



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

UNIDAD SALTILLO

**“Estudio computacional de los campos térmicos y de esfuerzos
en el piso del horno de arco eléctrico de corriente directa”**

Tesis que presenta

Ing. Óscar Munguía Ramírez

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

En la especialidad de

Ingeniería Metalúrgica

Director de la Tesis:

Dr. Francisco Andrés Acosta González

DEDICATORIA

A mis padres, Maylet Ramírez y Juan Munguía, por su apoyo incondicional. Siempre me han instado a crecer personal y profesionalmente.

A mi hijo Emiliano Chávez, por ser mi motor para seguir esforzándome en cada uno de mis proyectos.

A mis hermanos, José Ariel y Jasiel, porque siempre me han brindado su apoyo en los momentos más difíciles de mi vida.

Y a todas las personas que siempre han creído en mí.

AGRADECIMIENTOS

Mi agradecimiento a CONAHCYT por brindarme la oportunidad de continuar con mis estudios de maestría. La beca me permitió dedicarme por completo a mis deberes académicos, reflejándose en mi buen aprovechamiento.

Al CINVESTAV Saltillo por abrirme las puertas de seguir preparándome profesionalmente. A mis profesores por su dedicación en el aula y por compartir sus conocimientos conmigo.

Un especial agradecimiento a mi director de tesis, el Dr. Andrés Acosta; por su apoyo, mentoría y sus enseñanzas dentro y fuera del aula. Es una de las pocas personas que he llegado a admirar por su compromiso, humildad y profesionalismo.

Gracias a mis padres por alentarme a perseguir mis objetivos. Los llevo en mi corazón en todo momento.

RESUMEN

Esta tesis presenta un estudio por simulación computacional de los fenómenos termo-fluidinámicos y termo-mecánicos en el piso de un horno de arco eléctrico de corriente directa (DC-EAF, por sus siglas en inglés). Dicho estudio está enfocado en entender el mecanismo que origina el ensanchamiento característico de una porción de los ánodos cilíndricos de acero, tipo palanquilla (mejor conocidos como tipo *billet*, léase “*billet*” del inglés). Este ensanchamiento es conocido como “*pata de elefante*” por su similitud con la pata de dicho paquidermo. Aparece a cierta profundidad del piso refractario y está asociado a un daño severo en las mangas refractarias que envuelven al ánodo. Este daño conduce a costosos paros de mantenimiento correctivo y limita la productividad de los hornos.

Se implementó un modelo termo-fluidinámico que involucra las ecuaciones diferenciales de continuidad, momentum y energía. El modelo incluye la rapidez de generación de calor dentro del ánodo debido al efecto Joule, la convección termo-gravitacional, la fuerza electromagnética de Lorentz y la turbulencia del acero líquido. El dominio computacional incluye un solo ánodo, pero enfundado en una manga refractaria y rodeado con una porción representativa de piso refractario, estableciendo condiciones de frontera apropiadas. Dada la condición de simetría del sistema, las simulaciones se implementaron en coordenadas axisimétricas (r, z) en estado estable. Dicho estado representa una condición de máxima saturación térmica del piso refractario que podría alcanzarse si el horno operara a su máxima potencia durante un tiempo suficientemente largo. Esta condición extrema representa el límite superior de temperatura que el piso refractario podría alcanzar después de muchas cargas procesadas consecutivamente en el horno.

Adicionalmente, en esta tesis se desarrolló un segundo modelo computacional para calcular el estado de esfuerzos térmicos en el sistema. En este modelo se utilizó el campo de temperatura previamente calculado con uno de los modelos termo-fluidinámicos y se resolvió la ecuación diferencial de equilibrio mecánico en el mismo dominio computacional. Los resultados de la simulación termo-mecánica demostraron que justo debajo del frente de fusión aparece el esfuerzo térmico máximo. Es probable que este esfuerzo tenga la suficiente magnitud para exceder el límite de resistencia de la manga refractaria que tiene contacto con el ánodo.

El frente de fusión tiene un efecto importante sobre el estado de esfuerzos térmicos en el material refractario cercano. Su posición es el resultado de un balance entre la rapidez de suministro de calor desde la cuba del horno hacia el ánodo y la rapidez de remoción de calor desde la parte inferior del ánodo. La posición calculada del frente de fusión fue similar a las que se observaron en pisos desmontados para mantenimiento en hornos de producción. Mediante la simulación se calculó que el frente de fusión está a 110 mm por encima de la interfase cobre-acero y en el ladrillo refractario cercano se presenta un elevado gradiente de temperatura. Por lo tanto, se concluyó que los esfuerzos térmicos son la causa principal de la formación de la “pata de elefante” en los ánodos tipo *billet*, ya que se genera un estado de elevados esfuerzos de compresión y tracción en las mangas refractarias, que presumiblemente provocarían la aparición de grietas, conduciendo a la infiltración de metal líquido en las mismas.

Finalmente, se realizó un estudio paramétrico: simulaciones computacionales asumiendo distintas propiedades mecánicas y distintos diseños de ánodo. Los resultados numéricos sugirieron que, bajo estas condiciones de operación, actualmente no existe ningún material capaz de proveer un factor de seguridad (SF) suficientemente alto, que se traduzca en la menor probabilidad de falla de las mangas refractarias cerca del frente de fusión. Sin embargo, es posible incrementar la vida útil del refractario si se elige una combinación de propiedades mecánicas adecuada, ya sea incrementando la resistencia al choque térmico, a la tracción y compresión; e incluso permitiendo cierta deformación plástica.

Palabras clave:

Horno de corriente directa, frente de fusión, piso refractario, simulación termo-mecánica, pata de elefante, ánodo tipo *billet*.

ABSTRACT

This thesis presents a study by computational simulation of the dynamic thermo-fluid and thermo-mechanical phenomena in the floor of a direct current electric arc furnace (DC-EAF). This study is focused on understanding the mechanism that causes the characteristic widening of a portion of the billet-type cylindrical steel anodes (better known as billet type). This widening is known as “elephant foot” due to its similarity to the foot of said pachyderm. It appears at a certain depth of the refractory floor and is associated with severe damage to the refractory sleeves that surround the anode. This damage leads to costly corrective maintenance outages and limits the productivity of the furnaces.

A thermo-fluid dynamic model was implemented that involves the differential equations of continuity, momentum, and energy. The model includes the rate of heat generation within the anode due to the Joule effect, thermo-gravitational convection, the Lorentz electromagnetic force and the turbulence of liquid steel. The computational domain includes a single anode but sheathed in a refractory sleeve and surrounded with a representative portion of refractory floor, establishing appropriate boundary conditions. Given the symmetry condition of the system, the simulations were implemented in axisymmetric coordinates (r, z) in steady state. Said state represents a condition of maximum thermal saturation of the refractory floor that could be achieved if the furnace operated at its maximum power for a sufficiently long time. This extreme condition represents the upper limit of temperature that the refractory floor could reach after many loads processed consecutively in the furnace.

Additionally, in this thesis a second computational model was developed to calculate the state of thermal stresses in the system. In this model, the temperature field previously calculated with one of the thermo-fluid dynamic models was used and the differential equation of mechanical equilibrium was solved in the same computational domain. The results of the thermo-mechanical simulation showed that the maximum thermal stress appears just below the fusion front. This stress is likely to be of sufficient magnitude to exceed the resistance limit of the refractory sleeve that contacts the anode.

The melting front has an important effect on the state of thermal stresses in the nearby refractory material. Its position is the result of a balance between the rate of heat supply from

the furnace vessel to the anode and the rate of heat removal from the bottom of the anode. The calculated position of the fusion front was like those observed in floors dismantled for maintenance in production furnaces. Through the simulation, it was calculated that the fusion front is 110 mm above the copper-steel interface and a high temperature gradient is present in the nearby refractory brick. Therefore, it was concluded that thermal stresses are the main cause of the formation of the “elephant foot” in billet-type anodes, since a state of high compression and traction stresses is generated in the refractory sleeves, which presumably would cause the appearance of cracks, leading to the infiltration of liquid metal into them.

Finally, a parametric study was carried out: computational simulations assuming different mechanical properties and different anode designs. The numerical results suggested that, under these operating conditions, there is currently no material capable of providing a sufficiently high safety factor (SF), which translates into the lowest probability of failure of the refractory sleeves near the fusion front. However, it is possible to increase the useful life of the refractory if an appropriate combination of mechanical properties is chosen, either by increasing the resistance to thermal shock, traction, and compression; and even allowing some plastic deformation.

Keywords: DC-EAF, billet-type anode, melting front, thermo-mechanical simulation, refractory floor, elephant’s foot

INDICE

Introducción	1
Justificación	3
Objetivos	5
Hipótesis.....	6
Alcances y limitaciones de este estudio	6
1. Revisión bibliográfica	7
1.1 Hornos de arco eléctrico.....	7
1.1.1 Proceso de fusión de acero	9
1.2 Horno de arco eléctrico de corriente directa	11
1.2.1 Tipos de ánodos	12
1.3 Materiales refractarios usados en hornos de arco eléctrico	13
1.3.1 Parámetros de diseño de materiales refractarios	15
1.3.2 Resistencia compresiva	15
1.3.3 Módulo de ruptura o resistencia a la flexión	16
1.3.4 Módulo elástico	17
1.3.5 Expansión térmica	18
1.3.6 Esfuerzo y choque térmico	18
1.3.7 Comportamiento de desgaste en materiales refractarios	20
1.3.8 Falla mecánica de materiales frágiles.....	21
1.3.9 Fenómenos electromagnéticos que producen un efecto sobre el piso refractario	22
1.4 Dinámica de fluidos computacional.....	28
1.4.1 Métodos de discretización	30
1.4.2 De ecuaciones gobernantes a ecuaciones algebraicas	33
1.4.3 Solución numérica del sistema de ecuaciones algebraicas.....	38
1.5 Estudios por simulación computacional de DC-EAFs.....	43
1.5.1 Fenómenos de transporte en la cuba del horno DC-EAF	43
1.5.2 Fenómenos de transporte en el ánodo tipo billet	51
2. Metodología	62
2.1 Dominio computacional	64
2.2 Consideraciones o simplificaciones	69
2.3 Ecuaciones diferenciales gobernantes.....	71

2.3.1 Modelo matemático termo-fluidinámico	71
2.3.2 Modelo matemático termo-mecánico	79
2.4 Condiciones de frontera	81
2.5 Propiedades de los materiales y condiciones de operación.....	83
2.6 Método de solución	87
2.6.1 Simulaciones termo-fluidinámicas ALFA y BETA	87
2.6.2 Simulaciones termo-mecánicas	98
3. Resultados y discusión	103
3.1 Resultados de la simulación termo-fluidodinámica ALFA.....	103
3.2 Resultados de la simulación termo-fluidodinámica BETA.....	108
3.3 Simulación termo-mecánica TM-A.....	112
3.4 Análisis paramétrico de las propiedades de los materiales	117
3.5 Efecto del diseño del piso del horno	119
4. Resumen y Conclusiones	125
Bibliografía	128
Apéndice A. Replicación de los resultados de Liu y cols. (2008): fenómenos de transporte en el ánodo.	131
Dominio computacional y condiciones de frontera	132
Modelo matemático.....	132
Propiedades de los materiales y condiciones de operación.....	134
Método de solución	136
Resultados numéricos de la simulación FU-A y FU-B	137
Apéndice B. Replica de los resultados numéricos de Liu y cols. (2008): simulaciones multi-material.....	142
Dominio computacional y condiciones a la frontera.....	142
Modelo matemático.....	144
Propiedades de los materiales y condiciones de operación.....	144
Método de solución	145
Resultados numéricos de la simulación MM-A y MM-B	146
Apéndice C. Ecuaciones diferenciales gobernantes en coordenadas axisimétricas 2D	150

LISTA DE VARIABLES

Variable	Descripción	Unidad
B	Densidad de flujo magnético	$\text{kg}\cdot\text{s}^{-2}\cdot\text{A}^{-1}$
C_p	Capacidad calorífica	$\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
E	Módulo de Young	$\text{N}\cdot\text{m}^{-2}$
F_{Lr}	Fuerza electromagnética de Lorentz en dirección radial por unidad de volumen de acero	$\text{N}\cdot\text{m}^{-3}$
F_{Lz}	Fuerza electromagnética de Lorentz en dirección axial por unidad de volumen de acero	$\text{N}\cdot\text{m}^{-3}$
F_r	Fuerza radial por unidad de volumen de material	$\text{N}\cdot\text{m}^{-3}$
FS	Factor de seguridad	---
F_z	Fuerza axial por unidad de volumen de material	$\text{N}\cdot\text{m}^{-3}$
g	Aceleración gravitacional, $9.8\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$	$\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$
h	Coefficientes de transferencia de calor	$\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$
I	Intensidad de corriente eléctrica	A
\vec{j}	Densidad de flujo eléctrico	$\text{A}\cdot\text{m}^{-2}$
k	Conductividad térmica	$\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
k_t	Energía cinética turbulenta	$\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}$
P	Potencia	W
P_l	Presión metalostática	Pa
Q_j	Calor total generado por el efecto Joule	J
r	Coordenada radial	m
R	Radio de ánodo tipo <i>billet</i>	m
R_e	Resistencia eléctrica	Ω
S_{joule}	Rapidez de generación de calor por efecto Joule	$\text{W}\cdot\text{m}^{-3}$
T_{\max}	Temperatura máxima	K
TSR	Parámetro de resistencia al choque térmico	$\text{W}\cdot\text{m}^{-1}$
V	Diferencia de potencial eléctrico	V
V_{\max}	Velocidad máxima del fluido	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
z	Coordenada axial	m

$Z_{liquidus}$ Posición del frente de fusión de acero m

LETRAS GRIEGAS

Variable	Descripción	Unidad
α_l	Coefficiente de expansión térmica lineal	K^{-1}
β	Coefficiente de dilatación térmica volumétrica	K^{-1}
γ	Angulo de conicidad anódica	$^{\circ}$
ΔT_{max}	Diferencia máxima de temperatura que puede soportar un material antes de fallar mecánicamente	K
ΔT_{water}	Incremento de temperatura del agua de enfriamiento	K
ε	Deformación	---
μ	Viscosidad dinámica	$kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$
μ_0	Permeabilidad magnética del vacío	$T \cdot m \cdot A^{-1}$
ρ	Densidad	$kg \cdot m^{-3}$
ρ_R	Resistividad eléctrica del metal	Ωm
σ	Esfuerzo mecánico	$N \cdot m^{-2}$
σ_f	Resistencia a la fractura	$N \cdot m^{-2}$
$\sigma_{flexion}$	Resistencia a la flexión	$N \cdot m^{-2}$
σ_g	Resistencia en función del tamaño de grano	$N \cdot m^{-2}$
σ_p	Resistencia en función de la porosidad del material	$N \cdot m^{-2}$
σ_t	Esfuerzo térmico	$N \cdot m^{-2}$
ν	Coefficiente de Poisson	---
ω	Rapidez de disipación de energía	$m^2 \cdot s^{-3}$

INDICE DE FIGURAS

Figura 1.1. Representación isométrica de: a) Ánodo instalado en el piso de un DC-EAF, b) ánodo nuevo, y c) ánodo con la “pata de elefante”.....	7
Figura 1.2. Representación esquemática de los circuitos eléctricos de: a) un horno de corriente alterna y b) un horno de corriente directa.....	8
Figura 1.3. Representación secuencial de las etapas de fusión en un horno de arco eléctrico	11
Figura 1.4. Horno de arco eléctrico de corriente eléctrica y los tipos de ánodos situados en el piso del horno.....	13
Figura 1.5. Representación esquemática del revestimiento refractario para hornos de arco básicos con paredes normales (izquierda) y paredes laterales enfriadas con agua (derecha).	14
Figura 1.6. Relación esquemática entre la fuerza aplicada a una viga sujeta a deflexión por 3 puntos.....	17
Figura 1.7. Ley de Biot-Savart. Campo magnético $d\mathbf{B}$ en los puntos P y P' debido a la corriente I que pasa a través de un elemento de longitud y dirección $d\mathbf{s}$	23
Figura 1.8. Regla de la mano derecha para determinar la dirección del campo magnético, 24	
Figura 1.9. Movimiento de una partícula cargada a través de un ánodo por el que pasa una corriente I , que genera un campo magnético B . (a) partícula en un ánodo cilíndrico, (b) partícula en un ánodo ligeramente cónico.	27
Figura 1.10. Representación esquemática de un volumen de control alrededor de un nodo P en un dominio de una dimensión usando el método de volumen finito	35
Figura 1.11. Distribuciones calculadas de (a) velocidad y (b) de temperatura en un horno con fondo conductor y con geometría axisimétrica.....	45
Figura 1.12. a) Campo de velocidad y b) de temperatura en el metal fundido cuando existe un ánodo de 0.1 m de radio en el centro del piso refractario.....	46

Figura 1.13. Representación isométrica del dominio tridimensional discretizado para la modelación magnetohidrodinámica en un DC-EAF de 420 t fabricado por la compañía DANIELI	47
Figura 1.14. (a) Campo vectorial calculado de la fuerza de Lorentz cerca de los ánodos (N/m^3), en una vista isométrica del piso del horno. (b) Líneas de corriente calculadas de metal líquido mostradas desde una vista superior del horno	48
Figura 1.15. Representación esquemática de: (a) Ánodo recién instalado en el piso refractario, y (b) ánodo parcialmente fundido y refractario circundante erosionado después de 400 ciclos de fusión.....	48
Figura 1.16. Representación esquemática de un DC-EAF	49
Figura 1.17. (a) Líneas de corriente de metal líquido calculadas sin contemplar la convección termo-gravitacional, (b) Líneas de corriente calculadas considerando la convección termo-gravitacional.....	50
Figura 1.18. Perfiles calculados de velocidad sobre el eje Y	50
Figura 1.19. Representación esquemática de distintos diseños de ánodos considerados en el estudio térmico del piso refractario de un DC-EAF. a) Ánodo original, b) enfriamiento del fondo modificado, c) ánodo escalonado y d) enfriamiento interno del ánodo.	52
Figura 1.20. Posición calculada del frente de fusión después de 7 días de operación de un DC-EAF que opera con 80 MW y 120 kA. Los resultados corresponden a ánodos con enfriamiento interno.....	54
Figura 1.21. Dominio computacional axi-simétrico usado por Liu y cols. (2008).....	55
Figura 1.22. Fotografía de un ánodo tipo billet	56
Figura 1.23. Líneas de corriente calculadas: (a) usando el modelo A, (b) usando el modelo B, (c) usando el modelo C. El ánodo se muestra horizontalmente.	57
Figura 1.24. Evolución calculada de la posición del frente de fusión en función del tiempo.	58
Figura 1.25. (a) Ánodo y sistema de enfriamiento, (b) chaqueta de cobre y componente de acero, (c) dominio computacional y condiciones a la frontera	60

Figura 1.26. Ciclos esquemáticos de carga térmica usados en la simulación termo-mecánica.	60
Figura 1.27. Esfuerzo equivalente de Von Mises calculado: (a) después del calentamiento, (b) después del enfriamiento a temperatura ambiente,	61
Figura 2.1. Representación sinóptica de la metodología de trabajo	63
Figura 2.2. Representación esquemática de un ánodo tipo <i>billet</i> con sistema de enfriamiento interno. Dimensiones en mm.	64
Figura 2.3. Vista superior de un DC-EAF con cuatro ánodos instalados en el piso refractario. La línea de color rojo representa una superficie adiabática.	65
Figura 2.4. Piso refractario y región axisimétrica considerada en este trabajo.	66
Figura 2.5. Representación del dominio computacional y superficies de frontera, F1 a F7, usados en la simulación ALFA.....	67
Figura 2.6. Dominio computacional y superficies de frontera, F1 a F7, usados en la simulación BETA	68
Figura 2.7. Capacidad calorífica del acero AISI 1015 en función de la temperatura	85
Figura 2.9. Resistividad eléctrica del acero AISI 1015 en función de la temperatura.....	86
Figura 2.10. Tipo de malla usada en la simulación ALFA y BETA.....	88
Figura 2.11. Dominio computacional de la simulación G1. Longitudes en mm.	94
Figura 2.12. Dominio computacional de la simulación G2. Longitudes en mm.	95
Figura 2.13. Dominio computacional de la simulación G3. Longitudes en mm.	96
Figura 2.14. Dominio computacional de la simulación G4. Longitudes en mm.	97
Figura 2.15. Tipo de malla usada en la simulación termo-mecánica.....	100
Figura 2.16. Materiales que conforman el dominio computacional de la simulación termo- mecánica.	102
Figura 3.1. Campo estable de temperatura del piso refractario calculado mediante el modelo ALFA.	103
Figura 3.2. Ánodo tipo <i>billet</i> con sistema de enfriamiento interno	104

Figura 3.3. Perfil de velocidad de acero líquido calculado en función de la posición radial en la cavidad anódica y a diferentes alturas z. 106

Figura 3.4. Esfuerzo cortante calculado en la pared de las mangas refractarias, y a lo largo de la altura de la cavidad anódica. 107

Figura 3.5. Simulación ALFA, cavidad anódica. (a) Líneas de corriente en el acero líquido, y (b) campo de energía cinética turbulenta. 108

Figura 3.6. Campo estable de temperatura del piso refractario calculado mediante el modelo BETA. 109

Figura 3.7. Perfil de velocidad en función de la posición radial a diferentes posiciones z 110

Figura 3.8. Simulación BETA, cavidad anódica. (a) Líneas de corriente en el acero líquido, y (b) campo de energía cinética turbulenta. 111

Figura 3.9. (a) Distribución calculada del esfuerzo equivalente de Von Mises, usando el modelo ALFA, y (b) magnificación de la zona con los máximos esfuerzos equivalentes. 112

Figura 3.10. Campo de deformación radial en el ladrillo refractario MgO-C. Simulación TM-A. 113

Figura 3.11. Esfuerzo compresivo sobre la superficie del ladrillo refractario MgO-C. Simulación TM-A. 114

Figura 3.12. (a) Perfiles del factor de seguridad calculados en función de la altura, z, en el ladrillo refractario, y (b) líneas sobre las que se calcularon los perfiles del factor de seguridad. 115

Figura 3.13. Perfil calculado del factor de seguridad a lo largo de la altura del ladrillo refractario hipotético con resistencias a la tracción y compresión 30 veces las correspondientes del refractario MgO-C. Simulación TM-B. 118

Figura 3.14. Comparación de los perfiles calculados del factor de seguridad a lo largo de la altura del ladrillo refractario, obtenidos con las simulaciones, TM-A, TM-C y TM-D. 119

Figura 3.15. Campo de temperatura obtenido mediante la simulación G1. 121

Figura 3.16. Campo de temperatura obtenido mediante la simulación G2. 122

Figura 3.17. Campo de temperatura obtenido mediante la simulación G3. 123

Figura 3.18. Campo de temperatura obtenido mediante la simulación G4.....	124
Figura A.1. Dominio computacional de las simulaciones presentadas por Liu (2008)	133
Figura A.2. Capacidad calorífica del acero AISI 1015 en función de la temperatura. (a) Contabilización del calor latente de fusión.....	134
Figura A.3. Conductividad térmica del acero AISI 1015 en función de la temperatura	135
Figura A.4. Resistividad eléctrica del acero AISI 1015 en función de la temperatura.....	135
Figura A.5. Campo de temperatura del ánodo de acero obtenido mediante la simulación FU- A.....	137
Figura A.6. Campo de temperatura del ánodo de acero obtenido mediante la simulación FU- B.....	138
Figura A.7. Campo de velocidad en el ánodo de acero obtenido mediante la simulación-FU- A.....	139
Figura A.8. Campo de velocidad en el ánodo de acero obtenido mediante la simulación-FU- B.....	139
Figura A.9. Ánodo tipo <i>billet</i> después de ser desinstalado del piso refractario. Liu (2008)	141
Figura B.1. Dominio computacional Liu y cols. (2008):.....	143
Figura B.2. Campo de temperatura obtenido por medio de la simulación MM-A.	147
Figura B.3. Campo de temperatura obtenido por medio de la simulación MM-B	148

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1.1 Criterios de falla de un material frágil con base en la teoría de Mohr-Coulomb.	22
Tabla 1.2. Resultados numéricos de Liu y cols. (2008) obtenidos con distintos modelos fluidodinámicos. El valor observado fue de $Z_{liquidus} = -267$ mm (ver Figura 1.20).....	57
Tabla 2.1. Composición mineralógica de los materiales refractarios	83
Tabla 2.2. Propiedades de los materiales de sistema bajo estudio.....	84
Tabla 2.3. Propiedades mecánicas de los materiales.	86
Tabla 2.4. Métodos de solución y factores de relajación usados en las ecuaciones respectivas para las simulaciones ALFA y BETA.	91
Tabla 2.5. Criterios de convergencia de las ecuaciones diferenciales gobernadoras.....	91
Tabla 3.1. Flujos de calor a través de las fronteras y por efecto Joule, calculados con el modelo ALFA. Ver Figura 2.5 para la descripción de las fronteras.	105
Tabla A.1. Viscosidad efectiva del ánodo de acero	134
Tabla A.2. Métodos de solución y factores de relajación de las simulaciones FU-A y FU-B	136
Tabla A.3. Criterios de convergencia de las ecuaciones diferenciales gobernadoras.....	136
Tabla A.4. Tasas de transferencia de calor de la simulación FU-A y la Simulación FU-B	140
Tabla A.5. Comparación entre los resultados numéricos obtenidos en este trabajo y los resultados reportados por Liu (2008).....	140
Tabla B.1. Condiciones de frontera de las simulaciones multi-material	143
Tabla B.2. Propiedades térmicas de los materiales.....	144
Tabla B.3. Métodos de solución y factores de relajación de las simulaciones con fase única.	145
Tabla B.4. Criterios de convergencia de las ecuaciones diferenciales gobernadoras.....	146
Tabla B.5. Transferencia de calor de las simulaciones multi-material MM-A y MM-B. ..	149
Tabla B.6. Comparación entre los resultados numéricos de las simulaciones multi-material y las simulaciones de Liu y cols. (2008).....	149

Introducción

Los hornos de arco eléctrico de corriente directa (DC-EAF, **D**irect **C**urrent-**E**lectric **A**rc **F**urnace) presentan ventajas con respecto a los hornos de arco eléctrico tradicionales de corriente alterna por lo que se han logrado posicionar en la industria acerera desde su aparición a fines de la década de los 90's. Sin embargo, se ha encontrado que una de las principales limitaciones de su productividad es el desgaste prematuro de su piso refractario. Este desgaste se ha atribuido a distintos factores entre los que destacan una alta temperatura del baño metálico y la erosión posiblemente producida por agitación electromagnética del acero fundido. El desgaste del piso se monitorea mediante el uso de termopares instalados en posiciones específicas dentro del propio piso refractario que típicamente tiene alrededor de 1 m de espesor. Cuando la temperatura excede un valor límite específico, se debe detener la producción para dar mantenimiento al piso refractario.

En este trabajo se estudia el piso de un DC-EAF con ánodos cilíndricos de acero, llamados palanquillas (en inglés, "billets"), que son insertados en el piso refractario para conducir la corriente eléctrica desde la carga metálica hasta la parte exterior del horno donde se cierra el circuito eléctrico. Típicamente, los ánodos tienen diámetros entre 100 a 250 mm y una longitud aproximada de 2.5 m (Liu, y otros, 2008). El número de ánodos en un horno varía desde uno hasta cuatro, dependiendo del tamaño del horno. Los ánodos están enfundados por mangas de ladrillo refractario básico y el resto del piso es material granular apisonado formado por una mezcla base MgO (Sarna, 2013).

El flujo de calor que proviene del baño metálico se propaga por el piso del horno a través del material apisonado y a través de los ánodos de acero, cuya conductividad térmica es superior a la de los refractarios. Esto resulta en dos direcciones de conducción de calor en el piso: verticalmente a través del propio espesor del piso, y horizontalmente desde cada ánodo hacia las mangas refractarias. Lógicamente, cuando se funde el acero en cada ánodo, la rapidez de transferencia de calor hacia las mangas refractarias se incrementa considerablemente. Para evitar que los ánodos se fundan completamente durante la operación, se emplea un sistema de refrigeración que consiste en una chaqueta de cobre que conduce agua en su interior y cuya pared superior está soldada a la parte inferior de cada ánodo. Este sistema permite detener el frente de fusión en el ánodo hasta una posición operativamente segura. La posición

de este frente de fusión es clave en la durabilidad del piso refractario, ya que, por encima del mismo, el metal fundido transfiere un elevado flujo de calor al refractario.

Se ha reportado que en algunos DC-EAFs el ánodo sufre un ensanchamiento significativo cerca de la interfase acero-cobre. Este ensanchamiento se asocia con el deterioro progresivo de los ladrillos refractarios que envuelven cada ánodo. Se ha confirmado que el metal líquido se filtra en el ladrillo refractario a causa de la porosidad generada por la interacción entre el ánodo y el material refractario. El ensanchamiento del ánodo ocurre en la parte inferior, cerca del frente de fusión; y se denomina “pata de elefante” por su similitud con la pata de dicho paquidermo.

En este trabajo se desea entender el mecanismo de formación de la “pata de elefante” mediante la obtención de la solución numérica de las ecuaciones diferenciales gobernantes de los fenómenos de transporte de energía, masa y momentum, así como de la ecuación diferencial de equilibrio mecánico en los materiales involucrados. En este trabajo se desarrollaron simulaciones termo-fluidodinámicas y termo-mecánicas bajo condiciones de estado estable para explicar las causas probables de la formación de la “pata de elefante” y para explorar alternativas para evitarla o al menos reducir su incidencia.

Justificación

La productividad de los hornos EAF-DC empleados para la fabricación de acero está vinculada con la frecuencia de mantenimiento del piso refractario, dentro del cual se encuentran instalados los ánodos de acero. Dicha frecuencia depende del proceso de calentamiento y fusión del metal, tanto en la cuba del horno, como en los ánodos mismos. Actualmente, no se conoce el mecanismo preciso del deterioro de los ánodos/mangas refractarias, aunque se han postulado un número de hipótesis que no se han podido probar. Existe una gran dificultad para llevar a cabo observaciones y/o mediciones de temperatura en el metal durante la operación del horno. Los estudios en planta se reducen al análisis de los datos de temperatura registrados por los termopares y la observación de los restos del piso refractario después de haberlo desmontado para su reparación. Además, no existen instrumentos para medir el campo de velocidad y temperatura de metal líquido en cada ánodo durante la producción. Los esfuerzos térmicos tampoco pueden medirse con celdas de carga porque el horno opera bajo condiciones extremas de temperatura. Por todo lo anterior, resulta muy conveniente llevar a cabo estudios por simulación computacional de los fenómenos de transporte en el piso refractario y en los ánodos. Se han reportado previamente trabajos de simulación computacional cuyos resultados han permitido mejorar el funcionamiento y prolongar la vida útil del piso de los DC-EAFs, sin embargo, no se ha estudiado el mecanismo de formación de la “pata de elefante” en los ánodos cilíndricos tipo *billet*, que aparece cerca de la interfase de refrigeración (cobre-acero). La aparición de la “pata de elefante” está asociada a un desgaste progresivo de las mangas refractarias que rodean al ánodo, por lo que su entendimiento permitiría sugerir alternativas de diseño o de procesamiento para prolongar la vida útil del piso refractario antes de requerir mantenimiento.

Cabe mencionar que existen estudios por simulación computacional que explican la relación entre los vórtices de origen electromagnético dentro del baño de metal líquido en la cuba del horno y la degradación del piso en la zona superior de los ánodos. Sin embargo, no se ha estudiado el posible efecto de la agitación electromagnética de metal líquido dentro del ánodo sobre la formación de la “pata de elefante”. Por otro lado, existe información relevante sobre la relación de la fuerza de Lorentz, la degradación superior del ánodo y la penetración del frente de fusión que podría explicar por qué el frente de fusión se aproxima mucho al sistema

de enfriamiento, lo que podría estar relacionada con la aparición de la “pata de elefante”. Debido a su bajo costo, el control de los datos de entrada, y el detalle de los resultados numéricos, se justifica plenamente este estudio por simulación computacional de los fenómenos de transporte que ocurren en el piso refractario y del comportamiento termomecánico. Los resultados numéricos serán interpretados para proponer un mecanismo de formación de la “pata de elefante” con la ayuda de datos sobre la localización observada de dicho defecto en ánodos de hornos de producción.

Objetivos

Objetivo general

Estudiar mediante simulación computacional los fenómenos de transporte de masa, energía y momentum y el comportamiento termo-mecánico del piso refractario de un DC-EAF para entender el mecanismo de formación de la “pata de elefante” en los ánodos tipo *billet*.

Metas

1. Plantear e implementar un modelo basado en la solución de las ecuaciones diferenciales gobernadoras de los fenómenos de transporte y equilibrio mecánico, en una región representativa del piso de un DC-EAF y estableciendo condiciones de frontera apropiadas. Se dispone de los programas comerciales ANSYS-Fluent y ANSYS Mechanical para la implementación del modelo.
2. Validar la implementación computacional del modelo mediante la réplica de los resultados numéricos de estudios previos de simulación computacional enfocados a un piso con ánodos tipo *billet* (Apéndice A y B).
3. Analizar la distribución de velocidad, temperatura y esfuerzos térmicos calculados en el ánodo de acero y en el refractario circundante para proponer un mecanismo de formación de la “pata de elefante”.
4. Obtener, mediante simulación numérica, cambios viables en el diseño, materiales u operación del horno para evitar o al menos reducir la incidencia de la “pata de elefante”.

Hipótesis

Con base en la observación general en planta de producción de que la “pata de elefante” se sitúa cerca del frente de fusión, se postula que la elevada temperatura del acero fundido combinada con el alto gradiente térmico en la manga refractaria y la erosión ejercida sobre su superficie por el metal líquido en movimiento, provocan daño mecánico sobre el material refractario, y consecuentemente, la infiltración de metal fundido a través de las grietas que podrían formarse. Adicionalmente, la naturaleza cíclica del proceso de carga, fusión y vaciado de acero contribuye a la degradación de las mangas refractarias mediante un proceso de fatiga termo-mecánica generada por la dilatación y contracción térmica de los materiales, aunado a que tienen distintos coeficientes de expansión térmica.

Alcances y limitaciones de este estudio

- a) Este trabajo se enfoca en pisos de horno con ánodos tipo *billet* solamente. Existen otros diseños de ánodo muy eficientes que incluyen ánodos tipo alfiler (*pin*) o pisos conductores de corriente eléctrica (Elizarov, Krutyanskii, Nekhamin, & Nekhamin, 2014). No obstante, es posible aplicar la metodología desarrollada en este trabajo a dichos sistemas.
- b) Este estudio considera al sistema ánodo-refractario en condiciones de estado estable. Esto significa que el campo de temperatura no cambia con el tiempo, por lo que se ignora la naturaleza cíclica del proceso de carga, fusión y vaciado de acero fundido. Esta consideración se justifica porque el estado estable representa una condición extrema de saturación térmica que se alcanzaría si se mantuviese el acero fundido en la cuba del horno por un tiempo suficientemente largo.
- c) Este trabajo no pretende profundizar en el entendimiento de los mecanismos de desgaste, tales como abrasión, erosión y corrosión del material refractario. La cinética de desgaste y/o fractura del ladrillo refractario también se encuentra fuera del alcance de este proyecto.
- d) En este trabajo no se incluye la modelación matemática del proceso de fatiga del material refractario.

1. Revisión bibliográfica

Antes de presentar la revisión bibliográfica, conviene ilustrar el defecto denominado “pata de elefante”. La **Figura 1.1(a)** es una representación isométrica de un ánodo cilíndrico instalado en el piso refractario de un horno. Nótese que el ánodo está enfundado por mangas refractarias, mientras que el resto del piso es material apisonado. El componente cilíndrico de color rojo corresponde a la chaqueta de cobre, dentro de la cual circula agua para enfriar las superficie lateral y superior del cilindro de cobre. La **Figura 1.1(b)** es una representación de un ánodo funcional, mientras que la **Figura 1.1(c)** representa un ánodo con la “pata de elefante” localizada cerca de la interfase acero-cobre. En este caso, el acero -representado en color gris- se ha desplazado radialmente, invadiendo el espacio ocupado por las mangas refractarias. De acuerdo con el mejor conocimiento del autor de esta tesis, no existen reportes del estudio del mecanismo de la formación de la “pata de elefante”.

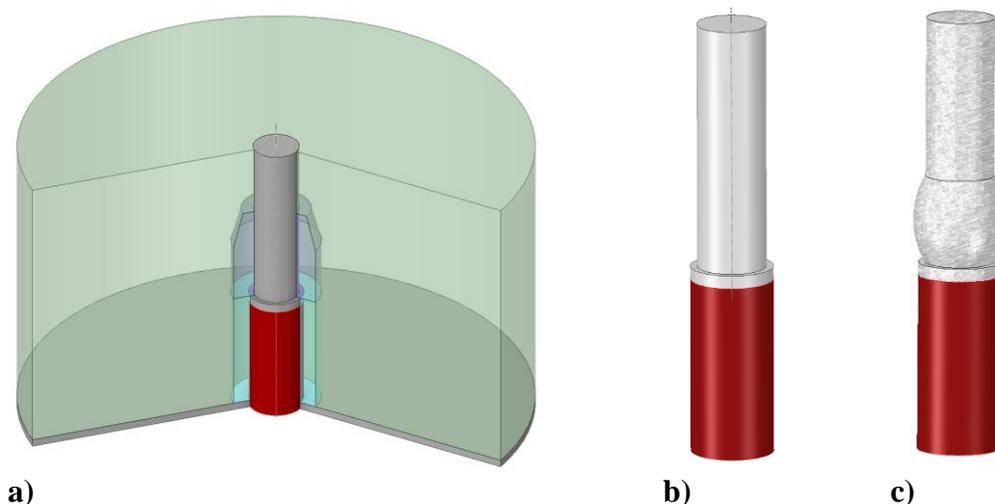


Figura 1.1. Representación isométrica de: a) Ánodo instalado en el piso de un DC-EAF, b) ánodo nuevo, y c) ánodo con la “pata de elefante”.

1.1 Hornos de arco eléctrico

Las rutas actuales para fabricar acero se pueden dividir en dos rutas: (1) ruta primaria o integrada y (2) la ruta secundaria. La primera ruta combina los procesos de reducción química de mineral en el alto horno, para producir arrabio, con la refinación de éste en convertidores con oxígeno. La ruta secundaria utiliza chatarra para fundirla y refinarla en hornos de arco

eléctrico (EAF) o de inducción electromagnética (IMF) para obtener acero. Aunque estos hornos se emplean generalmente para producir acero a partir de chatarra de acero, se ha incrementado su uso para el procesamiento de hierro esponja, el cual es el producto de la reducción de mineral de hierro en reactores de reducción directa. Los hornos de arco eléctrico se clasifican en dos categorías que se representan esquemáticamente en la **Figura 1.2** y son:

- (a) EAF-AC, horno de corriente alterna. Este horno tiene tres electrodos de grafito colocados sobre la carga metálica y se alimenta eléctricamente usando un suministro trifásico, una fase conectada a cada electrodo y la carga es el punto neutral. El arco se genera entre los electrodos y su calor por radiación funde la carga metálica.
- (b) EAF-DC, horno de corriente directa. Este horno tiene un único electrodo de grafito sobre la carga metálica. Éste actúa como cátodo (-) que desprende el arco eléctrico hacia la carga metálica. El circuito se completa con uno o varios ánodos (+) instalados en el piso refractario del horno. Destaca el uso de un tiristor, que es un componente formado por elementos semiconductores para el control de la potencia del horno.

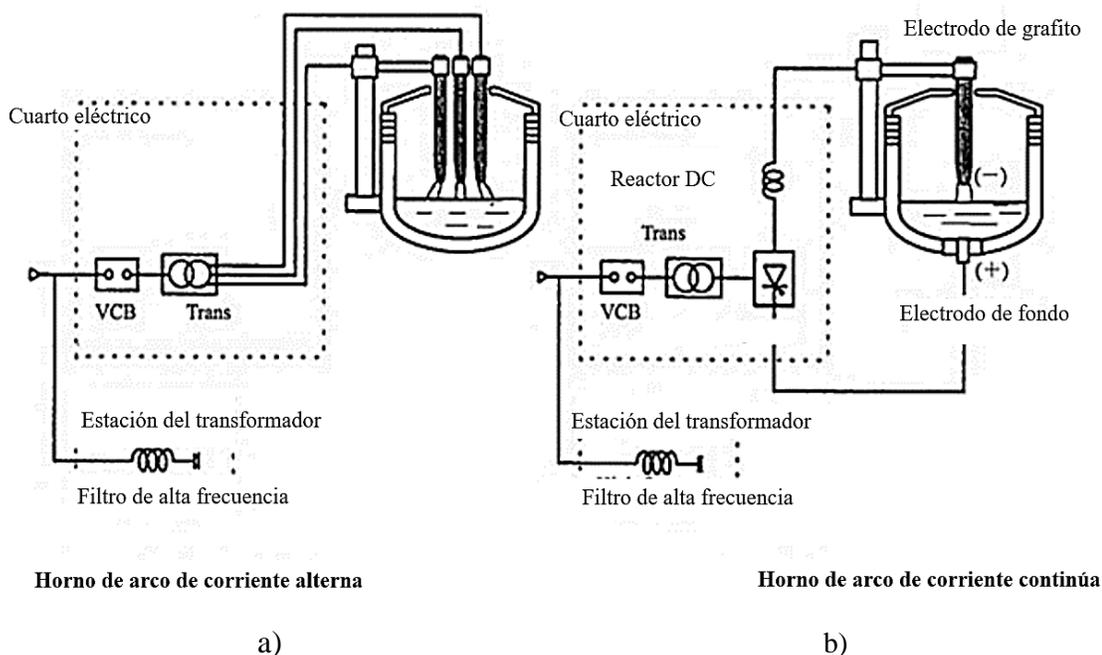


Figura 1.2. Representación esquemática de los circuitos eléctricos de: a) un horno de corriente alterna y b) un horno de corriente directa (Dutta & Chokshi, 2020).

El horno de arco eléctrico de corriente alterna tiene un alto consumo o deterioro de los electrodos de grafito y su recubrimiento refractario, así como un impacto negativo en el sistema de suministro de energía. Para contrarrestar estos efectos adversos, se introdujeron, entre 1980 y 1990, los primeros hornos de corriente directa en la producción de acero. A pesar de la necesidad de emplear un tiristor y de algunos problemas con la operación del electrodo instalado en el piso refractario, el horno DC permite obtener un menor consumo de los electrodos de grafito y alcanzar un efecto mucho menos perjudicial en la red de suministro de potencia que los hornos AC (Karbowniczek, 2022).

Hoy en día, las fuentes de alimentación de corrientes eléctricas directas alcanzan entre 80-100 kA, y con el uso de electrodos de grafito con diámetros superiores a 1 m, es posible diseñar hornos con consumos entre 120-135 MW de potencia, y 850-1000 V/160 kA (Lupi, 2017).

1.1.1 Proceso de fusión de acero

El proceso de producción de acero en hornos de arco eléctrico se alimenta principalmente de chatarra de acero. Se puede emplear además hierro esponja, que se produce previamente en hornos de reducción directa de mineral peletizado. Sin embargo, su contribución a la producción mundial de acero es pequeña.

El proceso de producción en un EAF incluye las siguientes etapas (Dutta & Chokshi, 2020):

1. **Preparación del horno eléctrico:** Después de vaciar el metal líquido de una carga, comienza la primera etapa del proceso de preparación de la siguiente carga en el horno de arco, esto se denomina *fettling*. Conviene notar que el vaciado del acero debe dejar un remanente de metal líquido dentro del horno, llamado *hot heel*, el cuál es muy importante para desarrollar la siguiente fusión. Además, en esta etapa se debe evaluar las condiciones técnicas de todos los componentes estructurales del horno, en particular la condición del revestimiento refractario del fondo, paredes, techo y el agujero de vaciado, electrodo de grafitos, así como la reparación de cualquier daño.
2. **Carga:** La carga se suministra invariablemente desde la parte superior del horno. Se utiliza una cesta/bandeja de fondo abatible para transportar la carga sólida al horno. El techo deslizante se mueve para cargar la chatarra, la cal y el fluoruro de calcio. La

rapidez de fusión de la carga depende en gran medida de la proporción de chatarra ligera, media y pesada y de la secuencia de carga. La canasta de vaciado se llena con 20% de chatarra ligera, 40% chatarra media, 40% chatarra pesada; en la secuencia: ligero, medio y pesado. La carga puede suministrarse de forma intermitente (por lotes) o de manera continua, por ejemplo, el hierro esponja se puede alimentar en forma continua al horno de arco eléctrico. Durante la fusión, también se agrega mineral de hierro en trozos/escamas de laminación (6%). La chatarra ligera y los pedazos pequeños llenan los espacios entre las partes más grandes, esto asegura una mejor continuidad eléctrica de la carga y por lo tanto menor tiempo para fundir la carga.

3. **Fusión de la carga metálica:** Después de cargar el metal y cerrar la cuba del horno con el techo deslizante, se enciende el suministro de voltaje, y se activa el sistema de control automático de la posición de los electrodos. La Figura 1.3 muestra una secuencia de las etapas de fusión comenzando con el descenso de los electrodos, y su contacto con la carga donde el arco eléctrico comienza el proceso de fusión de la chatarra. El tiempo total del período de fusión de la carga, dependiendo de la potencia del transformador de suministro, es de 30 a 100 min. Durante este tiempo, la potencia del horno se incrementa gradualmente en función de la cantidad de metal cargado al horno y de su temperatura. Después de ajustar y analizar la composición química del baño de metal, se ajusta y se mide la temperatura, la cuál debe ser apropiada para dicha composición química. La temperatura debe ser 50-100°C por encima del punto de fusión del hierro que es 1538°C (Dutta & Chokshi, 2020).
4. **Vaciado:** La última etapa del proceso de producción de acero en hornos de arco eléctrico es el vaciado del metal fundido, con la composición química objetivo. El acero se vacía en una olla que se coloca debajo del horno. En la práctica, se emplean dos métodos de vaciado: a través de un vertedor en la boca del horno o través de un agujero en el fondo de éste. En el caso de un vertedor, el horno debe tener un mecanismo basculante que le permita inclinarse para vaciar su carga. La operación comienza con la colocación de la olla debajo del horno, de modo tal que, al bascular el horno, el extremo del vertedor se posicione por encima y al centro de la boca de la olla para que el acero fluya por el vertedor y llegue a dicha boca. En el caso de un

orificio de colada en el fondo, la olla se coloca sobre una plataforma de transporte que se mueve a lo largo de vías dispuestas debajo del horno, perpendiculares al lado más largo de la sala del horno. La olla debe colocarse debajo del horno y centrada en el orificio de colada (Dutta & Chokshi, 2020). Los flujos promedio de vaciado de acero son de ~ 120 t/min.

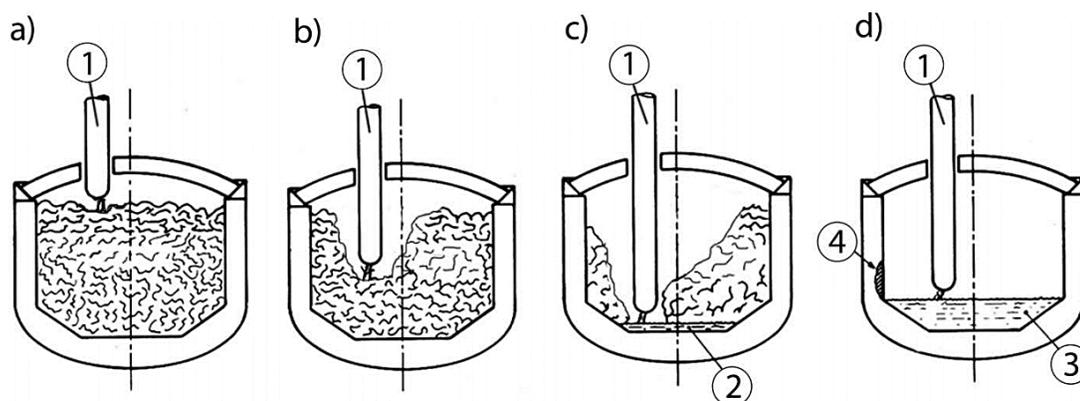


Figura 1.3. Representación secuencial de las etapas de fusión en un horno de arco eléctrico: a) encendido de arco, (b) fusión del cráter, (c) el arco alcanza el nivel del metal líquido, (d) sobrecalentamiento de la carga metálica. 1-electrodo, 2- baño de metal inicial, 3- baño de metal líquido, 4- punto caliente (Dutta & Chokshi, 2020).

1.2 Horno de arco eléctrico de corriente directa

1.2.1 Principio de funcionamiento

El arco de corriente directa actúa como una bomba de chorro, atrayendo los gases y partículas circundantes para formar un plasma, el cual tiene un movimiento con velocidad definida desde el electrodo hacia la carga metálica. Por lo tanto, representa un medio eficiente de transferencia de calor del electrodo hacia la masa fundida. En un DC-EAF, el electrodo está ubicado en el centro del techo y se proyecta a través de este, conectándose al polo negativo del rectificador, por lo que actúa como cátodo. El polo positivo está conectado a un electrodo inferior que está en contacto directo con la carga metálica o con las palanquillas (billets) de acero que actúan como ánodos. Las partes superior e inferior de la carcasa del DC-EAF están unidas con una capa de material aislante para aislar eléctricamente el electrodo inferior (Dutta & Chokshi, 2020). La corriente eléctrica fluye desde el cátodo de grafito hacia el(los) ánodo(s) instalado(s) en el interior del piso refractario del horno. De esta manera, la corriente

eléctrica fluye verticalmente en forma de arco desde el cátodo hacia la carga metálica, y después se conduce hacia el(los) ánodo(s), cruzando de este modo el piso refractario hasta salir por la parte inferior del horno. El arco generalmente se sumerge en la escoria espumosa. La fusión tiene lugar muy rápidamente y se obtiene un buen rendimiento operacional (Dutta & Chokshi, 2020).

Gracias al uso del calor y la fuerza magnética generada por la corriente en la carga metálica, este horno de arco (DC-EAF) logra un ahorro de energía de aproximadamente 5% en términos de consumo de potencia en comparación con el horno AC, y en consecuencia una disminución de la rapidez de consumo de electrodos con respecto al horno AC. Además, el horno DC asegura una buena homogenización metalúrgica y térmica de acero líquido (Dutta & Chokshi, 2020).

1.2.1 Tipos de ánodos

El electrodo de fondo es un componente tecnológico importante del horno DC para el cual se han propuesto varios diseños, y con excepción del ánodo tipo billet, se encuentran aún bajo desarrollo. Los principales tipos de electrodos de fondo se muestran esquemáticamente en las Figuras 1.4(a)-(d) y son:

Tipo *Billet*: es una palanquilla de acero instalada en el piso refractario. El calor se extrae mediante una chaqueta refrigerada con agua instalada en la parte inferior de cada ánodo cilíndrico. Estos ánodos se emplean en hornos de producción y típicamente, se emplean 3 ó 4 ánodos en el piso.

Tipo *Pin*: Los ánodos son múltiples barras de acero embebidas en la parte central del fondo refractario. El calor se remueve mediante un sistema de enfriamiento con aire instalado en la parte inferior de la coraza del horno.

Tipo *Aleta*: similar al previo, pero está constituido por múltiples anillos de chapa de acero embebidos en el refractario y soldados en el fondo del horno.

Tipo *Piso Conductor*: El fondo del horno está constituido por ladrillos de carbón-magnesita que son conductores eléctricos. Se enfrían intensivamente con aire en la parte inferior del horno.

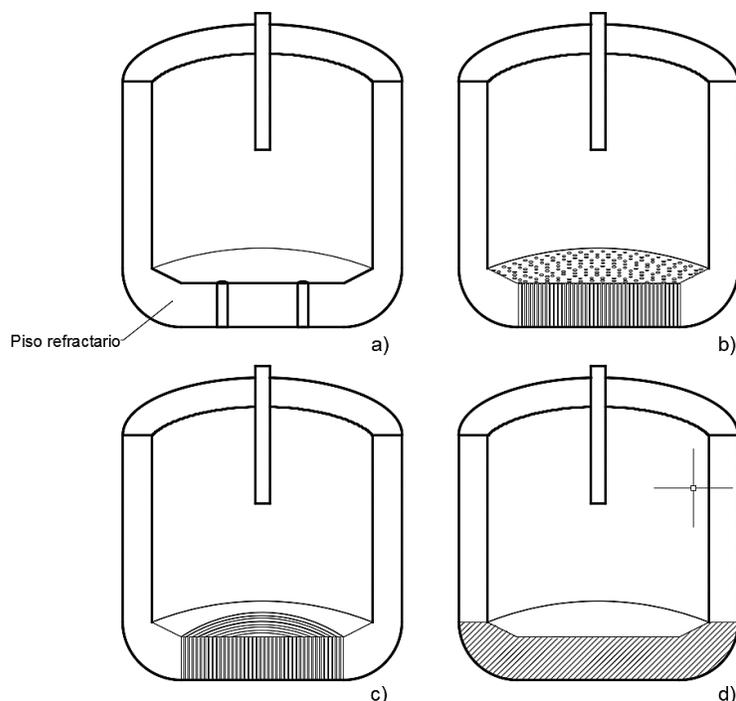


Figura 1.4. Horno de arco eléctrico de corriente eléctrica y los tipos de ánodos situados en el piso del horno. a) Tipo billet, b) tipo pin, c) tipo aleta y d) tipo piso conductor.

Los electrodos de fondo deben reemplazarse cada 2000–3000 cargas de fusión (Lupi, 2017) ya que el piso refractario se deteriora colada tras colada.

1.3 Materiales refractarios usados en hornos de arco eléctrico

El revestimiento refractario del piso y las paredes del recipiente están hechos de materiales refractarios los cuales deben tener características apropiadas, por ejemplo, soportar altas temperaturas y variaciones de temperatura, baja conductividad térmica y eléctrica, bajo coeficiente de expansión térmica, máxima resistencia al ataque de escoria y abrasión durante la carga. Dependiendo de su composición química, los revestimientos refractarios pueden ser clasificados en dos grupos: alcalinos o ácidos. Los refractarios del primer grupo están formados por compuestos alcalinos tales como la magnesita ($MgCO_3$, MgO), la cal (CaO), la cromita-magnesita y dolomita, ya sea en forma de ladrillos o en forma granular (3-15 mm de tamaño) para formar una masa apisonada (Lupi, 2017). Mientras que los refractarios ácidos incluyen compuestos ácidos tales como la sílice (SiO_2) y la alúmina (Al_2O_3). Esta última tiene realmente un carácter anfótero, es decir, puede comportarse como ácido o álcali dependiendo de los compuestos con los que se encuentre en contacto.

La **Figura 1.5** muestra esquemáticamente la distribución de materiales en el revestimiento del piso del horno, el cual está compuesto por tres capas:

- a) Una primera capa exterior de aislamiento térmico, constituida por láminas y polvo aislante de 10 mm de espesor y una capa de Schamotte (arcilla calcinada que contiene una alta proporción de alúmina), de 40–60 mm de espesor.
- b) Una capa intermedia de ladrillos de magnesita, que es denominado un revestimiento de larga duración.
- c) Una capa interna de 200-400 mm de espesor de magnesita apisonada que se renueva frecuentemente.

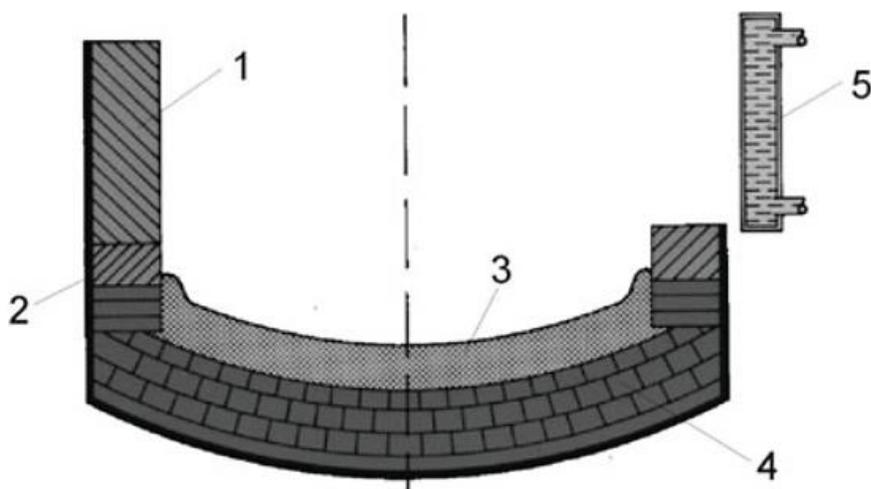


Figura 1.5. Representación esquemática del revestimiento refractario para hornos de arco básicos con paredes normales (izquierda) y paredes laterales enfriadas con agua (derecha). (1) revestimiento en las paredes de cromo-magnesita, (2) revestimiento de magnesita, (3) magnesita apisonada, (4) ladrillos de magnesita, capa de larga duración, (5) placa lateral refrigerada por agua. (Karbowniczek, 2022).

El revestimiento refractario de las paredes está hecho con una primera capa aislante, similar a la que se utiliza en el hogar de otros hornos, una segunda capa de ladrillos de bloques prefabricados de magnesita o cromo-magnesita y un espacio entre las dos capas, 40-50 mm de espesor, llenado con material refractario de granulometría fina para permitir la expansión térmica. En lugar de utilizar ladrillos, lo más frecuente es que la segunda capa se haga con una mezcla apisonada en caliente de gránulos de dolomita, magnesita o cromo-magnesita, a la que se añade aproximadamente un 10% de ligante bituminoso. El refractario apisonado o

el uso de ladrillos prefabricados permiten un ahorro económico, porque el revestimiento de las paredes laterales debe ser reconstruidas en promedio cada 100-300 fusiones (Lupi, 2017).

1.3.1 Parámetros de diseño de materiales refractarios

Los materiales refractarios son materiales cerámicos inorgánicos no metálicos, compuestos por óxidos, nitruros, carburos o la combinación de ellos; los cuales pueden soportar muy altas temperaturas (1400-2500°C), también pueden prevenir la corrosión provocada por el metal líquido y la escoria, y son resistentes a la abrasión en caliente y la erosión. Otras propiedades esenciales de los materiales refractarios son:

1. Resistencia a fluctuaciones térmicas.
2. Resistencia a la deformación lenta a altas temperaturas (creep).
3. Estabilidad de su volumen a elevadas temperaturas.
4. Alta capacidad de carga mecánica.

La resistencia a la fluctuación térmica del refractario depende del módulo elástico, trabajo de fractura, coeficiente de expansión y la conductividad térmica. La resistencia de deformación lenta a altas temperaturas (creep) es controlada por las propiedades fundamentales como su comportamiento termoplástico, deformación bajo carga a altas temperaturas (RUL) y la temperatura de operación en sitio. La estabilidad de volumen a elevadas temperaturas está asociada con el cambio lineal permanente (PLC), la expansión térmica reversible (RTE), así como la temperatura de operación. Finalmente, la capacidad de carga mecánica depende de la porosidad aparente, la densidad aparente, la resistencia a la compresión, su dilatación lineal, la presencia de fase vítrea, etc. Estas propiedades están controladas por la composición mineralógica, la microestructura, el contenido de porosidad y su distribución. Se deben considerar las propiedades físicas, las propiedades térmicas y termomecánicas críticas para el diseño y/o la selección de refractario a utilizar en cada zona particular de interés del horno (Biswas & Sarkar, 2020).

1.3.2 Resistencia compresiva

Se espera que el material refractario soporte un esfuerzo de compresión máximo antes de su aplastamiento o falla. La importancia de este dato inicia desde la fabricación de ladrillos verdes que requieren una resistencia mínima para manipularlos durante las etapas de

transporte y cocido y obtener un alto grado de resistencia compresiva. Generalmente se mide como la fractura de carga a temperatura ambiente y es conocida como esfuerzo de compresión en frío (*Cold Crushing Strength*, en inglés). El comportamiento de la resistencia depende predominantemente del tipo de enlace, en particular del tamaño de grano y grado de porosidad. Algunas relaciones importantes entre diferentes variables son dadas a continuación:

La resistencia a la compresión se expresa en función del tamaño de grano mediante la ecuación siguiente:

$$\sigma_g = \sigma_0 + k_\sigma D^{-1/2} \quad (1.1)$$

donde σ_0 es el esfuerzo intrínseco, k_σ es el coeficiente de Hall-Petch y D es el tamaño de grano. Por otro lado, la resistencia a la compresión se expresa en función de la porosidad por la ecuación siguiente:

$$\sigma_p = \sigma_0 \exp(-bp) \quad (1.2)$$

donde σ_0 es el esfuerzo intrínseco cuando la porosidad es igual a cero, b es una constante empírica y p es la porosidad.

1.3.3 Módulo de ruptura o resistencia a la flexión

Este módulo es un indicador de la falla del refractario a carga máxima cuando el material está sujeto a experimentar el modo de flexión de carga a temperatura elevada, conocida comúnmente como módulo de ruptura. Es un verdadero indicador para estimaciones del rendimiento y de la adaptabilidad de un material refractario a la alta temperatura, análoga al entorno de aplicación. Mientras que la resistencia compresiva es un indicador de la idoneidad para el uso de cualquier construcción refractaria en particular. La resistencia de flexión a alta temperatura, generalmente conocida como módulo de ruptura en caliente (HMOR), se expresa mediante la siguiente expresión:

$$\sigma_F = \frac{3FL}{2bd^2} \quad (1.3)$$

donde F es la carga de flexión en Newtons, L es el espaciamento entre los puntos de apoyo, b y d son el ancho y el espesor de la viga, respectivamente. La **Figura 1.6** muestra un gráfico esquemático de la fuerza de flexión aplicada a una viga, en 3 puntos, y la deflexión respectiva.

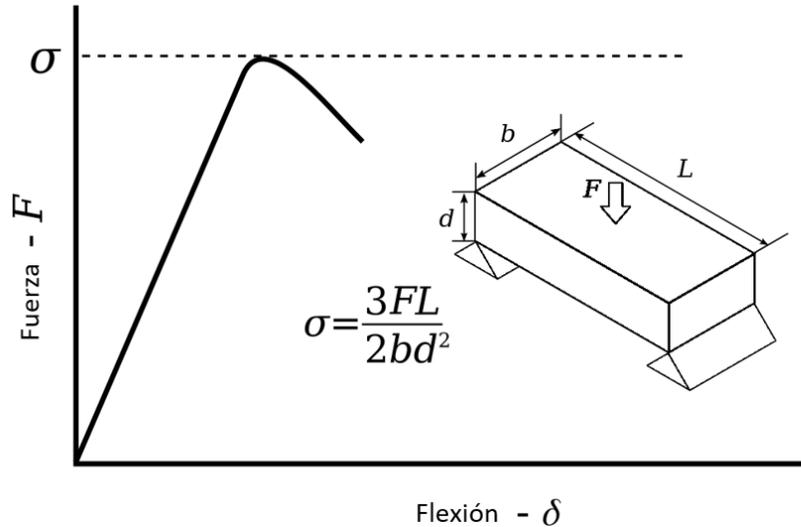


Figura 1.6. Relación esquemática entre la fuerza aplicada a una viga sujeta a deflexión por 3 puntos (Wikipedia, 2023).

1.3.4 Módulo elástico

Los datos del módulo elástico, E , para materiales homogéneos están disponibles en la literatura. Sin embargo, para materiales heterogéneos a menudo calculamos el valor de E mediante alguna regla de mezclas. Obviamente, la porosidad tiene que ser determinada durante tal estimación, ya que la porosidad adicional reduce el módulo elástico del refractario. Algunas relaciones clásicas entre el módulo elástico y la porosidad están dadas por las expresiones siguientes:

$$E = E_0 \exp(-bP) \quad (1.4a)$$

$$E = E_0(1 - b_1P) \quad (1.4b)$$

$$E = E_0(1 - \exp[-b_2(1-P)]) \quad (1.4c)$$

donde E_0 es el módulo de Young cuando la porosidad es cero, b es una constante empírica y P es el porcentaje de porosidad. La constante empírica $b = 4$, $2 < b_1 < 4$, y $b_2 = 0.5$. Las Ecs. 1.4(a)-(c) se aplican para $0 < P < 40\%$, $P < 6\%$, y $P \geq 50\%$, respectivamente.

1.3.5 Expansión térmica

La temperatura incrementa la vibración atómica y la posición de equilibrio de las fuerzas de repulsión y atracción entre átomos. Esto produce un incremento de la distancia interatómica de separación o expansión reticular. Los cristales se tienden a expandir y aumentar su simetría a elevada temperatura lo que resulta en un decremento de su volumen específico. El cambio de volumen asistido por vibración reticular incrementa la energía y resulta en la expansión del sistema. El coeficiente de expansión térmica lineal (α_L) es un incremento relativo en longitud por unidad de incremento de temperatura, y es representado como:

$$\alpha_L = \frac{1}{L_0} \frac{dL}{dT} \quad (1.5)$$

donde dL/dT es la razón de cambio de la longitud con respecto a la temperatura, y L_0 es la longitud inicial.

Los materiales refractarios pueden experimentar una formación mineral o transformaciones de fase cuando se calientan, pocas de ellas son reversibles. Estos cambios de fase involucran una expansión y contracción volumétrica adicional. El cambio de volumen que ocurre en el calentamiento es una de las propiedades físicas más importantes de los materiales refractarios para el diseño de los recubrimientos refractarios. Se debe prestar atención especial al armado de las paredes manteniendo espacios suficientes entre ladrillos para evitar la generación de esfuerzos térmicos por expansión del material refractario durante el calentamiento.

1.3.6 Esfuerzo y choque térmico

El coeficiente de expansión térmica lineal o el coeficiente de expansión térmica anisotrópica son propiedades de los materiales que tienen un efecto directo en los esfuerzos generados por gradientes térmicos. Para entender la magnitud de dichos esfuerzos, consideremos la ecuación de deformación elástica $E = \sigma/\varepsilon$, donde E es el módulo elástico y σ y ε son el esfuerzo y la deformación, respectivamente. Si se considera que un material se elonga al incrementar su temperatura desde un valor inicial T_0 hasta una temperatura T , y que dicha elongación se podría suprimir aplicando un esfuerzo en dirección opuesta al alargamiento, entonces el valor de dicho esfuerzo, llamémosle esfuerzo térmico, se puede expresar por la ecuación siguiente,

$$\sigma_t = \alpha_L E(T - T_o) \quad (1.6)$$

El esfuerzo térmico varía significativamente con la diferencia de temperatura; sin embargo, por encima de la diferencia crítica de temperatura (ΔT_{max}) el material experimenta choque térmico extensivo que extiende las grietas a una nueva distancia y disminuye la resistencia del material. Si la propagación de la grieta no se detiene en la matriz del refractario, entonces se convierte en la principal causa de falla de toda la estructura. La diferencia máxima de temperatura, ΔT_{max} , puede ser representada como,

$$\Delta T_{max} = \frac{\sigma_f(1 - \nu)}{E\alpha_L} \quad (1.7)$$

donde σ_f es la resistencia a la fractura y ν es el coeficiente de Poisson.

En los metales y polímeros dúctiles, las tensiones térmicas pueden aliviarse mediante deformación plástica. Sin embargo, la falta de ductilidad de muchos materiales cerámicos aumenta la posibilidad de fractura frágil debido a estas tensiones. El enfriamiento rápido de un cuerpo frágil es más probable que provoque mayor choque térmico que el caso de calentamiento, puesto que las tensiones superficiales inducidas son de tracción.

La capacidad de un material para resistir este tipo de rotura se denomina resistencia al choque térmico. Para una pieza cerámica que es enfriada rápidamente, la resistencia al choque térmico depende no sólo de la magnitud del cambio de temperatura, sino también de las propiedades térmicas y mecánicas del material. La resistencia al choque térmico es mayor para cerámicos que tienen alta resistencia a la fractura y altas conductividades térmicas, k , así como módulo de elasticidad relativamente bajos y bajos coeficientes de dilatación térmica. La resistencia de muchos materiales a este tipo de roturas puede expresarse mediante un parámetro de resistencia al choque térmico, TSR :

$$TSR \cong \frac{\sigma_f k}{E\alpha_L} \quad (1.8)$$

El choque térmico puede prevenirse alterando las condiciones externas de manera que las velocidades de enfriamiento o calentamiento sean reducidas para que los gradientes térmicos a lo largo del cuerpo sean mínimos.

1.3.7 Comportamiento de desgaste en materiales refractarios

El desgaste es la eliminación de material en la superficie o el daño de la superficie de una o ambas superficies en contacto cuando están en movimiento relativo entre sí; en la mayoría de los casos las asperezas superficiales facilitan el desgaste. El daño debido al desgaste precede a la pérdida de material. Bajo servicio, varios mecanismos incluyendo desgaste químico, desgaste mecánico y choque térmico, son los mecanismos predominantes de desgaste encontrados en los contenedores destinados a la producción de acero.

Diferencia entre corrosión, erosión y abrasión

Cuando un material refractario entra en contacto con la escoria líquida a alta temperatura, es susceptible de ser atacado químicamente mediante un proceso de desgaste que se conoce comúnmente como “corrosión”. Este proceso involucra la penetración física del líquido al interior del material, las reacciones que ocurren como consecuencia de la incompatibilidad química entre el refractario y el fundido, y el desgaste que se produce debido a estas interacciones. La fuerza impulsora para la corrosión es la diferencia de potenciales químicos de los diferentes componentes del refractario y el líquido; dicho de otra manera, el desgaste químico ocurre para alcanzar el equilibrio termodinámico, cuando la escoria está insaturada en los componentes químicos del refractario (Calvo, 2019).

El desgaste erosivo ocurre por el impacto de partículas sólidas o líquidas contra la superficie del material refractario, la cual eventualmente presenta varios mecanismos de desgaste que son predominantemente por la densidad de las partículas, el ángulo y la velocidad de impacto y el tamaño de las partículas. El ángulo de impacto es el ángulo entre la trayectoria de la partícula y la superficie erosionada antes de impacto (Karbowniczek, 2022).

La abrasión está relacionada con la destrucción o daño del material durante la fricción. La acción mecánica de las superficies opuestas en movimiento relativo provoca que las superficies sufran deformación y/o desprendimiento de material. El contacto mecánico inicial entre las tribo-superficies y el grado de movimiento relativo son factores predominantes y cruciales. El desgaste por abrasión también se define como un fenómeno de pérdida dimensional de un sólido, pérdida de material y con o sin desacoplamiento real debido a la interacción entre las caras de los sólidos que realmente se encuentran dentro del

dominio de trabajo. La abrasión en realidad depende de la dirección y velocidad de deslizamiento, tipo de carga (alternativo, rotario o de impacto), y de la temperatura. También depende de las fases con las que se haga contacto, como líquido, gas o sólido (Karbowniczek, 2022).

1.3.8 Falla mecánica de materiales frágiles

Una de las teorías de falla para materiales frágiles es el criterio de Mohr-Coulomb. Este criterio está basado en la teoría de Mohr-Coulomb, también conocida como teoría interna de fricción. Este criterio se emplea para materiales frágiles con diferentes valores de resistencia a la tensión y compresión. Los materiales frágiles no tienen un punto de cedencia específico y por eso no se recomienda usar el límite elástico para definir su falla mecánica (Singh, 2007).

La teoría de Mohr-Coulomb se puede representar gráficamente usando la construcción del círculo de Mohr (Christensen, 2013). La forma analítica se expresa por la ecuación siguiente:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{C}\right)(\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{T} + \frac{1}{C}\right)(\sigma_1 - \sigma_3) \leq 1 \quad (1.9)$$

donde T y C , son la resistencia a la tensión y la resistencia a la compresión, respectivamente. σ_1 y σ_3 son el esfuerzo principal máximo y el esfuerzo principal mínimo, respectivamente. La Ecuación (1.9) se satisface siempre y cuando el material no falle, lo cual ocurre si se respeta la desigualdad siguiente:

$$\frac{\sigma_1}{T} - \frac{\sigma_3}{C} \leq 1 \quad (1.10)$$

Esta forma extremadamente simple constituye todo el criterio de falla de Coulomb-Mohr de dos propiedades. Para los esfuerzos principales σ_1 , σ_2 y σ_3 ordenados como $|\sigma_1| > |\sigma_2| > |\sigma_3|$, la teoría de Mohr-Coulomb predice que la falla ocurre en los casos descritos en la **Tabla 1.1**. En esta tabla, el criterio de falla establece los esfuerzos principales límite que un material con propiedades definidas podría soportar antes de fallar. En la siguiente columna de la tabla se indica el factor de seguridad, que se define como la relación entre las propiedades de resistencia del material y los esfuerzos principales, y debe ser mayor que la unidad para que el material no falle.

Tabla 1.1 Criterios de falla de un material frágil con base en la teoría de Mohr-Coulomb.

Casos	Criterio de falla	Factor de seguridad
$\sigma_1 > 0$ $\sigma_3 > 0$	$\sigma_1 > \sigma_{LimiteTension}$	$(\sigma_1/\sigma_{LimiteTension})^{-1}$
$\sigma_1 < 0$ $\sigma_3 < 0$	$ \sigma_1 > \sigma_{LimiteCompresion}$	$(\sigma_1 /\sigma_{LimiteCompresion})^{-1}$
$\sigma_1 > 0,$ $\sigma_3 < 0$	$\frac{\sigma_1}{\sigma_{LimiteTension}} + \frac{ \sigma_3 }{\sigma_{LimiteCompresion}} > 1$	$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{LimiteTension}} + \frac{ \sigma_3 }{\sigma_{LimiteCompresion}}\right)^{-1}$
$\sigma_1 < 0,$ $\sigma_3 > 0$	$\frac{ \sigma_1 }{\sigma_{LimiteCompresion}} + \frac{\sigma_3}{\sigma_{LimiteTension}} > 1$	$\left(\frac{ \sigma_1 }{\sigma_{LimiteCompresion}} + \frac{\sigma_3}{\sigma_{LimiteTension}}\right)^{-1}$

* El esfuerzo, $\sigma_{LimiteCompresion}$ tiene signo positivo

El valor óptimo del factor de seguridad depende de la aplicación del material frágil y los estándares de diseño, pero siempre se espera un valor mucho mayor que uno (Solidworks , 2023).

1.3.9 Fenómenos electromagnéticos que producen un efecto sobre el piso refractario

Los fenómenos electromagnéticos producen de forma indirecta un efecto térmico sobre el piso refractario del horno. La corriente eléctrica, I , que se transmite por cada ánodo produce los siguientes fenómenos:

1. **La generación de un campo magnético** en cada punto del espacio cuya magnitud y dirección dependen de la corriente eléctrica y de la dirección del segmento conductor de electricidad, así como de la distancia del punto al segmento conductor. La ley de Biot-Savart expresa a la densidad de campo magnético mediante la siguiente ecuación:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \hat{r}}{\|\hat{r}\|^2} \tag{1.11}$$

La ecuación anterior incluye al producto vectorial o producto cruz, por lo que establece que el diferencial de campo magnético producido, $d\vec{B}$, es perpendicular al vector que define la dirección de la corriente, \vec{ds} , y al vector \hat{r} que une al segmento conductor con el punto en el espacio donde se desea determinar el campo magnético.

La **Figura 1.7** muestra esquemáticamente un segmento conductor de longitud ds que conduce una corriente eléctrica constante I , la que genera un campo magnético estable de magnitud dB . En el punto P el campo magnético apunta hacia afuera del plano del dibujo, mientras que en el punto P' el campo magnético apunta hacia adentro del plano de este texto.

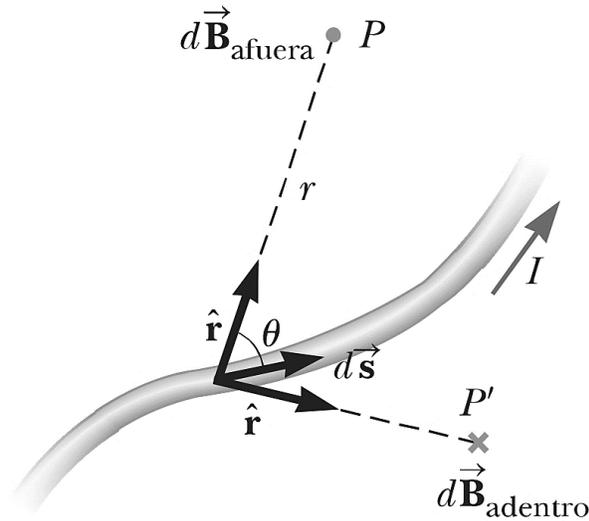


Figura 1.7. Ley de Biot-Savart. Campo magnético $d\vec{B}$ en los puntos P y P' debido a la corriente I que pasa a través de un elemento de longitud y dirección $d\vec{s}$.

La constante μ_0 es llamada permeabilidad magnética del espacio vacío, con un valor igual a $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$.

Observe que el campo $d\vec{B}$ en la ecuación de Biot-Savart es creado en un punto por la corriente contenida en un elemento de longitud $d\vec{s}$ del conductor. Para determinar el campo magnético total \vec{B} que se crea por la contribución de toda la longitud del conductor, se debe sumar las contribuciones de todos los elementos de corriente $I d\vec{s}$ en el conductor, que para nuestro caso es cada ánodo. Es decir, se debe integrar la ecuación para evaluar \vec{B} ,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{\|\hat{r}\|^2} \quad (1.12)$$

Esta integral se aplica sobre la distribución completa de la corriente y es una cantidad vectorial. La ley de Biot-Savart es solo la primera etapa para el cálculo de la densidad de campo magnético producido por cada ánodo (Serway & Jewett, 2016).

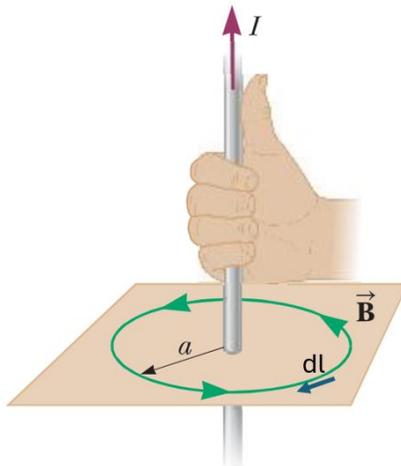


Figura 1.8. Regla de la mano derecha para determinar la dirección del campo magnético, \vec{B} , que rodea a un conductor que transporta una corriente I (Serway & Jewett, 2016)

La **Figura 1.8** muestra en perspectiva el campo magnético que rodea a un conductor cilíndrico muy largo que conduce corriente. Debido a la simetría del alambre, las líneas de campo magnético forman círculos concéntricos con el conductor ubicados en planos perpendiculares a éste. La magnitud de \vec{B} es constante en cualquiera de los círculos de radio a .

Una regla útil para determinar la dirección de \vec{B} es tomar el alambre con la mano derecha, colocando el pulgar a lo largo de la dirección de la corriente y doblando los otros cuatro dedos en la dirección del campo magnético.

Para evaluar el campo magnético producido por cada ánodo, se debe considerar éste como un cilindro con longitud infinita, es decir suficientemente largo para despreciar los efectos de los extremos, generando un campo magnético con simetría circular. Si se traza una trayectoria cerrada alrededor de todo el ánodo, como se muestra en la **Figura 1.8**, se calcula la integral del producto $\vec{B} \cdot d\vec{l}$ para un pequeño elemento de longitud $d\vec{l}$ sobre la trayectoria circular cerrada. A lo largo de esta trayectoria, los

vectores $d\vec{l}$ y \vec{B} son paralelos en cada punto, así que $\vec{B} \cdot d\vec{l} = Bdl$. Además, la magnitud de \vec{B} es constante sobre este círculo. Por lo tanto, la suma de los productos Bdl a lo largo de la trayectoria cerrada, es equivalente a la integral de línea de $\vec{B} \cdot d\vec{l}$, es decir

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (2\pi r) = \mu_0 I \quad (1.13)$$

Donde $\oint dl = 2\pi r$ es la circunferencia de la trayectoria circular. A pesar de que este resultado fue calculado para el caso especial de una trayectoria circular que rodea a un alambre, también es aplicable para una trayectoria cerrada de cualquier forma que rodea una corriente en un circuito cerrado. El caso general, conocido como la ley de Ampere, puede enunciarse como sigue:

La integral de línea $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ alrededor de cualquier trayectoria cerrada es igual $\mu_0 I$, donde I es la corriente total estable que pasa a través de cualquier superficie limitada por la trayectoria cerrada,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad (1.14)$$

2. **El segundo fenómeno es la generación de una fuerza electromagnética** que resulta de la interacción entre la carga eléctrica en movimiento y el campo magnético generado por la propia corriente eléctrica. Esta fuerza se representa por la fuerza electromagnética de Lorentz que establece que un elemento de volumen, dV que conduce una densidad de corriente \vec{j} en presencia de un campo magnético \vec{B} , experimentará una fuerza dada por la siguiente expresión:

$$dF_L = \|\vec{j} \times \vec{B}\| dV = \|\vec{j}\| \|\vec{B}\| dV * \text{sen}\theta \quad (1.15)$$

Donde θ es el ángulo entre los dos vectores. Nótese que esta fuerza es perpendicular a ambos vectores, a la densidad de corriente y al campo magnético. La densidad de campo magnético B dentro del ánodo de acero se obtiene como una función de la posición radial a partir de la ley de Ampere. Nuevamente, se considera que el ánodo tiene una longitud suficientemente larga para crear un campo magnético con simetría circular. El área de la sección transversal del ánodo es igual a πR^2 , siendo R el radio

del ánodo. En una sección interior del ánodo, donde $r < R$, la corriente es I' y es una fracción de la corriente total I .

Asumiendo que la corriente eléctrica está uniformemente distribuida en el área de la sección transversal del ánodo, dicha fracción es igual a la fracción de área transversal y puede escribirse como,

$$\frac{I'}{I} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} \quad (1.16)$$

despejando I' y aplicando la ley de ampere a una trayectoria circular $2\pi r$ se obtiene,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(2\pi r) = \mu_0(I') = \mu_0 \left(\frac{r^2}{R^2} I \right) \quad (1.17)$$

Finalmente, resolviendo para B se obtiene la siguiente expresión:

$$B = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \right) r \quad (1.18)$$

Esta expresión indica que el campo magnético aumenta linealmente con la posición radial, siendo igual a cero en el eje del ánodo, $r = 0$. Por otro lado, la densidad de flujo eléctrico está dada por la siguiente ecuación, $J = I/(\pi R^2)$. Por lo tanto, el diferencial de la fuerza de Lorentz cuando la trayectoria de una partícula es perpendicular al campo magnético B está dado por la siguiente expresión,

$$dF_L = \frac{I}{\pi R^2} \times \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \right) r * dV * \text{sen}(90^\circ) = \left(\frac{\mu_0 I^2 r}{2\pi^2 R^4} \right) dV \quad (1.19)$$

Por consiguiente, la fuerza magnética por unidad de volumen de metal es:

$$\frac{dF_L}{dV} = F_L = \left(\frac{\mu_0 I^2 r}{2\pi^2 R^4} \right) \quad (1.20)$$

La dirección de esta fuerza es radial, r , ya que el campo magnético tiene dirección angular (ver **Figura 1.8**) y la densidad de corriente tiene dirección axial, z . Esta es la fuerza de Lorentz que actúa sobre las partículas cargadas que se mueven en el mismo sentido que la corriente eléctrica y que no hay fuerza magnética que empuje verticalmente al fluido. Sin embargo, en un horno de producción se presenta una situación distinta. Durante la operación, la cavidad que aloja a los ánodos sufre

desgaste preferencial en la parte superior del ánodo. El metal fundido adopta la forma cónica resultante y bajo esta nueva geometría, la fuerza magnética tiene ambas componentes, radial y axial, tal como lo mostraron Liu y cols. (2008). Estos autores consideraron un ánodo con un ángulo de expansión, α , y corrigieron los resultados de la fuerza de Lorentz mediante un coeficiente, n , que varía de cero a uno para representar el aumento lineal del radio del ánodo en función de la altura. Los resultados reportados por dichos autores son los siguientes:

$$F_{Lr} = \left(\frac{\mu_0 I^2 r}{2\pi^2 R^4} \right) \cos(n\alpha) \quad (1.21a)$$

$$F_{Lz} = \left(\frac{\mu_0 I^2 r}{2\pi^2 R^4} \right) \sin(n\alpha) \quad (1.21b)$$

Donde n es igual a r/R . Siendo r la coordenada radial y R el radio del ánodo. Cuando el ánodo tiene forma cilíndrica, la fuerza de Lorentz actúa únicamente en sentido radial, porque la intensidad de corriente I está alineada con el eje z . Cuando el ánodo sufre desgaste y adquiere forma cónica, la intensidad de corriente entra al ánodo oblicuamente, como la fuerza de Lorentz es perpendicular al vector de intensidad de corriente, la fuerza de Lorentz resultante que actúa sobre una partícula en movimiento tiene una componente en r y en z (ver **Figura 1.9**).

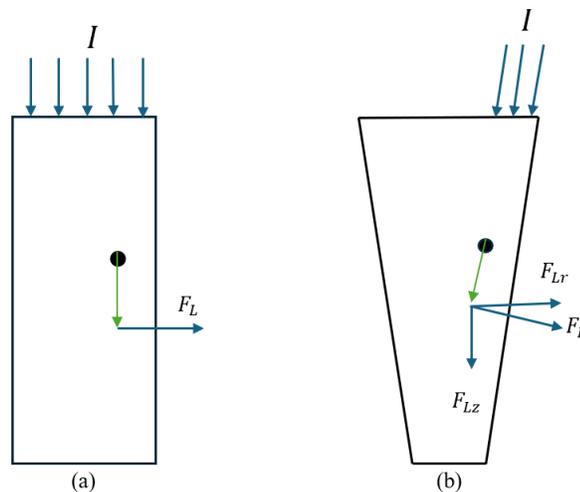


Figura 1.9. Movimiento de una partícula cargada a través de un ánodo por el que pasa una corriente I , que genera un campo magnético B . (a) partícula en un ánodo cilíndrico, (b) partícula en un ánodo ligeramente cónico.

3. **El tercer fenómeno es la generación de calor por efecto Joule.** En general, el paso de corriente eléctrica I a través de un medio con resistencia eléctrica R_e implica una transformación de la energía eléctrica consumida en energía térmica, lo que se denomina efecto Joule. La expresión matemática para la potencia eléctrica o la rapidez de generación de calor, P , es conocida como Ley de Joule y se escribe de la forma siguiente:

$$P = I^2 R_e \quad (1.22)$$

donde la resistencia eléctrica, R_e , está dada por la siguiente ecuación:

$$R_e = \rho_R \left(\frac{L}{A} \right) \quad (1.23)$$

siendo ρ_R la resistividad eléctrica del material usado como conductor, L es la longitud del conductor y A es el área de sección transversal del conductor. Al sustituir la Ecuación (1.23) en la Ecuación (1.22) y dividiendo la potencia por el volumen del ánodo cilíndrico, $\pi R^2 * L$, se obtiene la siguiente ecuación:

$$S_{joule} = \frac{P}{\pi R^2 L} = \rho_R \left(\frac{I}{\pi R^2} \right)^2 \quad (1.24)$$

donde S_{joule} es el término generación de calor en el ánodo cilíndrico por unidad de volumen, y se expresa en unidades de W/m^3 . Nótese que este término se considera uniforme ya que se asume que la corriente eléctrica está homogéneamente distribuida en la sección transversal del ánodo.

1.4 Dinámica de fluidos computacional

La dinámica de fluidos computacional (CFD) es el análisis de sistemas que involucran flujo de fluidos, transferencia de calor y fenómenos asociados por medio de simulación en computadora. La técnica es muy poderosa y abarca un amplio rango de áreas de aplicación industrial y no industrial. Los códigos CFD están estructurados alrededor de algoritmos que pueden abordar problemas de flujo de fluidos. Para proveer fácil acceso al poder de procesamiento todos los paquetes actuales CFD, estos incluyen interfaces de usuario sofisticadas para ingresar parámetros y examinar los resultados. Por eso todos los códigos

contienen tres elementos principales: (i) un preprocesador, (ii) un solucionador y (iii) un post-procesador (Versteeg & Malalasekera, 2007).

(i) Pre-procesador

El pre-procesamiento consiste en la introducción de un problema de flujo a un programa CFD por medio de una interfaz amigable con el usuario y la subsecuente transformación de esta entrada en una forma adecuada para su uso por el solucionador. Las actividades de usuario en la etapa de preprocesamiento incluyen:

- Definición de la geometría de la región de interés
- Generación de malla, división del dominio en subdominios que no se superponen
- Selección de los fenómenos químicos y físicos que necesitan ser modelados
- Definición de las propiedades del fluido
- especificación de condiciones de frontera adecuadas

(ii) Solucionador

Hay tres técnicas principales de solución numérica: diferencia finita, elemento y volumen finitos. En resumen, los métodos numéricos que forman las bases del solucionador llevan a cabo los siguientes pasos:

- Aproximación de las variables desconocidas de flujo por medio de funciones simples
- Discretización por sustitución de las aproximaciones en las ecuaciones gobernantes de flujo y la subsecuente manipulación matemática
- Soluciones de las ecuaciones algebraicas

(iii) Post-procesador

Como en el pre-procesamiento una cantidad inmensa de desarrollo ha tomado lugar recientemente en el campo del post-procesamiento. Debido a la creciente popularidad de las estaciones de trabajo de ingeniería, muchos de los cuales tienen capacidades gráficas sorprendentes, los paquetes CFD ahora están equipados con herramientas de datos versátiles. Estas incluyen:

- Geometría de dominio y visualización de malla

- Graficas de vectores
- Graficas de contorno
- Graficas de superficie 2D y 3D
- Seguimiento de partícula

El punto de partida de cualquier método numérico es el modelo matemático, por ejemplo, el conjunto de ecuaciones diferenciales parciales y las condiciones de frontera. Las ecuaciones usadas para la predicción de flujo pueden consultarse en distintas fuentes bibliográficas. Uno escoge un modelo apropiado para la aplicación objetivo (fluido incompresible, fluido no viscoso, turbulento; dos y tres dimensiones, etc.). Este modelo debe incluir simplificaciones de las leyes de conservación exactas. Un método de solución es usualmente diseñado para un conjunto particular de ecuaciones (Jayanti, 2018).

1.4.1 Métodos de discretización

Después de seleccionar el modelo matemático, uno tiene que elegir un método de discretización, por ejemplo, un método de aproximar las ecuaciones diferenciales por un sistema de ecuaciones algebraicas para las variables en algún conjunto de ubicaciones discretas en el espacio y el tiempo. Hay varios enfoques, pero los más importantes son los métodos de diferencia finita (FDM), volumen finito (FVM) y elemento finito (FEM). Cada tipo de método llega a la misma solución si la malla es fina. Sin embargo, algunos métodos son más adecuados para algunas clases de problemas que otros (Maliska, 2023).

1.4.1.1 Método de diferencia finita

Este es uno de los métodos más viejos para la solución numérica de las ecuaciones diferenciales parciales. Introducido por Euler en el siglo 18, es también el método más fácil de usar para geometrías simples. El punto de partida es la ecuación de conservación en su forma diferencial. El dominio de solución es cubierto por una malla. En cada punto de la malla, la ecuación diferencial es aproximada reemplazando las derivadas parciales por aproximaciones en términos de los valores nodales de las funciones. El resultado es una ecuación algebraica por nodo de la cuadrícula, en la que el valor de la variable en ese momento y un cierto número de nodos vecinos aparecen como incógnitas. En mallas rectangulares, el método FD es muy simple y efectivo. La desventaja del método FD es que

la conservación no se aplicada a menos que se tenga un especial cuidado. También, la restricción a geometrías simples es una desventaja significativa los flujos complejos (Ferziger, Perić, & Street, 2002).

La idea detrás de las aproximaciones de diferencia finita es tomada directamente de la definición de una derivada,

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x_i} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\phi(x_i + \Delta x) - \phi(x_i)}{\Delta x} \quad (1.25)$$

Donde ϕ puede ser una variable como temperatura, velocidad; y x_i es un punto de referencia espacial.

1.4.1.2 Método de Volumen Finito

El método FV usa la forma integral de las ecuaciones de conservación como punto de partida. El dominio de solución es subdividido en un numero finito de volúmenes de control contiguos y las ecuaciones de conservación son aplicadas a cada volumen de control (CV). En el centroide de cada CV, yace el nodo computacional en el cual los valores de la variable son calculados. La interpolación es usada para expresar los valores de las variables en la superficie del CV en términos de los valores nodales. Integrales de volumen y superficie son aproximadas usando fórmulas de cuadratura. Como resultado, uno obtiene una ecuación algebraica para cada CV, en la cual un número de valores nodales vecinos aparece. Este método puede acomodarse a cualquier tipo de malla, así que es adecuada para geometrías complejas. La malla define solamente las fronteras del volumen de control y no necesita estar relacionado con el sistema de coordenadas. El método es conservativo por construcción, siempre y cuando las integrales de superficie sean las mismas para los volúmenes de control que comparten la frontera (Ferziger, Perić, & Street, 2002).

La forma integral de la ecuación genérica de conservación puede ser escrita como,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \phi dV + \int_S \rho \phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \Gamma \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dS + \int_V q_\phi dV \quad (1.26)$$

donde ϕ es cualquier propiedad intensiva (para conservación de la masa, $\phi = 1$; para conservación de momentum, $\phi = \mathbf{v}$, para la conservación de un escalar ϕ representa la

propiedad conservada por unidad de masa. \mathbf{n} es un vector unitario ortogonal a la superficie del volumen de control, \mathbf{v} es el campo de velocidad del fluido, Γ es la difusividad de la cantidad ϕ , q_ϕ es el termino fuente de ϕ y ∇ es la divergencia (Ferziger, Perić, & Street, 2002).

El método de volúmenes finitos es una técnica numérica utilizada para resolver ecuaciones diferenciales parciales, especialmente en problemas de dinámica de fluidos y transferencia de calor (Tu, Yeoh, & Liu, 2018). A continuación, se detallan los pasos de este método:

1. División del Dominio en Volúmenes de Control
2. Formulación de la Ecuación Integral
3. Aplicación del Teorema de Gauss
4. Discretización de las Ecuaciones Integrales
5. Tratamiento de las Condiciones de Frontera
6. Resolución del Sistema de Ecuaciones Algebraicas.

En general, ANSYS Fluent proporciona un conjunto completo de herramientas para configurar, resolver y analizar simulaciones de volúmenes finitos para diversos problemas de flujo de fluidos y transferencia de calor (Ansys , 2022).

1.4.1.3 Método de Elemento Finito

El método de elemento finito es similar al método de volumen finito en varias maneras. El dominio es dividido en un conjunto de elementos finitos que generalmente es no estructurado; en 2D, son usualmente triángulos o cuadriláteros; tetraedros o hexaedros son usados en 3D más a menudo. La característica distintiva del método de elemento finito es que las ecuaciones son multiplicadas por una función de peso (weight function) antes de que sean integradas sobre el dominio completo. En los métodos más simples de elemento finito, la solución es aproximada por una función de forma lineal dentro de cada elemento en un modo que se garantice la continuidad de la solución a lo largo de las fronteras del elemento. Una función de este tipo se puede construir a partir de sus valores en las esquinas de los elementos. La función de peso suele tener la misma forma. Luego, esta aproximación se sustituye en la integral ponderada de la ley de conservación y las ecuaciones a resolver se derivan exigiendo que la derivada de la integral con respecto a cada valor nodal sea cero; esto corresponde a

seleccionar la mejor solución dentro del conjunto de funciones permitidas (la que tiene mínimo residual). El resultado es un conjunto de ecuaciones algebraicas no lineales (Ferziger, Perić, & Street, 2002).

La división del dominio completo en elementos finitos puede no ser exacta introduciendo errores en el dominio que es modelado. Típicamente, las variables desconocidas (u) de un problema son aproximadas usando la idea base que de cualquier función continua puede ser representada por una combinación lineal de funciones conocidas ϕ_i y coeficientes indeterminados c_i ($u \approx u_h = \sum c_i \phi_i$). Las relaciones algebraicas entre los coeficientes indeterminados c_i son obtenidas satisfaciendo las ecuaciones gobernantes en su forma integral débil, sobre cada elemento. Las funciones de aproximación ϕ_i son a menudo polinomios, y pueden ser derivadas usando conceptos de teoría de interpolación (Reddy, 2006).

Se presentan los pasos en ANSYS Mechanical usando FEM (Thompson & Thompson, 2017):

1. Formulación Débil de la Ecuación Diferencial
2. División del Dominio en Elementos Finitos
3. Selección de las Funciones de Forma
4. Montaje de la Matriz de Rigidez y el Vector de Fuerzas
5. Aplicación de las Condiciones de Frontera
6. Resolución del Sistema de Ecuaciones Algebraicas

1.4.2 De ecuaciones gobernantes a ecuaciones algebraicas

Método de volumen finito: obtención de ecuaciones algebraicas

Cuando se aplica el método del volumen finito, tenemos que considerar el dominio físico dividido en volúmenes de control finitos que rodean los puntos nodales W, P, and E. La **Figura 1.10** muestra un volumen de control rodeando el punto nodal P. Las distancias entre los nodos W y P y entre los nodos P y E son identificados por las notaciones respectivas δx_w y δx_E . Para un caso unidimensional, el volumen de control con puntos nodales vecinos P es Δx ya que Δy y Δz tienen dimensiones de longitud unitaria. Para aplicar la discretización de volumen finito, tomemos como ejemplo la ecuación de difusión en una dimensión,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + S_\phi = 0 \quad (1.27)$$

El termino gradiente puede ser aproximado por,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \frac{1}{\Delta V} \int_V \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dV = \frac{1}{\Delta V} \int_A \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dA^x \approx \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^2 \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i A_i^x \quad (1.28)$$

Aquí, las áreas proyectadas A_i^x para un caso unidimensional son dadas por $A_1^x = -A_W$ y $A_2^x = -A_E$. La Ecuación (1.28) puede ser escrita como,

$$\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e A_E - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w A_W \quad (1.29)$$

El término fuente es aproximado como,

$$\frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} S_\phi dV = S_\phi \quad (1.30)$$

donde S_ϕ es asumido como constante dentro de ΔV , el cual es el volumen de control finito. La forma final de la ecuación después de aproximar los gradientes $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ en la cara w y e, por perfiles de gradiente lineales $\frac{\Delta \phi}{\delta x}$ entre W y P, así como entre P y E, se expresa como,

$$\frac{\Gamma_e A_E}{\Delta V} \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_E} \right) - \frac{\Gamma_w A_W}{\Delta V} \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_W} \right) + S_\phi = 0 \quad (1.31)$$

Esta ecuación discretizada posee una clara interpretación física. Establece la diferencia entre los flujos difusivos ϕ en las caras este y oeste del volumen de control igual a la generación de ϕ y constituye una ecuación de balance para ϕ sobre el control de volumen (Tu, Yeoh, & Liu, 2018).

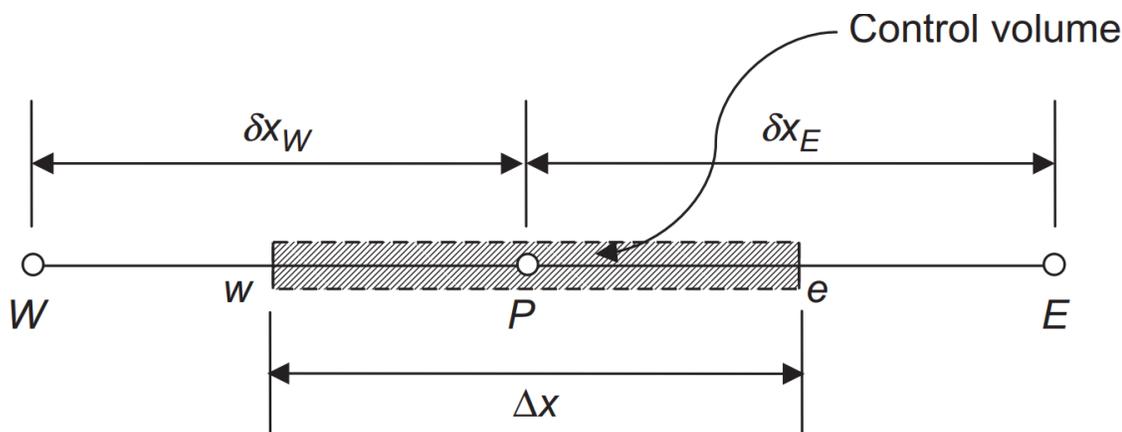


Figura 1.10. Representación esquemática de un volumen de control alrededor de un nodo P en un dominio de una dimensión usando el método de volumen finito (Tu, Yeoh, & Liu, 2018)

Método de elemento finito (FEM): obtención de ecuaciones algebraicas

En FEM que utiliza el enfoque de residuos ponderados, el dominio considerado se discretiza primero con elementos adecuados. Entonces, se supone que el comportamiento general de la variable dependiente satisface aproximadamente las ecuaciones diferenciales dadas sobre los elementos. Inicialmente, se aplica la aproximación a cada elemento y posteriormente esta aproximación se sustituye en la ecuación diferencial original y se ensambla para todo el dominio. La aproximación da como resultado un error llamado "residual", que debe desaparecer de alguna manera de todo el dominio de la solución. El sistema de ecuaciones resultante se resuelve después de sustituir las condiciones de frontera para obtener una solución aproximada (Reddy, 2006).

El objetivo es encontrar una función aproximada para una variable de campo h regida por la ecuación diferencial,

$$L(h) - g(x, y) = 0 \quad (1.32)$$

en el dominio Ω delimitado por la superficie Γ con condiciones de frontera apropiadas. La función g es una función conocida de las variables independientes. El procedimiento de elementos finitos utilizando el método de residual ponderado se explica brevemente a continuación:

En el primer paso, la solución exacta desconocida h se aproxima mediante funciones de aproximación. Aquí cabe señalar que el comportamiento funcional de \bar{h} está completamente especificado en términos de parámetros desconocidos. La variable dependiente se puede aproximar como,

$$h \approx \bar{h} = \sum_{i=1}^m N_i D_i \quad (1.33)$$

donde N_i son las funciones asumidas y D_i son los parámetros o las funciones desconocidas de una de las variables independientes. Como \bar{h} son las funciones aproximadas, es posible que no satisfagan la ecuación cuando se sustituye en la Ecuación (1.32). Por lo tanto, se puede escribir como,

$$L(\bar{h}) - g(x, y) = R_1 \quad (1.34)$$

donde R_1 es el residuo o error que resulta de aproximar h por \bar{h} . En el método de residuos ponderados, las incógnitas m de D_i se determinan de tal manera que el error R_1 en todo el dominio de la solución desaparece o se vuelve muy pequeño.

A medida que el dominio se discretiza en elementos y nodos, inicialmente la técnica residual ponderada basada en el enfoque de Galerkin se puede formular para un elemento y luego se puede ensamblar para todo el dominio. N_i son las funciones de interpolación, N_i^e definida sobre el elemento y D_i son los parámetros indeterminados, que pueden ser los valores nodales de la variable de campo o sus derivadas. Para el elemento considerado, las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del elemento se pueden escribir como

$$\int_{\Omega^e} [L(h^e) - g(x, y)^e] N_i^e d\Omega^e = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (1.35)$$

donde el superíndice (e) se refiere a un elemento, $h^e = [N^e]\{h\}^e$, $g(x, y)^e$ es la función forzada definida sobre el elemento (e) y r es número de parámetros desconocidos asignados al elemento.

En FEM usando la técnica de Galerkin, un conjunto de ecuaciones, como la Ecuación (1.35), se obtiene para cada elemento del conjunto total. La elección de la función de aproximación N_i debe garantizar la continuidad entre elementos necesaria para el proceso de ensamblaje.

Aplicando la integración por partes a la expresión integral de la Ecuación. (1.35), se pueden obtener expresiones que contienen derivadas de orden inferior (lo que se denomina formulación débil). Finalmente, se ensambla el sistema para todos los elementos, se aplican condiciones de frontera y se resuelven las ecuaciones del sistema para las incógnitas (Desai, Eldho, & Shah, 2011).

En ANSYS Mechanical, el método Galerkin se utiliza a menudo como parte del método de elementos finitos (FEM), que es la técnica numérica subyacente para resolver problemas estructurales, térmicos y otros problemas de ingeniería mecánica (Ansys, 2022). Así es como se aplica normalmente el método Galerkin en ANSYS Mechanical:

1. Discretización: El dominio continuo de la estructura se discretiza en elementos finitos, como elementos tetraédricos o hexaédricos, formando una malla. Cada elemento tiene un conjunto de nodos donde se definen las incógnitas (desplazamientos, temperaturas, etc.).
2. Formulación variacional: El método de Galerkin implica expresar las ecuaciones que rigen el problema (por ejemplo, ecuaciones de equilibrio para mecánica estructural o ecuaciones de conducción de calor para análisis térmico) en una forma débil o variacional. Por lo general, esto implica multiplicar las ecuaciones gobernantes por funciones de peso e integrar en el dominio.
3. Aproximación de la solución: La solución dentro de cada elemento finito se aproxima utilizando funciones de forma, que se interpolan en función de los valores nodales. Estas funciones de forma suelen ser polinomios por partes definidos sobre cada elemento.
4. Matrices y vectores de elementos: utilizando la formulación variacional y las funciones de forma, se ensamblan matrices de rigidez de elementos, matrices de masa (si corresponde) y vectores de carga para cada elemento finito. Estas matrices y vectores describen el comportamiento del elemento bajo las cargas aplicadas y las condiciones de frontera.
5. Ensamblaje: Las matrices de elementos y los vectores se ensamblan en un sistema global de ecuaciones considerando la conectividad de los elementos y los grados de libertad en cada nodo.

6. Aplicación de condiciones de frontera: Las condiciones de frontera, incluidos los desplazamientos, fuerzas, temperaturas, etc. prescritos, se aplican al sistema global de ecuaciones.

7. Solución: El sistema global de ecuaciones se resuelve para obtener los desplazamientos nodales, temperaturas u otras cantidades deseadas.

8. Postprocesamiento: Luego de obtener la solución, se utilizan herramientas de postprocesamiento en ANSYS Mechanical para visualizar y analizar los resultados, como distribuciones de tensiones, contornos de deformación, perfiles de temperatura, etc.

1.4.3 Solución numérica del sistema de ecuaciones algebraicas

Se han descrito los métodos de discretización de las ecuaciones diferenciales parciales. Mediante este proceso, obtenemos un sistema de ecuaciones algebraicas lineales o no lineales que debe resolverse mediante algunos métodos numéricos. La complejidad y el tamaño de este conjunto de ecuaciones depende de la dimensionalidad y geometría del problema físico. Ya sea que las ecuaciones sean lineales o no lineales, se requieren métodos numéricos eficientes y robustos para resolver el sistema de ecuaciones algebraicas. Básicamente, existen dos familias de métodos numéricos: métodos directos y métodos iterativos (Tu, Yeoh, & Liu, 2018).

Métodos directos

Uno de los métodos para resolver sistemas lineales de ecuaciones algebraicas es la eliminación gaussiana. El algoritmo se deriva de la base de la reducción sistemática de grandes sistemas de ecuaciones a otros más pequeños. Supongamos que los sistemas de ecuaciones se pueden escribir en la forma

$$A\phi = B \tag{1.36}$$

donde ϕ son las variables nodales desconocidas. La matriz A contiene coeficientes distintos de cero de las ecuaciones algebraicas, como se ilustra a continuación:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

mientras que B se compone de valores conocidos de ϕ , por ejemplo, que están dados por la condiciones de frontera o términos de fuente/sumidero.

Se puede observar que los coeficientes diagonales de la matriz A están representados por las entradas de $A_{11}, A_{22}, \dots, A_{nn}$. El corazón del algoritmo es eliminar las entradas debajo de la diagonal para producir un triángulo inferior de ceros. Esto significa eliminar los elementos de $A_{21}, A_{31}, A_{32}, \dots, A_{nn-1}$.reemplazándolos con ceros. Una vez completado este proceso, la matriz A original se convierte en una matriz triangular superior dada por

$$U = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ 0 & 0 & A_{33} & \dots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones triangular superior U ahora se puede resolver mediante el proceso de sustitución hacia atrás. Se observa que la entrada de la matriz U contiene sólo una variable, ϕ_n , y se resuelve como,

$$\phi_n = \frac{B_n}{U_{nn}} \tag{1.37}$$

La fórmula general de la ecuación ϕ_i puede ser expresada como,

$$\phi_i = \frac{B_i - \sum_{j=i+1}^n A_{ij}\phi_j}{A_{ii}} \tag{1.38}$$

Consideremos la forma tridiagonal del sistema de ecuaciones algebraicas como,

Se puede observar que el algoritmo de Thomas es más económico que la eliminación gaussiana debido a la ausencia de operaciones aritméticas (multiplicación y división) para obtener ϕ_i durante la sustitución hacia atrás. Sin embargo, con el fin de evitar un mal condicionamiento (y por lo tanto un error de redondeo) para los dos métodos directos, es necesario que

$$|A_{ii}| > |A_{ii-1}| + |A_{ii+1}| \quad (1.42)$$

Esto significa que se requiere que los coeficientes diagonales sean mucho mayores que la suma de los coeficientes vecinos.

Método iterativo

Se puede emplear un método directo como la eliminación gaussiana para resolver cualquier sistema de ecuaciones. Desafortunadamente, en la mayoría de los problemas de CFD que generalmente resultan en un gran sistema de ecuaciones no lineales, el costo de utilizar este método es generalmente bastante alto. El algoritmo de Thomas es particularmente económico para obtener la solución para un problema unidimensional de conducción de calor en estado estacionario debido a la estructura inherente de la matriz con bandas (tridiagonal). Sin embargo, para situaciones multidimensionales, la naturaleza del solucionador no puede extenderse fácilmente para resolver tales problemas. Por lo tanto, esto deja la opción de emplear métodos iterativos. En un método iterativo, se adivina la solución y se utiliza la ecuación para mejorarla sistemáticamente hasta que alcance cierto nivel de convergencia. Si el número de iteraciones es pequeño para lograr la convergencia, el uso de un solucionador iterativo puede costar menos que un método directo. Este suele ser el caso de los problemas de CFD (Tu, Yeoh, & Liu, 2018).

Métodos de Jacobi y Gauss-Seidel: el método más simple de las diversas clases de métodos iterativos es el método de Jacobi. Revisemos el sistema de ecuaciones, $A\phi = B$; la forma general de la ecuación algebraica para cada variable nodal desconocida de ϕ se puede escribir como,

$$\sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}\phi_j + A_{ii}\phi_i + \sum_{j=i+1}^n A_{ij}\phi_j = B_i \quad (1.43)$$

En la Ecuación. (1.43), el método de Jacobi requiere que se suponga que las variables nodales ϕ_j (elementos de la matriz no diagonales) sean conocidas en el paso de iteración k y que las variables nodales ϕ_i sean tratadas como desconocidas en el paso $k+1$ de la iteración. Resolviendo para ϕ_i , tenemos

$$\phi_i^{(k+1)} = \frac{B_i}{A_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{A_{ij}}{A_{ii}} \phi_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n \frac{A_{ij}}{A_{ii}} \phi_j^{(k)} \quad (1.44)$$

El proceso de iteración comienza con una estimación inicial de las variables nodales $\phi_j (k = 0)$. Después de la aplicación repetida de la Ec. (1.44) para todas las incógnitas n , se completa la primera iteración, $k = 1$. Procedemos al siguiente paso de iteración, $k = 2$, sustituyendo los valores iterados en $k = 1$ en la Ec. (1.44) para estimar los nuevos valores en el siguiente paso de iteración. Este proceso se repite continuamente durante tantas iteraciones como sean necesarias para converger a la solución deseada.

Una mejora más inmediata del método de Jacobi la proporciona el método de Gauss-Seidel en el que las variables nodales actualizadas ϕ_j^{k+1} se utilizan inmediatamente en el lado derecho de la Ecuación (1.44) tan pronto como estén disponibles. En tal caso, los valores anteriores de ϕ_j^k que aparecen en el segundo término del lado derecho de la Ecuación (1.44) se reemplazan por los valores actuales de ϕ_j^k . La Ecuación. (1.44) se convierte en,

$$\phi_i^{(k+1)} = \frac{B_i}{A_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{A_{ij}}{A_{ii}} \phi_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n \frac{A_{ij}}{A_{ii}} \phi_j^{(k)} \quad (1.45)$$

Comparando los dos procedimientos iterativos anteriores, la iteración de Gauss-Seidel suele ser dos veces más rápida que la iteración de Jacobi. Después de aplicaciones repetidas de las Ecuaciones (1.44) y (1.45), la convergencia se puede medir de varias maneras. Una condición conveniente para terminar el proceso de iteración es asegurar que la máxima diferencia $\phi_i^{(k+1)} - \phi_j^{(k)}$ cae por debajo de algún valor predeterminado de error aceptable. Cuanto menor sea el error aceptable, más precisa será la solución, pero se observa que esto se logra a expensas de un mayor número de iteraciones (Tu, Yeoh, & Liu, 2018).

1.5 Estudios por simulación computacional de DC-EAFs

La mayor parte de los estudios numéricos reportados en la literatura se han efectuado para hornos de arco de corriente alterna (EAF-AC), cuyo funcionamiento no requiere ánodos insertados en el piso refractario. En cambio, las simulaciones de hornos de corriente directa (DC-EAF) son menos numerosas y aún hay mucho desconocimiento del comportamiento térmico de los ánodos y del piso refractario. La dinámica de fluidos computacional (CFD, Computational Fluid Dynamics) se ha utilizado desde hace dos décadas para estudiar los fenómenos de transporte de masa, momentum y energía que ocurren en los hornos DC-EAF. Por lo anterior, los retos para las simulaciones CFD en dichos hornos son todavía imprevisibles, pero seguramente muy desafiantes, porque los fenómenos de interés son tridimensionales, transitorios, afectados por la fricción, bajo flujo turbulento, no isotérmico y multifásico. A pesar de ello, se han asumido algunas simplificaciones que han permitido estudiar algunos fenómenos en regiones específicas del sistema (Odenthal, y otros, 2018).

En particular, los estudios sobre hornos DC con ánodos tipo *billet* no son numerosos. Esto se atribuye a que es una tecnología que compite con otros diseños de electrodos y contra nuevas tecnologías de DC-EAFs que ya no cuentan con electrodos de fondo (Elizarov, Krutyanskii, Nekhamin, & Nekhamin, 2014). Se presenta a continuación una serie de estudios CFD que están relacionados con los DC-EAFs con ánodos tipo *billet*. Tres estudios se centran en estudiar el comportamiento termo-fluidinámico de la carga metálica dentro de la cuba del horno y otros tres estudios tratan sobre los fenómenos de transferencia de energía en el interior de los ánodos tipo *billet*.

1.5.1 Fenómenos de transporte en la cuba del horno DC-EAF

Ramírez (2000) desarrolló un modelo matemático muy completo para entender, mediante simulación computacional, las operaciones de refinación en los DC-EAF. El modelo matemático involucró la solución simultánea de las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético, las ecuaciones diferenciales de conservación de masa, momentum y energía para flujo turbulento.

Las principales características del baño de metal líquido son presentadas bajo el efecto de un arco estándar de 40 kA de corriente y 0.25 metros de longitud. El horno modelado tiene forma

cilíndrica, 3 metros de diámetro y la profundidad del baño de metal líquido es 0.5 metros. El campo de velocidad presentado en la **Figura 1.11(a)** exhibe una circulación de metal líquido con dirección horaria. El acero líquido se mueve hacia abajo cuando está cerca del eje de simetría z y se mueve hacia arriba cerca de la pared lateral. La magnitud de la velocidad es alta cerca del eje de simetría (con una velocidad máxima de 1.2 m/s) y es pequeña cerca de la pared lateral. Las fuerzas electromagnéticas rigen el movimiento del fluido, dejando en una posición secundaria la convección natural originada por la variación de densidad. La **Figura 1.11(b)** muestra el campo de temperatura del baño de metal líquido. El efecto del arco es evidente, ya que las temperaturas más altas se encuentran cerca de la Zona de Fijación del Arco (AAZ, por sus siglas en inglés). En esta zona, la mayor cantidad de calor y corriente eléctrica son transferidos desde el arco al baño de metal líquido. El campo de velocidad da forma al campo de temperatura. El metal líquido que se mueve cerca del eje de simetría mejora la disipación del calor que es recibido en la superficie desde el arco eléctrico. Los gradientes de temperatura son altos cerca de AAZ, pero comienzan a decrecer conforme nos acercamos a la pared del horno. Se reportó una temperatura máxima de 1952 K en el centro de AAZ, donde se recibe la mayor densidad de flujo de calor.

Los resultados mostrados en las **Figuras 1.11(a)-(b)** corresponden a un DC-EAF que cuenta con un fondo conductor, esto quiere decir, que hipotéticamente existen ladrillos refractarios instalados en el fondo del piso refractario. Con la finalidad de conocer el efecto de la configuración de los ánodos en el campo de velocidad y temperatura, se restringió el paso de la corriente eléctrica en ciertas secciones. Se exploraron tres configuraciones anódicas (a) ánodo en forma de anillo en la posición radial $r = 1.062, 0.06$ m de espesor, (b) ánodo circular de 0.1 m de radio localizado en el centro del piso refractario y (c) ánodo circular de 0.05 m de radio localizado en el centro del piso.

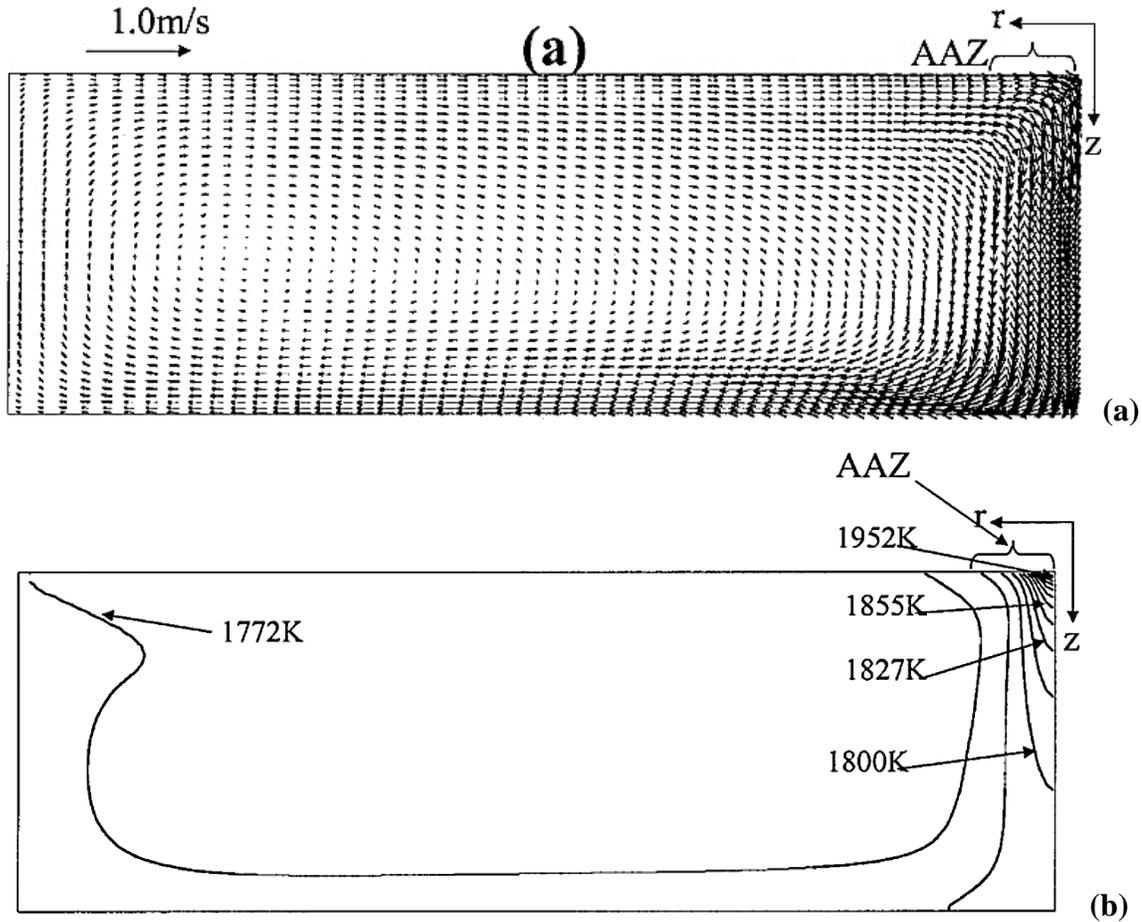


Figura 1.11. Distribuciones calculadas de (a) velocidad y (b) de temperatura en un horno con fondo conductor y con geometría axisimétrica. Características de baño de metal líquido: corriente de arco 40 kA, Longitud de arco 0.25 m, radio 1.5 m, profundidad de líquido 0.5 m. Tomada de (Ramírez, 2000).

Se encontró que el efecto de la configuración de ánodo era evidente ya que influyó en el comportamiento de mezclado y eventualmente cambió el patrón de flujo dramáticamente. Por ejemplo, la **Figura 1.12(a)** corresponde al ánodo de 0.1 m de radio. Se observa que se produce un patrón de flujo complejo donde el fluido es dirigido hacia arriba cerca del eje de simetría, lo cual contrasta con el movimiento hacia abajo que se visualiza en la **Figura 1.11(a)**. Adicionalmente, la **Figura 1.12(b)** muestra que la temperatura es más elevada cerca del ánodo al compararse con la distribución de temperatura mostrada en la **Figura 1.11(b)**.

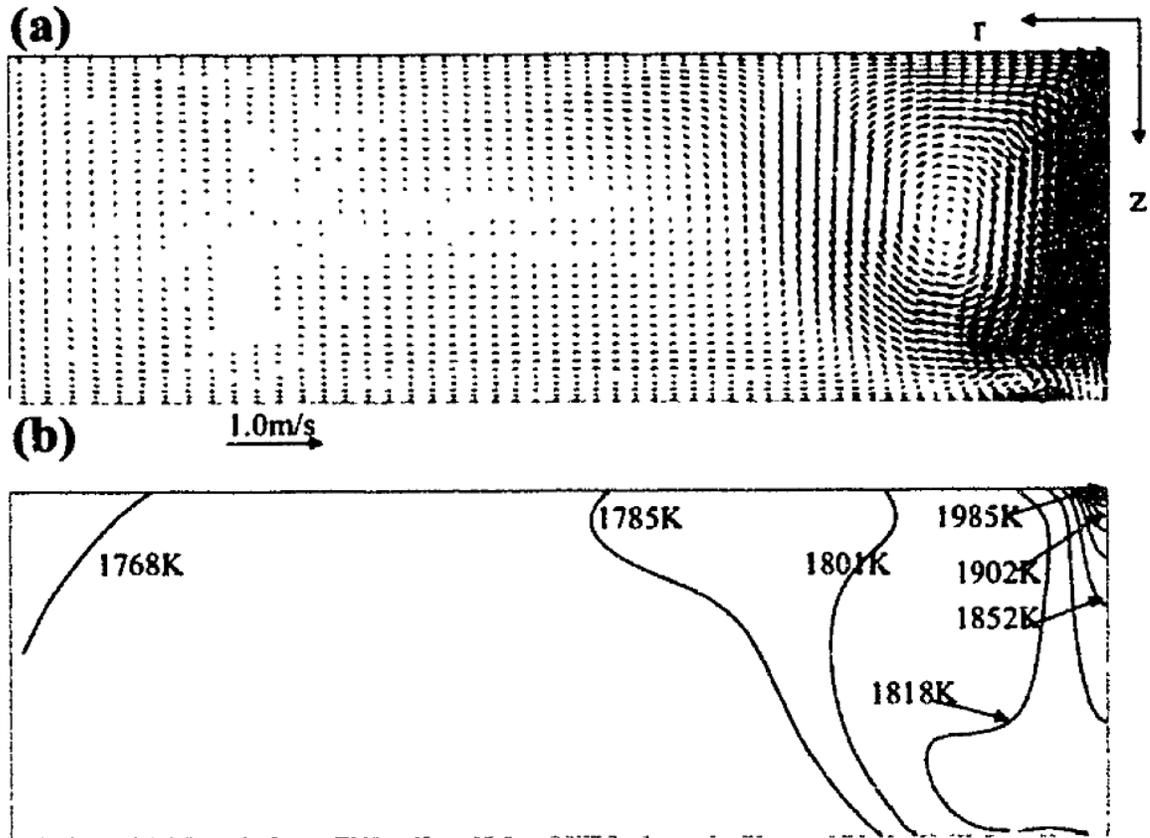


Figura 1.12. a) Campo de velocidad y b) de temperatura en el metal fundido cuando existe un ánodo de 0.1 m de radio en el centro del piso refractario. Tomada de (Ramírez, 2000).

Kazak (2014) presentó un modelo matemático de los fenómenos magnetohidrodinámicos en el baño metálico, considerando la distribución espacial de la corriente eléctrica, de los campos electromagnéticos y de la fuerza de Lorentz. La modelación numérica del movimiento de metal líquido se llevó a cabo para un DC-EAF con capacidad de 420 t, diseñado por la compañía DANIELI. Para modelar los procesos electromagnéticos en el metal líquido, se consideró todo el volumen de metal como el dominio computacional. Las **Figuras 1.13(a)-(b)** muestran dos vistas isométricas del dominio discretizado en tres dimensiones, construido usando el software comercial de CFD Ansys Fluent versión 11. Los principales parámetros son: diámetro mayor del horno de arco eléctrico 8.5 m, profundidad del baño de metal líquido 0.78 m, diámetros de electrodos de fondo 0.4 m, intensidad de corriente $I = 80 \text{ kA}$.

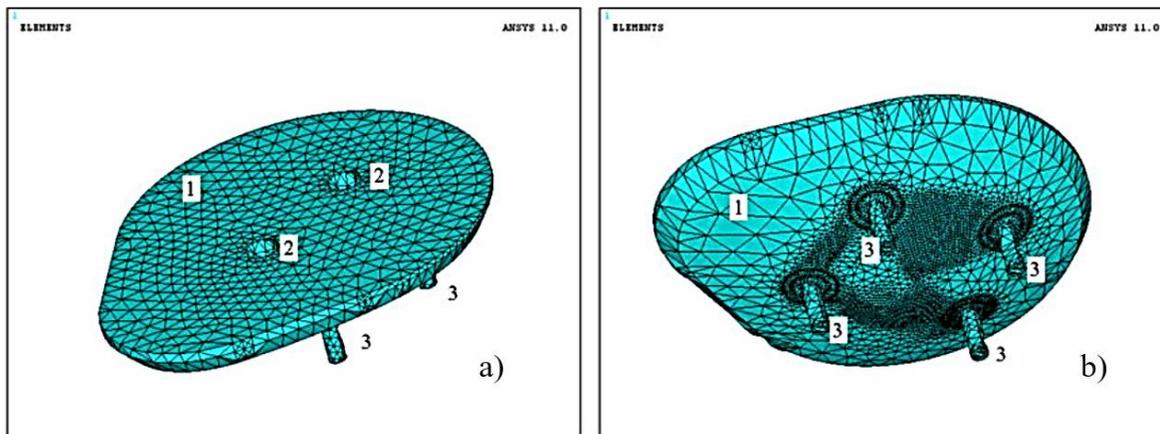


Figura 1.13. Representación isométrica del dominio tridimensional discretizado para la modelación magnetohidrodinámica en un DC-EAF de 420 t fabricado por la compañía DANIELI. a) Vista superior, donde (1) metal líquido en la cuba del horno, (2) huella del arco proveniente de los dos cátodos de grafito, y (3) ánodos de acero, tipo billet, instalados en el piso refractario; b) vista inferior. Tomado de (Kazak, 2014).

La **Figura 1.14(a)** muestra la distribución de la fuerza electromagnética de Lorentz, la cual es esencial en la aparición de electrovórtices que pueden visualizarse mediante líneas de corriente en la **Figura 1.14(b)**. Estos resultados confirmaron que los vórtices generados por la fuerza de Lorentz aparecen por el desequilibrio de corriente eléctrica en el metal líquido. De acuerdo con las estimaciones, la distribución de la fuerza volumétrica de Lorentz aporta aproximadamente el 30% de la fuerza de volumen que provoca el flujo de metal. Se identificó que los valores máximos de densidad de flujo magnético, densidad de corriente y fuerza de Lorentz están localizados cerca de ánodos. Lejos del electrodo se encuentran los valores más bajos. La separación de las líneas de corriente mostradas en la **Figura 1.14(b)** es inversamente proporcional a la velocidad del líquido. Por tanto, de esta figura se aprecia que el movimiento más intenso de metal líquido está cerca de los ánodos insertados en el piso refractario donde el valor máximo es 0.5 m/s. Esto podría explicar la erosión preferencial del piso refractario cerca de los ánodos, tal como se muestra esquemáticamente en las **Figuras 1.15(a)-(b)**. La **Figura 1.15(a)** muestra un ánodo nuevo y la **Figura 1.15(b)** representa al mismo ánodo después de 400 ciclos de servicio. Nótese que el nivel del piso del horno descendió 300 mm y la manga refractaria se desgastó 150 mm adicionales. La región formada por la mezcla de refractario y metal corresponde a la “pata de elefante”.

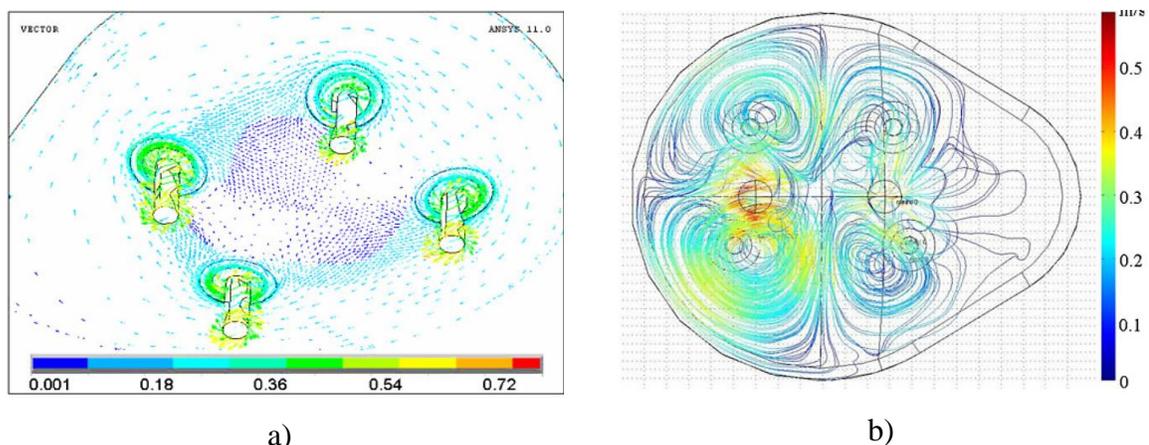


Figura 1.14. (a) Campo vectorial calculado de la fuerza de Lorentz cerca de los ánodos (N/m^3), en una vista isométrica del piso del horno. (b) Líneas de corriente calculadas de metal líquido mostradas desde una vista superior del horno. Tomado de (Kazak, 2014).

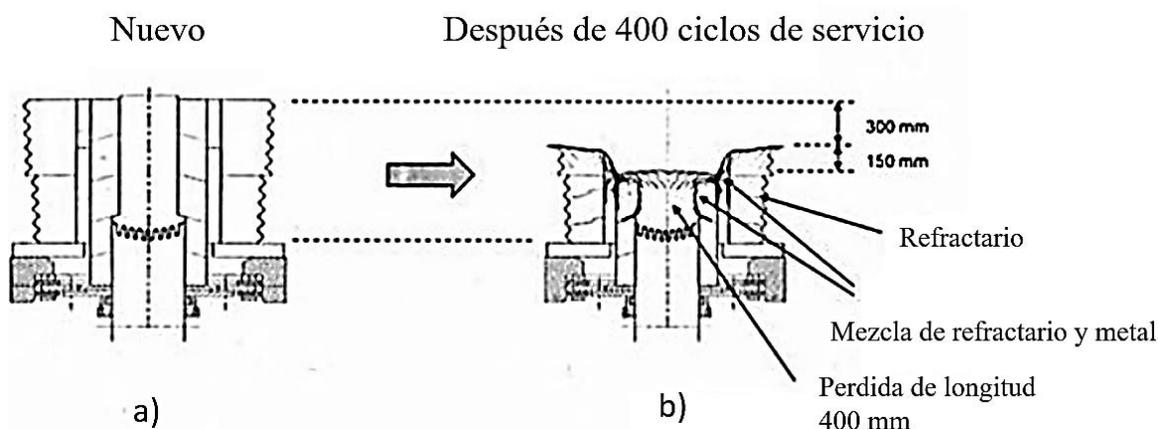


Figura 1.15. Representación esquemática de: (a) Ánodo recién instalado en el piso refractario, y (b) ánodo parcialmente fundido y refractario circundante erosionado después de 400 ciclos de fusión. Adaptado de (Kazak, 2014).

Kukharev (2019) reportó otro trabajo de simulación fluidinámica para proponer un diseño de DC-EAF con tres cátodos y tres ánodos, tal como se muestra esquemáticamente en las **Figuras 1.16(a)-(b)**. Este diseño provee caminos adicionales de corriente eléctrica en el baño de metal líquido. Para el estudio numérico de la temperatura en el metal fundido de este horno, se implementó un modelo matemático de conducción de calor y de los procesos magnetohidrodinámicos en tres dimensiones. Fue estudiada la interacción de los electrovórtices y la convección termo-gravitacional en un horno de 180 toneladas que opera con una intensidad de corriente de 80 kA.

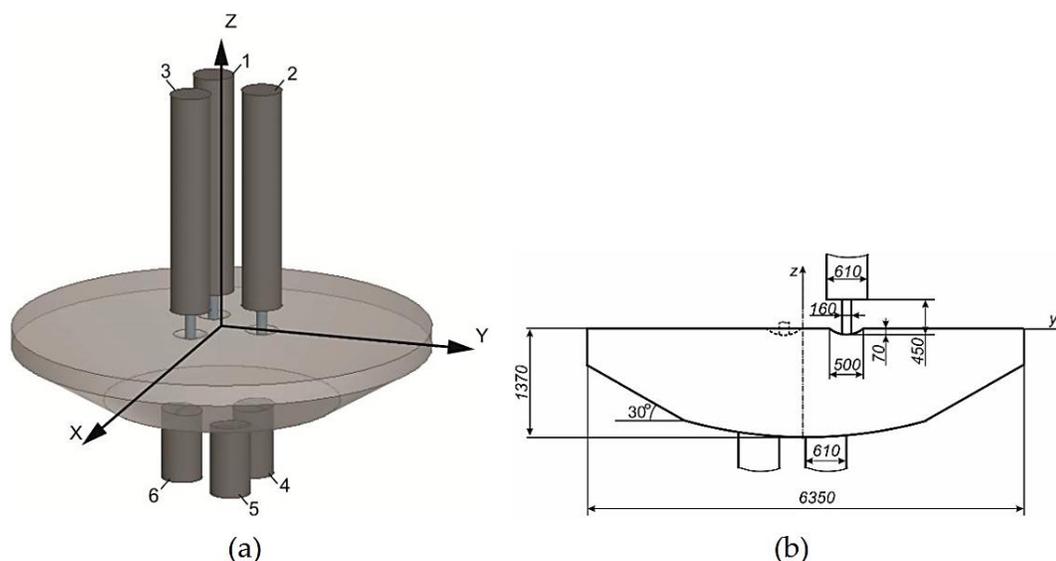
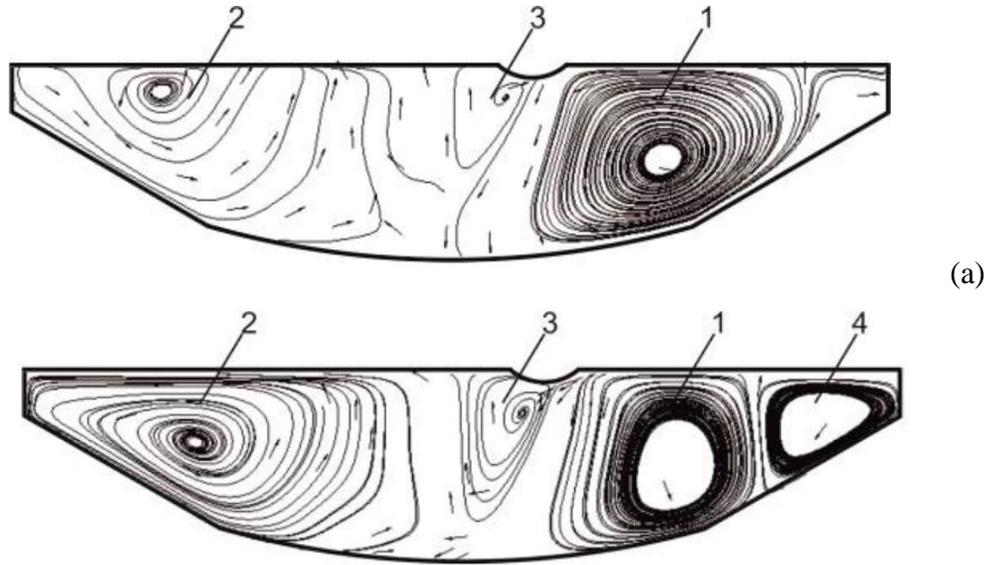


Figura 1.16. Representación esquemática de un DC-EAF. (a) Proyección isométrica; los cátodos son 1, 2 y 3 y los ánodos son 4, 5 y 6. (b) Proyección en el plano YZ, con dimensiones en mm. Tomado de (Kukharev, 2019).

La **Figura 1.17 (a)** muestra las líneas de corriente calculadas considerando únicamente la fuerza electromagnética, mientras que la **Figura 1.17 (b)** presenta las líneas calculadas considerando también a la fuerza boyante, es decir la convección termo-gravitacional. En ambas figuras aparece un patrón de flujo formado por multivórtices. Los autores estimaron la distribución del número local de Richardson, que es el inverso del cuadrado del mejor conocido número de Froude ($R_i = 1/Fr^2 = gL/u^2$), con lo que demostraron que la convección electromagnética dominó cerca del eje de simetría y la convección termo-gravitacional dominó cerca de las paredes debido al calentamiento no uniforme de la carga metálica. La convección termo-gravitacional debido al calentamiento no uniforme del metal provocó un decremento en el tamaño de los electrovórtices y un incremento del flujo cerca de las paredes del horno.



(b)

Figura 1.17. (a) Líneas de corriente de metal líquido calculadas sin contemplar la convección termo-gravitacional, (b) Líneas de corriente calculadas considerando la convección termo-gravitacional. Tomado de (Kukharev, 2019).

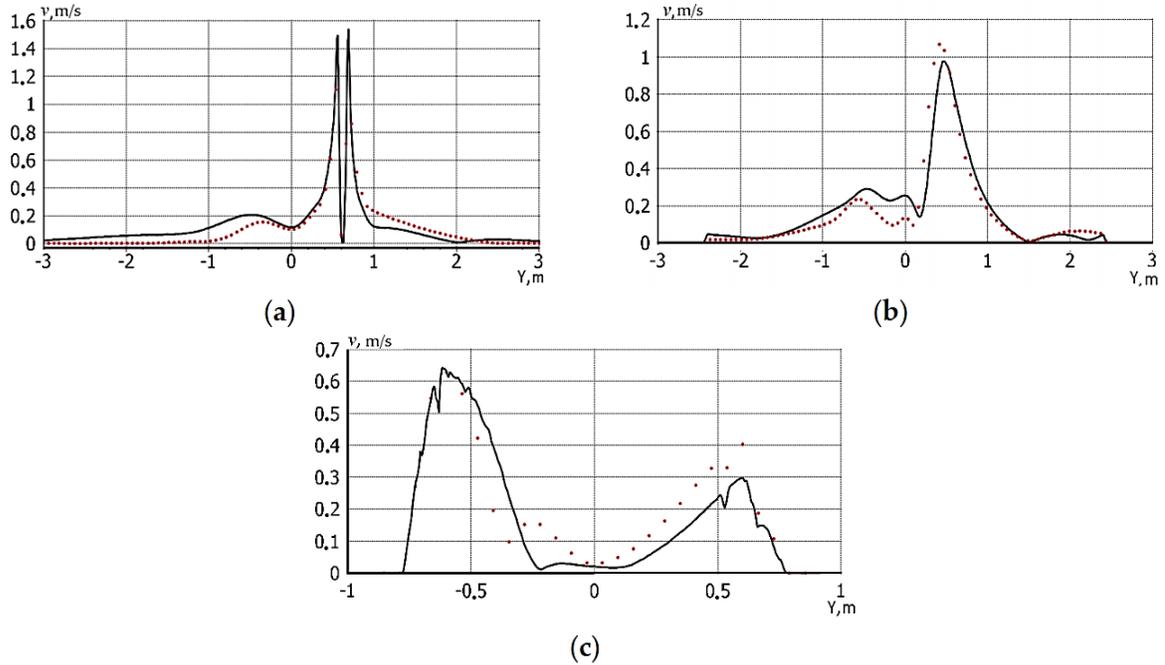


Figura 1.18. Perfiles calculados de velocidad sobre el eje Y: (a) $Z = -70$ mm; (b) $Z = -715$ mm; y (c) $Z = -1320$ mm. Tomado de (Kukharev, 2019).

Las **Figuras 1.18 (a)-(c)** muestran perfiles calculados de velocidad a lo largo del eje Y, a distintas profundidades z. Las líneas sólidas representan los perfiles de velocidad cuando se considera la convención termo-gravitacional, y las líneas punteadas indican el perfil de velocidad cuando no se toma en cuenta. En promedio, el cambio de velocidad está entre 15-25%. También puede observarse que la velocidad máxima es aproximadamente 1.5 m/s.

1.5.2 Fenómenos de transporte en el ánodo tipo billet

Castillejos y cols. (1998) publicaron uno de los primeros estudios numéricos sobre la evolución de temperatura en el piso refractario de un horno DC con ánodos tipo *billet*. El horno fue fabricado por la empresa Fuchs y tiene las siguientes características: capacidad de 175 t, potencia de 80 MW y corriente máxima igual a 120 kA. El horno tiene tres ánodos tipo *billet*, insertados equidistantemente a 120° en el centro del piso refractario. El estudio numérico incluyó los resultados de un trabajo que fue reportado posteriormente (Castillejos y cols., 2000) sobre el cálculo de la evolución de la temperatura y fusión del metal en la cuba del horno durante todo el proceso de carga por lotes con potencia variable. Estos cálculos permitieron determinar los campos de temperatura sobre la superficie del piso del horno, los cuales se emplearon en una simulación independiente como condición a la frontera para predecir la temperatura en el interior del piso refractario. De este modo, los autores calcularon la evolución de temperatura en el piso, fusión tras fusión, día tras día, hasta completar una semana de operación. Los autores implementaron un modelo basado en la solución numérica de la ecuación de conducción de calor en tres dimensiones sujeta a condiciones iniciales y de frontera apropiadas. La solución fue validada exitosamente al comparar la posición calculada del frente de fusión con la longitud real de un ánodo que permaneció sin fundir en una campaña. El modelo demostró ser lo suficientemente sensible a las variables de operación para proponer varios diseños de ánodo que se muestran esquemáticamente en las **Figuras 1.19 (a)-(d)**. De éstos, se encontró que el enfriamiento interno del ánodo que se muestra en la **Figura 1.19 (d)** minimizó la penetración del frente de fusión, y, por ende, condujo a un menor calentamiento del material refractario. De manera independiente, en esa época la empresa Danieli estaba probando un prototipo de ánodo con enfriamiento interno. Poco tiempo después, se demostró en la línea de producción las bondades de este nuevo sistema de enfriamiento implementado en los hornos Danieli.

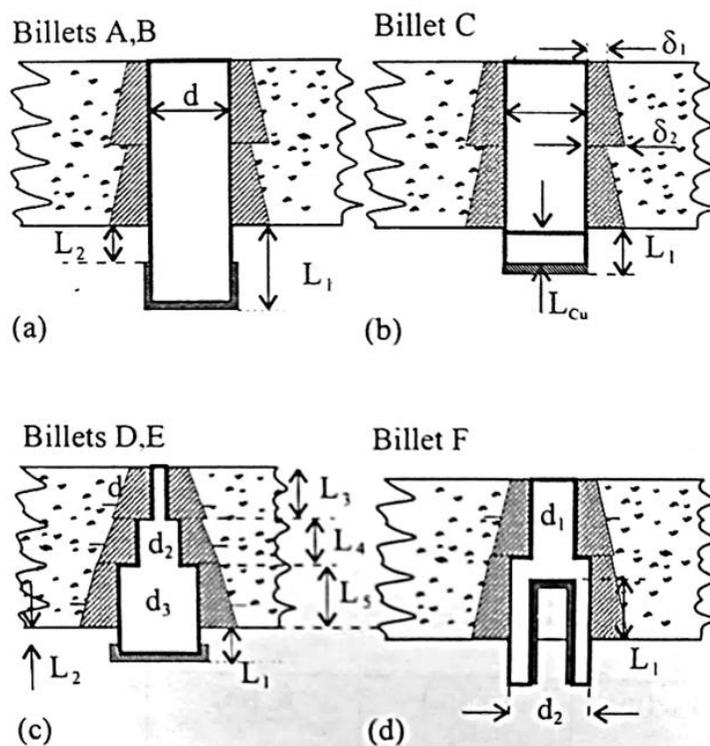


Figura 1.19. Representación esquemática de distintos diseños de ánodos considerados en el estudio térmico del piso refractario de un DC-EAF. a) Ánodo original, b) enfriamiento del fondo modificado, c) ánodo escalonado y d) enfriamiento interno del ánodo. Tomado de (Castillejos y cols., 1998).

Las conclusiones de ese estudio se resumen a continuación.

- a) Un diámetro de ánodo de 0.25 m es adecuado, ya que limita la transferencia de calor desde el baño de metal líquido hacia el sistema de enfriamiento. También se limita el calentamiento por el efecto Joule. La separación entre ánodos es también apropiada. La temperatura durante el proceso de fusión debe ser lo más baja posible, $\sim 1600^{\circ}\text{C}$.
- b) La colocación de la chaqueta de enfriamiento cerca del baño de metal líquido tiene un efecto favorable previniendo el calentamiento excesivo del material refractario, ya que se evita que el frente de fusión penetre demasiado en la cavidad anódica. La **Figura 1.20** muestra la posición calculada de la isoterma “liquidus”, que corresponde a la temperatura de fusión del acero, después de una semana de operación y tomando en cuenta un sistema de enfriamiento interno. En esta configuración de ánodo, se presenta una penetración limitada del frente de fusión. El frente de fusión alcanzó su posición final rápidamente desde el primer día de operación y se mantuvo así el resto

de la semana. En consecuencia, solo una región pequeña de material refractario es afectada por altas temperaturas y esto resulta en un aumento de la vida útil del refractario.

El modelo claramente mostró que el diseño y los parámetros de operación afectan las condiciones térmicas del ánodo. Algunas prácticas de operación que fueron sugeridas en este trabajo incrementaron la vida del ánodo de 300 a 1800 ciclos de calentamiento. Este diseño de ánodo, implementado en el horno Danieli, produjo notables mejoramientos en la vida de los ánodos y disminuyó otros problemas operacionales.

Diez años después del trabajo anterior, Liu y cols. (2008) reportaron un trabajo enfocado al entendimiento del mecanismo de fusión de los ánodos tipo *billet* de los DC-EAFs durante su funcionamiento, mediante el desarrollo de un modelo matemático que acopló las ecuaciones de momentum, continuidad y energía. El campo de velocidad de metal fundido dentro de la cavidad anódica se calculó tomando en cuenta la fuerza electromagnética de Lorentz. En este trabajo se considera una región del piso refractario y un ánodo tipo *billet* como dominio computacional. El dominio es representado en coordenadas axisimétricas y se muestra en la **Figura 1.21**.

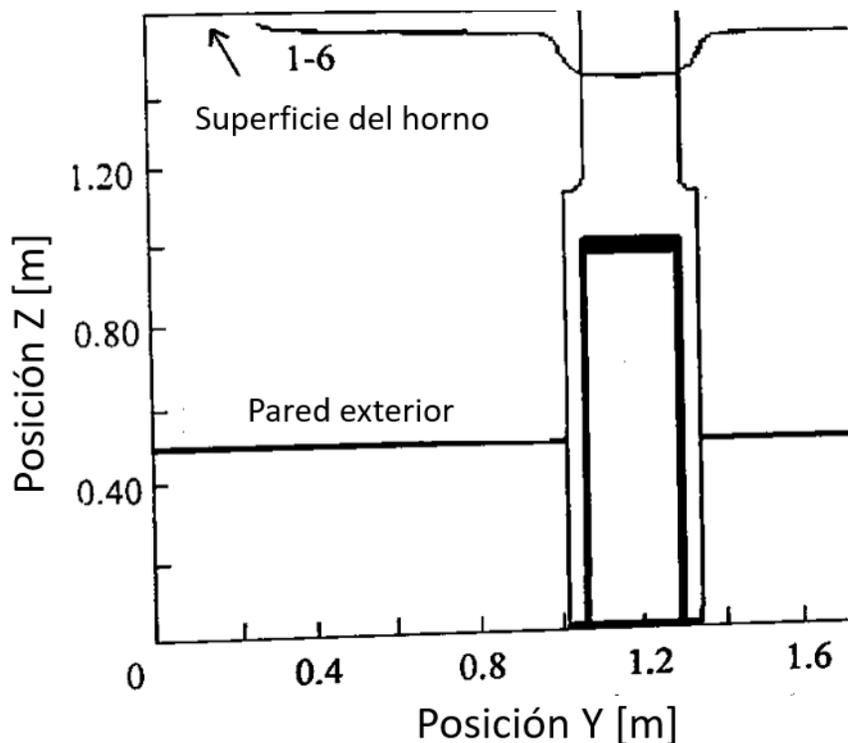


Figura 1.20. Posición calculada del frente de fusión después de 7 días de operación de un DC-EAF que opera con 80 MW y 120 kA. Los resultados corresponden a ánodos con enfriamiento interno. Tomado de (Castillejos y cols., 1998).

La superficie del piso, frontera B2, está sujeta a una temperatura conocida como condición de frontera. En este trabajo las propiedades térmicas de los materiales son dependientes de la temperatura, y se incluye a la ecuación de energía para contabilizar el transporte convectivo de energía. El horno estudiado opera con una intensidad de corriente de 120 kA y cuenta con tres ánodos instalados en el piso refractario. Debe mencionarse que el comportamiento fluidinámico del baño de metal líquido no fue estudiado, solamente se estudió un ánodo y la porción cilíndrica de material refractario que lo rodea.

El trabajo de Liu y cols. (2008) se divide en dos partes, en la primera se probaron tres modelos fluidinámicos para encontrar una concordancia entre los resultados numéricos y las mediciones experimentales de la última posición del frente de fusión en los ánodos después de su ciclo de operación. Estas simulaciones fueron implementadas en estado estable, sin tomar en cuenta el comportamiento térmico del material refractario circundante.

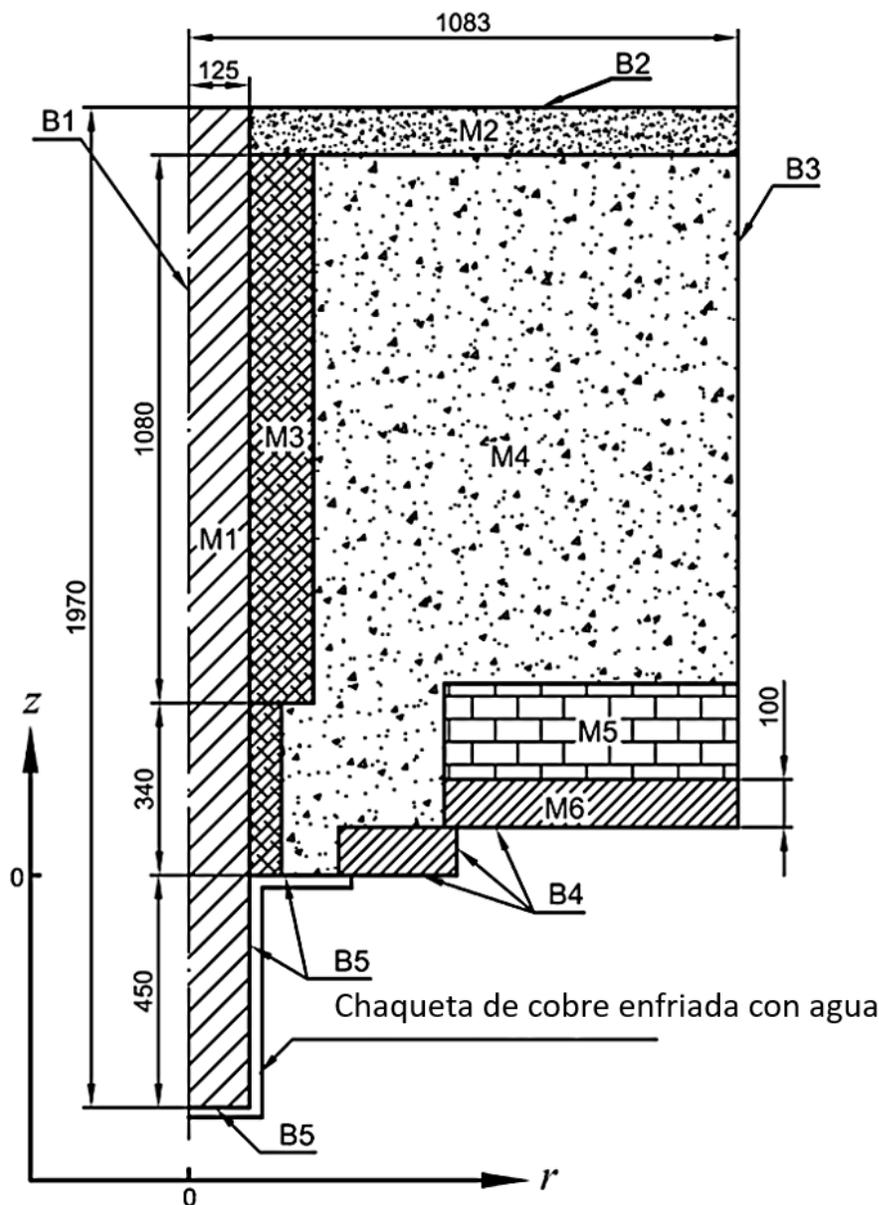


Figura 1.21. Dominio computacional axi-simétrico usado por Liu y cols. (2008): M1: Ánodo de acero, M2: Capa sinterizada de refractario, M3: Camisa refractaria, M4: Material granular apisonado, M5: Ladrillos refractarios y M6: Pared exterior de acero. B1: Eje de simetría, B2: frontera con temperatura conocida, B3: frontera adiabática, B4: Convección natural y B5: Convección forzada.

La **Figura 1.22** muestra una fotografía, colocada horizontalmente, de un ánodo tipo *billet* después de su ciclo de funcionamiento. Se indica el ángulo de expansión anódica, α , la superficie lateral del ánodo que se enfría con agua y la máxima penetración del frente de fusión, $Z_{liquidus}$. La **Figura 1.23** muestra las líneas de corriente de metal líquido dentro de la

cavidad anódica usando tres modelos fluidinámicos distintos: (a) convección termo-gravitacional (modelo A), (b) convección termo-gravitacional y fuerza de Lorentz (modelo B), (c) convección termo-gravitacional y componente axial de la fuerza de Lorentz (modelo C). La componente axial de la fuerza de Lorentz aparece cuando el ánodo se desgasta cónicamente durante su funcionamiento, este desgaste produce un ángulo de expansión anódica, α .

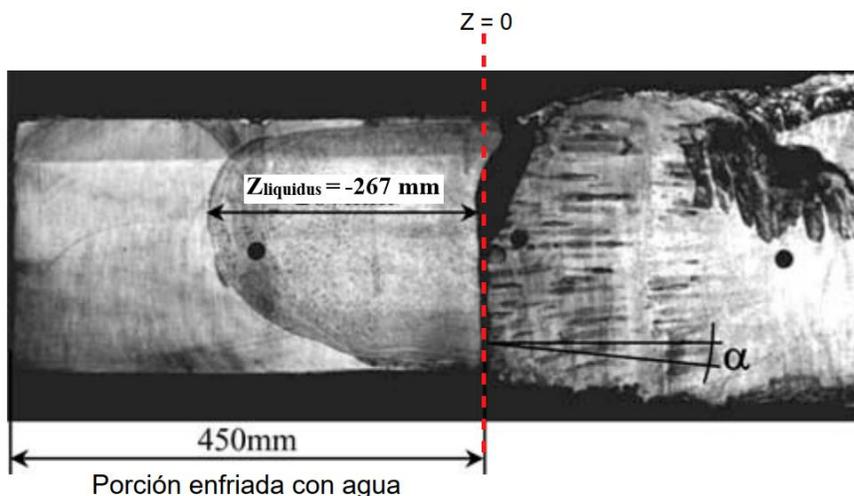


Figura 1.22. Fotografía de un ánodo tipo billet después de completar su ciclo de funcionamiento. El frente de fusión no es plano y penetró en el ánodo 267 mm por debajo donde inicia el enfriamiento de la superficie lateral del ánodo cilíndrico. Adaptada de Liu y cols. (2008).

De acuerdo con el autor, el modelo fluidinámico que mejor explicó la penetración del frente de fusión dentro de la cavidad anódica fue aquel que tomó en cuenta la componente axial de la fuerza electromagnética, ya que los respectivos resultados numéricos coinciden razonablemente con las observaciones en planta. La **Tabla 1.2** resume los principales resultados numéricos, obtenidos con los distintos modelos fluidinámicos. En el modelo C se usó un ángulo de expansión anódica $\alpha = 3^\circ$.

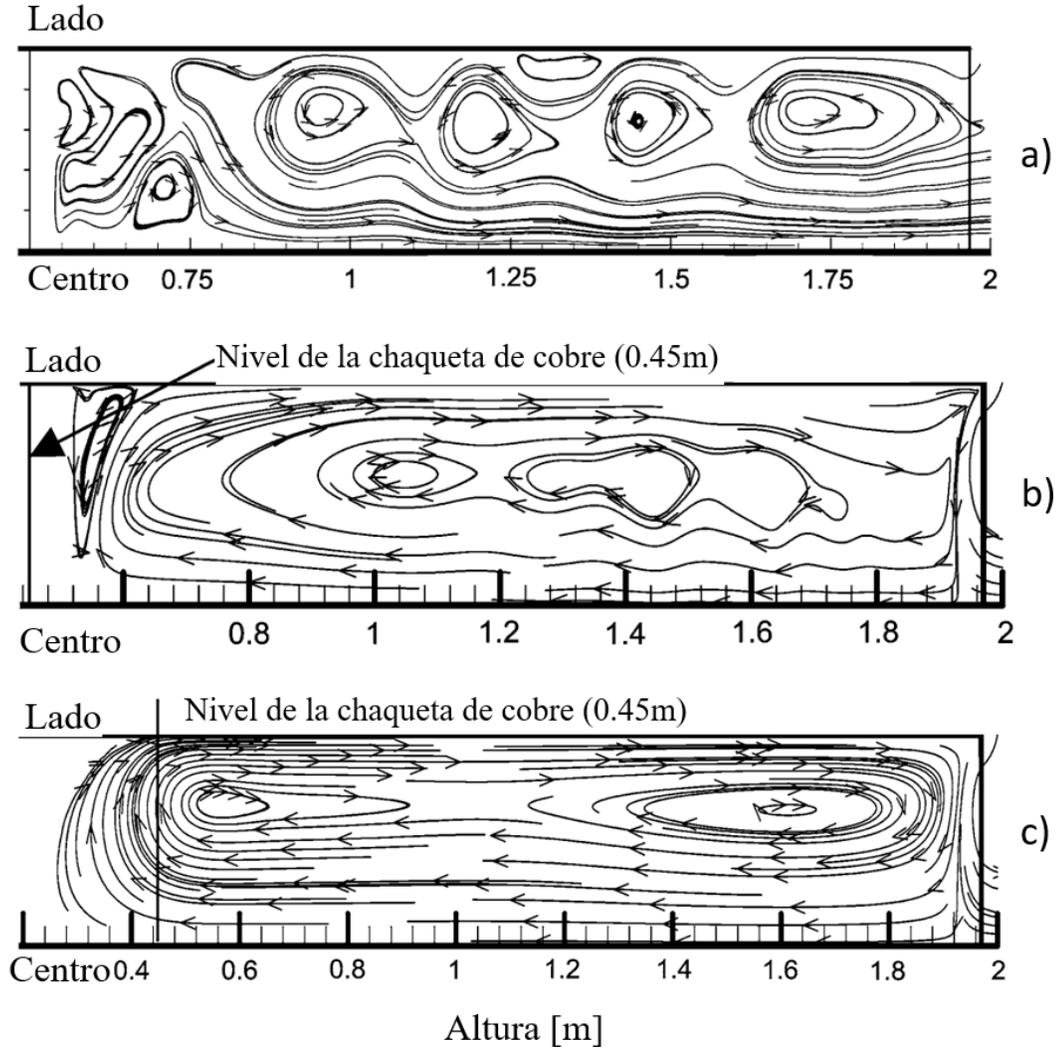


Figura 1.23. Líneas de corriente calculadas: (a) usando el modelo A, (b) usando el modelo B, (c) usando el modelo C. El ánodo se muestra horizontalmente. Adaptado de Liu y cols. (2008).

Tabla 1.2. Resultados numéricos de Liu y cols. (2008) obtenidos con distintos modelos fluidodinámicos. El valor observado fue de $Z_{liquidus} = -267$ mm (ver Figura 1.20).

Modelo	$Z_{liquidus}$ (mm)	T_{max} (K)	V_{max} (m/s)
Modelo A	89	1923	0.173
Modelo B	67	1920	0.652
Modelo C ($\alpha=3^\circ$)	-174.2	1903	0.659

La segunda etapa del trabajo de Liu y cols (2008) consistió en usar el modelo fluidinámico C ($\alpha = 3^\circ$) en una simulación en estado transitorio incluyendo todos los materiales del dominio computacional, con la finalidad de conocer el comportamiento del frente de fusión en función del tiempo. La **Figura 1.24** muestra el comportamiento del frente de fusión a distintos tiempos. Para un horno nuevo, el frente de fusión debería alcanzar la chaqueta de enfriamiento después de 85 ciclos de fusión y debería alcanzarse un equilibrio dinámico después de 100 ciclos de fusión (Liu, y otros, 2008).

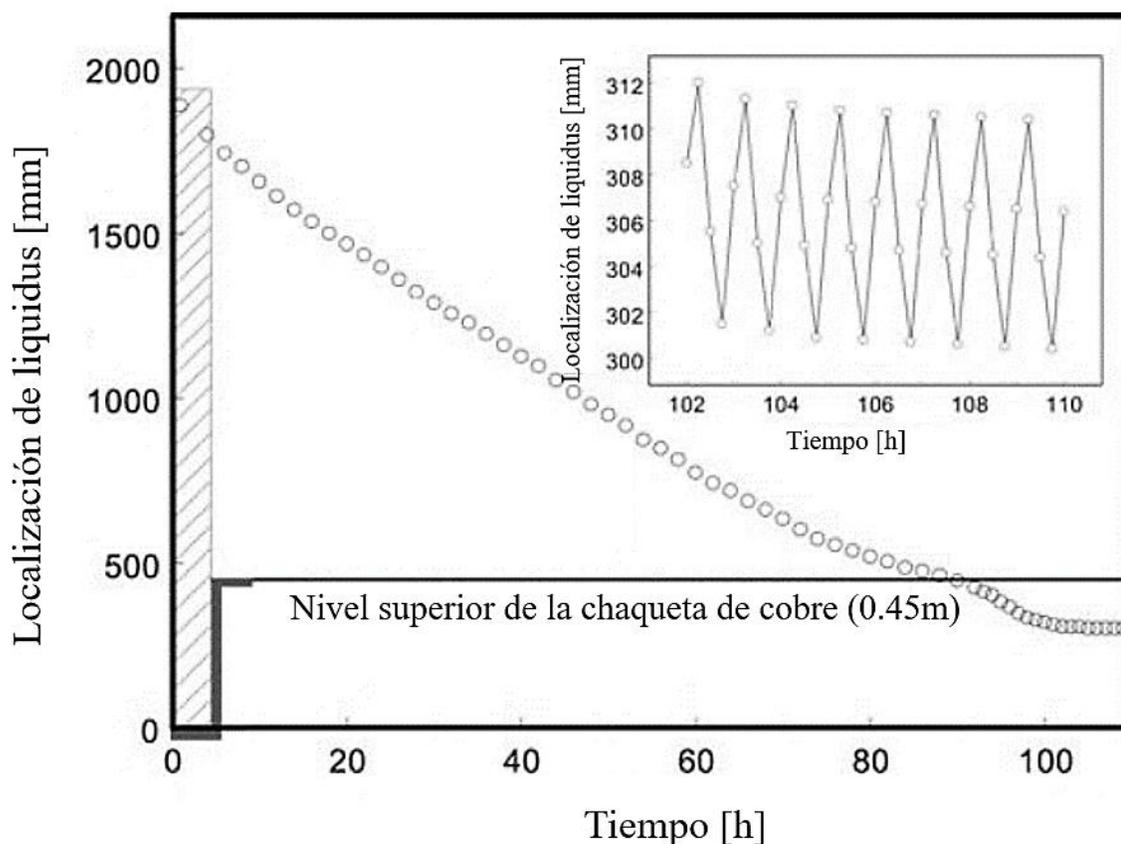


Figura 1.24. Evolución calculada de la posición del frente de fusión en función del tiempo. Adaptado de Liu y cols. (2008).

En otro trabajo, Moro y cols. (2017) presentaron una simulación numérica para analizar la durabilidad de un ánodo tipo *billet* de un DC-EAF. Este componente sufre cargas térmicas cíclicas, las cuales producen fusión parcial de la parte superior del ánodo, mientras que la parte inferior se mantiene a una temperatura casi constante, por medio de un sistema de

enfriamiento. El enfoque propuesto permite evaluar la vida útil de los ánodos por medio de una simulación termo-mecánica en condiciones de estado estable.

La **Figura 1.25(a)** muestra esquemáticamente el ánodo de acero y el sistema de enfriamiento con agua. Este componente está embebido en el piso refractario. El ánodo tiene contacto con el baño de metal líquido y se funde parcialmente durante la operación del horno. El sistema de enfriamiento es básicamente una chaqueta de cobre en cuyo interior fluye agua a alta velocidad. La **Figura 1.25(b)** muestra la chaqueta de cobre y el ánodo de acero en tres dimensiones. Debido a la axisimetría de sistema, el análisis puede llevarse a cabo a través de una simulación en dos dimensiones. La **Figura 1.25(c)** muestra el dominio computacional y las condiciones de frontera utilizadas. La evolución termo-mecánica calculada del proceso de calentamiento sigue la ruta mostrada en la **Figura 1.26** donde la densidad de flujo de calor suministrada al sistema varía cíclicamente de acuerdo con cada período de encendido o apagado del horno. La condición más crítica corresponde al apagado durante un mantenimiento prolongado. En dicho período, el ánodo se enfría y solidifica completamente. Tal ciclo de carga ocurre pocas veces en la vida útil del ánodo, pero un enfoque conservador requiere diseñar el componente bajo tal condición. En la simulación, el ánodo se calienta hasta alcanzar las temperaturas operativas y subsecuentemente se enfría a temperatura ambiente.

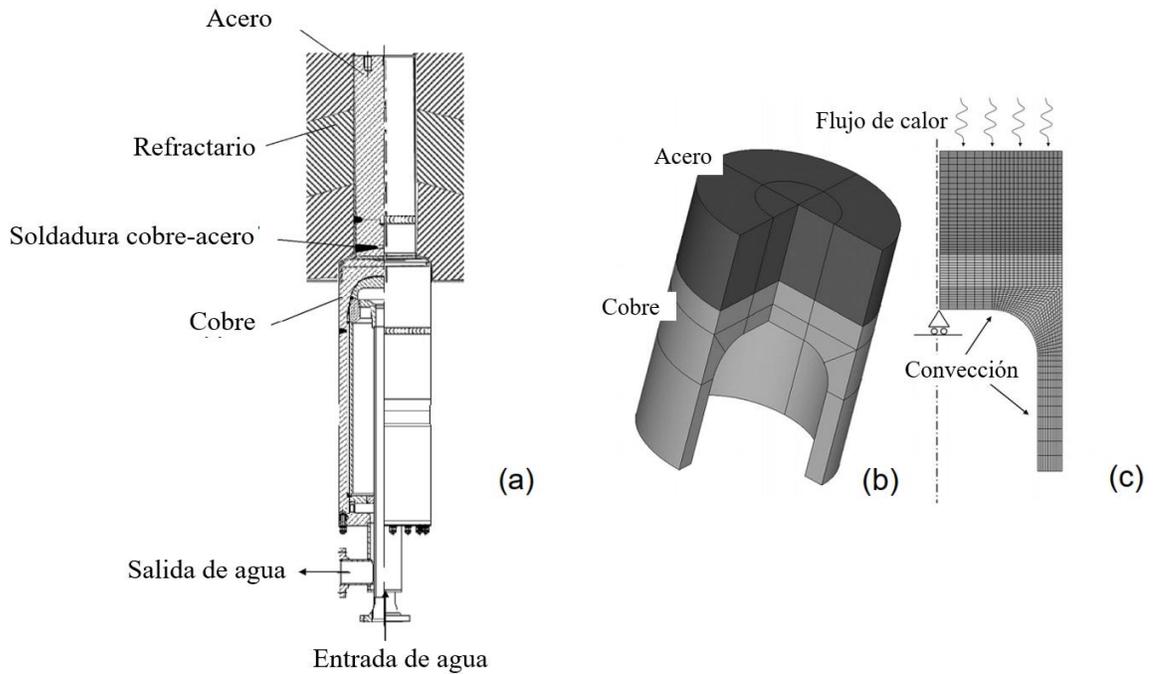


Figura 1.25. (a) Ánodo y sistema de enfriamiento, (b) chaqueta de cobre y componente de acero, (c) dominio computacional y condiciones a la frontera. (Moro, Benasciutti, & Bona, 2017)

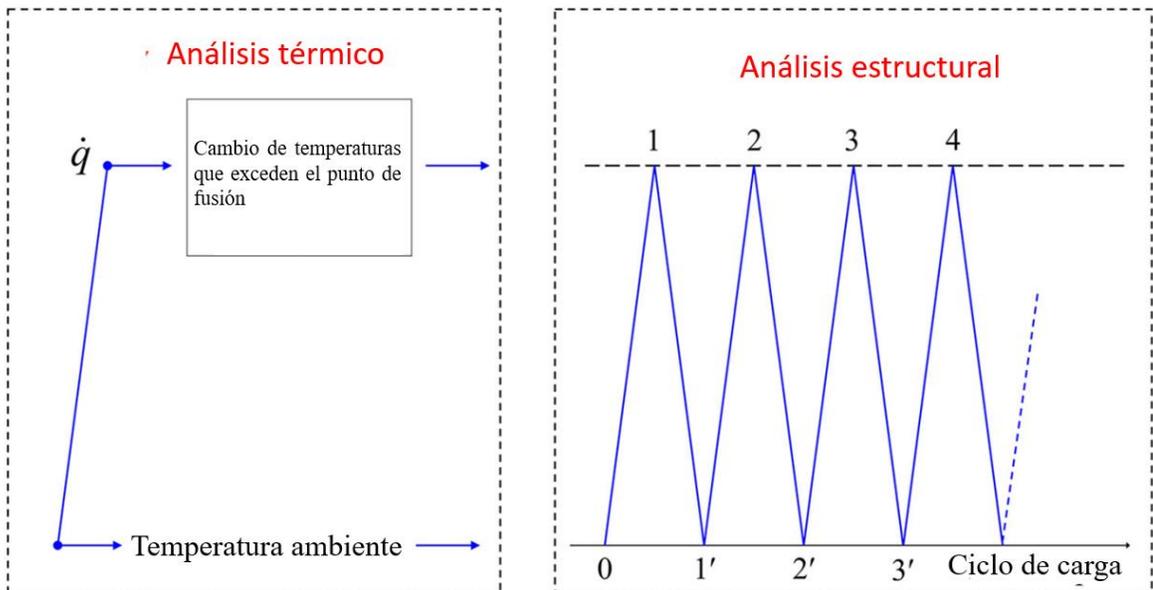


Figura 1.26. Ciclos esquemáticos de carga térmica usados en la simulación termo-mecánica. (Moro, Benasciutti, & Bona, 2017)

La **Figura 1.27(a)** muestra la distribución de esfuerzo equivalente de Von Mises, mientras que la **Figura 1.27(b)** muestra el esfuerzo equivalente de Von Mises a temperatura ambiente. Debido a los altos gradientes de temperatura, los esfuerzos relevantes ocurren durante el calentamiento cuando se alcanza el esfuerzo de cedencia del acero de la superficie interna de la chaqueta de cobre. Una vez que la densidad de flujo de calor se suprime y el componente se enfría, la distribución de la deformación plástica es no uniforme y se producen esfuerzos residuales en el componente, los cuales localmente exceden la resistencia a la cedencia de la chaqueta de cobre.

Todos los resultados confirmaron que, durante el calentamiento, la superficie interior de la chaqueta de cobre exhibe deformación positiva, debido a la acción del material que se calienta a su alrededor. El punto de cedencia ocurre con una deformación plástica relevante. Cuando la densidad de flujo de calor se suprime, surge un esfuerzo compresivo que produce cedencia en la parte redondeada de la chaqueta de cobre. De este modo, el material sufre una secuencia de cedencia en tensión y en compresión, dependiendo de la variación de temperatura.

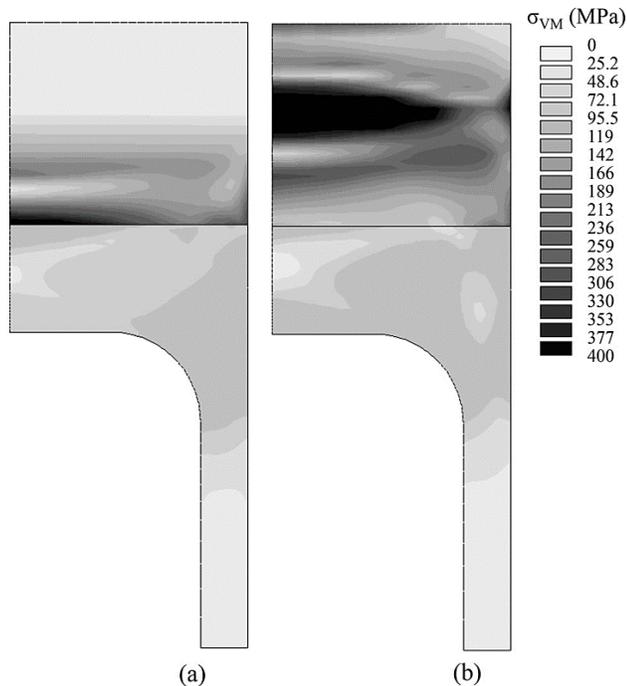


Figura 1.27. Esfuerzo equivalente de Von Mises calculado: (a) después del calentamiento, (b) después del enfriamiento a temperatura ambiente, (Moro, Benasciutti, & Bona, 2017).

2. Metodología

La primera etapa de este proyecto consistió en reproducir los resultados del trabajo de Liu y cols. (2008) por su afinidad con la temática de esta tesis. Aunque se introdujeron algunos datos supuestos (ya que no se contó con información detallada sobre todos los parámetros de la simulación), fue posible obtener resultados numéricos bastante similares a los reportados en dicho estudio. Se distinguen dos simulaciones termo-fluidinámicas. En una de ellas solamente se contempló el efecto de la convección termo-gravitacional y en la otra, se contempló la convección termo-gravitacional y la fuerza de Lorentz. Se presenta más información en la sección 1.4.2. Los detalles de la formulación de estos modelos y los resultados numéricos obtenidos en este trabajo de tesis se presentan en el apéndice A y B.

Los resultados generados en la presente tesis corresponden a un horno con especificaciones típicas. Con base en lo anterior se definen las dimensiones del dominio de cálculo y las propiedades termo-físicas de los materiales usados en este trabajo. Todas las simulaciones se desarrollaron en condiciones de estado estable.

La metodología para generar los resultados de esta tesis se presenta de forma resumida en la **Figura 2.1**. La parte medular de este trabajo consistió en desarrollar simulaciones termo-fluidinámicas para conocer el movimiento y temperatura del metal líquido dentro de la cavidad anódica y determinar su efecto sobre el campo de temperatura en el material refractario. A diferencia del estudio de Liu y cols (2008), en este trabajo si se toma en cuenta la turbulencia que puede existir en el ánodo debida a los distintos fenómenos de transporte en las cercanías del ánodo y en el mismo ánodo.

Se hace una distinción clara de las simulaciones desarrolladas en este trabajo. Una de las simulaciones corresponde al caso en que el ánodo es cilíndrico, ya que no se toma en cuenta la erosión o el desgaste del material refractario, esta simulación es denominada ALFA. En esta simulación solo existe la componente radial de la fuerza electromagnética por lo que no produce movimiento del líquido en dirección z (ver sección 1.3.9). La otra simulación corresponde al caso en que el ánodo tiene forma cónica, emulando el desgaste que sufre el material refractario después de un determinado número de ciclos de operación, esta simulación es denominada BETA. En la simulación BETA se usaron ambas componentes de la fuerza de Lorentz, radial y axial.

Los resultados de la simulación ALFA y BETA permitieron sugerir nuevas condiciones de estudio numérico, representadas por las simulaciones G1, G2, G3 y G4. Estas simulaciones termo-fluidinámicas están enfocados a conocer el efecto que tienen distintos diseños de ánodo en el campo de temperatura del piso refractario en condiciones extremas de operación.

Las simulaciones termo-mecánicas emplean el mismo dominio computacional que la simulación ALFA. El campo de temperatura corresponde al calculado con el modelo termo-fluidodinámico ALFA. Se realizaron simulaciones termo-mecánicas en las cuales se variaron las propiedades mecánicas de los materiales refractarios para conocer qué materiales podrían resistir los esfuerzos térmicos bajo condiciones extremas de operación. Estas simulaciones se denominaron TM-A, TM-B, TM-C y TM-D.

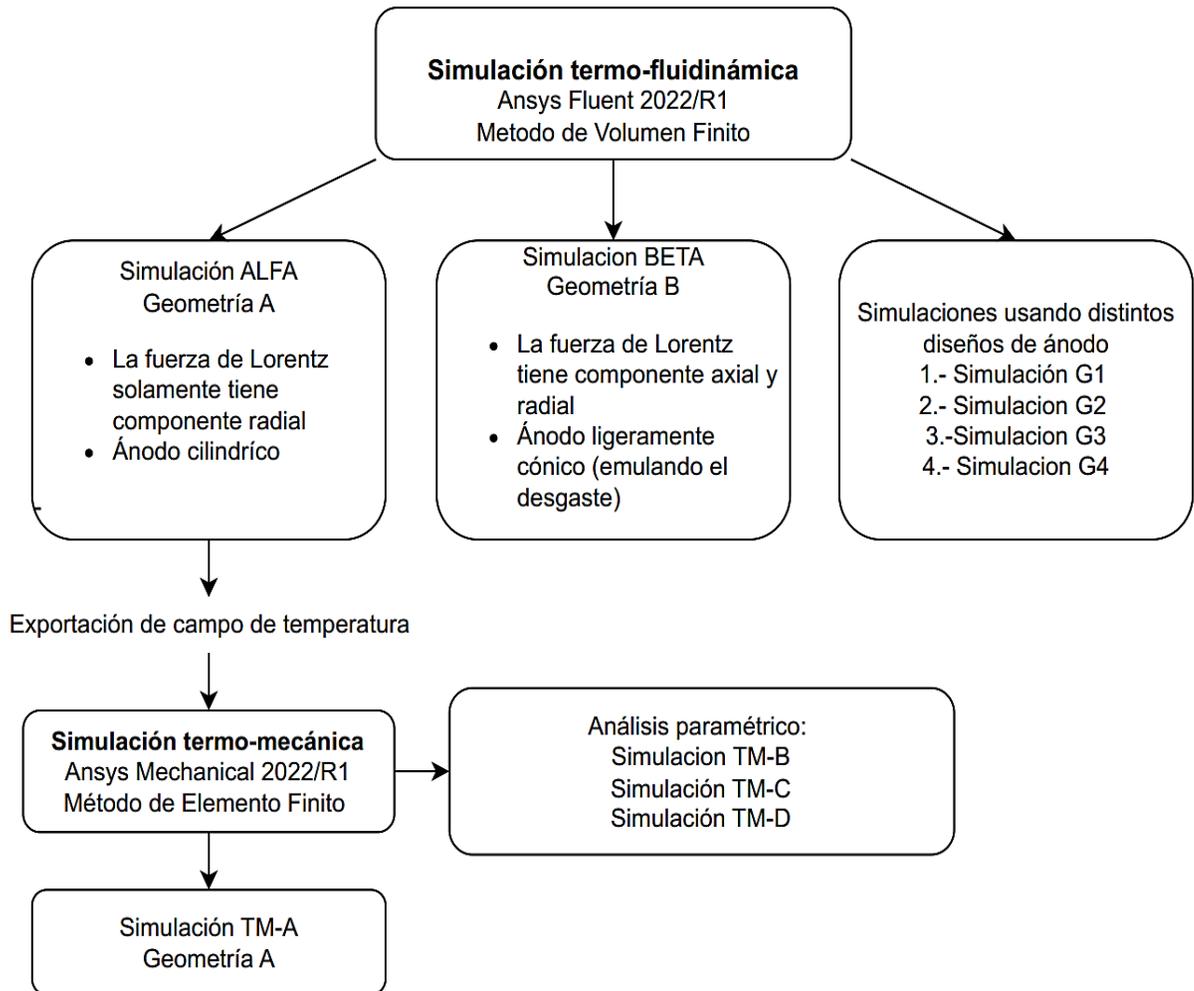


Figura 2.1. Representación sinóptica de la metodología de trabajo

2.1 Dominio computacional

El horno considerado en este estudio es similar a los fabricados por la compañía Danieli (Pavlicevic & Gensini, 1996), con una capacidad de 200 toneladas y con cuatro ánodos tipo *billet* embebidos en el fondo del piso refractario.

La **Figura 2.2** muestra un ánodo tipo *billet* que en su parte superior recibe un flujo de calor Q proveniente del baño de metal líquido en la cuba del horno. La fusión total del ánodo se evita gracias al sistema de enfriamiento con agua: una chaqueta de cobre soldada a la parte inferior del ánodo de acero. El agua sube hasta alcanzar el “nivel del agua de enfriamiento” indicado en la figura y desciende para refrigerar también las paredes laterales de la chaqueta. La figura indica tres posiciones del frente de fusión bajo diferentes condiciones: operación estándar, operación de refinación y operación extrema. Una termo-resistencia instalada en el refractario permite monitorear la temperatura durante la operación e inferir la posición del frente de fusión.

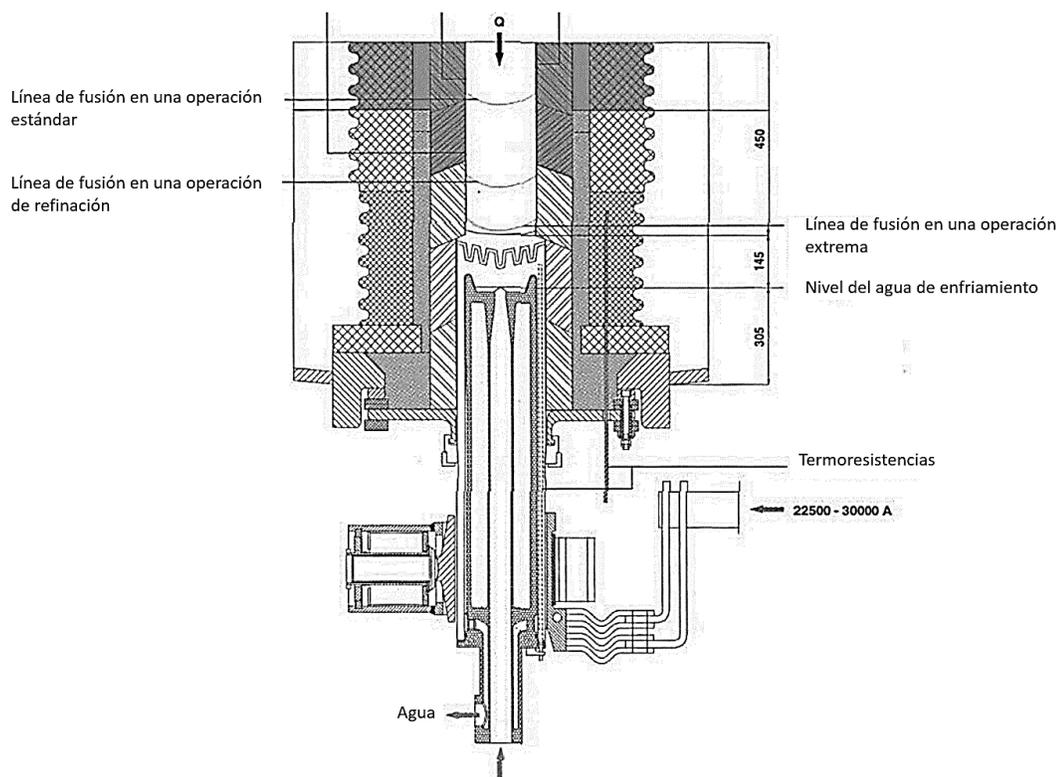


Figura 2.2. Representación esquemática de un ánodo tipo *billet* con sistema de enfriamiento interno. Dimensiones en mm. (Pavlicevic & Gensini, 1996)

La **Figura 2.3** muestra esquemáticamente una vista aérea del piso del horno, en la cual se visualiza la posición equidistante entre los ánodos. Esta simetría permite simplificar el modelo. Sólo es necesario estudiar un solo ánodo y el material refractario circundante para conocer el campo de temperatura y el comportamiento termo-fluidinámico.

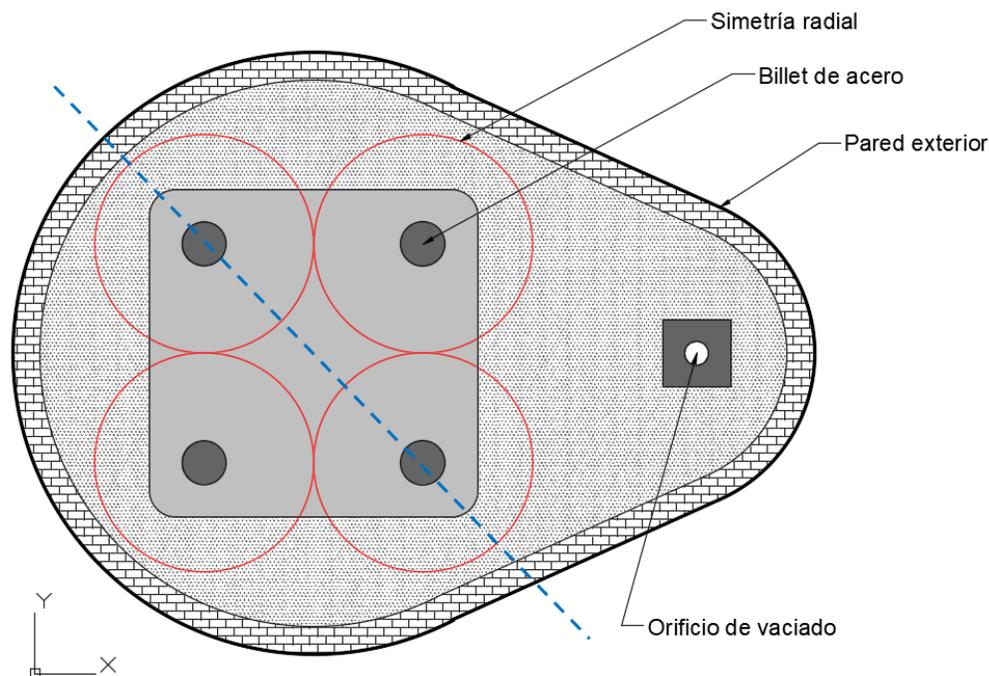


Figura 2.3. Vista superior de un DC-EAF con cuatro ánodos instalados en el piso refractario. La línea de color rojo representa una superficie adiabática.

Si realizamos un corte transversal sobre la línea discontinua de color azul, podríamos ver la disposición del ánodo de acero, la chaqueta de cobre y las mangas refractarias dentro del piso refractario (esto puede observarse en la **Figura 2.3**). Entonces, el sistema bajo estudio es una porción cilíndrica que contiene un ánodo y el material refractario que lo rodea. Sin embargo, aún puede realizarse otra simplificación del modelo, ya que es válido asumir que la superficie lateral de este cilindro es una frontera adiabática (representada por círculos rojos en la **Figura 2.3**). Como consecuencia, podemos prescindir de un modelo en tres dimensiones y usar un modelo en dos dimensiones en coordenadas, r y z ; si tomamos en cuenta que la variación de cualquier variable (temperatura, velocidad, etc.) es independiente de la coordenada angular.

La **Figura 2.4** muestra la región de estudio de este trabajo de tesis, la cual es modelada computacionalmente en coordenadas axisimétricas. Esta región incluye un ánodo de acero, la chaqueta de cobre, la pared exterior del horno, las mangas y el material refractario apisonado.

La **Figura 2.5** muestra el dominio computacional en coordenadas axisimétricas de la simulación ALFA. Distintos materiales refractarios constituyen el sistema y son clasificados principalmente en dos tipos: material refractario granulado apisonado y ladrillos refractarios. Los materiales M3, M4 y M5 son ladrillos refractarios y el material M6 es un material refractario apisonable (granulado). El material M2 es la chaqueta de cobre, M1 es el ánodo de acero y el material M7 es la pared exterior del horno (acero).

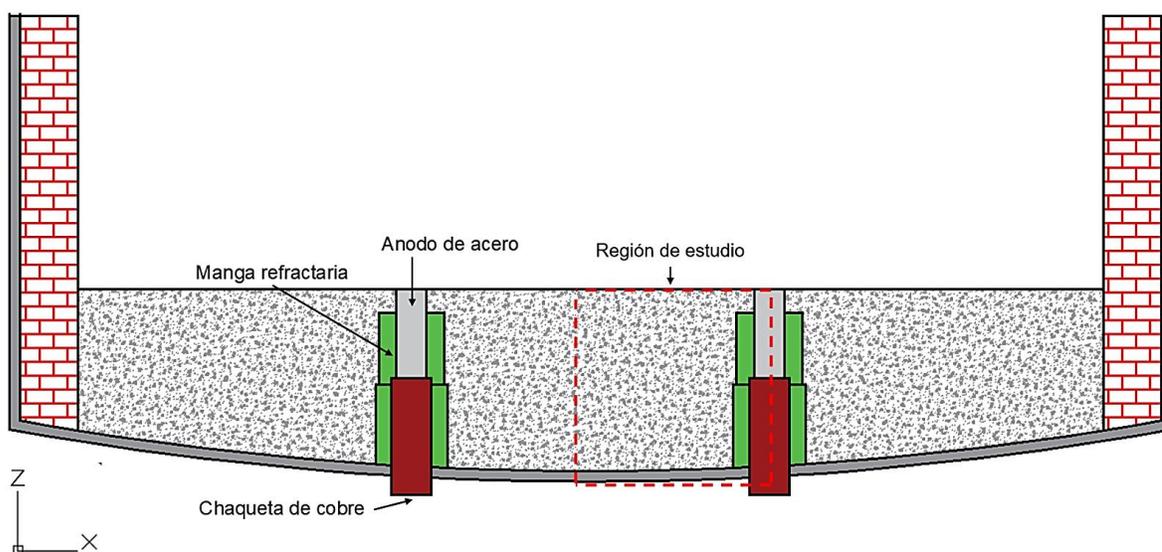


Figura 2.4. Piso refractario y región axisimétrica considerada en este trabajo.

La **Figura 2.6** muestra el dominio computacional de la simulación BETA. La única diferencia respecto al dominio computacional de la simulación ALFA radica en la forma cónica del ánodo. A diferencia de las simulaciones de Liu y cols. (2008), en la simulación BETA si se toma en cuenta la geometría cónica del ánodo deteriorado y se usa una sencilla expresión que relaciona el radio anódico con su altura para calcular los términos fuente de generación de calor y generación de momentum. Se usó un ángulo de expansión anódica igual a 1° (en vez de 3°).

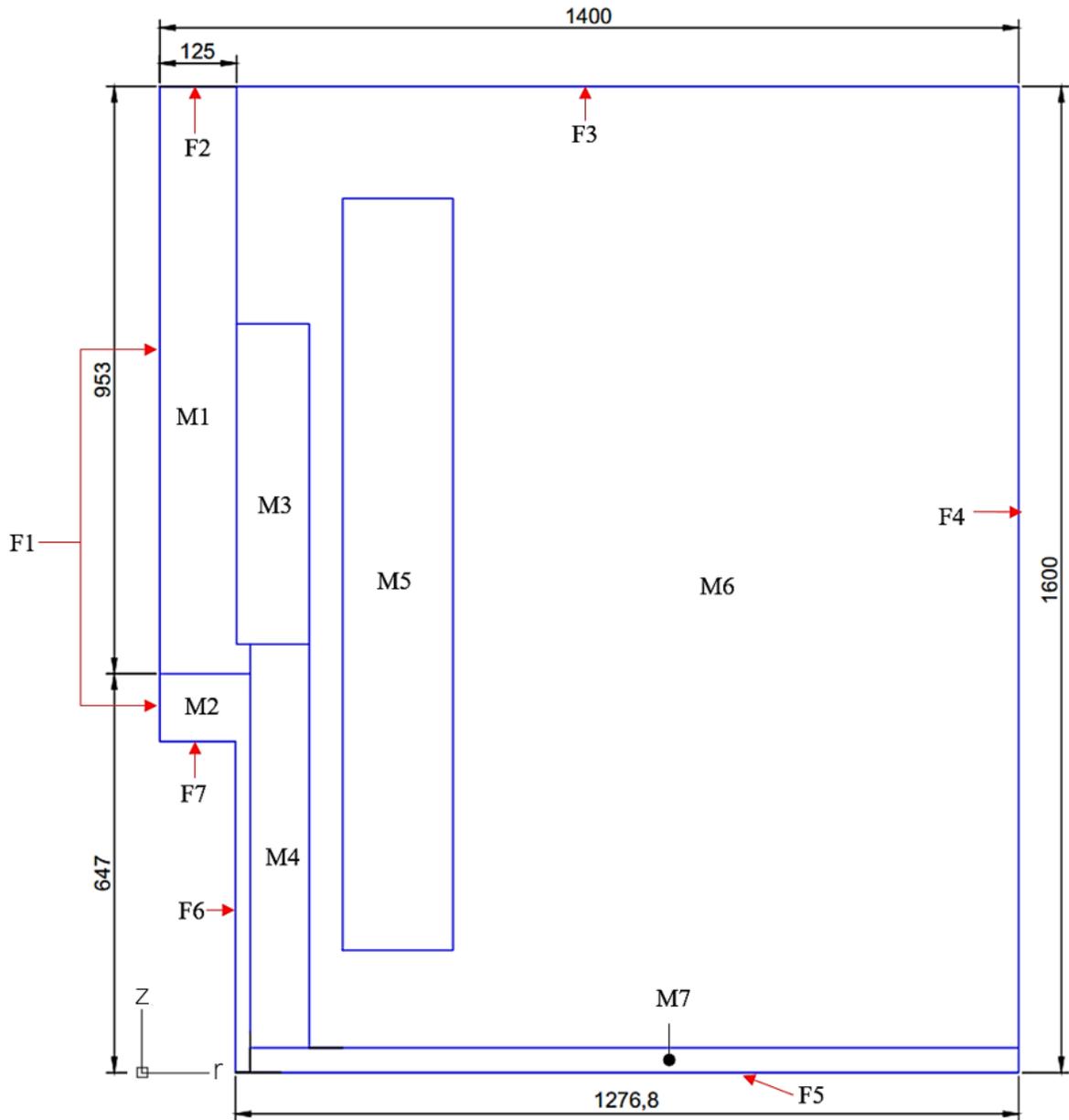


Figura 2.5. Representación del dominio computacional y superficies de frontera, F1 a F7, usados en la simulación ALFA. M1: ánodo de acero, M2: chaqueta de cobre, M3: Ladrillo refractario MgO-C, M4 y M5: ladrillos refractarios MgO-Cr₂O₃, M6: Material refractario granulado MgO, M7: Pared exterior de acero. Dimensiones en mm.

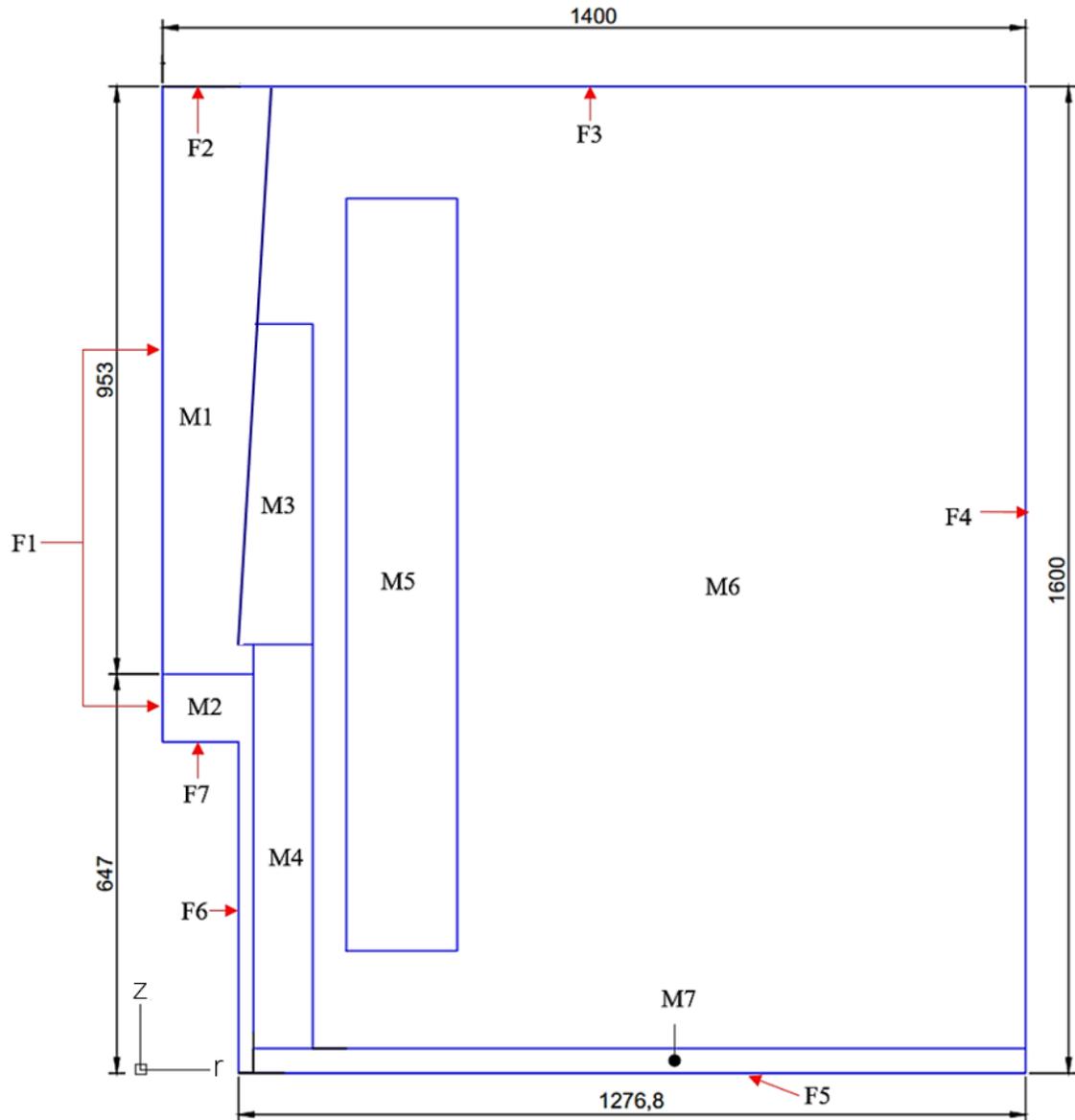


Figura 2.6. Dominio computacional y superficies de frontera, F1 a F7, usados en la simulación BETA. M1: ánodo de acero, M2: chaqueta de cobre, M3: Ladrillo refractario MgO-C, M4 y M5: ladrillos refractarios MgO-Cr₂O₃, M6: Material refractario granulado MgO, M7: Pared exterior de acero. Dimensiones en mm.

2.2 Consideraciones o simplificaciones

Simulaciones termo-fluidinámicas:

1. *Condición de estado estable.* Esta condición considera que el resultado no depende del tiempo y corresponde a una condición extrema de calentamiento del horno que podría alcanzarse después de un tiempo muy prolongado de tratamiento del metal.
2. *Temperatura del acero en la cuba del horno.* El ánodo está fabricado con acero de bajo carbono. En este trabajo de tesis se escogió un acero AISI 1015. La temperatura de liquidus del acero AISI 1015 es 1793 K, pero es necesario un sobrecalentamiento de 50-100K antes de ser vaciado. Por esta razón, en el piso refractario se impuso una temperatura constante de 1833 K (frontera F2). Se asume que la temperatura del baño líquido es homogénea durante todo el proceso de fusión, así también es posible imponer un valor de temperatura constante para el *backflow* (flujo de recirculación) en la frontera F2. Ver **Figuras 2.5 y 2.6**.
3. *La pared exterior del horno es una frontera de convección natural,* (frontera F5). En aire estático el valor del coeficiente de transferencia está entre $5-25 W/m^2K$. Es importante aclarar que, en este trabajo de tesis no se toma en cuenta el mecanismo de radiación en la pared exterior del horno con el objetivo de simplificar el modelo.
4. *Sistema de enfriamiento con agua.* El conducto de circulación de agua es un espacio anular entre la chaqueta de cobre y un componente cilíndrico de acero que se aprecia en la **Figura 2.2**. Este espaciado anular es de 4 mm en la pared lateral, superficie F6, de la chaqueta de cobre. En la parte superior, superficie F7, se forma un espaciado de 2.5 mm. En estos espacios fluye el agua de enfriamiento a alta velocidad. Dado que la velocidad es más alta en la parte superior de la chaqueta de cobre que en la pared cilíndrica lateral, se estimaron dos coeficientes de transferencia de calor distintos para las superficies F6 y F7. El flujo volumétrico de agua de enfriamiento es de $40 m^3/h$. Con este dato y las estimaciones del espacio entre la chaqueta de cobre y el componente cilíndrico de acero (sistema de tuberías), se calculó la velocidad de agua a través de cada espacio anular, y posteriormente, se calcularon dos coeficientes de transferencia de calor a través de la correlación de Dittus y Boelter (Hortelano, Gallegos, & Belman, 2013).

5. *Las dimensiones del ánodo tipo billet* y los componentes del piso refractario corresponden a un horno de arco eléctrico de ~200 toneladas. Este horno opera con 80 kA en total y posee cuatro ánodos de piso, lo que equivale a 20 kA por cada ánodo. Los parámetros geométricos principales son: diámetro de baño de metal líquido (8.5 m), profundidad del baño de metal líquido (0.8 m), diámetro de los ánodos (250 mm).
6. *Contacto perfecto*. Se considera que el contacto entre los distintos materiales es perfecto, es decir no hay espacios de aire entre ellos. Así que el único mecanismo de transferencia de calor en el piso refractario es la conducción.
7. *Contemplación de turbulencia*. A diferencia del estudio de Liu y cols (2008), en este trabajo si se toma en cuenta la influencia de la turbulencia en los mecanismos de transferencia de calor. El modelo de turbulencia elegido es adecuado para flujo incompresible en los que se espera una transición de flujo laminar a turbulento en las regiones cercanas a las paredes de las mangas refractarias.

Simulación termo-mecánica:

1. Las fronteras F1 y F4 son posiciones de simetría. Este tipo de frontera se trata como soporte libre de fricción. Existe deformación en la dirección axial pero no en la dirección radial.
2. Las superficies F6 y F7 se definieron como soportes fijos, porque se espera poca expansión térmica en esta zona. Además, la expansión térmica de la chaqueta de cobre está parcialmente restringida por el sistema interno de tuberías a una temperatura casi constante.
3. Todos los contactos entre los materiales del sistema se definieron como *Contactos de No-separación*, excepto el contacto entre la chaqueta de cobre y el ánodo (éste se trató como *contacto unido*, porque estos materiales están soldados). El contacto de no separación permite el deslizamiento entre los materiales, pero restringe la separación normal entre ellos. Esta configuración es adecuada porque no se espera alguna separación entre los materiales durante la operación del horno. El piso tiene material granulado que impide o minimiza la aparición de espacios entre los distintos materiales refractarios cuando se expanden o contraen térmicamente.

4. Los esfuerzos térmicos calculados a través de la simulación termo-mecánica podrían ser sobreestimados, porque se considera que los materiales tienen contacto perfecto. Sin embargo, en este trabajo se prioriza la importancia de conocer la distribución del campo de esfuerzos y deformaciones en los materiales, bajo una condición extrema e idealizada de contacto perfecto.

2.3 Ecuaciones diferenciales gobernantes

En esta sección se presentan las ecuaciones diferenciales gobernantes de continuidad, momentum y energía en notación vectorial; las cuales gobiernan los fenómenos de transporte asociados con el caso de estudio. Es importante enfatizar que las simulaciones implementadas en este trabajo de tesis son en estado estacionario y en coordenadas axisimétricas (r, z). En el Apéndice C se presentan las ecuaciones gobernantes en coordenadas axisimétricas.

El modelo matemático que rige el comportamiento térmico-fluidodinámico del ánodo de acero es construido acoplando las ecuaciones de continuidad, momentum, turbulencia y energía. Se toma en cuenta la fuerza electromagnética de Lorentz, la convección termo-gravitacional, la generación de calor dentro del ánodo por la acción de efecto Joule, y el cambio de fase sólido-líquido.

El modelo matemático para problemas de elasticidad axisimétrica se construye usando las ecuaciones de desplazamiento-deformación, las ecuaciones diferenciales de equilibrio y las ecuaciones constitutivas del material, sujetas a condiciones de frontera de esfuerzo y desplazamiento (Stasa, 2000).

2.3.1 Modelo matemático termo-fluidinámico

2.3.1.1 Ecuación de continuidad

En su forma general, la ecuación de continuidad se puede expresar como,

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.1)$$

Donde ρ es la densidad de la cantidad conservada (masa), \mathbf{v} es el vector de velocidad y ∇ es el operador nabra (Moukalled, Mangani, & Darwish, 2016).

2.3.1.2 Ecuación de momentum para flujo turbulento

La ecuación de momentum para un flujo turbulento puede escribirse en su forma general como:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}\mathbf{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}) + \rho \vec{g} + \vec{F} + \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} + S \quad (2.2)$$

donde ρ es la densidad del fluido, \mathbf{v} es el vector de velocidad, p es la presión del fluido, S es un término fuente o sumidero de momentum, \vec{g} es la aceleración de la gravedad, ρ es la densidad y \vec{F} son las fuerzas de volumen externas (como la agitación generada por campos electromagnéticos). $\boldsymbol{\tau}$ es el tensor de esfuerzos debido a la viscosidad molecular y está definido por,

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \left[(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I} \right] \quad (2.3)$$

donde μ es la viscosidad molecular, \mathbf{I} es el tensor unitario, y el segundo término de la derecha es el efecto de la dilatación volumétrica (Versteeg & Malalasekera, 2007). $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ es un término adicional que representa los efectos de la turbulencia en el fluido, y es denominado tensor de esfuerzos de Reynolds:

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \mu_t (\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^T) - \frac{2}{3} [\rho k + \mu_t (\nabla \cdot \vec{v})] \mathbf{I} \quad (2.4)$$

donde μ_t es la viscosidad turbulenta, k es la energía cinética turbulenta, ρ es la densidad del fluido, $\nabla \mathbf{v}$ es el tensor gradiente de velocidad, $\nabla \mathbf{v}^T$ es la transpuesta del tensor gradiente de velocidad, $\nabla \cdot \mathbf{v}$ es la divergencia del campo de velocidad (Moukalled, Mangani, & Darwish, 2016). μ_t se calcula a partir de los valores de la energía cinética turbulenta k y la tasa de disipación de turbulencia ω .

Modelo de turbulencia

En estas simulaciones se usó el modelo de turbulencia SST de Transición (también conocido como modelo $\gamma - Re_\theta$ o modelo de turbulencia de cuatro ecuaciones) está basado en el acoplamiento de las ecuaciones de transporte SST $k-\omega$ con otras dos ecuaciones, una para la intermitencia y otra para el criterio de inicio de transición, en términos del número de Reynolds de momentum-espesor. Es usado en dinámica de fluidos computacional para

modificar las ecuaciones de transporte turbulento para simular flujo laminar, de transición y turbulento (Rogowski, Krolak, & Bangga, 2021). Se ha elegido este modelo de turbulencia porque se espera que la agitación por efecto electromagnético sea amortiguada en algún grado por las paredes de la cavidad anódica.

El modelo de turbulencia SST $k-\omega$ combina elementos de los modelos $k-\omega$ y $k-\varepsilon$ para mejorar la predicción del comportamiento del fluido en las regiones cercanas a una pared y en regiones alejadas de ésta. El modelo de turbulencia $k-\varepsilon$ tiene una limitada precisión para calcular características complejas de flujo cerca de las paredes. El acrónimo SST hace referencia a que se toma en cuenta el transporte del esfuerzo cortante de turbulencia en la definición de la viscosidad turbulenta, con esto se evita la sobreestimación del esfuerzo cortante en las paredes (Karim, Rahman, & Alim, 2011).

Las ecuaciones de transporte de modelo de turbulencia SST $k-\omega$ se presentan en notación tensorial:

Energía cinética de turbulencia k

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_k \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + G_k - Y_k + S_k + G_b \quad (2.5)$$

Tasa específica de disipación ω

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \omega u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) + G_\omega - Y_\omega + S_\omega + G_{\omega b} \quad (2.6)$$

donde u_i representa las componentes del vector velocidad y es x_i las coordenadas espaciales (r y z), G_k representa la generación de energía cinética turbulenta debido a los gradientes de velocidad promedio. G_ω representa la generación de ω . Γ_k y Γ_ω representan la difusividad efectiva de k y ω , respectivamente. Y_k y Y_ω representan la disipación de k y ω debido a la turbulencia. S_k y S_ω son términos fuentes definidos por el usuario. G_b y $G_{\omega b}$ toman en cuenta los términos de flotabilidad (Moukalled, Mangani, & Darwish, 2016).

El modelo de Transición introduce la intermitencia γ y el número Reynolds de momentum-espesor $R\tilde{e}_{\theta t}$.

La intermitencia γ es una magnitud escalar que varía de 0 a 1, indicando la fracción de flujo que es turbulento. Cerca de la pared, donde el flujo es laminar, γ es cercano a 0, y a medida que el flujo se torna turbulento, γ incrementa hacia 1.

La ecuación de transporte para la intermitencia γ se define como,

$$\frac{\partial(\rho U_j \gamma)}{\partial x_j} = P_{\gamma 1} - E_{\gamma 1} + P_{\gamma 2} - E_{\gamma 2} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\gamma} \right) \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} \right] \quad (2.7)$$

Donde U_j son las componentes de la velocidad de flujo libre, $P_{\gamma 1}$ y $E_{\gamma 1}$ son términos fuente de transición, $P_{\gamma 2}$ y $E_{\gamma 2}$ son términos fuente de destrucción/relaminarización del flujo. σ_γ es el número de Prandtl para la intermitencia (Moukalled, Mangani, & Darwish, 2016).

El número Reynolds de momentum-espesor $R\tilde{e}_{\theta t}$ es un parámetro crucial en el análisis de la capa límite. Particularmente en la predicción del inicio de la transición de la capa límite de flujo laminar a turbulento.

La ecuación de transporte para el número Reynolds de momentum-espesor $R\tilde{e}_{\theta t}$ es

$$\frac{\partial(\rho U_j R\tilde{e}_{\theta t})}{\partial x_j} = P_{\theta t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sigma_{\theta t} (\mu + \mu_t) \frac{\partial R\tilde{e}_{\theta t}}{\partial x_j} \right] \quad (2.8)$$

donde $P_{\theta t}$ es un término fuente y $\sigma_{\theta t}$ es el número de Prandtl de $R\tilde{e}_{\theta t}$.

El modelo de transición interactúa con el modelo SST k- ω modificando la ecuación k como sigue,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_k \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + G_k^* - Y_k^* + S_k \quad (2.9)$$

$$G_k^* = \gamma_{eff} G_k \quad (2.10)$$

$$Y_k^* = \min(\max(\gamma_{eff}, 0.1), 1.0) Y_k \quad (2.11)$$

donde G_k y Y_k son los términos originales de producción y destrucción del modelo SST (ecuación 2.5). La Ecuación (2.6) no es modificada. γ_{eff} es una función de la intermitencia y el número Reynolds de momentum-espesor $R\tilde{e}_{\theta t}$.

Fuerzas de volumen \vec{F} :

En este trabajo se contempla la fuerza de Lorentz y la fuerza de volumen gravitacional, la primera actúa en dirección radial y axial; y la segunda en dirección axial z . Ansys Fluent 2022/R1 calcula la fuerza de volumen gravitacional a través de la siguiente ecuación,

$$F_z = g(\rho - \rho_0) \quad (2.12)$$

donde g es la aceleración del campo gravitacional, ρ_0 es una densidad de referencia. Esta densidad de referencia es calculada promediando los valores de densidad de todas las celdas (la finalidad es contabilizar únicamente las fluctuaciones de densidad en el fluido, que son las que dan origen a la fuerza boyante) o puede ser definida por el usuario; y ρ es la densidad en función de la temperatura (Tu, Yeoh, & Liu, 2018).

En la simulación ALFA el ánodo no tiene conicidad, así la fuerza de Lorentz solo actúa en dirección radial y es expresada por la siguiente ecuación,

$$F_r = \left(\frac{\mu_0 I^2 r}{2\pi^2 R^4} \right) \quad (2.13)$$

siendo μ_0 una constante llamada permeabilidad magnética del espacio libre ($= 4\pi \times 10^{-7} T \cdot m/A$), I es la intensidad de corriente eléctrica, en Amperes; y R es el radio del ánodo, en metros.

En la simulación BETA se activa la componente axial de la fuerza de Lorentz porque el ánodo presenta conicidad, debido al desgaste del material refractario circundante. La fuerza de Lorentz en este caso se calcula a través de dos ecuaciones,

$$F_r = \left(\frac{\mu_0 I^2 r}{2\pi^2 R^4} \right) \cos(n \alpha), \quad F_z = \left(\frac{\mu_0 I^2 r}{2\pi^2 R^4} \right) \sin(n \alpha) \quad (2.14)$$

donde α es el ángulo de expansión del agujero del ánodo, y n es una posición adimensional que varía linealmente de 0 a 1 a medida que un punto considerado se desplaza desde el centro hacia los lados del ánodo. Está definido como el cociente de la coordenada radial y el radio del ánodo R (la deducción de estas ecuaciones se presenta en detalle en la sección 1.3.9).

En la simulación BETA se toma en cuenta el cambio geométrico del ánodo cuando es erosionado por los electrovórtices dentro del baño metálico. En este trabajo se asume que el ánodo adquiere una forma ligeramente cónica, con un ángulo de expansión de 1° . La relación entre el radio y la altura del ánodo se calculó a través de la siguiente ecuación,

$$R = 0.125 + 0.01745 * (z - 0.690) \quad (2.15)$$

Esta expresión se sustituyó en la Ecuación (2.14), y en el término fuente de generación de calor, Ecuación (2.21); para tomar en cuenta la conicidad del ánodo. En $z = 0690 \text{ m}$, comienza a incrementar el radio del ánodo proporcionalmente con su altura (0.01745 mm por cada milímetro de altura). 0.125 m es el radio inicial del ánodo.

Sumideros de momentum durante el cambio de fase

La solidificación-fusión del ánodo de acero se modela usando la formulacion de entalpia-porosidad. El método consiste en considerar esta región como un medio poroso. La porosidad en cada volumen es fijada exactamente como la fracción de líquido en esa celda. En regiones completamente solidificadas, la porosidad es igual a cero, lo cual elimina las velocidades en esas regiones. El sumidero de momentum debido a la porosidad reducida en la zona pastosa toma la siguiente forma:

$$S = \frac{(1 - \beta)^2}{(\beta^3 + \varepsilon)} A_{mush} (\vec{v} - \vec{v}_p) \quad (2.16)$$

donde β es la fracción volumétrica de líquido, ε es un número pequeño (0.001) para prevenir la división por cero, A_{mush} es la constante de zona pastosa, y \vec{v}_p es la velocidad del sólido debida a la tracción del material solidificado fuera del dominio (Krastev & Falcucci, 2021).

Sumidero de energía turbulenta durante el cambio de fase

Los sumideros de energía turbulenta son agregados a todas las ecuaciones de turbulencia, para la zona pastosa y las zonas solidificadas, tomando en cuenta la presencia de material sólido. Este término de sumidero es muy similar al término de sumidero de momentum y se expresa por la siguiente ecuación:

$$S = \frac{(1 - \beta)^2}{(\beta^3 + \varepsilon)} A_{mush} \varphi \quad (2.17)$$

donde φ representa la cantidad de turbulencia que se está resolviendo (k , ε , ω , *etc*) y la constante de la zona pastosa, A_{mush} , es la misma que aparece en la Ecuación (2.9) (Krastev & Falcucci, 2021).

2.3.1.3 Ecuación de energía para flujo turbulento

Se empleo el modelo de fusión-solidificación incorporado en Ansys Fluent versión 2022/R1 para calcular el frente de fusión. La ecuación general de energía para un flujo turbulento se define por,

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} H) = \nabla \cdot (k_{eff} \nabla T + \tau_{eff} * \mathbf{v}) + S_{joule} \quad (2.18)$$

donde k_{eff} es la conductividad térmica efectiva ($k_t + k$ donde k_t es la conductividad termica turbulenta, definida de acuerdo con el modelo de turbulencia empleado), \mathbf{v} es el campo de velocidad, S_{joule} representa el término de generación volumétrica de calor debido al efecto Joule, H es la entalpia y ρ es la densidad del fluido. τ_{eff} es el tensor de esfuerzos efectivo, definido como $\tau + \bar{\tau}$.

La entalpia del material es calculada como la suma de la entalpia sensible, h , y el calor latente ΔH ,

$$H = h + \Delta H \quad (2.19)$$

siendo,

$$h = h_{ref} + \int_{T_{ref}}^T C_p dT \quad (2.20)$$

donde h_{ref} es la entalpia de referencia, T_{ref} la temperatura de referencia y C_p la capacidad calorífica a presión constante. La fracción de líquido, β , puede ser definida como,

$$\begin{aligned} \beta &= 0 && \text{si } T \leq T_{solidus} \\ \beta &= 1 && \text{si } T \geq T_{liquidus} \\ \beta &= \frac{T - T_{solidus}}{T_{liquidus} - T_{solidus}} && \text{si } T_{solidus} < T < T_{liquidus} \end{aligned} \quad (2.21)$$

El cambio de entalpía del proceso de fusión puede escribirse en términos del calor latente del material, L :

$$\Delta H = \beta L \quad (2.22)$$

El cambio entálpico varía entre cero (para fase sólida) y L (para fase líquida). La solución para la temperatura es esencialmente una iteración entre la ecuación de energía en términos de temperatura, Ecuación (2.18), y la ecuación de fracción de líquido, Ecuación (2.21) (Chibani, Dehane, Merouani, Bougriou, & Guerraiche, 2022).

Termino fuente S_{joule}

El término fuente de energía contemplado en este modelo matemático proviene del efecto Joule y se expresa como,

$$S_{joule} = \rho_R \left(\frac{I}{\pi R^2} \right)^2 \quad (2.23)$$

donde ρ_R es la resistividad eléctrica en función de la temperatura, I es la intensidad de corriente eléctrica y R es el radio del billet de acero. S_{joule} tiene unidades de W/m^3 .

2.3.1.4 Ecuación de energía en regiones sólidas del dominio

En las regiones sólidas del dominio computacional solamente prevalece el mecanismo de transferencia de calor por conducción. Se definen conductividades térmicas constantes para los distintos materiales. Por lo tanto, en la region sólida, la ecuación de energia toma la siguiente forma:

$$\nabla^2 T = 0 \quad (2.24)$$

donde T es la temperatura y ∇^2 es el operador Laplaciano (Patankar, 2009).

2.3.2 Modelo matemático termo-mecánico

Los problemas de elasticidad axisimétrica involucran esfuerzos y deformaciones en estructuras debido a cargas que exhiben simetría rotacional sobre la coordenada angular θ . Si las dos condiciones: geometría axialmente simétrica y carga axisimétrica se cumplen, la respuesta de la estructura será axisimétrica (o radialmente simétrica). Entonces el comportamiento de la estructura (desplazamiento, deformaciones y esfuerzos) son independientes de la coordenada angular (Stasa, 2000).

Las ecuaciones gobernantes son presentadas usando el sistema coordenado cilíndrico en tres dimensiones (r, z, θ) , donde r es la coordenada radial, es decir la distancia desde el eje de simetría, $r \geq 0$; z es la coordenada axial dirigida a lo largo del eje de simetría, y θ es la coordenada angular. El campo de desplazamiento $u(r, z)$ es una función de r y z , definida por dos componentes:

$$u(r, z) = (u_r(r, z), u_z(r, z), 0) \quad (2.25)$$

donde $u_r(r, z)$ es el desplazamiento radial, $u_z(r, z)$ es el desplazamiento axial, y u_θ es cero debido a la simetría rotacional. El tensor de deformación en coordenadas axisimétricas se define como,

$$\varepsilon = [\varepsilon_{rr} \quad \varepsilon_{\theta\theta} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{rz}]^T \quad (2.26)$$

donde

$$\gamma_{rz} = \varepsilon_{rz} + \varepsilon_{zr} = 2\varepsilon_{rz} \quad (2.27)$$

de forma análoga, los componentes de esfuerzo $\sigma_{r\theta}$ y $\sigma_{z\theta}$ desaparecen, y el tensor de esfuerzo para problemas de elasticidad axialmente simétricos se simplifica a:

$$\sigma = [\sigma_{rr} \quad \sigma_{\theta\theta} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{rz}]^T \quad (2.28)$$

Ecuaciones cinemáticas

Para pequeños desplazamientos, se genera un comportamiento elástico lineal, y las ecuaciones de deformación-desplazamiento para problemas axisimétricos elásticos son:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \quad (2.29)$$

en forma de matricial, la expresión es:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{rz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ 2\varepsilon_{rz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_r \\ u_z \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Ecuación constitutiva

Para un problema en coordenadas axisimétricas, las componentes térmicas de deformación relevante son:

$$\varepsilon_{ij}^{Thermal} = [\varepsilon_{rr} \quad \varepsilon_{\theta\theta} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{rz}]^T = [\alpha\Delta T \quad \alpha\Delta T \quad \alpha\Delta T \quad 0]^T \quad (2.31)$$

donde α es el coeficiente de expansión térmica y ΔT es la diferencia de temperatura entre un punto material cualesquiera y una temperatura de referencia T_0 .

Los componentes de deformación ε_{ij} son la suma de la deformación mecánica ε_{ij}^M y la deformación térmica $\varepsilon_{ij}^{Thermal}$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \varepsilon_{rr}^M + \varepsilon_{rr}^{Thermal} & \varepsilon_{zz} &= \varepsilon_{zz}^M + \varepsilon_{zz}^{Thermal} & \varepsilon_{\theta\theta} &= \varepsilon_{\theta\theta}^M + \varepsilon_{\theta\theta}^{Thermal} \\ \gamma_{rz} &= \gamma_{rz}^M \end{aligned} \quad (2.32)$$

Los componentes del esfuerzo en términos de los componentes de deformación están dados por la ley de Hooke para materiales isotrópicos (Francois, Pineau, & Zaoui, 2013):

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{rr} + \nu(\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz})] - \frac{E\alpha\Delta T}{1-2\nu} \quad (2.33)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{\theta\theta} + \nu(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz})] - \frac{E\alpha\Delta T}{1-2\nu} \quad (2.34)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{zz} + \nu(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta})] - \frac{E\alpha\Delta T}{1-2\nu} \quad (2.35)$$

$$\gamma_{rz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{rz}^M \quad (2.36)$$

donde E es el módulo de Young y ν es el coeficiente de poisson (Ike, Onah, & Nwoji, 2017).

Ecuaciones diferenciales de equilibrio

Las ecuaciones diferenciales tridimensionales generales de equilibrio estático en coordenadas cilíndricas son los sistemas de tres ecuaciones:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \sigma_{r\theta} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{rz} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} + F_r = 0 \quad (2.37)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{zr}) + \frac{1}{r} \sigma_{z\theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + F_z = 0 \quad (2.38)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma_{\theta r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \sigma_{\theta\theta} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{\theta z} + F_\theta = 0 \quad (2.39)$$

donde F_r , F_z y F_θ son los componentes del campo de fuerza del cuerpo en las direcciones de coordenadas radial, axial y angular, respectivamente. Para casos axisimétricos, las ecuaciones diferenciales de equilibrio estático se simplifican a:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{rr}) + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{rz} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} + F_r = 0 \quad (2.40)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{zr}) + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + F_z = 0 \quad (2.41)$$

La tercera ecuación de equilibrio es idénticamente satisfecha si $F_\theta = 0$, porque $\sigma_{\theta r} = \sigma_{\theta z} = 0$, y $\sigma_{\theta\theta}$ es independiente de θ . Si $F_\theta \neq 0$, el problema de elasticidad no puede ser axialmente simétrico (Ike, Onah, & Nwoji, 2017).

2.4 Condiciones de frontera

Condiciones de frontera del modelo matemático termo-fluidinámico

Las fronteras del sistema se denotan con la letra inicial F en la **Figura 2.5 y 2.6**.

Frontera **F1**: eje de simetría $r = 0$

Frontera **F2**: presión de salida. Este tipo de condición de frontera es útil para simular flujos que salen del dominio computacional. En esta frontera se espera que el metal salga y vuelva a entrar al dominio computacional. Para simular este efecto, se definió una presión manométrica de 57 kPa, que corresponde a la presión que ejerce el baño metálico de 0.8 m

de altura. Entonces, la presión en la frontera queda definida como la suma de la presión atmosférica y la presión manométrica que ejerce el metal líquido sobre esta frontera.

El metal que vuelve a entrar al dominio computacional es denominado reflujo (*backflow*) y algunas de sus propiedades deben ser definidas. Se usaron las propiedades predeterminadas: intensidad turbulenta del reflujo (5%), cociente de viscosidad turbulenta (10), la intermitencia (1, el reflujo es turbulento), el metal entra a la cavidad anódica con dirección normal a la frontera F2. La temperatura del reflujo fue establecida en 1833 K.

Frontera **F3**: condición tipo Dirichlet. En $z = Z$ y $r > R$, $T = 1833 K$

Frontera **F4**: condición tipo Neuman. En $r = 1.4 m$, $-k \frac{\partial T}{\partial r} = 0$

Frontera **F5**: condición tipo Robin,

$$-k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{F5} = h_1 (T - T_\infty)$$

$$10 W/m^2K, 313 K$$

donde $h_1 = 10 W/m^2K$, un valor adecuado para simular convección natural en la pared de acero del horno.

Frontera **F6**: nuevamente una condición tipo Robin,

$$-k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{F6} = h_2 (T - T_\infty)$$

donde $h_2 = 15000 W/m^2K$. Se explica cómo fue calculado este coeficiente de transferencia de calor en la sección 2.2 de este capítulo.

Frontera **F7**:

$$-k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{F7} = h_3 (T - T_\infty)$$

donde $h_2 = 30000 W/m^2K$. En esta frontera tenemos un valor más elevado porque la velocidad del agua de enfriamiento es más alta en esta sección. Este coeficiente de transferencia de calor fue calculado de forma análoga que el coeficiente h_2 .

Condiciones de frontera del modelo matemático termo-mecánico

Frontera **F1**: eje de simetría. Desplazamiento axial u_z no restringido.

$$r = 0 \quad u_r = 0$$

Frontera **F2** y **F3**: presión del metal líquido sobre el piso refractario.

$$z = 0 \quad p = 57 \text{ KPa}$$

Frontera **F4**: no existe desplazamiento radial, solamente desplazamiento axial.

$$r = 1.4 \text{ m} \quad u_r = 0$$

Frontera **F5**: expansión libre. El desplazamiento axial y radial no están restringidos.

Frontera **F6** y **F7**: soporte fijo. El desplazamiento axial y radial están restringidos

$$u_r = 0 \quad u_z = 0$$

2.5 Propiedades de los materiales y condiciones de operación

Las propiedades físicas y térmicas de los materiales fueron obtenidas de distintas fuentes bibliográficas. Existen tres tipos de materiales refractarios en el piso refractario: ladrillo de MgO-Cr₂O₃, ladrillo de MgO-C y un material refractario apisonable (granulado). La **Tabla 2.1** muestra la composición mineralógica de los materiales refractarios, y puede notarse que son materiales base MgO.

Tabla 2.1. Composición mineralógica de los materiales refractarios

Material	Composición química %						
	MgO	Cr ₂ O ₃	Al ₂ O ₃	Fe ₂ O ₃	CaO	SiO ₂	C
Ladrillos MgO-Cr ₂ O ₃	57	21	6.5	12.5	1.1	0.5	-
ladrillo MgO-C	81.8	-	0.6	0.9	0.8	0.8	14
Material granulado	95	-	0.1	0.2	2.1	1	-

La **Tabla 2.2** muestra tres propiedades de los materiales (densidad, capacidad calorífica y conductividad térmica de los distintos materiales que conforman el dominio computacional. Es importante señalar que solamente la conductividad térmica es parte de la ecuación de energía que se resuelve en las regiones sólidas (material refractario, pared exterior de acero y chaqueta de cobre). La densidad y la capacidad calorífica de los materiales refractarios solo se muestra con fines informativos.

En el modelo matemático termo-fluidinámico sí se toma en cuenta la densidad, la capacidad calorífica (para simular el cambio de fase) y la conductividad térmica. Solamente las propiedades del ánodo de acero están en función de la temperatura, porque el ánodo está sujeto a un gradiente considerable de temperatura y porque es importante conseguir una simulación lo más realista posible en la cavidad anódica para entender la causa de la aparición de la pata de elefante explicada en secciones previas.

Las propiedades del cobre pueden considerarse constantes porque no se presenta un gradiente importante de temperatura debido a la rápida transferencia de calor hacia el agua de enfriamiento. La pared exterior del horno está fabricada en acero estructural y también se pueden asumir propiedades térmicas constantes. Para obtener las propiedades del acero del ánodo, se empleó el software de simulación de propiedades JMatPro® en el rango de temperatura 300-2000 K. Los valores de la capacidad calorífica, la conductividad térmica y la resistividad eléctrica del acero AISI 1015 se presentan gráficamente en función de la temperatura en las **Figuras 2.7, 2.8 y 2.9**, respectivamente. El calor latente de este grado de acero es 250 kJ/kg. La resistividad eléctrica se usó para calcular la rapidez de generación de calor dentro del ánodo por la acción del efecto Joule, cuando el ánodo opera con una intensidad de corriente igual a 20 kA.

Tabla 2.2. Propiedades de los materiales de sistema bajo estudio

Región	Material	Densidad (kg/m^3)	k ($W/m\ k$)	C_p ($J/kg\ K$)
M1	Ánodo de acero AISI 1015	7840-6750 (300-2000K)	67-39 (300-2000K)	480-833 (300-2000K)
M2	Chaqueta de cobre	8960	385	385
M3	Ladrillo MgO- C	2900	9.8	1200
M4	Ladrillo MgO- Cr2O3	3310	2.6	1000
M5	Ladrillo MgO- Cr2O3	3310	2.6	1000
M6	Refractario granulado	2100	2	1150
M7	Acero (~320 K)	7800	50	470

Para simular el comportamiento fluidinámico del ánodo fundido es necesario definir la viscosidad en función de la temperatura. Es válido asumir una dependencia lineal entre la viscosidad dinámica ($Pa \cdot s$) y la temperatura, definida por la siguiente expresión,

$$\mu = 7x10^{-3} - 4.4x10^{-3} T(K) \quad (2.42)$$

En el intervalo de temperatura 1793-2000. Las temperaturas de solidus y liquidus del acero AISI 1015 es 1733 y 1793 K, respectivamente.

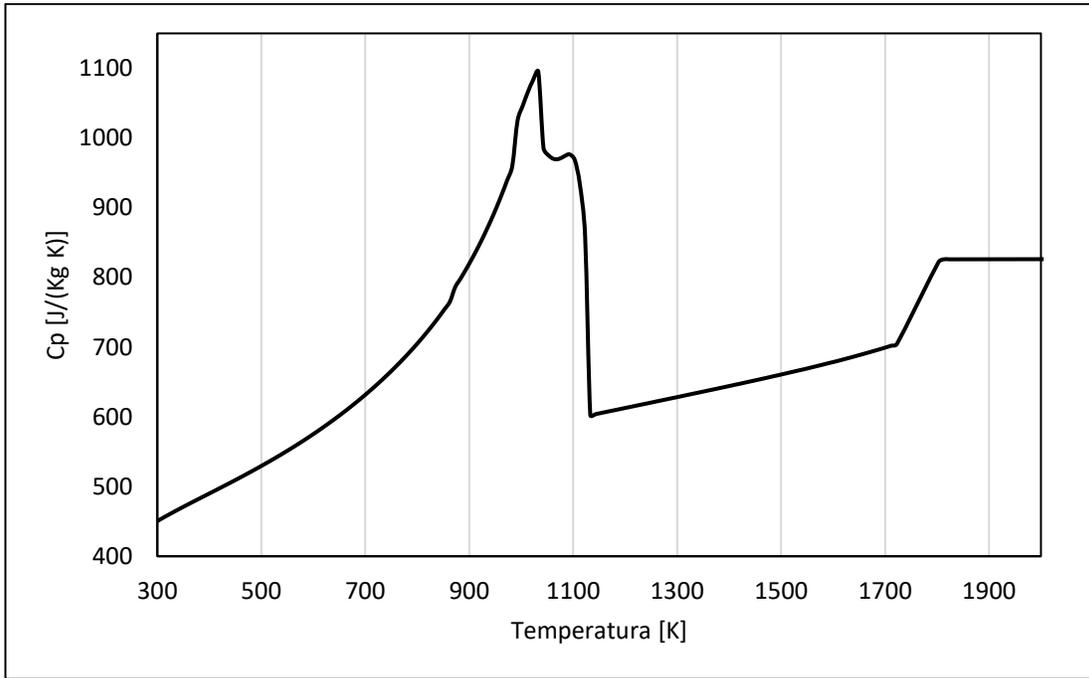


Figura 2.7. Capacidad calorífica del acero AISI 1015 en función de la temperatura

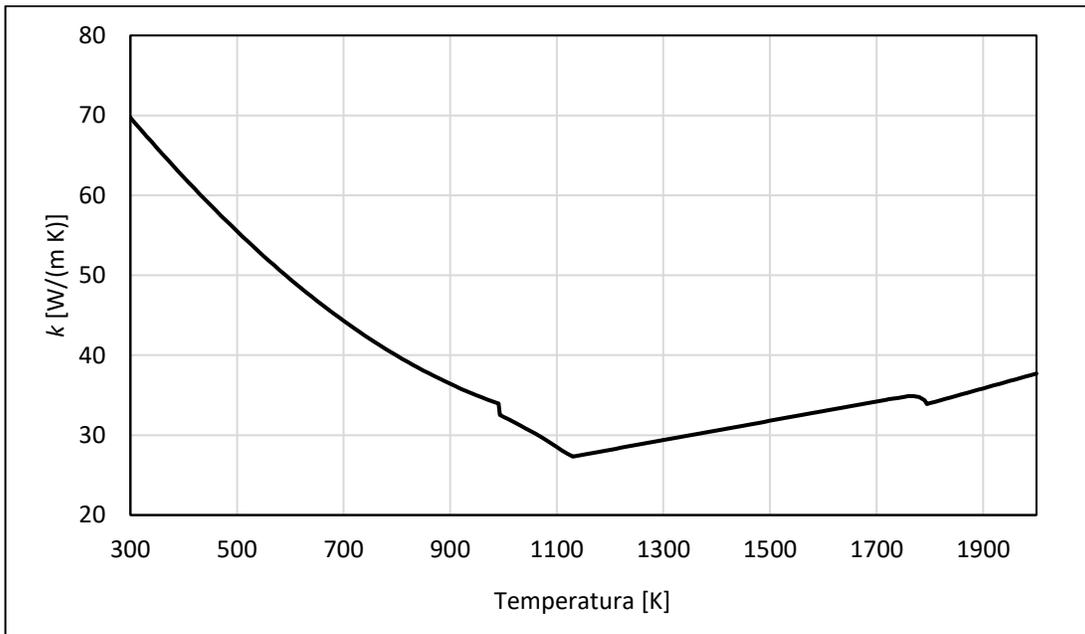


Figura 2.8. Conductividad térmica del acero AISI 1015 en función de la temperatura

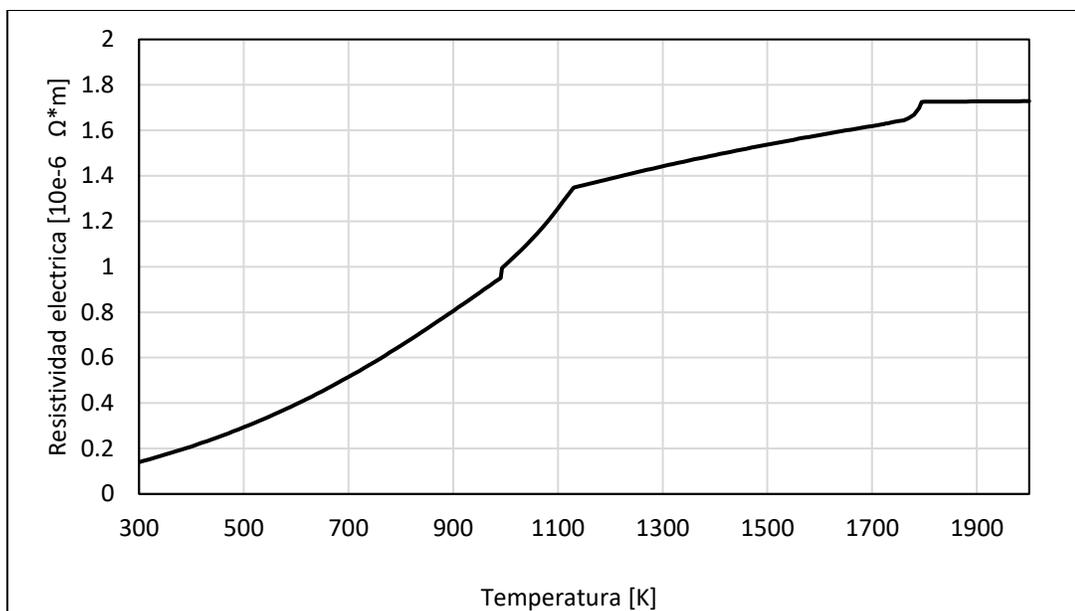


Figura 2.9. Resistividad eléctrica del acero AISI 1015 en función de la temperatura.

Para las simulaciones termo-mecánicas se requirieron solamente tres propiedades; el módulo de Young (E), el coeficiente de Poisson (ν) y el coeficiente de expansión térmica (CTE). La **Tabla 2.3** muestra estas propiedades mecánicas. El cobre tiene un CTE constante, porque teóricamente no se alcanzan altas temperaturas debido al sistema de enfriamiento. Las propiedades mecánicas del acero AISI 1015 también se obtuvieron del software JMatPro®, pero solamente se muestran los valores extremos del rango de temperatura 300 – 1900 K.

La resistencia a la tracción y a la compresión del ladrillo MgO-C es 8 y 25 MPa, respectivamente. En el análisis de falla sólo se requieren estas propiedades mecánicas.

Tabla 2.3. Propiedades mecánicas de los materiales.

Material	CTE (1/°C) 300-1900 K	E (GPa)	ν
Ladrillos MgO-Cr ₂ O ₃	$2.38 \times 10^{-6} - 1.08 \times 10^{-5}$	35	0.2
ladrillo MgO-C	$2.38 \times 10^{-6} - 1.08 \times 10^{-5}$	30	0.2
Material apisonado	$2.84 \times 10^{-6} - 1.57 \times 10^{-5}$	10	0.2
Cobre	1.62×10^{-5}	130	0.32
Acero (ánodo)	$1.228 \times 10^{-5} - 2.919 \times 10^{-5}$	210-0.001	0.3-0.49

2.6 Método de solución

Las simulaciones ALFA y BETA requirieron un tiempo considerable de CPU (no contabilizado), con las siguientes características de procesador Intel(R) Core (TM) i7-1165G7 @ 2.80GHz, 2803 Mhz, 4 Core(s), 8 Logical Processor(s) y 16 MB de memoria RAM.

2.6.1 Simulaciones termo-fluidinámicas ALFA y BETA

La solución numérica del modelo matemático termo-fluidinámico se obtuvo a través del Método de Volumen Finito (FVM) (Patankar, 2009). Ansys Fluent 2022/R1 implementa este método para la solución de las ecuaciones gobernantes presentadas en la sección 2.3 en su forma integral.

El dominio computacional se divide en un conjunto de volúmenes finitos, también conocidos como celdas o elementos. En el Método de Volumen Finito, las ecuaciones gobernantes se expresan en forma integral para permitir la discretización del dominio en volúmenes finitos y garantizar la conservación de las cantidades físicas en la solución numérica (Tu, Yeoh, & Liu, 2018).

En la simulación ALFA, la discretización espacial consistió en dividir el dominio computacional en 117,300 volúmenes de control y 120,124 nodos. Los volúmenes de control del ánodo de acero tienen un tamaño de 2 mm y el resto (chaqueta de cobre, material refractario, pared del horno) tienen un tamaño de 5 mm. Se llegó a esta discretización espacial después de realizar un estudio paramétrico que ayudó a definir una solución numérica independiente de la resolución de la malla o el número de volúmenes de control.

Cerca de la interfase ánodo-material refractario se impuso una malla más fina para calcular de forma precisa los fenómenos de transporte cerca de la capa límite. La **Figura 2.10** muestra la discretización espacial de la región de estudio. En la simulación BETA se usaron los mismos tamaños de volumen de control y se obtuvo un número similar de volúmenes de control y nodos. Pero es importante recordar que en la simulación BETA el ánodo tiene forma cónica, el radio del ánodo en la parte superior es igual a 140.8 mm y en la base es igual a 125 mm, lo que equivale a un ángulo de 1° .

Una vez que se ha realizado la discretización espacial, se procede a la discretización de las ecuaciones gobernantes (pero en su forma integral) dentro de cada una de estas celdas, lo que forma el segundo paso del proceso de resolución numérica en FVM. Finalmente, las ecuaciones discretizadas resultantes se escriben en forma algebraica y se combinan para formar un sistema de ecuaciones algebraicas que puede resolverse numéricamente. Esto implica definir las cantidades desconocidas en cada celda y las relaciones entre las cantidades en las celdas vecinas (Moukalled, Mangani, & Darwish, 2016). La discretización de las ecuaciones gobernantes está fuera del alcance de este trabajo, pero se presentan algunas bases teóricas en la sección 1.4 del capítulo 1.

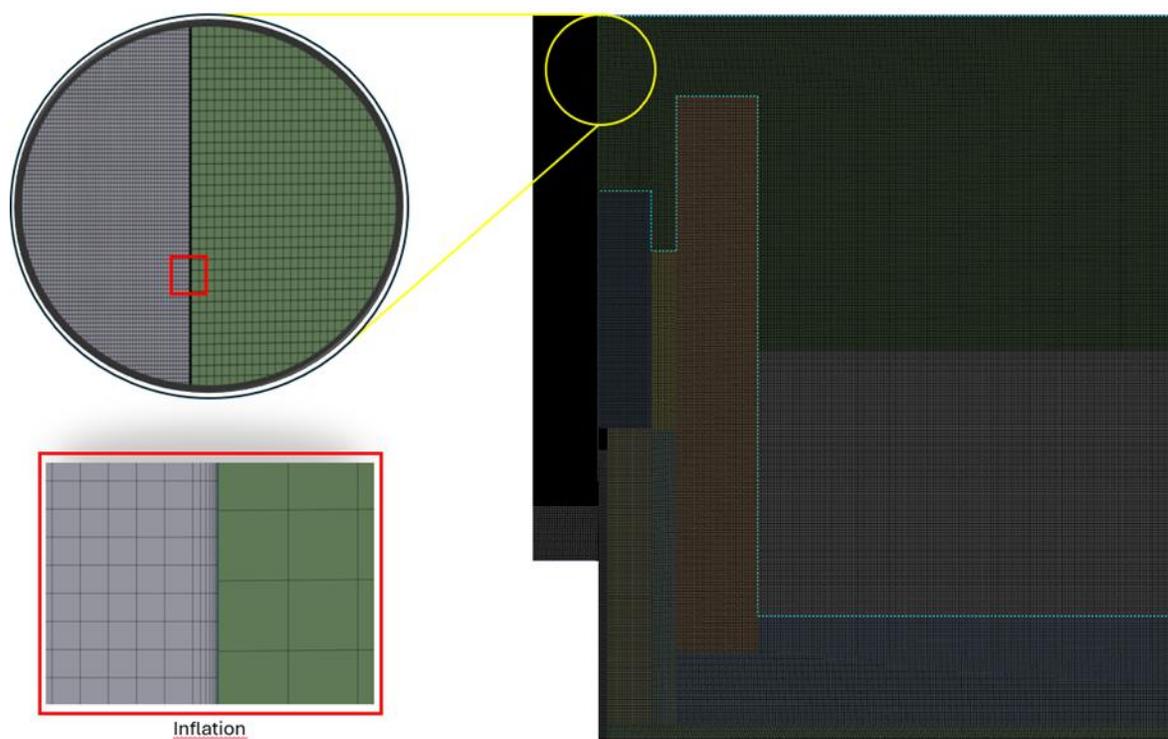


Figura 2.10. Tipo de malla usada en la simulación ALFA y BETA

La **Tabla 2.4** muestra el esquema de acoplamiento presión-velocidad, la discretización espacial de las ecuaciones diferenciales gobernadoras y los factores de relajación usados en esta simulación. Se explican brevemente estos esquemas a continuación:

1. Acoplamiento de presión-velocidad

SIMPLE: Este es uno de los métodos de acoplamiento presión-velocidad más utilizados en Fluent. En este enfoque, las ecuaciones de Navier-Stokes se dividen en

dos pasos: un paso de predicción de velocidad y un paso de corrección de presión. Durante el paso de predicción, se resuelve una aproximación de las ecuaciones de momentum para obtener una velocidad provisional. Luego, se calcula la corrección de presión para satisfacer la ecuación de continuidad. Este proceso se repite iterativamente hasta que se satisfagan las condiciones de convergencia (Moukalled, Mangani, & Darwish, 2016).

2. Discretización espacial

Gradiente basado en mínimos cuadrados por celda:

Un método utilizado en ANSYS Fluent para calcular los gradientes de las propiedades del flujo, como la presión, la velocidad o la temperatura, en cada celda de la malla. Este método se utiliza en la discretización espacial de las ecuaciones de conservación que rigen el comportamiento del fluido. Los cálculos de gradiente se realizan en función de la información dentro de las celdas computacionales individuales (o volúmenes de control) de la cuadrícula. Cada celda contribuye al cálculo de los gradientes en sus proximidades. Es adecuado para simulaciones en las que los cálculos precisos de gradiente son fundamentales, como en problemas relacionados con el modelado de turbulencias, la transferencia de calor o el transporte de especies (Tu, Yeoh, & Liu, 2018).

Presión PRESTO:

El esquema emplea interpolación lineal para estimar los valores de presión en ubicaciones dentro del dominio computacional donde la presión no se calcula directamente. La interpolación lineal implica el uso de una línea recta para conectar valores de presión adyacentes, lo que proporciona un método de interpolación sencillo y computacionalmente eficiente (Maliska, 2023)

Corriente arriba, primer orden:

En el contexto de discretizar los términos convectivos en las ecuaciones rectoras (por ejemplo, ecuaciones de Navier-Stokes) para el flujo de fluidos, el esquema de primer orden "aguas arriba" aproxima las variables de flujo (como velocidad, presión, temperatura, etc.) en un punto determinado de la cuadrícula (nodo), considerando los valores en los puntos de la cuadrícula vecinos, ubicados "aguas arriba" de la dirección del flujo.

El esquema de primer orden aguas arriba generalmente es menos exigente desde el punto de vista computacional en comparación con los esquemas de orden superior en términos de memoria y recursos computacionales. Esto se debe a que el esquema de primer orden en contra del viento es relativamente simple e implica una interpolación directa de valores de puntos vecinos de la cuadrícula (Maliska, 2023).

3. Factores de relajación

Los factores de relajación influyen en la rapidez con la que las variables de la simulación convergen hacia una solución. Un factor de relajación más bajo puede acelerar la velocidad de convergencia (cercano a uno), permitiendo que las variables cambien más rápidamente en cada iteración del solver. Por otro lado, un factor de relajación más alto (cercano a cero) puede ralentizar la velocidad de convergencia, lo que permite una evolución más gradual de las variables.

Fue necesario usar factores de relajación en las ecuaciones de transporte, excepto en la ecuación de energía. Estos factores se ajustaron durante el proceso de cálculo iterativo para estabilizar la convergencia. La **Tabla 2.5** muestra los criterios de convergencia para cada una de las ecuaciones gobernantes. Fue necesario alcanzar un valor residual igual a 1×10^{-12} para la ecuación de energía, para obtener un balance neto de tasas de transferencia de calor cercano a cero (lo cual corresponde al estado estable).

Tabla 2.4. Métodos de solución y factores de relajación usados en las ecuaciones respectivas para las simulaciones ALFA y BETA.

Acoplamiento presión-velocidad	Factores de relajación
Esquema: Simple	Presión: 0.1
Discretización espacial	Momentum: 0.1
Gradiente: Basado en mínimos cuadrados por celda	Densidad: 0.1
Presión: ¡PRESTO!	Fuerzas de volumen: 0.1
Momentum: Corriente arriba, primer orden	Energía cinética turbulenta: 0.1
Energía cinética turbulenta: Corriente arriba, primer orden	Rapidez específica de disipación: 0.1
Rapidez específica de disipación: Corriente arriba, primer orden	Viscosidad turbulenta: 0.1
Intermitencia: Corriente arriba, primer orden	Actualización de la fracción de líquido: 0.1
Momentum Thickness Re: Corriente arriba, primer orden	Intermitencia: 0.1
Energía: Corriente arriba, primer orden	Momentum Thickness Re: 0.1
	Energía: 1

Tabla 2.5. Criterios de convergencia de las ecuaciones diferenciales gobernadoras.

Ecuación diferencial	Criterio de convergencia, residual
Continuidad	0.001
x-velocidad	0.001
y-velocidad	0.001
Energía	1×10^{-12}
Energía cinética turbulenta k	0.001
Rapidez específica de disipación ω	0.001
Intermitencia	0.001
Momentum Thickness Re	0.001

Distintos diseños de ánodo

Se realizaron simulaciones adicionales para conocer la influencia de distintos diseños de ánodo en el comportamiento termo-fluidinámico. Se usaron los mismos métodos de discretización espacial, acoplamiento presión-velocidad, factores de relajación y los mismos criterios de convergencia que se muestran en la **Tabla 2.6** y **Tabla 2.7**. El objetivo fue encontrar alguna ventaja operativa, por ejemplo, la reducción de la penetración del frente de fusión. Se desarrollaron cuatro simulaciones con geometría distinta, las cuales se describen brevemente a continuación:

1. Simulación G1: el sistema de enfriamiento más cerca del piso refractario (**Figura 2.11**)
2. Simulación G2: el sistema de enfriamiento está en una posición intermedia (**Figura 2.12**)
3. Simulación G3: Ánodo con forma cónica (**Figura 2.13**)
4. Simulación G4: Ánodo con dos diámetros distintos (**Figura 2.14**)

Las condiciones de frontera, propiedades de los materiales, condiciones de operación y el método de solución de estas simulaciones son prácticamente las mismas que las presentadas en secciones anteriores. La única diferencia radica en la manera en que se definió el término fuente de momentum (por acción de la fuerza electromagnética) y el término fuente de calor (por acción del efecto Joule) en las simulaciones G3 y G4.

En la simulación G3 se activa la componente axial de la fuerza electromagnética de Lorentz. Eso implica que se debe utilizar las Ecuaciones (2.5) para calcular la componente radial y axial, respectivamente. Sin embargo, estas ecuaciones no toman en cuenta la variación de radio anódico (R) en función de su altura. Una manera simple de tomar en cuenta la geometría cónica es a través de una expresión que permita definir el radio en función de la altura. El radio puede expresarse en términos de la altura como,

$$R = 0.190 - 0.0682056 * (z - 0.647) \quad (2.43)$$

Esta expresión se sustituye en las Ecuaciones (2.5) para calcular la generación de momentum por la acción de la fuerza electromagnética y también en la Ecuación (2.14) para calcular la

rapidez de generación de calor por la acción del efecto Joule. Esto se había presentado en la sección 2.2 de este capítulo.

En la simulación G4 se usó una condicional para definir los términos fuente en función de la altura del ánodo. En este caso la fuerza electromagnética solamente actúa en dirección radial, por lo tanto, se usa la Ecuación (2.4) y después de sustituir los valores constantes, se obtiene la siguiente condición para definir la fuerza volumétrica de Lorentz en el ánodo:

Si $z > 1.21\text{m}$ entonces

$$F_L = 104303[\text{kg m}^{-3} \text{s}^{-2}] * r$$

de otra forma

$$F_L = 7067.58[\text{kg m}^{-3} \text{s}^{-2}] * r$$

A una altura de 1.21 m se presenta el cambio abrupto del radio anódico. Una expresión análoga es utilizada para establecer el termino de generación de calor por acción del efecto Joule.

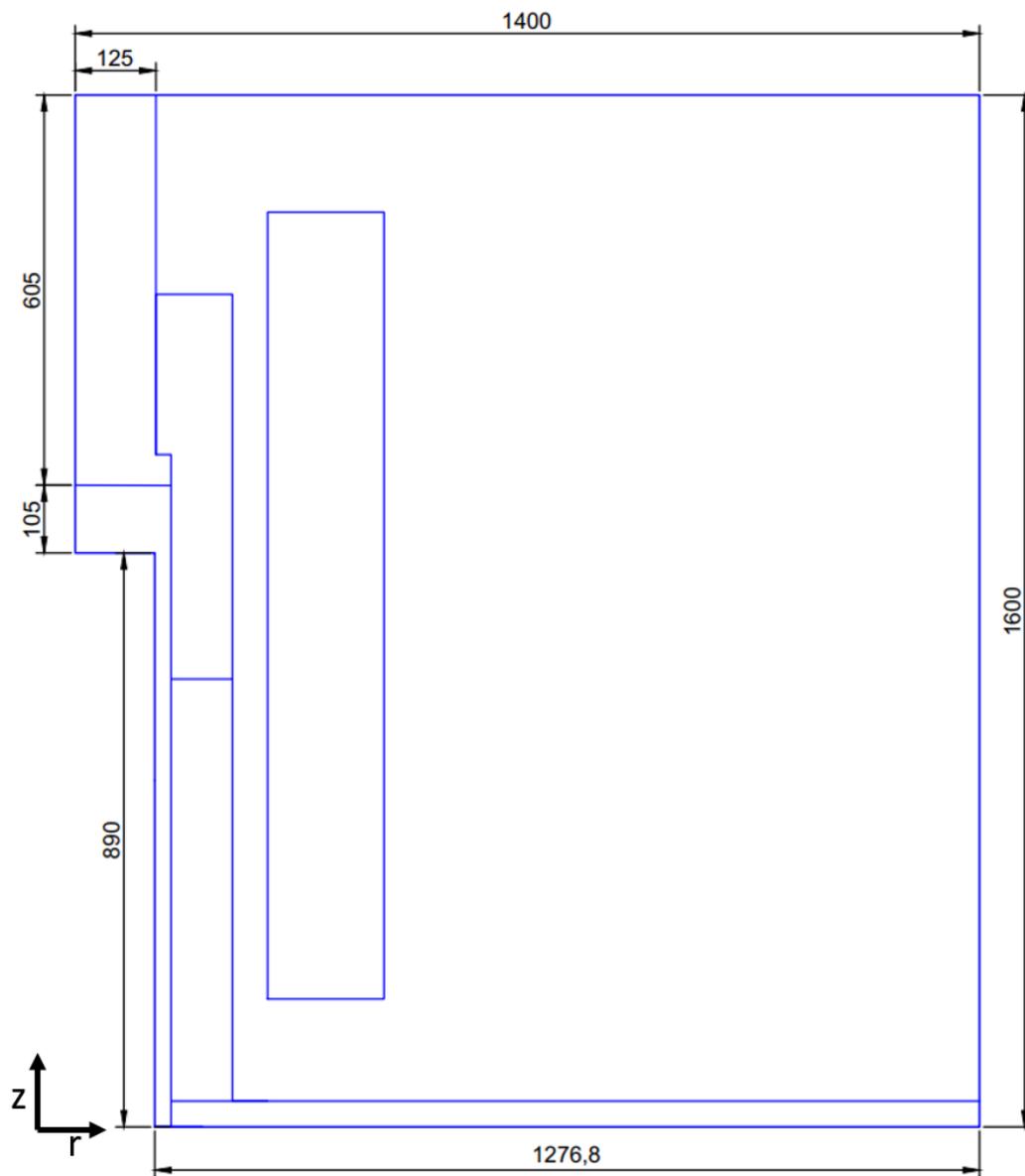


Figura 2.12. Dominio computacional de la simulación G2. Longitudes en mm.

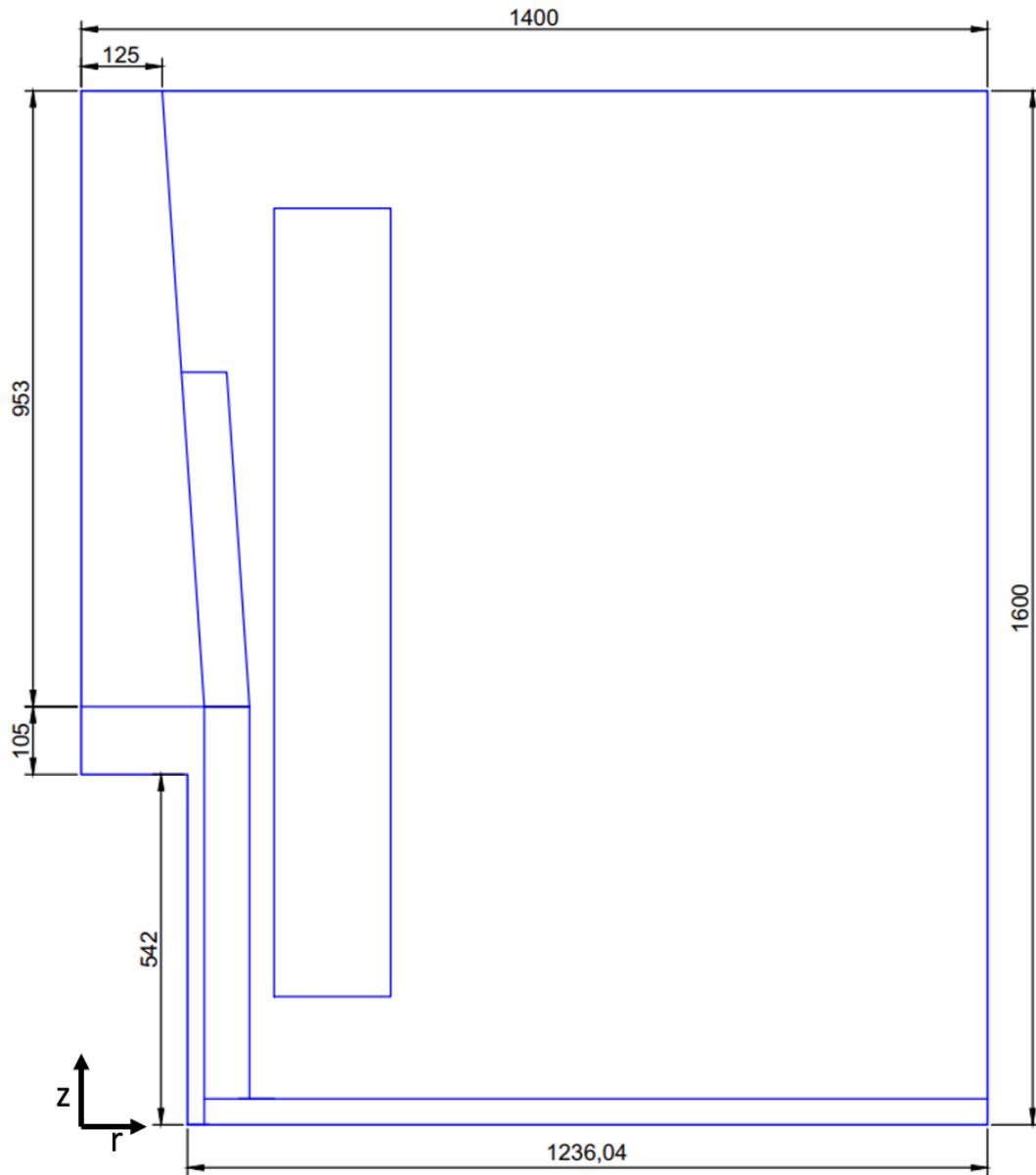


Figura 2.13. Dominio computacional de la simulación G3. Longitudes en mm.

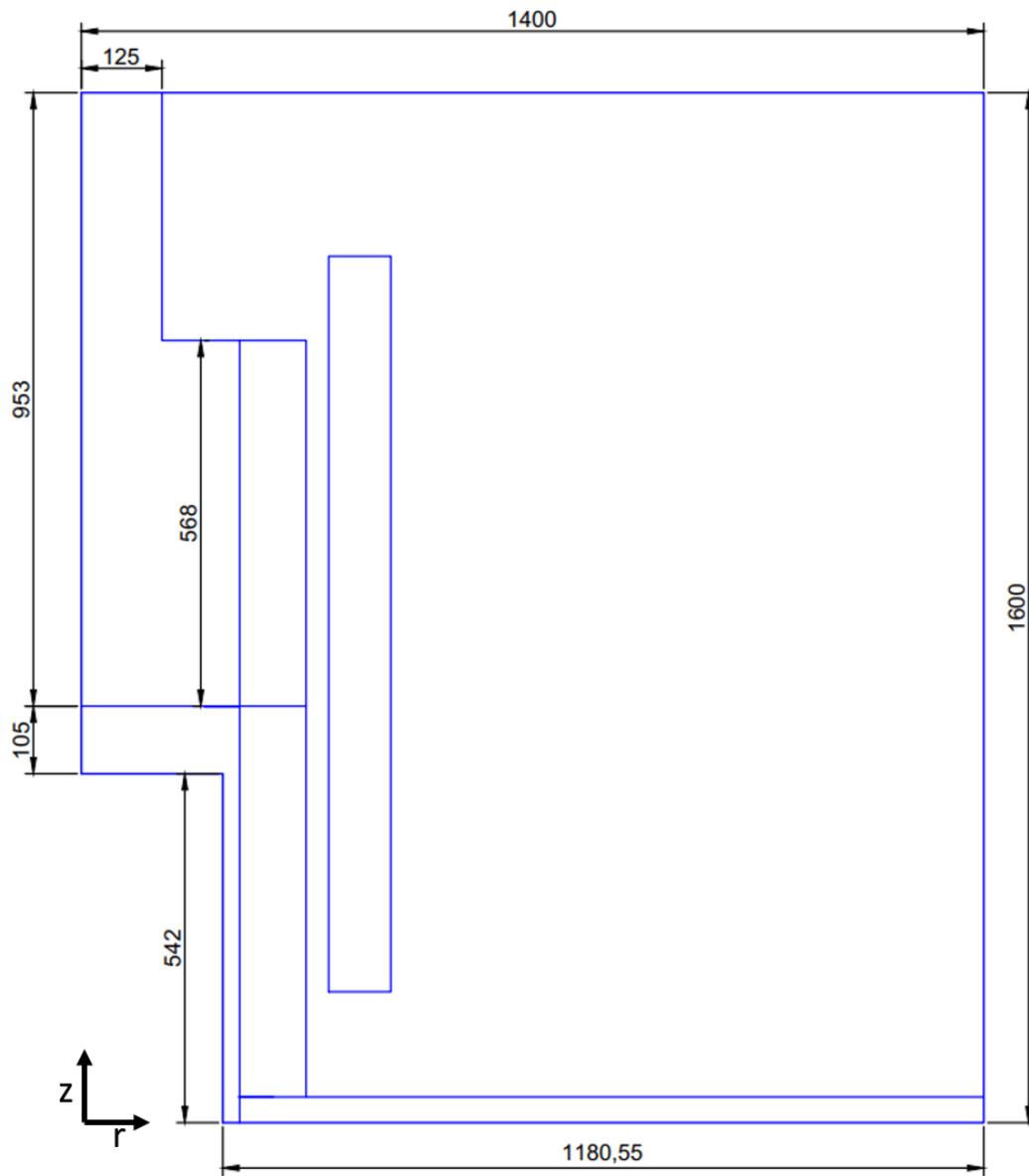


Figura 2.14. Dominio computacional de la simulación G4. Longitudes en mm.

2.6.2 Simulaciones termo-mecánicas

La formación de la “pata de elefante” puede tener su origen cuando aparecen esfuerzos térmicos en el sistema ánodo-refractario. Es necesario determinar si en el estado de máxima saturación térmica aparecen esfuerzos de alta magnitud que sean capaces de provocar la falla mecánica del material refractario. Los ciclos de enfriamiento y calentamiento también deberían tener un efecto en la durabilidad del material refractario, pero no se incluyen en este trabajo de tesis. Esto justificó la importancia de realizar una simulación termo-mecánica.

El campo de temperatura obtenido a través de la simulación termo-fluidinámica ALFA fue importado en el módulo de análisis estructural de Ansys Mechanical 2022/R1 para estimar el comportamiento termo-mecánico en el sistema. Por lo tanto, se trata de una simulación termo-mecánica desacoplada. Esta simulación emplea el mismo dominio computacional mostrado en la **Figura 2.5** y se denomina simulación termo-mecánica TM-A. La solución numérica del modelo matemático termo-mecánico se obtuvo a través del Método de Elemento Finito (FVM). Ansys Mechanical 2022/R1 implementa este método para la solución de las ecuaciones que gobiernan el comportamiento mecánico en el sistema en presencia de esfuerzos térmicos.

El primer paso en el Método de Elementos Finitos (FEM) es dividir el dominio del problema en una malla de elementos finitos, tal como se hace en el Método de Volumen Finito. Estos elementos pueden ser triángulos, cuadriláteros, tetraedros, hexaedros u otras formas geométricas, dependiendo de la naturaleza del problema.

En ANSYS Mechanical, que es un software de análisis de elementos finitos (FEA), se utiliza comúnmente la forma débil de las ecuaciones gobernantes. La forma débil, también conocida como forma variacional o principio de trabajo virtual, se deriva de la forma fuerte (forma diferencial) de las ecuaciones gobernantes. Se pueden utilizar varios métodos para derivar la forma débil, como el método de Galerkin, el método de mínimos cuadrados o el método de colocación. Estos métodos implican multiplicar las ecuaciones en su forma “fuerte” por funciones de prueba e integrar en el dominio, seguido de la aplicación de la integración por partes, lo que da como resultado las ecuaciones en su forma débil. Finalmente, las ecuaciones integrales discretizadas se ensamblan para formar un sistema algebraico de ecuaciones

lineales. Este sistema de ecuaciones generalmente se deriva utilizando métodos de integración numérica, como la regla del trapecio o la regla de Simpson, sobre cada elemento (Szabó & Babuska, 2021).

Para el cálculo de esfuerzos y deformaciones, para cada elemento, se derivan las ecuaciones de equilibrio, que relacionan las fuerzas nodales con los desplazamientos nodales mediante la matriz de rigidez del elemento. La ecuación básica para un elemento es:

$$K^e u^e = F^e \quad (2.44)$$

donde K^e es la matriz de rigidez del elemento, u^e son los desplazamientos nodales del elemento y F^e son las fuerzas del elemento.

Las matrices de rigidez de todos los elementos se ensamblan para formar la matriz de rigidez global de la estructura K . Del mismo modo, se ensamblan los vectores de desplazamientos y fuerzas nodales globales (u y F , respectivamente). Las fuerzas nodales se refieren a las fuerzas que actúan en los nodos de la malla de elementos finitos. Estas fuerzas pueden ser fuerzas externas aplicadas directamente en los nodos o fuerzas internas que resultan de la respuesta de la estructura a las cargas aplicadas (Szabó & Babuska, 2021).

Las condiciones de frontera se aplican modificando la matriz de rigidez global y el vector de fuerzas. Esto implica fijar ciertos desplazamientos (por ejemplo, $u_i=0$ en nodos fijos) y ajustar el sistema de ecuaciones para reflejar estas restricciones. El sistema global de ecuaciones lineales resultante:

$$Ku = F \quad (2.45)$$

se resuelve para encontrar los desplazamientos nodales u . Este sistema se puede resolver utilizando métodos numéricos como la eliminación gaussiana. Con los desplazamientos nodales conocidos, se pueden calcular las deformaciones en cada elemento usando las relaciones de deformación-desplazamiento (Stasa, 2000) (Ecuaciones (2.29)). Luego, se calculan los esfuerzos utilizando las relaciones constitutivas del material (ley de Hooke para materiales elásticos lineales). Ver sección 2.3.2.

Es importante enfatizar que la obtención de las ecuaciones gobernantes en su forma débil está fuera del alcance de este trabajo de tesis. Las ecuaciones gobernantes de equilibrio

mecánico se resolvieron por el método del elemento finito (FEM) implementado en el software Ansys Mechanical® 2022-R1. La discretización espacial consistió en dividir el dominio computacional en 44,324 elementos triangulares con un tamaño de 10 mm. La **Figura 2.15** muestra el tipo de malla usada en las simulaciones termo-mecánicas. La calidad

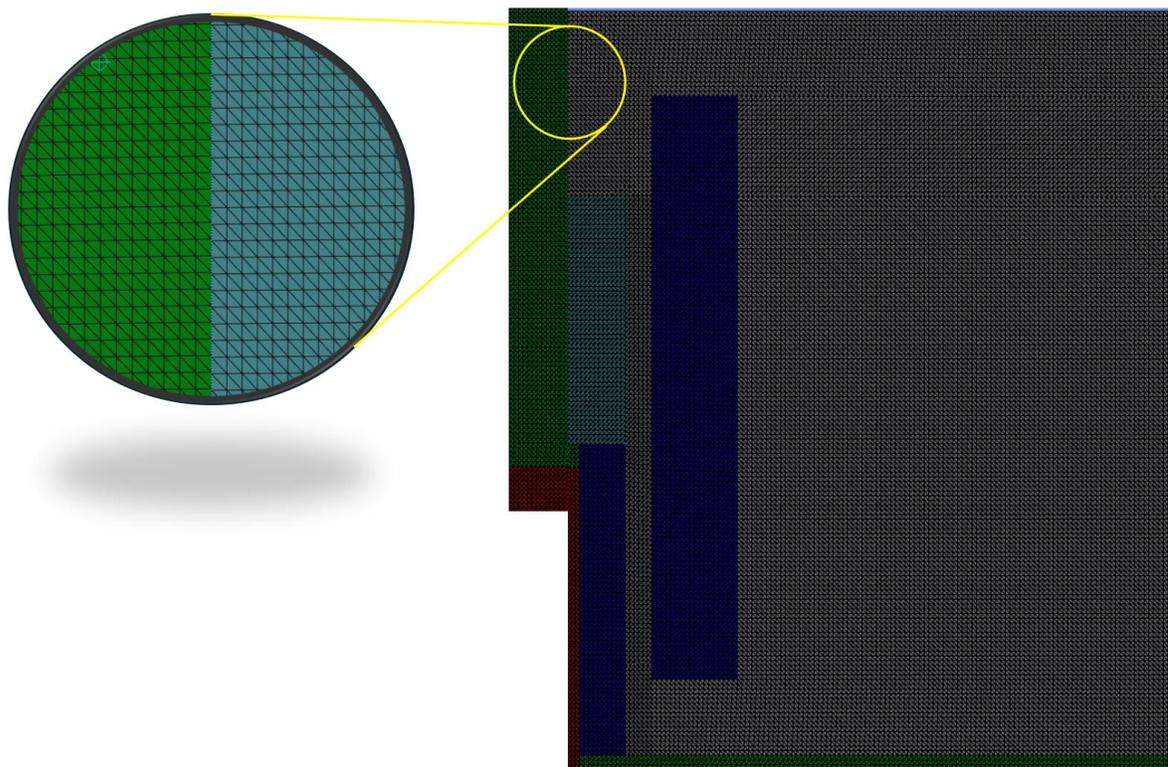


Figura 2.15. Tipo de malla usada en la simulación termo-mecánica

Análisis paramétrico para evaluar la falla del ladrillo refractario MgO-C

Se realizó un análisis del efecto que tienen las propiedades mecánicas en la distribución de esfuerzos y deformaciones del ladrillo refractario MgO-C. La finalidad es encontrar las propiedades mecánicas óptimas bajo las cuales el refractario podría resistir los esfuerzos térmicos originados en la interfase ánodo-refractario. El enfoque de este análisis es encontrar las propiedades mecánicas que debería tener el ladrillo refractario para que el factor de seguridad (FS) sea lo más elevado posible, exactamente en el punto donde se encuentra el esfuerzo térmico máximo. El factor de seguridad relaciona el estado de esfuerzos obtenido a través de la simulación termo-mecánica con los valores de resistencia a la tracción y compresión del ladrillo refractario. Las simulaciones desarrolladas se enumeran a continuación:

1. **Simulación termo-mecánica TM-B:** consistió en variar las propiedades de resistencia del ladrillo refractario MgO-C hasta encontrar un valor de FS igual a uno en el punto de mayor esfuerzo térmico, el cual se encontró ser justo debajo del frente de fusión. Esta condición se alcanzó después de haber multiplicado por treinta los valores reportados de resistencia a la tracción y resistencia a la compresión.

En la realidad, no es posible incrementar treinta veces la resistencia mecánica del ladrillo refractario MgO-C, por tanto, es conveniente encontrar una combinación de propiedades mecánicas que sí puedan ser alcanzadas, aunque el resultado final solo sea incrementar la vida útil del ladrillo refractario en vez de prevenir la formación de la “pata de elefante”. Con esa finalidad se desarrollaron otras dos simulaciones termo-mecánicas en las que se consideraron propiedades mecánicas más realistas:

2. **Simulación termo-mecánica TM-C:** esta simulación consistió en disminuir el módulo de Young del material refractario apisonable (ver **Figura 2.16**) de 10 a 1 GPa.
3. **Simulación termo-mecánica TM-D:** Se mantuvo un módulo de Young igual a 1 GPa en el material refractario apisonado, y se redujo dos terceras partes el módulo de Young del ladrillo refractario MgO-C acompañado de un incremento de un 20% de la resistencia a la tensión y de la resistencia a la compresión.

El objetivo de estas simulaciones es encontrar una combinación de propiedades mecánicas que permita incrementar el valor del factor de seguridad, dicho de otro modo, que permita disminuir la probabilidad de falla del material refractario en las regiones de mayor esfuerzo térmico.

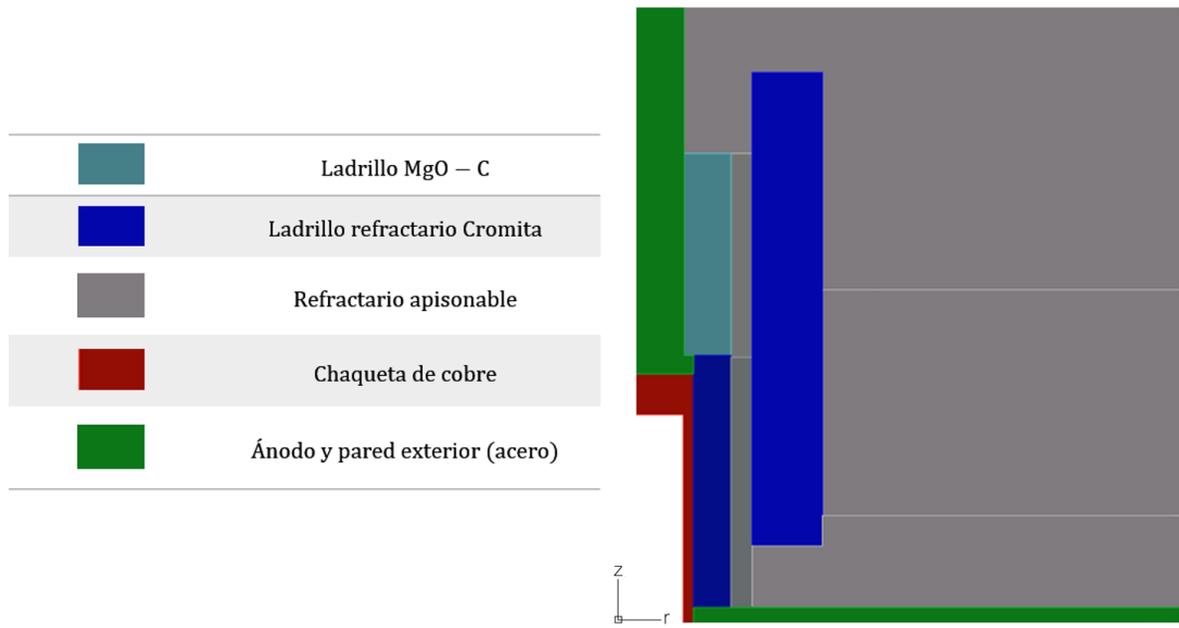


Figura 2.16. Materiales que conforman el dominio computacional de la simulación termo-mecánica.

3. Resultados y discusión

3.1 Resultados de la simulación termo-fluidodinámica ALFA

La **Figura 3.1** muestra el campo estable de temperatura calculado para el ánodo que no tiene conicidad, y que corresponde al modelo alfa. Como se recordará, se incluyeron la corriente eléctrica y las fuerzas electromagnéticas para calcular el calentamiento por efecto Joule y la fuerza de Lorentz en dirección radial sobre el fluido. El ánodo opera con una intensidad de corriente de 20 kA y la temperatura elegida del baño de metal líquido es 1833 K, que representa cuarenta grados por encima del punto de fusión del ánodo de acero (1793 K).

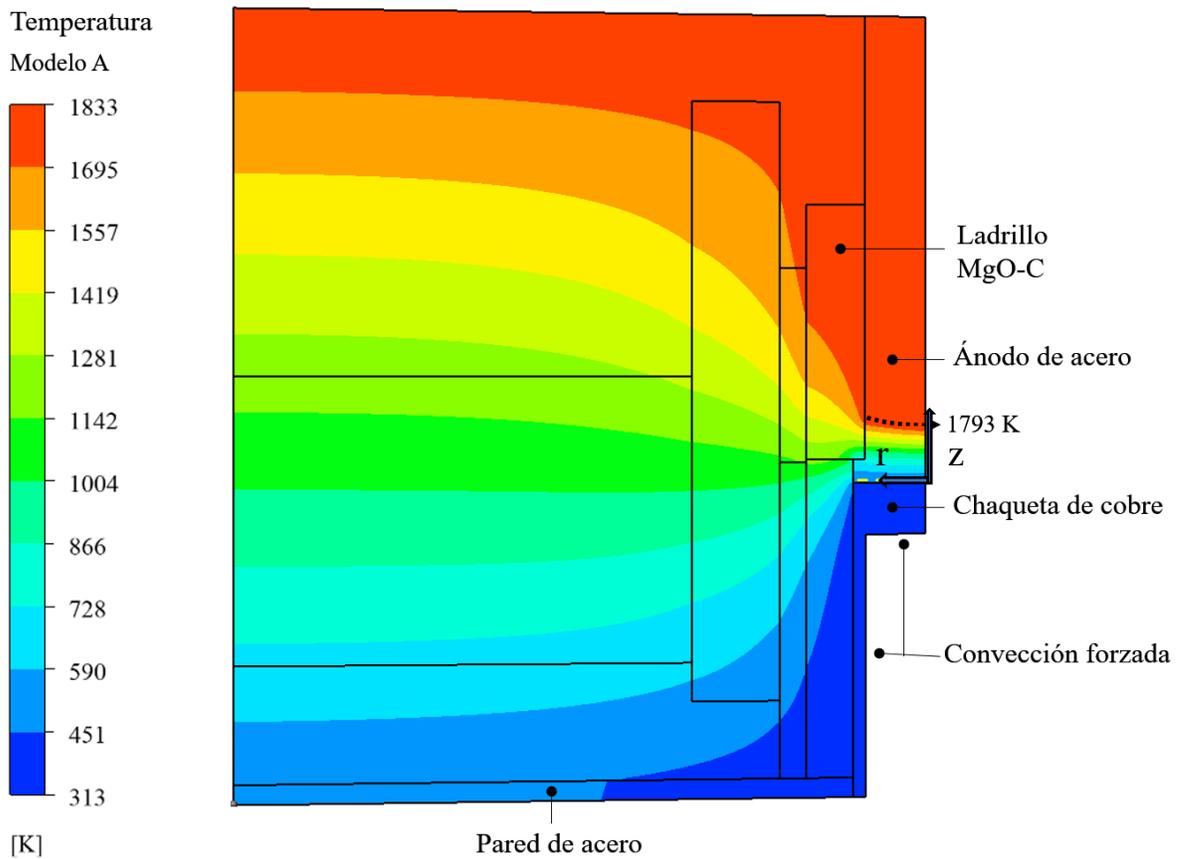


Figura 3.1. Campo estable de temperatura del piso refractario calculado mediante el modelo ALFA.

Recordemos que esta simulación representa un estado de máxima saturación térmica, que se alcanzaría si el horno operara indefinidamente en condiciones estables. La figura muestra la penetración preferencial de la temperatura a través del ánodo de acero. El frente de fusión se calculó a 100 mm por encima de la interfase cobre-acero. Los datos operativos de planta

confirman que el frente de fusión se detiene cerca de la interfase cobre-acero, y es en esta zona donde se forma la “pata de elefante”. Las **Figuras 3.2(a)-(b)** muestran fotografías de un ánodo, con sistema de enfriamiento interno, desinstalado de un horno después de haber cumplido una campaña de funcionamiento. Estas fotografías muestran la “pata de elefante” formada a una distancia de 1.24 m por encima de la base de la chaqueta de cobre. La **Figura 3.2(b)** muestra esquemáticamente la geometría de este tipo de ánodo. Puede verse que la zona donde aparece la “pata de elefante” incluye la interfase acero-cobre, por lo tanto, el frente de fusión debe estar muy cerca de ésta porque el componente de cobre no se funde durante la operación del horno.

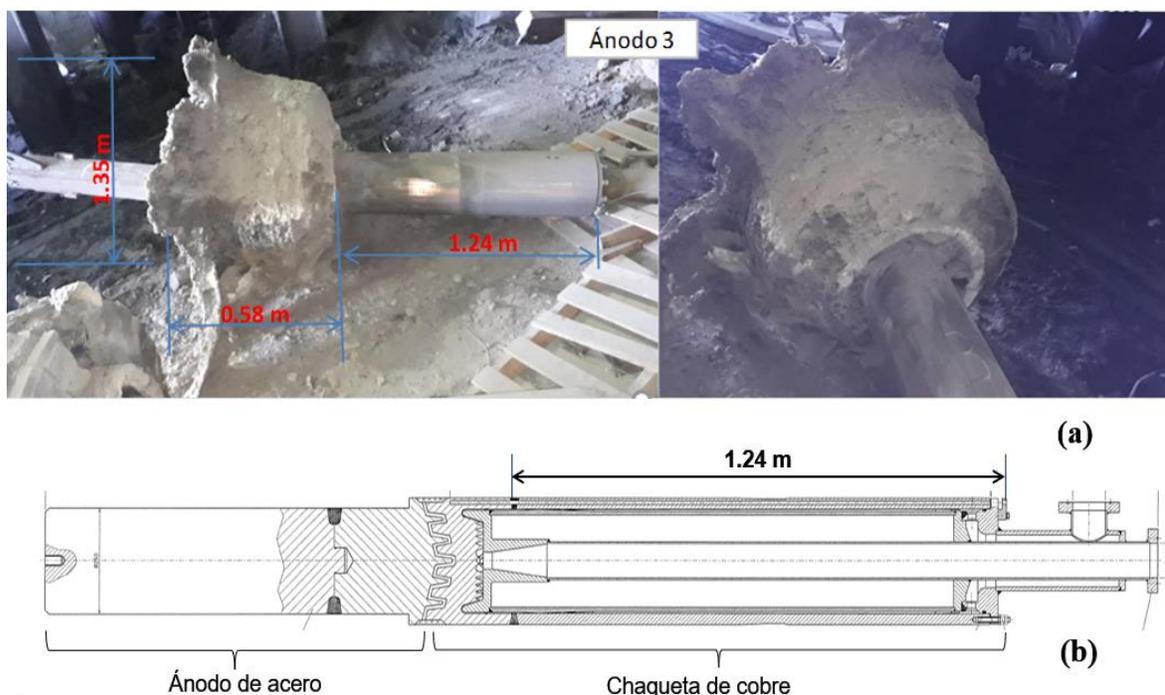


Figura 3.2. Ánodo tipo billet con sistema de enfriamiento interno: (a) fotografías de la “pata de elefante” (archivo privado Dr. Luis Ochoterena Booth, RHI México), (b) representación esquemática del ánodo.

La **Tabla 3.1** presenta los flujos calor a través de las diferentes fronteras del dominio de cálculo, y la rapidez de generación de calor por efecto Joule, obtenidas a través de la simulación ALFA. De acuerdo con los resultados de esta simulación, en la parte superior (frontera F2, **Fig. 2.5**) del ánodo entra el 68% del calor total que proviene del acero fundido de la cuba del horno. El 32% restante lo transfiere a través del piso refractario. Por otra parte,

el calor generado por el efecto Joule representa el 45% del calor que ingresa desde la cuba del horno. Por lo tanto, este calor generado es una variable importante para determinar la temperatura del metal y la posición del frente de fusión.

Tabla 3.1. Flujos de calor a través de las fronteras y por efecto Joule, calculados con el modelo ALFA. Ver **Figura 2.5** para la descripción de las fronteras.

Frontera	Flujo de calor (W)
Pared exterior de acero, F5	-8912
Sistema de enfriamiento, F6+F7	-32180.5
Parte superior del ánodo, F2	19292
Piso refractario, F3	9117.4
Generación en ánodo por efecto Joule	12682
Balance neto	-1.1

La **Figura 3.3** muestra el perfil de la velocidad, v_z , a lo largo de la posición radial en la cavidad del ánodo y a diferentes alturas, z . Los valores negativos de velocidad se presentan en la región central de la cavidad anódica e indican que el fluido se dirige hacia abajo, es decir hacia el sistema de enfriamiento. Por el contrario, los valores positivos se presentan cerca de la pared de la cavidad anódica e indican que el fluido se mueve hacia arriba. El origen del sistema de referencia, $z = 0$, está ubicado en la interfase acero-cobre. En $z=158$ mm la velocidad del acero es muy reducida, ya que es menor que 0.05 m/s. En cambio, en $z=953$ mm la velocidad alcanza una magnitud de 0.420 m/s en una posición cercana a la pared de la boca de la cavidad anódica. Esta velocidad sugiere la mayor posibilidad de desgaste del refractario por erosión en dicha región. En alturas intermedias, $458 \leq z \leq 758$ mm, la velocidad del líquido que asciende cerca de la pared de la cavidad no excede 0.10 m/s. Por lo anterior, la región donde se ha observado la “pata de elefante” estaría sujeta a un efecto erosivo muy moderado como resultado de esta velocidad, relativamente baja, de acero fundido.

El ladrillo refractario MgO-C sufre daño durante la operación del horno porque está en contacto con el ánodo en todo momento. La hipótesis inicial de que la fuerza

electromagnética provocaría una agitación erosiva en la zona donde se forma la “pata de elefante” pierde validez a la luz de los resultados anteriores. La simulación demostró que la fuerza electromagnética no genera corrientes de alta velocidad en la parte inferior del ánodo, como resultado del confinamiento del flujo en la cavidad anódica.

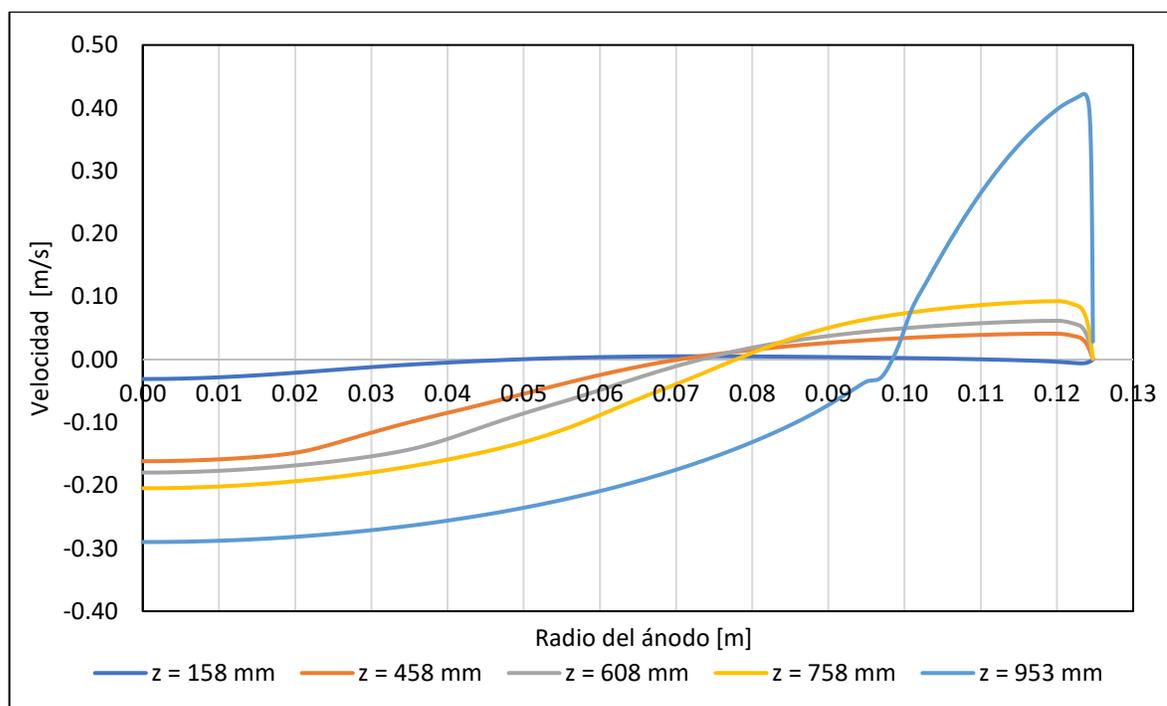


Figura 3.3. Perfil de velocidad de acero líquido calculado en función de la posición radial en la cavidad anódica y a diferentes alturas z . Modelo ALFA.

La variable que tiene relación directa con la capacidad erosiva de un flujo de fluido sobre una pared es el esfuerzo de corte que el propio fluido ejerce sobre la pared. La **Figura 3.4** muestra el esfuerzo cortante (σ_{shear}) calculado en la pared refractaria y en función de la altura en la cavidad anódica. Puede apreciarse claramente que los valores de σ_{shear} son significativos después de $z = 0.850$ m. Es decir, el esfuerzo es importante solo en la parte superior de la cavidad anódica. Por el contrario, en el resto de la pared refractaria se presentan bajos esfuerzos de corte, lo cual confirma lo improbable que la erosión por la corriente de metal sea una causa principal de la formación de la “pata de elefante”.

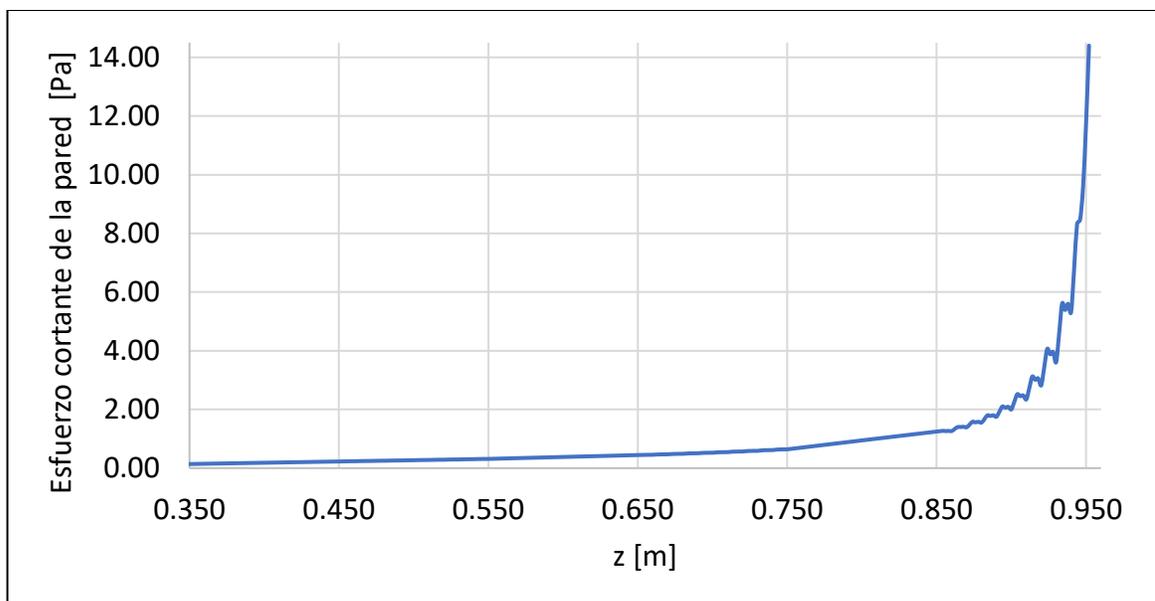


Figura 3.4. Esfuerzo cortante calculado en la pared de las mangas refractarias, y a lo largo de la altura de la cavidad anódica.

En complemento a lo anterior, la energía cinética turbulenta se relaciona con el nivel de agitación del metal y no necesariamente con la capacidad de erosión del líquido en movimiento. Una forma de visualizar el movimiento del acero dentro de la cavidad anódica es mediante la gráfica de las líneas de corriente de acero calculadas y mostradas en la **Figura 3.5(a)**. La figura muestra curvas cuya separación mutua es proporcional a la velocidad local del líquido. Estas curvas aparecen más cercanas entre sí en la parte superior de la cavidad anódica, es decir donde la coordenada z es mayor. Hay que recordar que el líquido desciende por el centro del ánodo y asciende por la zona cercana a la pared refractaria. La correspondiente distribución de energía cinética turbulenta, k_t , se muestra en la **Figura 3.5(b)**. En este caso, los valores más altos se encuentran en una región intermedia de la cavidad anódica. Es decir, donde se presenta el cambio de dirección del movimiento del líquido. Por el contrario, en la región cercana a la pared refractaria, la energía cinética turbulenta es relativamente pequeña. Esto se atribuye a la laminarización del flujo de líquido como resultado de la fricción con dicha pared. Por lo anterior, la erosión del refractario se asocia con elevados esfuerzos de corte que se presentan en la pared del refractario cerca de la boca de la cavidad anódica, tal como se ha reportado previamente (Kazak, 2014). Por lo anterior, se verifica que la “pata de elefante” no se puede atribuir a la velocidad del fluido ni

al esfuerzo de corte en la pared refractaria en dicha zona. El nivel de agitación representado por la energía cinética turbulenta si es importante en la zona de la “pata de elefante” pero solamente en el seno del acero líquido, no en la pared refractaria. Por tanto, la agitación por sí misma tampoco jugaría un papel importante.

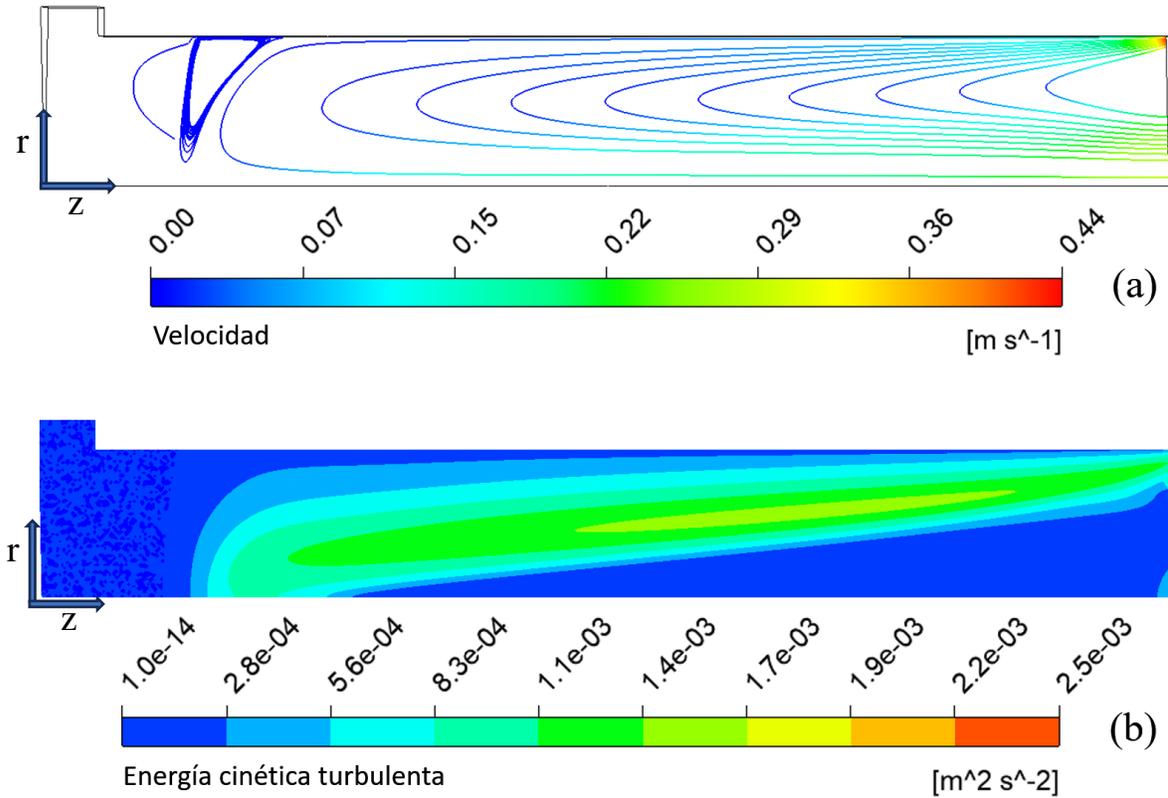


Figura 3.5. Simulación ALFA, cavidad anódica. (a) Líneas de corriente en el acero líquido, y (b) campo de energía cinética turbulenta.

3.2 Resultados de la simulación termo-fluidodinámica BETA

La **Figura 3.6** muestra el campo de temperatura obtenido a través de la simulación BETA. La ligera conicidad de la cavidad anódica es una suposición con base en observaciones reportadas en la línea de producción (ver Apéndices A y B). Se puede observar que el frente de fusión penetra aún más en la cavidad anódica comparado con la simulación ALFA.

El incremento del área transversal en la parte superior del ánodo provoca un decremento en la generación de calor debido a una disminución de la potencia por efecto Joule, como habría de esperarse, pero el incremento de área provoca mayor transporte convectivo de calor hacia

el sistema de enfriamiento, siendo inevitable la fusión completa del ánodo. Otra observación interesante es que en la chaqueta de cobre se forma un gradiente de temperatura igual a ~ 5.35 K/mm: en una distancia de tan solo 105 mm la temperatura varía desde 400 K hasta 960 K. Bajo estas condiciones térmicas se pueden generar esfuerzos que dañarían la manga refractaria y la chaqueta de cobre. Esta situación explica porque la “pata de elefante” afecta varias secciones del material refractario.

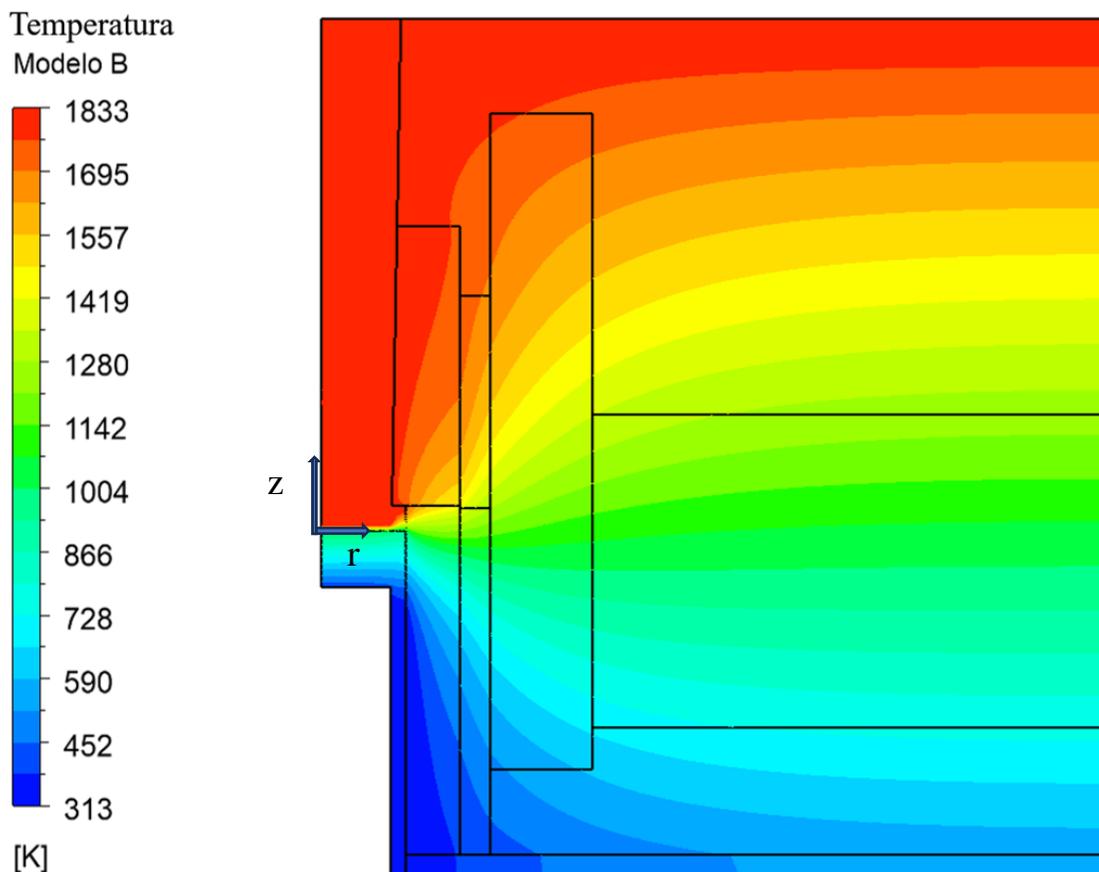


Figura 3.6. Campo estable de temperatura del piso refractario calculado mediante el modelo BETA.

La **Figura 3.7** muestra perfiles de velocidad axial, v_z , en función de la posición radial, r , a diferentes alturas, z . Los valores de velocidad negativos indican que el fluido se dirige hacia abajo, y los valores positivos en dirección contraria, hacia la boca de la cavidad anódica. A 158 mm por encima de la interfase acero-cobre la velocidad del fluido es ~ 0.22 m/s, mucho mayor que la que se presenta en la simulación ALFA a la misma altura (~ 0.05 m/s). La velocidad máxima es ascendente y tiene un valor de ~ 0.39 m/s localizándose cerca de la boca de la cavidad anódica. El esfuerzo cortante máximo es 11.38 Pa, y también se encuentra en

la superficie del material refractario que está cerca de la parte superior del ánodo. Aunque la penetración del frente de fusión es mayor, se observa un comportamiento fluidodinámico similar al que se obtuvo en la simulación ALFA, obteniendo una conclusión similar. La erosión ejercida por el flujo de metal es poco probable que sea la causa principal de la formación de la “pata de elefante”.

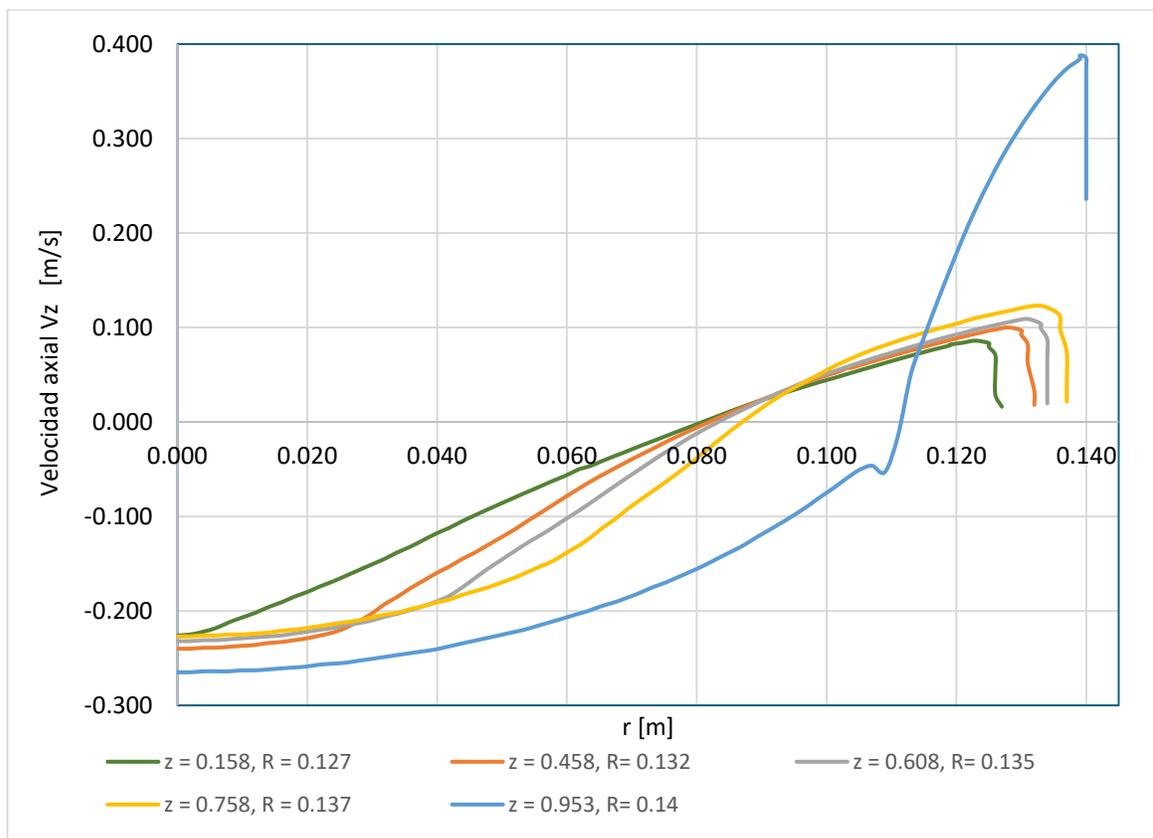


Figura 3.7. Perfil de velocidad en función de la posición radial a diferentes posiciones z . Nótese que el radio de la cavidad anódica, R , aumenta con la altura debido a su conicidad. Modelo BETA.

La **Figura 3.8(a)** muestra las líneas de corriente de acero líquido calculadas dentro de la región anódica. Cerca de la interfase acero-cobre, la separación entre líneas de corriente es menor que la correspondiente para el modelo ALFA, lo que representa una mayor velocidad, de ~ 0.1 m/s. Este resultado confirma que una ligera conicidad de la cavidad anódica favorece la presencia de corrientes de fluido de mayor velocidad en zonas más profundas de dicha cavidad. La **Figura 3.8(b)** muestra el campo calculado de energía cinética turbulenta k_t . En este caso, existe una magnitud de turbulencia importante en la proximidad al sistema de

enfriamiento. Sin embargo, al igual que en el modelo ALFA, esta turbulencia se ubica en el seno del líquido, y no en la proximidad a la pared refractaria.

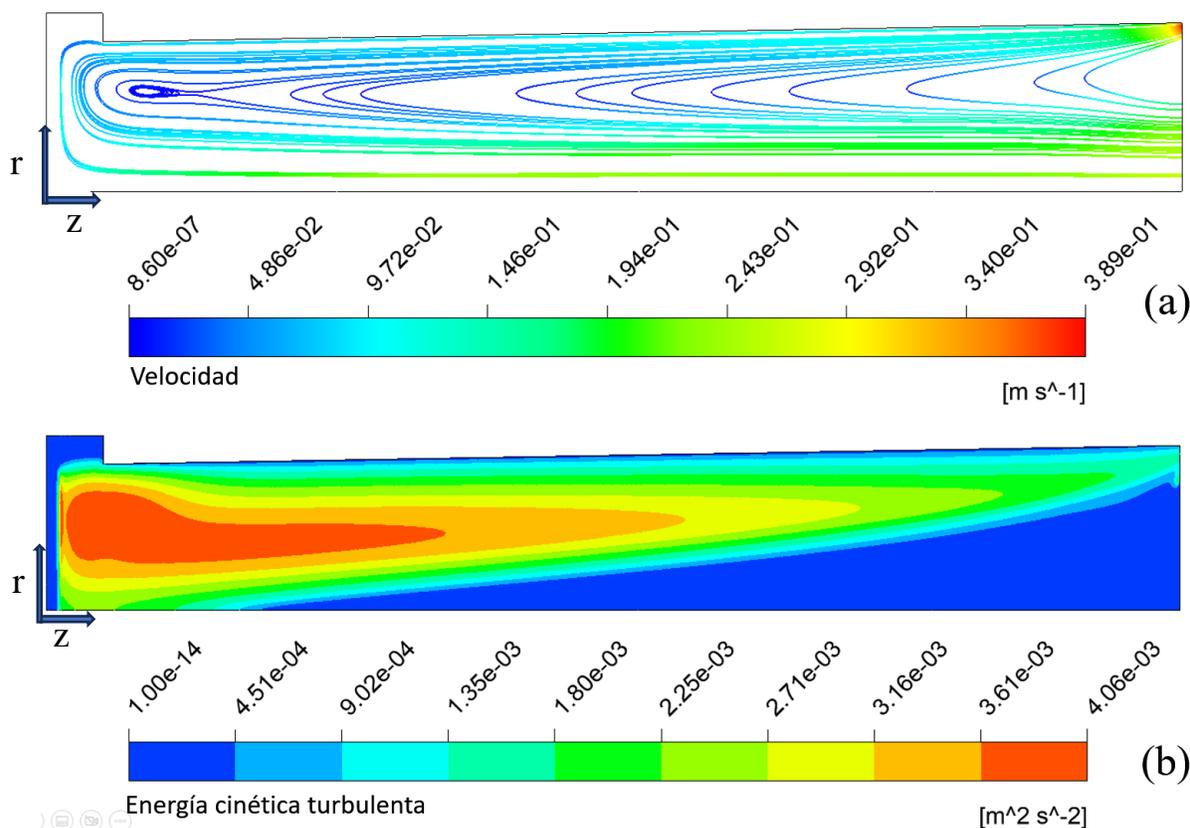


Figura 3.8. Simulación BETA, cavidad anódica. (a) Líneas de corriente en el acero líquido, y (b) campo de energía cinética turbulenta.

Los resultados numéricos mostrados en esta sección demuestran que la mayor probabilidad de erosión por efecto del acero líquido en movimiento ocurre en la boca de la cavidad anódica. Esta erosión puede originar una conicidad en la cavidad anódica, que, a su vez, incrementa el flujo circulatorio de metal en la cavidad. Sin embargo, los cálculos sugieren que la baja velocidad y turbulencia en la pared de refractario situada en la región de aparición de la “pata de elefante” no serían suficientes para la formación de este defecto.

La causa principal de formación de la “pata de elefante” debe tener su origen en la falla mecánica del ladrillo refractario por la aparición de esfuerzos térmicos. Durante la operación del horno se forma un gradiente de temperatura en el material refractario, que genera

esfuerzos que podrían exceder el límite de resistencia mecánica de los materiales. A continuación, se presentan los resultados de las simulaciones termo-mecánicas.

3.3 Simulación termo-mecánica TM-A

La simulación termo-mecánica TM-A se calculó considerando el mismo dominio computacional y el campo de temperatura de la simulación ALFA. Por lo tanto, se trata de un cálculo termo-mecánico desacoplado en condiciones de estado estable.

La **Figura 3.9(a)** muestra la distribución calculada del esfuerzo equivalente de Von Mises en todo el piso refractario. Lo más interesante de estos resultados es que el valor máximo de esfuerzo equivalente de Von Mises se encuentra justo debajo del frente de fusión. El ladrillo refractario MgO-C (identificado con la letra B) está sujeto a un estado complejo de esfuerzos térmicos. La zona líquida del ánodo (A) no tiene rigidez y se comprime por el material refractario a su alrededor, y la parte sólida del ánodo (C) genera compresión sobre la manga refractaria. Además, el ladrillo MgO-C está sometido a flexión. La **Figura 3.9(b)** es una magnificación de la zona donde aparecen los esfuerzos equivalentes máximos de Von Mises.

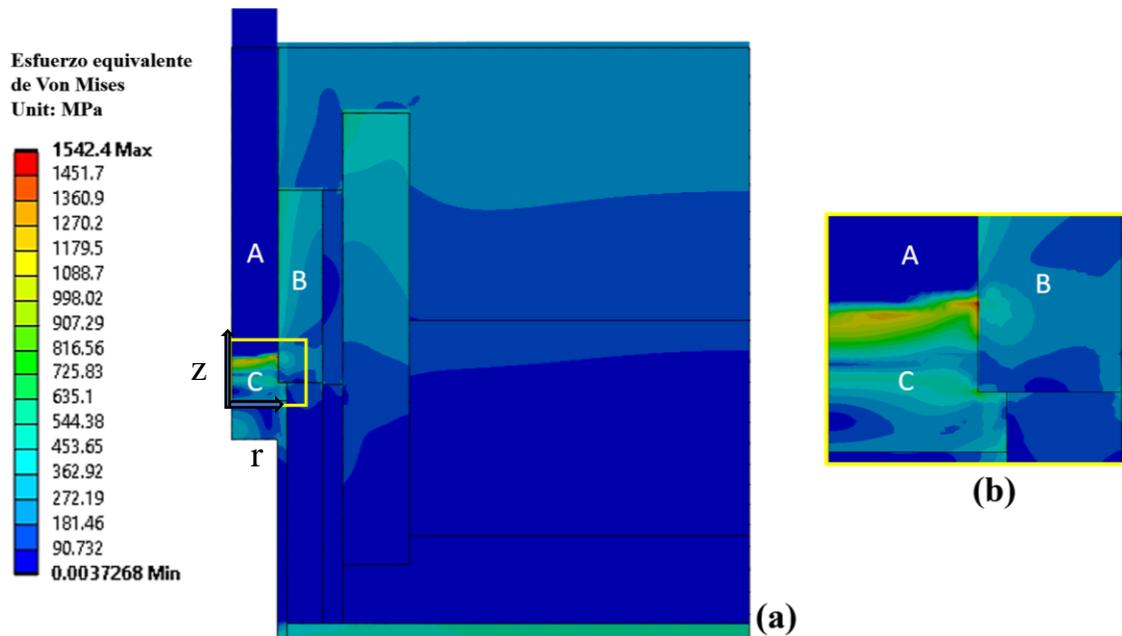


Figura 3.9. (a) Distribución calculada del esfuerzo equivalente de Von Mises, usando el modelo ALFA, y (b) magnificación de la zona con los máximos esfuerzos equivalentes.

La **Figura 3.10** muestra el campo de deformación radial del ladrillo refractario MgO-C. Se puede verificar que, en las condiciones de máxima saturación térmica consideradas, el ladrillo se dobla. Por encima del frente de fusión el ladrillo se deforma negativamente hasta alcanzar un valor máximo de 0.85 mm. Por debajo del frente de fusión el ladrillo se deforma positivamente y se alcanza un valor máximo de 1.57 mm.

En el interior del ladrillo está presente una deformación positiva y negativa que podría generar grietas. Estos resultados permiten visualizar las deformaciones que podrían generarse si el ladrillo refractario tuviera un comportamiento plástico.

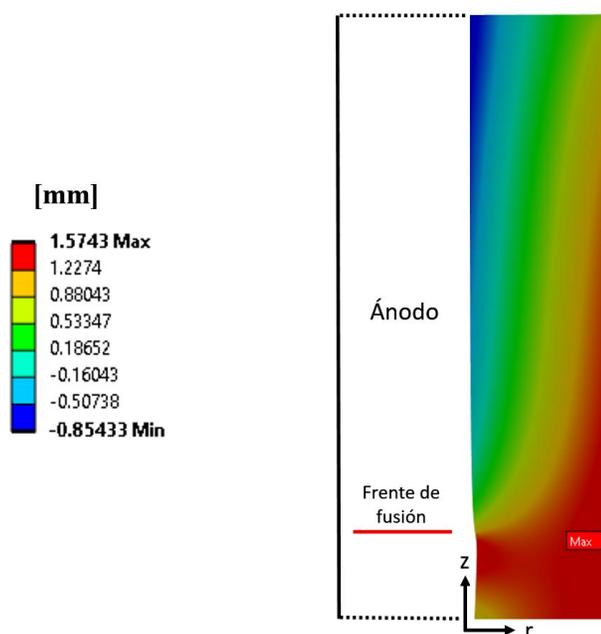


Figura 3.10. Campo de deformación radial en el ladrillo refractario MgO-C. Simulación TM-A.

La **Figura 3.11** muestra el esfuerzo compresivo que ejerce el ánodo sobre el ladrillo refractario MgO-C, en función de su altura. A una altura de 70 mm se encuentra el esfuerzo compresivo máximo (1125 MPa), justo debajo del frente de fusión. Superada esa altura el esfuerzo compresivo cae dramáticamente hasta cero, porque el metal líquido no ejerce compresión sobre el material refractario. Una pequeña zona del ladrillo refractario (0-15 mm de altura) no está bajo compresión porque el ánodo en esa región tiene el coeficiente de expansión térmica más bajo, ya que se presenta la transformación de fase eutectoide *ferrita + cementita* → *austenita*.

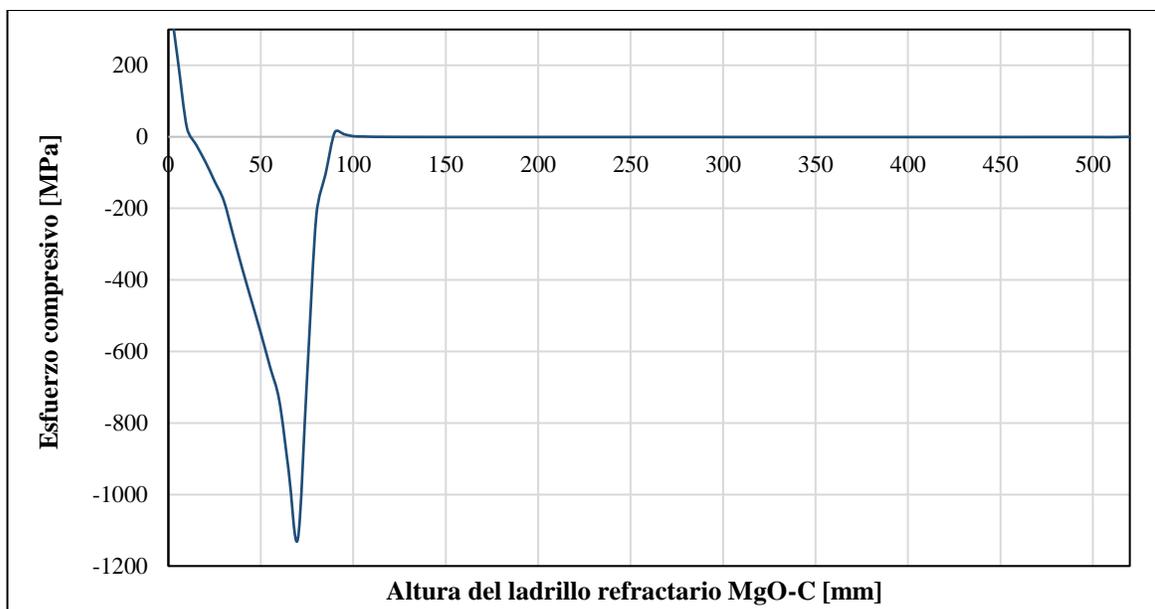


Figura 3.11. Esfuerzo compresivo sobre la superficie del ladrillo refractario MgO-C. Simulación TM-A.

Se utilizó el criterio de Mohr-Coulomb para materiales frágiles para saber si el material refractario podría fallar bajo los esfuerzos compresivos obtenidos en esta simulación. A partir de este criterio se deduce un índice conocido como factor de seguridad, que permite evaluar fácilmente la falla de un material frágil.

La **Figura 3.12(a)** muestra los perfiles del factor de seguridad calculados en función de la altura, z , y a lo largo de diferentes líneas indicadas en la **Figura 3.12(b)**. Las líneas son: (1) superficie interna del ladrillo que tiene contacto con el ánodo, (2) parte interna del ladrillo refractario, y (3) superficie en contacto con el resto de los materiales refractarios. En cualquier posición, el valor del factor de seguridad es mucho menor que uno, lo que significa que teóricamente el ladrillo refractario tiene alta probabilidad de fallar mecánicamente. Este resultado era esperado porque el esfuerzo de compresión máximo es 1125 MPa justo debajo del frente de fusión, un valor que vence fácilmente la resistencia a la compresión del ladrillo estudiado, ~25 MPa.

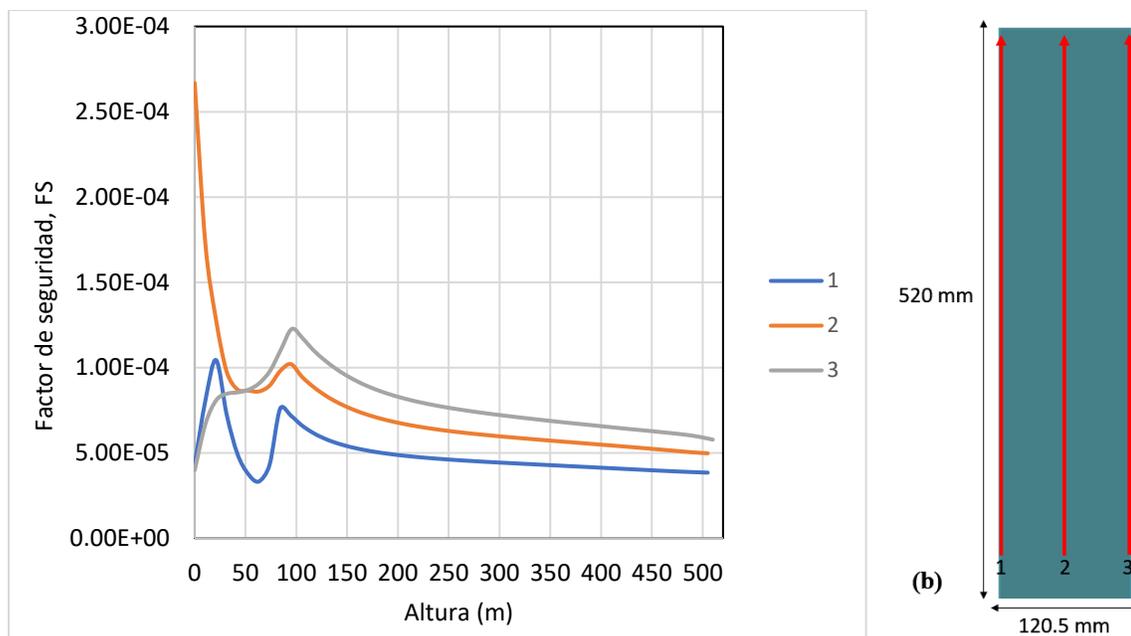


Figura 3.12. (a) Perfiles del factor de seguridad calculados en función de la altura, z , en el ladrillo refractario, y (b) líneas sobre las que se calcularon los perfiles del factor de seguridad.

Los resultados de la simulación termo-mecánica indican que el ánodo es capaz de ejercer un esfuerzo de compresión de suficiente magnitud para provocar la falla mecánica del ladrillo refractario MgO-C. Además, se genera un estado de esfuerzos complejo en el material, que puede conducir a la propagación de grietas. Los resultados numéricos de las simulaciones termo-fluidodinámicas y la simulación termo-mecánica presentada en esta sección permiten proponer, como primera aproximación, el mecanismo de formación de la pata de elefante. Este mecanismo se describe a continuación:

1. Considere la condición de estado estable, que corresponde a la máxima saturación térmica del piso refractario. Bajo esta condición extrema, el frente de fusión de acero desciende por la cavidad anódica hasta llegar a la zona donde se ha observado la “pata de elefante”. Sin embargo, la velocidad de metal calculada en dicha cavidad tiene valores muy moderados por lo que sería poco probable que se produjera la erosión del refractario. El esfuerzo de corte ejercido por el líquido sobre la pared refractaria también tiene valores bajos, lo que refuerza la afirmación anterior.
2. El frente de fusión impone una condición extrema de esfuerzo térmico sobre el refractario de la cavidad anódica. Por arriba de dicho frente, el acero fundido tiene contacto perfecto con el refractario y le transfiere gran cantidad de calor, aumentando su temperatura y por

ende su dilatación térmica sin ninguna oposición. En cambio, por debajo del frente de fusión, el refractario está relativamente frío por el efecto del sistema de enfriamiento y además el ánodo sólido restringe la dilatación que el refractario pudiera sufrir como resultado de ser “jalado” por la dilatación térmica en la región superior. Esto genera valores muy grandes de esfuerzos equivalentes de Von Mises en el refractario situado alrededor del frente de fusión, que sobrepasan la resistencia mecánica del material. Como resultado, la distribución del factor de seguridad arroja valores mucho menores que uno, indicando la inminente formación de grietas en el refractario.

3. Adicionalmente, el movimiento de metal fundido podría erosionar la boca de la cavidad anódica, ya que ahí las velocidades y el esfuerzo viscoso son máximas. El resultado de la erosión sería la conicidad de la cavidad. Con una conicidad de solamente 1° es suficiente para que el frente de fusión descienda hasta el fondo de la cavidad anódica, casi en contacto con la superficie del sistema de enfriamiento.
4. La conicidad de la cavidad anódica también conlleva la generación de mayor turbulencia en el fondo de la cavidad, la que puede favorecer la penetración de metal líquido por las grietas formadas por el gradiente de temperatura. Este metal solidificaría dentro del refractario y lo ensancharía paulatinamente dando origen a la “pata de elefante”.
5. Un horno de producción opera de forma intermitente, con una temperatura variable con el tiempo de forma cíclica. Esto implica que el frente de fusión se moverá también de forma cíclica, bajando y subiendo por la cavidad anódica. Lo anterior no lo exenta del análisis de los resultados obtenidos en esta tesis, ya que simplemente la región de esfuerzos máximos equivalentes de Von Mises sería la franja barrida por el movimiento cíclico del frente de fusión. Esto es consistente con el tamaño observado relativamente grande de la “pata de elefante”, ver **Figura 3.2(a)**.

3.4 Análisis paramétrico de las propiedades de los materiales

En esta sección se presentan los resultados del efecto que tienen las propiedades mecánicas de un refractario hipotético, que ocuparía el lugar del MgO-C, en el factor de seguridad (FS) en el propio refractario. El objetivo de este análisis es encontrar una combinación de propiedades mecánicas que teóricamente podrían incrementar el factor de seguridad y con ello la vida útil del ladrillo refractario. Se presentan los resultados de tres simulaciones termo-mecánicas:

1. Simulación termo-mecánica TM-B
2. Simulación termo-mecánica TM-C
3. Simulación termo-mecánica TM-D

La **Figura 3.13** muestra el perfil calculado del factor de seguridad a lo largo de la altura del ladrillo refractario usando la simulación termo-mecánica TM-B. La resistencia a la tracción y a la compresión se consideraron iguales a 30 veces los respectivos valores del refractario MgO-C. La figura muestra que los valores de FS, calculados en la superficie interna de la cavidad anódica, son mayores que uno en toda la longitud considerada, lo que aseguraría la integridad del refractario. Esto requiere que la resistencia del ladrillo refractario sea muy elevada para soportar los esfuerzos térmicos generados en el sistema. Actualmente no se conocen materiales refractarios que puedan cumplir estos requerimientos de resistencia termo-mecánica.

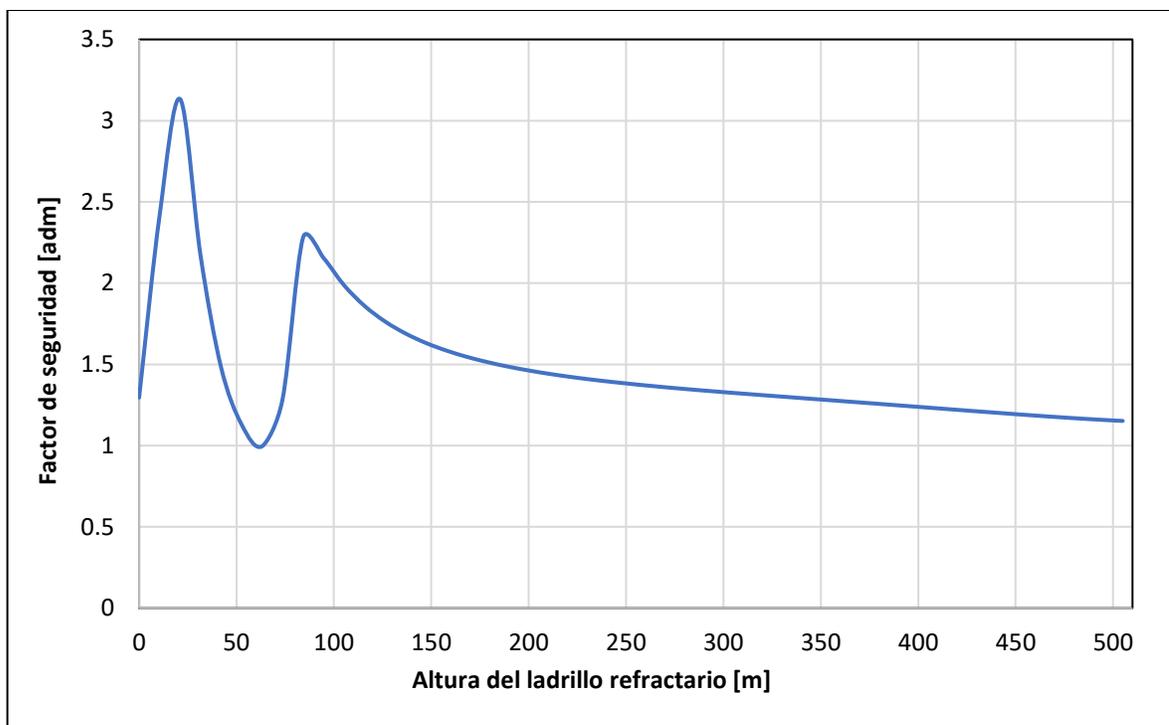


Figura 3.13. Perfil calculado del factor de seguridad a lo largo de la altura del ladrillo refractario hipotético con resistencias a la tracción y compresión 30 veces las correspondientes del refractario MgO-C. Simulación TM-B.

La simulación termo-mecánica TM-C consistió en disminuir el módulo de Young del material granular apisonado de 10 GPa a 1 GPa. La simulación TM-D mantuvo un módulo de Young igual a 1 GPa en el material apisonado, se redujo dos terceras partes el módulo de Young del ladrillo refractario MgO-C y se incrementó un 20% tanto la resistencia a la tensión como la resistencia a la compresión.

La **Figura 3.14** muestra los perfiles calculados del factor de seguridad a lo largo de la altura del ladrillo refractario, obtenidos con las simulaciones termo-mecánicas TM-A, TM-C y TM-D. Ninguna combinación de propiedades mecánicas permitió incrementar significativamente el factor de seguridad. Los resultados muestran que en ningún caso se alcanzó un valor de FS ≥ 1 . No obstante, por encima de 70 mm el FS aumenta de forma notable usando las simulaciones TM-C y TM-D. Esto se debe a que la parte superior del ladrillo refractario puede expandirse con mayor libertad porque está en contacto con metal líquido en una cara y material refractario apisonado por la opuesta, ambos con baja rigidez. Quizá la mejor alternativa práctica para incrementar el FS sea seleccionar materiales refractarios con los

mayores valores posibles de resistencia a la tensión y compresión, para aumentar en lo posible el FS y con ello prolongar la vida útil de los materiales al retrasar la aparición de la “pata de elefante”.

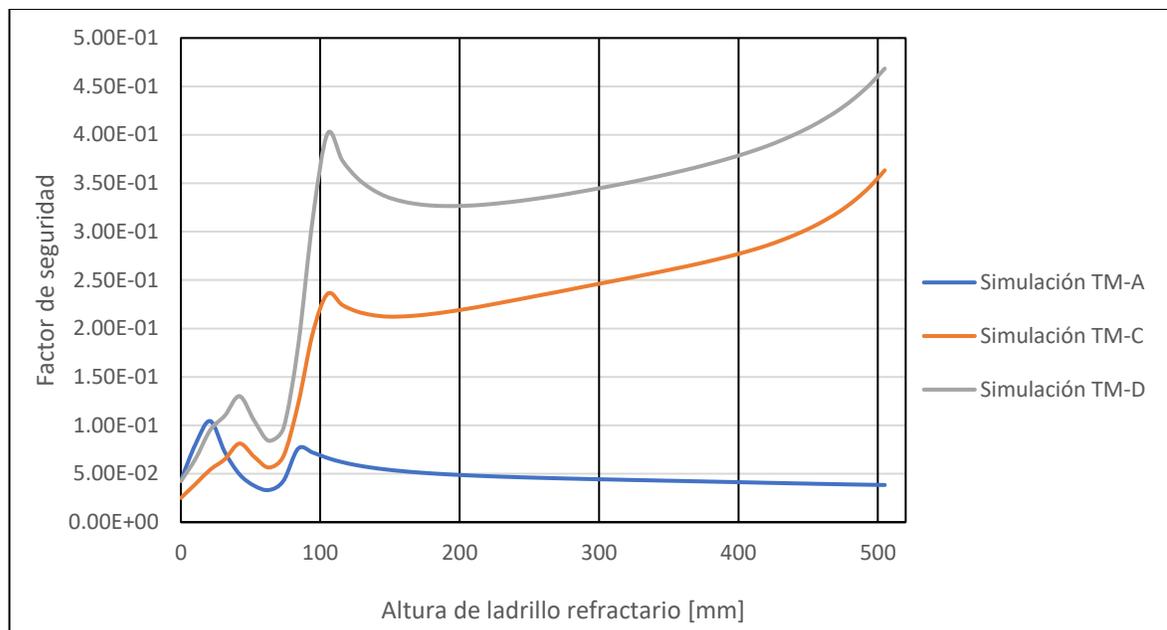


Figura 3.14. Comparación de los perfiles calculados del factor de seguridad a lo largo de la altura del ladrillo refractario, obtenidos con las simulaciones, TM-A, TM-C y TM-D.

3.5 Efecto del diseño del piso del horno

Los resultados de simulación G1 y G2 no son relevantes. Se pensaba que colocando el sistema de enfriamiento más cerca del piso refractario, se podría disminuir la penetración del frente de fusión porque la superficie lateral del sistema de enfriamiento sería más grande, lo que permitiría enfriar mejor el material refractario. Los resultados numéricos mostraron que el ánodo se funde completamente, incluso llega a formarse un gradiente térmico en la chaqueta de cobre. Por lo tanto, subir el sistema de enfriamiento no tiene alguna ventaja operativa. Las **Figuras 3.15** y **3.16** muestran el campo de temperatura de la simulación G1 y G2, respectivamente.

La **Figura 3.17** muestra el campo de temperatura obtenido mediante la simulación G3. Recordemos que, mediante la simulación ALFA, el frente de fusión se ubicó a 100 mm por encima de la interfase cobre-acero. Con este diseño el frente de fusión se ubica a 290 mm por encima de la misma interfase, sin embargo, el material refractario seguiría expuesto a

gradientes y esfuerzos térmicos. Este diseño de ánodo podría incrementar la vida útil del sistema porque la superficie superior de la chaqueta de cobre es más grande, esto permite extraer mayor cantidad de calor. Además, la generación de calor por el efecto Joule disminuye a medida que aumenta el radio del ánodo. Esto podría incrementar considerablemente la vida útil del material refractario, tal como sugirió Liu (2008) en su trabajo de simulación computacional, donde propone un ánodo con radios distintos.

La **Figura 3.18** muestra el campo de temperatura obtenido mediante la simulación G4. El ánodo cambia abruptamente de radio a 500 mm por encima de la interfase acero-cobre. Esto tiene un efecto en la generación de calor por el efecto Joule, siendo distinto en estas dos zonas. En este caso el frente de fusión se ubica 280 mm por encima de la interfase acero-cobre. Este diseño puede extraer mayor cantidad de calor, ya que el área superior de la chaqueta de cobre es más grande. Como en los casos anteriores, los materiales refractarios que tienen contacto con el ánodo presentan gradientes térmicos importantes. La geometría G4 puede fabricarse e instalarse con mayor facilidad. La construcción de la geometría G3 podría ser complicada, por la manera en que se tendrían que acomodar los materiales refractarios alrededor del ánodo, e incluso habría mayor probabilidad de que colapsen durante la operación del horno

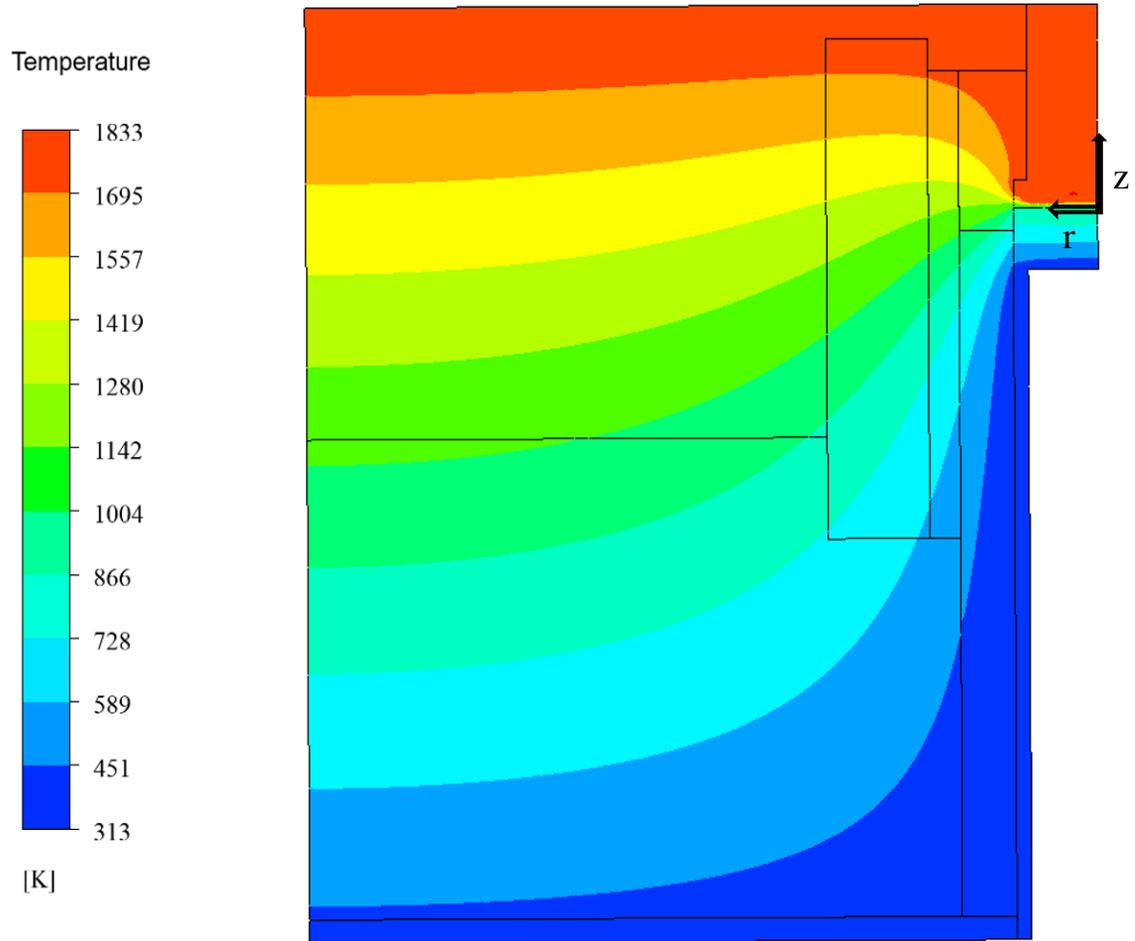


Figura 3.15. Campo de temperatura obtenido mediante la simulación G1.

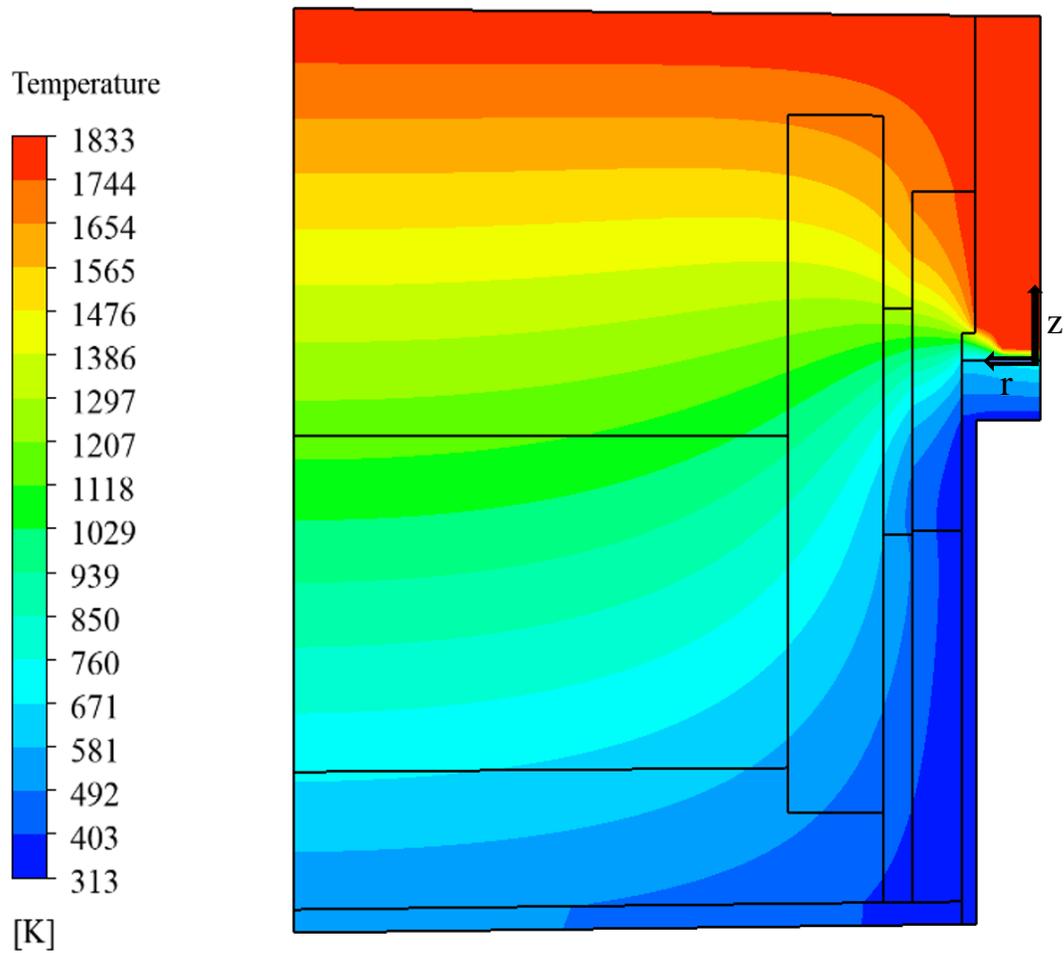


Figura 3.16. Campo de temperatura obtenido mediante la simulación G2.

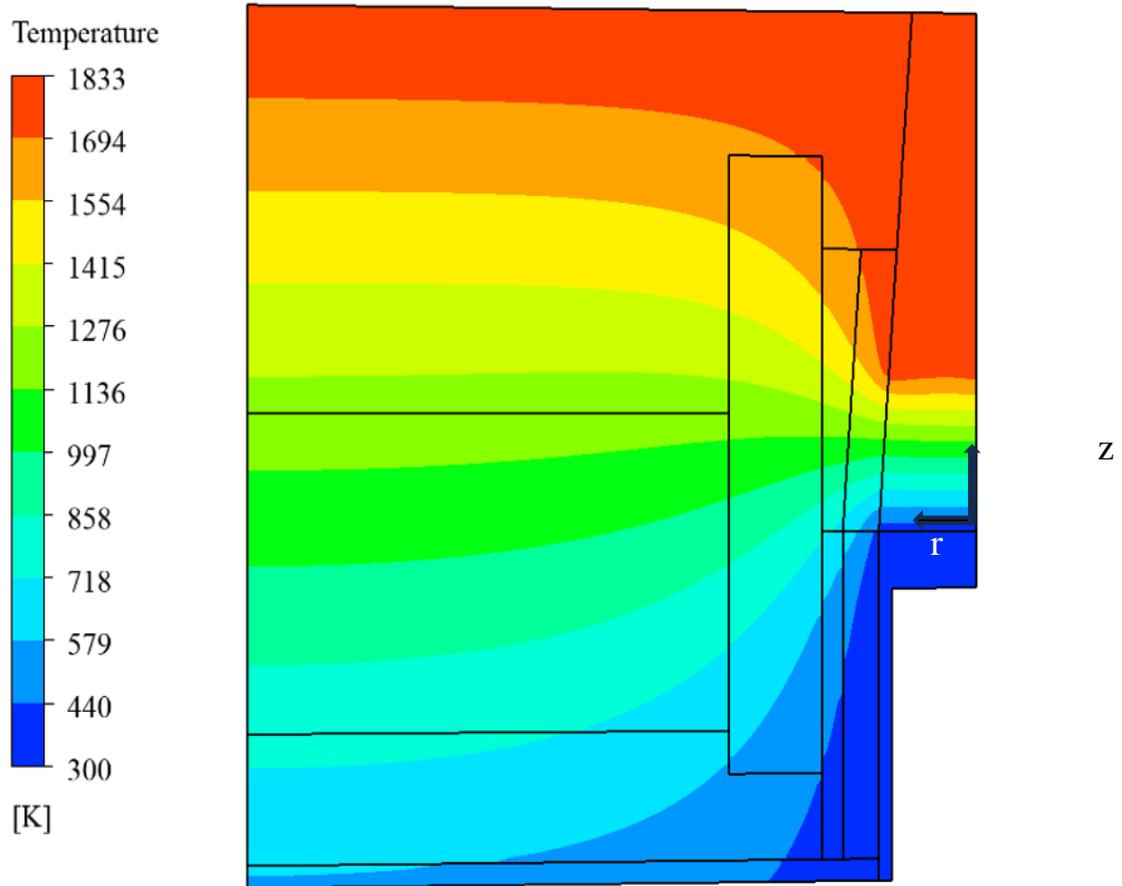


Figura 3.17. Campo de temperatura obtenido mediante la simulación G3.

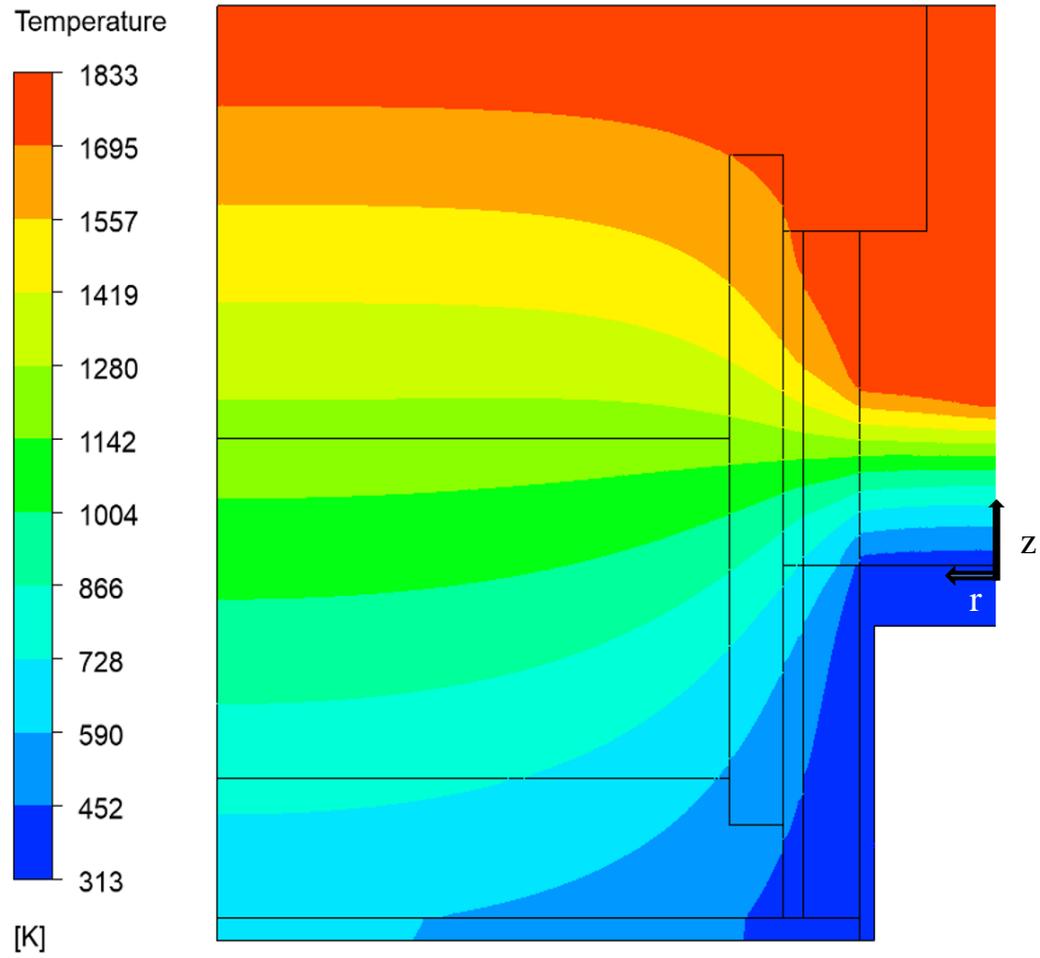


Figura 3.18. Campo de temperatura obtenido mediante la simulación G4.

4. Resumen y Conclusiones

Esta tesis es un estudio numérico del comportamiento termo-mecánico del piso de un horno de corriente directa, bajo condiciones de operación en estado estable. Se considera una región representativa del piso refractario que incluye un solo ánodo de acero tipo billet, mangas refractarias que lo enfundan y material refractario apisonado en el resto del piso. Se resolvieron las ecuaciones diferenciales de conservación de masa, momentum y energía en dicho dominio, sujetas a condiciones a la frontera apropiadas. Se consideró el movimiento de acero líquido como resultado de la fuerza electromagnética, así como la rapidez de generación de calor por el efecto Joule. Una vez calculado el campo de temperatura, se calculó el campo de esfuerzos y deformaciones asumiendo la teoría elástica de los materiales. Se empleó el criterio de falla Coulomb-Mohr para materiales frágiles a través del factor de seguridad para determinar la posibilidad de generar fracturas en el refractario por el efecto combinado del gradiente térmico y de las condiciones de frontera para la ecuación diferencial de equilibrio mecánico. Si $FS < 1$, entonces hay altas posibilidades de que se generen fracturas.

Se encontró que el frente de fusión de acero desciende por la cavidad anódica hasta llegar a la zona donde se ha observado la “pata de elefante”. Sin embargo, la velocidad de metal calculada en dicha cavidad tiene valores muy moderados por lo que sería poco probable que se produjera la erosión del refractario. El esfuerzo de corte ejercido por el líquido sobre la pared refractaria también tiene valores bajos, lo que refuerza la afirmación anterior.

El frente de fusión impone una condición extrema de esfuerzo térmico sobre el refractario de la cavidad anódica. Por arriba de dicho frente, el acero fundido tiene contacto perfecto con el refractario y le transfiere gran cantidad de calor, aumentando su temperatura y por ende su dilatación térmica sin ninguna oposición. En cambio, por debajo del frente de fusión, el refractario está relativamente frío por el efecto del sistema de enfriamiento y además el ánodo sólido restringe la dilatación que el refractario pudiera sufrir como resultado de ser “jalado” por la dilatación térmica en la región superior. Esto genera valores muy grandes de esfuerzos equivalentes de Von Mises en el refractario situado alrededor del frente de fusión, que sobrepasan la resistencia mecánica del material. Como resultado, la distribución del factor

de seguridad arroja valores mucho menores que uno, indicando la inminente formación de grietas en el refractario.

Adicionalmente, el movimiento de metal fundido podría erosionar la boca de la cavidad anódica, ya que ahí las velocidades y el esfuerzo viscoso son máximas. El resultado de la erosión sería la conicidad de la cavidad. Con una conicidad de solamente 1° es suficiente para que el frente de fusión descienda hasta el fondo de la cavidad anódica, y casi haga contacto con la superficie del sistema de enfriamiento. Por lo tanto, reducir el deterioro de la boca de la cavidad anódica puede tener un efecto positivo en el incremento de la vida útil del ánodo.

La conicidad de la cavidad anódica también conlleva la generación de mayor turbulencia en el fondo de la cavidad, la que puede favorecer la penetración de metal líquido por las grietas formadas por el gradiente de temperatura. Este metal solidificaría dentro del refractario y lo ensancharía dando origen a la “pata de elefante”.

Se encontró que cambios en los valores de las propiedades mecánicas de los materiales refractarios y en el diseño del sistema refractario-ánodo, no tienen un efecto significativo en el factor de seguridad, excepto cuando la resistencia última de tensión y compresión del material refractario se incrementaron aproximadamente 30 veces más por encima de sus valores típicos. Por lo tanto, se concluye que no es posible evitar la formación de la “pata de elefante” usando los materiales refractarios comercialmente disponibles. Solamente, sería posible incrementar ligeramente el factor de seguridad usando materiales refractarios con mayor resistencia termo-mecánica, lo que se podría traducir en un alargamiento de la vida útil del sistema anódico.

El diseño anódico que posee ciertas ventajas operativas es aquel que tiene dos radios distintos: un mayor radio en la parte inferior. Esto tiene un efecto en la generación de calor por el efecto Joule, siendo distinto en estas dos zonas. En este diseño de ánodo el frente de fusión se ubica 280 mm por encima de la interfase acero-cobre. Este diseño puede extraer mayor cantidad de calor, ya que el área superior de la chaqueta de cobre es más grande. Se seguirían presentando gradientes térmicos importantes en los materiales refractarios que tienen contacto con el ánodo, pero quizá tomaría más tiempo alcanzar la penetración máxima

del frente de fusión. Este diseño ya ha sido sugerido en un trabajo de simulación computacional por Liu (2008).

Un horno de producción opera de forma intermitente, con una temperatura variable con el tiempo de forma cíclica. Esto implica que el frente de fusión se moverá también de forma cíclica, bajando y subiendo por la cavidad anódica. Lo anterior no lo exenta del análisis de los resultados obtenidos en esta tesis, ya que simplemente la región de esfuerzos máximos equivalentes de Von Mises sería la franja barrida por el movimiento cíclico del frente de fusión. Esto es consistente con el tamaño observado relativamente grande de la “pata de elefante”.

Bibliografía

- Ansys . (2022). *Ansys Fluent Theory Guide*. Canonsburg, PA: ANSYS Inc.
- Arzpeyma, N. (2011). *Modelling of Electric Arc Furnaces (EAF) with electromagnetic stirring*. Stockholm, Suecia : School of Industrial Engineering and Management.
- Biswas, S., & Sarkar, D. (2020). *Introduction to Refractories for Iron and Steelmaking*. Suiza: Springer.
- Callister, W. D. (1996). *Introducción a la Ciencia e Ingeniería de Materiales*. Barcelona: Editorial Reverté.
- Calvo, W. A. (2019). *Corrosión de Materiales Refractarios Conteniendo Carbono: Aspectos Metodológicos y Comportamiento de los Materiales*. Mar del Plata, Argentina: Universidad Nacional de Mar del Plata.
- Castillejos, A. H., Acosta, F. A., Pedroza, M. A., & Herrera, M. A. (2000). Analysis, design and performance of bottom anodes of DC furnaces. (M. a. Canadian Institute of Mining, Ed.) *The Brimacombe Memorial Symposium*, 451-465.
- Chibani, A., Dehane, A., Merouani, S., Bougriou, C., & Guerraiiche, D. (2022). Melting/solidification of phase change material in a multi-tube heat exchanger in the presence of metal foam: effect of the geometrica configuration of tubes . *Energy Storage and Saving* , 241-258.
- Christensen, R. M. (2013). *The Theory of Materials Failure*. Oxford: Oxford University Press.
- Desai, Y. M., Eldho, T. I., & Shah, A. H. (2011). *Finite Element Method with Applications in Engineering* . India: Pearson Education India .
- Dutta, S. K., & Chokshi, Y. B. (2020). *Basic Concept of Iron and Steel Making*. Singapore: Springer Nature Singapore Pte Ltd 2020.
- Elizarov, K., Krutyanskii, M. M., Nekhamin, I. S., & Nekhamin, S. M. (2014). New Trends in the Development of DC Arc Furnaces. *Russian Metallurgy (Metally)*, 443-448.
- Ferziger, J. H., Perić, M., & Street, R. L. (2002). *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Standford, CA, USA : Springer.
- Francois, D., Pineau, A., & Zaoui, A. (2013). *Mechanical Behaviour of Materials*. Paris, France : Springer .
- Hortelano, J. G., Gallegos, A., & Belman, J. (2013). Comparacion teórico-númeroico en un intercambiador de calor carcasa y tubos. *Memorias del XIX Congreso Internacional Anual de la SOMIM* , 1187-1196.

- Ike, C. C., Onah, H. N., & Nwoji, C. U. (2017). Bessel functions for axisymmetric elasticity problemas of the elastic half space soil: A potencial Method . *Nigerian Journal Technology* , 773-781.
- Jayanti, S. (2018). *Computational Fluid Dynamics for Engineers and Scientists* . Chennai, India : Springer .
- Karbowniczek, M. (2022). *Electric Arc Furnace Steelmaking*. London New York: CRC Press, Taylor and Francis Group.
- Karim, M. M., Rahman, M. M., & Alim, M. A. (2011). Performance of SST k- ω turbulence model for computation of viscous drag of axisymmetric underwater bodies. *IJE Transactions B: Applications* , 139-146.
- Kazak, O. (2014). Numerical modelling of electrovortex and heat flows in DC electric arc furnace with cooling bottom electrode. *Heat and Mass Transfer-Springer* , 685-692. doi:10.1007/s00231-013-1265-1
- Krastev, V. K., & Falcucci, G. (2021). Comparison of enthalpy-porosity and lattice Boltzmann-phases field techniques for the simulation of the heat transfer and melting processes in LHTES devices . *E3S Web of Conferences* 312 .
- Kukharev, A., Bilousov, V., Bilousov, E., & Bondarenko, V. (2019). The Peculiarities of Convective Heat Transfer in Melt of a Multiple-Electrode Arc Furnace. *Metals*, 12.
- Liu, X., Zhou, J., Shi, H., Yang, Y., Yang, B., Hu, A., . . . Wang, Y. (2008). Melting Mechanism Of Water-Cooled Billet-Type Bottom Electrode of Direct Current Arc Furnace: A Numerical Approach. *Los Minerales, Metales y Materiales Society and ASM International*. doi:10.1007/s11663-008-9189-8
- Lupi, S. (2017). *Fundamentals of Electroheat: Electrical Technologies for Process Heating* (Primera ed.). Suiza: Springer Nature.
- Maliska, C. R. (2023). *Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*. Santa Catarina, Brasil: SPRINGER.
- Moro, L., Benasciutti, D., & Bona, F. D. (2017). Simplified numerical approach for the thermo-mechanical analysis of steelmaking components under cyclic loading: an anode for electric arc furnace. *The Institute of Material Minerals and Mining* , 10.
- Moukalled, F., Mangani, L., & Darwish, M. (2016). *The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics*. New York, USA: Springer .
- Odenthal, H.-J., Kemminger, A., Krause, F., Sankowski, L., Uebber, N., & Vogl, N. (2018). Review on Modeling and Simulation of the Electrical Arc Furnace (EAF). *Steel Research International*. doi:10.1002/srin.201700098
- Patankar, S. V. (2009). *Computation of Conduction and Duct Flow Heat Transfer*. New York : CRC Press.

- Pavlicevic, M., & Gensini, G. (1996). Getting more from the DC-EAF. *Steel Times International*, 2.
- Ramirez, M. A. (2000). *Mathematical Modelling of D.C. Electric Arc Furnace Operations [Thesis]*. Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology.
- Reddy, J. N. (2006). *An Introduction to the Finite Element Method*. Texas, USA: Mc Graw Hill.
- Rogowski, K., Krolak, G., & Bangga, G. (2021). Numerical Study on the Aerodynamic Characteristics of the NACA 0018 Airfoil at Low Reynolds Number for Darrieus Wind Turbines Using the Transition SST Model. *MDPI Processes*.
- Sarna, S. K. (2013, Mayo 15). <https://www.ispatguru.com/>. Retrieved from <https://www.ispatguru.com/dc-electric-arc-furnace/>
- Serway, R. A., & Jewett, J. W. (2016). *Física, Electricidad y Magnetismo*. Mexico, D.F. : CENGAGE Learning.
- Singh, A. K. (2007). *Mechanics of solids*. New Delhi: Prentice Hall of India.
- Solidworks. (2023, Agosto 13). *DASSAULT SYSTEMES*. Retrieved from https://help.solidworks.com/2023/english/SolidWorks/cworks/r_mohr-coulomb_stress_criterion.htm?verRedirect=1
- Stasa, F. L. (2000). *Applied Finite Element Analysis For Engineers*. New York, USA : CBS International Editions.
- Szabó, B., & Babuska, I. (2021). *Finite Element Analysis: Method, Verification and Validation*. Washington, USA: Wiley and Sons, Inc.
- Thompson, M. K., & Thompson, J. M. (2017). *ANSYS Mechanical APDL for Finite Element Analysis*. Oxford, United Kingdom: Elsevier.
- Tu, J., Yeoh, G.-H., & Liu, C. (2018). *Computational Fluid Dynamics: A Practical Approach*. Oxford, United Kingdom: Butterworth-Heinemann.
- Versteeg, H. K., & Malalasekera, W. (2007). *An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method*. New York : Longman Scientific and Technical.
- Wikipedia. (2023, Agosto 13). *Wikipedia*. Retrieved from https://es.wikipedia.org/wiki/Resistencia_flexional

Apéndice A. Replicación de los resultados de Liu y cols. (2008): fenómenos de transporte en el ánodo.

La primera etapa de este proyecto consistió en replicar los resultados numéricos de las simulaciones computacionales presentadas en el trabajo de Liu y cols. (2008). Este estudio se enfocó en entender el comportamiento térmico-fluidinámico de metal líquido dentro de la cavidad anódica de un horno de arco eléctrico de corriente continua (DC-EAF, por sus siglas en inglés). El modelo matemático contempla la fuerza electromagnética de Lorentz y la convección termo-gravitacional (fuerzas boyantes en el seno de metal líquido por efecto del cambio de densidad en función de la temperatura). Las simulaciones se llevaron a cabo en estado estable (invariantes en el tiempo), emulando un estado de máxima saturación térmica del piso refractario.

Liu y cols. (2008) propusieron dos modelos distintos para calcular la generación de momentum por la acción de la fuerza electromagnética de Lorentz. Estas ecuaciones se presentan a detalle en la sección 1.3.9 pero se describen brevemente continuación:

1. Ecuación de Lorentz A: su deducción parte de la suposición que el ánodo de acero es largo y mantiene sus dimensiones cilíndricas en todo momento. La fuerza electromagnética de Lorentz, \vec{F}_L , únicamente actúa en dirección radial.
2. Ecuaciones de Lorentz B: \vec{F}_L se descompone en la dirección radial y axial. El ángulo usado para descomponer \vec{F}_L se denomina ángulo de expansión anódica y representa la desviación del vector de intensidad de corriente, ya que el ánodo pierde su forma cilíndrica después de un cierto número de ciclos de operación (o coladas): hipotéticamente el ánodo adquiere una forma cónica invertida, consecuencia de la erosión del material refractario circundante.

Se desarrollaron dos simulaciones en estado estacionario, en las cuales el dominio computacional es únicamente el ánodo de acero. Estas simulaciones se identifican como,

1. Simulación FU-A: usando la ecuación de Lorentz A
2. Simulación FU-B: usando las ecuaciones de Lorentz B

Los resultados numéricos obtenidos en este trabajo son comparados con los que fueron reportados por Liu (2008). Para tener mayor claridad, las simulaciones desarrolladas por Liu (2008), se identifican como simulación de referencia de fase única A (simulación REF-A) y simulación de referencia de fase única B (simulación REF-B), respectivamente. Lo anterior significa que son simulaciones en las que sólo el ánodo constituye el dominio computacional y las últimas letras indican el modelo electromagnético empleado.

Dominio computacional y condiciones de frontera

La **Figura A.1** muestra las dimensiones del ánodo de acero, las condiciones de frontera e información sobre el mallado utilizado. Básicamente es una simulación en dos dimensiones en coordenadas axisimétricas (r,z). En la frontera convectiva se estableció un coeficiente de transferencia de calor igual a $750 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ y corresponde con el valor usado en el trabajo de Liu (2008). Dentro del ánodo de acero se genera calor debido al efecto Joule.

En la frontera de salida de presión se estableció una temperatura de 1900 K para el reflujo (Ansys, 2022), para simular la temperatura del metal líquido que vuelve a entrar a la cavidad anódica. La turbulencia del flujo de reversa se especificó a través del método de intensidad y viscosidad: se usaron los valores predeterminados de 5% y 10, que corresponden a la intensidad turbulenta de reflujo y al cociente de viscosidad turbulenta, respectivamente.

Modelo matemático

El modelo matemático que rige el comportamiento térmico-fluidodinámico del ánodo de acero es construido acoplando las ecuaciones de continuidad, momentum y energía. También se toma en cuenta la fuerza electromagnética de Lorentz, la convección termo-gravitacional, la generación de calor dentro del ánodo por el efecto Joule y la turbulencia mediante el modelo de dos ecuaciones $k - \omega$. Las principales diferencias de este modelo matemático respecto al modelo presentado en la sección 2.3 del capítulo 2, se enlistan a continuación:

1. El efecto termo-gravitacional es simulado a través de la aproximación de Boussinesq, tal como en el trabajo de Liu y cols (2008) y no con la ecuación 2.12.
2. La fusión-solidificación del ánodo se simula definiendo una capacidad calorífica aparente, contabilizando en ella el calor latente del metal.

3. Se usa el modelo de turbulencia de dos ecuaciones $k - \omega$, en vez del modelo de turbulencia SST de transición.
4. Se define una viscosidad aparente para la fase sólida para calcular el campo de velocidad solo en la fase líquida
5. En $R = 0.125$ el ánodo tiene contacto con el material refractario, pero en estas simulaciones no es parte del dominio computacional. Por lo tanto, se estableció una frontera adiabática.

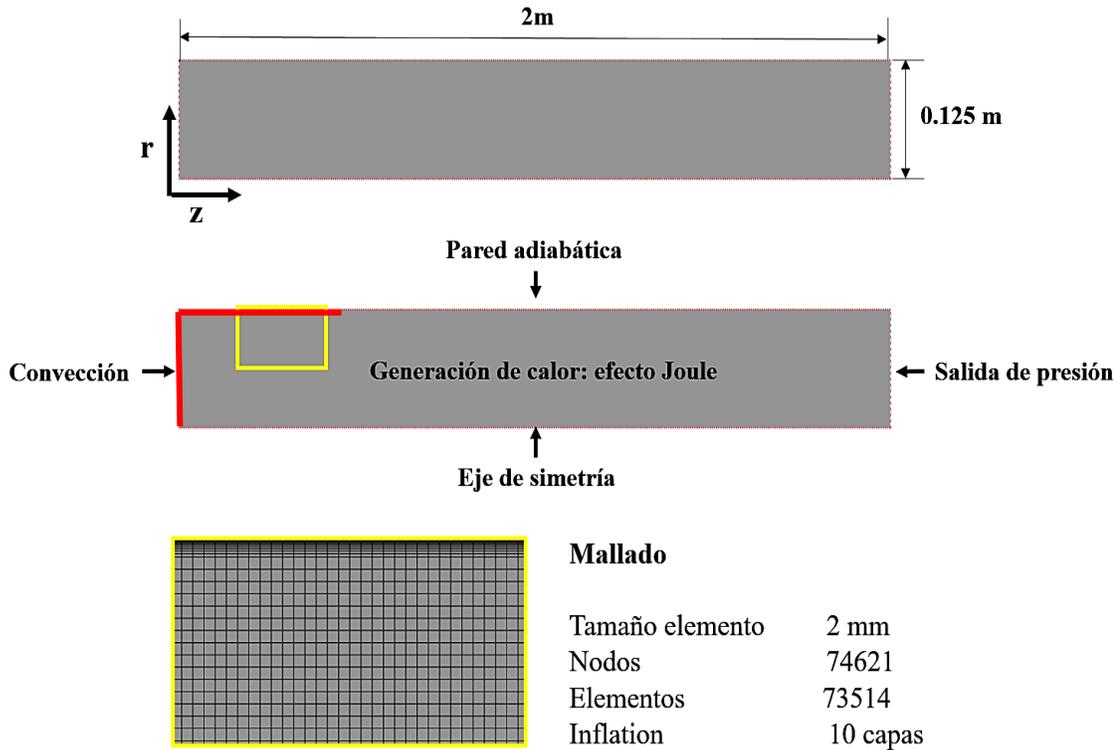


Figura A.1. Dominio computacional de las simulaciones presentadas por Liu (2008)

El término de generación de momentum debido a la convección natural o termo-gravitacional se define mediante la siguiente ecuación,

$$F_z = g\rho\beta(T - T_m) \quad (A.1)$$

donde g es el campo gravitacional ($= 9.8 \text{ ms}^{-2}$), β es el coeficiente de expansión térmica del acero líquido ($= 10^{-4} \text{ K}^{-1}$), y T_m es la temperatura de transformación de fase sólido-líquido del acero ($= 1793 \text{ K}$), y ρ es un valor constante de densidad (7300 kg/m^3).

Propiedades de los materiales y condiciones de operación

El ánodo es de acero AISI 1015. Las propiedades físicas/térmicas fueron obtenidas del programa de simulación de propiedades JMatPro®.

En la simulación FU-A y en la simulación FU-B, se estableció una densidad constante de 7300 kg/m³, porque la convección termo-gravitacional se calculó mediante la aproximación Boussinesq (Ecuación A.1). Se utilizó una pseudo capacidad calorífica, esto significa, que se contabilizó el calor latente de fusión mediante una capacidad calorífica aparente, en el rango de temperatura solidus-liquidus. El calor latente del acero es 250000 J/kg.

La **Figura A.2** y **Figura A.3** muestran la capacidad calorífica y la conductividad en función de la temperatura, respectivamente. En estas simulaciones la viscosidad se definió tal como en el trabajo de Liu (2008), usando una viscosidad equivalente para simular la fusión-solidificación del acero. La **Tabla A.1** muestra la viscosidad del acero a distintas temperaturas.

Tabla A.1. Viscosidad efectiva del ánodo de acero

T(K)	273	1723	1793	1823	1923
μ(Pa · s)	1x10 ⁶	4x10 ²	7x10 ⁻³	6x10 ⁻³	5x10 ⁻³

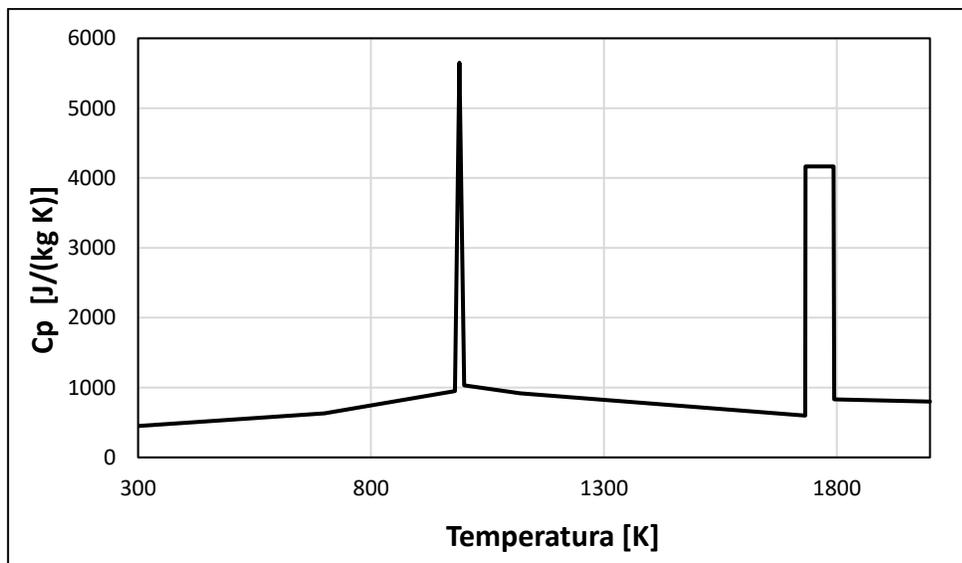


Figura A.2. Capacidad calorífica del acero AISI 1015 en función de la temperatura. (a) Contabilización del calor latente de fusión

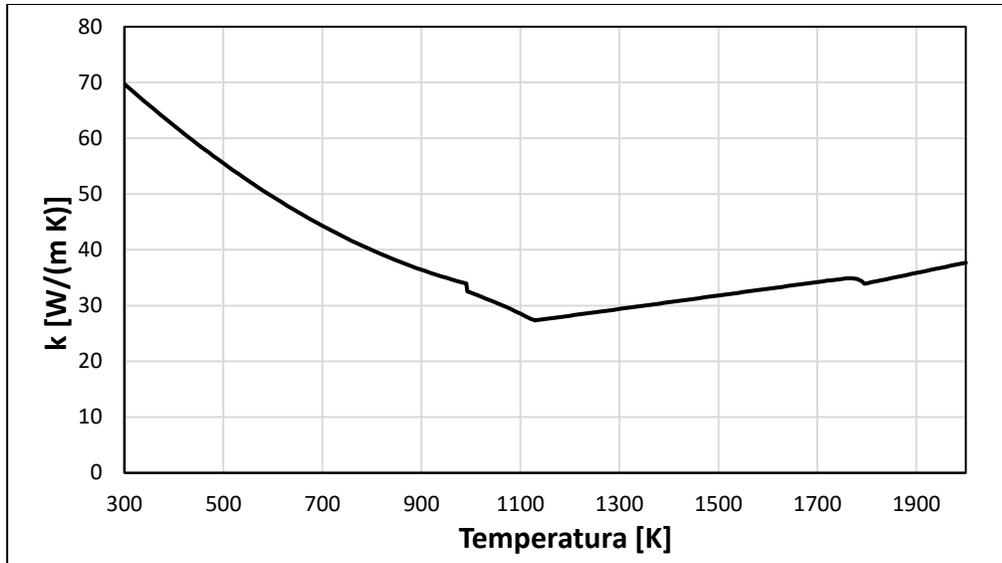


Figura A.3. Conductividad térmica del acero AISI 1015 en función de la temperatura

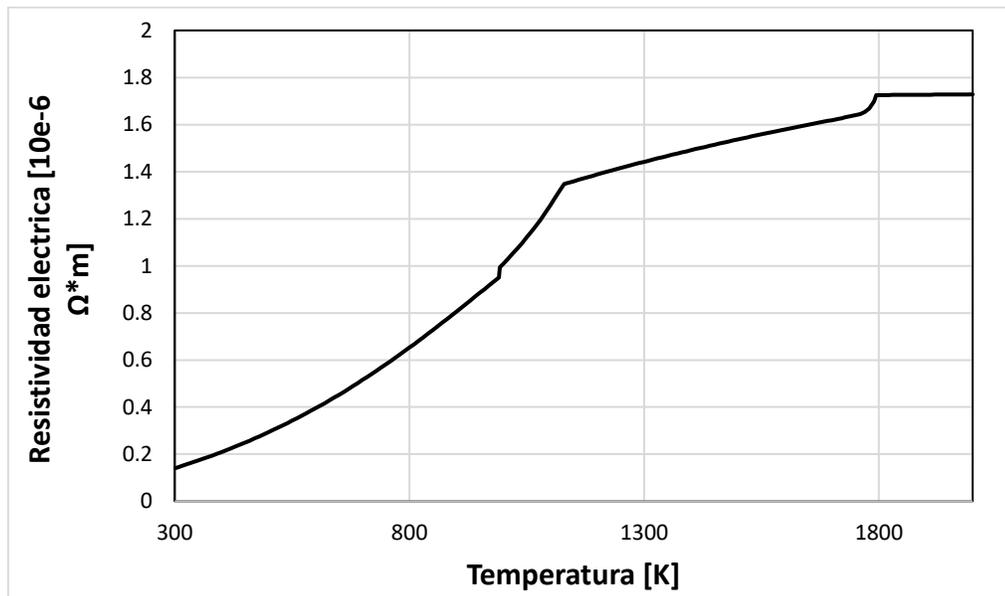


Figura A.4. Resistividad eléctrica del acero AISI 1015 en función de la temperatura

La **Figura A.4** muestra la resistividad eléctrica en función de la temperatura. La resistividad eléctrica se usó para calcular la generación de calor dentro del ánodo por la acción del efecto Joule. El ánodo opera con una intensidad de corriente igual a 32 kA.

Método de solución

Las ecuaciones gobernantes se discretizaron espacialmente a través del método de volumen finito (Patankar, 2009). La **Tabla A.2** muestra el esquema de acoplamiento presión-velocidad, la discretización espacial de las ecuaciones diferenciales gobernadoras y factores de relajación explícitos de pseudo-tiempo, usadas en las simulaciones FU-A y FU-B. Se utilizó el método de pseudo-tiempo para mejorar la convergencia (Ansys, 2022). La **Tabla A.3** presenta los criterios de convergencia para cada una de las ecuaciones diferenciales gobernantes. Fue necesario establecer un valor residual de 1×10^{-8} en la ecuación de energía para obtener un buen balance neto de tasas de transferencia de calor.

Tabla A.2. Métodos de solución y factores de relajación de las simulaciones FU-A y FU-B

Acoplamiento velocidad-presión	Factores de relajación explícitos
Esquema: Acoplado	Presión: 0.5
Discretización espacial	Momentum: 0.5
Gradiente: Least Squares Cell Based	Densidad: 0.5
Presión: PRESTO!	Fuerzas de volumen: 0.5
Momentum: First Order Upwind	Energía Cinética Turbulenta: 0.5
Energía Cinética Turbulenta: First Order Upwind	Tasa de disipación de energía: 0.5
Tasa de disipación de energía: First Order Upwind	Viscosidad turbulenta: 0.5
Energía: First Order Upwind	Energía: 0.85
Método de Pseudo Tiempo: Global Time Step	

Tabla A.3. Criterios de convergencia de las ecuaciones diferenciales gobernadoras

Ecuaciones	Criterio de convergencia, residual
Continuidad	0.001
x-velocidad	0.001
y-velocidad	0.001
Energy	1×10^{-8}
k	0.001
Omega	0.001

Resultados numéricos de la simulación FU-A y FU-B

La **Figura A.5** muestra el campo de temperatura en el ánodo de acero obtenido mediante la simulación FU-A. El ánodo se muestra en posición horizontal y tiene 2 m de longitud, en el lado izquierdo se encuentra el sistema de enfriamiento (línea roja) y en el borde vertical opuesto se encuentra la frontera de salida de presión que permite emular la interacción del ánodo con el baño de metal líquido. Puede observarse que el frente de fusión (isoterma, 1793 K), se encuentra a 200 mm por encima del sistema de enfriamiento ($z = 0.45 \text{ m}$). La fuerte circulación de acero líquido evita la aparición de un gradiente de temperatura significativo. El efecto Joule provoca un sobrecalentamiento de $6 \text{ }^\circ\text{C}$.

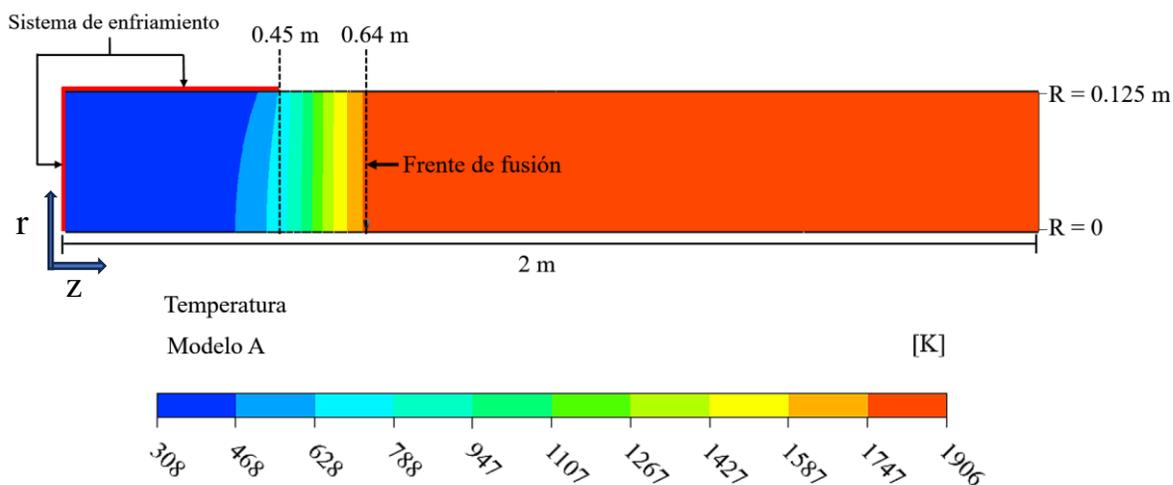


Figura A.5. Campo de temperatura del ánodo de acero obtenido mediante la simulación FU-A

La **Figura A.6** muestra el campo de temperatura en el ánodo de acero obtenido mediante la simulación FU-B. Se utilizó un ángulo de expansión anódica, $\gamma = 3^\circ$. De acuerdo con esta simulación, la activación de la componente axial de la fuerza electromagnética provoca la fusión completa del ánodo. Las pequeñas porciones de ánodo que se encuentran en estado sólido están en contacto con el sistema de enfriamiento. El ánodo tiene la misma temperatura que el baño de metal líquido, porque la circulación de acero líquido es más intensa.

El modelo electromagnético B, permite explicar la penetración del frente de fusión en la cavidad anódica cuando el ánodo pierde su forma cilíndrica, pero asume que el ánodo

adquiere una forma cónica perfecta después de su deterioro. Es lo suficientemente robusto para explicar la relación entre la penetración del frente de fusión y la activación de la componente axial de la fuerza electromagnética de Lorentz. En operaciones reales de fusión, el ángulo de expansión anódica incrementa gradualmente en función del tiempo, hasta un momento en que la condición térmica es operativamente insostenible. Cuando la parte superior del ánodo se expande (debido a la erosión causada por el baño de acero líquido), el área transversal aumenta, y, por tanto, incrementa la densidad de transferencia de calor. Al transportarse mayor calor hacia el sistema de enfriamiento, el pseudo equilibrio térmico en la interfase acero-cobre se alcanza a temperaturas cada vez más elevadas.

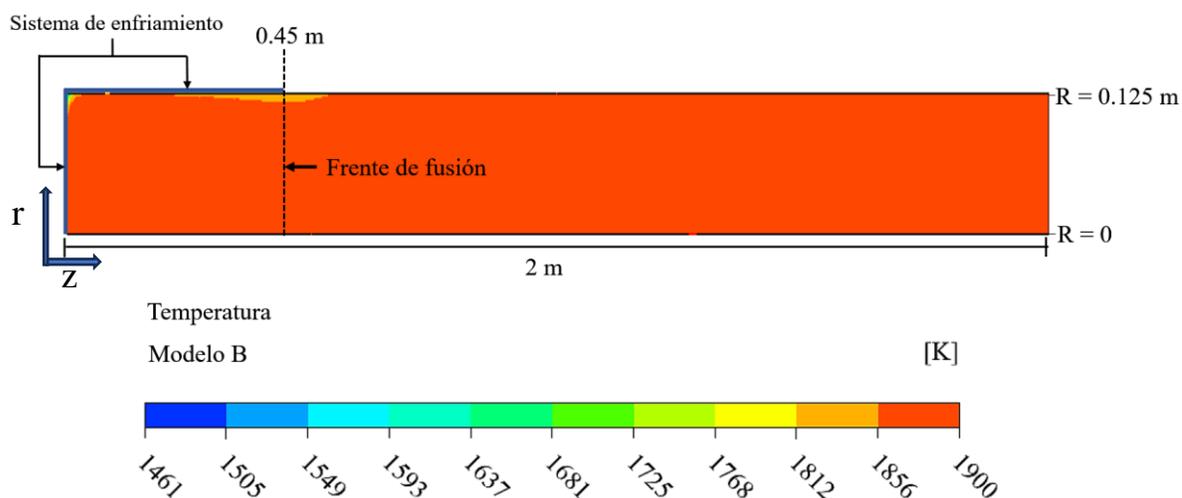


Figura A.6. Campo de temperatura del ánodo de acero obtenido mediante la simulación FU-B

La **Figura A.7** muestra las líneas de corriente mediante la simulación FU-A. Bajo condiciones de agitación electromagnética el ánodo funciona adecuadamente, esto se comprueba durante un número determinado de coladas. La mayor penetración del frente de fusión en la cavidad anódica está relacionada con la activación de la componente axial de la fuerza electromagnética; como muestra la **Figura A.8** La velocidad máxima (V_{max}), usando ambos modelos electromagnéticos es casi idéntica y se encuentra cerca de la parte superior del ánodo. En este trabajo el valor calculado de V_{max} coincide satisfactoriamente con los resultados reportados por Liu (2008).

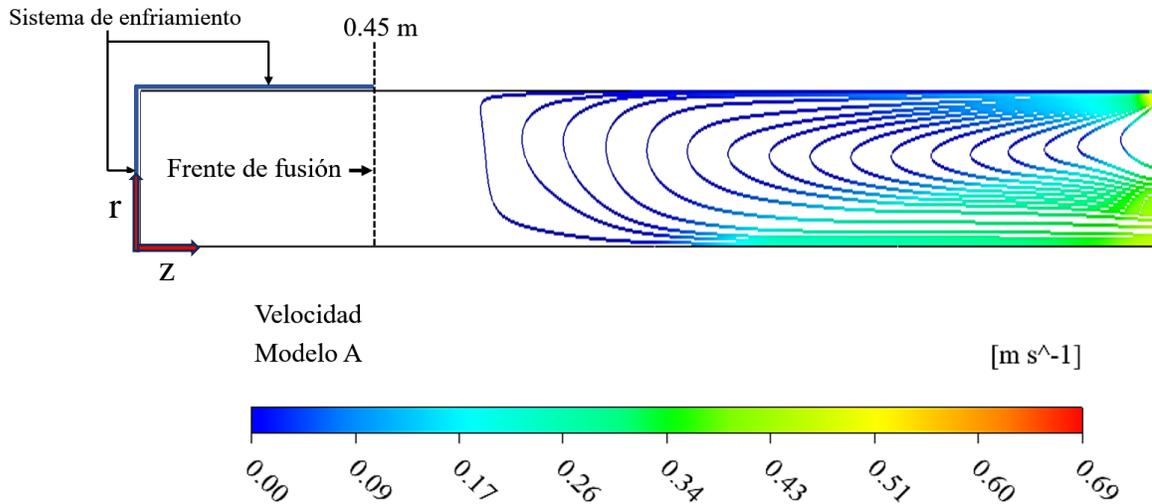


Figura A.7. Campo de velocidad en el ánodo de acero obtenido mediante la simulación-FU-A

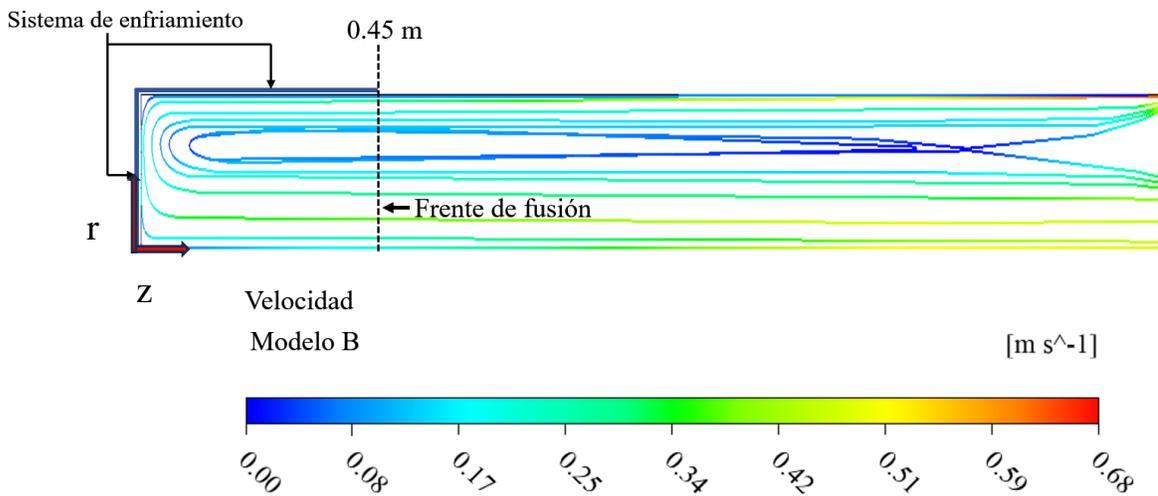


Figura A.8. Campo de velocidad en el ánodo de acero obtenido mediante la simulación-FU-B

En este modelo simplificado el ánodo cuenta con una frontera convectiva y una frontera de salida de presión; que permiten el intercambio de calor. En el eje de simetría y la pared adiabática el flujo de calor es igual a cero. Dentro del ánodo se genera calor por el efecto Joule. La **Tabla A.4** presenta las tasas de transferencia de calor de la simulación FU-A y la simulación FU-B.

Tabla A.4. Tasas de transferencia de calor de la simulación FU-A y la Simulación FU-B

Región	Simulación FU-A (J/s)	Simulación FU-B (J/s)
Frontera convectiva	-16,252.64	-455,726
Parte superior del ánodo	-35,768	393,233.94
Efecto Joule	52,023	62,492

La **Tabla A.5** muestra una comparación entre los resultados numéricos de las simulaciones desarrolladas en este trabajo y los resultados reportados por Liu (2008). $Z_{liquidus}$, es la posición del frente de fusión respecto al punto de referencia $z = 0.45 \text{ m}$. T_{max} , es la temperatura máxima del sistema; y ΔT_{water} , es el incremento de temperatura del agua de enfriamiento que se requeriría para extraer el flujo de calor en la superficie convectiva. ΔT_{water} es calculado a partir de la relación del flujo masico de agua (8.33 kg/s, dato operativo de planta), la capacidad calorífica del agua y la tasa de transferencia de calor en la frontera convectiva (ver **Tabla A.4**).

Tabla A.5. Comparación entre los resultados numéricos obtenidos en este trabajo y los resultados reportados por Liu (2008)

Variable	Simulación REF-A	Simulación FU-A	Simulación REF-B	Simulación FU-B
$Z_{liquidus}$ (mm)	67	200	-174.2	-0.450
T_{max} (K)	1920	1906	1903	1900
V_{max} (m/s)	0.652	0.690	0.659	0.680
ΔT_{water} (K)	0.942	0.46	3.04	13.07

La principal diferencia recae en $Z_{liquidus}$ y ΔT_{water} de las simulaciones que emplean el modelo electromagnético A. De acuerdo con los resultados numéricos de la simulación FU-B, el ánodo se debería fundir completamente cuando se utiliza un ángulo de expansión de 3° , sin embargo, no es lo que se observó en los ánodos estudiados por Liu (2008) después de ser reemplazados (ver **Figura A.9**). El valor de ΔT_{water} y $Z_{liquidus}$ no es coherente con los

resultados obtenidos por Liu (2008), los cuales son respaldados por datos operativos de planta.

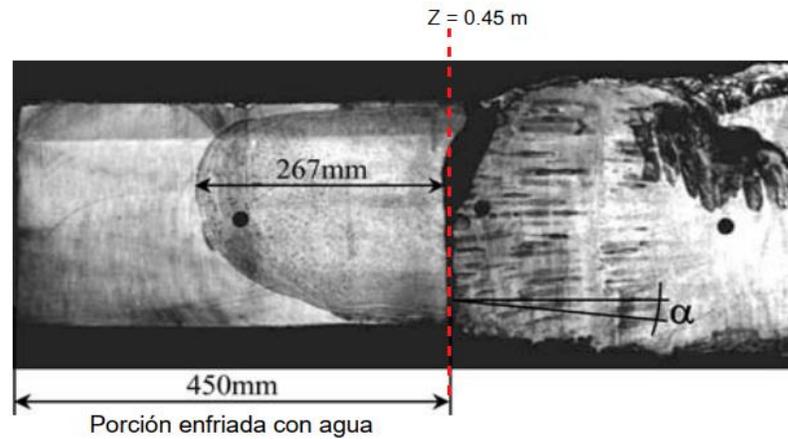


Figura A.9. Ánodo tipo *billet* después de ser desinstalado del piso refractario. Liu (2008)

La **Figura A.9** muestra el ánodo tipo *billet* estudiado por Liu (2008). Se observa claramente un ensanchamiento por encima de $z = 0.45 \text{ m}$, que puede tratarse de la pata de elefante (aunque en dicho trabajo no se haga referencia a ésta). El ánodo se deteriora y pierde sus dimensiones cilíndricas con el paso del tiempo. Cuanto mayor sea el deterioro del ánodo y del material que lo rodea, mayor debería ser la penetración del frente de fusión.

Apéndice B. Replica de los resultados numéricos de Liu y cols. (2008): simulaciones multi-material

Se complementó el proceso de replicación de resultados, desarrollando dos simulaciones adicionales en estado estacionario, que contemplan el material refractario alrededor del ánodo de acero y la pared exterior del horno (fabricada en acero). Estas simulaciones no se presentan en el trabajo de Liu y cols. (2008). En una de estas simulaciones se utilizó la ecuación de Lorentz A y en la otra la ecuación B (tal como las simulaciones de la sección A). Estas simulaciones se identifican como,

1. Simulación MM-A: se usa la ecuación de Lorentz A
2. Simulación MM-B: se usan las ecuaciones de Lorentz B

Dominio computacional y condiciones a la frontera

La **Figura B.1** muestra el dominio computacional en coordenadas axisimétricas de este sistema, los materiales que lo componen, las condiciones a la frontera, así como información sobre la malla utilizada. Se usó una malla de 68,860 elementos de 5 mm. En la interfase refractario-acero se aumentó la densidad de mallado mediante la herramienta *Inflation* para mejorar el cálculo del comportamiento térmico-fluidodinámico en la capa limite y resolver los problemas de convergencia que se presentaron inicialmente.

La **Tabla B.1** muestra las condiciones de frontera de este sistema. La frontera B2 se divide en una frontera isotérmica en la parte del material refractario y en una frontera de salida de presión B2 (a) en la parte superior del ánodo. En la frontera de salida de presión se estableció una temperatura de 1900 K para el flujo de reversa (Backflow temperature), para simular el reingreso de metal líquido dentro del ánodo. La turbulencia del flujo de reversa se especificó a través del método de intensidad y viscosidad: se usaron los valores predeterminados de 5% y 10, que corresponden a la intensidad turbulenta de flujo de reversa y al cociente de viscosidad turbulenta, respectivamente (Ansys , 2022).

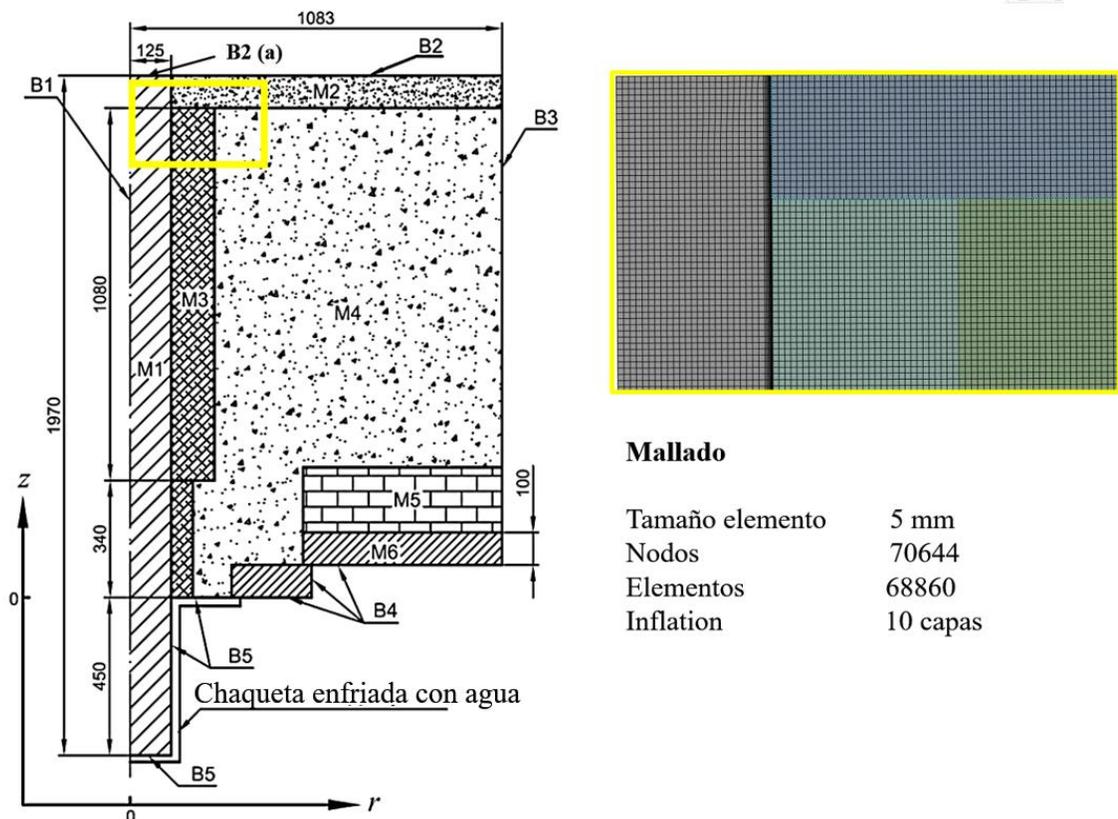


Figura B.1. Dominio computacional Liu y cols. (2008): M1: Ánodo de acero, M2: Capa sinterizada de refractario, M3: Camisa refractaria, M4: Material refractario apisonado, M5: Ladrillos refractarios y M6: Pared exterior de acero. B1: Eje axi-simétrico, B2: perfil de temperatura, B3: frontera adiabática, B4: Convección natural y B5: Convección forzada. (Liu y cols., 2008).

Tabla B.1. Condiciones de frontera de las simulaciones multi-material

Frontera	Tipo de condición a la frontera	Valores
B1	Eje axisimétrico	0 W/m^2
B2	Isotérmica	1900 K
B2 (a)	Salida de presión	1900 K
B3	Flujo de calor	0 W/m^2
B4	Convección natural	$h: 5 \text{ W/(m}^2\text{K)}$ Temperatura: 300 K
B5	Convección Forzada	$h: 750 \text{ W/m}^2\text{K}$ Temperatura: 300 K

Modelo matemático

El modelo matemático usado en estas simulaciones es el mismo que se presenta en la sección 2.3 del capítulo 2. La única diferencia es que en las simulaciones MM-A y MM-B se emplea el modelo de turbulencia de dos ecuaciones $k - \omega$ y la aproximación de Boussinesq para calcular la convección termo-gravitacional.

Propiedades de los materiales y condiciones de operación

Se usaron las mismas propiedades del acero presentada en el apéndice A, pero con algunas modificaciones debido a que se utilizó el modelo de fusión-solidificación incorporado en Ansys Fluent 2022/R1. Los cambios efectuados son:

1. Se estableció una dependencia lineal de la viscosidad con la temperatura, $7 \times 10^{-3} - 4.4 \times 10^{-3} Pa \cdot s$, en el intervalo de temperatura 1793-2000 K.
2. Las temperaturas de solidus y liquidus son 1733 y 1793, respectivamente.
3. En estas simulaciones también se estableció una densidad constante igual a 7300 kg/m^3 , porque la convección termo-gravitacional se calculó mediante la aproximación Boussinesq.

El ánodo opera con una intensidad de corriente igual a 32 kA. Se agregó al dominio computacional el material refractario y la pared exterior del horno. Distintos tipos de materiales refractarios constituyen el dominio computacional, sin embargo, se usaron las mismas propiedades térmicas para todos los materiales (ya que son bastante similares entre sí). La **Tabla B.2** muestra las propiedades del material refractario y el acero de la pared exterior del horno, usadas en estas simulaciones.

Tabla B.2. Propiedades térmicas de los materiales

Material	Cp [J/(kg K)]	k [W/(m K)]	Densidad [kg/m ³]
Material refractario	1200	3	2900
Acero de la pared exterior	470	50	7850

Método de solución

Las ecuaciones diferenciales gobernadoras se discretizaron espacialmente a través del método de volumen finito (Patankar, 2009), implementado en el software comercial Ansys Fluent 2022/R1. La **Tabla B.3** muestra el esquema de acoplamiento presión-velocidad, la discretización espacial de las ecuaciones diferenciales gobernadoras y factores de relajación explícitos de pseudotiempo. La **Tabla B.4** presenta los criterios de convergencia para cada una de las ecuaciones diferenciales gobernadoras. Fue necesario usar un residual 1×10^{-9} para la ecuación de energía, para obtener un buen balance neto de tasas de transferencia de calor.

Tabla B.3. Métodos de solución y factores de relajación de las simulaciones con fase única.

Acoplamiento presión-velocidad	Factores de relajación para cada variable método explícito pseudo-tiempo
Esquema: Acoplado	Presión: 0.8
Discretización espacial	Momentum: 0.8
Método del gradiente: Basado en mínimos cuadrados por celda	Densidad: 0.8
Presión: PRESTO!	Fuerzas de volumen: 0.8
Momentum: Corriente arriba, primer orden	Energía cinética turbulenta: 0.8
Energía cinética turbulenta: Corriente arriba, primer orden	Rapidez específica de disipación: 0.8
Rapidez específica de disipación: Corriente arriba, primer orden	Viscosidad turbulenta: 0.8
Energía: Corriente arriba, primer orden	Energía: 0.8
Método de pseudo-tiempo: Paso global de tiempo, Paso de pseudo-tiempo: 0.01 s	

Tabla B.4. Criterios de convergencia de las ecuaciones diferenciales gobernadoras

Ecuaciones	Criterio de convergencia, residual
Continuidad	0.001
x-velocidad	0.001
y-velocidad	0.001
Energía	1×10^{-9}
Energía cinética turbulenta	0.001
Rapidez específica de disipación	0.001

Resultados numéricos de la simulación MM-A y MM-B

Aunque los resultados numéricos presentados, hasta este momento, son relativamente consistentes con los resultados numéricos reportados por Liu y cols. (2008), debe enfatizarse que la simulación FU-A y FU-B, así como las simulaciones desarrolladas por Liu y cols. (2008), se desarrollaron a partir de un modelo simplificado que solo incluye al ánodo de acero en su dominio computacional. Además, los valores de ΔT_{water} y $Z_{liquidus}$ de la simulación FU-B son distintos a los valores obtenidos por Liu y cols. (2008). Por estas razones, se complementó este proceso de replicación de resultados, a través del desarrollo de dos simulaciones adicionales, que contemplan el material refractario alrededor del ánodo de acero y la pared exterior del horno (fabricada en acero).

La **Figura B.2** muestra el campo de temperatura obtenido a través de la simulación MM-A. El frente de fusión se encuentra a 210 mm por encima del sistema de enfriamiento, $z = 0.45 \text{ m}$. Esto coincide con la posición del frente fusión calculada a través de la simulación FU-A. El campo de velocidad es idéntico al mostrado en la **Figura A.7** del apéndice A, así que es innecesario mostrarlo nuevamente; basta mencionar, que la velocidad máxima es idéntica.

La **Figura B.3** muestra el campo de temperatura obtenido a través de la simulación MM-B. Se observa que la penetración del frente de fusión es variable, siendo mayor en $r = 0$. La penetración máxima del frente de fusión es -180 mm, que coincide con el valor obtenido por Liu (2008) a través de la simulación REF-B (**Tabla A.5**, Apéndice A). Es necesario

mencionar que la curvatura del frente de fusión coincide inequívocamente con la curvatura del frente de fusión observada en la fotografía del ánodo (**Figura A.9**, Apéndice A). Liu (2008), presenta una simulación en estado transitorio que demuestra que el frente de fusión alcanza una penetración máxima de 144 mm por debajo del sistema de enfriamiento ($z = 0.45$ m), después de 100 horas de operación ininterrumpida. La velocidad máxima es 0.73 m/s y se encuentra cerca de la parte superior del ánodo, tal como las simulaciones FU-A y FU-B.

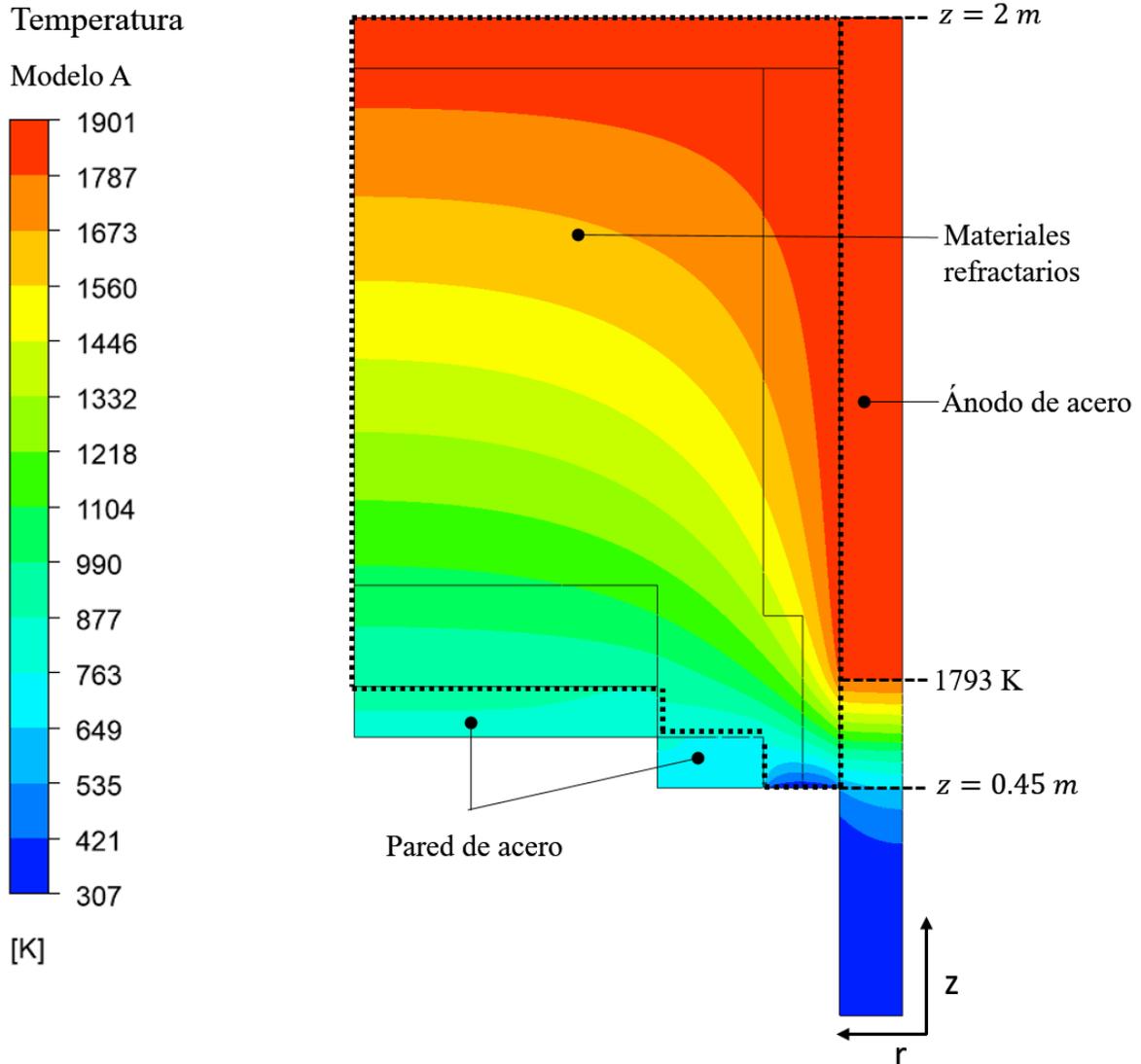


Figura B.2. Campo de temperatura obtenido por medio de la simulación MM-A.

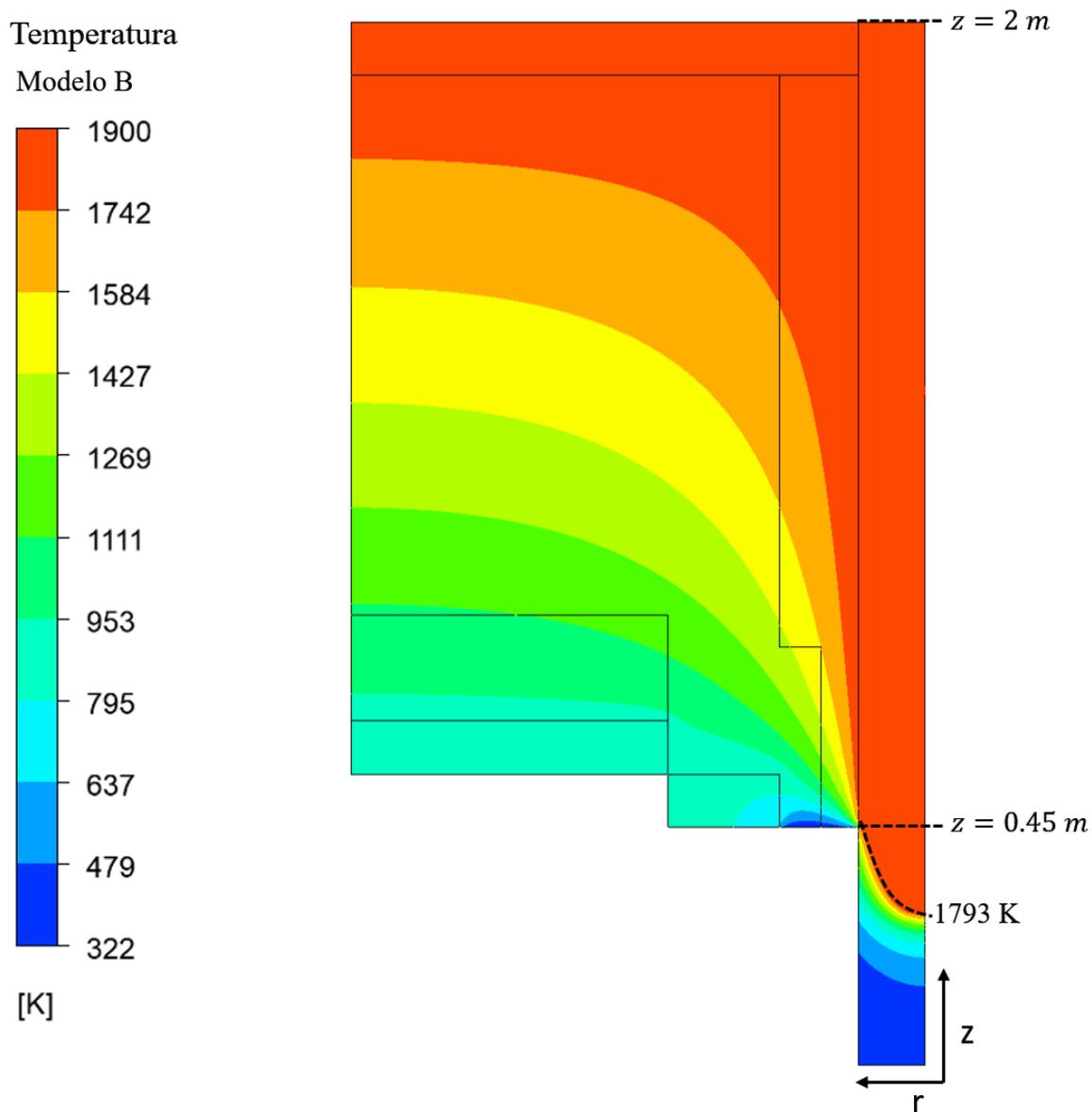


Figura B.3. Campo de temperatura obtenido por medio de la simulación MM-B

La **Tabla B.5** muestra las tasas de transferencia de calor de la simulación MM-A y de la simulación MM-B. En la simulación MM-A, el sistema de enfriamiento y la parte superior de ánodo extraen el calor generado por el efecto Joule. En teoría, mientras el ánodo mantenga sus dimensiones cilíndricas y el material refractario circundante no sea erosionado radialmente, el ánodo funciona adecuadamente. Cuando la componente axial de la fuerza de Lorentz es activada (simulación MM-B), el sistema de enfriamiento debe remover el calor generado por el efecto Joule y también el calor transportado desde el baño de metal líquido

hacia el interior de la cavidad anódica. En la simulación MM-B la generación de calor por el efecto Joule representa un 43% del calor removido por el sistema de enfriamiento y en la simulación MM-A, representa un 89%.

Tabla B.5. Transferencia de calor de las simulaciones multi-material MM-A y MM-B.

Zona	Simulación MM-A [W]	Simulación MM-B [W]
Pared de acero	-10241	-10828
Sistema de enfriamiento	-21125.44	-114505.93
Parte superior del ánodo	-23142	65595
Piso refractario	5892.23	5724
Efecto Joule (generación)	48616	54015

La **Tabla B.6** se muestran los mismos parámetros que la **Tabla A.5** (Apéndice A) pero aquí se comparan los resultados numéricos de la simulación MM-A y MM-B. Puede apreciarse una clara similitud entre los parámetros de la simulación MM-B y la simulación REF-B reportada. La replicación de los resultados numéricos de Liu y cols. (2008) es aceptable. Se han replicado las condiciones de operación, el dominio computacional y las condiciones de frontera. El modelo B se respalda con datos de planta, aunque debe mencionarse que las simulaciones reportadas y las simulaciones presentadas hasta ahora en este trabajo no contemplan el cambio de la geometría del ánodo después de su desgaste.

Tabla B.6. Comparación entre los resultados numéricos de las simulaciones multi-material y las simulaciones de Liu y cols. (2008)

Variable	Simulación REF-A	Simulación MM-A	Simulación REF-B	Simulación MM-B
$Z_{liquidus}$ (mm)	67	200	-174.2	-0.180
T_{max} (K)	1920	1901	1903	1900
V_{max} (m/s)	0.652	0.690	0.659	0.73
ΔT_{water}	0.942	0.46	3.04	3.28

Apéndice C. Ecuaciones diferenciales gobernantes en coordenadas axisimétricas 2D

Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho v_r) + \frac{\rho v_r}{r} = S_m$$

donde ρ es la densidad, z es la coordenada axial, r es la coordenada radial, v_z es la velocidad axial, v_r es la velocidad radial. S_m La fuente es la masa agregada a la fase continua desde la segunda fase dispersa y cualquier fuente definida por el usuario.

Ecuación de momentum para flujo turbulento

Componente z ,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_z) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z}(r \rho v_z v_z) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho v_r v_z) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left[r \mu \left(2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \right] + F_z + \nabla \cdot \bar{\tau}$$

Componente r ,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z}(\rho r v_z v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r v_r) \\ & = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \mu \left(2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left[r \mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] - 2\mu \frac{v_r}{r^2} + \frac{2}{3} \frac{\mu}{r} (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \rho \frac{v_z^2}{r} + F_r + \nabla \cdot \bar{\tau} \end{aligned}$$

donde \mathbf{v} es el vector de velocidad, $\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r}$, v_z y v_r son las componentes de la velocidad axial y radial, respectivamente; μ es la viscosidad, F_r y F_z representan la fuerza de volumen en dirección radial y axial, respectivamente. $\bar{\tau}$ es el tensor de esfuerzos de Reynolds.

Ecuación de energía para flujo turbulento

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho H + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z H) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho v_r H) + \frac{\rho v_r H}{r} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k}{C_p} \frac{\partial H}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{k}{C_p} r \frac{\partial H}{\partial r} \right) + S + \nabla \cdot (\tau_{eff} \cdot \mathbf{v})$$

donde k es la conductividad térmica, S representa el término fuente de generación de calor, H es la entalpía del metal y τ_{eff} es el tensor de esfuerzos efectivo, definido como $\tau + \bar{\tau}$.

τ es el tensor de esfuerzos debido a la viscosidad molecular y está definido por,

$$\tau = \mu \left[(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I} \right]$$

donde \mathbf{I} es el tensor unitario, y el segundo término de la derecha es el efecto de la dilatación volumétrica (Versteeg & Malalasekera, 2007).

$\bar{\tau}$ es el tensor de esfuerzos de Reynolds y está definido por,

$$\bar{\tau} = \mu_t (\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^T) - \frac{2}{3} [\rho k_e + \mu_t (\nabla \cdot \vec{v})] \mathbf{I}$$

donde μ_t es la viscosidad turbulenta, k_e es la energía cinética turbulenta, ρ es la densidad del fluido, $\nabla \mathbf{v}$ es el tensor gradiente de velocidad, $\nabla \mathbf{v}^T$ es la transpuesta del tensor gradiente de velocidad y $\nabla \cdot \mathbf{v}$ es la divergencia del campo de velocidad (Moukalled, Mangani, & Darwish, 2016)