Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional

Unidad Zacatenco
Departamento de Matemática Educativa

La recta tangente.
Un acercamiento a su definición y construcción utilizando Geometría Dinámica.

Tesis que presenta:

Cecilia Alanís García

Para obtener el grado de:

Maestra en Ciencias

En la especialidad de:

Matemática Educativa

Director de la tesis:

Dr. Hugo Rogelio Mejía Velasco

Ciudad de México Agosto, 2024

CONAHCYT

CONSEJO NACIONAL DE HUMANIDADES
CIENCIAS Y TECNOLOGÍAS

Agradezco al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías el apoyo financiero brindado para realizar mis estudios de maestría en el Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Cecilia Alanís García

Becaria No. 114779

Agradecimientos

Dar gracias y reconocer todo lo que tienes y eres,
es el primer paso para vivir una vida de plenitud y llena de felicidad.

Anónimo

Agradezco al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, especialmente al Departamento de Matemática Educativa y todo el personal que lo conforman, por ser un gran pilar en mi formación, dándome nuevas perspectivas en este campo.

Al Dr. Hugo Rogelio Mejía Velasco, mi más sincero agradecimiento por su dedicación y paciencia brindados en la realización de este trabajo. Su guía y orientación han sido fundamentales para que pudiera desarrollar esta tesis. No tengo palabras suficientes para expresar mi gratitud por su constante apoyo.

Al Dr. Jesús Alfonso Riestra Velázquez, agradezco su valiosa orientación en los inicios de esta investigación. Sus recomendaciones fueron cruciales para mejorar este trabajo.

A la M. en C. Susana Martínez Sánchez, gracias por sus observaciones y sugerencias, que han enriquecido este proyecto, logrando un trabajo de mayor calidad.

Al Dr. Gonzalo Zubieta Badillo, agradezco su tiempo para revisar y hacer las observaciones que aportó a este trabajo.

Gracias a mis profesores de Maestría, quienes me proporcionaron un nuevo panorama de la Educación en Matemática y del vasto camino que queda por recorrer (y que tal vez nunca se termine). Sus conocimientos y experiencias fueron parte fundamental del nuevo panorama que adquirí en este ámbito.

Al Colegio de Bachilleres del Estado de Hidalgo, Plantel “El Cid”, gracias por la educación que me proporcionaron, por el apoyo que proporcionan a sus alumnos y egresados. Estaré infinitamente agradecida por apoyarme en la implementación de esta secuencia pedagógica de principio a fin.

Al Ing. Raúl Servín Pérez, le agradezco profundamente por las facilidades proporcionadas para realizar este proyecto. Su ayuda fue invaluable, y su actitud colaborativa hizo posible que este trabajo se desarrollara sin contratiempos.

Al Mtro. Gerardo Rafael Flores Juárez, gracias por su ayuda en la realización de esta investigación, permitiéndome trabajar con sus estudiantes. Su disposición en todo momento fue fundamental para el éxito de este proyecto.

A los alumnos del 3101, del periodo escolar 2023-B, estoy muy agradecida por su colaboración en cada una de las sesiones, sin su apoyo no habría sido posible hacer esta trabajo. Fue grato trabajar con cada uno de ustedes y ver su avance en cada clase.

A mis compañeros de maestría por permitirme disfrutar esta etapa a su lado y brindarme un nuevo horizonte de aspectos que aún me faltan por aprender y vivir.

A mis padres, Silvia y Edgar, estaré eternamente agradecida por su apoyo incondicional en todos los aspectos de esta etapa (y siempre), por poder ayudarme a seguir superándome cada día. A mi hermano y colega Eduardo, gracias porque tu apoyo brindado, especialmente en la implementación (porque asi lo quiso la sagrada linea del tiempo). A mi hermana Elisa, gracias por tu ayuda, por ser el sujeto de prueba y darme perspectivas de la situación a la que me enfrentaría.

A mis amigos y colegas que he formado a lo largo de este camino, gracias a ustedes se ha hecho más liviano este viaje. Lo que he aprendido de ustedes siempre lo guardare con mucho aprecio.

Finalmente, a Dios, a la Vida, a la Suerte, al Destino, al Karma, al poder del Universo, o a cualquier entidad, energía o cosa, gracias por haber permitido que todo haya pasado en la forma que paso, haciendo que cada pieza encaje en el rompecabezas.

Dedicatoria

Si he logrado ver más lejos,
ha sido porque he subido a hombros de gigantes

Isaac Newton

Dedico este trabajo a mis gigantes,
mis padres, Silvia y Edgar,
y hermanos, Eduardo y Elisa,
porque este logro es gracias a ustedes.

Resumen

El objetivo principal que esta tesis pretende alcanzar es el diseño y puesta en marcha de actividades que promuevan la enseñanza y el aprendizaje de la recta tangente en el nivel medio superior en México. Aunque el concepto comienza a ser estudiado desde la secundaria, principalmente para la circunferencia, la imprecisión en su enseñanza ha generado dificultades en la comprensión del concepto en general y en la de conceptos relacionados, como el de *la derivada*. Esto destaca la importancia de revisar y mejorar los métodos de enseñanza y aprendizaje de conceptos elementales.

Para ello, se llevó a cabo un análisis amplio de diversos enfoques para construir la recta tangente, permitiendo identificar y comprender distintas perspectivas desde las cuales se aborda el tema. Al observar cómo se complementan estos enfoques, se pudo obtener una visión más completa.

Para alcanzar el objetivo que nos hemos planteado, se propone una secuencia pedagógica que incorpora el uso de tecnologías digitales como GeoGebra. Esta herramienta permite la visualización de los conceptos matemáticos de manera dinámica y manipulable, lo que puede facilitar su comprensión. Las actividades propuestas comienzan con ideas intuitivas para luego avanzar hacia situaciones más complejas. Esta dirección gradual permite a los estudiantes familiarizarse con el concepto.

La secuencia pedagógica se implementó con un grupo de diecinueve estudiantes de bachillerato de tercer semestre que estaban cursando la materia de Geometría Analítica, llevándose a cabo de forma presencial en el laboratorio de cómputo de la escuela. Para evaluar el progreso en la comprensión, se aplicó a los estudiantes el mismo test tanto al inicio como al final del período de estudio. Esto permitió observar un impacto muy positivo en la evolución de los estudiantes en la comprensión del concepto y en las habilidades adquiridas, ya que en el test final lograron trazar rectas tangentes con éxito, lo que no habían logrado en el inicial.

A pesar de que los resultados muestran un progreso significativo, se reconoce la necesidad de evaluar los beneficios a mediano y largo plazo, para valorar el impacto en cursos subsiguientes, como el de Cálculo Diferencial, por ejemplo. Por otro lado, también identificamos limitaciones en el presente estudio, lo que representa posibles áreas de oportunidad para investigaciones futuras. En particular, se enfatiza la importancia de seguir desarrollando estrategias efectivas para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje en temas de Cálculo y Matemáticas en general en el nivel medio superior.

Abstract

The main objective of this thesis is the design and implementation of activities that promote the teaching and learning of the tangent line at the high school level in Mexico. Although the concept begins to be studied since high school, mainly for the circumference, the imprecision in its teaching has generated difficulties in the understanding of the concept in general and in that of related concepts, such as the derivative. This highlights the importance of reviewing and improving the methods of teaching and learning elementary concepts.

To this end, a broad analysis of various approaches to constructing the tangent line was carried out, making it possible to identify and understand different perspectives from which the subject is approached. By observing how these approaches complement each other, a more complete view could be obtained.

In order to achieve the objective which we have set, a pedagogical sequence is proposed that incorporates the use of digital technologies such as GeoGebra. This tool allows the visualization of mathematical concepts in a dynamic and manipulable way, which can facilitate their understanding. The proposed activities start with intuitive ideas and then move towards more complex situations. This gradual direction allows students to become familiar with the concept.

The pedagogical sequence was implemented with a group of nineteen third-semester high school students who were taking the subject of Analytic Geometry and was carried out in the school's computer lab. To evaluate progress in comprehension, students were given the same test both at the beginning and at the end of the study period. This allowed us to observe a very positive impact on the students' evolution in the understanding of the concept and in the skills acquired, since in the final test they were able to successfully draw tangent lines, which they had failed to do in the initial test.

Although the results show significant progress, we recognize the need to evaluate the benefits in the medium and long term to assess the impact in subsequent courses, such as Differential Calculus, for example. On the other hand, we also identify limitations in the present study, which represent possible areas of opportunity for future research. We emphasize particularly the importance of continuing to develop effective strategies to improve the teaching and learning process in Calculus and Mathematics in general at the high school level.

Índice

Introducción

La enseñanza de la recta tangente en el nivel medio superior de México presenta diversos desafíos que deben ser abordados para mejorar la comprensión de este concepto, por lo que el desarrollo de recursos pedagógicos es fundamental para lograr este objetivo. En este trabajo se lleva a cabo una investigación de cómo se enseña el concepto de recta tangente. Se discuten los desafíos que enfrenta, presentando una propuesta pedagógica y las herramientas utilizadas en ésta, mostrando los resultados de la experimentación y evaluando el progreso alcanzado.

En los antecedentes, se efectúa un estudio acerca de la concepción que se tiene de la recta tangente en el nivel medio superior. Se discuten los retos que existen sobre el aprendizaje de las Matemáticas, particularmente en los temas de Cálculo Diferencial, mencionando la importancia de la recta tangente en esta materia. En este mismo capítulo, se presenta el planteamiento del problema, enfatizando la importancia de mejorar la enseñanza de este concepto. Se incluyen las preguntas de investigación que guiarán el estudio, así como el objetivo general y los objetivos específicos, los cuales indican cómo se implementarán actividades efectivas para la enseñanza de la recta tangente.

Para poder diseñar una secuencia pedagógica, es necesario tener una visión más amplia y completa del concepto en cuestión para lo cual es indispensable examinar de forma detallada el mayor número posible de perspectivas e interpretaciones distintas de dicho concepto. En nuestro caso se exploran diferentes acercamientos al concepto de recta tangente que influyen en su comprensión, destacando la importancia de proporcionar ejemplos para promover una comprensión más profunda, lo cual se discute en el capítulo del marco conceptual. Paralelamente, se examina el impacto de las tecnologías en la enseñanza de las Matemáticas, específicamente del Cálculo. A través de estas ideas, se ofrece una visión que permita abordar la enseñanza de la recta tangente desde una perspectiva completa y enriquecedora, con ayuda de las tecnologías.

En la sección de “Metodología y diseño de actividades” se describe de forma detallada cómo se llevó a cabo el estudio y cómo se desarrolló la secuencia de actividades. Se incluye información acerca de la selección de participantes, las actividades implementadas y los instrumentos empleados en la recolección de datos. Además, se detalla el proceso de análisis de datos, presentando los resultados obtenidos en cada sesión y comparando los datos recopilados para evaluar el impacto de las actividades diseñadas.

Tras la implementación de las actividades, se observa un progreso notable entre los alumnos en los resultados del Pre-Test y Post-Test, quienes en su mayoría pudieron trazar las rectas tangentes a diversas curvas, lo cual no se había logrado con éxito al principio de la secuencia. Este avance es evidencia del efecto de una secuencia bien estructurada y adaptada a sus necesidades de aprendizaje. Al finalizar, se observa que los estudiantes unificaron su concepción, tanto su significado teórico como práctico de la recta tangente.

Un hallazgo adicional a nuestras expectativas fue que durante las sesiones los alumnos mostraron un gran progreso en el manejo del software lo que permitió que las actividades propuestas se llevaran a cabo de una manera eficiente y efectiva, facilitando así el proceso de aprendizaje.

Finalmente, se presentan los resultados obtenidos en la experimentación y las respuestas a las preguntas de investigación planteadas al inicio del estudio. Se analiza el impacto de la secuencia pedagógica implementada, se discuten las limitaciones del estudio, áreas de oportunidad y se ofrecen recomendaciones para investigaciones futuras. Se busca resumir de manera clara los resultados obtenidos, destacando la importancia de abordar las dificultades en la enseñanza de la recta tangente y proponer estrategias efectivas para mejorar el aprendizaje de los estudiantes en el nivel medio superior.

1 Antecedentes

En este capítulo se abordarán aspectos relacionados con la enseñanza del Cálculo, haciendo énfasis específicamente en la comprensión de la recta tangente. A partir de esta contextualización, surgen las dificultades que los estudiantes enfrentan al aprender sobre ella. A través de este análisis, buscamos mejorar la eficacia del proceso educativo, contribuyendo así al desarrollo de una comprensión relacional de la recta tangente.

1.1 Dificultades en la enseñanza de las Matemáticas

Las Matemáticas, más que una simple serie de reglas y procedimientos a seguir o memorizar fórmulas y teoremas, constituyen una disciplina en la que los estudiantes deben desarrollar la capacidad de razonar, formular conjeturas y reflexionar sobre los resultados obtenidos. Al fomentar esto, los estudiantes adquieren una visión más profunda de los procesos matemáticos, lo que a su vez refuerza su capacidad para abordar problemas más complejos.

Santos-Trigo (2014) considera que la comprensión de las ideas matemáticas no es un proceso final, sino gradual y dinámico que se va robusteciendo en relación con la necesidad de la comunidad de aprendizaje.

Diversas investigaciones, como la realizada por Tall y Razali (1993), señalan que los errores cometidos por los estudiantes reflejan las diferencias en los procesos de pensamiento entre aquellos con dificultades y los que tienen éxito. Esto resalta la importancia de abordar de manera efectiva estos errores para mejorar el aprendizaje matemático. Entre los errores más comunes se encuentran: dificultades en el orden de las operaciones aritméticas, falta de comprensión de conceptos matemáticos fundamentales, dependencia excesiva en procedimientos memorizados en lugar de comprensión conceptual, dificultades para coordinar procesos matemáticos de manera flexible y una sobrecarga cognitiva debido a la acumulación de conocimientos aislados sin una comprensión integrada.

Un ejemplo de las dificultades que presentan los alumnos es que relacionen procesos visuales y aritméticos, en un orden distinto al habitual. Consideremos el siguiente diagrama en el que se les proporciona a los alumnos información de la circunferencia, sin darles el valor de radio.

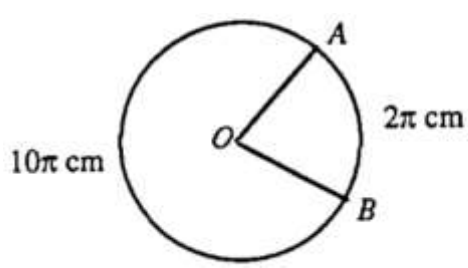


Figura 1.1.1 Dada la circunferencia: encontrar el radio. Obtenido de Tall y Razali (1993, pág. 215).

A los alumnos se les pide que escojan el radio de la circunferencia entre cinco opciones: $\sqrt{10}\,\pi$ cm, $\sqrt{12}\,\pi$ cm, 5 cm, 6 cm u otra respuesta. Para resolver este problema, basta con que los estudiantes recuerden que la medida de la circunferencia es dos veces el radio multiplicado por π, sin embargo, pueden cometer errores al calcular el resultado, en parte debido a su incapacidad para relacionar representaciones gráficas de expresiones aritméticas y también al llevar a cabo el proceso aritmético de forma incorrecta, específicamente, la incapacidad de hacer el proceso inverso, para obtener el radio.

A partir de esta idea, surge la importancia de que los alumnos logren una adecuada comprensión de los conceptos matemáticos, la cual es crucial para el éxito en la resolución de problemas. Conocer fórmulas o procedimientos no garantiza un cálculo correcto si no se comprenden las relaciones que existen entre los elementos matemáticos.

Para que los alumnos sean capaces de entender las reglas, teoremas, resultados y procedimientos que las Matemáticas ofrecen, es necesario que entiendan los conceptos con los que trabajarán. Skemp (1987) discute la idea de que un concepto requiere para su formación un número de experiencias que tienen algo en común. Una vez formado el concepto, podemos hablar de ejemplos del concepto. Un ejemplo de la importancia de basarse en experiencias para forjar una comprensión profunda de los procesos es el método para multiplicar fracciones. Siguiendo la idea de Skemp, podemos entender que, para realizar la multiplicación de dos fracciones, es crucial multiplicar los numeradores entre sí para obtener el numerador del resultado, de la misma forma con los denominadores para formar el denominador del producto final. Veamos estos dos ejemplos:

a) $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5} = \frac{2\times 4}{3\times 5} = \frac{8}{15}$

b) $\frac{3}{5}$ de $\frac{10}{13} = \frac{3\times 10}{5\times 13} = \frac{30}{65} = \frac{6}{13}$

Continuando con la idea de Skemp, se puede enseñar la multiplicación de fracciones de forma gráfica; esto puede ser muy efectivo para entender cómo este proceso funciona. Retomando el caso de $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$, para realizar esta operación, consideraremos primero la representación gráfica de $\frac{2}{3}$, para esto consideraremos un rectángulo, en donde dividimos la altura del rectángulo en las partes que indica el denominador, es decir, en tres partes y seleccionamos el número que indica el numerador, coloreándolos de la siguiente forma.

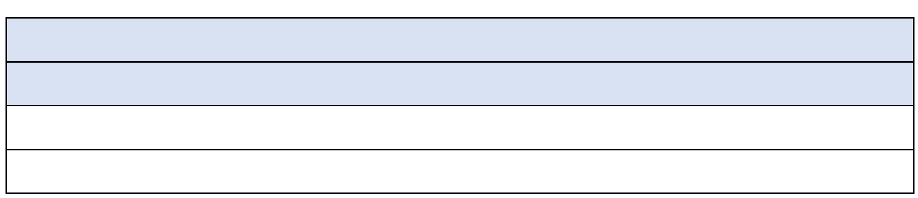


Figura 1.1.2 Representación gráfica de 2/3.

De forma similar, en el mismo rectángulo, representamos la fracción de $\frac{4}{5}$ en la base del mismo rectángulo, dividiendo a esta en cinco partes iguales y seleccionado cuatro partes de esta partición, las cuales han sido marcadas con rayas diagonales.

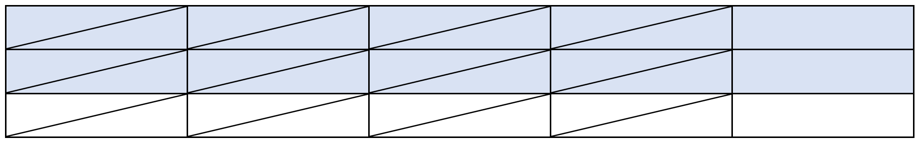


Figura 1.1.3 Representación gráfica de 2/3 x 4/5.

Así, quedan marcadas por sombras y rayas $\frac{2}{3}$ de cada quinta parte. El rectángulo (la unidad) quedó dividida en 15 partes de las cuales las marcadas por sombras y rayas son 8, obteniendo de forma gráfica lo que el algoritmo indica $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$.

De esta forma, al enseñar la multiplicación de fracciones a través de una variedad de experiencias, que permitan a los estudiantes manipular objetos físicos, visualizar gráficamente e interpretar los objetos matemáticos en situaciones reales, podemos ayudar a los estudiantes a construir un entendimiento profundo y significativo del concepto, conectando la manipulación concreta con el entendimiento abstracto, siguiendo las ideas de Skemp (1976).

No obstante, en Matemáticas existen palabras que se parecen o son iguales, pero poseen diversos significados, lo cual es considerado por Skemp (1976) como la raíz de muchas de las dificultades de la educación matemática actual. Un ejemplo de esto es el concepto de secante. Por una parte, la recta secante, en Geometría, es una recta que corta a una curva, por otro lado, la secante en Trigonometría es el recíproco de la función coseno, por lo que también se escribe como $sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$. Observamos que la diferencia principal entre ambos términos radica en los contextos en los que se utilizan y lo que representan, sin embargo, es necesario una comprensión clara para saber cuál utilizar dependiendo del contexto, pues los estudiantes pueden confundir cuándo y cómo usar cada concepto adecuadamente.

Sin embargo, estas dificultades no son propias de las Matemáticas, sino que también existen en el ámbito educativo, un ejemplo de esta situación ocurre alrededor del concepto de *comprensión*, pudiéndolo distinguir de dos maneras, la primera como *comprensión relacional* la cual se basa en la comprensión de las relaciones y conexiones entre conceptos matemáticos, mientras que la segunda es *comprensión instrumental*, en la que los alumnos son capaces de utilizar reglas o procedimientos sin comprender necesariamente por qué funcionan.

A partir de esto, se muestra la importancia de la enseñanza relacional, ya que posibilita la adaptabilidad a nuevas tareas, resolución de problemas, la capacidad de inferir soluciones alternativas y comprender nuevos problemas o variaciones de los originales. Además, de facilitar la retención de información, ya que, al comprender los conceptos, los alumnos pueden deducir las fórmulas, lo que facilita su memorización, por lo que la enseñanza de las matemáticas relacionales es más efectiva a largo plazo.

Un ejemplo que respalda la prevalencia en las Matemáticas de la enseñanza relacional, en comparación con la enseñanza instrumental, se encuentra alrededor de la enseñanza de la fórmula de la pendiente de una recta, previamente explorada por Wu (2012). Si consideramos la recta L en el plano, la cual no es vertical y los puntos $P = (p_1, p_2)$ y $Q = (q_1, q_2)$ distintos en L, entonces, por definición de la pendiente de la recta L, es $\frac{P_2 - q_2}{p_1 - q_1} = \frac{PR}{PQ}$.

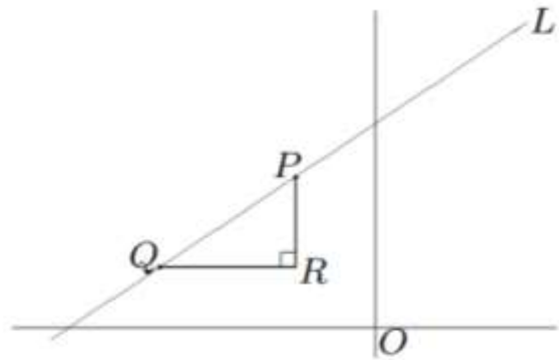


Figura 1.1.4 Pendiente de L. Obtenido de Wu (2012).

Por otra parte, si consideramos dos puntos en L, sean A y B, distintos de P y Q, entonces pendiente de la recta L es $\frac{AC}{BC}$. De esta forma, tenemos dos pendientes que corresponden a la recta L.

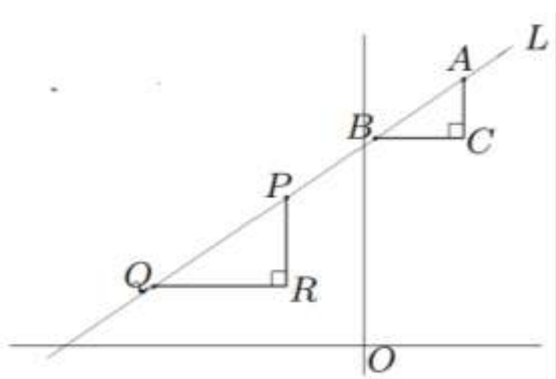


Figura 1.1.5 Pendientes en distintos puntos de L. Obtenido de Wu (2012).

Pero observamos que los triángulos ΔQRP y ΔBCA son semejantes, por lo que se obtiene que $\frac{PR}{QR} = \frac{AC}{BC}$, obteniendo de esta forma que la pendiente de la recta funciona para cualesquiera dos puntos distintos en la recta. No obstante, a los alumnos se les promueve que memoricen la definición para dos puntos fijos, sin comprender por qué funciona para cualesquiera dos puntos de la recta, es decir, la enseñanza de este concepto adopta un enfoque instrumental.

Sin embargo, existen diversas dificultades con respecto de la enseñanza relacional, debido a la naturaleza abstracta y conceptual de muchos conceptos matemáticos, otros más enfocados a la implementación de esta; Skemp (1976) considera los siguientes factores circunstanciales: el efecto de rebote de los exámenes, programas de estudio sobrecargados, dificultad para evaluar si una persona entiende de forma relacional o instrumental y la gran dificultad psicológica para los profesores de acomodar (reestructurar) sus esquemas existentes.

Para abordar estas dificultades, es importante utilizar secuencias pedagógicas que fomenten la comprensión relacional, proporcionen ejemplos y contextos significativos, que promuevan la exploración y la formación adecuada de los conceptos. Por ello, es fundamental identificar los conceptos cruciales para la enseñanza del Cálculo y adaptar los métodos de enseñanza para fortalecer la comprensión de estos, mejorando la calidad de aprendizaje.

1.2 Dificultades en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo

El Cálculo tiene una fuerte presencia en los planes de estudio de diversas disciplinas (dentro y fuera de las propias Matemáticas) por su capacidad para modelar fenómenos en diversos contextos. Debido a esto, en México, la Dirección General de Bachillerato (2023) ha asignado cursos correspondientes a la enseñanza del Cálculo, uno para Cálculo Diferencial y otro para Cálculo Integral.

Hablando específicamente del curso de Cálculo Diferencial, este se aborda entre el cuarto y el quinto semestre acorde a la institución, después de los cursos correspondientes de Álgebra, Geometría, Trigonometría y Geometría Analítica. Los temas vistos dependen del programa educativo, pero en general, se abordan los siguientes:

1. Números reales y la recta numérica.
2. Funciones reales de variable real.
3. Límites.
4. Definición y construcción de la derivada.
5. Derivadas de funciones algebraicas y trascendentes.
6. Uso de la derivada: Problemas de optimización.

Este curso con frecuencia se considera difícil de entender debido a una gran cantidad de factores que lo rodean, como por ejemplo la introducción de nuevos conceptos y de nuevas notaciones junto con la densa cantidad de contenidos, lo que generalmente dificulta el aprendizaje de los alumnos. Además de la necesidad de tener adecuados conocimientos previos, genera dificultades en el aprendizaje, no solo en el bachillerato, sino también en los primeros semestres de las carreras de las distintas licenciaturas que contienen cursos de Cálculo, como las licenciaturas en ingeniería.

Hitt (2003), considera que el manejo de algunos de los subconceptos del Cálculo (que incluyen el concepto de función, el de límite y el de continuidad de funciones) obstaculiza el desarrollo profundo de los conceptos propios de la asignatura. Además de los problemas que surgen al iniciar el estudio de los procesos infinitos, existen problemas que son producto de un mal aprendizaje del precálculo.

A continuación, mencionaremos algunas dificultades específicas relacionadas con los contenidos abordados en el curso de Cálculo. Además, daremos ejemplos concretos de estas dificultades, basados en estudios previos realizados.

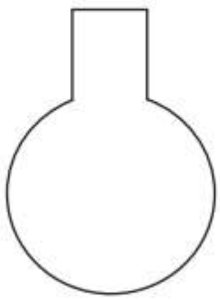
Tall y Schwarzenberger (1978) indican, al igual que otros autores, que "la mayor parte de las Matemáticas que se encuentran en la escuela secundaria consisten en ideas sofisticadas concebidas por adultos inteligentes traducidas a una forma adecuada para enseñarlas a niños en desarrollo" (p. 44.)**.** Esto es de suma importancia ya que, por un lado, al simplificar un concepto sofisticado, podría implicar una pérdida de precisión y aumentar la complejidad conceptual. Por otro lado, la traducción informal del lenguaje puede introducir ideas no deseadas del significado del concepto. Un ejemplo de esto son los números reales.

Esto es de suma importancia ya que, por un lado, al simplificar un concepto sofisticado, podría implicar una pérdida de precisión y aumentar la complejidad conceptual. Por otro lado, la traducción informal del lenguaje puede introducir ideas no deseadas del significado del concepto. Un ejemplo de esto son los números reales.

Los números reales se pueden representar como puntos en una recta numérica. Sin embargo, esta representación visual puede presentar desafíos debido a su limitada precisión. Por ejemplo, en un dibujo realizado en una hoja de papel, es complicado de distinguir entre segmentos de longitud $\sqrt{2}$ y 1.414. Esta falta de precisión en la representación gráfica se vuelve importante en el contexto del Cálculo Diferencial, ya que la representación precisa de los números reales en una recta numérica es importante para los conceptos como límites y derivadas.

De acuerdo con Carlson *et. al*. (2010), diversos estudios han indicado que, en los niveles previos al Cálculo, los alumnos tienden a concebir el razonamiento matemático en términos de operaciones aritméticas estáticas, utilizadas para calcular valores numéricos específicos de una función o expresión. Sin embargo, una vez que los estudiantes logran visualizar de forma continua los valores de entrada en el dominio de la función, los cuales generan una gama continua de valores de salida, se considera que han desarrollado una comprensión más amplia del proceso de función, percibiéndolo como un mapeo general de conjuntos de valores de entrada a conjuntos de valores resultantes. La habilidad para interpretar el significado de una función que modela una situación dinámica implica observar cómo varían los valores de salida de la función mientras se imaginan cambios en los valores de entrada. Este tipo de habilidad se ha denominado razonamiento covariacional, y se ha evidenciado como esencial para representar e interpretar la naturaleza cambiante de las cantidades en diversas situaciones funcionales.

Carlson *et. al*. (2010) proponen el problema de la botella para evaluar la capacidad de los estudiantes de nivel de precálculo para comprender y aplicar la covariación, es decir, cómo dos cantidades (en este caso, la altura del agua y la cantidad de agua) cambian juntas. El problema mencionado es el siguiente:



Imagina a esta botella (Figura 1.2.1) llenándose de agua. Dibuja una gráfica de la altura del agua en la botella en función de la cantidad de agua en la botella. Explica el pensamiento que usaste para construir tu gráfica.

Figura 1.2.1 "Problema de la botella". Obtenido de Carlson et. al. (2010, pág.132).

En este el estudio, se observó que los estudiantes tenían dificultades para interpretar correctamente la covariación. Algunos de los resultados obtenidos fueron los siguientes:

- Uno de los estudiantes dibujó un segmento de recta con pendiente positiva, lo que indicaba una escasa comprensión entre la altura del agua y la cantidad de agua en la botella. Este estudiante se centró únicamente en como cambiaba la altura, como si solo se tratara de llenar una botella cilíndrica de agua en lugar de la botella propuesta.
- Once de los estudiantes representaron la altura del agua con una gráfica cóncava hacia arriba, es decir, imaginaban que el agua subía cada vez más rápido en la botella. Esta respuesta muestra una comprensión parcial, pues no consideran la relación entre la altura y la cantidad de agua.
- Tres de los estudiantes dibujaron un gráfico cóncavo hacia abajo. Notamos que esta interpretación errónea, surge al tratar de relacionar la forma de la gráfica con la forma de la botella.

De este modo, se evidencia que 14 de cada 20 estudiantes no lograron comprender adecuadamente la covariación en la gráfica que representa la altura del agua en la botella en relación con la cantidad de agua presente en ella. Por otro lado, sólo cinco estudiantes dieron una solución aceptable: tres alumnos realizaron una gráfica aceptable, excepto por la pendiente del segmento, y los otros dos tuvieron completamente correcta la gráfica (Ver Figura 1.2.2). Estos estudiantes fueron capaces de explicar cómo los cambios en la cantidad de agua estaban relacionados con los cambios en la altura del agua en diferentes partes de la botella.

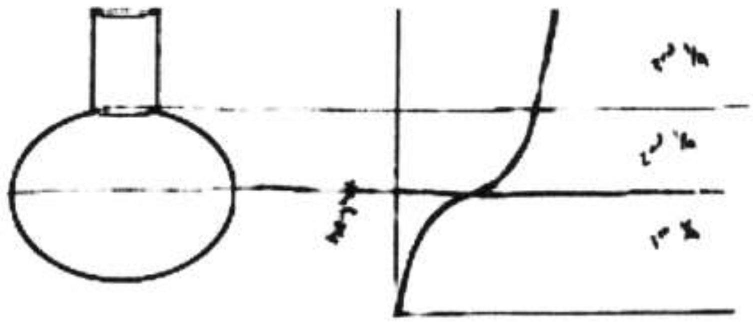


Figura 1.2.2 Ejemplo de respuesta de un alumno al "Problema de la botella". Obtenido de Carlson et. al. (2010, pág.138).

Estas respuestas muestran las dificultades que los estudiantes pueden enfrentar al comprender y aplicar la covariación en un contexto específico como el problema de la botella. La variedad de respuestas resalta la importancia de desarrollar una comprensión profunda de cómo dos cantidades cambian juntas para representar con precisión la relación entre ellas en situaciones dinámicas.

Con el modelo mencionado, notamos que la comprensión de la covariación es fundamental en el Cálculo, ya que muchas situaciones del mundo real se modelan mediante funciones que describen cómo una cantidad cambia en relación con otra. La covariación permite entender cómo estas variables se relacionan y cómo cambian, además de la interpretación de esta en diferentes contextos.

Hitt y González-Martín (2016), analizaron las dificultades que pueden tener los estudiantes es identificar, generalizar patrones y regularidades en problemas matemáticos, lo que limita su capacidad para aplicar los conceptos y resolver problemas. Diversos libros de textos abordan la continuidad de funciones reales de una sola variable, a menudo utilizando representaciones visuales, como la idea de que una función es continua si "su gráfica puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel". A pesar de que esta analogía simplifica el concepto, puede limitar su comprensión, ya que la definición formal involucra el límite de una función en un punto, observando que la dependencia de imágenes puede obstaculizar este desarrollo.

Por su parte, Tall (2012) considera la forma de transformar estas experiencias en una definición formal. Se plantea la idea de que, al estirar horizontalmente la gráfica de una función en la pantalla, se puede visualizar cómo la curva se extiende más allá de los límites de la pantalla, pero sólo se puede ver la parte mostrada en la pantalla (el cuadro).

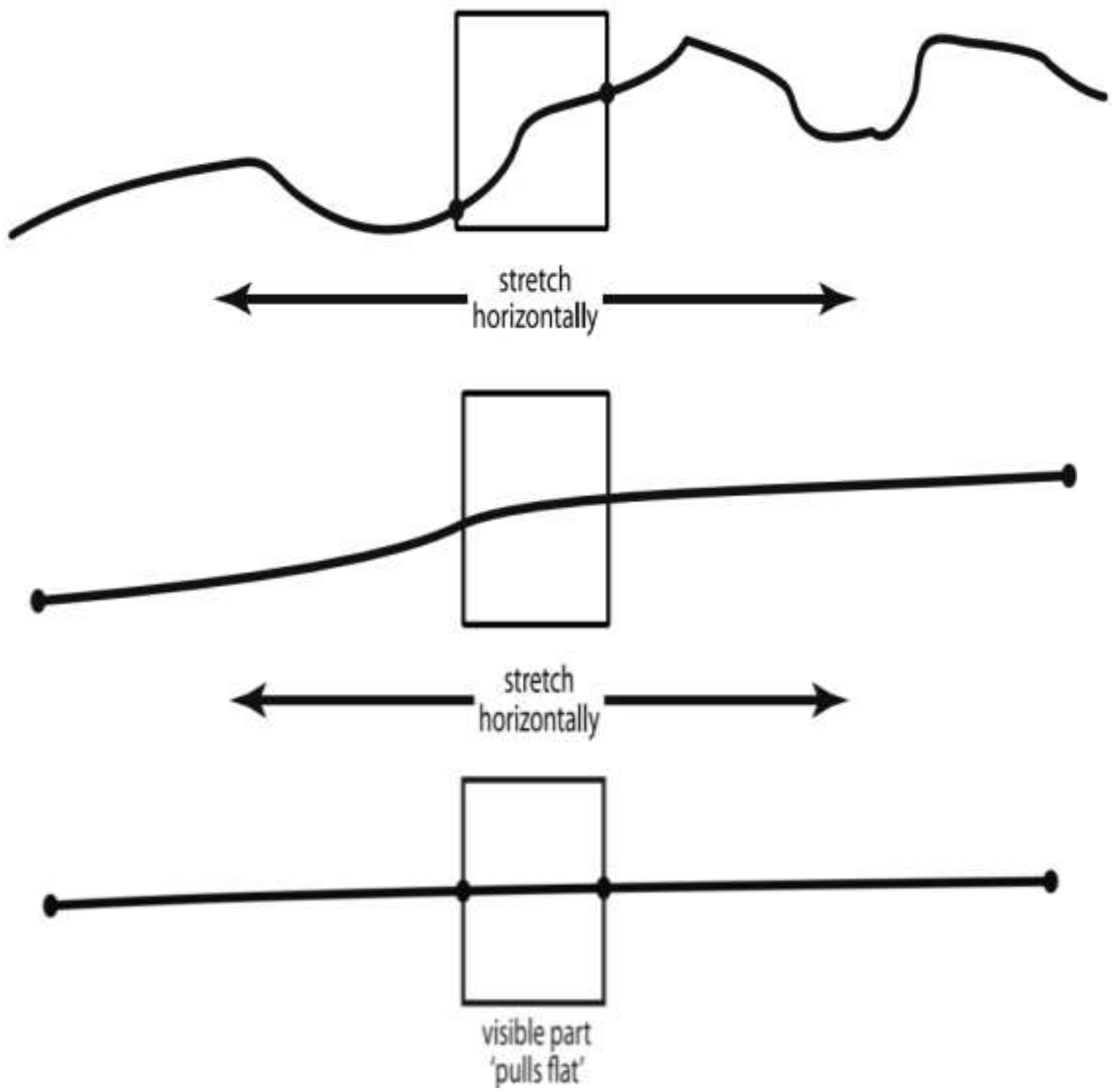


Figura 1.2.3 Estiramientos de horizontales de una función. Obtenido de Tall (2012).

De donde podemos decir que una función es continua si, al estirarla horizontalmente, la función acaba aplanándose, quedando contenida en la región visible por pequeña que esta región sea. A partir de esta idea es posible construir la definición de épsilon-delta, por lo que se muestra la importancia de vincular las ideas intuitivas con las representaciones formales Matemáticas para desarrollar una comprensión más profunda y significativa de conceptos.

Artigue (1998) discute que las dificultades a los que se enfrentan los alumnos en Cálculo se encuentra conceptos que pueden ser difíciles de comprender debido a su naturaleza abstracta, la noción de límite al pasar de una idea intuitiva a la formal, la traducción de un objeto matemático de un registro semiótico a otro, entre otros.

En este último tópico, un ejemplo que menciona Artigue es el de una representación gráfica a una algebraica. Los estudiantes pueden enfrentar dificultades al intentar traducir una función representada gráficamente a su forma algebraica, o viceversa. Estas dificultades pueden surgir debido a una falta de conexión entre los diferentes registros semióticos utilizados para representar funciones, lo que puede dificultar la comprensión y el manejo efectivo de conceptos matemáticos, como lo es la función y su derivada o sus primitivas. Esto es de suma importancia en el contexto del Cálculo, ya que, si los estudiantes solo pueden trabajar con una representación de función y no traducirla a otra, su comprensión puede ser superficial o limitada.

El primer concepto que propiamente se aborda en el curso de Cálculo es el de límite, aunque informalmente ya haya sido visto en cursos previos. Cornu (2002) menciona que puede ser difícil de asimilar para los estudiantes, debido a su complejidad, especialmente cuando se introduce formalmente. Usualmente los alumnos llegan con la idea de límite con concepciones informales, que pueden entrar en conflicto con la definición formal, generando confusiones y obstáculos en la comprensión.

A pesar de que los alumnos, pueden resolver ejercicios y problemas relacionados con límites, muchos estudiantes no logran tener una comprensión profunda y efectiva del concepto en contextos matemáticos más amplios. Estas dificultades resaltan la importancia de abordar el concepto de límite desde múltiples perspectivas y de fomentar una comprensión profunda para los estudiantes.

Un ejemplo de esto es mostrado por Hitt (2003), quien realizó un estudio en el cual un profesor escribió acerca de límites, en esta proporciono situaciones de "la vida real", las cuales promueven en los estudiantes una concepción errónea que posteriormente se convertirá en obstáculo. Después introducen diferentes situaciones para el cálculo de límites, específicamente la de $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$, en el cual lo estudia de forma numérica y gráficamente.

x	*-2.5*	*-2.9*	*-2.99*	*-2.999*	*-3.001*	*-3.01*	*-3.1*	*-3.5*
f(x)	*-5.5*	*-5.9*	*-5.99*	*-5.999*	*-6.001*	*-6.01*	*-6.1*	*-6.5*

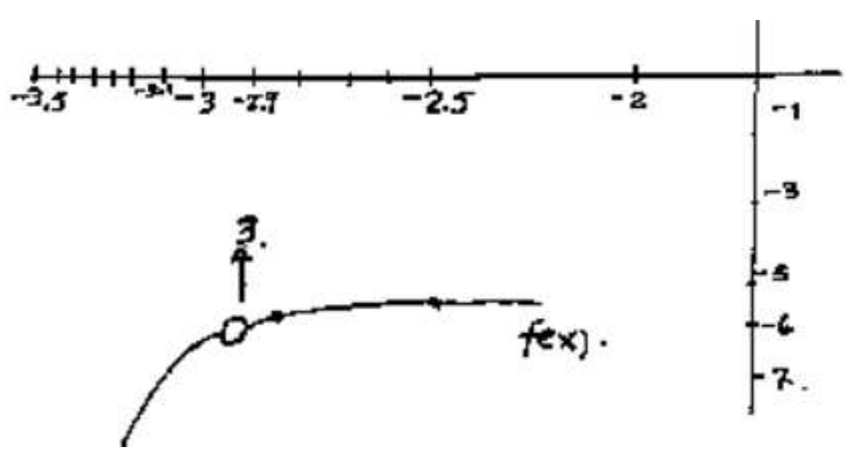


Figura 1.2.4. Ejemplos proporcionados por profesor con respecto del concepto de límite. Obtenido de Hitt (2003, pág. 9).

Observamos que *f(x)* no está definida en -3, por lo que *f(x)* tiene una discontinuidad removible en este punto, pero existe este límite. A pesar de que numéricamente se muestra que límite tiende a -6, la gráfica no corresponde a la función proporcionada, además que el profesor menciona que "este límite se encuentra tanto a la derecha como a la izquierda del hueco de la indeterminación", lo cual no ha definido anteriormente, dificultando la construcción del concepto de límite. Es crucial abordar este tipo de deficiencias, ya que la explicación clara y completa de los temas por parte del profesor es fundamental para que los estudiantes desarrollen una comprensión sólida de los conceptos.

Después, menciona las técnicas algebraicas para evaluar límites, reduciéndose a evaluar directamente y en caso de una indeterminación, utilizar un método algebraico para remover la indeterminación. De esta forma, no introduce en ningún momento un proceso al infinito, reduciéndose solo a una sustitución.

Al comprender el concepto de límite en la definición de la derivada, los estudiantes pueden apreciar la idea de aproximarse cada vez más al punto de interés en la función, lo que les permite calcular la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto (Orton, 1983). Sin embargo, se destaca que los errores cometidos estaban relacionados con los límites en lugar de la manipulación algebraica, además de que 43 estudiantes no pudieron afirmar que la recta secante se convierte en una tangente, a pesar de que el diagrama y la explicación estaban destinados a apoyar el proceso de aproximación.

Estas dificultades y respuestas erróneas de los estudiantes reflejan la confusión y la falta de comprensión en torno al concepto de límite y la relación entre la secante y la tangente en el contexto de la diferenciación. Estos hallazgos proporcionan información valiosa sobre las áreas problemáticas en la comprensión de la diferenciación por parte de los estudiantes.

No obstante, también existen estudios con respecto de las críticas a la enseñanza tradicional, tal es el caso de Moreno-Armella (2014), en el que menciona que el concepto de límite es una de las áreas donde los estudiantes enfrentan más dificultades, debido a las diferencias entre la intuición del movimiento y la formalización matemática. A partir de esta idea, surge la brecha que usualmente existe entre la forma en que los estudiantes intuitivamente perciben y comprenden conceptos matemáticos, y la manera en que estos se formalizan.

Notamos entonces, que la enseñanza tradicional se centra en la formalización matemática sin considerar adecuadamente las necesidades cognitivas de los estudiantes. Por consiguiente, es de suma importancia diseñar actividades y ejercicios que permitan a los estudiantes conectar los conceptos matemáticos con sus intuiciones y experiencias previas, ya sea considerando enfoques pedagógicos alternativos que se alineen mejor con las intuiciones de los estudiantes, para ayudar a construir una base sólida para la comprensión de conceptos más avanzados.

Un ejemplo discutido en el artículo de Moreno-Armella, en el que presenta cómo es posible conectar ideas intuitivas para abordar la obtención de la derivada de la función logaritmo de manera visual y geométrica. Se considera la diferencia entre log(x + H) y log(x), la cual se representa como el área entre x y x + H bajo la gráfica de la función y = 1/x.

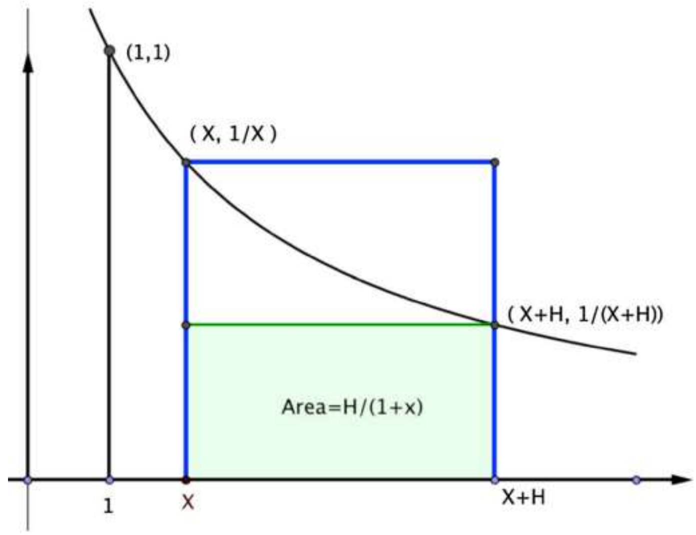


Figura 1.2.5 Diferencia de diferencia entre log (x + H) y log(x), representando el área entre x y x + H. Obtenido de Moreno-Armella (2014, pág. 623).

De esta forma se obtiene las siguientes desigualdades:

$$\frac{1}{x+H} < \frac{\log(x+H) - log(x)}{H} < \frac{1}{x}.$$

Cuando $H \to 0$ se tiene que el centro de la desigualdad es la derivada de log(x), mientras que los extremos toman el valor de $\frac{1}{x}$, obteniendo que $\frac{d}{dx} log(x) = \frac{1}{x}$.

Para este ejemplo, es necesario una perspectiva visual y geométrica, la cual permita a los estudiantes comprender la relación entre la función logarítmica y su derivada de una manera más intuitiva, en lugar de depender únicamente de la enseñanza tradicional, que solo les proporciona la formula. De esta forma se facilita la comprensión de los conceptos subyacentes y se fomenta una conexión más profunda con la intuición matemática de los estudiantes.

Sin embargo, las dificultades no solo son alrededor del concepto de la derivada, sino también en el uso y aplicaciones de estas. Benitez y Londoño (2009) señalan que las aplicaciones de la derivada son desafiantes en diversos aspectos para los alumnos, pues trabajan con problemas del mundo real. Durante el proceso de modelación, los estudiantes pueden cometer errores en la manipulación que puede llevar a resultados incorrectos. Al tratar de comprender e interpretar los resultados obtenidos, puede ser un desafío para los estudiantes al tratar de relacionarlos con el problema original. Estas dificultades se observaron en un grupo de estudiantes se les dio el siguiente conjunto de instrucciones, para el estudio del fenómeno de evaporación:

1. Poner un recipiente con agua, expuesto a la intemperie durante seis días.
2. Diseñar un método para determinar la cantidad de agua que se evapora al transcurrir el tiempo.
3. Construir una tabla en la cual se relacione el tiempo con la cantidad de agua evaporada. Elaborar una gráfica de los datos obtenidos y encontrar una representación algebraica del modelo, la cual permita estimar el volumen de agua en el recipiente en un momento específico.

A continuación, se presentan algunas de las respuestas y modelos descritos por los alumnos:

- Algunos estudiantes utilizaron recipientes cilíndricos para medir la altura del líquido a medida que transcurría el tiempo. Registraron los cambios en la altura y calcularon el volumen evaporado a partir de estos datos.

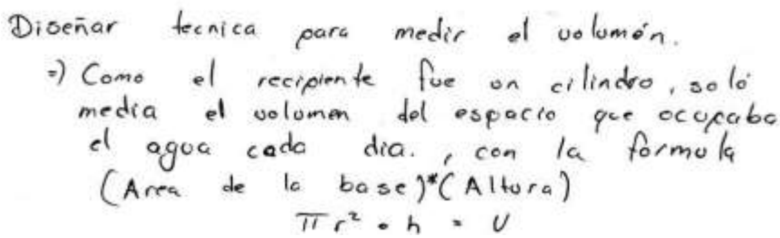
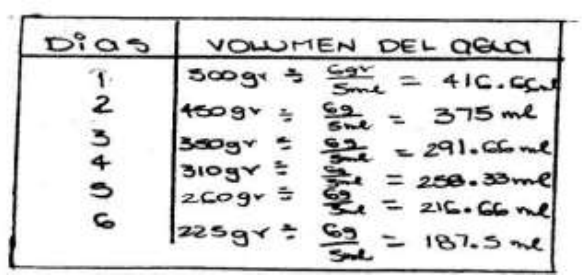

Diseñar tecnica para medir el volumén.
=) Como el recipiente fue un cilindro, solo media el volumen del espacio que ocupaba el agua cada dia. , con la formula
(Area de la base)*(Altura)
$\pi r^2 \cdot h = V$

Figura 1.2.6 Respuesta de alumno que utilizó recipientes cilíndricos Obtenido de Benitez y Londoño (2009, pág. 37).

- Otros estudiantes estimaron el volumen evaporado utilizando la relación entre la densidad del líquido, la masa y el volumen. Esta perspectiva les permitió calcular el volumen evaporado a partir de la densidad del líquido.



Dias	Volumen del agua
1	500gr ÷ 6gr/5ml = 416.6
2	450gr ÷ 6g/5ml = 375 ml
3	350gr ÷ 6g/5ml = 291.66 ml
4	310gr ÷ 6g/5ml = 258.33 ml
5	260gr ÷ 6g/5ml = 216.66 ml
6	225gr ÷ 6g/5ml = 187.5 ml

Figura 1.2.7 Respuesta de un alumno que estimo el volumen evaporado Obtenido de Benitez y Londoño (2009, pág. 39).

- Una estudiante utilizó un recipiente de un litro, marcando la altura del líquido y luego rellenándolo con un vaso graduado para obtener mediciones precisas. Este método implicaba la construcción de un modelo matemático y el uso de herramientas como hojas de cálculo y calculadoras para realizar ajustes lineales y otras funciones.

Figura 1.2.8 Respuesta de un alumno que utilizo herramientas tecnológicas Obtenido de Benitez y Londoño (2009, pág. 40).

Aunque no se muestra explícitamente que los estudiantes podrían haber empleado la derivada para analizar la tasa de cambio del volumen del líquido evaporado en función del tiempo, estas respuestas muestran la diversidad de estrategias que los estudiantes emplearon para abordar el problema de la evaporación del líquido en el recipiente, destacando la creatividad, el uso de diferentes recursos y la aplicación de la derivada.

También existen estudios que se centran en la baja calificación obtenida por los estudiantes que logran aprobar esta asignatura, además del alto índice de reprobación (Moreno, Alcántara, & Oñate, 2016). Esto es de suma preocupación, debido a que la reprobación está relacionada con el rezago académico y la deserción, la cual constituye en un impedimento para el logro de los objetivos de formación profesional de una institución educativa (Riego, 2013).

Por su parte, Rojas (2021) observa que la existencia de dificultades en la comprensión de los conceptos acerca de la derivada de una función ocurre en diversos contextos, algunas de estas son:

- Dificultades en comprender la definición y el significado de la derivada en un punto específico.
- Problemas para la interpretación geométrica y física del concepto de derivada y su relación con la función original.
- Confusión en la aplicación de las reglas de derivación para diferentes tipos de funciones.
- Dificultades en aplicar correctamente la derivada para resolver problemas específicos.

Los conflictos que pueden tener los alumnos debido a una falta de práctica y de comprensión de estos temas pueden causar un impacto importante en el rendimiento académico y profesional en campos de ciencias e ingenierías, así como en la capacidad para abordar problemas de aplicaciones.

Riestra y Ulin (2003) observaron que, en los cursos de Cálculo Diferencial, generalmente se introduce el concepto de la derivada con el de tangencia. A partir de la pendiente de la recta tangente a un punto, surge la definición de la derivada en ese punto, que se define como el límite del cociente de diferencias. Debido a esto, la comprensión del concepto de la recta tangente a una curva es esencial para la asimilación de la derivada.

De acuerdo con Tall y Vinner (1981), se han llevado a cabo múltiples estudios sobre cómo las percepciones visuales de los estudiantes de secundaria influyen en su habilidad para generalizar el concepto de recta tangente a curvas que no son solo circunferencias o cónicas.

Y aunque comúnmente se presenta el concepto de recta tangente utilizando el límite de las pendientes de las rectas secantes, para introducir geométricamente la derivada, esta no es la única manera de abordarlo. Por ello, es crucial que los estudiantes tengan la oportunidad de conocer y explorar diversos enfoques para entender el concepto de recta tangente (Riestra & Ulin, 2003, pág. 219).

1.3 Planteamiento del problema

El problema central que esta tesis pretende abordar es la falta de actividades que promuevan la enseñanza y el aprendizaje de la recta tangente en el nivel medio superior en México. La falta de claridad con respecto del concepto y la ausencia de enseñanza dirigida específicamente al mismo han llevado a dificultades, principalmente en la comprensión de las derivadas, pues estas se introducen y suelen interpretarse geométricamente a partir del concepto de las tangentes.

Con anterioridad, la recta tangente era abordada desde la escuela secundaria en el tercer grado, un ejemplo de esto son los libros de texto autorizados por la SEP en el ciclo 2011-2012, específicamente el libro de Briseño *et al*. (2009), en el cual en la lección 6 del bloque 3, se aborda a tangente y secantes de una circunferencia.

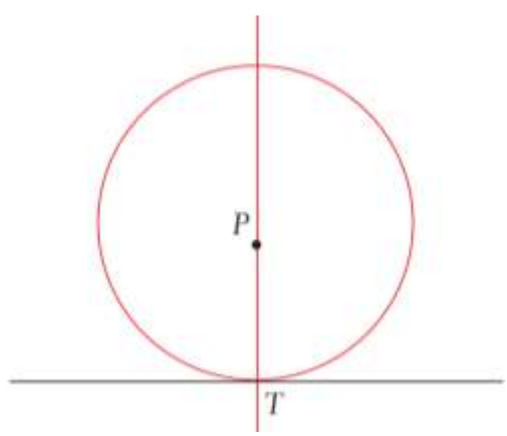


Figura 1.3.1 La recta tangente a la circunferencia en el punto T, Briseño et al. (2009).

Donde se define que: “A la recta que toca a la circunferencia en un solo punto T se le llama recta tangente la circunferencia en el punto T”.

Pero esta definición no funciona para todas las curvas más generales. Pocas curvas tienen centro, y la recta que podríamos calificar como tangente tal vez cortaría a C en puntos distintos, o quizá cruzaría C en el punto de tangencia (Thomas Jr., 2006).

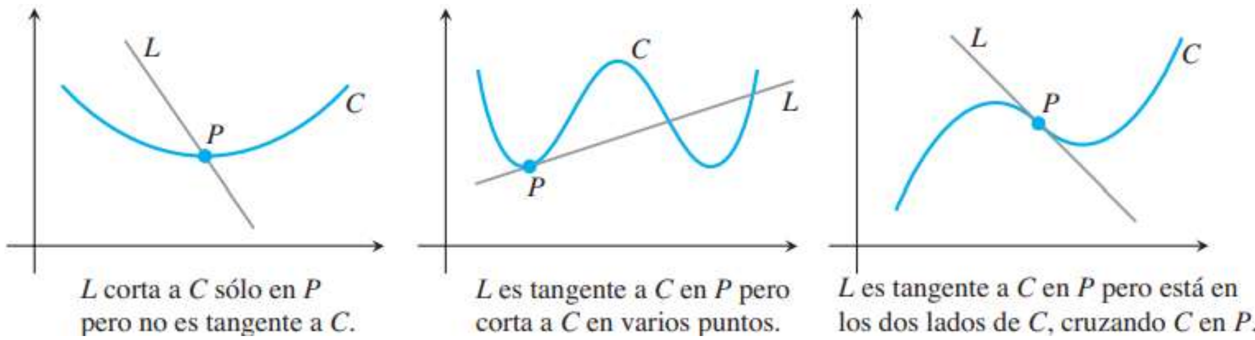


Figura 1.3.2 Exploración de mitos acerca de las rectas tangentes. Obtenido de Thomas (2006, pág.135).

Para definir la tangencia para curvas generales es necesario considerar otras nociones, sin embargo, en los planes de estudios subsecuentes, no se incluía la enseñanza del concepto de la recta tangente al círculo como parte del programa de Matemáticas a nivel secundaria (habiendo revisados los libros de los ciclos 2018-2022, de los diversos grados, como los libros de los tres grados de Matemáticas para secundaria de Editorial Castillo y Santillana), en donde los únicos segmentos que se abarcan de la circunferencia son el radio y el diámetro, para el cálculo de áreas, por lo que la recta tangente se aborda completamente en los planes de estudios de bachillerato.

La Dirección General del Bachillerato (DGB) es una unidad administrativa de la Subsecretaría de Educación Media Superior (SEMS), encargada de coordinar la educación que se imparte en el Bachillerato General. Dentro de los Programas de Estudio para la Generación 2017 - 2020 y subsecuentes (hasta 2023) de las materias de Matemáticas.

La recta tangente se aborda por primera vez en el tercer bloque del segundo curso (que corresponde Geometría Euclidiana), debido a que los alumnos deben de aprender a reconocer los segmentos, rectas y ángulos asociados a la circunferencia, en donde engloba a la recta tangente de una forma meramente geométrica, sin volver a abordarla.

En el tercer curso (que pertenece a Geometría Analítica) se empieza a enseñar este tema en el segundo bloque con el lugar geométrico de una recta, abordando tópicos como las formas de la ecuación de la recta. En los bloques siguientes se consideran a las cónicas (circunferencia, parábola y elipse), en donde se calculan las rectan tangentes a estas desde un punto de vista algebraico.

Finalmente, en el curso de Cálculo Diferencial se menciona que la derivada de una función es la pendiente de la recta tangente a la función en cualquier punto de la gráfica, sin embargo, más allá de dar esta interpretación geométrica de la derivada sin profundizar en ella, debido a que se concentra más en los temas de los métodos y reglas de derivación, se provoca que los alumnos no sean capaces de interpretarla adecuadamente.

El aprendizaje de la recta tangente se ha centrado en la presentación de la circunferencia, lo que sugiere una concepción limitada con respecto de las curvas en las que la recta tangente se podría aplicar. Esto puede resultar en una comprensión parcial del concepto y una incapacidad para aplicarlo a casos generales.

Notamos, a partir de esta somera revisión de los planes de estudio, que se viola el primer principio del aprendizaje de las Matemáticas de Skemp (1987), el cual nos enuncia:

> Los conceptos de orden superior a los que ya tiene la gente no pueden ser comunicados a ellos por una definición, sino solo organizando que ellos experimenten una adecuada colección de ejemplos (p. 14).

Observamos que el tema de la derivada, bajo el contexto de la recta tangente, se introduce como una definición que es entendible para el profesor (que ya tiene los conceptos a los que se refieren) pero ininteligibles para el alumno, por lo que, para una mejor comprensión de este concepto, es necesario introducir desde ejemplos sencillos a más complejos, para de esta forma lograr generalizaciones y que los alumnos sean capaces de entender el concepto.

Debido a esto se necesita una revisión y desarrollo de actividades para enseñar el concepto de la recta tangente en contextos más generales. Esto es importante para mejorar la comprensión de los estudiantes y permitirles aplicar este concepto en diversas situaciones

Las Matemáticas, incluyendo el concepto de la recta tangente y el Cálculo, son fundamental en muchas disciplinas de educación superior, como Física e ingeniería. Una comprensión deficiente de estos conceptos en el nivel medio puede dejar a los estudiantes en desventaja cuando ingresan a la educación superior.

El problema central que esta tesis pretende abordar es la falta de actividades que promuevan la enseñanza y el aprendizaje de la recta tangente en el nivel medio superior en México. La falta de claridad con respecto del concepto y la ausencia de enseñanza dirigida específicamente al mismo han llevado a dificultades, principalmente en la comprensión de las derivadas, pues estas se introducen y suelen interpretarse geométricamente a partir del concepto de las tangentes.

1.4 Preguntas de investigación

Para esta investigación planteamos las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es la concepción de los estudiantes sobre la recta tangente en el nivel medio superior en México?

- ¿Cuáles son las principales deficiencias en la enseñanza actual de la recta tangente en el nivel medio superior en México?
- ¿Qué elementos se necesitan para diseñar una secuencia de actividades que promueva una comprensión más completa y aplicable de la recta tangente?
- ¿Qué impacto tiene el uso de tecnologías en la comprensión de la recta tangente por parte de los estudiantes?

1.5 Objetivo general

Desarrollar estrategias pedagógicas efectivas para la enseñanza de la recta tangente en el nivel medio superior, al considerar la escasez de actividades que promuevan una comprensión del concepto en casos generales.

1.6 Objetivos específicos

1. Identificar las deficiencias en la enseñanza actual de la recta tangente en el nivel medio superior en México.

2. Diseñar y evaluar una secuencia de actividades que promueva una comprensión más completa y aplicable de la recta tangente.

3. Aplicar la secuencia de actividades a un grupo de estudiantes de nivel medio superior en México y evaluar su eficacia en un entorno educativo real.

4. Analizar el comportamiento de los estudiantes al desarrollar las actividades propuestas.

2 Marco conceptual

En este capítulo, exploraremos diversos enfoques de la recta tangente. Consideraremos la importancia de la integración de tecnologías educativas para mejorar la visualización y comprensión, reconociendo su papel crucial en el contexto actual de la educación matemática. Motivados por este análisis, propondremos el desarrollo de una secuencia pedagógica que combine diversas representaciones y aproveche las herramientas tecnológicas disponibles, con el objetivo de enriquecer la comprensión de la recta tangente de los estudiantes.

2.1 Enfoques e interpretaciones de la recta tangente

La recta tangente es un concepto fundamental que se puede abordar desde diversas perspectivas matemáticas y conceptuales. Estas no son contradictorias, en cambio, brindan formas complementarias de comprender y aplicar la idea de la recta tangente en una variedad de situaciones. Para crear estrategias pedagógicas efectivas para enseñar la recta tangente en el nivel medio superior, es necesario combinar modelos teóricos y prácticos.

Bos, Doorman y Piroi (2020) examinaron el aprendizaje intuitivo de conceptos como pendientes de curvas (o rectas tangentes). Consideraron que el profesor debe aprovechar esto, ya que debe ser capaz de identificar las ideas de los estudiantes, relacionadas con las pendientes de curvas y las rectas tangentes. Por esta razón, ellos desarrollaron estos conceptos, combinando aproximaciones informales con formales. Las perspectivas estudiadas principalmente son las siguientes:

Enfoque L (mejor aproximación lineal)

Se basa en el acto de ampliar la curva en un punto *P*, hasta observar a la curva como una recta, si la curva es suave en *P*. Informalmente, se considera que la línea tangente es la recta que no se distingue de la curva después de un aumento suficiente (Bos, Doorman, & Piroi, 2020), ver Figura 2.1.1 (Izquierda).

En el libro de Marsden & Weinstein (1981) donde se formaliza esta idea. Suponiendo que la curva es la gráfica de la función *f*, la ecuación $y = m(x - x_0) + f(x_0)$ describe a una recta l_m que pasa por $P(x_0, f(x_0))$ con pendiente *m*.

Decimos que l_m es la recta tangente en *P* si y solo si para $\varepsilon > 0$ arbitrario existe un intervalo abierto *I* que contiene a x_0, tal que para $x \in I$, $x \neq x_0$ se tiene que

$$|f(x) - m(x - x_0) - f(x_0)| < \varepsilon |x - x_0|,$$

(ver Figura 2.1.1 (derecha)).

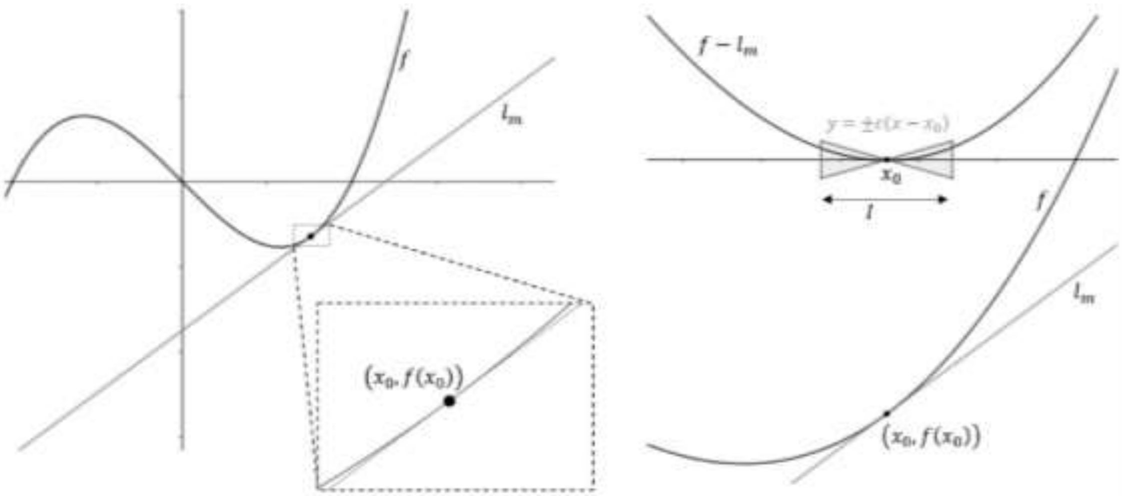


Figura 2.1.1 La gráfica de f es localmente lineal en x_0, como sugiere el Zoom (izquierda). Formalizado: la diferencia entre la gráfica de f y la recta tangente l_m puede ajustarse en un cono arbitrariamente estrecho (derecha). Obtenido de Bos et al., (2020, pág. 5).

De esta forma, decimos que la curva y la recta tangente son indistinguibles muy cerca de $(x_0, f(x_0))$. Y más aún, al observar que la gráfica de f es como una recta muy cerca de P, para cualquier punto en la curva, podemos considerar a la curva como la unión de segmentos de recta.

Enfoque S (límite de las rectas secantes)

De manera informal, la recta tangente de una curva c en un punto P, se puede considerar como un límite de rectas secantes que pasan por este punto. Geométricamente, esto implica que el límite de las rectas secantes a la curva, que pasan por los puntos $P(x_0, f(x_0))$ y $Q(x_0 + \triangle x, f(x_0 + \triangle x))$ cuando $\triangle$ x tiende a cero es la recta tangente (Bos, Doorman, & Piroi, 2020).

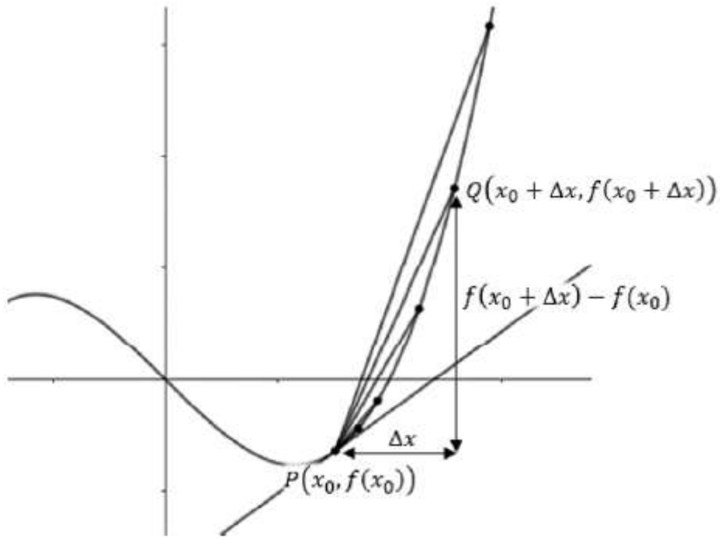


Figura 2.1.2 La recta tangente como límite de rectas secantes. Obtenido de Bos et al. (2020, pág. 3).

Orton (1983) considera una actividad de una circunferencia. Si en esta situamos un punto *P* fijo, por el cual se trazan las secantes *PQ* donde, *Q* son puntos en la circunferencia que se van acercando a *P*. Se les preguntó a los alumnos que ocurre con la secante cuando el punto *Q* está demasiado cerca del punto *P*, lo cual hace referencia a la generación de la recta tangente a la circunferencia en el punto *P*, como el límite de las rectas secantes. Cuando los dos puntos se acercan lo suficiente, la recta secante se convierte en la recta tangente.

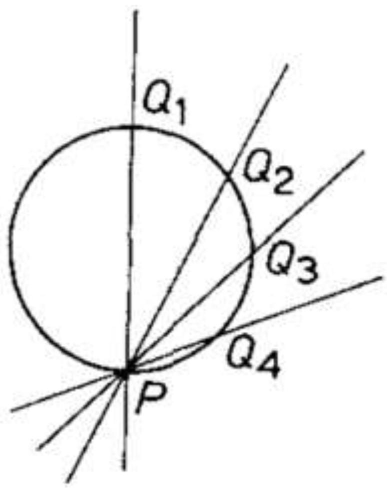


Figura 2.1.3 Ejemplo de rectas secantes en una circunferencia. Obtenido de Orton (1983, pág. 245).

La importancia de este enfoque es que es el más utilizado con respecto de este concepto de recta tangente, sin embargo, en el estudio de Orton (1983), se esperaba que existieran una mayor interpretación de los conceptos, no obstante, los estudiantes se centraron el dar repuestas numéricas, 43 de los 110 estudiantes no lograron reconocer que la secante se convierte en tangente, lo que indica una falta de comprensión.

Enfoque T (transiciones en los adelantamientos)

Por su parte, Marsden y Weinstein (1981) consideran que (si existe la recta tangente), si m (la pendiente de una recta que pasa por el punto de tangencia) es diferente que m_0 (es la pendiente de la recta tangente), la diferencia obtenida entre $y = m(x - x_0) + f(x_0)$ y $y = f(x)$ cambia de signo al pasar x por x_0, es decir, $f(x) - (m(x - x_0) + f(x_0))$ cambia de signo al pasar x por x_0.

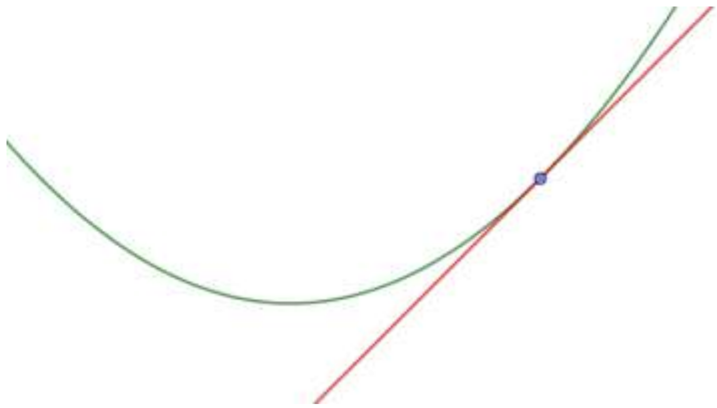


Figura 2.1.4 Observamos que la diferencia entre la recta tangente y la curva, tendrán el mismo signo al pasar por x_0, debido a que la curva siempre toma valores mayores o iguales al de la recta tangente.

Cuando $m < m_0$, la diferencia mencionada pasa de ser negativa para x *ligeramente* menor que x_0, a ser positiva para x *ligeramente* mayor que x_0.

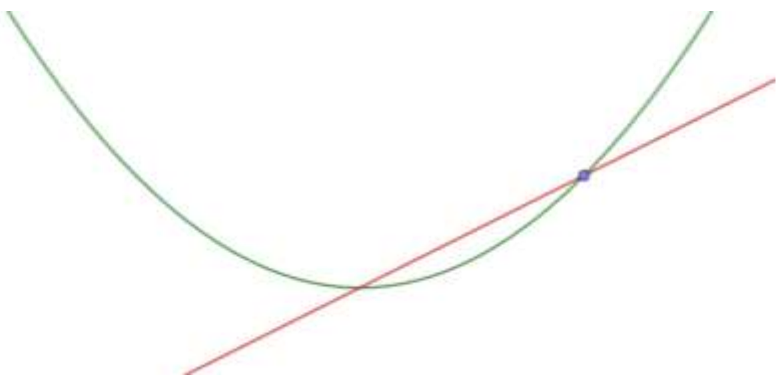


Figura 2.1.5 Cuando la pendiente de la recta secante es menor que la de la recta tangente ($m < m_0$), la diferencia entre la curva y la recta pasa de ser negativa a positiva alrededor de x_0.

Similarmente, cuando $m > m_0$, la diferencia pasa de ser positiva para x *ligeramente* menor que x_0, a ser negativa para x *ligeramente* mayor que x_0.

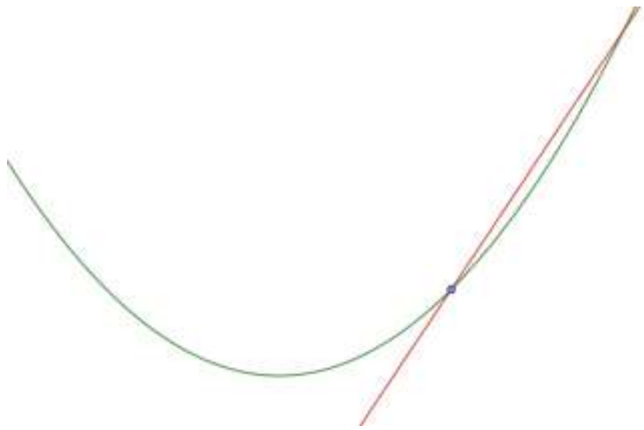


Figura 2.1.6 Cuando la pendiente de la recta secante es mayor que la de la recta tangente ($m > m_0$), la diferencia entre la curva y la recta pasa de ser positiva a negativa alrededor de x_0.

De esta forma, se describe cómo se comporta la diferencia entre la función y una recta al variar la pendiente de la recta que pasa por el punto de tangencia. Este análisis es importante, ya que la única recta que hace que la diferencia tenga siempre el mismo signo es la tangente.

Enfoque A (multiplicidad de puntos de intersección)

Propuesto por Range (2018), se remonta a las ideas algebraicas sobre las rectas tangentes de Fermat, Descartes y Hudde. Se podría considerar que este es la idea inversa al de la línea secante. La idea es que el punto de tangencia es en realidad un punto múltiple y la rotación lo revela separando el punto múltiple en múltiples puntos (Bos, Doorman, & Piroi, 2020).

Esto puede formalizarse para funciones algebraicas *f*, *la* recta es tangente a la gráfica de *f* si la solución de la ecuación dada por la diferencia entre la curva y una recta que pasa por el punto *P* que se encuentra en la curva, tiene una multiplicidad de 2 o superior.

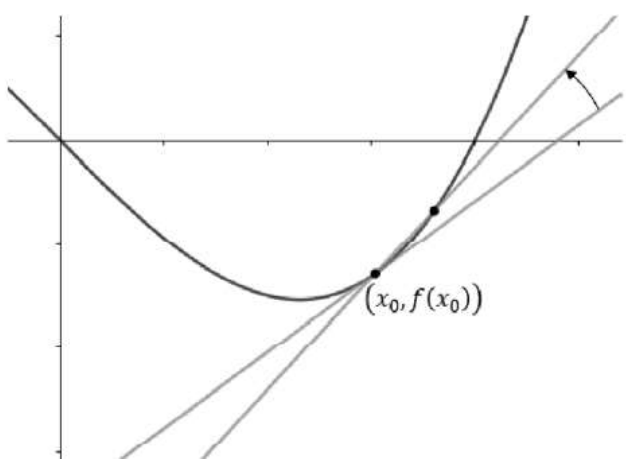


Figura 2.1.7 La línea tangente se encuentra con la curva en un punto múltiple; una ligera rotación de la línea tangente revela un nuevo punto de intersección cercano. Obtenido de Bos et al. (2020, pág. 5).

Enseñar las perspectivas mencionadas, puede ser difícil debido a que los alumnos necesitan un buen nivel de abstracción de los bocetos que realizan en papel y lápiz. No obstante, con el dinamismo de las herramientas digitales, ya no es necesario que los alumnos imaginen lo que está ocurriendo, sino que ahora pueden verlo y manipularlo. Al usar el dinamismo, no solo hace que el aprendizaje sea más accesible, sino que también fomenta una comprensión más profunda al permitir a los alumnos experimentar directamente con los conceptos.

Sin embargo, los enfoques descritos por Bos, Doorman y Piroi (2020) son más teóricos en su naturaleza, ya que ninguno de ellos incorpora consideraciones físicas. Aunque las ideas mencionadas son fundamentales para comprender el concepto de la recta tangente, los modelos físicos, considera los principios y leyes pertinentes en el análisis, proporcionando una comprensión más completa y aplicable de los fenómenos estudiados. A continuación, se describirán brevemente las interpretaciones físicas que contrastan con las teóricas mencionados:

Velocidad instantánea

Stewart (2017) considera que el problema de encontrar la recta tangente a una curva es el mismo problema de encontrar la velocidad de un objeto, pues implican el mismo tipo de límite.

Supongamos que un objeto tiene la ecuación del movimiento $s = f(t)$, donde s es el desplazamiento con al origen, en el tiempo *t*. En el intervalo $t = a$ a $t = a + h$, el cambio en la posición es $f(a + h) - f(a)$. Entonces para este intervalo, la velocidad promedio es:

$$Velocidad\ promedio = \frac{Desplazamiento}{Tiempo} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

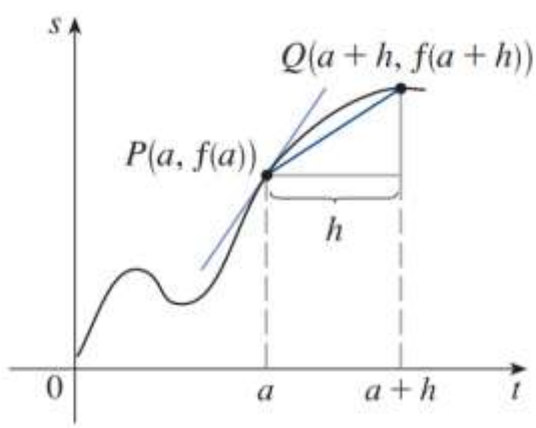


Figura 2.1.8 La velocidad promedio en este intervalo de tiempo de observado de forma gráfica. Obtenido de Stewart (2017, pág. 143).

Interesándonos en calcular las velocidades promedio sobre intervalos de tiempo más cortos, es equivalente a que h tienda a 0, de esta forma definimos a la velocidad instantánea $v(a)$ en $t = a$ como el límite de las velocidades promedio:

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Obteniendo que la velocidad en el instante $t = a$ es igual a la pendiente de la recta tangente en P.

Razón de cambio

Similarmente al caso de la velocidad instantánea, si y es una cantidad que depende de otra cantidad x, entonces $y = f(x)$. Si x cambia de x_1 a x_2, entonces el incremento de x es $\Delta x = x_2 - x_1$ y el incremento de y es $\Delta y = y_2 - y_1$, obteniendo que el cociente de diferencias es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

El cual se llama razón de cambio promedio de y con respecto a x sobre el intervalo $[x_1, x_2]$.

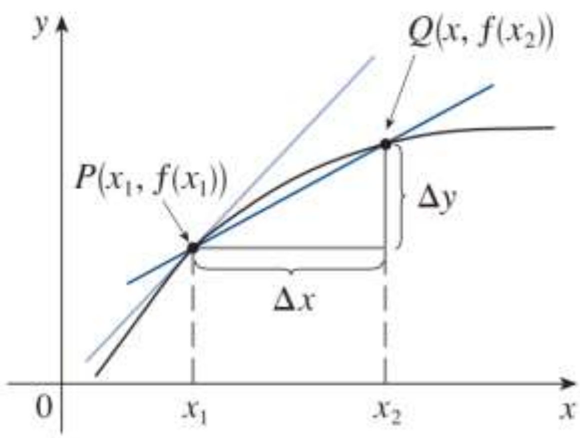


Figura 2.1.9 Razón de cambio promedio. Obtenido de Stewart (2017, pág. 145).

De esta forma se obtiene que la razón de cambio instantánea de y con respecto a x, es el límite de las tasas de cambio promedio cuando x_2 tiende a x_1, es decir, Δx tiende a 0. A este límite de razones de cambio promedio, se le llama razón de cambio instantánea de y con respecto a x, en x_1, que se interpreta como la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $P(x_1, f(x_1))$ (Stewart, 2017).

Por su parte, Orton (1983) considera ejercicios de razón de cambio de aplicaciones físicas (en las que proporciona un contexto, los datos y la gráfica), como casos específicos de funciones, para estudiantes de diversos niveles.

Time (x)	0		1		2		3		4		5
Depth (y)	0		2		4		6		8		10
1st difference (depth)		2		2		2		2		2	

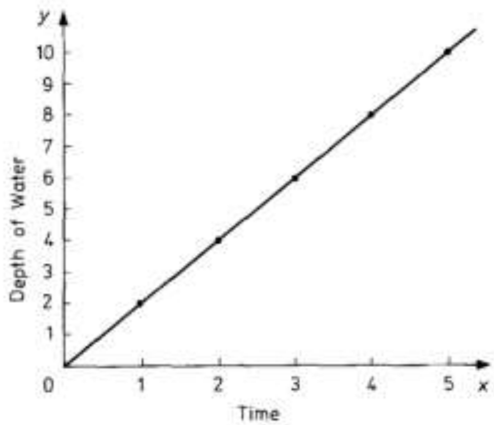


Figura 2.1.10 El agua fluye dentro de un tanque a una razón constante, en la cual cada unidad de tiempo que incrementa, la profundidad del agua incrementa dos unidades. La gráfica y la tabla ilustran esta situación. Obtenido de Orton (1983, pág. 246).

Derivada

Anteriormente, se mencionó que, para determinar la pendiente de una recta tangente o la velocidad de un objeto, surge el mismo límite, el cual es:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Este límite se define como la derivada de una función f en a, denotada por $f'(a)$. De esta forma, la derivada de una función está definida como a pendiente de la recta tangente a la curva en un punto.

En resumen, el concepto de la recta tangente se aborda desde diferentes perspectivas matemáticas. Los enfoques L (mejor aproximación lineal) y S (límite de las rectas secantes) se muestran como acercamientos más geométricos para entender la recta tangente. En el enfoque L, se visualiza la recta tangente como la mejor aproximación lineal a la curva en un punto, mientras que en el enfoque S, considera que al tener dos puntos en la curva que generan una recta secante, y al acercarlos lo suficiente, obtenemos la recta tangente. En contraste, los enfoques T (transiciones en los adelantamientos) y A (multiplicidad de puntos de intersección) se centran en aspectos más algebraicos. El enfoque T analiza la diferencia entre la función y una recta con respecto de la pendiente de esta; en cambio, el enfoque A examina la multiplicidad de puntos de intersección entre la curva y la recta.

También se mencionan alguna de las interpretaciones físicas en el contexto de la velocidad instantánea y la razón de cambio. La velocidad instantánea se relaciona con el movimiento de un objeto, mientras que la razón de cambio se utiliza para entender cómo una cantidad cambia en relación con otra, siendo aplicable en contextos físicos específicos.

Estas concepciones y aplicaciones reflejan la diversidad de perspectivas desde las cuales se puede abordar el concepto de recta tangente, ya sea desde un enfoque más geométrico o algebraico, así como su interpretación en el mundo real.

La importancia de considerar una variedad de perspectivas en la enseñanza de la recta tangente es por la cantidad de ejemplos que se pueden ofrecer. Esta diversidad no solo favorece la experiencia educativa de los estudiantes, sino que también se alinea con la teoría propuesta por Skemp (1976). En esta se considera que la conexión de conceptos abstractos con ejemplos concretos facilita la retención y comprensión a largo plazo.

Al conectar el concepto de la recta tangente con ejemplos concretos y relevantes, los estudiantes pueden visualizar y comprender mejor la utilidad y la aplicabilidad. De esta forma, se evita una enseñanza instrumental, la cual se centra en la aplicación de reglas y procedimientos sin profundizar en la comprensión, mientras que motiva a tener una enseñanza relacional, buscando desarrollar una comprensión profunda y significativa de los conceptos matemáticos a través de la exploración y la conexión con experiencias previas. (Skemp, 1987).

Finalmente, la enseñanza de la recta tangente mediante diversos enfoques y ejemplos concretos no solo cumple con los principios pedagógicos propuestos por Skemp, sino que también enriquece notablemente el proceso de aprendizaje. Teniendo la posibilidad de alentar a los estudiantes a establecer conexiones entre diferentes perspectivas y sus experiencias previas. Además, es fundamental reconocer que, para implementarlos, es necesario hacer uso de herramientas adecuadas que faciliten el entendimiento de estos conceptos.

2.2 Uso de tecnologías

Las tecnologías de la información y comunicación (TIC) incluyen todos los instrumentos, procesos y recursos destinados a optimizar la comunicación y que se utilizan en el procesamiento, almacenamiento y transmisión de información. (Pinargote-Baque & Cevallos-Cedeño, 2020). Como resultado, los estudiantes pueden aprender sobre una gran variedad de disciplinas gracias a la tecnología. Tienen la oportunidad de confiar en las posibilidades de la tecnología para representar y explorar formas de entender conceptos matemáticos y resolver problemas matemáticos en el área de tareas matemáticas (Santos-Trigo, 2019).

Uno de los principales factores que influyeron para que existiera mayor interés en la Geometría en la educación matemática, fue la introducción de la tecnología (Mariotti, 2006). Debido a esto, surgieron software de Geometría Dinámica como Cabri y GeoGebra, que permiten explorar y resolver actividades para la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría.

El software de Geometría Dinámica que usaremos es GeoGebra, cuya idea es unir la Geometría, Álgebra y Cálculo en un único programa, planeado para aprender y enseñar Matemáticas desde el nivel básico hasta el universitario. Además, GeoGebra está disponible de forma gratuita y ha sido utilizado por una gran cantidad de profesores y alumnos debido a la multiplataforma de esta y la traducción a más de 36 idiomas (Hohenwarter, Hohenwarter, Kreis, & Lavicza, 2008).

Gracias a estas características, el uso de GeoGebra en el aula ha demostrado impactar positivamente el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo, prueba de esto son los estudios y experiencias prácticas que respaldan la idea de que esta herramienta proporciona un entorno de aprendizaje interactivo.

Un ejemplo de los beneficios que tiene la implementación de GeoGebra es el estudio realizado por Verhoefa *et al*. (2014), en el que su tema central fue la implementación de la herramienta en la enseñanza de la derivada. En este estudio, diversos profesores de los Países Bajos diseñaron una lección centrada en la comprensión conceptual de la derivada antes de abordar los problemas alrededor de este tema, utilizando a GeoGebra como una herramienta para visualizar el comportamiento local de las funciones diferenciables. Una de estas lecciones, consto en el uso de Zoom para visualizar la rectitud de la curva localmente, pues se muestra el uso de forma dinámica para integrarse en las clases de Matemáticas.

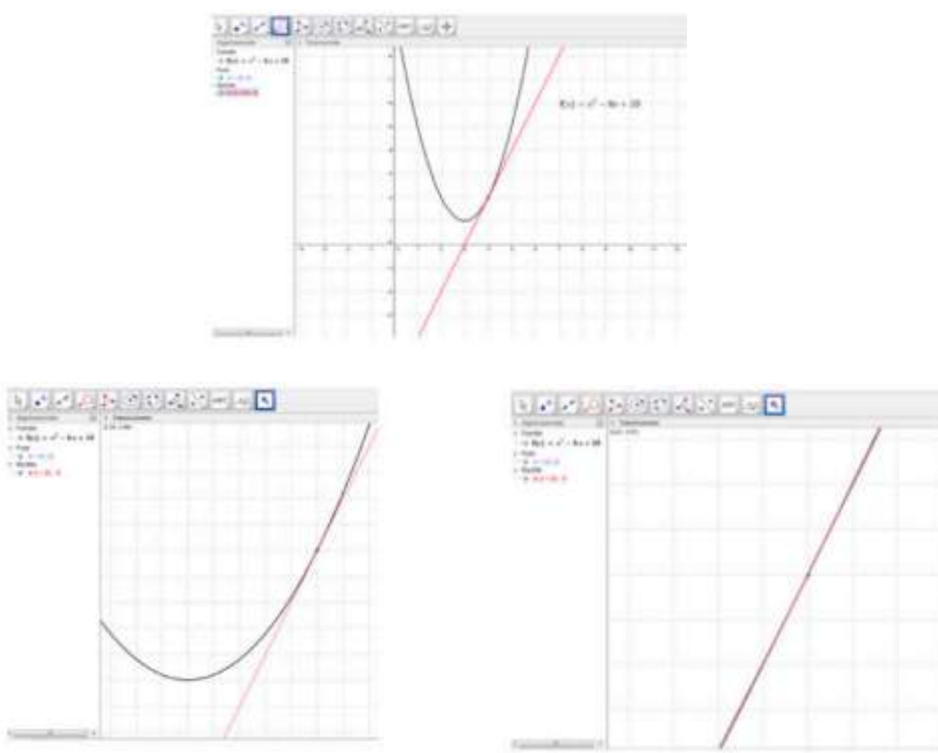


Figura 2.2.1 Zoom con GeoGebra para visualizar la rectitud local de la curva. Obtenido de Verhoefa et al. (2014, pág. 113).

Los profesores mencionaron que los alumnos aprendieron a utilizar las visualizaciones, además de aspectos como que la comprensión de la derivada como tasa de cambio supera las operaciones procedimentales. Concluyendo que el uso de GeoGebra y la metodología de estudio de lecciones contribuyeron a una mejor comprensión de la derivada para los alumnos y al desarrollo profesional de los profesores.

Similarmente, Hohenwarter *et al*. (2008) han explorado el uso de GeoGebra para la enseñanza del Cálculo Diferencial. En particular, diseñaron diversas actividades en la plataforma para poder enseñar contenidos de la materia. Por ejemplo, la primera actividad de la secuencia busca visualizar y apoyar la comprensión del cociente diferencial, y observar la conexión entre rectas secantes y tangentes, así como entender la importancia del concepto de límite y del cociente diferencial. Para esto toma en cuenta a los puntos *A* y *B* en la curva, la recta secante formado por ambos puntos y los valores del cociente de diferencias se muestran como texto dinámico que cambia con respecto del movimiento de *A* y/o *B*.

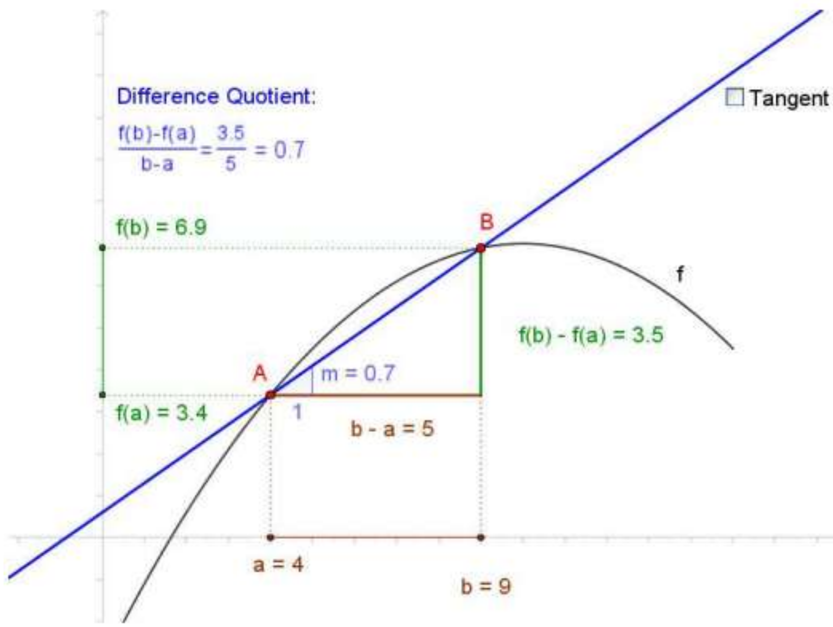
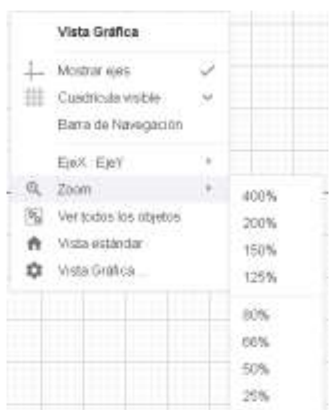


Figura 2.2.2 Recta secante de una función, incluyendo su cociente de diferencias en GeoGebra. Obtenido de Hohenwarter et al. (2008, pág. 3)

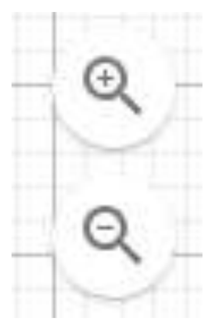
De esta forma, los alumnos pudieron utilizar esta figura dinámica para visualizar el cociente de diferencias como aproximación numérica de la pendiente de la recta secante a la pendiente de la recta tangente, arrastrando el punto *B* a lo largo de la gráfica de *f(x)* hacia el punto *A*. Otro factor importante es que cuando ambos puntos se convierten en uno, la recta secante desaparece y el cociente de diferencia es indefinido. Este problema permite tener debates en el aula, en lugar de dar a los estudiantes una respuesta a un problema que no aparece en primera instancia.

A partir de los ejemplos mencionados, podemos notar que GeoGebra ofrece una gran cantidad de herramientas las cuales se utilizan dependiendo del objetivo de la actividad a realizar, en este caso, la herramienta a la que prestaremos atención es la herramienta de Zoom, que nos permite acercarnos o alejarnos de la vista gráfica para observar según la necesidad de la actividad.

Existen tres formas para utilizar la herramienta de Zoom, la primera de ellas es hacer *clic* derecho en alguna parte de la vista gráfica, distinto de algún objeto. Esto nos desplegará el menú que se ve en la primera imagen de Figura 2.2.3, al seleccionar la parte de Zoom, cuando escogemos porcentajes mayores al 100, la vista gráfica se ampliara, similarmente, si el porcentaje es menor a 100, la vista se aleja acorde al porcentaje seleccionado. La segunda opción, es utilizar los botones que se encuentran en la parte inferior derecha, cuyos nombres son "Acercar" y "Alejar", ampliando y reduciendo la vista gráfica en un 200% y 50%. La última opción depende de dispositivo en que se esté trabajando, por ejemplo, en un ordenar con un *mouse*, la rueda de este hacer un Zoom de la vista gráfica dependiendo del sentido de giro; si es en un dispositivo móvil, basta con hacer los movimientos de "pellizcar" para acercar y "pellizcar hacia afuera" para alejarlo (Be Connected, 2020) .



1. Uso del Zoom por clic derecho



2. Uso del Zoom por los botones

Figura 2.2.3. Formas de usar Zoom en GeoGebra

Una de las desventajas de esta herramienta, es que, al usar el Zoom para acercarnos, podemos "perder" de la pantalla a objetos que era de nuestro interés mantener, por lo que sería necesario desplazar la pantalla para verlos o alejarnos para obtener una vista algebraica donde aparezcan los objetos deseados. Una forma de evitar el problema mencionado es hacer Zoom centralizado en nuestro objeto de interés (llamémosle *A*), al crear un botón en la vista gráfica (lo cual es posible debido a que GeoGebra es un software de código abierto) con el script <Zoom-in (A)>, el cual, al hacer *clic* en el botón, hace un acercamiento del 200% con centro en A. Similarmente, podemos hacer un botón para alejarnos un 50%, centrado en *A*, el cual se genera en la vista gráfica, con el script <Zoom-out (A)>.

De esta forma, observamos que el Zoom, GeoGebra y otras tecnologías similares pueden ser de gran ayuda en la enseñanza de las Matemáticas. No solo permiten nuevas posibilidades de exploración y comprensión de conceptos, sino que también fomentan una participación y colaborativa en el proceso de aprendizaje.

3 Metodología y diseño de actividades

Abordaremos el diseño de las actividades empleadas, además de considerar algunas características relevantes de los participantes y se detallarán los instrumentos utilizados para la recopilación de información. Este enfoque permitirá una comprensión a mayor detalle de la estructura y desarrollo del trabajo de campo, contribuyendo al análisis de los resultados obtenidos.

3.1 Participantes

Para la realización de este estudio, participaron estudiantes de tercer semestre de bachillerato, los cuales cursaban la materia correspondiente a Geometría Analítica; el grupo estaba conformado por 19 estudiantes de entre 15 y 17 años. Del total de participantes, solo diez de ellos habían utilizado GeoGebra previamente.

En el desarrollo de las actividades, se les proporcionó orientación sobre el empleo de herramientas digitales para resolver cualquier inquietud relacionada con su utilización. Asimismo, las actividades incluían instrucciones detalladas con el fin de brindar a los estudiantes una guía clara sobre cómo llevarlas a cabo, además de un instructivo de GeoGebra (ver Anexo: Instructivo de GeoGebra) que detallaba el uso específico de cada herramienta que sería empleada en las actividades, proporcionándoles así una referencia detallada para su correcta utilización.

3.2 Secuencia pedagógica

La secuencia de actividades de esta investigación se llevó a cabo en el laboratorio de cómputo de la institución educativa a la que asistían los participantes. En total, se efectuaron ocho sesiones: seis de ellas tuvieron una duración de dos horas cada una, y las otras dos duraron una hora cada una. Cada dos estudiantes, tuvieron a su disposición una computadora, la cual tenía acceso a internet, así como la aplicación de GeoGebra. Además, se contó con una computadora de escritorio, un proyector y un pizarrón, las cuales utilizo el investigador para poder guiar las sesiones y los participantes pudieran seguir las instrucciones mientras trabajaban en las actividades.

A lo largo del periodo de la implementación de las actividades a los estudiantes, diseñadas para observar el avance en la comprensión del concepto de la recta tangente. Además, se fomentó la participación de los alumnos, promoviendo un ambiente de aprendizaje dinámico y enriquecedor. Las etapas en las que se dividieron las actividades son las siguientes:

Pre-Test

El propósito de este examen diagnóstico fue evaluar y comprender los conocimientos previos de los estudiantes en relación con el concepto de la recta tangente. Para lograr este objetivo, se implementó un cuestionario impreso (ver Anexo: Pre – post test), el cual está dividido en tres secciones, abordando diferentes aspectos del tema.

En la primera sección del cuestionario, se utilizó parte del diseño propuesto por Vivier (2011), el cual presenta a los estudiantes diversas curvas y se les solicita trazar la recta tangente siempre que fuera posible en un punto específico de la curva. En caso de que no fuera posible trazar la recta tangente, se indicó a los alumnos que explicaran la razón de esto. De esta forma, fue posible no solo ver la capacidad de los estudiantes para dibujar la recta tangente, sino también la reflexión que hicieron sobre las situaciones en las que este concepto es aplicable o no.

La segunda sección del cuestionario exploró la comprensión conceptual que poseen los estudiantes sobre la recta tangente. Aquí, se les pide que den su concepto de recta tangente y que dibujen un ejemplo de esta. La intención era identificar posibles malentendidos o ideas preconcebidas que podrían influir en su comprensión, tales como las que observa Vivier (2011), en donde la mayoría de los estudiantes solo son capaces de generar la recta tangente a circunferencias.

La última sección del cuestionario, inspirada en la teoría de Aebli (1973), se centró en la aplicación de un proceso inverso en relación al trazado de rectas tangentes. Presentando a los estudiantes una curva específica y un punto determinado fuera de ella, se les solicitó que trazaran la recta tangente en ese contexto particular. Esta sección es de suma importancia, ya que se muestra que no solo debe enseñarse a los estudiantes a realizar operaciones, sino también a comprender las acciones inversas entre estas operaciones.

En resumen, el examen diagnóstico se diseñó de manera que proporciona una visión completa de los conocimientos de los estudiantes en cuanto a la recta tangente, explorando desde la capacidad práctica para trazarla, su comprensión conceptual y la aplicación del concepto. Estos resultados fueron fundamentales para conocer su avance durante y al final de las actividades propuestas.

Actividades

Para la creación y diseño de estas actividades (ver Anexo: Secuencia pedagógica), se adoptaron varios enfoques y estrategias propuestas por diversos autores con el objetivo de proporcionar a los estudiantes una comprensión profunda y contextualizada del concepto de recta tangente.

Para llevar a cabo las actividades, el investigador ejecutará la actividad correspondiente a la curva en el punto (-1,1) frente al grupo, utilizando la computadora de escritorio y el proyector del aula. Inmediatamente después, se instruirá a los alumnos para que realicen la misma actividad para los puntos (1,1) y luego para (0,0). Trabajando en parejas, se les indicará que, para el primer punto, uno de los estudiantes dictará los pasos al compañero, quien llevará a cabo la actividad. Posteriormente, al abordar el siguiente punto, invertirán los roles de trabajo, promoviendo así la colaboración y el intercambio de roles entre los estudiantes.

Se llevaron a cabo un total de once actividades, cada una diseñada con el propósito de profundizar en la comprensión de la recta tangente y su aplicación a través de diferentes enfoques. Las actividades se clasificaron de la siguiente forma:

- Enfoque L (Mejor Aproximación Lineal): Las actividades 1 y 2 se basaron en este acercamiento. La actividad 1 tiene como propósito ver como una recta a la curva $f(x) = x^2$, situada en un punto A, para calcular la pendiente de la recta tangente. Para ello, se utiliza la herramienta de Zoom-in(A) de GeoGebra obtener la pendiente de la curva en A.

  Una vez realizada la actividad 1 exitosamente, surge la actividad 2, la cual consta en confirmar que la pendiente de la recta propuesta corresponde a la pendiente de la recta tangente, utilizando la herramienta de Zoom-in de GeoGebra, para verificar que muy cerca de A, son indistinguibles la curva y la recta.

- Enfoque S (Límite de Rectas Secantes): Para la actividad 3, se genera una recta secante, formada por los puntos A y otro punto auxiliar B que no es el mismo que A. Al acercar el punto B al punto fijo A, la secante, la curva y la recta tangente se unen en una sola recta. Se observa simultáneamente que la pendiente de la secante formada por los puntos B y A se acerca cada vez más a la pendiente de la tangente en el punto A, utilizando Zoom-in (A).

- Enfoque T (Transición en Adelantamientos): En la actividad 4 se emplea GeoGebra para demostrar que al modificar ligeramente (mediante deslizadores) la pendiente m desde su valor inicial m_0 (la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto A), esta se transforma en una secante de la curva. Esto implica que la recta corta la curva en al menos dos puntos. Aquí lo que interesa es observar la diferencia entre la secante y la función dada en puntos cercanos al punto de tangencia y que se tiene un cambio de signo al cruzar el punto de tangencia excepto cuando la secante se convierte en la tangente

- Enfoque A (Multiplicidad de Puntos de Intersección): En la actividad 5 se emplea GeoGebra para verificar que la recta tangente se puede obtener de forma general cuando la diferencia entre la secante y la función tiene una raíz con multiplicidad (al menos 2) cuando $x = x(A)$ en el punto de tangencia.

Las actividades 1 a 5, están planeadas para $f(x) = x^2$, específicamente en los puntos (-1,1), (1,1) y (0,0), después se extienden esta secuencia para trabajar las actividades 1c a 5c, que son las mismas ideas estudiadas en las actividades anteriores, con la diferencia que estas son para la curva $f(x) = x^3$, para permitir una comprensión más profunda y generalizada del concepto.

La última actividad se centró en una de las propiedades de la derivada, explorando la idea de que la derivada de la suma de dos funciones es igual a la suma de las derivadas de cada función. Los estudiantes fueron desafiados a crear la recta tangente a la curva $f(x) = x^3 + x^2$, en el punto (1,2), combinando las pendientes obtenidas anteriormente en las actividades realizadas. Esta tarea promovió la aplicación práctica y la consolidación de la comprensión de la derivada como la pendiente de la recta tangente.

Podemos observar que los enfoques adoptados en las actividades son plenamente matemáticos y están dirigidos a fortalecer la comprensión sobre la recta tangente. Estos enfatizan la manipulación algebraica, la visualización geométrica, y procesos de aproximación.

No obstante, la decisión de no incluir aplicaciones físicas en la secuencia diseñada para la enseñanza de la recta tangente se basa en el objetivo general de esta investigación. Aunque los enfoques físicos aportan una mayor comprensión de las aplicaciones de la recta tangente, se optó por centrarse en los geométricos es con el propósito de preparar a los estudiantes para una mejor comprensión de la derivada.

La derivada, es un concepto matemático que describe la tasa de cambio instantánea de una función en un punto dado. Su comprensión no solo es fundamental para el estudio avanzado de las Matemáticas, sino también para campos aplicados. Sin embargo, al introducir la noción de la recta tangente como preparación para la derivada, es crucial enfocarse en los fundamentos matemáticos que permitirán a los estudiantes abordar estos temas con una base sólida.

Incorporar perspectivas físicas podría desviar la atención de nuestro objetivo, especialmente en un contexto donde el tiempo es limitado. Las aplicaciones físicas de la recta tangente, aunque valiosas, requieren una comprensión previa de conceptos como la velocidad instantánea y la aceleración, que son más adecuados para un curso de Física.

Además, al enfocarse en los aspectos matemáticos de la recta tangente, los estudiantes pueden desarrollar una base más sólida que les permitirá abordar aplicaciones con mayor comprensión en el futuro. Esta dirección permite una transición más lógica hacia conceptos matemáticos avanzados, asegurando que los estudiantes estén bien preparados para enfrentar desafíos más complejos.

Post- test

Consistió en la aplicación del mismo cuestionario que se utilizó en el Pre-Test, con una única modificación de que, en la primera sección, las marcas que inicialmente estaban ubicadas en los puntos de tangencia de las curvas fueron reemplazadas por puntos. Al utilizar puntos en lugar de marcas en las curvas, parte de los alumnos seguían la dirección de las marcas para intentar trazar las rectas tangentes. Este cambio en la presentación permitió evaluar de manera más específica la capacidad de los participantes para aplicar los conceptos aprendidos.

La elección de mantener la estructura del cuestionario entre el Pre-Test y el Post-Test, facilitó la comparación directa de los resultados antes y después de la intervención. Al analizar las respuestas proporcionadas en el Post-Test, se pudo evaluar no solo la retención de información, sino también la aplicación efectiva de los conceptos adquiridos durante la intervención educativa.

3.3 Instrumentos de recolección de datos

De forma preliminar, se esperaba que los alumnos trabajaran en GeoGebra en línea https://www.geogebra.org/classic/xtfrsccm que guardarán en la nube su sesión de trabajo y compartieran el enlace a la sesión, por medio de correo electrónico, en donde reportaran toda la actividad (incluyendo el reporte que harían y capturas de pantallas realizadas). Sin embargo, la baja calidad del internet no permitió a los alumnos trabajar en línea, lo que impidió la ejecución fluida de las actividades.

A pesar de los obstáculos enfrentados, los estudiantes lograron utilizar la versión de GeoGebra Portable-6-0-775-0 en sus dispositivos. Durante las sesiones, trabajaron con el archivo ActividadZ-(1,1)-TuNombre.gbb, el cual presentaba una interfaz completa con todos los botones de la aplicación activados. Dentro de la vista algebraica, se tenía la función $f(x) = x^2$ y un punto A, posicionado en (-1,1) sobre la curva de la función. Además, en la vista gráfica, junto con la representación gráfica de los elementos algebraicos, se contaba con los botones de Zoom-in(A) y Zoom-out(A). Estas herramientas permitían un aumento del 100% y una reducción del 50% en la escala de visualización con respecto al punto A, la importancia de estos botones surge de la posibilidad de ver a la función como una recta al acercarnos lo suficientemente con respecto del punto A.

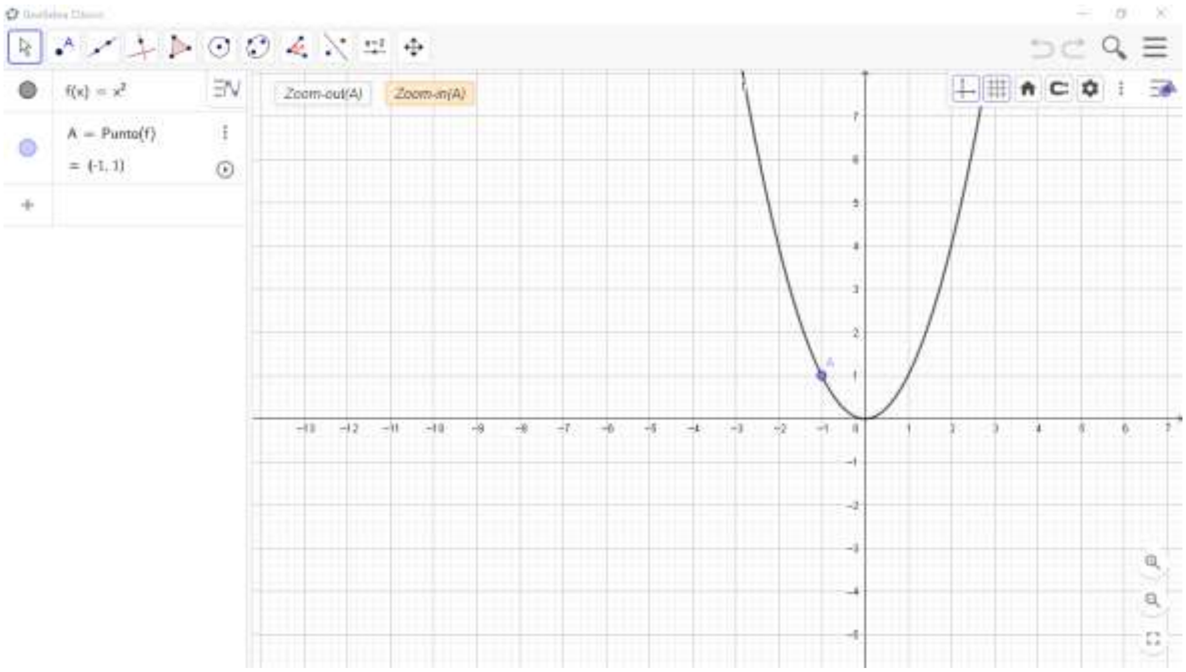


Figura 3.3.1 Interfaz de GeoGebra en la que trabajaron los alumnos.

Una vez concluida cada una de las actividades, tanto el archivo de trabajo como las capturas de pantalla se almacenaron en el dispositivo utilizado por los estudiantes. Además, como medida de respaldo, se realizaron copias de seguridad en un dispositivo USB por parte del investigador. Los reportes detallados sobre las actividades realizadas por los alumnos fueron registrados en hojas de papel blanco, asegurando así un registro físico de los avances y resultados obtenidos durante la sesión.

4 Análisis de datos

En este capítulo, se llevará a cabo un análisis detallado del grupo de alumnos que participaron en la secuencia pedagógica propuesta, además de la a forma de obtención de los datos y se describirá la estrategia empleada durante el desarrollo de la presente investigación.

4.1 Primera sesión

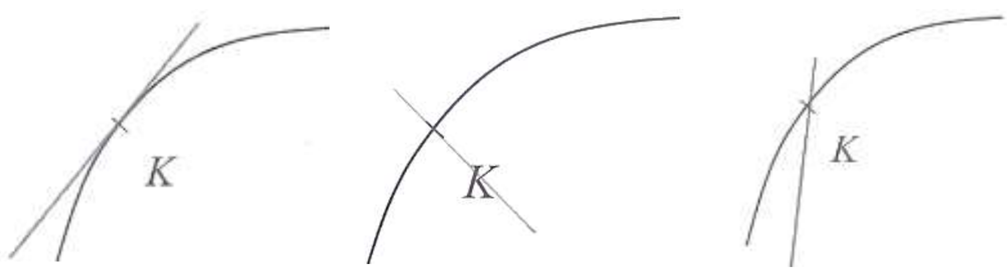
La primera sesión de trabajo se caracterizó por ser un encuentro introductorio para informar acerca de las actividades que se realizarían durante las sesiones siguientes además de la aplicación del Pre-Test. La duración de ésta fue de una hora.

Pre-Test

Como parte integral del proceso, se llevó a cabo un Pre-Test diseñado para evaluar los conocimientos previos de los alumnos en relación con el concepto de la recta tangente. Este Pre-Test se entregó en formato impreso (ver Anexo: Pre – Post Test), y la aplicación del mismo se extendió a lo largo de unos 30 minutos. El propósito fundamental de este test fue obtener una visión clara del nivel de comprensión inicial de los estudiantes sobre el concepto en cuestión.

Con respecto de la primera sección, en la que se les pedía trazar a los alumnos la recta tangente a ciertas curvas, se obtuvieron los siguientes resultados presentados por tipo de respuesta:

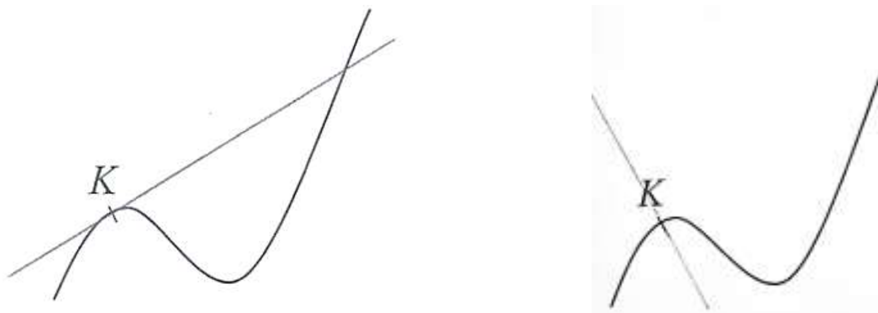
- En la primera curva, nueve de los alumnos pudieron trazar correctamente la recta tangente, mientras que siete dibujaron rectas normales, solo tres trazaron una recta secante distinta de la recta normal y un alumno no contesto.



Recta tangente Recta normal Recta secante

Figura 4.1.1 Rectas trazadas por los alumnos en la curva 1, en el Pre-Test.

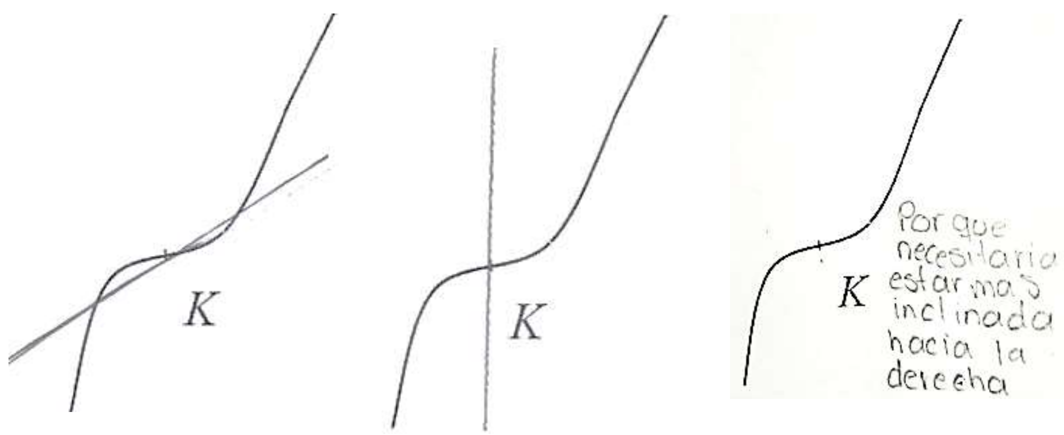
- En la tercera curva, cuyo comportamiento era parecido al de una cúbica, donde el punto de tangencia era un máximo local, once de los alumnos pudieron trazar la recta tangente sin problemas, mientras que cinco trazaron una recta normal y tres no contestaron.



Recta tangente Recta normal

Figura 4.1.2. Rectas trazadas por los alumnos en la curva 3, en el Pre-Test.

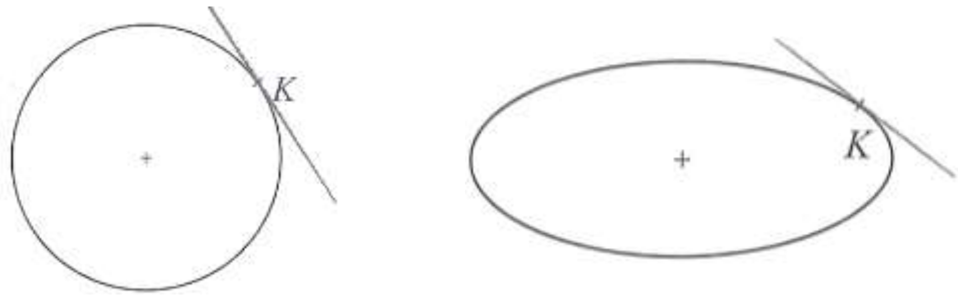
- En la cuarta curva, que es similar a una cúbica, donde el punto de tangencia es en el punto de inflexión, ninguno de los alumnos fue capaz de trazar la recta tangente, pero seis dibujaron una aproximación a esta, cuatro alumnos parte dibujaron la recta normal, mientras que seis mencionaron que la recta tangente no era capaz de dibujarse por la inclinación de la curva, tres no contestaron.



Aproximación de recta tangente Recta normal Argumentación

Figura 4.1.3. Respuestas obtenidas en la cuarta curva, en el Pre-Test.

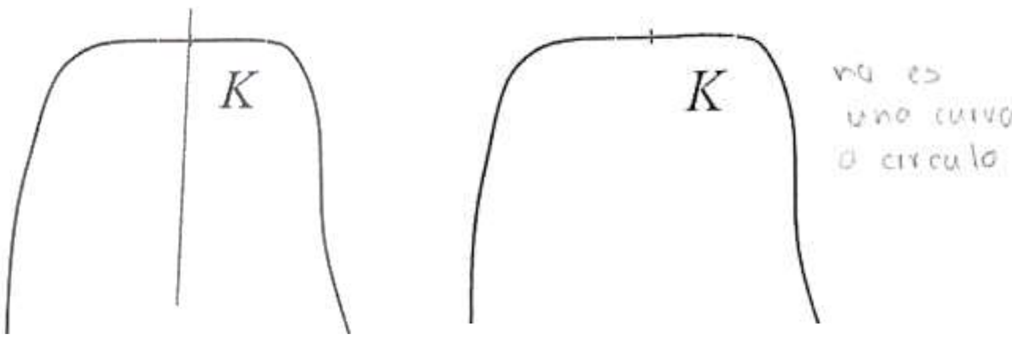
- En la quinta curva que corresponde a una circunferencia, el total de alumnos que la contesto (doce alumnos), fueron capaces de hacerlo correctamente, similarmente en la curva nueve que corresponde a una elipse.



Recta tangente en la quinta curva Recta tangente en la novena curva

Figura 4.1.4. Rectas tangentes en las curvas correspondientes, en el Pre-Test

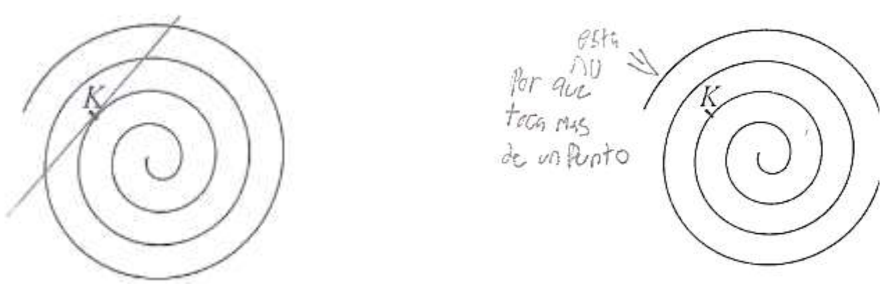
- En la sexta curva, ningún alumno fue capaz trazar de la recta tangente, puesto que siete de ellos trazaron la recta normal y uno solo mencionó que no era posible debido a que esta tocaría en más de un punto, los demás no lo contestaron.



Recta tangente a la curva Argumentación

Figura 4.1.5. Respuestas obtenidas en la sexta curva, en el Pre-Test

- En la séptima curva, que corresponde a la espiral, solo dos alumnos fueron capaz de dibujar la recta tangente, tres trazaron otras rectas, tres mencionaron que no era posible ya que esta tocaría a varios puntos y once alumnos no la contestaron.

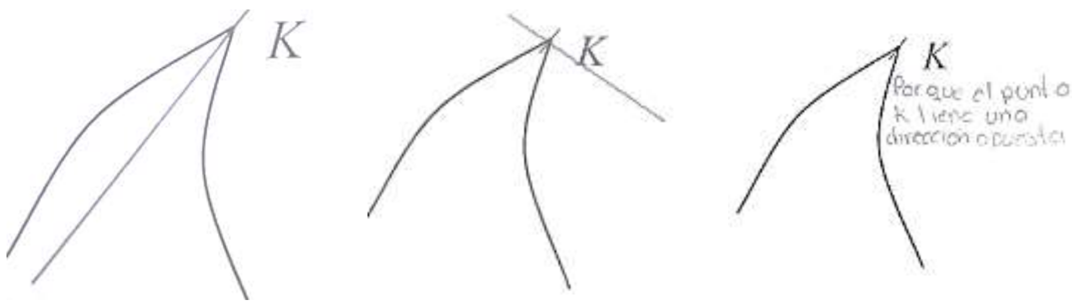


Recta tangente Argumentación

Figura 4.1.6. Respuestas obtenidas en la séptima curva, en el Pre-Test

Con relación a las curvas que no era posible trazar la recta tangente, los resultados fueron los siguientes:

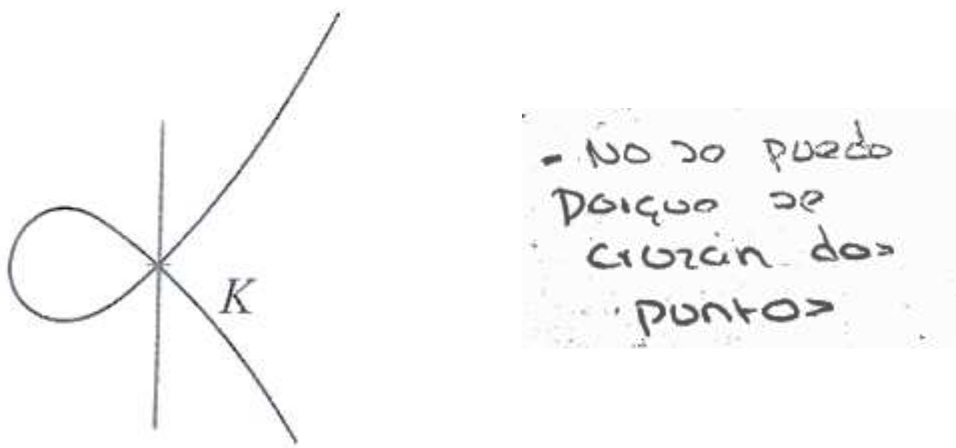
- Con respecto de la segunda curva, la cual presentaba al punto de tangencia en un pico, nueve estudiantes trazaron una perpendicular a la marca, mientras que dos alumnos trazaron una recta parecida a una bisectriz y cinco alumnos argumentaron que no era posible por la dirección del punto.



Bisectriz Recta perpendicular Argumentación

Figura 4.1.7. Respuestas obtenidas en la séptima curva, en el Pre-Test

- En la octava curva que parecía la letra alfa, cuatro alumnos mencionaron que no era posible debido a que esta tocaría varios puntos, mientras que dos consideraron una recta vertical que pasaba por el punto *K*.



Recta trazada Argumentación

Figura 4.1.8. Respuestas obtenidas en la octava curva, en el Pre-Test.

Es frecuente observar que entre las rectas dibujadas por los alumnos aparezca la recta normal. Esto se puede deber a que, al considerar que la recta tangente es aquella que toca la curva en un único punto, cabe considerar que la recta normal cumple parcialmente con esa definición, es decir, que dicha recta pasa por un único punto de la curva. Al no comprender de forma adecuada que es la recta tangente, no es extraño que tracen la recta normal (que es perpendicular a la tangente en el punto de tangencia), lo que se conoce como contacto de orden cero (entre la recta y la curva).

En el segundo apartado, acerca de la concepción de la recta tangente por los estudiantes, solo existieron dos resultados:

- Quince alumnos mencionaron que es “La recta que toca en un único punto a la curva”

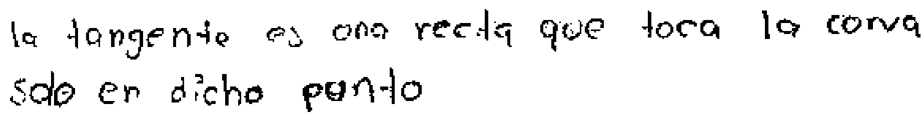

la tangente es una recta que toca la curva
solo en dicho punto

Figura 4.1.9. Ejemplo de una respuesta adecuada a la concepción de la recta tangente, en el Pre-Test

- Mientras que dos consideraron a tangente como identidad trigonométrica.

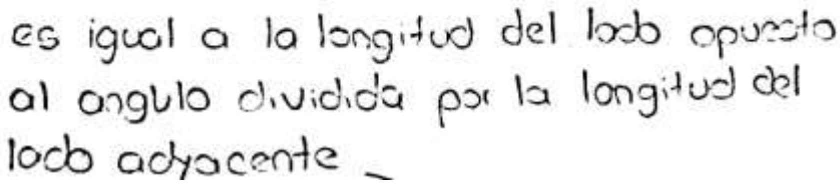

es igual a la longitud del lado opuesto
al angulo dividida por la longitud del
lado adyacente

Figura 4.1.10. Ejemplo de una repuesta a la concepción en recta tangente, confundida con la tangente trigonométrica, en el Pre-Test.

Dos alumnos, no contestaron. Sin embargo, en el apartado de realizar el dibujo, estos fueron:

- Cinco alumnos dibujaron la recta tangente a una circunferencia.

Figura 4.1.11. Recta tangente ejemplificada con una circunferencia, en el Pre-Test.

- Cinco alumnos dibujaron la recta tangente a una construcción parecida a una parábola.

Figura 4.1.12. Recta tangente ejemplificada con una parábola, en el Pre-Test

- Cuatro dibujaron un triángulo (por la identidad trigonométrica).

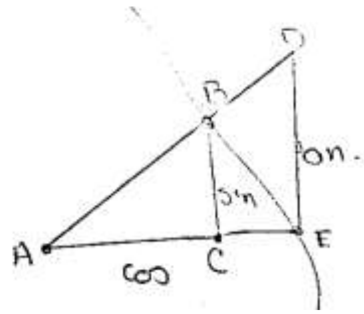


Figura 4.1.13. Tangente como identidad trigonométrica ejemplificada, en el Pre-Test

- Tres alumnos dibujaron la recta tangente a una curva arbitraria.

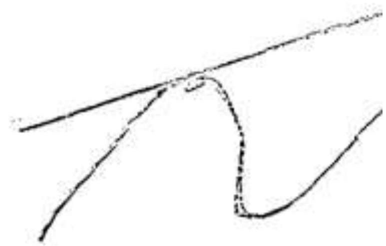


Figura 4.1.14. Recta tangente ejemplificada para una curva arbitraria, en el Pre-Test

Con estas respuestas, observamos que la gran parte de los alumnos no tiene dificultades para dibujar la recta tangente a una circunferencia, lo cual coincide con lo mencionado con Vivier (2011), coincidiendo con las concepciones de la noción de tangente acorde a la enseñanza secundaria.

Finalmente, para el tercer apartado, solo seis alumnos pudieron trazar correctamente la recta tangente dado el punto fuera de la curva, mientras que nueve alumnos trazaron rectas secantes que pasaban por el punto *K*.

Recta tangente Recta secante

Figura 4.1.15. Ejemplos de las rectas trazadas en la tercera sección del cuestionario, en el Pre-Test.

A continuación, presentaremos los resultados generales de las respuestas obtenidas por los estudiantes. En la primera sección, se muestra la relación de las gráficas donde las abreviaturas representan:

RT=Recta tangente B=Bisectriz

RN=Recta normal
RS=Recta secante
NPA= No es posible (argumentación)
NC=No contesto

Para la primera parte de la segunda sección, en donde se les pedía la definición de la recta tangente, las abreviaturas usadas fueron las siguientes.

RU= La recta que toca en un único punto a la curva
IT=Identidad trigonométrica
NC=No contesto

Para la segunda parte de la segunda sección, en el que se les solicitaba un ejemplo gráfico de la recta tangente, la abreviatura usada corresponde a los siguientes ejemplos:

CI=Circunferencia
C=Curva arbitraria
T=Tangente trigonométrica
P=Parábola
NC= No contesto

Para la última sección, en la que se les daba un punto y una curva, se les pedía trazar la recta tangente a la curva que pasara por ese punto, las abreviaciones son:

RT=Recta tangente
RS=Recta secante
NC=No contesto

A los alumnos que dieron la respuesta correcta, se les indicó su respuesta con el color distintivo, para notar la relación de comprensión

	Curvas									Concepto		R.T.
	C1.	C2.	C3.	C4.	C5.	C6.	C7.	C8.	C9.	Def.	Dib.	Inv.
A1.	RT	NC	RT	RS	RT	NC	NC	NC	RT	RU	C	RS
A2.	RN	NPA	RN	NPA	NC	NC	NC	NC	NC	RU	CI	RS
A3.	RT	RS	RT	RS	RT	NC	NC	NC	RT	NC	P	NC
A4.	RN	NC	RN	NC	RT	NC	NC	NC	RT	RU	CI	RT
A5.	RN	NPA	RN	NPA	NC	NC	NC	NC	NC	RU	CI	RT
A6.	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC
A7.	RN	NPA	RN	NPA	NC	NC	NC	NC	NC	RU	CI	RT
A8.	RN	NPA	NC	NPA	NC	NC	NC	NC	NC	RU	T	NC
A9.	RS	RS	RT	RS	RT	RN	RN	NC	RT	RU	P	RS
A10.	RN	NPA	RN	NPA	NC	NC	NC	NC	NC	RU	CI	RT
A11.	RT	RS	RT	NPA	RT	RN	NPA	NPA	RT	RU	P	RS
A12.	RN	B	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	RU	T	NC
A13.	RT	RS	RT	RN	RT	RN	RT	RS	RT	RU	P	RT
A14.	RT	RS	RT	RS	RT	RN	NPA	NPA	RT	RU	P	RS
A15.	RT	B	RT	RS	RT	NC	NC	NC	RT	RU	C	RS
A16.	RT	RS	RT	RS	RT	NPA	NPA	NPA	RT	IT	T	RS
A17.	RS	RS	RT	RN	RT	RN	RN	NC	RT	RU	NC	RS
A18.	RT	RS	RT	RN	RT	RN	RT	RS	RT	IT	T	RT
A19.	RT	RS	RT	RN	RT	RN	RN	NPA	RT	RU	C	RS

Tabla 4.1.1Resultados de los alumnos del Pre-Test de forma individual.

En los resultados mostrados, se identificó una variabilidad significativa en el nivel de comprensión de la recta tangente entre los estudiantes. A pesar de que la mayoría de los alumnos mostró tener un concepto de la recta tangente como la recta que toca a la curva en un punto, se observó una falta de habilidad para trazar la tangente, especialmente en casos diferentes a las cónicas.

Esta discrepancia entre la comprensión intuitiva del concepto y la aplicación práctica muestra la necesidad de abordar las habilidades relacionadas al trazado de la recta tangente. Debido a esto, es de suma importancia introducir ejercicios y actividades específicas que requieran la representación gráfica de la recta tangente para casos más generales. Estas prácticas pueden ayudar a disminuir la diferencia entre la teoría y la aplicación, permitiendo a los estudiantes no solo comprender el concepto, sino también aplicarlo en contextos más concretos.

4.2 Segunda sesión

Tuvo una duración de dos horas, en las cuales se planeaba llevar a cabo la Actividad 1 y Actividad 2, ya que el tiempo de era suficiente para abordar ambas. Sin embargo, debido a las dificultades técnicas que surgieron durante el transcurso de la sesión, solo fue posible presentar y completar la Actividad 1.

Actividad 1. Pendiente de una curva cerca de un punto: curva vista muy de cerca alrededor de un punto luce como una recta

El objetivo de esta actividad es caracterizar la recta tangente a una curva dada en un punto A dado, valiéndose de la herramienta de Zoom-in de GeoGebra que permite estimar con acercamientos sucesivos, la pendiente de la curva (muy cerca de A) que entonces se ve como una recta por A. Este tipo actividades ya ha sido implementada en otros estudios, como el mencionado por Verhoefa *et al*. (2014), teniendo resultados positivos con respecto del aprendizaje de los alumnos.

El 100% de los alumnos pudieron realizar de forma exitosa esta actividad, sin embargo, no todos necesitaron las mismas cantidades de Zoom, ni obtuvieron las mismas observaciones. Un ejemplo de un reporte realizado por los alumnos A14 y A19:

Puntos criticos calculados :

B = punto f = (1,1)

A = punto (f) = (0.99, 0.98)

$\Delta y = y(A) - y(B) = -0.02$

$\Delta x = x(A) - x(B) = -0.01$

$m = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = -0.02$

Figura 4.2.1 Notamos que los alumnos cometieron un error de cálculo, pues con los valores de Δx y Δy dados, el resultado obtenido para m debería de ser en 2, observando de esta forma que los alumnos no anotaron el resultado obtenido en GeoGebra y posiblemente calcularon m de forma mental, percibiendo que enfrentan dificultades al calcular la división entre números decimales.

Hice zoom 3 veces y despues siendo una linea curva

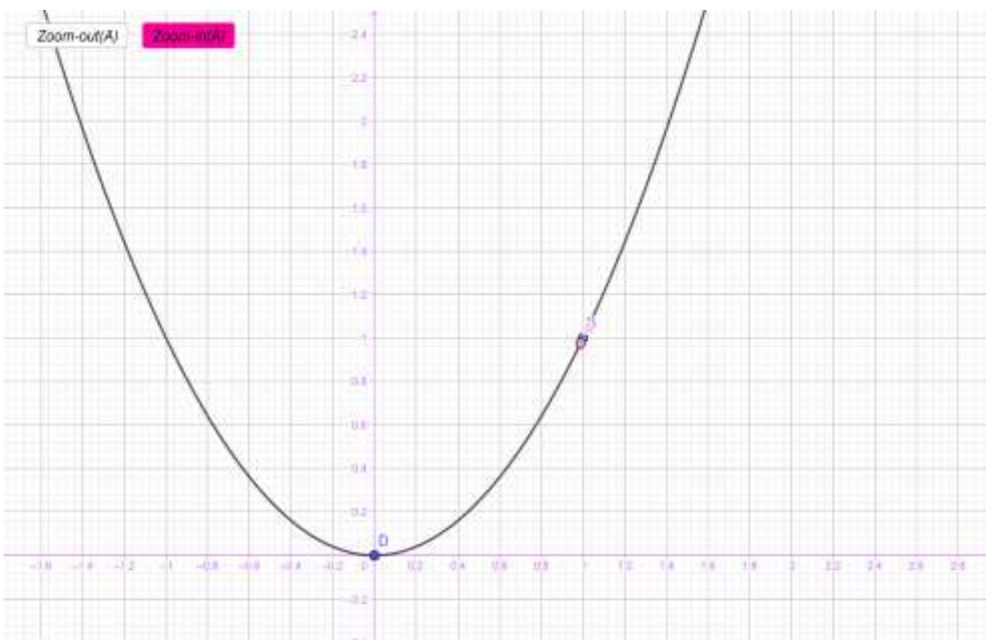


Figura 4.2.2 Captura obtenida por los alumnos A14 y A19, después de realizar tres Zoom-in(A) para la Actividad 1, en el punto A=(1,1).

Hice zoom 9 veces y ya se veia como una linea recta

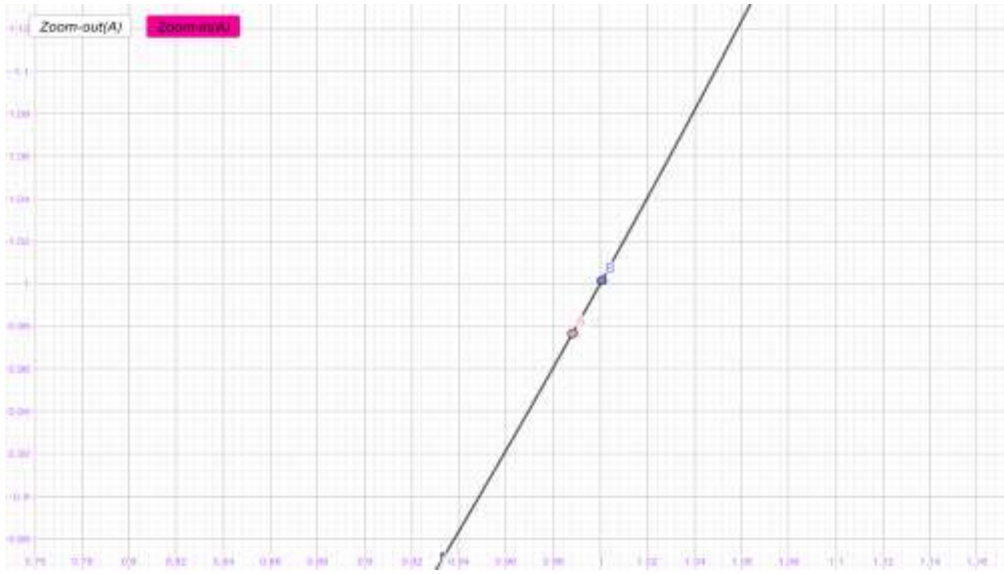


Figura 4.2.3. Captura obtenida por los alumnos A14 y A19, después de realizar nueve Zoom-in(A) extras para la Actividad 1, en el punto A=(1,1).

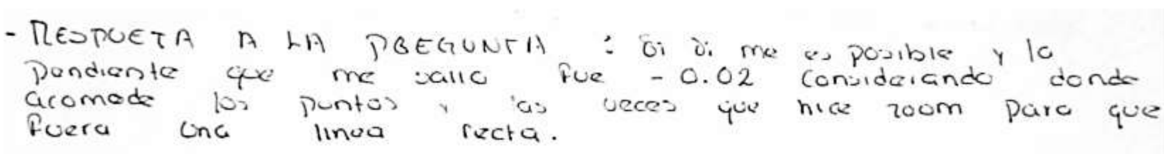


Figura 4.2.4 Notamos que el error percibido al inicio del reporte continua durante toda la secuencia, a pesar de que los alumnos pudieron realizar la actividad en GeoGebra de manera adecuada, percibiendo que los alumnos A14 y A19 no se fijaron en la relación entre la vista algebraica y la vista gráfica.

Al realizar actividad para el punto A=(1,1), observamos que los estudiantes necesitaron usar entre 5 y 10 Zoom-in(A) para ser capaces de que la curva fuera vista como una recta. Después ejecutaron las operaciones adecuadas para calcular la pendiente de la curva en el punto A. Alguna de las dificultades que presentaron los alumnos, fue el no saber generar los puntos en la curva de forma adecuada, pues ellos querían graficarlos al escribir el código en la vista algebraica o utilizando el comando de punto en lugar de Punto en Objeto, a pesar de que ya se les había explicado antes como generarlo.

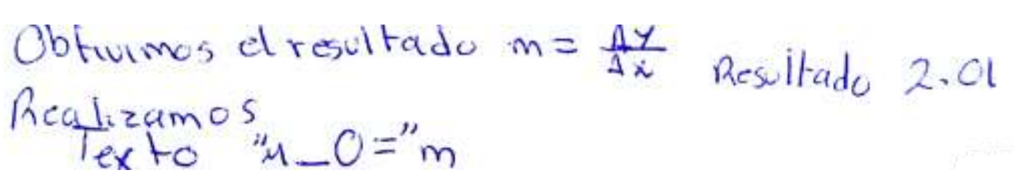


Figura 4.2.5 Observaciones finales de los alumnos A3 y A4, después de realizar siete Zoom-in(A) para la Actividad 1, en el punto A=(1,1).

Con respecto de las observaciones realizadas, en general, la mayoría fueron alrededor de las rectas y los puntos, las cuales se observan de la siguiente gráfica[1]:

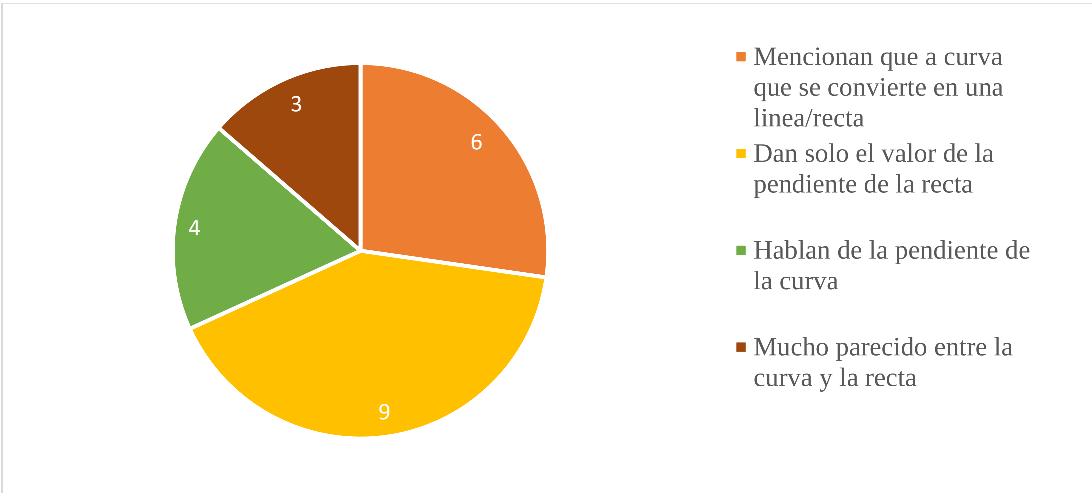


Figura 4.2.6 Gráfico correspondiente a la distribución de las observaciones de la Actividad 1, con A=(1,1).

Para el punto A=(0,0), los alumnos realizaron entre 10 y 15 Zoom-in(A) en total para ver a la curva como una recta alrededor del punto de interés. En cuanto a observaciones, realizaron las mismas que en el (1,1), se les solicitó a los alumnos que hicieran observaciones diferentes para las siguientes actividades, puesto que los comportamientos no son necesariamente los mismos.

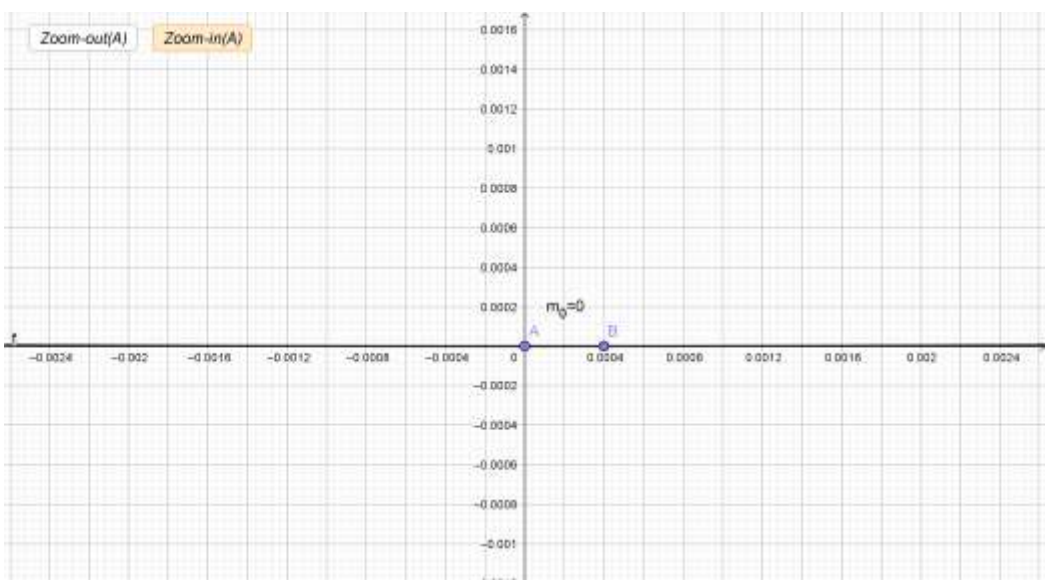


Figura 4.2.7 Captura obtenida por los alumnos A2 y A10, después de realizar doce Zoom-in(A) para la Actividad 1, en el punto A=(0,0).

[1] Nota: La cantidad de observaciones registradas es mayor a la cantidad de muestras obtenidas debido a que algunos alumnos hicieron más de una observación.

Entonces podemos agrupar la información recolectada de esta primera actividad, considerando los Zoom que utilizaron y las observaciones de A=(1,1) y A=(0,0), donde las notaciones utilizadas son:

PR = Mencionan el parecido de la curva con una recta
P = Solo dan el valor numérico de la pendiente obtenida
VP= Hablan con respecto del valor de la pendiente
CR = Hablan sobre el hecho de que la curva se convierte en una recta

Los resultados obtenidos por parte de los alumnos de forma individual son los siguientes:

	A=(1,1)		A=(0,0)	
	Núm. Zoom	Observación	Núm. Zoom	Observación
A1	9	P	15	P
A2	8	P	15	P
A3	7	P	12	P
A4	7	P	12	P
A5	10	VP	15	VP
A6	10	P	15	P
A7	8	CR	16	CR
A8	8	CR	16	CR
A9	9	P	15	P
A10	8	P	15	P
A11	10	P	15	P
A12	5	PR	10	PR
A13	10	VP	15	VP
A14	12	CR, VP	17	CR, VP
A15	8	CR	14	CR
A16	7	P, PR	15	P, PR
A17	5	PR	10	PR
A18	8	CR	14	CR
A19	12	CR, VP	17	CR, VP

Tabla 4.2.1Resultados de los reportes realizados por los alumnos de forma individual en la actividad 1.

Durante la discusión al final de la sesión, ninguno de los alumnos fue capaz de notar que la curva puede verse como segmentos de recta, por lo que debió de explicarles esta idea, no tuvieron dificultades al entenderla, para ilustrar el proceso es necesario hacer uso del Zoom y de casita. En general, se encontró que la mayoría de las observaciones de los estudiantes se centraron en los movimientos de los puntos.

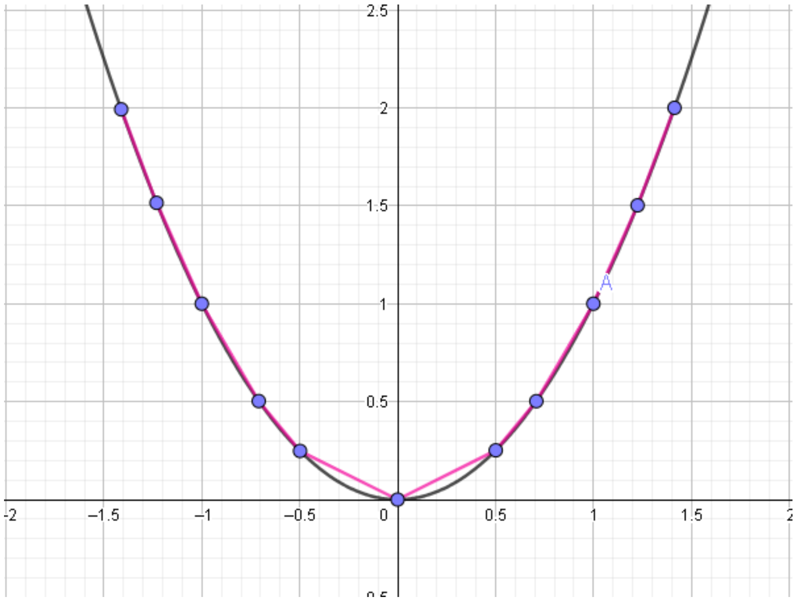


Figura 4.2.8 Construcción de la curva como segmentos de rectas creados por dos puntos.

Es importante destacar, que esta actividad puede observarse de forma más estática, pues la idea principal es que los alumnos vean que, con el acercamiento suficiente, la curva puede ser vista como una recta, y a partir de esto poder calcular la pendiente, siendo un proceso meramente descriptivo, sin la necesidad de generar objetos dinámicos.

4.3 Tercera sesión

Esta sesión tuvo una duración de dos horas, en esta se abordaron la Actividad 2 y la Actividad 3. Debido a las dificultades de la sesión pasada, tanto técnicas como dificulta de los alumnos al escribir sus apuntes en procesadores de texto, se optó por que escribieran sus reportes en hojas.

Actividad 2. Proponer la tangente como la recta por A cuya pendiente es la pendiente de la curva en A que se determinó en la Actividad 1.

La finalidad de esta tarea consiste en verificar si la propuesta de la recta tangente a la curva dada en el punto A, específicamente la recta que pasa por A y tiene la misma pendiente que la curva (en este caso, $m_0 = 2$ y $m_0 = 0$), sirve como la mejor aproximación lineal cerca de A. Este proceso se lleva a cabo mediante el uso de la función de Zoom de GeoGebra.

Todos los estudiantes lograron completar esta actividad de manera exitosa, aunque se observaron variaciones en las cantidades de Zoom utilizadas, así como en los reportes registrados para ambos puntos.

Un ejemplo de un reporte realizado por el alumno A1:

1 primero ubique el punto A (1,1)
2 realize la operación $y=m_0(x-x(A))+y(A)$
3 aparecio una nueva linea que es la tangente y la cambie de color morado
4 al hacer zoom muchas veces llega un punto en el que la tangente y la linea inicial ya no se podían distingui

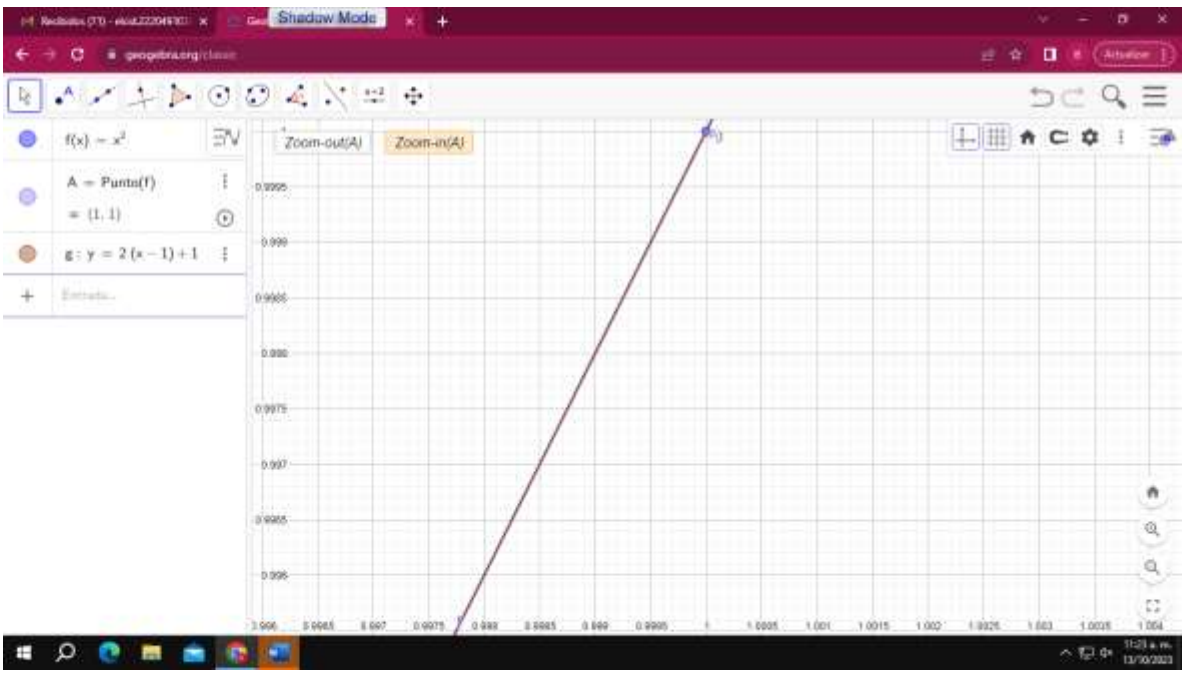


Figura 4.3.1. Captura obtenida por el alumno A1, después de realizar ocho Zoom-in(A) para la Actividad 2, en el punto A=(1,1).

En relación con la ejecución de la actividad en el punto A=(1,1), diecisiete de los diecinueve estudiantes que participaron necesitaron entre 6 y 9 acercamientos para lograr que la propuesta de la recta tangente fuera prácticamente indistinguible de la curva, especialmente cerca del punto A.

Es importante destacar que todas las observaciones recopiladas se centran en la similitud que adquiere la recta tangente con respecto de la cuadrática.

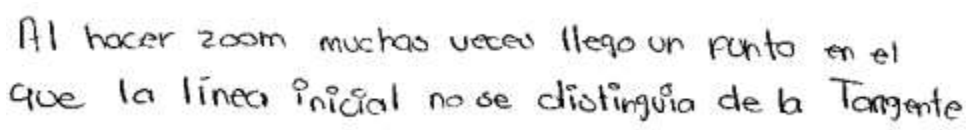

Al hacer zoom muchas veces llego un punto en el que la línea inicial no se distinguía de la Tangente

Figura 4.3.2. Observaciones finales de los alumnos A15 y A16, después de realizar ocho Zoom-in(A) para la Actividad 1, en el punto A=(1,1).

Las observaciones están distribuidas de la siguiente manera, donde algunos estudiantes hicieron más de una observación:

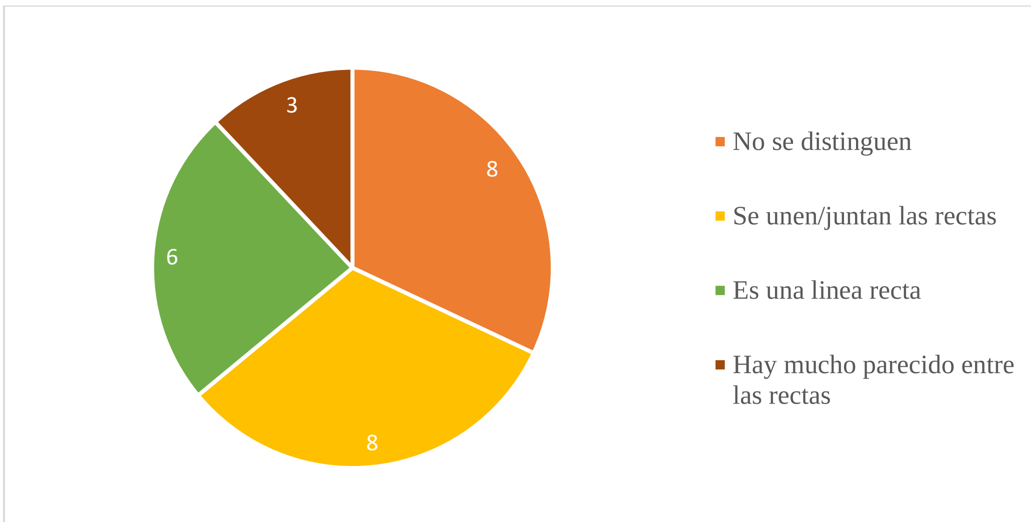
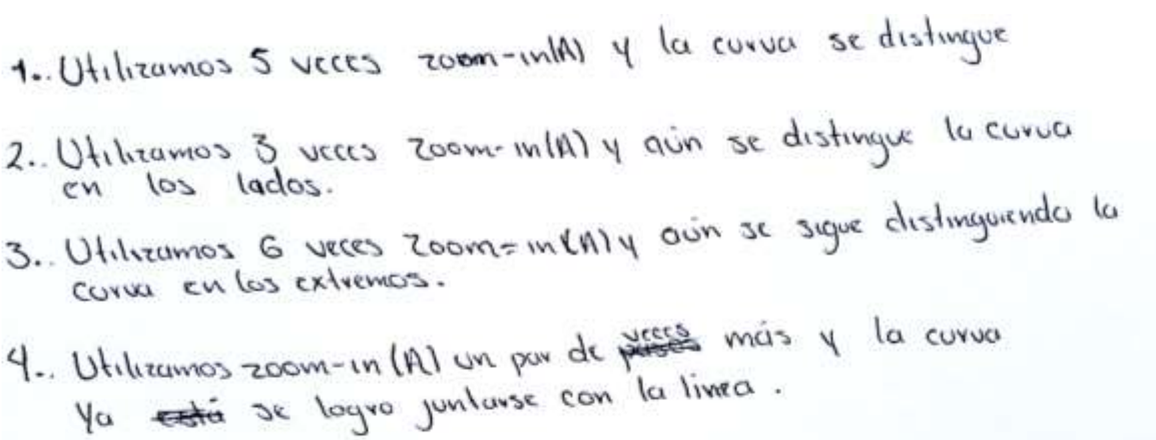


Figura 4.3.3 Gráfico correspondiente a la distribución de las observaciones de la Actividad 2, con A=(1,1).

En el caso del punto A=(0,0), los estudiantes requerían realizar entre 10 y 15 acercamientos para apreciar la similitud entre la curva y la recta. Una observación común en la discusión fue que, en comparación con el punto anterior, fue que necesitaron realizar más acercamientos en este caso específico debido a que la curva es percibida como más "curva" en este punto.


1.. Utilizamos 5 veces zoom-in(A) y la curva se distingue

2.. Utilizamos 3 veces Zoom-in(A) y aún se distingue la curva en los lados.

3.. Utilizamos 6 veces Zoom-in(A) y aún se sigue distinguiendo la curva en los extremos.

4.. Utilizamos zoom-in (A) un par de ~~pasos~~ veces más y la curva ya ~~está~~ se logro juntarse con la linea.

Figura 4.3.4 Reporte de los alumnos A5 y A6, en donde se observa un mayor uso de Zoom-in(A), en el punto A=(0,0).

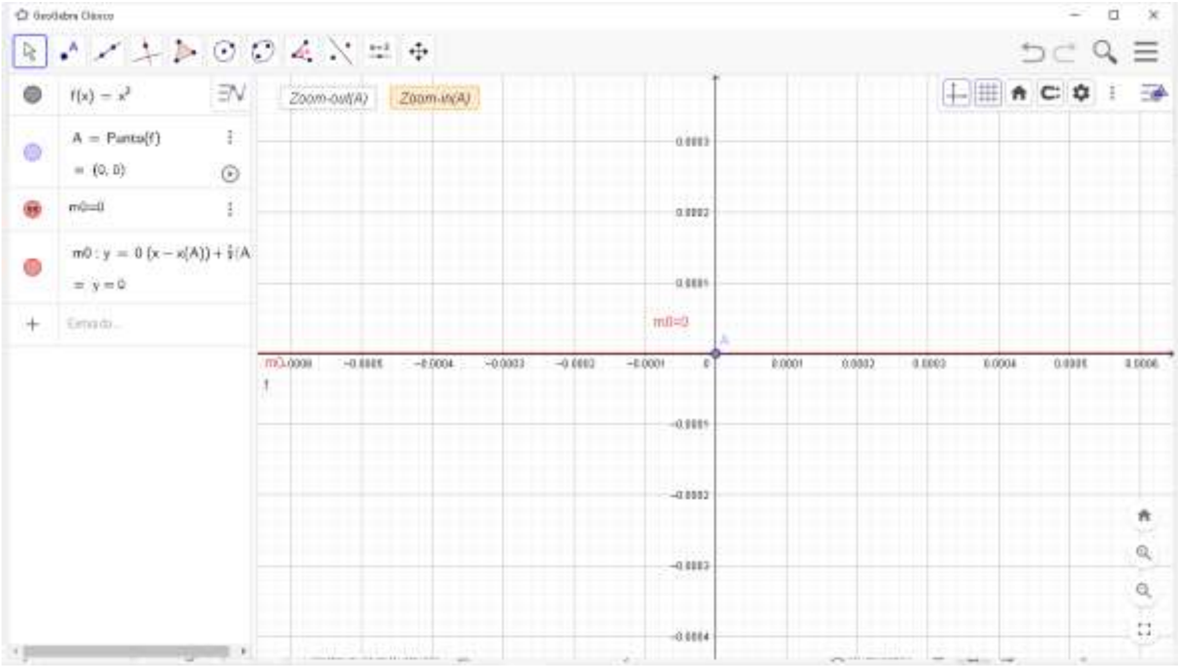


Figura 4.3.5. Captura obtenida por los alumnos A5 y A6, después de realizar catorce Zoom-in(A) para la Actividad 2, en el punto A=(1,1).

Con respecto de las observaciones sobre el parecido de las curvas, estas presentan algunas variaciones en comparación con las observaciones realizadas en el punto A=(1,1). Estas diferencias se pueden describir de la siguiente manera:

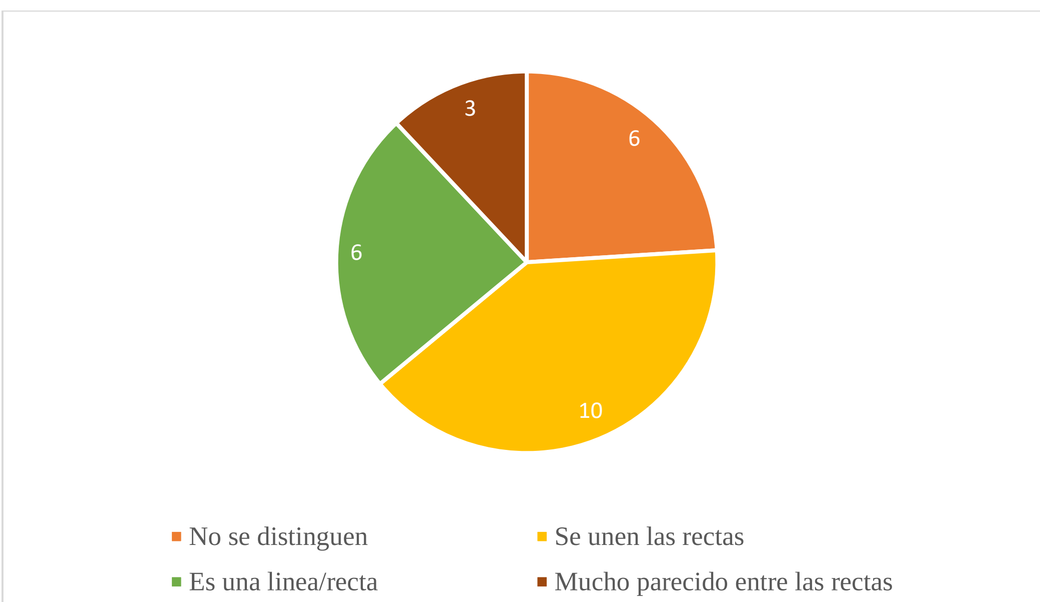


Figura 4.3.6 Gráfico correspondiente a la distribución de las observaciones de la Actividad 2, con A=(0,0).

Otra muestra de las conclusiones obtenidas es la siguiente:

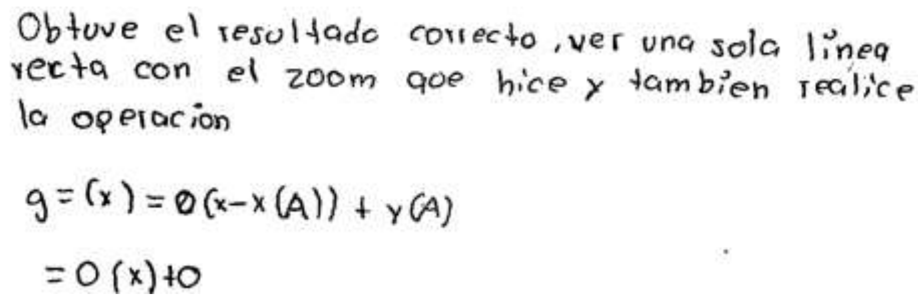


Figura 4.3.7 Observaciones finales de los alumnos A3 y A4, después de realizar siete Zoom-in(A) para la Actividad 2, en el punto A=(0,0).

Agrupando la información recolectada de la segunda actividad, considerando los Zoom y las observaciones con respecto de A=(1,1) y A=(0,0), donde las notaciones utilizadas son:

MP= Existe mucho pareció entre la curva y la recta
SU= Se unen la recta y la curva
UR=Es una única recta
ND= No se distinguen la curva de la recta

Donde las observaciones se distribuyeron de la siguiente forma:

	A=(1,1)		A=(0,0)	
	Núm. Zoom	Observación	Núm. Zoom	Observación
A1	8	MP	11	MP
A2	9	MP, SU	12	MP, SU
A3	8	UR	10	UR
A4	8	UR	10	UR
A5	9	ND	14	ND
A6	9	ND	14	ND
A7	9	MP, SU	12	MP, SU
A8	7	SU	10	SU
A9	11	ND	14	ND
A10	7	SU, UR	10	SU, UR
A11	7	SU, UR	10	SU, UR
A12	7	SU	10	SU
A13	6	ND	10	SU
A14	7	SU, UR	10	SU, UR
A15	8	ND	15	ND
A16	8	ND	15	ND
A17	11	ND	14	ND
A18	6	ND	10	SU
A19	7	SU, UR	10	SU, UR

Tabla 4.3.1 Resultados de los reportes realizados por los alumnos de forma individual en la actividad 2.

Las observaciones realizadas a lo largo de la actividad se centraron en la similitud entre la recta tangente propuesta y la curva, con algunos estudiantes mencionando que la curva podría verse como segmentos de recta, identificando estos segmentos como rectas tangentes en los puntos seleccionados. Estas observaciones difieren de las realizadas en la Actividad 1, ya que los estudiantes pudieron notar que la curva podía representarse como segmentos de recta, específicamente correspondientes a rectas tangentes en puntos específicos.

Otra diferencia es que en esta ocasión se usa a GeoGebra para verificar la hipótesis propuesta en la actividad anterior, que el valor de la pendiente de la recta tangente en los puntos escogidos es correcto, pero sigue siendo una actividad estática, pues no es necesario usar alguno objeto dinámico, y se centra en la observación del parecido entre curva y recta tangente.

Actividad 3. Aproximación a la recta tangente por secantes

El propósito de la actividad consiste en verificar, mediante repetidos Zoom-in(A), que las líneas rectas (secantes) que surgen al unir el punto A con otro punto auxiliar B, distinto de A, y al acercar el punto B hacia el punto fijo A, finalmente se fusionan en una única línea que confunde la secante, la curva y la recta tangente. Adicionalmente, se pretende confirmar que la pendiente de la secante formada por B y A se aproxima cada vez más a la pendiente de la tangente en A. Esta última parte de la actividad ha sido trabajada anteriormente por Hohenwarter *et al*. (2008).

Todos los alumnos realizaron la actividad, pero hubo diversas dificultades, como las de la actividad 1, entre ellas que los alumnos no construyeron la recta que pasa entre el punto A y B, pues querían escribir el código en la vista algebraica.

A continuación, mostraremos el reporte realizado por los alumnos A3 y A4:

Realice las operaciones para el punto A

$g(x) = 2(x - x(A)) + y(A)$

$= 2(x-1)+1$

$\therefore m\_0 \doteq 2$

Realice o puse un puntobe B

Despues hice la siguiente operacion

$\Delta y = y(A) = y(B)$

$\Delta x = x(A) - x(B)$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$= 1.99$$
$$\therefore m_s \simeq m$$

Hice zoom necesario ~~[illegible]~~ hasta obtener una sola recta entre los punto A y B

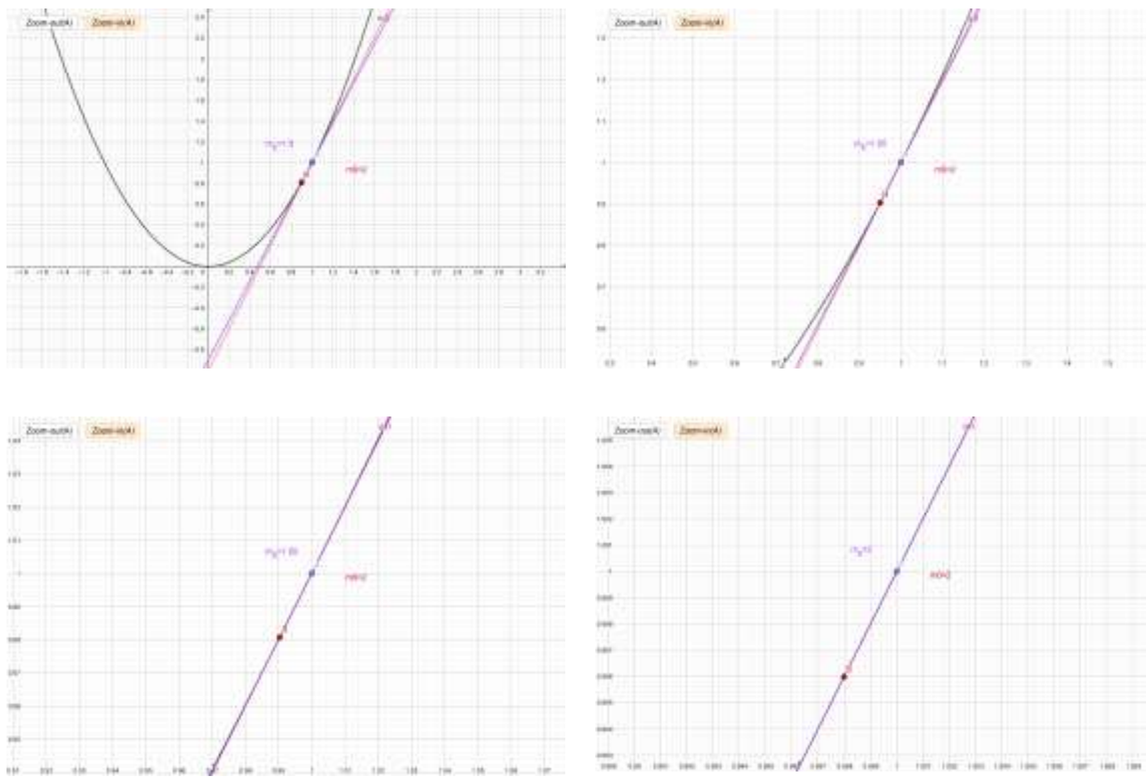


Figura 4.3.8. Capturas obtenidas por los alumnos A3 y A4, después de realizar diversas cantidades de Zoom-in(A) para la Actividad 3, en el punto A=(1,1).

En relación con la ejecución de la actividad en el punto A=(1,1), diecisiete de los diecinueve estudiantes que participaron necesitaron entre 5 y 8 Zoom-in(A) para verificar que la recta tangente, la secante y la curva fueran indistinguibles cerca de A.

•Al ubicar el punto b con la recta del punto a se forma una recta igual de mo=2 y mo=2, los cuales al ir haciendo zoom 8 se juntan y

Figura 4.3.9. Observaciones finales de los alumnos A9 y A17, para la Actividad 3, en el punto A=(1,1).

Con respecto a las observaciones realizadas, en general, la mayoría fueron con acerca de las rectas y los puntos, las cuales se observan de la siguiente forma:

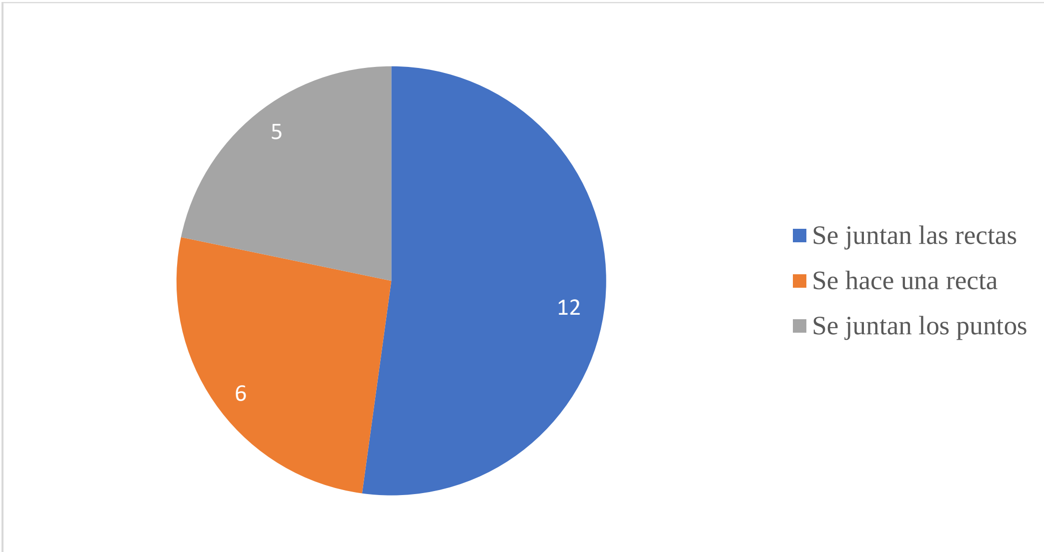


Figura 4.3.10 Gráfico correspondiente a la distribución de las observaciones de la Actividad 3.

Para el punto A=(0,0), los estudiantes requerían realizar entre seis y doce Zoom para apreciar la similitud entre ambas curvas. Fuera de esta observación, sus resultados fueron exactamente los mismos que los mencionados que en el punto A=(1,1).

Durante la discusión que se realizó al final de la sesión, solo seis alumnos mencionaron que la pendiente de la recta secante m_s, se aproxima al valor de m_0 cuando B se acerca al punto A, de esta forma los alumnos fueron capaces de ver que la recta secante tiende a ser una recta tangente.

Figura 4.3.11. Observaciones finales de los alumnos A10 y A14, para la Actividad 3, en el punto A=(0,0).

Con la información recolectada, considerando los Zoom y las observaciones con respecto de A=(1,1) y A=(0,0), utilizamos la siguiente clasificación de datos

JP= Se juntan los puntos
SR= Se juntas las rectas
UR= Se hace una recta

	A=(1,1)	A=(0,0)

	Núm. Zoom	Observación	Núm. Zoom	Observación
A1	8	JP	11	JP
A2	7	SR, UR	11	SR, UR
A3	6	SR	10	SR
A4	6	SR	10	SR
A5	5	SR	8	SR
A6	5	SR	8	SR
A7	7	SR, UR	11	SR, UR
A8	7	SR	10	SR
A9	5	SR	7	SR
A10	6	JP	12	JP
A11	6	JP	12	JP
A12	7	SR	10	SR
A13	3	SR, UR	6	SR, UR
A14	6	JP	12	JP
A15	8	UR	15	UR
A16	8	UR	15	UR
A17	5	SR	7	SR
A18	3	SR	6	SR
A19	6	JP	12	JP

Tabla 4.3.2 Resultados de los reportes realizados por los alumnos de forma individual en la actividad 3.

En esta actividad, se destacó la presencia de observaciones tanto numéricas como visuales. La combinación de análisis numérico y visual permitió a los estudiantes abordar el concepto de la recta tangente desde múltiples perspectivas, enriqueciendo su comprensión global.

A diferencia del estudio de Hohenwarter *et al*. (2008), en esta actividad los alumnos no se enfrentaron (o al menos no lo escribieron, ni mencionaron) al hecho de que cuando el punto B se sobrepone en el punto A, la recta secante desaparece, al igual que la pendiente de la secante sería indefinida, sin embargo, cuando se les mencionó esto en la discusión final, el grupo no mostró alguna duda o estar seguros de la información dada.

Al realizar el análisis de datos es que no se les solicita a los alumnos tomar una captura al final de la actividad, pero sin el uso de Zooms, es decir, en la vista general de GeoGebra. Esta captura es de suma importancia ya que ayuda a ver globalmente que la recta secante tiende a convertirse en una recta tangente, sin embargo, con las capturas tomadas por los alumnos, solo es posible verlo como un proceso local. De esta forma consideramos para futuras investigaciones agregar ese paso extra.

Observamos también que esta es una actividad completamente dinámica, pues se les solicita a los alumnos realizar la creación de un punto auxiliar, del cual dependía una recta y un letrero, haciendo que, al mover el punto, los otros dos objetos fueran cambiando, al mismo tiempo que observan la relación que existe en relación a la recta tangente. Además, para observar el nivel de comprensión de los alumnos en la actividad, sería posible agregar ciertas preguntas como las siguientes:

- ¿Qué ocurre cuando acercas el punto B al punto A con respecto de la pendiente de la secante y la tangente? ¿Por qué tiene ese comportamiento?
- ¿Qué significa que la secante y la tangente se logren confundir?

4.4 Cuarta sesión

Esta sesión tuvo una duración de dos horas, en esta se abordaron la Actividad 4 y la Actividad 1c. A diferencia de las sesiones anteriores, en esta hubo un pequeño intermedio, pues se les explico a los alumnos que a partir de la actividad 1c, se realizarían las mismas actividades, con la diferencia de modificar la curva de $f(x) = x^2$ y $f(x) = x^3$.

Actividad 4.

Con esta actividad, se observa que al modificar ligeramente (mediante el uso de deslizadores) el valor de la pendiente m, con respecto del valor m_0 de la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto A, dicha recta se transforma en una secante de la curva. La secante interseca a la curva en al menos dos puntos, lo que revela la multiplicidad de la raíz $x = x(A)$ en el punto de tangencia cuando se trata de la recta tangente, siendo esta multiplicidad de al menos 2.

Al igual que con la actividad 1 y la actividad 3, los alumnos tuvieron dificultades al generar ciertos objetos como el punto de intersección y las perpendiculares, puesto que solo pensaron en escribir el comando del objeto en la vista algebraica, pero una vez explicada la construcción por el investigador, pudieron seguir la actividad sin problemas.

En seguida mostraremos las observaciones escritas por los alumnos A2 y A7:

1.- la línea A y B aún quedan lejos

2.- La linea de la A y B queda horizontal

3.- Las líneas quedan de manera hacia la derecha

4.- Ya está muy elevada y casi juntas las perpendiculares

5.- Las perpendiculares ya estan muy muy pegadas casi una arriba de otra

6.- Las perpendiculares ya estan arriba de otra.

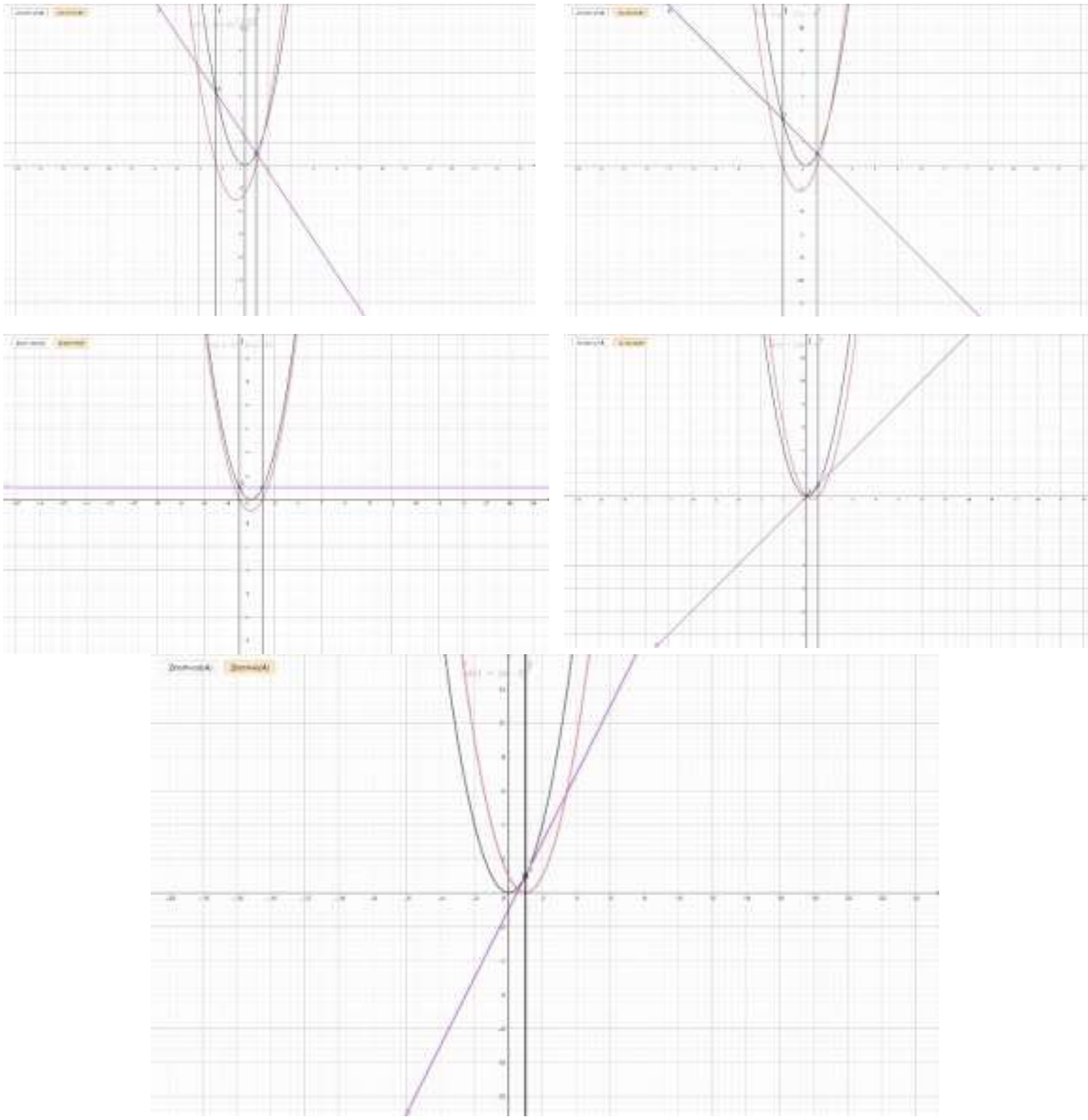


Figura 4.4.1. Capturas obtenidas por los alumnos A2 y A7, después de realizar diversas cantidades de Zoom-in(A) para la Actividad4, en el punto A=(1,1).

La mayoría de las observaciones fue con respecto de a los movimientos de las rectas, perpendiculares o puntos.

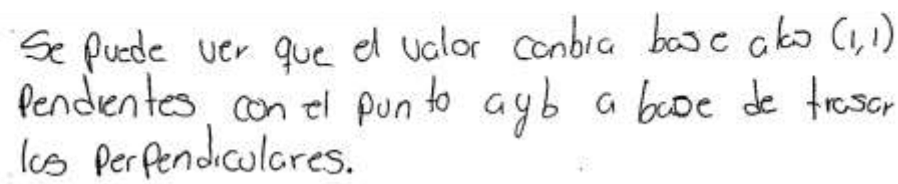


Figura 4.4.2. Observaciones finales del alumno A3, para la Actividad 4, en el punto A=(1,1).

A diferencia de las actividades anteriores, el Zoom no fue una herramienta de suma importancia, por lo que los alumnos no escribieron en sus reportes la cantidad de veces que la utilizaron, o inclusive no lo utilizaron, a diferencia de las otras actividades. Las observaciones se distribuyeron de la forma siguiente:

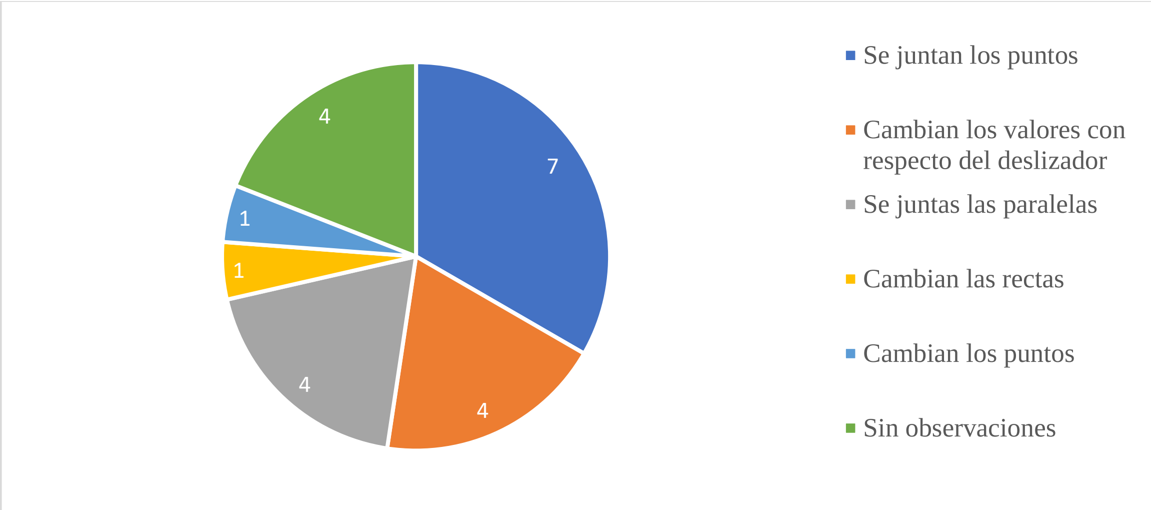


Figura 4.4.3 Gráfico correspondiente a la distribución de las observaciones de la Actividad 4, con A=(1,1).

Las observaciones fueron exactamente las mismas para el punto (0,0). Los alumnos no fueron capaces de observar que ocurre con el comando de factorización cuando el valor del deslizador tiende al valor de la pendiente de la tangente, fue necesario hacer una retroalimentación de esta actividad, mencionando que el primer factor tiene a ser igual que el segundo factor, es decir, cuando el valor de m es la pendiente de la recta tangente, obtenemos una raíz única (en particular, esta es una raíz doble).

Para simplificar la información de forma individual, usaremos las siguientes notaciones:

SP= Se juntan los puntos
CV= Cambian los valores de las rectas con respecto del deslizador
SRP= Se juntan las rectas paralelas
CR= Cambian las rectas
CP= Cambian los puntos
SO = Sin observaciones

Donde los resultados obtenidos de forma individual son los siguientes:

	Observaciones
A1	SO
A2	SRP
A3	CV, CP, CR
A4	SP
A5	SP
A6	SP

A7	SRP
A8	SP
A9	SO
A10	SP
A11	SRP
A12	SP
A13	SR, CV
A14	SR, CV
A15	SO
A16	SRP
A17	SO
A18	SR, CV
A19	SP

Tabla 4.4.1 Resultados de los reportes realizados por los alumnos de forma individual en la actividad 4.

Al igual que la actividad anterior, esta actividad es completamente dinámica, pues se les solicita a los alumnos realizar la creación de un deslizador (que de por sí ya es un objeto dinámico), del cual dependía una recta, un letrero y una nueva curva, haciendo que cuando cambie el valor del deslizador, todos los objetos cambien. Sin embargo, en ninguno de los reportes generados por los alumnos, se observa que hayan puesto atención en la curva generada entre la diferencia de la recta con pendiente el valor del deslizador y la curva original, aun cuando se les hace una pregunta explicita sobre esto, no obstante se esperaba que notaran que, cuando el valor del deslizador corresponde al valor de la pendiente de la recta tangente, la diferencia nunca es negativa, mientras que, en cualquier otro caso, hay un cambio de signo en $x(A)$. Algunas preguntas que pueden ayudar

- ¿Qué ocurre con $P(x)$ cuando m es igual al valor de la pendiente de la tangente?
- ¿Qué ocurre con $P(x)$ cuando m es diferente al valor de la pendiente de la tangente?
- ¿Qué ocurre con el letrero de $P(x)$ cuando m es igual al valor de la pendiente de la tangente?
- ¿Qué relación existe entre el letrero de $P(x)$ con respecto de las paralelas trazadas?

Es posible que los alumnos no hayan tenido el comportamiento esperado debido a que en esta actividad se tiene una gran cantidad de elementos en la vista gráfica y algebraica al final de la construcción, lo cual distrajo a los alumnos acerca del objetivo principal, el cual es observar que existe una raíz doble entre la diferencia de la curva y de la recta, cuando la pendiente de recta corresponde a la tangente. De esta forma, la actividad no se llevó a cabo de manera exitosa.

Antes de la actividad siguiente, se les explico a los alumnos que se realizaría la actividad 1c, la cual era igual a la actividad 1, con la diferencia de que en esta ocasión se consideraría la curva $f(x) = x^3$ y que la dinámica en las siguientes actividades seria la misma.

Actividad 1c. Pendiente de una curva cerca de un punto: curva vista muy de cerca alrededor de un punto luce como una recta

El propósito de esta actividad es describir a la recta tangente a una curva específica en un punto A determinado, utilizando la función de Zoom-in(A) de GeoGebra. Esta herramienta posibilita la estimación progresiva de la pendiente de la curva (en las inmediaciones de A), transformándola en una recta cerca de A. Este enfoque es similar al utilizado en la actividad 1, donde también se examinaba el comportamiento de la curva mediante acercamientos sucesivos en relación con la recta tangente en A, con la diferencia de que modificaremos la curva de $f(x) = x^2$ a $f(x) = x^3$.

Los alumnos pudieron realizar de forma exitosa esta actividad, sin embargo, al principio, no lograban identificar la diferencia con la actividad 1, por lo que se les tuvo que explicar que el procedimiento que había realizado anteriormente era para de $f(x) = x^2$, y que, con el cambio realizado, el valor de la pendiente de la curva cambiaria, a pesar de tener los mismos puntos asignados, además al usar el Zoom-out(A), podían verificar que las curvas son completamente distintas.

Un ejemplo de un reporte hecho por los alumnos es el siguiente, realizado por A9 y A17:

Modificamos F^2 por F^3

seleccionamos un punto contrario al punto A sobre la curva.

Colocamos $\Delta y = y(A) - y(B)$.

$\Delta x = x(A) - x(B)$.

"m_0=" m "(Aprox)"

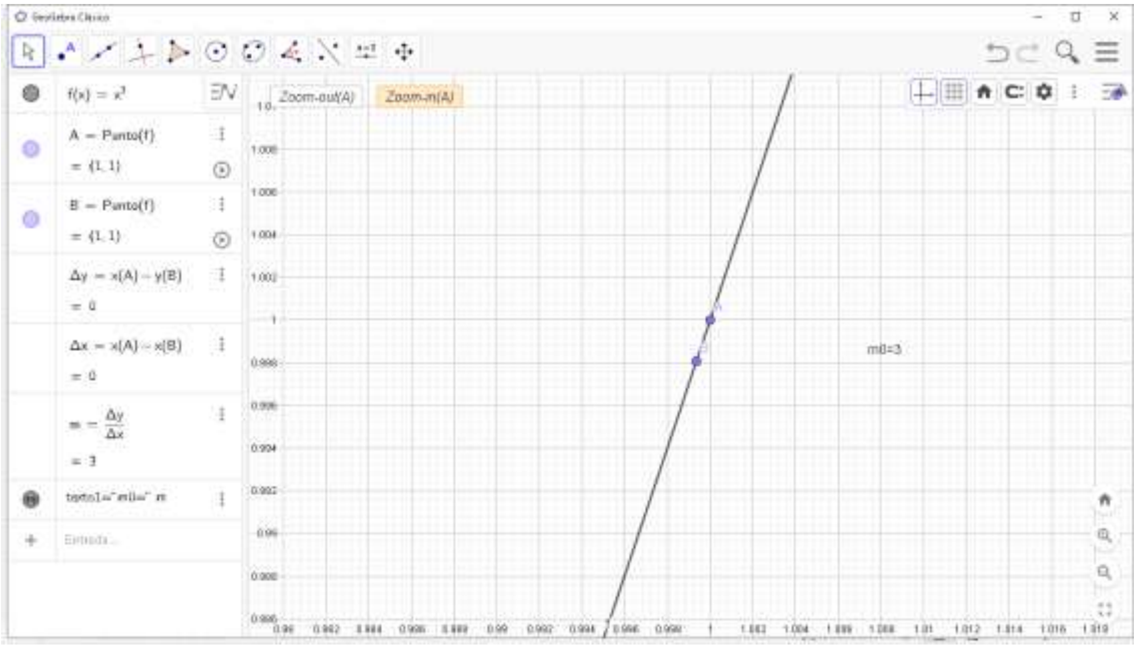


Figura 4.4.4. Captura obtenida por los alumnos A9 y A17, después de realizar siete Zoom-in(A) para la Actividad 1c, en el punto A=(1,1).

En relación con la ejecución de la actividad en el punto A=(1,1), los participantes requerían realizar entre 6 y 10 acercamientos (Zoom-in(A)) para lograr que la curva se percibiera como una recta. Aunque los alumnos también realizaron observaciones con respecto del valor de la pendiente.

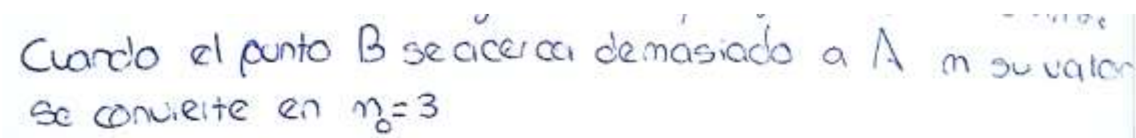

Cuando el punto B se acerca demasiado a A m su valor se convierte en $m_0 = 3$

Figura 4.4.5 Observaciones finales de los alumnos A13 y A18, para la Actividad 1c, en el punto A=(1,1).

Posteriormente, llevaron a cabo la secuencia de pasos correspondientes para calcular la pendiente de la curva en el punto A. Los alumnos no tuvieron ninguna dificultad al hacer esta actividad, debido a que ya conocían los comandos a utilizar. Dentro de las observaciones recabadas fueron las siguientes:

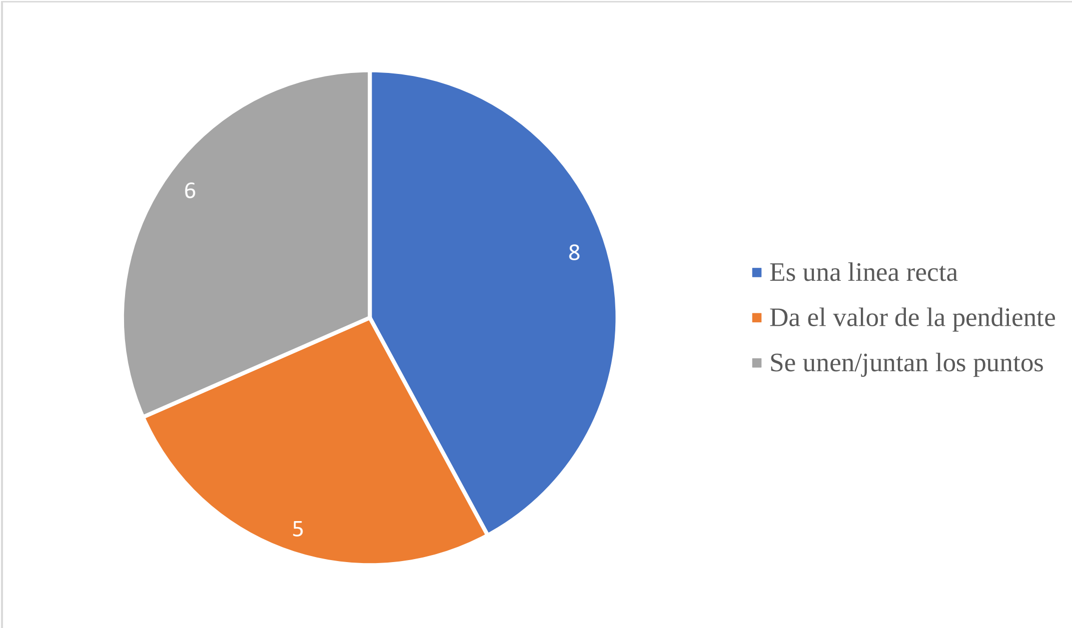


Figura 4.4.6 Gráfico correspondiente a la distribución de las observaciones de la Actividad 1c, con A=(1,1).

Para el punto A=(0,0) el número de Zoom utilizado fueron entre 10 y 15, argumentando que también era más curva en este punto que en el (1,1). Las observaciones fueron las mismas que en el punto anterior, donde la notación usada es la siguiente:

LR= Mencionan como la curva se convierte en una recta
UP= Los puntos se unen o juntan
PR= Solo dan o explican alrededor de la pendiente obtenida

Donde las observaciones estaban distribuidas de la siguiente forma:

	A=(1,1)		A=(0,0)	
	Núm. Zoom	Observación	Núm. Zoom	Observación
A1	6	LR	12	LR
A2	9	UP	15	UP
A3	7	LR	12	LR
A4	8	UP	12	UP
A5	8	UP	14	UP
A6	8	LR	14	LR
A7	9	UP	15	UP
A8	8	LR	14	LR
A9	7	PR	10	PR
A10	8	UP	14	UP
A11	6	LR	12	LR
A12	8	LR	14	LR

A13	10	PR	15	PR
A14	10	PR	15	PR
A15	7	LR	12	LR
A16	6	LR	12	LR
A17	7	PR	10	PR
A18	10	PR	15	PR
A19	8	UP	12	UP

Tabla 4.4.2 Resultados de los reportes realizados por los alumnos de forma individual en la actividad 1c.

A pesar de que en la discusión al final de la sesión, los alumnos fueron capaz de notar que la curva puede verse como segmentos de recta (a diferencia de la actividad 1). Otra situación que ocurrió es que en la actividad 1, al principio los alumnos tenían duda porque el punto realizado por el investigador A=(-1,1) y el realizado por ellos A=(1,1) tenían valores diversos, a lo que se les explico que es por el comportamiento de $f(x) = x^2$, en los puntos específicamente escogidos, sin embargo, en esta actividad ningún alumno observo (o al menos mencionó) que la pendiente en el punto (1,1), era la misma que en el (-1,-1).

Observamos que al igual que la actividad 1, esta es completamente estática, pues lo único que hacen los alumnos es notar que cuando observamos suficiente, la curva puede ser vista como una recta, y con esto es posible calcular la pendiente de la curva en un punto.

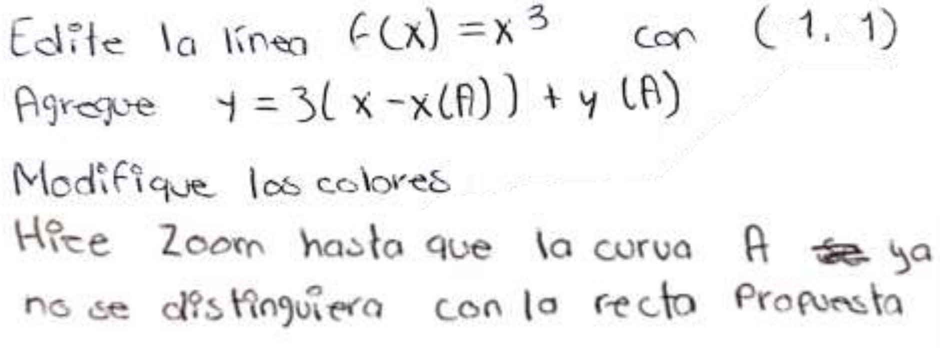
4.5 Quinta sesión

Esta sesión tuvo una duración de dos horas, en esta se abordaron la Actividad 2c y la Actividad 3c.

Actividad 2c. Proponer la tangente como la recta por A cuya pendiente es la pendiente de la curva en A que se determinó en la Actividad 1c.

El propósito de esta tarea es comprobar la propuesta de la recta tangente a la curva dada en el punto A, específicamente aquella que atraviesa A y comparte la misma pendiente que la curva (en este caso, $m_0 = 3$ y $m_0 = 0$), como la mejor aproximación lineal en las cercanías de A. Este procedimiento se realiza mediante la utilización de la función de Zoom de GeoGebra.

A continuación, mostraremos el reporte realizado por los alumnos A11 y A15:


Edite la línea $f(x)=x^3$ con (1, 1)
Agregue $y = 3(x - x(A)) + y(A)$
Modifique los colores
Hice Zoom hasta que la curva A ~~se~~ ya no se distinguiera con la recta Propuesta

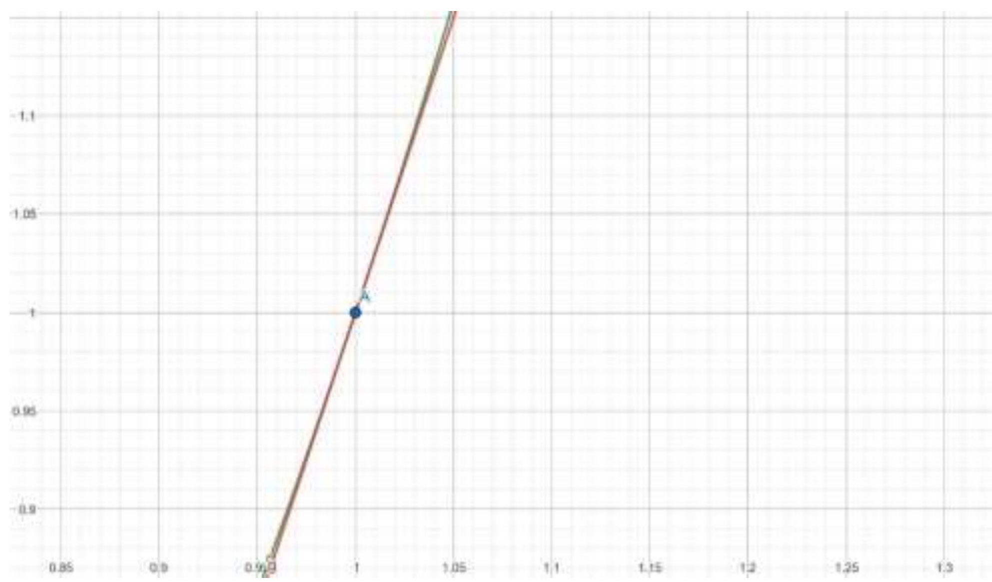


Figura 4.5.1 Captura obtenida por los alumnos A11 y A15, después de realizar cinco Zoom-in(A) para la Actividad 2c, en el punto A=(1,1).

En relación con la realización de la actividad en el punto A=(1,1), diecisiete de los diecinueve estudiantes participantes necesitaron entre cuatro y nueve acercamientos (Zoom-in(A)) para lograr que la propuesta de la recta tangente fuera prácticamente indistinguible de la curva, especialmente en las inmediaciones del punto A.

Es crucial señalar que todas las observaciones recopiladas se centran en estas curvas, específicamente en la semejanza que la recta tangente adquiere con respecto de la curva. Estas observaciones están distribuidas de la siguiente manera, donde algunos estudiantes hicieron más de una observación:

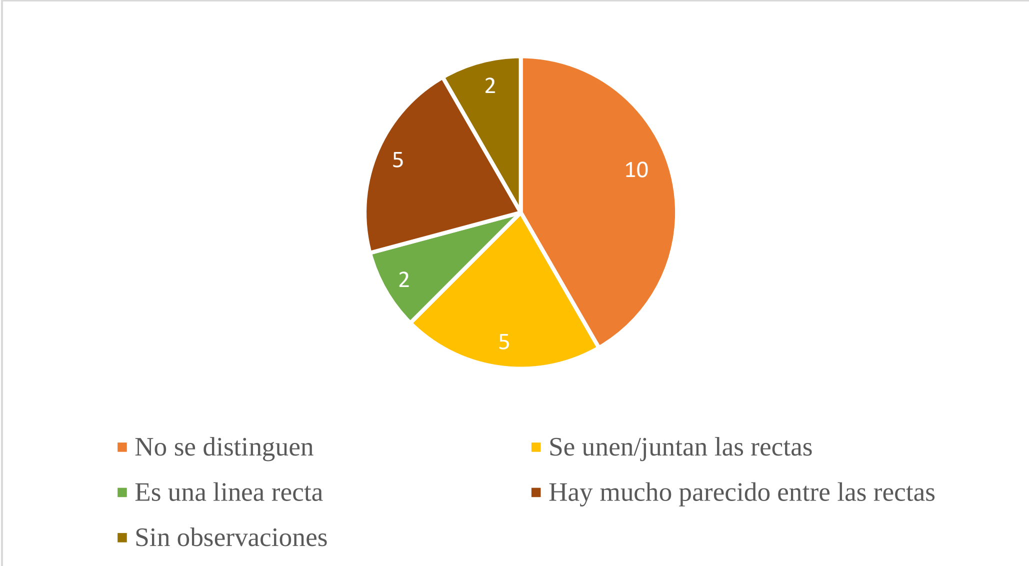


Figura 4.5.2 Gráfico correspondiente a la distribución de las observaciones de la Actividad 2c, con A=(1,1).

Además, los alumnos notaron que la recta propuesta como recta tangente, no satisfacía su definición porque en la parte inferior del lado izquierdo, observaban que esta cortaba a la curva en otro punto, entonces se les tuvo que explicar sobre cuál es la diferencia entre una tangente local (que es la que aparece en este caso) y una global (que es la que se había estudiado anteriormente con la cuadrática).

En el caso del punto A=(0,0), la mayoría de los alumnos hicieron un reporte como el siguiente, realizado por A4 y A5:

1. ~~Re~~ Se realizo la siguiente operación:
$g(x)=0(x-x(A))+y(A)$
$=0(x)+0.$

2. Se realizo zoom-in(A) varias veces hasta que fuera necesario para ver una sola recta.

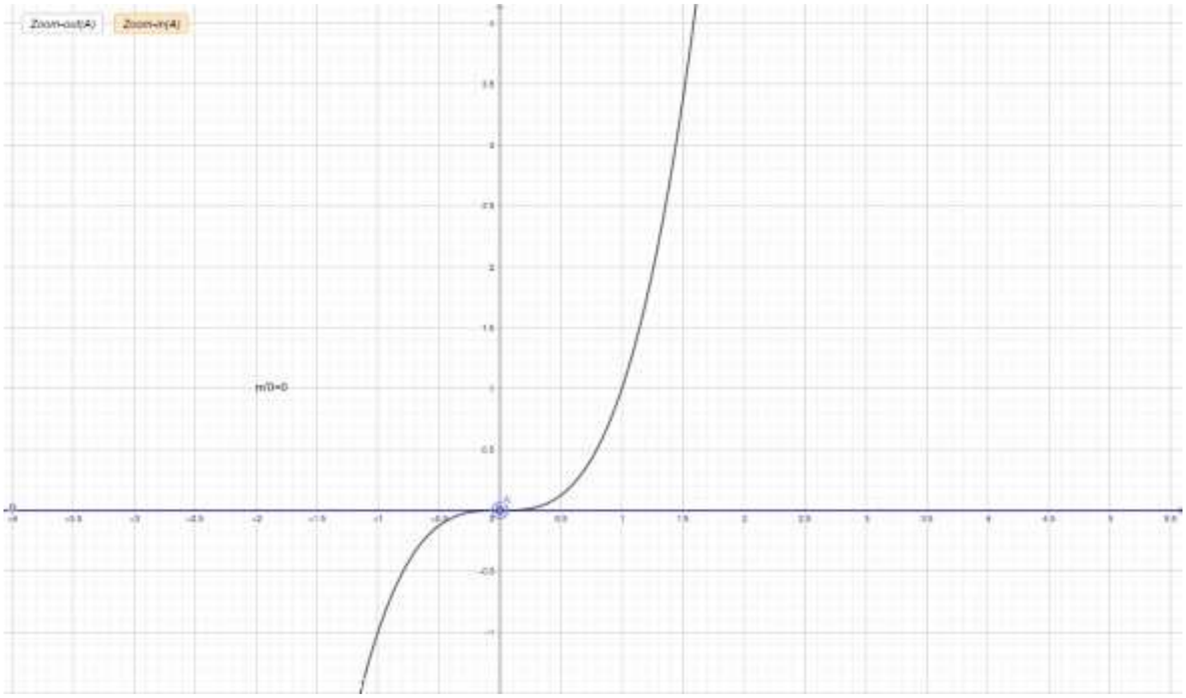


Figura 4.5.3. Captura obtenida por los alumnos A4 y A5 de la Actividad 2c, en el punto A=(0,0).

Los estudiantes requerían realizar entre 10 y 20 acercamientos (Zoom) para apreciar la similitud entre ambas curvas. Con respecto de las observaciones sobre la semejanza de las curvas, estas presentan algunas variaciones en comparación con las observaciones realizadas en el punto A=(1,1), además de una nueva observación. Estas diferencias se pueden describir de la siguiente manera:

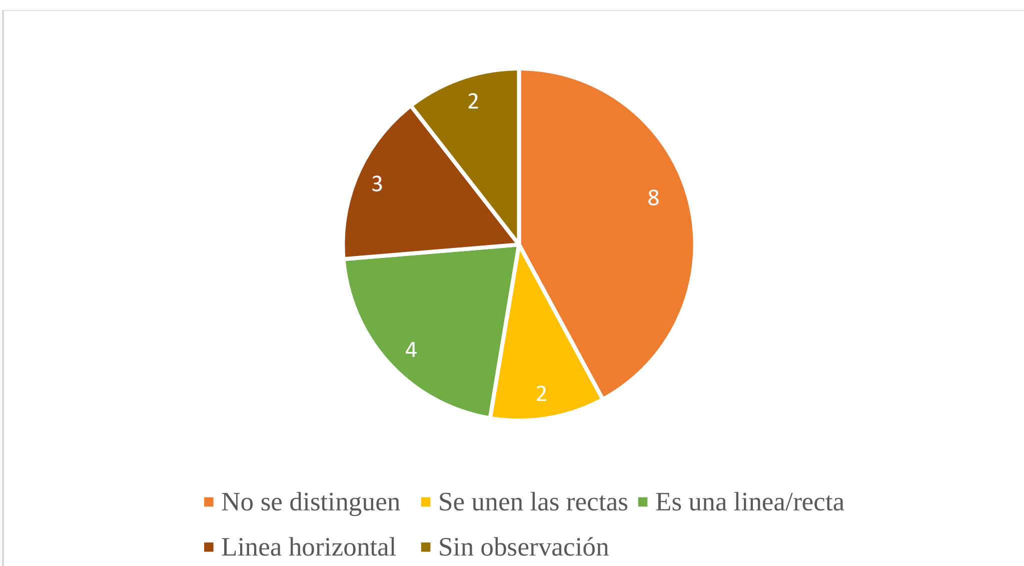


Figura 4.5.4 Gráfico correspondiente a la distribución de las observaciones de la Actividad 2c, con A=(0,0).

Podemos separar los contenidos de los reportes con las siguientes clasificaciones:

ND= No se distingue la curva de la recta
MP= Mucho parecido entre la curva y la recta
SU= Se unen la curva y la recta
UR= Es una solo recta
SO= Sin observaciones

Las cuales están repartidas de la siguiente forma:

	A=(1,1)		A=(0,0)	
	Núm. Zoom	Observación	Núm. Zoom	Observación
A1	8	ND	18	ND
A2	9	MP, ND	15	UR
A3	8	ND	18	ND
A4	10	UR	20	UR
A5	10	UR	20	UR
A6	5	SO	10	SO
A7	9	MP, ND	15	UR
A8	10	SU	15	SU
A9	7	ND	14	ND
A10	10	ND	16	ND
A11	8	ND	16	ND
A12	10	SU	15	SU
A13	8	MP, SU	15	ND
A14	8	MP, SU	15	ND
A15	8	ND	16	ND
A16	5	SO	10	SO
A17	7	ND	14	ND
A18	8	MP, SU	15	ND
A19	10	ND	16	ND

Tabla 4.5.1 Resultados de los reportes realizados por los alumnos de forma individual en la actividad 2c.

Cabe destacar que tres alumnos pudieron distinguir que la recta tangente en el punto A=(0,0) era una recta horizontal que cortaba a la curva, por lo que tuvieron conflicto porque que esta no entraba en su esquema de recta tangente (tanto global como local).

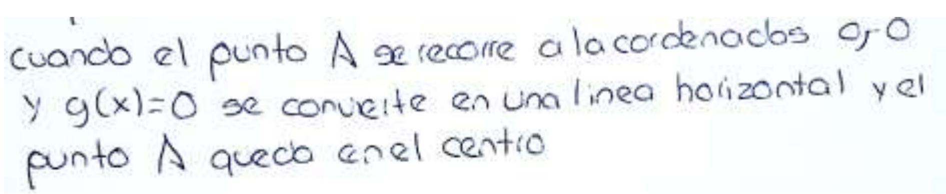


Figura 4.5.5. Observaciones finales de los alumnos A13 y A18, para la Actividad 2c, en el punto A=(0,0).

A partir de esta observación fue necesario regresar a recordar que podemos considerar a la recta tangente como la mejor aproximación lineal, y que en este caso la recta horizontal era la que mejor se aproxima, aunque cortara en un punto a la curva, lo cual solo pudieron observar cuando tenían una percepción global.

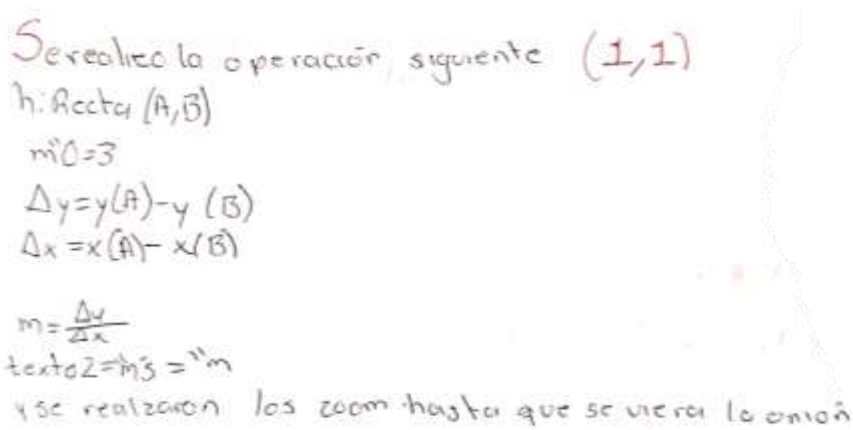
Esta actividad fue de suma importancia, a pesar de que es estática al ser principalmente descriptiva, ya que reveló no solo la capacidad de los estudiantes para visualizar el parecido entre la recta tangente y la curva, sino también la posibilidad de cuestionar y entender las limitaciones de la definición en diferentes contextos, destacando la importancia de entender el concepto durante el proceso de aprendizaje.

Actividad 3c. Aproximación a la recta tangente por secantes

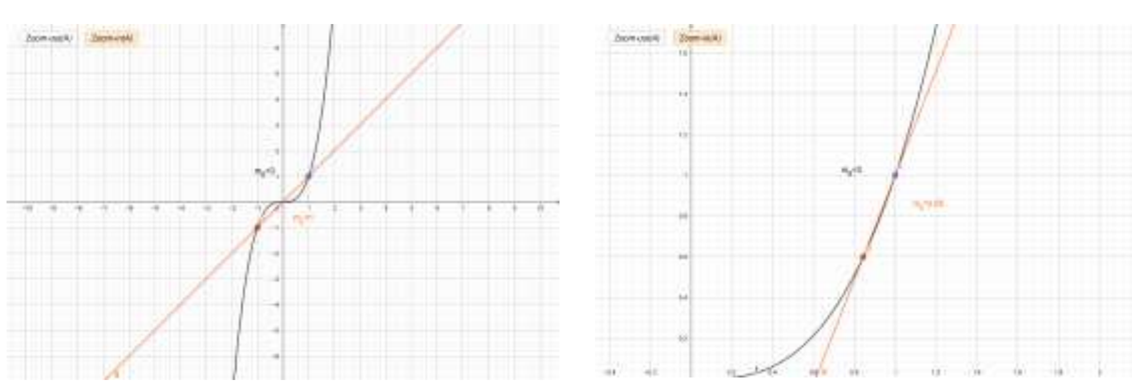
Con esta tarea se pretende validar, mediante sucesivos acercamientos (Zoom-in(A)), que las líneas rectas (secantes) que resultan de la conexión entre el punto A y otro punto auxiliar B, diferente de A, convergen en una sola línea al

acercar el punto B hacia el punto fijo A, generando así una confusión entre la secante, la curva y la recta tangente. Además de confirmar que la pendiente de la secante formada por B y A se acerca progresivamente a la pendiente de la tangente en A.

Mostraremos un ejemplo de un reporte realizado por los alumnos A6 y A16:


Se realizo la operación siguiente (1,1)
h: Recta (A,B)
m'()=3
$\Delta y = y(A) - y(B)$
$\Delta x = x(A) - x(B)$

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
texto2="m's = "m
y se realizaron los zoom hasta que se viera la unión



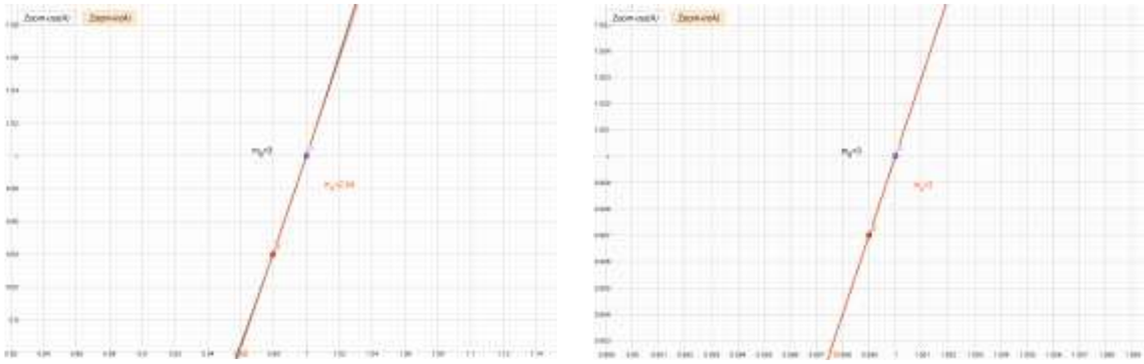


Figura 4.5.6. Capturas obtenidas por los alumnos A6 y A16, después de realizar diversas cantidades de Zoom-in(A) para la Actividad 3c, en el punto A=(1,1).

En cuanto a la ejecución de la actividad en el punto A=(1,1), los estudiantes participantes necesitaron entre cinco y diez acercamientos (Zoom-in(A)) para verificar que la recta tangente, la secante y la curva se volvían prácticamente indistinguibles cerca de A.

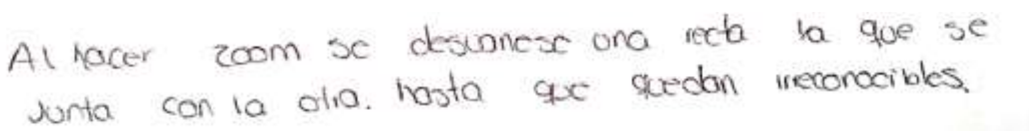


Figura 4.5.7. Observaciones finales de los alumnos A9 y A17, para la Actividad 3c, en el punto A=(1,1).

En relación con las observaciones realizadas, predominaron aquellas relacionadas con las rectas y los puntos. Estas observaciones se distribuyen de la siguiente manera:

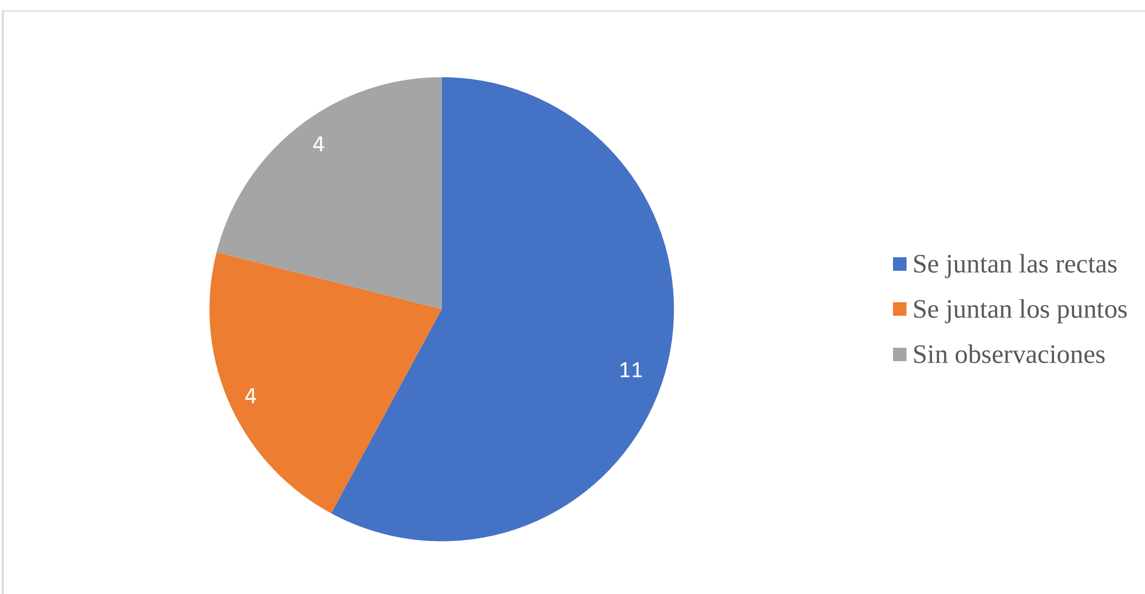


Figura 4.5.8 Gráfico correspondiente a la distribución de las observaciones de la Actividad 3c, con A=(1,1).

En el caso del punto A=(0,0), los estudiantes necesitaban realizar entre diez y quince acercamientos (Zoom) para percibir la semejanza entre ambas curvas. Se observó de manera recurrente que, en comparación con el punto anterior, realizaron más acercamientos en este caso específico debido a que percibían la curva como más notablemente curva en este punto. Aparte de esta observación, sus resultados fueron idénticos a los mencionados en el punto A=(1,1). La notación usada para separar las observaciones fue la siguiente:

SR= Se juntan las rectas
JP= Se juntan los puntos
SO=Sin observaciones

	A=(1,1)		A=(0,0)	
	Núm. Zoom	Observación	Núm. Zoom	Observación
A1	7	SO	12	SO
A2	9	SR	15	SR
A3	5	SO	10	SO
A4	8	JP	16	JP
A5	7	JP	15	JP
A6	10	SR	16	SR
A7	9	SR	15	SR
A8	10	SR	15	SR
A9	8	SR	15	SR
A10	7	JP	15	JP
A11	7	SO	12	SO
A12	9	SR	14	SR
A13	9	SR	14	SR
A14	10	SR	15	SR
A15	8	JP	16	JP
A16	10	SR	16	SR
A17	8	SR	15	SR
A18	10	SR	15	SR
A19	5	SO	10	SO

Tabla 4.5.2 Resultados de los reportes realizados por los alumnos de forma individual en la actividad 3c.

Durante la discusión al final de la sesión, los alumnos fueron capaces de mencionar que la pendiente de la recta secante (m_s) se aproxima al valor de la pendiente de la recta tangente (m_0) cuando el punto B se acerca a A. De esta manera, los alumnos son capaces de reconocer de que la recta secante se comporta cada vez más como una recta tangente a medida que B se acerca a A.

Recordando que esta actividad es dinámica, al hacer el movimiento con respecto del punto B, se mueven los objetos que dependen de esta. Para que los alumnos puedan ser capaces de prestarle atención a todos los objetos, se sugiere agregar una serie de preguntas para futuras investigaciones, para fomentar la comprensión en este dinamismo, como las siguientes:

- ¿Qué significa que la pendiente de la secante se aproxime a la pendiente de la tangente?
- ¿Qué ocurre con el otro punto de intersección para cada valor de la pendiente? ¿A qué se debe esto?

4.6 Sexta sesión

Esta sesión tuvo una duración de una hora, por lo que solo se abordó la actividad 4c.

Actividad 4c.

El propósito de esta actividad es observar cómo, al realizar una modificación (a través de deslizadores) en la pendiente m del valor m_0 de la recta tangente a la curva en un punto A, dicha recta se convierte en una secante de la curva. La secante cruza la curva en al menos dos puntos, revelando así la multiplicidad de la raíz $x = x(A)$ en el punto de tangencia, con una multiplicidad mínima de 2.

Mostraremos ahora el reporte realizado por los alumnos A4 yA5:

(1,1)
Se genero la pendiente para el punto A y de ahi se genero la formula para la recta A

Las perpendiculares están alejadas

Las perpendiculares están más cercanas y las curvas ya se parecen

Las curvas estān muy cercas, que casi se enciman, a las perpendiculares les falta muy poco para estar juntas

Las curvas ya están encima de una y las perpendiculares igual ya estan juntas completamente

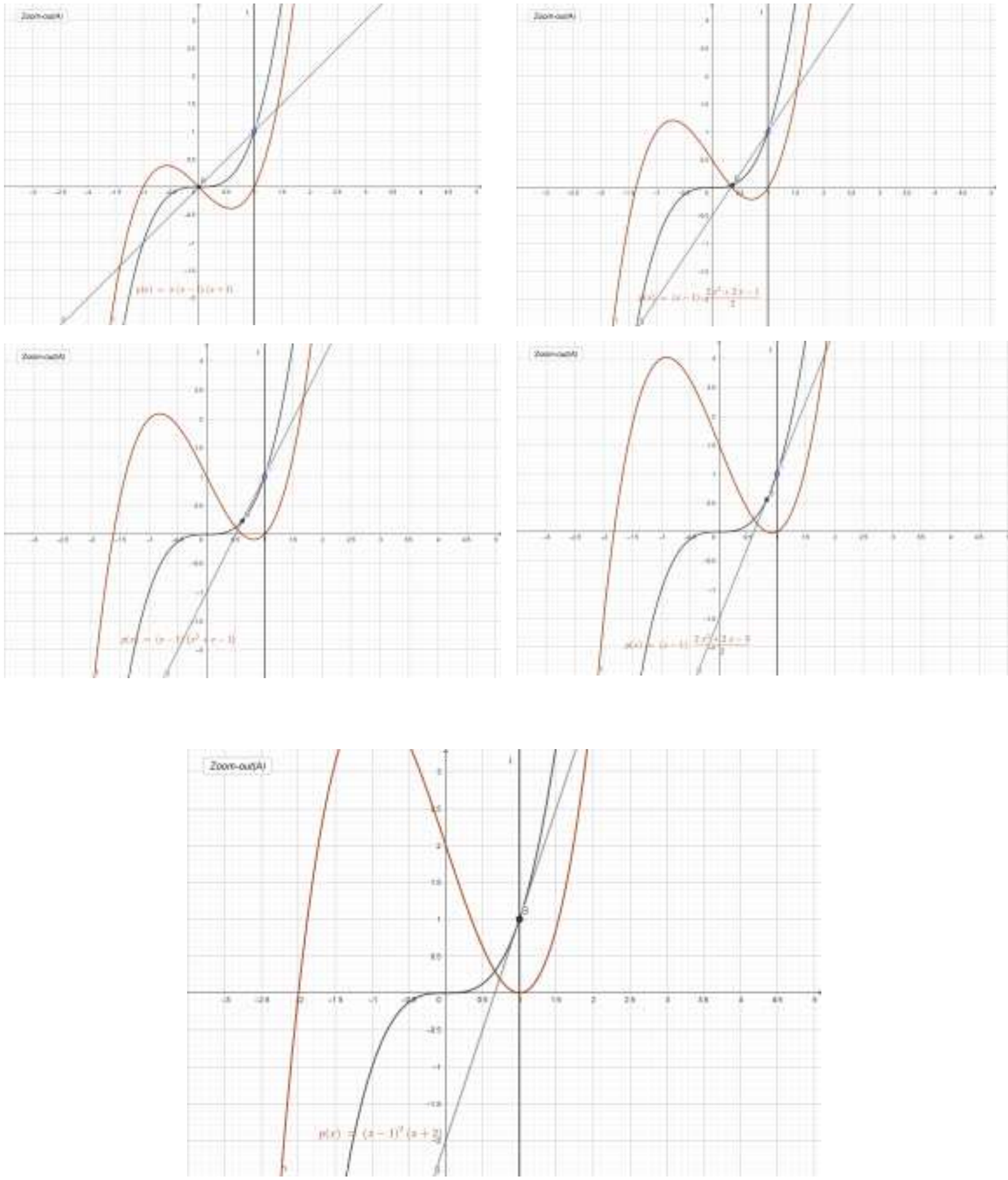


Figura 4.6.1. Capturas obtenidas por los alumnos A4 y A5, después de realizar diversas cantidades de Zoom-in(A) para la Actividad4c, en el punto A=(1,1).

Al igual que en la actividad 4, los estudiantes no incluyeron en sus reportes la frecuencia con la que utilizaron Zoom, no obstante, se centraron más en describir las observaciones que realizaron, las cuales se detallan a continuación:

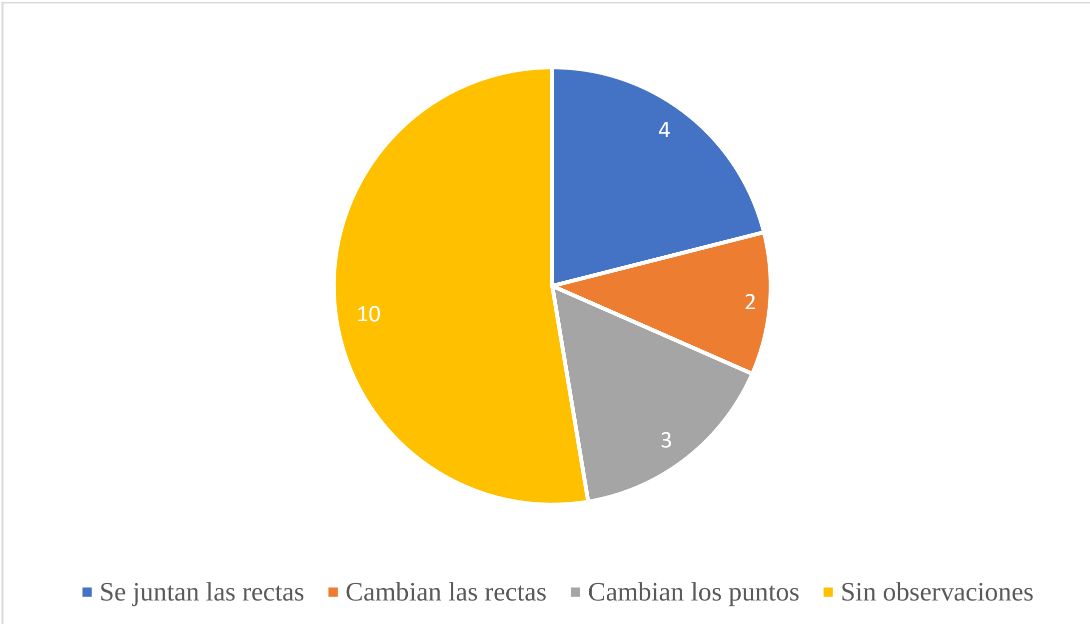


Figura 4.6.2 Gráfico correspondiente a la distribución de las observaciones de la Actividad 4, con A=(1,1).

Las observaciones fueron exactamente las mismas para el punto (0,0). Más de la mitad de los alumnos no lograron hacer observaciones, solamente describieron los pasos que realizaron. Al igual que en la actividad 4, no fueron capaces de notar que ocurre con el comando de factorización cuando el valor del deslizador tiende al valor de la pendiente de la tangente, fue necesario hacer una discusión acerca de que el primer factor tiene a ser igual que el segundo factor, es decir, cuando el valor de m es la pendiente de la recta tangente, obtenemos una raíz doble.

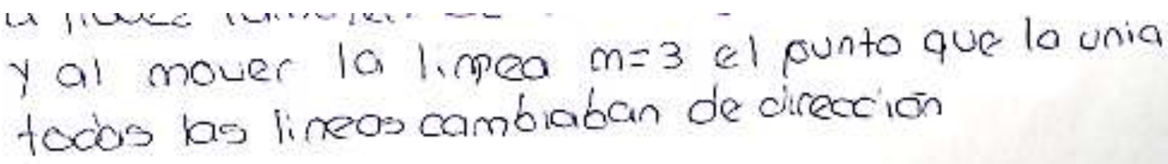


Figura 4.6.3. Observaciones finales de los alumnos A8 y A12, para la Actividad 4c, en el punto A=(1,1).

Otra de las diferencias que existen con respecto de la actividad 4, es que en la primera se costaba de una única raíz, y en esta actividad, de las tres raíces, solo dos coincidían en el punto A=(1,1), mientras que en A=(0,0) es única la raíz; esto ocurre debido a que estamos interesados en las raíces dobles, en particular para que exista la recta tangente esta debe tener al menos una raíz doble en el punto de tangencia, para el caso de la cuadrática, al solo existir dos raíces, el que coincidan sígnica que es una raíz única, mientras que en la cúbica, si consta de una raíz doble, salvo en el caso del origen, donde se vuelve triple la raíz.

Las notaciones utilizadas para la clasificación de los datos son las siguientes:

SRP = Se juntan las rectas paralelas
CP= Cambian los puntos

CR= Cambian las rectas
SO= Sin observaciones

Y la observación de las observaciones fue la siguiente:

	Observaciones
A1	SO
A2	SO
A3	SO
A4	SRP
A5	SRP
A6	SO
A7	SO
A8	CR
A9	SRP
A10	SO
A11	SO
A12	CR
A13	CP
A14	CP
A15	SO
A16	SO
A17	SRP
A18	CP
A19	SO

Tabla 4.6.1 Resultados de los reportes realizados por los alumnos de forma individual en la actividad 4c.

Al ser esta una actividad completamente dinámica donde los alumnos deben de analizar el comportamiento de los objetos generados cuando cambia el valor del deslizador (que corresponde a la pendiente de la recta que pasa por el punto A). También cabe destacar que en el punto (1,1), con la pendiente correspondiente a la recta tangente, obtenemos que $x(A)$ es una raíz doble, mientras que en el punto (0,0), más que una raíz triple, es una raíz única. Para fomentar una mayor comprensión tanto del dinamismo, como lo mencionado anteriormente, se podrían realizarse preguntas como las siguientes:

- ¿Qué ocurre con $P(x)$ cuando m es igual al valor de la pendiente de la tangente?
- ¿Qué ocurre con $P(x)$ cuando m es diferente al valor de la pendiente de la tangente?
- ¿Qué sucede con el letrero de $P(x)$ cuando m es igual al valor de la pendiente de la tangente para cada punto?
- ¿Qué diferencia existe entre el letrero de $P(x)$ en el punto (1,1) y el punto (0,0)?

Al igual que la actividad 4, los alumnos no fueron capaces de observar la multiplicidad de una raíz (doble para el caso de A=(1,1) y triple para A=(0,0)) entre la diferencia de la curva y de la recta, cuando la pendiente de recta corresponde a la tangente, lo cual era el objetivo de la actividad. Es probable que, debido a la cantidad de elementos en la vista gráfica y algebraica al final de la construcción, los alumnos se abrumaran al momento de hacer las observaciones, cuando se hicieron, y no se concentraran en el objetivo de la actividad, haciendo que esta actividad tampoco se concluyera satisfactoriamente.

4.7 Séptima sesión

Esta sesión tuvo una duración de dos horas, en esta se mostró el cálculo algebraico para la obtención de la recta tangente para $f(x) = x^2$ y $f(x) = x^3$. Para verificar que nuestros resultados obtenidos en las actividades anteriores fueran correctos, surge la Actividad 5 y la Actividad 5c.

Actividad 5. Determinación Teórica de la pendiente de la Tangente (raíz doble)

Con esta actividad se proporciona la expresión funcional de la recta tangente a la curva $f(x) = x^2$ en relación con un punto arbitrario A, utilizando nuestra fórmula específica. Posteriormente, evalúa cómo se comporta esta tangente al desplazar el punto A a diversas posiciones, verificando su capacidad como la mejor aproximación lineal a la curva en cada posición.

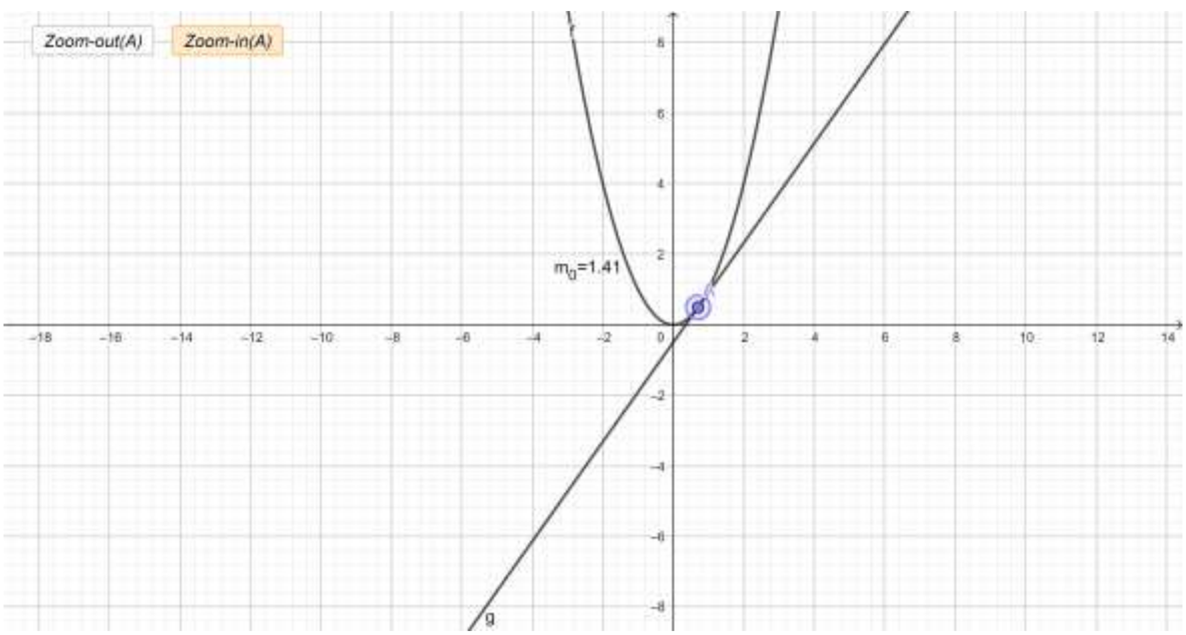


Figura 4.7.1. Captura obtenida por los alumnos A13 y A14, después de realizar la Actividad 5.

Actividad 5c. Determinación Teórica de la pendiente de la Tangente (raíz doble)

El propósito de la actividad 5c, es el mismo que la actividad 5, con la diferencia que se considera la curva $f(x) = x^3$. Las observaciones fueron variadas, con respecto de las diversas acciones que realizaron.

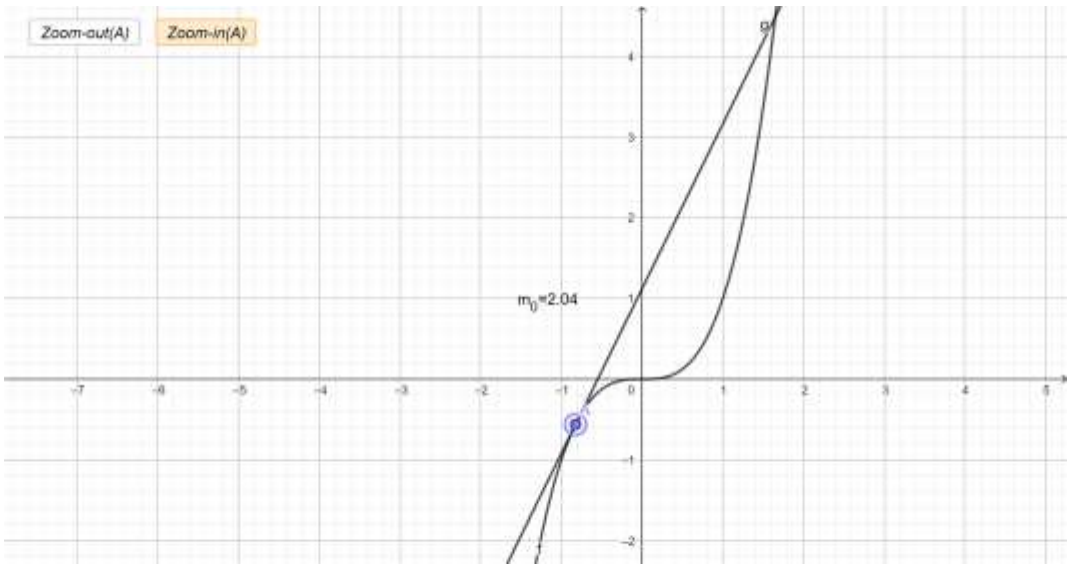


Figura 4.7.2. Captura obtenida por los alumnos A13 y A14, después de realizar la Actividad 5c.

Un ejemplo de cómo los alumnos realizaron la actividad es el siguiente escrito por A11 y A19:

COLOCAMOS LAS SIGUIENTES COORDENADAS:
$m = 2x(A)$
$= 0$
$g(x) = m_0(x - x(A))t(A)$

Y una vez que nos salio la linea la fuimos moviendo en diferentes puntos verificando la ecuacion que utilizamos

La mayoría de los alumnos hicieron un único reporte por la actividad 5 y la actividad 5c, por lo que sus resultados fueron:

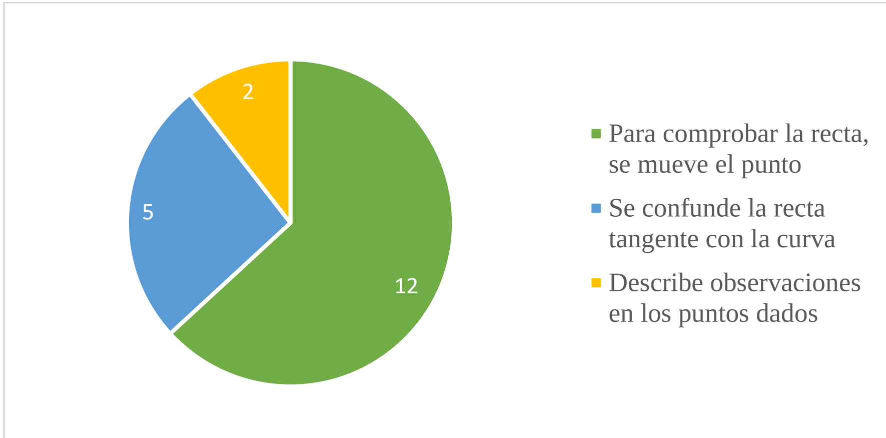


Figura 4.7.3 Gráfico correspondiente a la distribución de las observaciones de la Actividad 5.

- Se movieron a los puntos (-[illegible]) (-2, 4) y (-2.46, 6) y (1.74, 3.2) y nos dimos cuenta que la tangente se confunde con la curva.

Figura 4.7.4 Observaciones finales de los alumnos A4 y A5, para la Actividad 5.

Al finalizar la sesión, se les mencionó a los alumnos que esta actividad es la determinación de la derivada de $f(x) = x^2$ y $f(x) = x^3$, sin embargo, este tópico lo abordaran completamente en el curso de Matemáticas correspondiente en quinto semestre, que pertenece a Cálculo Diferencial. Esta aclaración busca contextualizar que los conceptos explorados en la sesión están conectados con temas más avanzados que se abordarán en etapas posteriores del programa académico. En cuanto a las observaciones, consideraremos la siguiente notación para clasificarlas:

MP = Para comprobar mueven el punto
CT= Usa el zoom para ver que la tangente coincide con la curva
DP= Describe el comportamiento en puntos en especifico

	Observaciones
A1	MP
A2	MP
A3	CT
A4	CT
A5	CT
A6	MP
A7	CT
A8	DP

A9	MP
A10	CT
A11	MP
A12	DP
A13	MP
A14	MP
A15	MP
A16	MP
A17	MP
A18	MP
A19	MP

Tabla 4.7.1 Resultados de los reportes realizados por los alumnos individualmente en las actividades 5 y 5c.

A pesar de que se esperaba que esta actividad fuera completamente dinámica, los alumnos en general tuvieron dos posturas, la primera que era la esperada, que movían el punto y observaban que la recta construida cumplía para cualquier punto en la curva. La otra postura, originalmente tiene la misma idea que la planteada, pero los alumnos lo que hicieron es hacer uso del Zoom-in(A) para verificar que muy cerca de A, la recta tangente es indistinguible de la curva, es decir mezclaron la parte dinámica con uno estático.

4.8 Octava sesión

Esta última sesión tuvo una duración de dos horas, se completaron la Actividad 6 y el Post-Test, lo que permitió a los estudiantes poner en práctica los conocimientos adquiridos y evaluar su comprensión del tema. Se evidenció un nivel satisfactorio de dominio de los conceptos tratados, así como un compromiso continuo con el aprendizaje por parte de los participantes. La sesión final sirvió como un cierre exitoso del programa, consolidando los logros obtenidos y subrayando la importancia del esfuerzo continuo en el proceso de aprendizaje

Actividad 6. Cálculo de la pendiente de la recta tangente en la suma de funciones.

En esta actividad se les solicita a los alumnos que generen la recta tangente a la curva $f(x) = x^3 + x^2$, es decir, la suma de las funciones que han trabajado de las actividades 1 a 5 y 1c a 5c, con cualquiera de las técnicas realizadas (Aproximación lineal, límite de secantes, determinación algebraica) en el punto A=(2,1).

El 100% de los estudiantes realizaron la actividad utilizando el método de aproximación lineal (Actividad 1 y 1c). Algunos alumnos tuvieron dificultades al no recordar las ecuaciones para calcular la pendiente de la curva en el punto A, sin embargo, se les proporcionaron cuando fue requerido. Un ejemplo de esto fue el reporte realizado por los alumnos A11 y A19:

$f(x)=x^3+x^2$ el punto A (1,2) se saca un punto B y se saca su pendiente de los puntos A y B

$\Delta x = x(A) - x(B)$
$= -0.05$

$\Delta y = y(A) - y(B)$
$= -0.28$

$m_0 = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
$= 5.22$

$g: y = m_0(x-1)+2$

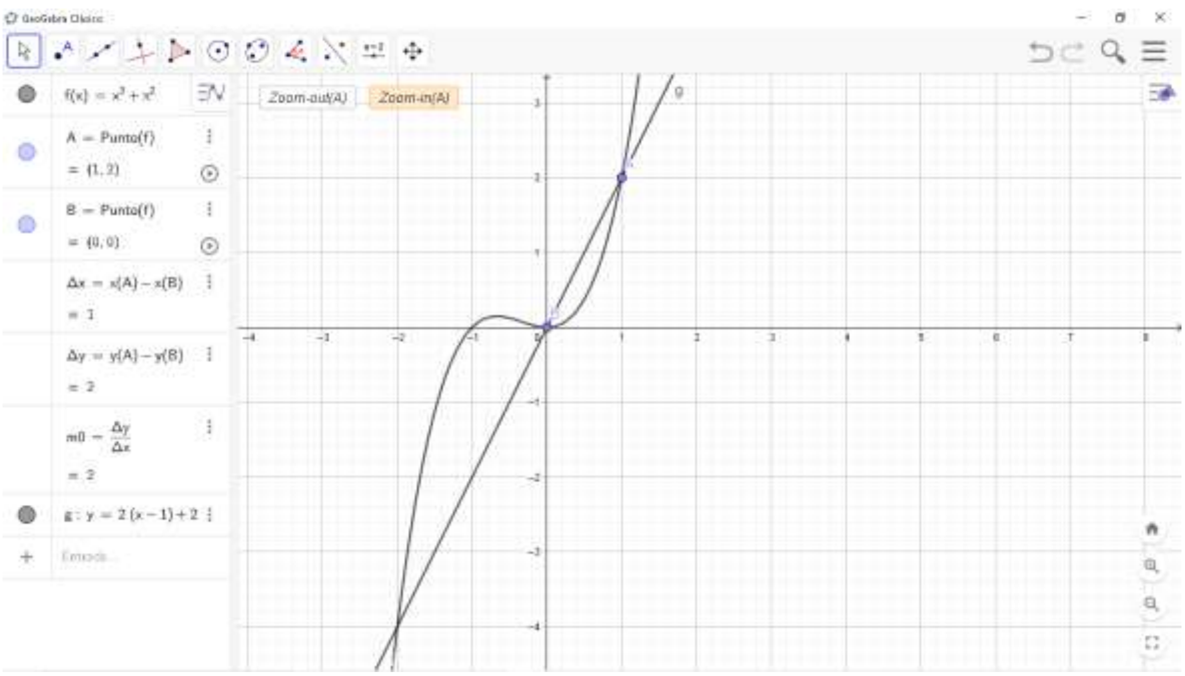


Figura 4.8.1. Captura obtenida por los alumnos A13 y A14, después de realizar la Actividad 6.

Cuando se les preguntó si su construcción funcionaba para todo punto, ellos mencionaron que sí, pero al momento de discutirlo, se dieron cuenta de que también debían de mover su punto auxiliar B.

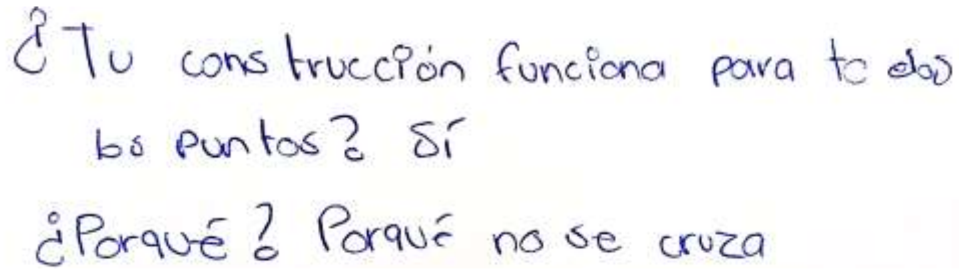


Figura 4.8.2 Observaciones finales de los alumnos A9 y A15, para la Actividad 6.

En la retroalimentación de la actividad, se les propuso a los alumnos que, para obtener la pendiente, sumaran las pendientes obtenidas en las actividades 5 y 5c, después los alumnos verificaron que la recta generada si correspondía a la recta tangente y funcionaba para cualquier punto. Se finalizó la discusión, retomando la idea de que la derivada es la pendiente de la recta tangente y que la derivada de la suma de dos funciones es la derivada de cada una de las funciones sumadas.

Algunos aspectos que se pueden considerar, es que, aunque el procedimiento que utilizaron los alumnos es válido y fue abordado en actividades anteriores, la oportunidad radica en fomentar la exploración de otras técnicas, como el límite de secantes o la determinación algebraica. Esto promovería una comprensión más integral de las diferentes formas de calcular la pendiente de la tangente. Sin embargo, es probable que escogieran este enfoque debido a que es el más sencillo, ya que es una actividad completamente estática en la que basta con acercarse lo suficiente a un punto.

En futuras investigaciones, se podría considerar introducir las propiedades de la derivada comenzando por la función $f(x)$ desplazada verticalmente, es decir, $f(x)+c$, entonces la derivada de esta expresión será igual la derivada de la función original. Otro ejemplo podría ser al multiplicar la función por una constante c, obteniendo que la derivada de esa función será igual a la constante multiplicada por la derivada de la función original, para después abordar la derivada de la suma de funciones.

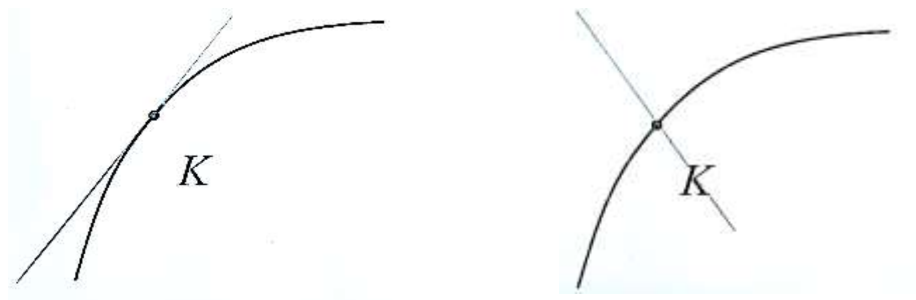
Post-Test

Se realizó inmediatamente después de concluir la actividad 6, este cuestionario consiste en el mismo realizado en el Pre-Test, con la única modificación que las marcas que tenían las curvas de la primera sección, fuero remplazadas por puntos, ya que, en los resultados del Pre-Test, algunos alumnos dibujaron la recta normal, la cual coincidía con la línea que era usada como marca, de esta forma, los alumnos no tendrían alguna dirección para guiarse.

La aplicación del cuestionario duro de nuevo de 30 minutos. Los resultados obtenidos mostraron una mayor unificación de los conocimientos, a diferencia del Pre-Test, además de una mayor cantidad de respuestas correctas.

Dentro de las curvas en las que si era posible trazar la recta tangente:

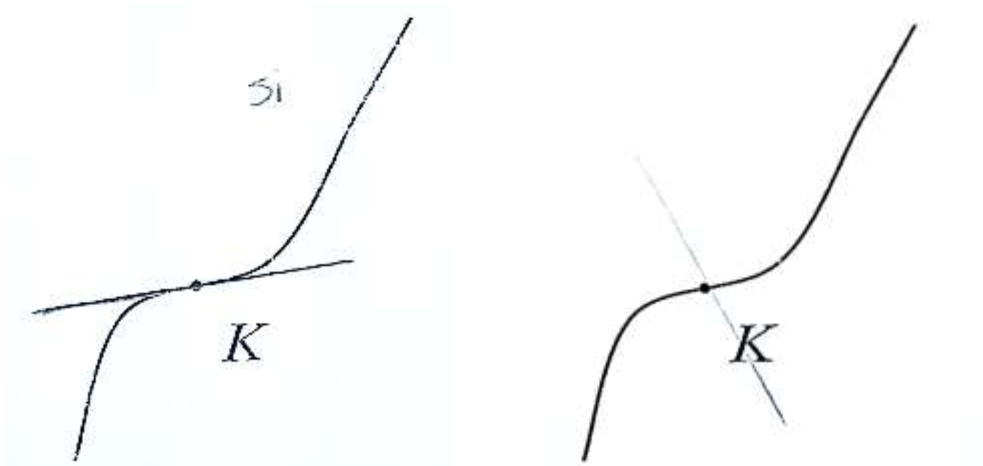
- En primera curva, catorce alumnos pudieron calcular correctamente la recta tangente, mientras que el resto trazó rectas normales.



Recta tangente Recta normal

Figura 4.8.3. Rectas trazadas por los alumnos en la curva 1, en el Post-Test.

- En la tercera curva, los quince alumnos pudieron trazar la recta tangente, tres trazaron una recta normal y uno trazó otra recta.

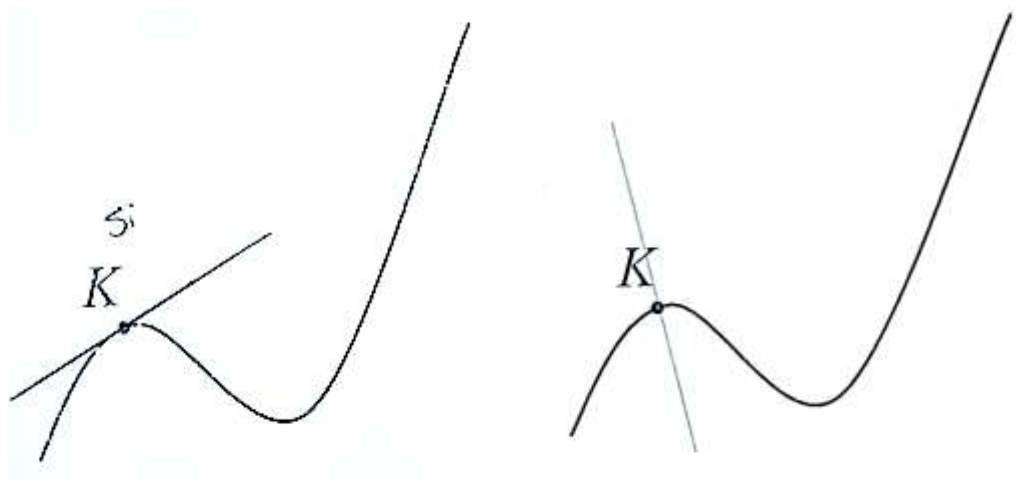


Recta tangente Recta normal

Figura 4.8.4. Rectas trazadas por los alumnos en la curva 3, en el Post-Test.

La importancia de este ejemplo radica en que la curva presentada tiene un gran parecido a la función $f(x) = x^3$, en el punto A=(0,0). Al tener una gran proporción de respuestas correctas, es una muestra de la importancia de la práctica constante y la retroalimentación para fortalecer el entendimiento y la retención de la información

- En la cuarta curva, doce alumnos fueron capaces de trazar la recta tangente y el resto trazaron la recta parecida a la normal como se muestra en la figura siguiente.

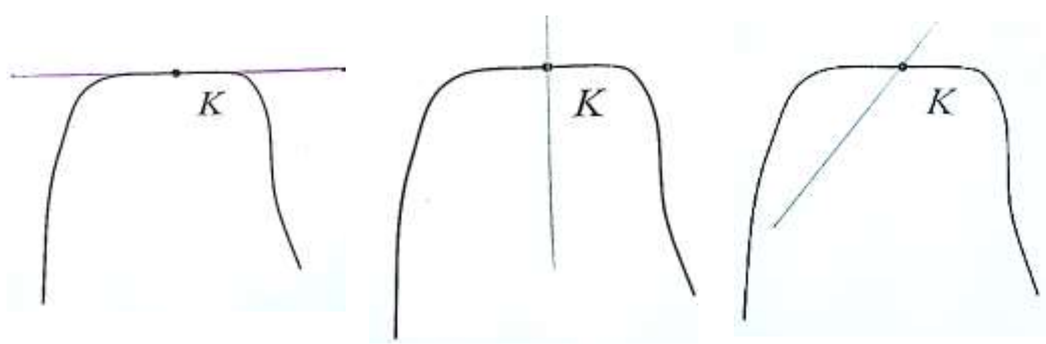


Recta tangente Recta normal

Figura 4.8.5 Rectas trazadas por los alumnos en la curva 4, en el Post-Test.

- En la quinta curva que corresponde a una circunferencia, todos los alumnos la trazaron correctamente, similarmente en la curva nueve que corresponde a una elipse.

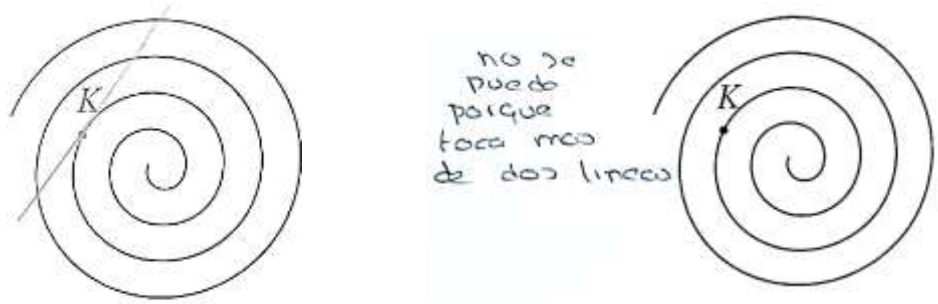
- En la curva sexta, trece alumnos la recta tangente, puesto tres de ellos trazaron la recta normal, uno trazó una recta secante y dos no contestaron



Recta tangente Recta normal Recta secante

Figura 4.8.6 Rectas trazadas por los alumnos en la curva 6, en el Post-Test.

- En la séptima curva, solo tres alumnos fueron capaz de dibujar la recta tangente, mientras que once mencionaron que esta tocaría a varios puntos.



Recta tangente Argumentación

Figura 4.8.7 Rectas trazadas por los alumnos en la curva 7, en el Post-Test.

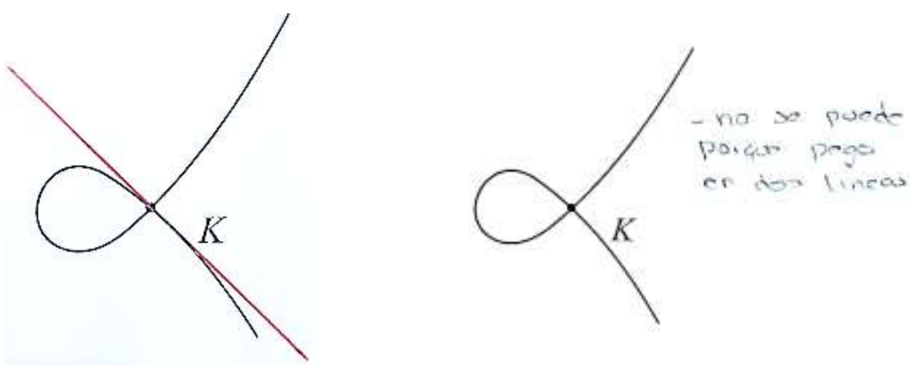
Con relación a las curvas que no era posible trazar la recta tangente, los resultados fueron:

- Con respecto de la segunda curva, tres alumnos trazaron una recta parecida a una bisectriz, siete alumnos consideraron que no era posible por la dirección, seis trazaron la recta que solo toca a un punto en el pico y tres alumnos no contestaron.

Bisectriz Recta perpendicular Argumentación

Figura 4.8.8. Respuestas dadas por los alumnos en la curva 2, en el Post-Test

- En la octava curva, doce alumnos trazaron la siguiente recta, seis no contestaron y uno contesto lo siguiente:



Recta tangente Argumentación

Figura 4.8.9. Rectas trazadas por los alumnos en la curva 8, en el Post-Test.

En el segundo apartado, acerca de la concepción de la recta tangente por los estudiantes, todos los alumnos mencionaron concepciones parecidas a la siguiente:

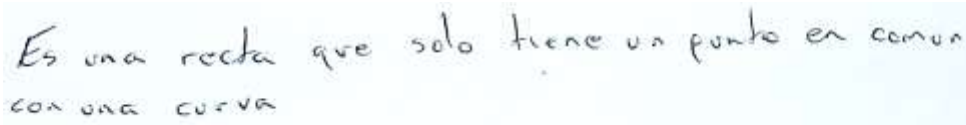
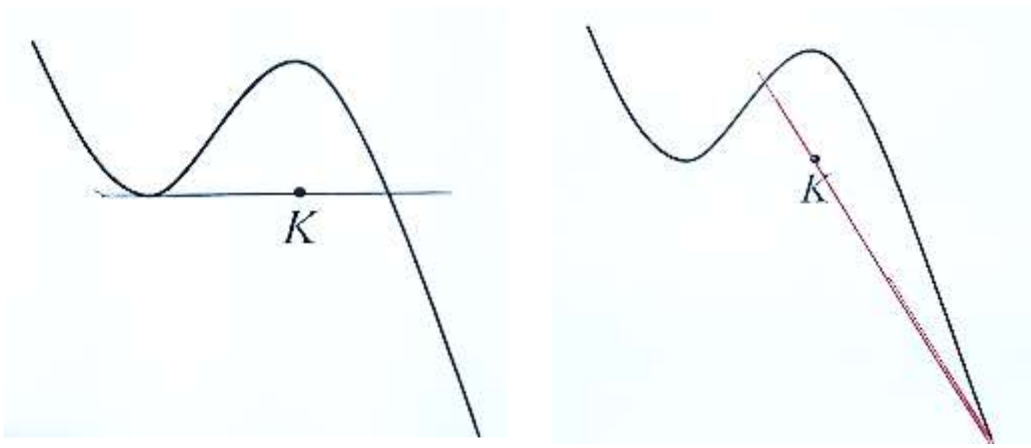


Figura 4.8.10. Ejemplo de una respuesta adecuada a la concepción de la recta tangente, en el Post-Test

En la sección de realizar el dibujo, tres alumnos no hicieron el dibujo, mientras que 16 alumnos dibujaron la recta tangente a una circunferencia.

Y en la última sección, diez alumnos trazaron la recta tangente, mientras que los otros ocho trazaron una recta incorrecta.



Recta tangente — Recta incorrecta

Figura 4.8.11. Ejemplos de respuestas al tercer apartado, en el Post-Test

Observamos que, a diferencia del Pre-Test, ya es considerablemente menor la cantidad de alumnos que trazan la recta normal en lugar de la recta tangente, incluyendo casos en los que gráfique rectas que no coinciden con la definición de recta tangente que ellos mencionan, como en la tercera y la sexta curva, pero que si logran trazarla de forma correcta.

A continuación, presentaremos los resultados generales de las respuestas obtenidas por los estudiantes. En la primera sección, se muestra la relación de las gráficas donde las abreviaturas representan:

RT=Recta tangente	B=Bisectriz
RN=Recta normal	NPA= No es posible (argumentación)
RS=Recta secante	NC=No contesto

Para la primera parte de la segunda sección, en donde se les pedía la definición de la recta tangente, las abreviaturas usadas fue las siguientes.

RU*= La recta que toca en un único punto a la curva

Para la segunda parte de la segunda sección, en el que se les solicitaba un ejemplo gráfico de la recta tangente, la abreviatura usada corresponde a los siguientes ejemplos:

CI=Circunferencia ND= No dibujo

Para la última sección, en la que se les daba un punto y una curva, se les pedía trazar la recta tangente a la curva que pasara por ese punto, las abreviaciones son:

RT=Recta tangente RS=Recta secante

A los alumnos que dieron la respuesta correcta, se les indicó su respuesta con el color distintivo, para notar la relación de comprensión, al igual que en el Pre-Test:

	Curvas									Concepto		R.T.
	C1.	C2.	C3.	C4.	C5.	C6.	C7.	C8.	C9.	Def.	Dib.	Inv.
A1.	RN	RS	RT	RS	RT	NC	NC	NC	RT	RU*	CI	RS
A2.	RT	NPA	RT	RT	RT	RT	NPA	RS	RT	RU*	CI	RT
A3.	RT	NPA	RT	RT	RT	RT	NPA	RS	RT	RU*	CI	RT
A4.	RT	NPA	RT	RT	RT	RT	NPA	RS	RT	RU*	CI	RT
A5.	RT	NPA	RT	RT	RT	RT	NPA	RS	RT	RU*	CI	RT
A6.	RN	RS	RT	RT	RT	RT	NPA	RS	RT	RU*	CI	RS
A7.	RT	NPA	RT	RS	RT	RT	NPA	RS	RT	RU*	CI	RT
A8.	RT	NPA	RT	RS	RT	RT	NPA	RS	RT	RU*	CI	RT
A9.	RT	NC	RT	RT	RT	RT	NC	NC	RT	RU*	CI	RS
A10.	RT	NPA	RT	RT	RT	RT	NPA	RS	RT	RU*	CI	RT
A11.	RN	B	RN	RS	RT	RN	NPA	RS	RT	RU*	CI	RS
A12.	RN	B	RN	RS	RT	RN	NPA	RS	RT	RU*	CI	RS
A13.	RT	RS	RT	RT	RT	RT	RT	NC	RT	RU*	CI	RT
A14.	RT	RS	RT	RT	RT	RT	RT	NC	RT	RU*	CI	RT
A15.	RT	NC	RS	RS	RT	RS	NC	RS	RT	RU*	CI	RS
A16.	RT	RS	RT	RT	RT	RT	NC	RS	RT	RU*	ND	RS
A17.	RT	NC	RT	RT	RT	NC	NC	NC	RT	RU*	ND	RS
A18.	RT	RS	RT	RT	RT	RT	RT	NC	RT	RU*	CI	RT
A19.	RN	B	RN	RS	RT	RN	NPA	NPA	RT	RU*	ND	RS

Tabla 4.8.1 Resultados de los alumnos del Post-Test de forma individual.

Observamos que, en la segunda sección, específicamente donde se les pregunta a los alumnos sobre el concepto que tienen sobre la recta tangente, todo el grupo respondió que era la recta que tocaba en un único punto a la curva, sin embargo, esta concepción es parcial, ya que incluso la recta normal entraría en esta definición, y más aún, podemos observar que una pequeña cantidad de alumnos trazaron la recta normal a varias curvas.

Algunas de las propiedades de la recta tangente vistas las actividades de la secuencia pedagógica que podían haber complementado su concepción son:

- La recta tangente es la recta que mejor aproxima a la curva, discutido en la actividad 1, 1c,2 y 2c.

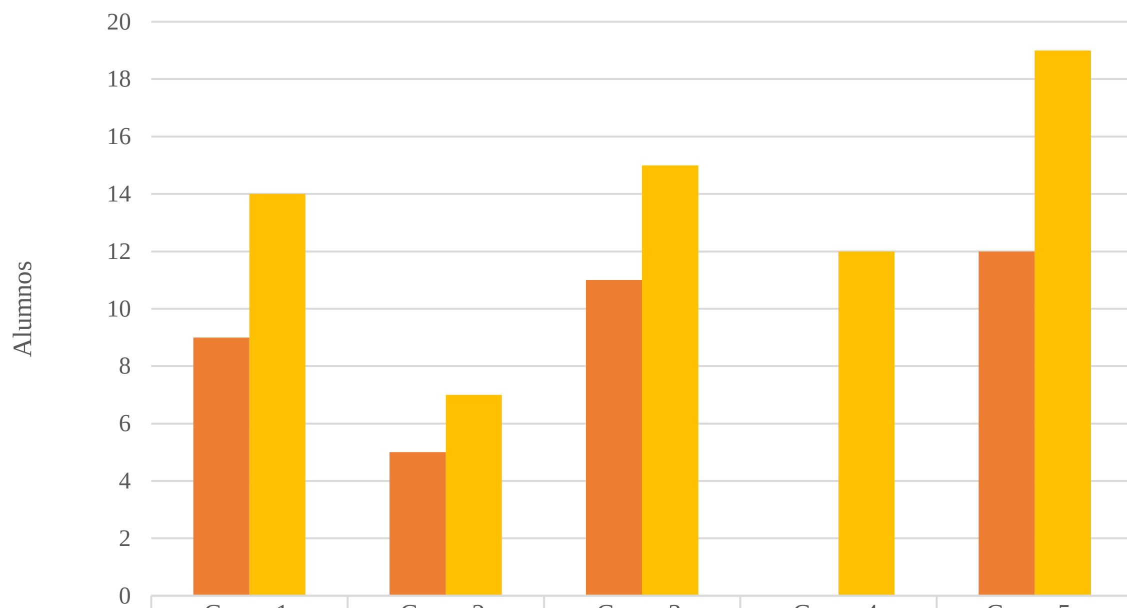
- La recta tangente es la recta que no cruza a la curva, como lo mencionan en la actividad 6,Figura 4.8.2 Observaciones finales de los alumnos A9 y A15, para la Actividad 6.Figura 4.8.2.
- Siguiendo la idea anterior, de manera formal es que la diferencia entre la curva y la recta tangente siempre tendrá el mismo signo, lo cual fue abordado en la actividad 4.
- La recta tangente puede ser vista como el límite de las rectas secantes, mostrado en la actividad 3

Aunque ninguno de los alumnos mencionó estas propiedades explícitamente en el concepto, en la parte de graficar las rectas tangentes, una mayor cantidad de alumnos pudo trazar correctamente la tangente a las curvas, excepto en las curvas 7 y 8.

4.9 Comparación de datos del Pre-Test y Post-Test

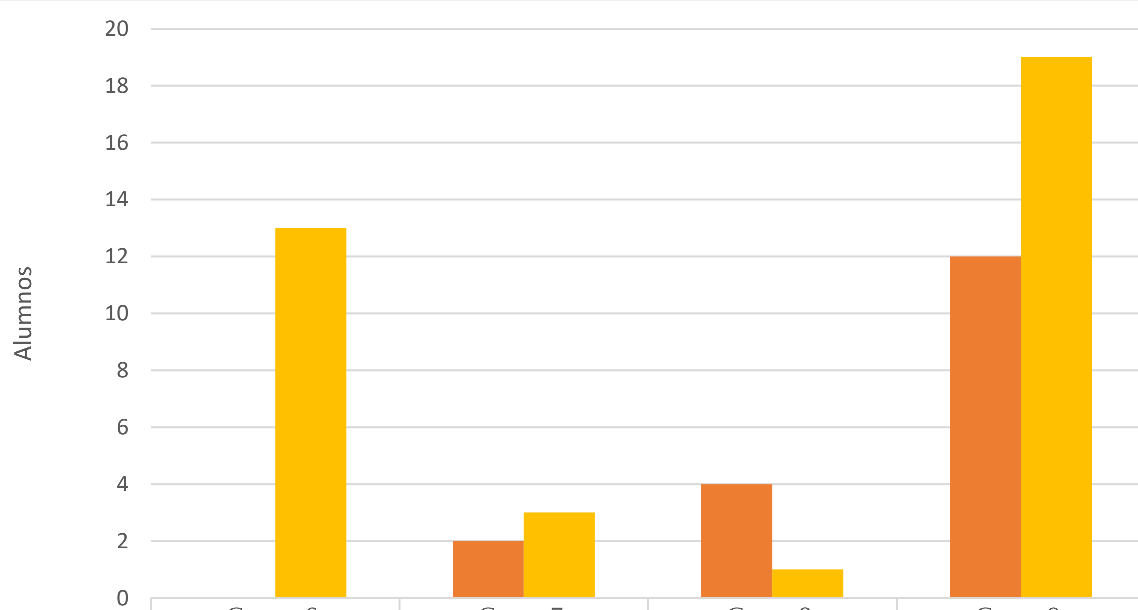
En relación con los datos obtenidos tanto en el Pre-Test como en el Post-Test, se evidenció un avance significativo en la comprensión de la recta tangente, lo cual se refleja de manera clara al analizar los gráficos que representan las respuestas correctas obtenidas en el primer apartado, específicamente en la tarea de trazar la recta tangente a las curvas proporcionadas.

Al comparar las respuestas recopiladas antes y después de la secuencia pedagógica, se observa una mejora en la capacidad de los estudiantes para visualizar y representar correctamente la recta tangente en relación con las curvas dadas. Este progreso sugiere que las actividades y enseñanzas desarrolladas durante la sesión impactaron positivamente en la adquisición de habilidades relacionadas con la identificación y trazado de la recta tangente en contextos específicos.



	Curva 1.	Curva 2.	Curva 3.	Curva 4.	Curva 5.
Pre Test	9	5	11	0	12
Post Test	14	7	15	12	19

Figura 4.9.1 Comparación de los resultados correctos en el primer apartado del Pre-Post Test de la primera a la quinta curva.



	Curva 6.	Curva 7.	Curva 8.	Curva 9.
Pre Test	0	2	4	12
Post Test	13	3	1	19

Figura 4.9.2 Comparación de los resultados correctos en el primer apartado del Pre-Post Test de la sexta a la novena curva.

Los gráficos muestran un aumento notable en la proporción de respuestas correctas en el Post-Test en comparación con el Pre-Test, indicando que los estudiantes han asimilado de manera efectiva los conceptos y métodos abordados durante la sesión. Este avance puede atribuirse a la implementación de diversas estrategias pedagógicas, como la misma secuencia, la retroalimentación y la discusión grupal, que han contribuido al desarrollo de habilidades necesarias para abordar a la recta tangente.

No obstante, en la única curva que se observó un "retroceso" fue en la octava curva, la cual corresponde a una curva que en el punto interés, corresponde a una tangente que no es única, por lo tanto, no es posible trazarla, sin embargo, doce alumnos si trazaron una de las tangentes (Figura 4.8.9), en lugar de mencionar que no es posible trazarla

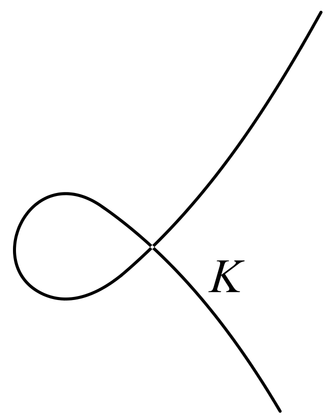


Figura 4.9.3. Séptima curva del Pre-Post Test

Sin embargo, esta curva tiene la particularidad, que en caso de que exista la recta tangente, no es única, por lo que, la situación en la que se encontraron varios alumnos fue trazar solo una de las tangentes.

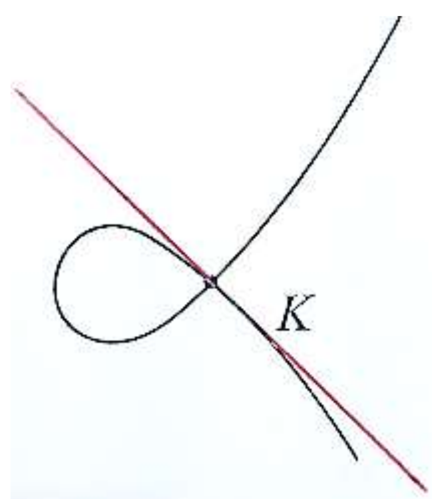


Figura 4.9.4. Ejemplo de una respuesta de los alumnos

Por otra parte, en la concepción de la recta tangente, todos los alumnos mencionaron definiciones similares a “la recta que toca en un único punto a la curva”, lo cual es una definición parcial, pues esta solo se está considerando con contacto de orden cero, cuando para ser recta tangente, el contacto debe de ser orden uno. No obstante, la idea de recta tangente se unificó, a diferencia del Pre-Test, que aún existía confusión con la Tangente trigonométrica o que simplemente no escribieron ninguna definición.

Continuando con la segunda parte con respecto de la concepción de la recta tangente, la totalidad de los alumnos trazó el ejemplo de una circunferencia, esto va de la mano con lo mencionada con Vivier (2011), pues aún están muy marcadas sus nociones obtenidas anteriormente.

En el último apartado, en el que se les solicita a los alumnos trazar la recta tangente a una curva, dado un punto K fuera de la curva, pasaron de seis alumnos que pudieron realizarlo a diez, notando que el 66.67% más pudo lograr realizar este proceso inverso, lo cual sugiere un mayor nivel de profundidad en la comprensión del concepto.

De esta forma, observamos un progreso en la comprensión de la recta tangente en el Post-Test, lo que indica que la secuencia de actividades fue útil para mejorar la comprensión de los estudiantes. Además, se unificó la idea de recta tangente entre los estudiantes, a diferencia del preexamen, donde aún existía confusión con la tangente trigonométrica o simplemente no se escribieron definiciones.

Sin embargo, con los resultados obtenidos con los dos test, no fue posible ver como gradualmente mejoraba la comprensión de los alumnos. Para ver estos avances, una opción hubiera sido el considerar mini test al final cada sesión, proporcionando una visión más detallada de cómo iban evolucionando sus respuestas conforme a cada a enfoque presentado y de esta forma notar las áreas de oportunidad que presentaban.

Otra forma de ver su avance sería considerar alguna de las curvas vistas en el test y trabajarlas con alguno de los enfoques vistos en GeoGebra. Esto habría permitido observar el comportamiento de las rectas tangente en algunas curvas y más aún, explorar casos más complejos además de las cónicas, como sería el caso de las curvas no paramétricas.

En general, se puede concluir que la utilización de herramientas tecnológicas como GeoGebra y la realización de actividades prácticas y visuales son útiles para mejorar la comprensión de conceptos matemáticos complejos como la recta tangente.

5 Conclusiones

En este capítulo final, se hace un resumen del análisis de datos de las sesiones de trabajo, así como las respuestas a las preguntas de investigación planteadas al principio de este estudio. La secuencia pedagógica centrada en la recta tangente, diseñada para llevarse a cabo en un entorno tecnológico adecuado, presentó los métodos, estrategias, fallos y logros de los estudiantes.

En el Pre-Test ayudo a conocer los conocimientos previos de los alumnos en relación con el concepto de la recta tangente. Aunque la mayor parte de los estudiantes tenían un concepto de la recta tangente como que toca a la curva en un punto, esta solo es una concepción parcial que no abarca diversos aspectos, como que no debe de cruzar a la curva o que es la mejor aproximación lineal. También se observó una falta de habilidad para trazar la tangente a los diferentes tipos de curvas, siendo las cónicas donde hubo mayor cantidad de respuestas correctas, lo cual coincide con Vivier (2011), que la concepción que tienen de la recta tangente es principalmente alrededor de circunferencias y otras cónicas.

En la actividad 1, donde se abarca en enfoque de la recta tangente como la mejor aproximación lineal, puede observarse que esta es una actividad estática, con el acercamiento suficiente, los alumnos pueden ver a la curva como una recta, y a partir de esto poder calcular la pendiente, para trazar la recta tangente (lo cual se realiza en la actividad siguiente). A pesar de que los estudiantes lograron realizar correctamente las actividades, tuvieron dificultades en el uso del software, puesto que la mayoría no lo conocía.

Para la actividad 2, en la que debían de trazar la recta tangente con la pendiente obtenida en la actividad anterior, las observaciones obtenidas se centraron en la similitud entre la recta tangente propuesta y la curva, es decir, es una actividad estática. Sin embargo, en esta ocasión GeoGebra funciona para reafirmar que la pendiente de la recta tangente en el punto dado es correcta.

A diferencia de las actividades anteriores, la actividad 3 es dinámica, pues se les solicita observar el comportamiento de los objetos en relación con la recta tangente. No obstante, el nivel de comprensión en la actividad no fue el esperado pues la mayoría se concentró en que los puntos tienden a juntarse. Un factor a considerar es que falto observar al final globalmente que la recta secante tiende a convertirse en una recta tangente, sin embargo, con las capturas tomadas por los alumnos, solo es posible verlo como un proceso local. También para reforzar el entendimiento de esta actividad en futuras investigaciones, se pueden agregar preguntas de control.

Al igual que la actividad anterior, la actividad 4 es completamente dinámica, pues a partir del deslizador que es un objeto dinámico, se generan diversos objetos que dependen de este. A pesar de esto, en ninguno de los reportes generados, se observa que hayan puesto atención en todos los objetos, especialmente, en que ocurre entre la diferencia entre la recta y la curva original, aun cuando se les hace una pregunta explicita sobre esto, probablemente ocurra debido a la cantidad de objetos en la actividad, lo que provoca que se desvíen del objetivo principal de la actividad, obteniendo que no se realizó con éxito la actividad. Para solucionar este problema, también se sugiere añadir más preguntas en la actividad para centrar la atención en los objetos deseados.

En la actividad 1c, que es la misma que la actividad 1 con la diferencia de que se considera la curva $f(x) = x^3$, sigue siendo una actividad estática, pues los alumnos notaron que la curva puede ser vista como una recta suficientemente cerca.

La actividad 2c, fue de suma importancia, especialmente en el punto A=(0,0), en el que los estudiantes tuvieron una confusión acerca de porque la recta trazada es una recta que parte a la curva, pues esto no coincide con la concepción que tienen de recta tangente. A partir de esto fue necesario recordar que podemos considerarla como la mejor aproximación lineal, y que en este caso la recta horizontal era la que mejor se aproxima, sin embargo, esta percepción solo logra notarse cuando tienen una vista global de la curva y no local. Reflexionando así, es posible que los alumnos sean capaces de cuestionar y entender las limitaciones de la definición que van construyendo y que se tiene que ir modificando acorde al contexto.

En la discusión al final de la actividad 3c, los estudiantes mencionaron que la pendiente de la recta secante se aproxima a la pendiente de la recta tangente, cuando el punto B se acerca a A, lo cual no habían notado (o al menos mencionado) en la actividad 3. También se sugiere el uso de preguntas control para mejorar la comprensión del enfoque de la recta tangente como límite de rectas secantes, el cual también es uno de los más comunes.

En la actividad 4c, los alumnos no lograron observar que en el punto (1,1), con la pendiente correspondiente a la recta tangente, $x(A)$ es una raíz doble y que para cualquier otra recta se tienen al menos dos raíces pues solo volvieron a poner atención en el parecido entre la recta tangente y la curva. Las acciones las realizaron, pero faltaron preguntas para que se dieran cuenta de que la recta tangente es la mejor recta en términos del tipo de contacto.

La actividad 5 y 5c se realizaron de forma conjunta, los estudiantes movían el punto y observaban que la recta construida si era tangente para cualquier punto en la curva, pero más aun, una parte del grupo hizo uso del Zoom-in(A) para verificar que muy cerca de A, la recta tangente es indistinguible de la curva, es decir mezclaron la parte dinámica y estática anteriormente vistas.

Como conclusión de las actividades de la secuencia, en la actividad 6 se les solicitaba que utilizaran cualquier enfoque o técnica vistos para poder realizar la recta tangente a la curva $f(x) = x^3 + x^2$. La intención de esta actividad era que sumaran las pendientes obtenidas en las actividades 5 y 5c, sin embargo, la totalidad del grupo utilizo el enfoque de la mejor aproximación lineal. Uno de los motivos por el que posiblemente usaron el primer enfoque visto es debido a que es el más sencillo, pues basta usar el Zoom-in(A) para calcular la pendiente de la recta tangente.

En los datos registrados del Post-Test, se muestra un avance en la comprensión de la recta tangente a comparación de lo obtenido en el Pre-Test. En el primer apartado, en donde se solicitó el trazado de las rectas tangente, la mayoría de las curvas tuvieron un aumento significativo en relación a las respuestas correctas. Las únicas curvas que siguieron teniendo una baja cantidad de respuestas correctas fueron las que correspondían a curvas paramétricas, lo cual tiene sentido debido a que estas no son abordados en los cursos de nivel medio superior.

A partir de los resultados obtenidos antes, durante y después de la secuencia pedagógica, nos permitió responder a nuestras preguntas de investigación y establecer un panorama para futuras investigaciones:

5.1 Respuestas a las preguntas de investigación

A continuación, se dará respuesta a las preguntas de investigación planteadas al principio de la investigación, fundamentando las respuestas en los datos recopilados.

1. ¿Cuál es la concepción de los estudiantes sobre la recta tangente en el nivel medio superior en México?

Basándonos en los resultados obtenidos en el Pre-Test, es claro que la mayoría de los estudiantes tienen una comprensión parcial de lo que es una recta tangente en relación con una curva. Quince de los diecinueve alumnos mencionaron que “la recta tangente es la recta que toca en un único punto a la curva”, sin embargo, la recta normal también cumple con esta definición, por lo que hace falta que consideren más características de este concepto, específicamente, el contacto de orden uno (Riestra & Ulin, 2003).

Al profundizar en la habilidad de trazar la recta tangente, o explicar por qué no es posible trazarla en algunas de las curvas propuestas, las correspondientes a las cónicas (una parábola, circunferencia y elipse), tuvieron en promedio once respuestas correctas, mientras que, en las demás curvas, el promedio de respuestas correctas fue menor a 4, lo cual coincide con lo estudiado por Vivier (2011), donde menciona que la mayoría de los alumnos solo tienen la concepción de la recta tangente a la circunferencia (y algunas cónicas), pero no en casos generales.

Esta diferencia entre la concepción y la práctica es una muestra de la prevalencia de la enseñanza de las Matemáticas desde una perspectiva instrumental, aunque los estudiantes pueden memorizar definiciones y conceptos, tienen problemas para aplicarlos. Es fundamental pasar de una enseñanza instrumental, que se centra en la memorización de definiciones, a un enfoque relacional. Esto no solo mejorará su capacidad para trazar la recta tangente, sino que también fortalecerá su comprensión general del tema y su capacidad para resolver futuros problemas.

2. ¿Cuáles son las principales deficiencias en la enseñanza actual de la recta tangente en el nivel medio superior en México?

Los alumnos expresaron que su conocimiento a este concepto se limita a breves menciones y ejemplos con respecto de la circunferencia, dejando de lado el resto de las curvas y funciones. Esto se puede observar en los resultados de Pre-Test, donde hubo una mayor cantidad de respuestas correctas (doce de los diecinueve alumnos) al trazar la recta tangente a la circunferencia y a la elipse en un punto dado, a diferencia de otras curvas, como la curva número cuatro, la cual asemeja a una función cúbica (la cual han visto en cursos anteriores), en donde ninguno de los alumnos proporcionó una respuesta correcta. De esta forma observamos que un factor que dificulta la comprensión de la recta tangente por parte de los estudiantes es la falta de variedad y profundización en los ejemplos expuestos.

Al llegar a los cursos de Cálculo Diferencial, los alumnos se enfrentan a un panorama donde la recta tangente se presenta de manera aislada, sin conexión con otros temas o aplicaciones, por lo cual enfrentan dificultades, principalmente, del concepto de la derivada, pues está es definida como la pendiente de la recta tangente a la curva de la función en un punto dado, siendo que este concepto lo conocen usualmente solo para la circunferencia y no para otras curvas.

Además, la enseñanza de la recta tangente muchas veces carece de aplicaciones prácticas o contextualizadas. Los alumnos no tienen la oportunidad de realizar ejercicios que les permitan trazar rectas tangentes que permita interpretar el significado. Esto limita su capacidad para aplicar su conocimiento en situaciones meramente de matemáticas.

Para mejorar este ambiente, es necesario considerar actividades que incorporen una variedad de aplicaciones y ejemplos prácticos deben ayudar a los estudiantes a desarrollar un entendimiento completo y aplicable de la recta tangente.

3. ¿Qué elementos se necesitan para diseñar una secuencia de actividades que promueva una comprensión más completa y aplicable de la recta tangente?

La recta tangente es un concepto matemático fundamental que tiene una gran variedad de perspectivas y aplicaciones en diversos contextos, debido a esto fue posible crear una secuencia pedagógica que abarcó diferentes construcciones de la recta tangente para aprovechar esta versatilidad y promover un mayor entendimiento.

Para desarrollar las actividades, seleccionamos perspectivas que integran elementos algebraicos, visuales y numéricos, aunque en primera instancia parecen diferentes, se complementan entre sí. A pesar de que estos elementos no son indispensables, son suficientes para construir la secuencia efectivamente.

Los enfoques “mejor aproximación lineal”, “límite de rectas secantes”, “transición en los adelantamientos” y “multiplicidad en los puntos de intersección” brindaron perspectivas diversas y complementarias sobre la recta tangente, cada uno de los cuales mostraba distintos aspectos de esta.

Comenzando con la “mejor aproximación lineal”, los alumnos pudieron obtener la pendiente y trazar la recta tangente al observar la curva de cerca y utilizando las fórmulas de la pendiente dados dos puntos y la ecuación de la recta (las cuales ya conocían). Luego, se introdujo el enfoque de “límite de las rectas secantes”, los alumnos observaron gráficamente cómo, al acercar un punto móvil al punto de tangencia, la recta secante se aproximaba a la recta tangente. De forma similar la pendiente de la secante se acercaba al de la tangente. Esta actividad fue la primera experiencia de los alumnos con el concepto de límites.

Con la “transición en los adelantamientos”, se pretendía mostrar que cualquier cambio en el valor de la pendiente de la recta tangente (aunque fuera mínimo) transforma a la recta en una secante. Esto implica que la diferencia entre la curva y la recta secante tenga dos raíces distintas, mientras que la recta tangente, presenta una raíz doble. Debido a la construcción de la actividad la cantidad de elementos en esta, no se obtuvieron los resultados esperados en la actividad, pues no lograron observar que la diferencia entre la curva y la recta tenía no tenía un cambio de signo cuando la pendiente corresponde a la recta tangente.

De manera inversa al enfoque anterior, al considerar la “multiplicidad en los puntos de intersección”, busca encontrar una raíz doble entre la curva y una recta, a partir de un procedimiento algebraico que se realizó en el pizarrón.

Al seguir el orden en que fueron seleccionados los enfoques, podemos notar una progresión desde ideas simples a más complejas. La combinación de observaciones gráficas, algebraicas, procedimientos intuitivos a formales, los cuales se fueron complementando, permitió a los estudiantes obtener una comprensión más completa de la recta tangente, no obstante, aún es posible hacer mejoras a esta secuencia, como el uso de más preguntas control en ciertas actividades.

Comparando los resultados obtenidos en el Post-Test, los alumnos mostraron una mejora significativa en comparación del Pre-Test. En la definición de lograron unificar sus conocimientos, pero siguieron utilizando la definición de contacto de orden cero. En la mayoría de las curvas del primer aparatado (salvo las no parametrizadas), se observó un avance significativo, es decir, pudieron trazar o argumentar cuando es posible la recta tangente, aun en curvas que no se discutieron en la sesión.

Sin embargo, notamos que solo estamos viendo un progreso en dos únicos momentos, cuando lo ideal hubiera sido realizar mini cuestionarios después de cada sesión para notar como progresa el entendimiento de los estudiantes tras cada enfoque presentado.

A pesar de que este estudio no es una prueba estadística, queda evidenciando la efectividad de considerar una secuencia pedagógica con diversas perspectivas de la recta tangente para mejorar la compresión de está.

No obstante, un aspecto crucial durante la ejecución de estas actividades fue el entorno en el que se llevaron a cabo. Si se hubieran realizado en papel y lápiz, habría sido más difícil para los alumnos debido al nivel de abstracción requerido. Por tanto, las herramientas tecnológicas, específicamente por su dinamismo, interactividad y visualidad, resultan fundamentales para el éxito de estas actividades.

4. ¿Qué impacto tiene el uso de tecnologías en la comprensión de la recta tangente por parte de los estudiantes?

El uso de tecnologías fue crucial para que los estudiantes pudieran comprender el concepto de recta tangente. Esto se manifestó en la mejora de la comprensión de los estudiantes de la relación y la práctica, así como en el desarrollo de sus habilidades de exploración.

Los estudiantes pudieron explorar conceptos de manera visual gracias al dinamismo e interactividad de herramientas como GeoGebra. Por ejemplo, usar el zoom ayudó a observar que la recta tangente muy cerca del punto de tangencia se volvía una recta, o que el límite de las rectas secantes coincidía con la recta tangente, ofreciendo una perspectiva que era difícil de realizar con lápiz y papel. La capacidad de GeoGebra para mostrar al mismo tiempo los cambios del valor de la pendiente con el movimiento de una recta secante hasta convertirse en tangente, ofreció a los estudiantes una comprensión más profunda de la relación entre las ecuaciones y sus representaciones gráficas. Esta aproximación visual y dinámica facilitó la internalización de conceptos abstractos.

GeoGebra no solo sirvió como una herramienta exploratoria sino también como un medio para verificar y validar resultados obtenidos en papel y lápiz. Esta idea promovió que los estudiantes no solo realizaran cálculos algebraicos, sino que también pudieran corroborar sus resultados mediante la visualización, como forma de consolidar su aprendizaje.

La experiencia en este estudio muestra que el uso de software y una secuencia pedagógica adecuada tiene un impacto significativo en la mejora de la comprensión de conceptos matemáticos, pues permitió a los alumnos interactuar directamente con los conceptos de una manera activa, contrastando con la enseñanza tradicional, en el cual los alumnos eran solo observadores.

5.2 Reflexiones finales

En las actividades en clase, se observaron inicialmente dificultades significativas en el uso de las herramientas tecnológicas, en parte debido a desafíos logísticos con respecto de la implementación, sino también a la poca familiarización con el software, lo cual planteó inicialmente un obstáculo para el avance fluido de las lecciones.

Sin embargo, a lo largo de la realización de las actividades, se mostró una evolución en el uso de GeoGebra. Este progreso fue el resultado de varios factores como: diseño de las actividades permitió que los estudiantes tuvieran oportunidad de explorar y equivocarse en un entorno, el trabajo colaborativo entre los estudiantes, fomentando un ambiente de aprendizaje donde podían compartir conocimientos, resolver dudas y apoyarse mutuamente. Esta interacción no solo mejoró el manejo del software individual, sino que también fortaleció su proceso de expresar ideas a través de los reportes.

Con la actividad 6, pudimos observar cuál de los enfoques resultó más fácil de recordar para los alumnos con respecto de la construcción de la recta tangente, en este caso fue el enfoque de la mejor aproximación lineal (utilizado en las actividades 1 y 1c). Esto se debe, probablemente, a que es un enfoque relativamente sencillo: solo requiere el uso del Zoom-in (A) y calcular la pendiente con un punto auxiliar B. En comparación, los otros enfoques son más complejos ya que implican el uso y comparación de diversos objetos, lo cual puede ser más difícil de entender para los alumnos.

Esta observación es de suma importancia ya que nos proporciona una estrategia acerca de cómo es posible introducir el concepto de la recta tangente para curvas diferentes de las cónicas. Al comenzar con el enfoque de la mejor aproximación lineal introducido a partir de ejemplos, permite una enseñanza relacional del concepto, a diferencia del enfoque instrumental al que están acostumbrados los alumnos, logrando que los alumnos puedan aplicar el concepto a curvas en general.

Al final de la secuencia, los estudiantes no solo lograron superar las dificultades iniciales, sino que también demostraron poder manejar las herramientas tecnológicas de forma adecuada y sin dificultades. La capacidad para adaptarse y aprender a utilizar nuevas tecnologías es fundamental en un mundo donde cada vez se usan más éstas. De aquí surge la idea de fomentar más actividades en las aulas de cómputo de las escuelas para materias diferentes a informática y/o computación.

En cuanto a los resultados del Pre y Post Test, no solo se evidencia la unificación del concepto, sino que también se aprecia un avance en el trazado de las rectas tangentes. Al analizar detenidamente las respuestas y desempeño de los estudiantes en ambos momentos de evaluación, podemos constatar que el objetivo general planteado al inicio ha sido cumplido con éxito. La mejora en la comprensión del concepto clave se refleja en la consistencia con la que los alumnos fueron capaces de argumentar sus respuestas. Este logro también subraya el impacto de la secuencia propuesta para el proceso de enseñanza.

Más aun, los resultados sugieren una validación significativa de la teoría de Skemp (1976). Según esta perspectiva, la importancia de los ejemplos es que, a partir de ellos, los estudiantes crean una imagen de los conceptos. Para este caso, consideramos ejemplos basados en los diferentes enfoques de cómo se construye la recta tangente, los cuales no se limitaron a una simple definición o fórmula, sino en toda una construcción diferente, logrando una comprensión más profunda del concepto por parte de los estudiantes.

Sin olvidarnos que otro factor de suma importancia fueron las herramientas utilizadas en la secuencia pedagógica. La información obtenida va de la mano con lo planteado por Moreno-Armella (2014), ya que las tecnologías digitales ofrecen la posibilidad de visualizar conceptos matemáticos de manera interactiva, lo que puede ayudar a los estudiantes a desarrollar una comprensión más profunda y significativa de los temas matemáticos.

Además, al ver este progreso en los estudiantes, también estamos equipándolos con habilidades prácticas y aplicables en sus futuros contenidos, específicamente en los relacionados a la derivada, o en algunos en la rama de Física como la razón de cambio.

Sin embargo, es importante reconocer que, debido a las limitaciones de tiempo y recursos disponibles, no fue posible observar todos los beneficios y áreas de oportunidad que pueden surgir a mediano plazo a partir de la secuencia dada. Los beneficios a mediano plazo de esta metodología que se esperan es la comprensión de la derivada, junto con las aplicaciones de estas.

Para realizar un estudio más completo y exhaustivo, sería altamente recomendable llevar a cabo un análisis longitudinal. En este permitiría una evaluación más profunda y detallada de los efectos y beneficios a largo plazo de la secuencia pedagógica implementada. El análisis longitudinal se dividiría en dos etapas principales: la primera correspondería a la implementación y observación de la secuencia pedagógica, mientras que la segunda etapa se enfocaría en analizar el desempeño de los mismos alumnos que participaron en la primera etapa, con el objetivo de observar los beneficios o consecuencias a mediano plazo, específicamente en el curso del Cálculo Diferencial.

En la primera etapa del estudio longitudinal, se aplicaría la secuencia pedagógica diseñada, en la cual, se llevaría a cabo un seguimiento cercano de los estudiantes, recopilando datos sobre su comprensión de los conceptos, su nivel de participación en las actividades prácticas y su progreso tanto en el uso de las herramientas digitales, como en las ideas expresadas, haciendo uso de mini test en cada sesión para ver su progresión de forma más detallada, además del uso de nuevas preguntas control para consolidar lo aprendido en cada actividad.

Una vez completada la primera etapa y transcurrido un periodo de tiempo adecuado (tentativamente de un año), se procedería a la segunda etapa del estudio longitudinal. En esta fase, se volvería a evaluar a los mismos estudiantes que participaron en la primera etapa, pero ahora con el objetivo de analizar los efectos a mediano plazo de la secuencia pedagógica.

Los análisis en esta etapa se centrarían en determinar si los estudiantes que experimentaron la secuencia pedagógica tienen un mejor desempeño en el curso correspondiente de Cálculo

Diferencial, si muestran un mayor entendimiento en el concepto y las aplicaciones de la derivada.

Los resultados de este estudio proporcionarían una visión completa de los beneficios y posibles áreas de mejora de la secuencia pedagógica, brindando información valiosa para la enseñanza del Cálculo, más específicamente del concepto de la derivada con uso de herramientas tecnológicas.

6 Referencias

Aebli, H. (1973). *Una didáctica fundada en la psicología de Jean Piaget.* Editorial Kapelusz S. A.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 1*(1), 40-55.

Be Connected. (21 de 4 de 2020). *Introducción a los gestos de "desplazamiento" y "hacer zoom".* Be Connected eSafety: https://beconnected.esafety.gov.au/pluginfile.php/50435/mod_resource/content/3/PA2%20Gestos%20de%20desplazamiento%20y%20hacer%20zoom%20en%20dispositivos%20inteligentes%20BeConnected%20SPA.pdf

Benitez Mojica, D. & Londoño Millán, N. (2009). Situaciones problemáticas en contexto en el aprendizaje del Cálculo. *El Cálculo y su Enseñanza, 1*(1), 33-43. https://doi.org/10.61174/recacym.v1i1.163

Bos, R., Doorman, M. & Piroi, M. (2020). Emergent models in a reinvention activity for learning the slope of a curve. *The Journal of Mathematical Behavior, 59,* 100773. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100773

Briseño, L., Carrasco, G., Martínez, P., Palmas, Ó., Struck, F., & Verdugo, J. (2009). *Matemáticas 3.* Santillana S.A. de C.V.

Carlson, M., Oehrtman, M., & Engelke, N. (2010). The Precalculus Concept Assessment: A Tool for Assessing Students' Reasoning Abilities and Understandings. *Cognition and Instruction, 28*(2), 113-145. https://doi.org/10.1080/07370001003676587

Cornu, B. (2002). Limits. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Mathematics Education Library, 11. Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_10

Dirección General de Bachillerato . (22 de Septiembre de 2023). *DGB*. Programas de Estudio: https://dgb.sep.gob.mx/programas-de-estudio/

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. *Undécimo Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior.* Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. https://www.academia.edu/807014/Dificultades_en_el_aprendizaje_del_c%C3%A1lculo

Hitt, F. & González-Martín, A. (2016). Generalization, Covariation, Functions, and Calculus. En *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics*

Education (pp. 3-38). SensePublishers, Rotterdam. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_1

Hohenwarter, M., Hohenwarter, J., Kreis, Y. & Lavicza, Z. (2008). Teaching and calculus with free dynamic mathematics. *1th International Congress on Mathematical Education (ICME 11).* Monterrey, Mexico. https://orbilu.uni.lu/bitstream/10993/47219/1/ICME11-TSG16.pdf

Mariotti, M. A. (2006). Proof and Proving in Mathematics Education. En A. Gutiérrez, y P. Boero (Edits.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future* (pp. 173-204). Rotterdam, Netherlands.

Marsden, J. & Weinstein, A. J. (1981). *Calculus unlimited.* Benjamin/Cummings Publishing Company.

Moreno, H., Alcántara, R. & Oñate, P. (2016). Dificultades en el aprendizaje del cálculo diferencial: La percepción de los alumnos . *Octavo Congreso Internacional sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas.* https://matematicasfesc.cuautitlan.unam.mx/Memorias/octavo/POEA049.pdf

Moreno-Armella, L. (2014). An essential tension in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 46*(4), 621–633. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0580-4

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics, 14*, 235-250.

Pinargote-Baque, K. Y. & Cevallos-Cedeño, A. M. (2020). El uso y abuso de las nuevas tecnologías en el área educativa. *Dominio De Las Ciencias, 6*(3), 517–532. https://doi.org/10.23857/dc.v6i3.1297

Range, R. M. (2018). Using high school algebra for a natural approach to derivatives and continuity. *The Mathematical Gazette, Volume 102 , Issue 555*, 435 - 446. https://doi.org/10.1017/mag.2018.110

Riego, M. A. (2013). Factores Académicos que Explican la Reprobación en Cálculo Diferencial. *Conciencia Tecnológica ,*(46), 29-35.

Riestra, J. A. & Ulin, C. A. (2003). Tangencia, contacto y la diferencial. En E. Filloy et al. (Eds.), *Matemática Educativa: Aspectos de la investigacion actual. (XXV aniversario del Departamento de Matemática Educativa)* (pp. 218–241). Fondo de Cultura Económica.

Rojas, A. (2021). La significatividad del aprendizaje del cálculo diferencial e integral. *VARONA, 72*, 11-15.

Santos-Trigo, M. (2014). *La resolución de problemas matemáticos.* Trillas.

Santos-Trigo, M. (2019). Mathematical Problem Solving and the Use of Digital Technologies. En P. Liljedahl & M. Santos-Trigo (Ed.), *Mathematical Problem Solving* (pp. 63-89). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-10472-6_4

Skemp, R. (1976). Instrumental understanding and relational understanding. *Mathematics Teaching*(77), 20-26. http://www.davidtall.com/skemp/pdfs/instrumental-relational.pdf

Skemp, R. (1987). *The Psychology of Learning Mathematics.* Lawrence Erlbaum Associates.

Stewart, J. (2017). *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas. Octava edición.* (Trad. A. E. García Hernández & E. C. Mercado González). Cengage Learning

Tall, D. (2012). A Sensible approach to the Calculus. *El cálculo Y Su enseñanza, 3*(1), 81–128. https://doi.org/10.61174/recacym.v3i1.139

Tall, D. & Razali, M. R. (1993). Diagnosing students' difficulties in learning mathematics. *International Journal Of Mathematical Education In Science And Technology, 24*(2), 209-222. https://doi.org/10.1080/0020739930240206

Tall, D. & Schwarzenberger, R. (1978). Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits. (D. S. Fielker, Ed.). *Mathematics teaching (82)*, 44-59.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151–169. https://doi.org/10.1007/bf00305619

Thomas Jr., G. B. (2006). *Cálculo Una Variable. Undécima edición.* (Trad. E. Quintanar Duarte, Ed.; E. Oteyza de Oteyza & V. H. Ibarra Mercado) Pearson Educación.

Verhoefa, N. C., Coenders, F. G., Pieters, J. M., Van Smaalen, D., y Tall, D. (2014). Professional Development through lesson study: Teaching the derivative using GeoGebra. *Professional Development in Education, 41*(1), 109-126. https://doi.org/10.1080/19415257.2014.886285

Vivier, L. (2011). La noción de tangente en la educación media. *El cálculo Y Su enseñanza, 2*, 111-144. https://doi.org/10.61174/recacym.v2i1.149

Wu, H.-H. (2012). How good are the Common Core. *SF East Bay CCSS Summit.* Concord, CA. https://math.berkeley.edu/~wu/Contra-Costa-County-2012-2.pdf

7 Anexos

7.1 Pre – Post test

Nombre: ____

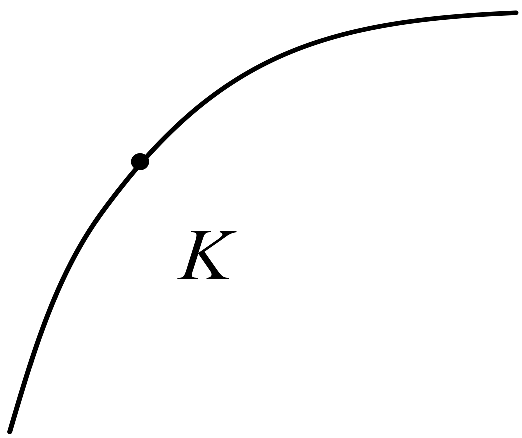
Fecha: ____

1. Para cada una de las curvas, ¿es posible trazar una tangente en el punto *K*?

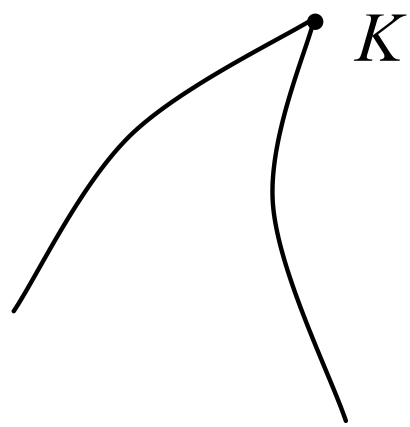
   - si se puede, trace esta tangente;

   - si no, aclare brevemente por qué (escriba al lado de la curva).

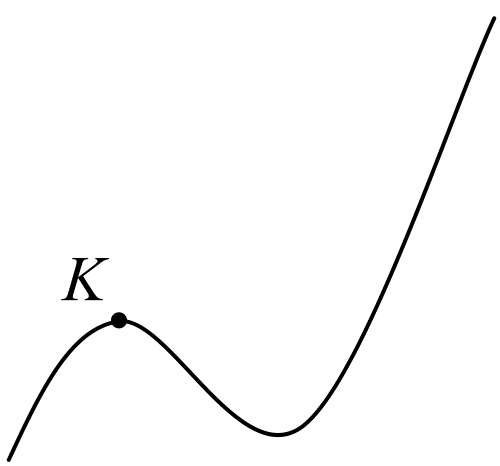
Curva no. 1



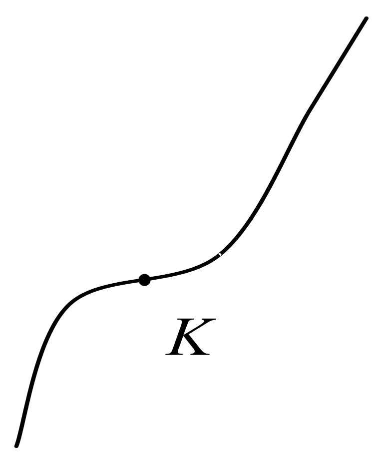
Curva no. 2



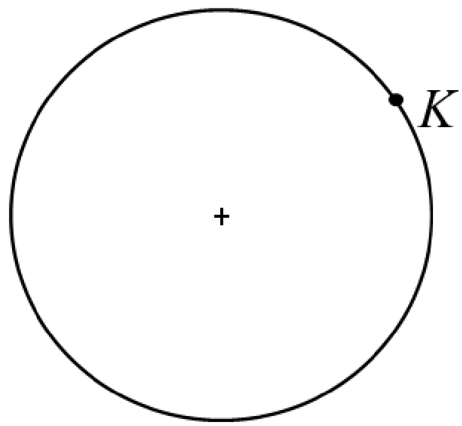
Curva no. 3



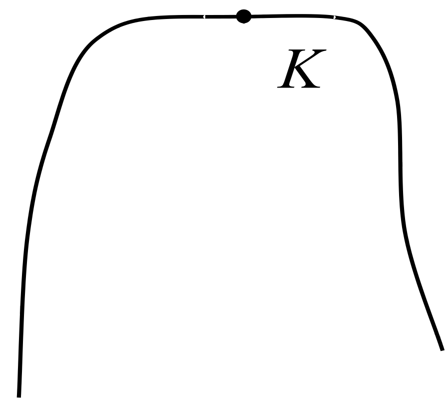
Curva no. 4



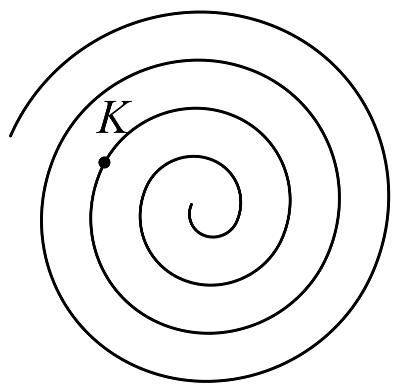
Curva no. 5



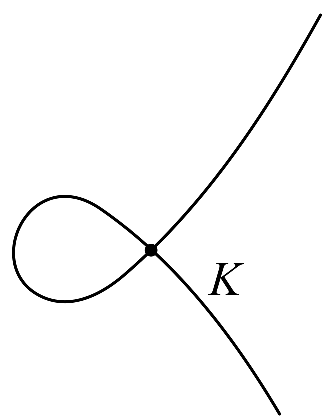
Curva no. 6



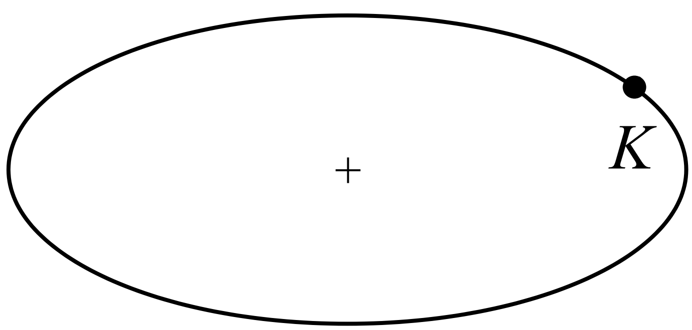
Curva no. 7



Curva no. 8

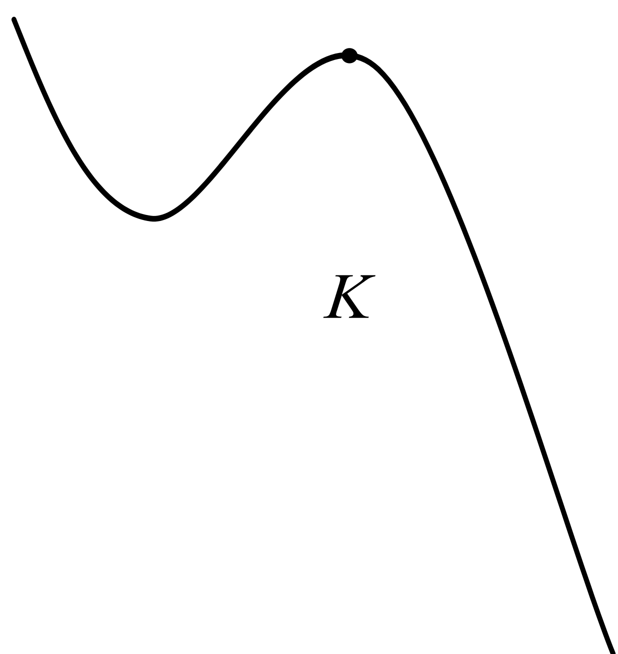


Curva no. 9



2. Define el concepto de recta tangente y proporciona un ejemplo gráfico que ilustre este concepto

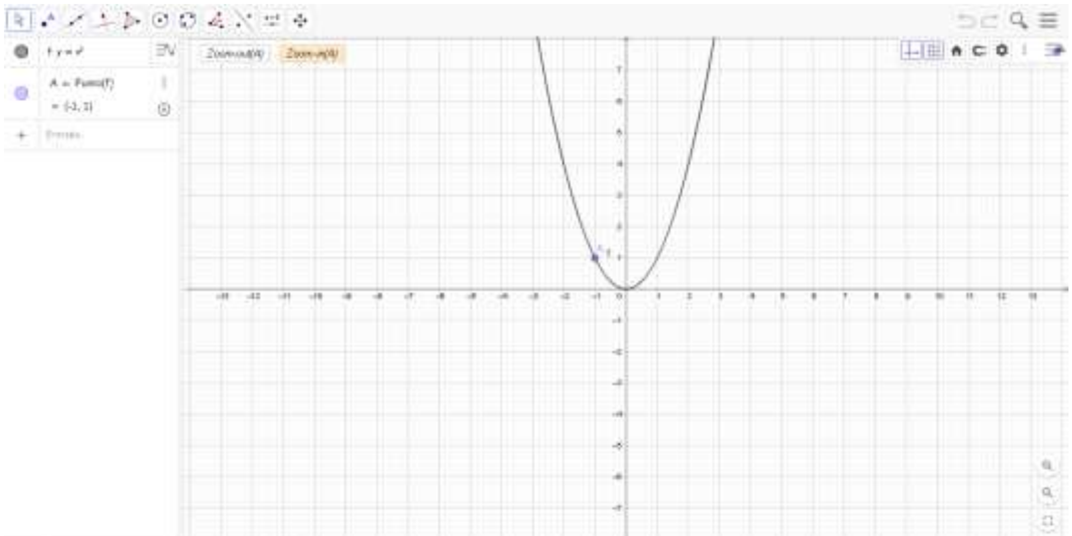
3. Con base en la gráfica de la curva proporcionada y el punto *K*, dibuja la recta tangente a la curva que pasa por el punto *K*. En caso de no ser posible, explica el motivo.



7.2 Instructivo GeoGebra

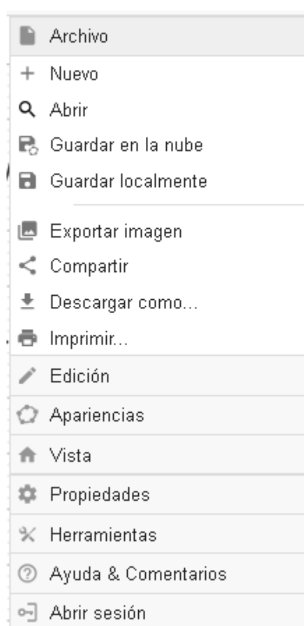
El objetivo de este instructivo es explicar las herramientas de GeoGebra que se utilizaran en las actividades.

Menús de GeoGebra
La interfaz gráfica de GeoGebra con la que trabajaras es la siguiente:



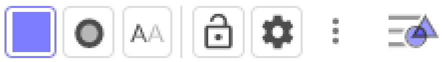
A continuación, explicaremos las principales características de la interfaz gráfica de GeoGebra para facilitar el acceso a las herramientas necesarias.

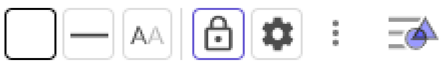
Barra de menú
Se encuentra en la parte superior derecha y se despliega al seleccionar las tres rayas horizontales ☰. Al desplegarlo aparecen las siguientes opciones:

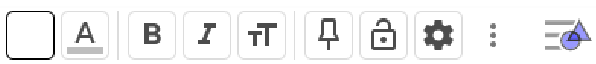


Barra de herramientas

Se encuentra en la parte superior derecha, debajo de la *barra de menú*,  , las opciones mostradas dependen del objeto seleccionado, algunas de estas son:

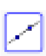
- Barra de herramientas cuando no hay ningún objeto seleccionado
  
- Barra de herramientas cuando esta seleccionado un punto
  

- Barra de herramientas cuando esta seleccionada una curva
  

- Barra de herramientas cuando esta seleccionado un texto
  

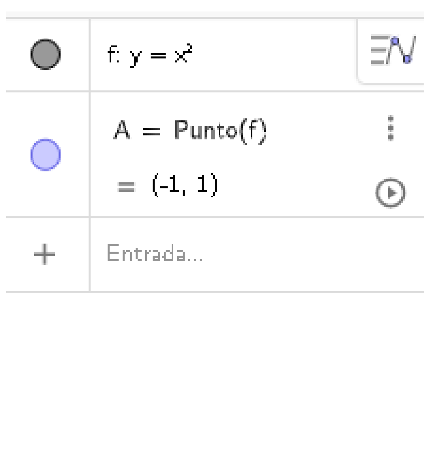
Barra de herramientas gráficas

Aparece en la parte superior izquierda de la pantalla, al hacer *clic* en alguno de los iconos, despliega un grupo de herramientas que permite crear objetos realizando *clic* en la herramienta correspondiente.

Algunas de las funciones comunes de la *barra de herramientas gráficas* son la creación de puntos , rectas , trazados , las herramientas de desplazamiento , entre otras.

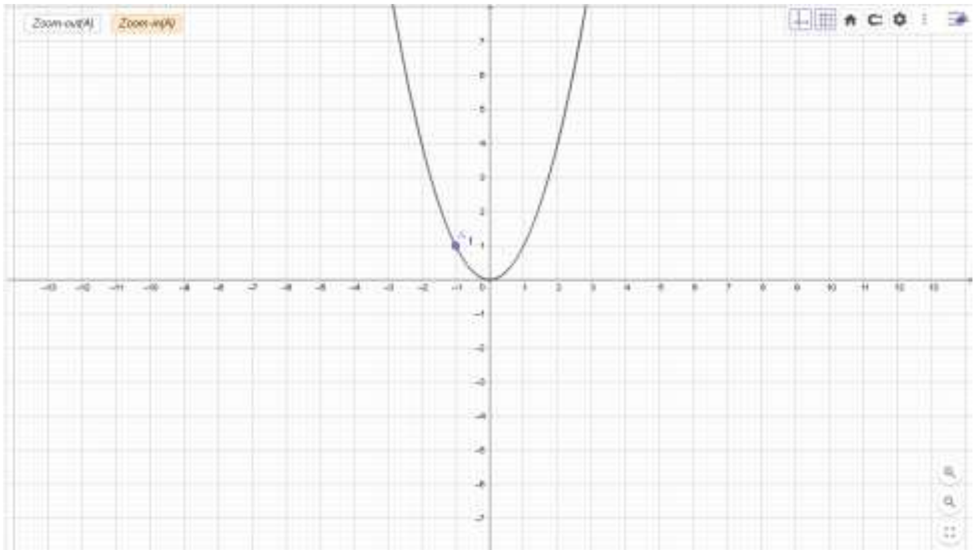
Vista algebraica

Se encuentra en el lado izquierdo de la pantalla, permite visualizar las expresiones algebraicas que determinan a los objetos geométricos.



Vista gráfica

Es el espacio principal dentro de la pantalla donde se muestra la representación gráfica de objetos matemáticos como las curvas, puntos, rectas y otros elementos relacionados con las actividades propuestas.



Antes de iniciar

A continuación, se describirán las herramientas necesarias para poder compartir de forma eficiente y personalizada, la información recabada en las actividades.

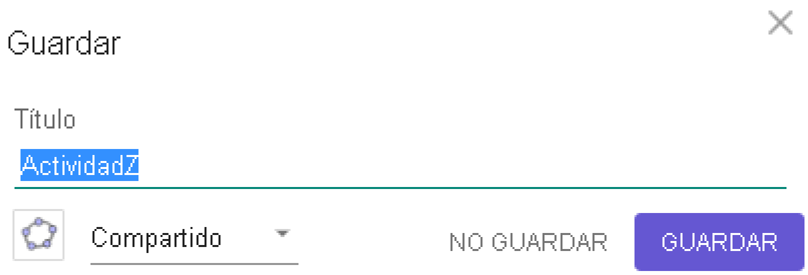
Abrir sesión

En la *barra de menú*, la opción de *Abrir sesión* es para guardar información en la nube, al seleccionarla aparece la siguiente ventana, la cual permite crear una nueva cuenta o acceder si ya tenemos cuenta de GeoGebra.

Una vez iniciada sesión, en lugar de aparecer *Abrir sesión*, aparece el nombre de usuario registrado.

Guardar

En la *barra de menú* seleccionamos la opción *Guardar*, en la cual aparece la siguiente ventana emergente.

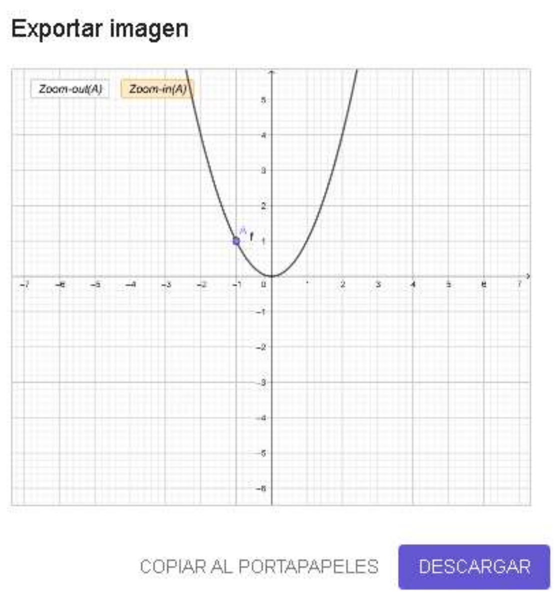


Para cambiar el nombre del archivo, basta con hacer *clic* en el nombre del archivo para poder activar el cursor y modificar el nombre. Después basta con seleccionar el botón guardar.

Exportar imagen

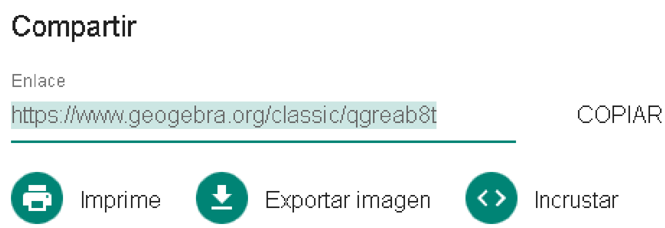
En la *barra de menú*, seleccionamos la opción de *Exportar Imagen* y aparece la siguiente ventana con dos opciones.

Si se selecciona Descargar, la imagen se descarga en el directorio predeterminado de forma automática con el nombre del archivo en formato .png. Por ejemplo, si el archivo es ActividadZ, las imágenes descargadas aparecerán de la siguiente forma:



Compartir

Al seleccionar la opción *Compartir* ubicada en la *barra de menú* de GeoGebra, se desplegará una ventana emergente donde aparece el enlace del programa en la nube, se debe seleccionar la opción *Copiar* para obtener el enlace.



De esta forma con quién se comparta el enlace, podrá acceder al archivo de GeoGebra en la nube.

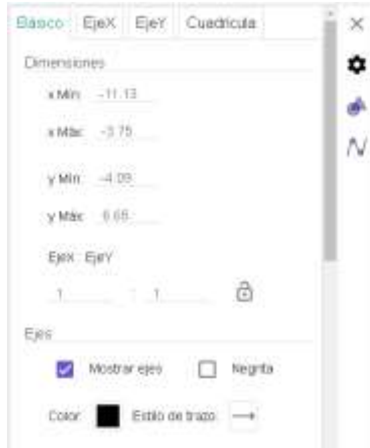
Herramientas

GeoGebra ofrece una amplia variedad de herramientas y funciones, en este instructivo podrás familiarizarte con algunas de las herramientas esenciales para las actividades planeadas, las cuales serán mostradas en orden alfabético.

Ajustar escala

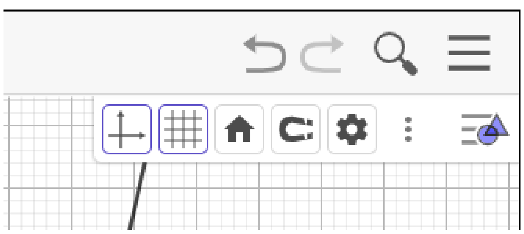
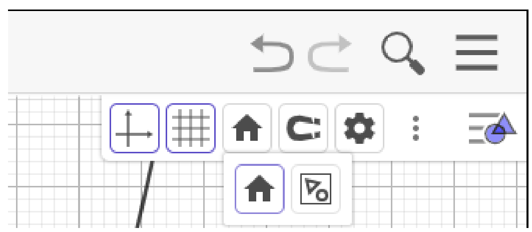
Para ajustar la escala, hacer *clic derecho* en la pantalla y seleccionar Eje X:Eje Y a 1:1.

También podemos ajustar la escala, al ir a la *barra de herramientas* cuando no está seleccionado ningún objeto y hacer *clic* en el *engrane* , en la sección de básico, ir a Eje X:Eje Y y escribir 1:1 en los espacios correspondientes.

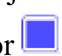


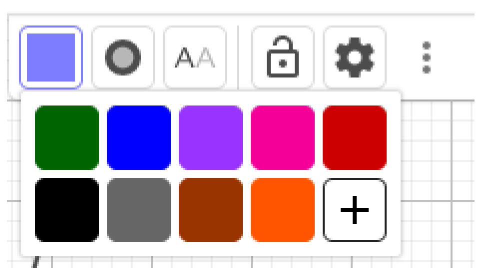
Casita

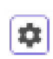
Para recuperar la configuración predeterminada de la vista gráfica, cuando no hay ningún objeto seleccionado, se requiere localizar el ícono de la *casita* en la *barra de herramientas*, al hacer *clic* sobre esta, y luego en la *casita* de la pestaña correspondiente.

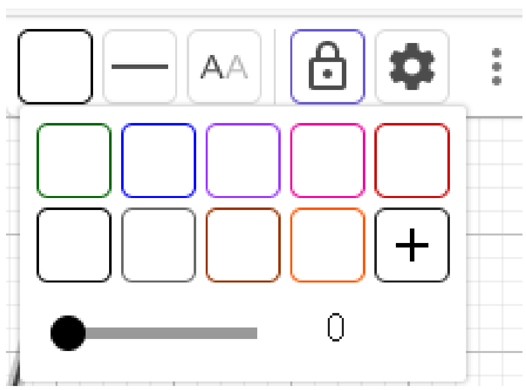
Color de objeto

Para cambiar el color de un objeto, primero selecciona el objeto de interés, por ejemplo, un punto, en la *barra de herramientas*, escoger el icono de color  y al hacer *clic* se despliega un repertorio de colores, en caso de querer otro, hacer *clic* en + para encontrar más colores



También podemos cambiar el color del objeto al ir a la *barra de herramientas* cuando está seleccionado el objeto de interés y al hacer *clic* en el *engrane* , escoger la opción de *Color*, en la cual aparece una mayor gama de colores.

El *color* en la *barra de herramientas* para otros objetos, como rectas, es muy similar al punto.

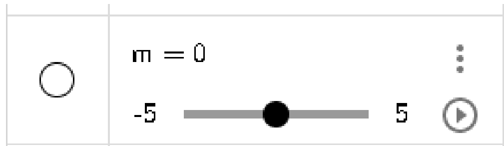


Color de texto

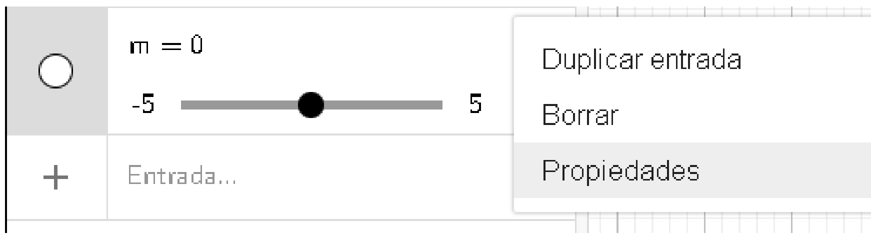
Una vez que tenemos un *texto en la pantalla*, por ejemplo, el texto "Pendiente", primero se selecciona el texto de interés, después en *la barra de herramientas*, al hacer *clic* en el icono  se despliega un repertorio de colores, en caso de querer otro, hacemos clic en + para encontrar más colores

Deslizador

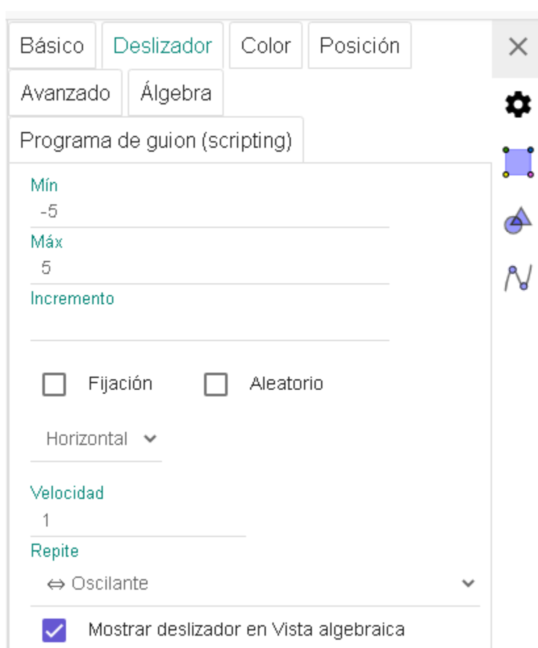
Un *deslizador* es la representación de una variable que toma distintos valores numéricos. Para generar un *deslizador*, en la *entrada* de la *vista algebraica*, escribimos el nombre del deslizador (sin espacios), el signo igual (=) y el valor inicial que tendrá, al oprimir <enter> se genera el deslizador, por ejemplo, generamos el deslizador *m=0*, el cual aparece en la *vista algebraica* de la siguiente forma.



Seleccionando en la *vista algebraica* los *tres puntos* aparecen las siguientes opciones:



Al hacer *clic* en la opción de *propiedades*, GeoGebra despliega un menú de opciones en la pestaña de *deslizador*, se observa que los valores predeterminados del deslizador son valor mínimo -5, valor máximo 5 (cuando el valor inicial del deslizador esta entre -5 y 5) con incrementos de .1 (aunque no aparezca de forma previa), en caso de querer modificar alguno de estos valores, es necesario escribir el valor que se desee.



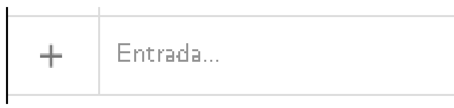
Desplazar vista gráfica

La herramienta de *Desplazar vista gráfica*, como su nombre lo indica, permite mover la *vista gráfica*, lo cual es útil para explorar diferentes partes de una curva. Para hacer uso de esta, en la *barra de herramientas gráficas*, escoger el icono de *Generales* y al hacer *clic* se despliega un menú de herramientas, en este caso hacemos *clic* en Desplaza Vista Gráfica.

Observamos que una vez que la herramienta está activada, al hacer *clic* en alguna parte libre de objetos, a medida que mueves el mouse, la vista gráfica se desplazará en la dirección correspondiente. Para deshabilitar esta función necesaria ir a la *barra de herramientas gráficas*, escoger el icono de desplazamiento y hacer *clic* Mueve.

Entrada

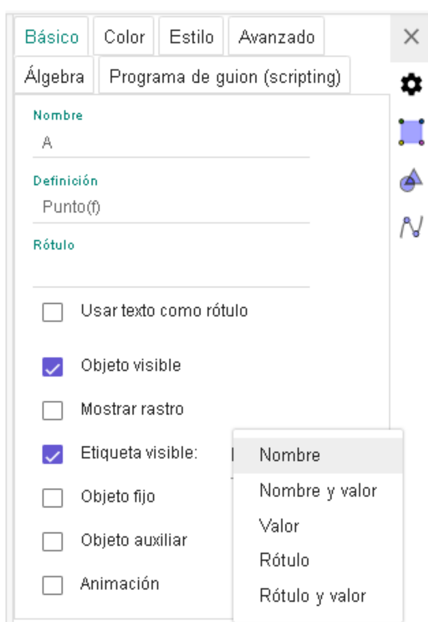
En la *vista algebraica* de se encuentra la *entrada*, la cual permite ingresar comandos y expresiones matemáticas para crear construcciones geométricas y manipular objetos.



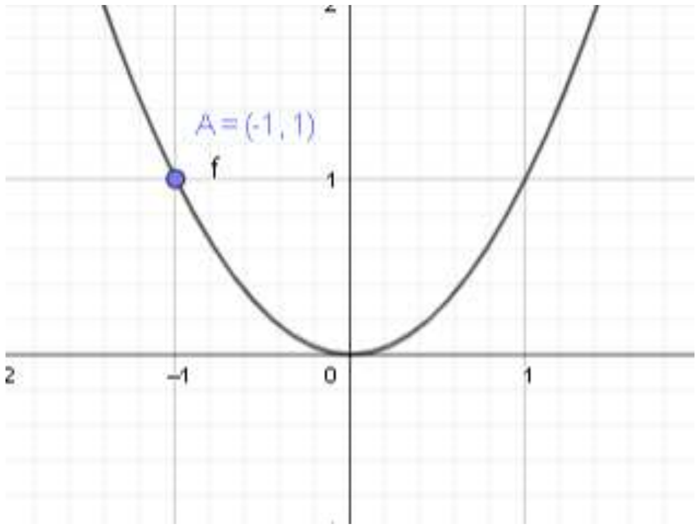
Para introducir objetos, basta con escribir la ecuación del objeto y hacer <enter> o hacer *clic* en cualquier otro punto de la pantalla. Para introducir símbolos con subíndices como m_s es necesario escribir *m_s*, para escribir símbolos con exponentes como x^3, se escribe *x^3*.

Etiqueta visible

Esta herramienta permite ver qué información aparece con respecto de un objeto de interés. Seleccionar el objeto, al ir a la *barra de herramientas* hacemos *clic* en el *engrane*, en la opción de *Básico*, en la opción de *Etiqueta visible* elegimos la opción que más nos interese.

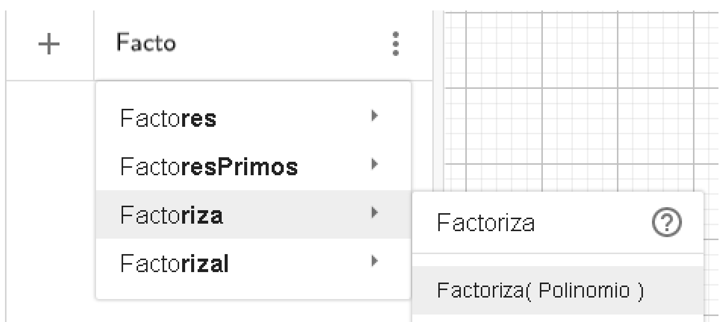


Por ejemplo, usando la opción *Nombre y valor* en la imagen anterior, en la *vista gráfica* aparece el nombre del punto igualado a las coordenadas correspondientes.



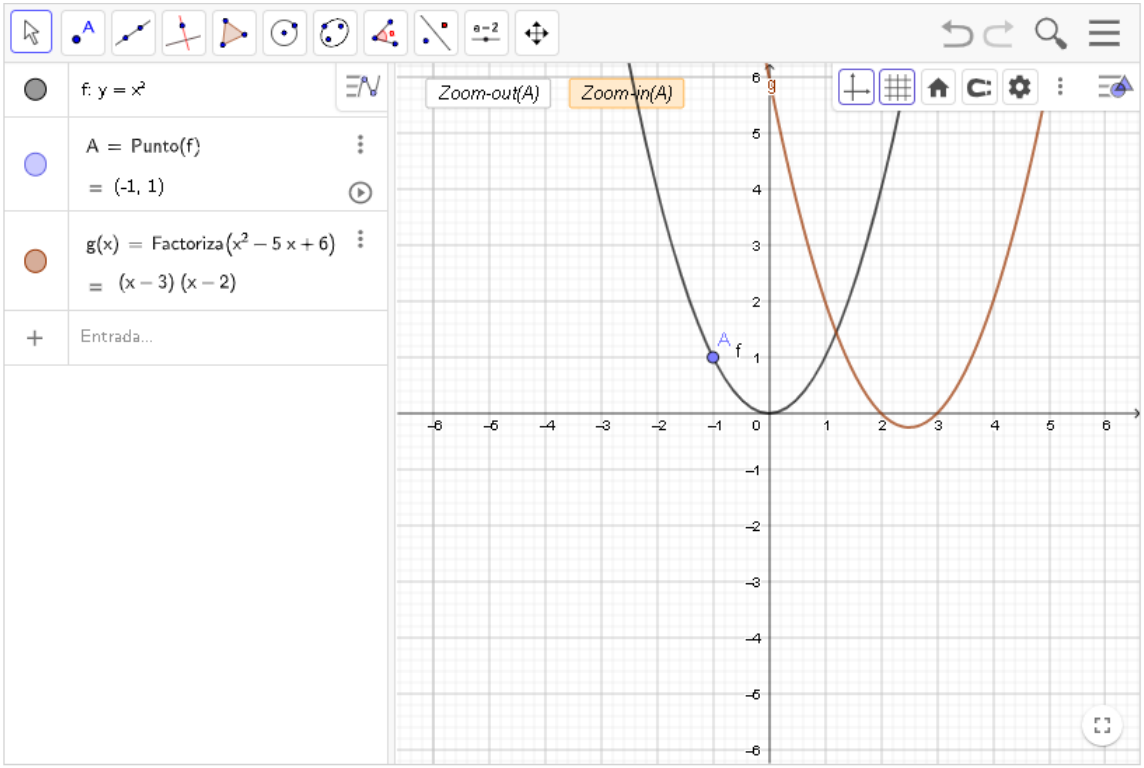
Factoriza(Polinomio)

El comando *Factoriza(Polinomio)* en GeoGebra intentará factorizar la expresión matemática dada. Para hacer uso de este comando, en la *línea de entrada* al escribir Factoriza, GeoGebra completa la expresión y seleccionamos *Factoriza(Polinomio)*.

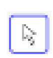
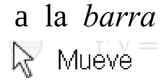


Una vez seleccionada la opción indicada, GeoGebra nos indica que escribamos el polinomio que nos interesa factorizar dentro del paréntesis. Después de ingresar la expresión, presiona la tecla <enter> o haz clic en cualquier parte de la ventana para ejecutar el comando.

GeoGebra calculará y mostrará el resultado de la factorización en la vista algebraica y además graficará al polinomio dado. Por ejemplo, consideramos al polinomio $x^2 - 5x + 6$, GeoGebra lo factoriza como $(x-3)(x-2)$, además de graficarlo.



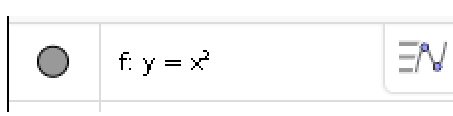
Intersección

La herramienta de *intersección* permite calcular y visualizar los puntos de intersección entre diferentes objetos geométricos. Para hacer uso de esta, en la *barra de herramientas gráficas*, escoger el icono de puntos  y al seleccionarlo se despliega un menú de herramientas, en este caso hacemos *clic* en  para habilitar la herramienta. Haciendo *clic* directamente sobre una de las intersecciones entre dos objetos, se crea ese único punto de intersección. Para deshabilitar esta función es necesario ir a la *barra de herramientas gráficas*, escoger el icono de desplazamiento  y hacer *clic* .

Modificar objeto

Para modificar un objeto desde la *vista algebraica*, buscar el objeto de interés y hacer *clic* la expresión que deseas modificar.

Consideramos el caso de $y = x^2$ y queremos cambiar a $y = x^3$, el cual en la *vista algebraica* aparece de la siguiente forma:



Haciendo *clic* en la expresión, al final de la línea de entrada aparece el símbolo de pleca "|", el cual indica que ya podemos editar la expresión. Haciendo uso del botón de retroceso en el teclado, eliminamos el valor de 2, escribimos el valor 3 y oprimimos <enter> para guardar la modificación.

En caso de haber borrado el exponente (el cursor aparece a la misma altura que x en lugar de solo el exponente), agregamos el símbolo ^ seguido del valor del exponente, es decir, ^3. Si se borra toda la expresión, escribimos en la entrada y=x^3.

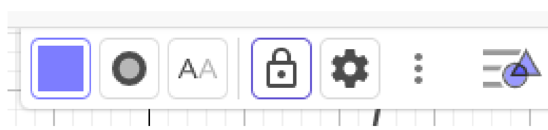
Mueve

La herramienta *mueve* es una de las herramientas fundamentales en GeoGebra, pues como su nombre lo dice, permite mover objetos libres. Para usar esta herramienta es necesario ir a la *barra de herramientas gráficas*, escoger el icono de desplazamiento  y hacer *clic* 

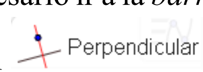
. Una vez activada la herramienta, basta con seleccionar en la *vista gráfica* el objeto de interés.

Objeto fijo

Se utiliza para fijar un objeto en una posición específica en la *vista gráfica*, lo que impide que se mueva cuando se realizan cambios en la construcción. Para fijar un objeto, primero seleccionamos el objeto de interés, en este caso un punto, después en la *barra de herramientas* correspondiente, seleccionamos el icono de objeto fijo  y al hacer *clic* el icono se transforma a .

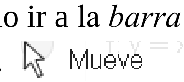


Perpendicular

Esta herramienta se utiliza para construir una línea perpendicular a otra línea, segmento o vector en la vista gráfica. Para usar esta herramienta es necesario ir a la *barra de herramientas gráficas*, escoger el icono de trazados  y hacer *clic* en 

. Basta con hacer *clic* en la recta de interés y el punto en esta para poder generar la perpendicular a la recta que pasa por el punto dado (es indistinto el orden en que se realiza).

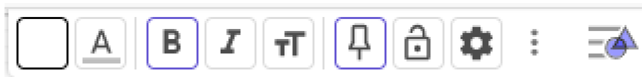
En caso de hacer *clic* en un lugar donde no existe un punto, se generará un punto, por lo que solo habrá que seleccionar la recta a la que será perpendicular.

Para deshabilitar esta función es necesario ir a la *barra de herramientas gráficas*, escoger el icono de desplazamiento  y hacer *clic* 

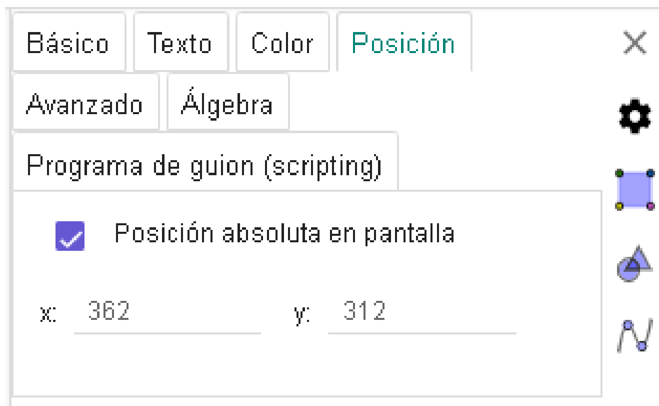
.

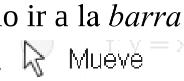
Posición absoluta en pantalla

Esta herramienta permite que el objeto se vea siempre en el mismo lugar de la *vista gráfica* (haciendo Zoom, por ejemplo), salvo el arrastre de este. Para usar la *posición absoluta en pantalla* de un texto, primero seleccionamos el texto de interés, en a la *barra de herramientas* correspondiente.



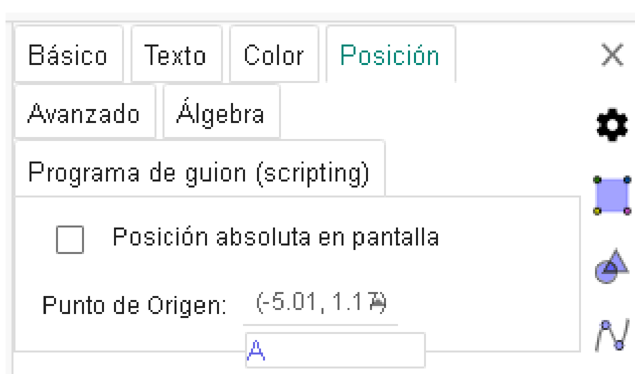
Se hace *clic* icono de *posición absoluta en pantalla*  . También podemos usar esta herramienta al ir a la *barra de herramientas* cuando no está seleccionado ningún objeto y hacer *clic* en el *engrane* , escoger la opción de *Posición* y palomeamos la opción *posición absoluta en pantalla*.



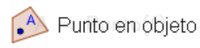
Para deshabilitar esta función es necesario ir a la *barra de herramientas gráficas*, escoger el icono de desplazamiento  y hacer *clic*  .

Posición de letrero

Esta herramienta permite asignarle a un objeto un nombre dado por un texto. Seleccionamos el *texto en la pantalla* en la *vista gráfica,* al ir a la *barra de herramientas* correspondiente hacemos *clic* en el *engrane* , escoger la opción de *Posición* y en *Punto de origen* elegimos el objeto al cual queremos asignarle el nombre, por ejemplo, el punto A.



Punto en objeto

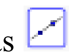
Para usar esta herramienta es necesario ir a la *barra de herramientas gráficas*, escoger el icono de *punto*  y hacer *clic* en 

. Para generar el punto, basta con seleccionar un lugar cualquiera en el objeto de interés.

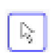
Para deshabilitar esta función y evitar hacer más puntos, en la *barra de herramientas gráficas*, escoger el icono de desplazamiento  y hacer *clic* 

.

Recta

Esta herramienta crea una recta que pasa por dos puntos. Para usar esta herramienta es necesario ir a la *barra de herramientas gráficas*, escoger el icono de rectas  y hacer *clic* en 

. Si ya tenemos dos puntos por los que queremos generar la recta, solo los seleccionamos, si falta al menos un punto, al usar este comando se genera (al menos) un punto por el cual pasara por la recta.

Para deshabilitar esta función necesaria ir a la *barra de herramientas gráficas*, escoger el icono de desplazamiento  y hacer *clic* 

.

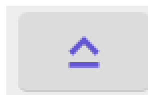
Teclado de GeoGebra

Utilizando primero la *Entrada*, GeoGebra automáticamente abre el teclado con el siguiente aspecto:

Seleccionando la opción **ABC**, aparece el alfabeto latino.

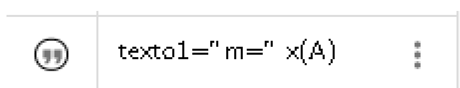
Seleccionado la opción $\alpha\beta\gamma$, se accede al alfabeto griego.

En caso de querer activar las letras mayúsculas (para ambos alfabetos) seleccionamos

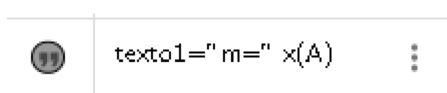


Texto en pantalla

Al insertar texto en GeoGebra, se pueden agregar comentarios o aclaraciones a las construcciones para facilitar la comprensión y comunicación de ideas. Utilizando la *entrada*, por ejemplo "m=" $x(A)$ (en donde "m=" es el texto y x(A) es la abscisa de A), al oprimir <enter> GG lo precede con texto1= , apareciendo en la *vista algebraica* de la siguiente forma.



Sin embargo, el texto no aparecerá en la *vista gráfica*, entonces para que este sea visible es necesario seleccionar el botón , obteniendo que el texto en la *vista algebraica* se visualizara de esta forma.



7.3 Secuencia pedagógica

En cada actividad, la profesora la realizará para la curva $f(x) = x^2$ en el punto (-1,1) ante el grupo e inmediatamente después la realizan los alumnos para (1,1) y luego para (0,0). La secuencia de pasos en GeoGebra (GG) es común a Profesora y alumnos.

Actividad 1.

Personaliza para registrar tu Actividad: Al *Guardar Localmente*, edita el Título **ActividadZ**, por ejemplo, cambiándolo a Actividad1-(1,1)-TuNombre. Consideraremos los siguientes pasos para llegar al resultado deseado. Después de ciertos pasos realizados, selecciona *Exportar Imagen*, realiza tus observaciones (Reporte de la Actividad 1), guarda los archivos PNG al terminar la actividad.

0. Si nos dan el programa de GeoGebra donde las coordenadas de A no son las deseadas, hay que hacer *clic* en el punto A, sostener y arrastrar al punto hasta la posición con las coordenadas adecuadas. Ajustar la escala en caso de ser necesario (Cuando la escala sea diferente de 1:1) [Instructivo GG: Ver herramienta *Ajustar Escala*]
1. Utilizar Zoom-in(A) un par de veces. *Exportar Imagen* [Instructivo GG: herramienta *Exportar Imagen*.]
2. Utilizar de nuevo Zoom-in(A) dos o tres veces. *Exportar Imagen*.
3. Utilizar Zoom-in(A) a discreción hasta que la curva alrededor de A parezca una recta. *Exportar Imagen*.

¿Te es posible calcular la pendiente m_0 de la recta en la que se convirtió la curva aprovechando el cuadriculado de GeoGebra? En caso afirmativo escribe en tu reporte cuál es la pendiente, cómo se dedujo, en caso contrario ¿Podrías explicar por qué no obtuviste el resultado? Y continúa con la actividad.

4. Seleccionar un punto auxiliar B, distinto de A, sobre la curva [Instructivo GG: Ver herramienta *Punto en Objeto*].
5. Escribir en la *Entrada* la diferencia de ordenadas de los puntos y asignarlo a la variable Δy (incremento *algebraico* de *y*): $\Delta y = y(A) - y(B)$, donde $y(A)$ es la ordenada (la *y*) del punto A y donde $y(B)$ es la ordenada, o sea la y, del punto B (deja que GeoGebra haga los cálculos por ti) [Instructivo GG: Ver herramientas *Entrada* y *Teclado de GeoGebra*].
6. Expresar la diferencia de abscisas de los puntos y asignarlo a la variable Δx (incremento *algebraico* de *x*): $\Delta x = x(A) - x(B)$ (GeoGebra sustituye los valores), donde $x(A)$ es la abscisa, o sea, la primera coordenada del punto A y donde $x(B)$ es la abscisa, o sea la x, del punto B.
7. Asigna a m el valor del cociente de incrementos en A: $m = (\Delta y)/(\Delta x)$ (GeoGebra escribe $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ y calcula su valor).

8. Escribe “m_0=” m “(Aprox)”. Cuando oprimas <enter> GG lo precede con texto1=. Para reflejar el texto en pantalla (*vista gráfica*), dale *clic* en el botón a la izquierda de la línea de texto, dale *clic* al letrero, luego al *engrane,* elige Posición y palomea Posición absoluta en pantalla. [Instructivo GG: Ver herramienta *Texto* y *Posición absoluta en pantalla*].
9. Aplicar Zoom-in(A) para que el valor de la pendiente m, al mover B en la pantalla sea casi constante, elige *Exportar Imagen* para dar cuenta del proceso.
10. El valor de m obtenido le llamaremos la pendiente de la curva en el punto A.

Recuerda que después de completar estos pasos, debes de enviar el reporte correspondiente.

Actividad 2.

Personaliza para registrar tu Actividad: Al *Guardar Localmente*, edita el Título **ActividadZ**, por ejemplo, cambiándolo a Actividad2-(1,1)-TuNombre. Consideraremos los siguientes pasos para llegar al resultado deseado. Después de ciertos pasos realizados, selecciona *Exportar Imagen*, realiza tus observaciones (Reporte de la Actividad 2), guarda los archivos PNG al terminar la actividad.

0. Si nos dan el programa de GeoGebra donde las coordenadas de A no son las deseadas, hay que hacer *clic* en el punto A, sostener y arrastrar al punto hasta la posición con las coordenadas adecuadas. Considera la conveniencia de fijar el punto A [Instructivo GG: Ver herramienta *Objeto fijo*].
1. Agregar + (programa) la *Expresión* de la ecuación de la recta propuesta como la tangente $y = m_0\big(x - x(A)\big) + y(A)$ (GeoGebra sustituye los valores correspondientes de $x(A)$ y $y(A)$), donde m_0 es el valor de la pendiente de la curva (hallado en la Actividad 1) que debes sustituir. Observa que cuando sustituyes $x = x(A)$ en la ecuación obtienes $y = y(A)$. [Esto quiere decir que la recta pasa por el punto ¿?]
2. Elegir los colores adecuados tanto de la curva $f(x) = x^2$, como de la recta $y = \_\big(x - x(A)\big) + y(A)$. [Instructivo GG: Ver herramienta *Color de objeto*]Utilizar Zoom-in(A) las veces necesarias hasta que la curva cerca de A se confunda con la recta propuesta. Sus colores se combinan en una misma recta [Éxito]. Utilizar *Exportar Imagen* varias veces para ilustrar el proceso.

Recuerda que después de completar estos pasos, debes de enviar el reporte correspondiente.

Actividad 3.

Personaliza para registrar tu Actividad: Al *Guardar Localmente*, edita el Título **ActividadZ**, por ejemplo, cambiándolo a Actividad3-(1,1)-TuNombre. Consideraremos los siguientes pasos para llegar al resultado deseado. Después de ciertos pasos realizados, selecciona *Exportar Imagen*, realiza tus observaciones (Reporte de la Actividad 3), guarda los archivos PNG al terminar la actividad.

0. Si nos dan el programa de GeoGebra donde las coordenadas de A no son las deseadas, hay que hacer *clic* en el punto A, sostener y arrastrar al punto hasta la posición con las coordenadas adecuadas. Considera la conveniencia de fijar el punto A [Instructivo GG: Ver herramienta *Objeto fijo*].
1. Agregar en la *Entrada* la expresión de la ecuación de la recta propuesta como la tangente $y = m_0\big(x - x(A)\big) + y(A)$, donde m_0 es el valor de la pendiente de la curva (Actividad 1) que debes sustituir (GeoGebra sustituye los valores de $x(A)$ y $y(A)$) [Instructivo GG: Ver herramienta *Entrada*].
2. Seleccionar un punto auxiliar B, distinto de A, sobre la curva $f(x) = x^2$. [Instructivo GG: Ver herramienta *Punto en objeto*].
3. Construir recta que pasa por A y B. [Instructivo GG: Ver herramienta *Recta*]
4. Elegir los colores adecuados tanto de la curva $f(x) = x^2$, como de la recta secante y el de la tangente, el cual debe ser, de preferencia, "dominante". [Instructivo GG: Ver *Color de objeto*]
5. Escribir la *Entrada* "m_0=<valor>", donde debes sustituir el <valor> correspondiente. Cuando oprimas <enter> GG lo precede con texto1=. Refleja el texto en pantalla (*vista gráfica*) y escoge el mismo color de texto para la recta tangente generada anteriormente. Dale *clic* en el botón a la izquierda de la línea de texto, dale *clic* al letrero, luego al *engrane,* elige Posición y palomea Posición absoluta en pantalla [Instructivo GG: Ver herramientas *Texto en pantalla*, *Color de texto* y *Posición absoluta en pantalla*] .
6. Escribir en la *Entrada* diferencia de ordenadas de los puntos y asignarlo a la variable Δy (incremento *algebraico* de *y*): $\Delta y = y(A) - y(B)$, donde $y(A)$ es la ordenada (la *y*) del punto A y donde $y(B)$ es la ordenada, o sea la y, del punto B (deja que GeoGebra haga los cálculos por ti) [Instructivo GG: Ver herramientas *Entrada* y *Teclado de GeoGebra*]
7. Expresar la diferencia de abscisas de los puntos y asignarlo a la variable Δx (incremento *algebraico* de *x*): $\Delta x = x(A) - x(B)$ (GeoGebra sustituye los valores), donde $x(A)$ es la abscisa, o sea, la primera coordenada del punto A y donde $x(B)$ es la abscisa, o sea la x, del punto B.
8. Asigna a m el valor de la pendiente de la secante por B y A con: $m = (\Delta y)/(\Delta x)$ (GeoGebra escribe $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ y calcula su valor).
9. Escribe en la *Entrada* "m_S=" m. Cuando oprimas <enter> GG lo precede con texto2= . Refleja el texto en pantalla (*vista gráfica*) y escoge el mismo color de texto para la recta secante generada en el paso 3. Dale *clic* en el botón a la izquierda de la línea de texto, dale *clic* al letrero, luego al *engrane,* elige Posición y palomea Posición absoluta en pantalla. Has creado un *testigo* en pantalla para visualizar el proceso de cómo la pendiente de la secante, m_S, va aproximando la pendiente m_0 de la tangente en A.
10. Alternar la aplicación del Zoom-in(A) con acercar B a A a la mitad (o menos) de la distancia anterior, repetidamente, a discreción, hasta ver confundirse la secante y la curva con la tangente. Utilizar *Exportar Imagen* varias veces para ilustrar bien el proceso. Aparte de notar como m_S aproxima a m_0, hay otras variables que van cambiando.

Recuerda que después de completar estos pasos, debes de enviar el reporte correspondiente.

Actividad 4.

Personaliza para registrar tu Actividad: Al *Guardar Localmente*, edita el Título **ActividadZ**, por ejemplo, cambiándolo a Actividad4-(1,1)-TuNombre. Consideraremos los siguientes pasos para llegar al resultado deseado. Después de ciertos pasos realizados, selecciona *Exportar Imagen*, realiza tus observaciones (Reporte de la Actividad 4), guarda los archivos PNG al terminar la actividad.

0. Si nos dan el programa de GeoGebra donde las coordenadas de A no son las deseadas, hay que hacer clic en el punto A, sostener y arrastrar al punto hasta la posición con las coordenadas adecuadas. Considera la conveniencia de fijar el punto A [Instructivo GG: Ver herramienta *Objeto fijo*].
1. Agregar en la *Entrada* la expresión $m = m_0$, donde en vez de m_0 debes poner el valor numérico de la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto A que hallaste en la Actividad 1 y verificaste en la Actividad 2 (GeoGebra crea un *deslizador* de nombre m) [Instructivo GG: Ver herramientas *Entrada* y *Deslizador*].
2. Agregar en la *Entrada* la expresión correspondiente a la recta con pendiente m y que pase por el punto A: $y = m\big(x - x(A)\big) + y(A)$ (GeoGebra se encarga de sustituir los valores correspondientes). Si no has modificado el valor de m con el *deslizador*, GeoGebra habrá trazado la tangente a la curva en A.
3. Observar que cuando, al utilizar el *deslizador*, hacemos que m tome valores cercanos a m_0, logramos que la recta corte al menos en otro punto distinto de A. Para hacer observable y luego manejable esta situación se recomienda utilizar Zoom-in(A) y/o tomar valores de m no tan cercanos al de la pendiente m_0 de la tangente.
4. Generamos otro punto (distinto de A) en la *intersección* entre la curva y la recta. [Instructivo GG: Ver herramienta *Intersección*] GeoGebra le asigna el nombre B.
5. Agregar en la *Entrada* la diferencia de la ordenada de la curva menos la ordenada de la recta escribiendo $f(x) - g(x)$ [GG le llama $h(x)$ al completar $h(x) = f(x) - g(x)$]
6. Trazar las *perpendiculares* al eje X que pasan por los puntos de intersección de la curva y la recta, A (fijo) y B que varía con m. Queremos observar mejor los valores del Eje X, donde se proyectan las intersecciones de la recta y la curva. [Instructivo GG: Ver herramienta *Perpendicular*]. También estos pies de perpendicular son las raíces de $h(x)$.
7. En la *Entrada* escribe el comando *Factoriza(h)* [Instructivo GG: Ver herramienta *Factoriza(Polinomio)*], donde $h(x)$ es la expresión para la diferencia de ordenadas del paso 5. GG le llama $p(x)$; escribe $p(x) =$ *Factoriza(*h). Comprueba que el gráfico de $h(x)$ es el mismo que el de $p(x)$. Para ello cambia los colores de ambos, enciende y apaga. Finalmente elige un color llamativo para ambos. Muestra en pantalla la factorización de p [Instructivo GG: Ver herramientas *Color de objeto* y *Etiqueta visible*].

¿Qué ocurre con $p(x)$, cuando le vamos regresando gradualmente a m el valor m_0? Hay que proceder lentamente para capturar el proceso utilizando *Exportar Imagen* para cada uno de los valores de m intermedios (al menos 3 o 4) hasta el último, cuando $m = m_0$. Hay que proceder lentamente para comparar en cada paso la factorización de $p(x)$ y las raíces de $h(x) = p(x)$, cuyas observaciones anotarás en tu Reporte de la Actividad 4.

Recuerda que después de completar estos pasos, debes de enviar el reporte correspondiente

Nota: Las Actividades 1c, 2c, 3c y 4c, son como las Actividades 1, 2, 3 y 4, pero para la curva $\boldsymbol{f(x) = x^3}$ (en vez de $\boldsymbol{f(x) = x^2}$). Los casos son 1) A=(-1,-1) para la Profesora, 2) A=(1,1) para los alumnos y 3) A=(0,0) para los alumnos.

En principio los pasos de las Actividades 1 y 1c, Actividades 2 y 2c, etcétera, serán los mismos, excepto que hay un Paso 00 (doble cero) anterior al Paso 0 en donde, cambiando el exponente 2 por 3, para que quede $\boldsymbol{f(x) = x^3}$.

Actividad 1c.

Personaliza para registrar tu Actividad: Al *Guardar Localmente*, edita el Título **ActividadZ**, por ejemplo, cambiándolo a Actividad1c-(1,1)-TuNombre. Consideraremos los siguientes pasos para llegar al resultado deseado. Después de ciertos pasos realizados, selecciona *Exportar Imagen*, realiza tus observaciones (Reporte de la Actividad 1c), guarda los archivos PNG al terminar la actividad.

00. Editar la línea $f(x) = x^2$ en la *vista algebraica*, cambiando el exponente 2 por 3, para que quede $f(x) = x^3$. [Instructivo GG: Ver herramienta *Modificar objeto desde vista algebraica*].
0. Si nos dan el programa de GeoGebra donde las coordenadas de A no son las deseadas, hay que hacer *clic* en el punto A, sostener y arrastrar al punto hasta la posición con las coordenadas adecuadas. Ajustar la escala en caso de ser necesario (Cuando la escala sea diferente de 1:1) [Instructivo GG: Ver herramienta *Ajustar Escala*]
1. Utilizar Zoom-in(A) un par de veces. *Exportar Imagen* [Instructivo GG: herramienta *Exportar Imagen*.]
2. Utilizar de nuevo Zoom-in(A) dos o tres veces. *Exportar Imagen*.
3. Utilizar Zoom-in(A) a discreción hasta que la curva alrededor de A parezca una recta. *Exportar Imagen*.

¿Te es posible calcular la pendiente m_0 de la recta en la que se convirtió la curva aprovechando el cuadriculado de GeoGebra? En caso afirmativo escribe en tu reporte cuál es la pendiente, cómo se dedujo, en caso contrario ¿Podrías explicar por qué no obtuviste el resultado? Y continúa con la actividad.

4. Seleccionar un punto auxiliar B, distinto de A, sobre la curva. [Instructivo GG: Ver herramienta *Punto en Objeto*].

5. Escribir en la *Entrada* la diferencia de ordenadas de los puntos y asignarlo a la variable Δy (incremento *algebraico* de *y*): $\Delta y = y(A) - y(B)$, donde $y(A)$ es la ordenada (la *y*) del punto A y donde $y(B)$ es la ordenada, o sea la y, del punto B (deja que GeoGebra haga los cálculos por ti) [Instructivo GG: Ver herramientas *Entrada* y *Teclado de GeoGebra*].
6. Expresar la diferencia de abscisas de los puntos y asignarlo a la variable Δx (incremento *algebraico* de *x*): $\Delta x = x(A) - x(B)$ (GeoGebra sustituye los valores), donde $x(A)$ es la abscisa, o sea, la primera coordenada del punto A y donde $x(B)$ es la abscisa, o sea la x, del punto B.
7. Asigna a m el valor del cociente de incrementos en A: $m = (\Delta y)/(\Delta x)$ (GeoGebra escribe $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ y calcula su valor).
8. Escribe "m_0=" m "(Aprox)". Cuando oprimas <enter> GG lo precede con texto1= . Para reflejar el texto en pantalla (*vista gráfica*), dale *clic* en el botón a la izquierda de la línea de texto, dale *clic* al letrero, luego al *engrane,* elige Posición y palomea Posición absoluta en pantalla. [Instructivo GG: Ver herramienta *Texto* y *Posición absoluta en pantalla*].
9. Aplicar Zoom-in(A) para que el valor de la pendiente m, al mover B en la pantalla sea casi constante, elige *Exportar Imagen* para dar cuenta del proceso.
10. El valor de m obtenido le llamaremos la pendiente de la curva en el punto A.

Recuerda que después de completar estos pasos, debes de enviar el reporte correspondiente.

Actividad 2c.

Personaliza para registrar tu Actividad: Al *Guardar Localmente*, edita el Título **ActividadZ**, por ejemplo, cambiándolo a Actividad2c-(1,1)-TuNombre. Consideraremos los siguientes pasos para llegar al resultado deseado. Después de ciertos pasos realizados, selecciona *Exportar Imagen*, realiza tus observaciones (Reporte de la Actividad 2c), guarda los archivos PNG al terminar la actividad.

00. Editar la línea $f(x) = x^2$ en la *vista algebraica*, cambiando el exponente 2 por 3, para que quede $f(x) = x^3$.[Instructivo GG: Ver herramienta *Modificar objeto desde vista algebraica*].
0. Si nos dan el programa de GeoGebra donde las coordenadas de A no son las deseadas, hay que hacer *clic* en el punto A, sostener y arrastrar al punto hasta la posición con las coordenadas adecuadas. Considera la conveniencia de fijar el punto A [Instructivo GG: Ver herramienta *Objeto fijo*].
1. Agregar + (programa) la *Expresión* de la ecuación de la recta propuesta como la tangente $y = m_0\big(x - x(A)\big) + y(A)$ (GeoGebra sustituye los valores correspondientes de $x(A)$ y $y(A)$), donde m_0 es el valor de la pendiente de la curva (hallado en la Actividad 1) que

debes sustituir. Observa que cuando sustituyes $x = x(A)$ en la ecuación obtienes $y = y(A)$. [Esto quiere decir que la recta pasa por el punto ¿?]

2. Elegir los colores adecuados tanto de la curva $f(x) = x^2$, como de la recta $y = \_\big(x - x(A)\big) + y(A)$. [Instructivo GG: Ver herramienta *Color de objeto*]
3. Utilizar Zoom-in(A) las veces necesarias hasta que la curva cerca de A se confunda con la recta propuesta. Sus colores se combinan en una misma recta [Éxito]. Utilizar *Exportar Imagen* varias veces para ilustrar el proceso.

Recuerda que después de completar estos pasos, debes de enviar el reporte correspondiente

Actividad 3c.

Personaliza para registrar tu Actividad: Al *Guardar Localmente*, edita el Título **ActividadZ**, por ejemplo, cambiándolo a Actividad3c-(1,1)-TuNombre. Consideraremos los siguientes pasos para llegar al resultado deseado. Después de ciertos pasos realizados, selecciona *Exportar Imagen*, realiza tus observaciones (Reporte de la Actividad 3c), guarda los archivos PNG al terminar la actividad.

00. Editar la línea $f(x) = x^2$ en la *vista algebraica*, cambiando el exponente 2 por 3, para que quede $f(x) = x^3$.
0. Si nos dan el programa de GeoGebra donde las coordenadas de A no son las deseadas, hay que hacer *clic* en el punto A, sostener y arrastrar al punto hasta la posición con las coordenadas adecuadas . Considera la conveniencia de fijar el punto A
1. Agregar en la *Entrada* la expresión de la ecuación de la recta propuesta como la tangente $y = m_0\big(x - x(A)\big) + y(A)$, donde m_0 es el valor de la pendiente de la curva (Actividad 1c) que debes sustituir (GeoGebra sustituye los valores de $x(A)$ y $y(A)$) [Instructivo GG: Ver herramienta *Entrada*].
2. Seleccionar un punto auxiliar B, distinto de A, sobre la curva $f(x) = x^2$.
3. Construir recta que pasa por A y B. [Instructivo GG: Ver herramienta *Recta*]
4. Elegir los colores adecuados tanto de la curva $f(x) = x^2$, como de la recta secante y el de la tangente, el cual debe ser, de preferencia, “dominante”. [Instructivo GG: Ver *Color de objeto*]
5. Escribir la *Entrada* “m_0=<valor>”, donde debes sustituir el <valor> correspondiente. Cuando oprimas <enter> GG lo precede con texto1=. Refleja el texto en pantalla (*vista gráfica*) y escoge el mismo color de texto para la recta tangente generada anteriormente. Dale *clic* en el botón a la izquierda de la línea de texto, dale *clic* al letrero, luego al *engrane,* elige Posición y palomea Posición absoluta en pantalla.
6. Escribir en la *Entrada* diferencia de ordenadas de los puntos y asignarlo a la variable Δy (incremento *algebraico* de *y*): $\Delta y = y(A) - y(B)$, donde $y(A)$ es la ordenada (la *y*) del punto A y donde $y(B)$ es la ordenada, o sea la y, del punto B (deja que GeoGebra haga los cálculos por ti) [Instructivo GG: Ver herramientas *Entrada* y *Teclado de GeoGebra*]

7. Expresar la diferencia de abscisas de los puntos y asignarlo a la variable Δx (incremento *algebraico* de *x*): $\Delta x = x(A) - x(B)$, donde $x(A)$ es la abscisa, o sea, la primera coordenada del punto A y donde $x(B)$ es la abscisa, o sea la x, del punto B.
8. Asigna a m el valor de la pendiente de la secante por B y A con: $m = (\Delta y)/(\Delta x)$.
9. Escribe en la *Entrada* "m_S=" m. Cuando oprimas <enter> GG lo precede con texto2=. Refleja el texto en pantalla (*vista gráfica*) y escoge el mismo color de texto para la recta secante generada en el paso 3. Dale *clic* en el botón a la izquierda de la línea de texto, dale *clic* al letrero, luego al *engrane,* elige Posición y palomea Posición absoluta en pantalla. Has creado un *testigo* en pantalla para visualizar el proceso de cómo la pendiente de la secante, m_S, va aproximando la pendiente m_0 de la tangente en A.
10. Alternar la aplicación del Zoom-in(A) con acercar B a A a la mitad (o menos) de la distancia anterior, repetidamente, a discreción, hasta ver confundirse la secante y la curva con la tangente. Utilizar *Exportar Imagen* varias veces para ilustrar bien el proceso. Aparte de notar como m_S aproxima a m_0, hay otras variables que van cambiando.

Recuerda que después de completar estos pasos, debes de enviar el reporte correspondiente.

Actividad 4c.

Personaliza para registrar tu Actividad: Al *Guardar Localmente*, edita el Título **ActividadZ**, por ejemplo, cambiándolo a Actividad4c-(1,1)-TuNombre. Consideraremos los siguientes pasos para llegar al resultado deseado. Después de ciertos pasos realizados, selecciona *Exportar Imagen*, realiza tus observaciones (Reporte de la Actividad 3c), guarda los archivos PNG al terminar la actividad.

00. Editar la línea $f(x) = x^2$ en la *vista algebraica*, cambiando el exponente 2 por 3, para que quede $f(x) = x^3$. [Instructivo GG: Ver herramienta *Modificar objeto desde vista algebraica*].
0. Si nos dan el programa de GeoGebra donde las coordenadas de A no son las deseadas, hay que hacer clic en el punto A, sostener y arrastrar al punto hasta la posición con las coordenadas adecuadas. Considera la conveniencia de fijar el punto A [Instructivo GG: Ver herramienta *Objeto fijo*].
1. Agregar en la *Entrada* la expresión $m = m_0$, donde en vez de m_0 debes poner el valor numérico de la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto A que hallaste en la Actividad 1c y verificaste en la Actividad 2c (GeoGebra crea un *deslizador* de nombre m) [Instructivo GG: Ver herramientas *Entrada* y *Deslizador*].
2. Agregar en la *Entrada* la expresión correspondiente a la recta con pendiente m y que pase por el punto A: $y = m\big(x - x(A)\big) + y(A)$ (GeoGebra se encarga de sustituir los valores correspondientes). Si no has modificado el valor de m con el *deslizador*, GeoGebra habrá trazado la tangente a la curva en A.
3. Observar que, al utilizar el *deslizador*, hacemos que m tome valores cercanos a m_0, logramos que la recta corte al menos en otro punto distinto de A. Para hacer observable

y luego manejable esta situación se recomienda utilizar Zoom-in(A) y/o tomar valores de m no tan cercanos al de la pendiente m_0 de la tangente.

4. Generamos otro punto (distinto de A) en la *intersección* entre la curva y la recta. [Instructivo GG: Ver herramienta *Intersección*] GeoGebra le asigna el nombre B.
5. Agregar en la *Entrada* la diferencia de la ordenada de la curva menos la ordenada de la recta escribiendo $f(x) - g(x)$ [GG le llama $h(x)$ al completar $h(x) = f(x) - g(x)$]
6. Trazar las *perpendiculares* al eje X que pasan por los puntos de intersección de la curva y la recta, A (fijo) y B que varía con m. Queremos observar mejor los valores del Eje X, donde se proyectan las intersecciones de la recta y la curva. [Instructivo GG: Ver herramienta *Perpendicular*]. También estos pies de perpendicular son las raíces de $h(x)$.
7. En la *Entrada* escribe el comando *Factoriza(h)* [Instructivo GG: Ver herramienta *Factoriza(Polinomio)*], donde $h(x)$ es la expresión para la diferencia de ordenadas del paso 5. GG le llama $p(x)$; escribe $p(x) =$ *Factoriza(h)*. Comprueba que el gráfico de $h(x)$ es el mismo que el de $p(x)$. Para ello cambia los colores de ambos, enciende y apaga. Finalmente elige un color llamativo para ambos. Muestra en pantalla la factorización de p [Instructivo GG: Ver herramientas *Color de objeto* y *Etiqueta visible*].

¿Qué ocurre con $p(x)$, cuando le vamos regresando gradualmente a m el valor m_0? Hay que proceder lentamente para capturar el proceso utilizando *Exportar Imagen* para cada uno de los valores de m intermedios (al menos 3 o 4) hasta el último, cuando $m = m_0$. Hay que proceder lentamente para comparar en cada paso la factorización de $p(x)$ y las raíces de $h(x) = p(x)$, cuyas observaciones anotarás en tu Reporte de la Actividad 4c.

Recuerda que después de completar estos pasos, debes de enviar el reporte correspondiente.

Actividad 5.

Personaliza para registrar tu Actividad: Al *Guardar Localmente*, edita el Título **ActividadZ**, por ejemplo, cambiándolo a Actividad5-(1,1)-TuNombre. Consideraremos los siguientes pasos para llegar al resultado deseado. Después de ciertos pasos realizados, selecciona *Exportar Imagen*, realiza tus observaciones (Reporte de la Actividad 5), guarda los archivos PNG al terminar la actividad.

0. Si nos dan el programa de GeoGebra donde las coordenadas de A no son las deseadas, hay que hacer clic en el punto A, sostener y arrastrar al punto hasta la posición con las coordenadas adecuadas.
1. Introducir la expresión: $m_0 = 2x$(A) [Instructivo GG: Ver herramienta *Entrada*]
2. Introducir: $y = m_0\big(x - x(A)\big) + y(A)$ [la ecuación funcional de la recta por el punto A con la pendiente del paso anterior]
3. Introducir un letrero: “m_0=” m_0 y hazlo visible[Instructivo GG: Ver herramienta *Texto en pantalla*]
4. Fija el letrero en la pantalla creando anteriormente en el punto A [Instructivo GG: Ver herramienta *Posición de letrero*].

5. Experimenta arrastrando al punto A. Puedes realizar unas pocas instantáneas en diversas posiciones con *Exportar Imagen*. [Instructivo GG: Ver *Desplaza vista* en caso de ser necesario]
6. Elige unos tres puntos que sean distintos de los ya vistos (0,0), (1,1) y (-1,1), por ejemplo, que tengan pendiente m_0 igual a -4, 1 y 3, para verificar como en la Actividad 2, en cada caso, aplicando Zoom-in(A) repetidamente, la tangente y la curva se confunden (i.e. la tangente es la mejor aproximación lineal a la curva cerca del punto en cuestión). Utilizar *Exportar Imagen* al menos dos veces para cada punto.

Recuerda que después de completar estos pasos, debes de enviar el reporte correspondiente.

Actividad 5c.

Personaliza para registrar tu Actividad: Al *Guardar Localmente*, edita el Título **ActividadZ**, por ejemplo, cambiándolo a Actividad5c-(1,1)-TuNombre. Consideraremos los siguientes pasos para llegar al resultado deseado. Después de ciertos pasos realizados, selecciona *Exportar Imagen*, realiza tus observaciones (Reporte de la Actividad 5c), guarda los archivos PNG al terminar la actividad.

00. Editar la línea $f(x) = x^2$ en la *vista algebraica*, cambiando el exponente 2 por 3, para que quede $f(x) = x^3$.[Instructivo GG: Ver herramienta *Modificar objeto desde vista algebraica*].
0. Si nos dan el programa de GeoGebra donde las coordenadas de A no son las deseadas, hay que hacer clic en el punto A, sostener y arrastrar al punto hasta la posición con las coordenadas adecuadas.
1. Introducir la expresión: $m_0 = 2x(\mathrm{A})$ [Instructivo GG: Ver herramienta *Entrada*]
2. Introducir: $y = m_0\big(x - x(A)\big) + y(A)$ [la ecuación funcional de la recta por el punto A con la pendiente del paso anterior]
3. Introducir un letrero: “m_0=” m_0 y hazlo visible[Instructivo GG: Ver herramienta *Texto en pantalla*]
4. Fija el letrero en la pantalla creando anteriormente en el punto A [Instructivo GG: Ver herramienta *Posición de letrero*].
5. Experimenta arrastrando al punto A. Puedes realizar unas pocas instantáneas en diversas posiciones con *Exportar Imagen*. [Instructivo GG: Ver *Desplaza vista* en caso de ser necesario]
6. Elige unos tres puntos que sean distintos de los ya vistos (0,0), (1,1) y (-1,1), por ejemplo, que tengan pendiente m_0 igual a -4, 1 y 3, para verificar como en la Actividad 2, en cada caso, aplicando Zoom-in(A) repetidamente, la tangente y la curva se confunden (i.e. la tangente es la mejor aproximación lineal a la curva cerca del punto en cuestión). Utilizar *Exportar Imagen* al menos dos veces para cada punto

Recuerda que después de completar estos pasos, debes de enviar el reporte correspondiente.

Actividad 6.

Personaliza para registrar tu Actividad: Al *Guardar Localmente*, edita el Título **ActividadZ**, por ejemplo, cambiándolo a Actividad6-(1,2)-TuNombre. Consideraremos los siguientes pasos para llegar al resultado deseado. Después de ciertos pasos realizados, selecciona *Exportar Imagen*, realiza tus observaciones (Reporte de la Actividad 6), guarda los archivos PNG al terminar la actividad.

00. Editar la línea $f(x) = x^2$ en la *vista algebraica*, para que quede $f(x) = x^3 + x^2$.[Instructivo GG: Ver herramienta *Modificar objeto desde vista algebraica*].
0. Si nos dan el programa de GeoGebra donde las coordenadas de A no son las deseadas, hay que hacer clic en el punto A, sostener y arrastrar al punto hasta la posición con las coordenadas adecuadas.
1. Calcula la pendiente de la recta tangente en el punto (1,2), utilizando cualquiera de los métodos vistos anteriormente.
2. Escribe en la *Entrada* “m_0”=<valor>=, donde <valor> es la pendiente de la recta tangente calculada en el paso anterior.
3. Agregar+(programa) la *Expresión* de la ecuación de la recta propuesta como la tangente $y = m_0\big(x - x(A)\big) + y(A)$ (GeoGebra sustituye los valores correspondientes de $x(A)$ y $y(A)$), donde m_0 es el valor de la pendiente de la curva que debes sustituir.
4. Verifica que la recta propuesta como tangente realmente es una recta tangente. Utilizar *Exportar Imagen* varias veces para ilustrar el proceso.

¿Tu construcción funciona para cualquier punto de la curva? (Verifica moviendo el punto A sobre la curva)

¿Por qué?

Recuerda que después de completar estos pasos, debes de enviar el reporte correspondiente