



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS  
DEL  
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

**UNIDAD ZACATENCO**

**PROGRAMA DE DOCTORADO EN CIENCIAS EN  
SISTEMAS AUTÓNOMOS DE NAVEGACIÓN AÉREA Y SUBMARINA**

**"Desarrollo de un sistema de control para dirigir el vector  
de empuje en un motor cohete"**

**T E S I S**

Que presenta

**M. en C. Jhonatan Fernando Eulopa Hernandez**

Para obtener el grado de

**Doctor en Ciencias**

**en**

**Sistemas Autónomos de Navegación Aérea y Submarina**

Directores de Tesis:

Dr. Sergio Rosario Salazar Cruz

Dr. Rogelio Lozano Leal

CIUDAD DE MÉXICO

SEPTIEMBRE 2024.



# Agradecimientos

---

## **A mi familia**

Para empezar me gustaría agradecer a mis padres Olga y Fernando por su gran amor y apoyo incondicional a lo largo de toda mi vida, además de motivarme para alcanzar mis metas a pesar de todas las adversidades. A mi hermana Zuleyma por permanecer a mi lado en todo momento y darme el aliento necesario para nunca rendirme ante los retos de la vida. Y sin olvidar mencionar a las personas que siempre han creído en mi y me han dado su apoyo incondicional para continuar con mis sueños, a mis abuelitos (Teo y Angelina) y a mis tíos que tanto quiero.

## **A Pam**

Por motivarme siempre a ser una mejor persona y ayudarme a seguir mis sueños, acompañándome siempre de la mano para superar cualquier reto.

## **A mis directores de tesis**

Por siempre estar al pendiente durante mi formación tanto profesional como personal. Gracias por su dedicación y paciencia.

## **A mis amigos del laboratorio**

Por esas palabras de aliento que recibí de ustedes durante mis momentos más difíciles y esas charlas inolvidables durante nuestros almuerzos.

## **Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCyT)**

Por el financiamiento otorgado para poder realizar mis estudios de doctorado.

## **Al Ing. Miguel Álvarez Montalvo<sup>†</sup>**

Por el impulso, motivación y gran apoyo que me brindó esta gran persona para realizar mis estudios de Doctorado. Siempre recordaré con gran aprecio sus consejos y los tomaré como guía de vida.

**Sin ustedes no hubiera podido culminar esta etapa de mi vida.**



# Resumen

---

En la ingeniería aeroespacial, la precisión en el control de la trayectoria y la orientación de los vehículos lanzadores es crucial para el éxito de las misiones espaciales. Los Sistemas de Control de Vector de Empuje (TVC) son esenciales para este propósito, pero enfrentan desafíos significativos en términos de respuesta dinámica y adaptabilidad bajo diversas condiciones de vuelo. Aunque los sistemas TVC pueden controlar la trayectoria del vehículo mediante una variedad de configuraciones, tener el sistema físico no lo es todo.

Por tal motivo, esta tesis se centra en el desarrollo y evaluación de algoritmos de control para los sistemas TVC. A través de un enfoque combinado de teoría de control y simulaciones numéricas, se propone una serie de algoritmos. Los resultados demuestran que estos algoritmos pueden guiar el control de vector de empuje para controlar el ascenso y descenso vertical del cohete o simplemente mantener un vuelo estacionario.

Además, se hacen propuestas de prototipos de cohetes que utilizan motores sin escobillas y hélices como sistema de propulsión. Esta tesis contribuye significativamente a la literatura existente al ofrecer algoritmos de control que pueden ser implementados en futuros sistemas de propulsión de cohetes.

# Abstract

---

In aerospace engineering, precision in controlling the trajectory and orientation of launch vehicles is crucial to the success of space missions. Thrust Vector Control (TVC) Systems are essential for this purpose, but face significant challenges in terms of dynamic response and adaptability under various flight conditions. Although TVC systems can control the vehicle's trajectory through a variety of settings, having the physical system is not everything.

For this reason, this thesis focuses on the development and evaluation of control algorithms for TVC systems. Through a combined approach of control theory and numerical simulations, a series of algorithms are proposed. The results demonstrate that these algorithms can guide thrust vector control to control the vertical rise and descent of the rocket or simply maintain a hover.

In addition, proposals are made for rocket prototypes that use brushless motors and propellers as a propulsion system. This thesis contributes significantly to the existing literature by offering control algorithms that can be implemented in future rocket propulsion systems.

# Índice general

---

<b>Agradecimientos</b>	<b>I</b>
<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>Abstract</b>	<b>IV</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>VIII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Planteamiento del problema . . . . .	2
1.3. Justificación . . . . .	2
1.4. Objetivo general . . . . .	3
1.5. Objetivos específicos . . . . .	3
1.6. Alcance de la tesis . . . . .	3
1.7. Estructura de la tesis . . . . .	4
1.8. Contribución de la tesis . . . . .	4
<b>2. Marco teórico</b>	<b>5</b>
2.1. Sistemas de control de vector de empuje . . . . .	7
2.2. Funcionamiento del TVC . . . . .	10
2.3. Mecanismos de control de vector de empuje . . . . .	13
<b>3. Estado del arte</b>	<b>17</b>

<b>4. Dinámica del cohete</b>	<b>23</b>
4.1. Modelo dinámico de un cohete . . . . .	24
4.2. Sistemas de fase mínima y de fase no mínima . . . . .	27
4.2.1. Sistemas estables de fase mínima . . . . .	27
4.2.2. Sistemas estables de fase no mínima . . . . .	27
4.2.3. Sistemas de fase no mínima en general . . . . .	29
<b>5. Algoritmos de control propuestos</b>	<b>30</b>
5.1. Modelo para el control de desplazamiento horizontal . . . . .	31
5.2. Dominio de convergencia . . . . .	35
5.3. Modelo para el control de altitud . . . . .	40
5.3.1. Simulaciones numéricas para el control de altitud . . . . .	42
5.4. Modelo para el control de velocidad horizontal . . . . .	43
5.4.1. Simulación numérica para el control de velocidad horizontal . . . . .	47
5.5. Modelo para el control de posición de un cohete por aproximación . . . . .	48
5.5.1. Simulación del algoritmo de control por aproximación . . . . .	50
5.6. Modelo para el control de posición de un cohete utilizando doble saturación	53
5.6.1. Simulación del algoritmo de control por doble saturación . . . . .	55
5.7. Modelo para el control de posición de un cohete utilizando saturaciones variables . . . . .	58
5.7.1. Simulación del algoritmo de control por saturaciones dinámicas . . . . .	59
5.8. Modelo para el control de posición de un cohete utilizando una saturación . . . . .	62
5.8.1. Simulación del algoritmo de control utilizando una saturación . . . . .	64
5.9. Análisis de resultados . . . . .	68
<b>6. Diseño y construcción de prototipo</b>	<b>70</b>
6.1. Consideraciones de Diseño . . . . .	71
6.2. Componentes electrónicos . . . . .	73
6.3. Propuesta de prototipo 1 . . . . .	75
6.3.1. Diseño en CAD . . . . .	75
6.3.2. Piezas impresas en PLA . . . . .	78
6.4. Propuesta de prototipo 2 . . . . .	82
6.5. Propuesta de prototipo 3 . . . . .	84



<b>7. Conclusiones</b>	<b>86</b>
7.1. Recomendaciones para trabajos futuros . . . . .	87
<b>8. Publicaciones</b>	<b>88</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>90</b>

# Índice de figuras

---

2.1. Diagramas esquemáticos de ocho mecanismos TVC diferentes . . . . .	8
2.2. Representación de fuerzas que actúan en el cohete . . . . .	10
2.3. Diagrama de TVC . . . . .	11
2.4. Circuito de referencia general representado . . . . .	11
2.5. Elementos básicos del sistema de control de vuelo . . . . .	12
2.6. Sistema de Actuación montado en una tobera flexible . . . . .	13
2.7. Disposición esquemática del TVC . . . . .	14
2.8. Lazo de control del vector empuje . . . . .	14
2.9. Vista trasera del Thrust Vector Control del misil SAPPHIRE-1 . . . . .	15
2.10. Vista trasera del Thrust Vector Control del misil AAM-5 Kai . . . . .	15
4.1. Diagrama de fuerzas del cohete . . . . .	24
4.2. Fuerza $F$ y sus componentes . . . . .	24
4.3. Diagrama de representación de momentos de inercia . . . . .	25
5.1. Evolución de los estados $x, y, \theta, \delta$ . . . . .	42
5.2. Evolución de los estados $x, y, \theta, \delta$ . . . . .	42
5.3. Evolución de los estados $y, \theta, \dot{x}, \delta$ . . . . .	47
5.4. Evolución de los estados $x, y, \theta$ . . . . .	50
5.5. Evolución de los estados $x, y, \theta$ . . . . .	50
5.6. Evolución de los estados $x, y, \theta$ . . . . .	51
5.7. Evolución de los estados $x, y, \theta$ . . . . .	51
5.8. Evolución de los estados $x, y, \theta$ . . . . .	52
5.9. Evolución de los estados $x, y, \theta, \tau$ . . . . .	55

5.10. Evolución de los estados $x, y, \theta, \tau$ . . . . .	55
5.11. Evolución de los estados $x, y, \theta, \tau$ . . . . .	56
5.12. Evolución de los estados $x, y, \theta, \tau$ . . . . .	56
5.13. Evolución de los estados $x, y, \theta, \tau$ . . . . .	57
5.14. Evolución de los estados $x, y, \theta, \tau$ . . . . .	59
5.15. Evolución de los estados $x, y, \theta, \tau$ . . . . .	59
5.16. Evolución de los estados $x, y, \theta, \tau$ . . . . .	60
5.17. Evolución de los estados $x, y, \theta, \tau$ . . . . .	60
5.18. Evolución de los estados $x, y, \theta, \tau$ . . . . .	61
5.19. Evolución de los estados $x, y, \theta, \tau$ . . . . .	64
5.20. Evolución de los estados $x, y, \theta, \tau$ . . . . .	64
5.21. Evolución de los estados $x, y, \theta, \tau$ . . . . .	65
5.22. Evolución de los estados $x, y, \theta, \tau$ . . . . .	65
5.23. Evolución de los estados $x, y, \theta, \tau$ . . . . .	66
5.24. Evolución de los estados $x, y, \theta, \tau$ . . . . .	66
5.25. Evolución de los estados $x, y, \theta, \tau$ . . . . .	67
6.1. Servomotores HK15178 . . . . .	73
6.2. Motores DYS Fire FPV Race Edition de 2600KV . . . . .	73
6.3. Hélices 5051 . . . . .	74
6.4. Pixhawk PX4 2.4.8 . . . . .	74
6.5. Estructura interna del cono . . . . .	75
6.6. Base de los motores . . . . .	75
6.7. Estructura del fuselaje . . . . .	76
6.8. Canards y cono del cohete . . . . .	76
6.9. Vistas del cohete en CAD . . . . .	77
6.10. cono y canards ensamblados . . . . .	78
6.11. Base para sistemas de electrónicos de control . . . . .	79
6.12. Base de servomotores y Superficie de control inferior (Aleta) . . . . .	79
6.13. Costilla y larguero del fuselaje . . . . .	80
6.14. Base para soportes de motores con las hélices ensambladas . . . . .	80
6.15. Prototipo ensamblado (a)Vista lateral (b)Vista frontal . . . . .	81
6.16. Vistas del cohete en CAD . . . . .	82

6.17. Segunda propuesta de Prototipo . . . . .	83
6.18. Vistas del cohete en CAD . . . . .	84
6.19. Tercer propuesta de Prototipo . . . . .	85
8.1. Control of the PVTOL with Strong Input Coupling . . . . .	88
8.2. Nonlinear control of a thrust vectored rocket . . . . .	89

# **Introducción**

---

## **1.1. Motivación**

La tecnología espacial tiene una gran variedad de aplicaciones y los sistemas de propulsión son una de las más desarrolladas. Estos sistemas ayudan a colocar en órbita numerosos dispositivos espaciales como satélites, telescopios, Rovers, entre otros. Sin embargo, para colocar cualquier objeto en una posición orbital, es necesario controlar la trayectoria utilizando sistemas que se denominan TVC (Thrust Vector Control) para aumentar la eficiencia y seguridad de las misiones espaciales.

Este tipo de sistemas TVC es utilizado en muchos vehículos de lanzamiento modernos y es esencial para la capacidad de controlar precisamente el vuelo del cohete, lo que es crucial para misiones que requieren alta precisión, como el lanzamiento de satélites en órbitas específicas o misiones tripuladas.

En el contexto actual de exploración espacial, donde el reciclaje de los lanzadores se ha vuelto un tema central, el estudio de sistemas TVC eficientes es fundamental para permitir aterrizajes precisos y seguros, lo que directamente afecta la viabilidad económica de las misiones.

## **1.2. Planteamiento del problema**

Los motores cohete son sistemas especializados que dan el empuje necesario para que se coloque tecnología en el espacio, pero los sistemas TVC son los que brindan la capacidad de controlar la trayectoria del vehículo. Esta tecnología se considera de uso militar ya que también es utilizada para el desarrollo de misiles, lo que la hace de difícil acceso para los ciudadanos obtener información precisa sobre cómo funcionan estos sistemas especializados de un motor cohete.

A pesar de los significativos avances en la tecnología de propulsión de cohetes, los sistemas de Control de Vector de Empuje (TVC) enfrentan varios desafíos técnicos que limitan su eficiencia y confiabilidad. Parte importante de este sistema es el algoritmo complejo de control que da las instrucciones a los sistemas físicos. Con el fin de dar solución a esta problemática se han desarrollado algoritmos partiendo del modelo dinámico del cohete para dar estabilidad al sistema por diferentes métodos matemáticos de control, lo cual sigue siendo actualmente un reto.

## **1.3. Justificación**

La cohería en México es un área de oportunidades para el desarrollo de investigación y fabricación de tecnología espacial nacional. Ya que estos vehículos son los encargados de colocar en órbita satélites y con ello construir la infraestructura necesaria para mantener en comunicación a la sociedad.

Por tal motivo, al realizar investigación en los subsistemas de propulsión como lo es el control de vector de empuje (TVC - Thrust Vector Control) se logra contribuir con uno de los subsistemas más complejos que componen a un cohete para garantizar el control preciso de la trayectoria y la orientación de los vehículos lanzadores, además de reducir riesgo de fallas en misiones para la seguridad de las cargas útiles costosas y potencialmente de las tripulaciones humanas.

Para lo cual se propone el desarrollo de un sistema de control para dirigir el vector de empuje de un cohete, con el fin de contribuir al desarrollo de sistemas de control de cohetes con tecnología espacial nacional.

---

## 1.4. Objetivo general

Desarrollar varias estrategias de control para el vector de empuje (Thrust Vector Control - TVC) de un motor cohete con el fin de realizar un seguimiento de trayectoria durante su fase propulsiva y se logre tener un vuelo estacionario.

## 1.5. Objetivos específicos

- Examinar los algoritmos de control que existen actualmente para su aplicación en los sistemas de control de vector de empuje (TVC).
- Desarrollar varios algoritmos de control del sistema simplificado de un cohete, que sea capaz de estabilizar y lograr el control de orientación del sistema. Se estudiarán algoritmos de control por compensación no lineal y aproximación para ángulos pequeños de orientación.
- Proponer y evaluar por simulación diferentes algoritmos de control para la estabilización de trayectoria de un cohete. Enfocado en el control de ascenso, descenso y traslación para conservar la posición vertical del cohete.

## 1.6. Alcance de la tesis

Esta tesis se enfoca en el desarrollo de algoritmos para el Control de Vector de Empuje (TVC) de un cohete. Esto con el objetivo de controlar su trayectoria para realizar un despegue y aterrizaje vertical, logrando que el vehículo realice un vuelo estacionario.

Cada uno de los algoritmos de control propuestos funciona de diferente manera, pero con el mismo objetivo de estabilizar el sistema. Por otra parte, se plantea la propuesta de un cohete con propulsión eléctrica que funciona a través de dos motores sin escobillas colocados en configuración coaxial con sus respectivas hélices de cada uno para generar el empuje necesario para elevar el cohete.

---

## **1.7. Estructura de la tesis**

Esta tesis está estructurada de la siguiente forma: Capítulo 1 Introducción, describe la del proyecto de tesis y sus requerimientos. El Capítulo 2 presenta las bases del sistema que se esta trabajando. El Capítulo 3 muestra lo que se ha investigado sobre el tema propuesto por otros autores y lo que se plantea hacer diferente a ellos. El Capítulo 4 aborda los modelos dinámicos en 2D de un cohete. Los algoritmos de control propuestos y los resultados obtenidos en la simulación numérica se analizan en el Capítulo 5. Por otra parte, en el Capítulo 6 se muestran las propuestas de prototipo. Las conclusiones se muestran en el Capítulo 7 y finalmente, en el Capítulo 8 se pueden observar los artículos desarrollados.

## **1.8. Contribución de la tesis**

El estado del arte en el campo del control de cohetes propulsados y guiados por toberas orientables sera ampliamente descrito en el Capítulo 3. En forma sintética, las estrategias de control que se encuentran en la literatura están basadas en técnicas de control frecuencial y no resuelven el problema de vuelo estacionario. Se concentran en ascenso del cohete. En este trabajo de tesis se estudia un modelo no lineal reducido del cohete y se proponen estrategias de control no lineal para realizar un vuelo estacionario. También se proponen estrategias basadas en la aproximación de ángulos de orientación pequeños. Se realizan simulaciones numéricas para comparar los diversos algoritmos de control propuestos.

---



---

## Marco teórico

---

En la actualidad los lanzadores espaciales o vehículos de lanzamiento juegan un papel muy importante para la exploración del universo, es por lo que ha progresado su tecnología desde el desarrollo del primer misil intercontinental R-7 fabricado por los soviéticos, el cual logro poner en órbita el satélite Sputnik 1 y los llevo a ser los primeros en alcanzar el espacio exterior [1].

De ahí que los lanzadores espaciales tienen la misión de transportar la carga útil desde la superficie terrestre al espacio exterior. La carga útil puede ser un satélite, una sonda espacial, alimentos para los astronautas que habitan la estación espacial internacional o llevar un Rover a Marte para la exploración de su superficie, cada una de estas cargas útiles cuenta con características específicas de forma, tamaño y peso que dan pauta a la elección del lanzador espacial que se va a utilizar para llevar esta tecnología al espacio exterior.

Los vehículos de lanzamiento espacial inicialmente eran desechables y se diseñaban para ser empleados una sola vez, ya que generalmente se separan de su carga útil y realizan una reentrada atmosférica. Los sistemas de lanzamiento reutilizables por otra parte ofrecen la posibilidad de recuperar el sistema intacto una vez que haya sido usado, de esta forma puede ser empleado en diversos lanzamientos, disminuyendo los costos de elaboración. El ejemplo más parecido de vehículo reutilizable es el transbordador espacial, aunque solo parcialmente porque pierde el tanque externo en el espacio y solo se puede reutilizar el orbitador, el cual incluye los motores principales y los dos cohetes reforzadores sólidos que se vuelven a usar para cada lanzamiento después de algunos meses de reconstrucción. En relación con lo anterior Space Exploration Technologies Corporation (SpaceX) es una empresa estadounidense de transporte aeroespacial fundada en 2002 por Elon Musk, pese a todo SpaceX decidió im-

plementar tecnología de aterrizaje vertical para la recuperación completa de la primera etapa de propulsión.

Esta tecnología llevaba décadas en desarrollo, pero no sería hasta el siglo XXI cuando maduraría lo suficiente como para que pudiera ponerse en práctica. Esta tecnología ha logrado reducir los costos de lanzamiento y reutilizar la primera parte de propulsión del lanzador espacial haciendo uso de un sistema de control de aterrizaje vertical del lanzador espacial.

Para controlar la trayectoria de un vehículo es necesario disponer de sensores y actuadores para modificar su posición y orientación, basándose en las mediciones de los sensores y las especificaciones requeridas.

El campo integral que estudia las combinaciones de sensores, actuadores y algoritmos se denomina "Guía, Navegación y Control"(GNC). Primordialmente para el desarrollo de cohetes se requiere de un GNC que permita desarrollar un vuelo a lo largo de una trayectoria programada, así como también compensar las perturbaciones que se presenten durante la fase propulsiva.

El sistema de navegación es aquel que determina automáticamente la posición del vehículo con respecto a algún marco de referencia, por ejemplo, la tierra, y se lo muestra a un operador. Si el vehículo está fuera de curso, es responsabilidad del operador realizar la corrección necesaria. Por lo contrario, el sistema de guía, en cambio, realiza automáticamente la corrección necesaria para mantener el rumbo del vehículo enviando la señal adecuada al sistema de control o al piloto automático. A continuación, el sistema de guía realiza todas las funciones de un sistema de navegación además de generar la señal de corrección requerida para enviarla al sistema de control. Ahora bien, el sistema de control se encarga de indicar la dirección del vector de empuje y generar un cambio de trayectoria del vehículo. El sistema de guía requerido depende de la misión que se planea cumplir, ya que su complejidad puede variar desde un sistema de guía inercial para cohetes de largo alcance hasta un sistema simple donde el operador envía comandos de guía a través de un enlace de radio. En cualquier caso, el comando de guía sirve como entrada al sistema de control.

---

## 2.1. Sistemas de control de vector de empuje

La vectorización de empuje, también conocida como control de vector de empuje o TVC, es la capacidad de una aeronave, cohete u otro vehículo para manipular la dirección del empuje desde su motor o motores para controlar la orientación o la velocidad angular del vehículo.

En cohetes y misiles balísticos que vuelan fuera de la atmósfera, las superficies de control aerodinámico son ineficaces, por lo que la vectorización de empuje es el principal medio de control de orientación. Este método fue originalmente previsto para proporcionar un empuje vertical como un medio para dar a las aeronaves capacidad de despegue y aterrizaje vertical (VTOL - Vertical Take-Off and Landing) o corto (STOL - Short Take-Off and Landing) [2].

La vectorización de empuje se puede lograr por cuatro medios básicos:

1. Gimbaled engine or nozzle (Toberas con movimiento)
2. Reactive fluid injection
3. Auxiliary "Vernier" thrusters (Propulsores auxiliares)
4. Exhaust vanes (Aletas de control de flujo)
5. Grid fins (Aletas de rejilla)

En la Figura 2.1 podemos observar los diagramas esquemáticos de diferentes sistemas de control de vector de empuje, donde la letra *L* significa que se usa con motores de cohetes de combustible líquido y *S* si se usa con motores de combustible sólido.

---

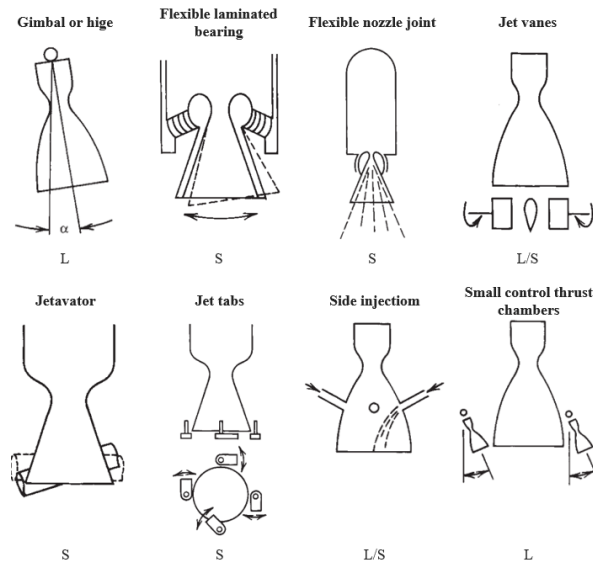


Figura 2.1: Diagramas esquemáticos de ocho mecanismos TVC diferentes

[1]

Controlar la trayectoria de vuelo y la orientación de un vehículo propulsado por un motor cohete, ya sea un lanzador espacial o un misil balístico le hace posible llegar a un destino de vuelo preciso. Los sistemas de propulsión de cohetes siempre brindan un empuje hacia un objetivo previsto, pero también se pueden hacer para proporcionar pares para rotar el vehículo junto con la fuerza de propulsión.

Primordialmente para el desarrollo de este tipo de tecnología se requiere de un sistema de control que este compuesto por el “subsistema de navegación”, “subsistema de guía” y “subsistema de control de vector de empuje” que permita desarrollar un vuelo a lo largo de una trayectoria programada, así como también compensar las perturbaciones que se presenten durante la fase propulsiva. Al controlar la dirección de los vectores de empuje a través de distintos mecanismos, es posible influir en los movimientos rotativos de cabeceo, guiñada y balanceo de un vehículo [3].

Todos los sistemas de propulsión química pueden proporcionarse con uno de varios tipos de mecanismos de control de vectores de empuje (TVC). Algunos de estos se aplican a sistemas de propulsión de cohetes propulsores sólidos, híbridos o líquidos, pero la mayoría son específicos de solo una de estas categorías de propulsión.

Las aletas aerodinámicas fijas o móviles continúan siendo muy efectivas para controlar el vuelo del vehículo dentro de la atmósfera de la tierra, y casi todos los cohetes, misiles anti-aéreos y misiles aire-superficie los usan en todo clima. Aunque las superficies de control aerodinámico proporcionan algo de resistencia adicional, su efectividad en términos de peso del vehículo, momento de giro y consumo de potencia de actuación es difícil de superar con cualquier otro método de control de vuelo.

El control de vuelo del vehículo también se puede lograr mediante un sistema de propulsión de control de orientación separado o utilizando pequeños propulsores de combustible líquido que proporcionan momentos al vehículo en vuelo durante, antes o después de la operación del sistema principal de propulsión de cohetes.

Las razones para utilizar un TVC son:

1. Cambiar intencionalmente una trayectoria de vuelo (por ejemplo, cambiar la dirección de la trayectoria de vuelo de un misil de búsqueda de objetivos).
  2. Rotar el vehículo o cambiar su orientación en vuelo.
  3. Corregir la desviación de la trayectoria prevista o la orientación durante el vuelo propulsado.
  4. Corregir la desalineación de empuje de una tobera móvil en el sistema de propulsión de combustible sólido durante su vuelo, cuando el vector de empuje principal pierde el centro de masa del vehículo por consumo de combustible.
-

## 2.2. Funcionamiento del TVC

El TVC genera momentos sobre el centro de masa para controlar las trayectorias de vuelo. La ubicación de la fuerza lateral (o su componente perpendicular) a lo largo del eje del vehículo determina su brazo de momento y, por lo tanto, la magnitud de la fuerza necesaria para una aplicación determinada; Esto implica que los lugares lo más alejados posible del centro de masa (es decir, con brazos de momento largo) son los más deseables para minimizar la acción de la fuerza y, por lo tanto, el uso de propulsores [3]. Los momentos de cabeceo (Yaw) son aquellos que elevan o bajan la nariz de un vehículo; los momentos de guiñada (Pitch) giran la nariz hacia los lados; y los momentos de balanceo (Roll) se aplican alrededor del eje principal del vehículo como se muestra en la Figura 2.2.

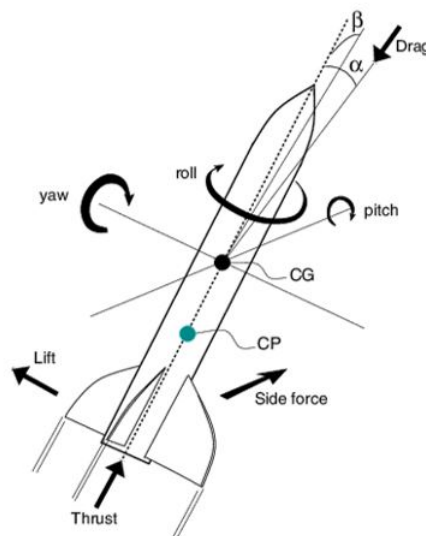


Figura 2.2: Representación de fuerzas que actúan en el cohete

[3]

Por lo general, el vector de empuje de la boquilla del cohete principal está en la dirección del eje del vehículo y atraviesa el centro de masa del vehículo. Por lo tanto, es posible obtener momentos de control de cabeceo y guiñada por la simple desviación del vector de empuje del cohete principal; sin embargo, el control de balanceo generalmente requiere el uso de dos o más paletas giratorias o dos o más boquillas de sistema de propulsión con bisagras separadas.

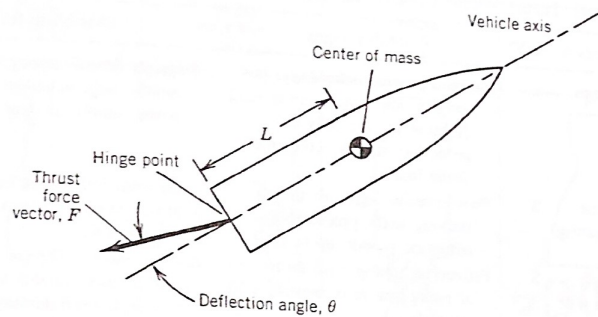


Figura 2.3: Diagrama de TVC

[1]

La Figura 2.3 explica el momento de cabeceo obtenido por una cámara de empuje o boquilla articulada. La fuerza lateral y el momento de inclinación varían según el seno del ángulo efectivo de deflexión del vector de empuje.

Todo lo anterior se complementa con un sistema de control que regula el movimiento de la tobera, su orientación y aceleración. A este se le denomina sistema de control de vuelo, en la Figura 2.5 muestra los elementos básicos del sistema de control de vuelo, que en sí mismo es otro circuito de control de retroalimentación dentro del circuito de referencia general representado en la Figura 2.4.

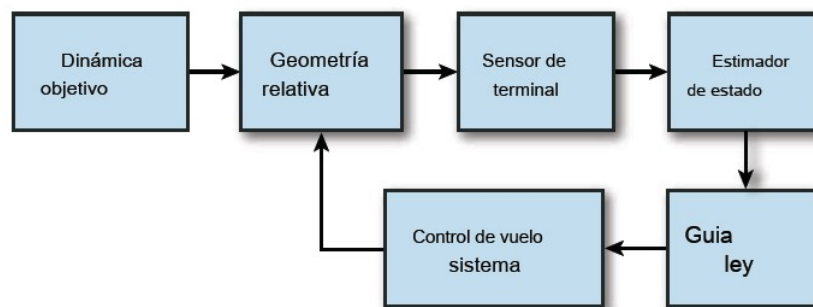


Figura 2.4: Circuito de referencia general representado

[4]

Una unidad de medición inercial (IMU) mide la aceleración traslacional del misil y la velocidad angular. Las salidas de la IMU son combinadas con los comandos de guía en el piloto automático para calcular la entrada de control ordenada, así como la desviación deseada de la superficie de la tobera o el ángulo del vector de empuje. Un actuador, generalmente un

sistema electromecánico, obliga a la entrada de control físico a seguir la entrada de control ordenada, la dinámica del fuselaje responde a la entrada de control. Estableciendo como objetivo básico del sistema de control de vuelo, obligar a la dinámica de misiles lograda a seguir los comandos de guía de una manera controlada.

Las cifras de mérito (FOM) utilizadas para evaluar el funcionamiento del sistema de control de vuelo se discuten en Objetivos de diseño del sistema de control de vuelo. Esta sección proporciona una descripción general de cada elemento del circuito de control de vuelo [4].

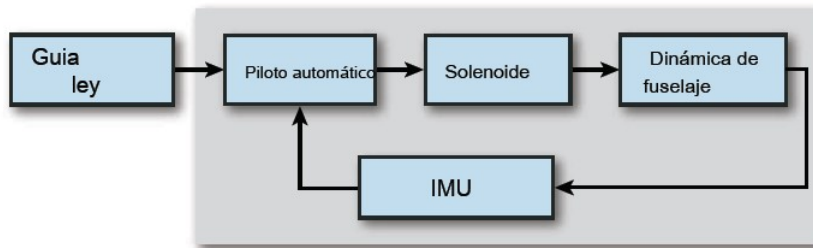


Figura 2.5: Elementos básicos del sistema de control de vuelo

[4]



## 2.3. Mecanismos de control de vector de empuje

Existen distintos mecanismos para lograr este objetivo, siendo uno de los más utilizados el basado en rotar la dirección de la tobera de empuje. En el caso de combustibles sólidos, la tobera incluye una junta flexible conformada mediante la unión de un elastómero con aros de acero que posibilita ajustar la orientación del eje de empuje, mediante un actuador lineal montado de manera conveniente entre la tobera y la estructura del vehículo, el que provoca la deformación elástica de la junta.

El trabajo desarrollado por Esteban A. Dutto [5] establece el uso de un actuador electromecánico, basado en tecnología de un motor eléctrico brushless, para conformar el sistema de control de orientación de una tobera flexible. Ya que dichas toberas imponen fuertes requerimientos operativos a los sistemas de actuación, debido a los elevados valores de rigidez y rozamiento que presentan. El diseño definitivo del actuador lo realizó partiendo de los requerimientos impuestos a sistemas de estas características, incorporando las modificaciones correspondientes luego de haber realizado las revisiones sobre el diseño preliminar.

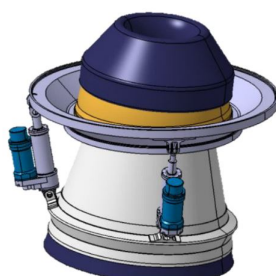


Figura 2.6: Sistema de Actuación montado en una tobera flexible

[5]

La problemática del control de posición de la tobera de un vehículo lanzador, mediante actuadores cruzados es discutida en sus aspectos cinemáticos. En particular el estudio de las relaciones dinámicas que rigen el movimiento de un motor a reacción orientable para grandes ángulos de deflexión y asimismo la determinación de los comandos que serán suministrados por el autopiloto. Garantizando que la trayectoria descrita por el eje de la tobera minimice las componentes del empuje en direcciones no deseadas [6].

Naguil analizó las cargas dinámicas impuestas por el conjunto constituido por la tobera y los dos actuadores electromecánicos montados a  $90^\circ$  para la orientación del eje de empuje

de un vehículo lanzador. Estudió la influencia de los componentes del conjunto y las simplificaciones aplicables, se discute la utilización de las expresiones de Euler y Kane para obtener el modelo dinámico del sistema, presenta un esquema de control y genera la correspondiente ley de control para el movimiento combinado de los actuadores, sometida a las especificaciones de comportamiento dinámico y restricciones cinemáticas.

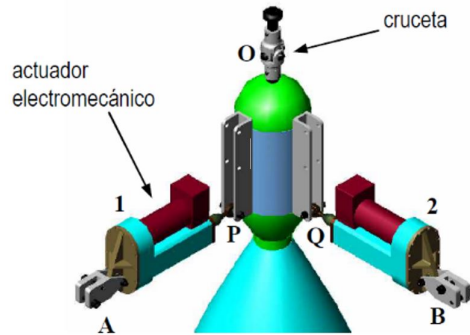


Figura 2.7: Disposición esquemática del TVC

[6]

Finalmente validó los resultados obtenidos mediante simulaciones en condiciones de funcionamiento lineal y no lineal, se evalúa el comportamiento del controlador utilizando un índice de optimización.

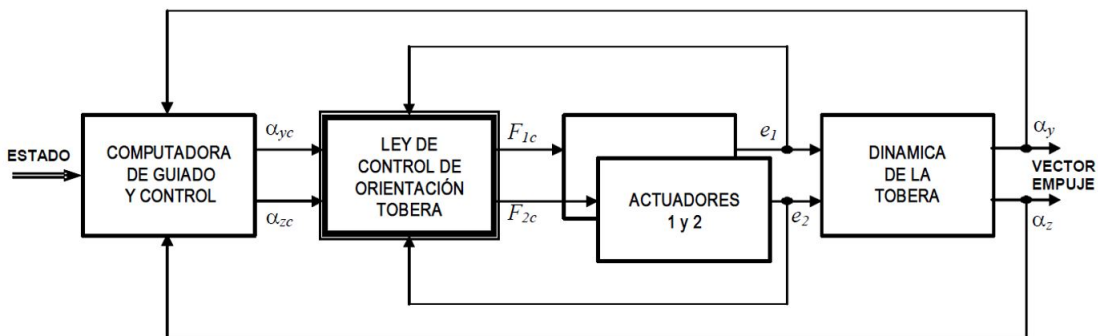


Figura 2.8: Lazo de control del vector empuje

[6]

Tener el control del TVC es una prioridad, ya que de ello se puede lograr el concepto de cohetes de aterrizaje vertical se desarrolló para lograr la reutilización del cohete a fin de disminuir el costo y el tiempo de lanzamiento de este.

La tecnología requerida para lograr con éxito aterrizajes retropropulsivos o aterrizaje vertical son, la vectorización de empuje (boquilla con gimbaled), guía que es capaz de calcular la posición y altitud del vehículo, motores que pueden volver a encenderse en diferentes condiciones, RCS (sistema de control de reacción) para mantener el vehículo en el ángulo correcto y además se utilizan aletas de rejilla para controlar la orientación durante el aterrizaje [8].

Otra forma de controlar el TVC de un motor cohete es a través de jet vanes o también conocidas como aletas controlables, las cuales direccionan la salida del flujo masico del cohete para definir una trayectoria del misil o lanzador. Como es el caso del cohete SAPPHIRE-1 y BIG LES, proyecto liderado por Flemming Nyboe de la empresa Copenhagen Suborbitals [9].

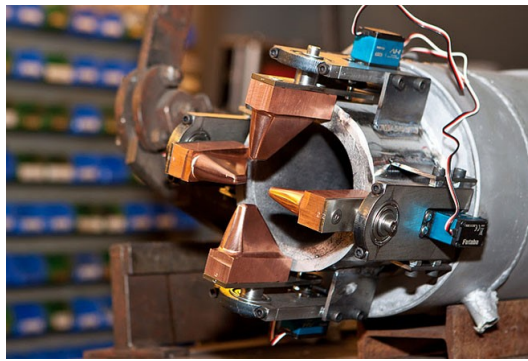


Figura 2.9: Vista trasera del Thrust Vector Control del misil SAPPHIRE-1 [9]



Figura 2.10: Vista trasera del Thrust Vector Control del misil AAM-5 Kai [13]

Los desarrollos tecnológicos actuales referentes a cohetes están enfocados en la fabricación de misiles de largo alcance para diferentes propósitos y por otra parte están enfocados al

desarrollo de grandes lanzadores espaciales como lo es el Falcon 9 de Space X que puede llevar una carga útil de más de 22 toneladas a más de 1000 kilómetros en órbita Leo [7].

Por tal motivo se ha comenzado el desarrollo de cohetes pequeños para la puesta en órbita cargas útiles de bajo peso, como es el caso de la empresa Polaca “Space forest Innovative solution” que tiene en desarrollo un cohete para poner en órbita cargas útiles de máximo 50 kg a altitudes máximas de 150 km, pero aún sigue en desarrollo [12]. Por otra parte, los proyectos que se han desarrollado para este tipo de tecnología se han enfocado en cada uno de los subsistemas de control para el seguimiento de una trayectoria en específico para cohetes de aficionado, como es el caso de Jorge Alexander Aponte [11] que desarrollo el modelado, diseño y construcción de un sistema activo de control de estabilidad de bajo costo para cohetes experimentales tipo aficionado.

En definitiva, cada uno de los casos mencionados anteriormente son desarrollos tecnológicos ejemplifican la trascendencia del desarrollo de nano lanzadores, para lograr disminuir costos y lograr dotar de esta tecnología espacial a cualquier persona que quiera realizar pruebas de sus desarrollos tecnológicos en ambientes extremos y validar el desarrollo de su tecnología.

---

---

## Estado del arte

---

El motor cohete es el único que provoca empuje para que una nave espacial llegue a su destino. Pero, el movimiento del cohete puede verse influenciado por perturbaciones internas y externas, clasificándolo como un sistema no lineal de múltiples entradas y múltiples salidas cuya dinámica es inestable y poco conocida, haciendo que la orientación de la nave espacial en una posición precisa sea tan crítica.

Por lo tanto, el control de orientación del cohete es un gran desafío en tiempo real que hace que el cohete sea estable frente a las perturbaciones. Se ha llegado a utilizar el regulador cuadrático lineal (LQR) y el controlador derivado integral proporcional (PID) como sistema de control para el TVC.

En [10] se mencionan que el controlador PID tiene menor tiempo de estabilización y error de estado estable. Como resultado, el sistema exhibe una respuesta transitoria rápida con menos sobre impulso. La medida de desempeño resulta satisfactoria y por lo tanto, el controlador PID ponderado de punto de ajuste propuesto es una opción preferible para el control de orientación de cabeceo y guiñada de un motor cohete.

Por otra parte, existe un proceso para definir los criterios apropiados para seleccionar algoritmo de control del actuador que se utiliza para el motor de cohete en un vector de empuje de una tobera flexible.

El control de cohetes independientemente de la realización física tiene tres segmentos básicos que son los siguientes:

1. Control del centro de gravedad.

2. Estabilización del movimiento del cohete alrededor de su centro de gravedad.
3. Equilibrar los movimientos de los cohetes.

Como resultado del progreso tecnológico, ahora se han comenzado a desarrollar vehículos de lanzamiento reutilizables para brindar acceso al espacio. Este tipo de vehículos tienen la capacidad de poner en órbita diferentes dispositivos y regresar a la tierra para usarlos nuevamente.

Cada uno de estos vehículos tiene una misión preestablecida y son guiados por un sistema de control que les ayuda a seguir un camino para llegar a un punto específico. Estos sistemas de control son los encargados de dar instrucciones a las superficies de control aerodinámico (canards, alas, tail fins) o Thrust Vector Control (TVC) por diferentes métodos con el fin de realizar cambios en la dirección y magnitud de las fuerzas que actúan sobre el vehículo para realizar se mueve en una dirección diferente y permite que el vehículo maniobre a lo largo de su trayectoria.

Estos sistemas de control se utilizan en misiles, cohetes y transbordadores espaciales para controlar su trayectoria y garantizar que lleguen con la mayor precisión al punto final indicado. Por lo tanto, el control de orientación es de gran importancia en el desarrollo de un vehículo de este tipo.

El control de orientación de los Reusable Launch Vehicles (RLV) durante la fase de reingreso a tierra ha sido uno de los puntos más críticos para los sistemas de control, ya que se enfrentan a diferentes perturbaciones externas que dificultan alcanzar la estabilidad en el vehículo. Por lo cual el rendimiento del seguimiento de orientación se puede mejorar utilizando un controlador adaptativo H-infinity fuzzy y un controlador proporcional integral derivado (PID), según [21].

En contraste con lo anterior, [20] está enfocado en un subsistema de guía para un cohete a pequeña escala. Usaron un sistema de control de retroalimentación para estabilizar el vuelo y seguir una trayectoria usando ruedas de inercia dentro del cohete para generar un momento angular. En cambio, [30] propuso un sistema de control de retroalimentación para

---

---

estabilizar el vector de velocidad de traslación y la orientación de la nave espacial, mientras se atenúan los modos de oscilación que caracterizan la dinámica interna del cohete. De igual modo [28] evaluó en una trayectoria definida por la misión el desempeño del control para un vehículo de lanzamiento reusable.

Los cohetes también son guiados por sistemas Sliding Mode Control (SMC) para seguir una trayectoria previamente establecida. Por lo que [25] propuso un controlador de modo deslizante adaptativo de tiempo discreto para cohetes giratorios usando linealización de retroalimentación de entrada-salida. En contraste con [27] que describió el diseño de un controlador no lineal robusto para un vehículo de lanzamiento reusable.

El PVTOL (Planar Vertical Take-Off and Landing) es un modelo longitudinal simplificado de un helicóptero o quadrotor. Básicamente consta de dos propulsores unidos en los extremos de una barra. Existen muchas estrategias de control para el PVTOL que se pueden encontrar en la literatura. Por ejemplo; [31] propuso guiar un Vehículo Aéreo No Tripulado (UAV) en vuelos 3D para tareas de posicionamiento y seguimiento de trayectorias, con una arquitectura basada en la fusión de tres señales de control generadas por tres controladores más simples asociados a tareas PVTOL.

Alternativamente, [37] presentó cómo el control de saturación anidado introducido en [38] puede modificarse para estabilizar el modelo del sistema PVTOL y se da una elección particular de las amplitudes del controlador de saturaciones anidado de tal manera que la estabilidad global del se obtiene un sistema de lazo cerrado.

De la misma manera [17] proponer un esquema de control de seguimiento de orientación de tiempo fijo difuso adaptativo no singular para este tipo de vehículos sujetos a incertidumbres de inercia, saturación del actuador y fallas. Por otro lado, [18] estudia el problema de seguimiento de formación cooperativa de quadrotors agrupados sin mediciones de velocidad. En particular, se requiere que los quadrotores agrupados sigan una trayectoria de referencia mientras mantienen una forma de formación bien definida.

De manera similar [19] estudia la maniobrabilidad de un quadrotor estándar con hélice co-

---

planar y presenta un diseño innovador capaz de lograr una inclinación biaxial independiente de  $100^\circ$  y  $180^\circ$  sobre dos ejes perpendiculares, manteniendo una complejidad mecánica relativamente baja.

En contraste con lo anterior, el PVTOL ha despertado el interés de varios investigadores por tratarse de un sistema dinámico no lineal que simula la dinámica longitudinal de un helicóptero o UAV (Vehículo Aéreo No Tripulado) multirroto. Solo tiene dos entradas de control mientras tiene tres grados de libertad.

En el escenario ideal, el torque es proporcional a la aceleración angular y las aceleraciones vertical y horizontal son proporcionadas por las proyecciones del vector de empuje. Hay un desacoplamiento de las entradas en este escenario, ya que el empuje solo influye en las aceleraciones lineales y la entrada de par solo afecta la aceleración rotacional. En la literatura, se han sugerido muchos métodos de control de PVTOL.

[41] introdujo uno de los primeros controladores que se sugirieron para el PVTOL. Demostraron que cuando el control de vuelo del PVTOL se somete a un enfoque preciso de linealización de entrada y salida, el sistema resultante muestra una dinámica interna inestable. Propusieron una solución utilizando una técnica de linealización de entrada-salida aproximada diseñada para sistemas no lineales con una fase no mínima.

Para estabilizar el PVTOL, [42] sugirió un control de saturación anidado. Sólo cuando el ángulo de orientación  $\theta$  y su derivada fueron originalmente suficientemente modestos se garantizó la estabilidad. La idea de emplear la saturación anidada surgió de la observación de que cuando la altitud se controla mediante una compensación no lineal, el subsistema resultante de la entrada de par  $\tau$  a la salida  $x$  (el desplazamiento horizontal) se reduce a cuatro integradores en cascada cuando  $\theta$  es pequeño, es decir, cuando  $\tan \theta \approx \theta$ .

[35], por el contrario, sugiere un controlador no lineal basado en la teoría de Lyapunov para estabilizar un quadrotor para ejecutar tareas de seguimiento de trayectoria y posicionamiento restringidas a un plano vertical. Debido a las restricciones de vuelo, movimiento limitado a los aviones  $XZ/YZ$ , las maniobras descritas se realizan frecuentemente con vehículos

---



---

PVTOL. Se proporciona la prueba de estabilidad del sistema de lazo cerrado y se emplea un controlador no lineal para este propósito. Para evitar que los actuadores físicos se saturen, se propone un enfoque analítico que implica saturar las señales de control.

[43] publicó un controlador basado en un controlador PD y un controlador de modo deslizante para estabilizar las variables horizontales y angulares a la posición de reposo deseada. Se estableció que el sistema de lazo cerrado es localmente estable si la velocidad angular inicial y la posición angular caen dentro de un área determinada sin singularidades.

En [40], se sugirió un enfoque de control jerárquico para un pequeño vehículo VTOL para monitorear una trayectoria deseada en todo el mundo. Al emplear este ángulo de orientación como una entrada virtual para mantener la ubicación de la aeronave, su enfoque de control sorteó la restricción topológica de la orientación.

Además, [39] sugirió una estrategia de control para proporcionar un controlador globalmente estable para UAV. También tienen un método de control adaptativo que puede lidiar con factores del sistema no identificados.

Por otra parte, [49] propone un controlador robusto para resolver el problema de control de seguimiento de la trayectoria de la aeronave PVTOL con viento cruzado. El controlador combina control de rechazo de perturbaciones activas y algoritmos de linealización de retroalimentación de entrada-salida. Este último calcula y mitiga activamente los impactos de los vientos cruzados, mientras que el primero linealiza la dinámica PVTOL.

En [45], se proporcionó un enfoque de control para el conocido problema PVTOL. Para lograr la altura objetivo, la fuerza total se calcula utilizando la corrección de retroalimentación no lineal. El ángulo de orientación se selecciona como una función de saturación uniforme de  $x, \dot{x}$ , que controla la posición horizontal  $x$ . Se utilizó una técnica de Lyapunov para ofrecer una prueba de estabilidad.

Sin embargo, para estabilizar el modelo de un PVTOL, [37] muestra cómo se puede cambiar el control de saturación en capas. Para lograr la estabilidad general del sistema de lazo

---

cerrado, se realiza una elección específica de las amplitudes de saturación del controlador de saturación anidada.

En el caso del PVTOL ideal, tenga en cuenta que el empuje solo proporciona aceleraciones lineales y el par solo produce aceleraciones rotacionales. El torque, sin embargo, ocurre en los cálculos de aceleración traslacional aumentados por la diminuta constante  $\epsilon$  cuando los propulsores PVTOL no están perfectamente alineados. Esta situación se denomina problema de PVTOL con un acoplamiento significativo en las entradas por este motivo. Debido a esto, son menos las técnicas de control que se han investigado en la literatura.

La estabilización de la configuración global para la aeronave VTOL con alto acoplamiento en las entradas a través de retroalimentación de estado estático uniforme se trata en [44]. Además, la aplicación de un cambio de coordenadas de desacoplamiento da como resultado la generación automatizada de salidas diferencialmente planas para aeronaves VTOL.

Por otro lado, [47] ofrece un método ideal basado en control para examinar trayectorias de sistemas no lineales viables. Sirve como una herramienta prototipo para rastrear trayectorias bajo limitaciones. El enfoque se basa en nuevos enfoques de optimización para problemas de control óptimo con restricciones puntuales aplicadas a un PVTOL, incrustación dinámica y relajación de restricciones.

Similar a esto, [46] ofrece un planificador de trayectoria ideal para el control de orientación de naves espaciales sujeto a restricciones de velocidad angular y saturación de entrada. Maneja la no linealidad de la variedad de cuaterniones unitarios adaptando el enfoque de Newton para la optimización de la trayectoria.

---

---

## Dinámica del cohete

---

El objetivo del problema del control de posición es conservar el propulsor primario en una posición vertical. Este sistema se analiza a partir de la aplicación de las leyes de movimiento de Newton, donde las fuerzas y variables que actúan en el sistema como se observan en la Figura 4.1.

En general un vehículo avanza impulsado por la fuerza de reacción que resulta del mismo ejerciendo una fuerza sobre su entorno: un automóvil ejerce una fuerza sobre el pavimento a través de sus llantas, un avión ejerce una fuerza sobre el aire que lo rodea a través de su ala para poder generar una fuerza de levantamiento, etc.

En cambio, un cohete que se mueve en el espacio no tiene un medio sobre el cual ejercer fuerza alguna. El cohete se mueve por la fuerza de reacción que resulta de expeler parte de su masa en dirección opuesta a su movimiento a través de un motor cohete.

A continuación, se describe el análisis de la dinámica del cohete.

## 4.1. Modelo dinámico de un cohete

Sea  $\theta$  el ángulo del cohete con respecto a la línea vertical,  $g$  la fuerza de gravedad,  $m$  la masa del cohete,  $C$  el centro de gravedad del cohete en el medio de su fuselaje,  $l$  la distancia media,  $F$  la fuerza de empuje y  $\tau$  el par generado por  $F$ .

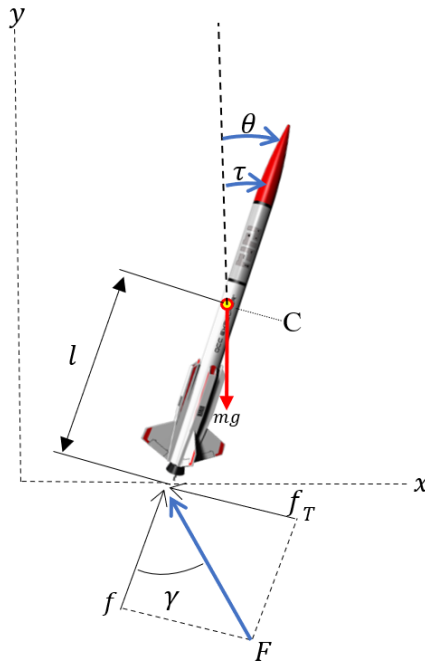


Figura 4.1: Diagrama de fuerzas del cohete

Inicialmente partimos de descomponer la fuerza de empuje, donde  $F$  es el empuje total del cohete y  $\gamma$  es la posición angular del propulsor.  $F$  se descompone en las fuerzas  $f$  y  $f_T$ .

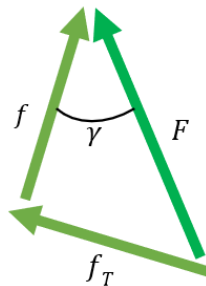


Figura 4.2: Fuerza  $F$  y sus componentes

Donde

$$\sin \gamma = \frac{f_T}{F} \quad (4.1)$$

$$f_t = F \sin \gamma \quad (4.2)$$

$$\cos \gamma = \frac{f}{F} \quad (4.3)$$

$$f = F \cos \gamma \quad (4.4)$$

Posteriormente para obtener las ecuaciones de movimiento del sistema, se considera el diagrama de cuerpo libre para establecer el movimiento rotacional del cohete alrededor de su centro de gravedad y de esta manera obtener  $\tau_{net}$  el torque neto.

Se establecen las fuerzas que generan un momento inercia respecto a la distancia que los separa y a su vez es el brazo de palanca.

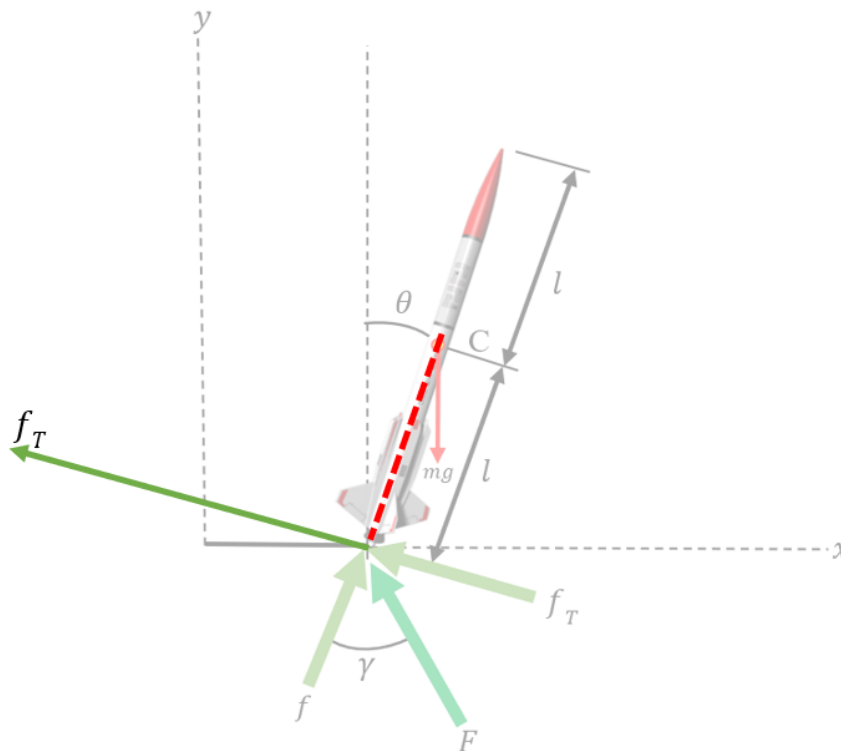


Figura 4.3: Diagrama de representación de momentos de inercia

Donde

$$I\ddot{\theta} = \tau_{net} \quad (4.5)$$

$$I\ddot{\theta} = lf_T \quad (4.6)$$

Observe también que

$$\tan \gamma = \frac{f_T}{f} \quad (4.7)$$

$$F = \sqrt{f^2 + f_T^2} \quad (4.8)$$

Ahora se describe el movimiento traslacional a través de las fuerzas que pasan por el centro de gravedad y provocan un desplazamiento del cohete.

Haciendo uso de la segunda ley de Newton donde  $F = ma$ , se inicia el cálculo del movimiento de traslación del cohete. Tomando en cuenta la Figura 4.1 y todas las fuerzas que pasan sobre  $x$ .

La aceleración horizontal del cohete se obtiene mediante la siguiente ecuación:

$$\sum f_x = m\ddot{x} \quad (4.9)$$

$$m\ddot{x} = f \sin \theta - f_T \cos \theta \quad (4.10)$$

Tomando en cuenta la Figura 4.1 y todas las fuerzas que pasan sobre el eje  $y$ , se obtiene la aceleración vertical del cohete mediante la siguiente ecuación:

$$\sum f_y = m\ddot{y} \quad (4.11)$$

$$m\ddot{y} = f \cos \theta + f_T \sin \theta - mg \quad (4.12)$$

Finalmente, las ecuaciones del modelo dinámico para el sistema de cohete usando el enfoque de Newton se resumen en las siguientes ecuaciones:

---

---

$$I\ddot{\theta} = lf_T \quad (4.13)$$

$$m\ddot{x} = f \sin \theta - f_T \cos \theta \quad (4.14)$$

$$m\ddot{y} = f \cos \theta + f_T \sin \theta - mg \quad (4.15)$$

## 4.2. Sistemas de fase mínima y de fase no mínima

Durante el desarrollo de los algoritmos de control propuestos se llegó a la conclusión de que se tiene un sistema de fase no mínima. Por tal motivo a continuación, se explican los conceptos de fase mínima y fase no mínima. Esto para destacar la complejidad de controlar un sistema como el que se está desarrollando.

### 4.2.1. Sistemas estables de fase mínima

De manera particular considerando un sistema de fase mínima que es estable y analizado su respuesta frecuencial, se dice que es de fase mínima si su respuesta de fase se mantiene mínima en todas sus frecuencias. Esto significa que la fase cambia de manera suave y monótona a medida que la frecuencia varía. Se considera que este tipo de sistemas son deseables porque no introducen retrasos excesivos o cambios abruptos de fase en la señal de salida.

Las características de los sistemas estables de fase mínima son las siguientes:

- La fase es positiva y aumenta linealmente con la frecuencia.
- La función de transferencia tiene un número igual de polos y ceros en el semiplano izquierdo del plano complejo.

### 4.2.2. Sistemas estables de fase no mínima

Por el contrario, un sistema estable de fase no mínima es aquel cuya respuesta de fase presenta cambios abruptos o discontinuidades en diferentes frecuencias. La fase puede cambiar

---

de manera no lineal o incluso puede haber regiones en las que la fase sea negativa. Estos sistemas pueden introducir retrasos o adelantos no deseados en la señal de salida.

En resumen, las características de los sistemas estables de fase no mínima son las siguientes:

- La fase puede ser negativa y tener cambios abruptos o discontinuidades.
- Tienen al menos un cero con parte real positiva.
- La función de transferencia tiene un número desigual de polos y ceros en el semiplano izquierdo del plano complejo.

Hay que mencionar, que los sistemas de fase no mínima presentan varias desventajas en comparación con los sistemas de fase mínima.

A continuación, se muestran algunas de ellas:

- Retraso excesivo de fase: Los sistemas de fase no mínima pueden introducir un retardo significativo en la señal de salida en ciertas frecuencias. Esto puede ser problemático en aplicaciones en tiempo real donde la sincronización y la alineación temporal son críticas. El retardo de fase puede afectar negativamente el rendimiento y la estabilidad del sistema.
  - Respuesta transitoria deficiente: Los sistemas de fase no mínima pueden tener una respuesta transitoria deficiente, lo que significa que la señal de salida puede tardar más tiempo en alcanzar el estado estacionario después de una perturbación o un cambio en la entrada. Esto puede afectar la capacidad del sistema para seguir rápidamente cambios en la señal de referencia o para rechazar perturbaciones.
  - Sensibilidad a la variación de fase: Los sistemas de fase no mínima pueden ser más sensibles a los cambios en la fase de la señal de entrada. Pequeñas variaciones en la fase pueden tener un impacto significativo en la respuesta del sistema, lo que puede dificultar el diseño y la estabilidad del controlador.
  - Mayor complejidad del diseño: El diseño y el análisis de sistemas de fase no mínima suelen ser más complejos en comparación con los sistemas de fase mínima. La presencia de cambios abruptos o discontinuidades en la respuesta de fase requiere técnicas y métodos más avanzados para su modelado y control.
-



En general, los sistemas de fase mínima tienen un mejor comportamiento desde el punto de vista del control y el filtrado de señales, ya que evitan problemas como el adelanto o retraso excesivo de la fase.

### **4.2.3. Sistemas de fase no mínima en general**

En general, un sistema estable o inestable es de fase no mínima si tiene al menos un cero con parte real positiva.

En resumen, los sistemas de fase no mínima presentan desventajas importantes en términos de retardo de fase, respuesta transitoria, sensibilidad y complejidad del diseño, así como en estabilidad y robustez del sistema. Por lo tanto, en la mayoría de las aplicaciones de control y filtrado, se prefieren los sistemas de fase mínima debido a sus mejores características de rendimiento y estabilidad. Ahora planteando de manera general el análisis de este tipo de sistemas, se define a un sistema de fase mínima como aquel que tiene todos sus ceros en el plano izquierdo. Por el contrario, si existe un solo cero en el lado derecho del plano, el sistema se considera de fase no mínima.

Considere el problema de estabilización a una altura deseada de un cohete en el plano longitudinal. Si se desea desplazar el cohete horizontalmente, se deberá hacer girar el propulsor del cohete de manera que el cohete se incline hacia el lado que se desea desplazar. Dado que el centro de masa está arriba del propulsor, el cohete se desplazará primeramente hacia el sentido contrario de la posición horizontal deseada. Esta característica de responder inicialmente en el sentido contrario del deseado es típica de sistemas de fase no mínima.

Con lo descrito anteriormente, se llega a la conclusión que un cohete de acuerdo con el análisis de su comportamiento cumple con características de sistemas de fase no mínima, lo cual lo convierte en un sistema de diseño complejo y de fase no mínima.

---

---

## Algoritmos de control propuestos

---

El modelo dinámico de un cohete impulsado por propulsores vectorizados es distinto al modelo PVTOL. Por lo tanto, se obtiene un algoritmo de control apropiado para controlar dicho modelo de cohete simplificado. En este capítulo se introduce un cambio de transformación de variable para simplificar el diseño de una ley de control. El objetivo es controlar el TVC para realizar un vuelo estacionario a una altitud deseada y poder moverse en un plano vertical para alcanzar una posición deseada utilizando un control de retroalimentación de lazo cerrado no lineal para estabilizar el sistema.

Finalmente, el rendimiento de los controladores propuestos se verifica en simulaciones numéricas.

## 5.1. Modelo para el control de desplazamiento horizontal

Considerando la siguiente transformación de variables

$$\tau' = \frac{lfT}{I} \quad (5.1)$$

$$x' = \left(\frac{lm}{I}\right) x \quad (5.2)$$

$$y' = \left(\frac{lm}{I}\right) y \quad (5.3)$$

Entonces las ecuaciones (4.13), (4.10) y (4.12) se pueden reescribir como

$$\ddot{\theta} = \tau' \quad (5.4)$$

$$\ddot{x}' = \left(\frac{lf}{I}\right) \sin \theta - \tau' \cos \theta \quad (5.5)$$

$$\ddot{y}' = \left(\frac{lf}{I}\right) \cos \theta + \tau' \sin \theta - \left(\frac{lmg}{I}\right) \quad (5.6)$$

Definamos la variable  $\eta$  como

$$\eta = \sin \theta \quad (5.7)$$

Derivando lo anterior obtenemos

$$\dot{\eta} = \cos \theta \dot{\theta} \quad (5.8)$$

Diferenciando de nuevo

$$\ddot{\eta} = \cos \theta \ddot{\theta} - \sin \theta \dot{\theta}^2 \quad (5.9)$$

Introduciendo (5.4) en lo anterior se obtiene

$$\ddot{\eta} = u \quad (5.10)$$

donde

$$u = \cos\theta \tau' - \sin\theta \dot{\theta}^2 \quad (5.11)$$

Elijamos la magnitud de la fuerza  $f$  como

$$f = \frac{mg}{l} + \frac{I\dot{\theta}^2}{l} \quad (5.12)$$

Introduciendo (5.12) en (5.5) y (5.6) las ecuaciones dinámicas del cohete se pueden reescribir como

$$\ddot{\eta} = u \quad (5.13)$$

$$\ddot{x}' = a\eta - u \quad (5.14)$$

$$\ddot{y}' = (a + \dot{\theta}^2) \cos\theta + \sin\theta \tau' - la \quad (5.15)$$

donde el coeficiente  $a$  es

$$a = \frac{mg}{I} \quad (5.16)$$

Note que el subsistema  $\eta$  y  $x'$  (5.13)-(5.14) es un sistema lineal. Por lo tanto, podemos estabilizar ese subsistema usando un control de retroalimentación de estado de la siguiente manera

$$u = k_1\eta + k_2\dot{\eta} + k_3x' + k_4\dot{x}' \quad (5.17)$$

Partiendo del sistema lineal (5.13)-(5.14) y utilizando la transformada de Laplace, se obtiene el sistema en lazo cerrado. Posteriormente se determinan los polos en lazo cerrado y los

---

valores de los coeficientes del controlador.

Ahora, introduciendo (5.17) en (5.13)-(5.14) y usando la transformada de Laplace se obtiene

$$M(s) \begin{bmatrix} \eta \\ x' \end{bmatrix} = 0 \quad (5.18)$$

donde

$$M(s) = \begin{bmatrix} s^2 - k_2s - k_1 & -k_4s - k_3 \\ k_2s - a + k_1 & s^2 + k_4s + k_3 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Premultiplicando (5.18) por la matriz adjunta de  $M$ , obtenemos

$$\det M(s) \begin{bmatrix} \eta \\ x' \end{bmatrix} = 0 \quad (5.20)$$

El sistema de lazo cerrado es estable si los ceros del polinomio  $\det M(s)$  están en la parte izquierda del plano complejo.

De (5.19) obtenemos

$$\det M(s) = (s^2 - k_2s - k_1)(s^2 + k_4s + k_3) - (-k_4s - k_3)(k_2s - a + k_1) \quad (5.21)$$

$$\det M(s) = s^4 + s^3(k_4 - k_2) + s^2(k_3 - k_1) - ak_4s - ak_3 \quad (5.22)$$

Elegimos los polos en lazo cerrado como

$$(s + 1)^4 = (s^2 + 2s + 1)(s^2 + 2s + 1) \quad (5.23)$$

$$= s^4 + 2s^3 + s^2 + 2s^3 + 4s^2 + 2s + s^2 + 2s + 1 \quad (5.24)$$

$$= s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1 \quad (5.25)$$

Comparando las ecuaciones (5.22) y (5.25) obtenemos los siguientes valores para los coeficientes del controlador

$$k_3 = -\frac{1}{a} \quad (5.26)$$

$$k_4 = -\frac{4}{a} \quad (5.27)$$

$$k_3 - k_1 = 6 \quad (5.28)$$

Introduciendo (5.26) en lo anterior obtenemos

$$k_1 = -\frac{1}{a} - 6 \quad (5.29)$$

De (5.22) y (5.25) obtenemos

$$k_4 - k_2 = 4 \quad (5.30)$$

Introduciendo (5.27) en lo anterior obtenemos

$$k_2 = -\frac{4}{a} - 4 \quad (5.31)$$

Los siguientes valores de ganancia del controlador colocarán los cuatro polos en  $-1$ :

$$k_1 = -\frac{1}{a} - 6, k_2 = -\frac{4}{a} - 4, k_3 = -\frac{1}{a}, k_4 = -\frac{4}{a} \quad (5.32)$$

---

## 5.2. Dominio de convergencia

En esta sección se presenta un análisis de estabilidad para el lazo cerrado cuando se usa la estrategia de control horizontal.

El dominio de convergencia se obtiene utilizando el enfoque de Lyapunov.

$$\dot{w} = Aw + Bu \quad (5.33)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

$$w = \begin{bmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \\ x' \\ \dot{x}' \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

Ahora considerando un sistema lineal de (5.13)-(5.14) calculamos la función de transferencia con entrada  $u$  y salida  $x'$ , demostrando que tiene 4 polos en el origen y es de fase no mínima. Para obtener la función de transferencia, usamos (5.13) y (5.14). A partir de (5.33) de la representación del espacio de estado del sistema de lazo cerrado, donde  $w$  es el estado, es decir, un vector compuesto por  $\eta, \dot{\eta}, x', \dot{x}'$  como se muestra en (5.35). La matriz  $A$  está representada por (5.34) y la matriz  $B$  por (5.36).

Se aplica la transformada de Laplace

$$sw = Aw + Bu \quad (5.37)$$

o

$$(sI - A)w = Bu \quad (5.38)$$

Por lo tanto

$$w = (sI - A)^{-1}Bu \quad (5.39)$$

donde  $I$  es la matriz identidad

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ -a & 0 & 0 & s \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

Invirtiendo la matriz anterior obtenemos

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} & 0 & 0 \\ \frac{a}{s^3} & \frac{a}{s^4} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ \frac{a}{s^2} & \frac{a}{s^3} & 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

Introduciendo lo anterior en (5.39) se obtiene

$$w = \begin{bmatrix} \frac{u}{s^2} \\ \frac{u}{s} \\ u\left(\frac{a}{s^4} - \frac{1}{s^2}\right) \\ u\left(\frac{a}{s^3} - \frac{1}{s}\right) \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

La salida se expresa como

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} w \quad (5.43)$$

---



por lo tanto, obtenemos la siguiente función de transferencia

$$y = \frac{u(a - s^2)}{s^4} \quad (5.44)$$

se tienen cuatro polos en

$$s = 0 \quad (5.45)$$

y los ceros son los siguientes

$$s = \pm\sqrt{a} \quad (5.46)$$

Lo anterior indica que el sistema tiene un cero del lado derecho del plano complejo, lo que indica que el sistema es de fase no mínima.

Introduciendo la entrada de control en (5.17) obtenemos la siguiente representación de espacio de estados en lazo cerrado

$$\dot{w} = A_{cl} w \quad (5.47)$$

donde

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a - k_1 & -k_2 & -k_3 & -k_4 \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

El sistema de lazo cerrado es estable si existen matrices  $P > 0$  y  $Q > 0$  tales que se satisfice la siguiente ecuación de Lyapunov

$$A_{cl}^T P + P A_{cl} + Q = 0 \quad (5.49)$$

donde  $A_{cl}, P, Q \in \mathbf{R}^{n \times n}$

Considere la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(w) = w^T P w \quad (5.50)$$

entonces

$$\dot{V}(w) = (A_{cl} w)^T P w + w^T P (A_{cl} w) = -w^T Q w \quad (5.51)$$

tenemos las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} \dot{V}(w) = -w^T Q w &\leq -\lambda_{\min}(Q) w^T w \leq -\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} w^T P w \\ &= -\alpha V(w) \end{aligned} \quad (5.52)$$

donde  $\alpha = \lambda_{\min}(Q) / \lambda_{\max}(P)$

Utilizando (5.35) se obtiene

$$\lambda_{\min}(P) \eta^2 \leq \lambda_{\min}(P) w^2 \leq w^T P w = V < V_0 \quad (5.53)$$

donde

$$V_0 = V(w(0)) \quad (5.54)$$

y por lo tanto

$$\eta^2 \leq \frac{V_0}{\lambda_{\min}(P)} \quad (5.55)$$

Si las condiciones iniciales son lo suficientemente pequeñas como para que

$$V_0 \leq \lambda_{\min} P \quad (5.56)$$

entonces la singularidad en  $\theta = 90^\circ$  no ocurrirá

---

De (5.53) obtenemos

$$\lambda_{\min}(P)\eta^2 \leq V_0 = w(0)^T P w(0) \leq \lambda_{\max}(P)w(0)^2 \quad (5.57)$$

La singularidad se evita si

$$\eta^2 \leq \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} w(0)^2 \leq 1 \quad (5.58)$$

por lo tanto, obtenemos el siguiente dominio de convergencia

$$w(0)^2 \leq \frac{\lambda_{\min}(P)}{\lambda_{\max}(P)} \quad (5.59)$$

---

### 5.3. Modelo para el control de altitud

La estrategia de control utiliza la representación del espacio de estados del sistema de lazo cerrado en (5.17) y la entrada de control  $f$  en (5.12) para estabilizar  $x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}$ .

Considerando la siguiente norma

$$d = \sqrt{x^2 + \dot{x}^2 + \theta^2 + \dot{\theta}^2} \quad (5.60)$$

Una vez que la norma  $d$  esté lo suficientemente cerca de cero, podemos cambiar la entrada de control de empuje  $f$  para estabilizar la altitud de la siguiente manera (ver (4.12))

$$f = mg - mk_{11}\dot{y} - mk_{22}(y - y_d) \quad (5.61)$$

donde las ganancias anteriores se eligen de la siguiente manera

$$k_{11} = 2 \quad (5.62)$$

$$k_{22} = 1 \quad (5.63)$$

En otras palabras, las entradas de control  $\tau'$  (de (5.11) y (5.17)) y  $f$  (ver (5.12), (4.12) y (5.61)) se dan de la siguiente manera

$$\tau' = \begin{cases} \frac{\sin\theta \dot{\theta}^2 + k_1\eta + k_2\dot{\eta} + k_3x + k_4\dot{x}}{\cos\theta} & \text{para } d > \epsilon \\ 0 & \text{para } d < \epsilon \end{cases} \quad (5.64)$$

$$f = \begin{cases} \frac{mg}{l} + \frac{l\dot{\theta}^2}{l} & \text{para } d > \epsilon \\ mg - mk_{11}\dot{y} - mk_{22}(y - y_d) & \text{para } d < \epsilon \end{cases} \quad (5.65)$$

donde  $\epsilon$  es una pequeña constante positiva

Para indicar qué entrada de control se aplica usamos en los resultados de la simulación la variable  $\delta$  de la siguiente manera

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{para } d > \epsilon \\ 0 & \text{para } d < \epsilon \end{cases} \quad (5.66)$$

Introduciendo (5.61) en (4.12) y asumiendo que  $\theta = 0^\circ$  da el siguiente sistema de lazo cerrado

$$\ddot{y} + k_{11}\dot{y} + k_{22}(y - y_d) = 0 \quad (5.67)$$

por lo tanto, la altitud  $y$  convergerá a la salida deseada  $y_d$ .

---

### 5.3.1. Simulaciones numéricas para el control de altitud

La Figura 5.1 presenta la evolución de  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ ,  $\delta$  cuando  $a = 1$ ,  $y_d = 15$ ,  $\epsilon = 2$  bajo las siguientes condiciones iniciales  $\dot{\theta}(0) = 0$ ,  $\theta(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = 0$ ,  $y(0) = 8$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ ,  $x(0) = 2$ .

Se introduce un interruptor para pasar del control de desplazamiento horizontal al esquema de control de altitud, donde  $\epsilon$  es el umbral del interruptor y  $\delta$  es la salida del interruptor.

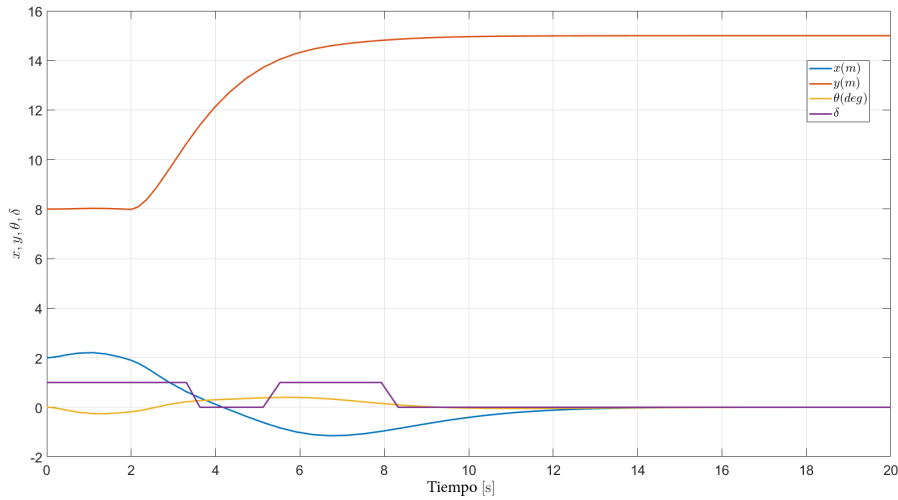


Figura 5.1: Evolución de los estados  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ ,  $\delta$

La Figura 5.2 presenta la evolución de  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ ,  $\delta$  cuando  $a = 1$ ,  $y_d = 10$ ,  $\epsilon = 1$  bajo las siguientes condiciones iniciales  $\dot{\theta}(0) = 0$ ,  $\theta(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = 0$ ,  $y(0) = 20$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ ,  $x(0) = 7$ .

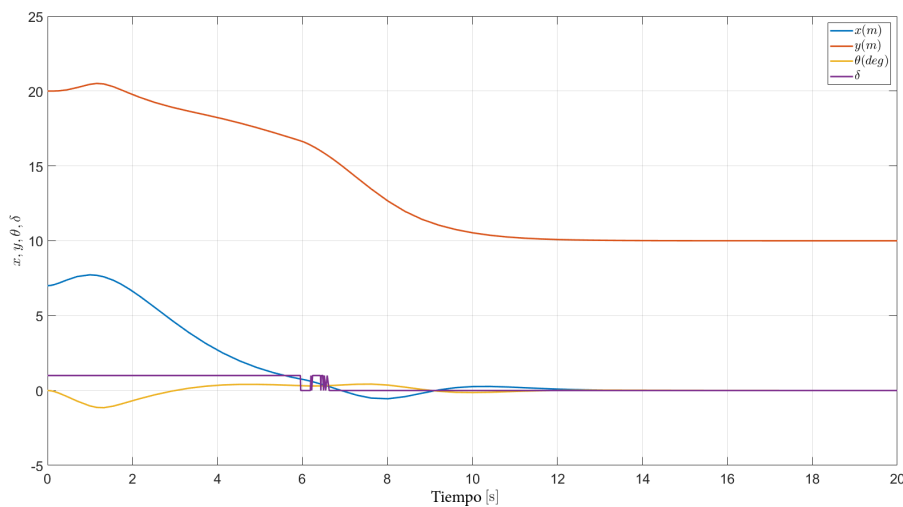


Figura 5.2: Evolución de los estados  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ ,  $\delta$

## 5.4. Modelo para el control de velocidad horizontal

La estrategia de control de la sección anterior converge cuando la condición inicial está cerca del valor deseado. Si la condición inicial es lejana, propondremos una estrategia de control tal que la velocidad horizontal alcance una velocidad deseada mientras que la altitud converge a un valor deseado. El desplazamiento horizontal cuando la entrada de control viene dada por (5.12) viene dada por (5.13) y (5.14).

$$\ddot{\eta} = u \quad (5.68)$$

$$\ddot{x}' = a\eta - u \quad (5.69)$$

Consideramos el sistema lineal de (5.68) - (5.69) y calculamos la función de transferencia con entrada  $u$  y salida  $\dot{x}'$ .

Para obtener la función de transferencia, usamos (5.68) y (5.69). A partir de (5.33) de la representación del espacio de estados del sistema de lazo cerrado y  $w'$  es el estado.

$$w' = \begin{bmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \\ \dot{x}' \end{bmatrix} \quad (5.70)$$

Las matrices  $A$  y  $B$  son las siguientes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.71)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (5.72)$$

Aplicando la transformada de Laplace se sigue

$$sw' = A_1w' + B_1u \quad (5.73)$$

o

$$(sI - A_1)w' = B_1u \quad (5.74)$$

Por lo tanto

$$w' = (sI - A_1)^{-1}B_1u \quad (5.75)$$

donde  $I$  es la matriz identidad.

$$(sI - A_1) = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ -a & 0 & s \end{bmatrix} \quad (5.76)$$

invirtiendo la matriz anterior se obtiene

$$(sI - A_1)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} & 0 \\ \frac{a}{s^2} & \frac{a}{s^3} & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \quad (5.77)$$

Introduciendo lo anterior en (5.75) se obtiene

$$w' = \begin{bmatrix} \frac{u}{s^2} \\ \frac{u}{s} \\ u\left(\frac{a}{s^3} - \frac{1}{s}\right) \end{bmatrix} \quad (5.78)$$

La salida  $y'$  se expresa como

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} w' \quad (5.79)$$

por lo tanto, obtenemos la siguiente función de transferencia

$$y' = \frac{u(a - s^2)}{s^3} \quad (5.80)$$

Por lo tanto, la función de transferencia de  $u$  a  $y$  tiene tres polos en el origen, un cero a la derecha del plano complejo y un cero a la izquierda del plano complejo de la siguiente manera:

---



$$s = \pm\sqrt{a} \quad (5.81)$$

Obteniendo los polos y ceros de la función de transferencia de  $u$  a  $\dot{x}'$ , se llega a la conclusión de que hay 3 polos en el origen y es un sistema de fase no mínima.

Considere la siguiente entrada de control de retroalimentación de estado

$$u = k_1\eta + k_2\dot{\eta} + k_3e_v \quad (5.82)$$

donde  $\dot{x}'_d$  es una constante y  $e_v$  se describe a continuación

$$e_v = \dot{x}' - \dot{x}'_d \quad (5.83)$$

introduciendo (5.82) en (5.68) y (5.69) da la siguiente representación de espacio de estado para el sistema de lazo cerrado.

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \ddot{\eta} \\ \dot{e}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \\ \dot{x}' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u \quad (5.84)$$

Introduciendo (5.82) en lo anterior obtenemos

$$\ddot{\eta} - k_2\dot{\eta} - k_1\eta - k_3e_v = 0 \quad (5.85)$$

$$\dot{e}_v - a\eta + k_2\dot{\eta} + k_1\eta + k_3e_v = 0 \quad (5.86)$$

Usando la transformada de Laplace se obtiene:

$$M(s) \begin{bmatrix} \eta \\ e_v \end{bmatrix} = 0 \quad (5.87)$$

$$M(s) = \begin{bmatrix} s^2 - k_2s - k_1 & -k_3 \\ k_2s + k_1 - a & s + k_3 \end{bmatrix} \quad (5.88)$$

De lo anterior se obtiene

$$\det M(s) = s^3 + s^2(k_3 - k_2) - sk_1 - ak_3 \quad (5.89)$$

Suponga que los polos en lazo cerrado deseados están dados por el polinomio

$$(s + 1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1 \quad (5.90)$$

Por lo tanto, las ganancias del controlador están dadas por

$$k_1 = -3 \quad (5.91)$$

$$k_2 = -3 - \frac{1}{a} \quad (5.92)$$

$$k_3 = -\frac{1}{a} \quad (5.93)$$

Considere la siguiente norma

$$d' = \sqrt{(\dot{x}' - \dot{x}'_d)^2 + \theta^2 + \dot{\theta}^2} \quad (5.94)$$

La entrada de control  $f$  cambiará de su valor en (5.12) a su valor en (5.94) cuando la norma  $d'$  sea menor que un umbral predefinido.

En otras palabras, las entradas de control  $\tau$  y  $f$  se dan de la siguiente manera

$$\tau = \begin{cases} \frac{\sin\theta \dot{\theta}^2 + k_1\eta + k_2\dot{\eta} + k_3(\dot{x}' - \dot{x}'_d)}{\cos\theta} & \text{para } d' > \epsilon \\ 0 & \text{para } d' < \epsilon \end{cases} \quad (5.95)$$

$$f = \begin{cases} \frac{mg}{l} + \frac{I\dot{\theta}^2}{l} & \text{para } d' > \epsilon \\ mg - mk_{11}\dot{y} - mk_{22}(y - y_d) & \text{para } d' < \epsilon \end{cases} \quad (5.96)$$

Para indicar qué entrada de control se aplica usamos en los resultados de la simulación la variable  $\delta$  de la siguiente manera

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{para } d' > \epsilon \\ 0 & \text{para } d' < \epsilon \end{cases} \quad (5.97)$$

### 5.4.1. Simulación numérica para el control de velocidad horizontal

La Figura 5.3 presenta la evolución de  $y, \theta, \dot{x}, \delta$  cuando  $a = 1, y_d = 10, \epsilon = 1$  bajo las siguientes condiciones iniciales  $\dot{\theta}(0) = 0, \theta(0) = 0, \dot{y}(0) = 0, y(0) = 8, \dot{x}(0) = 0, \dot{x}_d(0) = 3, x(0) = 5$ , donde  $\epsilon$  es el umbral de cambio y  $\delta$  es la salida del interruptor.

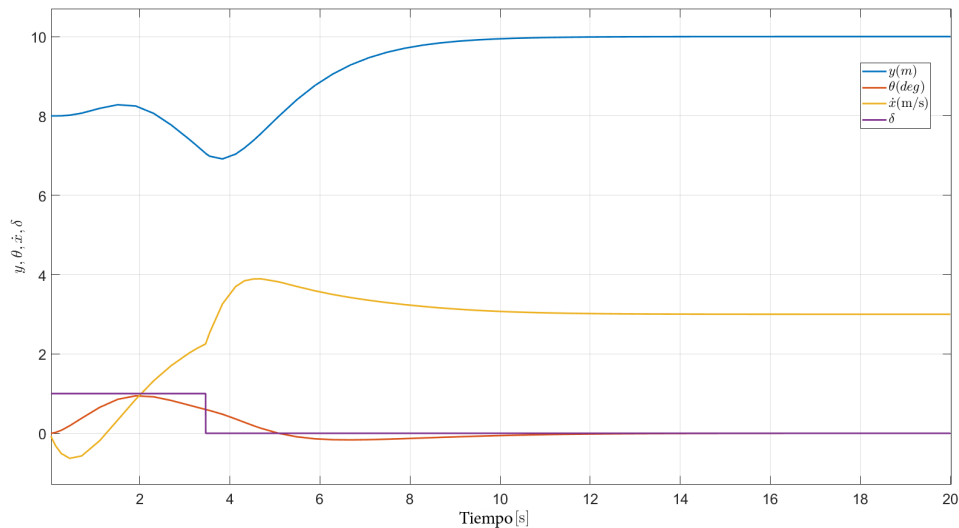


Figura 5.3: Evolución de los estados  $y, \theta, \dot{x}, \delta$

## 5.5. Modelo para el control de posición de un cohete por aproximación

Este algoritmo se basa en un cambio de las variables de control que linealiza parcialmente el sistema que describen la operación del cohete.

Partiendo de las ecuaciones de planta

$$\ddot{\theta} = \tau \quad (5.98)$$

$$\ddot{x} = f \sin \theta - \tau \cos \theta \quad (5.99)$$

$$\ddot{y} = f \cos \theta + \tau \sin \theta - mg \quad (5.100)$$

ahora se despeja  $f, \tau$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} f \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (5.101)$$

La ecuación (5.102) se obtiene premultiplicando (5.101) por la inversa de la matriz  $A$

$$\begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (5.102)$$

donde

$$\tau = -\cos \theta u_1 + \sin \theta u_2 \quad (5.103)$$

$$f = \sin \theta u_1 + \cos \theta u_2 \quad (5.104)$$

sustituyendo (5.103) en (5.98) obtenemos

$$\ddot{\theta} = -\cos \theta u_1 + \sin \theta u_2 \quad (5.105)$$

ahora (5.106) es una aproximación de (5.105) cuando el ángulo  $\theta$  es pequeño.

$$\ddot{\theta} = -u_1 + \theta \quad (5.106)$$

$$\ddot{x} = u_1 \quad (5.107)$$

Se establece lo siguiente

$$\ddot{y} = u_2 - mg = -2\dot{y} - (y - y_d) \quad (5.108)$$

$$u_2 = -2\dot{y} - (y - y_d) + mg \quad (5.109)$$

Donde  $y$  converge con  $y_d$  al igual que  $u_2$  converge a  $mg$ . Así que, si  $mg$  es igual a 1, entonces  $u_2$  converge a 1.

$$u_1 = k_1\theta + k_2\dot{\theta} + k_3x + k_4\dot{x} \quad (5.110)$$

Aplicando la transformada de Laplace en (5.110) se obtiene

$$\underbrace{\begin{bmatrix} s^2 + k_1 + k_2s - 1 & k_3 + k_4s \\ -k_1 - k_2s & s^2 - k_3 - k_4s \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix} = 0 \quad (5.111)$$

$$\det A = s^4 + s^3(k_2 - k_4) + s^2(k_1 - k_3 - 1) + sk_4 + k_3 \quad (5.112)$$

si se desea

$$(s + 1)^4 = s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1 \quad (5.113)$$

con lo anterior se obtienen las siguientes ganancias

$$k_1 = 8 \quad (5.114)$$

$$k_2 = 8 \quad (5.115)$$

$$k_3 = 1 \quad (5.116)$$

$$k_4 = 4 \quad (5.117)$$

Sustituyendo las ganancias obtenidas en (5.110)

$$u_1 = 8\theta + 8\dot{\theta} + x + 4\dot{x} \quad (5.118)$$

### 5.5.1. Simulación del algoritmo de control por aproximación

La Fig.5.4 presenta la evolución de  $x, y, \theta$  bajo las siguientes condiciones iniciales  $\dot{\theta}(0) = 0.12, \theta(0) = 0.1, \dot{y}(0) = 0.2, y(0) = 0.1, \dot{x}(0) = 0.2, x(0) = 0.1, y_d = 1$ .

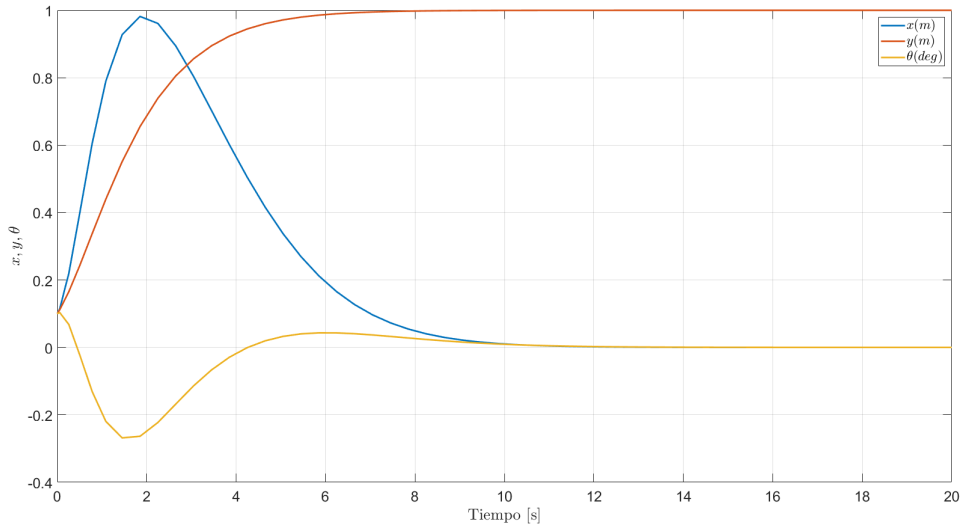


Figura 5.4: Evolución de los estados  $x, y, \theta$

La Fig.5.5 presenta la evolución de  $x, y, \theta$  bajo las siguientes condiciones iniciales  $\dot{\theta}(0) = 1, \theta(0) = 0.1, \dot{y}(0) = 0.2, y(0) = 0.1, \dot{x}(0) = 0.2, x(0) = 0.1, y_d = 1$ .

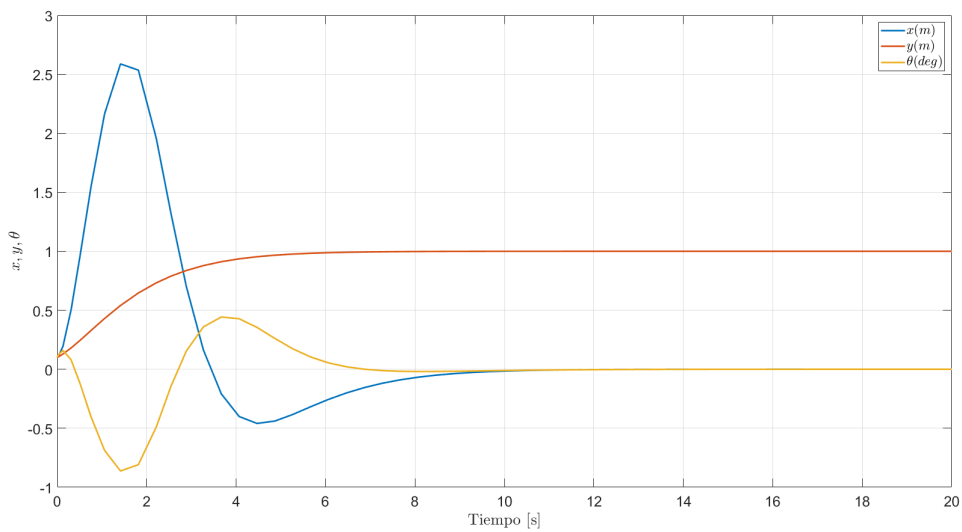


Figura 5.5: Evolución de los estados  $x, y, \theta$

La Fig.5.6 presenta la evolución de  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$  bajo las siguientes condiciones iniciales  $\dot{\theta}(0) = 0.12$ ,  $\theta(0) = 0.1$ ,  $\dot{y}(0) = 0.2$ ,  $y(0) = 1$ ,  $\dot{x}(0) = 0.2$ ,  $x(0) = 0.5$ ,  $y_d = 10$ .

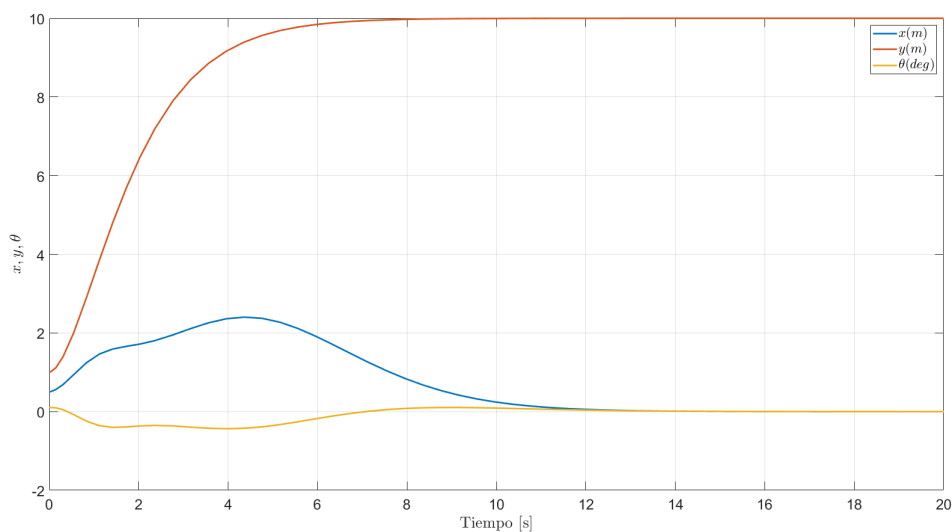


Figura 5.6: Evolución de los estados  $x, y, \theta$

La Fig.5.7 presenta la evolución de  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$  bajo las siguientes condiciones iniciales  $\dot{\theta}(0) = 1$ ,  $\theta(0) = 0.1$ ,  $\dot{y}(0) = 0.5$ ,  $y(0) = 0.1$ ,  $\dot{x}(0) = 0.2$ ,  $x(0) = 0.1$ ,  $y_d = 15$ .

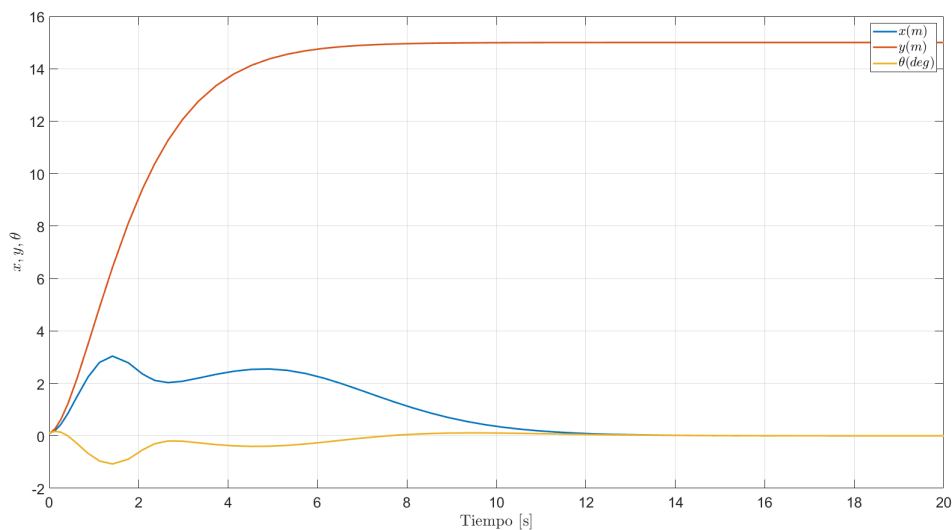


Figura 5.7: Evolución de los estados  $x, y, \theta$

La Fig.5.8 presenta la evolución de  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$  bajo las siguientes condiciones iniciales  $\dot{\theta}(0) = 1$ ,  $\theta(0) = 0.1$ ,  $\dot{y}(0) = 0.2$ ,  $y(0) = 0.5$ ,  $\dot{x}(0) = 0.2$ ,  $x(0) = 0.1$ ,  $y_d = 18$ .

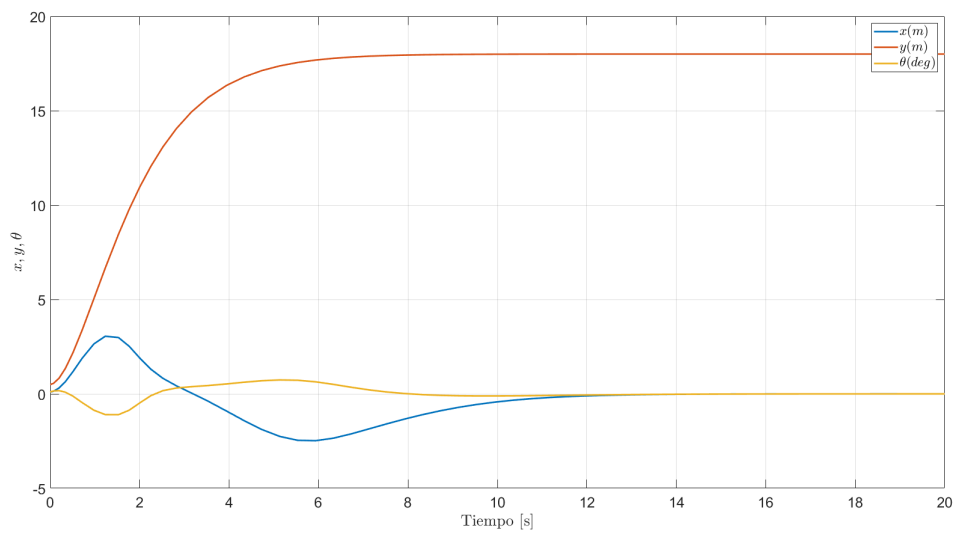


Figura 5.8: Evolución de los estados  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$



## 5.6. Modelo para el control de posición de un cohete utilizando doble saturación

Partiendo de las ecuaciones de planta

$$\ddot{\theta} = \tau \quad (5.119)$$

$$\ddot{x} = f \sin \theta - \tau \cos \theta \quad (5.120)$$

$$\ddot{y} = f \cos \theta + \tau \sin \theta - mg \quad (5.121)$$

Suponiendo que  $f$  se usa para controlar la altitud, entonces

$$f = \frac{-2\dot{y} - y + y_d + mg}{\cos \theta} \quad (5.122)$$

Al introducir la ecuación anterior en 5.121 se obtiene

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + (y - y_d) = \tau \sin \theta \quad (5.123)$$

esto significa que si el término  $\tau \sin \theta$  es pequeño, entonces  $y \rightarrow y_d, \dot{y} \rightarrow 0$ .

Para controlar el subsistema (5.119), (5.120) se propone la siguiente ley de control para  $\tau$ .

$$\tau = -\theta - 10\dot{\theta} - (\sigma_a(x + \dot{x}) + \sigma_b(\dot{x})) \quad (5.124)$$

Los valores de los parámetros anteriores se han ajustado mediante simulaciones para proporcionar un transitorio razonable. La función de saturación se define de la siguiente manera

$$\sigma_a(\chi) = \begin{cases} a & \text{si } \chi > a \\ \chi & \text{si } -a \leq \chi \leq a \\ -a & \text{si } \chi < -a \end{cases} \quad (5.125)$$

Introduciendo (5.124) en (5.119) se obtiene el siguiente bucle cerrado

$$\ddot{\theta} + 10\dot{\theta} + \theta = -\frac{1}{mg}(\sigma_a(\dot{x} + x) + \sigma_b(\dot{x})) \quad (5.126)$$

Los límites  $a, b$  de las dos saturaciones se seleccionan mediante simulación. Se seleccionan como  $a = 0.1$  y  $b = 1.0$  de modo que después de un cierto tiempo  $|\theta| < \epsilon$ , donde  $\epsilon = a + b$

es un número pequeño y representa el límite superior de  $|\theta|$ . El coeficiente de amortiguación 10 se selecciona de manera que  $|\theta| < \epsilon$ , en poco tiempo. Luego después de un corto lapso de tiempo se tendrá que el término  $\tau \sin \theta$  en (5.123) es de orden  $\epsilon$ , por lo que  $y - y_d$  es de orden  $\epsilon$  también.

Considerando que  $\tau$  y  $\theta$  son pequeños, tenemos que  $\tau \cos \theta \approx 0$ ,  $f \approx mg$ ,  $\sin \theta \approx \theta$ . Entonces de (5.126) se deduce que  $\theta$  rastrea el expresión en el lado derecho de (5.126). Se concluye que (5.99) es aproximadamente igual a la siguiente ecuación.

$$\ddot{x} = -\sigma_a(\dot{x} + x) - \sigma_b(\dot{x}) \quad (5.127)$$

Hemos elegido  $a = 0.1$  y  $b = 1.0$  tales que  $a \ll b$ . Defina  $V = \frac{1}{2}\dot{x}^2$ . Entonces  $\dot{V} = \dot{x}(-\sigma_a(\dot{x} + x) - \sigma_b(\dot{x}))$ . Entonces, cuando  $|\dot{x}| > b$  se deduce que  $\dot{V} < 0$ . Por lo tanto, después de un tiempo finito  $|\dot{x}| < b$ .

La ecuación anterior se reduce a

$$\ddot{x} + \dot{x} = -\sigma_a(\dot{x} + x) \quad (5.128)$$

De lo anterior se deduce que  $\dot{x} + x \rightarrow 0$  y luego  $x \rightarrow 0$

---

### 5.6.1. Simulación del algoritmo de control por doble saturación

La Figura 5.9 presenta la evolución de  $x, y, \theta, \tau$  bajo las siguientes condiciones iniciales  $\dot{\theta}(0) = 0.5, \theta(0) = 0.1, \dot{y}(0) = 0.02, y(0) = 0.03, \dot{x}(0) = 0.1, x(0) = 0.4, y_d = 20$ .

De la Figura 5.9 se deduce que  $\theta$  converge a cero,  $y_d$  converge a su valor deseado y  $x$  oscila alrededor de cero.

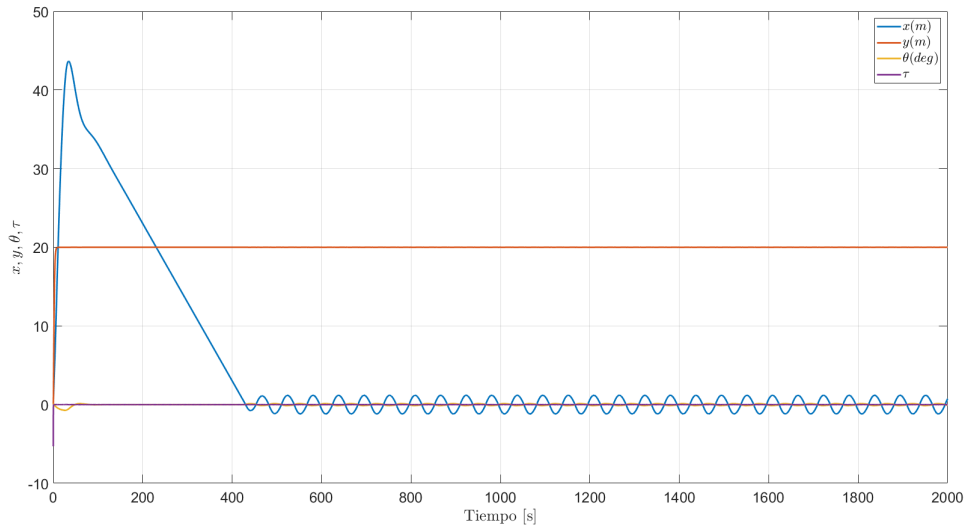


Figura 5.9: Evolución de los estados  $x, y, \theta, \tau$

La Fig.5.10 presenta la evolución de  $x, y, \theta, \tau$  bajo las siguientes condiciones iniciales  $\dot{\theta}(0) = 0.5, \theta(0) = 0.1, \dot{y}(0) = 0.02, y(0) = 0.03, \dot{x}(0) = 0.1, x(0) = 0.2, y_d = 10$ .

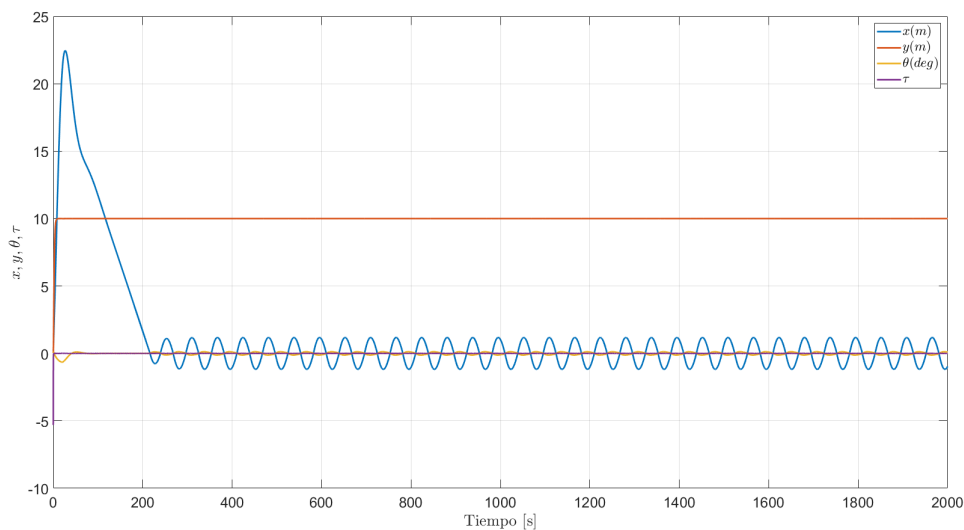


Figura 5.10: Evolución de los estados  $x, y, \theta, \tau$

La Fig.5.11 presenta la evolución de  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ ,  $\tau$  bajo las siguientes condiciones iniciales  $\dot{\theta}(0) = 0.5$ ,  $\theta(0) = 0.1$ ,  $\dot{y}(0) = 0.02$ ,  $y(0) = 0.03$ ,  $\dot{x}(0) = 0.1$ ,  $x(0) = 0.5$ ,  $y_d = 30$ .

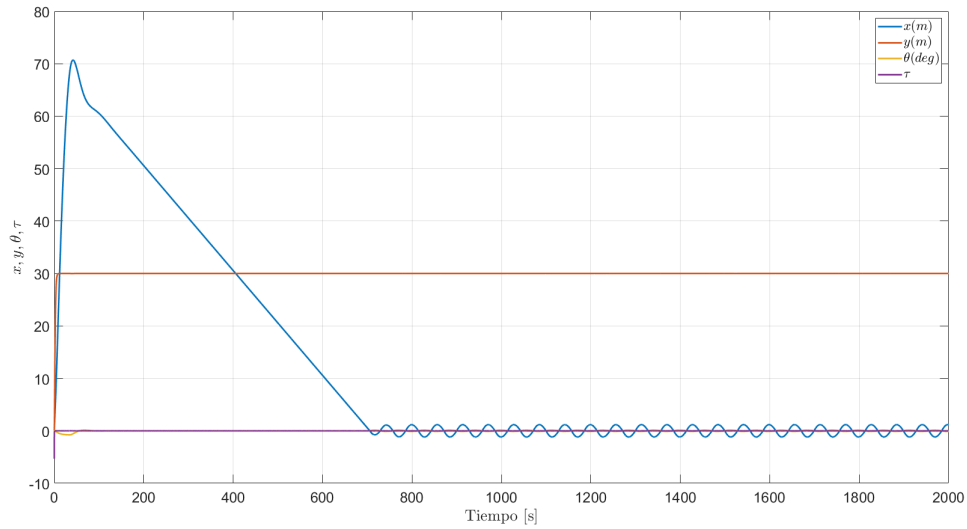


Figura 5.11: Evolución de los estados  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ ,  $\tau$

La Figura 5.12 presenta la evolución de  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ ,  $\tau$  bajo las siguientes condiciones iniciales  $\dot{\theta}(0) = 0.3$ ,  $\theta(0) = 0.1$ ,  $\dot{y}(0) = 0.01$ ,  $y(0) = 0.03$ ,  $\dot{x}(0) = 0.2$ ,  $x(0) = 0.5$ ,  $y_d = 5$ .

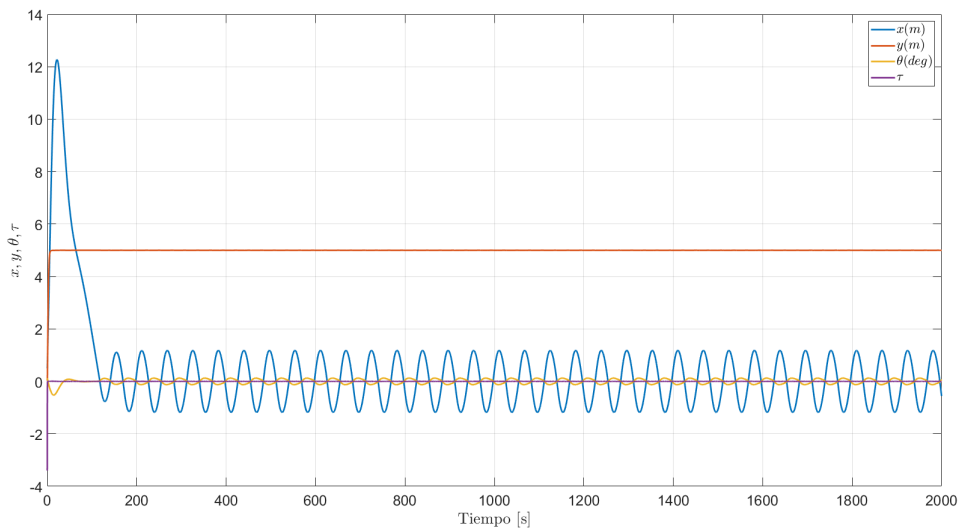


Figura 5.12: Evolución de los estados  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ ,  $\tau$

La Figura 5.13 presenta la evolución de  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ ,  $\tau$  bajo las siguientes condiciones iniciales  $\dot{\theta}(0) = 0.5$ ,  $\theta(0) = 0.2$ ,  $\dot{y}(0) = 0.05$ ,  $y(0) = 0.03$ ,  $\dot{x}(0) = 0.3$ ,  $x(0) = 0.5$ ,  $y_d = 1$ .

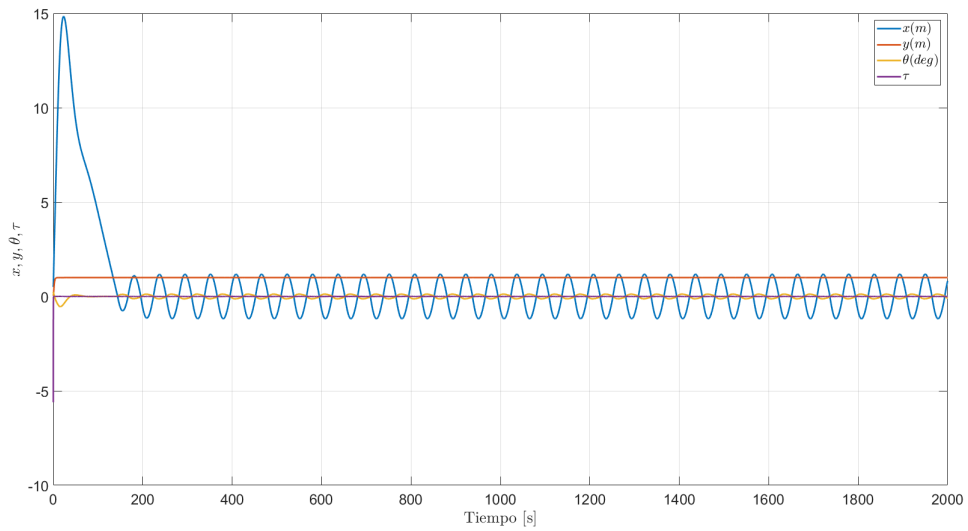


Figura 5.13: Evolución de los estados  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ ,  $\tau$

## 5.7. Modelo para el control de posición de un cohete utilizando saturaciones variables

Partiendo de las ecuaciones de la planta

$$\ddot{\theta} = \tau \quad (5.129)$$

$$\ddot{x} = f \sin \theta - \tau \cos \theta \quad (5.130)$$

$$\ddot{y} = f \cos \theta + \tau \sin \theta - mg \quad (5.131)$$

Suponiendo que  $f$  se usa para controlar la altitud, entonces

$$f = \frac{-2\dot{y} - y + y_d + mg}{\cos \theta} \quad (5.132)$$

Para controlar el subsistema (5.129), (5.130) se propone la siguiente ley de control para  $\tau$ .

$$\tau = -\theta - 10\dot{\theta} - (Sat_{din1}(x + \dot{x}) + Sat_{din2}(\dot{x})) \quad (5.133)$$

Al utilizar saturaciones dinámicas se necesita establecer un límite superior  $Lim_s$  e inferior  $Lim_I$ . Por lo cual en la  $Sat_{din1}$  se establece como  $Lim_s = b$  y como  $Lim_I = -b$ . Mientras que a la  $Sat_{din2}$  se establece como  $Lim_s = 8b$ ,  $Lim_I = -8b$  y  $t$ =tiempo.

$$b = Sat_3(0.01(10 - t0.01)) \quad (5.134)$$

Para la  $Sat_3$  se establece como  $Lim_s = 0.5$  y como  $Lim_I = 0.0001$ .

---

### 5.7.1. Simulación del algoritmo de control por saturaciones dinámicas

La Fig.5.14 presenta la evolución de  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ ,  $\tau$  bajo las siguientes condiciones iniciales  $\dot{\theta}(0) = 0.5$ ,  $\theta(0) = 0.1$ ,  $\dot{y}(0) = 0.02$ ,  $y(0) = 0.03$ ,  $\dot{x}(0) = 0.1$ ,  $x(0) = 0.4$ ,  $y_d = 20$ .

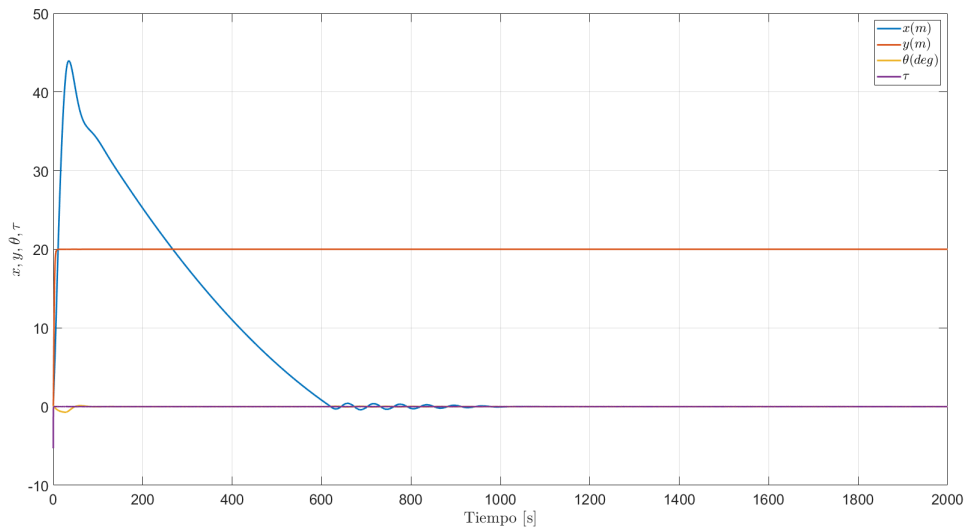


Figura 5.14: Evolución de los estados  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ ,  $\tau$

La Fig.5.15 presenta la evolución de  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ ,  $\tau$  bajo las siguientes condiciones iniciales  $\dot{\theta}(0) = 0.5$ ,  $\theta(0) = 0.1$ ,  $\dot{y}(0) = 0.02$ ,  $y(0) = 0.03$ ,  $\dot{x}(0) = 0.1$ ,  $x(0) = 0.4$ ,  $y_d = 5$ .

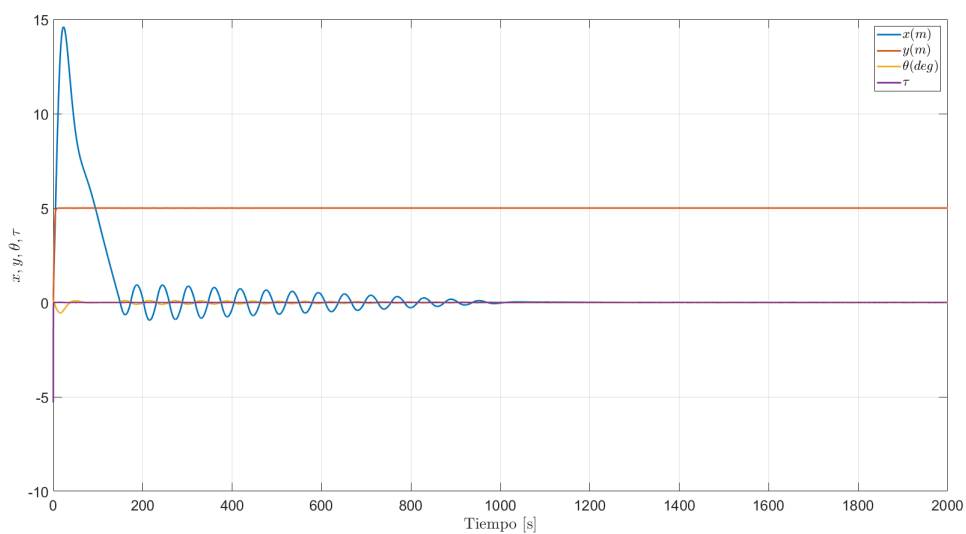


Figura 5.15: Evolución de los estados  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ ,  $\tau$

La Fig.5.16 presenta la evolución de  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ ,  $\tau$  bajo las siguientes condiciones iniciales  $\dot{\theta}(0) = 0.5$ ,  $\theta(0) = 0.1$ ,  $\dot{y}(0) = 0.02$ ,  $y(0) = 0.03$ ,  $\dot{x}(0) = 0.1$ ,  $x(0) = 0.2$ ,  $y_d = 10$ .

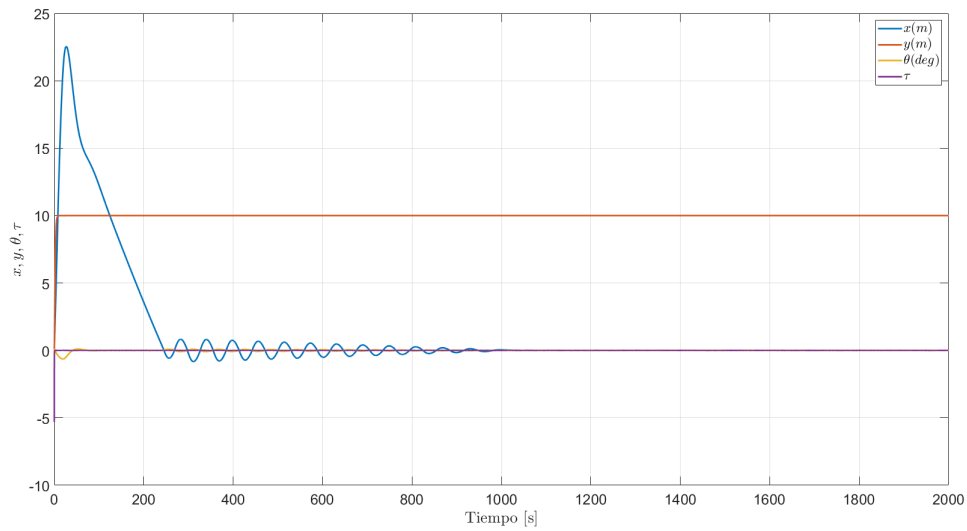


Figura 5.16: Evolución de los estados  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ ,  $\tau$

La Fig.5.17 presenta la evolución de  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ ,  $\tau$  bajo las siguientes condiciones iniciales  $\dot{\theta}(0) = 0.3$ ,  $\theta(0) = 0.1$ ,  $\dot{y}(0) = 0.01$ ,  $y(0) = 0.03$ ,  $\dot{x}(0) = 0.2$ ,  $x(0) = 0.5$ ,  $y_d = 5$ .

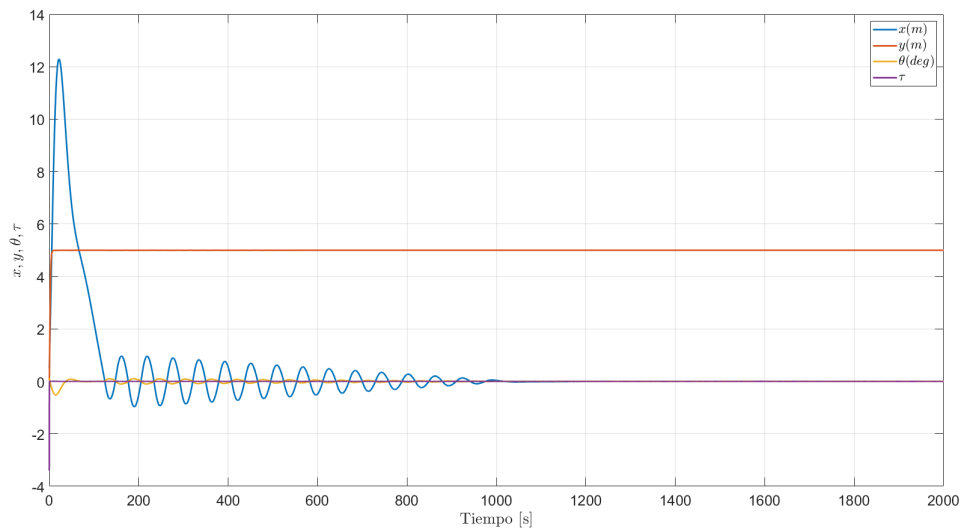


Figura 5.17: Evolución de los estados  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ ,  $\tau$



La Fig.5.18 presenta la evolución de  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ ,  $\tau$  bajo las siguientes condiciones iniciales  $\dot{\theta}(0) = 0.5$ ,  $\theta(0) = 0.2$ ,  $\dot{y}(0) = 0.05$ ,  $y(0) = 0.03$ ,  $\dot{x}(0) = 0.3$ ,  $x(0) = 0.5$ ,  $y_d = 1$ .

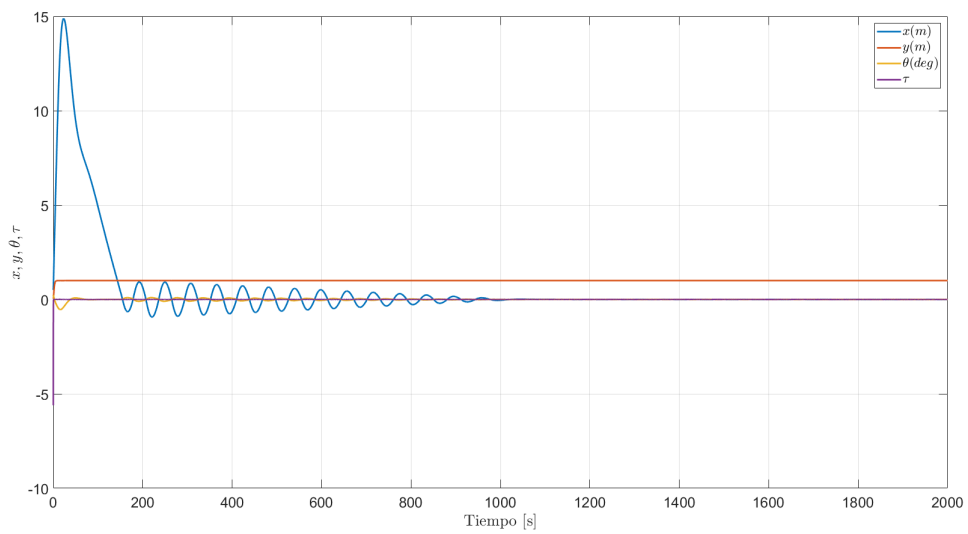


Figura 5.18: Evolución de los estados  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ ,  $\tau$

## 5.8. Modelo para el control de posición de un cohete utilizando una saturación

Partiendo de las ecuaciones del sistema

$$\ddot{\theta} = \tau \quad (5.135)$$

$$\ddot{x} = f \sin \theta - \tau \cos \theta \quad (5.136)$$

$$\ddot{y} = f \cos \theta + \tau \sin \theta - mg \quad (5.137)$$

Proponemos nuevamente la entrada de control  $f$  como

$$f = \frac{-2\dot{y} - y + y_d + mg}{\cos \theta} \quad (5.138)$$

y la entrada de control  $\tau$  como

$$\tau = -\theta - 10\dot{\theta} - \sigma_c(0.01x + \dot{x}) \quad (5.139)$$

En la ecuación anterior, la entrada de control  $\tau$  tiene solo una función de saturación. El término de amortiguación fijado como 10 multiplicando  $\dot{\theta}$  modifica la velocidad de convergencia. El término proporcional fijado en 1 multiplicando  $\theta$  modifica la amplitud y finalmente el coeficiente 0.01 multiplicando  $x$  reducirá la influencia de la condición inicial  $x(0)$  y por tanto el algoritmo de control reducirá primero la velocidad horizontal  $|\dot{x}|$  y una vez que la velocidad es pequeña, el desplazamiento  $x$  convergerá a cero. Introduciendo (5.138) en (5.137) se obtiene el siguiente sistema de lazo cerrado

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + (y - y_d) = \tau \sin \theta \quad (5.140)$$

Introduciendo (5.139) en (5.135) se obtiene

$$\ddot{\theta} + 10\dot{\theta} + \theta = -\frac{1}{mg}\sigma_c(0.01x + \dot{x}) \quad (5.141)$$

---

Si el límite  $c$  en (5.139) es tal que  $c < \epsilon$  entonces, después de un cierto tiempo, seguirá  $|\theta| < \frac{\epsilon}{mg}$ . Entonces de (5.139) se sigue que  $|\tau| < \frac{\epsilon}{mg}$  y después de cierto tiempo el término  $\tau \sin \theta$  será del orden de  $(\frac{\epsilon}{mg})^2$ .

Por esta razón se considera que  $\tau$  y  $\theta$  son pequeños y se deduce que  $\tau \cos \theta \approx 0$ ,  $f \approx mg$ ,  $\sin \theta \approx \theta$ . Entonces  $\theta$  converge a la expresión en el lado derecho de (5.141). Por lo tanto (5.136) se puede reescribir como la siguiente ecuación.

$$\ddot{x} = -\sigma_c(0.01x + \dot{x}) \quad (5.142)$$

Para una condición inicial  $x(0)$ , el coeficiente que multiplica  $x$  se puede elegir lo suficientemente pequeño como para que  $|\dot{x}|$  disminuya y luego (5.142) se reduzca a

$$\ddot{x} + \dot{x} + 0.01x = 0 \quad (5.143)$$

de lo cual se deduce que  $x \rightarrow 0$ .

---

### 5.8.1. Simulación del algoritmo de control utilizando una saturación

La Fig.5.19 presenta la evolución de  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ ,  $\tau$  bajo las siguientes condiciones iniciales  $\dot{\theta}(0) = 0.5$ ,  $\theta(0) = 0.1$ ,  $\dot{y}(0) = 0.2$ ,  $y(0) = 0.3$ ,  $\dot{x}(0) = 0.1$ ,  $x(0) = 0.4$ ,  $y_d = 20$ .

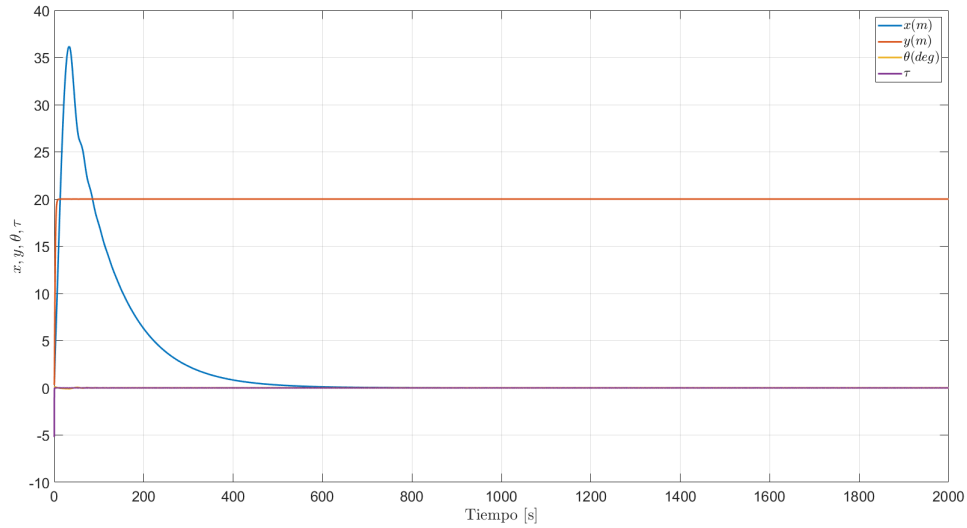


Figura 5.19: Evolución de los estados  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ ,  $\tau$

La Fig.5.20 presenta la evolución de  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ ,  $\tau$  bajo las siguientes condiciones iniciales  $\dot{\theta}(0) = 0.5$ ,  $\theta(0) = 0.1$ ,  $\dot{y}(0) = 0.2$ ,  $y(0) = 0.8$ ,  $\dot{x}(0) = 0.1$ ,  $x(0) = 0.4$ ,  $y_d = 5$ .

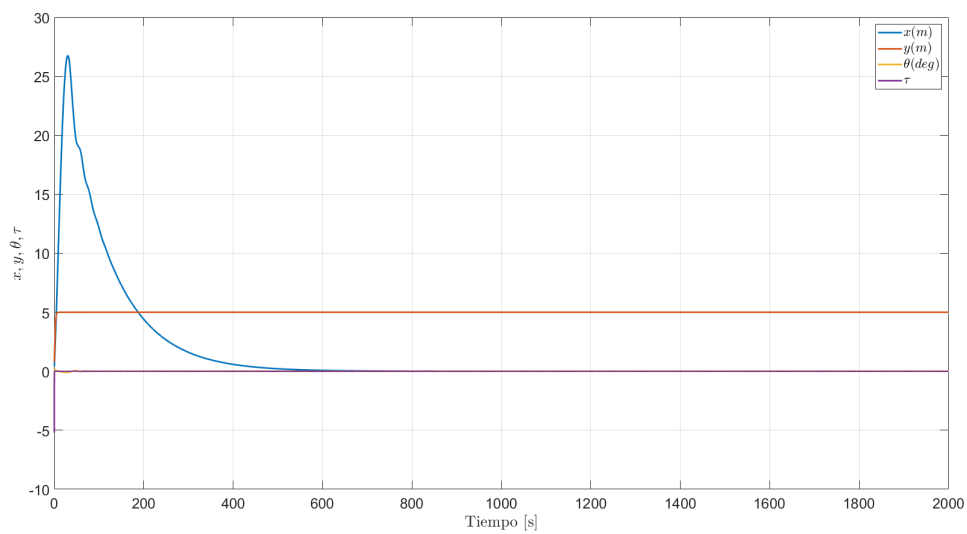


Figura 5.20: Evolución de los estados  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ ,  $\tau$

La Fig.5.21 presenta la evolución de  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ ,  $\tau$  bajo las siguientes condiciones iniciales  $\dot{\theta}(0) = 0.7$ ,  $\theta(0) = 0.3$ ,  $\dot{y}(0) = 0.5$ ,  $y(0) = 0.8$ ,  $\dot{x}(0) = 0.3$ ,  $x(0) = 0.4$ ,  $y_d = 10$ .

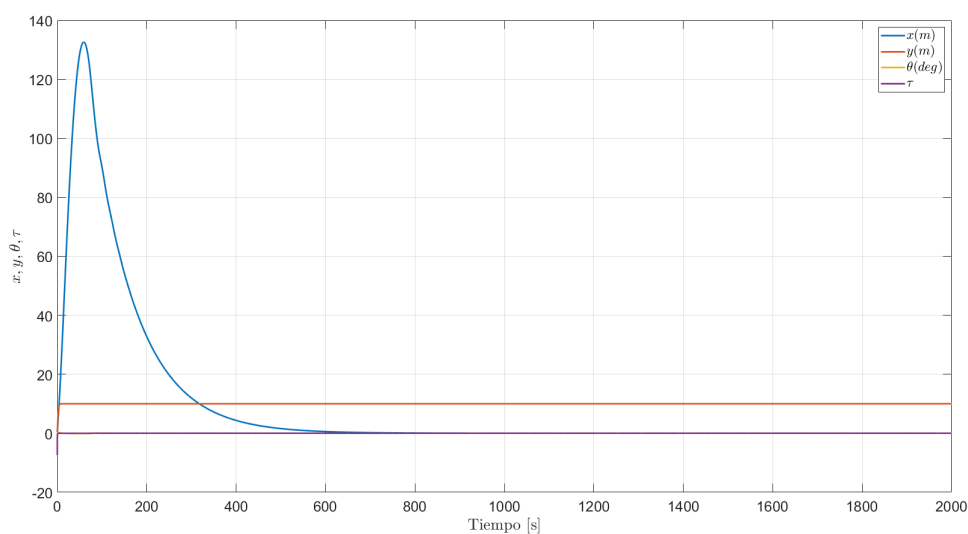


Figura 5.21: Evolución de los estados  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ ,  $\tau$

La Fig.5.22 presenta la evolución de  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ ,  $\tau$  bajo las siguientes condiciones iniciales  $\dot{\theta}(0) = 0.1$ ,  $\theta(0) = 0.5$ ,  $\dot{y}(0) = 0.1$ ,  $y(0) = 0.2$ ,  $\dot{x}(0) = 0.8$ ,  $x(0) = 0.2$ ,  $y_d = 30$ .

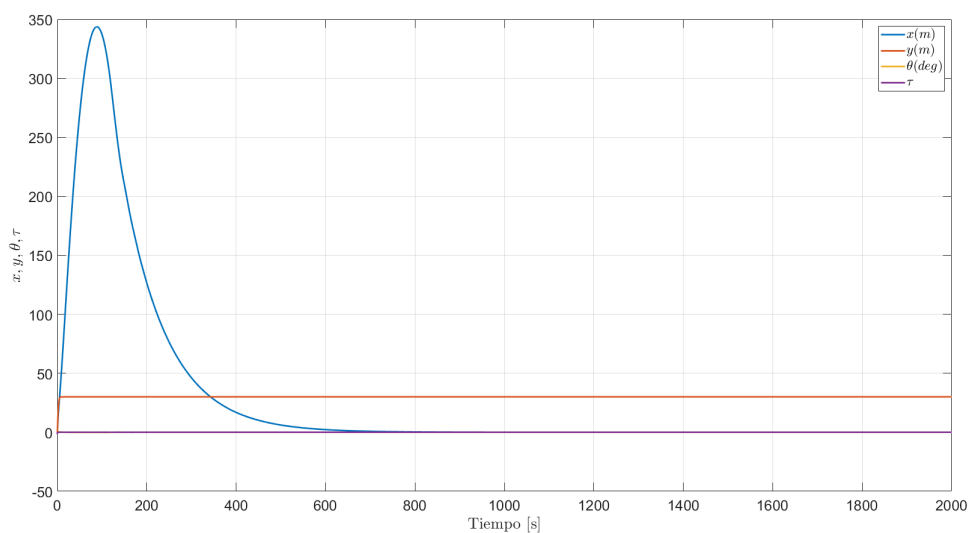


Figura 5.22: Evolución de los estados  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ ,  $\tau$

La Fig.5.23 presenta la evolución de  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ ,  $\tau$  bajo las siguientes condiciones iniciales  $\dot{\theta}(0) = 1$ ,  $\theta(0) = 0.5$ ,  $\dot{y}(0) = 0.5$ ,  $y(0) = 0.2$ ,  $\dot{x}(0) = 0.3$ ,  $x(0) = 0.2$ ,  $y_d = 1$ .

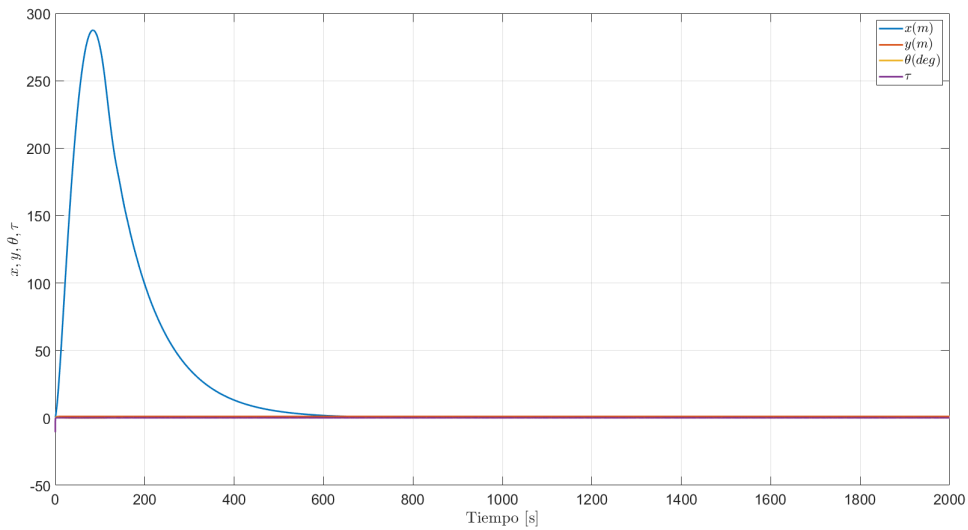


Figura 5.23: Evolución de los estados  $x, y, \theta, \tau$

La Fig.5.24 presenta la evolución de  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ ,  $\tau$  bajo las siguientes condiciones iniciales  $\dot{\theta}(0) = 0.5$ ,  $\theta(0) = 0.1$ ,  $\dot{y}(0) = 0.2$ ,  $y(0) = 0.3$ ,  $\dot{x}(0) = 0.1$ ,  $x(0) = 0.4$ ,  $y_d = 20$ . Además, se cambia el valor de la ganancia a 1 para el cálculo de  $\tau$ .

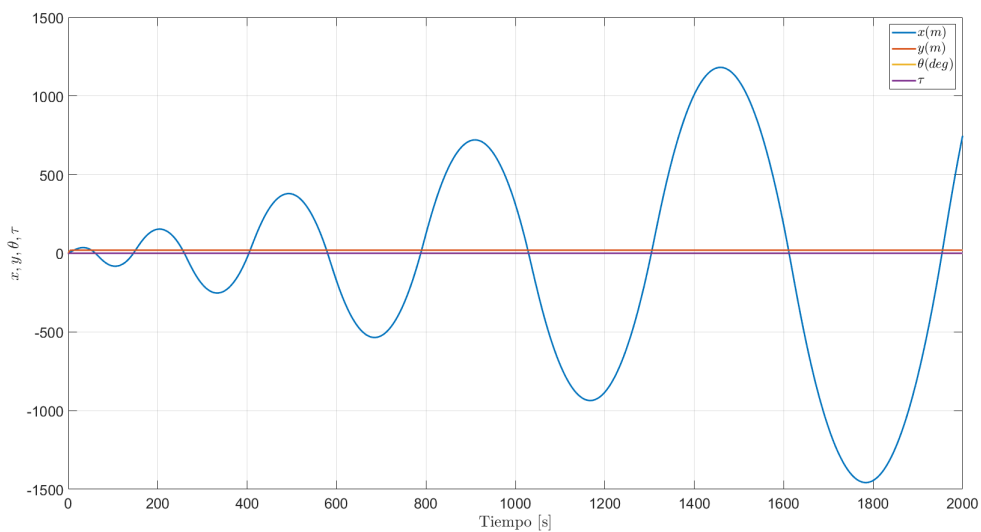


Figura 5.24: Evolución de los estados  $x, y, \theta, \tau$

La Fig.5.25 presenta la evolución de  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ ,  $\tau$  bajo las siguientes condiciones iniciales  $\dot{\theta}(0) = 0.5$ ,  $\theta(0) = 0.1$ ,  $\dot{y}(0) = 0.2$ ,  $y(0) = 0.3$ ,  $\dot{x}(0) = 0.1$ ,  $x(0) = 0.4$ ,  $y_d = 20$ . Además, se cambia el valor de la ganancia a -1 para el cálculo de  $\tau$ .

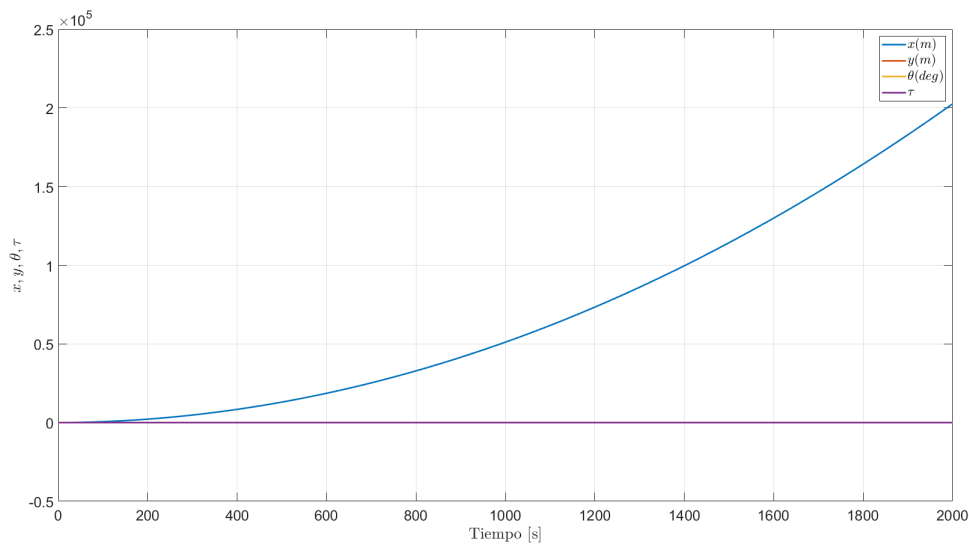


Figura 5.25: Evolución de los estados  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ ,  $\tau$

## 5.9. Análisis de resultados

El algoritmo de control de posición por aproximación se basa en un cambio de las variables de entrada de modo que se pueda definir una ley de control lineal para estabilizar la altitud en un valor deseado. Posteriormente se supone que la orientación  $\theta$  está cerca del origen. Luego, el modelo del subsistema  $x - \theta$  se reduce a un sistema lineal controlado por una ley de control de asignación de polos. Este algoritmo de control presenta buen comportamiento, ver Figuras de las simulaciones del control de posición por aproximación. Tenga en cuenta que en este caso las leyes de control del empuje y el par son lineales. El algoritmo de control 1 se obtuvo asumiendo que el desplazamiento angular  $\theta$  era cercano a cero. Por lo tanto la convergencia al origen de este controlador es sólo local. De hecho, se ha observado en simulaciones numéricas que si la posición inicial  $x(0)$  se elige lejos del origen, entonces el controlador no logrará estabilizar el sistema. Dado que el algoritmo de control de posición por aproximación requiere que  $|\theta(0)|$  sea pequeño, se podría proponer una estrategia que primero haga que  $\theta$  sea pequeño y luego cambie al algoritmo de control de posición por aproximación. Sin embargo, los algoritmos de control utilizando doble saturación y utilizando una saturación no requieren ningún cambiar. Observe en la Tabla 5.1 que el algoritmo de control de posición por aproximación proporciona los valores más pequeños para el tiempo de subida y el tiempo de estabilización de  $x$ ,  $y$  y  $\theta$ .

El algoritmo de control de posición utilizando doble saturación, se basa en la compensación de las no linealidades en la ecuación de altitud ( $y$ ), para que el vehículo alcance una altitud deseada. Por otro lado, se propone una ley de control de orientación para  $\theta$  en (5.126) para que  $\theta$  converja a la suma de dos funciones de saturación de  $x$  y  $\dot{x}$ . Las amplitudes de saturación  $a$  y  $b$  deben elegirse lo suficientemente pequeñas como para que  $\theta$  converja a una vecindad del origen. Además, la amplitud de la saturación que contiene  $x$ ,  $a$ , debe seleccionarse menor que la amplitud de la saturación que contiene solo  $\dot{x}$ ,  $b$ . Esto se hace para que el controlador reduzca primero el tamaño de la velocidad  $\dot{x}$  y una vez que la velocidad sea menor que  $b$  entonces la ecuación (5.128) se cumple y se deduce que tanto  $x$  como  $\dot{x}$  convergen a cero. Sin embargo, (5.127) se ha obtenido suponiendo que  $\theta$  es pequeño y que  $\tau$  es cero, lo cual es una aproximación. Esto explica por qué  $x$  no converge exactamente a cero sino que oscila en una vecindad alrededor del origen, como se puede ver las Figuras de las simulaciones del control de posición utilizando doble saturación. Este tipo de controlador

---



estabiliza el ángulo  $\theta$  y asegura que  $x$  converja hacia una vecindad del origen. La selección de los valores de las amplitudes de saturación permite variar la velocidad de convergencia del desplazamiento al origen, pero también varía la amplitud de las oscilaciones de  $x$ .

El algoritmo de control de posición utilizando una saturación es similar al algoritmo de control de posición utilizando doble saturación, pero en este caso la ley de control del par contiene una única función de saturación. También en este caso, el controlador primero reduce la velocidad horizontal  $\dot{x}$  y esto se lleva a cabo seleccionando un pequeño peso 0.01 en el desplazamiento  $x$  en (5.139). En este algoritmo de control también se supone que  $\theta$  converge a una pequeña vecindad del origen y que  $\tau$  converge a cero, lo que conduce a (5.142) y finalmente (5.143). Como se puede ver en las Figuras de las simulaciones del algoritmo de control utilizando una saturación, los resultados de las simulaciones numéricas usando el algoritmo de control 3 son mejores que los obtenidos con el algoritmo de control de posición utilizando doble saturación. En este caso la altitud también converge a su valor deseado pero además  $x$  y  $\theta$  convergen ambos hacia el origen.

Tabla 5.1: Parámetros del comportamiento observado en simulaciones para control en 2D

Control por aproximación			
	$x$	$y$	$\theta$
Rise time	1.16	3.52	1.26
Settling Time	10.26	7.58	10.79
Steady state error	$1.8 \times 10^{-6}$	0	$1.17 \times 10^{-5}$
Control utilizando doble saturación			
	$x$	$y$	$\theta$
Rise time	24.09	3.87	0.061
Settling Time	384.66	10.93	78.69
Steady state error	0.75	0	$-2.55 \times 10^{-2}$
Control utilizando una saturación			
	$x$	$y$	$\theta$
Rise time	24.086	3.87	0.05
Settling Time	690.73	9.06	77.25
Steady state error	$9.57 \times 10^{-8}$	0	$-9.49 \times 10^{-6}$

---

## **Diseño y construcción de prototipo**

---

Los sistemas TVC nos ayudan a dirigir la trayectoria del flujo másico expedido por los motores del cohete. Por tal motivo, el poder controlar este sistema se refleja en el seguimiento de la trayectoria establecida y en su desplazamiento controlado.

Para ejemplificar este sistema se propone el desarrollo de un modelo de TVC utilizando motores sin escobillas y hélices de tres palas tipo 5051.

---

## 6.1. Consideraciones de Diseño

Una de las partes importantes de esta investigación también ha sido la propuesta de diseño de este prototipo de TVC que controla la trayectoria del cohete. Fue diseñado para poder proporcionar estabilidad en su desplazamiento y mantenerlo en posición vertical en cualquier instante, corrigiendo las perturbaciones en su posición a través del TVC.

Además se tomaron las siguientes consideraciones:

- Material ligero y flexible para la estructura. Se considera una estructura modular, enfocada en una base principal para los motores que generan el empuje, otra base para los componentes electrónicos, además de largueros y costillas.
- Posición adecuada de los motores que generan el empuje, respecto a los servomotores que generan los movimientos de roll y pitch.
- Ubicación de los componentes electrónicos y el autopiloto, ya sea para el remplazo de los componentes o la programación del autopiloto.
- Uno de los puntos mas importantes para este vehículo es que sea ligero, por lo cual se elige utilizar una configuración coaxial para los rotores que generan el empuje. Con lo cual reducimos el peso al no utilizar rotor de cola para contrarrestar los momentos.

Desde una perspectiva teórica y experimental, se han realizado investigaciones a nivel internacional sobre la aerodinámica del rotor coaxial tanto en vuelo estacionario como en movimiento. Cabe destacar que, en una configuración coaxial, se altera la relación de reparto de empuje al cambiar la distancia de separación entre los rotores.

La gran ventaja de los rotores en configuración coaxial en vuelo estacionario es que no necesitan un rotor de cola y esto se refleja en el peso total del vehículo aéreo. Por lo tanto, los rotores coaxiales son una buena opción para conseguir un vuelo estacionario. De la misma manera, se afirma que el rendimiento que se logra con esta configuración es un caso especial cuando ninguno de los rotores domina y los vórtices de ambos rotores están espaciados uniformemente, lo que establece un par equilibrado entre los dos rotores. Sin embargo, el uso de dos rotores no implica el doble de empuje. Esto se refleja únicamente en un aumento

---

aproximado del 5 % de empuje [51], pero con una reducción de peso. Lo cual permite que esta configuración coaxial se utilice en áreas reducidas.

Con lo anterior, se justifica el uso de una configuración coaxial como parte del sistema de propulsión de este vehículo. Estableciendo que los principales requerimientos de este sistema son; que sea compacto, ligero, que proporcione el empuje suficiente para elevar el vehículo y que pueda realizar maniobras para estabilizarlo.

---

## 6.2. Componentes electrónicos

El sistema electrónico de control que se encargará de articular y mover los mecanismos del TVC fue elegido de acuerdo a las necesidades de espacio, empuje, consumo de batería y peso.

Para mover el sistema de TVC se eligieron los servomotores HobbyKing modelo HK15178 con un límite de carga de 1.4 Kg como se muestra en la Figura 6.1.



Figura 6.1: Servomotores HK15178

Estos servomotores a través de varillas de acero inoxidable convierten los movimientos angulares en movimientos longitudinales y de esta manera se logra mover los soportes de los motores sin escobillas que dan los movimientos de Pitch y Roll.

Los motores sin escobillas que se eligieron son el modelo DYS Fire FPV Race Edition de 2600KV, estos motores proporcionan un empuje de 1200 gr utilizando una batería de 4 celdas y un ESC de 30A programable como se muestra en la Figura 6.2.



Figura 6.2: Motores DYS Fire FPV Race Edition de 2600KV

Para conseguir el empuje requerido, se necesita utilizar hélices tipo 5051 con un ángulo de paso alto, las cuales hacen que el vuelo sea más fluido y estable, como se muestra en la Figura 6.3.



Figura 6.3: Hélices 5051

Se debe agregar que los dispositivos anteriores son dirigidos por un controlador de vuelo Pixhawk PX4 2.4.8 de 32 bits ARM PX4FMU PX4IO. Este autopiloto tiene una nueva tecnología de chip y sensor de 32 bits. Utiliza un procesador avanzado de alto rendimiento CortexM4 ARM de 32 bits y puede ejecutar el sistema operativo en tiempo real RTOS NuttX, como se muestra en la Figura 6.4.



Figura 6.4: Pixhawk PX4 2.4.8

## 6.3. Propuesta de prototipo 1

### 6.3.1. Diseño en CAD

De acuerdo con los componentes electrónicos seleccionados anteriormente se inicia el proceso de diseño. La Figura 6.5 parte de los servomotores que se usan para mover el sistema de TVC, se inician las mediciones y conociendo sus dimensiones se diseñan las bases donde se fijaran los servomotores.

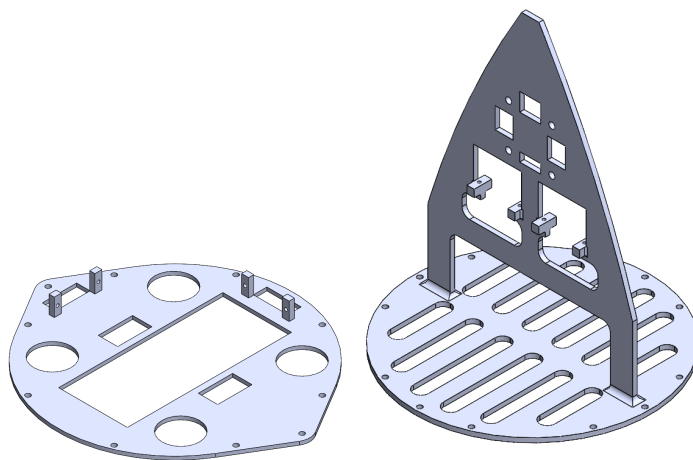


Figura 6.5: Estructura interna del cono

Por otra parte, la sección de empuje que es de las mas importantes. Se inicia con el diseño de la base de los motores sin escobillas como se muestra en la Figura 6.6, los cuales darán el empuje total al vehículo y para esto también se consideran las pestañas a las que estarán sujetas las barrillas de acero inoxidable que transmiten el movimiento de los servomotores.

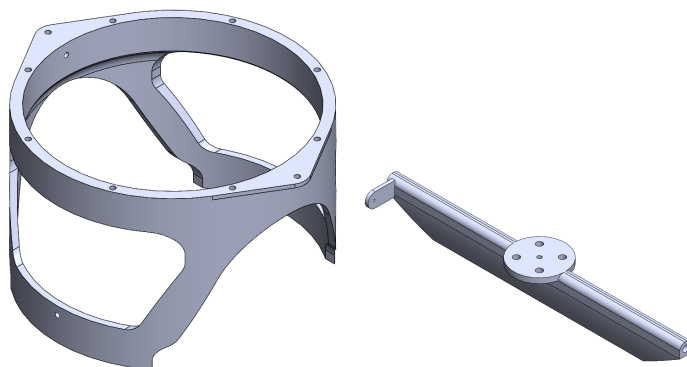


Figura 6.6: Base de los motores

Ahora para dar rigidez a la estructura del fuselaje del vehículo se utilizan costillas y varillas de fibra de vidrio, las cuales le dan flexibilidad y además rigidez a su estructura modular. Esto lo podemos observar en la Figura 6.7.

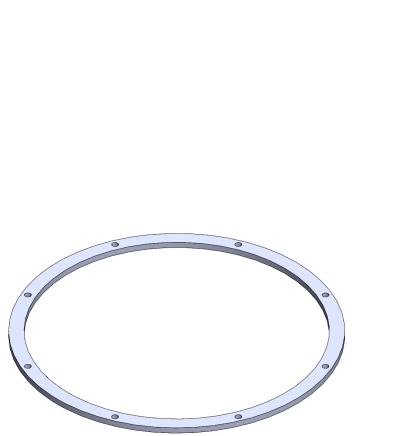


Figura 6.7: Estructura del fuselaje

Finalmente, se procede a hacer el diseño de las aletas de la parte inferior del cohete, el canard que va en la parte superior y el cono donde se guardan los sistemas electrónicos incluyendo el autopiloto, como lo podemos revisar en la Figura 6.8.

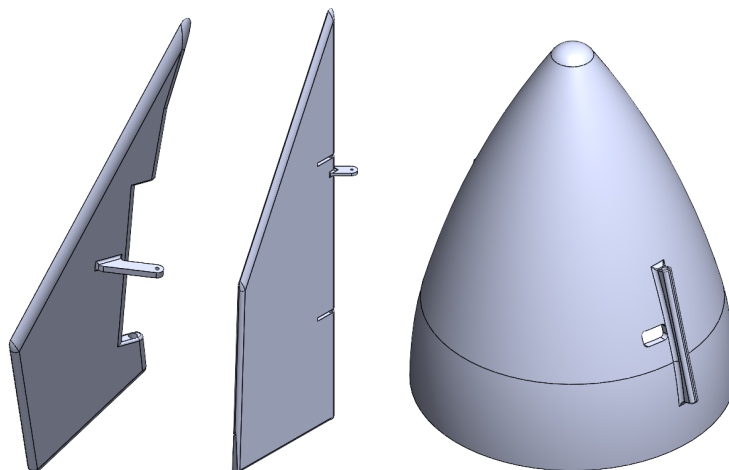


Figura 6.8: Canards y cono del cohete

---



Como resultado de lo anterior, se hace un renderizado del ensamblaje final del cohete. Esto lo podemos observar en la Figura 6.9, donde se muestran tres vistas del resultado del ensamblaje de cada una de las piezas diseñadas.

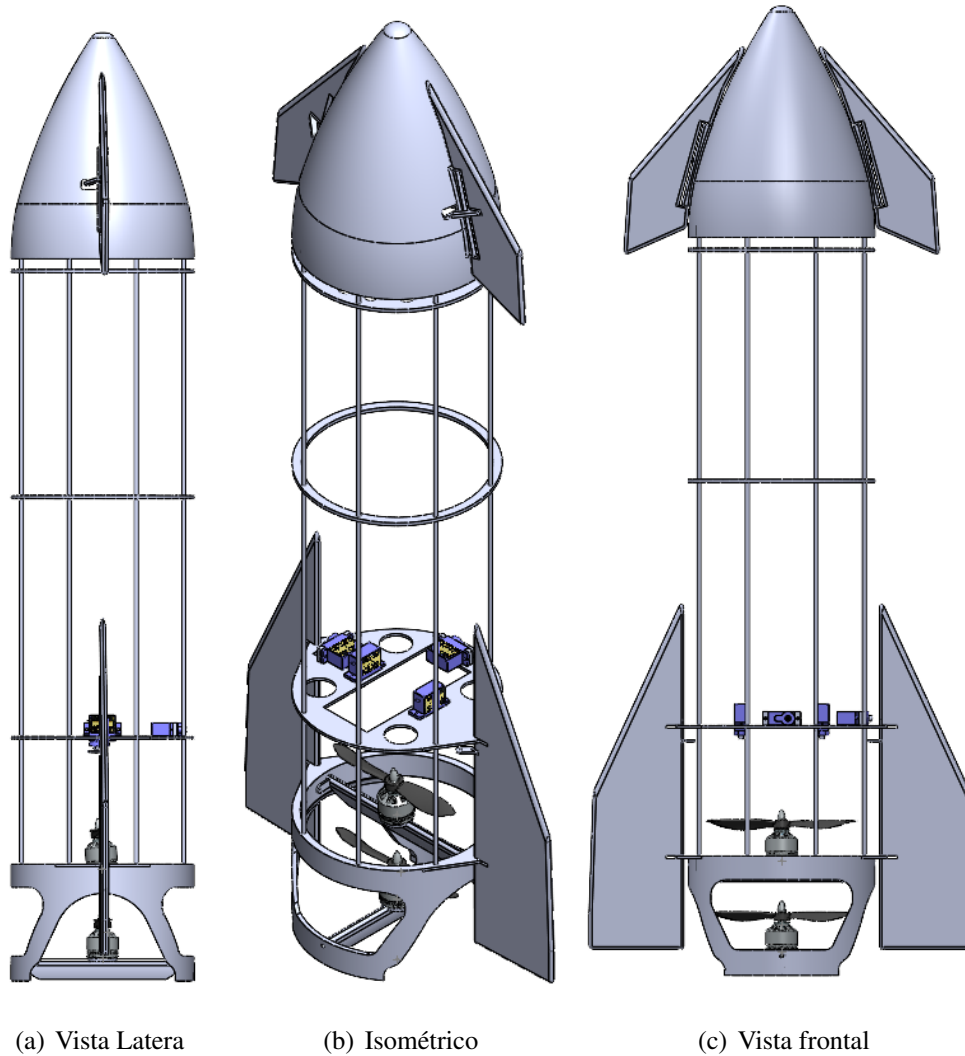


Figura 6.9: Vistas del cohete en CAD

### 6.3.2. Piezas impresas en PLA

La siguiente sección es parte del desarrollo del prototipo, con el cual se validan los algoritmos de control propuestos. Ahora que ya contamos con los diseños en CAD se procede a la construcción de las piezas, para esto se utiliza tecnología aditiva. Esta tecnología permite convertir modelos digitales en objetos tridimensionales sólidos mediante la impresión 3D.

Cada una de las piezas que se imprimieron en 3D fueron diseñadas para finalmente ensamblarlas e integrar al vehículo de prueba. En la Figura 6.10 se puede observar la impresión del cono y los canards, las cuales van en la parte superior. El cono está diseñado internamente para darle rigidez a la estructura donde se coloca el autopiloto y de igual manera mejorar la aerodinámica del vehículo.

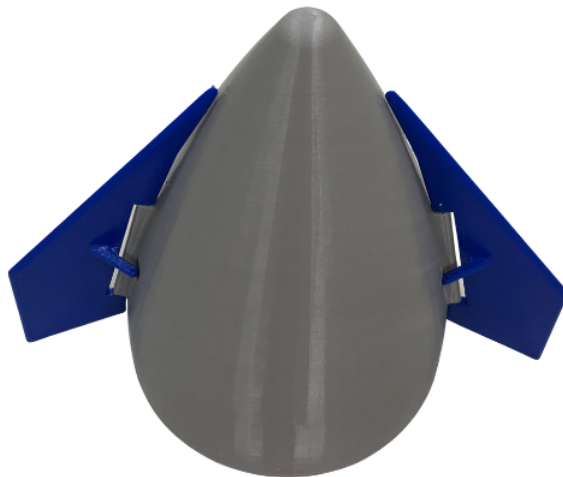


Figura 6.10: cono y canards ensamblados

Cada una de las piezas tiene una función en específico, como lo es la Figura 6.11. La cual se encarga de dar soporte al autopiloto y a los servomotores que mueven los canards. Este autopiloto es el que procesa los algoritmos y se encarga de mover cada uno de los subsistemas que componen al TVC.

---

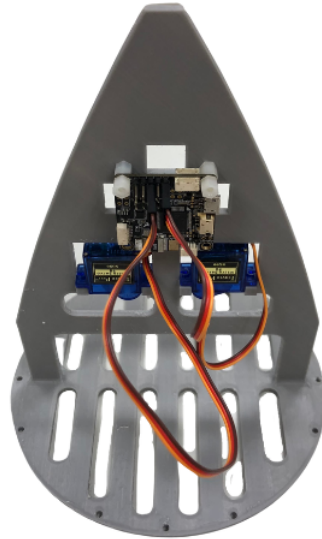


Figura 6.11: Base para sistemas de electrónicos de control

Cabe mencionar que cada una de las piezas esta diseñada considerando el peso de la misma, por lo cual se hacen aligeramientos y además, cada una tiene los barrenos por los cuales pasa la varilla que proporciona rigidez a la estructura.

Ahora en la Figura 6.12 podemos observar la base de los servomotores que se encargan de generar los movimientos de Pitch y Roll, además de dar soporte a los servomotores que dan movimiento a los alerones colocados en la parte inferior del vehículo.

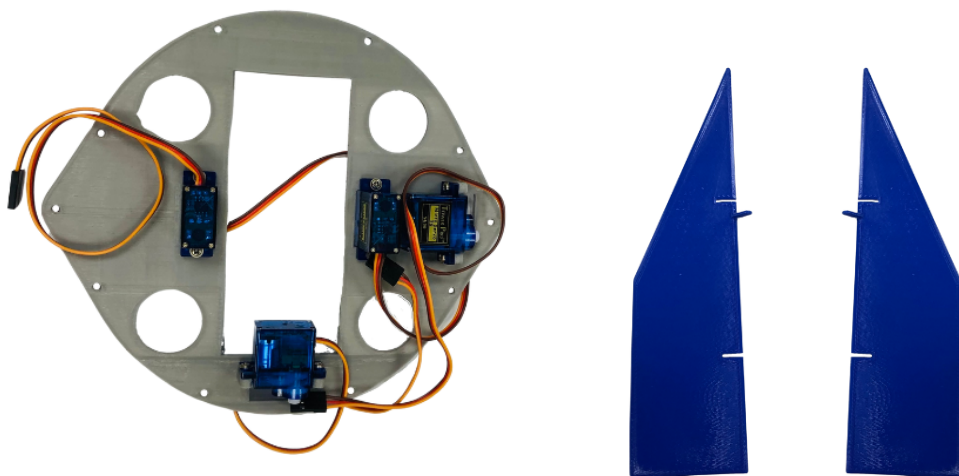


Figura 6.12: Base de servomotores y Superficie de control inferior (Aleta)

A continuación, en Figura 6.13 podemos observar una de las partes mas importantes de la estructura del fuselaje, ya que le dan rigidez pero a su vez flexibilidad. Otra de las funciones de las varillas es dar soporte a cada una de las piezas que se imprimen en 3D para formar la estructura de cohete.

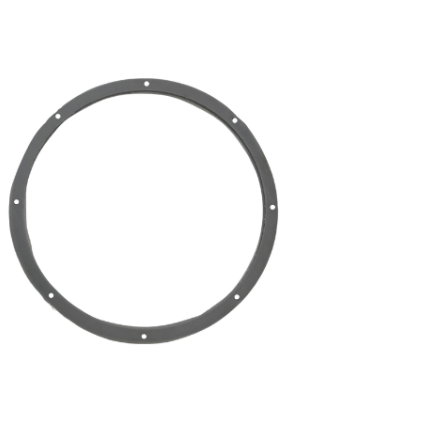


Figura 6.13: Costilla y larguero del fuselaje

La Figura 6.14 muestra el sistema de potencia que se encarga de proporcionar el empuje total al cohete, el cual es conformado por 2 motores sin escobillas de 2600 Kv y hélices tipo 5051. Además, están colocados sobre una base móvil que ayudan a generar los movimientos de pitch y roll.



Figura 6.14: Base para soportes de motores con las hélices ensambladas

---

Finalmente, en la Figura 6.15 se puede observar el ensamble de la estructura del cohete integrada con la sección de electrónica y sistema de potencia. Con este prototipo se realizan las pruebas pertinentes de los algoritmos de control propuestos y se valida el comportamiento de cada uno.

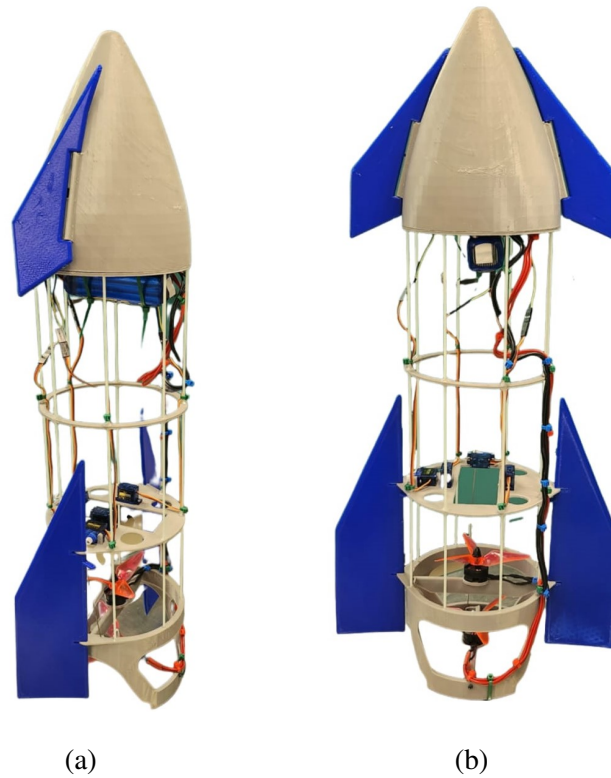
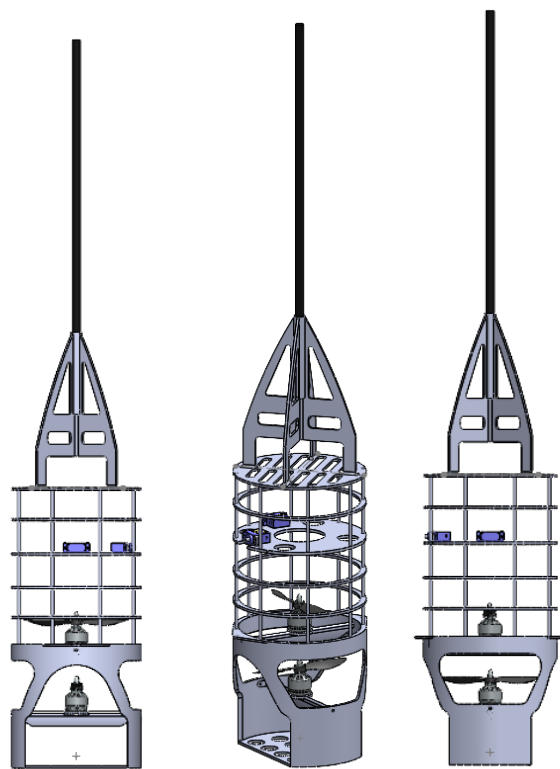


Figura 6.15: Prototipo ensamblado (a)Vista lateral (b)Vista frontal

## 6.4. Propuesta de prototipo 2

Se han realizado distintas pruebas en la primera propuesta de estructura con las cuales se han establecido cambios que se deben de realizar en la misma, para ayudar a disminuir el peso y además concentrar la mayor cantidad de peso en la parte inferior del vehículo. Esto cambia el centro de masa del prototipo para ayudar a su estabilidad de manera natural.

En la Figura 6.16 podemos observar los cambios que se han realizado. Se reforzó la parte superior para poder colocar un tubo de fibra de vidrio para sujetarlo desde ese punto y verificar el funcionamiento de los rotores al generar los ángulos de Pitch, Yaw y Roll.



(a) Vista Lateral (b) Isométrico (c) Vista frontal

Figura 6.16: Vistas del cohete en CAD

Cabe destacar que la reducción del peso de esta propuesta fue de 980 gr a 820 gr, logrando una reducción de 160 gr en el peso total del prototipo.

Esto es un beneficio para que los motores que mueven las hélices tengan el margen de carga suficiente no solo para levantar el peso del prototipo, sino para poder realizar maniobras de control.

---

Teniendo el diseño en CAD de las nuevas piezas que integran a esta propuesta de prototipo se inicia con su impresión en 3D con filamento de PLA. En la Figura 6.17 podemos observar el ensamblaje real de las piezas ya impresas en conjunto de los componentes electrónicos que integran al sistema de estabilidad.



Figura 6.17: Segunda propuesta de Prototipo

---

## 6.5. Propuesta de prototipo 3

Analizando los resultados obtenidos con el prototipo anterior se hace una nueva propuesta de diseño para la base de los rotores, con la cual se reduce el peso con algunos aligeramientos, se realiza una organización comprimida de los componentes electrónicos y se coloca la mayor cantidad de peso en la parte inferior de manera distribuida.

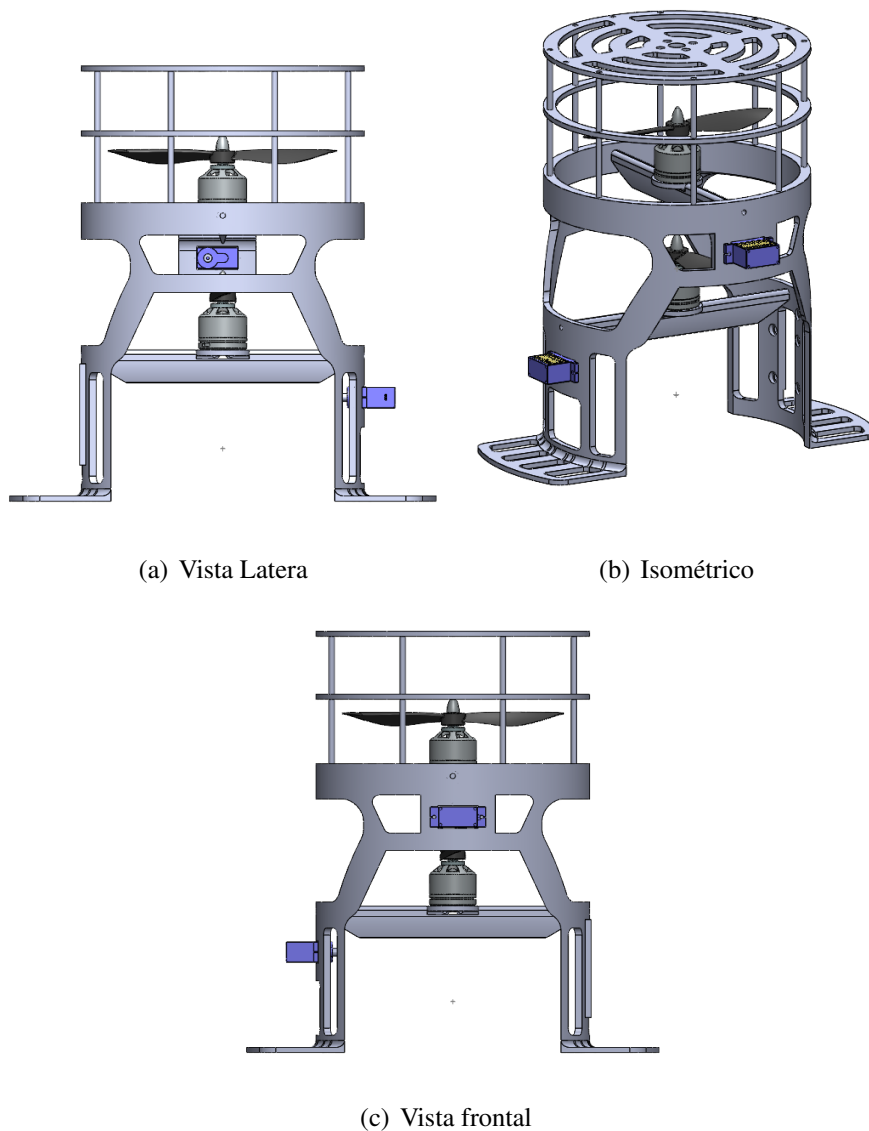


Figura 6.18: Vistas del cohete en CAD

En la Figura 6.18 se tienen las vistas del ensamble de la nueva estructura propuesta, donde se pueden observar los cambios que se han realizado en la estructura. Esto nos beneficia en la reducción de peso para poder mejorar la estabilidad del sistema, brindando la oportunidad de proporcionar movilidad con los rotores de sistema.



Con las nuevas modificaciones que se realizaron a esta propuesta de prototipo se puede desatacar que realizando la comparación con la primer propuesta se pasa de un peso de 980 gr a 620 gr, ya contemplando los dispositivos electrónicos, la batería y la misma estructura.

Logrando una reducción de 360 gr en el peso total del prototipo, beneficiando el margen de carga de 1200 gr del prototipo para poder realizar maniobras de control.

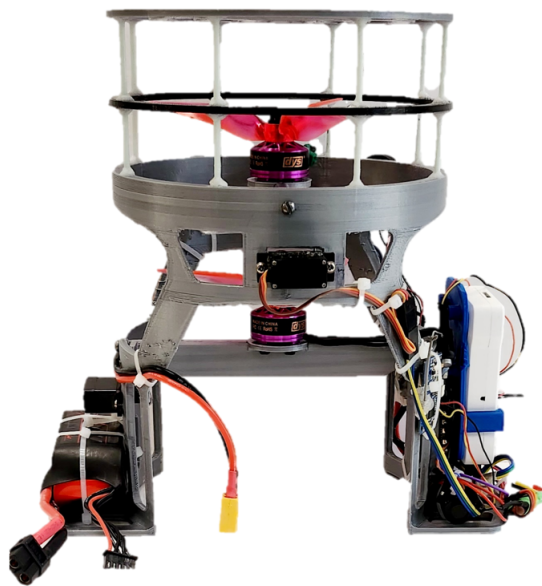


Figura 6.19: Tercer propuesta de Prototipo

---

## Conclusiones

---

La investigación presentada en esta tesis ha abordado el desarrollo de algoritmos de control para los sistemas de Control de Vector de Empuje (TVC) en motores de cohetes, con el objetivo de mejorar la precisión y estabilidad en la trayectoria de los vehículos lanzadores, integrando la teoría de control y simulaciones numéricas para obtener importantes avances en el control de la orientación y trayectoria de cohetes.

Uno de los principales logros de esta tesis ha sido la formulación y validación de algoritmos de control que permiten una gestión efectiva del vector de empuje bajo diversas condiciones de vuelo. Estos algoritmos han demostrado su capacidad para estabilizar el vuelo del cohete, controlar su ascenso y descenso vertical para mantener un vuelo estacionario.

Los resultados de las simulaciones numéricas han confirmado la eficiencia de estos métodos, lo que representa una contribución significativa a la ingeniería aeroespacial. Además, se han propuesto algunos prototipos de cohetes equipados con motores sin escobillas y hélices donde se podría tener la implementación de estos algoritmos. Este enfoque ha demostrado ser viable, proporcionando una base para futuros desarrollos en sistemas de propulsión de cohetes que puedan beneficiarse de la tecnología TVC.

Los prototipos propuestos abren la puerta a nuevas oportunidades de investigación y desarrollo en el ámbito de la cohetaría. Además, la tesis ha contribuido a la literatura existente con la publicación de artículos en revistas científicas internacionales, ofreciendo algoritmos de control que pueden ser implementados en futuros sistemas de propulsión de cohetes.

La cohetería en México se presenta como un área de oportunidades para el desarrollo de investigación y fabricación de tecnología espacial nacional, y esta investigación contribuye a ese objetivo al proponer soluciones innovadoras para uno de los subsistemas más complejos que componen a un cohete.

En términos de impacto, los algoritmos desarrollados en esta tesis no solo mejoran la precisión y estabilidad de los sistemas TVC, sino que también tienen el potencial de reducir los riesgos asociados con las misiones espaciales. Incrementando la seguridad de las cargas útiles y las tripulaciones humanas.

En conclusión, esta tesis ha demostrado la viabilidad y efectividad de los algoritmos de control desarrollados para sistemas TVC en motores cohete. Esta investigación sienta las bases para futuras innovaciones y aplicaciones prácticas de este sector, contribuyendo al avance tecnológico y científico en el campo de la exploración espacial nacional, estableciendo las bases para el desarrollo de soluciones innovadoras y efectivas en la cohetería moderna.

## **7.1. Recomendaciones para trabajos futuros**

Como trabajo a futuro, se recomienda explorar la optimización de los algoritmos de control para condiciones de vuelo más extremas, así como la integración de sensores avanzados para mejorar aún más la precisión del control. También sería benéfico investigar nuevos materiales o tecnologías que puedan aumentar la eficiencia de los sistemas TVC y aplicar estos modelos de control en alguno de los prototipos para ampliar el impacto de esta investigación.

---

Nombre del artículo: Control of the PVTOL with strong input coupling

Revista: Journal of Intelligent & Robotic Systems (2024) 110:33

DOI: <https://doi.org/10.1007/s10846-024-02066-7>

Journal of Intelligent & Robotic Systems (2024) 110:33  
<https://doi.org/10.1007/s10846-024-02066-7>

REGULAR PAPER



## Control of the PVTOL with Strong Input Coupling

Rogelio Lozano<sup>1,2</sup> · Jhonatan F Eulopa-Hernandez<sup>1</sup> · Sergio Salazar-Cruz<sup>1</sup>

Received: 1 June 2023 / Accepted: 23 January 2024  
 © The Author(s) 2024

### Abstract

This paper studies the modeling and control of a Planar Vertical Take-Off and Landing (PVTOL) with steerable thruster. A longitudinal model is obtained using Newton's second law for the PVTOL which evolves in 3 degrees of freedom and has two control inputs. The aerial vehicle is driven by steerable propulsion controlling its evolution in the vertical plane through the thrust and torque control inputs, which drive the vehicle body and generate a rotation. The obtained model is nonlinear and is significantly different with respect to the well-known PVTOL. For this reason, different control algorithms are presented, and the closed-loop behavior is studied for each of them. The proposed control strategies perform a stationary flight at a desired altitude and control the position of the aerial vehicle. The performance of the proposed control algorithms is tested in numerical simulations.

**Keywords** Thrust vector control · Linear feedback control · Stationary flight · Closed-loop system

### 1 Introduction

The PVTOL has drawn the interest of many researchers because it is a nonlinear dynamical system that simulates the longitudinal dynamics of a helicopter or multirotor UAV (Unmanned Aerial Vehicle). It only has two control inputs while having three degrees of freedom.

In an ideal scenario, the vertical and horizontal accelerations of the vehicle are proportional to the projections of the thrust vector and the angular acceleration is proportional to the torque. Implicitly, there is a decoupling of the inputs, as the thrust only influences linear accelerations and the torque input only impacts rotational acceleration. In the literature, many PVTOL control methods have been suggested.

Hausser et al. [1] introduced one of the first controllers that were suggested for the PVTOL. They demonstrated that

when the PVTOL's flight control is subjected to an accurate input-output linearization approach, the resulting system exhibits unstable internal dynamics. They put forth a solution using a rough input-output linearization technique designed for nonlinear systems with somewhat non-minimal phase.

A nested saturation control was suggested in [2] to stabilize the PVTOL. The stability was guaranteed only when the orientation angle  $\theta$  and its derivative were initially sufficiently small. The idea to employ nested saturation arose from the observation that when the altitude is controlled by nonlinear compensation, the resulting subsystem from the torque input  $\tau$  to the output  $x$  (the horizontal displacement) reduces to four integrators in cascade when  $\theta$  is small, i.e., when  $\tan \theta \approx \theta$ .

Brandão et al. [3], in contrast, suggests a nonlinear controller based on Lyapunov Theory to stabilize a quadrotor to execute positioning and trajectory tracking tasks constrained to a vertical plane. Due to flying restrictions motion limited to the  $XZ$  and  $YZ$  planes. The maneuvers described are frequently carried out using PVTOL vehicles. A nonlinear controller is proposed and the closed-loop system stability is proved. To prevent the physical actuators from becoming saturated, the proposed controller includes saturating the control signals.

A controller based on a PD controller and a sliding mode controller was published in [4] to stabilize both the horizontal and angular variables to the desired rest position. It was

✉ Sergio Salazar-Cruz  
 sosalazar@cinvestav.mx

Rogelio Lozano  
 rogelio.lozano@cinvestav.mx

Jhonatan F Eulopa-Hernandez  
 jhonatan.eulopa@cinvestav.mx

<sup>1</sup> LANADEX, CINVESTAV, Av. IPN, CDMX 07360, CDMX, Mexico

<sup>2</sup> Université de technologie de Compiègne, Heudiacq CNRS, Compiègne 60319, France

Figura 8.1: Control of the PVTOL with Strong Input Coupling

---

Nombre del artículo: Nonlinear control of a thrust vectored aircraft for hover flight

Revista: Journal of Intelligent & Robotic Systems

Estado: Sometido a revisión (Julio 2024)

## Nonlinear control of a thrust vectored aircraft for hover flight

Rogelio Lozano <sup>1</sup>, Jhonatan F Eulopa-Hernandez <sup>1</sup>,  
Sergio Salazar-Cruz <sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>CINVESTAV, Av. IPN 2508, 07360, México.

\*Corresponding author(s). E-mail(s): [sesalazar@cinvestav.mx](mailto:sesalazar@cinvestav.mx);  
Contributing authors: [rogelio.lozano@cinvestav.mx](mailto:rogelio.lozano@cinvestav.mx);  
[jhonatan.eulopa@cinvestav.mx](mailto:jhonatan.eulopa@cinvestav.mx);

### Abstract

A three dimensional dynamical model is computed by applying Newton's second law to an aerial vehicle. The main characteristic of this aircraft is that it is powered by a thruster whose propulsion force and orientation can be modified and represent the control inputs of the aerial vehicle. The objective of the control strategy is to move the aerial vehicle to a pre-specified position. The vertical displacement of the aerial vehicle is controlled using the thrust magnitude. The yaw angular displacement is controlled using the aircraft lateral ailerons. The pitch and roll angular displacements are used as virtual inputs to control the horizontal displacements. A nonlinear control algorithm is proposed which is based on saturation functions to perform a stationary hover flight at a desired altitude and to reach a desired position in the horizontal plane. Numerical simulations have confirmed that the proposed control algorithm performs well.

**Keywords:** Thrust vector control, Nonlinear control, Hover flight, Saturation functions.

Figura 8.2: Nonlinear control of a thrust vectored rocket

---

# Bibliografía

---

- [1] G.P. Sutton and O. Biblarz. *Rocket Propulsion Elements*. John Wiley & Sons, 8 edition, 2010.
- [2] Missile Technology Control Regime. *Manual anexo del Régimen de Control de Tecnología de Misiles*. MTCR, 2017.
- [3] Faustino J. Gomez and Risto Miikkulainen. Active guidance for a finless rocket using neuroevolution. In *Genetic and Evolutionary Computation — GECCO 2003*, pages 2084–2095, Berlin, Heidelberg, 2003. Springer Berlin Heidelberg.
- [4] Paul B. Jackson. *Overview of Missile Flight Control Systems*. The Johns Hopkins APL Technical Digest, 2010.
- [5] Esteban A. Dutto. Diseño definitivo de un actuador electromecánico de control de vector empuje para vehículos lanzadores con tobera flexible. In *Genetic and Evolutionary Computation — GECCO 2003*, pages 2084–2095, Berlin, Heidelberg, 2003. Springer Berlin Heidelberg.
- [6] Naguil Jorge, Juan Pedroni, Walter Cova, Jorge Jazni, and Mario Modesti. Consideraciones dinámicas sobre el control de una tobera pivotante. 05 2007.
- [7] SpaceX. *FALCON USER 'S GUIDE*. Space Exploration Technologies Corp. (SpaceX), 2020.
- [8] Tinus Breiting. Proceedings of the 3rd tmal02 expert conference. volume 3, pages 58–60, October 2018.

- 
- [9] Kristian Von Bengtson. Rocket test preparations, [www.wired.com/2011/12/rocket-test-preparations/](http://www.wired.com/2011/12/rocket-test-preparations/), 19 de mayo de 2023, 2011.
- [10] Sumathi Ramakrishnan and M. Usha. Setpoint weighted pid controller for the electro-mechanical actuator in spacecraft. *International Journal of Engineering and Technology*, 6:929–938, 05 2014.
- [11] Jorge Aponte, Darío Hurtado, Astrid Rubiano, and Vladimir Prada-Jiménez. Modelado, diseño y construcción de un sistema activo de control de estabilidad de bajo costo para cohetes experimentales tipo aficionado. *Ciencia e Ingeniería Neogranadina*, 20:77, 06 2010.
- [12] SpaceForest Ltd. Spaceforest innovative solutions, <https://spaceforest.pl/sir-suborbital-inexpensive-rocket>, 19 de mayo de 2023, 2018.
- [13] Hunini. Jasdf aam-5, [www.commonswikimedia.org](http://www.commonswikimedia.org), 19 de mayo de 2023, 2017.
- [14] Ivan Cornejo and Robert E Hayes. A review of the critical aspects in the multi-scale modelling of structured catalytic reactors. *Catalysts*, 11(1):89, 2021.
- [15] Albert Einstein. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. (German) [On the electrodynamics of moving bodies]. *Annalen der Physik*, 322(10):891–921, 1905.
- [16] Sergio Pérez-Roca, Julien Marzat, Hélène Piet-Lahanier, Nicolas Langlois, François Farago, Marco Galeotta, and Serge Le Gonidec. A survey of automatic control methods for liquid-propellant rocket engines. *Progress in Aerospace Sciences*, 107:63–84, 2019.
- [17] Qiang Chen, Meiling Tao, Xiongiong He, and Liang Tao. Fuzzy adaptive nonsingular fixed-time attitude tracking control of quadrotor uavs. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 57(5):2864–2877, 2021.
- [18] Yongbin Sun, Kewei Xia, Yao Zou, Qiang Fu, and Xiuyu He. Distributed output-feedback formation tracking control for clustered quadrotors. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 58(3):1894–1905, 2022.
-

- [19] Karanjot Singh, Mohit Mehndiratta, and Mir Feroskhan. Quadplus: Design, modeling, and receding-horizon-based control of a hyperdynamic quadrotor. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 58(3):1766–1779, 2022.
- [20] Florian Kehl, Ankur M. Mehta, and Kristofer S.J. Pister. An attitude controller for small scale rockets. *Springer Tracts in Advanced Robotics*, 105:201–214, 2015.
- [21] Qi Mao, Liqian Dou, Qun Zong, and Zhengtao Ding. Attitude controller design for reusable launch vehicles during reentry phase via compound adaptive fuzzy H-infinity control. *Aerospace Science and Technology*, 72:36–48, 1 2018.
- [22] Mahmut Ağralı, Mehmet Uğur Soydemir, Alkım Gökçen, and Savas Sahin. Deep Reinforcement Learning Based Controller Design for Model of The Vertical Take off and Landing System. *European Journal of Science and Technology*, 6 2021.
- [23] Manal Fawzy, Hassen Dorrah, and O. Elrahman. Design of flight control system using gain schedule fractional pid controller. *International Conference on Aerospace Sciences and Aviation Technology*, 17:1–14, 04 2017.
- [24] Kaveh Kianfar, Reza Amiri, and Ali Bozorgmehr. Designing the non-linear PID controller for a missile. pages 171–175, 2011.
- [25] Rong Jun Yang and Yun Guo Shi. Guided Rocket Control System Design Based on Discrete-Time Adaptive Sliding Mode. *Applied Mechanics and Materials*, 541-542:1159–1163, 2014.
- [26] Arvind Rajagopalan, Farhan Faruqi, and Nanda Nandagopal. Intelligent missile guidance using artificial neural networks. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 4, 01 2015.
- [27] Bailing Tian, Wenru Fan, Qun Zong, Jie Wang, and Fang Wang. Nonlinear robust control for reusable launch vehicles in reentry phase based on time-varying high order sliding mode. *Journal of the Franklin Institute*, 350(7):1787–1807, 2013.
- [28] Daniel Kiehn. Stability analysis and flight control design of the winged reusable launch vehicle ReFEx. *CEAS Space Journal*, 13(1):51–64, 1 2021.
-



- 
- [29] Bo Zhang, Qixing Lv, and Yuqing Lei. The application of pid controller in missile longitudinal loop system and its simulation. 01 2015.
- [30] Jaime Rubio Hervas and Mahmut Reyhanoglu. Thrust-vector control of a three-axis stabilized upper-stage rocket with fuel slosh dynamics. *Acta Astronautica*, 98(1):120–127, 2014.
- [31] Milton Santos, Mário Sarcinelli-Filho, A. Brandão, and Ricardo Carelli. A controller based on pvtol control signals for guiding a quadrotor in 3d navigation tasks. *2018 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, pages 639–646, 06 2018.
- [32] Fernando Hernández-Castañeda, Víctor Santibáñez, and Francisco Jurado. Stabilization control to the pvtol system via immersion and invariance (control de estabilización para el sistema pvtol vía inmersión e invariancia). 11 2016.
- [33] D J López-Araujo, A Zavala-Río, I Fantoni, S Salazar, and R Lozano. Global stabilization of the PVTOL aircraft with lateral force coupling and bounded inputs. *International Journal of Control PVTOL-Art12 International Journal of Control*, 15(00):1–26, 2010.
- [34] Herrera Margarita, David Lara Alabazares, Gerardo Romero, and Federico Ramírez. Plataforma virtual de un pvtol para evaluar algoritmos de control. *Congreso Internacional de Investigación*, 9(6):3209, 11 2017.
- [35] Alexandre Santos Brandão, Daniel Gandolfo, Mário Sarcinelli-Filho, and Ricardo Carelli. PVTOL maneuvers guided by a high-level nonlinear controller applied to a rotorcraft machine. *European Journal of Control*, 20(4):172–179, 2014. doi: [10.1016/j.ejcon.2014.04.003](https://doi.org/10.1016/j.ejcon.2014.04.003).
- [36] Jossué Cariño Escobar, Rogelio Lozano, and Moisés Bonilla Estrada. PVTOL control using feedback linearisation with dynamic extension. *International Journal of Control*, 94(7):1794–1803, 2019.
- [37] Rogelio Lozano, Sergio Salazar, Donovan Flores, and Iván González-Hernández. PVTOL global stabilisation using a nested saturation control. *International Journal of Control*, pages 1–11, 2021.
-

- [38] Andrew R. Teel. Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls. *Systems Control Letters*, 18(3):165–171, 1992.
- [39] Trong Toan Tran, Shuzhi Sam Ge, and Wei He. Adaptive control of a quadrotor aerial vehicle with input constraints and uncertain parameters. *International Journal of Control*, 91(5):1140–1160, 5 2018.
- [40] Roberto Naldi, Michele Furci, Ricardo G. Sanfelice, and Lorenzo Marconi. Robust Global Trajectory Tracking for Underactuated VTOL Aerial Vehicles Using Inner-Outer Loop Control Paradigms. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(1):97–112, 1 2017.
- [41] John Hauser, Shankar Sastry, and George Meyer. Nonlinear Control Design for Slightly Non-minimum Phase Systems: Application to V/STOL Aircraft \*t. 28(4):665–679, 1992.
- [42] Pedro Castillo, Alejandro Dzul, and Rogelio Lozano. Real-time stabilization and tracking of a four-rotor mini rotorcraft. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 12(4):510–516, 7 2004.
- [43] Carlos Aguilar-Ibañez. Stabilization of the PVTOL aircraft based on a sliding mode and a saturation function. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 27(5):843–859, 3 2017.
- [44] Reza Olfati-Saber. Global configuration stabilization for the vtol aircraft with strong input coupling. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 47:1949 – 1952, 12 2002.
- [45] R. Lozano, Sergio Salazar, and Jonathan Flores. Stabilization of the planar vertical take-off and landing using nonlinear feedback control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 32, 10 2021.
- [46] Thomas L. Dearing, John Hauser, Xudong Chen, Marco M. Nicotra, and Christopher Petersen. Efficient Trajectory Optimization for Constrained Spacecraft Attitude Maneuvers. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 45(4):638–650, 2022.
- [47] Giuseppe Notarstefano and John Hauser. Computing feasible trajectories for constrained maneuvering systems: the pvtol example. *IFAC Proceedings Volumes*, 40, 12 2011.
-

- [48] Giuseppe Notarstefano, John Hauser, and Ruggero Frezza. Trajectory manifold exploration for the PVTOL aircraft. In *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference, CDC-ECC '05*, volume 2005, pages 5848–5853, 2005.
- [49] Carlos Aguilar-Ibanez, Hebertt Sira-Ramirez, Miguel S. Suarez-Castanon, and Ruben Garrido. Robust Trajectory-Tracking Control of a PVTOL under Crosswind. *Asian Journal of Control*, 21(3):1293–1306, 5 2019.
- [50] IEEE Control Systems Society, IEEE Robotics and Automation Society, and Institute of Electrical and Electronics Engineers. *2018 International Conference on Unmanned Aircraft Systems : ICUAS' 18 : June 12-15, 2018, Dallas Marriott City Center, 650 N. Pearl Str., Dallas, 75201*.
- [51] Colin P Coleman. A survey of theoretical and experimental coaxial rotor aerodynamic research. Technical report, NASA Ames Research, 1997.
-