



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

UNIDAD ZACATENCO
DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

**Observadores Fraccionales de Alta Ganancia y sus
Aplicaciones**

Tesis que presenta:
Arturo Govea Vargas

Para obtener el grado de:
Doctor en Ciencias

En la especialidad de:
Control Automático

Director de la Tesis:
Dr. Rafael Martínez Guerra

Agradecimientos

Al Dr. Rafael Martínez Guerra: *Por sus consejos, su apoyo y sus críticas para lograr la culminación de este trabajo. Por darme la oportunidad de trabajar con él y por confiar en mí para el desarrollo de este proyecto de tesis.*

A los miembros del jurado: *Por sus comentarios y las aportaciones que hicieron a este trabajo de tesis.*

A los doctores del departamento de control automático: *Por su enseñanza, sus consejos y por compartir sus conocimientos y experiencias conmigo. Por confiar en mí y darme la oportunidad de realizar mis estudios de doctorado en el departamento de control automático.*

A mis amigos y compañeros del CINVESTAV: *Por compartir su amistad conmigo y los buenos momentos que pasamos juntos.*

A mi estimada Familia: *Por todo el apoyo que me han brindado, hasta en los momentos más difíciles.*

Al CONACYT: *Por su apoyo económico para realizar mis estudios de Doctorado a través de la beca con número de registro 786275.*

Resumen

En este trabajo se propone un observador fraccional de alta ganancia el cual es globalmente acotado Mittag-Leffler para dinámicas desconocidas y ruido en la medición de la salida. Se muestra un resultado teórico respecto a sistemas enteros, en particular se muestra un observador de alta ganancia últimamente uniformemente acotado. Se muestra un resultado teórico en forma de teorema que es el observador fraccional de alta ganancia el cual es globalmente acotado Mittag-Leffler, primero se propone un sistema aumentado del sistema original, el cual tiene la ventaja de considerar la salida con ruido aditivo como un nuevo estado, las dinámicas desconocidas también se consideran como nuevos estados, este sistema aumentado nos permite proponer un observador de alta ganancia fraccional. También se proponen observadores fraccionales para la estimación de fallas en sistemas no lineales fraccionales, se proponen cinco observadores fraccionales que son el observador fraccional de orden reducido, observador fraccional por modos deslizantes, observador fraccional proporcional integral, observador fraccional proporcional y observador fraccional de alta ganancia. Se muestran simulaciones numéricas de los observadores fraccionales propuestos. También se incluye un capítulo para abordar aplicaciones fraccionales de la teoría propuesta.

Abstract

In this work, a high-gain fractional observer is proposed which is globally bounded Mittag-Leffler for unknown dynamics and noise in the output measurement. A theoretical result is shown regarding entire systems, in particular an ultimately uniformly bounded high-gain observer is shown. A theoretical result is shown in the form of a theorem that is the high-gain fractional observer which is globally bounded Mittag-Leffler, first, an augmented system of the original system is proposed, which has the advantage of considering the output with additive noise as a new state, the unknown dynamics are also considered as new states, this augmented system allows us to propose a high fractional gain observer. Fractional observers are also proposed for fault estimation in fractional nonlinear systems, five fractional observers are proposed, which are the reduced order fractional observer, sliding mode fractional observer, integral proportional fractional observer, proportional fractional observer and high gain fractional observer. Numerical simulations of the proposed fractional observers are shown. A chapter is also included to address fractional applications of the proposed theory..

Contenido

Agradecimientos	III
Resumen	V
Abstract	VII
Lista de Figuras	XII
Lista de Tablas	XV
1. Introducción	1
1.1. Motivación	2
1.2. Aportaciones de la tesis.	2
1.3. Organización de la tesis.	3
2. Sistemas Enteros:Observador de Alta Ganancia	5
2.1. Sistemas Enteros	5
2.1.1. Observabilidad Algebraica	5
2.1.2. Observabilidad Algebraica Racional	6
2.2. Sistemas Enteros	7
2.2.1. Observador de Alta Ganancia	8
2.2.2. Ejemplo y Resultados Numéricos	10
2.2.3. Sistema caótico de Lorenz	14
2.2.4. Sistema caótico de Rössler	20
2.2.5. Sistema caótico Arneodo-Couillet-Tresser	25
3. Cálculo Fraccional:Definiciones básicas	33
3.1. Cálculo Fraccional.	33
3.1.1. Cálculo fraccional una generalización del cálculo de orden entero	35
3.1.2. Desarrollo histórico del cálculo fraccional	36

3.1.3.	Las definiciones populares de derivadas/integrales fraccionales en cálculo fraccional	40
3.1.4.	Definiciones básicas.	41
3.1.5.	Integración fraccional Riemann-Liouville (RL)	44
3.1.6.	Derivada fraccional Riemann-Liouville (RL) Definición de Mano izquierda(DMI)	44
3.1.7.	Derivadas fraccionales de Caputo Definición de Mano Derecha (DMD)	45
3.1.8.	Diferenciales integrales fraccionales Grunwald Letnikov (GL)	48
3.1.9.	Composición	49
3.1.10.	Derivadas fraccionales para algunas funciones estándar	49
4.	Sistemas Fraccionales:Observador de Alta Ganancia Fraccional	53
4.1.	Sistemas Fraccionales	53
4.1.1.	Observabilidad Algebraica Fraccional	53
4.1.2.	Observabilidad Algebraica Fraccional Racional	54
4.2.	Sistemas Fraccionales	55
4.2.1.	Observador de Alta Ganancia	56
4.2.2.	Ejemplo y Resultados Numéricos	60
4.2.3.	Péndulo Simple de Orden Fraccional	62
4.2.4.	Sistema Arneodo de Orden Fraccional	64
5.	Aplicaciones de algunos otros observadores fraccionales en el problema de diagnóstico de fallas.	69
5.0.1.	Problema de Diagnóstico	70
5.1.	Observadores Fraccionales	70
5.1.1.	Observador Fraccional de Orden Reducido	70
5.1.2.	Observador Fraccional de Modos Deslizantes	72
5.1.3.	Observador Fraccional Proporcional Integral	72
5.1.4.	Observador Fraccional Proporcional	73
5.1.5.	Observador Fraccional de Alta Ganancia	74
5.2.	Simulaciones Numéricas	75
5.2.1.	Oscilador de van der Pol Fraccional	85
5.2.2.	Dispositivo mecatrónico FHPS	86
5.2.3.	Modelo Bergman	95
6.	Conclusiones	101
6.1.	Conclusiones	101
	Bibliografía	104

A. Artículos Publicados	113
A.1. ISA Transactions	113
A.2. Congreso Nacional de Control Automático 2023	113
A.3. Interdisciplinary Conference on Electrics and Computer 2024	113

Lista de Figuras

2.1. Estados del sistema Lotka-Volterra en \mathbb{R}^3	13
2.2. Coordenada x_1 y su estimado \hat{x}_1 , correspondiente a la primer población del sistema Lotka-Volterra.	14
2.3. Coordenada x_2 y su estimado \hat{x}_2 , correspondiente a la segunda población del sistema Lotka-Volterra.	15
2.4. Coordenada x_3 y su estimado \hat{x}_3 , correspondiente a la tercer población del sistema Lotka-Volterra.	16
2.5. Salida del sistema Lotka-Volterra con el término de ruido aditivo. . .	17
2.6. Error del estado x_1 correspondiente a la primer población del Sistema Lotka-Volterra.	17
2.7. Error del estado x_2 correspondiente a la segunda población del Sistema Lotka-Volterra.	18
2.8. Error del estado x_3 correspondiente a la tercer población del Sistema Lotka-Volterra.	18
2.9. Estados del sistema Lorenz en \mathbb{R}^3	19
2.10. Coordenada x_1 y su estimado \hat{x}_1 , para el sistema Lorenz.	19
2.11. Coordenada x_2 y su estimado \hat{x}_2 , para el sistema Lorenz.	20
2.12. Coordenada x_3 y su estimado \hat{x}_3 , para el sistema Lorenz.	21
2.13. Error del estado x_1 correspondiente a la primer estado del sistema Lorenz.	22
2.14. Error del estado x_2 correspondiente al segundo estado del sistema Lorenz.	22
2.15. Error del estado x_3 correspondiente al tercer estado del sistema Lorenz.	23
2.16. Estados del sistema Rössler en \mathbb{R}^3	24
2.17. Coordenada x_1 y su estimado \hat{x}_1 , para el sistema Rössler.	24
2.18. Coordenada x_2 y su estimado \hat{x}_2 , para el sistema Rössler.	25
2.19. Coordenada x_3 y su estimado \hat{x}_3 , para el sistema Rössler.	26
2.20. Error del estado x_1 correspondiente a la primer estado del sistema Rössler.	27
2.21. Error del estado x_2 correspondiente al segundo estado del sistema Rössler.	27
2.22. Error del estado x_3 correspondiente al tercer estado del sistema Rössler.	28
2.23. Estados del sistema Arneodo en \mathbb{R}^3	29
2.24. Coordenada x_1 y su estimado \hat{x}_1 , para el sistema Arneodo.	29
2.25. Coordenada x_2 y su estimado \hat{x}_2 , para el sistema Arneodo.	30

2.26. Coordenada x_3 y su estimado \hat{x}_3 , para el sistema Arneodo.	30
2.27. Error del estado x_1 correspondiente a la primer estado del sistema Arneodo.	31
2.28. Error del estado x_2 correspondiente al segundo estado del sistema Arneodo.	31
2.29. Error del estado x_3 correspondiente al tercer estado del sistema Arneodo.	32
3.1. Recta numérica e interpolación de las derivadas fraccionales	35
3.2. Representación en diagrama de bloques para el proceso de convolución de la integración fraccional	45
3.3. Diagrama de bloques para la diferenciación fraccional definición mano izquierda	45
3.4. Diferenciación fraccional 2.3 veces DMI	46
3.5. Diagrama de bloques para la diferenciación fraccional definición mano derecha Caputo	46
3.6. Diferenciación fraccional 2.3 veces mediante DMD	46
4.1. Señal de error para el estado correspondiente a la biomasa (x_1), con distintos órdenes fraccionales.	62
4.2. Señal de error para el estado correspondiente al sustrato (x_2), con distintos órdenes fraccionales.	63
4.3. Observador de Alta Ganancia estado x_1	64
4.4. Observador de Alta Ganancia estado x_2	65
4.5. Salida ruidosa.	65
4.6. Observador de Alta Ganancia estado x_1	67
4.7. Observador de Alta Ganancia estado x_2	67
4.8. Observador de Alta Ganancia estado x_3	68
4.9. Salida ruidosa.	68
5.1. Observador Fraccional de Orden Reducido Falla 1.	77
5.2. Observador Fraccional de Orden Reducido Falla 2.	78
5.3. Observador Fraccional por Modos Deslizantes Falla 1.	79
5.4. Observador Fraccional por Modos Deslizantes Falla 2.	79
5.5. Observador Fraccional Proporcional Integral Falla 1.	80
5.6. Observador Fraccional Proporcional Integral Falla 2.	80
5.7. Observador Fraccional Proporcional Falla 1.	81
5.8. Observador Fraccional Proporcional Falla 2.	81
5.9. Observador Fraccional de Alta Ganancia Falla 1.	82
5.10. Observador Fraccional de Alta Ganancia Falla 2.	83
5.11. Función de Costo Falla 1.	83
5.12. Función de Costo Falla 2.	84
5.13. Observador Fraccional de Orden Reducido.	87
5.14. Observador Fraccional por Modos Deslizantes.	87
5.15. Observador Fraccional Proporcional Integral.	88
5.16. Observador Fraccional Proporcional.	88

5.17. Observador Fraccional de Alta Ganancia.	89
5.18. Función de Costo para los Observadores Fraccionales del Oscilador de Van der Pol.	89
5.19. Dispositivo mecatrónico FHPS.	90
5.20. Observador Fraccional de Orden Reducido.	92
5.21. Observador Fraccional por Modos Deslizantes.	92
5.22. Observador Fraccional Proporcional Integral.	93
5.23. Observador Fraccional Proporcional.	94
5.24. Observador Fraccional de Alta Ganancia.	94
5.25. Función de Costo de los Observadores Fraccionales del FHPS.	95
5.26. Observador Fraccional de Orden Reducido del Modelo Bergman	97
5.27. Observador Fraccional por Modos Deslizantes del Modelo Bergman.	98
5.28. Observador Fraccional Proporcional Integral del Modelo Bergman.	98
5.29. Observador Fraccional Proporcional del Modelo Bergman.	99
5.30. Observador Fraccional de Alta Ganancia del Modelo Bergman.	100
5.31. Función de Costo de los Observadores Fraccionales del Modelo Bergman.	100

Lista de Tablas

3.1. Derivada con terminal inferior 0, i.e. ${}_0D_t^\alpha f(t)$ para $t>0$	50
3.2. Derivada con terminal inferior $-\infty$, i.e. ${}_{-\infty}D_t^\alpha f(t)$	51
5.1. Función de Costo	84
5.2. Ventajas y Desventajas	85
5.3. Función de Costo del Oscilador de Van der Pol	90
5.4. Cost Function FHPS	93
5.5. Función de Costo Modelo Bergman	99

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo se presenta una introducción a los observadores fraccionales. Se describe el problema a resolver y los objetivos que se requieren alcanzar para resolverlo. Finalmente, se mencionan las aportaciones y se da una explicación de la organización de la tesis.

El uso de observadores de alta ganancia en control realimentado, apareció por primera vez en el contexto de retroalimentación lineal como una herramienta para el diseño de observadores robustos.

Doyle y Stein [1] usaron observadores de alta ganancia para recuperar propiedades en el dominio de frecuencia que son obtenidas mediante retroalimentación de estado. La investigación de observadores de alta ganancia en el contexto de control lineal robusto, continuó alrededor de los años 1980 con el trabajo de Petersen y Hollot [2]. El uso de observadores de alta ganancia en control no lineal realimentado apareció a finales de los años 1980 con el trabajo de Saberi [3], Tornambe [4] y Khalil [5].

Existen dos escuelas de investigación acerca de observadores de alta ganancia, que nacieron a partir de dos artículos publicados en 1992.

El primer trabajo fue de Gauthier, Hammouri y Othman [6], su investigación abarca una amplia clase de sistemas no lineales y resultados globales, bajo condiciones de crecimiento global.

El segundo trabajo corresponde a Esfandiari y Khalil [7], quienes enfocaron su atención en el fenómeno de pico, mostraron que la interacción de este fenómeno de pico con no linealidades puede inducir tiempo de escape finito.

El problema del diseño de observadores de alta ganancia para sistemas no lineales, consiste en sintonizar los coeficientes (ganancias), para que sean escogidas lo suficientemente grandes, para asegurar convergencia exponencial arbitrariamente rápida.

Martínez-Guerra y Martínez Fuentes [8] y Etilili et. al. [9] propusieron un observador de alta ganancia para sistemas no lineales fraccionales, con resultados de estabilidad Mittag-Leffler. Sin embargo ninguno de ellos propuso perturbaciones o ruido en la medición en su análisis matemático.

Por otro lado Muñoz-Vázquez et. al. [10] diseñaron un control basado en observación para sistemas con perturbaciones, utilizando observadores fraccionales de alta ganancia, sin embargo solamente consideraron sistemas lineales.

Vazquez Guerrero et. al. [11] presentaron un observador de alta ganancia para sincronizar estados de quimera de una red de neuronas, a pesar de los ejemplos presentados en el trabajo éste no contiene un análisis de estabilidad.

Bettayeb et. al. [12], utilizaron un esquema en cascada para sincronizar sistemas caóticos fraccionales con medición de retardos, en el cuál la primera fase es utilizada para estimar los estados actuales y el resto de las fases para estimar los instantes previos.

Finalmente Rodríguez-Mata et. al. [13] propusieron un observador de alta ganancia que incorpora un término integral de tipo fraccional, sin embargo el modelo que consideraron y el análisis matemático, no consideran dinámicas fraccionales.

1.1. Motivación

Las técnicas de Control asumen que se tiene un conocimiento completo del vector de estados y el tiempo. Desafortunadamente este no es el caso siempre, debido a razones físicas. Por lo tanto es necesario construir un observador para dichos sistemas. Para sistemas de orden entero existe una amplia variedad de observadores, en este trabajo motivados por los resultados en orden entero se da la versión de un observador de alta ganancia para sistemas fraccionales.

La principal motivación de utilizar sistemas fraccionales es debido a que tienen amplia aplicación en fenómenos tales como electromagnetismo, viscoelasticidad, mecánica de fluidos, electrqímica, modelos de población biológica, procesamiento de señales entre otras [14, 15, 16, 17, 18, 19, 11].

Los observadores de alta ganancia han sido ampliamente usados en sistema enteros [20] [21] [22]. Sin embargo para sistemas fraccionales, el uso de observadores de alta ganancia ha sido reciente y por lo tanto limitada.

Por ejemplo para sistema de orden fraccional se tienen los trabajos de [8] [9], sin embargo éstos no consideran la presencia de perturbaciones en el análisis de estabilidad. Por lo tanto en esta tesis consideramos sistemas no lineales de orden fraccional con dinámicas no modeladas y ruido en la medición de la salida.

En esta tesis para proponer un observador de alta ganancia para sistemas no lineales fraccionales, consideramos la condición de observabilidad algebraica fraccional racional y que además el ruido en la medición de la salida es acotado, respecto a las dinámicas no modeladas éstas se asumen que son localmente Lipschitz, con estas tres hipótesis se propone un observador de alta ganancia que es globalmente acotado Mittag-Leffler para dinámicas desconocidas y ruido en la medición de la salida.

1.2. Aportaciones de la tesis.

El elemento principal que será utilizado en este trabajo de tesis es el cálculo fraccional. Las principales aportaciones de la tesis son:

- Se propone un observador de alta ganancia para sistemas enteros, el cual es últimamente uniformemente acotado, primero se propone un sistema aumentado, el cual tiene la ventaja de considerar la salida con el ruido aditivo como un nuevo estado, las dinámicas desconocidas también se consideran como nuevos estados en este sistema aumentado, el cual nos permite proponer un observador de alta ganancia. Basados en este observador de alta ganancia para sistemas enteros, se diseña un observador de alta ganancia fraccional.
- Se propone un observador de alta ganancia fraccional que es globalmente acotado Mittag-Leffler para dinámicas desconocidas y ruido en la medición de la salida, se propone un sistema aumentado que tiene la ventaja de considerar la salida con ruido aditivo como un nuevo estado en el que no aparece el ruido, también considera las dinámicas desconocidas como nuevos estados, este nuevo sistema aumentado nos permite proponer un observador de alta ganancia fraccional.
- Se realizan simulaciones numéricas para el observador de alta ganancia fraccional propuesto, en particular se muestran algunas aplicaciones como son un sistema tipo bioreactor, un péndulo simple fraccional y un sistema caótico de Arneodo.
- Se desarrollan observadores fraccionales para la estimación de fallas, los cuales son evaluados mediante una función de costo, para verificar cuál tiene el mejor desempeño, se seleccionan las ganancias de cada observador fraccional y se implementan en algunas aplicaciones como son un sistema Bergman, un oscilador de van Der Pol fraccional y un dispositivo mecatrónico FHPS.

1.3. Organización de la tesis.

En el capítulo 2 se presenta un observador de alta ganancia para sistemas enteros el cual es últimamente uniformemente acotado, primero se propone un sistema aumentado el cual permite que la salida sea un nuevo estado sin el ruido aditivo y después se propone el observador de alta ganancia y se ilustra con un ejemplo de un sistema Lotka-Volterra de tres dimensiones.

En el capítulo 3 se presenta una introducción a la diferenciación e integración de orden fraccional, se dan definiciones básicas que serán utilizadas en el capítulo 4.

El capítulo 4 se desarrolla un observador de alta ganancia fraccional el cual es globalmente acotado Mittag-Leffler, primero se propone un sistema aumentado que tiene la ventaja de considerar la salida con el ruido aditivo como un nuevo estado, el cual se integra fraccionalmente y el nuevo estado obtenido ya no contiene el ruido aditivo, después se propone el observador de alta ganancia y se ilustra con un ejemplo del sistema tipo bioreactor, un péndulo simple y un sistema caótico de Arenodo.

En el capítulo 5 se desarrollan algunos observadores fraccionales aplicados a la estimación de fallas, se proponen cinco observadores fraccionales y una función de costo, que

verifica el desempeño de los observadores fraccionales propuesto, también se muestran algunas aplicaciones de dichos observadores fraccionales.

Por último, en el capítulo 6 se muestran algunas conclusiones.

Capítulo 2

Sistemas Enteros: Observador de Alta Ganancia

En este capítulo se muestra un observador de alta ganancia para sistemas enteros, el cual es últimamente uniformemente acotado, se propone un sistema aumentado que nos permite considerar la salida con ruido aditivo como un nuevo estado, las dinámicas desconocidas también se consideran como nuevos estados, este sistema aumentado nos permite proponer un observador de alta ganancia. También se ilustra el observador de alta ganancia con un sistema Lotka-Volterra de tres dimensiones.

2.1. Sistemas Enteros

2.1.1. Observabilidad Algebraica

Definición 2.1 (*Condición de observabilidad algebraica*) Un estado x se denomina algebraicamente observable con respecto a $\{u, y\}$ si y solamente si es algebraico, esto es, satisface una ecuación diferencial polinomial en términos de $\{u, y\}$, y algunas de sus derivadas con respecto al tiempo,

$$P(x, u, \dot{u}, \dots, y, \dot{y}, \dots) = 0$$

con coeficientes $\{u, y\}$. A esta propiedad se le conoce como la condición de observabilidad algebraica.

Ejemplo 1 Sea el sistema no lineal

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2^2 + x_1 + u \\ y &= x_2\end{aligned}$$

Podemos ver que x_1 y x_2 son algebraicamente observables, debido a que satisfacen

$$\begin{aligned}x_1 - \dot{y} - y^2 + u &= 0 \\ x_2 - y &= 0\end{aligned}$$

los cuales son polinomios algebraico diferenciales con coeficientes en $\mathbb{R}, \{u, y\}$ y sus derivadas.

Ejemplo 2 Considere el siguiente sistema no lineal,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + x_3^2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= u \\ y &= x_2\end{aligned}\tag{2.1}$$

Podemos ver que x_1, x_2 y x_3 satisfacen

$$\begin{aligned}x_2 &= y \\ x_3 &= \dot{y} \\ \dot{x}_1 &= y + \dot{y}^2\end{aligned}$$

El sistema (2.1) no es algebraicamente observable ya que x_1 no puede expresarse como un polinomio diferencial algebraico en términos de $\{u, y\}$. Sin embargo el sistema (2.1) es Liouviliano¹, en efecto x_1 puede obtenerse de la siguiente expresión:

$$x_1 = \int (y + \dot{y}^2)$$

2.1.2. Observabilidad Algebraica Racional

Definición 2.2 (Condición de observabilidad algebraica racional) Un estado x se denomina algebraicamente observable con respecto a $\{u, y\}$ si y solamente si es algebraico, esto es, satisface una ecuación diferencial polinomial en términos de $\{u, y\}$, y algunas de sus derivadas con respecto al tiempo,

$$P(x, c_i, u, \dot{u}, \dots, y, \dot{y}, \dots) = 0$$

donde pueden existir coeficientes de la forma:

$$c_i = \frac{f(u, y)}{h(u, y)}$$

Donde $f(u, y), h(u, y)$ son polinomios diferenciales con coeficientes en $\mathbb{R}, \{u, y\}$ y sus derivadas.

A esta propiedad se le conoce como la condición de observabilidad algebraica racional.

Ejemplo 3 Considere el sistema de Lotka-Volterra de tres dimensiones,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_1 - 0.1x_1^2 - 0.6x_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + 0.8x_1x_2 - 0.4x_2x_3 \\ \dot{x}_3 &= -2x_3 + 0.5x_2x_3 \\ y &= x_1\end{aligned}$$

¹Un sistema dinámico se dice Liouviliano si sus elementos (por ejemplo, variables de estado o parámetros) se pueden obtener por una expresión en términos de integrales o exponenciales de integrales de elementos de \mathbb{R} .

Se puede ver que x_1, x_2, x_3 satisfacen

$$\begin{aligned} x_1 - y &= 0 \\ x_2 - \frac{10}{3} + \frac{1}{6}y - \frac{5}{3}\dot{y}y^{-1} &= 0 \\ x_3 - \frac{y(10 - 3y - 4y^2)}{2(y^2 + 2y + \dot{y})} - \frac{1}{2}\frac{\dot{y}(5y^2 - y + 5)}{y(y^2 + 2y + \dot{y})} - \frac{5}{2}\frac{\ddot{y}}{(y^2 + 2y + \dot{y})} &= 0 \end{aligned}$$

Lo cual nos dice que el sistema es racionalmente algebraicamente observable, siempre y cuando $y \neq 0$, $\dot{y} \neq 0$, es decir que la salida y y su primera derivada no estén cercanas a cero. En el caso en el que $y \rightarrow 0$, $\dot{y} \rightarrow 0$ se tendría que los estados x_2, x_3 son no observables.

2.2. Sistemas Enteros

Se desea diseñar un observador, para poder estimar los estados no conocidos del sistema, que en algunas aplicaciones no están disponibles o es muy costoso medirlos. Adicionalmente se tiene en aplicaciones cotidianas que la salida disponible del sistema tiene ruido y se tienen dinámicas no modeladas del sistema, que son deseables estimar. Por lo anterior consideramos una clase de sistemas no lineales, con un término de ruido en la salida y dinámicas no modeladas, para poder aplicar nuestra metodología se propone un sistema aumentado, que tiene la ventaja, de considerar el término de ruido aditivo en la salida como un estado más, cuando se encuentra la solución del sistema aumentado el ruido es sujeto a una acción integral, por lo cual se atenúa y nos brinda mayor robustez del observador.

El problema que se considera es el de diseñar un observador de alta ganancia para un sistema no lineal de orden entero, que además posee dinámicas no modeladas y ruido en la medición de la salida, para conseguir este objetivo se considera que el ruido está acotado y que las dinámicas no modeladas son funciones localmente Lipschitz.

Considere el siguiente sistema no lineal:

$$\begin{aligned} \dot{\chi}(t) &= A\chi(t) + \phi(\chi(t), u) \\ y &= C\chi(t) + \bar{\omega} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Donde: $\chi(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado y es conocido parcialmente. $u(t) \in \mathbb{R}^p$ es un vector de entrada, $y \in \mathbb{R}$ es la salida del sistema, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^n$, $\bar{\omega}$ es un término de ruido aditivo en la medición, $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función no lineal localmente Lipschitz con respecto a χ .

Suposición:

El término de ruido aditivo en la medición $\bar{\omega}$ está acotado, i.e. existe una constante positiva \bar{M} tal que $\|\bar{\omega}\| \leq \bar{M}$.

2.2.1. Observador de Alta Ganancia

La principal motivación en proponer un Observador de Alta Ganancia es poder estimar los estados desconocidos del sistema no lineal propuesto, también se desea estimar la salida con el término de ruido aditivo y las dinámicas no modeladas, para ello se propone el siguiente sistema aumentado:

Considere el siguiente sistema aumentado de (2.2):

$$\begin{aligned}\dot{\chi} &= A\chi + f(\chi) + g(\chi, u) \\ \dot{\chi}_* &= C\chi + \bar{\omega} \\ \phi(\dot{\chi}) &= \Theta(\chi) \\ y_* &= \chi_*(t)\end{aligned}\tag{2.3}$$

Donde $y_* \in \mathbb{R}$. Note que la nueva salida no contiene el término de ruido aditivo medido y f, g son tomadas como nuevas variables de estado. Entonces se puede expresar al sistema (2.3) en la siguiente forma matricial:

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= \mathcal{A}X(t) + \Phi(X, u) + \mathcal{W} \\ y_* &= \mathcal{C}X(t)\end{aligned}\tag{2.4}$$

$$\text{Con } X(t) = \begin{bmatrix} \chi(t) \\ \chi_*(t) \\ \phi(\chi) \end{bmatrix}, \mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & 0 & I_n \\ \mathcal{C} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Phi(X, u) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi(X) \end{bmatrix}, \mathcal{W} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\omega} \\ 0 \end{bmatrix}, \mathcal{C} =$$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ Donde I_n es la matriz identidad de dimensión n . Note que $X(t) \in \mathbb{R}^{2n+1}$, $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{(2n+1) \times (2n+1)}$, $\Phi \in \mathbb{R}^{2n+1}$, $\mathcal{W} \in \mathbb{R}^{2n+1}$ y $\mathcal{C}^T \in \mathbb{R}^{2n+1}$. $\Theta(\chi) = \phi(X)$ contiene las dinámicas no modeladas.

Se propone el siguiente observador de alta ganancia para el sistema (2.4):

$$\begin{aligned}\dot{\hat{X}}(t) &= \mathcal{A}\hat{X}(t) + \Phi(\hat{X}, u) + S_\theta^{-1}\mathcal{C}^T(y_*(t) - \mathcal{C}\hat{X}(t)) \\ \hat{y}_* &= \mathcal{C}\hat{X}(t)\end{aligned}\tag{2.5}$$

Donde: $\hat{X}(t) = [\hat{\chi}(t), \hat{\chi}_*(t), \phi(\hat{\chi})]^T \in \mathbb{R}^{2n+1}$ es la estimación del vector de estado X y la matriz S_θ es conocida como la matriz de alta ganancia. La matriz $S_\theta = S_\theta^T > 0$ es solución de la siguiente ecuación algebraica de Riccati:

$$\left(\frac{\theta}{2} + \mathcal{A}\right)S_\theta(t) + S_\theta(t)\left(\frac{\theta}{2} + \mathcal{A}\right) = \mathcal{C}^T\mathcal{C}, \quad S_\theta(0) = S_{\theta_0}.\tag{2.6}$$

con $\theta > 0$. La matriz de alta ganancia S_θ es definida de la siguiente manera:

$$(S_\theta)_{i,j} = v_{i,j} \frac{(-1)^{i+j}}{\theta^{i+j-1}},$$

donde $v_{i,j}$ es el coeficiente binomial dado por:

$$v_{i,j} = \binom{i+j-2}{j-1}$$

Sea el error de estimación del sistema aumentado $\epsilon(t) = X(t) - \hat{X}(t)$. De (2.4) y (2.5) la dinámica de la estimación del error está dada por:

$$\dot{\epsilon}(t) = [\mathcal{A} - S_\theta^{-1}\mathcal{C}^T\mathcal{C}]\epsilon(t) + \mathcal{R}(\epsilon, u) + \mathcal{W} \quad (2.7)$$

Donde $\mathcal{R} = \Phi(X, u) - \Phi(\hat{X}, u)$. Se denota $\|x\|_{S_\theta} = x^T S_\theta x$, para alguna $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces si $\mathcal{R}(\epsilon, u)$ es diferenciable, se obtiene $\|\mathcal{R}(\epsilon, u)\| \leq L\|\epsilon\|_{S_\theta}$, para alguna $L > 0$.

Teorema 2.1 *El sistema (2.5) es un observador de alta ganancia últimamente uniformemente acotado para el sistema (2.4), cuyo error de estimación satisface:*

$$\|\epsilon(t)\| \leq \left(\frac{\lambda_{\max}(S_\theta)}{\lambda_{\min}(S_\theta)}\right)^{1/2} \left(\frac{2\bar{M}\sqrt{\lambda_{\max}(S_\theta)}}{\gamma\lambda_{\min}(S_\theta)}\right), \quad (2.8)$$

donde $\theta > 0$ y $\gamma = \theta - 2L > 0$.

Demostración Considere la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(\epsilon(t)) = \epsilon^T(t)S_\theta\epsilon(t) = \|\epsilon(t)\|_{S_\theta}^2. \quad (2.9)$$

Se deriva (2.9) y se obtiene que:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\epsilon(t)) &\leq 2\epsilon^T(t)S_\theta\dot{\epsilon}(t), \\ &\leq 2\epsilon^T(t)S_\theta\mathcal{A}\epsilon(t) - 2\epsilon^T(t)\mathcal{C}^T\mathcal{C}\epsilon(t) + 2\epsilon^T(t)S_\theta\mathcal{R}(\epsilon, u) + 2\epsilon^T(t)S_\theta\mathcal{W} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Por otra parte de la ecuación algebraica de Riccati (ecuación 2.6), se tiene que:

$$2\epsilon^T(t)S_\theta\mathcal{A}\epsilon(t) = \epsilon^T(t)\mathcal{C}^T\mathcal{C}\epsilon(t) - \theta\epsilon^T(t)S_\theta\epsilon(t), \quad (2.11)$$

Se substituye (2.11) en (2.10) y se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\epsilon(t)) &\leq -\theta\epsilon^T(t)S_\theta\epsilon(t) - \epsilon^T(t)\mathcal{C}^T\mathcal{C}\epsilon(t) + 2\epsilon^T(t)S_\theta\mathcal{R}(\epsilon, u) + 2\epsilon^T(t)S_\theta\mathcal{W} \\ &\leq -\theta\epsilon^T(t)S_\theta\epsilon(t) + 2\epsilon^T(t)S_\theta\mathcal{R}(\epsilon, u) + 2\epsilon^T(t)S_\theta\mathcal{W} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Se puede encontrar una cota superior para (2.12) de la siguiente manera. Debido a que $S_\theta = S_\theta^T > 0$, se puede aplicar la descomposición de Cholesky, i.e. $S_\theta = MM^T$, donde M es una matriz triangular inferior definida como

$$M = \begin{cases} m_{i,j} & , i \geq j \\ 0 & , i < j \end{cases}$$

Se considera la desigualdad de Cauchy-Schwartz, para el segundo término se tiene que:

$$\|\epsilon^T(t)S_\theta\mathcal{R}(\epsilon, u)\| = \|\epsilon^T(t)MM^T\mathcal{R}(\epsilon, u)\| \leq \|\epsilon^T(t)M\| \|M^T\mathcal{R}(\epsilon, u)\|. \quad (2.13)$$

Se tiene que:

$$\|\epsilon^T(t)M\| = (\epsilon^T(t)MM^T\epsilon(t))^{1/2} = (\epsilon^T(t)S_\theta\epsilon(t))^{1/2} = \|\epsilon(t)\|_{S_\theta} \quad (2.14)$$

y

$$\|M^T \mathcal{R}(\varepsilon, u)\| = (\mathcal{R}^T(\varepsilon, u) M M^T \mathcal{R}(\varepsilon, u))^{1/2} = (\mathcal{R}^T(\varepsilon, u) S_\theta \mathcal{R}(\varepsilon, u))^{1/2} = \|\mathcal{R}(\varepsilon, u)\|_{S_\theta} \quad (2.15)$$

por lo tanto $\|\varepsilon^T(t) S_\theta \mathcal{R}(\varepsilon, u)\| \leq \|\varepsilon(t)\|_{S_\theta} \|\mathcal{R}(\varepsilon, u)\|_{S_\theta}$. Debido a que $\mathcal{R}(\varepsilon, u)$ es diferenciable se tiene que:

$$\|\mathcal{R}(\varepsilon, u)\|_{S_\theta} \leq L \|\varepsilon(t)\|_{S_\theta} \quad (2.16)$$

y entonces:

$$\|\varepsilon^T(t) S_\theta \mathcal{R}(\varepsilon, u)\| \leq L \|\varepsilon(t)\|_{S_\theta}^2 \quad (2.17)$$

Por otra parte, para el tercer término se tiene:

$$\|\varepsilon^T(t) S_\theta \mathcal{W}\| = \|\varepsilon^T(t) M M^T \mathcal{W}\| \leq \|\varepsilon^T(t) M\| \|M^T \mathcal{W}\|, \quad (2.18)$$

se tiene que:

$$\|\varepsilon^T(t) M\| = (\varepsilon^T(t) M M^T \varepsilon(t))^{1/2} = (\varepsilon^T(t) S_\theta \varepsilon(t))^{1/2} = \|\varepsilon(t)\|_{S_\theta} \quad (2.19)$$

y

$$\|M^T \mathcal{W}\| = (\mathcal{W}^T M M^T \mathcal{W})^{1/2} = (\mathcal{W}^T S_\theta \mathcal{W})^{1/2} = \|\mathcal{W}\|_{S_\theta} \quad (2.20)$$

Debido a que $\bar{\omega}$ está acotada, entonces $\|\mathcal{W}\|_{S_\theta} \leq \bar{M}$ tal que:

$$\|\varepsilon^T(t) S_\theta \mathcal{W}\| \leq \bar{M} \|\varepsilon(t)\|_{S_\theta} \quad (2.21)$$

Por lo tanto (2.12) se mantiene acotada:

$$\dot{V}(\varepsilon) \leq -\theta \|\varepsilon(t)\|_{S_\theta}^2 + 2L \|\varepsilon(t)\|_{S_\theta}^2 + 2\bar{M} \|\varepsilon(t)\|_{S_\theta} \quad (2.22)$$

Se utiliza la desigualdad de Rayleigh-Ritz y se obtiene:

$$\dot{V}(\varepsilon(t)) \leq -(\theta - 2L) \lambda_{\min}(S_\theta) \|\varepsilon(t)\|^2 + 2\bar{M} \sqrt{\lambda_{\max}(S_\theta)} \|\varepsilon(t)\| \quad (2.23)$$

Aplicando el Teorema Últimamente Uniformemente Acotado de Corless-Leitman [23], si $\gamma = \theta - 2L > 0$, con $\theta > 0$, entonces $\varepsilon(t)$ es acotada uniformemente para cualquier estado inicial $\varepsilon(0)$ y se mantiene en el conjunto compacto $B = \{\varepsilon(t) \mid \|\varepsilon(t)\| \leq b, b > 0\}$ donde

$$b = \left(\frac{\lambda_{\max}(S_\theta)}{\lambda_{\min}(S_\theta)} \right)^{1/2} \left(\frac{2\bar{M} \sqrt{\lambda_{\max}(S_\theta)}}{\gamma \lambda_{\min}(S_\theta)} \right)$$

2.2.2. Ejemplo y Resultados Numéricos

Las ecuaciones de Lotka-Volterra, también conocidas como ecuaciones depredador-presa o presa-depredador, son ecuaciones diferenciales de primer orden no lineales que se usan para describir dinámicas de sistemas biológicos en el que dos especies interactúan, una como presa y otra como depredador. Las ecuaciones fueron propuestas de forma independiente por Alfred J. Lotka en 1925 y Vito Volterra en 1926.

Se aplica el observador de alta ganancia al modelo de Lotka-Volterra de tres dimensiones, el modelo está dado por:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= 2x_1 - 0.1x_1^2 - 0.6x_1x_2 \\
 \dot{x}_2 &= -x_2 + 0.8x_1x_2 - 0.4x_2x_3 \\
 \dot{x}_3 &= -2x_3 + 0.5x_2x_3 \\
 y &= x_1
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Se cumple tanto la condición de observabilidad algebraica, y las dinámicas no modeladas son Lipschitz:

Condición de observabilidad algebraica:

x_1, x_2, x_3 son algebraicamente observables, debido a que satisfacen:

$$\begin{aligned}
 x_1 - y &= 0 \\
 x_2 - \frac{10}{3} + \frac{1}{6}y - \frac{5}{3}\dot{y}y^{-1} &= 0 \\
 x_3 - \frac{y(10 - 3y - 4y^2)}{2(y^2 + 2y + \dot{y})} - \frac{1}{2}\frac{\dot{y}(5y^2 - y + 5)}{y(y^2 + 2y + \dot{y})} - \frac{5}{2}\frac{\ddot{y}}{(y^2 + 2y + \dot{y})} &= 0
 \end{aligned}$$

Se tiene que la siguiente función $\Phi(\chi) : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^7$ es Lipschitz, con $\chi = [x_1, x_2, x_3, x_*, \phi_1, \phi_2, \phi_3]^T$:

$$\Phi(\chi) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.1x_1^2 - 0.6x_1x_2 \\ 0.8x_1x_2 - 0.4x_2x_3 \\ 0.5x_2x_3 \end{bmatrix}$$

Debido a que $\Phi \in C^1$, entonces Φ es localmente Lipschitz, véase [24].

El sistema (2.24) es de la forma:

$$\dot{\chi} = A\chi + f(\chi)$$

$$y = h(\chi) = C\chi$$

Con $\chi = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T$

El sistema aumentado está dado por:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= 2x_1 + \phi_1(x) \\
\dot{x}_2 &= -x_2 + \phi_2(x) \\
\dot{x}_3 &= -2x_3 + \phi_3(x) \\
\dot{x}_* &= x_1 + \hat{\omega} \\
\dot{\phi}_1 &= -0.1x_1^2 - 0.6x_1x_2 \\
\dot{\phi}_2 &= 0.8x_1x_2 - 0.4x_2x_3 \\
\dot{\phi}_3 &= 0.5x_2x_3 \\
y_* &= x_*
\end{aligned}$$

El observador de alta ganancia está dado por:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}_1 &= 2\hat{x}_1 + \phi_1(\hat{x}) + k_1(y_* - \hat{y}_*) \\
\dot{\hat{x}}_2 &= -\hat{x}_2 + \phi_2(\hat{x}) + k_2(y_* - \hat{y}_*) \\
\dot{\hat{x}}_3 &= -2\hat{x}_3 + \phi_3(\hat{x}) + k_3(y_* - \hat{y}_*) \\
\dot{\hat{x}}_* &= \hat{x}_1 + \hat{\omega} + k_4(y_* - \hat{y}_*) \\
\dot{\hat{\phi}}_1 &= -0.1\hat{x}_1^2 - 0.6\hat{x}_1\hat{x}_2 + k_5(y_* - \hat{y}_*) \\
\dot{\hat{\phi}}_2 &= 0.8\hat{x}_1\hat{x}_2 - 0.4\hat{x}_2\hat{x}_3 + k_6(y_* - \hat{y}_*) \\
\dot{\hat{\phi}}_3 &= 0.5\hat{x}_2\hat{x}_3 + k_5(y_* - \hat{y}_*) \\
\hat{y}_* &= \hat{x}_*
\end{aligned}$$

Se tiene:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Phi(\chi) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.1x_1^2 - 0.6x_1x_2 \\ 0.8x_1x_2 - 0.4x_2x_3 \\ 0.5x_2x_3 \end{bmatrix} \quad \Phi(\hat{\chi}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.1\hat{x}_1^2 - 0.6\hat{x}_1\hat{x}_2 \\ 0.8\hat{x}_1\hat{x}_2 - 0.4\hat{x}_2\hat{x}_3 \\ 0.5\hat{x}_2\hat{x}_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{\omega} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad S_\theta = \begin{bmatrix} 1.3 & -1.6 & 2.0 & -2.4 & 3.1 & -3.8 & 4.5 \\ -1.6 & 3.9 & -7.3 & 12.2 & -19.1 & 28.6 & -30.2 \\ 2.0 & -7.3 & 18.3 & -38.1 & 71.5 & -125.2 & 156.5 \\ -2.4 & 12.2 & -38.1 & 95.4 & -208.6 & 417.2 & -517.2 \\ 3.1 & -19.1 & 71.5 & -208.6 & 521.5 & -1173.5 & 1233.3 \\ -3.8 & 28.6 & -125.2 & 417.2 & -1173.5 & 2933.7 & -3625.2 \end{bmatrix}$$

Para verificar que el observador de alta ganancia propuesto en efecto estima las variables de estado, se realizaron experimentos en simulación numérica, se utilizó la herramienta Simulink de Matlab 2018b, una computadora con sistema operativo Debian GNU / Linux 10 (buster), RAM 5.6 GiB y un Procesador AMD® Phenom(tm) ii p820 triple-core processor \times 3. Un tiempo de muestreo de $t_s = 0.0001[s]$, con el método de integración Runge-Kutta.

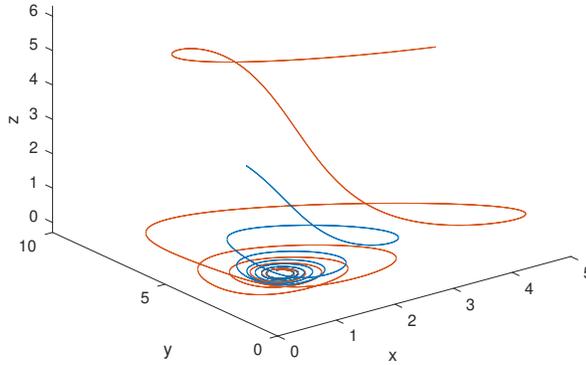


Figura 2.1: Estados del sistema Lotka-Volterra en \mathbb{R}^3 .

En la Figura 2.1 se pueden observar los tres estados del sistema Lotka-Volterra. Se muestran tanto los estados originales como los estados estimados, a pesar de que se simularon con distintas condiciones iniciales, ambos estados coinciden. Las condiciones iniciales escogidas fueron $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 4$, $x_3(0) = 3$ y $\hat{x}_1(0) = 5$, $\hat{x}_2(0) = 6$, $\hat{x}_3(0) = 4$

En la Figura 2.2 se puede observar el estado x_1 y su estado estimado \hat{x}_1 . Note que ambos estados coinciden después de cierto tiempo, y llegan a confundirse uno del otro.

En la Figura 2.3 se puede observar el estado x_2 y su estado estimado \hat{x}_2 . Note que ambos estados coinciden después de cierto tiempo.

En la Figura 2.4 se puede observar el estado x_3 y su estado estimado \hat{x}_3 . Note que ambos estados coinciden después de cierto tiempo.

En la Figura 2.5 se puede observar la salida del sistema, a la cual se le ha añadido un ruido gaussiano. A pesar de la presencia de ruido la salida original y la estimada coinciden, además de brindar un observador que estima los tres estados del sistema.

En las Figuras 2.6-2.8 se observa que el error de estimación converge a cero para los tres estados del sistema Lotka-Volterra. A pesar de tener presencia de ruido en la salida del sistema y dinámicas no modeladas.

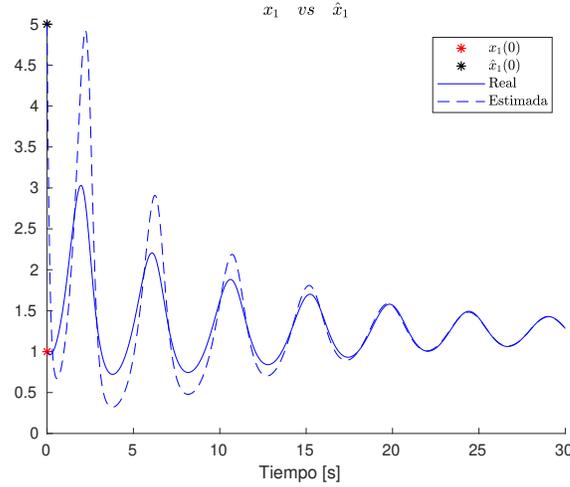


Figura 2.2: Coordenada x_1 y su estimado \hat{x}_1 , correspondiente a la primer población del sistema Lotka-Volterra.

2.2.3. Sistema caótico de Lorenz

Las ecuaciones de Lorenz son un modelo de convección de fluidos inducida térmicamente en la atmósfera. El trabajo fue propuesto por Lorenz en 1963 [25],[26],[27]. Ha sido ampliamente estudiado en el caos, teoría y modelado de sistemas dinámicos porque el atractor tiene dos alas como mariposas. Las ecuaciones caóticas de Lorenz son un sistema dinámico tridimensional y están definidas por x , y y z [28].

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ay - ax \\ \dot{y} &= -xz + rx - y \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}$$

Aquí x , y y z son las funciones del tiempo y a , b y r son los parámetros del sistema para el sistema determinista. Definimos a , b y r como 10, $8/3$ y 28 respectivamente para obtener caos.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ax_2 - ax_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_1x_3 + rx_1 - x_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - bx_3 \\ y &= x_1 + \bar{\omega}\end{aligned}\tag{2.25}$$

El sistema (2.25) es de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{\chi} &= A\chi + f(\chi) \\ y &= h(\chi) = C\chi\end{aligned}$$

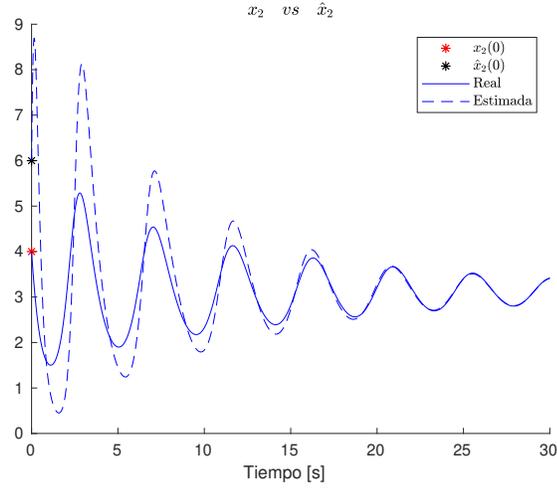


Figura 2.3: Coordenada x_2 y su estimado \hat{x}_2 , correspondiente a la segunda población del sistema Lotka-Volterra.

Con $\chi = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T$

El sistema aumentado está dado por:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= ax_2 - ax_1 \\
 \dot{x}_2 &= rx_1 - x_2 + \phi_2(x) \\
 \dot{x}_3 &= -bx_3 + \phi_3(x) \\
 \dot{x}_* &= x_1 + \hat{\omega} \\
 \dot{\phi}_1 &= 0 \\
 \dot{\phi}_2 &= -x_1x_3 \\
 \dot{\phi}_3 &= x_1x_2 \\
 y_* &= x_*
 \end{aligned}$$

El observador de alta ganancia está dado por:

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{x}}_1 &= a\hat{x}_2 - a\hat{x}_1 + k_1(y_* - \hat{y}_*) \\
 \dot{\hat{x}}_2 &= r\hat{x}_1 - \hat{x}_2 + \phi_2(\hat{x}) + k_2(y_* - \hat{y}_*) \\
 \dot{\hat{x}}_3 &= -b\hat{x}_3 + \phi_3(\hat{x}) + k_3(y_* - \hat{y}_*) \\
 \dot{\hat{x}}_* &= \hat{x}_1 + \hat{\omega} + k_4(y_* - \hat{y}_*) \\
 \dot{\hat{\phi}}_1 &= k_5(y_* - \hat{y}_*) \\
 \dot{\hat{\phi}}_2 &= -\hat{x}_1\hat{x}_3 + k_6(y_* - \hat{y}_*) \\
 \dot{\hat{\phi}}_3 &= \hat{x}_1\hat{x}_2 + k_5(y_* - \hat{y}_*) \\
 \hat{y}_* &= \hat{x}_*
 \end{aligned}$$

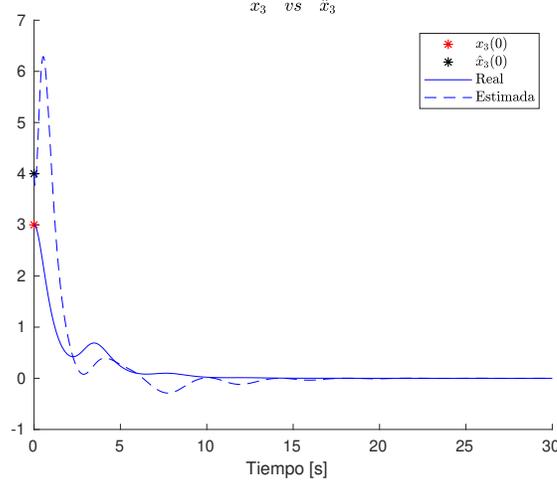


Figura 2.4: Coordenada x_3 y su estimado \hat{x}_3 , correspondiente a la tercer población del sistema Lotka-Volterra.

Se tiene:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} -a & -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Phi(\chi) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -x_1x_3 \\ x_1x_2 \end{bmatrix} \quad \Phi(\hat{\chi}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\hat{x}_1\hat{x}_3 \\ \hat{x}_1\hat{x}_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad S_\theta = \begin{bmatrix} 0.3333 & -0.1111 & 0.0370 & -0.0123 & 0.0041 & -0.0014 & 0.0005 \\ -0.1111 & 0.0741 & -0.0370 & 0.0165 & -0.0069 & 0.0027 & -0.0011 \\ 0.0370 & -0.0370 & 0.0247 & -0.0137 & 0.0069 & -0.0032 & 0.0014 \\ -0.0123 & 0.0165 & -0.0137 & 0.0091 & -0.0053 & 0.0028 & -0.0014 \\ 0.0041 & -0.0069 & 0.0069 & -0.0053 & 0.0036 & -0.0021 & 0.0012 \\ -0.0014 & 0.0027 & -0.0032 & 0.0028 & -0.0021 & 0.0014 & -0.0009 \\ 0.0005 & -0.0011 & 0.0014 & -0.0014 & 0.0012 & -0.0009 & 0.0006 \end{bmatrix}$$

Con $\theta = 3$.

Para verificar que el observador de alta ganancia propuesto en efecto estima las variables de estado, se realizaron experimentos en simulación numérica, se utilizó la herramienta Simulink de Matlab 2018b, una computadora con sistema operativo Debian GNU / Linux 10 (buster), RAM 5.6 GiB y un Procesador AMD® Phenom(tm) ii p820 triple-core processor $\times 3$. Un tiempo de muestreo de $t_s = 0.001[s]$, con el método de integración Runge-Kutta.

En la Figura 2.9 se pueden observar los tres estados del sistema Lorenz. Se muestran tanto los estados originales como los estados estimados, a pesar de que se simularon

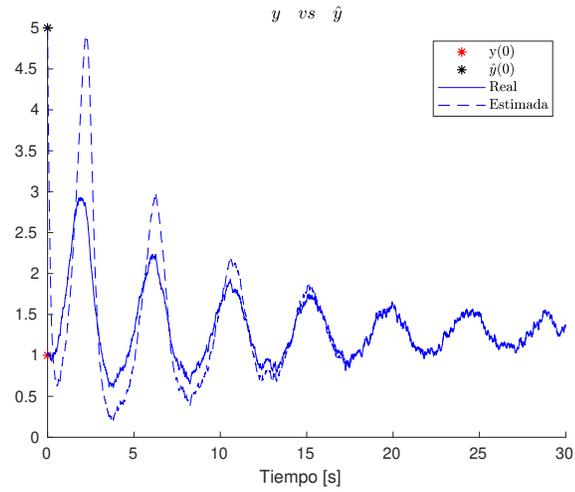


Figura 2.5: Salida del sistema Lotka-Volterra con el término de ruido aditivo.

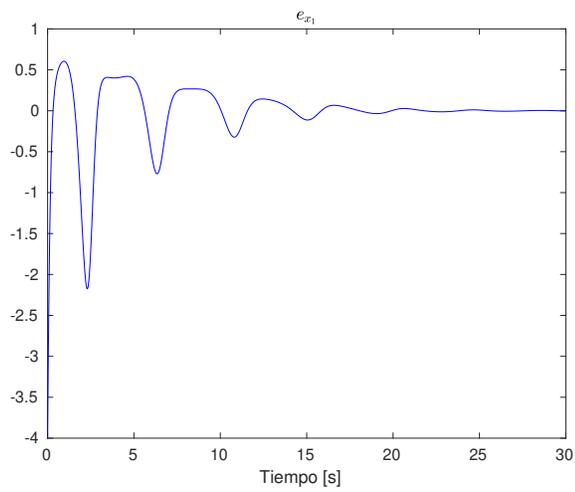


Figura 2.6: Error del estado x_1 correspondiente a la primer población del Sistema Lotka-Volterra.

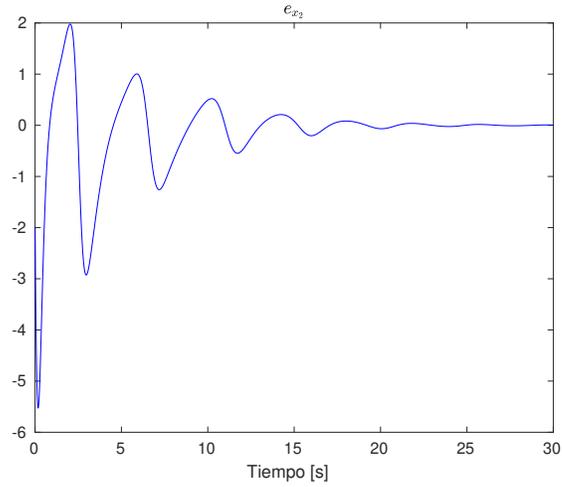


Figura 2.7: Error del estado x_2 correspondiente a la segunda población del Sistema Lotka-Volterra.

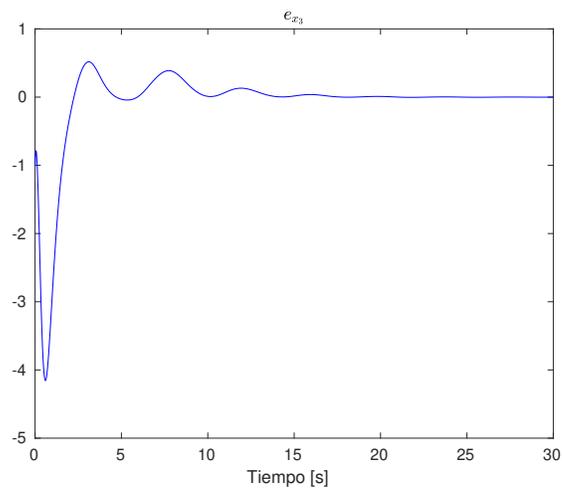


Figura 2.8: Error del estado x_3 correspondiente a la tercer población del Sistema Lotka-Volterra.

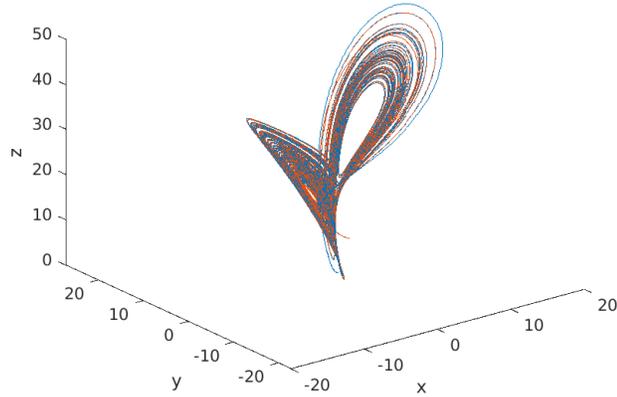


Figura 2.9: Estados del sistema Lorenz en \mathbb{R}^3 .

con distintas condiciones iniciales, ambos estados coinciden. Las condiciones iniciales escogidas fueron $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$, $x_3(0) = 1$ y $\hat{x}_1(0) = 5$, $\hat{x}_2(0) = 5$, $\hat{x}_3(0) = 5$.

En la Figura 2.10, 2.11, 2.12 se puede observar los estados x_1, x_2, x_3 y sus estados estimados $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$. Note que ambos estados coinciden después de cierto tiempo, y llegan a confundirse uno del otro.

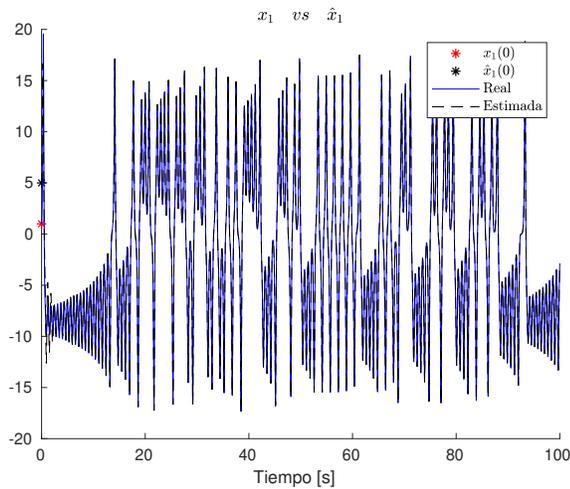


Figura 2.10: Coordenada x_1 y su estimado \hat{x}_1 , para el sistema Lorenz.

En las Figuras 2.13-2.15 se observa que el error de estimación converge a cero para los tres estados del sistema Lorenz. A pesar de tener presencia de ruido en la salida del sistema y dinámicas no modeladas.

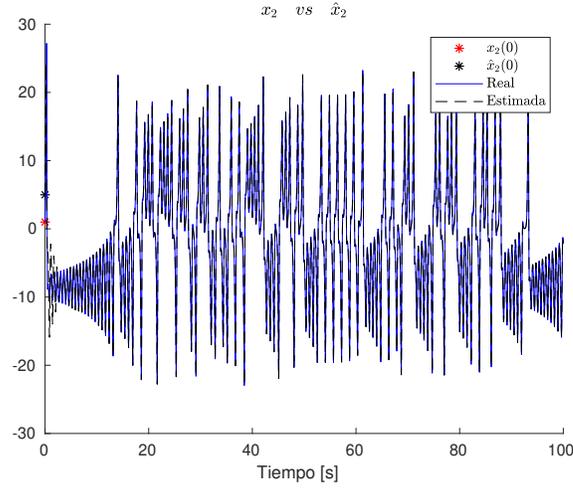


Figura 2.11: Coordenada x_2 y su estimado \hat{x}_2 , para el sistema Lorenz.

2.2.4. Sistema caótico de Rössler

Considere el sistema de Rössler [29] definido por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias[30],[31]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + zx - cz\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + ax_2 \\ \dot{x}_3 &= b + x_3x_1 - cx_3 \\ y &= x_1 + \bar{\omega}\end{aligned}\tag{2.26}$$

Donde los parámetros del sistema son $a = 0.2, b = 0.2, c = 10$. El sistema (2.26) es de la forma:

$$\dot{\chi} = A\chi + f(\chi)$$

$$y = h(\chi) = C\chi$$

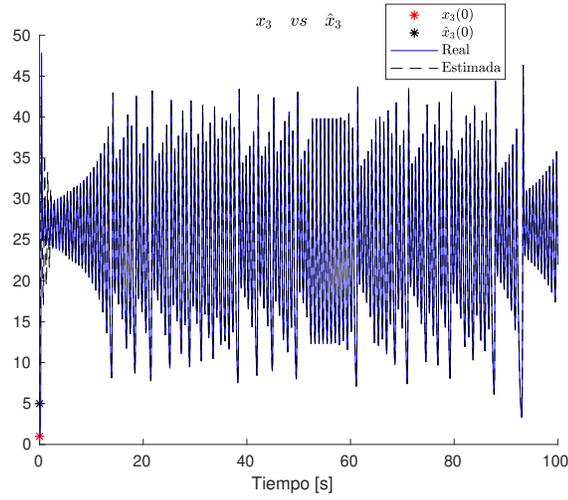


Figura 2.12: Coordenada x_3 y su estimado \hat{x}_3 , para el sistema Lorenz.

Con $\chi = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$

El sistema aumentado está dado por:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -x_2 - x_3 \\
 \dot{x}_2 &= x_1 + ax_2 \\
 \dot{x}_3 &= b - cx_3 + \phi_3(x) \\
 \dot{x}_* &= x_1 + \hat{\omega} \\
 \dot{\phi}_1 &= 0 \\
 \dot{\phi}_2 &= 0 \\
 \dot{\phi}_3 &= x_3x_1 \\
 y_* &= x_*
 \end{aligned}$$

El observador de alta ganancia está dado por:

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{x}}_1 &= -\hat{x}_2 - \hat{x}_3 + k_1(y_* - \hat{y}_*) \\
 \dot{\hat{x}}_2 &= \hat{x}_1 + a\hat{x}_2 + k_2(y_* - \hat{y}_*) \\
 \dot{\hat{x}}_3 &= b - c\hat{x}_3 + \phi_3(\hat{x}) + k_3(y_* - \hat{y}_*) \\
 \dot{\hat{x}}_* &= \hat{x}_1 + \hat{\omega} + k_4(y_* - \hat{y}_*) \\
 \dot{\hat{\phi}}_1 &= k_5(y_* - \hat{y}_*) \\
 \dot{\hat{\phi}}_2 &= k_6(y_* - \hat{y}_*) \\
 \dot{\hat{\phi}}_3 &= \hat{x}_3\hat{x}_1 + k_5(y_* - \hat{y}_*) \\
 \hat{y}_* &= \hat{x}_*
 \end{aligned}$$

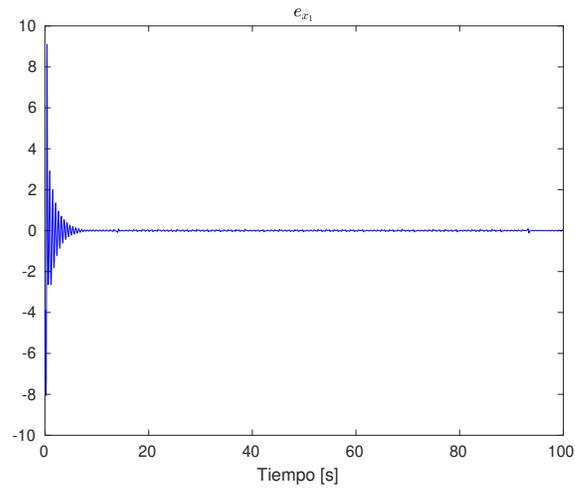


Figura 2.13: Error del estado x_1 correspondiente a la primer estado del sistema Lorenz.

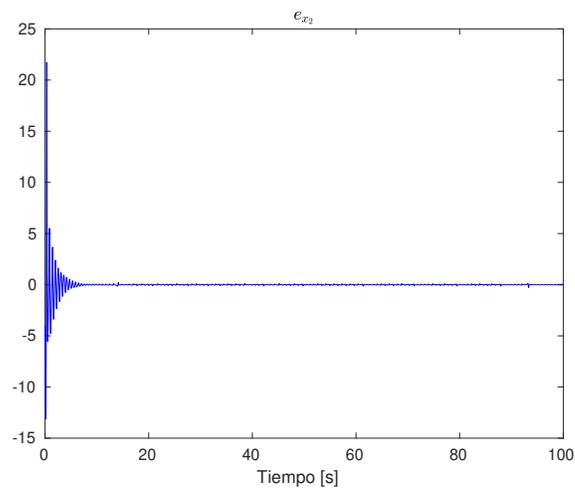


Figura 2.14: Error del estado x_2 correspondiente al segundo estado del sistema Lorenz.

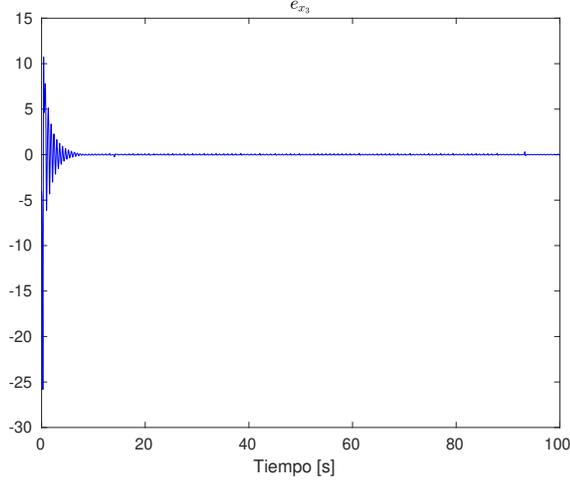


Figura 2.15: Error del estado x_3 correspondiente al tercer estado del sistema Lorenz.

Se tiene:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Phi(\chi) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_3 x_1 \end{bmatrix} \quad \Phi(\hat{\chi}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{x}_3 \hat{x}_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{\omega} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad S_\theta = \begin{bmatrix} 0.3333 & -0.1111 & 0.0370 & -0.0123 & 0.0041 & -0.0014 & 0.0005 \\ -0.1111 & 0.0741 & -0.0370 & 0.0165 & -0.0069 & 0.0027 & -0.0011 \\ 0.0370 & -0.0370 & 0.0247 & -0.0137 & 0.0069 & -0.0032 & 0.0014 \\ -0.0123 & 0.0165 & -0.0137 & 0.0091 & -0.0053 & 0.0028 & -0.0014 \\ 0.0041 & -0.0069 & 0.0069 & -0.0053 & 0.0036 & -0.0021 & 0.0012 \\ -0.0014 & 0.0027 & -0.0032 & 0.0028 & -0.0021 & 0.0014 & -0.0009 \\ 0.0005 & -0.0011 & 0.0014 & -0.0014 & 0.0012 & -0.0009 & 0.0006 \end{bmatrix}$$

Con $\theta = 3$.

Para verificar que el observador de alta ganancia propuesto en efecto estima las variables de estado, se realizaron experimentos en simulación numérica, se utilizó la herramienta Simulink de Matlab 2018b, una computadora con sistema operativo Debian GNU / Linux 10 (buster), RAM 5.6 GiB y un Procesador AMD® Phenom(tm) ii p820 triple-core processor $\times 3$. Un tiempo de muestreo de $t_s = 0.001[s]$, con el método de integración Runge-Kutta.

En la Figura 2.16 se pueden observar los tres estados del sistema Rössler. Se muestran tanto los estados originales como los estados estimados, a pesar de que se simularon con distintas condiciones iniciales, ambos estados coinciden. Las condiciones iniciales escogidas fueron $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$, $x_3(0) = 1$ y $\hat{x}_1(0) = 5$, $\hat{x}_2(0) = 5$,

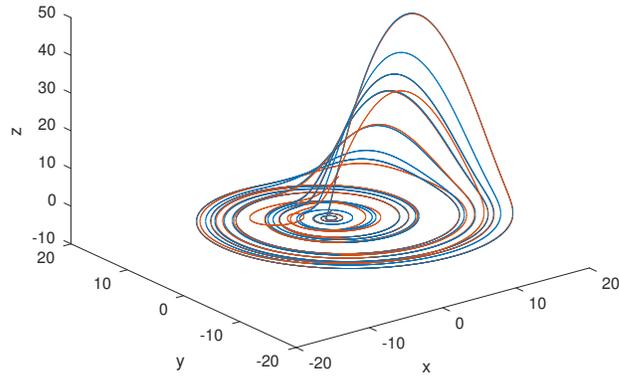


Figura 2.16: Estados del sistema Rössler en \mathbb{R}^3 .

$$\hat{x}_3(0) = 5.$$

En la Figura 2.17, 2.18, 2.19 se puede observar los estados x_1, x_2, x_3 y sus estados estimados $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$. Note que ambos estados coinciden después de cierto tiempo, y llegan a confundirse uno del otro.

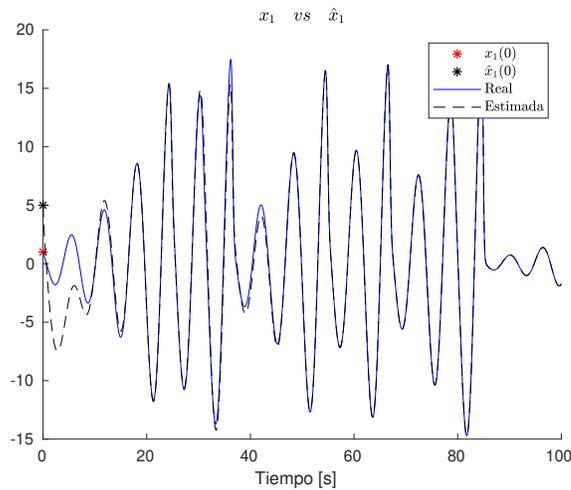


Figura 2.17: Coordenada x_1 y su estimado \hat{x}_1 , para el sistema Rössler.

En las Figuras 2.20-2.22 se observa que el error de estimación converge a cero para los tres estados del sistema Rössler. A pesar de tener presencia de ruido en la salida del sistema y dinámicas no modeladas.

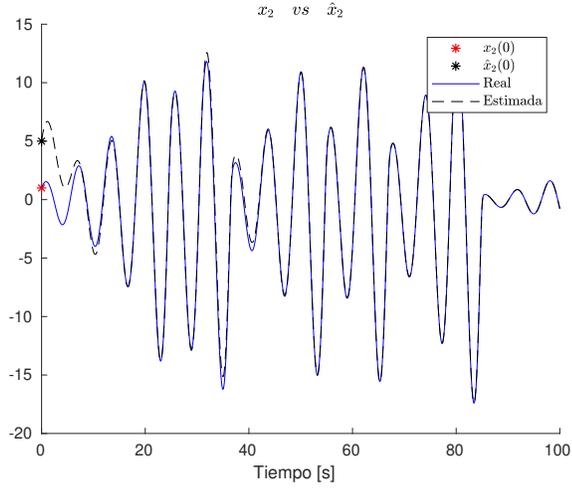


Figura 2.18: Coordenada x_2 y su estimado \hat{x}_2 , para el sistema Rössler.

2.2.5. Sistema caótico Arneodo-Coullet-Tresser

El sistema caótico Arneodo-Coullet-Tresser se puede representar mediante las siguientes ecuaciones diferenciales [32],[33]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= ax - by - cz - x^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= ax_1 - bx_2 - cx_3 - x_1^3 \\ y &= x_1 + \bar{\omega}\end{aligned}\tag{2.27}$$

Donde los parámetros del sistema son $a = 5.5, b = 3.5, c = 1.0$ [34],[35]. El sistema (2.27) es de la forma:

$$\dot{\chi} = A\chi + f(\chi)$$

$$y = h(\chi) = C\chi$$

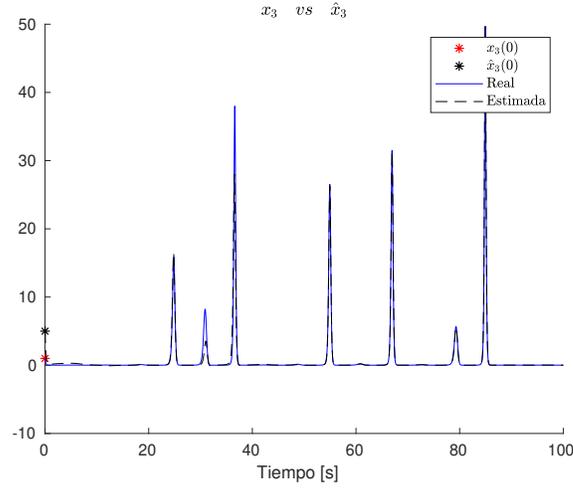


Figura 2.19: Coordenada x_3 y su estimado \hat{x}_3 , para el sistema Rössler.

Con $\chi = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$

El sistema aumentado está dado por:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= x_3 \\
 \dot{x}_3 &= ax_1 - bx_2 - cx_3 + \phi_3(x) \\
 \dot{x}_* &= x_1 + \hat{\omega} \\
 \dot{\phi}_1 &= 0 \\
 \dot{\phi}_2 &= 0 \\
 \dot{\phi}_3 &= x_1^3 \\
 y_* &= x_*
 \end{aligned}$$

El observador de alta ganancia está dado por:

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + k_1(y_* - \hat{y}_*) \\
 \dot{\hat{x}}_2 &= \hat{x}_3 + k_2(y_* - \hat{y}_*) \\
 \dot{\hat{x}}_3 &= a\hat{x}_1 - b\hat{x}_2 - c\hat{x}_3 + \phi_3(\hat{x}) + k_3(y_* - \hat{y}_*) \\
 \dot{\hat{x}}_* &= \hat{x}_1 + \hat{\omega} + k_4(y_* - \hat{y}_*) \\
 \dot{\hat{\phi}}_1 &= k_5(y_* - \hat{y}_*) \\
 \dot{\hat{\phi}}_2 &= k_6(y_* - \hat{y}_*) \\
 \dot{\hat{\phi}}_3 &= \hat{x}_1^3 + k_5(y_* - \hat{y}_*) \\
 \hat{y}_* &= \hat{x}_*
 \end{aligned}$$

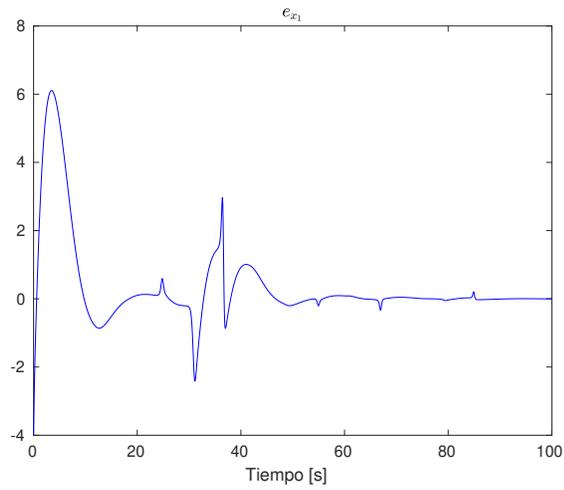


Figura 2.20: Error del estado x_1 correspondiente a la primer estado del sistema Rössler.

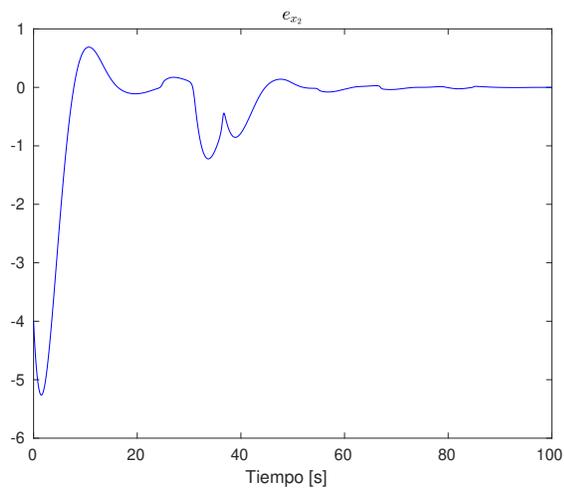


Figura 2.21: Error del estado x_2 correspondiente al segundo estado del sistema Rössler.

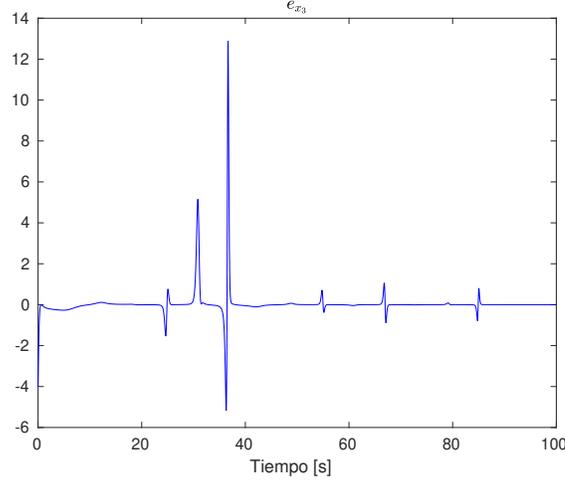


Figura 2.22: Error del estado x_3 correspondiente al tercer estado del sistema Rössler.

Se tiene:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & -b & -c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Phi(\chi) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_1^3 \end{bmatrix} \quad \Phi(\hat{\chi}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{x}_1^3 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad S_\theta = \begin{bmatrix} 0.3333 & -0.1111 & 0.0370 & -0.0123 & 0.0041 & -0.0014 & 0.0005 \\ -0.1111 & 0.0741 & -0.0370 & 0.0165 & -0.0069 & 0.0027 & -0.0011 \\ 0.0370 & -0.0370 & 0.0247 & -0.0137 & 0.0069 & -0.0032 & 0.0014 \\ -0.0123 & 0.0165 & -0.0137 & 0.0091 & -0.0053 & 0.0028 & -0.0014 \\ 0.0041 & -0.0069 & 0.0069 & -0.0053 & 0.0036 & -0.0021 & 0.0012 \\ -0.0014 & 0.0027 & -0.0032 & 0.0028 & -0.0021 & 0.0014 & -0.0009 \\ 0.0005 & -0.0011 & 0.0014 & -0.0014 & 0.0012 & -0.0009 & 0.0006 \end{bmatrix}$$

Con $\theta = 3$.

Para verificar que el observador de alta ganancia propuesto en efecto estima las variables de estado, se realizaron experimentos en simulación numérica, se utilizó la herramienta Simulink de Matlab 2018b, una computadora con sistema operativo Debian GNU / Linux 10 (buster), RAM 5.6 GiB y un Procesador AMD® Phenom(tm) ii p820 triple-core processor $\times 3$. Un tiempo de muestreo de $t_s = 0.001[s]$, con el método de integración Runge-Kutta.

En la Figura 2.23 se pueden observar los tres estados del sistema Arneodo. Se muestran tanto los estados originales como los estados estimados, a pesar de que se simularon con distintas condiciones iniciales, ambos estados coinciden. Las condiciones iniciales escogidas fueron $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$, $x_3(0) = 1$ y $\hat{x}_1(0) = 3$, $\hat{x}_2(0) = 3$,

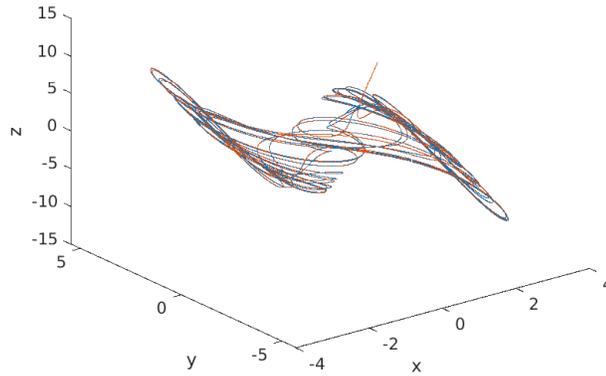


Figura 2.23: Estados del sistema Arneodo en \mathbb{R}^3 .

$$\hat{x}_3(0) = 3.$$

En la Figura 2.24, 2.25, 2.26 se puede observar los estados x_1, x_2, x_3 y sus estados estimados $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$. Note que ambos estados coinciden después de cierto tiempo, y llegan a confundirse uno del otro.

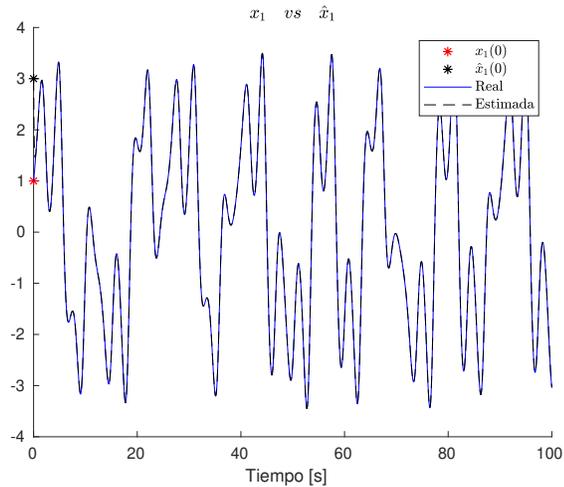


Figura 2.24: Coordenada x_1 y su estimado \hat{x}_1 , para el sistema Arneodo.

En las Figuras 2.27-2.29 se observa que el error de estimación converge a cero para los tres estados del sistema Arneodo. A pesar de tener presencia de ruido en la salida del sistema y dinámicas no modeladas.

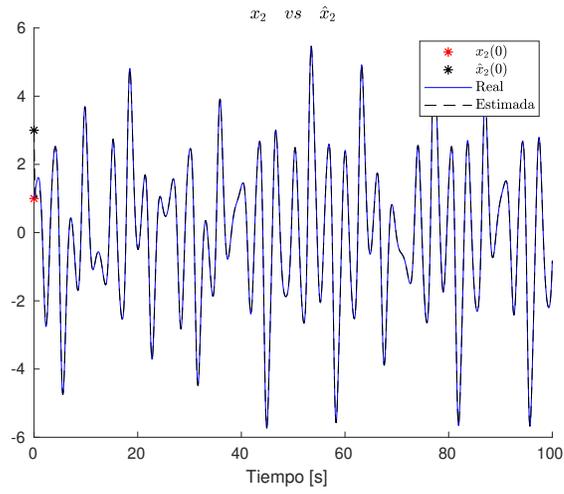


Figura 2.25: Coordenada x_2 y su estimado \hat{x}_2 , para el sistema Arneodo.

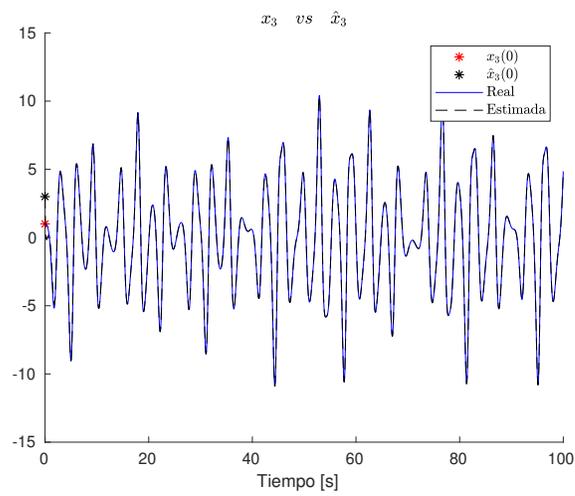


Figura 2.26: Coordenada x_3 y su estimado \hat{x}_3 , para el sistema Arneodo.

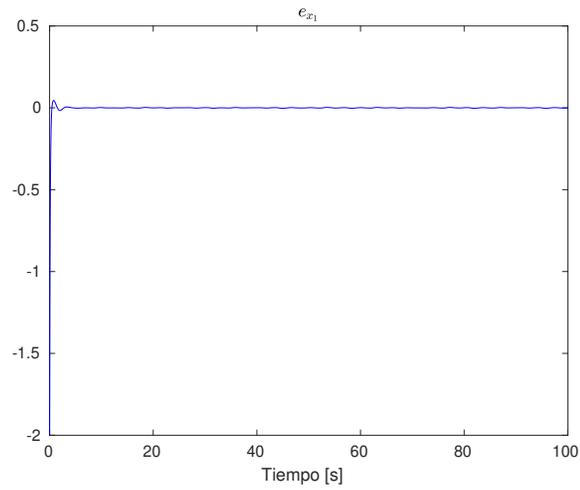


Figura 2.27: Error del estado x_1 correspondiente a la primer estado del sistema Arneodo.

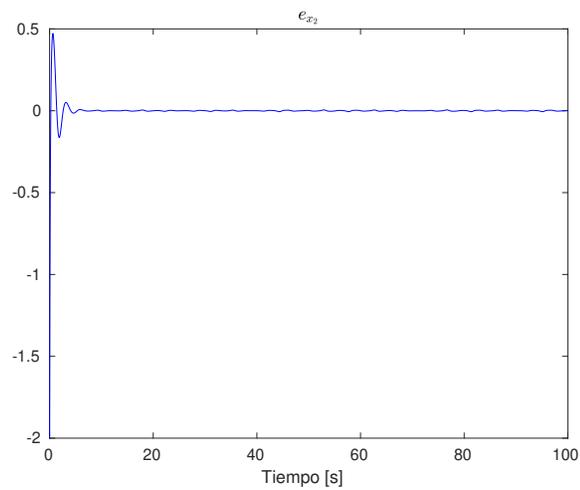


Figura 2.28: Error del estado x_2 correspondiente al segundo estado del sistema Arneodo.

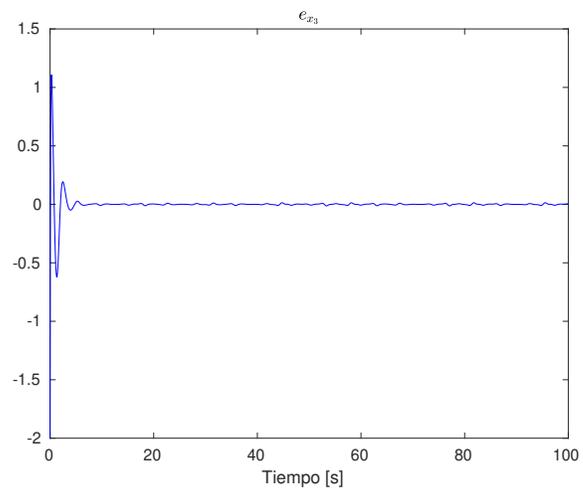


Figura 2.29: Error del estado x_3 correspondiente al tercer estado del sistema Arneodo.

Capítulo 3

Cálculo Fraccional:Definiciones básicas

En este capítulo se da una introducción a la integración y diferenciación de orden fraccional, se muestran algunas definiciones básicas que serán utilizadas en el capítulo 4 .

3.1. Cálculo Fraccional.

El cálculo fraccional se refiere principalmente al cálculo de integrales y derivadas de un orden fraccional arbitrario que puede ser real o complejo[36]. El cálculo fraccional es tan antiguo como el cálculo convencional, sin embargo no es tan popular entre científicos e ingenieros[36]. El cálculo fraccional nació el día 30 de septiembre de 1695, en una carta que escribió L'Hopital dirigida a Leibniz, en la cual le preguntaba cuál sería el significado de una derivada elevada al orden $1/2$, es decir[36]

$$\frac{D^{\frac{1}{2}}f(x)}{Dx^{\frac{1}{2}}}.$$

La respuesta que dió Leibniz fue: "sería una paradoja aparente de la cual algún día útiles consecuencias serán obtenidas"[36].

Posteriormente se hizo mención de las derivadas fraccionales, en algún contexto o el otro, por ejemplo Euler en 1730, Lagrange en 1772, Laplace en 1812, Lacroix en 1819, Fourier en 1822, Liouville en 1832, Riemann en 1847, Greer en 1859, Holmgren en 1865, Grünwald en 1867, Letnikov en 1868, Sonin en 1869, Laurent en 1884, Nekrasov en 1888, Krug en 1890 y Weyl en 1917 [37].

De hecho, en sus 700 páginas del libro de texto, titulado "Traité du Calcul Differentiel et du Calcul Intégral" (Segunda edición; Courcier, París, 1819), S. F. Lacroix dedicó dos páginas (págs. 409-410) al cálculo fraccional, demostrando eventualmente que [37]

$$\frac{d^{1/2}}{dv^{1/2}}v = \frac{2\sqrt{v}}{\sqrt{\pi}}$$

Además, por supuesto, de las teorías de la teoría diferencial, integral e integro-diferencial, ecuaciones espaciales y funciones especiales de la física matemática, así como sus extensiones y generalizaciones en una y más variables, algunas de las áreas de la actualidad, las aplicaciones diarias del cálculo fraccional incluyen Flujo de Fluidos, Reología y Dinámica, Procesos en Estructuras Autosimilares y Porosas, Transporte Difusivo Similar al de Difusión, Redes Eléctricas, Probabilidad y Estadística, Teoría de Control de Dinámica de Sistemas, Viscoelasticidad, Electroquímica de la Corrosión, Física, Química, Óptica y Procesamiento de Señales, entre otras[37].

El primer trabajo, dedicado exclusivamente al tema del cálculo fraccional, es el libro de Oldham y Spanier [38] publicado en 1974. Uno de los más recientes obras sobre el tema del cálculo fraccional es el libro de Podlubny [39] publicado en 1999, que trata principalmente de ecuaciones diferenciales fraccionales. Alguno de los últimos (pero ciertamente no los últimos) trabajos especialmente en modelos fraccionales de cinética anómala de procesos complejos son los volúmenes editados por Carpinteri y Mainardi [40] en 1997 y por Hilfer [41] en 2000, y el libro de Zaslavsky [42] publicado en 2005. De hecho, mientras tanto, numerosas otras obras (libros, editados volúmenes y actas de congresos) también han aparecido. Estos incluyen la monografía de tipo enciclopédico notablemente completa de Samko, Kilbas y Marichev [43], publicado en ruso en 1987 y en inglés en 1993, y el libro dedicado sustancialmente a las ecuaciones diferenciales fraccionarias por Miller y Ross [44], que fue publicado en 1993. Y hoy existen en al menos dos revistas internacionales dedicadas casi en su totalidad al tema de cálculo fraccional: (i) Revista de cálculo fraccional y (ii) Cálculo fraccional y Análisis Aplicado [37].

Recientemente, el diseño de controladores de orden fraccional se ha convertido en uno de los temas más interesantes en teoría de control que ha desembocado en aplicaciones de sistemas físicos tales como sistemas de suspensión, motores síncronos de imán permanente, sistemas de electrónica de potencia y vehículos aéreos no tripulados, entre otros. La idea de control de orden fraccional fue propuesta inicialmente por [45] quien introdujo el esquema de control de orden fraccional robusto. También Podlubny [46, 47] introdujo el conocido controlador proporcional-derivativo de orden fraccional. Por lo tanto, muchos controladores de orden fraccional han sido introducidos en la literatura, incluyendo los controladores TID [48], compensadores lead-lag de orden fraccional [49, 50], controladores óptimos de orden fraccional [51, 52], y controladores adaptativos de orden fraccional [53, 54].

3.1.1. Cálculo fraccional una generalización del cálculo de orden entero

Considere n un número entero, cuando se dice x^n rápidamente se visualiza que x multiplicado n veces dará el resultado. Ahora todavía se obtiene un resultado si n no es número entero pero se falla en visualizar cómo. Como 2^π es difícil de visualizar, pero sí existe. Similarmente la derivada fraccional[55]

$$\frac{d^\pi}{dx^\pi} f(x)$$

aunque es difícil de visualizar, sí existe. Como los números reales existen entre los enteros, así las derivadas integro-diferenciales fraccionales, sí existen entre las derivadas enteras convencionales. Se visualiza la siguiente generalización de los enteros a los números reales, de la siguiente manera

$$\begin{aligned} x^n &= \underbrace{x.x.x\dots x}_n, n \text{ es entero} \\ x^n &= e^{n \ln(x)}, n \text{ es un real} \\ n! &= 1.2.3\dots(n-1)n, n \text{ es entero} \\ n! &= \Gamma(n+1), n \text{ es un real y } \Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \end{aligned}$$

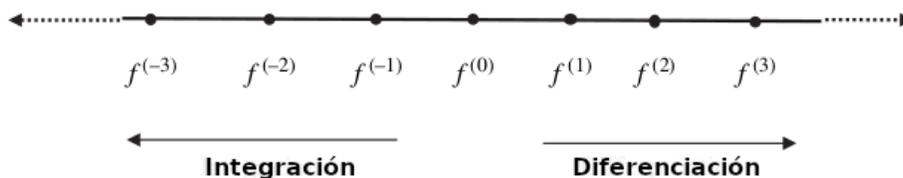


Figura 3.1: Recta numérica e interpolación de las derivadas fraccionales

Por lo tanto, la generalización anterior de entero a no entero es lo que hace que a la recta numérica general (es decir, no restringida solo a números enteros). La Figura 3.1 demuestra la recta numérica y la extensión de ésta para mapear cualquier derivada-integral fraccional. En el lado negativo se extiende a la integración y el lado positivo a la diferenciación.

Heaviside (1871) afirma que existe un universo de matemáticas que se encuentra entre la diferenciación e integración completas, y que los operadores fraccionales los impulsan y a veces son tan reales como los otros.

Las matemáticas son un arte de dar nombres engañosos a las cosas. La bella y a primera vista misterioso: nombre, el cálculo fraccional es solo uno de esos nombres equivocados, que son la esencia de las matemáticas. Conocemos nombres como naturales números y números reales. Los usamos muy a menudo; pensemos por un

momento en estos nombres. La noción de número natural es una abstracción natural, pero es la ¿El número natural en sí mismo es natural?. La noción de número real es la generalización de la noción de número natural. El número real enfatiza que pretendemos que reflejan cantidades reales, pero no pueden cambiar el hecho de que no existen. Si uno quiere calcular algo, inmediatamente se descubre que no hay lugar para los números reales en este mundo real. En una computadora se puede trabajar con un conjunto finito de elementos finitos, fracciones, que sirven como aproximaciones a números reales irreales.

El cálculo fraccional no significa cálculo de fracciones, ni tampoco significa fracción de ningún cálculo de diferenciación e integración o cálculo de variaciones. El cálculo fraccional es el nombre de la teoría de integraciones y derivadas de arbitrarias orden, que unifican y generalizan la noción de diferenciación de orden entero. Por eso lo llamamos integrales-derivadas generalizadas[56].

3.1.2. Desarrollo histórico del cálculo fraccional

Sistemas de orden fraccional, o sistemas que contienen derivadas e integrales fraccionales, han sido estudiados por muchos en el área de la ingeniería y la ciencia: Heaviside (1922), Bush (1929), Goldman (1949), Holbrook (1966), Starkey (1954), Carslaw y Jeager (1948), Scott (1955) y Mikuniski (1959). Oldham y Spanier (1974) y Miller y Ross (1993) presentan además discusiones muy confiables dedicadas específicamente al tema. Cabe señalar que cada vez hay más sistemas físicos cuyo comportamiento se puede describir de forma compacta mediante cálculo fraccional[57].

De interés específico para los ingenieros eléctricos son las largas líneas eléctricas (Heaviside 1922), proceso electroquímico (Ichise, Nagayanagi y Kojima 1971; Sun, Onaral y Tsao 1984), polarización dieléctrica (Sun, Abdelwahab y Onaral 1984), ruido coloreado (Manderbolt 1967), materiales viscoelásticos (Bagley y Calico 1991; Koeller 1986; Skaar, Michel y Miller 1988) y el caos (Hartley, Lorenzo y Qammer 1995), y polos fraccionales del electromagnetismo (Engheta 1998). Durante el desarrollo de la teoría aplicada del cálculo fraccional, durante los últimos 300 años, contribuciones de N.Ya. Sonin (1869), A.V. Letnikov (1872), H. Laurent (1884), N. Nekrasov (1888), K. Nishimoto (1987), Srivastava (1968, 1994), R.P. Agarwal (1953), SC Dutta Roy (1967), Miller y Ross (1993), Kolwankar y Gangal (1994), Oustaloup (1994), L. Debnath (1992), Igor Podlubny (2003), Carl Lorenzo (1998) Tom Hartley (1998), R.K. Saxena (2002), Mainardi (1991), S. Saha Ray y R.K. Bera (2005) y varios otros son notables[58].

A continuación se presentan algunas de las notaciones y esfuerzos de formalización realizados por varios matemáticos, desde finales del siglo XVII[59]. Desde 1695, tras la pregunta de L'Hopital sobre el orden de diferenciación, Leibniz fue el primero en emprender este camino. Leibniz (1695-1697) mencionó un posible enfoque para la diferenciación de orden fraccional, en el sentido de que para un no

entero (n) la definición podría ser la siguiente. Escribió esta carta a J. Wallis y J. Bernulli:

$$\frac{d^n e^{mx}}{dx^n} = m^n e^{mx}$$

Leonard Euler (1730) sugirió utilizar una relación para números negativos o no enteros (racionales), tomando $m = 1$ y $n = 1/2$, obtuvo lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{d^n x^m}{dx^n} &= m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)x^{m-n} \\ \Gamma(m+1) &= m(m-1)\dots(m-1+1)\Gamma(m-n+1) \\ \frac{d^n x^m}{dx^n} &= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}x^{m-n} \\ \frac{d^{1/2}x}{dx^{1/2}} &= \sqrt{\frac{4x}{\pi}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{1/2} \end{aligned}$$

El primer paso en la generalización de la notación para la diferenciación de funciones arbitrarias fue concebido por J.B.J. Fourier (1820-1822), tras la introducción de

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(px - pz)dp$$

Hizo un comentario como

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(px - pz + n\frac{\pi}{2}\right)dp$$

y esta relación podría servir como una definición de derivada de n -ésimo orden para orden no-entero n . N.H. Abel (1823-1826) introdujo la integral como

$$\int_0^x \frac{S'(\eta)d\eta}{(x-\eta)^\alpha} = \psi(x)$$

De hecho resolvió la integral para un α arbitrario y no sólo para $1/2$, y obtuvo

$$S(x) = \frac{\operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\pi} x^\alpha \int_0^1 \frac{\psi(xt)}{(1-t)^{1-\alpha}} dt$$

Después, Abel expresó la solución obtenida con la ayuda de una integral de orden α

$$S(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d^{-\alpha}\psi(x)}{dx^{-\alpha}}$$

J. Liouville (1832-1855) dio tres enfoques. La primera es la fórmula de Leibniz. ción, que es la siguiente

$$\begin{aligned}\frac{d^m e^{ax}}{dx^m} &= a^m e^{ax} \\ f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x} \\ \frac{d^\gamma f(x)}{dx^\gamma} &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^\gamma e^{a_n x}\end{aligned}$$

Aquí, la función se descompone en un conjunto infinito de funciones exponenciales. J. Liouville introdujo la integral de orden no entero como segundo enfoque, que se señala a continuación:

$$\begin{aligned}\int^{\mu} \phi(x) dx^{\mu} &= \frac{1}{(-1)^{\mu} \Gamma(\mu)} \int_0^{\infty} \phi(x + \alpha) \alpha^{\mu-1} d\alpha \\ \int^{\mu} \phi(x) dx^{\mu} &= \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^{\infty} \phi(x - \alpha) \alpha^{\mu-1} d\alpha \\ &\quad \tau = x + \alpha, \tau = x - \alpha \\ \int^{\mu} \phi(x) dx^{\mu} &= \frac{1}{(-1)^{\mu} \Gamma(\mu)} \int_x^{\infty} (\tau - x)^{\mu-1} \phi(\tau) d\tau \\ \int^{\mu} \phi(x) dx^{\mu} &= \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_{-\infty}^x (x - \tau)^{\mu-1} \phi(\tau) d\tau\end{aligned}$$

El tercer enfoque dado por Liouville son las definiciones de derivadas de orden no entero, como

$$\begin{aligned}\frac{d^{\mu} F(x)}{dx^{\mu}} &= \frac{(-1)^{\mu}}{h^{\mu}} \left(F(x) - \frac{\mu}{1} F(x+h) + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} F(x+2h) - \dots \right) \\ \frac{d^{\mu} F(x)}{dx^{\mu}} &= \frac{(-1)^{\mu}}{h^{\mu}} \left(F(x) - \frac{\mu}{1} F(x-h) + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} F(x-2h) - \dots \right) \\ \lim h &\rightarrow 0\end{aligned}$$

Liouville fue el primero en señalar la existencia entre el lado derecho y el lado izquierdo de derivadas e integrales.

G.F.B. Riemann (1847) utilizó una generalización de la serie de Taylor para obtener una fórmula para la integración de orden fraccional. Riemann introdujo una función “complementaria” arbitraria $\psi(x)$ porque no fijó el límite inferior de integración. Él no pudo resolver esta desventaja. A partir de aquí, el cálculo fraccional inicializado nació últimamente en la segunda mitad del siglo XX. La notación de Riemann es la siguiente con la función complementaria

$$D^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt + \psi(t)$$

La fórmula de Cauchy para la n -ésima derivada en variables complejas es

$$f^n(z) = \frac{n!}{j2\pi} \oint \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt$$

y para $n = \nu$ no entero, aparece en su lugar un punto de ramificación de la función $(t-z)^{\nu+1}$ de polo

$$D^\nu f(z) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{j2\pi} \int_C \frac{f(t)}{(t-z)^{\nu+1}} dt$$

Generalmente, para comprender la dinámica de cualquier sistema en particular, a menudo consideramos la naturaleza de las singularidades del dominio complejo (polos). Considere una función compleja $G(z) = (z^q + a)^{-1}$, donde $q > 0$ y es un número fraccionario. Esta función particular de la variable compleja no tiene ningún polo en la hoja primaria de Riemann de el plano complejo $z = \text{rexp}(j\theta)$, es decir, dentro de $|\theta| < \pi$. Es imposible forzar el denominador $z^q + a$ a cero en cualquier lugar del plano complejo $|\theta| < \pi$. Considerar para $q = 0.5$, el denominador $z^{0.5} + 1$ no llega a cero en el principio en la hoja primaria de Riemann, $|\theta| < \pi$. Se vuelve cero en la hoja secundaria de Riemann en $z = \text{exp}(\pm j2\pi) = 1 + j0$ [60].

Normalmente, para llegar a la hoja secundaria de Riemann, es necesario pasar por un “corte de rama” en la hoja primaria de Riemann. Esto se logra aumentando el ángulo en el plano complejo z . Aumentar el ángulo a $\theta = +\pi$ nos lleva a la “corte de rama” en el plano complejo z . Esto también se puede lograr disminuyendo el ángulo hasta $\theta = -\pi$, lo que también nos lleva al “corte de rama”. Este “corte de rama” se encuentra en $z = \text{rexp}(\pm j\pi)$, para todo r positivo. Aumentando aún más el ángulo eventualmente llega a $\theta = \pm j2\pi$. Aumentar aún más el ángulo $\theta > \pi$ hace que vaya “por debajo” la hoja primaria de Riemann, dentro del eje real negativo de z del plano complejo[61],[62].

El comportamiento de la función $(z^{0.5} + 1)^{-1}$ se describe así mediante dos hojas de Riemann. Volviendo a la primera hoja de Riemann en el plano complejo z , comienza el corte de rama en $z = 0$, el origen, y se extiende hasta el eje real negativo hasta el infinito. El fin de los cortes de las ramas se denominan “puntos de ramificación”, que se encuentran entonces en el origen y en el punto negativo infinito en el plano z .

Los “puntos de bifurcación” pueden considerarse como singularidades en la hoja primaria de Riemann del plano z también, pero la función $z^{0.5} + 1$ no va al infinito entonces. Por lo tanto, para obtener la trama del poste, uno tiene que rodear estas ramas y pasar a la hoja secundaria de Riemann (en este caso, en $1 + j0$ en $\theta = \pm 2\pi$)[63].

3.1.3. Las definiciones populares de derivadas/integrales fraccionales en cálculo fraccional

Riemann-Liouville[64]:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau$$

$$(n-1) \leq \alpha < n,$$

donde n es un número entero y α es un número real.

Grunwald-Letnikov[65]:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\lceil \frac{t-a}{h} \rceil} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh)$$

$\lceil \frac{t-a}{h} \rceil$ entero.

M. Caputo (1967)[66]:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau$$

$$(n-1) \leq \alpha < n$$

donde n es un número entero y α es un número real.

Oldham and Spanier (1974)[67]:

La propiedad escalada de derivadas fraccionales es

$$\frac{d^q f(\beta x)}{dx^q} = \beta^q \frac{d^q f(\beta x)}{d(\beta x)^q}$$

lo que lo hace adecuado para el estudio de escalamiento. Esto implica el estudio de procesos autosimilares, objetos y distribuciones también.

K.S. Miller B. Ross (1993)[44]:

$$D^\alpha f(t) = D^{\alpha_1} D^{\alpha_2} \dots D^{\alpha_n} f(t)$$

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

$$\alpha_i < 1$$

Esta definición de composición secuencial es un concepto muy útil para obtener derivadas fraccionales de cualquier orden arbitrario. El operador de derivada puede ser cualquier definición RL o Caputo.

Kolwankar and Gangal (1994)[68],[69],[70]:

Kolwankar y Gangal definen la derivada fraccional local para explicar la comportamiento de una función “continua pero en ninguna parte diferenciable”.

Para $0 < q < 1$, la derivada fraccional local es

$$D^q f(y) = \lim_{x \rightarrow y} \frac{d^q(f(x) - f(y))}{d(x - y)^q}$$

3.1.4. Definiciones básicas.

Definición 3.1 [36](Derivada Fraccional de Riemann-Liouville). Sea $f(t)$ una función suave¹, se define entonces la derivada fraccional de $f(t)$ como [71]

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}} d\tau, (n - 1) \leq \alpha < n, \quad (3.1)$$

con n un entero y α un número real. $\Gamma(z)$ es la llamada función Gama de Euler.

Definición 3.2 [36](Función Gama de Euler). Sea z un número real, la función Gama de Euler se define como sigue

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \quad (3.2)$$

La función gama generaliza la noción del factorial de un número entero, a números reales. De alguna manera esta función gama debe estar presente en la definición de derivada fraccional debido a que, para obtener la derivada fraccional mediante la definición de Riemann-Liouville, primero se tiene que integrar la función de la cual se quiere obtener la derivada fraccional y después se debe derivar al orden n -ésimo.

De estas definiciones, se puede notar que cuando $\alpha < 0$ se obtienen integrales fraccionales y cuando $\alpha > 0$ se obtienen derivadas fraccionales, cuando $\alpha = 0$ se obtiene la función original.

Definición 3.3 Derivada Fraccional de Caputo

La derivada fraccional de Caputo de lado izquierdo de orden $\alpha \in \mathbb{R}^+$ de una función $f(t) : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ se define de la siguiente manera:

$${}_0^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha + 1 - n}} d\tau, t > 0$$

¹Una función suave (smooth en inglés) es una función que tiene derivadas continuas hasta algún orden deseado sobre algún dominio. Una función así se puede decir que es suave sobre algún intervalo restringido (a,b) o $[a,b]$. El número de derivadas continuas necesarias para que una función sea considerada suave depende del problema en cuestión, y puede variar desde dos hasta infinito. Una función que tiene todos sus órdenes de derivadas continuas es llamada función C^∞ .

Donde $n \in \mathbb{N}$ es tal que $n - 1 < \alpha < n$, $\Gamma(\cdot)$ es la función gama.
En particular cuando $n = 1$ se tiene:

$${}_0^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t \frac{f^{(1)}(\tau)}{(t - \tau)^\alpha} d\tau$$

Definición 3.4 Función Mittag-Leffler[72]

Sea β un número real positivo. La función:

$$E_\beta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k\beta + 1)}, x \in \mathbb{R}$$

siempre y cuando converja, es conocida como la función Mittag-Leffler.

Para las siguientes definiciones considere el sistema no lineal fraccional dado por:

$$D^\alpha x(t) = f(t, x(t)), \quad (3.3)$$

donde $\alpha \in (0, 1)$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ y $f : [0, \infty] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua definida a trozos en t y Lipschitz con respecto a x .

Definición 3.5 El sistema no lineal de orden fraccional (3.3) se dice acotado uniformemente, si dado $\varepsilon > 0$ existe una constante $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que [23]

$$\|x(t)\| \leq \delta, \quad t \geq 0,$$

para cualquier condición inicial $x(0)$.

Definición 3.6 Si existe una función definida positiva y radialmente no acotada $V(t, x(t))$, un funcional continuo y no negativo $G(t, x(t))$, constantes positivas $l > 0$ y $\gamma > 0$ tal que para cualquier solución $x(t)$ de (3.3), se tiene que[73]

$$V(t, x(t)) - l \leq [G(0, x(0))]E_\alpha(-\gamma t^\alpha), \quad t \geq 0,$$

entonces el sistema (3.3) se dice globalmente Mittag-Leffler atractivo con respecto a $V(t, x(t))$, y el conjunto compacto $\Omega = \{x(t) \in \mathbb{R}^n \mid V(t, x(t)) \leq l\}$ se llama conjunto compacto atractivo globalmente Mittag-Leffler del sistema (3.3).

Definición 3.7 Si el sistema (3.3) es acotado uniformemente y globalmente Mittag-Leffler atractivo, entonces se dice globalmente Mittag-Leffler acotado[73].

Lema 1 Sea $x(t) \in \mathbb{R}^n$ un vector de funciones diferenciables, $\alpha \in (0, 1)$ [74]. Entonces, para cualquier $t \geq 0$, la siguiente desigualdad se cumple:

$$\frac{1}{2} D^\alpha [x^T(t) P x(t)] \leq x^T(t) P D^\alpha x(t).$$

Con $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $P = P^T > 0$.

Lema 2 Sea $V(t)$ una función continua en $[0, \infty]$ tal que[75]

$$D^\alpha V(t) \leq \gamma V(t)$$

con $0 < \alpha < 1$ y γ una constante. Entonces

$$V(t) \leq V(0)E_\alpha(\gamma t^\alpha), \quad t \geq 0.$$

Lema 3 Para $a > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$, la siguiente desigualdad se cumple

$$-ax^2 + xy \leq -\frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{2a}y^2$$

Demostración Para cualquier $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple $(ax - y)^2 > 0$, entonces multiplicando por $-\frac{1}{2a}$, con $a > 0$ se tiene que

$$-\frac{1}{2}ax^2 + xy + \frac{1}{2a}y^2 = -ax^2 + \frac{1}{2}ax^2 + xy + \frac{1}{2}ay^2 \leq 0$$

Teorema 3.1 [76] Sea $x = 0$ un punto de equilibrio del sistema (3.3) y $V(t, x(t)) : [0, \infty] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferencialmente continua y Lipschitz con respecto a x , tal que:

$$\beta_1 \|x\|^a \leq V(t, x(t)) \leq \beta_2 \|x\|^{ab} \quad (3.4)$$

y

$$D^\alpha V(t, x(t)) \leq \beta_3 \|x\|^{ab} \quad (3.5)$$

donde $t \geq 0$ y $\beta_1, \beta_2, \beta_3, a, b$ son constantes positivas arbitrarias, entonces $x = 0$ es globalmente Mittag-Leffler estable.

Algunas propiedades de las derivadas e integrales fraccionales son las siguientes[36]:

- Si $f(z)$ es una función analítica² de z , entonces su derivada fraccional ${}_0D_z^\alpha f(z)$ es una función analítica de z y α .
- Para $\alpha = n$, con n un entero, el operador ${}_0D_z^\alpha f(z)$ nos da el mismo resultado que la integración y derivación convencionales de orden entero n .
- Para $\alpha = 0$, la operación ${}_0D_z^\alpha f(z)$ nos da el operador identidad, es decir ${}_0D_z^0 f(z) = f(z)$.

²Una función compleja se dice que es analítica en una región R si es diferenciable compleja en cada punto de R . Una función cuyo rango está en los números complejos se dice que es una función compleja.

Sea $z = x + iy$ y $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ en alguna región G que contiene al punto z_0 . Si $f(z)$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann y tiene derivadas parciales continuas en la vecindad de z_0 , entonces $f'(z_0)$ existe y está dada por

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

y la función se dice que es diferenciable compleja. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann son: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$.

- La integración y derivación fraccional, son operadores lineales:

$${}_0D_z^\alpha a f(z) + {}_0D_z^\alpha b g(z) = a {}_0D_z^\alpha f(z) + b {}_0D_z^\alpha g(z)$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$

- La ley de adición de índices:

$${}_0D_z^\alpha {}_0D_z^\beta f(z) = {}_0D_z^\beta {}_0D_z^\alpha f(z) = {}_0D_z^{\alpha+\beta} f(z)$$

es válida, bajo ciertas condiciones de la función $f(z)$.

3.1.5. Integración fraccional Riemann-Liouville (RL)

La integración repetida de n veces se generaliza mediante la función Gamma para la expresión del factorial, cuando el número entero n es un número real α [77]

$$D^{-n} f(t) = J^n f(t) = f_n(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau$$

$$D^{-\alpha} f(t) = J^\alpha f(t) = f_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

Definiendo la función de potencia como

$$\phi_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

y usando la definición de integral de convolución, la expresión para la integración fraccional se puede escribir como la convolución de la función y la función de potencia[78].

$$D^{-\alpha} f(t) = \phi_\alpha(t) * f(t) = \int_0^t \phi_\alpha(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

Este proceso se representa en la Figura 3.2, donde L es el operador de Laplace y L^{-1} es el operador inverso de Laplace

3.1.6. Derivada fraccional Riemann-Liouville (RL) Definición de Manó izquierda(DMI)

La formulación de esta definición es:

Seleccione un número entero m mayor que el número fraccional α

- integrar la función $(m-\alpha)$ mediante el método de integración RL
- diferenciar el resultado anterior por m

La expresión viene dada como

$$D^\alpha f(t) = \frac{d^m}{dt^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau \right]$$

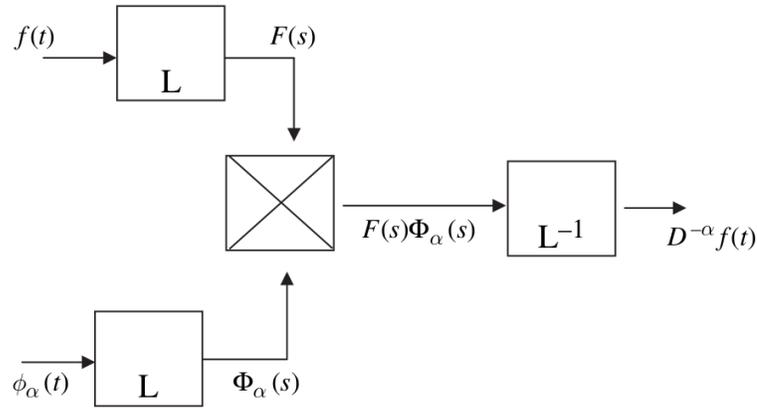


Figura 3.2: Representación en diagrama de bloques para el proceso de convolución de la integración fraccional

La Figura 3.3 muestra el proceso de diagrama de bloques y la Figura 3.4 muestra el proceso de diferenciación de 2.3 veces para una función

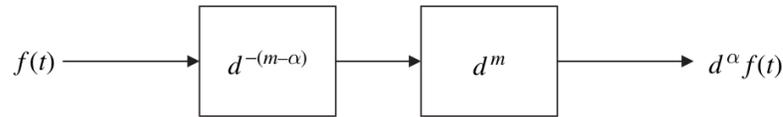


Figura 3.3: Diagrama de bloques para la diferenciación fraccional definición mano izquierda

3.1.7. Derivadas fraccionales de Caputo Definición de Mano Derecha (DMD)

La formulación es exactamente opuesta a DMI.

Seleccione un número entero m mayor que un número fraccional α .

- (i) derivar la función m veces
- (ii) integrar el resultado anterior $(m - \alpha)$ veces mediante el método de integración RL

En DMI y DMD, la selección de números enteros se realiza de manera que $(m - 1) < \alpha < m$. Por ejemplo, la diferenciación de la función por orden $\alpha = 2.3$ seleccionará $m = 4$. La formulación de DMD de Caputo es la siguiente:

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_0^t \frac{d^m f(\tau)}{d\tau^m} (t - \tau)^{\alpha + 1 - m} d\tau = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha + 1 - m}} d\tau$$

La Figura 3.5 muestra la representación del diagrama de bloques del proceso DMD, y la Figura 3.6 representa gráficamente la DMD utilizado para la función diferenciadora fraccional de 2.3 veces.

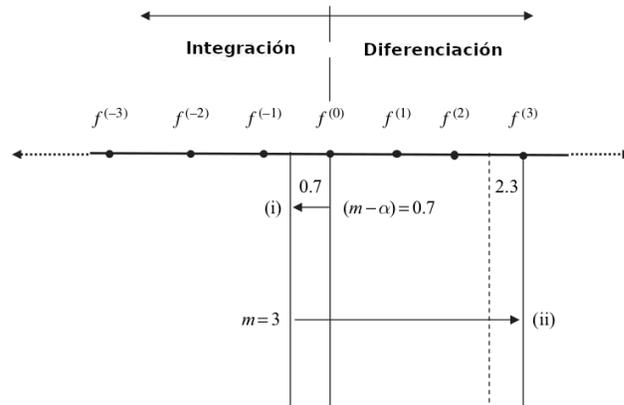


Figura 3.4: Diferenciación fraccional 2.3 veces DMI

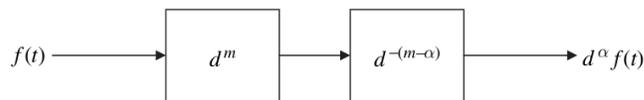


Figura 3.5: Diagrama de bloques para la diferenciación fraccional definición mano derecha Caputo

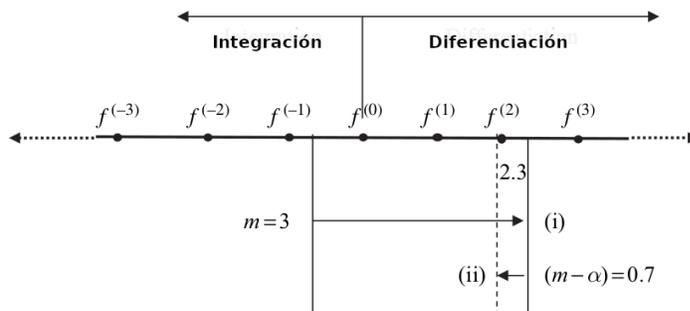


Figura 3.6: Diferenciación fraccional 2.3 veces mediante DMD

Las definiciones de Riemann-Liouville de diferenciación fraccional jugaron un papel importante en el desarrollo del cálculo fraccional. Sin embargo, las demandas de la ciencia y la ingeniería modernas requieren una cierta revisión de los principios de enfoques matemáticos puros bien establecidos. Los problemas aplicados requieren definiciones de derivadas fraccionales, permitiendo la utilización de ‘condiciones iniciales’ físicamente interpretables que contienen $f(a)$, $f^{(1)}(a)$, $f^{(2)}(a)$ y cantidades no fraccionales (actualmente impensables)[79]. Las definiciones de RL requieren,

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow a} {}_a D_t^{\alpha-1} f(t) &= b_1 \\ \lim_{t \rightarrow a} {}_a D_t^{\alpha-2} f(t) &= b_2\end{aligned}$$

A pesar de que los problemas de valor inicial con tales condiciones iniciales pueden ser resueltas con éxito matemáticamente, sus soluciones son prácticamente inútiles porque no existe una interpretación física conocida para tales condiciones iniciales.

DMD es más restrictivo que DMI. Para RL (o DMI), $f(t)$ debe ser causal, es decir, siempre que $f(0) = 0$ para $t \leq 0$, el método DMI es viable. Para la definición de mano derecha debido a que $f(t)$ se convierte primero en m-ésima derivada, es decir, $f^{(m)}(t)$, la condición $f(0) = 0$ y $f^1 = f^2 = \dots = f^m = 0$. En el mundo matemático, esto es vulnerable para DMD. Para DMI:

$$D^\alpha C \neq 0 = \frac{Ct^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

la derivada de la constante C no es cero. Este hecho llevó a utilizar el RL o DMI con enfoque en límite inferior de diferenciación $a \rightarrow -\infty$; en el mundo físico esto plantea un problema. El significado físico de este límite inferior que se extiende hacia menos infinito inicia el proceso físico en tiempos inmemoriales. En tales casos, los efectos transitorios entonces no se pueden estudiar. Sin embargo, hacer un $a \rightarrow -\infty$ es una abstracción necesaria para la consideración del proceso de estado estacionario, por ejemplo, para el estudio de análisis sinusoidal para un sistema de orden fraccional en estado estacionario.

Si bien hoy estamos familiarizados con la interpretación del mundo físico con ecuaciones diferenciales de orden entero, no tenemos (actualmente) una comprensión práctica de el mundo con ecuaciones diferenciales de orden fraccional. Nuestras herramientas matemáticas van más allá de la limitación práctica de nuestro entendimiento[80].

Por lo tanto, todavía está en proceso de “generalizar” los conceptos para su uso en el mundo práctico.

3.1.8. Diferenciales integrales fraccionales Grunwald Letnikov (GL)

El proceso de diferenciación como se describe a continuación es la diferenciación para índice positivo e integración para índice negativo para el operador diferencial-integral (generalizado).

$$\begin{aligned}
 f^1(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 f^2(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^1(x+h) - f^1(x)}{h} \\
 &= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{\lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(x+h_1+h_2) - f(x+h_1)}{h_2} - \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(x+h_2) - f(x)}{h_2}}{h_1} \\
 h_1 &= h_2 = h \\
 f^2(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} \\
 f^n(x) &= D^n f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} f(x - mh) \\
 \binom{n}{m} &= \frac{n!}{m!(n-m)!}
 \end{aligned}$$

Esto puede reemplazarse por la función Gamma como $\frac{\Gamma(\alpha+1)}{m!\Gamma(\alpha-m+1)}$ para n no entero, es decir α . Por lo tanto, la diferenciación en orden fraccional es

$${}_a D^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{x-a}{h} \rfloor} (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+1)}{m!\Gamma(\alpha-m+1)} f(x - mh)$$

Para α negativo, el proceso será integración

$$\begin{aligned}
 \binom{-n}{m} &= \frac{-n(-n-1)(-n-2)\dots(-n-m+1)}{m!} \\
 &= (-1)^m \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\dots(n+m-1)}{m!} \\
 &= (-1)^m \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} \rightarrow (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+m)}{m!\Gamma(\alpha)}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, para la integración escribimos

$${}_a D^{-\alpha} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^\alpha \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{x-a}{h} \rfloor} (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+m)}{m!\Gamma(\alpha)} f(x - mh)$$

La parte $\left[\frac{(x-a)}{h} \right]$ es una parte entera (función suelo). Es decir, el límite superior de la la suma es la parte entera de la fracción. Son RL, GL, DMD (Caputo) y DMI, ¿equivalentes? La respuesta es “sí”.

3.1.9. Composición

Los símbolos para la diferenciación fraccional se han estandarizado como sigue:

- ${}_c D_t^q f(t)$ representa la diferenciación de integración de orden q inicializada de $f(t)$ desde el punto de inicio c a t .
- ${}_c d_t^q f(t)$ representa diferenciales-integrales de q -ésimo orden generalizadas (o fraccionales) no inicializadas

Esto también es lo mismo que

$$\frac{d^q f(t)}{d(t-c)^q} = {}_c d_t^q f(t)$$

desplazando el origen de la función al inicio del punto desde donde comienza la diferenciación-integración. Este operador no inicializado también puede ser corto, formado como $d^q f(t)$. El índice $q > 0$ es diferenciación y el índice $q < 0$ es proceso de integración. Para q como número entero, el proceso es de diferenciación e integración clásica de orden entero.

Miller y Ross (1993), con derivadas fraccionales secuenciales, intentaron dar propiedades y tener métodos de composición para integrales diferentes generalizadas. Descomposición ${}_a D_t^\alpha y(t) = {}_a D_t^m {}_a D_t^{\alpha-m} y(t)$ y también, hasta cierto punto, el índice conmutación (bajo ciertas condiciones) $D^{-\alpha} D^{-\beta} = D^{-(\alpha+\beta)} = D^{-\beta} D^{-\alpha}$ son muy ciertas para integración fraccional. Pero las derivadas fraccionarias no siempre conmutan, es decir, $D^\alpha D^\beta \neq D^{\beta+\alpha} \neq D^{\alpha+\beta}$ (excepto en condiciones iniciales cero). El operador entero (m) conmuta con el operador fraccional (α), es decir, $D^m D^\alpha = D^{m+\alpha}$.

3.1.10. Derivadas fraccionales para algunas funciones estándar

La tabla 3.1 enumera las derivadas fraccionales de Riemann-Liouville de algunas funciones, que se utilizan muy a menudo. En la mayoría de los casos, el orden de diferenciación α puede ser un número real, por lo que reemplazarlo con $-\alpha$ da la integral fraccional de Riemann-Liouville. La Tabla 3.1 se puede utilizar para encontrar Grunwald-Letnikov, derivadas fraccionales, derivadas fraccionales de Caputo y derivadas fraccionales secuenciales de Miller-Ross. En tales casos, α debe tomarse entre 0 y 1, y las derivadas fraccionales de Riemann-Liouville deben combinarse (componerse) adecuadamente con derivadas de orden entero, con definición considerada (de composición). La tabla 3.1 muestra las derivadas de RL con menor terminal en 0, y la Tabla 3.2 proporciona las derivadas fraccionales de RL con terminal inferior en $-\infty$. En la lista, $H(t)$ es la función de Heaviside del paso unitario. E es la función de

Mittag-Leffler. Estas tablas dan una idea de cómo se verá la integración y diferenciación fraccional en expresiones analíticas[81].

Tabla 3.1: Derivada con terminal inferior 0, i.e. ${}_0D_t^\alpha f(t)$ para $t > 0$

Derivada con terminal inferior 0	
Función f(t)	${}_0D_t^\alpha f(t)$ <i>derivada fraccional</i>
H(t)	$\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$
H(t-a)	$\frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, (t > a)$ $0, (0 \leq t \leq a)$
H(t-a)f(t)	${}_0D_t^\alpha f(t), (t > a)$ $0, (0 \leq t \leq a)$
$\delta(t)$	$\frac{t^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}$
$\delta^{(n)}(t)$	$\frac{t^{-\alpha-n-1}}{\Gamma(-\alpha-n)}$
$\delta^{(n)}(t-a)$	$\frac{(t-a)^{-\alpha-n-1}}{\Gamma(-n-\alpha)}, (t > a)$ $0, (0 \leq t \leq a)$
t^ν	$\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1-\alpha)} t^{\nu+\alpha}, \nu > -1$
$e^{\lambda t}$	$t^{-\alpha} E_{1,1-\alpha}(\lambda t)$
$\cosh(\sqrt{\lambda t})$	$t^{-\alpha} E_{2,1-\alpha}(\lambda t^2)$
$\frac{\sinh(\sqrt{\lambda t})}{\sqrt{\lambda t}}$	$t^{-\alpha} E_{2,2-\alpha}(\lambda t^2)$
$\ln(t)$	$\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} (\ln(t) + \psi(1) - \psi(1-\alpha))$
$t^{\beta-1} \ln(t)$	$\frac{\Gamma(\beta)t^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta-\alpha)} (\ln(t) + \psi(\beta) - \psi(\beta-\alpha))$
$t^{\beta-1} E_{\mu,\beta}(\lambda t^\mu)$	$t^{\beta-\alpha-1} E_{\mu,\beta-\alpha}(\lambda t^\mu)$

Tabla 3.2: Derivada con terminal inferior $-\infty$, i.e. ${}_{-\infty}D_t^\alpha f(t)$

Derivada con terminal inferior $-\infty$	
Función f(t)	${}_{-\infty}D_t^\alpha f(t)$ derivada fraccional
H(t-a)	$\frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, (t > a)$ $0, (0 \leq t \leq a)$
H(t-a)f(t)	${}_0D_t^\alpha f(t), (t > a)$ $0, (t \leq a)$
$e^{\lambda t}$	$\lambda^\alpha e^{\lambda t}$
$e^{\lambda t + \mu}$	$\lambda^\alpha e^{\lambda t + \mu}$
$\text{sen}(\lambda t)$	$\lambda^\alpha \text{sen}\left(\lambda t + \frac{\pi\alpha}{2}\right)$
$\text{cos}(\lambda t)$	$\lambda^\alpha \text{cos}\left(\lambda t + \frac{\pi\alpha}{2}\right)$
$e^{\lambda t} \text{sen}(\mu t)$	$r^\alpha e^{\lambda t} \text{sen}(\mu t + \alpha\phi), r = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}, \tan(\phi) = \frac{\mu}{\lambda}, (\lambda, \mu > 0)$
$e^{\lambda t} \text{cos}(\mu t)$	$r^\alpha e^{\lambda t} \text{cos}(\mu t + \alpha\phi), r = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}, \tan(\phi) = \frac{\mu}{\lambda}, (\lambda, \mu > 0)$

Capítulo 4

Sistemas Fraccionales: Observador de Alta Ganancia Fraccional

En este capítulo se describe el observador fraccional de alta ganancia el cual es globalmente acotado Mittag-Leffler, se propone un sistema aumentado que tiene la ventaja de considerar la salida con ruido aditivo como un nuevo estado, también las dinámicas desconocidas se consideran como nuevos estados, este sistema aumentado nos permite proponer un observador de alta ganancia fraccional. También se muestran algunas aplicaciones, como son un sistema tipo bioreactor, un péndulo simple fraccional y un sistema caótico de Arneodo fraccional.

4.1. Sistemas Fraccionales

4.1.1. Observabilidad Algebraica Fraccional

Definición 4.1 (*Sistema No Lineal de Orden Fraccional*) Sea el siguiente sistema no lineal de orden fraccional,

$$\begin{aligned}x^\alpha &= Ax + f(x, u), x(0) = x_0, \\y &= C\bar{x} + \bar{\omega},\end{aligned}\tag{4.1}$$

Donde $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función Lipschitz continua, $u \in \mathbb{R}^m$ es la entrada, y es la salida del sistema (la medición física que se puede obtener), $\bar{x} \in \mathbb{R}^p$ son los estados que se pueden observar (estados conocidos), $C \in \mathbb{R}^n$ y $\bar{\omega}$ es un término de ruido aditivo en la medición. El orden fraccional se encuentra en el intervalo: $0 < \alpha < 1$.

Definición 4.2 (*Sistemas de Orden Fraccional Conmensurados e Inconmensurados*) Sea $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T$, el sistema (4.1) es llamado sistema de orden conmensurado si $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$, de otra manera es un sistema de orden inconmensurado.

Definición 4.3 *Observabilidad Algebraica Fraccional* La variable de estado $x_i \in \mathbb{R}$ satisface la propiedad de observabilidad algebraica fraccional si es una función de

las primeras $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$ derivadas fraccionales secuenciales de la salida disponible \bar{y} , i.e.,

$$x_i = \phi_i(\bar{y}, \bar{y}^{(\alpha)}, D^{2\alpha}\bar{y}, \dots, D^{r_1\alpha}\bar{y}, u, u^{(\alpha)}, u^{(2\alpha)}, \dots, u^{(r_2\alpha)})$$

Donde $\phi_i : \mathbb{R}^{(r_1+1)(r_2+1)} \rightarrow \mathbb{R}$

Ejemplo 4 Considere el sistema no lineal fraccional de Duffing,

$$\begin{aligned} x_1^{(\alpha)} &= x_2 \\ x_2^{(\alpha)} &= x_1 - x_1^2 - \beta x_2 + \delta \cos(\omega t) \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

Donde $\beta = 0.15, \delta = 1.3, \omega = 1$.

Se tiene que las variables de estado x_1, x_2 son fraccionalmente algebraicamente observables, debido a que satisfacen,

$$\begin{aligned} x_1 - y &= 0 \\ x_2 - y^{(\alpha)} &= 0 \end{aligned}$$

4.1.2. Observabilidad Algebraica Fraccional Racional

Definición 4.4 Observabilidad Algebraica Fraccional Racional La variable de estado $x_i \in \mathbb{R}$ satisface la propiedad de observabilidad algebraica fraccional racional si es una función de las primeras $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$ derivadas fraccionales secuenciales de la salida disponible \bar{y} , i.e.,

$$x_i = \phi_i(f_i, \bar{y}, \bar{y}^{(\alpha)}, D^{2\alpha}\bar{y}, \dots, D^{r_1\alpha}\bar{y}, u, u^{(\alpha)}, u^{(2\alpha)}, \dots, u^{(r_2\alpha)})$$

Donde $\phi_i : \mathbb{R}^{(r_1+1)(r_2+1)} \rightarrow \mathbb{R}$ y $f_i = \frac{g(u, \bar{y})}{h(u, y)}$ con $g(u, y), h(u, y)$ polinomios diferenciales con coeficientes en α y sus derivadas fraccionales.

Ejemplo 5 Considere el sistema fraccional de un bioreactor,

$$\begin{aligned} x_1^\alpha &= -ax_1 + \frac{0.3x_1x_2}{1.75 + x_2} \\ x_2^\alpha &= a(b - x_2) - \frac{0.3x_1x_2}{(1.75 + x_2)(0.01 + 0.03x_2)} \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

x_1 y x_2 son variables algebraicamente observable debido a que satisfacen:

$$\begin{aligned} x_1 - y &= 0 \\ x_2 - 1.75 \frac{y^\alpha}{y^\alpha + y(a - 0.3)} - 1.75 \frac{ay}{y^\alpha + y(a - 0.3)} &= 0 \end{aligned}$$

Note que y, y^α deben ser distintos de cero, para que el estado x_2 sea algebraicamente observable. Específicamente se debe cumplir $y^\alpha + y(a - 0.3) \neq 0$.

4.2. Sistemas Fraccionales

En esta tesis está motivado por los fenómenos físicos que pueden ser representados por modelos de orden fraccional de la forma (4.2). Los cuales tienen amplia aplicación en electromagnetismo, viscoelasticidad, mecánica de fluidos, electroquímica, modelos de población biológica, procesamiento de señales entre otras [14, 15, 16, 17, 18, 19, 11]. Los sistemas de orden fraccional (FO) han motivado el desarrollo de sistemas fraccionales. Controladores para aplicaciones industriales. Sin embargo, los controladores requieren un conocimiento total de las variables de estado, lo que puede no ser posible para razones lógicas o económicas. Por tanto, el desarrollo de los llamados observadores de estado es igualmente importante. Los observadores estatales clásicos como Kalman o los observadores de Luenberger pueden extenderse fácilmente al caso fraccional. Sin embargo, éstos no son adecuados para sistemas no lineales, como es el caso de la mayoría de los sistemas industriales. Por lo tanto, los observadores no lineales como el filtro de Kalman extendido, los estimadores proporcionales-integrales o los estimadores de modo deslizante ya tienen amplios resultados en este sentido [82],[83],[84],[85],[86],[87]. Otro tipo de estimador no lineal es el observador de alta ganancia. Fue introducido a principios de los años 90 y tiene importantes ventajas [88],[6]. Primero, su velocidad de convergencia, a la trayectoria de estado real es alta y puede mejorarse aún más aumentando su valor de ganancia.

De ahí que, a diferencia del resto de observadores, su desempeño depende de un parámetro único. Además, son robustos contra perturbaciones exteriores y ruido de medición, por lo que son ideales para mediciones basadas en observaciones [89],[90]. Por otro lado, la principal desventaja de los observadores de alta ganancia es la amplificación de ruido para grandes valores de ganancia. A pesar de esto, han sido ampliamente utilizados en sistemas de orden entero [20],[21],[22], aunque sus aplicaciones en los sistemas fraccionales son recientes y por lo tanto limitadas.

El problema consiste en diseñar un observador de alta ganancia para una clase de sistemas no lineales fraccionales de la forma (4.1) con dinámicas no modeladas y ruido en la medición de la salida. Para lograr este objetivo se considera que el sistema posee la propiedad de observabilidad algebraica fraccional racional, que las dinámicas no modeladas son funciones localmente Lipschitz y que el ruido está acotado. Además se introduce un sistema aumentado a partir del sistema original, el cual tiene la ventaja de considerar el ruido y las dinámicas no modeladas como variables de estado del sistema aumentado, al encontrar la solución de este sistema aumentado, el ruido es sujeto a una acción fraccional integral, por lo que el ruido se atenúa y se tiene mayor robustez del observador. Utilizando esta técnica se pueden estimar los estados y las dinámicas no modeladas, a pesar de la presencia de ruido en la medición de la salida [91].

Considere el siguiente sistema no lineal fraccional:

$$\begin{aligned}\chi^{(\alpha)}(t) &= A\chi(t) + \phi(\chi(t), u) \\ y &= C\chi(t) + \bar{w}\end{aligned}\tag{4.2}$$

Donde: $\chi(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado y es conocido parcialmente. $u(t) \in \mathbb{R}^p$ es un vector de entrada, $y \in \mathbb{R}$ es la salida del sistema, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^n$, $\bar{\omega}$ es un término de ruido aditivo en la medición, $\phi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ son funciones no lineales localmente Lipschitz con respecto a χ . $0 < \alpha < 1$ es el orden fraccional.

Suposición:

El término de ruido aditivo en la medición $\bar{\omega}$ está acotado, i.e. existe una constante positiva \bar{M} tal que $\|\bar{\omega}\| \leq \bar{M}$.

4.2.1. Observador de Alta Ganancia

Motivados con los resultados obtenidos en el observador de alta ganancia para sistemas enteros, se propone un observador de alta ganancia para sistemas no lineales fraccionales, el cuál tiene la ventaja de considerar la salida con ruido del sistema como un estado más en el sistema aumentado propuesto, además las dinámicas no modeladas también se consideran como estados del sistema aumentado, esto nos permite estimar los estados originales y las dinámicas no modeladas, a pesar de tener presencia de ruido en la medición de la salida.

Considere el siguiente sistema aumentado de (4.2):

$$\begin{aligned} \chi^{(\alpha)} &= A\chi + f(\chi) + g(\chi, u) \\ x_*^{(\alpha)} &= C\chi + \bar{\omega} \\ \phi^{(\alpha)}(\chi) &= \Theta(\chi) \\ y_* &= x_*(t) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Donde $y_* \in \mathbb{R}$. Note que la nueva salida no contiene el término de ruido aditivo medido y f, g son tomadas como nuevas variables de estado. Entonces se puede expresar al sistema (4.3) en la siguiente forma matricial:

$$\begin{aligned} X^{(\alpha)}(t) &= \mathcal{A}X(t) + \Phi(X, u) + \mathcal{W} \\ y_* &= \mathcal{C}X(t) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Con $X(t) = \begin{bmatrix} \chi(t) \\ \chi_* \\ \phi(\chi) \end{bmatrix}$, $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & 0 & I_n & I_n \\ \mathcal{C} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\Phi(X, u) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Theta(X) \end{bmatrix}$, $\mathcal{W} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\omega} \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathcal{C} =$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Donde I_n es la matriz identidad de dimensión n . Note que $X(t) \in \mathbb{R}^{2n+1}$, $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{(2n+1) \times (2n+1)}$, $\Phi \in \mathbb{R}^{2n+1}$, $\mathcal{W} \in \mathbb{R}^{2n+1}$ y $\mathcal{C}^T \in \mathbb{R}^{2n+1}$. $\Theta(\chi) = \phi(X)$ contiene las dinámicas no modeladas.

Se propone el siguiente observador de alta ganancia para el sistema (4.4):

$$\begin{aligned} \hat{X}^{(\alpha)}(t) &= \mathcal{A}\hat{X}(t) + \Phi(\hat{X}, u) + S_\theta^{-1}\mathcal{C}^T(y_*(t) - \mathcal{C}\hat{X}(t)) \\ \hat{y}_* &= \mathcal{C}\hat{X}(t) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Donde: $\hat{X}(t) = [\hat{\chi}(t), \hat{\chi}_*(t), f(\hat{\chi}), g(\hat{\chi}, u)]^T \in \mathbb{R}^{2n+1}$ es la estimación del vector de estado X y la matriz S_θ es conocida como la matriz de alta ganancia. La matriz $S_\theta = S_\theta^T > 0$ es solución de la siguiente ecuación algebraica de Riccati:

$$\left(\frac{\theta}{2} + \mathcal{A}\right)S_\theta(t) + S_\theta(t)\left(\frac{\theta}{2} + \mathcal{A}\right) = \mathcal{C}^T \mathcal{C}, \quad S_\theta(0) = S_{\theta_0}. \quad (4.6)$$

con $\theta > 0$. La matriz de alta ganancia S_θ es definida de la siguiente manera:

$$(S_\theta)_{i,j} = v_{i,j} \frac{(-1)^{i+j}}{\theta^{i+j-1}},$$

donde $v_{i,j}$ es el coeficiente binomial dado por:

$$v_{i,j} = \binom{i+j-2}{j-1}$$

Sea el error de estimación del sistema aumentado $\varepsilon(t) = X(t) - \hat{X}(t)$. De (4.4) y (4.5) la dinámica de la estimación del error está dada por:

$$\varepsilon^{(\alpha)}(t) = [\mathcal{A} - S_\theta^{-1} \mathcal{C}^T \mathcal{C}] \varepsilon(t) + \mathcal{R}(\varepsilon, u) + \mathcal{W} \quad (4.7)$$

Donde $\mathcal{R}(\varepsilon, u) = \Phi(X, u) - \Phi(\hat{X}, u)$. Se denota $\|x\|_{S_\theta} = x^T S_\theta x$, para alguna $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces si $\mathcal{R}(\varepsilon, u)$ es diferenciable, se obtiene $\|\mathcal{R}(\varepsilon, u)\| \leq L \|\varepsilon\|_{S_\theta}$, para alguna $L > 0$.

Considerando las hipótesis anteriores, es decir, que las dinámicas no modeladas son una función localmente Lipschitz y que existe una cota para el término de ruido aditivo y una cota para la función \mathcal{R} . Se propone el siguiente teorema, el cual consiste en proponer un observador de alta ganancia, para el sistema aumentado descrito en (4.4).

Teorema 4.1 *El sistema (4.5) es un observador de alta ganancia globalmente acotado Mittag-Leffler para el sistema (4.4), cuyo error de estimación converge asintóticamente y permanece en el compacto $B_o = \{\varepsilon(t) \mid \|\varepsilon(t)\| \leq b, b > 0\}$, donde :*

$$b = \left[\left(\frac{\lambda_{\max}(S_\theta)}{\lambda_{\min}(S_\theta)} \|\varepsilon(0)\| - \frac{\mu}{\lambda_{\min}(S_\theta)} \right) E_\alpha \left(\frac{-1}{2} \gamma t^\alpha \right) + \frac{\mu}{\lambda_{\min}(S_\theta)} \right]^{1/2}, \quad (4.8)$$

donde $\theta > 0$, $\gamma = \theta - 2L > 0$ y $\mu = \frac{4\bar{M}^2}{\gamma^2}$.

Demostración Considere la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(\varepsilon(t)) = \varepsilon^T(t) S_\theta \varepsilon(t) = \|\varepsilon(t)\|_{S_\theta}^2. \quad (4.9)$$

Se deriva (4.9) y se obtiene que:

$$\begin{aligned} V^{(\alpha)}(\varepsilon(t)) &\leq 2\varepsilon^T(t) S_\theta \varepsilon^{(\alpha)}(t), \\ &\leq 2\varepsilon^T(t) S_\theta \mathcal{A} \varepsilon(t) - 2\varepsilon^T(t) \mathcal{C}^T \mathcal{C} \varepsilon(t) + 2\varepsilon^T(t) S_\theta \mathcal{R}(\varepsilon, u) + 2\varepsilon^T(t) S_\theta \mathcal{W} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Por otra parte de la ecuación algebraica de Riccati (ecuación 4.6), se tiene que:

$$2\varepsilon^T(t) S_\theta \mathcal{A} \varepsilon(t) = \varepsilon^T(t) \mathcal{C}^T \mathcal{C} \varepsilon(t) - \theta \varepsilon^T(t) S_\theta \varepsilon(t), \quad (4.11)$$

Se substituye (4.11) en (4.10) y se obtiene:

$$\begin{aligned} V^{(\alpha)}(\varepsilon(t)) &\leq -\theta\varepsilon^T(t)S_\theta\varepsilon(t) - \varepsilon^T(t)\mathcal{C}^T\mathcal{C}\varepsilon(t) + 2\varepsilon^T(t)S_\theta\mathcal{R}(\varepsilon, u) + 2\varepsilon^T(t)S_\theta\mathcal{W} \\ &\leq -\theta\varepsilon^T(t)S_\theta\varepsilon(t) + 2\varepsilon^T(t)S_\theta\mathcal{R}(\varepsilon, u) + 2\varepsilon^T(t)S_\theta\mathcal{W} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Se puede encontrar una cota superior para (4.12) de la siguiente manera. Debido a que $S_\theta = S_\theta^T > 0$, se puede aplicar la descomposición de Cholesky, i.e. $S_\theta = MM^T$, donde M es una matriz triangular inferior definida como

$$M = \begin{cases} m_{i,j} & , i \geq j \\ 0 & , i < j \end{cases}$$

Se considera la desigualdad de Cauchy-Schwartz, para el segundo término se tiene que:

$$\|\varepsilon^T(t)S_\theta\mathcal{R}(\varepsilon, u)\| = \|\varepsilon^T(t)MM^T\mathcal{R}(\varepsilon, u)\| \leq \|\varepsilon^T(t)M\| \|M^T\mathcal{R}(\varepsilon, u)\|. \quad (4.13)$$

Se tiene que:

$$\|\varepsilon^T(t)M\| = (\varepsilon^T(t)MM^T\varepsilon(t))^{1/2} = (\varepsilon^T(t)S_\theta\varepsilon(t))^{1/2} = \|\varepsilon(t)\|_{S_\theta} \quad (4.14)$$

y

$$\|M^T\mathcal{R}(\varepsilon, u)\| = (\mathcal{R}^T(\varepsilon, u)MM^T\mathcal{R}(\varepsilon, u))^{1/2} = (\mathcal{R}^T(\varepsilon, u)S_\theta\mathcal{R}(\varepsilon, u))^{1/2} = \|\mathcal{R}(\varepsilon, u)\|_{S_\theta} \quad (4.15)$$

por lo tanto $\|\varepsilon^T(t)S_\theta\mathcal{R}(\varepsilon, u)\| \leq \|\varepsilon(t)\|_{S_\theta} \|\mathcal{R}(\varepsilon, u)\|_{S_\theta}$. Debido a que $\mathcal{R}(\varepsilon, u)$ es diferenciable se tiene que:

$$\|\mathcal{R}(\varepsilon, u)\|_{S_\theta} \leq L\|\varepsilon(t)\|_{S_\theta} \quad (4.16)$$

y entonces:

$$\|\varepsilon^T(t)S_\theta\mathcal{R}(\varepsilon, u)\| \leq L\|\varepsilon(t)\|_{S_\theta}^2 \quad (4.17)$$

Por otra parte, para el tercer término se tiene:

$$\|\varepsilon^T(t)S_\theta\mathcal{W}\| = \|\varepsilon^T(t)MM^T\mathcal{W}\| \leq \|\varepsilon^T(t)M\| \|M^T\mathcal{W}\|, \quad (4.18)$$

se tiene que:

$$\|\varepsilon^T(t)M\| = (\varepsilon^T(t)MM^T\varepsilon(t))^{1/2} = (\varepsilon^T(t)S_\theta\varepsilon(t))^{1/2} = \|\varepsilon(t)\|_{S_\theta} \quad (4.19)$$

y

$$\|M^T\mathcal{W}\| = (\mathcal{W}^TMM^T\mathcal{W})^{1/2} = (\mathcal{W}^TS_\theta\mathcal{W})^{1/2} = \|\mathcal{W}\|_{S_\theta} \quad (4.20)$$

Debido a que $\bar{\omega}$ está acotada, entonces $\|\mathcal{W}\|_{S_\theta} \leq \bar{M}$ tal que:

$$\|\varepsilon^T(t)S_\theta\mathcal{W}\| \leq \bar{M}\|\varepsilon(t)\|_{S_\theta} \quad (4.21)$$

Por lo tanto (4.12) se mantiene acotada:

$$\begin{aligned} V^{(\alpha)}(\varepsilon) &\leq -\theta\|\varepsilon(t)\|_{S_\theta}^2 + 2L\|\varepsilon\|_{S_\theta}^2 + 2\bar{M}\|\varepsilon(t)\|_{S_\theta} \\ &\leq -\gamma\|\varepsilon(t)\|_{S_\theta}^2 + 2\bar{M}\|\varepsilon(t)\|_{S_\theta} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Donde $\gamma = \theta - 2L$. Sea $\theta > 2L$ tal que $\gamma > 0$. Entonces, del Lemma 3 (veáse el apéndice), se tiene que

$$\begin{aligned} V^{(\alpha)}(\varepsilon) &\leq -\frac{1}{2}\gamma\|\varepsilon(t)\|_{S_\theta}^2 + \frac{1}{2\gamma}(2\bar{M})^2 \\ &\leq -\frac{1}{2}\gamma V(\varepsilon(t)) + \frac{2\bar{M}}{\gamma}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

esto es,

$$D^\alpha \left(V(\varepsilon(t)) - \frac{4\bar{M}^2}{\gamma^2} \right) \leq -\frac{1}{2}\gamma \left(V(\varepsilon(t)) - \frac{4\bar{M}^2}{\gamma^2} \right)$$

Por lo tanto se obtiene,

$$V(\varepsilon(t)) - \frac{4\bar{M}^2}{\gamma^2} \leq \left[V(\varepsilon(0)) - \frac{4\bar{M}^2}{\gamma^2} \right] E_\alpha \left(-\frac{1}{2}\gamma t^\alpha \right)$$

es decir, el sistema (4.5) es globalmente Mittag-Leffler atractivo, con conjunto atractivo compacto,

$$\Omega_0 = \{ \varepsilon(t) \in \mathbb{R}^{2n+1} \mid V(\varepsilon(t)) \leq \mu \},$$

Donde $\mu = \frac{4\bar{M}^2}{\gamma^2}$.

Además, considerando la desigualdad de Rayleigh-Ritz se tiene que

$$\lambda_{\min}(S_\theta)\|\varepsilon(t)\|^2 - \mu \leq V(\varepsilon(t)) - \mu \leq (\lambda_{\max}(S_\theta)\|\varepsilon(0)\|^2 - \mu)E_\alpha \left(-\frac{1}{2}\gamma t^\alpha \right)$$

tal que

$$\|\varepsilon(t)\| \leq \left[\left(\frac{\lambda_{\max}(S_\theta)}{\lambda_{\min}(S_\theta)} \|\varepsilon(0)\| - \frac{\mu}{\lambda_{\min}(S_\theta)} \right) E_\alpha \left(\frac{-1}{2}\gamma t^\alpha \right) + \frac{\mu}{\lambda_{\min}(S_\theta)} \right]^{1/2} = b,$$

Es decir, para cualquier condición inicial $\varepsilon(0)$, el error de estimación es acotado uniformemente y permanece en el conjunto compacto $B_0 = \{ \varepsilon(t) \mid \|\varepsilon(t)\| \leq b, \quad b > 0 \}$. Por lo tanto se concluye que el sistema (4.5) es un observador de alta ganancia globalmente Mittag-Leffler acotado.

Corolario 1 *Si el término de ruido aditivo en la medición es $\bar{\omega} = 0$, entonces el sistema (4.5) es un observador de alta ganancia Mittag-Leffler estable del sistema (4.4) y su error de estimación satisface*

$$\|\varepsilon(t)\| \leq \left[\frac{\lambda_{\max}(S_\theta)}{\lambda_{\min}(S_\theta)} E_\alpha(-\gamma t^\alpha) \right]^{1/2} \|\varepsilon(0)\|$$

donde $\theta > 0$ y $\gamma = \theta - 2L > 0$.

Demostración Considerando la misma función candidata de Lyapunov del Teorema 4.1,

$$\lambda_{\min}(S_\theta)\|\varepsilon(t)\|^2 \leq V(\varepsilon(t)) = \|\varepsilon(t)\|^2 \leq \lambda_{\max}(S_\theta)\|\varepsilon(t)\|^2$$

y siguiendo un análisis similar al del Teorema 4.1, se obtiene

$$D^\alpha V(\varepsilon(t)) \leq -\theta\|\varepsilon(t)\|_{S_\theta}^2 + 2L\|\varepsilon(t)\|_{S_\theta}^2 = -\gamma\lambda_{\min}(S_\theta)\|\varepsilon(t)\|^2,$$

donde $\gamma = \theta - 2L > 0$. Por lo tanto, las condiciones (3.4) y (3.5) del Teorema 3.1 son satisfechas, es decir el punto de equilibrio $\varepsilon = 0$ del observador de alta ganancia fraccional (4.5) es Mittag-Leffler estable. Más aún del Lema 2 y la desigualdad de Rayleigh-Ritz se tiene que,

$$\lambda_{\min}(S_\theta)\|\varepsilon(t)\|^2 \leq V(\varepsilon(t)) \leq V(\varepsilon(0))E_\alpha(-\gamma t^\alpha) \leq \lambda_{\max}(S_\theta)\|\varepsilon(0)\|^2 E_\alpha(-\gamma t^\alpha) \quad (4.24)$$

Por lo tanto el error de estimación satisface:

$$\|\varepsilon(t)\| \leq \left[\frac{\lambda_{\max}(S_\theta)}{\lambda_{\min}(S_\theta)} E_\alpha(-\gamma t^\alpha) \right]^{1/2} \|\varepsilon(0)\|$$

Corolario 2 Si el orden fraccional de derivación es $\alpha = 1$, entonces (4.5) es un observador de alta ganancia uniformemente últimamente acotado del sistema (4.4), cuyo error de estimación satisface

$$\|\varepsilon(t)\| \leq \left(\frac{\lambda_{\max}(S_\theta)}{\lambda_{\min}(S_\theta)} \right)^{1/2} \left(\frac{2\bar{M} \sqrt{\lambda_{\max}(S_\theta)}}{\gamma \lambda_{\min}(S_\theta)} \right), \quad (4.25)$$

donde $\theta > 0$ y $\gamma = \theta - 2L > 0$. Véase la demostración para el Teorema 2.1.

4.2.2. Ejemplo y Resultados Numéricos

Para verificar el comportamiento del observador de alta ganancia para sistemas no lineales de orden fraccional, se eligió el modelo matemático de un bioreactor presentado por [14], en el que se describe el comportamiento dinámico de las concentraciones de sustrato y biomasa, y que para las condiciones de operación seleccionadas, presenta un comportamiento oscilatorio. El modelo se construye a partir de balances de masa estándar, generándose el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales de orden fraccional:

$$\begin{aligned} x_1^\alpha &= -ax_1 + \frac{0.3x_1x_2}{1.75 + x_2} \\ x_2^\alpha &= a(b - x_2) - \frac{0.3x_1x_2}{(1.75 + x_2)(0.01 + 0.03x_2)} \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

x_1 y x_2 son variables algebraicamente observable debido a que satisfacen:

$$\begin{aligned} x_1 - y &= 0 \\ x_2 - 1.75 \frac{y^\alpha}{y^\alpha + y(a - 0.3)} - 1.75 \frac{ay}{y^\alpha + y(a - 0.3)} &= 0 \end{aligned}$$

Se tiene que la siguiente función $\Phi(\chi) : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ es Lipschitz, con $\chi = [x_1, x_2, x_*, \phi_1, \phi_2]^T$:

$$\Phi(\chi) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{0.3x_1x_2}{1.75+x_2} \\ -\frac{0.3x_1x_2}{(1.75+x_2)(0.01+0.03x_2)} \end{bmatrix}$$

Debido a que $\Phi \in C^1$, entonces Φ es localmente Lipschitz, veáse [24].

El sistema aumentado está dado por:

$$\begin{aligned} x_1^{(\alpha)} &= -ax_1 + \phi_1(x) \\ x_2^{(\alpha)} &= -ax_2 + \phi_2(x) \\ x_*^{(\alpha)} &= x_1 + \hat{\omega} \\ \phi_1^{(\alpha)} &= \frac{0.3x_1x_2}{1.75+x_2} \\ \phi_2^{(\alpha)} &= -\frac{0.3x_1x_2}{(1.75+x_2)(0.01+0.03x_2)} \\ y_* &= x_* \end{aligned}$$

El observador de alta ganancia está dado por:

$$\begin{aligned} \hat{x}_1^{(\alpha)} &= -a\hat{x}_1 + \phi_1(\hat{x}) + k_1(y_* - \hat{y}_*) \\ \hat{x}_2^{(\alpha)} &= -a\hat{x}_2 + \phi_2(\hat{x}) + k_2(y_* - \hat{y}_*) \\ \hat{x}_*^{(\alpha)} &= \hat{x}_1 + \hat{\omega} + k_4(y_* - \hat{y}_*) \\ \hat{\phi}_1^{(\alpha)} &= \frac{0.3\hat{x}_1\hat{x}_2}{1.75+\hat{x}_2} + k_5(y_* - \hat{y}_*) \\ \hat{\phi}_2^{(\alpha)} &= -\frac{0.3\hat{x}_1\hat{x}_2}{(1.75+\hat{x}_2)(0.01+0.03\hat{x}_2)} + k_6(y_* - \hat{y}_*) \\ \hat{y}_* &= \hat{x}_* \end{aligned}$$

Se tiene:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Phi(\chi) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{0.3x_1x_2}{1.75+x_2} \\ ab - \frac{0.3x_1x_2}{(1.75+x_2)(0.01+0.03x_2)} \end{bmatrix} \quad \Phi(\chi) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{0.3\hat{x}_1\hat{x}_2}{1.75+\hat{x}_2} \\ ab - \frac{0.3\hat{x}_1\hat{x}_2}{(1.75+\hat{x}_2)(0.01+0.03\hat{x}_2)} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{\omega} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad S_\theta = \begin{bmatrix} 0.6667 & -0.4444 & 0.2963 & -0.1975 & 0.1317 \\ -0.4444 & 0.5926 & -0.5926 & 0.5267 & -0.4390 \\ 0.2963 & -0.5926 & 0.7901 & -0.8779 & 0.8779 \\ -0.1975 & 0.5267 & -0.8779 & 1.1706 & -1.3656 \\ 0.1317 & -0.4390 & 0.8779 & -1.3656 & 1.8209 \end{bmatrix}$$

Para verificar que el observador de alta ganancia para sistemas no lineales de orden fraccional propuesto en efecto estima las variables de estado desconocidas del sistema, se realizaron experimentos en simulación numérica, se utilizó la herramienta Simulink de Matlab 2018b, una computadora con sistema operativo Debian GNU / Linux 10 (buster), RAM 5.6 GiB y un Procesador AMD® Phenom(tm) ii p820 triple-core processor $\times 3$. Un tiempo de muestreo de $t_s = 0.001[s]$, utilizando la herramienta de cálculo fraccional FOMCON.

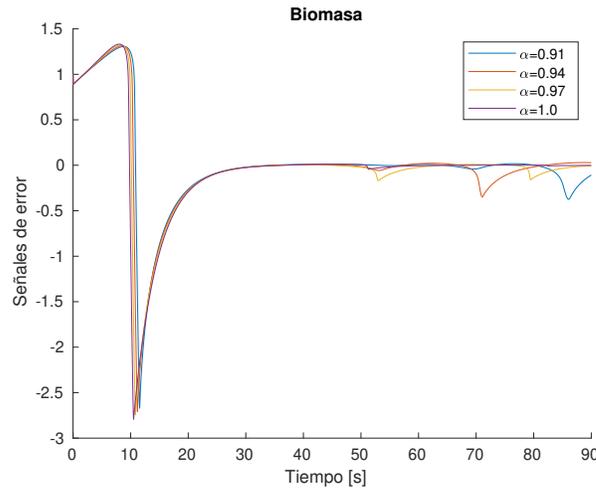


Figura 4.1: Señal de error para el estado correspondiente a la biomasa (x_1), con distintos órdenes fraccionales.

En la Figura 4.1 se puede observar la señal de error para el estado correspondiente a la biomasa x_1 , con distintos órdenes fraccionales, que incluyen al caso entero cuando $\alpha = 1.0$, visto en el Teorema 2.1 y Corolario 2. Note que la señal de error converge a cero. Esta simulación se realizó con un paso de muestreo de $0.001[s]$, se utilizó FOMCON.

En la Figura 4.2 se puede observar la señal de error para el estado correspondiente a el sustrato x_2 , con distintos órdenes fraccionales, que incluyen al caso entero cuando $\alpha = 1.0$, visto en el Teorema 2.1 y Corolario 2. Note que la señal de error converge a cero. Esta simulación se realizó con un paso de muestreo de $0.001[s]$, se utilizó FOMCON.

4.2.3. Péndulo Simple de Orden Fraccional

Un péndulo es una masa suspendida de un pivote (sin fricción) con una cuerda o vara de masa despreciable de manera que pueda balancearse libremente[92]. La ecuación diferencial que describe al péndulo simple es bien conocida y puede generalizarse con ayuda de la teoría de cálculo fraccional. El modelo matemático de un péndulo simple de orden fraccional está dado por [8]

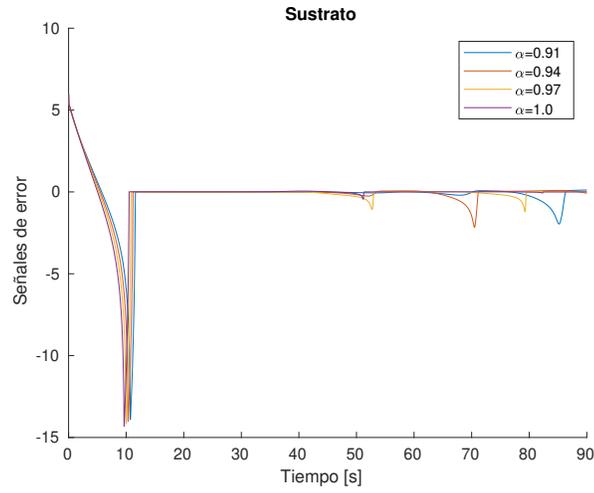


Figura 4.2: Señal de error para el estado correspondiente al sustrato (x_2), con distintos órdenes fraccionales.

$$\begin{aligned}x_1^{(\alpha)} &= x_2 \\x_2^{(\alpha)} &= -\frac{g}{l}\sin(x_1) \\y &= x_1 + \bar{\omega}\end{aligned}$$

donde $g = 9.81m/s^2$, $L = 1m$, $\alpha = 0.98$ y $x = [x_1 \quad x_1]^T = [\phi \quad \omega]^T$.

Se considera el siguiente sistema aumentado:

$$\begin{aligned}x_1^{(\alpha)} &= x_2 \\x_2^{(\alpha)} &= +\phi_2 \\x_*^{(\alpha)} &= x_1 + \bar{\omega} \\\phi_1^{(\alpha)} &= 0 \\\phi_2^{(\alpha)} &= -\frac{g}{l}\sin(x_1) \\y_* &= x_*\end{aligned}$$

Se propone el siguiente observador de alta ganancia:

$$\begin{aligned}\hat{x}_1^{(\alpha)} &= \hat{x}_2 + k_1(y_* - \hat{y}_*) \\ \hat{x}_2^{(\alpha)} &= k_2(y_* - \hat{y}_*) \\ \hat{x}_*^{(\alpha)} &= \hat{x}_1 + \bar{\omega} + k_3(y_* - \hat{y}_*) \\ \hat{\phi}_1^{(\alpha)} &= k_4(y_* - \hat{y}_*) \\ \hat{\phi}_2^{(\alpha)} &= -\frac{g}{l}\sin(\hat{x}_1) + k_5(y_* - \hat{y}_*) \\ \hat{y}_* &= \hat{x}_*\end{aligned}$$

donde $[k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4 \ k_5]^T = S_\theta^{-1}C^T$.

La simulación numérica se lleva a cabo en Matlab Simulink y la herramienta FOM-CON. Las condiciones iniciales son $x(0) = [\frac{\pi}{2} \ 0]^T$ y $\hat{x}(0) = [\pi \ 0.1]^T$. Los resultados se muestran en las Figuras 4.3,4.4.

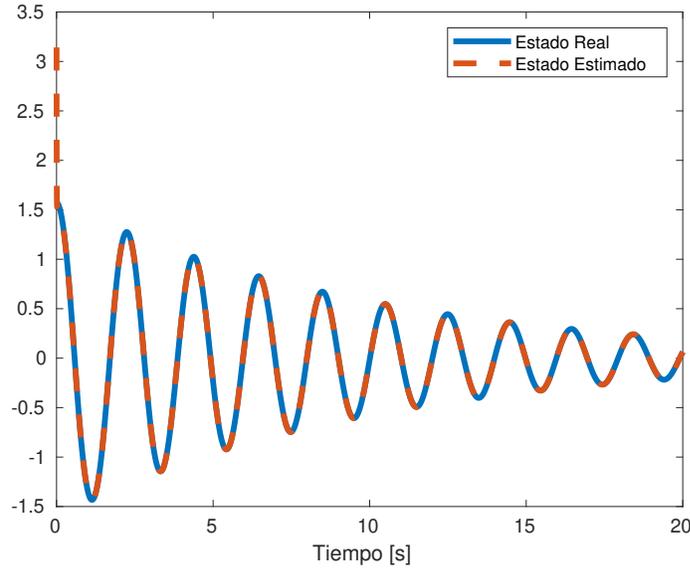


Figura 4.3: Observador de Alta Ganancia estado x_1 .

4.2.4. Sistema Arneodo de Orden Fraccional

Consider el sistema Arneodo de orden fraccional descrito por[93]

$$\begin{aligned}x_1^{(\alpha)} &= x_2 \\ x_2^{(\alpha)} &= x_3 \\ x_3^{(\alpha)} &= -\beta_1 x_1 - \beta_2 x_2 - \beta_3 x_3 + \beta_4 x_1^3 \\ y &= x_1 + \bar{\omega}\end{aligned}$$

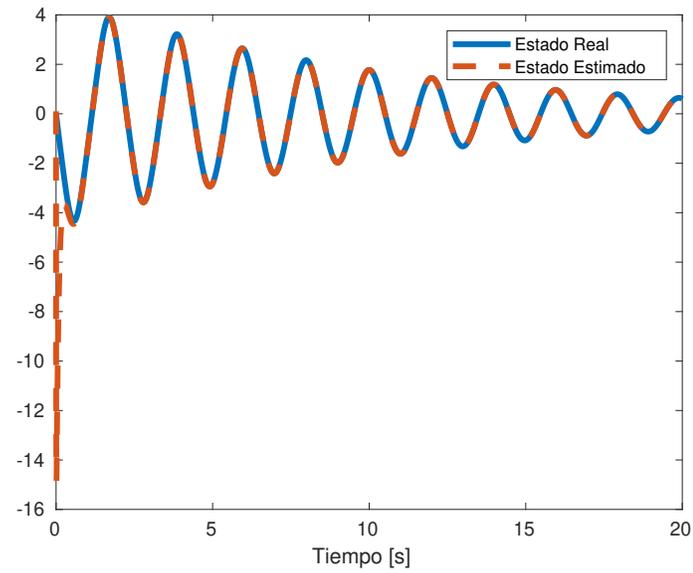
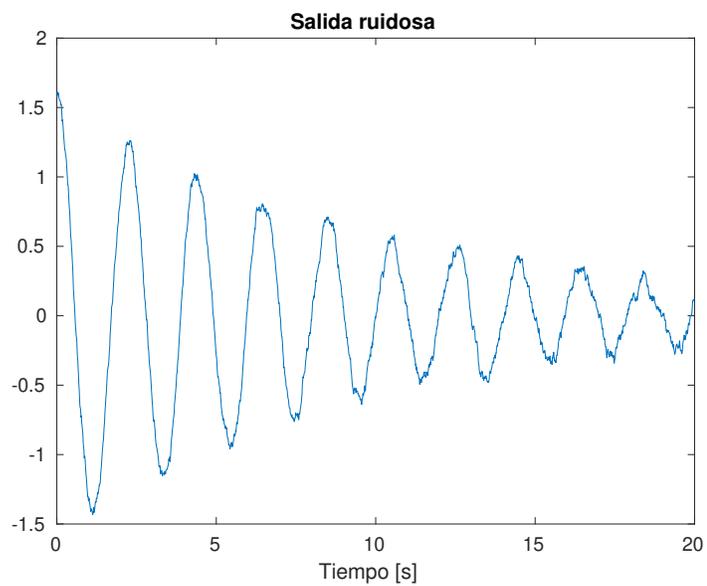
Figura 4.4: Observador de Alta Ganancia estado x_2 .

Figura 4.5: Salida ruidosa.

donde $\beta_1 = 5.5, \beta_2 = 3.5, \beta_3 = 0.25, \beta_4 = -1, x(0) = [-0.25 \quad 1.2 \quad 0.2]^T$ y $\alpha = 0.92$.
Se considera el siguiente sistema aumentado:

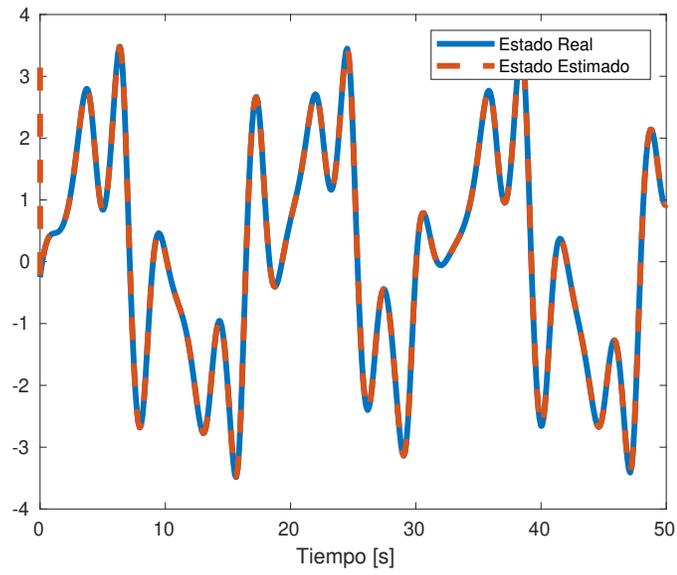
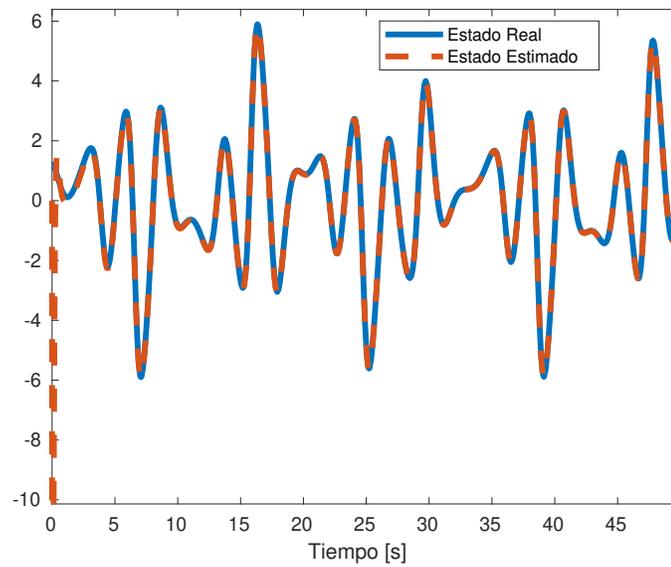
$$\begin{aligned} x_1^{(\alpha)} &= x_2 \\ x_2^{(\alpha)} &= x_3 \\ x_3^{(\alpha)} &= -\beta_1 x_1 - \beta_2 x_2 - \beta_3 x_3 + \phi_3 \\ x_*^{(\alpha)} &= x_1 + \bar{\omega} \\ \phi_1^{(\alpha)} &= 0 \\ \phi_2^{(\alpha)} &= 0 \\ \phi_3^{(\alpha)} &= \beta_4 x_1^3 \\ y_* &= x_* \end{aligned}$$

Se propone el siguiente observador de alta ganancia:

$$\begin{aligned} \hat{x}_1^{(\alpha)} &= x_2 + k_1(y_* - \hat{y}_*) \\ \hat{x}_2^{(\alpha)} &= x_3 + k_2(y_* - \hat{y}_*) \\ \hat{x}_3^{(\alpha)} &= -\beta_1 \hat{x}_1 - \beta_2 \hat{x}_2 - \beta_3 \hat{x}_3 + \phi_3 + k_3(y_* - \hat{y}_*) \\ \hat{x}_*^{(\alpha)} &= \hat{x}_1 + \bar{\omega} + k_4(y_* - \hat{y}_*) \\ \hat{\phi}_1 &= k_5(y_* - \hat{y}_*) \\ \hat{\phi}_2 &= k_6(y_* - \hat{y}_*) \\ \hat{\phi}_3 &= \beta_4 \hat{x}_1^3 + k_7(y_* - \hat{y}_*) \\ \hat{y}_* &= \hat{x}_* \end{aligned}$$

donde $[k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4 \quad k_5 \quad k_6 \quad k_7]^T = S_\theta^{-1} C^T$

La simulación numérica se lleva a cabo en Matlab Simulink y la herramienta FOM-CON. Las condiciones iniciales son $x(0) = [-0.25 \quad 1.2 \quad 0.2]^T$ y $\hat{x}(0) = [0 \quad 0 \quad 0]^T$. Los resultados se muestran en las Figuras 4.6, 4.7, 4.8.

Figura 4.6: Observador de Alta Ganancia estado x_1 .Figura 4.7: Observador de Alta Ganancia estado x_2 .

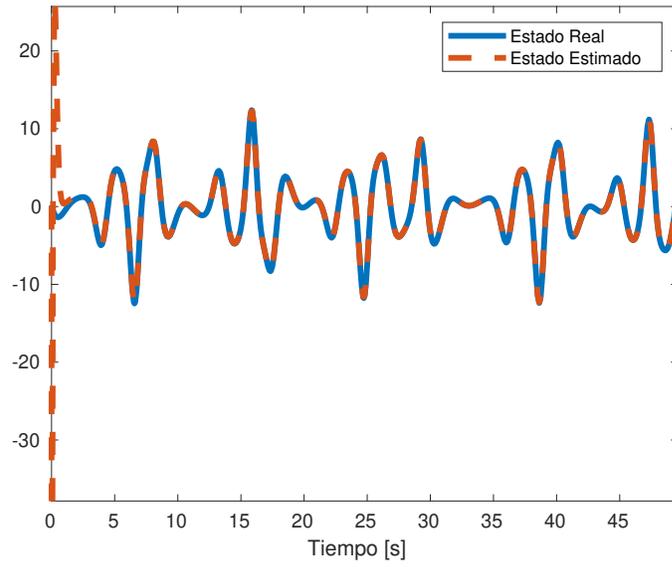
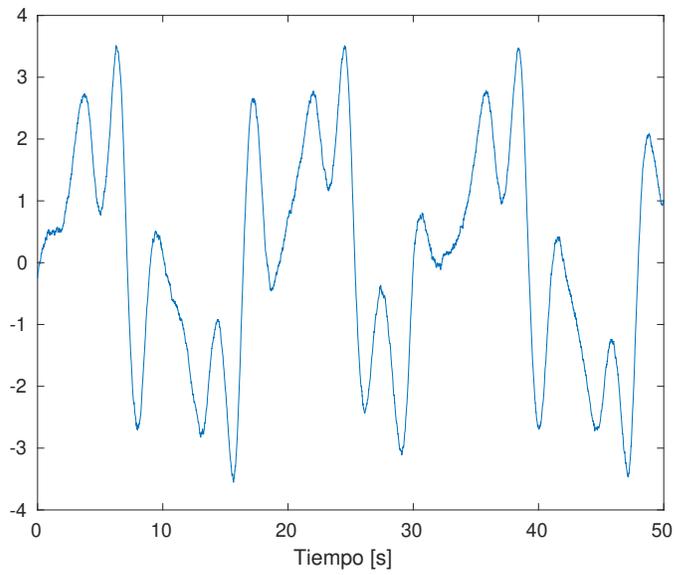
Figura 4.8: Observador de Alta Ganancia estado x_3 .

Figura 4.9: Salida ruidosa.

Capítulo 5

Aplicaciones de algunos otros observadores fraccionales en el problema de diagnóstico de fallas.

En este capítulo se muestran algunos observadores fraccionales para la estimación de fallas, en particular se muestran tres aplicaciones para los observadores fraccionales. Se consideran cinco observadores fraccionales, los cuáles son evaluados mediante una función de costo, se seleccionan las ganancias y se verifica cuál observador fraccional tiene el mejor desempeño.

En [94] un observador fraccional por modos deslizantes es propuesto, para el diagnóstico de fallas en un circuito análogo. En [95] un observador fraccional proporcional integral es propuesto, para el diagnóstico de fallas en sistemas fraccionales singulares. En [96] observadores fraccionales tipo luenberger son propuestos, para el diagnóstico de fallas en baterías de litio. Estos observadores representan el estado del arte del presente trabajo, el diagnóstico de fallas de este trabajo toma en cuenta cinco observadores fraccionales, uno de orden reducido, otro por modos deslizantes, uno proporcional integral, uno proporcional y finalmente uno de alta ganancia, los trabajos mencionados lo aplican a distintos sistemas, en este trabajo se seleccionó un sistema no lineal fraccional, un modelo Bergman, un oscilador de van der Pol fraccional y un dispositivo mecatrónico FHPS. El diagnóstico fraccional se ha estudiado durante muchos años y ha sido un tema importante para la supervisión del sistema, el control de rechazo activo de perturbaciones y control tolerante a fallas [97], aún ahora sigue siendo un tema de gran importancia. El diagnóstico basado en el observador es uno de los enfoques principales para el diagnóstico fraccional. En este trabajo se utilizan cinco observadores fraccionales para estimar las fallas de un sistema no lineal fraccional, un modelo de Bergman, un oscilador de van der Pol fraccional y un dispositivo mecatrónico FHPS, el desempeño de dichos observadores se compara con una función índice de desempeño, las fallas a estimar son fallas aditivas en el sistema.

5.0.1. Problema de Diagnóstico

Se introduce el problema de Diagnóstico Fraccional. Un Sistema No Lineal Fraccional con fallas se describe mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}x^{(\alpha)} &= F(x, \bar{u}) \quad 0 < \alpha \leq 1 \\y &= h(x)\end{aligned}\tag{5.1}$$

donde $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m, f_1, f_2, \dots, f_\mu) \in \mathbb{R}^{m-\mu} \times \mathbb{R}^\mu$ u es un vector de entrada conocido y f es un vector de falla desconocido, $y = (y_1, y_2, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$ es la medición de la salida.

Definición 5.1 (*OAF Observabilidad Algebraica Fraccional*) Una variable de estado $x_i \in \mathbb{R}$ satisface la propiedad OAF, si es una función de las primeras $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$ derivadas secuenciales fraccionales de la salida disponible y y el vector de entrada conocido u .

$$x_i = \phi_{x_i}(y, y^{(\alpha)}, \dots, y^{(r_1\alpha)}, u, u^{(\alpha)}, \dots, u^{(r_2\alpha)}).$$

Definición 5.2 (*DAF Diagnóstico Algebraico Fraccional*) Un Sistema No Lineal Fraccional descrito por la ecuación (5.1) es un sistema fraccional diagnosticable, si f_i cumple la definición 5.1 con respecto a y , u y las $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$ derivadas secuenciales, i.e., f_i puede ser escrito como

$$f_i = \phi_{f_i}(y, y^{(\alpha)}, \dots, y^{(r_1\alpha)}, u, u^{(\alpha)}, \dots, u^{(r_2\alpha)}).$$

5.1. Observadores Fraccionales

5.1.1. Observador Fraccional de Orden Reducido

Considere el sistema (5.1), el vector de falla desconocido f puede interpretarse como un estado con dinámica fraccional incierta. Para estimar f , el vector de estado se extiende para tratar con el vector desconocido. El nuevo sistema extendido está dado por

$$\begin{aligned}x^{(\alpha)} &= F(x, \bar{u}) \\f^{(\alpha)} &= \Omega(x, \bar{u}) \quad 0 < \alpha \leq 1 \\y &= h(x)\end{aligned}$$

donde $\Omega(\cdot)$ es una función incierta acotada.

Lema 4 Si las siguientes hipótesis son satisfechas:

- H_1 : $\Omega_i(x, \bar{u})$ es acotada, i.e. $\|\Omega_i(x, \bar{u})\| \leq M_i$, $M_i \in \mathbb{R}^+$, $0 < i \leq \mu$.
- H_2 : $f_i(t)$ satisface la condición DAF
- H_3 : $K_{\hat{f}_i} \in \mathbb{R}^+$

entonces, el sistema

$$\hat{f}_i^{(\alpha)} = K_{\hat{f}_i}(f_i - \hat{f}_i) \quad 0 < i \leq \mu, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (5.2)$$

es un observador fraccional de orden reducido que alcanza el diagnóstico de la falla f_i , donde \hat{f}_i denota la falla estimada, y $K_{\hat{f}_i}$ determina la tasa deseada de convergencia del observador fraccional.

Corolario 3 Si la señal de falla f_i con $1 \leq i \leq \mu$ satisface la condición DAF, y la falla puede ser escrita como

$$f_i = \sigma_i y^{(\alpha)} + \psi_i(y, u)$$

con $\sigma_i = (\sigma_{i1}, \dots, \sigma_{ip}) \in \mathbb{R}^p$ un vector constante, $y(t)$ y $\psi_i(y, u)$ funciones acotadas, entonces, el observador fraccional de orden reducido (5.2) puede ser escrito como sigue:

$$\begin{aligned} \gamma_{f_i}^{(\alpha)} &= -K_{\hat{f}_i}(\gamma_{f_i} - \psi_i(y, u)) - K_{\hat{f}_i}^2 \sigma_i y_i, \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ \hat{f}_i &= \gamma_{f_i} + K_{\hat{f}_i} \sigma_i y_i \end{aligned}$$

donde $\gamma_{f_i}(0) = \gamma_{f_{i0}}$

Una prueba del Lema (4) y Corolario (3) puede ser consultada en [98] Capítulo 6.

Teorema 5.1 El observador fraccional de orden reducido 5.2 es Mittag-Leffler estable[98].

Demostración Defina el error del observador como $e_i = f_i - \hat{f}_i$. Considere la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(e_i) = e_i^2 \quad (5.3)$$

Note que $V(e_i)$ satisface la primera desigualdad del Teorema 3.1:

$$\beta_1 \|e_i\| \leq V(e_i) \leq \beta_2 \|e_i\| \quad (5.4)$$

Con $a = b = \beta_1 = 1$ y $\beta_2 = \sup(\|e_i\|)$.

Tome la derivada fraccional:

$$V(e_i)^{(\alpha)} = (e_i^2)^{(\alpha)} \leq 2e_i e_i^{(\alpha)}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} V(e_i)^{(\alpha)} &\leq 2e_i e_i^{(\alpha)} = 2e_i(f_i^{(\alpha)} - \hat{f}_i^{(\alpha)}) \\ &= 2e_i(\Omega_i - K_{\hat{f}_i}(e_i)) \\ &\leq 2e_i \Omega_i - 2e_i^2 K_{\hat{f}_i} \\ &\leq 2\omega_i \|e_i\| - 2\|e_i\|^2 K_{\hat{f}_i} \\ &\leq -(2K_{\hat{f}_i} \|e_i\| - 2\omega_i) \|e_i\| \end{aligned} \quad (5.5)$$

Entonces

$$V(e_i)^{(\alpha)} \leq -\beta_3 \|e_i\| \quad (5.6)$$

Con $\beta_3 = 2K_{\hat{f}_i} \|e_i\| - 2\omega_i$.

Por lo tanto si $\beta_3 > 0$, del teorema 3.1 y las ecuaciones 5.3-5.6, se concluye que el origen del sistema 5.2 es Mittag-Leffler estable.

5.1.2. Observador Fraccional de Modos Deslizantes

Si las hipótesis del Lema (4) son satisfechas entonces el sistema

$$\hat{f}_i^{(\alpha)} = \rho \text{sign}(f_i - \hat{f}_i) \quad 0 < i \leq \mu, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (5.7)$$

es un observador de modos deslizantes para la falla f_i , con $\rho > 0$.

Teorema 5.2 *El observador fraccional por modos deslizantes 5.7 es Mittag-Leffler estable [98].*

Demostración Defina el error del observador como $e_i = f_i - \hat{f}_i$. Considere la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(e_i) = e_i^2 \quad (5.8)$$

Note que $V(e_i)$ satisface la primera desigualdad del Teorema 3.1:

$$\beta_1 \|e_i\| \leq V(e_i) \leq \beta_2 \|e_i\| \quad (5.9)$$

Con $a = b = \beta_1 = 1$ y $\beta_2 = \sup(\|e_i\|)$.

Tome la derivada fraccional:

$$V(e_i)^{(\alpha)} = (e_i^2)^{(\alpha)} \leq 2e_i e_i^{(\alpha)}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} V(e_i)^{(\alpha)} &\leq 2e_i e_i^{(\alpha)} = 2e_i (f_i^{(\alpha)} - \hat{f}_i^{(\alpha)}) \\ &= 2e_i (\Omega_i - \rho \text{sign}(e_i)) \\ &\leq 2e_i \Omega_i - 2e_i \rho \text{sign}(e_i) \\ &\leq 2\omega_i \|e_i\| - 2\rho |e_i| \\ &\leq 2\omega_i \|e_i\| - 2\rho \|e_i\| \\ &\leq -(2\rho - 2\omega_i) \|e_i\| \end{aligned} \quad (5.10)$$

Entonces

$$V(e_i)^{(\alpha)} \leq -\beta_3 \|e_i\| \quad (5.11)$$

Con $\beta_3 = 2\rho - 2\omega_i$.

Por lo tanto si $\beta_3 > 0$, del teorema 3.1 y las ecuaciones 5.8-5.11, se concluye que el origen del sistema 5.7 es Mittag-Leffler estable.

5.1.3. Observador Fraccional Proporcional Integral

Si las hipótesis del Lema (4) son satisfechas entonces el sistema

$$\begin{aligned} \hat{f}_i^{(\alpha)} &= K_i (f_i - \hat{f}_i) + \zeta_i \quad 0 < i \leq \mu, \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ \zeta_i^{(\alpha)} &= k_i (f_i - \hat{f}_i) \end{aligned} \quad (5.12)$$

es un observador fraccional proporcional integral para la falla f_i , con $K_i, k_i > 0$ [99].

Teorema 5.3 *El observador fraccional proporcional integral 5.12 es Mittag-Leffler estable[98].*

Demostración Defina el error del observador como $e_i = f_i - \hat{f}_i$. Considere la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(e_i) = e_i^2 \quad (5.13)$$

Note que $V(e_i)$ satisface la primera desigualdad del Teorema 3.1:

$$\beta_1 \|e_i\| \leq V(e_i) \leq \beta_2 \|e_i\| \quad (5.14)$$

Con $a = b = \beta_1 = 1$ y $\beta_2 = \sup(\|e_i\|)$.

Tome la derivada fraccional:

$$V(e_i)^{(\alpha)} = (e_i^2)^{(\alpha)} \leq 2e_i e_i^{(\alpha)}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} V(e_i)^{(\alpha)} &\leq 2e_i e_i^{(\alpha)} = 2e_i (f_i^{(\alpha)} - \hat{f}_i^{(\alpha)}) \\ &= 2e_i (\Omega_i - K_i (f_i - \hat{f}_i) + \zeta_i) \\ &\leq 2e_i \Omega_i - 2e_i K_i (e_i + \zeta_i) \\ &\leq 2\omega_i \|e_i\| - 2K_i e_i^2 - 2e_i \zeta_i \\ &\leq 2\omega_i \|e_i\| - 2K_i \|e_i\|^2 - 2\|e_i\| \zeta_i \\ &\leq -(2K_i \|e_i\| + 2\zeta_i - 2\omega_i) \|e_i\| \end{aligned} \quad (5.15)$$

Entonces

$$V(e_i)^{(\alpha)} \leq -\beta_3 \|e_i\| \quad (5.16)$$

Con $\beta_3 = 2K_i \|e_i\| + 2\zeta_i - 2\omega_i$.

Por lo tanto si $\beta_3 > 0$, del teorema 3.1 y las ecuaciones 5.13-5.16, se concluye que el origen del sistema 5.12 es Mittag-Leffler estable.

5.1.4. Observador Fraccional Proporcional

Si las hipótesis del Lema (4) son satisfechas entonces el sistema

$$\hat{f}_i^{(\alpha)} = K(f_i - \hat{f}_i) \quad (5.17)$$

es un observador fraccional proporcional para la falla f_i , con $K > 0$.

Teorema 5.4 *El observador fraccional proporcional 5.17 es Mittag-Leffler estable[98].*

Demostración Defina el error del observador como $e_i = f_i - \hat{f}_i$. Considere la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(e_i) = e_i^2 \quad (5.18)$$

Note que $V(e_i)$ satisface la primera desigualdad del Teorema 3.1:

$$\beta_1 \|e_i\| \leq V(e_i) \leq \beta_2 \|e_i\| \quad (5.19)$$

Con $a = b = \beta_1 = 1$ y $\beta_2 = \sup(\|e_i\|)$.

Tome la derivada fraccional:

$$V(e_i)^{(\alpha)} = (e_i^2)^{(\alpha)} \leq 2e_i e_i^{(\alpha)}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} V(e_i)^{(\alpha)} &\leq 2e_i e_i^{(\alpha)} = 2e_i (f_i^{(\alpha)} - \hat{f}_i^{(\alpha)}) \\ &= 2e_i (\Omega_i - K(f_i - \hat{f}_i)) \\ &\leq 2e_i \Omega_i - 2e_i K(e_i) \\ &\leq 2\omega_i \|e_i\| - 2K e_i^2 \\ &\leq 2\omega_i \|e_i\| - 2K \|e_i\|^2 \\ &\leq -(2K \|e_i\| - 2\omega_i) \|e_i\| \end{aligned} \quad (5.20)$$

Entonces

$$V(e_i)^{(\alpha)} \leq -\beta_3 \|e_i\| \quad (5.21)$$

Con $\beta_3 = 2K \|e_i\| - 2\omega_i$.

Por lo tanto si $\beta_3 > 0$, del teorema 3.1 y las ecuaciones 5.18-5.21, se concluye que el origen del sistema 5.17 es Mittag-Leffler estable.

5.1.5. Observador Fraccional de Alta Ganancia

Si las hipótesis del Lema (4) son satisfechas entonces el sistema

$$\hat{f}_i^{(\alpha)} = S_\theta^{-1} C^T (f_i - \hat{f}_i) \quad 0 < i \leq \mu, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (5.22)$$

es un observador de alta ganancia para la falla f_i . Donde S_θ se conoce como la matriz de ganancia y se obtiene al resolver la siguiente ecuación de Riccati:

$$\theta S_\theta(t) + A^T S_\theta(t) + S_\theta A = C^T C$$

Donde $\theta > 0$ y $A = \frac{\delta F(x,u)}{\delta x}$. La solución de la matriz de alta ganancia está definida como:

$$(S_\theta)_{ij} = \nu_{ij} \frac{(-1)^{i+j}}{\theta^{i+j-1}}$$

Donde ν_{ij} es el coeficiente binomial definido como:

$$\nu_{ij} = \binom{i+j-2}{j-1}$$

Teorema 5.5 *El observador fraccional de alta ganancia 5.22 es Mittag-Leffler estable[98].*

Demostración Defina el error del observador como $e_i = f_i - \hat{f}_i$. Considere la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(e_i) = e_i^2 \quad (5.23)$$

Note que $V(e_i)$ satisface la primera desigualdad del Teorema 3.1:

$$\beta_1 \|e_i\| \leq V(e_i) \leq \beta_2 \|e_i\| \quad (5.24)$$

Con $a = b = \beta_1 = 1$ y $\beta_2 = \sup(\|e_i\|)$.

Tome la derivada fraccional:

$$V(e_i)^{(\alpha)} = (e_i^2)^{(\alpha)} \leq 2e_i e_i^{(\alpha)}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} V(e_i)^{(\alpha)} &\leq 2e_i e_i^{(\alpha)} = 2e_i (f_i^{(\alpha)} - \hat{f}_i^{(\alpha)}) \\ &= 2e_i (\Omega_i - S_\theta^{-1} C^T (f_i - \hat{f}_i)) \\ &\leq 2e_i \Omega_i - 2e_i S_\theta^{-1} C^T (e_i) \\ &\leq 2\omega_i \|e_i\| - 2\|e_i\|_{S_\theta^{-1} C^T}^2 \\ &\leq 2\omega_i \|e_i\| - 2\|e_i\|_{S_\theta^{-1} C^T}^2 \\ &\leq -(2\|e_i\|_{S_\theta^{-1} C^T} - 2\omega_i) \|e_i\| \end{aligned} \quad (5.25)$$

Entonces

$$V(e_i)^{(\alpha)} \leq -\beta_3 \|e_i\| \quad (5.26)$$

Con $\beta_3 = 2\|e_i\|_{S_\theta^{-1} C^T} - 2\omega_i$.

Por lo tanto si $\beta_3 > 0$, del teorema 3.1 y las ecuaciones 5.23-5.26, se concluye que el origen del sistema 5.22 es Mittag-Leffler estable.

5.2. Simulaciones Numéricas

Considere el siguiente Sistema No Lineal Fraccional, el cual requiere un diagnóstico de fallas simultáneo [98], este sistema representa un ejemplo académico para el diagnóstico de fallas:

$$\begin{aligned} x_1^{(\alpha)} &= -x_1 + f_1 x_2^3 + f_2 x_2 x_3 + u(t) \\ x_2^{(\alpha)} &= x_3 + f_1 \\ x_3^{(\alpha)} &= -x_2^3 + f_2 \\ y_1 &= x_2 \\ y_2 &= x_3 \end{aligned} \quad (5.27)$$

donde $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ es el vector de estado, $f = (f_1, f_2)^T$ es el vector de falla, $y = (y_1, y_2)^T$ es el vector de salida y $u(t)$ es una entrada conocida.

La condición DAF para las fallas f_1 y f_2 pueden obtenerse considerando las ecuaciones

dinámicas de x_2 y x_3 del sistema (5.27), i.e, las señales desconocidas (o fallas) pueden ser escritas en términos de las salida y sus derivadas fraccionales.

$$\begin{aligned} f_1 &= \phi_{f_1}(y, y^{(\alpha)}) = y_1^{(\alpha)} - y_2 \\ f_2 &= \phi_{f_2}(y, y^{(\alpha)}) = y_2^{(\alpha)} + y_1^3 \end{aligned}$$

Los observadores fraccionales de orden reducido para f_1 y f_2 son descritos como sigue:

$$\begin{aligned} \hat{f}_1^{(\alpha)} &= K_{\hat{f}_1}(y_1^{(\alpha)} - y_2 - \hat{f}_1) \\ \hat{f}_2^{(\alpha)} &= K_{\hat{f}_2}(y_2^{(\alpha)} + y_1^3 - \hat{f}_2) \end{aligned}$$

Se pueden definir las siguientes dos variables artificiales para evitar la necesidad de estimar cualquier derivada fraccional.

$$\begin{aligned} \gamma_{f_1} &\triangleq \hat{f}_1 - K_{\hat{f}_1} y_1 \\ \gamma_{f_2} &\triangleq \hat{f}_2 - K_{\hat{f}_2} y_2 \end{aligned} \quad (5.28)$$

Finalmente, tomando la derivada fraccional de(5.28), los observadores fraccionales de orden reducido pueden ser escritos como:

$$\begin{aligned} \gamma_{f_1}^{(\alpha)} &= -K_{\hat{f}_1}(\gamma_{f_1} + y_2) - K_{\hat{f}_1}^2 y_1, \quad \gamma_{f_1}(0) = \gamma_{f_{10}} \\ \hat{f}_1 &= \gamma_{f_1} + K_{\hat{f}_1} y_1 \\ \gamma_{f_2}^{(\alpha)} &= -K_{\hat{f}_2}(\gamma_{f_2} - y_1^3) - K_{\hat{f}_2}^2 y_2, \quad \gamma_{f_2}(0) = \gamma_{f_{20}} \\ \hat{f}_2 &= \gamma_{f_2} + K_{\hat{f}_2} y_2 \end{aligned}$$

Los observadores fraccionales por modos deslizantes para f_1 y f_2 son descritos como sigue:

$$\begin{aligned} \hat{f}_1^{(\alpha)} &= \rho_1 \text{sign}(f_1 - \hat{f}_1) \\ \hat{f}_2^{(\alpha)} &= \rho_2 \text{sign}(f_2 - \hat{f}_2) \end{aligned}$$

Los observadores fraccionales proporcionales integrales para f_1 y f_2 son descritos como sigue:

$$\begin{aligned} \hat{f}_1^{(\alpha)} &= k_1(f_1 - \hat{f}_1) - \zeta_1 \\ \zeta_1^{(\alpha)} &= k_2(f_1 - \hat{f}_1) \\ \hat{f}_2^{(\alpha)} &= k_3(f_2 - \hat{f}_2) - \zeta_2 \\ \zeta_2^{(\alpha)} &= k_4(f_2 - \hat{f}_2) \end{aligned}$$

Los observadores fraccionales proporcionales para f_1 y f_2 son descritos como sigue:

$$\begin{aligned} \hat{f}_1^{(\alpha)} &= k_1(f_1 - \hat{f}_1) \\ \hat{f}_2^{(\alpha)} &= k_2(f_2 - \hat{f}_2) \end{aligned}$$

Los observadores fraccionales de alta ganancia para f_1 y f_2 son descritos como sigue:

$$\begin{aligned}\hat{f}_1^{(\alpha)} &= S_{\theta_1}^{-1} C_1^T (f_1 - \hat{f}_1) \\ \hat{f}_2^{(\alpha)} &= S_{\theta_2}^{-1} C_2^T (f_2 - \hat{f}_2)\end{aligned}$$

La simulación numérica para el sistema(5.27) se lleva a cabo considerando la dinámica de las fallas f_1 y f_2 , descritas por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}f_1 &= 1 + 5\sin(x_1)e^{-10t} \\ f_2 &= 5e^{-5(t-0.3)}\mathcal{U}(t-0.3) + e^{-5(t-1)}\mathcal{U}(t-1)\end{aligned}$$

donde $\mathcal{U}(t)$ es la función escalón unitario.

Las siguientes simulaciones numéricas fueron realizadas en Matlab Simulink y utilizando la herramienta FOMCON. Los resultados de la simulación se obtienen considerando las condiciones iniciales $\gamma_{10} = \gamma_{20} = 0$ y los parámetros $K_{\hat{f}_1} = K_{\hat{f}_2} = 40, \alpha = 0.935$ y $u(t) = 5\mathcal{U}(t)$. Los resultados se muestran en las Figuras 5.1,5.2. Se puede notar que las fallas estimadas siguen su valor verdadero correspondiente, aunque en la figura 5.2 la falla tiene dos picos, lo que corresponde a la falla misma, en estos picos el observador se comporta mal debido a la naturaleza de la falla, que tiene dos picos abruptos. Este observador de orden reducido tiene un gran error de falla al principio, debido a las condiciones iniciales. Se probaron algunos valores de las ganancias y se fijó en $K_{\hat{f}_1} = K_{\hat{f}_2} = 40$, debido a que arroja un resultado aceptable.

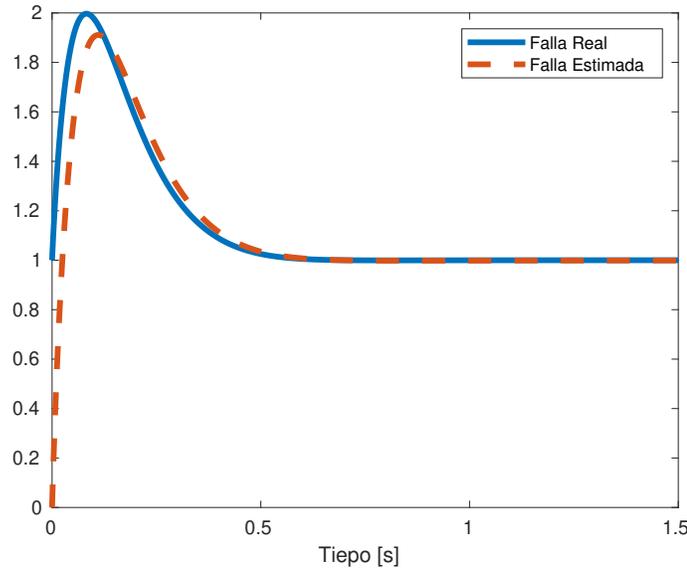


Figura 5.1: Observador Fraccional de Orden Reducido Falla 1.

Los resultados de la simulación para los segundos observadores de modos deslizantes fraccionales se obtienen considerando los parámetros $\rho_1 = \rho_2 = 350$, este valor de ganancia fue probado con distintos valores y se fijó en 350, debido a que este

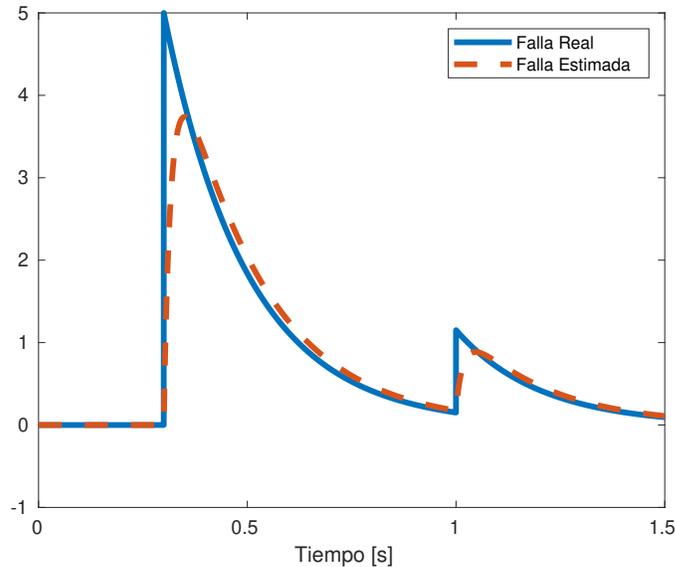


Figura 5.2: Observador Fraccional de Orden Reducido Falla 2.

valor arroja resultados aceptables. Los resultados se muestran en Figuras 5.3 y 5.4. Se puede notar que las fallas estimadas siguen su valor verdadero correspondiente de una manera muy precisa, con este observador se estiman mejor los picos de la falla 2 que con el observador de orden reducido, aunque estos picos se estiman mejor, no son perfectos, los dos picos de la falla corresponden a una función no suave, que es difícil de seguir. Este observador tiene un excelente desempeño y el error de falla es muy pequeño.

Los resultados de la simulación para los observadores integrales proporcionales fraccionales se obtienen considerando los parámetros $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 50$, estos valores para las ganancias fueron probados con distintos valores, se fijó en 40, porque con este valor se obtienen resultados aceptables. Los resultados se muestran en Figuras 5.5 y 5.6. Se puede notar que las fallas estimadas siguen su correspondiente valor verdadero, aunque en la Figura 5.6 podemos notar que la falla estimada no sigue perfectamente a la falla real, esto se debe a que la falla 2 no es una función suave. Este observador tiene un error de falla muy pequeño.

Los resultados de la simulación para los observadores proporcionales fraccionales se obtienen considerando el parámetro $K_1 = K_2 = 50$. Los resultados se muestran en Figuras 5.7 y 5.8. Podemos notar que la falla estimada 1 se aproxima a la falla real 1 casi a la perfección, mientras que la falla 2 en la Figura 5.8 no se sigue perfectamente, la falla estimada 2 no puede seguir los dos picos de la falla real 2, esto porque la falla 2 no es una función suave. Este observador tiene un error de falla en casi toda la trayectoria.

Los resultados de la simulación para los observadores de Alta Ganancia fraccionales

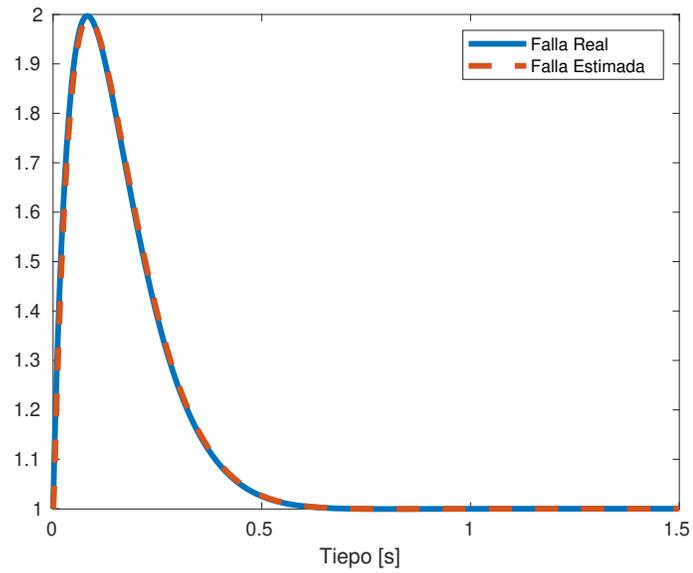


Figura 5.3: Observador Fraccional por Modos Deslizantes Falla 1.

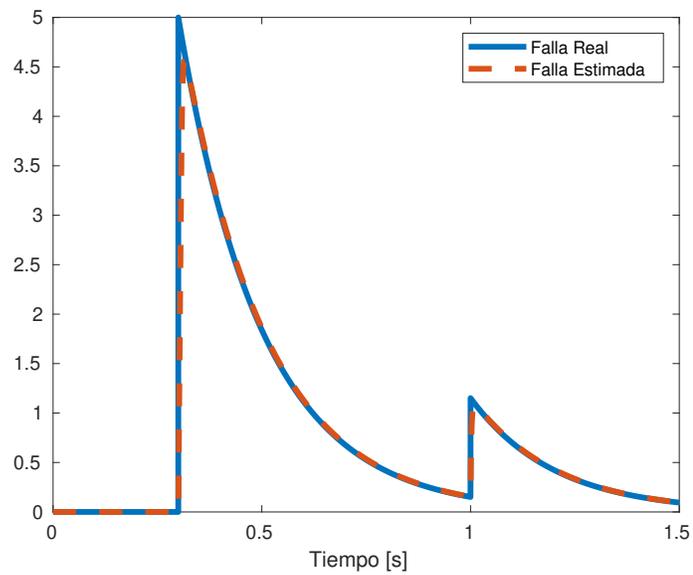


Figura 5.4: Observador Fraccional por Modos Deslizantes Falla 2.

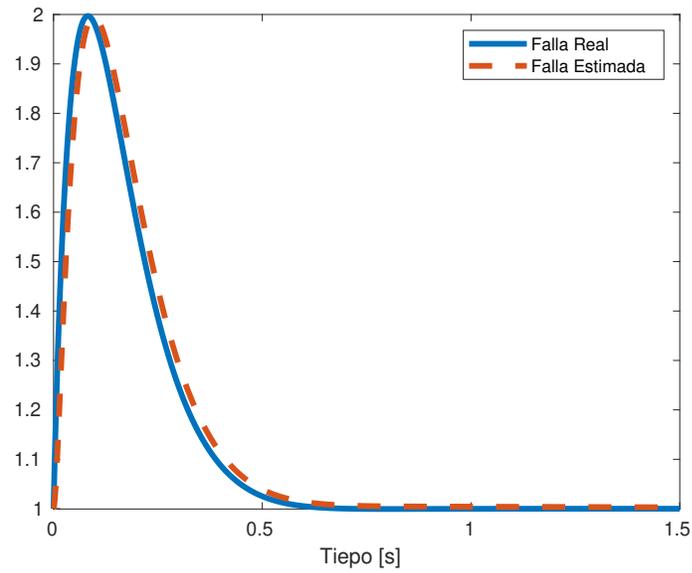


Figura 5.5: Observador Fraccional Proporcional Integral Falla 1.

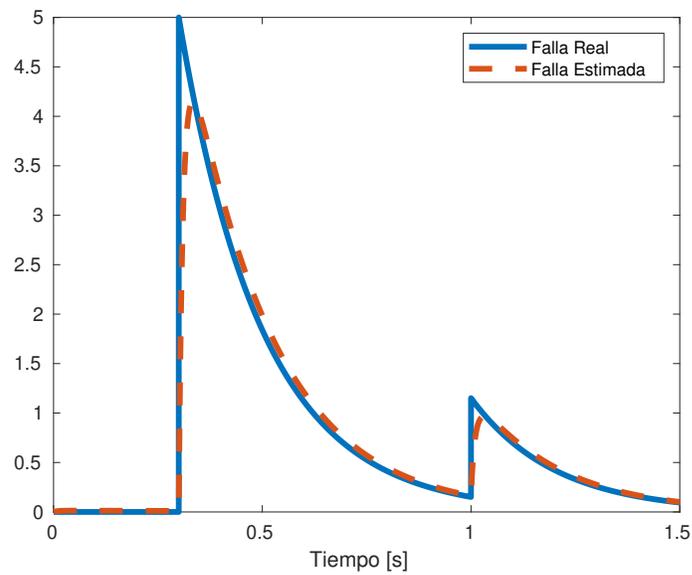


Figura 5.6: Observador Fraccional Proporcional Integral Falla 2.

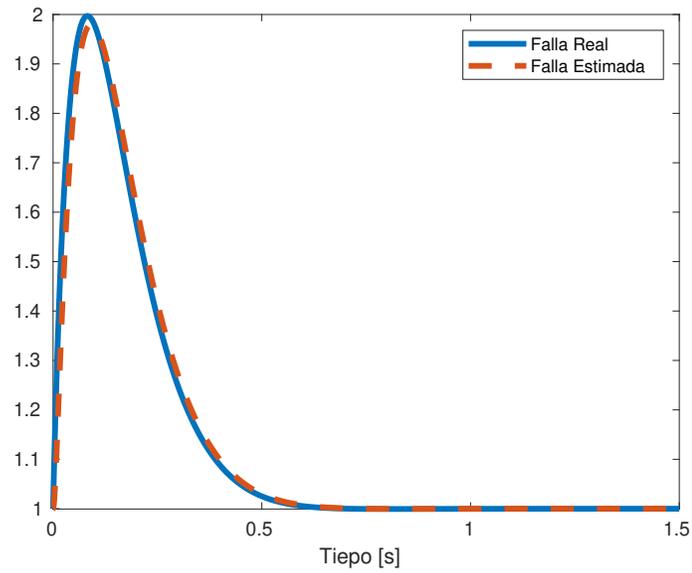


Figura 5.7: Observador Fraccional Proporcional Falla 1.

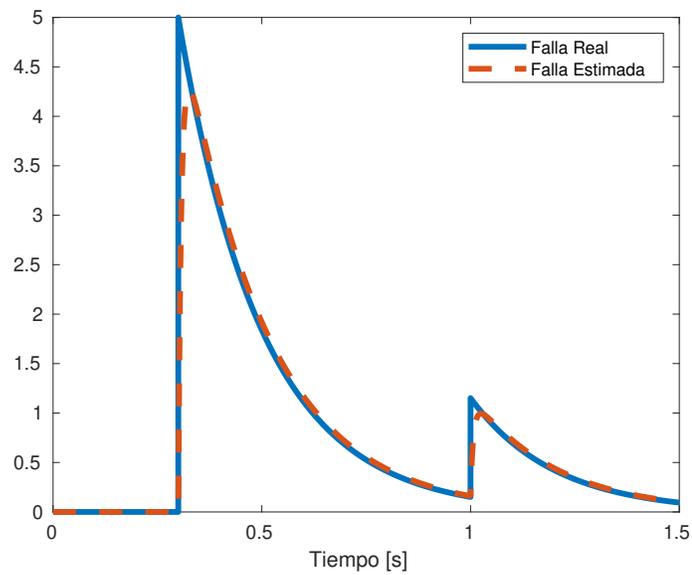


Figura 5.8: Observador Fraccional Proporcional Falla 2.

se obtienen considerando la matriz de ganancia $\theta = 9$, $S_\theta^{-1} = \begin{pmatrix} 27 & 243 & 729 \\ 243 & 3645 & 13122 \\ 729 & 13122 & 59049 \end{pmatrix}$

Los resultados se muestran en Figuras 5.7 y 5.8. Podemos notar que la falla estimada 1 se aproxima a la falla real 1 casi a la perfección, mientras que la falla 2 en la Figura 5.8 no se sigue perfectamente, la falla estimada 2 no puede seguir los dos picos de la falla real 2, esto porque la falla 2 no es una función suave. Este observador tiene un error de falla en casi toda la trayectoria.

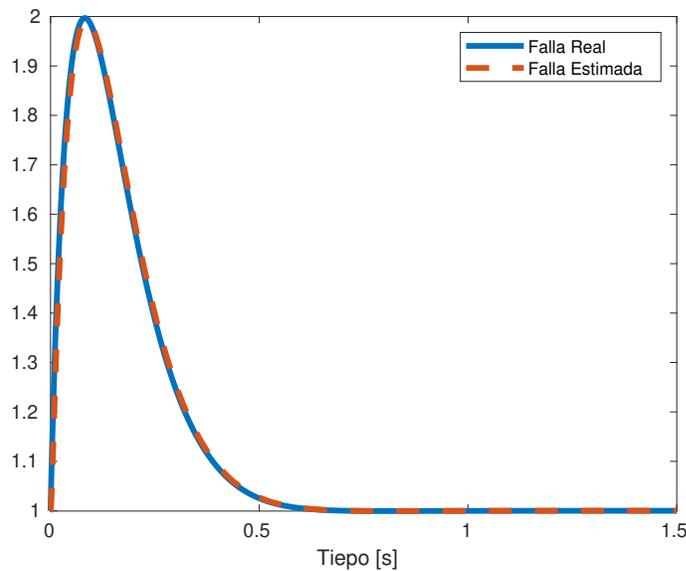


Figura 5.9: Observador Fraccional de Alta Ganancia Falla 1.

Se aplicó el siguiente índice de rendimiento a los observadores fraccionales:

$$J_t = \frac{1}{t + \epsilon} \int_0^t \|\tilde{f}\|^2 dt$$

donde $\epsilon = 0.0001$ y $\tilde{f} = f - \hat{f}$. Y también las funciones de costo convencionales ISE e ITSE.

$$ISE = \int_0^t \tilde{f}^2 dt \quad ITSE = \int_0^t t \tilde{f}^2 dt$$

A partir de las simulaciones numéricas y el índice de rendimiento resumido en la Tabla 5.1, se puede notar que el mejor rendimiento se logra con el observador de modos deslizantes fraccionales. Los cinco observadores fraccionales implementados estiman las fallas del sistema fraccional no lineal, aunque el observador fraccional de modos deslizantes da un mejor resultado, lo cual se puede corroborar en las Figuras 5.11 y 5.12, y en la Tabla 5.1. Se compararon cinco observadores fraccionales y verificamos cuál tiene mejor desempeño

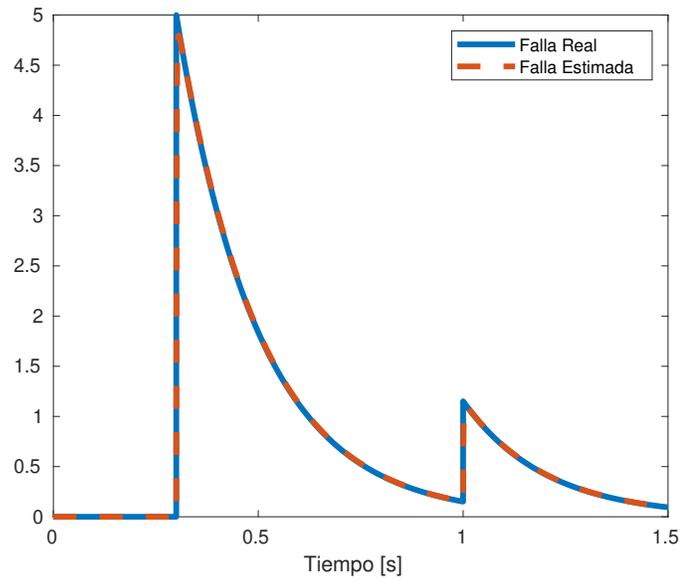


Figura 5.10: Observador Fraccional de Alta Ganancia Falla 2.

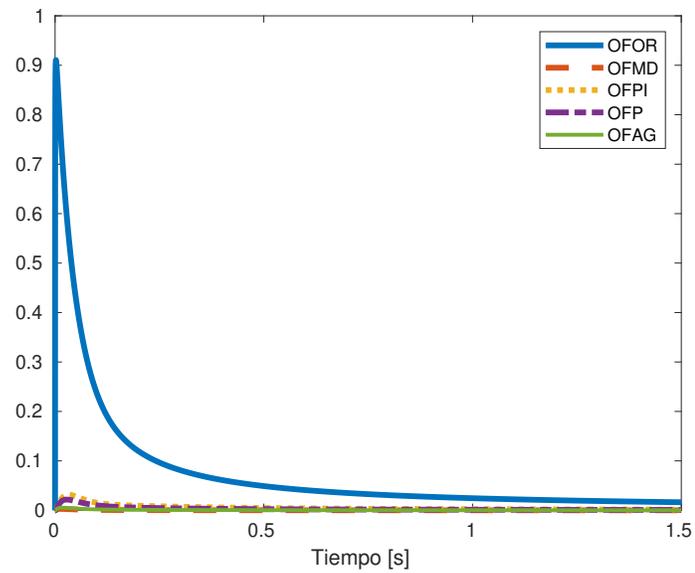


Figura 5.11: Función de Costo Falla 1.

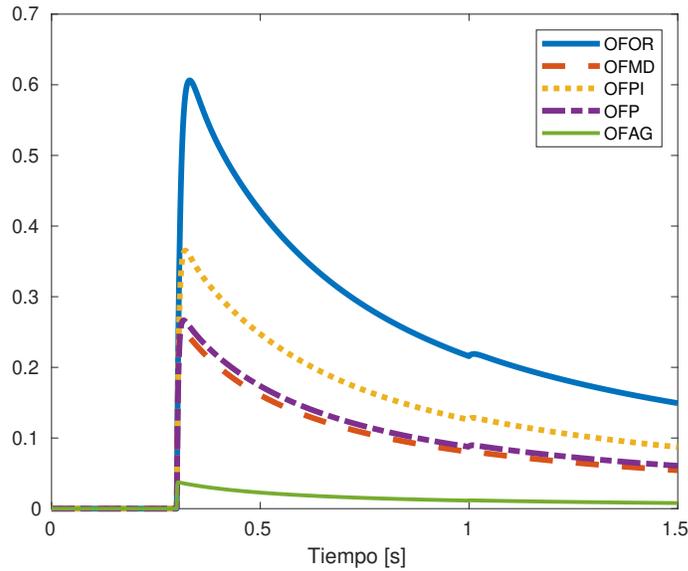


Figura 5.12: Función de Costo Falla 2.

Suma de la función de costo			
Función de Costo	Valor	ISE	ITSE
J_1 de OFOR	1137.3	245.9393	7.2623
J_1 de OFMD	4.7861	1.1368	0.0569
J_1 de OFPI	80.2740	23.9891	2.5924
J_1 de OFP	46.7990	12.1560	0.7294
J_1 de OFAG	9.4773	2.2979	0.1194
J_2 de OFOR	3391.2	2252.9	776.5110
J_2 de OFMD	1290.7	828.1255	258.9542
J_2 de OFPI	1993.6	1320.3	450.0149
J_2 de OFP	1402.1	922.7327	308.6457
J_2 de OFAG	184.8031	131.9555	43.2674

Tabla 5.1: Función de Costo

Desempeño de los Observadores		
Observador	Ventajas	Desventajas
OFOR	No es necesario calcular derivadas fraccionales	Necesidad de calcular la función gamma adicional
OFMD	Excelente desempeño del observador	Se utiliza una función discontinua
OFPI	Buen desempeño del observador	Necesidad de calcular el término integral
OFP	Fácil implementación del observador	El error de falla es alto
OFAG	Rápida convergencia a la falla	Fenómeno de peaking

Tabla 5.2: Ventajas y Desventajas

5.2.1. Oscilador de van der Pol Fraccional

Considere la versión modificada del oscilador de Van der Pol fraccional [98]

$$\begin{aligned}
 x_1^{(\alpha)} &= x_2 + u \\
 x_2^{(\alpha)} &= -x_1 - \epsilon(x_1^2 - 1)x_2 + f \\
 y &= x_1
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

La condición DAF para f se puede obtener considerando las ecuaciones dinámicas de x_2 del sistema (5.29), i.e, las señales desconocidas (o fallas) son escritas en términos de la salida y sus derivadas fraccionales.

$$f = \phi_{f_1}(y, y^{(\alpha)}) = y^{(2\alpha)} - u^{(\alpha)} + y + \epsilon(y^2 - 1)(y^{(\alpha)} - u)$$

El observador fraccional de orden reducido para f se describe como sigue:

$$\hat{f}^{(\alpha)} = K_{\hat{f}}(y^{(2\alpha)} - u^{(\alpha)} + y + \epsilon(y^2 - 1)(y^{(\alpha)} - u) - \hat{f})$$

La siguiente variable artificial puede ser definida para evitar la necesidad de estimar una segunda derivada fraccional.

$$\gamma_f \triangleq \hat{f} - K_{\hat{f}}y^{(\alpha)} \tag{5.30}$$

Finalmente, tomando la derivada fraccional de (5.32), el observador fraccional de orden reducido es escrito como:

$$\begin{aligned}
 \gamma_f^{(\alpha)} &= -K_{\hat{f}}(\gamma_f - y + u^{(\alpha)} - \epsilon(y^2 - 1)(y^{(\alpha)} - u)) - K_{\hat{f}}^2 y^{(\alpha)}, \\
 \gamma_f(0) &= \gamma_{f_0} \\
 \hat{f} &= \gamma_f + K_{\hat{f}}y^{(\alpha)}
 \end{aligned}$$

El observador fraccional por modos deslizantes para f es descrito como sigue:

$$\hat{f}^{(\alpha)} = \rho \text{sign}(y^{(2\alpha)} - u^{(\alpha)} + y + \epsilon(y^2 - 1)(y^{(\alpha)} - u) - \hat{f})$$

El observador fraccional proporcional integral para f es descrito como sigue:

$$\begin{aligned}\hat{f}^{(\alpha)} &= k_1(y^{(2\alpha)} - u^{(\alpha)} + y + \epsilon(y^2 - 1)(y^{(\alpha)} - u) - \hat{f}) + \zeta \\ \zeta^{(\alpha)} &= k_2(y^{(2\alpha)} - u^{(\alpha)} + y + \epsilon(y^2 - 1)(y^{(\alpha)} - u) - \hat{f})\end{aligned}$$

El observador fraccional proporcional para f es descrito como sigue:

$$\hat{f}^{(\alpha)} = K(y^{(2\alpha)} - u^{(\alpha)} + y + \epsilon(y^2 - 1)(y^{(\alpha)} - u) - \hat{f})$$

El observador fraccional de alta ganancia para f es descrito como sigue:

$$\hat{f}^{(\alpha)} = S_\theta^{-1} C^T (y^{(2\alpha)} - u^{(\alpha)} + y + \epsilon(y^2 - 1)(y^{(\alpha)} - u) - \hat{f})$$

La simulación numérica para el sistema (5.29) es llevada a cabo considerando la dinámica de la falla f , la cual es descrita mediante la siguiente ecuación:

$$f = \cos(t)$$

donde $\mathcal{U}(t)$ es la función escalón unitario.

Las simulaciones numéricas son llevadas a cabo en Matlab Simulink y con la herramienta FOMCON. Los resultados en simulación son obtenidos considerando las condiciones iniciales $f_0 = 0$ y los parámetros $K_f = 40, \alpha = 0.935$ y $u(t) = 5\mathcal{U}(t)$. El valor de α fue fijado en 0.935 para que la derivada fraccional no tenga un valor apartado del caso fraccional y aún así tener una contribución fraccional. Los resultados son mostrados en las Figuras 5.13.

Los resultados en simulación para el observador fraccional por modos deslizantes es obtenido considerando el parámetro $\rho = 40$. Los resultados son mostrados en las Figuras 5.14.

Los resultados en simulación para el observador fraccional proporcional integral es obtenido considerando los parámetros $k_1 = k_2 = 50$. Los resultados son mostrados en las Figuras 5.15.

Los resultados en simulación para el observador fraccional por modos deslizantes es obtenido considerando el parámetro $K = 40$. Los resultados son mostrados en las Figuras 5.16.

Los resultados en simulación para el observador fraccional de alta ganancia es obtenido considerando el parámetro $\theta = 30$ y la matriz de ganancia $S_\theta^{-1} = \begin{pmatrix} 60 & 900 \\ 900 & 27000 \end{pmatrix}$. Los resultados son mostrados en las Figuras 5.17.

5.2.2. Dispositivo mecatrónico FHPS

El sistema de plataforma horizontal de orden fraccional (FHPS por sus siglas en inglés) es un instrumento mecatrónico que rota alrededor de un eje horizontal. Se

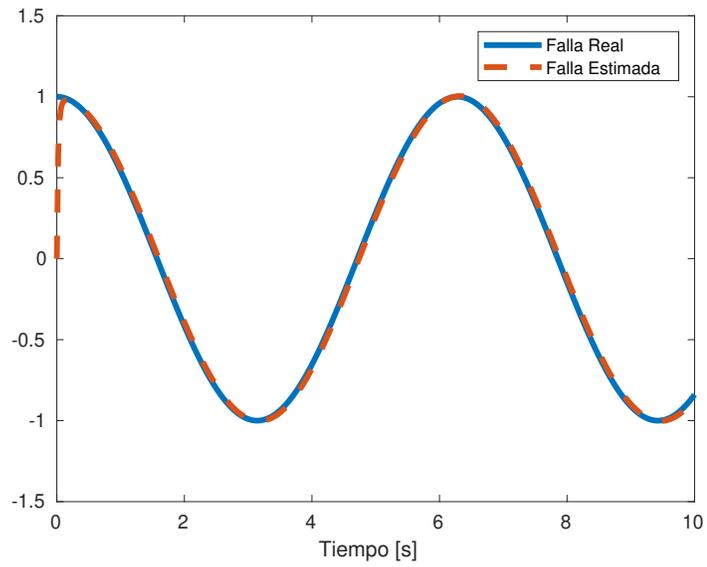


Figura 5.13: Observador Fraccional de Orden Reducido.

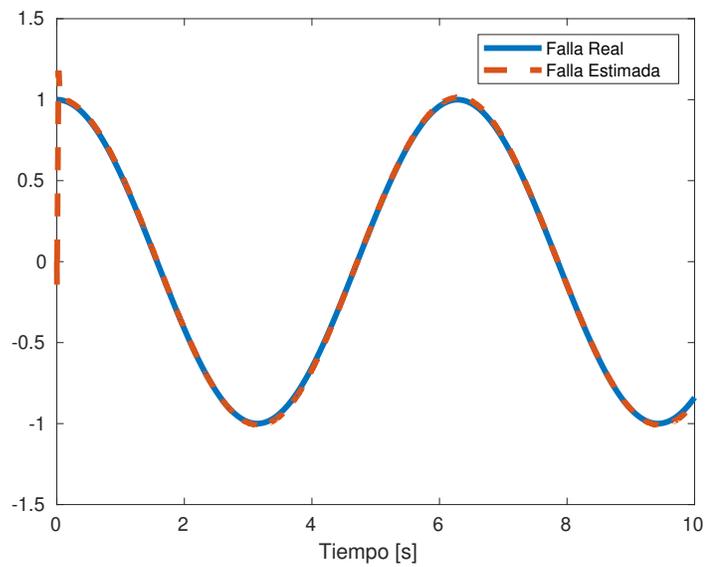


Figura 5.14: Observador Fraccional por Modos Deslizantes.

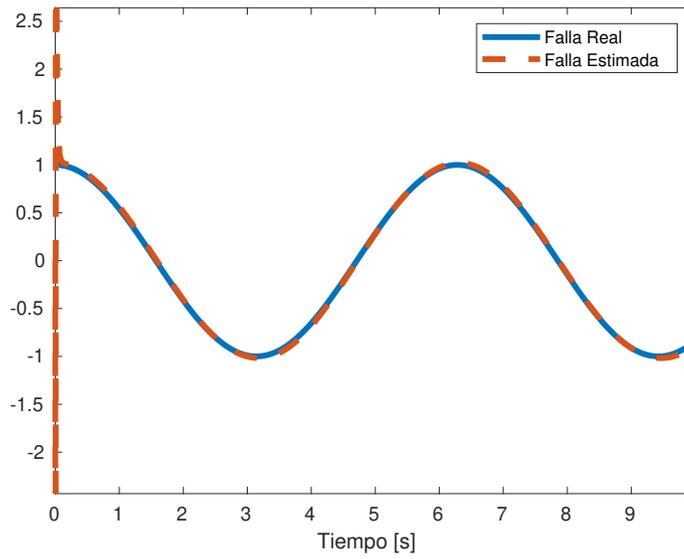


Figura 5.15: Observador Fraccional Proporcional Integral.

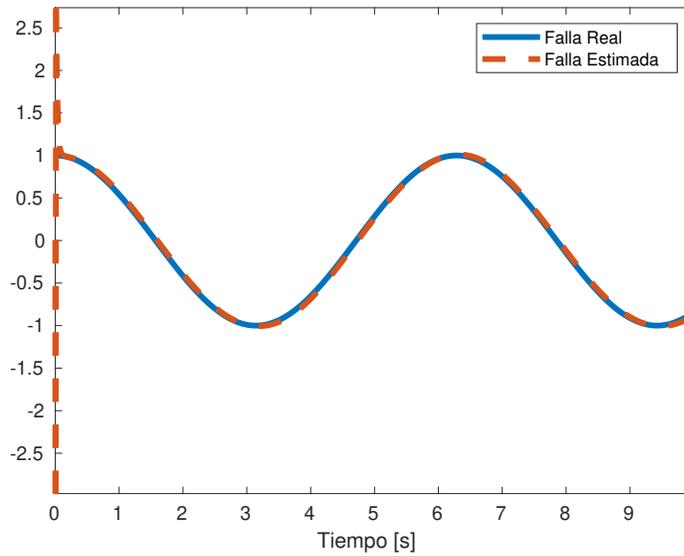


Figura 5.16: Observador Fraccional Proporcional.

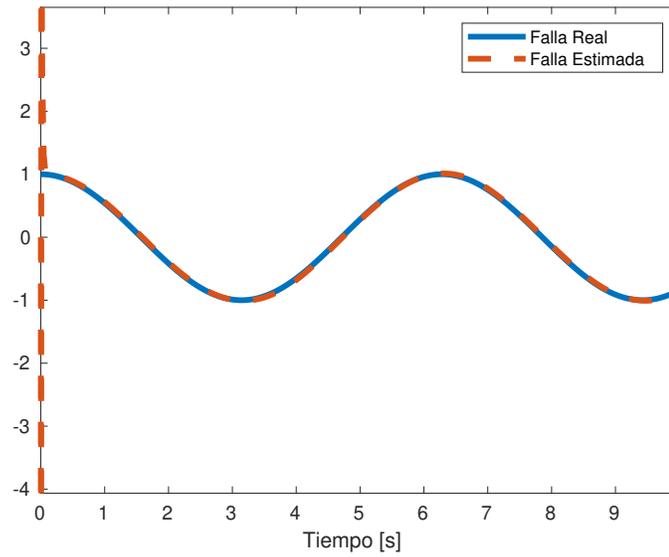


Figura 5.17: Observador Fraccional de Alta Ganancia.

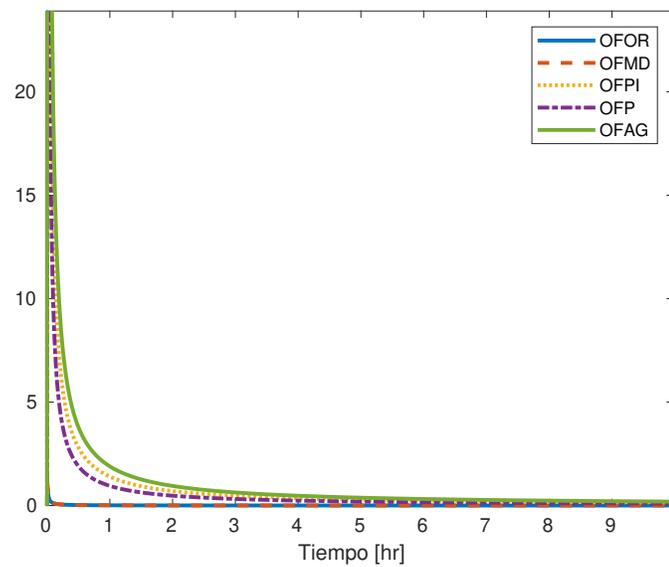


Figura 5.18: Función de Costo para los Observadores Fraccionales del Oscilador de Van der Pol.

Suma de la Función de Costo			
Función de Costo	Valor	ISE	ITSE
J de FROO	877.9348	-236.5732	-2131
J de FSMO	927.3994	72.7844	350.0012
J de FPIO	11421	-37.5316	-55.1428
J de FPO	77795	-215.5464	-1858
J de FHGO	15444	-138.0158	-1116.4

Tabla 5.3: Función de Costo del Oscilador de Van der Pol

utilizan generalmente en ingeniería sísmica. El FHPS posee movimientos caóticos y oscilatorios [100]. El comportamiento fraccional del FHPS se describe mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 x_1^{(\alpha)} &= x_2 \\
 x_2^{(\alpha)} &= -ax_2 - b\sin(x_1) + l\sin(x_1)\cos(x_1) \\
 &\quad + F\cos(\omega t) + u(t) + f(t) \\
 y &= x_1
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

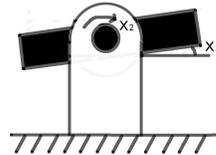


Figura 5.19: Dispositivo mecatrónico FHPS.

La condición DAF f se puede obtener considerando las ecuaciones dinámicas de x_2 del sistema (5.31), i.e, las señales desconocidas (o fallas) se expresan de acuerdo a la salida y su derivadas fraccionales.

$$\begin{aligned}
 f &= \phi_{f_1}(y, y^{(\alpha)}) = y^{(2\alpha)} + ay^{(\alpha)} + b\sin(y) - l\sin(y)\cos(y) \\
 &\quad - F\cos(\omega t) - u(t)
 \end{aligned}$$

El observador fraccional de orden reducido para f es descrito como:

$$\begin{aligned}
 \hat{f}^{(\alpha)} &= K_{\hat{f}}(y^{(2\alpha)} + ay^{(\alpha)} + b\sin(y) - l\sin(y)\cos(y) \\
 &\quad - F\cos(\omega t) - u(t) - \hat{f})
 \end{aligned}$$

La siguiente variable artificial puede ser definida para evitar la necesidad de calcular una segunda derivada fraccional.

$$\gamma_f \triangleq \hat{f} - K_{\hat{f}}y^{(\alpha)} \tag{5.32}$$

Finalmente, considerando la derivada fraccional del sistema (5.32), el observador fraccional de orden reducido es escrito como:

$$\begin{aligned}\gamma_f^{(\alpha)} &= -K_{\hat{f}}(\gamma_f - ay^{(\alpha)} - b\sin(y) + l\sin(y)\cos(y) \\ &\quad + F\cos(\omega t) + u(t)) - K_{\hat{f}}^2 y^{(\alpha)}, \\ \gamma_f(0) &= \gamma_{f_0} \\ \hat{f} &= \gamma_f + K_{\hat{f}} y^{(\alpha)}\end{aligned}$$

El observador fraccional por modos deslizantes para f es descrito como sigue:

$$\begin{aligned}\hat{f}^{(\alpha)} &= \rho \text{sign}(y^{(2\alpha)} + ay^{(\alpha)} + b\sin(y) - l\sin(y)\cos(y) \\ &\quad - F\cos(\omega t) - u(t) - \hat{f})\end{aligned}$$

El observador fraccional proporcional integral para f es descrito como sigue:

$$\begin{aligned}\hat{f}^{(\alpha)} &= k_1(y^{(2\alpha)} + ay^{(\alpha)} + b\sin(y) - l\sin(y)\cos(y) \\ &\quad - F\cos(\omega t) - u(t) - \hat{f}) + \zeta \\ \zeta^{(\alpha)} &= k_2(y^{(2\alpha)} + ay^{(\alpha)} + b\sin(y) - l\sin(y)\cos(y) \\ &\quad - F\cos(\omega t) - u(t) - \hat{f})\end{aligned}$$

El observador fraccional proporcional para f es descrito como sigue:

$$\begin{aligned}\hat{f}^{(\alpha)} &= K(y^{(2\alpha)} + ay^{(\alpha)} + b\sin(y) - l\sin(y)\cos(y) \\ &\quad - F\cos(\omega t) - u(t) - \hat{f})\end{aligned}$$

El observador fraccional de alta ganancia para f es descrito como sigue:

$$\begin{aligned}\hat{f}^{(\alpha)} &= S_{\theta}^{-1} C^T (y^{(2\alpha)} + ay^{(\alpha)} + b\sin(y) - l\sin(y)\cos(y) \\ &\quad - F\cos(\omega t) - u(t) - \hat{f})\end{aligned}$$

La simulación para el sistema (5.31) es presentada considerando la dinámica de la falla f , la cual es descrita por la siguiente ecuación:

$$f = \cos(t)$$

Las simulaciones numéricas son obtenidas en Matlab Simulink y con la herramienta FOMCON. Los resultados en simulación son obtenidos considerando las condiciones iniciales $f_0 = 0$ y los parámetros $K_{\hat{f}} = 30, \alpha = 0.1$. Los resultados son mostrados en la Figura 5.20.

Los resultados en simulación para el observador fraccional por modos deslizantes son obtenidos considerando el parámetro $\rho = 25$. Los resultados son mostrados en la Figura 5.21.

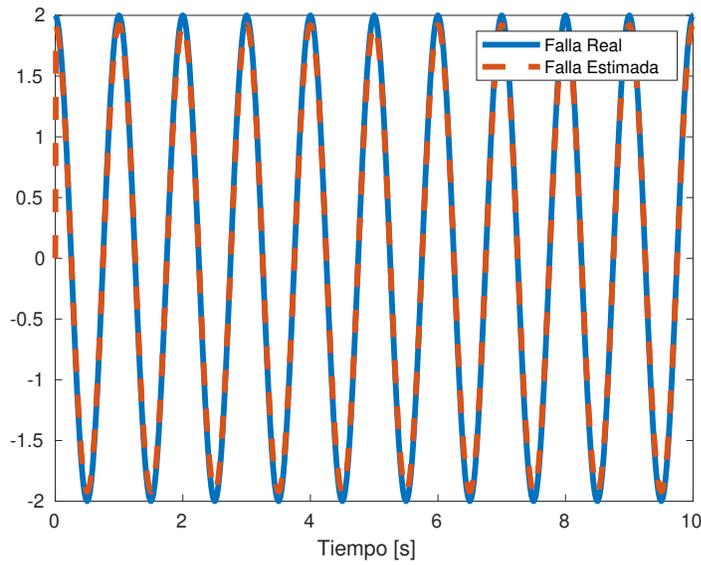


Figura 5.20: Observador Fraccional de Orden Reducido.

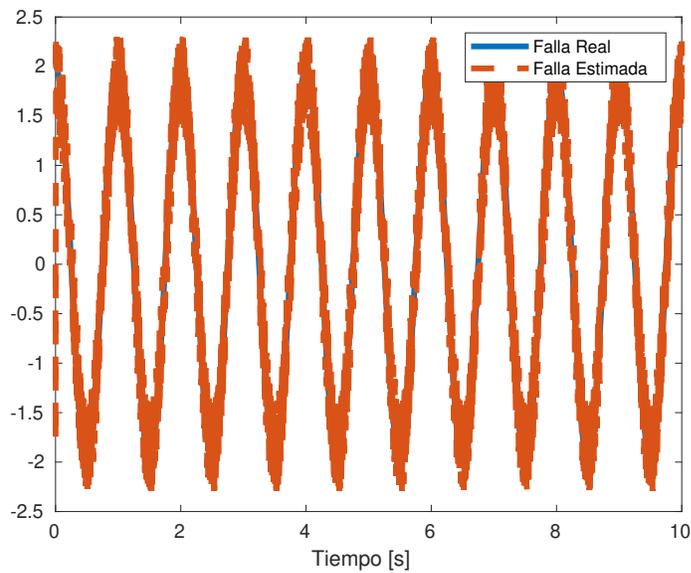


Figura 5.21: Observador Fraccional por Modos Deslizantes.

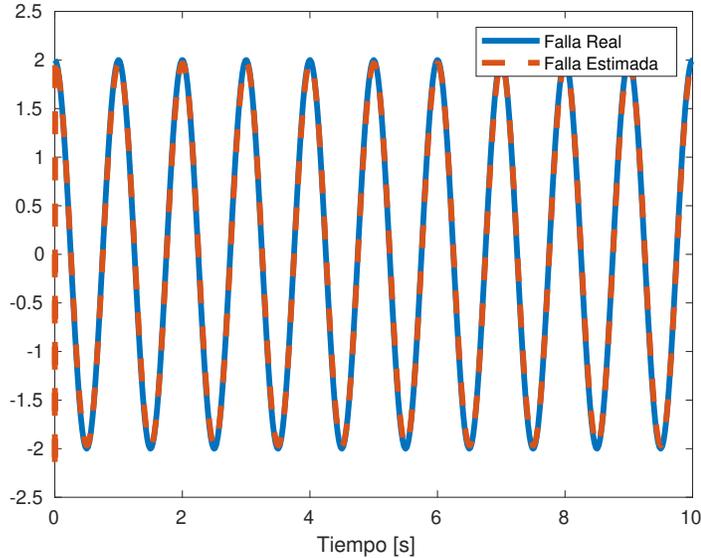


Figura 5.22: Observador Fraccional Proporcional Integral.

Los resultados en simulación para el observador fraccional proporcional integral son obtenidos considerando los parámetros $k_1 = k_2 = 35$. Los resultados son mostrados en la Figura 5.22.

Los resultados en simulación para el observador fraccional proporcional son obtenidos considerando el parámetro $K = 30$. Los resultados son mostrados en la Figura 5.23.

Los resultados en simulación para el observador fraccional de alta ganancia son obtenidos considerando el parámetro $\theta = 20$ y la matriz de ganancia $S_\theta^{-1} = \begin{pmatrix} 40 & 400 \\ 400 & 8000 \end{pmatrix}$. Los resultados son mostrados en la Figura 5.24.

Tabla 5.4: Cost Function FHPS

Suma de la Función de Costo			
Función de Costo	Valor	ISE	ITSE
J de OFOR	328.4644	302.4534	1492.3
J de OFMD	75877	8033.2	39165
J de OFPI	1944.5	332.0863	690.2030
J de OFP	2123.9	547.7563	1804.5
J de OFAG	2033.7	425.5580	1162.8

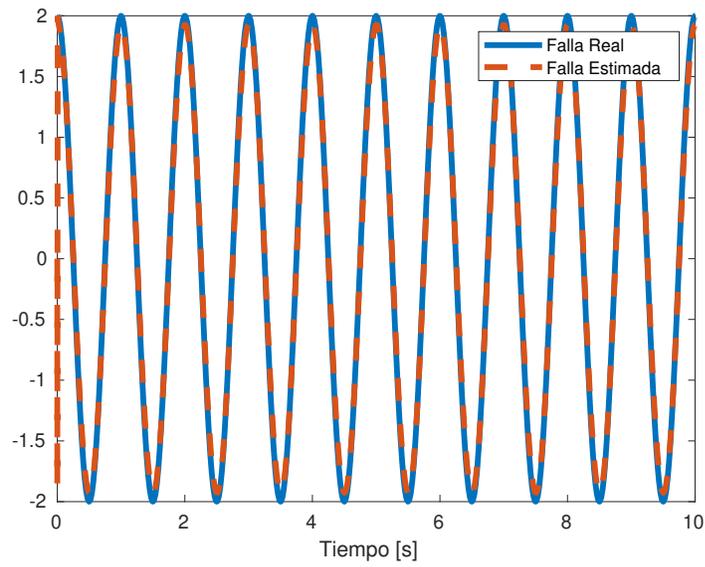


Figura 5.23: Observador Fraccional Proporcional.

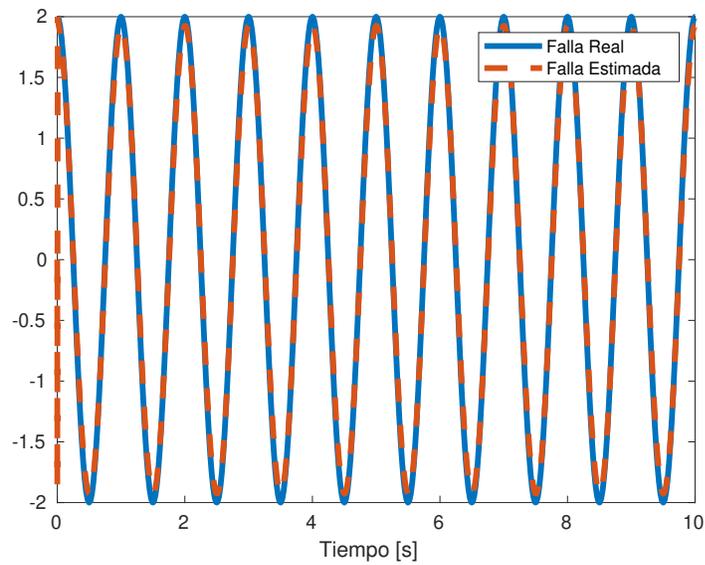


Figura 5.24: Observador Fraccional de Alta Ganancia.

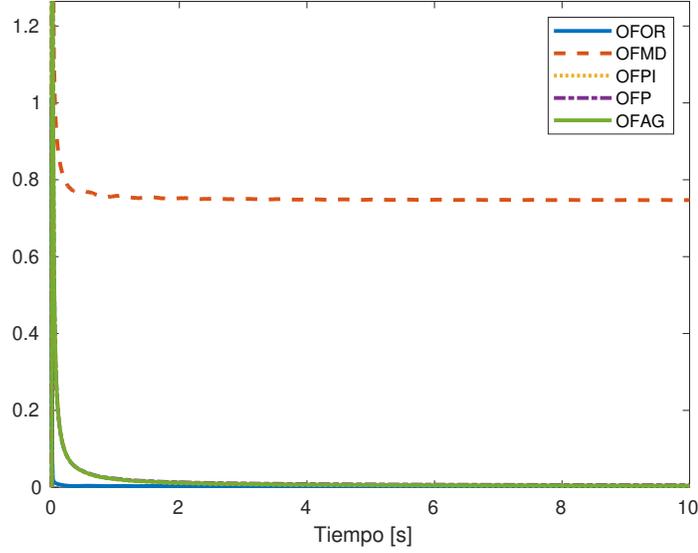


Figura 5.25: Función de Costo de los Observadores Fraccionales del FHPS.

5.2.3. Modelo Bergman

El modelo mínimo generalizado de Bergman para glucosa-insulina es un modelo que se aproxima a la respuesta dinámica de la concentración de glucosa en sangre de un paciente diabético a la inyección de insulina. Consideremos el modelo de Orden Fraccional que monitorea la dinámica temporal de la concentración de glucosa en sangre [98] y [100]:

$$\begin{aligned}
 x_1^{(\alpha)} &= -p_1(x_1 - G_b) - x_1x_2 + f(t) \\
 x_2^{(\alpha)} &= -p_2x_2 + p_3(x_3 - I_b) \quad 0 < \alpha \leq 1 \\
 x_3^{(\alpha)} &= -n(x_3 - I_b) + u \\
 y &= x_1
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

donde x_1 , x_2 y x_3 son la concentración de glucosa en plasma sanguíneo (mg/dl), la concentración de glucosa en sangre se considera como la salida y. G_b representa el nivel basal de glucosa previo a la inyección, I_b es el nivel basal de insulina antes de la inyección y u actúa como la variable de control. La regulación normal de insulina no existe en pacientes diabéticos, esta absorción de glucosa es considerada como una falla $f(t)$ para el sistema 5.33. La falla puede ser modelada por $A\sin(\omega t)$, representando ritmos circadianos (ciclos endocrinos) con periodo de 8 h y amplitud alrededor de 10 mg/dl.

$$f(t) = A|\sin(\omega t)|$$

con $A = 10mg/dl$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ y $T = 8hr$.

Para este ejemplo, el componente de falla está dado por

$$f = \phi(y, y^{(\alpha)}, x_2) = y^{(\alpha)} + p_1(y - G_b) + yx_2 \quad (5.34)$$

Se puede notar que f no cumple con la definición de DAF debido a la dependencia de x_2 , para resolver este problema podemos definir las variables de estado $x_2 = \beta$ y $x_3 = \xi$ y rescribir el sistema 5.33 como

$$\begin{aligned} x_1^{(\alpha)} &= -p_1(x_1 - G_b) - \beta x_1 + f(t) \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

donde, β y ξ tienen las dinámicas descritas por

$$\begin{aligned} \beta^{(\alpha)} &= -p_3(\xi - I_b) - p_2\beta \\ \xi^{(\alpha)} &= nI_b + u - n\xi \end{aligned}$$

Con 5.34 y las soluciones de β and ξ , se obtiene la siguiente ecuación fraccional

$$\hat{f}^{(\alpha)} = K_{\hat{f}}(y^{(\alpha)} + p_1(x_1 - G_b) + y\beta - \hat{f})$$

Se usa el Corolario 3 y seleccionando la variable $\gamma_f \geq \hat{f} - K_{\hat{f}}y$ el observador fraccional de orden reducido para f en el sistema 5.33 es definido como

$$\begin{aligned} \gamma_f^{(\alpha)} &= -K_{\hat{f}}(\gamma_f - p_1(x_1 - G_b) - y\beta) - K_{\hat{f}}^2 y \\ \hat{f} &= \gamma_f + K_{\hat{f}}y \end{aligned}$$

El observador fraccional por modos deslizantes para f es descrito como sigue:

$$\hat{f}^{(\alpha)} = \rho \text{sign}(y^{(\alpha)} + p_1(x_1 - G_b) + y\beta - \hat{f})$$

El observador fraccional proporcional integral para f es descrito como sigue:

$$\begin{aligned} \hat{f}^{(\alpha)} &= k_1(y^{(\alpha)} + p_1(x_1 - G_b) + y\beta - \hat{f}) + \zeta \\ \zeta^{(\alpha)} &= k_2(y^{(\alpha)} + p_1(x_1 - G_b) + y\beta - \hat{f}) \end{aligned}$$

El observador fraccional proporcional para f es descrito como sigue:

$$\hat{f}^{(\alpha)} = K(y^{(\alpha)} + p_1(x_1 - G_b) + y\beta - \hat{f})$$

El observador fraccional de alta ganancia para f es descrito como sigue:

$$\hat{f}^{(\alpha)} = S_{\theta}^{-1}C^T(y^{(\alpha)} + p_1(x_1 - G_b) + y\beta - \hat{f})$$

Las siguientes simulaciones numéricas fueron realizadas en Matlab Simulink y utilizando la herramienta FOMCON. Los resultados numéricos se obtienen con constantes conocidas $p_1 = 0$, $p_2 = 0.02$, $p_3 = 5.3 \times 10^{-6}$, $n = 0.3$, $G_b = 70$, $I_b = 7$ y las condiciones iniciales $x_{10} = 220$, $x_{20} = 0$ y $x_{30} = 50$. La ganancia fraccional del observador

K_f y la condición inicial son escogidas como $K_f = 10$, $\gamma_{f0} = -2200$. La simulación se realizó durante 30 h y un orden fraccional de $\alpha = 0.935$ las Figuras 5.26,5.27,5.28,5.29 y 5.30 muestran cómo se logra el diagnóstico de la falla. En la Figura 5.26 que corresponde al observador de orden reducido fraccional, podemos notar que existe un pequeño error entre la falla estimada y la falla real, esto se debe a que la falla estimada tarda un tiempo en llegar a la falla real.

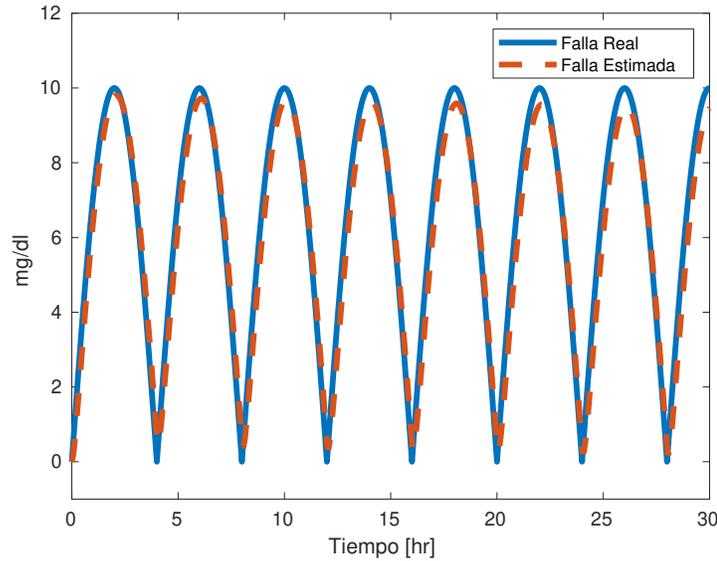


Figura 5.26: Observador Fraccional de Orden Reducido del Modelo Bergman

Los resultados de la simulación para los observadores de modos deslizantes fraccionales se obtienen considerando el parámetro $\rho = 100$. Los resultados se muestran en la Figura 5.27. La ganancia del observador ρ se selecciona para lograr el mejor rendimiento, podemos notar que la falla estimada y la falla real tienen un error muy pequeño entre ellas y que el tiempo para que la falla estimada llegue a la falla real también es muy pequeño.

Los resultados de la simulación para los observadores integrales proporcionales fraccionales se obtienen considerando los parámetros $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 100$. Los resultados se muestran en la Figura 5.28. Las ganancias del observador $k_1 = k_2 = k_3 = k_4$ se seleccionan para lograr el mejor rendimiento, estas ganancias no pueden ser tan grandes como queremos, hay un límite en el que estas ganancias no da un mejor resultado, seleccionamos este valor en 100, que da el mejor resultado. Podemos notar que la falla estimada y la falla real tienen un error muy pequeño entre ellas y que el tiempo para que la falla estimada llegue a la falla real también es muy pequeño.

Los resultados de la simulación para el observador proporcional fraccional se obtienen considerando el parámetro $K = 100$. Los resultados se muestran en la Figura 5.29. Este observador es un caso especial del observador integral proporcional, en este solo se toma en cuenta la parte proporcional, se selecciona la ganancia del observador para lograr el mejor desempeño posible, podemos notar que el valor estimado de la

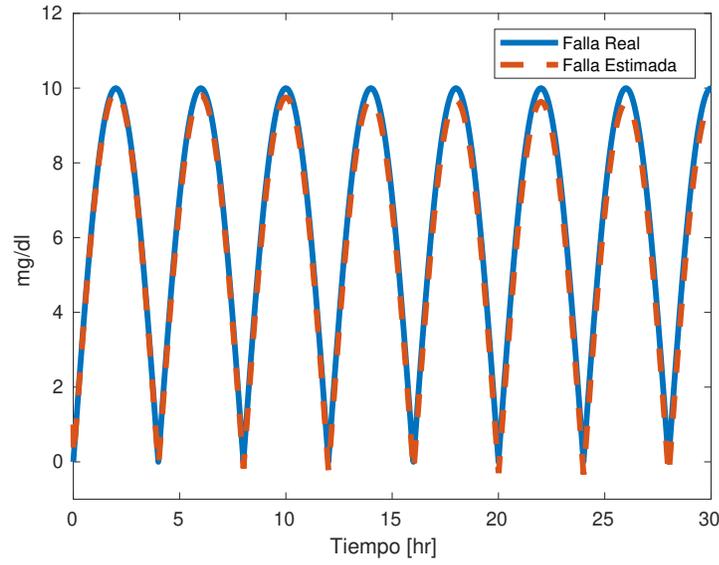


Figura 5.27: Observador Fraccional por Modos Deslizantes del Modelo Bergman.

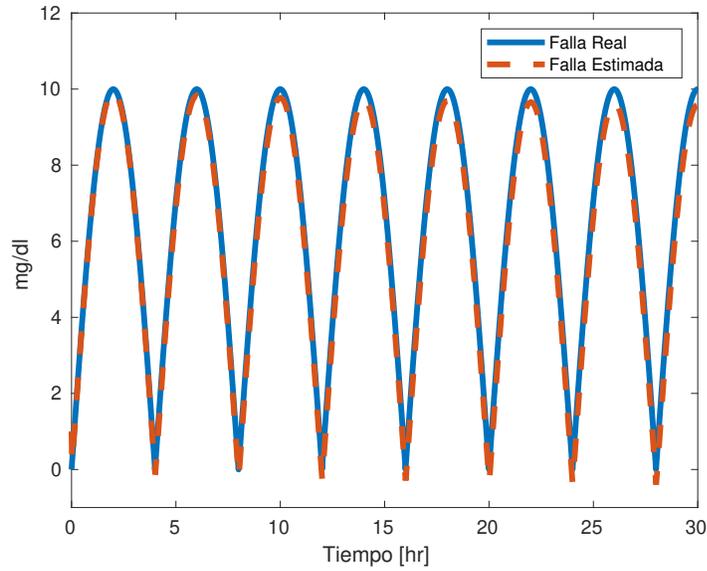


Figura 5.28: Observador Fraccional Proporcional Integral del Modelo Bergman.

falla y la falla real tienen un error muy pequeño entre ellos y que el tiempo para que la falla estimada llegue a la falla real también es muy pequeño.

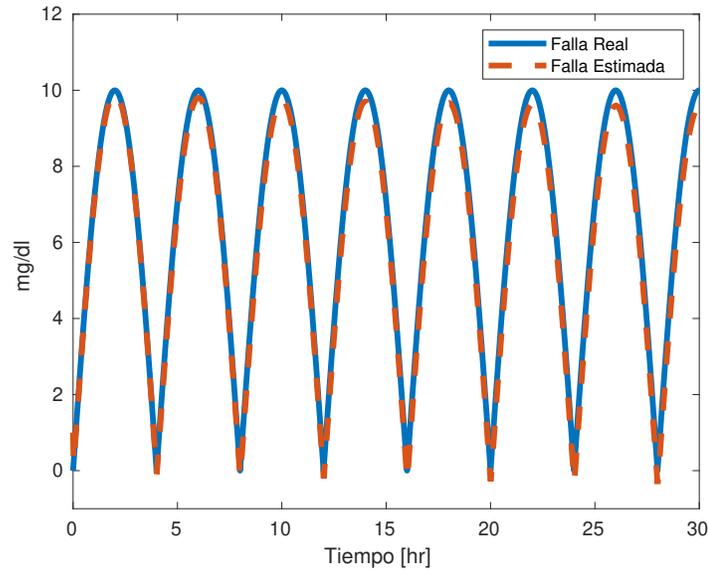


Figura 5.29: Observador Fraccional Proporcional del Modelo Bergman.

Los resultados de la simulación para el observador de alta ganancia fraccional se obtienen considerando el parámetro $\theta = 150$ y la matriz de ganancia $S_{\theta}^{-1} = \begin{pmatrix} 300 & 22500 \\ 22500 & 3375000 \end{pmatrix}$. Los resultados se muestran en la Figura 5.30.

Suma de la función de costo			
Función de Costo	Valor	ISE	ITSE
J de OFOR	94574	104610	1740500
J de OFMD	8685.3	13645	248000
J de OFPI	8757.6	13789	251600
J de OFP	14256	27835	558040
J de OFAG	13240	26875	541230

Tabla 5.5: Función de Costo Modelo Bergman

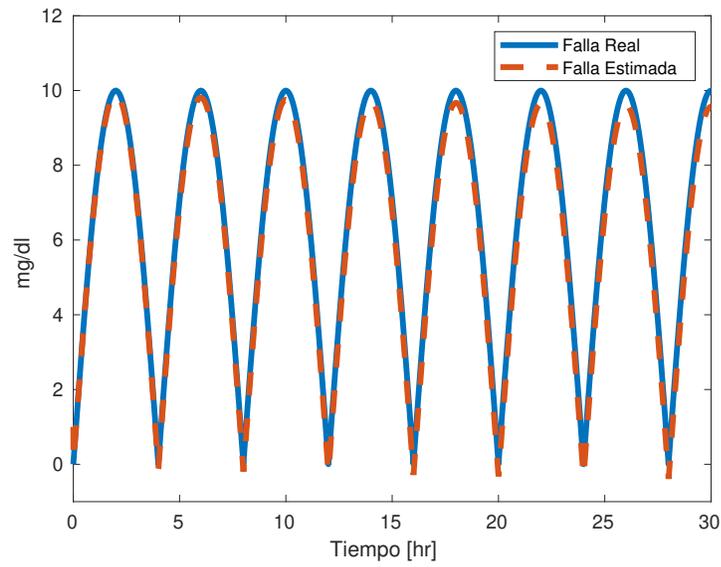


Figura 5.30: Observador Fraccional de Alta Ganancia del Modelo Bergman.

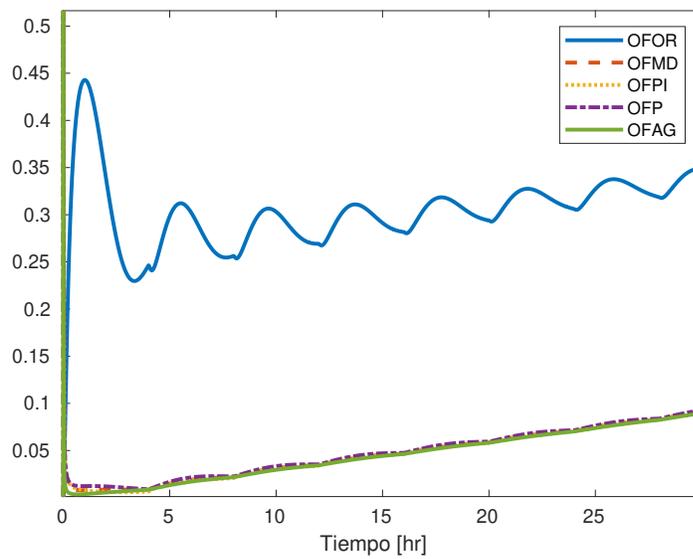


Figura 5.31: Función de Costo de los Observadores Fraccionales del Modelo Bergman.

Capítulo 6

Conclusiones

6.1. Conclusiones

En esta tesis hemos introducido un observador de alta ganancia para sistemas de orden fraccional. Se motivó el caso fraccional con un ejemplo en caso entero, que se ilustró con el ejemplo de un sistema tipo Lotka-Volterra, se observó que en el caso entero, el observador estima los estados desconocidos y su señal de error converge a cero, para el caso en el que la salida del sistema contiene ruido y se tienen dinámicas no modeladas.

Para el caso del observador de alta ganancia para sistemas no lineales de orden fraccional, se obtuvieron los siguientes resultados: se demostró que con la técnica utilizada, es decir definiendo el sistema aumentado, se puede obtener un observador de alta ganancia que es globalmente Mittag-Leffler acotado. Además se obtuvieron dos corolarios, el primero (Corolario 1) cuando no hay ruido en la medición de la salida, se obtuvo un observador de alta ganancia Mittag-Leffler estable y cuyo error de estimación permanece en un conjunto compacto; y el segundo (Corolario 2) cuando el orden fraccional es igual a uno ($\alpha = 1$), en cuyo caso se obtuvo un observador de alta ganancia últimamente uniformemente acotado y cuyo error de estimación también se encuentra acotado. Notése que el Corolario 2, es un resultado directo, del análisis previo que se hizo para sistemas no lineales de orden entero, visto en la sección 2.2.

Respecto a los observadores fraccionales para la estimación de fallas, se tienen las siguientes conclusiones: A partir de las simulaciones numéricas y el índice de rendimiento resumido en la Tabla 5.1 y 5.5, se puede notar que el mejor rendimiento se logra con el observador de modos deslizantes fraccionales, también se puede corroborar mediante el índice resumido en la Tabla 5.3 y 5.4 que el observador fraccional de orden reducido tiene un mejor desempeño. El observador fraccional por modos deslizantes y el observador fraccional de orden reducido, resultaron ser en dos ocasiones cada uno, el observador que tiene mejor desempeño. Los cinco observadores fraccionales implementados estiman las fallas del sistema fraccional no lineal, aunque el observador fraccional de modos deslizantes y el observador fraccional de orden reducido dan un mejor resultado. En este trabajo se realizó un estudio de comparación, se implementaron

los observadores en un Sistema No Lineal Fraccional para validar los observadores, se compararon cinco observadores fraccionales y verificamos cuál tiene mejor desempeño.

Como trabajo futuro se propone diseñar un control basado en observación, utilizando el observador de alta ganancia descrito por el Teorema 4.1, esto es un observador de alta ganancia globalmente Mittag-Leffler acotado y que es para sistemas no lineales de orden fraccional. Se propone diseñar otro tipo de estimadores, para poder corroborar la eficacia del observador propuesto en la presente tesis.

‘

Bibliografía

- [1] Doyle J.C. y Stein G. Robustness with observers. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 24(4):607–611, 1979.
- [2] Petersen I.R. y Holot C.V. High-gain observers applied to problems in disturbance attenuation, h-infinity optimization and the stabilization of uncertain linear systems. *Proc. American Control Conf.*, pages 2490–2496, 1988.
- [3] Khalil H.K. y Saberi A. Adaptive stabilization of a class of nonlinear systems using high-gain feedback. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, pages 1031–1035, 1987.
- [4] Tornambe A. Use of asymptotic observers having high-gains in the state and parameter estimation. *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 1792–1794, 1988.
- [5] Esfandiari F. y Khalil H.K. Observer-based design of uncertain systems: Recovering state feedback robustness under matching conditions. *Proc. Allerton Conf.*, pages 97–106, 1987.
- [6] Gauthier J.P., Hammouri H., Othman S., et al. A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors. *IEEE Transactions on automatic control*, 37(6):875–880, 1992.
- [7] Esfandiari F. y Khalil H.K. Output feedback stabilization of fully linearizable systems. *Int. J. Contr.*, pages 1007–1037, 1992.
- [8] Martínez-Guerra R. y Martínez-Fuentes O. A high-gain observer with mittag-leffler rate of convergence for a class of nonlinear fractional-order system. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 79, 2019.
- [9] Etlili D. y Khedher A. y Errachdi A. A proposed high-gain observer for a class of nonlinear fractional-order systems. *Mathematical Problems in Engineering*, 2021.
- [10] Muñoz-Vázquez A.J., Parra-Vega V., Sánchez-Orta A., Martínez-Fuentes O. High-gain fractional disturbance observer control of uncertain dynamical systems. *Journal of the Franklin Institute*, 358(9):4793–4806, 2021.

- [11] Vázquez-Guerrero P., Gómez-Aguilar J., Santamaria F., Escobar-Jiménez R. Design of a high-gain observer for the synchronization of chimera states in neurons coupled with fractional dynamics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 539, 2020.
- [12] Bettayeb M., Al-Saggaf U.M., Djennoune S. High gain observer design for fractional-order non-linear systems with delayed measurements: application to synchronization of fractional-order chaotic systems. *IET Control Theory and Applications*, 11(17):3171–3178, 2017.
- [13] Rodriguez-Mata AE., Bustos-Terrones Y., Gonzalez-Huitrón V., Lopéz-Peréz P.A., Hernández-González O., Amabilis-Sosa LE. A fractional high-gain non-linear observer design application for rivers environmental monitoring model. *Mathematical and Computational Applications*, 25(3):44, 2020.
- [14] Tsao J.H. y Wu W.T. Global control of a continuous stirred tank bioreactor. *The Chemical Engineering Journal and the Biochemical Engineering Journal*, 56(1):69–74, 1994.
- [15] Failla G. y Zingales M. Advanced materials modelling via fractional calculus: challenges and perspectives. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 378(2172), 2020.
- [16] Baleanu D. y Agarwal R.P. Fractional calculus in the sky. *Advances in Difference Equations*, pages 1–9, 2021.
- [17] Khajehsaeid H. Application of fractional time derivatives in modeling the finite deformation viscoelastic behavior of carbon-black filled nr and sbr. *Polymer Testing*, 68:110–115, 2018.
- [18] Voyiadjis G.Z., Sumelka W. Brain modelling in the framework of anisotropic hyperelasticity with time fractional damage evolution governed by the caputo-almeida fractional derivative. *Journal of the mechanical behavior of biomedical materials*, 89:209–216, 2019.
- [19] Makris N. y Efthymiou E. Time-response functions of fractional derivative rheological models. *Rheologica Acta*, 59(12):849–873, 2020.
- [20] Khalil HK. High-gain observers in feedback control: Application to permanent magnet synchronous motors. *IEEE Control Systems Magazine*, 37(3):25–41, 2017.
- [21] Liu H. y Khalil H.K. Output feedback stabilization using super-twisting control and high-gain observer. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 29(3):601–617, 2019.
- [22] Liu W. y Huang J. Event-triggered cascade high-gain observer and its application. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 30(6):2335–2351, 2020.

- [23] Corless M., Leitmann G. Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, pages 1139–1144, 1981.
- [24] J.H. Hubbard y B.H. West. *Differential equations, Part I*. Springer-Verlag, 1991.
- [25] Song W. y Liang J. Difference equation of lorenz system. *Int J Pure Appl Math*, 2013.
- [26] Ott E. Chaos in dynamical systems. *Cambridge university press*, 1994.
- [27] Grigorenko I., Grigorenko E. Chaotic dynamics of the fractional lorenz system. *Phys Rev Lett*, 91, 2003.
- [28] Munazah Lyle, Parsa Sarosh, Shabir A. Parah. Selective medical image encryption based on 3d lorenz and logistic system. *Multimedia Tools and Applications*, 2024.
- [29] O. Rössler. An equation for continuous chaos. *Phys. Lett. A*, 1976.
- [30] Zbigniew Galias. A fast method to find periodic orbits in chaotic attractors with applications to the rössler system. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 2023.
- [31] Li C.G., Chen G. Chaos and hyperchaos in fractional order rössler equations. *Physica A*, 341:55–61, 2004.
- [32] W. S. Mada Sanjaya. Encryption of digital images and voices using the arneodo-couillet-tresser chaotic system. *Phys. Scr.*, 2023.
- [33] Arneodo A., Couillet P., Spiegel E., Tresser C. Asymptotic chaos. *Physica D*, 14(3):327–347, 1985.
- [34] Arneodo A., Couillet P., Tresser C. Possible new strange attractors with spiral structure. *Commun. Math. Phys*, 1981.
- [35] Adelakun A. O., Ogunjo S. T., Fuwape I. A. Chaos suppression in fractional order systems using state-dependent noise. *SN Applied Sciences*, 2019.
- [36] Shantanu Das. *Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
- [37] Anatoly A. Kilbas, Hari M. Srivastava, Juan J. Trujillo. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier B.V., 2006.
- [38] Oldham K.B. y Spanier J. *The Fractional Calculus*. Academic Press New York, 1974.
- [39] Podlubny I. *Fractional Differential Equation*. Academic Press, San Diego, 1999.

- [40] Carpinteri A. y Mainardi F. *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [41] Hilfer E. *Applications of Fractional Calculus in Physics*. World Sci. Publishing, New York, 2000.
- [42] Zaslavsky G. M. *Chaos and Fractional Dynamics*. Oxford University Press, Oxford, 2005.
- [43] Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*. Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland, 1993.
- [44] B. Miller K. S. y Ross. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. Wiley and Sons, New York, 1993.
- [45] Oustaloup A. From fractality to non integer derivation: A fundamental idea for a new process control strategy. *Anal. Optim. Syst.*, pages 53–64, 2006.
- [46] Podlubny I., Dorcak K., Kostial I. On fractional derivatives, fractional-order dynamic systems and $pi^\lambda d^\mu$ controllers. *In Proceedings of the Conference on Decision and Control, San Diego, CA, USA, 10–12 December 1997*, pages 4985–4990, 1997.
- [47] Podlubny I. Fractional-order systems and $pi^\lambda d^\mu$ controllers. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1999.
- [48] Lurie B.J. Three parameter tunable tilt-integral derivative (tid) controller. *US Patent, US5371 670*, 1994.
- [49] Monje C.A., Calderon A.J., Vinagre B.M. The fractional order lead compensator. *In Proceedings of the IEEE International Conference on Computational Cybernetics*, pages 347–352, 2004.
- [50] Tavazoei M.S. y Tavakoli-Kakhki M. Compensation by fractional-order phase-lead/lag compensators. *IET Control Theory Appl.*, 2014.
- [51] Federico S.F. y Torres F.M. Fractional conservation laws in optimal control theory. *Nonlinear Dyn.*, 2008.
- [52] Agrawal C. y Chen Y.Q. An approximate method for numerically solving fractional-order optimal control problems of general. *Comput. Math. Appl.*, 2010.
- [53] Ladcai S. Charef. On fractional adaptive control. *Nonlinear Dyn.*, 2006.
- [54] Aguila-Camacho y N. Duarte-Mermoud M.A. Fractional adaptive control for automatic voltage regulator. *ISA Trans.*, pages 807–815, 2013.

- [55] Carlson y Halijak. Simulation of the fractional derivative operator \sqrt{s} and fractional integral operator $1/\sqrt{s}$. *Kansas State University Bulletin*, 45:1–22, 1964.
- [56] D. Matignon. Generalized fractional differential and difference equation: Stability properties and modeling issues. *Theory of Networks and Systems Symposium, Padova, Italy*, 1998.
- [57] Mauro Bologna. Short introduction to fractional calculus. *Univ. Tarpeca Chile. Lecture Notes*, pages 41–54, 2005.
- [58] R. K. Saxena. Fractional calculus and fractional differential equations. *Jai Narayan Vyas University Rajasthan*, pages 1–39, 2006.
- [59] Adam Loverro. Fractional calculus history definition and application. *Department of Aerospace and Mechanical Engg. University of Notre Dame*, 2004.
- [60] Jack Leszczynski et al. A numerical method solution for ordinary differential equation of fractional order. *Technical university of Czestochowa Poland*, 2005.
- [61] Kuo Diethelm y Ford. Analysis of fractional differential equations. *University of Manchester. Numerical Analysis Report*, pages 1–18, 2003.
- [62] K. Diethelm. An algorithm for the numerical solution of differential equations of fractional order. *Electronics transactions on Numerical Analysis*, 5:1–6, 1997.
- [63] Bohennan Gary. Analog realization of fractional order control element revisited. *Department of Physics Montonna State Univ*, 2002.
- [64] Sabzikar F., Meerschaert M., Chen J. Tempered fractional calculus. *J. Comput. Phys.*, 293:14–28, 2015.
- [65] Podlubny I. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. *Mathematics in Science and Engineering*, 198:340, 1999.
- [66] K. Diethelm. *The Analysis of Fractional Differential Equations*. Berlin, Germany: Springer, 2010.
- [67] Jerome Spanier, Keith B. Oldham. Reviewed work: An atlas of functions. *Mathematics of Computation*, 51(183):382–383, 1988.
- [68] K.M. Kolwankar, A.D. Gangal. Fractional differentiability of nowhere differentiable functions and dimension. *Chaos*, 6:505–513, 1996.
- [69] K.M. Kolwankar, A.D. Gangal. Hölder exponents of irregular signals and local fractional derivatives. *Pramana*, 48:49–68, 1997.
- [70] K.M. Kolwankar, A.D. Gangal. Local fractional derivatives and fractal functions of several variables. *preprint*, 1998.

- [71] Podlubny I. *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Elsevier, 1998.
- [72] H. M. Srivastava. On extension of mittag-leffler function. *Yokohama Math. J.*, 16(2):77–88, 1968.
- [73] Wan P., Jian J. Global mittag-leffler boundedness for fractional-order complex-valued cohen-grossberg neural networks. *Neural Processing Letters*, 2019.
- [74] Liu S., Jiang W., Li X., Zhou X.F. Lyapunov stability analysis of fractional nonlinear systems. *Applied Mathematics Letters*, 2016.
- [75] Chen J., Zeng Z., Jiang P. Global mittag-leffler stability and synchronization of memristor-based fractional-order neural networks. *Neural Networks*, 2014.
- [76] Li Y., Chen Y., Podlubny I. Mittag-leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems. *Automatica*, 45(8):1965–1969, 2009.
- [77] Xiaorang Li et al. On concept of local fractional differentiation. *Department of applied mathematics University of Western Ontario London*, 2004.
- [78] Shih-Tong, H. M. Srivastava et al. A certain family of fractional differential equations. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 4(3):417–426, 2000.
- [79] Lubomir Dorcak. Numerical models for simulation of fractional order control system. *Slovak Accedemy of Science*, pages 1–15, 1994.
- [80] M. Axtell, M. E. Bise. Fractional calculus applications in control systems. *Proc of IEEE Nat.Aerospace and Electronics Conf, New York*, pages 563–566, 1990.
- [81] V.Kirayakova. Generalized fractional calculus and applications. *Pitman Research Notes in Maths*, (301), 1994.
- [82] Mofid O., Mobayen S., Khooban M.H. Sliding mode disturbance observer control based on adaptive synchronization in a class of fractional-order chaotic systems. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 33(3):462–474, 2019.
- [83] Solís-Pérez J., Gómez-Aguilar J., Torres L., Escobar-Jiménez R., Reyes-Reyes J. Fitting of experimental data using a fractional kalman-like observer. *ISA transactions*, 88:153–169, 2019.
- [84] Wang J., Shao C., Chen Y.Q. Fractional order sliding mode control via disturbance observer for a class of fractional order systems with mismatched disturbance. *Mechatronics*, 53:8–9, 2018.
- [85] Karami-Mollae A., Tirandaz H., Barambones O. On dynamic sliding mode control of nonlinear fractional-order systems using sliding observer. *Non-linear Dynamics*, 92(3):1379–1393, 2018.

- [86] N Doye I., Salama K.N., Laleg-Kirati T. Robust fractional-order proportional-integral observer for synchronization of chaotic fractional-order systems. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 6(1):268–277, 2019.
- [87] Komachali F.P., Shafiee M., Darouach M. Design of unknown input fractional order proportional-integral observer for fractional order singular systems with application to actuator fault diagnosis. *IET Control Theory and Applications*, 13(17):2163–2172, 2019.
- [88] Bornard G., Hammouri H. A high gain observer for a class of uniformly observable systems. *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1494–1496, 1991.
- [89] Martínez-Guerra R., Suarez R., León-Morales J.D. Asymptotic output tracking of a class of nonlinear systems by means of an observer. *International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal*, 11(4):373–391, 2001.
- [90] Christopher Diego Cruz-Ancona y Rafael Martínez-Guerra. *Algorithms of Estimation for Nonlinear Systems, A Differential and Algebraic Viewpoint*. Springer, 2017.
- [91] R. Martínez-Guerra, J.P. Flores-Flores y A. Govea-Vargas. A globally mittag-leffler bounded high-gain observer for systems with unknown dynamics and noisy measurements. *ISA Transactions*, 2021.
- [92] Lee S.M. The double-simple pendulum problem. *Am J Phys*, 38(4):536–537, 1970.
- [93] Lu J.G. Chaotic dynamics and synchronization of fractional-order arneodo's systems. *Chaos Solitons Fract*, 26(4):1125–1133, 2005.
- [94] Yong Deng, Xian Zeng, Di Zhang, Ting Chen. Analog circuit fault diagnosis based on the fractional sliding model observer. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2023.
- [95] Fateme Pourdadaashi Komachali, Masoud Shafiee, Mohamed Darouach. Design of unknown input fractional order proportional-integral observer for fractional order singular systems with application to actuator fault diagnosis. *IET Control Theory and Applications*, 2019.
- [96] Shulan Kong, Mehrdad Saif, Guozeng Cui. Estimation and fault diagnosis of lithium-ion batteries: A fractional-order system approach. *Mathematical Problems in Engineering*, 2018.
- [97] H., Reich Haussecker J., Cheung-P. Feng Zhao, X., Koutsoukos. Monitoring and fault diagnosis of hybrid systems. *IEEE Trans. Syst. Cybern.* 35, 2005.

- [98] Rafael Martínez-Guerra, Fidel Meléndez-Vázquez, Iván Trejo-Zuñiga. *Fault-tolerant Control and Diagnosis for Integer and Fractional-order Systems. Fundamentals of Fractional Calculus and Differential Algebra with Real-Time Applications*. Studies in Systems, Decision and Control, 2021.
- [99] Lorenz Josue Oliva-Gonzalez, Rafael Martínez-Guerra, Juan Pablo Flores-Flores. A fractional pi observer for incommensurate fractional order systems under parametric uncertainties. *ISA Transactions*, 2023.
- [100] H., Darouach M., Schneider J.G., Knauf N. N'Doye, I., Voos. An unknown input fractional-order observer design for fractional-order glucose-insulin system. *Conference on Biomedical Engineering and Sciences, Langkawi*, 2012.

Apéndice A

Artículos Publicados

En este apéndice se mencionan los artículos aceptados en tres foros.

A.1. ISA Transactions

R. Martínez-Guerra, J.P. Flores-Flores and A. Govea-Vargas; “A globally Mittag-Leffler bounded high-gain observer for systems with unknown dynamics and noisy measurements”; *ISA Transactions 2021*; DOI: 10.1060/j.isatra.2021.11.003

A.2. Congreso Nacional de Control Automático 2023

A. Govea-Vargas and R. Martínez-Guerra; “Estimation of Faults in Fractional Non-linear Systems via Fractional Observers”; *CNCA 2023*.

<https://doi.org/10.58571/CNCA.AMCA.2023.020>

Acapulco de Juárez, Guerrero, México. 25-27 de octubre del 2023.

A.3. Interdisciplinary Conference on Electrics and Computer 2024

A. Govea-Vargas and R. Martínez-Guerra; “Fault Diagnosis based in Fractional Observers”; *INTCEC 2024*

Chicago Illinois, USA. 11-13 de junio del 2024.