Cinvestav

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

Unidad Zacatenco
Departamento de Matemática Educativa

Argumentación matemática colectiva a partir de tareas de generalización de patrones figurales con estudiantes de primaria

Tesis que presenta:

Maritza Melisa Comparan Velarde

Para obtener el grado de:

Maestra en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa

Directora de tesis:

Gisela Montiel Espinosa

Ciudad de México

Agosto, 2024.

Agradecimientos

Agradezco a mi familia, en especial a mi abuelo † por enseñarme a dar lo mejor de mi
y ser la razón por la que decidí ser docente.

Agradezco profundamente al Doctor Lezama por ser un guía,
por hacerme parte de sus proyectos,
por acercarme a la Matemática Educativa
y por apoyarme en esta travesía.

Agradezco al Dr. Cantoral † que me abrió las puertas en este proyecto,
y quien me acerco a la Teoría Socioepistemología.

Agradezco a mis compañeros de generación que vivimos una experiencia única,
a mis amigas Ita y Fabi por apoyarme y comprenderme.
Y a todos con los que pude compartir
a través de una charla o un seminario
el proceso de construcción de mi proyecto.

Agradezco a la Dra. Gisela que me acobijó,
brindándome un espacio y tiempo en momentos difíciles,
gracias por asesorar este proyecto.

Índice

Introducción

Desde la experiencia docente en la educación primaria se identificó que el estudiantado experimentaba dificultades en tareas que le solicitaban justificar o argumentar sus respuestas de manera escrita. Y es comprensible, porque en la educación primaria se da poca importancia al desarrollo de las habilidades de argumentación, refutación y verificación. En la clase de matemáticas la validez de los resultados recae fuertemente en la institución (frecuentemente representada por el o la docente).

En los últimos años, se ha resaltado la importancia de la argumentación matemática y su desarrollo desde los primeros años de escolaridad, de modo que no se considere algo propio de los grados superiores. En la revisión de literatura identificamos que los estudios abordan la argumentación desde una mirada social donde se construye a partir de las interacciones de los estudiantes y el profesor, a lo que se ha denominado *argumentación matemática colectiva*.

Con base a lo descrito anteriormente reconocemos la necesidad de hacer investigación en torno a la argumentación matemática colectiva en primaria desde la perspectiva cultural. Al integrarnos en esta perspectiva social complementaremos el componente social desde nuestra postura teórica, lo que atañe a lo matemático, nos interesa reconocer las prácticas acompañantes a la argumentación matemática colectiva, hacer algebraico en sí mismo; y para lo cual ampliamos la mirada social al objeto de estudio.

El trabajo se divide en seis capítulos, cada uno con un enfoque específico que contribuye al desarrollo y comprensión de la investigación.

El primer capítulo titulado consideraciones iniciales, se presentan las motivaciones, la justificación del estudio, el desarrollo de la revisión de la literatura sobre la argumentación matemática colectiva, desde su conceptualización, perspectivas, modelos de reconstrucción y tipos de tareas utilizadas. De manera que describimos la problemática y construimos las preguntas de investigación y los objetivos para la investigación. Este capítulo proporciona una visión general de la importancia de la argumentación matemática en la educación primaria y los fundamentos que sustentan esta investigación.

En el segundo capítulo titulado consideraciones teóricas, introducimos los componentes teóricos de la investigación. Nuestro proyecto está sustentado en algunos elementos de la Teoría Socioepistemológica y la argumentación matemática colectiva.

En el tercer capítulo titulado consideraciones metodológicas, describimos los componentes metodológicos de la investigación. La investigación es basada en el diseño y se explica el desarrollo de las fases: preparación y experimentación. En la primera fase da cuenta de la trayectoria de aprendizaje, la selección de participantes, los conocimientos de partida, las nociones esenciales y la situación de aprendizaje. En la segunda fase se muestra los criterios de la selección, organización y análisis de los datos

En el cuarto capítulo titulado resultados, se describen los resultados de la investigación los cuales se estructuraron en dos etapas. La primera se describe y se realiza un primer análisis los datos por los momentos del diseño, enfatizando sobre la actividad matemática para obtener la primera categorización e identificar los episodios de argumentación. En la segunda se organizó por interacciones individual/grupales y colectivas donde se reconocieron los episodios de argumentación y reconstruimos los argumentos para identificar las prácticas que emergieron y el proceso de resignificación de los argumentos en las tareas.

En el quinto capítulo titulado conclusiones, se ofrecen conclusiones sobre la argumentación matemática colectiva, el trabajo con la generalización de patrones, respecto a la metodología y la teoría.

En el sexto capítulo titulado limitaciones y prospectivas, establecemos las limitaciones de nuestra investigación y las nuevas preguntas que emergen de ella para otros estudios a futuro.

1. Consideraciones Iniciales

En medio de la dificultad se esconde la oportunidad.
– Albert Einstein

1.1. Motivaciones

A lo largo de los distintos niveles educativos, siempre me gustaron las matemáticas. Hasta la preparatoria, empecé a no encontrar la utilidad de lo que hacíamos en las clases de matemáticas y a discrepar de cómo se enseñaban los saberes.

Al iniciar mis estudios en la Normal en el curso de Algebra: su enseñanza y aprendizaje abordamos las fracciones un contenido que siempre me representaba una dificultad. Con la docente, que llamábamos de cariño “La madre” trabajamos las fracciones desde otra mirada, buscando su origen y dejando de lado al trabajo algorítmico. Con esta experiencia, pude caer en cuenta que la forma y la interacción de los estudiantes con el saber es fundamental para que disfruten u odien a las matemáticas. En el último año de la Normal, realicé una estancia de investigación en el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada –del Instituto Politécnico Nacional, Unidad Legaria, con el Dr. Javier Lezama quien me acercó a la investigación en Matemática Educativa.

En el 2016, comencé como maestra de primaria. En mi quehacer como docente comenzaron ciertos conflictos entre mi formación y la realidad. Entre los cuales el tiempo era insuficiente para ver todos los contenidos de matemáticos, los exámenes evaluaban cosas distintas a lo que abordaba a diario con los estudiantes y los aspectos administrativos te consumían tiempo. En ocasiones me cuestionaba constantemente: ¿qué sé de la naturaleza de este saber?, ¿qué utilidad puede tener para los estudiantes?

El proyecto que me acercó a la teoría Socioepistemológica fue el Programa Interdisciplinario de Desarrollo Profesional Docente en Matemáticas (PIDPDM). El Dr. Lezama me invitó a colaborar en el diseño de Situaciones de Aprendizaje en el equipo de la Dra. Reyes-Gasperini y el Dr. Cantoral, donde encontré una afinidad entre mi quehacer docente y la Teoría Socioepistemológica donde se problematiza el saber identificando las prácticas que dieron origen al saber, es decir, atendiendo a la construcción social del conocimiento.

En mi quehacer como docente propiciaba discusiones con los estudiantes que consistían en mostrar a los otros las estrategias para resolver problemas. Regularmente comenzábamos a partir del error para encontrar posibles razones, posteriormente explicaban procedimientos más formales y correctos. Conforme me involucraba en diversos proyectos, mi formación y mi perspectiva de la educación iba cambiando.

En las clases de matemáticas pude darme cuenta de que los estudiantes presentaban dificultades en tareas que se les solicitaba de manera escrita, justificar o argumentar la respuesta. Normalmente respondían con frases como: “porque así me salió”, “porque sí” o bien colocaban solo la cantidad numérica. Estas actividades poco típicas en el aula, parecía colocar en problemas a los estudiantes al no entender qué debían hacer.

Lo mismo sucedía en los momentos de argumentación matemática en el aula. Pocas veces se argumentaban las afirmaciones y se solía más explicar las ideas, procedimientos y estrategias para resolver diversos problemas. Sin embargo, estas explicaciones únicamente buscaban la validez del profesor.

1.2. Justificación

En educación primaria se da poca importancia al desarrollo de la capacidad estudiantil para argumentar, refutar y verificar. En matemáticas, la validez de los resultados recae fuertemente en los docentes, por lo que los educandos son receptores pasivos de información, alimentando una cultura que no cuestiona las afirmaciones del docente, los programas o los libros de texto.

En los últimos años, la NCTM (2000) sugiere abordar la argumentación y la prueba matemática desde los primeros años de escolaridad, de modo que no se considere algo propio de los grados superiores. En esta tendencia se destaca la relación entre la argumentación y la prueba matemática (Knipping y Reid, 2015; Stylianides, 2007), en particular en el desarrollo del razonamiento (Krummheur, 1995; 2007) y el pensamiento crítico y reflexivo (Cornejo-Morales et al., 2020).

En el estudio de Cornejo-Morales y Alsina (2020) encontraron que algunas propuestas internacionales (Principios y Estándares, 2000; Common Core State Standards, 2010; Essential Understanding, 2011; Programme for International Student Assessment, 2017) tienden en reconocer la argumentación matemática desde los primeros niveles y se enfatiza en la perspectiva de aprender argumentar más que el argumentar para aprender. Mostrando una vinculación con la demostración y dando mayor énfasis al carácter de la argumentación narrativa-escrita. Además, Cetina-Vázquez y Cabañas-Sánchez (2017) resaltan que hay pocos estudios enfocados en los procesos de argumentación matemática en la escuela básica.

1.3. Revisión de Literatura

Lo anterior nos motivó a llevar a cabo un proyecto en torno a la argumentación matemática en el nivel de primaria. Iniciamos con una revisión de la literatura en la disciplina, con el objetivo de analizar los estudios realizados sobre la argumentación matemática en este nivel educativo. Esto nos permitió ubicarnos y trazar una ruta para un diseño de investigación apropiado al escenario donde identificamos el fenómeno.

Como el fenómeno de interés es la argumentación en el aula, revisamos desde la argumentación matemática colectiva que permite verla desde una mirada social a partir de las interacciones de estudiantes y profesor en el salón de clase.

1.3.1. Argumentación Matemática Colectiva: Conceptualizaciones

El concepto de argumentación, desde la retórica, se remota a Aristóteles, donde era vista como el proceso en el que una sola persona confronta a una audiencia que debe ser convencida. Sin embargo, hoy en día las características de la comunicación en el aula son distintas, los estudiantes se involucran más en su aprendizaje y adquieren un rol activo en el aula.

El aula se vuelve un espacio donde se encuentran ideas, pensamientos y creencias que forman parte de una micro comunidad, con reglas de interacción, ya sea estudiante-estudiante o bien profesor-estudiante. Por ello, es que la argumentación juega un papel importante para que los estudiantes perfeccionen sus ideas matemáticas y a su vez construyan juntos una comprensión compartida (Van Ness y Maher, 2019).

Argumentación que Apoya el Aprendizaje. Con la revisión de los estudios de la argumentación en el aula de primaria logramos identificar los estudios enfocados en la argumentación que apoya al aprendizaje, es decir, los estudiantes logran descubrir, convencer, construir, perfeccionar y cuestionar las ideas matemáticas.

Uno de los primeros estudios de la Argumentación Matemática Colectiva en primaria es el trabajo de Krummheuer (1995) quien considera que "la argumentación se ve aquí principalmente como un fenómeno social, cuando los individuos cooperantes intentaron ajustar sus intenciones e interpretaciones presentando verbalmente la justificación de sus acciones" (p.229). Ampliando esta conceptualización Rumsey y Langrall (2016) ven a la argumentación matemática como "un proceso de discurso social dinámico para descubrir nuevas ideas matemáticas y convencer a otros de que una afirmación es verdadera" (p. 414), ya no solo implica convencer a los otros sino construir nuevas ideas.

Continuando con la idea, Cornejo-Morales y Alsina (2020) consideran que la argumentación es "una actividad comunicativa y situada por medio de la cual los niños y las niñas entregan razones (para otros o para sí mismos) para justificar y convencer (o convencerse) sobre cierta posición o cuestionarla reflexivamente" (p. 14). Lin (2018) la visualiza como un proceso social donde estudiantes y profesor participan en un discurso matemático que implica averiguar para convencerse a sí mismo y a las dudas de los demás.

Aprendizaje de la Argumentación. El segundo enfoque se centra en el aprendizaje de la argumentación en sí misma, con el objetivo de desarrollar habilidades que fomenten la creación de estructuras lógicas, las cuales pueden servir como base para las demostraciones matemáticas. Cervantes-Barraza et al. (2019b) consideran que es una actividad social para convencer a otros a través de razones presentadas de forma lógica. Estos autores reconocen la importancia de la forma de las razones presentadas, ya que enfatizan en la parte lógica. En esta postura, se encuentra también el estudio de Knipping (2008), quien considera que la argumentación se refiere al proceso de ensamblaje de los argumentos, planteamiento que Cervantes-Barraza, Valbuena et al. (2019) complementan caracterizando como una "habilidad básica y necesaria para que el estudiante explique, justifique y convenzan a los demás a través de razones lógicas sus sobre sus ideas o conclusiones ante una comunidad educativa" (p.125).

Si bien la investigación define objetos de estudios desde una u otra perspectiva, reconocemos la relevancia de ambas en los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Tanto, la argumentación como apoyo para el aprendizaje y el aprendizaje argumentativo están inmersos en los procesos de argumentación, y ambos juegan un papel importante en el aprendizaje, ya sea del saber matemático o bien de las habilidades para expresar ideas de manera fundamentada para que llegar a acuerdos y permita el desarrollo crítico para la validez de sus argumentos.

1.3.2. Argumento Matemático

Las investigaciones en torno a la argumentación matemática colectiva diferencian la argumentación del argumento matemático. Cervantes-Barraza et al. (2017) consideran que el argumento "es una razón o series de razones ofrecidas por el argumentador" (p.864), por otro lado, Krummheuer (1995) señala que los argumentos son colectivos ya que los estudiantes "[intentan] ajustar sus intenciones e interpretaciones presentando verbalmente la justificación de sus acciones" (p. 229). Por tanto, el argumento es el resultado de una argumentación realizada en una clase de matemáticas (Whitenack y Knipping, 2002) y el proceso de interacción es importante para la reconstrucción del argumento.

Por su parte Cornejo-Morales y Alsina (2020) reconocen que los argumentos refieren tanto a “producciones orales, gestuales, pictóricas y escritas que usan los niños y niñas para justificar o cuestionar, como a las reconstrucciones lingüísticas posteriores…mediante las que se expresa sintéticamente el aspecto argumentativo de tales producciones” (p.14).

Con respecto a los componentes del argumento diversas investigaciones (Cervantes-Barraza et al., 2017; Cervantes-Barraza et al., 2019a; Krummheur, 1995, 2007; Whitenack y Knipping, 2002) se han apoyado del esquema que propone Toulmin (2007) compuesto por conclusión, datos, garantía, respaldo, calificadores y refutación. Otros estudios (Lin, 2018; Cervantes-Barraza et al., 2019b; Van y Maher, 2018) en las adaptaciones que han hecho la modelo Knipping (2008) y Knipping y Reid (2015).

En el trabajo de Rumsey et al. (2022) no se hace alusión al modelo, pero se caracteriza al argumento como compuesto de afirmaciones, evidencia –pruebas o apoyos de la afirmación– y razonamiento –explicación entre la conexión afirmación-evidencia–.

Por otra parte, las investigaciones de Zhou et al. (2021) y Blanton et al. (2022) rescatan las ideas de prueba de Stylianides (2007) para determinar los componentes del argumento matemático como:

> (1) un conjunto de enunciados disponibles en la comunidad del aula, (2) modos conocidos de argumentos en la comunidad del aula y (3) modos conocidos de representación de argumentos en la comunidad del aula, en que la comunidad era principalmente un aula de primaria. (p. 217)

Considerando lo anterior, la mayoría de los estudios han caracterizado a los argumentos colectivos desde el modelo de Toulmin (2007). No obstante, es importante no dejar de lado aquellos argumentos individuales que solo suceden en la interacción del sujeto con el objeto matemático.

1.3.3. Argumentación Matemática Colectiva en Primaria: Categorización de los estudios

Para presentar la revisión de literatura organizamos los estudios según el énfasis de los resultados en el proceso de argumentación matemática colectiva en cada investigación, para identificar dos perspectivas que no son excluyentes entre sí. Las cuales nos permitieron organizar lo que se ha hecho en torno a la argumentación matemática con estudiantes de primaria.

Perspectiva Estructural. Esta perspectiva agrupamos aquellos estudios cuyo énfasis encontramos que están en mostrar la estructura lógica y tipificar los argumentos. Por ejemplo, el estudio de Cervantes-Barraza et al. (2017) reconocieron dos tipos de argumentos: por un lado, los formales, que se construyen a partir de propiedades, acciones y fórmulas matemáticas y, por otro lado, los informales, que se presentan en torno a interpretaciones físicas o visuales. El estudio identifica cómo la refutación de aserciones en argumentaciones colectivas permite cuestionar y mejorar la validez de los argumentos presentados, y ejerce un poder persuasivo significativo, capaz de influir en las ideas y conclusiones de los demás estudiantes.

En el trabajo de Cervantes-Barraza et al. (2019a) caracterizaron los argumentos que surgen en una tarea de álgebra temprana y reconocieron que los estudiantes son capaces de formular argumentos en niveles básicos, utilizando principalmente recursos como dibujos y objetos físicos. Sin embargo, se observó que la falta de interés en las matemáticas puede dificultar el desarrollo de argumentos más complejos.

Cervantes-Barraza et al. (2019b) exploraron la naturaleza de la argumentación compleja a nivel estructural y encontraron que en el contexto de tareas de refutación y utilizando el modelo de Knipping y Reid (2015) caracterizan y muestran la estructura de la argumentación la reportada en el artículo es la estructura de fuente con un argumento de refutación. La tarea es fundamental, pues se promovió la refutación de conclusiones y resalta la importancia del rol del docente para guiar y estimular las habilidades argumentativas. Además, los autores mencionan que el tipificar la argumentación matemática colectiva es una entrada a la lógica del proceso de prueba.

El estudio realizado por Zhou et al. (2021) mostró que casi la mitad de los estudiantes de sexto grado de una escuela rural de China no podían producir una argumentación válida para resolver una tarea argumentativa geométrica. Los autores identificaron que la mayoría de los estudiantes utilizaron métodos de inducción en lugar de deducción, además que dominaba la justificación verbal y pocos estudiantes ofrecieron contraejemplos.

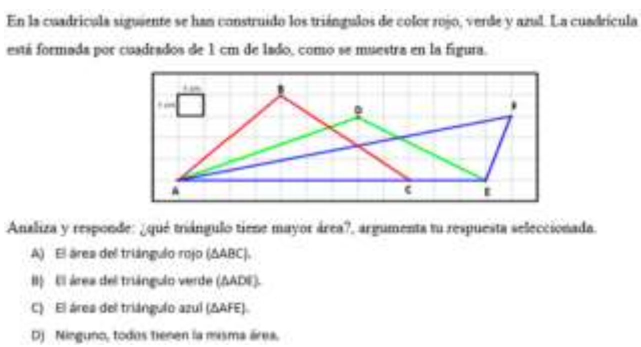
Por su parte Krummheur (1995) hace una distinción entre argumentación analítica y sustancial. La primera refiere a la deducción lógica correcta, es decir, cuando se obtiene la conclusión de las premisas; mientras que la sustancial le ofrece expandir los significados de las proposiciones conforme se presenta un nuevo caso, sin rigor lógico. Por lo tanto, propone que se le debe de mirar a cada una desde su naturaleza y evitar subordinar una a otra.

Tareas y saberes. En este apartado rescatamos únicamente las tareas y saberes que se trabajaron en los artículos revisados. Dentro de esta perspectiva se integran cuatro estudios de los cuales tres abordan tareas geométricas y una de Álgebra Temprana. En la investigación de Zhou et al. (2021) se trabaja con la fórmula del área rectangular al mostrar la siguiente tarea “para cualquier rectángulo, si la longitud se reduce a la mitad, el ancho se duplica, entonces el área del rectángulo siempre será la misma. ¿Estás de acuerdo con esta idea? Explique las razones de su juicio” (p. 220). El saber fue el área de una figura geométrica y la tarea promueve la formación de una postura y explicar razones.

Por su parte, Cervantes-Barraza et al. (2017) proponen una actividad donde se utiliza una representación visual de tres triángulos posteriormente una pregunta de opción múltiple (Figura 1) sobre el área de los triángulos. El saber trabajado es el área de figuras geométricas y la tarea promueve una postura la cual será argumentada.

Figura 1

Tarea geométrica


En la cuadricula siguiente se han construido los triángulos de color rojo, verde y azul. La cuadrícula está formada por cuadrados de 1 cm de lado, como se muestra en la figura.

Analiza y responde: ¿qué triángulo tiene mayor área?, argumenta tu respuesta seleccionada.

A) El área del triángulo rojo (ΔABC).
B) El área del triángulo verde (ΔADE).
C) El área del triángulo azul (ΔAFE).
D) Ninguno, todos tienen la misma área.

Nota. Tomada de *El poder persuasivo de la refutación en argumentaciones colectivas* (p. 868), por J. Cervantes-Barraza et al., 2017, Bolema.

Por su parte, Cervantes-Barraza et al. (2019b) para el diseño de las tareas contemplaron cinco principios para promover refutaciones: aalto nivel de demanda cognitivas, tareas abiertas, introducir conclusiones falsas, generar conflicto cognitivo y la gestión del enfrentamiento de posiciones. A partir de los cuales se elaboraron un conjunto de tareas sobre la clasificación de triángulos según los ángulos. En el estudio solo se reporta los resultados de la pregunta "¿Existen triángulos equiláteros con un ángulo de noventa grados?" (p.229).

Por otro lado, Cervantes-Barraza et al. (2019a) trabajaron con una tarea del Álgebra Temprana la cual consistía en generalizar un patrón a partir de sucesiones numéricas. La tarea promueve la apertura de argumentos al poder conjeturar sobre la regla que siguen las sucesiones numéricas.

Perspectiva Contextual. Esta categoría se encuentran aquellas investigaciones que enfatizan en evidenciar los procesos de confrontación, debate o convencimientos y reconocer los elementos que influyen en la construcción de la argumentación matemática colectiva. La complejidad se muestra conforme avanza las interacciones (Whitenack y Knipping, 2002) y se evidencia tanto en los elementos como en la estructura de los argumentos (Van y Maher, 2018), puesto que incita a los/las estudiantes hacer públicos sus argumentos y a su vez a dar sentido al discurso que va surgiendo.

Van y Maher (2018) muestran que la argumentación de los estudiantes puede carecer de precisión en el lenguaje, sin embargo, su razonamiento toma forma de argumentos válidos al proporcionarles herramientas que apoyen la construcción de modelos para expresar sus ideas (Rumsey et al., 2022; Whitenack y Knipping, 2002).

Asimismo, Whitenack y Knipping (2002) consideran el medio social y la comprensión de los estudiantes como elementos importantes ya que el argumento se vuelve más sólido en la medida que otros estudiantes apoyen las afirmaciones y permita a sus compañeros comprender.

Lin (2018) reconoce que el papel del profesor en el diseño de las tareas y como mediador de las preguntas durante la argumentación es transcendental para brindar experiencias de argumentación. Experiencias en las cuales los estudiantes no solo sean una audiencia, sino que se les brinde oportunidades para explicar, elaborar o defender la afirmación de uno ante los demás.

Rumsey et al. (2022) reconocen que la naturaleza de la tarea, la participación de los alumnos (Krummheur, 2007), el lenguaje común, las normas del aula y el papel del docente son elementos que influyen en la argumentación y en la forma de los argumentos. Las normas del aula requieren de un cambio en tanto a las expectativas como a las responsabilidades del profesor y los estudiantes. El papel del docente debe ser de una autoridad compartida donde los estudiantes puedan expresar libremente sus ideas y críticas a sus compañeros.

Esta perspectiva identifica variables que pueden influir en el argumento como en la argumentación al considerar, las normas del aula, el papel del docente en torno al diseño de tareas, el empleo de herramientas y las instrucciones durante la argumentación. Por parte de los estudiantes: los conocimientos, el lenguaje, la participación y la comprensión de las ideas de los otros. Lo que permite considerar elementos que configuran la argumentación matemática colectiva en el aula y no solo ver las declaraciones de los estudiantes como elementos aislados, sino que surgen o se construyen a partir de un contexto específico con características del aula y de los participantes que conviven en ella.

Tareas y saberes. En esta perspectiva está integrada por cinco estudios de los cuales tres trabajan con tareas Aritméticas, uno con tareas Geométricas y otro con una tarea de Algebra Temprana. En el estudio de Whitenack y Knipping (2002) se propone resolver situaciones de problemas de suma y resta de dos dígitos, el caso reportado es una tarea de demostración a partir de la situación: "la tía Mary acaba de empaquetar 31 caramelos. El tío Johnny la visita y come 15 dulces. Muestre cuántos dulces tiene la tía Mary ahora" (p. 447). Por su parte, Krummheur (2007) trabajó con la descomposición aditiva de números de dos dígitos. Van y Maher (2018) hacen referencia al trabajo de fracciones al preguntar "¿Cuál es mayor 1/2 o 1/3, y por cuánto?" (p.15) y con ayuda de las varillas de Cuisenaire los estudiantes pueden construir modelos que den respuesta.

Por otro lado, Lin (2018) trabajó con tareas como áreas, perímetros, división de números, volumen, triángulos y cuadriláteros. La tarea reportada fue "el perímetro se mantiene igual, si se corta un pequeño cuadrado en la esquina de un rectángulo" (p.1178). Por el contrario, Rumsey et al. (2022) diseñaron un conjunto de tareas de ecuaciones aritméticas que tienen operaciones en ambos lados, entre las cuales se propusieron demostrar "si una ecuación como 8 + 4 = 7 + 5 es verdadera o falsa" o pedirles que "determinen el número desconocido necesario para hacer que una ecuación como 8 + 4 = _ + 5 sea verdadera" (p.21).

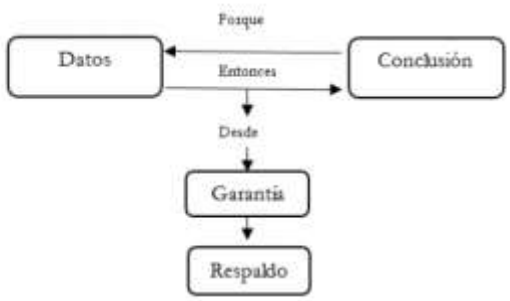
1.3.4. Argumentación Matemática Colectiva: Modelos de Reconstrucción

Dentro de la literatura revisada sobre argumentación matemática colectiva en primaria reconocimos que para la reconstrucción de la argumentación en el aula se usan tres modelos, de los que se profundiza en las siguientes secciones.

Modelo de Toulmin. En los estudios de Whitenack y Knipping (2002), Krummheur (2007) y Cervantes-Barraza et al. (2019a) usaron el modelo de Toulmin (2007) con sus adecuaciones incluyendo datos, garantía y respaldo, tal como se muestra en la Figura 2. La conclusión es una afirmación matemática, los datos son la información que apoya la conclusión, la garantía es la información adicional que muestra la conexión de los datos y la conclusión; y, finalmente, el respaldo son las declaraciones que refieren a la permisibilidad de la garantía.

Figura 2

Modelo adecuado de Toulmin



Nota. Tomada de *The Ethnography of Argumentation* (p.248), por G. Krummheur,1995, New York & London: Routledge.

Por su parte, Whitenack y Knipping (2002) colocan el nombre de la persona que proporcionó cada elemento. También Krummheur (2007) reconoce la participación de los estudiantes, pero con la diferencia que no lo coloca explícitamente en el modelo.

Por otro lado, Cervantes-Barraza et al. (2017) agregan otro elemento que refiere a las refutaciones y colocan convenciones en la representación de cada elemento, es decir, la afirmación la representan con un rectángulo con las esquinas curvas, los datos con un rectángulo, la garantía con un ovalo y la refutación con un rombo, y al igual que Whitenack y Knipping (2002) colocan los nombres de los participantes.

Modelo de Knipping y Reid. Este modelo hace una adaptación del modelo de Toulmin para evidenciar las estructuras argumentativas en el salón de clase tanto a nivel local como global y así comprender la lógica y las limitaciones contextuales que dan forma a la argumentación (Knipping, 2008). Para representar la argumentación completa se usa refutación como la negación de un argumento conclusión cuando se proporciona datos y garantías (Knipping y Reid, 2015).

Este modelo consta de tres etapas como se muestra en la Figura 3. La primera se identifica las secuencias de temas y se reconstruyen los significados individuales de los enunciados en el papel de la argumentación. En la segunda etapa se reconstruyen los argumentos locales y estructuras globales de acuerdo con la convencionalidad de representación como se ve en la Figura 3. En la tercera etapa, se comparan las estructuras de argumentación global a partir de su estructura general que muestra la lógica que emerge del proceso de prueba (Knipping y Reid, 2015).

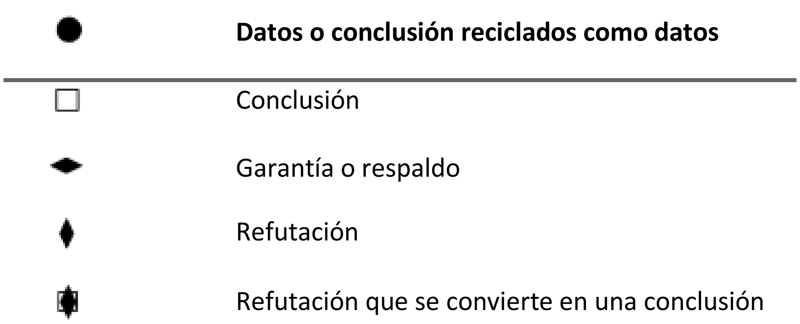
Figura 3

Modelo de Estructura Global de Argumentación

Nota. Adaptada de *Reconstructing Argumentation Structures: A Perspective on Proving Processes in Secondary Mathematics Classroom Interactions* (pp. 83-91) por C. Knipping y D. Reid (2015), Springer

Figura 4

Convencionalidades en la estructura global de argumentación



Nota. Tomada de Complex Argumentation in Elementary School (p. 231) por Cervantes-Barraza et al., 2019, PNA 13(4)

Este modelo surge para reconstruir y analizar la compleja estructura argumentativa de los procesos de prueba en las conversaciones del aula de secundaria.

Modelo de Stylianides. Zhou et al. (2021) y Blanton et al. (2022) construyeron un marco a partir del trabajo de Stylianides (2007) sobre lo que considera que es una prueba matemática en primaria, es decir, "un argumento matemático, una secuencia conectada de afirmaciones a favor o en contra de una afirmación matemática" (p. 291). Dicho argumento debe cumplir tres características: que emplea declaraciones aceptadas por el aula, que se construye a partir de razonamientos comprensibles por el aula y que utilice formas de comunicación apropiados para el aula.

De los estudios revisados el modelo que más se emplea para la reconstrucción de la argumentación en el aula, es el modelo de Toulmin con sus adaptaciones. No obstante, Krummheuer (1995) menciona que se debe tener cuidado al usar dicho modelo, puesto que se puede hacer uso únicamente para indicar los componentes del modelo. Puesto que la argumentación colectiva no solo se puede ver como una sucesión de enunciados, sino en varios que están en una relación constante de construcción y reconstrucción que va dando sentido al argumento (Yackel, 2002), es fundamental considerar las interacciones y otros elementos que influyen en dicha argumentación.

1.4. Síntesis

La revisión bibliográfica nos proporcionó resultados valiosos para situar nuestro estudio. Primero, nos permitió identificar que la argumentación matemática en los estudios básicos es un problema de interés por el reconocimiento de su impacto en el aprendizaje de los estudiantes. Como resultado de la revisión, reconocimos que los estudios se han enfocado en reconocer la estructura de la argumentación, en tipificar los argumentos si carecen de estructura lógica. En identificar dentro del contexto de la argumentación matemática colectiva los elementos que la promueven que inciden en su desarrollo, como lo son: el papel del profesor, las interacciones, las herramientas empleadas, la comprensión del estudiante y la naturaleza de la tarea.

A partir de la revisión de los artículos en específico de las tareas y saberes nos percatamos que las tareas Geométricas se priorizan desde la perspectiva estructural y las de tipo Aritmética en la perspectiva contextual. En cada perspectiva se aborda un estudio relacionado con el Álgebra Temprana, una relacionada con el enfoque de la aritmética generalizada donde Rumsey et al. (2022) muestran cómo influyen los participantes, las herramientas y la tarea en la argumentación. El profesor debe guiar a partir de preguntas, mientras que los estudiantes aprenden a expresar y defender sus ideas claramente. Una forma de apoyar son las herramientas pueden ayudar a organizar sus pensamientos, proporcionar evidencias para sus argumentos y colaborar con sus compañeros.

Y desde la perspectiva estructural se hace a partir de los patrones, en específico de sucesiones numéricas. Cervantes-Barraza et al. (2019a) el estudio se enfoca en cómo los estudiantes desarrollan y expresan sus argumentos matemáticos y en qué medida estos argumentos reflejan una comprensión sólida de los conceptos algebraicos. Los argumentos de los estudiantes varían en profundidad y sofisticación, reflejando diferentes niveles de comprensión algebraica. Al final se rescata la importancia de integrar la argumentación en la enseñanza del álgebra temprana, ya que facilita una comprensión más profunda de los conceptos y promueve el pensamiento crítico entre los estudiantes de primaria.

En la revisión de la argumentación matemática colectiva con estudiantes de primaria no se reportó la relación del argumento con la naturaleza de la tarea ni los haceres matemáticos que surgen en la argumentación matemática. El reconocer esa relación posibilita identificar la evolución de los argumentos. Mientras que los haceres nos van a permitir entender las acciones que hacen los estudiantes para desarrollar la argumentación matemática. De tal manera que encontramos un camino propicio para nuestra investigación.

1.5. Planteamiento de la Investigación

Con base en lo descrito anteriormente reconocemos la necesidad de continuar la investigación en torno a la argumentación matemática colectiva en primaria desde la perspectiva contextual al reconocer que las interacciones, los factores del contexto y la actividad matemática se significa y resignifica. Puesto que nos interesa reconocer el papel de la tarea en la construcción de los argumentos en la argumentación matemática colectiva, así como los haceres matemáticos que ponen en juego los estudiantes.

La argumentación matemática en el aula nos va a permitir “tender puentes entre los procesos interpersonales e intrapersonales, se convierte en una buena candidata para propiciar la construcción del conocimiento” (Schwarz et al., 2003, p.162) porque vamos a considerar los argumentos intrapersonales como los interpersonales productos de la argumentación colectiva que se desarrolla en el aula de clase.

Dadas las características de los estudiantes de primaria debemos considerar que en su narrativa no usan el lenguaje matemático formal, sin embargo, su razonamiento toma forma de argumentos válidos (Whitenack y Knipping, 2002). Discordamos con la idea que mientras sea más explicitas y sofisticada la participación será una condición para el aprendizaje (Krummheuer, 2007; Cornejo-Morales y Alsina, 2020) ya que en el contexto del aula no todos los estudiantes participan y eso no es indicativo que no estén aprendiendo.

Con el propósito de aportar en una dirección poco explorada planteamos nuestro diseño de investigación en torno a la argumentación matemática colectiva en primaria a partir de tareas dentro del Álgebra Temprana. El interés es reconocer la relación de la naturaleza de la tarea con la construcción de los argumentos y reconocer los haceres matemáticos que surgen en la argumentación matemática colectiva.

1.5.1. Objetivos de la Investigación

Con base a la revisión realizada nos planteamos atender el siguiente objetivo general y los objetivos específicos.

Objetivos generales

I. Describir la relación de las tareas algebraicas y la construcción de argumentos en la argumentación matemática colectiva con estudiantes de primaria.

II. Identificar los haceres matemáticos que surgen durante la argumentación matemática colectiva.

Objetivos específicos

I.1. Identificar y reconstruir los argumentos en tareas algebraicas durante la argumentación matemática colectiva.

I.2. Describir el rol de la tarea en el desarrollo de los argumentos durante la argumentación matemática colectiva.

II.1. Identificar el hacer matemático que surge en la argumentación matemática colectiva.

Para lograr estos objetivos de investigación realizaremos una investigación de diseño, que nos permita llevar a cabo una intervención en el aula de matemáticas, debido a que se requiere de la interacción de los estudiantes y el profesor al construir argumentos algebraicos.

2. Consideraciones Teóricas

Una teoría no es una solución,
es la posibilidad de tratar un problema.

— Edgar Morin

Los fundamentos teóricos nos permiten ver, describir, analizar y explicar el objeto de estudio desde una mirada particular. Por tanto, la importancia de explicitar los lentes teóricos para este estudio. Dado que nuestro interés está en identificar el hacer matemático, en términos de prácticas. La investigación estará fundamentada en la Teoría Socioepistemológica la cual nos permite ver las prácticas y nos dará pauta para el diseño de tareas basadas en prácticas. Por otro lado, la argumentación matemática colectiva considera las variables que juegan un papel en la construcción de los argumentos matemáticos, así como los diversos agentes involucrados y los elementos para la reconstrucción de las tareas.

2.1. Teoría Socioepistemología de la Matemática Educativa

El estudio se sitúa dentro de los paradigmas socioculturales que resaltan la relación entre lo social y lo individual, más allá de las interacciones sociales. La Teoría Socioepistemológica es un enfoque teórico de la Matemática Educativa que tiene como objeto de estudio la construcción social del conocimiento y su difusión institucional (Cantoral, 2016).

Entre los objetivos de dicha teoría está la democratización del aprendizaje, que refiere a tener igualdad de oportunidades para aprender y así poder usar el conocimiento (Cantoral, 2016). Al hablar de uso del conocimiento aludimos al saber, en contraposición del conocimiento entendido como la información sin uso.

Para la Teoría Socioepistemología de la Matemática Educativa (TSME) el saber matemático se construye a través de prácticas que dan sentido y significado a las nociones matemáticas que emergen (Cantoral, 2016). Por ello, la Socioepistemología se centra en las prácticas y no en el objeto matemático, es decir, se priorizan las prácticas que acompañan a dicho objeto, más no se le abandona. Esto implicó estudiar la cognición desde la construcción de significado (matemático), mismo que se asume derivado del uso del conocimiento. Suponemos entonces que al actuar en el mundo aprendemos, no al revés, aprendemos y luego actuamos en el mundo.

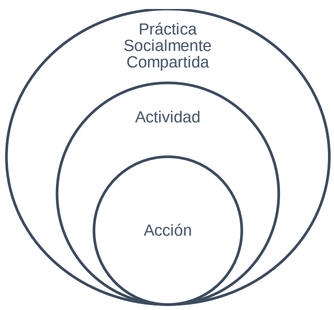
2.1.1. El Uso del Conocimiento

Como se mencionó anteriormente, el saber es el conocimiento puesto en uso y es derivado de los usos que se construyen significados relativos al objeto matemático. La teoría refiere a un *uso social* del objeto, en tanto usos situados en prácticas contextualizadas y se entiende por usos del conocimiento a las formas en que es empleada o adoptada una noción matemática en una situación específica, sean nociones representadas típicamente como en la escuela o contextualizadas por la situación; además se caracterizan por ser funcionales puesto que responden a la tarea matemática (Torres-Corrales y Montiel-Espinosa, 2021).

Una de las formas para identificar las practicas es observando el quehacer del aprendiz. Parte del análisis de este quehacer humano en interacción social y en un contexto dado, se hace mediante la denominada *anidación de prácticas* (Figura 5) que teóricamente explica la construcción *social* del conocimiento (Cantoral, 2020).

Figura 5

Anidación de prácticas



Nota. Adaptada de *Modelo de prácticas anidadas* (p. 334), de R. Cantoral, 2013, Gedisa

De acuerdo con Cantoral (2016) el primer nivel, llamado *acción*, que alude a la interacción del sujeto con la tarea. Esa acción se caracteriza por ser objetiva, puede observar a través de los comportamientos de los sujetos, mediante expresiones escritas o verbales, gestos, etc. Además, se caracteriza por ser intencionada al tener un propósito vinculado con el conocimiento del sujeto y la tarea matemática. El segundo nivel se ubica la *actividad*, que se caracteriza por la organización de las acciones del primer nivel con la particularidad de ser útiles para contestar la tarea que se presenta con ciertas condiciones contextuales. El tercer nivel la *práctica socialmente compartida* refiere a la organización de actividades que realiza el sujeto de manera intencionada y repetitiva sobre la tarea (Cruz-Márquez y Montiel-Espinosa, 2024).

2.1.2. Contextos

La TSME plantea como principio la *racionalidad contextualizada*, que "alude a que la relación del sujeto al saber es una función del contexto" (Cantoral, 2016, p.162). Es decir, la Socioepistemología considera la relación del sujeto con el saber, situado en un contexto. Por lo tanto, los argumentos que surjan deben ser contemplados desde el lugar y el tiempo en el que se encuentre el sujeto (Espinoza-Ramírez, 2009). El contexto influye en el tipo de racionalidades donde el sujeto o grupo construye conocimiento en tanto que signifique y ponga en uso. De ahí que esté relacionado con el principio de *relativismo epistemológico* dado que la validez del saber es en función del contexto y de las personas que construyen ese saber. Es decir, "los puntos de vista no tienen verdad ni validez universal" (Cantoral, 2016, p.163), sino que es subjetiva y relativa al contexto, ya que considera que "el saber es una multitud de saberes, con verdades relativas" (p. 164).

Para entender la relación del sujeto y el saber permeado por el contexto, Torres-Corrales y Montiel-Espinosa (2021) proponen tres niveles para su análisis:

El *contexto cultural* refiere a la pertenencia a grupos humanos específicos y con él se reconocen influencias en el comportamiento e interacciones sociales de los sujetos o grupos involucrados. Situando nuestro estudio en la escuela, este nivel de contexto y su influencia en estudiantes, profesor, escuela, padres de familia, entre otros; se puede reportar en la dirección del *contrato escolar* que, a decir de (Montiel-Espinosa, 2002), define "la actividad, las responsabilidades, actitudes y los derechos de los participantes del fenómeno escolar" (p.25).

Con el *contexto situacional* se reconoce el rol del tiempo, el lugar y las condiciones donde se lleva a cabo la actividad matemática; por ejemplo, tiempo de dedicación, organización del aula, interacciones sociales y pedagógicas, entre otras; que, por el escenario de la investigación, pueden reportarse en la dirección del *contrato pedagógico* con el que se establecen "las relaciones sociales entre profesor y alumno" (Montiel-Espinosa, 2002, p.25).

Finalmente, con el *contexto de significación* se busca dar cuenta de aquello "que da forma y sentido a la matemática en juego" (Torres-Corrales y Montiel-Espinosa, 2021, p.210). Considerando el interés y escenario de estudio de la presente investigación, este contexto puede reportarse en la dirección del contrato didáctico que refiere a "las negociaciones de profesor y alumno respecto del saber matemático escolar" (Montiel-Espinosa, 2002, p.25); considerando que en el análisis se priorizará el rol de las prácticas que se intencionen en la interacción con el saber matemático.

Aunque reconocemos que todos los contextos influyen en nuestro objeto de estudio, nuestras herramientas teóricas pondrán mayor atención en el contexto de significación, que enmarca en la construcción de conocimiento matemático, mediante el diseño de tareas con base en prácticas en un contexto especifico donde se usa dicho conocimiento y emergen significados.

2.1.3. Significados y Resignificación

Para Socioepistemología el significado dependerá en gran medida del escenario contextual. Por lo tanto, los significados no son preexistentes a la mente del sujeto, sino que al estar en interacción con diversos contextos evolucionan y se resignifican los saberes. La diversidad de significados del objeto matemático no se interpreta con tan solo su definición o explicación, sino que requiere de la acción humana, que se encuentra en el uso de la noción dentro de un contexto especifico (Kaisari y Patronis, 2010, como se citó en Cruz-Amaya, 2019).

Así mismo, la “base de significación no solo a la matemática misma, sino a todo aquello que rodea y en lo que se involucra el humano al hacer matemática” (Buendía, 2012, p.14), es decir, las herramientas, argumentos, discursos y los contextos de uso son importantes para la significación.

Lo anterior, da paso a otro de los principios de la Teoría Socioepistemología, la *resignificación progresiva*, el cual alude al proceso donde el primer significado a una noción matemática se pone en juego en otra situación, se usa de manera diferente, se construye nuevas caracterizaciones, argumentos y conocimientos que son la base para la nueva significación. En esta dirección, la TSME reconoce la limitación de significados del conocimiento matemático que promueve la escuela como parte esencial del fenómeno didáctico.

2.1.4. Discurso Matemático Escolar

La teoría Socioepistemológica plantea que el saber se construye socialmente y en ámbitos no escolares, por tanto, al introducirlo al sistema educativo se produce modificaciones estructurales para organizarlo para que sea enseñado, produciendo el fenómeno de transposición didáctica (Reyes-Gasperini, 2016). Estas modificaciones dan origen a discursos sobre qué y cómo enseñar, que se estructuran en contenidos que serán enseñados en una asignatura, en los libros de texto y por ende en el discurso de los profesores y estudiantes. Este discurso se ha caracterizado como un sistema de razón (Soto y Cantoral, 2014) denominado discurso Matemático Escolar (dME), que se caracteriza por:

- La atomización en los conceptos: no se consideran los contextos sociales y culturales que permiten la constitución del conocimiento.

- Su carácter hegemónico: existe una supremacía de argumentaciones, significados y procedimientos, frente a otras.
- La concepción de que la Matemática es un conocimiento acabado y continúo: los objetos matemáticos son presentados como si hubiesen existido siempre y con un orden.
- El carácter utilitario y no funcional del conocimiento: la organización de la matemática escolar ha antepuesto la utilidad del conocimiento a cualquiera de sus restantes cualidades. Se busca que el conocimiento tenga un carácter funcional, en el sentido que logre integrar tal conocimiento a la vida para transformarla.
- La falta de marcos de referencia para resignificar la matemática escolar: se ha soslayado el hecho de que la Matemática responde a otras disciplinas y, por tanto, es ahí donde encuentra una base de significados naturales.

(Soto y Cantoral, 2014, p.1528)

En este sentido la TSME nos aporta otra perspectiva para explicar el fracaso escolar, al cuestionarse el papel que juega la matemática escolar en dicho fracaso, en tanto el discurso Matemático Escolar genera violencia simbólica al imponer significados, argumentaciones y procedimientos (Soto, 2013), que son reproducidos tanto por profesores como por estudiantes al considerarlos imposibles de ser modificados.

En respuesta, la Teoría Socioepistemológica propone el Rediseño del discurso Matemático Escolar (RdME), planteamiento sustentado en transitar de una evolución conceptual hacia una evolución pragmática centrada en prácticas asociadas al objeto matemático. Por lo tanto, se privilegia la validez matemática respaldada con una argumentación contextualizada, que está fundamentada en las prácticas sociales y se resignificará a partir del diálogo compartido por los estudiantes y el profesor, por los diversos argumentos (Reyes-Gasperini, 2016). En esta propuesta de transición, nos interesa prestar atención en el discurso Matemático Escolar que se produce entorno a la argumentación en el Álgebra Temprana en los libros de texto, para realizar un rediseño del discurso, que permita identificar cómo usan los estudiantes los argumentos y resignifican el saber al enfrentarse a tareas diseñadas desde una mirada que prioriza las prácticas.

2.2. Argumentación Matemática Colectiva

La argumentación matemática colectiva es un constructo para estudiar la naturaleza de la actividad dentro del aula de matemáticas. Considerando los agentes involucrados (estudiantes y docente) y diversos factores como: las tareas, herramientas, el lenguaje entre otros. La argumentación es conceptualizada como un fenómeno social (Krummheuer, 1995), una actividad comunicativa y situada (Cornejo-Morales y Alsina, 2020), un proceso de discurso social dinámico (Rumsey y Langrall, 2016) o bien proceso social (Lin, 2018). De modo que, la argumentación se caracteriza por ser social y requerir de diversos actores participantes para la construcción de argumentos, ya se para validar, convencer o disentir una afirmación.

Por tanto, requiere espacios de comunicación mediante la discusión o debate para que los estudiantes puedan presentar, explicar, comparar, confrontar, justificar y validar sus ideas. De manera que se negocien los significados y los argumentos evolucionen. Dentro de esta postura se distingue entre proceso (argumentación) y producto (argumento). El argumento refiere tanto a “producciones orales, gestuales, pictóricas y escritas que usan los niños y las niñas para justificar o cuestionar, como a las reconstrucciones lingüísticas posteriores" (Cornejo-Morales y Alsina, 2021, p.161) que apoya a dichas producciones en el proceso de argumentación.

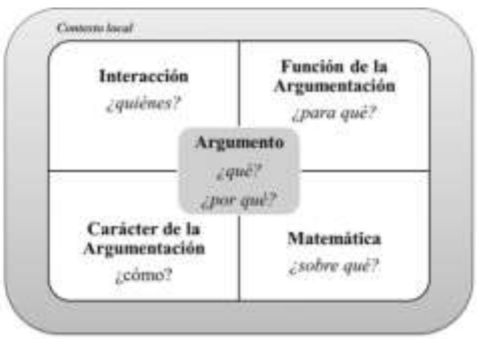
Para la reconstrucción de los argumentos Cornejo-Morales et al. (2021) proponen una Situación Argumentativa como se muestra en la Figura 6 con la finalidad de caracterizar la argumentación infantil e identificar los argumentos. Dicho modelo está integrado por cinco componentes:

- Argumento: "se relaciona con la identificación y reconstrucción del argumento como elemento central de la argumentación. Este componente responde al qué dicen y hacen los participantes de la interacción y por qué" (p. 165).
- Interacción: "responde a quiénes participan en la argumentación, considerando los papeles de profesor y estudiante" (p. 166) puede ser grupal, pares en pequeños grupos, pequeños grupos con el profesor o bien individual.
- Función de la argumentación: "se refiere al significado, propósito y utilidad que tiene un argumento" (p. 166). Se responde el para qué argumentan. Proponen cinco funciones: verificar, explicar, comunicar, descubrir y sistematizar.
- Carácter de la argumentación: "responde al cómo argumentan…diagramática y narrativa" (p. 169). Es decir, las distintas formas cómo se presentan los argumentos.

- Matemática: “se refiere al conocimiento matemático que está en juego en los argumentos de los estudiantes… [es decir responde al] sobre qué hablan los estudiantes y qué matemática están utilizando o problematizando” (p. 169).
-

Figura 6

Situación Argumentativa



Nota. Tomada de *La situación argumentativa: un modelo para analizar la argumentación en educación matemática infantil* (p.165), por Cornejo-Morales et al., 2021, PNA 15(3).

En este apartado podemos dilucidar por una parte nuestro posicionamiento teórico con respecto al fenómeno a observar, en nuestro caso las prácticas y la argumentación matemática en el aula.

2.3. Coordinación Teórica y Reformulación de los Objetivos de la Investigación

Con la integración de los lentes teóricos para abordar nuestro objeto de estudio, es crucial definir claramente el papel que desempeñarán ambas posturas en la investigación.

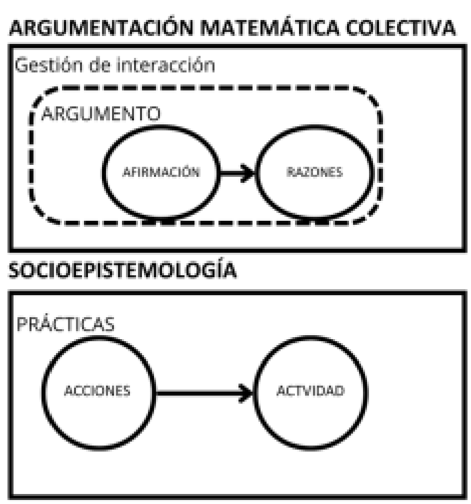
Respecto a la argumentación matemática colectiva es pertinente a nuestra investigación porque forma parte de la perspectiva social al considerar la argumentación que ocurre en el salón de clase desde las interacciones del profesor, estudiantes y el contexto donde surge. Al integrarnos en esta perspectiva social vamos a complementar el componente social desde una postura teórica particular, que atañe a lo propiamente matemático: la Socioepistemología. Con esta nos va a permitir caracterizar los argumentos entornos a las prácticas que emergen y cómo estos se reformulan al enfrentarse a diversas tareas basadas en prácticas durante la argumentación.

Para ello articulamos los principales elementos que vamos a utilizar en ambas posturas (Figura 7) para mirar las prácticas desde la postura de la Teoría Socioepistemológica y apoyarnos del diseño de las tareas basadas en prácticas.

Por otro lado, adecuamos el modelo propuesto por Cornejo-Morales et al. (2021) para reconstruir los argumentos el cual estará compuesto por una afirmación que corresponde a la posición adoptada y las razones de su posición, y la argumentación consideraremos los argumentos presentados como la gestión de interacciones y la función de la argumentación.

Figura 7

Principales elementos teóricos del estudio



Por ello, consideramos pertinente refinar nuestros *objetivos generales*:

I. Describir la relación de las tareas basadas en prácticas y la construcción de argumentos en la argumentación matemática colectiva con estudiantes de primaria.

II. Identificar las prácticas que emergen durante la argumentación matemática colectiva con estudiante de primaria.

Y los *objetivos específicos*:

I.1. Identificar y reconstruir los argumentos en tareas basadas en prácticas durante la argumentación matemática colectiva.

I.2. Identificar y describir las prácticas que emergen en los argumentos de los estudiantes.

I.3. Describir el rol de la tarea basada en prácticas en el desarrollo de los argumentos durante la argumentación matemática colectiva.

II.1. Identificar las prácticas que emergen en la argumentación matemática colectiva.

3. Consideraciones Metodológicas

Es verdad que en la ciencia no hay caminos reales;
que la investigación se abre camino en la selva de los hechos,
y que los científicos sobresalientes elaboran su propio estilo de pesquisas.

— Mario Bunge

Una vez elegida la postura teórica, en este apartado se describe la ruta metodológica que siguió el proyecto de investigación. Nuestro trabajo es de corte cualitativo y llevó a cabo una investigación basada en el diseño con la que podemos producir los datos que, posteriormente, serán analizados e interpretados desde nuestra base teórica. Con base en esta ruta metodológica podremos responder a nuestra pregunta de investigación, la cual requiere de la actividad matemática de los estudiantes y el profesor en el escenario del aula de matemáticas.

La investigación basada en el diseño, de acuerdo con Cobb et al. (2017), nos permite generar puentes entre la teoría y la práctica, además de proponer mecanismos para el funcionamiento de los resultados de investigación. Se requiere de un programa práctico que sirva como diseño y una teoría que justifique dicho diseño. Además, se caracteriza por ser intervencionista, esto es, se interviene en el aula para comprender el fenómeno estudiado. En este caso, los argumentos y la resignificación de la matemática en el contexto de la argumentación matemática en el aula para así generar explicaciones teóricas en torno al fenómeno. Este tipo de investigaciones se caracteriza por realizar estudios iterativos, pues se realizan varios ciclos para conjeturar, probar y revisar las conjeturas, para refinar las explicaciones teóricas. Es decir, se contempla la complejidad del aula, por ello se crean las condiciones para el desarrollo del diseño y se reconoce que ciertas normas de la cultura de la escuela y el aula impactan en la argumentación.

Por lo anterior, consideramos propicio la investigación basada en el diseño puesto que obtendremos datos empíricos que nos permitan obtener explicaciones teóricas del fenómeno a estudiar. Dado que la investigación del diseño es iterativa, es decir, un proceso de probar y verificar conjeturas para mejorar el diseño. En nuestro estudio emplearemos nuestro marco teórico y consideraremos las tres fases propuestas por Cobb et al. (2017): preparación para el estudio, la experimentación y el análisis retrospectivo. Y solo se realizará solo un ciclo de análisis.

3.1. Fase 1: Preparación para el Estudio.

Es necesario especificar las metas para el aprendizaje matemático. Para ello es fundamental cuestionar desde los planes de estudio como se representa dicho saber para así elaborar diseños que impliquen una reorganización significativa de dicho saber (Cobb et al., 2017). También se requiere trabajar con los puntos de partida de la instrucción, los conocimientos previos de los estudiantes. Se pueden obtener a partir de evaluaciones diagnosticas, entrevistas, etcétera. Lo que se pretende es conocer y rescatar los conocimientos previos o bien trabajar nociones esenciales para la puesta en marcha del diseño.

Otro elemento es construir una trayectoria de aprendizaje prevista. Para ello, se requiere de “la formulación de conjeturas comprobables sobre desarrollos significativos en el razonamiento de los estudiantes y los medios específicos para respaldar esos desarrollos” (Cobb et al., 2017, p.112). Por tanto, es primordial reconocer qué tareas, cuáles herramientas y cómo se implementarán en el aula según la naturaleza de las normas del aula. Finalmente, se requiere situar el estudio en un contexto teórico ya que una de las características de este tipo de investigación es producir explicaciones teóricas.

En nuestra investigación en esta fase retomamos cuatro actividades (Tabla 1), la revisión de los acercamientos la Álgebra Temprana, la estructuración de los objetivos, la construcción de la trayectoria de aprendizaje a partir del modelo propuesto por Cárcamo y Fuentealba (2023) ya que incorpora elementos considerados en esta fase y la construcción del diseño a partir de tareas y el proceso de aprendizaje hipotético.

Tabla 1

Actividades en la Fase 1

Fase 1-Preparación para el estudio
1. Acercamientos al Álgebra Temprana. 2. Estructuración de los objetivos de la investigación. 3. Trayectoria Hipotética de Aprendizaje preliminar. a) Enfoque teórico b) Objetivo de aprendizaje y selección del objeto matemático c) Revisión de la literatura d) Revisación del currículo e) Puntos de partida de los estudiantes. 4. La construcción de las tareas y el proceso de aprendizaje hipotético.

En la revisión de los estudios de la argumentación matemática colectiva en primaria identificamos que se predomina el trabajo con saberes de la Aritmética y la Geometría, y pocos centrados en el Álgebra Temprana (AT). Por lo tanto, realizamos una revisión para identificar los posibles acercamientos o ideas matemáticas que se pueden trabajar desde el AT.

3.1.1. Álgebra Temprana

El estudio del Álgebra en el currículo se trabaja a partir de la secundaria. Sin embargo, diversas investigaciones han reportado las dificultades que presentaban los estudiantes de secundaria al transitar del estudio de la Aritmética al Álgebra. Kaput (2008), por ejemplo, señala la abrupta transición de la Aritmética al Álgebra como una de las razones de este fracaso. Esta transición no es fácil y requiere de una forma particular de pensamiento.

Al estudiar esta problemática surge el Álgebra Temprana. Entre sus planteamientos iniciales, de acuerdo con Radford (2018), fue saber si los estudiantes de niveles básicos pueden o no comenzar con el estudio del Álgebra, y si al trabajar con los conceptos algebraicos elementales se podría contribuir a una transición hacia el estudio formal del Álgebra.

Incorporar el Álgebra Temprana al currículo confronta a la matemática escolar, ya que se orienta hacia una forma de pensar –priorizando procesos de razonamiento y representaciones (Kieran et al., 2016)–, más que al dominio de objetos abstractos o técnicas, y propone su estudio desde los niveles básicos. En la actualidad, es apoyada por algunas propuestas curriculares internacionales –por ejemplo: la *Common Core State Standards Initiative* y las propuestas de la *National Council of Teachers of Mathematics*– que han reconocido su importancia desde los primeros años para ir desarrollando el pensamiento algebraico.

Según Mason (2018) la generalización está en el corazón del Álgebra y se usa hasta antes que los niños ingresen en la escuela. Este planteamiento del Álgebra y del Álgebra Temprana, retomaremos la postura de López-Acosta (2016) de hablar de Pensamiento Algebraico, que se promoverá según el nivel del estudiante. Para Godino et al. (2014) el razonamiento algebraico:

> implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas. A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar [...], especialmente las ecuaciones, las variables y las funciones [...]. (p. 2002)

Para Blanton y Kaput (2004) es "un hábito mental que impregna todas las matemáticas y que implica la capacidad de los estudiantes para construir, justificar y expresar conjeturas sobre la estructura y las relaciones matemáticas" (p. 142). Por otra parte, Kieran (2004) menciona que:

> involucra el desarrollo de formas de pensar dentro de actividades para las cuales el lenguaje simbólico podría usarse como herramienta, o alternativamente dentro de actividades que podrían realizarse sin usar el lenguaje simbólico en absoluto, por ejemplo, analizar relaciones entre cantidades, darse cuenta de la estructura, estudiar el cambio, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar, probar y predecir. (pág. 149)

Para Rojas y Vergel (2013) el pensamiento variacional es un eje para el pensamiento algebraico, que "refiere al conjunto de procesos, procedimientos y esquemas que dan forma y sentido al pensamiento variacional" (p. 694). Para Radford (2006) el pensamiento algebraico no necesariamente implica el uso de los símbolos sino de otras formas de representaciones semióticas donde están interrelacionados tres elementos: "a) cantidades indeterminadas y (b) modos idiosincrásicos o específicos cultural e históricamente desarrollados de representar/simbolizar estas cantidades indeterminadas y sus operaciones, y trata con: (c) cantidades indeterminadas de manera analítica" (Radford, 2018, p. 8).

Esta evolución da mayor precisión a lo que se entiende como Pensamiento Algebraico y los estudios se han redireccionado respecto a los resultados de las investigaciones. En la actualidad, el énfasis está en las "relaciones matemáticas, los patrones y las estructuras aritméticas, con atención detallada a los procesos de razonamiento…procesos tales como notar, conjeturar, generalizar, representar y justificar" (Kieran et al., 2016, p. 9). Para lo cual, Kaput (2008) propone tres líneas de contenido donde se trabaja el Pensamiento Algebraico:

Estudio de Estructuras y Relaciones que Surgen en la Aritmética. En diversos estudios es llamado también como aritmética generalizada la cual incluye "números/cantidades, operaciones, propiedades, igualdad y representaciones y diagramas relacionados…variables, expresiones y ecuaciones, dependiendo de si los símbolos alfanuméricos se han integrado o no en el entorno de aprendizaje" (Kieran et al., 2016, pp. 12-13). Tradicionalmente, la enseñanza de la Aritmética ha priorizado los procedimientos con la finalidad de mecanizar. Sin embargo, esta línea involucra una forma distinta de tratar con la Aritmética, es decir mirar su estructura más que en su cálculo.

Estudio de Funciones. La perspectiva funcional implica "generalizar relaciones entre cantidades covariables, expresar esas relaciones en palabras, símbolos, tablas o gráficos, y razonar con estas diversas representaciones para analizar el comportamiento de la función” (Blanton et al., 2011, p. 13). En esta línea el concepto de covariación, el cambio y las representaciones son elementos centrales (Kieran et al., 2016).

Conjunto de Lenguajes de Modelado. La finalidad es integrar “diversos registros de representación en los que la expresión algebraica, la gráfica, la descripción verbal, las tablas de datos son articulados a partir de la reinterpretación de las características que cierto registro semiótico tiene en otro” (López- Acosta, 2016).

Dentro de estas áreas de contenido se encuentran inmersos diversos procesos importantes para el Álgebra como “los procesos de generalización, representación, justificación y razonamiento con estructura y relaciones matemáticas” (Blanton et al., 2011, p.11. citado en Kieran et al., 2016).

Para esta investigación decidimos trabajar desde la perspectiva funcional a partir de la generalización de patrones lineales los siguientes motivos:

a) Por el resultado de nuestra revisión de literatura encontramos que los estudios de la argumentación matemática colectiva en primaria que trabajan con tareas que se promueva el Pensamiento Algebraico se concentran en el contenido de aritmética generalizada y pensamiento funcional solo con patrones numéricos.

b) La generalización se puede ver no solo como un acto individual, sino, también “como un proceso dinámico, socialmente situado, que puede evolucionar” (Ellis, 2011, p. 308) y además “está influenciado e influye en las acciones interrelacionadas de estudiantes, profesores, problemas, representaciones y artefactos” (p.337).

Por último, está dentro del currículo del nivel primaria. Y los estudiantes tienen acercamiento con patrones figurales y numéricos.

3.1.2. Estructuración de los objetivos de la investigación

Llevada a cabo esta revisión de los acercamientos al Algebra Temprana justificamos la elección del trabajo con la generalización de patrones con secuencias figurales y numéricas. Por ello, consideramos pertinente refinar nuestros *objetivos generales*:

I. Describir la relación de las tareas de generalización de patrones basadas en prácticas y la construcción de argumentos en la argumentación matemática colectiva con estudiantes de primaria.

III. Identificar las prácticas que emergen durante la argumentación matemática colectiva con estudiante de primaria al trabajar con las tareas de generalización de patrones en secuencias figurales y numéricas.

Y los *objetivos específicos*:

I.1. Identificar y reconstruir los argumentos de los estudiantes al trabajar con las tareas de generalización de patrones basadas en prácticas durante la argumentación matemática colectiva.

I.2. Identificar y describir las prácticas que emergen en los argumentos de los estudiantes al trabajar con las tareas de generalización de patrones basadas en prácticas.

I.3. Describir el rol de las tareas de generalización de patrones basadas en prácticas en el desarrollo de los argumentos durante la argumentación matemática colectiva.

II.1. Identificar las prácticas que emergen en la argumentación matemática colectiva con las tareas de generalización de patrones en secuencias figurales y numéricas.

3.1.3. Trayectoria Hipotética de Aprendizaje Preliminar: Argumentación Matemática Colectiva y Generalización de Patrones

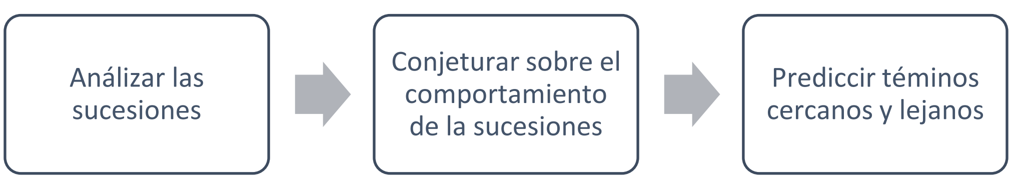
Para esta investigación optamos por hablar de trayectoria hipotética de aprendizaje preliminar (THAp) desde lo que propone Cárcamo y Fuentealba (2023) que para la construcción se requiere de tres componentes: “objetivo de aprendizaje, las tareas de aprendizaje y el proceso de aprendizaje hipotético” (p. 580). Estos autores proponen un modelo para la construcción de la trayectoria hipotética de aprendizaje preliminar el cual consta de cuatro pasos: elección del enfoque teórico, elección del objetivo y el objeto matemático, revisión de literatura y currículo sobre el objeto matemático. A continuación, se describirá a detalle cada paso.

3.1.3.1. Elegir el enfoque teórico que orientara la construcción de la THAp

Para la construcción de la THAp sobre la generalización de sucesiones seleccionamos dos enfoques: la Teoría Socioepistemológica, la usamos para la elaboración del proceso de aprendizaje hipotético, el cual se adaptó el modelo propuesto por López-Acosta (2016) a partir de la revisión de literatura sobre la generalización de patrones (Figura 8). Y esta última junto con la argumentación matemática colectiva para el diseño de las tareas.

Figura 8

Proceso de aprendizaje hipotético de la generalización de patrones basado en prácticas



El análisis de sucesiones figurales a través de la visualización, tanto en la estructura figural como numérica. Este análisis se apoya de las estrategias de comparación entre dos sucesiones y la seriación de comparación entre términos de dos sucesiones. Es decir, observar lo que sucede en un mismo término en distintas sucesiones figurales para establecer lo que pertenece y lo que cambia. Conjeturar sobre el comportamiento de las sucesiones lo que permite construir una posible expresión sobre el patrón. Predicción cercana y lejana donde se usa la conjetura del patrón, que participará en su generalización. Se consideró la trayectoria hipotética de (Uicab et al., 2022) la cual propone trabajar primero con la función identidad, función lineal, función cuadrática, etc. Para la presente investigación, consideramos solo la función identidad y lineal. También se consideró que las variables estuvieran explicitas tanto al numerar cada término como en la organización espacial de las sucesiones figurales.

De la argumentación matemática colectiva rescatamos la importancia de establecer desde un inicio las normas de interacción (Stylianou y Blanton, 2018) el saber escuchar, compartir ideas, construir ideas a través de los demás, tomar postura respecto a las ideas propuestas y compartir la autoridad sobre la validez de las afirmaciones de los estudiantes. Considerar tareas donde se presenten falsas afirmaciones (Rumsey y Langrall, 2016), promover la refutación de argumentos, gestionar del error como oportunidades para construir el conocimiento y tareas abiertas donde no solo haya un único resultado y además se promuevan diversas estrategias (Solar y Deulofeu, 2016). Definir los roles tanto del estudiante como de la docente. El estudiante tendrá que ser un observador y saber escuchar para compartir sus ideas, critique las ideas de los demás, y participe en la construcción de argumentos. La docente tendrá que dar tiempo para que los estudiantes piensen, ser mediadora y hacer preguntas concretas y puntuales para orientar la argumentación. Considerar la gestión de la organización de las interacciones tanto individual, en equipos y colectivas. De la generalización de patrones se consideró que las variables estuvieran explicitas al numerar cada término y en la organización espacial de las sucesiones figurales y se usaran representaciones pictóricas, numéricas y tabulares, y objetos manipulables.

3.1.3.2. Seleccionar el objetivo de aprendizaje e identificar el concepto matemático

El objetivo de aprendizaje lo elegimos de acuerdo con partir de lo que dice el currículo como aprendizaje "resuelve problemas que implican identificar la regularidad de sucesiones con progresión aritmética o geométrica" (SEP, 2011, p.80), que los estudiantes participen en construcción de argumentos en tareas de generalización de patrones lineales figurales y numéricos en la argumentación matemática colectiva.

3.1.3.3. Revisión de estudios relacionados con el concepto matemático.

La revisión que realizamos fue entorno a la generalización de patrones como la argumentación matemática colectiva para identificar las consideraciones cognitivas y didácticas, así como las nociones esenciales previas.

Generalización en Patrones

Varios investigadores han realizado trabajos que caracterizan la generalización de patrones, los procesos implicados, los tipos de generalizaciones y las estrategias de los estudiantes. Para Mason et al. (1985, citado en Radford, 2018) la generalidad es el centro de las matemáticas y para generalizar se "debe percibir algún patrón o regularidad y luego tratar de expresarlo de manera sucinta para que pueda comunicar su percepción a otra persona y usarla para responder preguntas específicas" (p. 8).

Para Radford (2010) la generalización de un patrón:

> "se basa en la capacidad de captar un elemento común notado en algunos elementos de una sucesión S, siendo consciente de que este elemento común se aplica a todos los términos de S y poder usarlo para proporcionar una expresión directa de cualquier término de S." (p. 42)

Zapatera (2018) retoma estas ideas y menciona que este proceso implica tres acciones: darse cuenta de algo común, generalizar eso común a todos los términos y usar esa regla para extender la sucesión.

Rivera (2015) destaca que la capacidad de generalización de patrones y la estructura matemática están relacionadas, ya que la generalización permite emplear el razonamiento predictivo e inferencial, ya que los estudiantes construyen y justifican una estructura interpretada y definida. Viendo a la generalización en una relación funcional. En esa dirección, Ureña et al. (2021) menciona que "la identificación y representación de la regularidad subyacente a la tarea extiende el razonamiento más allá de los casos en los que fue originado" (p. 615).

Kaput (1999, como se citó en Cetina-Vázquez, M. y Cabañas-Sánchez, 2022), define la generalización como:

> extender deliberadamente el rango de razonamiento o comunicación más allá del caso o casos considerados, identificar y exponer explícitamente los puntos en común entre los casos, o elevar el razonamiento o la comunicación a un nivel en el que el enfoque

ya no está en los casos o situaciones en sí, sino en los patrones, procedimientos, estructuras y la relación a través y entre ellos. (pág. 67)

Po su parte, Ellis (2011) ve a la generalización en el aula como "un acto situado que esta influenciado e influye en las acciones interrelacionadas de estudiantes, profesores, problemas, representaciones y artefactos" (p. 337). Depende de las personas, el contexto, el tipo de tareas y de herramientas, por lo tanto, es dinámico y evoluciona con la colaboración de los participantes.

Consideraciones Cognitivas de la Generalización de Patrones

En este apartado se mencionan los estudios que resaltan los procesos que competen a la parte cognitiva del estudiante al enfrentarse a tareas de generalización de patrones.

Niveles o Etapas en la Generalización de Patrones. Mason (1996, como se citó en Uicab et al., 2022) identifica que en el proceso de generalización se encuentran tres etapas: ver, decir y registrar. *Ver* implica identificar algo común, que puede ser una regularidad o una relación; *decir* consiste en articular en palabras (a uno mismo o a otros) lo que se identificó; y, finalmente, *registrar* es hacer visible el lenguaje mediante actividades que permitan la simbolización y comunicación escrita. Por otra parte, Radford (2010, 2018) estableció y caracterizó cuatro niveles de generalizaciones:

- *Generalización Aritmética*: los estudiantes reconocen la generalidad, pero no se puede expresar para cualquier término.
- *Generalización factual*: la indeterminación se expresa en acciones concretas.
- *Generalización contextual*: lo indeterminado se hace lingüísticamente explícito, pero se nombra a través de una descripción corpórea y situada.

- *Generalización simbólica*: la indeterminación se nombra. Se expresan por un sistema semiótico alfanumérico del algebra.

Zapatera (2015 citado en Zapatera, 2018) caracterizó tres estadios de comprensión en el desarrollo del proceso de generalización de patrones:

> *Estadio 1*, si el estudiante es capaz de continuar la sucesión para términos cercanos identificando el patrón de crecimiento cuantitativo, pero no coordina las estructuras numérica y espacial. *Estadio 2*, si el estudiante es capaz de coordinar las estructuras espacial y numérica y de establecer una relación funcional que le permita hallar el número de elementos de cualquier término de la sucesión. *Estadio 3, si el estudiante puede invertir esa relación en casos concretos.* (p. 7)

A partir de estos estadios, Zapatera (2018) desarrolló de una trayectoria de aprendizaje que consta de 10 niveles:

Nivel 0: No continúan la sucesión.

Nivel 1: Continua la sucesión de figuras. No realizan generalizaciones cercanas.

Nivel 2: Realizan la generalización cercana. No invierten el proceso para términos cercanos.

Nivel 3: invierten el proceso para términos cercanos. No realiza generalización lejana al no coordinar estructuras espaciales y numérica.

Nivel 4: Realizan la generalización lejana. No expresar la regla general.

Nivel 5: Expresan la regla general.

Nivel 6: Invierten el proceso para término grandes. No expresan de forma verbal la regla del proceso inverso.

Nivel 7: Expresan de forma verbal la regla general del proceso inverso. No utiliza la indeterminación para expresar de manera algebraica.

Nivel 8: Expresan algebraicamente la regla general. No utilizan la indeterminación para expresar algebraicamente la regla general del proceso inverso.

Nivel 9: Expresan algebraicamente la regla general en el proceso inverso.

Procesos Involucrados en la Generalización de Patrones. Para Radford (2010) la generalización de patrones implica:

“notar una similitud en algunos términos particulares dados. La segunda es formar un concepto general —un género— generalizando la comunalidad notada a todos los términos de la sucesión…tercer componente: que el género u objeto generalizado se cristalice en un esquema, es decir, una regla que proporcione una expresión de cualquier término de la sucesión”. (p. 55)

Mason (1996, como se citó en Uicab et al., 2022) señala que la generalidad consiste en un proceso en espiral continua de acciones:

- Manipular: se aprecia lo que sucede y se detectan patrones, relaciones o generalidades.
- Obtener sentido de: “alguna característica o propiedad de los objetos que se están manipulando” (p. 49).
- Articular: la estructura para generalizar.

Cuando se refiere a expresar la generalidad se atribuye al desarrollo y adquisición del lenguaje algebraico, sin embargo, no solo se contemplan las expresiones algebraicas al usar el lenguaje formal sino aquellas que tienen un significado para el estudiante.

Ellis (2011) propone una distinción entre generalizar la cual involucra tres acciones: a) Identificar puntos en común entre los casos, b) extender el razonamiento de uno más allá del rango que se originó, c) derivar resultados más amplios de casos particulares (p. 311), y la generalización, que refiere al producto de dicho proceso.

López-Acosta (2016) reconoce que ciertas estrategias variacionales están inmersas en la generalización de patrones y propone cuatro para identificar la regularidad en el comportamiento de las sucesiones:

- Comparar un estado a otro: las formas de ver y estructurar los objetos para ver qué cambia y qué se mantiene entre términos.
- Seriación de las comparaciones: se realiza comparaciones entre varios términos para determinar la regularidad.
- Conjeturar sobre el patrón: generalizar el comportamiento para lo cual se identifica lo que permanece estable en el cambio.
- Predecir comportamiento, es decir, se usa la conjetura para describir los casos cercanos como lejanos.

Consideraciones Didácticas: Elementos para el Proceso de Generalización de Patrones

En este apartado rescatamos los estudios que nos muestran elementos didácticos que podemos considerar para el proceso de generalización en patrones, tanto en el diseño como en la implementación de este.

Elaboración del Diseño. Para elaborar el diseño de las tareas que promueva la generalización se requiere de acciones sistemáticas e intencionadas por parte del profesor

(Ellis et al., 2021). Para lo cual rescatamos de la revisión de las investigaciones centradas en generalización de patrones aquellos elementos importantes para la estructuración del diseño.

Por parte de la estructura de las tareas es importante: las estructura espacial y numérica, la relación funcional y el proceso inverso (Zapatera, 2018). Se reporta que es relevante incluir tanto situaciones lineales crecientes como decrecientes, así como generalizaciones correctas e incorrectas (Lannin et al., 2006). Es importante que las actividades de predecir términos consideren términos cercanos y términos lejanos (Hunter y Miller, 2022, Ellis, 2011; Zapatera, 2018), expresar la regla que permite la predicción y por último trabajar con problemas inversos de la relación (Zapatera, 2018), es decir, dar el número de elementos de un término y determinar la posición de ese término. También, se señala que deben diseñarse tareas que promuevan la conjetura, la justificación o aclaración ideas, así como el compartir a los otros las conjeturas (Ellis, 2011).

Respecto a la estructura que emerge del patrón hay que contemplar si ambas variables, tanto la dependiente como la independiente, son explicitas, si se encuentran dentro del patrón o si son fácil de identificar. La organización espacial de cada elemento de la sucesión es importante ya que también puede afectar en cómo los estudiantes acceden a la estructura (Hunter y Miller, 2022), pues la visualización juega un factor importante (Ellis, 2011; Mason, 2018; Hunter y Miller, 2022). La identificación de estructura requiere de un "proceso de semiosis perceptual a través del lenguaje, los gestos, el signo pictórico de los términos y la actividad visual" (Radford, 2018, p.13).

Otro elemento que se reporta importante es el uso de objetos manipulables, herramientas o artefactos para que los estudiantes reconozcan, detecten y representen las relaciones estructurales. También, considerar las representaciones numéricas, pictóricas, tabulares y gráficas. Todo lo anterior, son herramientas que apoyan el proceso de generalización (Ellis et al., 2021; Hunter y Miller, 2022; Mason, 2018).

Desarrollo del Diseño. En el aula, estudiantes y profesor juegan un papel importante para promover la generalización, ya que en la interacción de las actividades del diseño surgen formas de razonamiento. En las acciones discursivas del profesor con los estudiantes, y viceversa, es donde se construye la generalización, para formalizar o bien encontrar otras estrategias para construir el patrón y reflexionar sobre sus ventajas y limitaciones (Lannin et al., 2006), interrogar, responder, afirmar o corregir la generalización (Ellis et al., 2021).

Por eso se recomienda el uso de debates en el aula, notar y responder al pensamiento de los estudiantes, así como plantear preguntas donde se promueva la predicción de términos de la sucesión y el uso de cuasi-variables (Hunter y Miller, 2022). En esta dirección, las normas juegan un papel importante ya que median el comportamiento y la forma de trabajo de los estudiantes y el profesor.

Síntesis para el Diseño de la Situación de Aprendizaje. Generalización de Patrones

La noción de Ellis (2011) sobre la generalización en el aula, donde reconoce su carácter situado y su relación con las interacciones entre los estudiantes, la tarea, las herramientas y el profesor, nos permite una articulación con la argumentación matemática colectiva, al proponer (interacciones para) que los estudiantes interroguen, respondan, afirmen o corrijan, apoyen, entre otros, y así confronten sus generalizaciones. Así, la generalización de patrones en el aula no solo debe considerar el diseño en sí, sino aquello que desarrollará en el salón de clases ya que es un proceso dinámico, situado y que a partir de la interacción con los otros puede evolucionar. Para este proyecto nos interesa enfatizar en los momentos de argumentación en el aula, en tareas de generalización de patrones.

Argumentación Matemática Colectiva

A partir de nuestra revisión (Jiménez y Pineda, 2013; Rumsey y Langrall,2016; Whitenack y Knipping, 2002; Krummheur, 2007, Cervantes-Barraza et al., 2017; Van y Maher, 2018; Lin, 2018; Cervantes-Barraza, Cabañas-Sánchez et al., 2019, Cervantes-Barraza, Valbuena et al., 2019; Zhou et al., 2021; Rumsey et al.,2022; Blanton et al., 2022) rescatamos los elementos que fueron reportados para favorecer la argumentación matemática colectiva en el aula y los categorizamos de acuerdo con la naturaleza de dichos elementos. Dichas categorías amplían los principios propuestos por Stylianou y Blanton (2018) para promover la cultura de argumentación en el aula.

Consideraciones Didácticas: Elementos para la Actividad de Argumentación

Establecer Normas Sociales. Se trata de aquellas reglas, muchas veces implícitas, sobre la forma de interactuar en el aula, incluyendo el saber escuchar a los demás y valorar sus ideas, compartir las ideas y construir a partir de las ideas de los otros, ya sea al examinar o criticar sus argumentos para respaldarlos o refutarlos. Nos interesa promover la autoridad compartida, donde la validez de las afirmaciones no resida únicamente en el profesor sino de todos los miembros de la clase, de tal manera que los estudiantes puedan hacer y responder preguntas de sus compañeros. Las preguntas deben emplearse no solo cuando hay error, sino también cuando las ideas son correctas.

Las tareas se caracterizan por presentar falsas afirmaciones (Rumsey y Langrall, 2016), promover la refutación de argumentos, gestionar del error como oportunidades para construir el conocimiento y tareas abiertas donde no solo haya un único resultado y además se promuevan diversas estrategias (Solar y Deulofeu, 2016).

Gestión de la Organización del Aula. Se trata de la forma en cómo pueden interactuar los estudiantes con la tarea matemática, esto puede ser del trabajo individual al colectivo, de equipos al colectivo o bien individual-grupal y colectivo. La intención del trabajo individual es que los estudiantes piensen y construyan ideas sobre la tarea propuesta, mientras que en el trabajo en equipo se tendrán que compartir sus pensamientos y criticar para robustecer las ideas (propias y de otros) para compartirlas con el resto del grupo y construir y/o reconstruir argumentos colectivos.

Uso de Herramientas y Diversas Representaciones. Se orienta a considerar herramientas que permitan a los estudiantes interactuar con el saber, trabajando con diversas representaciones y, conforme a la argumentación evolucione, se llegue a la estructura matemática.

Rol del Estudiante y del Docente. Los estudiantes tendrán que observar y describir las relaciones que identifican para articularlas y lograr compartir con otros a partir de símbolos, ideas propias, esquemas o imágenes; y para ello deben sentirse seguros de compartir sus ideas. También deben estar atentos a las ideas de los demás, con el propósito de hacer posibles conexiones entre las ideas y notar la base de la construcción de los argumentos.

En este escenario, el papel del docente ha sido reportado como un elemento importante no solo en el diseño de las tareas sino en direccionar la argumentación del aula. Su papel le demanda observar y escuchar para decidir sobre la estrategia a implementar: dar tiempo para que los estudiantes piensen y compartan las ideas, hacer preguntas con una intención clara, aclarar, explicar, criticar o construir para orientar a los estudiantes a desarrollar o profundizar sus ideas, reconocer los elementos importantes de sus ideas y articular su razonamiento para comunicar su argumento.

Síntesis para el Diseño de la Situación de Aprendizaje. Argumentación Matemática Colectiva

Tanto para la generalización de patrones como para la argumentación matemática colectiva, tanto las interacciones (estudiante-estudiante y estudiante-profesor) como los adecuados roles del estudiante y del profesor. Definición de las normas sociales. que son importantes para fomentar la argumentación, y que, a su vez, se llegue a la generalización del patrón de las sucesiones figurales. Asimismo, se contemplarán diversos momentos de confrontaciones de los argumentos en torno a la generalización, habrá una etapa individual, de equipo y colectiva. Otro elemento en común son el apoyo tanto en herramientas como en diversas representaciones las cuales se considerarán en las tareas.

Nociones Esenciales para la Argumentación Matemática Colectiva y Generalización de Patrones

A partir de la revisión, tanto de la argumentación matemática colectiva como la generalización de patrones, reconocemos que antes de la implementación del diseño debemos contemplar nuevas:

- ⇒ Normas de aula: fomentar entre los estudiantes ciertas formas de comunicación, como es el saber escuchar, confrontar, cuestionar y construir a partir de las ideas de los demás.

- ⇒ Criterios de validez del saber: ceder la autoridad a los estudiantes para que no sea solo el maestro el que tenga la verdad y por lo tanto esperen la aprobación. Hay que permitir que los estudiantes validen sus afirmaciones.
- ⇒ Trabajar la visualización de los patrones: evitar pensar que por ser estudiantes de grados superiores de primaria y haber tenido contacto con los patrones quiere decir que ya saben o pueden analizar el cambio solo a partir de los números. Por lo tanto, es necesario hacer actividades de análisis del cambio de diversos patrones para promover diversas visualizaciones.

3.1.3.4. Examinar el material curricular que incluya el concepto matemático

Para este momento se realizó una revisión de los libros de texto donde se está trabajando con la generalización de patrones lo que nos permite saber cómo ha sido la interacción de la generalización y la argumentación en el currículo y el acercamiento que ha tenido los estudiantes. También se rescató los resultados de una evaluación diagnostica que hicieron los estudiantes de quinto grado al inicio del ciclo escolar.

Revisión de los Libros de Texto de Matemática en Primaria

Lo anterior nos da pautas para realizar una revisión del plan y programa de estudio, así como el libro de texto de quinto grado, poniendo énfasis particular en las tareas que involucran la generalización de patrones y la argumentación matemática. La intención es saber cómo vive dicho saber en la escuela y así poder elaborar un diseño que implique una reorganización significativa de dicho saber.

En la actualidad, el sistema educativo mexicano se encuentra en una transición entre modelos educativos. En los primeros dos años de la educación primaria se trabaja con el modelo 2017 y de tercero a sexto grado con el modelo 2011. Por lo tanto, decidimos hacer una revisión de los libros de texto del plan y programa 2011 ya que es el que se trabaja en más grados.

Estudios sobre el Pensamiento Algebraico en los Libros de Texto de Matemática en Primaria

Los libros de texto juegan un papel importante en las aulas, aunque no es el único recurso que se emplea, este orienta la actividad matemática de los estudiantes, refleja los objetivos y el enfoque del plan de estudio (Demosthenous y Stylianides, 2014, citado en Salazar et al., 2016). Los docentes les dan importancia a propósito de ser materiales que orientan su actividad profesional (Cabañas-Sánchez et al., 2017), incluso resultan recursos para los padres de familia porque son un indicador del trabajo de los maestros. Por ello, iniciamos el acercamiento a los libros de texto revisando estudios enfocados en caracterizar el tratamiento del pensamiento algebraico en los libros de texto de matemáticas en primaria en el contexto mexicano.

En el estudio de Salazar et al. (2016) se utilizó el marco analítico de Demosthenous y Stylianides (2014), enfocado en relaciones Aritméticamente Situadas, relaciones Basadas en Reglas y relaciones Conocidos – Desconocidos, para analizar los libros de segundo y tercer grado de primaria y encontró que son pocas las tareas en las que se promueve el pensamiento algebraico, además, identifica que estas se plantean mayormente en relaciones Aritméticas situadas y Basadas en Reglas.

También, Cabañas-Sánchez et al. (2017) articulan el marco analítico de Demosthenous y Stylianides (2014) y las cinco grandes ideas representadas en Blanton et al. (2015) para analizar el contenido matemático en libro de primer grado y caracterizar las tareas que potencian el pensamiento algebraico temprano. Estos investigadores reportaron que las tareas que predominan son las que favorecen la comprensión del signo igual, seguidas por las tareas sobre el estudio de patrones.

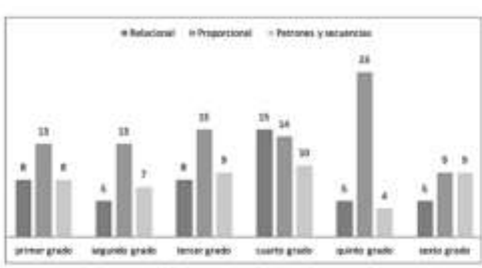
Por su parte, Ake y Díaz (2018) utilizaron un Modelo de Niveles de Algebrización para analizar el libro de primer grado y encontraron que las tareas no promueven el pensamiento algebraico y que se prioriza el registro numérico. Sin embargo, reconocen que con algunas modificaciones se podría intencionar dicho pensamiento.

López-Mojica y Martínez (2017), por otro lado, utilizan el planteamiento de Butto y Rojano (2010), que requiere de un equilibrio entre lo proporcional, lo relacional y la generalidad de patrones; a un análisis de los libros desde primero hasta sexto grado. Los autores encontraron que hay un énfasis en tareas de lo proporcional y se limita el estudio de patrones, además que las tareas “tienden más a requerir que los alumnos empleen el simbolismo matemático a como se realiza en el álgebra" (p.57).

Tanto López-Mojica y Martínez (2017) como Salazar et al. (2016) reportan que las tareas en el desarrollo de la generalización, a través del estudio de patrones, se encuentran limitadas en los libros de texto, en especial en quinto grado donde se tiene un porcentaje menor (Figura 9).

Figura 9

Tareas de generalización de patrón en libros de matemáticas en primaria



Gráfica 1. Frecuencia de las nociones de álgebra por grado académico.

Nota. Tomada de *Una caracterización del pensamiento algebraico en los libros de texto de educación primaria* (p.51) por López-Mojica y Martínez, 2017, CENEJUS-UASLP

Con dicha revisión identificamos que los libros de texto escasamente desarrollan el pensamiento algebraico en primaria, donde el estudio de patrones es un componente importante. Dados los antecedentes que plantea la literatura, nos interesa hacer una revisión de las tareas, en torno a la generalización de patrones, en el libro de texto de quinto grado por ser el periodo en que disminuye este tipo de tareas.

Revisión Descriptiva: Plan y Programa de Estudio 2011

El sistema educativo mexicano se caracteriza por ser centralizado y la Secretaría de Educación Pública (SEP) es el organismo responsable tanto de plantear los objetivos de la educación como del diseño de planes y programas de estudio, asimismo, de la elaboración de libros de texto gratuitos. El libro de texto se entrega a todas las escuelas del país, pero las privadas pueden decidir si quieren emplearlo.

En el Plan y programa 2011 se basa en un enfoque por competencias, es decir, plantea que no solo se adquieran conocimientos y habilidades, sino que también actitudes y valores para la construcción de competencias. Específicamente en matemáticas, se sugiere la metodología didáctica de "situaciones problemáticas que despierten el interés de los alumnos y los inviten a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver los problemas y a formular argumentos que validen los resultados" (SEP, 2011, p. 67). Respecto a los contenidos matemáticos están organizados en tres ejes temáticos: Sentido numérico y pensamiento algebraico, Forma, espacio y medida, y Manejo de la información.

La enseñanza de contenidos relativos al Pensamiento Algebraico se ubica dentro del eje denominado “Sentido numérico y pensamiento algebraico”; en específico en el tema “Números y sistemas de numeración”. Los contenidos que están relacionados al estudio de patrones son:

> Identificación de la regularidad en sucesiones con números (incluyendo números fraccionarios) que tengan progresión aritmética, para encontrar términos faltantes o continuar la sucesión.
>
> Identificación de la regularidad en sucesiones con números que tengan progresión geométrica, para establecer si un término (cercano) pertenece o no a la sucesión (SEP, 2011, pp. 79-80).

De los cuales se desprende el aprendizaje esperado: “resuelve problemas que implican identificar la regularidad de sucesiones con progresión aritmética o geométrica” (SEP, 2011, p.80), que es lo que se espera que logre el estudiante de quinto grado.

Con lo anterior, se infiere que la propuesta curricular del Pensamiento Algebraico se centre o al menos aborde el estudio de patrones, poniendo especial atención a la identificación de la regularidad. Sin embargo, podemos observar que no se establecen con claridad los temas para trabajar, puesto que la organización curricular aún se ve opacada por la Aritmética.

Libro de Desafíos Matemáticos para el Docente: Revisión de Tareas

Los libros de matemáticas son llamados “libro de desafíos matemáticos” y los hay tanto para el docente como para el alumno. El libro de texto que se analizó fue “Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Quinto grado”, tercera edición que va acorde con el Plan y programa de estudio del 2011. Se encuentra organizado por cuatro secciones: intenciones didácticas, contenido, consignas, consideraciones previas y observaciones posteriores.

Para identificar las tareas donde se trabaja el estudio de patrones seleccionamos aquellas tareas con intención didáctica: regularidad, patrón, regla; además, que el contenido matemático correspondiera con lo establecido en el programa. Encontramos que estas tareas se abordan en los bloques IV y V, tal como se muestra en la

Tabla **2**. En ambos bloques se trabajan dos desafíos, que en total abarcan 8 páginas del libro. Al cuarto bloque le corresponden los desafíos 61 "Patrones numéricos" y 62 "Uso de patrones", ambos con 4 tareas cada uno. Para el quinto bloque se tiene el desafío 82 "¿Cuál es el patrón?" con 12 tareas y el desafío 83 "Un patrón de comportamiento" con 8 tareas.

Tabla 2

Tareas sobre estudio de patrones en quinto grado

No. desafíos	Bloque 1	Bloque 2	Bloque 3	Bloque 4	Bloque 5
61				Patrones numéricos	
62				Uso de patrones	
82					¿Cuál es el patrón?
83					Un patrón de comportamiento

Nota. Elaborada de *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Quinto grado* (pp.117-166) de SEP, 2022. CONALITEG

La revisión que realizamos se centra en cuatro criterios que se auxilian de preguntas:

1. La situación de la tarea, con la pregunta: ¿cómo se presenta la tarea?

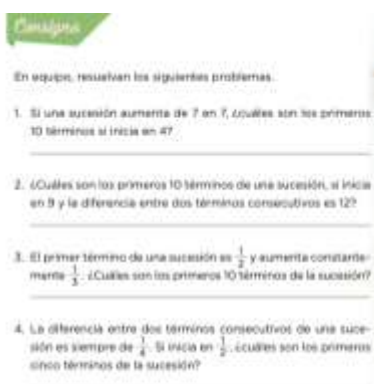
2. Las nociones de generalización de patrones, con la pregunta: ¿para qué se utiliza la generalización de patrones?
3. Los recursos semióticos en juego, con la pregunta: ¿qué herramientas emplea la tarea?,
4. Los términos empleados, con la pregunta ¿cuáles son las expresiones?

Buscando una mirada a todas las tareas, concluimos con la revisión respondiendo cómo las tareas del libro de texto favorecen la generalización en el estudio de patrones con los estudiantes de primaria de quinto grado.

En el desafío 61 "Patrones numéricos" (Figura 10) se resuelven cuatro tareas, con la intención de "que los alumnos construyan sucesiones con progresión aritmética a partir de distintas informaciones" (SEP, 2016, p. 192).

Figura 10

Tareas 1 a 4 del desafío 61


Consigna

En equipo, resuelvan los siguientes problemas.

1. Si una sucesión aumenta de 7 en 7, ¿cuáles son los primeros 10 términos si inicia en 4?
2. ¿Cuáles son los primeros 10 términos de una sucesión, si inicia en 9 y la diferencia entre dos términos consecutivos es 12?
3. El primer término de una sucesión es $\frac{1}{2}$ y aumenta constantemente $\frac{1}{3}$. ¿Cuáles son los primeros 10 términos de la sucesión?
4. La diferencia entre dos términos consecutivos de una sucesión es siempre de $\frac{1}{4}$. Si inicia en $\frac{1}{2}$, ¿cuáles son los primeros cinco términos de la sucesión?

Nota. Tomada de *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Quinto grado* (p.117), por SEP, 2022.CONALITEG

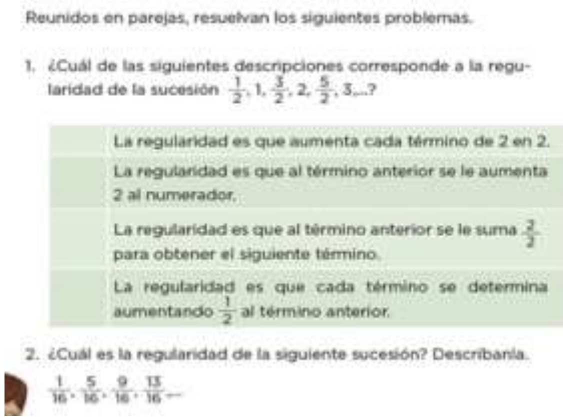
Identificamos como situación: construir una sucesión a partir de una regla dada y número de términos. Las nociones de generalización de patrones son nulas ya que la actividad matemática consiste en aplicar la regla dada para construir la sucesión. Los recursos semióticos fueron: lenguaje numérico, en las primeras dos tareas se utiliza números enteros y en últimos dos números fraccionarios. Los términos empleados fueron: sucesión para referirse a la sucesión, y al patrón, se usa la diferencia entre términos consecutivos. Podemos identificar que no hay un trabajo de generalización ya que se enfatiza en las expresiones para identificar el patrón y la dificultad gira en torno en el tipo de números que se van a operar.

Para el desafío 62 "Uso de patrones" (Figura 11) se resuelven cuatro problemas en parejas. De acuerdo con la intención didáctica del libro, se busca que los estudiantes "determinen la regularidad de una sucesión con progresión aritmética y la apliquen para encontrar términos faltantes o continuar la sucesión" (SEP, 2016, p. 194).

En la tarea 1 y 2, identificamos como situación: identificar la regularidad de sucesiones con números fraccionarios, con la diferencia de que en el primero la regularidad se descarta de varias opciones y el segundo se escribe con sus palabras. La noción de generalización de patrones que encontramos fue: expresar la regla, para ello los estudiantes deben observar los términos e identificar que cambia, después comparar entre términos para encontrar lo estable de esos cambios y poder explicar cómo cambia. Los recursos semióticos utilizados fueron: el lenguaje numérico y escrito, y solo en la tarea 1 se emplea una tabla con opciones de posibles reglas. Los términos empleados fueron: el patrón, refiriendo a la regularidad de la sucesión. En estas tareas identificamos que se enfatiza el apoyo lingüístico dando pautas para lograr describir el patrón que sigue las sucesiones.

Figura 11

Problemas 1 y 2 del desafío 62


Reunidos en parejas, resuelvan los siguientes problemas.

1. ¿Cuál de las siguientes descripciones corresponde a la regularidad de la sucesión $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3,...$?

	La regularidad es que aumenta cada término de 2 en 2.
	La regularidad es que al término anterior se le aumenta 2 al numerador.
	La regularidad es que al término anterior se le suma $\frac{2}{2}$ para obtener el siguiente término.
	La regularidad es que cada término se determina aumentando $\frac{1}{2}$ al término anterior.

2. ¿Cuál es la regularidad de la siguiente sucesión? Descríbanla.

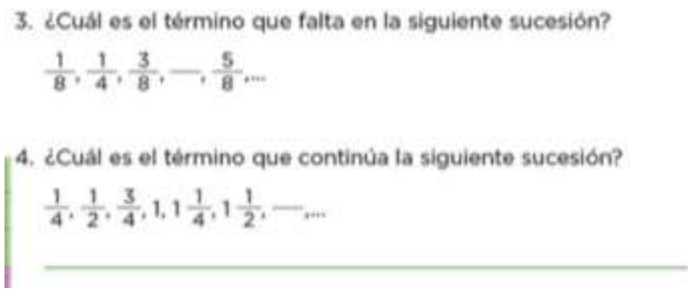
$\frac{1}{16}, \frac{5}{16}, \frac{9}{16}, \frac{13}{16}$...

Nota. Tomada de *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Quinto grado* (p.118), por SEP, 2022, CONALITEG

En la tarea 3 y 4 (Figura 12), identificamos como la situación: continuar la sucesión o completar el término faltante. La noción de generalización de patrones que encontramos fue: predecir término cercano, para lo cual los estudiantes deben observar los términos e identificar que cambia, después, comparar entre términos para encontrar lo estable de esos cambios y poder explicar cómo cambia para predecir términos cercanos. Los recursos semióticos utilizados fueron: el lenguaje numérico. Los términos empleados son: sucesión para referirse a la sucesión, y al término, a cada elemento de la sucesión. En estas tareas logramos identificar que se prioriza la generalización cercana ya sea para completar o bien continuar la sucesión y la dificultad radica en el uso de números fraccionarios.

Figura 12

Problema 3 y 4 del desafío 62



3. ¿Cuál es el término que falta en la siguiente sucesión?

$\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \_\_, \frac{5}{8}, \ldots$

4. ¿Cuál es el término que continúa la siguiente sucesión?

$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}, \_\_, \ldots$

Nota. Tomada de *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Quinto grado* (p.118), por SEP, 2022, CONALITEG

El desafío 82 consta de seis tareas, cuya intención es que los estudiantes “identifiquen y apliquen la regularidad en una sucesión con progresión geométrica de números naturales, para encontrar términos faltantes o cercanos” (SEP, 2016, p. 261), está planteada para trabajarla en equipo y con apoyo de la calculadora.

En la tarea 1 (Figura 13), identificamos como la situación: determinar la regularidad geométrica, para lo cual los estudiantes deben observar los términos para identificar que cambia, después comparar entre términos para encontrar lo estable de esos cambios y poder explicar cómo cambia. Así determinar el patrón y poder aplicarlo para completar o continuar la sucesión. En el segundo problema, los estudiantes deben explicar cómo encontraron los términos, es decir expresar el patrón. Las nociones de generalización de patrones que se emplean son: predecir términos cercanos y expresar la regla. Los recursos semióticos utilizados: el lenguaje numérico y escrito. Los términos empleados son: sucesión y términos faltantes. Identificamos que se prioriza la generalización cercana ya sea para completar la sucesión y poder explicar el patrón.

Figura 13

Problema 1 y 2 del desafío 82

1. Encuentren los términos faltantes de las siguientes sucesiones.

   a) 1, 4, 16, ______, 256, 1024, 4096, ______, ______,...

   b) 4, 28, 196, 1372, ______, ______, ______, 3294172,...

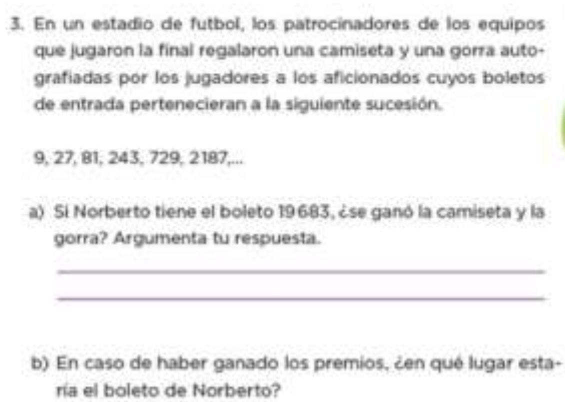
2. ¿Cómo encontraron los términos faltantes en cada sucesión?

Nota. Tomada de *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Quinto grado* (p.161), por SEP, 2022, CONALITEG

En la tarea 3 (Figura 14) identificamos la situación en contexto: a través de la numeración de boletos de futbol que ganaron un premio (camiseta y gorra autografiada) los cuales pertenecen a $f(n) = 9\ (3^{n-1})$, también se hace uso de la argumentación para conocer si un término pertenece a la sucesión y su posición ordinal. Las nociones de generalización de patrones: función inversa, para ello los estudiantes deben encontrar el patrón, continuar la sucesión hasta verificar si el dato proporcionado pertenece a la sucesión. Los recursos semióticos utilizados son: el lenguaje numérico y escrito. Los términos (matemáticos y en contexto) empleados: sucesión, boletos que pertenecen a una sucesión y lugar del boleto. En estas tareas a pesar de que se hacen explicitas las variables (el folio del ganador como la posición del ganador), por el tipo de relación funcional que se trabajó, podría haber dificultades pues es un contenido que no se ha trabajado con ellos.

Figura 14

Problema 3 del desafío 82



3. En un estadio de futbol, los patrocinadores de los equipos que jugaron la final regalaron una camiseta y una gorra autografiadas por los jugadores a los aficionados cuyos boletos de entrada pertenecieran a la siguiente sucesión.

9, 27, 81, 243, 729, 2187,...

a) Si Norberto tiene el boleto 19 683, ¿se ganó la camiseta y la gorra? Argumenta tu respuesta.

b) En caso de haber ganado los premios, ¿en qué lugar estaría el boleto de Norberto?

Nota. Tomada de *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Quinto grado* (pp. 161-162), por SEP, 2022, CONALITEG

Tarea 4 (Figura 14), identificamos como situación contexto: los folios de los boletos ganadores (continuación de la tarea anterior), ahora se muestra una serie de números para determinar cuáles son ganadores y expresar la regla que siguieron los boletos. Las nociones de generalización de patrones trabajadas son: predicción de términos cercanos y expresar la regla. Los recursos semióticos: el lenguaje numérico y escrito. Los términos (en contexto) empleados: folio de boletos y folios ganadores.

En la Tarea 5 (Figura 15), identificamos como situación en contexto: se emplean los folios de exámenes para determinar la regularidad geométrica $f(n) = 13(4^{n-1})$ y usarla para continuar con la sucesión. En el inciso a), se pide la posición del folio para lo cual los estudiantes tendrán que continuar con la sucesión o bien utilizar la operación inversa de la multiplicación, la división. En el inciso b) se da un no-ejemplo, para lo cual, si el estudiante continuo con la sucesión anterior solo requiere revisar si es parte, o no, o bien utilizar la operación inversa de la multiplicación. Por último, en el inciso c) se pide explicar la regla que siguen los folios. Las nociones de generalización de patrones trabajadas: las variables se hicieron visibles (independiente y dependiente), función inversa, predecir términos cercanos y la expresión del patrón. Los recursos semióticos utilizados: lenguaje numérico, escrito y tablas con la variable independiente y dependiente. Los términos (en contexto) empleados: número de asiento, folios, cómo determinar los folios. En esta tarea se promueve la estrategia recursiva (a términos consecutivos multiplicar por 4) para encontrar los términos de la sucesión, por lo que no se trabaja con el pensamiento funcional.

Figura 15

Tarea 4 del desafío 82

4. Algunos folios de boletos fueron exhibidos en la entrada del estadio por diferentes motivos:

25 789, 36 890, 59 049, 63 564, 177 147, 531 441

a) ¿Cuáles corresponden a los ganadores de la gorra y la camiseta?

____

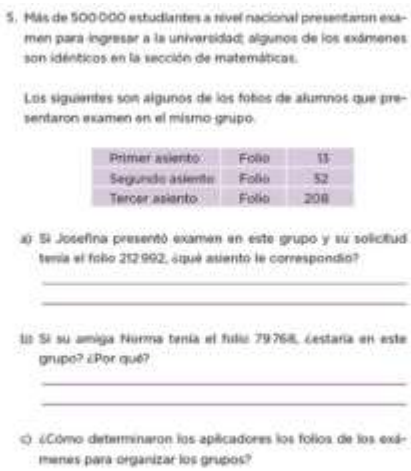
____

b) ¿Cómo determinaron los patrocinadores a quién le regalarían la camiseta y la gorra?

Nota. Tomada de *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Quinto grado* (p. 162), por SEP, 2022, CONALITEG

Figura 16

Problema 5 del desafío 82



5. Más de 500 000 estudiantes a nivel nacional presentaron examen para ingresar a la universidad; algunos de los exámenes son idénticos en la sección de matemáticas.

Los siguientes son algunos de los folios de alumnos que presentaron examen en el mismo grupo.

Primer asiento	Folio	13
Segundo asiento	Folio	52
Tercer asiento	Folio	208

a) Si Josefina presentó examen en este grupo y su solicitud tenía el folio 212 992, ¿qué asiento le correspondió?

b) Si su amiga Norma tenía el folio 79 768, ¿estaría en este grupo? ¿Por qué?

c) ¿Cómo determinaron los aplicadores los folios de los exámenes para organizar los grupos?

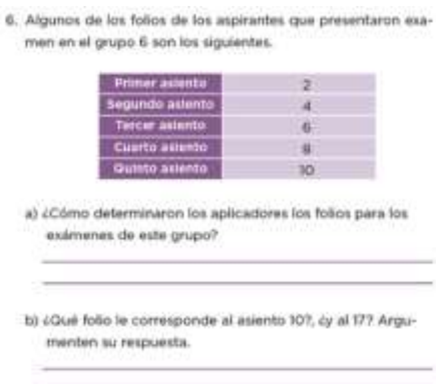
Nota. Tomada de *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Quinto grado* (p. 163), por SEP, 2022, CONALITEG

Hasta este momento en las tareas se ha priorizado la estrategia recursiva puesto que solo se ha trabajado con generalizaciones cercanas y las preguntas no se han enfatizado en la relación entre las variables (dependiente e independiente), y cuando se hace se trabaja con funciones tales como: $f(n) = 9 \cdot 3^{n-1}\ y\ f(n) = 13 \cdot 4^{n-1}$, las cuales presentan un nivel de dificultad mayor para su análisis con los estudiantes de primaria.

Tarea 6 (Figura 17), identificamos como situación en contexto: el mismo contexto de la tarea 5. El patrón es $f(n)=2n$. Para encontrar la relación es necesario considerar dos valores, el de los asientos y el de los folios. Por lo tanto, los estudiantes deben observar dos valores que están cambiando, compararlos, ver la relación entre ellos y encontrar lo estable para determinar cómo cambia. Posteriormente, explicar dicha relación con sus palabras y predecir términos cercanos. Las nociones de generalización de patrones trabajadas son: expresar la regla y función inversa. Los recursos semióticos: lenguaje numérico, escrito y tablas. Los términos (en contexto) empleados: folios, numero de asiento y cómo determinar asientos. Esta tarea hace un cambio con el tipo de función a trabajar, en este caso lineales. Se promueve el pensamiento funcional al relacionar ambas variables para encontrar la función.

Figura 17

Problema 6 del desafío 82



6. Algunos de los folios de los aspirantes que presentaron examen en el grupo 6 son los siguientes.

Primer asiento	2
Segundo asiento	4
Tercer asiento	6
Cuarto asiento	8
Quinto asiento	10

a) ¿Cómo determinaron los aplicadores los folios para los exámenes de este grupo?

b) ¿Qué folio le corresponde al asiento 10?, ¿y al 17? Argumenten su respuesta.

Nota. Tomada de *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Quinto grado* (pp. 164), por SEP, 2022, CONALITEG

En el desafío 83 se pide trabajar en equipos y tiene dos problemas con cuatro incisos cada uno. La intención “que los alumnos utilicen la regularidad de una sucesión con progresión geométrica para determinar si un elemento pertenece o no a tal sucesión” (SEP, 2016, p. 268).

En la tarea 1 (Figura 18) identificamos que la situación: utilizar la regularidad para determinar si un valor es parte de la sucesión y argumentar. Se determina la regularidad, en este caso multiplicativa, se observa la sucesión, se compara lo que cambia y se busca la relación de ese cambio para determinar cómo cambia. Posteriormente, se emplea la regularidad para extender la sucesión hasta que se acerque al valor que se quiere saber si es parte o no de la sucesión. La diferencia entre los incisos es que en los primeros dos es que la regularidad es multiplicativa y con números enteros y en los últimos dos la regularidad utiliza la división con números decimales. Las nociones de generalización de patrones trabajadas son: predecir términos cercanos. Los recursos semióticos utilizados: el lenguaje numérico y escrito. Los términos empleados: pertenencia a la sucesión.

Figura 18

Problema 1 del desafío 83

1. En cada caso, indiquen si el número que aparece en el inciso pertenece o no a la sucesión. Argumenten su respuesta.

a) 512
2, 4, 8, 16, 32, 64,...

b) 4 880
20, 60, 180, 540, 1620,...

c) 3.75
245 760, 61 440, 15 360, 3 840, 960, 240,...

d) 0.375
96, 48, 24, 12, 6, 3, 1.5,...

Nota. Tomada de *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Quinto grado* (pp. 165), por SEP, 2022, CONALITEG

En estas tareas de nuevo se prioriza la estrategia recursiva puesto que el tipo de relación $f(n) = 2^n, f(n) = 20(3^{n-1})$ presentan un nivel mayor de análisis para trabajar con estudiantes de primaria.

En la tarea 2 (Figura 19) identificamos la situación: la construcción de una sucesión con regularidad geométrica y compuesta por 10 términos máximo. La sucesión elaborada se intercambia con otro equipo para identificar la regularidad y, finalmente, explicarla al grupo. Para ello, los estudiantes deben considerar la regularidad que quieren que siga su sucesión, determinar a partir de que valor va a iniciar y la cantidad de términos que va a tener. Las nociones de generalización de patrones trabajadas son: la construcción libre de una sucesión con progresión geométrica, expresar el patrón y organizar la explicación. Recursos semióticos: lenguajes oral, numérico y escrito. Los términos empleados son: sucesión, progresión geométrica, elementos y regularidad.

Figura 19

Problema 2 del desafío 83

2. Diseñen una sucesión con progresión geométrica de 10 elementos como máximo. Consideren los siguientes pasos.

   a) Construyan la sucesión solicitada.

   b) Intercámbienla con otro equipo.

   c) Identifiquen la regularidad planteada en la sucesión que intercambiaron.

   d) Expliquenla a sus compañeros de grupo.

Nota. Tomada de *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Quinto grado* (pp. 166), por SEP, 2022, CONALITEG

Al terminar esta revisión de las acciones y la intención de las tareas en estos desafíos donde se trabajan los patrones, nos hicimos la pregunta ¿cómo las tareas del libro de texto favorecen la generalización en el estudio de patrones con los estudiantes de primaria de quinto grado? Encontramos que la situación de la mayoría de las tareas prioriza ir directamente con la sucesión, solo dos tareas se trabajan con contextos-los folios ganadores en un estadio o bien folios que forman parte de la aplicación de un examen-. En cuanto a las nociones trabajadas, identificamos que se podía expresar la regla y predecir términos cercanos, por lo que consideramos priorizar el uso del lenguaje, pero no se orienta completamente a la generalización —en la dirección que señala la literatura— ya que no se trabaja la predicción de términos lejanos (véase por ejemplo lo que propone Zapatera, 2018). Los recursos que más se emplean son el numérico y el escrito dejando de lado otros recursos como el uso de gráficas o tablas, que son importantes para el proceso de generalización (Ellis et al., 2021; Hunter y Miller, 2022; Mason, 2018). Respecto a los términos que se emplean es sucesión para referirse a la sucesión y para nombrar el patrón, se utiliza regularidad.

Acercamiento al discurso Matemático Escolar: Generalización de Patrones

Dentro de la Teoría Socioepistemológica recurre al constructo teórico discurso Matemático Escolar (dME) para explicar cómo vive la matemática dentro del aula, es decir, la matemática escolar (Soto y Cantoral, 2014). Reconocemos que la generalización de patrones no se trata de un concepto o noción matemática de la cual se pueda reportar un proceso de transposición didáctica e identificar el dME, como tradicionalmente se ha hecho en la Socioepistemología. A pesar de ello, cuando realizamos la revisión de lo que sucede en torno a las tareas de generalización de patrones reconocemos que se ha logrado una tradición para enseñar patrones que, al contrastar con la revisión de la literatura, identificamos que está generando un cierto dME.

Respecto a la estructura del patrón. Se enseña en su mayoría a partir de patrones descontextualizados o prototípicos como la cantidad de mosaicos o bien la cantidad de patas de animales, siendo que uno los factores que inciden en la forma de ver el patrón es la naturaleza de este. Se trabaja con patrones figurales solo hasta cuarto grado y a partir de quinto se emplean patrones numéricos. Por su parte en la literatura, se ha reportado que el uso de patrones contextuales “pueden aumentar la accesibilidad al proporcionar un aspecto visual familiar de los mundos conocidos de los estudiantes antes de pasar a una representación abstracta del patrón funcional” (Hunter y Miller, 2022, p. 1350).

Estructura de las tareas. La generalización de patrones se emplea para predecir términos cercanos, es decir, tareas que implican completar o continuar las sucesiones, y tareas que solicitan expresar el patrón que siguen las sucesiones. Sin embargo, la literatura ha reportado que en el proceso de la generalización se requiere de un proceso de análisis de los términos de la sucesión (López-Acosta, 2016). En las etapas de generalización que propone Radford (2008) la generalización cercana es solo el inicio, ya que solo limita a que los estudiantes reconozcan el patrón y se limita al recuento mientras que con la generalización lejana se promueve su aplicabilidad y una mayor abstracción. Encontramos que se prioriza el cálculo, es decir, sumar, restar, multiplicar o dividir el patrón y la dificultad radica en el tipo de números involucrados, ya sea fracciones, decimales o enteros.

Por lo anterior, los procedimientos que se favorecen son las estrategias de tipo recursivo más que la funcional. Es decir, se enfatiza en encontrar la diferencia entre dos términos consecutivos y aplicar esa diferencia para extender el patrón más que encontrar la relación de dos variables: la posición de la figura y el número de elementos de ella. En cuanto a las tareas argumentativas son escasas y están centradas en argumentar si ciertos valores son partes de una sucesión y una sola tarea en la generalización de términos cercanos. Por ello, los argumentos que se promueven son recursivos.

El uso de objetos manipulables, herramientas o artefactos. El uso de diversas representaciones es escaso. La representación que predomina es la numérica, ya que solo en una actividad se analizó la sucesión a partir de una tabla., y ello podría dificultar el proceso de generalización (Ellis, et al., 2021; Hunter y Miller, 2022; Mason, 2018).

Por lo anterior, identificamos que el tipo de tareas que promueve el libro de texto para el estudio de patrones numéricos se ve limitado a un tratamiento aritmético. Además, se está olvidado que las tareas de generalización de los patrones pueden desarrollar el pensamiento funcional y se promueven mayormente argumentos recursivos que funcionales.

3.1.4. Puntos de Partida de los Estudiantes

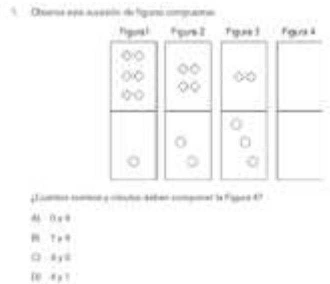
Dentro de la preparación del diseño es esencial reconocer los conocimientos previos de los estudiantes y las nociones esenciales para antes de la implementación, con la intención de considerarlos en la construcción del diseño y en la implementación.

En el apartado siguiente se especifican las características de la población con la que se trabajó. Los participantes fueron 26 estudiantes de quinto grado de primaria, quienes no han realizado trabajo con la generalización de patrones en ese grado. Sin embargo, realizaron al inicio del ciclo escolar una prueba por parte de la Comisión Nacional para la Mejora Continua de la Educación (MEJOREDU) la cual incorporaba tres tareas relacionadas con el estudio de patrones.

La primera tarea presenta unos dóminos con figuras donde están inmersos dos patrones y la pregunta pide continuar con la sucesión (Figura 20), de modo que se estaba trabajando la predicción cercana. En este reactivo hubo 10 aciertos de los cuales 5 fueron niñas y 5 niños.

Figura 20

Tarea 1 patrón figural compuesto

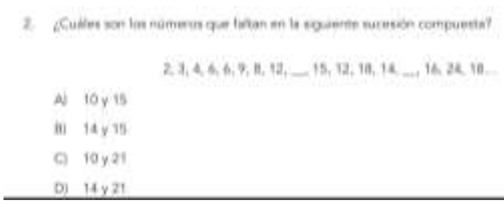


Nota. Tomada de *Evaluación Diagnóstica para los Alumnos de Educación Básica. Quinto de primaria* (p.26) por SEP, 2022, MEJOREDU

En la segunda tarea se presenta un patrón numérico compuesto, que consiste en una sucesión con dos patrones (Figura 21). La actividad es completar la sucesión con los números que hacen falta, lo que significa que aquí, también se trabajó con predicción de términos cercanos. En este reactivo contestaron correctamente 5 estudiantes, 4 niñas y 1 niño.

Figura 21

Tarea 2 patrón numérico compuesto



2. ¿Cuáles son los números que faltan en la siguiente sucesión compuesta?

2, 3, 4, 6, 6, 9, 8, 12, ___, 15, 12, 18, 14, ___, 16, 24, 18...

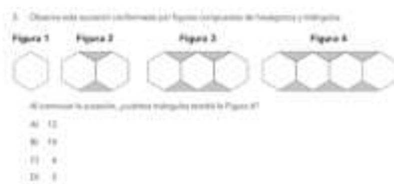
A) 10 y 15
B) 14 y 15
C) 10 y 21
D) 14 y 21

Nota. Tomada de *Evaluación Diagnóstica para los Alumnos de Educación Básica. Quinto de primaria* (p.26) por SEP, 2022, MEJOREDU

En la tercera tarea se trabaja con un patrón figural compuesto por dos figuras (hexágonos y triángulos), sin embargo, la actividad pide solo predecir cuantos triángulos tiene el término seis (Figura 22). Al igual que las otras tareas se está trabajando con la predicción de términos cercanos. En este reactivo se obtuvieron 14 aciertos, de los cuales 8 fueron de niñas y 6 de niños.

Figura 22

Tarea 3 patrón figural compuesto



Nota. Tomada de *Evaluación Diagnóstica para los Alumnos de Educación Básica. Quinto de primaria* (p.27) por SEP, 2022, MEJOREDU

Por lo anterior identificamos que entre los estudiantes se presentan dificultades con la generalización cercana ya que los aciertos en las tareas 1 y 2 el porcentaje es menos de la mitad de la población; y en la tarea 3 hay un incremento, quizá porque solo pide identificar un patrón figural. También, podemos reconocer que las estudiantes (niñas) se destacaron en este tipo de tareas por lo tanto creemos que, al incluirlas, pudiera haber una mayor participación de las niñas.

3.1.5. La construcción de las tareas y el proceso de aprendizaje hipotético de la THAp

Considerando el enfoque teórico que guía la construcción de la THAp de la generalización de patrones y la argumentación matemática colectiva, así como el objetivo de aprendizaje, la revisión de la literatura y del currículo procedemos a pensar en el diseño de las tareas considerando el papel del docente y estudiantes, los recursos, materiales y tiempo disponible.

El diseño fue un proceso complejo que consideró aportaciones de la revisión de literatura, la revisión del diseño por otros académicos, un pilotaje con estudiantes del mismo nivel y contexto educativo, y, con base en las dos últimas, el rediseño de la trayectoria de aprendizaje (Figura 23).

Figura 23

Proceso del diseño de la trayectoria hipotética de aprendizaje preliminar

Final después de ese proceso, el THAp sobre la generalización de patrones y la argumentación colectiva se estructura como lo muestra la Tabla 3.

Tabla 3

Trayectoria Hipotética de Aprendizaje preliminar de generalización de patrones y argumentación matemática colectiva

Momentos	Tareas	Interacción	Proceso de aprendizaje hipotético		
			Analizar	Conjeturar	Predecir
1	1.1	Individual	Los estudiantes analizan las sucesiones a partir de estrategias de	Los estudiantes logran conjeturar sobre el patrón de la sucesión	

			comparación y seriación.		
	1.2				Los estudiantes usan su conjetura a través de la predicción de términos cercanos.
	1.3	Equipo			Los estudiantes comparten las conjeturas y acuerdan en aquellas que son correctas.
	1.4	Colectivo	¿Por qué fue que lo dibujaron de esa manera? ¿Es igual o diferente que al de otros compañeros? ¿Cuál es la correcta? ¿Por qué? ¿Pueden explicar porque lo construyeron así? ¿Cuáles presentan errores?		
2	2.1	Individual	Los estudiantes analizan la sucesión figural a través de preguntas qué, cómo, y cuánto cambia, así como la utilización de una tabla.	Los estudiantes logran conjeturar sobre sobre el patrón. A su vez articulen lo que ven para describir de manera escrita el comportamiento y la relación entre variables.	
	2.2	Equipo			Los estudiantes comprueban su conjetura a través de la predicción de términos cercanos.
	2.3				Los estudiantes toman postura para defender su conjetura.
	2.4	Colectivo	Intervención del docente ¿Qué equipo quiere mostrar a sus compañeros su posición? ¿En qué se fijaron para saberlo?		

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="3">¿Habrá otra manera de demostrar? ¿Quién está en desacuerdo con la idea? ¿Por qué? ¿Pueden mostrarlo?</td></tr>
<tr><td rowspan="5">3</td><td>3.1</td><td rowspan="2">Individual</td><td>Los estudiantes analizan dos sucesiones figurales a través de preguntas qué, cómo, y cuánto cambia, así como la utilización de una tabla.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3.2</td><td></td><td>Los estudiantes construyen una conjetura que describa el comportamiento de las sucesiones.</td><td></td></tr>
<tr><td>3.3</td><td rowspan="2">Equipo</td><td></td><td>Los estudiantes comprueban las conjeturas a través de la argumentación de estas y construyen una en equipo.</td><td></td></tr>
<tr><td>3.4</td><td></td><td></td><td>Los estudiantes toman postura ante la afirmación y además comprueban la conjetura establecida en equipo al usarla en la predicción de un término lejano.</td></tr>
<tr><td>3.5</td><td>Colectivo</td><td colspan="3">Intervención docente ¿Qué equipo quiere mostrar a sus compañeros su posición? ¿Quién este de acuerdo? ¿Por qué lo dicen?</td></tr>
</table>

A continuación, se detalla en que consistió cada tarea y como fue presentada a los estudiantes.

3.1.5.1. Diseño

El diseño se conforma de tres momentos (Anexo 1) con interacciones individuales, en equipo y en colectivo. El primer y segundo momento cuentan con cuatro tareas y el tercer momento con cinco tareas. El contexto que se trabajó fue el arte Wixarika, en particular el ojo de Dios porque consideramos un medio propicio para el estudio de patrones y para un acercamiento y valoración de la cultura de los Wixarika, un grupo étnico que habita dentro del estado de Jalisco.

Objetivo del diseño: Construcción argumentos en tareas de generalización de patrones lineales figurales y numéricos en la argumentación matemática colectiva.

Contexto de la situación: El arte Wixarika

Se promoverá ciertas normas sociales que favorecen la argumentación matemática colectiva, tales como: el saber escuchar, compartir ideas, construir ideas a través de los demás, tomar postura respecto a las ideas propuestas y compartir la autoridad sobre la validez de las afirmaciones de los estudiantes. Por ello, antes de comenzar con el desarrollo del diseño, el grupo conocerá los comportamientos que se requieren y se tendrán a la vista de todos. El diseño consta de tres momentos con entre cuatro y cinco tareas.

Momento 1

De acuerdo con la revisión de la literatura que realizamos sobre la generalización de patrones encontramos que las nociones previas que influyen en dicho estudio son la visualización y el análisis de las sucesiones. Por ello, este momento esta permeado de un análisis de la sucesión donde se hace uso de la comparación de sucesiones figurales. El objetivo de este momento es: promover el análisis de la sucesión figural a partir de la comparación de sucesiones figurales con una variación para construir argumentos sobre el patrón.

Dicho momento está compuesto por cuatro tareas que tiene una doble intención, por un lado, promover la construcción de argumentos algebraicos y por otro el estudio de patrones. La Tabla 4 muestra las intenciones y la gestión de interacción de cada tarea.

Tabla 4

Organización del momento1 de la Situación de Aprendizaje

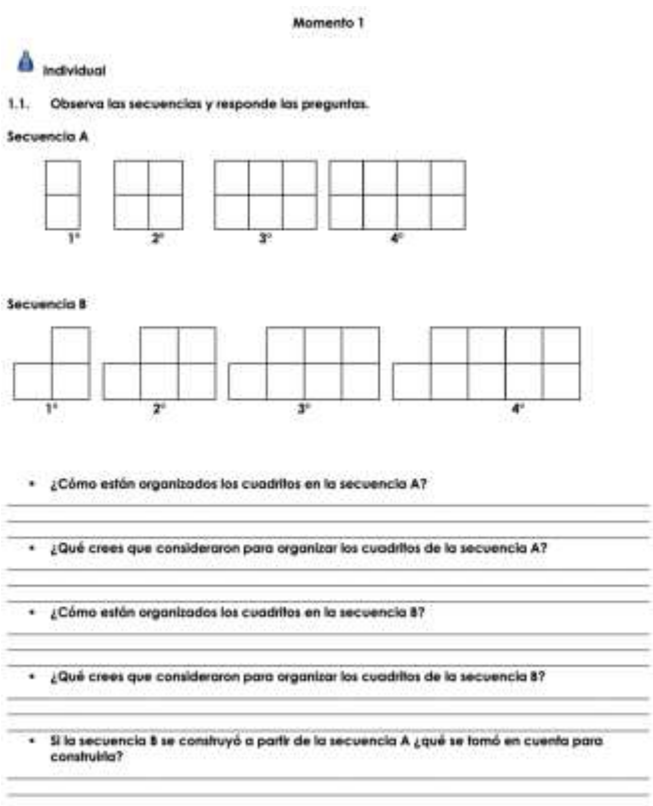
No. de tarea	Gestión de interacción	Estudio de patrones	Argumentación matemática colectiva
1.1	Individual	Se analizan las secuencias figurales desde la visualización para identificar la estructura del patrón.	Se da explicaciones de la sucesión figural, después se explica la estructura del patrón.
1.2	Individual	Se hace uso de la conjetura sobre la estructura del patrón que identificaron previamente a partir de la generalización cercana.	
1.3	Equipo	Se comparten diferentes conjeturas y logran identificar distintas formas de visualizar el patrón.	Se promueve que la explicación se configure para ser expuesta a los otros. Lo que implica que el estudiante busque la mejor manera de expresarse y posiblemente surja la justificación de las diferentes representaciones.
1.4	Grupal	Se argumentan las diferentes conjeturas sobre la estructura del patrón que identificaron y se promueve la validez colectiva.	Se caracteriza por ser una tarea abierta para que los estudiantes argumenten a sus compañeros de la veracidad de sus conjeturas y el grupo le otorgue la validez.

A continuación, se amplía la descripción de cada tarea con respecto a sus preguntas, recursos, materiales empleados y consideraciones didácticas.

Tarea 1.1. En la tarea 1.1 (Figura 24) se presentan dos sucesiones figurales con diferentes patrones para lo cual se pretende utilizar la estrategia de comparación para encontrar las diferencias y semejanzas en la forma de la estructura del patrón de cada sucesión figural.

Figura 24

Tarea 1.1 del momento 1-individual


Momento 1

Individual

1.1. Observa las secuencias y responde las preguntas.

Secuencia A

1° 2° 3° 4°

Secuencia B

1° 2° 3° 4°

- ¿Cómo están organizados los cuadritos en la secuencia A?
- ¿Qué crees que consideraron para organizar los cuadritos de la secuencia A?
- ¿Cómo están organizados los cuadritos en la secuencia B?
- ¿Qué crees que consideraron para organizar los cuadritos de la secuencia B?
- Si la secuencia B se construyó a partir de la secuencia A ¿qué se tomó en cuenta para construirla?

Las preguntas están organizadas para visualizar la estructura de las sucesiones figurales A y B (¿cómo están organizados los cuadritos en la sucesión A?), identificar elementos que se consideraron (¿qué crees que consideraron para organizar los cuadritos de la sucesión A?) posteriormente comparar ambas organizaciones para conjeturar sobre la estructura del patrón.

Tarea 1.2. En la tarea 1.2 (Figura 25) se pondrá en uso la conjetura del patrón que identificaron al hacer predicción cercana, para ello se proporcionará material recortable, hojas de colores con cuadritos para que los estudiantes puedan manipular y organizar la estructura del término 8 de la sucesión figural.

Figura 25

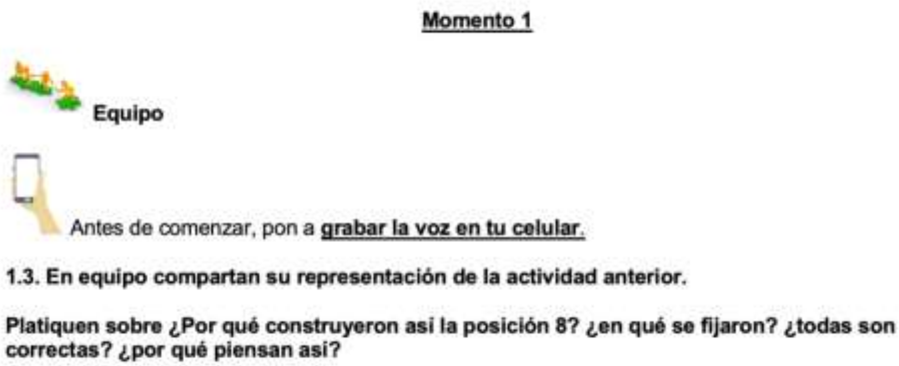
Tarea 1.2 del momento 1-individual

1.2. Con el material representa como sería la posición 8 de la secuencia A y B.	
Secuencia A	Secuencia B

Tarea 1.3. En la tarea 1.3 (Figura 26) los estudiantes se forman en equipo y comparten su conjetura sobre la estructura del patrón al explicar y justificar qué fue lo que hicieron (¿por qué construyeron así la posición 8?, ¿en qué se fijaron?) y a su vez construyan una postura respecto a las conjeturas (¿todas son correctas?, ¿por qué piensan así?).

Figura 26

Tarea 1.3 del momento 1-equipo



Momento 1

Equipo

Antes de comenzar, pon a **grabar la voz en tu celular.**

1.3. En equipo compartan su representación de la actividad anterior.

Platiquen sobre ¿Por qué construyeron así la posición 8? ¿en qué se fijaron? ¿todas son correctas? ¿por qué piensan así?

Tarea 1.4. La tarea 1.4 se realizará de manera colectiva a partir de preguntas tales como: ¿por qué construyeron la posición 8 de las sucesiones A y B de esa manera?, ¿en qué se deben fijar para construirlas?, ¿es igual o diferente que al de otros compañeros?, ¿cuál es la correcta?, ¿por qué?, ¿cuáles presentan errores? Con ello se espera la confrontación de argumentos sobre la estructura del patrón que sigue cada sucesión figural con la finalidad de co-construir un argumento algebraico validado por el grupo.

Momento 2

En el momento 2 se trabajará con la relación funcional $f(x) = x$, y la predicción cercana. Con el objetivo de promover el análisis de la sucesión figural a partir de la generalización de predicción de términos cercanos para construir argumentos sobre el patrón de la sucesión. Dicho momento se compone de cuatro tareas con la doble intención de promover, por un lado, la construcción de argumentos algebraicos y, por otro, el estudio de patrones. En la Tabla 5 se muestra esta vinculación.

Tabla 5

Organización del momento 2 de la Situación de Aprendizaje

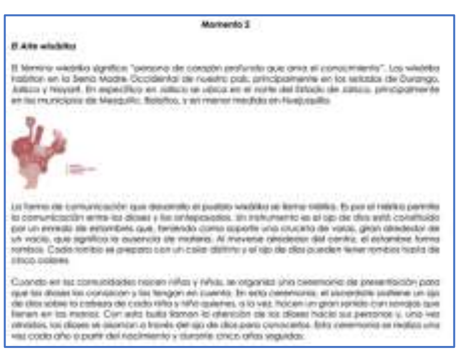
No. de tarea	Gestión de interacción	Estudio de patrones	Argumentación matemática colectiva
2.1	Individual	Se promueve el análisis de la secuencia figural y la construcción de una conjetura sobre el patrón.	Se promueve la explicación a sí mismo del patrón de la secuencia figural.
2.2	Equipo	Se comprueban o refutan las conjeturas sobre el patrón de la secuencia figural a través de la predicción de términos cercanos.	Se usa el patrón al ponerlo en una tarea de predicción cercana y una tarea de refutación.
2.3	Equipo		Se promueve la construcción de una postura respecto a una afirmación matemática.
2.4	Colectivo	Se construye un argumento sobre el patrón de la secuencia figural.	Se usa el patrón al ponerlo en una tarea de predicción cercana y una tarea de refutación.

A continuación, se describen tanto las preguntas, como los recursos, materiales y consideraciones didácticas para el momento dos.

Tarea 2.1. En la tarea 2.1 (Figura 27) sea usa el contexto del arte Wixarika en particular el nierika (ojo de Dios), un instrumento de comunicación con los Dioses y los ancestros.

Figura 27

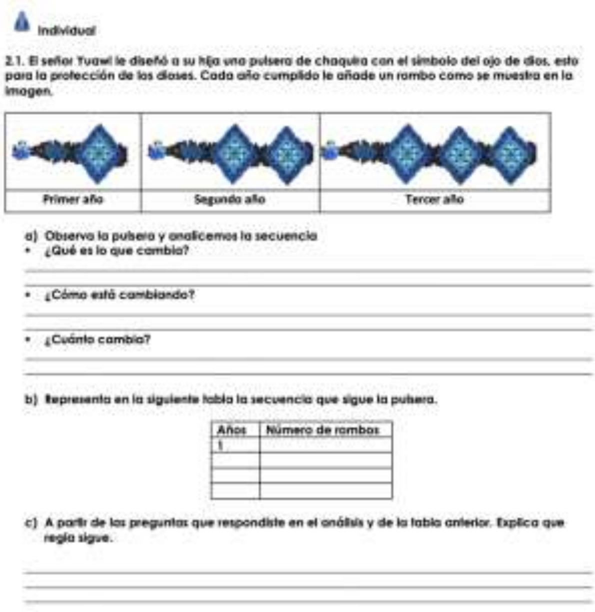
Contexto del momento 2



Después de compartir una pequeña información del Arte Wixárika, se desprende el problema, que fue adaptado para el trabajo en el aula (Figura 28).

Figura 28

Tarea 2.1 del momento 2-individual



Individual

2.1. El señor Yuawi le diseñó a su hija una pulsera de chaquira con el símbolo del ojo de dios, esto para la protección de los dioses. Cada año cumplido le añade un rombo como se muestra en la imagen.

Primer año	Segundo año	Tercer año

a) Observa la pulsera y analicemos la secuencia
- ¿Qué es lo que cambia?
- ¿Cómo está cambiando?
- ¿Cuánto cambia?

b) Representa en la siguiente tabla la secuencia que sigue la pulsera.

Años	Número de rombos
1	

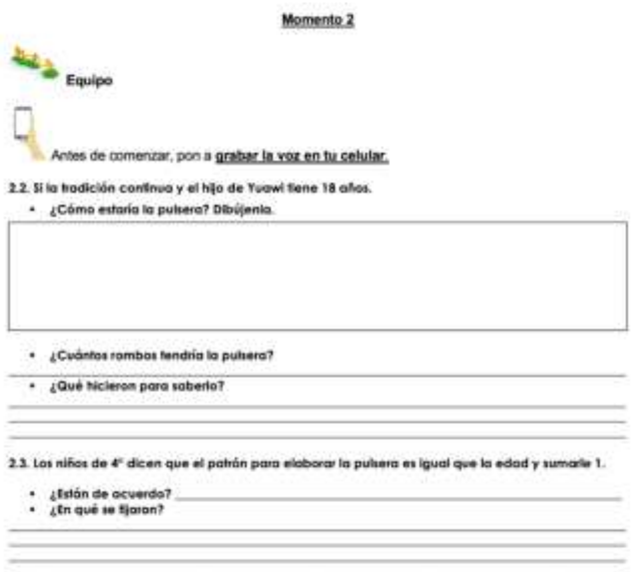
c) A partir de las preguntas que respondiste en el análisis y de la tabla anterior. Explica que regla sigue.

El inciso a) propicia el análisis de la sucesión figural a través de preguntas tales como ¿cuánto cambia?, para ver tanto la parte cualitativa cómo la cuantitativa del patrón. El inciso b) promueve que los estudiantes usen otra herramienta para observar el comportamiento de la sucesión a partir del registro numérico. En el inciso c) se busca que los estudiantes logren conjeturar sobre sobre el patrón, a su vez que articulen lo que ven para describir de manera escrita el comportamiento y la relación entre variables.

Tarea 2.2. En la tarea 2.2 (Figura 29) se continua con el contexto, pero ahora la interacción es en equipo, por lo tanto, la explicación o justificación se comparte con los compañeros, y ello implica ponerse de acuerdo para predecir un término cercano de la sucesión. Se espera que con esto se promuevan diversas explicaciones y/o justificaciones de cada miembro, mismas que se refutaran, reconstruirán y validarán por el equipo.

Figura 29

Tarea 2.2 y 2.3 del momento 2-equipo


Momento 2

Equipo

Antes de comenzar, pon a grabar la voz en tu celular.

2.2. Si la tradición continua y el hijo de Yuawi tiene 18 años.

- ¿Cómo estaría la pulsera? Dibújenla.

- ¿Cuántos rombos tendría la pulsera?
- ¿Qué hicieron para saberlo?

2.3. Los niños de 4° dicen que el patrón para elaborar la pulsera es igual que la edad y sumarle 1.

- ¿Están de acuerdo?
- ¿En qué se fijaron?

Tarea 2.3. En la tarea 2.3 se pretende que los estudiantes construyan argumentos para convencer y poder justificar la postura del equipo. Posteriormente, en la tarea 2.4 al interactuar en colectivo y con la ayuda de las siguientes preguntas: ¿qué equipo quiere mostrar a sus compañeros su posición?, ¿en qué se fijaron para saberlo?, ¿habrá otra manera de demostrar?, ¿quién está en desacuerdo con la idea?, ¿por qué?, ¿pueden mostrarlo?, con la intención de co-construir un argumento algebraico colectivo sobre el patrón de la sucesión figural.

Momento 3

Se continua con el contexto de las artesanías Wixárika y se trabajará con relación funcional $f(x) = 4x$ y $f(x) = 4x + 1$. Este momento se caracteriza por trabajar la generalización a través de la predicción de términos lejanos y a partir de la argumentación matemática colectiva para co-construir el argumento sobre el patrón de la sucesión figural. Por lo tanto, el objetivo es fomentar el análisis estructural de la sucesión figural a partir de la comparación de sucesiones figurales con una variación para construir diversos argumentos algebraicos de la estructura del patrón.

El momento consta de cinco tareas que pretende promover, por un lado, la construcción de argumentos algebraicos y, por otro, el estudio de patrones. La Tabla 6 muestra las intenciones y la gestión de interacción de cada tarea.

Tabla 6

Organización del momento 3 de la Situación de Aprendizaje

No. de tarea	Gestión de interacción	Estudio de patrones	Argumentación matemática colectiva
3.1	Individual	Se analizan la secuencia figural tanto cualitativamente como cuantitativamente mediante la comparación de secuencias figurales para identificar la estructura del patrón.	Se da explicaciones de la sucesión figural, después se explica la estructura del patrón.
3.2	Individual	Se conjetura sobre la estructura del patrón que siguen las secuencias figurales.	
3.3	Equipo	Se comparten diferentes conjeturas y se co-construye una conjetura.	Se promueve que la conjetura se configure para ser expuesta a los otros. Lo que implica que el estudiante busque la mejor manera de expresarse y surja el argumento de las diferentes representaciones.
3.4	Equipo	Se usa la conjetura sobre la estructura del patrón que identificaron antes a partir de la generalización lejana.	

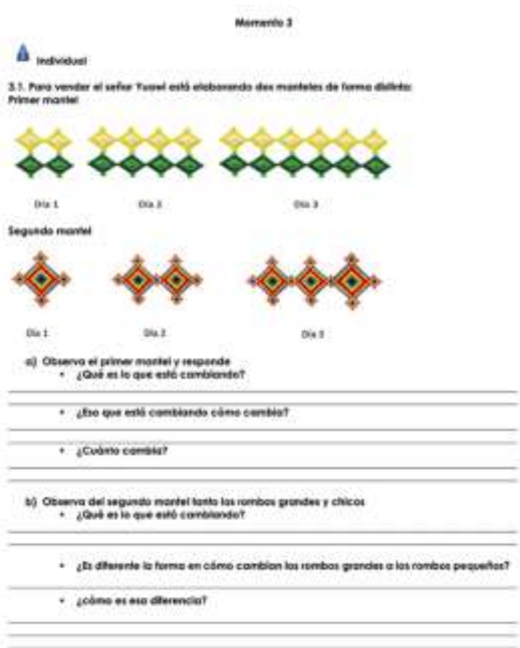
3.5	Colectivo	Se caracteriza por ser una tarea abierta para que los estudiantes argumenten sus conjeturas a los compañeros y el grupo le otorgue validez.

A continuación, se amplía la descripción de cada tarea con respecto a sus preguntas, recursos, materiales empleados y consideraciones didácticas.

Tarea 3.1. En la tarea 3.1 (Figura 30) se presentan dos sucesiones figurales con distinta estructura espacial y distinto patrón, para cual se realizará dos momentos de análisis. En el primer momento se harán las preguntas: ¿qué es lo que está cambiando?, eso que está cambiando ¿cómo cambia?, ¿cuánto cambia?, para cada sucesión figural. El objetivo es identificar tanto la parte cualitativa cómo la cuantitativa del patrón.

Figura 30

Tarea 3.1 del momento 3-individual



En el segundo momento (Figura 31) el análisis se realiza a partir de la comparación entre las dos sucesiones figurales desde su composición numérica, la cual se apoya de una tabla. Para el análisis se emplea la estrategia de seriación entre las sucesiones, con el objetivo de identificar semejanzas y diferencias entre ambas.

Figura 31

Tarea 3.1 parte 2 del momento 3-individual

c) Representa en la siguiente tabla las dos formas de elaborar los manteles.

Día	Primera propuesta	Segunda propuesta
	Número de rombos	Número de rombos
1		

- ¿Qué relación hay entre el día 1 del primer y segundo mantel?
- ¿Qué relación hay entre el día 2 del primer y segundo mantel?
- ¿Está creciendo de manera diferente?
- ¿Cómo es esta diferencia?
- ¿En qué te fijaste?

Tarea 3.2. La tarea 3.2 (Figura 32) busca que los estudiantes construyan una conjetura que describa el comportamiento de las sucesiones a partir del análisis que realizaron.

Figura 32

Tarea 3.2 del momento 3-individual

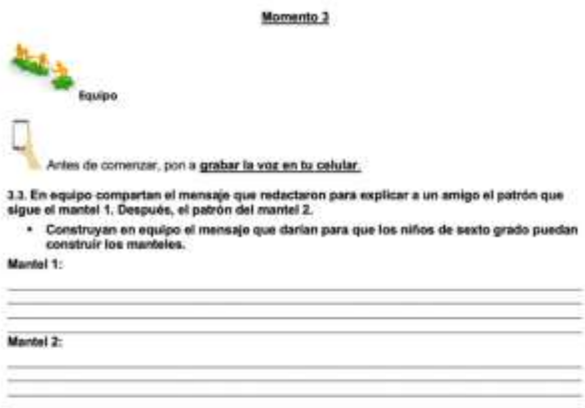
3.2. Imagina que el señor Yuawi te contrata a ti y tu amigo como sus ayudantes.

- ¿Cómo le explicarías a tu amigo que funciona el patrón de la primera propuesta de mantel?
- ¿Cómo le explicarías a tu amigo que funciona el patrón de la segunda propuesta de mantel?

Tarea 3.3. Para la tarea 3.3 (Figura 33) los estudiantes se organizan en equipo. En este proceso de interacción requiere que los estudiantes escuchen las explicaciones y/o justificaciones, de cada participante, sobre la expresión del patrón. A partir de estas se co-construirá una nueva expresión del patrón para cada sucesión.

Figura 33

Tarea 3.3 del momento 3-equipo


Momento 3

Equipo

Antes de comenzar, pon a grabar la voz en tu celular.

3.3. En equipo compartan el mensaje que redactaron para explicar a un amigo el patrón que sigue el mantel 1. Después, el patrón del mantel 2.

- **Construyan en equipo el mensaje que darían para que los niños de sexto grado puedan construir los manteles.**

Mantel 1:

Mantel 2:

Tarea 3.4. En la tarea 3.4 (Figura 34) los estudiantes continuarán en equipo. La actividad involucra y pone en uso el patrón que identificaron para formar una postura respecto a una afirmación y se solicita que la argumenten.

Figura 34

Tarea 3.4 del momento 3-equipo

En equipo resuelvan la siguiente situación:

3.4. Si los niños de 6° dicen que el día 70 el mantel uno tendrá 280 rombos y el mantel dos tendrá 281

- **¿Están de acuerdo?** ____________________
- **¿Cómo lo supieron?**

Tarea 3.5. En la tarea 3.5 se utilizará material para trabajar en el pizarrón (los rombos en grande) con el propósito de que puedan mostrar y/o comprobar la expresión del patrón que construyeron en cada equipo. Se cambia de la interacción en equipo al colectivo para confrontar y argumentar la postura de cada uno con la finalidad de co-construir argumentos algebraico-colectivos respecto al patrón de las sucesiones. Un ejemplo de las preguntas que orientan la interacción es: ¿qué equipo quiere mostrar a sus compañeros su posición?, ¿en qué se fijaron para saberlo?, ¿habrá otra manera de demostrar?, ¿quién está en desacuerdo con la idea?, ¿por qué?, ¿pueden mostrarlo?, ¿pueden explicarnos su mensaje?, ¿cualquier persona entendería su mensaje?, ¿qué elementos debemos contemplar para describir el comportamiento?

3.2. Fase 2: Experimentación

El propósito fundamental de esta fase es mejorar la trayectoria desarrollada probando y revisando las conjeturas tanto de los procesos como los medios especificados (Cobb et al., 2017). Para eso se realiza una recopilación de datos que permita "documentar tanto el proceso de aprendizaje de los estudiantes en las sesiones de clase como la evolución del entorno de aprendizaje en el aula, que incluye los apoyos promulgados para el aprendizaje de los estudiantes" (p.213). Se puede usar herramientas como la grabación de audio y video, documentos escritos, notas de campo, etcétera. Otro momento es el ciclo iterativo de diseño y análisis, esto supone que:

> "Como parte de este proceso de prueba y revisión, el equipo de investigación debe tener reuniones informativas después de cada sesión de clase en las que los miembros del equipo compartan y debatan sus interpretaciones de los eventos del aula. Una vez

> que el equipo ha llegado a un consenso, puede prepararse para las próximas sesiones en el aula diseñando (o revisando los diseños existentes para) tareas de instrucción y considerando otros medios de apoyo (por ejemplo, la renegociación de las normas del aula).” (p.214)

Por tanto, es importante contar con un equipo de investigación que revise constantemente la trayectoria y la experiencia del aula para contrastarlos y tener una base para las siguientes sesiones. Para nuestra investigación las actividades que consideramos en esta fase (Tabla 7) fueron la selección de participantes y el contexto institucional, los registros de información, gestión de los datos y sobre el análisis continuo.

Tabla 7

Actividades realizadas en la fase 2

Fase 2-Experimentación
1. Participantes y contexto institucional. 2. Registros de información. 3. Sobre el análisis continuo

3.2.1. Participantes y contexto institucional

Como se mencionó en el apartado del puntos de partida, se decidió que la experimentación se llevaría cabo en la escuela donde labora la investigadora en formación que lleva a cabo la presente investigación y con el grupo que impartía clases, esto con la intención de asegurar que los estudiantes no hubieran trabajado con patrones en ese grado, estuvieran familiarizados con las normas sociales para promover la argumentación matemática colectiva (mencionadas en el apartado 3.1.4) y, a su vez, se contara con la apertura para realizar la investigación.

Se decidió trabajar con 15 estudiantes con la intención de que los equipos estuvieran integrados por tres, sin embargo, una niña sufrió un accidente y no pudo asistir. Al final se contó con la participación de 14 estudiantes (7 niñas y 7 niños) de quinto grado de primaria.

Antes de la experimentación se entregó una carta invitación a la directora del plantel y se platicó sobre los objetivos de la investigación (Anexo 2). Después, se informó a los estudiantes del proyecto para saber quiénes no querían participar, pero se mostraron accesibles y entusiasmados. Posteriormente, se realizó una reunión con los padres de familia para explicarle el objetivo de la investigación y aclarar que no tenía ningún tipo de repercusión en la evaluación. Las madres de familia firmaron la autorización de confidencialidad (Anexo 3) y llegaron al acuerdo, que la forma de identificación de los estudiantes fuera por etiquetas genéricas.

También hubo una observadora no participante, estudiante de la maestría en pedagogía, con experiencia como docente frente a grupo.

3.2.2. Registros de información

Las herramientas que se emplearon para la recopilación de datos se centraron en registrar las interacciones entre estudiantes y estudiantes-investigadora. Para ello, se tuvieron los registros tanto de las videograbaciones, grabaciones de audio y sus transcripciones junto con las hojas de trabajo, que constituyeron la materia prima para el análisis. También, se recolectaron otros materiales que nos sirvieron como información complementaria. Los cuales fueron, las notas del observador no participante y las notas del investigador-profesor.

Para capturar el aula se empleó la videograbación con dos computadoras fijas, una de frente y otra atrás del salón, y un dispositivo móvil que traía grabando la investigadora-profesora. Para el trabajo en equipo, se asignó un responsable de grabar el audio de toda la actividad. La observadora no participante registró tanto las interacciones, las dudas, las intervenciones que le parecieron relevantes para la investigación. La Tabla 8 muestra la relación entre el diseño, las interacciones y los registros que tenemos.

Tabla 8

Registros de información en la implementación del diseño

Momentos del diseño	Interacciones	Registro de información
Momento 1, 2 y 3	Individual	Hojas de trabajo Videograbación del aula Notas del investigador-profesor Notas de la observadora no participante
	Equipo	Hojas de trabajo Grabación de audio Videograbación del aula Notas del investigador-profesor Notas de la observadora no participante
	Colectivo	Hojas de trabajo Videograbación del aula Notas del investigador-profesor Notas de la observadora no participante

Todo ello, permite documentar las prácticas que emergieron durante la argumentación matemática colectiva, así como la interacción de los argumentos que surgieron tanto individual, como en equipo y en colectivo.

3.2.3. Sobre el Análisis Continuo

El análisis continuo se realizó tras cada sesión. Se reunía la observadora no participante como la investigadora-profesora para estudiar lo sucedido en el aula. En dicha reunión se compartían las observaciones generales de cada momento y notas específicas sobre las tareas y las interacciones. Esto nos apoyó para tomar decisiones respecto a la modificación de nuestro diseño de acuerdo con el contexto que fue desarrollado, al revisar nuestros objetivos de cada sesión y lo acontecido. Dado que forma parte de la producción de datos se describirá en el capítulo siguiente.

3.3. Fase de análisis retrospectivo

En esta última fase se tienen un conjunto de datos generados durante la implementación y se busca ubicar el "aprendizaje y los medios por los cuales fue sustentado en un contexto teórico más amplio al enmarcarlo como un caso paradigmático de un fenómeno más abarcador" (Cobb et al., 2017, p. 214). Esta fase alude al estudio de los datos recogidos y atender los objetivos de la investigación para construir explicaciones teóricas. Para ello realizamos las actividades mostradas en la Tabla 9.

Tabla 9

Actividades realizadas en la fase 3

Fase 3-Analisis retrospectivo
1. Gestión y preparación de los datos. 2. Sobre el método de análisis.

3.3.1. Gestión y Preparación de los datos

Los registros de información fueron almacenados en una carpeta por momento, del momento 1 (M1) al momento 4 (M4) y cada momento se colocó lo siguiente:

- Hojas de las tareas de los estudiantes que corresponden a la parte individual-grupal y colectiva.
- Audios de la interacción de los estudiantes que corresponde a las tareas en equipo.
- Videograbaciones del aula de las interacciones de los estudiantes que corresponde a las tareas en colectivo.

Primeramente, se escuchó cada audio de los equipos. Dado que los estudiantes dialogaban de temas que no correspondían a las tareas, se decidió transcribir únicamente las conversaciones donde dialogaran en torno a la tarea matemática. Este mismo criterio se consideró para las videograbaciones de las tareas en colectivo. Para dar cuenta de la realidad del aula, se conservaron las transcripciones textuales de los estudiantes y se complementaron con la información no verbal —gestos o acciones— relevantes, para las que se utilizaron corchetes []. El uso de paréntesis con puntos suspensivos en su interior (…) es para indicar que se omitieron intervenciones no matemáticas.

En la carpeta de cada momento se creó una Hoja de Cálculo en Excel (Tabla 10) para el vaciado de los datos, cada hoja contenía: las preguntas de investigación, el objetivo de investigación, el objetivo de cada momento y el número de la tarea (por ejemplo, con T1.1, nos referimos a Tarea (T), del momento 1 y tarea 1), la intención del estudio con patrones (IP) y la intención de la argumentación (IA), el nombre del estudiante, el código, las respuestas a las preguntas y notas de la investigadora. Así como la evidencia, fotos de los trabajos en cada tarea.

Tabla 10

Ejemplo de la organización de datos en Excel

Preguntas de investigación			
Objetivo de investigación			
Objetivo del momento X			
N° de la tarea			
Intención del estudio con patrones			
Intención de la argumentación			
Nombre del estudiante	**Código**	**Preguntas**	**Notas**
	Ea1	Respuestas	
	…	…	…

Esto nos permitió organizar los datos tanto en las tareas individuales, en equipo y en colectivo. En las tareas individuales se codificó a cada estudiante de la siguiente manera: para las niñas como Ea y un número y en caso de los niños Eo y un número. El número que le correspondía a cado uno fue según en el equipo donde estaban integrados

Dado que se consideró que para las tareas en equipo estuviera integrado por tres estudiantes (con diferentes desempeños, según habían mostrado en el transcurso del periodo escolar) y los equipos se codificó como E más un número quedando de la siguiente manera:

- E1: Ea1, Ea2 y Eo3
- E2: Ea4, Ea5, Ea6
- E3: Eo7, Ea8 y Eo9
- E4: Eo10, Ea11, Eo12
- E5: Eo13 y Ea14

Esta organización nos permitió reconocer quién dice, qué hace, qué dice, así como su razonamiento, es decir, las formas de hacer y decir ante una tarea.

3.3.2. Sobre el método de análisis

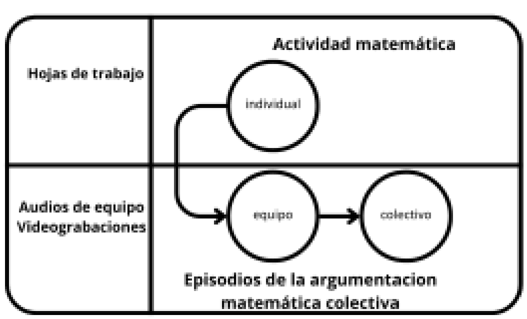
Como se mencionó anteriormente, este análisis implica el análisis de todo el diseño con la intención de atender los objetivos de la investigación. En nuestro caso dado nuestro interés en los argumentos en la generalización de patrones lineales como en la argumentación matemática colectiva y la coordinación teórica que realizamos un primer análisis de la actividad matemática y la argumentación matemática colectiva.

Primera etapa

En la primera etapa se caracteriza por ser descriptiva sobre la forma en cómo se implementó el diseño y un primer análisis de la actividad matemática entorno a la generalización del patrón y la identificación de los episodios de argumentación matemática colectiva (Figura 35).

Figura 35

Primera etapa del análisis de datos. Actividad matemática y Episodios de argumentación matemática colectiva



El primero se centra en el hacer y decir de los estudiantes entorno a la generalización del patrón de las secuencias trabajadas y se obtiene de los registros de las hojas de trabajo de cada tarea y los audios de cada equipo. Mientras que el segundo contempla los registros de audio de equipo y videograbaciones colectivos, en los cuales se consideró los momentos de argumentación matemática colectiva cuando dos o más estudiantes muestran sus argumentos ya sean validar, convencer o disentir una afirmación.

Además, el análisis se realiza por participante, equipo y colectivo. Con respecto al primero se obtendrán los argumentos de cada participante, mientras que en el equipo se rescata las negociaciones del argumento construido en equipo. Por último, en lo colectivo, se recupera los momentos de confrontaciones de los argumentos de equipo

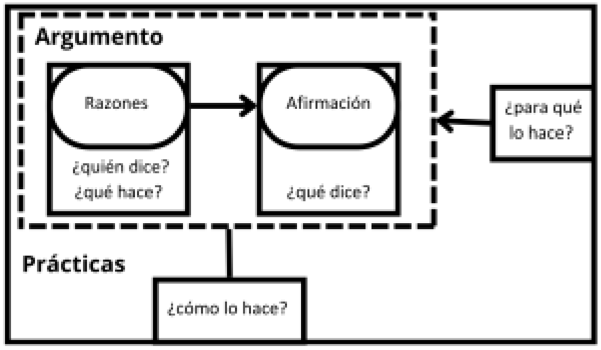
Segunda etapa

A partir de la primera etapa, identificamos la actividad matemática entorno a la generalización de patrones lineales y os episodios de argumentación matemática colectiva realizamos el segundo análisis el cual se organizó a partir de la gestión de las interacciones individual, equipo y colectivo.

En lo individual, se retomó la actividad matemática en la generalización de patrones lineales de la etapa 1 y para identificar las acciones de los participantes utilizamos las preguntas ¿quién dice?, ¿qué dice? y ¿cómo lo hace? y ¿para qué lo hace? (Cruz-Márquez y Montiel-Espinosa, 2024). Para la reconstrucción de los argumentos adaptamos el modelo de Cornejo-Morales et al. (2021) donde contemplamos la afirmación que es la posición adoptada y nos preguntamos ¿qué dice? y las razones que es el razonamiento de la posición adoptada nos apoyamos ¿quién dice? ¿qué hace? hacen los estudiantes (Figura 36).

Figura 36

Articulación teórico-metodológica para el análisis de argumentos y prácticas



En equipo, se rescató los episodios de argumentación matemática colectiva y planteo dos preguntas ¿qué argumento validan? y ¿cómo lo validan?

Por lo último en lo colectivo, se consideró los episodios de argumentación matemática colectiva nos preguntamos ¿qué argumento validan? y ¿cómo lo validan? ¿para qué argumentan?

4. Resultados.

Lo importante en la ciencia no es tanto obtener nuevos datos,
sino descubrir nuevas formas de pensar sobre ellos.

— William Lawrence Bragg

4.1. Etapa 1: Descripción y Primer Análisis de Datos

La descripción de los datos se estructuró conforme a los cuatro momentos, sus interacciones y la actividad matemática de cada tarea. En las interacciones individuales el estudiante interactúa solo con la tarea y los datos ahí fueron obtenidos a partir de las hojas de trabajo de cada estudiante. Las interacciones en equipo refieren a los diálogos entre los miembros de cada equipo y se obtuvieron tanto de las hojas de trabajo de equipo como de los audios; por último, las interacciones colectivas son las discusiones entre los diversos equipos y se recuperaron de las videograbaciones.

Los momentos 1 y 2 se diseñaron para trabajar las nociones esenciales previas al objeto de estudio, reportadas en el estudio de patrones y en la argumentación matemática colectiva. Por ende, tendríamos que trabajarlas previo al diseño. Es decir, trabajar las normas de aula, ceder la autoridad del docente en la validación de las tareas y la visualización del patrón.

4.1.1. Momento 1

En la primera sesión asistieron 13 estudiantes (6 niñas y 7 niños). El mobiliario se organizó en forma de herradura y los estudiantes se sentaron conforme se fue asignando su lugar (Figura 37). Antes de comenzar, se explicaron las normas de interacción que se iban a trabajar durante las clases, las cuales se escribieron y se colocaron en una cartulina visible para todo el grupo. Dichas normas fueron: saber escuchar, levantar la mano, compartir las ideas y tomar una postura: criticar o afirmar. También se aclaró que la organización del trabajo sería individual, en equipo y colectivo.

Figura 37

Organización del mobiliario para el trabajo individual y en colectivo

4.1.1.1. Interacción Individual

La tarea 1.1 (Figura 24) tuvo una duración aproximada de 12 minutos ya que se dio tiempo a que todos concluyeran la actividad. La intención era que los estudiantes analizarán las sucesiones figurales con relación funcional $\mathrm{f(x)} = 2\mathrm{x}$ y $\mathrm{f(x)} = 2\mathrm{x} + 1$ desde la visualización, para que identificarán el patrón y así comenzar a dar explicaciones de su estructura. Al momento que los estudiantes presentaban dudas se les hicieron preguntas tales como: ¿qué posición es está?, ¿cuántos hay?, ¿cómo están acomodados los cuadros?

Actividad Matemática en la Tarea 1.1.

Para el análisis de la sucesión A, la relación funcional es $f(x) = 2x$, se hicieron las preguntas: ¿cómo están organizados los cuadritos de la sucesión A? y ¿qué crees que consideraron para organizar los cuadritos de la sucesión A? Las respuestas se marcaron con colores, según el énfasis de las características del patrón (Figura 38). El amarillo representa que se centra en la parte cuantitativa del patrón, es decir, respuestas tipo: “2 en 2” (Ea1), “tabla del 2” (Ea9) y “sumando 2” (Ea6); el verde a la parte cualitativa del patrón, cuando se proporcionan expresiones del tipo: “en hileras” (Eo3 y Eo7) y “en horizontal” (Eo10); en azul claro se marca la combinación de ambas características (cuantitativa y cualitativa), por ejemplo, con expresiones del tipo: “sumando en vertical en cada una” (Eo7) o bien “ponerle 2 cuadros por fila” (Eo12). Lo mismo se hizo para el análisis de la sucesión B con la relación funcional $f(x) = 2x + 1$.

Figura 38

Extracto de la tabla de análisis de la tarea 1.1-sucesiones A

Código	Secuencia A	
	¿cómo están organizados?	**¿qué se consideró?**
Ea1	2 en 2	irle sumando 2 más y que tuvieran pares.
Eo3	hileras	sí es un cuadrito le dan 2 cuadros, si son 2 cuadritos le dan cuatro
Ea4	numeración y valor es de 2 en 2, 2,4,6,8, suma de 2 en dos y están en hileras	irse de dos en dos y acomodarlas en hileras
Ea5	van de 2 en 2 y están en hilera	1 iba 2, 2 iban 4…
Ea6	le van sumando 2 cuadritos mas	la multiplicación
Eo7	hileras	sumando 2 en vertical en cada una
Eo9	por orden de 2 en 2	la tabla del 2
Eo10	horizontal	estructura de los cuadros
Eo12	2 cuadros por fila	poner 2 cuadros por fila
Ea14	2 en dos uno arriba y 1 abajo	agregar 2 y colocarlos en hileras y columnas

Dentro de las preguntas para fomentar el análisis, se planteó: “Si la sucesión B se construyó a partir de la sucesión A, ¿qué se tomó en cuenta para construirlo?”, con la intención de promover el argumento de comparación de sucesiones, para encontrar lo que se mantiene (coeficiente) y lo que cambia (constante). Según la Figura 39 (cinco estudiantes (Ea1, Ea4, Ea5, Eo12, y Ea14) expresaron el patrón. Solo cuatro estudiantes (Eo7, Eo10, Ea11 y Eo13) utilizaron la comparación entre sucesiones A y B observando lo que cambia, es decir, un cuadro. Solo Eo7 y Eo13 especificaron la parte cualitativa-cuantitativa del patrón, por ejemplo, con acciones y expresiones como: “igual a la sucesión A y poner un cuadro enfrente” (Eo7) y “como la A solo se suma 1 cuadro más a la derecha” (Eo13). Por el contrario, Eo10 y Ea11 aludieron a la diferencia sin especificar la parte cualitativa del patrón, al referirse a ello con acciones y expresiones como: “como la A solo se agrega 1 cuadro más” (Eo10) y “la misma que la A, pero en la B se suma un cuadro” (Ea11).

Figura 39

Extracto de la tabla de análisis de la tarea 1.1-sucesiones B

Código	Transcripción textual
Ea1	que en la b se iban sumando dos al igual que la A, pero la diferente era la forma en la que se acomodaron
Eo3	los cuadritos que tiene y los números que hay y todos menos el primer cuadro
Ea4	la cantidad de cuadritos que se agregaron en la sucesión A se aumentaban de 2 en 2 y en la B también y que había 4 opciones
Ea5	las 2, A y B les subían 2 mas
Ea6	tener que sumar
Eo7	Igual que la A solo se puso enfrente un cuadro
Eo10	como la A solo se agrega 1 cuadro más.
Ea11	la misma que la A, pero en la B se suma un cuadro
Eo12	que cada fila se agrega 2 cuadros
Eo13	como la A, pero sumando un cuadro a la derecha
Ea14	se agregan de 2 en 2

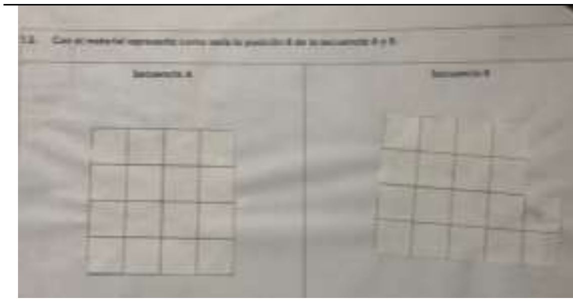
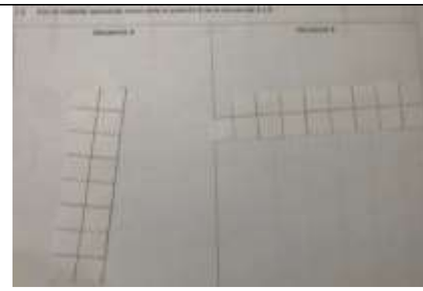
Actividad Matemática en la Tarea 1.2.

Tuvo una duración aproximada de 15 minutos. Se pretendía que los estudiantes usaran la conjetura sobre la estructura del patrón, que construyeron previamente, a partir de la actividad de generalización cercana (Figura 25). La indicación la explicó una alumna, pero varios estudiantes no la entendieron, por lo que otros compañeros la explicaron, de manera que, desde su lenguaje, los otros niños pudieran comprender.

En la construcción de la posición 8 en la sucesión A, solo Eo10 no contestó correctamente. Los 12 estudiantes restantes emplearon la parte cuantitativa del patrón al considerar que para al término 8, en la sucesión A, le correspondían 16 cuadros. Sin embargo, Eo3, Ea6, Eo7, Eo9 y Eo13 (Tabla 11) no consideraron la parte cualitativa del patrón, es decir, continuar el acomodo en forma horizontal.

Tabla 11

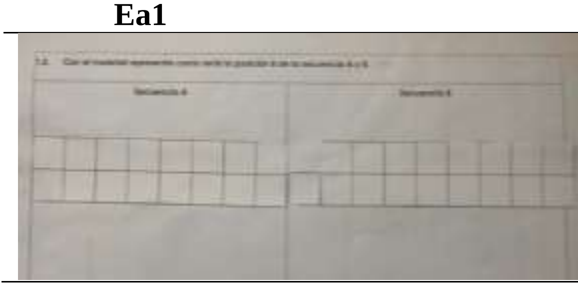
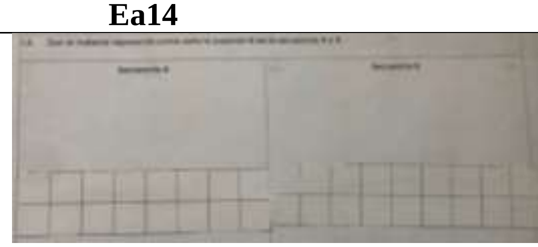
Ejemplo de respuestas sin la parte cualitativa del patrón en la tarea 1.2 de la sucesión A

Ea6	Eo13
	

En la sucesión B, Ea1, Ea2, Eo13 y Ea14 consideraron ambas cualidades (cualitativa y cuantitativa) del patrón, tal como se muestra en la Tabla 12.

Tabla 12

Ejemplo de respuestas cualitativas y cuantitativas del patrón a la tarea 1.2 de la sucesión B

Ea1	Ea14
	

Por otra parte, Eo3 y Ea4 consideraron la parte cualitativa del patrón, pero no la parte cuantitativa (Tabla 13) y viceversa Ea5 Ea7, Eo9, Eo10 y Ea12 (Tabla 11).

Tabla 13

Ejemplo. Respuestas sin características cuantitativa del patrón en la tarea 1.2 de la sucesión B

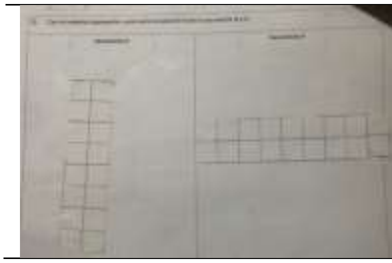
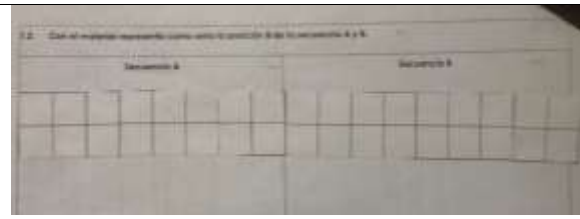
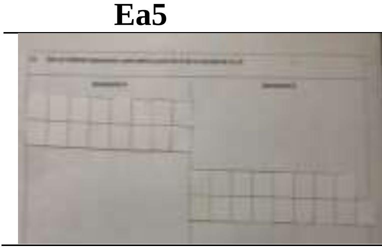
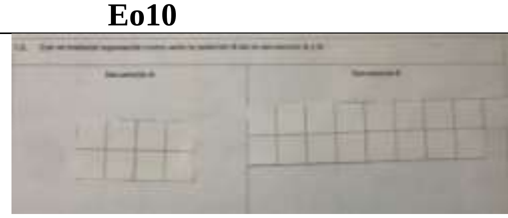
Ea3	Ea4
	

Tabla 14

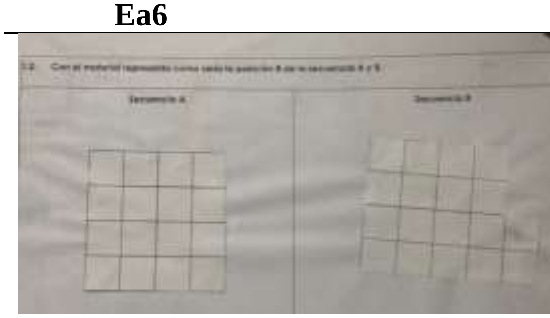
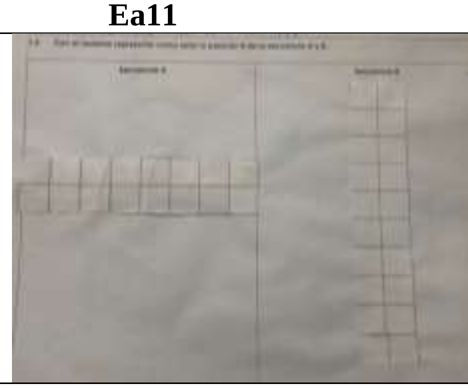
Ejemplo de respuestas sin características cualitativa del patrón en la tarea 1.2 de la sucesión B

Ea5	Eo10
	

Solo Ea6 y Ea11 presentaron tanto errores cuantitativos como cualitativos, tal como se muestra en la Tabla 15.

Tabla 15

Respuesta de las respuestas con errores del patrón de la tarea 1.2 de la sucesión B

Ea6	Ea11
	

4.1.1.2. Interacción en Equipo

El mobiliario se colocó en grupos como se muestra en la Figura 40. Además, se designó un encargado de grabar la conversación de cada equipo. Y antes de empezar el trabajo, los estudiantes leyeron las normas de interacción que se colocaron en la cartulina.

Figura 40

Organización de la interacción en equipos

En cada equipo se les entregó una hoja con las indicaciones de la tarea 1.3 (

Figura 26), la cual tenía como intención que los estudiantes compartieran diferentes conjeturas y formas de ver el patrón. A su vez, se promovió la explicación a los otros de tal manera que se buscara la mejor forma de expresión y posiblemente surgiera la justificación de las diferentes representaciones. El tiempo en que se realizó la tarea fue de alrededor de 10 minutos.

Actividad Matemática en la Tarea 1.3.

Equipo 1. En la discusión de la construcción de la figura 8 surgieron razones recursivas, por ejemplo: “porque así me dieron siguiéndola” (Eo3); como de comparativa entre la sucesión A y B en: “por ejemplo, dice 1 y sin querer arriba viene uno 1 y 2 [señala la columna] o sea cada uno tiene 2 y 2…entonces lo único que hice fue 8 y 8. En esta [sucesiones b]…aquí se le sumaba 1, entonces hice 8 abajo y le sumaba 1 y quedaba…” (Ea2). La forma de validar fue a través del conteo de los cuadros, sin embargo, consideraron que Eo3 no siguió el patrón cualitativo y en la sucesión B no tiene la misma cantidad de cuadros, por lo que se le hizo la crítica y se propuso como debía mejorarla, pues Ea2 dijo: “bueno solo te faltaron 2 cuadritos y en esta [sucesiones A] solo la acomodaste mal [vertical]”.

Equipo 2. Surgieron razones recursivas, al decir: “porque eran 8,10,11,12,13,14,15,16 y le conté” (Ea4); multiplicativa sin énfasis en lo cualitativo con: “la A porque conté cuantos cuadritos tenía y lo multipliqué por 2, me dio 16, conté mis cuadritos me dio así [vertical], pero como quería hacerlo más chiquita la hice así [cuadrado]” (Ea6); y de relación al doble con: “yo vi que en la 4 daba 8 y en la 5 daba 10, y luego 12, 14 y 16” (Ea5). La forma de validar, al igual que el equipo 1, fue a través del conteo de los cuadrados, aunque mencionaron la excepción en la figura de Ea6, ya que lo acomodó como un cuadrado, pero aun así la validaron (Tabla 16).

Tabla 16

M1. Interacción de equipo 2 en la tarea 1.3. Validación del patrón de la sucesión A

Código	**Transcripción textual**
DI	¿Cuál es la correcta?
Ea4	las tres solo que Michelle la hizo en cuadrado.
Ea6	es que se me iba hacer muy grandote y la quería ser más chiquita.
Ea4	pero si tiene 16.

Para la sucesión B, surgió la confrontación entre las diferentes afirmaciones. Ea4 y Ea6 concordaron con 18 cuadros y Ea5 con 17, cada una mostró sus razones. Al final, Ea5 convenció a Ea4 de usar su estrategia recursiva, lo que permitió que Ea5 se diera cuenta que efectivamente eran 17 cuadros, pero Ea6 no queda convencida pero acepta (Tabla 17).

Tabla 17

M1. Interacción de equipo 2 en tarea 1.3. Convencimiento.

	Código	Transcripción textual
Equipo 2	Ea6	haz de cuenta que esta es la 4 y es la 8 es multiplicar por 2…
	Ea5	aquí en estas son 9 [señalando la figura 4] 10-11, 12-13, 14-15, 15-17.
	Ea6	da 18, porque tiene 9 cuadritos por 2 da 18.
	Ea5	pero si le cuentas da 17
	Ea4	le va sumando a cada figura 9, 10, 11 más 2 da 13 ya me confundí.
	Ea5	es que ve son 9 verdad, es que van subiendo de 2 en 2 también.
	Ea4	9 más 2 son 11 ¿sería la secuencia 11 [figura 11], ¿no? Ah no sería la 5.
	Ea6	a mí me da 18.
	Ea4	[sigue contando] Si, da 17
	Ea6	¿17?
	Ea4	la cara de Michelle
	Ea6	es que ¿cómo?
	Ea5	es que aquí tiene 9, 10-11, 12-13, 14-15, 16-17. Da 17 [sonríe]
	Ea6	entonces si da 17, entonces la que está bien es samanta. Aún sigo sin entender.

Equipo 3. Para la sucesión A las razones fueron reconstruyéndose. En un primer momento Eo9 uso la recursividad al mencionar que “la construí la A porque iba de una sucesión de 2 más 2” (Eo9). Por su parte Eo7 utilizó la comparación entre sucesiones observando lo que cambia y se mantiene estable, diciendo: “yo hice prácticamente lo mismo, pero yo hice una estrategia de la sucesión A, si te das cuenta en nuestra hoja viene 1 le

aumenta 1 y se vuelve en 2, luego en 3 luego en 4 es como se va enumerando lo de abajo [señala la parte inferior de cada figura] entonces, pensé que si la posición 8 son 8 cuadritos horizontal más 8 cuadritos en vertical arriba o 16 cuadritos". A partir de ello, Eo9 reconstruyó su discurso y dice: "porque en la sucesión de la A era un estilo de multiplicación de la tabla del 2, así que le fui multiplicando hasta el 16, quería 8 x 2", de tal forma que empleó la analogía con la tabla de multiplicación del 2 y da razones de relación multiplicativa.

Para sucesiones B, Eo9 utilizó la recursividad al mencionar "yo puse 17…lo fui sumando lo que me iba saliendo", por el contrario, Eo7 empleó la comparación entre sucesiones al decir: "lo que yo hice fue lo mismo de la posición A, pero solo le aumenté un cuadrito. Entonces, aquí son 9 en forma horizontal y 8 en forma vertical [segunda fila]". Al igual que los otros equipos la forma de validar fue a través del conteo de los cuadros, sin embargo, se cuestionaron la cualidad del patrón concluyendo que no importa la figura sino la cantidad de cuadros (Tabla 18).

Tabla 18

M1. Extracto de la interacción de equipo 3 en la tarea 1.3. Respaldo al no contemplar la característica cualitativa del patrón

	Código	**Transcripción textual**
Equipo 3	Eo7	yo pienso que las dos son iguales, solo que en la B hay una perturbación hasta más adelante que en mi perspectiva puede ser adelante, atrás, izquierda o derecha. Es lo mismo ¿tú qué opinas Eydan?
	Eo9	concuerdo con tu explicación yo también tuve lo mismo solo diferente lado, pero creo que es lo de menos.

Equipo 4. En la sucesión A, Eo12 no encontró palabras para verbalizar el patrón, al decir: "por cada línea hay dos cuadritos y porque cada [piensa] no sé explicar", por su parte

Ea11 dio razones recursivas al explicar “en esta hoja solamente hay 4 figuras que son 1, 4, 6, 8 y tenía que llegar hasta la 8, estamos de acuerdo. Aquí solo llega hasta la 4 [figura 4] y teníamos que llegar a la 8. Teníamos que sumar hasta llegar a la 8, aja aumentarle 2 cuadritos”. Al igual que los otros equipos la forma de validación de la sucesión fue por medio de la cantidad de cuadros. En la sucesión B surgió la confrontación cuando Eo10 dijo que la figura 8 tenía 18 cuadros, “9 y 9”, por su parte, Ea11 afirmó que 20 cuadros y Eo12 que 17. Comenzó Ea11 explicando que son 20 porque se le agregan 4 cuadritos, Eo12 justificó que no se le suma en cada figura sino solo un cuadro, que corresponde al término 1, pero, Ea11 no comprendió las razones, pero terminó diciendo que es correcta la de Eo12, aunque no estuvo convencida (Tabla 19).

Tabla 19

M1. Extracto de la interacción del equipo 4 en la tarea 1.3. Confrontación.

	Código	Transcripción textual
Equipo 4	Ea11	en el otro sale 16 pero en el de abajo se le incluye otro cuadrito.
	Eo12	si
	Ea11	entonces, serían cuatro más, serian 20.
	Eo12	no, acá no se le suma.
	Ea11	por eso está bien pero como son 16 y le sumas los otros cuatro.
	Eo12	no, este [cuadrito de la secuencia B] sigue siendo igual, se le suma de la misma manera. El cuadrito está en la primera figura y por cada figura no se agregan…
	Ea11	no, mira le agregaron aquí…haz de cuenta que le quitas esto y nomas le agregaron un cuadrito. Mira quítale este cuadrito y son 16 y agrégale los otros cuadritos son 20.
	Eo12	los cuadritos no se suman siguen siendo iguales en cada una.
	Ea11	entonces, la de Eo12 esta correcta [en tono enojada].

Equipo 5. En la sucesión A, Eo13 uso la relación doble al mencionar que: “porque la posición 4 en la posición A eran 4 cuadritos y solo lo dupliqué para que fueran los cuadritos de la posición 8…los dos cuadritos arriba son 4 y abajo son 4. En el 4 se duplicaba el 4 o sea

que en el 8 tendría que haber 16”. Ea14 refinó su discurso al escuchar a su compañero ya que en lo individual mencionó que: “en cada figura se sumaba 2 cada vez que cambiaba la figura se le sumaba 2 en hilera” y luego de la intervención dijo: “mi explicación es similar pero no igual, yo vi que por cada figura se sumaba 2, entonces vi que el 4x2 da 8”, de manera que uso la relación multiplicativa.

En el caso de la sucesión B, Eo13 dio razones apoyándose de la comparación de las sucesiones y encontró la relación: “en la B, vi que solo se le sumaba 1 cuadrito y nomas le recorté un cuadrito de arriba y ya le fui contando y me dieron 9 abajo y 8 arriba”, la cual fue respaldada por Ea14 pues ella dijo: “en la de abajo vi que era lo mismo solo que le agregué 1 cuadrito”.

Para hacer la validación no sabían cómo hacerlo, por lo que los orienté con las preguntas: ¿la organización es la misma? y ¿la forma es la misma? Eo13 reconoció que él lo acomodo en vertical y Ea14 le dice que ella lo colocó de esa manera (horizontal) porque las sucesiones estaban horizontal y no vertical, y no creía que fuera valido cambiar de posición. Eo13 le dijo que así la dejo porque le estorbaba los cuadros, pero apoya lo que dice Ea14.

4.1.1.3. Interacción Colectiva

Para este momento se trabajó con la tarea 1.4 la cual recupera la actividad 1.2 (Figura 25) donde cada equipo se puso de acuerdo para presentar al colectivo aquella tarea que consideraron valida; se le tomó una foto para proyectarlas y así el grupo pudiera verla. Esta tarea tenía la intención de que los estudiantes argumenten las diferentes conjeturas respecto a la estructura del patrón y el grupo le otorgara la validez. Para esta tarea surgieron momentos de reformulación de razones, confrontación, toma de postura, validación y meta-reflexión.

Actividad Matemática en la Tarea 1.4

En la Sucesiones A comenzó el equipo 5 comentando que eligieron el trabajo de Ea14 porque Eo13 había colocado de manera vertical las figuras, y dado que las sucesiones iban acomodadas en horizontal no podrían ser validas, Ea4 estuvo de acuerdo y agregó que se debe considerar que se está sumando de 2 en 2. Por lo que, Eo7 confrontó al cuestionar la forma en qué deben ir las figuras ¿acostadas o paradas?, a lo que Eo12 mencionó que “no importa si está en horizontal o vertical, está bien, porque tiene la cantidad”, y Eo7 añadió que “por qué ahí no especifica si la quieren en horizontal o vertical”.

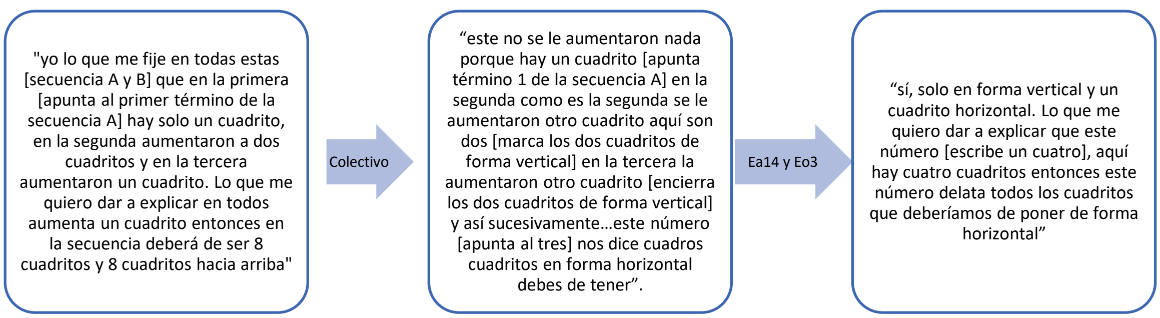
Por otro lado, Ea2 no estuvo de acuerdo con sus compañeros, pero si con Ea14 pues dijo: “porque aquí en la hoja [coloca sus dedos explicando cada fila del patrón] si la volteas hay más cuadro arriba que abajo”, pero para el grupo no fue claro, así que reformuló sus ideas en: “la sucesión B tiene un cuadro [maestra pide que vean la hoja] si, por ejemplo, nosotros volteáramos estaríamos faltando a la regla. Si, en…la sucesión A, viene acostado es porque ellos quieren que la hagamos acostado y si viene parado es porque quieren que lo hagamos parado”. Eo7 validó el argumento de sus compañeras, pero aclaró que se ve muy amontonado y que no se podría apreciar, pero Ea2 señaló que pudiera acomodarlo en la parte inferior de la hoja para que se pudiera ver completo. Por último, Ea4 también estuvo de acuerdo con Ea2 utilizando el ejemplo de la sucesión B: “tiene razón porque si ponemos el cuadro de la sucesión B arriba seria romper la regla ya no sigues el patrón”.

Esta confrontación del argumento se enfatizó en el aspecto cualitativo del patrón, al no ser considerado en varios equipos, sin embargo, en los equipos que lo contemplaron mostraron razones para convencer a los otros.

Eo7 mencionó las razones de la sucesión A, pero fueron reformuladas (Figura 41). En la primera reformulación surgió porque el colectivo no comprendió. En la segunda reformulación porque Ea14 parafraseó diciendo que entonces se le “agrega un cuadrito arriba y abajo” y Eo3 insistió que se le va sumando de dos. Con la última reformulación, Ea14 reconoció la relación de dependencia ya que dijo que los cuadros dependen del número de términos. Para dar más razones Eo7 uso la generalización cercana al decir: “haz de cuenta que en el 15 tenemos que poner 15 cuadritos arriba y abajo”. Este razonamiento fue validado por Ea2 y Ea12 porque también lo pensaron de esa manera.

Figura 41

Reformulación del razonamiento de Eo7 ante el patrón de la sucesión A



Para la sucesión B ***s***urgieron dos razonamientos. Comenzó Eo7 diciendo “…en la sucesión B hice otro procedimiento que no es tan complicado. En la primera le debemos de sumar uno [a] todo aquel número solo que en su respectivo momento. Por ejemplo: 1+1=2 u otra forma más fácil es hacer la sucesión A solo le pones un cuadrito hasta mero adelante”. Tanto Ea6 como Eo10 estuvieron de acuerdo. Pero Eo7 agregó que el cuadro se puede colocar hacia la “derecha, arriba, abajo”, por lo tanto, le mostré con un no-ejemplo, al colocar el cuadro que se agrega en otro lugar y los estudiantes mencionaron que es otra figura. Eo7 insistió diciendo que podría poner otros dos cuadros, por lo que le pedí al grupo explicar cómo debían estar las figuras a lo que contestaron que acostadas. Esto permitió que Ea7 reconociera su error, acomodar las figuras en forma vertical, y cuestioné ¿qué tendría que hacer? a lo que respondió que necesitaría únicamente rotarla.

El segundo razonamiento se reformuló para que fuera accesible para el colectivo. Primero Ea2 dijo: “la sucesión B que los cuadros de abajo si decía 1 eran 2…aquí vi que era uno y venían dos, y a todos le voy sumando uno, y aquí por ejemplo era 8 le puse 8 y le sumé una más”. Sin embargo, no fue lo suficientemente explicito para que el colectivo lo comprendiera, por lo que mencionó: “hice lo mismo de acá, pero decía ¿cuál era la figura 8? puse este ahorita lo eliminé [cuadrito]. Ahorita puse 8 de acá y 8 de acá…entonces, vi que se le tenía que sumar 1 al 8, pero vi que sí, le ponía el cuadrito acá [señala la segunda fila] no estaba bien. Entonces, se lo puse acá [señala la primera fila] para que fuera igual”.

El primer argumento estuvo más enfatizado en la parte cuantitativa del patrón sin importar la parte cualitativa, sin embargo, la discusión permitió que emergiera la meta-reflexión ya que el estudiante se da cuenta de su error y cómo corregirlo. En el segundo argumento se recuperó no solo parte cuantitativa del patrón sino cualitativa. Por lo que la validación ya no solo giro entorno a la cantidad sino también a la cualidad del patrón, por lo que el colectivo decidió que el equipo 5 y 1 presentaron razonamientos válidos porque contemplaron ambas características del patrón.

4.1.2. Momento 2

En la segunda sesión asistieron 14 estudiantes (7 niñas y 7 niños). Comencé platicando sobre la nueva norma “mirar a quien está explicando”, enfaticé que el día de ayer, al momento de exponer sus ideas, me miraban a mi o bien estaban haciendo otras cosas. Un estudiante interrumpió y dice que es una falta de respeto no mirar a las personas cuando te están hablando, por lo que afirmé y pedí que fueran trabajando con esa nueva norma.

Este momento no estaba previsto en el diseño ya que surgió a partir del análisis continuo al observar la interacción y las respuestas de los estudiantes respecto a las tareas del primer momento ya que se estaba enfatizando la característica cuantitativa del patrón y se dejaba de lado lo cualitativo.

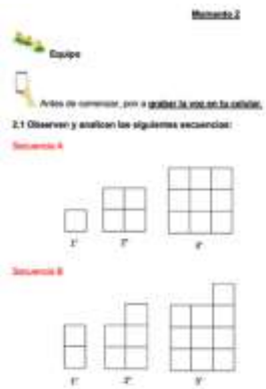
Para este momento solo hubo la gestión de interacción por equipos y en colectivo. En la tarea 2.1 (figura 38) se propuso dos sucesiones: la sucesión A con la relación funcional $f(x) = x^2$, y la sucesión B, $f(x) = x^2 + 1$. Esta tarea tenía la intención de promover el análisis de las sucesiones figurales desde la visualización para identificar su estructura. Por otra parte, la tarea 2.2, la intención fue que a partir del análisis de las sucesiones figurales de la tarea 2.1 se reconstruyera la característica cualitativa, manteniendo el mismo patrón cuantitativo. Para ambas, tareas el tiempo de trabajo fue alrededor de los 35 minutos.

4.1.2.1. Interacción en Equipo

A cada equipo se les pidió que comenzaran a grabar y se les entregó una hoja con la tarea 2.1 (Figura 52). Eo13 leyó la indicación y les expliqué que primeramente tendrían que analizar las dos sucesiones A y B. Posteriormente, realizar la reconstrucción de la nueva sucesión figural.

Figura 42

Tarea 2.1 del momento 2



Actividad Matemática en la Tarea 2.1

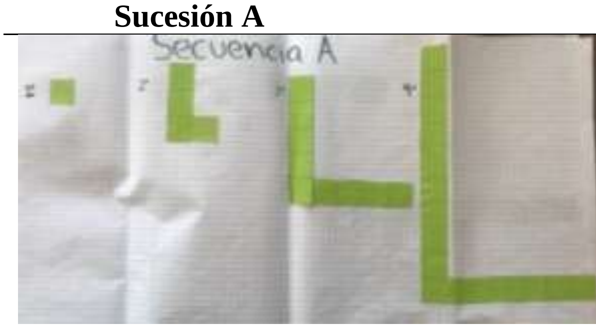
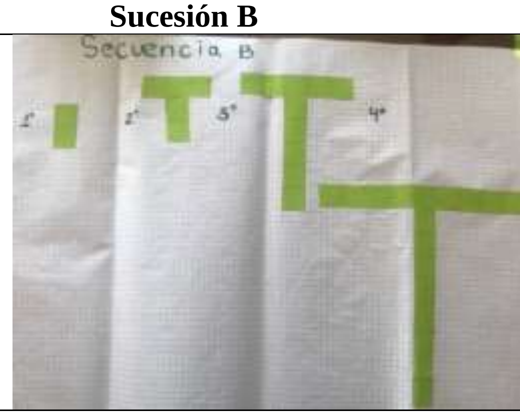
Equipo 1. Para el análisis del patrón de la sucesión A, el razonamiento se caracterizó como relacional entre la posición del término y la cantidad de cuadros que le corresponde, por ejemplo: “es que mira, ahí [señalando los números de las figuras] te están señalando cuántos cuadritos hay debajo, esta 1, 2, y 3, [cuenta los de la primera fila] 1, 2 y 3 [cuenta lo de la segunda fila]…” (Eo3).

El conflicto surgió en la sucesión B, una primera conjetura fue que se “le agregan 3” (Eo1) pero se dieron cuenta que no funcionaba para todos los términos de la sucesión. Una segunda conjetura, se hizo el primer acercamiento de tipo relacionar, al vincular el patrón de la sucesión B con el de la sucesión A “…sería 2 aquí y 2 acá, pero este no sé [refiriéndose al cuadro de arriba]. Podría ser 2 y 2, aquí podría ser 3 y 3”. Ya observando lo que se mantiene estable en ambas sucesiones, Ea1 reconoció lo diferente entre ambos patrones “como que siempre debe llevar un cuadrito” (Ea2). Además, ellas observaron la parte cuantitativa y complementaron con lo cualitativo “...este de aquí [término 2] es este de acá [término 1], nomás le agregaron otro…para que quedara un cuadrito sin espacio. Lo que debe de ser es que siempre deben quedar cuadritos sin espacio" (Ea1); "¡ah! ya te entendí, son 3 aquí y 3 aquí y nomas se le agregan a todos uno arriba. ¡Ah! Si ya entendí" (Ea2). Al final, Ea2 expresó desde su lenguaje el patrón de la sucesión A reconociendo la relación entre la variable dependiente e independiente, al decir: "yo sé que no tiene nada que ver, pero si se multiplica el número por el número, por ejemplo, 2x2 son 4, 3x3 son 9, 4x4 son 16" (Ea2).

En la segunda tarea 2.2 que implicó la reconstrucción figural las sucesiones conservando la parte cuantitativa del patrón y complementando con la predicción del término siguiente. Ea1 y Ea2 no entendían la indicación, pero Eo3 les mencionó que es diferente acomodo acostada o parada. El equipo solicitó ayuda por lo que sugerí que pudiera ser lineal, diagonal, en T, en L, etc. A lo que decidieron que la sucesión A lo harían en formando una L y la sucesión B en forma de T (Tabla 20), en cada una estuvieron contando los cuadritos para estructurar la figura ya sea de la L o T.

Tabla 20

Reconstrucción de la sucesión A y B- E1

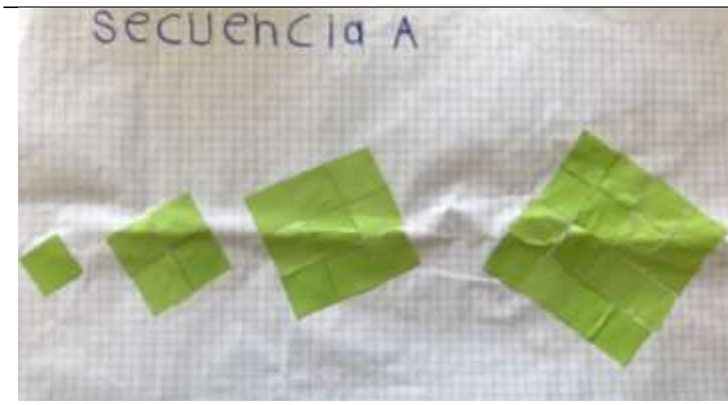
Sucesión A	Sucesión B
	

Equipo 4. Para el análisis del patrón de la sucesión A y B, la interacción entre los miembros del equipo fue limitada. A pesar de ello, reconocieron que las sucesiones son similares a las que se trabajó el día anterior y lograron ver que el acomodo era distinto (Tabla

21), al decir: “ya me di cuenta de algo, son como las que hicimos ayer pero solo que esta viene acostada y esta tiene más, otros 3 cuadritos más ¿ya te disté cuenta? y… ya viene diferentes tipos de acomodo en los cuadritos que viene” (Eo10). También, identificaron la parte cuantitativa del patrón de ambas sucesiones, al mencionar: “estos se multiplican creo 2x2, 4, 3x3, 9, acá es lo mismo solo que se agrega 1 cuadrito hasta mero arriba” (Eo12).

Tabla 21

Reconstrucción de la sucesión A y B- E4

Secuencias A	**Secuencia B**
	

Equipo 5. Para el análisis del patrón de la sucesión A identificaron la relación entre el número de la posición y la estructura de la figura, ya que de acuerdo con el número del término es el número que le corresponde de largo y ancho, Eo13 dijo: “en la figura 2 hay dos cuadritos de estatura y 2 cuadrito”. Y verbalizó el crecimiento diciendo que “…la figura 3 es uno de 3x3, la figura 1 es de 1x1 y esta [término2] 2x2”. En el patrón de la sucesión B, solo Eo13 comentó que: “tenemos que hacer la sucesión A, la primera solo tiene un cuadrito”.

Con respecto a la segunda tarea, para reconstruir las sucesiones decidieron hacerlo de forma lineal para ambas sucesiones (Tabla 22), solo en el caso de la sucesión B agregaron un cuadro a la derecha sin dar importancia a la posición del cuadro.

Tabla 22

Reconstrucción de la sucesión A y B- E5

Secuencias A	Secuencia B
	

Se presenta una síntesis del patrón reconstruido tanto de la sucesión A y B que mostraron los equipos en la tarea 2.2 (Figura 43).

Figura 43

Síntesis de los patrones reconstruidos por los equipos en la tarea 2.2

Equipos	Secuencia A		Secuencia B	
	Característica cualitativa del patrón	**Característica cuantitativa del patrón**	**Característica cualitativa del patrón**	**Característica cuantitativa del patrón**
1	En forma de L	Se multiplica el número por el número.	En forma de T	Se multiplica el número por el número y se le suma uno arriba.
2	Tomaron el patrón original solo rotaron 90° a la derecha la columna de en medio.	Agregar una columna a la derecha.	Sin seguimiento del patrón cualitativo.	Sumar 5 cuadros
3	Sin seguimiento del patrón cualitativo.	Multiplicar el número por sí mismo.	Sin seguimiento del patrón cualitativo.	Se multiplica el número por el número y se le suma uno arriba.
4	Rotación de 90° a la derecha de la figura original.	Multiplicar el número por sí mismo.	Sin seguimiento del patrón cualitativo.	Como la secuencia A y se le añade un cuadro en la parte superior.
5	En recta vertical apilado uno a uno.	Multiplicar el número por sí mismo.	Sin seguimiento del patrón cualitativo.	Se multiplica el número por el número y se le suma uno arriba.

4.1.2.2. Interacción Colectiva

En la interacción colectiva le corresponde a la tarea 2.3, la intención fue analizar las diferentes estructuras de las sucesiones figurales reconstruidas y formar una postura sobre ellas. En la recuperación de los datos tuvimos problemas con el equipo 2 y 3, ya que no se pudo obtener el análisis que hicieron de las sucesiones. Asimismo, el equipo 4 en la reconstrucción de una sucesión nueva pauso el audio, por lo tanto, tampoco se tiene datos. Todos los equipos se consideraron en la interacción colectiva, ya que formaron parte de la discusión y la aportación de ideas que impactaron en la intención de la tarea colectiva.

Para esta interacción el mobiliario fue acomodado en forma de herradura. El tiempo aproximado de la tarea fue de 45 minutos. El orden en cómo fueron compartiendo los trabajos los equipos fue aleatorio. A continuación, se presenta una síntesis de la discusión de cada equipo respecto a las reconstrucciones de las sucesiones A y B.

Actividad Matemática en la Tarea 2.3

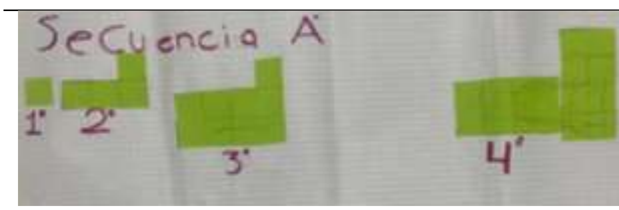
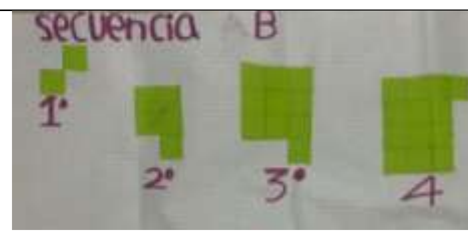
Equipo 4. Construyó la sucesión A (Tabla 21), tomando en cuenta la original y la rotaron a la derecha, de manera que reconocieron que al rotar una figura no pierde su tamaño. Al revisar la parte cuantitativa del patrón se confrontaron dos ideas, si la figura debe tener 12 cuadros (Eo7) y 16 cuadros (Eo12). Sin embargo, Eo7 reconoció su error, pero cuestionó a Ea9 que explicará la razón del 16 pero ella no pudo decirlo, Eo2 se ofreció ayudar diciendo: “por ejemplo, en el 1 [término] se llevaba 1, en la del 2 [término] eran 2 en línea vertical y 2 en línea horizontal, de la 3 [término] igual, de la 4 [término]…hacer los cuadros para que se hicieran 4 líneas horizontales y 4 vertical”. Al final usaron el patrón para encontrar los cuadros que corresponden a la figura 4, en tal caso fue 4x4=16. Eo13 logró generalizar al decir que se debe “multiplicar por sí mismo”.

Para la reconstrucción de la sucesión B (Tabla 21), Ea14 reconoció que el patrón es igual al patrón de la sucesión A con la diferencia que se le agrega un cuadro. El patrón cualitativo fue refutado ya que Eo7 mencionó que la figura 4 no sigue el patrón cualitativo y sugirió rotarla para que corresponda con la sucesión.

Equipo 3. Eo7 desde el inicio reconoció que su sucesión A (Tabla 23) tiene un error, por lo que pedí que primero nos contara que hicieron para hacer sus reconstrucciones.

Tabla 23

Reconstrucción de la sucesión A y B- E3

Patrón de la sucesión A	**Patrón de la sucesión B**
	

La primera explicación fue “la A porque como aquí [término 1] son 1 aquí haz de cuenta que pusimos los 3 y agregamos el 1, acá [término 3] también le agregamos una fila arriba y uno aquí [arriba]” (Ea8). Los estudiantes no entendieron la explicación, por lo que Ea8 la reformuló: “haz de cuenta, aquí [término 2] había 4 cuatros y estos [señala 2 cuadros de arriba] los quitamos de aquí y los pusimos así pa arriba [señala a un lado]. Y acá 9 cuadritos y le pusimos, en vez de ponerlos, así como estaba en la imagen los pusimos a lado” (Ea8). Sin embargo, para los estudiantes no era suficientemente claro y tuvieron que reformular su explicación, además, que otros alumnos aportaron otras explicaciones (Tabla 24).

Tabla 24

Discusión en colectivo en la tarea 2.3 del equipo 3

Código	Transcripción textual
Eo7	yo lo que pensé a base que Ea8 hizo esta [término 1], yo pensé que para hacer originales y pa no copiar a la hojita, has de cuenta este cuadrito es de este [término 1] y se le añadieron otros 3, aquí [término 2] [se detiene y va por un lápiz y marca] este [término 2] es esto [término 3].
G	nos estas tapando.
Eo7	en la figura 2 como pueden apreciar aquí está la figura 2 y se le sumaron otros 5 y luego de aquí, esta [piensa] esto es la secuencia 3 [refiriéndose al término 3] aquí como pueden apreciar se le sumaron otros 7, [cuenta 1,2,3,4,5,6,7] se le sumaron otros 7, no sé si me di a expresar bien.
Eo10	esta partida a la mitad, pero esa mitad la agregaron acá
DI	¿en dónde?
Eo10	la partieron a la mitad y esta mitad la pusieron acá [toma su bote y lo coloca a la derecha indicando que la reconstrucción se le quita la mitad y se la agrega la derecha].

Al final, los estudiantes refutaron el patrón cualitativo mencionando que el término 4 no cumple con dicho patrón y se tendría que haber continuado con una sola columna a la derecha (Tabla 25).

Tabla 25

Discusión en colectivo en la tarea 2.3 del equipo 3. Critica término 4 de la sucesión A

Código	Transcripción textual
Eo3	debían de seguir el patrón, si la segunda y la tercera figura lo estaba haciendo de uno, la cuarta también debería de ser de uno.
Ea2	cortar esta línea [los cuadros en vertical del término 4] por ejemplo y pegarla aquí así abajo y esta subirla hacia acá, o sea subirla, ya sea aquí para que estén parejos los cuadros. Este aquí, este aquí y esta que quede aquí como los demás que dejaron un cuadro arriba.

Para la reconstrucción de la sucesión B (Tabla 23) Ea4 observó que las figuras 1 y 4 no cumplen con la característica cualitativa del patrón, ya que el cuadro que se agregó está hacia arriba y no hacia abajo como en las figuras 2 y 3. Eo3 se muestra de acuerdo, diciendo: "yo lo mismo que Ea4, pero yo me di cuenta de que la 1 [término 1] puso una figura aquí y otra acá [hace los movimientos con sus manos] y ya las demás [término 2 y 3] lo acomodaron así [un cuadro en la parte inferior derecho] y en la 4 [término 4] pusieron una aquí [coloca su mano arriba de lado de la figura del término 4] y no lo pusieron abajo como estaba la segunda y la tercera".

Por otro lado, Eo8 mencionó que el error es que la figura 4 debería tender 16 cuadros. Ea4 dijo que 15 y Eo10, Eo7 y Eo3 replicaron que 17. Eo3 argumenta que la sucesión A deberían ser 16 y en la B, 17, porque se le agregó un cuadro más. Aun así, Ea8 persistió, diciendo: "maestra sí es 16 porque, por ejemplo, se multiplica por el mismo número". Eo10 y Ea2, le recordaron que es más el cuadro. Al final, el grupo no validaron la parte cualitativa ni la cuantitativa del patrón de la sucesión B.

Equipo 5. Para la sucesión A (Tabla 22) mencionaron que tomaron la idea de la sucesión original solo que las apilaron en línea vertical, el grupo mencionó que sí sigue un patrón figural. En la sucesión B (Tabla 22) la hicieron a partir de la A, pero le agregaron un cuadro a la derecha.

Eo7 se percató de que el cuadro que agregaron en todas las figuras no se agregó en el mismo lugar, a lo que Ea2, Eo3 y Eo10 están de acuerdo. Ea2 mostró evidencia diciendo que en el término 2 colocaron el cuadro en medio de los cuadros dos y tres, y en el término 3 lo colocaron entre el tres y el cuatro. Ea14 estuvo de acuerdo y señaló que no se había dado cuenta. Ea8 propuso cómo podían mejorarlo: "lo cuadritos de al lado también, como dice

Eo7, deberían de estar hasta arriba, pensando en el primer cuadrito de hasta arriba… solo deberían de, en vez ponerlo aquí [señala abajo a su derecha], ponerlo aquí [señala arriba a su derecha]".

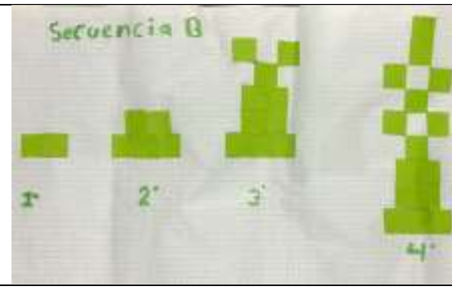
Equipo 1. En la sucesión A (Tabla 20) el patrón cualitativo seguía la forma de la L y el equipo mencionó: "en esta estábamos viendo cómo formarla y llegamos a la conclusión de hacerlo en L. En todo los fuimos repartiendo como dividiendo, no lo dividimos en sí, pero sí, por ejemplo, cuál era la más grande y cuál era chica y cuál cabía y lo hicimos en L porque se nos hizo más fácil y entendible" (Ea2). Y en la sucesión B (Tabla 20) siguieron la figura de la T, ya que dijeron: "pues con T… si pusimos la más larga hacia arriba o por ejemplo en esta era 5 para que quedara bien, poner el palo en el del medio [refiriéndose al cuadro] y que quedaran 2 de cada lado y en todos los fuimos diciendo así para que quedaran..." (Ea2).

El grupo validó las sucesiones A y B mencionando que siguieron el patrón figural desde el primer término y mantuvieron la coherencia entre cada término, por ejemplo, "yo estoy de acuerdo porque como voy a poner de ejemplo la de Eo7, en la de Eo7 tenían en la A [sucesiones A], en la última, ya ve que tenía 2 acá [señala con sus manos dos columnas] y las otras tenía 1 [columna], entonces en la de Eo7 para que fueran así tenía que agregar de dos columnas y en esta, si le fueron agregando más, sí me entiende" (Ea14).

Equipo 2. Para la sucesión A (Tabla 26), el equipo decidió acomodarla en columnas y los cuadros de la columna de en medio se rotaron a 90 grados a la derecha. Ea4 comentó que la figura 4 tiene 12 cuadros a lo que el grupo estuvo de acuerdo. Por lo que cuestioné a Ea14 las razones de la cantidad de la figura 4, pero se quedó callada y Ea8 le explicó "porque se multiplica el mismo número de la figura" y menciona ejemplos "1x1 es 1, 2x2 son 4, 3x3 con 9 y 4x4 son 16”. Lo que permitió que identificaran su error en la parte cuantitativa del patrón.

Tabla 26

Reconstrucción de la sucesión A y B- E2

Patrón de la sucesión A	Patrón de la sucesión B
	

Para la sucesión B (Tabla 24), los estudiantes se dieron cuenta que no hubo patrón figural y que el término 4 tiene menos cuadritos de lo que debería de ser. Por lo tanto, no validaron su patrón cualitativo y cuantitativo.

4.1.3. Momento 3

La tercera sesión de trabajo asistió 14 estudiantes (7 niñas y 7 niños). El mobiliario se colocó en forma de herradura. Antes de comenzar, se indicó que se iba a establecer una nueva norma “preguntar si la idea fue clara”, misma que se escribió en la cartulina. Esto, a propósito, a que en el momento 2 hubo estudiantes que se molestaron porque otros compañeros les señalaban sus errores. Se especificó que los errores son parte del proceso de aprender y si algún compañero te da razones de tu error debemos escucharlo para entender la idea.

4.1.3.1. Interacción Individual

La tarea 3.1 (Figura 28) se retomó de una tradición en el arte Wixarika, específicamente con el instrumento del ojo de Dios, una forma de comunicarse con los Dioses. Para lo cual, a cada estudiante se les entregó una hoja con información, para contextualizar los patrones (Figura 27). En esta tarea se empleó el patrón la relación función identidad $f(x) = x$. La intención era que los estudiantes realizarán un análisis de la sucesión figural y construyeran una conjetura del patrón y a su vez explicarán dicho patrón. El tiempo en que se realizó fue aproximadamente de 6 minutos.

Actividad Matemática en la Tarea 3.1

Las preguntas para el análisis del patrón que corresponden al inciso a) y b). En el primer inciso las preguntas fueron: ¿qué cambia?, ¿cómo cambia? y ¿cuánto cambia?, respecto a la primera pregunta 13 estudiantes identificaron que son los rombos lo que cambia, de los cuales Ea2, Ea5, Ea11, Ea12 y Ea14 reconocen que aumenta 1 rombo.

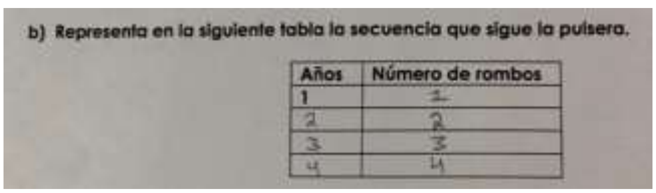
En la segunda pregunta, ¿cómo cambia?, los estudiantes Ea1, Eo3, Ea4, Eo10 y Eo11 refieren al poner, sumar, añadir y agregar un rombo u ojo de dios. En cambio, Ea5 y Ea6 recuperan casos concretos de la sucesión, por ejemplo, señalando: “en el primer año es el 1 en el segundo 2 y el tercero 3” (Ea5). Los estudiantes Eo9 y Ea11 refieren a la longitud de la pulsera al hacerse más grande conforme pasen los años, diciendo: “se hace cada vez más grande” (Eo9).

Con respecto a la tercera pregunta, ¿cuánto cambia?, las respuestas de los estudiantes Ea1, Eo3, Eo7 y Ea14 utilizaron cuantificadores cualitativos como mucho, no mucho y medio. Por su parte, Ea8, Eo10, Eo12 y Eo13 respondieron conforme a la cantidad de términos de la sucesión, pues mencionaron que “3 veces”. Por otro lado, otros cuantificaron numéricamente al decir: “1 en 1” (Ea2); “1 rombo más por año” (Ea4); “1 cada año” (Ea5); “por un ojo” (Ea6); “cambia cada año” (Eo9) y “cambia uno más” (Ea11).

El inciso b) se usó una tabla donde los estudiantes pudieran representar y analizar numéricamente el patrón. En esta tarea también se incorporó la predicción cercana, en este caso del término 4. Todos los estudiantes completaron de manera correcta la tabla (Figura 44).

Figura 44

Respuesta de Ea1 en la tarea 3.1 inciso b)



b) Representa en la siguiente tabla la secuencia que sigue la pulsera.

Años	Número de rombos
1	1
2	2
3	3
4	4

En el inciso c) los estudiantes escribieron la conjetura del patrón. Por lo que, identificamos cuatro conjeturas:

Recursiva descriptiva, recursiva cuantitativa y recursiva cuantitativa-cualitativa. La primera alude a frases que el énfasis en reconocer el crecimiento, por ejemplo: “seguir la sucesión” (Eo9). En *recursiva cuantitativa* son las reconocen el cambia sino el y cuánto cambia, un ejemplo: “conforme crece se le agrega un rombo” (Ea14). En la *recursiva cuantitativa-cualitativa* es una conjetura más compleja reconociendo el cambio tanto en el cómo y en el cuánto con frases como: “cada que pase otro año se pone otro rombo y la pulsera se va haciendo más larga” (Ea1).

Utilizan ejemplos. Aluden a ejemplos concretos, en estos términos específicos con énfasis en lo cualitativo: "el cuarto año y otro rombo a la izquierda" (Ea2), y el ejemplo con un énfasis cuantitativo: "en el 4to año se agrega 1 rombo más" (Ea4).

Relacional. Se reconoce la relación de y (número de términos) y la x (cantidad de rombos), por ejemplo: "según el patrón de cada número de año y rombos" (Eo3); "cada año se agrega un ojo" (Ea6) y "un rombo por cada año si tiene 5 años tendrás 5 rombos" (Eo7); "que se le aumenta un rombo cada año" (Eo10); y "cada que pase otro año se pone otro rombo y la pulsera se va haciendo más larga" (Ea1).

Incompletas. Estas conjeturas no fueron suficientemente explicitas, para entender lo que se buscaba expresar, por ejemplo: "la forma de los rombos y la cantidad que debe haber y debe haber 3 rombos" (Ea8) y "la cantidad de años" (Eo13).

4.1.3.2. Interacción en Equipo

Los estudiantes se reunieron en equipos y el encargado del equipo puso a grabar con su celular. Después, se les entregó la tarea 3.2. y 3.3. La intención fue que los estudiantes comprobaran o refutaran las conjeturas sobre el patrón de la sucesión figural a través de la predicción de términos cercanos al ponerlo en uso. El tiempo aproximado que se trabajó fue de 13 minutos.

Actividad Matemática en la Tarea 3.2

Consistía en usar la conjetura al predecir términos cercanos (Figura 29).

Equipo 1. No hubo confrontación ya que todos acordaron que la pulsera tendría 18 rombos, pero se saltaron la justificación de su respuesta.

Equipo 2. Por su parte estuvieron de acuerdo con que tendrían que ser 18 rombos y al justificar dijeron: "…a cada año se le agrega 1, ¿no?" (Ea6). A lo anterior, Ea4 responde: "¡ajá! [escribe la respuesta], ¿qué hicieron para saberlo?, pues la edad que tenía son los rombos que se le iba sumando [escribe]". Ambas hablan de la relación entre años y cantidad de rombos, sin embargo, la segunda hace explicita la relación de dependencia entre la edad y los rombos.

Equipo 3. Al igual que los demás equipos concordaron en 18 rombos y al justificar comenzaron siendo poco explícitos, se mencionó: "pues contar" (Ea8), sin embargo, Eo7 comentó que: "siguiendo el patrón porque cada año tiene un rombo, cada año se le suma un rombo", Eo9 está de acuerdo, pero Ea8 refina su primer planteamiento diciendo que "contando los años que tiene la persona [lo escribe]", de manera que hacer referencia a la relación de dependencia entre edad y cantidad de rombos.

Equipo 4. También mencionaron que son 18 rombos. No hubo interacción de otras conjeturas solo la de Eo11 "…por cada año se incluye 1 más. Entonces seria 18 de esos…". Sin embargo, al monitorear me percaté de las respuestas y les cuestioné por qué 18. Eo10 respondió: "sí, es un año un rombo, si son dos años dos rombos se van aumentando los rombos, depende de los años y los rombos", de tal manera que hizo explicita la relación de dependencia entre años y cantidad de rombos. Al final, Eo12 utilizó la predicción lejana al mencionar que "por ejemplo, si tiene 75 años serían 75 rombos".

Equipo 5. Estuvieron de acuerdo con los 18 rombos y su justificación fue que se debe a "la cantidad de años" (Eo12) y "por la explicación de la hoja" (Ea14), refiriéndose al análisis que habían realizado en la tarea anterior.

Actividad Matemática en la Tarea 3.3

Tenía la intención de que los estudiantes construyeran una postura respecto a una afirmación matemática (Figura 29), para la cual todos los equipos concordaron que estaba incorrecta mencionando lo siguiente:

Equipo 1. Primero utilizaron el ejemplo de los 18 años de la actividad anterior, a la cual todos estaban de acuerdo: “no, porque si le sumas 1 te daría 19 rombos” (Ea3) y complementaron diciendo que: “los años que tiene son los rombos” (Ea2), es decir, explicitaron la relación de dependencia.

Equipo 2. Al igual que el primer equipo, utilizaron la misma estrategia de retomar el acuerdo: los 18 años le corresponden 18 rombos, diciendo “no, porque si no tendrías, por ejemplo, si tienes 18 y le agregas 1 tendrías 19” (Ea4). Y terminaron explicando que “en cada año se le suma 1” (Ea6), de manera que recurrieron a un razonamiento recursivo cuantitativo.

Equipo 3. Usaron la predicción lejana “yo me fijé que en cada año se le suma un rombo. Haz de cuenta que el 101 año sería 101 rombos…” (Eo7). Además, “porque cada año se le suma un rombo y aquí no [refiriéndose a la tarea 3.2.], los niños de 4° dicen que el patrón para elaborar la pulsera es igual que la edad y sumarle 1, no se le tiene que sumar 1”, de tal manera que volvieron a recurrir a lo que ya tenían establecido como cierto, es decir, la tarea 3.2. e identificaron el error de la afirmación al sumarle 1.

Equipo 4. Todos los integrantes concordaron que no, pero solo Eo10 especifica que “no, porque… aquí está el patrón [señala la sucesión de la hoja], aquí está la edad y es el número de rombos y dicen ellos que van a poner uno”. Les cuestioné en qué se habían fijado y responden que, en las pulseras, así que de nuevo pregunté en qué más; Eo10 mencionó que, en la cantidad de años, de tal manera que recurren a un razonamiento relacional.

Equipo 5**.** Ambos no están de acuerdo con la afirmación porque depende de la edad y relacionaron la afirmación con otra sucesión que previamente se trabajó: "...no es como la otra que la figura B se le sumaba 1" (Eo13), por lo que usaron la relación de dependencia entre la postura de la figura y la cantidad de rombos.

4.1.3.3. Interacción Grupal

El mobiliario del salón se acomodó en forma de herradura. El tiempo aproximado de discusión fue de 3 minutos. La tarea 3.4 tenía la intención de confrontar los argumentos de los equipos para las tareas 3.2 y 3.3.

Actividad Matemática en la Tarea 3.2.

En esta tarea todos los equipos estuvieron de acuerdo que al tener 18 años la cantidad de rombos serían 18, conforme a la interacción, el razonamiento se fue robusteciendo y haciendo más explícito, como se muestra en la Tabla 27.

Tabla 27

Interacción colectiva tarea 3.2

Código	Transcripción textual
DI	3.2 Si la tradición continua y el hijo de Yuawi tiene 18 años. ¿cómo estaría la pulsera?, Ea14 usted.
Ea14	según yo 18 rombos, porque como la persona tiene 18 años, y como cada año se le agrega 1 rombo. Esa es mi explicación.
DI	¿están de acuerdo?
G	sí [en coro]
DI	¿alguien tiene una explicación diferente?

Ea8	nosotros tenemos lo mismo, pero pusimos que cada año se le agrega un rombo y como tiene 18 años ocuparía 18 rombos.
Eo7	es lo mismo que dijo Ea14.
DI	pero está afirmando lo que dijo Ea14. Ea2, ¿tú estás de acuerdo?
Ea2	[asienta con la cabeza] sí, porque también nos fijamos en eso de los años, también porque acá [señala la figura] en el segundo año tenía 2.

Actividad Matemática en la Tarea 3.3

Para la tarea que dice: "Los niños de cuarto dicen que el patrón para elaborar la pulsera es igual que la edad y sumarle 1, ¿están de acuerdo?". El grupo respondió en coro que no y entre los razonamientos que surgieron encontramos que: "porque cada año se le pone un rombo y ellos dicen que aparte le deben agregar otro" (Eo10). El equipo 3 lo apoyó, al igual que Ea1, al decir que: "porque tiene 18 años y debería tener 18 rombos la pulsera, y si le agregas uno, tendrías 19"; interrumpió Eo3 y complementando: "como si la persona tuviera 19 años" (Tabla 28). Como en la tarea anterior, esta interacción permitió robustecer y hacer explícito el razonamiento, así como construir uno colectivo.

Tabla 28

Interacción colectiva tarea 3.3

Código	Transcripción textual
Eo7	los niños de cuarto dicen que el patrón para elaborar la pulsera es igual que la edad y sumarle 1. ¿Están de acuerdo?
G	no [en coro]
DI	¿nadie está de acuerdo?
G	no [en coro]
DI	¿cómo supieron que no era cierto?
	Levantan la mano Eo10, Ea4 y Ea14
Eo10	porque cada, si es un año se le pone un año, a parte ellos dicen que se le agrega otro.
Eo7	es casi lo mismo que nosotros.
DI	Ea1, ¿usted qué opina?
Ea1	que no, porque lo mismo que Eo10, porque tiene 18 debería tener 18 y si le agregas uno tendrías 19.
Eo3	como si tuviera 19 años.

4.1.4. Momento 4

En la cuarta sesión de trabajo asistieron 14 estudiantes (7 niños y 7 niñas) y el mobiliario se colocó en forma de herradura. Este momento se llevó a cabo en dos días, la interacción individual en el día tres y la interacción en equipo y colectivo en la sesión cuatro. El objetivo de dicho momento era construir argumentos sobre el patrón de la sucesión figural a partir de la predicción de términos lejanos. El contexto de las tareas siguió con el arte Wixarika, para este caso con el tejido de manteles empleando los ojos de dios. Se trabajó con dos diseños de manteles, por lo tanto, dos sucesiones. El patrón de la primera su relación funcional $f(x) = 4x$, para el segundo $f(x) = 4x + 1$.

4.1.4.1. Interacción Individual

La tarea 4.1 (Figura 30) tenía la intención que los estudiantes analizaran la sucesión figural tanto cualitativamente como cuantitativamente a través de la comparación de sucesiones figurales para identificar la estructura del patrón y así dar explicaciones sobre el patrón. El tiempo de duración de esta primera parte fue alrededor de 23 minutos.

Actividad Matemática en la Tarea 4.1

Para el análisis del patrón del mantel 1 se hicieron las preguntas: ¿qué cambia?, ¿cómo cambia? y ¿cuánto cambia? Para la primera interrogante se categorizaron las respuestas de la siguiente manera:

- La “cantidad de rombos” (Ea1, Ea2, Ea4, Ea5, Eo7, Ea8, Eo9, Eo13 y Ea14).

- El “tamaño de la pulsera” (Ea6 y Ea11).
- Recuperando un extracto de la sucesión para mostrar el cambio, “que en el día uno hay 4 ojos de dios y en el día 2 son 8 ojos de dios” (Eo3).
- Cuantificando el cambio “se agregan 4 rombos por día” (Eo12) o bien “cada día se agrega un pedazo del primer día” (Eo10).

Con la segunda pregunta, ¿cómo cambia?, se categorizaron las respuestas de la siguiente manera:

- Cantidad de rombos y su color: “aumenta 2 rombos verdes y 2 rombos amarillos” (Ea1 y Ea5)
- Cantidad de rombos: “por día sumándole lo doble” (Eo9), “agregar 4” (Eo12) y “sumando otros 4 rombos” (Eo13) y utilizando ejemplos: “que se le suma 4 y así en el día 2 hay ocho y en el día 3 hay 12 ojos de dios” (Eo3).
- Cantidad sin especificación numérica: “cantidad de rombos que aumenta” (Ea4), “va sumando” (Ea6), “agregando más rombos” (Ea8), “multiplicando” (Ea11) y “en el número” (Ea14).
- Utilizando un ejemplo: “porque en el día 2 hay 8 rombos, y el día 3 hay 12 rombos” (Eo7)
- Utilizando la generalización cercana, “si, son 2 días, 2 pedazos, si son 45 días son 45 pedazos” (Eo10)

En la tercera pregunta, ¿cuánto cambia?, también se reconocieron los siguientes códigos:

- Cuantitativo-numérico sin importar lo cualitativo (Ea1, Eo3, Ea6, Eo7, Eo9, Ea11 y Eo13), por ejemplo: “4 rombos” (Ea6), y lo cuantitativo sin especificación numérica ni cualitativo, por ejemplo: “sumando más rombos” (Ea2).
- Cuantitativo-cualitativo (Ea4 y Ea5), con: “de dos en dos, día 1: 2 filas 4 rombos, día 2: 8 rombos, día 3: 12 rombos. Día 1: 2 filas, día 2: 4 filas, día 3: 6 filas” (Ea4).
- Ejemplificando, con: “los rombos, el día 1: 4 rombos, día 2: 8 rombos y el día 3: 16 rombos. El 2 mantel hay menos, pero en el 2 hay más que el primer mantel” (Ea8).

En el inciso b), se trabajó con el análisis del mantel 2 y se hicieron preguntas tales como: ¿qué es lo que está cambiando?, ¿es diferente la forma en cómo cambian los rombos grandes a los rombos pequeños?, ¿cómo es esa diferencia?

En la primera pregunta las respuestas se categorizaron de acuerdo con su énfasis en el patrón:

- Cuantitativo sin especificar lo numérico (Ea1, Ea2, Ea8, Eo9, Ea11, Ea13 y Ea14), por ejemplo: “cantidad de rombos” (Ea1), “cada día hay más rombos” (Ea8), etc.
- Cuantitativo numérico sin considerar lo cualitativo, por ejemplo: “el rombo que cambia de uno en uno” (Eo3) y “se agregan 5 por día” (Eo12).
- Cualitativo y cuantitativo del patrón, por ejemplo: “rombos pequeños y rombos grandes” (Ea5) y “cada día un rombo de más y 3 mini rombos” (Eo7).

- En lo cualitativo, es decir el tamaño (Ea4 y Ea6).

En la segunda pregunta se encontró que dos estudiantes (Ea4 y Eo10) no percibieron el cambio de los rombos grande y pequeños. Respecto a las demás respuestas se categorizaron de la siguiente manera:

- Con errores tanto cualitativos como cuantitativo, "cada día se pone uno grande [rombo] y 4 [rombos] pequeños" (Ea1), "en el primer rombo los pequeños son 4 y en la segunda 7 deberían ser 8 y el [rombo] grande aumenta 1" (Ea5) y "que en uno se agregan 4 y en otro 5" (Eo12).
- Énfasis en la parte visual de los rombos, en frases como: "en el tamaño", "cantidad", pero sin especificar el cuánto ni la organización figural (Ea2, Ea4, Ea6, Ea8, Eo10, Ea11, Eo13 y Ea14).
- Utilizando ejemplos "en el día uno hay un rombo grande y cuatro rombos pequeños, día 2: 2 grandes y 7 chicos" (Eo3).
- Utilizando la recursividad, "…el rombo grande suma uno y el chiquito 3" (Eo7).

En el inciso c, se empleó el uso de la tabla para que los estudiantes pudieran analizar las sucesiones con el apoyo de otra herramienta, así como para fomentar la estrategia de comparación entre sucesiones con el objetivo de identificar qué se mantiene estable y qué cambia. En el análisis de las sucesiones (Figura 45) nos percatamos de que con el mantel 1, todos los estudiantes lograron reconocer el patrón; por el contrario, en el mantel 2 solo lograron identificar el patrón quienes emplearon la estrategia de comparación de sucesiones al distinguir lo que cambia entre sucesiones, es decir, un rombo más (Ea4, Ea5, Ea9 y Eo12) o bien al utilizar la estrategia de recursividad al contemplar que no hay cambios, ya que ambas sucesiones van aumentando 4 (Eo7 y Eo13). Para ambos patrones se enfatiza la característica cuantitativa del patrón.

Figura 45

Concentrado del análisis del inciso c de la tarea 4.1

<table>
<tr><th rowspan="2">Código</th><th colspan="2">Tabla</th><th colspan="2">Estrategia de comparación</th></tr>
<tr><th>Secuencia A</th><th>Secuencia B</th><th>¿cómo es la diferencia?</th><th>¿en qué se fijaron?</th></tr>
<tr><td>Ea1</td><td rowspan="14"><table><tr><th>Día</th><th>N° rombos</th></tr><tr><td>1</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>8</td></tr><tr><td>3</td><td>12</td></tr><tr><td>4</td><td>16</td></tr></table></td><td rowspan="4"><table><tr><th>Día</th><th>N° rombos</th></tr><tr><td>1</td><td>5</td></tr><tr><td>2</td><td>10</td></tr><tr><td>3</td><td>15</td></tr><tr><td>4</td><td>20</td></tr></table></td><td>Mantel 1: 4 en 4
Mantel 2: 5 en 5</td><td>Más rombos en el mantel 2</td></tr>
<tr><td>Ea2</td><td>Suman</td><td>Acomodo y cantidad</td></tr>
<tr><td>Eo10</td><td>No hay diferencia.</td><td>Patrón</td></tr>
<tr><td>E11</td><td>Se multiplican</td><td>Tamaño de los rombos</td></tr>
<tr><td>Ea4</td><td rowspan="7"><table><tr><th>Día</th><th>N° rombos</th></tr><tr><td>1</td><td>5</td></tr><tr><td>2</td><td>9</td></tr><tr><td>3</td><td>13</td></tr><tr><td>4</td><td>17</td></tr></table></td><td>El mantel 2 aumenta 1 rombo.</td><td>Acomodo y cantidad</td></tr>
<tr><td>Ea5</td><td>Mantel 2 tiene uno más.</td><td>Cantidad</td></tr>
<tr><td>Eo7</td><td>No hay diferencia.</td><td>Ambas se les suma 4.</td></tr>
<tr><td>Ea8</td><td>El primero se suma 4 y el segundo se agrega 1.</td><td>Cantidad y acomodo</td></tr>
<tr><td>Ea9</td><td>El segundo le gana por 1.</td><td>Cantidad</td></tr>
<tr><td>Eo12</td><td>Un rombo de diferencia.</td><td>Cantidad</td></tr>
<tr><td>Eo13</td><td>No hay diferencia.</td><td>Son iguales</td></tr>
<tr><td>Ea14</td><td><table><tr><th>Día</th><th>N° rombos</th></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>4</td><td>4</td></tr></table></td><td>En el mantel 1 se agregan más rombos.</td><td>Los rombos que se agregan por día.</td></tr>
<tr><td>Ea6</td><td><table><tr><th>Día</th><th>N° rombos</th></tr><tr><td>1</td><td>5</td></tr><tr><td>2</td><td>9</td></tr><tr><td>3</td><td>10</td></tr><tr><td>4</td><td>14</td></tr></table></td><td>El mantel 1 se suma 4 y el mantel 2 se suma 3.</td><td>Cuantos rombos se suman.</td></tr>
<tr><td>Eo3</td><td><table><tr><th>Día</th><th>N° rombos</th></tr><tr><td>1</td><td>1 y 4 chicos</td></tr><tr><td>2</td><td>2 y 7 chicos</td></tr><tr><td>3</td><td>3 y 10 chicos</td></tr><tr><td>4</td><td>4 y 14 chicos</td></tr></table></td><td>Rescata la cantidad de rombos en el segundo día de ambas secuencias.</td><td>Rescata la cantidad de rombos en el primer día de ambas secuencias.</td></tr>
</table>

Actividad Matemática en la Tarea 4.2

En la tarea 4.2 (Figura 31) la intención fue que los estudiantes, después de haber realizado el análisis de las sucesiones, pudieran construir una conjetura sobre el patrón que siguen las sucesiones figurales.

Las conjeturas se codificaron según el énfasis expresado respecto al patrón (Figura 46). En el caso de Eo13, la expresión escrita carece de elementos, por lo tanto, no se codificó. Las marcadas en amarillo corresponden aquellas que rescatan solo la parte cuantitativa del patrón, para el amarillo claro representa la cantidad correcta y el amarillo oscuro las que no identificaron correctamente la cantidad. Por su parte, en color verde, el énfasis está en la parte cuantitativa, pero sin expresión numérica. En gris se señalan conjeturas que retoman ejemplos de los términos de la sucesión para describir el patrón. El azul claro representa aquellas conjeturas que no solo rescataron la parte cuantitativa-numérica sino también la cualitativa, es decir, la parte figural o estructural del patrón, y el azul oscuro son aquellas conjeturas que mencionan la parte cualitativa y cuantitativa pero su patrón no corresponde con las sucesiones. Por último, el rosa claro se utilizó para indicar el razonamiento de comparación de sucesiones y el rosa oscuro para reconocer el crecimiento, con excepción del primer término.

Figura 46

Extracto de la tabla de análisis de la tarea 4.2

Código	Conjeturas de la sucesión A	Conjeturas de la sucesión B
Ea1	cada día le tiene que sumar 4 rombos	cada día tiene que sumar 4 rombos chicos y uno grande.
Ea2	sumarle 4 rombos cada día	sumarle 4 chicos y uno grande
Eo3	en la primera propuesta son 4 rombos y cada día se le suman 4 rombos	que, en la segunda, cada día son 1 rombo y 4 rombos chicos y el segundo día son 2 rombos y 7 chicos.

Ea4	se le aumenta más por día y hay que seguir un patrón	que su forma es diferente y hay que ver la cantidad que se le suma por día.
Ea5	aumenta 2 más, en total y 2 verdes y 2 amarillas	que aumenta 4 rombos más y si son 2 rombos grandes solo es un pequeño del medio para los 2 rombos.
Ea6	a cada día se le suman 4 rombos	que a cada día se le suman 3 rombos
Eo7	amigo es que se le va sumando 2 amarillos y 2 verdes en cada día	es casi lo mismo que el primer patrón solo que se le suma 3 rombos chiquitos y un grande.
Ea8	que le ocupa ir agregando 4 en forma vertical	que le ocupa ir agregando cada 5, 4 chicos y 1 grande.
Eo9	solo se cuentan 4 rombos en una posición	solo busca un acomodo diferente al mantel uno y súmale uno.
Eo10	1 día son 4 pedazos y 2 días son 8 pedazos y así sucesivamente.	que 1 día tiene 5 rombos y 2 día son 10 rombos y va sumándose 5 rombos por día
Ea11	multiplicando por el número 4	multiplicando por 5
Eo12	que se agregan 4 por día	que se agregan 4 por día
Eo13	por los rombos	la cantidad de rombos
Ea14	por cada día le debes agregar 4 rombos	por cada día debes agregar un rombo grande y 3 pequeños, pero el primer día es un rombo grande y 4 pequeño

4.1.4.2. Interacción de Equipo

Este momento se realizó en la sesión 4, por ello se entregó a los estudiantes las tareas 4.1 y 4.2 que previo había realizado. La indicación fue que leyeran sus respuestas para continuar con la actividad de equipos, algunos estudiantes pidieron permiso para corregir. Se conformaron los equipos y se les entregó la tarea 4.3 y 4.4, y el material manipulable para construir las sucesiones (rombos de colores correspondientes a las sucesiones).

La tarea 4.3 (Figura 33) tenía la intención de que los estudiantes compartieran diferentes conjeturas y se co-construyera una conjetura. Por su parte, la tarea 4.4 (Figura 34) se pretendía que los estudiantes usaran la conjetura del patrón que construyeron a partir de la actividad de generalización lejana. Para ambas se esperaba que los estudiantes buscarán la mejor manera de expresar sus ideas para ser expuestas a los otros, y posiblemente surgiera el argumento de sus razonamientos. La duración aproximada de dichas tareas fue de 30 minutos.

Actividad Matemática en la Tarea 4.3 y 4.4

Equipo 1. Para la tarea 4.3 el equipo compartió la conjetura del patrón encontrado en el mantel 1, y coincidieron en sumar o poner 4 rombos. Esta evolucionó conforme conversan el patrón del mantel 2, pues se percataron que no estaban hablando del cómo cambia, por ello especificaron que deben acomodar: 2 rombos amarillos arriba y 2 verdes abajo.

En el mantel 2 todos habían coincidido en ponerle 5 rombos, sin embargo, me percaté que Eo3 solo había rescatado un extracto de la sucesión, así que le pedí que explicará qué fue lo que hizo. Lo que permitió que Ea2 se diera cuenta que Eo3 era más explícito en la forma de acomodar los rombos, es decir, la parte cualitativa del patrón. Eo3 afirmó, pero se quedó dudoso y le dijo que no daría, pero no lo tomaron en cuenta y anotaron que el patrón es sumarle 5 rombos: 4 pequeños y 1 grande (Tabla 29).

Tabla 29

E1. Extracto de la discusión de la tarea 4.3

Código	Transcripción textual
Ea1	que cada día le tiene que poner 4 rombos
Ea2	yo le puse sumarle 4 cada día.
Ea1	es lo mismo.
Ea2	¿le pongo sumarle 4 rombos cada día?
Eo3	yo puse casi como Ea1, pero el mío dice son 4 rombos y cada día hay que sumarle 4 rombos.
DI	ahora platiquen del 2
Ea1	cada día le tiene que poner 5 rombos.
Ea2	yo puse lo mismo
Eo3	yo igual.
DI	¿qué le pusiste tú [dirigiéndose a Eo3]?

Eo3	que el día 1 son 1 rombo grande y 4 chicos y el segundo día son 2 rombos grandes y 7 chicos.
Ea1	sí, es lo mismo, pero yo no puse como sumarle los cuadritos, tu explicaste más a detalle
Ea2	sumarle 5 cada día.
Eo3	sí, son 5, 4 chicos 1 grande
Eo3	dices que son 5 pero si le sumas de 5 en 5 no te va a dar igual.
Ea1	construyan en equipo el mensaje que darían para que los niños de sexto grado puedan construir los manteles. O sea, qué mensaje les daríamos para que construyeran el mantel 1, este.
Eo3	¡ah! el del 1, que el primer día son 4 rombos y se le suma 4 rombos.
Ea1	que cada día se le suma 4 rombos.
Eo3	sí, el primer día son 4 rombos el segundo día son 8
Ea2	yo creo que más fácil…
Ea1	cada día le deben poner 4 rombos.
Eo3	sí
Ea2	[escribe el mensaje] le ponemos que pongan 2 arriba y 2 abajo
Ea1	¡ajá! 2 amarillos y 2 verdes.
Ea2	Mantel 2
Ea1	Ponerle: cada día se pone 1 grande y 4 chicos.

En la tarea 4.4 para poder comprobar la afirmación de la tarea, los estudiantes utilizaron la multiplicación, al multiplicar 70 (que corresponde a los días) por 4 que es el patrón que encontraron y confirman la afirmación. Al hacer uso del patrón del mantel 2, no les dio el resultado que afirman en la tarea (Tabla 30).

Tabla 30

E1. Extracto de la discusión en la tarea 4.4

Código	**Transcripción textual**
Ea2	hay que multiplicarlo
Ea1	70 x4
Eo3	28
Ea2	[riendo] 28. El mantel 1 si está bien como dice, pero el 2 no.
Ea2	no, ya lo multipliqué hasta por 4 y no.
Ea2	el día 70 el mantel 1 dice que tendrá 280 y sí está bien, pero en el mantel dice 281 y no
Eo3	¿cuánto te da?

Ea2	350 pues no, no. Listo ya está.

Cuando terminaron pasé a revisar y me di cuenta de su error en el mantel 2, y pregunté cómo estaban construyendo el mantel 2. A partir de compartir sus conjeturas del patrón, los encaminé para que usaran el patrón y se dieron cuenta que no funcionaba, a lo que propusieron que el mantel sigue un patrón donde el día 1 comienza con 5 rombos y después el crecimiento va 4 en 4. Lograron acordar cómo crece, es decir, 3 rombos pequeños y 1 grande. Al final, borraron el mensaje que tenían escrito en la actividad 4.2 por esta nueva conjetura (Tabla 31).

Tabla 31

E1. Extracto de la discusión en la reformulación del patrón del mantel 2

Código	Transcripción textual
DI	¿qué días estás haciendo ahí?
Eo3	el tres
DI	¿cómo sabes que es el día 3 Eo3?
Eo3	porque hice en el primer 1 es 4 rombos chicos y 1 grande, y yo le estaba sumando 4 chicos y 1 grande y aquí es el día 2... es que yo le sume 4 y 4 me da 8 pero estoy mal
Ea2	¡ah! Entonces, sí estaba mal porque en esta [mantel 2] puse que iba de 5 en 5
DI	pero el día siguiente están estos [señalo los rombos que agregaron] y entonces sí seguimos el patrón de ella en el segundo día, ¿cuánto sería?
Eo3	10
DI	¿y tenemos 10?
Eo3	no
Ea1	al principio es de 5 y después de 4 en 4
Eo3	de tres, ¿no?
Ea2	no, sí va de 4 en 4, porque si fuera de 10 tendría que ser estos dos [señala el día 1] para que fuera 1, 2, 3... 10, y ni modo que los pongan juntos.
Ea1	al principio del día son 5 y después… sabes que vamos a hacer en la segunda, en el primer día [cuenta]
Ea2	pues sumarle 4
Eo3	sumarle 4 rombos chicos y 1 grande.
Ea2	no, si le hiciéramos así ya sería 5 y es lo mismo de acá.
Eo3	4 chicos y 1 grande, el grande no es igual o ¿lo vez que es igual?

Ea1	en el día 1 si son 5 pero ya los demás días van de 4 en 4. Son tres chicos sin este [señala el que une con el rombo grande] 1, 2, 3, 4. 1, 2, 3, 4, 5.
Ea2	¿cómo le ponemos?
Ea1	en el primer día son 5 y los demás vas poniéndole 4 en 4.

La confrontación surgió al emplear la conjetura, si multiplicar 70x4 y sumar 5, o 69x 4 y sumar 5. Eo3 no entendía qué significaba el 5 que estaban sumando por lo que Ea1 y Ea2 justificaron su razonamiento, pero Eo3 no terminó convencido (Tabla 32).

Tabla 32

E1. Extracto de la discusión en la tarea 4.3, con respecto al mantel 2.

Código	**Transcripción textual**
Ea2	hay que hacerlo de nuevo, 70 por ¿el primero cuánto trae?, ¿4 verdad?
Ea1	280 más 5, ¿no?
Eo3	¿por qué más 5?
Ea1	¿ahí cómo le vamos a hacer? 69 por 4 y le sumamos otro 5.
Ea2	pues sí, 4
Ea1	porque si le sumáramos otros 5 serían de otro día.
Ea1	69 por 4 y ya sumas 5
Ea2	70 x 4 de la figura 1 y de la otra si multiplicamos 70 x 4 más 5 se le sumaría otro día, entonces 69 x4 da 276 más el 5
Ea1	que es de otro día ya sería los 70 días, serian 281
Eo3	es que no sé de dónde sacan el 5
Ea1	que no dijimos que el primer día tenía 5 y los demás van de 4 en 4.
DI	¿qué hicieron?
Ea2	en esta [del trabajo de Ea1 del primer mantel] 70 x 4, que fueron los cuatro de estos y los 70 de los 70 días [repite Ea1: 70 días] que ellos dijeron y no salieron 280 y aquí decía igual y en este lo hicimos por 69 porque el primer día es de 5 y los demás de 4, y si le pusiéramos 70 x4 y después le sumáramos 5 sería otro día 71, entonces le multiplicamos 69 x 4 y le sumamos otros 5 y nos dio este [281], y es el que dice aquí.

Equipo 2. Para la tarea 4.3 el equipo compartió la conjetura del patrón encontrado en el mantel 1, donde concordaron en agregar 4 rombos; sin embargo, Ea5 agrega la parte

cualitativa del patrón, es decir, “dos verdes y dos amarillos o sea 4 en total…”. Para ponerse de acuerdo, las integrantes del equipo explican su idea, lo que permitió que se dieran cuenta qué le faltaba a cada una para lograr llegar a un acuerdo y así escribir la conjetura colectiva (Tabla 33).

Tabla 33

E2. Extracto de la discusión 4.3 con respecto al mantel 1

Código	**Transcripción textual**
Ea4	por día se van sumando más rombos, esa es la de Ea6, que por día se van sumando más rombos. Si, Ea6, pero te hace falta algo más.
Ea6	¿qué le hace falta?
Ea4	le falta seguir un patrón
Ea5	que se le va aumentando de 4 y tienes que seguir…
Ea4	[interrumpe] va aumentando de 4 y tenemos que seguir el patrón, está completa. La mía, seguir un patrón y ver cuánto se le aumenta por día, ¿cuál elegimos?
Ea5	yo voto por la de Ea4
Ea4	yo por la de Ea5
Ea6	yo también.
Ea4	la tuya Ea5
Ea4	… es que aquí hicimos una idea, quedó la de Ea5, pero no sé, va aumentando de 4 y tenemos que seguir un patrón. A tu idea se me ocurre añadirle algo, ver la posición de la que está acomodada de la figura.
Ea5	¡Ah! sí.
Ea4	Porque, por ejemplo, que ponen este así, es diferente. Así quedó, van aumentando de 4 y tenemos que seguir el patrón y ver la posición de la figura.

Para el mantel 2 comenzó Ea6 con su conjetura cuantitativa-errónea del cambio, pero ello permitió a Ea5 y Ea4 analizar el cambio de los rombos pequeños y del rombo grande para llegar a la conjetura que se agregan 3 rombos chicos y 1 grande. Cada integrante compartió su idea y votaron por cual les parecía mejor, que fue la de Ea4 como se muestra en Tabla 34.

Tabla 34

E2. Extracto de la discusión 4.3 con respecto al mantel 2

Código	**Transcripción textual**
Ea4	sí, y de aquí, ¿cuánto se le va aumentando?, de tres, ¿no?
Ea5	en el primero son 4 y en el segundo 7 chiquitos, pero deberían de ser 8, pero porque este lo comparten los dos.
Ea4	¡ajá!, como una unión
Ea5	¡ajá!, y de estos de grandes se le suma…
Ea4	[interrumpe] 1
Ea5	1, ¿y de los chiquitos?
Ea4	3
Ea5	3
Ea4	porque uno ya tiene el conector, pienso yo.
Ea5	se le aumenta 3
Ea6	en la segunda [refiriéndose al mantel 2], ¿son 3 chiquitos y uno grande, ¿no? 4
Ea4	sí, así está bien.
Ea4	ok, cada día se le va sumando 3 y elige un patrón, esa es la de Ea6 que no le entendí**,** Ea5 se le aumenta 1 grande y 3 pequeños y seguir el patrón y como están acomodados y la mía es... el acomodo de la figura, pero me gustó tu idea: seguir el patrón y ver cuantos se le aumenta, 1 grande y 3 chicos y el acomodo de la figura, esa es la mía, es como la tuya [refiriéndose a Ea5]
Ea5	a ti Ea6, ¿cuál te gusto?
Ea6	el de Ea4
Ea5	a mí también

Para la tarea 4.4 (Figura 34) se requería de afirmar o refutar una afirmación para ello las estudiantes decidieron multiplicar el número del día del mantel por la conjetura del patrón, en el caso del mantel 1, por 4. Lo que permitió afirmar que para el día 70 la cantidad de rombos sería 280. Con el mantel 2, emplearon el mismo razonamiento, es decir, multiplicaron los días por la conjetura del patrón, en este caso 3 rombos chicos y 1 grande sumaban 4 así que se multiplicó por 4, por lo que 70 por 4 resulta 280, no 281 como se especifica en la afirmación, por lo tanto, no estuvieron de acuerdo (Tabla 35).

Tabla 35

E2. Extracto de la discusión 4.4

Código	Transcripción textual
Ea5	multiplicar 70
Ea4	en el mantel 1 se le agrega 4, 70x4
Ea5	70 x 4
Ea4	280
Ea5	¿sí está bien?
Ea4	sí, porque mira 70 x 4= 0 y 4x7, 28, una está bien. Ahora el mantel 2, 70 ¿Cuántos se le van agregando?
Ea5	4 en total
Ea4	4
Ea5	porque se va agregando 1 grande y 3 chiquitos.
Ea4	7 x 4, 28, maestra aquí en total en el segundo se le agrega 4, 3 chicos y 1 grande, en la primera sí estamos de acuerdo que se le agregan 280 pero en la segunda no.

Equipo 3. Para la tarea 4.3 los estudiantes comenzaron a compartir sus conjeturas sobre el patrón del mantel 1, pero Eo7 se percató que no estaban leyendo lo que tenían escrito por lo que pide que lo hagan. Eo9 pudo refinar su conjetura durante la interacción ya que al principio solo tenía escrito “seguir el patrón” y al compartir, añadió que es agregar 4. Por su parte, la conjetura de Ea8 fue cuantitativa y cualitativa al tener escrito que: “agregaría 4 y en forma vertical”, también uso la generalización cercana, en este caso, en predecir el día 4. Por otra parte, Eo7 compartió su conjetura cuantitativa-cualitativa y dice que “se agregan 2 rombos amarillos y 2 rombos verdes en forma vertical”. Lo que permitió a Eo9 darse cuenta de que no contempló la parte cualitativa del patrón. El equipo no llegó a un consenso y dejaron a Ea8 escribir (Tabla 36). La conjetura escrita quedó de la siguiente manera: “si llego el primer día de trabajo, ocupo para empezar poner 4 rombos, el 2 día agregar 4 a los del primer día y el 3 día agregarle al 2 día otros 4 y le daría 12 rombos si fuera a hacer un mantel 4 rombos cada día”.

Tabla 36

E3. Extracto de la discusión para ponerse de acuerdo en la escritura del patrón del mantel 1 en la tarea 4.3

Código	Transcripción textual
Eo7	¿qué le podríamos poner a mantel 1? O denme ideas cada quien.
Ea8	me lo puedes volver a leer Miguel.
Eo7	no, cómo le dirías a tu amigo en el mantel 1, solo que aquí tomando en cuenta a tu amigo.
Ea8	sí es el día 1, ocupa entregar 4 rombos y ya, ¿lo puedo anotar?

Para el mantel 2, realizaron lo mismo, comparten sus conjeturas, pero ahora acordaron en escribir la conjetura de Eo7 (Tabla 37) quedando como: “es casi lo mismo que el 1 patrón solo que se le suma 3 rombos chiquitos y un grande”.

Tabla 37

E3. Extracto de la discusión para ponerse de acuerdo en la escritura del patrón del mantel 2 en la tarea 4.3

Código	Transcripción textual
Eo7	¿quién hace la del mantel 2?
Eo9	primero hay que explicar.
Eo7	es casi lo mismo que el patrón 1 solo que se suma 3 rombos chiquitos y 1 grande.
Ea8	yo puse también como Eo7, pero yo puse le ocuparía agregando 5 cada día, en el día 1, 5 rombos.
Eo9	¿cómo?
Ea8	1 grande y 4 chicos
Eo7	pero es solo leer cómo lo explicaste.
Ea8	que le ocupa agregar cada 5
Eo9	solo busca un acomodo diferente al mantel 1 y súmale 1.
Eo7	¿quién pone el del mantel 2 o lo hacemos entre todos?
Eo9	entre todos yo opino.

Para la tarea 4.4 que implica tomar postura sobre una afirmación ya sea para afirmar o refutar los estudiantes utilizaron la multiplicación de los días por la conjetura del patrón, en el caso del mantel 1, fue 70x4, que resulta 280. En el mantel 2, hicieron la multiplicación de 69 días por 4 y se le sumaba 5 del primer día, ya que se dieron cuenta que el primer día no se comporta igual que los demás días, así fue como les dio 281 rombos, por lo tanto, afirmaron la tarea (Tabla 38).

Tabla 38

E3. Extracto de la discusión en la tarea 4.4

Código	Transcripción textual
Eo7	haciendo una multiplicación
Eo9	están de acuerdo, ¿no verdad?
Eo7	no sé, aun no la he hecho.
Ea8	70 x4
Eo7	no, es 69 x 4
Eo9	sí, 69 x4
Eo7	¿cuánto era?
Eo9	6x4 24
Ea8	276 [insiste]
Eo7	más 5
Eo9	Serían 281.
Eo7	sí, sería 281. Pero ¿cuál sería?
Ea8	esta [mantel 1] es 70 x4 son 280, aquí [mantel 2] sería 69 x 4 …
Eo7	pero cuál es la primera o la segunda.
Ea8	esta, la segunda. La primera es 280
Eo7	280
Eo9	entonces, sí estamos de acuerdo.
Eo7	¿cómo lo supieron? Haciendo una multiplicación.

Equipo 4. Para la tarea 4.3 compartieron sus conjeturas del mantel 1 y se percataron que es lo mismo por lo que deciden que la conjetura colectiva se agregue solo lo compartido, es decir, “4 pedazos por día o es la tabla de multiplicar del 4” (Tabla 39).

Tabla 39

E4. Extracto de la discusión al compartir sus conjeturas del mantel 1 para la tarea 4.3

Código	Transcripción textual
Eo10	que un día equivale a 4 pedazos de mantel y 2 son 8.
DI	¿Tú Ea11?
Ea11	multiplicar por el número 4
DI	¿y tú, Eo12?
Eo12	¡ah! que se agrega 4 por día.
DI	¿es lo mismo que todos?
E4	sí

Para el mantel 2, también compartieron sus conjeturas, sin embargo, Eo12 confrontó la conjetura de Ea11, pero tanto Eo10 y Ea11 no consideraron su razonamiento y Eo12 ya no insistió y terminaron escribiendo que la conjetura es “5 pedazos por día o es la tabla de multiplicar del 5” (Tabla 40).

Tabla 40

E4. Extracto de la discusión al compartir sus conjeturas del mantel 2 para la tarea 4.3

Código	Transcripción textual
DI	mantel 2 ¿qué pusieron?
Eo12	4 rombos.
Ea11	yo le puse multiplicándolo por 5
Eo12	1, 2, 3 y 4, este se queda igual 1, 2, 3 y 4 [contando los rombos]
Ea11	yo le puse multiplicándolo por 5.
Eo12	el primero es 5 y después es 1, 2, 3 y 4
Ea11	porque 1 x 5, 5
Eo12	1, 2, 3, 4 [señala cada rombo agregado]

En la tarea 4.4 se tenía que afirmar o refutar una afirmación, para ello los estudiantes usaron la multiplicación de los días por la conjetura del patrón, en este caso 70x4, pero presentaron un error en su multiplicación, aunque utilizaron la descomposición de los números al multiplicar 7x4, aun siguieron con error hasta que Ea11 utilizó un razonamiento verdadero para ella: 7x3 son 21 y le suma 7, por lo tanto, da 28. Con ello, el equipo logró afirmar la primera parte de la afirmación motivo por el cual fue suficiente para validar, sin embargo, dejaron de lado la segunda sucesión (Tabla 41).

Tabla 41

E4. Extracto de la discusión en la tarea 4.4

Código	**Transcripción textual**
Eo10	Si los niños de 6° dicen que el día 70 el mantel uno tendrá 280 rombos y el mantel dos tendrá 281 ¿Están de acuerdo? ¿70 x4?
Ea11	480
Eo10	son 32
Ea11	70x4 son 480
Eo10	no, 320
Ea11	no
Eo10	sí, mira 4x0, 0
Ea11	maestra ¿cuánto es 70x 4?
Eo10	¿son 320, ¿no?
DI	no sé, ustedes háganlo, pueden rayar la hoja no pasa nada.
Eo12	puedo consultar mi amiga la calculadora.
DI	háganlo, multiplíquenlo.
Eo12	listo, le puse que no ¿cómo lo supieron? Porque lo multiplicamos y nos dio otro resultado ¿sí o no?
Ea11	también te estas equivocando tú ¿cuánto?
Eo10	4x70 o 70 x4
Ea11	70 x4, son 0, 4x7 ¿cuánto es 4x7?
Eo12	32
Eo10	320, ya vez, ¿cómo lo supieron? Porque lo multiplicamos y nos dio otro resultado.
Ea11	no son 32, son 28, por eso te estaba saliendo mal. Ve si 3x7 son 21,
Eo10	3x7
Ea11	ya sé 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, si me entiendes, ¿no? Ya son 4 veces. Con razón, dije ya no me la sé o qué.

Equipo 5. Para la tarea 4.3 compartieron sus conjeturas tanto Eo13 y Ea14, lo que permitió que las conjeturas fueran refinándose y siendo más explícitas tanto en la parte cuantitativa y cualitativa del patrón para así configurar una del equipo (Tabla 42).

Tabla 42

E5. Extracto de la discusión en la tarea 4.3

Código	Transcripción textual
Eo13	imagina que el señor Yuawi te contrata a ti y tu amigo como sus ayudantes. ¿Cómo le explicarías a tu amigo que funciona el patrón de la primera propuesta de mantel? Por los rombos
Ea14	y la segunda
Eo13	…la cantidad de rombos.
Ea14	que sencillo sigo yo…por cada día agregar 4 rombos. ¿Cómo le explicarías a tu amigo que funciona el patrón de la segunda propuesta de mantel? Por cada día hay que agregar 1 rombo grande y 3 pequeños pero el primer día es 1 rombo grande y 4 chicos. ¿Cuál crees que esta más completo? aún no entendiste, ¿verdad?
Eo13	por eso ya lo hiciste ahora el mensaje para que lo entiendan, qué mensaje podemos decirle ¿Qué podríamos decirles?
Ea14	[lee la indicación] ¿Cómo el mensaje?
Eo13	lo que le podríamos decir. Pongan dos hileras de 2 rombos cada uno
Ea14	el mensaje que quiere que demos es sobre cómo hacer las cosas.
DI	¿qué patrón sigue la secuencia?
Eo13	yo me imagine que pongan dos hileras de dos rombos cada uno en el primer rombo.
DI	pero ¿qué pasa con el segundo día?
Eo13	que en el segundo día pongan dos hileras de 4 rombos cada uno, una amarilla y una verde.
Ea14	creo que ya tengo algo… [escribe y lee en voz alta] por día agrega 2 rombos amarillos y 2 verdes. ¿Te parece? …en el segundo mantel en el primer día agregas 1 rombo grande y 4 pequeños, y después 1 grande y 3 pequeños.

En la tarea 4.4 para el mantel 1 lograron estar de acuerdo y Eo13 justificó su razonamiento mostrando que multiplicó los 70 días por 4 que es el número de rombos que se añaden, a lo que Ea14 confirmó (Tabla 43)

Tabla 43

E5. Extracto de la discusión en la tarea 4.4

Código	Transcripción textual
Eo13	en el día 70, está correcto.
Ea14	¿cómo sabes?
Eo13	porque en 70 días el mantel 1 tendrá en total 220 rombos
Ea14	¿seguro?

Eo13	Haber préstamelo [lee la indicación] ¿70 x4?
Ea14	yo digo que no
Eo13	que sí, 70 x4 ¿quieres ver en la calculadora? 70x4, 280
Ea14	entonces sí, pero la segunda da 281.

El conflicto se dio en el segundo mantel ya que Eo14 insistió que son 284, al justificar surgió la conjetura que era multiplicar 70x4, pero Eo13 mostró la inconsistencia utilizando el término 2 donde solo hay 7 rombos chicos, pero Ea14 identificó que el rombo grande no lo están contado, por lo tanto, Eo3 afirmó que entonces sí es por 4. Sin embargo, Ea14 no estuvo convencida del razonamiento, pero Eo13 insistió y escribió en la hoja (Tabla 44).

Tabla 44

E5. Extracto de la discusión para la escritura en la tarea 4.4

Código	Transcripción textual
Eo13	¿por qué 281? ¡ah sí!, ¡ah, no, mijita!: se suma 4, da 284.
Ea14	¿cómo lo supieron?
Eo13	¡Ah no!, no estoy de acuerdo…70 por, puedes quitar tu mano
Ea14	4, ¿no?
Eo13	no mira aquí: son 4, y aquí tendría que ver, 8 y son 1, 2, 3… 7, ya vez.
Ea14	¿y el grande?
Eo13	¡ah!, pues si es más el grande serían 5. Así que aquí son 8. ¡Ah!, ta todo difícil.
Ea14	yo digo que sí
Eo13	no, ya te comprobé que son 270… ¿cómo lo supiste? Multiplicándolo.

4.1.4.3. Interacción Colectiva

El mobiliario del salón se acomodó en forma de herradura. El tiempo aproximado de discusión fue de 15 minutos. La tarea 4.5 tenía la intención que cada equipo argumentara la veracidad de sus conjeturas y el grupo le otorgara la validez de dichas conjeturas. El equipo 3 comenzó con el mantel 1 y su razonamiento fue apoyado por los otros equipos (Tabla 45).

Tabla 45

E3. Extracto de la discusión colectiva en la tarea 4.5

Código	Transcripción textual
Ea8	no, 4 x70 [hace la multiplicación en el pizarrón]
Ea1	28 [indicando la multiplicación 4x8]
Ea8	son da 280
DI	¿saben por qué hicieron eso?
G	sí
Ea8	porque en el primer mantel se le agregaban cada 4 y multiplicamos 70 x 4, son los 4 rombos que se le agregaban
DI	Ea14, ¿ustedes qué opinan?
Ea14	sí
DI	¿ese era el patrón?
Ea5-Ea6	sí
Eo10	sí, ese resultado también nos dio.

Actividad Matemática en la Tarea 4.5

Para el mantel 2 se generaron momentos de confrontación, validación, contraejemplos, reformulación de razonamiento y reflexión. Los razonamientos que surgieron eran del tipo relacional, entre un término menos al solicitado por el crecimiento, más el término diferente. El segundo de comparación, entre sucesiones, para determinar lo que se mantiene estable y lo que cambia.

La postura del equipo 3 fue a favor de la afirmación porque mencionaron que multiplicaron 69x4 y le sumaron 5, pero Ea14 cuestionó la razón del 69, si son 70 días. Eo7 le justificó que la primera figura tiene 5 rombos, pero Ea14 mencionó que son 4. Pero el equipo 1 apoya el razonamiento del equipo 3, pues ellos identificaron que el primer término tiene 5 y los demás términos su incremento es de 4 rombos, y añadieron que si pusieran 5 rombos la figura no seguiría el patrón cualitativo. Ea14 no estaba convencida por lo que pedí al equipo 3 que utilizará el material que eran imágenes imantadas de los rombos de cada sucesión para utilizar en el pizarrón.

Eo7 reformuló su razonamiento y se apoya en el material y logró convencer a Ea14, Eo10 y a Ea6. Por el contrario, el equipo 2 no compartió la postura y dijeron que ellas pusieron que no estaban de acuerdo con la afirmación porque habían multiplicado 70x4, por lo que se cuestionó cuál era lo correcto. El equipo 1 y Ea10 apoya el razonamiento del equipo 3. También, Eo13 lo apoyó y mencionó que utilizando una estrategia recursiva se llegaría.

Eo7 utilizó un contraejemplo con el razonamiento del equipo 2, pues quita un rombo de la figura y mostró como no sigue el patrón cualitativo. Por su parte, Eo12 da un contraejemplo, si la figura aumentara 5 rombos, se debería llevar un rombo más en las uniones entre los rombos grandes, por lo tanto, no sigue con el patrón cualitativo; mientras Eo7 muestra el razonamiento con el material manipulable. Ea8 apoyó diciendo que un solo rombo chico conecta a dos grandes. Al final Ea5 terminó convencida del razonamiento que mostraron sus compañeros.

El segundo razonamiento se sustentó a partir de la comparación entre sucesiones, a lo que el equipo 3 concluyó que para obtener los términos del mantel 2 se pueden obtener a partir del mantel 1 solo sumándole 1 rombo. En primera instancia, el razonamiento no fue seguido por sus compañeros por lo que pidieron a Eo7 que fuera más lento y paso a paso. Por lo que, Eo7 refinó su razonamiento y lo validó Ea14 y Ea2, esta última aportó una reflexión del error de su primer razonamiento, 70x5, el cual no daba la cantidad de rombos y el patrón cuantitativo era 4; solo el primer término tenía la excepción de tener 5 rombos, por ende, se debía quitar un día para sumarle el valor del primer día.

4.2. Etapa 2: Análisis de los Datos

Para esta segunda etapa de análisis ya se contaba con una codificación inicial tanto del estudio con patrones como de la argumentación matemática colectiva, de esta también, se identificaron los episodios donde se generaba esas interacciones. Para esta etapa se reconocieron dichos episodios y se identificó la función de las frases de los estudiantes para la reconstrucción del argumento y la argumentación, así como identificar las prácticas que los acompañaban.

4.2.1. Organización de los Datos

Para identificar los argumentos consideramos la evidencia, la afirmación y el razonamiento del sujeto el cual muestra la conexión entre la evidencia y la afirmación. Para las identificar las prácticas que emergieron en los argumentos se elaboró una tabla en Excel. Para identificar la práctica en el nivel de acción nos preguntamos ¿qué dice? y ¿cómo lo hace?, en el nivel de actividad nos apoyamos de la pregunta ¿para qué lo hace? que se relaciona con la intención de la tarea. Como ejemplo ilustrativo, se presenta la Tabla 46, realizada para este primer momento.

Tabla 46

Extracto del análisis de los argumentos individuales del momento 1

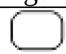
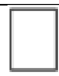
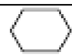
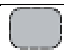
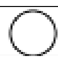
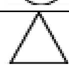
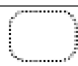
Secuencia	**¿quién dice?**	**¿qué dice?**	**¿cómo lo hace?**		**¿para qué lo hace?**
			cuantitativa	**cualitativa**	
A	Ea1	irle sumando 2 más y que tuvieran pares.	sumando de 2 cuadros	usa la noción de par	Construir una conjetura del patrón y predecir
B		iban sumando 1 en la fila de arriba y la de abajo solo que en la de arriba	sumando 1 + 1	usa la noción de vacío	

		dejaban un espacio sin nada.		el término 8.
A	Ea2	Yo me fijé que, por ejemplo, en esta sumaba 2 en lo que yo me fijé, por ejemplo, dice 1 y sin querer arriba viene uno 1 y 2 [coloca en la columna] o sea cada uno tiene 2 y 2, 3, 4, entonces lo único que hice fue 8 y 8.	doble del término	
B		en esta [secuencia b] por ejemplo era 1, aquí si estaba bien, pero aquí se le sumaba 1, entonces hice 8 abajo y le sumaba 1 y quedaba	comparando con la secuencia A y reconoce que lo que cambia es 1 cuadro	
A	Eo3	sí es un cuadrito, le dan 2 cuadros; si son 2 cuadritos, le dan cuatro	copiando parte de la secuencia	
B		el primer número es uno y tiene 3, y el dos, 5 cuadros; y los demás van algo así	copiando parte de la secuencia	

Organizados los argumentos individuales, se prosiguió a realizar un esquema de cada estudiante en un rectángulo con esquinas redondas se colocó tanto el *quién dice* como el *qué hace*, seguido de una flecha a un rectángulo para indicar el *qué dice* y en la conexión entre ambas se colocó un hexágono para explicar el *cómo lo hizo.* Para representar el apoyo se empleó un rectángulo gris con líneas no continuas. En el caso de la refutación se colocó un conector con un cuadro al final. El parafraseo fue indicado por círculos, los cuestionamientos a través de triángulos y la reformulación de argumentos con un rectángulo con puntos (Tabla 47).

Tabla 47

Simbología en la argumentación matemática colectiva

Figura	Indicador
	¿quién dice? ¿qué hace?
	¿qué dice?
	¿cómo lo hace?
	Apoyo
	Refutación
	Parafraseo
	Cuestionamiento
	Reformulación del argumento

Construidos los argumentos individuales se prosiguió con el análisis de la discusión de los equipos. Para reconocer el argumento de equipo se hicieron los cuestionamientos: ¿qué argumento validan? y ¿cómo lo validan?

4.2.2. Momento 1: Argumento Individual y de Equipo

Para este momento los estudiantes realizaron un análisis de los patrones de la sucesión A y B con la intención de poder predecir y construir un término cercano de cada sucesión.

Equipo 1

Al inicio de la discusión el equipo Ea1 tenía un argumento cualitativo de tipo recursivo con característica cualitativa ya que recupera el cuánto y el cómo cambia el patrón de cada sucesión (Figura 47). En el argumento de la sucesión A, recurrió a la noción de agregar y acomodar en par. En el argumento de la sucesión B, aludió a agregar por columnas en dos filas, siempre dejando un espacio vacío.

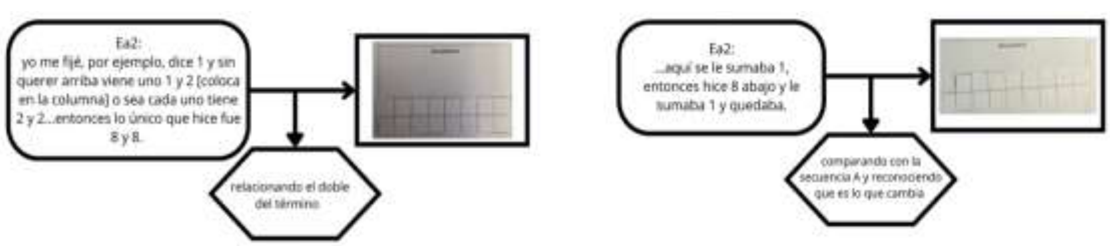
Figura 47

Argumento individual de Ea1-M1

Por su parte Ea2, para el patrón de la sucesión A, utilizó un argumento relacional al considerar el número del término por 2. En el caso del patrón de la sucesión B, empleó un argumento comparativo de sucesiones al reconocer lo que se mantiene y lo que cambia en las sucesiones presentadas, de manera que logró ver que solo aumentó 1 cuadro más que la sucesión A. Aunque en ambos casos no consideró explícitamente la parte cualitativa (Figura 48).

Figura 48

Argumento individual de Ea2-M1



Por último, Eo3 utilizó un argumento que carece de un análisis explícito de las sucesiones ya que en ambas extrae solo parte de la sucesión (Figura 49).

Figura 49

Argumento individual de Eo3-M1

Argumentación y Acciones

En la discusión de equipo la validación de los argumentos se dio a partir del conteo de cuadros, es decir, el énfasis está en la parte cuantitativa del patrón. Pero, no dejaron de lado la parte cualitativa porque Ea2 le hizo una crítica al acomodo de la figura de Eo3 (Tabla 48). En la sucesión A, todos tuvieron la misma cantidad de cuadros, pero en la sucesión B, Eo3 dijo 15; Ea2, 17; y Ea1, 17. Eo3 no defendió su argumento y reconoció que está mal, de manera que es persuadido por la relación de mayoría. Al final, a través de votaciones, deciden presentar el trabajo de Ea2 (Figura 53).

Tabla 48

Extracto de la discusión de la tarea 1.3 del equipo 1

Código	Transcripción textual
Eo3	¿cuánto te dio en la secuencia b?, ¿cuántos números? ¿cuántos cuadritos?
Ea2	[cuenta] 1…17

Eo3	no, fallé en la mía
Ea2	esta [secuencia A, cuenta de 2 en 2] 2, 4…16
Eo3	sí, 16
Ea2	sí, pero la tenías que acomodar así, vertical [refiriéndose a la horizontal]

La construcción de los argumentos individuales a partir Tabla 49, nos permitió reconocer las prácticas inmersas dentro la predicción cercana de dos sucesiones figurales. En el equipo 1, identificamos las prácticas de: agregar cuando aluden a sumar, relacionar al hacer uso del doble del término, y comparar sucesiones, en este caso la sucesión A y B; y analizar lo que cambia y se mantiene estable en ambas.

Tabla 49

M1. E1. Acciones en la tarea de la predicción cercana con sucesiones figurales

Código	**Secuencia**	**¿Cómo lo hace?**	**Acción**
Ea1	A	sumando de 2 cuadros	Agregar (sumar)
	B	sumando 1 + 1	Agregar (sumar)
Ea2	A	relacionando el doble del término	Relacionar (doble)
	B	comparando con la secuencia A y reconoce que lo que cambia es 1 cuadro	Comparar secuencias
Eo3	A	copiando parte de la secuencia	
	B	copiando parte de la secuencia	

Equipo 2. Para la sucesión A y B, al principio Ea4 presentó un argumento recursivo con característica cualitativa ya que va agrupando de 2 cuadros acomodándolos en hileras. Solo en el caso de la sucesión B, especificó que, en forma de escalón, sin embargo, no lo usa al construir la figura (Figura 50).

Figura 50

Argumento individual de Ea4-M1

En la sucesión A, Ea5 también utilizó un argumento recursivo con característica cualitativa, ya que agrupa en 2 y los acomoda en hilera. En la sucesión B, también los agrupó de 2 en 2, y aunque reconoció que debe faltar un cuadro, no determinó en qué lado debe estar colocado (Figura 51).

Figura 51

Argumento individual de Ea5-M1

Para la sucesión A y B, Ea6 empleó un argumento recursivo, ya que agregó 2 cuadros para cada sucesión y carecen de la característica cualitativa. Ya que las figuras de ambas sucesiones fueron acomodadas en forma de cuadrado (Figura 52).

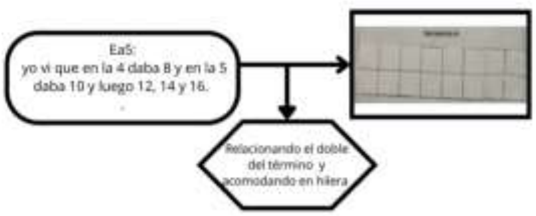
Figura 52

Argumento individual de Ea6-M1

En la discusión en equipo con la sucesión A, Ea5 reformuló su argumento recursivo a relacional (Figura 53), pues relaciona el término del número al doble y rescata la parte cualitativa al mencionar que debe acomodarse por hileras.

Figura 53

Reformulación de Argumento individual de Ea5-M1



Prácticas y Argumentación

Al igual que el equipo 1, la forma de validación de los argumentos fue a partir del conteo de cuadros, sin importar la parte cualitativa del patrón; aunque Ea6 acomodó diferente, sí cumplió con la cantidad de cuadros (Tabla 16). En la discusión de la sucesión B, se dio una confrontación, ya que Ea4 y E6 concordaron que el término 8 debe tener 19 cuadros, pero Ea5 mencionó que 17. Ea5 demostró con su argumento recursivo su afirmación y logró convencer a Ea4 de utilizar su estrategia recursiva permitiendo que Ea4 respaldara la afirmación de Ea5. Al final Ea6 terminó persuadida, ya que dos de sus compañeras estuvieron de acuerdo (Tabla 17). Al final, a través de votaciones, eligieron presentar el argumento de Ea5 (Figura 53).

En el equipo 2 logramos identificar a partir de los argumentos individuales las prácticas de *agregar* desde la de sumar y la noción de aumentar, *agrupar* cuando los estudiantes utilizan la seriación de 2 en 2 y *relacionar* al hacer uso de la multiplicación del patrón por el término (Tabla 48). En la interacción de equipo Ea5 reconstruyó su argumento respecto de la sucesión A (Tabla 50), de modo que paso de *agrupar* a *relacionar* desde la noción del doble.

Tabla 50

M1. E2. Acciones en la tarea de la predicción cercana con secuencias figurales

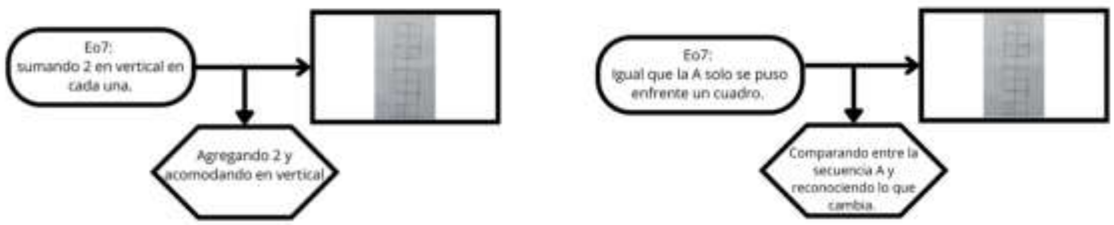
Código	**Secuencia**	**¿Cómo lo hace?**	**Acción**
Ea4	A	usando la serie del 2	Agrupar (seriar)
	B	usando la serie del 2	
Ea5	A	usando la serie del 2	Agrupar (seriar)
	B	aumentando 2 extrae una parte de la secuencia	Agregar (aumentar)
Ea6	A	relacionando la posición del término con el aumento de 2, por lo tanto, lo multiplica.	Relacionar (multiplicar)
	B	sumando 2, pero en el conteo del término 4 hace conteo erróneo	Agregar (sumar)

Equipo 3

En el equipo 3 faltó una integrante, por lo tanto, solo se inició con dos argumentos. Para la sucesión A, Eo7 construyó un argumento recursivo con característica cualitativa al considerar que los cuadros de la figura se acomodan en forma horizontal. Para la sucesión B su argumento fue comparativo puesto que compara las sucesiones A y B para encontrar lo que se mantiene estable y lo que cambia, pero no hizo explicito la parte cualitativa del patrón (Figura 54)

Figura 54

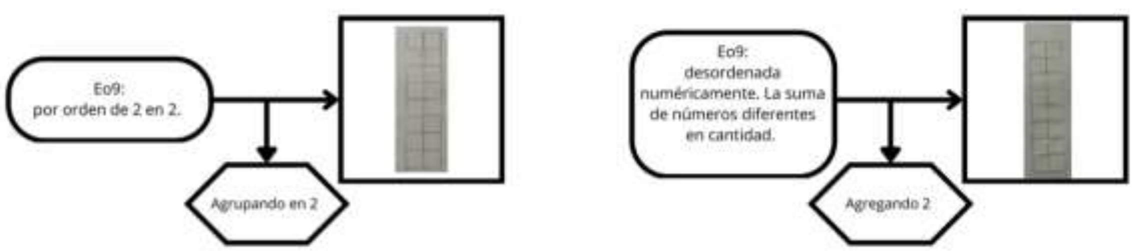
Argumento individual de Ea7-M1



Eo9 construyó para ambas sucesiones un argumento de tipo recursivo sin la característica cualitativa del patrón, ya que solo fue agrupando de 2 en 2 cuadros (Figura 55).

Figura 55

Argumento individual de Eo9-M1

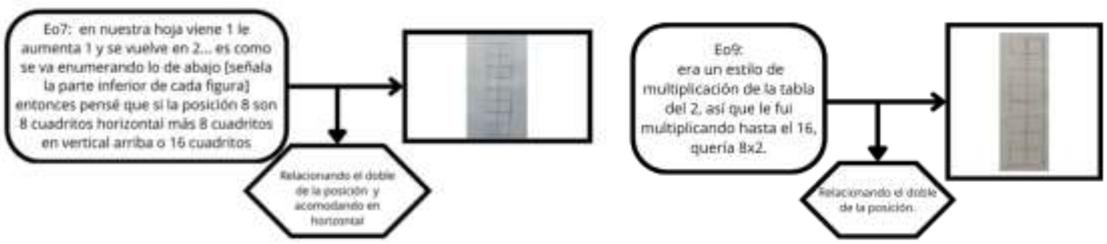


Prácticas y Argumentación

En la discusión de equipo, los argumentos de la sucesión A, tanto de Eo7 como de Eo9, se reformularon al considerar la interacción del otro. Para ambos, en la sucesión A, su argumento paso de ser recursivo a relacional, en el caso de Eo7 utilizó la noción del doble y en el caso de Eo9 uso lo multiplicativo (Figura 56).

Figura 56

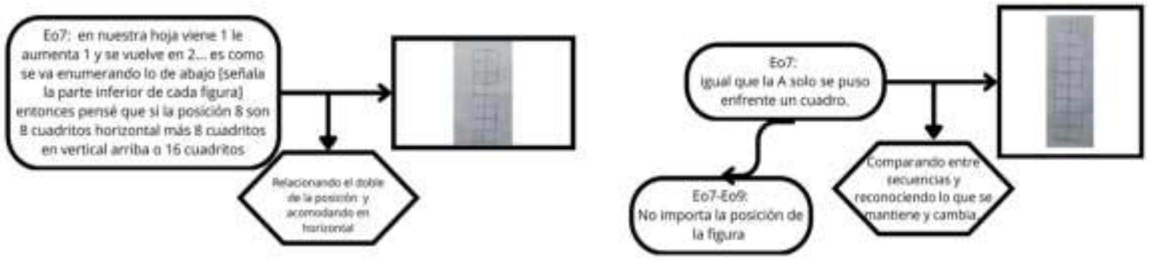
Reformulación de Argumento individual de Eo7-Eo9-M1



Al igual que el equipo 1 y 2, la forma de validación fue a través del conteo de cuadros y dado que ambos tenían el mismo resultado numérico apoyaron sus argumentos. Este equipo, explícitamente se discutió la parte cualitativa del patrón de la sucesión B, ya que lo acomodaron diferente. Pero, Eo7 respaldó al decir que no importa lo posición (Tabla 18). Al final, concuerdan presentar el argumento de Eo7 enfatizando la parte cuantitativa y dejando de lado la parte cualitativa (Figura 57).

Figura 57

Argumento de E3 para presentar en colectivo.



En el equipo 3, logramos identificar la práctica de *agregar* cuando se usa la suma, *agrupar* al momento que se emplea la seriación y *comparar* sucesiones al reconocer lo que cambia entre sucesiones (Tabla 51). Al igual que el equipo 2, el equipo 3 reformuló sus argumentos en la sucesión A, de tal modo, que Eo7 y Eo9 pasaron de la acción de *agregar* a *relacionar*, desde la noción del doble del término.

Tabla 51

M1. E3. Acciones en la tarea de la predicción cercana con sucesiones figurales

Código	**Secuencia**	**¿Cómo lo hace?**	**Acción**
Eo7	A	sumando 2	Agregar (sumar)
	B	comparando con la secuencia A y reconociendo que lo que cambia es 1 cuadro	Comparar secuencias
Eo9	A	usando la serie del 2	Agrupar (seriar)
	B	sumando 2, pero iniciando con otra cantidad	Agregar (sumar)

Equipo 4

Al iniciar la sucesión A, Eo10 construyó un argumento cualitativo, donde únicamente se enfatizó que el acomodo de la figura sería horizontal. En el caso de la sucesión B, presentó un argumento comparativo entre sucesiones para identificar lo que cambia y lo que se mantiene estable, sin embargo, no se consideró la característica cualitativa del patrón (Figura 58).

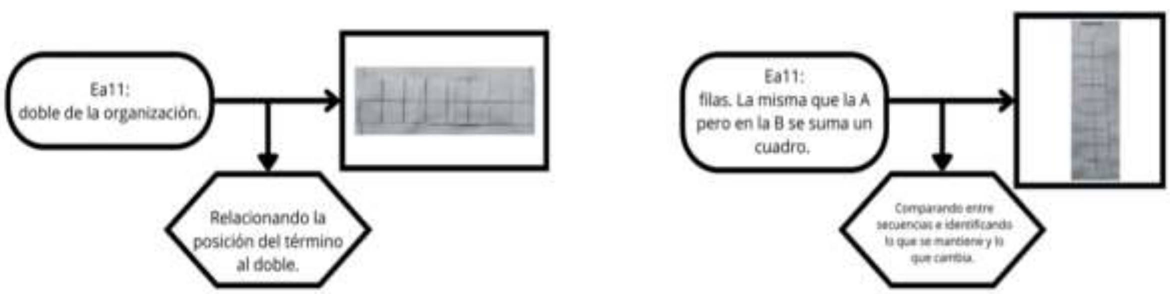
Figura 58

Argumento individual de Eo10-M1

Por su parte, Ea11, en la sucesión A, construyó un argumento relacional al considerar el doble de la posición del término; mientras que en la sucesión B, construyó un argumento comparativo, como lo hizo Eo10. Sin embargo, al ponerlo en uso no logra construir la figura 8 de la manera correcta (Figura 59).

Figura 59

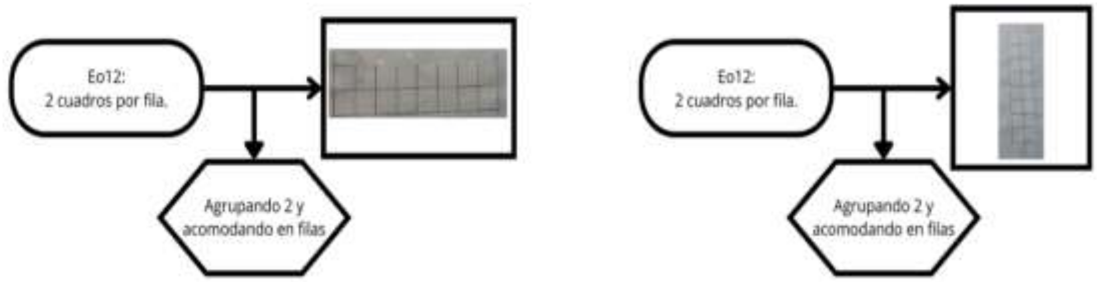
Argumento individual de Ea11-M1



Por último, Eo12 construyó un argumento recursivo con característica cualitativa, en ambas sucesiones consideró que se debían agregar 2 cuadros por filas (Figura 60).

Figura 60

Argumento individual de Eo12-M1

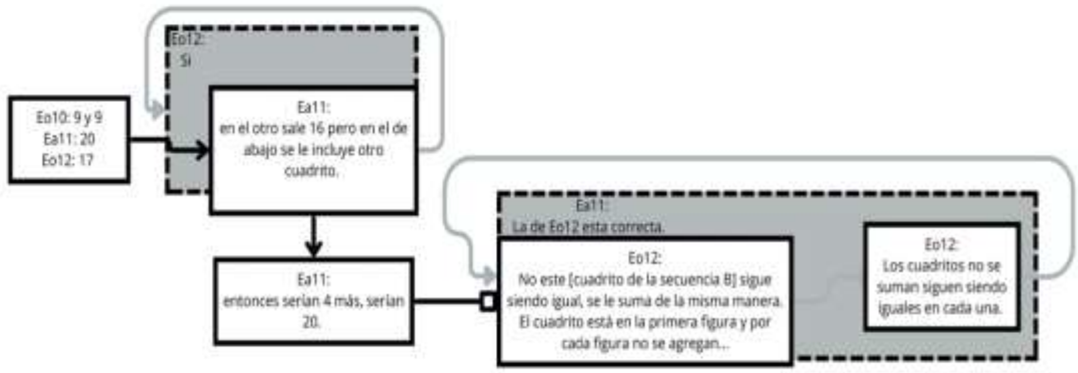


Prácticas y Argumentación

En la discusión de equipo, la validación, al igual que los otros equipos, fue a través de la cantidad de cuadros de la figura, dado que Ea11 y Ea12 tenían el mismo número de cuadros invalidaron al argumento de Eo10. La confrontación se generó al validar los argumentos en la sucesión B, ya que Eo10 afirmó que eran 18 cuadros (a pesar de que su construcción tenía 17 cuadros); Ea11, afirmó que eran 20 cuadros; mientras que Eo12, afirmó que 17 cuadros. En dicha confrontación Eo11 mostraba su argumento relacional con error, ya que reconocía que la sucesión B aumentaba en 1 cuadro más que la sucesión B, pero ese incremento lo sumaba en cada término. Eo12 intentó mostrarle que el cuadro solo estaba en el primer término, pero Ea11 no estuvo de acuerdo, aunque admite que se presente el argumento de Eo12 (Figura 60), de forma que terminó solo persuadida (Tabla 19).

Figura 61

Confrontación de los argumentos individuales del equipo 4 en la sucesión B.



En el equipo 3, Eo10 no logró comunicar de manera escrita lo que hace y en la discusión de equipo no da razones de su acción. Con los demás, logramos identificar en sus argumentos las prácticas de relacionar con la noción del doble, el de agregar desde la suma y el de comparar sucesiones al reconocer lo que cambia en las sucesiones (Tabla 52)

Tabla 52

M1.E4. Acciones en la tarea de la predicción cerca con sucesiones figurales

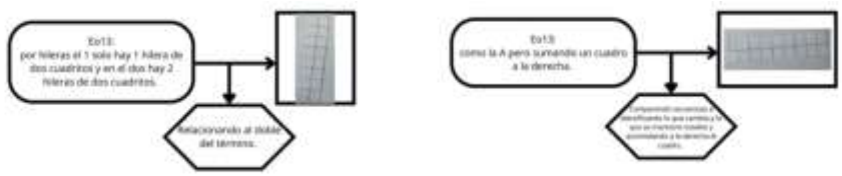
Código	Secuencia	¿Cómo lo hace?	Acción
Eo10	A		
	B	comparando con la secuencia A y reconociendo que lo que cambia es 1 cuadro	Comparar secuencias
Ea11	A	empleando el número del término al doble.	Relacionar (doble)
	B	comparando con la secuencia A y reconociendo que lo que cambia es 1 cuadro	Comparar secuencias
Eo12	A	sumando 2	Agregar (sumar)
	B	sumando 2	Agregar (sumar)

Equipo 5

En el equipo 5, en la sucesión A, Eo13 construyó un argumento relacional con característica cualitativa del patrón, al considerar que el número de cuadros le corresponde al doble de la posición del término y se acomodaría en una columna con dos filas. Sin embargo, para la construcción de la figura, la rotó 90 grados. Para la sucesión B, su argumento fue comparativo entre sucesiones y tiene características cualitativas pues considera que el cuadro que es la diferencia entre las sucesiones debe colocarse de lado derecho de la figura (Figura 62).

Figura 62

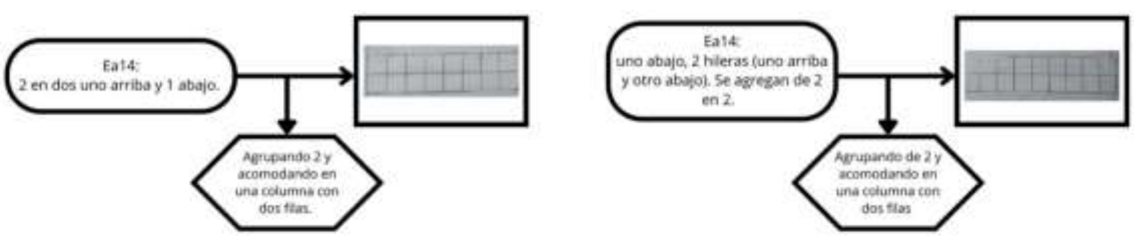
Argumento individual de Eo13-M1



Por su parte Ea14 construyó, para la sucesión A y B, un argumento recursivo con característica cualitativa pues consideró que se debe agregar 2 cuadros y acomodarlos arriba y abajo, es decir, en una columna con dos filas (Figura 63).

Figura 63

Argumento individual de Ea14-M1

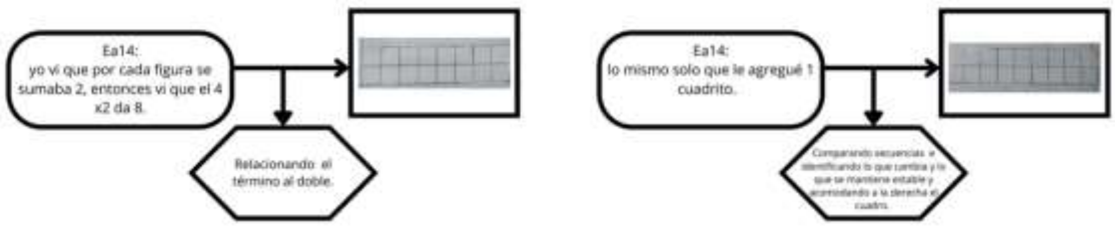


Prácticas y Argumentación

Durante la discusión en equipo y con la intervención de cada uno, Ea14 reformuló ambos argumentos de modo que para la sucesión A cambió de ser un argumento recursivo a relacional pues reconoció que la cantidad de cuadros corresponde al doble del número del término. En el caso de la sucesión B, en un argumento recursivo a comparativo de sucesiones al reconocer lo que cambió y se mantiene estable entre ambas sucesiones (Figura 64).

Figura 64

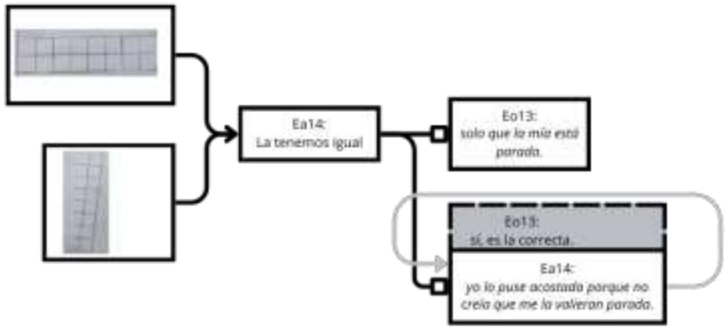
Reformulación del argumento individual de Ea14-M1



Este equipo tuvo problemas ya que no encontraban una estrategia para validar los argumentos, por lo que tuve que intervenir cuestionando: ¿la organización es la misma?, ¿la forma? De primer momento solo observaron que ambas tenían la misma cantidad de cuadros, sin embargo, reconocieron la diferencia entre sus construcciones y confrontaron en torno a la característica cualitativa del patrón de la sucesión A. De modo que, Eo13 valida el argumento de Ea14 (Figura 65).

Figura 65

Confrontación del equipo 5 respecto a la característica cualitativa del patrón de la sucesión A



Para el equipo 5, se identificó prácticas como: *relacionar* desde la noción del doble, *agrupar* cuando hacían uso de la seriación y *comparar sucesiones* al reconocer el cambio y lo estable entre la sucesión A y B (Tabla 53). También como en el equipo 2 y 3, Eo14 reformuló sus argumentos en la sucesión A, pasó de *agrupar* a *relacionar* cuando emplea la multiplicación, y en la sucesión B, pasó de *agrupar* a *comparar sucesiones* y a encontrar lo que cambia (Tabla 53).

Tabla 53

M1.E5. Acciones en la tarea de la predicción cerca con sucesiones figurales

Código	Secuencia	¿Cómo lo hace?	Acción
Eo13	A	relacionando al doble del término	Relacionar (doble)
	B	comparando con la secuencia A y reconociendo lo que cambia es 1 cuadro	Comparar secuencias
Ea14	A	usa la serie del 2	Agrupar (seriar)
	B	usa la serie del 2	Agrupar (seriar)

Síntesis de las Prácticas en el Nivel de Acción y Actividad

Después del análisis de los argumentos reconstruidos a partir de la Tabla 46 donde nos cuestionamos el hacer y decir matemáticos de los estudiantes en torno a la predicción del término 8 en dos sucesiones figurales. Logramos identificar las siguientes practicas inmersas: *agregar*, cuando los estudiantes refieren a sumar o aumentar; *agrupar*, al hacer uso de la seriación, en este caso de dos en dos; *relacionar*, al usar el doble del término o bien refiriendo número del término al multiplicarlo por 2; y *comparar sucesiones*, al usar la sucesión y B, analizar qué cambia y qué se mantiene estable en ambas (Tabla 54). En el caso de la *actividad* logramos identificar que los equipos organizan sus *acciones* para la construir *conjeturas* sobre el comportamiento del patrón y usar para *predecir* términos cercanos.

Tabla 54

M1. Concentrado de Prácticas en nivel de acción encontradas en los argumentos individuales de los estudiantes en la tarea de predicción cercana de dos sucesiones figurales

Código	Secuencia	¿Cómo lo hace?	Acción
Ea1	A	sumando de 2 en 2 cuadros	Agregar (sumar)
	B	sumando 1 + 1	Agregar (sumar)
Ea2	A	relacionando el doble del término	Relacionar (doble)
	B	comparando con la sucesión A y reconociendo que lo que cambia es 1 cuadro	Comparar sucesiones
Eo3	A	copiando parte de la sucesión	Extraer (copiar)

	B	copiando parte de la sucesión	
Ea4	A	usando la serie del 2	Agrupar (seriar)
	B	usando la serie del 2	
Ea5	A	usando la serie del 2	Agrupar (seriar)
	B	aumentando 2, extrae una parte de la sucesión	Agregar (aumentar)
Ea6	A	relacionando la posición del término con el aumento de 2, por lo tanto, lo multiplica.	Relacionar (multiplicar)
	B	sumando 2, pero en el conteo del término 4 hace conteo erróneo	Agregar (sumar)
Eo7	A	sumando 2	Agregar (sumar)
	B	comparando con la sucesión A y reconociendo que lo que cambia es 1 cuadro	Comparar sucesiones
Eo9	A	usando la serie del 2	Agrupar (seriar)
	B	sumando 2, pero iniciando con otra cantidad	Agregar (sumar)
Eo10	A		
	B	comparando con la sucesión A y reconociendo que lo que cambia es 1 cuadro	Comparar sucesiones
Ea11	A	empleando el número del término al doble.	Relacionar (doble)
	B	comparando con la sucesión A y reconociendo que lo que cambia es 1 cuadro	Comparar sucesiones
Eo12	A	sumando 2	Agregar (sumar)
	B	sumando 2	Agregar (sumar)
Eo13	A	relacionando al doble del término	Relacionar (doble)
	B	compara con la sucesión A y reconociendo que lo que cambia es 1 cuadro	Comparar sucesiones
Ea14	A	usa la serie del 2	Agrupar (seriar)
	B	usa la serie del 2	Agrupar (seriar)

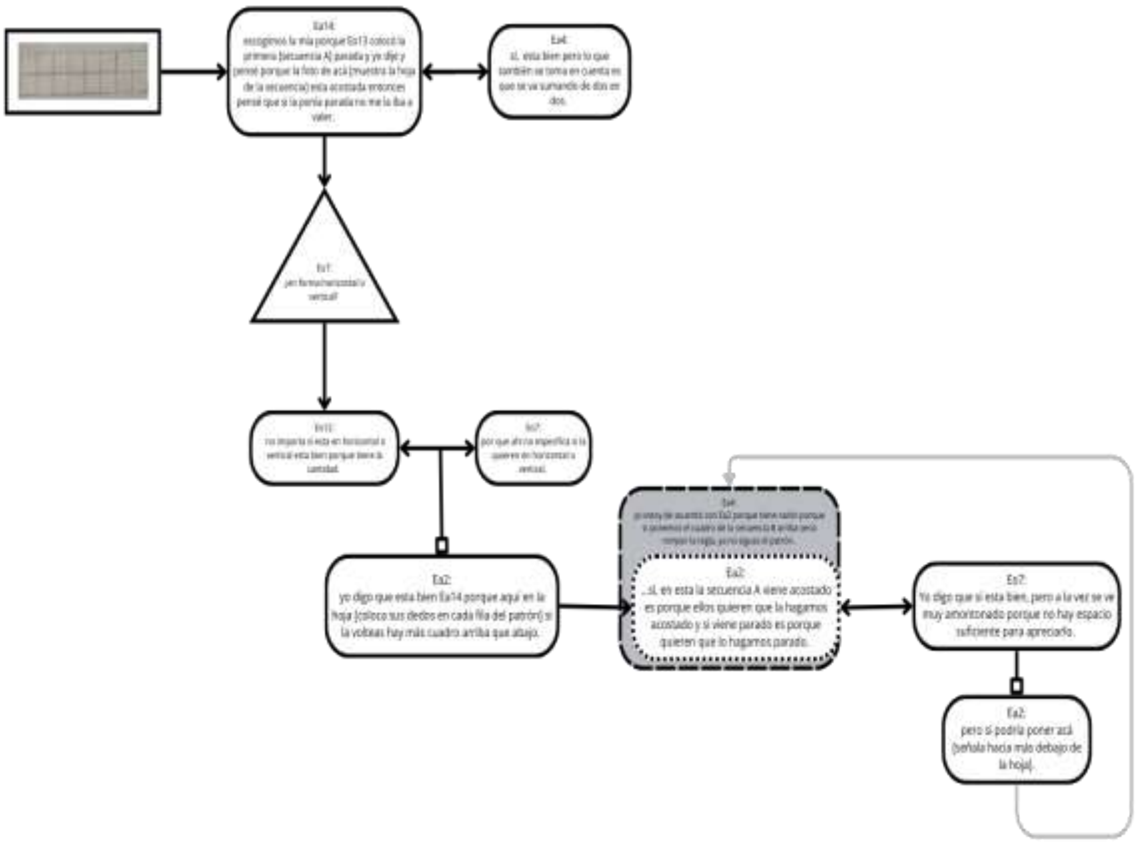
4.2.3. Momento 1: Argumento Colectivo

Para este momento, los equipos 1, 2, 3 y 5 discutieron sobre la parte cuantitativa y cualitativa del patrón, solo E2 y E3 validaron únicamente la por parte cuantitativa como lo hizo el E4. El equipo 1 y 5 consideraron ambas características.

Para la sucesión A se presentó dos argumentos. El primero lo inició Ea14 con un argumento con característica cualitativa del patrón. Ea4 agrega la característica cuantitativa del patrón al emplear la práctica de *agregar* desde la noción de sumar. Sin embargo, la confrontación emergió cuando Eo7 cuestionó la forma de la figura: horizontal o vertical, tanto Eo12 y Eo7 descartaron la parte cualitativa del patrón. Ea2 refutó dicha afirmación, pero no fue entendido por el grupo por lo que reformuló valiéndose de los datos que tenían de la sucesión, sin embargo, Eo7 dio razones de por qué no lo colocó de esa manera, pero Eo2 lo refutó. Al final, Ea4 apoyó a Eo2 a través de un contra-ejemplo con la sucesión B (Figura 66).

Figura 66

Primer argumento colectivo. Sucesiones A-M1



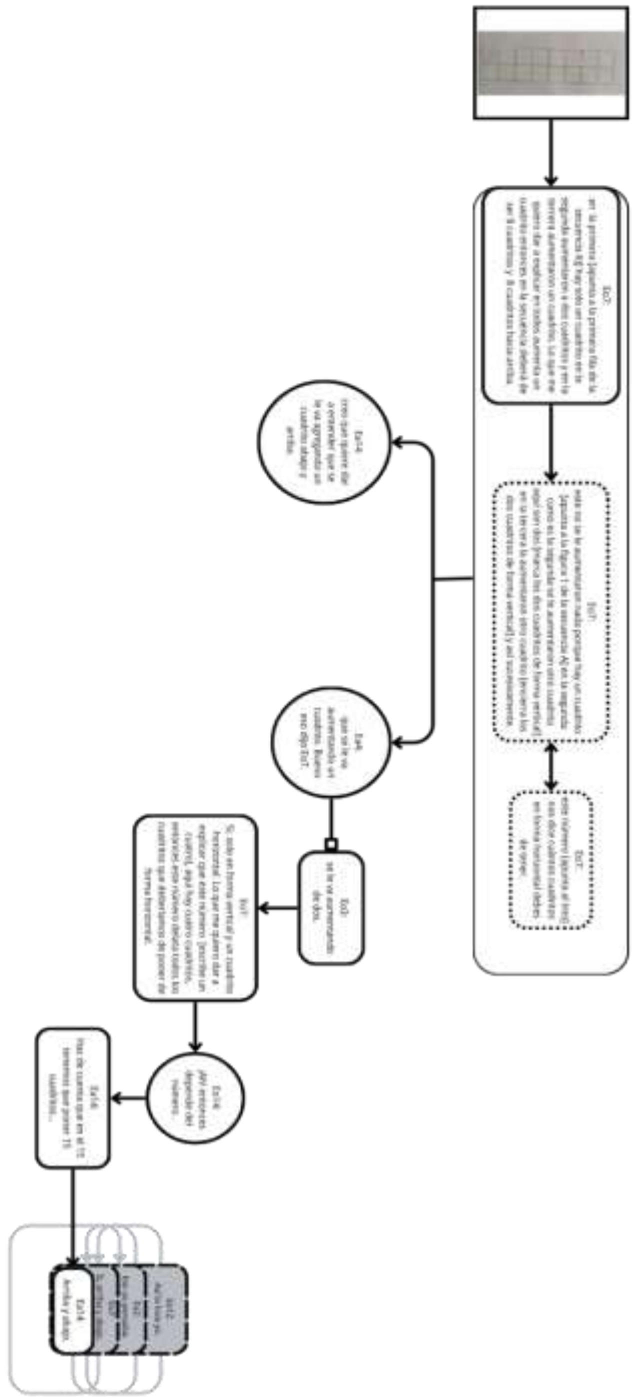
Este primer argumento gira en torno a la parte cualitativa ya que dentro de los equipos hubo quienes dieron mayor poder a la parte de cuantitativa que a la cualitativa. Por lo que a partir de la diferencia es que surgió la confrontación de los argumentos y lograron llegar al acuerdo de que ambas características son importantes para construir las sucesiones figurales.

Considerando la discusión anterior, el segundo argumento giró en torno a la parte cuantitativa. Eo7 presentó un argumento relacional entre la posición del término al doble y con características cualitativas al mencionar cómo se tendrían que acomodar, pero no fue entendible para todos, por lo que se tuvo que reformular en dos ocasiones. Ea14 y Ea4 parafrasearon, sin embargo, Eo3 refutó lo que mencionó Ea4 y fue apoyado por Eo7 que dio más razones de su argumento. Ante esto, Ea14 de nuevo parafrasea y Eo7 apoyó con una predicción cercana para dar validez a su argumento y, de nuevo, Ea14 apoyó haciendo énfasis en la parte cualitativa del patrón, que fue respaldado por Ea7, Ea2 y Ea12 (Figura 67).

Como se pudo observar, en el proceso de argumentación matemática colectiva respecto al patrón de la sucesión A, se generaron momentos de reformulación de argumentos, cuestionamiento, refutación, apoyo y parafraseo de las afirmaciones que se exponían. Con lo anterior, se puede identificar que el primer argumento algebraico colectivo es recursivo y emplea la práctica de *agrupar*, pues hace uso de la seriación del 2. Pero, el énfasis de la argumentación fue en la parte cualitativa del patrón ya que varios argumentos de los equipos carecían de dicha parte, pues la validación en equipo giro entorno a la parte cuantitativa. En el segundo argumento algebraico colectivo se emplea la práctica de *relacionar*, ya que hace uso de la noción del doble al considerar que la cantidad de cuadros le corresponde al doble de la posición. Este argumento fue respaldado por varios estudiantes.

Figura 67

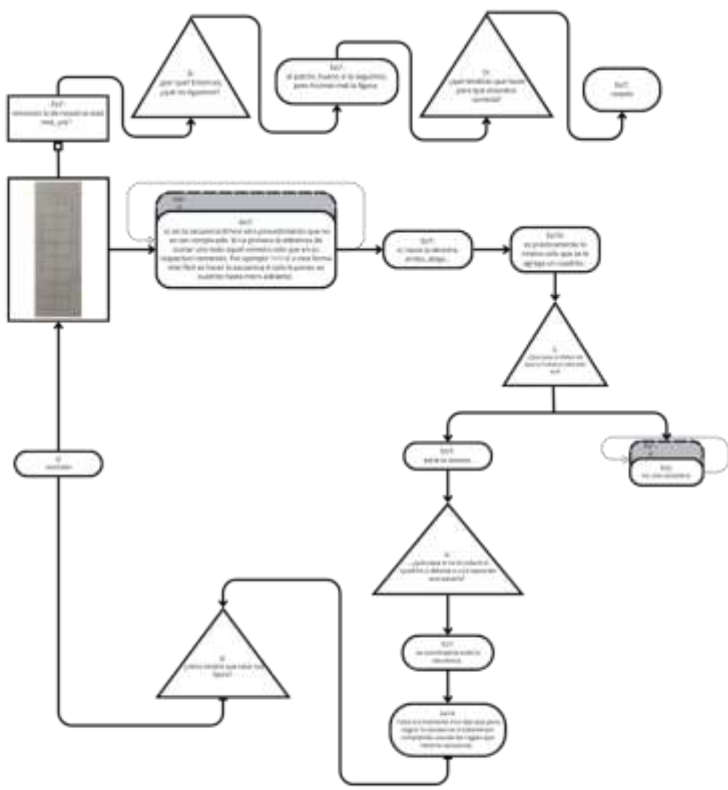
Segundo argumento colectivo. Sucesiones A-M1



Para la sucesión B, Eo7 comenzó con su argumento empleando la práctica de *comparar sucesiones*, al identificar qué cambia y qué se mantiene entre ambas sucesiones, y fue respaldado por Ea6. Eo7 agregó que la parte cualitativa no importaba y Eo10 apoyó con razones cuantitativas, a lo que respondí con un contra-ejemplo, y Ea1 y Ea2 dijeron que estaría mal, pero Eo7 dijo que sería lo mismo. De nuevo, puse el contra-ejemplo, pero ahora lo dibujé con el cuadro en otro lado, a lo que Eo7 y Eo14 reconocieron que no cumpliría con el patrón, así que, de nuevo, pregunté: ¿cómo debería estar la figura? El grupo gritó que acostada y en ese momento Eo7 reconoce su error, es a través del cuestionamiento que propuso cómo mejorarla (Figura 68).

Figura 68

Primer argumento colectivo. Sucesiones B-M1



Este argumento se robusteció al retomar el primer argumento (Figura 66) donde se hacía énfasis en la parte cualitativa, lo que permitió a través del cuestionamiento agregar la característica cualitativa y hacer una reflexión de la construcción de la figura. Al final, al darse cuenta de esta doble característica del patrón, el grupo comentó que solo las figuras del equipo 1 y 5 cumplían con ambas características.

En esta tarea las *acciones* de los estudiantes fueron organizadas para darle validez a las *conjeturas* de los patrones de las sucesiones A y B a través de la *predicción* de términos cercanos.

4.2.4. Momento 2: Argumento de Equipo

Este momento se construyó a partir del análisis del momento 1, donde se identificó que para el análisis del patrón de las sucesiones figurales los estudiantes daban mayor énfasis en la parte cuantitativa del patrón. Por lo tanto, este nuevo momento se diseñó con la intención de reconstruir el patrón cualitativo de dos sucesiones figurales. Para identificar los argumentos de los equipos y las prácticas que emergieron, se continuó con el análisis como se mostró en la Tabla 46 y se agregó la parte cuantitativa del patrón. Para ello se rescató la configuración, estrategia y distribución; finalmente, se construyó un esquema del proceso de la argumentación de acuerdo con la Tabla 47.

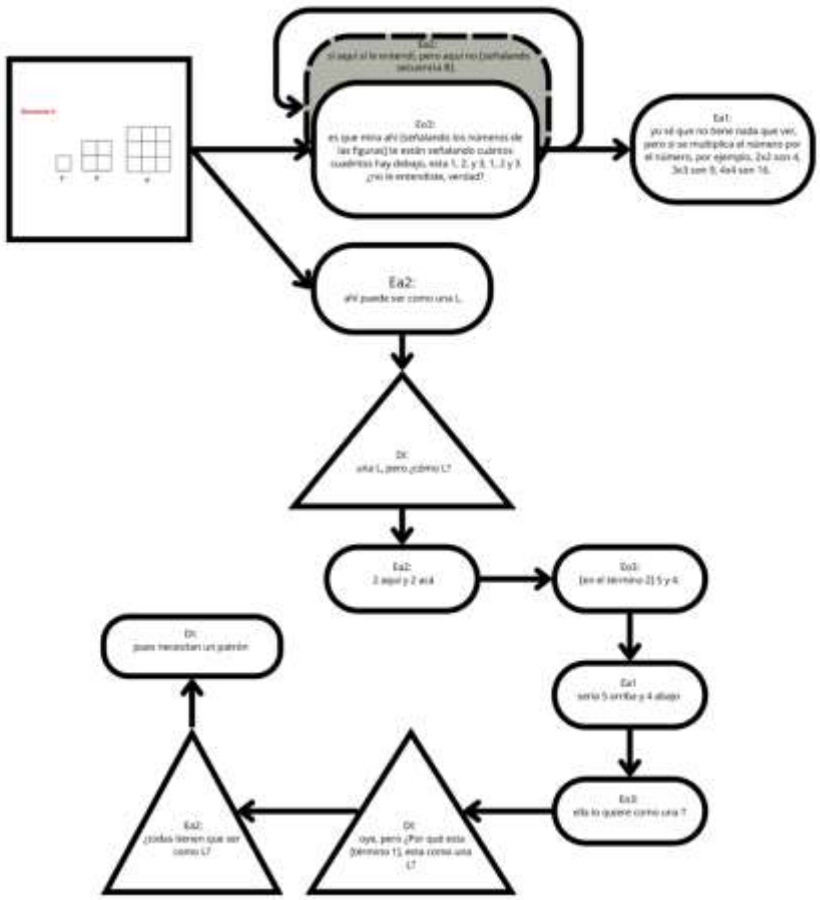
Equipo 1

Para la sucesión A, el argumento (Figura 69) se caracterizó por ser relacional siendo cada vez más explícito conforme se predijo un término cercano. En relación con la característica cualitativa del patrón tuve que intervenir cuestionando sobre la configuración, ya que el primer término se comenzó a hacer en forma de L (Tabla 20) y el segundo término en forma de T. En el E1 lograron comprender que el patrón cualitativo se debía seguir en todos los términos.

La configuración quedó en L, la estrategia que siguieron fue dividir la cantidad de cada término y la distribución de los cuadros propuesta fue dejar más cuadros de manera vertical y menos en la parte horizontal.

Figura 69

Argumento relacional de E1en la sucesión A-M2

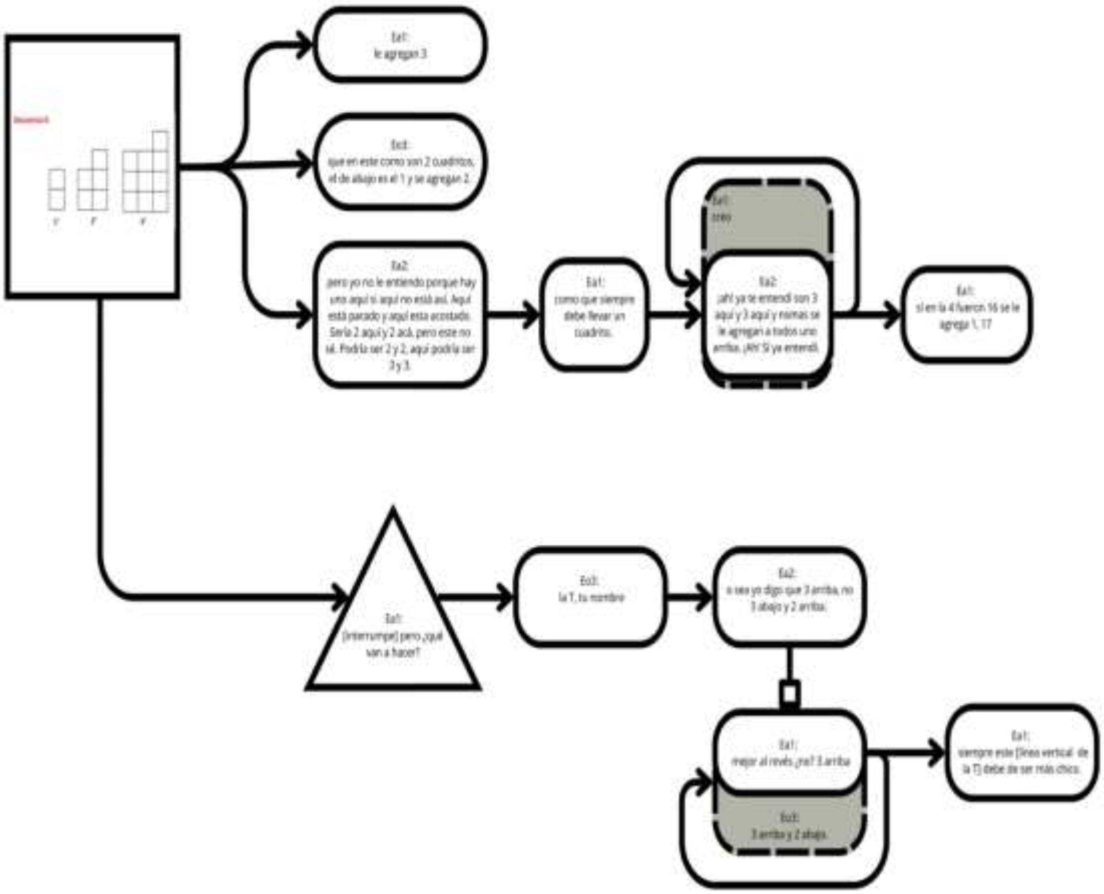


En la sucesión B, el argumento (Figura 70) comenzó a construirse conjuntamente pasando del tipo sumativo, al decir que se agregan 3 cuadros; relacional, ya que se relaciona el número del término que se acomodan en dos filas; y comparativo, al comparar las sucesiones A y B y reconocer lo que se mantiene estable y lo que cambia en cada sucesión.

En la configuración decidieron formar una T y la distribución de los cuadros se quedó la menor cantidad en parte vertical de la T.

Figura 70

Argumento relacional de E1en la sucesión B-M2



Prácticas y Argumentación

En los argumentos estuvieron presentes varias prácticas identificadas en el momento 1. En el caso del patrón de la sucesión A, la práctica identificada fue *relacionar*. Por otro lado, en el patrón de la sucesión B, se comenzó con la práctica de *agregar*, pero vieron que no funcionaba con todos los términos; y se dio un cambio a *relacionar*, primero al hacer uso del número del término con la cantidad de cuadro en la primera fila más agregar 2 cuadros, pero tampoco funcionó. Esta primera relación permitió que otra compañera usara la relación multiplicativa del número del término y la cantidad de cuadros, y la complementara otra compañera al reconocer la constante, el cuadro añadido. Con lo anterior podemos caracterizar que este argumento fue *co-construido* entre los miembros del equipo, cada uno aportando distintos elementos para el análisis del patrón, tanto cualitativo como cuantitativo. Por otro lado, en la argumentación hubo momentos de apoyo, cuestionamiento y refutación.

Equipo 2

Para este equipo no pudimos realizar observaciones del progreso del argumento y de la estrategia de la configuración ya que no se contó con suficientes registros de audio, por lo que solo se consideró las imágenes de las sucesiones reconstruidas. Para la sucesión A, su argumento se caracterizó por ser sumativo ya que para el término 4 agregaron una columna para formar la base de 4 cuadros, y dejaron 3 filas. Por ello, resultó que tendría 12 cuadros, lo cual es incorrecto. Para la configuración se consideró la figura original con la excepción de girar a 45° los cuadros de en medio. Con respecto a la distribución, concordaron que debían seguir la figura inicial para seguir el patrón.

Para la sucesión B, su argumento se construyó a partir de observar el cambio del término 2 al 3, ya que vieron que se agregaron 5 cuadros, por lo tanto, concluyeron que el patrón sería sumar 5. A lo cual, el término 4 estaba compuesto por 15 cuadros, presentando error en su razonamiento. En la distribución siguieron contemplando las figuras anteriores y agregando los cuadros hacia arriba, sin ningún patrón.

Prácticas y Argumentación

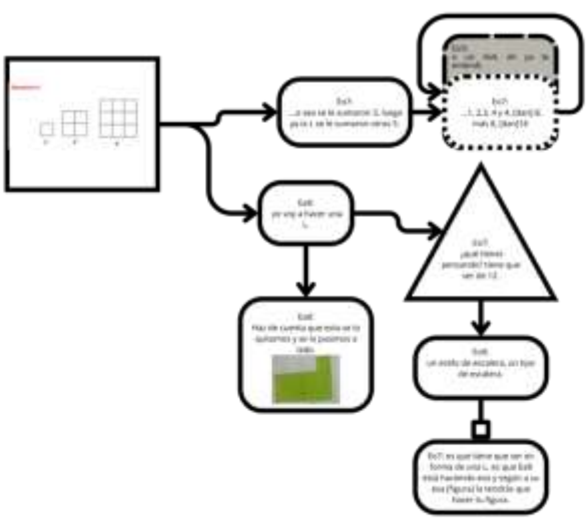
En ambos argumentos emergió la práctica de *agregar*, en el caso del patrón A se hizo uso del arreglo rectangular pero solo contemplaron el cambio en las columnas. En el caso del patrón B, se agregó 5 cuadros, pero no funcionó lo que se agregaba entre cada término. En el caso de la argumentación no se contó con los suficientes datos.

Equipo 3

Para la sucesión A, al iniciar el argumento se caracterizó por ser sumativo y conforme se fue dialogando pasó a multiplicativo. La configuración que siguieron fue en forma de L invertida. La estrategia fue que, a partir de la figura original, le quitarían unos cuadros y los colocarían en la parte horizontal, de tal manera, que la distribución de los cuadros en la parte horizontal fuera más gruesa que la vertical. Sin embargo, no siguieron el patrón cualitativo con el término 4 (Figura 71).

Figura 71

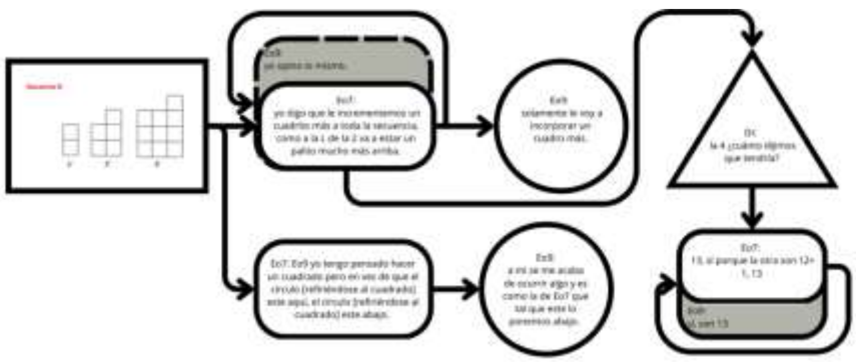
Argumento relacional de E3-M2



Para la sucesión B, el argumento se caracterizó por ser comparativo entre sucesiones, pero, cuando se predijo el término cercano, no usaron el argumento de la sucesión A y tomaron solo la cantidad de cuadros con la que construyeron el término 4 de la sucesión A, en este caso, 12 sumándole 1 cuadro más. Para la configuración fue a partir de la original girando 180°, sin embargo, no todos los términos seguían dicho patrón cualitativo (Figura 65).

Figura 72

Argumento comparativo entre sucesiones de E3-M2



Prácticas y Argumentación

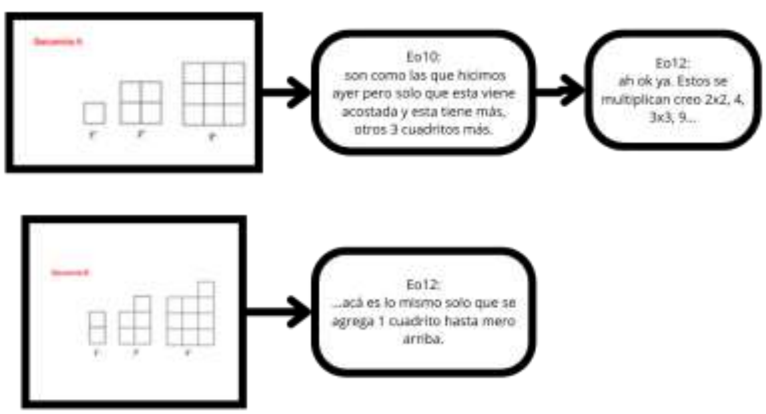
En los argumentos del patrón A estuvo presente la práctica de *agregar*, de la cual se dieron cuenta que no era funcional en toda la sucesión; de ahí que emergiera la práctica *relacional*, al hacer uso de la multiplicación del número del término por sí mismo. A pesar de ello, no verificaron el número de cuadros que hicieron en el término 4. En el patrón B, emergió la práctica de *comparar entre sucesiones*, pero dado que en la construcción de la figura 4 de la sucesión A hubo un error, el término 4 no siguió el patrón cuantitativo. Por otro lado, en la argumentación hubo momentos de apoyo, parafraseo, cuestionamiento, refutación y reformulación del razonamiento.

Equipo 4

Para este equipo no podemos realizar observaciones del progreso del argumento y de la estrategia de la configuración ya que faltaron los registros de audio, y al igual que con el equipo 2 solo consideramos las imágenes de las sucesiones reconstruidas. Para la sucesión A, el argumento se caracterizó en un inicio como sumativo y pasó a relacional. Para la configuración se tomó la figura original y se giró aproximadamente 45° a la izquierda. Para la sucesión B, el argumento fue comparativo entre sucesiones y la configuración fue a partir de la original con una rotación a la derecha (Figura 73). En ambas sucesiones la rotación no fue uniforme entre términos.

Figura 73

Argumento comparativo entre sucesiones de E4-M2



Prácticas y Argumentación

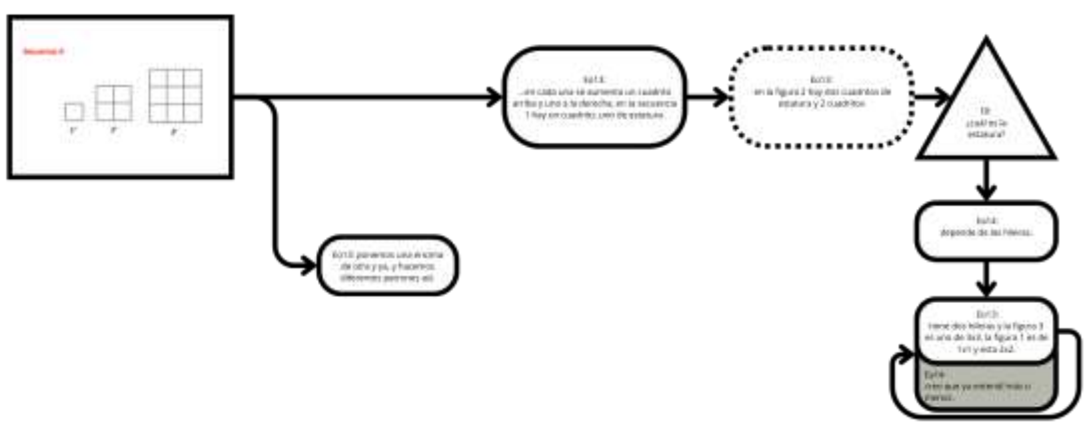
La práctica que emergió en su argumento, en el caso del patrón A, fue *agregar*, pero otro compañero hace la observación que se multiplica el número del término por sí mismo, de manera que cambia por la práctica de *relacionar*. En el patrón B, se caracteriza por la práctica de *comparar sucesiones*, al reconocer que es igual que la sucesión A más un cuadro arriba.

Equipo 5

Para la sucesión A, al inició, el argumento se caracterizó por ser relacional, entre el número del término y el número de hileras y columnas que tendrá la figura; posteriormente se pasa a la relación multiplicativa al multiplicar el término por sí mismo. La configuración que eligieron es una recta vertical, por lo tanto, la distribución fue colocar un cuadro encima de otro, dejando una sola columna (Figura 74).

Figura 74

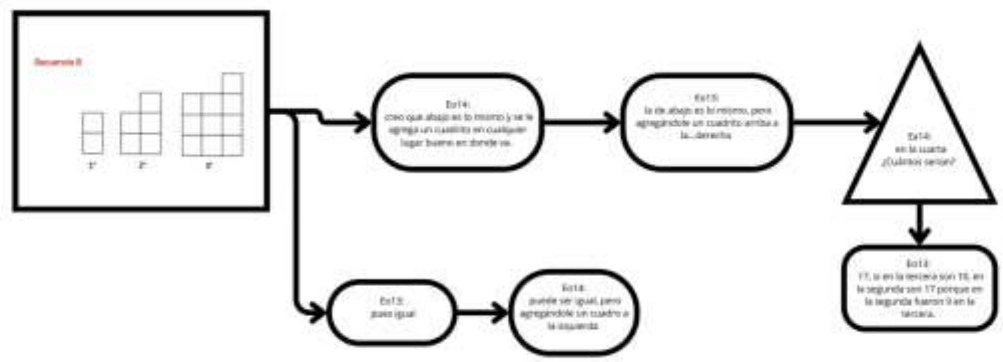
Argumento relacional (multiplicativa) E5-M2



Para la sucesión B, el argumento se caracterizó por ser comparativo entre sucesiones, al reconocer que es la misma que la sucesión A con la diferencia que se le añade un cuadro. La configuración se realizó en una recta vertical añadiendo un cuadro, así que su distribución fue como la sucesión A, solo que se agregó un cuadro a la derecha sin considerar el seguimiento del patrón cualitativo (Figura 75).

Figura 75

Argumento comparativo entre sucesiones E5-M2



Prácticas y Argumentación

En el patrón A, se relaciona con la organización figural, ya que reconocieron que las filas y las columnas corresponden al valor ordinal del término. Después, se reformuló al usar la relación multiplicativa de la posición del término por sí mismo. Por otro lado, en la argumentación hubo momentos de reformulación del razonamiento, apoyo y cuestionamiento.

En este momento 2 en argumentos de equipo logramos identificar que en la tarea las *acciones* de cada equipo se organizaron para construir *conjeturas* sobre el patrón de las sucesiones A y B y usarlas para reconstruir la parte cualitativa y *predecir* términos cercanos.

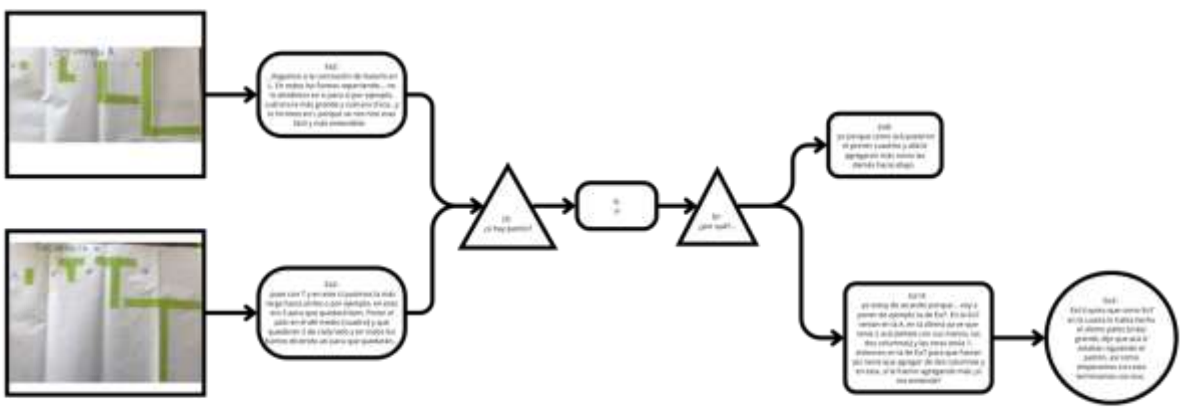
4.2.5. Momento 2: Argumento de Colectivo

Para la interacción en colectivo se tenía la intención de que los estudiantes argumentaran las estructuras de las sucesiones figurales reconstruidas, lo que permitió que los equipos validaran las figuras a partir del patrón cualitativo y cuantitativo de cada sucesión. Al final, reconocieron que solo el equipo 1 conservó ambas características.

En el caso del equipo 1, todo el grupo estuvo de acuerdo con el patrón cuantitativo y cualitativo de la sucesión A y B que presentaron. Para apoyarlo dieron un contra-ejemplo de otro equipo donde no respeto el patrón cualitativo (Figura 76).

Figura 76

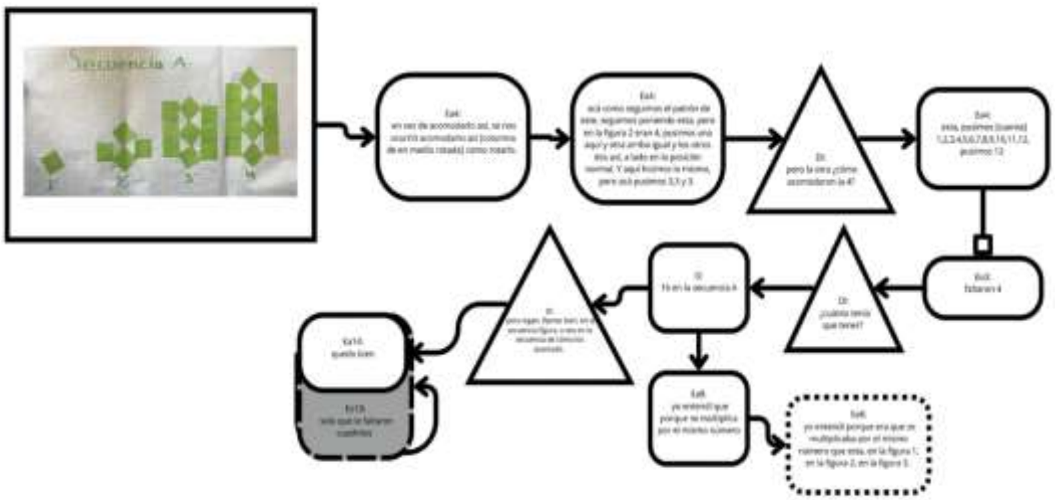
Argumento colectivo. Validación colectiva de los patrones construidos por E1-M2



En el equipo 2, en la sucesión A los equipos validaron el patrón cualitativo, pero refutaron el patrón cuantitativo ya que la cantidad de cuadros en la predicción del término cercano tenía un error. Se afirmó que al término 4 le corresponden 16 cuadros y respaldaron dicha afirmación (Figura 77).

Figura 77

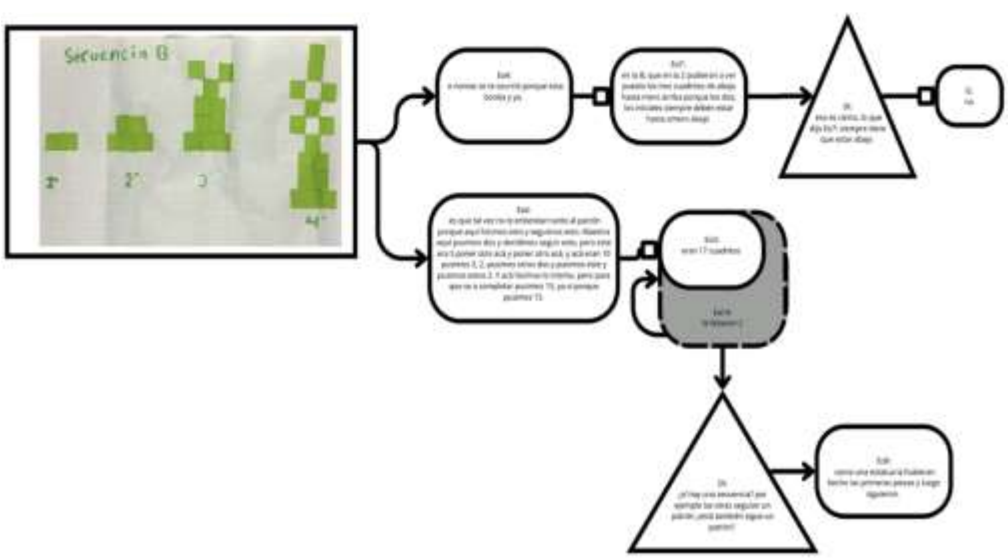
Argumento colectivo. Sucesión A. Validación del patrón cualitativo y refutación del patrón cuantitativo de E2-M2



Por el contrario, en la sucesión B, se refutó tanto el patrón cualitativo como el cuantitativo ya que el equipo había colocado 15 cuadros en el término 4 (Figura 78).

Figura 78

Argumento colectivo. Sucesión B. Refutación E2-M2



En el equipo 3 refutaron el patrón cualitativo de ambas sucesiones, ya que la parte figural del término 4 de la sucesión A (Figura 79) no continuaba con el patrón, así como los términos 1 y 4 de la sucesión B. En la parte cuantitativa del patrón validaron la sucesión A, pero no la sucesión B (Figura 80).

Figura 79

Argumento colectivo. Sucesión A del E3-M2

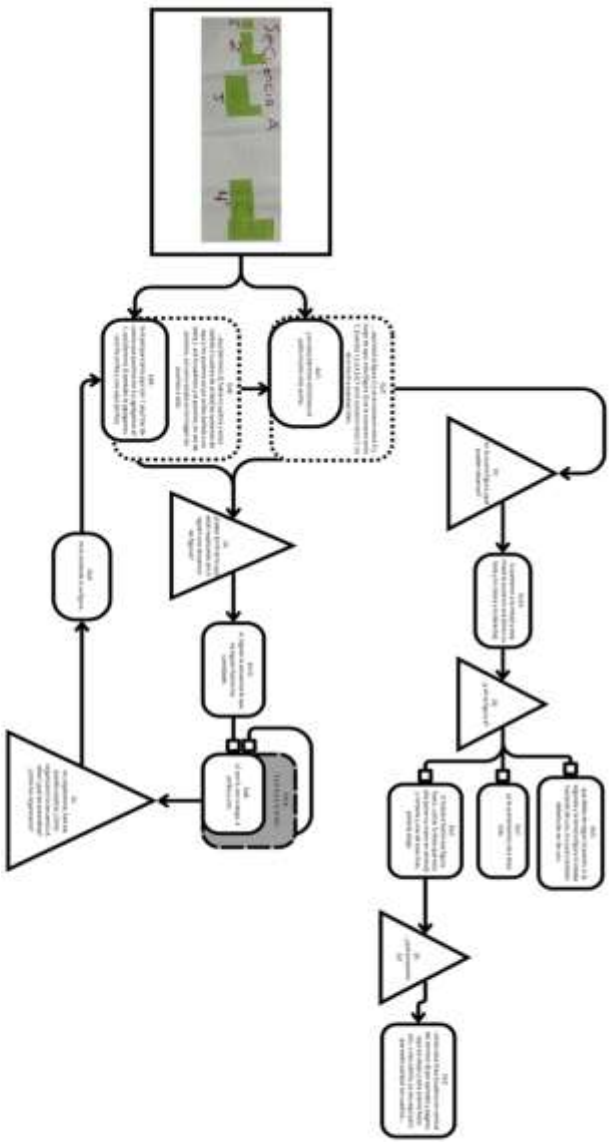
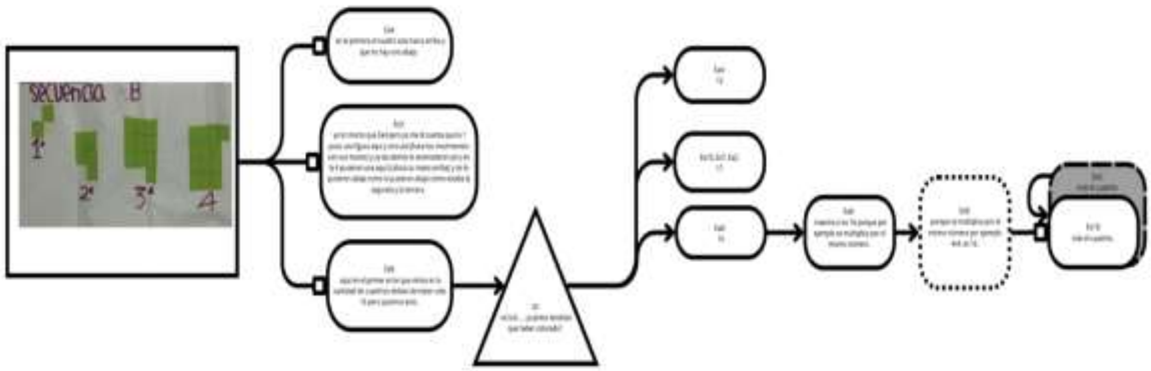


Figura 80

Argumento colectivo. Sucesión B del E3-M2



Durante la argumentación hubo momentos de reformulación de razonamientos ya que el grupo no comprendía las ideas, lo que obligó a que los estudiantes fuesen más claros. También, hubo momentos de confrontación, en el caso de la sucesión B, pues los argumentos de los equipos que se caracterizaban por ser sumativos no estaban de acuerdo con los de tipo comparativo entre sucesiones, lo que permitió que los estudiantes respaldaran sus afirmaciones. Además, hubo momentos de apoyo, por parte de los estudiantes, al razonamiento de sus compañeros.

En el equipo 4, en ambas sucesiones, se validó el patrón cuantitativo (Figura 81), pero se refutó el patrón cualitativo en la sucesión B, ya que la figura del término 4 no presentaba la misma rotación que las otras (Figura 82). Se presentaron momentos de cuestionamiento, refutación y apoyo.

Figura 81

Argumento colectivo. Sucesión A de E4-M2

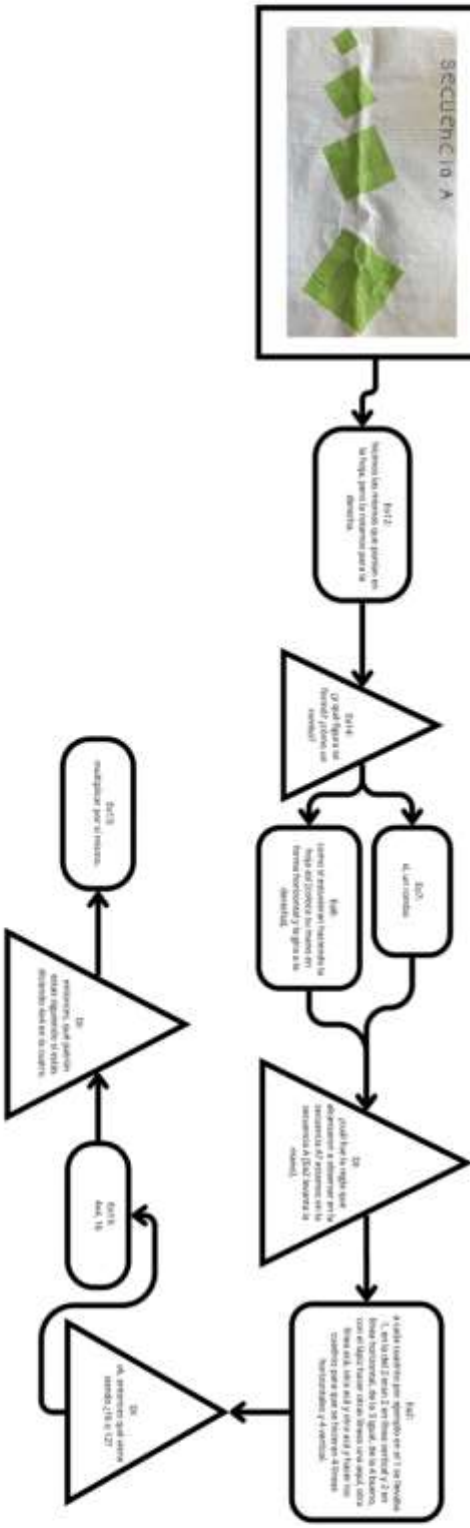
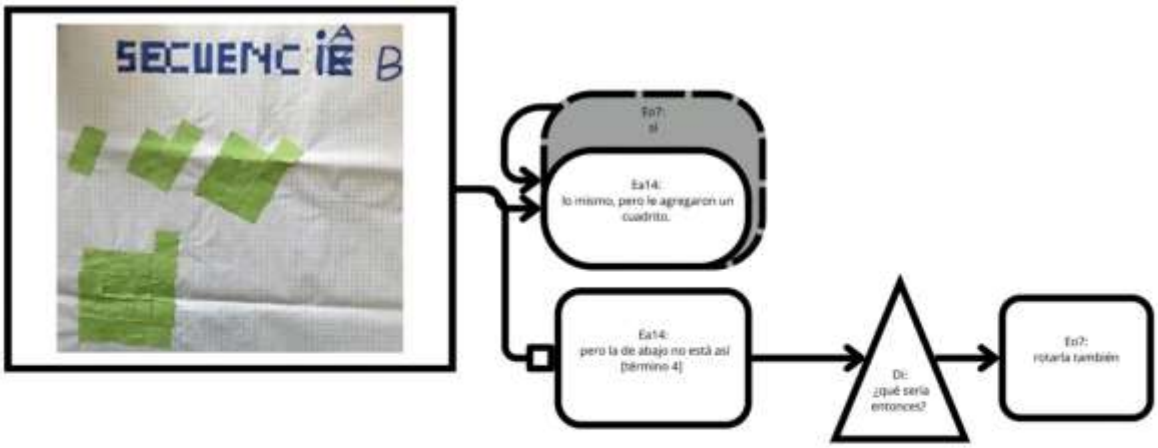


Figura 82

Argumento colectivo. Sucesión B de E4-M2



Con el equipo 5, el resto de los equipos validaron el patrón cuantitativo para ambas sucesiones (Figura 83), sin embargo, en el patrón cualitativo de la sucesión B fue refutado ya que no continuaba con dicho patrón figural, es decir, la distribución de los cuadros no era continua (Figura 84). Se presentaron momentos de apoyo, cuestionamiento, refutación, reformulación del razonamiento y el parafraseo.

Figura 83

Argumento colectivo. Sucesión A de E5-M2

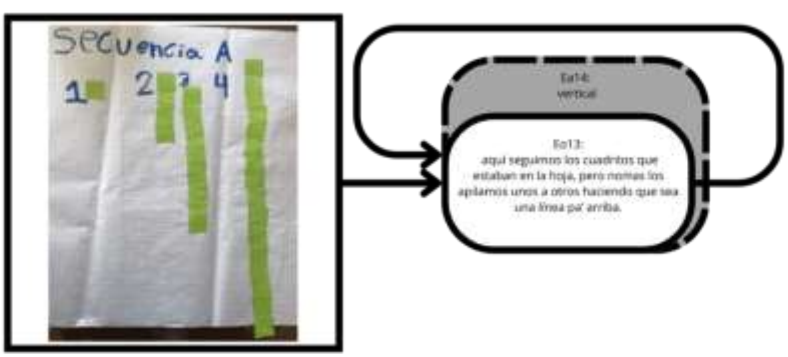
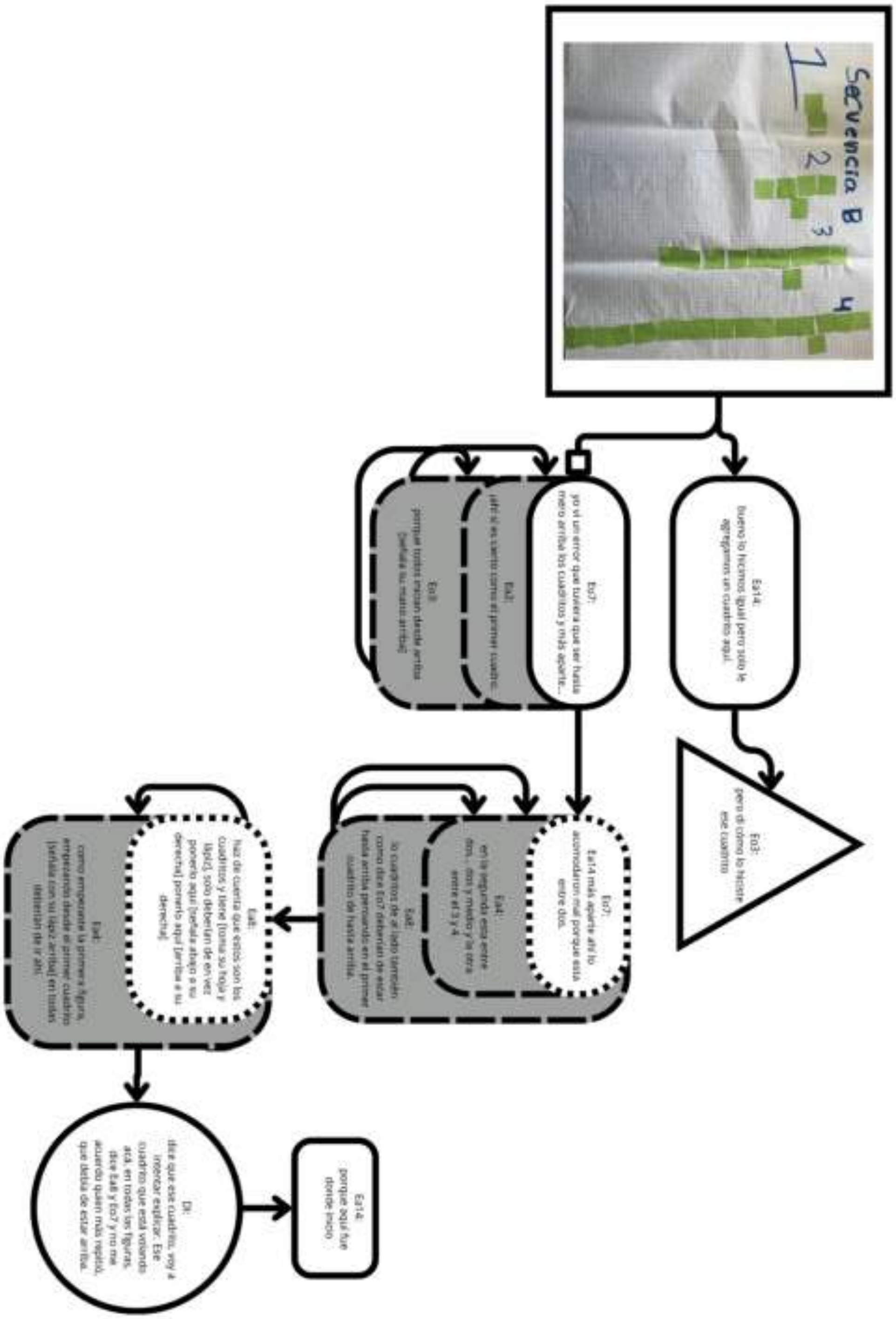


Figura 84

Argumento colectivo. Sucesión B de E5-M2

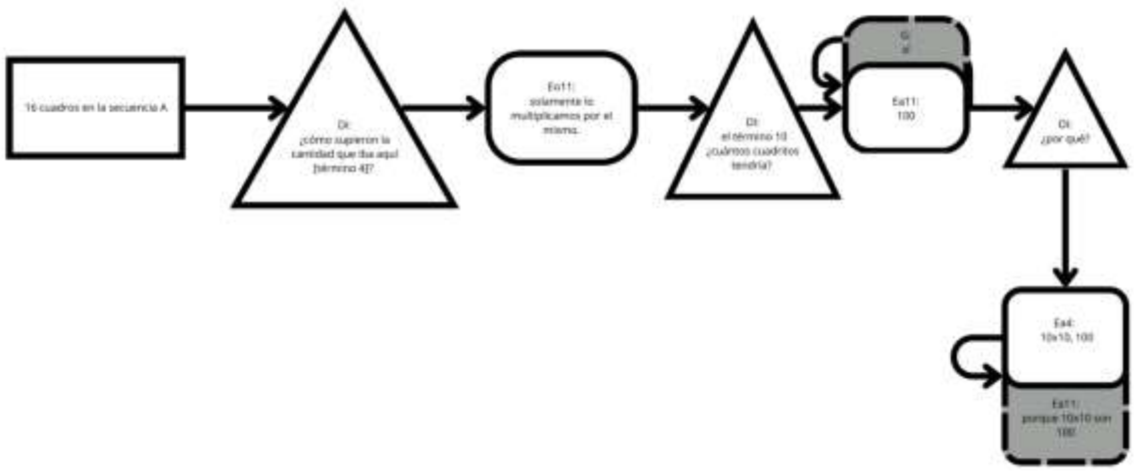


Síntesis del Argumento Colectivo de la Sucesiones A y B

El argumento colectivo que lograron co-construir del patrón A (Figura 85) emergió la práctica de *relacionar* al hacer uso de la relación de la posición del término y la cantidad de cuadros que correspondía, es decir, multiplicaron el número del término por sí mismo. Dicho argumento se usó para predecir un término cercano, en este caso el 10 que sirvió de validación.

Figura 85

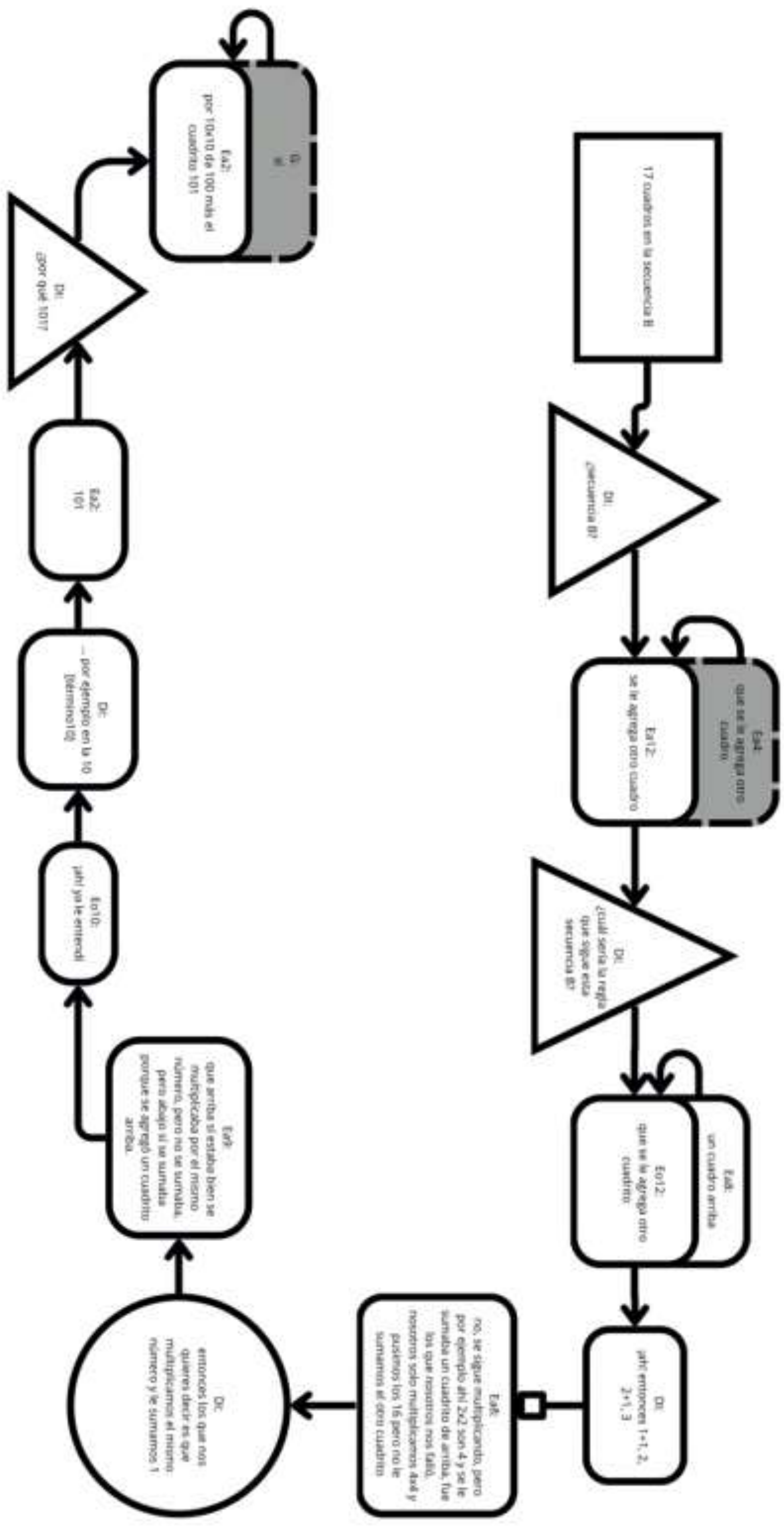
Argumento colectivo final de la sucesión A- M2



El argumento colectivo que se logró co-construir del patrón B (Figura 86) emergió la práctica de *comparar sucesiones* ya que se hace uso de la comparación para encontrar lo que se mantiene estable y lo que cambia. Al inicio de la verbalización del argumento no explicitaban todos los elementos, por ello verbalicé lo que se entendió, pero los estudiantes refutaron mi idea, dando un ejemplo de un término y aclararon que antes se tenía que multiplicar el número y agregar un cuadro arriba de la figura, y parafraseé el argumento juntando ambas piezas. Al final, los estudiantes lo usaron para la *predicción* del término 10 y para validar.

Figura 86

Argumento colectivo final de la sucesión B- M2



4.2.6. Momento 3: Argumento Individual y de Equipo

Para este momento los estudiantes realizaron un análisis del patrón con la relación funcional $f(x) = x$ con la intención de construir una conjetura del patrón. Para identificar los argumentos individuales y de equipo, así como las prácticas que emergieron de dichos argumentos, se elaboró una tabla en Excel donde se colocaron las siguientes preguntas: ¿quién dice?, ¿qué dice?, ¿cómo lo hace?, ¿para qué lo hace? Como ejemplo ilustrativo de la tabla elaborada, se presenta un extracto en la Tabla 55, la cual se realizó para este tercer momento.

Tabla 55

Tabla de análisis de la actividad 3.1 M3

¿quién dice?	**¿qué dice?**	**¿cómo lo hace?**		**¿Para qué lo hace?**
		cuantitativa	**cualitativa**	
Ea1	Cada que pase otro año se pone otro rombo y la pulsera se va haciendo más larga	relacionando los años y la cantidad de rombos	noción de largo	Conjeturar sobre el patrón de la sucesión
Ea2	que se le suma 1 y se hace cada vez más grande… a la izquierda	agregando un rombo	distribución a la izquierda	Conjeturar sobre el patrón de la sucesión
Eo3	según el patrón de cada número de año y rombos	relacionando los años con los rombos		Conjeturar sobre el patrón de la sucesión
Ea4	1 rombo más por año	relacionando los años y la cantidad de rombos		Conjeturar sobre el patrón de la sucesión
Ea5	1 cada año	relacionando los años y la cantidad de rombos		Conjeturar sobre el patrón de la sucesión
Ea6	cada año se agrega un ojo	agregando uno rombo		Conjeturar sobre el patrón de la sucesión
Eo7	un rombo por cada año, si tiene 5 años tendrás 5 rombos	relacionando los años con los rombos y		Conjeturar sobre el patrón de la sucesión

		prediciendo un término cercano		
Ea8	la forma de los rombos y la cantidad que debe haber, y debe haber 3 rombos	agregando más rombos		Conjeturar sobre el patrón de la sucesión
Eo9	seguir la sucesión		noción de dimensión	Conjeturar sobre el patrón de la sucesión
Eo10	que se le aumenta un rombo cada año.	relacionando los años y la cantidad de rombos		Conjeturar sobre el patrón de la sucesión
Ea11	que le ponen un ojo de dios cada año que pasa… cada vez se hace más grande. Multiplicar el número que tienes por sí mismo.	relacionando los años y la cantidad de rombos	noción de dimensión	Conjeturar sobre el patrón de la sucesión
Eo12	se le aumenta un rombo cada año	relacionando los años y la cantidad de rombos		Conjeturar sobre el patrón de la sucesión
Eo13	la cantidad de años			Conjeturar sobre el patrón de la sucesión
Ea14	conforme crece se le agrega un rombo	relacionando los años y la cantidad de rombos		Conjeturar sobre el patrón de la sucesión

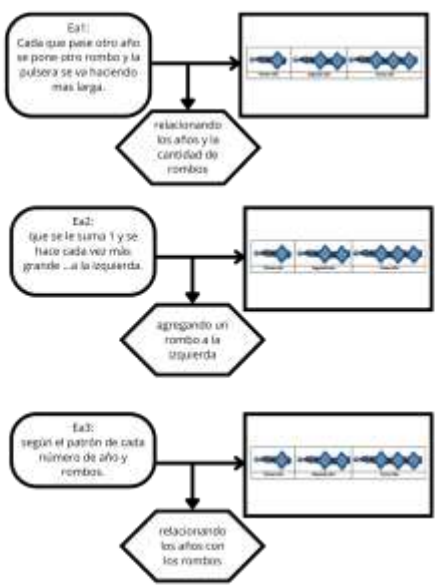
Se prosiguió a realizar el esquema del argumento de cada estudiante de acuerdo con la Tabla 47, después se construyeron los esquemas de los argumentos de cada equipo. Durante la argumentación se discutieron dos tareas: la primera (3.2) tenía la intención de que validaran o refutaran la conjetura del patrón en la tarea 3.1 a través de la predicción de un término cercano. La segunda tarea (3.3) pretendía que se construyera una postura respecto a una afirmación matemática. En ambas tareas se esperaba que se hiciera uso de la conjetura del patrón de la sucesión.

Equipo 1

En la interacción individual, los argumentos se caracterizaron por ser relacional (Ea1 y Eo3) y recursivo-cualitativo (Ea2) (Figura 87). En el primer argumento la práctica que emergió es relacionar al poner en uso la relación de dependencia de la edad con la cantidad de ojos de dios que tendrá la pulsera. En el segundo argumento la práctica que emergió es *agregar* al referirse que se ponía un rombo más, también se añadió la parte cualitativa del patrón, al decir que se hace "más grande" hacia la izquierda.

Figura 87

Argumentos individuales de E1-M3



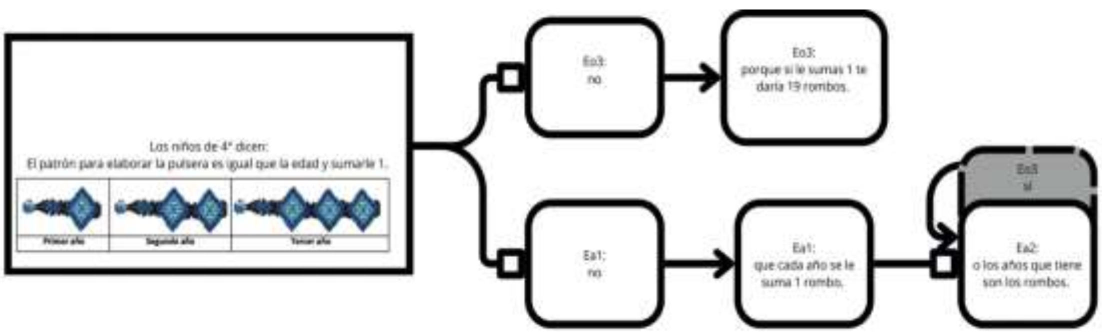
En la tarea 3.2 todos estuvieron de acuerdo con la cantidad de rombos que tendría la pulsera, tendría que ser 18, sin embargo, no se pudo rescatar la justificación ya que se saltaron las preguntas (Figura 88). Para la tarea 3.3 refutaron la afirmación del patrón y la forma de demostrarlo fue a través del uso del patrón construido en la tarea 3.1; al usar el patrón dado con un término acordado, en este caso, en la tarea 3.2, ya se había acordado de que el término 18 le correspondía 18 ojos de dios y si usaban el patrón dado daba 19 rombos, por lo tanto, era incorrecto. Al final se refinó el argumento al explicitar que la cantidad de años equivale a la cantidad de ojos de dios (Figura 89).

Figura 88

Argumento de E1-3.2-M3

Figura 89

Argumento de E1-3.3-M3



Prácticas y Argumentación

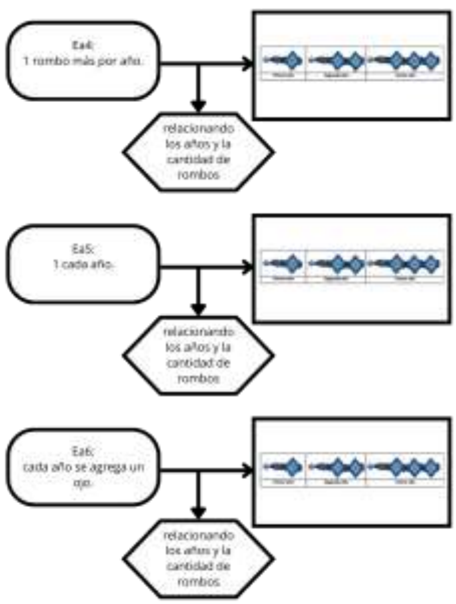
Las prácticas inmersas en lo individual son relacionar y agregar. Respecto a la argumentación en la predicción de un término cercano surgió momentos de apoyo con diferentes razonamientos. En el caso de la tarea 3.3 se logró la refutación del patrón propuesto por los niños de 4°. Además, refinaron la expresión del patrón al ponerlo en uso pues se dio evidencia que no era funcional con el término ya acordado y explicitaron la relación de dependencia de años y rombos.

Equipo 2

En la interacción individual, se construyó un argumento donde emergió la práctica de *relacionar* al poner en uso la relación de dependencia de la cantidad de años con los ojos de dios (Figura 90).

Figura 90

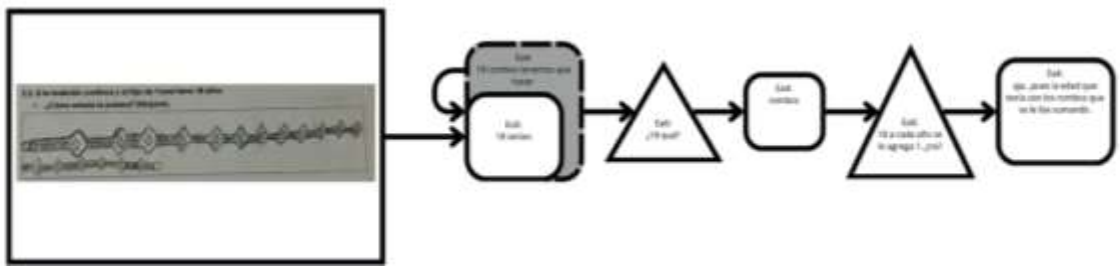
Argumentos individuales de E2-M3



En la tarea 3.2, las integrantes estuvieron de acuerdo con que la pulsera tendría 18 rombos y se recurrió al patrón de la tarea 3.1 y lograron explicitar la relación de dependencia de la edad con los ojos de Dios (Figura 91).

Figura 91

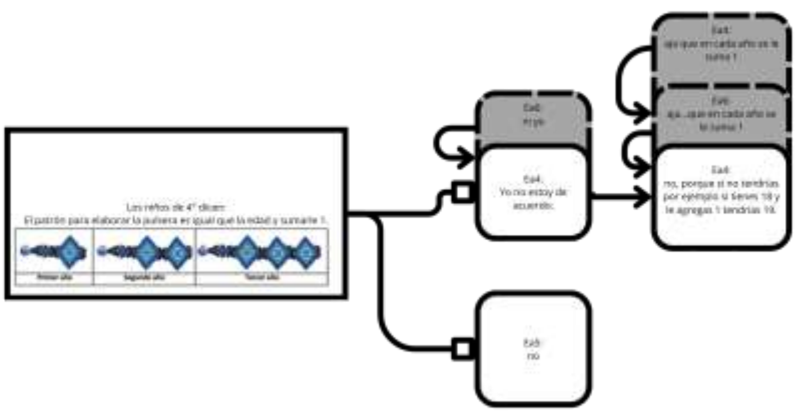
Argumento de E2-3.2-M3



En la tarea 3.3, al igual que el equipo 1, refutaron el patrón dado y emergieron los dos tipos de demostraciones, uno a través del uso del patrón construido en la tarea 3.1 y el otro al usar el patrón dado con un término ya acordado (Figura 92).

Figura 92

Argumento de E2-3.3-M3



Prácticas y Argumentación

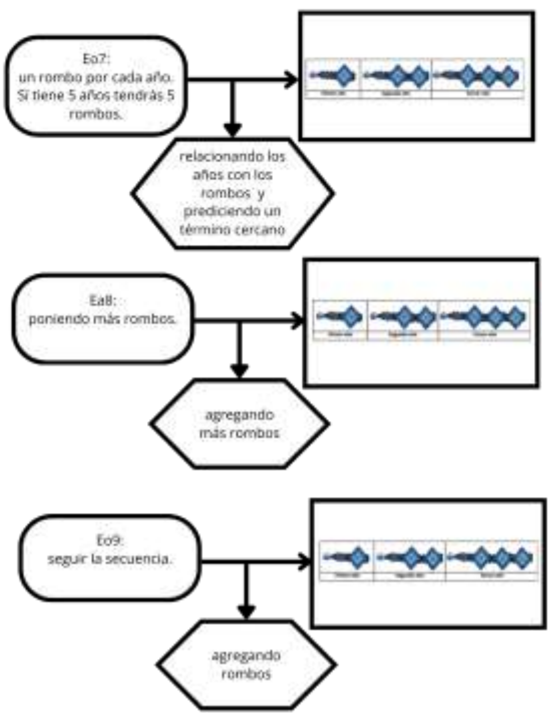
En lo individual, identificamos que la práctica que emergió en los argumentos es *relacionar*. Al igual que en el E1, hubo un momento de apoyo, pues concordaron con la cantidad de rombos del término 18 y refinaron su expresión del patrón al encontrar la relación de dependencia de años y rombos. Con respecto al patrón propuesto por los niños de 4° se refutó y se demostró al usar el patrón con un término ya acordado.

Equipo 3

Los argumentos individuales que se construyeron fueron dos. El primero reconoce la relación de la cantidad de años es equivalente con los ojos de Dios y se complementa con la predicción de un término. El segundo se caracteriza por reconocer el crecimiento del patrón, pero no explicita el cuánto crece (Figura 93).

Figura 93

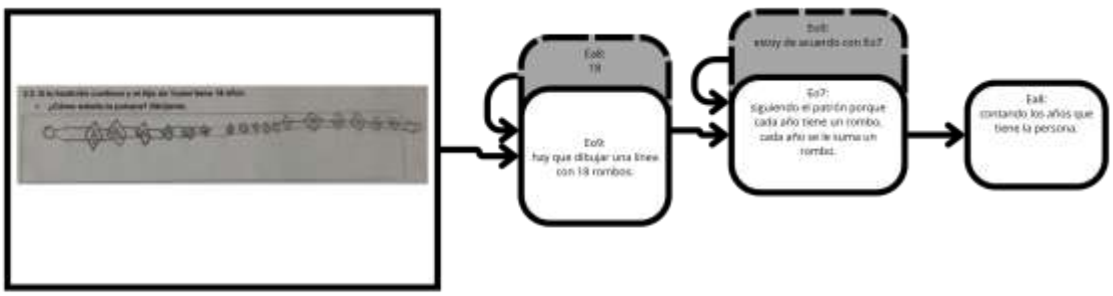
Argumentos individuales de E3-M3



En la tarea 3.2, los miembros del equipo acordaron que al término 18 le correspondían 18 ojos de Dios, y para ello explicitaron la relación de dependencia entre años y ojos de dios (Figura 94), pues mencionan que “contando los años de la persona” puedes saber la cantidad de ojos de dios que necesitas hacer.

Figura 94

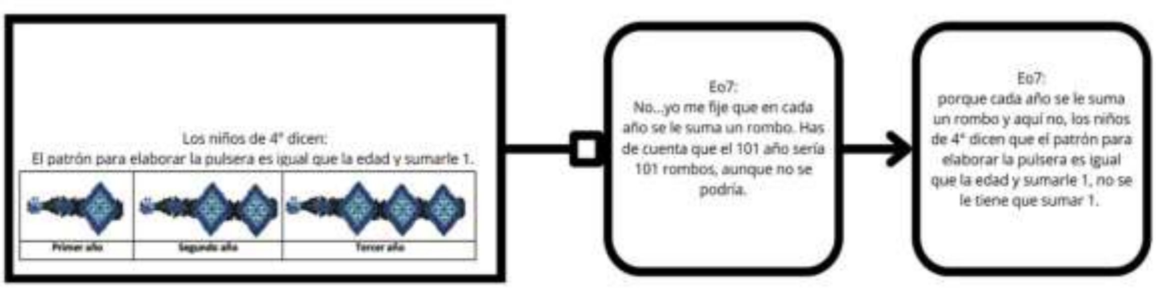
Argumento de E3-3.2-M3



En la tarea 3.3 no se dio la interacción del equipo, solo Eo7 refutó el patrón y para demostrarlo recurrió al patrón que identificó en la tarea 3.1 y a la predicción lejana de un término. En este caso, a 101 años le corresponderían 101 rombos, además, comparó su patrón con el dado y reconoció la diferencia, por lo tanto, el error de la afirmación era sumar 1 (Figura 95).

Figura 95

Argumento de E3-3.3-M3



Prácticas y Argumentación

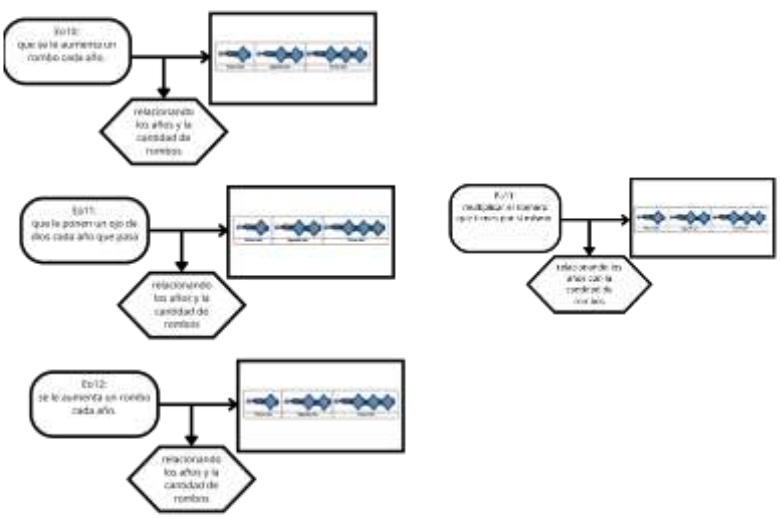
En la parte individual, las prácticas que identificamos son *relacionar*, *predecir* y *agregar* sin cuantificar. Al igual que en el E1 y E2, en la argumentación se generó momentos de apoyaron y refinamiento del argumento al reconocer la relación de dependencia de años y rombos. En el caso del patrón propuesto por los niños de 4°, refutaron y demostraron a partir del uso del patrón, la generalización lejana y comparando su patrón con el dado para reconocer el error del patrón.

Equipo 4

Los argumentos individuales podemos identificar que la práctica que emergió es *relacionar* como sucedió con el equipo 2, ya que reconocen la relación de dependencia cantidad de años y los ojos de Dios. Sin embargo, nos percatamos que Ea11 cambio su argumento y emergió la práctica relacionar multiplicativa (Figura 96), conjeturando que la relación era multiplicar la edad por sí mismo como fue en la sucesión A del momento 2, de tal modo que hubo error.

Figura 96

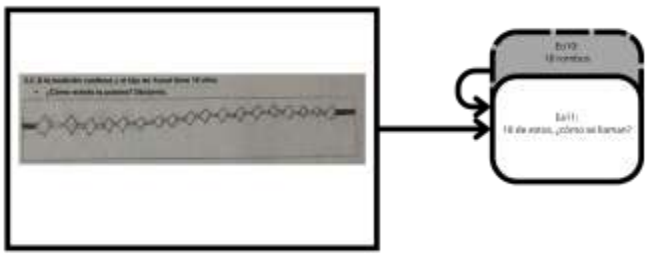
Argumentos individuales de E4-M3



En la tarea 3.2 concordaron en que al término 18 le corresponde 18 ojos de dios, pero no hubo una interacción respecto a cómo llegaron a dicha afirmación, solo refirieron que a la "pulsera anterior" (Figura 97).

Figura 97

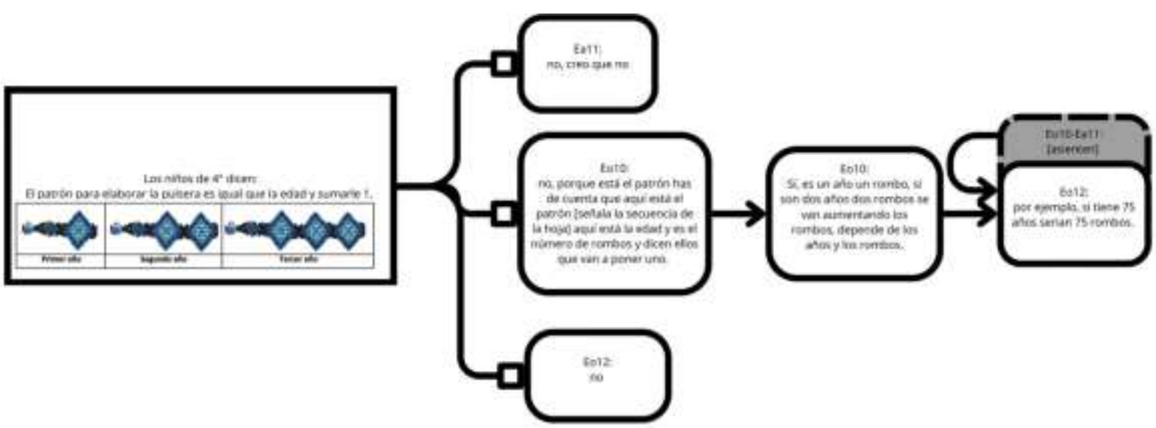
Argumento de E4-3.2-M3



A diferencia de la tarea 3.3 todos los integrantes participaron refutando el patrón dado. La forma de demostrar su postura fue similar a la del equipo 3, pues fue a través del patrón construido en la tarea 3.1, donde reconocieron que la relación de la cantidad de años es igual a los ojos de Dios, e identificaron la diferencia con el patrón dado, es decir sumar 1, afirmando que ese fue el error. Otra manera fue usando el patrón para la predicción lejana, en este caso, el término 75 al que le corresponden 75 ojos de dios (Figura 98).

Figura 98

Argumento de E4-3.3-M3



Prácticas y Argumentación

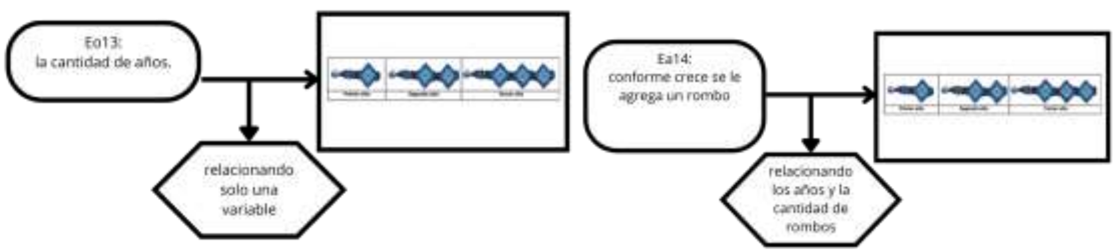
En los argumentos individuales, la práctica que identificamos es *relacionar*. Los miembros del equipo se apoyaron en la predicción del término 18. En el patrón dado por los niños de 4°, lo refutaron y demostraron como lo hizo el E3, con el uso del patrón, la comparación con su patrón y encontrando el error, y por medio de la generalización lejana que fue apoyada por todo el equipo.

Equipo 5

Los argumentos individuales emergieron la práctica de *relacionar* (Figura 99), pero en el caso de Eo13 solo explicitó una sola variable, por el contrario, Ea14 reconoce que la edad y la cantidad de años es equivalente.

Figura 99

Argumentos individuales de E5-M3



En la tarea 3.2, los miembros del equipo acordaron que a los 18 años le corresponden 18 ojos de dios, porque hay una relación con la cantidad de años y ambos refirieron al patrón que explicaron en la tarea 3.1 (Figura 100). En la tarea 3.3, refutaron el patrón dado y la forma de demostrar. Es a través del uso de su patrón donde se reconoció la relación de la edad equivale a los ojos de dios, y se alude a otras sucesiones que se habían trabajado donde sí era necesario sumar 1 (Figura 101).

Figura 100

Argumento de E5-3.2-M3

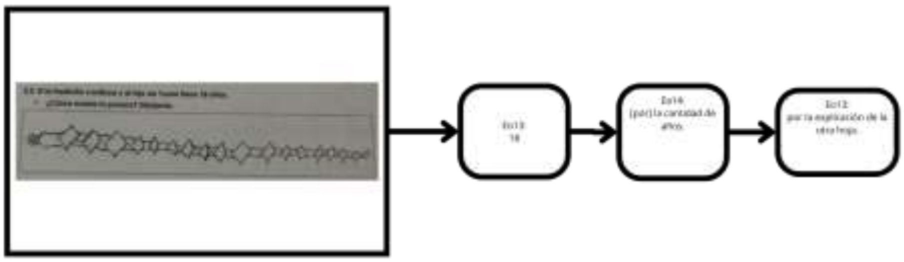
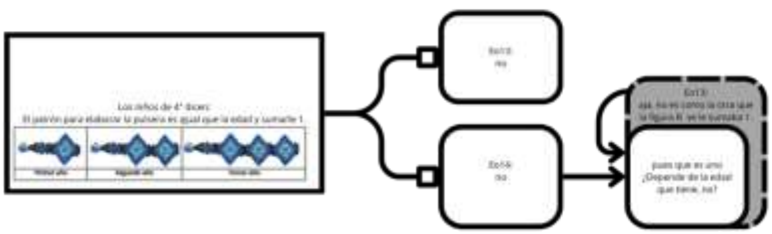


Figura 101

Argumento de E5-3.3-M3



Prácticas y Argumentación

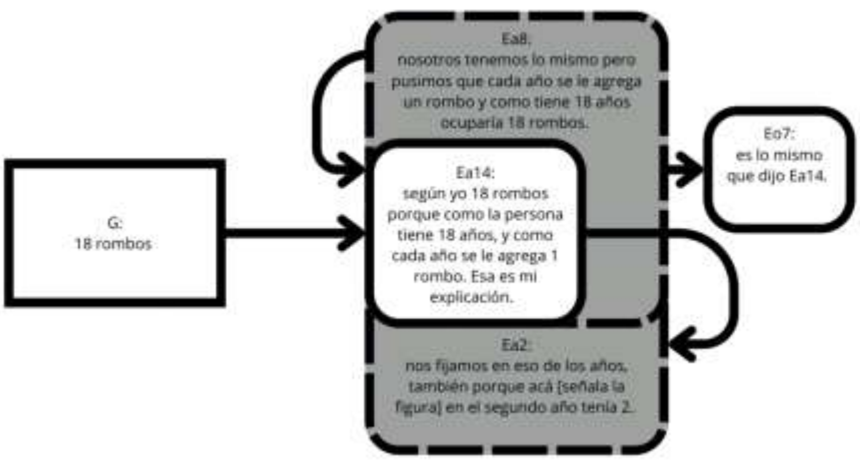
En los argumentos individuales la práctica que identificamos es *relacionar*. Los estudiantes usaron esos argumentos la predicción del término 18. En el patrón dado por los niños de 4°, lo refutaron y demostraron a partir del uso del patrón y relacionando con otra sucesión que vieron en tareas previas donde el patrón estaba conformado también por la constante.

4.2.7. Momento 3: Argumento Colectivo

En la tarea 3.2 todos los equipos estuvieron de acuerdo que, al tener 18 años, la cantidad de rombos serían 18 (Tabla 28). En el argumento emergió la práctica de relacionar, al reconocer la relación de la edad es equivalente a la cantidad de rombos (Figura 102). De cada argumento que se hizo explícito, podemos deducir que querían demostrar la validez de su afirmación, al usar la predicción de un término cercano.

Figura 102

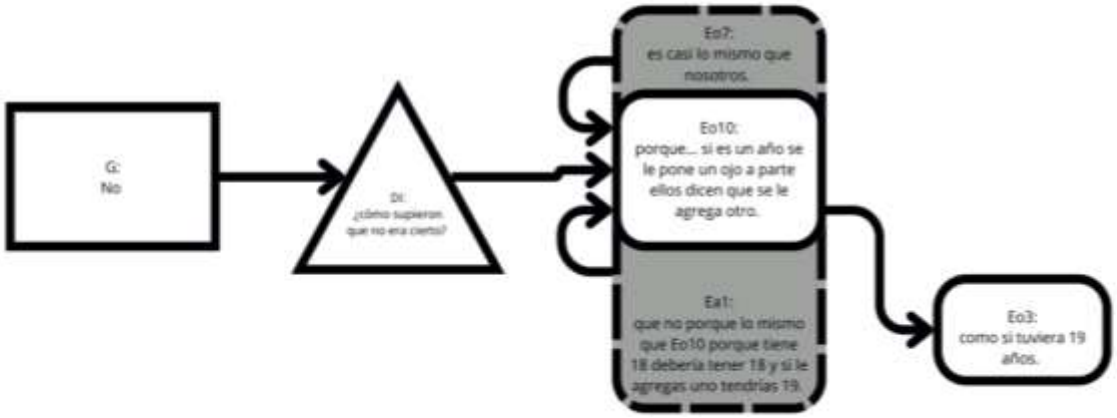
Argumento colectivo en la tarea 3.2



En la tarea 3.3, todos los equipos concordaron que el patrón dado por los niños de 4° era incorrecto, para demostrar su postura usaron su patrón y compararon para identificar que el error estaba en sumar 1, lo cual fue apoyado por los otros equipos. Otra manera, fue usando el patrón con la relación funcional $f(x) = x + 1$ y lo utilizaron con el término 18 (que ya habían acordado previamente), y demostraron que no correspondía con la cantidad de rombos, por lo tanto, no era funcional (Figura 103). Cabe resaltar que en esta interacción colectiva no emergió la generalización lejana como lo vimos en la interacción de equipo 3 y 4.

Figura 103

Argumento colectivo en la tarea 3.3



Respecto a la *actividad* de la tarea 3.2 logramos identificar que los estudiantes organizaron sus *acciones* para construir una *conjetura* del patrón de la sucesión. Para la tarea 3.2 se usó de la *conjetura* para *predecir* términos cercanos, lo mismo sucedió con la tarea 3.3 en esta no solo se usó en la *predicción* de un término cercano sino lejano, a pesar de que dicha tarea su intención era que los estudiantes refutaran una afirmación, emergió la práctica de predecir.

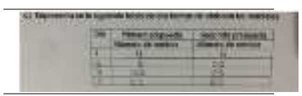
4.2.8. Momento 4: Argumento Individual y de Equipo

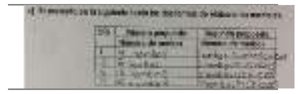
Para este momento realizaron un análisis cualitativo y cuantitativo de dos sucesiones figurales con la ayuda de preguntas y con el uso de una tabla para identificar los patrones con la intención de expresarlos de manera escrita. Los patrones que se emplearon su relación funcional son $f(x) = 4x$ y $f(x) = 4x + 1$.

Para lo cual se trabajó con las tareas 4.1 y 4.2, tomando como principal la tarea 4.2 pues en ella se quedaron plasmados los patrones y se complementó con la tarea 4.1 que corresponde al análisis de las sucesiones. Al igual que con los otros momentos, se elaboró una tabla en Excel (Tabla 56) donde se colocaron las preguntas: ¿quién dice?, ¿qué dice?, ¿cómo lo hace?, ¿cómo aplico el patrón?, ¿qué dice sobre la relación entre los patrones? y ¿para qué lo hace?, esto para identificar las prácticas que emergieron en dichos argumentos.

Tabla 56

Extracto de la tabla de análisis de los argumentos individuales del Momento 4

¿quién dice?	**¿qué dice?**	**¿cómo lo hace?**		**¿cómo aplicó el patrón?**	**¿qué dice sobre la relación entre los patrones?**	**¿para qué lo hace?**
		cuantitativa	**cualitativa**			
Ea1	cada día le tiene que sumar 4 rombos	agregando 4 rombos	colocando 2 rombos amarillos y 2 verdes			Construir una conjetura sobre el patrón
	cada día tiene que sumar 4 rombos chicos y uno grande	agregando 5 rombos	colocando 4 rombos chicos y 1 rombo grande			Construir una conjetura sobre el patrón
Ea2	sumarle 4 rombos cada día	agregando 4 rombos				Construir una conjetura sobre el patrón
	sumarle 4 chicos y uno grande	agregando 5 rombos	colocando 4 rombos chicos y 1 rombo grande			Construir una conjetura sobre el patrón

Eo3	en la primera propuesta son 4 rombos y cada día se le suman 4 rombos	agregando 4 rombos				Construir una conjetura sobre el patrón
	en la segunda, cada día son: 1 rombo [grande] y 4 rombos chicos, y el segundo día son 2 rombos [grandes] y 7 chicos.	reconociendo el crecimiento de los rombos grandes pero el de los chicos no lo encuentra				Construir una conjetura sobre el patrón
Ea5	aumenta 2 más, en total y 2 verdes y 2 amarillas	agrupando 2 filas con 2 columnas	colocando 2 rombos amarillos y 2 verdes		el 2 mantel le gana al 1 mantel por 1	Construir una conjetura sobre el patrón
	aumenta 4 rombos más y si son 2 rombos grandes solo es un pequeño del medio para los 2 rombos.	aumentando 4 rombos	colocando entre rombos grandes uno pequeño.			Construir una conjetura sobre el patrón

Se prosiguió a realizar un esquema del argumento de cada estudiante y se construyeron los esquemas de los argumentos de cada equipo para terminar con el argumento colectivo.

Equipo 1

En las tareas 4.1 y 4.2, los argumentos de Ea1 (Figura 104) y Ea2 (Figura 105) emergieron la práctica de *agregar*, pues para ambos patrones identificaron que se debía sumar. En la sucesión A, sumar 4, y en el caso de la sucesión B, sumar 5. El uso de su patrón en la tabla fue congruente con cada argumento.

Figura 104

Argumento individual de Ea1 en las tareas 4.1-4.2-M4

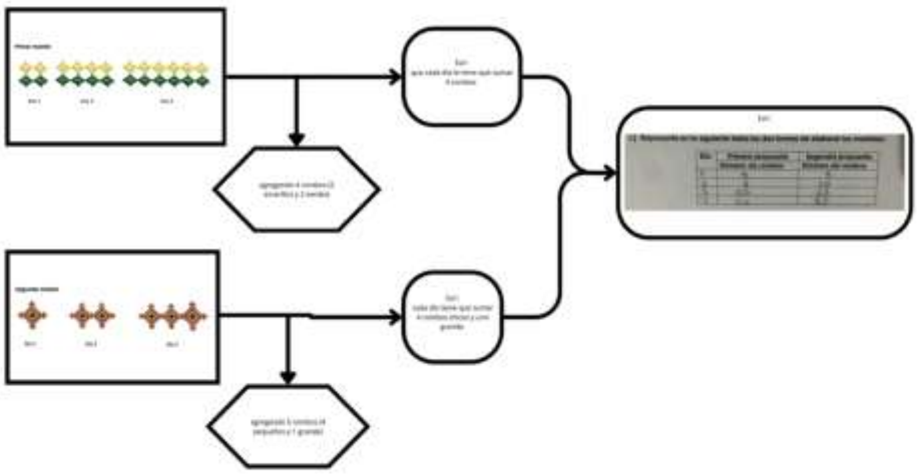
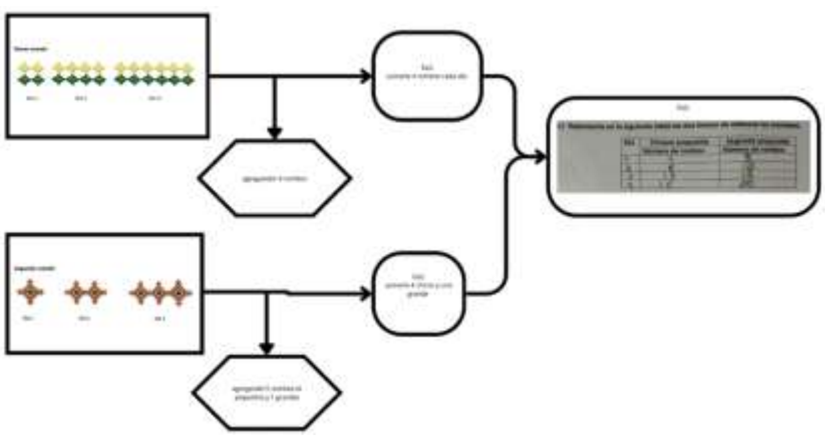


Figura 105

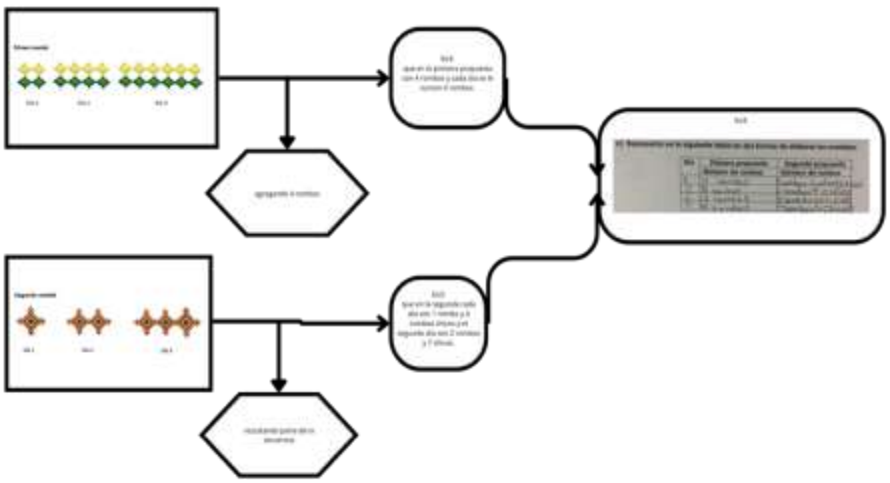
Argumento individual de Ea2 en las tareas 4.1-4.2-M4



Por otro lado, en la sucesión A, el argumento de Eo3 (Figura 106) emergió la práctica de agregar y concordó con el de sus compañeras, pero en la sucesión B no logró construir un argumento, ya que solo extrajo una parte de la sucesión.

Figura 106

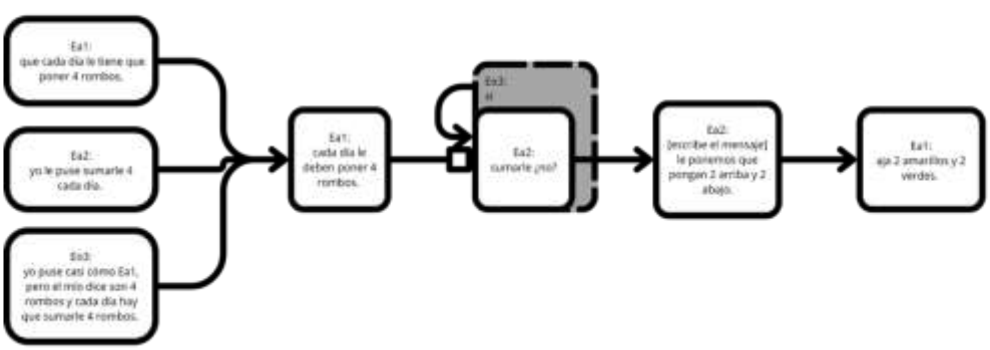
Argumento individual de Eo3 en las tareas 4.1-4.2-M4



En la tarea 4.3, de la sucesión A, el argumento se caracterizó como ser co-construido ya que el equipo participó, validando que el patrón era sumar 4 y agregando características cualitativas en torno a la posición de los rombos y los colores (Figura 107).

Figura 107

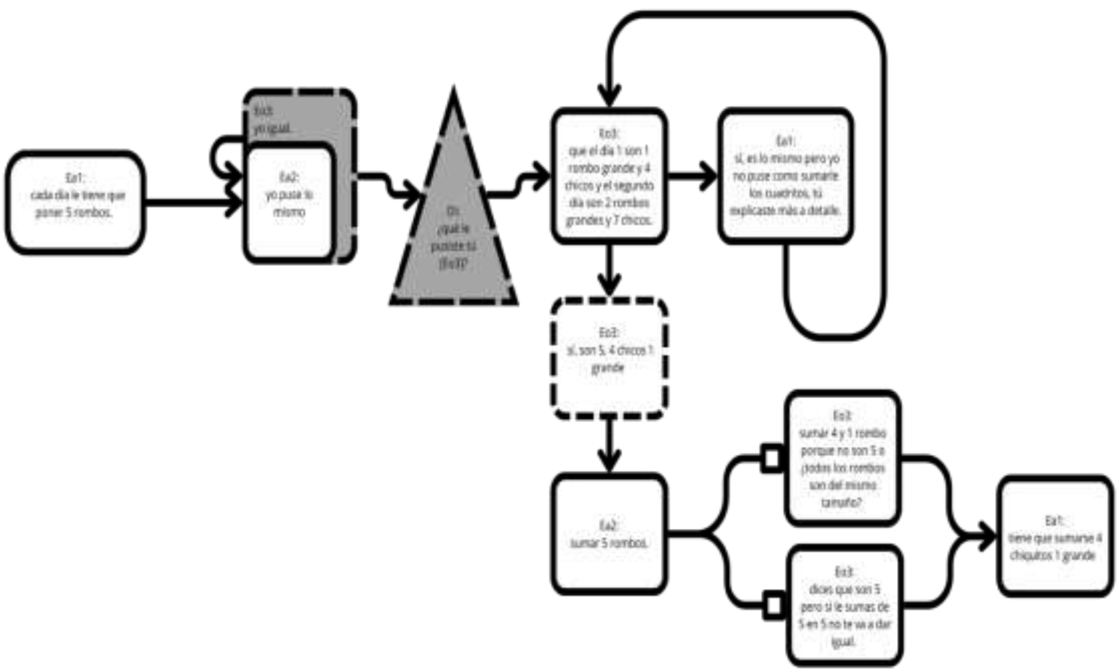
Argumentación del E1 en torno al patrón B-4.3-M4.



En el caso de la sucesión B, el argumento se robusteció respecto a la parte cualitativa del patrón, con la cantidad y el tamaño de los rombos. Con ello, nos damos cuenta de que consideraron lo que se trabajó en el segundo momento del diseño (Figura 108).

Figura 108

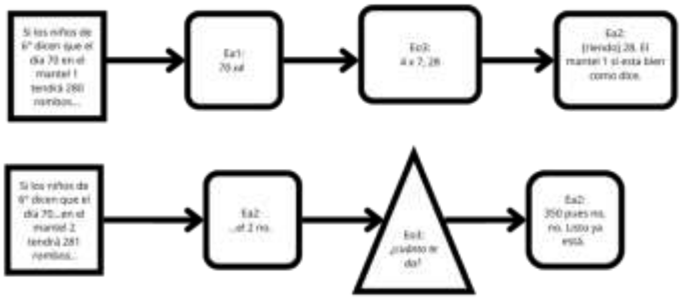
Primera argumentación del E1 en torno al patrón B-4.3-M4



En la tarea 4.4, en un primer instante, los estudiantes no estuvieron a favor de la afirmación ya que solo en la sucesión A correspondía con la cantidad de rombos que obtuvieron al utilizar su argumento. Por el contrario, en la sucesión B cuando usaron el argumento para predecir el término 70 no correspondía con la afirmación de la tarea (Figura 109).

Figura 109

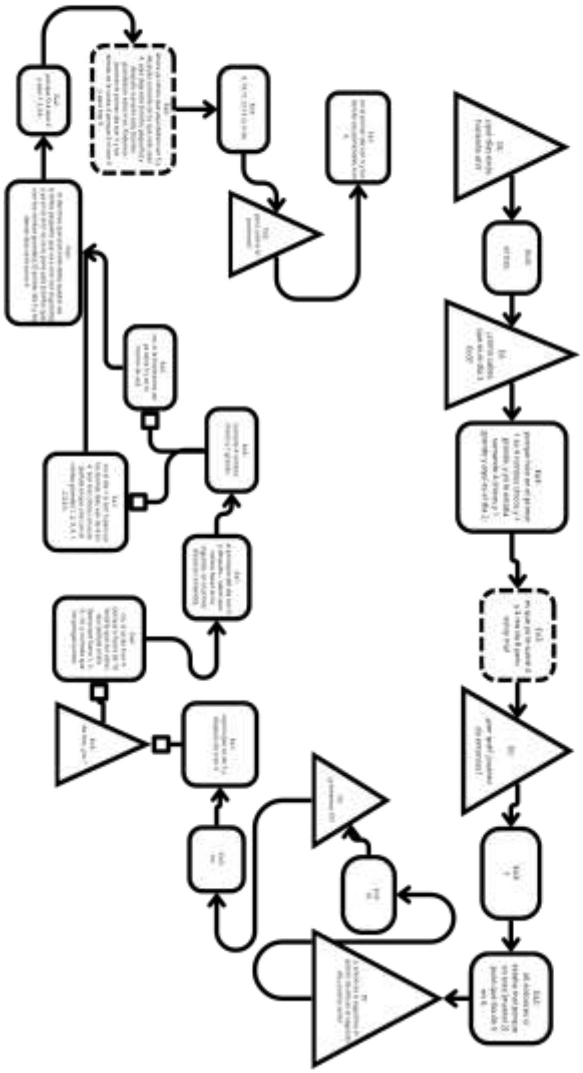
E1. Primera postura respecto a la tarea 4.4



Se realizó una intervención al ver que los integrantes realizaban la sucesión B con el material concreto. Se cuestionó como sabían que esa figura le correspondía al término 3. Con dicha intervención fue que el equipo se dio cuenta que si aplicaban su argumento de “sumar 5” no correspondía con la cantidad de rombos en la figura de los términos que ya conocían. Al final, lograron transformar su argumento, al reconocer que se sumaba 4, con la restricción del primer término que comenzaba con 5 rombos (Figura 110).

Figura 110

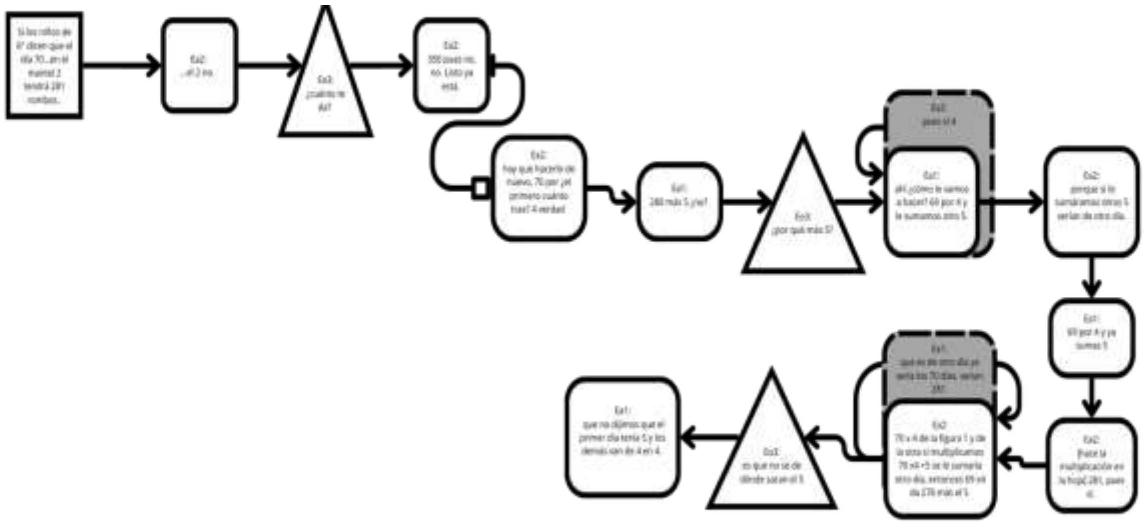
Segunda argumentación del E1 en torno al patrón B-4.4-M4.



Con el nuevo argumento, los estudiantes decidieron revisar su posición en torno a la afirmación del patrón para la sucesión B, lo que permitió darse cuenta de que toda la afirmación de la tarea 4.4 era correcta (Figura 111). Sin embargo, Eo3 no entendía el razonamiento de sus compañeras, estas intentaron explicar que estaban multiplicando 69 x 4 y luego se sumaban 5, debido al primer término, y aunque aún no estaba a su alcance, las apoyo.

Figura 111

E1. Segunda postura respecto a la tarea 4.4, patrón B.



Prácticas y Argumentación

En los argumentos individuales podemos identificar la práctica de agr*egar* para ambas sucesiones, a excepción de Eo3 que solo extrajo una parte de la sucesión como lo hizo en el momento 1. El argumento de equipo, para ambas sucesiones, continúo emergiendo la práctica de *agregar*, pero se refinó con la parte cualitativa. La tarea de generalización lejana permitió para ambos argumentos emergiera la práctica de *relacionar*, solo en el caso de la sucesión B se colocó una excepción al patrón. En la argumentación, Eo3 no termina convencido, pero apoya a sus compañeras.

Equipo 2

En las tareas 4.1 y 4.2 los argumentos tanto en la sucesión A como en la B emergieron la práctica de agregar, pero solo en la A coincidieron que se tenía que sumar 4. En el caso de la B, el cuánto creció fue diverso, ya que Ea4 (Figura 112) lo cuantificó como más 5, Ea5 (Figura 113) como más 4 y Ea6 (Figura 114) como más 3, esto es, cada una reconoció el crecimiento diferente. Tanto en Ea4 como en Ea5 no hubo congruencia al usar el patrón de la sucesión B ya que se dieron cuenta, a través del análisis de la tabla, de la relación entre el patrón de las sucesiones A y B.

Figura 112

Argumento individual de Ea4 en las tareas 4.1-4.2-M4

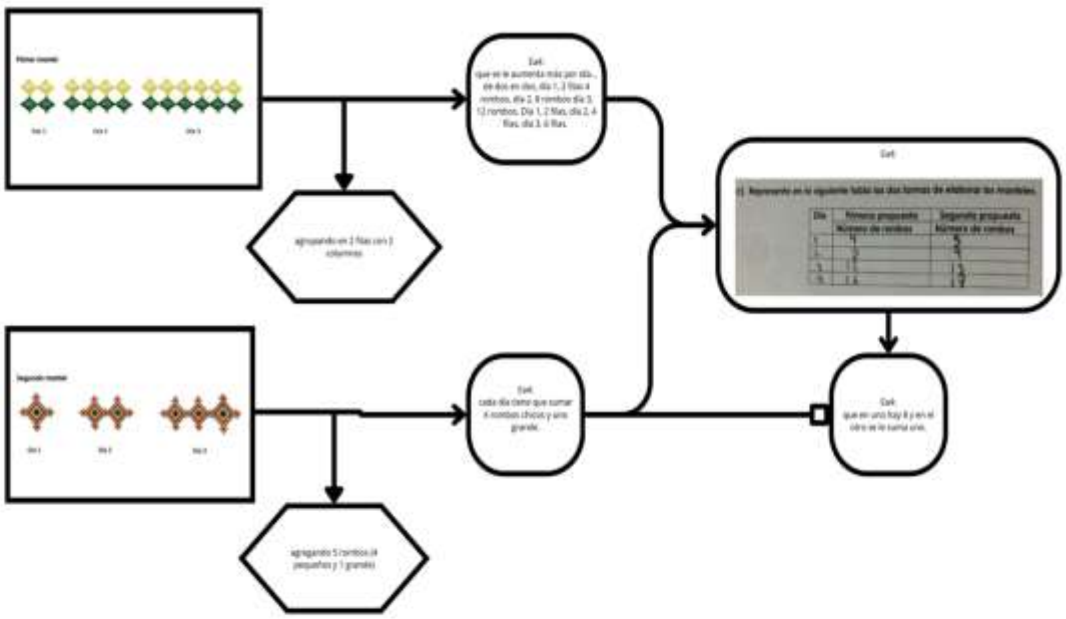


Figura 113

Argumento individual de Ea5 en las tareas 4.1-4.2-M4

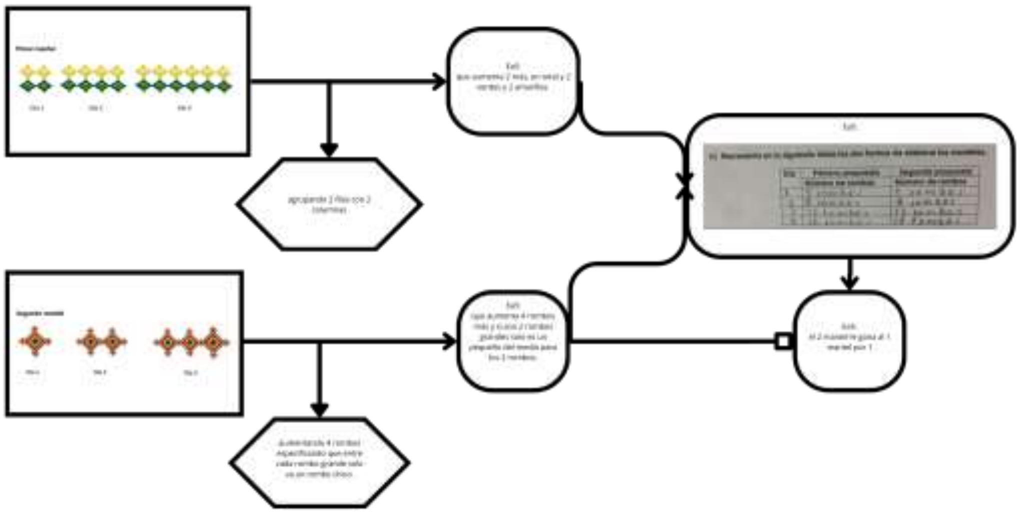
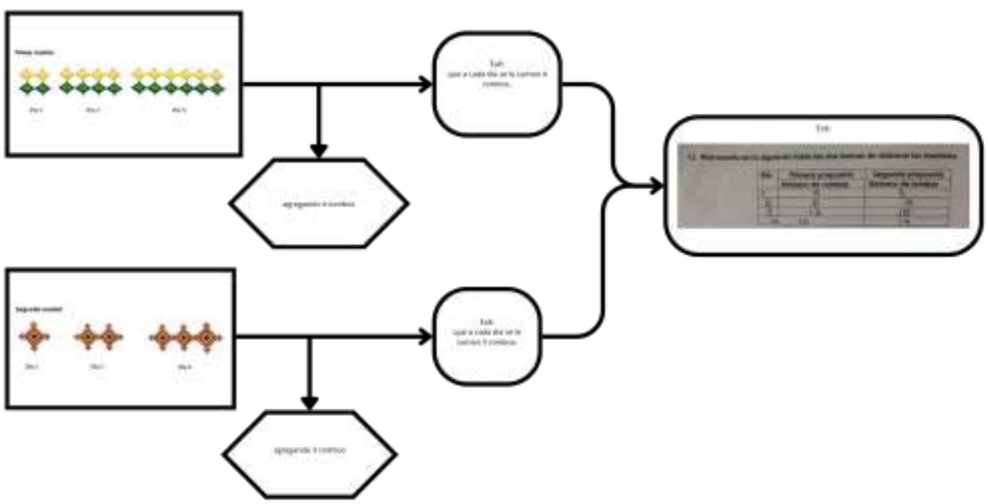


Figura 114

Argumento individual de Ea6 en las tareas 4.1-4.2-M4



En la tarea 4.3, en el patrón de la sucesión A, se co-construyó un argumento ya que validaron que era sumar 4 y agregaron características cualitativas en torno a la posición de los rombos y los colores (Figura 115), aunque no se recupera en la hoja de trabajo. En el caso de la sucesión B, a pesar de que Ea4 y Ea5 en la tarea previa ya habían identificado la relación de la sucesión B era uno más que la de A, no lograron conectar esas ideas para este momento. La argumentación giro en torno a validar el crecimiento del patrón y especificar la cualidad del tamaño de los rombos, concluyendo que son 4 rombos, 3 chicos y 1 grande (Figura 116).

Figura 115

Argumentación del E2 en torno al patrón A-4.2-M4.

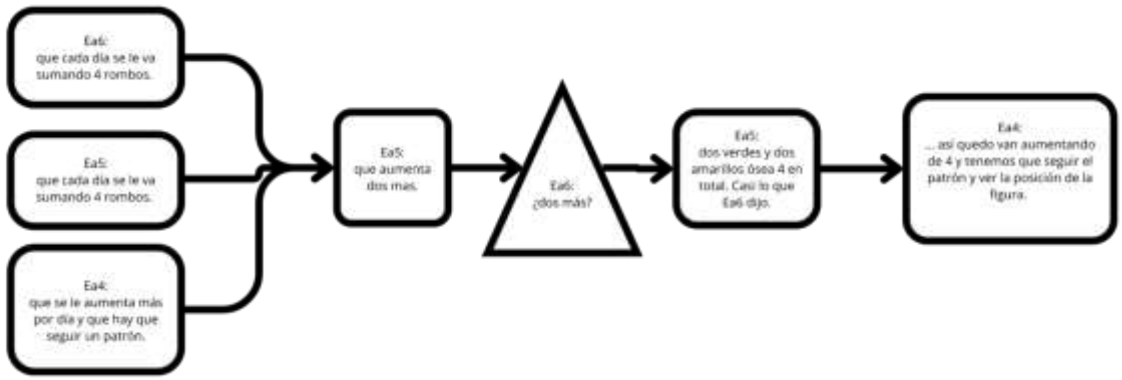
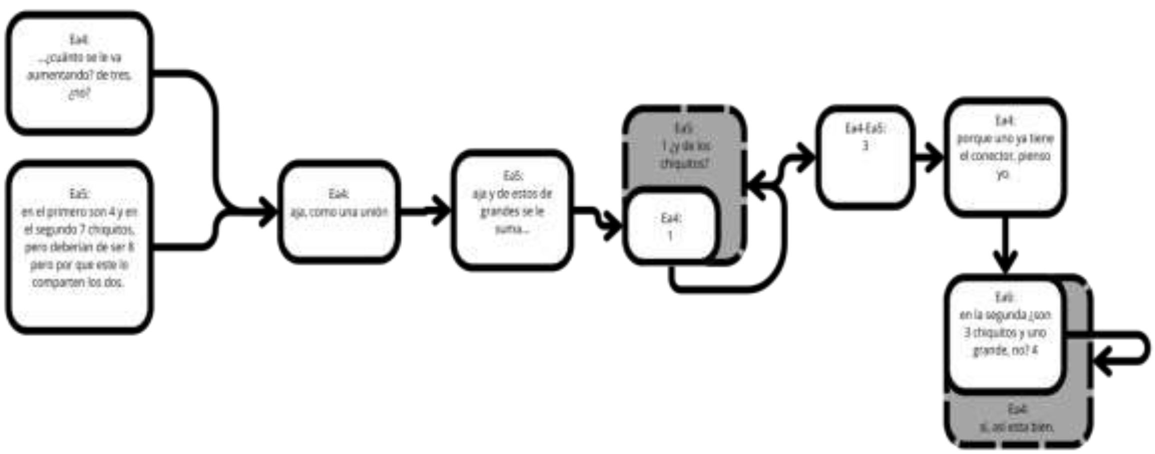


Figura 116

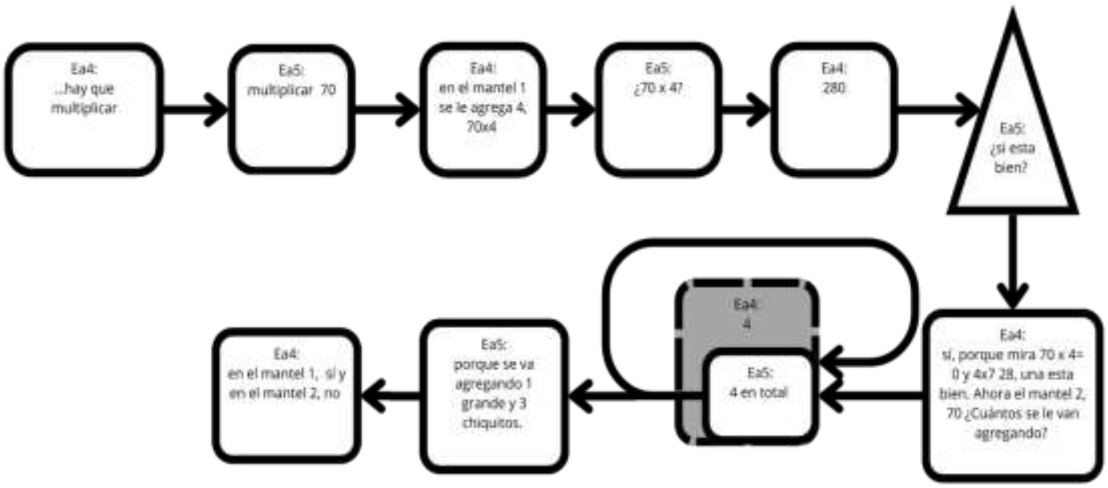
Argumentación del E2 en torno al patrón B-4.2-M4



En la tarea 4.4 se acordó que la forma de tomar una postura respecto a la afirmación de la tarea era multiplicar el 70 por el patrón que encontraron, así fue como lograron solo acordar con una parte de la afirmación. Así que solo afirmaron que en el mantel 1 sí correspondían los rombos, pero refutaron lo del mantel 2 (Figura 117). Para este equipo no se realizó cuestionamiento por parte de la investigadora.

Figura 117

Argumentación del E2 en torno a la postura del patrón de las sucesiones A y B-4.3-M4.



Prácticas y Argumentación

En los argumentos individuales podemos identificar que emergió la práctica de agregar con la diferencia en la cuantificación del crecimiento. En el argumento de equipo, en ambas sucesiones, se robusteció al emerger la práctica de agregar con características cualitativas, solo en la sucesión B volvieron analizar el crecimiento del patrón para acordar en el cuánto cambia. Sin embargo, los argumentos se modifican en la tarea de predicción lejana ya que emergió la práctica de relacionar. Al usar el patrón A lograron concordar con la afirmación, pero en el B no, ya que no contemplaron que su patrón no cumple en el primer término.

Equipo 3

En las tareas 4.1 y 4.2, los argumentos para el patrón A emergieron las prácticas de *agrupar*, al decir 2 filas con 2 columnas (Figura 118) y la práctica de *agregar* al añadir 4 rombos (Figura 119). En el caso del patrón B, emergieron la práctica de *agregar*, ya sea 4 o 5 rombos, *comparar los patrones* de las sucesiones A y B y reconocer que la diferencia es uno más (Figura 120). Eo7 y Ea8 no fueron congruentes al usar el patrón que escribieron en el primer análisis, ya que en el segundo análisis se dieron cuenta de la relación entre los patrones de las sucesiones A y B y la tabla fue completada a partir de ese razonamiento, que fue vista desde el inicio por Eo9.

Figura 118

Argumento individual de Eo7 en las tareas 4.1-4.2-M4

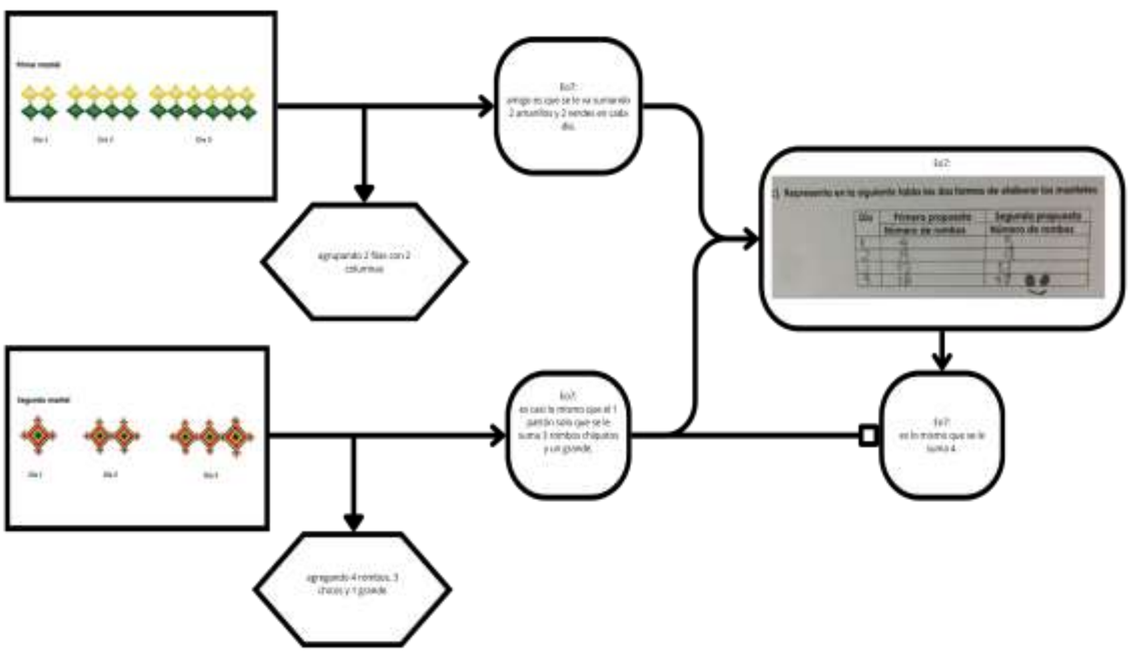


Figura 119

Argumento individual de Ea8 en las tareas 4.1-4.2-M4

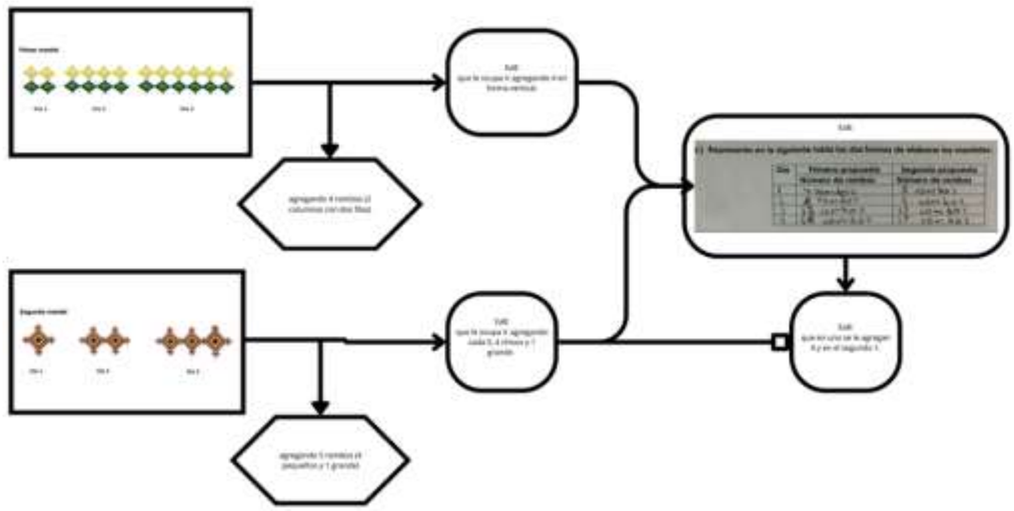
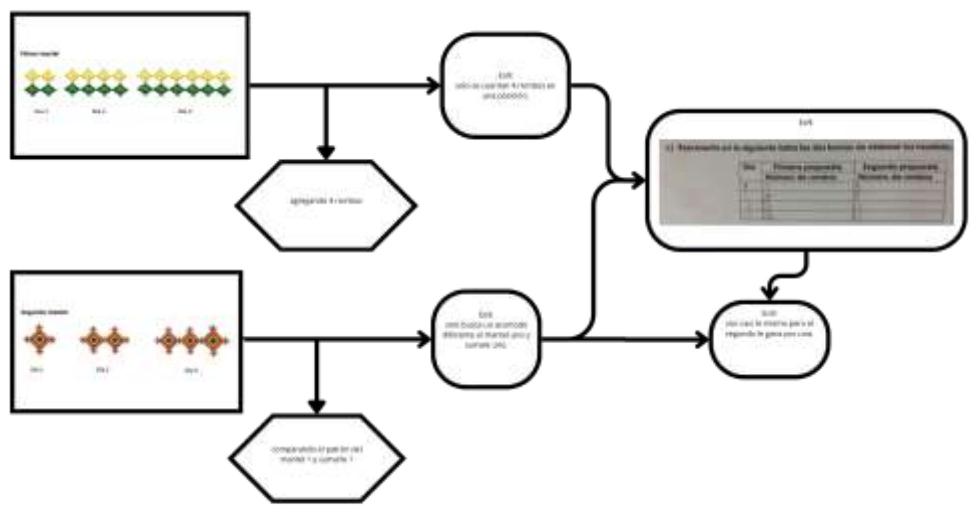


Figura 120

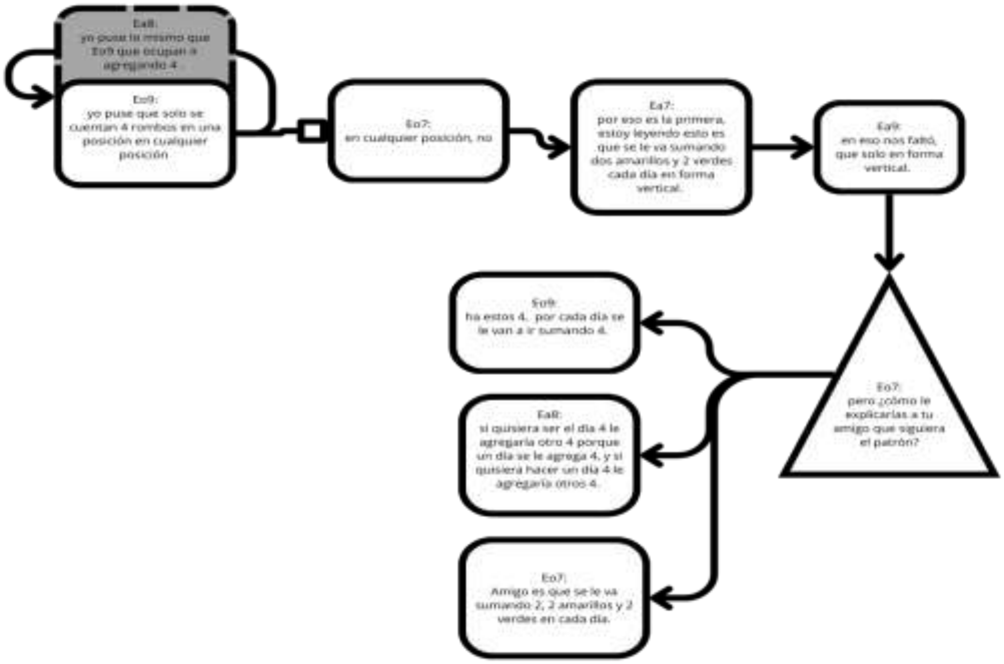
Argumento individual de Eo9 en las tareas 4.1-4.2-M4



En la tarea 4.3 los estudiantes solo explicaron el patrón que encontraron en las sucesiones A y B. En el patrón A, no se logró la construcción colectiva del argumento ya que a pesar de que se mencionaron tanto las características cuantitativas como cualitativas del patrón no se discutió y no se plasmó en la hoja de trabajo (Figura 121).

Figura 121

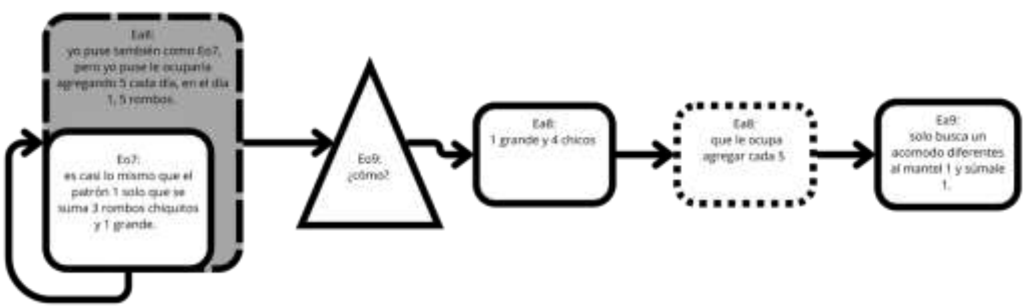
Argumentación del E3 entorno al patrón A-4.3-M4.



El patrón de la sucesión B quedó solo como la explicación de lo que encontraron sin confrontar ni validar, pues había argumentos donde emergían las prácticas de *agregar* y *comparar sucesiones* para encontrar la diferencia (Figura 122).

Figura 122

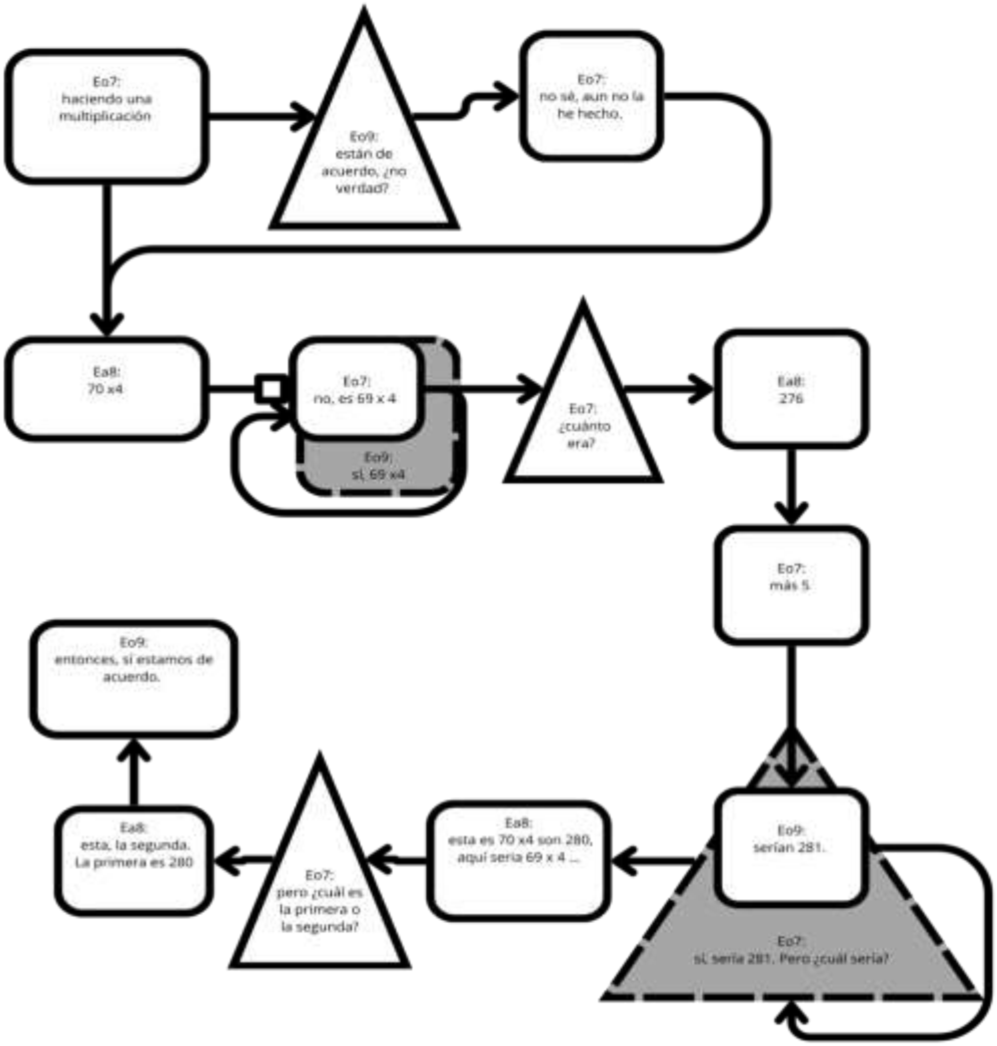
Argumentación del E3 entorno al patrón B-4.3-M4.



Para la tarea 4.4 lograron tomar postura respecto a la afirmación utilizando la multiplicación del número del término y usando el patrón encontrado. A pesar de que no se discutió sobre el patrón de la sucesión B, para este momento si se recuperó la excepción que tenía, es decir, el primer término debe contar con 5 rombos. Por lo tanto, tenían que quitarle 1 término al 70, dando 69, luego multiplicarlo por 4 y sumarle el 5 del primer término. Así lograron concordar con la afirmación de la tarea (Figura 123).

Figura 123

Argumento colectivo de E3-4.4-M4



Prácticas y Argumentación

En los argumentos individuales en la sucesión A emergieron las prácticas de *agrupar* y *agregar*, por su parte en la sucesión B las prácticas de *agregar* y *comparar sucesiones*. En los argumentos de equipo solo se explicó lo que hizo cada uno y se comentó la característica cualitativa del patrón, pero no se logró co-construir el argumento; fue hasta la tarea de predicción lejana que el argumento cambió pues emergió la práctica de *relacionar*. En el caso del patrón de la sucesión B se consideró la excepción del primer término. Este argumento colectivo carece de convencimiento ya que solo Eo7 da el razonamiento, por lo que inferimos que los otros fueron persuadidos. A pesar de que la práctica de *comparar sucesiones* estuvo presente la interacción individual no se usa para demostrar su postura.

Equipo 4

En las tareas 4.1 y 4.2, los argumentos del patrón de la sucesión A emergieron las prácticas de agregar, es decir, 4 rombos (Figura 124); agrupar, 1 pieza de 2 filas con 2 columnas (Figura 125); y relacionar la posición del término y la cantidad de rombos (Figura 126). En el patrón de la sucesión B, las prácticas fueron *agregar*, ya sea 4 o 5 rombos; o bien *relacionar*. En el caso de Eo12, no fue congruente con el uso del patrón que había identificado en el primer análisis y en el segundo análisis, donde se utilizó una tabla, logró ver la relación entre los patrones de las sucesiones A y B, pero no la empleó.

Figura 124

Argumento individual de Eo10 en las tareas 4.1-4.2-M4

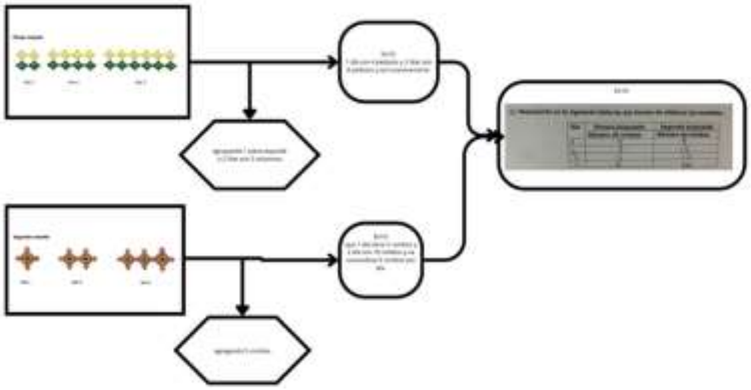


Figura 125

Argumento individual de Ea11 en las tareas 4.1-4.2-M4

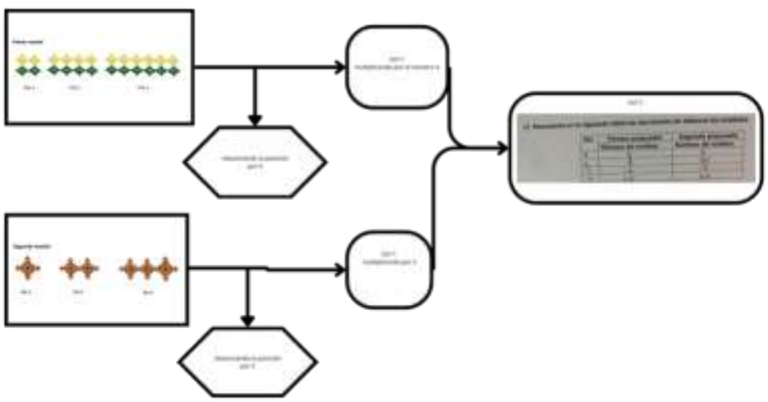
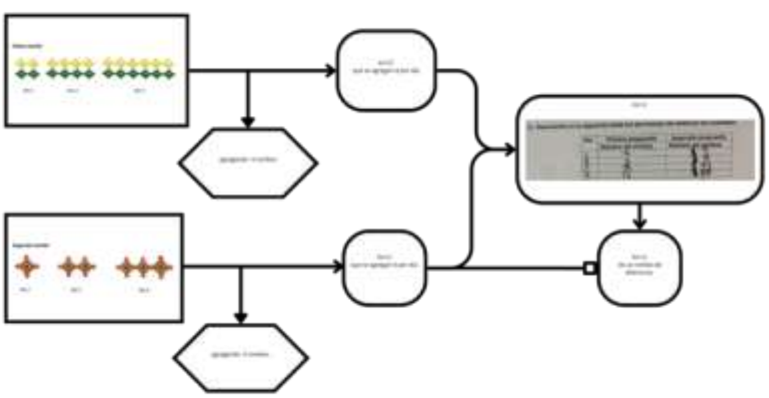


Figura 126

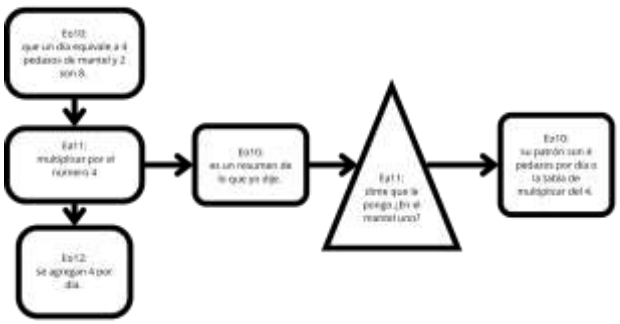
Argumento individual de Eo12 en las tareas 4.1-4.2-M4



En la tarea 4.3 el argumento del patrón de la sucesión A fue complementado al reconocer otra manera de expresar el crecimiento, emergieron las prácticas de *agregar* y *relacionar* para explicar el patrón (Figura 127). Sin embargo, en el patrón de la sucesión B no se discutió ni se presentaron los argumentos de cada uno, ya que solo Eo10 escribió “sus patrones son 5 pedazos por día o es la tabla de multiplicar del 5”. Suponemos que se relacionó con lo acordado en el patrón de la sucesión A.

Figura 127

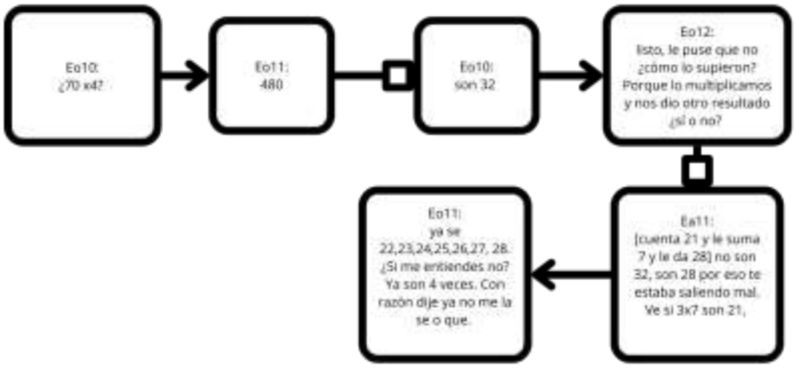
Argumentación del E4 entorno al patrón A-4.3-M4.



Para la tarea 4.4 omitieron una parte de la afirmación ya que solo demostraron en la argumentación que en el mantel 1 sí correspondía los rombos al término 70, creyendo que no era necesario revisar la afirmación en el mantel 2 (figura 128).La confrontación que se dio fue en torno a la multiplicación del 7x4 pues no estaban de acuerdo con el resultado. Al final Ea11, utiliza 7x3 que es una multiplicación de la que sí conocen el resultado y solo suman otros 7, demostrando que sí eran 280 rombos para el término 70 en el mantel 1.

Figura 128

Argumentación del E4-4.4-M4.



Prácticas y Argumentación

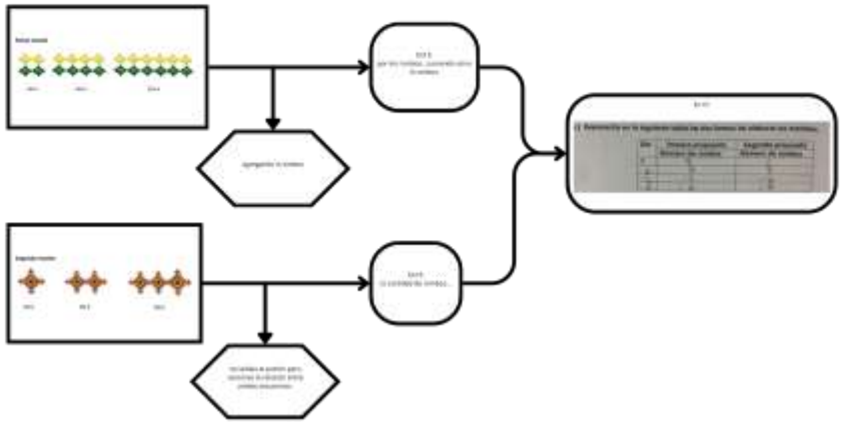
En los argumentos individuales en la sucesión A identificamos que emergieron las prácticas de agrupar, agregar y relacionar; y en la sucesión B las prácticas de agregar y relacionar. En el argumento de equipo, para la sucesión A, se decide incluir ambas prácticas–agrupar y relacionar– pues acordaron que es lo mismo. Pero en la sucesión B, se persuadió a Eo12 ya que los otros dos compañeros tenían la misma respuesta, por tanto, el argumento quedó como el de la sucesión A, con la diferencia de que el crecimiento era en 5 rombos. En la tarea de generalización lejana solo demostraron una parte de la afirmación, usando su argumento donde emerge la práctica de relacionar que funcionaba para el término solicitado.

Equipo 5

En las tareas 4.1 y 4.2, para el patrón A, el argumento de Eo13 y Ea14 emergió la práctica de *agregar* 4 rombos sin especificar características cualitativas. En el patrón B, Eo13 solo señala la característica cuantitativa, pero sin especificación numérica, sin embargo, en el segundo análisis con la tabla logra identificar el crecimiento del patrón de manera correcta (Figura 129).

Figura 129

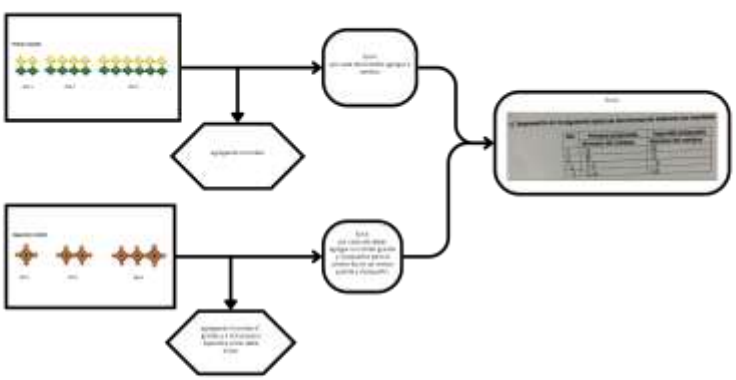
Argumento individual de Eo13 en las tareas 4.1-4.2-M4



En el caso de Ea14, el argumento emergió la práctica de *agregar* con especificación, ya que reconoce que aumenta de 4 rombos (1 rombo grande y 3 chicos), con la excepción del primer término que comienza con 5 rombos, sin embargo, en el análisis con la tabla solo rescata el patrón de los rombos grandes, donde el crecimiento corresponde a la relación funcional $f(x) = x$, por ello no hay una congruencia con el uso del patrón (Figura 130).

Figura 130

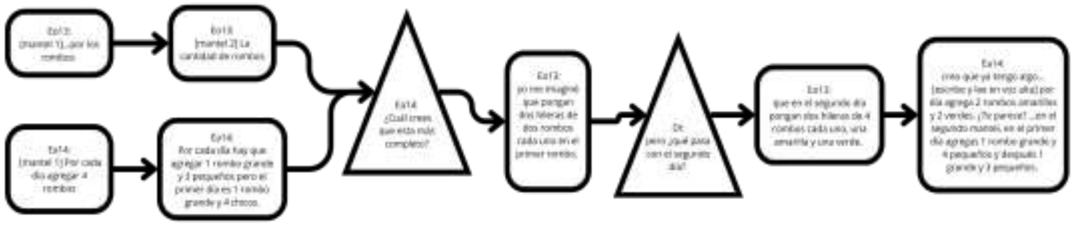
Argumento individual de Ea14 en las tareas 4.1-4.2-M4



En la tarea 4.3 ambos estudiantes explicaron su argumento, pero cuestionaron cuál es el más completo. Para el patrón de la sucesión A hablaron tanto de la parte cuantitativa, al mencionar que se van a agregar 4 rombos, como de la cualitativa, al especificar que serán 2 verdes y 2 amarillos. En el caso del patrón de la sucesión B, se quedan con el argumento de Ea14 (Figura 131).

Figura 131

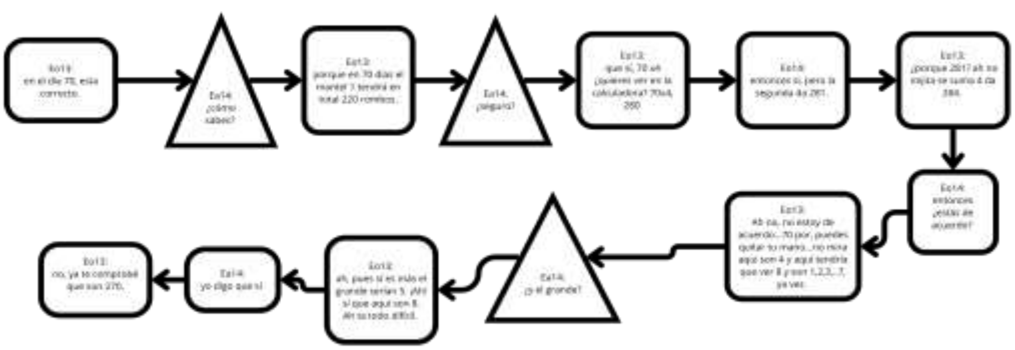
Argumentación del E5 entorno al patrón A-B-4.3-M4.



En la tarea 4.4 ambos concordaron en el patrón de la sucesión A, pero Ea14 no estuvo convencida a pesar de que Eo13 le mostró que 70x4 eran 280 y sumarle 4 rombos daban 284, por lo tanto, no daban los 281 de la afirmación. Desafortunadamente, al final se pierden en su discurso diciendo que sale 270 (Figura 132).

Figura 132

Argumentación del E5-4.4-M4.



Prácticas y Argumentación

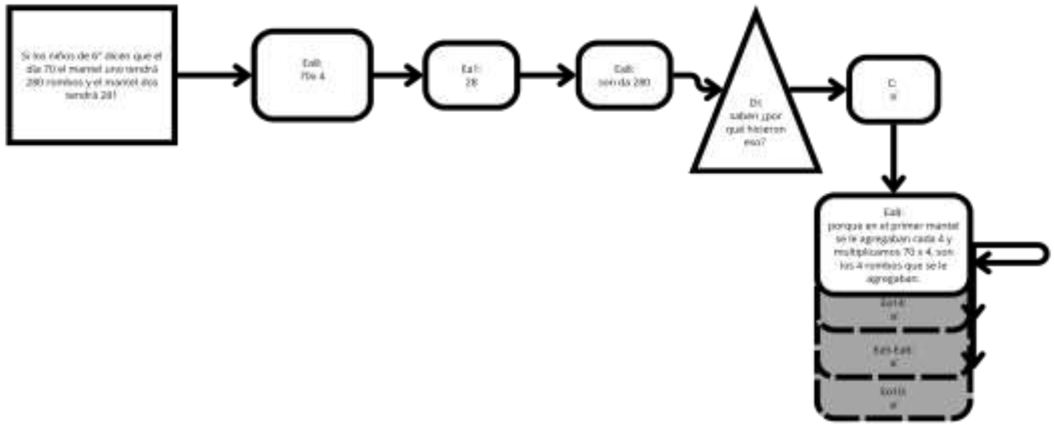
En los argumentos individuales podemos identificar que emergieron las prácticas de *agregar con* y *sin especificación numérica*. En la sucesión B el argumento de Ea14 solo añade la característica cualitativa del patrón. En los argumentos de equipo para ambas sucesiones acuerdan que el argumento debe contener características cuantitativas y cualitativas, de modo que, los argumentos de A y B emergió la práctica de *agregar* 4 *con especificación cualitativa*, solo que, en el B con excepción del primer término, que son 5 rombos. En la tarea de generalización lejana el argumento cambió al emerger la práctica de *relacionar*, en el caso de la sucesión A se hace uso del argumento y concordaron con la afirmación. Con la sucesión B también se empleó el argumento, pero no concordaron con la afirmación. Eo14 no terminó convencida con la forma que Eo13 uso el argumento.

4.2.9. Momento 4: Argumento Colectivo

La tarea 4.5 tenía la intención que los estudiantes mostraran su postura ante la afirmación de la tarea 4.4 y argumentaran la veracidad de los argumentos construidos en equipo para que el colectivo le otorgará validez. Con el argumento construido en torno a la primera parte de la afirmación, en este caso del patrón A, los equipos acordaron ya que utilizaron el mismo argumento donde se usa la multiplicación del término por 4. Lo que nos permitió dar cuenta de que el uso del patrón no solo se quedó en *agregar* sino en la *relacionar* la posición de cada término y la cantidad de rombos que le correspondían (Figura 133).

Figura 133

Argumentación colectiva de la situación del mantel 1-4.5-M4.



Para la segunda parte de la afirmación que corresponde al patrón B, se construyeron dos argumentos. El primero emergió la práctica de *relacionar* al vincular la posición del término y la cantidad de rombos con la excepción del primer término (Figura 134). Para predecir términos lejanos era necesario quitar un término y sumarle 5, es decir, $f(x) = [(x-1)4] + 5$. Sin embargo, no fue aceptado por todo el grupo por lo que tuvieron que demostrar de dónde sacaban el 69 y por qué sumaban 5.

Al final con ayuda del material que se elaboró para manipular en el pizarrón, se mostró de donde se obtenía el 5 y porque se tenía que multiplicar por 4. Esto ayudó al estudiante Eo7 a formar el segundo argumento donde emergió la práctica de *comparar sucesiones* al reconocer la relación entre los patrones de las sucesiones patrón A y B, ya que comparó la cantidad de rombos de ambos y reconoció que había una diferencia de 1 (Figura 135). Mismo que fue validado por el grupo.

Figura 134

Primera argumentación colectiva de la situación del mantel 2-4.5-M4

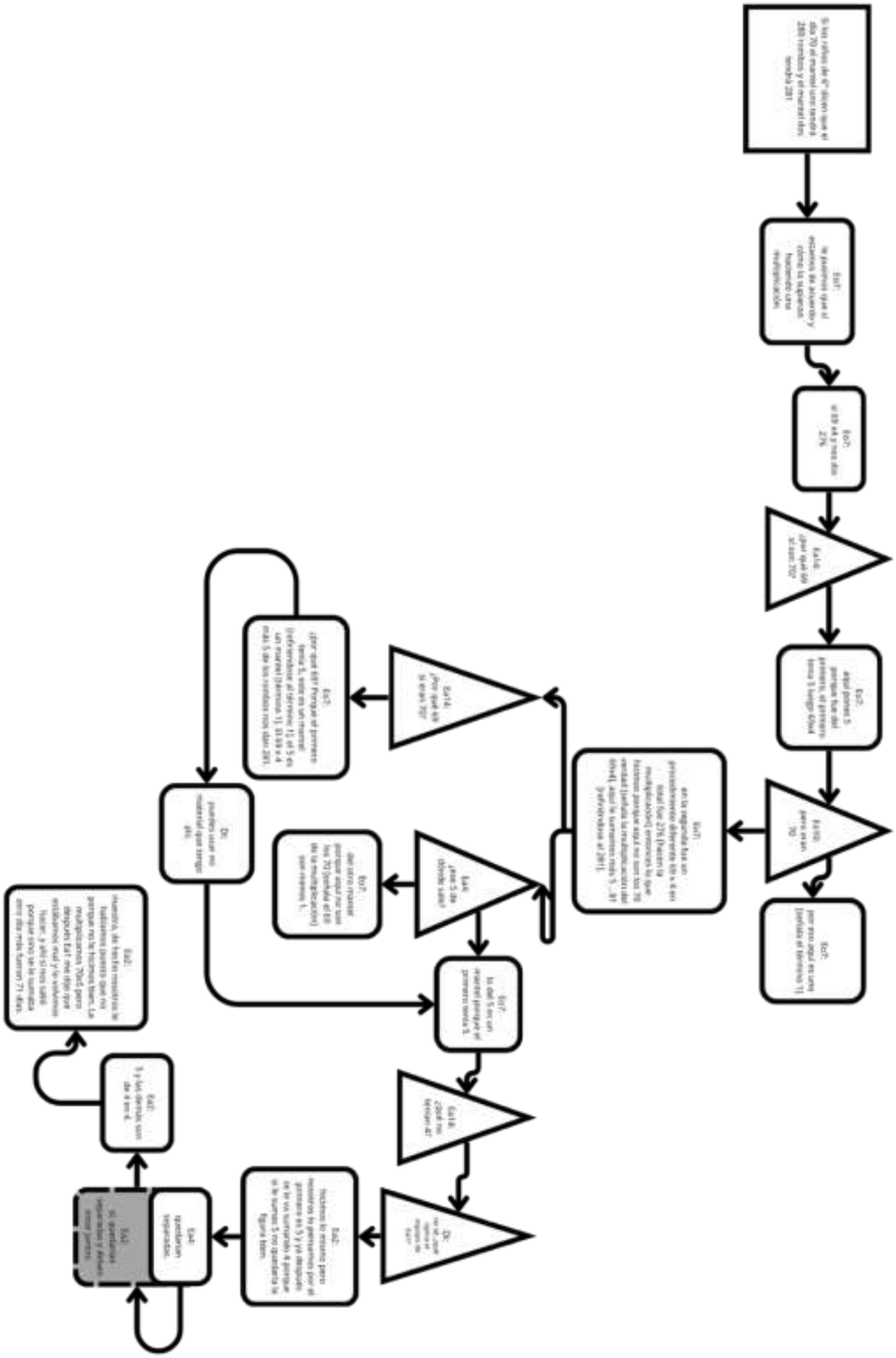
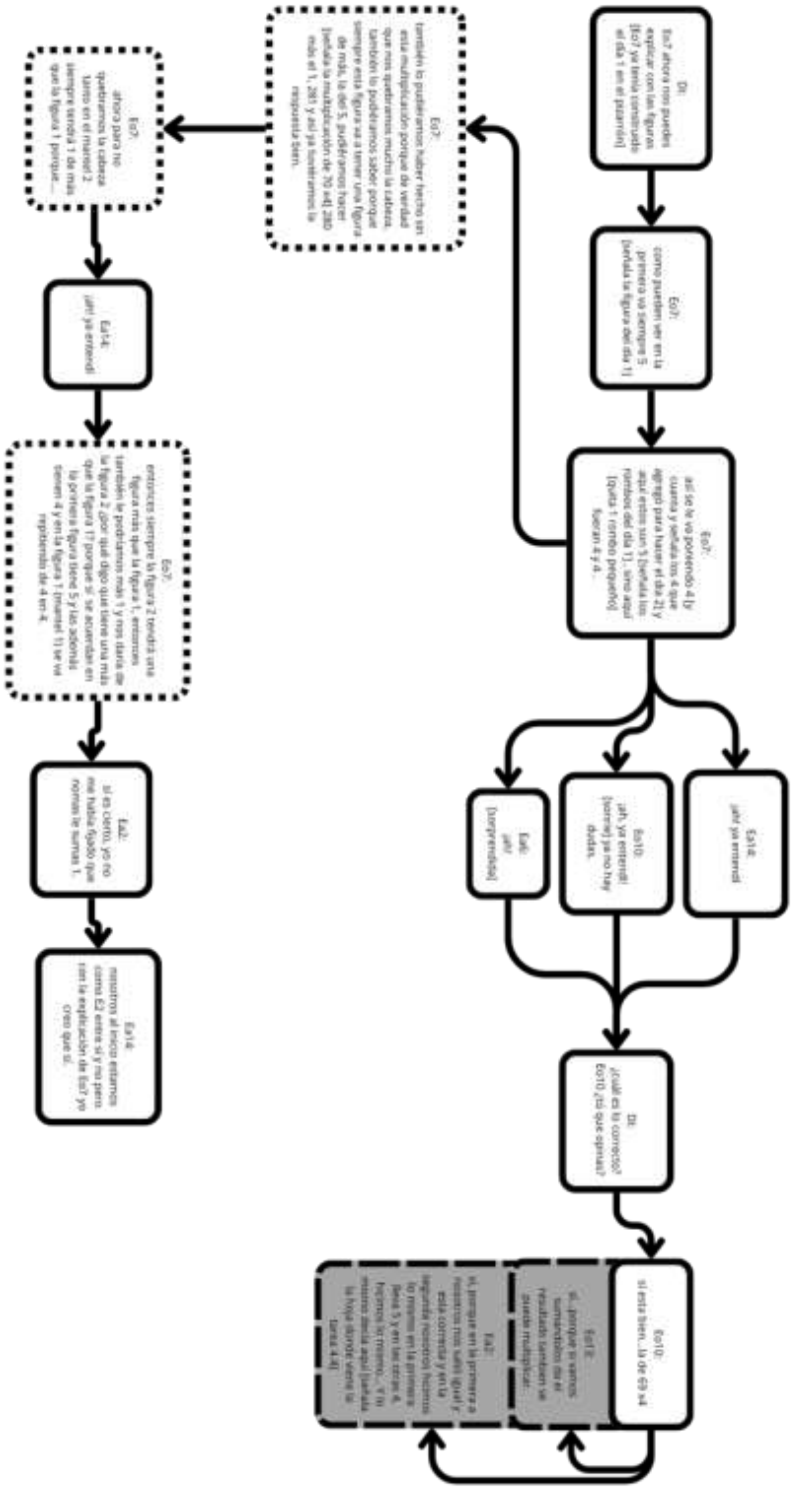


Figura 135

Segunda argumentación colectiva de la situación del mantel 2-4.5-M4



En síntesis, por parte de la generalización de patrones logramos identificar que los argumentos cambiaron en torno a la interacción y a la tarea. En la interacción se puede observar en la mayoría de los equipos se robustecieron los argumentos al reconocer las características cualitativas del patrón. Por su parte, en las tareas cuando se solicitaba la expresión prevalecía el argumento donde emerge la práctica de *agregar*, pero, en tareas de generalización lejana, donde debían demostrar su postura, el argumento cambiaba porque emergía la práctica de *relacionar*.

En la interacción colectiva el argumento donde emergía la práctica de *relacionar*, el patrón de la sucesión A fue validado y respaldado por los otros equipos. En el patrón de la sucesión B fue haciéndose más explícito en la forma de usarlo, ya que a pesar de que la práctica que emergió era *relacionar* tenía una excepción en el primer término. Lo cual implicaba no solo multiplicar el término por el patrón sino quitar la excepción para después agregarla. En esta interacción también surgió el argumento donde emergió la práctica de *comparar de sucesiones* el cual validaron por la funcionalidad para generalizar términos lejanos.

Por parte de la argumentación matemática colectiva se identificó diversos momentos como la reformulación de argumentos, es decir, al escuchar o mostrar al otro se vuelve más explícito el razonamiento. Los momentos de confrontación cuando dos o más argumentos presentan diferentes razonamientos o se diserta el argumento, por lo que los estudiantes muestran su validez mediante el convencimiento del otro mediante la razón o al convencer, es decir, cuando uno o más estudiantes, mediante la relación de poder de autoridad de otros compañeros. De allí que emerja el apoyo, el aporte de más ideas o bien la refutación del argumento del otro.

4.3. Síntesis de los resultados

La argumentación matemática colectiva que se desarrolló en la Situación Aprendizaje, diseñada con base en prácticas para la generalización de patrones con sucesiones figurales se sintetiza en la figura 136. La estructura de cada momento era de tres tipos de interacción: la individual, con el análisis y la expresión del patrón; en equipo, con la potenciación de la expresión del patrón individual; y, finalmente, en colectivo, con la predicción cercana y lejana. En cada tipo de interacción se obtuvo un argumento, el cual nombramos en relación con el tipo de interacción: argumento individual (AI), refiriéndonos aquellos argumentos que son de interacción del estudiante con la tarea; argumentos de equipo (AE) son aquellos que validan dos o más estudiantes; y los argumentos colectivos (AC), aquellos que son validados, funcionales y comprensibles para todos los estudiantes del aula.

Figura 136

La argumentación matemática colectiva en tareas basadas en prácticas para la generalización de patrones figurales

Entre cada interacción surgieron elementos que caracterizaron la forma de validación. En la interacción individual, la validación provenía del análisis que realizaron de las sucesiones para conjeturar sobre el patrón. En la interacción en equipo, la validación se expresaba en términos de apoyo, convicción y persuasión, en algunos casos se usaban argumentos que emergían prácticas funcionales que se ponían a prueba, pero para algunos este no era un requisito para validar. En la interacción en colectivo, la validación se obtiene del apoyo y la convicción, y desaparece la persuasión; también la funcionalidad emerge como necesaria, aunque no es suficiente para que los estudiantes validen el patrón. Así, aparece la comprensión del argumento que comunican, es decir, requieren que el o los estudiantes muestren sus razones de cómo llegaron al patrón.

La comprensibilidad del argumento pudimos observarlo cuando el estudiante muestra verbalmente su razonamiento, apoya su razonamiento verbal con material concreto; al cuestionar, criticar o refinar el argumento, es decir, decir con otras palabras su razonamiento o bien parafraseando, o sea cuando otro estudiante expresa lo que entendió del razonamiento mostrado.

La participación estudiantil fue cada vez más importante, ya que requerían comprender el argumento, lo que implicaba mayor involucramiento, por ello, la validación por persuasión ya no se presentó en lo colectivo, así como lo funcional no apareció en todos los equipos, pero fue necesario en la interacción colectiva. Este nivel de participación es un reflejo de las normas de convivencia, las cuales cedían el poder del docente a los estudiantes. Esto se trabajó antes con el grupo y se visibilizó con la situación de aprendizaje diseñada.

La resignificación de los argumentos pasó por etapas, en el caso del argumento individual al de equipo se dio por las prácticas de *conjeturar*, *generalizar* y *predecir* porque los estudiantes lograron hacer uso de su argumento al compartir y lograr validar el o los argumentos en tanto a la expresión del patrón como al usarla en la predicción de términos cercanos.

La segunda resignificación fue del argumento en equipo al colectivo cuando se enfrentaban a tareas de generalizar y predecir términos lejanos, así que algunos argumentos de equipo se caracterizaban por agregar, pero al usarlo en tareas de predicción de términos lejanos el argumento cambiaba la práctica a relacionar.

Las prácticas que emergieron y que pudimos identificar en el nivel de *acción* en los diferentes momentos fueron: *agregar, agrupar, relacionar, relacionar con excepción y comparar de sucesiones*. Las cuales se organizaron con la intención de expresar la relación entre los términos de la sucesión, lo que nos permitió reconocer las prácticas en el nivel de *actividad* como lo fue *conjeturar* y *generalizar*, la primera alude cuando el sujeto construye una hipótesis del comportamiento de los términos de la sucesión y la segunda se construye un patrón funcional para la sucesión. Estas *actividades* a su vez se configuran de manera intencionada e iterada para responder a este tipo de tareas donde emergió la *práctica socialmente compartida, predecir,* como una acción para demostrar la validez de su conjetura o generalización.

5. Conclusiones

A partir de la revisión consideramos este estudio como un área de oportunidad por los pocos estudios en torno a la argumentación matemática colectiva en primaria en el área del Álgebra Temprana, sobre todo en el estudio de funciones, en el cual decidimos abordar desde la generalización de patrones. En los trabajos que revisamos muestra cómo se desarrolla la argumentación matemática en una tarea, pero en nuestro estudio se estructuran tareas diseñadas para promover argumentos en diferentes interacciones.

5.1. Sobre los objetivos de la investigación

Atendiendo a nuestro primer objetivo de investigación: Describir la relación de las tareas de generalización de patrones basadas en prácticas y la construcción de argumentos en la argumentación matemática colectiva con estudiantes de primaria.

Tuvimos que articular tanto las preguntas que se hacen normalmente dentro de la Teoría Socioepistemológica para mirar las prácticas como las preguntas del modelo de Situación Argumentativa, logrando un esquema metodológico que nos permitió ver el argumento como la práctica que emergía. En este estudio pudimos dar cuenta de prácticas en el nivel de acción como: agregar, agrupar, relacionar, y comparar entre secuencias. Las prácticas de algunos de los argumentos fueron cambiando conforme su uso tanto en las tareas como las interacciones.

En relación con las tareas, logramos dar cuenta que las tareas que se promovía el análisis permitían a los estudiantes orientar la atención en ver el patrón de la sucesión, pero vimos que fue un reto para ellos, ya que son tareas que no están dentro del currículo, pues en este nivel se da por sentado que los estudiantes ya saben analizar. Por ello, en este estudio se propusieron preguntas, que rescatamos de nuestra revisión, para apoyar el análisis. Algunas de las preguntas fueron ¿cómo están organizados cada figura...? ¿qué crees que consideraron para acomodarlos así? ¿que está cambiando? ¿cómo está cambiando? ¿cuánto cambia? Estas tareas inciden en la construcción de sus argumentos, ya que es el razonamiento que dan a sus afirmaciones.

Las tareas que permitían a los estudiantes conjeturar sobre el patrón de la sucesión articularon el análisis de lo que observan con sus conocimientos previos, pero no es suficiente para que todos lograran generalizar. Pero es un paso importante para ir construyendo ideas sobre el comportamiento de las sucesiones.

Con este trabajo logramos identificar que los argumentos de los estudiantes pueden robustecer o reconstruirse, al usarlos en tareas que implicaban tomar una postura y predecir términos lejanos más que en expresar la regla. Esto lo pudimos ver, por ejemplo, en la tarea 4.3, que implica expresar el patrón de la sucesión de manera escrita, los argumentos emergían la práctica de *agregar* mientras que en las tareas 4.4, que implican usar la conjetura del patrón, los argumentos surgen la práctica de *relacionar* o *comprar secuencias*.

En torno a las interacciones, sin duda es un elemento que complementa la resignificación de los argumentos ya que, con la interacción de otros argumentos, nos percatamos que, por medio de mostrar los diferentes razonamientos tanto de los equipos como del colectivo, los estudiantes lograron co-construir argumentos o robustecerlos.

Respecto a nuestro segundo objetivo: Identificar las prácticas que emergen durante la argumentación matemática colectiva con estudiante de primaria al trabajar con las tareas de generalización de patrones en secuencias figurales y numéricas.

En la argumentación matemática colectiva logramos identificar dos prácticas a nivel de acción: *apoyar* y *refutar* los argumentos, y estas con la finalidad de *validar*. Por lo tanto, la validación juega un papel importante y está en función del contexto y las personas. La validez la pudimos caracterizar en términos de persuasión, convicción y apoyo, y sus componentes son la funcionalidad y la comprensibilidad del argumento.

5.2. De la Argumentación Matemática Colectiva

Al igual que Krummheur (1995) reconocemos que no podemos afirmar que los argumentos de los estudiantes por no tener una deducción lógica correcta no sean válidos, sino que debemos mirar los argumentos desde su naturaleza. Para nuestro estudio, consideramos el contexto, las características de los estudiantes y sus conocimientos, las relaciones entre estudiante y profesor, el tipo de tareas y la forma de validar por grupo. Así como de las practicas que emergieron para formar el argumento.

Concordamos con Van y Maher (2020) que los argumentos de los estudiantes carecen de precisión en el lenguaje, pues en las tareas correspondientes a la etapa individual faltaba que el razonamiento fuera explícito, para que se permitiera conectar lo que se afirmaba con sus evidencias, pero conforme se discutió en equipo y colectivo se logró que se hiciera cada vez más explícito.

Considerando las ideas de Yackel (2002) que rescata que la argumentación no puede verse como una sucesión, nosotros reconocemos que debemos considerar el lugar y el tiempo en que emergieron esos argumentos (Espinoza-Ramírez, 2009), es decir, existe una historia, un contexto y ciertos participantes. En este trabajo los argumentos se fueron construidos y reconstruidos por los estudiantes a través de las interacciones, entre estudiantes con las tareas, entre estudiantes y entre estudiantes con la profesora-investigadora. Por ello, es que destacamos el proceso de cada momento en dicha argumentación porque en las diversas etapas de interacción se logró robustecer los argumentos y hacerlos más explícitos.

Los autores que categorizamos en nuestra revisión de la argumentación matemática colectiva, desde una perspectiva cultural, rescatan el valor del papel del docente, y nosotros apoyamos esa idea y resaltamos que su papel comienza desde el diseño de las actividades como en la interacción con estas. Puesto que en la actividad 4.3 intervine con el equipo 1 en preguntas como: ¿cómo sabes que es el término…?, ¿lo que piensas concuerda con la cantidad?, etc. logrando que el equipo replantear su patrón y en cambio con otros que no se cuestionó su patrón no funcional, no se reflexionó para mejorarlo.

Logramos identificar al igual que Whitenack y Knipping (2002) que el medio social donde se lleva a cabo la argumentación afecta en su desarrollo, en este estudio logramos identificar la relación de poder que tienen los niños que destacan por su desempeño en el aula, puesto que fue un elemento para apoyar el argumento de otro. También se presentó en la cantidad de personas que apoyaban pues si en los equipos se apoyaban dos y uno estaba en contra, el que está en desacuerdo aceptaba y no cuestionaba.

Por otro lado, la no comprensión de los estudiantes en torno a los argumentos que se estaban comunicando permitió que otros pudieran participar para dar otras razones o bien se reformularan sus argumentos, para que el compañero comprendiera y pudiera apoyarlo.

Reconocemos que el contexto escolar impacta, en específico las normas de aula. Es un reto importante ya que los estudiantes son parte de una cultura que no cuestiona y pregunta poco, por tanto, las argumentaciones necesitan irse dirigiendo hasta que los estudiantes vayan tomando mayor papel y siendo más autónomos. En el caso del docente es necesario ceder un poco la autoridad para dársela a los estudiantes, para que se sientan libre de criticar, expresar sus opiniones y plantear nuevas normas de sociales.

Logramos articular la argumentación matemática colectiva con la noción de generalización en el aula de Ellis (2011) ya que reconoce su carácter situado y relacionado con las interacciones entre los estudiantes, la tarea, las herramientas y el profesor. Por ello la propuesta de tres tipos de interacciones para que los estudiantes interroguen, respondan, afirmen o corrijan, apoyen, es decir confronten sus generalizaciones.

5.3. De la Generalización de Patrones

A diferencia del estudio de Cervantes-Barraza et al. (2019b) donde mencionan que sus argumentos no presentan un razonamiento algebraico, nosotros encontramos que los estudiantes, al poner en uso los argumentos en tareas que fomentan la construcción de una postura a través de la predicción lejana, se caracterizaban por relacionar la cantidad de figuras con la posición del término, es decir utilizan una de las estrategias del pensamiento algebraico.

Respecto al uso del lenguaje matemático formal identificamos que algunos argumentos escritos no expresaban la relación de los estudiantes, así que se podía caracterizar el argumento con un uso recursivo. Esto cambiaba al emplearlo con otras tareas como de predicción lejana ya que el uso emergía la práctica de *relacionar*. Por ejemplo, en la tarea 4.1 los argumentos de ciertos estudiantes emergían la práctica de *agregar*, y se perfilaba que se caía a la recursividad, pero en la tarea 4.4 (correspondiente a la interacción colectiva) se trabajó con una tarea de predicción lejana, el argumento emergía la práctica de relacionar al usar la relación de la posición del término con los rombos que le correspondían.

Desde el punto de vista de Van y Maher (2019) construyen juntos una comprensión compartida que perfeccionan sus ideas matemáticas.

En la literatura reconocimos que varias representaciones promovían el análisis de los patrones, pero en nuestro estudio no se logró del todo, ya que en la actividad 4.1 en el inciso c) el uso de la tabla y las preguntas para reconocer el patrón parecían que los estudiantes componían el crecimiento, pero al comunicarlo de manera escrita no concordaba con lo que hacían en la tabla. En este caso se logró comunicar de manera escrita el patrón, pero no se logró que se usara el argumento.

Considerando los resultados de la revisión de los estudios y los libros de texto del Plan 2011 trabajamos con sucesiones figurales y nos apoyamos en tareas enfocadas en el análisis ya que en el libro de texto de quinto grado (SEP, 2022), como tal, no hay el apoyo. Para lo cual diseñamos preguntas orientadas para analizar las sucesiones. También incorporamos tareas que se pidiera la generalización lejana y el uso del patrón, es decir, tareas de predicción ya sea de para refutar o para afirmar una postura.

En la revisión de la literatura identificamos que en la generalización de patrones se identifican tres momentos. El primero: ver, notar, apreciar, percibir e identificar lo común en la sucesión. El segundo: decir, expresar, caracterizar o generalizar el patrón. Y el tercero: usar el patrón para cualquier término de la sucesión (Mason et al., 1985, citado en Radford, 2018; Radford, 2010; Zapatera, 2018 y Ellis, 2011). La investigación enfatiza en los últimos dos momentos, la parte abstracta de la generalización. Un ejemplo de ello es el estudio de Radford (2010) que caracterizó en niveles la generalización. Por su parte, Zapatera (2018) enfatizó lo que pueden hacer los estudiantes en la generalización y se ubicaron en estadios. En otras palabras, el énfasis está en uno de los momentos de la generalización.

Por otro lado, en el estudio de López-Acosta (2016) describe estrategias variacionales en el primer momento, como lo es la comparación en cada término para conocer el cambio, lo estable y la seriación de comparaciones entre los términos. Reafirmamos dichas estrategias ya que en el estudio para poder identificar lo común y lo diferente, los estudiantes necesitaron comparar de un término a otro; seriar comparaciones entre términos, lo que para algunos estudiantes le permitió refinar sus comparaciones, pero en cambio para otros la estrategia no estuvo presente pues solo se quedaban en la primera comparación de dos términos lo que hacía que su conjetura fuera errónea.

5.4. De la Metodología

En la fase de experimentación en el ciclo de diseño y análisis fue importante ya que logramos identificar que los estudiantes priorizaban la parte numérica del patrón y la parte cualitativa no se estaba considerando. Y dado que Zapatera (2018) rescata las características del patrón en sucesiones figurales, es decir, el crecimiento cuantitativo y la estructura espacial; se rediseñó la situación agregando un momento. De modo que los estudiantes, en las tareas de los otros momentos, fueron explícitos en ambas cualidades del patrón.

5.5. De la Teoría Socioepistemológica

Con la articulación de los posicionamientos teóricos seleccionados, la Teoría Socioepistemológica y la argumentación matemática colectiva, ambos de carácter social, se reconoce que estudiantes y docente participan en un ejercicio de prácticas, donde construyen y resignifican sus argumentos, y se comparten una vez que sean validados y funcionales para todos los miembros del grupo. La resignificación del argumento se identifica en su negociación, reformulación, refutación, e incluso en la incorporación de elementos para fortalecer un argumento dado.

Para nuestro estudio y siendo congruentes con nuestro posicionamiento teórico para nosotros es importante lo que se hace para establecer una conjetura. Las prácticas que acompañan a la generalización del patrón, ya que esas prácticas se usarán como parte de sus recursos para el proceso de argumentación matemática colectiva.

Para nuestro diseño dado que también se estaba estudiando la argumentación matemática colectiva, contemplamos ambos e intencionados tres procesos en la generalización de patrones. El primero *análisis del patrón* que implica la forma de observar, notar e identificar lo que cambia y lo que se mantiene estable en la sucesión. El segundo *expresar el patrón* en el cual se puede conjeturar (hipótesis del patrón) o generalizar (regla del patrón), ambas pueden mejorar su forma de expresión. Ello se puede lograr en el tercer proceso, la *predicción para cualquier término* donde se puede hacer uso tanto de la conjetura para lograr la generalización o bien usar la generalización mejorar su forma de expresión.

Por ello, la articulación con la argumentación matemática colectiva fue en los últimos dos momentos pues en ellos se hicieron uso de las prácticas que utilizaron en el primer momento para la confrontación y negociación de las conjeturas, generalización de manera que sean válidas para los equipos. En el último momento, en la predicción lejana, se usó la conjetura y la generalización para mostrar cómo era funcional. También aquí, la argumentación matemática colectiva influyó para que los estudiantes demostraran dónde surgió argumento, de tal manera que regresaron al proceso de análisis mostrando las prácticas que emergieron (*contar, agregar, agrupar, relacionar, comparar entre términos y entre patrones*).

La construcción de los argumentos en cada etapa de interacción se usó el relativismo epistemológico porque la validez de los argumentos estaba en función las negociaciones de las personas y al contexto de la tarea. En la primera interacción del sujeto con la tarea, la validez recae en el bagaje de cada estudiante. En la segunda interacción dependía de las negociaciones de los argumentos individuales, los cuales dieron cuenta que recae en el apoyo, la convicción y en la persuasión, y la funcionalidad no era por todos necesaria. Los argumentos se confrontaron y robustecieron en la última interacción, validados mediante el apoyo y la convicción, además era fundamental funcionalidad del patrón en la tarea y la comprensión del argumento.

6. Limitaciones y Prospectivas

Al realizar los proyectos de investigación se encuentran limitaciones de distinta índole. Por lo que para nosotros es importante rescatarlas para futuras investigaciones.

Una de las limitaciones que consideramos fue en los instrumentos porque para el momento individual solo se rescataron las respuestas de las tareas y creemos que pudiéramos conocer a profundidad el análisis de todos los estudiantes, si se hubiera realizados entrevistas *a posteriori* o bien videograbar cada interacción.

En torno al diseño se pudieran propiciar otras preguntas o bien otras representaciones como es el uso de la graficación para el análisis de los patrones, inclusive trabajar con otros patrones o un solo patrón y contextos donde se usen.

Respecto a la parte de la experimentación consideramos que pudieran hacerse modificaciones tanto en población, cantidad de participantes, diferentes interacciones pudieran ser: individual- colectivo, individual-equipo o bien equipo-colectivo, para reconocer si afectan esas interacciones en el argumento, como lo vimos en el estudio. Además de reconocer qué sucede con la validación, la funcionalidad y la comprensión de los argumentos.

Consideramos que se podrían realizar investigaciones enfocadas en la argumentación matemática colectiva, pero considerando otra línea dentro del Álgebra Temprana para robustecer las prácticas que surgen en los argumentos algebraicos.

Un elemento que identificamos que afectaba en la validación del argumento es la relación de poder, dado que no era nuestro objeto de estudio y nuestro posicionamiento teórico no cuenta con recursos teóricos-metodológicos para caracterizarlo no se atendió, pero con otros constructos se podría cuestionar: ¿de qué manera impacta la relación de poder en el proceso de argumentación matemática colectiva?

Referencias

Aké P., y Díaz, J. (2018). Análisis de tareas de un libro de texto de primaria desde la perspectiva de los niveles de algebrización. *Educación matemática*, *30*(2), 171-201.

Buendía, G. (2012). El uso de las gráficas cartesianas. Un estudio con profesores. *Educación Matemática, 24*(2), 9-35. http://www.redalyc.org/pdf/405/40525862001.pdf

Blanton, M. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group of the Psicology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Blanton, M. y Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization, advances in mathematics education* (pp. 5-23). Nueva York, NY: Springer.

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I., y Kim, J.-S. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Jornal for Research in Mathematics Education, 46*, 39–87. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.1.0039

Blanton, M., Gardiner, A. M., Ristroph, I., Stephens, A., Knuth, E., y Stroud, R. (2022). Progressions in young learners' understandings of parity arguments. *Mathematical Thinking and Learning*, 1–32. https://doi.org/10.1080/10986065.2022.2053775

Butto, C., y Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Educación matemática*, *22*(3), 55-86.

Cabañas-Sánchez, G., Salazar, V., y Nolasco-Hesiquio, H. (2017). Tareas que potencian el desarrollo del pensamiento algebraico temprano en libros de texto de matemáticas de primaria. En Aké T. y Cuevas J. (Coord.), Pensamiento algebraico en México desde diferentes enfoques (pp.13-36). CENEJUS-UASLP

Cantoral, R. (2016). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Gedisa.

Cantoral, R. (2020). Socioepistemology in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp.1–7). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100041

Cárcamo, A., y Fuentealba, C. (2023). Un modelo para la construcción de trayectorias hipotéticas de aprendizaje preliminares. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *37*, 577-601.

Cervantes-Barraza, J., Cabañas-Sánchez, G. y Ordoñez-Cuastumal, S. (2017). El poder persuasivo de la refutación en argumentaciones colectivas. *Boletim de Educação Matemática*, *31*(59), 861-879. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a01

Cervantes-Barraza, J., Valbuena, S., y Paternina, Y., (2019). Argumentos de estudiantes de primaria en el contexto de álgebra temprana. Educación y Humanismo, 21(37), 120-138. http://dx.doi.org/10.17081/eduhum.21.37.3459

Cervantes-Barraza, J., Cabañas-Sánchez, G., y Reid, D. (2019b). Complex Argumentation in Elementary School. *PNA 13(4*), 221-246. https://doi.org/10.30827/pna.v13i4.8279.

Cetina, M., y Cabañas-Sánchez, G. (2017). Algunas investigaciones sobre argumentación matemática. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, *2,* 259-266.

Cetina-Vázquez, M. y Cabañas-Sánchez, G. (2022). Estrategias de generalización de patrones y sus diferentes formas de uso en quinto grado. *Enseñanza de las Ciencias*, *40*(1), 65-86. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3096

Cobb, P., Jackson, K., y Dunlap Sharpe, C. (2017). Conducting design studies to investigate and support mathematics students' and teachers' learning. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 208–233). Reston: NCTM

Common Core State Standards Initiative (CCSSI). (2010). Common core state standards for mathematics. Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers.

Cornejo-Morales, C. y Alsina, Á. (2020). La argumentación en los currículos de Educación Matemática Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *9*(1), 12-30. https://doi.org/10.24197/edmain.1.2020.12-30

Cornejo-Morales, C., Goizueta, M., y Alsina, Á. (2021). La Situación Argumentativa: un modelo para analizar la argumentación en educación matemática infantil. *PNA*, *Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 15*(3), 159-185.

Cruz-Amaya, M. (2019). *Linealidad y angularidad en la esfera. Un nuevo escenario de trabajo geométrico* [Tesis de maestría]. https://www.doi.org/10.13140/RG.2.2.25114.49604

Cruz-Márquez, G. y Montiel-Espinosa, G. (2024). Medición indirecta de distancias y los significados de las nociones trigonométricas del profesorado de matemáticas en formación inicial. Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado (RIFOP).

Demosthenous, E., y Stylianides, A. (2014). Algebra-Related Tasks in Primary School Textbooks. *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Ellis, A. B. (2011). Generalizing-promoting actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *42*(4), 308-345.

Ellis, A., Ying, Y., Waswa, A., Moore, K., Hamilton, M., Tasova, H. y Celik, A. (2021). Classroom supports for generalizing. In *Proceedings of the forty-third annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Espinoza, L. (2009). *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico [T*esis de Maestría, CINVESTAV].

Godino, D., Aké, P., Gonzato, M., y Wilhelmi, R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, *32*(1), 199-219. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965

Hunter, J., y Miller, J. (2022). The use of cultural contexts for patterning tasks: supporting young diverse students to identify structures and generalise. *ZDM–Mathematics Education*, *54*(6), 1349-1362.

Jiménez, A., y Pineda, L. (2013). Comunicación y argumentación en clase de matemáticas. *Educación y ciencia*, *16*, 101-116.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Nueva York, NY: Routledge.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? The Mathematics Educator,8(1),139–151.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., y Ng, S. F. (2016). *Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching*. Springer Nature.

Knipping, C. (2008). A method for revealing structures of argumentations in classroom proving processes. *ZDM Mathematics Education, 40*, 427–441.

Knipping, C., y Reid, D. (2015). Reconstructing argumentation structures: A perspective on proving processes in secondary mathematics classroom interactions. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, & N. Presmeg (Eds.), Approaches to qualitative research in mathematics education: Examples of methodology and methods (pp. 75-101). Dordrecht, Netherlands: Springer.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures*, (pp. 229-269). Lawrence Erlbaum.

Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom. Two episodes and related theoretical abductions. Journal of Mathematical Behavior 26, 60–82.

Lannin, J., Barker, D., y Townsend, B. (2006). Algebraic generalisation strategies: Factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal*, 18(3), 3 - 28.

Lin, P. J. (2018). The development of students' mathematical argumentation in a primary classroom. Educação & Realidade, 43, 1171-1192.

López-Mojica, J. (2017). Una caracterización del pensamiento algebraico en los libros de texto de educación primaria. En Aké Tec y Lilia P. (Coord.), Pensamiento algebraico en México desde diferentes enfoques (pp.77-96). CENEJUS-UASLP

Mason, J. (2018). How early is too early for thinking algebraically? En C. Kieran (Ed.) *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp.329-350). ICME

Montiel, G. (2002). Una caracterización del contrato didáctico en un escenario virtual [Tesis de maestría, CINVESTAV].

López-Acosta, L. (2016). *Generalización de patrones. Una trayectoria Hipotética de Aprendizaje basada en el Pensamiento y Lenguaje Variacional* [Tesis de maestría, CINVESTAV].

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 2–21). PME-NA.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 4*(2), 37-62.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. En C. Kieran (Ed.) *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp.3-25). ICME

Reyes-Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento docente y Socioepistemología. Un estudio sobre la transformación educativa en Matemáticas*. Gedisa.

Rivera, F. (2015). The distributed nature of pattern generalization. *PNA, 9*(3), 165-191.

Rojas, P. y Vergel R. (2014). Procesos de Generalización y Pensamiento Algebraico. *Revista Científica, 17*(2), 688–694. https://doi.org/10.14483/23448350.7753

Rumsey, C., y Langrall, C. W. (2016). Promoting mathematical argumentation. Teaching children mathematics, 22(7), 413-419.

Rumsey, C., Whitacre, I., Atabaş, Ş., y Smith, J.L. (2022). Argumentation in the Context of Elementary Grades: The Role of Participants, Tasks, and Tools. En: Bieda, K.N., Conner, A., Kosko, K.W., Staples, M. (eds) *Conceptions and Consequences of Mathematical Argumentation, Justification, and Proof. Research in Mathematics Education.* Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-80008-6_3

Salazar, V., Cabañas, G., y Navarro, C. (2016). Tareas relacionadas con el álgebra temprana en los libros de texto de matemáticas de primaria. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa, 1*, 49-56.

Schwarz, B. B., Neuman, Y., Gil, J., & Ilya, M. (2003). Construction of collective and individual knowledge in argumentative activity. The Journal of the Learning Sciences, 12(2), 219-256.

Stylianou, D., y Blanton, M. (2018). Teaching with Mathematical Argument. *Strategies for Supporting Everyday Instruction. Heinemann.*

SEP (2020). Plan y programa de estudio 2011. México. SEP

SEP (2020). Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Quinto grado. México. SEP

Soto, D. (2013). *La dialéctica exclusión-inclusión entre el discurso matemático escolar y la construcción social del conocimiento matemático. (T*esis de doctorado, CINVESTAV)

Soto, D. y Cantoral, R. (2014). Discurso matemático escolar y exclusión. Una visión Socioepistemológica. *Bolema: Boletín de Educación Matemática*, 29(50), 1525-1544.

Stylianides, A. J. (2007). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 65*, 1-20.

Torres-Corrales, D. y Montiel, G. (2020). La desarticulación matemática en Ingeniería. Una alternativa para su estudio y atención, desde la Matemática Educativa. Nóesis. Revistade Ciencias Sociales y Humanidades 29 (58-1), 24-55. https://doi.org/10.20983/noesis.2020.3.

Torres-Corrales, D. y Montiel-Espinosa, G. (2021). Resignificación de la razón trigonométrica en estudiantes de primer año de Ingeniería. Revista Educación Matemática 33(3), 202-232. https://doi.org/10.24844/EM3303.08

Toulmin, S. (2007). Los usos de la argumentación. Barcelona, España: Ediciones Península.

Uicab, G., Rojano, M. y García, M. (2022). Expresiones de generalización en escolares de 10 a 12 años durante la resolución de sucesioness figurales-numéricas y numéricas. *Educación matemática*, *34*(1), 42-69.

Ureña, J., Ramírez, R., Molina, M. y Cañadas, M. (2021). *Representación de la generalización por estudiantes de primaria y secundaria (11-13 años) en una tarea funcional*. En Diago, P., Yáñez, D., González-Astudillo, M y Carrillo, D. (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXIV (pp. 613-620). Valencia: SEIEM.

Van Ness, C. K., y Maher, C. A. (2019). Analysis of the argumentation of nine-year-olds engaged in discourse about comparing fraction models. Journal of Mathematical Behavior, 53, 13-41.

Whitenack, J. W., y Knipping, N. (2002). Argumentation, instructional design theory and students' mathematical learning: A case for coordinating interpretive lenses. Journal of Mathematical Behavior, 21(4), 441–457. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00144-X

Yackel, E. (2001). *Explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms.* Paper presented at the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Urtecht, The Netherlands.

Zapatera, A. (2018). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones: una sucesiones de tareas para Educación Infantil y Primaria. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas,* vol. 97, 51-67

Zhou, D., Liu, J., y Liu, J. (2021). Mathematical argumentation performance of sixth- graders in a Chinese rural class. International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology 9(2), 213-235.

Anexos

Anexo 1. Situación de Aprendizaje

Nombre: ______________________________ Grado: __________

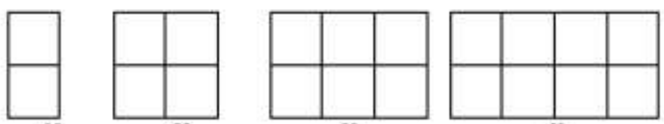
Fecha: ____________________

Momento 1

Individual

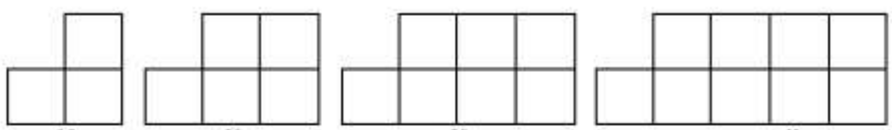
1.1. Observa las secuencias y responde las preguntas.

Secuencia A



1° 2° 3° 4°

Secuencia B



1° 2° 3° 4°

- **¿Cómo están organizados los cuadritos en la secuencia A?**

____

____

____

- **¿Qué crees que consideraron para organizar los cuadritos de la secuencia A?**

____

____

____

- **¿Cómo están organizados los cuadritos en la secuencia B?**

____

____

____

- **¿Qué crees que consideraron para organizar los cuadritos de la secuencia B?**

____

____

____

- **Si la secuencia B se construyó a partir de la secuencia A ¿qué se tomó en cuenta para construirla?**

____

____

____

1.2. Con el material representa como sería la posición 8 de la secuencia A y B.

Secuencia A	Secuencia B

Momento 1

Equipo

Antes de comenzar, pon a **grabar la voz en tu celular**.

1.3. En equipo compartan su representación de la actividad anterior.

Platiquen sobre ¿Por qué construyeron así la posición 8? ¿en qué se fijaron? ¿todas son correctas? ¿por qué piensan así?

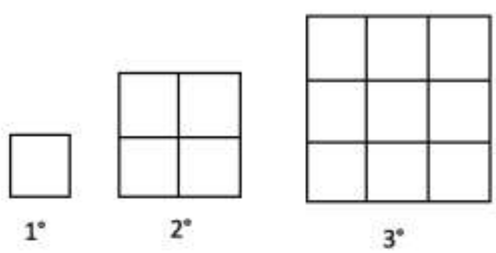
Momento 2

Equipo

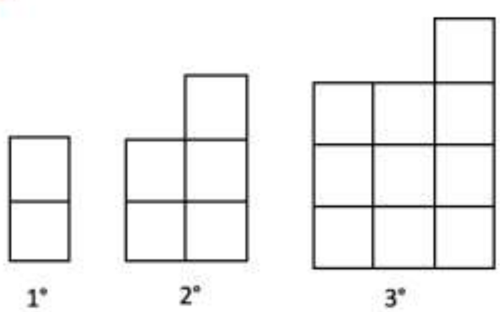
Antes de comenzar, pon a **grabar la voz en tu celular**.

2.1 Observen y analicen las siguientes secuencias:

Secuencia A



Secuencia B



Nombre: ____ Grado: ______________
Fecha: ________________________________

Momento 3

El Arte wixárika

El término wixárika significa "persona de corazón profundo que ama el conocimiento". Los wixárika habitan en la Sierra Madre Occidental de nuestro país, principalmente en los estados de Durango, Jalisco y Nayarit. En específico en Jalisco se ubica en el norte del Estado de Jalisco, principalmente en los municipios de Mezquitic, Bolaños, y en menor medida en Huejuquilla.

La forma de comunicación que desarrollo el pueblo wixárika se llama niérika. Es por el niérika permite la comunicación entre los dioses y los antepasados. Un instrumento es el ojo de dios está constituido por un enredo de estambres que, teniendo como soporte una cruceta de varas, giran alrededor de un vacío, que significa la ausencia de materia. Al moverse alrededor del centro, el estambre forma rombos. Cada rombo se prepara con un color distinto y el ojo de dios pueden tener rombos hasta de cinco colores.

Cuando en las comunidades nacen niños y niñas, se organiza una ceremonia de presentación para que los dioses los conozcan y los tengan en cuenta. En esta ceremonia, el sacerdote sostiene un ojo de dios sobre la cabeza de cada niña y niño quienes, a la vez, hacen un gran sonido con sonajas que tienen en las manos. Con esta bulla llaman la atención de los dioses hacia sus personas y, una vez atraídos, los dioses se asoman a través del ojo de dios para conocerlos. Esta ceremonia se realiza una vez cada año a partir del nacimiento y durante cinco años seguidos.

Individual

3.1. El señor Yuawi le diseñó a su hija una pulsera de chaquira con el símbolo del ojo de dios, esto para la protección de los dioses. Cada año cumplido le añade un rombo como se muestra en la imagen.

		
Primer año	**Segundo año**	**Tercer año**

a) Observa la pulsera y analicemos la secuencia

- **¿Qué es lo que cambia?**

____
____

- ¿Cómo está cambiando?

- ¿Cuánto cambia?

b) Representa en la siguiente tabla la secuencia que sigue la pulsera.

Años	Número de rombos
1	

c) A partir de las preguntas que respondiste en el análisis y de la tabla anterior. Explica que regla sigue.

Momento 3


Equipo


Antes de comenzar, pon a **grabar la voz en tu celular**.

3.2. Si la tradición continua y el hijo de Yuawi tiene 18 años.

- **¿Cómo estaría la pulsera? Dibújenla.**

- **¿Cuántos rombos tendría la pulsera?**
- **¿Qué hicieron para saberlo?**

3.3. Los niños de 4° dicen que el patrón para elaborar la pulsera es igual que la edad y sumarle 1.

- ¿Están de acuerdo? ____
- ¿En qué se fijaron?

____
____
____
____

Nombre: ____ Grado: ______________
Fecha: ______________________________

Momento 4

Individual

4.1. Para vender el señor Yuawi está elaborando dos manteles de forma distinta:
Primer mantel

Día 1 Día 2 Día 3

Segundo mantel

Día 1 Día 2 Día 3

a) Observa el primer mantel y responde
   - ¿Qué es lo que está cambiando?

____
____

   - ¿Eso que está cambiando cómo cambia?

____
____

   - ¿Cuánto cambia?

____
____

b) Observa del segundo mantel tanto los rombos grandes y chicos

- ¿Qué es lo que está cambiando?

- ¿Es diferente la forma en cómo cambian los rombos grandes a los rombos pequeños?

- ¿cómo es esa diferencia?

c) Representa en la siguiente tabla las dos formas de elaborar los manteles.

Día	Primera propuesta	Segunda propuesta
	Número de rombos	Número de rombos
1		

- ¿Qué relación hay entre el día 1 del primer y segundo mantel?

- ¿Qué relación hay entre el día 2 del primer y segundo mantel?

- ¿Está creciendo de manera diferente?

- ¿Cómo es esta diferencia?

- ¿En qué te fijaste?

4.2. Imagina que el señor Yuawi te contrata a ti y tu amigo como sus ayudantes.

- ¿Cómo le explicarías a tu amigo que funciona el patrón de la primera propuesta de mantel?

- ¿Cómo le explicarías a tu amigo que funciona el patrón de la segunda propuesta de mantel?

Momento 4

Equipo

Antes de comenzar, pon a **grabar la voz en tu celular.**

4.3. En equipo compartan el mensaje que redactaron para explicar a un amigo el patrón que sigue el mantel 1. Después, el patrón del mantel 2.

- **Construyan en equipo el mensaje que darían para que los niños de sexto grado puedan construir los manteles.**

Mantel 1:

Mantel 2:

En equipo resuelvan la siguiente situación:

4.4. Si los niños de 6° dicen que el día 70 el mantel uno tendrá 280 rombos y el mantel dos tendrá 281

- **¿Están de acuerdo?** ______________________________
- **¿Cómo lo supieron?**

Anexo 2. Formato de Confidencialidad

Educación

"2023, AÑO DEL BICENTENARIO DEL NACIMIENTO DEL ESTADO LIBRE Y SOBERANO DE JALISCO"

Zapopan, Jalisco a ________________ de 2023

Yo, ____, madre / padre / tutor de mi hija/hijo ____autorizo que participe en el diseño didactico que llevará a cabo por la investigadora en formación, la Lic. Maritza Melisa Comparan Velarde.

Declaro que estoy al tanto de la actividad academica la cual implica 3 sesiones de hora y media de actividades matematicas que resolveran los estudiantes. Con el objetivo de estudiar el desarrollo del pensamiento de los estudiantes con dichas actividades. Para lo cual se tomará registro tanto escrito, como videograbaciones y grabaciones mismas que seran utilizadas exclusivamente con fines academicos.

Solicito que las usuarias y los usuarios de la información se comprometan a cuidar la identidad de mi hija/hijo en sus reportes, ocultando su rostro y modificando su voz. Asimismo, deseo que en los reportes emanados de las prácticas de formación e investigación se oculte su identidad, cambiando su nombre con:

a) Una etiqueta genérica (ejemplo: EM1 –estudiante mujer 1–)
b) Otro nombre:

____

____

Nombre y firma de madre/padre/tutor

Aviso: Este documento puede contener datos personales de acuerdo con lo establecido en el artículo 3, fracción IX y X de la Ley de Protección de datos personales en posesión de sujetos obligados del Estado de Jalisco y sus municipios, así como información confidencial de conformidad del Articulo 21 de la Ley de Transparencia y Acceso a la información Pública del Estado de Jalisco. Atendiendo a lo establecido en el artículo 72 de la citada Ley de Protección de datos personales, el receptor adquiere el carácter responsable de los datos personales y su tratamiento, comprometiéndose a garantizar su confidencialidad y utilizarlos solamente para lo que fueron transferidos.