



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemáticas

**Representación espectral para núcleos de
transmutación del operador de Shrödinger**

Tesis que presenta

Miguel Moisés Algalán Beltrán

para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias

en la Especialidad de

Matemáticas

Director de Tesis

Dr. Vladislav Kravchenko Cherkasski

Ciudad de México

Julio 2024

Agradecimientos

Quiero agradecer al CINVESTAV, por abrirme las puertas a un entorno de excelencia académica, el programa de maestría en el Departamento de Matemáticas es un gran ejemplo de ello. Agradezco también al CONAHCYT, el financiamiento recibido es sin duda un apoyo inestimable y con el cual completar este programa ha sido posible.

Estoy muy agradecido con el Dr. Vladislav Kravchenko. Es muy apreciable para mí su experiencia y capacidad como mentor en la investigación, es en virtud de estas cualidades y por convicción propia que me ha resultado muy satisfactorio realizar este proyecto. Agradezco su tiempo y dedicación, trabajar con usted ha sido una etapa trascendente en mi formación.

Quiero agradecer a todos los profesores que compartieron sus conocimientos conmigo en este trayecto. Han hecho de esta experiencia un gran reto que me ha hecho crecer a nivel personal y profesional. Quiero mencionar que de particular relevancia para este proyecto ha sido el entrenamiento que recibí en las distintas áreas del análisis matemático. Dr. Carlos Pacheco, Dra. Maribel Loaiza, Dr. Michael Porter, Dr. Sergii Torba y Dr. Vladislav Kravchenko, muchas gracias a todos por sus enseñanzas.

Quiero agradecer también a los compañeros con los cuales he compartido momentos gratos, a aquellos con los cuales tuve reuniones para intercambiar ideas y también a aquellos que mostraron disposición para ayudarme cuando tuve la necesidad.

Agradezco también al personal administrativo, particularmente aprecio la disposición de Roxana, siempre me apoyó en tiempo y forma.

Quiero agradecer a mi familia por la confianza que han depositado en cada uno de mis proyectos. Tener a alguien que apoye y crea en tus decisiones te da un motivo invaluable para dar lo mejor de tí.

Resumen

Este trabajo tiene como propósito estudiar y enriquecer la teoría de los operadores de transmutación en el contexto del problema de Sturm-Liouville.

Tres principales núcleos de transmutación para el operador de Schrödinger son estudiados: K , G y S . El núcleo G es un referente en el estudio de problemas inversos, ya que fue el primero para el cual se obtuvo la ecuación de Gelfand-Levitan. Hoy en día también es conocida la ecuación integral del mismo tipo para el núcleo S . En este trabajo se obtiene la ecuación de Gelfand-Levitan para el núcleo K .

Para potenciar la aplicabilidad de los operadores de transmutación en el problema de Sturm-Liouville resulta importante obtener representaciones en forma de serie para sus núcleos. Con este fin en este trabajo se hace uso de parte de la teoría espectral en el problema directo. Conociendo el comportamiento asintótico de las eigenfunciones y datos espectrales se obtienen las expansiones en serie para los núcleos K y S . Además, mediante el planteamiento de un problema de Goursat adecuado es posible conocer los núcleos L y P , siendo estos los núcleos integrales de los operadores inversos definidos por K y S respectivamente. Se presentan también representaciones para los núcleos L y P .

Las primeras representaciones para los núcleos K y S que se obtienen tienen una discontinuidad de salto que proviene de la función espectral a partir de la cual se construyen. Sin embargo, ya se conoce un método para construir una representación continua, el cual es aplicado para los núcleos S y P ; así que este también es uno de los resultados en este trabajo.

Finalmente, se presentan resultados numéricos para corroborar las representaciones de los núcleos en el caso de un potencial constante. Para esto se plantean los problemas de Sturm-Liouville correspondientes de los cuales se obtiene la información espectral necesaria para las representaciones. Se crea el algoritmo con el cual se pueden comparar los núcleos exactos con aproximaciones de las representaciones. Esto se implementa en un lenguaje de cómputo numérico, MATLAB.

Abstract

The purpose of this project aims to study and enrich the theory of transmutation operators in the context of the Sturm-Liouville problem.

Three key transmutation kernels for the Schrödinger operator are studied: K , G and S . Kernel G is a benchmark in the field of inverse problems, it is known that this kernel played an important role for obtaining for the first time the Gelfand-Levitan equation. Recently an integral equation of the same type for the kernel S has been presented. In this work the Gelfand-Levitan equation for the kernel K is obtained.

To enhance the application of transmutation operators in the Sturm-Liouville problem it is important to obtain series expansions for their kernels. To this end the spectral theory in the direct problem is relevant in this work. Once knowing the asymptotic behaviour of the spectral data and eigenfunctions, the series representations for K and S are obtained. Furthermore, by posing an appropriate Goursat problem it is possible to obtain the L and P kernels, such integral kernels corresponds to the inverse transmutation operators defined by K and S respectively. Series expansions for the L and P kernels are also presented.

The first series representations for K and S have a jump discontinuity due to the nature of the corresponding spectral functions. However, now it is known a method to get rid of this discontinuity and obtain a continuous representation, this method is applied to the case of the kernels S and P , so this is also part of the contributions in this work.

Finally, numeric results are presented to corroborate the kernel representations in the simple case of a constant potential. For this end corresponding Sturm-Liouville problems are solved to obtain the spectral data for the series expansions. Approximations for the representations are compared to the exact solutions for the kernels. This test is implemented in a numeric computing environment, MATLAB.

Índice

Introducción	7
1 Operadores integrales	12
1.1 Clasificación de operadores integrales	13
1.2 Operadores de transmutación	15
1.3 El problema de Cauchy para la ecuación de Klein-Gordon . . .	20
1.4 El problema de Goursat para núcleos de transmutación	24
2 Teoría de Sturm-Liouville	36
2.1 Planteamiento del problema directo	36
2.2 El problema $L(q(x), h, H)$ en $[0, \pi]$	37
2.3 El problema $\tilde{L}(q(x), \pi, \frac{\pi}{2})$ en $[0, \pi]$	40
3 Núcleos de operadores de transmutación	48
3.1 Dominio de definición para F_G y F_S	48
3.2 Representación para K y L	55
3.3 Representación continua para S y P	63
3.4 Resultados numéricos	79
Conclusiones y trabajo futuro	89
A Código en MATLAB	90
A.1 Aproximación para K	90
A.2 Aproximación para L	94
A.3 Aproximación para S	99

Introducción

El problema de Sturm-Liouville ocupa un lugar importante en el campo de estudio de la física matemática, ya que surge de manera natural en el estudio de algunos problemas con valores en la frontera para ecuaciones diferenciales parciales. Los operadores de transmutación han resultado ser una herramienta muy útil en este campo de investigación. Es por esto que el objetivo de esta tesis es estudiar y enriquecer esta teoría. El valor de este proyecto se encuentra en la presentación de dos conjuntos de resultados concernientes a núcleos de transmutación para el operador de Shrödinger: se establece la ecuación de Gelfand-Levitan que satisfacen y se construye una representación en serie para estos núcleos a partir de la información espectral del problema de Sturm-Liouville asociado al operador.

Un operador de transmutación T es un operador lineal acotado sobre un espacio topológico lineal E que transmuta a dos operadores lineales A y B definidos en un subespacio $E_1 \subseteq E$. Transmutar o transformar se refiere a que T satisface la relación entre operadores $AT = TB$ en E_1 . Es en virtud de esta propiedad que un operador de transmutación puede ser relevante al abordar un problema planteado con una ecuación diferencial definida a partir de un operador A , pues podría relacionarse a un problema más simple con una ecuación definida a partir de un operador B .

El problema de Sturm-Liouville está definido a partir de un operador diferencial lineal de segundo orden que es autoadjunto. Y fue precisamente para operadores de segundo orden que el concepto de operador de transmutación fue estudiado por primera vez por J. Delsarte en [4]. Para el caso del problema de Sturm-Liouville que abordaremos el operador autoadjunto de interés es el operador de Shrödinger. Hoy en día se sabe que para el operador de Shrödinger el operador de transmutación toma la forma de un operador integral de Volterra del segundo tipo, lo cual fue probado por A. Povzner en [20].

Dando seguimiento al estudio espectral del problema de Sturm-Liouville, en [14] I. M. Gelfand y B. M. Levitan presentaron por primera vez la ecuación de Gelfand-Levitan. Esta es una ecuación integral de Fredholm del segundo

tipo para el núcleo de transmutación que está construida a partir de los datos espectrales, por lo cual es de particular importancia en el problema inverso; es decir, cuando se quiere determinar el operador de Shrödinger partiendo del conocimiento de los datos espectrales.

Considerando la importancia que tienen los operadores de transmutación en problemas directos e inversos se comenzó a estudiarlos sistemáticamente. Evidencia de esto es el trabajo desarrollado por V. A. Marchenko en [18] y [17]. Uno de los núcleos integrales importantes que aparecen en este trabajo es el núcleo K . Cuando se considera el problema de Sturm-Liouville en un intervalo simétrico $[-b, b]$ el operador T que transmuta al operador de Shrödinger $-\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$ con el operador $-\frac{d^2}{dx^2}$ es justamente el operador con núcleo K . Otros ejemplos de aportaciones que dan un tratamiento exhaustivo en teoría de problemas directos e inversos se puede encontrar en [15] y [21], en ambos casos se trata con otros dos operadores de transmutación T_G y T_S relacionados con el problema de Sturm-Liouville en el intervalo $[0, b]$. Los núcleos integrales G y S respectivamente de estos operadores también serán estudiados en este trabajo.

Justificado por la capacidad de poder abordar problemas directos e inversos mediante la maquinaria de operadores de transmutación, el poder conocer representaciones en serie para los núcleos integrales emerge de forma natural. En [1] se planteó la posibilidad de aplicar el método de aproximaciones sucesivas, en [2] se abordó el problema mediante la serie de Fourier y se ilustró con ejemplos cómo obtener los coeficientes, en [9] y [11] se obtuvieron representaciones en series de polinomios ortogonales (Laguerre y Legendre respectivamente) y se dieron fórmulas recursivas para calcular los coeficientes en la expansión. Finalmente, uno de los trabajos sobre los que están inspirados algunos de los resultados en esta tesis es [8], en el cual se obtienen representaciones mediante las eigenfunciones y datos espectrales del problema de Sturm-Liouville. Más aún, se obtiene una representación del mismo tipo para el núcleo del operador de transmutación inverso.

El primer resultado en este trabajo es la obtención de la ecuación de Gelfand-Levitan para el núcleo K . Partiendo de la relación que existe entre los núcleos G , S y K es posible obtener la ecuación de Gelfand-Levitan para G y S en términos del núcleo K . En este proceso se modifica la parte integral para las ecuaciones de G y S , ya que se extiende la región de integración. Originalmente en la parte integral de las ecuaciones citadas se considera la región donde G y S son continuas, y en dicha región están definidas también las funciones espectrales F_G y F_S respectivamente. Así que hay que asegurarse que estas funciones siguen estando definidas en la región extendida, por lo cual se desarrolla este análisis. Cualquier ecuación de Fredholm cuenta con una función conocida como núcleo de la ecuación

(distinto al núcleo integral del operador), en este caso a dicha función se le ha denotado como F , resulta interesante que F en este caso está determinada por $F(x, t) = \frac{1}{2} [F_G(x, t) + F_S(x, t)]$; es decir, el núcleo de la ecuación relaciona la información de las funciones espectrales que aparecen en la ecuación de Gelfand-Levitan para los núcleos G y S respectivamente. Esto sugiere que el núcleo K puede determinarse a partir de la información espectral de dos problemas de Sturm-Liouville.

El siguiente resultado es la obtención de las representaciones en serie para los núcleos K y L de los operadores de transmutación T y T^{-1} respectivamente. En [12] fue demostrado que $L(x, t) = -K(t, x)$, partiendo de esta relación se encuentra que el núcleo F de la ecuación de Gelfand-Levitan para K es la preimagen bajo el operador T del núcleo L actuando sobre la variable t . Se tiene entonces que tanto K como L están determinados por las funciones espectrales F_G y F_S . Un detalle técnico necesario es verificar que F_G y F_S son elementos del espacio $L_2([-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi])$, esto para poder aplicar T , T_G ó T_S a las series respectivas que definen a F_G y F_S término a término en cualquiera de las variables x o t . La metodología para la verificación se basa en criterios de convergencia para series donde aparecen las asintóticas de los datos espectrales asociados a dos problemas de Sturm-Liouville en el $[0, \pi]$. De manera que se hace un uso exhaustivo de análisis asintótico. En este trabajo se hace el desarrollo para el caso de la función espectral F_G , ya que el caso para la función F_S se encuentra en [6]. Finalmente, las expresiones encontradas para los núcleos K y L quedan determinadas por las eigenfunciones y datos espectrales de dos problemas de Sturm-Liouville. Con este resultado se motiva denotar *representación espectral* a estas series para los núcleos de transmutación.

Como último resultado se obtiene una versión continua de la representación espectral para los núcleos S y P de los operadores T_S y T_S^{-1} respectivamente. Para lograr esto se necesitan asintóticas para los datos espectrales del problema de Sturm-Liouville con condiciones de Dirichlet-Neumann

$$\begin{aligned} -y'' + q(x)y &= \rho^2 y \\ y(0) = 0 &= y'(\pi). \end{aligned}$$

Se estudia primero este problema demostrando algunos hechos básicos que se sugieren como ejercicio en [5] y [15] concernientes a la función característica $\Delta(\lambda)$ del problema. La función $\Delta(\lambda)$ contiene información acerca de los eigenvalores (por ejemplo, su distribución, ya que coincide con sus raíces) y en principio se podría intentar utilizarla para obtener asintóticas. Sin embargo, en [5] ya se encuentra la asintótica para los eigenvalores, de manera que el esfuerzo se concentra en obtener la asintótica para las constantes de normalización directamente de su definición. Para lograr esto

se necesita conocer el comportamiento asintótico de las eigenfunciones, en este proceso se demuestran varias relaciones que satisfacen. Entre ellas una relación asintótica que se obtiene a partir de la ecuación integral que satisfacen estas funciones, la cual será de gran relevancia para las representaciones espectrales de los núcleos. Finalmente, la representación espectral continua buscada para S se obtiene al considerar que S y F_S difieren entre si por una serie que converge absoluta y uniformemente. Nuevamente en este caso es muy útil el análisis asintótico para la convergencia de series. Para la representación espectral continua del núcleo P primero se considera el problema de Goursat que satisface, a partir del cual se obtiene que $P(x, t) = T_{S,t}[F_S(x, t)]$. A partir de esto basta justificar que $P(x, t)$ y $F_S(x, t)$ también difieren por una serie que converge absoluta y uniformemente. Estos resultados para las series espectrales continuas para P y S se basan en la idea empleada en [8], donde obtuvieron el resultado análogo en el caso de los núcleos G y H de los operadores de transmutación T_G y T_G^{-1} respectivamente.

Se ha estructurado este trabajo en tres capítulos, a continuación se detalla el objetivo y contenido de cada uno. El objetivo principal del capítulo 1 es presentar a los operadores de transmutación que son de relevancia en este trabajo: introducirlos en principio como un tipo particular de operadores integrales, enunciar sus propiedades principales y obtener toda la información posible del problema de Goursat que satisfacen sus núcleos. Otro objetivo es la presentación de las ecuaciones integrales que satisfacen los núcleos, mismas que están ligadas al espectro del operador de Shrödinger que es transmutado. Como objetivo adicional se presenta mediante un ejemplo la relevancia que pueden tener los operadores de transmutación en la solución de problemas para ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con valores en la frontera, donde además se puede motivar la utilidad que puede tener una representación en serie para los núcleos.

En el capítulo 2 se presentan dos problemas de Sturm-Liouville sobre el intervalo $[0, \pi]$ definidos a partir del operador de Shrödinger para un potencial $q \in L_2[0, \pi]$ dado. El objetivo principal es abordar el problema directo y conocer el comportamiento asintótico de los datos espectrales y las eigenfunciones. En este capítulo también se señala cómo obtener las eigenfunciones de los problemas de Sturm-Liouville citados como imagen bajo un operador de transmutación de las soluciones a un problema con valores en la frontera sin potencial.

En el capítulo 3 primero se estudian las funciones que contienen la información espectral de los problemas de Sturm-Liouville, esto con el fin de asegurar la convergencia de las series que se van a obtener para los núcleos. Después se aborda el objetivo principal, el cual es obtener las series en términos de los datos espectrales y eigenfunciones que se obtuvieron en el capítulo

2 para los núcleos K y L . Partiendo del comportamiento asintótico de los datos espectrales y las eigenfunciones también se construyen representaciones continuas para los núcleos S y P . Al final de este capítulo además se presenta un problema concreto para un potencial constante, a partir del cual se puede corroborar los resultados obtenidos.

Capítulo 1

Operadores integrales

Consideremos primero un contexto muy general pero suficientemente conocido en el análisis funcional. Sea $\mathcal{B}(X)$ el espacio de operadores lineales acotados sobre un espacio de Banach X . Dada $f \in X$, podemos plantear el problema de encontrar una solución a la ecuación

$$(I - T)\varphi = f, \quad (1.0.1)$$

esta es una ecuación del *segundo tipo* donde queremos determinar φ . Es claro que si $I - T$ es invertible entonces hemos acabado; más aún, es sabido que la invertibilidad de $I - T$ está garantizada cuando $\|T\| < 1$. La forma del operador inverso y una cota para su norma están dadas por

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n, \\ \|(I - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

La serie para el inverso de $I - T$ es conocida como *serie de Neumann*. Definiendo

$$\varphi_n := \sum_{i=0}^n T^i f, \quad (1.0.2)$$

entonces se sigue que $\varphi_{n+1} = T\varphi_n + f$, de forma iterativa para $n \geq 0$. Un resultado conocido es que la solución φ para $f \in X$ dada se puede obtener aproximándose con las iteraciones φ_n (con $\varphi_0 \in X$ arbitrario), esto es conocido como *método de aproximaciones sucesivas*.

A nosotros nos interesa el caso en que T es un operador integral, por lo cual introducimos ahora dicho concepto con un caso básico. Consideremos un

compacto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, por practicidad nos enfocaremos al caso $\Omega = [a, b] \times [a, b]$. Sea $K(x, y)$ una función continua y \mathbb{C} -valuada en Ω , la cual denotaremos de ahora en adelante como *núcleo* del operador. Definimos el operador $T : \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathcal{C}([a, b])$ como

$$T[\varphi](x) := \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy, \quad x \in [a, b]. \quad (1.0.3)$$

Este es el caso de un *operador integral* con núcleo continuo K . Claramente T es lineal; además, es acotado y su norma está dada por

$$\|T\| = \max_{x \in [a, b]} \int_a^b |K(x, y)| dy.$$

En correspondencia con el planteamiento dado al inicio, como $(\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach, entonces dada $f \in \mathcal{C}([a, b])$ y suponiendo que T es una contracción, esto es, $\|T\| < 1$, entonces la ecuación

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = f(x) \quad (1.0.4)$$

tiene una solución única φ continua en $[a, b]$, la cual se puede obtener mediante aproximaciones sucesivas. Un análisis detallado de los resultados expuestos hasta ahora se encuentra en [13]. Se pueden citar más propiedades relevantes de este operador integral; por ejemplo, T es compacto en $\mathcal{C}([a, b])$; sin embargo, resulta más útil en este trabajo considerar un espacio más amplio de funciones sobre el que puede actuar un operador integral con núcleo definido sobre un conjunto compacto, lo cual abordaremos más adelante.

1.1 Clasificación de operadores integrales

Podemos escribir una ecuación lineal integral en una forma general como

$$g(\tau)\varphi(\tau) = f(\tau) + \lambda \int_a^x K(\tau, t)\varphi(t)dt, \quad (1.1.1)$$

donde f, g y K son funciones conocidas, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, el límite superior x en la integral puede ser fijo o variable y la función desconocida es φ , la cual debe estar definida en $[a, b]$. De (1.1.1) podemos obtener los dos casos de ecuaciones integrales que nos interesan:

- *Ecuación integral de Fredholm.* En este caso el límite superior x en la integral es fijo, por convención tomaremos $x = b$ ($a < b < \infty$). Considerando $g \equiv 1$ diremos que es una *ecuación de Fredholm del segundo tipo*. Mientras que si $g \equiv 0$ obtenemos una *ecuación de Fredholm del primer tipo*; por ejemplo, tomando $\lambda = -1$

$$f(\tau) = \int_a^b K(\tau, t)\varphi(t)dt \quad (1.1.2)$$

- *Ecuación integral de Volterra.* Las ecuaciones del primer y segundo tipo se definen análogamente al caso anterior; sin embargo, ahora el límite de integración x es variable, tomamos $x(\tau) = \tau$. Un ejemplo relevante para este trabajo es cuando $\lambda = -1$ y $g \equiv 1$, obtenemos la *ecuación de Volterra del segundo tipo*

$$f(\tau) = \varphi(\tau) + \int_a^\tau K(\tau, t)\varphi(t)dt \quad (1.1.3)$$

Vamos a considerar núcleos integrales más generales al caso continuo. Sea $K(x, t) \in L_2([a, b] \times [a, b])$, en base a la clasificación anterior para ecuaciones integrales podemos definir los operadores de Fredholm y de Volterra, citaremos sólo dos de ellos .

La ecuación (1.1.2) se puede reescribir como

$$T_{Fr}[\varphi](\tau) = \int_a^b K(\tau, t)\varphi(t)dt, \quad (1.1.4)$$

con $f(\tau) = T_{Fr}[\varphi](\tau)$, donde $T_{Fr} : L_2[a, b] \rightarrow L_2[a, b]$. En este caso diremos que T_{Fr} es un *operador de Fredholm del primer tipo*.

De la misma manera, la ecuación (1.1.3) la podemos reescribir como

$$T_V[\varphi](\tau) = \varphi(\tau) + \int_a^\tau K(s, t)\varphi(t)dt, \quad (1.1.5)$$

con $f(\tau) = T_V[\varphi](\tau)$, donde $T_V : L_2[a, b] \rightarrow L_2[a, b]$. En este caso diremos que T_V , es un *operador de Volterra del segundo tipo*.

Del estudio de operadores compactos en análisis funcional se conoce el siguiente resultado.

Teorema 1. *Sea (G, Ω, μ) un espacio de medida finita y $K \in L_2(\Omega \times \Omega)$. Sea $T : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ un operador integral definido por*

$$T[x](t) = \int_\Omega K(s, t)x(s)ds,$$

entonces T es compacto.

Por este teorema es inmediato que un operador de Fredholm del primer tipo es compacto. También note que el operador de Volterra en (1.1.5) se puede escribir como

$$T_V[\varphi](\tau) = I[\varphi](\tau) + \int_a^\tau K(\tau, t)\varphi(t)dt. \quad (1.1.6)$$

Como todo operador compacto es continuo y desde que el operador identidad es continuo, entonces T_V es continuo en $L_2[a, b]$.

Tanto para operadores de Fredholm como para el caso de operadores de Volterra existen criterios para aplicar el método de aproximaciones sucesivas con el fin de encontrar la solución a (1.1.2) o (1.1.3) respectivamente, en este caso la solución encontrada es una función $\varphi \in L_p[a, b]$, con $p = 1$ o $p = 2$ dependiendo las condiciones que se requieren al núcleo y la función f . Estos resultados y otras propiedades se pueden encontrar en [7].

1.2 Operadores de transmutación

En este trabajo es de vital importancia obtener la información espectral de problemas de Sturm-Liouville; esta tarea se puede simplificar utilizando una herramienta que nos permite relacionar los operadores diferenciales

$$A := -\frac{d^2}{dx^2} + q(x), \quad (1.2.1)$$

$$B := -\frac{d^2}{dx^2}. \quad (1.2.2)$$

En [4] se abordó por primera vez el concepto de *operador de transmutación*, y fue en [20] que se demostró que dicho operador corresponde a un operador de Volterra del segundo tipo. A continuación presentamos con más precisión este concepto.

Definición 1. *Sea E un espacio topológico lineal y $E_1 \subseteq E$ un subespacio. Un operador lineal invertible $T : E \rightarrow E$ tal que $T(E_1) \subseteq E_1$ (es decir, E_1 es T -invariante) es un operador de transmutación para el par de operadores $A, B : E_1 \rightarrow E$ si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. T y T^{-1} son continuos en E .
2. Se verifica cualquiera de las siguientes relaciones equivalentes

$$AT = TB \quad (1.2.3)$$

$$A = TBT^{-1} \quad (1.2.4)$$

Sea T un operador de transmutación para el par de operadores en (1.2.1) y (1.2.2), con $E_1 \subseteq E$ espacios de funciones donde podemos aplicar estos operadores. Observe que si $\nu = Tu$ con $u \in \text{Ker} B \subseteq E_1$, como $T(E_1) \subseteq E_1$, entonces podemos usar (1.2.3), con lo cual se obtiene que $ATu = TBu = 0$, entonces

$$T(\text{Ker} B) \subseteq \text{Ker} A. \quad (1.2.5)$$

No sólo notamos la importancia de la invarianza del subespacio E_1 bajo T , este razonamiento también motiva a concluir lo siguiente: si $Bu = \lambda u$ para alguna $\lambda \in \mathbb{C}$ y $u \in E_1$, entonces para $\nu = Tu$ por (1.2.3) se tiene que

$$A\nu = ATu = TBu = \lambda Tu = \lambda\nu. \quad (1.2.6)$$

De (1.2.6) concluimos que una solución u a la ecuación $-y'' - \lambda y = 0$ es mapeada con T a una solución $\nu = Tu$ de la ecuación $-y'' + q(x)y = \lambda y$.

Para el siguiente resultado ocupamos definir el siguiente espacio de funciones sobre el intervalo $[a, b]$,

$$H^p([a, b]) := \{f \in L_2([a, b]) : f^{(j)} \in L_2([a, b]), j \in \{1, \dots, p\}\}. \quad (1.2.7)$$

$H^p([a, b])$ es conocido como *espacio de Sobolev* y tiene propiedades muy interesantes; por ejemplo, es un espacio de Hilbert separable con el siguiente producto interior

$$\langle u, v \rangle_{H^p} := \sum_{j=0}^p \langle u^{(j)}, v^{(j)} \rangle_{L_2}.$$

Para ver una definición más robusta¹ de espacio de Sobolev se sugiere consultar [3]. Aquí nos interesa para enunciar el siguiente resultado.

Teorema 2. *Dados $h \in \mathbb{C}$ y $q \in L_2[-b, b]$, el operador de transmutación T_h para los operadores A y B en (1.2.1) y (1.2.2) respectivamente, tiene la forma*

$$T_h[u](x) = u(x) + \int_{-x}^x K_h(x, t)u(t)dt, \quad (1.2.8)$$

donde el núcleo integral K_h es continuo en $0 \leq |t| \leq |x| \leq b$, y es tal que satisface las condiciones

$$K_h(x, x) = \frac{h}{2} + \frac{1}{2} \int_0^x q(s)ds, \quad K_h(x, -x) = \frac{h}{2}. \quad (1.2.9)$$

Además, la propiedad (1.2.3) se cumple para $u \in H^2[-b, b] \subseteq L_2[-b, b]$.

¹La definición formal para espacio de Sobolev involucra introducir el concepto de derivadas débiles, lo cual no está considerado en este trabajo.

Con este teorema hemos presentado el primer operador de transmutación con el que trabajaremos. Este resultado se puede encontrar en [17]. Existen también operadores de transmutación que operan sobre subclases de los espacios de funciones del resultado anterior, nos interesa el caso de aquellas subclases que satisfacen un condición en el origen. Producto de un resultado análogo al teorema anterior introducimos otros dos operadores con los cuales también se trabajará. Una demostración se puede encontrar en [21]. En este caso se considerará $q \in L_2[0, b]$.

Teorema 3. *Dada $h \in \mathbb{C}$, los operadores T_G y T_S que transmutan los operadores A y B definidos en (1.2.1) y (1.2.2) están dados por*

$$T_G[u](x) := u(x) + \int_0^x G(x, s)u(s)ds. \quad (1.2.10)$$

$$T_S[u](x) := u(x) + \int_0^x S(x, s)u(s)ds. \quad (1.2.11)$$

La propiedad (1.2.3) se satisface para funciones tales que $u'(0) = 0$ en el caso de T_G , y para funciones tales que $u(0) = 0$ en el caso de T_S . Además, los núcleos integrales G y S son continuos en $0 \leq t \leq x \leq b$ y satisfacen las condiciones

$$G(x, x) = h + \frac{1}{2} \int_0^x q(t)dt, \quad \left. \frac{\partial}{\partial t} G(x, t) \right|_{t=0} = 0 \quad (1.2.12)$$

$$S(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x q(t)dt, \quad S(x, 0) = 0. \quad (1.2.13)$$

El intervalo en el que se trabajará en el próximo capítulo es el $[0, \pi]$, para el cual se conoce la teoría que establece parte de los cimientos de este trabajo. Aprovechando que hemos presentado el operador de transmutación con núcleo G , en [5] y [15] se presenta el rol que juega este operador en el contexto del problema de Sturm-Liouville justamente en el intervalo $[0, \pi]$. Es necesario agregar también que este núcleo satisface la ecuación integral de Fredholm del segundo tipo

$$G(x, t) = -F_G(x, t) - \int_0^x F_G(t, s)G(x, s)ds, \quad 0 \leq t < x, \quad (1.2.14)$$

donde $x \in (0, \pi]$ es fijo, y

$$F_G(x, t) := \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\cos(\rho_n x) \cos(\rho_n t)}{\alpha_n} - \frac{\cos(nx) \cos(nt)}{\alpha_n^0} \right]. \quad (1.2.15)$$

A (1.2.14) se le conoce como *ecuación de Gelfand-Levitan*. En [14] se demostró por primera vez la existencia del núcleo G y la ecuación de Gelfand-Levitan. Este trabajo representa un nuevo paradigma para resolver el problema inverso de Sturm-Liouville, ya que conociendo los datos espectrales la *función espectral* F_G en (1.2.15) queda determinada, y haciendo uso de la ecuación (1.2.14) podemos reconstruir el operador que define al problema de Sturm-Liouville.

En la siguiente sección trataremos con la ecuación de Klein-Gordon, resulta interesante que el núcleo G satisface esta ecuación, y por tanto F_G satisface la ecuación de onda. Esto lo deduciremos para la función espectral F_S que se introduce a continuación; sin embargo, el caso para F_G es totalmente análogo. Cabe agregar que la función F_G tomará un rol importante en el capítulo 3 para la determinación de las representaciones en serie para los núcleos de transmutación.

En [6] se demostró que el núcleo S satisface la siguiente ecuación integral

$$S(x, t) = -F_S(x, t) - \int_0^x F_S(s, t)S(x, s)ds, \quad 0 \leq t \leq x, \quad (1.2.16)$$

donde $x \in (0, \pi]$ es fijo, y

$$F_S(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\sin(\rho_n x) \sin(\rho_n t)}{\alpha_n \rho_n^2} - \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right] \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right]}{\alpha_n^0 (\rho_n^0)^2} \right]. \quad (1.2.17)$$

Los parámetros $\{\rho_n, \alpha_n\}_{n \geq 0}$ y $\{n, \alpha_n^0\}_{n \geq 0}$ en (1.2.15) y (1.2.17) corresponden a los datos espectrales de dos problemas de Sturm-Liouville que presentaremos posteriormente.

Otro tema importante a citar es sobre el operador inverso a un operador de transmutación. En [16] se demuestra que el inverso de un operador de Volterra del segundo tipo vuelve a ser un operador del mismo tipo, por supuesto con otro núcleo integral. En [12] obtienen la siguiente relación entre los núcleos integrales L_h y K_h de T_h^{-1} y T_h respectivamente

$$L_h(x, t) = -K_h(t, x), \quad (1.2.18)$$

donde T_h es el operador en (1.2.8). Entonces se concluye que T_h^{-1} tiene la forma

$$\begin{aligned} T_h^{-1}[u](x) &= u(x) + \int_{-x}^x L_h(x, t)u(t)dt \\ &= u(x) - \int_{-x}^x K_h(t, x)u(t)dt. \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

La relación (1.2.18) se obtuvo a partir de plantear el problema de Goursat que satisface el núcleo L_h , en este trabajo haremos lo análogo para el caso del núcleo integral del operador T_S^{-1} .

Observación. Los núcleos K_h , G y S de los operadores T_h , T_G y T_S que hemos presentado en principio los hemos definido sobre regiones que no son de la forma $\Omega \times \Omega$ como en el teorema (1); sin embargo, sí sabemos que dichos núcleos son continuos sobre sus respectivas regiones, las cuales son conjuntos compactos. Con esta información es un ejercicio sencillo obtener conclusiones sobre su continuidad. Para obtener las representaciones en serie de estos núcleos es importante saber sobre qué espacio de funciones son continuos los operadores de transmutación.

Concluimos esta sección con un resultado acerca de la continuidad de los operadores de transmutación.

Lema 1. Para $q \in L_2[0, b]$ se satisface $T_G, T_S \in \mathcal{B}(L_2[0, b])$, y si $q \in L_2[-b, b]$ entonces $T_h \in \mathcal{B}(L_2[-b, b])$.

Demostración. Sea $u \in L_2[0, b]$.

Como S es continuo en el compacto $D_b := \{(x, t) : 0 \leq t \leq x \leq b\}$, entonces alcanza su máximo en D_b

$$M_S := \max\{|S(x, t)| : (x, t) \in D_B\},$$

entonces

$$\begin{aligned} \|T_S[u]\|_2^2 &:= \int_0^b |T_S[u](x)|^2 dx = \int_0^b \left| u(x) + \int_0^x S(x, t)u(t)dt \right|^2 dx \\ &\leq \int_0^b |u(x)|^2 dx + 2 \int_0^b |u(x)| \left| \int_0^x S(x, t)u(t)dt \right| dx \\ &\quad + \int_0^b \left| \int_0^x S(x, t)u(t)dt \right|^2 dx. \end{aligned}$$

Como $u \in L_2[0, b] \subseteq L_1[0, b]$, denotaremos por $\|u\|_2$ y $\|u\|_1$ a las normas de u en $L_2[0, b]$ y $L_1[0, b]$ respectivamente. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} \|T_S[u]\|_2^2 &\leq \|u\|_2^2 + 2 \int_0^b |u(x)| dx \left| \int_0^b S(x, t)u(t)dt \right| \\ &\quad + \int_0^b \left(\int_0^x |S(x, t)||u(t)|dt \right)^2 dx \\ &\leq \|u\|_2^2 + 2M_S \|u\|_1^2 + M_S^2 \int_0^b \left(\int_0^b |u(t)|dt \right)^2 dx \\ &\leq \|u\|_2^2 + (2M_S + bM_S^2) \|u\|_1^2 \leq R^2 \|u\|_2^2, \end{aligned} \tag{1.2.20}$$

donde $R^2 = 1 + (2M_S + bM_S^2)c^2 > 0$. La constante es tal que $\|u\|_1 \leq c\|u\|_2$, resultado conocido para espacios L_P sobre conjuntos de medida finita. Se concluye que $\|T_S[u]\|_2 \leq \|u\|_2$ y por tanto $T_S \in \mathcal{B}(L_2[0, b])$. Los casos para T_G y T_h se obtienen de manera análoga. \square

1.3 El problema de Cauchy para la ecuación de Klein-Gordon

El objetivo de esta sección es mostrar mediante un problema concreto la relevancia que puede tener el uso de operadores de transmutación en la resolución de problemas que involucren ecuaciones en derivadas parciales; así como justificar el objetivo de buscar representaciones en serie para núcleos de transmutación.

En esta sección la ecuación de onda tendrá un rol importante, por lo cual definimos a continuación el símbolo \square para denotar al *operador de onda*

$$\square := \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Haciendo uso de este operador introducimos el problema de valor inicial para la ecuación de Klein-Gordon con coeficiente variable

$$\square u + q(x)u = 0, \tag{1.3.1}$$

en la región $|x| \leq b, t \geq 0$, sujeto a las condiciones

$$u(x, 0) = g(x), \tag{1.3.2}$$

$$u_t(x, 0) = h(x), \tag{1.3.3}$$

donde $q \in \mathcal{C}[-b, b]$, $g \in \mathcal{C}^2[-b, b]$ y $h \in \mathcal{C}^1[-b, b]$ son funciones conocidas. Es posible simplificar este problema haciendo uso del operador de transmutación T para los operadores A y B en (1.2.1) y (1.2.2). De acuerdo al teorema (2) este operador tiene la forma

$$T[\nu](x) := \nu(x) + \int_{-x}^x K(x, s)\nu(s)ds. \tag{1.3.4}$$

Comprobaremos que el problema planteado se puede simplificar como un problema de valor inicial correspondiente para la ecuación de onda.

Lema 2. *Sea $u = T[\nu]$, donde u es solución de la ecuación de Klein-Gordon (1.3.1), entonces ν satisface la ecuación de onda.*

Demostración. Podemos reescribir (1.3.1) en términos del operador A y $T\nu$ como

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - \frac{d^2}{dx^2} + q(x) \right) T\nu = 0 \quad (1.3.5)$$

$$\Leftrightarrow AT\nu = -\frac{d^2}{dt^2}T\nu. \quad (1.3.6)$$

Por otro lado, de la propiedad de transmutación (1.2.3) tenemos

$$AT\nu = TB\nu. \quad (1.3.7)$$

Entonces, por (1.3.6) y (1.3.7) se tiene

$$\begin{aligned} TB\nu &= -\frac{d^2}{dt^2}T\nu \\ \Rightarrow T\frac{d^2\nu}{dx^2} &= \frac{d^2}{dt^2}T\nu = T\frac{d^2\nu}{dt^2} \\ \Rightarrow \square\nu &= 0, \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

es decir, ν satisface la ecuación de onda. \square

Finalmente, para obtener el problema de valor inicial para la ecuación de onda basta mapear las condiciones iniciales del problema original (1.3.2) y (1.3.3). Esto lo logramos considerando que $T^{-1}u = \nu$, así

$$u(x, 0) = g(x) \xrightarrow{T^{-1}} \nu(x, 0) = T^{-1}u(x, 0) = T^{-1}g(x), \quad (1.3.9)$$

$$u_t(x, 0) = h(x) \xrightarrow{T^{-1}} \nu_t(x, 0) = T^{-1}u_t(x, 0) = T^{-1}h(x). \quad (1.3.10)$$

La ecuación de onda (1.3.8) tiene la solución general

$$\nu(x, t) = f(x - t) + g(x + t), \quad (1.3.11)$$

siendo f la componente de la onda que se desplaza en dirección positiva de x y g la componente que se desplaza en dirección opuesta. Para conseguir esta solución basta con usar cálculo elemental, se propone el cambio de variables:

$$\xi = x + t, \quad (1.3.12)$$

$$\eta = x - t. \quad (1.3.13)$$

Reescribamos la ecuación en las nuevas coordenadas (ξ, η) :

$$\frac{\partial \nu}{\partial x} = \frac{\partial \nu}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \nu}{\partial \xi} + \frac{\partial \nu}{\partial \eta} \quad (1.3.14)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \nu}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \nu}{\partial \eta} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \nu}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ &= \frac{\partial^2 \nu}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 \nu}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial \eta^2}. \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

Análogamente se tiene

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \nu}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 \nu}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial \eta^2}. \quad (1.3.16)$$

Finalmente, sustituyendo (1.3.15) y (1.3.16) en (1.3.8) se obtiene la ecuación en las nuevas coordenadas

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (1.3.17)$$

De esta ecuación es claro que $\frac{\partial \nu}{\partial \eta}$ no depende de ξ , y por tanto es igual a una función h que sólo depende de η , $h(\eta) := \frac{\partial \nu}{\partial \eta}$. Integrando h tenemos

$$\nu(\xi, \eta) = f(\xi) + \int h(\eta) d\eta, \quad (1.3.18)$$

donde f es una función que al depender sólo de ξ toma el rol de constante de integración. Definiendo ahora

$$g(\eta) := \int \nu(\eta) d\eta,$$

y sustituyendo en (1.3.18) obtenemos $\nu(\xi, \eta)$ en términos de $f(\xi)$ y $g(\eta)$. Finalmente regresando a las coordenadas (x, t) obtenemos la solución (1.3.11). Al considerar las condiciones de valor inicial para ν y ν_t es posible determinar de manera explícita la solución. Note que al evaluar (1.3.11) en $t = 0$ obtenemos

$$\nu(x, 0) = f(x) + g(x). \quad (1.3.19)$$

Derivando (1.3.11) y evaluando en $t = 0$ se tiene

$$\nu_t(x, 0) = g'(x) - f'(x). \quad (1.3.20)$$

Integrando ahora (1.3.20)

$$g(0) - f(0) + \int_0^x \nu_t(s, 0) ds = g(x) - f(x). \quad (1.3.21)$$

De (1.3.21) y (1.3.19) tenemos

$$g(x) = \frac{1}{2}\nu(x, 0) + \frac{g(0) - f(0)}{2} + \frac{1}{2} \int_0^x \nu_t(s, 0) ds, \quad (1.3.22)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\nu(x, 0) - \frac{g(0) - f(0)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^x \nu_t(s, 0) ds. \quad (1.3.23)$$

Con (1.3.22) y (1.3.23) podemos reescribir (1.3.11) como

$$\nu(x, t) = \frac{\nu(x-t, 0) + \nu(x+t, 0)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \nu_t(s, 0) ds. \quad (1.3.24)$$

La solución representada de esta forma se conoce como *fórmula de d'Alembert*. Observe que esta solución queda determinada por la aplicación de T^{-1} a las funciones dadas g y h .

Considerando que T^{-1} es un operador de Volterra en la forma (1.3.4) pero con núcleo $L(x, t)$, entonces si conocemos $L(x, t)$ ya tenemos resuelto el problema de valor inicial (1.3.8), (1.3.9)-(1.3.10) mediante la fórmula de d'Alembert. Posteriormente mediante la aplicación de T queda resuelto el problema original (1.3.1)-(1.3.3). Ahora, suponga que conocemos una representación en serie para los núcleos de T y T^{-1} en la forma

$$K(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} l_n(x, t),$$

$$L(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{l}_n(x, t),$$

donde l_n, \tilde{l}_n son funciones conocidas. Entonces, se podrían obtener aproximaciones numéricas a la solución buscada truncando las series hasta cierto índice N . Justamente en el último capítulo de este trabajo se obtendrá una descomposición de esta forma para cada núcleo de transmutación, donde se determinarán de forma explícita las funciones $l_n(x, t)$ y $\tilde{l}_n(x, t)$ para los núcleos del operador de transmutación y su inverso respectivamente. Se demostrará que los elementos necesarios para construir estas funciones se encuentran en la información espectral asociada a problemas de Sturm-Liouville.

1.4 El problema de Goursat para núcleos de transmutación

En esta sección nos encargaremos de mostrar resultados acerca de los núcleos de los operadores T_h , T_S y T_S^{-1} usando como recurso el planteamiento de un problema de Goursat.

La primera proposición tiene como objetivo mostrar que el operador T_h efectivamente tiene la forma de un operador de Volterra del segundo tipo. Se va a considerar un potencial con mayor regularidad al citado en el teorema (2); sin embargo, la proposición se demuestra para un operador de transmutación asociado a la pareja de operadores más generales

$$\hat{A} := -\frac{d^2}{dx^2} + q(x), \quad (1.4.1)$$

$$\hat{B} := -\frac{d^2}{dx^2} + r(x), \quad (1.4.2)$$

donde $q, r \in E := \mathcal{C}^1[-b, b]$ son \mathbb{C} -valuadas.

Observación. *Es sabido que para un potencial que tiene derivada de orden n continua, entonces el núcleo de T_h tiene derivadas parciales de orden $n+1$ continuas en cada variable [18].*

Considerando esta observación, en el siguiente teorema podremos aplicar la *regla integral de Leibniz* dos veces, ya que el núcleo K_h en este caso tendrá derivadas parciales de segundo orden continuas en cada variable.

Teorema 4. *Para los operadores (1.4.1) y (1.4.2), el operador de transmutación T_h tal que*

$$\nu(0) = u(0) \text{ y } \nu'(0) = u'(0) + hu(0), \quad (1.4.3)$$

donde $\nu = T_h u$ y $h \in \mathbb{C}$, tiene la forma de un operador integral de Volterra

$$T_h u(x) := u(x) + \int_{-x}^x K_h(x, t)u(t)dt, \quad (1.4.4)$$

donde el núcleo $K_h(x, t)$ es la solución del problema de Goursat

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - q(x)\right)K_h(x, t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - r(t)\right)K_h(x, t), \quad (1.4.5)$$

$$K_h(x, x) = \frac{h}{2} + \frac{1}{2} \int_0^x (q(s) - r(s))ds, \quad K_h(x, -x) = \frac{h}{2} \quad (1.4.6)$$

en la región $|t| \leq |x| \leq b$.

Y recíprocamente, si K_h satisface el problema de Goursat, entonces el operador de Volterra T_h en (1.4.4) define un operador de transmutación para los operadores (1.4.1), (1.4.2) tal que las condiciones en (1.4.3) se satisfacen.

Demostración. Consideremos $\nu = T_h u$ para $u \in \mathcal{C}^2[-b, b]$ arbitraria y T_h definido en (1.4.4), entonces

$$\nu'(x) = u'(x) + \frac{d}{dx} \left(\int_{-x}^x K_h(x, t) u(t) dt \right). \quad (1.4.7)$$

Por regla integral de Leibniz aplicada al segundo término en (1.4.7) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\int_{-x}^x K_h(x, t) u(t) dt \right) &= K_h(x, x) \frac{dx}{dx} u(x) - K_h(x, -x) \frac{d(-x)}{dx} u(-x) \\ &\quad + \int_{-x}^x \frac{\partial K_h(x, t)}{\partial x} u(t) dt \\ &= K_h(x, x) u(x) + K_h(x, -x) u(-x) \\ &\quad + \int_{-x}^x \frac{\partial K_h(x, t)}{\partial x} u(t) dt. \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

Entonces, de (1.4.7) y (1.4.8) se obtiene

$$\begin{aligned} \nu'(x) &= u'(x) + K_h(x, x) u(x) + K_h(x, -x) u(-x) \\ &\quad + \int_{-x}^x \frac{\partial K_h(x, t)}{\partial x} u(t) dt. \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

De la definición en (1.4.4) es claro que se satisface la condición $\nu(0) = u(0)$. Ahora, evaluando (1.4.9) en $x = 0$ tenemos

$$\nu'(0) = u'(0) + 2u(0)K_h(0, 0),$$

entonces

$$\nu'(0) = u'(0) + hu(0) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{h}{2} = K_h(0, 0). \quad (1.4.10)$$

Para verificar la propiedad de transmutación $\hat{A}T_h = T_h\hat{B}$ tenemos que calcular ν'' y $T_h u''$. Por un lado, de (1.4.7) se tiene que

$$\nu''(x) = u''(x) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\int_{-x}^x K_h(x, t) u(t) dt \right). \quad (1.4.11)$$

Por otro lado, si volvemos a derivar (1.4.9) obtenemos

$$\begin{aligned}
\nu''(x) &= u''(x) + \left(\frac{dK_h(x, x)}{dx} \right) u(x) + K_h(x, x)u'(x) \\
&+ \left(\frac{dK_h(x, -x)}{dx} \right) u(-x) + K_h(x, -x) \frac{du(-x)}{dx} \\
&+ \frac{d}{dx} \left(\int_{-x}^x \frac{\partial K_h(x, t)}{\partial x} u(t) dt \right). \tag{1.4.12}
\end{aligned}$$

Una vez que aplicamos la regla integral de Leibniz al último término obtenemos

$$\begin{aligned}
\nu''(x) &= u''(x) + \left(\frac{dK_h(x, x)}{dx} \right) u(x) + K_h(x, x)u'(x) \\
&+ \left(\frac{dK_h(x, -x)}{dx} \right) u(-x) - K_h(x, -x)u'(-x) \\
&+ \frac{\partial K_h(x, t)}{\partial x} \Big|_{t=x} u(x) + \frac{\partial K_h(x, t)}{\partial x} \Big|_{t=-x} u(-x) \\
&+ \int_{-x}^x \frac{\partial^2}{\partial x^2} K_h(x, t) u(t) dt. \tag{1.4.13}
\end{aligned}$$

De (1.4.11) y (1.4.13) se observa que

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2} \int_{-x}^x K_h(x, t) u(t) dt &= \frac{dK_h(x, x)}{dx} u(x) + K_h(x, x)u'(x) \\
&+ \frac{dK_h(x, -x)}{dx} u(-x) - K_h(x, -x)u'(-x) \\
&+ \frac{\partial K_h(x, t)}{\partial x} \Big|_{t=x} u(x) + \frac{\partial K_h(x, t)}{\partial x} \Big|_{t=-x} u(-x) \\
&+ \int_{-x}^x \frac{\partial^2}{\partial x^2} K_h(x, t) u(t) dt. \tag{1.4.14}
\end{aligned}$$

Ahora consideremos la aplicación de T_h sobre u'' :

$$T_h u''(x) = u''(x) + \int_{-x}^x \mathcal{K}(x, t) u''(t) dt. \tag{1.4.15}$$

Podemos ahora integrar por partes el último término en (1.4.15), obteniendo

así

$$\begin{aligned}
\int_{-x}^x K_h(x, t)u''(t)dt &= [K_h(x, t)u'(t)] \Big|_{-x}^x - \int_{-x}^x u'(t) \frac{\partial K_h(x, t)}{\partial t} dt \\
&= K_h(x, x)u'(x) - K_h(x, -x)u'(-x) \\
&\quad - \int_{-x}^x u'(t) \frac{\partial K_h(x, t)}{\partial t} dt. \tag{1.4.16}
\end{aligned}$$

Para el último término en (1.4.16) integrando por partes

$$\begin{aligned}
\int_{-x}^x u'(t) \frac{\partial K_h(x, t)}{\partial t} dt &= \left[\frac{\partial K_h(x, t)}{\partial t} u(t) \right] \Big|_{t=-x}^x - \int_{-x}^x u(t) \frac{\partial^2 K_h(x, t)}{\partial t^2} dt \\
&= \frac{\partial K_h(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=x} u(x) - \frac{\partial K_h(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=-x} u(-x) \\
&\quad - \int_{-x}^x u(t) \frac{\partial^2 K_h(x, t)}{\partial t^2} dt. \tag{1.4.17}
\end{aligned}$$

Al sustituir (1.4.17) en (1.4.16) se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{-x}^x K_h(x, t)u''(t)dt &= K_h(x, x)u'(x) - K_h(x, -x)u'(-x) \\
&\quad + \int_{-x}^x u(t) \frac{\partial^2 K_h(x, t)}{\partial t^2} dt + \frac{\partial K_h(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=-x} u(-x) \\
&\quad - \frac{\partial K_h(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=x} u(x). \tag{1.4.18}
\end{aligned}$$

Por un lado se tiene

$$\begin{aligned}
T_h \hat{B}u(x) &= T_h (-u''(x) + r(x)u(x)) \\
&= -T_h u''(x) + T_h r(x)u(x) \\
&= -u''(x) - \int_{-x}^x K_h(x, t)u''(t)dt + r(x)u(x) \\
&\quad + \int_{-x}^x K_h(x, t)r(t)u(t)dt. \tag{1.4.19}
\end{aligned}$$

Por otro lado se tiene

$$\begin{aligned}
AT_h u(x) &= \left(-\frac{d^2}{dx^2} + q(x) \right) \left(u(x) + \int_{-x}^x K_h(x, t)u(t)dt \right) \\
&= -u''(x) - \frac{d^2}{dx^2} \left(\int_{-x}^x K_h(x, t)u(t)dt \right) + q(x)u(x) \\
&\quad + q(x) \int_{-x}^x K_h(x, t)u(t)dt. \tag{1.4.20}
\end{aligned}$$

De manera que la igualdad entre (1.4.19) y (1.4.20) se satisface si y sólo si

$$\begin{aligned}
& - \int_{-x}^x K_h(x, t) u''(t) dt + r(x)u(x) + \int_{-x}^x K_h(x, t) r(t)u(t) dt = q(x)u(x) \\
& - \frac{d^2}{dx^2} \left(\int_{-x}^x K_h(x, t) u(t) dt \right) + q(x) \int_{-x}^x K_h(x, t) u(t) dt. \quad (1.4.21)
\end{aligned}$$

Usando (1.4.18) y (1.4.14) en la igualdad anterior, eliminando términos comunes y agrupando obtenemos

$$\begin{aligned}
& \int_{-x}^x \left(\frac{\partial^2 K_h(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K_h(x, t)}{\partial t^2} - q(x)K_h(x, t) + r(t)K_h(x, t) \right) u(t) dt \\
& + u(x) \left[r(x) - q(x) + \frac{\partial K_h(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=x} + \frac{\partial K_h(x, t)}{\partial x} \Big|_{t=x} + \frac{dK_h(x, x)}{dx} \right] \\
& + u(-x) \left[\frac{\partial K_h(x, t)}{\partial x} \Big|_{t=-x} - \frac{\partial K_h(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=-x} + \frac{dK_h(x, -x)}{dx} \right] = 0. \quad (1.4.22)
\end{aligned}$$

Desde que $u \in \mathcal{C}^2[-b, b]$ se ha tomado de forma arbitraria, se concluye que los términos acompañando a $u(x)$, $u(-x)$ y el integrando satisfacen

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - q(x) \right) K_h(x, t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - r(t) \right) K_h(x, t), \quad (1.4.23)$$

$$r(x) - q(x) + \frac{\partial K_h(x, t)}{\partial x} \Big|_{t=x} + \frac{\partial K_h(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=x} + \frac{dK_h(x, x)}{dx} = 0, \quad (1.4.24)$$

$$\frac{\partial K_h(x, t)}{\partial x} \Big|_{t=-x} - \frac{\partial K_h(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=-x} + \frac{dK_h(x, -x)}{dx} = 0. \quad (1.4.25)$$

Por otro lado, calculando derivadas totales para K se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{dK_h(x, x)}{dx} &= \frac{\partial K_h(x, t)}{\partial x} \Big|_{t=x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial K_h(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=x} \frac{\partial x}{\partial x} \\
&= \frac{\partial K_h(x, t)}{\partial x} \Big|_{t=x} + \frac{\partial K_h(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=x}, \quad (1.4.26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dK_h(x, -x)}{dx} &= \frac{\partial K_h(x, t)}{\partial x} \Big|_{t=-x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial K_h(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=-x} \frac{\partial(-x)}{\partial x} \\
&= \frac{\partial K_h(x, t)}{\partial x} \Big|_{t=-x} - \frac{\partial K_h(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=-x}. \quad (1.4.27)
\end{aligned}$$

Al sustituir (1.4.26) y (1.4.27) en (1.4.24) y (1.4.25) respectivamente se tiene

$$2 \frac{dK_h(x, x)}{dx} = q(x) - r(x), \quad (1.4.28)$$

$$\frac{dK_h(x, -x)}{dx} = 0. \quad (1.4.29)$$

De (1.4.28) tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^x dK_h &= \frac{1}{2} \int_0^x [q(s) - r(s)] ds \\ \Rightarrow K_h(x, x) &= \frac{1}{2} \int_0^x [q(s) - r(s)] ds + K_h(0, 0) \\ \Rightarrow K_h(x, x) &= \frac{1}{2} \int_0^x [q(s) - r(s)] ds + \frac{h}{2} \end{aligned} \quad (1.4.30)$$

donde hemos usado (1.4.10) para simplificar $K_h(0, 0)$.

Desarrollando de manera análoga la relación (1.4.29) usando (1.4.10) obtenemos

$$K_h(x, -x) = K_h(0, 0) = \frac{h}{2} \quad (1.4.31)$$

En conclusión, el operador de transmutación para \hat{A} y \hat{B} tiene la forma del operador T_h definido en (1.4.4), el cual satisface las condiciones (1.4.3) si y sólo si se cumple la relación (1.4.10), lo cual implica que su núcleo $K_h(x, t)$ satisface el problema de Goursat definido por (1.4.23), (1.4.30) y (1.4.31).

Recíprocamente, supongamos que $K_h(x, t)$ satisface el problema de Goursat (1.4.5)-(1.4.6). Por el desarrollo anterior sabemos que la propiedad de transmutación $\hat{A}T_h = T_h\hat{B}$ es equivalente a (1.4.22), entonces debemos verificar que (1.4.22) se cumple y que las condiciones (1.4.3) se satisfacen. Como $K_h(x, t)$ satisface (1.4.5), la integral en (1.4.22) se anula para cualquier $u \in \mathcal{C}^2[-b, b]$. Además, como $K_h(x, t)$ satisface (1.4.30), entonces considerando la derivada total calculada en (1.4.26) tenemos

$$\left. \frac{\partial K_h(x, t)}{\partial t} \right|_{t=x} + \left. \frac{\partial K_h(x, t)}{\partial x} \right|_{t=x} + \frac{dK_h(x, x)}{dx} = 2 \frac{dK_h(x, x)}{dx} = q(x) - r(x),$$

de manera que el término acompañando a $u(x)$ en (1.4.22) se anula para cualquier $u \in \mathcal{C}^2[-b, b]$. Análogamente, de la derivada total en (1.4.27) y la condición (1.4.31) que satisface $K_h(x, t)$ tenemos

$$\left. \frac{\partial K_h(x, t)}{\partial x} \right|_{t=-x} - \left. \frac{\partial K_h(x, t)}{\partial t} \right|_{t=-x} + \frac{dK_h(x, -x)}{dx} = 2 \frac{dK_h(x, -x)}{dx} = 0,$$

de manera que el término acompañando a $u(-x)$ en (1.4.22) se anula para cualquier $u \in \mathcal{C}^2[-b, b]$. Finalmente, la primera condición en (1.4.3) se satisface por la definición de T_h en (1.4.4), y la segunda porque $K_h(x, t)$ satisface (1.4.31), lo cual es suficiente de acuerdo a (1.4.10). \square

Consideremos el caso particular cuando $r(x) \equiv 0$ en \hat{B} ; es decir, regresamos a los operadores A y B en (1.2.1) y (1.2.2), por el teorema anterior el núcleo $K_h(x, t)$ satisface la ecuación de Klein-Gordon

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - q(x) \right) K_h(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} K_h(x, t), \quad (1.4.32)$$

con las condiciones de Goursat (1.2.9).

Los núcleos $G(x, t)$ y $S(x, t)$ de los operadores de transmutación T_G y T_S que definimos en (1.2.10) y (1.2.11) respectivamente, también satisfacen la ecuación de Klein-Gordon (1.4.32) pero con las condiciones respectivas (1.2.12) y (1.2.13).

Considerando que estos operadores son invertibles, es natural preguntarse si los núcleos de los operadores inversos también satisfacen un problema de Goursat. De hecho, en [15] y [21] muestran que esto efectivamente sucede para el núcleo $H(x, t)$, donde $T_H := T_G^{-1}$. Probando este resultado se obtiene que $H(x, t)$ y $G(x, t)$ satisfacen

$$H(x, t) - F_G(x, t) - \int_0^t F_G(x, \tau) G(t, \tau) d\tau = 0, \quad 0 \leq t < x; \quad (1.4.33)$$

es decir, $H(x, t) = T_{G,t}[F_G(x, t)]$.

Nuestro siguiente objetivo es obtener un resultado similar para el caso del núcleo $P(x, t)$, donde $T_P := T_S^{-1}$.

Recordemos que T_S cumple la propiedad de transmutación $AT_S u = T_S B u$ para $u \in \mathcal{C}^2[0, b]$ tal que $u(0) = 0$, por lo cual $T_S[u](0) = u(0) = 0$. Entonces en el rango $\mathcal{R}(T_S)$ las funciones se anulan en $x = 0$, por lo cual el operador T_P también toma funciones que se anulan en $x = 0$. De la propiedad de transmutación para T_S obtenemos la respectiva para T_P

$$T_P A u = B T_P u. \quad (1.4.34)$$

Proposición 1. *El núcleo $P(x, t)$ satisface el problema de Goursat*

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - q(t) \right) P(x, t) \quad (1.4.35)$$

$$P(x, x) = -\frac{1}{2} \int_0^x q(t) dt, \quad P(x, 0) = 0. \quad (1.4.36)$$

Demostración. Sea $\nu = T_P u$. Por un lado se tiene

$$\nu''(x) = u''(x) + \frac{d^2}{dx^2} \int_0^x P(x, s)u(s)ds. \quad (1.4.37)$$

Por otro lado, después de aplicar dos veces la regla integral de Leibniz

$$\begin{aligned} \nu''(x) &= u''(x) + u(x) \frac{d}{dx} P(x, x) + u'(x) P(x, x) \\ &\quad + \left. \frac{\partial P(x, s)}{\partial x} \right|_{s=x} u(x) + \int_0^x u(s) \frac{\partial^2 P(x, s)}{\partial x^2} ds. \end{aligned} \quad (1.4.38)$$

De (1.4.37) y (1.4.38) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \int_0^x P(x, s)u(s)ds &= u(x) \frac{d}{dx} P(x, x) + u'(x) P(x, x) \\ &\quad + \left. \frac{\partial P(x, s)}{\partial x} \right|_{s=x} u(x) + \int_0^x u(s) \frac{\partial^2 P(x, s)}{\partial x^2} ds. \end{aligned} \quad (1.4.39)$$

Queremos obtener una condición equivalente a la propiedad de transmutación (1.4.34), entonces calculamos

$$T_p[u''](x) = u''(x) + \int_0^x P(x, s)u''(s)ds. \quad (1.4.40)$$

Después de dos integraciones por partes se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^x P(x, s)u''(s)ds &= P(x, x)u'(x) - P(x, 0)u'(0) - \left. \frac{\partial P(x, s)}{\partial s} \right|_{s=x} u(x) \\ &\quad + \int_0^x u(s) \left. \frac{\partial^2 P(x, s)}{\partial s^2} \right|_{s=x} ds, \end{aligned} \quad (1.4.41)$$

donde hemos anulado el término $u(0)$ que aparece en la segunda integración. La parte izquierda de (1.4.34) está dada por

$$\begin{aligned} T_P[Au](x) &= T_P \left[-\frac{d^2}{dx^2} u(x) + q(x)u(x) \right] \\ &= -u''(x) - \int_0^x P(x, s)u''(s)ds + q(x)u(x) \\ &\quad + \int_0^x P(x, s)q(s)u(s)ds. \end{aligned} \quad (1.4.42)$$

Para la parte derecha de (1.4.34) tenemos

$$\begin{aligned} B[T_P u](x) &= -\frac{d^2}{dx^2} \left[u(x) + \int_0^x P(x, s)u(s)ds \right] \\ &= -u''(x) - \frac{d^2}{dx^2} \int_0^x P(x, s)u(s)ds. \end{aligned} \quad (1.4.43)$$

Como T_P satisface la propiedad de transmutación, al igualar (1.4.42) y (1.4.43) y considerar las relaciones (1.4.41) y (1.4.39), llegamos a la condición equivalente

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^x \left[P(x, s)q(s) - \frac{\partial^2 P(x, s)}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 P(x, s)}{\partial x^2} \right] u(s)ds \\ &\quad + \left[\frac{\partial P(x, s)}{\partial s} \Big|_{s=x} + \frac{\partial P(x, s)}{\partial x} \Big|_{s=x} + \frac{dP(x, x)}{dx} + q(x) \right] u(x) \\ &\quad + P(x, 0)u'(0) \\ &= \int_0^x \left[\frac{\partial^2 P(x, s)}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} - q(s) \right) P(x, s) \right] u(s)ds \\ &\quad + \left[2\frac{dP(x, s)}{dx} + q(x) \right] u(x) + P(x, 0)u'(0) \end{aligned} \quad (1.4.44)$$

De la arbitrariedad de u obtenemos del primer término que $P(x, s)$ satisface la ecuación (1.4.35). Del segundo término se obtiene

$$\frac{dP(x, s)}{dx} = -\frac{1}{2}q(x), \quad (1.4.45)$$

así que definiendo $\lambda(\tau) := P(\tau, s)$ e integrando en el $[0, x]$ se obtiene

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= \lambda(0) - \frac{1}{2} \int_0^x q(\tau)d\tau \\ \Rightarrow P(x, x) &= P(0, 0) - \frac{1}{2} \int_0^x q(\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (1.4.46)$$

Del tercer término obtenemos que

$$P(x, 0) = 0, \quad (1.4.47)$$

la cual es una de las condiciones (1.4.36) buscadas, y si utilizamos esta en (1.4.46) para $x = 0$ obtenemos la otra condición. Concluimos que $P(x, t)$ satisface el problema de Goursat. \square

Observación. De la ecuación integral para $S(x, t)$ en (1.2.16) se tiene que

$$S(x, t) = -T_{S,x}[F_S(x, t)]. \quad (1.4.48)$$

Desde que $S(x, t)$ satisface la ecuación de Klein-Gordon (1.4.32), entonces $F_S(x, t)$ satisface la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 F_S(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 F_S(x, t)}{\partial x^2}. \quad (1.4.49)$$

Esto se sabe del desarrollo que se hizo en (1.3.5)-(1.3.8).

Lema 3. Se satisface $P(x, t) = T_{S,t}[F_S(x, t)]$

Demostración. Definamos la función

$$\tilde{P}(x, t) := F_S(x, t) + \int_0^t S(t, \tau) F_S(x, \tau) d\tau. \quad (1.4.50)$$

Observe que

$$\tilde{P}(x, 0) = F_S(x, 0) = 0, \quad (1.4.51)$$

ya que de la definición de $F_S(x, t)$ en (1.2.17) es claro que se anula cuando $t = 0$.

De la ecuación integral para $S(x, t)$ en (1.2.16) obtenemos para $t = x$

$$S(x, x) = -F_S(x, x) - \int_0^x S(x, \tau) F_S(\tau, x) d\tau. \quad (1.4.52)$$

Al evaluar $t = x$ en (1.4.50) y comparar con la expresión anterior obtenemos que

$$\tilde{P}(x, x) = -S(x, x) = -\frac{1}{2} \int_0^x q(t) dt, \quad (1.4.53)$$

donde la última igualdad se debe a la condición (1.2.13) del problema de Goursat que satisface el núcleo $S(x, t)$.

Mostremos ahora que $\tilde{P}(x, t)$ satisface la ecuación (1.4.35).

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{P}(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} F_S(x, t) + S(t, t) F_S(x, t) + \int_0^t F_S(x, \tau) \frac{\partial}{\partial t} S(t, \tau) d\tau \\ \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{P}(x, t) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} F_S(x, t) + F_S(x, t) \frac{d}{dt} S(t, t) + S(t, t) \frac{\partial}{\partial t} F_S(x, t) \\ &\quad + F_S(x, t) \frac{\partial}{\partial t} S(t, \tau) \Big|_{\tau=t} + \int_0^t F_S(x, \tau) \frac{\partial^2}{\partial t^2} S(t, \tau) d\tau \end{aligned} \quad (1.4.54)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{P}(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} F_S(x, t) + \int_0^t S(t, \tau) \frac{\partial}{\partial x} F_S(x, \tau) d\tau \\ \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{P}(x, t) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_S(x, t) + \int_0^t S(t, \tau) \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_S(x, \tau) d\tau \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_S(x, t) + \int_0^t S(t, \tau) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} F_S(x, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (1.4.55)$$

donde hemos usado (1.4.49). Ahora aplicando integración por partes dos veces tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^t S(t, \tau) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} F_S(x, \tau) d\tau &= S(t, t) \frac{\partial}{\partial \tau} F_S(x, \tau) \Big|_{\tau=t} \\ &\quad - \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} S(t, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} F_S(x, \tau) d\tau, \end{aligned}$$

donde hemos eliminado el término con $S(t, 0)$ pues se cumple (1.2.13).

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} S(t, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} F_S(x, \tau) d\tau &= F_S(x, t) \frac{\partial}{\partial \tau} S(t, \tau) \Big|_{\tau=t} \\ &\quad - \int_0^t F_S(x, \tau) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} S(t, \tau) d\tau, \end{aligned}$$

donde hemos usado que $F_S(x, 0) = 0$. Con lo anterior tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{P}(x, t) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} F_S(x, t) + S(t, t) \frac{\partial}{\partial \tau} F_S(x, \tau) \Big|_{\tau=t} - F_S(x, t) \frac{\partial}{\partial \tau} S(t, \tau) \Big|_{\tau=t} \\ &\quad + \int_0^t F_S(x, \tau) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} S(t, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.4.56)$$

Eliminando los términos comunes entre (1.4.54) y (1.4.56) tenemos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \tilde{P}(x, t) &= - \left[\frac{\partial}{\partial \tau} S(t, \tau) \Big|_{\tau=t} + \frac{\partial}{\partial t} S(t, \tau) \Big|_{\tau=t} \right] F_S(x, t) \\
&\quad - \int_0^t F_S(x, \tau) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) S(t, \tau) d\tau \\
&\quad - F_S(x, t) \frac{d}{dt} S(t, t) \\
&= -q(t) F_S(x, t) - \int_0^t F_S(x, \tau) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) S(t, \tau) d\tau,
\end{aligned}$$

donde el potencial $q(t)$ apareció al considerar la condición (1.2.13) para $S(t, t)$. Finalmente, podemos reescribir $F_S(x, t)$ al despejarlo de la definición de $\tilde{P}(x, t)$ en (1.4.53), con lo cual obtenemos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \tilde{P}(x, t) &= -q(t) \tilde{P}(x, t) \\
&\quad - \int_0^t F_S(x, \tau) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - q(t) \right) S(t, \tau) d\tau.
\end{aligned} \tag{1.4.57}$$

Notemos que la parte del integrando en (1.4.57) que opera sobre $S(t, \tau)$ es justo la ecuación (1.4.32) para $S(t, \tau)$, de modo que se anula la integral y obtenemos finalmente

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{P}(x, t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - q(t) \right) \tilde{P}(x, t). \tag{1.4.58}$$

Hemos mostrado que $\tilde{P}(x, t)$ satisface la ecuación (1.4.58) y las condiciones (1.4.51), (1.4.53), entonces es solución del problema de Goursat (1.4.35)-(1.4.36). De la unicidad de la solución concluimos que $\tilde{P}(x, t) = P(x, t)$. Finalmente, considerando de (1.2.17) que $F_S(x, \tau) = F_S(\tau, x)$, entonces de la definición (1.4.50) se tiene que $\tilde{P}(x, t) = T_{S,t}[F_S(x, t)]$, por tanto $P(x, t) = T_{S,t}[F_S(x, t)]$. \square

Capítulo 2

Teoría de Sturm-Liouville

2.1 Planteamiento del problema directo

Supongamos que queremos encontrar soluciones no triviales en el espacio de Hilbert $L_2[a, b]$ al problema con valores en la frontera

$$-(ry')' + (q+\lambda)y = 0 \quad (2.1.1)$$

$$a_1y(a) + a_2y'(a) = 0, \quad b_1y(b) + b_2y'(b) = 0. \quad (2.1.2)$$

donde $q, r^{-1} \in L_1[a, b]$ con q una función \mathbb{R} -valuada, $r(x) > 0$ en el intervalo $[a, b]$. Además, para garantizar soluciones únicas pediremos que $|a_1| + |a_2| > 0$ y $|b_1| + |b_2| > 0$, donde $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Como primer paso se debe determinar para cuáles valores de λ es posible encontrar dichas soluciones.

Motivado por este problema, podemos definir el operador de Sturm-Liouville $L : D(L) \rightarrow L_2[a, b]$

$$L[y] := -(ry')' + qy \quad (2.1.3)$$

donde $D(L) := \{y \in AC[a, b] : y \text{ satisface (2.1.2) y } ry' \in AC[a, b]\} \subseteq L_2[a, b]$. El problema directo de Sturm-Liouville es encontrar el espectro $\sigma(L)$ y las correspondientes eigenfunciones partiendo de que se conocen el potencial q y las condiciones de frontera del problema, con la información obtenida se construyen además las constantes de normalización.

Es sencillo demostrar que el operador L es simétrico y por tanto $\sigma(L) \subseteq \mathbb{R}$; además, también es cierto que L es un operador con resolvente compacto. Con estos resultados se puede demostrar el siguiente teorema, de particular importancia en el estudio del operador de Sturm-Liouville.

Teorema 5. *L es un operador autoadjunto y $\sigma(L) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ es un conjunto discreto tal que $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$. Además,*

$\dim N(L - \lambda_n I) = 1$, esto es, los eigenvalores son simples. Y si se eligen eigenfunciones normalizadas $y_n \in N(L - \lambda_n I)$, entonces $\{y_n\}_{n \geq 1}$ es un conjunto ortonormal completo en $L_2[a, b]$.

Estos resultados citados para L son clásicos del análisis funcional, y pueden encontrarse en [19].

En el siguiente capítulo obtendremos representaciones en forma de serie para los núcleos de transmutación K , L , S y P . Es sabido que los núcleos K , S y G están relacionados entre si, a saber por (3.2.3) y (3.2.4), lo cual será de gran utilidad para nuestros propósitos. Como los operadores con núcleos S y G son utilizados para representar eigenfunciones de dos problemas distintos de Sturm-Liouville en el intervalo $[0, \pi]$, es necesario primero presentar dichos problemas, esto lo hacemos en las siguientes dos secciones.

2.2 El problema $L(q(x), h, H)$ en $[0, \pi]$

Consideremos el problema de Sturm-Liouville con valores en la frontera

$$L[y] = -y'' + q(x)y = \rho^2 y, \quad x \in [0, \pi], \quad \rho^2 := \lambda \quad (2.2.1)$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \quad (2.2.2)$$

donde $h, H \in \mathbb{R}$, $q \in L_2[0, \pi]$ es \mathbb{R} -valuada y $\lambda \in \mathbb{R}$ es el parámetro espectral. A este problema lo denotaremos como $L(q(x), h, H)$ de ahora en adelante. Estamos tratando con un caso particular del problema planteado en la sección anterior al tomar $r \equiv 1$. El operador L en (2.2.1) se conoce como *operador de Shrödinger*. Tenemos ahora un dominio $D(L) \subseteq L_2[0, \pi]$, el cual queda determinado por las condiciones de frontera (2.2.2).

Asociado a $L(q(x), h, H)$ se tiene la sucesión de eigenvalores $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$, donde cada λ_n es un valor del parámetro espectral tal que existe una solución no trivial sujeta a las condiciones (2.2.2).

Para cada $\rho \in \mathbb{C}$ podemos definir el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} -\varphi''(\rho, x) + q(x)\varphi(\rho, x) &= \rho^2 \varphi, & (2.2.3) \\ \varphi(\rho, 0) &= 1, \quad \varphi'(\rho, 0) = h. \end{aligned}$$

Está claro que la solución única $\varphi(\rho, x)$ satisface la condición en $x = 0$ del problema $L(q(x), h, H)$. Más aún, es bien sabido que cuando $\rho = \rho_n$ se tiene que $\varphi(\rho_n, x)$ es eigenfunción del problema $L(q(x), h, H)$. Este hecho lo probaremos en la siguiente sección para el caso de otro problema de Sturm-Liouville, para lo cual ocuparemos el concepto de *función característica*.

Definición 2. Sea $\psi(\rho, x)$ la solución a (2.2.1) que satisface las condiciones iniciales $\psi(\rho, \pi) = 1$ y $\psi'(\rho, \pi) = -H$, se define

$$\Delta(\lambda) := \psi(\rho, x)\varphi'(\rho, x) - \psi'(\rho, x)\varphi(\rho, x). \quad (2.2.4)$$

Note que $\Delta(\lambda)$ es el Wronskiano de $\psi(\rho, x)$ y $\varphi(\rho, x)$, en este caso esta es la función característica para $L(q(x), h, H)$. Como la ecuación (2.2.1) no tiene derivada de primer orden, entonces por la identidad de Abel para ecuaciones de segundo orden se concluye que $\Delta(\lambda)$ no depende de x .

A las soluciones $\varphi(\rho_n, x)$ se les conoce como *eigenfunciones normalizadas*. A partir de estas soluciones se definen las *constantes de normalización* $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$ como

$$\alpha_n := \int_0^\pi \varphi_n^2(\rho_n, s) ds. \quad (2.2.5)$$

Para resolver este problema directo necesitamos encontrar conjunto de datos espectrales $\{\rho_n, \alpha_n\}_{n=0}^\infty$ partiendo de que se conocen los parámetros h, H de las condiciones de frontera en (2.2.2) y el potencial q en (2.2.1).

El conocimiento del comportamiento de la solución $\varphi(\rho, x)$ al problema de Cauchy (2.2.3) cuando $|\rho| \rightarrow \infty$ es importante para obtener el comportamiento asintótico ($n \rightarrow \infty$) de los datos espectrales.

Afirmación. Para $\rho \in \mathbb{C}$, la solución $\varphi(\rho, x)$ a (2.2.3) satisface

$$\varphi(\rho, x) = \cos(\rho x) + h \frac{\sin(\rho x)}{\rho} + \int_0^x \frac{\sin[\rho(x-t)]}{\rho} q(t) \varphi(\rho, t) dt. \quad (2.2.6)$$

Demostración. Como $\varphi(\rho, t)$ satisface (2.2.3), entonces se tiene

$$\sin[\rho(x-t)]q(t)\varphi(\rho, t) = \rho^2 \sin[\rho(x-t)]\varphi(\rho, t) + \sin[\rho(x-t)]\varphi''(\rho, t).$$

Para obtener la expresión deseada observamos que necesitamos obtener $\varphi(\rho, x)$, así que integramos en el $[0, x]$. Note que en este intervalo tenemos información de las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \int_0^x \sin[\rho(x-t)]q(t)\varphi(\rho, t) dt &= \int_0^x \rho^2 \sin[\rho(x-t)]\varphi(\rho, t) \\ &\quad + \int_0^x \sin[\rho(x-t)]\varphi''(\rho, t) dt. \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Integrando por partes la segunda integral en (2.2.7) tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^x \sin[\rho(x-t)]\varphi''(\rho, t) dt &= -\sin(\rho x)\varphi'(\rho, 0) \\ &\quad + \rho \int_0^x \cos[\rho(x-t)]\varphi'(\rho, t) dt. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Integrando por partes ahora la segunda integral en (2.2.8)

$$\int_0^x \cos[\rho(x-t)]\varphi'(\rho, t)dt = \varphi(\rho, x) - \cos(\rho x)\varphi(\rho, 0) - \rho \int_0^x \sin[\rho(x-t)]\varphi(\rho, t)dt. \quad (2.2.9)$$

Considerando las condiciones de frontera en los términos $\varphi(\rho, 0)$ y $\varphi'(\rho, 0)$ que han aparecido y sustituyendo lo obtenido en (2.2.7), se tiene finalmente

$$\begin{aligned} \int_0^x \sin[\rho(x-t)]q(t)\varphi(\rho, t)dt &= \rho^2 \int_0^x \sin[\rho(x-t)]\varphi(\rho, t)dt - h \sin(\rho x) \\ &+ \rho\varphi(\rho, x) - \rho \cos(\rho x) \\ &- \rho^2 \int_0^x \sin[\rho(x-t)]\varphi(\rho, t)dt. \end{aligned}$$

Notamos que un par de integrales con signos opuestos se eliminan, y finalmente se llega a la expresión buscada. \square

Usando este resultado, se puede mostrar que para $|\rho| \rightarrow \infty$ se satisfacen las siguientes expresiones asintóticas

$$\varphi(\rho, x) = \cos(\rho x) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\rho|}\right) \quad (2.2.10)$$

$$\varphi'(\rho, x) = -\rho \sin(\rho x) + \mathcal{O}(1). \quad (2.2.11)$$

Con los dos resultados anteriores, finalmente se pueden obtener las siguientes asintóticas para los datos espectrales del problema $L(q(x), h, H)$ que nos serán bastante útiles posteriormente

$$\rho_n = n + \frac{\omega}{\pi n} + \frac{\kappa_n}{n}, \quad \{\kappa_n\} \in l_2 \quad (2.2.12)$$

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\tilde{\kappa}_n}{n}, \quad \{\tilde{\kappa}_n\} \in l_2. \quad (2.2.13)$$

Una demostración de (2.2.10)-(2.2.13) puede encontrarse en [5].

Consideremos ahora el problema $L(0, 0, 0)$; es decir, $q(x) = 0$, $h = 0 = H$, el cual se reduce a

$$-y'' = \rho^2 y \quad (2.2.14)$$

$$y'(0) = 0 = y'(\pi). \quad (2.2.15)$$

Este problema tiene eigenvalores λ_n^0 no negativos. La solución general a (2.2.14) es de la forma $y(\rho, x) = c_1 \cos(\rho x) + c_2 \sin(\rho x)$. Considerando las

condiciones de frontera (2.2.15) se obtiene que $y(\rho, x) = c_1 \cos(\rho x)$, y se deducen además los eigenvalores para las soluciones no triviales

$$\lambda_n^0 = (\rho_n^0)^2 = n^2, \quad n \geq 0. \quad (2.2.16)$$

Las eigenfunciones normalizadas correspondientes a este problema están dadas por

$$\cos(nx), \quad n \geq 0. \quad (2.2.17)$$

Obtenemos además las siguientes constantes de normalización

$$\alpha_n^0 = \int_0^\pi \cos^2(ns) ds = \begin{cases} \pi & \text{si } n = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}. \quad (2.2.18)$$

La solución $\varphi(\rho, x)$ a (2.2.3) admite la siguiente representación [15]

$$\varphi(\rho, x) = \cos(\rho x) + \int_0^x G(x, s) \cos(\rho s) ds. \quad (2.2.19)$$

$$= T_G[\cos(\rho x)], \quad (2.2.20)$$

donde T_G es el operador de transmutación definido en (1.2.10). De (2.2.20) en particular se tiene que T_G conecta la solución $\cos(\rho x)$ de $-y'' = \rho^2 y$ tal que $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ con la solución del problema de Cauchy (2.2.3).

Como último comentario de esta sección retomemos la función F_G definida en (1.2.15). Ahora que ya presentamos los problemas $L(q(x), h, H)$ y $L(0, 0, 0)$, entonces queda claro que F_G está determinada por los datos espectrales de ambos problemas.

2.3 El problema $\tilde{L}(q(x), \pi, \frac{\pi}{2})$ en $[0, \pi]$

Para nuestros propósitos necesitamos trabajar con otros dos problemas de Sturm-Liouville, mismos que denotaremos como $\tilde{L}(q(x), \alpha, \beta)$. En [6] se plantea este problema con la siguiente forma

$$\begin{aligned} -y'' + q(x)y &= \rho^2 y, \\ y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha &= 0 \\ y(\pi) \cos \beta + y'(\pi) \sin \beta &= 0, \end{aligned}$$

donde $\alpha \in (0, \pi]$, $\beta \in [0, \pi)$ y $q \in L_1[0, \pi]$ es un potencial \mathbb{R} -valuado. Sin embargo, a nosotros nos interesa el caso particular cuando $q \in L_2[0, \pi]$, $\alpha = \pi$ y $\beta = \frac{\pi}{2}$. El primer problema que consideraremos es $\tilde{L}(q(x), \pi, \frac{\pi}{2})$

$$-y'' + q(x)y = \rho^2 y, \quad \rho^2 := \lambda \quad (2.3.1)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0. \quad (2.3.2)$$

Con el fin de obtener eigenfunciones normalizadas, para $\rho \in \mathbb{C}$ planteamos el siguiente problema de Cauchy

$$-\mathbf{s}''(\rho, x) + q(x)\mathbf{s}(\rho, x) = \rho^2\mathbf{s}, \quad (2.3.3)$$

$$\mathbf{s}(\rho, 0) = 0, \quad \mathbf{s}'(\rho, 0) = 1. \quad (2.3.4)$$

Las eigenfunciones citadas se obtienen al considerar $\rho = \rho_n$, y con estas definimos las constantes de normalización como

$$\alpha_n := \int_0^\pi \mathbf{s}^2(\rho_n, x) dx. \quad (2.3.5)$$

Definiendo ahora $u_0(y(x)) := y(0)$ y $v_\pi(y(x)) := y'(\pi)$, podemos reescribir las condiciones (2.3.2) con esta notación como $u_0(y(x)) = 0$ y $v_\pi(y(x)) = 0$, misma que ocuparemos para algunos resultados.

Consideramos otro problema de Cauchy, esta vez $\psi(\rho, x)$ es la solución a (2.3.3) que satisface las condiciones de frontera $\psi(\rho, \pi) = 1$ y $\psi'(\rho, \pi) = 0$.

En la siguiente proposición veremos que $\mathbf{s}(\rho, x)$ y $\psi(\rho, x)$ son eigenfunciones del problema $\tilde{L}(q(x), \pi, \frac{\pi}{2})$ cuando ρ es un eigenvalor. Para este problema definimos la función característica como el siguiente Wronskiano

$$\Delta(\lambda) := \langle \psi(\rho, x), \mathbf{s}(\rho, x) \rangle. \quad (2.3.6)$$

Evaluando en $x = 0$ y $x = \pi$ y considerando las condiciones de frontera que satisfacen $\psi(\rho, x)$ y $\mathbf{s}(\rho, x)$ se tiene

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda)|_{x=0} &= \psi(\rho, 0)\mathbf{s}'(\rho, 0) - \psi'(\rho, 0)\mathbf{s}(\rho, 0) \\ &= \psi(\rho, 0) = u_0(\psi(\rho, x)), \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

análogamente también se obtiene que

$$\Delta(\lambda)|_{x=\pi} = v_\pi(\mathbf{s}(\rho, x)). \quad (2.3.8)$$

Como el Wronskiano no depende de x , entonces de las igualdades anteriores se concluye que

$$\Delta(\lambda) = u_0(\psi(\rho, x)) = v_\pi(\mathbf{s}(\rho, x)) \quad (2.3.9)$$

A continuación presentamos resultados que relacionan los datos espectrales y la función característica de $\tilde{L}(q(x), \pi, \frac{\pi}{2})$.

Teorema 6. *Los eigenvalores del problema $\tilde{L}(q(x), \pi, \frac{\pi}{2})$ coinciden con las raíces de $\Delta(\lambda)$. Las funciones $\psi(\rho_n, x)$ y $\mathbf{s}(\rho_n, x)$ son eigenfunciones y existe una sucesión $\{\gamma_n\}$ tal que $\mathbf{s}(\rho_n, x) = \gamma_n\psi(\rho_n, x)$.*

Demostración. Sea λ eigenvalor de $\tilde{L}(q(x), \pi, \frac{\pi}{2})$, y sea y_λ la eigenfunción asociada. Como y_λ satisface las condiciones de frontera

$$0 = u_0(y_\lambda(x)) = v_\pi(y_\lambda(x)).$$

De esto concluimos que $y'_\lambda(0) \neq 0$ (como $y_\lambda(0) = 0$, si $y'_\lambda(0) = 0$ entonces por unicidad de la solución tendríamos que $y_\lambda \equiv 0$, pero esto no ocurre pues es eigenfunción). Se concluye que $y'_\lambda(0) = c$ para alguna constante $c \neq 0$. Por tanto podemos considerar $g_\lambda(x) = \frac{1}{c}y_\lambda(x)$, y es claro que g_λ es también eigenfunción asociada a λ . De las condiciones de frontera tenemos además que $g_\lambda(0) = 0$ y $g'_\lambda(0) = \frac{y'_\lambda(0)}{c} = 1$. Por unicidad de las soluciones se concluye que $g_\lambda \equiv \mathbf{s}(\rho, x)$, por tanto de (2.3.9) tenemos

$$\Delta(\lambda) = v_\pi(\mathbf{s}(\rho, x)) = v_\pi(g_\lambda(x)) = g'_\lambda(\pi) = 0, \quad (2.3.10)$$

por lo cual λ es raíz de $\Delta(\lambda)$.

Sea ahora λ tal que $\Delta(\lambda) = 0$, entonces de (2.3.9) tenemos que $\mathbf{s}(\rho, x)$ y $\psi(\rho, x)$ satisfacen ambas condiciones de frontera del problema $\tilde{L}(q(x), \pi, \frac{\pi}{2})$, y por tanto son eigenfunciones; más aún, como $\Delta(\lambda)$ es el Wronskiano de estas funciones, el que se anule implica que son linealmente dependientes, de manera que existe γ tal que $\mathbf{s}(\rho, x) = \gamma\psi(\rho, x)$. \square

Lema 4. *Se satisface la siguiente relación*

$$\frac{\alpha_n}{\gamma_n} = - \left. \frac{d\Delta(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_n} \quad (2.3.11)$$

Demostración. Para $\rho \in \mathbb{C}$, consideremos $g_\rho(n, x) := \langle \psi(\rho, x), \mathbf{s}(\rho_n, x) \rangle$, por las condiciones de frontera para $\psi(\rho, x)$ y $\mathbf{s}(\rho_n, x)$ se tiene que

$$g_\rho(n, \pi) = \mathbf{s}'(\rho_n, \pi) \quad (2.3.12)$$

$$g_\rho(n, 0) = \psi(\rho, 0) \quad (2.3.13)$$

Derivemos ahora

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} g_\rho(n, x) &= \frac{d}{dx} [\psi(\rho, x) \mathbf{s}'(\rho_n, x) - \psi'(\rho, x) \mathbf{s}(\rho_n, x)] \\ &= \psi'(\rho, x) \mathbf{s}'(\rho_n, x) + \psi(\rho, x) \mathbf{s}''(\rho_n, x) - \psi''(\rho, x) \mathbf{s}(\rho_n, x) \\ &\quad - \psi'(\rho, x) \mathbf{s}'(\rho_n, x) \\ &= \psi(\rho, x) \mathbf{s}''(\rho_n, x) - \psi''(\rho, x) \mathbf{s}(\rho_n, x). \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Como $\psi(\rho, x)$ y $\mathbf{s}(\rho, x)$ satisfacen la ecuación (2.3.1), entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} g_\rho(n, x) &= \psi(\rho, x) (q(x) \mathbf{s}(\rho_n, x) - \lambda_n \mathbf{s}(\rho_n, x)) \\ &\quad - (q(x) \psi(\rho, x) - \lambda \psi(\rho, x)) \mathbf{s}(\rho_n, x) \\ &= (\lambda - \lambda_n) \psi(\rho, x) \mathbf{s}(\rho_n, x). \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

Integrando y considerando (2.3.12) y (2.3.13) tenemos

$$\mathbf{s}'(\rho_n, \pi) - \psi(\rho, 0) = (\lambda - \lambda_n) \int_0^\pi \psi(\rho, x) \mathbf{s}(\rho_n, x) dx. \quad (2.3.16)$$

Podemos reescribir la igualdad anterior usando (2.3.9), con lo cual se obtiene

$$-\frac{\Delta(\lambda) - \Delta(\lambda_n)}{\lambda - \lambda_n} = \int_0^\pi \psi(\rho, x) \mathbf{s}(\rho_n, x) dx, \quad (2.3.17)$$

tomando el límite $\lambda \rightarrow \lambda_n$ y considerando que $\gamma_n \psi(\rho_n, x) = \mathbf{s}(\rho_n, x)$ se tiene

$$-\frac{d\Delta(\lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_n} = \int_0^\pi \psi(\rho_n, x) \mathbf{s}(\rho_n, x) dx = \frac{1}{\gamma_n} \int_0^\pi \mathbf{s}^2(\rho_n, x) dx = \frac{\alpha_n}{\gamma_n}. \quad (2.3.18)$$

□

A continuación mostramos que la solución $\mathbf{s}(\rho, x)$ satisface una ecuación de Volterra del segundo tipo, la cual será útil para derivar resultados posteriores.

Lema 5. Para $\rho \in \mathbb{C}$, la solución $\mathbf{s}(\rho, x)$ a (2.3.3) satisface

$$\mathbf{s}(\rho, x) = \frac{\sin(\rho x)}{\rho} + \int_0^x \frac{\sin[\rho(x-t)]}{\rho} q(t) \mathbf{s}(\rho, t) dt. \quad (2.3.19)$$

Demostración. Como $\mathbf{s}(\rho, x)$ satisface (2.3.3), entonces se tiene

$$\frac{\sin[\rho(x-t)]}{\rho} q(t) \mathbf{s}(\rho, t) = \rho \sin[\rho(x-t)] \mathbf{s}(\rho, t) + \frac{\sin[\rho(x-t)]}{\rho} \mathbf{s}''(\rho, t).$$

Para obtener $\mathbf{s}(\rho, x)$ integramos en el $[0, x]$. En este intervalo además tenemos información de las condiciones de frontera (2.3.4) que vamos a utilizar

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\sin[\rho(x-t)]}{\rho} q(t) \mathbf{s}(\rho, t) dt &= \rho \int_0^x \sin[\rho(x-t)] \mathbf{s}(\rho, t) dt \\ &+ \int_0^x \frac{\sin[\rho(x-t)]}{\rho} \mathbf{s}''(\rho, t) dt. \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

Integrando por partes la segunda integral en (2.3.20) tenemos

$$\int_0^x \sin[\rho(x-t)] \mathbf{s}''(\rho, t) dt = -\sin(\rho x) + \rho \int_0^x \cos[\rho(x-t)] \mathbf{s}'(\rho, t) dt. \quad (2.3.21)$$

Procedemos de la misma forma ahora con la segunda integral en (2.3.21)

$$\int_0^x \cos[\rho(x-t)]\mathbf{s}'(\rho, t)dt = \mathbf{s}(\rho, x) - \rho \int_0^x \sin[\rho(x-t)]\mathbf{s}(\rho, t)dt. \quad (2.3.22)$$

Sustituyendo (2.3.21) y (2.3.22) en (2.3.20) se tiene finalmente

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\sin[\rho(x-t)]}{\rho} q(t)\mathbf{s}(\rho, t)dt &= \rho \int_0^x \sin[\rho(x-t)]\mathbf{s}(\rho, t)dt - \frac{\sin(\rho x)}{\rho} \\ &+ \mathbf{s}(\rho, x) - \rho \int_0^x \sin[\rho(x-t)]\mathbf{s}(\rho, t)dt. \end{aligned}$$

Notamos que un par de integrales con signos opuestos se eliminan, y finalmente se llega a la expresión buscada. \square

Observación. Para $\rho = u + iv \in \mathbb{C}$, es válida la siguiente desigualdad

$$|\sin(\rho)| = \left| \frac{e^{i\rho} - e^{-i\rho}}{2i} \right| \leq \frac{|e^{i\rho}| + |e^{-i\rho}|}{2} = \frac{e^{-v} + e^v}{2} \leq e^{|v|} \quad (2.3.23)$$

Con el lema anterior estamos listos para deducir el comportamiento de $\mathbf{s}(\rho, x)$ cuando $|\rho| \rightarrow \infty$, en esta dirección mostramos tres resultados más.

Proposición 2. Para la solución $\mathbf{s}(\rho, x)$ se satisface la siguiente relación asintótica cuando $|\rho| \rightarrow \infty$

$$\mathbf{s}(\rho, x) = \mathcal{O}\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}(\rho)|x}}{|\rho|}\right). \quad (2.3.24)$$

Demostración. Por practicidad, escribimos $\rho = u + iv \in \mathbb{C}$. Proponemos $\mathbf{s}(\rho, x) = f_\rho(x)e^{|v|x}$, para f_ρ continua en el $[0, \pi]$, entonces $f_\rho(x) = e^{-|v|x}\mathbf{s}(\rho, x)$. Luego, como $\mathbf{s}(\rho, x)$ satisface la ecuación integral (2.3.19) entonces

$$f_\rho(x) = \frac{\sin(\rho x)}{\rho} e^{-|v|x} + \frac{1}{\rho} \int_0^x \sin[\rho(x-\tau)]q(\tau)e^{-|v|(x-\tau)}f_\rho(\tau)d\tau. \quad (2.3.25)$$

Ahora, por desigualdad del triángulo tenemos

$$\begin{aligned} |f_\rho(x)| &\leq \frac{|\sin(\rho x)|}{|\rho|} e^{-|v|x} + \frac{1}{|\rho|} \left| \int_0^x \sin[\rho(x-\tau)]q(\tau)e^{-|v|(x-\tau)}f_\rho(\tau)d\tau \right| \\ &\leq \frac{1}{|\rho|} + \frac{1}{|\rho|} \int_0^x |q(\tau)| |f_\rho(\tau)| d\tau, \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

donde hemos aplicado la desigualdad (2.3.23) para $\rho x, \rho(x - \tau) \in \mathbb{C}$. Como $x \in [0, \pi]$ y estamos integrando términos no negativos, entonces

$$\begin{aligned} |f_\rho(x)| &\leq \frac{1}{|\rho|} + \frac{1}{|\rho|} \int_0^\pi |q(\tau)| |f_\rho(\tau)| d\tau \\ &\leq \frac{1}{|\rho|} + \frac{\|f_\rho\|_\infty}{|\rho|} \|q\|_{L_1[0,\pi]} \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

Hemos usado que $q \in L_2[0, \pi] \subseteq L_1[0, \pi]$; además, la desigualdad es para cualquier $x \in [0, \pi]$, luego, por definición de supremo se tiene que

$$\|f_\rho\|_\infty \leq \frac{1}{|\rho|} + \frac{\|f_\rho\|_\infty}{|\rho|} \|q\|_{L_1[0,\pi]}, \quad (2.3.28)$$

de donde

$$\|f_\rho\|_\infty \leq \frac{1}{|\rho|} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{|\rho|} \|q\|_{L_1[0,\pi]}\right)} \Leftrightarrow |\rho| > \|q\|_{L_1[0,\pi]}. \quad (2.3.29)$$

Entonces, cuando ρ satisface la desigualdad (2.3.29) tenemos

$$|\mathbf{s}(\rho, x)| \leq \|f_\rho\|_\infty e^{|\nu|x} \leq \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{|\rho|} \|q\|_{L_1[0,\pi]}\right)} \frac{e^{|\nu|x}}{|\rho|} \leq \alpha \frac{e^{|\nu|x}}{|\rho|}, \quad (2.3.30)$$

donde la última desigualdad es válida para cualquier $\alpha > 1$ elegida, ya que podemos tomar $|\rho| \in [M_\alpha, \infty)$ con $M_\alpha \in (\|q\|_{L_1[0,\pi]}, \infty)$ suficientemente grande. \square

La relación asintótica anterior puede ser más precisa.

Corolario 1. *Para la solución $\mathbf{s}(\rho, x)$ se satisface la siguiente relación asintótica cuando $|\rho| \rightarrow \infty$*

$$\mathbf{s}(\rho, x) = \frac{\sin(\rho x)}{\rho} + \mathcal{O}\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}(\rho)|x}}{|\rho|^2}\right). \quad (2.3.31)$$

Demostración. De la desigualdad (2.3.30) tenemos

$$\left| \int_0^x \frac{\sin[\rho(x-t)]}{\rho} q(t) \mathbf{s}(\rho, t) dt \right| \leq \frac{\alpha}{|\rho|^2} \int_0^x |q(t)| e^{|\nu|t} dt \leq \beta \frac{e^{|\nu|x}}{|\rho|^2}$$

entonces

$$\int_0^x \frac{\sin[\rho(x-t)]}{\rho} q(t) \mathbf{s}(\rho, t) dt = \mathcal{O}\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}(\rho)|x}}{|\rho|^2}\right).$$

Introduciendo esto en (2.3.19) obtenemos el resultado. \square

El siguiente resultado será útil para estimar la convergencia de las representaciones en serie para núcleos de transmutación en los teoremas (10) y (11) del próximo capítulo.

Corolario 2. *Para la solución $\mathbf{s}(\rho, x)$ se satisface la siguiente relación asintótica cuando $|\rho| \rightarrow \infty$*

$$\mathbf{s}(\rho, x) = \frac{\sin(\rho x)}{\rho} + q_1(x) \frac{\cos(\rho x)}{\rho^2} + \int_0^x \frac{q(t) \cos[\rho(x-2t)]}{2\rho^2} dt + \mathcal{O}\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}(\rho)|x}}{|\rho|^3}\right), \quad (2.3.32)$$

donde $q_1(x) := -\frac{1}{2} \int_0^x q(t) dt$.

Demostración. Introduciendo la aproximación asintótica (2.3.31) en (2.3.19) tenemos

$$\mathbf{s}(\rho, x) = \frac{\sin(\rho x)}{\rho} + \int_0^x q(t) \frac{\sin[\rho(x-t)] \sin(\rho t)}{\rho^2} dt + \mathcal{O}\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}(\rho)|x}}{|\rho|^3}\right). \quad (2.3.33)$$

Ahora sólo resta hacer un poco de trigonometría.

$$\begin{aligned} \cos(\rho x - 2\rho t) &= \cos(\rho x) \cos(2\rho t) + \sin(\rho x) \sin(2\rho t) \\ &= \cos(\rho x)(1 - 2\sin^2(\rho t)) + 2\sin(\rho x) \sin(\rho t) \cos(\rho t) \\ &= \cos(\rho x) + 2[\sin(\rho x) \cos(\rho t) - \cos(\rho x) \sin(\rho t)] \sin(\rho t) \\ &= \cos(\rho x) + 2\sin[\rho(x-t)] \sin(\rho t), \end{aligned}$$

entonces

$$\sin[\rho(x-t)] \sin(\rho t) = \frac{\cos(\rho x - 2\rho t)}{2} - \frac{\cos(\rho x)}{2}. \quad (2.3.34)$$

Introduciendo (2.3.34) en (2.3.33) obtenemos el resultado. \square

Podemos ahora conocer el comportamiento asintótico de los datos espectrales del problema $\tilde{L}(0, \pi, \frac{\pi}{2})$. Para el caso de los eigenvalores, en [5] se reporta la siguiente asintótica

$$\rho_n = n + \frac{1}{2} + \frac{\omega_0}{\pi n} + \frac{k_n}{n}, \quad (2.3.35)$$

donde $\omega_0 = \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt$ y $\{k_n\} \in l_2$.

Para el caso de las constantes de normalización, basta con que las calculemos de acuerdo a (2.3.5) usando la expresión asintótica (2.3.31) de las eigenfunciones. Ahora, recordemos que los eigenvalores del operador de Sturm-Liouville son reales, y por tanto la asintótica en (2.3.31) que en general es

válida para $\rho \in \mathbb{C}$ se simplifica¹, por lo cual tenemos

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \int_0^\pi \frac{\sin^2(\rho_n t)}{\rho_n^2} dt + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\rho_n^2}\right) \int_0^\pi \frac{\sin(\rho_n t)}{\rho_n} dt + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\rho_n^4}\right) \\ &= \frac{2\pi\rho_n - \sin(2\pi\rho_n)}{4\rho_n^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\rho_n^4}\right).\end{aligned}\quad (2.3.36)$$

Para el caso con $q(x) = 0$, es sencillo deducir que el problema de Sturm-Liouville $\tilde{L}(0, \pi, \frac{\pi}{2})$ tiene asociado el conjunto de datos espectrales y eigenfunciones normalizadas dados por:

$$\lambda_n^0 = (\rho_n^0)^2 = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2, \quad n \geq 0 \quad (2.3.37)$$

$$\alpha_n^0 = \frac{\pi}{2\left(n + \frac{1}{2}\right)^2}, \quad (2.3.38)$$

$$\mathbf{s}(\rho_n^0, x) = \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]}{\left(n + \frac{1}{2}\right)}. \quad (2.3.39)$$

El problema (2.3.3) para $q(x) \equiv 0$ tiene solución para ρ arbitrario dada por $\mathbf{s}(\rho, x) = \rho^{-1} \sin(\rho x)$. Si consideramos ahora el potencial, es posible representar la solución $\mathbf{s}(\rho, x)$ como [15]

$$\mathbf{s}(\rho, x) = \frac{\sin(\rho x)}{\rho} + \int_0^x S(x, t) \frac{\sin(\rho t)}{\rho} dt \quad (2.3.40)$$

$$= T_S \left[\frac{\sin(\rho x)}{\rho} \right], \quad (2.3.41)$$

donde T_S es el operador de transmutación definido en (1.2.11). De (2.3.41) en particular se tiene que T_S conecta la solución $\rho^{-1} \sin(\rho x)$ de $-y'' = \rho^2 y$ tal que $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ con la solución $\mathbf{s}(\rho, x)$ del problema de Cauchy (2.3.3).

Como último comentario de esta sección retomemos la función F_S definida en (1.2.17). Ahora que ya presentamos los problemas $\tilde{L}(q(x), \pi, \frac{\pi}{2})$ y $\tilde{L}(0, \pi, \frac{\pi}{2})$, entonces queda claro que F_S está determinada por los datos espectrales de ambos problemas.

¹Como los eigenvalores son reales, entonces $\text{Im } \rho = 0$, de manera que usamos (2.3.31) sin el término exponencial; además, ya no hay necesidad de tomar valor absoluto de ρ .

Capítulo 3

Núcleos de operadores de transmutación

3.1 Dominio de definición para F_G y F_S

Queremos obtener una representación en forma de serie para los núcleos $K(x, t)$ y $S(x, t)$ de los operadores de transmutación en (1.2.8) y (1.2.11) respectivamente, así como para los núcleos de los operadores inversos. Estas representaciones estarán determinadas a partir de los datos espectrales y las eigenfunciones de los problemas de Sturm-Liouville presentados el capítulo anterior. Para lograr esto mostraremos primero varias relaciones entre los núcleos y los operadores presentados hasta ahora, uno de los recursos principales para lograrlo son las ecuaciones integrales que satisfacen estos núcleos. Para todas las representaciones necesitaremos conocer la imagen bajo los operadores de transmutación de las funciones F_G y F_S presentadas en el primer capítulo, por tanto es necesario asegurarse primero que dichas funciones se encuentran en el dominio de estos operadores.

Observe que la función F_G en la ecuación de Gelfand-Levitan (1.2.14) debe estar definida para $(x, t) \in [0, \pi] \times [0, \pi]$, con esto en mente, definimos a continuación la siguiente función

$$a(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\cos \rho_n x}{\alpha_n} - \frac{\cos nx}{\alpha_n^0} \right), \quad (3.1.1)$$

donde $\{\rho_n, \alpha_n\}$ y $\{n, \alpha_n^0\}$ son los datos espectrales de los problemas $L(q(x), h, H)$ y $L(0, 0, 0)$ respectivamente. De las identidades para suma y diferencia de

aángulos se obtiene

$$\begin{aligned} a(x+t) + a(x-t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{2 \cos(\rho_n x) \cos(\rho_n t)}{\alpha_n} - \frac{2 \cos nx}{\alpha_n^0} \right) \\ \Rightarrow F(x, t) &= \frac{1}{2} [a(x+t) + a(x-t)], \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

de manera que $a(x)$ debe estar definida al menos en $[-\pi, 2\pi]$. Sin embargo, para aplicar el operador de transmutación T definido en (1.2.8) a F_G y F_S es necesario extender el dominio para $a(x)$ a $[-2\pi, 2\pi]$.

Para obtener más información sobre la función $a(x)$ es necesario descomponerla en una expresión más sencilla de analizar y hacer uso del comportamiento asintótico de los datos espectrales en (2.2.12)-(2.2.13).

Obtenemos ahora una representación de $a(x)$ como una suma finita de series. Usando los valores para α_n^0 en (2.2.18) tenemos

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{\cos \rho_0 x}{\alpha_0} - \frac{1}{\pi} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\cos \rho_n x}{\alpha_n} - \frac{2 \cos nx}{\pi} \right) \\ &= \frac{\cos \rho_0 x}{\alpha_0} - \frac{1}{\pi} + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{2}{\pi} \right) \cos(\rho_n x) + \frac{2}{\pi} (\cos(\rho_n x) - \cos(nx)) \right]. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Definiendo $\delta_n := \rho_n - n$ se tiene

$$\begin{aligned} \cos(\rho_n x) - \cos(nx) &= \cos(\delta_n x) \cos(nx) - \sin(\delta_n x) \sin(nx) - \cos(nx) \\ &= (\cos(\delta_n x) - 1) \cos(nx) - \sin(\delta_n x) \sin(nx). \end{aligned}$$

Consideremos ahora que $\sin^2 \left(\frac{\delta_n x}{2} \right) = \frac{1 - \cos(\delta_n x)}{2}$, entonces

$$\begin{aligned} \cos(\rho_n x) - \cos(nx) &= -2 \sin^2 \left(\frac{\delta_n x}{2} \right) \cos(nx) - \sin(\delta_n x) \sin(nx) \\ &= -(\delta_n x) \sin(nx) - [\sin(\delta_n x) - \delta_n x] \sin(nx) \\ &\quad - 2 \sin^2 \left(\frac{\delta_n x}{2} \right) \cos(nx). \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Luego, note de (2.2.12) que $\delta_n = \frac{\omega}{\pi n} + \frac{\kappa_n}{n}$. Introduciendo esta información en el primer término de (3.1.4) y acoplado finalmente en (3.1.3) se obtiene

$$a(x) = \frac{\cos \rho_0 x}{\alpha_0} - \frac{1}{\pi} + \sum_{i=1}^5 H_i(x),$$

donde

$$H_1(x) = -\frac{2\omega x}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}, \quad (3.1.5)$$

$$H_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{2}{\pi} \right) \cos(\rho_n x), \quad (3.1.6)$$

$$H_3(x) = -\frac{2x}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_n}{n} \sin(nx), \quad (3.1.7)$$

$$H_4(x) = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{\delta_n x}{2}\right) \cos(nx), \quad (3.1.8)$$

$$H_5(x) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} [\sin(\delta_n x) - \delta_n x] \sin(nx). \quad (3.1.9)$$

Queremos analizar la convergencia de estas series, para lo cual será útil conocer el comportamiento asintótico de algunos términos e identificar aquellos que pueden encontrarse en un espacio conveniente.

Afirmación. *Considere el comportamiento asintótico de los datos espectrales en (2.2.12)-(2.2.13), entonces se cumplen las siguientes proposiciones:*

- (a) $\delta_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.
- (b) $\frac{1}{\alpha_n} - \frac{2}{\pi} = \frac{\gamma_n}{n}$, con $\{\gamma_n\} \in l_2$.

Demostración. Para (a), notemos que

$$\begin{aligned} \delta_n &= \rho_n - n = \frac{1}{n} \left(\frac{\omega}{\pi} + \kappa_n \right) \\ \Rightarrow |\delta_n| &\leq \frac{1}{n} \left(\left| \frac{\omega}{\pi} \right| + |\kappa_n| \right) \leq \frac{1}{n} \left(\left| \frac{\omega}{\pi} \right| + \|\{\kappa_n\}\|_{l_2} \right). \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Tomando $M = \left| \frac{\omega}{\pi} \right| + \|\{\kappa_n\}\|_{l_2}$, tenemos así que $|\delta_n| \leq M\left(\frac{1}{n}\right)$.

Para (b), notemos que

$$\frac{1}{\alpha_n} - \frac{2}{\pi} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \frac{\tilde{\kappa}_n}{n}} - \frac{2}{\pi} = -\frac{2\tilde{\kappa}_n}{n\pi \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\tilde{\kappa}_n}{n} \right)}. \quad (3.1.11)$$

Se propone entonces $\gamma_n = -\frac{2\tilde{\kappa}_n}{\pi \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\tilde{\kappa}_n}{n} \right)}$, y resta demostrar que está en l_2 .

Como $\{\tilde{\kappa}_n\} \in l_2$, entonces $\frac{\tilde{\kappa}_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Así, dada $0 < \epsilon < \frac{\pi}{2}$ existe n_0 tal que $\left| \frac{\tilde{\kappa}_n}{n} - \frac{\pi}{2} \right| \in \left[\frac{\pi}{2} - \epsilon, \frac{\pi}{2} + \epsilon \right]$ si $n \geq n_0$. Se tiene entonces que

$$\left| \frac{\tilde{\kappa}_n}{n} - \frac{\pi}{2} \right|^{-2} \in \left[\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} + \epsilon \right)^2}, \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - \epsilon \right)^2} \right], \quad n \geq n_0. \quad (3.1.12)$$

Ahora por la desigualdad del triángulo invertida

$$\left| \frac{|\tilde{\kappa}_n|}{n} - \frac{\pi}{2} \right| \leq \left| \frac{\tilde{\kappa}_n}{n} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right| = \left| \frac{\tilde{\kappa}_n}{n} + \frac{\pi}{2} \right|, \quad (3.1.13)$$

entonces

$$\frac{1}{\left| \frac{\tilde{\kappa}_n}{n} + \frac{\pi}{2} \right|^2} \leq \frac{1}{\left| \frac{|\tilde{\kappa}_n|}{n} - \frac{\pi}{2} \right|^2} \leq \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - \epsilon\right)^2}, \quad n \geq n_0.$$

Finalmente, sumando se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{|\tilde{\kappa}_n|^2}{\left| \frac{\tilde{\kappa}_n}{n} + \frac{\pi}{2} \right|^2} &\leq \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - \epsilon\right)^2} \sum_{n=n_0}^{\infty} |\tilde{\kappa}_n|^2 \leq \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - \epsilon\right)^2} \|\{\tilde{\kappa}_n\}\|_{l_2} < \infty \\ &\therefore \{\gamma_n\} \in l_2. \end{aligned}$$

□

Lema 6. *Considere el conjunto de datos espectrales $\{\rho_n, \alpha_n\}$ y $\{n, \alpha_n^0\}$ de los problemas $L(q(x), h, H)$ y $L(0, 0, 0)$ respectivamente. Entonces la función $a(x)$ definida en (3.1.1) es elemento de $H^1([-2\pi, 2\pi])$.*

Demostración. Analicemos la convergencia de cada serie H_i en (3.1.5)-(3.1.9). Para $H_2(x)$: usaremos la representación con la sucesión $\{\gamma_n\} \in l_2$ vista en resultado anterior. Definimos $M_n := \left| \frac{\gamma_n}{n} \right|$ y se tiene

$$\left| \frac{1}{\alpha_n} - \frac{2}{\pi} \right| |\cos(\rho_n x)| \leq M_n \quad \forall x \in [-2\pi, 2\pi].$$

Además, como $\{\gamma_n\} \in l_2$ y $\left\{ \frac{1}{n} \right\} \in l_2$, por desigualdad de Hölder tenemos que $\left\{ \frac{\gamma_n}{n} \right\} \in l_1$, de modo que $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$.

Para $H_3(x)$: definimos $M_n := 4 \left| \frac{\kappa_n}{n} \right|$ y tenemos

$$\left| \frac{2x}{\pi} \frac{\kappa_n}{n} \sin(nx) \right| \leq 4 \left| \frac{\kappa_n}{n} \right| = M_n \quad \forall x \in [-2\pi, 2\pi].$$

Sabemos que $\{\kappa_n\} \in l_2$ por hipótesis, entonces $\left\{ \frac{\kappa_n}{n} \right\} \in l_1$ y por tanto $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$.

Para $H_4(x)$: definimos ahora $M_n := 4\pi\delta_n^2$. Considerando que $|\sin x| \leq |x|$ $\forall x \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\left| \frac{4}{\pi} \sin^2 \left(\frac{\delta_n x}{2} \right) \cos(nx) \right| \leq \frac{4}{\pi} \left(\frac{\delta_n x}{2} \right)^2 \leq 4\pi\delta_n^2 = M_n \quad \forall x \in [-2\pi, 2\pi].$$

En la afirmación anterior vimos que $\delta_n = \mathcal{O}(\frac{1}{n})$, entonces $M_n = \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$, por tanto $M_n \leq r \frac{1}{n^2}$ para alguna $r > 0$ y $n \geq n_0$ a partir de algún n_0 . De manera que

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n \leq \sum_{n=1}^{n_0-1} M_n + r \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Para $H_5(x)$: definimos $M_n := 16\pi^2 |\delta_n|^3 \|h\|_{\infty}$, donde la existencia de la función h se determinará más adelante. Expandiendo la serie de Taylor para $\sin(\delta_n x)$ tenemos

$$\begin{aligned} \sin(\delta_n x) - \delta_n x &= \left[(\delta_n x) - \frac{(\delta_n x)^3}{3!} + \frac{(\delta_n x)^5}{5!} - \dots \right] - (\delta_n x) \\ &= -(\delta_n x)^3 \left[\frac{1}{3!} - \frac{(\delta_n x)^2}{5!} + \frac{(\delta_n x)^4}{7!} - \dots \right] \\ &= -(\delta_n x)^3 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\delta_n x)^{2n}}{(2n+3)!} \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

Definiendo $C_n := \frac{(2\pi\delta_n)^{2n}}{(2n+3)!}$ notamos que

$$\left| (-1)^n \frac{(\delta_n x)^{2n}}{(2n+3)!} \right| \leq C_n \quad \forall x \in [-2\pi, 2\pi].$$

Tomando el cociente entre términos consecutivos

$$\frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{4\pi^2 \delta_n^2}{(2n+4)(2n+5)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.1.15)$$

Observe que se ha considerado que a partir de alguna n_0 suficientemente grande $|\delta_n| \leq \frac{r}{n^2}$ para alguna $r \geq 0$. De manera que por el criterio de d'Alembert la serie $\sum_{n=0}^{\infty} C_n$ converge, y por tanto la serie en (3.1.14) converge uniformemente a una función $h \in \mathcal{C}[-2\pi, 2\pi]$. Como consecuencia h es acotada en dicho intervalo y por tanto para cada $n \geq 1$ y para toda $x \in [-2\pi, 2\pi]$ se tiene que

$$\frac{2}{\pi} |\sin(\delta_n x) - \delta_n x| |\sin(n x)| \leq \frac{2}{\pi} |(\delta_n x)^3| |h(x)| \leq 16\pi^2 |\delta_n|^3 \|h\|_{\infty} = M_n. \quad (3.1.16)$$

Luego, considerando que $\delta_n^3 = \mathcal{O}(\frac{1}{n^3})$, entonces existe $r \geq 0$ y $n_0 \geq 1$ tal que $|\delta_n|^3 \leq \frac{r}{n^3}$ si $n \geq n_0$. Se tiene entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n \leq \sum_{n=1}^{n_0-1} M_n + 16r\pi^2 \|h\|_{\infty} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty.$$

En los cuatro casos anteriores concluimos que las series que definen a H_i con $2 \leq i \leq 5$ convergen absoluta y uniformemente en $[-2\pi, 2\pi]$ por el criterio de Weierstrass. Se concluye que H_2, H_3, H_4 y H_5 son funciones continuas en $[-2\pi, 2\pi]$, y por tanto son cuadrado integrables en dicho intervalo.

Para $H_1(x)$: consideremos el espacio $L_2[-\pi, \pi]$ y el conjunto ortonormal en dicho espacio

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos(mt)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(mt)}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\},$$

podemos encontrar los coeficientes de la serie de Fourier para la función $f(t) = t$, con lo cual llegamos a la expresión

$$t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} (-1)^{k-1} \sin(kt) \quad \forall t \in [-\pi, \pi].$$

Definiendo el cambio de variable $x(t) = \pi - t$, se tiene que $x \in [0, 2\pi]$, substituyendo en la expresión de arriba y simplificando finalmente obtenemos

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin[k(\pi - x)] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}.$$

Análogamente, con el cambio de variable $x(t) = t - \pi$, se encuentra que $x \in [-2\pi, 0]$, y se obtiene

$$\frac{x + \pi}{2} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}.$$

Considerando ambos casos, para $x \in [-2\pi, 2\pi]$ se tiene que

$$H_1(x) = \begin{cases} -\frac{\omega|x|(\pi-|x|)}{\pi^2}, & |x| < 2\pi \\ 0, & |x| = 2\pi \end{cases} \quad (3.1.17)$$

Note que las raíces de $H_1(x)$ se alcanzan donde $\sin(kx) = 0$, en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ esto sucede para $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi$; sin embargo, existe discontinuidad de salto en $x = \pm 2\pi$, mientras que en el resto del intervalo es continua. Finalmente, como $H_1(x)$ es un polinomio de orden 2 en $(-2\pi, 0]$, y también lo es en $(0, 2\pi)$, se concluye que $H_1 \in H^1([-2\pi, 2\pi])$, concluimos que $a(x) \in L_2[-2\pi, 2\pi]$.

Consideremos ahora las series de las derivadas, nuevamente usaremos el comportamiento asintótico de los datos espectrales. Para $H_2(x)$, notemos primero que

$$\frac{\gamma_n}{n} \rho_n = \gamma_n \left(1 + \frac{\omega}{\pi n^2} + \frac{\kappa_n}{n^2} \right) = \gamma_n \left(\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = \gamma_n \mathcal{O}(1),$$

entonces

$$\begin{aligned} \left[\frac{\gamma_n}{n} \cos(\rho_n x) \right]' &= \gamma_n \mathcal{O}(1) \sin \left[nx + \left(\frac{\omega}{\pi n} + \frac{\kappa_n}{n} \right) x \right] \\ &= \gamma_n \mathcal{O}(1) \sin(nx) + \gamma_n \mathcal{O}(1) \cos(nx). \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

En el caso de $H_3(x)$ basta considerar los términos dentro de la serie, se tiene

$$\left[\frac{\kappa_n}{n} \sin(nx) \right]' = \kappa_n \cos(nx). \quad (3.1.19)$$

Para $H_4(x)$ tenemos

$$\begin{aligned} \left[\sin^2 \left(\frac{\delta_n x}{2} \right) \cos(nx) \right]' &= \delta_n \sin \left(\frac{\delta_n x}{2} \right) \cos \left(\frac{\delta_n x}{2} \right) \cos(nx) \\ &\quad - n \sin^2 \left(\frac{\delta_n x}{2} \right) \sin(nx). \end{aligned}$$

Como $|\sin^2 \left(\frac{\delta_n x}{2} \right)| \leq \left| \frac{\delta_n x}{2} \right|^2 \leq 2\pi^2 \delta_n^2$, entonces $\sin^2 \left(\frac{\delta_n x}{2} \right) = \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^2} \right)$, de manera que

$$\left[\sin^2 \left(\frac{\delta_n x}{2} \right) \cos(nx) \right]' = \mathcal{O} \left(\frac{1}{n} \right) \cos(nx) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n} \right) \sin(nx). \quad (3.1.20)$$

Para $H_5(x)$ se tiene

$$\begin{aligned} ([\sin(\delta_n s) - \delta_n x] \sin(nx))' &= \delta_n [\cos(\delta_n x) - 1] \sin(nx) \\ &\quad + n [\sin(\delta_n x) - \delta_n x] \cos(nx) \\ &= \mathcal{O} \left(\frac{1}{n} \right) \left[-(\delta_n x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\delta_n x)^{2n}}{(2n+2)!} \right] \sin(nx) \\ &\quad + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^2} \right) \cos(nx). \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

Donde usamos la serie de Taylor de $\cos(\delta_n x)$ para obtener la serie del primer término. En el segundo término se considera la desigualdad (3.1.16) para obtener el comportamiento asintótico. Un tratamiento totalmente análogo al que se hizo para obtener que la serie en (3.1.14) es una función $h \in \mathcal{C}[-2\pi, 2\pi]$ se puede hacer para mostrar que la serie en (3.1.21) es una función $\tilde{h} \in \mathcal{C}[-2\pi, 2\pi]$. Lo que se concluye es

$$([\sin(\delta_n s) - \delta_n x] \sin(nx))' = \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^3} \right) \sin(nx) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^2} \right) \cos(nx). \quad (3.1.22)$$

Las series cuyos términos son de la forma (3.1.18), (3.1.19), (3.1.20) y (3.1.22) convergen en $L_2[-2\pi, 2\pi]$, pues los conjuntos $\{\frac{\cos(nx)}{2\pi}\}_{n \geq 1}$ y $\{\frac{\sin(nx)}{2\pi}\}_{n \geq 1}$ son ortonormales en dicho espacio y las sucesiones de coeficientes correspondientes a cada serie están en l_2 . Se concluye que H_2, H_3, H_4 y H_5 están en $H^1([-2\pi, 2\pi])$ y por tanto $a(x) \in H^1([-2\pi, 2\pi])$. \square

Observación. Con el lema anterior, si consideramos la representación de F_G en (3.1.2), se tiene que F_G es continua en¹ $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] \setminus \{(\pm\pi, \pm\pi)\}$, de manera que $F_G \in L_2([-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi])$. Además, cada término en la serie (1.2.15) que define a F_G es continuo en $[-\pi, \pi]$, de manera cada término está en $L_2[-\pi, \pi]$. Por la continuidad de T y T_G en $L_2([-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi])$ y $L_2([0, \pi] \times [0, \pi])$ respectivamente, podemos aplicar estos operadores a la serie de F_G término a término.

Un análisis análogo al anterior se hizo en [6] para la función $F_S(x, t)$ definida en (1.2.17). En este caso se utiliza la función auxiliar

$$a_S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\cos(\rho_n x) - 1}{\alpha_n \rho_n^2} - \frac{\cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right] - 1}{\alpha_n^0 (\rho_n^0)^2} \right], \quad (3.1.23)$$

donde aparecen los datos espectrales de los problemas $\tilde{L}(q(x), \pi, \frac{\pi}{2})$ y $\tilde{L}(0, \pi, \frac{\pi}{2})$ respectivamente. Así que la función $F_S(x, t)$ se puede expresar como

$$F_S(x, t) = \frac{1}{2} [a_S(x - t) - a_S(x + t)]. \quad (3.1.24)$$

En este caso también tenemos que podemos aplicar los operadores T y T_S a la serie para F_S término a término.

3.2 Representación para K y L

Con las observaciones anteriores podemos probar el siguiente resultado.

Dos casos inmediatos, de (1.2.10) y (1.2.14) se tiene

$$G(x, t) = -T_{G,x}[F_G](x, t), \quad (3.2.1)$$

donde hemos denotado como $T_{G,x}$ al operador T_G aplicado en la variable x . Análogamente, de (1.2.11) y (1.2.16) y se observa que

$$S(x, t) = -T_{S,x}[F_S](x, t). \quad (3.2.2)$$

¹Recuerde que la serie $H_1(x)$ en (3.1.17) es discontinua en $x = \pm 2\pi$, lo cual corresponde a los puntos $(x, t) = (\pm\pi, \pm\pi)$.

Además, en [18] se muestran las siguientes relaciones entre G , S y K

$$G(x, t) = K(x, t) + K(x, -t), \quad (3.2.3)$$

$$S(x, t) = K(x, t) - K(x, -t), \quad (3.2.4)$$

de donde es inmediato

$$K(x, t) = \frac{1}{2}[G(x, t) + S(x, t)]. \quad (3.2.5)$$

Con las relaciones anteriores podemos obtener las ecuaciones de Gelfand-Levitan (1.2.14) y (1.2.16) en términos del núcleo K . Usando (3.2.3) en la integral de (1.2.14) tenemos

$$\int_0^x F_G(t, s)G(x, s)ds = \int_0^x F_G(t, s)K(x, s)ds + \int_0^x F_G(t, s)K(x, -s)ds. \quad (3.2.6)$$

Basta ahora trabajar con la segunda integral

$$\begin{aligned} \int_0^x F_G(t, s)K(x, -s)ds &= - \int_x^0 F_G(t, s)K(x, -s)ds \\ &= \int_{\tau(x)}^{\tau(0)} F_G(t, -\tau)K(x, \tau)d\tau \quad (\text{sustitución } \tau(s) := -s) \\ &= \int_{-x}^0 F_G(t, \tau)K(x, \tau)d\tau. \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Para la última igualdad, note que en la expresión (1.2.15) para F_G los términos que dependen de la segunda variable son funciones pares (coseno), entonces $F_G(t, -\tau) = F_G(t, \tau)$.

Por (3.2.7) podemos simplificar (3.2.6) como

$$\int_0^x F_G(t, s)G(x, s)ds = \int_{-x}^x F_G(t, s)K(x, s)ds. \quad (3.2.8)$$

Procedemos de forma análoga con el núcleo S , al sustituir (3.2.4) en la integral de (1.2.16) tenemos

$$\int_0^x F_S(z, t)S(x, z)dz = \int_0^x F_S(z, t)K(x, z)dz - \int_0^x F_S(z, t)K(x, -z)dz. \quad (3.2.9)$$

Trabajando ahora con la segunda integral

$$\begin{aligned}
\int_0^x F_S(z, t)K(x, -z)dz &= - \int_x^0 F_S(z, t)K(x, -z)dz \\
&= \int_{\tau(x)}^{\tau(0)} F_S(-\tau, t)K(x, \tau)d\tau \text{ (sustitución } \tau(z) = -z) \\
&= - \int_{-x}^0 F_S(\tau, t)K(x, \tau)d\tau.
\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

En la última igualdad, note que en la expresión (1.2.17) para F_S los términos que dependen de la primera variable son funciones impares (seno), de manera que se tiene $F_S(-\tau, t) = -F_S(\tau, t)$, por tanto (3.2.9) se convierte en

$$\begin{aligned}
\int_0^x F_S(z, t)S(x, z)dz &= \int_{-x}^x F_S(z, t)K(x, z)dz \\
&= \int_{-x}^x F_S(t, z)K(x, z)dz.
\end{aligned} \tag{3.2.11}$$

La última igualdad es válida pues F_S es invariante ante el intercambio de sus argumentos, basta una simple inspección a (1.2.17) para verificarlo. Finalmente, sustituyendo (3.2.8) en (1.2.14) y (3.2.11) en (1.2.16) respectivamente, se concluye que

$$G(x, t) = -T_x[F_G](x, t), \tag{3.2.12}$$

$$S(x, t) = -T_x[F_S](x, t), \tag{3.2.13}$$

y por tanto de (3.2.1) y (3.2.2)

$$T_x[F_G](x, t) = T_{G,x}[F_G](x, t), \tag{3.2.14}$$

$$T_x[F_S](x, t) = T_{S,x}[F_S](x, t). \tag{3.2.15}$$

En el siguiente resultado obtenemos la ecuación de Gelfand-Levitan para el núcleo K . Ya hemos mostrado que $F_G(x, t)$ no es continua en $(\pm\pi, \pm\pi)$, por lo cual se puede anticipar la región en la cual se obtiene la solución.

Teorema 7. *Dada $x \in (-\pi, \pi)$, el núcleo $K(x, t)$ satisface la siguiente ecuación de Fredholm*

$$K(x, t) + F(x, t) + \int_{-x}^x F(t, s)K(x, s)ds = 0, \quad -x < t < x \tag{3.2.16}$$

donde $F(x, t) := \frac{1}{2} [F_G(x, t) + F_S(x, t)]$.

Demostración. Podemos usar el resultado (3.2.8) para reescribir G en (1.2.14) como

$$G(x, t) = -F_G(x, t) - \int_{-x}^x F_G(t, s)K(x, s)ds.$$

Análogamente, del resultado (3.2.11) se puede reescribir S en (1.2.16) como

$$S(x, t) = -F_S(x, t) - \int_{-x}^x F_S(t, \tau)K(x, \tau)d\tau.$$

Sustituyendo esto en la relación (3.2.5) para K

$$\begin{aligned} K(x, t) &= -\frac{1}{2} [F_G(x, t) + F_S(x, t)] \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\int_{-x}^x [F_G(t, s) + F_S(t, s)] K(x, s)ds \right), \\ \Rightarrow K(x, t) &= -F(x, t) - \int_{-x}^x F(t, s)K(x, s)ds. \end{aligned}$$

□

Observación. Podemos reescribir esta igualdad para $K(x, t)$ como

$$K(x, t) = -T_x[F](x, t) \quad (3.2.17)$$

Queremos ahora ver el núcleo del operador de transmutación inverso T^{-1} de nuestro problema como imagen de alguna función bajo el operador T . Por ejemplo, recuerde que en el lema (3) obtuvimos que $P(x, t) = T_{S,t}[F_S(x, t)]$. Logrando algo análogo para nuestro operador se puede explorar la posibilidad de tener una expresión en forma de series para el núcleo de T^{-1} .

Teorema 8. El núcleo L del operador T^{-1} satisface $L(x, t) = T_t[F](x, t)$

Demostración. Intercambiando x por t en (3.2.17) obtenemos que

$$K(t, x) = -T_t[F](t, x). \quad (3.2.18)$$

Además, note de (1.2.15) y (1.2.17) que la dependencia en x y t de F_G y F_S respectivamente es simétrica, esto es $F_G(x, t) = F_G(t, x)$ y $F_S(x, t) = F_S(t, x)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} F(x, t) &= \frac{1}{2} [F_G(x, t) + F_S(x, t)] \\ &= \frac{1}{2} [F_G(t, x) + F_S(t, x)] = F(t, x), \end{aligned}$$

$$\text{por (1.2.18) y (3.2.18)} \Rightarrow L(x, t) = T_t[F](x, t). \quad (3.2.19)$$

□

De (2.2.20), sabemos que el operador T_G conecta la solución $\cos(\rho x)$ para $q(x) = 0$ con la solución del problema de Cauchy (2.2.3). Veamos que el operador T conecta también a estas dos soluciones.

Afirmación. Para $\rho \in \mathbb{C}$, se cumple que

$$T_G[\cos(\rho x)] = T[\cos(\rho x)]. \quad (3.2.20)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} T_G[\cos(\rho x)] &= \cos(\rho x) + \int_0^x G(x, s) \cos(\rho s) ds \\ &= \cos(\rho x) + \int_0^x K(x, s) \cos(\rho s) ds + \int_0^x K(x, -s) \cos(-\rho s) ds \\ &= \cos(\rho x) + \int_0^x K(x, s) \cos(\rho s) ds + \int_{-x}^0 K(x, \tau) \cos(\rho \tau) d\tau \\ &= \cos(\rho x) + \int_{-x}^x K(x, s) \cos(\rho s) ds = T[\cos(\rho x)], \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

donde hemos usado nuevamente la relación (3.2.3) entre G y K , la paridad $\cos(-\rho s) = \cos(\rho s)$, y el cambio de variable $\tau(s) = -s$ para obtener los límites de integración convenientes. \square

Observación. De manera análoga es posible demostrar para $\rho \in \mathbb{C}$ que

$$T_S[\sin(\rho x)] = T[\sin(\rho x)], \quad (3.2.22)$$

basta considerar la relación (3.2.4) entre S y K , la imparidad de la función seno y el cambio de variable $\tau(s) = -s$.

Con los resultados mostrados hasta ahora ya podemos obtener las representaciones en serie para los núcleos de T y T^{-1} .

Teorema 9. El núcleo K de T admite la siguiente representación en serie

$$\begin{aligned} K(x, t) &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\varphi(\rho_n, x) \cos(\rho_n t)}{\alpha_n} - \frac{\varphi(n, x) \cos(nt)}{\alpha_n^0} + \mathbf{s}(\tilde{\rho}_n, x) \frac{\sin(\tilde{\rho}_n t)}{\tilde{\alpha}_n \tilde{\rho}_n} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(2n+1)}{\pi} \mathbf{s}\left(n + \frac{1}{2}, x\right) \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

El núcleo L de T^{-1} admite la siguiente representación en serie

$$\begin{aligned} L(x, t) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\cos(\rho_n x) \varphi(\rho_n, t)}{\alpha_n} - \frac{\cos(nx) \varphi(n, t)}{\alpha_n^0} + \mathbf{s}(\tilde{\rho}_n, t) \frac{\sin(\tilde{\rho}_n x)}{\tilde{\alpha}_n \tilde{\rho}_n} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(2n+1)}{\pi} \mathbf{s}\left(n + \frac{1}{2}, t\right) \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

donde $\{\rho_n, \alpha_n\}$ y $\{\tilde{\rho}_n, \tilde{\alpha}_n\}$ son los datos espectrales de los problemas (2.2.1) y (2.3.1) respectivamente.

Demostración. De la relación (3.2.17) y la definición de F tenemos que

$$K(x, t) = -\frac{1}{2}T_x[F_G(x, t) + F_S(x, t)] = -\frac{1}{2}(T_x[F_G](x, t) + T_x[F_S](x, t)). \quad (3.2.25)$$

Por la continuidad y linealidad de T en $L_2[-\pi, \pi]$, podemos aplicar este operador a la serie (1.2.15) para F_G de la siguiente manera

$$\begin{aligned} T_x[F_G](x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{T[\cos(\rho_n x)] \cos(\rho_n t)}{\alpha_n} - \frac{T[\cos(nx)] \cos(nt)}{\alpha_n^0} \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\varphi(\rho_n, x) \cos(\rho_n t)}{\alpha_n} - \frac{\varphi(n, x) \cos(nt)}{\alpha_n^0} \right\}, \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

donde hemos usado el resultado (3.2.20) y (2.2.20) para justificar que la imagen bajo T de $\cos(\rho_n x)$ y $\cos(nx)$ son las eigenfunciones $\varphi(\rho_n, x)$ y $\varphi(n, x)$ respectivamente. De forma análoga tenemos

$$\begin{aligned} T_x[F_S](x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{T[\sin(\tilde{\rho}_n x)] \sin(\tilde{\rho}_n t)}{\tilde{\alpha}_n \tilde{\rho}_n^2} - \frac{T[\sin(n + \frac{1}{2})x] \sin(n + \frac{1}{2})t}{\tilde{\alpha}_n^0 (n + \frac{1}{2})^2} \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \mathbf{s}(\tilde{\rho}_n, x) \frac{\sin(\tilde{\rho}_n t)}{\tilde{\alpha}_n \tilde{\rho}_n} - \frac{(2n+1)}{\pi} \mathbf{s}\left(n + \frac{1}{2}, x\right) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t \right\}, \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

donde ahora se considera (3.2.22) y (2.3.41) para obtener las eigenfunciones $\mathbf{s}(\tilde{\rho}_n, x)$ y $\mathbf{s}(n + \frac{1}{2}, x)$. Finalmente, la representación en serie para $K(x, t)$ viene sustituir las series (3.2.26) y (3.2.27) en (3.2.25).

Para el núcleo del operador inverso podemos usar el resultado del teorema (8). En este caso operando ahora sobre la variable t .

$$\begin{aligned} L(x, t) &= T_t[F](x, t) = \frac{1}{2}T_t[F_G(x, t) + F_S(x, t)] \\ &= \frac{1}{2}(T_t[F_G](x, t) + T_t[F_S](x, t)). \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

Tenemos por un lado

$$T_t[F_G](x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\cos(\rho_n x) \varphi(\rho_n, t)}{\alpha_n} - \frac{\cos(nx) \varphi(n, t)}{\alpha_n^0} \right\},$$

y análogamente

$$T_t[F_S](x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ s(\tilde{\rho}_n, t) \frac{\sin(\tilde{\rho}_n x)}{\tilde{\alpha}_n \tilde{\rho}_n} - \frac{(2n+1)}{\pi} s\left(n + \frac{1}{2}, t\right) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x \right\}.$$

Finalmente, obtenemos la representación deseada sustituyendo las últimas dos series en (3.2.28). \square

Mostramos a continuación gráficas para los núcleos K y L para el caso de un potencial constante, de esta manera se pueden comparar los núcleos exactos contra aproximaciones calculadas a partir de las representaciones en (3.2.23) y (3.2.24). Los detalles para la obtención de la representación en serie, la expresión exacta para los núcleos y gráficos para errores relativos y absolutos se encuentran en la sección de [resultados numéricos](#).

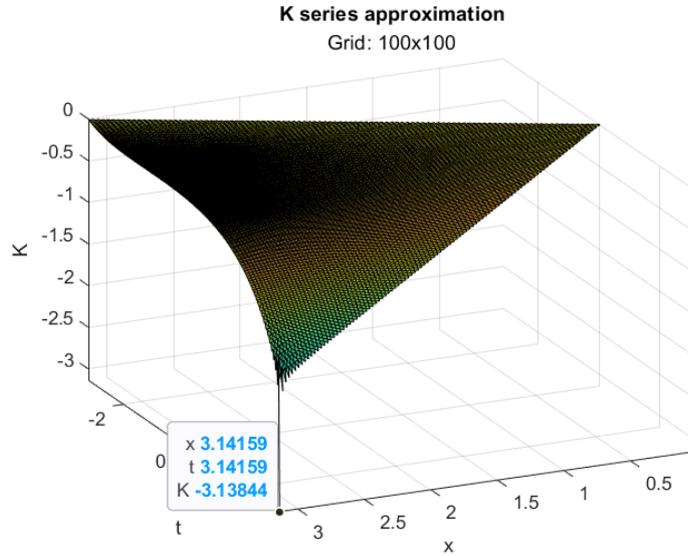


Figura 3.1: Núcleo K en región $0 \leq |t| \leq x \leq \pi$. Se considera un potencial constante: $q(x) = -1$. Representación mediante la serie (3.4.15), aproximación con 100 términos. Se observa una discontinuidad de salto en (π, π) .

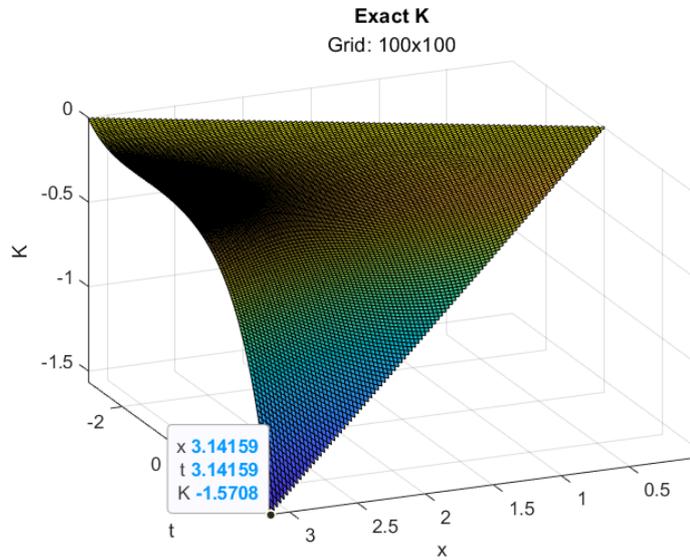


Figura 3.2: Núcleo K en región $0 \leq |t| \leq x \leq \pi$. Se considera un potencial constante: $q(x) = -1$, en este caso se usa (3.4.17) y (3.4.18) para calcular K . Se muestra el valor $K(\pi, \pi)$ exacto.

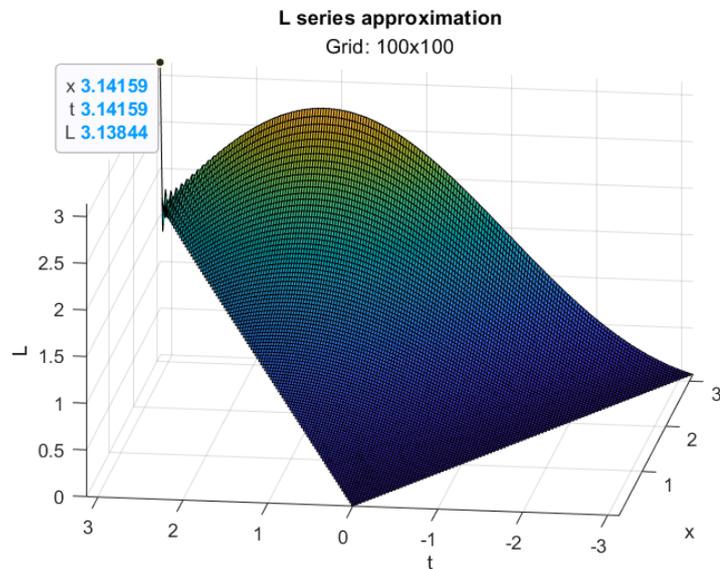


Figura 3.3: Núcleo L en región $0 \leq |t| \leq x \leq \pi$. Se considera un potencial constante: $q(x) = -1$. Representación mediante la serie (3.4.16), aproximación con 100 términos. Se observa una discontinuidad de salto en (π, π) .

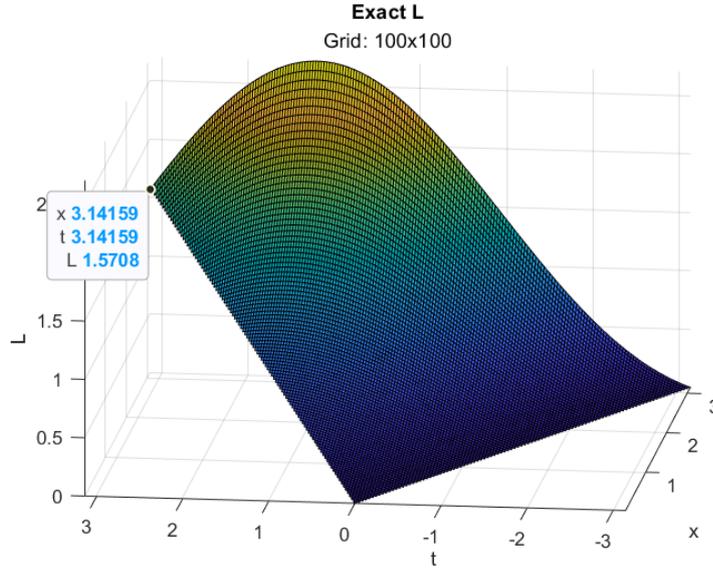


Figura 3.4: Núcleo L en región $0 \leq |t| \leq x \leq \pi$. Se considera un potencial constante: $q(x) = -1$. Considerando que $L(x, t) = -K(t, x)$, se usa (3.4.17) y (3.4.18) para calcular L . Se muestra el valor $L(\pi, \pi)$ exacto.

3.3 Representación continua para S y P

En la sección anterior estudiamos la función $a(x)$ definida en (3.1.1) en el contexto del problema $L(q(x), h, H)$. Analizando su descomposición encontramos que en $H_1(x)$ existe una discontinuidad en $x = \pm 2\pi$. Para el dominio de $F_G(x, t)$ la discontinuidad se encuentra en $(x, t) = (\pm\pi, \pm\pi)$; además, por simple inspección de (3.1.17) se tiene que la discontinuidad es de tamaño 2ω . Parte de los resultados en [8] justo es mejorar la convergencia y eliminar la discontinuidad de la función $a(x)$ en $x = 2\pi$. Para lograr esto se propone la siguiente representación

$$a(x) = \frac{\cos \rho_0 x}{\alpha_0} - \frac{1}{\pi} - \frac{\omega|x|(\pi - |x|)}{\pi^2} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\cos \rho_n x}{\alpha_n} - \frac{\cos nx}{\alpha_n^0} + \frac{2\omega x \sin(nx)}{\pi^2 n} \right). \quad (3.3.1)$$

Notemos que dentro de la serie se han restado los términos de $H_1(x)$, con lo cual se evita que aparezca la discontinuidad; además, el valor de la suma para la serie de $H_1(x)$ es una función continua, y es justo lo que se ha sumado fuera de la serie. Usando (3.3.1) en (3.1.2) se obtiene la siguiente representación

continua para $F_G(x, t)$ en $[0, \pi] \times [0, \pi]$

$$\begin{aligned}
F_G(x, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\cos(\rho_n x) \cos(\rho_n t)}{\alpha_n} - \frac{\cos(nx) \cos(nt)}{\alpha_n^0} \right. \\
& \left. + \frac{\omega(x+t) \sin[n(x+t)]}{\pi^2} + \frac{\omega(x-t) \sin[n(x-t)]}{\pi^2} \right] \\
& \frac{\cos(\rho_0 x) \cos(\rho_0 t)}{\alpha_0} - \frac{1}{\pi} - \frac{\omega}{2\pi^2} |x+t|(\pi - |x+t|) \\
& - \frac{\omega}{2\pi^2} |x-t|(\pi - |x-t|). \tag{3.3.2}
\end{aligned}$$

En el mismo trabajo se deduce la siguiente representación en series para los núcleos G y H de los operadores $T_G(x, t)$ y $T_G^{-1}(x, t)$ respectivamente, las cuales tienen la propiedad de converger absoluta y uniformemente

$$\begin{aligned}
G(x, t) = & \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\varphi(n, x) \cos(nt)}{\alpha_n^0} - \frac{\varphi(\rho_n, x) \cos(\rho_n t)}{\alpha_n} - \frac{2\omega}{\pi^2 n} (x \sin(nx) \cos(nt) \right. \\
& \left. + t \sin(nt) \cos(nx)) \right] + \frac{\varphi(0, x)}{\pi} - \frac{\varphi(\rho_0, x) \cos(\rho_0 t)}{\alpha_0} \\
& + \frac{\omega}{\pi^2} (\pi x - x^2 - t^2), \tag{3.3.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H(x, t) = & \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\varphi(\rho_n, t) \cos(\rho_n x)}{\alpha_n} - \frac{\varphi(n, t) \cos(nx)}{\alpha_n^0} + \frac{2\omega}{\pi^2 n} (x \sin(nx) \cos(nt) \right. \\
& \left. + t \sin(nt) \cos(nx)) \right] + \frac{\varphi(\rho_0, t) \cos(\rho_0 x)}{\alpha_0} - \frac{\varphi(0, t)}{\pi} \\
& - \frac{\omega}{\pi^2} (\pi x - x^2 - t^2) \tag{3.3.4}
\end{aligned}$$

para $0 \leq t \leq x \leq \pi$.

A continuación presentamos los resultados análogos para los núcleos S y P de los operadores respectivos T_S y T_S^{-1} en el contexto del problema $\tilde{L}(q(x), \pi, \frac{\pi}{2})$. Al igual que hicimos para analizar la función $a(x)$ descomponiéndola en términos más elementales, en [6] lo hacen para la función $a_S(x)$; sin embargo, en dicho trabajo consideran un potencial más general $q \in L_1[0, \pi]$. De manera que las asintóticas que logran obtener para los datos espectrales $\{\rho_n, \beta_n\}$ están dadas por

$$\rho_n = n + \frac{1}{2} + \frac{c}{2(n + \frac{1}{2})} + l_n, \tag{3.3.5}$$

$$\beta_n = \frac{\pi}{2(n + \frac{1}{2})^2} \left(1 + \frac{2s_n}{\pi(n + \frac{1}{2})} \right), \tag{3.3.6}$$

donde $l_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, $s_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ y $c = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q(t) dt$.

Trabajando con estas asintóticas se tiene también una discontinuidad para $F_S(x, t)$ en $(x, t) = (\pi, \pi)$. Para considerar corregir esto basta estudiar únicamente las dos series para las cuales en [6] no se logra concluir su continuidad, estas son

$$M_1(x) = -\frac{2x}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} l_n \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right]. \quad (3.3.7)$$

$$M_2(x) = -\frac{cx}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right]}{n + \frac{1}{2}} \quad (3.3.8)$$

En este trabajo nos interesa considerar el potencial $q \in L_2[0, \pi]$, para el cual sí se conoce un comportamiento asintótico de los eigenvalores más preciso, este fue presentado en (2.3.35) del capítulo anterior. El término l_n en (3.3.5) queda determinado por $\frac{k_n}{n}$ en (2.3.35) para $q \in L_2[0, \pi]$, de manera que la serie que vamos a considerar es

$$\tilde{M}_1(x) = -\frac{2x}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{k_n}{n} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right], \quad (3.3.9)$$

Afirmación. $\tilde{M}_1(x)$ es continua en $[-2\pi, 2\pi]$.

Demostración. Consideremos $M_n := \frac{k_n}{n}$. Notemos que

$$\left| \frac{k_n}{n} \right| \left| \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right] \right| \leq M_n \quad \forall x \in [-2\pi, 2\pi]. \quad (3.3.10)$$

Además, desde que $\{\frac{1}{n}\}, \{k_n\} \in l_2$, por desigualdad de Hölder se tiene que $\{\frac{k_n}{n}\} \in l_1$, y por tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty. \quad (3.3.11)$$

Se concluye por criterio de Weierstrass la continuidad de la serie en $\tilde{M}_1(x)$, y por tanto la continuidad de $\tilde{M}_1(x)$. \square

²Comparando el comportamiento asintótico de las expresiones (3.3.5) y (2.3.35) tenemos: $\frac{c}{2(n+\frac{1}{2})} = \frac{\int_0^\pi q(t) dt}{2\pi(n+\frac{1}{2})} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ y $\frac{\omega_0}{\pi n} = \frac{\int_0^\pi q(t) dt}{2\pi n} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$, análogamente, como $\{k_n\} \in l_2$, entonces $\frac{k_n}{n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$, lo cual corresponde al comportamiento de l_n .

Resta entonces evaluar si en $M_2(x)$ se encuentra alguna discontinuidad. Se propone considerar la siguiente construcción. Sea $f(x) = 1$ en $(0, 2\pi]$, la cual podemos extender para obtener una función impar; es decir

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (0, 2\pi] \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x \in [-2\pi, 0). \end{cases} \quad (3.3.12)$$

La representación en serie de Fourier es de la forma

$$g(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{nx}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{nx}{2}\right), \quad (3.3.13)$$

donde

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} g(x) \cos\left(\frac{nx}{2}\right) dx, \quad n \geq 0$$

$$B_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} g(x) \sin\left(\frac{nx}{2}\right) dx, \quad n \geq 1.$$

De la imparidad de $g(x)$, el integrando en la definición de A_n es impar, entonces $A_n = 0$ para $n \geq 0$ por la simetría del intervalo. Ahora, de la paridad del integrando en B_n se tiene

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \sin\left(\frac{nx}{2}\right) dx = -\frac{2}{n\pi} [\cos(n\pi) - 1]$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ par} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ impar.} \end{cases} \quad (3.3.14)$$

Por lo anterior, la serie en (3.3.13) tiene únicamente índices impares

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1} \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right] = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]}{2n+1}$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{2}{3} \sin\left(\frac{3x}{2}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]}{n + \frac{1}{2}} \right],$$

por tanto se tiene que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]}{n + \frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(x) - 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{2}{3} \sin\left(\frac{3x}{2}\right). \quad (3.3.15)$$

Como primera aproximación se propone entonces que $M_2(x)$ es igual a

$$\tilde{M}_2(x) := -\frac{cx}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(x) - 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{2}{3} \sin\left(\frac{3x}{2}\right) \right]. \quad (3.3.16)$$

Note que la serie en (3.3.15) tiene una discontinuidad de salto en $x = 0$ de tamaño π , esta discontinuidad de salto proviene de la extensión impar que hicimos para f ,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(x) - 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{2}{3} \sin\left(\frac{3x}{2}\right) \right] &= \frac{\pi}{2}, \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(x) - 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{2}{3} \sin\left(\frac{3x}{2}\right) \right] &= -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Sin embargo, es fácil verificar que en (3.3.16) ya no existe esta discontinuidad

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \tilde{M}_2(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{cx}{\pi} \right) \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \tilde{M}_2(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{cx}{\pi} \right) \left(-\frac{\pi}{2} \right) = 0, \end{aligned}$$

y esto también ocurre en $M_2(x)$, por tanto en $x = 0$ descartamos que existe discontinuidad. En la figura (3.5) se muestran algunos ejemplos de \tilde{M}_2 para distintos potenciales. No obstante, por simple inspección detectamos que justo cuando $x = \pm 2\pi$ se tiene

$$\begin{aligned} M_2(\pm 2\pi) &= -2c \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left[\pm\left(n + \frac{1}{2}\right) 2\pi\right]}{n + \frac{1}{2}} = 0, \\ \tilde{M}_2(\pm 2\pi) &= \mp 2c \left[\pm \frac{\pi}{2} - 2 \sin(\pm\pi) - \frac{2}{3} \sin(\pm 3\pi) \right] = -c\pi. \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

Concluimos finalmente que $M_2(x)$ y $\tilde{M}_2(x)$ difieren sólo en este punto

$$M_2(x) = \begin{cases} \tilde{M}_2(x) & \text{si } |x| < 2\pi \\ 0 & \text{si } x = \pm 2\pi. \end{cases} \quad (3.3.18)$$

Entonces $M_2(x)$ tiene una discontinuidad de salto en $x = \pm 2\pi$ cuya magnitud depende únicamente del potencial: $-c\pi = -\int_0^\pi q(t)dt$. Esta discontinuidad aparece entonces en la función $a_S(x)$ en (3.1.23), se pro-

pone reescribir esta función como

$$\begin{aligned}
 a_S(x) = & \sum_{n=0}^1 \left[\frac{\cos(\rho_n x) - 1}{\alpha_n \rho_n^2} - \frac{\cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right] - 1}{\alpha_n^0 (\rho_n^0)^2} \right] \\
 & + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{\cos(\rho_n x) - 1}{\alpha_n \rho_n^2} - \frac{\cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right] - 1}{\alpha_n^0 (\rho_n^0)^2} + \frac{cx \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right]}{\pi \left(n + \frac{1}{2} \right)} \right] \\
 & - \frac{cx}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(x) - 2 \sin \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{2}{3} \sin \left(\frac{3x}{2} \right) \right]. \quad (3.3.19)
 \end{aligned}$$

Hemos restado dentro de la serie los términos que originan la discontinuidad, y sumado el resultado de la serie con dichos términos que es justo $\tilde{M}_2(x)$, de manera que obtenemos una representación continua para $a_S(x)$ en $[-\pi, 2\pi]$. Con esta representación para $a_S(x)$ podemos obtener también una repre-

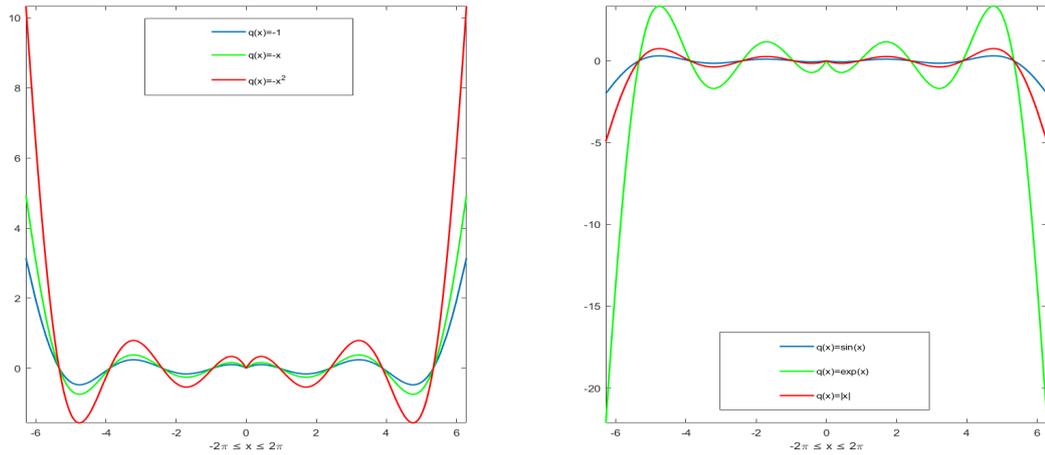


Figura 3.5: $\tilde{M}_2(x)$ para distintos $q \in L_2[0, \pi]$. Notamos un comportamiento simétrico respecto al eje $x = 0$. Además, como el potencial influye directamente en la magnitud de la constante c , a mayor variación del potencial se observa mayor crecimiento de la amplitud en las oscilaciones que provienen de $\sin \left(\frac{x}{2} \right)$ y $\sin \left(\frac{3x}{2} \right)$.

sentación continua para $F_S(x, t)$ en $[0, \pi] \times [0, \pi]$, basta considerar la diferencia en (3.1.24). Para lograr esto definimos

$$\begin{aligned}
 b^{\mp}(x, t) & := -\frac{c(x \mp t)}{\pi} \left\{ \operatorname{sgn}(x \mp t) \frac{\pi}{2} - 2 \sin \left(\frac{x \mp t}{2} \right) - \frac{2}{3} \sin \left[\frac{3}{2}(x \mp t) \right] \right\} \\
 d_n^{\mp}(x, t) & := \frac{c(x \mp t)}{\pi} \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) (x \mp t) \right]}{n + \frac{1}{2}}, \quad n \geq 2.
 \end{aligned}$$

Desarrollamos sólo los dos términos en la diferencia que no son claros por inspección

$$\begin{aligned}
b^-(x, t) - b^+(x, t) &= \frac{c}{2} [(x+t)\operatorname{sgn}(x+t) - (x-t)\operatorname{sgn}(x-t)] \\
&\quad + \frac{2c}{\pi} \left[(x-t) \sin\left(\frac{x-t}{2}\right) - (x+t) \sin\left(\frac{x+t}{2}\right) \right] \\
&\quad + \frac{2c}{3\pi} \left\{ (x-t) \sin\left[\frac{3}{2}(x-t)\right] - (x+t) \sin\left[\frac{3}{2}(x+t)\right] \right\} \\
&= \frac{c}{2} (|x+t| - |x-t|) - \frac{4cx}{\pi} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right) \\
&\quad - \frac{4ct}{\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{4cx}{3\pi} \cos\left(\frac{3x}{2}\right) \sin\left(\frac{3t}{2}\right) \\
&\quad - \frac{4ct}{3\pi} \sin\left(\frac{3x}{2}\right) \cos\left(\frac{3t}{2}\right). \tag{3.3.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_n^-(x, t) - d_n^+(x, t) &= \frac{c(x-t)}{\pi(n+\frac{1}{2})} \left\{ \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right] \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right] \right. \\
&\quad \left. - \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right] \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right] \right\} \\
&\quad - \frac{c(x+t)}{\pi(n+\frac{1}{2})} \left\{ \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right] \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right] \right. \\
&\quad \left. - \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right] \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right] \right\} \\
&= -\frac{2cx}{\pi(n+\frac{1}{2})} \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right] \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right] \\
&\quad - \frac{2ct}{\pi(n+\frac{1}{2})} \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right] \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]. \tag{3.3.21}
\end{aligned}$$

El resto de los términos en la diferencia son del tipo

$$\cos(\rho(x-t)) - \cos(\rho(x+t)) = 2 \sin(\rho x) \sin(\rho t), \tag{3.3.22}$$

de manera que finalmente se tiene

$$\begin{aligned}
F_S(x, t) = & \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{\sin(\rho_n x) \sin(\rho_n t)}{\alpha_n \rho_n^2} - \frac{\sin(\rho_n^0 x) \sin(\rho_n^0 t)}{\alpha_n^0 (\rho_n^0)^2} \right. \\
& \left. - \frac{c}{\pi \left(n + \frac{1}{2}\right)} [x \cos(\rho_n^0 x) \sin(\rho_n^0 t) + t \cos(\rho_n^0 t) \sin(\rho_n^0 x)] \right\} \\
& + \sum_{n=0}^1 \left\{ \frac{\sin(\rho_n x) \sin(\rho_n t)}{\alpha_n \rho_n^2} - \frac{\sin(\rho_n^0 x) \sin(\rho_n^0 t)}{\alpha_n^0 (\rho_n^0)^2} \right\} \\
& - \frac{2c}{\pi} [x \cos(\rho_0^0 x) \sin(\rho_0^0 t) + t \cos(\rho_0^0 t) \sin(\rho_0^0 x)] \\
& - \frac{2c}{3\pi} [x \cos(\rho_1^0 x) \sin(\rho_1^0 t) + t \cos(\rho_1^0 t) \sin(\rho_1^0 x)] \\
& + \frac{c}{4} [|x + t| - |x - t|]. \tag{3.3.23}
\end{aligned}$$

donde $\rho_n^0 = n + \frac{1}{2}$ de acuerdo a (2.3.37).

Con los resultados que tenemos hasta ahora podemos construir una representación continua para el núcleo $S(x, t)$. Sin embargo, es conveniente desmotrar antes algunas relaciones asintóticas.

Lema 7. *Se satisfacen las siguientes relaciones asintóticas cuando $n \rightarrow \infty$*

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\rho_n}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right), \tag{3.3.24}$$

$$\frac{2}{\pi} \alpha_n \rho_n^3 - \left(n + \frac{1}{2}\right) = \mathcal{O}(1), \tag{3.3.25}$$

$$\frac{1}{\alpha_n \rho_n^3} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right), \tag{3.3.26}$$

$$\frac{\frac{2}{\pi} \alpha_n \rho_n^3 - \left(n + \frac{1}{2}\right)}{\left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha_n \rho_n^3} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{3.3.27}$$

Demostración. Se van a considerar las asintóticas para los datos espectrales $\{\rho_n, \alpha_n\}_{n \geq 0}$ en (2.3.35) y (2.3.36). Para obtener (3.3.24) observamos que

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{1}{n + \frac{1}{2} + \frac{\omega_0}{\pi n} + \frac{\kappa_n}{n}} = \frac{n}{n^2 + \frac{n}{2} + \frac{\omega_0}{\pi} + \kappa_n},$$

entonces

$$\frac{n}{\rho_n} = \frac{n^2}{n^2 + \frac{n}{2} + \frac{\omega_0}{\pi} + \kappa_n} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2n} + \frac{\omega_0}{\pi n^2} + \frac{\kappa_n}{n^2}} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty, \tag{3.3.28}$$

ya que claramente $\frac{1}{2n}, \frac{\omega_0}{\pi n^2} \rightarrow 0$, y $\frac{\kappa_n}{n^2} \rightarrow 0$ pues $\{\kappa_n\} \in l_2$.
 Por tanto la sucesión $\left\{\frac{n}{\rho_n}\right\}$ al converger es acotada, entonces para alguna $\alpha > 0$ se tiene

$$\left|\frac{1}{\rho_n}\right| \leq \frac{\alpha}{n}.$$

Para (3.3.25) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi}\alpha_n\rho_n^3 - \left(n + \frac{1}{2}\right) &= \left[\rho_n - \frac{\sin(2\pi\rho_n)}{2\pi} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\rho_n}\right)\right] - \left(n + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\omega_0}{\pi n} + \frac{\kappa_n}{n} - \frac{\sin(2\pi\rho_n)}{2\pi} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) = \mathcal{O}(1), \end{aligned} \quad (3.3.29)$$

donde se ha considerado que $\frac{\omega_0}{\pi n} + \frac{\kappa_n}{n} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$, $\frac{\sin(2\pi\rho_n)}{2\pi} = \mathcal{O}(1)$ y el resultado (3.3.24).

Para obtener (3.3.26) partimos del resultado anterior,

$$\frac{2}{\pi}\alpha_n\rho_n^3 - \left(n + \frac{1}{2}\right) = \mathcal{O}(1),$$

entonces para alguna constante $\alpha > 0$ se tiene

$$\left|\alpha_n\rho_n^3 - \frac{\pi}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right| \leq \alpha.$$

Aplicando la desigualdad del triángulo inversa

$$\frac{\pi}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right) - |\alpha_n\rho_n^3| \leq \alpha,$$

tomando inversos y multiplicando por n se obtiene

$$\frac{n}{|\alpha_n\rho_n^3|} \leq \frac{n}{\frac{\pi}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right) - \alpha} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4n} - \frac{\alpha}{n}} \rightarrow \frac{2}{\pi}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.3.30)$$

Como la sucesión a la derecha en (3.3.30) converge es acotada, así queda acotada también la sucesión a la izquierda, de donde se obtiene el resultado.

Para obtener (3.3.27) usamos (3.3.25) y (3.3.26) de la siguiente manera

$$\frac{\frac{2}{\pi}\alpha_n\rho_n^3 - \left(n + \frac{1}{2}\right)}{\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha_n\rho_n^3} = \frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)}\mathcal{O}(1)\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

□

Teorema 10. *El núcleo $S(x, t)$ admite la siguiente representación*

$$\begin{aligned}
S(x, t) = \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{2}{\pi} \left(n + \frac{1}{2} \right) \mathbf{s}(\rho_n^0, x) \sin(\rho_n^0 t) - \frac{\mathbf{s}(\rho_n, x) \sin(\rho_n t)}{\alpha_n \rho_n} \right. \\
\left. + \frac{c}{\pi \left(n + \frac{1}{2} \right)} [x \cos(\rho_n^0 x) \sin(\rho_n^0 t) + t \cos(\rho_n^0 t) \sin(\rho_n^0 x)] \right\} \\
+ \frac{1}{\pi} \mathbf{s}\left(\frac{1}{2}, x\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{\mathbf{s}(\rho_0, x) \sin(\rho_0 t)}{\alpha_0 \rho_0} \\
+ \frac{3}{\pi} \mathbf{s}\left(\frac{3}{2}, x\right) \sin\left(\frac{3t}{2}\right) - \frac{\mathbf{s}(\rho_1, x) \sin(\rho_1 t)}{\alpha_1 \rho_1} \\
+ \frac{2c}{\pi} \left[x \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right) + t \cos\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right] \\
+ \frac{2c}{3\pi} \left[x \cos\left(\frac{3x}{2}\right) \sin\left(\frac{3t}{2}\right) + t \cos\left(\frac{3t}{2}\right) \sin\left(\frac{3x}{2}\right) \right] - \frac{c}{2} t,
\end{aligned} \tag{3.3.31}$$

la cual es continua en $0 \leq t \leq x \leq \pi$.

Demostración. La idea es mostrar que $S(x, t)$ y $F_S(x, t)$ difieren entre si por una serie que converge absoluta y uniformemente. Para conocer $S(x, t)$ en serie tenemos la relación (3.2.2); sin embargo, por (3.2.15) esto es equivalente a conocer $-T_x[F_S(x, t)]$, lo cual ya hicimos en (3.2.27). Denotemos por $[T_S[F_S(x, t)]]_n$ el término n-ésimo en la serie de $T_S[F_S(x, t)]$, y por $[F_S(x, t)]_n$ el respectivo término para la serie de $F_S(x, t)$ dada en (1.2.17). Definimos

$$\Delta_n := [F_S(x, t)]_n - [T_x[F_S(x, t)]]_n \tag{3.3.32}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sin(\rho_n t)}{\alpha_n \rho_n} \left[\frac{\sin(\rho_n x)}{\rho_n} - \mathbf{s}(\rho_n, x) \right] \\
&\quad - \frac{2}{\pi} \sin(\rho_n^0 t) \left[\sin(\rho_n^0 x) - \left(n + \frac{1}{2} \right) \mathbf{s}(\rho_n^0, x) \right].
\end{aligned} \tag{3.3.33}$$

Ahora, cuando $n \rightarrow \infty$ sabemos que $\mathbf{s}(\rho_n, x)$ satisface la relación (2.3.32), de manera que usando esa información en Δ_n tenemos que

$$\begin{aligned}
\Delta_n = \frac{\sin(\rho_n t)}{\alpha_n \rho_n} \left[-q_1(x) \frac{\cos(\rho_n x)}{\rho_n^2} - \int_0^x \frac{q(\tau) \cos[\rho_n(x - 2\tau)]}{2\rho_n^2} d\tau \right] \\
- \frac{2}{\pi} \sin(\rho_n^0 t) \left[-q_1(x) \frac{\cos(\rho_n^0 x)}{\rho_n^0} - \int_0^x \frac{q(\tau) \cos[\rho_n^0(x - 2\tau)]}{2\rho_n^0} d\tau \right] \\
+ \frac{\sin(\rho_n t)}{\alpha_n \rho_n} \mathcal{O}\left(\frac{1}{\rho_n^3}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned} \tag{3.3.34}$$

Considerando el comportamiento asintótico de los datos espectrales podemos usar (3.3.27) y (3.3.24), de donde se tiene

$$\frac{1}{\alpha_n \rho_n} = \frac{\rho_n^2}{\alpha_n \rho_n^3} = \mathcal{O}(\rho_n),$$

usando ahora que $|\sin(\rho_n t)| \leq 1$ se sigue que

$$\frac{\sin(\rho_n t)}{\alpha_n \rho_n} \mathcal{O}\left(\frac{1}{\rho_n^3}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\rho_n^2}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (3.3.35)$$

Podemos reescribir ahora adecuadamente Δ_n como

$$\Delta_n = q_1(x)\Delta_{n,1} + \int_0^x q(\tau)\Delta_{n,2}d\tau + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (3.3.36)$$

donde

$$\Delta_{n,1} = \frac{2}{\pi} \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right] \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]}{n + \frac{1}{2}} - \frac{\cos(\rho_n x) \sin(\rho_n t)}{\alpha_n \rho_n^3}, \quad (3.3.37)$$

$$\Delta_{n,2} = \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right] \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)(x - 2\tau)\right]}{\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)} - \frac{\sin(\rho_n t) \cos[\rho_n(x - 2\tau)]}{2\alpha_n \rho_n^3}, \quad (3.3.38)$$

además, ya hemos simplificado usando (3.3.35).

Nos interesa conocer el comportamiento de $\Delta_{n,1}$ y $\Delta_{n,2}$ cuando $n \rightarrow \infty$. Sumando un cero conveniente podemos reescribir $\Delta_{n,1}$ como

$$\begin{aligned} \Delta_{n,1} = & \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right] \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right] \left[\frac{\frac{2}{\pi}\alpha_n \rho_n^3 - \left(n + \frac{1}{2}\right)}{\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha_n \rho_n^3}\right] \\ & + \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right] \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right] - \sin(\rho_n t) \cos(\rho_n x)}{\alpha_n \rho_n^3}. \end{aligned} \quad (3.3.39)$$

Podemos encontrar una representación más útil para estudiar el comportamiento del segundo término en $\Delta_{n,1}$. Definimos $\tau^\pm := x \pm t$ y consideramos las siguientes relaciones que se cumplen por identidad trigonométrica

$$\frac{\sin[\rho_n \tau^+]}{2} - \frac{\sin[\rho_n^0 \tau^+]}{2} = \sin\left[\frac{(\rho_n - \rho_n^0)\tau^+}{2}\right] \cos\left[\frac{(\rho_n + \rho_n^0)\tau^+}{2}\right], \quad (3.3.40)$$

$$\frac{\sin[\rho_n \tau^-]}{2} - \frac{\sin[\rho_n^0 \tau^-]}{2} = \sin\left[\frac{(\rho_n - \rho_n^0)\tau^-}{2}\right] \cos\left[\frac{(\rho_n + \rho_n^0)\tau^-}{2}\right]. \quad (3.3.41)$$

Al tomar la diferencia tenemos

$$(3.3.41) - (3.3.40) = \cos(\rho_n^0 x) \sin(\rho_n^0 t) - \cos(\rho_n x) \sin(\rho_n t), \quad (3.3.42)$$

donde hemos usado la definición de τ^\pm para simplificar por identidades de suma y resta de ángulos, entonces se tiene

$$\begin{aligned} \Delta_{n,1} = & \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right] \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right] \left[\frac{\frac{2}{\pi} \alpha_n \rho_n^3 - (n + \frac{1}{2})}{(n + \frac{1}{2}) \alpha_n \rho_n^3} \right] \\ & + \frac{\sin \left[\frac{(\rho_n - n - \frac{1}{2}) \tau^-}{2} \right] \cos \left[\frac{(\rho_n + n + \frac{1}{2}) \tau^-}{2} \right]}{\alpha_n \rho_n^3} \\ & - \frac{\sin \left[\frac{(\rho_n - n - \frac{1}{2}) \tau^+}{2} \right] \cos \left[\frac{(\rho_n + n + \frac{1}{2}) \tau^+}{2} \right]}{\alpha_n \rho_n^3}. \end{aligned} \quad (3.3.43)$$

Como seno y coseno son funciones acotadas, entonces de (3.3.27) se tiene cuando $n \rightarrow \infty$

$$\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right] \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right] \left[\frac{\frac{2}{\pi} \alpha_n \rho_n^3 - (n + \frac{1}{2})}{(n + \frac{1}{2}) \alpha_n \rho_n^3} \right] = \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^2} \right). \quad (3.3.44)$$

Considerando la asintótica para los eigenvalores obtenemos lo siguiente

$$\rho_n - \left(n + \frac{1}{2} \right) = \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\omega^0}{\pi n} + \frac{\kappa_n}{n} - \left(n + \frac{1}{2} \right) = \mathcal{O} \left(\frac{1}{n} \right), \quad (3.3.45)$$

y como $\tau^\pm = x \pm t$ con x, t en una región acotada, entonces

$$\left[\rho_n - \left(n + \frac{1}{2} \right) \right] \frac{\tau^\pm}{2} = \mathcal{O} \left(\frac{1}{n} \right). \quad (3.3.46)$$

Por otro lado, recordemos que $\sin x \sim x$, cuando $x \rightarrow 0$ ³. Entonces, de (3.3.46) se concluye que cuando $n \rightarrow \infty$

$$\sin \left[\frac{(\rho_n - n - \frac{1}{2}) \tau^\pm}{2} \right] = \mathcal{O} \left(\frac{1}{n} \right), \quad (3.3.47)$$

³Esto se puede observar al desarrollar la expansión en serie de Taylor para $\sin x$.

entonces por (3.3.26) y considerando que coseno es una función acotada finalmente se tiene

$$\frac{\sin \left[\frac{(\rho_n - n - \frac{1}{2})\tau^\pm}{2} \right] \cos \left[\frac{(\rho_n + n + \frac{1}{2})\tau^\pm}{2} \right]}{\alpha_n \rho_n^3} = \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^2} \right). \quad (3.3.48)$$

Considerando las asintóticas (3.3.44) y (3.3.48) en (3.3.43) se concluye que $\Delta_{n,1} = \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^2} \right)$. Finalmente, por simple inspección al comparar (3.3.37) y (3.3.38) se tiene también que $\Delta_{n,2} = \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^2} \right)$, y por tanto

$$\Delta_n = \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^2} \right). \quad (3.3.49)$$

De la definición (3.3.32), al sumar obtenemos

$$S(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n - F_S(x, t). \quad (3.3.50)$$

De la relación (3.3.33) notamos que Δ_n es una función continua para (x, t) en la región $0 \leq t \leq x \leq \pi$ y para $n \geq 1$, misma región donde la relación asintótica (3.3.49) es válida, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n$ converge absoluta y uniformemente a una función continua en dicha región. Por otro lado, $F_S(x, t)$ en (3.3.23) también es continua en dicha región, entonces el lado derecho en (3.3.50) es una función continua en $0 \leq t \leq x \leq \pi$. El núcleo $S(x, t)$ también es continuo en $0 \leq t \leq x \leq \pi$. Finalmente, la representación continua para $S(x, t)$ se obtiene de (3.3.50) al considerar Δ_n dado por (3.3.33) y $F_S(x, t)$ en (3.3.23). \square

En el lema (3) verificamos que $P(x, t) = T_{S,t}[F_S(x, t)]$ para un potencial $q \in \mathcal{C}^1[0, \pi]$; sin embargo, este resultado puede extenderse al caso más general para $q \in L_2[0, \pi]$, para esto se puede seguir un procedimiento límite como el descrito en [5]. Dicho lo anterior, enunciamos el siguiente teorema para el núcleo del operador $T_P := T_S^{-1}$.

Teorema 11. *El núcleo $P(x, t)$ admite la siguiente representación*

$$\begin{aligned}
P(x, t) = \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{\sin(\rho_n x) \mathbf{s}(\rho_n, t)}{\alpha_n \rho_n} - \frac{2}{\pi} \left(n + \frac{1}{2} \right) \sin(\rho_n^0 x) \mathbf{s}(\rho_n^0, t) \right. \\
\left. - \frac{c}{\pi \left(n + \frac{1}{2} \right)} \left[x \cos(\rho_n^0 x) \sin(\rho_n^0 t) + t \cos(\rho_n^0 t) \sin(\rho_n^0 x) \right] \right\} \\
+ \frac{\sin(\rho_0 x) \mathbf{s}(\rho_0, t)}{\alpha_0 \rho_0} - \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right) \mathbf{s}\left(\frac{1}{2}, t\right) \\
+ \frac{\sin(\rho_1 x) \mathbf{s}(\rho_1, t)}{\alpha_1 \rho_1} - \frac{3}{\pi} \sin\left(\frac{3x}{2}\right) \mathbf{s}\left(\frac{3}{2}, t\right) \\
- \frac{2c}{\pi} \left[x \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right) + t \cos\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right] \\
- \frac{2c}{3\pi} \left[x \cos\left(\frac{3x}{2}\right) \sin\left(\frac{3t}{2}\right) + t \cos\left(\frac{3t}{2}\right) \sin\left(\frac{3x}{2}\right) \right] + \frac{c}{2} t,
\end{aligned} \tag{3.3.51}$$

la cual es continua en $0 \leq t \leq x \leq \pi$.

Demostración. La idea es mostrar que $P(x, t)$ y $F_S(x, t)$ difieren entre si por una serie que converge absoluta y uniformemente. Denotemos por $[T_{S,t}[F_S(x, t)]]_n$ el término n -ésimo en la serie de $T_{S,t}[F_S(x, t)]$, y por $[F_S(x, t)]_n$ el respectivo término para la serie de $F_S(x, t)$ dada en (1.2.17). Definimos

$$\Delta_n := [F_S(x, t)]_n - [T_{S,t}[F_S(x, t)]]_n, \tag{3.3.52}$$

donde

$$T_{S,t}[F_S(x, t)] = \sum_0^{\infty} \left[\frac{\sin(\rho_n x) \mathbf{s}(\rho_n, t)}{\alpha_n \rho_n} - \frac{2}{\pi} \left(n + \frac{1}{2} \right) \sin(\rho_n^0 x) \mathbf{s}(\rho_n^0, t) \right].$$

Se tiene entonces

$$\begin{aligned}
\Delta_n = \frac{\sin(\rho_n x)}{\alpha_n \rho_n} \left[\frac{\sin(\rho_n t)}{\rho_n} - \mathbf{s}(\rho_n, t) \right] \\
- \frac{2}{\pi} \sin(\rho_n^0 x) \left[\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right] - \left(n + \frac{1}{2}\right) \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right] \right].
\end{aligned}$$

Lo que sigue es demostrar que $\Delta_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$; sin embargo, a partir de aquí todas las implicaciones se siguen por los mismos argumentos usados en el

teorema anterior, por lo cual se omite. En este caso basta agregar que de la definición (3.3.52) y considerando que $P(x, t) = T_{S,t}[F_S(x, t)]$ se sigue

$$P(x, t) = F_S(x, t) - \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n.$$

□

Mostramos a continuación gráficas calculadas para el núcleo S para el caso de un potencial constante. En este caso podemos comparar la expresión exacta para S y las dos representaciones en serie que podemos conocer hasta ahora, una con discontinuidad en (π, π) calculada mediante $S(x, t) = -T_{S,x}[F_S(x, t)]$ y la otra continua dada en (3.3.31). Los detalles para la obtención de la representación en serie, la expresión exacta para S y gráficas para errores relativos y absolutos se encuentran en la sección de [resultados numéricos](#).

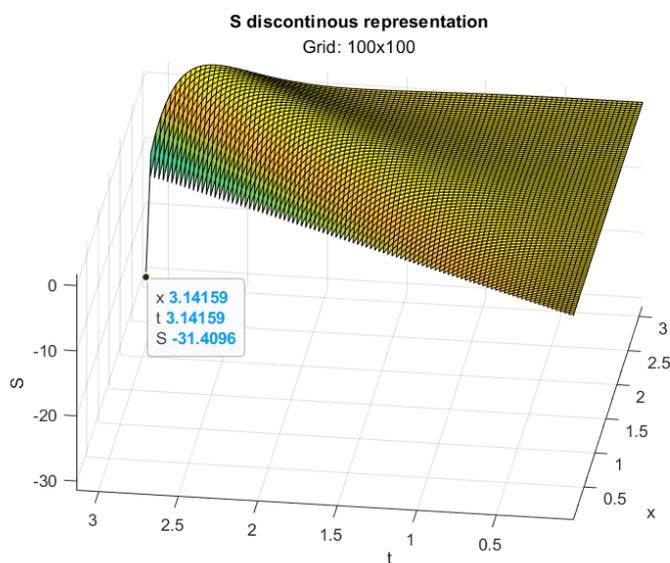


Figura 3.6: Núcleo S en región $0 \leq t \leq x \leq \pi$ para un potencial: $q(x) = -10$. Representación con discontinuidad en (π, π) mediante la serie (3.4.20), aproximación con 1000 términos.

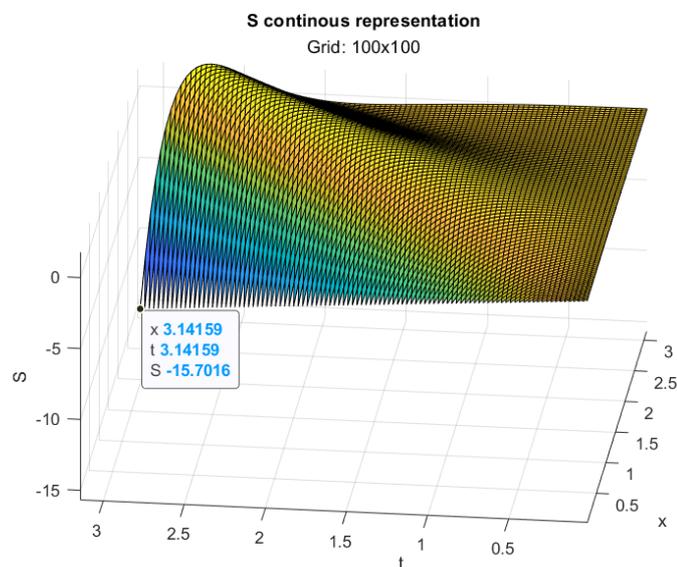


Figura 3.7: Núcleo S en región $0 \leq t \leq x \leq \pi$ para un potencial: $q(x) = -10$. Representación continua mediante la serie (3.4.19), aproximación con 1000 términos.

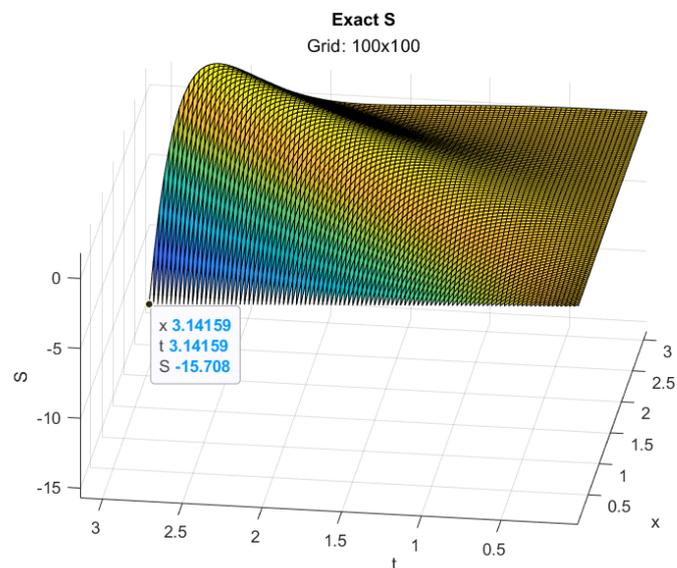


Figura 3.8: Núcleo S en región $0 \leq t \leq x \leq \pi$ para un potencial $q(x) = -10$, expresión exacta calculada a partir de (3.4.21) y (3.4.22). Se observa la cercanía en el punto (π, π) respecto a la representación en figura (3.7).

3.4 Resultados numéricos

Queremos poner a prueba los resultados obtenidos. Para lograr esto, compararemos las aproximaciones numéricas de las representaciones en serie con expresiones exactas para los núcleos, esto se puede lograr considerando un potencial constante. Vamos a considerar el caso de un problema de Sturm-Liouville con el potencial $q(x) \equiv -c^2$, donde $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Para las condiciones iniciales tomemos $h = 0 = H$, tenemos entonces el problema $L(-c^2, 0, 0)$ con condiciones de Neumann

$$-y'' - c^2 y = \rho^2 y, \quad \lambda := \rho^2 \quad (3.4.1)$$

$$y'(0) = 0 = y'(\pi). \quad (3.4.2)$$

La ecuación característica para (3.4.1) es $r^2 + (c^2 + \rho^2) = 0$. De evaluar los casos $> 0, = 0, < 0$ para el discriminante, obtenemos soluciones con la forma $y(\rho, x) = \alpha \cos(\sqrt{c^2 + \rho^2}x) + \beta \sin(\sqrt{c^2 + \rho^2}x)$, con α, β constantes arbitrarias. Al evaluar las condiciones de frontera (3.4.2) y requerir obtener soluciones no triviales obtenemos los eigenvalores y las respectivas eigenfunciones

$$\rho_n^2 = n^2 - c^2, \quad n \geq 0, \quad (3.4.3)$$

$$y_n(\rho_n, x) = \cos(nx). \quad (3.4.4)$$

Es claro que y_n satisface las condiciones de frontera, es inmediato también comprobar que satisface la ecuación:

$$\begin{aligned} y_n'(x) &= -n \sin(nx) \Rightarrow y_n''(x) = -n^2 \cos(nx) = -n^2 y_n(x) \\ \Rightarrow 0 &= y_n''(x) + n^2 y_n(x) = y_n''(x) + (\lambda_n + c^2) y_n(x) \\ &\Rightarrow -y_n''(x) - c^2 y_n(x) = \lambda_n y_n(x) \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

Observe que hemos obtenido las eigenfunciones del problema directamente sin recurrir al problema de Cauchy para las funciones $\varphi(\rho, x)$. Comprobemos que obteniéndolas mediante el problema de Cauchy coinciden. Consideremos las soluciones $\varphi(\rho, x)$ a (3.4.1) que satisfacen las condiciones de Cauchy $\varphi(\rho, 0) = 1$ y $\varphi'(\rho, 0) = 0$. En este caso obtenemos soluciones del tipo $\varphi(\rho, x) = \alpha e^{\sqrt{-c^2 - \rho^2}x} + \beta e^{-\sqrt{-c^2 - \rho^2}x}$. Al considerar las condiciones iniciales para $\varphi(\rho, x)$ obtenemos $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, posteriormente al evaluar en el espectro (3.4.3) del problema $L(-c^2, 0, 0)$ obtenemos automáticamente las eigenfunciones que satisfacen ambos conjuntos de condiciones iniciales

$$\varphi(\rho_n, x) = \cos(nx), \quad (3.4.6)$$

las cuales coinciden con las que habíamos obtenido en (3.4.4). Podemos ahora calcular las constantes de normalización

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \int_0^\pi \cos^2(nx) dx = \left[\frac{\sin(2nx) + 2nx}{4n} \right]_0^\pi, \quad n \geq 0, \\ \Rightarrow \alpha_n &= \begin{cases} \pi & \text{si } n = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}. \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

A pesar de obtener las mismas eigenfunciones y constantes de normalización del problema para $q(x) \equiv 0$ en (2.2.14), observamos que obtenemos datos espectrales diferentes, pues ahora los eigenvalores están desplazados por el valor constante del potencial ($-c^2$). Más adelante usaremos entonces que

$$\alpha_n = \alpha_n^0. \quad (3.4.8)$$

Para poder determinar explícitamente al núcleo $K(x, t)$ en su representación en serie necesitamos primero obtener otro conjunto de datos espectrales. El problema directo a resolver es $\tilde{L}(-c^2, \pi, \frac{\pi}{2})$, el cual tiene condiciones de frontera mixtas de acuerdo a (2.3.1)

$$-y'' - c^2 y = \tilde{\rho}^2 y, \quad \tilde{\lambda} := \tilde{\rho}^2 \quad (3.4.9)$$

$$y(0) = 0 = y'(\pi). \quad (3.4.10)$$

La solución general es del tipo $y(\rho, x) = \alpha \cos(\sqrt{c^2 + \tilde{\rho}^2}x) + \beta \sin(\sqrt{c^2 + \tilde{\rho}^2}x)$. Al considerar las condiciones de frontera y requerir soluciones no triviales obtenemos los siguientes eigenvalores y sus respectivas eigenfunciones

$$\tilde{\rho}_n^2 = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - c^2, \quad n \geq 0 \quad (3.4.11)$$

$$y_n(\tilde{\rho}_n, x) = \sin \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) x \right]. \quad (3.4.12)$$

Sea $\mathbf{s}(\tilde{\rho}, x)$ una solución a (3.4.9) con condiciones de Cauchy $\mathbf{s}(\tilde{\rho}, 0) = 0$ y $\mathbf{s}'(\tilde{\rho}, 0) = 1$. La solución general tiene la forma $y(\tilde{\rho}, x) = \alpha e^{\sqrt{-c^2 - \tilde{\rho}^2}x} + \beta e^{-\sqrt{-c^2 - \tilde{\rho}^2}x}$. Al evaluar las condiciones iniciales se obtiene $\alpha = -\beta = \left(2\sqrt{-c^2 - \tilde{\rho}^2}\right)^{-1}$, si posteriormente consideramos el espectro (3.4.11), entonces tenemos soluciones que satisfacen ambos conjuntos de condiciones iniciales

$$\mathbf{s}(\tilde{\rho}_n, x) = \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) x \right]}{\left(n + \frac{1}{2}\right)}, \quad (3.4.13)$$

notamos que son múltiplos de las eigenfunciones que obtuvimos directamente en (3.4.12).

Las constantes de normalización en este caso son

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_n &= \int_0^\pi \frac{\sin^2 \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right]}{\left(n + \frac{1}{2} \right)^2} dx = \left(\frac{2 [-\sin(2nx + x) + 2nx + x]}{(2n + 1)^3} \right)_0^\pi, \quad n \geq 0 \\ \Rightarrow \tilde{\alpha}_n &= \begin{cases} 2\pi & \text{si } n = 0 \\ \frac{\pi}{2(n + \frac{1}{2})^2} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}.\end{aligned}\quad (3.4.14)$$

Nuevamente obtenemos que las constantes de normalización coinciden con las reportadas para el potencial $q(x) \equiv 0$ en (2.3.38) y el espectro se encuentra desplazado por el potencial respecto al reportado en (2.3.37).

Podemos ahora usar directamente los resultados del teorema (9). Procedemos por partes, primero introducimos los datos espectrales $\{\alpha_n, \rho_n\}$, $\{\alpha_n^0, \rho_n^0\}$ y eigenfunciones correspondientes de los problemas $L(-c^2, 0, 0)$ y $L(0, 0, 0)$. Consideramos además que

$$\varphi(n, x) = T[\cos(nx)] = \cos\left(\sqrt{c^2 + n^2}x\right)$$

es la solución a (3.4.9) para $\rho = n$ con condiciones $\varphi(n, 0) = 1$ y $\varphi'(n, 0) = 0$. Se tiene entonces

$$\begin{aligned}K(x, t) &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[\frac{\cos(nx) \cos(\sqrt{n^2 - c^2}t)}{\alpha_n} - \frac{\cos(\sqrt{c^2 + n^2}x) \cos(nt)}{\alpha_n} \right] \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{s}(\tilde{\rho}_n, x) \frac{\sin(\tilde{\rho}_n t)}{\beta_n \tilde{\rho}_n} - \frac{(2n + 1)}{\pi} \mathbf{s}\left(n + \frac{1}{2}, x\right) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t \right\},\end{aligned}$$

donde ya hemos usado la coincidencia en las constantes de normalización (3.4.8) dadas por (3.4.7). A continuación introducimos los datos espectrales $\{\tilde{\alpha}_n, \tilde{\rho}_n\}$, $\{\tilde{\alpha}_n^0, \tilde{\rho}_n^0\}$ y eigenfunciones correspondientes a los problemas $\tilde{L}(-c^2, \pi, \frac{\pi}{2})$ y $\tilde{L}(0, \pi, \frac{\pi}{2})$. Usaremos además que

$$\mathbf{s}\left(n + \frac{1}{2}, x\right) = T\left[\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{\left(n + \frac{1}{2}\right)}\right] = \frac{\sin\left(\sqrt{c^2 + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2}x\right)}{\sqrt{c^2 + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2}}$$

es la solución a (3.4.9) para $\rho = (n + \frac{1}{2})$ con condiciones $\mathbf{s}(n + \frac{1}{2}, 0) = 0$ y $\mathbf{s}'(n + \frac{1}{2}, 0) = 1$. Se tiene entonces

$$K(x, t) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[\frac{\cos(nx) \cos(\sqrt{n^2 - c^2}t) - \cos(\sqrt{c^2 + n^2}x) \cos(nt)}{\alpha_n} \right] \right. \\ \left. + \frac{\sin[(n + \frac{1}{2})x] \sin\left(\sqrt{(n + \frac{1}{2})^2 - c^2}t\right)}{(n + \frac{1}{2}) \beta_n \tilde{\rho}_n} \right. \\ \left. - \frac{(2n + 1)}{\pi} \frac{\sin\left(\sqrt{c^2 + (n + \frac{1}{2})^2}x\right)}{\sqrt{c^2 + (n + \frac{1}{2})^2}} \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right] \right\}. \quad (3.4.15)$$

Por el teorema (9) sabemos además que $L(x, t)$ se obtiene intercambiando los roles de x y t en los términos de la serie que obtenemos para $K(x, t)$, sin olvidar que existe un signo de diferencia; es decir,

$$L(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[\frac{\cos(\sqrt{n^2 - c^2}x) \cos(nt) - \cos(nx) \cos(\sqrt{c^2 + n^2}t)}{\alpha_n} \right] \right. \\ \left. + \frac{\sin\left(\sqrt{(n + \frac{1}{2})^2 - c^2}x\right) \sin[(n + \frac{1}{2})t]}{\beta_n \tilde{\rho}_n (n + \frac{1}{2})} \right. \\ \left. - \frac{(2n + 1)}{\pi} \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right] \frac{\sin\left(\sqrt{c^2 + (n + \frac{1}{2})^2}t\right)}{\sqrt{c^2 + (n + \frac{1}{2})^2}} \right\}. \quad (3.4.16)$$

En [10] se encuentra la forma exacta de $K(x, t)$ para un potencial constante, el cual para nuestro caso $q(x) \equiv -c^2$ tiene la forma

$$K(x, t) = -\frac{1}{2(x-t)} \sqrt{c^2(x^2 - t^2)} J_1\left(\sqrt{c^2(x^2 - t^2)}\right), \quad (3.4.17)$$

donde J_1 es la función de Bessel del primer tipo.

Podemos entonces utilizar la expresión en (3.4.15) truncada hasta un N para aproximar el resultado que se obtiene de (3.4.17). Para el caso $x = t$ en vez de usar (3.4.17) consideramos la condición (1.2.9) del núcleo con $h = 0$, lo cual en este caso es

$$K(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x -c^2 dt = -\frac{c^2}{2} x. \quad (3.4.18)$$

También podemos poner a prueba la mejora que se obtiene al considerar la representación continua de $S(x, t)$ mediante el teorema (10) comparándola con la representación que se obtiene usando (3.2.13). Introduciendo los datos espectrales y las eigenfunciones que ya hemos calculado en la representación (3.3.31) tenemos que

$$\begin{aligned}
S(x, t) = & \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{2n+1}{\pi} [h_n^-(x, t) - h_n^+(t, x)] - \frac{c^2 [xu_n(x, t) + tu_n(t, x)]}{\pi (n + \frac{1}{2})} \right\} \\
& + \frac{1}{\pi} [h_0^-(x, t) - h_0^+(t, x)] + \frac{3}{\pi} [h_1^-(x, t) - h_1^+(t, x)] \\
& - \frac{2c^2}{\pi} [xu_0(x, t) + tu_0(t, x)] - \frac{2c^2}{3\pi} [xu_1(x, t) + tu_1(t, x)] \\
& + \frac{c^2}{4} (|x+t| - |x-t|), \tag{3.4.19}
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
h_n^\pm(x, t) & := \frac{\sin \left[\sqrt{(n + \frac{1}{2})^2 \pm c^2 x} \right]}{\sqrt{(n + \frac{1}{2})^2 \pm c^2}} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right], \quad n \geq 0 \\
u_n(x, t) & := \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right] \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right], \quad n \geq 0.
\end{aligned}$$

La representación dada por (3.2.13) ya se calculó en (3.2.27) salvo el cambio de signo (ya que $S(x, t) = -T[F_S](x, t)$). Introduciendo las eigenfunciones y datos espectrales que ya obtuvimos se tiene

$$\begin{aligned}
S(x, t) = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{\pi} \left\{ \sin \left[\sqrt{c^2 + \left(n + \frac{1}{2} \right)^2} x \right] \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right]}{\sqrt{c^2 + \left(n + \frac{1}{2} \right)^2}} \right. \\
& \left. - \sin \left[\sqrt{\left(n + \frac{1}{2} \right)^2 - c^2} t \right] \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right]}{\sqrt{\left(n + \frac{1}{2} \right)^2 - c^2}} \right\}. \tag{3.4.20}
\end{aligned}$$

Por otro lado, de (3.4.17) y (3.2.4) se obtiene una expresión exacta para $S(x, t)$ dada por

$$S(x, t) = -\frac{t}{x^2 - t^2} \sqrt{c^2 (x^2 - t^2)} J_1 \left(\sqrt{c^2 (x^2 - t^2)} \right). \tag{3.4.21}$$

El caso cuando $x = t$ lo podemos abordar con la condición (1.2.13) para $S(x, t)$, lo cual se reduce a

$$S(x, x) = -\frac{c^2}{2}x. \quad (3.4.22)$$

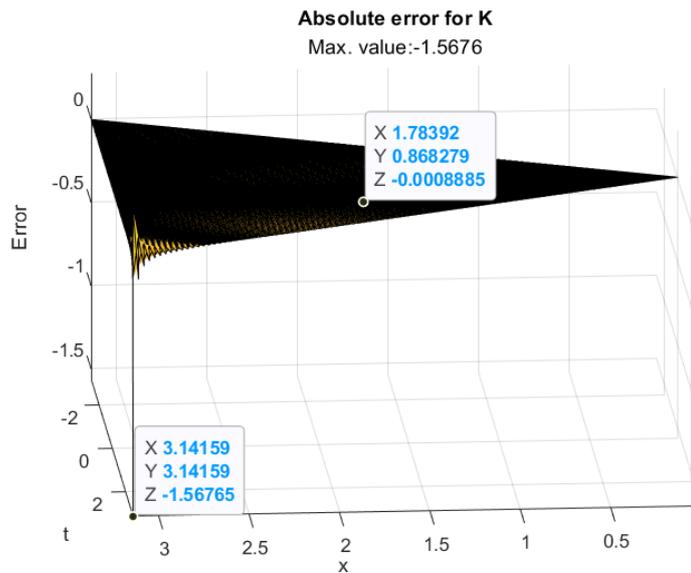


Figura 3.9: Error absoluto para K en la región $0 \leq |t| \leq x \leq \pi$ para un potencial $q(x) = -1$. Representación con discontinuidad en (π, π) mediante la serie (3.4.15), aproximación con 100 términos. Se muestra también el error absoluto en un punto alejado de (π, π) como referencia.

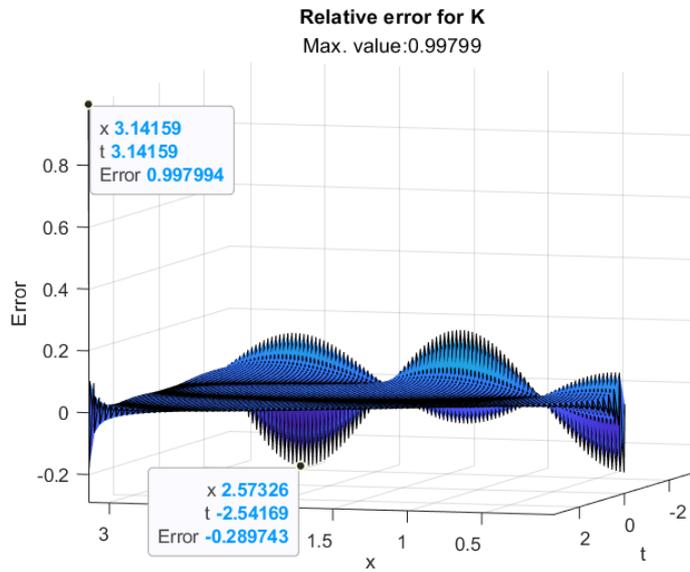


Figura 3.10: Error relativo para K en la región $0 \leq |t| \leq x \leq \pi$ para un potencial $q(x) = -1$. Representación con discontinuidad en (π, π) mediante la serie (3.4.15), aproximación con 100 términos. Se muestra también el error relativo en un punto alejado de (π, π) como referencia.

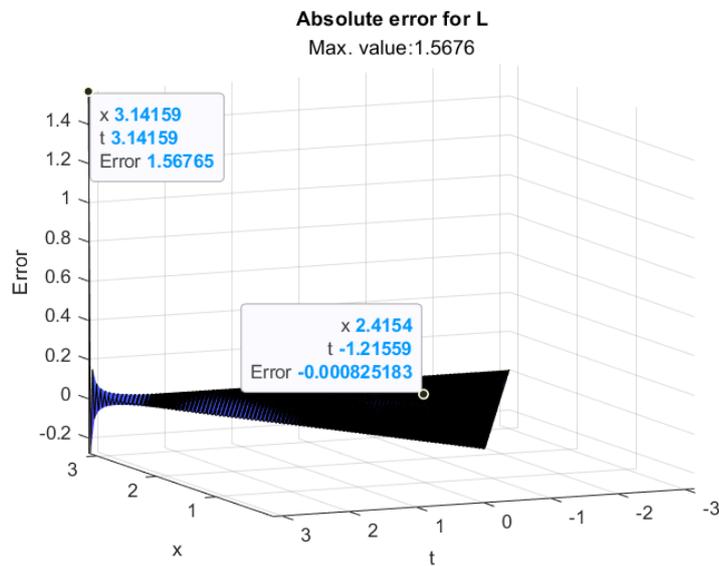


Figura 3.11: Error absoluto para L en la región $0 \leq |t| \leq x \leq \pi$ para un potencial $q(x) = -1$. Representación con discontinuidad en (π, π) mediante la serie (3.4.16), aproximación con 100 términos. Se muestra también el error absoluto en un punto alejado de (π, π) como referencia.

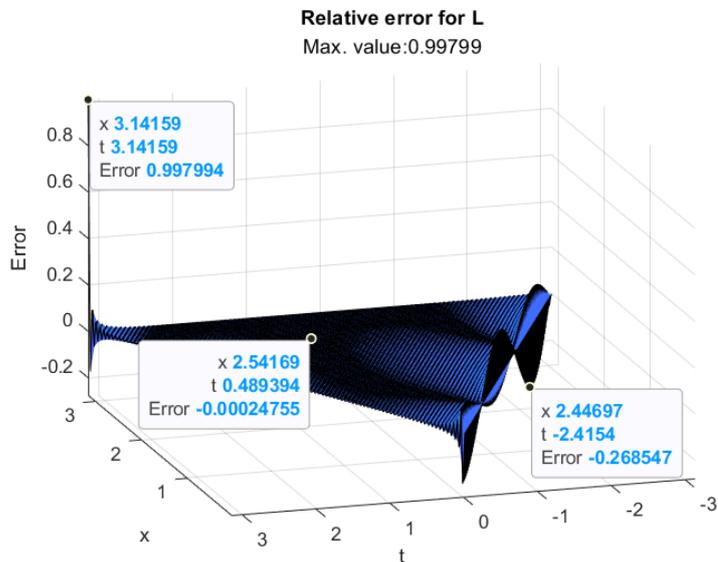


Figura 3.12: Error relativo para L en la región $0 \leq |t| \leq x \leq \pi$ para un potencial $q(x) = -1$. Representación con discontinuidad en (π, π) mediante la serie (3.4.16), aproximación con 100 términos. Se muestra también el error relativo en dos puntos alejados de (π, π) como referencia.

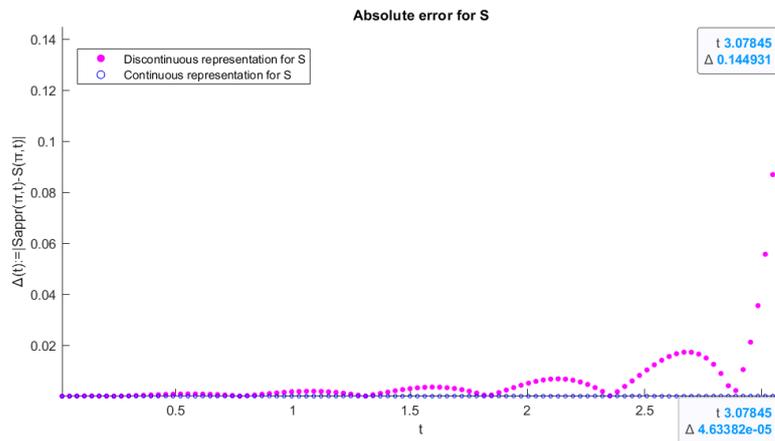


Figura 3.13: Error absoluto para S a lo largo de la recta (π, t) , $0 \leq t \leq \pi$ para un potencial $q(x) = -10$. Se compara el error absoluto de las representaciones continua y discontinua en (3.4.19) y (3.4.20) respectivamente. Aproximación con 1000 términos.

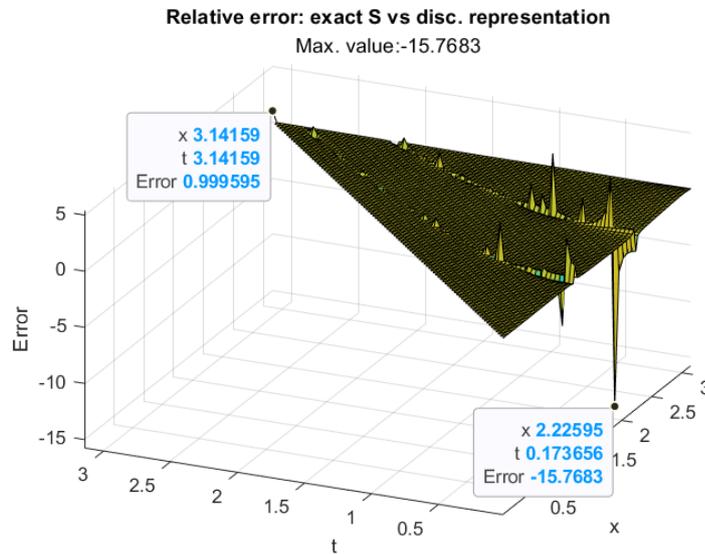


Figura 3.14: Error relativo para S en la región $0 \leq t \leq x \leq \pi$ para un potencial $q(x) = -10$. Se considera la representación con discontinuidad en (π, π) mediante la serie (3.4.20), aproximación con 1000 términos. Se muestra también el punto de error relativo máximo.

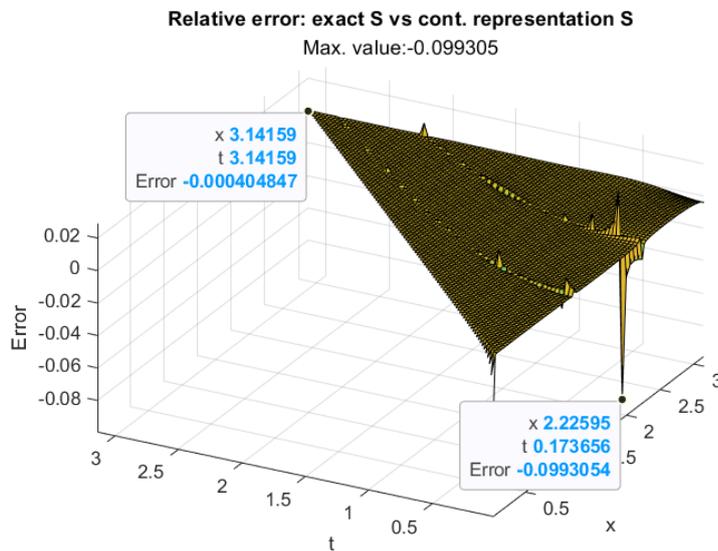


Figura 3.15: Error relativo para S en la región $0 \leq t \leq x \leq \pi$ para un potencial $q(x) = -10$. Se considera la representación continua mediante la serie (3.4.19), aproximación con 1000 términos. Se muestra también el punto de error relativo máximo.

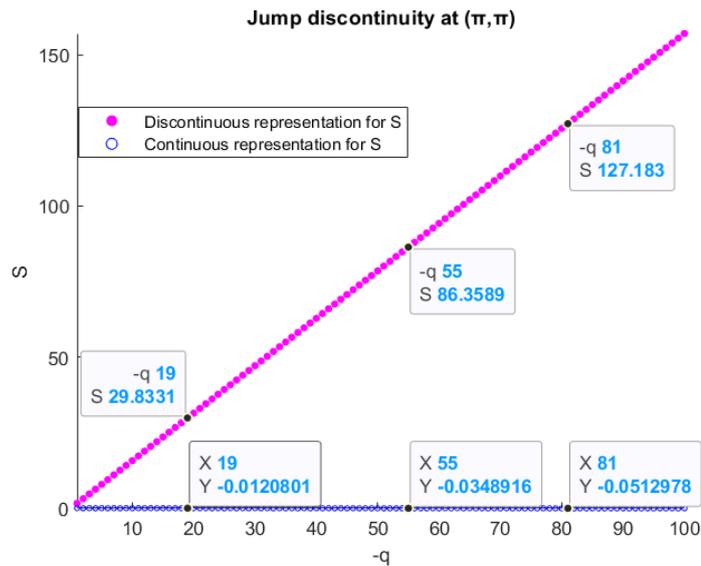


Figura 3.16: Se calcula $S(\pi, \pi)$ para valores de $-q$ constante entre 1 y 100. Se comparan las aproximaciones continua y discontinua para S en (3.4.19) y (3.4.20) respectivamente. Para esta familia de potenciales constantes se espera un comportamiento lineal en la discontinuidad para la función M_2 en (3.3.18), pues el salto depende únicamente de $\int_0^\pi q(t)dt$. Considerando que M_2 es parte de la descomposición para a_s en una cantidad finita de sumas [6] y que F_S está dada por (3.1.24), entonces esta discontinuidad se traslada a $S(x, t) = -T_{S,x}[F_S(x, t)]$. Observamos que para S también se tiene el comportamiento lineal en la discontinuidad.

Conclusiones y trabajo futuro

- Hasta ahora sólo se conocían las ecuaciones de Gelfand-Levitan para los núcleos G y S . Al obtener en este trabajo la ecuación respectiva para K se ha terminado de caracterizar a toda una familia $\{(K, G, S)\}_{q \in L_2[0, \pi]}$ de núcleos de transmutación para el operador de Shrödinger relacionados entre si por (3.2.5) en términos de las ecuaciones integrales que satisfacen. Además, como la función espectral F en la ecuación para K está determinada por $F(x, t) = \frac{1}{2} [F_G(x, t) + F_S(x, t)]$, entonces la caracterización citada queda determinada por los datos espectrales de los problemas $L(q(x), h, H)$ y $\tilde{L}(q(x), \pi, \frac{\pi}{2})$.
- En este trabajo se ha demostrado que basta conocer el espectro y las eigenfunciones normalizadas de $L(q(x), h, H)$ y $\tilde{L}(q(x), \pi, \frac{\pi}{2})$ para obtener representaciones de los núcleos K y L . Por el estudio de las propiedades de las eigenfunciones en la teoría de Sturm-Liouville podemos concluir que hemos encontrado representaciones para K y L en forma de una serie que involucra dos sistemas completos distintos para el espacio $L_2[0, \pi]$.
- Se obtuvieron también las representaciones espectrales continuas para los núcleos S y P , aportando de esta manera dos nuevos resultados a la teoría de operadores de transmutación. Considerando que las respectivas representaciones continuas para G y H se obtuvieron en [8], entonces por la relación (3.2.5) queda determinada también una representación espectral continua para K .

Aplicando la teoría de operadores de transmutación al problema directo de Sturm-Liouville, los resultados descritos en los tres puntos anteriores pueden ser relevantes al abordar el problema inverso, de manera que puede tener una gran cantidad de aplicaciones. En particular, para trabajo futuro podemos considerar aplicar estos resultados a problemas con valores en la frontera para ecuaciones diferenciales parciales. Un posible primer caso a evaluar es justamente el problema de Cauchy para la ecuación de Klein-Gordon con coeficiente variable descrito en la sección (1.3).

Apeñndice A

Código en MATLAB

Para la representación de los núcleos K , L y S obtenidos en la sección de [resultados numéricos](#) se desarrollaron códigos en Matlab R2023b.

Los parámetros son: potencial constante (**potential**), número de términos para la aproximación mediante las series (**n_approx**) y número de elementos para una partición uniforme del $[0, \pi]$ (**grid_dim**).

Con el código se crea una partición uniforme del $[0, \pi] \times [0, \pi]$ de **grid_dim**² elementos. Por cada punto (x, t) en dicha partición se calcula el valor exacto y las aproximaciones de los núcleos $K(x, t)$, $L(x, t)$ y $S(x, t)$. Finalmente se realizan las gráficas tanto de los núcleos exactos, las aproximaciones, los errores absolutos y los errores relativos.

A.1 Aproximación para K

```
%%%%%DEFINITIONS/INITIAL DATA%%%%%
potential= -1; %negative constant: q(x)=-c^2
n_approx= 100; %number of sum-terms for numeric
    approximation
grid_dim= 200; %Number of elements in partition to
    generate grid

%%%%%PROCESSING DATA%%%%%
%%GRID EVALUATIONS
partition= linspace((-1)*pi, pi, grid_dim); %
    partition for [-pi,pi]
k_grid= getKernelGrid(partition, potential, n_approx
    , 1);%K evaluated in grid
```

```

appr_k_grid= getKernelGrid(partition, potential,
    n_approx, 2);%K approximation in grid

%%REDUCED REGION
Kplot= getRegion(k_grid, 1);
apprKplot= getRegion(appr_k_grid, 1);

%%Absolute/relative errors for grid data
abs_error_kplot= apprKplot-Kplot;
rel_error_kplot= abs_error_kplot./Kplot;
rel_error_kplot(isnan(rel_error_kplot))=0;
rel_error_kplot= getRegion(rel_error_kplot,1);

%%PLOT TASKS
new_grid_dim=grid_dim/2;
[X,T] = meshgrid(partition,partition);
figure(1)
surf(T,X,Kplot);
title('Exact K');%Region I:  x 0 , |t| x
subtitle(['Grid: ',num2str(new_grid_dim),'x',num2str
    (new_grid_dim)]);
xlabel('x'), ylabel('t'), zlabel('K');
axis tight;

figure(2)
surf(T, X, apprKplot);
title('K series approximation');% Region I:  x 0 , |
    t| x
subtitle(['Grid: ',num2str(new_grid_dim),'x',num2str
    (new_grid_dim)]);
xlabel('x'), ylabel('t'), zlabel('K');
axis tight;

figure(3)
max_abs_errork= max(max(abs(abs_error_kplot)));
surf(T,X,abs_error_kplot);
title('Absolute error for K');
subtitle(['Max. value:', num2str((-1)*max_abs_errork
    (1))] );
xlabel('x'), ylabel('t'), zlabel('Error');

```

```

axis tight;

figure(4)
rel_error_kplot(isinf(rel_error_kplot)) = 0;
max_rel_errork= max(max(abs(rel_error_kplot)));
surf(T,X,rel_error_kplot);
title('Relative error for K');
subtitle(['Max. value:', num2str(max_rel_errork(1))
]);
xlabel('x'), ylabel('t'), zlabel('Error');
axis tight;

%Compute T[F_G] terms
function nTFGterm = getTFGn(n_term, dom_point,
    pot_value)
    nTFGterm_one = cos(n_term * dom_point(1)) * cos(
        sqrt(n_term^(2) + pot_value )*dom_point(2));
    nTFGterm_two = cos(sqrt(n_term^(2) - pot_value)*
        dom_point(1)) * cos(n_term * dom_point(2));
    if n_term == 0
        nTFGterm = (nTFGterm_one - nTFGterm_two)/pi;
    else
        nTFGterm = (nTFGterm_one - nTFGterm_two)/(pi
            /2);
    end
end

%Compute T[F_S] terms
function nTFSterm = getTFSn(n_term, dom_point,
    pot_value)
    nTFSterm_one = (2*(n_term + 1/2) * sin((n_term +
        1/2)*dom_point(1)) * sin(sqrt((n_term + 1/2)
            ^2 + pot_value )*dom_point(2))) / (pi *
        sqrt( (n_term + 1/2)^2 + pot_value ));
    nTFSterm_two = ((2*n_term + 1) * sin(sqrt((
        n_term + 1/2)^2 - pot_value)*dom_point(1))
        * sin((n_term + 1/2)*dom_point(2)))/(pi *
        sqrt((n_term + 1/2)^2 - pot_value));
    nTFSterm = nTFSterm_one - nTFSterm_two;
end

```

```

%Series approximation for kernel
function apprK = getApprK(in_point, pot_value,
    in_n_approx)
    nTFG_n= 0;
    for n_ind = 0:in_n_approx
        cos_n = getTFGn(n_ind, in_point, pot_value);
        sin_n = getTFSn(n_ind, in_point, pot_value);
        nTFG_n = nTFG_n + cos_n + sin_n;
    end
    apprK = -1/2 * nTFG_n; %approximation kernel
end

%Exact kernel
function bessellK = getExactK(dom_point, pot_value)
    bessell_arg= sqrt((-1)*(pot_value)*(dom_point(1)
        ^2-dom_point(2)^2));
    if dom_point(1)==dom_point(2)
        bessellK= (1/2)*(pot_value)*dom_point(1);
    else
        bessellK= (-1) * (bessell_arg * bessellj(1,
            bessell_arg))/(2*(dom_point(1)-dom_point
                (2)));
    end
end

%K evaluation grid
function kGrid = getKernelGrid(in_partition,
    pot_value, in_n_approx, option)
    k_matrix = zeros(length(in_partition));
    for n_index = 1:length(in_partition)%loop for x
        variable
            for m_index= 1:length(in_partition)%loop for
                t variable
                    eval_point = [in_partition(n_index),
                        in_partition(m_index)]; %(x,t)
                    coordinates
                    if option==1 %si queremos K exacto
                        z_nm= getExactK(eval_point,
                            pot_value);
                    else %si queremos k aproximado

```

```

                z_nm= getApprK(eval_point , pot_value
                    , in_n_approx);
            end
            k_matrix(n_index,m_index)= z_nm;
        end
    end
    kGrid= k_matrix;
end

%get region for graphs
function Kregion = getRegion(in_matrix, region)
    nrows = size(in_matrix, 1);
    new_matrix= in_matrix;
    for i = 1:nrows
        if i<=fix(nrows/2)
            if region==1
                new_matrix(i,:)= NaN;
            else
                new_matrix(:,i)= NaN;
            end
        else
            for j = 1:nrows
                if j>i || j<(nrows-i+1)
                    if region==1
                        new_matrix(i,j)= NaN;
                    else
                        new_matrix(j,i)= NaN;
                    end
                end
            end
        end
    end
    Kregion= new_matrix;
end

```

A.2 Aproximación para L

```

%%%%%DEFINITIONS/INITIAL DATA%%%%%
potential= -1; %negative constant: q(x)=-c^2

```

```

n_approx= 100; %number of sum-terms for numeric
    approximation
grid_dim= 200; %Number of elements in partition to
    generate grid

%%%%%PROCESSING DATA%%%%%
%%GRID EVALUATIONS
partition= linspace((-1)*pi, pi, grid_dim); %
    partition for [-pi,pi]
L_grid= getKernelGrid(partition, potential, n_approx
    , 1);%L evaluated in grid
appr_L_grid= getKernelGrid(partition, potential,
    n_approx, 2);%K approximation in grid

%%REDUCED REGION
Lplot= getRegion(L_grid, 2);
apprLplot= getRegion(appr_L_grid, 2);

%%Absolute/relative errors for grid data
abs_error_lplot= apprLplot-Lplot;
rel_error_lplot= abs_error_lplot./Lplot;
rel_error_lplot(isnan(rel_error_lplot))=0;
rel_error_lplot= getRegion(rel_error_lplot, 2);

%Print to screen
partition
data
L_grid
appr_L_grid
Lplot
apprLplot
abs(appr_L_grid-L_grid)
abs((appr_L_grid-L_grid)./L_grid)

%%PLOT TASKS
new_grid_dim=grid_dim/2;
[X,T] = meshgrid(partition,partition);
LplotI= getRegion(L_grid, 1);

```

```

figure(5)
surf(T,X,LplotI);
title('Exact L');% I:  x 0 , |t| x
subtitle(['Grid: ',num2str(new_grid_dim),'x',num2str
(new_grid_dim)]);
xlabel('x'), ylabel('t'), zlabel('L');
axis tight;

figure(6)
apprLplotI= getRegion(appr_L_grid, 1);
surf(T, X, apprLplotI);
title('L series approximation');% Region I:  x 0 , |
t| x
subtitle(['Grid: ',num2str(new_grid_dim),'x',num2str
(new_grid_dim)]);
xlabel('x'), ylabel('t'), zlabel('L');
axis tight;

abs_error_lplotI= apprLplotI-LplotI;
rel_error_lplotI= abs_error_lplotI./LplotI;
rel_error_lplotI(isnan(rel_error_lplotI))=0;
rel_error_lplotI= getRegion(rel_error_lplotI, 1);
max_abs_errorlI= max(max(abs(abs_error_lplotI)));
figure(7)
surf(T,X,abs_error_lplotI);
title('Absolute error for L');% Region I:  x 0 , |t|
x
subtitle(['Max. value:', num2str(max_abs_errorlI(1))
]);
xlabel('x'), ylabel('t'), zlabel('Error');
axis tight;

rel_error_lplotI(isinf(rel_error_lplotI)) = 0;
max_rel_errorlI= max(max(abs(rel_error_lplotI)));
figure(8)
surf(T,X,rel_error_lplotI);
title('Relative error for L');% Region I:  x 0 , |t|
x
subtitle(['Max. value:', num2str(max_rel_errorlI(1))
]);
xlabel('x'), ylabel('t'), zlabel('Error');

```

```
axis tight;
```

```
%Compute T[F_G] terms
```

```
function nTFGterm = getTFGn(n_term, dom_point,
    pot_value)
    nTFGterm_one = cos(n_term * dom_point(1)) * cos(
        sqrt(n_term^(2) + pot_value )*dom_point(2));
    nTFGterm_two = cos(sqrt(n_term^(2) - pot_value)*
        dom_point(1)) * cos(n_term * dom_point(2));
    if n_term == 0
        nTFGterm = (nTFGterm_one - nTFGterm_two)/pi;
    else
        nTFGterm = (nTFGterm_one - nTFGterm_two)/(pi
            /2);
    end
end
```

```
%Compute T[F_S] terms
```

```
function nTFSterm = getTFSn(n_term, dom_point,
    pot_value)
    nTFSterm_one = (2*(n_term + 1/2) * sin((n_term +
        1/2)*dom_point(1)) * sin(sqrt((n_term + 1/2)
            ^2 + pot_value )*dom_point(2))) / (pi *
        sqrt( (n_term + 1/2)^2 + pot_value ));
    nTFSterm_two = ((2*n_term + 1) * sin(sqrt((
        n_term + 1/2)^2 - pot_value)*dom_point(1))
        * sin((n_term + 1/2)*dom_point(2)))/(pi *
        sqrt((n_term + 1/2)^2 - pot_value));
    nTFSterm = nTFSterm_one - nTFSterm_two;
end
```

```
%L series approximation
```

```
function apprK = getApprK(in_point, pot_value,
    in_n_approx)
    nTFG_n= 0;
    for n_ind = 0:in_n_approx
        cos_n = getTFGn(n_ind, in_point, pot_value);
        sin_n = getTFSn(n_ind, in_point, pot_value);
```

```

        nTFG_n = nTFG_n + cos_n + sin_n;
    end
    apprK = -1/2 * nTFG_n; %approximation kernel
end

%Exact L
function besselK = getExactK(dom_point, pot_value)
    bessel_arg= sqrt((-1)*(pot_value)*(dom_point(1)
        ^2-dom_point(2)^2));
    if dom_point(1)==dom_point(2)
        besselK= (1/2)*(pot_value)*dom_point(1);
    else
        besselK= (-1) * (bessel_arg * besselj(1,
            bessel_arg))/(2*(dom_point(1)-dom_point
            (2)));
    end
end

%L evaluation grid
function kGrid = getKernelGrid(in_partition,
    pot_value, in_n_approx, option)
    k_matrix = zeros(length(in_partition));
    for n_index = 1:length(in_partition)%loop for x
        variable
            for m_index= 1:length(in_partition)%loop for
                t variable
                    eval_point = flip([in_partition(n_index)
                        ,in_partition(m_index)]); %(x,t)
                    coordinates for L are the (t,x) ones
                    for K
                        if option==1 %si queremos L exacto
                            z_nm= getExactK(eval_point,
                                pot_value);
                        else %si queremos L aproximado
                            z_nm= getApprK(eval_point, pot_value
                                , in_n_approx);
                        end
                    k_matrix(n_index,m_index)= (-1)*z_nm; %
                        recuerde que L(x,t)=-K(t,x)
                end
            end
        end
    end
end

```

```

        end
    end
    kGrid= k_matrix;
end

function Kregion = getRegion(in_matrix, region)
    nrows = size(in_matrix, 1);
    new_matrix= in_matrix;
    for i = 1:nrows
        if i<=fix(nrows/2)
            if region==1
                new_matrix(i,:)= NaN;
            else
                new_matrix(:,i)= NaN;
            end
        else
            for j = 1:nrows
                if j>i || j<(nrows-i+1)
                    if region==1
                        new_matrix(i,j)= NaN;
                    else
                        new_matrix(j,i)= NaN;
                    end
                end
            end
        end
    end
    Kregion= new_matrix;
end

```

A.3 Aproximación para S

```

%%%%DEFINITIONS/INITIAL DATA%%%%
potential= -10; %negative constant: q(x)=-c^2
n_approx= 1000; %number of sum-terms for numeric
approximation
ev_point= [x, t]; %evaluation coordinates
grid_dim= 200; %Number of elements in partition to

```

```

generate grid

%%%%%PROCESSING DATA%%%%%
%%GRID EVALUATIONS
partition= linspace((-1)*pi, pi, grid_dim); %
    partition for [-pi,pi]
s_grid= getKernelGrid(partition, potential, n_approx
    , 1);%S evaluated in grid
appr_s_grid= getKernelGrid(partition, potential,
    n_approx, 2);%S approximation in grid

%%REDUCED REGION
splot= getRegion(s_grid, 1);
apprSplot= getRegion(appr_s_grid, 1);

%%Absolute/relative errors for grid data
abs_error_splot= apprSplot-splot;
rel_error_splot= abs_error_splot./splot;
rel_error_splot(isnan(rel_error_splot))=0;
rel_error_splot= getRegion(rel_error_splot,1);

%%PLOT TASKS
[X,T] = meshgrid(partition,partition);
figure(1)
surf(T,X,splot);
new_grid_dim=grid_dim/2;
title('Exact S');
subtitle(['Grid: ',num2str(new_grid_dim),'x',num2str
    (new_grid_dim)]);
xlabel('x'), ylabel('t'), zlabel('S');
axis tight;

figure(2)
surf(T, X, apprSplot);
title('S discontinous representation');
subtitle(['Grid: ',num2str(new_grid_dim),'x',num2str
    (new_grid_dim)]);
xlabel('x'), ylabel('t'), zlabel('S');
axis tight;

```

```

figure(3)
surf(T,X,apprContSplot);
title('S continuous representation');
subtitle(['Grid: ',num2str(new_grid_dim),'x',num2str
    (new_grid_dim)]);
xlabel('x'), ylabel('t'), zlabel('S');
axis tight;

%S approximation complete region
max_abs_errors= max(max(abs(abs_error_splot)));
figure(4)
surf(T,X,abs_error_splot);
title('Absolute error S vs disc. representation');
subtitle(['Max. value:', num2str(max_abs_errors(1))
    ]);
xlabel('x'), ylabel('t'), zlabel('Error');
axis tight;

%Compute T[F_S] terms
function nTFSterm = getTFSn(n_term, dom_point,
    pot_value)
    nTFSterm_one = (2*(n_term + 1/2) * sin((n_term +
        1/2)*dom_point(1)) * sin(sqrt((n_term + 1/2)
        ^2 + pot_value )*dom_point(2))) / (pi *
        sqrt( (n_term + 1/2)^2 + pot_value ));
    nTFSterm_two = ((2*n_term + 1) * sin(sqrt((
        n_term + 1/2)^2 - pot_value)*dom_point(1))
        * sin((n_term + 1/2)*dom_point(2)))/(pi *
        sqrt((n_term + 1/2)^2 - pot_value));
    nTFSterm = nTFSterm_two - nTFSterm_one;
end

%S series approximation
function apprS = getApprS(in_point, pot_value,
    in_n_approx)
    nTFS_n= 0;
    for n_ind = 0:in_n_approx
        sin_n = getTFSn(n_ind, in_point, pot_value);
        nTFS_n= nTFS_n + sin_n;
    end
end

```

```

    apprS= nTFS_n;
end

function firstSeries = getFirstSeries(n_term,
    dom_point, pot_value)
    common_n= (n_term + 1/2)^2;
    first_sqrt= sqrt(common_n - pot_value);
    second_sqrt= sqrt(common_n + pot_value);
    pre_first_term= sin(first_sqrt * dom_point(1))/
        first_sqrt;
    first_term= pre_first_term*sin((n_term + 1/2)*
        dom_point(2));
    pre_second_term= sin(second_sqrt * dom_point(2))
        /second_sqrt;
    second_term= pre_second_term * sin((n_term +
        1/2)*dom_point(1));
    diff_term= first_term - second_term;
    coef= (2*n_term + 1)/pi;
    firstSeries= coef * diff_term;
end

```

```

function secondSeries = getSecondSeries(n_term,
    dom_point, pot_value)
    common_n= n_term + 1/2;
    x_arg= common_n*dom_point(1);
    t_arg= common_n*dom_point(2);
    first_term= dom_point(1)*cos(x_arg)*sin(t_arg);
    second_term= dom_point(2)*cos(t_arg)*sin(x_arg);
    sum_term= first_term + second_term;
    coef= pot_value/(pi*common_n);
    secondSeries= coef * sum_term;
end

```

```

function apprContS = getContApprS(in_point,
    pot_value, in_n_approx)
    n_ind = 0;
    cum_sum = 0;
    for n_ind = 2:in_n_approx
        firstTerm = getFirstSeries(n_ind, in_point,

```

```

        pot_value);
        secondTerm = getSecondSeries(n_ind, in_point
            , pot_value);
        cum_sum= cum_sum + firstTerm + secondTerm;
    end
    extra_sum_one= getFirstSeries(0, in_point,
        pot_value);
    extra_sum_one= extra_sum_one + getFirstSeries(1,
        in_point, pot_value);
    extra_sum_two= getSecondSeries(0, in_point,
        pot_value);
    extra_sum_two= extra_sum_two + getSecondSeries
        (1, in_point, pot_value);
    extra_sum= extra_sum_one + extra_sum_two;
    abs_diff= abs(in_point(1)+in_point(2))-abs(
        in_point(1)-in_point(2));
    independent_term = (pot_value/4)*abs_diff;
    extra_sum= extra_sum - independent_term;
    apprContS= cum_sum + extra_sum;
end

```

%Exact S

```

function besselK = getExactK(dom_point, pot_value)
    bessel_arg= sqrt((-1)*(pot_value)*(dom_point(1)
        ^2-dom_point(2)^2));
    if dom_point(1)==dom_point(2)
        besselK= (1/2)*(pot_value)*dom_point(1);
    else
        besselK= (-1) * (bessel_arg * besselj(1,
            bessel_arg))/(2*(dom_point(1)-dom_point
            (2)));
    end
end

```

%S evaluation grid

```

function sGrid = getKernelGrid(in_partition,
    pot_value, in_n_approx, option)
    s_matrix = zeros(length(in_partition));
    for n_index = 1:length(in_partition)%loop for x

```

```

variable
  for m_index= 1:length(in_partition)%loop for
    t variable
      eval_point = [in_partition(n_index),
                    in_partition(m_index)]; %(x,t)
      coordinates
      if option==1 %si queremos S exacto
        alt_eval_point= [eval_point(1), (-1)
                          *eval_point(2)];
        z_nm= getExactK(eval_point,
                        pot_value)-getExactK(
                        alt_eval_point, pot_value);
      elseif option==2 %si queremos S
        aproximado
          z_nm= getApprS(eval_point, pot_value
                          , in_n_approx);
      else % versi\ 'on continua
        z_nm= getContApprS(eval_point,
                            pot_value, in_n_approx);
      end
      s_matrix(n_index,m_index)= z_nm;
    end
  end
  sGrid= s_matrix;
end

function Sregion = getRegion(in_matrix, region)
  nrows = size(in_matrix, 1);
  new_matrix= in_matrix;
  for i = 1:nrows
    if i<=fix(nrows/2)
      if region==1
        new_matrix(i,:)= NaN;
      else
        new_matrix(:,i)= NaN;
      end
    else
      for j = 1:nrows
        if j>i || j<=fix(nrows/2)
          if region==1
            new_matrix(i,j)= NaN;
          end
        end
      end
    end
  end
end

```

```
                else
                    new_matrix(j,i)= NaN;
                end
            end
        end
    end
end
Sregion= new_matrix;
end
```

Referencias

- [1] H. Begehr and R. P. Gilbert. “Transformations, transmutations, and kernel functions, vol. 1-2”. In: *Longman Scientific Technical, Harlow* 36.3 (1992), pp. 524–525.
- [2] A. Boumenir. “The approximation of the transmutation kernel”. In: *J. Math. Phys.* 47.1 (2006), pp. 013505, 9.
- [3] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, Dordrecht, Heidelberg, 2011.
- [4] J. Delsarte. “Sur certaines transformations fonctionnelles relative aux equations lineaires aux derives partielles du second ordre”. In: *C. R. Acad. Sci. Paris* 206.1 (1938), pp. 178–182.
- [5] G. Freiling and V. A. Yurko. *Inverse Sturm-Liouville problems and their applications*. Nova Science Publishers, Huntington, 2001.
- [6] T. N. Harutyunyan and A. M. Tonoyan. “Some properties of the kernel of a transmutation operator”. In: *Operator Theory and Harmonic Analysis OTHA 2020, Part I – New General Trends and Advances of the Theory* (2021), pp. 203–219.
- [7] A. N. Karapetyants and V. V. Kravchenko. *Methods of mathematical physics: Classical and modern*. Birkhäuser, Cham, 2022.
- [8] K. V. Khmelnytskaya, V. V. Kravchenko, and S. M. Torba. “A representation of the transmutation kernels for the Schrödinger operator in terms of eigenfunctions and applications”. In: *Applied Mathematics and Computation* 353 (2019), pp. 274–281.
- [9] V. V. Kravchenko. “Construction of a transmutation for the one dimensional Schrödinger operator and a representation for solutions”. In: *Applied Mathematics and Computation* 328 (2018), pp. 75–81.
- [10] V. V. Kravchenko. *Direct and inverse Sturm-Liouville problems: A method of solution*. Birkhäuser, Cham, 2020.

- [11] V. V. Kravchenko, L. J. Navarro, and S. M. Torba. “Representation of solutions to the one-dimensional Schrödinger equation in terms of Neumann series of Bessel functions”. In: *Applied Mathematics and Computation* 314 (2017), pp. 173–192.
- [12] V. V. Kravchenko and S. M. Torba. “Transmutations for Darboux transformed operators with applications”. In: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 45.7 (2012), p. 075201.
- [13] R. Kress. *Linear integral equations*. Springer, New York, 1999.
- [14] B. M. Levitan and I. M. Gelfand. “On the determination of a differential equation from its spectral function”. In: *Izvestiya AN SSSR, Ser. matem* 15(4) (1951), pp. 309–360.
- [15] B. M. Levitan and I. S. Sargsjan. *Sturm-Liouville and Dirac operators*. Mathematics and its Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.
- [16] J. L. Lions. “Solutions élémentaires de certains opérateurs différentiels à coefficients variables”. In: *J. Math.* 36 (1957), pp. 57–64.
- [17] V. A. Marchenko. “Some questions of the theory of one-dimensional linear differential operators of the second order”. In: *Trans. Moscow Math. Soc.* 1952.1 (1952), pp. 327–420.
- [18] V. A. Marchenko. *Sturm-Liouville operators and applications: Revised Edition*. AMS Chelsea Pub., Providence, 2011.
- [19] M. Miklavčič. *Applied functional analysis and partial differential equations*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, Singapore, New Jersey, London, 1998.
- [20] A. Povzner. “On differential equations of Sturm-Liouville type on a half-line”. (in Russian). In: *Mat. Sb.* 23.1 (1948), pp. 3–52.
- [21] V. A. Yurko. *Introduction to the theory of inverse spectral problems*. (in Russian). Fizmatlit, Moscow, 2007.