CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Interpretaciones del signo igual que movilizan estudiantes de tercer año de preparatoria al resolver problemas aritmético-algebraicos: Un estudio exploratorio

T E S I S

Que presenta

IRVIN ARELLANO ROSAS

Para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

EN LA ESPECIALIDAD DE MATEMATICA EDUCATIVA

Director de la Tesis:

Dr. Armando Solares Rojas

Ciudad de México Agosto, 2024

Agradecimientos

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) por el apoyo financiero que recibí durante mis estudios de maestría por medio de la beca otorgada con número de registro 772441.

Agradecimientos

A mi director de tesis, Armando Solares Rojas, por su inagotable apoyo, paciencia y calidez. ¡Gracias por todo lo que me enseñaste!

A los sinodales, Teresa Rojano Ceballos y Hugo Mejía Velasco, por haber aceptado revisar mi trabajo. Gracias por su tiempo, sus observaciones y su ejemplo.

A todos los miembros del Departamento de Matemática Educativa por hacer que muchas personas podamos avanzar en nuestros proyectos personales y profesionales. En especial, quiero agradecer a Adriana Parra Hernández, pues sin su ayuda no hubiera podido concluir mis estudios. ¡Gracias por siempre ser tan profesional, amable y optimista!

A todos mis compañeros por haber compartido su tiempo.

Y a mi familia, claro. No hay palabras que sirvan para expresar el profundo amor que siento por ustedes. ¡Gracias por caminar conmigo esta vida!

Dedicatoria

A todos los seres quienes, intencionalmente o por accidente, me enseñan cada día a servir mejor a los demás.

Resumen

En este estudio se exploran las interpretaciones del signo igual que los estudiantes de preparatoria movilizan durante la resolución de problemas aritméticos y algebraicos. Aunque se presenta una clasificación de tales interpretaciones, el interés está en su emergencia, en el contexto en el que surgen, y en las relaciones que se forman a propósito de la resolución de problemas.

Como hay pocas investigaciones en torno a la comprensión de la igualdad en poblaciones de estudiantes del nivel medio superior, no hay consenso sobre cuáles nociones de la igualdad podrían tener. Debido a esto se categorizó a las distintas formas de interpretar a la igualdad que se reportan en la literatura. Los detalles de esta categorización se exponen en la tesis.

También se presenta un análisis de las características de los instrumentos de recolección de datos que se han usado mayormente en esta línea de investigación. Derivado de este análisis se plantea la propuesta de investigar la comprensión de los estudiantes durante la resolución de problemas no-rutinarios. Con base en dicha propuesta se elaboró una secuencia de problemas que tiene el potencial de movilizar igualdades entre expresiones aritméticas y algebraicas. Esta secuencia se utiliza como instrumento de recolección de datos para este estudio.

Una de las conclusiones es que la emergencia de las interpretaciones de los estudiantes sobre la igualdad responde a las necesidades del trabajo matemático que desarrollan. A pesar de que algunas de sus interpretaciones funcionan en la aritmética tradicional pero no en contextos algebraicos, el proceso de resolución de problemas abrió la posibilidad de discutir y desarrollar sus ideas sobre la igualdad, cosa que derivó en la articulación de distintos usos del signo igual según el objetivo que tuvieran. Otras conclusiones y reflexiones sobre la continuidad de este trabajo se presentan al final del documento.

Abstract

This study explores the interpretations of the equal sign that high school students mobilize during arithmetic and algebraic problem solving. Although a classification of such interpretations is presented, the interest lies in their emergence, in the context in which they arise, and in the relationships that are formed during problem solving.

As there is little research on the understanding of equality in high school student populations, there is no consensus on what notions of equality they might have. Because of this, we categorized the different ways of interpreting equality that are reported in the literature. The details of this categorization are exposed in the thesis.

An analysis of the characteristics of the data collection instruments that have been mostly used in this line of research is also presented. Derived from this analysis, a proposal is made to investigate students' comprehension during the resolution of non-routine problems. Based on this proposal, a sequence of problems was elaborated that has the potential to mobilize equality between arithmetic and algebraic expressions. This sequence is used as a data collection instrument for this study.

One of the conclusions is that the emergence of the students' interpretations of equality responds to the needs of the mathematical work they develop. Despite the fact that some of their interpretations work in traditional arithmetic but not in algebraic contexts, the problem solving process opened the possibility of discussing and developing their ideas about equality, which resulted in the articulation of different uses of the equal sign according to the objective they had. Other conclusions and reflections on the continuity of this work are presented at the end of the thesis.

Contenido

Introducción

Desde hace al menos 40 años han sido temas de interés en educación matemática tanto las interpretaciones de los estudiantes sobre el signo igual, como su relación con el aprendizaje del álgebra (Baroody y Ginsburg, 1983; Behr, Erlwagner y Nichols, 1976; Byers y Herscovics, 1977; Denmark, Barco y Voran, 1976; Kieran, 1981).

Los estudios en torno a estos temas de investigación han dejado claros cuando menos dos hechos. En primer lugar, las formas en que los estudiantes interpretan la igualdad deben de cambiar conforme aumentan en sofistificación sus experiencias matemáticas (Bush y Karp, 2013; Knuth et al., 2006; Molina y Ambrose, 2008). Mientras que para afrontar tareas aritméticas tradicionales es suficiente pensar que el signo igual separa operaciones de su resultado (por ejemplo, $7 \cdot 5 = 35$ o $2 + 7 = 9$), esta noción no alcanza para interpretar una expresión como $2x + 1 = 5$ (Renwick, 1932). Y aunque alguien pueda resolver la ecuación $2x + 1 = 5$ “deshaciendo” las operaciones aritméticas del miembro izquierdo, necesita reconocer que el signo expresa equivalencia para trabajar ecuaciones como $2x + 5 = 3x - 1$, pues su resolución requiere operar la incógnita, cosa que se sale del dominio de la aritmética (Filloy y Rojano, 1989).

En segundo lugar, las investigaciones reportan que la manera de interpretar al signo igual no tiende a evolucionar espontánea ni linealmente conforme se avanza de grado escolar (Chesney, et al., 2013; Filloy, Rojano y Solares, 2010; Kieran, 1981; Knuth et al., 2011; Mainela-Arnold et al., 2011; McNeil, 2007, 2014; McNeil y Alibali, 2004). Este fenómeno podría ser problemático para quienes estén iniciándose en el estudio del álgebra, pues para transitar de la aritmética hacia el álgebra es necesario extender el significado calculatorio del signo igual (Matthews y Fuchs, 2020).

Por lo tanto, la intervención del profesor en la enseñanza del concepto de igualdad podría ser para muchos estudiantes no solo la puerta hacia el álgebra, sino también un recurso para dotar de sentido a objetos algebraicos y mejorar su aprendizaje (Solares y Kieran, 2013). Pero antes de pretender implementar cualquier método didáctico es necesario fijar un punto de partida, conocer qué interpretaciones del signo igual tienen los estudiantes. Y aunque este problema ha sido estudiado ampliamente en los niveles escolares básicos, niños de entre 6 y 13 años de edad, todavía faltan investigaciones en poblaciones de estudiantes de mayor edad:

> “El desarrollo de la comprensión del signo igual se ha considerado tradicionalmente como algo que tiene lugar en los primeros grados escolares y, a partir de entonces, se le ha dado una atención limitada en los últimos años escolares” (Sumpter y Löwenhielm, 2022, p.1).

Pues bien, precisamente en este proyecto de tesis se pretende recabar información sobre el modo en el que los estudiantes de preparatoria interpretan al asigno igual. Si bien, por los alcances de este proyecto, pueden obtenerse resultados no concluyentes, al menos se espera que sirvan para esbozar la cartografía de los terrenos que investigaciones futuras pueden describir mejor.

1. Antecedentes

1.1 Comprensión relacional y comprensión operacional del signo igual

1.1.1 ¿Qué se entiende por cada tipo de comprensión?

Renwick (1932) emprendió uno de los primeros estudios enfocados en investigar las interpretaciones de los estudiantes sobre el signo igual. Encontró que la mayoría asocia al signo igual con la instrucción “realiza las operaciones” o bien considera que separa operaciones aritméticas de “su respuesta”. Renwick sugiere que estas interpretaciones pueden dificultar el aprendizaje del álgebra. Por ejemplo, la expresión $2x + 1 = 5 + x$ carece de sentido si se piensa al signo igual de las formas anteriores.

De acuerdo con Kieran (2022), no fue sino hasta la década de los 70’s que la investigación en torno a la comprensión del signo igual se profundizó. Para los 80’s había indicios de que estudiantes de diversos niveles educativos tenían una comprensión parcial del signo igual y de la relación de igualdad que denota (Kieran, 1981; Van de Walle, 1980). La importancia de este hallazgo se acentuó por las consecuencias que podría haber en el aprendizaje de los estudiantes:

> Más aún, una comprensión restringida de la igualdad puede continuar en la preparatoria y universidad y puede afectar al aprendizaje de las matemáticas en estos niveles. (Byers y Herscovics, 1977, p. 5)

Hacia finales del siglo XX ya era conocido que los estudiantes jóvenes tendían a interpretar al signo igual más como un signo *operacional* que como una relación matemática (Baroody y Ginsburg, 1983; Behr, Erlwagner y Nichols, 1976, 1980; *Falkner, Levi y Carpenter, 1999*). Era común que para ellos este signo evocara alguna acción o regla: “calcula el total”, “da la respuesta del problema”, “suma todos los números”, “encuentra la respuesta”, “termina el problema”, “opera lo del miembro izquierdo y pon su resultado en el miembro derecho”, etc. (Baroody y Ginsburg, 1983; Byers y Herscovics,1977; Denmark, Barco y Voran, 1976; Donovan et al., 2022; Ginsburg, 1977; Kieran, 1981). En este caso se dice que los estudiantes tienen una comprensión operacional del signo igual.

Por otro lado, “una concepción relacional del signo igual consiste en entender que el símbolo $=$ denota la ‘igualdad’ de dos cantidades o expresiones” (Donovan et al., 2022, p. 1200). Es decir, las cantidades o expresiones a ambos lados del signo están relacionadas y que son equivalentes (Kiselman y Mouwitz, 2008). Luego una comprensión relacional del signo igual implica reconocer que expresa equivalencia entre las expresiones que conecta.

1.1.2 Algunas causas y consecuencias de la comprensión operacional

A día de hoy, la investigación sobre la comprensión del signo igual ha cristalizado dos categorías. Por un lado está el signo igual visto como un signo que denota una relación de equivalencia, la igualdad. Por otro, puede ser interpretado como un signo que separa “operaciones” de su “resultado”, donde a la izquierda están las operaciones y a la derecha su resultado, o bien evocar alguna acción procedimental (Ying, 2020).

En distintas regiones geográficas, como Occidente, Sudáfrica, India y Asia Occidental, es común que los estudiantes interpreten al signo igual operacionalmente (Behr, Erlwanger y Nichols, 1980; Byrd et al., 2015; Eichhorn, Perry y Brombacher, 2018; Fyfe, Mathews y Amsel, 2020; Jones et al., 2012; Li et al., 2008; Machaba y Makgakga, 2016; McAuliffe, Tambara y Simsek, 2020; Mickey y McClelland, 2014; Simsek et al., 2021; Stephens et al., 2013; Vermeulen y Meyer, 2017; Vincent et al., 2015; Wardat, Jarrah y Stoica, 2021).

Estudiantes de primaria, por ejemplo, suelen pensar al signo igual como indicador de alguna acción o bien de su consumación: “sumar todos los números”, “obtener el total”, “terminar el problema”, “la respuesta del problema”, “a la izquierda se escriben las operaciones y a la derecha su resultado”, etc. (Byrd et al., 2015; Stephen et al., 2013).

Asimismo, la literatura reporta que los estudiantes de secundaria también poseen una noción principalmente operacional del signo igual (Bush y Karp, 2013; Jones et al., 2013; Kieran, 1981; Knuth et al., 2005, 2006, 2011; McNeil y Alibali, 2005a). Si bien sus interpretaciones se vuelven más sofisticadas conforme avanzan de grado escolar, no llegan a desprenderse por completo de un carácter operacional. Por ejemplo, aunque se inclinan menos por la idea de que el signo igual indica “sumar todos los números” siguen pesando en él como el preludio de “la respuesta al problema” (Knuth et al., 2011).

En relación con lo anterior se pueden plantear las siguientes preguntas: ¿A qué se debe este fenómeno? ¿Será que la propensión a lo operacional es temporal? ¿Es desventajosa una interpretación operacional? Como se explica a continuación, *la teoría de la resistencia al cambio del desarrollo de la igualdad* (McNeil, 2014) permite proponer respuestas a estas preguntas.

A grandes rasgos, la teoría de la resistencia al cambio sostiene que la experiencia temprana y constante con tareas que involucran al signo igual en contextos aritméticos repetitivos y rutinarios ocasiona que los estudiantes se apeguen, inconsciente e incidentalmente, a esquemas mentales donde este signo tiene una connotación operacional (McNeil, 2014). Además, esta forma de interpretar al signo igual puede persistir en el tiempo porque es difícil de cambiar sin que haya instrucción de por medio (Nelson y Fyfe, 2019).

Los resultados obtenidos en algunas investigaciones recientes refuerzan la teoría de la resistencia al cambio (Byrd et al., 2015; Chesney et al., 2013; Fischer et al., 2019; Jones et al., 2012; McNeil et al., 2017; Mickey y McClelland, 2014; Nelson y Fyfe, 2019; Ying, 2020). Por ejemplo, la literatura documenta que incluso estudiantes universitarios pueden exhibir las mismas interpretaciones rígidas del signo igual que tienen estudiantes de educación básica, interpretaciones que probablemente datan de su niñez (Baiduri, 2015; Chesney et al., 2013; Fyfe el at., 2020). De hecho, en el estudio de Fyfe y sus colegas (Fyfe et al., 2020) se encontró que 1 de cada 6 estudiantes universitarios posee únicamente una interpretación operacional del signo igual. Por lo tanto, si se adopta una visión estrictamente operacional de la igualdad, podría quedar arraigada aun cuando el contexto exija interpretaciones más flexibles.

La teoría de la resistencia al cambio no solo hace explicita la importancia de las experiencias tempranas de aprendizaje de la igualdad matemática, sino también explica el origen de algunas interpretaciones operacionales del signo igual. En los libros de texto occidentales regularmente los problemas aritméticos tienen el formato $a + b \ = \square$ (Capraro et al., 2011, 2012; Powell, 2012; Voutsina, 2019), del que se pueden extraer al menos tres patrones que conducen a interpretaciones operacionales. En primer lugar, los estudiantes retienen que a la izquierda del signo igual están las operaciones a efectuar y a la derecha el resultado —que se espera calculen (Swithinbank, 2015). El esquema unidireccional $operaciones = resultado$ ocasiona que para resolver el problema $\square = 2 + 3$ primero tengan que reescribirlo como $2 + 3 = \square$ y solo entonces ponen 5 en el cuadro (Ginsurg, 1977). O bien, reescriben a $\square = 2 + 3$ como $\square + 2 = 3$, permutando $=$ y $+$ en el enunciado original (Behr, Erlwanger y Nichols, 1980). Esta interpretación se puede describir de la siguiente manera: el signo separa un “conjunto de operaciones” de “su respuesta” exactamente en ese orden, de izquierda a derecha.

El segundo patrón que adoptan los estudiantes es que el signo igual evoca la realización de “las operaciones indicadas” sobre “los números dados”; en otras palabras, evoca una regla o un procedimiento rutinario (McNeil y Alibali, 2005; Nelson y Fyfe, 2019; Tilley, 2011; Vincent et al., 2015). Un fenómeno que refleja esta interpretación es la considerable dificultad que experimentan con problemas como $8 + 4 = \square + 5$ (ver figura 1.1). Algunos suman todos los números y afirman que 17 es la solución; otros suman todos los números que anteceden al signo igual y proponen como solución a 12.

Figura 1.1

Prevalencia de soluciones incorrectas del problema $8 + 4 = \square + 5$

Percent of children offering various solutions to 8 + 4 = □ + 5

Grade	Answers Given					Number of Children
	7	12	17	12 and 17	Other	
1	0	79	7	0	14	42
1 and 2	6	54	20	0	20	84
2	6	55	10	14	15	174
3	10	60	20	5	5	208
4	7	9	44	30	11	57
5	7	48	45	0	0	42
6	0	84	14	2	0	145

Nota. Los niños tienen dificultad al resolver problemas como $8 + 4 = \square + 5$ (Falkner, Levi y Carpenter, 1999, p. 233).

Finalmente, el tercer patrón consiste en que los estudiantes sintetizan los dos anteriores: entienden que en el signo igual está latente una acción. Por ello pueden tener dificultades al tratar de interpretar enunciados como $x = x$, pues no ven una acción que realizar (Fischer et al., 2019; Kieran, 1981; Oksuz, 2007; Stephens et al., 2013). Un ejemplo de esto se encuentra en la figura 1.2. Kieran (1981) explica que la mayoría de los niños “no pueden leer enunciados que expresen relaciones” (p. 318). Así que la igualdad $8 = 8$ podría carecer de sentido para los estudiantes aun cuando expresa la relación matemática más fundamental: la identidad (Gómez, 2014)

Figura 1.2

Soluciones de niños de primaria al problema $8 = \square$

Nota. Para los niños el signo igual evoca una acción (Tilley, 2011, p. 22).

Estos patrones operacionales ilustran algunas de las interpretaciones del signo igual que pueden tener los estudiantes. Interpretaciones que, según la teoría de la resistencia al cambio, podrían persistir conforme avanzan de grado escolar y por ende dificultar su aprendizaje de las matemáticas superiores. En este escenario, entender mejor el modo en el que los estudiantes interpretan la igualdad supone un primer paso hacia la toma de decisiones tanto didácticas como curriculares para favorecer su proceso de aprendizaje. En la siguiente sección se presentan algunos avances que ha habido en esta línea de investigación.

1.2 El desarrollo de la investigación sobre la noción de igualdad

1.2.1 De la comprensión operacional hacia la relacional

En la literatura es común que a través del desempeño de los estudiantes en tareas relacionadas con el signo igual se establezca qué tan sofisticadas son sus interpretaciones de la igualdad.

Tradicionalmente, el diseño de las tareas dependía de cada grupo de investigación. Según los criterios de cada grupo se otorgaba mayor o menor importancia a determinado problema o pregunta. Así en algún momento hubo en la literatura distintas tareas que se afirmaba eran idóneas para analizar un mismo concepto: la igualdad matemática. De acuerdo con Rittle-Johnson y su equipo (Rittle-Johnson et al., 2011) esto ocasionó que hubiera discrepancias entre las investigaciones. Un ejemplo de esto es el siguiente. Mientras Knuth y colegas (Knuth et al., 2006) concluyeron que regularmente los estudiantes de secundaria tenían dificultades con el concepto de equivalencia, Matthews y Rittle-Johnson (2009) reportaron que la mayoría de estos comprendía bien dicho concepto. ¿Por qué sus conclusiones son opuestas? Por el tipo de tareas que utilizaron. Los datos de Knuth y su equipo consistían en las definiciones que los estudiantes proponían del signo igual, mientras que Matthews y Rittle-Johnson se basaron en su desempeño al resolver problemas del tipo $3 + 8 = 5 + \_$.

Por consiguiente, en tanto no se homogeneizaran los criterios para estudiar la comprensión de la igualdad difícilmente las investigaciones podrían seguir profundizando. Debido a esto los trabajos de Matthews y sus colegas (Mathews et al., 2012; Rittle-Johson et al., 2011) supusieron un paso importante para asentar esta línea de investigación. Estos investigadores formularon un conjunto de problemas que sintetizó la diversidad de tareas que se hallaban en la literatura (por ejemplo Alibali et al., 2007; Baroody y Ginsburg, 1983; Behr et al., 1980; Carpenter et al., 2003; Knuth et al., 2006; Matthews y Rittle-Johnson, 2009; McNeil, 2007; Molina y Ambrose, 2008).

Aunque el objetivo primario de los equipos de Matthews era el desarrollo de un instrumento de evaluación de la comprensión de la igualdad, debido a su metodología, paralelamente propusieron un *mapa de constructo* de los conocimientos de los estudiantes sobre la igualdad (ver figura 1.3); esto es, “una representación del continuo de conocimientos a través del cual se cree que las personas progresan por el constructo considerado” (Rittle-Johson et al., 2011, p. 3).

Figura 1.3

Niveles del mapa de constructo de Rittle-Johnson y su equipo (Rittle-Johnson et al., 2011)

Level	Description
Level 4: Comparative relational	Successfully solve and evaluate equations by comparing the expressions on the two sides of the equal sign, including using compensatory strategies and recognizing that performing the same operations on both sides maintains equivalence. Recognize relational definition of equal sign as the best definition.
Level 3: Basic relational	Successfully solve, evaluate, and encode equation structures with operations on both sides of the equal sign. Recognize *and generate* a relational definition of the equal sign.
Level 2: Flexible operational	Successfully solve, evaluate, and encode atypical equation structures that remain compatible with an operational view of the equal sign.
Level 1: Rigid operational	Only successful with equations with an operations-equals-answer structure, including solving, evaluating, and encoding equations with this structure. Define the equal sign operationally.

Nota. Rittle-Johnson y su equipo proponen cuatro etapas de desarrollo para la comprensión de la equivalencia matemática (Rittle-Johnson et al., 2011, p. 3).

Bajo el supuesto de que la comprensión del signo igual evoluciona desde una noción operacional hacia una relacional, el mapa de constructo de Rittle-Johnson et al. (2011) muestra cuatro niveles o etapas que dan cuenta de los matices que podría tener el desarrollo de la comprensión de la igualdad en estudiantes de 7 a 12 años. La pertenencia a alguno de los cuatro niveles depende del tipo de problemas que los estudiantes puedan resolver.

Es importante señalar que el tránsito por los cuatro niveles del mapa no es automático. En general, los estudiantes no pueden progresar fácilmente hacia una comprensión más profunda del signo igual como resultado natural de su madurez cognitiva (Chimoni, Pitta-Pantazi y Christou, 2018; Filloy y Rojano, 1989; Pepin, Bergem y Klette, 2014; Kieran, 2007; Stephens et al., 2013).

La importancia tanto de la evaluación como del mapa de constructo desarrollados por Matthews y sus colegas (Matthews et al., 2012; Rittle-Johnson et al., 2011) queda de manifiesto en las diversas investigaciones que han echado mano de estas herramientas, que han buscado extenderlas a poblaciones de estudiantes de mayor edad y/o robustecer el mapa (por ejemplo, Fyfe et al., 2018, 2020; Lee y Pang, 2021, 2022; McAuliffe, Tambara y Simsek, 2020; Simsek et al., 2021; Singh y Kosko, 2017).

1.2.2 La propiedad sustitutiva de la igualdad matemática

El mapa de constructo de Rittle-Johnson et al. (2011) describe la transición desde una noción *operacional rígida* hacia una noción *relacional comparativa*, asumiendo esencialmente que hay un camino unidimensional.

No obstante, Jones et al. (2012, 2013) sostienen que la manera en que las interpretaciones de la igualdad evolucionan hacia una concepción relacional puede no seguir la trayectoria que teorizaron Rittle-Johnson et al. (2011). Esta afirmación surge del hecho de que en el nivel *relacional comparativo*, el último del mapa, no se considera una de las propiedades esenciales de la igualdad matemática, la característica sustitutiva. Por lo que Jones y su equipo propusieron una categoría para comprensión de la igualdad: "Una comprensión sofisticada del signo igual también implica considerar que '=' significa 'puede ser sustituido por', y ver los enunciados aritméticos como reglas para hacer intercambios de notación. Nos referimos a esto como la concepción *sustitutiva relacional* del signo igual" (Jones et al., 2013, p.34).

Aunque el carácter sustitutivo del signo igual representa solo una cualidad de la relación de igualdad que denota, en general no es fácil para los estudiantes percibir ni utilizar la sustitución de forma flexible en la resolución de problemas (Ying, 2020). Tener consciencia de la naturaleza sustitutiva de la igualdad en un determinado nivel de representación no asegura la habilidad de implementarla exitosamente en tareas más abstractas. Por ejemplo, al resolver sistemas de ecuaciones un estudiante puede ser capaz de sustituir variables por números, pero aun así tener dificultades al sustituir variables por expresiones que contengan una segunda variable (Filloy, Rojano y Solares, 2010).

Entre los educadores matemáticos hay quienes piensan que la característica sustitutiva de la igualdad es su atributo más valioso debido a la utilidad práctica que tiene (Mirin, 2019; Ying, 2020). Por ejemplo, Gattegno describe a la equivalencia en términos de la sustitución y afirma que esta caracterización es la que acentúa su potencial práctico:

> Vemos que la *identidad [identity]* es un tipo muy restrictivo de relación relativo a la similitud [*sameness*], que la *igualdad [equality]* designa un atributo que no cambia, y que la *equivalencia [equivalence]* atañe a una relación más amplia en la que uno acuerda que para ciertos propósitos es posible intercambiar una expresión por otra. La equivalencia, siendo la relación más general, también será la más flexible y por lo tanto la más útil (Gattegno, 1974; citado en Kieran, 1981, p. 317).

Por su parte, Ying (2020) propone que el nivel más sofisticado de comprensión del signo igual en una ecuación supone ver a la ecuación como una pieza de información que solamente muestra explícitamente *una* igualdad, pero a la vez aceptar que incluye otras igualdades implícitas, susceptibles de ser inferidas, que se pueden utilizar en la resolución de determinado problema.

Sin embargo, para los estudiantes puede no ser sencillo determinar cómo utilizar la característica sustitutiva de la igualdad en la práctica (Ying, 2020). Como se explica en la siguiente sección, esto se debe en parte a la diversidad de factores que influyen en la correcta sustitución de expresiones.

1.2.3 ¿Cómo sustituir?

La comprensión de la propiedad sustitutiva de la igualdad no consiste llanamente en aceptar que una expresión se puede cambiar por otra, sino en determinar cómo, dónde y por qué es pertinente realizar dicho intercambio (Jones et al., 2012). De hecho, "numerosas estrategias algebraicas funcionan gracias a la posibilidad de efectuar una sustitución formal en patrones estratégicos" (Freudenthal, 1983, p. 485).

Para ilustrar el punto anterior conviene analizar la siguiente observación de Freudenthal, que aparece en *Didactical phenomenology of mathematical structures* de 1983:

> Si en la expresión $a - b$ se remplaza *literalmente* a por $a + c$ se obtiene $a + c - b$; si se hace lo mismo pero ahora reemplazando b por $b + d$ entonces tenemos $a + c - b + d$. Sin embargo, $a + c - b - d$ es lo que debería resultar de sustituir a por $a + c$ y b por $b + d$ en $a - b$.
>
> La sustitución, que no es solo un reemplazo, permite deducir de la conocida igualdad $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ una más compleja:
>
> $$(a + c + b + d)(a + c - b - d) = (a + c)^2 - (b + d)^2.$$

Este ejemplo, tan concreto como es, pone en claro la sutileza de la propiedad sustitutiva de la igualdad. Por un lado, la sustitución de una expresión por otra sí hace referencia al intercambio de expresiones; pero, por otro lado, dicho intercambio debe ser compatible con la sintaxis y estructura de los enunciados. Precisamente es la ambivalencia de esta propiedad la que la hace tan versátil en el álgebra y a la vez tan delicada de manipular:

> Es una pena que [la sustitución] no sea tan formal como se tiende a creer, y ésta es una de las dificultades, quizás la principal, en el aprendizaje del lenguaje del álgebra (Freudenthal, 1983, p. 483).

En efecto, en la práctica no basta tener conciencia del potencial intercambio de dos expresiones, también es necesario realizar transformaciones premeditadas para inferir una sustitución consistente y útil para la resolución de un problema (Jones y Pratt, 2012; Ying, 2020).

1.3 Sobre el(los) significado(s) del signo igual

1.3.1 La polisemia del signo igual

Diversos investigadores reconocen que las interpretaciones del signo igual se pueden clasificar en dos categorías: operacional y relacional (Alibali et al., 2007, Bush y Karp, 2013; Byrd et al., 2015; Chimoni, Pitta-Pantazi y Christou, 2018; *Falkner et al., 1999;* Hornburg et al., 2021; Johannes et al., 2017; McNeil et al., 2019).

No obstante, otros tantos han sugerido que los significados que tiene el signo igual en las matemáticas no necesariamente pueden clasificarse en una de estas dos clases. Pues la interpretación del signo igual depende del contexto en el que aparezca (Borenson, 2015; Prediger, 2010; Vincent et al., 2015). Es decir, el que dos expresiones sean iguales depende del contexto en el que el término *igual* tenga definido un significado. Por eso es preferible decir que el signo igual denota “una” relación de igualdad y no “la” relación de igualdad (Ying, 2020). Esto puede comprobarse a través de algunos ejemplos:

- La expresión $5 + 8 = 6 + 7$ es una igualdad aritmética.
- La equivalencia $1/2 = 2/4$ refiere la igualdad de dos fracciones que representan el mismo número racional.
- En el caso de la expresión $2x + 2 = 2(x + 1)$ se tiene que el signo igual denota igualdad sintáctica (equivalencia formal).
- La relación
$$2x + 2 = \frac{(x + 1)(6x - 10)}{3x - 5} \quad para\ todo\ x\ número\ real\ tal\ que\ x \neq \frac{5}{3}$$
refiere igualdad semántica (equivalencia numérica).
- La ecuación $2x + 2 = x - 1$ supone una igualdad condicional: Si $2x + 2 = x - 1$, entonces el valor de x es 3 (ecuación condicional).
- Si A y B son conjuntos, la relación $A = B$ denota la igualdad de conjuntos: $z \in A \iff z \in B$.

En particular, entre los ejemplos se muestran tres grandes categorías en las que el signo igual expresa una perspectiva particular de igualdad matemática: equivalencia sintáctica, equivalencia semántica o numérica y ecuación condicional (Mirin, 2017; Prediger, 2010; Solares y Kieran, 2013). En el capítulo 2 se definen formalmente estos tipos de igualdades.

Un ejemplo notablemente distinto de los anteriores es el siguiente. En las calculadoras tradicionales la tecla que tiene al signo igual funciona para producir el resultado de una operación. Así que el signo igual funciona aquí como una indicación para ejecutar una acción; es decir, operacionalmente. Entonces, si los estudiantes están aprendiendo a utilizar la calculadora, la tendencia operacional a pensar que el signo igual separa “operaciones” de “su resultado” no solo es correcta sino deseable (Borenson, 2015; Mirin, 2020). Esto no quiere decir que una visión operacional de la igualdad sea suficiente, pues para el aprendizaje del álgebra es necesario que los estudiantes reconozcan la faceta relacional del signo igual (Filloy y Rojano, 1989; Qetrani, Ouailal y Achtaich, 2021). Es solo que este reconocimiento depende del contexto en que los estudiantes lo aprendan y no del signo igual *per se* (Ardiansari et al., 2020).

1.3.2 Las relaciones de igualdad en la resolución de problemas

En relación con lo anterior, el significado de la relación de igualdad que refiere el signo igual puede variar en función del contexto en el que usa. Los diversos significados que puede tener deben diferenciarse y cohabitar en un mismo plano cuando la resolución de algún problema lo requiera (Boggs et al., 2018; Borenson, 2015; Prediger, 2010). Por ejemplo, Prediger (2010) muestra que puede haber múltiples significados del signo igual en la resolución de un mismo problema (ver figura 1.3).

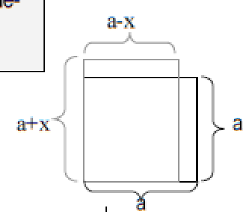
Por lo tanto, una interpretación flexible del signo igual implica reconocer que denota una relación de equivalencia, que tiene una característica sustitutiva y que puede adquirir diversos significados según el contexto. Pero también implica la habilidad de utilizar y articular sus distintos significados según las necesidades que surjan durante la resolución de problemas (Prediger, 2010).

Al considerar las interpretaciones del signo igual en contextos concretos se pueden apreciar nuevos matices de la comprensión de la igualdad. “El significado de un símbolo no puede ser separado de su contexto. La omisión de esta consideración conduce a una visión particularmente rígida de la comprensión de los estudiantes” (Mirin, 2020, p.6).

Figura 1.3

Cambios en la interpretación del signo igual al resolver un problema

Isoperimetric Problem: Show that among all rectangles with equal perimeter, the square has the largest area.		Interpretation of the variables	Interpretation of the equal sign
Solution with derivatives:			
(1) A square with length a of its sides has the perimeter P=4a. Each rectangle with P=4a has the length a+x and a-x for its sides.		generalizable magnitudes	contextual identities
(2) Then the area satisfies	$A = (a-x)(a+x)$	generalizable magnitudes	contextual identity
(3)	$= a^2 - x^2$	meaningless symbol	formal equivalence
(4) Consider the function	$A(x) = a^2 - x^2$.	changing quantity	specification
(5) Calculate the derivatives	$A'(x) = -2x$	meaningless symbol	operational sign
(6)	$A''(x) = -2$.	meaningless symbol	operational sign
(7) Every local maximum satisfies	$A'(x_E) = 0$ and $A''(x_E) < 0$.	generalizable magnitudes	contextual identity
(8) Let be	$A'(x_E) = -2x_E = 0$	Unknown	conditional equation for unknowns
(9) hence, we have in a potential extremum.	$x_E = 0$.	unknown found	operational sign
(10)	$A''(0) = -2$	substitution	operational sign
(11) Thus, A has a local maximum at $x_E=0$. Hence, the square is the rectangle with maximal area.		Interpretation for the original problem.	



Nota. Es necesario articular distintas interpretaciones del signo igual en el trabajo matemático (Prediger, 2010, p. 9).

1.4 Pregunta y objetivos de investigación

A continuación se presentan formalmente las preguntas y objetivos de investigación, así como la justificación de este proyecto.

1.4.1 Pregunta de investigación

Comparado con el cúmulo de información que hay sobre las interpretaciones del signo igual que tienen los estudiantes de niveles básicos (primaria y secundaria), actualmente hay poca información de los estudiantes del nivel medio superior (ver sección 1.4.2). Se requieren, entonces, más investigaciones que se enfoquen en estudiantes de este nivel.

Ahora bien, incluso restringiéndose a las matemáticas que se estudian en el nivel medio superior, el concepto de igualdad es extremadamente amplio. Esta es la razón por la que la investigación que se desarrolla en este trabajo se limita al conjunto de expresiones matemáticas que contienen al signo igual y que han sido abordadas en algún momento en la literatura. En concreto, se consideran formas simbólicas que utilizan al signo igual dentro del contexto de la aritmética (*e.g.* $1+3=5,\ 0=7-5-2,\ 4+2=1+5$) y del álgebra elemental (*e.g.* $2x+x=(2+1)x,\quad 5x+1=2,\quad 2x+2=\frac{(x+1)(6x-10)}{3x-5}\ \ para\ todo\ x\ \text{número}\ real\ tal\ que\ x\neq\frac{5}{3}$).

Investigaciones como la de Susanne Prediger (2010) sugieren que la interpretación del signo igual por parte de estudiantes de niveles avanzados puede cambiar en virtud del tipo de problemas que enfrenten y enfoques que utilicen. En tal caso, durante este cambio hay una emergencia y movilización de conocimientos importante que da cuenta de la complejidad del concepto de igualdad. Por ello resulta valioso analizar cómo es que estas interpretaciones surgen. ¿Cómo favorecer e investigar la manifestación de las distintas formas en las que se puede interpretar el signo igual? Las secciones 1.4.2 y 1.4.3 dejan ver una posibilidad. Investigar la comprensión de los estudiantes sobre el signo igual mientras trabajan colaborativamente en una serie de problemas no-rutinarios puede ser un recurso metodológico adecuado para documentar la diversidad de formas en las que puede interpretar este signo.

Es en este contexto que se sitúa la pregunta general que orienta el curso de esta investigación:

¿Qué interpretaciones operacionales y relacionales del signo igual movilizan estudiantes de tercer año de preparatoria cuando resuelven problemas aritmético-algebraicos?

1.4.2 Objetivos de la investigación

Con el fin de poder responder la pregunta de investigación, se fijaron los siguientes objetivos:

1. Proponer una categorización para estudiar las interpretaciones que estudiantes de preparatoria dan al signo igual al solucionar problemas aritmético-algebraicos.
2. Diseñar e implementar una secuencia de problemas que permita aplicar la categorización propuesta.
3. Categorizar las interpretaciones que estudiantes de preparatoria dan al signo igual a la secuencia de problemas aritmético-algebraicos.

1.4.3 Justificación del estudio

Las investigaciones enfocadas en la comprensión de los estudiantes sobre el signo igual, y las implicaciones de esta en su aprendizaje, han dejado claros dos hechos. En primer lugar, tanto el modo en el que los estudiantes conceptualizan la igualdad matemática como la manera en la que la representan simbólicamente (con el signo igual) debe cambiar conforme sus experiencias matemáticas se hacen más sofisticadas, pues es una condición necesaria para el desarrollo de su pensamiento algebraico (Bush y Karp, 2013; Chimoni et al., 2018; Knuth et al., 2006; Matthews y Fuchs, 2020; Molina y Ambrose, 2008).

En segundo lugar, la manera en que los estudiantes interpretan el signo igual no tiende a evolucionar espontánea ni linealmente conforme estos avanzan de grado escolar y se enfrentan a problemas matemáticos más complejos (Alibali et al., 2007; Chesney, et al., 2013; Filloy, Rojano y Solares, 2010; Kieran, 1981; Knuth et al., 2011; Mainela-Arnold et al., 2011; Matthews, et al., 2012; McNeil, 2007, 2014; McNeil y Alibali, 2004; Solares y Kieran, 2013; Ying, 2020).

La literatura reporta que, sin importar el nivel escolar, ya sea secundaria, preparatoria o universidad, los estudiantes pueden preservar las interpretaciones construidas durante sus primeras experiencias con el signo dentro del contexto de la aritmética, a pesar de que estos no funcionan más allá de la aritmética tradicional (Baiduri, 2015; Byrd et al., 2015; Chesney et al., 2013; Fyfe, Matthews y Amsel, 2020; Kieran, 1981; Knuth et al., 2011; McNeil, 2014; McNeil et al, 2017; Nelson y Fyfe, 2019).

Los dos puntos anteriores acentúan la importancia de una intervención adecuada del profesor enfocada en el signo igual, en la relación de igualdad que denota. No solo es importante que esto se haga en puntos de transición concretos, como cuando los estudiantes aprenden álgebra por primera vez (Bush y Karp, 2013; Byrd et al., 2015*;* Filloy y Rojano, 1989; Matthews y Fuchs, 2020), sino también en preparatoria y en universidad (Prediger, 2010; Solares y Kieran, 2013; Sumpter y Löwenhielm, 2022; Vincent et al., 2015). Actualmente, casi todas las investigaciones se han interesado en estudiantes de primaria y secundaria, habiendo muy pocas que hayan explorado la comprensión de los estudiantes de preparatoria. Esta tesis se centra en la población de este nivel educativo.

No obstante, antes de pretender implementar cualquier método didáctico o cambio curricular, primero se necesita determinar un punto de partida. Es necesario entender cómo los estudiantes interpretan al signo igual y entonces fijar los objetivos a alcanzar y la ruta a seguir para su tratamiento didáctico. De modo que un paso importante en esta dirección es preguntarse cómo entienden los estudiantes el signo igual. Esta pregunta ya ha sido explorada por la investigación. Sin embargo, la mayor parte de los acercamientos llevados a cabo se basan fundamentalmente en dos fuentes de información: 1) evaluaciones escritas con ítems independientes; y 2) desempeño individual de los estudiantes. El problema está en que estas fuentes de información pueden resultar muy restrictivas. Esta tesis se enfoca en estos aspectos.

En el presente trabajo se considera que investigar cuáles son las nociones que los estudiantes de preparatoria tienen del signo igual puede ser el punto de partida para diseñar futuros tratamientos didácticos que, por una parte, atiendan y fortalezcan las necesidades educativas de este grado y que, por otra parte, consideren qué aspectos de la igualdad pueden considerarse como conocimientos base para los primeros años de universidad.

2. Marco de Referencia

El mapa de constructo propuesto por Rittle-Johnson y colaboradores (Rittle-Johnson et al., 2011), figura 1.3, se consolidó en una investigación posterior. En 2012 Matthews y colaboradores (Matthews et al., 2012) se plantearon ampliar el panorama en cuanto a los matices que puede tener la comprensión de los estudiantes sobre el signo igual. Esto ocasionó que la atención se centrara en las características del mapa:

> Los niveles del mapa de constructo se distinguen por los tipos de contextos en los que se aparece el signo igual a medida que progresa el conocimiento. […] Nuestro mapa no pretendía ser un mapa exhaustivo que cubriera el universo de pensamiento que podría argumentarse que abarca el concepto de igualdad matemática. En su lugar, cubre un subconjunto de formas simbólicas que utilizan el signo igual y que han sido estudiadas previamente con niños en edad escolar [de entre 7 y 12 años]. Por lo tanto, nuestro mapa se ha restringido principalmente a la comprensión del signo igual en contextos aritméticos, así como al registro de las primeras extensiones hacia el álgebra (Matthews et al., 2012, p. 319-320).

Considerando que los niveles del mapa buscan modelar el desarrollo de la comprensión de los estudiantes y que cada nivel se caracteriza por las formas en que utilizan al signo igual, lo anterior da lugar a tres suposiciones relativas al estudio de la comprensión del signo igual:

1) La comprensión del signo igual está relacionada con las formas simbólicas en las que aparece este signo en el transcurso del progreso escolar.
2) La comprensión de los estudiantes se puede describir a través de niveles o categorías que resumen las formas en que utilizan al signo igual.

3) El estudio del concepto de igualdad matemática se entiende como el estudio de las formas simbólicas que incluyen al signo igual en el contexto de la aritmética y/o el álgebra elemental.

Estos puntos resumen las suposiciones de las que parten Matthews y sus equipos (Mathews et al., 2012; Rittle-Johson et al., 2011) y retoman los resultados de numerosas investigaciones previas (por ejemplo Alibali et al., 2007; Baroody y Ginsburg, 1983; Behr et al., 1980; Blanton et al., 2011; Carpenter et al., 2003; Kieran, 1981; Knuth et al., 2006; Matthews y Rittle-Johnson, 2009; McNeil, 2007; Molina y Ambrose, 2006, 2008). En la presente tesis estas suposiciones se utilizan para definir el marco de referencia.

2.1 Algunos puntos de partida

Para desarrollar el estudio que se propone a continuación, se parte de los siguientes puntos respecto a los problemas que se tratan y el uso del signo igual.

I. Este estudio se centra exclusivamente en la comprensión del concepto de igualdad en el contexto de la aritmética y el álgebra elemental.
II. Se parte del supuesto de que la comprensión de los estudiantes sobre la igualdad puede abordarse a través de investigar las formas en las que interpretan al signo igual.
III. Las soluciones de los estudiantes a problemas aritméticos y algebraicos dan cuenta de sus interpretaciones del signo igual.
IV. Los términos *comprensión del signo igual*, *comprensión de la iguald*ad, *interpretaciones del signo igual* y *concepciones del signo igual* se utilizarán indistintamente.

A continuación, se propone una categorización que permite describir estas interpretaciones en el contexto de resolución de problemas aritméticos y algebraicos, basada en la revisión de la literatura previa.

2.1.1 Definición de categorización

De aquí en adelante por *categorización de la comprensión del signo igual* se entenderá el conjunto de categorías de las distintas formas de interpretar al signo igual de los estudiantes de bachillerato con los que se trabaja y que se elabora con base en la revisión de resultados de investigación anterior, como se presenta más adelante. Estas categorías no están ordenadas entre sí y no representan etapas de desarrollo. Es decir, el desarrollo de la comprensión de los estudiantes no se asume que deba progresar a través de todas las categorías en una ruta fija ni de forma lineal u ordenada.

Cabe aclarar que esta definición es similar a que Rittle-Johnson et al. (2011) usan para el mapa de constructo del desarrollo de la igualdad. Sin embargo, no son iguales. El mapa de constructo tiene como finalidad definir etapas de desarrollo de la comprensión del signo igual, que van de lo operacional hacia lo relacional. En esta tesis el papel de una categorización es distinto: herramienta para describir las interpretaciones del signo igual y su movilización durante la resolución de problemas, sin jerarquizarlas ni graduarlas.

Ahora bien, la definición de categorización tiene sentido por lo siguiente. En principio se podría esperar que las interpretaciones de los estudiantes sobre la igualdad progresen, de forma gradual y continua, hacia interpretaciones más sofisticadas conforme avanzan de grado escolar. No obstante, diversas investigaciones han reportado que la evolución de sus conocimientos y el desarrollo de sus experiencias no tiene por qué seguir una ruta fija ni predeterminada (Jones et al. 2013; Lee y Pang, 2021; McNeil, 2007; McNeil et al., 2019; Molina y Ambrose, 2008; Prediger, 2010). Debido a esto parece redituable centrar el foco de atención en la movilización de los conocimientos de los estudiantes sobre la igualdad, en lugar de en su jerarquización o graduación (Prediger, 2010; Solares y Kieran, 2010).

Si bien es común el posicionamiento de las investigaciones recientes que reconocen dos categorías amplias en las que se clasifican las interpretaciones de los estudiantes: operacional y relacional, esta tesis se adhiere a la postura de Rittle-Johnson y colaboradores quienes sostienen que afirmar que “los estudiantes tienen una visión operacional o relacional de la igualdad es demasiado simplista” (Rittle-Johnson et al., 2011, p. 13).

Con esta discusión en mente, en esta tesis se retoman las categorizaciones de Lee y Pang (2021, 2022) y de Prediger (2010) para elaborar una categorización propia que permita estudiar las distintas formas de interpretar al signo igual de los estudiantes de bachillerato pero que no se asuman progresión evolutiva a través las categorías, rutas fijas, lineales ni ordenadas entre las categorías.

A continuación se describen los rasgos generales de estas dos categorizaciones.

2.2 Dos categorizaciones de la comprensión del signo igual

2.2.1 La 7-categorización de Lee y Pang

Las investigadoras Lee y Pang (2021, 2022) sintetizaron las clasificaciones de la comprensión del signo igual planteadas en cinco estudios representativos de esta línea de investigación; a saber, Baroody y Ginsburg, 1983; Jones et al., 2013; Matthews et al., 2012; Molina y Ambrose, 2008; Stephens et al., 2013. La clasificación que obtuvieron consta de siete categorías (ver figura 2.1).

Aunque se apoyaron en el mapa de constructo de Matthews y su equipo (Matthews et al., 2012), en el trabajo de Lee y Pang (2021) “los tipos de concepciones de los estudiantes sobre el signo igual no representan etapas de desarrollo en sí” (p. 2011). En otras palabras, la clasificación que proponen es una categorización de la comprensión de la igualdad. A tal categorización se le designará en adelante *7-categorización.*

Figura 2.1

La 7-categorización de la comprensión de la igualdad

Categorías	Descripción
1.- Operacional rígido	Signo igual como operador direccional en el esquema $operaciones = resultado$. Los estudiantes trabajan ecuaciones del tipo $a \pm b = c$
2.- Operacional flexible	Signo igual como operador bidireccional en el esquema $operaciones = resultado$. Los estudiantes trabajan ecuaciones del tipo $a \pm b = c$, $c = a \pm b$ y $a = a$.
3.- Relacional sustitutivo	Signo igual como una relación. Los miembros de una ecuación se pueden intercambiar por otras expresiones incluso si no son iguales.
4.- Operacional-relacional simultáneo	Signo igual como una relación que se basa en la igualdad numérica entre expresiones, pero al mismo tiempo se interpreta como un operador. Los estudiantes trabajan ecuaciones del tipo $a \pm b = c \pm d$, pero pueden tener dificultades con expresiones de la forma $a \pm b = c \pm d = e$.
5.- Relacional básico puro	Signo igual como una relación. Los estudiantes entienden que los dos miembros de una ecuación tienen el mismo valor en expresiones de la forma $a \pm b = c,\ c = a \pm b$, $a = a,\ a \pm b = c \pm d$ y $a \pm b = c \pm d = e$.
6.- Relacional comparativo	Los estudiantes comparan ambos miembros de una ecuación sin necesidad de cálculos específicos. Pueden trabajar cualquier tipo de ecuación.

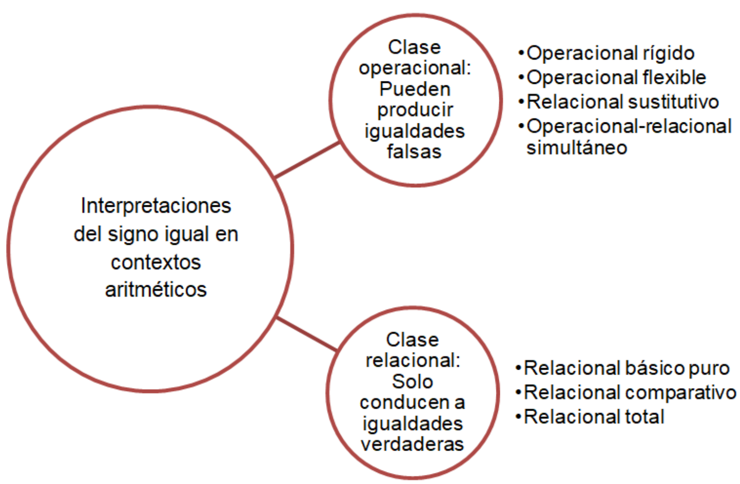
7.- Relacional total	Los estudiantes pueden usar las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva de la equivalencia para trabajar ecuaciones.

Nota. Lee y Pang proponen siete categorías para describir las interpretaciones de los estudiantes de primaria sobre el signo igual (Lee y Pang, 2022).

Ahora bien, a pesar de que las siete categorías no representan niveles de desarrollo de la comprensión de la igualdad, sí sugieren un progreso hacia nociones que apuntalan el significado relacional del signo igual en contextos aritméticos. De hecho, las categorías 1-4 sugieren interpretaciones operacionales y las categorías 5-7 interpretaciones relacionales. Entonces es posible agrupar estas categorías en dos clases, ambas relativas al uso del signo igual en aritmética: una operacional, donde los usos del signo igual pueden conducir a igualdades falsas; una relacional, donde a pesar de que la comprensión del concepto de igualdad podría ser parcial, todos los usos del signo igual conducen a igualdades genuinas. Esto se esquematiza en la figura de abajo.

Figura 2.2

Reordenación de las categorías de 7-categorízación



Nota. Las categorías de la 7-categorízación se pueden ordenar en dos clases: clase relacional y clase operacional.

Lo que da forma a la 7-categorización es la distinción de la comprensión de la igualdad según los tipos de ecuaciones aritméticas que los estudiantes pueden trabajar y el modo en que lo hacen. Pero el contacto con estas ecuaciones es inducido. Los estudiantes no las deducen sino que las encuentran, ya hechas, inmersas en problemas que les piden resolver. Este enfoque es distinto al que propone Susanne Prediger (2010), pues para ella la comprensión de los estudiantes sobre el signo igual está relacionada con los tipos de igualdades que ellos mismos pueden generar al resolver problemas. Esta postura le permitió proponer una clasificación de las interpretaciones del signo igual que tiene diferencias sustanciales con la 7-categorización. Enseguida se presenta su clasificación.

2.2.2 La categorización de Prediger

Dentro de la matemática escolar que atienden los estudiantes de entre 10 y 18 años, Susanne Prediger (2010) enfatiza que el signo igual puede tener distintos significados, cada uno relativo a un contexto especifico. De modo que, en matemáticas, no hay *una* forma ideal de interpretarlo, sino varias y todas ellas son igual de legitimas en el contexto al que pertenecen (ver sección 1.3).

Prediger sistematizó esta diversidad de significados en tres categorías: significado operacional, significado relacional y significado definitorio. En la figura 2.3 se muestran los rasgos generales de las tres categorías. En virtud de que estas engloban algunos significados del signo igual en las matemáticas (como disciplina), la clasificación de Prediger no describe etapas ni rutas del desarrollo de la comprensión de la igualdad. Su clasificación es una categorización de los significados del signo igual.

Figura 2.3

Clasificación de los significados del signo igual propuesta Prediger (2010)

Categorías		Descripción
1.- Significado operacional		Representa el uso asimétrico de la igualdad en el esquema $operaciones = resultado$, donde las "operaciones" son operaciones matemáticas cualesquiera, en particular aritméticas.
2.- Significado relacional	2.1.- Identidad aritmética simétrica	Uso simétrico del signo igual en contextos aritméticos. Expresa que dos términos numéricos tienen el mismo valor. Por ejemplo, $16 = 3 \times 5 + 1$, $2 + 7 = 7 + 2$, $(9 - 1)(9^{100-1} + 9^{100-2} + \cdots + 9 + 1) = 9^{100} - 1$, etc.
	2.2.- Equivalencia formal	Uso del signo igual para referir equivalencia de términos algebraicos; es decir, expresiones que involucran variables
	2.3.- Ecuación condicional	Uso del signo igual en ecuaciones donde se busca caracterizar o encontrar las incógnitas.
	2.4.- Identidades contextuales	Uso del signo igual en proposiciones matemáticas. Por ejemplo, la igualdad entre el cuadrado de hipotenusa y la suma de los cuadrados de los catetos de un triangulo rectángulo que afirma el teorema de Pitágoras.
3.- Especificación		El signo igual se usa para denotar o definir objetos matemáticos. Por ejemplo, "sea $y = 2x + 1$ ...".

Nota. Prediger (2010) propone tres categorías para ordenar las diversas interpretaciones que el signo igual tiene en aritmética y en álgebra elemental.

Prediger (2010) sugiere que la comprensión de los estudiantes sobre la igualdad se distingue por los diferentes significados del signo igual que pueden hacer emerger. ¿Dónde y por qué tiene lugar la emergencia de igualdades? De acuerdo con Prediger es en la resolución de problemas donde, por necesidad, el signo igual toma diferentes significados, que se relacionan entre sí para articular una solución.

Es importante que los estudiantes puedan cambiar entre distintos tipos igualdades, pues es una condición necesaria para el desarrollo de capacidades matemáticas superiores:

> Mientras que la aritmética elemental se centra en el significado operacional, el álgebra […] necesita diferentes significados relacionales y definitorios. Los estudiantes universitarios exitosos son capaces de alternar entre distintos significados según las necesidades del contexto. […] El cambio de significado del signo igual no sólo representa un obstáculo en el proceso de aprendizaje, sino también una importante característica y fortaleza en la resolución de problemas matemáticos (Prediger, 2010, p. 9).

Como Lee y Pang (2021, 2022), en la propuesta de Prediger la comprensión de la igualdad se asocia con las formas de las ecuaciones que los estudiantes manejan. Sin embargo, sus categorizaciones tienen una finalidad diferente. A grandes rasgos, la 7-categorización de Lee y Pang pretende dar cuenta de los matices en la comprensión de los estudiantes sobre la igualdad en contextos aritméticos. Mientras que la clasificación de Prediger se centra en los distintos significados que el signo igual puede tener en matemáticas, particularmente en álgebra. Por lo tanto, el interés de Lee y Pang está en los procesos cognitivos de los estudiantes; el interés de Prediger está en los distintos referentes que el signo igual tiene dentro de las matemáticas.

A pesar de las diferencias entre las categorizaciones de Prediger y de Lee y Pang, también tienen coincidencias importantes que permiten proponer la categorización usada en esta tesis, como se presenta a continuación.

2.3 Construcción de la categorización PLP

A continuación se presenta la categorización que se utiliza en la presente tesis para describir las interpretaciones sobre el signo igual que tienen los estudiantes de preparatoria. Esta categorización se basa en la categorización de Prediger (2010) y en la 7-categorización de Lee y Pang (2022). En reconocimiento a estas investigadoras, a tal categorización se le denominará *categorización PLP*.

2.3.1 Relaciones entre las categorizaciones de Prediger y de Lee y Pang

En relación a la categorización de Prediger (2010), las únicas categorías que involucran explícitamente al signo igual en contextos aritméticos son *significado operacional* e *identidad aritmética simétrica*, donde la primera contiene connotaciones procedimentales o calculatorias del signo igual y la segunda connotaciones relacionales (ver figura 2.3). Por lo tanto, si las categorías de la 7-categorización tienen alguna relación con las de Prediger, debe ser con la categoría *significado operacional* o con la categoría *identidad aritmética simétrica* (ver figura 2.1).

A pesar de la coincidencia en los nombres, la categoría *significado operacional* no tiene ninguna relación con la clase operacional de Lee y Pang (ver figura 2.2), pues esta clase puede incluir igualdades falsas, cosa que no pasa ni en la categoría *significado operacional* ni en la categoría *identidad aritmética simétrica*. Por lo tanto, la clase operacional de la 7-categorización funda una categoría nueva, en el sentido de que no es ninguna de las que propone Prediger.

En cambio, la clase relacional de Lee y Pang (ver figura 2.2) se ubica dentro de la categoría *identidad aritmética simétrica*. Esto se debe a que las formas de interpretar al signo igual en la clase relacional no solo incluyen su propiedad simétrica, sino también reflejan aspectos de la equivalencia numérica. Por tanto, las categorías *relacional básico*, *relacional comparativo* y *relacional total* pueden describir acercamientos específicos de los estudiantes hacia el significado relacional del signo igual en la categoría *identidad aritmética simétrica* de la categorización de Prediger.

Dicho lo anterior, el nuevo problema es cómo integrar en una sola clasificación las categorías resultantes del análisis anterior. A continuación, se introducen algunas definiciones para hacerlo y, posteriormente, la categorización PLP.

2.3.2 Definiciones en torno a la igualdad aritmética y algebraica

En este trabajo de tesis la definición de igualdad en aritmética y álgebra elemental es la siguiente:

> "La igualdad es una relación entre dos cantidades, o más generalmente dos expresiones matemáticas, que afirma que las cantidades tienen el mismo valor, o que las expresiones representan el mismo objeto matemático, o que se está definiendo un objeto" (Kieran y Martínez-Hernández, 2022, p. 1216).

La generalidad de esta definición da cabida a una diversidad importante de relaciones y permite agrupar las interpretaciones que la comunidad de investigación en Matemática Educativa le puede dar a un enunciado de la forma $a = b$ en contextos aritméticos y algebraicos:

1) Significado operacional: Dos expresiones aritméticas, a y b, son iguales si tienen el mismo valor numérico.
2) Significado relacional: Dos expresiones aritméticas o algebraicas, a y b, son iguales si representan el mismo objeto.
3) Significado definitorio: En el enunciado $a = b$ la expresión a denota, designa o se define como la expresión b, o viceversa.

Bajo esta definición, las relaciones de igualdad que inducen los significados 1 y 2 son relaciones de equivalencia; es decir, tienen tres propiedades: reflexividad, simetría y transitividad.

Respecto al significado relacional, para definir lo que se entiende por "representar el mismo objeto" hay que definir primero a qué tipos de objetos nos referimos. En esta tesis solo hay dos tipos de objetos matemáticos que se abordan y que se denominan "objetos aritméticos" y "objetos algebraicos". Es importante señalar que estas definiciones no buscan discutir la naturaleza aritmética ni algebraica de los objetos matemáticos que se abordan. La intención es mucho más modesta: se busca establecer un punto de partida para analizar las interpretaciones que los estudiantes de bachillerato dan a la igualdad entre objetos aritméticos y algebraicos con los que comúnmente trabajan en la escuela. A continuación se definen estos objetos.

- Objetos aritméticos: Números enteros y expresiones que se puedan formar a partir de de ellos sintácticamente; es decir, siguiendo las reglas de conformación y transformación del anillo de los números enteros.
- Objetos algebraicos: Cantidades determinadas o indeterminadas (*meaningless symbols*, incógnitas, variables o números generalizados) que se pueden operar analíticamente; es decir, se pueden sumar, restar, multiplicar o dividir, según las operaciones de la estructura algebraica sobre la que se restringa el discurso, como si fueran números conocidos (Radford, 2018).

Cabe resaltar que bajo estas definiciones los objetos aritméticos pueden interpretarse como objetos algebraicos, pero en general no al revés.[1]

---

[1] Para el autor de este trabajo de tesis la aritmética es parte del álgebra, porque es esencialmente el estudio interno del anillo $\mathbb{Z}$, anillo de los números enteros. El estudio de los números enteros puede hacerse desde al menos tres enfoques. Uno de ellos puramente calculatorio y procedimental, que es lo que comúnmente se conoce como *aritmética tradicional*. El otro es a través de las relaciones que se pueden definir entre los enteros, como la relación de

Ahora que ya están definidos los objetos, ¿cuándo dos de ellos representen lo mismo? Por un lado, si los ***objetos son aritméticos***, que representen lo mismo significa que tienen el mismo valor numérico. En este caso, la igualdad entre tales objetos se llama ***igualdad aritmética*.**

Por otro lado, si los ***objetos son algebraicos***, entonces tenemos varios casos (Prediger, 2010):

i. Si las cantidades indeterminadas se consideran como *meaningless symbols,* entonces las expresiones que las contengan también lo son. Luego dos expresiones son equivalentes si una puede transformarse en la otra utilizando las reglas de transformación de la estructura algebraica sobre la que gire el discurso.

   Ejemplo: Si $(R,+,\cdot,0,1)$ es un anillo asociativo conmutativo con elemento unitario y $a,b \in R$, entonces la expresión $(a-b)\cdot(a+b)$ se transforma en a^2-b^2 aplicando dos veces la propiedad distributiva. Por lo tanto representan lo mismo, $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, y se llama ***igualdad sintáctica***.

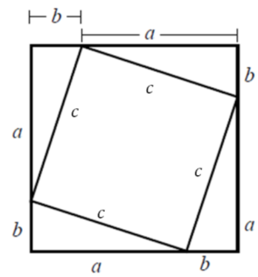
ii. Si las cantidades indeterminadas son números generalizados, las expresiones sirven para describir situaciones concretas. Así, dos expresiones son lo mismo si describen la misma situación.

   Ejemplo: En la figura 2.4 las expresiones $(a+b)^2$ y $2ab+c^2$ describen el área de la misma figura y por ello $(a+b)^2=2ab+c^2$. Una igualdad así se llama ***igualdad proposicional.***

divisibilidad, que de hecho forma una rama del álgebra: la *teoría de números.* El último tiene que ver con el estudio estructural del conjunto de los números enteros y la generalización de sus propiedades, de donde nace la *teoría de anillos*. En otras palabras, es el enfoque con en el que se trabajan los números enteros el que determina si se denomina algebraico o no a este trabajo, por lo tanto $\mathbb{Z}$ tiene una naturaleza algebraica.

Figura 2.4

Descomposición de un cuadrado en varias figuras geométricas



Nota. Las expresiones *a* y *b* expresan objetos concretos en la figura.

iii. Si las cantidades indeterminadas se consideran variables, “lugares” en los que se pueden insertar valores numéricos, entonces expresiones iguales son las que generan el mismo valor para todos los números insertados que pertenecen a un conjunto específico. Este tipo de relación se llama ***igualdad semántica.***

Ejemplo: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ porque $(a+b)^2$ y $a^2 + 2ab + b^2$ generan el mismo valor numérico para cualesquiera $a, b \in \mathbb{N}$.

Ejemplo: Para todo número real $x \neq \frac{5}{3}$ se tiene que $2x + 2 = \frac{(x+1)(6x-10)}{3x-5}$. Entonces las funciones $f(x) = 2x + 2$ y $g(x) = \frac{(x+1)(6x-10)}{3x-5}$ cuyo dominio es $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{3}\right\}$ y codominio es $\mathbb{R}$, son iguales.

iv. Si las cantidades indeterminadas se consideran incógnitas, entonces, por ejemplo si a, b, c, d son números enteros, una expresión del tipo $ax + b = c$ se llama ***ecuación aritmética*** y una expresión del tipo $ax + b = c + dx$ se llama ***ecuación algebraica***. En una ecuación se busca determinar los valores que hacen verdaderas a las igualdades.

2.3.3 Categorización PLP

Los tres tipos de significados del signo igual definidos en 2.3.2 se relacionan directamente con las tres categorías que propone Prediger para clasificar las interpretaciones del signo igual en matemáticas (ver figura 2.3). Con base en ello, en esta tesis se propone dividir las interpretaciones de los estudiantes sobre la igualdad en tres categorías:

I. Interpretación operacional: Interpretaciones de los estudiantes que aluden al significado operacional de la igualdad.
II. Interpretación relacional: Interpretaciones de los estudiantes que aluden al significado relacional de la igualdad.
III. Interpretación definitoria: Interpretaciones de los estudiantes que aluden al significado definitorio de la igualdad

De esta manera, tanto la clase operacional de la 7-categorización (ver figura 2.2) como la categoría *significado operacional* de Prediger (ver figura 2.3) se pueden ordenar en la categoría Interpretación operacional:

Figura 2.5

Categoría Interpretación operacional de la categorización PLP

<table>
<tr><td rowspan="2">Interpretación operacional</td><td>Clase operacional de la 7-categorización
• Operacional rígido
• Operacional flexible
• Relacional sustitutivo
• Operacional-relacional simultáneo</td></tr>
<tr><td>Significado operacional (Prediger)</td></tr>
</table>

Ahora, la clase relacional de la 7-categorización se relaciona con la categoría *identidad aritmética simétrica* de Prediger, la cual forma parte de la categoría Interpretación relacional (ver definición de igualdad relacional de expresiones aritméticas en sección 2.3.2). En virtud de la definición de los tipos de igualdades algebraicas, la categoría Interpretación relacional también incluye a las categorías *sintáctica*, *semántica*, *ecuación condicional* e *identidades contextuales* de Prediger (ver la definición de igualdad de objetos algebraicos en la sección 2.3.2):

Figura 2.6

Categoría Interpretación relacional de la categorización PLP

Interpretación relacional	Clase relacional de la 7-categorización • Relacional básico puro • Relacional comparativo • Relacional total
	Sintáctica
	Semántica
	Ecuación condicional (Prediger)
	Identidades contextuales (Prediger)

Finalmente, la categoría Interpretación definitoria coincide con la categoría *especificación* de Prediger:

Figura 2.7

Categoría Interpretación definitoria de la categorización PLP

Interpretación definitoria	Especificación (Prediger)

Para evitar confusiones entre los términos y para identificar su significado en función de su nombre se decidió renombrar algunas subcategorías de la categorización PLP:

- Clase operacional de la 7-categorización ⟶ Operacional clásica
- Significado operacional (Prediger) ⟶ Operacional calculatoria
- Clase relacional de la 7-categorización ⟶ Relacional aritmética
- Ecuación condicional (Prediger) ⟶ Condicional
- Identidades contextuales (Prediger) ⟶ Proposicional

Resumiendo, la categorización PLP se encuentra en la figura 2.8:

Figura 2.8

Categorización PLP

Interpretación operacional	Operacional clásica • Operacional rígido • Operacional flexible • Relacional sustitutivo • Operacional-relacional simultáneo
	Operacional calculatoria
Interpretación relacional	Relacional aritmética • Relacional básico puro • Relacional comparativo • Relacional total
	Sintáctica
	Semántica
	Condicional
	Proposicional
Interpretación definitoria	Especificación

Nota. Categorización de interpretaciones de la igualdad en aritmética y álgebra elemental que se utiliza en este trabajo de tesis.

3. Metodología

3.1 Rasgos generales del estudio

Es importante señalar que al momento de la realización de este estudio, la población educativa del país estaba trabajando bajo las restricciones del confinamiento por la pandemia de COVID-19. Por ello, el número de estudiantes que asistían a clases era pequeño y no estaban permitidos los eventos académicos de multitudes en espacios cerrados. Estas restricciones marcaron pautas para definir el tamaño de la población de estudio, el diseño del instrumento de recolección de datos y la dinámica del levantamiento de datos.

El estudio presentado en esta tesis tiene una naturaleza descriptiva y cualitativa. La población de estudio fueron dos estudiantes (hombre y mujer) de tercer año de preparatoria, con edades de 17 y 18 años, quienes estudiaban en una escuela pública del Estado de México. De acuerdo con su profesor de matemáticas, ambos eran estudiantes de alto rendimiento y habían sido aceptados en universidades públicas para realizar sus estudios en carreras relacionadas con matemáticas (Ingeniería química y Economía).

Se analizó el trabajo de los estudiantes al resolver una secuencia de problemas que tenía como finalidad movilizar distintos usos del signo igual en aritmética y algebra elemental. El diseño de esta secuencia se basó en problemas propuestos por Lee y Pang (2021) y por Sadovsky (2005). Paralelo al diseño de la secuencia se realizó un análisis de las posibles soluciones y de los tipos de interpretaciones de la igualdad (de acuerdo con la categorización PLP) que potencialmente podrían movilizar los estudiantes al resolver los problemas.

Cabe destacar que para definir el tipo de problemas de la secuencia y su implementación se hizo un análisis de los aspectos metodológicos comunes en las investigaciones en torno a la comprensión de la igualdad. La secuencia de problemas que se utilizó en el presente estudio, su puesta en marcha y las fuentes de información para el análisis de datos, se distinguen por poseer tres características poco exploradas en la literatura. Primero, los problemas están relacionados entre sí (es una secuencia de problemas), son no rutinarios y van aumentando en complejidad. Segundo, la aplicación de la secuencia fue a través de una entrevista semiestructurada en formato presencial, donde los estudiantes trabajaron en equipo y junto con el entrevistador discutieron los problemas y las soluciones propuestas. La entrevista se grabó en audio y video. Por último, los datos de registraron mediante tres fuentes de información: el trabajo escrito de los estudiantes, sus explicaciones verbales y su lenguaje corporal.

Finalmente, para el análisis de los datos se realizaron las transcripciones de los episodios de la entrevista donde se utilizó, explícita o implícitamente, alguna interpretación de la igualdad. Para identificar estos episodios se utilizaron la categorización PLP y el análisis previo de los problemas. Después se hizo un análisis de las relaciones de igualdad que utilizaron los estudiantes y cómo se movilizaron durante el proceso de resolución de los problemas.

En el siguiente esquema se resume la metodología:

Población de estudios

- Estudiantes de tercer año de preparatoria.
- Dos personas: un hombre y una mujer.
- Estudiantes de alto rendimiento.

Diseño de la secuencia de problemas

- Basado en problemas propuestos por Lee y Pang (2021) y Sadovsky (2005) en torno al algoritmo de la división.
- Análisis de los tipos de interpretaciones de la igualdad que el algoritmo de la división pude suscitar.
- Secuencia de problemas relacionados entre sí.

Secuencia de problemas

- 5 problemas repartidos en dos activiades.
- Primera actividad: 4 problemas.
- Segunda actividad: 1 problema con 4 incisos.

Implementación de la secuencia

- Entrevista semiestructurada en formato presencial.
- Cada actividad se aplicó en días distintos; dos días en total.
- Cada actividad tuvo una duración de 60 minutos.

Recolección de datos

- Trabajo escrito de los estudiantes.
- Grabación de audio y vídeo de cada actividad.

Análisis de datos

- Categorización PLP y anális previo de los problemas como herramientas para identificar episodios de interés.
- Descripción de las interpretaciones de la igualdad y su movilización durante la resolución de problemas.

3.2 Diseño y aplicación de la secuencia de problemas

En esta tesis el instrumento de recolección de datos es una secuencia de problemas tal que ella y su implementación tienen las siguientes características:

- Los problemas planteados son no-rutinarios y detonan la discusión y el uso de algunas de las interpretaciones de la igualdad consideradas en la categorización PLP.
- La secuencia promueve la resolución de los problemas de manera colaborativa.
- La implementación de la secuencia permite obtener información escrita y videograbada del trabajo de los estudiantes.

Para el diseño de la secuencia de problemas se decidió que todos los problemas estén conectados entre sí por el algoritmo de la división euclidiana en los números enteros. La razón de esto se explica a continuación.

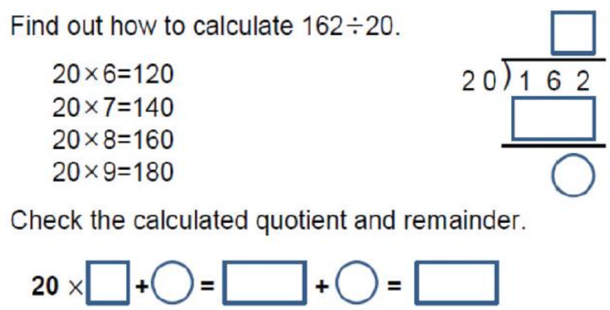
3.3.1 Un problema propuesto por Lee y Pang (2021)

Varias investigaciones han señalado que es común ver en el trabajo escrito de los estudiantes igualdades falsas, como $3 + 5 = \underline{8}+2 = 10$ (por ejemplo, Knuth et al., 2006; Molina y Ambrose, 2008; Nelson y Fyfe, 2019; Tilley, 2011). Kieran (1981) sugiere que estas pseudoigualdades codifican el orden en el que se hace un procedimiento. Pero no es claro qué tan conscientes son los estudiantes de la falta de sentido lógico formal de tales expresiones ni si este uso del signo igual coincide con la noción de igualdad que tienen. Por ello este tipo de expresiones “proveen un contexto especialmente útil para animar a los alumnos a debatir el significado del signo igual y enfrentarse a sus ideas erróneas” (Stephens et al., 2013, p. 175).

A las expresiones con dos signos igual se les llama *cadenas de igualdades*. Publicaciones recientes han comprobado el potencial de las cadenas de igualdades para investigar las formas en que los estudiantes interpretan al signo igual. Por ejemplo, Lee y Pang (2021) utilizaron el problema de la figura 3.1.

Figura 3.1

Problema propuesto por Lee y Pang (2021)



Nota. Problema empleado para investigar cómo interpretan al signo igual estudiantes de primaria surcoreanos (Lee y Pang, 2021, p. 212).

Esta pareja de investigadoras capitalizó la experiencia de los estudiantes con el algoritmo de la división euclidiana para suscitar una cadena de igualdades, posibilitando que los estudiantes analizaran el sentido de las relaciones que se expresan en el problema. La solución de este problema no solo promovió la emergencia de diversas interpretaciones del signo igual, sino también permitió generar nuevos problemas para profundizar en la investigación de estas interpretaciones.

Por lo tanto, Lee y Pang (2021) mostraron que la división euclidiana tiene el potencial de movilizar distintas y complejas interpretaciones de la igualdad. Debido a esto, para el diseño de la secuencia de problemas de la tesis se decidió tomar el problema de la figura 3.1 como el primero de la secuencia, para dar entrada al segundo problema, el cual se centra en el trabajo con la división euclidiana desde el punto de vista algebraico.

3.3.2 La división euclidiana en el estudio de Sadovsky (2005)

Patricia Sadovsky (2005) afirma que hay problemas de origen aritmético que admiten un modelo algebraico, el cual redirige la atención hacia la estructura de los números para lograr una solución. Este modelo algebraico podría ser una igualdad simbólica. Por ejemplo, para resolver el problema

> *Si un número natural excede en 22 a un múltiplo de 5, ¿cuál es su residuo al dividirlo por 3?*

la igualdad algebraica $n = 5k + 22$ constituye un modelo (algebraico) para resolver el problema (ver Sadovsky, 2005, p. 27).

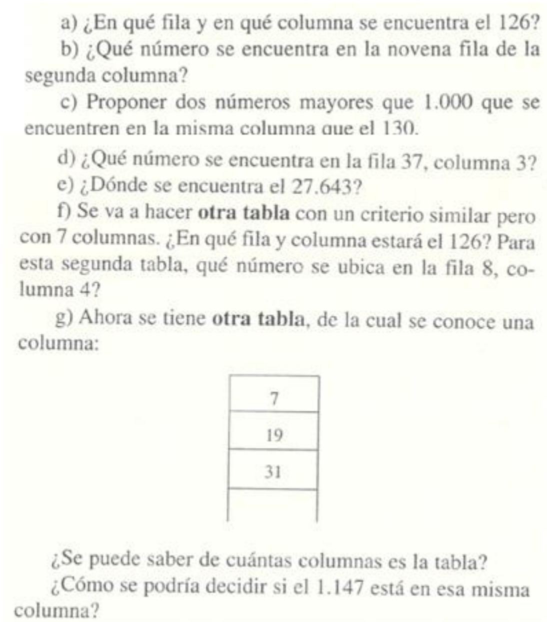
En su libro *Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos,* Sadovsky expone algunos problemas relacionados con la divisibilidad que pueden estimular distintas relaciones de igualdad entre objetos tanto aritméticos como algebraicos. Entre otros, el problema de la figura 3.2 fue aplicado a profesores de primaria y generó muchas discusiones. Este problema se integró en el diseño de la secuencia de actividades que se utiliza en la tesis debido a que promueve la discusión de la relación dialéctica entre lo procedimental y lo conceptual, generando condiciones idóneas para analizar el concepto de igualdad.

Figura 3.2

Problema en torno al algoritmo de la división euclidiana

En una tabla de 6 columnas e "infinitas" filas, se van ubicando consecutivamente el cero y "todos" los números naturales:

0	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35
.	.	.	.	.	.



a) ¿En qué fila y en qué columna se encuentra el 126?

b) ¿Qué número se encuentra en la novena fila de la segunda columna?

c) Proponer dos números mayores que 1.000 que se encuentren en la misma columna que el 130.

d) ¿Qué número se encuentra en la fila 37, columna 3?

e) ¿Dónde se encuentra el 27.643?

f) Se va a hacer **otra tabla** con un criterio similar pero con 7 columnas. ¿En qué fila y columna estará el 126? Para esta segunda tabla, qué número se ubica en la fila 8, columna 4?

g) Ahora se tiene **otra tabla**, de la cual se conoce una columna:

7
19
31

¿Se puede saber de cuántas columnas es la tabla?

¿Cómo se podría decidir si el 1.147 está en esa misma columna?

Nota. Este problema tiene el potencial de movilizar diversas relaciones de igualdad aritmético-algebraicas (Sadovsky, 2005, p. 45).

Para los fines de esta tesis, se ajustaron los problemas de Sadosvsky (figura 3.2) y de Lee y Pang (figura 3.1) para que hubiera relación entre ellos y además se adaptaran a las limitaciones logísticas de su aplicación (la resolución de los problemas no podía durar más de hora y media). En la siguiente sección se presenta el método de recolección de datos, la secuencia de problemas y su análisis *a priori*.

3.3.3 Método de levantamiento de datos

La implementación de la secuencia de problemas se llevó a cabo durante dos días consecutivos. En cada día se tuvo una sesión de 90 minutos, la cual tuvo el formato de entrevista semi-estructurada. El entrevistador fue el autor de este trabajo de tesis.

Debido a las restricciones impuestas por motivo de la pandemia por COVID-19, el número de participantes fue pequeño: un alumno y una alumna, ambos de tercer año de preparatoria. Las entrevistas fueron realizadas en las instalaciones del plantel educativo al que perecían los participantes, la Escuela Preparatoria Oficial 143, en el Estado de México.

Como se muestra en la siguiente sección, la secuencia de problemas estuvo dividida en dos partes: Tarea 1 y Tarea 2. Cada una se aplicó en días distintos, por lo que hubo dos entrevistas en total. En ellas solo estuvieron presentes los dos estudiantes y el entrevistador. Ambas entrevistas se grabaron en audio y video bajo el consentimiento de los estudiantes, tanto para ser grabados como para utilizar sus nombres e imágenes en este proyecto de tesis.

La estructurada general de la entrevista consistió en pedir a los estudiantes que resolvieran cada uno de los problemas. Se le entregó a cada uno la secuencia de los problemas impresa correspondiente al día de la actividad; en el primer día se aplicó la Tarea 1 y en el segundo día la Tarea 2. Asimismo, tuvieron hojas blancas para escribir sus soluciones, ideas o lo que ellos necesitaran para desarrollar sus soluciones. Al final de las sesiones, estas hojas de trabajo las recolectó el entrevistador.

En cuanto a la dinámica de las entrevistas, el aplicador leía en voz alta los problemas y aclaraba las dudas que hubiera en cuanto a la forma y fondo de los enunciados. Se les pidió a los estudiantes que, a pesar de que cada quien tenía hojas para escribir sus soluciones, expresaran libremente tanto sus ideas como sus duda y opiniones. Si bien la secuencia de problemas definía la estructura de las entrevistas, se invitaba constantemente a los estudiantes a interactuar a propósito de la actividad que desarrollaban. En estas interacciones el papel del entrevistador era el de organizador de propuestas que pudieran alentar u orientar la participación de los estudiantes, la comparación de resultados, la generación de nuevos problemas y, en específico, la expresión explicita de sus interpretaciones de la igualdad.

3.3.4 Instrumento final de levantamiento de datos

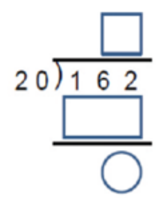
La Tarea 1 se basa en el problema de Lee y Pang (2021) de la figura 3.1. Se compone de cuatro problemas. Tiene por objetivo que los estudiantes muestren explícitamente algunos de sus usos e interpretaciones del signo igual al establecer relaciones entre números enteros a propósito del algoritmo de la división euclidiana (ver tabla 1).

Tabla 1

Primera parte de la secuencia de problemas: Tarea 1

1.- Descubran cómo calcular $162 \div 20$ dados los siguientes datos:

$$20 \times 6 = 120$$
$$20 \times 7 = 140$$
$$20 \times 8 = 160$$
$$20 \times 9 = 180$$



Comprueben el cociente y el residuo encontrados:

$$20 \times \square + \bigcirc = \square + \bigcirc = \bigcirc$$

2.- Elijan cualquier número natural n entre 165 y 175. ¿Existen dos múltiplos consecutivos de 20 entre los que se ubique n? De ser así, ¿pueden escribir a n en términos de alguno de estos múltiplos? Si sí, ¿qué estrategia utilizaron para lograrlo?

3.- Un día Alejandro le dijo a Xavier que dividir un número entre 20 es lo mismo que ubicarlo entre dos múltiplos consecutivos de 20. Pero Xavier no le creyó. ¿Qué argumento darías a favor o en contra de la afirmación de Alejandro?

4.-Si n es un número natural, ¿qué residuo deja al ser dividio entre 3? Justifica tu respuesta. Observa la siguiente tabla:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Residuo al dividir por 3	**0**	**1**	**2**	**0**	**1**	**2**	**0**	**1**	**2**

Nota. Problemas 1-4 de la secuencia de problemas utilizada en esta tesis.

La Tarea 2 está basada en el problema de Sadovsky (2005) presentado en la figura 3.2. Está compuesto por un único problema con cuatro incisos; el último de ellos contiene tres preguntas (ver tabla 2). La redacción del problema no incluye explícitamente al signo igual ni a la noción de igualdad. Sin embargo, para su solución es necesario considerar diversas las relaciones de igualdad, tanto aritméticas como algebraicas.

Tabla 2

Segunda parte de la secuencia de problemas: Tarea 2

5.- En una tabla de 6 columnas e infinitas filas se van ubicando consecutivamente el cero y todos los demás números naturales:

	Columna 1	Columna 2		…		Columna 6
Fila 1	0	1	2	3	4	5
Fila 2	6	7	8	9	10	11
⋮	12	13	14	15	16	17
	18	19	20	21	22	23
	24	25	26	27	28	29
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

a) ¿En qué fila y en qué columna se encuentra el 126?

b) ¿Qué número se encuentra en la novena fila de la segunda columna?

c) Se va a hacer otra tabla con un criterio similar pero con 7 columnas. ¿En qué fila y columna estará el 126? Para esta segunda tabla, ¿qué número se ubica en la fila 8, columna 4?

d) Ahora se tiene otra tabla, de la cual se conoce una columna:

7
19
31
⋮

d.1 ¿Se puede saber de cuántas columnas es la tabla? ¿Cómo se podría decir si el 1,141 está en esa misma columna?

d.2 Supongamos que a y b son dos números de la columna

7
19
31
⋮

pero que se encuentran en filas desconocidas

⋮
a
⋮
b
⋮

¿Qué se puede decir de su diferencia?

d.3 ¿Será cierto que si la diferencia de dos números es un múltiplo de 12 entonces están en la misma columna? Justifica tu respuesta.

Nota. Problemas 5 de la secuencia de problemas utilizada en esta tesis.

En la siguiente tabla se explica la relación entre los problemas de las tablas 1 y 2. Además, se resumen los tipos de interpretaciones del signo igual a los que se espera recurran los alumnos.

Tabla 3

Relaciones entre los problemas de la secuencia e interpretaciones del signo igual que pueden movilizar

Problema	Finalidad en la secuencia	Potenciales interpretaciones del signo igual
1	• Contextualizar cadenas de igualdades • El procedimiento para efectuar el AD consiste en descomponer el dividendo en términos del divisor, el cociente y el residuo • El AD induce una relación de igualdad	• Operacional rígido $20 \times 8 + 2 = 162 + \quad =$ • Operacional calculatorio $20 \times 8 + 2 = 160 + 2 = 162$ pues $20 \times 8 + 2 = 164$ y $160 + 2 = 162$ • Relacional básico Atendiendo las relaciones en el esquema del AD se obtiene que $20 \times 8 + 2 = 162 + 2 = 164$ • Relacional comparativo Como $20 \times 8 = 160$, entonces $20 \times 8 + 2 = 160 + 2$. Pero $160 + 2 = 162$, así que $20 \times 8 + 2 = 160 + 2 = 162$ • Relacional sustitutivo $20 \times 8 + 2 = 162 + 2 = 164$ • Transitividad de la igualdad Si $20 \times 8 + 2 = 160 + 2 = 164$, entonces $20 \times 8 + 2 = 164$
2	• Recíproco del problema 1: Si n se decompone como	• Operacional rígido Por ejemplo, si se escogió el 166,

	$n = 20 \times 8 + r$ para algún natural r entre 0 y 10, entonces 8 y r son el cociente y el residuo, respectivamente, al aplicar el AD a n como dividendo y a 20 como divisor • Introducir la idea de que el AD "es" una igualdad particular	entonces 166 está entre 20×8 y 20×9 porque $20 \times 8 = 160$ y $20 \times 9 = 180$. Además $20 \times 8 = 160$ $20 \times 8 + 1 = 161$ $20 \times 8 + 2 = 162$ $20 \times 8 + 3 = 163$ $20 \times 8 + 4 = 164$ $20 \times 8 + 5 = 165$ $20 \times 8 + 6 = 166$ • Operacional flexible Si se escogió 166, entonces está entre $20 \times 8 = 160$ y $20 \times 9 = 180$. Además $20 \times 8 + 6 = 166$. Luego $166 = 20 \times 8 + 6$ • Relacional aritmético Si se escogió 166, por el AD se tiene que $166 = 20 \times 8 + 6$ donde 8 es el cociente y 6 es el residuo. Entonces 166 está entre 20×8 y 20×9 • Simetría de la igualdad Ver ejemplo de la interpretación Operacional flexible
3	• Extensión del problema 2: Desarrollar los mismos razonamientos que en problema 2 pero ahora sin acotar al cociente. • Dividir un número a través del AD equivale a descomponerlo (obtener	• Relacional aritmético Tomar varios números concretos, aplicarles el AD y deducir que efectivamente se pueden ordenar entre sendos múltiplos consecutivos de 20. De estos casos particulares conjeturar que lo mismo debe ocurrir para

	una igualdad) en términos de un múltiplo de 20 y un número natural. • La igualdad que origina el AD relaciona a cada número con su cociente y su residuo a través de operaciones aritméticas. Estas operaciones no se espera que sean efectuadas, pues en tal caso se "perdería" la relación.	cualquier número. • Proposicional Si n es un número entero, por el AD se tiene que $n = 20 \times q + r$ donde q es el cociente y r es el residuo. Entonces n está entre $20 \times q$ y $20 \times (q + 1)$
4	• Extensión y generalización del problema 3: Usar ahora el AD con 3 como divisor y notar que todo número se puede descomponer como un múltiplo de 3 más un número que es 0, 1 ó 2. • Al aplicar el AD el residuo siempre está acotado, pero no así el cociente. • Conjeturar la unicidad del cociente en la descomposición que induce el AD.	• Relacional aritmético Tomar varios números concretos, aplicarles el AD y deducir que su residuo es 0, 1 o 2. De estos casos particulares conjeturar que lo mismo debe ocurrir para cualquier número. • Semántica, Sintáctica y Proposicional Si n es un natural, por el AD ocurre que $n = 3q + r$ para algunos números naturales q y r. Notar que para obtener descomposiciones en términos de múltiplos de 3 la variación de r conduce a $3q + 0 = 3q$ $3q + 1 = 3q + 1$ $3q + 2 = 3q + 2$ $3q + 3 = 3(q + 1)$ $3q + 4 = 3(q + 1) + 1$

		$$3q + 5 = 3(q + 1) + 2$$ $$\dots$$ Entonces $0 \leq r < 3$
5 inciso a	• Extensión del problema 4: Determinar qué dividendo ocupar con base en la cota que debe tener el residuo. • Las igualdades que induce el AD expresan relaciones que contienen las "coordenadas" de los números en la tabla. • El sentido de aplicar el AD ya no es operacional, sino para describir relaciones de igualdad.	• Operacional calculatorio $$6(0) = 0$$ $$6(1) = 6$$ $$6(2) = 12$$ ... $$6(21) = 126$$ • Relacional aritmético Por el AD se tiene $126 = 6(21) + 0$
5 inciso b	• Recíproco y generalización del inciso a: Dadas las coordenadas de una posición en la tabla, encontrar el número que está ahí. • Ocupar la relación entre los elementos del AD (dividendo, divisor, cociente y residuo) para construir el número que se busca	• Condicional, Proposicional y Relacional aritmético Si n es un número en la tabla, por el AD $$n = 6q + r$$ Luego n está en la fila $q + 1$ y columna $r + 1$. Entonces $6(9 - 1) + (2 - 1) = n$ es el número que está en la fila 9, columna 2. Resolviendo se obtiene que $n = 49$
5 inciso c	• Extensión de los incisos a y b: Extender los razonamientos de los dos incisos anteriores	Las mismas interpretaciones que en los incisos a y b.

	utilizando como divisor al número 7.	
5 inciso d.1	• Generalización del inciso c: El análisis en el inciso c dependió del dividendo, pero en este problema hay que encontrarlo utilizando las relaciones entre los números de la misma columna y la estructura de la tabla.	• Relacional aritmética, Proposicional, Condicional y Sintáctica Por la relación entre las coordenadas de los números y el AD se tienen las relaciones $7 = n(1-1) + (r-1)$ y $19 = n(2-1) + (r-1)$ Resolviendo se obtiene $n = 12$.
5 inciso d.2	• Profundización del inciso d.1: Caracterización de los números en la columna ocho en función de su cociente. • La relación de divisibilidad entre números enteros.	• Proposicional, Sintáctica, Definitoria y Característica sustitutiva de la igualdad Como a y b están en la columna ocho, entonces se pueden expresar como $a = 12q + 7$ y $b = 12q' + 7$. Sustituyendo en la expresión $a - b$ y simplificando se llega a que $a - b = 12(q - q')$ Tomando $k = (q - q')$ se concluye que $a - b = 12k$ para algún entero k Entonces $a - b$ es divisible entre 12.
5 inciso d.3	• Generalización y recíproco del inciso d.2: Caracterización de los números en cualquier columna de la tabla en función de su cociente y residuo.	• Proposicional, Sintáctica, Definitoria y Característica sustitutiva de la igualdad Si a está en la fila q, columna r y b está en la fila q', columna r', entonces se expresan como $a = 12(q-1) + (r-1)$ $b = 12(q'-1) + (r'-1)$

		Si $a - b$ es divisible entre 12 entonces $$a - b = 12k$$ Para algún entero k. Sustituyendo las primeras dos igualdades en la tercera, factorizando, reduciendo y despejando se llega a que $$r' - r = 12k'$$ donde $k' = \{[(q-1) - (q'-1)] - 1\}$. Como $1 \leq r, r' < 12$, entonces $k' = 0$ y por consiguiente $r = r'$. Por lo tanto a y b están en la misma columna si su diferencia es divisible entre 12.

En el Apéndice A se encuentra una presentación exhaustiva del análisis previo que se realizó para determinar la secuencia de problemas, incluyendo las soluciones, las estrategias e interpretaciones del signo igual que los estudiantes de bachillerato podrían proponer, así como todos los detalles de las relaciones que mantienen entre sí los problemas.

4. Análisis, discusión y conclusiones generales de los datos

En este capítulo se presenta el análisis y discusión de la implementación de la secuencia de problemas. Cabe aclarar que solo se presentan los episodios que el autor de este trabajo consideró más relevantes según los objetivos de la tesis. Un análisis detallado de la implementación de la secuencia se presenta en el Apéndice B.

4.1 De la interpretación operacional a la relacional: algunas interpretaciones de Marcos

En la figura 4.1 aparecen las soluciones escritas de los estudiantes sobre la primera parte del problema.

Figura 4.1

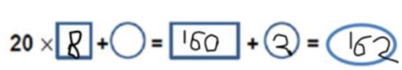
Solución del problema 1

Nota. A la izquierda la solución de Gaby y a la derecha la de Marcos.

Atendiendo su trabajo escrito, parece que Marcos usa una interpretación operacional del signo igual. Esto se confirma enseguida. Él menciona que la solución de Gaby es incorrecta y propone reestructurarla (ver figura 4.2).

Figura 4.2

Marcos propone una reestructuración de la solución de Gaby



Nota. Marcos donde exhibe una interpretación del signo igual que se inscribe en el esquema $operaciones\ =\ resultado$.

La propuesta de Marcos sugiere que su interpretación del signo igual está restringida al formato operacional $operaciones = resultado$. Esto es, inmediatamente después del signo igual debe de ir “la solución” o “el resultado que se pide”. De hecho, esto lo reconoce de forma explícita:

> Marcos: Eh… bueno, es que yo estoy acostumbrado a lo de poner, si está el igual, directamente ya el resultado.

Por lo tanto, su trabajo a papel y lápiz muestra una interpretación del signo igual que es **operacional rígida** de acuerdo con la categorización propuesta en esta tesis.

Pero cuando Gaby explicó su solución y afirmó que en la cadena de igualdades $20 \times 8 + 2 = 160 + 2 = 162$ había tres igualdades, Marcos no solo aceptó que la solución de Gaby sí era correcta sino que también refirió verbalmente la simetría de la igualdad:

> Entrevistador: ¿Cómo ves [Marcos]? ¿Qué piensas del trabajo que anotó Gaby?
>
> Marcos: Que sí son lo mismo, nada más que, como ciertamente había dicho mi compañera, se expresan de diferente forma. Pero en sí, realmente es lo mismo.
>
> Entrevistador: Por ejemplo, $160 + 2$ ¿a qué es igual?
>
> Marcos: Igual que a esta [20×8 +2] y esta [162], que a la primera y a la tercera [expresión].

Marcos afirma que la expresión $160 + 2$ es igual a la que está a la derecha del signo igual (162) y también a la que está a la izquierda del signo igual ($20 \times 8 + 2$). Si no reconociera simetría en la igualdad, solo hubiera podido leer igualdades de izquierda a derecha, cosa que no ocurrió. Así que también podría tener una interpretación **operacional flexible** del signo igual de acuerdo con la categorización propuesta en esta tesis..

Además, en el episodio anterior Marcos reconoce que las expresiones $160 + 2$ y $20 \times 8 + 2$ son “lo mismo” aunque “se expresan de forma diferente”. Si bien simbólicamente no relaciona estas expresiones aritméticas, verbalmente sí describe su equivalencia. Esto sugiere una interpretación **relacional aritmética** de la igualdad. En efecto, durante la discusión de las igualdades que Gaby afirmó estaban contenidas en la cadena de igualdades, Marcos notó que la igualdad $20 \times 8 + 2 = 160 + 2$ da lugar a una nueva: $20 \times 8 = 160$. Pero la igualdad $20 \times 8 = 160$ no la obtuvo haciendo operaciones aritméticas sino deduciéndola de la igualdad $20 \times 8 + 2 = 160 + 2$ al utilizar la estrategia compensatoria de “quitar” el “más 2” de cada miembro de la igualdad. Entonces interpretó al signo igual de forma **relacional comparativa**.

Incluso cuando Marcos expresó abiertamente una concepción operacional rígida del signo igual, “si está el signo igual, poner inmediatamente el resultado”, y esta se evidencio en sus soluciones escritas, la comparación y discusión verbal del trabajo de los estudiantes permitió exponer la variedad de interpretaciones de la igualdad que conoce Marcos. Esto permite sostener que, para el diseño seguido en este estudio, una noción operacional rígida de la igualdad no necesariamente limita la emergencia de interpretaciones más flexibles.

4.2 Reflexividad y simetría de la igualdad: propiedades que los estudiantes no (necesariamente) expresan simbólicamente

En la solución del problema 1 Gaby comentó que las expresiones $20 \times 8 + 2$, $160 + 2$ y 162 eran iguales. Tanto ella como Marcos convinieron en que se tenían las siguientes igualdades

$$20 \times 8 + 2 = 162$$

$$160 + 2 = 162$$

$$20 \times 8 + 2 = 160 + 2$$

A pesar de que verbalmente Marcos refirió que $160 + 2$ es igual a $20 \times 8 + 2$ y Gaby que 162 es 162, ambos afirmaron que la lista anterior de igualdades era exhaustiva. No consideraron necesario expresar simbólicamente las igualdades que verbalizaron: $160 + 2 = 20 \times 8 + 2$ y $162 = 162$. Es decir, incluso cuando eran consientes de estas relaciones, la simetría y reflexividad de la igualdad no se manifestaron en su trabajo escrito. ¿Por qué ocurrió este fenómeno? Como enseguida se explica, el análisis de su trabajo en el problema 2 sugiere una posible respuesta.

Ante la pregunta de si hay una descomposición de 170 que incluya 20×8 o 20×9, Gaby respondió lo siguiente:

> Gaby: Sí. Por ejemplo, 170 es 20×8 más 10 igual a 170. 20×9 menos 10 es igual a 170. Y se incluyen los dos, 20×8 y 20×9.

La descripción verbal que hace de 170 en términos de 20×8 tiene la siguiente forma simbólica:

$$170 = 20 \times 8 + 10 = 170$$

Es una cadena de igualdades similar a la que propuso en el problema 1 (ver figura 4.1). En ese problema ella notó que de la cadena de igualdades $20 \times 8 + 2 = 160 + 2 = 162$ se obtenían al menos tres relaciones de igualdad: la primera expresión con la tercera ($20 \times 8 + 2 = 162$), la segunda con la tercera ($160 + 2 = 162$) y la primera con la segunda ($20 \times 8 + 2 = 160 + 2$). Entonces de la cadena $170 = 20 \times 8 + 10 = 170$ ella bien podría deducir las siguientes igualdades:

$$170 = 170$$

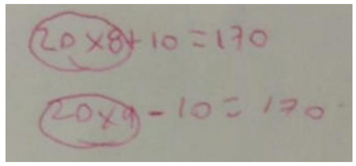
$$20 \times 8 + 10 = 170$$

$$170 = 20 \times 8 + 10$$

En otras palabras, podría simbolizar la reflexividad y simetría de la igualdad. No obstante, como se aprecia en la figura 4.3 en su respuesta escrita solo escribió una de estas tres igualdades.

Figura 4.3

Parte de la solución de Gaby del problema 2



Nota. La producción escrita de Gaby no incluye la simetría ni la reflexividad de la igualdad, a pesar de que reconoce estas propiedades.

En su explicación escrita (figura 2.3) está respondiendo si 170 se puede descomponer en una expresión que contenga a 20×8. Ella dice que sí, que tal expresión es $20 \times 8 + 10$; está partiendo de 170 y llegando a $20 \times 8 + 10$. Luego la igualdad $170 = 20 \times 8 + 10$, donde 170 está a la izquierda, modelaría el orden en el que configuró su respuesta, pues leemos de izquierda a derecha. Sin embargo, después de haber llegado a la solución, $170 = 20 \times 8 + 10$, Gaby pareció atraída por el esquema $operaciones = solución$ y entonces concluyo que $20 \times 8 + 10 = 170$. El hecho de que *regrese* a 170 podría significar una interpretación operacional rígida de la igualdad o bien el conocimiento de la simétrica del signo igual. No obstante, en virtud de la segunda descomposición de 170 que propuso es posible afirmar que reconoce **simetría** en la igualdad. En efecto, ella dice “20×9 menos 10 es igual a 170”; en símbolos, $20 \times 9 - 10 = 170$. Pero recordar que está respondiendo si 170 se puede descomponer en una expresión que contenga a 20×9. Por lo tanto su respuesta es que sí, que 170 es $20 \times 9 - 10$. Al final esta última igualdad, así como la que incluía a 20×8, las (re)escribió en la forma $20 \times 8 + 10 = 170$ y $20 \times 9 - 10 = 170$ no porque ignoraba las igualdades $170 = 20 \times 8 + 10$ y $170 = 20 \times 9 - 10$, sino porque estas últimas están latentes en las primeras.

Este episodio sugiere que las propiedades de reflexividad y simetría de la igualdad pueden permanecer ocultas en el trabajo escrito de los estudiantes.

Ya teniendo que $20 \times 8 + 10 = 170$, las igualdades $170 = 170$ y $170 = 20 \times 8 + 10$ no aportarían más información de la que realmente necesitan para solucionar el problema. Con todo, que no las escriban no significa que no estén conscientes de ellas.

4.3 Una familia de igualdades semánticas: otras interpretaciones de Marcos

Durante la discusión de si había una descomposición de 170 que incluyera a 20×8, Marcos propuso lo siguiente:

> Marcos: Se podría hacer lo que sería 20×8 más, no sé… podría ser $20 - 10$; podría haber una gran variación en otras que da igual 170.
>
> […]
>
> Entrevistador: ¿Qué estrategia ocupas para lograr la descomposición [de 170]?
>
> Marcos: Bueno, por ejemplo, para 20×8, ya sabiendo que da 160, sabiendo que cualquier número mayor o menor que 10; si es menor que 10, se tiene que sumar con otro número. Por ejemplo, suponiendo que es 9 se tendría que aparte sumar otro 1 para que diera 170. Ya si es… $15, 20$, se tendría que restar. Por ejemplo el 15, se tendría que restar 5 para que diera 170; en el 20, pues 10, y así…

Según Marcos, “podría haber una gran variación en otras, que da igual 170”. ¿De qué variación habla? Cuando empezó a decir “podría haber una gran variación en otras…” él estaba observando la resta $20 - 10$ mientras movía ambas manos de tal que forma que expresaba equilibrio o compensación (ver figura 4.4).

Figura 4.4

Marcos corporiza compensación con sus manos

Nota. Marcos menciona que puede haber “una gran variación” entre los números en la expresión $x - y$ de modo que esta resta siempre sea el mismo número.

Una opción es que la variación se refiera a la resta. Pero esto no es así. Trata de explicar que al tomar 20×8 y sumarle cierta cantidad se podría obtener como resultado 170 sin importar la variación que haya *dentro* del número que se suma. Por lo tanto, la variación que menciona no es sobre el resultado de la resta sino sobre las cantidades que se están restando (tal como lo ejemplifica en la descripción de la estrategia que utilizó). La compensación que corporiza es sobre los números que se restan, de modo que al operarlos se mantenga estable el resultado: que siempre sea 10.

En términos simbólicos, lo anterior se resume en que la igualdad $20 \times 8 + (x - y) = 170$ se preserva siempre que las cantidades x y y varíen de modo que la diferencia $x - y$ sea 10. La observación de Marcos generaría entonces una familia de igualdades:

$$20 \times 8 + (20 - 10) = 170$$

$$20 \times 8 + (9 + 1) = 170$$

$$20 \times 8 + (15 - 5) = 170$$

$$20 \times 8 + (20 - 10) = 170$$

$$\vdots$$

Estas igualdades se obtienen al dejar suspendidas algunas de las operaciones involucradas; es decir, al no realizarlas. En ellas se utiliza al signo igual en virtud de la estructura de las expresiones $20 \times 8 + x - y$ y de la relación que guardan las diferencias $x - y$. En consecuencia, de acuerdo con la categorización propuesta en esta tesis, las interpretaciones de Marcos corresponden a las categorías **relacional comparativa** y **relacional semántica.**

4.4. Una igualdad condicional subyacente a la aplicación del AD: un descubrimiento derivado del trabajo conjunto

Para responder la pregunta *¿Qué estrategia utilizan para expresar a* 170 *en términos de un múltiplo de* 20*?* Ambos estudiantes coincidieron en que un primer paso es encontrar un múltiplo de 20 que esté lo más cerca de 170. Por ejemplo, 20×8**.** No obstante, la descripción del segundo paso los llevó a plantear la necesidad de resolver ecuaciones particulares.

Por un lado, Marcos propone lo siguiente:

> Entrevistador: ¿Cuál sería el segundo paso?
>
> Marcos: Después sería restar el resultado de ese múltiplo (20×8) del resultado que esperas obtener (170) para saber la cantidad que necesitas sumar para obtener ese resultado (170).
>
> Entrevistador: Ok. Entonces, paso uno: encontrar el múltiplo de 20 más cercano a 170. Dice Marcos, el paso dos es decir cuánto es 20×8, que es 160, y restárselo a 170. ¿Luego?, ¿Lo que te da esa resta qué le haces?
>
> Marcos: Esa, en el caso que tenía que era 20×8, que era 160, se tendría que restar, sabiendo que esta el resultado menor se tendría que sumar lo que tenga que dar la resta entre 160 y 170, que en este caso es el 10.

Básicamente lo que Marcos propuso fue un método para encontrar el residuo que deja 170 cuando se divide entre 20. Dice que primero se calcula 20×8, que es 160. Después se debe considerar la resta $170 - 160$, que en este caso es 10. Finalmente, se toma la suma $160 + 10$ para obtener 170. Este procedimiento exhibe un manejo controlado de la aritmética. Las operaciones que se efectúan no son arbitrarias, por el contrario, surgen de forma premeditada para apuntalar la descomposición de 170 que se buscaba. Debido a los cálculos que hizo Marcos y a lo que pretendía con ello, aunque no la planteó explícitamente, al final resolvió la siguiente ecuación:

$$(20 \times 8) + x = 170.$$

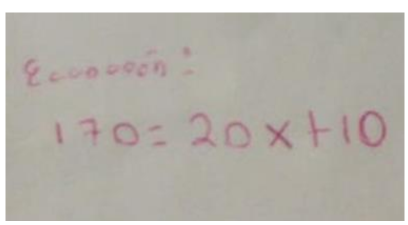
Por otro lado, Gaby parece ver en la explicación de Marcos precisamente el procedimiento para resolver una ecuación:

> Entrevistador: Esta serie de pasos, ¿no les parece familiar?
>
> Ambos: Una ecuación.
>
> Entrevistador: ¿Por qué una ecuación?
>
> Gaby: Porque también son igualdades, y normalmente hacemos los procedimientos inversos para encontrar el número.

Gaby piensa en una ecuación debido a dos cosas: hay igualdades y se hacen procedimientos inversos para "encontrar el número". ¿De cuál "número" habla Gaby? En principio se podría pensar que habla del residuo, pues en el razonamiento de Marcos este era la incógnita. Sin embargo, Gaby escribió la ecuación de la figura 4.5.

Figura 4.5

Gaby plantea que la división euclidiana permite encontrar el cociente



Nota. Gaby relaciona la aplicación del algoritmo de la división con la resolución de una ecuación.

La producción escrita Gaby en la figura 4.5 deja ver no solamente que puede abandonar el esquema operacional direccional $operaciones = resultado$, sino que también tiene una **interpretación condicional** del signo igual. Pero lo que en definitiva sobresale en su trabajo es que la ecuación que compuso es distinta de la que resolvió Marcos. Aunque ambas son ecuaciones aritméticas, la incógnita que trabajó Marcos fue el residuo de dividir 170 entre 20:

$$(20 \times 8) + x = 170.$$

Mientras que en la ecuación de Gaby, la incógnita es el cociente que resulta de dividir 170 entre 20:

$$20x + 10 = 170.$$

Entonces cada estudiante se enfocó en uno y sólo uno de los dos objetos cuya existencia garantiza el algoritmo de la división euclidiana. Por ello el entrevistador les pidió que realizaran la siguiente división

$$20 \,\overline{\big)\, 175}$$

Luego el entrevistador señaló que la sucesión de pasos que estaban construyendo eran los que ellos ya conocían para hacer una división con la casita. En este punto retomó la idea considerar una ecuación:

> Entrevistador: No tiene que ver tal cual con una ecuación, porque una ecuación es [según dice Gaby] “encuentra el número”. Pero aquí no hay incógnita. ¿O sí?
>
> Gaby: No.
>
> Entrevistador: Tú qué dices, Marcos.
>
> Marcos: [Hace ademanes de que tiene sus reservas]
>
> Gaby [ganándole a Marcos la palabra]: O podría ser que sí, porque pues estamos buscando la descomposición.
>
> Entrevistador: Ok. Para hacer la división, les dan el número que van a dividir y por cuál número [van a dividir]. Cuando dividen, ¿qué números encuentran?
>
> Marcos: El 8 y queda como residuo el 10.

Yo: Entonces sí están encontrando números, ¿verdad? Están encontrando el 8 que se conoce como “cociente” y el 10 que se conoce como “residuo”.

Ambos: Sí.

Entrevistador: ¿Y este procedimiento [el de descomponer a 170 como antes] servirá para cualquier otro número que yo me encuentre entre 165 y 175?

[…]

Gaby: ¡No!. No debe de ser con 10. Porque si tomamos como base 10 nada más va a ser para 170 porque no nos puede dar 168 sumado 10. Pero sí sería buscando el… como había dicho mi compañero, multiplicar y después al número que elegimos restarle lo que nos dio.

Yo: O sea, que el cociente y el residuo depende del número que hayan elegido.

Marcos: ¡Exacto!

Gaby: ¡Sí, sí!

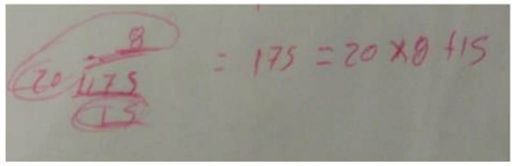
Lo anterior muestra que al final ambos estudiantes estuvieron de acuerdo en que al aplicar el algoritmo de la división euclidiana no tenían que encontrar un número, sino dos: el cociente y el residuo. Es decir, tenían que resolver una ecuación algebraica, una ecuación con dos incógnitas

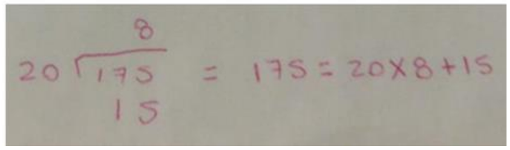
$$170 = 20x + y$$

Esto se comprueba al revisar su solución escrita del nuevo problema que les planteó el entrevistador para estrenar la estrategia que recién habían descubierto: Determinar una descomposición de 175 que incluya un múltiplo de 20. En la figura 4.6 se muestra que los dos establecieron una relación explicita entre el algoritmo de la división euclidiana en su forma de la casita y éste como una relación de igualdad.

Figura 4.6

Los estudiantes identifican al algoritmo de la división euclidiana como una relación de igualdad





Nota. Arriba el trabajo de Marcos y abajo el de Gaby.

Marcos y Gaby (re-)descubrieron el rol como variables que juegan el *cociente* y el *residuo* en el algoritmo de la división euclidiana de manera colaborativa, completando las igualdades condiciones que cada uno había propuesto. Esto da cuenta del valor que el trabajo cooperativo podría tener para el aprendizaje de conceptos matemáticos, en particular del concepto de igualdad algebraica.

4.5 Igualdad sintáctica como herramienta para determinar residuos en el AD: una expresión verbal de Marcos.

El trabajo de los estudiantes en la problema 4 giraba alrededor del problema de determinar cuáles son los posibles residuos al tomar 3 como divisor. Después de analizar algunos números concretos ambos conjeturaron que los residuos obedecían un patrón: $0, 1$ y 2. Sin embargo, ambos pudieron generalizar su análisis y concluir que cualquier número debía forzosamente dejar residuo $0, 1$ o 2:

> Entrevistador: Y si les preguntara, ¿Qué números dejan residuo cero?
>
> Gaby: Múltiplos de 3.
>
> Marcos: ¡Ajá, múltiplos de 3!
>
> Entrevistador: ¿Y cuáles dejan residuo 1?
>
> Marcos: Cuando se sobrepasa por 1 al 3. Puede ser el 4, puede ser el $7\ldots$
>
> Entrevistador: A ver el 22.

Gaby: [Sin decir nada, escribe $22 = 3 \times 7 + 1$].

Entrevistador: Aquí tiene residuo 1, dice Gaby. ¿Cómo lo explicas tú, Marcos? Porque dijiste "que sobrepasa por 1 al 3". Aquí 22 no sobrepasa en 1 a 3 pero sí deja residuo 1.

Ambos: ¡Sería que sobrepasa un múltiplo de 3 en 1!

Entrevistador: ¿Y cuáles dejarían residuo 2?

Marco: Uno que sobrepasa un múltiplo de 3 en 2.

Entrevistador: ¿Y no habrá uno que sobrepase un múltiplo de 3 en 3?

Marcos: No, porque como hay una regla de… Siempre el 3 cabe en su propio número cuantas veces sean necesarias. Entonces cuando llega a un múltiplo de 3 vuelve el ciclo.

Ambos están interpretando a la igualdad de forma **relacional comparativa**. En efecto, tanto Gaby como Marcos tienen claro que cualquier número de la forma $3q$ deja residuo 0 al dividirse entre 3, cualquiera de la forma $3q + 1$ deja residuo 1 y cualquiera de la forma $3q + 2$ deja residuo 2. ¿Cómo lo supieron? Conjeturando que, por ejemplo, la ecuación $3q + 1 = 3k + r$, donde k sería el cociente y r el residuo al dividir el número $3q + 1$ entre 3, tiene una única solución: $k = q$ y $r = 1$. En otras palabras, atendieron la estructura de las expresiones.

Lo anterior se refuerza y amplifica con la última intervención de Marcos. El entrevistador pregunta si existe un número que exceda por 3 a un múltiplo de 3. Evidentemente los estudiantes saben que en el contexto de la aritmética claro que existe. Por ejemplo 6, pues $3 \times 1 + 3 = 6$. Con todo, Marcos responde que no existe. Simbólicamente, la explicación Marcos es que un número que excede por 3 a un múltiplo de 3 no deja residuo 3 porque $3q + 3 = 3(q + 1) + 0$ para cualquier q número entero. Esta afirmación es sustentada por dos hechos. Por un lado, usa **sintácticamente** a la igualdad: menciona la palabra *siempre* y dice que "el 3 cabe en su propio número cuantas veces sean necesarias". Es decir, sin importar quién sea q ("cuantas veces sean necesarias") se cumple "la regla" $3q + 3 = 3(q + 1)$ siempre. Por otro lado, cuando dice “vuelve el ciclo” está pensando en el ciclo que describen los residuos. Así que a la expresión $3(q+1)$ la relaciona con el primero de los números dentro del ciclo de residuos, el 0, y como los residuos se suman a los múltiplos entonces se tiene la expresión $3(q+1)+0$.

Marcos está consciente de que hay reglas generales para manipular los números enteros. ¿Cuáles números exactamente? ¡Cualesquiera! En este sentido interpreta sintácticamente a la igualdad. En particular, refiere la propiedad de la distributividad del producto sobre la suma en las estructuras algebraicas llamadas *anillos* (ver Gómez, 2014). Esta propiedad, aunque contextualizada en los números enteros y expresada verbalmente, refleja que Marcos pone un uso un conocimiento una sofisticado de la relación de igualdad que dista mucho de la interpretación operacional rígida que mostró en la sección 4.1.

En relación a la noción de igualdad sintáctica, Marcos nuevamente evidenció su conocimiento y manipulación durante la resolución del problema 5 inciso a. En concreto, estaba determinando cómo descomponer a 126 en términos de múltiplos de 6. Su procedimiento fue el siguiente:

> Marcos: Si multiplicamos 6 por 20 te da 120. […] Y aparte si multiplicamos 6 por 1 da igual a 6. Si sumamos todo el resultado te da 126, que sería lo que nos está pidiendo.
>
> Entrevistador: Entonces lo estas descomponiendo [a 126] como 6 por…
>
> Marcos: 6 por 20 y luego… Bueno, 6 por 21. (Marcos escribe $21\times 6=126$).

La explicación verbal de Marcos puede resumirse en la siguiente igualdad: $(6\times 20)+(6\times 1)=126$.

A partir de las explicaciones verbales de Marcos, se puede inferir que después estableció la igualdad sintáctica $(6\times 20)+(6\times 1)=6\times(20+1)=6\times 21$ y de ella obtuvo $(6\times 20)+(6\times 1)=6\times 21$ (por transitividad de la igualdad). Finalmente sustituyó $(6\times 20)+(6\times 1)$ por 6×21 en $(6\times 20)+$

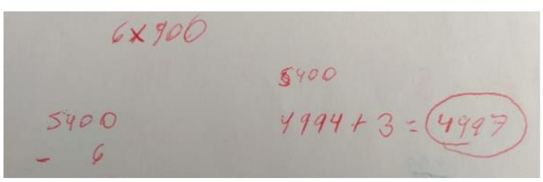
$(6 \times 1) = 126$, de donde llegó a la igualdad que escribió $21 \times 6 = 126$. Esta secuencia de pasos deja ver un uso aritmético del signo igual en donde la **sintaxis,** la **transitividad** y la **propiedad sustitutiva** de la igualdad son utilizadas conjuntamente.

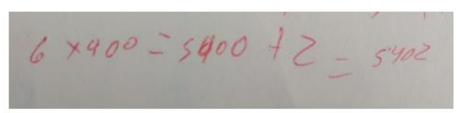
4.6 Sobre la utilidad práctica de las cadenas de igualdades falsas: algunos usos de Marcos y Gaby

En el problema 5 inciso b, ambos estudiantes estaban tratando de encontrar qué número está en la fila 900, columna 3 en una tabla con seis columnas. La dificultad de este problema es considerable (ver Apéndice B sección A.5.2). Por ello la atención de los estudiantes estaba enfocada en el fin y no tanto en los medios. Es decir, para términos del problema, no era importante la formalidad de su trabajo escrito sino su sentido. En la figura 4.7 se encuentra un ejemplo de esto.

Figura 4.7

¿Qué número está en la fila 900, columna 3?





Nota. La producción escrita de los estudiantes muestra los atajos calculatorios que tomaron para resolver el problema que enfrentaron. A la izquierda está el trabajo de Gaby y a la derecha el de Marcos.

La respuesta a lápiz y papel de Marcos (imagen de la derecha en la figura 4.7) muestra al signo igual desprovisto de un sentido relacional: las tres expresiones que conecta no son equivalentes. Se podría inferir entonces que tiene una interpretación operacional rígida del signo igual. Pero al atender el contexto en el que emergió esta cadena se descubre que simplemente es una abreviación de las operaciones que requirió efectuar para resolver el problema.

Es decir, con la sucesión de expresiones

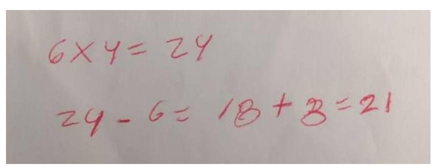
$$6 \times 900 = 5400 + 2 = 5402.$$

Marcos no pretendía proponer una cadena de igualdades, solo utilizó su interpretación operacional rígida del signo igual como una herramienta para hacer más eficientes sus cálculos.

Lo anterior también ocurrió con Gaby. En la figura 4.8 se aprecia una cadena de igualdades falsas. No obstante, Gaby utilizó la cadena de expresiones $24 - 6 = 18 + 3 = 21$ para acortar las operaciones aritméticas que deseaba realizar, más no para expresar equivalencia.

Figura 4.8

¿Qué número está en la fila 4, columna 3?



Nota. Producción escrita de Gaby para obtener los datos que necesita para resolver el problema, prescindiendo de la consistencia matemática de los símbolos.

Estos episodios proveen evidencia del origen de algunas cadenas de igualdades que no expresan equivalencia. Esta inconsistencia matemática no fue producto del descuido o confusión de los estudiantes, sino un medio premeditado para utilizar el esquema operacional $operaciones = resultado$ eficientemente durante la resolución de problemas.

4.7 Igualdades algebraicas: comprensión a través de la manipulación sintáctica

Para desarrollar la solución del problema 5 inciso d.3 era necesario que los estudiantes plantearan y manipularan igualdades algebraicas. En el Apéndice B sección A.5.4 se describen los detalles de todas las dificultades que Gaby y Marcos enfrentaron.

En términos generales, el entrevistador guió a los estudiantes a lo largo de la solución del problema: dando pautas para que ellos completaran algunos pasos, ayudándolos a manipular correctamente las expresiones algebraicas y también redirigiendo su atención hacia los elementos clave del problema. Si bien los estudiantes no resolvieron por sí solos el problema, fue relevante que su comprensión de las igualdades algebraicas fue emergiendo y relacionándose con diversos significados del signo igual, solidificándose a lo largo de todo el proceso de resolución. A continuación, se presenta una descripción y análisis del trabajo que hicieron los estudiantes.

La primera parte del problema consistía en determinar una descomposición general para dos números, a y b, que yacen en la siguiente columna de una tabla con 12 columnas en total:

7
19
31
…
a
…
b
…

Los estudiantes ya habían descubierto que todo número en la tabla se relaciona con su cociente y residuo al dividir entre 12: Su cociente es el número de la fila en la que está y su residuo el número de columna. Por ello el entrevistador procedió a tomar este hecho como base para construir las descomposiciones de a y b:

> Entrevistador: Si no supieran en qué fila y qué columna está el 31, según su estrategia toman 31 y lo dividen entre…
>
> Ambos: Entre 12.
>
> Entrevistador: ¿Y qué les daría? Que 31 es igual a 12 por…
>
> Gaby: Por 2 más 7. (El entrevistador escribe $31 = 12 \times 2 + 7$)
>
> Entrevistador: Entonces todos estos números [en columna 7] son 12 por su número de…
>
> Ambos: …de fila más su número de columna.
>
> Entrevistador: Pero a y b están por aquí [en la columna 7], entonces también los pueden escribir así. Luego a es igual a…
>
> Gaby: 12 por el numero de fila.
>
> Entrevistador: …que no sabemos. Entonces le voy a poder un cuadro. (Escribe $a = 12 \times \square +$). Más…
>
> Ambos: Más el número de columna.
>
> Entrevistador: ¿Ese no lo sabemos, o sí?
>
> Gaby: Más 7.
>
> Entrevistador: ¿Por qué?
>
> Ambos: [Porque] a y b están en la columna 7.
>
> Entrevistador: (Termina de escribir $a = 12 \times \square + 7$) ¿Y b cómo se podría escribir?
>
> Ambos: Igual.
>
> Entrevistador: (Escribe $b = 12 \times$). Por…
>
> Ambos: El numero de fila.

Entrevistador: [El cual no tenemos.] Aquí le voy a poner un triángulo, porque puede ser diferente [al de a]. (Escribe $b = 12 \times \triangle +$)

Ambos: Más 7.

Entrevistador: (Escribe $b = 12 \times \triangle + 7$) Ya tienen una expresión algebraica de a y de b.

Entonces, si a y b están en la columna 7 se pueden expresar así: $a = 12 \times \square + 7$ y $b = 12 \times \triangle + 7$, donde $\square$ denota la fila en la que se encuentra a y $\triangle$ denota la fila en la que se encuentra b.

La segunda parte del problema consistía en suponer ahora que a y b están en columnas y filas desconocidas. Así que los estudiantes tenían que extender los razonamientos de la primera parte del problema para proponer descomposiciones genéricas de a y de b. El entrevistador les sugirió retomar la discusión anterior y generalizar las relaciones que encontraron:

Entrevistador: [En la primera parte del problema] ustedes conocían que el residuo [que dejaban a y b al dividirse entre 12] era 7 porque estaban en la misma columna [7]. Pero si no supieran en qué columna están, los residuos también serían incógnitas. Entonces esto se podría escribir así: a igual a 12 por… (escribe $a = 12 \times$)

Marcos: Por “x”.

Entrevistador: Sí. Pero le voy a llamar q, de cociente. (Ambos asienten) Entonces a es igual a 12 por q más… (Escribe $a = 12 \times q +$)

Ambos: Más el residuo, “r”.

Entrevistador: (Escribe $a = 12 \times q + r$) Ahora b. Le voy a llamar 12 por otro q…

Marcos: Por “q uno”

Entrevistador: Esto [q'] se llama “q prima”. (Escribe $b = 12 \times q' +$)

Gaby: Más “r'”

Entrevistador: (Termina de escribir $b = 12 \times q' + r'$). Escriban así a y b. Estamos describiendo a y b de forma general.

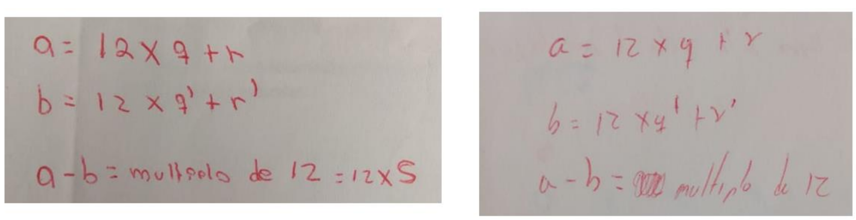
Lo anterior relata el proceso que llevó a los estudiantes a deducir que si a y b están en la tabla, entonces necesariamente se ven así: $a = 12 \times q + r$ y $b = 12 \times q' + r'$ para algunos $q, q', r, r' \in \mathbb{Z}$. Son igualdades **proposicionales**. Estas igualdades se tomaron como parte de las hipótesis de la siguiente parte del problema.

Finalmente, la tercera parte del problema consistía en probar que si la diferencia de a y b es un múltiplo de 12 entonces forzosamente están en la misma columna. Ambos estudiantes estuvieron de acuerdo en que la condición de que $a - b$ sea un múltiplo de 12 debería ser parte de las hipótesis. Además, convinieron en que a y b tenían que estar en la misma si r y r' eran iguales. En otras palabras, para terminar el problema bastaba con mostrar que $r = r'$.

Entonces el entrevistador les pidió que escribieran juntas todas hipótesis que tenían para iniciar con la resolución del nuevo problema: Muestra que $r = r'$. En la figura 4.9 está el planteamiento de ambos estudiantes.

Figura 4.9

Relaciones simbólicas y sincopadas descritas por los estudiantes



Nota. A la izquierda está el trabajo de Gaby y a la derecha el de Marcos.

Como se aprecia en la figura 4.9, mientras que las expresiones de Gaby fueron completamente simbólicas, las de Marcos no lo fueron. Gaby concibió la igualdad **proposicional** $a - b = 12 \times s$. Este paso facilita manipular las otras expresiones. Como Marcos se quedó con la relación semántica "$a - b$" *y "múltiplo de 12" son equivalentes en el contexto del problema,* tuvo dificultades al tratar de establecer conexiones con las primeras dos igualdades.

Para ayudar a los estudiantes a movilizar las hipótesis el entrevistador les propuso que en la expresión $a - b$ sustituyan a por $12 \times q + r$ y b por $12 \times q' + r'$. Marcos escribe

$$a - b = 12 \times q + r - 12 \times q' + r'$$

y Gaby escribe

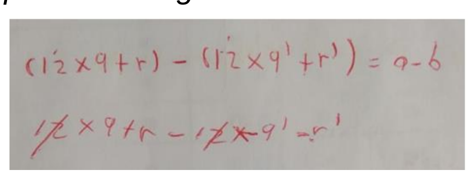
$$(12 \times q + r) - (12 \times q' + r') = a - b.$$

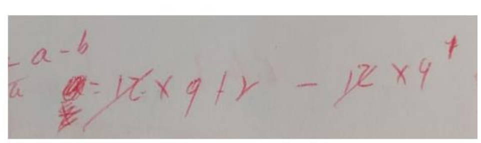
Marcos no sustituyó correctamente, descuidó la sintaxis de los objetos de manipuló (números enteros). Luego la igualdad que propuso es falsa. De seguir trabajando con ella no se podría llegar a la conclusión deseada ($r = r'$).

En cuanto a Gaby, parece que sí consideró la estructura de las expresiones, utilizó paréntesis y la igualdad que escribió es correcta. Por lo tanto, su sustitución es adecuada para continuar el análisis. Sin embargo, conforme avanzó la entrevista se descubrieron algunas inconsistencias en el manejo sintáctico de Gaby, lo cual, como con Marcos, le complicaría el camino para poder concluir el problema. Por ejemplo, cuando el entrevistador les preguntó si en la expresión $(12 \times q + r) - (12 \times q' + r')$ podían simplificar algo, ambos dijeron que "el 12 se cancelaría". En la figura 4.10 se muestra el razonamiento que hicieron.

Figura 4.10

Dificultades de los estudiantes para la manipulación sintáctica de expresiones algebraicas



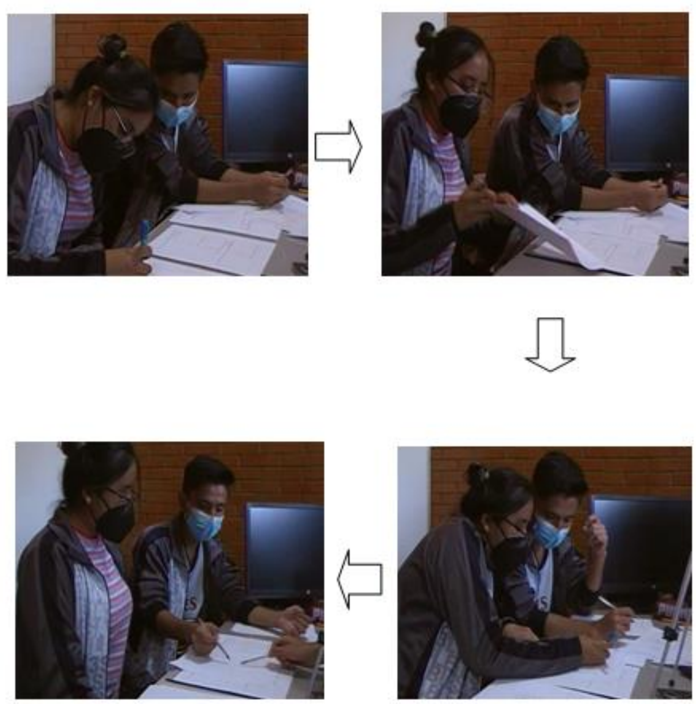


Nota. A la izquierda está el trabajo de Gaby y a la derecha el de Marcos.

Debido a los problemas que enfrentaban los estudiantes, el entrevistador decidió participar activamente en la resolución del problema, acompañándolos en cada paso que daban. Para avanzar, les sugirió factorizar 12 en la expresión $(12 \times q + r) - (12 \times q' + r')$. Pero otra vez ambos tuvieron problemas. Tanto fue así que Marcos no siguió con el problema, decidió dejarlo y mejor poner atención a lo que hacía Gaby. Entonces ella optó por tratar de explicarle lo que estaba haciendo. Por lo que el entrevistador les propuso que trabajaran juntos, en una misma hoja (ver figura 4.11).

Figura 4.11

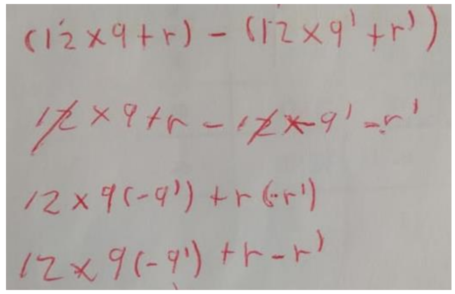
Marcos abandona su trabajo, pero al final trabaja en equipo con su compañera



Ante la sugerencia de que podían factorizar el 12, Gaby propuso la transformación de la figura 4.12.

Figura 4.12

Gaby tiene problemas para factorizar y reducir expresiones algebraicas



Nota. “La suma se distribuye sobre el producto”, una regla sintáctica falsa.

Parece que ella está usando que, en el anillo de los enteros, la suma se distribuye sobre el producto (algo falso). Establece que

$$-(12\times q' + r') = -12\times -q' - r'.$$

Además, afirma que $12\times q - 12\times -q = 12\times q\times -q'$. Pero ella misma tiene dudas de su procedimiento, así que le pregunta al entrevistador si va bien:

Gaby: (Escribe $12\times q(-q') + r - r'$). ¿Así quedaría?

Entrevistador: Aquí va el paréntesis (cambia $12\times q(-q')$ por $12\times(q-q')$) porque estas factorizando el 12. Fíjate, si metes el 12 es 12 por q, que lo tienes aquí, y luego es 12 por $-q'$, que es -12 por q'.

Gaby: ¡Ah, sí!.

Entrevistador: ¿Sí, Marcos?

Marcos: Sí.

(Gaby escribe $12\times(q-q') + (r-r')$)

Entrevistador: Eso es $a-b$

(Gaby escribe $12\times(q-q') + (r-r') = a-b$)

Entrevistador: Ahora, ¿qué otra cosa saben? Llegaron a esto simplemente al sustituir en la expresión $a-b$ a a por $12\times q + r$ y a b por $12\times q' + r'$. No han ocupado que $a-b$ es múltiplo de 12. ¿Qué les parece si lo ocupan? ¿Cómo lo ocuparían?

Gaby: Es $12 \times (q - q') + (r - r')$ y esto nos va a dar como resultado $a - b$. Pero $a - b$ es igual a un múltiplo de 12 multiplicado por algo. Entonces sería $2 \times (q - q') + (r - r') = 12 \times \ldots$ por algo. ¿Qué letra le ponemos? (Le pregunta Gaby a Marcos).

Marcos: Que sea z

Al final los estudiantes lograron establecer la igualdad

$$12 \times (q - q') + (r - r') = 12 \times z$$

Para obtenerla, Gaby utilizó la propiedad transitiva de la igualdad. Pues menciona explícitamente dos igualdades en un orden específico; habla de las "igualdades" $12 \times (q - q') + (r - r') = a - b$ y $a - b = 12 \times "algo"$. Aunque la expresión $12 \times "algo"$ está desprovista de sentido sintáctico, ello logra deducir que

$$12 \times (q - q') + (r - r') = 12 \times "algo"$$

¿Cómo lo hizo si la expresión $12 \times "algo"$ no es, como ella misma dijo, "un resultado"? Pues a través de la **transitividad** de la igualdad. Aunque $12 \times "algo"$ no es una expresión algebraica, está consciente de que es equivalente a la expresión $a - b$ y esto es suficiente para trabajarlas como cosas equivalentes. Si en la cadena de expresiones

$$12 \times (q - q') + (r - r') = a - b = 12 \times "algo"$$

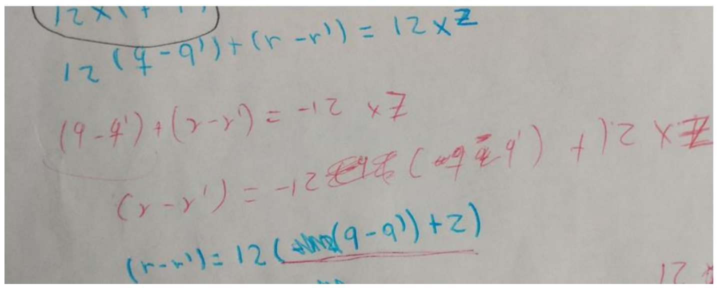
todas ellas son lo mismo, también deben serlo, por transitividad, las de los extremos:

$$12 \times (q - q') + (r - r') = 12 \times "algo"$$

Una vez que Gaby utilizó la letra que Marcos le recomendó pudieron concretar la igualdad algebraica $12 \times (q - q') + (r - r') = 12 \times z$. Entonces el entrevistador les sugirió transformarla de modo que pudieran factorizar otro 12. Gaby no veía cómo manipular las expresiones, pero Marcos sí. Entonces él se hizo cargo del siguiente paso (ver última imagen de la figura 4.10). Trató de pasar el 12 que estaba en el miembro izquierdo al miembro derecho. Pero se confundió, pues la expresión $12 \times (q - q')$ no la considero como una sola (ver figura 4.13), únicamente pasó *restando* al miembro derecho el 12. El entrevistador le explicó que $12 \times (q - q')$ era una sola expresión y que por ello toda pasaba *restando* al otro lado de la igualdad. Después de que Marcos consiguió hacer el despeje Gaby se ocupó de factorizar 12 (ver figura 4.13).

Figura 4.13

Desarrollo de igualdades algebraicas: trabajo conjunto de los estudiantes



Nota. Marcos trata de hacer un despeje y Gaby hace una factorización. En azul el trabajo de Gaby y en rojo el trabajo de Marcos.

Una vez que llegaron a la expresión $r - r' = 12(\,(q - q') + z)$ estaban confundidos en cómo ocupar los cocientes y los residuos. El entrevistador les sugirió renombrar la expresión $(\,(q - q') + z)$ como y: hacer $y = (\,(q - q') + z)$. Es decir, usaron una igualdad **definitoria.** Así que Gaby escribió $r - r' = 12y$.

En el siguiente episodio se termina la solución del problema. Es pertinente aclarar que la decisión del entrevistador de intervenir directamente se debió a que el tiempo de la entrevista estaba terminando. Con todo, ambos estudiantes pudieron avanzar y comprender el sentido de lo que se estaba haciendo, terminaron entusiasmados y satisfechos con lo que lograron:

> Entrevistador: Entonces, miren, ya que llegaron a $r - r' = 12y$. Pero esto [y] es un número natural, porque q, digamos, es 5, q' es 0, y z es 8. Entonces, [al tener $y = (\,(q - q') + z)$], y también es un número natural. ¿Pero cuál es el natural más chico que conocen?
>
> Ambos: El 0

Entrevistador: El 0, luego el 1, luego el 2, etc. Entonces esto $[12y]$ puede ser 12×0, cero; 12×1, doce; 12×2, veinticuatro, etc. Pero r y r' son residuos, y habíamos visto que los residuos eran menores que…

Ambos: Que 12 [en este caso].

Entrevistador: Entonces si ustedes tienen dos números menores que 12 y los restan, les va a un número…

Gaby: Del 1 al 11.

Entrevistador: Sí, menor estricto que 12. Pero aquí $[12y]$ si ustedes empiezan a multiplicar, y tuvieran que y no es 0, les daría $12, 24$, etc. Entonces no hay otra opción más que y sea….

Gaby: ¿Cero?

[...]

Entrevistador: Entonces $r - r$' es 0 porque 12 por 0 es 0.

(Gaby escribe $r - r' = 0$)

Entrevistador: ¿Y de ahí puedes despejar r?

(Gaby escribe $r = 0 + r'$)

Entrevistador: Y $0 + r'$, ¿quién es?

Marcos: r'

Entrevistador: Exacto. Entonces r es igual a..

Ambos: r'

(Gaby escribe $r = r'$)

Entrevistador: Que es lo que queríamos. (Ambos se ríen alegremente). Y entonces los residuos son iguales y por lo tanto a y b…

Ambos (interrumpiendo): Están en la misma columna. ¡Sí es cierto!

La dificultad de este problema ocasionó que los estudiantes tuvieran complicaciones con aspectos conceptuales del uso de la igualdad. Con todo, el trabajo colaborativo entre estudiante-estudiante y las intervenciones del entrevistador favorecieron que terminaran el problema. Marcos expresó que deseaba abandonar el proceso de resolución, pero Gaby lo animó a seguir junto a ella. Marcos no solo aceptó acompañarla, posteriormente también trató de colaborar activamente en la resolución del problema. Este episodio muestra varios rasgos de las matemáticas. Por un lado, pueden ser una actividad social. La actividad matemática puede servir de base para formar comunidades de aprendizaje, donde todos los miembros se poyan mutuamente para lograr un fin común. Por otro lado, el proceso de hacer matemáticas no tiene que estar guiado por si se sabe o no se sabe la respuesta correcta. Los procesos de discusión, comparación y refinamiento de las ideas –aunque sean parciales o, incluso, incorrectas– generan conocimientos matemáticos significativos

Por último, a pesar de que la secuencia de problemas no estaba diseñada para servir como instrumento pedagógico para la enseñanza del concepto de equivalencia algebraica, todas las dificultades que tuvieron los estudiantes acentúan el potencial que los problemas no-rutinarios tienen para identificar y reforzar los contenidos que no dominan.

5. Conclusiones

A continuación, se discuten los resultados de este estudio agrupados de manera que permiten, por una parte, contestar a la pregunta de investigación y, por otra parte, dar cuenta de las principales aportaciones. Al final, se discuten algunas posibles continuaciones para trabajos futuros con base en estos resultados.

5.1 La diversidad de interpretaciones

A pesar de que el algoritmo de la división euclidiana es un tema que se aborda desde la primaria, sometido al escrutinio de estudiantes de preparatoria, su trabajo en esta secuencia de problemas desplegó una cantidad muy diversa de formas de utilizar la igualdad. Lo mismo permitió establecer igualdades calculatorias, $6 \times 3 + 1 = 19$, que igualdades proposicionales, $a = 12 \times q + r$ donde $0 \leq r < 12$, o igualdades condicionales, $20 \times 8 + x = 170$, así como igualdades semánticas, $20 \times 8 + x - y = 170$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $x - y = 10$, e igualdades sintácticas, $6 \times (n-1) + 2 = (6 \times n - 6) + 2$, $0 + r' = r'$. Incluso igualdades definitorias, como la siguiente identificación entre el algoritmo de la división euclidiana y una igualdad numérica:

$$\begin{array}{r|l} & 8 \\ 20 & \overline{175} \\ & 15 \end{array} = 175 = 20 \times 8 + 15$$

Asimismo, los estudiantes estructuraron, ya fuera verbal o simbólicamente, algunas igualdades que reflejaban las propiedades de relación de equivalencia que subyace al concepto de igualdad matemática. Por ejemplo, "162 es 162", reflexividad; $170 = 20 \times 8 + 10 = 170$, simetría; "como $12 \times$

$(q-q') + (r-r') = a-b$ y $a-b = 12 \times z$, entonces $12 \times (q-q') + (r-r') = 12 \times z$", transitividad.

Por lo tanto, los estudiantes fueron capaces de formar y articular distintos tipos de relaciones de igualdad en función de los problemas que querían resolver.

Si bien en ocasiones los estudiantes no comprendieron todos los aspectos y propiedades de la noción de equivalencia detrás de las igualdades, en todo momento tuvieron conciencia de la naturaleza proposicional de las expresiones que contenían al signo igual, pues para progresar en sus soluciones fue necesario reflexionar sobre la veracidad de las igualdades que surgían. Con base en esto, es posible afirmar que los estudiantes ejercitaron implícitamente su concepción del signo igual como un símbolo relacional.

5.2 Sobre la dualidad operacional-relacional

Una de las conclusiones de este trabajo permite apreciar la dualidad operacional-relacional del signo igual bajo la luz de la solución de los problemas propuestos. Como enseguida se explica, la relación ente lo operacional y lo relacional podría no ser dual sino dialéctica.

A lo largo de la entrevista, los estudiaron recurrieron en varias ocasiones al esquema operacional $operaciones = resultado$. Por ejemplo, Marcos dijo "estoy acostumbrado a poner, si está el igual, directamente ya el resultado". Por su parte, Gaby afirmó que "$12 \times (q-q') + (r-r')$ va a dar como resultado $a-b$" cuando se refirió a la igualdad de estas expresiones. Pero resulta importante notar que esta interpretación operacional no pareció inhibir la conceptualización formas relacionales de la igualdad.

Con base en los resultados obtenidos en esta tesis, es posible afirmar que las interpretaciones operacionales de la igualdad pueden convivir con las relacionales sin que necesariamente provoquen inconsistencias. Por ejemplo, aunque Gaby dijo que el resultado de $12 \times (q-q') + (r-r')$ es $a-$

b, esto no la limitó para más tarde establecer la igualdad $12 \times (q - q') + (r - r') = 12 \times z$ a través de la transitividad y luego, sintácticamente, transformarla en $r - r' = 12 \times [(q - q') + z]$. Algo parecido ocurrió con Marcos, quien sugirió que la igualdad $20 \times 8 + x - y = 170$ se preserva siempre que x y y varíen de modo que la diferencia $x - y$ sea 10, una igualdad semántica; es decir, estableció infinitas igualdades sin recurrir a cálculos aritméticos.

5.3 Algunos usos no-canónicos del signo igual

También es posible sacar conclusiones sobre las nociones operacionales de la igualdad y la consistencia de expresiones como las siguientes:

$$\frac{24}{6} = 4 + 1 = 5$$

$$6 - 6 = 0 + 1 = 1$$

Estas expresiones son parte del trabajo escrito de los estudiantes. Se podría decir que en estas producciones los estudiantes no parecen tener consciencia del papel que tiene el signo igual para denotar equivalencia, sino que hacen un uso operacional clásico del signo igual, inscrito en el esquema $operaciones = resultado$. Sin embargo, al analizar estas expresiones en el contexto en el que emergieron y complementándolas con las explicaciones verbales de los estudiantes, queda claro que la ausencia de equivalencia entre las expresiones fue premeditada. La intención de los estudiantes no era establecer equivalencia entre las expresiones $\frac{24}{6}$, $4 + 1$ y 5, por ejemplo, sino abreviar o acortar sus procedimientos. En ambos casos, lo que ellos buscaban, lo que querían originar con este procedimiento, era la equivalencia de las últimas expresiones (yendo de izquierda a derecha), que efectivamente son equivalentes:

$$4 + 1 = 5$$

$$0 + 1 = 1$$

Este fenómeno puede resumirse del siguiente modo: el esquema operacional $operaciones = resultado$ puede utilizarse conscientemente para generar atajos, los cuales no necesariamente conducen a igualdades desprovistas de sentido.

5.4 La importancia de lo aritmético y lo proposicional

Con base en los resultados obtenidos en este estudio, se puede decir de manera general que la naturaleza aritmética-algebraica de los problemas propuestos provocó que en su solución los estudiantes recurrieran a cálculos numéricos para avanzar en las soluciones, como efectuar operaciones aritméticas, descomponer y simplificar expresiones aritméticas, ejecutar el algoritmo de división euclidiana con números concretos, etc. Los estudiantes siempre tuvieron de fondo las nociones operacionales de la igualdad estudiadas en sus primeros años escolares (McNeil, 2014).

Ambos estudiantes mostraron dominio sobre la aritmética, y en los procedimientos para llegar a las soluciones fue precisamente su habilidad calculatoria la que les permitió conectar con relaciones de igualdad entre expresiones no necesariamente aritméticas. A través de sus destrezas procedimentales, de su referente de igualdad aritmética, los estudiantes lograron acercarse a nociones relacionales o conceptuales de la igualdad.

Así que ciertas nociones operaciones de los estudiantes no solo no pueden ser problemáticas, sino que incluso pueden ser favorables para su habilidad aritmética y un recurso para construir equivalencias. Luego la dualidad operacional-relacional, procedimiento-concepto, parece falsa. Aunque este proyecto de tesis carece de información suficiente para llegar a una conclusión al respecto, los datos obtenidos sí permiten conjeturar: *en lugar de dualidad (polarizada) entre lo procedimental y lo conceptual, la relación dialéctica entre estas interpretaciones resulta de importancia para la* *explicación de las distintas interpretaciones de la igualdad que hacen los estudiantes* (ver sección 5.2).

5.5 El desarrollo de la comprensión de la igualdad

Otra conclusión de este trabajo va en la dirección del desarrollo de la comprensión del concepto de igualdad. Algunos investigadores sugieren que la comprensión de la igualdad podría evolucionar de manera lineal y unidimensional, de lo operacional hacia lo relacional (ver capítulo 1, sección 1.2.1). A pesar de que este proyecto de tesis no tenía como finalidad evaluar la compresión de los estudiantes, considerando los datos recabados y las producciones de los estudiantes es posible esbozar algo al respecto. Por un lado, las nociones que los estudiantes tienen de la igualdad son diversas y ricas en significados. Pero la presencia de esta diversidad de formas de utilizar al signo igual no fue espontánea. El trabajo cooperativo entre estudiantes y estudiantes-entrevistador fue fundamental para derivar algunos usos del signo igual, tomar conciencia de su papel en la solución de los problemas y especular sobre sus posibilidades. Las oportunidades de indagar, cuestionar y comentar las respuestas de y con los estudiantes, dieron lugar a discusiones que terminaron tocando alguna noción o cualidad de cierta relación de igualdad.

Por otra parte, las maneras de expresar la igualdad tienen implicaciones en las interpretaciones que usan los estudiantes. La contrastación de sus producciones escritas, sus explicaciones verbales y su lenguaje corporal, permite obtener las siguientes dos conclusiones al respecto:

En primer lugar, *los estudiantes prefirieron expresar de manera verbal y gestual algunas relaciones de igualdad por sobre su expresión simbólica*. Por ejemplo, Gaby afirmó que de la expresión simbólica $20 \times 8 + 2 = 160 + 2 = 162$ se podían deducir al menos tres igualdades. Verbalmente las describió así (en negritas está la forma en que se refirió a la relación de igualdad): “veinte por ocho más dos **igual a** ciento sesenta más dos”, “(señalando la expresión $160 + 2$) **igual a** ciento sesenta y dos" y "ciento sesenta y dos **es** el número completo (señala la expresión 162)". Pero cuando el entrevistador le pidió que escribiera las tres igualdades solo escribió las expresiones, no la relación entre ellas:

$$20 \times 8 + 2 \qquad\qquad 160 + 2 \qquad\qquad 162$$

Otro ejemplo de esta preferencia de lo verbal y gestual sobre lo simbólico se da cuando Marcos responde que no existe un número que dividido entre 20 deje residuo, "porque el veinte cabría en el veinte, que cabe una vez". Es decir, tiene conciencia de la equivalencia $20q + 20 = 20(q + 1)$, aunque esta igualdad simbólica no la concretó en su hoja de trabajo.

En segundo lugar, *la lectura en voz alta de expresiones simbólicas permitió a los estudiantes enfocarse en la consistencia sintáctica de las relaciones de igualdad*. Un ejemplo es el siguiente: La respuesta escrita de Marcos en el problema 1 fue la pseudoexpresión $20 \times 8 + 2 = 126+ \ =$. En el momento en que la propuso no reparó en las inconsistencias sintácticas, y Gaby tampoco hizo algún comentario. Pero, más tarde, cuando enfrente de ellos el entrevistador leyó en voz alta la pseudoexpresión $180 = 20 \times 9 +$, ambos estuvieron de acuerdo en que después del símbolo $+$ debería haber un número, el 0 en este caso.

Finalmente, en este trabajo se puede concluir que es necesaria la intervención de los profesores para apoyar a los estudiantes en la solución de las dificultades para transformar sintácticamente las expresiones algebraicas asociadas a sus procesos de solución. Por ejemplo, cuando el entrevistador les pidió que en la expresión $a - b$ sustituyeran a por $12 \times q + r$ y b por $12 \times q' + r'$, Marcos escribió lo siguiente:

$$a - b = 12 \times q + r - 12 \times q' + r'$$

Cuando reemplazó b por $12 \times q' + r'$ en la expresión $a - b$ no atendió la estructura de esta última, lo cual derivó en una igualdad falsa. Esto muestra que en general reemplazar no es sustituir -aunque sustituir sí implica reemplazar. Si Marcos hubiera tenido más cuidado de la sintaxis, quizá su reemplazo habría llegado a una sustitución y por lo tanto generado expresiones equivalentes. ¿Pero cuánto *cuidado* es suficiente? A diferencia de Marcos, al tratar de hacer la sustitución Gaby ocupó marcadores visuales:

$$(12 \times q + r) - (12 \times q' + r') = a - b.$$

Pero al momento de simplificar hubo inconsistencias en sus transformaciones sintácticas, lo que al final también la llevó a una igualdad falsa. El problema en su estrategia tuvo origen en la siguiente transformación que propuso:

$$-(12 \times q' + r') = -12 \times -q' - r'.$$

Aunque los problemas no se detuvieron ahí. Al sugerir el entrevistador que podía factorizar un 12 ella realizó la siguiente transformación:

$$12 \times q + r - 12 \times -q' - r' = 12 \times q(-q') + r(-r')$$

De este episodio se puede señalar la importancia de que los profesores apoyen a los estudiantes en el uso de técnicas de factorización, simplificación, despeje y, en general, todas las manipulaciones sintácticas. El álgebra transformativa ofrece destrezas en el manejo de propiedades que redundan en el desarrollo de la noción de igualdad algebraica.

5.6 La pregunta de investigación: una aproximación a su(s) respuesta(s)

El origen de la tesis fue esta pregunta: ¿Cuáles interpretaciones del signo igual movilizan los estudiantes de preparatoria cuando resuelven problemas? Aun cuando en esta pregunta se hace referencia a *interpretaciones del signo igual*, el énfasis de este trabajo de tesis estaba en el concepto de igualdad ni en la evaluación del conocimiento de los estudiantes, sino en los procesos que subyacen al desarrollo de este concepto. El objetivo no era la enseñanza o formalización de la equivalencia en aritmética o en álgebra, así como tampoco concluir qué saben los estudiantes y qué no. La finalidad de la clasificación de las interpretaciones del signo igual que se construyó en la metodología (la categorización PLP) fue servir de hilo conductor para la descripción el trabajo de los estudiantes con la secuencia de problemas, ya que es en la resolución de problemas donde nacen y se definen los objetos matemáticos (Santos-Trigo, 2014). En este sentido, la esencia de la pregunta de investigación no está en las *interpretaciones del signo igual* sino en su *movilización*. Fruto de las oportunidades de discusión y reflexión que tuvieron los participantes durante la entrevista, el análisis de datos permite describir dos fases en la movilización de las interpretaciones del la igualdad: por un lado, el diseño de la secuencia de problemas y la dinámica que enmarcó su aplicación *estimuló la aproximación* hacia ciertas interpretaciones de la igualdad y la formación de vínculos entre ellas para llegar a solucionar el problema; por otro lado, a través de las palabras, símbolos y razonamientos generados cooperativamente, los estudiantes pudieron *llegar* a reconocer estas interpretaciones y vínculos. En otras palabras, la actividad matemática dio sentido y lugar a diversas interpretaciones de la igualdad.

5.7 Perspectivas sobre trabajos futuros

Este trabajo de tesis tuvo limitaciones metodológicas que en estudios posteriores se podrían superar. Por ejemplo, las conclusiones dependieron tanto de la secuencia de problemas como del trabajo desarrollado por dos estudiantes particulares. Esto ocasiona que los resultados no sean generalizables. Una línea de acción inicial para explorar este problema sería aplicar la misma secuencia a distintos grupos de estudiantes de preparatoria. Esto permitiría reportar las nociones sobre la igualdad que efectivamente moviliza esta secuencia, lo cual podría ser útil para investigaciones enfocadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la equivalencia en álgebra.

Otra posibilidad para investigaciones futuras es utilizar la categorización PLP para generar jerarquías sobre las interpretaciones del signo igual que sirvan para articular una respuesta a las siguientes preguntas, las cuales retoman y reformulan problemas de investigación propuestos por Kieran (1981):

1. ¿Qué tan sofisticadas son las interpretaciones de los estudiantes de preparatoria sobre el signo igual y qué aspectos de la igualdad pueden considerarse como un conocimiento base en el primer año de universidad?
2. ¿En qué medida el reconocimiento de la igualdad como una relación de equivalencia denotada por el signo igual se corresponde con la comprensión del concepto de equivalencia de ecuaciones y de los procedimientos para hallar sus soluciones?

Por último, el recurso metodológico de utilizar al algoritmo de la división euclidiana como medio para estudiar relaciones entre objetos algebraicos podría ser empleado en el diseño de propuestas didácticas para la enseñanza del álgebra elemental. Bajo este enfoque, el algoritmo de la división euclidiana podría servir como punto de partida para tomar conciencia del cambio en el significado del signo igual al transitar de la aritmética hacia el algebra. Tener de fondo un referente cuya naturaleza es aritmética podría hacer más natural el cambio en la conceptualización de la igualdad aritmética hacia la igualdad algebraica.

6. Bibliografía

Alibali, M., Knuth, E., Hattikudur, S., McNeil, N., y Stephens, A. (2007). A longitudinal examination of middle school students' understandings of the equalsign and performance solving equivalent equations. *Mathematical Thinking and Learning*, 9(3), 221–247.

Ardiansari L., Suryadi D. & Dasari D. (2020). The Concept Image of Students and Teachers about the Equal Sign. *Universal Journal of Educational Research,* 8(12), 6751 - 6764.

Baiduri, A (2015). Mathematics education students understanding of equal sign and equivalent equation. *Asian Social Science*, 11(25), 15-24.

Baroody, A. J., y Ginsburg, H. P. (1983). The effects of instruction on children's understanding of the" equals" sign. *The Elementary School Journal*, 84(2), 199-212.

Behr, M., Erlwanger, S., y Nichols, E. (1980). How children view the equals sign. *Mathematics teaching*, 92(1), 13- 15.

Behr, M., Erlwanger, S., y Nichols, E. (1976). How Children View Equality Sentences. *PMDC Technical Report No. 3*. Tallahassee: Florida State University.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., y Dougherty, B. J. (2011). Developing essential understandings of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3–5 (R. M. Zbiek, Series Ed., & B. J. Dougherty, Vol. Ed.). Reston, VA: *National Council of Teachers of Mathematics.*

Blanton, M., Otálora, Y.,Brizuela, B. M., Murphy, A., Sawrey, K. B., Gibbins, A., y Kim, Y. (2018).Exploring Kindergarten Students' Early Understandings of the Equal Sign. *Mathematical Thinking and Learning*, 20(3),167-201

Boggs, G., Whitacre, I., Schellinger, J., Champagne, Z., y Schoen, R. (2018). Contextual meanings of the equals sign as conceptual blends. *For the Learning of Mathematics*, 38(2), 34–39

Borenson, H. (2013). "The Equal Sign: A Balancing Act. *Teaching Children Mathematics*. 20 (2), 90-94. National Council of Teachers of Mathematics.

Bush, S. B., y Karp, K. S. (2013). Prerequisite algebra skills and associated misconceptions of middle grade students: A review. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(3), 613–632

Byers, V. y Herscovics, N. (1977). Understanding School Mathematics. *Mathematics Teaching*, 81, 24-7

Byrd, C. E., McNeil, N. M., Chesney, D. L., y Matthews, P. G. (2015). A specific misconception of the equal sign acts as a barrier to children's learning of early algebra. *Learning and Individual Differences*, 38, 61–67.

Capraro, R. M., Capraro, M. M., Yetkiner, E. Z., Corlu, S. M., Ozel, S., Ye, S., y Kim, H. (2011). An international perspective between problem types in textbooks and students' understanding of relational equality. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education,* 10(1–2), 187– 213.

Capraro, R. M., Capraro, M. M., Younes, R., Han, S. Y., y Garner, K. (2012). Changes in equality problem types across four decades in four second and sixth grade textbook series. *Journal of Mathematics Education*, 5(1), 166–189.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Heinemann.

Chesney, D. L., McNeil, N. M., Brockmole, J. R., y Kelley, K. (2013). An eye for relations: Eye-tracking indicates long-term negative effects of operational thinking on understanding of math equivalence. *Memory and Cognition*, 41, 1079–1095.

Chimoni, M., Pitta-Pantazi, D., y Christou, C. (2018). Examining early algebraic thinking: insights from empirical data. *Educational Studies in Mathematics*, 98(1): 57–76

Denmark, T., Barco, E. y Voran, J. (1976). Final Report: A Teaching Experiment on Equality. *PMDC Technical Report No. 6*. Florida State University.

Donovan, A.M., Stephens, A., Alapala, B., Monday, A., Szkudlarek, E., Alibali, M.W. y Matthews, P.G. (2022). Is a substitute the same? Learning from lessons centering different relational conceptions of the equal sign. *ZDM: the international journal on mathematics education,* 54(6), 1199–1213.

Eichhorn, M.S., Perry, L.E., y Brombacher, A. (2018). Students' early grade understanding of the equal sign and non-standard equations in Jordan and India. *International Journal of Research in Education and Science*, 4(2), 655-669.

Falkner, K.P., Levi, L., y Carpenter, T.P. (1999). Children's Understanding of Equality: A Foundation for Algebra. *Teaching children mathematics*, 6, 232-236.

Filloy, E., y Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 19-25.

Filloy, E., Rojano, T., y Solares, A. (2010). Problems dealing with unknown quantities and two differ-ent levels of representing unknowns. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41, 52–80.

Fischer, J.P., Sander, E., Sensevy, G.B. y Richard, J.F. (2019). Can young students understand the mathematical concept of equality? A whole-year arithmetic teaching experiment in second grade. *European Journal of Psychology of Education.* 34. 10.1007/s10212-018-0384-y

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: Reidel

Fyfe, E.R., Matthews, P.G. y Amsel, E. (2020). College developmental math students' knowledge of the equal sign. *Educational Studies in Mathematics*, 104, 65–85.

Fyfe, E. R., Matthews, P. G., Amsel, E., McEldoon, K. L. y McNeil, N. M. (2018). Assessing formal knowledge of math equivalence among algebra and pre-algebra students. *Journal of Educational Psychology*, 110(1), 87–101.

Gattegno, C. (1974). *The Common Sense of Teaching Mathematics, Educational Solutions*, New York.

Ginsurg, H. (1977). *Children's Arithmetic: The Learning Process*. New York: D.Van Nostrand, 1977.

Gómez, L.C. (2014). *Álgebra superior: curso completo*. Prensas de Ciencias. UNAM.

Hornburg, C.B., Devlin, B. L., y McNeil, N. M. (2021). Earlier understanding of mathematical equivalence in elementary school predicts greater algebra readiness in middle school. *Journal of Educational Psychology*. Advance online publication:https://doi.org/10.1037/edu0000683

Johannes, K., Davenport, J., Kao, Y., Hornburg, C. B., & McNeil, N. M. (2017). Promoting children's relational understanding of equivalence. In G. Gunzelmann, A. Howes, T. Tenbrink, y E. Davelaar (Eds.), *Proceedingsof the 39th Annual Conference of the Cognitive ScienceSociety* (pp. 600-605). Austin, TX: Cognitive Science Society

Jones, I., Inglis, M., Gilmore, C., y Dowens, M. (2012). Substitution and sameness: Two components of a relational conception of the equals sign. *Journal of Experimental Child Psychology*, 113, 166–176.

Jones, I., Inglis, M., Gilmore, C. y Evans, R. (2013). Teaching the substitutive conception of the equals sign. *Research in Mathematics Education*,15:1,34-49

Jones, I. y Pratt, D. (2012). A Substituting Meaning for the Equals Sign in Arithmetic Notating Tasks. *Journal for Research in Mathematics Education*. 43. 2-33.

Kieran, C. (1981) Concepts Associated with the Equality Symbol. *Educational Studies in Mathematics,* 12, 317-26.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707–762). Charlotte, NC: Information Age.

Kieran, C., y Martínez-Hernández, C. (2022). Coordinating invisible and visible sameness within equivalence transformations of numerical equalities by 10- to 12 year-olds in their movement from computational to structural approaches. *ZDM*. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01355-5 Special Issue.

Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: Background, overarching dimensions, and new direction. *ZDM. Mathematics Education*, 54, 1131–1150. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6

Kiselman, C., y Mouwitz, L. (2008). Matematiktermer för skolan [Mathematical terms in school]. In Gothenburg: *Nationellt centrum för matematikutbildning* (*NCM*) 312 pp. University of Gothenburg

Knuth, E., Alibali, M., Weinberg, A., Stephens, A., y McNeil, N. (2011). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence & variable. In J. Cai & E. J. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 259–276). New York: Springer.

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A., y Stephens, A. C. (2005). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equality and variable. *ZDM*, 37(1), 68–7

Knuth, E., Stephens, A., McNeil, N., y Alibali, M. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education,* 37(4), 297–312.

Lee, J. y Pang, J. (2021). Students' opposing conceptions of equations with two equal signs. *Mathematical Thinking and Learning* 23:3, 209-224.

Lee, J., y Pang, J. (2022). What is so Complicated in Developing Students' Conception of the Equal Sign?. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 21, 559–580. https://doi.org/10.1007/s10763-022-10248-8

Li, X., Ding, M., Capraro, M. M., y Capraro, R. M. (2008). Sources of Differences in Children's Understandings of Mathematical Equality: Comparative Analysis of Teacher Guides and Student Texts in China and the United States. *Cognition and Instruction*, vol. 26, no. 2, pp. 195–217.

Machaba, F. y Makgakga, S., (2016). 'Grade 9 learners' understanding of the concept of the equal sign: A case study of a secondary school in Soshanguve'. In J. Keirk, A. Ferreira, K. Padayachee, S. van Putten& B. Seo (eds.), *Towards Effective Teaching and Meaningful Learning in Mathematics, Science and Technology Education, Proceedings of 9th Annual ISTE Conference on Mathematics, Science and Technology Education*, Kruger National Park, Limpopo.

Mainela-Arnold, E., Alibali, M. W., Ryan, K., y Evans, J. L. (2011). Knowledge of mathematical equivalence in children with specific language impairment: insights from gesture and speech. *Language, speech, and hearing services in schools*, 42(1), 18–30.

Matthews, P. G., y Fuchs, L. S. (2020). Keys to the Gate? Equal Sign Knowledge at Second Grade Predicts Fourth-Grade Algebra Competence. *Child development*, 91(1), 14–28.

Matthews, P. y Rittle-Johnson, B. (2009). In pursuit of knowledge: Comparing self-explanations, concepts, and procedures as pedagogical tools. *Journal of Experimental Child Psychology*, 104, 1–21. doi:10.1016/j.jecp.2008.08.004

Matthews, P., Rittle-Johnson, B., McEldoon, K., y Taylor, R. (2012). Measure for measure: What combining diverse measures reveals about children's understanding of the equal sign as an indicator of mathematical equality. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43, 316–350.

McNeil, N. M. (2007). U-shaped development in math: 7-year-olds outperform9-year-olds on equivalence problems. *Developmental Psychology*, 43, 687–695.

McNeil, N. M. (2014). A change-resistance account of children's difficulties understanding mathematical equivalence. *Child Development Perspectives*, 8, 42–47.

McNeil, N. M., y Alibali, M. W. (2005a). Knowledge change as a function of mathematics experience: All contexts are not created equal. *Journal of Cognition and Development*, 6, 385–406.

McNeil, N. M., y Alibali, M. W. (2004). You'll see what you mean: Students encode equations based on their knowledge of arithmetic. *Cognitive Science*, 28, 451–466

McNeil, N. M., Hornburg, C. B., Brletic-Shipley, H., y Matthews, J. M. (2019). Improving children's understanding of mathematical equivalence via an intervention that goes beyond nontraditional arithmetic practice. *Journal of Educational Psychology,* 111(6), 1023–1044.

McNeil, N. M., Hornburg, C. B., Devlin, B. L., Carrazza, C., y McKeever, M. O. (2019). Consequences of individual differences in children’s formal understanding of mathematical equivalence. *Child Development*, 90(3), 940–956.

McNeil, N. M., Hornburg, C. B., Fuhs, M. W., y O'Rear, C. D. (2017). Understanding children's difficulties with mathematical equivalence. In D. C. Geary, D. B. Berch, R. Ochsendorf, & K. M. Koepke (Eds.), *Acquisition of complex arithmetic skills and higher-order mathematics concepts* (pp. 167–195). Elsevier Academic Press

McAuliffe, S., Tambara, C., y Simsek, E. (2020). Young students' understanding of mathematical equivalence across different schools in South Africa. *South African Journal of Childhood Education*, 10(1), 1-8.

Mickey, K. W., y McClelland, J. L. (2014). “A neural network model of learning mathematical equivalence,” in *Proceedings of the 36th Annual Conference of the Cognitive Science Society*, (QC, Canada: Cognitive Science Society), 1012–1017

Mirin, A. (2020). Operational Meanings for the Equals Sign. Conference: *Research in Undergraduate Mathematics Education (RUME)* 2020, Boston, MA

Mirin, A. (2019). The Relational Meaning of the Equals Sign: A Philosophical Perspective. In A. Weinberg, D. Moore-Russo, H. Soto, & M. Wawro (Eds.), *Proceedings of the 22nd AnnualConference on Research in Undergraduate Mathematics Education*. Oklahoma City, Oklahoma: SIGMAA for RUME.

Mirin, A. (2017). Function Sameness to "Function" Meaning. Conference papaer: *Research in Undergraduate Mathematics Education (RUME)*, San Diego, CA.

Molina, M., y Ambrose, R. (2006). Fostering relational thinking while negotiating the meaning of the equal sign. *Teaching Children Mathematics*, 13, 111–117. http://www.nctm.org/publications/tcm.aspx

Molina, M. y Ambrose, R. (2008). From an operational to a relational conception of the equal sign. Thirds graders' developing algebraic thinking. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 30(1), 61-80.

Nelson, L.J. y Fyfe, E.R. (2019). Metacognitive monitoring and help-seeking decisions on mathematical equivalence problems. *Metacognition Learning*, 14, 167–187.

Oksuz, C. (2007). Children's understanding of equality and the equal symbol. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 1–19.

Pepin, B., Bergem, O. K., &y Klette, K. (2014). Rethinking Algebra Teaching in the Light of 'Orchestration of Signs' –Exploring the "Equal Sign" in a Norwegian Mathematics Classroom. In *Algebra Teaching around the World.* Leiden, The Netherlands: Brill.

Prediger, S. (2010). How to develop mathematics-for-teaching and for understanding: the case of meanings of the equal sign. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 13, 73–93

Qetrani, S., Ouailal, S., y Achtaich, N. (2021). Enhancing Students' Conceptual and Procedural Knowledge Using a New Teaching Approach of Linear Equations Based on the Equivalence Concept. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education,* 17(7).

Radford L. (2018). The Emergence of Symbolic Algebraic Thinking in Primary School. In: Kieran C. (eds) *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds.* ICME-13 Monographs. Springer, Cham.

Renwick, E. M. (1932). Children's misconceptions concerning the symbols for mathematical equality. *British Journal of Educational Psychology*, 2, 173–183.

Rittle-Johnson, B., Matthews, P. G., Taylor, R. S., y McEldoon, K. L. (2011). Assessing knowledge of mathematical equivalence: A construct-modeling approach. *Journal of Educational Psychology,* 103(1), 85–104.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Libros del Zorzal.

Santos-Trigo, M. (2014). *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos*. México: Trillas.

Simsek, E., Jones, I., Hunter, J. y Xenidou-Dervou, I. (2021). Mathematical equivalence assessment: Measurement invariance across six countries. *Studies In Educational Evaluation*.

Singh, R. y Kosko, K. (2017). Exploring the structure of equivalence items in an assessment of elementary grades. In Galindo, E., & Newton, J., (Eds.) *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Indianapolis, IN: Hoosier

Solares, A. y Kieran, C. (2013). Articulating syntactic and numeric perspectives on equivalence: the case of rational expressions. *Educational Studies in Mathematics*, 84, 115–148.

Stephens, A., Knuth, E., Blanton, M., Isler-Baykal, I., Gardiner, A. y Marum, T. (2013). Equation structure and the meaning of the equal sign: The impact of task selection in eliciting elementary students' understandings. *The Journal of Mathematical Behavior,* 32. 173–182.

Sumpter, L. y Löwenhielm, A (2022). Differences in grade 7 students' understanding of the equal sign. *Mathematical Thinking and Learning,* DOI: 10.1080/10986065.2022.2058160

Swithinbank, L. (2015). It’s the symbol you put before the answer: Laura Swithinbank discovers that pupils often ‘see’ things differently. *Mathematics Teaching,* 247. 43-46.

Tilley, V. (2011). Two Little Lines. *Mathematics Teaching*, 224.

van de Walle, J. (1980). An investigation of the concept of equality and mathematical symbols held by first, second, and third-grade children: An informal report. *Paper presented at the annual meeting of the National Council of Teachers of Mathematics*, Seattle, WA

Vermeulen, C., y Meyer, B. (2017). The equal sign: Teachers’ knowledge and students’ misconceptions. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, 21(2), 136–147

Vincent, J., Bardini, C., Pierce, R., y Pearn, C. (2015).Misuse of the equals sign: An entrenched practice from early primary years to tertiary mathematics. *Australian Senior Mathematics Journal,* 29(2), 31–39.

Voutsina, C. (2019). Context Variation and Syntax Nuances of the Equal Sign in Elementary School Mathematics. Canadian Journal of Science, *Mathematics and Technology Education.* 19. 10.1007/s42330-019-00067-5.

Wardat, Y., Jarrah, A. M., y Stoica, G. (2021). Understanding the meaning of the equal sign: A case study of middle school students in the United Arab Emirates. *European Journal of Educational Research,* 10(3), 1505-1514.

Ying, Y. (2020). A conceptual analysis of the equal sign and equation –the transformative component In: Sacristán, A.I., Cortés-Zavala, J.C. & Ruiz-Arias, P.M. (Eds.). (2020). *Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 246-254). Mexico. Cinvestav/AMIUTEM/PME-NA.

Apéndice A. Análisis de la secuencia de problemas

Problema 1

> 1.- Descubran cómo calcular $162 \div 20$ dados los siguientes datos:
>
> $$20 \times 6 = 120$$
> $$20 \times 7 = 140$$
> $$20 \times 8 = 160$$
> $$20 \times 9 = 180$$
>
> $$\begin{array}{r} \square \\ 20\overline{)1\;6\;2} \\ \underline{\square\square} \\ \bigcirc \end{array}$$
>
> Comprueben el cociente y el residuo encontrados:
>
> $$20 \times \square + \bigcirc = \square + \bigcirc = \bigcirc$$

El problema 1, aunque puede parecer simple para estudiantes de preparatoria, tiene tres objetivos que son claves para movilizar distintas interpretaciones del signo igual a lo largo de toda la secuencia:

1] Hacer notar que la forma esquemática –tradicional- del algoritmo de la división euclidiana

$$\begin{array}{r} \square \\ 20\overline{)1\;6\;2} \\ \underline{\square\square} \\ \bigcirc \end{array}$$

puede representarse por medio de una relación de igualdad

$$20 \times \square + \bigcirc = \square + \bigcirc = 162$$

2] Recordar que para efectuar el algoritmo de la división euclidiana se necesita ubicar al dividendo entre dos múltiplos consecutivos del divisor

$$\begin{array}{l} 20 \times 8 = 160 \\ \qquad\qquad\qquad \longleftarrow \quad 162 \\ 20 \times 9 = 180 \end{array}$$

3] En la cadena de igualdades el signo igual representa una relación:

$$20 \times \square + \bigcirc = \boxed{} + \bigcirc = \bigcirc$$

Por lo que tiene el potencial de expresar, al menos, tres igualdades o relaciones:

1) $20 \times \square + \bigcirc = \boxed{} + \bigcirc$

2) $\boxed{} + \bigcirc = \bigcirc$

3) $20 \times \square + \bigcirc = \bigcirc$

Dichas relaciones emergerán en la medida en que el signo igual no se interprete de forma operacional rígida ni operacional flexible (ver categorización PLP en el capítulo 3).

Este problema fue utilizado por Lee y Pang (2021) para explorar las concepciones del signo igual que surgen cuando niños de entre 11 y 12 años analizan enunciados con dos signos igual. Debido a que los estudiantes de preparatoria han sido poco atendidos en esta línea de investigación no existe un antecedente del papel que estas cadenas de igualdades puede desempeñar en el estudio de sus interpretaciones sobre el signo.

No obstante, de acuerdo con Kieran (1981) las cadenas de igualdades usualmente reflejan nociones operacionales de la igualdad. Así que una posibilidad es que los estudiantes recurran a las estrategias operacionales previas que este tipo de enunciados atrae de su experiencia aritmética

(McNeil, 2014). Por consiguiente, entre las posibles respuestas de los estudiantes están las siguientes:

$$20 \times 8 + 2 = 160 + 2 = 162$$
$$20 \times 8 + 2 = 162 + 2 = 164$$
$$20 \times 8 + 2 = 162 + 0 = 162$$
$$20 \times 8 + 2 = 162 + \quad =$$

En caso necesario el entrevistador intervendrá en el desarrollo de este problema para contrastar, junto con los estudiantes, las respuestas. Por ejemplo, si ocurre que obtienen una igualdad falsa, digamos

$$20 \times 8 + 2 = 162 + 2 = 164$$

se les podría preguntar "¿Puedes deducir de esta cadena tres igualdades?" Si los estudiantes caen en cuenta que su respuesta implicaría que $20 \times 8 + 2 = 164$, entonces sería evidente que deben reformularla y por consiguiente movilizarían otras nociones de la igualdad.

Otro caso sería que produjeran una igualdad como

$$20 \times 8 + 2 = 162 + 0 = 162$$

Si bien no es falsa, lo cierto es que no expresa una relación correcta en el contexto del problema, pues está desvinculada del algoritmo de la división euclidiana que aparece en la primera parte del problema. Una igualdad así más bien se basa en el cálculo de las operaciones aritméticas en cada miembro; es decir, refiere una interpretación operacional calculatoria. En esta situación se les podría decir "Esta cadena de igualdades, y las igualdades que resultan de ella, ¿cómo se relaciona con el algoritmo de la división euclidiana? ¿Hay otra respuesta?". Procediendo así se puede redirigir la atención de los estudiantes hacia el origen del problema, el algoritmo de la división euclidiana.

Este problema resalta la naturaleza relacional del signo igual. En efecto, el papel que el signo igual desempeña en la igualdad $20 \times 8 + 2 = 160 + 2 = 162$ no es relacionar operaciones con sus resultados (interpretación operacional), sino denotar equivalencia entre cada una de las expresiones aritméticas (interpretación relacional aritmética). Pero esto no quiere decir que no exista un vínculo relacional entre las operaciones y su resultado, pues a través de la propiedad transitiva de la igualdad se obtiene la relación $20 \times 8 + 2 = 162$; luego 162 está relacionado con una descomposición suya que depende del cociente y del residuo al dividir por 20.

Este inciso pretende ilustrar cómo la división (algoritmo de la división euclidiana) da lugar a relaciones distintas a las que surgen en el contexto aritmético tradicional. En específico, la división relaciona un número con su cociente y residuo que resultan de dividirlo por un número fijo distinto de cero.

Problema 2

> 2.- Elijan cualquier número natural n entre 165 y 175. ¿Existen dos múltiplos consecutivos de 20 entre los que se ubique n? De ser así, ¿pueden escribir a n en términos de alguno de estos múltiplos? Si sí, ¿qué estrategia utilizaron para lograrlo?

En el problema 1 se ocupó el algoritmo de la división euclidiana para descomponer a 162 como

$$20 \times 2 + 2$$

Para esto se necesitó, antes que todo, ubicar a 162 entre dos múltiplos consecutivos de 20.

$$\begin{array}{lcl} 20 \times 8 = 160 & & \\ & \longleftarrow & 162 \\ 20 \times 9 = 180 & & \end{array}$$

El problema 2 pretende describir el proceso inverso: Iniciar con un número n entre dos múltiplos consecutivos de 20, en este caso 165 y 175, y después notar que ese número estaría, tal como pasó con 162, entre 20×8 y 20×9. Luego con el algoritmo de la división se puede hallar la descomposición

$$n = 20 \times 8 + r$$

La resolución del problema tiene el potencial de esbozar una correspondencia entre dividir un número y descomponerlo como un múltiplo del dividendo más un residuo.

Si los alumnos tienen dificultades con el enunciado del problema o para establecer una conjetura, el entrevistador les ayudará, ya sea a entender el problema y/o explicar la relación con el problema 1.

Se espera que el alumno haga una identificación entre “dividir un número entre 20” y “ubicarlo entre dos múltiplos consecutivos de 20”. Al establecer dicha relación se estará interpretando al signo igual relacionalmente, pues se dilucida una relación entre números que no surge a propósito de un cálculo sino de una identificación entre expresiones equivalentes:

$$n = 20q + r$$

En esta situación el entrevistador puede intervenir para hacer notar que aunque 162 y n, donde n es cualquier número entre 165 y 175, se reescriben como $20 \times 8 + r$, para algún cierto residuo r, lo que los distingue son precisamente sus respectivos residuos. De tal suerte que los estudiantes también podrían conjeturar la unicidad del residuo en el algoritmo de la división euclidiana, y por lo tanto la unicidad de la relación de igualdad entre n y su cociente y residuo.

Pero si el escenario anterior llega a ocurrir durante la entrevista, todavía se puede ir más allá y formular la siguiente pregunta: ¿Los residuos están acotados en algún intervalo? Esto permitiría empezar a formar, desde aquí, una solución para el problema 4. Claro que esta alternativa es hipotética, pues no hay certeza de que los estudiantes deduzcan que, en general, el residuo es positivo y menor que el divisor.

Problema 3

> 3.- Un día Alejandro le dijo a Xavier que dividir un número entre 20 es lo mismo que ubicarlo entre dos múltiplos consecutivos de 20. Pero Xavier no le creyó. ¿Qué argumento darías a favor o en contra de la afirmación de Alejandro?

El propósito del problema 3 es que los estudiantes extiendan y, en dado caso, robustezcan las estrategias utilizadas en los primeros dos problemas. Los problemas anteriores giran en torno a dos múltiplos particulares de 20, 20×8 y 20×9. La conclusión de cualquier número que se halle entre 20×8 y 20×9 se puede descomponer en función de su cociente y residuo, puede generalizarse: Cualquier número entre dos múltiplos consecutivos de 20 se puede descomponer en términos del cociente y el residuo que deja al ser dividió por 20. A esta generalización invita el problema 3.

La complejidad del enunciado del problema podría ocasionar que los estudiantes no comprendan totalmente el problema. Si esto pasa, el entrevistador podría intervenir para ayudarles a ligarlo con los problemas anteriores: "Si no entienden el enunciado, por qué no prueban con esta pareja de nuevos problemas: 1) Si dividen 162 entre 20, ¿pueden encontrar dos múltiplos consecutivos de 20 tales que 162 se halle entre estos? Ahora, ¿pueden reescribir a 162 como la suma de un múltiplo de 20 más un número positivo menor que 20? ¿Hay otra descomposición de 20 que satisfaga estas condiciones?; 2) 165 es un numero que está entre 20×8 y 20×9, ¿pueden descomponerlo como

$$165 = 20q + r$$

donde r es un entero positivo menor que 20? Si sí, ¿cómo lo lograron?"

Una vez que los estudiantes son conscientes de que este problema engloba los dos anteriores, pueden intentar resolverlo diciendo "Alejandro tiene razón porque se divide". Aunque la respuesta podría decirse correcta no expresa el trasfondo de la identificación entre dividir un número y descomponerlo como la suma de un múltiplo de 20 y un número menor que 20. En este caso el entrevistador podría preguntar “¿Qué información provee la división entera para poder ubicar al número entre los dos múltiplos consecutivos?”

Este problema llama a dotar de un sentido estructural al cociente y residuo obtenidos en el algoritmo de la división euclidiana. De modo que la forma esquemática tradicional de hacer la división

$$\begin{array}{r|l} & \;\;23 \\ \cline{2-2} 15 & \;347 \\ & -30 \\ \cline{2-2} & \;\;47 \\ & -45 \\ \cline{2-2} & \;\;\;2 \end{array}$$

puede reinterpretarse en términos de una igualdad relacional

$$347 = 15 \times 23 + 2$$

en el sentido de que el dividendo se relaciona con el cociente y el residuo a través del signo igual, más no que el dividendo se obtiene al realizar un cálculo rutinario.

Problema 4

> 4.-Si n es un número natural, ¿qué residuo deja al ser dividio entre 3? Justifica tu respuesta. Observa la siguiente tabla:

$\boldsymbol{n}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Residuo al dividir por 3	**0**	**1**	**2**	**0**	**1**	**2**	**0**	**1**	**2**

A diferencia de los tres primeros ejercicios, en el problema 4 el divisor es 3. Esto se decidió así por dos motivos. Por un lado, para promover que los estudiantes extiendan los razonamientos que hayan hecho con 20 como divisor en los problemas anteriores. Por otro lado, para que para que fuera sencillo manipular los residuos que resultan al dividir por 3.

Los problemas anteriores sirven para sembrar la idea de que todo número se puede relacionar con su cociente y su residuo. Mientras que el problema 4 tiene como intención tocar una propiedad especial del residuo: es positivo y menor que el divisor. Este hecho, además de ser valioso por sí mismo (desde un enfoque matemático teórico), es necesario para resolver el problema 5 de la segunda parte de la actividad.

Asimismo, el problema 4 estimula una interpretación relacional aritmética del signo igual al centrar el análisis en igualdades de la forma

$$a = 3q + r$$

Para trabajar estas igualdades de objetos aritméticos los estudiantes deben resistir el impulso de ejecutar las operaciones aritméticas, deben tratar ambos miembros de la igualdad como expresiones *completas.* La descomposición de un número a como algo de la forma $3q + r$ se advierte útil para la resolución del problema solo si todos los elementos que giran alrededor del algoritmo de la división euclidiana están visibles. Si se efectúa alguna de las operaciones que ahí aparecen, entonces se pierde la relación entre dividendo y cociente, residuo.

Para iniciar la resolución del problema se sugiere a los estudiantes identificar y analizar las relaciones expresadas en la tabla. Conforme n varía se producen sendos residuos, entre los cuales se aprecia un patrón. Entonces nace una conjetura: los residuos posibles son 0, 1 y 2. Una vez que los estudiantes establecen esta conjetura se les puede preguntar "¿Cómo argumentan justificas esto para cualquier número arbitrario?". Esta pregunta condeciría al estudio de las descomposiciones de los números en términos de su cociente y residuo, por lo que es muy probable que circulen distintas interpretaciones de la igualdad.

Se observa que los números n tales que tienen residuo 0 son aquello divisibles por $3\ (0, 3, 6, \ldots)$. Los números n tales que tienen residuo 1 son aquellos que están separados por 1 de algún múltiplo de $3\ (1, 4, 7, \ldots)$.

Finalmente, los números n que tienen residuo 2 son los que tienen están separados por 2 de los múltiplos de $3\,(2, 5, 8, \ldots)$. Como dos múltiplos consecutivos de 3 están separados entre sí por 1 o 2, y como n podría ser un múltiplo de 3, los casos anteriores cubren todas las posibilidades para n. En resumen:

- Los números de la forma $n = 3q$ son tales que dejan residuo 0.
- Los números de la forma $n = 3q + 1$ son tales que dejan residuo 1.
- Los números de la forma $n = 3q + 2$ son tales que dejan residuo 2.

Por lo tanto, los posibles residuos de dividir entre 3 son 0,1 y 2. Total que de este problema se concluye la relación $n = 3q + r$ con algún r tal que $0 \leq r < 3$, para cualquier numero natural n.

Problema 5

Inciso a

5.- En una tabla de 6 columnas e infinitas filas se van ubicando consecutivamente el cero y todos los demás números naturales:

	Columna 1	Columna 2	…			Columna 6
Fila 1	0	1	2	3	4	5
Fila 2	6	7	8	9	10	11
⋮	12	13	14	15	16	17
	18	19	20	21	22	23
	24	25	26	27	28	29
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

a) ¿En qué fila y en qué columna se encuentra el 126?

Según Sadovsky (2005), “es sencillo que [los estudiantes] reparen rápidamente en que los numero de la primera columna son múltiplos de 6, y con eso alcanza para establecer fila y columna del 126” (p. 47). Como 126 es múltiplo de 6, $6 \times 21 = 126$, entonces está en primera columna. Solo faltaría determinar la fila. Para ello, la estrategia que los estudiantes pueden es completar los términos de la columna 1 hasta llegar a 126; esta estrategia implica una interpretación operacional del signo igual:

$$6(0) = 0$$

$$6(1) = 6$$

$$6(2) = 12$$

...

$$6(21) = 126$$

Luego 126 está en la columna 1, fila 22.

No obstante, aunque estrictamente esto resolvería el problema, el entrevistador podría redirigir la atención de los estudiantes hacia la relación que todos estos números tienen con su cociente y residuo que dejan al dividirse por 6. Esto produciría otro tipo de igualdades:

$$0 = 6(0) + 0$$

$$6 = 6(1) + 0$$

$$12 = 6(2) + 0$$

$$\dots$$

$$126 = 6(21) + 0$$

El uso del signo igual es aquí relacional aritmético, pues la expresión $126 = 6(21) + 0$ refiere igualdad entre objetos aritméticos, más no la realización de algún cálculo. De hecho, en comparación con la primera lista, el orden de la igualdad $126 = 6(21) + 0$ acentúa la simetría de la igualdad.

Además de estas observaciones, los estudiantes podrían empezar a conjeturar relaciones entre cociente, residuo y números de renglón, número de columna. Si esto sucede, el entrevistador llevaría la discusión hacia el comportamiento de los números en las otras columnas para tratar de definir junto con ellos la relación general:

$a = 6q + r --\rightarrow a$ está en la fila $q + 1$, columna $r + 1$ de la tabla con 6 columnas

donde q es el cociente y r el residuo al dividir a por 6.

Este análisis no solo movilizaría distintas interpretaciones de la igualdad, sino que también sería fructífero para la resolución del resto de los problemas.

Inciso b

> b) ¿Qué número se encuentra en la novena fila de la segunda columna?

El inciso b plantea el problema inverso del inciso anterior. Mientras que en inciso a se tenía un número y se preguntaba por su posición en la tabla, en el inciso b se da la posición de un número y se pregunta cuál número es.

Si en el problema anterior los estudiantes establecieron un vínculo entre cociente, residuo y fila, columna, entonces para resolver este nuevo problema podrían comenzar con la expresión algebraica

$$6q + r$$

y luego sustituir por los números adecuados:

$$6(9 - 1) + (2 - 1) = 6(8) + 1 = 49$$

Por lo tanto en la fila 9, columna 2 está el número 49.

En esta ruta aparecerían diversas interpretaciones del signo igual, por ejemplo relacional aritmética y operacional calculatoria.

Pero si la solución del inciso anterior no permitió establecer ninguna conexión con el algoritmo de la división euclidiana, entonces podrían notar que todos los números de la columna 2 van de 6 en 6. Luego bastaría plantear algunas igualdades operacionales parra llegar a la solución:

1
7
13
19
25
$25 + 6 = 31$
$31 + 6 = 37$
$37 + 6 = 43$
$43 + 6 = 49$

Otra opción sería que notaran la relación entre la diferencia de dos números en la columna 2 y el número de filas que los separan. Por ejemplo, 1 y 19 están en esta columna. Se ve que $19 - 1 = 18$ y $18 = 6(3)$, y justamente 19 está 3 filas delante de 1. Entonces el número n que está 8 filas delante de 1 debe cumplir que $n - 1 = 6(8)$; luego $n = 49$ está en la fila 9, columna 2. Bajo este enfoque también se movilizarían distintas interpretaciones de la igualdad, en especial la interpretación condicional.

Sin embargo, puede que para los estudiantes ninguna de las estrategias previas sea natural. En tal situación, podrían optar por "completar" la tabla hasta *ver* el número que está en la fila 9, columna 2; a saber, 49. Recorrieran toda la tabla yendo de 1 en 1 hasta la posición que les interesa. En este escenario no se vería un uso explicito de la igualdad, por lo que el entrevistador podría sugerir el inicio de alguna de las estrategias anteriores.

Una vez resuelto el problema, obtenido el número 49, si es que no lo notaron antes, se puede invitar a los estudiantes a dividir 49 entre 6 y empezar a esbozar la relación general entre fila, columna y cociente, residuo:

$$n \text{ en la fila } q, \text{ columna } r --\rightarrow n = 6(q-1) + (r-1)$$

donde $q-1$ es el cociente y $r-1$ es el residuo al dividir n por 6.

Luego podrían hacer el mismo análisis al problema 1, que ya está resuelto, de modo que se haga explicita una relación simétrica entre las soluciones y los datos de los problemas:

$$49 = 6(8) + 1 \text{ y } 6(9-1) + (2-1) = 49 \ ;$$
$$126 = 6(22-1) + (1-1) \text{ y } 6(21) + 0 = 126.$$

Este camino tiene entonces el potencial, al menos, de movilizar la simetría de la igualdad. Pero además hay otro detalle. Aunque la igualdad $6(8) + 1 = 49$ esté en el formato estándar $operaciones = resultado$, el entrevistador podría llamar la atención sobre el hecho de que conviene interpretar esta expresión como la igualdad entre dos expresiones y no como la ejecución de las operaciones, pues este modo de verla predispone a la idea de que algoritmo de la división euclidiana no solo produce “resultados” sino también relaciones entre los elementos que reúne (dividendo, cociente y residuo).

Finalmente, el problema podría terminar haciendo explicitas las relaciones entre algoritmo de la división euclidiana y ubicación de los números de la tabla. El lenguaje simbólico es el más eficiente para resumir tal relación:

$$\begin{cases} a = 6q + r --\rightarrow \ a \text{ está en la fila } q+1, \text{ columna } n+1 \\ a \text{ está en la fila } q+1, \text{ columna } n+1 --\rightarrow a = 6q + r \end{cases}$$

Reconocer que la estrategia de aplicar el algoritmo de la división euclidiana con 6 como divisor resuelve el problema implica reconocer que todo número natural puede expresarse como un múltiplo de 6 más un número entre 0 y 5, lo cual justamente se siguen de los problemas 3 y 4. En consecuencia, las nociones de la igualdad que los estudiantes movilicen en este problema dependerán en cierto modo de las que expresaron en la solución de la primera parte de la secuencia.

Inciso c

> c) Se va a hacer otra tabla con un criterio similar pero con 7 columnas. ¿En qué fila y columna estará el 126? Para esta segunda tabla, ¿qué número se ubica en la fila 8, columna 4?

En los tres primeros incisos "se está comunicando implícitamente la idea de que hay relaciones generales que es conveniente utilizar. [...] Este posicionamiento puede lograrse [...] por las discusiones que se generen" (Sadovsky, 2005, p . 47). Pues bien, el inciso c invita a extender la relación que describe el signo igual entre el dividendo y su cociente y residuo en los primeros dos incisos.

Antes los estudiantes trabajaron con 6 como divisor, pero en realidad las relaciones que definieron entre los números y su posición en la tabla se pueden generalizar para tablas con número de columnas distinto de 6. En este problema se espera que reconstruyan las relaciones de igualdad que les fueron útiles en los incisos pasados y las adapten para abordar el nuevo problema. Tal ejercicio podría hacer explícita la importancia de robustecer las relaciones que menciona Sadovsky.

En especifico, del análisis de los incisos anteriores, los estudiantes podrían deducir que si a es un número tal que al dividirse entre 7 se obtiene un cociente q y un residuo r, entonces

$$a = 7q + r.$$

Lo que equivale a decir que

a está en la fila $q+1$, columna $r+1$ de la tabla con 7 columnas.

Debido a esto era necesario que en los primeros cuatro problemas de la secuencia los estudiantes se convencieran de que el algoritmo de la división euclidiana *es* una relación de igualdad entre el dividendo, divisor, cociente y residuo. Una vez internalizada esta correspondencia, puede ligar el algoritmo de la división euclidiana con la ubicación de cada número en la tabla. El papel que tendrá el entrevistador a los largo de las actividades será el de organizar las discusiones de modo que vayan encaminadas a develar estas relaciones.

Inciso d

d) Ahora se tiene otra tabla, de la cual se conoce una columna:

7
19
31
⋮

d.1) ¿Se puede saber de cuántas columnas es la tabla? ¿Cómo se podría decir si el 1,141 está en esa misma columna?

Como se muestra más adelante, el inciso d tiene el potencial no solo de hacer surgir expresiones algebraicas, sino también igualdades sintácticas, condicionales y proposicionales. Asimismo, promueve el uso de la propiedad sustitutiva de la igualdad.

Para resolver este problema es necesario que los estudiantes, si no lo han hecho ya, establezcan una relación entre los números de una determinada columna y el residuo que dejan al dividirse por el número de columnas que tenga la tabla. Pero no solo eso, también se requiere información sobre el número de fila al que pertenece un número y su cociente al dividirlo por el número total de columnas. Debido a esto, por la complejidad del inciso d, el entrevistador intervendrá abiertamente para orientar a los estudiantes siempre que lo necesiten. Esto no significa que resuelva él resolverá el problema, simplemente se encargara de llevar a los estudiantes a terrenos adecuados, en donde sus ideas puedan desarrollarse y madurar.

En relación con lo anterior, en el subinciso d.1 se usa el número 1,141 para forzar a los estudiantes a abandonar definitivamente las estrategias operacionales, pues aunque quizá funcionan para números particulares, resultarían limitantes en casos más generales. Por lo tanto, el camino a seguir en el transcurso del problema es promover una discusión colaborativa y la comparación de estrategias con el fin de que ellos mismos constaten la utilidad de las relaciones que propongan.

Teniendo presentes las relaciones construidas en los incisos previos, una solución del primer problema puede ser la siguiente:

> Digamos que la columna del enunciado es la columna r de la tabla.
> Entonces 7 está en la fila 1, columna r y 19 está en la fila 2, columna r.
> Por lo tanto
> $$7 = n(1-1) + (r-1) \text{ y } 19 = n(2-1) + (r-1),$$
> donde n es el número de columnas.
> Al simplificar se obtiene que
> $7 = n(1-1) + (r-1) = n(0) + (r-1) = 0 + (r-1) = r-1$ y
> $19 = n(2-1) + (r-1) = n(1) + (r-1) = n + (r-1)$.
> La transitividad de la igualdad lleva a las igualdades
> $$7 = r-1 \text{ y } 19 = n + (r-1).$$
> Al sustituir la primera en la segunda igualdad tenemos $19 = n + 7$.
> Luego $n = 19 - 7 = 12$.
> Entonces la tabla tiene 12 columnas.

En esta solución aparecen igualdades proposicionales, calculatorias, sintácticas y condicionales, también la propiedad de transitividad y sustitución de la igualdad.

Sobre el segundo problema, como ya se sabe que la tabla tiene 12 columnas, basta dividir 1141 entre 12 para encontrar su ubicación en la tabla. Puesto que $1141 = 12(95) + 1$, entonces 1141 está en la fila 96, columna 2. El problema se reduce a determinar si la columna del enunciado es la columna 2. Como 7 está en dicha columna y $7 = 12(0) + 7,$ entonces la columna a la que pertenece es la columna 6. Por lo tanto 1141 no está en está columna.

d.2) Si a y b son dos números en la misma columna pero en filas desconocidas, ¿qué se puede decir de su diferencia?

...
a
..
b

La solución de este problema y del siguiente implica el uso de igualdades proposicionales, igualdades sintácticas y la propiedad sustitutiva de la igualdad en torno a expresiones algebraicas (ver sección 2.2.3.2). Por lo tanto, la competencia de los estudiantes para manipular expresiones algebraicas es imprescindible para avanzar. Si se presenta el caso que algún estudiante tenga dificultades, el entrevistador deberá ayudarlo a hacer el algebra manipulativa necesaria.

En cuanto a la solución, debido a la experiencia desarrollada en los problemas anteriores, se sabe que cualesquiera dos números a y b que se hallen en una misma columna, r, se pueden escribir de la siguiente forma:

$$a = 12(q-1) + (r-1)$$
$$b = 12(q'-1) + (r-1)$$

en donde q es la fila donde está a y q’ la fila donde esta b.

Lo que pide el problema es analizar la diferencia $a - b$. Así que se procede a sustituir las descomposiciones de a y b en la expresión $a - b$:

$$a - b = (12q + r) - (12q' + r) = 12(q - q´)$$

Por transitividad de la igualdad se llega a que $a - b = 12(q - q´)$ para algún número entero $(q - q´)$. Dicho en otras palabras, $a - b$ es un múltiplo de 12.

> d.3) ¿Será cierto que si la diferencia de dos números es un múltiplo de 12 entonces están en la misma columna?

Las relaciones que surgieron durante la resolución de los incisos anteriores sirven de pretexto para generar una discusión que conduzca a propiedades generales, descontextualizadas o despegadas de la tabla. En este último inciso los estudiantes podrían deducir la unicidad de la representación de los números en la tabla, en términos de fila, columna. Si bien esto podría haber sido intuido desde antes, al tener de referente visual la tabla y números específicos en ella, es en este punto donde pueden prescindir de números concretos y trabajar con expresiones formadas por variables como si fueran números conocidos, es decir, algebraicamente (Radford, 2018).

El primer paso para resolver este problema es establecer una conjetura sobre la veracidad del enunciado. Si ocurre que los estudiantes no lo intuyen verdadero, el entrevistador podría invitarlos a analizar la pregunta a la luz de la primera tabla, la de 6 columnas, y esto bastaría para que se convencieran de que sí debe serlo.

En cuanto los estudiantes piensen que el enunciado debe ser verdadero, el siguiente paso es argumentarlo. Como los ejemplos particulares no bastan, pues la tabla tiene infinitas filas, los estudiantes deberán echar mano de su experiencia algebraica para argumentar a través de relaciones entre objetos algebraicos:

Si a está en la fila q, columna r y b está en la fila q', columna r', entonces se expresan como

$$a = 12(q-1) + (r-1) \qquad \text{(I)}$$

$$b = 12(q'-1) + (r'-1) \qquad \text{(II)}$$

Ahora, lo que se quiere mostrar es que si $a-b$ es un múltiplo de 12 entonces a y b están en la misma columna, lo cual ocurriría si $r = r'$. Entonces hay que suponer que $a-b$ es un múltiplo de 12, digamos

$$a - b = 12k \qquad \text{(III)}$$

y con esto concluir que $r = r'$.

Por un lado, al sustituir I y II en la expresión $a-b$, desarrollar y reducir se tiene:

$$a - b = [12(q-1) + (r-1)] - [12(q'-1) + (r'-1)]$$

$$= 12(q-1) + (r-1) - 12(q'-1) - (r'-1)$$

$$= 12[(q-1) - (q'-1)] + (r-1) - (r'-1)$$

$$= 12[(q-1) - (q'-1)] + r - 1 - r' + 1$$

$$= 12[(q-1) - (q'-1)] + r - r'$$

Entonces $a - b = 12[(q-1) - (q'-1)] + r - r'$ por transitividad de la igualdad.

Por otro lado, al sustituir III en la última igualdad, desarrollar y reducir se llega a

$$12k = 12[(q-1) - (q'-1)] + r - r'$$

$$12k = 12[(q-1) - (q'-1)] + r - r'$$

$$r' - r = 12[(q-1) - (q'-1)] - 12$$

$$r^{'} - r = 12\{[(q-1) - (q^{'} - 1)] - 1\}$$

Al definir $z = \{[(q-1) - (q^{'} - 1)] - 1\}$, la última igualdad se transforma en

$$r' - r = 12z \qquad \text{(IV)}$$

Ahora, como r y r' son los números de columna de a y b, respectivamente, y como sólo hay 12 columnas, entonces $1 \leq r, r' < 12$. Así que

$$r' - r < 12 \quad y \quad r - r^{'} < 12 \qquad \text{(V)}$$

Además, al ser $r^{'} - r$ un número entero, se cumple una y solo una de las siguientes relaciones:

$$0 < (r^{'} - r) \quad \text{ó} \quad (r^{'} - r) < 0 \quad \text{ó} \quad (r^{'} - r) = 0 \quad \text{(VI)}$$

Si $0 < (r' - r)$, entonces $0 < r' - r < 12$ por V. De IV se sigue que $0 < 12z < 12$ para algún entero z, cosa que no puede ocurrir porque $12z$ varía de la siguiente forma

$$\vdots$$

$$12(-2) = -24$$

$$12(-1) = -12$$

$$12(0) = 0$$

$$12(1) = 12$$

$$12(2) = 24$$

$$\vdots$$

Entonces $0 \nless (r' - r)$.

Si $(r' - r) < 0$, entonces $0 < -(r' - r)$. Pero $-(r' - r) = -r' + r = r - r'$. Luego $0 < r - r'$, y de V se consigue $0 < r - r' < 12$. De esto último y de IV se sigue que $0 < -12z < 12$ para algún entero z, cosa que no es posible porque $-12z$ varía de la siguiente forma

$$\vdots$$

$$-12(-2) = 24$$

$$-12(-1) = 12$$

$$-12(0) = 0$$

$$-12(1) = -12$$

$$-12(2) = -24$$

$$\vdots$$

Luego $(r' - r) \nless 0$.

Por lo tanto debe ser que $r' - r = 0$, pues es la única opción que sobra en VI, y en consecuencia $r' = r$, como se quería.

En este argumento aparece una buena cantidad de interpretaciones del signo igual, pero exactamente cuáles son no es lo fundamental aquí. Lo verdaderamente importante es, de acuerdo con Prediger (2010), cómo se movilizan todas ellas para estructurar, en su conjunto junto, un argumento. Es en este sentido que el punto de atención en la resolución de este inciso, por parte de los estudiantes, estará en cómo emergen, se relacionan y desarrollan los distintos tipo de igualdades que formulen.

Apéndice B. Análisis de la resolución de la secuencia de problemas

Las soluciones de los estudiantes son presentadas en el orden en el que se resolvieron los problemas. Para cada uno de los cinco problema que componen la secuencia se hace una descripción del proceso de resolución, haciendo énfasis en las interpretaciones de la igualdad que emergieron, el contexto en el que se utilizó determinada igualdad, las discusiones que se suscitaron y la forma en que se movilizó la noción de igualdad.

A.1 Problema 1

Problema 1

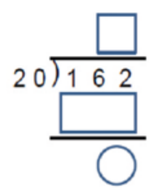
1.- Descubran cómo calcular $162 \div 20$ dados los siguientes datos:

$20 \times 6 = 120$

$20 \times 7 = 140$

$20 \times 8 = 160$

$20 \times 9 = 180$



Comprueben el cociente y el residuo encontrados:

$$20 \times \square + \bigcirc = \square + \bigcirc = \bigcirc$$

Problema 1 de la Tarea 1

Después de que el entrevistador leyó a la pareja de estudiantes las indicaciones y el enunciado del problema, les pidió que escribieran su solución. Pero ambos se mostraban herméticos en su trabajo, por lo que se les preguntó directamente cuál era su solución. El entrevistador le llamó “la casita” a la versión esquemática del algoritmo de la división euclidiana, pues coloquialmente así se le designa en educación básica. Mientras que se llegó al acuerdo de que a la sucesión de igualdades se le designaría “cadena de igualdades”.

> Episodio 1.1
>
> Entrevistador: ¿Con qué números rellenaron las figuras que hay en la casita y las figuras que hay en la cadena de igualdades?
>
> Gaby: 8 en el cuadrado, 160 en el rectángulo y 2 en el círculo.
>
> Entrevistador: Y en la cadena de igualdades, ¿qué piensan que podría ir ahí?
>
> Gaby y Marco: Es lo mismo
>
> Marcos: El mismo resultado que se pide, que sea 162.

Gaby fue la primera en exponer su solución; asocio a cada figura de la casita un numero. Aunque Marcos no explicó su respuesta, hizo lo mismo que su compañera. En la versión esquemática del algoritmo de la división euclidiana la solución de ambos fue la misma (figura A.1).

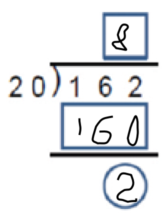
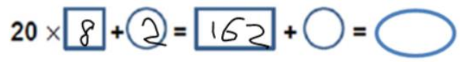


Figura A.1 Solución común en la primera parte del problema.

Sin embargo, sus soluciones en la cadena de igualdades fueron diferentes. Mientras que Gaby propuso la siguiente solución

$$20 \times \boxed{8} + 2 = \boxed{160} + 2 = 162$$

Marcos escribió:



Como se aprecia en el fragmento 1.1, la disparidad entre sus solución no fue anunciada por sus respuestas verbales, su trabajo escrito fue el que la evidenció. Ahora bien, considerando únicamente las repuestas escritas, en particular se podría deducir que Gaby tiene una interpretación **relacional aritmética** del signo igual. Por un lado, la igualdad $20 \times 8 + 2 = 160 + 2$ indica que Gaby primero identificó estructura en la cadena de igualdades y después usó la igualdad numérica como una relación de equivalencia: interpretó $20 \times 8 + 2$ como $(20 \times 8) + 2$ y luego de tener que $20 \times 8 = 160$ dedujo que $20 \times 8 + 2 = 160 + 2$. Por otro lado, debido a que el ovalo que aparece en la cadena de igualdades no aparece en la casita, pero aun así escribió 162 dentro de él, sugiere que la igualdad $160 + 2 = 162$ la obtuvo operando los números enteros. Así que Gaby exhibió específicamente una concepción **relacional comparativa** del signo igual.

Por su parte, el trabajo escrito de Marcos parece que revela una interpretación operacional del signo igual. Con todo, lo que escribió Marcos no aporta más información sobre su interpretación del signo igual. ¿Por qué escribió directamente

dejando vacías las otras figuras? Esta pregunta pudo tener respuesta gracias a que durante la entrevista se compararon las soluciones de los estudiantes. El siguiente episodio deja ver con más detalle lo que subyace a la solución de Marcos.

Episodio 1.2

Entrevistador: Aquí hay algo interesante. ¿Se pueden juntar un poquito más, y sus hojas? Aquí Gaby, curioso, puso $20 \times 8 + 2 = 160 + 2 = 162$. Y Marcos puso aquí $20 \times 8 + 2 = 162$; es correcto, ciertamente. Y aquí [señalando la solución de Gaby], ¿esto también será correcto, Marcos?

> Marcos: A mi parecer, sería correcto si tuviéramos que quitar este 2 [el que Gaby puso en el círculo de la primera expresión] para que diera 160, y ya posteriormente sí se le tendría que sumar el 2. Porque si no aquí daría 164 [señalando la última expresión].

Marcos dice que la igualdad que escribió Gaby, $20 \times 8 + 2 = 160 + 2 = 162$, es incorrecta, porque, así como está, lo que se obtendría sería lo siguiente:

$$20 \times 8 + 2 = 162 + 2 = 164.$$

De acuerdo con Marcos, la igualdad de Gaby hubiera sido correcta de haber escrito esto:

$$20 \times \boxed{8} + \bigcirc = \boxed{160} + 2 = 162$$

La explicación de Marcos permite observar dos cosas. La primera, que no relacionó la cadena de igualdades con el esquema del algoritmo de la división euclidiana. A diferencia de Gaby, él no estableció una relación biunívoca entre los números que puso en las figuras de la casita y los números con los que llenó las figuras de la cadena de igualdades; es decir, no consideró la estructura de la cadena de igualdades. La segunda, Marcos sostiene que el uso del signo igual se restringe al formato "$operaciones = resultado$". Esto es, para él, inmediatamente después del signo igual debe de ir la solución o "el resultado que se pide", tal como lo manifiesta al final del episodio 1.1. Por lo tanto, su interpretación del signo igual es operacional rígida o bien operacional flexible; para determinar cuál de las dos se debería investigar si le otorga o no un naturaleza simétrica al esquema "$operaciones = resultado$" (cosa que se resuelve más adelante en la entrevista).

Aunque Marcos emitía opiniones sobre la solución de Gaby, ella no se veía muy convencida de lo que él decía, pero tampoco defendía su trabajo. Entonces el entrevistador pidió a Gaby que explicara su solución.

Episodio 1.3

Gaby: Yo formo las parejas de números, porque siempre va primero la multiplicación, y después va a ser la división; es comprobar de dónde salió ese 162. Como cuando se comprueba porqué 2 más 2 es 4.

Entrevistador: A ver, explícanos por favor.

Gaby: Se forman las parejas, de números… o de operaciones. El resultado que me dé aquí lo voy a sumar con el resultado que me dé acá y ya cuando me va a dar “igual” pues es resolver primero la multiplicación por la ley de las operaciones y después sumarle el 2.

Entrevistador: Ok. Primero estás haciendo esto que encerraste en un cirulo [20x8]. Y eso lo pusiste aquí [160]. Y al 2 de aquí [de la primera expresión], ¿qué le hiciste?

Gaby: Lo pase normal. No lo utilice.

Marcos [Interrumpiendo a Gaby]: No lo desarrollaste por completo… separándolo por partes.

El episodio 1.3 confirma la interpretación que se hizo del trabajo escrito de Gaby. Pero además deja ver que el modo en el que resolvió el problema es altamente sintáctico; reconoce que las operaciones aritméticas son binarias y que hay ciertas reglas para relacionarlas, la “ley de las operaciones” ella dice. Afirma que para resolver la operación $20 \times 8 + 2$ primero se ordenan las expresiones:

$$20 \times 8 + 2 = (20 \times 8) + 2.$$

Luego procede a calcular $20 \times 8 = 160$ y después infiere la relación $20 \times 8 + 2 = 160 + 2$, pues, en sus propias palabras, al 2 “no lo utiliza”; es decir, no lo opera. Entonces las igualdades $20 \times 8 + 2 = 160 + 2 = 162$ las justifica a través de reglas para establecer relaciones. Este hecho es importante, pues aunque piense el signo igual como un signo en el contexto aritmético tradicional, acepta enunciados del tipo $a + b = c + d$ y utiliza estrategias compensatorias para establecer igualdades. Dicho en otras palabras, su experiencia sintáctica con ciertas expresiones la particulariza dentro del contexto de la aritmética y esto es la que la lleva a establecer ahí identidades, más no en virtud de un cálculo aritmético puntual.

La explicación de Gaby convence a Marcos de que su solución no es incorrecta. Más aun, él reconoce que el modo en el que ella utiliza al signo igual es una forma distinta de la que él le daba.

> Episodio 1.4
>
> Entrevistador: OK. Y Marcos, ¿aún sigues creyendo que hay algún detalle en la respuesta de tu compañera?
>
> […]
>
> Marcos: No, porque ya entiendo su explicación: sí, está separándolos.
>
> Entrevistador: OK. ¿Y tú qué creías que había hecho al principio, cuando pensaste que era 164?
>
> Marcos: Eh… bueno, es que yo estoy acostumbrado a lo de poner, si está el igual, directamente ya el resultado. Entonces por eso había pensado que podría ser 164 cuando lo vi acomodado así.

Por un lado, en el episodio 1.4 Macos declara explícitamente que acostumbra interpretar al signo igual de forma operacional en el esquema $operaciones = resultado$ (cosa que refuerza la conclusión que se obtuvo del episodio 1.2). Por otro, también valida su uso como relación en igualdades del tipo $a + b = c + d = e$. En este punto, parece que no lo conflictúa tal ambivalencia del signo igual. Por ello su conceptualización del signo igual podría decirse **operacional-relacional simultánea**.

A pesar de que el problema estaba resuelto, la discusión enganchó a los estudiantes y por ello se formó el ambiente propicio para extender el problema original. Aprovechando que la respuesta de Gaby "contenía" la respuesta de Marcos, el entrevistador dirigió la conversación hacía ese detalle:

Episodio 1.4

Entrevistador: Lo curiosos de aquí es que, si se dan cuenta, hay dos signos igual. ¿No?

Ambos: Mmm, sí.

Entrevistador: […] Hay dos signo iguales. ¿Cuántas igualdades dirían que aquí se están expresando? ¿Una, dos, tres igualdades…?

Gaby: Yo diría que tres.

Entrevistador: Que tres. ¿Cuáles?

Gaby: $20 \times 8 + 2$ igual a $160 + 2$ que esto es igual a 162.

En primer lugar, Gaby afirma que hay tres igualdades. Verbalmente, sin embargo, solo refiere dos: $20 \times 8 + 2$ igual a $160 + 2$ [y $160 + 2$] que esto es igual a 162. En segundo lugar, hay direccionalidad en su descripción, lee de izquierda a derecha.

En relación al segundo hecho, si bien Gaby mostró una interpretación del signo igual más sofisticada que la de Marcos, como él, su interpretación no se desprende por completo del esquema operacional $operaciones = solución$.

Sobre el primer punto, ella afirmó que la cadena de igualdades contenía tres igualdades. Pero solo mostró dos; simbólicamente, estas son $20 \times 8 + 2 = 160 + 2$ y $160 + 2 = 162$. En principio se podría pensar que la igualdad restante es la que escribió Marcos, $20 \times 8 + 2 = 162$. Tal relación se obtendría de la solución de Gaby, $20 \times 8 + 2 = 160 + 2 = 162$, al usar la propiedad transitiva de la igualdad: Como $20 \times 8 + 2 = 160 + 2 = 162$, entonces $20 \times 8 + 2 = 162$. No obstante, el siguiente episodio muestra que Gaby estaba pensando en otra propiedad de la igualdad.

Episodio 1.5

Entrevistador: Aja, ¿ahí son dos? [$20 \times 8 + 2 = 160 + 2$ y $160 + 2 = 162$]

> Gaby: No, en total son tres porque el 162 ya es el número completo.

Gaby dice que "en total son tres [igualdades] porque el 162 ya es el número completo". Resulta que cuando hace alusión a "el número completo" señala al 162. La conjunción de su respuesta verbal y su actividad gestual sugiere que lo que ella afirma es que 162 es igual a sí mismo. Entonces la frase "el 162 ya es el número completo" se puede parafrasear como "162 es 162"; simbólicamente: $162 = 162$. Su respuesta refleja que para ella es más natural el carácter reflexivo de la igualdad que la transitividad.

Si bien Gaby es consciente de que hay al menos tres igualdades en el enunciado $20 \times 8 + 2 = 160 + 2 = 162$ y además puede describirlas verbalmente, en el episodio 1.6 se puede ver que le resulta desafiante expresarlo simbólicamente.

> Episodio 1.6
>
> Entrevistador: Si quieres, Gaby, puedes ir poniendo las tres igualdades por separado.
>
> [Gaby escribe: $20 \times 8 + 2$ $160 + 2$ 162]
>
> Entrevistador: Esas son las tres igualdades que propone [Gaby]. ¿Cómo ves [Marcos]? ¿Qué piensas del trabajo que anotó Gaby?
>
> Marcos: Que sí son lo mismo, nada más que, como ciertamente había dicho mi compañera, se expresan de diferente forma. Pero en sí, realmente es lo mismo.
>
> Entrevistador: Por ejemplo, este $160 + 2$ ¿a qué es igual?
>
> Marcos: Igual que a esta [$20 \times 8 + 2$] y esta [162], que a la primera y a la tercera [expresión].

En el episodio 1.6 Marcos reconoce la simetría de la igualdad. Afirma que la expresión $160 + 2$ es igual a la que está a la derecha (162) y a la que está a la izquierda ($20 \times 8 + 2$). Así que la disyuntiva de si Marcos tiene una concepción operacional rígida u operacional flexible queda resuelta: su interpretación del signo igual es **operacional flexible**.

Ahora, tal como se ve en el episodio 1.6, Gaby solamente escribió por separado las expresiones de la cadena de igualdades que propuso, no las relaciones entre ellas. El entrevistador trató de que ambos estudiantes notaran que las relaciones de igualdad que describían verbalmente eran binarias, por lo que si querían expresar igualdad en forma simbólica tenían que estar enlazadas, de alguna manera, las expresiones que escribió Gaby a través del signo igual. No obstante, cuando el entrevistador hizo referencia una *igualdad en forma simbólica* ambos estudiantes preguntaron de inmediato si se les estaba pidiendo escribir una “expresión algebraica”. Ante tal cuestionamiento el entrevistador les preguntó qué entendían por expresión algebraica. Los dos hicieron alusión a expresiones que tenían x’s y y’s. En este punto, debido a que la atención de los estudiantes se estaba desviando del problema y del foco original, el entrevistador decidió retomar el enunciado del problema, redirigir el análisis hacia la solución de Gaby y hacer explicito que ahí estaba contenida la solución de Marcos.

Episodio 1.7

Entrevistador: ¿Ustedes dirían que esto ($20 \times 8 + 2 = 162$) [la igualdad que propuso Marcos] es una igualdad simbólica?

Ambos: Sí.

Entrevistador: Sí. Y no tiene “x” ni “y”, ¿no? [Ambos asienten]. Pero esa es “una” igualdad. Y tú Gaby, de las tres [igualdades] que viste, ¿dirías que esta igualdad que acaba de escribir Marcos está aquí contenida [en tu respuesta]?

Gaby: Sí, sí está contenida.

Entrevistador: En tu trabajo es la primera con la última, ¿no? [El entrevistador señala ambas expresiones en la cadena de igualdades de Gaby]

Ambos: ¡Sí, la primera con la última!

En el momento en el que el entrevistador señaló las expresiones que estaban en los extremos de la cadena de Gaby, ambos estudiantes descubrieron que de la expresión $20 \times 8 + 2 = 160 + 2 = 162$ se desprendían igualdades que no necesariamente eran contiguas. Esto los animó a pensar que había más relaciones de las que propusieron al principio. No obstante, el modo en el que cada uno infirió las posibles igualdades fue distinto:

Episodio 1.8

Entrevistador: Esa que escribió Marcos es una de las tres igualdades que aquí están contenidas. ¿Qué otra igualdad está contenida ahí?

Gaby: Ya viéndolo así serían más de tres. Porque sería este [$20 \times 8 + 2$] con este [162], es una.

Entrevistador: Que es la que escribió Marcos. [Ambos asienten con la cabeza]

Gaby: También está $160 + 2$ es igual a 162. Ya son dos.

Entrevistador: A ver, ¿puedes escribir esa? Para ir teniendo el registro.

Gaby. Sí, sí. [Gaby escribe lo siguiente:

$20 \times 8 + 2 = 162$

$160 + 2 = 162$

$20 \times 8 + 2 = 160 + 2$]

Entrevistador: Pero decía Gaby que hay más. ¿Sí crees que haya más, Marcos?

Marcos: Mmm. [Se ríe] Eh… más de tres…

Entrevistador: Es lo que dice Gaby. Afirma que hay más de tres igualdades.

[…]

Marcos: Yo encontraría máximo cuatro.

Entrevistador: ¿Si? ¿Cuál otra le falta entonces? Porque ya llevan tres.

Gaby: No, creo que sí ya no, ya son las únicas.

[…]

Entrevistador: Pero dice Marcos que aquí hay otra. ¿Verdad, Marcos?

Marcos: Aha. Pero tendríamos que quitar el “más dos” para que sea 20×8 igual a 160.

Las igualdades que Gaby dedujo provinieron de considerar algunas de las combinaciones de las tres expresiones que ella declaró como iguales: $20 \times 8 + 2$, $160 + 2$ y 162. Pero no escribió todas las combinaciones posibles. Por ejemplo, no consideró que de las tres igualdades que planteo se podían obtener otras tres: $162 = 20 \times 8 + 2$, $162 = 160 + 2$ y $160 + 2 = 20 \times 8 + 2$. Asimismo, aunque ella declaró verbalmente que 162 era igual a sí mismo, reconociendo así la reflexividad de la igualdad, en la lista que escribió, y que afirmó era exhaustiva, no aparece la igualdad $162 = 162$. Parece que las propiedades de reflexividad y simetría de la igualdad son más fáciles de expresar en el lenguaje natural que en el lenguaje simbólico.

Respecto a Marcos, si bien está de acuerdo con las tres igualdades que escribió Gaby, menciona que hay una cuarta igualdad. Esta igualdad es más sutil que las otras porque se deduce de una de ellas. Afirma que de $20 \times 8 + 2 = 160 + 2$ se obtiene la igualdad $20 \times 8 = 160$. Entonces, desde esta perspectiva, la igualdad $20 \times 8 = 160$ verdaderamente se desprende de la cadena de igualdades que propuso Gaby. Y se observa que aun cuando él tenía una interpretación operacional del signo igual bien definida, la igualdad $20 \times 8 = 160$ no la obtuvo haciendo operaciones aritméticas sino deduciéndola de la igualdad $20 \times 8 + 2 = 160 + 2$ al utilizar estrategias compensatorias: quitar el ‘más 2’ de cada miembro de la igualdad. Entonces su concepción del signo igual es ahora **relacional comparativa**.

A.2 Problema 2

Problema 2

2.- Elijan cualquier número natural n entre 165 y 175. ¿Existen dos múltiplos consecutivos de 20 entre los que se ubique n? De ser así, ¿pueden escribir a n en términos de alguno de estos múltiplos? Si sí, ¿qué estrategia utilizaron para lograrlo?

Problema 2 de la Tarea 1

El entrevistador leyó en voz alta el enunciado del problema, haciendo pausas en las dos primeras partes de él para que los estudiantes manifestaran si algún término les era desconocido o si no eran claras las preguntas.

Casualmente, ambos participantes eligieron el 170 para trabajar. Esta coincidencia, el hecho de hacerla pública, suscitó que los estudiantes siguieran resolviendo el problema en equipo. Este acuerdo no se hizo explicito, sino que fue dándose por sí mismo, de forma casual.

Al momento de abordar el cuestionamiento de si 170 estaba entre dos múltiplos consecutivos de 20, Gaby tomó la palabra. Afirmó que 170 está entre 20×8 y 20×9; su trabajo escrito aparece en la figura A.2

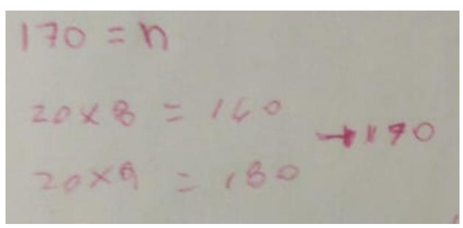


Figura A.2 Parte de la solución de Gaby al problema 2

En el primer renglón de su solución parece emplear al signo igual para introducir una definición; es decir, parece interpretarlo definitoriamente. Pero lo cierto es que a lo largo de su solución no utilizó esta identificación. Así que en este punto no hay certeza de que ella reconozca este uso del signo igual.

En cambio, la forma en que esquematiza el orden entre 20×8, 20×9 y 170 pone de manifiesto un uso **calculatorio** del signo igual. En efecto, decide efectuar las multiplicaciones para establecer las igualdades $20 \times 8 = 160$ y $20 \times 9 = 180$, las cuales hacen evidente que 170 está en medio de 20×8 y 20×9.

Durante la discusión de la segunda pregunta del problema, *¿Pueden escribir a* 170 *en términos de* 20×8 *o* 20×9*?*, se acordó que esta era equivalente a la siguiente: ¿Hay una descomposición de 170 que incluya 20×8 o 20×9? Gaby es la primera en dar una respuesta:

> Episodio 2.1
>
> Gaby: Sí. Por ejemplo, 170 es 20×8 más 10 igual a 170. 20×9 menos 10 es igual a 170. Y se incluyen los dos, 20×8 y 20×9.

La solución escrita de Gaby (figura A.3) junto con su explicación verbal permite rescatar cosas interesantes. La descripción verbal que hace de 170 en términos de 20×8 tiene la siguiente forma simbólica: $170 = 20 \times 8 + 10 = 170$, una cadena de igualdades muy particular. Aunque verbalmente establece la igualdad $170 = 20 \times 8 + 10$, esta no aparece en su respuesta escrita (ver figura A.3), ¿por qué?

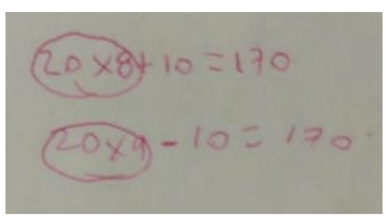


Figura A.3 Parte de la solución de Gaby al problema 2

Bien, en su explicación está respondiendo si 170 se puede descomponer en una expresión que contenga a 20×8; ella dice que sí, que tal expresión es $20 \times 8 + 10$. Entonces está partiendo de 170 y llegando a $20 \times 8 + 10$.

Luego la igualdad $170 = 20 \times 8 + 10$, donde 170 está a la izquierda, modelaría el orden en el que configuró su respuesta, pues leemos de izquierda a derecha. Sin embargo, después de haber llegado a la solución $170 = 20 \times 8 + 10$, Gaby parece atraída por el esquema "$operaciones = solución$" y entonces concluye que $20 \times 8 + 10 = 170$. El hecho de que *regrese* a 170 podría significar una interpretación operacional rígida de la igualdad o bien el conocimiento de la simétrica del signo igual. No obstante, en virtud de la segunda parte de su respuesta es posible contextualizar la información y confirmar que sí reconoce **simetría** en la igualdad. En efecto, ella dice "20×9 menos 10 es igual a 170"; en símbolos, $20 \times 9 - 10 = 170$. Pero recordar que está respondiendo si 170 se puede transformar en una expresión que contenga a 20×9. Por lo tanto su respuesta es que sí, leyendo de izquierda a derecha, que $170 = 20 \times 9 - 10$. Esta última igualdad, así como la que incluía a 20×8, las (re)escribió en la forma $20 \times 8 + 10 = 170$ y $20 \times 9 - 10 = 170$ no porque ignoraba las igualdades $170 = 20 \times 8 + 10$ y $170 = 20 \times 9 - 10$, sino porque sabía que estas últimas, las que modelan la solución conforme ella la concibió, yacían latentes en las primeras.

Como Gaby era quien dirigía la conversación, el entrevistador intervino para incluir a Marcos en la discusión. Su participación resultó ser de alto valor para la entrevista.

> Episodio 2.2
>
> Entrevistador: ¿Y tú qué piensas, [Marcos]?
>
> Marcos: Eh, bueno, esto sería complementando pero también se podría hacer lo que sería el 20×8 más, no sé… podría ser $20 - 10$, que podría haber una gran variación en otras, que da igual 170. Y 20×9 menos… igual podría ser 10, como ella habia dicho, igual daría 170.
>
> […]
>
> Entrevistador: ¿Qué estrategia ocuparon para lograr su descomposición [de 170]?

> Marcos: Bueno, por ejemplo, para 20×8, ya sabiendo que da 160, sabiendo que cualquier número mayor o menor que 10; si es menor que 10, se tiene que sumar con otro número. Por ejemplo, suponiendo que es 9, se tendría que aparte sumar otro 1 para que diera 170. Ya si es… $15, 20$, se tendría que restar. Por ejemplo el 15, se tendría que restar 5 para que diera 170; en el 20, pues 10, y así… Y en el de 20×9, siempre se va a tener que restar un número ya que sobrepasa la cantidad de los 170.

¿De qué variación habla Marcos en el episodio 2.2? Él dijo "podría ser $20 - 10$, que podría haber una gran variación en otras, que da igual 170". Justo cuando empezó a decir que "podría haber una gran variación en otras…" él estaba observando la resta $20 - 10$ mientras movía ambas manos de tal que forma que expresaba equilibrio o compensación (ver figura A.4). Una opción es que la variación se refiera a la resta, pero esto no es así. Afirma que al tomar 20×8 y sumarle cierta cantidad, sin importar la variación que haya se podría obtener como resultado 170 (aunque él dice "que da igual 170", debido a la forma en que usa la palabra *igual* a lo largo del episodio 2.2 se puede inferir que usa *igual* como sinónimo de *también*). Por lo tanto, la variación que menciona no es sobre el resultado de la resta sino sobre las cantidades que se están restando (tal como lo ejemplifica en su segunda intervención del episodio 2.2); así la compensación que corporiza es sobre los números que se restan, de modo que al operarlos se mantenga estable el resultado, que siempre se obtenga 10.

Figura A.4 Marcos corporiza compensación con sus manos

En resumen, la igualdad $20 \times 8 + x - y = 170$ se preserva siempre que las cantidades x y y varíen de modo que la diferencia $x - y$ sea 10. La observación de Marcos generaría entonces una familia de igualdades:

$$20 \times 8 + 20 - 10 = 170$$

$$20 \times 8 + 10 - 1 = 170$$

$$20 \times 8 + 15 - 5 = 170$$

$$20 \times 8 + 20 - 10 = 170$$

$$\vdots$$

Estas igualdades se obtienen no al ejecutar todas las operaciones involucradas; es decir, no se utiliza al signo igual de forma operacional; sino en virtud de la estructura de las expresiones $20 \times 8 + x - y$ y de la relación que guardan las diferencias $x - y$. En consecuencia, Marcos, quien su solución del problema 1 reflejó un uso operacional del signo igual, puede concebir al signo igual de forma **relacional comparativa** y también **semántica**.

El episodio 2.2 también contiene el planteamiento de la tercera y última pregunta del problema: ¿Qué estrategia utilizaron para expresar a 170 en términos de un múltiplo de 20? Tanto Marcos como Gaby coincidieron en que un primer paso es encontrar un múltiplo de 20 que esté lo más cerca de 170. Por ejemplo, 20×8. No obstante, la descripción del segundo paso no fue tan inmediata. Pero en su desarrollo los se dieron cuenta de que necesitaban resolver una ecuación:

> Episodio 2.3
>
> Entrevistador: Luego, ¿cuál sería el siguiente paso?
>
> Marcos: Después sería restar el resultado de ese múltiplo del resultado que esperas obtener [170] para saber la cantidad que necesitas sumar para obtener ese resultado.
>
> Entrevistador: Ok. Entonces, paso uno: encontrar el múltiplo de 20 más cercano a 170. Dice Marcos, el paso dos es decir, en este caso, cuánto es

> 20×8, que es 160, y restárselo a 170; ¿ y luego?, ¿lo que te da esa resta qué le haces?
>
> Marcos: Esa, en el caso que tenía que era 20×8, que era 160, se tendría que restar, sabiendo que esta el resultado menor se tendría que sumar lo que tenga que dar la resta entre 160 y 170, que en este caso es el 10.
>
> […]
>
> Entrevistador: Entonces aquí yo estoy diciendo ah, mira, 170 es igual a 20×8 más… ¿más qué?
>
> Ambos: Más 10.
>
> Entrevistador: Exacto. Y esta serie de pasos, ¿no les parece familiar?
>
> Ambos: Una ecuación.
>
> Entrevistador: ¿Por qué una ecuación?
>
> Gaby: Porque también son igualdades, y normalmente hacemos los procedimientos inversos para encontrar el numero.

Básicamente lo que Marcos propuso fue un método para encontrar el residuo que deja 170 cuando se divide entre 20. Dice que primero se calcula 20×8, que es 160. Después se debe considerar la resta $170 - 160$, que en este caso es 10. Finalmente, se toma la suma $160 + 10$ para obtener 170. Este procedimiento exhibe un manejo controlado de la aritmética, donde las operaciones que se efectúan no son arbitrarias, por el contrario, surgen de forma premeditada para apuntalar la descomposición de 170 que se buscaba. Debido a los cálculos que hizo Marcos y a lo que buscaba hacer con ellos, la ecuación que resolvió, aunque no la planteó explícitamente, es la siguiente: $20 \times 8 + x = 170$.

Es curioso que Marcos nunca mencionara explícitamente la palabra *igual*. Parece que, en el episodio 2.3, la noción de igualdad está fundida con la idea de operatividad. Pero tal operatividad no implica necesariamente una interpretación operacional clásica del signo igual. El hecho de que ambos estudiantes asociaran este procedimiento con una ecuación sugiere una interpretación tanto **condicional** como **semántica** del signo igual, como en seguida se muestra.

Gaby pone sobre la mesa el concepto de ecuación debido a dos cosas concisas: hay igualdades y se hacen procedimientos inversos para encontrar "el número". ¿De cuáles igualdades y cuál "número" habla Gaby? Por la discusión del episodio 2.2 se podría conjeturar que se refiere a las igualdades que mencionó –sin mencionar así- Marcos, y que por "el número" se refiere al residuo que él también determinó, el 10. Sin embargo, Gaby escribió lo siguiente en su hoja de trabajo:

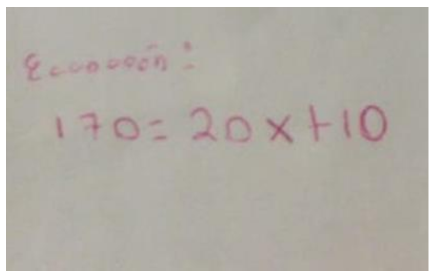


Figura A.5 Planteamiento de una ecuación concreta por Gaby

La ecuación que formuló Gaby deja ver no solamente que puede abandonar el esquema operacional direccional $operaciones = resultado$, sino que también tiene una **interpretación condicional** del signo igual. Pero lo que en definitiva sobresale en su trabajo es que la ecuación que compuso es sustancialmente distinta de la de Marcos. Aunque ambas son ecuaciones aritméticas, la incógnita en la ecuación de Marcos es el residuo de dividir 170 entre 20:

$$20 \times 8 + x = 170.$$

Mientras que en la ecuación de Gaby, la incógnita es el cociente que resulta de dividir 170 entre 20:

$$20x + 10 = 170.$$

Resulta –de menos- curioso que cada estudiante se enfocó en uno y sólo uno de los dos objetos cuya existencia garantiza el algoritmo de la división euclidiana. Con todo, como ninguno asoció de forma directa la solución de su ecuación con el algoritmo de la división euclidiana, el entrevistador decidió invitarlos a considerar esta posibilidad. Se les pidió que realizaran la siguiente división y que explicaran los pasos de su procedimiento:

$$20 \,\big|\overline{\,175\,}$$

Tanto Marcos como Gaby resolvieron la división correctamente (en la figura A.6 están sus soluciones). Ambos cayeron en cuenta de que debían aproximarse lo que mejor que pudieran a 175 con un múltiplo de 20; en este caso 20×8, que expresaron como 160. Finalmente dijeron que “bajaban” el residuo, que les dio 15.

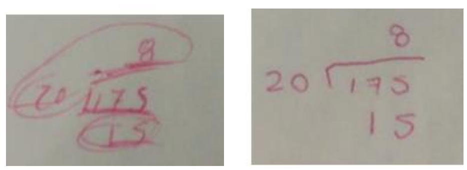


Figura A.6 La solución de Marcos a la izquierda; la de Gaby a la derecha.

Luego el entrevistador les señaló que este procedimiento fue justo el que emplearon en el problema 1, y por consiguiente la sucesión de pasos que estaban construyendo (ver episodio 4.3) eran los que ellos ya conocían para hacer una división con la casita. En este punto el entrevistador retomó la idea que ambos habían tenido, aquella de que la sucesión de pasos que describieron tenían que ver con una ecuación:

Episodio 2.4

Entrevistador: No tiene que ver tal cual con una ecuación, porque una ecuación es [según dijo Gaby] “encuentra el número”. Pero aquí no hay incógnita. ¿O sí?

Gaby: No.

Entrevistador: Tú qué dices, Marcos.

Marcos: [Hace ademanes de que tiene sus reservas]

Gaby [ganándole a Marcos la palabra]: O podría ser que sí, porque pues estamos buscando la descomposición.

Marcos: [Asiente, con inseguridad, y mira al entrevistador, como esperando aprobación]

Entrevistador: Ok. O sea, de antemano, para hacer la división, les dan el numero que van a dividir y por cuál numero [van a dividir]; estos dos datos les dan. Y ustedes, cuando dividen, ¿qué números encuentran?

Marcos: El 8 y queda como residuo el 10.

Entrevistador: Entonces sí están encontrando números, ¿verdad? Están encontrando el 8 que se conoce como "cociente" y el 10 que se conoce como "residuo".

Ambos: Ajá, sí.

Entrevistador: ¿Y este procedimiento [el de descomponer a 170 como antes] servirá para cualquier otro número que yo me encuentre entre 165 y 175?

Ambos: Sí.

Entrevistador: ¿Sí funcionará? A ver, vamos a …

Gaby [interrumpiendo]: ¡No!

Entrevistador: ¿No funciona?

Gaby: No. No debe de ser con 10. Porque si tomaos como base 10 nada más va a ser para 170 porque no nos puede dar 168 sumado 10. Pero sí sería buscando el… como había dicho mi compañero, multiplicar y después al número que elegimos restarle lo que nos dio.

Entrevistador: O sea, que el cociente y el residuo depende del número que hayan elegido.

Marcos: ¡Exacto!

Gaby: ¡Sí, sí!

El episodio 2.4 muestra que los estudiantes, pese a que el entrevistador trató de hacerlos desistir de su idea de relacionar el algoritmo de la división euclidiana con la resolución de ecuaciones, lograron defender su idea y además completarla. Mientras Gaby se centró en encontrar el cociente, Marcos estaba entretenido en encontrar el residuo. Gaby se da cuenta que la ecuación que había planteado, $20x + 10 = 170$, efectivamente no resuelve el problema original, pues el residuo (10) no es una constante sino también una incógnita. Al final, los dos estuvieron de acuerdo en que no tenían que encontrar un número, sino dos: el cociente y el residuo. Pero quizá lo más interesante es que los dos establecieron una relación explicita entre el algoritmo de la división euclidiana en su forma de la casita y éste como una relación de igualdad, tal como se aprecia en su trabajo escrito, en la figura A.7.

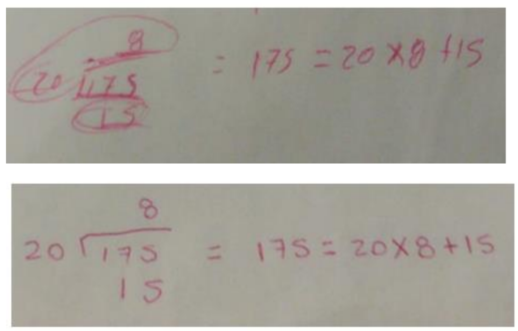


Figura A.7 Ambos estudiantes reescriben el algoritmo de la división euclidiana en su forma *de casita* como una igualdad. (A la izquierda el trabajo de Marcos y a la derecha el de Gaby)

El modo en que escribieron la igualdad de la figura A.7 es especial. Interpretaron al signo igual **definitoriamente**. En efecto, al escribir $175 = 20 \times 8 + 15$ están relacionando, a través de la igualdad, al dividendo (175), divisor (20), cociente (8) y residuo (15). Aquí el uso del signo igual ya no es operatorio: no están interesados en realizar las operaciones ni en asirse al esquema unidireccional "$operaciones = resultado$". Lo que les interesa es expresar una identificación entre distintas expresiones: el algoritmo de la división euclidiana y una igualdad numérica son *lo mismo*. Claro que para que esto sea una buena definición no debe depender de los representantes;

es decir, sin importar qué números relacionen con el algoritmo de la división euclidiana, esta relación siempre tienen que poder identificarla con una igualdad numérica. En otras palabras, cuando piensen en dividir deben de pensar simultáneamente en una igualdad numérica. Esta identificación se va solidificando en los episodios 2.5 y 2.6.

Habiendo los estudiantes avanzado tan lejos por sí mismos, el entrevistador supuso pertinente llamar su atención sobre la naturaleza cíclica de los residuos y su relación con los sendos cocientes.

> Episodio 2.5
>
> Entrevistador: Miren, aquí yo escribí una descomposición de 170 como 20×8 más 10, y aquí, en su ejercicio 1, tienen la descomposición de 162 ¿cómo quién? 20×8 más…
>
> Ambos: Más 2.
>
> Entrevistador: Ahí se repite el “por ocho”. ¿Pero qué cambia?
>
> Ambos: El residuo.
>
> Entrevistador: Ok. ¿Será que el residuo puede ser muy grande? […] ¿Podría obtener un residuo 15, por ejemplo? […] ¿Qué número dicen ustedes que cuando lo divido entre 20 deja residuo 15?
>
> Gaby: Sería 175.
>
> Entrevistador: ¿175? A ver, hagan la división.
>
> Gaby: $20 \times 8, 160,$ más $15, 175$.
>
> Entrevistador: Perfecto. ¿Pueden escribir la descomposición de 175 que incluye al cociente y al residuo?
>
> Ambos: [Asienten y escriben, cada uno, $175 = 20 \times 8 + 15$]

Del episodio anterior puede extraerse, al menos, la siguiente observación. Cuando el entrevistador les pidió que aplicaran el algoritmo de la división euclidiana a 175 como dividendo y a 20 como divisor, Gaby directamente asoció el algoritmo de la división euclidiana con una igualdad. En forma simbólica, lo que ella mencionó es lo siguiente: $20 \times 8 + 15 = 175.$ Mientras que su trabajo escrito, $175 = 20 \times 8 + 15$, muestra explícitamente la intención de denotar equivalencia entre las expresiones 175 y $20 \times 8 + 15$. Este fragmento refuerza la hipótesis de que en la figura A.7 los estudiantes usaron al signo igual de forma definitoria.

En el episodio 2.5 los estudiantes notaron la variabilidad de los residuos. Aunque haya números distintos, como 170 y 162, el cociente puede permanecer fijo, y en tal caso es el residuo el que caracteriza o determina a los números. Pero Marcos señaló un fenómeno más sutil, y es que cuando se habla de cocientes y residuos al tomar como divisor al 20, expresiones como $20 \times 6 + 20$ no tienen cabida (semánticamente hablando). Esto se desarrolló en el siguiente episodio –que es la continuación del episodio 2.5:

Episodio 2.6

Entrevistador: Ahora, ¿habrá un número que tenga residuo 20?

Marcos: En este caso no, porque el 20 cabría en el 20, que cabe una vez.

[…]

Entrevistador: A ver, ¿qué pasará con 179?

Gaby: Tendrá un residuo de 19.

Entrevistador: ¿Tendrá un residuo de 19? ¿Entonces este (179) cómo lo puedo reescribir?

Marcos: 20×8 mas 19. [El entrevistador escribe $179 = 20 \times 8 + 9$ frente a ambos]

Entrevistador: ¿Y qué pasará entonces con 180?

Marcos: Seria 20×9

Gaby: Sí. Ya no hay ningún residuo.

Entrevistador: [Escribe $180 = 20 \times 9 +$] Más…

Ambos: ¡Más cero!

Entrevistador: OK. Entonces sí hay residuo [y escribe $180 = 20 \times 9 + 0$], como también hay cociente, ¿no? [Los participantes asienten]

Marcos percibe la necesidad de transformar una expresión como $20q + 20$ en $20(q + 1)$, "el 20 cabría en el 20, que cabe una vez", lo cual sugiere, por un lado, equivalencia en sentido **sintáctico**; por otro, también exhibe un uso de la propiedad **sustitutiva** del signo igual al preferir la expresión $180 = 20 \times 9$ sobre $180 = 20 \times 8 + 20$. Asimismo, Gaby también usó la estructura de la (pseudo)expresión $180 = 20 \times 9 +$ para reformular su conjetura sobre la inexistencia del residuo. Ella inicialmente dice que al tomar 180 como dividendo y 20 como divisor no hay residuo. Si no hubiera sido consciente de las reglas de conformación en la aritmética, aun cuando tuviera a la vista la pseudoexpresión $180 = 20 \times 9 +$ y se le preguntara "¿más qué?" hubiera podido responder algo como "más nada" (exactamente como se leería la solución de Marcos del problema 1, por ejemplo). Pero esto no pasó. Finalmente Gaby aceptó la existencia de residuos iguales al número cero. Por lo tanto, ambos estudiantes mostraron un conocimiento **sintáctico** de la igualdad.

Con la intención de no romper el hilo de los razonamientos desarrollados hasta ese punto, sino por el contrario, extenderlo, el entrevistador planteo la siguiente lista de igualdades:

$$179 = 20 \times 8 + 19$$

$$180 = 20 \times 9 + 0$$

$$181 = 20 \times 9 + 1$$

$$182 = 20 \times 9 + 2$$

$$\vdots$$

Ante el cuestionamiento de cuántas igualdades se tendrían que escribir para obtener de nuevo un residuo igual a 0, ambos estudiantes respondieron con seguridad que esto ocurriría cuando se llegara a 200, pues $200 = 20 \times 10 + 0$, y que además tal número aparecería 20 igualdades después de 180.

$$
\begin{array}{c}
179 = 20 \times 8 + 19 \\
180 = 20 \times 9 + 0 \\
\left.\begin{array}{c}
181 = 20 \times 9 + 1 \\
182 = 20 \times 9 + 2 \\
\vdots \\
200 = 20 \times 10 + 0
\end{array}\right\} \text{20 igualdades}
\end{array}
$$

Figura A.8 Comportamiento cíclico de los residuos.

Entonces los estudiantes dedujeron que una vez que se obtiene residuo 0, hay que *avanzar* 20 números más que vuelva a aparecer un residuo 0. Pero hicieron más que eso, encontraron que los residuos que resultan de dividir entre 20 son exactamente los números enteros que hay entre 0 y 19:

Episodio 2.7

Entrevistador: Entonces, ¿qué residuos vamos obteniendo? Aquí está el 0, 1, 2..

Ambos: Hasta el 19.

Marcos: Y otra vez empieza desde cero.

Entrevistador: Aquí (en la posición previa a 200, a la altura de su residuo 0, en la figura A.7) antes sería 19, ¿no?. [En azul aparece que lo escribió el entrevistador en ese momento:

$$179 = 20 \times 8 + 19$$

$$180 = 20 \times 9 + 0$$

$$181 = 20 \times 9 + 1$$

$$182 = 20 \times 9 + 2$$

...

$$19$$

$$200 = 20 \times 10 + 0]$$

Entrevistador: Y aquí (en renglón del residuo 19, exactamente arriba de 20×10), ¿qué numero sería?

Gaby: Veinte por nueve. [En azul aparece que lo escribió el entrevistador en ese momento:

$$179 = 20 \times 8 + 19$$

$$180 = 20 \times 9 + 0$$

$$181 = 20 \times 9 + 1$$

$$182 = 20 \times 9 + 2$$

...

$$20 \times 9 + 19$$

$$200 = 20 \times 10 + 0]$$

Marco: Ese sería doscientos…

Gaby [interrumpiendo]: Serian doscientos noventa y nueve…

Ambos [súbitamente]: ¡Ciento noventa y nueve! [En azul aparece que lo escribió el entrevistador en ese momento:

$$179 = 20 \times 8 + 19$$

$$180 = 20 \times 9 + 0$$

$$181 = 20 \times 9 + 1$$

$$182 = 20 \times 9 + 2$$

...

$$199 = 20 \times 9 + 19$$

$$200 = 20 \times 10 + 0]$$

Entrevistador: Muy bien. Aquí ya descubrimos algo curioso: los residuos están acotados entre 0 y…

Ambos: …y 19.

En el episodio 2.7 está el camino que llevó a los estudiantes a determinar cuáles son los posibles residuos al dividir entre 20. El método que se utilizó nada tiene de operatorio, ni siquiera tuvieron que realizar las veinte operaciones de la figura A.8 para estar seguros que llegarían de nuevo a un residuo 0. La caracterización de los residuos la obtuvieron analizando las relaciones expresa el algoritmo de la división euclidiana en su versión de igualdad. Como ejemplo de esto está el fragmento donde el entrevistador inicia dándoles como residuo 19; a partir de él construyen el cociente, 9, y luego el dividendo, 199. Así que la igualdad $199 = 20 \times 9 + 19$ no surgió de la realización de operaciones concretas (tanto es así que ambos se embarcaron en el análisis ignorando quien era el dividendo, una de las dos piezas fundamentales para realizar el algoritmo de la división euclidiana, prueba de ello es que ambos se equivocaron en su primer intento de desenmascáralo), sino del estudio de las relaciones que guardan los elementos del algoritmo de la división euclidiana. Por lo tanto, ambos pueden conceptualizar relacionalmente la igualdad. De hecho, este último episodio provee las primeras pistas de que los estudiantes son capaces de interpretar proposicionalmente al signo igual.

A.3 Problema 3

Problema 3

3.- Un día Alejandro le dijo a Xavier que dividir un número entre 20 es lo mismo que ubicarlo entre dos múltiplos consecutivos de 20. Pero Xavier no le creyó. ¿Qué argumento darías a favor o en contra de la afirmación de Alejandro?

Problema 3 de la Tarea 1

Gracias a todo el trabajo que desarrollaron los estudiantes a lo largo de los primeros dos problemas, la solución del problema 3 y problema 4 fue muy sencilla para ellos. En el caso del problema 3, por ejemplo, ambos convinieron en que es verdad lo que afirma Xavier. Para examinar la aseveración que hacen, el entrevistador les pide trabajar el problema con un número concreto, con 113:

Episodio 3.1

Gaby: En el ejemplo de 113, pues divido 113 entre 20. Y como son números consecutivos y el resultado es 5, entonces ya sé que el número que sigue a 5 es 6. Entonces seria 20×5 y después 20×6. Y como hay un residuo de 13 pues ya puedo ubicarme que son 13 números después de 100.

La solución de Gaby es muy precisa. Menciona que "el resultado es 5". Ocurre que 5 es el cociente de dividir 133 entre 20. ¿Por qué identifica al cociente con "el resultado"? Pues bien, ella trató de explicar, de forma concisa, porqué dividir 133 entre 20 permite acomodarlo entre dos múltiplos consecutivos de 20. En términos estrictos, el primer paso en la resolución del problema es decir cuáles son esos múltiplos. Pero como estos deben ser múltiplos consecutivos, en realidad basta dar uno de ellos, pues el otro es sencillamente el múltiplo que le sigue. Más aún, debido a que busca un múltiplo particular de 20, este quedará caracterizado si logra decir por cuál número debe multiplicar a 20. En resumen, es suficiente con encontrar un solo número, el cociente de dividir 133 entre 20; tal número lo calcula rápidamente, es 5. Luego los múltiplos consecutivos de 20 entre los que está 113 son, como ella misma dice, 20×5 y 20×6.

Ahora bien, el segundo y último paso en la resolución del problema es hallar la ubicación exacta de 113. Ya teniendo que 113 está entre 20×5 y 20×6 (es decir, 100 y 120, respectivamente), Gaby usa el residuo que obtuvo al dividir 113 entre 20, que afirma es 13, para ubicar a 113: "13 números después de 100".

La solución de Gaby muestra un manejo perfecto de la aritmética, pero además muestra un uso eficientemente del algoritmo de la división euclidiana como herramienta para resolver el problema. Fue muy selectiva al usar el cociente y el residuo, en ese orden, para articular su solución. Para ella la igualdad $113 = 20 \times 5 + 13$ tiene más que un significado aritmético, contiene información acerca de 113. Esta relación entre expresiones aritméticas va solidificándose, dejando atrás su esencia como objeto operacional y convirtiéndose en algo más conceptual.

A.4 Problema 4

Problema 4

4.-Si n es un número natural, ¿qué residuo deja al ser dividio entre 3? Justifica tu respuesta. Observa la siguiente tabla:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Residuo al dividir entre 3	**0**	**1**	**2**	**0**	**1**	**2**	**0**	**1**	**2**

Problema 4 de la Tarea 1

Hacia el final de la solución del problema 2 se concluyo que los residuos al dividir entre 20 estaban acotados entre 0 y 19. Aunque la idea para resolver el problema 4 es en esencia la misma, los estudiantes no hicieron la asociación de inmediato. Para ayudarlos, el entrevistador les pidió que iniciaran comprobando los datos de la tabla. Gaby empezó a trabajar con el primer número, el 0. Para ello primero escribió el algoritmo de la división euclidiana en su versión esquemática de la casita y después lo pasó a una igualdad (ver figura A.8).

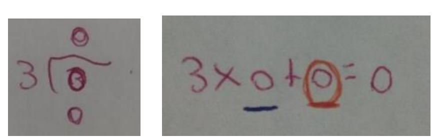


Figura A.9 Gaby primero hizo la división en la casita y luego la expresó como una igualdad.

El hecho de que Gaby primero tuviera que ejecutar el algoritmo de la división euclidiana en la casita para establecer la igualdad, muestra que su razonamiento se baso en un procedimiento calculatorio. Esto también explicaría el orden en el que escribió la descomposición de 0. En lugar de escribir $0 = 3 \times 0 + 0$, siguiendo la estructura de antes, escribió la igualdad en el orden en el que posiblemente mentalizó sus cálculos: $3 \times 0 + 0 = 0$. Parece que regresó a una noción **operacional clásica** de la igualdad. Esto pudo deberse a la dificultad que tiene operar con el número 0, por lo que tuvo que apoyarse en métodos más familiares; en la figura A.9 se aprecia que en el lugar del dividendo había puesto al 0, estaba confundiendo qué número era el que tenía que dividir; incluso, antes de realizar la división en la casita comentó "Es que no se puede dividir un numero entre 0", por lo que el entrevistador tuvo que señalar cuál era el divisor y cuál el dividendo.

Debido a que Marcos estaba desvinculado de la discusión, el entrevistador le pidió que se encargara de números restantes de la tabla. En la figura A.10 aparece el trabajo escrito de Marcos.

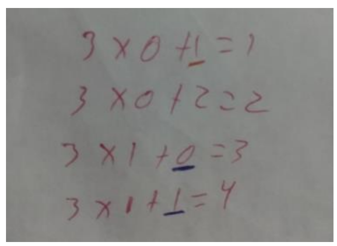


Figura A.10 Comprobación de marcos de los datos del problema 4

El trabajo de Marcos motivo a que ambos estudiantes detectaran un patrón para los residuos: $0, 1$ y 2. Sin embargo, este patrón lo extrajeron de las igualdades que tenían a la vista. No había certeza de que fueran consientes de que cualquier número debía forzosamente dejar residuo $0, 1$ o 2 al dividirlo entre 3. Pero, al final, esto hecho fue descubierto por Gaby y Marcos:

Episodio 4.1

Entrevistador: Y si les preguntara, ¿qué números dejan residuo cero?

Gaby: Múltiplos de 3.

Marcos: Ajá, múltiplos de 3.

> Entrevistador: ¿Y cuáles dejan residuo 1?
>
> Marcos: Cuando se sobrepasa por 1 al 3. Puede ser el 4…. puede ser el 7.
>
> Entrevistador: A ver el 22. [Sin decir nada, Gaby escribió $22 = 3 \times 7 + 1$]. Aquí tiene residuo 1, dice Gaby. ¿Cómo lo explicas tú, Marcos? Porque dijiste “que sobrepasa por 1 al 3” [Marco asiente]. Pero aquí 22 no sobrepasa en 1 a 3, pero sí deja residuo 1.
>
> Ambos: ¡Sería que sobrepasa un múltiplo de 3 en 1!
>
> Entrevistador: ¿Y cuáles dejarían residuo 2?
>
> Marco: Uno que sobrepasa un múltiplo de 3 en 2.
>
> Entrevistador: ¿Y no habrá uno que sobrepase un múltiplo de 3 en 3?
>
> Ambos: No.
>
> Marcos: No, porque como hay una regla de… Siempre el 3 cabe en su propio numero cuantas veces sean necesarias. Entonces por ende cuando llega a un múltiplo de 3 vuelve el ciclo.

El episodio 4.1 contiene varios fragmentos valiosos. Cuando el entrevistador les pidió analizar qué ocurre con el residuo de 22 al dividirlo entre 3, la respuesta de Gaby cambió del formato que recién había adoptado. Para determinar el residuo de 0 al dividirlo entre 3, como se ve en la figura A.9, ella escribió $3 \times 0 + 0 = 0$, una expresión tiene de fondo un uso operacional del signo igual. Pero para el caso de 22 escribió $22 = 3 \times 7 + 1$, situando el foco de atención en la descomposición de 22 y por consiguiente en la estructura de la igualdad. (Esta diferencia acentúa la hipótesis de que para descomponer a 0 tuvo que recurrir a estrategias operatorias, antes que a relacionales, para librar la dificultad del problema). En este punto su noción de la igualdad parece relacional básica. Pero lo cierto es que ambos están interpretando a la igualdad de forma **relacional comparativa**. En efecto, tanto Gaby como Marcos tienen claro que cualquier número de la forma $3q$ deja residuo 0 al dividirse entre 3, cualquiera de la forma $3q + 1$ deja residuo 1 y cualquiera de la forma $3q + 2$ deja residuo 2. ¿Cómo lo supieron? Conjeturando que, por ejemplo, la ecuación $3q + 1 = 3k + r$, donde k sería el cociente y r el residuo al dividir el número $3q+1$ entre 3, tiene una única solución: $k=q$ y $r=1$. En otras palabras: fijándose en la estructura de las expresiones. Esta impresión se refuerza en la última intervención de Marcos - en el episodio 4.1. El entrevistador pregunta si existe un número que exceda por 3 a un múltiplo de 3. Evidentemente los estudiantes saben que en el contexto de la aritmética claro que existe; 6, por ejemplo, pues $3 \times 1 + 3 = 6$. Con todo, ambos estudiantes responden que no existe, mostrando así que las expresiones de las que hablan están inmersas en la **semántica** del algoritmo de la división euclidiana y no solo de la aritmética. Marcos justifica su afirmación: “Siempre el 3 cabe en su propio número cuantas veces sean necesarias. Entonces por ende cuando llega a un múltiplo de 3 vuelve el ciclo.” Simbólicamente, lo que Marcos refiere es que ningún número deja residuo *3* porque $3q+3=3(q+1)+0$ para cualquier q número entero; es posible afirmar esto debido a dos cosas. Por un lado, usa **sintácticamente** al signo igual, pues menciona la palabra *siempre* y dice que “el 3 cabe en su propio número cuantas veces sean necesarias”; es decir, sin importar quién sea q, $3q+3=3(q+1)$ porque “siempre [se puede hacer esto]”. Por otro lado, cuando dice “vuelve el ciclo” está pensando en el ciclo que describen los residuos, el que habían descrito anteriormente, así que a la expresión $3(q+1)$ la relaciona con el primero de los números dentro del ciclo de residuos, el 0, y como los residuos se suman a los múltiplos entonces se tiene la expresión $3(q+1)+0$.

A.5 Problema 5

Actividad 2

5.- En una tabla de 6 columnas e infinitas filas se van ubicando consecutivamente el cero y todos los demás números naturales:

0	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29
…	…	…	…	…	…

a) ¿En qué fila y en qué columna se encuentra el 126?
b) ¿Qué número se encuentra en la novena fila de la segunda columna?
c) Se va a hacer otra tabla con un criterio similar pero con 7 columnas. ¿En qué fila y columna estará el 126? Para esta segunda tabla, ¿qué número se ubica en la fila 8, columna 4?
d) Ahora se tiene otra tabla, de la cual se conoce una columna:

7
19
31
…

d.1 ¿Se puede saber de cuántas columnas es la tabla? ¿Cómo se podría decir si el 1,141 está en esa misma columna?

d.2 Supongamos que a y b son dos números de la columna

7
19
31
…

pero que se encuentran en filas desconocidas

…
a
…
b
…

¿Qué se puede decir de su diferencia?

d.3 ¿Será cierto que si la diferencia de dos números es divisible entre 12 entonces están en la misma columna?

Problema 5, Tarea 2

A.5.1 Inciso a

a) ¿En qué fila y en qué columna se encuentra el 126?

En este problema el entrevistador inició explicando el enunciado del primer inciso y cómo estaba construida la tabla, sus partes y por qué se decía que había infinitas filas. Inmediatamente después de que se terminó de leer la pregunta del problema Marcos afirmó que ya tenía la respuesta. El modo en que llegó a ella se encuentra en el siguiente fragmento:

Episodio 5.1

Marcos: Yo puse 21. Porque si multiplicamos por…Bueno son 6 columnas. Si multiplicamos 6 por 20 te da 120. […] Y aparte si multiplicamos 6 por 1 da igual a 6. Si sumamos todo el resultado te da 126, que sería lo que nos está pidiendo.

Entrevistador: Entonces lo estas descomponiendo [a 126] como 6 por…

Marcos: 6 por 20 y luego… Bueno, 6 por 21. [Marcos escribe $21 \times 6 = 126$].

La respuesta de Marcos no solo está incompleta, pues sólo menciona uno de los dos números que caracterizarían la posición de 126 en la tabla, también es incorrecta. Pero no por esto es irrelevante, todo lo contrario, es muy valiosa. La explicación verbal de Marcos puede resumirse en la siguiente igualdad: $(6 \times 20) + (6 \times 1) = 126$. Como su respuesta escrita fue $21 \times 6 = 126$, es posible inferir que, primero, mentalmente realizó la siguiente transformación aritmética sintáctica:

$$(6 \times 20) + (6 \times 1) = 6 \times (20 + 1) = 6 \times 21.$$

Luego sustituyó 6×21 por $(6 \times 20) + (6 \times 1)$ en $(6 \times 20) + (6 \times 1) = 126$, lo cual finalmente lo llevo a la igualdad $21 \times 6 = 126$. De modo que Marcos no sólo exhibe una interpretación **operacional calculatoria** del signo igual en su respuesta escrita, sino que su descripción verbal también deja ver un uso aritmético del signo igual en donde la **sintaxis** y la **propiedad sustitutiva** de la igualdad son utilizadas de forma eficiente.

Marcos tuvo la idea de considerar múltiplos de 6 al notar el número de columnas que tiene la tabla. Gaby también pensó en múltiplos de 6, pero ella porque observó que en la primera columna todos los números son múltiplos de 6. Esto le permitió evaluar y completar la idea de su compañero.

Episodio 5.2

Gaby: Sí, sería en la 21. Porque… bueno, yo aquí lo estoy tomando porque va por la tabla del 6: $6, 12, 18, 24, 30, 36$ [recorre con su dedo la primera columna]. Y pues 6 por 20 son 120, pero… No. De hecho, sería en la 22. Porque esta sería la primera [señala el 0 de la primera fila], si la contamos. Por 5 nos da 24 si tomamos el 0 como una base. Entonces seria 6 por 22 nos va a dar justamente en esta parte [en la columna 1] 126.

E: O sea, tú dices que 126 va a estar en la columna…

G: En la primera columna, en la fila 22. [Marcos asiente].

La estrategia de Gaby para resolver el problema consistió en tres pasos. El primero, notar que la columna 1 “es la tabla del 6”. Este paso sugiere el uso de la característica **calculatoria** de la igualdad. Segundo, considerar la relación que hay entre cada múltiplo de 6 y la fila en la que éste se encuentra. Dice que el 0, si lo consideramos, sería el primer múltiplo de 6, en la primera fila. Entonces el quinto múltiplo de 6 correspondería a 24, en la quinta fila. Luego el vigésimo segundo múltiplo de 6 debería ser 126, en la vigésimo segunda fila. En el episodio 5.2 cuando Gaby dice “6 por 22 nos va a dar […] 126” no se está refiriendo a la igualdad aritmética $6 \times 22 = 126$, que es falsa, sino a la **igualdad semántica** que refiere su trabajo escrito en la figura A.11 y que da cuenta de la relación múltiplo-fila que descubrió. Esta relación es la que da lugar al tercer paso: un algoritmo para calcular la fila en la que se encuentra cada múltiplo de 6 en función del factor que acompaña a 6. En la figura A.11 Gaby ejemplifica cómo resuelve el problema para 126.

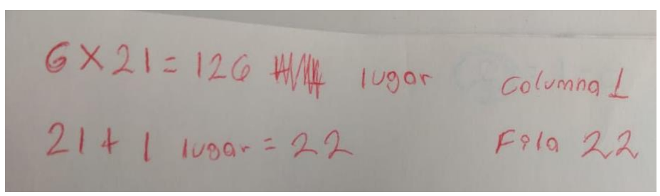


Figura A.11 Solución escrita de Gaby del inciso a

Al final, Marcos se convenció de que la solución de Gaby era correcta (columna 1, fila 22); pero todavía más, también adoptó el algoritmo de su compañera. En su hoja de trabajo escribió “Descompongo 126 como $21 \times 6 = 126$ pero se suma el lugar de la fila 1 por lo que es 22-fila y columna 1”.

A.5.2 Inciso b

b) ¿Qué número se encuentra en la novena fila de la segunda columna?

El entrevistador leyó el enunciado del inciso b e hizo notar que era el problema inverso del inciso anterior. En el primer problema se tenía un número y se pedía determinar su posición en la tabla. Ahora, en este segundo problema, se tiene la posición o las coordenadas de un número (novena fila, segunda columna) y se pregunta cuál número es.

La primera participación la hizo Gaby. Directamente dijo que el número era 49. ¿Cómo llego a él? Básicamente completando la tabla. En el siguiente episodio se encuentra su explicación:

> Episodio 5.3
>
> Gaby: Sería 49. Es que si seguimos lo de la tabla del 6, seria fila 1, cero; fila 2, seis; fila 3, doce. En veinticuatro ya es la fila 5. Treinta sería la fila 6; treinta y seis, fila 7; cuarenta y dos, fila 8; cuarenta y ocho, sería la fila 9. Y como es en la columna 2, más 1 da 49.

La conjunción de la respuesta verbal de Gaby y de su trabajo escrito (ver figura A.12) aclara el enfoque que utilizó para obtener la respuesta. Por un lado, rescata el hallazgo que hizo en el problema anterior: la columna 1 contiene a todos los múltiplos de 6. Cuando dice “fila 1, cero; fila 2, seis; fila 3, doce” empieza a repensar a los números de la columna 1 como múltiplos de 6, por eso pudo decir cuáles números siguen debajo del 24 (que es el último número de la columna 1 que aparece en la tabla): $30, 36$, etc. Por otro lado, también sabe que la relación múltiplo-fila no es directa. Cuando va mencionando a los múltiplos de 6 que le siguen a 24 se detiene en 48, que es 6×8, y lo hace porque, según su trabajo de la figura A.11, este número está en la fila $8+1$, que es la que le interesa. Por lo tanto, en la columna 1, fila 9 está el 48. Como el problema pedía el número en la columna 2, fila 9, Gaby simplemente completa el siguiente termino de la fila 9 y así concluye que la solución es 49.

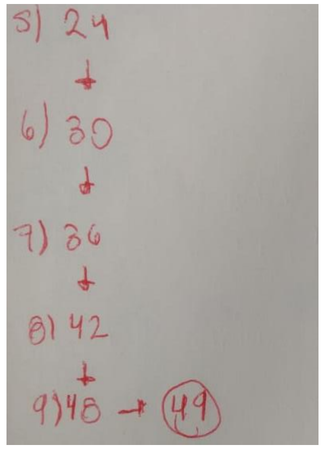


Figura A.12 Solución de Gaby del inciso b

En esencia, lo que Gaby hizo para resolver el problema fue completar la tabla. Entonces usó la igualdad **calculatoriamente.** Pero cabe resaltar que la forma en que la completó fue estratégica. No calculó todos los números que tendría la tabla entre 29 y 49, sólo se ocupó de los que habría en la columna 1 y luego se apoyó en la estructura de la tabla para dar con el número buscado. En este sentido podría decirse que su estrategia más que operacional fue relacional, pues justamente lo que le permitió resolver el problema fue su capacidad de reconocer y manipular la relación múltiplo-fila (por lo menos de manera local).

Debido al procedimiento que explicó Gaby y al hecho de que Marcos afirmó que esa era la forma "más rápida" de resolver un problema así, el entrevistador propuso un nuevo problema, para probar tanto la flexibilidad de la estrategia de Gaby como la conjetura de Marcos: ¿Qué número está en la columna 3, fila 900? En la figura A.13 se encuentran las soluciones de ambos estudiantes.

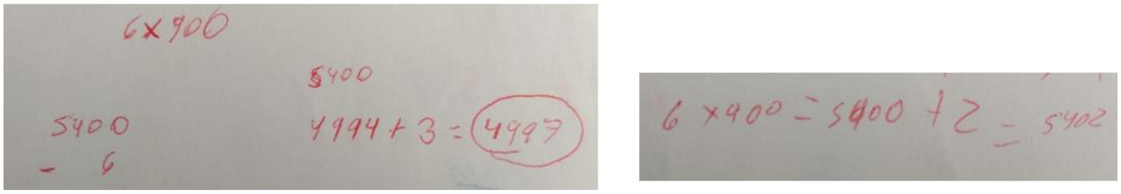


Figura A.13 ¿Qué número está en la fila 900, columna 3? A la izquierda, la respuesta de Gaby; a la derecha, la de Marcos

Aunque Gaby pudo extender bien su argumento para calcular las filas, no así para las columnas. Procede como antes, primero define qué número está en la columna 1, fila 900: "Como son 900 filas, entonces seria 6×900, 5400, menos 6 números nos da como resultado 4994". La explicación de Gaby se puede resumir en la siguiente cadena de igualdades:

$$6 \times (900 - 1) = 6 \times 900 - 6 = 5400 - 6 = 4994$$

Lo cual es correcto: en la columna 1, fila 900 está 4994. La manera en la que llegó a esto muestra que fue capaz de reestructurar la estrategia que ocupó en el inciso a (ver figura A.11) para resolver parte del problema inverso. En consecuencia, se advierte que domina la sintaxis aritmética, en particular tiene una interpretación **sintáctica** de la igualdad aritmética.

Gaby tenía clara la relación múltiplo-fila, pero tuvo dificultades al establecer una relación entre los números de la tabla y la columna a la que pertenecen. Ella ya sabía que 4994 está en la columna 1, fila 900. Sin embargo, al momento de calcular el número que está en la misma fila que 4994, en la columna 3, tuvo problemas: "Se le suma 3 [a 4994], porque dice que [el número que se busca] está en la columna 3. Entonces el número que se encuentra ahí es 4997". Esta afirmación es falsa, pues el número en la fila 900, columna 3 es 4996. Luego está **mezclando la sintaxis aritmética con la semántica de la tabla**. Por un lado, sumar 3 a 4994 es una transformación sintácticamente correcta. Por otro lado, si 4994 está en la columna 1, el número que está en su misma fila pero en la columna 3 no se construyen sumando 3 a 4994, sino avanzando, de uno en uno, 2 posiciones.

Marcos, por su parte, aunque tuvo más cuidado en la relación que guarda cada número de la tabla con su respectiva columna, pasó por alto que la relación entre los múltiplos de 6 con la fila a la que pertenecen no es directa. En efecto, cuando explicó su solución dijo lo siguiente: "Seria 6 por $900,$ que es 5400, y le tendría que sumar 2. […] No nada más se va a tener que multiplicar, tendríamos [además] que sumar otra cantidad. Por ejemplo, aquí [en la fila 2] del 6 al 8 son 2. Igual [en la fila 3] del 12 al 14 son 2. Entonces por eso tendríamos que sumar 2." Para él, el número en la fila 900, columna 3 es 5402. Lo mismo que Gaby, su respuesta es incorrecta. Pero a diferencia de ella, Marcos no pudo reacomodar su argumento del inciso anterior para resolver el nuevo problema. No obstante, su trabajo escrito junto a su explicación verbal permite hacer una observación peculiar. Su respuesta escrita fue la siguiente (ver figura A.13):

$$6 \times 900 = 5400 + 2 = 5402.$$

Si solo se analizara su trabajo escrito, de inmediato se podría inferir que tiene una interpretación de la igualdad ya sea operacional rígida o bien operacional flexible. Pero al atender su respuesta verbal se descubre que está cadena de expresiones simplemente es una abreviación de las operación que requirió efectuar; es decir, no es una cadena de igualdades. Este hecho es importante porque muestra, paradójicamente, un **uso operación rígido** del signo igual eficiente (el cual se repite más adelante en la entrevista).

Ahora bien, como ambos estudiantes llegaron a respuestas distintas (Gaby llegó a era 4997 y Marcos a 5402), ambos estuvieron de acuerdo en que al menos una respuesta era incorrecta y que además era inviable usar la estrategia de completar la tabla, como Marcos había propuesto, para determinar cuál era realmente el número en la fila 900, columna 3. Para dirimir el conflicto el entrevistador les propuso poner a prueba la estrategia que cada uno había utilizado para calcular el número que se encuentra en la fila 4, columna 3. Como en la tabla este número está visible, 20, los estudiantes sabían a qué llegar. Si alguno, con su estrategia, obtenía un numero distinto de 20, entonces sabría que su respuesta a la pregunta de cuál es el número en la fila 900, columna 3, probablemente sería incorrecta. ¿Qué ocurrió? Naturalmente ambos llegaron a números distintos de 20. Por lo tanto, ambos conjeturaron que el esquema de su estrategia era incorrecto. En la figura A.14 se encuentra el trabajo escrito de Gaby.

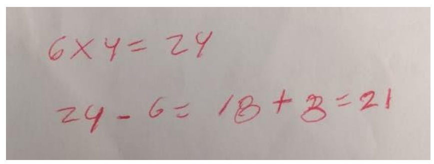


Figura A.14 ¿Qué número está en la fila 4, columna 3? Respuesta de Gaby

En resumen, Gaby primero hizo $6 \times (4-1) = 18$ y luego sumó 3: $18 + 3 = 21$. No obstante, como en la respuesta de Marcos en la figura A.13, en su trabajo escrito parece haber una noción operacional rígida del signo igual. Esta intuición es falsa, pues con la cadena de expresiones $24 - 6 = 18 + 3 = 21$ Gaby simplemente está acortando las operaciones aritméticas que desea realizar, no trata de expresar equivalencia.

Debido a que los estudiantes necesitaban reconstruir sus estrategias para resolver el problema, el entrevistador les propuso otro problema: Sabiendo que el número 1 está en la fila 1, columna 2, ¿cómo pueden modificar sus estrategias para llegar a este número? El nuevo problema permitió a Gaby definir una relación entre los números de la tabla y el número de columna en la que se encuentran:

Episodio 5.4

Gaby: Se tendría que sumar el número de columna… pero al número de columna se resta 1. Por ejemplo, para llegar al 1 sería $6 - 6$, es igual a 0, más 1. […] El 1 sale de tomar el número de columna, que es 2, y se le resta 1. A cualquier número de columna que tomemos se le va a restar 1. […] Y el resultado que salga [de esa resta] es el que se le va a sumar a esta resta [$6-6$].

Entrevistador: Entonces Gaby está viendo cómo ocupar el número de columna.

Gaby: Regresando, por ejemplo, al de la fila 4, columna 3. Primero, al número de columna le voy a restar 1. Sería $3-1=2$. Ahora voy a multiplicar el 6 por el numero de fila, que sería 4: 6 por 4 da 24; a este le voy a restar 6. […] Entonces el resultado me da 18. Y a este 18 le voy a sumar el primer resultado que me dio de la resta de columna, que sería más 2, y me da el 20.

A pesar de que la respuesta de Gaby es correcta, tiene dificultades para explicarla. (De hecho, Marcos reconoció que se sentía confundido y no sabía cómo seguir). En parte se debe a que, hasta el episodio 5.4, Gaby no ha podido unificar los pasos para armar la relación entre el número en la tabla y su número de fila. Para el problema del número en la fila 4, columna 3, primero hace $6 \times 4 = 24$ y luego $24 - 6 = 18$. El entrevistador decidió hacer explicito que el resultado de estos dos pasos es el mismo que se obtiene al calcular 6×3, pero no sin antes ayudarle a recapitular toda su estrategia. Esta intervención le sirvió a Gaby no solo para mejorar su comprensión del problema, sino también, sorprendentemente, para expresar las relaciones sobre las que hablaba en una sola igualdad (ver figura A.15):

Episodio 5.5

Entrevistador: Lo que primero dices es: fíjate en la columna que te están dando. Te dieron la columna 3. A esa columna le restas 1. Llegas al 2. Eso lo guardas. Luego tomas al 6 y lo multiplicas por el número de fila [4], que es 24, y a eso le restas 6. A este resultado [18] le sumas el número que te había dado aquí [el 2]. Pero fíjense qué está pasando. Cuando multiplicas 6 por 4 y le restas 6, es lo mismo que multiplicar 6 por 3 [Gaby asiente]. Y entonces este procedimiento se puede simplificar. Puedes decir ‘multiplico 6 por *la fila menos 1’.* ¿Qué te parece si eso lo escribes?

Gaby: Sí. [Escribe $6 \times (4-1) + (3-1) = 20$]

Entrevistador: ¡Exactamente! Fíjate que esta ya podría ser una fórmula, ¿no?

Gaby: Aha. 6 por $n-1$…

Entrevistador: ¿"n" qué cosa es?

Gaby: La fila.

Entrevistador: Ponle entonces f, de *fila.*

Gaby: 6 por $f-1$ más $c-1$. [Escribe $6\times(f-1)+(c-1)=n$]

La respuesta de Gaby no solo convenció a Marcos, quien hasta entonces atendía atento las explicaciones de Gaby, sino que también le permitió a ella unir todos los elementos sobre los que giraba su discurso. En la igualdad

$$6\times(4-1)+(3-1)=20$$

muestra Gaby homogéneas las relaciones entre el número de fila, número de columna y el número que estos dos datos caracterizan dentro de la tabla. Esta igualdad aunque es una relación entre expresiones aritméticas, así como la escribió Gaby permite apreciar que el énfasis no está en la ejecución de las operaciones, sino en la descomposición de 20 en términos de expresiones relacionadas con su columna y fila. Es decir, Gaby utilizó **proposicionalmente** el signo igual. En efecto, cuando el entrevistador le sugirió que había implícita una fórmula, ella inmediatamente dedujo la igualdad

$$6\times(f-1)+(c-1)=n$$

que es verdadera para la fila f y la columna c del número natural n: Una igualdad proposicional.

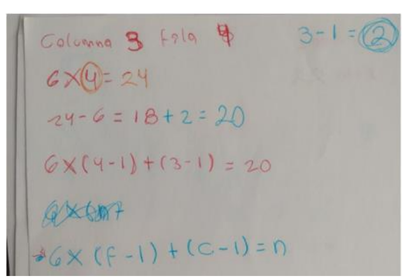


Figura A.15 Gaby ordenó en una igualdad todos los elementos sobre los que giraba su discurso

Gracias a que los estudiantes llegaron tan lejos, el ambiente de trabajo se presentó idóneo para seguir explorando juntos el problema. El entrevistador aprovechó que recién habían descrito la expresión $6 \times (4-1) + (3-1) = 20$ para preguntar, sin hacer alusión directa a esta igualdad, si ahora podían replantear su solución del problema inverso; es decir, dado un número, por ejemplo, 20, ¿cómo determinar su fila y su columna en la tabla? El entrevistador sugirió analizar qué ocurre si con el algoritmo de la división toman a 20 y lo dividen entre 6. Ambos participantes efectuaron el algoritmo de la división en la forma de la casita y después obtuvieron la igualdad $6 \times 3 + 2 = 20$.

Los estudiantes ligaron el algoritmo de la división euclidiana con la igualdad $6 \times 3 + 2 = 20$. A pesar de que la relación entre fila, columna y número que había propuesto Gaby estaba a la vista ($6 \times (4-1) + (3-1) = 20$), ninguno de los dos estableció directamente una conexión entre cociente, residuo y fila, columna:

> Episodio 5.6
>
> Entrevistador: ¿Les dice algo esa igualdad [$6 \times 3 + 2 = 20$]? ¿Tú qué piensas, Marcos?
>
> Marcos: No hay un dato en la igualdad que diga cuál es la fila.
>
> Entrevistador: ¿Por qué? ¿En qué fila está 20?
>
> Marcos: En la 4.
>
> Entrevistador: ¿Aquí tú dices que no está la información porque no hay ningún 4? [Marcos asiente] […] ¿Qué esperan ver y no ven?
>
> Gaby: Yo busco que me dé el número de columna y de fila. O que me dé un numero que lo pueda multiplicar por algo para que me dé el numero de fila y columna, pero no hay nada.

Aunque había incertidumbre sobre el papel del algoritmo de la división euclidiana en la construcción de la tabla, Gaby conjeturo que algo tenía que haber. Entonces planteo hacer otra prueba, ahora con el 15. Ambos estudiantes concluyeron que al dividirlo entre 6 se obtenía un cociente 2 y un residuo 3. Pero los dos se decepcionaron al no hallar lo que esperaban, pues 15 está en la columna 4, fila 3. Entonces el entrevistador propuso reformular la numeración que tenían las filas y las columnas de la tabla, esto para ayudar a los participantes a esbozar alguna relación entre cociente, residuo y la posición de los números en la tabla. En lugar de empezar a numerar con el 1, los invitó a usar el 0.

Episodio 5.7

Entrevistador: Con esta nueva numeración, ¿el 15 en qué columna está?

Ambos: En la columna 3, fila 2...

Gaby: ¡Así entonces sí daría, así sí da!

Entrevistador: ¿Entonces cuál es cuál? ¿Qué información refleja el residuo el residuo y qué información el cociente?

Marcos: El residuo sería la columna.

Gaby: Y el cociente es el número de fila.

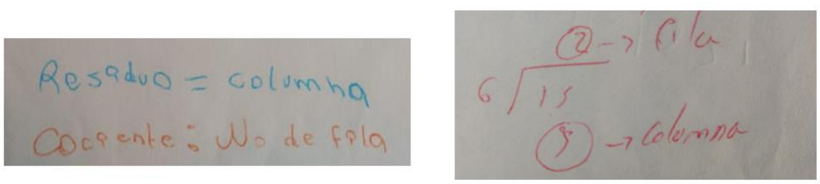


Figura A.16 Relación entre el residuo y el cociente con la columna y la fila, respectivamente. A la izquierda, el trabajo de Gaby; a la derecha, el de Marcos.

Al reenumerar las filas y columnas de la tabla, los estudiantes lograron establecer una relación concreta entre el algoritmo de la división euclidiana y la estructura de la tabla (ver figura A.16). Esta relación no solo les permitió calcular la fila y columna de un número dado, sino también resolver el problema inverso: dadas fila y columna, encontrar el número que esta pareja determina. El entrevistador les preguntó, con esta nueva numeración, qué número está en la fila 900, columna 3. Ambos llegaron al mismo número, 5403, pero su procedimiento simbólico fue distinto. Gaby escribió lo siguiente:

$$6 \times 900 + 3 = 5400 + 3 = 5403$$

Mientras que Marcos escribió:

$$6 \times 900 = 5400 + 3 = 5403$$

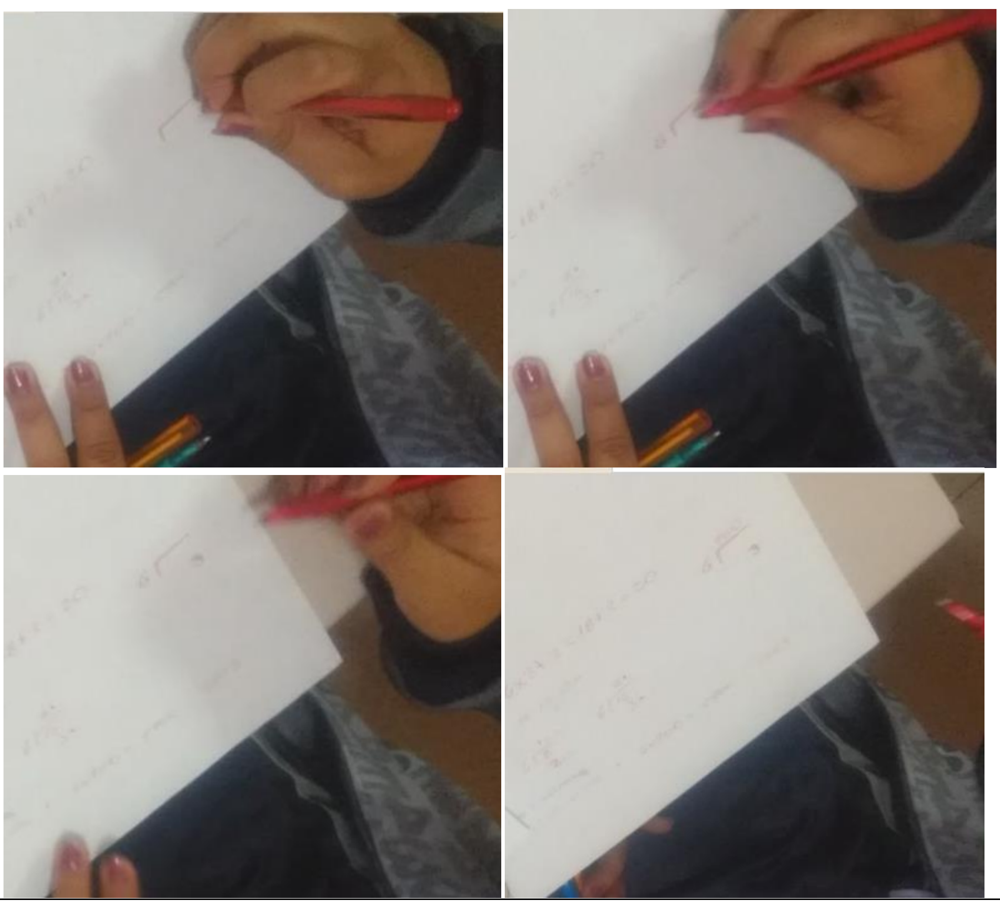
En términos semánticos, la respuesta de marcos es incorrecta, pues, numéricamente, no es verdad que las expresiones relacionadas con el signo igual sean equivalentes. No obstante, la intención que Marcos tuvo al escribir esta cadena de expresiones no fue establecer igualdad numérica entre ellas, sino resumir un procedimiento calculatorio. Tal procedimiento lo efectuaron bien tanto Gaby como Marcos, pues llegaron a lo mismo.

Como sus soluciones escritas no mostraron una relación definida con el algoritmo de la división euclidiana, el entrevistador les preguntó directamente si la había:

> Episodio 5.8
>
> Entrevistador: ¿Entonces ya no les sirvió de nada el cociente y el residuo?
>
> Gaby: Podrían servir, sí. Si colocamos la división [escribe la casita], sería un número que multiplicado por 6 [lo escribe en el divisor] esté en la columna 3. Entonces tiene que haber un residuo 3 [escribe 3 en el residuo]. Y en la fila 900, que entonces estaría aquí [lo escribe en el cociente]. Entonces seria 900 por 6, 5400, más 3, 5403.

Si bien la solución escrita de Gaby parece fuertemente calculatoria ($6 \times 900 + 3 = 5400 + 3 = 5403$), su explicación verbal, en el episodio 5.8, le concede un matiz diferente. En la figura A.17 aparece en orden la secuencia de símbolos que Gaby escribió mientras platicaba su trabajo. En esta figura se ve cómo Gaby, en virtud de las relaciones que guardan, va ensamblando los elementos que interactúan en el algoritmo de la división euclidiana para construir el dividendo. En este episodio el atributo operacional calculatorio del algoritmo de la división euclidiana se ve conectado con una esencia relacional. Si en el algoritmo de la división está fijo el divisor, mientras que la parte algorítmica permite generar un cociente y un residuo a partir del dividiendo, la faceta relacional permite caracterizar al dividendo a partir del cociente y el residuo. En este sentido, se podría decir que a la igualdad $6 \times 900 + 3 = 5400 + 3 = 5403$ subyace una relación dialéctica entre lo procedimental y lo conceptual.

En relación con lo anterior, adicionalmente se tiene que Gaby puede pasar de la igualdad $6 \times 900 + 3 = 5403$ a la igualdad $5403 = 6 \times 900 + 3$, y viceversa. Dicho en otras palabras, en el fondo, su trabajo también refleja la **simetría** de la igualdad.



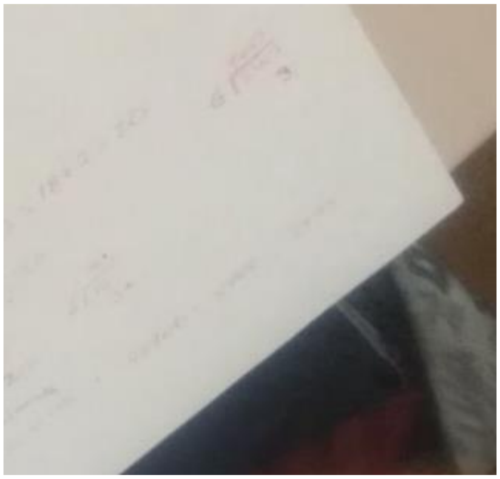
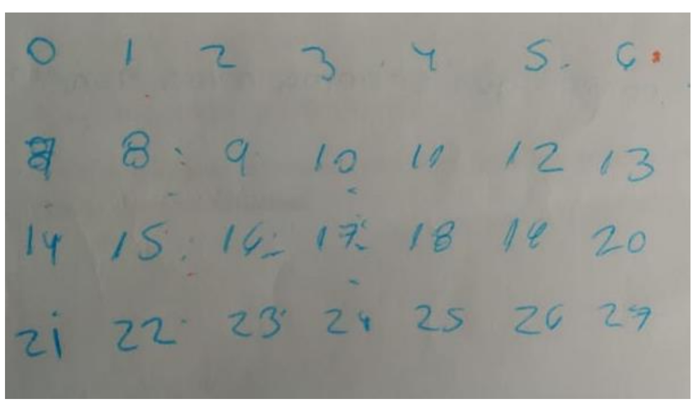


Figura A.17 Yendo de izquierda a derecha, de arriba hacia abajo, orden en el que Gaby determina el dividendo a través del divisor, cociente y residuo.

A.5.3 Inciso c

c) Se va a hacer otra tabla con un criterio similar pero con 7 columnas. ¿En qué fila y columna estará el 126? Para esta segunda tabla, ¿qué número se ubica en la fila 8, columna 4?

Para comprender mejor el enunciado del problema, Gaby y Marcos decidieron escribir parte de la nueva tabla.



Ambos coincidieron en que la construcción tiene que ver con los múltiplos de 7. Esta afirmación no solo la hicieron por los números de la primera columna (es decir, la columna 0, en la nueva numeración), también porque los números de las otras columnas están dispuestos de forma que su orden tiene alguna relación con el número 7.

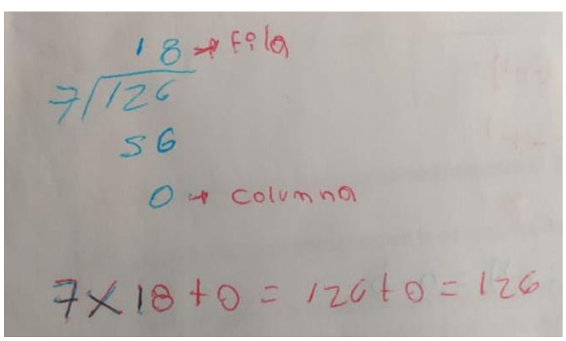
> Episodio 5.9
>
> Entrevistador: ¿Por qué dicen que la construcción tiene que ver con “la tabla del 7”?
>
> Marcos: Porque el que manda por cuánto se tiene que multiplicar es el número de columnas. Dependiendo del número de columnas que haya es lo que se va a tener que multiplicar por las filas.
>
> […]
>
> Gaby: Sí es por la tabla del 7. Sí, porque 7,14, 21… aquí ya van 7; 8, 15, son 7; del 15 al 22 son 7. Del 9 al 16 son 7. Y del 16 al 23 son 7. Del 10 al 17 son 7, Y del 17 al 24 son 7.
>
> Entrevistador: Entonces estás encontrando que los números de cualquier columna van aumentando de 7 en 7. O bien, que la diferencia de estos dos números [17 y 10, por ejemplo] es…
>
> Ambos: ¡Siete!
>
> Entrevistador: Pero, por ejemplo, la diferencia de este [25] y este [4] ya no es 7. ¿Qué pasó ahí?
>
> Gaby: Aumenta multiplicado por 7 las filas que avance.

En el episodio 5.9 los estudiantes descubrieron relaciones interesantes. Marcos, por ejemplo, conecta la cantidad de columnas, en este caso 7, con la forma que tienen los números al inicio de cada fila, los de la primera columna. Así en la fila 0, columna 0 está el número 7×0; en la fila 1, columna 0 está el número 7×1; en la fila 2, columna 0 está el número 7×2, etc. Por lo tanto, implícito en su afirmación está el hecho de que los números fuera de la primera columna no son múltiplos de 7, no son divisibles entre 7. En cuanto a Gaby, ella nota dos cosas importantes. La primera es que los números consecutivos en cada columna difieren de 7. La segunda cosa es una consecuencia de la primera: la diferencia de dos números en una misma columna es un múltiplo de 7; en concreto, si a y b están en una misma columna y b está k-filas adelante de a, entonces $b - a = 7 \cdot k$. Por ejemplo, 4 y 25 están en la columna 4 y 25 está 3-filas adelante de 4, y en verdad $25 - 1 = 7 \cdot 3$. Estas observaciones, hechas por los estudiantes, les serán muy útiles más adelante.

Sobre la solución del problema original, como en el inciso anterior los participantes estudiaron ampliamente la estructura de la tabla y su relación con el algoritmo de la división euclidiana, no tuvieron dificultades para proponer una solución. La primera parte del problema consistía en encontrar la fila y columna, en la nueva tabla de 7 columnas, donde se encuentra 126. Ambos estudiantes dieron solución al problema utilizando la relación entre el cociente y el residuo con la fila y la columna que caracterizan al 126. Los dos utilizaron al signo igual de forma **relacional** (ver figura A.18), pues establecieron la igualdad

$$7 \times 18 + 0 = 126,$$

que si bien conecta expresiones aritméticas, lo cierto es que no expresa el cálculo de las operaciones sino el modo en el que se relacionan el divisor, dividendo, cociente y residuo.



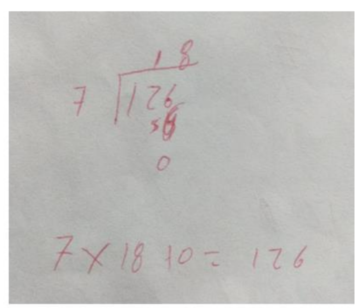


Figura A.18 ¿En qué fila y en qué columna está el 126? A la izquierda, la respuesta de Gaby; a la derecha, la de Marcos.

La segunda parte del problema pedía determinar qué número está en la fila 8, columna 4. La estrategia que los estudiantes desarrollaron para resolver este tipo de problemas en la tabla con 6 columnas fue extendida sin complicación para el caso en el que hay 7 columnas. Ambos llegaron a que el número era el 60 y lo dedujeron del mismo modo, escribiendo exactamente la misma respuesta:

$$7 \times 8 + 4 = 56 + 4 = 60.$$

Incluso Marcos, que anteriormente su trabajo escrito contenía igualdades numéricas falsas (por ejemplo, ver figura A.13) o bien escribía inmediatamente después del signo igual el resultado de operar las expresiones aritméticas del miembro izquierdo (por ejemplo, ver figura A.18), estableció la cadena de igualdades $7 \times 8 + 4 = 56 + 4 = 60$ para resolver el problema. La igualdad de las primeras dos expresiones, $7 \times 8 + 4 = 56 + 4$, sugiere una atención a la estructura de las expresiones; si únicamente se tuviera una noción operacional de la igualdad, esta equivalencia no hubiera tenido lugar. Entonces ambos estudiantes perciben, en efecto, una naturaleza **relacional** de la igualdad, son consientes de ellos y además capaces de utilizarla cuando la situación lo amerita.

A.5.4 Inciso d

d) Ahora se tiene otra tabla, de la cual se conoce una columna:

7
19
31
...

d.1 ¿Se puede saber de cuántas columnas es la tabla? ¿Cómo se podría decir si el 1,141 está en esa misma columna?

d.1 ¿Se puede saber de cuántas columnas es la tabla? ¿Cómo se podría decir si el 1,141 está en esa misma columna?

d.2 Supongamos que a y b son dos números de la columna

7
19
31
…

pero que se encuentran en filas desconocidas

…
a
…
b
…

¿Qué se puede decir de su diferencia?

d.3 ¿Será cierto que si la diferencia de dos números es divisible entre 12 entonces están en la misma columna?

Inciso d del problema 5, Tarea 2

Subinciso d.1

d.1 ¿Se puede saber de cuántas columnas es la tabla? ¿Cómo se podría decir si el 1,141 está en esa misma columna?

Los estudiantes tuvieron complicaciones para empezar a resolver el problema, no veían cómo proceder. Entonces el entrevistador les hizo dos sugerencias:

1. Recordar la relación que descubrieron, en el inciso c, entre los números de una misma columna.
2. Regresar a la tabla inicial, la de 6 columnas, tomar alguna de sus columnas y analizar cómo a través de ella podrían deducir la cantidad de columnas que tiene la tabla.

Estas pistas fueron suficientes para que los estudiantes empezaran a identificar algunas relaciones. Gaby inmediatamente observó que los números de la columna nueva, la del inciso c, van de 12 en 12. Esto la llevó a afirmar que con solo tener esa columna sí se puede decir cuántas columnas tiene la tabla a la que pertenece, dijo que debe tener 12 columnas. Pero Marcos no estaba convencido. Así que ella procedió a explicarle a su compañero con más detalle:

> Episodio 5.10
>
> Gaby: Por ejemplo, la que hicimos [en el inciso c] son 7 columnas. Aquí empieza con el 7 [en la columna 0, fila 1] y van de 7 en 7 [los números que están en cualquier columna]. Entonces aquí sería que va de 12 en 12. Esta [la fila 0] va del 0 al 11. Ya aquí [en la fila 1, columna 1] empieza el 12 y va de 12 en 12.
>
> (Entonces Gaby escribe una parte de la tabla, las primeras dos filas, y Marcos la mira atento.)
>
> Gaby: Y entonces aquí va el 31, debajo del 19. Son 12 columnas y pues infinitas filas.

En la figura A.19 está la tabla que escribió Gaby. La manera en que la construyó no exhibe una relación directa con el algoritmo de la división euclidiana. En realidad, su construcción depende solamente de la manera en que se espacian los números en cada columna; esto se manifiesta al momento en el que determina quién está debajo del 19. Al afirmar que la tabla “va de 12 en 12” Gaby lo que asegura es que al definir la fila 0, donde están los números del 0 al 11, a través de *sumar 12* puede construir todas las columnas y por lo tanto caracterizar la tabla. Así que aquí está utilizando una noción **calculatoria** de la igualdad ¿Cómo saber quién va debajo del 19? Pues haciendo la suma $19 + 7 = 31$. Iterando este proceso se obtendría la columna que da el enunciado del problema. Luego Gaby mostró que una tabla con 12 columnas incluye la columna que daba el problema, entonces resolvió el problema: Esta columna debería ser parte de una tabla con 12 columnas.

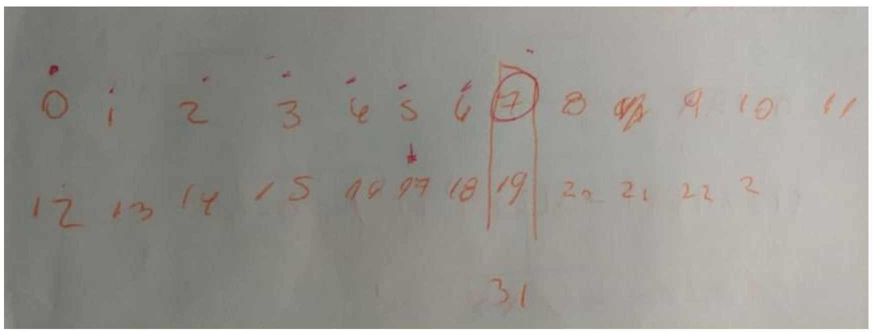


Figura A.19 Tabla con 12 columnas que incluye a la columna del problema d.1

El hecho de que Gaby utilizara una estrategia operacional en vez de una relacional, donde utilizara las relaciones a las que da lugar el algoritmo de la división euclidiana, parece que fue la mejor decisión considerando cuál era su intención: convencer a Marcos de que la columna que les daba el problema era parte de una tabla con 12 columnas. La explicación de Gaby convenció totalmente a Marcos, y es que es muy intuitiva. Quizá una explicación más formal (rigurosa y abstracta) no hubiera tenido el mismo impacto.

En la segunda parte del problema no hubo mayores contratiempos. Ya teniendo la nueva tabla a la vista (figura A.19), los estudiantes pudieron extender su estrategia utilizada en el inciso anterior para decidir si 1141 estaba en la columna 7 de esta tabla. Marcos propuso empezar dividiendo 1141 entre 12, y Gaby estuvo de acuerdo. Ambos usaron el algoritmo de la división euclidiana en la forma de la casita obteniendo así el cociente, 95, y el residuo 1. Marcos definió la siguiente igualdad:

$$12 \times 45 + 1 = 1141$$

Los dos sabían que el cociente indicaba la fila y el residuo indicaba la columna donde se encuentra 1141 (ver figura A.20), pero no tenía muy claro cómo ocupar estos números para resolver el problema que les interesaba (¿1141 está en la columna 7?). Con todo, a través de una estrategia operacional pudieron finalmente resolver el problema.

Episodio 5.11

Entrevistador: ¿Por qué lo dividen? ¿Qué esperan encontrar?

Marcos: Estamos esperando encontrar el número de fila. […] Es la fila 95, columna 1.

Entrevistador: ¿Cómo se podría saber si 1141 está [en la columna 7]? Eso es lo que queríamos saber.

Gaby: No está.

Entrevistador: ¿Qué tendría a que ocurrir para que sí estuviera?

Gaby: Está en la columna 1. Entonces tendría que ser 1147 para poder estar en la columna 7. […] Porque si 1141 está en la columna 1, para llegar a la columna 7 faltan 6, entonces a 1141 se le suman 6 y eso da 1147.

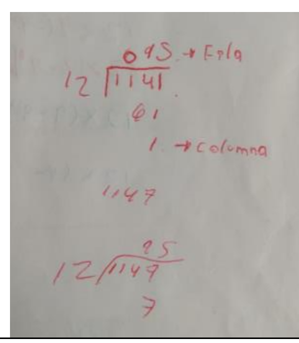


Figura A.20 ¿1141 está en la columna 7? Respuesta de Gaby.

La respuesta de Gaby fue muy rígida, no dejó lugar a duda alguna y por ello tampoco permitió mayor discusión. Básicamente, ella dice que 1141 no está en la columna 7 porque está en la columna 1. Esto lo supo porque el residuo que arrojó el algoritmo de la división euclidiana fue precisamente 1. ¿Qué tendría que ocurrir con 1141 para que sí estuviera en la columna 7? Gaby dice que 1141 tendría que ser otro número. Tendría que ser 1147, porque éste es el número que se obtiene en la columna 7 al completar la fila donde está 1441. De hecho, como se ve en la figura A.20, ella comprueba que 1147 está efectivamente en la columna 7, ya que deja residuo 7 al dividirse entre 12.

Así que, por un lado, se usó al signo igual **relacionalmente** al estructurar la igualdad $12 \times 45 + 1 = 1141$ de modo que dejara ver la información que se requería: Como el residuo es 1, entonces 1141 está en la columna 1. Pero, por otro lado, también se ocupó la igualdad de forma **calculatoria**: En el episodio 5.11 Gaby dice que “si 1141 está en la columna 1, para llegar a la columna 7 faltan 6, entonces a 1141 se le suman 6 y eso da 1147”.

Subinciso d.2

d.2 Supongamos que a y b son dos números de la columna

7
19
31
…

pero que se encuentran en filas desconocidas

…

a
…
b
…

¿Qué se puede decir de su diferencia?

La comprensión del enunciado fue especialmente difícil para los estudiantes. Así que nuevamente el entrevistador tuvo que dar una pista para empezar a resolver el problema.

Episodio 5.12

Entrevistador: Les sugiero que analicen qué relación cumplen los números que están en una misma columna. Ya lo habían descubierto antes.

Gaby: Tienen una diferencia de 12.

Entrevistador: ¿Todos?

Gaby: Sí, todos. Del 7 al 19 son 12, del 19 al 31 son 12.

Entrevistador: Esto pasa cuando [los números] son consecutivos: difieren de 12. El problema es que [a y b] pueden no ser consecutivos. Por ejemplo, el 7 y el 31 no son consecutivos.

Gaby: Sería que su diferencia sería igual a 12… por… el numero de espacios que los separan.

Entrevistador: Por ejemplo, aquí, el 7 y el 31 los separa un espacio. Y 31 menos 7, ¿cuánto es?

Marcos: 24. Sería [entonces por] 2 espacios.

Gaby: Sí. Porque si fuera por 2 espacios sí sería 24. Sería que la diferencia sea 12 por $n + 1$.

Entrevistador: ¿Quién es "n"?

Gaby: La cantidad de espacios entre los números.

Entrevistador: ¿Pueden escribir eso en una fórmula? (Su trabajo escrito está en la figura A.21)

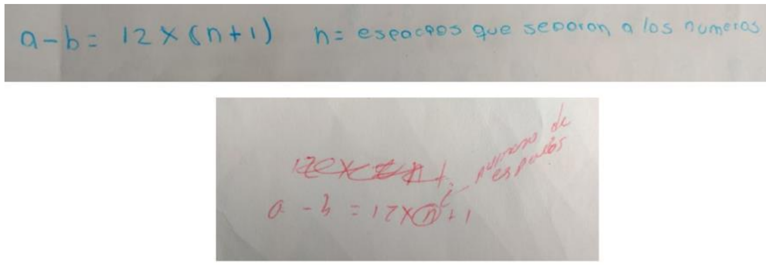


Figura A.21 ¿Cómo es la diferencia de dos números distintos, a y b, que están en la columna 7? Arriba el trabajo Gaby y abajo el de Marcos.

Si bien Gaby tuvo más cuidado con la sintaxis que Marcos (ver figura A.21), al final ambos plantearon la misma igualdad **proposicional**:

$$a - b = 12 \times (n + 1)$$

Esta expresión resuelve el problema. Todos convinieron en que la conclusión era que la diferencia de a y b es un múltiplo de 12. No obstante, el episodio 5.12 muestra que la forma en que la obtuvieron fue suponiendo que el comportamiento de casos particulares

$$19 - 7 = 12 \times (0 + 1)$$

$$31 - 19 = 12 \times (0 + 1)$$

$$31 - 7 = 12 \times (1 + 1))$$

(donde, por cierto, en el fondo, ocuparon a la igualdad **calculatoriamente**) era general, que se podía generalizar. En otras palabras, la expresión $a - b = 12 \times (n + 1)$, donde n denota el número de filas que hay entre a y b, es una conjetura. Claro que este hecho no les quita mérito a los estudiantes, al contrario, acentúa el valor matemático de su trabajo, pues el desarrollo de sus ideas es orgánico, razonan del mismo modo en que lo haría cualquier matemático.

Debido a lo anterior, y con la intención de preparar el terreno para abordar el siguiente problema, el entrevistador decidió sugerir que en realidad el que la diferencia de a y b sea divisible entre 12 se debe a que ambos se pueden descomponer de forma especial. En el siguiente episodio, el 5.13, se muestra el camino que los condujo hasta las igualdades proposicionales $a = 12 \times \blacksquare + 7$ y $b = 12 \times \triangle + 7$, donde ■ denota la fila en la que se encuentra a y △ denota la fila en la que se encuentra b.

Episodio 5.13

Entrevistador: Si no supieran en qué fila y qué columna está el 31, según su estrategia, toman 31 y lo dividen entre…

Ambos: Entre 12.

Entrevistador: ¿Y qué les daría? Que 31 es igual a 12 por…

Gaby: Por 2 más 7. (El entrevistador escribe $31 = 12 \times 2 + 7$)

Entrevistador: Entonces todos estos números [en columna 7] son 12 por su número de…

Ambos: …de fila más su número de columna.

Entrevistador: Pero a y b están por aquí [en la columna 7], entonces también los pueden escribir así. Luego a es igual a…

Gaby: 12 por el numero de fila.

Entrevistador: …que no sabemos. Entonces le voy a poder un cuadro. (Escribe $a = 12 \times \blacksquare +$) Más…

Ambos: Más el número de columna.

Entrevistador: ¿Ese no lo sabemos, o sí?

Gaby: Más 7.

Entrevistador: ¿Por qué?

Ambos: [Porque] a y b están en la columna 7.

Entrevistador: (Termina de escribir $a = 12 \times \blacksquare + 7$) ¿Y b cómo se podría escribir?

Ambos: Igual.

Entrevistador: (Escribe $b = 12\ \times$) Por…

Ambos: El numero de fila.

Entrevistador: [El cual no tenemos.] Aquí le voy a poner un triángulo, porque puede ser diferente [al de a]. (Escribe $b = 12 \times \Delta +$)

Ambos: Más 7.

Entrevistador: (Escribe $b = 12 \times \Delta + 7$) Ya tienen una algebraica de a y de b.

Subinciso d.3

> d.3 ¿Será cierto que si la diferencia de dos números es divisible entre 12 entonces están en la misma columna?

El entrevistador les leyó el enunciado del problema y señaló la diferencia con el problema anterior. Mientras que en el subinciso d.2 se llegó a que la diferencia de dos números cualesquiera en la columna 7 debía ser divisible entre 12, este nuevo problema trata la generalización del recíproco: Si la diferencia de dos números en la tabla es divisible entre 12, ¿esos números deben estar en una misma columna?

Gaby inmediatamente dijo que no. Pero Marcos tenía sus reservas, no se aventuraba a respaldar ni rechazar la respuesta de su compañera. Para diluir el dilema, el entrevistador primero los invitó a revisitar el génesis de las descomposiciones de a y b en el problema anterior, el subinciso d.2.

Episodio 5.14

Entrevistador: Aquí [en el subinciso d.2] ustedes conocían que el residuo [que dejaban a y b al dividirse entre 12] era 7, pero porque estaban en la misma columna [7]. Pero si no supieran en qué columna están, aquí [los residuos] también serían incógnitas. Entonces esto se podría escribir así: $a = 12 \times \ldots$

Marcos: Por “x”.

Entrevistador: Sí. Pero le voy a llamar q, de cociente. (Ambos asienten) Entonces a es igual a 12 por q más… (Escribe $a = 12 \times q +$)

Ambos: Más el residuo, “r”.

Entrevistador: (Escribe $a = 12 \times q + r$) Ahora b, le voy a llamar 12 por otro q…

Marcos: Por “q uno”

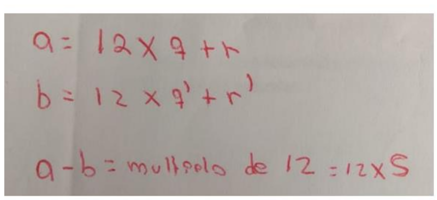
Entrevistador: Esto [q’] se llama “q prima”. (Escribe $b = 12 \times q' +$)

Gaby: Más “r'”

Entrevistador: (Termina de escribir $b = 12 \times q' + r'$). Si quieren escriban así a y b. Estamos escribiendo a y b de forma general.

Hacia el final del episodio 5.14 se obtuvo más información de los números en la tabla con 12 columnas. Si a y b están en la tabla, entonces necesariamente se ven así: $a = 12 \times q + r$ y $b = 12 \times q' + r'$, para algunos $q, q', r, r' \in \mathbb{Z}$. Estas igualdades son **proposicionales**. En el episodio 5.14 el entrevistador le llamó a r y r’ incógnitas, y aunque no es el término correcto (no se tienen igualdades condicionales) al menos sirvió para que estas expresiones tuvieran sentido para los estudiantes.

El segundo paso que el entrevistador les ayudó a dar a los participantes fue el planteamiento simbólico del problema. Si a y b son dos números cualquiera en la tabla sobre los que se desea responder la pregunta del problema, a y b tendrían, primeramente, que estar relacionados por la siguiente condición: su diferencia es un múltiplo de 12. Ambos estudiantes estuvieron de acuerdo en que esta condición debería ser parte de las hipótesis. Entonces el entrevistador les pedio que escribieran las relaciones que hasta ahora tenían para resolver el problema.



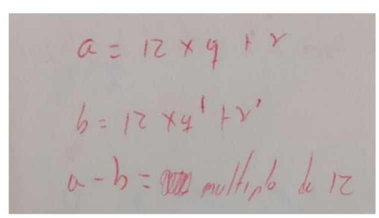


Figura A.22 ¿Cuáles son las hipótesis del problema? A la izquierda está el trbajo de Gaby y a la derecha el de Marcos.

En la figura A.22 está el trabajo de ambos estudiantes. Mientras que las expresiones de Gaby eran completamente simbólicas, las de Marcos no. Gaby concibió la igualdad **proposicional** $a - b = 12 \times s$; este paso le facilitará manipular las otras expresiones. Como Marcos se quedó con la relación semántica "$a - b$" *y "múltiplo de 12" son equivalentes en el contexto del problema,* tendrá dificultades al tratar de establecer conexiones con las primeras dos igualdades.

Finalmente, el tercer paso que el entrevistador sugirió fue analizar qué tendría que ocurrir con r y r' para concluir que a y b están en la misma columna. Aunque esto llevó a la solución del problema, en el camino los estudiantes se encontraron con varias dificultades que vale la pena señalar:

> Episodio 5.14
>
> Entrevistador: Si se creyera que a y b están en la misma columna, ¿qué tendrían que poder deducir de r y r'?
>
> G: Que es la misma columna
>
> Entrevistador: Exactamente. Si ustedes prueban que r y r' son iguales, entonces eso les dice que a y b están en la misma columna. (Ambos asienten). Entonces, ¿pueden ustedes con esas tres relaciones deducir que r y r' son iguales?
>
> […]
>
> G: Sí, tendría que ser un número multiplicado por 12 pero que necesariamente tenga un residuo 7 al momento de dividirse… porque estamos en la columna 7.
>
> Entrevistador: No estamos en la columna 7. No sabemos en qué columna está a ni en qué columna está b.
>
> G: ¡Ah, ya!

El episodio anterior es interesante porque quizá se enlaza con la forma –errónea- en que el entrevistador se refirió a los residuos, como incógnitas. Gaby tiene claro que es suficiente demostrar la igualdad entre r y r' para solucionar el problema. Pero parece que piensa, efectivamente, en r y r' como incógnitas, pues trata de deducir un valor numérico para ellos. Habla de la *necesidad* de tener un residuo 7. Es decir, si $a = 12 \times q + r$ y $b = 12 \times q' + r'$, entonces $r = 7 = r$'. Cuando el entrevistador le recuerda que en las expresiones $a = 12 \times q + r$ y $b = 12 \times q' + r'$ los residuos, las columnas, son variables, ella nota la limitación de sus suposiciones.

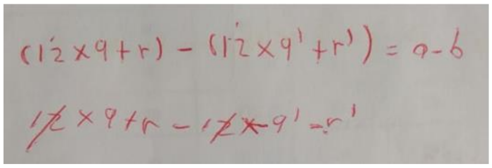
Para ayudar a los estudiantes a movilizar las igualdades $a = 12 \times q + r,\ b = 12 \times q' + r$ y $a - b = 12 \times s$, el entrevistador explícitamente les recomienda valerse de su experiencia algebraica y empezar a sustituir. En concreto, propone que en la expresión $a - b$ sustituyan a por $12 \times q + r$ y b por $12 \times q' + r'$. Marcos escribe

$$a - b = 12 \times q + r - 12 \times q' + r'$$

y Gaby escribe

$$(12 \times q + r) - (12 \times q' + r') = a - b.$$

Un primer análisis llevaría a que Marcos no sustituyó correctamente, descuidó la sintaxis de los objetos de manipuló (números enteros). Luego la igualdad que propuso es falsa. De seguir trabajando con ella no se podría llegar a la conclusión deseada, $r = r'$. En cuanto a Gaby, parece que sí consideró la estructura de las expresiones, utilizó paréntesis y la igualdad –**proposicional**- que escribió es verdadera. Por lo tanto, es potencialmente útil la igualdad de Gaby. Sin embargo, conforme avanzó la entrevista se descubrieron algunas inconsistencias en el manejo sintáctico de Gaby, lo cual, como con Marcos, inevitablemente le complicaría el camino para poder concluir el problema. Por ejemplo, cuando el entrevistador les preguntó si en la expresión $(12 \times q + r) - (12 \times q' + r')$ podían simplificar algo, ambos dijeron que "el 12 se cancelaría". En la siguiente figura se muestra el razonamiento que hicieron:



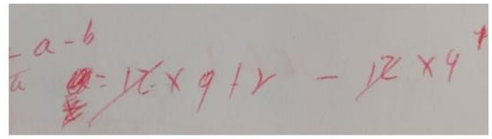


Figura A.23 A la izquierda está el trabajo de Gaby y a la derecha el de Marcos.

Debido a los problemas que enfrentaban los estudiantes, el entrevistador decidió participar activamente en la resolución del problema, acompañándolos en cada paso que daban. Para avanzar, les sugirió que podían factorizar un 12 en la expresión $(12 \times q + r) - (12 \times q' + r')$. Pero, otra vez, ambos estudiantes tuvieron problemas. Tanto fue así que Marcos no siguió con el problema, decidió dejarlo y mejor poner atención a lo que hacía Gaby. Entonces ella optó por tratar de explicarle a su compañero. Por lo que el entrevistador les propuso trabajar juntos, en equipo.

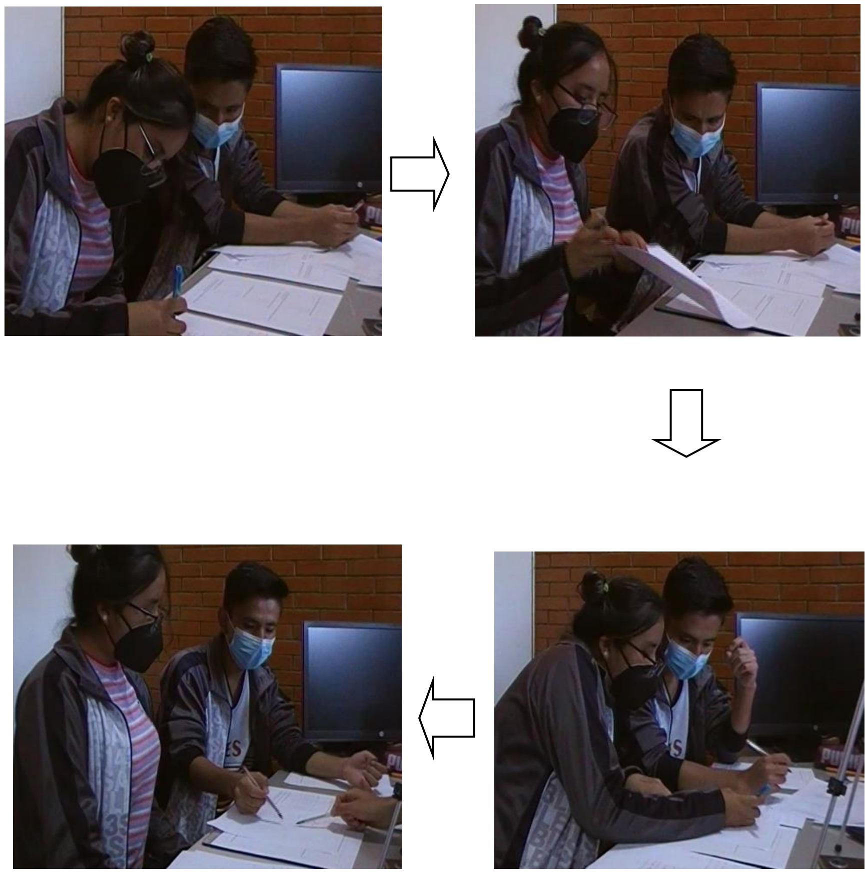
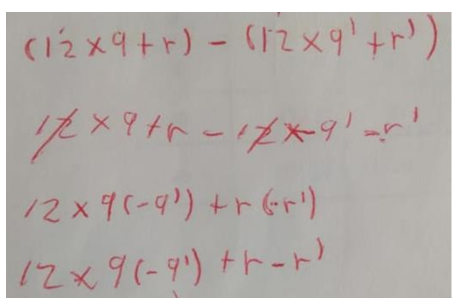


Figura A.24 Marcos abandona su trabajo, pero al final trabaja en equipo con su compañera.

Ante la sugerencia de que podían factorizar el 12, Gaby propone la siguiente transformación:



$(12 \times q + r) - (12 \times q' + r')$

$\cancel{12} \times q + r - \cancel{12} \times q' - r'$

$12 \times q(-q') + r(-r')$

$12 \times q(-q') + r - r'$

Parece que ella está usando que, en el anillo de los enteros, la suma se distribuye sobre el producto, pues establece que $-(12 \times q' + r') = -12 \times -q' - r'$. Además afirma que $12 \times q - 12 \times -q = 12 \times q \times -q'$. Pero ella misma tiene dudas de su procedimiento, así que le pregunta al entrevistador si va bien:

> Episodio 5.15
>
> Gaby: (Escribe $12 \times q(-q') + r - r'$). ¿Así quedaría?
>
> Entrevistador: Aquí va el paréntesis (cambia $12 \times q(-q')$ por $12 \times (q - q')$) porque estas factorizando el 12. Fíjate, si metes el 12 es 12 por q, que lo tienes aquí, y luego es 12 por $-q'$, que es -12 por q'.
>
> Gaby: ¡Ah, sí!.
>
> Entrevistador: ¿Sí, Marcos?
>
> Marcos: Sí.
>
> (Gaby escribe $12 \times (q - q') + (r - r')$)
>
> Entrevistador: Eso es $a - b$
>
> (Gaby escribe $12 \times (q - q') + (r - r') = a - b$)
>
> Entrevistador: Ahora, ¿qué otra cosa saben? Llegaron a esto simplemente al sustituir en la expresión $a - b$ a a por $12 \times q + r$ y a b por $12 \times q' + r'$. No han ocupado que $a - b$ es múltiplo de 12. ¿Qué les parece si lo ocupan? ¿Cómo lo ocuparían?
>
> Gaby: Es $12 \times (q - q') + (r - r')$ y esto nos va a dar como resultado $a - b$. Pero $a - b$ es igual a un múltiplo de 12 multiplicado por algo. Entonces sería $2 \times (q - q') + (r - r') = 12 \times \ldots$ por algo. ¿Qué letra le ponemos? (Le pregunta Gaby a Marcos).
>
> Marcos: Que sea z

Al final del episodio 5.15 los estudiantes lograron establecer la igualdad

$$12 \times (q - q') + (r - r') = 12 \times z$$

Para obtenerla, Gaby utilizó la propiedad **transitiva** de la igualdad. En efecto, ella menciona explícitamente dos igualdades en un orden específico; habla de las “igualdades” $12 \times (q - q') + (r - r') = a - b$ y $a - b = 12 \times "algo"$. Aunque la expresión $12 \times "algo"$ está desprovista de sentido sintáctico, ello logra deducir que

$$12 \times (q - q') + (r - r') = 12 \times "algo"$$

¿Cómo lo hizo si la expresión $12 \times "algo"$ no es, como ella misma dijo, “un resultado”? Pues a través de la transitividad de la igualdad. Aunque $12 \times "algo"$ no es una expresión algebraica, ella está consiente de que es equivalente a la expresión $a - b$, y esto es suficiente para trabajarlas como cosas iguales. En particular, si en la cadena de expresiones

$$12 \times (q - q') + (r - r') = a - b = 12 \times "algo"$$

todas ellas son lo mismo, también deben serlo, por transitividad, las de los extremos:

$$12 \times (q - q') + (r - r') = 12 \times "algo"$$

Una vez que Gaby utilizó la letra que Marcos le recomendó, ya pudieron concretar la igualdad algebraica $12 \times (q - q') + (r - r') = 12 \times z$. Entonces el entrevistador les sugirió transformarla de modo que pudieran factorizar otro 12. Gaby no veía cómo manipular las expresiones, pero ocurrió que Marcos sí. Entonces él se hizo cargo del siguiente paso. Trató de pasar el 12 que estaba en el miembro izquierdo al miembro derecho, pero se confundió, pues la expresión $12 \times (q - q')$ no la considero cómo una sola (ver figura A.25) y sólo pasó *restando* al miembro derecho el 12. El entrevistador le explicó que $12 \times (q - q')$ era una sola expresión y que por ello toda pasaba *restando* al otro lado de la igualdad. Después de que Marcos consiguió hacer el despeje, Gaby se ocupó de factorizar 12 (ver figura A.25).

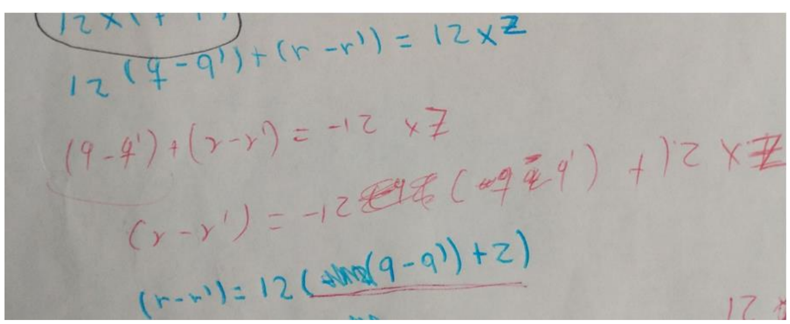


Figura A.25 Marcos trata de hacer un despeje y Gaby hace una factorización.

Una vez que llegaron a la expresión $r - r' = 12(\,(q - q') + z)$ estaban confundido en cómo ocupar los cocientes y los residuos. El entrevistador les sugirió renombrar la expresión $(\,(q - q') + z)$ como y; es decir, hacer $y = (\,(q - q') + z)$, usando así a la igualdad de forma **definitoria.** Así que Gaby escribió $r - r' = 12y$.

En el siguiente episodio se termina el problema. Es pertinente aclarar que la decisión del entrevistador de intervenir directamente se debió a que el tiempo de la entrevista estaba terminando. Con todo, ambos estudiantes pudieron avanzar fluidamente y comprender el sentido de lo que se estaba haciendo, pues terminaron muy entusiasmados y satisfechos con lo que lograron.

> Episodio 5.16
>
> Entrevistador: Entonces, miren, ya que llegaron a $r - r' = 12y$. Pero esto [y] es un número natural, porque q, digamos, es 5, q' es 0, y z es 8. Entonces, [al tener $y = (\,(q - q') + z)$], y también es un número natural. ¿Pero cuál es el natural más chico que conocen?
>
> Ambos: El 0
>
> Entrevistador: El 0, luego el 1, luego el 2, etc. Entonces esto [$12y$] puede ser 12×0, cero; 12×1, doce; 12×2, veinticuatro, etc. Pero r y r' son residuos, y habíamos visto que los residuos eran menores que…
>
> Ambos: Que 12 [en este caso].
>
> Entrevistador: Entonces si ustedes tienen dos números menores que 12 y los restan, les va a un número…
>
> Gaby: Del 1 al 11.
>
> Entrevistador: Sí, menor estricto que 12. Pero aquí $[12y]$ si ustedes empiezan a multiplicar, y tuvieran que y no es 0, les daría $12, 24$, etc. Entonces no hay otra opción más que y sea….
>
> Gaby: ¿Cero?
>
> [...]
>
> Entrevistador: Entonces $r - r$' es 0 porque 12 por 0 es 0.

(Gaby escribe $r - r' = 0$)

Entrevistador: ¿Y de ahí puedes despejar r?

(Gaby escribe $r = 0 + r'$)

Entrevistador: Y $0 + r'$, ¿quién es?

Marcos: r'

Entrevistador: Exacto. Entonces r es igual a..

Ambos: r'

(Gaby escribe $r = r'$)

Entrevistador: Que es lo que queríamos (Ambos se ríen alegremente). Y entonces los residuos son iguales y por lo tanto [a y b]

Ambos (interrumpiendo): Están en la misma columna. ¡Sí es cierto!