



**Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del
Instituto Politécnico Nacional**

UNIDAD ZACATENCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**“Agujeros de gusano dilatónicos rotantes
transitables”**

Tesis que presenta

Leonel De La Cruz Bixano

para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias

en la Especialidad de

Física

Director de tesis: **Dr. Tonatiuh Matos Chassin**

Agujeros de gusano dilatónicos rotantes transitables

Autor:

Leonel de la Cruz Bixano

Asesor:

Tonatiuh Matos Chassin

Institución:



Año:
2024

Índice general

Índice general	I
Índice de figuras	III
Agradecimientos	IX
1 Introducción	1
2 Agujeros de gusano transitables	5
2.1. Condiciones de navegabilidad	6
2.2. Forma matemática de las condiciones de navegabilidad	7
3 Reformulación de Matos	17
3.1. Teoría de Kaluza-Klein	18
3.2. Lagrangiano global	19
3.3. Formalismo del <i>espacio de potenciales</i>	20
3.4. Funciones Métricas	27
4 Estudio de algunas soluciones conocidas y nuevas	31
4.1. Familias de soluciones	31
4.2. Soluciones conocidas	32
4.3. Soluciones nuevas	33
4.4. Combinaciones	36
5 Análisis y dictamen de agujeros de gusano	39
5.1. Comportamiento de los espacios	39
5.2. Geometría de los agujeros de gusano.	40
5.3. Fuerzas de marea	45
5.4. Condiciones de energía	56
6 Conclusiones	61
Appendices	63

Apéndice A: Transformaciones de coordenadas	65
Coordenadas	65
Cambio de coordenadas	67
Apéndice B: Ecuación de Laplace en espacios planos	69
Soluciones	70
Apéndice C: Funciones métricas	71
Ecuación diferencial para ω	71
Ecuación diferencial para A_φ	71
Ecuación diferencial para κ	72
Apéndice D: Sistema de referencia cómovil	73
Tensor de Einstein $G_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$	73
Tensor de Riemann $R_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\alpha}\hat{\beta}}$	74
Tensor de Ricci $R_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$	75
Apéndice E: Gráficas de fuerzas de marea	77
Solución 1 (λ_5)	77
Solución 2 (λ_{N1})	80
Solución 3 (λ_{N2})	83
Bibliografía	87

Índice de figuras

1.	Imagen generada por la inteligencia artificial de Microsoft, creada a partir de una descripción detallada de un <i>Agujero de gusano</i> con rotación, campo electromagnético y un campo escalar fantasma y utilizando el motor DALL-E 3 de generación de imágenes.	X
2.	Imagen generada por la inteligencia artificial de Microsoft, creada a partir de una descripción detallada de un <i>Agujero negro</i> con rotación, campo electromagnético y un campo escalar fantasma y utilizando el motor DALL-E 3 de generación de imágenes.	X
5.1.	a): Comparación de las curvas $\rho(z)$ para un <i>campo escalar fantasma</i> y un <i>campo escalar dilatónico</i> usando la solución relacionada con λ_5 . Los valores usados son: $\lambda_0 = \{1/10, 1\}$, $k_0 = \{-5/4, 3/4\}$ respectivamente, $y_0 = 0.9$, $f = 1$, $L = 10$. b): Geometría del agujero de gusano correspondiente a la solución λ_5 . Se usaron los valores $\lambda_0 = 1/10$, $f = 1$, $k_0 = -7/12$, $L = 10$ y distintos y_0 para mostrar el comportamiento de las curvas $\rho(z)$. También se insertaron 2 líneas punteadas de color negro en $z(0) = \pm L$. <i>Nota: Se usó $k(x, y) > 0$ para centrarnos en el estudio de los fenómenos que cumplen la condición C.</i>	43
5.2.	a): Geometría del <i>agujero de gusano fantasma</i> correspondiente a la combinación 1 ($\tau + \lambda = \lambda_5 + \lambda_6$). Se usaron los valores $\lambda_0 = L\tau_0$, $\tau_0 = 1/10$, $f = 1$, $k_0 = -7/12$, $L = 10$ y distintos y_0 para mostrar el comportamiento de las curvas $\rho(z)$. También se insertaron 2 líneas punteadas de color negro en $z(0) = \pm L$. b): Estructura del AG-F agregando la coordenada $\varphi \in [0, 2\pi)$ para obtener la malla en coordenadas cartesianas. c): Geometría del <i>agujero de gusano dilatónico</i> correspondiente a la combinación 1 ($\tau + \lambda = \lambda_5 + \lambda_6$). Se usaron los valores $\lambda_0 = 0.7L$, $\tau_0 = 3/10$, $f = 1$, $k_0 = 3/4$, $L = 10$ y distintos y_0 para mostrar el comportamiento de las curvas $\rho(z)$. También se insertaron 2 líneas punteadas de color negro en $z(0) = \pm L$. d): Estructura del AG-D agregando la coordenada $\varphi \in [0, 2\pi)$ para obtener la malla en coordenadas cartesianas.	44

- 5.3. **a):** Comparación de las curvas $\rho(z)$ para un *campo escalar fantasma* y un *campo escalar dilatónico* usando la solución relacionada con λ_{N1} . Los valores usados son: $\lambda_0 = 1/10$, $y_0 = 0.9$, $f = 1$, $k_0 = \{-5/4, 3/4\}$ respectivamente, $L = 10$. **b):** Geometría del agujero de gusano correspondiente a la solución λ_{N1} . Se usaron los valores $\lambda_0 = 1/10^3$, $f = 1$, $k_0 = -7/12$, $L = 10$ y distintos y_0 para mostrar el comportamiento de las curvas $\rho(z)$. También se insertaron 2 líneas punteadas de color negro en $z(0) = \pm L$ 46
- 5.4. **a):** Comparación de las curvas $\rho(z)$ para un *campo escalar fantasma* y un *campo escalar dilatónico* usando la solución relacionada con λ_{N2} . Los valores usados son: $y_0 = 0.9$, $f = 1$, $\lambda_0 = \{0.1/10^4, 7/10^4\}$, $k_0 = \{-5/4, 3/4\}$ respectivamente, $L = 10$. Se logra ver que es muy volátil la solución con base a la constante λ_0 . **b):** Geometría del AG para la solución λ_{N2} usando los valores de $\lambda_0 = 1/10^4$, $f = 1$, $k_0 = -7/12$, $L = 10$. Se puede observar que atravesar el agujero de gusano es válido para $\theta \approx \{0, \pi/2, \pi, \pi\}$ 46
- 5.5. **a):** Geometría del *agujero de gusano fantasma* correspondiente a la combinación ($\lambda + \tau = \lambda_{N1} + \lambda_{N2}$), nuevamente, mostrando que sólo para los valores $y_0 = \{0.25, 0.75\} \Rightarrow \theta \approx \{0, \pi/2\}$ se 'abre' una ventana para cruzar el *pseudo AG-F*. Se usaron los valores $\lambda_0 = 1/10^3$, $\tau_0 = 7/10^4$, $f = 1$, $k_0 = -7/12$, $L = 10$. **b):** Al disminuir la influencia de λ_{N2} , se estabiliza el AG-F y se obtienen las curvas $\rho(z)$ bien comportadas como en las soluciones anteriores. Los valores $\lambda_0 = 1/10^3$, $\tau_0 = 0.6/10^4$, $f = 1$, $k_0 = -7/12$, $L = 10$. **c):** Geometría del *agujero de gusano dilatónico* correspondiente a la combinación 2 ($\lambda + \tau = \lambda_{N1} + \lambda_{N2}$), nuevamente, mostrando que sólo para los valores $y_0 = \{0.25, 0.75\} \Rightarrow \theta \approx \{0, \pi/2\}$ se 'abre' una ventana para cruzar el *pseudo AG-D*. Se usaron los valores $\lambda_0 = 1/10^3$, $\tau_0 = 7/10^4$, $f = 1$, $k_0 = 1/12$, $L = 10$. **d):** Al disminuir la influencia de λ_{N2} , se estabiliza el AG-F y se obtienen las curvas $\rho(z)$ bien comportadas como en las soluciones anteriores. Los valores $\lambda_0 = 1/10^3$, $\tau_0 = 0.6/10^4$, $f = 1$, $k_0 = 1/12$, $L = 10$. 47
- 5.6. Gráficas de los elementos $R_{\hat{\mu}\hat{t}\hat{\mu}\hat{t}}$, $\hat{\mu} = \hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ asociados a las fuerzas de marea, correspondientes a la **Combinación 1**: $\lambda_5 + \lambda_6 = \tau + \lambda$. Se usaron los valores $\lambda_0 = 1$, $\tau_0 = 1/10$, $k_0 = -7/12$, $l_1 = 1$ y $L = 10$ y las coordenadas Θ para una mejor visualización de física. Las gráficas del lado izquierdo corresponden a la malla generada por $R_{\hat{\mu}\hat{t}\hat{\mu}\hat{t}}(r, \theta)$ y el lado derecho a las curvas de nivel. Ambos lados con colores relacionados a **valores altos (color rojo)** y **valores bajos (color azul)**. 50
- 5.7. Gráficas de los elementos $\{R_{\hat{\mu}\hat{r}\hat{\mu}\hat{r}}\}$, $\hat{\mu} = \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ asociados a las fuerzas de marea *para velocidades relativistas*, correspondientes a la **Combinación 1**: $\lambda_5 + \lambda_6 = \tau + \lambda$. Se usaron los valores $\lambda_0 = 1$, $\tau_0 = 1/10$, $k_0 = -7/12$, $l_1 = 1$ y $L = 10$ y las coordenadas Θ . En figura **a)**, se comparan las consecuencias de elegir un *campo escalar fantasma* ó *dilatónico*, usando $k_0 = \{-7/12, 1/12\}$ consecutivamente y correspondiente al color *amarillo y rojo*. 51

- 5.8. Gráficas de los elementos $R_{\hat{\mu}\hat{t}\hat{\mu}\hat{t}}$, $\hat{\mu} = \hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ asociados a las fuerzas de marea, correspondientes a la **Combinación 2**: $\lambda_{N1} + \lambda_{N2} = \lambda + \tau$. Se usaron los valores $\lambda_0 = 1/10^3$, $\tau_0 = 0.6/10^4$, $k_0 = -7/12$, $l_1 = 1$ y $L = 10$ y las coordenadas Θ para una mejor visualización de física. Las gráficas del lado izquierdo corresponden a la malla generada por $R_{\hat{\mu}\hat{t}\hat{\mu}\hat{t}}(r, \theta)$ y el lado derecho a las curvas de nivel. Ambos lados con colores relacionados a **valores altos (color rojo)** y **valores bajos (color azul)**. 54
- 5.9. Gráficas de los elementos $\{R_{\hat{\mu}\hat{r}\hat{\mu}\hat{r}}\}$, $\hat{\mu} = \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ asociados a las fuerzas de marea *para velocidades relativistas*, correspondientes a la **Combinación 1**: $\lambda_{N1} + \lambda_{N2} = \lambda + \tau$. Se usaron los valores $\lambda_0 = 1/10^3$, $\tau_0 = 0.6/10^4$, $k_0 = -7/12$, $l_1 = 1$ y $L = 10$ y las coordenadas Θ . En figura **a)**, se comparan las consecuencias de elegir un *campo escalar fantasma ó dilatónico*, usando $k_0 = \{-7/12, 1/12\}$ consecutivamente y correspondiente al color *amarillo y rojo*. 55
1. Gráficas del elemento $R_{\hat{r}\hat{t}\hat{r}\hat{t}}$ asociado a las fuerzas de marea radial, correspondientes a la **Solución 1**: λ_5 , haciendo $\lambda_0 = 0$ en la ecuación (5.5). Se usaron los valores $\tau_0 = 1/10$, $k_0 = -7/12$, $l_1 = 1$ y $L = 10$ y las coordenadas Θ para una mejor visualización de física. Las gráficas del lado izquierdo corresponden a la malla generada por $R_{\hat{\mu}\hat{t}\hat{\mu}\hat{t}}(r, \theta)$ y el lado derecho a las curvas de nivel. Ambos lados con colores relacionados a **valores altos (color rojo)** y **valores bajos (color azul)**. 77
2. Gráficas de los elementos $R_{\hat{\mu}\hat{t}\hat{\mu}\hat{t}}$, $\hat{\mu} = \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ asociados a las fuerzas de marea, correspondientes a la **Solución 1**: λ_5 , haciendo $\lambda_0 = 0$ en la ecuación (5.5). Se usaron los valores $\tau_0 = 1/10$, $k_0 = -7/12$, $l_1 = 1$ y $L = 10$ y las coordenadas Θ para una mejor visualización de física. Las gráficas del lado izquierdo corresponden a la malla generada por $R_{\hat{\mu}\hat{t}\hat{\mu}\hat{t}}(r, \theta)$ y el lado derecho a las curvas de nivel. Ambos lados con colores relacionados a **valores altos (color rojo)** y **valores bajos (color azul)**. 78
3. Gráficas de los elementos $\{R_{\hat{\mu}\hat{r}\hat{\mu}\hat{r}}\}$, $\hat{\mu} = \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ asociados a las fuerzas de marea *para velocidades relativistas*, correspondientes a la **Solución 1**: λ_5 . Se usaron los valores $\tau_0 = 1/10$, $k_0 = -7/12$, $l_1 = 1$ y $L = 10$ y las coordenadas Θ . En figura **a)**, se comparan las consecuencias de elegir un *campo escalar fantasma ó dilatónico*, usando $k_0 = \{-7/12, 1/12\}$ consecutivamente y correspondiente al color *amarillo y rojo*. 79

4. Gráficas de $R_{\hat{r}\hat{t}\hat{r}\hat{t}}$ y $R_{\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}}$ asociado a la fuerzas de marea radial y angular θ , correspondientes a la **Solución 2**: λ_{N1} , haciendo $\tau_0 = 0$ en la ecuación (5.6). Se usaron los valores $\lambda_0 = 1/10^3$, $k_0 = -7/12$, $l_1 = 1$ y $L = 10$ y las coordenadas Θ para una mejor visualización de física. Las gráficas del lado izquierdo corresponden a la malla generada por $R_{\hat{\mu}\hat{t}\hat{\mu}\hat{t}}(r, \theta)$ y el lado derecho a las curvas de nivel. Ambos lados con colores relacionados a **valores altos (color rojo)** y **valores bajos (color azul)**. 80
5. Gráficas de los elementos $R_{\hat{\varphi}\hat{t}\hat{\varphi}\hat{t}}$ y $R_{\hat{\mu}\hat{r}\hat{\mu}\hat{r}}$, $\hat{\mu} = \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ asociados a las fuerzas de marea, correspondientes a la **Solución 2**: λ_{N1} , haciendo $\tau_0 = 0$ en la ecuación (5.6). Se usaron los valores $\lambda_0 = 1/10^3$, $k_0 = -7/12$, $l_1 = 1$ y $L = 10$ y las coordenadas Θ para una mejor visualización de física. Las gráficas del lado izquierdo corresponden a la malla generada por $R_{\hat{\mu}\hat{t}\hat{\mu}\hat{t}}(r, \theta)$ y el lado derecho a las curvas de nivel. Ambos lados con colores relacionados a **valores altos (color rojo)** y **valores bajos (color azul)**. 81
6. a) Se comparan las consecuencias de elegir un *campo escalar fantasma* ó *dilatónico*, usando $k_0 = \{-7/12, 1/12\}$ consecutivamente y correspondiente al color *amarillo y rojo*. En la mayoría de los casos, no hay diferencia entre uno y otro. b) Graficación de $R_{\hat{\varphi}\hat{r}\hat{\varphi}\hat{r}}$ usando un *campo escalar dilatónico*, a diferencia de la gráfica (5e), en la cual se usó un *campo escalar fantasma*. **Para ambas gráficas se usaron los valores $\lambda_0 = 1/10^3$, $k_0 = -7/12$, $l_1 = 1$ y $L = 10$.** 82
7. Gráficas de $R_{\hat{r}\hat{t}\hat{r}\hat{t}}$ y $R_{\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}}$ asociado a la fuerzas de marea radial y angular θ , correspondientes a la **Solución 3**: λ_{N2} , haciendo $\lambda_0 = 0$ en la ecuación (5.6). Se usaron los valores $\tau_0 = 0.6/10^4$, $k_0 = -7/12$, $l_1 = 1$ y $L = 10$ y las coordenadas Θ para una mejor visualización de física. Las gráficas del lado izquierdo corresponden a la malla generada por $R_{\hat{\mu}\hat{t}\hat{\mu}\hat{t}}(r, \theta)$ y el lado derecho a las curvas de nivel. Ambos lados con colores relacionados a **valores altos (color rojo)** y **valores bajos (color azul)**. 83
8. Gráficas de los elementos $R_{\hat{\varphi}\hat{t}\hat{\varphi}\hat{t}}$ y $R_{\hat{\mu}\hat{r}\hat{\mu}\hat{r}}$, $\hat{\mu} = \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ asociados a las fuerzas de marea, correspondientes a la **Solución 3**: λ_{N2} , haciendo $\lambda_0 = 0$ en la ecuación (5.6). Se usaron los valores $\tau_0 = 0.6/10^4$, $k_0 = -7/12$, $l_1 = 1$ y $L = 10$ y las coordenadas Θ para una mejor visualización de física. Las gráficas del lado izquierdo corresponden a la malla generada por $R_{\hat{\mu}\hat{t}\hat{\mu}\hat{t}}(r, \theta)$ y el lado derecho a las curvas de nivel. Ambos lados con colores relacionados a **valores altos (color rojo)** y **valores bajos (color azul)**. 84

9. **a)** Se comparan las consecuencias de elegir un *campo escalar fantasma* ó *dilatónico*, usando $k_0 = \{-7/12, 1/12\}$ consecutivamente y correspondiente al color *amarillo y rojo*. En la mayoría de los casos, no hay diferencia entre uno y otro. **b)** Graficación de $R_{\hat{\phi} \hat{\tau} \hat{\tau}}$ usando un *campo escalar dilatónico*, a diferencia de la gráfica (8e), en la cual se usó un *campo escalar fantasma*. **Para ambas gráficas se usaron los valores** $\tau_0 = 0.6/10^4$, $k_0 = -7/12$, $l_1 = 1$ **y** $L = 10$ 85

Agradecimientos

Agradezco sinceramente a mis padres, *Adelina de la Cruz Bixano* e *Ismael Sanchez Trejo* quienes han sido pilares fundamentales en mi vida. Gracias a su inquebrantable apoyo, he cultivado una mentalidad de superación y perseverancia en la búsqueda de mi sueños. Su ejemplo ha sido guía en el entendimiento del valor de la existencia, y gracias a su dedicación he recibido la formación sólida que me ha permitido alcanzar éste gran logro. El esfuerzo de estos seres tan maravillosos ha sido tanto emocional como físico y estos hechos son el motor de mi vida. No podría haber llegado hasta aquí sin su incondicional respaldo. En especial, anhelo que mi madre pueda compartir la alegría de este importante hito en mi vida. Su ausencia física me entristece, pero deseo fervientemente que, de alguna manera, si ella se encuentra en otro universo, la información más actual de mis logros puedan viajar por un agujero de gusano hasta el universo al cual partió.

Asimismo, deseo expresar un profundo agradecimiento a mi esposa *Valeria Michell Romero Avila* quien me ha enseñado algo muy importante, el significado del amor y apoyo incondicional. Su aliento constante y presencia han sido mi fortaleza durante este trayecto académico. No sólo yo he logrado completar este grado académico, ella lo ha hecho conmigo, hemos caminado juntos grandes tramos para obtener esta maestría.

Por último, no puedo pasar por alto al *Doctor Tonatiuh Matos Chassin*, quien ha sido mas que un mentor para mí. Su sabiduría y orientación han sido cruciales para expandir mi comprensión en fenómenos físicos y adquirir nuevos conocimientos. Su ejemplo es inspirador y me impulsa para conseguir el gran renombre que tiene, no obstante también cabe recalcar la gran persona moral que es y aspiro algún día alcanzar su grandeza.

Además, mi más sincero agradecimiento al **CONAHCYT**, el apoyo económico hizo posible que lograr estudiar en una institución de renombre como el **CINVESTAV**. Su respaldo a jóvenes talentos es invaluable para el desarrollo del país y espero poder retribuir este gesto contribuyendo al desarrollo académico de **México** en los años venideros.



Figura 1. Imagen generada por la inteligencia artificial de Microsoft, creada a partir de una descripción detallada de un *Agujero de gusano* con rotación, campo electromagnético y un campo escalar fantasma y utilizando el motor DALL-E 3 de generación de imágenes.

Imagen generada por Microsoft Copilot, 2024.



Figura 2. Imagen generada por la inteligencia artificial de Microsoft, creada a partir de una descripción detallada de un *Agujero negro* con rotación, campo electromagnético y un campo escalar fantasma y utilizando el motor DALL-E 3 de generación de imágenes.

Imagen generada por Microsoft Copilot, 2024.

Capítulo 1

Introducción

Durante muchos años, se han descubierto intrigantes particularidades en la *teoría de la relatividad*. Albert Einstein propuso sus ecuaciones de campo en 1915 en un artículo titulado “*Die Feldgleichungen der Gravitation*” (“*Las ecuaciones de campo de la gravitación*”) [1], las cuales establecen una relación entre la geometría del *espacio-tiempo* en el lado izquierdo, y la presencia de energía del lado derecho.

*Karl Schwarzschild*¹ logró obtener la primera solución exacta. Alcanzó éste hito considerando un espacio tiempo vacío, con excepción de una masa de simétricamente esférica y sin rotación. Si bien, esta solución fascinó a muchos, otros analizaron más profundamente este objeto cosmológico. La famosa métrica de Schwarzschild es de la siguiente forma:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{R_s}{r} \right) dt^2 + \frac{1}{(1 - R_s/r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

donde $d\Omega$ es el diferencial de ángulo sólido, $R_s = 2M$ es el radio de *Schwarzschild*.

Años mas tarde, se observó que esta métrica presentaba dos puntos problemáticos llamados *singularidades*. Estaban presentes en las componentes g_{tt} ($r = 0$) y g_{rr} ($r = R_s$). La primera singularidad reside en el origen del parche de coordenadas esféricas, mientras que la segunda se encuentra localizada en el radio de Schwarzschild², el cual indica el radio mínimo que una estrella puede ser comprimida. Esta *hipersuperficie*, se llama *horizonte de eventos*. Cuando una estrella es comprimida más allá de R_s , habrá una *implosión* y generará un *Agujero Negro (AN)*.

El horizonte de eventos constituye una región sumamente peculiar, es un límite en el cual todo lo que ingresa nunca puede salir debido a la curvatura del espacio-tiempo. En el caso hipotético que lograra salir, sería necesario que aquel objeto se moviera a una velocidad más grande que la de la luz, *algo imposible*. Pensemos en que somos capitanes de una nave espacial dedicada a la investigación de objetos cosmológicos extraños y para analizar un AN enviamos a nuestro astronauta hacia él. Si nosotros fuéramos

¹Lográndolo en el frente oriental de la primera guerra mundial.

²Esta singularidad no es un punto como tal, sino una esfera con radio $r = R_s$.

el astronauta, lograríamos viajar sin ningún inconveniente a través del horizonte de eventos y llegar al origen, pero si fuéramos el capitán, veríamos al astronauta viajar hacia el horizonte de eventos y en cuanto empezara a llegar a dicho límite, nuestro astronauta se estancaría indefinidamente en una posición y se tornaría de color rojo hasta desaparecer. En otras palabras, el horizonte de eventos “atrapa” la luz en ese límite y todo lo que traspase aquella hipersuperficie, nunca puede salir. Es por eso que se le denominó *agujero negro*.

Estos puntos singulares representaron durante años un problema y se pensaba que no se podría extender el análisis hacia adentro de los agujeros negros, tiempo después se dieron cuenta que sólo se requería usar otras coordenadas para poder analizar qué hay más allá del horizonte de eventos. Las coordenadas de *Kruskal-Székere*s ayudaron a ver lo que sucedía y se dieron cuenta que el horizonte de eventos son rectas de 45° que separa el interior y exterior del AG. Extendiendo el diagrama de *Kruskal-Székere*s, también descubrieron la existencia de los *Agujeros Blancos (AB)*³ e incluso *Agujeros de Gusano (AG)* que conectaban dos universos. Después de estos análisis, *Penrose R.* generó los diagramas que llevan su nombre y confirmó *teóricamente* la existencia de estos *puentes de Einstein-Rose*.

El problema de este tipo de AG es que la garganta es muy inestable y se mantiene “abierto” en un momento tan pequeño que sería imposible cruzarlo.

En 1963 *Keer R.* publicó un artículo nombrado como *Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics* (“*Campo gravitacional de una masa giratoria como ejemplo de métricas algebraicamente especiales*”) [2] donde expone la solución para un agujero negro *con rotación*. Esta consideración cambia las variables del juego ya que se pierde la simetría esférica y sólo contiene simetría axial en el eje de rotación, de igual forma ya no tiene sólo una capa, sino que varias y la singularidad se convierte en una *singularidad de anillo*. Esta nueva solución genera nuevos AG, pero tiene un problema ya que se violan las condiciones de energía y el viaje dentro del agujero de gusano se puede proyectar infinitamente a infinitos universos.

En los anteriores párrafos, se han expuesto las características geométricas de diversas soluciones, enfocándonos exclusivamente en el lado izquierdo de las ecuaciones de Einstein. Sin embargo, surge la interrogante *¿Cuáles soluciones son físicamente posibles?* Para abordar esta cuestión, los físicos han establecido las *condiciones de energía* que generarán los dictámenes de qué tipo de materia es físicamente posible. Por lo tanto, cualquier solución propuesta debe de estar en concordancia con dichas condiciones para que sea admisiblemente posible.

En este contexto *Michael S. Morris y Kip S. Thorne* publicaron un artículo llamado “*Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity*” [3] en donde exponen las condiciones⁴ para que un agujero de gusano sea físicamente aceptable. En dicho escrito llegan a la conclusión que para que su AG propuesto sea estable es necesario tener una densidad de energía negativa y así poder

³Objetos contrarios a los agujeros negros, nada puede entrar y todo sale de él.

⁴Sugerencias de los autores, aunque no son necesariamente inamovibles ya que no constituyen límites definidos.

mantear la garganta del agujero de gusano abierta. De igual forma mencionan que dicha energía no es físicamente aceptable.

Uno de los primeros fenómenos que rompieron los estereotipos del tipo de materia que es físicamente posible es *la expansión acelerada del universo*. Actualmente se ha propuesto que esta expansión es impulsada por *energía oscura* que al parecer, contrarresta la fuerza gravitacional a escalas cósmicas. Este hallazgo fue hecho en la década de 1990 y se obtuvo observando supernovas.

Otro hecho trascendental es la observación de la dinámica de las galaxias y cúmulos galácticos, ya que nos ha revelado que la cantidad de materia visible y la cantidad de materia necesaria para explicar las velocidades de dichos objetos no tienen concordancia. Para contrarrestar esto, se ha postulado la existencia de *materia oscura*, la cual no interacciona con la materia visible ni con los campos electromagnéticos, pero si lo hace de manera gravitacional a tal punto de influenciar la estructura cosmológica. Sin embargo, las propiedades de este tipo de *materia exótica* aún no es conocida.

En estudios más actuales se ha teorizado que pueda existir materia exótica que viole las condiciones de energía, en específico, se ha hecho en gravedad cuántica y teoría de cuerdas.

A pesar de los desafíos inherentes, persiste el esfuerzo por encontrar soluciones que puedan representar agujeros de gusano, mientras se evalúa su posibilidad con los principios fundamentales de la física. En este contexto, el *Dr. Matos y su grupo de investigación* han obtenido ciertas soluciones que satisfacen las condiciones de energía (CE), al considerar un campo escalar dilatónico en el universo. Este campo se puede asociar a una forma de materia aún desconocida, sin necesidad de recurrir a formas más exóticas de materia.

Este logro se ha alcanzado mediante una reformulación de las ecuaciones de Einstein generada por Matos, mediante la aplicación de cambios de variables y propuestas específicas. Esta reformulación simplifica las ecuaciones de campo a un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden en un espacio de potenciales de dos dimensiones (λ, τ) . Esta reformulación, a su vez, engloba a teorías como la de *Kaluza-Klein*, *teoría de cuerdas en bajas energías* y *la teoría de Einstein-Maxwell*, entre otras. Este enfoque teórico ha permitido obtener soluciones exactas sin la necesidad de recurrir a cálculos numéricos. La importancia de estas nuevas soluciones es la formación de agujeros de gusano independientemente de que se cumplan o no las CE.

Una ventaja significativa de esta reformulación es la capacidad para “obtener” objetos con características como campos electromagnéticos, rotación y campo gravitacional, lo que incluso abarca a los agujeros negros de Kerr-Newman.

Durante la tesis presente se estudiarán nuevas soluciones usando la *reformulación de Matos* para obtener agujeros de gusano que cumplan con las condiciones de “navegabilidad”, propuestas por Morris y Thorne, sin especificar alguna teoría. Al examinar las soluciones se determinarán los requisitos para el cumplimiento de las CE con base a la elección de alguna teoría y el tipo de campo escalar que se considerará.

En el capítulo 2 se analizarán las propuestas de Morris y Thorne usando una métrica mas general posible considerando la existencia de 3 vectores de *Killing*. Después, en el

capítulo 3 se expondrá la reformulación de Matos y en el capítulo 4 se darán a conocer las familias de soluciones exactas que obtuvo Matos y su grupo, para que, con ayuda de la segunda clase de soluciones se obtengan agujeros de gusano nuevos que se descubrieron en la presente investigación.

En el transcurso del capítulo 5 analizarán los 5 nuevos agujeros de gusano encontrados, tres de ellos sin singularidades y dos con singularidades de anillo. Toda esta familia de soluciones tienen una rotación presente, campo gravitacional constante, campo escalar y campo electromagnético, el cual tiene la característica de que no es posible diferenciar si el campo magnético es generado porque está eléctricamente cargado y rota o el caso contrario, magnéticamente cargado y que genera campo eléctrico gracias a la rotación. En el capítulo 6 se mostrarán las conclusiones del trabajo.

Para terminar, en los apéndices se dan muestras de los cálculos extras que se usaron para el escrito y las gráficas de las fuerzas de marea. Esto para evitar la saturación del penúltimo capítulo.

Capítulo 2

Agujeros de gusano transitables

En los albores del estudio de las soluciones exactas a las ecuaciones de campo de Einstein, los físicos han encontrado algunas estructuras astronómicas muy interesantes. El primer objeto “extraño” que encontraron fue justo después del descubrimiento de la *métrica de Schwarzschild* en 1916. Al examinar la dicha métrica se intuye la existencia del *horizonte de eventos*. Al “expandir” el análisis a la región interna de la estructura¹ abre el camino al mejor entendimiento del cuerpo esférico súper denso (más tarde conocido como *agujero negro*), con una *singularidad*² en $r \rightarrow 0 \Rightarrow g_{tt} \rightarrow \infty$, un *horizonte de eventos* en $r \rightarrow 2M \Rightarrow g_{rr} \rightarrow \infty$ y una región “imposible de escapar” $r < 2M$.

Mas tarde, en ese mismo año, un físico austriaco de nombre *Ludwig Flamm* publicó un artículo [4] bautizado como *Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen für kugelförmige Massen (Soluciones de las ecuaciones gravitacionales de Einstein para masas esféricas)* en la revista *Physikalische Zeitschrift*. En aquel escrito, el autor intentó explicar las conclusiones de Einstein y Schwarzschild de las geodésicas nulas, al realizar su análisis topológico, se percató de la existencia de “puentes” entre 2 espacios, sin embargo no exploró más en ello.

El 1 de Julio de 1935, *Einstein y Rosen*, publicaron su artículo titulado *The Particle Problem in the General Theory of Relativity* [5], el cual produjo un cambio significativo en la comprensión y estudio de los objetos que mas tarde serían llamados **puentes de Einstein-Rosen ó agujeros de gusano**. En dicho escrito, los autores indagan la posibilidad de una teoría atomística de materia y electricidad en la cual excluyen las singularidades con un cambio de variable (puramente geométrico), siempre teniendo en cuenta el *principio de invarianza*³.

La razón de la trascendencia del texto, fue debido a su cambio de variable $u^2 = r -$

¹Se detallará un poco más en el siguiente capítulo.

²Sin profundizar demasiado en el tema, existen muchas definiciones de singularidad, pero una de las más “completas”, a grandes rasgos, es *La existencia de geodésicas incompletas*. Durante el trabajo actual, nos centraremos un poco más en las singularidades que provienen de la métrica, es decir, el punto en el cuál algún $g_{\mu\nu}$ se indetermina.

³El principio de invarianza o principio de relatividad plantea que la “forma” de las ecuaciones que describen la física de dicha región se mantienen invariantes ante el cambio de sistema de coordenadas.

2m. Dicha transformación generó la “conexión” de 2 “hojas”, eso produjo un gran debate y férreas críticas. Uno de éstos retractores fue *Hermann Bondi* junto con *Thomas Gold* y *Fred Hoyle*, quienes publicaron en *Nature* (1948) una crítica titulada *The Steady-State Theory of the Expanding Universe* [6]. En forma de sátira, acuñaron el término **worm-hole**, para aludir a los cambios de variable que tenían como objetivo evitar las singularidades. No obstante, la palabra “*wormhole*” se convirtió en parte del léxico científico actual.

2.1 Condiciones de navegabilidad

Al explorar a los agujeros de gusano, nos parecen entes sumamente extraños. Muchas veces se han catalogado como temas intrigantes pero esotéricos, sin interpretación física o posible existencia. Esto ocurrió de igual manera con los agujeros negros y tuvieron que pasar al menos 100 años para “observar” uno. *La percepción humana no siempre concuerda con el comportamiento de nuestro universo; las matemáticas, la física y la experimentación se erigen como los verdaderos oráculos que guían nuestro entendimiento.* Por consiguiente, hay que ir descartando todas y cada una de las ideas con bases científicas existentes.

Hay que recordar que siempre la elegancia teórica se enfrenta a la realidad física. Muchas de las soluciones de AG (agujeros de gusano) propuestas son maravillosas en su concepción pero lamentablemente se revelan como inestables, destructivas o simplemente imposibles desde un punto de vista físico. Aquí es donde surge la necesidad imperante de condiciones físicamente posibles para los humanos en relación con los AG. Por lo tanto, debemos discernir entre aquellas soluciones que son viables y aquellas que no lo son.

Un artículo pionero en distinguir entre soluciones de AG navegables y las que no, fue hecho por *Michael S. Morris; Kip S. Thorne* [3]. En el mencionado escrito se dan a conocer las siguientes condiciones *y completadas con los hallazgos más recientes en la materia.*

- A **La métrica tiene que ser esféricamente simétrica y estacionaria, es decir, independiente de las variables t, ϕ , ésto para la simplificación de los cálculos.**
- B **La métrica tiene que ser una solución de las ecuaciones de Einstein para todo punto del espacio-tiempo.**
- C **Debe existir una *garganta* $L > 0$ tal que conecte dos espacio tiempos asintóticamente planos.⁴**

⁴Pueden ser o no asintóticamente planos, el motivo para imponer ésto es debido al universo en el que vivimos, un espacio tiempo locamente tipo *Minkowski*.

D No debe de existir un horizonte de eventos, ya que evita que se pueda viajar de ida y vuelta a través del agujero de gusano.

Actualmente, T. Matos, J.C. De Águila ha mostrado que algunos AG rotantes y con campo electromagnético existente, tienen horizonte de eventos pero las geodésicas nunca lo tocan. Es decir, la no existencia de horizonte de eventos puede violarse. [7]

E Las fuerzas de marea dentro del AG tienen que ser tan pequeñas de tal manera que no “aniquilen” al observador.

F El observador tiene que “atravesar” el AG en un tiempo propio finito y suficientemente razonable, al igual que el observador fuera del AG.

G La materia y los campos que generan la curvatura del agujero de gusano deben de tener un tensor de energía y momento razonable.

H La solución debe de ser estable ante perturbaciones.

En [8], Matos y Núñez conjeturaron que una condición suficiente para la estabilidad del AG es la existencia de una rotación $\omega \neq 0$.

J Debe de ser posible “crear” el agujero de gusano. La masa y tiempo necesarios para su construcción debe de ser menor a la masa y edad del Universo respectivamente.

Estos personajes colocaron la base para el estudio de los AG transitables físicamente realistas.

2.2 Forma matemática de las condiciones de navegabilidad

En la tesis doctoral de *Michel Galaxia Miranda Sánchez* [9] se analiza el artículo [3] y el libro [10], donde ilustran matemáticamente las condiciones para que un AG sea transitable.⁵

Morris-Thorne usaron la siguiente métrica como ejemplo

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - b/r} + r^2 [d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\varphi^2]. \quad (2.1)$$

En las próximas *subsecciones* se expondrán las condiciones matemáticas pertinentes⁶, utilizando (2.1). Además, se dará a conocer la métrica empleada del siguiente escrito y el análisis correspondiente.

⁵Únicamente aquellas condiciones que tengan una interpretación matemática ausente en su enunciado.

⁶No se darán a conocer todas las representaciones matemáticas ya que sólo se estudiarán las más importantes. La exposición de todas las condiciones se encuentran en [3] y [10].

Condición A

Es crucial tener presente un aspecto muy relevante: *La independencia de la métrica respecto a ciertas variables implica la existencia de isometrías, que a su vez refleja la presencia de simetrías y por el teorema de Noether sabemos que habrá cantidades conservadas.* Esto puede verse de manera matemática con ayuda de los *vectores de Killing*. Los vectores de Killing nos dicen que *existen direcciones privilegiadas en las cuales, al realizar una traslación en la métrica, esta permanece inalterada.*⁷

Tomando en cuenta la condición **A**, se puede afirmar que en nuestro espacio es necesario la existencia de 2 vectores de Killing; uno tipo temporal $\hat{K}_t = \partial_t$ y otro tipo angular $\hat{K}_\varphi = \partial_\varphi$.⁸

Considerando las isometrías previamente mencionadas (simetría axial y un espacio tiempo estacionario) y una rotación presente con base a la condición **H**, es posible emplear una métrica acorde con tales propiedades. Dicha métrica se expresa a través del siguiente elemento de línea, utilizando *coordenadas cilíndricas*⁹ ($Z = \{\rho, z\}$)¹⁰

$$ds^2 = -f(dt - \omega d\varphi)^2 + f^{-1}(e^{2k}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2), \quad (2.2)$$

donde $t \in (-\infty, \infty)$, $\rho \in [0, \infty)$, $z \in (-\infty, \infty)$ y $\phi \in [0, 2\pi)$.

Por otro lado, este elemento de línea puede expresarse en términos de las coordenadas de *Boyer-Linquist* ($\Theta = \{r, \theta\}$).

$$ds^2 = -f(dt - \omega d\varphi)^2 + f^{-1}(K dr^2 + \Delta_r(K d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)), \quad (2.3)$$

donde¹¹ $t \in (-\infty, \infty)$, $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi)$ y

$$K := \frac{\Delta_\theta}{\Delta_r} e^{2k}, \quad (2.4)$$

ó en las coordenadas *esferoidales* ($X = \{x, y\}$)

$$ds^2 = -f(dt - \omega d\varphi)^2 + L^2 f^{-1} \left((x^2 + 1)(1 - y^2) d\varphi^2 + (x^2 + y^2) e^{2k} \left\{ \frac{dx^2}{x^2 + 1} + \frac{dy^2}{1 - y^2} \right\} \right), \quad (2.5)$$

con $t \in (-\infty, \infty)$, $x \in [0, \infty)$, $y \in [1, -1]$ y $\phi \in [0, 2\pi)$. **Se puede extender $x \in (-\infty, \infty)$ haciendo notar que para valores $x < 0$ es un universo y $x > 0$ es otro. En este trabajo usaremos esta formalidad.**

⁷Para mayor detalle, consultar [11], sección 3.8 *Symmetries and Killing vectors*.

⁸Esta condición no es mencionada en [9], sino que en [12].

⁹Esto es válido para un espacio \mathbb{V}_4 , al considerar también la *condición cilíndrica* que se verá en la sección (S.3.2), la quita coordenada en la teoría de *Kaluza-Klein* no aparecerá y eso genera que podamos trabajar con dicho elemento de línea.

¹⁰Se está utilizando (Z, θ, X, Υ) para referirse a las coordenadas *Cilíndricas*, *B-L*, *Esferoidales* y el cambio de variable compleja, sucesivamente. Ver en el **Apéndice A**.

¹¹Las variables $\{\Delta_\theta, \Delta_r\}$ están dadas por la ecuación (5) y (6).

Todos éstos elementos de línea contienen a $\{f, \omega, k\}$, las cuales se denominan **funciones métricas** y crean la $g_{\mu\nu}$ más general posible en nuestro espacio y respetando lo mencionado. Estas funciones dependen de las coordenadas, es decir $\{f, \omega, k\}(\rho, z)$. Los cambios de coordenadas pueden verse en **Apéndice A**, ecuación (7).

La métrica derivada del elemento de línea (2.5) es

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -f & 0 & 0 & \omega f \\ 0 & \frac{L^2}{f} \frac{x^2+y^2}{x^2+1} e^{2k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L^2}{f} \frac{x^2+y^2}{1-y^2} e^{2k} & 0 \\ \omega f & 0 & 0 & \frac{L^2}{f} (x^2+1)(1-y^2) - \omega^2 f \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Haciendo¹² $h^2 = \Delta_r$ y sustituyendo en (2.3), obtenemos

$$ds^2 = \frac{K}{f} \left[-\frac{f^2}{K} (dt - \omega d\varphi)^2 + \frac{dh^2}{1 - L^2/h^2} + \frac{h^2}{K} (K d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\varphi^2) \right] = \frac{K}{f} \left[ds_{MT}^2 \right], \quad (2.7)$$

donde ds_{MT}^2 es un elemento de línea muy parecido a (2.1). Si hacemos $K = 1$ ¹³ y $f = e^\Phi$ obtenemos el caso particular mencionado salvo el denominador de dh^2 , que posee un término cuadrático, en contraposición al modelo de *Morris-Thorne* que exhibe una dependencia lineal¹⁴. En cuanto al término

$$d\Omega = \frac{R^2}{K} (K d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\varphi^2),$$

puede ser concebido como un *diferencial de ángulo sólido*, cuya caracterización se ve afectada por la existencia y naturaleza del campo escalar presente en nuestra teoría.

En conclusión. (2.1) es un caso particular de (2.3), pero haciendo notar que son *conformalmente similares*.¹⁵ En otras palabras, podemos trabajar con una u otra, teniendo cuidado de cómo extrapolar las propiedades del *elemento de línea de Morris-Thorne* al elemento de línea que se está trabajando en el presente escrito. **Ambas métricas estudiadas cumplen con la condición A.**

Condicion B

Para garantizar que la solución (2.1) sea consistente con las ecuaciones de campo de Einstein, es imperativo que se satisfaga la siguiente igualdad:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

¹²Para evitar confusión con el escalar de Ricci R .

¹³No se considera un campo escalar presente en la teoría, es decir $\phi = 0$ y no se considera acoplamiento con el campo, $\alpha_0 = 0$. Véase en el capítulo 3

¹⁴En cuanto a la diferencia, no es trascendental, sólo hace falta hacer $b(r) \rightarrow b(r)/r$.

¹⁵Conformalmente similares significa que una es una versión escalada de la otra.

donde c es la rapidez de la luz y G es la constante gravitacional.

Para mayor simplicidad, se usa *el sistema de referencia comóvil*¹⁶. Para lograrlo se definen los vectores directores en éste nuevo sistema de la siguiente forma¹⁷:

$$e_{\hat{t}} = e_t/\sqrt{-g_{00}}, \quad e_{\hat{r}} = e_r/\sqrt{g_{rr}}, \quad e_{\hat{\theta}} = e_\theta/\sqrt{g_{\theta\theta}}, \quad e_{\hat{\varphi}} = e_\varphi/\sqrt{g_{\varphi\varphi}}, \quad (2.9)$$

donde

$$e_t = \partial/\partial t, \quad e_r = \partial/\partial r, \quad e_\theta = \partial/\partial \theta, \quad e_\varphi = \partial/\partial \varphi.$$

Las ecuaciones de Einstein toman la forma:

Ecuaciones de Einstein en el SR-Comóvil de (2.1):

$$G_{\hat{t}\hat{t}} = \frac{b'}{r^2}, \quad (2.10a)$$

$$G_{\hat{r}\hat{r}} = -\frac{b}{r^3} + 2\frac{(1-b/r)\Phi'}{r}, \quad (2.10b)$$

$$G_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = G_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left(\Phi'' + \left\{\Phi' - \frac{b'r - b}{2r(r-b)}\right\}[\Phi' + 1/r]\right), \quad (2.10c)$$

y las *variables primadas* son la derivada total respecto a r .

Usando

$$T_{\hat{t}\hat{t}} = \rho(r)c^2, \quad T_{\hat{r}\hat{r}} = -p_r(r), \quad T_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = T_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = p(r), \quad (2.11)$$

en (2.10), se llega a

Densidad y presiones (2.1) en el SR comóvil:

$$\rho = \frac{b'}{G_0 r^2}, \quad (2.12a)$$

$$p_r = \frac{G_0}{c^2 r^2} \left[\frac{b}{r} - 2(r-b)\Phi' \right], \quad (2.12b)$$

$$p = \frac{r}{2} \left[(\rho c^2 - p_r)\Phi' - p'_r \right] - p_r. \quad (2.12c)$$

donde $G_0 = 8\pi G/c^2$ y $T_{\mu\nu}$ es el **tensor de Energía-Momento**. Al hacer lo mismo para la métrica de (2.3), se obtienen las ecuaciones (30) y (32). **Véase en el Apéndice D.**

¹⁶El sistema de referencia *comóvil* es aquél en el cual el astronauta y el observador se mantienen estáticos, de tal forma que *se mueva junto con ellos*.

¹⁷Válido únicamente para una matriz diagonal.

Condición C

Para visualizar mejor aquellas funciones que determinarán si es asintóticamente plano el espacio, usemos la métrica (2.6). Al hallar el escalar de *Ricci*

$$R = \frac{1}{2L^4(x^2 + 1)} \frac{\mathfrak{F}(f, \omega, k, x, y)}{(x^2 + y^2)(1 - y^2)f} e^{-2k}, \quad (2.13)$$

donde $\mathfrak{F}(f, \omega, k, x, y)$ es una función que depende de primeras y segundas derivadas parciales de las funciones $\{f, \omega, k\}$ y de las variables $\{x, y\}$.

Las singularidades son:

$$y = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \theta = n\pi, \quad (2.14)$$

$$x^2 + y^2 = 0, \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2}(2n + 1) \quad \text{y} \quad r = l_1, \quad (2.15)$$

$$f(x_0, y_0) = 0, \quad (2.16)$$

donde $n \in \mathbb{N}$, (2.15) corresponde a la **singularidad de anillo**, (2.14) a la singularidad de las coordenadas y (2.16) es una singularidad provocada por la función $f(x, y)$.¹⁸

No obstante, al dirigir nuestra atención hacia la condición necesaria de la *existencia de una garganta*, el radio $h(r)$ tiene que cumplir que:

$$\lim_{r \rightarrow \pm\infty} h(r) = |r|, \quad (2.17)$$

y $h(0) = h_{min}$.

Por otro lado, si usamos (2.1) el *Ricci* toma la forma

$$R = \frac{1}{r^2} \left[b'(r) (r\Phi'(r) + 2) + 2r(b(r) - r)\Phi''(r) - 2r(r - b(r))\Phi'(r)^2 + (3b(r) - 4r)\Phi'(r) \right], \quad (2.18)$$

si definimos a la *distancia radial apropiada* como

$$dl = \frac{dr}{1 - b(r)/r}, \quad (2.19)$$

entonces, para $L \neq 0$, es decir, la *existencia de una garganta*, implica que¹⁹

$$\lim_{l \rightarrow \pm\infty} r(l) = |l|, \quad (2.20)$$

donde $r_{min} = r(l = 0)$.

Mientras que, observando (2.18) la condición de la solución *asintóticamente plana* está dada por

$$\lim_{l \rightarrow \pm\infty} \Phi(l) = \Phi_0. \quad (2.21)$$

¹⁸El horizonte de eventos se encuentra en (x_1, y_1) tal que $f(x_1, y_1) \rightarrow \pm\infty$.

¹⁹Es decir, la condición será la misma, sólo que la función $R(r)$ la impondrá la solución que se ocupará.

Condición D

Nuevamente, si nos fijamos en (2.13), (2.18) y en (2.1), (2.6), se hace notar que *para evitar horizontes de eventos, es necesario que g_{tt} sea regular, es decir, que $f(x, y)$ y $\Phi(r)$ sean regulares. Para la segunda clase de soluciones que se abordarán, $f(x, y) = 1$.*

Condición E

El sistema de referencia comóvil adquiere una importancia fundamental en el ámbito de la física, pero para poder estudiar las fuerzas de marea es necesario *anclarnos* al sistema de referencia del viajero. Esto se debe a la necesidad de asegurar la integridad de los astronautas ante las fuerzas gravitacionales que emanan de *agujeros negros* (AG).

Recordemos que en la relatividad especial se usa la siguiente matriz para transformar elementos *contravariantes* (x^μ)

$$\mathbb{M}_{RE} = \begin{bmatrix} \beta & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : \quad \hat{\mathbb{O}} \rightarrow \hat{\hat{\mathbb{O}}}, \quad (2.22)$$

donde $\hat{\hat{\mathbb{O}}}$ es el sistema de referencia del observador y $\hat{\mathbb{O}}$ es el sistema de referencia que se mueve con velocidad $\vartheta\hat{x}$ respecto a $\hat{\mathbb{O}}$, también se define a $\beta = \vartheta/c$, donde ϑ es la rapidez y $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$. Por lo tanto

$$x^{\hat{\mu}} = \begin{bmatrix} c\hat{t} \\ \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{\varphi} \end{bmatrix} = \mathbb{M}_{RE} \begin{bmatrix} ct \\ \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} = \mathbb{M}_{RE} \cdot x^{\hat{\mu}}. \quad (2.23)$$

En este contexto, se ocupará como $\hat{\mathbb{O}}$ al sistema de referencia comóvil, mientras que al sistema de referencia anclado al individuo que viaja a través del agujero de gusano será $\hat{\hat{\mathbb{O}}}$. En cambio, si queremos transformar términos covariantes, se ocupará \mathbb{M}_{RE}^{-1} , por ejemplo, los vectores directores ²⁰

$$\begin{bmatrix} e_{\hat{t}} \\ e_{\hat{x}} \\ e_{\hat{y}} \\ e_{\hat{\varphi}} \end{bmatrix} = \mathbb{M}_{RE}^{-1} \begin{bmatrix} e_{\hat{t}} \\ e_{\hat{x}} \\ e_{\hat{y}} \\ e_{\hat{\varphi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{\hat{t}} \\ e_{\hat{x}} \\ e_{\hat{y}} \\ e_{\hat{\varphi}} \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Notemos algunos aspectos importantes ²¹:

²⁰siguiendo con la notación adecuada para identificar entre \mathbb{O} : **Sistema de referencia general** ; $\hat{\mathbb{O}}$: **Sistema de referencia comóvil** y $\hat{\hat{\mathbb{O}}}$: **Sistema de referencia del astronauta**.

²¹Para una exploración más exhausta del tema véase sen [11], *subsección 3.10* ó en [13], *subsección 11.3*. De igual forma en [3], se habla con más detalle de éste tema.

- En $\hat{\mathbb{O}}$ no hay movimiento angular, es decir, los vectores no tendrán componentes en dirección $e^{\hat{\theta}}$ y $e^{\hat{\varphi}}$.
- La velocidad del viajero será puramente temporal y unitaria $\vartheta^{\hat{\mu}} = (1, 0, 0, 0)$, en concordancia a $\hat{\mathbb{O}}$, ya que el navegante estará *estático en su sistema de referencia*, pero sentirá las fuerzas de marea $\Delta a^{\hat{\mu}}$ y una aceleración $a^{\hat{\mu}}$.
- El astronauta se mueve en dirección radial ($e_{\hat{r}} = Le_{\hat{x}}$)²², por lo tanto la *aceleración* será $a^{\hat{\mu}} = (0, \bar{a}, 0, 0)$, para cumplir con la ortogonalidad $a^{\hat{\mu}}\vartheta_{\hat{\mu}} = 0$, en el sistema de referencia $\hat{\mathbb{O}}$.
- Sea $\xi^{\hat{\mu}}$ el vector que representa la distancia *desde los pies hasta la cabeza*, es puramente espacial en $\hat{\mathbb{O}}$.

Por consiguiente, el análisis de las fuerzas de marea se puede generar con ayuda de la expresión:

$$\Delta a^{\hat{\mu}} = -c^2 R^{\hat{\mu}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\sigma}} \vartheta^{\hat{\alpha}} \xi^{\hat{\beta}} \vartheta^{\hat{\sigma}}, \quad (2.25)$$

ya que la velocidad del astronauta es puramente temporal, (2.25) se reduce a

$$\Delta a^{\hat{\mu}} = -c^2 R^{\hat{\mu}}_{\hat{t}\hat{\beta}\hat{t}} \xi^{\hat{\beta}}, \quad (2.26)$$

donde, la componente $\hat{0}$ se está adoptando como \hat{t} , $\hat{1} = \hat{r}$, así sucesivamente.

Al 'llevar' al tensor de Riemann al *sistema de referencia del astronauta* usando (31) y $\mathbb{M}_{comovil} \rightarrow \mathbb{M}_{RE}$ hallamos:

$R_{\hat{\mu}\hat{t}\hat{\mu}\hat{t}}$ (En el sistema $\hat{\mathbb{O}}$):

$$R_{\hat{r}\hat{t}\hat{r}\hat{t}} = R_{\hat{r}\hat{t}\hat{r}\hat{t}}, \quad (2.27a)$$

$$R_{\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}} = \gamma^2 R_{\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}} + \gamma^2 \beta^2 R_{\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}}, \quad (2.27b)$$

$$R_{\hat{\varphi}\hat{t}\hat{\varphi}\hat{t}} = \gamma^2 R_{\hat{\varphi}\hat{t}\hat{\varphi}\hat{t}} + \gamma^2 \beta^2 R_{\hat{\varphi}\hat{r}\hat{\varphi}\hat{r}}. \quad (2.27c)$$

Los elementos $R_{\hat{\mu}\hat{r}\hat{\mu}\hat{r}}$ están dados por (2.27).

Al abordar la consideración de una persona con una altura aproximada de $|\xi| \approx 2m$, se requiere que los elementos (35) satisfagan la condición

$$|R_{\hat{\mu}\hat{t}\hat{\mu}\hat{t}}| \leq \frac{g_{Tierra}}{2m * c^2} \approx (10^5 Km)^{-2}, \quad (2.28)$$

donde g_{Tierra} es la constante gravitación de la tierra.

²²Para pasar del sistema X al Θ , recordemos que usamos la matriz de transformación de términos covariantes (13) extendida, Véase en el Apéndice A y D.

Aunque las fórmulas matemáticas son herramientas invaluablemente útiles, es imperativo razonar sobre la física. En la actualidad, la tecnología de navegación espacial se encuentra en una fase muy primitiva, hemos logrado alcanzar grandes avances en los últimos siglos, sin embargo no se ha conseguido hacer viajes largos en el universo. La rapidez y comodidad son dos elementos de suma importancia para los humanos ya que somos seremos efímeros. Sin embargo, consideremos un universo en el cual estos viajes sean notoriamente más rápidos pero sin llegar a velocidades relativistas, es decir, $\beta \rightarrow 0$ y $\gamma \rightarrow 1$. Si mandamos a nuestro astronauta hacia un agujero de gusano considerando la condición mencionada para un manejo mejor de las fuerzas de marea y la comodidad de la persona de tal forma de asegurar su supervivencia, podemos deshacernos del segundo término de la ecuación (2.27b) y (2.27c), simplificando considerablemente los cálculos.

Sin no fuera el caso, se tienen que considerar los términos $R_{\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}}$ y $R_{\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}\hat{r}}$. Dichas componentes pueden verse en el **Apéndice D**.

Condición G

Las condiciones de energía (CE) son un método para poder limitar la arbitrariedad del tensor $T_{\mu\nu}$ derivados de una solución a las ecuaciones de Einstein. En [11], **sección 4.6. Energy Conditions** se dan a conocer las respectivas condiciones de energía y el método para obtenerlas. En esta subsección nos limitaremos a presentarlas.

Sea

$$\begin{aligned} t^\mu & \quad \text{Vector arbitrario temporal} \quad t^\mu t_\mu < 0, \\ l^\mu & \quad \text{Vector nulo} \quad l^\mu l_\mu = 0, \end{aligned}$$

se pueden describir las condiciones de energía, considerando que el objeto cosmológico es un *fluido perfecto*, su *Tensor de Energía-Momento* será

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)g_{\mu\nu} + pg_{\mu\nu},$$

donde ρ es la densidad y p la presión. Por ende, las CE adquieren la siguiente representación:

- **Condición Débil de Energía (WEK):**

$$T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq 0, \quad \forall \quad t^\mu, \quad (2.29)$$

o equivalentemente

$$\rho \geq 0, \quad (2.30a)$$

$$\rho + p \geq 0. \quad (2.30b)$$

- **Condición Nula de Energía (NEC):**

$$T_{\mu\nu}l^\mu l^\nu \geq 0, \quad \forall \quad l^\mu, \quad (2.31)$$

o equivalentemente

$$\rho + p \geq 0. \quad (2.32)$$

La densidad de energía puede ser ahora negativa, siempre y cuando haya una presión positiva compensatoria.

- **Condición Dominante de Energía (DEC):** Para esta condición incluye la condición **WEC** en adición con que $T^{\mu\nu}t_\mu$ sea un *vector no spacelike*, es decir

$$T_{\mu\nu}T^\nu{}_\lambda t^\mu t^\lambda \geq 0, \quad (2.33)$$

o equivalentemente

$$\rho > |p|. \quad (2.34)$$

- **Condición Nula Dominante de Energía (NDEC):** Se toma la condición **DEC** únicamente para *vectores nulos*.

$$T_{\mu\nu}l^\mu l^\nu \geq 0 \quad \forall \quad l^\mu, \quad (2.35a)$$

$$T_{\mu\nu}T^\nu{}_\lambda l^\mu l^\lambda \geq 0, \quad (2.35b)$$

En cuanto a las consecuencias, son las mismas que la condición **DEC**, excepto que *se permiten densidades negativas siempre y cuando:*

$$p = -\rho, \quad (2.36)$$

En otras palabras, NDEC excluye todas las fuentes excluidas por DEC, excepto para las energías negativas del vacío.

- **Condición Fuerte de Energía (SEC):**

$$T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq \frac{1}{2}T^\lambda{}_\lambda t^\sigma t_\sigma \quad \forall \quad t^\mu, \quad (2.37)$$

o equivalentemente

$$\rho + p \geq 0, \quad (2.38a)$$

$$\rho + 3p \geq 0. \quad (2.38b)$$

SEC no implica WEC. La condición SEC implica atracción gravitacional.

Para el presente trabajo, se aprovecharán las ventajas que aportan los vectores directores (28) del *sistema de referencia comovil*. En dicho sistema, las componentes del tensor de *Ricci* se vuelven sumamente sencillos.

Recordemos que “una cara” de las ecuaciones de Einstein es

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left[T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} \right], \quad (2.39)$$

donde $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$. Usando el *vector nulo*:

$$l^\mu = e_{\hat{t}} + e_{\hat{x}}, \quad (2.40)$$

El invariante

$$T_{\mu\nu}l^\mu l^\nu$$

toma la forma:

$$T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}l^{\hat{\mu}}l^{\hat{\nu}} = T_{\hat{t}\hat{t}} + T_{\hat{x}\hat{x}} = \rho - \varrho = \frac{1}{8\pi} \left[R_{\hat{t}\hat{t}} + R_{\hat{x}\hat{x}} \right], \quad (2.41)$$

donde

$$\begin{aligned} \rho &= T_{\hat{t}\hat{t}} && \text{densidad total,} \\ -\varrho &= T_{\hat{x}\hat{x}} && \text{tensión por unidad de área,} \end{aligned}$$

usando unidades naturales $G = 1$ y $c = 1$.

La forma de $R_{\hat{t}\hat{t}}$ y $R_{\hat{x}\hat{x}}$ pueden verse en el Apéndice D.

Capítulo 3

Reformulación de Matos

Cuando analizamos agujeros negros o agujeros de gusano, la incógnita principal es *¿Qué coordenadas a usar es la mejor?* En muchos problemas de la física, el sistema de referencia hace más complicado o más fácil el análisis del fenómeno.

En 1916 el físico Alemán **Karl Schwarzschild** derivó en su artículo *Sobre las ecuaciones del campo gravitatorio de Einstein para la masa puntual (Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie)* [14] una de las primeras métricas y que tomo una gran relevancia para la física actual, esa métrica lleva su nombre (*Métrica de Schwarzschild*)¹. En aquél artículo Schwarzschild describe el comportamiento que toma el **Espacio-Tiempo** en el exterior de un objeto con simetría esférica y al vacío, de igual forma lo hizo para el interior modelando dicho fenómeno como una esfera de fluido incompresible. Los personajes que fueron estudiando esta solución se encontraron con una divergencia cuando $r \rightarrow 2M^2$, ya que g_{rr} diverge en tal punto. Durante un tiempo se pensó que ésta era una singularidad sin posibilidad de estudio pero más tarde se dieron cuenta de que con algunos cambios de coordenadas³ era posible “extender el la investigación de la métrica” mas allá de éste *horizonte de eventos*⁴.

Durante el análisis de la región “extendida” con ayuda del *diagrama de kruskal* surgen las posibles existencias de los *puentes de Einstein-Rosen ó agujeros de gusano* al estudiar las *Hipersuperficies con T constante* (Durante los cambios de coordenadas, no necesariamente T es el tiempo, está relacionado pero extrictamente no lo es).⁵

Por consiguiente, “elegir las coordenadas correctas” para el uso de nuestro estudio es de suma importancia. La teoría de Kaluza-Klein es muy elegante pero las ecuaciones

¹Encontrar la métrica que satisfaga las ecuaciones de campo de Einstein es equivalente a resolverlas.

²Existe una singularidad geométrica, cuando $r \rightarrow 0$, $g_{tt} \rightarrow \infty$.

³En [11], capítulo 5, se explican los cambios de coordenadas (Tortoise coordintes, Eddington-Finkelstein coordinates and kruskal coordinates) para poder hacer el *diagrama de kruskal* y así lograr analizar y explicar qué ocurre dentro de aquél “horizonte de eventos”.

⁴El horizonte de eventos es “una línea divisoria” del espacio-tiempo, la cual separa la “región de no retorno” ó interior del objeto cosmológico con su exterior.

⁵Para más información de éste pequeño estudio, revisar [11], capítulo 5.7 *Maximally extended schwarzschild solution*.

suelen ser un poco complicadas. Al percatarse de esto, Matos en su artículo [15] logró pasar a un *espacio abstracto* que facilitaba la resolución de las ecuaciones de campo y así poder obtener soluciones exactas.

3.1 Teoría de Kaluza-Klein

Teoría de Kaluza

Una de las primeras teorías de unificación es la llamada *teoría de Kaluza-Klein*. Theodor Kaluza⁶ publicó en 1921 un trabajo que llevaba el nombre de *Zum Unitätsproblem in der Physik (Sobre el problema de la unidad en la física)* [16]. La idea principal de dicho artículo era la unificación de la teoría de electromagnetismo y de la relatividad general, desde el punto de vista geométrico. Es decir, propuso un espacio de 5 dimensiones (\mathbb{V}_5), incorporando la teoría de la relatividad (4 dimensiones) más el electromagnetismo (1 dimensión extra). Lo logró hacer definiendo una nueva métrica de la siguiente manera:

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g_{\mu\nu} & A_\mu \\ A_\nu & V \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

donde $g_{\mu\nu}$ es la métrica que conocemos en la teoría de la relatividad, A_μ es el 4-Potencial electromagnético y V es un potencial escalar.

En este nuevo espacio, exigió que los elementos de la nueva métrica no dependieran de la quinta variable (*condición cilíndrica*). Cuando $\hat{R}_{\mu\nu} = 0$, Kaluza logró obtener las ecuaciones de campo de Einstein, las ecuaciones de Maxwell y una ecuación de campo para V , en el vacío, pero aún más importante, gracias a la condición cilíndrica impuesta, obtuvo la conservación de la carga de la partícula que vivía en aquellas $(4 + 1)$ -Dimensiones⁷.

Teoría de Klein

Cinco años después, en 1921, Oskar Klein extendió el trabajo de Kaluza en su artículo titulado *Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity (Teoría cuántica y teoría de la relatividad de cinco dimensiones)* [16]. Como se dijo anteriormente, depende del sistema de coordenadas que se elija, las ecuaciones se facilitan o se vuelven sumamente complicadas. Einstein y Klein (de manera independiente) reparametrizaron la teoría de Kaluza de tal forma que fuera más amigable tomando en cuenta argumentos de simetría. Hicieron de forma covariante a la *condición cilíndrica* y encontraron que el diferencial $d\theta$ era invariante, pero Klein *compactificó* el espacio en el que trabajaban. Consiguió obtener que $\rho_0 = \hbar c \sqrt{2\kappa}/e$ el cual es el radio de \mathbb{S}^1 .

⁶Antes de Kaluza, Nordström ideó la idea de un espacio tiempo de cinco dimensiones junto con la *condición cilíndrica*.

⁷Una partícula vive en las $(4 + 1)$ -Dimensiones al asociar el espacio tiempo (4-D) de dicha partícula y la carga (1-D)

Teoría de Kaluza-Klein

Si se parte desde la acción en 5 Dimensiones⁸

$$S_{KK} = \frac{1}{2\hat{\kappa}} \int d^5z \sqrt{-\hat{g}} \hat{R}, \quad (3.2)$$

donde $\hat{\kappa}$ es la constante gravitacional de Einstein en \mathbb{V}_5 , $d^5z = dyd^4x$, con y la quinta coordenada y las cantidades $\{\hat{g}, \hat{R}\}$ son el determinante de la métrica $\hat{g}_{\mu\nu}$ y el escalar de *Ricci* en \mathbb{V}_5 , sucesivamente.

Introduciendo las cantidades conservadas por Klein y la compactificación del espacio, se puede reducir esta acción a:

$$S_{KK} = - \int d^4x \sqrt{-g} \sqrt{\tilde{\phi}} \left(\frac{1}{2\kappa} R_4 + \frac{1}{4} \tilde{\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + O(\tilde{\phi}) \right), \quad (3.3)$$

donde los términos $(R_4, g, F_{\mu\nu})$ son los escalares y tensores que se conocen en la teoría de la relatividad general (\mathbb{V}_4), $\tilde{\phi} = \phi/\phi_c$ y ϕ_c es una constante que surge en la identificación con la conocida acción de Einstein-Hilbert. A esto se le llama *reducción dimensional* y gracias a la compactificación se logró identificar a $\mathbb{V}_5 = \mathbb{V}_4 \times \mathbb{S}^1$.

En cambio, si se hace un *re-escalado conforme*⁹, se consigue finalmente:

$$S = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left(\frac{\bar{R}}{2\kappa} - \frac{1}{4} \phi \bar{F}_{\mu\nu} \bar{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{6\gamma^2 \phi^2} \bar{\partial}_\mu \phi \bar{\partial}^\nu \phi \right), \quad (3.4)$$

donde $\gamma^2 = 2\kappa/\phi$, y las variables barradas corresponden a las variables re-escaladas.

3.2 Lagrangiano global

La teoría de Kaluza- Klein puede ser introducida en otra teoría más general. Se parte con el lagrangiano:

$$\mathfrak{L} = \sqrt{-g} \left(-R + 2\epsilon_0 (\nabla\phi)^2 + e^{-2\alpha_0\phi} F^2 \right), \quad (3.5)$$

donde g es el determinante de la métrica $g_{\mu\nu}$ correspondiente al espacio \mathbb{V}_4 , $R = g^{\mu\nu} R^\sigma_{\mu\sigma\nu}$ es el escalar de Ricci en \mathbb{V}_4 , $(\nabla\phi)^2 = \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi$, ∇_μ es la derivada covariante en \mathbb{V}_4 , $F^2 = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ es el invariante formado por el tensor de Faraday y $\{\alpha_0, \epsilon_0\}$ son constantes¹⁰ { de acoplamiento entre el campo electromagnético y el campo escalar, de la teoría de estudio }, respectivamente.

La particularidad de este lagrangiano más general se encuentra determinada por los parámetros $\{\alpha_0, \epsilon_0\}$. Veamos primeramente el significado y los valores que puede tomar ϵ_0

⁸Originalmente se consideró una acción análoga a la de **Hilbert-Einstein** en \mathbb{V}_4 .

⁹La inducción completa puede verse en [17], subsección 8.2.2 *The 5D Model*, página 412.

¹⁰Se usarán los colores azul y rojo respectivamente para resaltar en el resto de la tesis el impacto de los parámetros.

$$\epsilon_0 = \begin{cases} +1 & \Rightarrow \phi \text{ representa un Campo } \mathbf{dilatónico} \\ -1 & \Rightarrow \phi \text{ representa un Campo } \mathbf{fantasma} \end{cases} \quad (3.6)$$

En contraste para α_0 se presenta una circunstancia similar y peculiar, ya que con los valores

$$\alpha_0^2 = \begin{cases} 3 & \Rightarrow \mathcal{L} \text{ corresponde a } \mathbf{Kaluza-Klein} \\ 1 & \Rightarrow \mathcal{L} \text{ corresponde a } \mathbf{Súper cuerdas} \text{ (Bajas energías)} \\ 0 & \Rightarrow \mathcal{L} \text{ corresponde a } \mathbf{Einstein-Maxwell} \end{cases} \quad (3.7)$$

se recuperan algunas teorías importantes. Sin embargo, es importante destacar que el parámetro no se encuentra restringido exclusivamente a éstos valores, sino que $\alpha_0 \in \mathbb{R}$.¹¹

Al variar la acción correspondiente al lagrangino (3.5), se adquieren las ecuaciones de campo

Ecuaciones de campo:

$$\nabla_\mu (e^{-2\alpha_0\phi} F^{\mu\nu}) = 0, \quad (3.8a)$$

$$\epsilon_0 \nabla^2 \phi + \frac{\alpha_0}{2} (e^{-2\alpha_0\phi} F^2) = 0, \quad (3.8b)$$

$$R_{\mu\nu} = 2\epsilon_0 \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + 2e^{-2\alpha_0\phi} \left(F_{\mu\sigma} F_\nu{}^\sigma - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^2 \right). \quad (3.8c)$$

En la **subsección 2.2** se expuso la existencia de dos vectores de killing debidos a la imposición de simetría axial y un espacio-tiempo estacionario, pero en la teoría de Kaluza-Klein se menciona la prescencia de otro. La condición cilíndrica nos arroja el último último vector de killing, tipo espacial \hat{K}_y , donde para éste caso y es la quinta coordenada.

3.3 Formalismo del *espacio de potenciales*

El “formalismo de potenciales” se fundamenta en la definición de cinco potenciales creados covariantemente con los vectores de killing, que surgen de la simetría axial y la condición cilíndrica que se menciona en la teoría de Kaluza-Klein¹². Mediante la definición de dichos potenciales se logra una redefinición de las ecuaciones de campo derivadas del lagrangiano (3.5). La utilidad de éste formalismo se manifiesta en la simplificación de las mencionadas ecuaciones de campo. Concretamente, en la disminución del número de ecuaciones y del orden¹³.

¹¹Una amplia gama de artículos escritos por *Matos y su grupo* han estudiado arduamente dicha teoría y han ido completando el formalismo a tal punto de llegar al lagrangiano (3.5). Véase en [15], [12], [18], [19], [20], [21], [8].

¹²En el artículo [12] se centra en la explicación de dichos potenciales y el desarrollo del formalismo más detalladamente.

¹³Cuando hablamos del orden, es con base al operador \hat{D} que se definirá más adelante.

Matos T. en su artículo titulado como *Class of Einstein–Maxwell phantom fields: rotating and magnetized wormholes*[15], describe detalladamente los cálculos del formalismo de potenciales¹⁴. En los párrafos siguientes, el objetivo principal consistirá en realizar una explicación del artículo mencionado, resaltando puntos claves. Se omitirán algunos cálculos y aquellos trascendentales se adjuntarán a los **Apéndices**.

Primera transformación.

Para obtener las nuevas ecuaciones de campo, primeramente es necesario dar a conocer algunas definiciones importantes. Comenzaremos con el *4-Potencial electromagnético*, proponiendo que

$$A^\mu = \begin{bmatrix} A_t \\ 0 \\ 0 \\ A_\varphi \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

donde $\{f, \omega, k, A_t, A_\varphi, \phi\}(\rho, z)$, es decir, todas estas variables encerradas entre corchetes dependen de las coordenadas (ρ, z) .

Otro aspecto importante para concretar el desarrollo es definir los operadores matematicos:

$$D = \begin{bmatrix} \partial_\rho \\ \partial_z \end{bmatrix}, \quad \tilde{D} = \begin{bmatrix} \partial_z \\ -\partial_\rho \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

tal que $D\tilde{D} = 0$, para toda función analítica. Introduciendo (3.9), $g_{\mu\nu}$ derivado de (2.2) en el lagrangiano (3.5) y haciendo una transformada de Legendre para eliminar los términos de D^2k y $D(rDf)$ ¹⁵, se obtiene:

$$\mathcal{L} = \frac{\rho}{2f^2} Df^2 - \frac{f^2}{2\rho} D\omega^2 + \frac{2\rho\epsilon_0}{\alpha_0^2 \kappa^2} D\kappa^2 + \frac{2f\kappa^2}{\rho} \left[(\omega DA_t + DA_\varphi)^2 - \frac{\rho^2}{f^2} DA_t^2 \right], \quad (3.11)$$

donde $\kappa^2 = e^{-2\alpha_0\phi}$.

A continuación mostraremos las ecuaciones de campo (3.8) en otra representación. Sea

$$Y^A = \begin{bmatrix} f \\ \omega \\ A_t \\ A_\varphi \\ \kappa \end{bmatrix},$$

unas *pseudo coordenadas* de un *espacio de potenciales* de 5 dimensiones¹⁶. Las ecuaciones de *Euler-Lagrange* adquiridas extremizando la acción del lagrangiano (3.11)

¹⁴De igual manera véase en [19].

¹⁵Hay que resaltar que $DDf = D^2f$ y $DfDf = Df^2$

¹⁶Generalmente la convención que se ocupa es: para las letras griegas, la numeración corre desde 0 hasta 4 y para las letras latinas mayúsculas desde 0 hasta n, tal que $n > 4$.

$$D \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(DY^A)} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(Y^A)} \right) = 0, \quad (3.12)$$

son:

Ecuación de Klein-Gordon:

$$D^2 \kappa + D\kappa \left(\frac{D\rho}{\rho} - \frac{D\kappa}{\kappa} \right) - \frac{f\kappa^3 \alpha_0^2}{\rho^2 \epsilon_0} \left[(\omega DA_t + DA_\varphi)^2 - \frac{\rho^2}{f^2} DA_t^2 \right] = 0, \quad (3.13a)$$

Ecuaciones de Maxwell:

$$D \left[\frac{4\kappa^2 f}{\rho} (\omega DA_t + DA_\varphi) \right] = 0, \quad (3.13b)$$

$$D \left[4\kappa^2 \left(\frac{f\omega}{\rho} (\omega DA_t + DA_\varphi) - \frac{\rho}{f} DA_t \right) \right] = 0, \quad (3.13c)$$

Ecuaciones principales de Einstein:

$$D^2 f + Df \left[\frac{D\rho}{\rho} - \frac{Df}{f} \right] + \frac{f^3}{\rho^2} D\omega^2 - \frac{2\kappa^2 f^2}{\rho^2} \left[(\omega DA_t + DA_\varphi)^2 + \frac{\rho^2}{f^2} DA_t^2 \right] = 0, \quad (3.13d)$$

$$D^2 \omega - D\omega \left[\frac{D\rho}{\rho} - \frac{2Df}{f} \right] + \frac{4\kappa^2}{f} (\omega DA_t + DA_\varphi) DA_t = 0. \quad (3.13e)$$

Con la ayuda de las ecuaciones (3.13b) y (3.13e), se nos permite definir dos potenciales de la siguiente manera:

$$\tilde{D}\chi = \frac{2f\kappa^2}{\rho} (\omega DA_t + DA_\varphi), \quad (3.14)$$

$$\tilde{D}\epsilon = \frac{f^2}{\rho} D\omega + \psi \tilde{D}\chi, \quad (3.15)$$

donde $\psi = 2A_t$. En virtud de ello, al redefinir las *pseudo-coordenadas* del espacio de potenciales previamente mencionadas, como

$$Y^A \rightarrow \begin{bmatrix} f \\ \epsilon \\ \chi \\ \psi \\ \kappa \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

las cuales son conocidas como **funciones armónicas**, donde $\{f, \epsilon, \chi, \psi, \kappa\}$ son los potenciales *{gravitacional, rotacional, magnético, eléctrico, escalar}* consecutivamente.

En consecuencia, las ecuaciones de campo (3.13) adquieren la forma siguiente:

Ecuación de Klein-Gordon:

$$D(\rho D\kappa) - \frac{\rho}{\kappa} D\kappa^2 + \frac{\rho\kappa^3\alpha_0^2}{4f\epsilon_0} \left[D\psi^2 - \frac{1}{\kappa^4} D\chi^2 \right] = 0, \quad (3.17a)$$

Ecuaciones de Maxwell:

$$D(\rho D\psi) + \rho D\psi \left[\frac{2D\kappa}{\kappa} - \frac{Df}{f} \right] - \frac{\rho}{f\kappa^2} (D\epsilon - \psi D\chi) D\chi = 0, \quad (3.17b)$$

$$D(\rho D\chi) - \rho D\chi \left[\frac{2D\kappa}{\kappa} + \frac{Df}{f} \right] + \frac{\rho\kappa^2}{f} (D\epsilon - \psi D\chi) D\psi = 0, \quad (3.17c)$$

Ecuaciones principales de Einstein:

$$D(\rho Df) + \frac{\rho}{f} [(D\epsilon - \psi D\chi)^2 - Df^2] - \frac{\rho\kappa^2}{2} \left(D\psi^2 + \frac{1}{\kappa^4} D\chi^2 \right) = 0, \quad (3.17d)$$

$$D(\rho(D\epsilon - \psi D\chi)) - \frac{2\rho}{f} (D\epsilon - \psi D\chi) Df = 0. \quad (3.17e)$$

Es imprescindible destacar que al emplear la definición (3.14) en la ecuación (3.17d), se obtiene $D\tilde{D}\chi = 0$. Por consiguiente, se sustituye por la ecuación $\tilde{D}DA_\varphi = 0$. Estas transformaciones se sustentan gracias a las propiedades de $\{D, \tilde{D}\}$

$$\tilde{D}A\tilde{D}B = DADB, \quad \tilde{D}ADB = -\tilde{D}BDA, \quad \tilde{D}\tilde{D} = DD = \partial_\rho^2 + \partial_z^2.$$

No obstante, surge una pregunta trascendental: *¿Cuál es el efecto en el lagrangiano (3.11) al introducir los potenciales (3.14) y (3.15)?* En efecto, al transformar (3.11) con (3.14) y (3.15) y obtener las ecuaciones de *Euler-Lagrange* (3.12), no coinciden con las ecuaciones de campo transformadas (3.17). Esta discrepancia se deriva de la degeneración presente en las transformaciones¹⁷ (3.14) y (3.15). Por lo tanto, se opta por obtener el lagrangiano transformado a partir de las ecuaciones de campo (3.17). Como resultado, se llega a:

$$\mathfrak{L} = \frac{\rho}{2f^2} (Df^2 + (D\epsilon - \psi D\chi)^2) + \frac{2\rho\epsilon_0}{\alpha_0^2\kappa^2} D\kappa^2 - \frac{\rho\kappa^2}{2f} \left(D\psi^2 + \frac{1}{\kappa^4} D\chi^2 \right). \quad (3.18)$$

Derivado del nuevo lagrangiano (3.18), se obtiene el análogo al elemento de línea (2.3):

$$ds^2 = \frac{1}{2f^2} (df^2 + (d\epsilon - \psi d\chi)^2) + \frac{2\epsilon_0}{\alpha_0^2\kappa^2} D\kappa^2 - \frac{\kappa^2}{2f} \left(d\psi^2 + \frac{1}{\kappa^4} d\chi^2 \right), \quad (3.19)$$

Derivado de este elemento de línea se obtiene la métrica

¹⁷Para más detalle, ver en [15] y [19]

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1/2f^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2f^2 & -\psi/2f^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\psi/2f^2 & (\psi^2 - f/\kappa^2)/2f^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\kappa^2/2f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\epsilon_0/\alpha_0^2\kappa^2 \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

que a su vez nos arroja el escalar de *Ricci*, es decir, la curvatura es:

$$R = -12 - \frac{\alpha_0^2}{\epsilon_0}. \quad (3.21)$$

Aunque se ha logrado un significativo avance en la transformación de las ecuaciones de campo, aún persiste la inmensa complejidad de su resolución. Es importante señalar que continuamos enfrentándonos a ecuaciones diferenciales parciales acopladas de grado 2. A pesar del álgebra hecha aún no se ha conseguido reducir el grado de dichas ecuaciones, sin embargo, es crucial destacar que se ha logrado un avance de suma relevancia. Las ecuaciones (3.17) puede ahora expresarse como una única ecuación covariante¹⁸:

$$D(\rho DY^A) + \rho \hat{\Gamma}^A_{BC} DY^B DY^C = 0, \quad (3.22)$$

donde $\hat{\Gamma}^A_{BC}$ son los símbolos de Christoffel para el espacio de potenciales generado por Y^A .

Segunda transformación

El siguiente paso implica la conversión de las ecuaciones de campo de segundo orden a ecuaciones de primer orden. Para ello se implementarán las siguientes variables.

Sea

$$A = \frac{1}{2f} [Df - i(D\epsilon - \psi D\chi)], \quad (3.23a)$$

$$B = \frac{-1}{2\sqrt{f}} \left[\kappa D\psi - i\frac{1}{\kappa} D\chi \right], \quad (3.23b)$$

$$C = -\frac{D\kappa}{\kappa}. \quad (3.23c)$$

Al introducir esta triada en (3.17), se obtiene el siguiente sistema:

Ecuaciones de campo en términos de $\{A, B, C\}$:

¹⁸Las ecuaciones *covariantes*, son sumamente importantes, debida a que su forma siempre se mantiene invariante sin importar que sistema de coordenadas se elijan.

$$\frac{1}{\rho}D(\rho A) = B\bar{B} + A(A - \bar{A}), \quad (3.24a)$$

$$\frac{1}{\rho}D(\rho B) = -\frac{B}{2}(A - 3\bar{A}) + C\bar{B}, \quad (3.24b)$$

$$\frac{1}{\rho}D(\rho C) = \frac{\alpha_0^2}{2\epsilon_0}(B^2 + \bar{B}^2), \quad (3.24c)$$

donde las variables “barradas” son los conjugados.

Este proceso resulta en una reducción del grado, lo que lleva a una disminución en el número de ecuaciones a tres. Sin embargo, es importante recordar que estas ecuaciones son de variable compleja.

Es importante destacar que, de ahora en adelante, los cálculos adquieren coherencia únicamente si se considera que tanto los potenciales Y^A como sus derivadas parciales son de naturaleza real. De lo contrario, la separación en parte real y parte imaginaria de $\{A, B, C\}$ carecería de validez.

Invariabilidad de las ecuaciones de campo

Considerando que todas las ecuaciones de campo están contenidas en (3.22), es imperativo que la forma de dicha ecuación covariante se mantenga inalterada.

Supongamos que las variables ρ y z dependen de los potenciales λ^l , es decir $Z(\Lambda)$, donde $\Lambda = \{\lambda^l\}$ ¹⁹. Entonces, si introducimos esta dependencia en (3.22), obtenemos

$$\rho \left[Y^A_{,ij} - \Gamma^l_{ij} Y^A_{,l} + \hat{\Gamma}^A_{BC} Y^B_{,i} Y^C_{,j} \right] D\lambda^i D\lambda^j + Y^A_{,l} \left[D(\rho D\lambda^l) + \rho \Gamma^l_{ij} D\lambda^i D\lambda^j \right] = 0, \quad (3.25)$$

donde $Y_{,l} = \partial Y / \partial \lambda^l$, Γ^l_{ij} son los símbolos de Christoffel del *espacio de potenciales generados por λ^l* (\mathbb{V}_p). Por ende tienen que cumplir las siguientes ecuaciones:

$$Y^A_{,ij} + \hat{\Gamma}^A_{BC} Y^B_{,i} Y^C_{,j} = 0, \quad (3.26)$$

$$D(\rho D\lambda^l) + \rho \Gamma^l_{ij} D\lambda^i D\lambda^j = 0. \quad (3.27)$$

Para finalizar, aplicando el cambio de variable (8) y usando la regla de la cadena en (3.27), se llega a

$$(\rho \lambda^l_{,\zeta})_{,\bar{\zeta}} + (\rho \lambda^l_{,\bar{\zeta}})_{,\zeta} + 2\rho \Gamma^l_{ij} \lambda^i_{,\zeta} \lambda^j_{,\bar{\zeta}} = 0. \quad (3.28)$$

Como podemos ver, se logran conseguir dos ecuaciones muy peculiares. La primera (3.26) es una *pseudo ecuación de la geodésica* dependiente de los potenciales λ^l , en cuanto a la segunda (3.28), es una *ecuación de laplace para espacios curvos*.

¹⁹Para éste caso en específico se está ocupando al índice $l = 1, 2, \dots$, para evitar confusión con las demás variables.

Transformación final

Con el objetivo de obtener soluciones exactas a las ecuaciones de campo, es esencial inicialmente obtener a $\Lambda(Z)$, es decir, obtener a los potenciales en función de las coordenadas. Para lograrlo, es necesario resolver la ecuación de laplace (3.27). Aunque es factible considerar a este espacio abstracto como curvo, por razones de simplicidad²⁰ y por condiciones que se mencionarán en los siguientes párrafos, se adoptará como *plano*.

Por consiguiente, el elemento de línea del espacio de potenciales generado por Λ , más general posible considerando que sea maximalmente simétrico, es decir, considerando la existencia de los vectores de killing mencionados en los párrafos superiores²¹, es

$$ds^2 = \frac{2(d\lambda^2 + d\tau^2)}{(1 - \sigma[\lambda^2 + \tau^2])^2} = \frac{d\xi d\bar{\xi}}{(1 - \sigma\xi\bar{\xi})}, \quad (3.29)$$

tal que $\xi = \lambda + i\tau$, $\{\lambda, \tau\} \in \mathbb{R}$ son funciones reales, $\sigma \in \mathbb{R}$ una constante real proporcional a la curvatura del espacio de potenciales.

En [19] mostraron que si el campo electromagnético existe, el único espacio de potenciales maximalmente simétrico es aquél con

$$\sigma = 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma^l_{ij} = 0.$$

Entonces, se tiene que cumplir la ecuación de Laplace plana, en el **Apéndice B**, ecuación (20), se pueden observar todas las representaciones posibles.

Si bien, es factible operar con (3.24), es importante reconocer que la ecuación de Laplace en su forma plana nos indica que $\{(D\lambda)^2, (D\tau)^2, D\lambda, D\tau\}$ son independientes. Por consiguiente se propone el *ansatz*

$$A = a_l(\lambda, \tau) D\lambda^l, \quad (3.30a)$$

$$B = b_l(\lambda, \tau) D\lambda^l, \quad (3.30b)$$

$$C = a_l(\lambda, \tau) D\lambda^l, \quad (3.30c)$$

donde $l = 1, 2$. al sustituir (3.30) en (3.24), se establece el siguiente sistema de ecuaciones:

Ecuaciones de campo en términos de $\{a, b, c\}$

Ecuaciones para a:

$$a_{1,\lambda} - a_1(a_1 - \bar{a}_1) - b_1\bar{b}_1 = 0, \quad (3.31a)$$

$$a_{2,\tau} - a_2(a_2 - \bar{a}_2) - b_2\bar{b}_2 = 0, \quad (3.31b)$$

$$(a_{1,\tau} + a_{2,\lambda}) - a_2(a_1 - \bar{a}_1) - a_1(a_2 - \bar{a}_2) - (b_1\bar{b}_2 + b_2\bar{b}_1) = 0, \quad (3.31c)$$

²⁰La curvatura del espacio generado por Λ no representa la curvatura del *espacio físico*.

²¹Esta afirmación se demostró en [19], con ayuda de las subálgebras generadas.

Ecuaciones para b:

$$b_{1,\lambda} - c_1 \bar{b}_1 + \frac{1}{2} b_1 (a_1 - 3\bar{a}_1) = 0, \quad (3.31d)$$

$$b_{2,\tau} - c_2 \bar{b}_2 + \frac{1}{2} b_2 (a_2 - 3\bar{a}_2) = 0, \quad (3.31e)$$

$$(b_{1,\tau} + b_{2,\lambda}) - c_2 \bar{b}_1 - c_1 \bar{b}_2 + \left(\frac{1}{2} b_1 (a_2 - 3\bar{a}_2) + \frac{1}{2} b_2 (a_1 - 3\bar{a}_1) \right) = 0, \quad (3.31f)$$

Ecuaciones para c:

$$c_{1,\lambda} = \frac{\alpha_0^2}{2\epsilon_0} (b_1^2 + \bar{b}_1^2), \quad (3.31g)$$

$$c_{2,\tau} = \frac{\alpha_0^2}{2\epsilon_0} (b_2^2 + \bar{b}_2^2), \quad (3.31h)$$

$$(c_{1,\tau} + c_{2,\lambda}) = \frac{\alpha_0^2}{\epsilon_0} (b_1 b_2 + \bar{b}_1 \bar{b}_2). \quad (3.31i)$$

$$(3.31j)$$

Es vital destacar que las ecuaciones (3.13), (3.22), (3.17), (3.24) y (3.31) son todas equivalentes. Por ende, obtener las soluciones para (3.31) es análogo a obtener las soluciones para (3.8). La preferencia entre ambas formas depende de las consideraciones individuales.

3.4 Funciones Métricas

Para concluir, es necesario “retroceder sobre nuestros pasos” para poder expresar $\{a, b, c\}$ en términos de las variables Y^A . Este paso implica sustituir la dependencia de $Z(\Lambda)$ en (3.23), usar el hecho de la independencia de $\{(D\lambda^l)^2, D\lambda D\tau\}$ y compararlo con (3.30), obteniendo así que:

Valores de $\{a, b, c\}$

a:

$$a_1 = \frac{1}{2f} [f_{,\lambda} - i(\epsilon_{,\lambda} - \psi\chi_{,\lambda})], \quad (3.32a)$$

$$a_2 = \frac{1}{2f} [f_{,\tau} - i(\epsilon_{,\tau} - \psi\chi_{,\tau})], \quad (3.32b)$$

b:

$$b_1 = -\frac{1}{2\sqrt{f}} \left[\kappa\psi_{,\lambda} - \frac{i}{\kappa}\chi_{,\lambda} \right], \quad (3.32c)$$

$$b_2 = -\frac{1}{2\sqrt{f}} \left[\kappa\psi_{,\tau} - \frac{i}{\kappa}\chi_{,\tau} \right], \quad (3.32d)$$

c:

$$c_1 = -\frac{1}{\kappa}\kappa_{,\lambda}, \quad (3.32e)$$

$$c_2 = -\frac{1}{\kappa}\kappa_{,\tau}. \quad (3.32f)$$

Hemos conseguido establecer la relación entre $\{a, b, c\}$ y las *funciones armónicas*. Sin embargo, para obtener la métrica, es necesario conseguir las **funciones métricas** $\{f, \omega, k\}$. Esto implica despejar $D\omega$ y $D\psi$ de (3.14) y (3.15), sucesivamente. De esta manera obtenemos:

$$D\omega = \frac{\rho}{f^2}[\tilde{D}\epsilon - \psi\tilde{D}\chi], \quad (3.33)$$

usando el hecho de que $A_t = \psi/2$

$$DA_\varphi = \left[\frac{\rho}{2f\kappa^2}\tilde{D}\chi - \frac{1}{2}\omega D\psi \right]. \quad (3.34)$$

Únicamente resta κ . La obtención de esta función métrica se logra mediante cuadraturas, tal como se detalla en el artículo [18]²².

$$k_{,\rho} = \frac{\rho}{4f^2} \left[f_{,\rho}^2 - f_{,z}^2 + \epsilon_{,\rho}^2 - \epsilon_{,z}^2 + \left(\psi^2 + \frac{f}{\kappa^2} \right) (\chi_{,\rho}^2 - \chi_{,z}^2) - 2\psi(\epsilon_{,\rho}\chi_{,\rho} - \epsilon_{,z}\chi_{,z}) \right. \\ \left. + f\kappa^2(\psi_{,\rho}^2 - \psi_{,z}^2) + \left(\frac{2f}{\alpha_0\kappa} \right)^2 (\kappa_{,\rho}^2 - \kappa_{,z}^2) \right], \quad (3.35a)$$

$$k_{,z} = \frac{\rho}{2f^2} \left[f_{,\rho}f_{,z} + \epsilon_{,\rho}\epsilon_{,z} + \left(\psi^2 + \frac{f}{\kappa^2} \right) (\chi_{,\rho}\chi_{,z}) - \psi(\epsilon_{,\rho}\chi_{,z} + \epsilon_{,z}\chi_{,\rho}) \right. \\ \left. + f\kappa^2(\psi_{,\rho}\psi_{,z}) + \left(\frac{2f}{\alpha_0\kappa} \right)^2 (\kappa_{,\rho}\kappa_{,z}) \right], \quad (3.35b)$$

Para éste caso se ha omitido ϵ_0 ya que entraría en el numerador de la división en la cual se encuentra α_0 . Gracias a que es un término cuadrático $\epsilon_0^2 = 1$.

Es crucial destacar la distinción entre las variables $\{\kappa, K, k\}$, es decir:

$$\kappa^2 = e^{-2\alpha_0\phi}, \quad K = \frac{\Delta_\theta}{\Delta_r} e^{2k}, \quad k : \text{función métrica.}$$

Al emplear el cambio de variable compleja (8), se logra simplificar (3.35) a:

²²Nota: La obtención de k fue hecha para una dimensión, es decir, tomando en cuenta que sólo hay dependencia de λ , no de τ

$$k_{,\zeta} = \frac{\rho}{4f^2} \left[f_{,\zeta}^2 + (\epsilon_{,\zeta} - \psi\chi_{,\zeta})^2 + f \left(\frac{1}{\kappa^2} \chi_{,\zeta}^2 + \kappa^2 \psi_{,\zeta}^2 \right) + \left(\frac{2f}{\alpha_0 \kappa} \right)^2 \kappa_{,\zeta}^2 \right], \quad (3.36a)$$

gracias a que $\partial/\partial\bar{\zeta} = \overline{\partial/\partial\zeta}$, podemos obtener el conjugado.

$$k_{,\bar{\zeta}} = \frac{\rho}{4f^2} \left[f_{,\bar{\zeta}}^2 + (\epsilon_{,\bar{\zeta}} - \psi\chi_{,\bar{\zeta}})^2 + f \left(\frac{1}{\kappa^2} \chi_{,\bar{\zeta}}^2 + \kappa^2 \psi_{,\bar{\zeta}}^2 \right) + \left(\frac{2f}{\alpha_0 \kappa} \right)^2 \kappa_{,\bar{\zeta}}^2 \right]. \quad (3.36b)$$

Aunque hemos establecido las ecuaciones a resolver y las soluciones en términos de las variables correspondientes, este conjunto de igualdades sigue siendo notablemente complejo para resolverlo directamente. Sin embargo, al emplear las coordenadas esféricas, los cálculos se vuelven significativamente más sencillos.

Al realizar el cambio de coordenadas en (3.36a), (3.33) y (3.34), obtenemos las funciones métricas en términos de las funciones armónicas, en coordenadas esféricas.²³

Sea

$$\frac{\partial}{\partial\lambda^l} A = A_{,l} \quad (3.37)$$

Con base en esta definición, se alcanzan las siguientes expresiones finales.

Ecuaciones diferenciales para ω en X

$$\vec{x}(\omega) = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{bmatrix} \omega = \frac{L}{f^2} (\epsilon_{,l} - \psi\chi_{,l}) \begin{bmatrix} (1-y^2)\partial_y \\ -(x^2+1)\partial_x \end{bmatrix} \lambda^l, \quad (3.38a)$$

Ecuaciones diferenciales para A_φ en X

$$\vec{x}(A_\varphi) = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{bmatrix} A_\varphi = \frac{L}{2f\kappa^2} (\chi_{,l}) \begin{bmatrix} (1-y^2)\partial_y \\ -(x^2+1)\partial_x \end{bmatrix} \lambda^l - \frac{\omega}{2} (\psi_{,l}) \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{bmatrix} \lambda^l, \quad (3.38b)$$

Ecuaciones diferenciales para k en X

$$\partial_x k = k_0 \frac{1-y^2}{x^2+y^2} \left\{ x[(x^2+1)(\partial_x \lambda)^2 - (1-y^2)(\partial_y \lambda)^2] - 2y(x^2+1)(\partial_x \lambda)(\partial_y \lambda) \right\}, \quad (3.38c)$$

$$\partial_y k = k_0 \frac{x^2+1}{x^2+y^2} \left\{ y[(x^2+1)(\partial_x \lambda)^2 - (1-y^2)(\partial_y \lambda)^2] + 2x(1-y^2)(\partial_x \lambda)(\partial_y \lambda) \right\}, \quad (3.38d)$$

²³Para más detalle del cómo se transformaron dichas ecuaciones, ver en **Apéndice C**.

donde $k_0 = k_{0l}$, es decir usando $l = j$ en:

$$k_{0lj} = \frac{1}{4f^2} \left[f_{,l}f_{,j} + \epsilon_{,l}\epsilon_{,j} + \left(\psi^2 + \frac{f}{\kappa^2} \right) \chi_{,l}\chi_{,j} - 2\psi\epsilon_{,l}\chi_{,j} + f\kappa^2\psi_{,l}\psi_{,j} + \left(\frac{2f}{\alpha_0\kappa} \right)^2 \kappa_{,l}\kappa_{,j} \right]. \quad (3.39)$$

Nótese que en las ecuaciones diferenciales de k , sólo se está considerando un potencial $\lambda^l = \lambda$, si quisiéramos generalizar, es cuestión de hacer:

$$\partial\lambda\partial\lambda \rightarrow \partial\lambda^l\partial\lambda^j, \quad k_0 \rightarrow k_{0lj}$$

Generalmente las expresiones

$$k_{0lj}, \quad \frac{1}{f^2}(\epsilon_{,l} - \psi\chi_{,l}), \quad \frac{1}{2f\kappa^2}(\chi_{,l}), \quad \frac{1}{2}(\psi_{,l}), \quad (3.40)$$

terminan siendo constantes, en especial, la familia de soluciones que se usarán tendrán ésta característica.

Capítulo 4

Estudio de algunas soluciones conocidas y nuevas

La resolución de (3.31) y con ayuda de las ecuaciones diferenciales (3.38), es posible identificar diversas familias de soluciones singulares. *Las consideraciones más básicas desencadenan hallazgos de gran relevancia.*

4.1 Familias de soluciones

En los artículos [21] y [12] se han documentado varias familias de soluciones. De igual forma en [22] han obtenido familias de soluciones para n vectores de Killing, pero han usado la formulación de espacios de potenciales aplicada a una teoría particular¹. En esta sección, nos limitaremos a exponer sólo 2 clases de soluciones, las más sencillas. Para el propósito de ésta tesis, basta con tomar a la *segunda clase de soluciones*.

Primera clase de soluciones

Sea:

$$\{a_1, b_1, c_1\} \in \mathbb{R}, \quad \& \quad \{a_2, b_2, c_2\} = \{0, 0, 0\}, \quad (4.1a)$$

sustituyendo en (3.31) y resolviendo

$$b_1 \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \{a_1, c_2\} : \text{Arbitrarios}, \quad (4.1b)$$

por lo tanto

$$f = f_0 e^{(\lambda+\tau)}, \quad (4.1c)$$

$$\kappa = \kappa_0 e^{-(\lambda+\tau)}, \quad (4.1d)$$

$$\epsilon = 0, \quad \chi = 0, \quad \psi = 0. \quad (4.1e)$$

Donde las variables con subíndice 0, son constantes.

¹Es decir, la teoría que se está usando en este trabajo es un poco más general.

Segunda clase de soluciones

Sea:

$$\{a_1, b_1, c_1\} \in \mathbb{C}, \quad \& \quad \{a_2, b_2, c_2\} = \{0, 0, 0\}, \quad (4.2a)$$

sustituyendo en (3.31) y resolviendo se encuentran los casos

$$b_1 = 0, \quad c_1 : \text{Arbitrario} \quad \mathbf{Si:} \quad \Im(a_1) = 0 \quad \& \quad \Re(a_1) \neq 0, \quad (4.2b)$$

$$b_1 = 0, \quad a_1 = 0, \quad \& \quad c_1 : \text{Arbitrario}, \quad (4.2c)$$

$$b_1 = \pm(1+i)\Im(a_1) \quad \& \quad c_1 = 2ia_1 \quad \mathbf{Si:} \quad \Im(a_1) \neq 0 \quad \& \quad \Re(a_1) = 0, \quad (4.2d)$$

$$b_1 = -(1 \pm i)\Im(a_1) \quad \& \quad c_1 = -2ia_1 \quad \mathbf{Si:} \quad \Im(a_1) \neq 0 \quad \& \quad \Re(a_1) = 0, \quad (4.2e)$$

Al seleccionar (4.2d) de forma positiva y usando $a_1 = \frac{ib_0}{2}$, se llega a la segunda clase de soluciones de [15].

$$f = f_0, \quad (4.3a)$$

$$\kappa = \kappa_0 e^{(\lambda+\tau)}, \quad (4.3b)$$

$$\psi = \frac{2\sqrt{f_0}}{\kappa_0} e^{-(\lambda+\tau)} + \psi_0, \quad (4.3c)$$

$$\chi = 2\sqrt{f_0}\kappa_0 e^{(\lambda+\tau)} + \chi_0, \quad (4.3d)$$

$$\epsilon = 2f_0(\lambda + \tau) + Cte. \quad (4.3e)$$

Donde las variables con un subíndice 0, son constantes.

4.2 Soluciones conocidas

En el trabajo titulado *Exact rotating magnetic traversable wormhole satisfying the energy conditions* hecho por Matos, Miranda y Del águila [21] se llevó a cabo un estudio sobre un AG magnéticamente cargado. Se usó la solución $\lambda = \lambda_6(21f)$, la cual representa un monopolo magnético.

En dicho trabajo se mostró que dicho objeto es un AG navegable. Tomaron la segunda clase de soluciones, es decir, no se toma en cuenta el potencial gravitacional, siendo $f = f_0$.

Se obtuvieron las funciones métricas con ayuda de las ecuaciones diferenciales (3.38) y (4.3) consiguiendo

$$\omega = \frac{\lambda_0}{2f_0 L} \left[\frac{x(y^2 - 1)}{x^2 + y^2} \right], \quad (4.4)$$

$$A_\varphi = \frac{\sqrt{f_0}}{2\kappa_0} \omega e^{-\lambda_6}, \quad (4.5)$$

$$k = k_0 \frac{\lambda_0^2}{L^4} \left[\frac{(y^2 - 1) \{ 8x^2 y^2 (x^2 + 1) - (1 - y^2)(x^2 + y^2)^2 \}}{4(x^2 + y^2)^4} \right], \quad (4.6)$$

lo que permitió el análisis de la métrica. Utilizando la métrica obtenida y el 4-Tensor de potencial electromagnético, los introdujeron a (3.8) para comprobar que fuera solución de dichas ecuaciones. Al realizar éste procedimiento, se derivó una ecuación que establece las condiciones bajo las cuales estas soluciones son factibles. Dentro de estas condiciones, se determinó el valor de k_0 cuando se considera la teoría de Kaluza-Klein o la teoría de cuerdas en bajas energías, tanto para un *campo escalar fantasma* como para un *campo escalar dilatónico*. La ecuación es²:

$$\alpha_0^2(\lambda_0^2 - 8k_0) - 4\lambda_0^2\epsilon_0 = 0. \quad (4.7)$$

Al estudiar la hipersuperficie para $\{t, y\}$: *Constantes* y posteriormente inmersar dicha geometría en un espacio cilíndrico usando la dependencia con la coordenada esférica x , se logró graficar mediante soluciones numéricas la trayectoria de una partícula de prueba arrojando como resultado que la curva empezara en un espacio del universo y terminara en otro ó en su caso, iniciar en un universo y terminar en otro. Esta trayectoria nunca pasa por el origen (*singularidad*).

Además investigaron las condiciones de energía, las fuerzas de marea y las curvas geodésicas.

En la segunda parte del artículo, se llevo a cabo un análisis del movimiento rotatorio y se aplicó la aproximación para pequeñas rotaciones. Estas características se verán en el siguiente capítulo con más detenimiento, por el momento, nos limitaremos a presentar únicamente las funciones identificadas en el artículo mencionado.

4.3 Soluciones nuevas

En la siguiente sección, se expondrán nuevos hallazgos descubiertos. Se ha empleado la *segunda clase de soluciones*, dentro de la cual se destacan algunas características significativas:

- El potencial gravitatorio es constante.
- El invariante electromagnético $F^2 = 0$.
- Siempre hay rotación $\omega \neq 0$.
- Existe un potencial escalar presente en todos los casos y será determinado con base a algunas consideraciones.
- En todas las soluciones hay campo electromagnético presente.
- **Los términos (3.40), para ésta familia de soluciones, serán todos constantes.**

²En este trabajo, introdujeron todas las constantes de (4.81) dentro de k_0 , es por ello que la ecuación toma otra representación a las que se mostrarán más adelante en la tesis.

Mediante el uso de (4.3) y la aplicación de las soluciones (21) para un espacio potencial plano y de una dimensión, es decir, utilizando únicamente un potencial y su introducción en las ecuaciones diferenciales (3.38) para su posterior resolución, se han obtenido los siguientes resultados.

$\{\omega, A_\varphi, k\}$ para la solución λ_2

$$\omega = -\frac{\lambda_0}{f_0}y, \quad (4.8a)$$

$$A_\varphi = -\frac{\sqrt{f_0}}{2\kappa_0}\omega e^{-\lambda_2}, \quad (4.8b)$$

$$k = -k_0\frac{\lambda_0^2}{2}\ln\left[\frac{-(x^2 + y^2)}{x^2 + 1}\right], \quad (4.8c)$$

$\{\omega, A_\varphi, k\}$ para la solución λ_3

$$\omega = \frac{2\lambda_0}{f_0}y, \quad (4.8d)$$

$$A_\varphi = -\frac{\sqrt{f_0}}{2\kappa_0}\omega e^{-\lambda_3}, \quad (4.8e)$$

$$k = 2k_0\lambda_0^2\ln\left[\frac{-(x^2 + y^2)}{x^2 + 1}\right], \quad (4.8f)$$

$\{\omega, A_\varphi, k\}$ para la solución λ_5

$$\omega = \frac{\lambda_0}{f_0}\left[y + \frac{y(1 - y^2)}{x^2 + y^2}\right], \quad (4.8g)$$

$$A_\varphi = -\frac{\sqrt{\lambda_0}}{2\sqrt{f_0}\kappa_0}\left[\frac{y(x^2 + 1)}{x^2 + y^2}\right]e^{-\lambda_5}, \quad (4.8h)$$

$$k = -k_0\frac{\lambda_0^2}{L^2}\left[\frac{(1 - y^2)\left\{[x^2 + y^2][(1 - y^2) + 2(x^2 + y^2)] - 8x^2y^2(x^2 + 1)\right\}}{4(x^2 + y^2)^4}\right], \quad (4.8i)$$

$\{\omega, A_\varphi, k\}$ para la solución λ_6

$$\omega = \frac{\lambda_0}{2f_0L}\left[\frac{x(y^2 - 1)}{x^2 + y^2}\right], \quad (4.8j)$$

$$A_\varphi = \frac{\sqrt{f_0}}{2\kappa_0}\omega e^{-\lambda_6}, \quad (4.8k)$$

$$k = -k_0\frac{\lambda_0^2}{L^4}\left[\frac{(1 - y^2)\{8x^2y^2(x^2 + 1) - (1 - y^2)(x^2 + y^2)^2\}}{4(x^2 + y^2)^4}\right], \quad (4.8l)$$

$\{\omega, A_\varphi, k\}$ para la solución λ_7

$$\omega = \frac{2\lambda_0 L}{f_0} xy, \quad (4.8m)$$

$$A_\varphi = \frac{\sqrt{f_0}}{2\kappa_0} \omega e^{-\lambda_7}, \quad (4.8n)$$

$$k = 2\kappa_0 \lambda_0^2 \ln \left[\frac{-(x^2 + y^2)}{x^2 + 1} \right], \quad (4.8ñ)$$

$\{\omega, A_\varphi, k\}$ para la solución λ_8

$$\omega = -\frac{\lambda_0 L}{f_0} x, \quad (4.8o)$$

$$A_\varphi = -\frac{\sqrt{f_0}}{2\kappa_0} \omega e^{-\lambda_8}, \quad (4.8p)$$

$$k = k_0 \frac{\lambda_0^2}{2} \ln \left[\frac{-(1 - y^2)}{x^2 + 1} \right]. \quad (4.8q)$$

Estos son resultados obtenidos con base a las λ 's conocidas, en cuanto a las nuevas, las funciones métricas serán:

$\{\omega, A_\varphi, k\}$ para la solución λ_{N1}

$$\omega = \frac{\lambda_0 L^2}{2f_0} \left[x^2(1 - y^2) - y^2 \right], \quad (4.9a)$$

$$A_\varphi = -\frac{\sqrt{f_0}}{2\kappa_0} \omega e^{-\lambda_{N1}}, \quad (4.9b)$$

$$k = -k_0 \lambda_0 f_0 \omega, \quad (4.9c)$$

$\{\omega, A_\varphi, k\}$ para la solución λ_{N2}

$$\omega = \frac{\lambda_0 L^2}{f_0} [Lxy] (x^2 + 1) [1 - y^2], \quad (4.9d)$$

$$A_\varphi = -\frac{\sqrt{f_0}}{2\kappa_0} \omega e^{-\lambda_{N2}}, \quad (4.9e)$$

$$k = -k_0 \frac{\lambda_0^2 L^4}{4} \left[y^2 + (1 - y^2) \left\{ x^2(x^2 + 1)(10y^2 - 1) + y^2 - x^2(x^2 y^2 + 1) \right\} \right]. \quad (4.9f)$$

En esta investigación, también se llevó a cabo la correspondiente comprobación de que las métricas (2.6) y 4-Potenciales electromagnéticos (3.9) correspondientes a $\lambda_5, \lambda_{N1}, \lambda_{N2}$ fueran soluciones a las ecuaciones (3.8). Para ello se usó³:

³Esta propuesta se tomo de [21].

$$\phi = -\frac{\lambda}{\alpha_0}. \quad (4.10)$$

Por lo tanto, introduciendo todo esto en las ecuaciones de campo, se obtiene la siguiente expresión que dictaminan la veracidad de la solución obtenida

Ecuación de verificación λ_5

$$\alpha_0^2(4k_0 + 1) - 4\epsilon_0 = 0. \quad (4.11)$$

Cuyos valores de k_0 están dictaminados, de igual forma, dando valores numéricos, se obtiene lo siguiente:

Cuadro 4.1: Valores de k_0

α_0^2	Dilatonic fiel ($\epsilon = 1$)	Phantom fiel ($\epsilon = -1$)
1	3/4	-5/4
3	1/12	-7/12
4	0	-1/2
$n \geq 5$	$(4 - n)/4n$	$-(4 + n)/n$

Se tiene que hacer notar algo de suma importancia, si tomamos un valor para $k_0 > 0$, es decir **campo escalar dilatónico**, y sustituimos en $k(x, y)$, podemos observar que *para la mayoría de los resultados* $k(x, y) < 0$, gracias a que $y^2 \in [0, 1]$. Caso contrario para $k_0 < 0$ (**campo escalar fantasma**), entonces $k(x, y) > 0$.⁴ Es decir:

$$\begin{aligned} \text{Dilatón} &\Rightarrow k_0 > 0 \Rightarrow k(x, y) < 0, \\ \text{Fantasma} &\Rightarrow k_0 < 0 \Rightarrow k(x, y) > 0. \end{aligned}$$

4.4 Combinaciones

Al elegir un valor específico para λ y sustituirlo en las ecuaciones diferenciales (3.38), podemos determinar sus funciones métricas correspondientes $\{f, \omega, k\}$ al igual que los elementos del 4-potencial, en específico para A_φ , lo que conduce a una solución particular de las ecuaciones (3.8). Como se ha dicho previamente, en [21] se ha obtenido la

⁴Esto es válido para los valores con $\alpha_0^2 < 4$, es decir, *la teoría de Kaluza Klein es la máxima posible para un espacio asintóticamente plano.*

solución relacionada a λ_6 . En la sección anterior se han mostrado las métricas correspondientes a las otras λ 's. Gracias a que se extendió la segunda clase de soluciones, podemos obtener una nueva solución con una combinación lineal $\sum_l \lambda^l$, ya que esta suma satisface la ecuación de Laplace plana.

Ahora, centrémonos en describir cómo afectan estas combinaciones a las funciones $\{A_\varphi, \omega, k\}$. Tanto para la primera función, como para la segunda⁵, la combinación no produce un cambio significativo, ya que al tratarse de ecuaciones diferenciales (3.38b), (3.38a) sin términos cruzados para las *lambda*'s, la solución de una combinación, será la combinación de las funciones, es decir (se usará la notación siguiente)

$$A_{\varphi(\lambda_n+\lambda_m)} = A_{\varphi(\lambda_n)} + A_{\varphi(\lambda_m)}, \quad (4.12)$$

$$\omega_{(\lambda_n+\lambda_m)} = \omega_{(\lambda_n)} + \omega_{(\lambda_m)}, \quad (4.13)$$

donde el término (λ_n) significará que la función es correspondiente a λ_n .

Para la función k , se observa una diferencia significativa. Como se puede apreciar en la ecuación diferencial (25), aparecen términos cuadráticos y cruzados, si se toman en cuenta dos potenciales. Es posible aislar los términos cuadráticos de manera independiente, por lo que se puede resolver de manera separada las ecuaciones diferenciales. Sin embargo, la misma separación no es factible para los términos cruzados. Por ende, cada combinación concebible de variables, surgirá el término cruzado correspondiente $k_{(\lambda_n)(\lambda_m)}$.

$$k_{(\lambda_n+\lambda_m)} = k_{(\lambda_n)} + k_{(\lambda_m)} + k_{(\lambda_n)(\lambda_m)}. \quad (4.14)$$

En este trabajo se estudiaron las siguientes combinaciones:

$\{\omega, A_\varphi, k\}$ para la solución $\tau + \lambda = \lambda_5 + \lambda_6$

$$\omega = \frac{1}{f_0} \left[\tau_0 y + \frac{(1-y^2)(L\tau_0 y - \lambda_0 x)}{L(x^2 + y^2)} \right], \quad (4.15a)$$

$$A_\varphi = \frac{1}{2\kappa_0 \sqrt{f_0}} \frac{[\lambda_0(1-y^2)x - \tau_0(x^2 + 1)Ly]}{L(x^2 + y^2)} e^{-(\lambda+\tau)}, \quad (4.15b)$$

$$k = k_{(\lambda_5)} + k_{(\lambda_6)} - \left[\frac{k_0}{L^4} \frac{8xy(x^2 + 1)(x^2 - y^2)L\lambda_0\tau_0(1 - y^2)}{4(x^2 + y^2)^4} \right], \quad (4.15c)$$

⁵Hay que tener un poco de cuidado cuando hay de por medio exponenciales, ya que los argumentos de dichos exponenciales se suman pero el coeficiente que acompaña a la exponencial no será el producto, sino la suma con el de la otra solución. Ver (4.15b) y (4.15e)

$\{\omega, A_\varphi, k\}$ para la solución $\lambda + \tau = \lambda_{N1} + \lambda_{N2}$

$$\omega = \frac{1}{f_0} \left[\frac{\lambda_0 L^2}{2} \left(x^2(1-y^2) - y^2 \right) + \tau_0 L^2 (Lxy)(x^2+1)(1-y^2) \right], \quad (4.15d)$$

$$A_\varphi = -\frac{\sqrt{f_0}}{2\kappa_0} \omega e^{-(\lambda+\tau)}, \quad (4.15e)$$

$$k = k_{(\lambda_{N1})} + k_{(\lambda_{N2})} - \left[\frac{k_0 L^2}{4} 8xy(x^2+1)L\lambda_0\tau_0(1-y^2) \right]. \quad (4.15f)$$

Hay que hacer notar que para las k 's, la constante k_0 que corresponde a λ_5 , λ_6 y al elemento derivado de los términos cruzados, son iguales. Lo único que cambia es $\tau_0 \neq \lambda_0$.

Al combinar las soluciones, **no se modifica la ecuación de veracidad de las soluciones** (4.11), por lo que ésta ecuación es para esta familia de soluciones (4.2).

Es fundamental ejercer con cuidadosa consideración el seleccionar cada caso con base a la información proporcionada en la tabla (4.1), dado que k_0 dictaminará el signo de $k(x, y)$ y eso tiene implicaciones significativas en el significado físico de la solución pero no en el comportamiento *asintóticamente plano del espacio*.

De acuerdo con las expresiones (4.8) y (4.15), observamos que en las soluciones $\{\lambda_5, \lambda_6, \lambda_5 + \lambda_6\}$:

$$\lim_{r \rightarrow \pm\infty} k(x, y) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} k(x, y) = 0, \quad (4.16)$$

sin importar el signo de $k(x, y)$. En cambio para la función métrica $k(x, y)$ derivadas de las soluciones nuevas $\{\lambda_{N1}, \lambda_{N2}, \lambda_{N1} + \lambda_{N2}\}$, se tiene que analizar con sumo cuidado. Tomando la aproximación $y \ll x$ y omitiendo términos cruzados entre x y y y menores a la potencia mayor de x

k para la solución λ_{N1}

$$k(x, y) \approx -k_0 \frac{\lambda_0^2 L^2}{2} x^2, \quad (4.17a)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} k(x, y) = \begin{cases} +\infty & \text{Si } k_0 < 0 \\ -\infty & \text{Si } k_0 > 0 \end{cases}, \quad (4.17b)$$

k para la solución λ_{N2}

$$k(x, y) \approx -k_0 \frac{\lambda_0^2 L^4}{4} [10y^2 - 9y^4 - 1] x^4,$$

Resolviendo $(10y^2 - 9y^4 - 1) = 0$ y estudiando el signo de cada región, vemos que

$$10y^2 - 9y^4 - 1 \begin{cases} \leq 0 & \text{Si } y \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}] \\ > 0 & \text{Si } y \in [-1, -\frac{1}{3}] \cup (\frac{1}{3}, 1] \end{cases}. \quad (4.18)$$

Capítulo 5

Análisis y dictamen de agujeros de gusano

En el presente escrito, se llevará a cabo un análisis detallado de 5 soluciones, 3 *independientes*: $\{\lambda_5, \lambda_{N1}, \lambda_{N2}\}$ y 2 *combinaciones*: $(\lambda_5 + \lambda_6)$, $(\lambda_{N1} + \lambda_{N2})$, donde $f_0 = \kappa_0 = 1$. En cada instancia, se examinará meticulosamente si las condiciones mencionadas en el capítulo 2 son *agujeros de gusano navegables*.

5.1 Comportamiento de los espacios

Previo a cualquier consideración, es imperativo estudiar el comportamiento de los espacios resultantes de las soluciones identificadas. Es fundamental comenzar por examinar la actuación del espacio cuando $x \rightarrow \pm\infty$, ya que $Lx = r - l_1$ está estrechamente relacionado con la *norma del radio vector* en coordenadas de Boyer-Linquist. El “extra” de éstas coordenadas es que se puede estudiar de mejor manera la física de fenómenos.

Los invariantes del tensor de Riemman $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ son muy importantes para determinar algunas cosas como *la curvatura*. Para ver si se cumple el comportamiento asintótico, usaremos el escalar de Ricci para cada una de las 5 soluciones.

Escalar de Ricci $R = g^{\mu\nu} R^\sigma_{\mu\sigma\nu}$ para λ_5

$$R = \frac{(4k_0 + 1)\lambda_0^2}{2L^4(x^2 + y^2)^4} e^{-k(x,y)} [x^2(x^2 + 1 - 3y^2) + y^2], \quad (5.1a)$$

Escalar de Ricci $R = g^{\mu\nu} R^\sigma_{\mu\sigma\nu}$ para $\tau + \lambda = \lambda_5 + \lambda_6$

$$R = \frac{(4k_0 + 1)}{2L^6(x^2 + y^2)^4} e^{-k(x,y)} \left[\lambda_0^2 \{x^2(1 + 3y^2) + y^2(1 - y^2)\} \right. \\ \left. + \tau_0^2 L^2 \{x^2(x^2 + 1 - 3y^2) + y^2\} + 4xy\lambda_0\tau_0(x^2 - y^2) \right], \quad (5.1b)$$

Escalar de Ricci $R = g^{\mu\nu} R^{\sigma}_{\mu\sigma\nu}$ para λ_{N1}

$$R = \frac{(4k_0 + 1)}{2} e^{-k(x,y)} [\lambda_0^2], \quad (5.1c)$$

Escalar de Ricci $R = g^{\mu\nu} R^{\sigma}_{\mu\sigma\nu}$ para λ_{N2}

$$R = \frac{(4k_0 + 1)}{2} e^{-k(x,y)} \lambda_0^2 L^2 [(1 - y^2) + x^2(1 + 3y^2)], \quad (5.1d)$$

Escalar de Ricci $R = g^{\mu\nu} R^{\sigma}_{\mu\sigma\nu}$ para $\lambda + \tau = \lambda_{N1} + \lambda_{N2}$

$$R = \frac{(4k_0 + 1)}{2} e^{-k(x,y)} \left[\lambda_0^2 + \tau_0^2 L^2 \{ (1 - y^2) + x^2(1 + 3y^2) \} + 4xyL\lambda_0\tau_0 \right]. \quad (5.1e)$$

Con base en los escalares de curvatura (5.1) y el comportamiento de $k(x, y)$ (4.16), se evidencia que para las soluciones $\{\lambda_5, \lambda_6, \lambda_5 + \lambda_6\}$ **los espacios asociados en cuestión son asintóticamente planos, sin importar la naturaleza del campo escalar.** Debido a

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-2k(x,y)} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} R = 0.$$

Para el caso de λ_{N1} , usamos la aproximación (4.17a) y (5.1c) se aprecia que *el comportamiento del espacio es asintóticamente plano considerando un campo escalar fantasma.*

Una particularidad relevante ocurre tomando en cuenta a λ_{N2} , cuyo espacio correspondiente *es asintóticamente plano en la regiones $y \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ suponiendo un campo escalar dilatónico.*

En relación a las singularidades, en el caso de (5.1b), se tiene **una singularidad de anillo**¹, similar a la encontrada en [21], donde al establecer $\lambda_0 = 0$ o $\tau_0 = 0$, se recupera (5.1a) o se alcanza el resultado documentado en dicho artículo. Sin embargo, resulta notable que en el caso de (5.1c), **no existan singularidades**, es decir, el espacio es *regular* en todo punto con $k_0 < 0$. No obstante, para λ_{N2} , **no existen singularidades en la región mencionada anteriormente.**

5.2 Geometría de los agujeros de gusano.

Estudiar la geometría de un agujero de gusano o un agujero negro consta de **analizar hipersuperficies**, en este caso, las curvas que dictaminan la 'geometría' $\rho(z)$ de un espacio cilíndrico. De los resultados del capítulo 4, se examinará una hipersuperficie con t, y constantes. La métrica (2.6) es la más general posible descrita en las coordenadas esferoidales. Si hacemos a $t = t_0$, $y = y_0$, $f_0 = 1$ y sustituimos dichos valores en (2.6), el elemento de línea se transforma a

¹Para más detalle, ver [21]

$$ds^2 = \left[\frac{(x^2 + y_0^2)e^{2k(x, y_0)}}{x^2 + 1} \right] dx^2 + [L^2(x^2 + 1)(1 - y_0^2) - \omega(x, y_0)^2] d\varphi^2. \quad (5.2)$$

El siguiente paso es *sumergir* ésta hipersuperficie en un espacio cilíndrico para poder analizar la forma de $\rho(z)$. Para ello se parametrizan las coordenadas $\{\rho, z\}$ en función de (x, y_0) , es decir:

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\rho^2 + dz^2 + \rho^2 d\varphi^2 \\ &= \left[\left(\frac{d\rho}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right] dx^2 + \rho(x, y_0)^2 d\varphi^2. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Al igualar (5.3) con (5.2), se obtienen las siguientes equivalencias

$$\rho(x, y_0)^2 = [L^2(x^2 + 1)(1 - y_0^2) - \omega(x, y_0)^2], \quad (5.4a)$$

$$\left(\frac{d\rho}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 = \frac{(x^2 + y_0^2)}{x^2 + 1} e^{2k(x, y_0)}. \quad (5.4b)$$

Las ecuaciones (5.4), no son tan sencillas de resolver analíticamente, en cambio si se hace numéricamente, es posible obtener las curvas deseadas.

En la resolución numérica se usó la condición inicial $z(0) = 0$, es decir, la garganta se localiza en aquél punto.

Siendo así, con ayuda de las gráficas que se mostrarán a continuación se puede ver más claramente que

$$y \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_{min} = \rho(z = 0) \rightarrow L.$$

Solución 1 (λ_5)

Si consideramos la solución relacionada a λ_5 y la introducimos en las ecuaciones (5.4), podemos obtener las curvas que describen la geometría del objeto cosmológico de manera numérica. En la figura (5.1a) es posible observar dichas curvas usando $y_0 = 0.9$, $\lambda_0 = \{1/10, 1\}$ y $k_0 = \{-5/4, 3/4\}$, respectivamente. En esta gráfica se comparan dos potenciales escalares: un **campo escalar fantasma** ($k_0 < 0 \Rightarrow k(x, y) > 0$) y un **campo escalar dilatónico** ($k_0 > 0 \Rightarrow k(x, y) < 0$) y diferentes ordenes de magnitud para el coeficiente λ_0 ². La diferencia primordial entre ellos radica en el radio mínimo posible que puede alcanzar la curva, pero, *prácticamente son idénticas*. No olvidemos que entre esas dos opciones hay que elegir una con base a la **Condición C**.

²Cuando se modifica únicamente k_0 y manteniendo $\lambda_0 = 1/10$, los perfiles son iguales.

Es importante destacar que esta curva representa algo trascendental. Consideremos que una partícula de prueba cuya posición radial ρ varía en función de la altitud z , siguiendo las curvas previamente mencionadas en el párrafo anterior, podemos ver que la partícula inicia en un universo ($\rho > 0$) y a medida que desciende, atraviesa una transición hacia otro universo ($\rho < 0$). Es decir, el cambio de signo en el radio marca el paso de un universo a otro.

Combinación 1 ($\lambda_5 + \lambda_6 = \tau + \lambda$)

Realizando los mismos cálculos y graficación para la combinación 1 conformada por el nuevo tipo de agujero negro (λ_5) con aquel que ya ha sido descrito en la literatura científica [21] (λ_6), se observa en la gráfica (5.2a) que el comportamiento geométrico del AG es notablemente similar al resultado previamente obtenido y reportado en el artículo mencionado.

En la figura (5.2a) se usó $\lambda_0 = 0.1L$, $\tau_0 = 0.1$, $k_0 = -7/12$ y en (5.2c) $\lambda_0 = 0.7L$, $\tau_0 = 0.3$, $k_0 = 3/4$, evidenciando que el cambio en la constante k_0 , ya sea *positiva* o *negativa* y el variar las constantes λ_0, τ_0 , **no incide de manera significativa en los resultados, por lo tanto, escoger un AG fantasma o un AG dilatónico es, resumidamente igual.**

En cambio, en la figura (5.2b) y (5.2d) se logran visualizar la geometría de los AG en 3 dimensiones para un *campo escalar fantasma* y un *campo escalar dilatónico*, sucesivamente. Se usan coordenadas cartesianas para distinguir el comportamiento del objeto cuando se varía y_0 . La 'malla' de color azul es para $y_0 = 0.25$ y la malla de color rojo corresponde a $y_0 = 0.90$, en ambas figuras.

En cuanto a las magnitudes de las constantes $\{\lambda_0, \tau_0\}$, es del orden de $\{10^0, 10^{-1}\}$ respectivamente, ello para tener un *peso* equivalente y examinar la influencia de ambas soluciones.

Solución 2 (λ_{N1})

Hemos observado previamente que en la *solución 1* y la *combinación 1*, el comportamiento de $\rho(z)$ no es distinto en función del signo de $k(x, y)$. En esta ocasión, *se presenta un comportamiento parecido, pero la forma del AG cambia un poco*. En la figura (5.3a) se aprecia que las curvas muestran un ρ_{min} común en $z = 0$, pero su forma varía a medida que se alejan de dicho punto para $k_0 = \{3/4, -5/4\}$, pero a diferencia de (5.1a), $\lambda_0 = 1/10$ no se modifica en cada caso. **Esto no ocurre escogiendo $k_0 = \{1/12, -7/12\}$, las curvas $\rho(z)$ se vuelven parecidas.**

En cuanto al comportamiento de la geometría del AG para distintos valores de y_0 , podemos apreciar en la gráfica (5.3b) que nuevamente el valor mínimo de ρ tiende a L conforme y_0 tiende a 0. El comportamiento de las curvas es similar a las de la figura (5.2a).

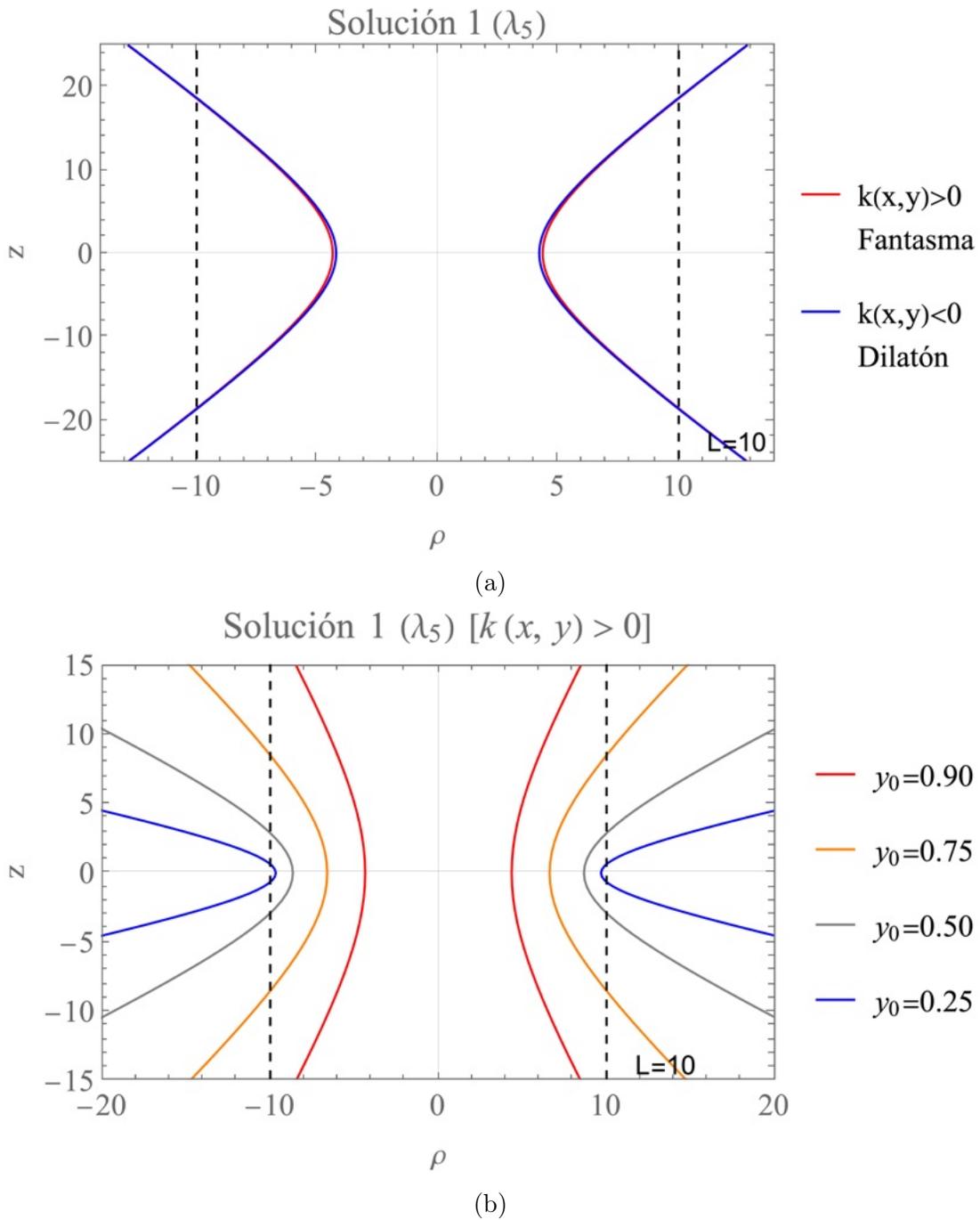


Figura 5.1. **a)**: Comparación de las curvas $\rho(z)$ para un *campo escalar fantasma* y un *campo escalar dilatónico* usando la solución relacionada con λ_5 . Los valores usados son: $\lambda_0 = \{1/10, 1\}$, $k_0 = \{-5/4, 3/4\}$ respectivamente, $y_0 = 0.9$, $f = 1$, $L = 10$. **b)**: Geometría del agujero de gusano correspondiente a la solución λ_5 . Se usaron los valores $\lambda_0 = 1/10$, $f = 1$, $k_0 = -7/12$, $L = 10$ y distintos y_0 para mostrar el comportamiento de las curvas $\rho(z)$. También se insertaron 2 líneas punteadas de color negro en $z(0) = \pm L$. *Nota: Se usó $k(x, y) > 0$ para centrarnos en el estudio de los fenómenos que cumplen la condición C.*

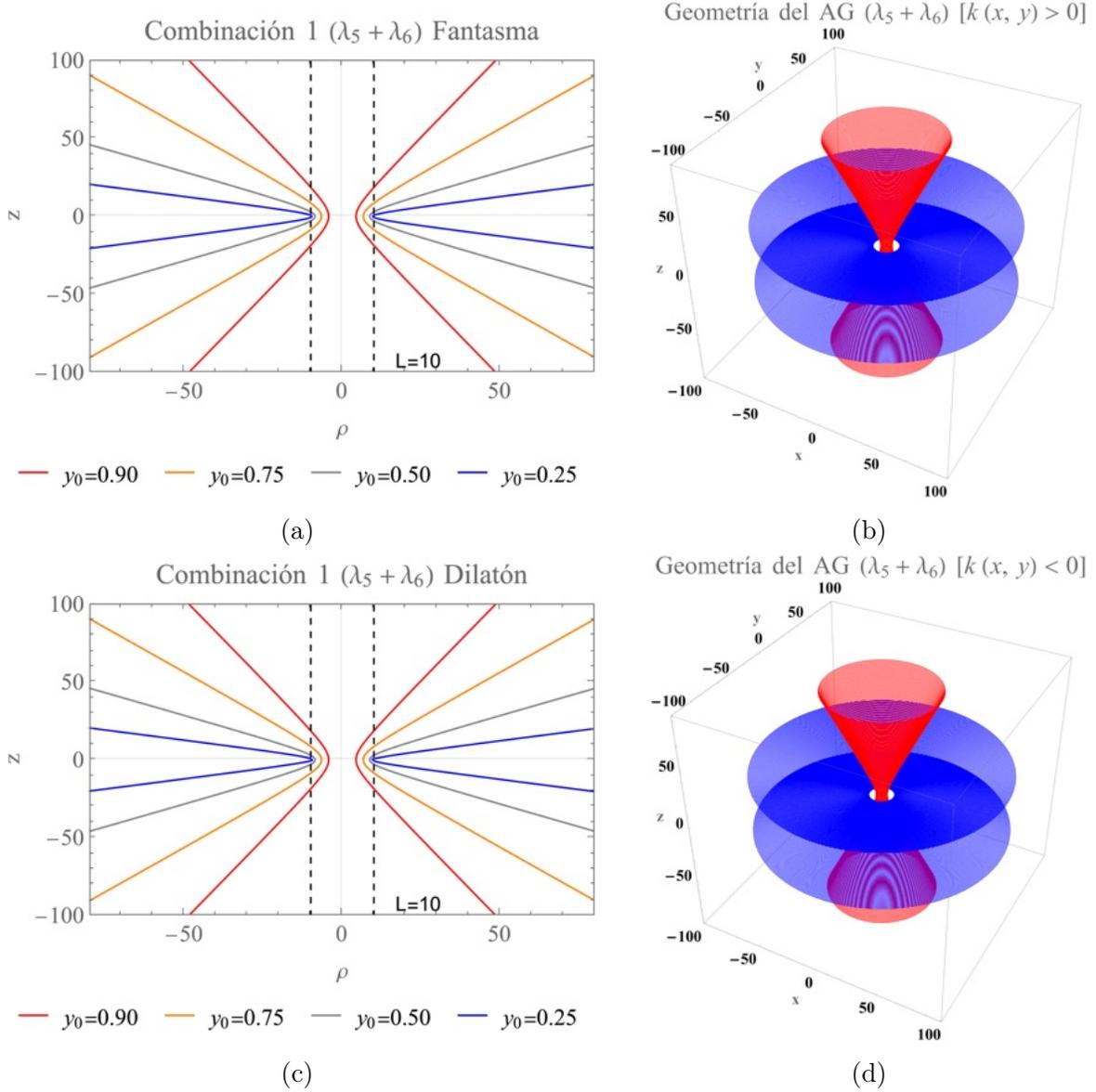


Figura 5.2. **a)**: Geometría del *agujero de gusano fantasma* correspondiente a la combinación 1 ($\tau + \lambda = \lambda_5 + \lambda_6$). Se usaron los valores $\lambda_0 = L\tau_0$, $\tau_0 = 1/10$, $f = 1$, $k_0 = -7/12$, $L = 10$ y distintos y_0 para mostrar el comportamiento de las curvas $\rho(z)$. También se insertaron 2 líneas punteadas de color negro en $z(0) = \pm L$. **b)**: Estructura del AG-F agregando la coordenada $\varphi \in [0, 2\pi)$ para obtener la malla en coordenadas cartesianas. **c)**: Geometría del *agujero de gusano dilatónico* correspondiente a la combinación 1 ($\tau + \lambda = \lambda_5 + \lambda_6$). Se usaron los valores $\lambda_0 = 0.7L$, $\tau_0 = 3/10$, $f = 1$, $k_0 = 3/4$, $L = 10$ y distintos y_0 para mostrar el comportamiento de las curvas $\rho(z)$. También se insertaron 2 líneas punteadas de color negro en $z(0) = \pm L$. **d)**: Estructura del AG-D agregando la coordenada $\varphi \in [0, 2\pi)$ para obtener la malla en coordenadas cartesianas.

Solución 3 (λ_{N2})

En anteriores ocasiones, se ha observado que la geometría de los AG exhiben un comportamiento bien definido, inclusive se ha evidenciado que las curvas atraviesan de un universo a otro. Sin embargo, la solución λ_{N2} difiere con dichas aseveraciones.

En la figura (5.4a) se compara el comportamiento de las curvas al elegir a k_0 *positiva* ó *negativa* y distintos valores de λ_0 . Se optó en hacer una pequeña variación del orden de magnitud de dicha constante ya que ***si consideramos a λ_0 igual en ambos casos, el comportamiento es idéntico entre ambos campos escalares, pero si se hace un poco más grande, deja de formarse un AG.*** Esto es debido a que las curvas $\rho(z)$ se vuelven complejas. No obstante, se observa una transición en la cual se abre una ventana de oportunidad, permitiendo la creación del AG³ *para ciertos valores de $y = \cos \theta$.* **Veáse en la figura (5.4b) .**

Combinación 2 ($\lambda + \tau = \lambda_{N1} + \lambda_{N2}$)

Al considerar la *combinación 2* ($\lambda + \tau = \lambda_{N1} + \lambda_{N2}$), es necesario prestar atención al comportamiento singular de la *nueva solución 2*, dado que su geometría difiere un tanto de las observadas anteriormente. Se han identificado el orden de magnitud para la constante τ_0 que resultan en la formación de un *pseudo agujero de gusano*, el cual solo es 'atravesable' bajo condiciones particulares de $y = \cos \theta$. Por lo tanto, a ciertos ángulos, será posible navegar en dicho AG.

Sin embargo, *al reducir dicho parámetro, el agujero de gusano se estabiliza, manifestando un comportamiento parecido a las soluciones previamente analizadas.* En este contexto, el comportamiento de la *Combinación 2* está influenciado por los pesos asignados (λ_0, τ_0), no por la elección del campo escalar.

La figura (5.5a) ilustra el comportamiento de las curvas que determinan la geometría cuando se usan las los siguientes ordenes de magnitud: $\{\lambda_0 \approx 1/10^3, \tau_0 \approx 7/10^4\}$, es decir, el peso que tiene λ_{N2} sobre la solución general, es mayor que λ_{N1} , dando lugar a la formación de un *pseudo AG*. Específicamente, los ángulos propicios para la travesía del agujero de gusano coinciden con los asociados a la solución previamente mencionada $\theta \approx \{0, \pi/2, \pi\}$. Por otro lado, al asignar un peso menor a la solución λ_{N1} , del orden de $\{\lambda_0 \approx 1/10^3, \tau_0 \approx 0.7/10^4\}$, la solución alcanza una mayor estabilidad.

5.3 Fuerzas de marea

En el **Capítulo 1** se presentó la desigualdad (2.28) la cual es una consecuencia directa de la **condición E**. Con el propósito de examinar los casos cuando las *fuerzas de marea* son insignificantes, se recurrirá a gráficas. Los escenarios para la *no destrucción del astronauta* dependerán en principal medida del ángulo θ .

³En las soluciones anteriores ésto no ocurre.

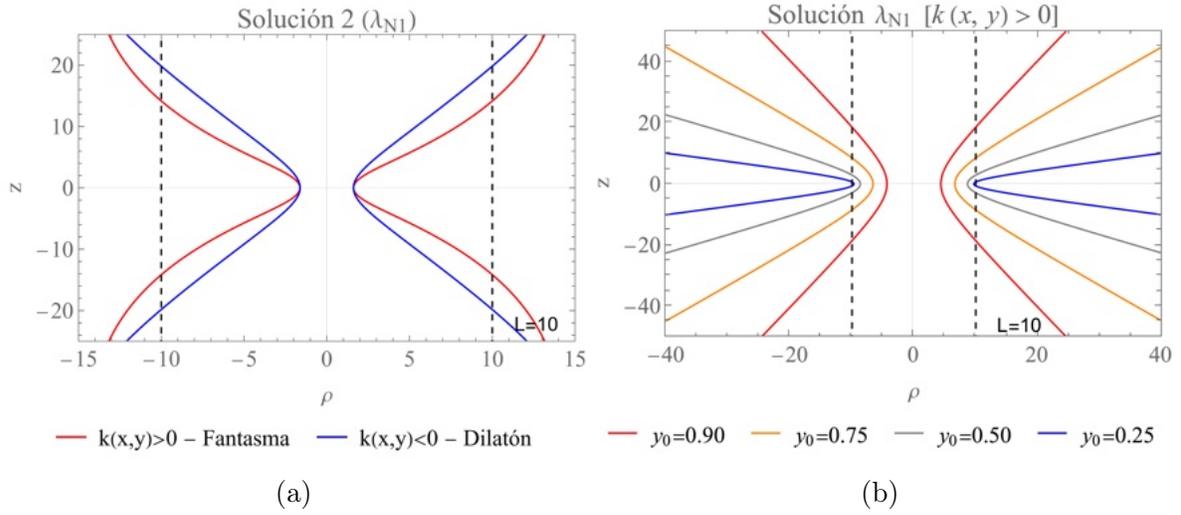


Figura 5.3. **a)**: Comparación de las curvas $\rho(z)$ para un *campo escalar fantasma* y un *campo escalar dilatónico* usando la solución relacionada con λ_{N1} . Los valores usados son: $\lambda_0 = 1/10$, $y_0 = 0.9$, $f = 1$, $k_0 = \{-5/4, 3/4\}$ respectivamente, $L = 10$. **b)**: Geometría del agujero de gusano correspondiente a la solución λ_{N1} . Se usaron los valores $\lambda_0 = 1/10^3$, $f = 1$, $k_0 = -7/12$, $L = 10$ y distintos y_0 para mostrar el comportamiento de las curvas $\rho(z)$. También se insertaron 2 líneas punteadas de color negro en $z(0) = \pm L$.

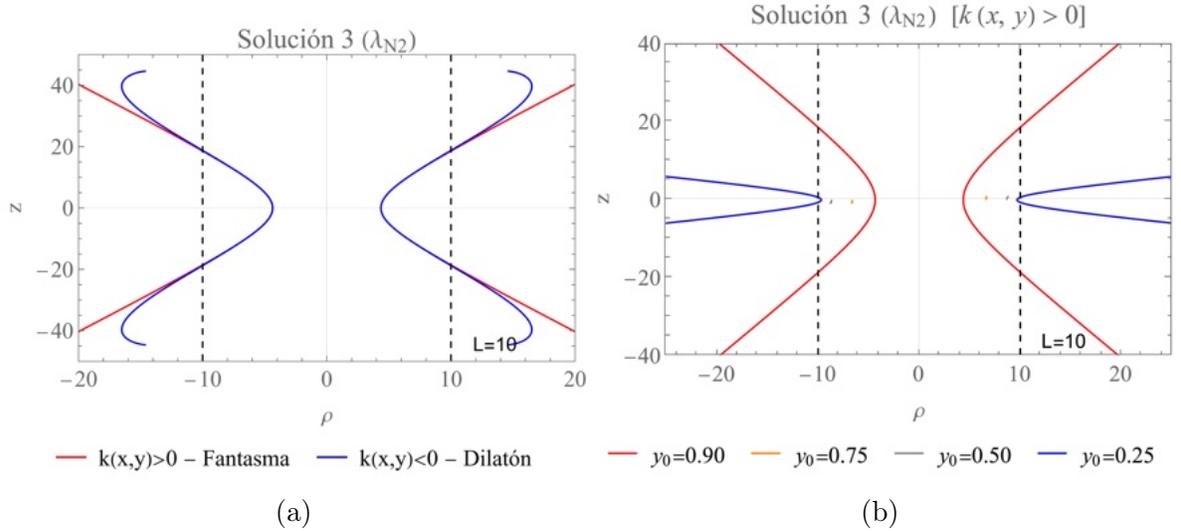


Figura 5.4. **a)**: Comparación de las curvas $\rho(z)$ para un *campo escalar fantasma* y un *campo escalar dilatónico* usando la solución relacionada con λ_{N2} . Los valores usados son: $y_0 = 0.9$, $f = 1$, $\lambda_0 = \{0.1/10^4, 7/10^4\}$, $k_0 = \{-5/4, 3/4\}$ respectivamente, $L = 10$. Se logra ver que es muy volátil la solución con base a la constante λ_0 . **b)**: Geometría del AG para la solución λ_{N2} usando los valores de $\lambda_0 = 1/10^4$, $f = 1$, $k_0 = -7/12$, $L = 10$. Se puede observar que atravesar el agujero de gusano es válido para $\theta \approx \{0, \pi/2, \pi, \pi\}$.

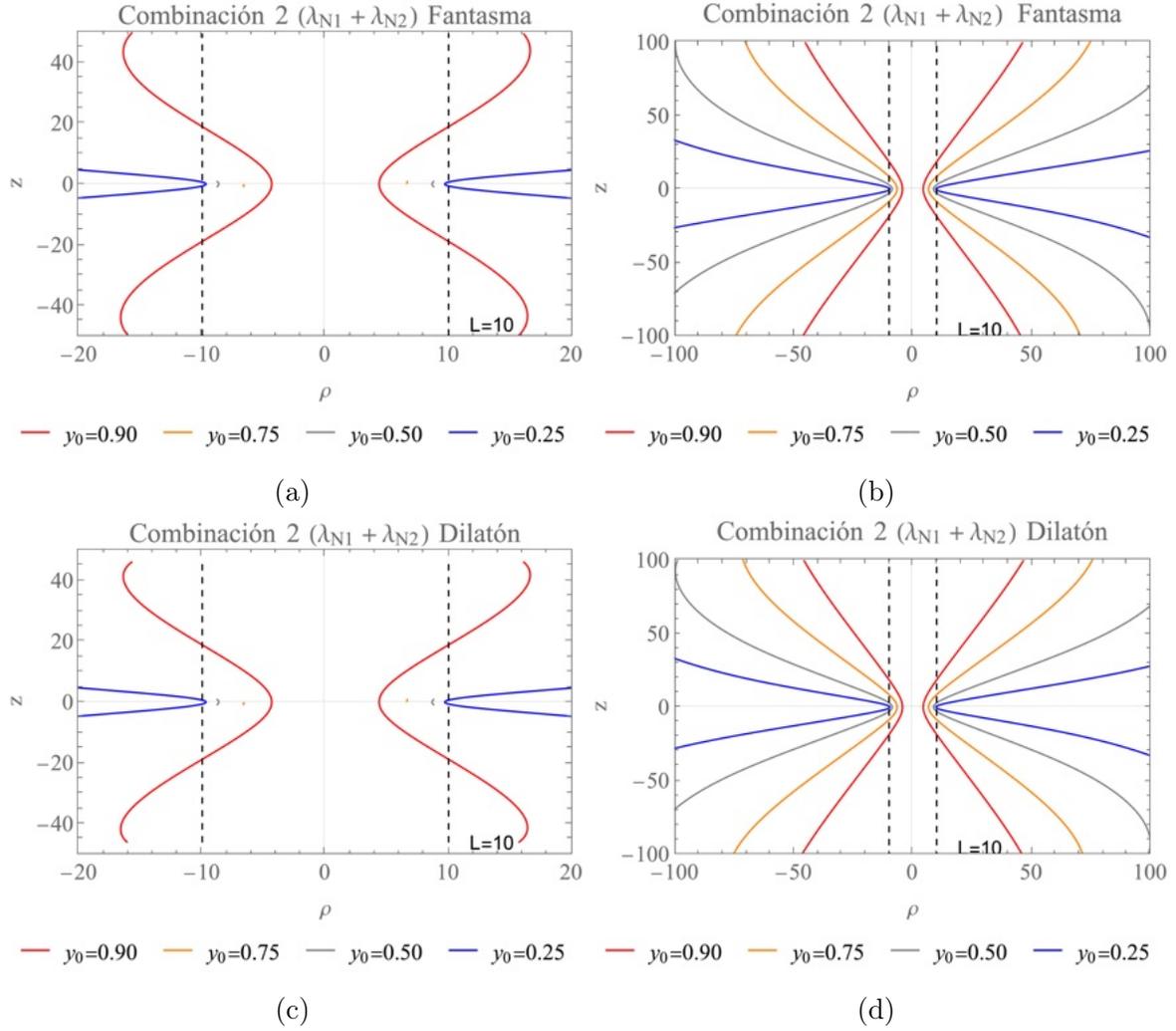


Figura 5.5. **a)**: Geometría del *agujero de gusano fantasma* correspondiente a la combinación $(\lambda + \tau = \lambda_{N1} + \lambda_{N2})$, nuevamente, mostrando que sólo para los valores $y_0 = \{0.25, 0.75\} \Rightarrow \theta \approx \{0, \pi/2\}$ se 'abre' una ventana para cruzar el *pseudo AG-F*. Se usaron los valores $\lambda_0 = 1/10^3$, $\tau_0 = 7/10^4$, $f = 1$, $k_0 = -7/12$, $L = 10$. **b)**: Al disminuir la influencia de λ_{N2} , se estabiliza el AG-F y se obtienen las curvas $\rho(z)$ bien comportadas como en las soluciones anteriores. Los valores $\lambda_0 = 1/10^3$, $\tau_0 = 0.6/10^4$, $f = 1$, $k_0 = -7/12$, $L = 10$. **c)**: Geometría del *agujero de gusano dilatónico* correspondiente a la combinación 2 $(\lambda + \tau = \lambda_{N1} + \lambda_{N2})$, nuevamente, mostrando que sólo para los valores $y_0 = \{0.25, 0.75\} \Rightarrow \theta \approx \{0, \pi/2\}$ se 'abre' una ventana para cruzar el *pseudo AG-D*. Se usaron los valores $\lambda_0 = 1/10^3$, $\tau_0 = 7/10^4$, $f = 1$, $k_0 = 1/12$, $L = 10$. **d)**: Al disminuir la influencia de λ_{N2} , se estabiliza el AG-F y se obtienen las curvas $\rho(z)$ bien comportadas como en las soluciones anteriores. Los valores $\lambda_0 = 1/10^3$, $\tau_0 = 0.6/10^4$, $f = 1$, $k_0 = 1/12$, $L = 10$.

Para tal propósito se sustituirá $\omega(r, \theta)$ y $k(r, \theta)$ en (35). Hecho eso, se graficarán las superficies $R_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\mu}\hat{\nu}}(r, \theta)$.

Combinación 1 ($\lambda_5 + \lambda_6 = \tau + \lambda$)

Al tener en cuenta la primera combinación, obtenemos las siguientes igualdades

$$R_{\hat{r}\hat{t}\hat{r}\hat{t}} = \frac{L^2 e^{-2k}}{4\Delta_\theta^5} \left[\lambda_0 \left(L^2 \cos^2 \theta - (r - l_1)^2 \right) + 2\tau_0 L^2 (r - l_1) \cos \theta \right]^2 \sin^2 \theta, \quad (5.5a)$$

$$R_{\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}} = \frac{e^{-2k}}{4\Delta_\theta^5 \sin^2 \theta} \left[2\lambda_0 (r - l_1) \cos \theta + \tau_0 \left((r - l_1)^2 - L^2 \cos^2 \theta \right) \right]^2 \Delta_r, \quad (5.5b)$$

$$\begin{aligned} R_{\hat{\varphi}\hat{t}\hat{\varphi}\hat{t}} = & \frac{e^{-2k}}{4\Delta_\theta^4} \left[4(r - l_1) \lambda_0 \tau_0 \cos \theta \left((r - l_1)^2 - L^2 \cos^2 \theta \right) \right. \\ & + \lambda_0^2 \left((r - l_1)^2 (1 + 3 \cos^2 \theta) + L^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \right) \\ & \left. + \tau_0^2 \left((r - l_1)^4 + L^4 \cos^2 \theta + L^2 (r - l_1)^2 (1 - 3 \cos^2 \theta) \right) \right], \quad (5.5c) \end{aligned}$$

$$R_{\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}} = 4k_0 L^2 \csc^2 \theta \left[R_{\hat{\varphi}\hat{t}\hat{\varphi}\hat{t}} \right], \quad (5.5d)$$

$$\begin{aligned} R_{\hat{\varphi}\hat{r}\hat{\varphi}\hat{r}} = & \frac{L^2 e^{-2k}}{4\Delta_\theta^5} \left[\lambda_0 \tau_0 (r - l_1) \cos \theta \left(16k_0 (r - l_1)^4 + 4(8k_0 - 3)L^2 (r - l_1)^2 \sin^2 \theta \right) \right. \\ & + 4L^4 \cos^2 \theta \{ 3 \sin^2 \theta + 4k_0 (\cos^2 \theta - 2) \} \\ & + \tau_0^2 \left(4k_0 \{ (r - l_1)^6 + L^6 \cos^4 \theta + L^2 (r - l_1)^4 (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \} \right. \\ & \left. + 4L^4 (r - l_1)^2 \cos^2 \theta \{ 6k_0 - 3 + (3 - 5k_0) \cos^2 \theta \} \right) \\ & + \lambda_0^2 \left(L^4 \cos^4 \theta \sin^2 \theta (3 - 4k_0) + (r - l_1)^4 \{ 3 - 4k_0 + (20k_0 - 3) \cos^2 \theta \} \right. \\ & \left. + 2L^2 (r - l_1)^2 \cos^2 \theta \{ 3 \sin^2 \theta + 4k_0 (\cos^2 \theta - 3) \} \right) \left. \right]. \quad (5.5e) \end{aligned}$$

Es importante hacer notar que si tomamos a $\lambda_0 = 0$ ó $\tau_0 = 0$, obtenemos las componentes del tensor de Riemann asociado a la solución λ_5 ó λ_6 respectivamente.

En la figura (5.6) se pueden apreciar la graficación de las componentes del tensor de Riemann $R_{\hat{\mu}\hat{t}\hat{\mu}\hat{t}}$, $\hat{\mu} = \hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ correspondientes a las fuerzas de marea en dirección $\hat{\mu}$

que siente el cuerpo del astronauta. Las imágenes del lado izquierdo corresponden a las superficies en 3 dimensiones de la malla generada por cada componente. Se usaron los mismos valores que en el caso de las gráficas (5.2a), pero para éste caso se emplearon las *coordenadas de Boyer-Linquist* para una mejor interpretación de la *física*. El color **azul** de la malla indica *valores bajos de las fuerzas de marea, caso contrario* para el color **rojo**. Dichas graficaciones están incompletas (*color gris*) debido a los valores altos que toman las fuerzas de marea, siendo físicamente imposibles para cruzar el AG.

Las gráficas del lado derecho muestran las curvas de nivel con un esquema de colores similar a las del lado izquierdo. Es importante destacar que el color blanco de las curvas de nivel representa los valores altos mencionados en el párrafo anterior. Además, a medida que se refinan los cálculos numéricos, en las figuras en forma de *pétalos* se aproximan a *un cierre central*, es decir, 'los pétalos adquieren una forma bien definida'.

En la figura (5.7), los valores y esquemas de colores son similares al caso anterior, pero se enfocan en las componentes que toman relevancia a medida que *el astronauta toma velocidades relativistas*, de acuerdo con las ecuaciones (2.27).

Centrándonos en la física representada por dichas gráficas, observamos **ángulos privilegiados para ingresar al agujero de gusano**, correspondiente a dicha solución de estudio. En este caso, es óptimo ingresar con ángulos cercanos a $\theta \approx \{0, \pi\}$. Sin embargo, **se tiene que tener precaución con las fuerzas de marea asociadas a $R_{\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}}$, figura (5.6c) y $R_{\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}}$, figura (5.7c), debido a que en los puntos $\theta = \{0, \pi\}$ se vuelven medianamente grandes. El orden de magnitud para ambos casos, es de $\approx 10^{-5}$.**

Alternativamente, también es posible ingresar con un ángulo $\theta = \pi/2$ y **navegar** dentro del AG para evitar las fuerzas de marea que podrían *dañar al astronauta*. Se pueden evitar siguiendo las líneas *contorno del interior de los pétalos*, esto es de suma importancia y **al mismo tiempo, se evita la singularidad de anillo** (2.15).

Para concluir, en la figura (5.7a), se compara el impacto de elegir un *campo escalar fantasma ó dilatónico* en la componente $R_{\hat{r}\hat{t}\hat{r}\hat{t}}$, donde se observa que **no existe diferencia**⁴ y las superficies se *superponen*. También podemos verlo en las ecuaciones (5.5), donde, debido al valor absoluto de (2.28), **la elección de un tipo de campo escalar es irrelevante en las fuerzas de marea**⁵, excepto $R_{\hat{\varphi}\hat{r}\hat{\varphi}\hat{r}}$, se aprecia comparando las figuras (5.7b) y (5.7e). En cuanto a los ordenes de magnitud, si escogemos un *campo escalar dilatónico*, esta crece en un orden de 2. Al visualizar la ecuación (5.5e) se contempla que en dicha expresión, entra en juego la constante k_0 la cual está relacionada con la elección del *campo escalar*⁶. Esto no ocurre en las otras ecuaciones de (5.5).

⁴Ocurre lo mismo para todas las componentes, exceptuando $R_{\hat{\varphi}\hat{r}\hat{\varphi}\hat{r}}$.

⁵Se trabajará con un AG fantasma, sobreentendiendo que son iguales las gráficas entre ambos campos escalares.

⁶Véase en la tabla 4.1.

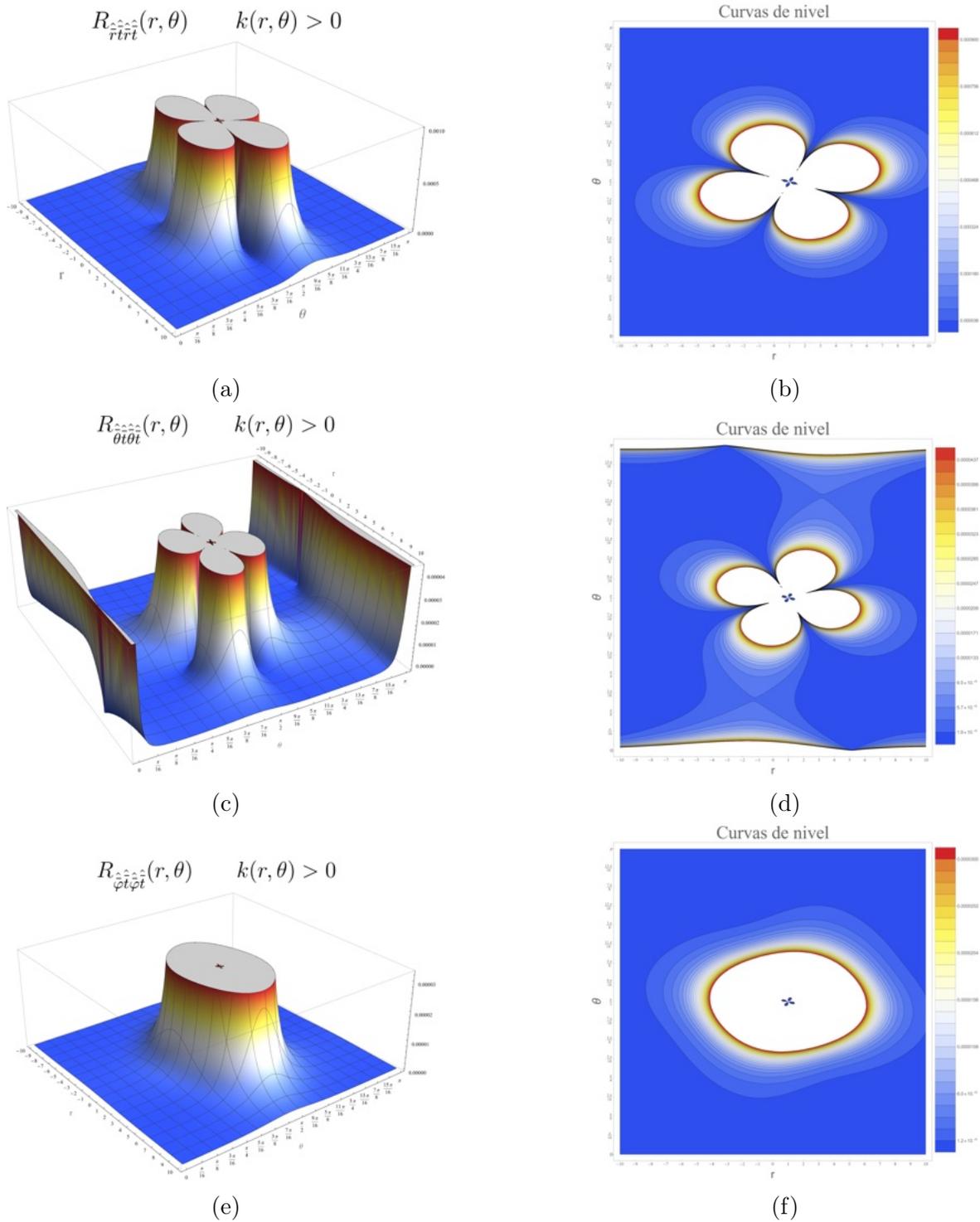


Figura 5.6. Gráficas de los elementos $R_{\hat{\mu}\hat{t}\hat{\mu}\hat{t}}$, $\hat{\mu} = \hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ asociados a las fuerzas de marea, correspondientes a la **Combinación 1**: $\lambda_5 + \lambda_6 = \tau + \lambda$. Se usaron los valores $\lambda_0 = 1$, $\tau_0 = 1/10$, $k_0 = -7/12$, $l_1 = 1$ y $L = 10$ y las coordenadas Θ para una mejor visualización de física. Las gráficas del lado izquierdo corresponden a la malla generada por $R_{\hat{\mu}\hat{t}\hat{\mu}\hat{t}}(r, \theta)$ y el lado derecho a las curvas de nivel. Ambos lados con colores relacionados a **valores altos (color rojo)** y **valores bajos (color azul)**.

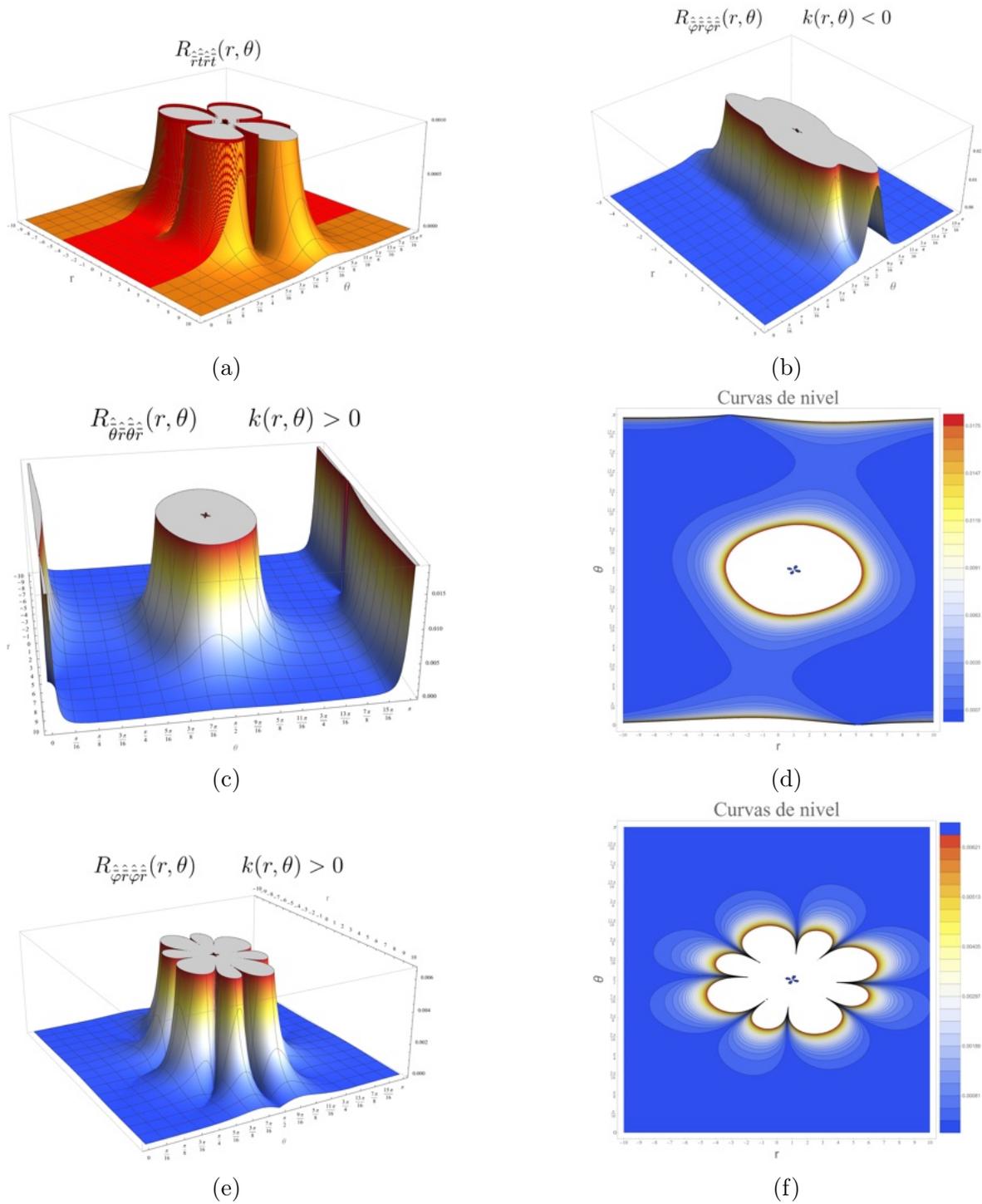


Figura 5.7. Gráficas de los elementos $\{R_{\hat{\mu}\hat{r}\hat{\mu}\hat{r}}\}$, $\hat{\mu} = \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ asociados a las fuerzas de marea *para velocidades relativistas*, correspondientes a la **Combinación 1**: $\lambda_5 + \lambda_6 = \tau + \lambda$. Se usaron los valores $\lambda_0 = 1$, $\tau_0 = 1/10$, $k_0 = -7/12$, $l_1 = 1$ y $L = 10$ y las coordenadas Θ . En figura **a**), se comparan las consecuencias de elegir un *campo escalar fantasma ó dilatónico*, usando $k_0 = \{-7/12, 1/12\}$ consecutivamente y correspondiente al color *amarillo y rojo*.

Solución 1 (λ_5)

Al tomar a $\lambda_0 = 0$, sustituirlo en (5.5) y graficarlo como en el caso anterior, se obtienen las figuras (1), (2) y (3).

Si observamos las figuras mencionadas, podremos notar algunas peculiaridades. Al contrastar las figuras (1), (2) con (5.6) y (3) con (5.7), podremos darnos cuenta de la similitud que existe en la forma de las superficies, sólo hay algunas pequeñas deformaciones. Sin embargo, **la distinción principal que hay entre ambas es la rotación de dichas gráficas cuando se considera la combinación**. No obstante, se conserva la posición del centro, determinado por $r = l_1$.

En resumen, si consideramos la solución λ_5 , las superficies tienen sus ejes de simetría paralelos a los ejes x, y del gráfico, pero si consideramos la combinación de $\lambda_5 + \lambda_6$, se generan rotaciones y mínimas deformaciones.

Si bien, es algo sutil, hay algo importante reflejado en la figura (1b). *La ventada en $\theta = \pi/2$, se abre completamente sin tener que 'navegar' ($\theta : \text{Constante}$) por el AG, tanto fantasma como dilatónico. Y las componentes $R_{\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}}$ y $R_{\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}}$, se hacen más pequeñas en regiones más cercanas en $\theta = \{0, \pi\}$, véase en las figuras (2b) y (3d).*

En los demás aspectos, el comportamiento es similar a la combinación 1.

Combinación 2 ($\lambda + \tau = \lambda_{N1} + \lambda_{N2}$)

En esta ocasión, la expresión para las fuerzas de marea son:

$$R_{\hat{r}\hat{t}\hat{r}\hat{t}} = \frac{e^{-2k}}{4\Delta_\theta} \sin^2 \theta \left[\lambda_0 L(r - l_1) + \tau_0 L(3(r - l_1)^2 + L^2) \cos \theta \right]^2, \quad (5.6a)$$

$$R_{\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}} = \frac{e^{-2k}}{4 \sin^2 \theta \Delta_\theta} \Delta_r \left[\lambda_0 \cos \theta + \tau_0 (r - l_1) (3 \cos^2 \theta - 1) \right]^2, \quad (5.6b)$$

$$R_{\hat{\varphi}\hat{t}\hat{\varphi}\hat{t}} = \frac{e^{-2k}}{4} \left[\lambda_0^2 + 4\lambda_0\tau_0(r - l_1) \cos \theta + \tau_0^2 (L^2 \sin^2 \theta + (r - l_1)^2 \{3 \cos^2 \theta + 1\}) \right], \quad (5.6c)$$

$$R_{\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}} = 4k_0 L^2 \csc^2 \theta \left[R_{\hat{\varphi}\hat{t}\hat{\varphi}\hat{t}} \right], \quad (5.6d)$$

$$\begin{aligned}
R_{\hat{\varphi}\hat{r}\hat{\varphi}\hat{r}} = & \frac{L^2 e^{-2k}}{4\Delta\theta} \left[\lambda_0^2 \left(4k_0 L^2 \cos^2 \theta + (r - l_1)^2 [3 - 4k_0 + (8k_0 - 3) \cos^2 \theta] \right) \right. \\
& + 2\lambda_0 \tau_0 (r - l_1) \cos \theta \left(3L^2 \sin^2 \theta + 8k_0 L^2 (2 \cos^2 \theta - 1) \right. \\
& \left. \left. + (r - l_1)^2 \{9 \sin^2 \theta + 8k_0 (3 \cos^2 \theta - 2)\} \right) \right. \\
& \left. + \tau_0^2 \left(L^4 (3 - 4k_0) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \right. \right. \\
& \left. \left. + 2L^2 (r - l_1)^2 \{2k_0 + (9 - 24k_0) \cos^2 \theta + (30k_0 - 9) \cos^4 \theta\} \right) \right. \\
& \left. + (r - l_1)^4 \{27 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + k_0 \{4 - 60 \cos^2 \theta + 72 \cos^4 \theta\}\} \right], \quad (5.6e)
\end{aligned}$$

Así como en la combinación 1, en este caso, si hacemos $\lambda_0 = 0$ ó $\tau_0 = 0$, aterrizamos a las componentes del tensor de Riemann para la solución λ_{N1} ó λ_{N2} .

Al analizar las figuras (5.8) y (5.9), se evidencia una marcada disparidad con respecto a la *combinación 1*. En primer lugar, es importante señalar que los ángulos $\theta = \{0, \pi\}$ no son fácilmente accesibles ya que para atravesar el agujero de gusano, se necesita *navegar variando el ángulo θ para evitar las fuerzas de marea destructivas*. Al examinar detenidamente las gráficas (5.8d), (5.8f), (5.9d) y (5.9f) se constata que las fuerzas de marea son muy pequeñas en un extremo de la figura, pero aumentan progresivamente en el otro. Aunque esta aseveración indica la complejidad para navegar en un ángulo constante $\theta = \{0, \pi\}$, es relevante recalcar que el orden de magnitud de dichas gráficas suele ser muy pequeño, de un aproximado de 1×10^{-6} , siempre y cuando se viajen a velocidades *no relativistas*. Si se viajan a velocidades más grandes, los *términos cruzados* $R_{\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}}$ (figura (5.9c)) y $R_{\hat{\varphi}\hat{r}\hat{\varphi}\hat{r}}$ (figura (5.9e)) se vuelven más relevantes, puesto que su orden de magnitud es aproximadamente 1×10^{-4} .

Las mejores trayectorias para navegar a velocidades relativistas nos las determinará la curvas de nivel de la componente $R_{\hat{\varphi}\hat{r}\hat{\varphi}\hat{r}}$ ya que las fuerzas de marea en las otras componentes son medianamente soportables si se sigue la curva ó *ventana* que nos exhibe la figura mencionada.⁷

Por lo tanto el mejor ángulo de entrada para un AG-F viajando a velocidades relativistas será $\theta \approx 15\pi/32$ siempre y cuando se 'navege' dentro del AG.

En segundo lugar, se tiene que destacar que para esta combinación, se presentan trayectorias en todas las gráficas que pueden transitar por el centro del AG y atravesarlo, a diferencia de la *combinación 1*, donde tal posibilidad se ve restringida en las componentes $R_{\hat{\varphi}\hat{t}\hat{\varphi}\hat{t}}$ y $R_{\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}}$ ⁸, reconociendo que en el punto central $r = l_1$ las fuerzas de marea se anulan.

⁷Esto es válido para las demás soluciones. Se expondrá con más detalle en las conclusiones.

⁸Ver en las figuras (5.6f) y (5.7d)

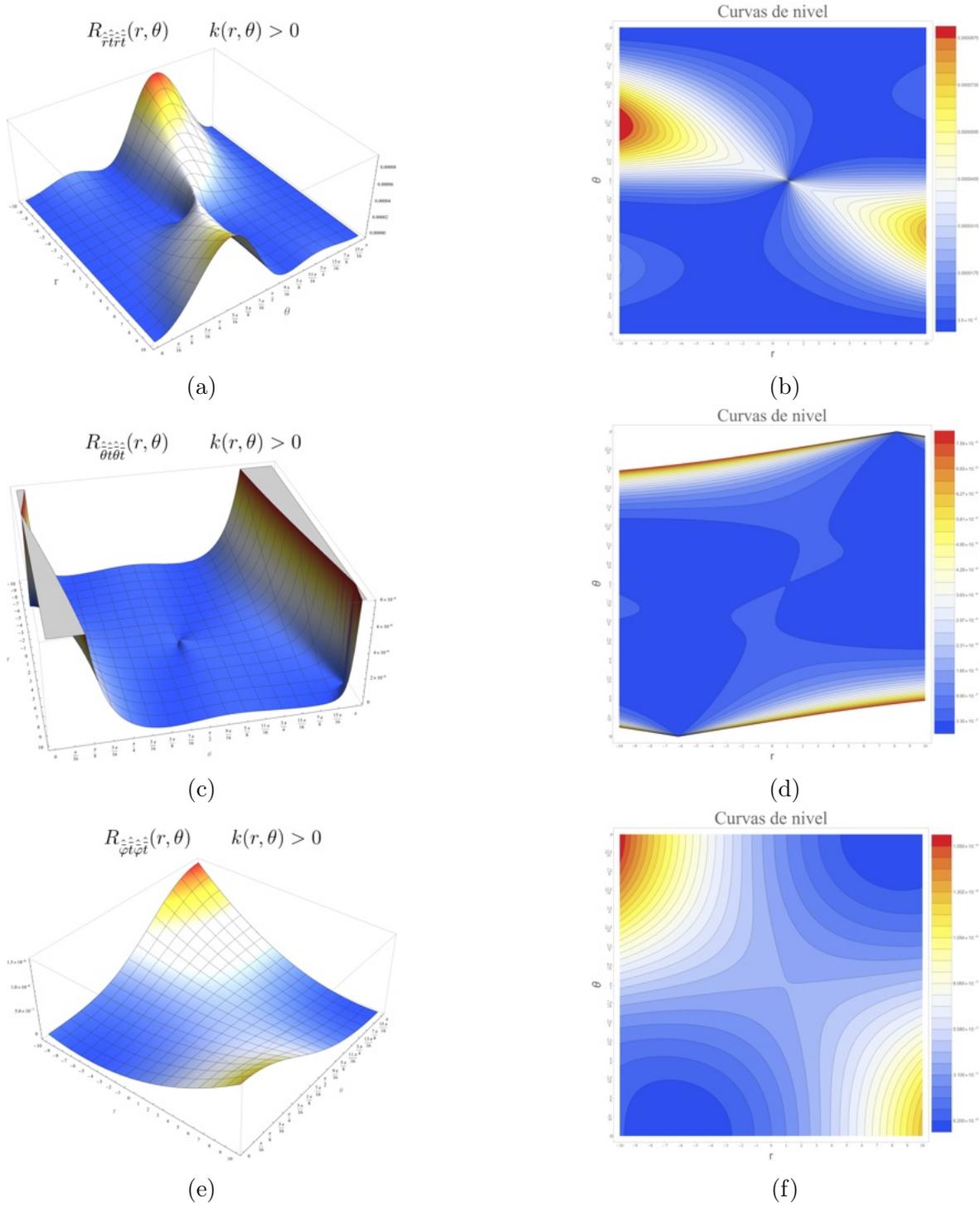


Figura 5.8. Gráficas de los elementos $R_{\hat{\mu}\hat{t}\hat{\mu}\hat{t}}$, $\hat{\mu} = \hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ asociados a las fuerzas de marea, correspondientes a la **Combinación 2**: $\lambda_{N1} + \lambda_{N2} = \lambda + \tau$. Se usaron los valores $\lambda_0 = 1/10^3$, $\tau_0 = 0.6/10^4$, $k_0 = -7/12$, $l_1 = 1$ y $L = 10$ y las coordenadas Θ para una mejor visualización de física. Las gráficas del lado izquierdo corresponden a la malla generada por $R_{\hat{\mu}\hat{t}\hat{\mu}\hat{t}}(r, \theta)$ y el lado derecho a las curvas de nivel. Ambos lados con colores relacionados a valores altos (color rojo) y valores bajos (color azul).

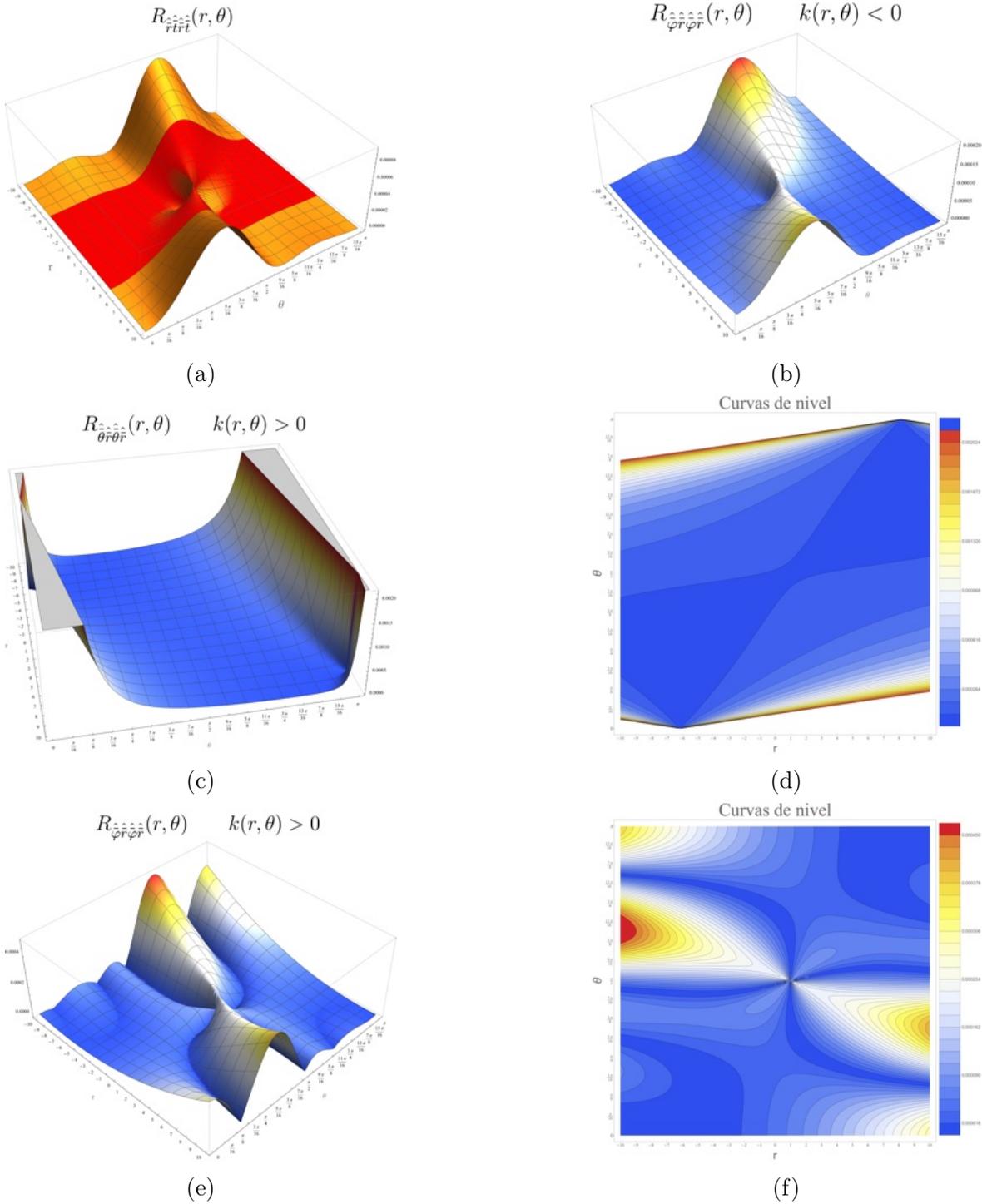


Figura 5.9. Gráficas de los elementos $\{R_{\hat{\mu}\hat{r}\hat{\mu}\hat{r}}\}$, $\hat{\mu} = \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ asociados a las fuerzas de marea *para velocidades relativistas*, correspondientes a la **Combinación 1**: $\lambda_{N1} + \lambda_{N2} = \lambda + \tau$. Se usaron los valores $\lambda_0 = 1/10^3$, $\tau_0 = 0.6/10^4$, $k_0 = -7/12$, $l_1 = 1$ y $L = 10$ y las coordenadas Θ . En figura **a)**, se comparan las consecuencias de elegir un *campo escalar fantasma ó dilatónico*, usando $k_0 = \{-7/12, 1/12\}$ consecutivamente y correspondiente al color *amarillo y rojo*.

Para terminar, la diferencia en las fuerzas de marea entre un AG-F y un AG-D no es relevante más que en la componente $R_{\hat{\varphi}\hat{r}\hat{\varphi}\hat{r}}$, si comparamos la gráfica (5.9e) y (5.9b), podemos ver que la forma de la superficie es diferente, en cuanto al orden de magnitud, es equivalente. En los dos casos, *se puede navegar para poder atravesar a salvo los agujeros de gusano.*

Solución 2 (λ_{N1})

Al usar $\tau_0 = 0$ en las ecuaciones (5.6), obtenemos las fuerzas correspondientes a la solución 2. **En el apéndice E**, figuras (4), (5) y (6) se graficaron las superficies de las fuerzas de marea.

En general, el comportamiento de las fuerzas de marea es muy similar a la *combinación 2*, nuevamente, para poder pasar a través del agujero de gusano es mejor llegar con ángulos cercanos $\theta \approx \{0, \pi\}$, ya que si nos encontramos en dichos valores, las fuerzas de marea $R_{\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}}$ (figura (4c)) y $R_{\hat{\varphi}\hat{t}\hat{\varphi}\hat{t}}$ (figura (5a)) se vuelven un poco significativas ya que el orden de magnitud es aproximadamente de 1×10^{-6} .

Si consideramos velocidades relativistas y un AG-F, las componentes $R_{\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}}$ (figura (5c)) y $R_{\hat{\varphi}\hat{r}\hat{\varphi}\hat{r}}$ (figura (5e)) toman relevancia y los ángulos de entrada más óptimos de entrada serán $\theta \approx \{3\pi/4, \pi/4\}$.

Solución 3 (λ_{N2})

Las aseveraciones que se hicieron analizando la solución 2 (λ_{N1}) y la combinación 2 ($\lambda_{N1} + \lambda_{N2}$) son aplicables para este caso.

La mayor distinción es que a velocidades no relativistas, la 'ventana' $\theta = \pi/2$ se abre sin tener que 'navegar' (θ constante) para poder atravesar el AG. En cambio, si se consideran velocidades relativistas y un AG-F, los mejores ángulos de entrada para poder navegar variando a θ dentro del agujero de gusano, serán $\theta \approx \{9\pi/16, 7\pi/16\}$.

Véase en el Apéndice E, figuras (7), (8) y (9). Donde para la graficación, se usaron las ecuaciones (5.6) evaluando $\lambda_0 = 0$.

5.4 Condiciones de energía

Para el análisis de las condiciones energéticas, resulta conveniente emplear las ecuaciones (35) debido a su carácter de generalización para la *familia de soluciones de segunda clase* presentadas en el capítulo 4.

Siendo así, tenemos que la densidad está dada por

$$\rho = \frac{e^{-2k}}{2L^4(x^2 + 1)(1 - y^2)(x^2 + y^2)} \left[(1 - y^2)\omega_{,y}^2 + (x^2 + 1)\omega_{,x}^2 \right], \quad (5.7)$$

podemos observar que todos de los términos presentes en la igualdad son cuadrático. Es notable que, independientemente de que si los valores de las derivadas parciales de ω

son positivos o negativos, el cuadrado de éstos 'eliminará' el signo. En lo que respecta a la expresión $(1 - y^2)$, la coordenada y se encuentra restringida al intervalo $[0, 1]^9$, siendo así, esta expresión será siempre positiva. Finalmente, la exponencial no puede tener valores negativos, entonces aterrizamos a la desigualdad

$$\rho > 0, \quad (5.8)$$

para la **Segunda clase de de soluciones**.

En cuanto al invariante de la igualdad (2.41), se analizará por separado, *pero sólo las combinaciones, ya que las soluciones se pueden obtener haciendo $\lambda = 0$ ó $\tau = 0$* .

Combinación 1 ($\lambda_5 + \lambda_6 = \tau + \lambda$)

Si sustituimos las funciones métricas en (2.41), llegamos a

$$\begin{aligned} \rho - \varrho = \frac{e^{-2k}}{2L^6(x^2 + y^2)^5} & \left[4L\lambda_0\tau_0xy(x^2 - y^2) \left(2y^2 + (4k_0 - 1) + x^2(4k_0 + 1) \right) \right. \\ & 2\lambda_0^2 \left(y^4(1 - y^2) + x^4(1 + y^2(8k_0 + 1)) + 2x^2y^2(4k_0 + y^2) \right) \\ & + L^2\tau_0^2 \left((4k_0 + 1)(x^2 + 1)x^4 - 2x^2y^2 \{ (4k_0 + 1)x^2 + 4k_0 - 3 \} \right. \\ & \left. \left. + y^4 \{ 1 + 4k_0 + x^2(4k_0 - 7) \} \right) \right]. \quad (5.9) \end{aligned}$$

Para obtener una comprensión más completa del comportamiento de la expresión anterior, se procederá a examinar lo que sucede cuando tomamos $y = \{0, 1\}$ con el fin de determinar si se cumple la CE **NEC** debido a la selección de *vectores nulos*.

- $y = 0$:

$$\rho - \varrho = \frac{e^{-2k(x,0)}}{2L^6x^6} \left[2\lambda_0^2 + \left\{ 4k_0 + 1 \right\} \tau_0^2 L^2 (x^2 + 1) \right]. \quad (5.10)$$

- $y = 1$:

$$\rho - \varrho = \left[4k_0 + 1 \right] \frac{(2\lambda_0x + L\tau_0[x^2 - 1])^2}{2L^6(x^2 + 1)^4}. \quad (5.11)$$

Si nos fijamos en (5.10) y (5.11), nos damos cuenta que existen términos cuadráticos que no tendrán relevancia en el signo, pero el elemento determinante es

$$(4k_0 + 1),$$

⁹En esta ocasión estamos tomando en cuenta el punto 1 ya que en las coordenadas esferoidales, no hay indeterminaciones para aquél valor, a diferencia de las coordenadas de Boyer-Linquist.

ya que si esta componente es mayor o igual a cero, $\rho - \varrho$ será mayor o igual a cero en los puntos $y = \{0, 1\}$, respectivamente.

Sabemos que $|y = \cos \theta| \leq 1$, entonces

$$\text{Si } (4k_0 + 1) < 0 \Rightarrow \rho - \varrho < 0, \quad (5.12)$$

$$\text{Si } (4k_0 + 1) > 0 \Rightarrow \rho - \varrho > 0. \quad (5.13)$$

En resumen:

- Si escogemos un **campo escalar dilatónico**, las condiciones de energía **NEC** se cumplen.
- Si escogemos un **campo escalar fantasma**, las condiciones de energía **NEC** no se cumplen.

Debido a que el mínimo valor posible para un **campo escalar fantasma** es

$$k_0 \leq -\frac{1}{2}, \quad (5.14)$$

y si se escoge un **campo escalar dilatónico**, los valores cumplen que

$$k_0 \geq -\frac{1}{4}. \quad (5.15)$$

Combinación 2 ($\lambda + \tau = \lambda_{N1} + \lambda_{N2}$)

$$\begin{aligned} \rho - \varrho = & \frac{e^{-2k}}{2(x^2 + y^2)} \left[\lambda^2 \left(2x^2 + y^2 \{4k_0 + 1 + x^2(4k_0 - 1)\} \right) \right. \\ & + L^2 \tau^2 \left((4k_0 + 1)(x^2 + 1)x^2 + 2y^2 \{1 + 3x^2[1 - 4k_0 + (2 - 4k_0)x^2]\} \right. \\ & \left. \left. + y^4 \{9x^4(4k_0 - 1) + x^2(36k_0 - 3) - 2\} \right) \right. \\ & \left. + 2Lxy\lambda_0\tau_0 \left(4k_0(x^2 + 1)(3y^2 - 1) + y^2 + 1 + x^2(5 - 3y^2) \right) \right]. \quad (5.16) \end{aligned}$$

Si seguimos el mismo procedimiento que en la *combinación 1*, obtenemos un resultado similar ya que al evaluar (5.16) en $y = \{0, 1\}$, se llega a

- $y = 0$:

$$\rho - \varrho = \frac{e^{-2k(x,0)}}{2} \left[2\lambda_0^2 + \left\{ 4k_0 + 1 \right\} \tau_0^2 L^2 (x^2 + 1) \right]. \quad (5.17)$$

- $y = 1$:

$$\rho - \varrho = \left[4k_0 + 1 \right] \frac{(\lambda_0 + 2\tau_0 Lx)^2}{2} e^{-2k(x,1)}. \quad (5.18)$$

Encontrando nuevamente que:

- Si escogemos un **campo escalar dilatónico**, las condiciones de energía **NEC** *se cumplen*.
- Si escogemos un **campo escalar fantasma**, las condiciones de energía **NEC** *no se cumplen*.

Capítulo 6

Conclusiones

Basándose en el trabajo presente y los resultados obtenidos en el **capítulo 4 y 5**, es posible que la *segunda clase de soluciones* (4.3) cumpla las siguientes conjeturas:

1. El invariante electromagnético cumple que $F^2 = 0$. En otras palabras, se encontró que para dicha familia, las magnitudes del campo eléctrico y el campo magnético son idénticos.
2. La ecuación (4.11) dictamina los valores para k_0 con base a la elección de la teoría de la segunda clase de soluciones.
3. Los agujeros de gusano tipo *dilatón*, **cumplen** con las condiciones de energía tipo **NEC**. En cambio los agujeros de gusano tipo *fantasma*, **no cumplen** con las condiciones de energía tipo **NEC**. Esta es una hipótesis ya conocida y se confirma nuevamente en el trabajo presente.
4. Las soluciones $\{\lambda_5, \lambda_6, \lambda_5 + \lambda_6\}$ **son asintóticamente planos sin importar la elección del campo escalar**, en cambio, $\{\lambda_{N2}\}$ **es asintóticamente plano en la región** $y \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ **escogiendo un campo escalar dilatónico**. y $\{\lambda_{N1} + \lambda_{N2}\}$ tiene la misma región de ser asintóticamente plano siempre y cuando la solución λ_{N1} tenga un “peso” mejor que λ_{N2} . Un hecho inesperado y conducta extravagante ya que las soluciones conocidas no tienen dicho comportamiento.
5. La solución λ_{N1} **es asintóticamente plano con un campo escalar fantasma**.
6. La selección de un tipo de campo escalar **no tiene influencia en la existencia de un agujero de gusano (AG)**, es decir para ambos casos se puede crear un AG y la geometría es muy similar al escoger uno u otro.
7. Las fuerzas de marea para velocidades relativistas son iguales entre un AG-Fantasma y un AG-Dilatónico. De igual forma las fuerzas de marea para velocidades relativistas y las fuerzas de marea no relativistas son iguales, salvo la componente $R_{\hat{\varphi}\hat{r}\hat{\varphi}\hat{r}}(r, \theta)$.

Para resumir los resultados de *navegabilidad* de los AG encontrados, se recurrirá a la tabla (6.1). En cuanto a la **Solución 1** (λ_5) y la **Combinación 1** ($\lambda_5 + \lambda_6$), existen una región para poder atravesar el AG sin tener que pasar por el centro y sin *variar a θ para evitar las fuerzas de marea destructivas*, es decir, con θ constante. Aquella aseveración es cierta para velocidades relativistas como las no relativistas. Dicha región está expuesta en la tabla mencionada.

En cuanto a las otras soluciones ($\lambda_{N1}, \lambda_{N2}$) y combinaciones ($\lambda_{N1} + \lambda_{N2}$), *es necesario pasar por el centro del AG y navegar variando a θ* . De igual forma *al tener un AG-F genera más “ventanas” para poder atravesarlo, pero la curva que tenemos que seguir para evitar las fuerzas de marea destructivas están bien definidas*.

Cuadro 6.1: Ángulos óptimos de entrada θ (**Entrando en $r = -10$**)

Solución	No relativista	Relativista	
		<i>Fantasma</i>	<i>Dilatón</i>
λ_5	$(0, \frac{5\pi}{16}] \cup [\frac{11\pi}{16}, \pi)$	$(0, \frac{5\pi}{16}] \cup [\frac{11\pi}{16}, \pi)$	$(0, \frac{5\pi}{16}] \cup [\frac{11\pi}{16}, \pi)$
$\lambda_5 + \lambda_6$	$(0, \frac{5\pi}{16}] \cup [\frac{11\pi}{16}, \pi)$	$(0, \frac{5\pi}{16}] \cup [\frac{11\pi}{16}, \pi)$	$(0, \frac{5\pi}{16}] \cup [\frac{11\pi}{16}, \pi)$
λ_{N1}	$(\frac{\pi}{16}, \frac{3\pi}{8}) \cup (\frac{5\pi}{8}, \frac{15\pi}{16})$	$\approx \{\frac{7\pi}{32}, \frac{23\pi}{32}\}$	$(\frac{\pi}{16}, \frac{3\pi}{8}) \cup (\frac{5\pi}{8}, \frac{15\pi}{16})$
λ_{N2}	$\approx \frac{\pi}{2}$	$\approx \{\frac{\pi}{8}, \frac{7\pi}{16}, \frac{9\pi}{16}, \frac{7\pi}{8}\}$	$\approx \frac{\pi}{2}$
$\lambda_{N1} + \lambda_{N2}$	$(\frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{2})$	$\approx \{\frac{\pi}{16}, \frac{5\pi}{16}, \frac{15\pi}{32}\}$	$(\frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{2})$

Es crucial destacar un punto importante. En el caso de la **Solución 1** (λ_5) y la **Combinación 1** ($\lambda_5 + \lambda_6$), los espacios presentan una *singularidad de anillo* ($x^2 + y^2 = 0$) de radio L que rodean a la garganta de los AG, pero están causalmente desconectadas. Sin embargo, en el caso de la **Combinación 1** ($\lambda_{N1} + \lambda_{N2}$) y las **Soluciones 1 y 2** (λ_{N1} y λ_{N2}) **no hay singularidades, el espacio es regular en todos los puntos y puede ser asintóticamente plano.**

En resumen, las soluciones que cumplen las condiciones (**C** y **G**) de M-T son:

- Físicamente admisibles en todo el espacio** $\triangleright \{\lambda_5, \lambda_6, \lambda_5 + \lambda_6\}$,
- Físicamente admisibles en la región $y \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$** $\triangleright \{\lambda_{N2}, \lambda_{N1} + \lambda_{N2}\}$,
- Físicamente no admisibles** $\triangleright \{\lambda_{N1}\}$.

Appendices

Apéndice A: Transformaciones de coordenadas

La adecuada selección de coordenadas específicas puede simplificar un problema considerablemente. En el presente escrito, se emplearán diversos tipos de coordenadas con este propósito. Iniciemos definiendo las coordenadas que usaremos.

Coordenadas

Sean los conjuntos de coordenadas

$$Z = \{\rho, z\}, \quad \Theta = \{r, \theta\}, \quad X = \{x, y\}, \quad \Upsilon = \{\zeta, \bar{\zeta}\}, \quad (1)$$

donde $Z = \{\rho, z\}$ son las **coordenadas cilíndricas**, $\Theta = \{r, \theta\}$ son las **coordenadas de Boyer-Linquist**, $X = \{x, y\}$ son las **coordenadas esferoidales**¹ y también se usará un **cambio de variable compleja** $\Upsilon = \{\zeta, \bar{\zeta}\}$.

La relación entre *coordenadas cilíndricas* y las de *Boyer-Linquist* vienen dadas de la siguiente forma (ρ, z) ²:

$$\rho = \sqrt{(r - m)^2 + \alpha^2} \sin(\theta), \quad z = (r - m) \cos(\theta). \quad (2)$$

En cambio, las relaciones entre *B-L* y las esferoidales son:

$$\alpha x = (r - m), \quad y = \cos(\theta). \quad (3)$$

Es posible relacionar (ρ, z) y (x, y) , obteniendo

$$\rho = \alpha \sqrt{(x^2 + 1)(1 - y^2)}, \quad z = \alpha xy. \quad (4)$$

¹Ver en [23], subsección 20.5 *The Kerr solution and the Tomimatsu-Sato class*

²En otros libros como [11] y [13] usan a $\rho = \sqrt{r^2 - 2m + \sigma^2} \sin(\theta)$. Para ésta trabajo se usará $\alpha^2 = \sigma^2 - m^2$.

Durante los cálculos, se emplearán α y σ , por lo que con el fin de evitar confusiones, se procederá a modificar el nombre de algunas variables³:

$$\begin{aligned}\alpha &\rightarrow L, \\ \sigma &\rightarrow l_0, \\ m &\rightarrow l_1,\end{aligned}$$

y se introducirán las definiciones

$$\Delta_\theta = L^2(x^2 + y^2) = (r - l_1)^2 + L^2 \cos^2 \theta, \quad (5)$$

$$\Delta_r = L^2(x^2 + 1) = (r - l_1)^2 + L^2, \quad (6)$$

para simplificar los cálculos, dado que estas aparecerán con frecuencia en algunas derivaciones. Esta acción se realiza con el objetivo de mantener una consistencia en la notación con las referencias [21] y [9]. Siendo así, las relaciones (2), (4) y (3) cambian de forma consecutivamente a (incluyendo los diferenciales):

Coordenadas $Z(\Theta)$:

$$\rho = \sqrt{\Delta_r} \sin(\theta), \quad z = (r - l_1) \cos(\theta), \quad (7a)$$

$$d\rho = \frac{(r - l_1)}{\sqrt{\Delta_r}} \sin(\theta) dr + \sqrt{\Delta_r} \cos(\theta) d\theta, \quad (7b)$$

$$dz = \cos(\theta) dr - (r - l_1) \sin(\theta) d\theta. \quad (7c)$$

Coordenadas $X(\Theta)$:

$$Lx = (r - l_1), \quad y = \cos(\theta), \quad (7d)$$

$$dx = \frac{1}{L} dr, \quad (7e)$$

$$dy = -\sin(\theta) d\theta, \quad (7f)$$

Coordenadas $Z(X)$:

$$\rho = L\sqrt{(x^2 + 1)(1 - y^2)}, \quad z = Lxy, \quad (7g)$$

$$d\rho = L \left[\frac{xdx}{\sqrt{(x^2 + 1)(1 - y^2)}} - \frac{ydy}{\sqrt{(x^2 + 1)(1 - y^2)}} \right], \quad (7h)$$

$$dz = L(ydx + xdy). \quad (7i)$$

El cambio de variable compleja que se mencionó y será de mucha utilidad es

$$\zeta = \rho + iz, \quad \bar{\zeta} = \rho - iz. \quad (8)$$

³ $\{L, l_0, l_1\}$ son constantes en unidades de longitud. En cambio $L^2 = l_0^2 - l_1^2$ está relacionado con el diámetro de la garganta del agujero de gusano.

Cambio de coordenadas

Supongamos que en una región de una variedad (\mathfrak{M}) están definidas dos cartas compatibles c_a, c_b con sus respectivos sistemas de coordenadas $\{z(x^i)\}, \{x(z^i)\}$.⁴ Si tomamos una función ∞ -Diferenciable $f : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}$, podemos obtener los *vectores tangentes*⁵ en x ó z .

De esta forma, por regla de la cadena obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial x^i} f(x^i(z^j)) = \sum_{j=0}^n \frac{\partial z^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial z^j} f(x^i(z^j)). \quad (9)$$

Esta igualdad podemos representarla en notación matricial, considerando a la base del espacio tangente $\frac{\partial}{\partial x^i}$ como una matriz $\mathbb{M}_{n \times 1}$ y a la *matriz de Jacobi* o *matriz de transformación* como un elemento de $\mathbb{M}_{n \times n}$ ⁶.

Durante todo el escrito se usará la siguiente notación: las cantidades \vec{a} representarán a los vectores base $\{\partial/\partial a^1, \partial/\partial a^2, \dots\}$ correspondientes al par de coordenadas representados por su símbolo en mayúsculas $A = \{a^1, a^2, \dots\}$, donde $A = Z, \Theta, X, \Upsilon, \dots$, puede tomar cualquier valor de coordenadas.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \frac{\partial}{\partial x^2} \\ \vdots \end{bmatrix} = \vec{x}, & \left(\frac{\partial}{\partial z^i} \right) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z^1} \\ \frac{\partial}{\partial z^2} \\ \vdots \end{bmatrix} = \vec{z}. \\ \left(\frac{\partial z^j}{\partial x^i} \right) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial z^1}{\partial x^1} & \frac{\partial z^2}{\partial x^1} & \cdots \\ \frac{\partial z^1}{\partial x^2} & \frac{\partial z^2}{\partial x^2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \mathbb{M}[z \leftarrow x]. \end{aligned}$$

Donde i : Filas, j : Columnas. La ecuación (9) se transforma en

$$\vec{z}(f) = \mathbb{M}[z \leftarrow x] \vec{x}(f), \quad (10)$$

$$\vec{x}(f) = \mathbb{M}[x \leftarrow z] \vec{z}(f), \quad (11)$$

se está considerando a $\mathbb{M}[x \leftarrow z]$ como la inversa de $\mathbb{M}[z \leftarrow x]$.

Ahora que ya sabemos cómo transformar coordenadas, podemos dejar todas las ecuaciones a resolver en término de las coordenadas esferoidales, ya que se vuelven sumamente más fáciles.

Comenzamos obteniendo las *Matrices de transformación*:

$$\mathbb{M}[X \leftarrow \Theta] = \begin{bmatrix} 1/L & 0 \\ 0 & -\sqrt{1-y^2} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

⁴Las definiciones se basaron principalmente en [24].

⁵Véase en [24], página 417, *Comentario 21.35*.

⁶Siendo $i = 1, \dots, n$, donde n es la dimensión del espacio vectorial.

$$\mathbb{M}[\Theta \leftarrow X] = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{1-y^2} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

$$\mathbb{M}[\Upsilon \leftarrow Z] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}. \quad (14)$$

$$\mathbb{M}[Z \leftarrow \Upsilon] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}. \quad (15)$$

$$\mathbb{M}[\Theta \leftarrow Z] = \begin{bmatrix} \frac{(r-l_1)\sin\theta}{\sqrt{\Delta_r}} & \cos\theta \\ \sqrt{\Delta_r} \cos\theta & -(r-l_1)\sin\theta \end{bmatrix}. \quad (16)$$

$$\mathbb{M}[Z \leftarrow \Theta] = \frac{\sqrt{\Delta_r}}{\Delta_\theta} \begin{bmatrix} (r-l_1)\sin\theta & \cos\theta \\ \sqrt{\Delta_r} \cos\theta & -\frac{(r-l_1)\sin\theta}{\sqrt{\Delta_r}} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Apéndice B: Ecuación de Laplace en espacios planos

Cuando el espacio generado por $\{\lambda, \tau\}$ es plano, entonces la ecuación (3.27) se convierte en

$$D(\rho D\lambda^l) = (\rho\lambda^l_{,\zeta})_{,\bar{\zeta}} + (\rho\lambda^l_{,\bar{\zeta}})_{,\zeta} = 0. \quad (18)$$

Pero ésta ecuación tiene distintas representaciones debido a las coordenadas que se están manejando. Usando las matrices de transformación (13)-(17) es posible obtener todas las formas de (18).

Desarrollando (18) y usando regla de la cadena, tenemos que:

$$\begin{aligned} D(\rho D\lambda^l) &= [\rho(\partial_\rho^2 + \partial_z^2) + \partial_\rho] \lambda^l = [\rho(\vec{z} \cdot \vec{z}) + \hat{1} \cdot \vec{z}] \lambda^l \\ &= \left[\rho(\mathbb{M}[Z \leftarrow \Theta]\vec{\theta}) \cdot (\mathbb{M}[Z \leftarrow \Theta]\vec{\theta}) + \vec{1} \cdot (M[Z \leftarrow \Theta]\vec{\theta}) \right] \lambda^l \\ &= \left\{ \partial_r (\Delta_r \partial_r) + \frac{\partial_\theta (\sin(\theta) \partial_\theta)}{\sin(\theta)} \right\} \lambda^l = 0. \end{aligned}$$

donde

$$\hat{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

De acuerdo con lo expuesto, considerando las transformaciones pertinentes y continuando con el proceso, se alcanza el siguiente resultado:

En representación de operadores:

$$D(\rho D\lambda^l) = 0, \quad (20a)$$

En representación Υ :

$$(\rho\lambda^l_{,\zeta})_{,\bar{\zeta}} + (\rho\lambda^l_{,\bar{\zeta}})_{,\zeta} = 0, \quad (20b)$$

En representación Z :

$$[\rho(\partial_\rho^2 + \partial_z^2) + \partial_\rho] \lambda^l = 0, \quad (20c)$$

En representación Θ :

$$\left\{ \partial_r (\Delta_r \partial_r) + \frac{\partial_\theta (\sin(\theta) \partial_\theta)}{\sin(\theta)} \right\} \lambda^l = 0, \quad (20d)$$

En representación X :

$$\partial_x[(x^2 + 1)\partial_x\lambda^l] + \partial_y[(1 - y^2)\partial_y\lambda^l] = 0. \quad (20e)$$

Soluciones

La manera más sencilla para encontrar algunas soluciones a la ecuación de Laplace, es usando la representación en las coordenadas X . En [15] se presentan las siguientes soluciones:

$$\lambda_1 = \lambda_0 \ln \left[1 - \frac{2m}{r} \right] + m_0, \quad l_0 = 0, \quad (21a)$$

$$\lambda_2 = \lambda_0 \text{ArcTan}[x] + m_0, \quad l_0^2 \geq l_1^2, \quad (21b)$$

$$\lambda_3 = \lambda_0 \ln \left[\frac{x-1}{x+1} \right] + m_0, \quad l_0^2 \leq l_1^2, \quad (21c)$$

$$\lambda_4 = \lambda_0 \text{ArcTanh}[x] + m_0, \quad l_0^2 \leq l_1^2, \quad (21d)$$

$$\lambda_5 = \lambda_0 \frac{x/L}{(x^2 + y^2)} + m_0, \quad (21e)$$

$$\lambda_6 = \lambda_0 \frac{y/L^2}{(x^2 + y^2)} + m_0, \quad (21f)$$

$$\lambda_7 = \lambda_0 \ln[L^2(x^2 + 1)(1 - y^2)] + m_0, \quad (21g)$$

$$\lambda_8 = \lambda_0 \ln \left[\frac{\sqrt{1 - y^2}}{y + 1} \right], \quad (21h)$$

donde $\{\lambda_0, m_0\} \in \mathbb{R}$ son constantes.

Durante la investigación realizada en el periodo de 'cálculos', se han identificado dos nuevas soluciones que cumplen con (20e)

$$\lambda_{N1} = \lambda_0 Lxy + m_0, \quad (22a)$$

$$\lambda_{N2} = \lambda_0 L^2 \left[(x^2 - y^2) - \frac{3}{2}(1 - y^2)(x^2 + 1) \right] + m_0. \quad (22b)$$

Apéndice C: Funciones métricas

Para la transformación de las ecuaciones (3.33), (3.34) y (3.35) en (3.38), hay que identificar algunos elementos

$$D = \vec{z}, \quad \tilde{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \vec{z} = \tilde{\mathbb{M}}\vec{z}, \quad \partial_\rho = \hat{1} \cdot \vec{z}, \quad \partial_z = \hat{2} \cdot \vec{z}. \quad (23)$$

Ecuación diferencial para ω

Entonces

$$\begin{aligned} D\omega = \vec{z}(\omega) &= \mathbb{M}[Z \leftarrow X] \left(\vec{x}(\omega) \right) = \frac{\rho}{f^2} [\tilde{D}\epsilon - \psi\tilde{D}\chi] \\ &= \frac{\rho}{f^2} \left[\tilde{\mathbb{M}} \left(\mathbb{M}[Z \leftarrow X] (\vec{x}(\epsilon)) \right) - \psi \tilde{\mathbb{M}} \left(\mathbb{M}[Z \leftarrow X] (\vec{x}(\chi)) \right) \right], \end{aligned}$$

pero

$$A(\lambda^l(Z)) \Rightarrow \vec{x}(A) = A_{,l} \vec{x}(\lambda^l), \quad (24)$$

continuando con los cálculos

$$\begin{aligned} \vec{x}(\omega) &= \frac{\rho}{f^2} (\epsilon_{,l} - \psi\chi_{,l}) \left\{ \mathbb{M}[X \leftarrow Z] \tilde{\mathbb{M}} \left(\mathbb{M}[Z \leftarrow X] \vec{x} \right) \right\} \lambda^l \\ &= \frac{L}{f^2} (\epsilon_{,l} - \psi\chi_{,l}) \begin{bmatrix} (1-y^2)\partial_y \\ -(x^2+1)\partial_x \end{bmatrix} \lambda^l, \end{aligned}$$

donde $\mathbb{M}[Z \leftarrow X] = \mathbb{M}[Z \leftarrow \Theta] \mathbb{M}[\Theta \leftarrow X]$.

Ecuación diferencial para A_φ

Notemos que el primer término del lado derecho de la igualdad de (3.34) contiene al operador \tilde{D} , por lo que, siguiendo el mismo procedimiento y usando el hecho de que

$$\mathbb{M}[Z \leftarrow X] \mathbb{M}[X \leftarrow Z] = \mathbb{M}[X \leftarrow Z] \mathbb{M}[Z \leftarrow X] = \mathbb{I}$$

$$\begin{aligned}\vec{x}(A_\varphi) &= \frac{\rho}{2f\kappa^2}(\chi, l) \left\{ \mathbb{M}[X \leftarrow Z] \tilde{\mathbb{M}}(\mathbb{M}[Z \leftarrow X] \vec{x}) \right\} \lambda^l - \frac{\omega}{2}(\psi, l) \vec{x}(\lambda^l) \\ &= \frac{L}{2f\kappa^2}(\chi, l) \begin{bmatrix} (1-y^2)\partial_y \\ -(x^2+1)\partial_x \end{bmatrix} \lambda^l - \frac{\omega}{2}(\psi, l) \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{bmatrix} \lambda^l.\end{aligned}$$

Ecuación diferencial para κ

En esta instancia, es necesario adoptar un enfoque más detallado, ya que la ecuación (3.35) incorpora términos cuadráticos. La estrategia más conveniente consiste en emplear a (3.36). Al usar la regla de la cadena (24), es decir, usar $Y^A(\Lambda)$, tal que $\Lambda = \{\lambda, \tau\}$ y proyectando al espacio $\hat{1} \otimes \hat{2} = \mathbb{I}$ se obtiene

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \partial_\zeta & 0 \\ 6 & \partial_{\bar{\zeta}} \end{bmatrix} k &= [\hat{1} \otimes \hat{2}] \vec{\Upsilon}(k) = [\hat{1} \otimes \hat{2}] \mathbb{M}[\Upsilon \leftarrow X] \vec{x}(k) \\ &= \mathbb{M}[\Upsilon \leftarrow X] [\hat{1} \otimes \hat{2}] \vec{x}(k) \\ &= k_{0lj} \begin{bmatrix} \partial_\zeta \lambda^l \partial_\zeta \lambda^j & 0 \\ 0 & \partial_{\bar{\zeta}} \lambda^l \partial_{\bar{\zeta}} \lambda^j \end{bmatrix} \\ &= k_{0lj} \begin{bmatrix} \partial_\zeta \lambda^l & 0 \\ 0 & \partial_{\bar{\zeta}} \lambda^l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial_\zeta \lambda^j & 0 \\ 0 & \partial_{\bar{\zeta}} \lambda^j \end{bmatrix} \\ &= k_{0lj} \left([\hat{1} \otimes \hat{2}] \vec{\Upsilon}(\lambda^l) \right) \cdot \left([\hat{1} \otimes \hat{2}] \vec{\Upsilon}(\lambda^j) \right) \\ &= k_{0lj} \left([\hat{1} \otimes \hat{2}] \mathbb{M}[\Upsilon \leftarrow X] \vec{x}(\lambda^l) \right) \cdot \left([\hat{1} \otimes \hat{2}] \mathbb{M}[\Upsilon \leftarrow X] \vec{x}(\lambda^j) \right),\end{aligned}$$

llegando al resultado

$$[\hat{1} \otimes \hat{2}] \vec{x}(k) = \tag{25}$$

$$k_{0lj} \mathbb{M}[X \leftarrow \Upsilon] \left\{ \left([\hat{1} \otimes \hat{2}] \mathbb{M}[\Upsilon \leftarrow X] \vec{x}(\lambda^l) \right) \cdot \left([\hat{1} \otimes \hat{2}] \mathbb{M}[\Upsilon \leftarrow X] \vec{x}(\lambda^j) \right) \right\} \tag{26}$$

Por consiguiente, mediante la aplicación de éstas transformaciones, se obtiene el resultado (3.38). Donde k_{0lj} está determinado por la expresión (3.39) y si se considera únicamente un potencial, como por ejemplo λ , la expresión resultante se simplifica a (3.38c) y (3.38d).

Apéndice D: Sistema de referencia có-movil

Por el contrario los vectores *ortonormales* del sistema de referencial comóvil, cuando $g_{t\hat{\varphi}} \neq 0$, es decir, existe al menos un término cruzado, mantiene la siguiente relación:

$$\begin{bmatrix} e_{\hat{t}} \\ e_{\hat{x}} \\ e_{\hat{y}} \\ e_{\hat{\varphi}} \end{bmatrix} = \mathbb{M}_{comovil} \begin{bmatrix} e_t \\ e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}, \quad (27)$$

donde la matriz de transformación para *elementos covariantes* es

$$\mathbb{M}_{comovil} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{-g_{tt}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{g_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{g_{yy}} & 0 \\ \frac{-g_{\varphi t}/g_{tt}}{\sqrt{g_{\varphi\varphi} - (g_{\varphi t})^2/g_{tt}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{g_{\varphi\varphi} - (g_{\varphi t})^2/g_{tt}}} \end{bmatrix} \quad (28)$$

Al transformar (2.6) usando (28), obtenemos

$$g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \eta_{\mu\nu} = \mathbb{M}_{comovil} \cdot \{g_{\mu\nu}\} \cdot (\mathbb{M}_{comovil})^T = \mathbf{Diag}(-1, 1, 1, 1),$$

donde $\{g_{\mu\nu}\}$ corresponde a la *matriz de la métrica covariante* y $(\mathbb{M}_{comovil})^T$ es *matriz transpuesta*.

Tensor de Einstein $G_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$

Pero aún más importante, al usar $f(x, y) = 1$ y transformar a $G_{\mu\nu}$ de la siguiente forma:

$$G_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \mathbb{M}_{comovil} \cdot \{G_{\mu\nu}\} \cdot (\mathbb{M}_{comovil})^T. \quad (29)$$

Los elementos del tensor de Einstein quedan de la siguiente forma:

Ecuaciones de Einstein en el SR-Comóvil de (2.6):

$$G_{\hat{t}\hat{t}} = \left[3 \frac{(1-y^2)\omega_{,y}^2 + (x^2+1)\omega_{,x}^2}{4L^4(x^2+1)(1-y^2)(x^2+y^2)} - \frac{(x^2+1)k_{,xx} + (1-y^2)k_{,yy} - yk_{,y}}{L^2(x^2+y^2)} \right] e^{-2k}, \quad (30a)$$

$$G_{\hat{x}\hat{x}} = \left[\frac{(x^2+1)\omega_{,x}^2 - (1-y^2)\omega_{,y}^2}{4L^4(x^2+1)(1-y^2)(x^2+y^2)} + \frac{xk_{,x} + yk_{,y}}{L^2(x^2+y^2)} \right] e^{-2k}, \quad (30b)$$

$$G_{\hat{x}\hat{x}} = \left[\frac{(1-y^2)\omega_{,y}^2 - (x^2+1)\omega_{,x}^2}{4L^4(x^2+1)(1-y^2)(x^2+y^2)} - \frac{xk_{,x} + yk_{,y}}{L^2(x^2+y^2)} \right] e^{-2k}, \quad (30c)$$

$$G_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = \left[\frac{(1-y^2)\omega_{,y}^2 + (x^2+1)\omega_{,x}^2}{4L^4(x^2+1)(1-y^2)(x^2+y^2)} + \frac{(x^2+1)k_{,xx} + (1-y^2)k_{,yy} - yk_{,y}}{L^2(x^2+y^2)} \right] e^{-2k}, \quad (30d)$$

$$G_{\hat{t}\hat{\phi}} = G_{\hat{\phi}\hat{t}} = -\frac{(x^2+1)\omega_{,xx} + (1-y^2)\omega_{,yy}}{2L^3(x^2+y^2)\sqrt{(x^2+1)(1-y^2)}} e^{-2k}, \quad (30e)$$

$$G_{\hat{x}\hat{y}} = G_{\hat{y}\hat{x}} = \frac{\omega_{,x}\omega_{,y} + 2L^2[x(1-y^2)k_{,y} - y(x^2+1)k_{,x}]}{2L^4(x^2+y^2)\sqrt{(x^2+1)(1-y^2)}} e^{-2k}. \quad (30f)$$

Tensor de Riemann $R_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\alpha}\hat{\beta}}$

Si usamos (28) y $f(x, y) = 1$ sobre el tensor $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ para obtener los elementos del *tensor de Riemman* en el **sistema de referencia comóvil**

$$R_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \{\mathbb{M}_{comovil}\}_{\hat{\mu}}^{\mu} \{\mathbb{M}_{comovil}\}_{\hat{\nu}}^{\nu} \{\mathbb{M}_{comovil}\}_{\hat{\alpha}}^{\alpha} \{\mathbb{M}_{comovil}\}_{\hat{\beta}}^{\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta} \quad (31)$$

donde $\{\mathbb{M}_{comovil}\}_{\hat{\mu}}^{\mu}$ es la componente de la matriz (28).

Nota: Hay que tener cuidado en la forma de transformar un tensor de rango $n \geq 2$, ya que no es directamente equivalente al producto matricial de elementos $\mathbb{M}_{n \times n}$.

Aplicando (31), se obtiene ⁷:

Componentes del tensor de Riemann en el SR-Comóvil de (2.6):

$$R_{\hat{x}\hat{t}\hat{x}\hat{t}} = \frac{e^{-2k}\omega_{,x}^2}{4L^4(1-y^2)(x^2+y^2)}, \quad (32a)$$

$$R_{\hat{y}\hat{t}\hat{y}\hat{t}} = \frac{e^{-2k}\omega_{,y}^2}{4L^4(x^2+1)(x^2+y^2)}, \quad (32b)$$

$$R_{\hat{\phi}\hat{t}\hat{\phi}\hat{t}} = \frac{e^{-2k}}{4L^4(x^2+1)(1-y^2)(x^2+y^2)} \left[(1-y^2)\omega_{,y}^2 + (x^2+1)\omega_{,x}^2 \right], \quad (32c)$$

$$R_{\hat{y}\hat{x}\hat{y}\hat{x}} = -\frac{e^{-2k}}{L^2(x^2+y^2)} \left[(1-y^2)k_{,yy} + (x^2+1)k_{,xx} + xk_{,x} - yk_{,y} \right], \quad (32d)$$

⁷Sólo se darán a conocer los más importantes que se ocuparán en el trabajo, debido gran número de ellos.

$$R_{\hat{\varphi}\hat{x}\hat{\varphi}\hat{x}} = \frac{e^{-2k}}{4L^4(1-y^2)(x^2+y^2)} \left[4L^2(1-y^2) \left(yk_{,y} + xk_{,x} \right) + 3\omega_{,x}^2 \right]. \quad (32e)$$

Recordemos que para poder pasar de X a Θ , o viceversa se ocupa (13) ó (12), respectivamente, pero al usar *todas las coordenadas*, sólo es cuestión de extender las matrices de transformación, por ejemplo

$$\mathbb{M}[\Theta \leftarrow X] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{1-y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Entonces (32) pasan a la siguiente representación:

$R_{\mu\nu\mu\nu}$ en el SR-Comóvil en coordenadas de B-L:

$$R_{\hat{r}\hat{t}\hat{r}\hat{t}} = \frac{e^{-2k}\omega_{,r}^2}{4L^2 \sin^2 \theta \Delta_\theta}, \quad (34a)$$

$$R_{\hat{\theta}\hat{i}\hat{\theta}\hat{i}} = \frac{e^{-2k}\omega_{,\theta}^2}{4\Delta_\theta \Delta_r}, \quad (34b)$$

$$R_{\hat{\varphi}\hat{t}\hat{\varphi}\hat{t}} = R_{\hat{r}\hat{t}\hat{r}\hat{t}} + R_{\hat{\theta}\hat{i}\hat{\theta}\hat{i}}, \quad (34c)$$

$$R_{\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}} = -\frac{e^{-2k}}{\Delta_\theta \sin^2 \theta} \left[L^2 \sin \theta \left(\sin \theta \partial_\theta \{ \sin \theta k_{,\theta} \} + \cos \theta k_{,\theta} \right) + (r-l_1) \left(k_{,r} + \frac{r-l_1}{L^2} k_{,rr} \right) \right], \quad (34d)$$

$$R_{\hat{\varphi}\hat{r}\hat{\varphi}\hat{r}} = \frac{e^{-2k}}{4\Delta_\theta \sin^2 \theta} \left[4L^2 \sin^2 \theta \left((r-l_1)k_{,r}/L - \sin \theta k_{,\theta} \right) - 3(\omega_{,r}/L)^2 \right]. \quad (34e)$$

Tensor de Ricci $R_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$

Algo importante que merece nuestra atención es la transformación del tensor de Ricci $R_{\alpha\beta} = R^\sigma_{\alpha\sigma\beta}$. Es importante recordar que la **condición G** se refiere a las condiciones de energía, las cuales dictaminan cuáles soluciones a las ecuaciones de Einstein son físicamente plausibles en nuestro universo. Aunque estas condiciones son de gran relevancia, investigaciones recientes han mostrado que la presencia de materia exótica general violación de las CE.

Por consiguiente, al seleccionar un vector nulo adecuado se llega a la ecuación (2.41), en la cual la determinación de si una solución cumple o no las CE se reduce a conocer la forma y el comportamiento de dos elementos del tensor de Ricci, $R_{\hat{t}\hat{t}}$ y $R_{\hat{x}\hat{x}}$. Para éste propósito, es suficiente emplear las coordenadas esferoidales sin necesidad de recurrir

a las coordenadas de Boyer-Linquist. La ventaja de utilizar las primeras mencionadas radica en la capacidad de facilitar la observación del comportamiento de dicho invariante y así determinar el cumplimiento o no de las CE.

Si transformamos los elementos del tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ con ayuda de (29), entonces

$$R_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \mathbb{M}_{comovil} \cdot \{R_{\mu\nu}\} \cdot (\mathbb{M}_{comovil})^T.$$

Por lo que, la nueva representación de $R_{\hat{t}\hat{t}}$ y $R_{\hat{x}\hat{x}}$ será:

Componentes del tensor de Ricci $R_{\alpha\beta} = R^\sigma{}_{\alpha\sigma\beta}$ en el SR-Comovil

$$R_{\hat{t}\hat{t}} = \frac{e^{-2k}}{2L^4(x^2 + 1)(1 - y^2)(x^2 + y^2)} \left[(1 - y^2)\omega_{,y}^2 + (x^2 + 1)\omega_{,x}^2 \right] = 2R_{\hat{\varphi}\hat{t}\hat{\varphi}\hat{t}}, \quad (35a)$$

$$R_{\hat{x}\hat{x}} = -\frac{e^{-2k}}{L^2(x^2 + y^2)} \left[(1 - y^2)k_{,yy} + (x^2 + 1)k_{,xx} - 2yk_{,y} - \frac{\omega_{,x}^2}{2L^2(1 - y^2)} \right]. \quad (35b)$$

Apéndice E: Gráficas de fuerzas de marea

Solución 1 (λ_5)

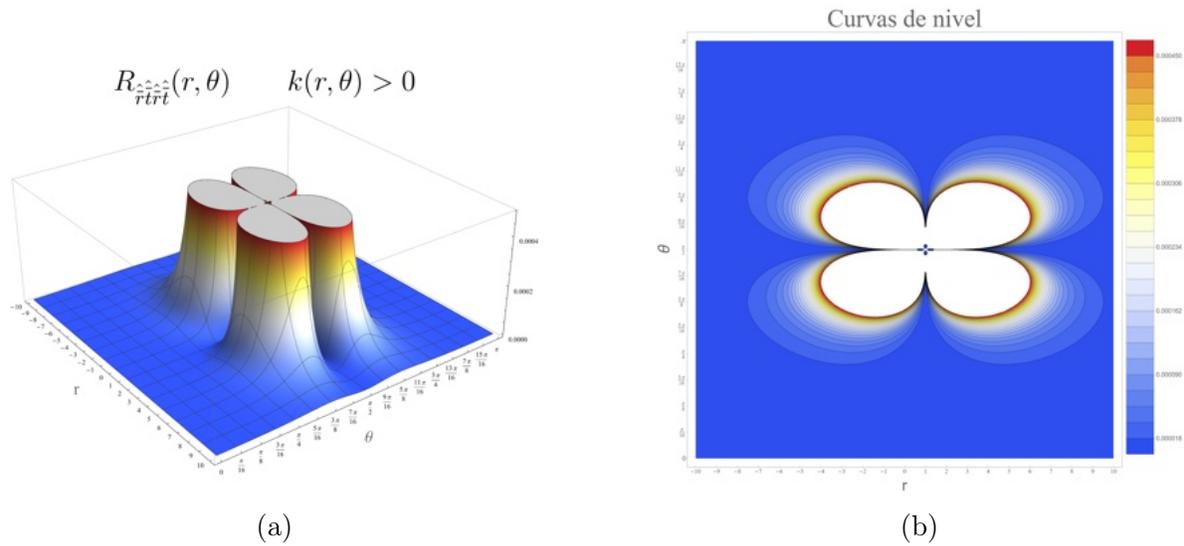


Figura 1. Gráficas del elemento $R_{\hat{r}\hat{t}\hat{r}\hat{t}}$ asociado a la fuerzas de marea radial, correspondientes a la **Solución 1**: λ_5 , haciendo $\lambda_0 = 0$ en la ecuación (5.5). Se usaron los valores $\tau_0 = 1/10$, $k_0 = -7/12$, $l_1 = 1$ y $L = 10$ y las coordenadas Θ para una mejor visualización de física. Las gráficas del lado izquierdo corresponden a la malla generada por $R_{\hat{\mu}\hat{t}\hat{\mu}\hat{t}}(r, \theta)$ y el lado derecho a las curvas de nivel. Ambos lados con colores relacionados a **valores altos (color rojo)** y **valores bajos (color azul)**.

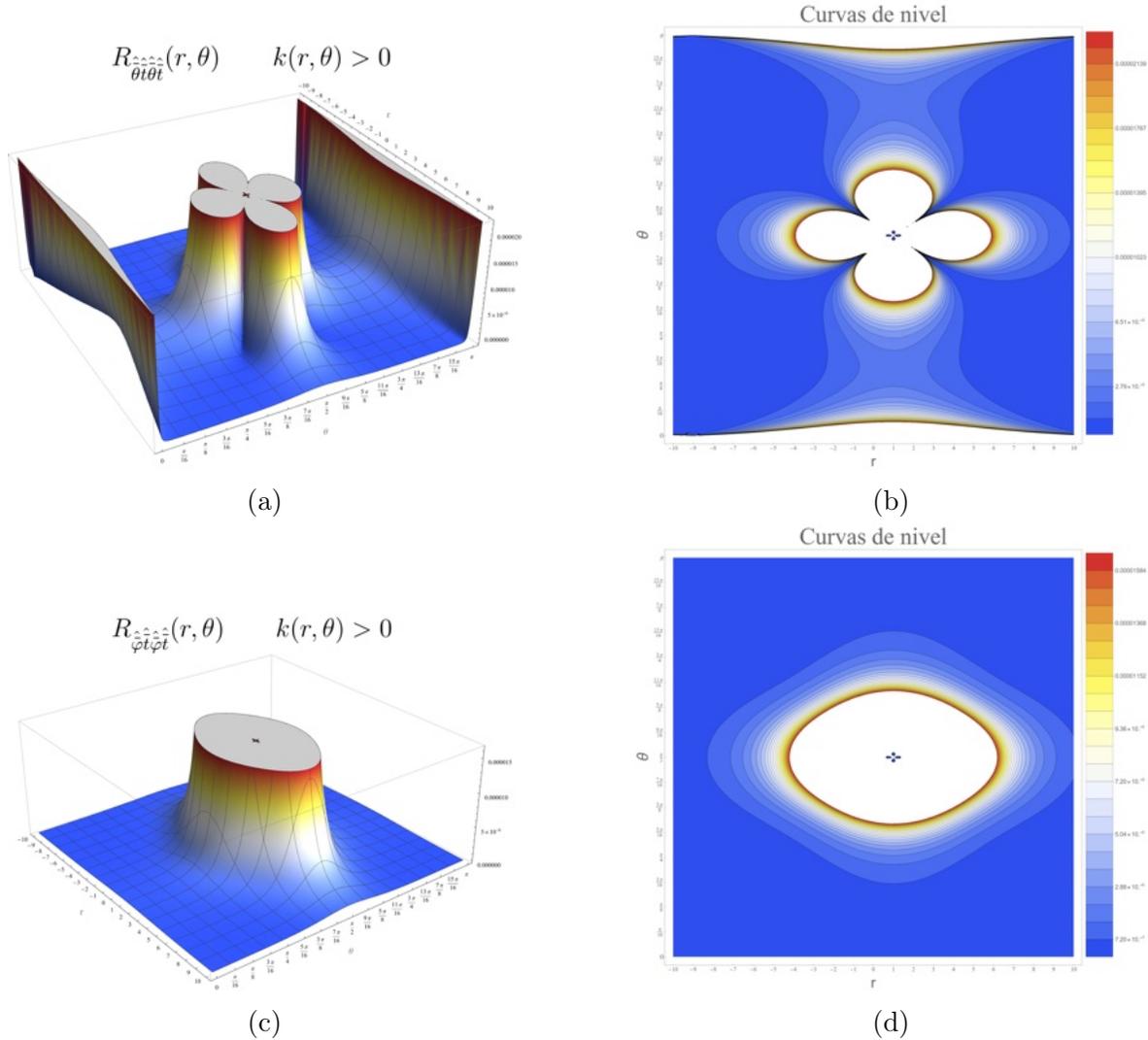


Figura 2. Gráficas de los elementos $R_{\hat{\mu}\hat{t}\hat{\mu}\hat{t}}$, $\hat{\mu} = \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ asociados a las fuerzas de marea, correspondientes a la **Solución 1**: λ_5 , haciendo $\lambda_0 = 0$ en la ecuación (5.5). Se usaron los valores $\tau_0 = 1/10$, $k_0 = -7/12$, $l_1 = 1$ y $L = 10$ y las coordenadas Θ para una mejor visualización de física. Las gráficas del lado izquierdo corresponden a la malla generada por $R_{\hat{\mu}\hat{t}\hat{\mu}\hat{t}}(r, \theta)$ y el lado derecho a las curvas de nivel. Ambos lados con colores relacionados a **valores altos (color rojo)** y **valores bajos (color azul)**.

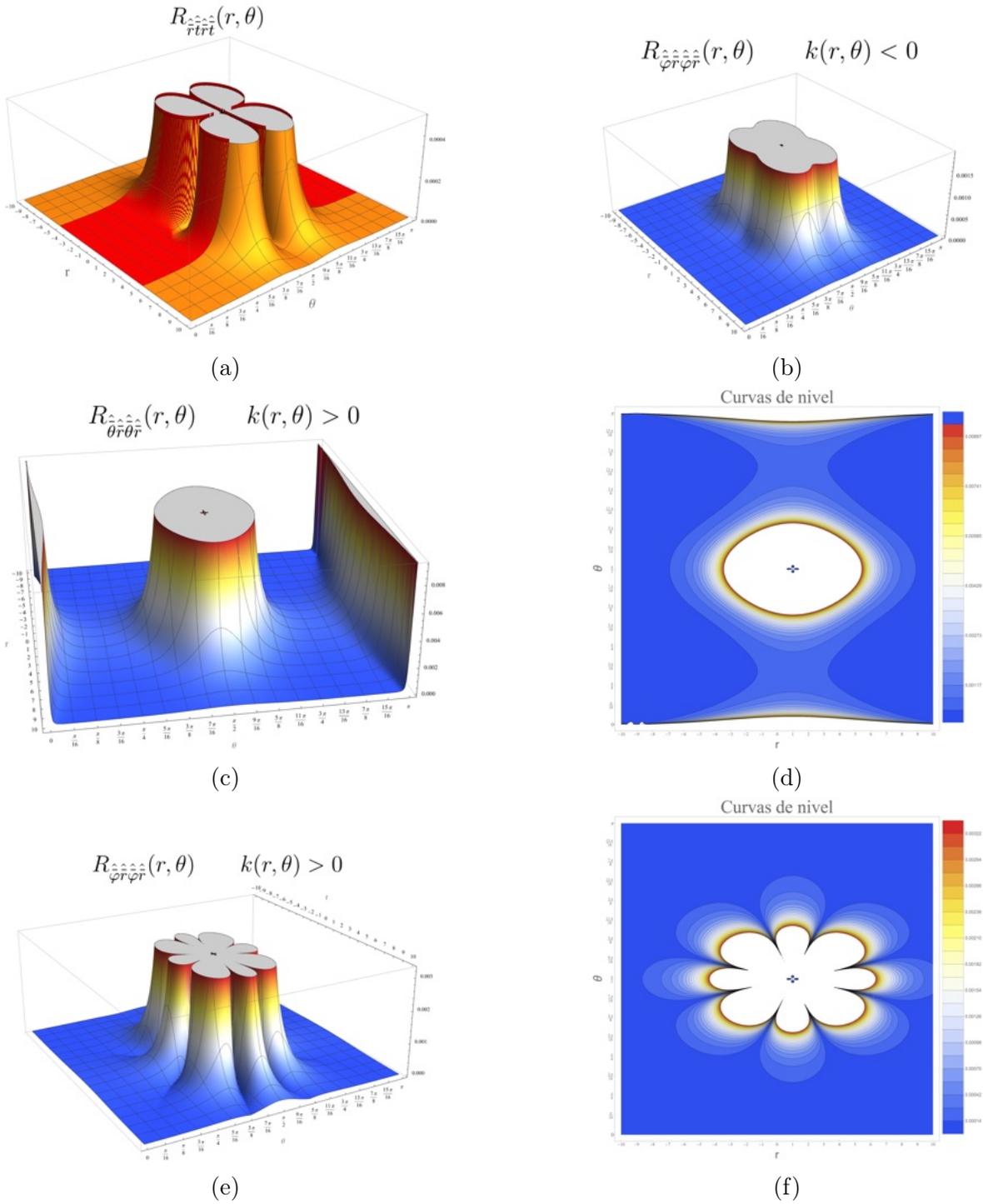


Figura 3. Gráficas de los elementos $\{R_{\hat{\mu}\hat{r}\hat{\mu}\hat{r}}\}$, $\hat{\mu} = \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ asociados a las fuerzas de marea *para velocidades relativistas*, correspondientes a la **Solución 1**: λ_5 . Se usaron los valores $\tau_0 = 1/10$, $k_0 = -7/12$, $l_1 = 1$ y $L = 10$ y las coordenadas Θ . En figura **a**), se comparan las consecuencias de elegir un *campo escalar fantasma ó dilatónico*, usando $k_0 = \{-7/12, 1/12\}$ consecutivamente y correspondiente al color *amarillo y rojo*.

Solución 2 (λ_{N1})

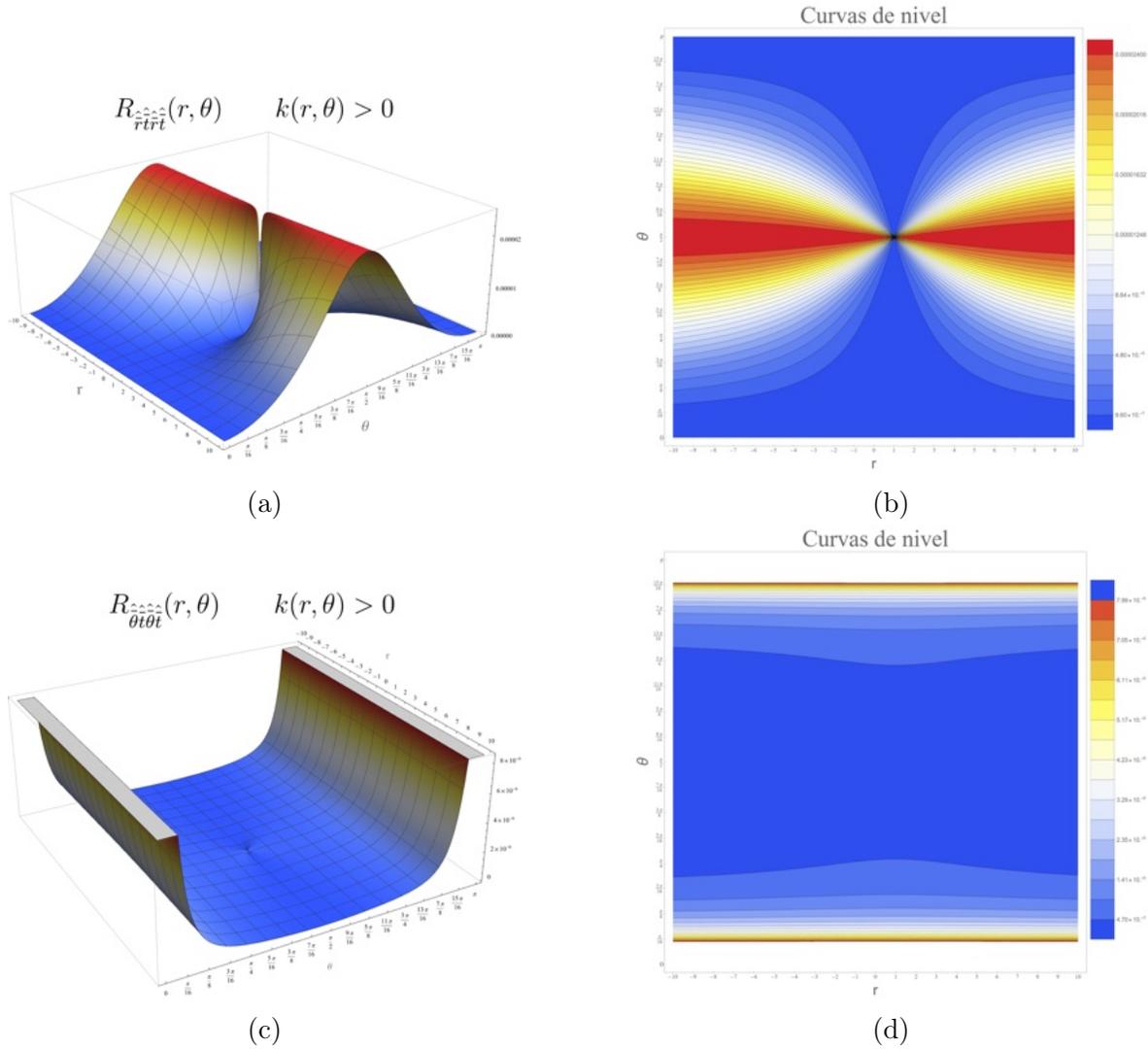


Figura 4. Gráficas de $R_{\hat{r}\hat{t}\hat{r}\hat{t}}$ y $R_{\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}}$ asociado a la fuerzas de marea radial y angular θ , correspondientes a la **Solución 2**: λ_{N1} , haciendo $\tau_0 = 0$ en la ecuación (5.6). Se usaron los valores $\lambda_0 = 1/10^3$, $k_0 = -7/12$, $l_1 = 1$ y $L = 10$ y las coordenadas Θ para una mejor visualización de física. Las gráficas del lado izquierdo corresponden a la malla generada por $R_{\hat{\mu}\hat{t}\hat{\mu}\hat{t}}(r, \theta)$ y el lado derecho a las curvas de nivel. Ambos lados con colores relacionados a **valores altos (color rojo)** y **valores bajos (color azul)**.

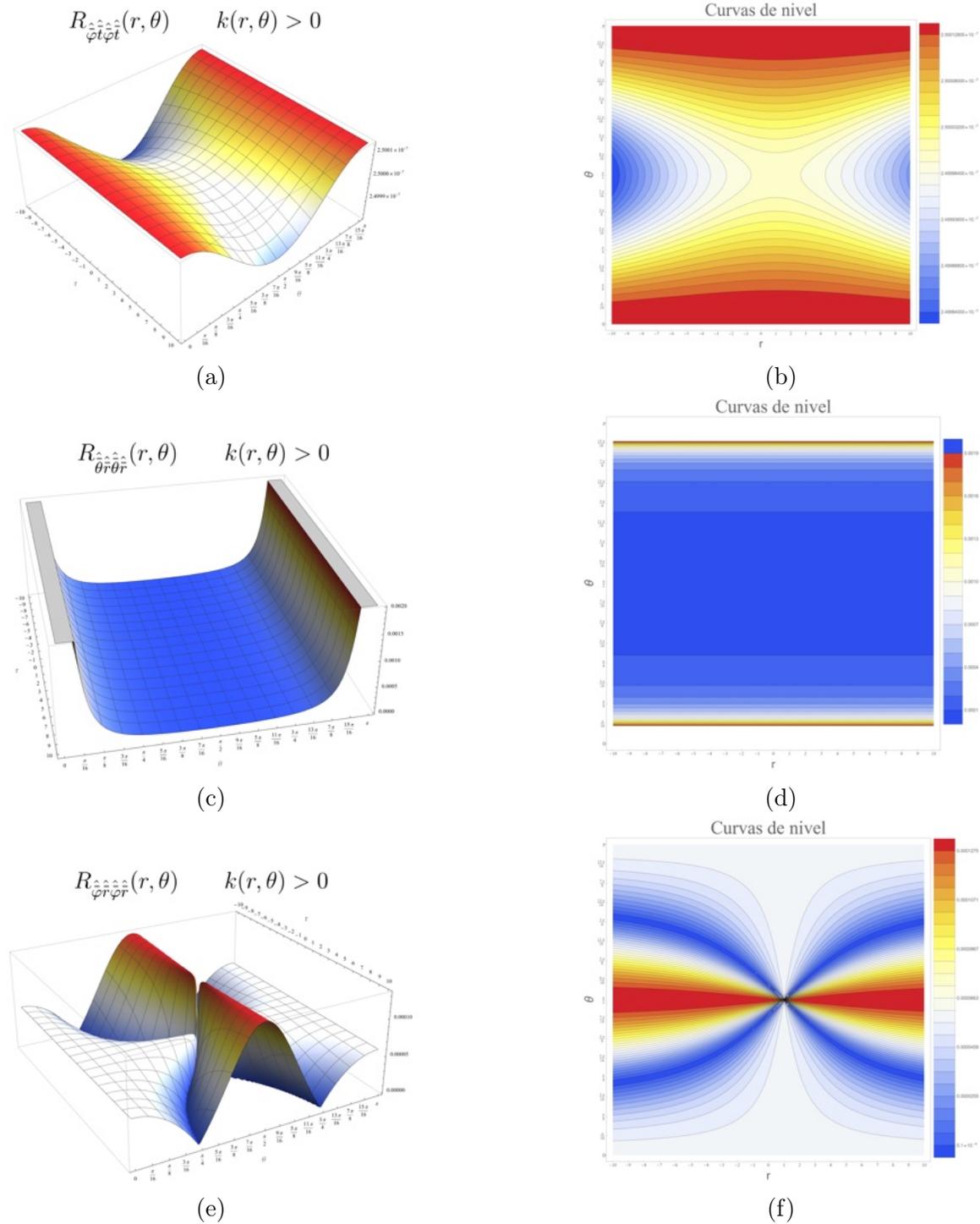
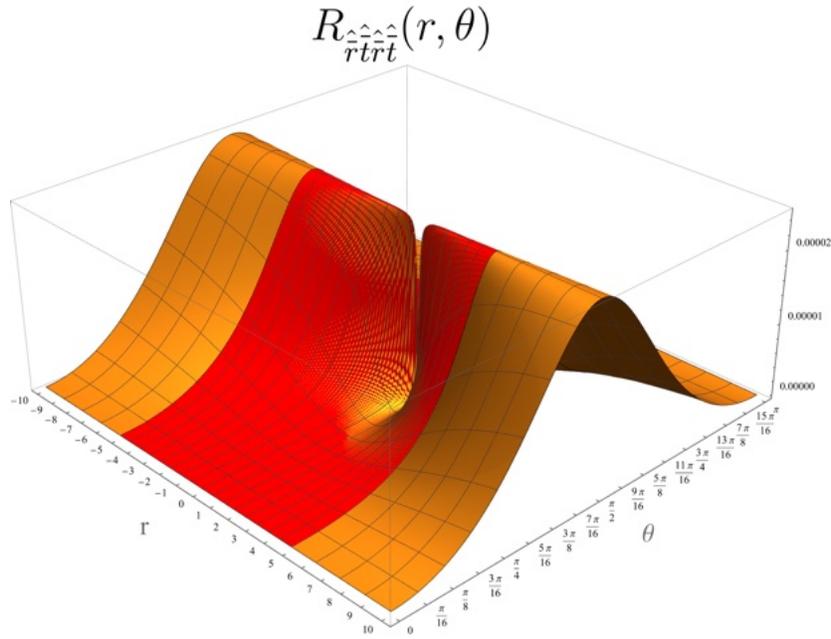
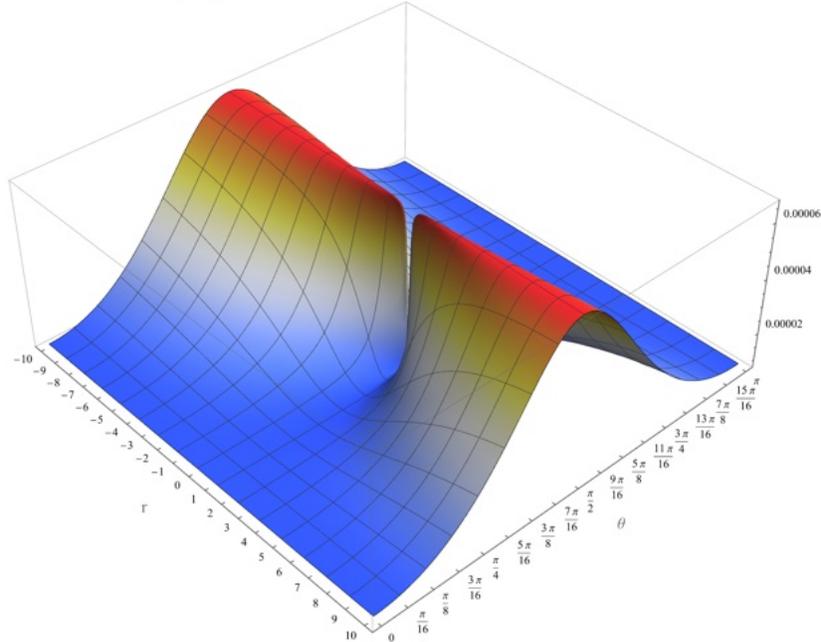


Figura 5. Gráficas de los elementos $R_{\hat{\varphi}\hat{t}\hat{\varphi}\hat{t}}$ y $R_{\hat{\mu}\hat{r}\hat{\mu}\hat{r}}$, $\hat{\mu} = \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ asociados a las fuerzas de marea, correspondientes a la **Solución 2**: λ_{N1} , haciendo $\tau_0 = 0$ en la ecuación (5.6). Se usaron los valores $\lambda_0 = 1/10^3$, $k_0 = -7/12$, $l_1 = 1$ y $L = 10$ y las coordenadas Θ para una mejor visualización de física. Las gráficas del lado izquierdo corresponden a la malla generada por $R_{\hat{\mu}\hat{t}\hat{\mu}\hat{t}}(r, \theta)$ y el lado derecho a las curvas de nivel. Ambos lados con colores relacionados a valores altos (color rojo) y valores bajos (color azul).



(a)

$$R_{\hat{\varphi}\hat{r}\hat{\varphi}\hat{r}}(r, \theta) \quad k(r, \theta) < 0$$



(b)

Figura 6. **a)** Se comparan las consecuencias de elegir un *campo escalar fantasma* ó *dilatónico*, usando $k_0 = \{-7/12, 1/12\}$ consecutivamente y correspondiente al color *amarillo y rojo*. En la mayoría de los casos, no hay diferencia entre uno y otro. **b)** Graficación de $R_{\hat{\varphi}\hat{r}\hat{\varphi}\hat{r}}$ usando un *campo escalar dilatónico*, a diferencia de la gráfica (5e), en la cual se usó un *campo escalar fantasma*. **Para ambas gráficas se usaron los valores $\lambda_0 = 1/10^3$, $k_0 = -7/12$, $l_1 = 1$ y $L = 10$.**

Solución 3 (λ_{N2})

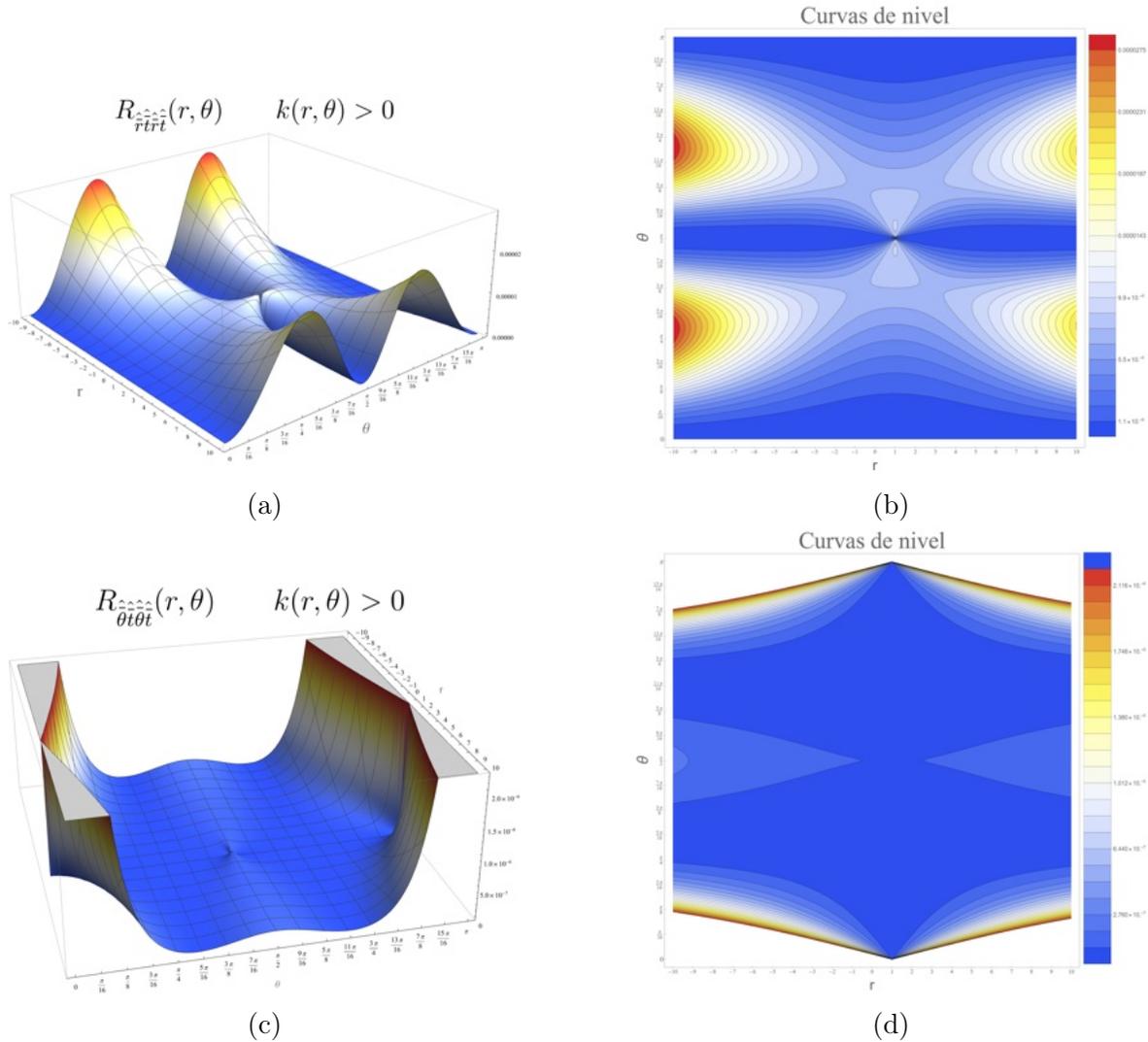


Figura 7. Gráficas de $R_{\hat{r}\hat{t}\hat{r}\hat{t}}$ y $R_{\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}}$ asociado a la fuerzas de marea radial y angular θ , correspondientes a la **Solución 3**: λ_{N2} , haciendo $\lambda_0 = 0$ en la ecuación (5.6). Se usaron los valores $\tau_0 = 0.6/10^4$, $k_0 = -7/12$, $l_1 = 1$ y $L = 10$ y las coordenadas Θ para una mejor visualización de física. Las gráficas del lado izquierdo corresponden a la malla generada por $R_{\hat{\mu}\hat{t}\hat{\mu}\hat{t}}(r, \theta)$ y el lado derecho a las curvas de nivel. Ambos lados con colores relacionados a **valores altos (color rojo)** y **valores bajos (color azul)**.

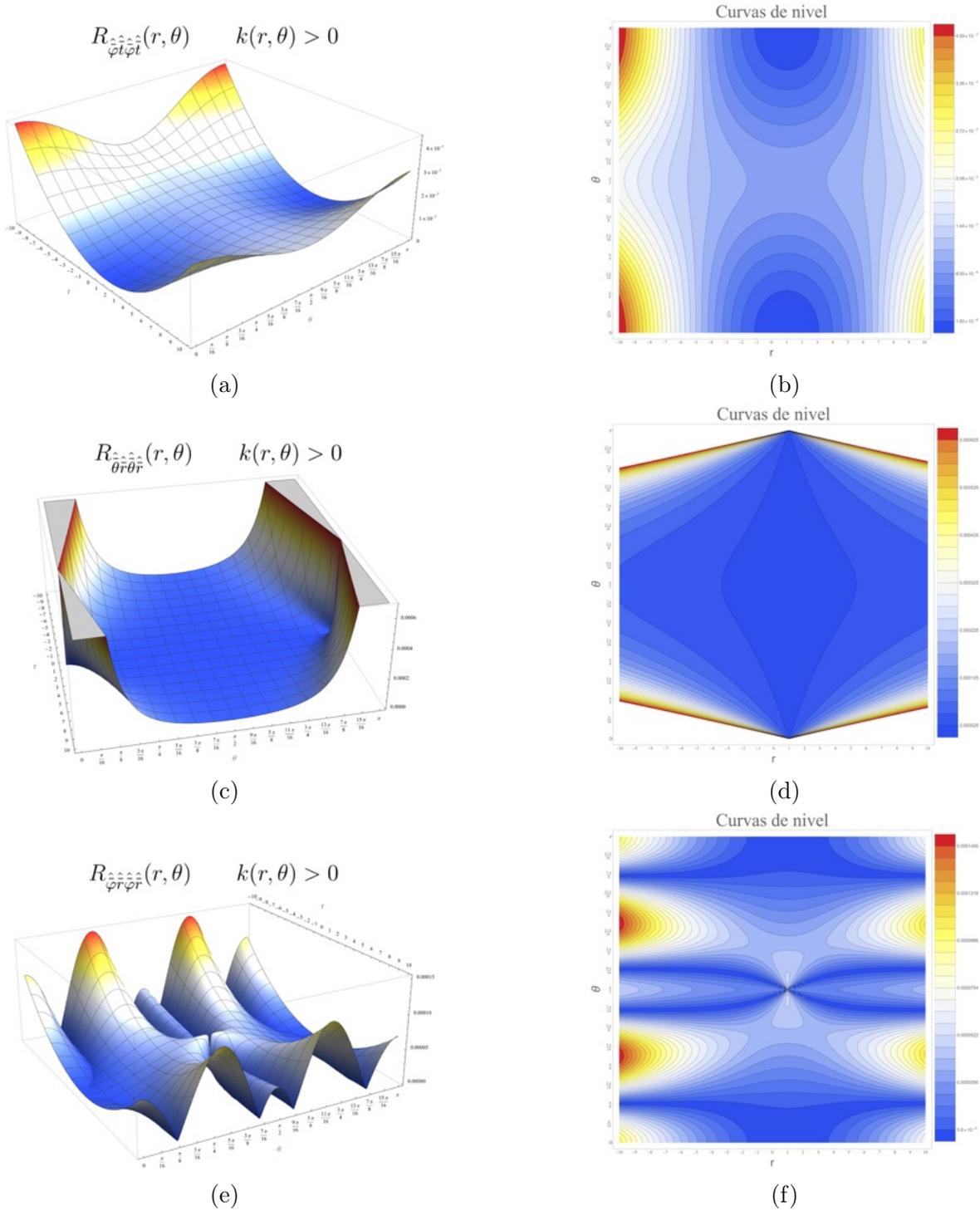


Figura 8. Gráficas de los elementos $R_{\hat{\varphi}\hat{t}\hat{\varphi}\hat{t}}$ y $R_{\hat{\mu}\hat{r}\hat{\mu}\hat{r}}$, $\hat{\mu} = \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ asociados a las fuerzas de marea, correspondientes a la **Solución 3**: λ_{N2} , haciendo $\lambda_0 = 0$ en la ecuación (5.6). Se usaron los valores $\tau_0 = 0.6/10^4$, $k_0 = -7/12$, $l_1 = 1$ y $L = 10$ y las coordenadas Θ para una mejor visualización de física. Las gráficas del lado izquierdo corresponden a la malla generada por $R_{\hat{\mu}\hat{t}\hat{\mu}\hat{t}}(r, \theta)$ y el lado derecho a las curvas de nivel. Ambos lados con colores relacionados a **valores altos (color rojo)** y **valores bajos (color azul)**.

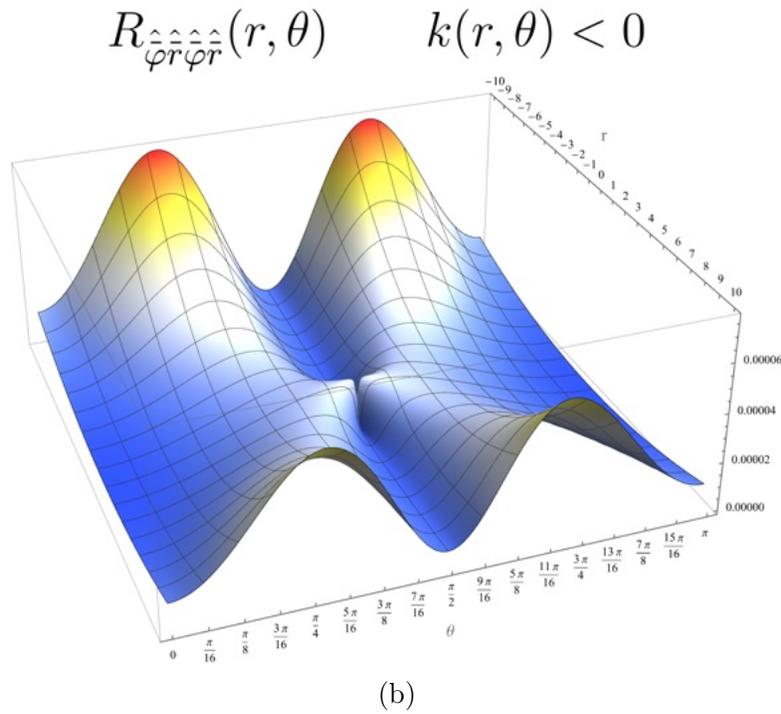
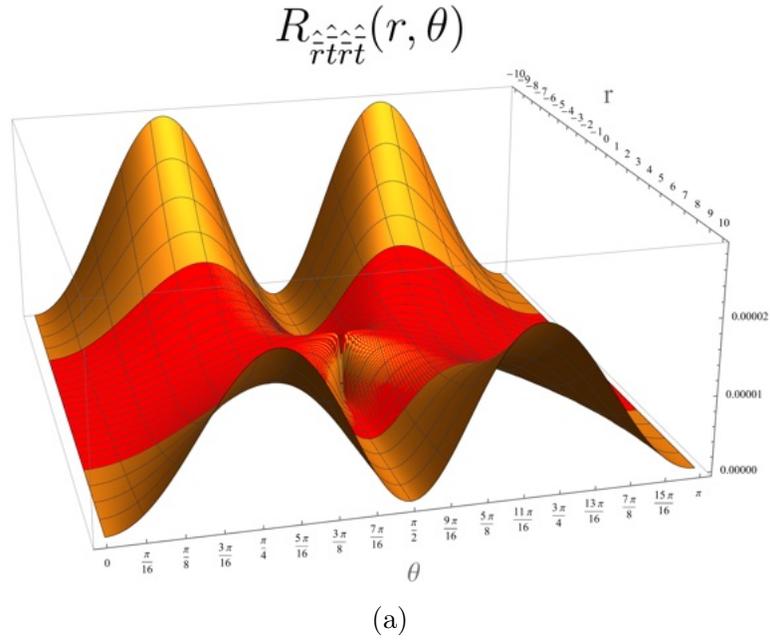


Figura 9. **a)** Se comparan las consecuencias de elegir un *campo escalar fantasma* ó *dilatónico*, usando $k_0 = \{-7/12, 1/12\}$ consecutivamente y correspondiente al color *amarillo* y *rojo*. En la mayoría de los casos, no hay diferencia entre uno y otro. **b)** Graficación de $R_{\hat{\varphi}\hat{r}\hat{\varphi}\hat{r}}$ usando un *campo escalar dilatónico*, a diferencia de la gráfica (8e), en la cual se usó un *campo escalar fantasma*. **Para ambas gráficas se usaron los valores $\tau_0 = 0.6/10^4$, $k_0 = -7/12$, $l_1 = 1$ y $L = 10$.**

Bibliografía

- [1] A. Einstein, “Die feldgleichungen der gravitation,” *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*, pp. 844–847, 1915, “Las ecuaciones de campo de la gravitación”.
- [2] R. P. Kerr, “Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 11, pp. 237–238, Sep 1963. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.11.237>
- [3] M. S. Morris and K. S. Thorne, “Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity,” *American Journal of Physics*, vol. 56, pp. 395–412, 5 1988.
- [4] G. W. Gibbons, “Editorial note to: Ludwig flamm, contributions to einstein’s theory of gravitation,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 47, p. 71, 6 2015.
- [5] A. Einstein and N. Rosen, “The particle problem in the general theory of relativity,” *Physical Review*, vol. 48, pp. 73–77, 7 1935.
- [6] H. Bondi, T. Gold, and F. Hoyle, “The steady-state theory of the expanding universe,” *Nature*, vol. 161, pp. 879–882, 1948.
- [7] J. C. D. Águila and T. Matos, “Gravitational perturbations in the newman-penrose formalism: Applications to wormholes,” *Physical Review D*, vol. 103, 4 2021.
- [8] T. Matos and D. Núñez, “Rotating scalar field wormhole,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 23, pp. 4485–4495, 6 2006.
- [9] M. G. M. Sanchez, “Agujeros de gusano rotatorios,” pp. 1–97, 11 2015. [Online]. Available: http://pelusa.fis.cinvestav.mx/tmatos/CV/3_RecursosH/Dr/Galaxia.pdf
- [10] M. Visser, *Lorentzian Wormholes: From Einstein to Hawking*. American Institute of Physics Melville, NY, 9 1996.
- [11] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry*. Cambridge University Press, 8 2019.

-
- [12] T. Matos, D. Núñez, G. Estevez, and M. Rios, “Rotating 5d-kaluza-klein spacetimes from invariant transformations,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 32, pp. 1499–1525, 8 2000.
- [13] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*, 2017.
- [14] J. T. Jebsen, “On the general spherically symmetric solutions of einstein’s gravitational equations in vacuo,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 37, pp. 2253–2259, 12 2005.
- [15] T. Matos, “Class of einstein–maxwell phantom fields: rotating and magnetized wormholes,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 42, pp. 1969–1990, 8 2010.
- [16] D. Wuensch, *Kaluza—Klein Theory*. Springer Berlin Heidelberg, 2009, pp. 328–331.
- [17] K. Sundermeyer, “Symmetries in fundamental physics.” [Online]. Available: <http://www.springer.com/series/6001>
- [18] T. Matos, D. Núñez, and H. Quevedo, “Class of einstein-maxwell dilatons,” *Physical Review D*, vol. 51, pp. R310–R313, 1 1995.
- [19] T. Matos, D. Núñez, and M. Rios, “Class of einstein-maxwell dilatons, an ansatz for new families of rotating solutions,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 17, pp. 3917–3933, 9 2000.
- [20] T. Matos, G. Miranda, R. Sánchez-Sánchez, and P. Wiederhold, “Class of einstein-maxwell-dilaton-axion space-times,” *Physical Review D*, vol. 79, p. 124016, 6 2009.
- [21] G. Miranda, J. C. D. Águila, and T. Matos, “Exact rotating magnetic traversable wormhole satisfying the energy conditions,” *Physical Review D*, vol. 99, 6 2019.
- [22] I. A. Sarmiento-Alvarado, P. Wiederhold, and T. Matos, “One-dimensional subspaces of the $sl(n, r)$ chiral equations,” *International Journal of Theoretical Physics*, vol. 62, 12 2023.
- [23] S. Hans, K. Dietrich, M. MacCallum, C. Hoenselaers, and E. Herlt, *Exact Solutions of Einstein’s Field Equations*, 2nd ed. Cambridge University Press, 11 2009.
- [24] T. Matos and P. Wiederhold, *PRINCIPIOS MATEMÁTICOS PARA CIENCIAS EXÁCTAS Y TECNOLOGÍA AVANZADA*, 1st ed. Colofón, 2009. [Online]. Available: http://pelusa.fis.cinvestav.mx/tmatos/CV/4_Repercusion/Libros/Principios.htm