



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa.

**Estudio de los procesos de construcción de cuadriláteros en Ambientes de
Geometría Dinámica**

Tesis que presenta:

Diana Alejandra Bustamante Hernández

Para obtener el grado de:

Maestra en Ciencias

En la Especialidad de:

Matemática Educativa

Directora de la tesis:

Dra. Gisela Montiel Espinosa

Agradezco al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) por el apoyo brindado para llevar a cabo esta investigación.

Diana Alejandra Bustamante Hernández

CVU 1080842

En primer lugar, quiero agradecer a Dios por permitirme culminar esta etapa académica, y a mi familia -mamá, papá y Laura-, por apoyarme, escucharme y estar presente en cada momento de este proceso, mil gracias por su paciencia en los días más estresantes y, sobre todo, mil gracias por todo su amor.

Agradezco a la Dra. Gisela Montiel por todo su acompañamiento en este tiempo, gracias por su paciencia, por escuchar mis ideas, por todas las reflexiones y enseñanzas, y sobre todo gracias por su apoyo personal y académico durante todo este proceso. A mis sinodales, el Dr. Hugo Mejía y la Dra. Daysi García por aportar sus comentarios y reflexiones a fin de mejorar esta investigación.

Agradezco a mis compañeras y compañeros de grupo -Melvin, Gerardo, Ana Lilia, Rodil, Meli, Ita, Selvin, Cris y Wen-, por todas sus retroalimentaciones, comentarios, sesiones de estudio y charlas para apoyarnos entre nosotros. En especial agradezco a Grisel por compartir conmigo este proyecto, por siempre motivarme a seguir adelante y escuchar todas las situaciones académicas y personales con las que me afrontaba; agradezco a Sergio por ser amigo, colega y compañero de la Comunidad GeoGebra Latinoamericana, por escuchar y reflexionar conmigo en este proyecto, ¡gracias totales!

Agradezco a Kike, por ser mi apoyo incondicional, tanto en lo personal como en lo académico, por escucharme, acompañarme y motivarme en este proceso y en la vida. Gracias por estar conmigo en los momentos bonitos y por comprender -y nunca dejarme sola- cuando las cosas eran complicadas y estresantes.

A mis amigas y amigos, gracias por siempre escuchar a su '*maeta*', por siempre preguntar cómo estaba o cómo iba con la maestría, gracias por todas sus palabras de motivación y cariño.

Finalmente, agradezco a la Diana de 2020 por atreverse y nunca rendirse.

Índice de Figuras.....	8
Índice de Tablas.....	9
RESUMEN.....	10
ABSTRACT.....	11
INTRODUCCIÓN.....	12
I. CONSIDERACIONES INICIALES.....	13
1.1 El nacimiento de un proyecto de investigación.....	13
1.2 Revisión de Literatura.....	14
1.2.1 Investigaciones sobre los <i>cuadriláteros</i>	14
1.2.2 Investigaciones sobre el trabajo en un AGD.....	18
1.2.3 Los cuadriláteros en el currículo mexicano y en los libros de texto.....	21
1.3 Planteamiento de Investigación.....	29
1.4 Preguntas de Investigación.....	29
1.5 Objetivos.....	30
1.5.1 Objetivo General.....	30
1.5.2 Objetivos Específicos.....	30
II. CONSIDERACIONES TEÓRICAS.....	31
2.1 Teoría Socioepistemológica.....	31
2.1.1 Confrontación y Resignificación.....	31
2.2 Modelo de Trabajo Geométrico.....	32
2.2.1 Caracterización del MTG.....	33
2.3 La idoneidad de los AGD para los procesos de construcción.....	35
2.4 Refinamiento de las preguntas de investigación.....	36
2.5 Refinamiento de objetivos.....	37
2.5.1 Objetivo General.....	37
2.5.2 Objetivos Específicos.....	37
III. CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS.....	38

3.1 Metodología	38
3.1.1 Herramientas teóricas para el análisis	38
3.1.2 Investigación de Diseño	42
3.2 Desarrollo de la Investigación de Diseño	43
3.2.1 Descripción del escenario de investigación	43
3.2.2 Fase de Planeación	44
3.2.3 Fase de Implementación	54
3.2.4 Fase de Análisis	54
IV. PRODUCCIÓN, ORGANIZACIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS	56
4.1 Implementación.....	56
4.2 Descripción de la experiencia didáctica.....	57
4.2.1 Descripción de la ambientación – Introducción a GeoGebra	58
4.2.2 Descripción del momento 1: Descubriendo el polígono	60
4.2.3 Descripción del momento 2: Estudiando el polígono	62
4.2.4 Descripción del momento 3: ¿Cómo se construye?	65
4.3 Análisis	67
4.3.1 Organización de datos en términos de prácticas	68
4.3.2 Análisis retrospectivo.....	71
V. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES	99
5.1 Discusión.....	99
5.2 Conclusiones	101
VI. PROSPECTIVA DE INVESTIGACIÓN	102
REFERENCIAS	103
ANEXOS	107
Anexo 1. Encuesta del perfil del estudiante.....	107
Anexo 2. Carta de autorización por parte del estudiante	114
Anexo 3. Tablas de organización de prácticas.....	115
Ambientación – Construcciones en GeoGebra	115

Momento 1: Descubriendo el polígono.....	119
Momento 2: Estudiando el polígono.....	124
Momento 3: ¿Cómo se construye?.....	131

Índice de Figuras

Figura 1 <i>Clasificación propuesta por de Villiers (1994)</i>	15
Figura 2 <i>Ejemplo de un cuadrado "típico" y uno con rotación</i>	17
Figura 3 <i>Tarea con actividad de naturaleza de tipo análisis asociada</i>	24
Figura 4 <i>Tarea con actividad de naturaleza aritmética asociada</i>	25
Figura 5 <i>Tarea con actividad de naturaleza geométrica asociada</i>	25
Figura 6 <i>Tarea con actividad de naturaleza de observación asociada</i>	26
Figura 7 <i>Tarea con actividad de naturaleza compuesta con énfasis inicial en la observación</i>	26
Figura 8 <i>Tarea con actividad de naturaleza compuesta con énfasis posterior en lo aritmético</i>	27
Figura 9 <i>Naturalezas de la Geometría (Rubio-Pizzorno, 2018)</i>	32
Figura 10 <i>Prácticas de abstracción y representación</i>	34
Figura 11 <i>Trabajo geométrico considerando el carácter dinámico</i>	35
Figura 12 <i>Del objeto dinámico al teórico</i>	39
Figura 13 <i>Práctica de Abstracción</i>	40
Figura 14 <i>Práctica de Representación</i>	41
Figura 15 <i>Nueva propuesta de MTG</i>	42
Figura 16 <i>Ciclos de la Investigación de Diseño</i>	43
Figura 17 <i>Ejemplo de tareas en el momento de Introducción</i>	46
Figura 18 <i>Ejemplo de arrastre momento 2.1</i>	48
Figura 19 <i>Applet de la tarea 2.1.2</i>	49
Figura 20 <i>Proceso de construcción</i>	50
Figura 21 <i>Orientación hacia las relaciones de dependencia</i>	51
Figura 22 <i>Applets para construcción</i>	52
Figura 23 <i>Vista de GeoGebra Classroom</i>	53
Figura 24 <i>Pregunta de la E1 en la introducción</i>	58
Figura 25 <i>Construcción después de la prueba del arrastre</i>	59
Figura 26 <i>Respuesta de la E1 en la T15</i>	59
Figura 27 <i>Modificación de la construcción</i>	60
Figura 28 <i>Respuesta de la E1 en la T4 – Momento 1</i>	61
Figura 29. <i>Transformaciones del polígono 2 a través del arrastre del punto D1</i>	61
Figura 30 <i>Respuesta de la E1 en la T11 – Momento 1</i>	62
Figura 31 <i>Respuesta de la E1 en la T12 – Momento 1</i>	62
Figura 32 <i>Respuesta de la E1a la T25 – Momento 2</i>	63
Figura 33 <i>Nociones de dependencia en la E1</i>	63
Figura 34 <i>Respuesta de la E1 a la T28 – Momento 2</i>	64
Figura 35 <i>Respuesta de la E1 a la T32 – Momento 2</i>	64

Figura 36 <i>Respuesta de la E1 a la T37 – Momento 3</i>	65
Figura 37 <i>Respuesta de la E1 a la T39 – Momento 3</i>	66
Figura 38 <i>Respuesta de la E1 a la T40 – Momento 3</i>	66
Figura 39 <i>Respuesta de la E1 a la T44 – Momento 3</i>	66
Figura 40 <i>Respuesta de la E1 a la T46 – Momento 3</i>	67
Figura 41 <i>Respuesta de la E1 a la T47 – Momento 3</i>	67
Figura 42 <i>Representación de la estudiante – T1</i>	72
Figura 43 <i>Representación de la estudiante – T2</i>	73
Figura 44 <i>Respuesta de la E1-T3 (A-AP)</i>	73
Figura 45 <i>Applet mostrado en la T4</i>	74
Figura 46 <i>Respuesta de la E1-T10 y T11 (R-B)</i>	75
Figura 47 <i>Representación de la E1 – T12</i>	75
Figura 48 <i>Deformación de la construcción de la E1 -T12</i>	76
Figura 49 <i>Respuesta de la E1-T13 (A-AG)</i>	76
Figura 50 <i>Respuesta de la E1-T14 (R-C/M)</i>	77
Figura 51 <i>Respuesta de la E1 - T12 (A-M/AP)</i>	85
Figura 52 <i>Respuesta de la E1 - T25</i>	89
Figura 53 <i>Respuesta de la E1 - T36</i>	91
Figura 54 <i>Respuesta de la E1 - T43</i>	93
Figura 55 <i>Creación de un nuevo punto – T14</i>	95

Índice de Tablas

Tabla 1 <i>Ejes y temas del plan y programa de estudios en educación secundaria</i>	22
Tabla 2 <i>Conteo y porcentaje general de cada clasificación</i>	27
Tabla 3 <i>Conteo por cada año escolar en secundaria</i>	28
Tabla 4 <i>Modalidad de las actividades a realizar</i>	54
Tabla 5 <i>Propuesta para el análisis</i>	55
Tabla 6 <i>Ejemplo de organización de datos en Excel</i>	57
Tabla 7 <i>Análisis de prácticas - Ambientación</i>	68
Tabla 8 <i>Identificación de prácticas en las T15 y T16 de la E1</i>	77
Tabla 9 <i>Identificación de prácticas en las T1, T2, T3 y T5 de la E1</i>	79
Tabla 10 <i>Identificación de prácticas en las T4 y T6 de la E1</i>	81
Tabla 11 <i>Identificación de prácticas en las T7 y T8 de la E1</i>	82
Tabla 12 <i>Identificación de prácticas en las T9, T10 y T11 de la E1</i>	83
Tabla 13 <i>Identificación de prácticas en las T15, T17, T19, T21 y T23 de la E1</i>	86
Tabla 14 <i>Identificación de prácticas en las T16, T18, T20, T22 y T24 de la E1</i>	87
Tabla 15 <i>Identificación de prácticas de la T27 a T33 de la E1</i>	89
Tabla 16 <i>Identificación de prácticas en la T40 de la E1</i>	92
Tabla 17 <i>Identificación de prácticas en la T47 de la E1</i>	94
Tabla 18 <i>Momento de Resignificación de la E1 en la Construcción de un cuadrado</i>	96

El trabajar cualquier construcción dentro de un Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) implica reconocer las características propias de dicho ambiente, las cuales consisten en el comportamiento dinámico, el orden de construcción y las relaciones de dependencia que se generan entre los elementos, esto para asegurar que dichas construcciones mantengan las propiedades geométricas que se quieran reflejar. Sin embargo, con nuestra revisión de literatura reconocemos la escasez de investigación sobre los procesos de construcción en AGD, por ello este trabajo se centra en los procesos de construcción, específicamente de cuadriláteros cuando se trabaja en un AGD.

Para poder ver, entender y analizar nuestro objeto de estudio nos posicionamos desde el Modelo de Trabajo Geométrico (Rubio-Pizzorno, 2018) para identificar y describir las prácticas geométricas asociadas al proceso de construcción de cuadriláteros y desde la Teoría Socioepistemológica reconocemos los momentos de confrontación y resignificación que viven las y los estudiantes; además retomamos las características propias del Ambiente.

Se realizó una Investigación de Diseño, la cual comprendió un ciclo de planeación, implementación y análisis, con dos estudiantes de formación inicial docente de matemáticas; dicho diseño se dividió en tres grandes momentos: (1) Introducción, (2) Tareas Geométricas y (3) Experiencia Didáctica y la Investigación, los cuales se llevaron a cabo en GeoGebra Classroom y Moodle, ya que además de las tareas geométricas, se consideraron los aspectos relacionados a la educación a distancia en línea.

Durante la organización y análisis de datos se propone organizar los datos en términos de prácticas a través de las preguntas ¿qué hace?, ¿cómo lo hace? y ¿con qué lo hace?, esto nos ayudó a interpretar las prácticas por medio del Modelo del Trabajo Geométrico, retomando las prácticas de Abstracción y Representación.

Se pudo concluir que, en un principio la estudiante se centraba en que su figura fuera visualmente correcta, pero no se consideraba las características del Ambiente, como lo es el comportamiento dinámico, sin embargo, con el diseño y fundamentación de las tareas propuestas, se propició un tránsito de prácticas aritméticas a prácticas de naturaleza geométrica.

The construction of any object within a Dynamic Geometry Environment (DGE) necessitates an understanding of the characteristics of such an environment. These characteristics include the dynamic behavior, the order of construction and the dependency relationships that are generated between the elements. This understanding is essential to ensure that the construction maintains the desired geometric properties. However, our literature review revealed a paucity of research on construction processes in DGE. Consequently, this paper focuses on the construction processes, specifically of quadrilaterals when working in an DGE.

To see, understand, and analyze our object of study, we position ourselves from the Geometric Work Model (Rubio-Pizzorno, 2018) to identify and describe the geometric practices associated with the process of construction of quadrilaterals. Additionally, we recognize the moments of confrontation and resignification experienced by the students from the Socioepistemological Theory. We also take up the characteristics of the environment.

A Design Research was carried out, which comprised a cycle of planning, implementation and analysis, with two students of initial teacher training in mathematics; this design was divided into three main moments: (1) Introduction, (2) Geometric Tasks and (3) Didactic Experience and Research, which were carried out in GeoGebra Classroom and Moodle, since in addition to the geometric tasks, aspects related to online distance education were considered.

During the organization and analysis of data, we proposed to organize the data in terms of practices through the questions "what do you do?", "how do you do it?" and "what do you do it with?", which helped us to interpret the practices through the Geometric Work Model, considering the practices of Abstraction and Representation.

It can be concluded that initially, the student focused on achieving an aesthetically pleasing figure, but did not consider the characteristics of the environment, such as dynamic behavior. However, with the design and foundation of the proposed tasks, a transition from arithmetic practices to geometric practices was facilitated.

La presente investigación aborda los procesos de construcción de cuadriláteros en Ambientes de Geometría Dinámica (AGD), reconociendo la importancia que toman sus características - comportamiento dinámico, el orden de construcción y las relaciones de dependencia- en este mismo proceso.

En el primer capítulo, *consideraciones iniciales*, desarrollamos la revisión de literatura centrada en las investigaciones relacionadas al objeto matemático -cuadriláteros-, el trabajo en los AGD y una revisión a libros de texto utilizados en México y describimos el planteamiento de investigación, esto nos llevó a proponer una primera versión de las preguntas y objetivos del trabajo.

En el segundo capítulo, *consideraciones teóricas*, abordamos nuestro posicionamiento teórico y los elementos considerados para el trabajo; nuestra investigación se centra en la *confrontación y resignificación* de la Teoría Socioepistemológica, *Modelo de Trabajo Geométrico* propuesto por Rubio-Pizzorno (2018) y las características de los AGD. En este capítulo, y dada las consideraciones teóricas, hacemos un refinamiento a las preguntas y objetivos de investigación.

En el tercer capítulo, *consideraciones metodológicas*, mostramos la metodología utilizada en esta investigación, explicamos las herramientas y precisiones teóricas para el análisis de datos y desarrollamos el diseño que fue implementado en este trabajo.

En el cuarto capítulo, *producción, organización y análisis de datos*, describimos cómo se implementó el diseño, cómo se llevó a cabo cada uno de los momentos, se presenta la organización de datos y posteriormente, el análisis de datos.

En el quinto capítulo, *discusión y conclusiones*, presentamos nuestra posición frente a la revisión de literatura y, a manera de conclusión, damos respuesta a las preguntas de investigación.

Por último, en el sexto capítulo, *prospectiva de investigación*, exponemos en qué etapas de la investigación nos gustaría ampliar la revisión, realizar precisiones, a fin de dar continuidad al trabajo y contribuir a las investigaciones sobre procesos de construcción en AGD.

1.1 El nacimiento de un proyecto de investigación

*“He aprendido a arriesgarme a hacer cosas nuevas.
El crecimiento y la comodidad no pueden coexistir”*

Virginia Rometty.

El presente trabajo de investigación e interés personal por este proyecto nace a finales de 2020 cuando se comienza a preparar un taller para el VII Taller Internacional “Tendencias en la Educación Matemática Basada en la Investigación” (TEMBI 7)¹, donde el objetivo era la construcción de un cuadrilátero a través de un Ambiente de Geometría Dinámica (AGD). Resultó interesante cómo se abordó el contenido, ya que durante mi formación inicial no se planteó la forma de trabajar con construcciones de cuadriláteros; dada esa participación se identifican algunas dificultades y reflexiones sobre el objeto matemático puesto en el AGD; y es ahí que nace el interés por la problemática.

Desde lo expuesto, buscamos plantear una problemática de investigación desde la construcción de cuadriláteros a través de un AGD, analizando las prácticas geométricas de los estudiantes en formación inicial docente en matemáticas y reconociendo la influencia de las relaciones de dependencia entre los elementos construidos en el AGD. Por medio de la experiencia del taller, y a partir de las reflexiones con las y los participantes se lograron identificar las siguientes situaciones:

- La poca familiarización con la construcción de figuras geométricas en los AGD.
- El manejo de los AGD representa una dificultad, dado que se suelen desconocer muchos aspectos técnicos.
- El poco conocimiento acerca de las propuestas de clasificación de cuadriláteros, un ejemplo de ellas la *clasificación jerárquica y particional* del autor Michael de Villiers (1994).

¹ Para más información sobre el evento, consultar <https://www.fcfm.buap.mx/TEMBI/>

1.2 Revisión de Literatura

En este apartado estaremos abordando la revisión de literatura, la cual dividimos en tres partes: primero, dado nuestro objeto de estudio, los *procesos de construcción de cuadriláteros en AGD*, reportaremos aquellas investigaciones que identificamos tienen en su objeto de estudio a los *cuadriláteros*, distinguiendo cómo los están abordando, es decir, si la investigación reporta su definición, propiedades, entre otras cosas; en una segunda parte reportaremos las investigaciones que tienen como objeto de estudio a las herramientas del AGD, así como sus características; y, por último, contextualizaremos el tipo de tareas geométricas que se llevan a cabo en el currículo mexicano con respecto a los *cuadriláteros*.

1.2.1 Investigaciones sobre los *cuadriláteros*

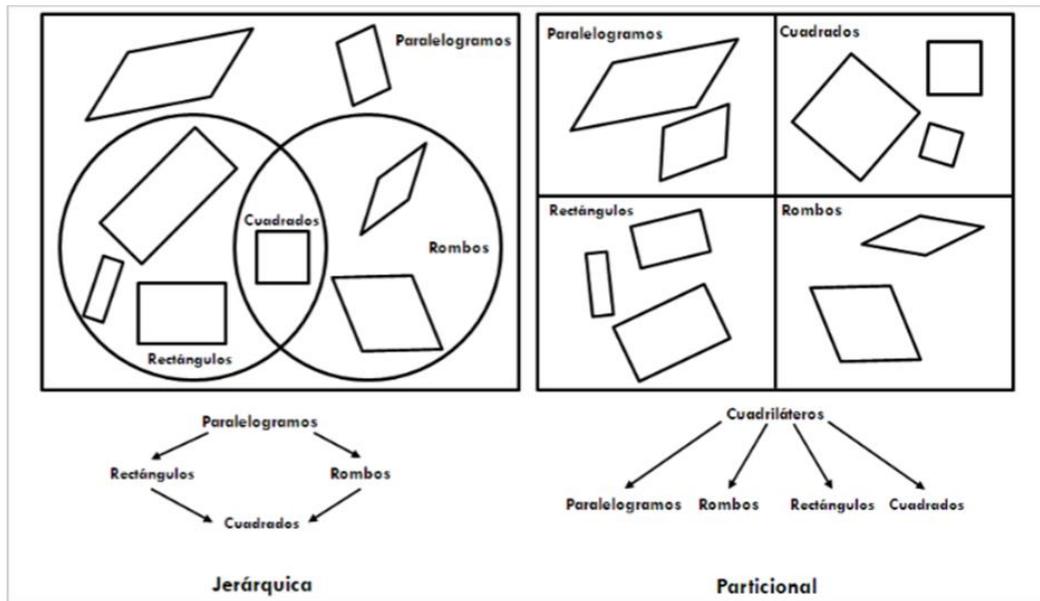
En un primer momento de búsqueda decidimos centrarnos en aquellas investigaciones que tuvieran como objeto de estudio a los *cuadriláteros*; con esto, logramos identificar que dichos trabajos centran sus intereses de investigación en la clasificación, definición y propiedades geométricas de los *cuadriláteros*. Para este apartado, en un primer lugar estaremos contextualizando la clasificación propuesta por De Villiers (1994), debido a su importancia en los resultados de los trabajos que se centran en las definiciones y propiedades.

1.2.1.1 Sobre la clasificación de '*cuadriláteros*'

Una de las clasificaciones más reportadas es la propuesta por De Villiers (1994), la cual se divide en dos tipos: *clasificación jerárquica* donde se considera un conjunto de conceptos, de tal forma que los más particulares forman un subconjunto de los más generales; y la *clasificación particional* donde se consideran diversos subconjuntos de conceptos como disjuntos unos de otros.

Para dar ejemplo de ello, en la figura 1 se muestra que, en la *clasificación jerárquica*, los rectángulos y rombos son un subconjunto de los paralelogramos y, a su vez, forman una intersección con los cuadrados; mientras que en la *clasificación particional* ninguno se considera paralelogramo, ni hay intersecciones que formen cuadrados, ya que no existe un criterio jerárquico, es decir, son disjuntos,

Figura 1 Clasificación propuesta por de Villiers (1994)



Nota. Imagen tomada de Miranda Molina, R. (2012)

De Villiers (1994) destaca que en la enseñanza es ideal es que se involucre de forma activa a las y los estudiantes en el proceso de definir, clasificar y comparar críticamente, en lugar de entregar definiciones y clasificaciones previamente preparadas. Gal y Lew (2008) coinciden que el estudiante debe tener un papel activo y reflexivo, ya que, si se conduce por un aprendizaje memorístico, las definiciones carecerán de otros sentidos geométricos y pueden ser incorrectas.

1.2.1.2 Las definiciones de ‘cuadriláteros’ como objeto de estudio

Al trabajar con definiciones de objetos matemáticos, éstas deben destacar las “relaciones lógicas entre declaraciones matemáticas, secuencias didácticas de aprendizaje, conexiones y comunicaciones matemáticas” (Leikin y Winicki-Landman, 2001, p. 63, citado en Avcu, 2022, p. 14), para el contenido de *cuadriláteros* esto resulta fundamental, dada su aplicación en diversos temas matemáticos, así como en el mundo real. Desde la investigación, su importancia se refleja con los muchos estudios sobre definiciones de cuadriláteros aparecidos en las últimas décadas, algunos de ellos reportados en compendios de investigación sobre educación en geometría; por ejemplo, el de Sinclair et al. (2016).

Con el trabajo de Fujita y Jones (2007) se propone un diseño para averiguar en qué nivel de pensamiento -a través del modelo de van Hiele- se encuentran las y los estudiantes en formación inicial docente de primaria con respecto a la definición y clasificación de

cuadriláteros; entre sus resultados lograr identificar la brecha que existe entre los niveles 2 y 3 del modelo van Hiele, es decir, cuando se reconocen las propiedades de forma individual -nivel 2- y cuando se empiezan a hacer deducciones sencillas sobre estas propiedades -nivel 3-. Asimismo, reconocen que la *clasificación jerárquica* propuesta por de Villiers (1994) es compleja para las y los estudiantes, particularmente por sus concepciones personales sobre cuadriláteros.

Por su parte Okazaki (2013) realiza un experimento de enseñanza con estudiantes de quinto grado, donde busca mejorar el reconocimiento de definiciones geométricas a través de tres etapas: (1) fomentar vistas dinámicas de figuras geométricas, (2) explorar relaciones de inclusión entre figuras y (3) construir definiciones de figuras; además de considerar los aspectos relacionados a la transición de lo *empírico* a lo *deductivo*, es decir, de lo que se comprende visualmente –lo *empírico*- a las conclusiones basadas en axiomas, reglas existentes y lógicas -lo *deductivo*- (de Villiers, 1998, citado en Okazaki, 2013). En sus resultados coincide con Fujita y Jones (2007) ya que logra reconocer las dificultades que tienen las y los estudiantes para construir definiciones geométricas debido a sus concepciones personales y desde lo que se denomina una *clasificación particional*.

González-Salazar y Flores-Medrano (2021) realizan una investigación cuyo objetivo es construir definiciones al identificar características de los objetos geométricos a través de una *clasificación particional*; al trabajar con estudiantes con discapacidad visual, mediante el tacto, se necesitó hacer analogías con objetos ya conocidos para ellos. En sus resultados reportan que las y los estudiantes tomaron como referente elementos fuera de la geometría para construir sus definiciones, sin embargo, le dieron más peso a la imagen del concepto² que a la definición del objeto matemático. No obstante, algunos pudieron identificar propiedades y hacer una correspondencia con la definición.

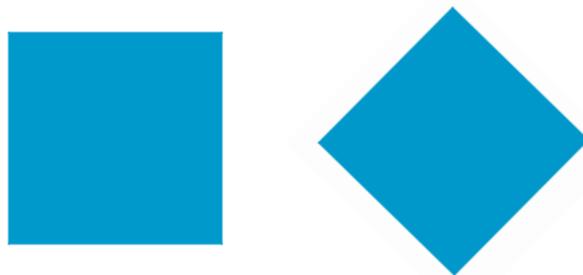
Recientemente Avcu (2022) realiza un trabajo de investigación donde explora las definiciones de los conceptos personales que tienen las y los estudiantes en formación inicial docente en matemáticas con respecto al trapecioide, paralelogramo, rectángulo, rombo, cometa y cuadrado; a través de tres tipos de tareas -de definición, de clasificación y de dibujo- logró

² Se entiende como *imagen del concepto* a lo que asocia nuestra mente con el concepto (Silva, 2013, citado en González-Salazar y Flores-Medrano, 2021).

reconocer que existía un mayor número de definiciones correctas para paralelogramo y rombo, que para las definiciones de cometa, mientras que para los rectángulos y cuadrados -los cuales según Usiskin y Grifn (2008, citado en Avcu, 2022) tienen un mayor número de propiedades críticas- se quedaron en definiciones mínimas. Además, se infiere que los bajos niveles de desempeño pueden deberse a la estructura lingüística de los nombres signados a esos cuadriláteros.

Podemos concluir que, se identifican dificultades con la definición matemática de los *cuadriláteros* por las creencias y las definiciones que hacen las y los estudiantes, las cuales tienen sus raíces en el trabajo sobre una *clasificación particional* o bien, son aprendidas de forma memorística; lo que lleva al estudiante a enfocarse en aquello que cree es “correcto” - sea en imagen o definición-, y dejar de lado las propiedades geométricas que identifican al *cuadrilátero* en específico; por ejemplo, cuando se tiene una imagen construida de un *cuadrado*, pero se presenta de otra manera, para las y los estudiantes podrían crear una confusión y preguntarse si es otro polígono (figura 2). En palabras de Laborde (1997) la idea de figura puede interpretarse de múltiples formas cuando los conocimientos geométricos no son tan sólidos.

Figura 2 Ejemplo de un cuadrado "típico" y uno con rotación



Nota. Elaboración propia.

Para nuestro trabajo de investigación si bien rescatamos la importancia de las definiciones y las propiedades geométricas; también somos conscientes de la poca literatura que se centra en los procesos de construcción de cuadriláteros, lo cual nos hace sentido, ya que es hasta la aparición de los AGD y el cambio de *naturaleza de la actividad geométrica* a la que tienen acceso las y los estudiantes, que los objetos de estudio en las investigaciones relativas a los cuadriláteros también empezaran a cambiar.

1.2.2 Investigaciones sobre el trabajo en un AGD

Los AGD permiten al usuario tener otro tipo de interacción con los objetos geométricos que ahí se construyen gracias a sus características, tales como, realizar “transformaciones continuas en tiempo real” (Goldenberg y Cuoco, 1998, p. 351), tener una secuencia de construcción e identificar las relaciones de dependencia entre los objetos creados. Esto contrasta con las tradiciones escolares, como la de la educación básica en México, que mantiene su atención en las definiciones y propiedades de figuras geométricas por medio de actividades donde la figura es estática, es decir que, por medio de la *percepción visual* las y los estudiantes deben identificar y reconocer dichas características.

A través de la revisión de literatura se logró identificar que uno de los principales objetos de estudio en las investigaciones que involucran a los AGD es el **arrastre**, ya que este representa una de las tres características que comparten los softwares de geometría dinámica (Straber, 2002, citado en Rubio-Pizzorno, 2018). El arrastre permite explorar dos tipos de comportamientos en las construcciones dentro del AGD (Hözl, 2001):

1. Explorar comportamientos de una construcción o diagrama.
2. Probar conjeturas sobre dicha construcción o diagrama.

La investigación de Leung (2011) pone atención al arrastre como un medio para distinguir las características invariantes en una situación geométrica, a partir de tareas pedagógicas³ propone involucrar a las y los estudiantes en tareas de construcción desde un modo de prácticas (PM), las cuales describe como: PM1 Construye objetos matemáticos o manipula objetos prediseñados en entorno de geometría dinámica, y PM2 Interactúa con las herramientas del entorno para desarrollar rutinas basadas en habilidades, modalidad de comportamientos y modos de diálogo.

Es importante destacar que, a través de las construcciones en AGD, se generan *invariantes* -previamente mencionadas en Leung (2011)-, las cuales consisten en “lo que permanece igual cuando los diferentes aspectos de un fenómeno varían” (Leung, Baccaglioni-Frank y Mariotti, 2013, p. 440); dentro del AGD nos permite mantener las propiedades geométricas que construimos. Sin embargo, según lo reportado por Erez y Yerushalmy (2006)

³ “Una tarea pedagógica es un medio, o herramienta, que le da sentido a lo que se presente aprender” (Leung, 2011, p. 325)

las *invariantes* también han representado una dificultad para sus estudiantes, dado que no se comprende el tipo de comportamiento que se genera con el arrastre, en específico no logran inferir cuáles serán los cambios visuales y, por ende, tampoco infieren qué quedará invariante.

Por su parte, Christou et al. (2004), quienes trabajan con tres estudiantes en formación inicial docente en primaria, examinan dos hipótesis principales: la primera con relación al potencial que tienen los AGD en la identificación de conjeturas basadas en las construcciones, y la segunda con la búsqueda de argumentos matemáticos para apoyar dichas conjeturas. En sus resultados pudieron destacar que el ambiente ofrece la posibilidad de explorar las propiedades geométricas y los cambios de distintas configuraciones de formas geométricas.

Gracias al arrastre y la forma que nos permite explorar las invariantes en el AGD, es que nos empezamos a cuestionar sobre los procesos de construcción, así como la influencia que tienen las relaciones de dependencia generadas entre los objetos geométricos en una construcción dentro de un AGD. En la revisión de literatura hemos identificado pocos trabajos que consideran como objeto de estudio tanto a los procesos de construcción como a las relaciones de dependencia. En el siguiente apartado abordaremos las investigaciones que son más cercanas a nuestro interés de investigación.

1.2.2.1 Proceso de construcción en AGD

Al momento de realizar la búsqueda de *procesos de construcción* se identificaron muy pocas investigaciones que estaban cercanas a nuestro objeto de estudio, sin embargo, destacamos los trabajos de Prieto y Arredondo (2021), Jones (2001) y Talmon y Yerushalmy (2004), que muestran algunos elementos -proceso de construcción, relaciones de dependencia- que se acercan a nuestro objeto de estudio.

En primer lugar, Prieto y Arredondo (2021) reconocen que las construcciones elaboradas con software de geometría dinámica “comprenden actividades que propician el reconocimiento de vínculos entre las evidencias que aportan los dibujos (invarianza) y los hechos geométricos” (Prieto y Arredondo, 2021, p. 364), y se plantean tres metas a trabajar con estudiantes en formación inicial docente en matemáticas: (1) construir un dibujo dinámico con propiedades geométricas; (2) poner atención en la manera en que las y los estudiantes comunicarán sus ideas, sea de forma oral y/o escrita; y por último (3) la justificación geométrica que se da del dibujo. Entre sus resultados reconocemos tres hallazgos relevantes:

1. El primero hallazgo son las *contradicciones* inherentes a la producción del dibujo dinámico, es decir, cuando el estudiante se da cuenta que su construcción no cumple con las propiedades geométricas.
2. El segundo se relaciona con los *medios semióticos de objetivación*⁴, los cuales funcionan como una unidad inseparable de las emociones, el uso coordinado de palabras, gestos y símbolos.
3. Por último, se rescata el rol de la interacción entre las y los estudiantes y el *formador* -profesor- durante el proceso.

Por su parte, Jones (2001) plantea como objetivo de investigación informar sobre las interpretaciones de objetos geométricos y sus relaciones cuando estudiantes de 12 años utilizan AGD. Por medio de una unidad didáctica de tres fases, las y los estudiantes pasaron por una serie de tareas que abordaban desde la familiarización con el ambiente hasta tareas de construcción de cuadriláteros. Con respecto a las tareas de construcción, uno de los desafíos para las y los estudiantes era construir el cuadrilátero y aplicar la prueba del arrastre para comprobar que las propiedades con las que fue construido se mantuvieran invariantes, de esta forma se pretendía que se pudiera apreciar la importancia de la construcción cuando se aplica el arrastre y su utilidad como prueba de validez en términos geométricos (Jones, 2001). En el trabajo se destaca que se debe de comprender el orden en que se crean los objetos dentro del ambiente, y que esto conducirá a las relaciones de dependencia entre los mismos objetos, a su vez que la naturaleza dinámica del ambiente influirá en las explicaciones que den las y los estudiantes.

En cuanto la importancia de las relaciones de dependencia, Talmon y Yerushalmy (2004) establecen en su trabajo lo fundamental de las relaciones de **jerarquía** y de **dependencia** entre los elementos construidos en un AGD, lo abordan como una relación de *padre e hijo*, donde, según las autoras, un *hijo* es un elemento que está relacionado al anterior, mientras que ese elemento anterior es su *padre*. Al trabajar con estudiantes de secundaria y posgrado en educación matemática, buscaban enfocarse en la *naturaleza* de los instrumentos, más que en la influencia de la experiencia, la edad o conocimientos matemáticos. En los resultados se reporta que las relaciones de **jerarquía** para el orden de construcción en un dibujo dinámico no eran tan claras para las y los participantes. También se destaca la necesidad de

⁴ Propio de la Teoría de Objetivación, para más información se sugiere consultar (Radford, 2006).

investigar acerca de las relaciones de dependencia y el papel que toma el orden de construcción en el proceso de construcción en un AGD.

Con dichas investigaciones y rescatando el papel que juegan las definiciones, situamos nuestro trabajo en el proceso de construcción de cuadriláteros poniendo énfasis en las prácticas que acompañan este quehacer geométrico y en la influencia de las relaciones de dependencia durante dicho proceso. Desde nuestro proyecto buscamos que las y los estudiantes puedan reconocer la importancia del proceso de construcción dentro -y fuera- del AGD, manifestando las propiedades geométricas que conocen acerca de los cuadriláteros, asimismo, que se identifiquen las relaciones de dependencia que se generan entre los objetos geométricos construidos.

De acuerdo con Itzcovich (2005) para identificar las propiedades geométricas no es suficiente solo mirar los dibujos que representan a las figuras, sino que se debe involucrar a las y los estudiantes en los procesos de construcción de figuras geométricas. Destacamos en la siguiente sección una revisión de las tareas que realizan las y los estudiantes en el eje correspondiente a la *naturaleza geométrica* de un libro de texto; en este podemos ejemplificar que al momento de proponer tareas de construcción de figuras geométricas observamos dos situaciones: (1) sobre las preguntas de dichas tareas se enfocan a las medidas de los ángulos interiores, exteriores y centrales, y (2) el espacio no permite que el estudiante plasme su construcción en el libro, incluso se sugiere realizar la tarea en el cuaderno. Con ello, podemos dar cuenta que las construcciones se utilizan para verificar ciertas afirmaciones o bien comprobar que los procesos aritméticos sean correctos.

1.2.3 Los cuadriláteros en el currículo mexicano y en los libros de texto

Durante esta sección se hará una revisión de los planes y programas que rigen al Sistema Educativo Mexicano con respecto a la definición, clasificación y construcción de cuadriláteros, a propósito que Fujita y Jones (2007) destacan que el definir y clasificar cuadriláteros está presente en el currículo escolar; sin embargo, es un tema complicado para las y los estudiantes. Por ello, se considera en la educación básica en México, específicamente en el nivel de secundaria a través del Plan y Programa de Estudios proporcionado por la Secretaría de Educación Pública (SEP).

1.2.3.1 Plan y programa de estudio en la Educación Secundaria

El plan y programa de estudios de matemáticas en la Educación Secundaria se divide en tres ejes temáticos (SEP, 2017): (1) Número, álgebra y variación; (2) Forma, espacio y medida; y (3) Análisis de datos, con siete, tres y dos temas, respectivamente. Esta organización de los temas por eje se muestra en la Tabla 1:

Tabla 1 Ejes y temas del plan y programa de estudios en educación secundaria

Eje temático	¿Qué incluye?	Temas
Número, álgebra y variación.	Este eje incluye los contenidos básicos de aritmética, de álgebra y de situaciones de variación.	<ol style="list-style-type: none"> 1. Número. 2. Adición y sustracción. 3. Multiplicación y división. 4. Proporcionalidad. 5. Ecuaciones. 6. Funciones. 7. Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes.
Forma, espacio y medida	Este eje incluye los aprendizajes esperados con el espacio, formas geométricas y medición.	<ol style="list-style-type: none"> 1. Ubicación espacial. 2. Figuras y cuerpos geométricos. 3. Magnitudes y medidas.
Análisis de datos	Este eje tiene como propósito propiciar la adquisición de conocimientos y desarrollo de habilidades propias de un pensamiento estadístico y probabilístico.	<ol style="list-style-type: none"> 1. Estadística. 2. Probabilidad.

Nota. Adaptado de Plan y Programa de Estudios (p. 165) por la Secretaría de Educación Pública, 2017.

El eje que se considera para la revisión es *Forma, espacio y medida*, debido a que dentro de él se propone que las y los estudiantes aprendan las características y propiedades de las figuras, a la vez que se busca supongan o anticipen las propiedades geométricas y luego traten de validar sus anticipaciones (SEP, 2017). El plan y programa se lleva a cabo por medio de aprendizajes esperados, y para nuestra investigación se retoman aquellos relacionados con cuadriláteros y construcción de cuadriláteros/polígonos, durante los tres años de educación secundaria:

Primer año \longrightarrow Analiza la existencia y unicidad en la construcción de triángulos y cuadriláteros.

Segundo año —→ Deduce y usa las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.

Tercer año —→ Construye polígonos semejantes.

(SEP, 2017)

Es importante destacar que durante la realización de esta investigación se está llevando a cabo una nueva propuesta para el plan y programa de estudio, sin embargo, decidimos mantener nuestra contextualización -y acercamiento- en el plan que conocemos y tenemos una mayor familiarización.

1.2.3.2 Revisión de un libro de texto

Durante la revisión de libros de texto, se exploró cada una de las tareas del primer, segundo y tercer año de la editorial *Santillana* de la serie *Espiral del Saber*, mismos que son avalados y sugeridos por la Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos (CONALITEG)⁵. La serie permite el trabajo en tres partes: la primera, llamada *secuencia didáctica*, donde se pueden encontrar todas las tareas correspondientes al tema; una segunda parte, llamada *¿qué aprendí?*, donde las tareas proponen una retroalimentación de la secuencia; y, por último, un apartado llamado *taller con tecnología* donde se sugiere trabajar tareas con el software GeoGebra.

Para nuestra revisión únicamente se estarán tomando en consideración la primera y segunda parte, ya que nos interesa caracterizar las tareas que se pueden trabajar en el libro o en el cuaderno para, de alguna forma, asegurar que pueden resolverse en clase o en casa; así como identificar su relación con los aprendizajes esperados establecidos por el plan y programa de estudios. Se caracterizó la *naturaleza de la actividad* asociada a las tareas, y se clasificaron en cuatro tipos de “tareas” y una compuesta:

- **Análisis:** tareas del tipo completar enunciados y dar respuestas sin apoyos visuales.
- **Aritméticas:** tareas que requieran el cálculo aritmético para dar respuestas, completar tablas por medio del cálculo de medidas o ángulos.
- **Geométrica:** tareas que impliquen el trazo o construcción de figuras y que sus preguntas deban responderse a través de la actividad geométrica.

⁵ Para consultar la lista completa de libros avalados por la SEP, se sugiere revisar la página: <https://conaliteg.sep.gob.mx/secundaria.html>

- **Observación:** tareas que pidan comparar figuras, argumentar congruencias sin necesidad de medir, identificar patrones en dibujos, o bien dar respuestas con apoyos visuales.
- **Observación/Aritmética:** tareas con más de un ejercicio y que basan en la observación, ya sea para comparar, argumentar congruencias/diferencias; y en otro que provocan actividades de naturaleza aritmética.

Es decir, se trata de tareas del Eje *Forma, Espacio y Medida*, que demandan de las y los estudiantes una actividad matemática de naturaleza de *análisis, aritmética, geométrica, de observación* o de *observación/aritmética*.

Ejemplos de cada clasificación de tipos de tareas

Para dar sentido a cada clasificación, en este apartado se mostrarán ejemplos de cada una de las tareas que se encontraron en la revisión de libros de texto.

Análisis

Durante el primer año de secundaria podemos encontrar actividades para completar las afirmaciones que se dan a las y los estudiantes. Este ejemplo (ver Figura 3) representa una actividad de *análisis*, ya que no se muestra ningún tipo de apoyo visual; sin embargo, previamente las y los estudiantes debieron hacer una actividad del tipo *geométrica*.

Figura 3 Tarea con actividad de naturaleza de tipo análisis asociada

<p>2. Con base en la actividad anterior, completa las afirmaciones.</p> <p>a) Los lados opuestos de un paralelogramo miden _____.</p> <p>b) Los ángulos opuestos de un paralelogramo miden _____.</p> <p>c) Las dos diagonales de un paralelogramo se intersecan en _____.</p> <p>d) Los dos triángulos que se forman al cortar un paralelogramo por una diagonal son _____.</p>
--

Nota. En la actividad solo se promueve completar las afirmaciones, a partir de la actividad anterior. Adaptado de *Matemáticas 1* (p. 85), por Martínez y Carrasco, 2018, Editorial Santillana.

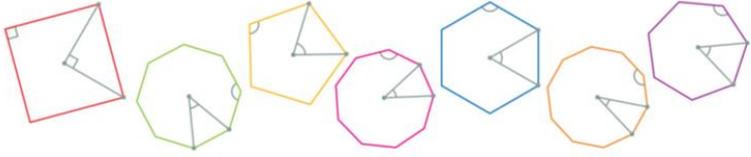
Aritmética

Para las actividades de naturaleza *aritmética* se consideran aquellas que necesitan del cálculo para poder dar respuesta, el ejemplo que se muestra corresponde al segundo año de secundaria (Figura 4) donde, dado el número de lados de un polígono, el estudiante debe completar la tabla

con sus medidas de los ángulos centrales e interiores, para finalizar con la suma de ambos ángulos.

Figura 4 Tarea con actividad de naturaleza aritmética asociada

7. Reúnete con un compañero, analicen las figuras y hagan lo que se pide.



Número de lados del polígono regular	Medida del ángulo central	Medida del ángulo interior	Suma de las medidas del ángulo central y el ángulo interior
4	90°	90°	180°
5	72°	108°	180°
6	60°	120°	180°
7	51.43°	128.57°	180°
8	45°	135°	180°
9	40°	140°	180°
10	36°	144°	180°

Nota. La figura representa la tabla que se debe completar por las y los estudiantes. Adaptado de *Matemáticas 2* (p. 75), por Martínez y Contreras, 2020, Editorial Santillana.

En la tarea podemos encontrar los dibujos correspondientes a los polígonos que se muestran en la tabla; sin embargo, solo se muestran como una orientación para las y los estudiantes, ya que no hay ningún ejercicio previo con ellos.

Geométrica

Una actividad de naturaleza *geométrica* que nos parece interesante es la que se muestra en la figura 5, donde las y los estudiantes deben construir un polígono regular de ocho lados inscrito en una circunferencia. Es importante destacar que para este momento no se ha mostrado la fórmula de $\frac{360}{n}$ donde n representa el número de lados.

Figura 5 Tarea con actividad de naturaleza geométrica asociada

6. Reúnete con dos compañeros y construyan en su cuaderno un polígono regular de ocho lados inscrito en una circunferencia. *Ver solucionario*

a) ¿Qué datos usaron para construir el polígono? *La medida del ángulo central del polígono*

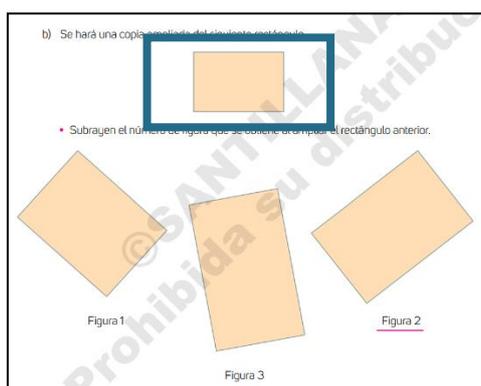
b) Escriban el procedimiento que usaron para construir el polígono. *R. M. En una circunferencia, se trazó un radio y después otros radios con una separación igual a la medida del ángulo central del polígono. Al final, se unieron los puntos que están sobre la circunferencia.*

Nota. Las respuestas en rosa representan las sugerencias que se le hacen al docente. Adaptado de *Matemáticas 2* (p. 74), por Martínez y Contreras, 2020, Editorial Santillana.

Observación

La siguiente tarea (figura 6) tiene asociada lo que consideramos una actividad de naturaleza de *observación*, ya que el estudiante debe fijar su atención en el primer rectángulo que se le muestra (marcado de azul), y a partir de ahí identificar cuál de los siguientes tres es la ampliación del mismo rectángulo. Al seleccionar la figura que consideran es la correcta, se les pregunta en qué se fijaron para poder decidir.

Figura 6 Tarea con actividad de naturaleza de observación asociada

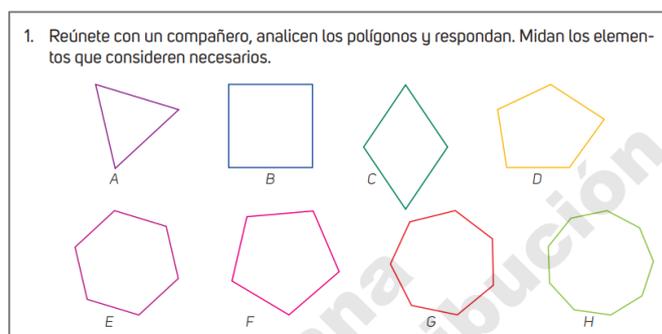


Nota. Adaptado de *Matemáticas 3* (p. 172), por Carrasco y Marván, 2019, Editorial Santillana.

Observación/Aritmética

Se decidió crear una clasificación compuesta porque se identificaron tareas con más de un ejercicio, y entre ellas compartían la característica que uno hacía énfasis en la observación y en lo aritmético. Un ejemplo de ello es la actividad uno del segundo año donde en primer lugar (figura 7) se pide a las y los estudiantes observar las figuras y determinar cuáles polígonos son regulares.

Figura 7 Tarea con actividad de naturaleza compuesta con énfasis inicial en la observación



Nota. Primera parte de la tarea. Adaptado de *Matemáticas 2* (p. 70), por Martínez y Contreras, 2020, Editorial Santillana.

Después de responder la primera parte, se debe completar una tabla (figura 8) con el número de lados y la suma de los ángulos interiores de los polígonos observados con anterioridad. No se le pregunta al estudiante por el método para obtener los ángulos interiores; sin embargo, en la secuencia anterior se realizan actividades para conocer este número.

Figura 8 Tarea con actividad de naturaleza compuesta con énfasis posterior en lo aritmético

b) Escriban en la tabla los datos faltantes.

Nombre del polígono regular	Número de lados	Suma de los ángulos interiores
Triángulo equilátero	3	180°
Cuadrado	4	360°
Pentágono	5	540°
Hexágono	6	720°
Heptágono	7	900°
Nonágono	9	1260°

Nota. Segunda parte de la tarea; las respuestas en rosa representan las sugerencias que se le hacen al docente. Adaptado de *Matemáticas 2* (p. 70), por Martínez y Contreras, 2020, Editorial Santillana.

Conclusiones acerca de la revisión de los libros de texto

En la Tabla 2 se muestra el número de tareas por tipo/clasificación, así como su porcentaje; destacando que se expone el conteo general, por los tres años de secundaria.

Tabla 2 Conteo y porcentaje general de cada clasificación

Clasificación	Número de tareas	Porcentaje
Geométrica	9	30%
Aritmética	7	23.33%
Observación	7	23.33%
Análisis	4	13.33%
Observación/Aritmética	3	10%
Total	30	100%

Nota. Elaboración propia.

Como se puede ver en la tabla, las tareas asociadas con actividad de naturaleza *geométrica* predominan por muy poco sobre aquellas de naturaleza *aritmética* o de *observación*, y las actividades catalogadas como de *análisis* son las que tienen un menor

porcentaje. Sin embargo, resulta interesante poder apreciar cuántas actividades por categoría hay en cada año escolar. Como se muestra en la tabla 3, durante el primer año las actividades de naturaleza de *análisis* son las de mayor número en estos libros de texto, sin embargo, para el segundo y tercer año ya no las encontramos.

De la misma forma, se reconoce que las actividades de naturaleza *aritmética* y de *observación* aumentan con el pasar de los años escolares, siendo incluso mayor en número que las de naturaleza *geométrica* durante el tercer año (Tabla 3).

Tabla 3 *Conteo por cada año escolar en secundaria*

Clasificación	Número de tareas por año		
	Primer año	Segundo año	Tercer año
Análisis	4	0	0
Aritmética	0	4	3
Observación/Aritmética	0	2	1
Geométrica	3	5	1
Observación	1	1	5
Total	8	12	10

Nota. Elaboración propia.

A lo largo de los tres años de educación secundaria, los cuadriláteros y los procesos de construcción suelen ser guiados por actividades del tipo *aritmético* y del tipo *observación*, las cuales aumentan con el paso de los años escolares, haciendo que las actividades *geométricas* disminuyan o cambien su naturaleza geométrica. Es decir, la geometría en la escuela (*geometría escolar*) “no da la oportunidad de desarrollar un pensamiento geométrico porque está centrada en el dominio de objetos (definiciones, técnicas y algoritmos), cuya institucionalización, es predominantemente aritmética o algebraica” (Rodríguez-Ibarra y Montiel, 2021).

1.3 Planteamiento de Investigación

Considerando la revisión de literatura y el currículo mexicano podemos reconocer que los procesos de construcción de cuadriláteros han sido menos estudiados, tanto en la investigación como en los libros de texto; por ejemplo, en la revisión de las *tareas* propuestas en un libro de texto en México pudimos identificar que, con respecto a los *cuadriláteros* se suele dar preferencia a las *tareas de naturaleza aritmética u observación*, aunque se esté trabajando el eje correspondiente a geometría. Los cuestionamientos que identificamos en las *tareas* se enfocan en un nivel de *mirar los cuadriláteros* y verificar sus respuestas a través de procedimientos aritméticos. Sumado a nuestro interés de investigación notamos que muy pocas -casi nulas- actividades hacen énfasis en la construcción de cuadriláteros.

Además, gracias a la revisión de literatura reconocemos la escasez de investigación sobre los procesos de construcción de cuadriláteros en Ambientes de Geometría Dinámica (AGD), y por ende a las relaciones de dependencia que se generan entre los elementos construidos en el ambiente. En palabras de Hölzl, et al. (1994) las y los estudiantes necesitan desarrollar una conciencia sobre las relaciones de dependencia si se desea tener éxito en las tareas de construcción cuando se utilizan los AGD. No obstante, Balacheff (1996) reconoce que la mayoría de los usuarios no toman en consideración la organización secuencial para el proceso de construcción de un diagrama en el AGD, ni las relaciones de dependencia.

Desde nuestro interés de investigación, y dado el objeto de estudio, se realizará una Investigación basada en Diseño dentro de un AGD con estudiantes en formación inicial docente en matemáticas, donde llevaremos a cabo un ciclo de planeación, implementación y análisis retrospectivo.

1.4 Preguntas de Investigación

- ¿Qué prácticas geométricas se manifiestan durante el proceso de construcción de cuadriláteros en un ambiente de geometría dinámica?
- ¿Cómo influyen las relaciones de dependencia en el proceso de construcción de cuadriláteros?

1.5 Objetivos

1.5.1 Objetivo General

- Describir las prácticas geométricas que utilizan las y los estudiantes en formación inicial docente durante el proceso de construcción de cuadriláteros en un ambiente de geometría dinámica.

1.5.2 Objetivos Específicos

- Reconocer la influencia de las relaciones de dependencia en el proceso de construcción de cuadriláteros.
- Diferenciar las dificultades relacionadas al ambiente de geometría dinámica de las que implican prácticas geométricas.

En cualquier investigación se debe establecer un punto de entendimiento entre lo que queremos probar y su validez en el mundo que vivimos; para nuestro caso, las teorías juegan un papel crucial en el intento por comprender al entorno en que nos relacionamos y por entendernos plenamente en él, entendiendo que las teorías, a su vez, “tienen un alcance, una temporalidad y una localidad” (Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014, p. 92). Es decir, que estas consideraciones teóricas nos darán una forma de ver, entender y analizar el fenómeno que se quiera estudiar.

Desde este trabajo de investigación nos situamos en la perspectiva de la Teoría Socioepistemológica (TS), dado el interés de identificar prácticas de tipo geométricas, y por este mismo enfoque de prácticas retomamos el Modelo de Trabajo Geométrico (MTG) propuesto por Rubio-Pizzorno (2018) creado desde una problematización general de la geometría. Sumado a esto -y por nuestro objeto de estudio- estaremos considerando las características de los AGD.

2.1 Teoría Socioepistemológica

La TS estudia la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional (Cantoral, 2013), que estima a la matemática como una producción humana de forma cultural, histórica e institucional, por lo que el saber puede ser popular, técnico y culto. Para develar la construcción del conocimiento se utiliza el *uso del conocimiento matemático*, el cual entendemos como “las formas en la que es empleada o adaptada determinada noción en un contexto específico” (Cabañas, 2011, p. 75).

Gracias a que el *uso del conocimiento matemático* se da en un ejercicio de **prácticas**, se tiene la oportunidad de emerger significados que se utilizan en situaciones nuevas y, dado su carácter social, dicho conocimiento matemático se resignifica (Torres-Corrales y Montiel Espinosa, 2021). Dado los objetivos de la presente investigación en el siguiente apartado profundizaremos más en torno a la construcción de significado (matemático).

2.1.1 Confrontación y Resignificación

Para la TS el *saber* se construye, se reconstruye, se significa y se resignifica. Para lograr que las y los estudiantes vivan momentos de resignificación es necesario que primero experimenten un momento de **confrontación**, en donde, a partir de una tarea específica, los significados

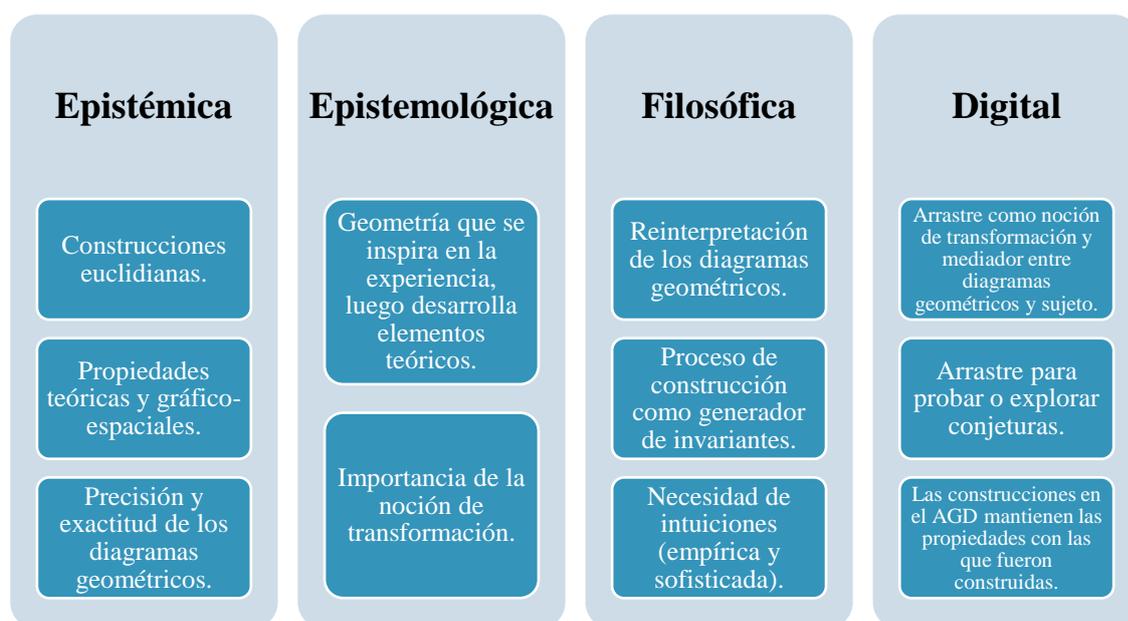
matemáticos que tienen entre en conflicto o se muestren insuficientes para resolver dicha tarea. Ese conflicto, detonará que se deban utilizar herramientas, argumentos, discursos y entornos socioculturales que permitirán la emergencia de un saber en forma de resignificación (Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014).

La **resignificación** se considera un principio de la teoría, se asume que quien ha construido un significado lo pone en funcionamiento en tareas y contextos nuevos, en el marco de nuevas prácticas o la adaptación de sus prácticas previas, lo que provocará la confrontación y un enriquecimiento de los significados iniciales. Esta continua dinámica es lo que desde la TS se conoce como *resignificación* (Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014). Ambos momentos se sitúan en un ejercicio de prácticas, las cuales se consideran contextualizadas y organizadas; para este enfoque, y dada la geometría como parte esencial de nuestro objeto de estudio, tomaremos el Modelo de Trabajo Geométrico (Rubio-Pizzorno, 2018), el cual se describe a continuación.

2.2 Modelo de Trabajo Geométrico

A través de un estudio sistémico de la naturaleza de la geometría se plantea un Modelo de Trabajo Geométrico (MTG) que considera diferentes esferas de conocimiento (figura 9). Su autor, Rubio-Pizzorno (2018), sintetiza los resultados de las naturalezas con el fin de realizar una articulación entre ellas, dichas naturalezas se describen a continuación:

Figura 9 *Naturalezas de la Geometría (Rubio-Pizzorno, 2018)*



Nota. Adaptado de Rubio-Pizzorno (2018)

Gracias a los elementos mencionados anteriormente, se pueden identificar convergencias entre dos naturalezas:

- **Aspecto epistémico-epistemológico (AeE):** Aspecto que marca la relación dialéctica entre lo concreto y lo teórico, lo cual ha sido propio de la geometría a través de la historia; dicha relación la identificamos entre las propiedades teóricas y gráfico-espaciales⁶. En los AGD se reconoce que un elemento crucial será el arrastre, ya que será puente entre la actividad geométrica concreta y teórica, dando la oportunidad de manipular objetos geométricos.
- **Aspecto epistemológico-filosófico (AEF):** Se da un cambio de interpretación de los diagramas geométricos, es decir, el reconocimiento de invariantes como propiedades geométricas. En los AGD, su dinamismo se da gracias al arrastre, el cual permite llevar a cabo la transformación geométrica.
- **Aspecto epistémico-filosófico (AeF):** Los diagramas entrelazan aspectos teóricos y concretos en su proceso de construcción estableciendo verdades geométricas, dada la forma en que se utilizan los postulados declarados en los *Elementos* de Euclides y siguiente un adecuado procedimiento. Para los AGD, las construcciones manifestarán las propiedades que le son atribuidas a partir del proceso de construcción y las propiedades teóricas que son propias de la geometría euclidiana; es a través del arrastre que es posible identificar las invariantes para probar o buscar propiedades geométricas.

A partir de la convergencia de las naturalezas identificadas es posible constituir un MTG, el cual se muestra en el siguiente apartado.

2.2.1 Caracterización del MTG

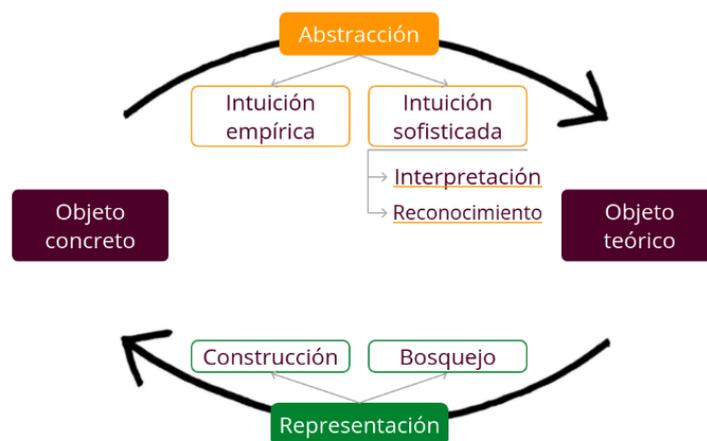
Con lo explicado anteriormente se plantea un modelo general para el trabajo geométrico, el cual toma a los objetos concretos y objetos teóricos como polos del modelo, y para lograr una

⁶Laborde (2005) define a las propiedades teóricas como aquellas con referente a la teoría geométrica, incluidos conjeturas, teoremas y demostraciones; mientras que las propiedades gráfico-espaciales son los aspectos perceptuales, analizados como fenómeno visual.

adecuada transición propone dos tipos de prácticas: práctica de abstracción y práctica de representación.

Por un lado, en la *práctica de abstracción* se consideran los tipos de *intuición empírica*, la cual identifica las propiedades gráfico-espaciales; y la *intuición sofisticada*, la cual identifica propiedades teóricas -o esencias- por medio de la **interpretación** de símbolos o el **reconocimiento** de patrones. Por otro lado, la *práctica de representación* identifica dos tipos de representaciones, *bosquejo* como un diagrama geométrico con escasa precisión en su proceso de construcción; y la *construcción* que es un diagrama con un grado de precisión suficiente para reflejar las propiedades geométricas (figura 10).

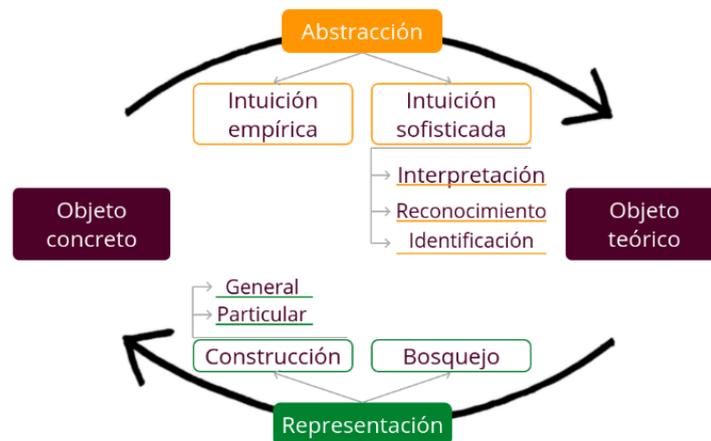
Figura 10 Prácticas de abstracción y representación



Nota. Recuperado de Rubio-Pizzorno (2018, p. 102)

Gracias al AEF se permite reconocer el carácter dinámico de la geometría por medio del par transformación-invariantes. Con este resultado se robustece el esquema de trabajo geométrico presentado arriba, ampliándolo de la siguiente manera; para la *práctica de abstracción* se refleja el carácter dinámico de la geometría en la *intuición sofisticada* a través de identificar propiedades geométricas como invariantes que se manifiestan por la aplicación de transformación. Por su parte en la *práctica de representación* se hace una reinterpretación de la construcción de diagramas como un proceso de generación de invariantes (figura 11).

Figura 11 Trabajo geométrico considerando el carácter dinámico



Nota. Recuperado de Rubio-Pizzorno (2018, p. 103)

De esta manera el MTG podrá adaptarse a nuestro objeto de investigación dado que consideramos el proceso de construcción de un cuadrilátero, este pasará de ser un objeto concreto al objeto teórico por las *prácticas de abstracción y de representación*, tomando en cuenta que las y los estudiantes en formación inicial docente podrán hacer descripciones por medio de la *intuición empírica y sofisticada*, a forma de exploración del diagrama; además que, dado el objeto de estudio, los *bosquejos y construcciones* serán una pieza fundamental para dar cuenta de las nociones geométricas utilizadas por las y los estudiantes, así como las reflexiones que se den a partir del estudio de las relaciones de dependencia, mismas a las que también ponemos el foco en nuestra investigación.

2.3 La idoneidad de los AGD para los procesos de construcción

Desde la década de 1980 los *softwares* de geometría dinámica han tenido presencia en los ámbitos didácticos y de investigación en la educación de la geometría; dichos programas computacionales poseen ciertas características que los hacen interesantes para los ambientes escolares, entre ellos: objetos primitivos (puntos, líneas, círculos, etc.), herramientas básicas (recta paralela, perpendicular, bisectriz, etc.), así como la posibilidad de interactuar entre ellos por medio de transformaciones (Rubio-Pizzorno, 2018).

Algunos de ellos, denominados Ambientes de Geometría Dinámica (AGD) corresponden a un tipo de software constructivo funcional, es decir, que las construcciones geométricas se deberán expresar en términos de construcciones secuenciales (Sinclair et al., 2016). Con ello, se puede demostrar que las construcciones en estos ambientes mantienen todas

las propiedades con las que fueron construidas. Durante el proceso de construcción, la organización secuencial producirá una jerarquía de dependencias, ya que cada objeto de la construcción depende de algo creado anteriormente; esta relación de dependencia tiene que ser identificada y entendida por las y los estudiantes, ya que, a su vez, está conectada con la noción de *robustez*⁷ de una figura bajo el arrastre (Jones, 2001; Hölzl, et al., 1994).

A propósito de la idea de robustez, se reconoce al arrastre como medio para probar y explorar propiedades, es decir, para comprobar si una construcción tiene las propiedades deseadas y reconocer nuevas propiedades (Hölzl, 2001). Esto nos ayuda a identificar las invariantes en el AGD por medio de dos formas a través del arrastre:

1. Poniendo a prueba una construcción realizada y verificando si mantiene invariantes las propiedades definidas.
2. Explorando una construcción para conjeturar sus invariantes como su proceso de construcción.

Por lo mencionado anteriormente, elegimos trabajar con GeoGebra, el cual es un software de matemáticas dinámicas, reúne geometría, álgebra, estadística y cálculo, por lo que puede ser utilizado en otras disciplinas; además es un software de libre acceso, y compatible con diversos dispositivos y plataformas como Android e iOS.

Las consideraciones teóricas previamente presentadas contribuyeron al refinamiento de las preguntas y objetivos de investigación, planteamientos que se desarrollan en la siguiente sección.

2.4 Refinamiento de las preguntas de investigación

- ¿Qué tipo de prácticas geométricas se ven involucradas durante el proceso de construcción de cuadriláteros en un Ambiente de Geometría Dinámica?
- ¿Cómo se utilizan las relaciones de dependencia para llevar a cabo una construcción de cuadriláteros dentro de un Ambiente de Geometría Dinámica?

⁷ Por robustez se entiende como *pasar la prueba del arrastre*, es decir “la figura debe construirse de tal manera que sea consistente con la teoría geométrica” (Jones, 2001, p. 58)

- ¿Qué momentos de confrontación viven los estudiantes en formación inicial al momento de construir un cuadrilátero en un Ambiente de Geometría Dinámica, cuando se consideran las características de este?

2.5 Refinamiento de objetivos

2.5.1 Objetivo General

- Describir, mediante el Modelo de Trabajo Geométrico, las prácticas geométricas de los estudiantes en formación inicial docente durante la construcción de cuadriláteros en un Ambiente de Geometría Dinámica, considerando las relaciones de dependencia.

2.5.2 Objetivos Específicos

- Identificar qué tipo de prácticas geométricas realizan las y los estudiantes cuando construyen cuadriláteros dentro del Ambiente de Geometría Dinámica.
- Reconocer la influencia de las relaciones de dependencia para llevar a cabo el proceso de construcción de cuadriláteros.
- Describir los momentos de confrontación y resignificación que viven las y los estudiantes en formación inicial docente durante el proceso de construcción de cuadriláteros.

III. CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS

En este capítulo se presentan las consideraciones teóricas y metodológicas que guiaron este trabajo de investigación en la producción, organización y análisis de datos, se profundizará principalmente en las justificaciones y fundamentaciones de la propuesta de diseño que se lleva a cabo. Se ha dividido este capítulo en dos partes, la primera sintetiza de forma general la metodología utilizada, y la segunda detalla cada fase a la luz de la investigación.

3.1 Metodología

Para llevar a cabo este proyecto estaremos trabajando de manera colaborativa con el proyecto de investigación de López-Ortiz (2024), quien se interesa por el estudio de la naturaleza de las interacciones matemáticas –emanadas de la intervención didáctica del presente proyecto– en los Ambientes Virtuales de Aprendizaje utilizados para la experiencia didáctica. Por nuestra parte centraremos el estudio en la confrontación y resignificación geométrica en el proceso de construcción de cuadriláteros en el contexto del Ambiente de Geometría Dinámica, priorizando el rol de las relaciones de dependencia.

3.1.1 Herramientas teóricas para el análisis

Dado nuestro posicionamiento teórico, consideraremos los momentos de **confrontación** como aquellas situaciones donde el significado no sea el suficiente para responder a las tareas geométricas que se proponen (las cuales se describen más adelante en este apartado), y los momentos de **resignificación** se identificarán después de una confrontación, todo ello en torno al proceso de construcción de cuadriláteros en ambientes de geometría dinámica.

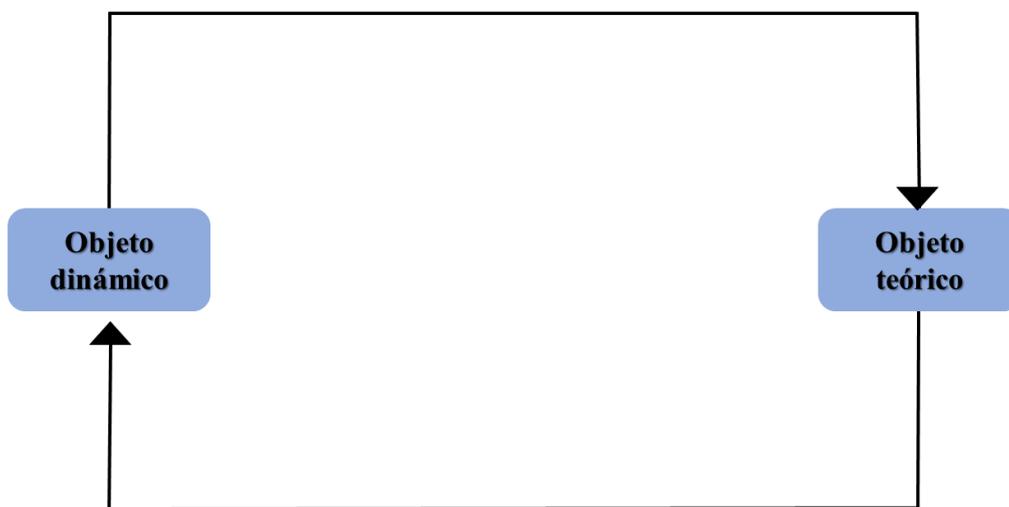
Para organizar prácticas mediante el Modelo de Trabajo Geométrico (MTG) nos preguntaremos: ¿qué hace?, ¿cómo lo hace?, ¿con qué lo hace?, pero para propósitos del análisis se proponen modificaciones a dicho modelo, que se abordan en el siguiente apartado.

De igual forma, por el objeto de estudio y el ambiente en el que se llevará a cabo, durante la identificación de prácticas geométricas, las características propias del Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) estarán presentes en el discurso oral y escrito de las y los estudiantes, pues dichas características juegan un rol fundamental en el proceso de construcción de cuadriláteros.

Precisiones Teóricas

Dado que estaremos utilizando el Modelo de Trabajo de Geométrico (MTG) es necesario realizar algunas precisiones dado nuestro objeto de estudio y el ambiente en el que está inmerso; con estas adecuaciones buscamos tener un mejor y más adecuado análisis de los datos. La primera precisión que se propone es cambiar el *objeto concreto* por un *objeto dinámico* (Figura 12), el objetivo de dicha precisión es dotar al *objeto* con un comportamiento dinámico, lo que es posible gracias al AGD.

Figura 12 *Del objeto dinámico al teórico*



Nota. Adaptado de Rubio-Pizzorno (2018)

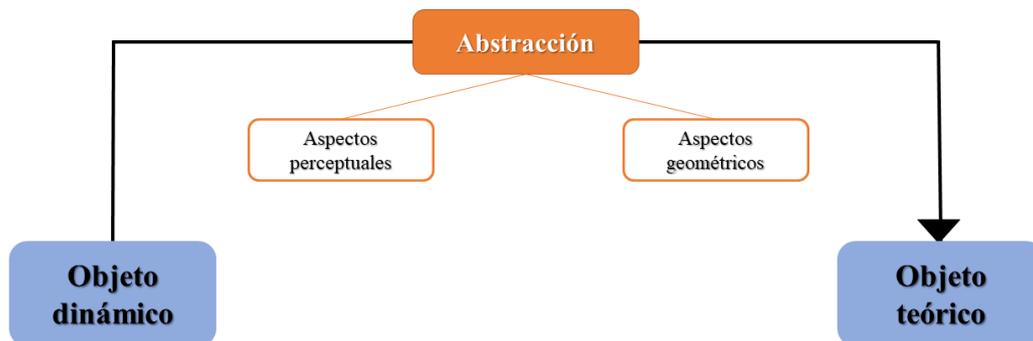
Entonces, por *objeto dinámico* entendemos a un objeto que expresa todos los referentes teóricos y características geométricas, el cual tendrá un carácter dinámico debido al ambiente en el que está inmerso, y a su vez, la construcción del objeto deberá pasar por la prueba del arrastre; mientras que el *objeto teórico* lo entendemos como un objeto que expresa todos los referentes teóricos, invariantes y características geométricas propias del objeto.

Para lograr transitar de un objeto a otro se deberá pasar por un proceso de abstracción, donde se obtenga información perceptual y geométrica por medio del arrastre; también deberá transitar por una práctica de representación donde se busca dotar de propiedades teóricas al objeto.

Práctica de Abstracción

Entendemos a la **abstracción** como la práctica donde se obtiene información directamente de un objeto dinámico (figura 13), a través del arrastre se pueden observar los aspectos perceptuales, así como inferir los aspectos geométricos, en tanto sus relaciones de dependencia como sus características. Es importante destacar que la manipulación (arrastre) nos ayudará a identificar propiedades geométricas para llegar al objeto teórico.

Figura 13 Práctica de Abstracción



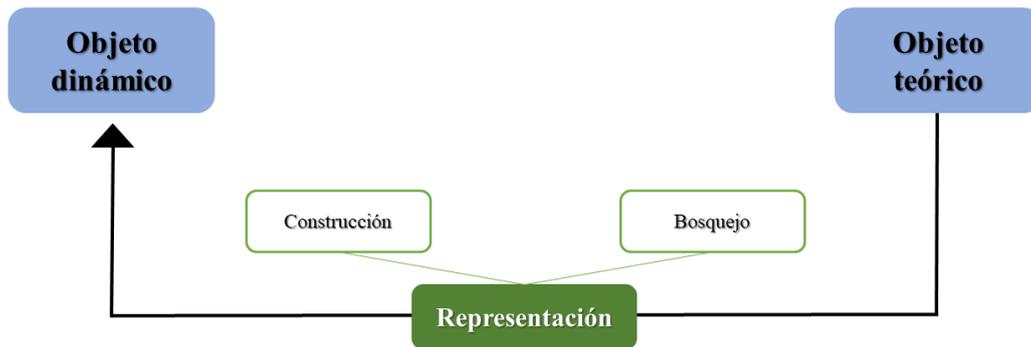
Nota. Adaptación de Rubio-Pizzorno (2018)

Por otra parte, definimos a los *aspectos perceptuales* como las propiedades gráfico-espaciales, es decir, todos aquellos que pueden ser analizados como fenómeno visual, de movimiento o kinestésicos; son objetos en los cuales es posible realizar acciones y se pueden expresar ideas, interpretaciones, opiniones y juicios. Mientras que los *aspectos geométricos* serán todos aquellos referentes teóricos incluidos en la teoría geométrica, considerando relaciones, operaciones, propiedades invariantes, conjeturas, teoremas y demostraciones (Laborde, 2005).

Práctica de representación

En la práctica de representación (Figura 14), mantenemos el concepto del autor de entender a la **representación** como la práctica para dotar propiedades teóricas a los objetos dinámicos, ya sea por el uso de símbolos que asignan significados geométricos o a través de un preciso y adecuado proceso de construcción (Rubio-Pizzorno, 2018); sin embargo, durante la transición es necesario realizar las precisiones de la *construcción* y el *bosquejo* dado que estamos trabajando en un AGD.

Figura 14 *Práctica de Representación*



Nota. Elaborado a partir de Rubio-Pizzorno (2018)

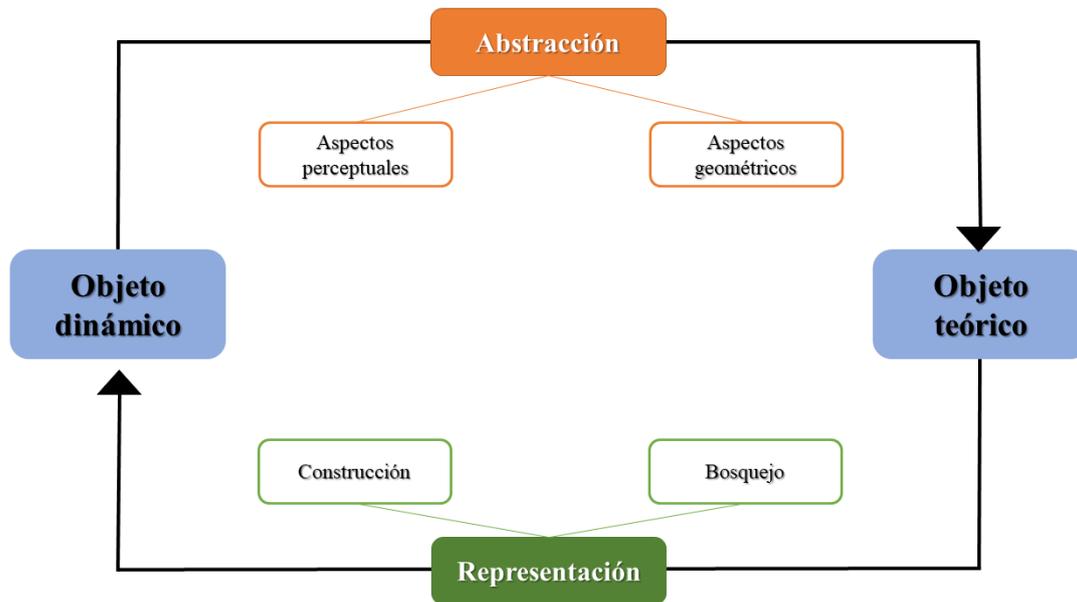
Por *construcción* entenderemos a los diagramas geométricos con un grado de precisión suficiente en su proceso de construcción para reflejar las propiedades geométricas, se espera que el diagrama pase la prueba del arrastre, es decir, que mantenga todas las propiedades con las que fue construido a pesar de la manipulación. Por su parte, entendemos como *bosquejo* al diagrama geométrico con escasa precisión en su proceso de producción, refleja propiedades geométricas de manera vaga o simplemente no refleja ninguna, además de necesitar símbolos, se espera que el *bosquejo* realizado no pase la prueba del arrastre.

En esta práctica esperamos ver reflejadas de una mejor manera las características del AGD, más específicamente las relaciones de dependencia, las cuales consideramos fundamentales para lograr un adecuado proceso de construcción.

Modelo de Trabajo Geométrico para la construcción de cuadriláteros en AGD

Dada las precisiones mencionadas anteriormente, el modelo que utilizaremos para este proyecto de investigación queda de la siguiente manera (Figura 15), donde se consideran los aspectos propios del AGD y los aspectos geométricos que implican el proceso de construcción de cuadriláteros.

Figura 15 Nueva propuesta de MTG

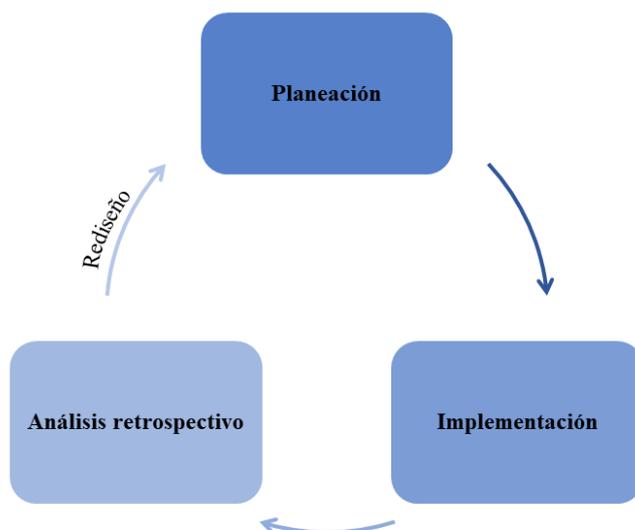


Para utilizar este modelo como herramienta de análisis de las producciones de las y los estudiantes, se realizará una investigación de diseño, donde se propongan tareas geométricas en torno al proceso de construcción de cuadriláteros en AGD. En los siguientes apartados se detalle a profundidad los aspectos realizados a la investigación de diseño y al método utilizado en esta investigación.

3.1.2 Investigación de Diseño

La Investigación de Diseño (ID) tiene como objetivo “analizar el aprendizaje en contexto mediante el diseño y estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje” (Molina et al., 2011). Este proceso de investigación se realiza a través de ciclos continuos, los cuales se componen de tres fases: planeación, implementación y análisis retrospectivo (figura 16); durante este proceso se permite hacer, probar y refinar hipótesis sobre el fenómeno de estudio; dichas hipótesis se basan en las evidencias teóricas rescatadas de la revisión de literatura, y en la evidencia que se va obteniendo por medio del análisis retrospectivo.

Figura 16 Ciclos de la Investigación de Diseño



Nota. Elaboración propia.

Una vez que se realiza el análisis retrospectivo, se deberá llevar a cabo un rediseño con las observaciones que se lograron encontrar en la implementación, así nuevamente se inicia el ciclo de la investigación de diseño. Para nuestro trabajo de investigación solo haremos un ciclo de planeación, implementación y análisis, antecedido por un pilotaje con estudiantes universitarios que trabajaron solo las tareas geométricas centrales de la investigación –la puesta en escena incluye una ambientación a la modalidad a distancia en línea–, pilotaje que permitió refinar la redacción de las instrucciones y el diseño de las tareas geométricas.

3.2 Desarrollo de la Investigación de Diseño

Como se ha mencionado anteriormente, esta investigación lleva a cabo un ciclo de la ID y a continuación se describen sus fases.

3.2.1 Descripción del escenario de investigación

El espacio colaborativo donde se llevó a cabo el presente proyecto y el de López-Ortiz (2024) se llamó **“Prácticas Geométricas en Ambientes Virtuales de Aprendizaje”**, el cual se configuró como un espacio donde abordar el contenido matemático de interés –en este caso, el proceso de construcción de cuadriláteros en AGD–enmarcado en una experiencia de participación en investigación didáctica dirigida a estudiantes en formación inicial docente en matemáticas. En este sentido, al finalizar la implementación de las tareas se incluye una sesión donde se comparten las características de los trabajos de investigación, con el objetivo de que

las y los estudiantes participantes tengan conocimiento de cómo serán utilizados sus datos –en tanto a lo trabajado en el diseño–, y también tengan un acercamiento a la investigación en Matemática Educativa.

3.2.2 Fase de Planeación

Durante esta primera fase, se tomaron decisiones tales como el tipo de participantes con los que estaríamos trabajando y se elaboró un diseño en GeoGebra Classroom y Moodle donde estarán trabajando las y los estudiantes. En esta investigación se reportará todo lo relacionado a las tareas geométricas y sus intencionalidades, sin embargo, con el fin de realizar una toma de datos de manera colaborativa se consideran aspectos relacionados a la educación a distancia en línea –que pueden consultarse en la investigación de López-Ortiz (2024).

Participantes de la investigación

La formación de profesores de matemáticas adquiere gran importancia con la entrada del siglo XXI debido a los procesos de aprendizaje en el aula, mismos que se establecen como áreas de prácticas educativas y de investigación (Sfard 2004 en Prieto y Arredondo, 2021). Para esta investigación buscamos que el perfil de nuestra población cuente con las siguientes características:

- Estudiantes en formación inicial docente en matemáticas, que hayan cursado alguna asignatura en línea.
- Que tengan interés por la investigación en Matemática Educativa, así como el uso de los Ambientes de Geometría Dinámica.

Dichas estudiantes participaron de forma voluntaria a través de una invitación; para tener un pre-registro se les compartió un formulario de Google⁸, donde se retomaron sus correos para tener comunicación. Por otra parte, las responsables de llevar a cabo esta experiencia son: dos estudiantes de la maestría en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa, del Cinvestav-IPN, y una investigadora titular del mismo programa.

⁸ Para consultar el formulario de registro: <https://forms.gle/Fs96ybxff9pAEaCV6>

3.2.2.1 Estructura del diseño

Para elaborar este diseño se optó por realizar una secuencia de tareas divididas en tres grandes momentos: Introducción, Tareas Geométricas y la Experiencia Didáctica y la Investigación; a continuación, se describe cada uno con sus respectivas tareas, pero abordamos con mayor énfasis las tareas geométricas que se estudian en nuestro objeto de interés.

1. Introducción

Este primer momento tiene dos objetivos:

1. Conocer a las y los estudiantes de la experiencia.
2. Familiarizar a las y los estudiantes con las plataformas de trabajo, en este caso Moodle y GeoGebra Classroom.

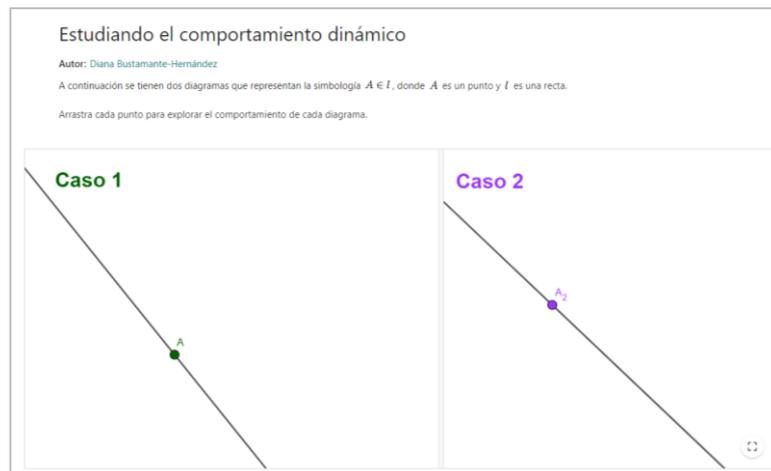
Para lograr el primer objetivo se proponen dos tareas (*1.1 Encuesta del perfil del participante*⁹ y *1.3 Presentación*) en las cuales se busca tener un perfil más amplio del estudiante, así como conocerlo de forma más personal, en tanto sus intereses académicos y personales. Mientras que, para el segundo objetivo se realizará una sesión sincrónica (*1.2 Bienvenida e introducción*) donde se les contará a las estudiantes los aspectos más relevantes a considerar en la plataforma de Moodle y una breve introducción a GeoGebra Classroom.

Sin embargo, para profundizar más en el trabajo con GeoGebra se propone una serie de tareas (*1.4 Introducción a GeoGebra*¹⁰) en las cuales se propone familiarizar al estudiante con la plataforma, desde cómo ingresar y utilizar GeoGebra Classroom, el funcionamiento particular de las herramientas del GeoGebra Clásico 6 y también la forma de trabajo del GeoGebra Notas. En la figura 17 se muestra un ejemplo de las tareas y las preguntas propuestas.

⁹ Retomado de Farfán y Simón (2016) e Hinojos y Torres-Corrales (2018).

¹⁰ Para consultar las actividades, ingrese a <https://www.geogebra.org/m/znj85tn3>

Figura 17 Ejemplo de tareas en el momento de Introducción



¿Los diagramas se comportan de la misma manera?
Marca solo la respuesta que corresponda, ignorando la instrucción predefinida por GeoGebra.

Marca todas las que correspondan

A Sí

B No

¿Cómo se comportan los puntos en cada caso?

Punto A caso 1:

Ingresa aquí tu respuesta...

Punto A caso 2:

Ingresa aquí tu respuesta...

¿Cómo se comportan las rectas en cada caso?

Recta l caso 1:

Ingresa aquí tu respuesta...

Recta l caso 2:

Ingresa aquí tu respuesta...

Nota. Para las actividades del momento de introducción

Con esta tarea pretendemos aclarar dudas que se tengan acerca de la plataforma de GeoGebra, en tanto sus herramientas como características, dado que, en los pilotajes realizados se presentaban algunas dificultades por parte de los participantes al tratar de recordar para qué utilizar cada herramienta. En complemento a este momento, para el caso en que existan más dudas, se elaboraron manuales con la información de cómo utilizar GeoGebra Clásico 6, GeoGebra Classroom y GeoGebra Notas; con el objetivo de tener una transición más fluida al

siguiente momento del diseño, el de las tareas geométricas, que concentrará los datos de nuestro estudio.

2. Tareas Geométricas

En particular para la actividad geométrica se diseñan tareas dentro de un Ambiente de Geometría Dinámica (AGD)¹¹. Por sus características y su libre acceso, tanto para estudiantes como para docentes, el ambiente a utilizar es GeoGebra -en específico el GeoGebra Clásico 6- y sus aplicaciones tales como *GeoGebra Classroom*, de la cual describimos sus ventajas a mayor profundidad en el siguiente apartado.

El diseño de las tareas geométricas tiene como objetivo identificar las nociones geométricas que presentan las y los estudiantes en formación inicial docente durante el proceso de construcción de cuadriláteros en un AGD, reconociendo elementos del ambiente tales como las relaciones de dependencia, orden de construcción y el comportamiento dinámico. Para realizar este tipo de tareas se organizaron tres grandes momentos: Descubriendo el polígono, estudiando el polígono y ¿cómo se construye el polígono? A continuación, nos centramos en cada una de las tareas que componen cada momento.

2.1 Descubriendo el polígono

Este primer momento nos enfocamos en la exploración y el estudio del comportamiento dinámico de un cuadrilátero y en identificar los diferentes comportamientos a través de una comparación de dos cuadrados; para organizar ambos objetivos dividimos este primer momento en dos tareas.

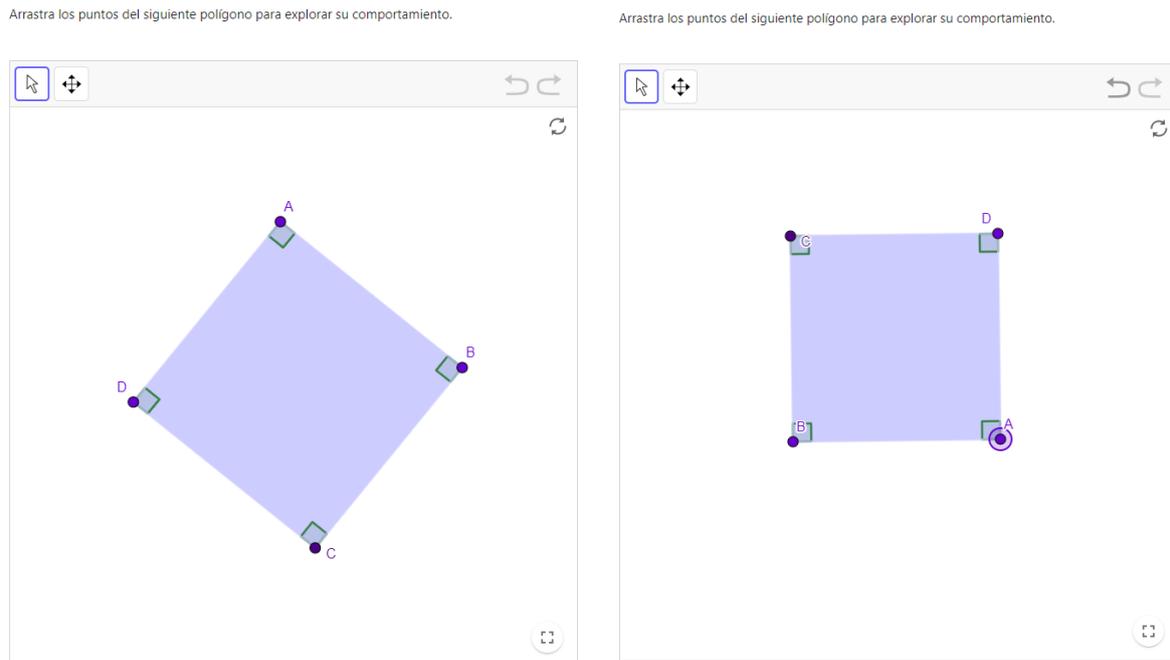
2.1.1 ¿Cómo es el polígono?

En esta primera tarea tenemos como objetivo estudiar el comportamiento dinámico del polígono e identificar aquellos elementos que pueden arrastrarse y aquellos que no (figura 18). Goldenberg y Cuoco (1998) reconocen al arrastre como una herramienta que nos permite manipular objetos geométricos y aplicar transformaciones; por ello, las preguntas se centran en explorar qué comportamientos se tienen al manipular los vértices que son posibles de arrastrar, y de igual forma hacer inferencias de por qué ciertos puntos se pueden arrastrar mientras que otros no.

¹¹ Para ver las tareas geométricas consultar <https://www.geogebra.org/m/hthbs5tc>

Al finalizar esta primera tarea se debe concluir qué tipo de polígono es el que se estudió, y se espera que, además del comportamiento dinámico, se consideren aspectos perceptuales y geométricos. En el applet se consideran los vértices, lados y ángulos, a propósito de que Usiskin y Griffin (2008) mencionan que las condiciones que determinan las definiciones de cuadriláteros se basan en sus propiedades –esto es, los lados, ángulos, diagonales, simetría, etc.

Figura 18 Ejemplo de arrastre momento 2.1

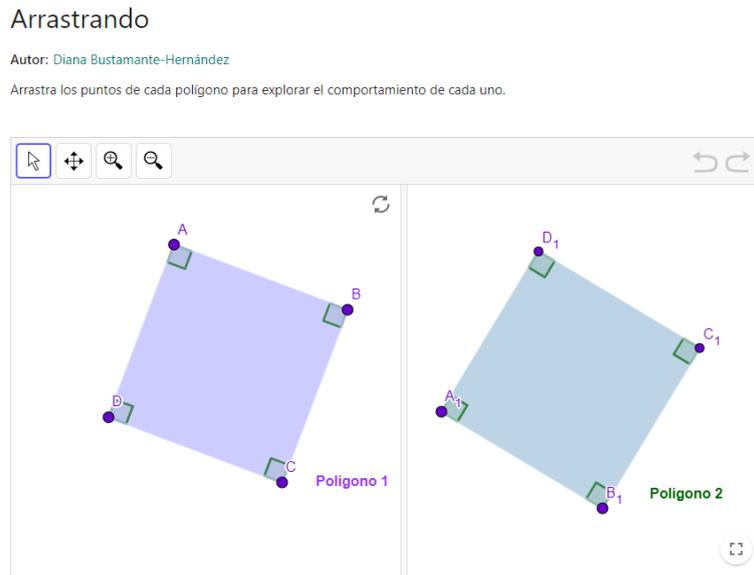


Nota. En la imagen de la izquierda tenemos el polígono sin efectos del arrastre, mientras que en la derecha podemos encontrar el polígono ya manipulado,

2.1.2 Arrastrando

Para esta segunda tarea, los estudiantes deben comparar el comportamiento dinámico de dos polígonos y reflexionar por qué sus comportamientos no son iguales (figura 19). Nos basamos en Hölzl (2001), quien reconoce que *arrastrar* permite explorar comportamientos o probar conjeturas; por lo que hacemos preguntas como: ¿cuáles son las diferencias que encuentras entre ambos polígonos?, ¿cuáles son las similitudes que encuentras entre ambos polígonos?, ¿por qué el punto D1 tiene ese comportamiento en especial?

Figura 19 Applet de la tarea 2.1.2



Buscamos que, con la exploración y comparación de ambos polígonos, el estudiante desarrolle una noción del orden de construcción que tienen ambos polígonos, así como sus relaciones de dependencia, mismas que se trabajarán de manera central en las siguientes tareas.

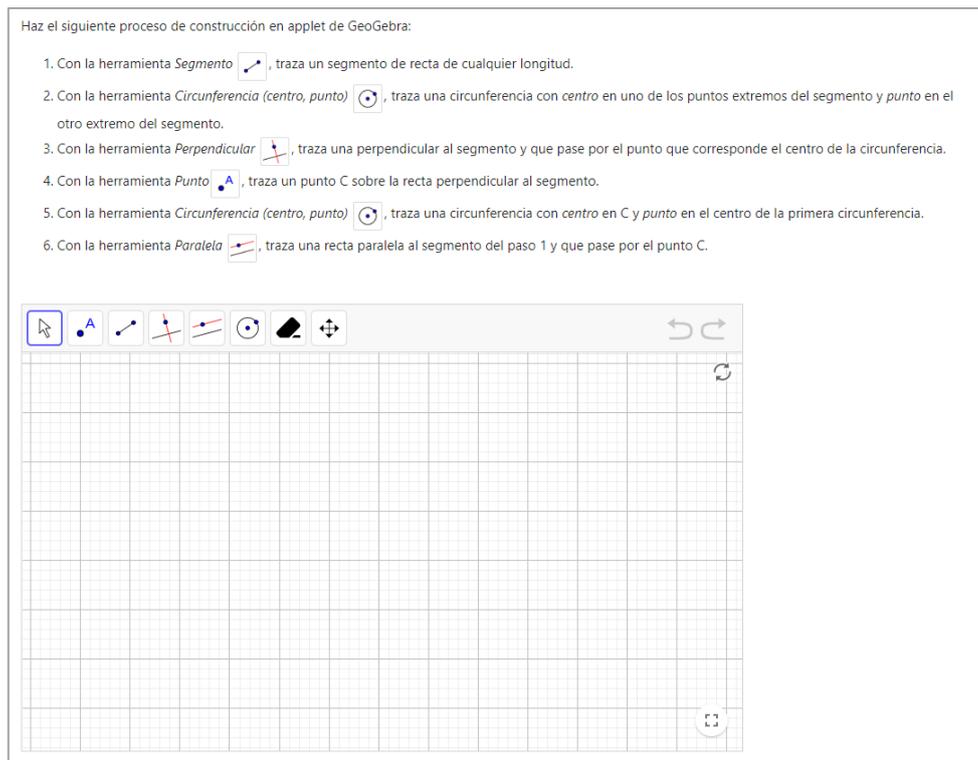
2.2 Estudiando el polígono

Este segundo momento tiene como objetivo reconocer las relaciones de dependencia de un diagrama por medio de un proceso de construcción; para lo cual dividimos este bloque en dos tareas, que se describen a continuación.

2.2.1 Explorando

La primera tarea de este momento pretende que se reconozcan las relaciones de dependencia al construir un diagrama en un AGD. Aunado a esto, también se busca el trabajo con el orden de construcción que debe seguir un diagrama, por lo que en una primera parte se da una secuencia de construcción (figura 20), para después guiar al estudiante por medio de preguntas sobre la importancia de las relaciones de dependencia que se generan al construir en un AGD. Esto porque, en palabras de Hölzl, et al. (1984), para realizar una tarea de construcción que pase la *prueba del arrastre* se debe reconocer las relaciones de dependencia.

Figura 20 *Proceso de construcción*



Las indicaciones que se plantean para reconocer las relaciones de dependencia tienen que ver con una secuencia de identificar un elemento en nuestra construcción (punto, recta, circunferencia), borrarlo y observar lo que sucede (figura 21); una vez realizada esta secuencia se le pregunta al estudiante *¿qué elementos se borraron también? ¿qué elementos se mantuvieron?* Para el último momento (proceso con la perpendicular) se plantea al estudiante responder las preguntas antes de comprobarlo con el applet para verificar si la noción de dependencia entre los objetos está siendo clara o todavía se debe profundizar en ello.

Al realizar esta reflexión con distintos elementos de la construcción concluimos con la pregunta *¿a qué se debe que ciertos elementos se eliminen cuando borras un elemento en específico?*, donde esperamos surjan las nociones de las relaciones de dependencia o bien sinónimos de dependencia.

Figura 21 Orientación hacia las relaciones de dependencia

Borra el punto B y observa lo que sucede.

¿Qué elementos se borraron también?

¿Qué elementos se mantuvieron?

⚠ Antes de continuar, regresa al applet de GeoGebra y vuelve a agregar los elementos borrados ⚠

- Recuerda que puedes utilizar la opción de *deshacer* (flecha hacia atrás ⇐ en la parte superior derecha).

Borra cualquier circunferencia y observa lo que sucede.

¿Qué elementos se borraron también?

¿Qué elementos se mantuvieron?

⚠ Antes de continuar, regresa al applet de GeoGebra y vuelve a agregar los elementos borrados ⚠

- Recuerda que puedes utilizar la opción de *deshacer* (flecha hacia atrás ⇐ en la parte superior derecha).

Es importante destacar que el plasmar las indicaciones, de manera que sigan un orden de construcción, está fundamentado en Balacheff (1996), donde reconoce que la mayoría de los usuarios de los AGD no consideran el orden de construcción. Para promover la importancia de esta característica es que se agrega como componente en ambas tareas de este bloque.

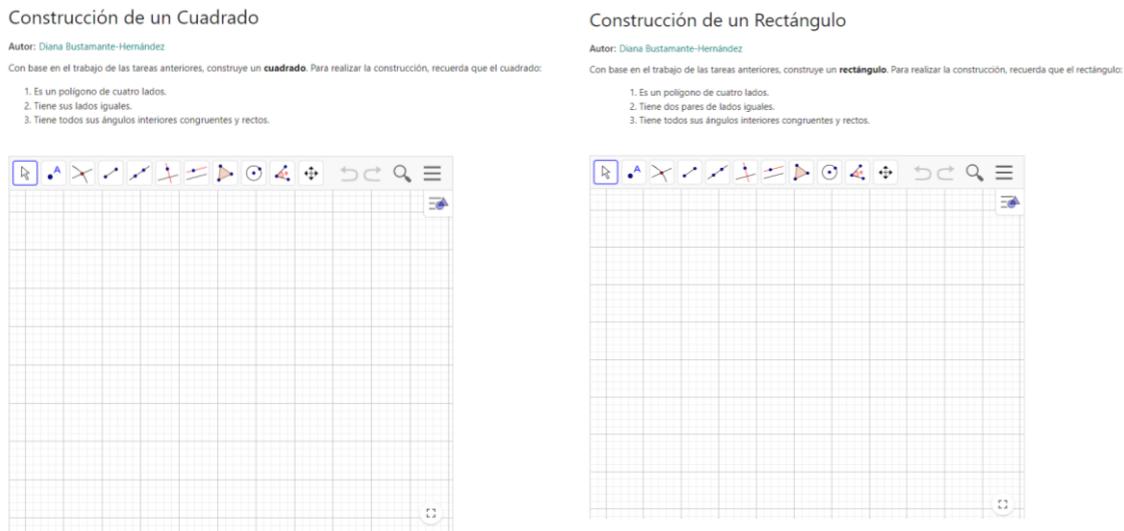
2.2.2 Estudiando la exploración

Para el cierre de este momento se retoma nuevamente la secuencia de construcción de la tarea pasada (2.2.1 *Explorando*) pero ahora buscamos que las y los estudiantes identifiquen las relaciones de dependencia en la construcción de un diagrama. Dichas relaciones se deben identificar en todos los elementos construidos (rectas, puntos, circunferencias) para dar paso a la construcción de la figura

2.3 ¿Cómo se construye el polígono?

Para este tercer y último momento se tiene como objetivo construir dos cuadriláteros (cuadrado y rectángulo) considerando las relaciones de dependencia y el orden secuencial, las cuales previamente se estudiaron y reflexionaron en el momento 2.2 *Estudiando el polígono*. En ambas tareas, primero se les dan propiedades geométricas de los cuadriláteros a construir, un applet y preguntas relacionadas sobre el proceso de construcción, las relaciones de dependencia, así como las propiedades invariantes que mantiene los cuadriláteros al arrastrar sus vértices (figura 22).

Figura 22 *Applets para construcción*



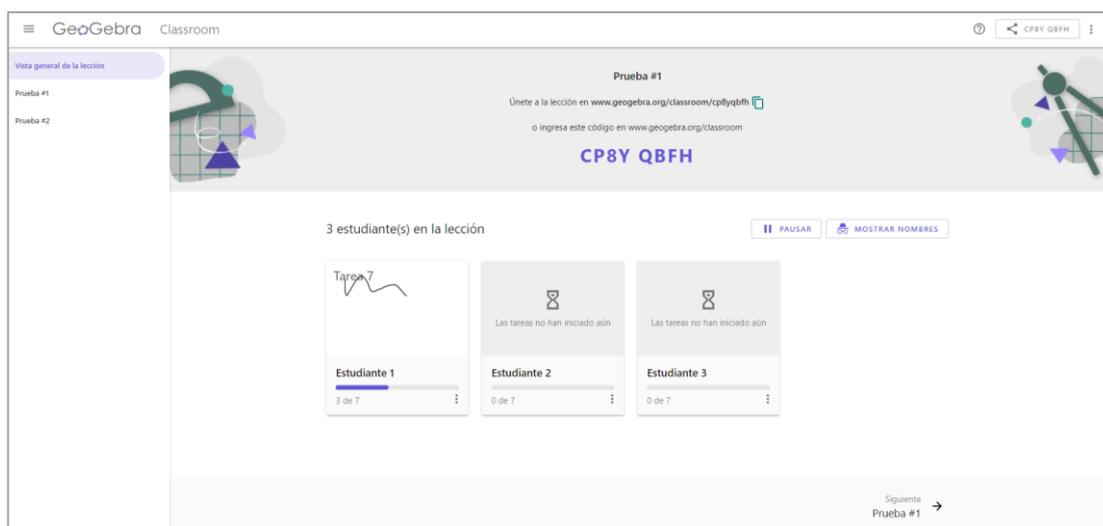
Se espera que, durante esta tarea -y guiados por las preguntas-, las y los estudiantes reconozcan que las construcciones en AGD mantienen todas las propiedades con las cuales fue construida la figura o el polígono (como plantea Leung, 2015).

Consideraciones de GeoGebra Classroom

Como se pudo observar las tareas geométricas están inmersas en un AGD, en específico utilizamos GeoGebra dado que es gratuito para sus usuarios y se puede trabajar tanto en computadoras como en dispositivos móviles -incluidas tabletas-. Sin embargo, nos centramos en su aplicación de **GeoGebra Classroom**, ya que permite ver en tiempo real el progreso de nuestros estudiantes cuando trabajan una tarea en particular; además organiza nuestro trabajo en tareas enumeradas, lo cual permite realizar intervenciones o preguntas puntuales sobre una tarea en particular. En ese mismo sentido cuando se realizan intervenciones -en una sesión sincrónica, por ejemplo- se cuida la identidad de cada estudiante (figura 23), ocultando su nombre por las etiquetas *estudiante 1*, *estudiante 2* ...

Otra característica importante de la aplicación es que se pueden tener profesores adjuntos, un aspecto fundamental para nuestro trabajo dado que estamos realizando la investigación en un Proyecto colaborativo que también enmarca la investigación de López-Ortiz (2024). Asimismo, GeoGebra Classroom permite pausar y reanudar nuestra lección para poder hacer intervenciones sin que las y los estudiantes se adelanten al trabajo, y se sigan los tiempos planeados de trabajo; otra característica que es importante tener en cuenta es que GeoGebra Classroom funciona totalmente en línea, es decir, el/la participante deberá tener conexión a internet para poder guardar su avance.

Figura 23 Vista de GeoGebra Classroom



Algo que es importante destacar es que el GeoGebra Classroom se crea a partir de un libro *GeoGebra*, por lo que podemos adjuntar otras aplicaciones de GeoGebra como lo son: applets (basados en la Calculadora GeoGebra Suite, Calculadora Gráfica, GeoGebra Clásico, etc.) y GeoGebra Notas; además de incluir preguntas de tipo abiertas y opción múltiple.

Por nuestro proyecto y su modalidad, consideramos ideal la aplicación de GeoGebra Classroom para desarrollar las tareas geométricas, ya que nos permite observar el trabajo de cada estudiante en tiempo real, así como retomar las características del AGD, como lo son las relaciones de dependencia o el proceso de construcción. Cabe destacar que, además de lo mencionado anteriormente, GeoGebra Classroom nos servirá como una herramienta para el registro y organización de datos, ya que todo queda registrado en nuestra cuenta GeoGebra.

3. La experiencia Didáctica y la Investigación

Para el último momento se planea realizar un cierre con las y los estudiantes cuyo objetivo es transparentar algunas características de los proyectos de investigación y con ello acercarlos a la investigación en Matemática Educativa. Además, se espera que los estudiantes puedan reflexionar sobre las tareas que realizaron durante el diseño y propongan una idea a investigar en un futuro, en el caso que les interesara continuar su formación académica en esa dirección.

3.2.3 Fase de Implementación

Durante esta segunda fase de la ID se realizará una implementación *a distancia en línea*¹², donde se tendrán *sesiones sincrónicas*, es decir todas y todos conectados al mismo tiempo, y *sesiones asincrónicas*, donde las y los estudiantes podrán realizar el trabajo de forma independiente, en sus tiempos y acorde a sus necesidades. Durante los periodos de trabajo asincrónico se habilitarán foros de dudas en Moodle para cualquier inquietud o comentario que pueda surgir, es decir, que nuestros participantes estarán acompañados por las responsables de la experiencia durante todas sus sesiones.

Cada sesión está planeada de la siguiente manera (Tabla 4):

Tabla 4 *Modalidad de las actividades a realizar*

Momento	Actividad	Modalidad	Tiempo
1 Introducción	1.1 Encuesta del perfil del participante	Asincrónica	2 días
	1.2 Bienvenida e introducción	Sincrónica	2 horas
	1.3 Presentación	Asincrónico	4 días
	1.4 Introducción a GeoGebra	Asincrónico	5 días
2 Tareas geométricas	2.1 Descubriendo el polígono	Asincrónico	2 días
	2.2 Estudiando el polígono	Sincrónico	3 horas
	2.3 ¿Cómo se construye?	Asincrónico	5 días
3 La Experiencia Didáctica y la Investigación	3.1 ¿Cómo se inserta esta experiencia en la investigación en Matemática Educativa?	Asincrónico	5 días
	3.2 Conversatorio	Sincrónico	2 horas

3.2.4 Fase de Análisis

Como última fase de la ID se deberá realizar un análisis a partir de los datos obtenidos de la implementación; para este proyecto se considerarán como datos aquellas participaciones y comentarios de las y los estudiantes que impliquen nociones geométricas relacionadas a los cuadriláteros y su proceso de construcción, así como las ideas de las relaciones de dependencia involucradas en el proceso de construcción de los cuadriláteros en el AGD.

¹² Todas las consideraciones de esta modalidad se pueden consultar en el trabajo de López-Ortiz (2024)

Análisis Retrospectivo

Para el análisis retrospectivo retomaremos nuestras consideraciones teóricas para organizar y dar cuenta de las prácticas geométricas identificadas a partir de la implementación, y como estamos trabajando una investigación de diseño, este análisis nos permitirá identificar las áreas a mejorar —en actividades y planteamiento de preguntas— para una próxima implementación.

Confrontación y Resignificación

Para describir la **confrontación**, consideramos aquellos momentos donde el estudiante entre en conflicto o bien sus significados geométricos se muestren insuficientes para resolver la tarea; mientras que la **resignificación** se describe después de un momento de confrontación poniendo atención en si el estudiante adquirió nuevas prácticas o hizo adaptaciones en sus prácticas previas.

Modelo de Trabajo Geométrico para la construcción de cuadriláteros en AGD

A partir del MTG para la construcción de cuadriláteros en AGD realizamos un análisis de las prácticas geométricas, para ello nos guiamos con las preguntas: *qué hacen y cómo lo hacen* y, con la pregunta *para qué lo hacen*, destacaremos el rol de las herramientas que ponen en juego. Esto lo organizamos utilizando la siguiente herramienta (tabla 5).

Tabla 5 Propuesta para el análisis

Momento #						
Objetivo del momento:						
Sección del diseño	Número de tarea	Pregunta/Instrucción	Respuesta	Análisis		
				¿Qué hace?	¿Cómo lo hace?	¿Con qué lo hace?
Título Objetivo: Modalidad:						
Título Objetivo: Modalidad:						

IV. PRODUCCIÓN, ORGANIZACIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS

En este capítulo desarrollaremos las Fases de Implementación y Análisis de la metodología. La primera como una *Descripción de la experiencia didáctica*, que nos sirvió para la selección de los datos, donde se explica qué sucedió durante la implementación del diseño y las modificaciones que se realizaron en el transcurso de esta. Dado que nuestro trabajo está diseñado e implementado dentro de un Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) y un Ambiente Virtual de Aprendizaje (AVA), seguiremos la numeración de tareas proporcionada por GeoGebra Classroom -nuestro AGD- y las interacciones dentro de Moodle -nuestro AVA-

En la Fase de Análisis, se realiza el análisis retrospectivo, es decir, se pondrán en funcionamiento las consideraciones teóricas del estudio para dar respuesta a las preguntas de investigación planteadas.

4.1 Implementación

Con esta etapa identificamos los datos de investigación, es decir, los momentos en que se presentan los argumentos, reflexiones y confrontaciones -en el sentido que se plantea desde la Teoría Socioepistemológica- en torno al proceso de construcción de cuadriláteros en Ambientes de Geometría Dinámica (AGD), tomando en cuenta las características de este mismo, en especial las relaciones de dependencia; dada la modalidad de implementación, los datos podrán ser de forma escrita -de las respuestas en GeoGebra y las participaciones en el foro de Moodle-, en imagen -por las figuras estáticas o dinámicas de las construcciones en GeoGebra- o verbal -de los diálogos en las sesiones sincrónicas-.

Nuestras participantes se componen por dos estudiantes en formación inicial docente en matemáticas, las cuales nombramos: *estudiante 1* (E1) y *estudiante 2* (E2), para nuestra investigación no será necesario distinguir entre estudiante mujer u hombre, ya que ambas estudiantes son mujeres. Además, por el tipo participación obtenida durante la experiencia, consideramos y analizamos las respuestas de la E1, y en algunos casos se complementa con interacciones con la E2; esta decisión se toma debido que se obtuvo un registro completo (respuestas en GeoGebra Classroom y grabaciones de pantalla cuando se trabajó de forma asincrónica) de la E1, mientras que la E2 no concluyó todas sus respuestas en GeoGebra Classroom, mismas que eran importantes para el análisis del proceso de construcción. Los datos se organizaron según la prioridad asignada para nuestra investigación:

- *Primaria:* Respuestas en GeoGebra Classroom e interacciones en foros de Moodle.
- *Secundarias:* Grabaciones de las sesiones sincrónicas y grabaciones de pantalla.

Debido que nuestra principal fuente de datos es GeoGebra Classroom seguiremos la enumeración que la aplicación asigna a nuestras tareas (entendiendo a las tareas como las preguntas y construcciones en applets); las tareas las presentaremos con la abreviación T1, T2, T3 ..., donde la T1 corresponde a la tarea 1, la T2 a la tarea 2 y así sucesivamente. Además, para una completa visualización de las respuestas de GeoGebra Classroom se realizó un documento en Microsoft Excel en donde se organizaron preguntas y respuestas de cada estudiante; la organización de los datos fue por medio de tablas (Tabla 6), donde se incluía el momento de trabajo y su objetivo, tarea y su objetivo, así como los enlaces directos a cada tarea.

Tabla 6 Ejemplo de organización de datos en Excel

Tareas Geométricas		
Momento #:		
Objetivo del momento:		
Tarea:		
Objetivo de la tarea:		
Enlace a tarea:		
Nombre de la participante	Clave	Preguntas (T1, T2, T3)
	Estudiante 1	Respuestas
	Estudiante 2	Respuestas

Nota: Elaboración propia

La organización de los datos nos ayudó a identificar aquellos argumentos, reflexiones y confrontaciones de la E1 con respecto al proceso de construcción de cuadriláteros en AGD. A continuación, se describen las respuestas que se consideraron como datos.

4.2 Descripción de la experiencia didáctica

Para nuestra descripción de datos comenzaremos desde la ambientación -en específico Introducción a GeoGebra- dado que en este momento se identificaron ciertas situaciones con respecto al Ambiente que después fueron de utilidad en las tareas geométricas. Sin embargo, es importante aclarar que para la ambientación y tareas geométricas solo describiremos las tareas y respuestas que consideramos aportan a nuestro objeto estudio.

4.2.1 Descripción de la ambientación – Introducción a GeoGebra

Este momento se llevó a cabo de forma asincrónica y se les presentaron un total de 14 tareas, donde las estudiantes pudieron explorar GeoGebra Classroom, las herramientas de GeoGebra Clásico 6 y GeoGebra Notas, dada la modalidad de implementación de este momento se decidió complementar con un foro en Moodle y posteriormente una sesión sincrónica para esclarecer ciertas situaciones.

4.2.1.1 Punto en una recta – Punto en una recta con GeoGebra

Para las tareas 1 y 2 (T1 y T2) las estudiantes debían hacer el diagrama que se representa con la siguiente simbología: $A \in l$, donde A es un punto y l una recta. Dichas tareas tenían la particularidad que, la T1 correspondía a un GeoGebra Notas, es decir podían utilizar las herramientas como lápiz, regla, etc.; mientras que la T2 tenía la misma instrucción con la diferencia que el diagrama debía construirse en un applet GeoGebra.

Las tareas fueron realizadas adecuadamente por ambas estudiantes, sin embargo, la estudiante 1 presentó una confusión acerca de las herramientas que debía utilizar para hacer los diagramas (Figura 24) y nos lo hizo saber por medio del foro en Moodle:

Figura 24 *Pregunta de la E1 en la introducción*

T1.Si quiero dibujar con el lápiz de GeoGebra, puedo además usar la herramienta de "regla", que aparece en las opciones ?,y es que en T2 aparecen otras herramientas distintas ,y bueno en este caso si las usé.

Nota: La pregunta fue retomada del primer foro en Moodle.

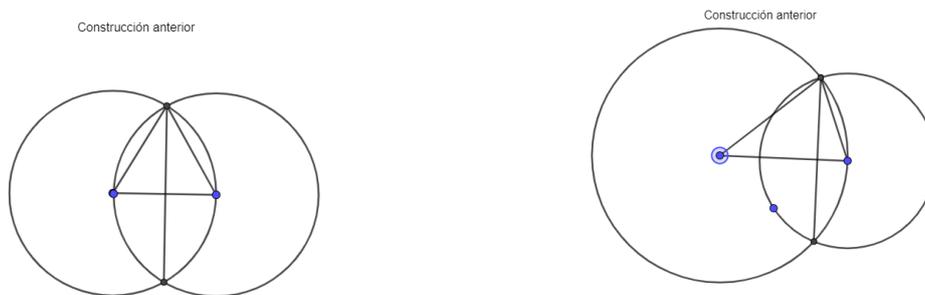
Esta pregunta fue importante, pues se podía definir que nos referimos con el software GeoGebra y la diferencia con sus otras herramientas, ya que en el siguiente momento de tareas geométricas se usarían estos conceptos/herramientas; también se aclaró que si era posible usar la herramienta de regla.

4.2.1.2 Secuencia en GeoGebra

Esta actividad se componía de las tareas 14, 15 y 16 (T14, T15 y T16), en las cuales primero se debía seguir una serie de instrucciones para llevar a la construcción de un triángulo equilátero (T14), después se hacían dos cuestionamientos (T15 y T16) relacionados a las diferencias entre las construcciones que hacen por su cuenta las estudiantes y esta tarea.

El seguimiento de las instrucciones concluía en la construcción de un triángulo equilátero que, aunque se hiciera el arrastre de los puntos, mantuviera las propiedades geométricas. En su primer intento, la construcción de la E1 presentaba inconsistencias (Figura 25), ya que al realizar la *prueba del arrastre* la figura perdía sus propiedades geométricas.

Figura 25 Construcción después de la prueba del arrastre



Nota: Construcción retomada de la E1 en GeoGebra Classroom.

Dada esta situación, para la T15 donde se le cuestiona qué diferencias notó entre la construcción anterior y la suya, la E1 menciona que se podían construir “un triángulo equilátero o dos triángulos escalenos” (figura 26) por lo que se optó hacerle algunos cuestionamientos en el foro de Moodle, entre ellos se le pidió realizar una secuencia con modificaciones para que su construcción efectivamente fuera un triángulo equilátero, y ella responde lo siguiente:

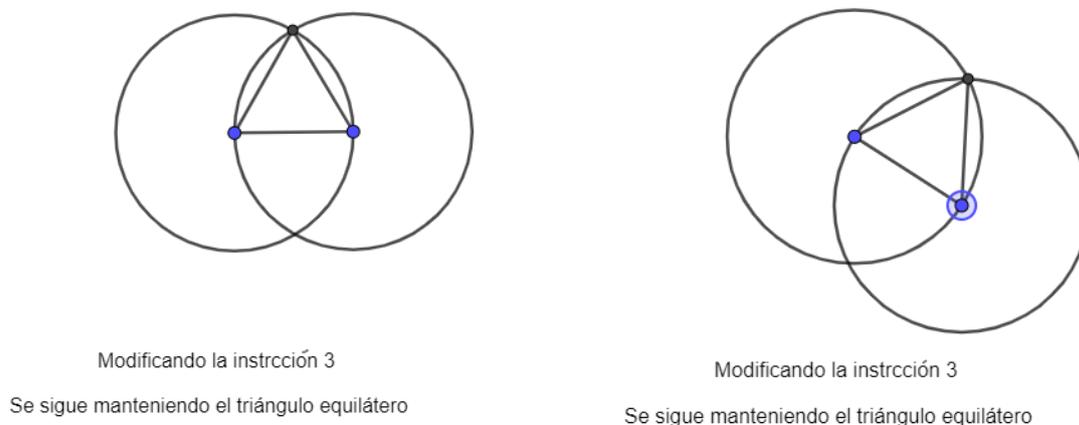
Figura 26 Respuesta de la E1 en la T15

T15. Creo que modificaría el paso 3, ya que, con solo colocar un punto en alguna de las dos intersecciones (sin trazar la línea que une ambas) y seguir con los demás pasos es suficiente para que se siga conservando el triángulo equilátero.

Nota: Respuesta retomada de la E1 en GeoGebra Classroom.

Con esta modificación se le pide nuevamente llevar a cabo la construcción y arrastrar los puntos para comprobar que el triángulo equilátero se mantenga después de la *prueba del arrastre*, la estudiante realiza dichas modificaciones en la T14 y podemos observar que ahora se cumplen las condiciones geométricas y propias del ambiente para la construcción del triángulo equilátero (Figura 27)

Figura 27 *Modificación de la construcción*



Nota: Construcción retomada de la E1 en GeoGebra Classroom.

Este momento previo al trabajo geométrico fue fundamental para la investigación ya que cumplió el objetivo de que las estudiantes pudieran conocer el software de GeoGebra y sus diferentes aplicaciones, tales como lo es Classroom; además que también se presentaron y aclararon dudas que estaban relacionadas a las características del ambiente, un ejemplo de ello se ve reflejado en la T15 donde empezamos a introducir las nociones del comportamiento dinámico, misma que se estudia en el primer momento de las tareas geométricas.

También es importante destacar que, durante la ambientación no hubo ninguna interacción entre las participantes, por lo que en este primer momento no se considera ninguna respuesta de la E2 como complemento al trabajo de la E1.

4.2.2 Descripción del momento 1: Descubriendo el polígono

A continuación, describimos lo sucedido con las tareas correspondientes a este momento, donde se seleccionaron aquellas respuestas que se centran en dos temas principales: (1) argumentos relacionados a lo geométrico y (2) argumentos relacionados al ADG, también tomamos en cuenta aquellas que sean relevantes para los momentos siguientes. Dada la modalidad en la que se llevó a cabo este momento -asincrónico- estaremos describiendo principalmente las respuestas de GeoGebra Classroom.

4.2.2.1 ¿Cómo es el polígono?

En las primeras tareas (T1, T2 y T3) se pide arrastrar los puntos de un polígono y se hacen preguntas relacionadas a qué puntos se pueden arrastrar y cuáles no; y es en la tarea 4 (T4)

donde empezamos a identificar argumentos relacionados a lo geométrico (marcados de verde) y argumentos relacionados al AGD (marcados de morado).

En la T4 se pregunta *¿por qué solo ciertos puntos se pueden arrastrar?* La E1 menciona (Figura 28) que *“puede ser que así este diseñado”* haciendo referencia al polígono y justifica por medio de lo geométrico complementando con *“es un cuadrado”* en donde no importa que par de puntos se muevan siempre y cuando el otro par no se mueva.

Figura 28 Respuesta de la E1 en la T4 – Momento 1

Respuesta

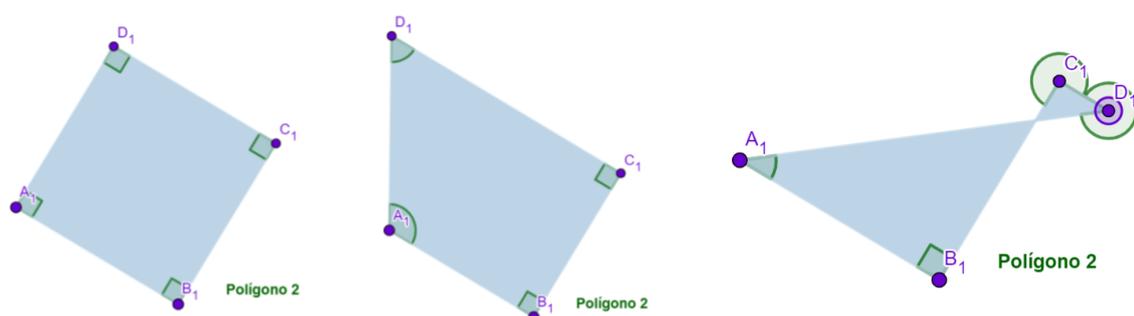
Puede ser que así esté diseñado o sea, que solo se puedan mover dos puntos, aunque como es un cuadrado viene siendo lo mismo mover los pares de puntos A y B, B y C, C y D, D y A, y que el otro par sobrante no se pueda mover, respectivamente. Siempre y cuando (sin importar que par se mueva) todos tengan o puedan realizar los mismos movimientos.

Nota: Respuesta retomada de la E1 en GeoGebra Classroom. Los rectángulos morados encierran los argumentos del AGD y el verde lo relacionado a lo geométrico.

4.2.2.2 Arrastrando

Para poder llevar la reflexión hacia las otras características del ambiente, en las tareas 11 y 12 (T11 y T12) se cuestionaba sobre el arrastre de un punto en específico -D1- del polígono 2, el cual tenía un comportamiento diferente al punto D del polígono 1; en la Figura 29 podemos observar algunas de las transformaciones del polígono 2 cuando se arrastraba el punto.

Figura 29. Transformaciones del polígono 2 a través del arrastre del punto D1



Para la T11 se pregunta *¿qué cambios tiene el polígono cuando arrastras el punto D1?* a lo que la E1 solo hace referencia al cambio cuando se arrastra hacia la derecha y su argumento se centra en la formación de nuevas figuras, es decir, se inclina por lo geométrico (Figura 30).

Figura 30 Respuesta de la EI en la T11 – Momento 1

Respuesta
Si movemos D1 sobre C1 se forman 2 triángulos

Nota: Respuesta retomada de la EI en GeoGebra Classroom. El rectángulo verde representa lo relacionado a lo geométrico.

Cuando se cuestiona por qué el punto D1 tiene ese comportamiento en especial (T12) la estudiante menciona que es para discutir acerca de las “*similitudes y diferencias tras el movimiento de los puntos*”, ya que si “*tuvieran el mismo comportamiento no habría mucho que discutir*” (Figura 31).

Figura 31 Respuesta de la EI en la T12 – Momento 1

Respuesta
Si los puntos respectivos de los polígonos tuvieran el mismo comportamiento no habría mucho que discutir respecto a sus similitudes y diferencias tras el movimientos los puntos.

Nota: Respuesta retomada de la EI en GeoGebra Classroom.

En este momento únicamente estamos reportando las respuestas que se dieron en GeoGebra Classroom, sin embargo, dado la participación de ambas estudiantes fue necesario hacer una sesión sincrónica para aclarar puntos sobre la forma de trabajo y en esta misma se les realizaron algunas preguntas para profundizar más en sus respuestas a estas tareas.

4.2.3 Descripción del momento 2: Estudiando el polígono

Este momento se compone de 22 preguntas divididas en dos grandes tareas; a continuación, se describe lo ocurrido en cada una de ellas en GeoGebra Classroom y se complementa con la grabación de sesión, dado que este momento se llevó a cabo de forma sincrónica.

4.2.3.1 Explorando

Para estas tareas se les dio un tiempo a ambas estudiantes para realizar de forma independiente su trabajo, pero estando presentes las investigadoras en la videollamada por si surgía alguna duda o comentario respecto a las tareas. Recuperaremos la respuesta a la tarea 25 (T25) donde se les cuestionó a las estudiantes *¿a qué se debe que ciertos elementos se eliminen cuando borras un elemento en específico?* En su respuesta podemos notar indicios de las características

propias del AGD, ya que por “*la forma*” (Figura 32) podemos hablar de un proceso o secuencia de pasos que se debieron seguir para llegar a una construcción.

Figura 32 Respuesta de la E1 a la T25 – Momento 2

Respuesta
Se debe a la **forma en que se fueron construyendo** ambas circunferencias.

Nota: Respuesta retomada de la E1 en GeoGebra Classroom. El rectángulo morado representa lo relacionado al AGD.

Al inicio de la sesión sincrónica, E1 hizo referencias a las relaciones de dependencia con el término **encima de**, por ejemplo:

E1: las construcciones se hacen *encima de* ese segmento -AB- [...] como todos los elementos están *encima de*, con uno que se borre se va a borrar todo.

Después, al empezar a trabajar juntas, se hizo la aclaración de que *encima de* hace referencia a una secuencia de pasos, en palabras de la estudiante:

E1: para hacer la instrucción 5 primero tuvo que haberse construido la 1, la 2 ... o sea, como que no te puedes ir saltando pasos.

Para profundizar más con las relaciones de dependencia, en la sesión también se hizo una reflexión a partir de las circunferencias que se creaban en la secuencia de pasos, propuesta durante la tarea. Al seleccionar el punto C se les preguntó a ambas estudiantes por qué cuando este punto se arrastraba solo una circunferencia se movía, la E2 respondió que, porque estaba construida con centro en C, la E1 coincidió con esta respuesta y a la vez se retomó la T14 donde la estudiante ya hablaba en términos de dependencia, aunque haciendo referencia al tamaño de los elementos (Figura 33).

Figura 33 Nociones de dependencia en la E1

El punto A se puede mover en cualquier dirección alrededor de B, y mientras movemos A B se queda fijo y C se va moviendo junto con A. Cuando movemos A podemos cambiar el tamaño de la circunferencia (la primera que se trazó 1) sin alterar la otra.

El punto C solo se puede mover sobre la línea paralela al segmento AB, Al momento de mover C entre más cerca este de A menor será el tamaño de la circunferencia (la segunda que se trazó 2), y entre más alejado este C de A, más grande será la circunferencia.

Los tamaños de ambas circunferencias es decir, quien es más grande que la otra, **dependen del punto C**

Nota: Respuesta retomada de la EI en GeoGebra Classroom. El rectángulo morado representa lo relacionado al AGD.

Gracias a las reflexiones anteriores, en la T25 se cuestiona ¿a qué se debe que ciertos elementos se eliminen cuando borras un elemento en específico?, a lo que la EI mencionó que “ciertos elementos **dependen** de otros”, haciendo ya referencia a las relaciones de dependencias entre los elementos de la construcción. Esto ayudó a que, en estas tareas, la estudiante pudiera describir de forma más precisa las relaciones entre los elementos de la construcción; también rescató la importancia de tener un orden/secuencia de pasos al construir en un AGD.

4.2.3.2 Estudiando la construcción

Después de las reflexiones en torno a las relaciones de dependencia, desde la T27 hasta la T33 las estudiantes estudiaron la construcción del momento 2 con respecto a qué elementos dependen de cada objeto; a manera de comparación y para ejemplificar mostramos las respuestas a las tareas T28 y T32. Por un lado, en la T28 se cuestiona por el *punto B* (Figura 34), del cual dependen todos los elementos de la construcción a excepción del *punto A*.

Figura 34 Respuesta de la EI a la T28 – Momento 2

Respuesta
Si borramos B, todas las demás construcciones se van y solo permanece A

Nota: Respuesta retomada de la EI en GeoGebra Classroom

Por otro lado, en la T32 se cuestiona sobre las dependencias de la *circunferencia c* (Figura 35), a diferencia de la T28 podemos observar que de este elemento no depende ningún otro. Dichas respuestas se dieron a partir del ejercicio de borrar un punto, recta o circunferencia y observar qué elementos se mantenían y qué elementos se borraban.

Figura 35 Respuesta de la EI a la T32 – Momento 2

Respuesta
ninguno

Nota: Respuesta retomada de la EI en GeoGebra Classroom

Estas tareas nos ayudaron a reconocer la importancia de las relaciones de dependencia y el proceso de construcción, las cuales son necesarias en las siguientes tareas.

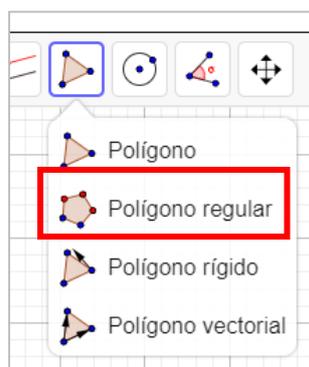
4.2.4 Descripción del momento 3: ¿Cómo se construye?

El último momento se compone de dos tareas con 12 preguntas en total. Dicho momento se llevó a cabo de manera asincrónica; a continuación, se describe lo sucedido en GeoGebra Classroom y se complementa con un foro de Moodle.

4.2.4.1 Construcción de un cuadrado

En las primeras tareas de este momento se debía construir un cuadrado, reportando cuál fue el orden de construcción y las relaciones de dependencia; además de preguntar si se habían utilizado otras características geométricas o de GeoGebra para su construcción. La E1 nos mencionó que utilizó la herramienta *polígono regular* (Figura 36), pero fue solo para tener una mejor visualización del cuadrado.

Figura 36 Respuesta de la E1 a la T37 – Momento 3



Nota: Herramienta utilizada por la E1

Durante la T38 y T39 la construcción del cuadrado de la E1 pasa la prueba del arrastre; al explicar por qué si pasa la prueba (Figura 37) hay argumentos geométricos —rectángulo verde— y los propios del AGD —rectángulo morado—. Además, que podemos notar que la estudiante declara que se guio de las actividades anteriores (momento 1 y 2)

Figura 37 Respuesta de la E1 a la T39 – Momento 3

Respuesta

Todas las características se mantienen pues los lados del polígono fueron marcados como **perpendiculares y paralelas**, al **mover los puntos-vértices** pasó la prueba pues me guíe de las actividades anteriores

Nota: Respuesta retomada de la E1 en GeoGebra Classroom. El rectángulo verde representa lo geométrico y lo morado representa lo propio del ambiente.

Por último, en la T40 cuando se le pide describir el comportamiento de los elementos podemos notar (Figura 38) que la E1 da nociones de las relaciones de dependencia, al decir que el *movimiento* de un elemento **depende** de otros elementos.

Figura 38 Respuesta de la E1 a la T40 – Momento 3

Respuesta

Las 2 perpendiculares, la paralela y los otros dos puntos-vértices grises, si se seleccionan para mover no se puede **su movimiento depende del movimiento de los elementos que si se pueden mover**

Los vértices azules se pueden mover en cualquier dirección dejando fijo al otro extremo azul.

Podemos seleccionar toda la construcción y se mueve en conjunto

Nota: Respuesta retomada de la E1 en GeoGebra Classroom. El rectángulo morado representa lo propio del ambiente.

4.2.4.2 Construcción de un rectángulo

Siguiendo la misma secuencia ahora se deberá realizar la construcción de un rectángulo. La E1 nuevamente reportó su orden de construcción y relaciones de dependencia; cuando se le pregunta por otras características geométricas o propias del ambiente (T44), en esta ocasión la E1 solamente hace referencia a lo geométrico (Figura 39) a diferencia de la construcción del cuadrado que mencionó lo correspondiente al AGD.

Figura 39 Respuesta de la E1 a la T44 – Momento 3

Respuesta

Que ahora la figura del rectángulo debe tener dos pares de **lados paralelos** (característica propia del rectángulo)

Nota: Respuesta retomada de la E1 en GeoGebra Classroom. El rectángulo verde representa lo geométrico.

Con respecto a la prueba del arrastre, su construcción la paso sin ningún problema (T46); y el principal argumento que utilizó fue geométrico (Figura 40), mencionando que los lados fueron construidos como *perpendiculares* para mantener el rectángulo.

Figura 40 Respuesta de la E1 a la T46 – Momento 3

Respuesta
Porque los lados del rectángulo fueron construidos como **perpendiculares** para que a pesar del movimiento de los puntos se conserve el rectángulo

Nota: Respuesta retomada de la E1 en GeoGebra Classroom. El rectángulo verde representa lo geométrico

Por último, en la T47 cuando se le pide describir el comportamiento de los elementos podemos notar (Figura 41) que la E1 da argumentos propios del AGD -relaciones de dependencia y comportamiento dinámico- cuando habla de que un *movimiento dependerá de los demás elementos* y de *mover* hacia arriba o abajo.

Figura 41 Respuesta de la E1 a la T47 – Momento 3

Respuesta
El punto gris y las 3 rectas paralelas si se seleccionan no se pueden mover, **su movimiento dependerá de los demás elementos de la construcción que si puedan moverse si son seleccionados**
El punto extremo izquierdo del segmento(p1) se puede mover en cualquier dirección dejando fijo el otro punto extremo derecho y viceversa
El punto c solo se puede **mover** arriba y abajo sobre la perpendicular 1

Nota: Respuesta retomada de la E1 en GeoGebra Classroom. El rectángulo morado representa lo propio del AGD.

4.3 Análisis

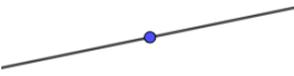
Para el análisis de datos, primero se muestra una organización de datos en términos de práctica; en seguida, sobre estos datos –ya en términos de prácticas– se realiza el análisis retrospectivo desde los referentes teóricos elegidos para la investigación. En particular, dado que nos interesa caracterizar las prácticas asociadas al trabajo geométrico durante la construcción de cuadriláteros en un Ambiente de Geometría Dinámica, considerando las relaciones de dependencia, se utilizan las adaptaciones propuestas al Modelo de Trabajo Geométrico de Rubio-Pizzorno (2018) y los procesos de confrontación y resignificación desde la Teoría Socioepistemológica.

4.3.1 Organización de datos en términos de prácticas

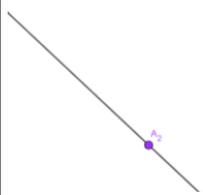
En una primera instancia analizamos nuestras tareas a través de las preguntas *¿qué hace?* y *¿cómo lo hace?*, para ir caracterizando las prácticas, y *¿con qué lo hace?* para destacar el rol de las herramientas que se ponen en juego –principalmente las del AGD–. A continuación, mostraremos un ejemplo de dicho análisis (Tabla 7), el cual corresponde a la Ambientación, momento *¿Cómo se comporta el punto?*; las demás tablas se podrán encontrar en la parte de Anexos 3.

Tabla 7 *Análisis de prácticas - Ambientación*

Ambientación				
Momento:	¿Cómo se comporta el punto?			
Secuencia de tareas:	Punto en una recta			
Instrucción/ Pregunta	Respuesta de la E1	Prácticas		
		¿Qué hace?	¿Cómo lo hace?	¿Con qué lo hace?
1. Haz el diagrama que se representa con la siguiente simbología: $A \in l$, donde A es un punto y l es una recta. Puedes hacerlo en una hoja de papel y luego subirlo como una foto; o dibujarlo con el lápiz de GeoGebra Notas, etc. La única restricción es que NO uses GeoGebra (software).		Un diagrama donde un punto pertenece a una recta	Trazando un punto color rosa y sobre él trazando un segmento de recta	Con las herramientas de <i>lápiz y regla</i>

Secuencia de tareas:		Punto en una recta con GeoGebra		
Instrucción/ Pregunta	Respuesta de la E1	Prácticas		
		¿Qué hace?	¿Cómo lo hace?	¿Con qué lo hace?
2. Haz el mismo diagrama que la actividad anterior, pero ahora en el software GeoGebra. Es decir, el diagrama que se representa con esta simbología: $A \in l$, donde A es un punto y l una recta.		Un diagrama donde un punto pertenece a una recta	Trazando una recta, de la cual se originan dos puntos; de esos dos puntos uno lo oculta	Con las herramientas de <i>recta</i> y <i>mostrar/ocultar objeto</i>
3. ¿Qué diferencias notas entre la construcción que realizaste en la tarea anterior (Punto en la recta) con la que hiciste en el applet de GeoGebra?	En T1 dibujar la recta con el lápiz fue un poco difícil por el pulso, y T2 un poco más fácil.	Describe la diferencia entre la construcción con GeoGebra Notas y el applet de GeoGebra	Explicando que la recta con lápiz fue más difícil en términos de precisión que la recta creada con el applet	

Secuencia de tareas:		Estudiando el comportamiento dinámico		
Instrucción/ Pregunta	Respuesta de la E1	Prácticas		
		¿Qué hace?	¿Cómo lo hace?	¿Con qué lo hace?
4. A continuación, se tienen dos diagramas que representan la simbología $A \in l$, donde A es un punto y l es una recta. Arrastra cada punto para explorar el comportamiento de cada diagrama.	Caso 1 	Explora el comportamiento del <i>punto A</i> para el caso 1 y el <i>punto A₂</i> para el caso 2	Moviendo el <i>punto A</i> y <i>A₂</i> de forma libre	Con la activación de la herramienta <i>Mueve</i> para cada punto en la recta

	<p>Caso 2</p> 			
5. ¿Los diagramas se comportan de la misma manera?	No	Determina si los diagramas se comportan de la misma	Moviendo el <i>punto A</i> para el caso 1 y el <i>punto A₂</i> para el caso 2 de forma libre	Con la activación de la herramienta <i>Mueve</i> para cada punto en la recta
6. ¿Cómo se comportan los puntos en cada caso? Punto A caso 1	Si movemos el punto, la recta también se mueve junto con él. Además, el punto lo podemos mover a cualquier parte.	Explora el caso 1 describiendo el comportamiento del <i>punto A</i>	Moviendo el <i>punto A</i> de forma libre en el applet	Con la activación de la herramienta <i>Mueve</i> para el <i>punto A</i>
7. ¿Cómo se comportan los puntos en cada caso? Punto A caso 2	Si movemos el punto, solo se moverá a lo largo de la recta.	Explora el caso 2 describiendo el comportamiento del <i>punto A₂</i>	Moviendo el <i>punto A₂</i> de forma libre en el applet	Con la activación de la herramienta <i>Mueve</i> para el <i>punto A₂</i>
8. ¿Cómo se comportan las rectas en cada caso? Recta l caso 1	La recta la podemos mover/desplazar a cualquier parte, pero dependerá de donde haya quedado colocado el punto.	Explora el caso 1 describiendo el comportamiento de la <i>recta l</i>	Moviendo la recta a cualquier parte del applet, haciendo la acotación de que la posición de la recta dependerá de donde se haya colocado el <i>punto A</i>	Con la activación de la herramienta <i>Mueve</i> para la <i>recta l</i>
9. ¿Cómo se comportan las rectas en cada caso? Recta l caso 2	Si movemos/desplazamos la recta, el punto se queda fijo en la recta, pero no importa en donde haya	Explora el caso 2 describiendo el comportamiento de la <i>recta l</i>	Moviendo la recta a cualquier parte del applet, haciendo la acotación que el <i>punto A₂</i> se quedará fijo en la	Con la activación de la herramienta <i>Mueve</i> para la <i>recta l</i>

	quedado colocado el punto		recta, no importando donde se haya colocado	
--	------------------------------	--	---	--

4.3.2 Análisis retrospectivo

A continuación, se muestra el análisis retrospectivo dividido en dos partes: en la primera vamos a explicitar las prácticas geométricas con base en el análisis de las respuestas de la E1 y tomando en consideración el Modelo de Trabajo Geométrico (MGT); mientras que en la segunda reportaremos los momentos de confrontación y resignificación, con base en los planteamientos desde la Teoría Socioepistemología.

4.3.2.1 Prácticas Geométricas

Para llevar a cabo la interpretación de las prácticas tomaremos en cuenta el Modelo de Trabajo Geométrico (MTG) con las modificaciones propuestas en el apartado de metodología, a fin de lograr una adecuada interpretación utilizaremos una codificación para identificar el tipo de práctica a la que corresponde cada tarea; en primer lugar, pondremos una letra para identificar la práctica sea del tipo abstracción (A) o representación (R), seguido separemos con un guion (-) la acción específica, los cuales, pueden ser aspectos perceptuales (AP), aspectos geométricos (AG) o aspectos AGD (AGD) para la abstracción; y para la representación pueden ser construcción (C) o bosquejo (B), además de esto incorporaremos la manipulación (M) como acción específica.

Para las tareas con diferentes acciones, las separemos mediante una diagonal. En ese sentido, si una tarea se reconoce como práctica de abstracción enfocada a los aspectos perceptuales su código sería A-AP, asimismo si la práctica es de abstracción donde se manipula y se considera a los aspectos perceptuales, su código será A-M/AP.

De la misma forma describiremos las tareas siguiendo la numeración de GeoGebra Classroom (T1, T2, T3 ... etc.).

Ambientación

En esta primera secuencia interpretaremos las tareas correspondientes a la ambientación, es importante considerar que durante estas tareas la estudiante (E1) se va familiarizando con el Ambiente de Geometría Dinámica (AGD), sus características y herramientas.

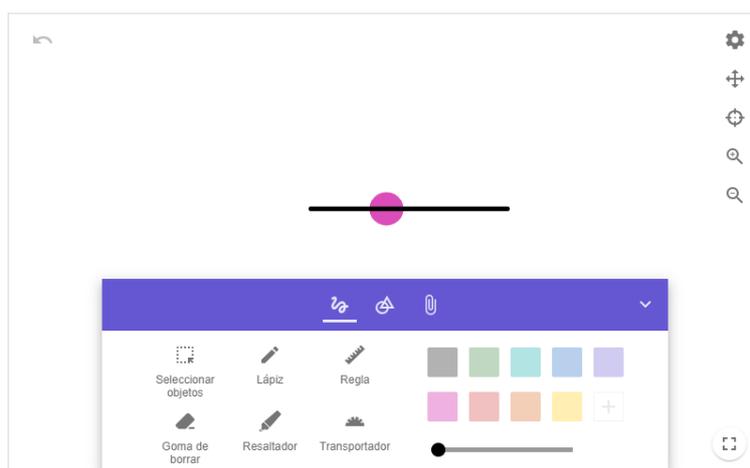
¿Cómo se comporta el punto?

Este primer momento se enfoca en guiar a la estudiante E1 en las construcciones, en GeoGebra software y en GeoGebra Notas; y en explorar los comportamientos dinámicos que se generan dentro del ambiente.

Punto en una recta

En esta primera tarea (T1) podemos encontrar una práctica de representación enfocada en la construcción (R-C), dado que la estudiante cumple con las instrucciones de la tarea, las cuales son representar $A \in l$, donde A es un punto y l es una recta, y con la condición de no utilizar la herramienta *punto-recta* de GeoGebra Clásico 6. En ese sentido, podemos observar que la representación hecha por la estudiante (Figura 42) cumple con estas condiciones, ya que se hace a mano, pero utilizando la herramienta de *lápiz* de GeoGebra Notas.

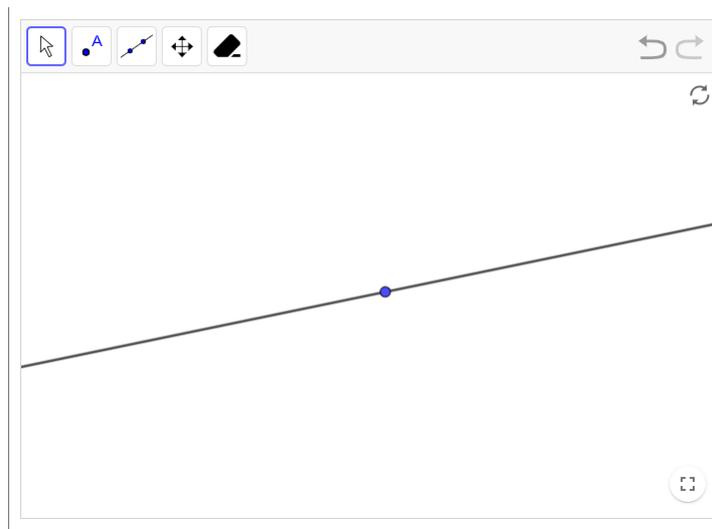
Figura 42 Representación de la estudiante – T1



Punto en una recta con GeoGebra

Para la T2 identificamos una práctica de representación enfocada a la construcción (R-C), dado que, al igual que en la T1, debía representar $A \in l$ donde A es un punto y l es una recta con la diferencia que ahora si podía utilizar GeoGebra Clásico (Figura 43).

Figura 43 Representación de la estudiante – T2



Sin embargo, en la T3 cuando se le pregunta cuáles son las diferencias de construcción entre la T1 y T2, identificamos que a través de los aspectos perceptuales se da una práctica de abstracción (A-AP), dado que la estudiante en su respuesta sólo hace referencia a la precisión con la que fueron construidos ambas representaciones (Figura 44), consideramos que esto puede deberse a que escolarmente las actividades de naturaleza de *geométrica* son menores a las actividades del tipo *aritmético* y del tipo *observación*, lo que hace que la estudiante se centre en lo que es “correcto” con base a la imagen o definición que ella misma ha construido, y cuando se está inmerso en un AGD en una primera instancia no se considera el dinamismo de los elementos que se construyen.

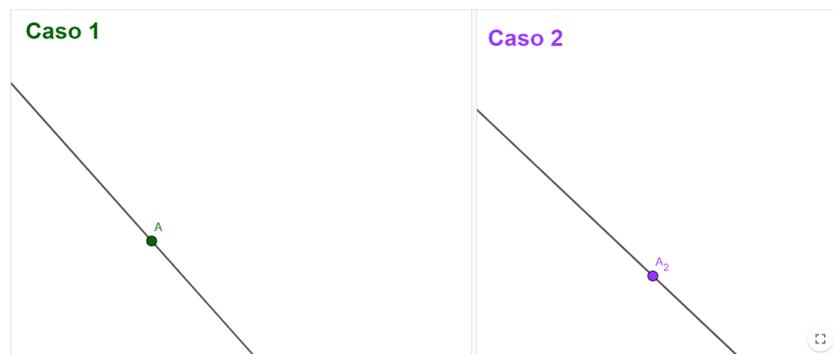
Figura 44 Respuesta de la E1-T3 (A-AP)

Respuesta
En T1 dibujar la recta con el lápiz fue un poco difícil por el pulso, y T2 un poco más fácil.

Estudiando el comportamiento dinámico

En esta secuencia de tareas (T4 a la T9) reconocemos que, por medio de la manipulación y los aspectos perceptuales se da una práctica de abstracción (A-M/AP), debido que en esta secuencia se mostraban dos casos que representaban $A \in l$ (Figura 45) y la estudiante debía explorar el comportamiento de cada punto y recta.

Figura 45 Applet mostrado en la T4



Para este momento entendemos como manipulación a la acción de *arrastrar* un punto o recta según lo solicité la tarea, en ese sentido la T4 retoma la manipulación y se observa los diferentes comportamientos, es decir, se presenta una práctica de abstracción (A-M), mientras que, de la T5 a la T9 identificamos que, mediante la manipulación y los aspectos perceptuales, se da una práctica de abstracción (A-M/AP), dado que primero se debe llevar a cabo una manipulación (arrastre) y después se debe observar el comportamiento de los elementos de cada diagrama.

Construcciones en GeoGebra

En este momento se continúan fortaleciendo las construcciones tanto el software como a lápiz y papel, estudiando las similitudes y diferencias de construcción entre cada una, además se busca reconocer el papel del proceso de construcción dentro de los AGD.

Construyendo

Para las T10 y T11 identificamos una práctica de representación enfocada en el bosquejo (R-B), debido a que la estudiante representa un triángulo equilátero, pero lo hace por medio de ensayo y error, y por medio de la vista aproxima las medidas (Figura 46); es decir, no se cuenta con los elementos necesarios para considerarla una práctica de construcción. Es importante señalar que durante estas tareas la restricción era no utilizar las herramientas de GeoGebra Clásico.

Figura 46 Respuesta de la E1-T10 y T11 (R-B)

Tarea 10



Respuesta

Dibujarlo con el lápiz de GeoGebra Notas es complicado por el pulso, pues deben ser los 3 trazos iguales, así que decidí hacerlo a mano en una hoja de papel, aunque mis dibujos fueron de ensayo y error hasta llegar a una mejor aproximación de triángulo equilátero. Para construir el triángulo equilátero, tuve que:
 Paso 1: dibujar primero una línea L1 (la que iba a ser la medida fija del lado del triángulo)
 Paso 2: después moví la hoja y solo con la vista calculé mas o menos que al trazar la siguiente línea L2 pasará por un extremo de L1, para completar el triángulo repetí el paso anterior solo que ahora tuviera que pasar por los extremos de L1 y L2

Construyendo en GeoGebra

Durante la T12 se debe realizar la misma construcción (triángulo equilátero) pero ahora sí se permite el uso del software de GeoGebra, esta tarea la identificamos como una práctica de representación enfocada en un bosquejo y manipulación (R-B/M), debido a que la construcción a simple vista cumple con todos los requisitos de un triángulo equilátero -todos sus lados y ángulos miden lo mismo- (Figura 47), sin embargo, al manipular la construcción podemos notar como se pierden características como el valor de sus lados y ángulos (Figura 48)

Figura 47 Representación de la E1 – T12

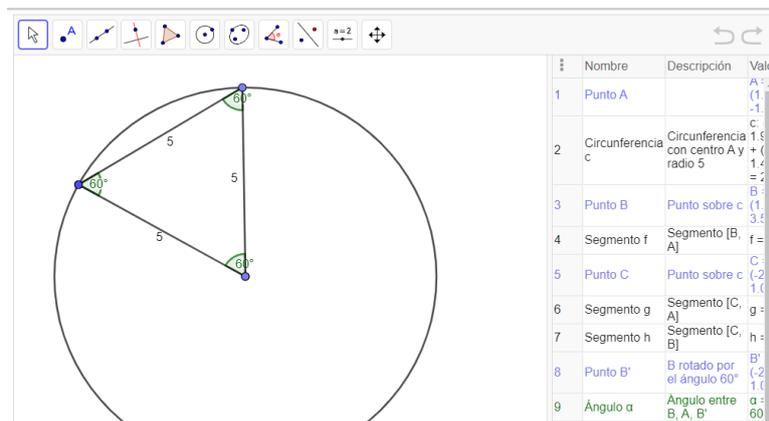
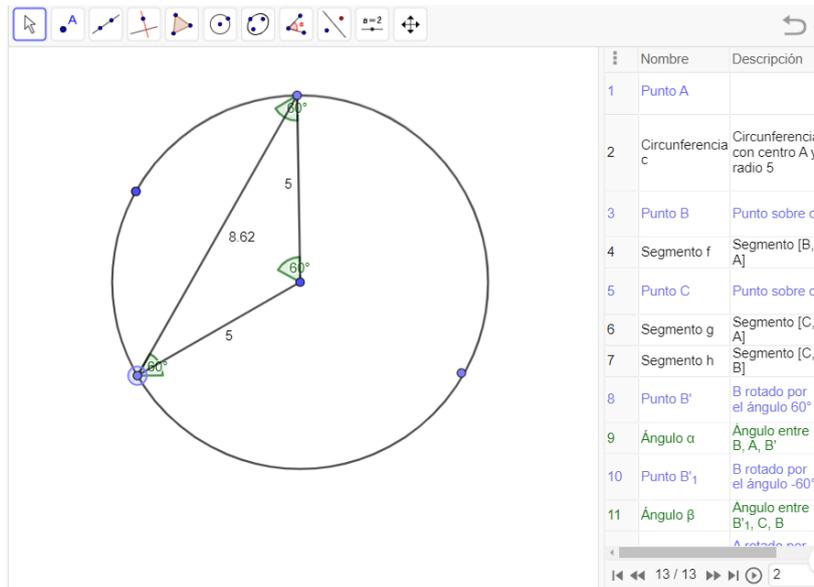


Figura 48 Deformación de la construcción de la E1 -T12



Durante la T13 identificamos una práctica de abstracción enfocada a los aspectos geométricos (A-AG) debido a que las principales diferencias que encuentra entre ambas representaciones son la medida de los lados y los ángulos (Figura 49). Sin embargo, para esta representación la estudiante no considera que al arrastrar algún punto su construcción perderá las características geométricas que tiene un triángulo equilátero.

Figura 49 Respuesta de la E1-T13 (A-AG)

Respuesta
 Ahora su construcción fue un poco mas fácil, y es seguro que sí es equilátero, pues con las herramientas se puede decidir la medida del lado, y medir los ángulos.

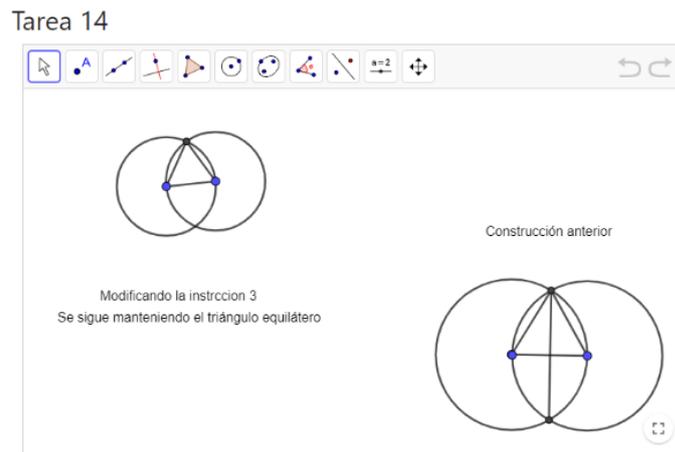
Esto es porque estamos en un primer momento de ambientación a las plataformas que se usarían en la experiencia y aún no abordamos las características del AGD, además de que la estudiante E1 declaró que antes tuvo dificultades al usar algunas herramientas de GeoGebra (encuesta del perfil de participante).

Secuencia en GeoGebra

Durante la T14 se identificó una práctica de representación enfocada al bosquejo y manipulación (R-B/M), sin embargo, esto cambió a una práctica de representación enfocada a la construcción y manipulación (R-C/M), debido que, en un primer intento la construcción de la estudiante no cumplía con las características de un triángulo equilátero, en este momento fue

que se empezó a reconocer la manipulación de los elementos de una construcción dentro de un AGD; al pedirle a la estudiante E1 que arrastre y observe los cambios en su construcción, logró percatarse de que el triángulo perdía sus características y propone ciertas modificaciones para que, a pesar del arrastre, se mantuviera el triángulo equilátero.

Figura 50 Respuesta de la E1-T14 (R-C/M)



En las T15 y T16 se identificaron prácticas de abstracción por medio de los aspectos geométricos, ya que se hace referencia a que ciertos elementos geométricos (tipos de triángulos, circunferencia) podían estar o no y, a su vez, estos elementos podían formar diferentes figuras después del arrastre (Tabla 8).

Tabla 8 Identificación de prácticas en las T15 y T16 de la E1

Instrucción/ Pregunta	Respuesta	Prácticas		
		¿Qué hace?	¿Cómo lo hace?	¿Con qué lo hace?
15. ¿Qué diferencias notas entre la construcción que realizaste en la tarea anterior (Construyendo en GeoGebra) con la que hiciste en esta tarea?	La construcción de T13 tiene la particularidad de que se tiene que construir un triángulo equilátero (de manera libre al hacer uso de las herramientas de GeoGebra), y en esta tarea se siguen instrucciones que al	Describe las diferencias entre su construcción del triángulo equilátero (T13) con la que secuencia de pasos que se propone en la T14	Argumentando que, en la tarea anterior, la construcción se hace de manera libre por medio del uso de las herramientas de GeoGebra, mientras que en esta se siguen	

	final nos llevan a construir un triángulo equilátero o dos triángulos escalenos más pequeños que el anterior.		instrucciones para llegar a un triángulo equilátero o dos triángulos escalenos más pequeños	
16. ¿Qué diferencias o similitudes notas entre el protocolo de construcción creado en la tarea anterior (Construyendo en GeoGebra) y el orden de construcción en esta tarea?	En al anterior se pudiera haber construido el triángulo equilátero sin hacer uso de circunferencia, y en esta tarea se tiene que seguir todas instrucciones tal cual.	Describe las diferencias entre el orden de construcción del triángulo equilátero de la T12 (elaboración propia) y la secuencia de pasos propuesta en la T14	Argumentando que en la tarea anterior (T13) no era necesario la circunferencia, mientras que en esta tarea (T14) se deben seguir las instrucciones tal cual	

Nota. En negritas se marcaron los aspectos geométricos (AG) considerados

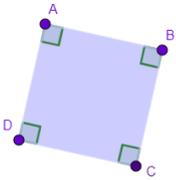
Momento 1. Descubriendo el polígono

Este primer momento se enfoca en estudiar el comportamiento dinámico de diagramas previamente ya construidos, por ello que predomina la práctica de tipo abstracción.

¿Cómo es el polígono?

En esta secuencia de tareas (T1 a la T6) identificamos que mediante la manipulación se llegó a una práctica de abstracción (A-M), con acciones extra como los aspectos perceptuales y geométricos, debido a la naturaleza de estas tareas. Por ejemplo, durante la T1 se tiene una práctica de abstracción por medio de la manipulación (A-M), ya que solo se explora el comportamiento del polígono, en cambio para la T2 y T3 se agrega a la manipulación, los aspectos perceptuales (A-M/AP) debido que se empieza a cuestionar sobre los puntos que se pueden o no arrastrar, de igual forma en la T5 se tiene una práctica de abstracción mediante la manipulación y aspectos perceptuales (A-M/AP), ya que en esta tarea se describe los comportamientos de cada punto sin caer en las características geométricas del polígono (Tabla 9).

Tabla 9 Identificación de prácticas en las T1, T2, T3 y T5 de la E1

Instrucción/ Pregunta	Respuesta	Prácticas		
		¿Qué hace?	¿Cómo lo hace?	¿Con qué lo hace?
1. Arrastra los puntos del siguiente polígono para explorar su comportamiento		Mueve los puntos del polígono para explorar su comportamiento	Seleccionando los puntos <i>A, B, C</i> y <i>D</i> y moviéndolos libremente en el plano	Con la activación de la herramienta <i>Mueve</i> para cada punto del polígono
2. ¿Qué puntos del polígono se pueden arrastrar?	Los puntos <i>A</i> y <i>B</i>	Determina que puntos se pueden arrastrar	Seleccionando los puntos <i>A, B, C</i> y <i>D</i> y moviéndolos libremente en el applet para mencionar cuáles se pueden arrastrar	Con la activación de la herramienta <i>Mueve</i> para punto del polígono
3 ¿Qué puntos del polígono no se pueden arrastrar?	Los <i>puntos C</i> y <i>D</i>	Determina que puntos no se pueden arrastrar	Seleccionando los puntos <i>A, B, C</i> y <i>D</i> y moviéndolos libremente en el applet para mencionar cuáles no se pueden arrastran	Con la activación de la herramienta <i>Mueve</i> para cada punto del polígono
5. Haz una descripción del comportamiento de cada punto, a modo de lista, y del efecto que produce en el polígono	Punto <i>A</i> : puede moverse en todas direcciones alrededor del punto <i>B</i> , puede agrandar o encoger el polígono, mientras movemos este punto, el punto <i>B</i> se queda fijo y hace que los puntos <i>D</i> y <i>C</i> se muevan junto con el polígono.	Describe los comportamientos de los <i>puntos A, B, C</i> y <i>D</i>	Moviendo los puntos <i>A, B, C</i> y <i>D</i> y describiendo sus comportamientos a manera de lista: 1. El <i>punto A</i> lo mueve en todas las direcciones alrededor del <i>punto B</i> , agrandado o encoge el polígono . Mientras mueve este punto, el <i>punto</i>	Con la activación de la herramienta <i>Mueve</i> para cada punto del polígono

	<p>Punto B: puede moverse alrededor del punto A, puede agrandar o encoger el polígono, mientras movemos este punto, el punto A se queda fijo y hace que los puntos D y C se muevan junto con el polígono.</p> <p>Punto C: no podemos moverlo directamente con el cursor y hacer que se mueva igual que el punto A o B, la única vez que se puede mover es cuando movemos uno de los dos puntos anteriores.</p> <p>Punto D: no podemos moverlo directamente con el cursor y hacer que se mueva igual que el punto A o B, la única vez que se puede mover es cuando movemos uno de los dos puntos anteriores.</p>		<p><i>B</i> se queda fijo y <i>puntos D</i> y <i>C</i> se mueven junto con el polígono.</p> <p>2. El <i>punto B</i> lo mueve alrededor del <i>punto A</i>, puede agrandar o encoger el polígono. Mientras mueve este punto, el <i>punto A</i> se queda fijo y los <i>puntos D</i> y <i>C</i> se mueven junto con el polígono.</p> <p>3. El <i>punto C</i> no lo puede mover directamente con el cursor, por lo que no se mueve igual que el <i>punto A</i> o <i>punto B</i>, la única vez que lo puede mover es cuando mueve uno de los puntos anteriores.</p> <p>4. El <i>punto D</i> no lo puede mover directamente con el cursor, por lo que no se mueve igual que el punto A o punto B, la única vez que lo puede mover es cuando mueve uno de los puntos anteriores.</p>	
--	---	--	--	--

Nota. En negritas se destacan los aspectos perceptuales (AP) y de manipulación (M).

Para las tareas mencionadas anteriormente, consideramos que tiene sentido que solamente se considere las acciones de manipular y aspectos perceptuales, debido que la estudiante solamente debe explorar el comportamiento del polígono e inferir con sus conocimientos geométricos y propios del Ambiente por qué solo ciertos puntos pueden moverse o no.

Durante la T4, por medio de la manipulación y los aspectos geométricos llegamos a una práctica de abstracción (A-M/AG), dado que la estudiante reconoce al polígono como un cuadrado y menciona que no importa que pares de puntos se muevan siempre y cuando tengan el mismo movimiento. Asimismo, en la T6 identificamos una práctica de abstracción mediante la manipulación y aspectos geométricos (A-M/AG), ya que la estudiante E1 manipuló y observó el comportamiento de todos los puntos para poder deducir el tipo de polígono del diagrama (Tabla 10).

Tabla 10 Identificación de prácticas en las T4 y T6 de la E1

Instrucción/ Pregunta	Respuesta	Prácticas		
		¿Qué hace?	¿Cómo lo hace?	¿Con qué lo hace?
4. ¿Por qué sólo ciertos puntos se pueden arrastrar?	Puede ser que así esté diseñado, o sea, que solo se puedan mover dos puntos, aunque como es un cuadrado viene siendo lo mismo mover los pares de puntos <i>A y B</i> , <i>B y C</i> , <i>C y D</i> , <i>D y A</i> , y que el otro par sobrante no se pueda mover, respectivamente. Siempre y cuando (sin importar que par se mueva) todos tengan o puedan realizar los mismos movimientos.	Infiere por qué solo ciertos puntos se pueden arrastrar	Moviendo libremente los puntos <i>A, B, C y D</i> argumenta que el polígono así está diseñado, y dado que es un cuadrado no importa que pares de puntos se muevan , siempre y cuando el otro par no se pueda mover	

6. Dado el comportamiento de los puntos que pudiste arrastrar, y el efecto que tiene en el polígono ¿qué tipo de polígono es?	Polígono regular	Determina qué tipo de polígono es	Moviendo los puntos A, B, C y D y explorando su comportamiento cuando se activa la herramienta <i>Mueve</i>	
---	------------------	-----------------------------------	--	--

Nota. En negritas se destacan los aspectos geométricos (AG) y manipulación (M).

Arrastrando

En esta secuencia de tareas nuevamente identificamos que predomina la práctica de abstracción por medio de la manipulación (A-M) con algunas acciones extras tales como los aspectos perceptuales y los geométricos (A-M/AP y A-M/AG), esto debido a que las tareas se centran en la manipular y describir el comportamiento de dos polígonos. Por ejemplo, durante la T7 tenemos la acción de manipular, lo que nos lleva a una práctica de abstracción (A-M), ya que la estudiante debe arrastrar los puntos de cada polígono, sin embargo, la T8 agrega la acción de aspectos perceptuales (A-M/AP) porque deduce si los polígonos se comportan de la misma manera (Tabla 11).

Tabla 11 Identificación de prácticas en las T7 y T8 de la E1

Instrucción/ Pregunta	Respuesta	Prácticas		
		¿Qué hace?	¿Cómo lo hace?	¿Con qué lo hace?
7. Arrastra los puntos de cada polígono para explorar el comportamiento de cada uno		Mueve los puntos de cada polígono para explorar su comportamiento	Primero seleccionando los puntos A, B, C y D del polígono 1 y moviéndolos libremente en el plano; después seleccionando los <i>puntos A1, B1, D1 y C1</i> del polígono 2 y moviéndolos libremente en el plano.	Con la activación de la herramienta de <i>Mueve</i> para cada vértice del polígono 1 y el polígono 2

8. ¿Los polígonos se comportan de la misma manera?	No	Determina si los polígonos se comportan de la misma manera	Moviendo los puntos de cada polígono y explorando su comportamiento individual y en conjunto	
--	----	--	---	--

Nota. En negritas se destacan los aspectos perceptuales (AP) y manipulación (M).

Para la T9 identificamos una práctica de abstracción mediante la manipulación, aspectos perceptuales y aspectos geométricos (A-M/AP/AG), debido que, al describir las diferencias entre ambos polígonos, la estudiante toma elementos propios del AGD, así como elementos geométricos (medida de los ángulos, paralelas, polígonos regulares e irregulares). En la T10 y T11 se reconoce una práctica de abstracción a través de la manipulación y los aspectos geométricos (A-M/AG), ya que en ambas se refiere a las figuras que se forman al manipular los diferentes puntos de cada polígono (Tabla 12).

Tabla 12 Identificación de prácticas en las T9, T10 y T11 de la E1

Instrucción/ Pregunta	Respuesta	Prácticas		
		¿Qué hace?	¿Cómo lo hace?	¿Con qué lo hace?
9. ¿Cuáles son las diferencias que encuentras entre ambos polígonos?	<p>Polígono 1</p> <p>En este polígono los puntos tienen el mismo comportamiento que en la tarea 1, y además los movimientos de los puntos A o B no alteran la medida de sus ángulos. Y siempre es regular.</p> <p>Polígono 2</p> <p>En este polígono los puntos A1 y B1 tienen el mismo</p>	Describe las diferencias entre ambos polígonos	Moviendo los puntos del polígono 1 y polígono 2 determinando las siguientes diferencias: 1. Argumentando que el Polígono 1 tiene el mismo comportamiento que la T1, además que el movimiento del punto A o B no alteran los ángulos. Concluye	Con la activación de la herramienta Mueve para cada vértice del polígono 1 y el polígono 2

	<p>comportamiento que en la tarea 1.</p> <p>Suponiendo que ya movimos los puntos A1, B1 o D1, quedo determinado un cierto polígono, si movemos el punto C1 junto con él se moverá D1, los puntos A1 y B1 se mantienen fijos, además como estos dos se quedan fijos, si imaginamos un segmento A1B1 y después movemos C1, este funciona como un reflejo o espejo del polígono, pues solo se puede mover en dirección paralela a dicho segmento.</p> <p>El movimiento del punto D1 es el único que altera la medida de los ángulos, en el mismo y el que se forma en A1.</p> <p>Mover D1 determina si el polígono 2 es regular o irregular, y en cambio el punto D no causa efecto alguno en el polígono 1</p>		<p>que es polígono regular</p> <p>2. Determinando que en el Polígono 2 los puntos A1 y B1 tienen el mismo comportamiento que la T1, pero al mover el punto C1 se moverá también el punto D1 y los puntos A1 y B1 se mantendrán fijos.</p> <p>3. Imaginando un segmento entre los puntos A1 y B1 y mueve el punto C1 tendrá una función de reflejo en el polígono.</p> <p>4. Haciendo una acotación que el punto D1 es el único que altera la medida de los ángulos, además que su movimiento es el que determina si el polígono es regular o irregular.</p>	
--	--	--	--	--

10. ¿Cuáles son las similitudes que encuentras entre ambos polígonos?	Cuando el Polígono A1B1C1D1 es un cuadrado será igual que polígono ABCD	Describe las similitudes entre ambos polígonos	Haciendo referencia a que, cuando el polígono 2 (A1, B1, C1, D1) forme un cuadrado será igual que el polígono 1 (A, B, C, D)	
11. Vuelve a arrastrar el punto D1. ¿Qué cambios tiene el polígono cuando arrastras este punto?	Si movemos D1 sobre C1 se forman 2 triángulos	Describe los cambios que tiene el polígono 2 cuando se arrastra el <i>punto D1</i>	Moviendo el <i>punto D1</i> determinan que se forman dos triángulos sobre el <i>punto C1</i>	Con la activación de la herramienta <i>Mueve</i> para el <i>punto D1</i> del polígono 2

Nota. En negritas se destacan los aspectos perceptuales (AP), aspectos geométricos (AG) y manipulación (M).

Por último, en la T12 se identifica una práctica de abstracción por medio de la manipulación y aspectos perceptuales (A-M/AP), ya que la estudiante hace referencia solo al comportamiento de los puntos, mencionando que si todos tuvieran el mismo comportamiento “no habría mucho que discutir” (Figura 51); lo cual tiene mucho sentido debido a que la estudiante aún no se ve inmersa en tareas donde se destaque la importancia del proceso de construcción y las relaciones de dependencia que se crean entre los elementos del ambiente.

Figura 51 Respuesta de la E1 - T12 (A-M/AP)

<p>Respuesta</p> <p>Si los puntos respectivos de los polígonos tuvieran el mismo comportamiento no habría mucho que discutir respecto a sus similitudes y diferencias tras el movimientos los puntos.</p>
--

Momento 2. Estudiando el polígono

Este segundo momento pretende reconocer las relaciones de dependencia, por lo que se incorpora un nuevo significado a la acción de manipular, además de arrastrar; entenderemos como manipular al *borrar* algún elemento de la construcción, ya que esto nos ayuda a reconocer las relaciones de dependencia.

Explorando

Para la T13 se identifica una práctica de representación enfocada a la construcción (R-C), ya que la estudiante cumple con la construcción que se le indica; y en la T14 identificamos una práctica de abstracción mediante la manipulación y los aspectos perceptuales (A-M/AP), debido que se describen los comportamientos de los puntos de la construcción, en los cuales la estudiante hace referencia al tamaño de las circunferencias y el comportamiento de los puntos A y B.

En las tareas 15, 17, 19, 21 y 23 nuevamente identificamos una práctica de abstracción mediante la manipulación y los aspectos perceptuales (A-M/AP), pero tienen la particularidad de que la manipulación se hace mediante el botón de *borrar* y observando qué elementos se borraron a la par del elemento en concreto (Tabla 13).

Tabla 13 Identificación de prácticas en las T15, T17, T19, T21 y T23 de la E1

Instrucción/ Pregunta	Respuesta	Prácticas		
		¿Qué hace?	¿Cómo lo hace?	¿Con qué lo hace?
15. En la construcción, con la herramienta de Borrar, borra el punto C y observa lo que sucede. ¿Qué elementos se borraron también?	Si borramos C también se borra la circunferencia 2 y la línea paralela al segmento AB	Borra el <i>punto C</i> e identifica que elementos de la construcción se borran	Seleccionando y borrando el <i>punto c</i> determina que la circunferencia 2 y la línea paralela al segmento AB se borran también	Con la herramienta de <i>Borrar</i>
17. Borra el punto A y observa lo que sucede. ¿Qué elementos se borraron también?	Se borra todo excepto el punto B	Borra el punto A e identifica que elementos de la construcción se borran	Seleccionando y borrando el punto A y determinando que todo se borra a excepción del punto B	Con la herramienta de <i>Borrar</i>
19. Borra el punto B y observa lo que sucede. ¿Qué elementos se borraron también?	Se borra todo excepto el punto A	Borra el punto B e identifica que elementos de la	Seleccionando y borrando el <i>punto B</i> y determina que	Con la herramienta de <i>Borrar</i>

		construcción se borran	todos los elementos borran a excepción del <i>punto A.</i>	
21. Borra cualquier circunferencia y observa lo que sucede. ¿Qué elementos se borraron también?	Ninguna	Borra la <i>circunferencia</i> e identifica que elementos de la construcción se borran	Seleccionando y borrando la <i>circunferencia</i> y determinando que ninguno elemento se borro	Con la herramienta de <i>Borrar</i>
23. Borra la perpendicular y observa lo que sucede. ¿Qué elementos se mantuvieron	Se borra C, la circunferencia 2 y la línea paralela a AB	Borra la <i>perpendicular</i> e identifica que elementos de la construcción se borran	Seleccionando y borrando la <i>perpendicular</i> y determinando que se borra el <i>punto C</i> , la <i>circunferencia 2</i> y la línea <i>paralela</i>	Con la herramienta de <i>Borrar</i>

Nota. En negritas se destacan los aspectos perceptuales (AP) y manipulación (M).

Mientras que las tareas 16, 18, 20, 22 y 24 promueven prácticas de abstracción mediante la manipulación y los aspectos perceptuales (A-M/AP), sin embargo, éstas hacen referencia a los elementos que se mantuvieron después de *borrar* un elemento en específico (Tabla 14).

Tabla 14 Identificación de prácticas en las T16, T18, T20, T22 y T24 de la E1

Instrucción/ Pregunta	Respuesta	Prácticas		
		¿Qué hace?	¿Cómo lo hace?	¿Con qué lo hace?
16. ¿Qué elementos se mantuvieron?	Se mantiene la circunferencia 1, Los puntos A y B, y también la línea perpendicular a AB que pasa por A	Identifica los elementos que se mantuvieron a partir de borrar el <i>punto C</i>	Enlistando los elementos que se mantienen después de borrar el <i>punto C</i> como la <i>circunferencia 1</i> , el <i>punto A</i> y <i>B</i> , la	

			<i>línea perpendicular al segmento AB</i>	
18. ¿Qué elementos se mantuvieron?	Se mantiene B	Identifica que elementos se mantuvieron a partir de borrar el punto A	Seleccionando y borrando el punto A y determina que solo se mantiene el punto B	
20. ¿Qué elementos se mantuvieron?	se mantiene A	Identifica que elementos se mantuvieron a partir de borrar el <i>punto B</i>	Seleccionando y borrando el <i>punto B</i> y determina que solo se mantiene el <i>punto A</i>	
22. ¿Qué elementos se mantuvieron?	Se mantienen todos y solo se borra la circunferencia seleccionada.	Identifica que elementos se mantuvieron a partir de borrar la <i>circunferencia</i>	Seleccionando y borrando la <i>circunferencia</i> y determinando que todos los elementos se mantienen menos la circunferencia borrada	
24. ¿Qué elementos se mantuvieron?	La circunferencia 1, los puntos A y B, y el segmento AB	Identifica que elementos se mantuvieron a partir de borrar la <i>perpendicular</i>	Seleccionando y borrando la perpendicular y determinando que se mantuvieron los puntos A y B, la primera circunferencia y el segmento AB	

Nota. En negritas se destacan los aspectos perceptuales (AP) y manipulación (M).

Por último, en la T25 sumamos los aspectos AGD, los cuales hacen referencia a las características del Ambiente de Geometría Dinámica -de ahí sus iniciales- ya que, en esta tarea, la estudiante logra una práctica de abstracción (A-AGD), pero lo hace considerando el *proceso de construcción*, debido a que al cuestionarle sobre por qué ciertos elementos se eliminan

cuando se borra un elemento en específico, ella menciona que se “debe a la forma que se fueron construyendo...” (Figura 52), es decir a la secuencia de pasos que se siguieron para llegar al diagrama final. En estos aspectos AGD también se consideran las relaciones de dependencia y comportamiento dinámico, ya que son características esenciales de los Ambientes de Geometría Dinámica.

Figura 52 Respuesta de la E1 - T25

Respuesta
Se debe a la forma en que se fueron construyendo ambas circunferencias.

Estudiando la construcción

Para la T26 identificamos una práctica de representación enfocada a la construcción (R-M), ya que en esta tarea nuevamente se debe seguir una secuencia de pasos para la construcción de un diagrama en específico.

Las tareas de la 27 a la 33 son prácticas de abstracción mediante la manipulación, los aspectos perceptuales y los aspectos AGD (A-M/AP/AGD), ya que la estudiante identifica las *relaciones de dependencia* entre los elementos, esto lo hace *manipulando* la construcción por medio de *borrar* el elemento específico e identificar que elementos se mantienen y cuáles se eliminan; aquellos elementos que se borran son los que dependían del elemento específico (Tabla 15); por ejemplo, del punto A (elemento específico) dependen todos los elementos excepto el punto B.

Tabla 15 Identificación de prácticas de la T27 a T33 de la E1

Instrucción/ Pregunta	Respuesta	Prácticas		
		¿Qué hace?	¿Cómo lo hace?	¿Con qué lo hace?
27. A partir de la construcción y el análisis de la tarea anterior, responde las siguientes preguntas: ¿Qué elementos dependen del punto A?	Si borramos el punto A, todas las demás construcciones se van y solo permanece B	Determina que elementos dependen del <i>punto A</i>	Borrando el <i>punto A</i> , y determinando que todas las construcciones se van y solamente	Con la herramienta de <i>Borrar</i>

			permanece el <i>punto B</i>	
28. ¿Qué elementos dependen del punto B?	Si borramos B, todas las demás construcciones se van y solo permanece A	Determina que elementos dependen del <i>punto B</i>	Borrando el <i>punto B</i> , y determinando que todas las construcciones se van y solamente permanece el <i>punto A</i>	Con la herramienta de <i>Borrar</i>
29. ¿Qué elementos dependen del punto C?	circunferencia d, la paralela y el movimiento de esta última	Determina que elementos dependen del <i>punto C</i>	Borrando el <i>punto C</i> , y determinando que de éste dependen la circunferencia d, la paralela y el movimiento de esta última	Con la herramienta de <i>Borrar</i> y con la activación de la herramienta <i>Mueve</i> para el <i>punto C</i> y la <i>paralela</i>
30. ¿Qué elementos dependen de la perpendicular?	la circunferencia d, el punto c y la paralela	Determina que elementos dependen de la <i>perpendicular</i>	Borrando la <i>perpendicular</i> , y determinando que dependen la <i>circunferencia d</i> , el <i>punto C</i> y la <i>paralela</i>	Con la herramienta de <i>Borrar</i>
31. ¿Qué elementos dependen de la paralela?	Ninguno	Determinan que elementos dependen de la <i>paralela</i>	Borrando la <i>paralela</i> , y determinando que ningún elemento depende de está.	Con la herramienta de <i>Borrar</i>
32. ¿Qué elementos dependen de la circunferencia c?	Ninguno	Determina que elementos dependen de la <i>circunferencia c</i>	Borrando la <i>circunferencia c</i> , y determinando que ningún elemento depende de está.	Con la herramienta de <i>Borrar</i>
33. ¿Qué elementos dependen de la circunferencia d?	Ninguno	Determina que elementos dependen de la <i>circunferencia d</i>	Borrando la <i>circunferencia d</i> , y determinando que ningún	Con la herramienta de <i>Borrar</i>

			elemento depende de está.	
--	--	--	---------------------------	--

Momento 3. ¿Cómo se construye?

En este último momento podemos notar que existen tareas enfocadas a la representación y a la abstracción, porque en este último se reflejan los elementos trabajados anteriores (arrastre, proceso de construcción y relaciones de dependencia).

Construcción de un cuadrado

En las primeras tareas (T34 y T35) identificamos una práctica de representación enfocada a la construcción (R-C), dado que la estudiante realiza un cuadrado y describe su proceso de construcción, en este caso también se reconoce el arrastre como un elemento importante durante el proceso de construcción, ya que la estudiante en el paso 7 y paso 9 mueve los vértices para confirmar que las características geométricas del cuadrado se mantengan, es decir, realiza una *prueba del arrastre*.

Para la T36 reconocemos una práctica de abstracción a través de la manipulación, aspectos perceptuales y aspectos AGD (A-M/AP/AGD), ya que la estudiante retoma la acción de *borrar* y observar qué se mantiene y qué se elimina para identificar las *relaciones de dependencia* en su construcción (Figura 53). En la T37 identificamos una práctica de abstracción enfocada en los aspectos perceptuales (A-AP), debido que solo se hace referencia a los aspectos visuales de la figura.

Figura 53 Respuesta de la E1 - T36

<p>Respuesta</p> <p>Si se borra el centro de la circunferencia se borra todo excepto el punto extremo derecho del segmento si borro el punto extremo derecho se borra todo excepto el punto que es centro de la circunferencia si se borra la paralela, todo se mantiene si se borra la primera perpendicular se borra también la paralela si se borra la segunda perpendicular, todo lo demás se mantiene si se borra la circunferencia, todo se mantiene excepto la paralela si se selecciona lo naranja todo la construcción se mantiene</p>
--

Como la E1 comprobó el comportamiento de los puntos, para la T38 identificamos una práctica de abstracción enfocada a la manipulación y en la T39 sumamos a esta práctica los aspectos geométricos (A-M/AG), ya que describe por qué su construcción pasa la prueba del

arrastré al referirse a que los lados se construyeron como perpendiculares y paralelas. Por último, en la T40 la estudiante utiliza los aspectos geométricos, perceptuales y los aspectos propios del Ambiente (Tabla 16), ya que al preguntarle por el comportamiento de los elementos hace referencia a las perpendiculares, paralelas, el movimiento de un elemento que depende de otro, etc., por lo que en esta tarea se reconoce una práctica de abstracción mediante la manipulación, aspectos perceptuales, aspectos geométricos y aspectos AGD (A-M/AP/AG/AGD).

Tabla 16 Identificación de prácticas en la T40 de la E1

Instrucción/ Pregunta	Respuesta	Prácticas		
		¿Qué hace?	¿Cómo lo hace?	¿Con qué lo hace?
40. Describe cómo es el comportamiento de los elementos de la construcción	<p>Las 2 perpendiculares, la paralela y los otros dos puntos- vértices grises, si se seleccionan para mover no se puede (su movimiento depende del movimiento de los elementos que si se pueden mover)</p> <p>Los vértices azules se pueden mover en cualquier dirección dejando fijo al otro extremo azul.</p> <p>Podemos seleccionar toda la construcción y se mueve en conjunto</p>	Describe cómo es el comportamiento de cada elemento de la construcción	<p>Enlistando el comportamiento de cada elemento:</p> <p>1. Seleccionando las <i>perpendiculares, paralela</i> y <i>vértices grises (puntos)</i> no se pueden mover, ya que su movimiento depende de los elementos que si se pueden mover.</p> <p>2. Seleccionando los vértices azules (<i>puntos</i>) se pueden mover en cualquier dirección, pero se deja fijo el otro punto.</p> <p>3. Seleccionando toda la construcción se</p>	<p>Con la activación de la herramienta <i>Mueve</i> para cada elemento de la construcción</p>

			mueve	en	
			conjunto.		

Nota. En negritas se destacan los aspectos perceptuales (AP), aspectos geométricos (AG), aspectos AGD (AGD) y la manipulación (M).

Construcción de un rectángulo

En las tareas T41 y T42 reconocemos una práctica de representación enfocada a la construcción (R-C), dado que la estudiante construye un rectángulo que cumple con las características geométricas pese a arrastrar los puntos, en la T42 podemos dar cuenta de esto ya que describe en su paso 6 que mueve los puntos; esto lo vemos reflejado en las tareas 45 y 46 cuando se realiza la prueba del arrastre, en esas tareas pasamos de una práctica de abstracción mediante la manipulación (A-M) y en los aspectos geométricos (A-M).

Nuevamente en la T43 cuando hay que describir las relaciones de dependencia reconocemos una práctica de abstracción a través de la manipulación, aspectos perceptuales y aspectos AGD (A-M/AP/AGD), debido que la estudiante realiza la acción de *borrar* y observar qué elementos se mantienen y qué elementos se eliminan para determinar las *relaciones de dependencia* (Figura 54). A diferencia de la construcción pasada, en la T44 la E1 reconoce que su construcción necesitaba tener dos pares de lados paralelos, por lo que esta tarea la identificamos como una práctica de abstracción mediante los aspectos geométricos (A-AG).

Figura 54 Respuesta de la E1 - T43

<p>Respuesta</p> <p>Si se borra el punto extremo izquierdo se borra todo excepto el otro punto extremo derecho y viceversa. si se borra el punto c (p3.1), se borra también la perpendicular 3 y el punto gris de intersección, lo demás permanece si se borra la perpendicular 3, solo se borra el punto gris de intersección si se borra la perpendicular 2 , solo se borra el punto gris de intersección si se borra la perpendicular 1 se borra el punto c y la perpendicular 3</p>
--

Por último, en la T47 reconocemos una práctica de abstracción a través de la manipulación, los aspectos perceptuales y los aspectos AGD (A-M/AP/AGD), ya que se describe el comportamiento de los puntos de la construcción, en tanto su comportamiento al arrastrar como a las *relaciones de dependencia* (Tabla 17).

Tabla 17 Identificación de prácticas en la T47 de la E1

Instrucción/ Pregunta	Respuesta	Prácticas		
		¿Qué hace?	¿Cómo lo hace?	¿Con qué lo hace?
47.Describe cómo es el comportamiento de los elementos de la construcción.	<p>El punto gris y las 3 rectas paralelas si se seleccionan no se pueden mover, su movimiento dependerá de los demás elementos de la construcción que si puedan moverse si son seleccionados</p> <p>El punto extremo izquierdo del segmento(p1) se puede mover en cualquier dirección dejando fijo el otro punto extremo derecho y viceversa</p> <p>El punto c solo se puede mover arriba y abajo sobre la perpendicular 1</p>	Describe cómo es el comportamiento de cada elemento de la construcción	<p>Enlistando el comportamiento de cada elemento:</p> <p>1. Seleccionando las <i>paralelas</i> y el <i>punto</i> gris no se pueden mover, ya que su movimiento dependerá de los otros elementos que si se pueden mover.</p> <p>2. Seleccionado el <i>punto</i> izquierdo del primer segmento se puede mover en cualquier dirección, dejando fijo el punto del extremo derecho; y viceversa.</p> <p>3. Seleccionando el <i>punto</i> C solo se mueve arriba y abajo sobre la primera <i>perpendicular</i>.</p>	<p>Con la activación de la herramienta <i>Mueve</i> para cada elemento de la construcción</p>

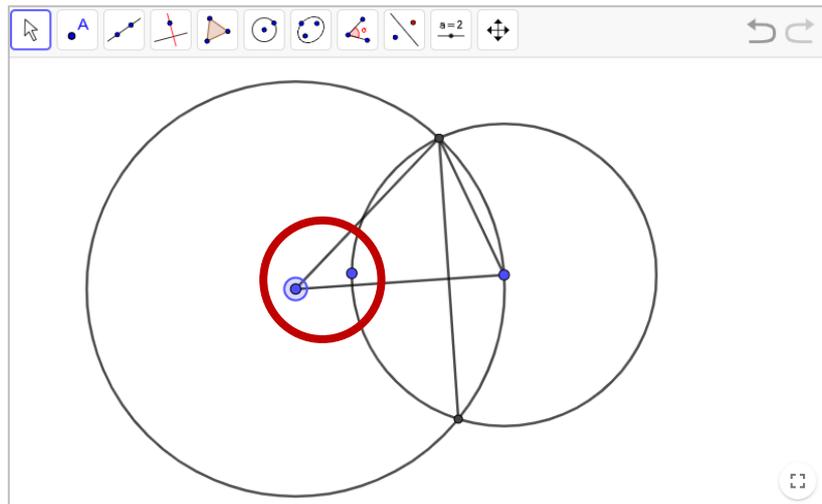
Nota. En negritas se destacan los aspectos perceptuales (AP), aspectos geométricos (AG), aspectos AGD (AGD) y la manipulación (M).

4.3.2.2 Confrontación y Resignificación

Durante la ambientación identificamos un momento de *confrontación* con respecto al proceso de construcción dentro del Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) y una construcción hecha a lápiz y papel; cuando la estudiante comienza a realizar construcciones más elaboradas, en este caso un triángulo equilátero, durante las tareas 12 y 13 podemos identificar que la construcción no pasa la *prueba del arrastre*, sin embargo, dejamos que la estudiante continuara hacia la T14 donde se le proponía una secuencia de pasos para el triángulo.

Durante esta tarea (14) nos percatamos que la E1 coloca un punto de manera equivocada, en lugar de seleccionar el centro de la circunferencia crea un nuevo punto, lo que provoca que al arrastrar el triángulo no *pase la prueba del arrastre* (figura 50). El momento de *confrontación* llega cuando la E1 reconoce que hubo un problema de comprensión al momento de construcción y se le pide realizar las modificaciones necesarias para que el triángulo se mantenga.

Figura 55 Creación de un nuevo punto – T14



Aunque haya sido un problema con la comprensión de las instrucciones, reconocemos la importancia que tuvo para las tareas que continuaban, ya que, nos permitió identificar el comportamiento dinámico de ciertos elementos dentro del ambiente, y también se pudo indicar las relaciones de dependencia, ya que del punto creado por error dependía la longitud del segmento.

De esta confrontación, reconocemos que hubo un proceso de *resignificación* gracias a las tareas geométricas del diseño (Momento 1, 2 y 3), ya que, al principio, reforzamos que los

elementos (puntos, rectas, etc.) dentro del Ambiente tendrán comportamientos mediante el arrastre; y en el segundo momento, empezamos a reconocer las relaciones de dependencia mediante la manipulación de las construcciones, borrando ciertos elementos y eliminando el comportamiento dinámico de los elementos.

Sin embargo, el momento más claro de la *resignificación* lo vemos demostrado en el tercer momento, cuando la estudiante debe realizar dos construcciones de cuadriláteros (cuadrado y rectángulo), aquí se ve reflejado que la estudiante además de considerar las características geométricas propias de cada cuadrilátero, toma en consideración los aspectos del AGD, es decir, comprueba el *comportamiento dinámico* de cada punto durante el *proceso de construcción* e identifica las *relaciones de dependencia* que se crean entre esos mismos elementos (Tabla 18).

Tabla 18 Momento de Resignificación de la EI en la Construcción de un cuadrado

Secuencia de tareas:	Construcción de un cuadrado			
Instrucción/ Pregunta	Respuesta	Prácticas		
		¿Qué hace?	¿Cómo lo hace?	¿Con qué lo hace?
36. A partir del orden de construcción mencionado anteriormente, enlista qué elementos dependen de qué elementos	Si se borra el centro de la circunferencia se borra todo excepto el punto extremo derecho del segmento si borro el punto extremo derecho se borra todo excepto el punto que es centro de la circunferencia si se borra la paralela, todo se mantiene si se borra la primera perpendicular se borra también la	Determina las relaciones de dependencia entre los elementos de su construcción	Seleccionando la herramienta de borrar, borrando los siguientes elementos y observando cuáles elementos se borran y cuáles se mantienen: 1. Borrando el centro de la <i>circunferencia</i> se borra todo excepto el <i>punto</i> extremo derecho del segmento. 2. Borrando el extremo derecho (<i>punto</i>) se borra	Con la herramienta de <i>Borrar</i>

	<p>paralela si se borra la segunda perpendicular, todo lo demás se mantiene si se borra la circunferencia ,todo se mantiene excepto la paralela si se selecciona lo naranja todo la construcción se mantiene</p>		<p>todo excepto el punto que es centro de la <i>circunferencia</i>. 3. Borrando la <i>paralela</i>, todo se mantiene. 4. Borrando la primera <i>perpendicular</i>, se borra también la <i>paralela</i>. 5. Borrando la segunda <i>perpendicular</i>, todo lo demás se mantiene. 6. Borrando la <i>circunferencia</i>, todo se mantiene excepto la <i>paralela</i>. 7. Borrando el <i>polígono</i> (solo la parte de color) toda la construcción se mantiene.</p>	
<p>39.Explica por qué la construcción pasó o no la prueba del arrastre</p>	<p>Todas las características se mantienen pues los lados del polígono fueron marcados como perpendiculares y paralelas, al mover los puntos-vértices pasó la prueba pues me guíe de</p>	<p>Describe por qué su construcción pasa la prueba del arrastre</p>	<p>Moviendo los puntos-vértices y comprobando que todas las características se mantienen, debido a que los lados del polígono fueron marcados como <i>perpendiculares y paralelas</i></p>	<p>Con la activación de la herramienta <i>Mueve</i> para cada uno de los vértices del cuadrado</p>

	las actividades anteriores			
40.Describe cómo es el comportamiento de los elementos de la construcción	<p>Las 2 perpendiculares, la paralela y los otros dos puntos-vértices grises, si se seleccionan para mover no se puede (su movimiento depende del movimiento de los elementos que si se pueden mover)</p> <p>Los vértices azules se pueden mover en cualquier dirección dejando fijo al otro extremo azul.</p> <p>Podemos seleccionar toda la construcción y se mueve en conjunto</p>	Describe cómo es el comportamiento de cada elemento de la construcción	<p>Enlistando el comportamiento de cada elemento:</p> <p>1. Seleccionando las <i>perpendiculares</i>, <i>paralela</i> y vértices grises (<i>puntos</i>) no se pueden mover, ya que su movimiento depende de los elementos que si se pueden mover.</p> <p>2. Seleccionando los vértices azules (<i>puntos</i>) se pueden mover en cualquier dirección, pero se deja fijo el otro punto.</p> <p>3. Seleccionando toda la construcción se mueve en conjunto.</p>	<p>Con la activación de la herramienta <i>Mueve</i> para cada elemento de la construcción</p>

Nota. En negritas se destacan los aspectos AGD.

En este apartado mostraremos nuestra posición frente a la revisión de la literatura, resaltando las similitudes y diferencias encontradas en nuestra toma de datos; también daremos conclusión del proyecto dando respuesta a nuestras preguntas de investigación.

5.1 Discusión

A partir de lo ocurrido en nuestra experiencia podemos encontrar ciertas similitudes con la revisión de literatura que reportamos; en primer lugar, coincidimos con Itzcovich (2005) acerca de involucrar a las y los estudiantes en el proceso de construcción, ya que en el sistema educativo mexicano se le suele dar más énfasis a las actividades del tipo *aritmético* y de *observación* haciendo que las actividades *geométricas* cambien o disminuyan su naturaleza geométrica; a su vez coincidimos que el estudiante se suele centrar en que la imagen de su figura sea la “*correcta*” dejando de lado las propiedades geométricas y el ambiente en el que se construye.

Reconocemos la importancia del orden de construcción en el Ambiente de Geometría Dinámica (AGD), coincidiendo con Jones (2001) en la dificultad de mantener invariantes las propiedades geométricas al aplicar la prueba del arrastre; por ello, es necesario explorar el comportamiento dinámico y realizar tareas donde se le proponga un orden de construcción al estudiante; en nuestro caso estas tareas se realizaron desde la ambientación y ahí reconocimos dificultades por parte de la estudiante, como centrarse solo en la imagen, donde reflejaran las medidas iguales en ángulos y lados.

Coincidimos con Balacheff (1996) quien reporta que la mayoría de los usuarios no toman en consideración la secuencia de pasos al llevar a cabo una construcción en un AGD, por ello que, para nosotras fuera importante orientar a la estudiante en ese sentido, así que dentro de las instrucciones se podían encontrar secuencias de pasos a seguir y en otras tareas se le pedía a la estudiante escribir su proceso de construcción para cuadriláteros; esto se dio desde la ambientación hasta el último momento del diseño.

Similar a lo reportado por Prieto y Arredondo (2021) nuestra estudiante también vive un momento de *confrontación* inherente del objeto dinámico, al darse cuenta que, al arrastrar un punto de su construcción, está no cumple con las propiedades geométricas, por ello que desde nuestro diseño, estudiemos en un primer momento el comportamiento dinámico reconociendo que los puntos creados en el AGD tendrán distintos comportamientos según el

orden en el que fueron creados, y a su vez ese primer momento buscaba dar indicios de las relaciones de dependencia.

En ese sentido, como segundo lugar, se decidió orientar el trabajo con las relaciones de dependencia hacia una práctica de manipulación y aspectos visuales, ya que tomamos en consideración lo reportado por Talmon y Yerushalmy (2004) y Hölzl, et al. (1994) acerca de la necesidad de hacer más investigaciones que se enfocaran en las relaciones de dependencia, ya que éstas no eran tan claras al momento de explorar una construcción; en nuestro caso, el diseño tenía tareas orientadas a *borrar* un elemento en específico y observar que elementos se mantenían y que elementos se eliminaban, esto ayudó a identificar las relaciones que se generaban en la construcción, en tanto su orden y su dependencia.

Toda esa orientación nos llevó a un último momento donde la estudiante dentro de su proceso de construcción iba trabajando con la *prueba del arrastre*, es decir, movía los puntos para comprobar su comportamiento con respecto a los otros elementos, y utilizaba la estrategia de *borrar* y observar qué se elimina y qué se mantenía para reconocer las relaciones de dependencia.

Nuestro diseño y la fundamentación de las tareas, así como la secuencia de estas, propiciaron el tránsito de prácticas aritméticas a *prácticas de naturaleza geométrica*, reconociendo acciones propias del ambiente en el que estuvimos trabajando; de igual forma, nuestra investigación -y diseño- puede ser un referente a la literatura en los procesos de construcción dentro de AGD y las investigaciones que se centren en las características de estos ambientes.

5.2 Conclusiones

Dando respuesta a nuestra pregunta de investigación: *¿qué tipo de prácticas geométricas se ven involucradas durante el proceso de construcción de cuadriláteros en un Ambiente de Geometría Dinámica?* Las prácticas que provocó el diseño fueron de abstracción y representación, dado que las tareas se enfocaban en comprender las características principales del ambiente y, por medio de éstas, llevar a cabo un proceso de construcción de cuadriláteros que al aplicar el arrastre siguieran manteniendo todas sus propiedades geométricas.

En nuestra segunda pregunta: *¿cómo se utilizan las relaciones de dependencia para llevar a cabo una construcción de cuadriláteros dentro de un Ambiente de Geometría Dinámica?*, es necesario tener en cuenta que Talmon y Yerushalmy (2004) reportaban que estas relaciones no eran tan claras para las y los usuarios de los AGD, por lo que fue fundamental que en un segundo momento la estudiante identificara la dependencia entre los elementos, por ello las tareas se enfocaron tanto en construir como en manipular la construcción, poniendo atención en el comportamiento y en la relación entre los elementos constitutivos de la construcción.

La acción de *borrar* y observar qué se mantenía y qué se eliminaba ayudó a que las relaciones de dependencia fueran más claras y visibles para la estudiante, ya que permitía relacionar la secuencia de pasos (proceso de construcción) con la dependencia que se generaba entre los elementos.

Respecto a nuestra tercera pregunta: *¿qué momentos de confrontación viven los estudiantes en formación inicial al momento de construir un cuadrilátero en un Ambiente de Geometría Dinámica, cuando se consideran las características de este?*, reconocemos que la principal confrontación se dio con la *prueba del arrastre* en el momento de ambientación, debido que la estudiante en un primer momento construyó su figura cuidando las propiedades geométricas del triángulo equilátero, es decir, que los lados y ángulos midieran lo mismo, sin embargo, no fue considerado el comportamiento dinámico de los puntos; misma situación ocurrió cuando a la estudiante se le propuso un proceso de construcción, ya que al poner un punto de más, la figura se deformaba, es decir, *no pasaba la prueba del arrastre*.

La estructura del diseño ayudo a reconocer las características del ambiente, en el sentido que los elementos que se construyen tendrán cierto comportamiento dinámico -por medio del

arrastre- y su comportamiento también se verá afectado por las relaciones de dependencia y el orden en el que fueron construidos.

VI. PROSPECTIVA DE INVESTIGACIÓN

En tanto a la revisión bibliográfica, sería significativo hacer una revisión más profunda a los libros de texto en educación secundaria, por ejemplo, revisar otras editoriales y comparar las tareas que se les piden a las y los estudiantes; e incorporar libros de educación media superior, en específico, revisar los correspondientes a las asignaturas de Geometría.

Respecto a los elementos para el rediseño, es necesario realizar ajustes en la redacción de preguntas e instrucciones para evitar confusiones, por ejemplo, lo sucedido en la ambientación cuando la estudiante no comprende del todo una instrucción y ser más específicas con la utilización de herramientas de GeoGebra Clásico o GeoGebra Notas; además, podríamos indagar más en el proceso de construcción y las relaciones de dependencia explorando la construcción de otros cuadriláteros o polígonos. A propósito de la confrontación y resignificación que se quiere lograr con el diseño, se propone incorporar una tarea más en la ambientación donde las y los participantes puedan realizar su propio proceso de construcción, pero de un cuadrilátero, esto con el fin de compararlo al finalizar el momento 3, donde se supone que el participante ya identifica las relaciones de dependencia, comportamiento dinámico y el orden de construcción.

Durante la implementación sería significativo llevar a cabo el diseño de forma presencial y con un número mayor de participantes, a fin de tener otro tipo de reflexiones e interacción con las y los participantes; el cambio de modalidad implicaría realizar un ajuste al número y duración de las sesiones, así como los requerimientos técnicos que se le solicitaría a las personas interesadas en participar. Además, permitiría tener más población para llevar a cabo el diseño, y enriquecer las discusiones que nazcan durante las tareas.

- Avcu, R. (2022). Pre-service middle school mathematics teachers' personal concept definitions of special quadrilaterals. *Mathematics Education Research Journal*. <https://doi.org/10.1007/s13394-022-00412-2>
- Balacheff, N. (1996). Advanced educational technology: knowledge revisited, en T.T. Liao (Ed.). *Advanced Educational Technology: Research Issues and Future Potential*, NATO ASI Series, 145. https://doi.org/10.1007/978-3-642-60968-8_1
- Cabañas, G. (2011). El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio Socioepistemológico. [Tesis de doctorado]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.
- Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Editorial Gedisa.
- Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). El Programa Socioepistemológico de Investigación en Matemática Educativa: El caso de Latinoamérica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18(1), 5-17. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1810>
- Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D. y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(3), 91-116. <https://www.redalyc.org/pdf/2740/274032530006.pdf>
- Carrasco, G. y Marván, L. (2019). Matemáticas 3. Editorial Santillana. https://www.santillanacontigo.com.mx/wp-content/uploads/2021/06/Matematicas-3_ES_RD_Conaliteg.pdf
- Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M. y Pitta-Pantazi, D. (2004). Proofs through exploration in dynamic geometry environments. *Journal Science Mathematics Educational*, 2, 339-352. <https://doi.org/10.1007/s10763-004-6785-1>
- De Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the learning of mathematics*, 14(1), 11-18. <http://www.jstor.org/stable/40248098>

- Erez, M. y Yerushalmy, M. (2006). "If you can turn a rectangle into a square, you can turn a square into a rectangle ..." Young students experience the dragging tool. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 11, 271-299. <https://doi.org/10.1007/s10758-006-9106-7>
- Fujita, T. y Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: towards a theoretical framing. *Research in Mathematics Education*, 9(1-2), 3-20. <http://dx.doi.org/10.1080/14794800008520167>
- Gal, H. y Lew, H. C. (2008). Is a rectangle a parallelogram? Towards a bypass of Van Hiele Level 3 decision making en H. N. Jahnke, H.N. y Lew, H.C. (Eds.), *The 11th International Congress on Mathematical Education*. México: Monterrey
- Goldenberg, E. P. y Cuoco, A. A. (1998). What is dynamic geometry? en Lehrer, R., Chazan, D. (Ed.). *Designing learning environments for developing an understanding of geometry and space*. Mahwah, NJ: Erlbaum
- González-Salazar, L. D. y Flores-Medrano, E. (2021). Geometría fuera de vista: clasificando cuadriláteros con estudiantes con discapacidad visual. *PNA*, 16(1), 57-77. <https://doi.org/10.30827/pna.v16i1.21240>
- Hölzl, R. (2001). Using dynamic geometry software to add contrast to geometric situations - A case study. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, 63-86. <https://doi.org/10.1023/A:1011464425023>
- Hölzl, R., Healy, L., Hoyles, C. y Noss, R. (1994). Geometrical relationships and dependencies in Cabri. *Micromath*, 10(3). 8-11.
- Itzcovich, H. (2005). Las construcciones como medio para explorar propiedades de las figuras, en Iniciación al estudio didáctico de la Geometría. *Libros del Zorzal*.
- Jones, K. (2001). Providing a Foundation for Deductive Reasoning Students' Interpretations when Using Dynamic Geometry Software and Their Evolving Mathematical Explanations. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 55-85. <https://doi.org/10.1023/A:1012789201736>
- Laborde, C. (2005). The Hidden Role of Diagrams in Students' Construction of Meaning En Geometry. En Kilpatrick, J., Hoyles, C., Skovsmose, O. y Valero, P. (Eds), *Meaning in*

- Mathematics Education*. (pp. 159-179). Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-24040-3_11
- Leung, A. (2011). An epistemic model of task design in dynamic geometry environment. *ZDM Mathematics Education*, 43, 325-336. <https://doi.org/10.1007/s11858-011-0329-2>
- Leung, A. (2015). Discernment and Reasoning in Dynamic Geometry Environments. En S. J. Cho (Ed.), *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education*, 451–469. https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6_26
- Leung, A., Baccaglioni-Frank, A. y Mariotti, M.A. (2013). Discernment of invariants in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, 84, 439-460. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9492-4>
- López-Ortiz, A. (2024). *Interacciones matemáticas en la Modalidad de Educación a Distancia en Línea*. [Tesis de maestría no publicada]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados.
- Martínez, P. y Carrasco, G. (2018). *Matemáticas 1*. Editorial Santillana. <http://santillanacontigo.com.mx/libromedia/espinal/cmt1/>
- Martínez, P. y Contreras, L. (2020). *Matemáticas 2*. Editorial Santillana. <https://www.santillanacontigo.com.mx/libromedia/espinal/cmt2ep/mobile.html>
- Molina, M., Castro, E., Molina, J.L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 75-88. http://funes.uniandes.edu.co/1568/1/Un_acercamiento_a_la_Investigación_de_Diseño_def.pdf
- Okazaki, M. (2013). Identifying situations for fifth graders to construct definitions as conditions for determining geometric figures, en *Proceedings of the 37th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, 3, 409–416. Kiel, German
- Prieto, J.L. y Arredondo, E-H. (2021). Construcciones euclidianas con GeoGebra y procesos de objetivación: Un estudio con futuros profesores de matemáticas. *Revista Matemática*,

Ensigno e Cultura. 16(39), 77-100. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n39.p77-100.id496>

Rodríguez-Ibarra, M. y Montiel, G. (2021). Pensamiento geométrico: una experiencia de trabajo con profesores de matemáticas de secundaria. *Sahuarus*, 5(1), 50-63

Rubio-Pizzorno, S. (2018). Integración digital a la práctica del docente de geometría [Tesis de maestría]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. [Oñ.]

Secretaría de Educación Pública. (2017). Matemáticas Educación Secundaria. Plan y programa de estudios, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación. <https://www.planyprogramasdestudio.sep.gob.mx/descargables/biblioteca/secundaria/mate/1-LPM-sec-Matematicas.pdf>

Sinclair, N., Bartolini Bussi, M., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A. y Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM Mathematics Education*, 48, 691-719. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0796-6>

Talmon, V. y Yerusalmy, M. (2004). Understanding dynamic behavior parent-child relations in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, 57, 91-119. <https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000047052.57084.d8>

Torres-Corrales, D. y Montiel-Espinosa, G. (2021). Resignificación de la razón trigonométrica en estudiantes de primer año de Ingeniería. *Educación matemática*, 33(3), 202-232. <https://doi.org/10.24844/em3303.08>

Anexo 1. Encuesta del perfil del estudiante

Encuesta del perfil del participante

Manejo de la información: Los datos recolectados para la investigación serán utilizados únicamente con fines académicos, formativos y de investigación, para lo que se mantendrá el anonimato de la identidad de sus participantes. Estos datos no serán utilizados para el envío de publicidad ni propaganda de ninguna índole.

Datos personales		
Nombre completo:	Edad	
Lugar de nacimiento: (Localidad, estado y país)	Sexo	<input type="checkbox"/> Mujer <input type="checkbox"/> Hombre
Correo electrónico:		

Datos familiares

En esta sección encontraras una serie de preguntas acerca de ti y tu familia (por ejemplo: con quien vives y el nivel de escolaridad de tus padres).

1) ¿Con quién vives? *Por favor marca con una X la o las respuestas que correspondan.*

Padre Madre Hermanos(as) Solo(a) Abuelos

Otros familiares (especifique) _____

2) ¿Cuál es la edad, escolaridad máxima y ocupación actual de los miembros de tu familia?

Escolaridad concluida -ejemplos- no fue a la escuela, primaria, secundaria, bachillerato, carrera técnica, licenciatura, maestría o especialidad, doctorado, no lo sé

Ocupación actual -ejemplos- empleado en una empresa, negocio propio, jubilado, dedicado al hogar, estudiante, desempleado, trabajo eventual, nunca ha trabajado

Miembros	Edad	Escolaridad concluida	Ocupación actual
Madre			
Padre			
Hermano/a			

Nota: si requiere más renglones puede responder debajo de la tabla, en caso de no tener hermanos, dejarlo en blanco y omitir la pregunta 4.

3) Acerca de tus abuelos (si lo desconoces escribe “no sé”)

Miembros	Escolaridad concluida	Ocupación actual
Abuela materna		
Abuelo materno		
Abuela paterna		
Abuelo paterno		

4) ¿Jugabas con tus hermanos/hermanas en tu infancia?

No Si

4.1) En caso de responder que sí, responde ¿Qué tipo de juegos jugabas con tus hermanos o hermanas?

5) ¿Jugabas con tu papá o mamá (o tutor) en tu infancia?

No Si

5.1) En caso de responder que sí, responde ¿Qué tipo de juegos jugabas con tu mamá o papá (o tutor)?

6) ¿Jugabas con tus abuelos en tu infancia?

No Si

6.1) En caso de responder que sí, responde ¿Qué tipo de juegos jugabas con tus abuelos?

7) Señala con una X los integrantes de tu familia con los que creciste:

Mamá Hermano(s) Primo(s) Tía(s) Abuelo Pat.
 Papá Hermana(s) Prima(s) Tío(s) Abuela Pat.
 Pareja del padre Pareja de la madre Abuela Mat. Abuelo Mat.
 Tutor(a) legal Otra(s) personas (especifique) _____

Datos tecnológicos y de conectividad

8) ¿Cuenta con plan de internet residencial en su domicilio?

Si Compañía _____ Megas _____
 No

8.1) En caso de responder que No, ¿Dónde toma Internet para sus estudios?

Vecinos () Amigos () Compañeros de curso () Parque () Centros de comercio () Cyber () Otro ()

9) Señala con una X lo que corresponda:

Usted cuenta para el estudio con:	En óptimas condiciones y actualizado	En óptimas condiciones y no actualizado	En pésimas condiciones y actualizado	En pésimas condiciones y no actualizado	No cuento
Computador portátil					
Computador de escritorio					
Celular (Smartphone)					
Tablet (IPad)					

10) ¿Qué redes sociales utiliza? *Por favor marca con una X la o las respuestas que correspondan.*

- Facebook
 WhatsApp
 Twitter
 Instagram
 TikTok

11) ¿Cuáles son los principales inconvenientes que has presentado en relación a la conectividad en la modalidad virtual de las clases? *Por favor marca con una X la o las respuestas que correspondan.*

- Dependo del internet de vecinos, familiares o amigos y cuando no tienen no me puedo conectar
 La compañía que uso ofrece una pésima señal y me pierdo parte de las clases
 Me conecto por medio de recargas y cuando no tengo dinero no estoy en clases
 Mis recursos tecnológicos son básicos u obsoletos y es muy lenta la conectividad
 Uso un celular con mala recepción y me pierdo parte de las clases
 Mi computadora no tiene cámara y me va mal porque le dan valor a ese instrumento
 No tengo ningún inconveniente
 Otra(s) _____

12) ¿Cómo han actuado tus docentes en clases sincrónicas? *Por favor marca con una X la o las respuestas que correspondan.*

- Uno/a o algunos/as de mis profesores/as no atienden mis dificultades tecnológicas
 Uno/a o algunos/as de mis profesores/as asisten poco a las clases en línea
 Uno/a o algunos/as de mis profesores/as no se les entiende por esta vía
 Uno/a o algunos/as de mis profesores/as no responden a las preguntas que hago en clases
 Uno/a o algunos/as de mis profesores/as solo usan exposiciones como clases
 Uno/a o algunos/as de mis profesores/as no nos entregaron guías de estudio de la asignatura
 Uno/a o algunos/as de mis profesores/as no usaron el CLASSROOM, u otra plataforma
 Uno/a o algunos/as de mis profesores/as no respondieron al correo electrónico, WhatsApp u otra vía de comunicación
 Uno/a o algunos/as de mis profesores/as dan las clases aburridas o monótonas
 Uno/a o algunos/as de mis profesores/as no atiende mis necesidades especiales de aprendizaje
 Uno/a o algunos/as de mis profesores/as trataron mal en clases
 Uno/a o algunos/as de mis profesores/as no hicieron las clases interactivas

No tuve problemas o inconvenientes con uno/a o algunos/as de mis profesores/as

Otra(s) _____

13) ¿En qué espacio tomas tus clases virtuales?

Oficina Recamara Recamara con escritorio Recamara compartida Sala

Otro(s) _____

14) ¿Qué plataforma has utilizado en la modalidad virtual de las clases?

Blackboard Classroom Moodle Microsoft Teams

Otro(s) _____

Datos sobre plataforma de trabajo

15) ¿Has utilizado *softwares* de geometría dinámica durante tus clases? Por ejemplo, GeoGebra, Cabri-Geometry, Sketchpad, etc.

No

Si ¿Cuáles? _____

15.1) En caso de responder que SI, responde ¿Cuál ha sido tu experiencia al utilizar los *softwares* anteriormente mencionados?

15.2) ¿Qué dificultades has presentado al trabajar con estos *softwares*? Describe si han sido técnicas (por ejemplo: difícil de descargar, ocupa mucha memoria de la computadora), por el tipo manejo del *software*, etc.

Datos Académicos

15) Semestre que cursas actualmente: _____

16) En la actualidad, ¿en cuál de las siguientes situaciones te encuentras?

- Sólo estudio
- Principalmente estudio y hago algún trabajo
- Principalmente trabajo y además estudio
- Estudio y además estoy buscando trabajo
- Otra situación

16.1) Si respondiste que trabajas contesta la siguiente tabla, en caso contrario contesta la 17.

¿En qué trabajas actualmente?	Nº de horas que dedica al trabajo diariamente:

Jornada laboral: Matutina () Vespertina () Nocturna () Rotativo () Sin horarios ()

17) ¿Cuentas con alguna otra licenciatura o carrera trunca? (marca con una x)

- No
 Si ¿Cuál? _____

18) ¿La carrera que elegiste fue tu primera opción de formación profesional? (marca con una x)

- Si No

18.1) En caso de responder que SI, responde ¿Cuáles fueron tus principales motivaciones para elegir tu carrera profesional? (marca con una x)

- Por motivación de algún familiar
 Por motivación de amistades
 Por motivación de docentes
 Porque me pareció interesante o un reto personal
 Por factores económicos
 Por los resultados de una prueba de aptitudes
 Por la cercanía de la universidad a mi lugar de origen
 Por el prestigio y calidad del programa o universidad
 Por mis habilidades
 Otro (especifique) _____

18.2) En caso de responder que NO, responde ¿Por qué no estudiaste la carrera que fue tu primera opción? (marque con una x)

- Por influencia de algún familiar
 Por influencia de amistades
 Por influencia de docentes
 Por el resultado del examen de admisión
 Por factores económicos
 Por los resultados de una prueba de aptitudes
 Por la lejanía de la universidad a mi lugar de origen
 Porque el perfil de la carrera no era adecuado a mi género
 Por mis habilidades
 Otro (especifique) _____

19) Mis materias favoritas (marca con una x las que correspondan):

En primaria

- Artística
 Ciencias
 Computación
 Deporte
 Español
 Geografía
 Historia y Civismo
 Idiomas
 Matemáticas
 Taller (especifique) _____
 Otro (especifique) _____

En secundaria

- Artística
 Biología
 Computación
 Deporte
 Español
 Geografía
 Historia/Formación Cívica
 Idiomas
 Matemáticas
 Química
 Taller (especifique) _____
 Otro (especifique) _____

En Bachillerato (medio superior)

- Ciencias sociales (filosofía, lógica, ética, comunicación)
- Computación
- Educación física
- Dibujo técnico
- Física
- Historia
- Idiomas
- Lectura y redacción
- Matemáticas
- Química
- Taller (especifique) _____
- Otro (especifique) _____

En Superior

- Artes
- Ciencias sociales
- Computación
- Deportes
- Física
- Idiomas
- Matemáticas
- Química
- Materias de mi carrera _____
- Otro (especifique) _____

20) Cuando realizo un trabajo en equipo me identifico con (*marque con una x*)

- Me identifico como líder y guío al equipo
- Me siento mejor trabajando individualmente
- Me reúno sólo con compañeros
- Me reúno sólo con compañeras
- Trato de integrarme a todo el equipo
- Sólo observo y hago lo que me indiquen
- Me siento mejor trabajando en parejas
- Doy indicaciones, pero no me considero líder

21) Al terminar la carrera, ¿cuáles son tus expectativas? (*marque con una x*)

- Trabajar en una empresa
- Trabajar en escuelas publicas
- Trabajar en escuelas privadas
- Trabajar por cuenta propia
- Seguir estudiando
- Dedicarme al hogar
- Formar una familia
- Emprender un negocio
- Otro (especifique) _____

22) Cuando lo has necesitado, ¿quién te ha apoyado a hacer tus tareas? (*marque con una x las que correspondan*)

- Hermanos(as)
- Pareja
- Compañeros de carrera
- Personas de otras carreras
- Otros (especifique) _____

23) Señala con una x tus pasatiempos actuales:

- Jugar videojuegos
- Leer por entretenimiento

- Pasar tiempo con mi familia y/o amigos
- Ver televisión o cine
- Asistir a eventos culturales, artísticos o deportivos
- Practicar deporte (ej. fútbol, béisbol, tenis, karate...), favor de especificar
- Practicar artes (ej. música, canto, baile, pintura, dibujo...), favor de especificar
- Estudiar algo extraescolar (ej. idiomas, cocina, costura, reparación...), favor de especificar
- Otro (especifique)_____

24) Señala con una x tus pasatiempos en la infancia:

- Practicar actividades al aire libre (brincar cuerda, correr, jugar)
- Jugar videojuegos
- Leer por entretenimiento
- Jugar con juguetes como muñecas, cocinita, peluches, otro
- Jugar con carritos, canicas, trompo, yoyo, otro
- Jugar juegos de mesa (rompecabezas, turista, otros)
- Ver televisión o cine
- Practicar actividades en equipos al aire libre
- Juegos de construcción (lego, mecano, fichas, otros)
- Practicar deporte (ej. fútbol, béisbol, tenis, karate...), favor de especificar
- Practicar artes (ej. música, canto, baile, pintura, dibujo...), favor de especificar
- Estudiar algo extraescolar (ej. idiomas, cocina, costura, reparación...), favor de especificar
- Otros (especifique)_____

¡Agradecemos tu tiempo en responder esta encuesta!

Esta encuesta está basada en los cuestionarios que reportan:

Farfán, R. y Simón, M. (2016). *La construcción social del conocimiento. El caso de género y matemáticas.* (p. 207-217) México: Gedisa.

Hinojos, J. y Torres-Corrales, D. (2018). *Encuesta del entorno sociocultural del estudiante de Ingeniería.* Recuperado de: <https://goo.gl/forms/pTbE9yiFgHoYzaxo2>

Anexo 2. Carta de autorización por parte del estudiante

Mexicali, Baja California, a 00 de mes de 202x

Yo, _____, autorizo que la **información** generada en el Proyecto “Prácticas Geométricas en Ambientes Virtuales de Aprendizaje” que llevan a cabo la Lic. Diana Alejandra Bustamante Hernández y la Lic. Amairani Grisel López Ortiz -estudiantes del Programa de Maestría- con el acompañamiento de la Dra. Gisela Montiel Espinosa –investigadora titular, todas ellas del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav, del Área de Educación Superior, sea utilizada **exclusivamente con fines académicos** en tareas de análisis para la formación e investigación.

Solicito que las usuarias y los usuarios de la información se comprometan a cuidar mi identidad en sus reportes, ocultando mi rostro y modificando mi voz. Asimismo, deseo que en los reportes emanados de las prácticas de formación e investigación se oculte mi identidad, cambiando mi nombre con:

Una etiqueta genérica (ejemplo: EM1 –estudiante mujer 1–)

Otro nombre: _____

Deseo acceder a los reportes:

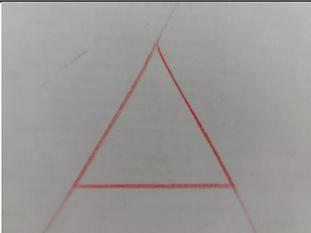
No Si

Favor de enviarlos a la cuenta de correo electrónico:

Nombre y firma de la / del participante de la experiencia didáctica

Anexo 3. Tablas de organización de prácticas

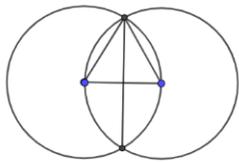
Ambientación – Construcciones en GeoGebra

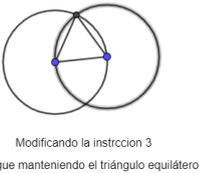
Secuencia de tareas:		Construyendo		
Instrucción/ Pregunta	Respuesta de la E1	Prácticas		
		¿Qué hace?	¿Cómo lo hace?	¿Con qué lo hace?
<p>10. A continuación, construye un triángulo equilátero.</p> <p>Puedes hacerlo en una hoja de papel y luego subirlo como una foto; o dibujarlo con el lápiz de GeoGebra Notas.</p> <p>La única restricción es que NO uses GeoGebra (software).</p>		<p>Dibuja un triángulo equilátero</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Dibujando primero una línea L1 (medida fija del lado del triángulo) 2. Aproximando que al trazar la siguiente línea L2 pasaría por un extremo de L1 3. Repitiendo el paso anterior para completar el triángulo 	<p>Con lápiz y una hoja de papel</p>
<p>11. Describe cuál fue el proceso para construir el triángulo equilátero:</p>	<p>Dibujarlo con el lápiz de GeoGebra Notas es complicado por el pulso, pues deben ser los 3 trazos iguales, así que decidí hacerlo a mano en una hoja de papel, aunque mis dibujos fueron de ensayo y error hasta llegar a una mejor aproximación de triángulo equilátero. Para construir el triángulo equilátero, tuve que:</p> <p>Paso 1: dibujar primero una línea L1 (la que iba a ser la medida fija del lado del triángulo)</p>	<p>Describe el proceso de construcción del triángulo rectángulo</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Dibujando primero una línea L1 (medida fija del lado del triángulo) 2. Aproximando que al trazar la siguiente línea L2 pasaría por un extremo de L1 3. Repitiendo el paso anterior para completar el triángulo 	

	Paso 2: después moví la hoja y solo con la vista calculé más o menos que al trazar la siguiente línea L2 pasará por un extremo de L1, para completar el triángulo repetí el paso anterior solo que ahora tuviera que pasar por los extremos de L1 y L2			
--	--	--	--	--

Secuencia de tareas:		Construyendo en GeoGebra		
Instrucción/ Pregunta	Respuesta de la E1	Prácticas		
		¿Qué hace?	¿Cómo lo hace?	¿Con qué lo hace?
12. Realiza la misma construcción de la tarea anterior (Construyendo), pero ahora en el applet de GeoGebra.		Reconstruye su dibujo en un applet de GeoGebra	<ol style="list-style-type: none"> 1. Creando un <i>punto A</i> 2. Creando una <i>circunferencia c</i> con centro en el <i>punto A</i> y radio de <i>5</i> 3. Colocando un <i>punto B</i> sobre la <i>circunferencia c</i> 4. Trazando un <i>segmento f</i>, del <i>punto A</i> al <i>punto B</i> 5. Colocando un <i>punto C</i> sobre la <i>circunferencia c</i> 6. Trazando un <i>segmento g</i>, del <i>punto A</i> al <i>punto C</i> 7. Trazando un <i>segmento h</i>, del <i>punto B</i> al <i>punto C</i> 8. Seleccionando los <i>puntos B, A</i> y 	Con las herramientas de <i>punto</i> , <i>circunferencia: centro y radio</i> , <i>segmento</i> y <i>ángulo</i>

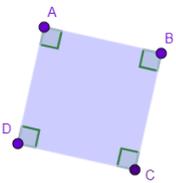
			<p>crea un ángulo, lo que origina el punto B'</p> <p>9. Seleccionando los puntos C, B y crea un ángulo, lo que origina el punto $B'I$</p> <p>10. Seleccionando los puntos A, B y crea un ángulo, lo que origina el punto A'</p>	
13. Describe qué aspectos cambiaron con respecto al orden de construcción de la tarea pasada (Construyendo):	Ahora su construcción fue un poco más fácil, y es seguro que sí es equilátero, pues con las herramientas se puede decidir la medida del lado. y medir los ángulos.	Describe las diferencias entre el orden de construcción del triángulo equilátero de la T10 (a mano) y la T12 (applet de GeoGebra)	Argumentando que la construcción fue más fácil y precisa, debido a que las herramientas del applet permiten decidir la medida de los lados y medir los ángulos	Con las herramientas de <i>circunferencia: centro y radio, ángulo</i>

Secuencia de tareas:		Secuencia en GeoGebra		
Instrucción/ Pregunta	Respuesta de la E1	Prácticas		
		¿Qué hace?	¿Cómo lo hace?	¿Con qué lo hace?
14. Haz el siguiente proceso de construcción en el applet de GeoGebra: 1. Con la herramienta de Circunferencia (centro, punto), traza una circunferencia de cualquier longitud. 2. Con la herramienta de Circunferencia (centro,	<p>Construcción anterior</p> 	Construye un triángulo equilátero en un applet de GeoGebra	Haciendo la siguiente secuencia de pasos: 1. Trazando una circunferencia de cualquier longitud 2. Trazando una circunferencia con centro en el punto	Con las herramientas de <i>circunferencia (centro, punto), intersección y segmento</i>

<p>punto), traza una circunferencia con centro en el punto de la circunferencia anterior y punto en el centro de la misma.</p> <p>3. Con la herramienta de Intersección, traza la intersección que se forma entre ambas circunferencias.</p> <p>4. Con la herramienta de Segmento, une los centros de la circunferencia.</p> <p>5. Con la herramienta de Segmento, une los centros de la circunferencia con una de las intersecciones</p>	 <p>Modificando la instrucción 3 Se sigue manteniendo el triángulo equilátero</p>		<p>de la circunferencia anterior y punto en el centro de esta</p> <p>3. Trazando una intersección entre ambas circunferencias</p> <p>4. Uniendo los centros de las circunferencias</p> <p>5. Uniendo los centros de las circunferencias con una de las intersecciones</p>	
<p>15. ¿Qué diferencias notas entre la construcción que realizaste en la tarea anterior (Construyendo en GeoGebra) con la que hiciste en esta tarea?</p>	<p>La construcción de T13 tiene la particularidad de que se tiene que construir un triángulo equilátero (de manera libre al hacer uso de las herramientas de GeoGebra), y en esta tarea se siguen instrucciones que al final nos llevan a construir un triángulo equilátero o dos triángulos escalenos más pequeños que el anterior.</p>	<p>Describe las diferencias entre su construcción del triángulo equilátero (T13) con la que se propone en la T14</p>	<p>Argumentando que, en la tarea anterior, la construcción se hace de manera libre por medio del uso de las herramientas de GeoGebra, mientras que en esta se siguen instrucciones para llegar a un triángulo equilátero o dos triángulos escalenos más pequeños</p>	
<p>16. ¿Qué diferencias o similitudes notas entre el protocolo de construcción creado en</p>	<p>En al anterior se pudiera haber construido el triángulo equilátero sin hacer uso</p>	<p>Describe las diferencias entre el orden de construcción del</p>	<p>Argumentando que en la tarea anterior (T13) no era necesario la</p>	

la tarea anterior (Construyendo en GeoGebra) y el orden de construcción en esta tarea?	de circunferencia, y en esta tarea se tiene que seguir todas instrucciones tal cual.	triángulo equilátero de la T12 (elaboración propia) y la secuencia de pasos propuesta en la T14	circunferencia, mientras que en esta tarea (T14) se deben seguir las instrucciones tal cual	
--	--	---	---	--

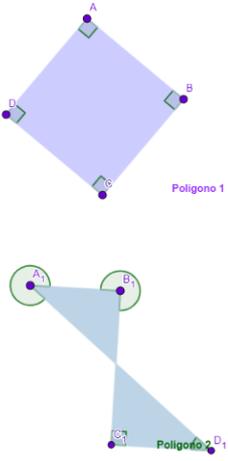
Momento 1: Descubriendo el polígono

Secuencia de tareas		¿Cómo es el polígono?		
Instrucción/ Pregunta	Respuesta de la E1	Prácticas		
		¿Qué hace?	¿Cómo lo hace?	¿Con qué lo hace?
1. Arrastra los puntos del siguiente polígono para explorar su comportamiento		Mueve los puntos del polígono para explorar su comportamiento	Seleccionando los puntos <i>A, B, C</i> y <i>D</i> y moviéndolos libremente en el plano	Con la activación de la herramienta <i>Mueve</i> para cada punto del polígono
2. ¿Qué puntos del polígono se pueden arrastrar?	Los puntos <i>A</i> y <i>B</i>	Determina que puntos se pueden arrastrar	Seleccionando los puntos <i>A, B, C</i> y <i>D</i> y moviéndolos libremente en el applet para mencionar cuáles se pueden arrastrar	Con la activación de la herramienta <i>Mueve</i> para punto del polígono
3 ¿Qué puntos del polígono no se pueden arrastrar?	Los <i>puntos C</i> y <i>D</i>	Determina que puntos no se pueden arrastrar	Seleccionando los puntos <i>A, B, C</i> y <i>D</i> y moviéndolos libremente en el applet para mencionar cuáles no se pueden arrastrar	Con la activación de la herramienta <i>Mueve</i> para cada punto del polígono
4. ¿Por qué sólo ciertos puntos se pueden arrastrar?	Puede ser que así esté diseñado, o sea, que solo se puedan mover dos puntos, aunque como es un	Infiere por qué solo ciertos puntos se pueden arrastrar	Moviendo libremente los <i>puntos A, B, C</i> y <i>D</i> argumenta que el polígono así está	

	<p>cuadrado viene siendo lo mismo mover los pares de puntos <i>A</i> y <i>B</i>, <i>B</i> y <i>C</i>, <i>C</i> y <i>D</i>, <i>D</i> y <i>A</i>, y que el otro par sobrante no se pueda mover, respectivamente.</p> <p>Siempre y cuando (sin importar que par se mueva) todos tengan o puedan realizar los mismos movimientos.</p>		<p>diseñado, y dado que es un cuadrado no importa que pares de puntos se muevan, siempre y cuando el otro par no se pueda mover</p>	
<p>5. Haz una descripción del comportamiento de cada punto, a modo de lista, y del efecto que produce en el polígono</p>	<p>Punto <i>A</i>: puede moverse en todas direcciones alrededor del punto <i>B</i>, puede agrandar o encoger el polígono, mientras movemos este punto, el punto <i>B</i> se queda fijo y hace que los puntos <i>D</i> y <i>C</i> se muevan junto con el polígono.</p> <p>Punto <i>B</i>: puede moverse alrededor del punto <i>A</i>, puede agrandar o encoger el polígono, mientras movemos este punto, el punto <i>A</i> se queda fijo y hace que los puntos <i>D</i> y <i>C</i> se muevan junto con el polígono.</p>	<p>Describe los comportamientos de los <i>puntos A, B, C y D</i></p>	<p>Moviendo los puntos <i>A, B, C y D</i> y describiendo sus comportamientos a manera de lista:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. El <i>punto A</i> lo mueve en todas las direcciones alrededor del <i>punto B</i>, agranda o encoge el polígono. Mientras mueve este punto, el <i>punto B</i> se queda fijo y <i>puntos D y C</i> se mueven junto con el polígono. 2. El <i>punto B</i> lo mueve alrededor del <i>punto A</i>, puede agrandar o encoger el polígono. Mientras mueve este punto, el <i>punto A</i> se queda fijo y los <i>puntos D y C</i> se 	<p>Con la activación de la herramienta <i>Mueve</i> para cada punto del polígono</p>

	<p>Punto C: no podemos moverlo directamente con el cursor y hacer que se mueva igual que el punto A o B, la única vez que se puede mover es cuando movemos uno de los dos puntos anteriores.</p> <p>Punto D: no podemos moverlo directamente con el cursor y hacer que se mueva igual que el punto A o B, la única vez que se puede mover es cuando movemos uno de los dos puntos anteriores.</p>		<p>mueven junto con el polígono.</p> <p>3. El <i>punto C</i> no lo puede mover directamente con el cursor, por lo que no se mueve igual que el <i>punto A</i> o <i>punto B</i>, la única vez que lo puede mover es cuando mueve uno de los puntos anteriores.</p> <p>4. El <i>punto D</i> no lo puede mover directamente con el cursor, por lo que no se mueve igual que el <i>punto A</i> o <i>punto B</i>, la única vez que lo puede mover es cuando mueve uno de los puntos anteriores.</p>	
6. Dado el comportamiento de los puntos que pudiste arrastrar, y el efecto que tiene en el polígono ¿qué tipo de polígono es?	Polígono regular	Determina qué tipo de polígono es	Moviendo los puntos A, B, C y D y explorando su comportamiento cuando se activa la herramienta <i>Mueve</i>	

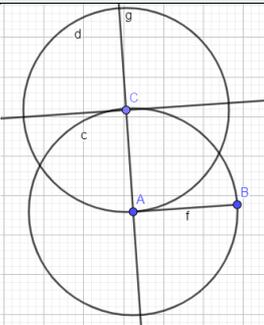
Secuencia de tareas:	Arrastrando			
Instrucción/ Pregunta	Respuesta de la E1	Prácticas		
		¿Qué hace?	¿Cómo lo hace?	¿Con qué lo hace?

<p>7. Arrastra los puntos de cada polígono para explorar el comportamiento de cada uno</p>		<p>Mueve los puntos de cada polígono para explorar su comportamiento</p>	<p>Primero seleccionando los puntos A, B, C y D del polígono 1 y moviéndolos libremente en el plano; después seleccionando los puntos A1, B1, D1 y C1 del polígono 2 y moviéndolos libremente en el plano.</p>	<p>Con la activación de la herramienta de Mueve para cada vértice del polígono 1 y el polígono 2</p>
<p>8. ¿Los polígonos se comportan de la misma manera?</p>	<p>No</p>	<p>Determina si los polígonos se comportan de la misma manera</p>	<p>Moviendo los puntos de cada polígono y explorando su comportamiento individual y en conjunto</p>	
<p>9. ¿Cuáles son las diferencias que encuentras entre ambos polígonos?</p>	<p>Polígono 1 En este polígono los puntos tienen el mismo comportamiento que en la tarea 1, y además los movimientos de los puntos A o B no alteran la medida de sus ángulos. Y siempre es regular.</p> <p>Polígono 2 En este polígono los puntos A1 y B1 tienen el mismo comportamiento que en la tarea 1.</p>	<p>Describe las diferencias entre ambos polígonos</p>	<p>Moviendo los puntos del polígono 1 y polígono 2 determinando las siguientes diferencias:</p> <ol style="list-style-type: none"> Argumentando que el Polígono 1 tiene el mismo comportamiento que la T1, además que el movimiento del punto A o B no alteran los ángulos. Concluye que es polígono regular Determinando que en el Polígono 	<p>Con la activación de la herramienta Mueve para cada vértice del polígono 1 y el polígono 2</p>

	<p>Suponiendo que ya movimos los puntos A1, B1 o D1, quedo determinado un cierto polígono, si movemos el punto C1 junto con él se moverá D1, los puntos A1 y B1 se mantienen fijos, además como estos dos se quedan fijos, si imaginamos un segmento A1B1 y después movemos C1, este funciona como un reflejo o espejo del polígono, pues solo se puede mover en dirección paralela a dicho segmento.</p> <p>El movimiento del punto D1 es el único que altera la medida de los ángulos, en el mismo y el que se forma en A1.</p> <p>Mover D1 determina si el polígono 2 es regular o irregular, y en cambio el punto D no causa efecto alguno en el polígono 1</p>		<p>2 los puntos A1 y B1 comportan el mismo comportamiento que la T1, pero al mover el punto C1 se moverá también el punto D1 y los puntos A1 y B1 se mantendrán fijos.</p> <p>3. Imaginando un segmento entre los puntos A1 y B1 y mueve el punto C1 tendrá una función de reflejo en el polígono.</p> <p>4. Haciendo una acotación que el punto D1 es el único que altera la medida de los ángulos, además que su movimiento es el que determina si el polígono es regular o irregular.</p>	
<p>10. ¿Cuáles son las similitudes que encuentras entre ambos polígonos?</p>	<p>Cuando el Polígono A1B1C1D1 es un</p>	<p>Describe las similitudes</p>	<p>Haciendo referencia a que, cuando el</p>	

	cuadrado será igual que polígono ABCD	entre ambos polígonos	polígono 2 (A1, B1, C1, D1) forme un cuadrado será igual que el polígono 1 (A, B, C, D)	
11. Vuelve a arrastrar el punto D1. ¿Qué cambios tiene el polígono cuando arrastras este punto?	Si movemos D1 sobre C1 se forman 2 triángulos	Describe los cambios que tiene el polígono 2 cuando se arrastra el <i>punto D1</i>	Moviendo el <i>punto D1</i> determinan que se forman dos triángulos sobre el <i>punto C1</i>	Con la activación de la herramienta <i>Mueve</i> para el <i>punto D1</i> del polígono 2
12. Vuelve a arrastrar el punto D1. ¿Qué cambios tiene el polígono cuando arrastras este punto?	Si los puntos respectivos de los polígonos tuvieran el mismo comportamiento no habría mucho que discutir respecto a sus similitudes y diferencias tras el movimiento los puntos.	Infiere porque el punto D1 tiene un comportamiento diferente	Mencionando que si los puntos tuvieran el mismo comportamiento no habría mucho que discutir sobre las similitudes y diferencias	

Momento 2: Estudiando el polígono

Secuencia de tareas:	Explorando			
Instrucción/ Pregunta	Respuesta de la E1	Prácticas		
		¿Qué hace?	¿Cómo lo hace?	¿Con qué lo hace?
13. Haz el siguiente proceso de construcción en applet de GeoGebra: 1. Con la herramienta Segmento, traza un segmento de recta de cualquier longitud. 2. Con la herramienta Circunferencia (centro,		Construye un diagrama dinámico	Siguiendo la secuencia de pasos: 1. Trazando un segmento de recta de cualquier longitud 2. Trazando una circunferencia con centro en uno de	Con las herramientas de <i>segmento</i> , <i>circunferencia</i> (<i>centro</i> , <i>punto</i>), <i>perpendicular</i> , <i>punto y paralela</i>

<p>punto), traza una circunferencia con centro en uno de los puntos extremos del segmento y punto en el otro extremo del segmento.</p> <p>3. Con la herramienta Perpendicular, traza una perpendicular al segmento y que pase por el punto que corresponde el centro de la circunferencia.</p> <p>4. Con la herramienta Punto, traza un punto C sobre la recta perpendicular al segmento.</p> <p>5. Con la herramienta Circunferencia (centro, punto), traza una circunferencia con centro en C y punto en el centro de la primera circunferencia.</p> <p>6. Con la herramienta, traza una recta paralela al segmento del paso 1 y que pase por el punto C.</p>			<p>los extremos del segmento y punto en el otro extremo del segmento</p> <p>3. Trazando una perpendicular al segmento pasando por el punto que corresponde al centro de la circunferencia</p> <p>4. Trazando un punto C sobre la recta perpendicular al segmento</p> <p>5. Trazando una circunferencia con centro en el punto C y punto en el centro de la primera circunferencia</p> <p>6. Trazando una recta paralela al segmento del paso 1 que pase por el punto C</p>	
<p>14. Arrastra los puntos y describe cuál es su comportamiento</p>	<p>El punto A se puede mover en cualquier dirección alrededor de B, y mientras movemos A B se queda fijo y C se va moviendo junto con A.</p> <p>Cuando movemos A podemos cambiar el tamaño de la circunferencia (la</p>	<p>Mueve los puntos para describir su comportamiento</p>	<p>Seleccionando y moviendo los puntos A, B y C, describe los siguientes comportamientos:</p> <p>1. El punto A lo mueve en cualquier dirección alrededor del punto B, mientras</p>	<p>Con la activación de la herramienta <i>Mueve</i> para los puntos A, B y C</p>

	<p>primera que se trazó 1) sin alterar la otra.</p> <p>El punto C solo se puede mover sobre la línea paralela al segmento AB, Al momento de mover C entre más cerca este de A menor será el tamaño de la circunferencia (la segunda que se trazó 2), y entre más alejado este C de A, más grande será la circunferencia.</p> <p>Los tamaños de ambas circunferencias, es decir, quien es más grande que la otra, dependen del punto C</p>		<p>mueve el punto A y B, el punto C se queda fijo y se va moviendo junto con el punto A.</p> <p>2. Cuando mueve el punto A puede cambiar el tamaño de la circunferencia (la primera que se trazó) sin alterar la otra.</p> <p>3. El punto C solo lo puede mover sobre la línea paralela al segmento AB. Al momento de mover el punto C entre más cerca este del punto A menor será el tamaño de la circunferencia (la segunda que se trazó), y entre más alejado este el punto C del punto A, más grande será la circunferencia.</p> <p>4. Los tamaños de ambas circunferencias, es decir, quien es más grande que la otra, dependen del punto C</p>	
--	---	--	--	--

15. En la construcción, con la herramienta de Borrar, borra el punto C y observa lo que sucede. ¿Qué elementos se borraron también?	Si borramos C también se borra la circunferencia 2 y la línea paralela al segmento AB	Borra el <i>punto C</i> e identifica que elementos de la construcción se borran	Seleccionando y borrando el <i>punto c</i> determina que la circunferencia 2 y la línea paralela al segmento AB se borran también	Con la herramienta de <i>Borrar</i>
16. ¿Qué elementos se mantuvieron?	Se mantiene la circunferencia 1, Los puntos A y B, y también la línea perpendicular a AB que pasa por A	Identifica los elementos que se mantuvieron a partir de borrar el <i>punto C</i>	Enlistando los elementos que se mantienen después de borrar el <i>punto C</i> como la <i>circunferencia 1</i> , <i>el punto A y B</i> , <i>la línea perpendicular al segmento AB</i>	
17. Borra el punto A y observa lo que sucede. ¿Qué elementos se borraron también?	Se borra todo excepto el punto B	Borra el punto A e identifica que elementos de la construcción se borran	Seleccionando y borrando el punto A y determinando que todo se borra a excepción del punto B	Con la herramienta de <i>Borrar</i>
18. ¿Qué elementos se mantuvieron?	Se mantiene B	Identifica que elementos se mantuvieron a partir de borrar el punto A	Seleccionando y borrando el punto A y determina que solo se mantiene el punto B	
19. Borra el punto B y observa lo que sucede. ¿Qué elementos se borraron también?	Se borra todo excepto el punto A	Borra el punto B e identifica que elementos de la construcción se borran	Seleccionando y borrando el <i>punto B</i> y determina que todos los elementos se borran a excepción del <i>punto A</i> .	Con la herramienta de <i>Borrar</i>
20. ¿Qué elementos se mantuvieron?	se mantiene A	Identifica que elementos se mantuvieron a	Seleccionando y borrando el <i>punto B</i> y determina que	Con la herramienta de <i>Borrar</i>

		partir de borrar el <i>punto B</i>	solo se mantiene el <i>punto A</i>	
21. Borra cualquier circunferencia y observa lo que sucede. ¿Qué elementos se borraron también?	Ninguna	Borra la <i>circunferencia</i> e identifica que elementos de la construcción se borran	Seleccionando y borrando la <i>circunferencia</i> y determinando que ninguno elemento se borro	Con la herramienta de <i>Borrar</i>
22. ¿Qué elementos se mantuvieron?	Se mantienen todos y solo se borra la circunferencia seleccionada.	Identifica que elementos se mantuvieron a partir de borrar la <i>circunferencia</i>	Seleccionando y borrando la <i>circunferencia</i> y determinando que todos los elementos se mantienen menos la circunferencia borrada	
23. Borra la perpendicular y observa lo que sucede. ¿Qué elementos se mantuvieron	Se borra C, la circunferencia 2 y la línea paralela a AB	Borra la <i>perpendicular</i> e identifica que elementos de la construcción se borran	Seleccionando y borrando la <i>perpendicular</i> y determinando que se borra el <i>punto C</i> , la <i>circunferencia 2</i> y la línea <i>paralela</i>	Con la herramienta de <i>Borrar</i>
24. ¿Qué elementos se mantuvieron?	La circunferencia 1, los puntos A y B, y el segmento AB	Identifica que elementos se mantuvieron a partir de borrar la <i>perpendicular</i>	Seleccionando y borrando la perpendicular y determinando que se mantuvieron los puntos A y B, la primera circunferencia y el segmento AB	
25. ¿A qué se debe que ciertos elementos se eliminen cuando borras un elemento en específico?	Se debe a la forma en que se fueron construyendo ambas circunferencias.	Deduce porque ciertos elementos se eliminan a partir	Borrando elementos específicos de las tareas previas, identificando	

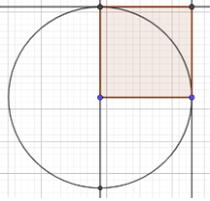
		de borrar uno en específico	cuáles se mantienen y cuáles no, determina que se debe a la forma en que fueron construidas ambas circunferencias	
--	--	-----------------------------	---	--

Secuencia de tareas:		Estudiando la construcción		
Instrucción/ Pregunta	Respuesta de la E1	Prácticas		
		¿Qué hace?	¿Cómo lo hace?	¿Con qué lo hace?
<p>26. Repite el proceso de construcción de la tarea previa:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Con la herramienta Segmento, traza un segmento de recta de cualquier longitud. 2. Con la herramienta Circunferencia (centro, punto), traza una circunferencia con centro en uno de los puntos extremos del segmento y punto en el otro extremo del segmento. 3. Con la herramienta Perpendicular, traza una perpendicular al segmento y que pase por el punto que corresponde el centro de la circunferencia. 4. Con la herramienta Punto, traza un punto C sobre la recta perpendicular al segmento. 5. Con la herramienta Circunferencia (centro, punto), traza una circunferencia con centro en 		<p>Construye un diagrama dinámico</p>	<p>Siguiendo la secuencia de pasos:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Trazando un segmento de recta de cualquier longitud 2. Trazando una circunferencia con centro en uno de los extremos del segmento y punto en el otro extremo del segmento 3. Trazando una perpendicular al segmento pasando por el punto que corresponde al centro de la circunferencia 4. Trazando un punto C sobre la recta perpendicular al segmento 5. Trazando una circunferencia con 	<p>Con las herramientas de <i>segmento</i>, <i>circunferencia</i> (<i>centro, punto</i>), <i>perpendicular</i>, <i>punto</i> y <i>paralela</i></p>

C y punto en el centro de la primera circunferencia. 6. Con la herramienta, traza una recta paralela al segmento del paso 1 y que pase por el punto C.			centro en el punto C y punto en el centro de la primera circunferencia 6. Trazando una recta paralela al segmento del paso 1 que pase por el punto C	
27.A partir de la construcción y el análisis de la tarea anterior, responde las siguientes preguntas: ¿Qué elementos dependen del punto A?	Si borramos el punto A, todas las demás construcciones se van y solo permanece B	Determina que elementos dependen del <i>punto A</i>	Borrando el <i>punto A</i> , y determinando que todas las construcciones se van y solamente permanece el <i>punto B</i>	Con la herramienta de <i>Borrar</i>
28. ¿Qué elementos dependen del punto B?	Si borramos B, todas las demás construcciones se van y solo permanece A	Determina que elementos dependen del <i>punto B</i>	Borrando el <i>punto B</i> , y determinando que todas las construcciones se van y solamente permanece el <i>punto A</i>	Con la herramienta de <i>Borrar</i>
29. ¿Qué elementos dependen del punto C?	circunferencia d, la paralela y el movimiento de esta última	Determina que elementos dependen del <i>punto C</i>	Borrando el <i>punto C</i> , y determinando que de éste dependen la circunferencia d, la paralela y el movimiento de esta última	Con la herramienta de <i>Borrar</i> y con la activación de la herramienta <i>Mueve</i> para el <i>punto C</i> y la <i>paralela</i>
30. ¿Qué elementos dependen de la perpendicular?	la circunferencia d, el punto c y la paralela	Determina que elementos dependen de la <i>perpendicular</i>	Borrando la <i>perpendicular</i> , y determinando que dependen la <i>circunferencia d</i> , el <i>punto C</i> y la <i>paralela</i>	Con la herramienta de <i>Borrar</i>

31. ¿Qué elementos dependen de la paralela?	Ninguno	Determinan que elementos dependen de la <i>paralela</i>	Borrando la <i>paralela</i> , y determinando que ningún elemento depende de está.	Con la herramienta de <i>Borrar</i>
32. ¿Qué elementos dependen de la circunferencia <i>c</i> ?	Ninguno	Determina que elementos dependen de la <i>circunferencia c</i>	Borrando la <i>circunferencia c</i> , y determinando que ningún elemento depende de está.	Con la herramienta de <i>Borrar</i>
33. ¿Qué elementos dependen de la circunferencia <i>d</i> ?	Ninguno	Determina que elementos dependen de la <i>circunferencia d</i>	Borrando la <i>circunferencia d</i> , y determinando que ningún elemento depende de está.	Con la herramienta de <i>Borrar</i>

Momento 3: ¿Cómo se construye?

Secuencia de tareas:	Construcción de un cuadrado			
Instrucción/ Pregunta	Respuesta de la E1	Prácticas		
		¿Qué hace?	¿Cómo lo hace?	¿Con qué lo hace?
34. Con base en el trabajo de las tareas anteriores, construye un cuadrado. Para realizar la construcción, recuerda que el cuadrado: Es un polígono de cuatro lados. Tiene sus lados iguales. Tiene todos sus ángulos interiores congruentes y rectos		Construye un cuadrado, recordando que es un polígono de cuatro lados iguales y que todos sus ángulos interiores son congruentes y rectos	1. Trazando un <i>segmento</i> de cualquier longitud 2. Trazando una <i>circunferencia</i> con centro en el extremo izquierdo del segmento anterior y punto en el otro extremo 3. Trazando una <i>perpendicular</i> al segmento del paso 1 y que pase por el punto del extremo izquierdo	Con un applet en GeoGebra y con las herramientas de <i>segmento</i> , <i>circunferencia</i> (<i>centro</i> , <i>punto</i>), <i>perpendicular</i> , <i>intersección</i> , <i>paralela</i> , <i>polígono</i> y <i>arrastre</i> .

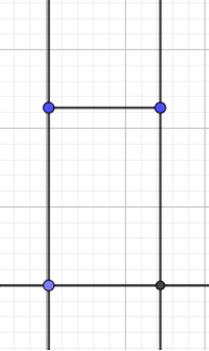
			<p>4. Repitiendo el paso anterior solo que ahora la <i>perpendicular</i> pasa por el otro extremo</p> <p>5. Marcando la intersección entre la <i>circunferencia</i> y la primera <i>perpendicular</i></p> <p>6. Trazando una <i>paralela</i> al segmento del paso 1</p> <p>7. Marcando la <i>intersección</i> entre la <i>paralela</i> y la segunda <i>perpendicular</i></p> <p>8. Moviendo dos de los vértices del cuadrado para comprobar su comportamiento</p> <p>9. Marcando el polígono para tener una mejor visualización</p> <p>10. Volviendo a mover los vértices.</p>	
35.A continuación, enlista cuál fue el orden de construcción que se utilizó para el cuadrado	<p>P1. Tracé un segmento de cualquier longitud</p> <p>p2. trace una circunferencia con centro en el extremo izquierdo del segmento anterior y punto en el otro extremo</p>	Enlista cuál fue el orden que siguió para la construcción del cuadrado	<p>Describiendo paso por paso el orden de construcción:</p> <p>1. Trazando un <i>segmento</i> de cualquier longitud</p> <p>2. Trazando una <i>circunferencia</i> con centro en el extremo izquierdo</p>	Con un applet en GeoGebra y con las herramientas de <i>segmento</i> , <i>circunferencia</i> (<i>centro</i> , <i>punto</i>), <i>perpendicular</i> , <i>intersección</i> , <i>paralela</i> ,

	<p>p3. tracé una perpendicular al segmento de P1 y que pasé por el punto del extremo izquierdo</p> <p>p4. repetí el paso anterior solo que ahora el perpendicular pase por el otro extremo</p> <p>p5. marqué la intersección entre la circunferencia y la primera perpendicular</p> <p>p6. tracé una paralela al segmento de p1</p> <p>p6. marqué la intersección entre la paralela y la segunda perpendicular</p> <p>p7. moví dos de los vértices del cuadrado</p> <p>p8. utilice la herramienta de <i>polígono</i> para tener una mejor visualización</p> <p>p9. volví a mover los mismos vértices</p>		<p>del segmento anterior y punto en el otro extremo</p> <p>3. Trazando una <i>perpendicular</i> al segmento del paso 1 y que pase por el punto del extremo izquierdo</p> <p>4. Repitiendo el paso anterior solo que ahora la <i>perpendicular</i> pasa por el otro extremo</p> <p>5. Marcando la <i>intersección</i> entre la <i>circunferencia</i> y la primera <i>perpendicular</i></p> <p>6. Trazando una <i>paralela</i> al segmento del paso 1</p> <p>7. Marcando la <i>intersección</i> entre la <i>paralela</i> y la segunda <i>perpendicular</i></p> <p>8. Moviendo dos de los vértices del cuadrado para comprobar su comportamiento</p> <p>9. Marcando el polígono para tener una mejor visualización</p> <p>10. Volviendo a</p>	<p><i>polígono</i> y <i>arrastre.</i></p>
--	--	--	--	---

			mover los vértices.	
36.A partir del orden de construcción mencionado anteriormente, enlista qué elementos dependen de qué elementos	Si se borra el centro de la circunferencia se borra todo excepto el punto extremo derecho del segmento si borro el punto extremo derecho se borra todo excepto el punto que es centro de la circunferencia si se borra la paralela, todo se mantiene si se borra la primera perpendicular se borra también la paralela si se borra la segunda perpendicular, todo lo demás se mantiene si se borra la circunferencia ,todo se mantiene excepto la paralela si se selecciona lo naranja todo la construcción se mantiene	Determina las relaciones de dependencia entre los elementos de su construcción	Seleccionando la herramienta de borrar, borrando los siguientes elementos y observando cuáles elementos se borran y cuáles se mantienen: 1. Borrando el centro de la <i>circunferencia</i> se borra todo excepto el <i>punto</i> extremo derecho del segmento. 2. Borrando el extremo derecho (<i>punto</i>) se borra todo excepto el punto que es centro de la <i>circunferencia</i> . 3. Borrando la <i>paralela</i> , todo se mantiene. 4. Borrando la primera <i>perpendicular</i> , se borra también la <i>paralela</i> . 5. Borrando la segunda <i>perpendicular</i> , todo lo demás se mantiene. 6. Borrando la <i>circunferencia</i> ,	Con la herramienta de <i>Borrar</i>

			<p>todo se mantiene excepto la <i>paralela</i>.</p> <p>7. Borrando el <i>polígono</i> (solo la parte de color) toda la construcción se mantiene.</p>	
<p>37. ¿Qué otras características -geométricas o propias de GeoGebra- consideraste para elaborar la construcción?</p>	<p>Utilicé la herramienta de polígono-polígono regular para una mejor visualización, aunque esto último no fue tan necesario</p>	<p>Menciona si considero otras características geométricas o propias del Ambiente para su construcción</p>	<p>Utilizando la herramienta de <i>polígono-polígono regular</i> para una mejor visualización, y declarando que no era tan necesario</p>	<p>Con la herramienta de <i>Polígono</i></p>
<p>38. Arrastra cada uno de sus vértices, ¿tu construcción pasó la prueba del arrastre? Es decir, mantiene todas las características mencionadas anteriormente, aunque se arrastre algún vértice.</p>	<p>Sí</p>	<p>Mueve cada vértice para comprobar que su construcción pasa la prueba del arrastre</p>	<p>Seleccionando cada uno de los vértices del cuadrado y moviéndolos libremente en el plano</p>	<p>Con la activación de la herramienta <i>Mueve</i> para cada uno de los vértices del cuadrado</p>
<p>39. Explica por qué la construcción pasó o no la prueba del arrastre</p>	<p>Todas las características se mantienen pues los lados del polígono fueron marcados como perpendiculares y paralelas, al mover los puntos-vértices pasó la prueba pues me guíe de las actividades anteriores</p>	<p>Describe por qué su construcción pasa la prueba del arrastre</p>	<p>Moviendo los puntos-vértices y comprobando que todas las características se mantienen, debido a que los lados del polígono fueron marcados como <i>perpendiculares</i> y <i>paralelas</i></p>	<p>Con la activación de la herramienta <i>Mueve</i> para cada uno de los vértices del cuadrado</p>

<p>40. Describe cómo es el comportamiento de los elementos de la construcción</p>	<p>Las 2 perpendiculares, la paralela y los otros dos puntos- vértices grises, si se seleccionan para mover no se puede (su movimiento depende del movimiento de los elementos que si se pueden mover)</p> <p>Los vértices azules se pueden mover en cualquier dirección dejando fijo al otro extremo azul.</p> <p>Podemos seleccionar toda la construcción y se mueve en conjunto</p>	<p>Describe cómo es el comportamiento de cada elemento de la construcción</p>	<p>Enlistando el comportamiento de cada elemento:</p> <p>1. Seleccionando las <i>perpendiculares</i>, <i>paralela</i> y vértices grises (<i>puntos</i>) no se pueden mover, ya que su movimiento depende de los elementos que si se pueden mover.</p> <p>2. Seleccionando los vértices azules (<i>puntos</i>) se pueden mover en cualquier dirección, pero se deja fijo el otro punto.</p> <p>3. Seleccionando toda la construcción se mueve en conjunto.</p>	<p>Con la activación de la herramienta <i>Mueve</i> para cada elemento de la construcción</p>
---	--	---	---	---

Secuencia de tareas:	Construcción de un rectángulo			
Instrucción/ Pregunta	Respuesta de la E1	Prácticas		
		¿Qué hace?	¿Cómo lo hace?	¿Con qué lo hace?
<p>41. Con base en el trabajo de las tareas anteriores, construye un rectángulo. Para realizar la construcción, recuerda que el rectángulo: Es un polígono de cuatro lados. Tiene dos pares de lados iguales. Tiene todos sus ángulos interiores congruentes y rectos.</p>		<p>Construye un rectángulo, considerando que es un polígono de cuatro lados con dos pares de lados iguales y todos sus ángulos interiores son congruentes y rectos.</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Trazando un <i>segmento</i> de cualquier longitud 2. Trazando una <i>perpendicular</i> (1) al <i>segmento</i>, que pasa por el extremo izquierdo del segmento. 3. Repitiendo el paso anterior, solo que ahora la <i>perpendicular</i> (2) pasa por el extremo derecho del segmento. 4. Marcando un <i>punto C</i> sobre la <i>perpendicular</i> 1 5. Trazando una <i>perpendicular</i> (3) que pase por el <i>punto C</i>, y esta a su vez es <i>paralela</i> al segmento realizado en el paso 1. 6. Marcando la intersección entre la <i>perpendicular</i> (2) y la <i>perpendicular</i> (3). 7. Moviendo los puntos 	<p>Con un applet de GeoGebra y con las herramientas de <i>segmento</i>, <i>perpendicular</i>, <i>punto</i>, <i>arrastre</i>.</p>
<p>42. A continuación, enlista cuál fue el orden de construcción que se utilizó para el rectángulo:</p>	<p>p1. tracé un segmento p2. trace perpendicular 1 al</p>	<p>Enlista cuál fue el orden que siguió para la</p>	<p>Describiendo paso a paso el orden de construcción: 1. Trazando un</p>	<p>Con un applet de GeoGebra y con las herramientas de <i>segmento</i>,</p>

	<p>segmento y que pase por el extremo izquierdo del segmento</p> <p>p3. repetí el paso anterior, solo que ahora la perpendicular 2 pase por el extremo derecho del segmento</p> <p>p3.1 marqué el punto c sobre la perpendicular 1</p> <p>p4. tracé una perpendicular 3 que pasé por el punto c (y esta es a su vez paralela al segmento realizado en p1)</p> <p>p5. marque la intersección entre la perpendicular 2 y perpendicular 3</p> <p>p6. moví los puntos.</p> <p>El punto c es el que aparece sobre la línea del punto gris a su izquierda.</p>	<p>construcción del rectángulo</p>	<p><i>segmento</i> de cualquier longitud</p> <p>2. Trazando una <i>perpendicular</i> (1) al segmento, que pasa por el extremo izquierdo del segmento.</p> <p>3. Repitiendo el paso anterior, solo que ahora la <i>perpendicular</i> (2) pasa por el extremo derecho del segmento.</p> <p>4. Marcando un <i>punto C</i> sobre la <i>perpendicular</i> 1</p> <p>5. Trazando una <i>perpendicular</i> (3) que pase por el <i>punto C</i>, y esta a su vez es <i>paralela</i> al segmento realizado en el paso 1.</p> <p>6. Marcando la <i>intersección</i> entre la <i>perpendicular</i> (2) y la <i>perpendicular</i> (3).</p> <p>7. Moviendo los puntos</p>	<p><i>perpendicular, punto, arrastre.</i></p>
43. A partir del orden de construcción mencionado anteriormente, enlista qué elementos dependen de qué elementos:	Si se borra el punto extremo izquierdo se borra todo excepto el otro punto extremo derecho y	Determina las relaciones de dependencia entre los elementos de su construcción	Seleccionando la herramienta de borrar, borrando los elementos de la construcción y observando cuáles	Con la herramienta de <i>Borrar</i>

	<p>viceversa. si se borra el punto c (p3.1), se borra también la perpendicular 3 y el punto gris de intersección, lo demás permanece si se borra la perpendicular 3, solo se borra el punto gris de intersección si se borra la perpendicular 2, solo se borra el punto gris de intersección si se borra la perpendicular 1 se borra el punto c y la perpendicular 3</p>		<p>se borran y cuáles se mantienen: 1. Borrando el <i>punto</i> izquierdo se borra todo excepto el punto del extremo derecho; y viceversa. 2. Borrando el <i>punto C</i> se borra la <i>perpendicular</i> (3) y el punto de <i>intersección</i>, todo lo demás permanece. 3. Borrando la <i>perpendicular</i> (3) solo se borra el punto de intersección. 4. Borrando la <i>perpendicular</i> (2) solo se borra el punto de <i>intersección</i>. 5. Borrando la <i>perpendicular</i> (1) se borra el <i>punto C</i> y la <i>perpendicular</i> (3). 6. Borrando la <i>circunferencia</i>, todo se mantiene excepto la <i>paralela</i>. 7. Borrando el <i>polígono</i> (solo la parte de color) toda la</p>	
--	---	--	--	--

			construcción se mantiene.	
44. ¿Qué otras características -geométricas o propias de GeoGebra- consideraste para elaborar la construcción?	Que ahora la figura del rectángulo debe tener dos pares de lados paralelos (característica propia del rectángulo)	Menciona si consideró otras características geométricas o propias del Ambiente para su construcción	Considerando las características geométricas propias del rectángulo, como que dos pares de lados son paralelos	
45. Arrastra cada uno de sus vértices, ¿tu construcción pasó la prueba del arrastre? Es decir, mantiene todas las características mencionadas anteriormente, aunque se arrastre algún vértice.	Sí	Mueve cada vértice para comprobar que su construcción pasa la prueba del arrastre	Seleccionando y moviendo cada vértice, y observando el comportamiento de la construcción	Con la activación de la herramienta de <i>Mueve</i> para cada vértice del polígono
46. Explica por qué la construcción pasó o no la prueba del arrastre	Porque los lados del rectángulo fueron construidos como perpendiculares para que a pesar del movimiento de los puntos se conserve el rectángulo	Describe por qué su construcción pasa la prueba del arrastre	Construyendo los lados del rectángulo como <i>perpendiculares</i> para que se conserve el movimiento de los <i>puntos</i> del rectángulo	Con la herramienta de <i>Perpendicular</i> y con la activación de la herramienta <i>Mueve</i> para los puntos del rectángulo
47. Describe cómo es el comportamiento de los elementos de la construcción.	El punto gris y las 3 rectas paralelas si se seleccionan no se pueden mover, su movimiento dependerá de los demás elementos de la construcción que si puedan moverse si son seleccionados	Describe cómo es el comportamiento de cada elemento de la construcción	Enlistando el comportamiento de cada elemento: 1. Seleccionando las <i>paralelas</i> y el <i>punto</i> gris no se pueden mover, ya que su movimiento dependerá de los otros elementos que si se pueden mover.	Con la activación de la herramienta <i>Mueve</i> para cada elemento de la construcción

	<p>El punto extremo izquierdo del segmento(p1) se puede mover en cualquier dirección dejando fijo el otro punto extremo derecho y viceversa</p> <p>El punto c solo se puede mover arriba y abajo sobre la perpendicular 1</p>		<p>2. Seleccionado el <i>punto</i> izquierdo del primer segmento se puede mover en cualquier dirección, dejando fijo el punto del extremo derecho; y viceversa.</p> <p>3. Seleccionando el <i>punto C</i> solo se mueve arriba y abajo sobre la primera <i>perpendicular</i>.</p>	
--	---	--	---	--