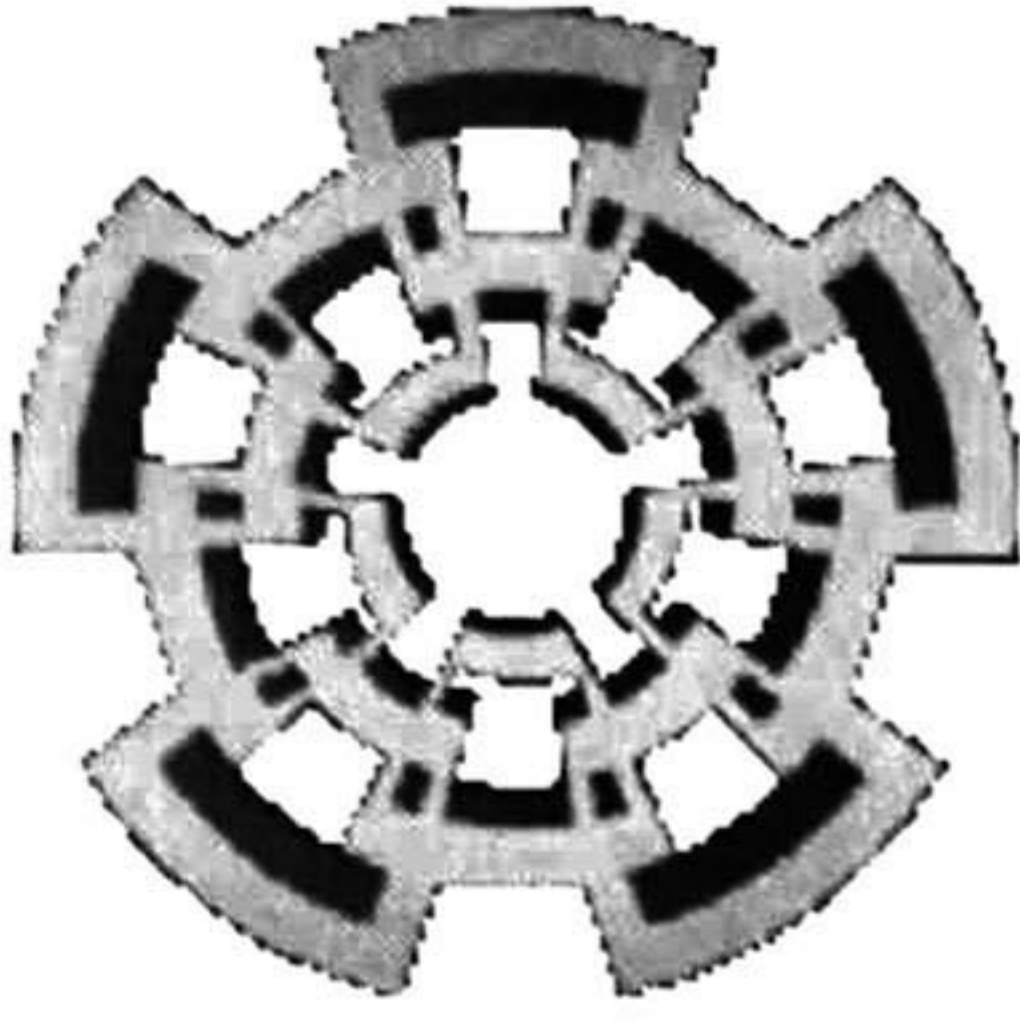


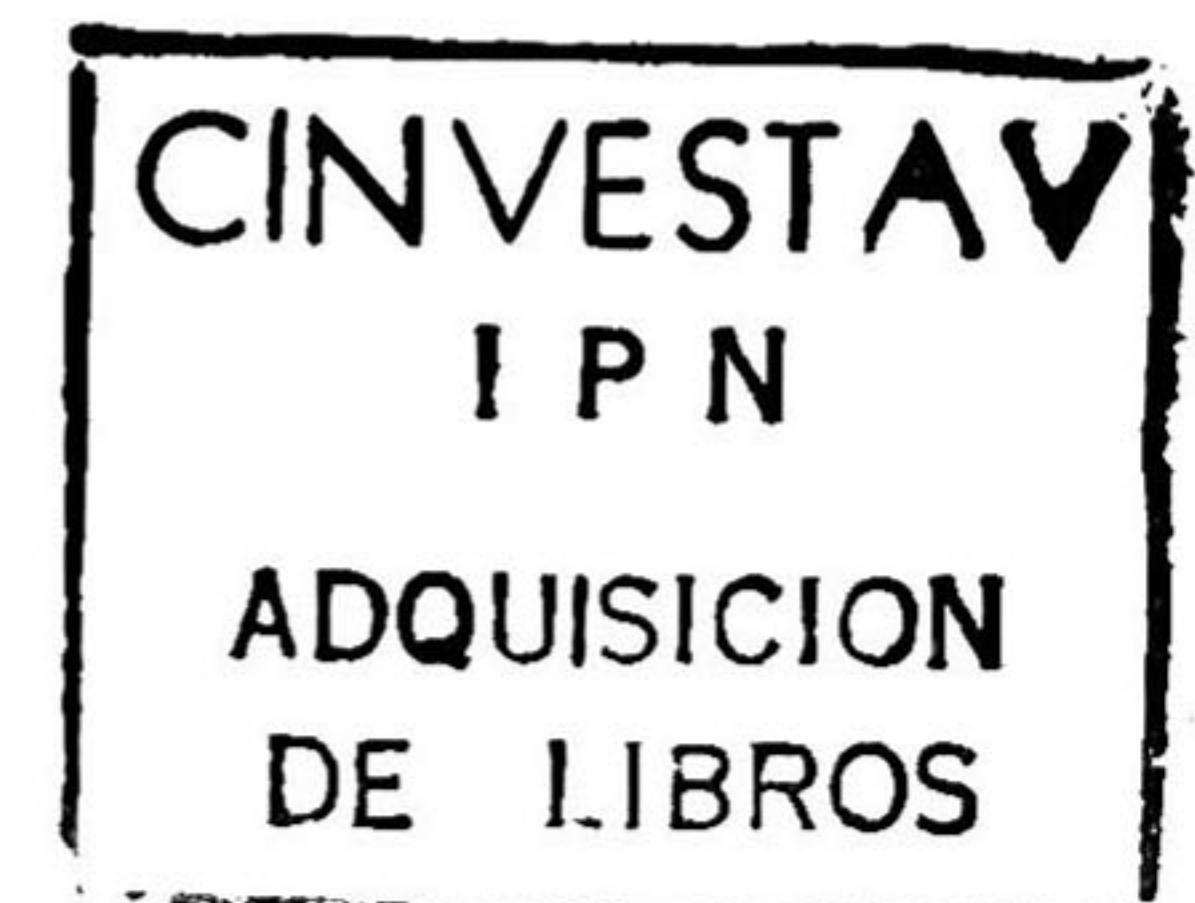
xx(93343.1)



CINVESTAV

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Unidad Guadalajara

Control por Bloques de Sistemas Lineales con Retardo



Tesis que presenta
Jaime Escoto Hernández

Para obtener el grado de
Maestro en Ciencias

En la especialidad de
Ingeniería Eléctrica

Guadalajara, Jal., Enero del 2001

CINVESTAV I.P.N.
SECCION DE INFORMACION
Y DOCUMENTACION

CLASIF. _____

ADQUIS. Tesis - 2001

FECHA: 19-Sep-2001

PROCED. Serv Bibliografico

\$

Control por Bloques de Sistemas Lineales con Retardo

**Tesis de Maestría en Ciencias
Ingeniería Eléctrica**

Por:

Jaime Escoto Hernández

Ingeniero Electrónico
Universidad de Guadalajara 1992-1996

Becario del CONACyT, expediente no. **129304**

Directores de Tesis
Dr. Alexander Loukianov
Dr. Arturo Sánchez Carmona

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Enero del 2001

Reconocimiento

- *A mis asesores, Dr. Alexander Loukianov y Dr. Arturo Sánchez; por su invaluable apoyo y orientación durante la realización de este trabajo.*
- *Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por el apoyo económico prestado durante el período del programa de Maestría.*
- *A la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, (CINVESTAV), por el apoyo otorgado durante la realización de los estudios de su programa de Maestría.*

Agradecimiento

- *A mis compañeros y amigos, por que en todos los momentos durante mi estancia en el CINVESTAVI, me demostraron confianza y apoyo.*
- *A mis profesores, por la cultura de superación que me enseñaron y por su incondicional amistad.*
- *A mis coordinadores del departamento de Ingeniería de Pruebas en SIEMENS . por su gran ayuda en los momentos difíciles.*
- *A mi familia, por que además de estar siempre a mi lado, nunca dudaron que lo lograría.*
- *A mi esposa Irene, por que además de su apoyo incondicional en todo momento, su amor me da fortaleza.*
- *A Dios, por que a diario me enseña que él es lo más importante en el universo.*

Índice General

1 Introducción	3
2 Formulación del problema y herramientas matemáticas	6
2.1 Introducción	6
2.2 Formulación del problema	7
2.3 Herramientas matemáticas	10
2.3.1 Preliminares sobre ecuaciones diferenciales funcionales	10
2.3.2 Descripción matemática de los sistemas con retardo	12
2.3.3 Teorema de existencia y unicidad para sistemas con retardo	13
2.3.4 Estabilidad de sistemas a diferencias	13
2.4 Técnica de descomposición para sistemas lineales sin retardo	14
2.4.1 Forma regular	14
2.4.2 Principio del control por bloques	15
2.5 Sistemas de Control con Modos Deslizantes y Sistemas de Alta Ganancia	17
2.5.1 Control por modos deslizantes y método de control equivalente	18
2.5.2 Sistemas con control de alta ganancia	19
3 Control por bloques	21
3.1 Introducción	21
3.2 Forma controlable por bloques para sistemas lineales con retardo	22
3.2.1 Descomposición del sistema por bloques, caso S1	22
3.2.2 Descomposición del sistema por bloques, caso S2	26
3.3 Control por bloques	33
3.3.1 Diseño de control por bloques para el caso S1	33
3.3.2 Diseño de control por bloques para el caso S2	39
3.4 Ejemplos	48
3.4.1 Ejemplo para el caso S1	48
3.4.1.1 Primera simulación	50
3.4.1.2 Segunda simulación	51
3.4.1.3 Tercera simulación	52
3.4.2 Ejemplo para el caso S2	53
3.4.2.1 Diseño del control por bloques	56
3.4.2.2 Simulaciones	58

4 Observador por modos deslizantes	59
4.1 Introducción	59
4.2 Observador lineal	60
4.3 Observador de alta ganancia	61
4.3.1 Obtención de las señales de entrada del observador	63
4.4 Observador por modos deslizantes	65
4.4.1 Casos especiales en el diseño del observador	67
4.4.2 Estrategia de control y diseño del observador	68
4.5 Ejemplo	71
4.5.1 Simulaciones	74
5 Control de la mezcla Gasolina-Aire en un motor de inyección electrónica	76
5.1 Introducción	76
5.2 Definiciones	77
5.3 Importancia del control del sistema de inyección y las emisiones de escape	78
5.4 Modelado matemático	79
5.4.1 Flujo de aire en el múltiple de entrada	80
5.4.2 Flujo de gasolina	81
5.4.3 Retardo de ciclo y retardo de transporte	83
5.4.4 Sensor de oxígeno	83
5.4.5 Inyector de gasolina	84
5.4.6 Modelo completo	84
5.5 Diseño de la ley de control	86
5.6 Diseño del observador	87
5.7 Resultados de simulación	89
6 Conclusiones y trabajos futuros	91
Bibliografía	93
Apéndice	

Capítulo 1

Introducción

Uno de los problemas de gran importancia en la teoría de control automático, es el de la estabilización de los sistemas dinámicos con retardo por medio de retroalimentación. Esto debido a que en la industria existe un número considerable de procesos que son modelados por ecuaciones diferenciales con retardo [1].

Estos sistemas son llamados así por que existe un retardo entre el instante en el que se aplica una entrada o control al sistema y el efecto resultante en el mismo. Este comportamiento de atraso en la respuesta ocurre frecuentemente en sistemas electrónicos, mecánicos, biológicos, metalúrgicos y químicos.

Los retardos que se presenta en los sistemas dinámicos, pueden debido a los tiempos de transporte de una señal de un punto a otro, o al tiempo de procesamiento de una señal o por ambos.

Los modelos matemáticos que describen a los sistemas dinámicos con retardo, contienen ecuaciones diferenciales funcionales. Estas ecuaciones han sido estudiadas desde poco antes de los años 50's, Volterra [2], Bellman [3], Elgolts [4], Hahn [5], Halanay [6], Krasovskii [7], Zubov [8].

Por otra parte, analizando el diagrama polar que presenta cualquier sistema lineal al introducirle un retardo ya sea en el control o en la rama de retroalimentación, se sabe que el sistema puede llegar a ser inestable en lazo cerrado, si la ganancia del controlador se incrementa de forma deliberada. Si se compara la respuesta de un sistema lineal de primer orden antes de introducir un retardo en su rama de retroalimentación y después de hacerlo, se tiene que para el primer caso, si la ganancia del controlador estabiliza al sistema, para un cierto valor, entonces si la ganancia se aumenta hasta cualquier valor, matemáticamente la respuesta del sistema sigue siendo estable. Por otro lado en el segundo caso, esto no es posible, ya que si la ganancia se hace mayor a cierto valor, el cual puede ser calculado como se indica en [9], entonces el sistema en lazo cerrado puede a ser inestable.

El problema de estabilización de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo con retardo consiste básicamente en:

- *Eliminar el retardo en el sistema en lazo cerrado.*
- *Asignar los valores propios del sistema en lazo cerrado de forma arbitraria.*

Otro problema interesante en la teoría de control es:

- *Diseñar un sistema para estimar los estados de la planta con retardo. Este sistema es comúnmente llamado: Observador de estado ó estimador de estado.*

En los últimos 25 años se han realizado interesantes investigaciones acerca de este tipo de sistemas y el problema de estabilización ha sido estudiado de manera exhaustiva y se han propuesto controladores y criterios de estabilidad basados en el método de control óptimo [1], [10], [11], incluyendo las técnicas de control H_∞ y LMI (Linear Matrix Inequalities) [12], [13], [14], [15], para resolverlo.

Las condiciones de estabilidad para estos sistemas con retardo, son presentadas de manera detallada también en [9].

La importancia de este trabajo radica primero en proponer un procedimiento para diseñar un controlador que en el sistema en lazo cerrado elimine los retardos y se puedan asignar un conjunto finito de valores propios, de forma arbitraria, usando la técnica de control conocida como control por bloques [16] y segundo diseñar un observador para el sistema con retardo, aplicando la técnica de modos deslizantes [17] y la de alta ganancia [27].

Por lo tanto el objetivo de este trabajo es primero, transformar el sistema lineal con retardo a una forma especial llamada forma controlable por bloques y segundo, una vez que el sistema esta representado en esta forma, aplicar la técnica de control por bloques sobre esta representación para obtener la ley de control que cumpla con las especificaciones de estabilización.

Esta técnica de control por bloques ha sido aplicada en las estrategias de control singular óptimo por descomposición, para sistemas lineales [18],[19] y no lineales [16],[17]. De aquí la idea de aplicar esta técnica en sistemas lineales con retardo. Esta técnica tiene ventajas muy notorias cuando se tratan sistemas multivariables de alto orden, las principales son: 1) La descomposición del problema de control del sistema completo en subsistemas de menor dimensión y 2) La asignación de polos en el sistema en lazo cerrado. De esta manera sería posible asignar una dinámica deseada donde se pueden utilizar ganancias de mayor magnitud en el controlador.

El problema a resolver en este trabajo de tesis es:

Proponer un procedimiento para transformar un conjunto de sistemas lineales e invariantes en el tiempo con retardo a la forma controlable por bloques y, teniendo esta forma, diseñar un controlador que logre estabilizar este tipo de sistemas usando la técnica de control por bloques. Diseñar un observador para este tipo de sistemas usando las técnicas de modos deslizantes y de alta ganancia. Además aplicar estas técnicas para estabilizar la relación Gasolina-Aire en un motor de ignición de un solo pistón

Las aportaciones que se hacen en este trabajo se concentran en los capítulos 3,4 y5 de este reporte de tesis, cuya organización es la siguiente:

En el capítulo 2 se presentan las herramientas matemáticas usadas a lo largo de la tesis. Se explica el método de control por bloques para sistemas lineales sin retardo. Este método es el punto de inicio de este trabajo, y se extenderá a los sistemas lineales con retardo.

El capítulo 3 es el de mayor importancia, ya que en él se encuentran las aportaciones que se realizaron en los sistemas lineales con retardo. En el se desarrolla detalladamente la técnica de control por bloques aplicada a este tipo de sistemas. Se explica primero la transformación del sistema en forma general a la comúnmente llamada forma controlable por bloques. También aquí se diferencian dos casos especiales al aplicar la técnica de control por bloques. Estos casos resultan de las condiciones de rango de la matriz de entrada con respecto a la dimensión de la entrada de control. Al final del capítulo se presentan dos ejemplos con el objetivo de esclarecer primero, las condiciones de estabilidad que se derivaron de la estructura del sistema presentado en la forma controlable por bloque y segundo, el procedimiento de transformación a la forma controlable por bloques. Los procedimientos de transformación y control se presentaron en un artículo que fue aceptado y publicado en la edición 2000 de **CDC** (Conference on Decision and Control.). En el apéndice de éste trabajo se presenta una copia de tal artículo.

Para el caso en que no se tengan todos los estados disponibles, ya sea por que los sensores para estas variables son muy caros o no están disponibles, en el capítulo 4 se propone el diseño de dos observadores, uno con alta ganancia y otro por modos deslizantes para los sistemas lineales con retardo. Se resuelve un problema específico que ayudará a resolver el problema de estabilización por observador en el sistema de inyección electrónica de gasolina. Se presenta un ejemplo en el que se aplican todas las técnicas explicadas en el capítulo tres, usando un observador por modos deslizantes.

En el capítulo 5 se presenta el modelado del sistema de inyección de gasolina [20],[21], para un solo cilindro. Se explican cada una de las dinámicas del sistema. Se obtiene un modelo simplificado de segundo orden, al cual se le aplica la teoría desarrollada en los capítulos 3 y 4, con el fin de regular el factor de exceso (que se define dentro del mismo capítulo) en la mezcla aire-gasolina de un motor de combustión interna.

En el capítulo 6, finalmente se presentan las conclusiones de la tesis y los trabajos futuros sobre la investigación presentada.

Capítulo 2

Formulación del problema y herramientas matemáticas

2.1 Introducción

El capítulo está organizado de la siguiente manera:

En la sección 2.2 se formula el problema de diseño del controlador y del observador para un conjunto de sistemas lineales con retardo. Estos temas se describen a detalle en los capítulos 3 y 4 respectivamente. En la sección 2.3 se presentan las herramientas matemáticas utilizadas en el análisis y diseño tanto del controlador como del observador. En esta sección se presentan algunos preliminares sobre ecuaciones diferenciales funcionales, las cuales describen a los sistemas con retardo. Se describen algunos modelos clásicos con retardo y se define a la función inicial de estos sistemas.

Además en esta sección se menciona como se modelan matemáticamente los sistemas con retardo, tanto lineales como no lineales. Por último en esta sección se presenta el teorema de existencia y unicidad para esta clase de ecuaciones diferenciales con retardo.

En la sección 2.4 se explica la técnica de control por bloques para sistemas lineales sin retardo. Aquí se presenta brevemente la forma regular para los sistemas lineales y el procedimiento para obtener el controlador que estabiliza a un sistema lineal invariante en el tiempo sin retardo. Esta es la idea principal para proponer un procedimiento en el diseño de un controlador para sistemas lineales con retardo.

En la sección 2.5 se presenta la técnica de separación de movimientos en sistemas con control discontinuos y control de alta ganancia. Esta técnica será utilizada para el diseño de las ganancias del observador en el capítulo 4.

2.2 Formulación del problema

Una de las causas principales de la dificultad de controlar sistemas lineales con retardo es, que analizando su diagrama polar, es claro intuir que el sistema puede llegar a ser inestable en lazo cerrado si la ganancia del controlador se incrementa de forma deliberada. Si se compara la respuesta de un sistema lineal de primer orden sin retardo y el mismo sistema pero con un retardo en la rama de retroalimentación o de control, se tiene que para el primer caso, si la ganancia del controlador $K > 0$ estabiliza al sistema, entonces si K se aumenta hasta cualquier valor, matemáticamente la respuesta del sistema sigue siendo estable. Por otro lado en el segundo caso, esto no es posible, ya que si K se hace mayor a cierto valor digamos, M , entonces el sistema en lazo cerrado puede llegar a ser inestable.

Las condiciones de estabilidad para estos sistemas con retardo, son presentadas de manera detallada en [9], donde para el caso especial de un sistema lineal con retardo de la forma

$$\dot{x}(t) = -ax(t) - kx(t - \tau) \quad 2.1$$

se enuncia la condición

$$\theta\tau(1 - \mu)\mu > \frac{k^2}{a^2} \quad 2.2$$

donde $0 < \theta < 1$, $\mu > 0$ son constantes y $\tau > 0$ es el retardo del sistema, tal que para una cierta función de Lyapunov $V(t, \varphi)$ donde φ es la función inicial, se puede demostrar que este sistema es asintóticamente estable.

Con el fin de demostrar de forma no analítica que (2.1) puede ser inestable si aumenta la ganancia, supongamos que, $\theta = 1$ y $\mu = \frac{1}{2}$. entonces la condición de estabilidad para (2.1) presentada en [9], con respecto a los parámetros a y k sería

$$a^2 > 4k^2 \quad 2.3$$

Si se escogen los valores: $a = 2$, $\varphi = 2$, las respuestas para dos valores de k se muestran en la Fig. 2.1, donde las estas son asintóticamente estable e inestable respectivamente.

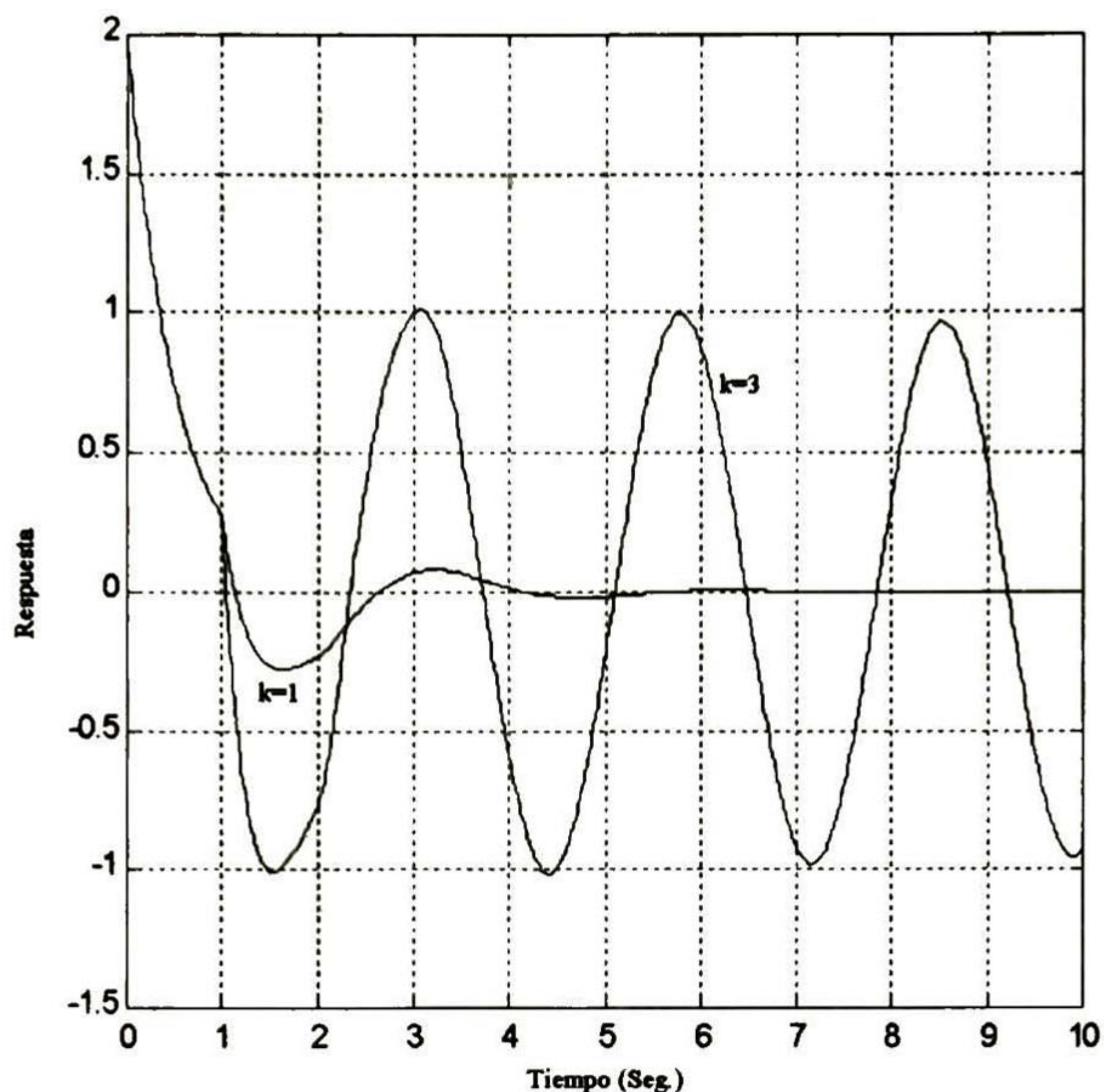


Fig. 2.1

Entonces para resolver el problema de estabilización de los sistemas lineales con retardo, se propone lo siguiente:

1. Eliminar el retardo en el sistema en lazo cerrado.
2. Asignar los valores propios del sistema en lazo cerrado de forma arbitraria.
3. Diseñar un observador para el sistema lineal con retardo.

Con la primera y segunda propuesta, eliminamos el inconveniente que tienen los sistemas con retardo al incrementar la ganancia del controlador

La primer parte consiste en diseñar un controlador para sistemas lineales e invariantes en el tiempo con retardo presentado de manera general en la forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Cx(t - \tau) + Bu(t) + Du(t - \tau) \quad 2.4$$

donde $x \in R^n$, $u \in R^m$ y A, B, C y D son matrices de dimensiones apropiadas y $x(t) = \varphi(t)$ para todo, $t \in [t_0 - \tau, t_0]$, donde $\varphi(t)$ es la condición inicial o función inicial del sistema (2.4) que debe ser continua.

Para aplicar la técnica de control por bloques es necesario transformar el sistema (2.4) a una forma especial llamada forma controlable por bloques, representada como

$$\dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + C_1 x_1(t - \tau) + B_1 [x_2(t) + \Pi_1 x_2(t - \tau)] \quad (2.5a)$$

$$\dot{x}_i(t) = A_i \bar{x}_i(t) + C_i \bar{x}_i(t - \tau) + B_i [x_{i+1}(t) + \Pi_i x_{i+1}(t - \tau)], i = 2, \dots, r - 1 \quad (2.5b)$$

$$\dot{x}_r(t) = A_r \bar{x}_r(t) + C_r \bar{x}_r(t - \tau) + B_r [u(t) + \Pi_r u(t - \tau)] \quad (2.5c)$$

donde $x(t) = [x_1(t), \dots, x_r(t)]^T$, $\bar{x}_i(t) := [x_1(t), \dots, x_i(t)]^T$, $\text{rango} B_i = \dim(x_i) = n_i, i = 1, \dots, r$

$$\sum_{i=1}^r n_i = n.$$

Esta transformación se explica a detalle en el capítulo 3.

Teniendo la forma (2.5a)-(2.5c), se necesita establecer un procedimiento para diseñar la ley de control y obtener un sistema en lazo cerrado sin retardo y con la dinámica deseada, representado en las nuevas variables $(z_1(t), \dots, z_n(t))$ como

$$\dot{z}_1(t) = \Lambda_1 z_1(t) + z_2(t) \quad (2.6a)$$

$$\dot{z}_i(t) = \Lambda_i z_i(t) + z_{i+1}(t), i = 2, \dots, r - 1 \quad (2.6b)$$

$$\dot{z}_r(t) = \Lambda_r z_r(t) \quad (2.6c)$$

donde la matriz $\Lambda_i, i = 1, \dots, r$; y $\Lambda_i = \{\lambda_{ij}\}, j = 1, \dots, n_i$, son los valores propios deseados.

Este procedimiento se explica también a detalle en el capítulo 3.

Hasta aquí tenemos resueltos el problema de eliminar el retardo en el sistema en lazo cerrado y el de asignar los polos de manera arbitraria.

Para la tercera parte, si los estados no están disponibles, se propone la idea de diseñar un observador para el sistema en las nuevas variables $(z_1(t), \dots, z_n(t))$, que en el último paso del diseño de la ley de control tiene la forma:

$$\dot{z}_1(t) = \Lambda_1 z_1(t) + z_2(t) \quad (2.7a)$$

$$\dot{z}_i(t) = \Lambda_i z_i(t) + z_{i+1}(t), i = 2, \dots, r - 1 \quad (2.7b)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_r(t) = & \sum_{j=1}^r [\bar{A}_{k,j} z_j(t) + \bar{C}_{k,j}^1 z_j(t - \tau) + \dots + \bar{C}_{k,j}^k z_j(t - r\tau)] \\ & + \sum_{j=1}^r [\bar{B}_{k,j} u(t) + \bar{D}_{k,j}^1 u(t - \tau) + \dots + \bar{D}_{k,j}^k u(t - r\tau)] \end{aligned} \quad (2.7c)$$

Para este sistema (2.7a)-(2.7c), se propone el siguiente observador

$$\dot{\hat{z}}_1(t) = \Lambda_1 \hat{z}_1(t) + \hat{z}_2(t) + w_1 \quad (2.8a)$$

$$\dot{\hat{z}}_i(t) = \Lambda_i \hat{z}_i(t) + \hat{z}_{i+1}(t) + w_i, i = 2, \dots, r-1 \quad (2.8b)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}_r(t) = & \sum_{j=1}^r [\bar{A}_{k,j} \hat{z}_j(t) + \bar{C}_{k,j}^1 \hat{z}_j(t-\tau) + \dots + \bar{C}_{k,j}^k \hat{z}_j(t-r\tau)] \\ & + \sum_{j=1}^r [\bar{B}_{k,j} u(t) + \bar{D}_{k,j}^1 u(t-\tau) + \dots + \bar{D}_{k,j}^k u(t-r\tau)] + w_r \end{aligned} \quad (2.8c)$$

El error de estimación, definido como $e(t) = [e_1(t), \dots, e_r(t)]$ donde $e_i(t) = z_i(t) - \hat{z}_i(t)$ para $(i = 1, \dots, r)$, tiene el siguiente comportamiento dinámico

$$\dot{e}_1(t) = \Lambda_1 e_1(t) + e_2(t) - w_1 \quad (2.9a)$$

$$\dot{e}_i(t) = \Lambda_i e_i(t) + e_{i+1}(t) - w_i, i = 2, \dots, r-1 \quad (2.9b)$$

$$\dot{e}_r(t) = \sum_{j=1}^r W_{k,j} e_j(t) + Y_{k,j}^1 e_j(t-\tau) + \dots + Y_{k,j}^k e_j(t-r\tau) - w_r \quad (2.9c)$$

donde las señales w_1, \dots, w_r se eligen tal que estabilicen al sistema (2.9a)-(2.9c). Los detalles de cómo construir el observador y de cómo obtener sus ganancias se explica en el capítulo 4 de esta tesis.

2.3 Herramientas matemáticas

2.3.1 Preliminares sobre ecuaciones diferenciales funcionales

Generalmente en las aplicaciones de control, el comportamiento futuro de muchos fenómenos, se asume que está descrito por las soluciones de una ecuación diferencial ordinaria. Implícitamente en esta suposición se encuentra que el comportamiento futuro del sistema es determinado únicamente por el estado presente y que es independiente del pasado del mismo.

En las ecuaciones diferenciales de diferencias, que de manera más general son llamadas ecuaciones diferenciales funcionales, la dinámica pasada tiene una gran influencia en el comportamiento futuro del sistema.

Existen muchos modelos matemáticos que son mejor representados por FDE que por ecuaciones diferenciales ordinarias [9]. Algunos de estos modelos dependen del estado en el pasado, otros dependen tanto del estado pasado como de la derivada con respecto al tiempo de este y algunos otros dependen también del estado en el futuro. Las soluciones para cada uno de estos casos tienen un comportamiento muy diferente.

Con el fin de reconocer las dificultades que se presentan en algunos de estos casos, vamos a considerar dos de ellos. Consideremos primero la siguiente ecuación lineal retardada:

$$\dot{x}(t) = -x(t - \tau), \quad \tau > 0 \quad (2.10)$$

Para esta ecuación podemos hacer la siguiente pregunta: ¿Cuál es la información necesaria de la ecuación (2.10) para definir una solución para $t \geq 0$? Si se reflexiona un poco, necesitamos especificar una función sobre el intervalo $[-\tau, 0]$. Si φ es tal función, entonces existe una sola función $x(t)$ definida en $[-\tau, \infty)$, la cual coincide con φ en $[-\tau, 0]$ y que satisface (2.10) para $t > 0$. De hecho si x es tal función, entonces debe satisfacer

$$x(t) = \varphi(0) - \int_0^t x(s - \tau) ds \quad t \geq 0 \quad (2.11)$$

y en forma particular

$$x(t) = \varphi(0) - \int_0^t \varphi(s - \tau) ds \quad 0 \leq t \leq \tau \quad (2.12)$$

Esta última ecuación (2.12) define de manera única a x en el intervalo $[0, \tau]$. Una vez que se conoce x en este intervalo entonces (2.11) define de manera única a x en el intervalo $[\tau, 2\tau]$ y así sucesivamente.

Las siguientes observaciones acerca de la ecuación (2.10) son muy importantes:

- (I) Para cualquier función continua φ definida en $[-\tau, \infty)$, existe una solución única de x para (2.10) en $[-\tau, \infty)$. Entonces esta solución puede ser llamada $x(\varphi)$.
- (II) La solución $x(\varphi)$ tiene derivada continua para $t > 0$, pero no en $t = 0$, a menos que $\varphi(\theta)$ tenga derivada por la izquierda en $\theta = 0$ y que $\dot{\varphi}(0) = -\varphi(-\tau)$.
- (III) Para una función φ en $[-\tau, 0]$, la solución $x(\varphi)(t)$ de (2.10) no necesita ser definida para $t \leq -\tau$. De hecho, si $x(\varphi)(t)$ es definida para $t \leq -\tau$ por ejemplo definida para, $t \geq -\tau - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, entonces $\varphi(\theta)$ debe de tener su primera derivada continua para $\theta \in (-\varepsilon, 0]$. Si existe una solución $x(\varphi)$ para $t \leq -\tau$, entonces $x(\varphi)(t)$ para $t \leq -\tau$ tiene en general menos derivadas que φ , [9].

Como un segundo caso, consideremos la siguiente ecuación con adelanto en el tiempo

$$\frac{dy(\tau)}{d\tau} = y(\tau + r), \quad r > 0 \quad (2.13)$$

Si fijamos $\tau = -t$, $x(t) = y(-t)$, entonces x satisface la ecuación (2.10). De esta manera, el problema natural para (2.13) es para $\tau \leq 0$. Por otra parte, si esta ecuación describe un sistema físico, entonces tiene que ser integrada para $\tau \geq 0$. Como se mencionó en (III), cualquier solución debe satisfacer algunas condiciones especiales y en general esta solución tiene menor número de derivadas que la información inicial.

2.3.2 Descripción matemática de los sistemas con retardo

Para sistemas con retardo de tiempo continuo la ecuación de estados en el caso general tiene la siguiente forma:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t - \tau_{x1}), x(t - \tau_{x2}), \dots, x(t - \tau_{xn}), u(t), u(t - \tau_{u1}), \dots, u(t - \tau_{um}), t) \quad (2.14)$$

Donde f es una función vector-valuada no lineal y $\tau_{xi} > 0, i = 1, \dots, n$; $\tau_{ui} > 0, i = 1, \dots, m$ representan los retardos del estado $x \in R^n$ y del control $u \in R^m$ en el sistema, respectivamente. La ecuación de salida expresa el vector de salida $y(t)$ como una función de los vectores de estado y de la entrada como:

$$y(t) = g(x(t), x(t - \tau_{x1}), \dots, x(t - \tau_{xn}), u(t), u(t - \tau_{u1}), \dots, u(t - \tau_{um}), t) \quad (2.15)$$

Donde g es una función vector-valuada no lineal. Si el sistema es invariante en el tiempo o estacionario, entonces las funciones f y g no dependen explícitamente del tiempo t .

Para sistemas lineales con retardo, las ecuaciones de estado y de salida tienen la forma:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + \sum_{i=1}^n A_i(t)x(t - \tau_{xi}) + B(t)u(t) + \sum_{i=1}^m B_i(t)u(t - \tau_{ui}) \quad (2.16)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + \sum_{i=1}^n C_i(t)x(t - \tau_{xi}) + D(t)u(t) + \sum_{i=1}^m D_i(t)u(t - \tau_{ui}) \quad (2.17)$$

Si además el sistema es invariante en el tiempo, entonces las matrices $A, B, C, A_i, C_i, i=1, \dots, n$ y $B_i, D_i, i=1, \dots, m$ tienen elementos constantes.

2.3.3 Teorema de existencia y unicidad para sistemas con retardo

Aunque no siempre es fácil obtener una solución explícita de la ecuación diferencial funcional que depende del estado en el pasado, es necesario saber si existe su solución y si esta es única, por lo que a continuación se enuncia el teorema de existencia y unicidad. La prueba de este teorema se encuentra en [9].

TEOREMA 2.1

Sea

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_n), t) \quad (2.18)$$

donde $x(t) = \phi(t)$, $t \in [t_0 - \tau, t_0]$ y $\tau = \max \tau_i > 0$, $i = 1, \dots, n$. Además f es continua en una vecindad del punto $(t_0, \phi(t_0), \phi(t_0 - \tau_1), \dots, \phi(t_0 - \tau_n))$ y satisface una condición de Lipschitz [22], en todos sus argumentos, comenzando por el segundo y si la función inicial $\phi(t)$ es continua, entonces existe una solución $x_\phi(t)$ al problema de condiciones iniciales para $t_0 < t < t_0 + \tau$, donde τ es suficientemente pequeño.

2.3.4 Estabilidad de sistemas a diferencias

La estabilidad de un sistema a diferencias, se puede analizar si se compara esta ecuación con un sistema dinámico representado en tiempo discreto. Por lo tanto al tener esta representación, la estabilidad queda definida por los valores propios de este nuevo sistema.

Consideremos al sistema a diferencias

$$x(t) - Ax(t - \tau) = 0 \quad (2.19)$$

donde $x \in R^n$, $A \in R^{n \times n}$ y τ es el retardo.

Si fijamos $t = (k + 1)\tau$, siendo τ el tiempo de muestreo, se puede representar el sistema (2.19) en tiempo discreto de la forma

$$x(k\tau + \tau) = Ax(k\tau) \quad (2.20)$$

De manera más simple (2.20) puede ser representado como

$$x_{k+1} = Ax_k \quad (2.21)$$

Por lo tanto se sabe que el sistema (2.21) es asintóticamente estable si todos los valores propios de la matriz A se encuentran dentro del círculo unitario.

2.4 Técnica de descomposición para sistemas lineales sin retardo

Cuando un sistema dinámico es de alto orden, se puede usar la descomposición de este sistema en un conjunto de subsistemas para simplificar el procedimiento de diseño del controlador. Vamos a considerar en esta sección, dos formas de descomposición de sistemas dinámicos lineales: la Forma Regular y la Forma Controlable por Bloques.

2.4.1 Forma Regular

Consideremos el sistema lineal e invariante en el tiempo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.22)$$

donde $x \in R^n$, $u \in R^m$, y supongamos que el $\text{rango}(B) = m$.

Siguiendo el procedimiento para el diseño de la Forma Regular, se puede encontrar una transformación lineal tal que el sistema (2.22) puede ser dividido en dos subsistemas de menor dimensión $(n - m)$ y m respectivamente como:

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) \quad (2.23)$$

$$\dot{x}_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2u(t) \quad (2.24)$$

donde $x = (x_1, x_2)^T$, $x_1(t) \in R^{n-m}$, $x_2(t) \in R^m$, $u(t) \in R^m$ y $\det(B_2) \neq 0$.

A esta forma donde la dimensión de (2.24) coincide con la dimensión de la entrada o control $u(t)$ y la ecuación (2.23) no depende de la entrada, se le conoce como: Forma Regular [23].

Debido a que las dimensiones de los vectores de estado y de entrada son iguales, el diseño del controlador para el bloque (2.24) es muy simple. Se puede notar que el problema de estabilización del sistema (2.22) ha sido descompuesto en dos subproblemas de menor complejidad y que pueden ser resueltos de manera individual.

Repitiendo este procedimiento sobre el bloque (2.23) y dividiéndolo en subsistemas de menor dimensión es la idea central del procedimiento para obtener la forma controlable por bloques. Teniendo esta forma especial es posible diseñar la estrategia de control usando la técnica de control por bloques.

2.4.2 Principio del control por bloques

Para un sistema lineal de alto orden, el principio de control por bloques puede ser aplicado si el sistema se puede representar en una forma especial comúnmente llamada Forma Controlable por Bloques representada por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= A_1 x_1(t) + B_1 x_2(t) \\ \dot{x}_i(t) &= A_i \bar{x}_i + B_i x_{i-1}(t), \quad i = 2, \dots, r-1 \\ \dot{x}_r(t) &= A_r \bar{x}_r + B_r u(t)\end{aligned}\tag{2.25}$$

donde $x = (x_r, \dots, x_1)^T$, $\bar{x}_i := (x_r, \dots, x_i)^T$, $x_i \in R^{d_i}$, $\text{rango}(B_i) = d_i$, $i = 1, 2, \dots, r$ y $\sum_{i=1}^r d_i = n$.

Como se puede observar cada ecuación o subsistema de la Forma Controlable por Bloques (2.25), forma uno de los r bloques del sistema completo. El vector de estado de cada bloque puede ser tratado como un vector de entrada virtual hacia el bloque superior que le precede.

Se pueden tener dos casos diferentes dependiendo de la dimensión del vector de entrada con respecto a la dimensión del vector de estado de cada ecuación. Esto será tratado en el siguiente capítulo de manera especial para los sistemas lineales con retardo.

Un procedimiento de diseño jerárquico basado en la Forma Controlable por Bloques puede ser resumido como sigue: Sean; $\Lambda_i = \text{diag}\{\lambda_{ij}\}$, $j = 1, \dots, d_i$ los valores propios deseados del sistema en lazo cerrado después de aplicar el control.

Paso 1: Iniciando por la parte superior de la forma a bloques (el bloque 1), el comportamiento dinámico deseado se puede obtener si la entrada de control virtual a este subsistema puede ser asignada como:

$$x_2(t) = B_1^{-1}(-A_1 x_1(t) + \Lambda_1 x_1(t)) + z_{r-1}\tag{2.26}$$

Si proponemos la transformación $x_1(t) = z_1(t)$ obtenemos el primer bloque en lazo cerrado en las nuevas variables como:

$$\dot{z}_1(t) = \Lambda_1 z_1(t) + B_1 z_2(t)\tag{2.27}$$

Paso 2: Denotemos el error o desviación entre la entrada de control virtual y la deseada como:

$$z_2(t) = x_2(t) - B_1^{-1}(-A_1 x_1(t) + \Lambda_1 x_1(t))\tag{2.28}$$

Tomando la derivada de (2.28), con respecto al tiempo, sobre las trayectorias de (2.25) tenemos que:

$$\dot{z}_2(t) = \sum_{i=1}^2 A_i z_i(t) + B_2 x_3 \quad (2.29)$$

El comportamiento dinámico deseado del bloque 2 de la forma:

$$\dot{z}_2(t) = \Lambda_2 z_2(t) + B_2 z_3(t)$$

puede ser obtenido si la entrada de control virtual x_3 puede ser asignada de la forma:

$$x_3(t) = B_2^{-1} \left(- \sum_{i=1}^2 A_i z_i(t) + \Lambda_2 z_2(t) \right) + z_3(t) \quad (2.30)$$

donde esta última ecuación es la transformación entre x_3 y z_3 .

Paso 3, 4, r-1: Consideremos los bloques inferiores siguientes podemos decir que existe una secuencia de controles virtuales deseados, los cuales se pueden obtener de manera similar a los bloques anteriores como:

$$x_i(t) = B_{i-1}^{-1} \left(- \sum_{i=1}^i A_i z_i(t) + \Lambda_{i-1} z_{i-1}(t) \right) + z_i(t) \quad (2.31)$$

y las desviaciones o errores entre los controles reales y los deseados como:

$$z_i(t) = x_i(t) - B_{i-1}^{-1} \left(- \sum_{i=1}^i A_i z_i(t) + \Lambda_{i-1} z_{i-1}(t) \right) \quad (2.32)$$

para $i = 3, \dots, r-1$.

Paso r: En el último paso, ya que:

$$z_r(t) = x_r(t) - B_{r-1}^{-1} \left(- \sum_{i=1}^r A_i z_i(t) + \Lambda_{r-1} z_{r-1}(t) \right) \quad (2.33)$$

entonces se puede obtener la derivada de $z_r(t)$ con respecto al tiempo, la cual depende o es función de la entrada de control real $u(t)$ como:

$$\dot{z}_r(t) = \sum_{i=1}^r A_i z_i(t) + B_r u(t) \quad (2.34)$$

donde $u(t)$ se puede asignar como:

$$u(t) = B_r^{-1} \left(- \sum_{i=1}^r A_i z_i(t) + \Lambda_r z_r(t) \right)$$

para obtener el sistema en lazo cerrado con las nuevas variables z_1, \dots, z_r de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= \Lambda_1 z_1(t) + B_1 z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) &= \Lambda_2 z_2(t) + B_2 z_3(t) \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r-1}(t) &= \Lambda_{r-1} z_{r-1}(t) + B_{r-1} z_r(t) \\ \dot{z}_r(t) &= \Lambda_r z_r(t) \end{aligned}$$

donde $\Lambda_i, i = 1, \dots, r$ son las matrices con los valores propios deseados del sistema en lazo cerrado.

2.5 Sistemas de Control con Modos Deslizantes y Sistemas de Alta Ganancia

La técnica de control por modos deslizantes y de control por alta ganancia que será descrita a continuación, será la base para el desarrollo del diseño de los observadores con modos deslizantes y de alta ganancia en el capítulo 4.

Estas técnicas, son herramientas clásicas para la supresión de los efectos de las perturbaciones y variación de parámetros. Pueden ser usadas en los sistemas de control para la descomposición artificial del movimiento general, en dos componentes de diferente velocidad (comúnmente llamados movimiento rápido y lento). Las características principales de esta técnica serán abordadas enseguida.

2.5.1 Control por modos deslizantes y método de control equivalente

Consideremos los sistemas no lineales donde el miembro derecho de la ecuación diferencial es linealmente dependiente del control

$$\dot{x}(t) = f(x, t) + B(x, t)u(t) \quad (2.35)$$

donde el vector $f(x, t)$ y la matriz $B(x, t)$ contienen argumentos continuos de dimensión n y $(n \times m)$ respectivamente, y el control discontinuo cambia con relación a

$$u_i(x, t) = \begin{cases} u_i^+(x, t) & \text{si } s_i(x) > 0 \\ u_i^-(x, t) & \text{si } s_i(x) < 0 \end{cases}, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.36)$$

sobre la superficie de discontinuidad

$$s(x) = 0 \quad (2.37)$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, es el vector de estados, $u = (u_1, \dots, u_m)^T$, es el vector de control, $s = (s_1, \dots, s_m)^T$; es la superficie de deslizamiento, $s_i(x)$, $u_i^+(x, t)$ y $u_i^-(x, t)$, son funciones suaves seleccionadas.

El efecto de este control discontinuo obliga a que la trayectoria de movimiento del sistema ocurra sobre la superficie de discontinuidad, a lo que se le llama *modos deslizantes*, es en esta condición donde el control actúa con la conmutación de alta frecuencia impidiendo que el sistema salga de la superficie de deslizamiento.

Es importante notar que los modos deslizantes ocurren sobre la superficie de discontinuidad, siempre que la distancia a esta superficie s_i y la velocidad de cambio \dot{s}_i sean de signo contrario

$$s_i \dot{s}_i < 0, \quad i = 1, \dots, m$$

Donde esta última relación es lo mismo que

$$\lim_{s_i \rightarrow -0} \dot{s}_i > 0 \quad \text{y} \quad \lim_{s_i \rightarrow +0} \dot{s}_i < 0 \quad (2.38)$$

El procedimiento formal para obtener la ecuación de modos deslizantes sobre las superficies de discontinuidad $s(x) = 0$ es el siguiente. Supóngase que las condiciones (2.38) se satisfacen, de aquí que un movimiento en modos deslizantes ocurre sobre la variedad (2.37).

Entonces se busca un control continuo bajo el cual un estado inicial localizado en la variedad, no salga de esta variedad, es decir la derivada del vector $s(x)$, sobre la trayectoria del sistema (2.35), es igual a cero

$$\dot{s} = G(x)f(x,t) + G(x)B(x,t)u = 0 \quad (2.39)$$

donde $G = \frac{\partial s}{\partial x}$. y la matriz $(G(x)B(x,t))$ debe ser no singular para toda x y t . Resolvemos esta ecuación sobre el control. Esta solución será referida como *el control equivalente*, $u_{eq}(x,t)$:

$$u_{eq}(x,t) = -(G(x)B(x,t))^{-1} G(x)f(x,t) \quad (2.40)$$

Sustituyendo este control en (2.35) se obtiene

$$\dot{x} = f(x,t) - B(x,t)(G(x)B(x,t))^{-1} G(x)f(x,t), \quad s(x) = 0 \quad (2.41)$$

La ecuación anterior describe el comportamiento del deslizamiento sobre la superficie de discontinuidad, y tiene orden reducido $(n-m)$ ya que $s(x) = 0$.

El procedimiento anteriormente descrito es llamado *método del control equivalente*, y la ecuación (2.41) asociada a este método es llamada la *ecuación de modos deslizantes*, la cual describe el comportamiento del deslizamiento sobre la superficie de discontinuidad $s_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m$.

2.5.2 Sistemas con control de alta ganancia

El método del control equivalente se puede aplicar para describir el comportamiento del sistema con control de alta ganancia sobre la variedad, $s(x) = 0$.

Elegimos el control para el sistema (2.35) como una función continua no lineal del vector de estado

$$u(t) = ks(x) \quad (2.42)$$

con una ganancia k lo suficientemente grande. Ahora escribamos la ecuación de la proyección del movimiento del sistema (2.35) con control (2.42) sobre el subespacio s en una escala de tiempo reducida

$$\frac{ds}{d\delta} = \mu Gf + GBs \quad (2.43)$$

donde $\mu = \frac{1}{k}$, $\delta = \frac{t}{\mu}$, $G = \left\{ \frac{\partial s}{\partial x} \right\}$.

La ecuación (2.43) describe los movimientos rápidos. Las condiciones donde las trayectorias del movimiento rápido convergen a la variedad, $s(x) = 0$, y el control u converge al control equivalente u_{eq} , se derivan del siguiente teorema cuya prueba se encuentra en [24].

TEOREMA 2.2 *Si las funciones $f(x,t)$, $B(x,t)u_{eq}(x,t)$ y $B(x,t)$ del sistema (2.35) satisfacen la condición de Lipschitz y si las derivadas parciales de u_{eq} con respecto a todos los argumentos existen y están acotadas en un dominio limitado, el sistema*

$$\frac{ds}{d\delta} = G(x,t)B(x,t)s \quad (2.44)$$

es exponencialmente estable con respecto a cualquier $x(t)$ dentro del dominio considerado y para cualquier t , esto es, existen los números positivos A y α tal que

$$s(t) < A s(0) e^{-\alpha t} \quad (2.45)$$

Entonces para cualquier conjunto de números positivos $\Delta, \Delta t_1$ y $T (\Delta t_1 < T)$ podemos encontrar $\mu_0 > 0$ tal que para el sistema (2.35) con control (2.36) tenemos que

- $\|s(t)\| < \Delta$
- $\|u - u_{eq}\| < \Delta$

para $0 < \mu < \mu_0$, $\Delta t_1 \leq t \leq T$

Basado en este teorema podemos concluir, que el movimiento lento del sistema en lazo cerrado (2.35) y (2.42) sobre la variedad $s(x) = 0$ se describe por la ecuación (2.41) y el control u en este movimiento es igual al control equivalente (2.40).

Capítulo 3

Control por bloques

3.1 Introducción:

En este capítulo con el fin de estabilizar sistemas lineales (SL) invariantes en el tiempo con retardo en el estado y en el control se usa la técnica de control por bloques [17].

Esta técnica es relativamente simple y ventajosa, especialmente cuando se aplica en sistemas multivariados, donde el problema de control es dividido en un número de subproblemas de menor complejidad. Para poder llevar a cabo esta descomposición, es necesario tener una representación especial del sistema, la cual es llamada forma controlable por bloques, que consiste de un conjunto de r bloques que pueden tener distintas dimensiones y que son controlables. Este método ha sido empleado en forma satisfactoria en control de sistemas sin retardo lineales y no lineales. En esta parte de la tesis se propone un método generalizado para aplicar esta técnica en el problema de estabilización de sistemas lineales con retardo. Este problema es uno de los problemas más interesantes en la teoría de control, debido a que muchos procesos industriales están modelados por ecuaciones diferenciales retardadas [1].

El capítulo está organizado de la siguiente manera: En la sección 3.2 se introduce la forma controlable por bloques para sistemas lineales con retardo. Se deriva la transformación del sistema original a la forma controlable por bloques para dos casos diferentes. En la sección 3.3 se describe un procedimiento para aplicar la técnica de control por bloques para los dos casos. También se formulan las condiciones que se deben cumplir en el sistema original para tener estabilidad en el sistema en lazo cerrado. En la sección 3.4 se presentan algunos ejemplos donde se aplican los procedimientos de transformación y control propuestos.

3.2 Forma controlable por bloques para SL con retardo

Consideremos el sistema lineal invariante en el tiempo con retardo descrito por la siguiente ecuación

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Cx(t - \tau) + Bu(t) + Du(t - \tau) \quad (3.1)$$

donde $x \in R^n$, $u \in R^m$ y A , B , C y D son matrices de dimensiones apropiadas. $x(t) = \varphi(t)$, $\forall t \in [t_0 - \tau, t_0]$, $t_0 \geq 0$, $\varphi(t)$ es la función inicial para el sistema (3.1), la cual debe ser continua y τ es el retardo en los estados y en el control.

La característica principal del método propuesto es la transformación del sistema (3.1) a la siguiente *Forma Controlable por Bloques*, la cual consiste de r bloques

$$\dot{x}_r(t) = A_{rr}x_r(t) + C_{rr}x_r(t - \tau) + B_r[x_{r-1}(t) + \Pi_r x_{r-1}(t - \tau)] \quad (3.2a)$$

$$\dot{x}_i(t) = A_i \bar{x}_i(t) + C_i \bar{x}_i(t - \tau) + B_i[x_{i-1}(t) + \Pi_i x_{i-1}(t - \tau)], \quad i = r - 1, \dots, 2 \quad (3.2b)$$

$$\dot{x}_1(t) = A_1 \bar{x}_1(t) + C_1 \bar{x}_1(t - \tau) + B_1[u(t) + \Pi_1 u(t - \tau)] \quad (3.2c)$$

donde $x = [x_r, \dots, x_1]^T$, $\bar{x}_i := [x_r, \dots, x_i]^T$, $x_i \in R^{n_i}$.

$$\text{rango} B_i = n_i, \quad i = 1, \dots, r \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^r n_i = n.$$

Los enteros (n_1, n_2, \dots, n_r) , caracterizan la estructura del sistema (3.1) y satisfacen la condición:

$$n_r \leq n_{r-1} \leq \dots \leq n_1 \leq m$$

En este trabajo se estudian los casos:

$$S1: n_1 = n_2 = \dots = n_r = m$$

$$S2: n_r < n_{r-1} < \dots < n_1 < m$$

3.2.1 Descomposición del sistema por bloques, caso S1

El sistema inicial (3.1) es llevado a la forma (3.2a)-(3.2c) a través de un procedimiento de transformaciones sucesivas que consiste de $(r - 1)$ pasos, que se explica a continuación.

Paso 1: Aquí introducimos las condiciones requeridas para cada paso del procedimiento:

A11. $\text{rango}B = n_1 = m$.

A12. Existe una matriz $\Pi_1 \in R^{n_1 \times n_1}$ tal que

$$D = B\Pi_1$$

La condición A12 es comúnmente llamada “matching condition”, [22]. Usando las condiciones A11 y A12, el vector $x(t)$, y las matrices B y D pueden ser particionadas como

$$x = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{12} \\ B_1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} D_{12} \\ D_1 \end{bmatrix}$$

donde $\text{rango}B_1 = \text{rango}B = n_1$.

Después aplicando la siguiente transformación ortogonal no singular

$$x'' = M_1 x, \quad M_1 = \begin{bmatrix} I_{n-n_1} & -B_{12}B_1^{-1} \\ 0 & I_{n_1} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

el sistema inicial (3.1) se puede representar como:

$$\dot{x}'_2(t) = A'_{22}x'_2(t) + C'_{22}x'_2(t-\tau) + B'_2x_1(t) + D'_2x_1(t-\tau) \quad (3.4a)$$

$$\dot{x}_1(t) = A_{12}x'_2(t) + A_{11}x_1(t) + C_{12}x'_2(t-\tau) + C_{11}x_1(t-\tau) + B_1[u(t) + \Pi_1 u(t-\tau)] \quad (3.4b)$$

donde $x'' = (x'_2, x_1)^T$, $x'_2 \in R^{n-n_1}$, $x_1 \in R^{n_1}$ y

$$M_1 A M_1^{-1} = \begin{bmatrix} A'_{22} & B'_2 \\ A_{12} & A_{11} \end{bmatrix}, \quad M_1 C M_1^{-1} = \begin{bmatrix} C'_{22} & D'_2 \\ C_{12} & C_{11} \end{bmatrix},$$

$$M_1 B = M_1 \begin{bmatrix} B_{12} \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_1 \end{bmatrix}, \quad M_1 D = M_1 \begin{bmatrix} D_{12} \\ D_1 \end{bmatrix} = M_1 \begin{bmatrix} B_{12}\Pi_1 \\ B_1\Pi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_1\Pi_1 \end{bmatrix}$$

Paso 2: En este paso podemos repetir las condiciones A11 y A12 para el sistema (3.4a) como:

A21. $\text{rango}(B'_2) = n_2$.

A22. Existe una matriz $\Pi_2 \in R^{n_2 \times n_2}$ tal que

$$D'_2 = B'_2 \Pi_2$$

En este punto del procedimiento es necesario revisar el valor n_2 , ya que dependiendo de este valor, las tres posibilidades siguientes son posibles

- (i) $n_2 = 0$. Esto significa que el sistema (3.4a) es incontrolable y por consecuencia el sistema inicial (3.1) es incontrolable también. Por lo tanto, el procedimiento tiene que detenerse, ya que no será posible obtener la Forma Controlable por Bloques deseada (ver el Teorema 3.1 de este capítulo).
- (ii) $n_2 = n - n_1$ o $n = n_2 + n_1 = 2m$. En este caso, el sistema transformado (3.4a), (3.4b) es la Forma Controlable por Bloques que se desea obtener. Por lo tanto el procedimiento se detiene para seguir con la estrategia de control (explicada en la sección 3.3 de este capítulo).
- (iii) $n_2 < n - n_1$, que significa que $n > n_2 + n_1 = 2m$. En este caso, el procedimiento tiene que continuar y un paso adicional es necesario, esto significa que el subsistema (3.4a) con entrada $x_1(t)$ puede ser particionado y dividido en el siguiente paso.

Paso k: Consideremos el sistema obtenido en el $(k-1)^{\text{mo}}$ paso

$$\dot{x}'_k(t) = A'_{kk} x'_k(t) + C'_{kk} x'_k(t - \tau) + B'_k x_{k-1}(t) + D'_k x_{k-1}(t - \tau) \quad (3.5a)$$

$$\dot{x}_i(t) = A_i \bar{x}_i(t) + C_i \bar{x}_i(t - \tau) + B_i [x_{i-1}(t) + \Pi_i x_{i-1}(t - \tau)], \quad i = 2, \dots, k-1 \quad (3.5b)$$

$$\dot{x}_1(t) = A_1 \bar{x}_1(t) + C_1 \bar{x}_1(t - \tau) + B_1 [u(t) + \Pi_1 u(t - \tau)] \quad (3.5c)$$

donde $x_i \in R^{n_i}$, $i = 1, \dots, k-1$, y x'_k es un vector de dimensión $(n - n_1 - \dots - n_{k-1})$, y

$$\text{rango} B_i = n_i, \quad i = 1, \dots, k-1$$

Para este paso podemos generalizar las condiciones A11 y A12 como sigue:

Ak1. $\text{rango} B'_k = n_k$.

Ak2. Existe una matriz $\Pi_k \in R^{n_k \times n_k}$ tal que

$$D'_k = B'_k \Pi_k$$

En este punto podemos suponer que el sistema (3.1) es controlable, lo que significa que, $n_k \neq 0$, entonces tenemos dos posibilidades:

1. Si se tiene que

$$n_k = n - \sum_{j=1}^{k-1} n_j$$

entonces, podemos definir:

$$x_k(t) = x'_k(t), \quad A_k = A'_{kk}, \quad C_k = C'_{kk}, \quad B_k = B'_k, \quad D_k = D'_k, \quad B_k \Pi_k = D_k$$

y el procedimiento termina dando las ecuaciones (3.5a)-(35c) como la Forma Controlable por Bloques deseada.

2. Pero si se obtiene que

$$n_k < n - \sum_{j=1}^{k-1} n_j$$

entonces el sistema (3.5a) puede ser particionado como

$$x'_k = \begin{bmatrix} x_{k,2} \\ x_k \end{bmatrix}, \quad B'_k = \begin{bmatrix} B_{k,2} \\ B_k \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D'_k = \begin{bmatrix} D_{k,2} \\ D_k \end{bmatrix}$$

donde x_k y $x_{k,2}$ son los vectores $n_k \times 1$ y $\left(n - \sum_{j=1}^{k-1} n_j - n_k \right) \times 1$ respectivamente, y

$$\text{rango} B_k = \text{rango} B'_k = n_k$$

Procediendo como en el primer paso, bajo las condiciones previas, usamos una transformación similar a (3.3):

$$x_k''(t) = M_k x_k'(t), \quad M_k = \begin{bmatrix} I_{n-n_1-\dots-n_k} & -B_{k,2}B_k^{-1} \\ 0 & I_{n_k} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

entonces el sistema (3.1) después de esta transformación, es descrito por el siguiente sistema:

$$\dot{x}'_{k+1}(t) = A'_{k+1}x'_{k+1}(t) + C'_{k+1}x'_{k+1}(t-\tau) + B'_{k+1}x_k(t) + D'_{k+1}x_k(t-\tau) \quad (3.7a)$$

$$\dot{x}_k(t) = A_k\bar{x}_k(t) + C_k\bar{x}_k(t-\tau) + B_k[x_{k-1}(t) + \Pi_k x_{k-1}(t-\tau)] \quad (3.7b)$$

$$\dot{x}_i(t) = A_i\bar{x}_i(t) + C_i\bar{x}_i(t-\tau) + B_i[x_{i-1}(t) + \Pi_i x_{i-1}(t-\tau)], \quad i = 2, \dots, k-1 \quad (3.7c)$$

$$\dot{x}_1(t) = A_1\bar{x}_1(t) + C_1\bar{x}_1(t-\tau) + B_1[u(t) + \Pi_1 u(t-\tau)] \quad (3.7d)$$

donde $x_k'' = (x'_{k+1}, x_k)^T$ y $\text{rango} B_i = n_i$, $i = 1, \dots, k$.

3.2.2 Descomposición del sistema por bloques, caso S2

Consideremos el sistema (3.1) otra vez. Recordamos que la estructura del sistema para este caso es:

S2. $m > n_1 > n_2 > \dots > n_r$

La Forma Controlable por Bloques que se quiere obtener para este caso es

$$\dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + C_r x_r(t-\tau) + \bar{B}_r [w_{r-1}(t) + \Pi_r w_{r-1}(t-\tau)] \quad (3.8a)$$

$$\dot{x}_i(t) = A_i \bar{x}_i(t) + C_i \bar{x}_i(t-\tau) + \bar{B}_i [w_{i-1}(t) + \Pi_i w_{i-1}(t-\tau)], \quad i = 2, \dots, r-1 \quad (3.8b)$$

$$\dot{x}_1(t) = A_1 \bar{x}_1(t) + C_1 \bar{x}_1(t-\tau) + \bar{B}_1 [v(t) + \Pi_1 v(t-\tau)] \quad (3.8c)$$

donde $x = (x_r, \dots, x_1)^T$, $\bar{x}_i := (x_r, \dots, x_i)^T$, $x_i \in R^{n_i}$, $w_i \in R^{n_{i+1}}$.

$$\text{rango} \bar{B}_i = n_i, \quad i = 1, \dots, r \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^r n_i = n.$$

Las matrices $\bar{B}_i, i = 1, \dots, r$ se obtienen durante el procedimiento que se explica más adelante.

La diferencia en este caso es que los nuevos vectores de control $v(t)$ y $w_i, i = 1, \dots, r-1$, son obtenidos a través de una transformación adicional:

$$u(t) = \Gamma_1 v(t) \quad \text{y} \quad x_i(t) = \Gamma_{i+1} w_i(t), \quad i = 1, \dots, r-1$$

$$\text{con } \Gamma_1 \in R^{m \times n_1} \text{ y } \Gamma_{i+1} \in R^{n_i \times n_{i+1}}$$

El sistema inicial (3.1) es llevado a la forma (3.8a)-(3.8c) a través del procedimiento de transformaciones sucesivas que consiste de $(r-1)$ pasos, el cual se explica enseguida:

Paso 1: En este paso es necesario introducir las siguientes condiciones, las cuales serán requeridas para cada paso del procedimiento

A11. $\text{rango} B = n_1 < m$.

Esto significa que existen entradas de control en el vector de control u que son linealmente dependientes. Entonces existe una matriz $\Gamma_1 \in R^{m \times n_1}$ tal que, los elementos de las columnas de esta matriz son los coeficientes de expansión de las columnas de la matriz B con respecto a los n_1 vectores linealmente independientes que existen en esta. Esto equivale a la matriz $\bar{B}, \bar{B} \in R^{m \times n_1}$:

$$\bar{B} = B\Gamma_1$$

donde \bar{B} tiene el rango completo:

$$\text{rango} \bar{B} = n_1$$

Entonces tenemos un nuevo vector de control de dimensión reducido, $v, v \in R^{n_1}$

$$u(t) = \Gamma_1 v(t) \tag{3.9}$$

el cual coincide con la dimensión de espacio del control. Ahora los componentes del vector nuevo de control, v , son linealmente independientes. Sustituyendo la transformación (3.9) en (3.1) obtenemos

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Cx(t-\tau) + B\Gamma_1 v(t) + D\Gamma_1 v(t-\tau)$$

Si definimos a $D\Gamma_1 = \bar{D}$, entonces tenemos que

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Cx(t-\tau) + \bar{B}v(t) + \bar{D}v(t-\tau) \tag{3.10}$$

donde $\text{rango} \bar{B} = n_1$.

La siguiente condición es comúnmente llamada “matching condition”.

A12. Existe una matriz $\Pi_1 \in R^{n_1 \times n_1}$ tal que

$$\bar{D} = \bar{B}\Pi_1$$

Si aplicamos una transformación ortogonal al sistema (3.10) similar a (3.3):

$$x''(t) = \bar{M}_1 x(t),$$

tal que

$$\bar{M}_1 \bar{B} = \bar{M}_1 \begin{bmatrix} \bar{B}_{12} \\ \bar{B}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B}_1 \end{bmatrix},$$

donde $\text{rang} \bar{B}_1 = n_1$. Entonces si la condición A12 se satisface, tenemos

$$\bar{M}_1 \bar{D} = \bar{M}_1 \begin{bmatrix} \bar{D}_{12} \\ \bar{D}_1 \end{bmatrix} = \bar{M}_1 \begin{bmatrix} \bar{B}_{12}\Pi_1 \\ \bar{B}_1\Pi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B}_1\Pi_1 \end{bmatrix}$$

Nota. De la relación $\bar{B} = B\Gamma_1$ se sigue que:

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{B}_{12} \\ \bar{B}_1 \end{bmatrix} = B\Gamma_1 = \begin{bmatrix} B_{12}\Gamma_1 \\ B_1\Gamma_1 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\bar{B}_1 = B_1\Gamma_1$$

Esta relación será usada en el procedimiento de diseño del control (ver sección 3.3.2).

Con la transformación anterior, el sistema (3.10) se presenta como

$$\dot{x}'_2(t) = A'_{22}x'_2(t) + C'_{22}x'_2(t - \tau) + B'_2x_1(t) + D'_2x_1(t - \tau) \quad (3.11a)$$

$$\dot{x}_1(t) = A_{12}x'_2(t) + A_{11}x_1(t) + C_{12}x'_2(t - \tau) + C_{11}x_1(t - \tau) + \bar{B}_1[v(t) + \Pi_1 v(t - \tau)] \quad (3.11b)$$

donde $x'' = \bar{M}_1 x = (x'_2, x_1)^T$, $x'_2 \in R^{n-n_1}$, $x_1 \in R^{n_1}$, y

$$\bar{M}_1 A \bar{M}_1^{-1} = \begin{bmatrix} A'_{22} & B'_2 \\ A_{12} & A_{11} \end{bmatrix}, \quad \bar{M}_1 C \bar{M}_1^{-1} = \begin{bmatrix} C'_{22} & D'_2 \\ C_{12} & C_{11} \end{bmatrix}.$$

Paso 2: Después repitiendo las condiciones A11 y A12 para el sistema (3.11a), las cuales en este paso serían.

A21. $\text{rango} B'_2 = n_2 < n_1$.

En este caso existe una matriz Γ_2 , $\Gamma_2 \in R^{n_1 \times n_2}$. tal que el sistema (3.11a) con la siguiente transformación

$$x_1(t) = \Gamma_2 w_1(t), w_1 \in R^{n_2} \quad (3.12)$$

se presenta en la forma

$$\dot{x}'_2(t) = A'_{22} x'_2(t) + C'_{22} x'_2(t - \tau) + \bar{B}_2 w_1(t) + \bar{D}_2 w_1(t - \tau) \quad (3.13)$$

con $\bar{B}_2 = B'_2 \Gamma_2$ y $\bar{D}_2 = D'_2 \Gamma_2$ y

$$\text{rango} \bar{B}_2 = n_2$$

A22. Existe una matriz $\Pi_2 \in R^{n_2 \times n_2}$ tal que

$$\bar{D}_2 = \bar{B}_2 \Pi_2$$

Ahora en este punto del procedimiento es necesario revisar el valor n_2 , ya que dependiendo de este valor, las tres posibilidades siguientes, semejantes a las mencionadas para el caso S1, son posibles

- (i) $n_2 = 0$.
- (ii) $n_2 = n - n_1$.
- (iii) $n_2 < n - n_1$.

Supongamos otra vez que el sistema (3.1) es controlable, entonces $n_2 \neq 0$, y además $n > n_2 + n_1$. En este caso un paso subsecuente es necesario y el sistema (3.13) con entrada de control $w_1(t)$ tiene que ser particionado y transformado como en el primer paso.

Paso k: Consideremos el sistema obtenido en el $(k-1)^{\text{mo}}$ paso

$$\dot{x}'_k(t) = A'_k x'_k(t) + C'_k x_k(t - \tau) + B'_k x_{k-1}(t) + D'_k x_{k-1}(t - \tau) \quad (3.14a)$$

$$\dot{x}_i(t) = A_i \bar{x}_i(t) + C_i \bar{x}_i(t - \tau) + \bar{B}_i [w_{i-1}(t) + \Pi_i w_{i-1}(t - \tau)], \quad i = 2, \dots, k-1 \quad (3.14b)$$

$$\dot{x}_1(t) = A_1 \bar{x}_1(t) + C_1 \bar{x}_1(t - \tau) + \bar{B}_1 [v(t) + \Pi_1 v(t - \tau)] \quad (3.14c)$$

donde $x_i \in R^{n_i}$ y x'_k es un vector de dimensión $(n - n_1 - \dots - n_{k-1})$, $w_i \in R^{n_{i+1}}$, $i = 1, \dots, k-1$, y

$$\text{rango} \bar{B}_i = n_i, \quad i = 1, \dots, k-1$$

Por último para este paso, las condiciones A11 y A12 serían como sigue:

Ak1. $\text{rango} B'_k = n_k < n_{k-1}$.

Entonces es necesario encontrar una transformación de la forma

$$x_{k-1}(t) = \Gamma_k w_{k-1}(t)$$

con $x_{k-1} \in R^{n_{k-1}}$, $w_{k-1} \in R^{n_k}$, $\Gamma_k \in R^{n_{k-1} \times n_k}$

Después sustituyendo esta transformación en (3.14a) obtenemos

$$\dot{x}'_k(t) = A'_k x'_k(t) + C'_k x'_k(t - \tau) + \bar{B}_k w_{k-1}(t) + \bar{D}_k w_{k-1}(t - \tau) \quad (3.15)$$

donde $\bar{B}_k = B'_k \Gamma_k$, $\bar{D}_k = D'_k \Gamma_k$ y la matriz \bar{B}_k tiene rango completo:

$$\text{rango} \bar{B}_k = n_k$$

Ak2. Existe una matriz $\Pi_k \in R^{n_k \times n_k}$ tal que

$$\bar{D}_k = \bar{B}_k \Pi_k$$

En este punto podemos tener dos posibilidades:

1. Si se tiene que:

$$n_k = n - \sum_{j=1}^{k-1} n_j$$

entonces podemos definir $x_k(t) = x'_k(t)$, $A_k = A'_k$, $C_k = C'_k$, $B_k \Gamma_k = \bar{B}_k$, $D_k \Gamma_k = \bar{D}_k$, y el procedimiento termina dando las ecuaciones (3.14a)-(3.14c) como la Forma Controlable por Bloques deseada.

2. Pero si se tiene que:

$$n_k < n - \sum_{j=1}^{k-1} n_j$$

entonces el sistema (3.14a) puede ser particionado como

$$x'_k = \begin{bmatrix} x_{k,2} \\ x_k \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_k = \begin{bmatrix} \bar{B}_{k,2} \\ \bar{B}_k \end{bmatrix} \text{ y } \bar{D}_k = \begin{bmatrix} \bar{D}_{k,2} \\ \bar{D}_k \end{bmatrix}$$

donde $\text{rango} \bar{B}_k = n_k$, y x_k , $x_{k,2}$ son vectores $n_k \times 1$ y $\left(n - \sum_{j=1}^{k-1} n_j - n_k \right) \times 1$ respectivamente.

Nota. De la relación $\bar{B}_k = B'_k \Gamma_k$ se sigue que

$$\bar{B}_k = \begin{bmatrix} \bar{B}_{k,2} \\ \bar{B}_k \end{bmatrix} = B'_k \Gamma_k = \begin{bmatrix} B_{k,2} \Gamma_k \\ B_k \Gamma_k \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\bar{B}_k = B_k \Gamma_k$$

Procediendo de manera similar que en el primer paso, bajo las condiciones previas, usamos una transformación similar a (3.3)

$$\bar{x}_k''(t) = \bar{M}_k \bar{x}_k'(t) \quad (3.16)$$

$$\bar{M}_k \bar{B}_k = \bar{M}_k \begin{bmatrix} \bar{B}_{k,2} \\ \bar{B}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B}_k \end{bmatrix}, \quad \bar{M}_k \bar{D}_k = \bar{M}_k \begin{bmatrix} \bar{D}_{k2} \\ \bar{D}_k \end{bmatrix} = \bar{M}_k \begin{bmatrix} \bar{B}_{k2} \Pi_k \\ \bar{B}_k \Pi_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B}_k \Pi_k \end{bmatrix}$$

para obtener el sistema descrito por

$$\dot{x}'_{k+1}(t) = A'_{k+1} x'_{k+1}(t) + C'_{k+1} x'_{k+1}(t - \tau) + B'_{k+1} x_k(t) + D'_{k+1} x_k(t - \tau) \quad (3.17a)$$

$$\dot{\bar{x}}_k(t) = A_k \bar{x}_k(t) + C_k \bar{x}_k(t - \tau) + \bar{B}_k [w_{k-1}(t) + \Pi_k w_{k-1}(t - \tau)] \quad (3.17b)$$

$$\dot{\bar{x}}_i(t) = A_i \bar{x}_i(t) + C_i \bar{x}_i(t - \tau) + \bar{B}_i [w_{i-1}(t) + \Pi_i w_{i-1}(t - \tau)], \quad i = 2, \dots, k-1 \quad (3.17c)$$

$$\dot{\bar{x}}_1(t) = A_1 \bar{x}_1(t) + C_1 \bar{x}_1(t - \tau) + \bar{B}_1 [v(t) + \Pi_1 v(t - \tau)] \quad (3.17d)$$

donde $\bar{x}_k'' = (x'_{k+1}, x_k)^T$ y $\text{rango} \bar{B}_i = n_i$, $i = 1, \dots, k$.

De los procedimientos previos se desprende una relación entre la forma controlable por bloques y la controlabilidad del sistema inicial, esta relación puede ser enunciada en el siguiente resultado:

TEOREMA 3.1 *Supongamos que*

A) *El sistema (3.1) es controlable, y*

B) *En cada paso del procedimiento para obtener la forma controlable por bloques, las condiciones Ak1 y Ak2 se satisfacen.*

Entonces, existe un entero $r \leq n$ tal que el sistema (3.1) toma la forma (3.2a)-(3.2d) para la estructura S1, o la forma (3.8a)-(3.8d) para la estructura S2.

Prueba. Si el sistema inicial es no controlable entonces en un paso k , $k = 1, \dots, r$ del procedimiento, se puede obtener en el sistema (3.14) que $B'_k = 0$ y por la condición B) se puede obtener que $D'_k = 0$ también.

Entonces obtenemos un subsistema de la forma

$$\dot{x}'_k(t) = A'_k x'_k(t) + C'_k x_k(t - \tau)$$

que es no controlable. Por lo tanto no existiría un número entero $r \leq n$ y no se pueden obtener las formas deseadas en ambas estructuras.

3.3 Control por bloques

3.3.1 Diseño de control por bloques para el caso S1

En esta sección se desarrolla una ley de control por medio de una retroalimentación de estado para el sistema transformado (3.2a)-(3.2c) con la estructura S1. Con el fin de explicar esta técnica de control es más conveniente renombrar los bloques de (3.2a)-(3.2c) como

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + C_{11}x_1(t - \tau) + B_1v_1(t), \quad v_1(t) = [x_2(t) + \Pi_1x_2(t - \tau)] \quad (3.18a)$$

$$\dot{x}_i(t) = A_i\bar{x}_i(t) + C_i\bar{x}_i(t - \tau) + B_iv_i(t), \quad v_i(t) = [x_{i+1}(t) + \Pi_ix_{i+1}(t - \tau)], \quad (3.18b)$$

$$i = 2, \dots, r-1$$

$$\dot{x}_r(t) = A_r\bar{x}_r(t) + C_r\bar{x}_r(t - \tau) + B_rv_r(t), \quad v_r(t) = [u(t) + \Pi_ru(t - \tau)] \quad (3.18c)$$

donde $x(t) = (x_1, \dots, x_r)^T$, $\bar{x}_i(t) := (x_1, \dots, x_i)^T$, $x_i \in R^{n_i}$,

$$\text{rango}B_i = n_i, \quad i = 1, \dots, r \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^r n_i = n.$$

Por lo tanto en este caso tenemos la estructura S1 donde $m = n_r = n_{r-1} = \dots = n_1$.

La estrategia de control puede ser diseñada para el sistema (3.18a)-(3.18c) considerando a v_i como un vector de entrada virtual en el i^{mo} bloque. Se diseña por medio de un procedimiento paso a paso explicado a continuación.

Paso 1. Seleccionando el vector de entrada ficticio $v_1(t)$ en el primer bloque (3.18a) como:

$$v_1(t) = v_{1c}(t) + B_1^{-1}[\Lambda_1z_1(t) + z_2(t)] \quad (3.19)$$

donde $z_1(t) = x_1(t)$ y $z_2 \in R^{n_2}$ son los nuevos vectores de estado, $\Lambda_1 \subset R^{n_1 \times n_1}$ es una matriz Hurwitz con los valores propios deseados, y $v_{1c}(t)$ es calculado de la ecuación $\dot{z}_1(t) = 0$ sobre las trayectorias del 1^{er} bloque (3.18a) como

$$v_{1c}(t) = -B_1^{-1}[A_{11}x_1(t) + C_{11}x_1(t - \tau)] \quad (3.20)$$

La ley de control (3.19), consiste de dos partes. La primera parte es $v_{1c}(t)$, que se necesita para eliminar los términos con retardo del primer bloque (3.18a), mientras la segunda parte, establece la dinámica nueva deseada, $\Lambda_1 z_1(t)$ sin retardo.

El primer bloque transformado en las nuevas coordenadas $z_1(t)$ y $z_2(t)$ con la entrada (3.19) y (3.20) tiene la forma deseada sin retardo

$$\dot{z}_1(t) = \Lambda_1 z_1(t) + z_2(t) \quad (3.21)$$

Sustituyendo (3.20) en (3.19), y multiplicando por B_1 por la derecha se obtiene que:

$$B_1 v_1(t) = -[A_{11} x_1(t) + C_{11} x_1(t - \tau)] + [\Lambda_1 z_1(t) + z_2(t)] \quad (3.22a)$$

Tomando en cuenta que:

$$v_1(t) = x_2(t) + \Pi_1 x_2(t - \tau) \quad (3.22b)$$

De las ecuaciones (3.22a) y (3.22b) se puede obtener la siguiente transformación para z_2 como:

$$z_2(t) = [(A_1 - \Lambda_1) x_1(t) + C_1 x_1(t - \tau)] + B_1 [x_2(t) + \Pi_1 x_2(t - \tau)] \quad (3.22c)$$

que en forma compacta sería:

$$z_2(t) = [(A_1 - \Lambda_1) x_1(t) + C_1 x_1(t - \tau)] + B_1 v_1(t) \quad (3.22d)$$

$$v_1(t) = x_2(t) + \Pi_1 x_2(t - \tau) \quad (3.22e)$$

La transformación (3.22d) con (3.22e) es estable si los valores propios de Π_1 se encuentran dentro del círculo unitario.

Paso 2. Tomando la derivada de (3.22c), sobre las trayectorias del 1^{er} y 2^{do} bloques de (3.18a)-(3.18c), tenemos que

$$\dot{z}_2(t) = \sum_{j=1}^2 [A_{2,j} x_j(t) + C_{2,j}^1 x_j(t - \tau) + C_{2,j}^2 x_j(t - 2\tau)] + \tilde{B}_2 v_2^1(t) \quad (3.23)$$

donde $\text{rango} \tilde{B}_2 = n_2$, $\tilde{B}_2 = B_1 B_2$, y con el nuevo vector de control ficticio $v_2^1(t)$ como:

$$v_2^1(t) = v_2(t) + B_2^{-1} \Pi_1 B_2 v_2(t - \tau) \quad (3.24a)$$

$$v_2(t) = x_3(t) + \Pi_2 x_3(t - \tau) \quad (3.24b)$$

De la misma manera que en el primer paso, el vector de entrada o de control ficticio $v_2^1(t)$ en (3.23) puede ser escogido en forma similar a (3.19) como

$$v_2^1(t) = v_{2c}^1(t) + \tilde{B}_2^{-1} [\Lambda_2 z_2(t) + z_3(t)] \quad (3.25)$$

donde $z_3 \in R^{n_3}$ es el nuevo vector de estado, $\Lambda_2 \subset R^{n_2 \times n_2}$ es una matriz Hurwitz y $v_{2c}^1(t)$ se puede calcular de la ecuación $\dot{z}_2(t) = 0$ como

$$v_{2c}^1(t) = -\tilde{B}_2^{-1} \sum_{j=1}^2 [A_{2,j} x_j(t) + C_{2,j}^1 x_j(t - \tau) + C_{2,j}^2 x_j(t - 2\tau)] \quad (3.26)$$

De esta forma, la ecuación (3.23) con (3.25) y (3.26) toma una forma similar a la ecuación (3.21), es decir

$$\dot{z}_2(t) = \Lambda_2 z_2(t) + z_3(t) \quad (3.27)$$

Combinando las ecuaciones (3.25) y (3.26), tenemos:

$$\tilde{B}_2 v_2^1(t) = -\sum_{j=1}^2 [A_{2,j} x_j(t) + C_{2,j}^1 x_j(t - \tau) + C_{2,j}^2 x_j(t - 2\tau)] + [\Lambda_2 z_2(t) + z_3(t)] \quad (3.28a)$$

Tomando en cuenta las relaciones:

$$v_2^1(t) = v_2(t) + B_2^{-1} \Pi_1 B_2 v_2(t - \tau) \quad (3.28b)$$

$$v_2(t) = x_3(t) + \Pi_2 x_3(t - \tau) \quad (3.28c)$$

tenemos:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_2 v_2^1(t) &= B_1 B_2 v_2^1(t) = B_1 B_2 [v_2(t) + B_2^{-1} \Pi_1 B_2 v_2(t - \tau)] \\ &= B_1 B_2 \{ [x_3(t) + \Pi_2 x_3(t - \tau)] + B_2^{-1} \Pi_1 B_2 [x_3(t - \tau) + \Pi_2 x_3(t - 2\tau)] \} \end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned} &\tilde{B}_2 \{ [x_3(t) + \Pi_2 x_3(t - \tau)] + B_2^{-1} \Pi_1 B_2 [x_3(t - \tau) + \Pi_2 x_3(t - 2\tau)] \} \\ &= \sum_{j=1}^2 [A_{2,j} x_j(t) + C_{2,j}^1 x_j(t - \tau) + C_{2,j}^2 x_j(t - 2\tau)] + [\Lambda_2 z_2(t) + z_3(t)] \end{aligned}$$

Como resultado obtenemos la transformación sobre z_3 y x_3 como:

$$z_3(t) = \sum_{j=1}^2 [A_{2,j}x_j(t) + C_{2,j}^1x_j(t-\tau) + C_{2,j}^2x_j(t-2\tau)] - \Lambda_2z_2(t) + \tilde{B}_2 \{ [x_3(t) + \Pi_2x_3(t-\tau)] + B_2^{-1}\Pi_1B_2[x_3(t-\tau) + \Pi_2x_3(t-2\tau)] \} \quad (3.28d)$$

El último término de esta transformación, usando la relación:

$$v_2(t) = x_3(t) + \Pi_2x_3(t-\tau) \quad (3.28e)$$

Sería:

$$\begin{aligned} &= [x_3(t) + \Pi_2x_3(t-\tau)] + B_2^{-1}\Pi_1B_2[x_3(t-\tau) + \Pi_2x_3(t-2\tau)] \\ &= v_2(t) + B_2^{-1}\Pi_1B_2v_2(t-\tau) \\ &= v_2^1(t) \end{aligned}$$

Entonces la transformación (3.28d) se puede representar en la forma compacta como:

$$\begin{aligned} z_3(t) &= \sum_{j=1}^2 [A_{2,j}x_j(t) + C_{2,j}^1x_j(t-\tau) + C_{2,j}^2x_j(t-2\tau)] - \Lambda_2z_2(t) + \tilde{B}_2v_2^1(t) \\ v_2^1(t) &= v_2(t) + B_2^{-1}\Pi_1B_2v_2(t-\tau) \\ v_2(t) &= x_3(t) + \Pi_2x_3(t-\tau) \end{aligned} \quad (3.28f)$$

La transformación (3.28f) es estable si los valores propios de las matrices Π_1 y Π_2 están localizados dentro del círculo unitario (Ver teorema 3.2)

Este procedimiento puede ser aplicado en forma iterativa obteniendo en el k^{mo} paso la siguiente transformación para $k = 3, \dots, r-1$

$$z_{k+1}(t) = \sum_{j=1}^k \left[A_{k,j} x_j(t) + C_{k,j}^1 x_j(t-\tau) + \dots + C_{k,j}^k x_j(t-k\tau) \right] - \Lambda_k z_k(t) + \tilde{B}_k v_k^1(t) \quad (3.29a)$$

$$v_k^1(t) = v_k^2(t) + B_k^{-1} \dots B_2^{-1} \Pi_1 B_2 \dots B_k v_k^2(t-\tau) \quad (3.29b)$$

$$v_k^2(t) = v_k^3(t) + B_{k-1}^{-1} \dots B_3^{-1} \Pi_2 B_3 \dots B_{k-1} v_k^3(t-\tau) \quad (3.29c)$$

\vdots

$$v_k^{k-1}(t) = v_k(t) + B_k^{-1} \Pi_{k-1} B_k v_k(t-\tau) \quad (3.29d)$$

$$v_k(t) = x_{k+1}(t) + \Pi_k x_{k+1}(t-\tau) \quad (3.29e)$$

donde

$$\Lambda_k \subset R^{n_k \times n_k} \text{ es una matriz Hurwitz y } \tilde{B}_k = B_1 \dots B_k.$$

En el último paso, el sistema (3.18a)-(3.18c) puede ser presentado en las nuevas variables definidas en (3.22), (3.28) y (3.29), de la forma

$$\dot{z}_1(t) = \Lambda_1 z_1(t) + z_2(t) \quad (3.30a)$$

$$\dot{z}_i(t) = \Lambda_i z_i(t) + z_{i+1}(t), \quad i = 2, \dots, r-1 \quad (3.30b)$$

$$\dot{z}_r(t) = \sum_{j=1}^r \left[A_{k,j} x_j(t) + C_{k,j}^1 x_j(t-\tau) + \dots + C_{k,j}^k x_j(t-r\tau) \right] + \tilde{B}_r v_r^1(t) \quad (3.30c)$$

donde $z = (z_1, \dots, z_r)^T$, $z_i \in R^{n_i}$, $i = 1, \dots, r$, $\tilde{B}_r = B_1 \dots B_r$ y

$$v_r^1(t) = v_r^2(t) + B_r^{-1} \dots B_2^{-1} \Pi_1 B_2 \dots B_r v_r^2(t-\tau) \quad (3.31d)$$

$$v_r^2(t) = v_r^3(t) + B_{r-1}^{-1} \dots B_3^{-1} \Pi_2 B_3 \dots B_{r-1} v_r^3(t-\tau) \quad (3.31e)$$

\vdots

$$v_r^{r-1}(t) = v_r(t) + B_r^{-1} \Pi_{r-1} B_r v_r(t-\tau) \quad (3.31f)$$

$$v_r(t) = u(t) + \Pi_r u(t-\tau) \quad (3.31g)$$

Podemos ver que las ecuaciones (3.30a) y (3.30b) no tienen retardo, pero el último bloque (3.30c) depende de todas las variables con diferentes retardos como $\tau, 2\tau, \dots, r\tau$. Estos términos con retardo se pueden eliminar si se escoge el vector de control $v_r^1(t)$ en forma similar a (3.19) como:

$$v_r^1(t) = v_{rc}^1 + \tilde{B}_r^{-1} \Lambda_r z_r(t)$$

con $\Lambda_r \in R^{n_r \times n_r}$ una matriz Hurwitz y

$$v_{rc}^1(t) = -\tilde{B}_r^{-1} \sum_{j=1}^r \left[A_{k,j} x_j(t) + C_{k,j}^1 x_j(t-\tau) + \dots + C_{k,j}^k x_j(t-r\tau) \right]$$

De esta forma obtenemos la dinámica en lazo cerrado en las nuevas variables de estado $(z_1(t), \dots, z_n(t))$ determinada por el sistema

$$\dot{z}_1(t) = \Lambda_1 z_1(t) + z_2(t) \quad (3.32a)$$

$$\dot{z}_i(t) = \Lambda_i z_i(t) + z_{i+1}(t), \quad i = 2, \dots, r-1 \quad (3.32b)$$

$$\dot{z}_r(t) = \Lambda_r z_r(t) \quad (3.32c)$$

con la dinámica deseada y sin retardo en los estados.

Es muy importante notar, que aunque el sistema (3.32) puede ser asintóticamente estable con una selección apropiada de los valores propios en las matrices Λ_i , $i = 1, \dots, r$, el sistema en lazo cerrado presentado en las variables originales, puede llegar a ser inestable si alguna de las transformaciones de las variables durante el procedimiento es inestable. Las condiciones de estabilidad para el sistema (3.18) con control (3.31) son presentadas en el teorema 3.2 (ver sección 3.3.2).

3.3.2 Diseño de control por bloques para el caso S2

En esta sección se desarrolla una ley de control por retroalimentación de estado para el sistema transformado (3.8a)-(3.8c) con estructura S2. En este punto es más conveniente renombrar los bloques de (3.8a)-(3.8c) como

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + C_{11}x_1(t - \tau) + \bar{B}_1v_1(t), \quad v_1(t) = [w_2(t) + \Pi_1w_2(t - \tau)], \quad (3.33a)$$

$$\dot{x}_i(t) = A_i\bar{x}_i(t) + C_i\bar{x}_i(t - \tau) + \bar{B}_iv_i(t), \quad v_i(t) = [w_{i+1}(t) + \Pi_iw_{i+1}(t - \tau)], \quad (3.33b)$$

$$i = 2, \dots, r-1$$

$$\dot{x}_r(t) = A_r\bar{x}_r(t) + C_r\bar{x}_r(t - \tau) + \bar{B}_rv_r(t), \quad v_r(t) = [v(t) + \Pi_rv(t - \tau)] \quad (3.33c)$$

donde $x = (x_1, \dots, x_r)^T$, $\bar{x}_i := (x_1, \dots, x_i)^T$, $x_i \in R^{n_i}$, $w_i \in R^{n_{i+1}}$, $\Pi_i \in R^{n_i \times n_i}$ con

$$u = \Gamma_r v, \quad \Gamma_r \in R^{m \times n_r} \quad (3.33d)$$

$$x_i = \Gamma_{i-1} w_i, \quad \Gamma_{i-1} \in R^{n_i \times n_{i-1}} \quad i = 2, \dots, r \quad (3.33e)$$

$$\bar{B}_i = B_i \Gamma_i, \quad B_i \in R^{n_i \times n_{i-1}} \quad i = 1, \dots, r \quad (3.33f)$$

$$\text{rango} \bar{B}_i = \text{rango} B_i = n_i, \quad i = 1, \dots, r \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^r n_i = n.$$

La estructura del sistema para este caso es S2 donde, $m > n_r > n_{r-1} > \dots > n_1$.

La estrategia de control para el sistema (3.33a)-(3.33c) puede ser diseñada considerando a v_i como un vector de entrada ficticio en el i^{mo} bloque. Este procedimiento es expuesto a continuación, que es similar al caso S1.

Paso 1. Seleccionando el vector de entrada ficticio v_i en el primer bloque (3.33a) como:

$$v_1(t) = v_{1c}(t) + \bar{B}_1^{-1} [\Lambda_1 z_1(t) + E_{11} z_2(t)] \quad (3.34a)$$

donde $z_1 = x_1$ y $z_2 \in R^{n_2}$ son las nuevas variables, $\Lambda_1 \subset R^{n_1 \times n_1}$ es una matriz Hurwitz con los valores propios deseados, $E_{11}, E_{11} \subset R^{n_1 \times n_2}$ es una matriz, que podemos definir durante el procedimiento, y $v_{1c}(t)$ se puede calcular de la ecuación $\dot{z}_1(t) = 0$ sobre las trayectorias del 1^{er} bloque (3.33a) como:

$$v_{1c}(t) = -\bar{B}_1^{-1} [A_{11}x_1(t) + C_{11}x_1(t - \tau)] \quad (3.34b)$$

El primer bloque transformado en las nuevas coordenadas $z_1(t)$ y $z_2(t)$ con entrada (3.34a) y (3.34b) tiene la forma deseada sin retardo

$$\dot{z}_1(t) = \Lambda_1 z_1(t) + E_{11} z_2(t) \quad (3.35)$$

Sustituyendo (3.34b) en (3.34a) y multiplicando por la matriz \bar{B}_1 por la derecha obtenemos que:

$$\bar{B}_1 v_1(t) = -[A_1 x_1(t) + C_1 x_1(t - \tau)] + [\Lambda_1 z_1(t) + E_{11} z_2(t)] \quad (3.36)$$

Por otro lado, tomando en cuenta la relación (3.33f):

$$\bar{B}_1 = B_1 \Gamma_1$$

la relación (ver (3.33a)):

$$v_1(t) = w_2(t) + \Pi_1 w_2(t - \tau)$$

y también la relación (3.33e):

$$x_2(t) = \Gamma_1 w_2(t) \quad \text{y} \quad w_2(t) = \Gamma_1^+ x_2(t), \quad \Gamma_1^+ = (\Gamma_1^T \Gamma_1)^{-1} \Gamma_1^T,$$

tenemos

$$\begin{aligned} \bar{B}_1 v_1(t) &= B_1 \Gamma_1 v_1(t) = B_1 [\Gamma_1 w_2(t) + \Gamma_1 \Pi_1 w_2(t - \tau)] \\ &= B_1 [x_2(t) + \Gamma_1 \Pi_1 \Gamma_1^+ x_2(t - \tau)] \end{aligned} \quad (3.37)$$

Si elegimos la matriz E_{11} como:

$$E_{11} = B_1$$

y combinamos las ecuaciones (3.36) y (3.37) podemos obtener

$$B_1 [x_2(t) + \Gamma_1 \Pi_1 \Gamma_1^+ x_2(t - \tau)] = -(A_1 - \Lambda_1)x_1(t) - C_1 x_1(t - \tau) + B_1 z_2(t) \quad (3.38)$$

Ahora se busca la nueva transformación para z_2 , para esto los elementos de la matriz B_1 pueden ser ordenados tal que la matriz cuadrada

$$\tilde{B}_2 := \begin{bmatrix} B_1 \\ E_{12} \end{bmatrix}$$

con $E_{12} = [0 \quad I_{n_2-n_1}]$, $E_{12} \in R^{(n_2-n_1) \times n_2}$ tiene rango n_2 . Luego si establecemos que:

$$E_{12} [x_2(t) + \Gamma_1 \Pi_1 \Gamma_1^+ x_2(t - \tau)] = E_{12} z_2 \quad (3.39)$$

De las ecuaciones (3.38) y (3.39) se puede obtener la siguiente transformación para z_2 como

$$z_2(t) = \tilde{B}_2^{-1} \begin{bmatrix} (A_1 - \Lambda_1)x_1(t) + C_1 x_1(t - \tau) \\ 0 \end{bmatrix} + [x_2(t) + \Gamma_1 \Pi_1 \Gamma_1^+ x_2(t - \tau)] \quad (3.40a)$$

El segundo termino de (3.40a), usando

$$x_2(t) = \Gamma_1 w_2(t) \quad \text{y} \quad w_2(t) = \Gamma_1^+ x_2(t),$$

se puede presentar como

$$\Gamma_1 w_2(t) + \Gamma_1 \Pi_1 w_2(t - \tau) = \Gamma_1 [w_2(t) + \Pi_1 w_2(t - \tau)] = \Gamma_1 v_1(t)$$

Entonces la transformación (3.40a) se puede presentar en la forma compacta

$$z_2(t) = \tilde{B}_2^{-1} \begin{bmatrix} (A_1 - \Lambda_1)x_1(t) + C_1 x_1(t - \tau) \\ 0 \end{bmatrix} + \Gamma_1 v_1(t) \quad (3.40b)$$

$$v_1(t) = w_2(t) + \Pi_1 w_2(t - \tau) \quad (3.40c)$$

$$x_2(t) = \Gamma_1 w_2(t) \quad (3.40d)$$

Es claro, que la transformación (3.40) es estable si los valores propios de la matriz Π_1 están localizados dentro del círculo unitario (como se demuestra en el teorema 3.2 más adelante). Entonces la ecuación (3.35) se representa como

$$\dot{z}_1(t) = \Lambda_1 z_1(t) + B_1 z_2(t)$$

Paso 2. Tomando la derivada de (3.40a) sobre las trayectorias del 1^{er} y 2^{do} bloques de (3.33a)-(3.33c) tenemos que:

$$\dot{z}_2(t) = \sum_{j=1}^2 [A_{2,j} x_j(t) + C_{2,j}^1 x_j(t - \tau) + C_{2,j}^2 x_j(t - 2\tau)] + \bar{B}_2 v_2^1(t) \quad (3.41a)$$

con:

$$v_2^1(t) = v_2(t) + \bar{B}_2^{-1} \Gamma_1 \Pi_1 \Gamma_1^+ \bar{B}_2 v_2(t - \tau) \quad (3.41b)$$

$$v_2(t) = w_3(t) + \Pi_2 w_3(t - \tau) \quad (3.41c)$$

$$x_3(t) = \Gamma_2 w_3(t) \quad (3.41d)$$

Ahora como en el primer paso, podemos escoger el vector de entrada de control ficticio $v_2^1(t)$ en (3.41a) en forma similar a (3.34) como:

$$v_2^1(t) = v_{2c}^1(t) + \bar{B}_2^{-1} [\Lambda_2 z_2(t) + E_{21} z_3(t)], \quad (3.42)$$

donde $z_3 \in R^{n_3}$ es un vector nuevo, $\Lambda_2 \subset R^{n_2 \times n_2}$ es una matriz Hurwitz, $E_{21} \subset R^{n_2 \times n_3}$ y $v_{2c}^1(t)$ puede ser calculado de la ecuación $\dot{z}_2(t) = 0$ como:

$$v_{2c}^1(t) = -\bar{B}_2^{-1} \sum_{j=1}^2 [A_{2,j} x_j(t) + C_{2,j}^1 x_j(t - \tau) + C_{2,j}^2 x_j(t - 2\tau)] \quad (3.43)$$

De esta manera, las ecuaciones (3.41a)-(3.41d) con (3.42) y (3.43) toman una forma similar a la ecuación (3.35), es decir

$$\dot{z}_2(t) = \Lambda_2 z_2(t) + E_{21} z_3(t) \quad (3.44)$$

Combinando (3.42) y (3.43), tenemos

$$\bar{B}_2 v_2^1(t) = -\sum_{j=1}^2 \left[A_{2,j} x_j(t) + C_{2,j}^1 x_j(t-\tau) + C_{2,j}^2 x_j(t-2\tau) \right] + [\Lambda_2 z_2(t) + E_{21} z_3(t)] \quad (3.45)$$

Por otro lado, tomando en cuenta la relación (3.33f):

$$\bar{B}_2 = B_2 \Gamma_2$$

y las relaciones (3.41b) y (3.41c):

$$\begin{aligned} v_2^1(t) &= v_2(t) + \bar{B}_2^{-1} \Gamma_1 \Pi_1 \Gamma_1^+ \bar{B}_2 v_2(t-\tau) \\ v_2(t) &= w_3(t) + \Pi_2 w_3(t-\tau) \end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned} \bar{B}_2 v_2^1 &= B_2 \Gamma_2 v_2^1 = B_2 \Gamma_2 \left[v_2(t) + \bar{B}_2^{-1} \Gamma_1 \Pi_1 \Gamma_1^+ \bar{B}_2 v_2(t-\tau) \right] \\ &= B_2 \Gamma_2 \left\{ [w_3(t) + \Pi_2 w_3(t-\tau)] + \bar{B}_2^{-1} \Gamma_1 \Pi_1 \Gamma_1^+ \bar{B}_2 [w_3(t-\tau) + \Pi_2 w_3(t-2\tau)] \right\} \end{aligned}$$

Usando también la relación (3.41d):

$$x_3(t) = \Gamma_2 w_3(t) \quad \text{y} \quad w_3(t) = \Gamma_2^+ x_3(t), \quad \Gamma_2^+ = (\Gamma_2^T \Gamma_2)^{-1} \Gamma_2^T$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} \bar{B}_2 v_2^1 &= \\ B_2 \left\{ [x_3(t) + \Gamma_2 \Pi_2 \Gamma_2^+ x_3(t-\tau)] + \Gamma_2 \bar{B}_2^{-1} \Gamma_1 \Pi_1 \Gamma_1^+ \bar{B}_2 \Gamma_2^+ [x_3(t-\tau) + \Gamma_2 \Pi_2 \Gamma_2^+ x_3(t-2\tau)] \right\} \end{aligned} \quad (3.46)$$

Eligiendo

$$E_{21} = B_2$$

y combinado (3.45) y (3.46) obtenemos

$$\begin{aligned} B_2 \left\{ [x_3(t) + \Gamma_2 \Pi_2 \Gamma_2^+ x_3(t-\tau)] + \Gamma_2 \bar{B}_2^{-1} \Gamma_1 \Pi_1 \Gamma_1^+ \bar{B}_2 \Gamma_2^+ [x_3(t-\tau) + \Gamma_2 \Pi_2 \Gamma_2^+ x_3(t-2\tau)] \right\} \\ = -\sum_{j=1}^2 \left[A_{2,j} x_j(t) + C_{2,j}^1 x_j(t-\tau) + C_{2,j}^2 x_j(t-2\tau) \right] + \Lambda_2 z_2(t) + B_2 z_3(t) \end{aligned}$$

Ahora se puede obtener la transformación para z_3 , para esto los elementos de la matriz B_2 se ordenan tal que la matriz cuadrada

$$\tilde{B}_3 := \begin{bmatrix} B_2 \\ E_{22} \end{bmatrix}$$

con $E_{22} = [0 \quad I_{n_3-n_2}]$, $E_{12} \subset R^{(n_3-n_2) \times n_3}$ tiene rango n_3 . Luego si establecemos que:

$$E_{22} \left\{ \left[x_3(t) + \Gamma_2 \Pi_2 \Gamma_2^+ x_3(t-\tau) \right] + \Gamma_2 \bar{B}_2^{-1} \Gamma_1 \Pi_1 \Gamma_1^+ \bar{B}_2 \Gamma_2^+ \left[x_3(t-\tau) + \Gamma_2 \Pi_2 \Gamma_2^+ x_3(t-2\tau) \right] \right\} = E_{22} z_3$$

Como resultado, obtenemos la transformación no singular sobre z_3 y x_3 como

$$z_3(t) = \tilde{B}_3^{-1} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^2 \left[A_{2,j} x_j(t) + C_{2,j}^1 x_j(t-\tau) + C_{2,j}^2 x_j(t-2\tau) \right] + \Lambda_2 z_2(t) \\ 0 \end{array} \right\} \quad (3.47a)$$

$$+ \left[x_3(t) + \Gamma_2 \Pi_2 \Gamma_2^+ x_3(t-\tau) \right] + \Gamma_2 \bar{B}_2^{-1} \Gamma_1 \Pi_1 \Gamma_1^+ \bar{B}_2 \Gamma_2^+ \left[x_3(t-\tau) + \Gamma_2 \Pi_2 \Gamma_2^+ x_3(t-2\tau) \right]$$

El segundo término de esta transformación, usando

$$x_3(t) = \Gamma_2 w_3(t) \quad \text{y} \quad w_3(t) = \Gamma_2^+ x_3(t), \quad \Gamma_2^+ = (\Gamma_2^T \Gamma_2)^{-1} \Gamma_2^T \quad \Gamma_2^+ \Gamma_2 = I_{n_2}$$

se puede presentar como

$$\begin{aligned} & \left[x_3(t) + \Gamma_2 \Pi_2 \Gamma_2^+ x_3(t-\tau) \right] + \Gamma_2 \bar{B}_2^{-1} \Gamma_1 \Pi_1 \Gamma_1^+ \bar{B}_2 \Gamma_2^+ \left[x_3(t-\tau) + \Gamma_2 \Pi_2 \Gamma_2^+ x_3(t-2\tau) \right] \\ &= \left[\Gamma_2 w_3(t) + \Gamma_2 \Pi_2 w_3(t-\tau) \right] + \Gamma_2 \bar{B}_2^{-1} \Gamma_1 \Pi_1 \Gamma_1^+ \bar{B}_2 \Gamma_2^+ \left[\Gamma_2 w_3(t-\tau) + \Gamma_2 \Pi_2 w_3(t-2\tau) \right] \\ &= \Gamma_2 \left\{ \left[w_3(t) + \Pi_2 w_3(t-\tau) \right] + \bar{B}_2^{-1} \Gamma_1 \Pi_1 \Gamma_1^+ \bar{B}_2 \left[w_3(t-\tau) + \Pi_2 w_3(t-2\tau) \right] \right\} \\ &= \Gamma_2 \left[v_2(t) + \bar{B}_2^{-1} \Gamma_1 \Pi_1 \Gamma_1^+ \bar{B}_2 v_2(t-\tau) \right] \\ &= \Gamma_2 v_2^1(t) \end{aligned}$$

Entonces la transformación (3.47a) se puede representar en la forma compacta

$$z_3(t) = \tilde{B}_2^{-1} \left\{ \sum_{j=1}^2 [A_{2,j} x_j(t) + C_{2,j}^1 x_j(t-\tau) + C_{2,j}^2 x_j(t-2\tau)] + \Lambda_2 z_2(t) \right\} + \Gamma_2 v_2^1(t) \quad (3.47b)$$

con:

$$v_2^1(t) = v_2(t) + \bar{B}_2^{-1} \Gamma_1 \Pi_1 \Gamma_1^+ \bar{B}_2 v_2(t-\tau) \quad (3.47c)$$

$$v_2(t) = w_3(t) + \Pi_2 w_3(t-\tau) \quad (3.47d)$$

$$x_3(t) = \Gamma_2 w_3(t) \quad (3.47e)$$

Esta transformación es estable si los valores propios de las matrices Π_1 y Π_2 están localizados dentro del círculo unitario (Ver teorema 3.2)

Entonces la ecuación (3.44) se puede presentar como:

$$\dot{z}_2(t) = \Lambda_2 z_2(t) + B_2 z_3(t)$$

Este procedimiento puede ser aplicado de forma iterativa, obteniendo en el paso k^{mo} la siguiente transformación para $k = 3, \dots, r-1$

$$z_{k+1}(t) = \tilde{B}_k^{-1} \left\{ \sum_{j=1}^k [A_{k,j} x_j(t) + C_{k,j}^1 x_j(t-\tau) + \dots + C_{k,j}^k x_j(t-k\tau)] + \Lambda_k z_k \right\} + \Gamma_k v_k^1(t) \quad (3.48a)$$

con:

$$v_k^1(t) = v_k^2(t) + \bar{B}_k^{-1} \dots \bar{B}_2^{-1} \Gamma_k \dots \Gamma_2 \Pi_1 \Gamma_2^+ \dots \Gamma_k^+ \bar{B}_2 \dots \bar{B}_k v_k^2(t-\tau) \quad (3.48b)$$

$$v_k^2(t) = v_k^3(t) + \bar{B}_{k-1}^{-1} \dots \bar{B}_3^{-1} \Gamma_{k-1} \dots \Gamma_3 \Pi_1 \Gamma_3^+ \dots \Gamma_{k-1}^+ \bar{B}_3 \dots \bar{B}_{k-1} v_k^3(t-\tau) \quad (3.48c)$$

⋮

$$v_k^{k-1}(t) = v_k(t) + \bar{B}_k^{-1} \Gamma_k \Pi_{k-1} \Gamma_k^+ \bar{B}_k v_k(t-\tau) \quad (3.48d)$$

$$v_k(t) = w_{k+1}(t) + \Pi_k w_{k+1}(t-\tau) \quad (3.48e)$$

$$x_{k+1}(t) = \Gamma_k w_{k+1}(t) \quad (3.48f)$$

donde Λ_k es una matriz Hurwitz.

En el último paso, el sistema (3.33a)-(3.33c) puede ser representado en las nuevas variables definidas en (3.40a), (3.47) y (3.48) de la forma:

$$\dot{z}_1(t) = \Lambda_1 z_1(t) + B_1 z_2(t) \quad (3.49a)$$

$$\dot{z}_i(t) = \Lambda_i z_i(t) + B_i z_{i+1}(t), \quad i = 2, \dots, r-1 \quad (3.49b)$$

$$\dot{z}_r(t) = \sum_{j=1}^r [A_{k,j} x_j(t) + C_{k,j}^1 x_j(t-\tau) + \dots + C_{k,j}^k x_j(t-r\tau)] + \bar{B}_r v_r^1(t) \quad (3.49c)$$

donde $z = (z_1, \dots, z_r)^T$, $z_i \in R^{n_i}$, $i = 1, \dots, r$, y

$$v_r^1(t) = v_r^2(t) + \bar{B}_r^{-1} \dots \bar{B}_2^{-1} \Gamma_r \dots \Gamma_1 \Pi_1 \Gamma_1^+ \dots \Gamma_r^+ \bar{B}_2 \dots \bar{B}_r v_r^2(t-\tau) \quad (3.50a)$$

$$v_r^2(t) = v_r^3(t) + \bar{B}_{r-1}^{-1} \dots \bar{B}_3^{-1} \Gamma_{r-1} \dots \Gamma_2 \Pi_2 \Gamma_2^+ \dots \Gamma_{r-1}^+ \bar{B}_3 \dots \bar{B}_{r-1} v_r^3(t-\tau) \quad (3.50b)$$

⋮

$$v_r^{r-1}(t) = v_r(t) + \bar{B}_r^{-1} \Gamma_{r-1} \Pi_{r-1} \Gamma_{r-1}^+ \bar{B}_r v_r(t-\tau) \quad (3.50c)$$

$$v_r(t) = v(t) + \Pi_r v(t-\tau) \quad (3.50d)$$

$$u(t) = \Gamma_r v(t) \quad (3.50e)$$

Escogiendo el vector de control $v_r^1(t)$ en la ecuación (3.49c) de forma similar a (3.34) tenemos

$$v_r^1(t) = v_{rc}^1(t) + \bar{B}_r^{-1} \Lambda_r z_r(t) \quad (3.51a)$$

con la matriz $\Lambda_r \subset R^{n_r \times n_r}$ Hurwitz y

$$v_{rc}^1(t) = -\bar{B}_r^{-1} \sum_{j=1}^r [A_{k,j} x_j(t) + C_{k,j}^1 x_j(t-\tau) + \dots + C_{k,j}^k x_j(t-r\tau)] \quad (3.51b)$$

Entonces podemos obtener la dinámica en lazo cerrado en las nuevas variables de estado $z_1(t), \dots, z_n(t)$ determinada por el sistema

$$\dot{z}_1(t) = \Lambda_1 z_1(t) + B_1 z_2(t) \quad (3.52a)$$

$$\dot{z}_i(t) = \Lambda_i z_i(t) + B_i z_{i+1}(t), \quad i = 2, \dots, r-1 \quad (3.52b)$$

$$\dot{z}_r(t) = \Lambda_r z_r(t) \quad (3.52a)$$

con las matrices Λ_i , diseñadas con los valores propios deseados y con las variables de estado sin retardo.

Las condiciones de estabilidad del sistema en lazo cerrado para los casos S1 y S2 son similares y están en función de los parámetros Π_i del sistema inicial. Este resultado se presenta en el siguiente teorema.

TEOREMA 3.2

Si todos los valores propios de las matrices Π_i , $i = 1, \dots, r$ en el sistema inicial que se encuentra en la forma controlable por bloques están localizados dentro del círculo unitario, entonces los sistemas (3.18a)-(3.18c) y (3.33a)-(3.33c) con estrategias de control (3.31), y (3.50)-(3.51), respectivamente, son asintóticamente estables.

Prueba: Primero, la estabilidad del sistema en lazo cerrado está definida por los valores propios del sistema (3.32) para el caso S1 y (3.52) para el caso S2, los cuales pueden ser elegidos arbitrariamente. Segundo, por la propiedad de la dinámica interna presentada en las transformaciones de los vectores de estado y de control en (3.22a), (3.28a), (3.29a) y (3.40a), (3.47a), (3.48a) respectivamente, es claro que la dinámica interna en lazo cerrado es asintóticamente estable si las condiciones del teorema 3.2 se satisfacen.

3.4 EJEMPLOS

3.4.1 Ejemplo para el caso S1

Consideremos el siguiente sistema lineal e invariante en el tiempo con retardo en el estado y en el control

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) + c_1 x_1(t - \tau) + x_2(t) + \rho_1 x_2(t - \tau) \quad (3.53a)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_1(t - \tau) + x_2(t) + x_2(t - \tau) + u(t) + \rho_2 u(t - \tau) \quad (3.53b)$$

El sistema (3.53a)-(3.53b) se encuentra en la forma controlable por bloques, que se puede representar como en el caso S1

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) + c_1 x_1(t - \tau) + v_1(t), v_1(t) = x_2(t) + \rho_1 x_2(t - \tau) \quad (3.54a)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_1(t - \tau) + x_2(t) + x_2(t - \tau) + v_2(t), v_2(t) = u(t) + \rho_2 u(t - \tau) \quad (3.54b)$$

Ahora aplicando la técnica explicada en la sección 3.3 de este capítulo al sistema (3.54a)-(3.54b), podemos fijar la transformación $z_1(t) = x_1(t)$ y elegir el control virtual $v_1(t)$ como:

$$v_1(t) = v_{1c}(t) - k_1 z_1(t)$$

y calculando $v_{1c}(t)$ de la ecuación $\dot{z}_1(t) = 0$ como:

$$v_{1c}(t) = -(x_1(t) + c_1 x_1(t - \tau))$$

Este control virtual dará como resultado la siguiente transformación

$$z_1(t) = x_1(t) \quad (3.55a)$$

$$z_2(t) = x_1(t) + c_1 x_1(t - \tau) + k_1 z_1(t) + v_1(t) \quad (3.55b)$$

$$v_1(t) = x_2(t) + \rho_1 x_2(t - \tau) \quad (3.55c)$$

Siguiendo el procedimiento explicado podemos tomar la derivada de la ecuación (3.55b) con respecto al tiempo, sobre las trayectorias de (3.54a)-(3.54b) obteniendo:

$$\begin{aligned} \dot{z}_2(t) = & a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + c_{21}^1 x_1(t - \tau) \\ & + c_{22}^1 x_2(t - \tau) + c_{21}^2 x_1(t - 2\tau) + c_{22}^2 x_2(t - 2\tau) + v_2^1(t) \end{aligned} \quad (3.56a)$$

$$v_2^1(t) = v_2(t) + \rho_2 v_2(t - \tau) \quad (3.56b)$$

$$v_2(t) = u(t) + \rho_2 u(t - \tau) \quad (3.56c)$$

donde $a_1 = a_2 = k_1 + 1, c_{21}^1 = c_1 k_1 + 2c_1 + \rho_2 + 1, c_{22}^1 = k_1 \rho_1 + \rho_1 + \rho_2 + c_1$ y $c_{21}^2 = (c_1)^2 + \rho_2, c_{22}^2 = c_1 + \rho_2$. Entonces aplicando el control v_2^1 en la ecuación (3.56a) de la forma:

$$v_2^1(t) = v_{2c}^1 - k_2 z_2(t)$$

y calculando v_{2c}^1 de la ecuación $\dot{z}_2(t) = 0$ como:

$$v_{2c}^1(t) = -[a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + c_{21}^1 x_1(t - \tau) + c_{22}^1 x_2(t - \tau) + c_{21}^2 x_1(t - 2\tau) + c_{22}^2 x_2(t - 2\tau)]$$

obtenemos el sistema en lazo cerrado en las nuevas variables como

$$\dot{z}_1(t) = -k_1 z_1(t) + z_2(t) \quad (3.57a)$$

$$\dot{z}_2(t) = -k_2 z_2(t) \quad (3.57b)$$

con los valores propios deseados k_1 y k_2 . Si $\rho_1 < 1$ y $\rho_2 < 1$, entonces las condiciones del teorema 3.2 se satisfacen, de aquí que la dinámica interna descrita por (3.55c)-(3.56b) es estable. Por lo tanto el controlador descrito por (3.55b),(3.55c),(3.57a) y (3.57b) estabiliza el sistema (3.53a)-(3.53b).

En las simulaciones escogemos primero uno de los valores (ρ_1) fuera del círculo unitario y el otro dentro (ρ_2), esto por lo tanto implicará que la dinámica en lazo cerrado sea inestable, debido al teorema 3.2. Luego en la segunda simulación se intercambian estos valores, dando como resultado otra vez un sistema en lazo cerrado inestable. En la última simulación se presenta el caso en el que ambos valores están dentro del círculo unitario (es decir se satisfacen las condiciones del teorema 3.2) y la respuesta que se obtiene en lazo cerrado es estable.

3.4.1.1 Primera simulación

Escogemos primero los parámetros de la planta como $c_1 = 2$, $\rho_1 = 2$, $\rho_2 = 0.5$ y $\tau = 0.5$ y los parámetros del controlador como $k_1 = 2$ y $k_2 = 4$. Con estos parámetros la condición de estabilidad que se menciona en el teorema 3.2 no se satisface, ya que el valor de ρ_1 se encuentra fuera del círculo unitario. Por lo tanto la dinámica del sistema en lazo cerrado es inestable (ver Fig.3.1).

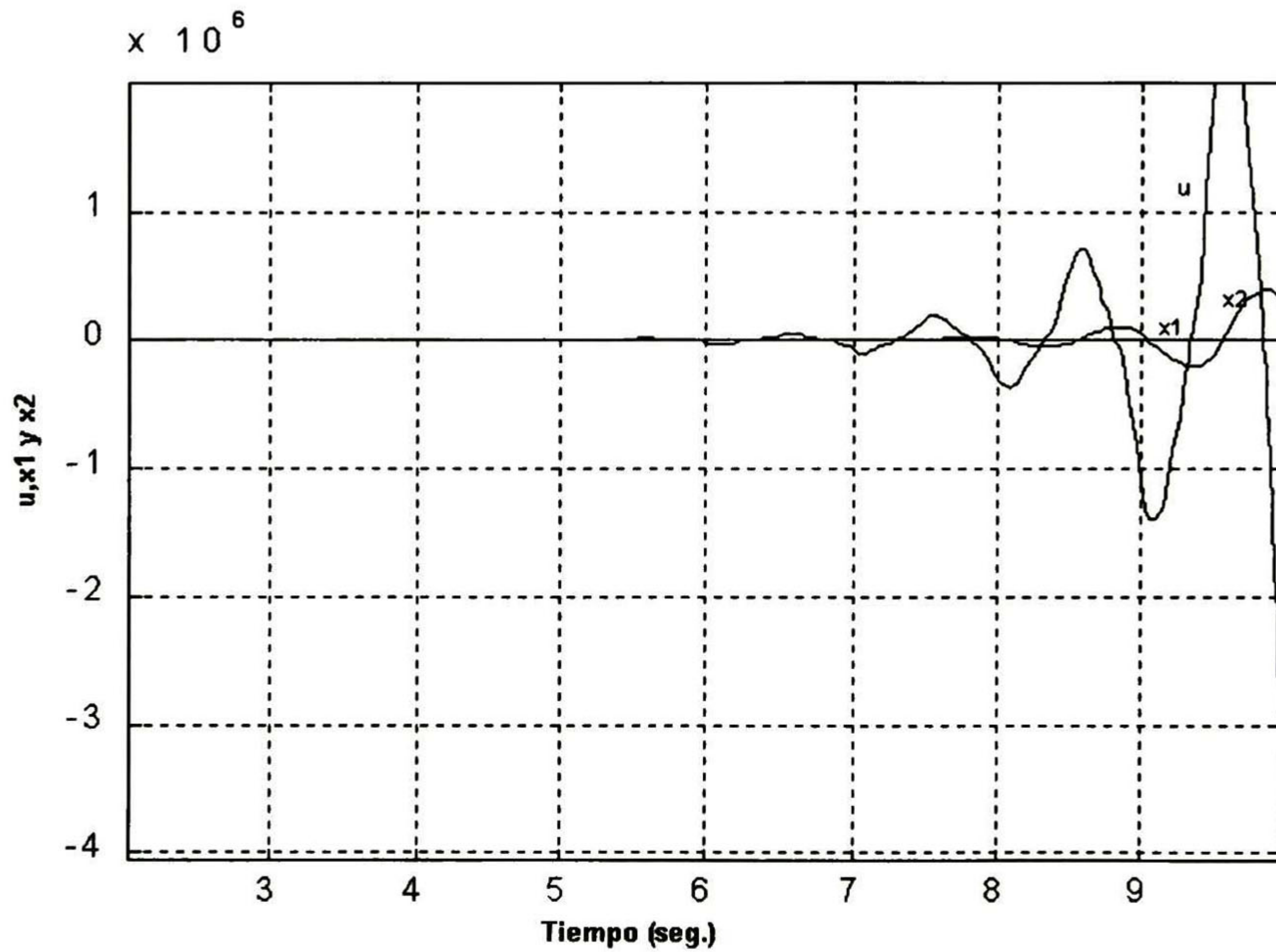


Fig. 3.1

3.4.1.2 Segunda simulación

Para esta simulación se escogen los parámetros de la planta como $c_1 = 2$, $\rho_1 = 0.5$, $\rho_2 = 2$ y $\tau = 0.5$. Los parámetros del controlador son los mismos valores que en la simulación pasada, esto con el fin de poder comparar las respuestas de ambos sistemas con un cambio en sus parámetros. En este caso el valor de ρ_2 se encuentra dentro del círculo unitario pero la condición de estabilidad del teorema 3.2 no se satisface debido al valor de ρ_1 que se encuentra fuera. De esta manera se obtiene que la dinámica del sistema en lazo cerrado es nuevamente inestable (ver Fig.3.2).

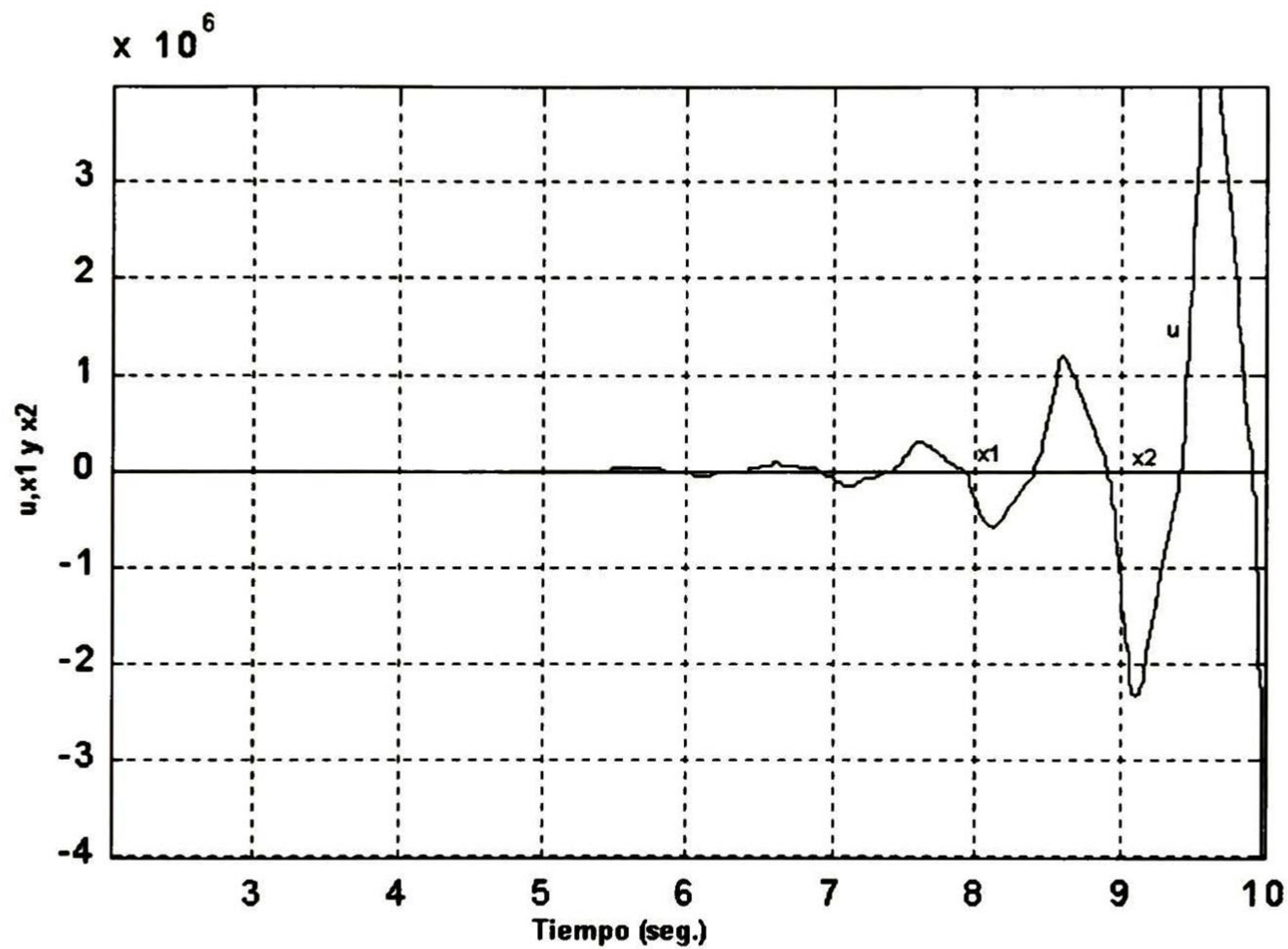
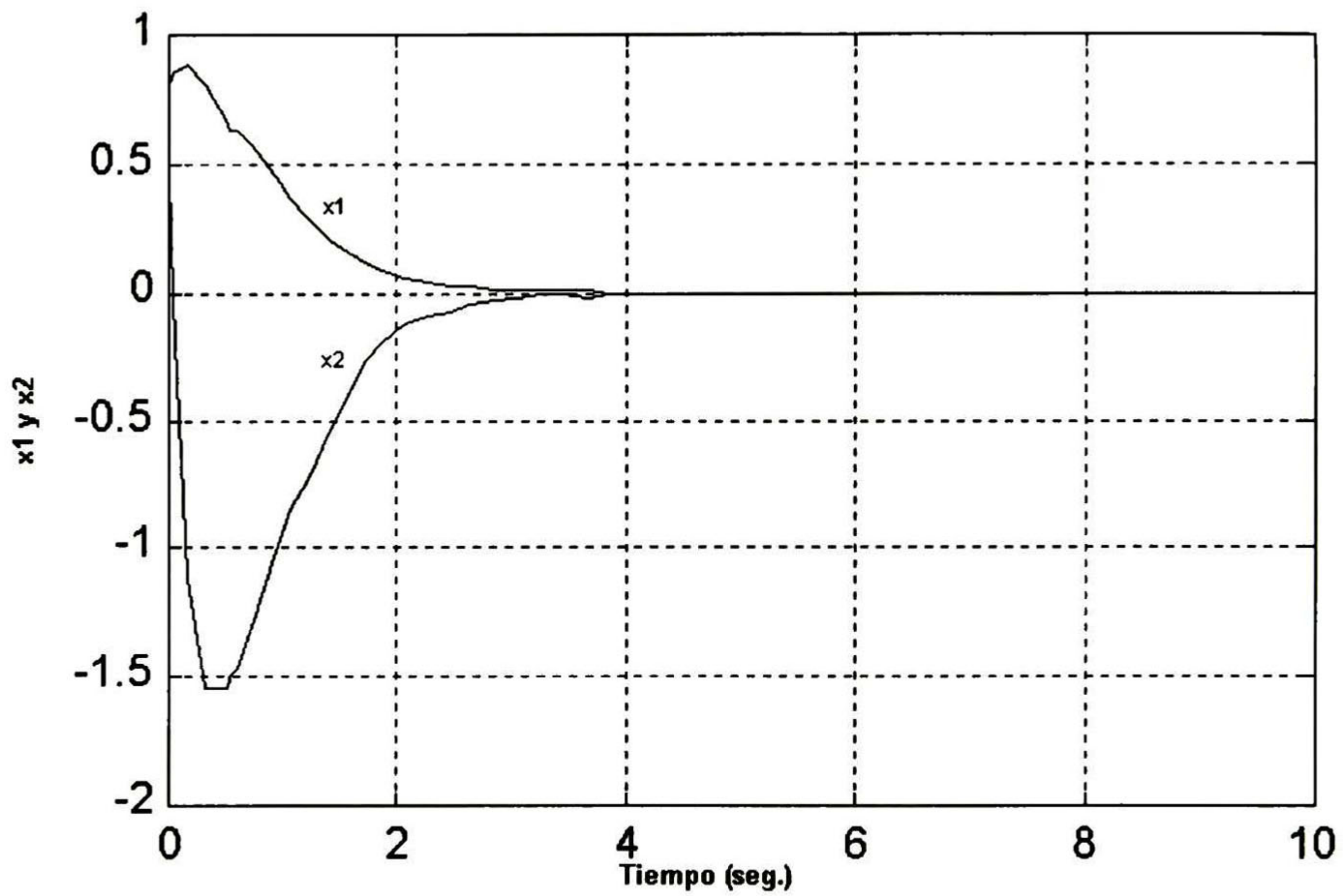


Fig. 3.2

3.4.1.3 Tercera simulación

En esta última simulación se escogen los parámetros de la planta como $c_1 = 2$, $\rho_1 = 0.5$, $\rho_2 = 0.5$ y $\tau = 0.5$. De igual manera se dejan los mismos parámetros del controlador. Para este caso debido a que los valores de ρ_1 y ρ_2 son menores a la unidad, las condiciones de estabilidad del teorema 3.2 se satisfacen. Por esta razón la dinámica en lazo cerrado del sistema es estable (ver Fig. 3.3).



3.4.2 Ejemplo para el caso S2

Consideremos el sistema de 3^{er} orden

$$\dot{x}_3(t) = x_2(t) + x_2(t - \tau) + u_1(t) + 0.5u_1(t - \tau) \quad (3.58a)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_3(t) + x_2(t - \tau) + x_1(t) + x_1(t - \tau) + u_2(t) + 0.5u_2(t - \tau) \quad (3.58b)$$

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) + u_1(t) + 0.5u_1(t - \tau) \quad (3.58c)$$

que en forma matricial se puede presentar como:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Cx(t - \tau) + Bu(t) + Du(t - \tau) \quad (3.59)$$

donde $n = 3, m = 2$ y

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Aquí tenemos que $\text{rango}B = m$ como en el caso de la estructura S1. Por lo tanto las condiciones para este caso son:

Paso 1.

A11. $\text{rango}B = m = 2$

A12. Existe una matriz

$$\Pi_1 \subset R^{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

tal que

$$D = B\Pi_1.$$

Ahora particionemos el estado de la forma

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_{12}(t) \\ x_1(t) \end{bmatrix}$$

y las matrices B y D como:

$$B = \begin{bmatrix} B_{12} \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} D_{12} \\ D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

donde $x_{12}(t) \in R^{n_2=1}$, $x_1(t) \in R^{n_1=2}$

Ahora podemos aplicar la siguiente transformación que se describió en la sección 3.2 como

$$x''(t) = Mx(t)$$

donde

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$x''(t) = [x_2'(t) \quad x_1(t)]^T$$

para obtener la ecuación

$$\dot{x}''(t) = MAM^{-1}x''(t) + MCM^{-1}x''(t-\tau) + MBu(t) + MDu(t-\tau) \quad (3.60)$$

donde

$$MAM^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; MCM^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; MB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; MD = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto obtenemos la partición del sistema original en los dos subsistemas siguientes que se describen como

$$\dot{x}_2'(t) = A'_{22}x_2'(t) + C'_{22}x_2'(t-\tau) + B'_2x_1(t) + D'_2x_1(t-\tau) \quad (3.61a)$$

$$\dot{x}_1(t) = A_{12}x_2'(t) + A_{11}x_1(t) + C_{12}x_2'(t-\tau) + C_{11}x_1(t-\tau) + B_1[u(t) + \Pi_1u(t-\tau)] \quad (3.61b)$$

donde

$$A'_{22} = 0; C'_{22} = 0; B'_2 = [1 \quad -1]; D'_2 = [1 \quad 0]; A_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; C_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; C_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \Pi_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Ahora con el fin de obtener la forma controlable deseada, se procede con la ecuación superior (3.61a). Esta ecuación tiene la estructura S2 ya que $n_1 > n_2$. Entonces las condiciones para este caso son:

Paso 2.

A21. Existe una matriz $\Gamma_2 \in R^{2 \times 1}$ tal que $x_1(t) = \Gamma_2 w_1(t)$. Para este caso escogemos

$$\Gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Sustituyendo (3.62) en (3.61a) se obtiene

$$\dot{x}'_2(t) = \bar{B}_2 w_1(t) + \bar{D}_2 w_1(t - \tau) \quad (3.63)$$

donde $\bar{B}_2 = B'_2 \Gamma_2 = 2$ y $\bar{D}_2 = D'_2 \Gamma_2 = 1$.

A22. Existe una matriz $\Pi_2 = 0.5$ tal que

$$\bar{D}_2 = \bar{B}_2 \Pi_2$$

En este paso se detiene el procedimiento ya que $n_2 = n - n_1$ como se indicó en la sección 3.2. Por lo tanto la forma controlable por bloques deseada del sistema (3.58a)-(3.58c) es

$$\dot{x}'_2(t) = \bar{B}_2 [w_1(t) + \Pi_2 w_1(t - \tau)] \quad (3.64a)$$

$$\dot{x}_1(t) = A_{12} x'_2(t) + A_{11} x_1(t) + C_{11} x_1(t - \tau) + B_1 [u(t) + \Pi_1 u(t - \tau)] \quad (3.64b)$$

3.4.2.1 Diseño del control por bloques

En este punto es mejor renombrar los bloques de (3.64a)-(3.64b) como

$$\dot{x}_1(t) = \bar{B}_1 v_1(t); v_1(t) = w_2(t) + \Pi_1 w_2(t - \tau) \quad (3.65a)$$

$$\dot{x}_2(t) = A_{11} x_1(t) + A_{22} x_2(t) + C_{22} x_2(t - \tau) + \bar{B}_2 v_2(t); v_2(t) = u(t) + \Pi_2 u(t - \tau) \quad (3.65b)$$

donde

$$\bar{B}_1 = 2, \bar{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; A_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; C_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \Pi_1 = 0.5; \Pi_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

y $x_2(t) = \Gamma_2 w_2(t)$.

Entonces se procede con la estrategia de control paso a paso que fue explicada en este capítulo.

Paso 1 . Seleccionemos la entrada de control virtual $v_1(t)$ en (3.65a) como

$$v_1(t) = v_{1c}(t) + \bar{B}_1^{-1} [\lambda_1 z_1(t) + E_{11} z_2(t)] \quad (3.66)$$

donde $z_1 = x_1$ y $z_2 \in R^2$ son las nuevas variables.

Si $\lambda_1 = -2$ y se calcula v_{1c} de (3.65a) como $v_{1c} = 0$, se puede obtener la transformación entre $x_2(t)$ y $z_2(t)$ como se explicó en la sección 3.2 de la forma:

$$z_2(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} x_1(t) + x_2(t) + \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{bmatrix} x_2(t - \tau) \quad (3.67)$$

Paso 2. Tomando la derivada de (3.67) sobre las trayectorias de (3.65a) y (3.65b) obtenemos la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \dot{z}_2(t) = & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_1(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} x_2(t) + \begin{bmatrix} 1/4 \\ -1/4 \end{bmatrix} x_1(t-\tau) + \begin{bmatrix} 3/2 & 3/4 \\ -1/2 & 1/4 \end{bmatrix} x_2(t-\tau) \\ & + \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & -1/4 \end{bmatrix} x_2(t-2\tau) + u(t) + \begin{bmatrix} 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 \end{bmatrix} u(t-\tau) + \begin{bmatrix} 1/8 & -1/8 \\ -1/8 & 1/8 \end{bmatrix} u(t-2\tau). \end{aligned}$$

Ahora si escogemos

$$\Lambda_2 = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

y siguiendo el procedimiento explicado en la sección 3.2, podemos encontrar la entrada de control que estabiliza el sistema (3.65a) y (3.65b) como:

$$\begin{aligned} u(t) = & \begin{bmatrix} -3/4 & 1/4 \\ 1/4 & -3/4 \end{bmatrix} u(t-\tau) + \begin{bmatrix} -1/8 & 1/8 \\ 1/8 & -1/8 \end{bmatrix} u(t-2\tau) + \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix} x_1(t) + \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -8 \end{bmatrix} x_2(t) \\ & + \begin{bmatrix} -1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9/4 & 0 \\ 2 & -7/4 \end{bmatrix} x_2(t-\tau) + \begin{bmatrix} -1/4 & -1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} x_2(t-2\tau). \end{aligned}$$

3.4.2.2 Simulaciones

Para este ejemplo solo se realizaron simulaciones del estado y del control, donde las condiciones del teorema 3.2 se satisfacen. Por lo tanto se obtiene una dinámica en lazo cerrado estable. (Ver Fig. 5), para dinámica de los estados y (Fig. 6) para el control.

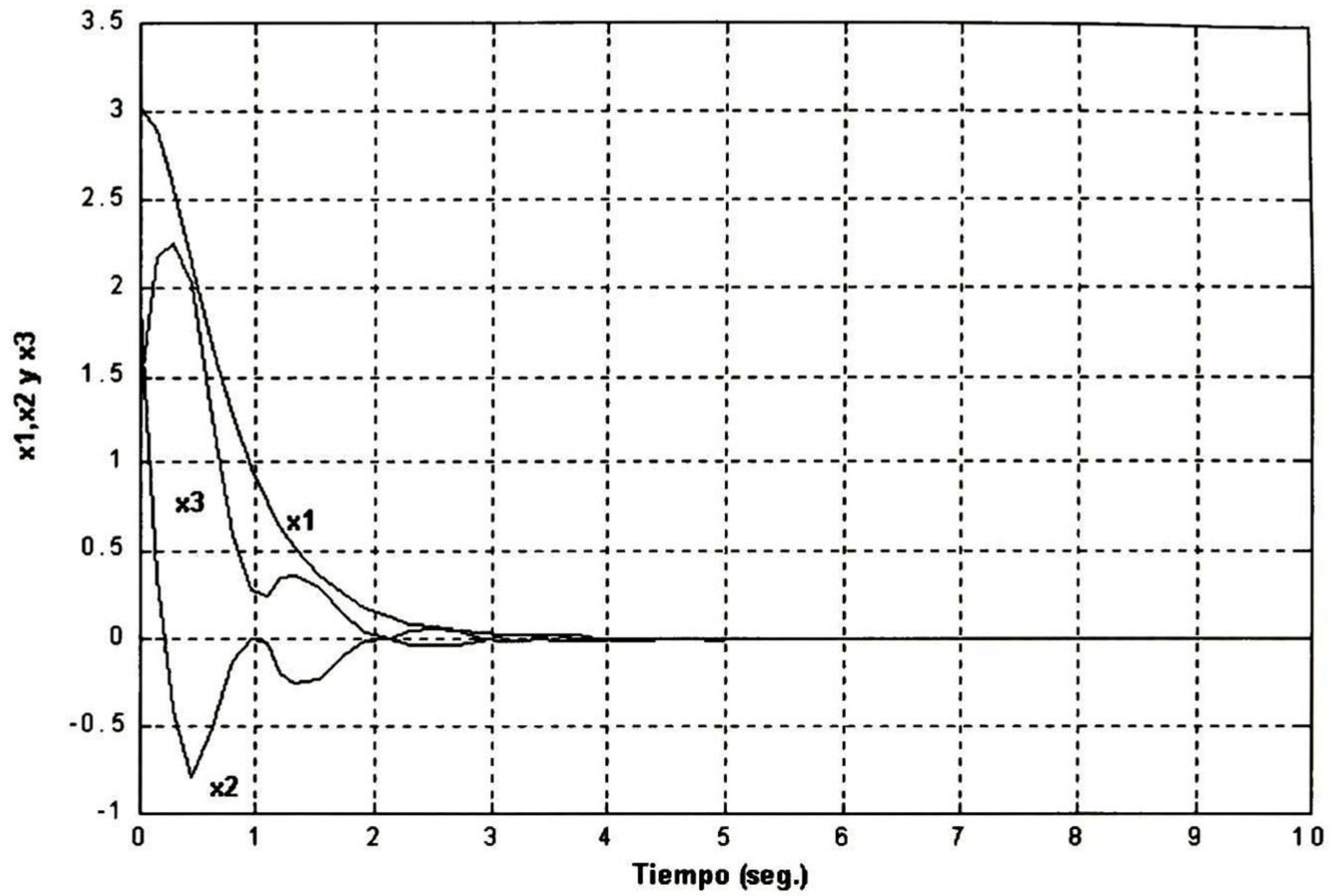


Fig. 5

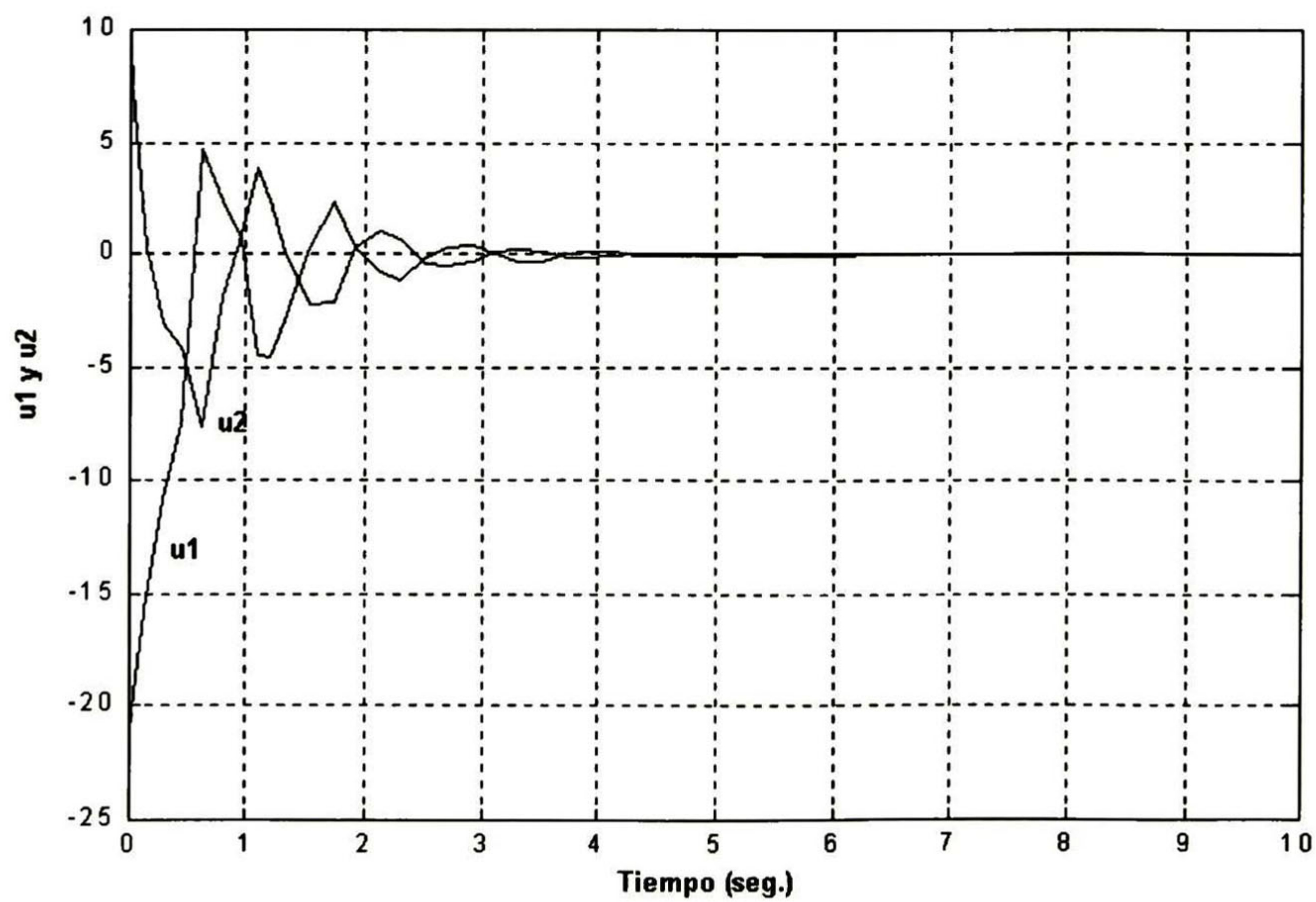


Fig. 6

Capítulo 4

Observador por modos deslizantes

4.1 Introducción

En el capítulo 3 se obtuvo la ecuación de la entrada de control por medio de una retroalimentación de estado donde se supuso que todas las variables de estado estaban disponibles para ser medidas o retroalimentadas. Esta suposición puede no ser cierta en la práctica, ya sea por que las variables de estado no son accesibles para una conexión directa o por que los sensores o transductores para estas variables no están disponibles en el mercado o son muy caros. En este caso para poder aplicar la retroalimentación de estado es necesario diseñar un sistema dinámico llamado “observador de estado”, de manera que se puedan estimar todos los componentes del vector de estado de la planta utilizando solo la parte del sistema que se puede medir.

En este capítulo se describe de forma breve en la sección 4.2 el diseño del observador lineal para sistemas lineales sin retardo [25].

En la sección 4.3 se presenta el diseño de observadores por medio de la técnica de alta ganancia [24]. Aquí se describe la forma en que se puede estructurar un observador por alta ganancia para sistemas lineales con retardo, así como la obtención de las entradas de dicho observador.

En la sección 4.4 también se presenta el desarrollo de un observador. Esta vez se utiliza la técnica de modos deslizantes [27].

La idea principal de este capítulo es mostrar que puede ser posible aplicar la técnica de modos deslizantes en el diseño de observadores para sistemas lineales con retardo.

4.2 Observador lineal

Consideremos el sistema lineal invariante en el tiempo

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde A , B y C son matrices conocidas y la entrada $u(t)$ y la salida $y(t)$ están disponibles. De [25] se sabe que es posible copiar los parámetros del sistema (4.1) con el fin de construir un observador lineal, el cual se presenta como:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L[y(t) - C\hat{x}(t)]\tag{4.2}$$

que puede ser modificado como:

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t)\tag{4.3}$$

Definamos el error de observación entre el vector de estado del sistema $x(t)$ y el vector de estado del observador $\hat{x}(t)$ como

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)\tag{4.4}$$

Diferenciando la ecuación (4.4) con respecto al tiempo y sustituyendo las ecuaciones (4.2) y (4.3) obtenemos:

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t)\tag{4.5}$$

la ecuación (4.5) es llamada ecuación de la dinámica del error entre $x(t)$ y $\hat{x}(t)$.

Si todos los valores propios de $(A - LC)$ pueden ser asignados arbitrariamente, entonces se puede controlar la velocidad con la que $e(t)$ tiende a cero o equivalentemente la velocidad con que $\hat{x}(t)$ alcanza al estado actual $x(t)$. Por ejemplo si todos los valores propios de $(A - LC)$ tienen parte real negativa menor que $-\sigma$, entonces todas las componentes de $e(t)$ tenderán a cero con dinámica más rápida que $e^{-\sigma}$. Por esto aunque exista un error significativo entre $\hat{x}(t_0)$ y $x(t_0)$ en el tiempo inicial t_0 , el estado estimado tenderá al estado real muy rápido. De esta manera no es necesario calcular el estado inicial en la ecuación de estado original.

Si un observador va a ser usado en una retroalimentación de estado, entonces los valores propios del estimador u observador deben ser más rápidos que los valores propios deseados del sistema en lazo cerrado.

Para poder usar la técnica de observadores es conveniente tomar en cuenta el siguiente teorema cuya prueba se encuentra en [25].

TEOREMA 4.1

Considere el par (A, C) del sistema (4.1). Todos los valores propios de $(A - LC)$ pueden ser asignados de forma arbitraria seleccionando un valor apropiado de L si y solo si (A, C) es observable.

4.3 Observador de alta ganancia

En la práctica comúnmente los sistemas dinámicos son descritos por ecuaciones de estado que se encuentran en la forma controlable por bloques. Además en muchos de ellos el vector de salida $y(t)$ coincide con el vector $x_1(t)$. Por lo tanto en el diseño del observador podemos suponer que

$$y(t) = x_1(t)$$

La idea fundamental de este diseño es transformar un sistema lineal e invariante en el tiempo con retardo que tiene una forma general en un sistema equivalente que se encuentre en la forma controlable por bloques, de igual manera como se explicó en el capítulo 3. Cuando se logra realizar esta transformación, es posible aplicar el procedimiento de diseño de la ley de control utilizando la técnica de control por bloques, descrito en el mismo capítulo. Esto se realiza con el fin de obtener el sistema deseado en lazo cerrado en las nuevas variables $[z_1(t), \dots, z_r(t)]$. Después el diseño del observador de alta ganancia se aplica a este nuevo sistema transformado. El método se describe a continuación.

Supongamos que tenemos el sistema lineal e invariante en el tiempo con retardo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Cx(t - \tau) + Bu(t) + Du(t - \tau) \quad (4.6)$$

donde $x \in R^n, u \in R^m$ y A, B, C y D son matrices de dimensiones apropiadas. $x(t) = \varphi(t), \forall t \in [t_0 - \tau, t_0], t_0 \geq 0, \varphi(t)$ es la función inicial del sistema (4.6), que debe ser continua.

Aplicando el procedimiento de descomposición sobre el sistema (4.6), como se explicó en el capítulo anterior, podemos obtener la siguiente forma controlable por bloques:

$$\dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + C_1 x_1(t - \tau) + B_1 v_1(t), v_1(t) = [x_2(t) + \Pi_1 x_2(t - \tau)] \quad (4.7a)$$

$$\dot{x}_i(t) = A_i \bar{x}_i(t) + C_i \bar{x}_i(t - \tau) + B_i v_i(t), v_i(t) = [x_{i+1}(t) + \Pi_i x_{i+1}(t - \tau)], i = 2, \dots, r-1 \quad (4.7b)$$

$$\dot{x}_r(t) = A_r \bar{x}_r(t) + C_r \bar{x}_r(t - \tau) + B_r v_r(t), v_r(t) = [u(t) + \Pi_1 u(t - \tau)] \quad (4.7c)$$

donde $x = [x_r, \dots, x_1]^T$, $\bar{x}_i := [x_r, \dots, x_i]^T$, $x_i \in R^{n_i}$,

$$\text{rango} B_i = n_i, \quad i = 1, \dots, r \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^r n_i = n.$$

Teniendo la forma controlable por bloques (4.7a)-(4.7c), se puede aplicar el procedimiento de diseño de la ley de control, aplicando la técnica de control a bloques, como se explicó en el capítulo anterior. El sistema transformado en las nuevas variables $(z_1(t), \dots, z_n(t))$, que se obtiene en el $(r-1)^{mo}$ paso del procedimiento tiene la forma:

$$\dot{z}_1(t) = \Lambda_1 z_1(t) + z_2(t) \quad (4.8a)$$

$$\dot{z}_i(t) = \Lambda_i z_i(t) + z_{i+1}(t), i = 2, \dots, r-1 \quad (4.8b)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_r(t) = & \sum_{j=1}^r [\bar{A}_{k,j} z_j(t) + \bar{C}_{k,j}^1 z_j(t - \tau) + \dots + \bar{C}_{k,j}^k z_j(t - r\tau)] \\ & + \sum_{j=1}^r [\bar{B}_{k,j} u(t) + \bar{D}_{k,j}^1 u(t - \tau) + \dots + \bar{D}_{k,j}^k u(t - r\tau)] \end{aligned} \quad (4.8c)$$

El observador de alta ganancia para el sistema (4.8a)-(4.8c) con entradas $\omega_1, \dots, \omega_r$ puede ser propuesto como:

$$\dot{\hat{z}}_1(t) = \Lambda_1 \hat{z}_1(t) + \hat{z}_2(t) + \omega_1 \quad (4.9a)$$

$$\dot{\hat{z}}_i(t) = \Lambda_i \hat{z}_i(t) + \hat{z}_{i+1}(t) + \omega_i, i = 2, \dots, r-1 \quad (4.9b)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}_r(t) = & \sum_{j=1}^r [\bar{A}_{k,j} \hat{z}_j(t) + \bar{C}_{k,j}^1 \hat{z}_j(t - \tau) + \dots + \bar{C}_{k,j}^k \hat{z}_j(t - r\tau)] \\ & + \sum_{j=1}^r [\bar{B}_{k,j} u(t) + \bar{D}_{k,j}^1 u(t - \tau) + \dots + \bar{D}_{k,j}^k u(t - r\tau)] + \omega_r \end{aligned} \quad (4.9c)$$

El error de estimación, definido como $e(t) = [e_1(t), \dots, e_r(t)]$ donde $e_i(t) = z_i(t) - \hat{z}_i(t)$ para $(i = 1, \dots, r)$, tiene el siguiente comportamiento dinámico

$$\dot{e}_1(t) = \Lambda_1 e_1(t) + e_2(t) - \omega_1 \quad (4.10a)$$

$$\dot{e}_i(t) = \Lambda_i e_i(t) + e_{i+1}(t) - \omega_i, i = 2, \dots, r-1 \quad (4.10b)$$

$$\dot{e}_r(t) = \sum_{j=1}^r W_{k,j} e_j(t) + Y_{k,j}^1 e_j(t - \tau) + \dots + Y_{k,j}^k e_j(t - r\tau) - \omega_r \quad (4.10c)$$

donde las señales de entrada $\omega_1, \dots, \omega_r$ se tienen que seleccionar, de tal manera que el sistema (4.10a)-(4.10c), sea asintóticamente estable. Una forma conveniente de obtener estas señales, es explicada a continuación.

4.3.1 Obtención de las señales de entrada del observador $\omega_1, \dots, \omega_r$.

La obtención de las señales de entrada del observador de alta ganancia, así como la demostración que las señales seleccionadas estabilizan al sistema (4.10a)-(4.10c), se obtienen a partir del siguiente teorema:

TEOREMA 4.2

Si las ganancias $\omega_1, \dots, \omega_r$ se escogen de forma recurrente como

$$\omega_1 = l_1 e_1(t) \quad (4.11a)$$

$$\omega_i = l_i v_{i-1} \quad v_{i-1} = \omega_i, (i = 2, \dots, r) \quad (4.11b)$$

Además si $l_i > 0$ y $l_i \rightarrow \infty$ para $(i = 1, \dots, r)$, entonces el sistema (4.10a)-(4.10c) es asintóticamente estable.

Prueba:

La prueba será realizada paso a paso. Cabe mencionar que esta prueba es similar a la que se encuentra en [23] para observadores por alta ganancia para sistemas sin retardo. En el primer paso escribamos el primer bloque (4.10a) con entrada (4.11a) como

$$\dot{e}_1(t) = \Lambda_1 e_1(t) + e_2(t) - l_1 e_1(t) \quad (4.12)$$

ya que la matriz deseada Λ_1 es constante, se puede usar el resultado del teorema (2.2) con el fin de asegurar que para cualquier $t > 0$ es verdad la siguiente expresión:

$$\lim e_1(t) = 0 \text{ y } \lim(l_1 e_1(t)) = e_2(t) \text{ ó } \lim \omega_1 = e_2(t) \quad (4.13)$$

con $l_1 \rightarrow \infty$.

Esto significa que tenemos la información acerca de $e_2(t)$, la cual puede ser utilizada en el siguiente paso. En el segundo paso, el siguiente bloque de (4.10b), con entrada (4.11b) con $i = 2$ y tomando en cuenta (4.13) para cualquier $t > 0$ puede ser escrito como:

$$\dot{e}_2(t) = \Lambda_2 e_2(t) + e_3(t) - l_2 e_2(t) \quad (4.14)$$

donde la siguiente expresión también es verdadera

$$\lim e_2(t) = 0 \text{ y } \lim \omega_2 = \lim(l_2(\lim(l_1 e_1(t)))) = e_3(t) \quad (4.15)$$

con $l_2, l_1 \rightarrow \infty$ lo cual implica que $l_2 \rightarrow \infty, l_1 \rightarrow \infty$

Este doble límite significa que para cualquier incremento de la ganancia l_1 , dado un $\varepsilon_2 > 0$, existe un valor l_2^* tal que $\|l_2 l_1 e_1(t) - e_2(t)\| < \varepsilon_2$ ó $\|w_2 - e_3(t)\| < \varepsilon_2$ siempre que $l_2 > l_2^*$.

Este movimiento rápido parcial nos da la información del vector $e_3(t)$, la cual puede ser utilizada en el siguiente bloque y así, sucesivamente.

Como la estructura de los bloques restantes de (4.10b) con las matrices deseadas constantes Λ_i para $i = 2, \dots, r-2$ tienen la siguiente forma, similar a (4.12) y (4.14):

$$\dot{e}_i(t) = \Lambda_i e_i(t) + e_{i+1}(t) - l_i e_i(t) \quad (4.16)$$

De esta manera en el $(r-1)^{mo}$ paso del procedimiento, el bloque (4.10c) con el vector de estado $e_r(t)$ puede ser representado para cualquier $t > 0$ como

$$\dot{e}_r(t) = \sum_{j=1}^r [W_{k,j} e_j(t) + Y_{k,j}^1 e_j(t - \tau) + \dots + Y_{k,j}^k e_j(t - r\tau)] - l_r e_r(t) \quad (4.17)$$

De los pasos anteriores se obtuvo que $e_i \rightarrow 0$ y además $\omega_i \rightarrow l_i e_i$ para $i = 1, \dots, r-1$, entonces la ecuación (4.17) se puede reducir a la siguiente expresión:

$$\dot{e}_r(t) = W_{k,r} e_r(t) + Y_{k,r}^1 e_r(t-\tau) + \dots + Y_{k,r}^k e_r(t-r\tau) - l_r e_r(t) \quad (4.18)$$

que aplicando la misma técnica que en los bloques anteriores podemos obtener

$$\lim e_r(t) = 0 \text{ y } \lim l_r e_r = \lim(l_r \dots (\lim(l_1 e_1(t)))) = 0 \quad (4.19)$$

De esta manera queda demostrado que el sistema (4.10a)-(4.10c) es asintóticamente estable.

4.4 Observador por modos deslizantes

Después de obtener la forma controlable por bloques del sistema (4.6) y aplicarle el procedimiento de diseño de la ley de control, utilizando la técnica de control por bloques explicada en el capítulo 3, en el $(r-1)^{mo}$ paso del procedimiento, podemos obtener un sistema transformado similar a (4.8a)-(4.8c). Si proponemos un observador similar a (4.9a)-(4.9c), el comportamiento dinámico del error de observación, tiene una forma similar a (4.10a)-(4.10c).

Para este caso las señales de entrada del observador w_1, \dots, w_r se escogen de la siguiente manera:

$$\omega_1 = M_1 \text{sign}(z_1(t) - \hat{z}_1(t)) \quad (4.20a)$$

$$\omega_i = M_i \text{sign}(\beta_i(t)) \text{ , } \gamma_i \dot{\beta}_i + \beta_i = \omega_{i-1} \text{ , } (i = 2, \dots, r) \quad (4.20b)$$

donde $\gamma_i \dot{\beta}_i + \beta_i = \omega_{i-1}$, $i = 2, \dots, r$ son filtros de primer orden con constantes de tiempo γ_i .

Por lo que ahora la dinámica del error se puede presentar como:

$$\dot{e}_1(t) = \Lambda_1 e_1(t) + e_2(t) - M_1 \text{sign}(e_1(t)) \quad (4.21a)$$

$$\dot{e}_i(t) = \Lambda_i e_i(t) + e_{i+1}(t) - M_i \text{sign}(\beta_i(t)), \quad i = 2, \dots, r-1 \quad (4.21b)$$

$$\dot{e}_r(t) = \sum_{j=1}^r W_{k,j} e_j(t) + Y_{k,j}^1 e_j(t - \tau) + \dots + Y_{k,j}^k e_j(t - r\tau) - M_r \text{sign}(\beta_r(t)) \quad (4.21c)$$

donde las β_i para $(i = 2, \dots, r)$ son las salidas de los filtros de primer orden. Estos filtros se utilizan en cada bloque de forma descendente, es decir, la entrada del bloque superior, tiene que pasar por uno de estos filtros, antes de utilizar esta información en el bloque siguiente. Con estos filtros se evita tener términos altamente no lineales (por ejemplo: $\text{sign}(\text{sign}(e_1(t)))$). Además con estos filtros es posible llevar a la práctica este tipo de observadores.

Por otro lado, para condiciones iniciales acotadas en el sistema (4.21a)-(4.21c) y tomando en cuenta el conjunto de números finitos M_2, \dots, M_r , existe otro número finito (M_1) tal que, después de un intervalo de tiempo finito, los modos deslizantes ocurren en la variedad $e_1(t) = 0$, ya que cada componente de $e_1(t)$ y su derivada con respecto al tiempo son de signos contrarios [24].

Ahora de acuerdo al método de control equivalente, explicado en el capítulo 2, la solución de $\dot{e}_1(t) = 0$ con $e_1(t) = 0$ es:

$$(\omega_1)_{eq} = (M_1 \text{sign}(e_1(t)))_{eq} = e_2(t) \quad (4.22)$$

la cual debe ser sustituida en la ecuación (4.21b) para encontrar la ecuación de modos deslizantes. Entonces la salida del filtro de primer orden $\beta_2(t)$ se iguala a la entrada de control equivalente $(\omega_1)_{eq}$

$$\lim_{\gamma_2 \rightarrow 0} \beta_2(t) = (\omega_1)_{eq} = e_2(t) \quad \text{y} \quad e_2(t) = \lim_{\gamma_2 \rightarrow 0} \beta_2(t)$$

De forma similar, $e_3(t)$ puede ser encontrado del segundo bloque como

$$e_3(t) = \lim_{\gamma_3 \rightarrow 0} \beta_3(t).$$

Consecuentemente, los modos deslizantes ocurrirán en cada bloque, lo cual producirá que todos los subvectores $[e_1(t), \dots, e_r(t)]$ convergiran a cero. Esto nos conduce a concluir que el sistema (4.21a)-(4.21c) es asintóticamente estable si se escogen las entradas $\omega_1, \dots, \omega_r$ como:

$$\omega_1 = M_1 \text{sign}(z_1(t) - \hat{z}_1(t)) \quad (4.23a)$$

$$\omega_i = M_i \text{sign}(\beta_i(t)) \quad , \quad \gamma_i \dot{\beta}_i + \beta_i = \omega_{i-1} \quad , \quad (i = 2, \dots, r) \quad (4.23b)$$

4.4.1 Casos especiales en el diseño del observador

En esta sección se tratará de explicar el diseño de un observador por modos deslizantes para una planta específica. La idea principal de este diseño de observador es poder aplicarlo en el problema de estabilización de la relación Gasolina-Aire en un motor de ignición con un solo pistón, el cual, será presentado en el siguiente capítulo. En este diseño especial de observadores, se presentan dos casos diferentes para resolver el problema.

Para esta planta en especial, se supone que se tienen solo dos bloques, los cuales se encuentran en la forma controlable por bloques y sus dimensiones son: $\eta_1 = \eta_2 = 1$.

Supongamos que tenemos el sistema

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + C_{11}x_1(t - \tau) + B_{11}x_2(t - \tau) \quad (4.24)$$

$$\dot{x}_2(t) = A_{21}x_1(t) + C_{21}x_1(t - \tau) + A_{22}x_2(t) + B_{21}u(t) + D_{21}u(t - \tau) \quad (4.25a)$$

$$y(t) = x_1(t) \quad (4.25b)$$

donde A, B, C y D son matrices de dimensiones apropiadas.

La característica principal de esta planta, es que en el primer bloque no se encuentra la información del estado $x_2(t)$ en el control virtual. Es por esta razón que el diseño del observador es diferente al explicado en la sección anterior.

El problema a resolver para esta planta es estabilizar la variable $x_2(t)$ del bloque dos, donde se supone que solo se puede medir la variable $x_1(t)$ del primer bloque. Es decir que tenemos la salida $y_1(t) = x_1(t)$ que puede ser medida, pero tenemos la salida $y_c(t) = x_2(t)$ que es la que se quiere controlar. Por lo tanto es necesario diseñar un observador para el sistema (4.23)-(4.24), con el fin de obtener información del bloque $x_2(t)$ para poder utilizarla al aplicar la ley de control.

4.4.2 Estrategia de Control y diseño del observador

Consideremos el segundo bloque:

$$\begin{aligned}\dot{x}_2(t) &= A_{21}x_1(t) + C_{21}x_1(t - \tau) + A_{22}x_2(t) + B_{21}v(t) \\ v(t) &= u(t) + \Pi_{21}u(t - \tau) \\ D_{21} &= B_{21}\Pi_{21}\end{aligned}\tag{4.25c}$$

Ahora si elegimos el control $v(t)$ como:

$$v(t) = v_{1c}(t) + \Lambda x_2(t)\tag{4.25d}$$

donde $v_{1c}(t)$ se calcula de la ecuación:

$$\dot{x}_2(t) = 0 \Rightarrow v_{1c}(t) = -B_{21}^{-1}[A_{21}x_1(t) + C_{21}x_1(t - \tau) + A_{22}x_2(t)]\tag{4.25e}$$

Sustituyendo (4.25d) en (4.25c) obtenemos la dinámica deseada:

$$\dot{x}_2(t) = \Lambda x_2(t)$$

Como se puede observar en la ecuación del control es necesaria la información del segundo bloque, por lo tanto se procede con el diseño del observador.

El diseño del observador puede ser resuelto de dos formas diferentes, como se describen a continuación:

a) Para este caso elegimos el observador para el sistema (4.24)-(4.25):

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1(t) &= A_{11}\hat{x}_1(t) + C_{11}\hat{x}_1(t-\tau) + B_{11}\hat{x}_2(t-\tau) + L_1 \text{sign}[x_1(t) - \hat{x}_1(t)] \\ \dot{\hat{x}}_2(t) &= A_{21}\hat{x}_1(t) + C_{21}\hat{x}_1(t-\tau) + A_{22}\hat{x}_2(t) + B_{21}u(t) + D_{21}u(t-\tau) + L_2\beta \\ y(t) &= x_1(t)\end{aligned}\quad (4.26)$$

donde $\beta(t)$ es la salida de un filtro de primer orden con entrada $v_1 = L_1 \text{sign}[x_1(t) - \hat{x}_1(t)]$.

Entonces la dinámica del error para este caso está descrita por:

$$\begin{aligned}\dot{e}_1(t) &= A_{11}e_1(t) + C_{11}e_1(t-\tau) + B_{11}e_2(t-\tau) - L_1 \text{sign}[e_1(t)] \\ \dot{e}_2(t) &= A_{21}e_1(t) + C_{21}e_1(t-\tau) + A_{22}e_2(t) + C_{22}e_2(t-\tau) - L_2\beta \\ \gamma\dot{\beta}(t) &= -\beta(t) + v_1\end{aligned}\quad (4.27)$$

donde γ es la constante de tiempo del filtro de primer orden.

Se elegimos la ganancia $L_1 > |A_{11}e_1(t)| + |C_{11}e_1(t-\tau)| + |B_{11}e_2(t-\tau)|$ en la primer ecuación de (4.27), aseguramos que los modos deslizantes ocurren en la superficie

$$e_1 = 0$$

Entonces podemos obtener la información:

$$L_1 \text{sign}[e_1(t)] = B_{11}e_2(t-\tau)$$

Por la propiedad de estabilidad del filtro que se utiliza, obtenemos que su salida llega al valor de: $\beta(t) = B_{11}e_2(t-\tau)$. Sustituyendo esta información del filtro en el bloque dos del error, podemos obtener la siguiente ecuación:

$$\dot{e}_2(t) = A_{22}e_2(t) - L_2B_{11}e_2(t-\tau)\quad (4.28)$$

En [33] se encuentra el resultado acerca de la estabilidad del sistema (4.28). En términos generales dice: Si la matriz A_{22} es estable y todas las raíces λ_j de la ecuación:

$$\det \begin{bmatrix} \lambda A_{22} - L_2 B_{11} & -\lambda \mu I \\ -\lambda \mu I & \lambda A_{22} - L_2 B_{11} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

se encuentran dentro del círculo unitario para cualquier número real $\mu > 0$, entonces el sistema (4.28) es estable para cualquier retardo $\tau \geq 0$.

Ahora si sustituimos los estados del observador en la ley de control, es decir si hacemos $x = \hat{x} + e$ en la ecuación (4.25d) obtenemos:

$$v(t) = -B_{21}^{-1} \{A_{21} [\hat{x}_1 + e_1] + C_{21} [\hat{x}_1(t - \tau) + e_1(t - \tau)] + A_{22} [\hat{x}_2 + e_2]\} + \Lambda [\hat{x}_2 + e_2] \quad (4.30)$$

Si elegimos la ganancia L_2 para hacer estable la dinámica del error es decir si hacemos que: $e \rightarrow 0 \Rightarrow e(t - \tau) \rightarrow 0$, obtenemos la ley de control con los estados del observador de la siguiente manera:

$$v(t) = -B_{21}^{-1} \{A_{21} \hat{x}_1(t) + C_{21} [\hat{x}_1(t - \tau)] + A_{22} \hat{x}_2(t)\} + \Lambda \hat{x}_2(t) \quad (4.31)$$

y con esta entrada de control podemos estabilizar el sistema (4.24)-(4.25).

b) Para este segundo caso, se usa el mismo diseño del observador (4.26)-(4.27). Por lo tanto tenemos el mismo comportamiento dinámico del error descrito por:

$$\dot{e}_1(t) = A_{11} e_1(t) + C_{11} e_1(t - \tau) + B_{11} e_2(t - \tau) - L_1 \text{sign}[e_1(t)] \quad (4.32)$$

$$e_2(t) = A_{21} e_1(t) + C_{21} e_1(t - \tau) + A_{22} e_2(t) + C_{22} e_2(t - \tau) - L_2 f \quad (4.33)$$

La diferencia fundamental entre este caso y el caso (a), es escoger la función $f = \text{sign}[e_2(t)]$.

El problema al hacer esta selección, es que la información de $e_2(t)$ no está disponible. Esta información puede ser obtenida de la ecuación (4.32) como se explica enseguida:

Primero se obtiene la información de, $e_2(t - \tau)$ de la ecuación (4.32), cuando ocurren los modos deslizantes:

$$B_{11} e_2(t - \tau) = L_1 \text{sign}[e_1(t)]$$

Con esta información y con la información del segundo bloque del observador $\hat{x}_2(t)$, se puede encontrar que:

$$x_2(t - \tau) = \hat{x}_2(t - \tau) + e_2(t - \tau)$$

Ahora si escribimos la solución en forma integral, [27], de la ecuación (4.25) como:

$$x_2(t) = e^{A_{22}t} x_2(t - \tau) + \int_0^t e^{A_{22}t} [B_{21}u(t - v) + D_{21}u(t - \tau - v) + A_{21}x_1(t - v) + C_{21}x_1(t - \tau - v)] dv$$

y usando la información de $x_2(t - \tau)$ en esta solución, obtenemos la información de $x_2(t)$. Con esta información y con la información correspondiente del observador podemos obtener la información del error:

$$e_2(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t)$$

Teniendo la información de, $e_2(t)$, podemos utilizar las entradas del observador $L_1 \text{sign}[e_1(t)]$ y $L_2 \text{sign}[e_2(t)]$ de manera independiente y estabilizar la dinámica del error, de la misma manera que se explicó en la sección del diseño de observador por modos deslizantes.

Cabe señalar que este último caso es computacionalmente complejo y que es necesario guardar información en el controlador para un intervalo de tiempo $[t, t - \tau]$ para ser utilizada en cada instante durante toda la dinámica del controlador en lazo cerrado.

4.5 Ejemplo

Consideremos el siguiente sistema lineal e invariante en el tiempo con retardo en el control y en el estado, el cual se encuentra en la forma controlable por bloques

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) + x_1(t - \tau) + x_2(t) + ax_2(t - \tau) \quad (4.34)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_1(t - \tau) + x_2(t) + x_2(t - \tau) + u(t) + bu(t - \tau) \quad (4.35)$$

Podemos aplicar el procedimiento de diseño de la ley de control utilizando el método de control por bloques explicado en el capítulo 3, con el fin de estabilizarlo.

Después de aplicar este método en el $(r-1)^{mo}$ se obtiene el siguiente sistema en las nuevas variables, $(z_1(t), \dots, z_n(t))$:

$$\dot{z}_1(t) = \lambda_1 z_1(t) + z_2(t) \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2(t) = & c_1 z_1(t) + c_2 z_1(t - \tau) + c_3 z_1(t - 2\tau) + c_4 z_2(t) \\ & + c_5 z_2(t - \tau) + u(t) + c_6 u(t - \tau) + c_7 u(t - 2\tau) \end{aligned} \quad (4.37)$$

donde $c_1 = 1 + \lambda_1 - (\lambda_1)^2$, $c_2 = 2\lambda_1 + a - 1$, $c_3 = a - 1$, $c_4 = 2 - \lambda_1$, $c_5 = 2$, $c_6 = a + b$ y $c_7 = ab$ y $x_1(t) = z_1(t)$.

Si se escoge la entrada de control $u(t)$ como

$$\begin{aligned} u(t) = & -c_6 u(t - \tau) - c_7 u(t - 2\tau) - c_1 z_1(t) - c_2 z_1(t - \tau) \\ & - c_3 z_1(t - 2\tau) - c_4 z_2(t) - c_5 z_2(t - \tau) + \lambda_2 z_2(t) \end{aligned} \quad (4.38)$$

donde λ_1 y λ_2 son los valores propios deseados.

De esta forma se obtiene el siguiente sistema en lazo cerrado en las nuevas variables $(z_1(t), \dots, z_n(t))$:

$$\dot{z}_1(t) = \lambda_1 z_1(t) + z_2(t)$$

$$\dot{z}_2(t) = \lambda_2 z_2(t)$$

Con el fin de obtener la información de los estados para generar la entrada de control (4.38) se diseña el siguiente observador para el sistema (4.36),(4.37) como

$$\dot{\hat{z}}_1(t) = \lambda_1 \hat{z}_1(t) + \hat{z}_2(t) + l_1 \text{sign}[z_1(t) - \hat{z}_1(t)] \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}_2(t) = & c_1 \hat{z}_1(t) + c_2 \hat{z}_1(t - \tau) + c_3 \hat{z}_1(t - 2\tau) + c_4 \hat{z}_2(t) \\ & + c_5 \hat{z}_2(t - \tau) + u(t) + c_6 u(t - \tau) + c_7 u(t - 2\tau) + l_2 \text{sign}(\beta) \end{aligned} \quad (4.40)$$

El filtro de primer orden del primer bloque y la primer entrada del observador se escogen de manera similar a la explicada en la sección 4.4 como:

$$\dot{\beta}(t) = -\frac{1}{\gamma}\beta(t) + \frac{1}{\gamma}v_1 \quad v_1 = l_1 \text{sign}[z_1(t) - \hat{z}_1(t)] \quad (4.41)$$

$$w_1 = M_1 \text{sign}[z_1(t) - \hat{z}_1(t)] \quad (4.42)$$

Entonces el error de estimación $e(t)$ tiene el siguiente comportamiento dinámico

$$\dot{e}_1(t) = \lambda_1 e_1(t) + e_2(t) - v_1 \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}_2(t) = & c_1 e_1(t) + c_2 e_1(t - \tau) + c_3 e_1(t - 2\tau) + c_4 e_2(t) \\ & + c_5 e_2(t - \tau) - l_2 \text{sign}[\beta(t)] \end{aligned} \quad (4.44)$$

Seleccionando las entradas al observador, de igual manera que fue explicado en la sección pasada, se puede decir que:

Cuando $e(t) \rightarrow 0$, se tiene que $\hat{z}_i(t) \rightarrow z_i(t)$ para $(i = 1, \dots, r)$ y la entrada de control se puede aplicar con las variables estimadas como:

$$\begin{aligned} u(t) = & -c_6 u(t - \tau) - c_7 u(t - 2\tau) - c_1 \hat{z}_1(t) - c_2 \hat{z}_1(t - \tau) \\ & - c_3 \hat{z}_1(t - 2\tau) - c_4 \hat{z}_2(t) - c_5 \hat{z}_2(t - \tau) + \lambda_2 \hat{z}_2(t) \end{aligned} \quad (4.45)$$

4.5.1 Simulaciones

En las simulaciones escogemos los siguientes valores: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -4$, $l_1 = 5$, $l_2 = 100$, $a = 0.5$, $b = 0.5$, $\tau = 0.5$ y $\gamma = 0.01$. Con estos valores obtenemos que la dinámica del primer estado de la planta $z_1(t)$ y del observador $\hat{z}_1(t)$ se comporta como en la Fig. 4.1

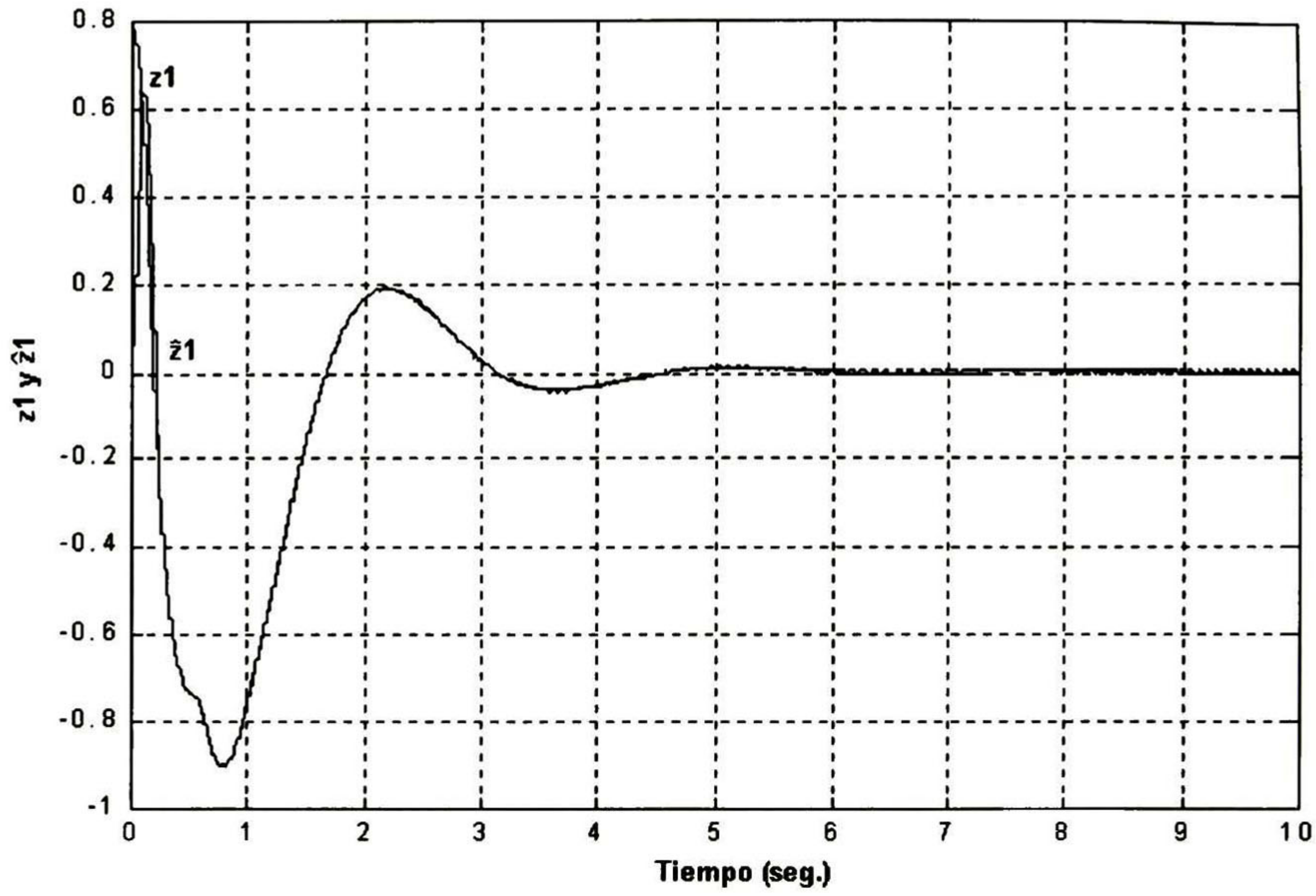


Fig. 4.1

La dinámica del segundo estado de la planta $z_2(t)$ y del observador, $\hat{z}_2(t)$, se presentan en la Fig. 4.2

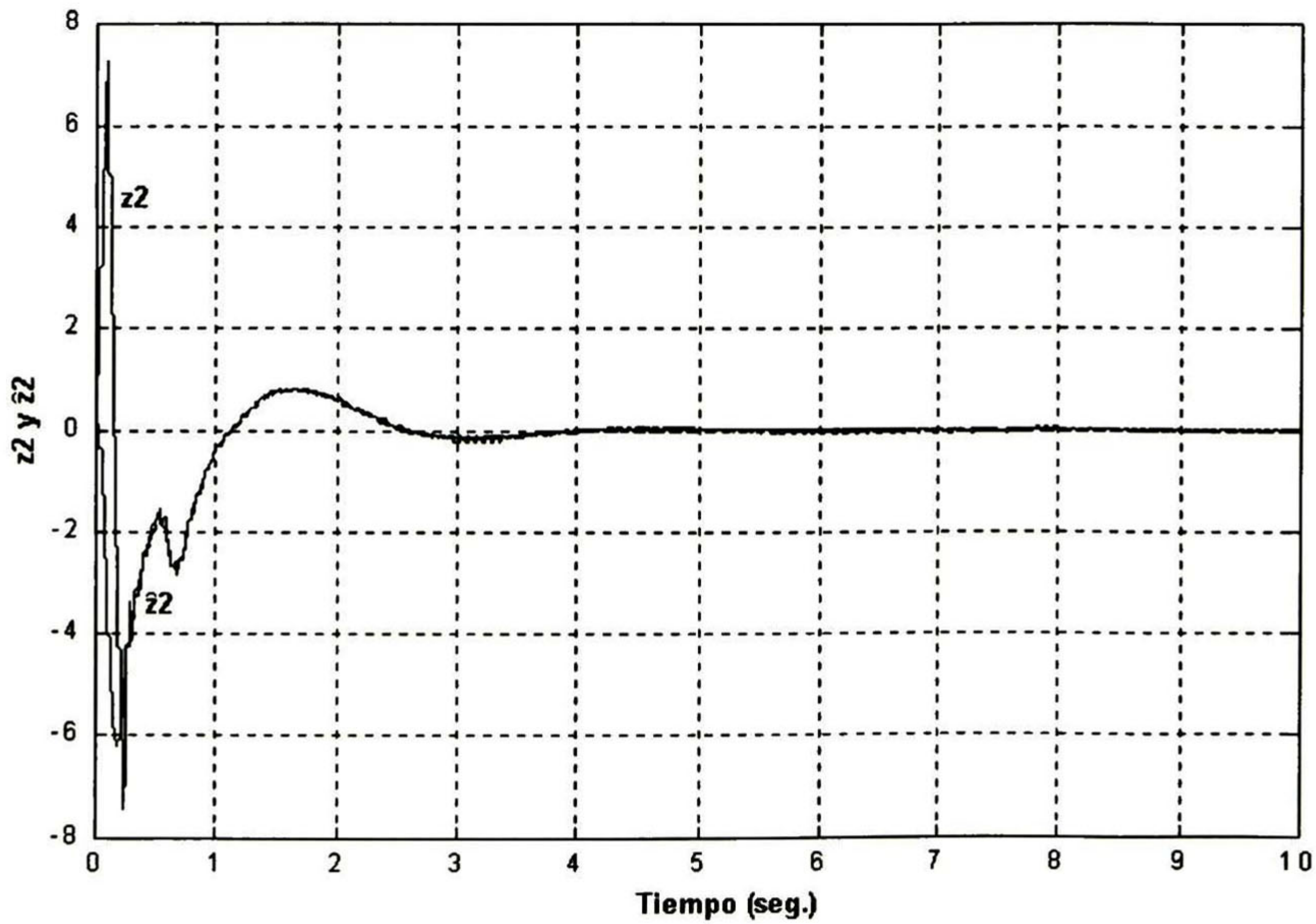


Fig. 4.2

La dinámica de los errores de observación $e_1(t)$ y $e_2(t)$ se presentan en la Fig. 4.3:

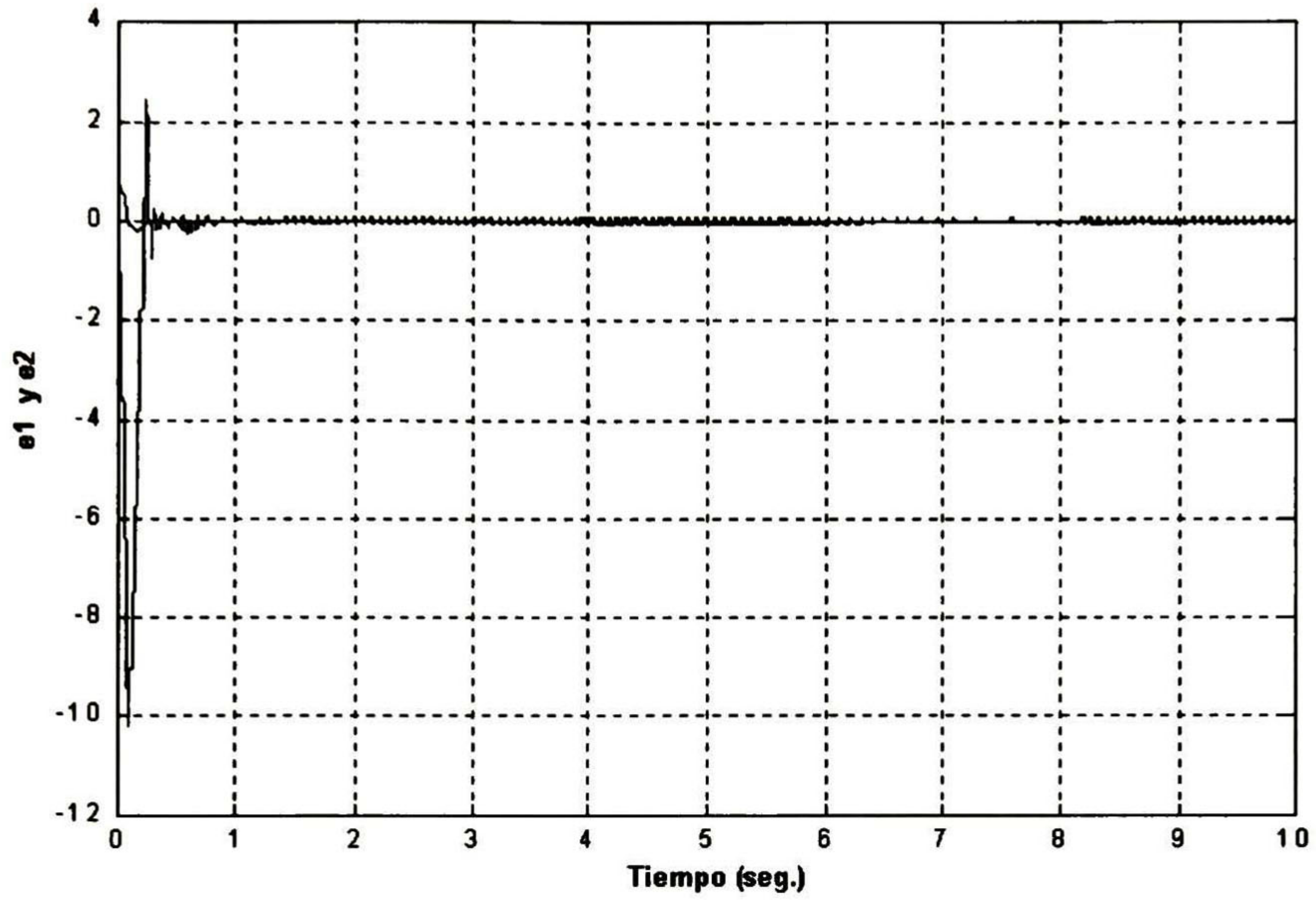


Fig. 4.3

Capítulo 5

Control de la mezcla Gasolina-Aire en un motor de inyección electrónica

5.1 Introducción

La estructura del capítulo es como sigue: En la sección 5.2 se enuncian algunas definiciones importantes que serán usadas en el capítulo.

En la sección 5.3 se justifica la importancia de controlar el sistema de inyección electrónica de gasolina. Se describen los contaminantes más importantes que se producen en los motores de combustión interna a gasolina actuales.

En la sección 5.4 se presenta el modelado matemático de las principales dinámicas que se presentan en el sistema de inyección a gasolina [20]. En la sección 5.5 se presenta el desarrollo de la ley de control con el fin de llevar la relación gasolina-aire al valor adecuado para la combustión. Luego en la sección 5.6 se presenta el diseño del observador que será aplicado en la estabilización de la planta. El observador a utilizar es semejante al que se mencionó en el caso especial del observador por modos deslizantes. Por último en la sección 5.7 se presentan las simulaciones correspondientes con el fin de visualizar la respuesta del sistema después de aplicar la ley de control.

El objetivo del capítulo es:

Controlar la relación gasolina-aire en un sistema de inyección electrónica de gasolina de un motor de combustión interna con un solo pistón, simplificando el modelo original del sistema con el fin de aplicar la técnica de control propuesta en el capítulo 3 y la de diseño de observadores del capítulo 4

5.2 Definiciones

*Relaciones Aire-Gasolina y Gasolina-Aire:

Se definen como las relaciones de los flujos másicos de estos compuestos en una mezcla.

$$\text{Relación Aire/Gasolina } (A/G) = \frac{\dot{m}_a}{\dot{m}_g}$$

$$\text{Relación Gasolina/Aire } (G/A) = \frac{\dot{m}_g}{\dot{m}_a}$$

Donde : \dot{m}_a Es el flujo másico de aire.

\dot{m}_g Es el flujo másico de gasolina.

Para un motor de ignición convencional a gasolina, el valor de estas relaciones varían entre los rangos $12 \leq A/G \leq 18$ y $0.056 \leq G/A \leq 0.883$.

**Punto estequiométrico en la combustión:*

Es el valor químicamente correcto de las proporciones de gasolina y aire para una combustión completa, es decir que en la proporción de estos compuestos, existe suficiente oxígeno para convertir el combustible en productos completamente oxidados. Ver[29].

El punto estequiométrico para el caso de la relación (A/G) en un motor de combustión interna, se considera ideal para los valores de 14.7Kg de aire por 1Kg. de gasolina, es decir:

$$(A/G)_s = 14.7$$

**Factor de exceso de aire (λ):*

La relación aire-gasolina es comúnmente descrita en términos de un factor de exceso de aire en la mezcla durante la combustión. Este factor se conoce como lambda (λ). λ indica la desviación entre la relación actual de aire-gasolina con respecto a la relación ideal requerida

$$\lambda = \frac{\text{Cantidad de aire actual}}{\text{Cantidad ideal (14.7 para gasolina)}}$$

En el punto estequiométrico: $\lambda = 1$.

En una mezcla con exceso de aire: $\lambda > 1$

En una mezcla con deficiencia de aire: $\lambda < 1$.

Lambda se obtiene al normalizar la relación (A/G) actual con la relación $(A/G)_s$ en el punto estequiométrico. Por esta razón el valor óptimo o ideal para λ es la unidad.

En el diseño de controladores para los sistemas de inyección de gasolina se usa el recíproco de λ llamado ϕ esto es $\phi = \lambda^{-1}$. Esto con el fin de controlar la cantidad de gasolina que se inyecta al sistema en lugar de la cantidad de aire, ya que esta es la forma común de control en los automóviles de nuestros días.

5.3 Importancia del control del sistema de inyección y las emisiones de escape

Las emisiones de escape en un motor de gasolina, son los contaminantes que se generan en el proceso de combustión cuando la mezcla (A/G) no se encuentra dentro de un rango establecido, digamos ± 0.05 del valor estequiométrico de la mezcla ideal.

En los motores de ignición de nuestros días, se usa un dispositivo llamado catalizador para reducir las emisiones de los tres principales contaminantes: Hidrocarburos no quemados ($C_m H_n$), monóxido de carbono (CO) y óxidos de nitrógeno (NO_x). Pero este dispositivo necesita que el motor esté operando cerca del punto estequiométrico para fin de obtener una eficiencia de conversión del 80%. Ver[28].

Por lo tanto el objetivo del control de inyección electrónica de gasolina, es minimizar las emisiones de escape y el consumo de combustible. Este control de manera simplificada y tomando en cuenta la Fig. 5.1, se realiza tomando las mediciones de oxígeno en la salida del motor y la cantidad de aire entrando, con esta información el controlador debe ser capaz de calcular la cantidad de gasolina necesaria para mantener a ϕ dentro un rango especificado.

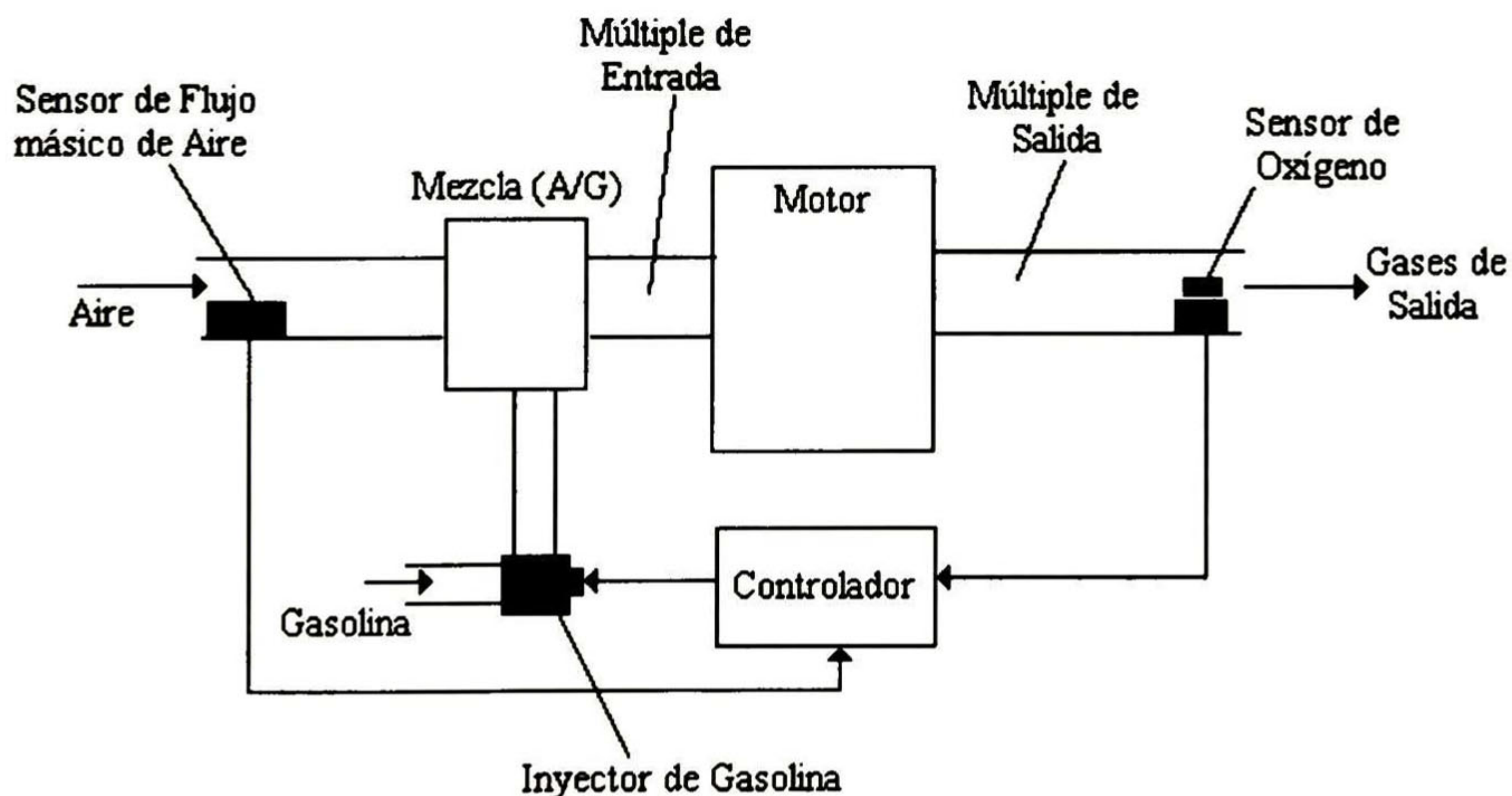


Fig. 5.1

La descripción más detallada de las dinámicas que intervienen en el sistema de inyección electrónica de gasolina, se explican a continuación.

5.4 Modelado matemático

Las principales dinámicas en el sistema de inyección de gasolina de un motor de ignición, son: La dinámica del aire de entrada al motor, la dinámica de la gasolina inyectada en el múltiple de entrada, el retardo de ciclo debido a los cuatro tiempos del motor y el retardo de transporte de la mezcla después de la combustión, para fluir desde la válvula de escape hasta el sensor de oxígeno de los gases de escape [21] y además la dinámica interna del sensor de oxígeno.

El modelo matemático del sistema de inyección de gasolina se obtiene a partir de las siguientes dinámicas:

- *Flujo de aire en el múltiple de entrada*
- *Flujo de gasolina*
- *Retardo de ciclo y retardo de transporte*
- *Sensor de oxígeno*
- *Inyector de gasolina*

El análisis matemático que se presenta, así como las variables que intervienen, se realizan con respecto a la Fig. 5.2.

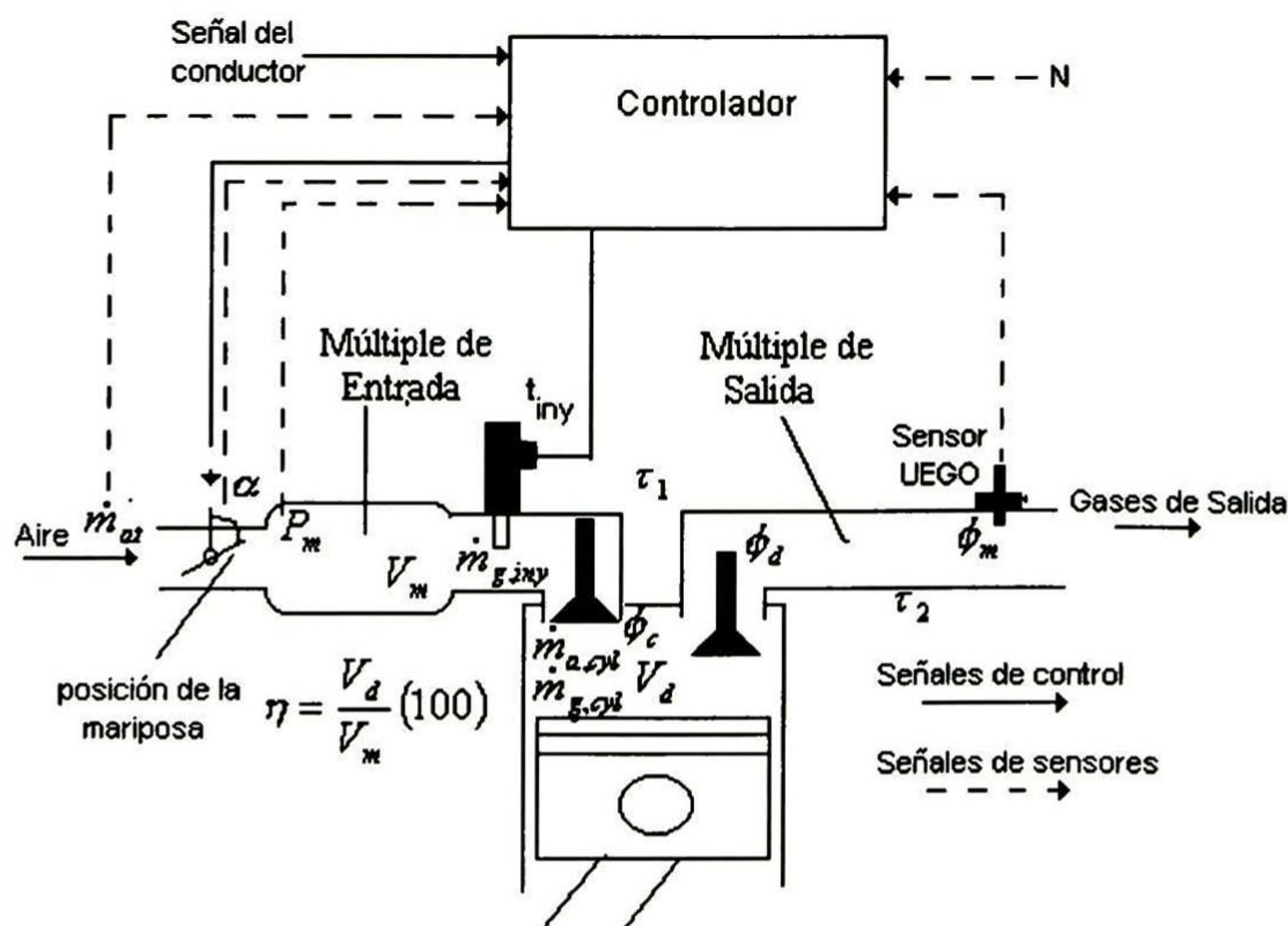


Fig. 5.2

La entrada al sistema se supondrá que es el flujo de gasolina inyectada y como salida la relación estequiométrica medida por el sensor de oxígeno.

5.4.1 Flujo de aire en el múltiple de entrada

Se han usado varios modelos para describir la dinámica del flujo de aire en el múltiple de entrada, [30],[31]. Asumiendo que la presión dentro del múltiple de entrada es uniforme y que la temperatura es constante, se puede obtener un modelo simple que describe el vaciado y llenado del múltiple de entrada. Este modelo está basado en la ecuación de la continuidad del flujo de aire que entra y sale del múltiple de entrada

$$\frac{dm_{a,m}}{dt} = \dot{m}_{a,th} - \dot{m}_{a,cyl} \quad (5.1)$$

donde $m_{a,m}$ es la cantidad de masa de aire que se encuentra en el múltiple de entrada, que es la diferencia entre el flujo de aire que entra por la mariposa de entrada $\dot{m}_{a,th}$ y el flujo que sale hacia el pistón $\dot{m}_{a,cyl}$.

El modelo que describe al flujo de masa entrando al múltiple de entrada puede ser presentado como:

$$\dot{m}_{a,th} = MAX \cdot TC \cdot PRI \quad (5.2)$$

donde MAX es el máximo flujo de aire que puede entrar al múltiple de entrada. Para este modelo se obtiene de [32], que $MAX = 0.1843 \text{ Kg/s}$. TC es la característica normalizada que presenta la mariposa en función del ángulo α , que se describe como:

$$TC = \begin{cases} 1 - \cos(1.14459 \cdot \alpha - 1.0600) & \text{para } \alpha \leq 79.46^\circ \\ 1 & \text{para } \alpha > 79.46^\circ \end{cases} \quad (5.3)$$

La influencia que tiene la presión (PRI) del múltiple de entrada sobre el flujo de aire de entrada, es función de la presión en el múltiple de entrada P_m y de la presión atmosférica P_{atm} , que se puede presentar como

$$PRI = 1 - e^{\left(9 \cdot \left(\frac{P_m}{P_{atm}} - 1\right)\right)} \quad (5.4)$$

Por otra parte, la variación del flujo másico de aire entrando al cilindro, puede ser modelada como:

$$\dot{m}_{a,cyl} = c_1 \cdot \eta_v \cdot m_{a,m} \cdot N \quad (5.5)$$

donde N es la velocidad del motor y c_1 es una constante del mismo que depende de la construcción del motor y que viene dada por [32]:

$$c_1 = \frac{V_d}{4\pi \cdot V_m} \quad (5.6)$$

donde, para el modelo que se tomó como referencia, el valor del volumen del pistón V_d es $0.0038m^3$ y el volumen del múltiple de entrada V_m es $0.0027m^3$. La eficiencia volumétrica η_v es una medida de la efectividad con la que se lleva a cabo el proceso de inducción de aire del múltiple de entrada al pistón, definida como la variación del flujo volumétrico de aire que entra al múltiple de entrada dividida por la variación a la cual el volumen es desplazado hacia el pistón [32].

5.4.2 Flujo de gasolina

Investigaciones previas [29], concluyeron que la gasolina dispersada por el inyector se mezcla con el flujo de aire de entrada y también arroja un porcentaje de esta sobre las paredes del múltiple de entrada. Para entender mejor este proceso de cómo, parte de la gasolina entra directamente al pistón en forma de vapor y como la parte restante entra como líquido al múltiple de entrada y tiene una dinámica de vaporización, tomemos en cuenta la Fig. 5.3:

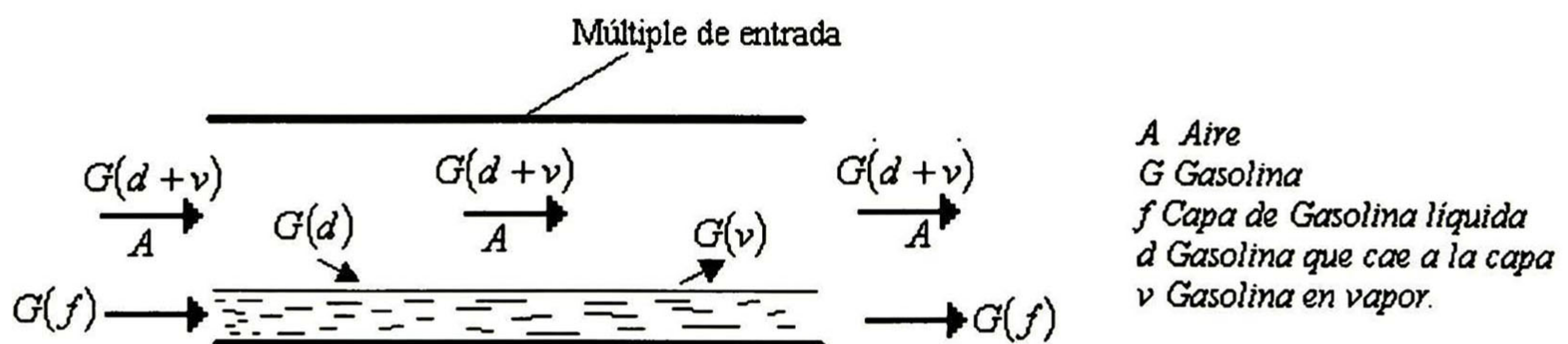


Fig. 5.3

Esquema para explicar como parte de la gasolina inyectada fluye directamente hacia el pistón y la parte restante pasa por una dinámica de vaporización.

El comportamiento de la capa de gasolina que se forma en el sistema de inyección está modelado en [29]. La gasolina inyectada entra a la capa, luego la gasolina sale de esta capa en forma de vapor. La ecuación que describe la variación de la masa de gasolina con respecto al tiempo en esta capa es:

$$\dot{m}_{g,p} = \dot{m}_{g,in} - \dot{m}_{g,out} = x\dot{m}_{g,iny} - \frac{m_{g,p}}{\tau_f} \quad (5.7)$$

donde $m_{g,p}$ es la masa de gasolina en la capa líquida, $\dot{m}_{g,iny}$ es el flujo de gasolina inyectada, que para este modelo es la entrada al sistema, x es la fracción de gasolina que entra en forma de líquido a la capa y τ_f es la constante de tiempo del proceso de vaporización.

El flujo de gasolina en forma de vapor que entra al cilindro $\dot{m}_{g,cyl}$ para mezclarse con el aire de entrada, viene dada por la suma de la gasolina que entra directamente del inyector en forma de vapor $(1-x)\dot{m}_{g,iny}$ y de la parte que se evapora de la capa $\frac{1}{\tau_f} m_{g,p}$. Esto es:

$$\dot{m}_{g,cyl}(t) = (1-x)\dot{m}_{g,iny}(t) + \frac{m_{g,p}(t)}{\tau_f} \quad (5.8)$$

Teniendo los modelos matemáticos de los flujos de aire y de gasolina entrando al cilindro, se puede obtener la relación gasolina-aire como:

$$\phi = \frac{\dot{m}_{g,cyl}(t)}{\dot{m}_{a,cyl}(t)}$$

la cual normalizada al valor estequiométrico es:

$$\phi_c(t) = \left(\frac{A}{G} \right)_s \frac{\dot{m}_{g,cyl}(t)}{\dot{m}_{a,cyl}(t)} \quad (5.9)$$

donde $\left(\frac{A}{G} \right)_s$ es la relación estequiométrica ideal de aire-gasolina que es igual a 14.7.

5.4.3 Retardo de ciclo y retardo de transporte

El retardo de ciclo es el tiempo que tarda la relación estequiométrica $\phi_c(t)$ en ir desde el múltiple de entrada del sistema hasta el múltiple de salida.

La relación estequiométrica en el múltiple de salida se simboliza como $\phi_d(t)$. El retardo de ciclo es entonces el retardo entre $\phi_c(t)$ y $\phi_d(t)$ que se puede modelar como:

$$\phi_d(t) = \phi_c(t - \tau_1) \quad (5.10)$$

En el caso de un motor multicilindro, existe una $\phi_d(t)$ por cada cilindro.

Además del retardo de ciclo, existe un retardo entre la relación estequiométrica en el múltiple de salida y cuando esta alcanza o llega al sensor de oxígeno, debido a que este sensor está ubicado a cierta distancia de la válvula de escape [21]. Este retardo está considerado dentro del modelo del sensor, del cual se hablará a continuación.

5.4.4 Sensor de oxígeno

El sensor de oxígeno UEGO por sus siglas en inglés (**U**niversal **E**xhaust **G**as **O**xxygen sensor), es modelado como un sistema de primer orden con retardo en la entrada y con una constante de tiempo τ_e como:

$$\tau_e \dot{\phi}_m(t) = -\phi_m(t) + \phi_d(t - \tau_2) \quad (5.11)$$

donde $\phi_m(t)$ es la relación estequiométrica medida por el sensor de oxígeno. Para completa información sobre la construcción y funcionamiento de este tipo de sensores ver [28] y [29].

5.4.5 Inyector de gasolina

En el modelo del inyector de gasolina se toma en cuenta el tiempo que la válvula esta cerrada (t_0) y el tiempo de inyección, (t_{in}), además existe una proporcionalidad entre el flujo de gasolina inyectada ($\dot{m}_{g,iny}$) y el tiempo de apertura de la válvula de inyección

El modelo puede ser escrito como

$$\dot{m}_{g,iny}(t) = K_f (t_{in} - t_0) \quad (5.12)$$

donde K_f es la constante de proporcionalidad.

5.4.6 Modelo completo

El modelo completo del sistema de inyección, puede ser representado en el diagrama de bloques de la Fig. 5.4 como:

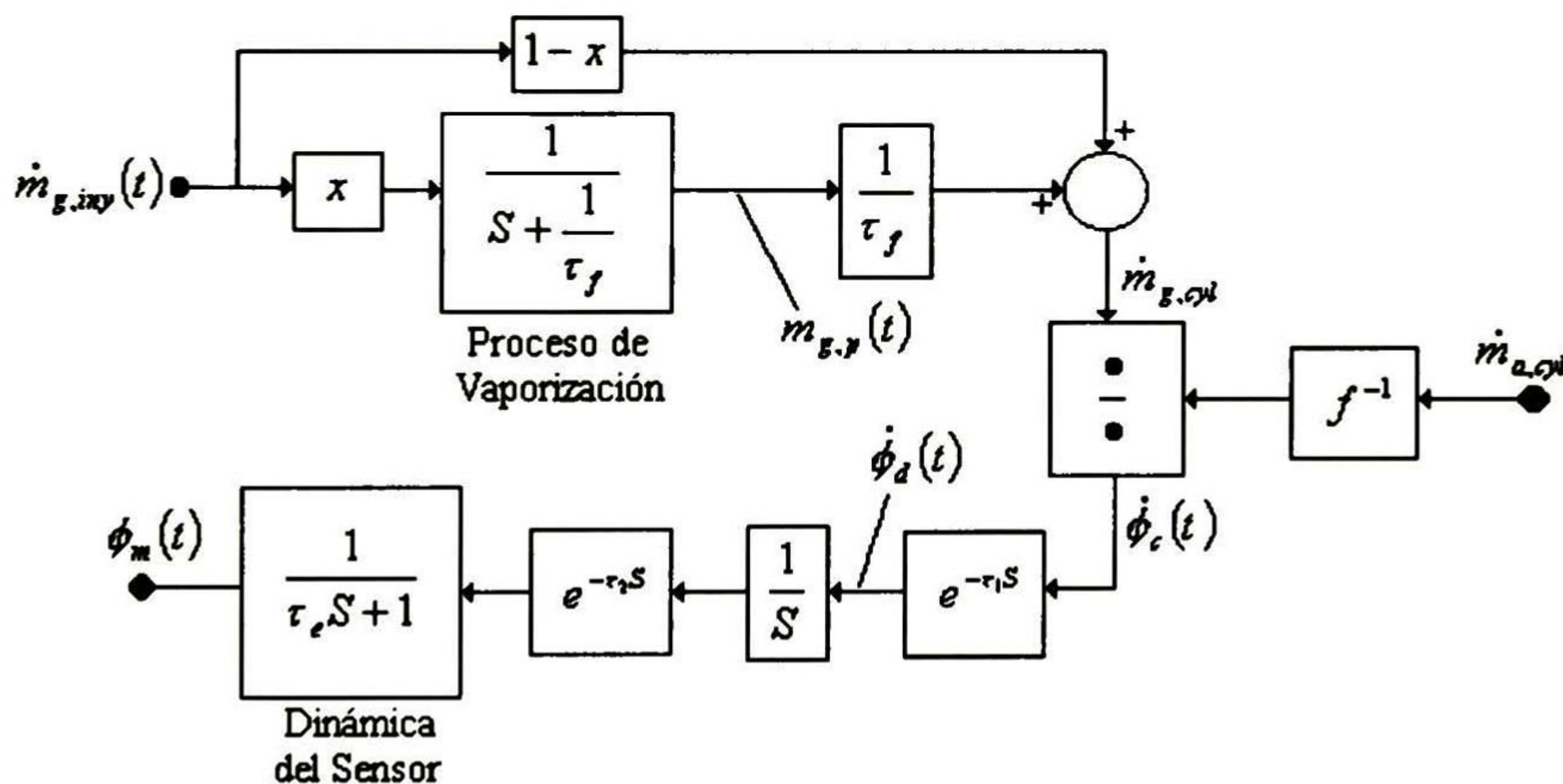


Fig. 5.4
Diagrama a bloques del sistema de inyección de gasolina.

Si suponemos que $\tau = \tau_1 + \tau_2$ y que la dinámica del proceso de vaporización puede ser simplificado por un retardo, es decir, que la parte de flujo de gasolina que entra como líquido a la capa, sale de esta, en forma de vapor después de un tiempo digamos, τ , se obtiene un modelo simplificado que en diagrama a bloques se muestra en la Fig. 5.5

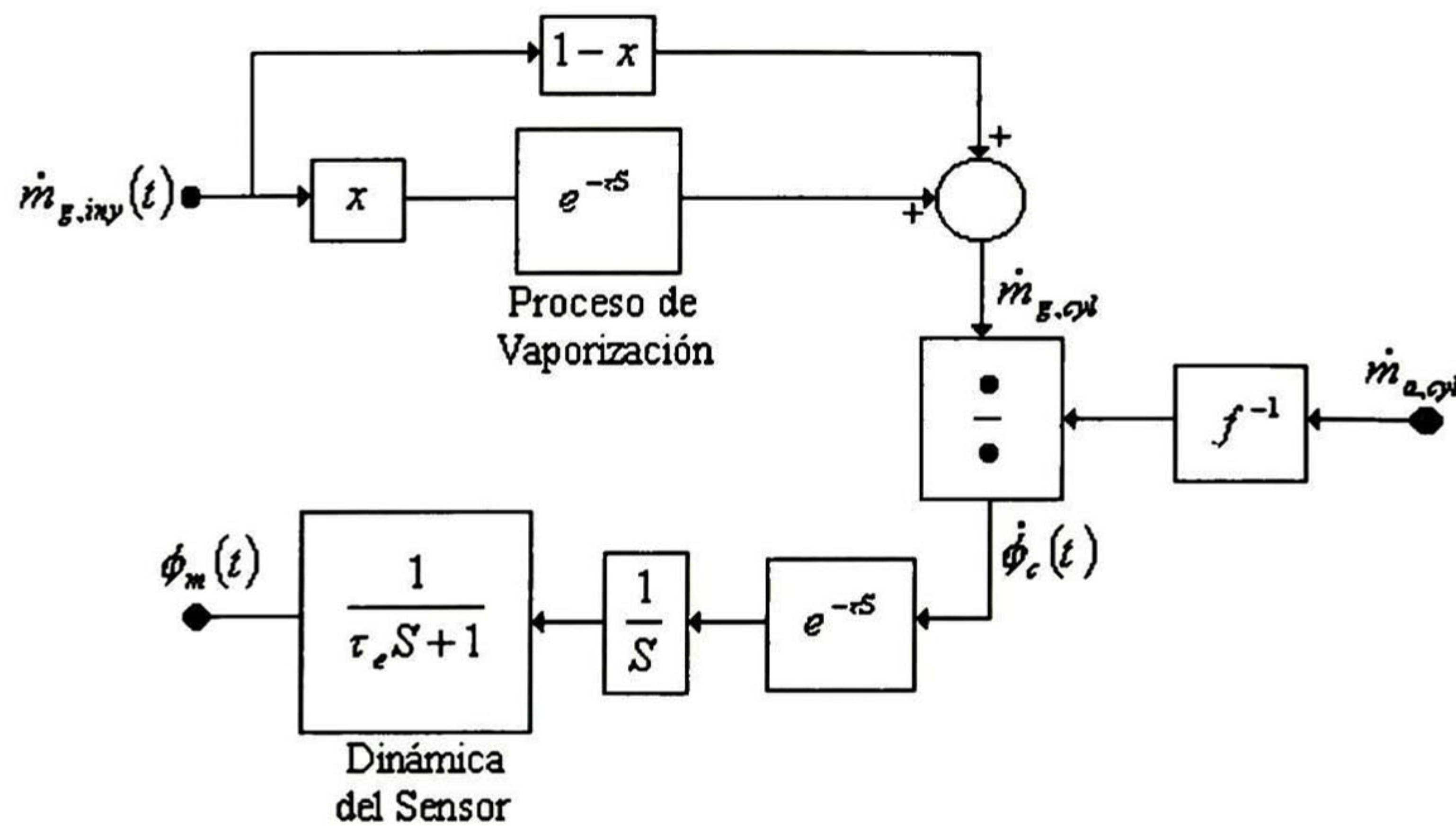


Fig. 5.5
Diagrama simplificado del sistema de inyección.

La representación con ecuaciones diferenciales con retardo sería:

$$\dot{\phi}_m(t) = -\frac{1}{\tau_e} \phi_m(t) + \frac{1}{\tau_e} \phi_c(t - \tau) \quad (5.12)$$

$$\dot{\phi}_c(t) = \frac{1}{\dot{m}_{a,cyl}} [(1-x)\dot{m}_{g,iny}(t) + x\dot{m}_{g,iny}(t - \tau)] \quad (5.13)$$

En este sistema la entrada del control es el flujo de gasolina inyectada directamente en forma de vapor, más la parte que entró como líquido y que después de τ seg. entra al cilindro como vapor. La variable a controlar es la relación estequiométrica en el múltiple de entrada del motor $\phi_c(t)$. La variable que se puede medir es la relación estequiométrica en el sensor de oxígeno $\phi_m(t)$. La condición de estabilidad que se encontró en el capítulo 3 se cumple para este sistema, ya que el valor de x es igual a 0.2, [20]. Las características de esta planta son similares a la descrita en la sección 4.4.1. donde las dimensiones de cada bloque es la unidad. Por lo tanto se diseñará la ley de control por medio de la técnica de control por bloques descrita en el capítulo 3 y después se procederá con el diseño del observador como en el caso especial de observadores de modos deslizantes del capítulo 4.

5.5 Diseño de la ley de control

En el diseño de la ley de control se utiliza el método de control por bloques explicado en el capítulo 3. Cabe mencionar que el sistema en lazo cerrado del control de la mezcla de Gasolina-Aire, funciona para una velocidad específica del motor, N . La variable $\dot{m}_{a,cyl}$ se mide constantemente y su valor a cada constante se considera una constante. Esta señal se obtiene del sensor de flujo de aire o del sensor de presión en el múltiple de entrada, [21]. En los cálculos de las simulaciones se usó una velocidad de $N = 1200 \text{ RPM}$ que corresponde a una cantidad de flujo de aire entrando al cilindro, $\dot{m}_{a,cyl} = 0.55$, [21].

Para este sistema el objetivo principal es regular la relación gasolina-aire en el múltiple de admisión normalizada a su valor estequiométrico, $\phi_c(t)$, que idealmente es igual a 1. Por lo tanto en el problema de regulación se desea que

$$\phi_c(t) = \phi_r(t) \quad (5.14)$$

donde $\phi_r(t)$ es el valor deseado de regulación, que para este caso en particular se desea que tenga un valor constante igual a la unidad, ya que este es el punto estequiométrico donde existe una combustión idealmente perfecta. El error de regulación entre la variable a controlar y la deseada se define como:

$$z_\phi(t) = \phi_c(t) - \phi_r(t) \quad (5.15)$$

Tomando la derivada de (5.15) con respecto al tiempo sobre las trayectorias de (5.12) y (5.13) se obtiene que:

$$\dot{z}_\phi(t) = \frac{1}{\dot{m}_{a,cyl}} \left[(1-x)\dot{m}_{g,iny}(t) + x\dot{m}_{g,iny}(t-\tau) \right] \quad (5.16)$$

Aplicando la técnica de control a bloques podemos proponer que

$$(1-x)\dot{m}_{g,iny}(t) + x\dot{m}_{g,iny}(t-\tau) = \dot{m}_{a,cyl}kz_\phi(t) \quad (5.17)$$

De esta manera podemos obtener la dinámica deseada del error en lazo cerrado como:

$$\dot{z}_\phi(t) = kz_\phi(t)$$

Por lo tanto nuestra ley de control que se necesita para llevar a cabo la regulación es

$$\dot{m}_{g,iny}(t) = -\frac{x}{(1-x)}\dot{m}_{g,iny}(t-\tau) + \frac{\dot{m}_{a,cyl}k}{(1-x)}\phi_c(t) - \frac{\dot{m}_{a,cyl}k}{(1-x)} \quad (5.18)$$

De la ecuación (5.18) podemos notar que en la ley de control necesitamos información del estado $\phi_c(t)$, el cual no puede ser medido directamente. Por lo tanto la ecuación de la dinámica del sensor de oxígeno es usada en el diseño de un observador para obtener esta información y usarla al aplicar el control. Esto se explica a continuación.

5.6 Diseño del observador

En el diseño del observador con modos deslizantes para el sistema de inyección de gasolina se usará el método explicado en el capítulo 4. En específico la parte especial del diseño del observador con modos deslizantes descrita en la sección 4.4.1 inciso (a).

Tenemos la planta como:

$$\dot{\phi}_m(t) = -\frac{1}{\tau_e} \phi_m(t) + \frac{1}{\tau_e} \phi_c(t - \tau) \quad (5.19)$$

$$\dot{\phi}_c(t) = \frac{1}{\dot{m}_{a,cyl}} [(1-x)\dot{m}_{g,iny}(t) + x\dot{m}_{g,iny}(t - \tau)] \quad (5.20)$$

Proponemos el siguiente observador con modos deslizantes:

$$\dot{\hat{\phi}}_m(t) = -\frac{1}{\tau_e} \hat{\phi}_m(t) + \frac{1}{\tau_e} \hat{\phi}_c(t - \tau) + l_1 \text{sign}[\phi_m(t) - \hat{\phi}_m(t)] \quad (5.21)$$

$$\dot{\hat{\phi}}_c(t) = \frac{1}{\dot{m}_{a,cyl}} [(1-x)\dot{m}_{g,iny}(t) + x\dot{m}_{g,iny}(t - \tau)] + l_2 \beta(t) \quad (5.22)$$

donde $\beta(t)$ es la salida de un filtro de primer orden, como se describió en el capítulo 4.

Ahora para la obtención de la dinámica del error de observación definimos los errores entre los estados de la planta y los correspondientes del observador como:

$$e_1(t) = \phi_m(t) - \hat{\phi}_m(t) \quad (5.23a)$$

$$e_2(t) = \phi_c(t) - \hat{\phi}_c(t) \quad (5.23b)$$

Tomando las derivadas de las ecuaciones (5.23a) y (5.23b) con respecto al tiempo sobre las trayectorias de (5.19)-(5.20) se obtiene el comportamiento dinámico del error de observación como:

$$\dot{e}_1(t) = -\frac{1}{\tau_e} e_1(t) + \frac{1}{\tau_e} e_2(t - \tau) - l_1 \text{sign}[e_1(t)] \quad (5.24)$$

$$\dot{e}_2(t) = -l_2 \beta(t) \quad (5.25)$$

donde, $\gamma \dot{\beta}(t) = -\beta(t) + v$ y $v = l_1 \text{sign}[e_1(t)]$. El parámetro γ es la constante de tiempo del filtro.

Ahora cuando l_1 tiende a infinito por el teorema 2.2 del capítulo 2, se tiene que

$$l_1 \text{sign}[e_1(t)] = \frac{1}{\tau_e} e_2(t - \tau) \quad (5.26)$$

Sustituyendo esta última ecuación en (5.25) obtenemos

$$\dot{e}_2(t) = -\frac{l_2}{\tau_e} e_2(t - \tau) \quad (5.27)$$

Si se escoge la ganancia l_2 de acuerdo a [9], la ecuación (5.27) puede llegar a ser asintóticamente estable. Por lo tanto, en la ley de control se puede utilizar la información del observador quedando de la siguiente manera:

$$\dot{m}_{g,iny}(t) = -\frac{x}{(1-x)} \dot{m}_{g,iny}(t - \tau) + \frac{\dot{m}_{a,cyl} k}{(1-x)} \hat{\phi}_c(t) - \frac{\dot{m}_{a,cyl} k}{(1-x)} \quad (5.28)$$

5.7 Resultados de simulación

Para la simulación se consideran los siguientes parámetros típicos de la planta y del observador como, $x = 0.2$, $\tau_f = 0.15$, $\tau_e = 0.10$, $\tau = \tau_1 + \tau_2 = 0.5$, $k = -15$, $\gamma = 0.01$, $l_1 = 30$ y $l_2 = 0.2$. Los datos de la planta se obtuvieron de [20]. Las simulaciones se obtuvieron aplicando la ley de control por medio del observador al sistema original antes de reducirlo.

El resultado de los estados $\phi_m(t)$ y $\hat{\phi}_m(t)$ se presenta en la Fig. 5.6

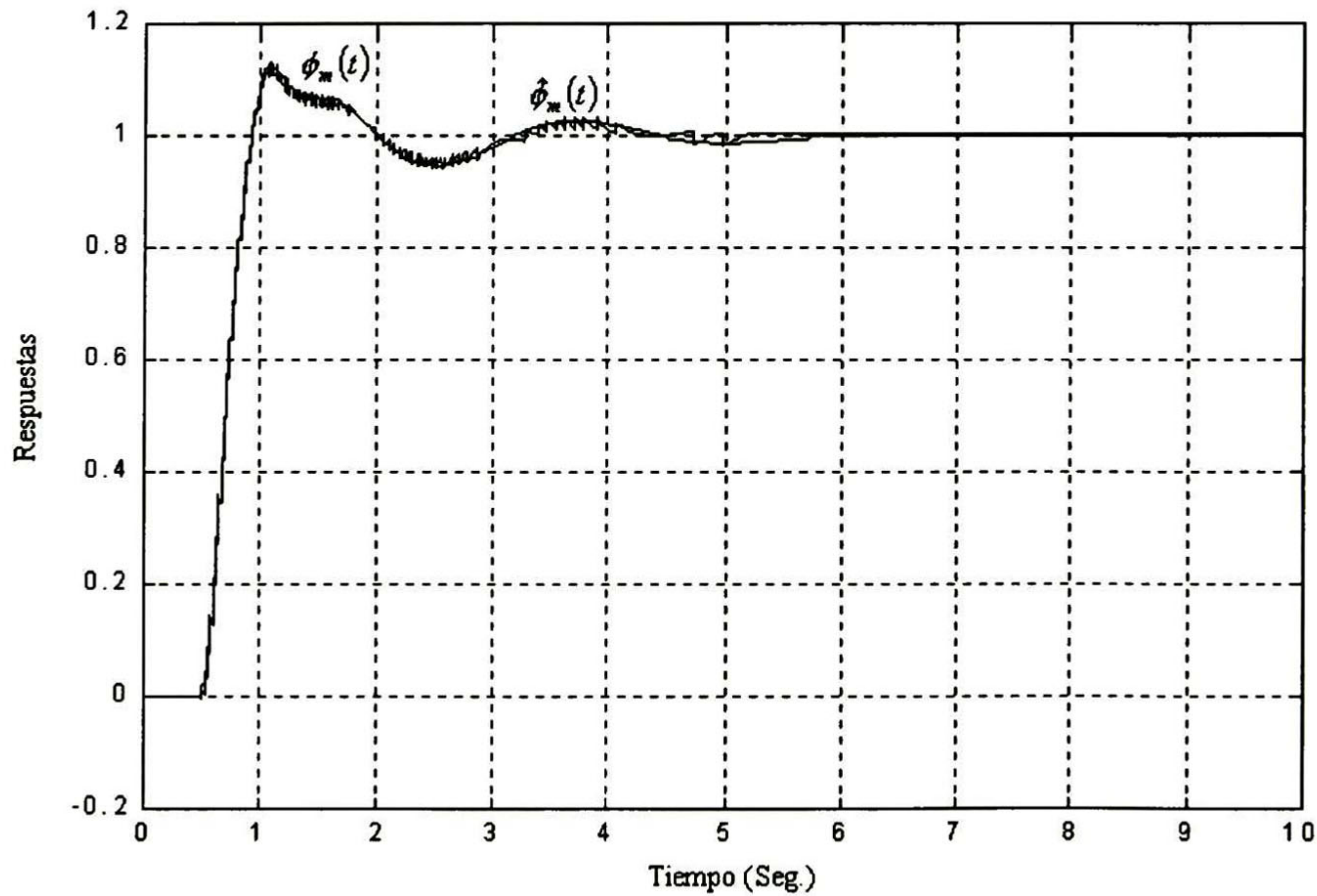


Fig. 5.6

Los resultados de los estados $\phi_c(t)$ y $\hat{\phi}_c(t)$ se muestran en la fig. 5.7

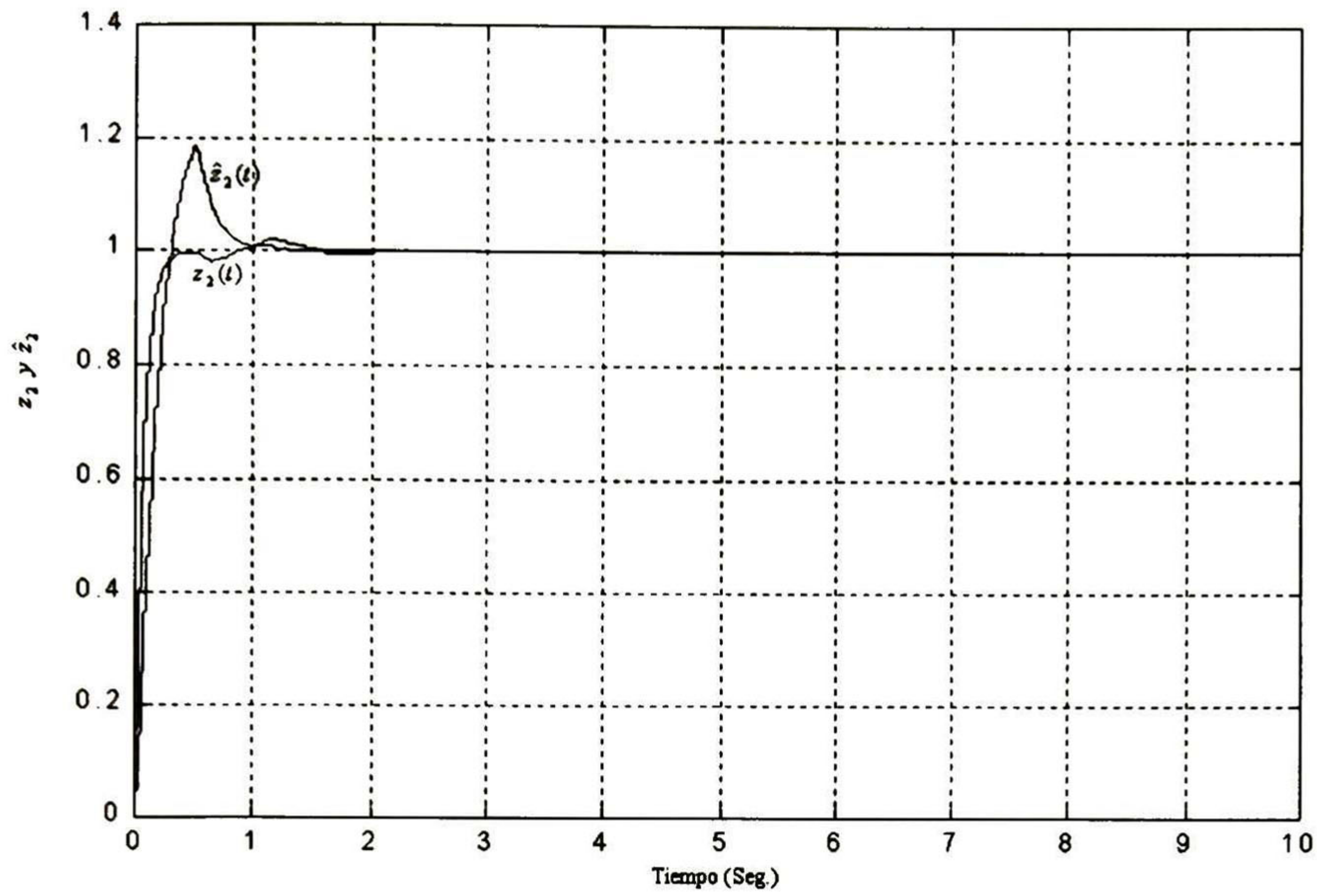


Fig. 5.7

Por último los resultados de los errores entre los estados de la planta y del observador se muestran en la fig. 5.8

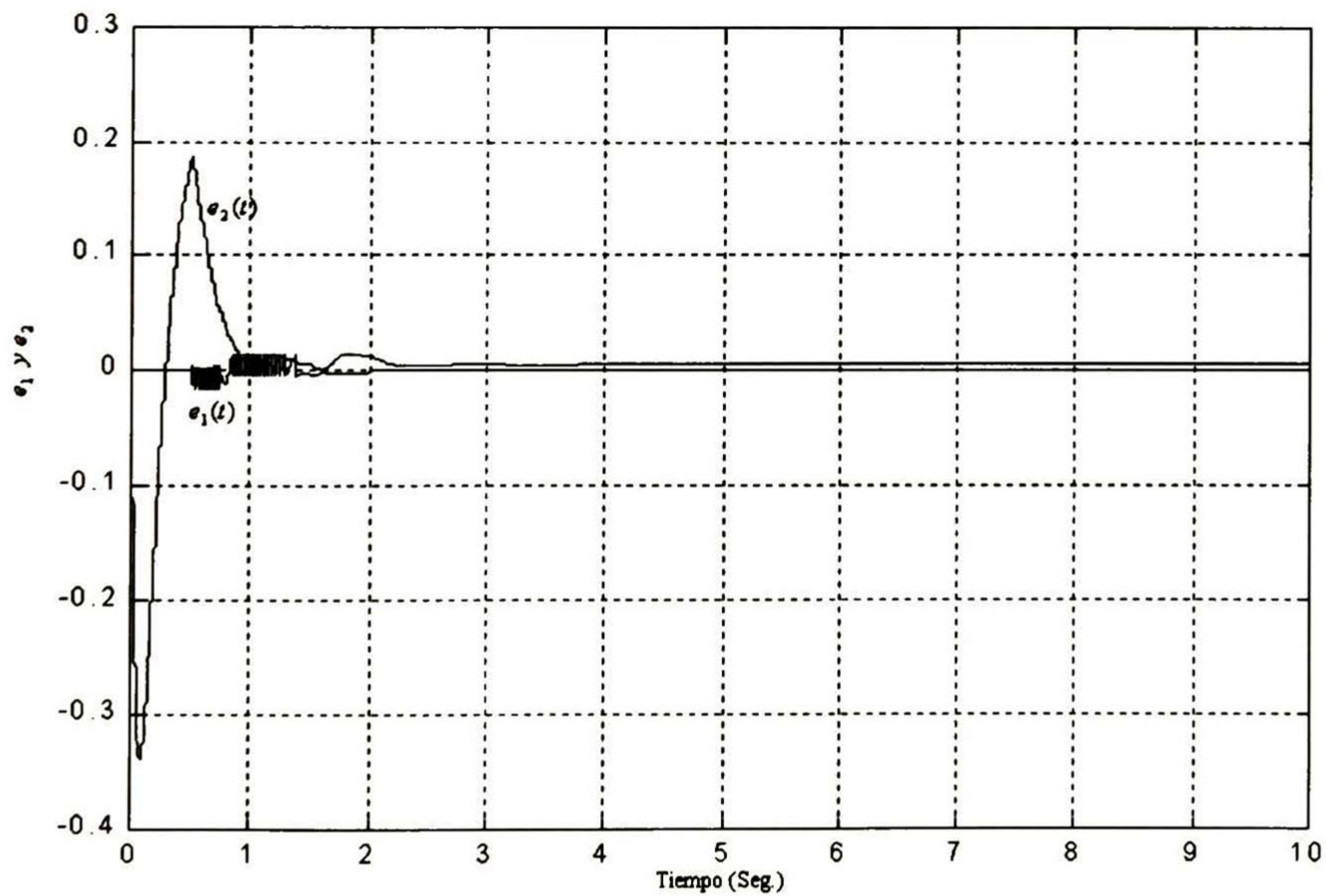


Fig. 5.8

Capítulo 6

Conclusiones y trabajos futuros

Conclusiones:

- Se resolvió el problema de estabilización de una clase especial de sistemas lineales invariantes en el tiempo con retardo en el estado y en el control.
- Se desarrollaron procedimientos para la transformación de estos sistemas a la forma controlable por bloques y para generalizar la estrategia de control.
- Se establecieron condiciones en los parámetros del sistema en la forma controlable por bloques para tener estabilidad en el sistema en lazo cerrado.
- Se aplicó la técnica de modos deslizantes para el diseño de observadores para este tipo de sistemas.
- Se aplicó la teoría desarrollada en este trabajo para resolver el problema de estabilización de la relación Gasolina-Aire en el sistema de inyección de un motor de ignición de un solo pistón.

Ventajas:

- Usando la técnica de control por bloques el problema de estabilización se divide en sub-problemas de menor complejidad.
- Se eliminan los retardos en el sistema a lazo cerrado y se pueden asignar los valores propios de forma arbitraria.
- La técnica de modos deslizantes simplifica el diseño del observador y es posible implementarlo con dispositivos electrónicos.

Trabajos futuros:

- Proponer otras estrategias de control para suavizar o eliminar las condiciones de estabilidad que se encontraron.
- Generalizar estrategias de control para casos especiales de sistemas con retardo.
- Utilizar técnicas de predicción en el diseño de observadores para los sistemas lineales con retardo.
- Implementar en tiempo real el control de la relación Gasolina-Aire en el sistema de inyección electrónica de gasolina para evaluar resultados con diferentes estrategias de control.
- Tratar de generalizar los procedimientos de transformación y control para sistemas no lineales con retardo.

Bibliografía

- [1] M. Zavarei y M. Jamshidi, "Time-Delay Systems Analysis, Optimization and Applications", North-Holland, 1987.
- [2] V. Volterra, *Lecons sur les équations intégrales et les équations intégrales différentielles*, Gauthier-Villars, Paris, 1913.
- [3] R. Bellman and K.L Cooke, *Differential-Difference Equations*, Academic Press, 1963.
- [4] L.E. Elsgolts, "Qualitative Methods in Mathematical Analysis", AMS Translation of Math. Monographs, Vol. 12, 1964.
- [5] W. Hahn, "Bericht uber Differential-Differenzgleichungen mit festen und veranderlichen Spannen", *Fahresber, DMV*, Vol. 57, pp. 55-84, 1954.
- [6] A. Halanay, *Differential Equations: Stability, Oscillations, Time Lags*, Academic Press, New York, 1966.
- [7] N.N. Krasovskii, *Certain Problems in the Theory of Stability of Motion*, Moscow, 1959.
- [8] W.I. Zubov, *Vibration in Nonlinear Control Systems*, Leningrad, 1962.
- [9] Hale, Jack K., "Functional Differential Equations", New York, Springer-Verlag, 1971.
- [10] J.C. Shen, B.S. Chen, and F.C. Kung, "Memoryless Stabilization of Uncertain Dynamic Delay Systems: Riccati Equation Approach", *IEEE Trans. On Automat. Control* Vol. 36, No.5, pp.638-640, 1991.
- [11] E. Feron, V. Balakrishnan, and S. Boyd, "Design of Stabilizing Feedback for Delay Systems via Convex Optimization", *Proc. Conference on Decision and Control*, Vol.4, pp.2195-2196, 1992.

- [12] J.H. Lee, S.W. Kim, and W.H Kwon, "Memoryless H_∞ Controllers for Input Delayed Systems", *IEEE Trans. On Automat. Control* Vol. 39, No.1, pp159-162, 1994.
- [13] H. Li, S.I. Niculesku, L.Dugard, and J.M Dion, "Robust H_∞ Control of Uncertain Linear Time Delay Systems: A Linear Matrix Inequality Approach", *Proc. Conference on Decision and Control*, 1996.
- [14] H. Li, amd C.E. de Souza, *LMI Approach to Delay-Dependent Robust Stability and Stabilization of Uncertain Linear Delay Systems*", *IEEE Trans. On Automat. Control*, Vol. 42, No.8, pp1144-1148, 1997.
- [15] B. Lehman and K. Shujaee, "Vibrational Feedback Control of Time Delay Systems, " *IEEE Trans. On Automat. Control*, Vol. 42, pp. 1529-1545, 1997.
- [16] A.G. Loukianov, "Optimal Nonlinear Block-Control Method", *Proc. Of the 2nd European Control Conference, Groningen*, pp.1853-1855, 1993.
- [17] A.G. Loukianov, "Nonlinear Block Control with Sliding Mode", *Automation and Remote Control*, Vol.59, No.7, pp. 916-933, 1998.
- [18] A.G. Loukianov, and V.I. Utkin, "Optimal Linear Systems with Degenerate Criteria", *Automation and Remote Control*, Vol. 43, No. 7, (P.1), pp.872-879, 1982.
- [19] S.J. Dodds, and A.G. Loukianov, "Design of Multivariable Time Varying Linear Systems with Discontinuous Controls", *Automation and Remote Control*, Vol. 58, No.5, (P.1), pp. 735-748, 1997.
- [20] Chen-Fang C, Nicholas P. Fekete, J. David Powell, "Observer Based Air-Fuel Ratio Control", *IEEE Control Systems*, October 1998.
- [21] Chen-Fang Chang, Nicholas P. Fekete, Alois Amstutz, and J. David Powell, "Air-Fuel Ratio Control in Spark-Ignition Engines Using Estimation Theory", *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol 2, No. 1, March 1995.
- [22] Hassal K. Khalil, "Nonlinear Systems", Prentice Hall, 1996.
- [23] Loukianov and Utkin, "Methods for reducing dynamics systems to regular form", *Automation and Remote Control*, vol. 42, No.4,(P.1), pp. 413-420, 1981.
- [24] Vadim I. Utkin, "Sliding Modes in Control Optimization", Springer-Verlag, 1992.

- [25] Chi-Tsog-Chen, *"Linear System Theory and Design"*, Holt, Rinehart and Winston, 1984.
- [26] S.V Drakunov, D.B. Izosimov, A.G. Loukianov and B.I. Utkin, *"Block Control Principle I,II"*, *Automation and Remote Control*, Vol. 51, No. 6, pp 737-742, 1990.
- [27] Vadim I. Utkin, Jurgen Guldner and Jingxin Shi, *"Sliding Mode Control in Electromechanical Systems"*, British Library, 1999.
- [28] Ronald K. Jurgen, *"Automotive Electronics Handbook"*, McGraw-Hill, 1995.
- [29] John B. Heywood, *"Internal Combustion Engine Fundamentals"*, McGraw-Hill, 1988.
- [30] Trayser, D.A., Creswick, F.A., Giesike, J.A., Hazard, H.R., Weller, A.E., and Locklin, D.W., *"A Study of the Influence of Fuel Atomization, Vaporization and Mixing Processes on Pollutant Emissions from Motor-Vehicle Powerplants"*, Battelle Memorial Institute, Columbus, Ohio, 1969.
- [31] Tabaczynski, R.J., *"Effects of Inlet and Exhaust System Design on Engine performance"* SAE paper 821577, 1982.
- [32] Cho, D., Hedrick, J.K, *"Automotive Powertrain Modeling for Control"*, *Transactions of the ASME*, DECEMBER 1989.
- [33] V. B. Kolmanouskii, *"Stability of Functional Differential Equations"*, Academic Press, 1986.

APÉNDICE

Contenido

- Carta de aceptación del artículo “**Block Control of linear time invariant systems with delay**”, presentado en la edición 2000 de CDC (**Conference on Decision and Control**).
- Copia del artículo.

**Program at
a Glance**

**Session
Index**

**Author
Index**

**Conference
Information**

Readme

**Install
Acrobat**

Support

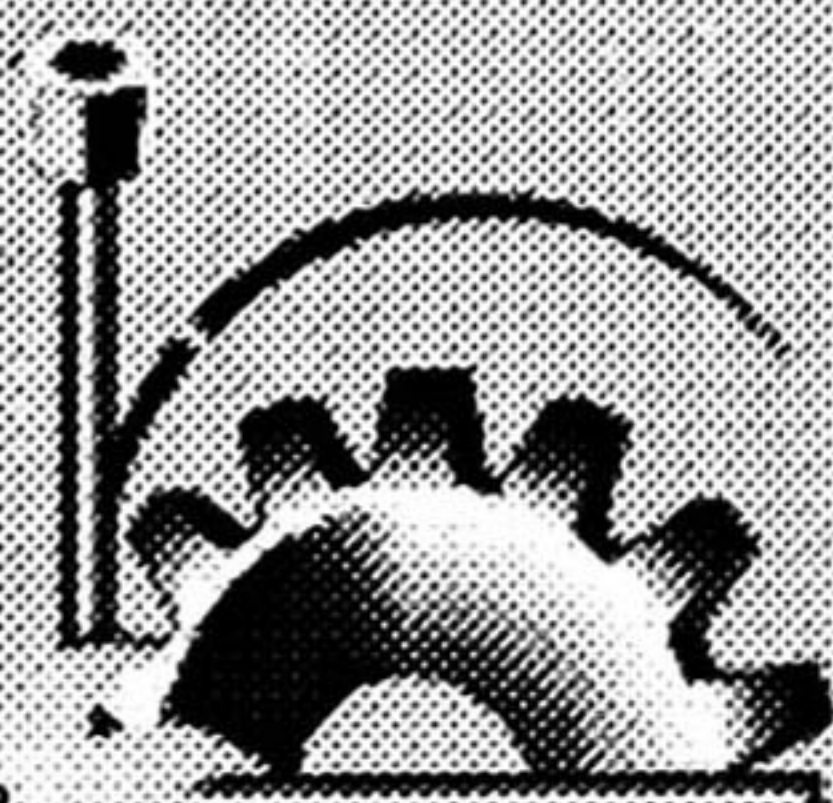


Search

39th IEEE Conference on Decision and Control

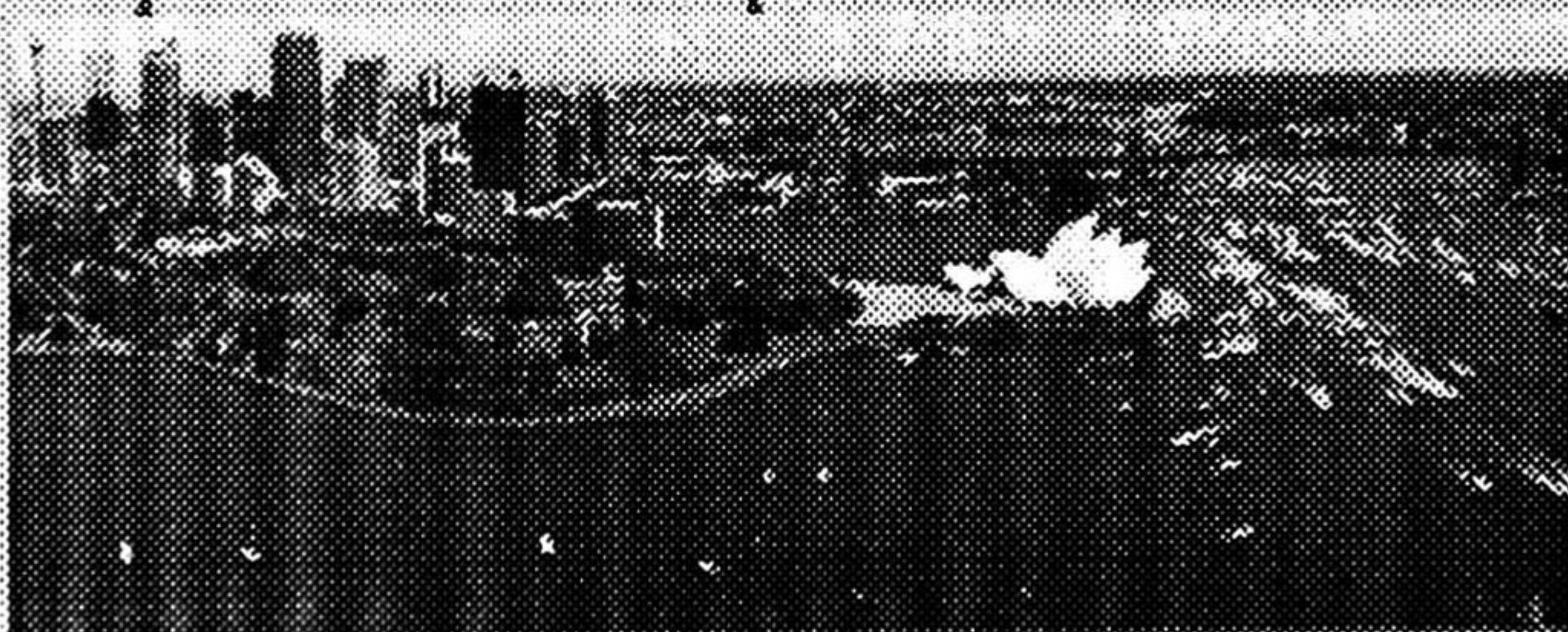


IEEE



CDC DOWNUNDER

12 - 15 DECEMBER 2000, SYDNEY AUSTRALIA



Copyright and Reprint Permission: Abstracting is permitted with credit to the source. Libraries are permitted to photocopy beyond the limit of U.S. copyright law for private use of patrons those articles in this volume that carry a code at the bottom of the first page, provided the per-copy fee indicated in the code is paid through Copyright Clearance Center, 222 Rosewood Drive, Danvers, MA 01923. For other copying, reprint or republication permission, write to IEEE Copyrights Manager, IEEE Operations Center, 445 Hoes Lane, P.O. Box 1331, Piscataway, NJ 08855-1331. All rights reserved. (C) 2000 IEEE. Personal use of this material is permitted. However, permission to reprint or publish this material for advertising or promotional purposes or for creating new collective works for resale or redistribution to servers or lists, or to reuse any copyrighted component of this work in other works must be obtained from the IEEE.

TuA13 Automotive Applications

Venue: Harbourside Meeting Room 7, Time: 0950-1210

- 438 **Active Axletree Suspension for Road Vehicles with Gain-Switching** - (*Alessandro Giua, Carla Seatzu, Giampaolo Usai*)
- 444 **Nonlinear Control Applied to Gearshifting in Automated Manual Transmissions** - (*Jonas Fredriksson, Bo S. Egardt*)
- 450 **Longitudinal Control Algorithm for Automated Vehicle Merging** - (*Xiao-Yun Lu, Karl J. Hedrick*)
- 456 **Adaptive Emergency Braking Control Using A Dynamic Tire/Road Friction Model** - (*Jingang Yi, Luis Alvarez, Roberto Horowitz, Carlos Canudas de Wit*)
- 462 **Control of Vehicle Speed : a Nonlinear Approach** - (*Rachid Outbib, Ahmed Rachid*)
- 464 **Block Control of Linear Time Invariant Systems with Delay** - (*Alexander G. Loukianov, Jaime Escoto Hernández*)



From: Professor J. Jim Zhu
3216-E CEBA Building
Division of Engineering Services
Louisiana State University
Baton Rouge, LA 70803, USA

Contact:
Email: css.ceb@rsip.lsu.edu
Fax: +1 225 388 4893
Voice: +1 225 388 6028
Internet: <http://nt1.rsip.lsu.edu/cssceb>

April 20, 2000

To: Dr. Alexander G. Loukianov
CINVESTAV
Apartado post 31-438 Plaza La Luna
Guadalajara, Jal 44550
MEXICO

PIN: 28402
Phone: +52.36841580
Fax: +52.36841708
Email: louk@gdl.cinvestav.mx

Re: Paper ID **CDC00-REG1671** Paper type **Regular**

Paper Title **Block control of linear time invariant systems with delay**

Authors (Surname, First Name; Institute [PIN]):

Loukianov, Alexander G.; CINVESTAV [PIN: 28402]
Escoto, Jaime; [PIN: 34310]

Dear Dr. Loukianov:

This is to acknowledge receipt of your manuscript, which was submitted to the 2000 Conference on Decision and Control. I am responsible for its review. If you need to contact me during the review process regarding this paper, please include the Paper ID in all correspondences by email, fax or mail (email is preferred).

Please check carefully your contact data and the manuscript information as listed above. If there is any error or omission, please notify us by email as soon as possible. Please also address any remarks in the Notes to Author box below. Voluntary changes to the paper's title and contents should be made in your final revision of the manuscript when it is accepted.

The next communication you should receive will be the notification letter on the acceptance of your paper in July, 2000. In that letter I will also enclose comments of the reviewers, if they are available. An email notification will also be sent to you promptly if your email address is correct.

Joint Submissions: Manuscripts may be simultaneously considered for publication in a journal, subject to its guidelines. Please submit directly to the journal of your choice, and note that the review process will be completely separate.

Sincerely,

J. Jim Zhu, Chair
Conference Editorial Board

Notes to Author

Block Control of Linear Time Invariant Systems with Delay

Alexander G. Loukianov and Jaime Escoto Hernández

Department of Electrical Engineering, CINVESTAV IPN,
Apartado Postal 31-438, Plaza La Luna, Guadalajara, Jal. 44550, Mexico,
E-mail: louk@gdl.cinvestav.mx, jescoto@gdl.cinvestav.mx

Abstract

This paper applies the block control method to form a decomposed control law suitable for multivariable linear time-delay systems. A Block Controllable Form is introduced, and a non-singular transformation that reduces the system to this form, is proposed. Conditions of stability of the closed-loop system are derived.

1 Introduction

The feedback stabilization of time-delay systems remains is one of most interest problems in control. This problem has been extensively studied and several controllers and stability criteria based on optimal control method [1] including H_∞ and LMI approaches [2], have been proposed. The common feature of the referred works is that their derivations are based on analysis of full order system.

In this paper, to stabilize linear time invariant systems with delayed state and input, we use the block control principle which is fruitful and relatively simple, especially when dealing with multivariable systems because the control problem is decomposed into a number of simpler sub-problems of lower dimensions. In order to achieve this, a special state representation must be used which will be referred to as the Block Controllable Form (or BC-form), consisting of a set of controlled blocks. This approach has successfully been employed for decomposition and control of linear time systems [3]. Here, the possibility of applying the same method for stabilization of linear delayed systems is investigated.

2 BC-Form for Systems with Delay

Consider a linear time-delay system described by the following state equation

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{C}\mathbf{x}(t - \tau) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t - \tau) \quad (1)$$

where $\mathbf{x} \in R^n$ $\mathbf{u} \in R^m$ $\mathbf{x}(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in [t_0 - \tau, t_0]$,
 $\varphi(t)$ is a continuous vector-valued initial function.

The essential feature of the proposed method is the conversation of the system (1) to the BC-form consisting of r blocks:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_r(t) &= \mathbf{A}_r \mathbf{x}_r(t) + \mathbf{C}_r \mathbf{x}_r(t - \tau) + \mathbf{B}_r [\mathbf{x}_{r-1}(t) + \mathbf{P}_r \mathbf{x}_{r-1}(t - \tau)] \\ \dot{\mathbf{x}}_i(t) &= \mathbf{A}_i \bar{\mathbf{x}}_i(t) + \mathbf{C}_i \bar{\mathbf{x}}_i(t - \tau) + \mathbf{B}_i [\mathbf{x}_{i-1}(t) + \mathbf{P}_i \mathbf{x}_{i-1}(t - \tau)] \\ \dot{\mathbf{x}}_1(t) &= \mathbf{A}_1 \bar{\mathbf{x}}_1(t) + \mathbf{C}_1 \bar{\mathbf{x}}_1(t - \tau) + \mathbf{B}_1 [\mathbf{u}(t) + \mathbf{P}_1 \mathbf{u}(t - \tau)] \\ & \quad i = 2, \dots, r-1 \end{aligned} \quad (2)$$

where $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r)^T$, $\bar{\mathbf{x}}_i = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i)^T$ $\mathbf{x}_i \in R^{n_i}$, and

$$\text{rank} \mathbf{B}_i = n_i, \quad i = 1, \dots, r. \quad \sum_{i=1}^r n_i = n.$$

The procedure for transforming plant (1) to the form (2) comprises $r-1$ steps. On the first step we introduce the following assumptions

A11) $\text{rank} \mathbf{B} = n_1 = m$.

A12) There is a matrix $\mathbf{P}_1 \in R^{n_1 \times n_1}$ such that

$$\mathbf{D} = \mathbf{B}\mathbf{P}_1$$

Under these assumptions, a change of variables

$$\mathbf{x}' = \mathbf{M}_1 \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}' = \mathbf{M}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n-n_1} & -\mathbf{B}_{12} \mathbf{B}_1^{-1} \\ 0 & \mathbf{I}_{n_1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_1 \end{bmatrix}$$

transforms the system (1) into

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}'_2(t) &= \mathbf{A}'_{22} \mathbf{x}'_2(t) + \mathbf{C}'_{22} \mathbf{x}'_2(t - \tau) + \mathbf{B}'_2 \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{D}'_2 \mathbf{x}_1(t - \tau) \\ \dot{\mathbf{x}}'_1(t) &= \mathbf{A}_{12} \mathbf{x}'_2(t) + \mathbf{C}_{12} \mathbf{x}'_2(t - \tau) + \mathbf{A}_{11} \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{C}_{11} \mathbf{x}_1(t - \tau) \\ & \quad + \mathbf{B}_1 [\mathbf{u}(t) + \mathbf{P}_1 \mathbf{u}(t - \tau)] \end{aligned}$$

where $\mathbf{x}' = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}'_2)^T$ $\mathbf{x}_1 \in R^{n_1}$ $\mathbf{x}'_2 \in R^{n-n_1}$

Lemma: Let

i) The system (1) be controllable.

ii) Assumptions **A11** and **A12** hold.

iii) In the system

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}'_k(t) &= \mathbf{A}'_k \mathbf{x}'_k(t) + \mathbf{C}'_k \mathbf{x}'_k(t - \tau) + \mathbf{B}'_k [\mathbf{x}_{k-1}(t) + \mathbf{D}'_k \mathbf{x}_{k-1}(t - \tau)] \\ \dot{\mathbf{x}}'_i(t) &= \mathbf{A}_i \bar{\mathbf{x}}_i(t) + \mathbf{C}_i \bar{\mathbf{x}}_i(t - \tau) + \mathbf{B}_i [\mathbf{x}_{i-1}(t) + \mathbf{P}_i \mathbf{x}_{i-1}(t - \tau)] \\ \dot{\mathbf{x}}'_1(t) &= \mathbf{A}_1 \bar{\mathbf{x}}_1(t) + \mathbf{C}_1 \bar{\mathbf{x}}_1(t - \tau) + \mathbf{B}_1 [\mathbf{u}(t) + \mathbf{P}_1 \mathbf{u}(t - \tau)], \quad i = 2, \dots, k-1 \end{aligned}$$

with $\text{rank} \mathbf{B}_i = n_i$, $i = 1, \dots, k-1$, obtained at the $(k-1)^{\text{th}}$ step of the transformation procedure, the following conditions hold

Ak1) $\text{rank} \mathbf{B}'_k = n_k = m$.

Ak2) There is a matrix $\mathbf{P}_k \in R^{n_k \times n_k}$ such that

$$\mathbf{D}'_k = \mathbf{B}'_k \mathbf{P}_k$$

Then, there exists an integer $r \leq n$ such that the system (1) takes the form (2).

3 Block Control Design

It is more conveniently to renumber the variables of (2) as

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1(t) &= \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{C}_1\mathbf{x}_1(t-\tau) + \mathbf{B}_1\mathbf{v}_1(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_i(t) &= \mathbf{A}_i\mathbf{x}_i(t) + \mathbf{C}_i\mathbf{x}_i(t-\tau) + \mathbf{B}_i\mathbf{v}_i(t), \quad i = 2, \dots, r-1 \\ \dot{\mathbf{x}}_r(t) &= \mathbf{A}_r\mathbf{x}_r(t) + \mathbf{C}_r\mathbf{x}_r(t-\tau) + \mathbf{B}_r\mathbf{v}_r(t)\end{aligned}\quad (3)$$

where $\mathbf{v}_i(t) = \mathbf{x}_{i+1}(t) + \mathbf{P}_i\mathbf{x}_{i+1}(t-\tau)$, $i = 1, \dots, r-1$, and

$$\mathbf{v}_r(t) = \mathbf{u}(t) + \mathbf{P}_r\mathbf{u}(t-\tau).$$

A control strategy can be designed for (3) considering \mathbf{v}_i as a fictitious control vector in the i^{th} block of (3). This procedure is outlined in the following.

Step 1. Let the fictitious control $\mathbf{v}_1(t)$ in (3) be chosen as

$$\mathbf{v}_1(t) = \mathbf{v}_{1c}(t) + \mathbf{B}_1^{-1}[\mathbf{K}_1\mathbf{y}_1(t) + \mathbf{y}_2(t)] \quad (4)$$

where $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1$, $\mathbf{y}_2 \in R^{n_2}$. \mathbf{K}_1 is a Hurwitz matrix, and \mathbf{v}_{1c} is calculated from $\dot{\mathbf{y}}_1(t) = 0$ of the form

$$\mathbf{v}_{1c}(t) = -\mathbf{B}_1^{-1}[\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{C}_1\mathbf{x}_1(t-\tau)] \quad (5)$$

The transformed first block of (3) in new coordinates \mathbf{y}_1 and \mathbf{y}_2 with input (4) and (5) has the desired form

$$\dot{\mathbf{y}}_1(t) = \mathbf{K}_1\mathbf{y}_1(t) + \mathbf{y}_2(t) \quad (6)$$

The algorithm (4)-(5) defines the transformation for $\mathbf{y}_2(t)$

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_2(t) &= (\mathbf{A}_1 - \mathbf{K}_1)\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{C}_1\mathbf{x}_1(t-\tau) + \mathbf{B}_1\mathbf{v}_1(t) \\ \mathbf{v}_1(t) &= \mathbf{x}_2(t) + \mathbf{P}_1\mathbf{x}_2(t-\tau)\end{aligned}\quad (7)$$

Step 2. Taking the derivative of (7), we have

$$\dot{\mathbf{y}}_2(t) = \sum_{j=1}^2 [\mathbf{A}_{2,j}\mathbf{x}_j(t) + \mathbf{C}_{2,j}^1\mathbf{x}_j(t-\tau) + \mathbf{C}_{2,j}^2\mathbf{x}_j(t-2\tau)] + \bar{\mathbf{B}}_2\mathbf{v}_2^1(t)$$

where $\bar{\mathbf{B}}_2 = \mathbf{B}_1\mathbf{B}_2$ and $\mathbf{v}_2^1(t) = \mathbf{v}_2(t) + \mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{P}_1\mathbf{B}_2\mathbf{v}_2(t-\tau)$.

As on the first step the fictitious control input $\mathbf{v}_2^1(t)$ is chosen similar to (4) and (5), namely

$$\mathbf{v}_2^1(t) = \mathbf{v}_{2c}^1(t) + \bar{\mathbf{B}}_2^{-1}[\mathbf{K}_2\mathbf{y}_2(t) + \mathbf{y}_3(t)] \quad (8)$$

where $\mathbf{y}_3 \in R^{n_3}$. \mathbf{K}_2 is a Hurwitz matrix, and $\mathbf{v}_{2c}^1(t)$ again is calculated from $\dot{\mathbf{y}}_2(t) = 0$ as

$$\mathbf{v}_{2c}^1(t) = -\bar{\mathbf{B}}_2^{-1} \sum_{j=1}^2 [\mathbf{A}_{2,j}\mathbf{x}_j(t) + \mathbf{C}_{2,j}^1\mathbf{x}_j(t-\tau) + \mathbf{C}_{2,j}^2\mathbf{x}_j(t-2\tau)]$$

Thus, equation for \mathbf{y}_2 with (8) takes the same form of (6):

$$\dot{\mathbf{y}}_2(t) = \mathbf{K}_2\mathbf{y}_2(t) + \mathbf{y}_3(t)$$

Then algorithm (8) gives the following transformation

$$\mathbf{y}_3 = \sum_{j=1}^2 [\mathbf{A}_{2,j}\mathbf{x}_j(t) + \mathbf{C}_{2,j}^1\mathbf{x}_j(t-\tau) + \mathbf{C}_{2,j}^2\mathbf{x}_j(t-2\tau)]$$

$$- \mathbf{K}_2\mathbf{y}_2(t) + \bar{\mathbf{B}}_2\mathbf{v}_2^1(t),$$

$$\mathbf{v}_2^1(t) = \mathbf{v}_2(t) + \mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{P}_1\mathbf{B}_2\mathbf{v}_2(t-\tau), \quad \mathbf{v}_2(t) = \mathbf{x}_3(t) + \mathbf{P}_2\mathbf{x}_3(t-\tau)$$

This procedure can be performed iteratively obtaining on the k^{th} step, $k = 3, \dots, r-1$ the recursive transformation

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_{k+1} &= \sum_{j=1}^k [\mathbf{A}_{k,j}\mathbf{x}_j(t) + \mathbf{C}_{k,j}^1\mathbf{x}_j(t-\tau) + \dots + \mathbf{C}_{k,j}^k\mathbf{x}_j(t-k\tau)] \\ &\quad - \mathbf{K}_k\mathbf{y}_k(t) + \bar{\mathbf{B}}_k\mathbf{v}_k^1(t),\end{aligned}$$

$$\mathbf{v}_k^1(t) = \mathbf{v}_k^2(t) + \bar{\mathbf{B}}_k^{-1} \dots \bar{\mathbf{B}}_2^{-1}\mathbf{P}_1\bar{\mathbf{B}}_2 \dots \bar{\mathbf{B}}_k\mathbf{v}_k^2(t-\tau)$$

$$\mathbf{v}_k^2(t) = \mathbf{v}_k^3(t) + \bar{\mathbf{B}}_{k-1}^{-1} \dots \bar{\mathbf{B}}_3^{-1}\mathbf{P}_2\bar{\mathbf{B}}_3 \dots \bar{\mathbf{B}}_{k-1}\mathbf{v}_k^3(t-\tau),$$

...

$$\mathbf{v}_k^{k-1}(t) = \mathbf{v}_k(t) + \bar{\mathbf{B}}_k^{-1}\mathbf{P}_{k-1}\bar{\mathbf{B}}_k\mathbf{v}_k(t-\tau),$$

$$\mathbf{v}_k(t) = \mathbf{x}_{k+1}(t) + \mathbf{P}_k\mathbf{x}_{k+1}(t-\tau).$$

where \mathbf{P}_k is a Hurwitz matrix, and $\bar{\mathbf{B}}_k = \mathbf{B}_1 \dots \mathbf{B}_k$.

On the last step, the system (2) can be presented in the new variables of the form

$$\dot{\mathbf{y}}_i(t) = \mathbf{K}_i\mathbf{y}_i(t) + \mathbf{y}_{i+1}(t), \quad i = 1, \dots, r-1 \quad (9)$$

$$\dot{\mathbf{y}}_r = \sum_{j=1}^r [\mathbf{A}_{r,j}\mathbf{x}_j(t) + \mathbf{C}_{r,j}^1\mathbf{x}_j(t-\tau) + \dots + \mathbf{C}_{r,j}^r\mathbf{x}_j(t-r\tau)] + \bar{\mathbf{B}}_r\mathbf{v}_r^1$$

where $\mathbf{v}_r^1(t) = \mathbf{v}_r^2(t) + \bar{\mathbf{B}}_r^{-1} \dots \bar{\mathbf{B}}_2^{-1}\mathbf{P}_1\bar{\mathbf{B}}_2 \dots \bar{\mathbf{B}}_r\mathbf{v}_r^2(t-\tau)$

$$\mathbf{v}_r(t) = \mathbf{u}(t) + \mathbf{P}_r\mathbf{u}(t-\tau).$$

A choice of the control $\mathbf{v}_r^1(t)$ similar to (4)-(5) form

$$\mathbf{v}_r^1(t) = \mathbf{v}_{rc}^1(t) + \bar{\mathbf{B}}_r^{-1}\mathbf{K}_r\mathbf{y}_r(t) \quad (10)$$

$$\mathbf{v}_{rc}^1 = -\bar{\mathbf{B}}_r^{-1} \sum_{j=1}^r [\mathbf{A}_{r,j}\mathbf{x}_j(t) + \mathbf{C}_{r,j}^1\mathbf{x}_j(t-\tau) + \dots + \mathbf{C}_{r,j}^r\mathbf{x}_j(t-r\tau)]$$

provides the closed-loop dynamics (9) and (10) as

$$\dot{\mathbf{y}}_i(t) = \mathbf{K}_i\mathbf{y}_i(t) + \mathbf{y}_{i+1}(t), \quad i = 1, \dots, r-1$$

$$\dot{\mathbf{y}}_r(t) = \mathbf{K}_r\mathbf{y}_r(t)$$

The stability conditions of the closed loop system are presented in the following theorem.

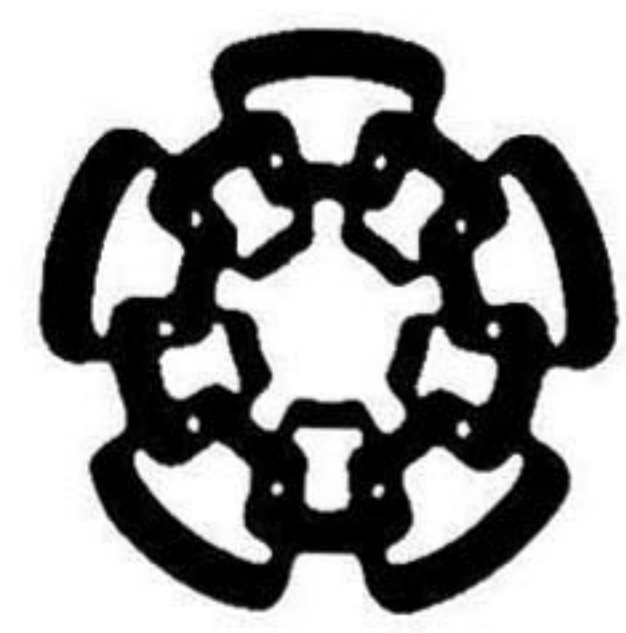
Theorem: *If all eigenvalues of matrices \mathbf{P}_i , $i = 1, \dots, r$ are located inside unit circle, then the system (2) with control strategy (10) is asymptotically stable.*

4 Conclusions

The block control method has been formulated for control of a class of linear time-delay systems, which can be transformed into BC-form. The proposed transformation and control design procedures have step-by-step character and simplify the solution of the problem. This method enables to solve one of the important classical problem: design of pole placement state feedback for linear systems with delayed state and control input.

References

- [1] M.Zavarei, M.Jamshidi, "Time-Delay Systems Analysis, Optimization and Applications," North-Holland, 1987.
- [2] H.Li, S.I.Niculescu, L.Dugard, J.M.Dion, "Robust H_∞ Control of Uncertain Linear Time Delay Systems: A Linear Matrix Inequality Approach", *Proc. Conference on Decision and Control*, 1996.
- [3] S.J.Dodds, A.G.Loukianov, "Design of Multivariable Time Varying Linear Systems with Discontinuous Controls", *Automation and Remote Control*, Vol. 58, No.5, (P.1), pp. 735-748, 1997.



**CENTRO DE INVESTIGACION Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL IPN
UNIDAD GUADALAJARA**

El Jurado designado por el Departamento de Ingeniería Eléctrica y Ciencias de la Computación del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, aprobó la tesis: "Control por bloques de sistemas lineales con retardo" el día 9 de Febrero de 2001.

Dr. Bernardino Castillo Toledo
Investigador Cinvestav 3A
CINVESTAV DEL IPN
Guadalajara.

Dra. Ofelia Begovich Mendoza
Investigador Cinvestav 3A
CINVESTAV DEL IPN
Guadalajara

Dr. Alexander Loukianov
Investigador Cinvestav 3A
CINVESTAV DEL IPN
Guadalajara

Dr. José Manuel Cañedo Castañeda
Investigador Cinvestav 2C
CINVESTAV DEL IPN
Guadalajara

Dr. José Javier Ruiz León
Investigador Cinvestav 2
CINVESTAV DEL IPN
Guadalajara.



CINVESTAV
BIBLIOTECA CENTRAL



SSIT000003899