



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco

Departamento de Control Automático

**Diseño y sintonización de controladores avanzados
implementados en un servomecanismo de bajo costo**

TESIS

Que presenta

OLGA LIDIA JIMÉNEZ MORALES

Para obtener el Grado de

DOCTORA EN CIENCIAS

En la Especialidad de

CONTROL AUTOMÁTICO

Director de la Tesis

Dr. Rubén Alejandro Garrido Moctezuma

Ciudad de México

Noviembre, 2024

Dedicatoria

A mi madre Esperanza Morales por acompañarme en cada paso que doy en la búsqueda de ser
mejor persona y profesional.

A mi hermano mayor Miguel, por todo su amor, por motivarme a seguir hacia delante y por
estar siempre cuando lo necesito.

A mis hermanos Eduardo, Manuel, Paulina y Sara por todo su apoyo incondicional.

A mi cuñada Paola por sus consejos y por motivarme a seguir siempre hacia delante.

A mis sobrinos: Michel, Jaret, Carlos, Kathie, Yamileth, Alondra, Emiliano, Alexis, Irain, Abi,
Oscarito, Emanuel y a mi querida ahijada Luz Narumi. Quienes son mi mayor motivación para
seguir adelante, espero les sirva de ejemplo de que todo se puede lograr.

Y finalmente, a la persona más luchadora y fuerte que puedo conocer: YO.

El futuro pertenece a aquellos que creen en la belleza de sus sueños. Eleanor Roosevelt

Agradecimientos

Quiero agradecer de manera especial a mi asesor el Dr. Rubén Garrido por su apoyo en este trabajo de tesis, por el tiempo dedicado a revisar y corregir este trabajo. Por todo lo que me enseñó en los dos años de maestría y cuatro años de doctorado, por que sin su apoyo nada hubiera sido posible. Gracias por que aparte de compartir sus conocimientos también me ayudo a mejorar mi desempeño en la escritura y motivarme ha superarme día a día.

A mis amigos Jose Antonio, Héctor, Gersón, Juan Carlos y Leopoldo por siempre estar a mi lado apoyándome en los momentos más difíciles y dándome ánimos de seguir adelante, además de estar juntos compartiendo los mismos sueños.

A mi gran amiga y compañera de infancia Luciola, por qué a pesar de la distancia siempre estuvo presente en las buenas y en la malas durante este largo camino.

Además quiero agradecer a los ingenieros Gerardo Castro y Jesús Meza por el apoyo brindado en el laboratorio. A la ingeniera Sheila R. Montiel por su apoyo en la instalación del *softwars* necesario para la implementación de los experimentos del proyecto y además por ser una muy buena compañera y amiga.

Al Consejo Nacional de Humanidades Ciencia y Tecnología (CONAHCYT) por el apoyo otorgado.

Índice general

Dedicatoria	II
Agradecimientos	III
Índice de figuras	VI
Índice de tablas	IX
Notación	XI
Abreviaturas	XII
Resumen	XIII
Abstract	XIV
1. Introducción	1
1.1. Estado del arte	1
1.2. Motivación	3
1.3. Objetivo de la tesis	4
1.4. Objetivos principales	4
1.5. Publicaciones	4
1.5.1. Congresos Nacionales	4
1.5.2. Congresos Internacionales	5
1.5.3. Capítulo de libro	5
1.6. Estructura de la tesis	6
2. Preliminares	7
2.1. Norma vectorial	7
2.1.1. Norma Euclidiana	8
2.1.2. Desigualdad de Cauchy-Schwarz	8
2.2. Normas matriciales	8
2.2.1. Norma matricial inducida	8
2.2.2. Norma-2 de una matriz	9
2.2.3. Teorema de Rayleigh-Ritz	9
2.3. Funciones de clase \mathcal{K} y clase \mathcal{KL}	9

2.4.	Funciones logarítmicas	10
2.4.1.	Logaritmos naturales	10
2.5.	Funciones convexas	10
2.5.1.	Teorema del valor medio	12
2.6.	Funciones hiperbólicas	12
2.6.1.	Propiedades de las funciones hiperbólicas	12
2.7.	Sistemas lineales invariantes y variantes en el tiempo	13
2.7.1.	Sistema lineal invariante en el tiempo	14
2.7.2.	Sistema lineal variante en el tiempo	15
2.8.	Estabilidad exponencial	15
2.8.1.	Ecuación de Lyapunov	15
2.9.	Estabilidad de sistemas variantes en el tiempo	16
2.10.	Espectro de un sistema lineal	17
3.	Estudio comparativo de servomotores de CD	18
3.1.	Características de los servomotores de CD empleados en el estudio comparativo	18
3.1.1.	Servomotor <i>Make Block</i>	19
3.1.2.	Servomotor <i>LEGO</i>	19
3.1.3.	Servomotor Analógico de Radio Control (<i>SARC</i>)	19
3.2.	Plataforma Experimental utilizada en el estudio comparativo	21
3.3.	Algoritmos de control implementados en los servomotores de CD	24
3.3.1.	Controlador PID sintonizado mediante técnicas basadas en el Regulador Cuadrático Lineal	24
3.3.2.	Control Adaptable por Modelo de Referencia	27
3.4.	Resultados experimentales	32
3.4.1.	Resultados experimentales con el Algoritmo de control PID	33
3.4.2.	Resultados experimentales del Control Adaptable por Modelo de Referencia	38
3.5.	Análisis de los resultados experimentales	43
3.6.	Estudio comparativo de los servomotores de CD	44
3.7.	Conclusiones	45
4.	Optimización por Enjambre de Partículas	46
4.1.	Metaheurísticas aplicadas a la optimización	46
4.2.	Optimización por Enjambre de Partículas	47
4.3.	Problema de optimización	48
4.3.1.	Conjunto de soluciones factibles	49
4.4.	Variantes del algoritmo PSO	50
4.4.1.	Algoritmo ω -PSO	50
4.4.2.	Algoritmo PSO Fraccionario	51
4.4.3.	Algoritmo PSO-AWDV	52
4.5.	Algoritmo PSO aplicado a la sintonización de controladores	53

5. Algoritmo de Control por Rechazo Activo de Perturbaciones sintonizado mediante algoritmos PSO	57
5.1. Preliminares	57
5.2. Idea principal del ADRC	58
5.3. ADRC aplicado a un servo sistema basado en un motor de CD	59
5.3.1. Análisis de estabilidad en lazo cerrado	62
5.4. Experimentos	68
5.4.1. Condiciones experimentales	68
5.4.2. Resultados experimentales de la sintonización del ADRC utilizando el algoritmo PSO	69
5.5. Análisis de los resultados experimentales del ADRC sintonizado por el algoritmo PSO	73
5.6. Conclusiones	75
6. Control adaptable robusto que emplea la modificación-e y proyección suave de parámetros	77
6.1. Preliminares	78
6.2. Control Adaptable Robusto	78
6.3. Propuestas de algoritmos de control adaptable con modificación- e y proyección suave de parámetros	80
6.3.1. Algoritmo CADASM-VR	81
6.3.2. Algoritmo CADASD-VR	83
6.3.3. Propuesta de leyes de adaptación	84
6.4. Análisis de estabilidad	86
6.4.1. Análisis de estabilidad del algoritmo CADASM-VR	86
6.4.2. Análisis de estabilidad del algoritmo CADASD-VR	89
6.4.3. Prueba de estabilidad alternativa del algoritmo CADASD-VR	94
6.5. Experimentos	96
6.5.1. Condiciones experimentales	96
6.5.2. Algoritmos CADASM-VR y CADASD-VR	97
6.6. Análisis de desempeño de los algoritmos CADASM-VR y CADASD-VR	111
6.7. Conclusiones	113
7. Conclusiones y trabajo a futuro	114
7.1. Conclusiones	114
7.2. Trabajo futuro	115
A. Modelo matemático de un motor de CD de imanes permanentes	116
B. Identificación Paramétrica de un Servomotor de CD	121
C. Algoritmo de la simulación dinámica del ADRC	124

Índice de figuras

2.1. Gráficas de la función $f(x)$ (2.10) y su derivada (2.11).	11
3.1. Servomotor marca <i>Make Block</i>	19
3.2. Servomotor marca <i>LEGO</i>	20
3.3. SARC HS-485HB.	20
3.4. Plataforma experimental utilizada para la aplicación de algoritmos de control a los servomotores de CD.	21
3.5. Circuito de un divisor de voltaje.	22
3.6. Diagrama eléctrico del amplificador de potencia para alimentar a los servomotores de CD [1].	23
3.7. Diagrama esquemático de la implementación del algoritmo de control PID (3.6).	34
3.8. Evaluación del controlador PID (3.15) en el servomotor <i>MakeBlock</i>	35
3.9. Evaluación del controlador PID (3.15) en el servomotor <i>LEGO</i>	36
3.10. Evaluación del controlador PID (3.15) del <i>SARC</i>	37
3.11. Evaluación del CADMR en el servomotor <i>MakeBlock</i>	39
3.12. Evaluación del CADMR en el servomotor <i>LEGO</i>	40
3.13. Evaluación del CADMR en el <i>SARC</i>	41
3.14. Parámetros estimados $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ obtenidos de algoritmo CADMR correspondientes a cada uno de los servomotores.	42
4.1. Representación del algoritmo PSO.	56
5.1. Diagrama de bloques del Controlador por Rechazo Activo de Perturbaciones [2]	58
5.2. Plataforma experimental para la implementación del ADRC.	69
5.3. Diagrama de bloques del ADRC.	70
5.4. Señal de Referencia r vs Señal de salida del servomotor y utilizando el ADRC (5.11) correspondiente al conjunto de ganancias mostradas en la Tabla 5.2. Sintonización con el algoritmo $\omega - PSO$	73
5.5. Señal de Control ADRC u . Sintonización con el algoritmo $\omega - PSO$	74
5.6. Error de seguimiento e del ADRC. Sintonización con el algoritmo $\omega - PSO$	75
6.1. Diagrama esquemático de un controlador adaptable.	79
6.2. Señal de Referencia deseada y_d vs salida de posición del servomotor y utilizando el algoritmo CADASM-VR (6.88) con la ley de adaptación (6.87)-(6.90). Experimento 1	100

6.3. Señal de Referencia deseada y_d vs salida de posición del servomotor y utilizando el algoritmo CADASD-VR (6.91) con la ley de adaptación (6.87)-(6.93). Experimento 1.	100
6.4. Error de seguimiento e utilizando el algoritmo CADASM-VR (6.88) con la ley de adaptación (6.87)-(6.90). Experimento 1.	101
6.5. Error de seguimiento e utilizando el algoritmo CADASD-VR (6.91) con la ley de adaptación (6.87)- (6.93). Experimento 1.	101
6.6. Señal de control u producida por el algoritmo CADASM-VR (6.7) con la ley de adaptación (6.30). Experimento 1.	102
6.7. Señal de control u producida por el algoritmo CADASD-VR (6.16) con la ley de adaptación (6.31). Experimento 1.	102
6.8. Parámetro estimado $\hat{\theta}_1$ acotado por $[\theta_{\min 1}, \theta_{\max 1}]$ producidos por la ley de adaptación (6.29)-(6.30). Algoritmo CADASM-VR. Experimento 1. Sintonización manual.	103
6.9. Parámetro estimado $\hat{\theta}_1$ acotado por $[\theta_{\min 1}, \theta_{\max 1}]$ producidos por la ley de adaptación (6.29)-(6.31). Algoritmo CADASD-VR. Experimento 1. Sintonización manual.	103
6.10. Parámetro estimado $\hat{\theta}_2$ acotado por $[\theta_{\min 2}, \theta_{\max 2}]$ producidos por la ley de adaptación (6.29)-(6.30). Algoritmo CADASM-VR.	104
6.11. Parámetro estimado $\hat{\theta}_2$ acotado por $[\theta_{\min 2}, \theta_{\max 2}]$ producidos por la ley de adaptación (6.29)-(6.31). Algoritmo CADASD-VR.	104
6.12. Señal de Referencia deseada y_d vs Salida de posición del servomotor y utilizando el algoritmo CADASM-VR (6.88) con la ley de adaptación (6.90). Experimento 2.	105
6.13. Señal de Referencia deseada y_d vs Salida de posición del servomotor y utilizando el algoritmo CADASD-VR (6.91) con la ley de adaptación (6.93). Experimento 2.	105
6.14. Error de seguimiento e utilizando el algoritmo CADASM-VR (6.88) con la ley de adaptación (6.90). Experimento 2.	106
6.15. Error de seguimiento e utilizando el algoritmo CADASM-VR (6.91) con la ley de adaptación (6.93). Experimento 2.	106
6.16. Señal de control u producida por el algoritmo CADASM-VR (6.88) con la ley de adaptación (6.90). Experimento 2.	107
6.17. Señal de control u producida por el algoritmo CADASD-VR (6.91) con la ley de adaptación (6.93). Experimento 2.	107
6.18. Parámetro estimado $\hat{\theta}_1$ acotado por $[\theta_{\min 1}, \theta_{\max 1}]$ producidos por la ley de adaptación (6.87)-(6.90). Algoritmo CADASM-VR. Experimento 2. Sintonización manual.	108
6.19. Parámetro estimado $\hat{\theta}_1$ acotado por $[\theta_{\min 1}, \theta_{\max 1}]$ producidos por la ley de adaptación (6.87)-(6.93). Algoritmo CADASD-VR. Experimento 2. Sintonización manual.	108
6.20. Parámetro estimado $\hat{\theta}_2$ acotado por $[\theta_{\min 2}, \theta_{\max 2}]$ producidos por la ley de adaptación (6.87)-(6.90). Algoritmo CADASM-VR. Experimento 2. Sintonización manual.	109

6.21. Parámetro estimado $\hat{\theta}_2$ acotado por $[\theta_{\min 2}, \theta_{\max 2}]$ producidos por la ley de adaptación (6.87)-(6.93). Algoritmo CADASD-VR. Experimento 2 . Sintonización manual.	109
A.1. Diagrama de un motor de CD.	116
A.2. Representación esquemática de un motor de CD con carga.	119

Índice de tablas

2.1. Límites de las funciones hiperbólicas.	12
3.1. Especificaciones técnicas de los servomotores utilizados en el estudio comparativo.	20
3.2. Voltajes de alimentación para el circuito de amplificación de potencia basado en el circuito integrado LM675.	23
3.3. Tabla de relaciones pulsos-grados, grados-voltios correspondiente a los servomotores de CD.	23
3.4. Ganancias del controlador PID (3.6) sintonizadas mediante la teoría del Regulador Cuadrático Lineal.	34
3.5. Parámetros estimados correspondientes a los modelos de los servomotores de CD y ganancias del controlador PD utilizado para realizar la identificación.	34
3.6. Variables utilizadas en el algoritmo de control adaptable.	38
3.7. Desempeños de los controladores PID y CADMR.	44
3.8. Tabla comparativa de costos en pesos mexicanos (MXN), voltaje de alimentación, tipo de sensor en posición y disponibilidad de los servomotores de CD en el mercado nacional.	45
5.1. Resultados de la sintonización	72
5.2. Ganancias utilizadas en la implementación del algoritmo ADRC.	73
5.3. Desempeño del ADRC empleando la sintonización mediante el algoritmo PSO.	75
6.1. Ganancias utilizadas en la implementación del algoritmo CADASM-VR (6.88) con la ley de adaptación (6.87)-(6.90) y del algoritmo CADASD-VR (6.91) y la ley de adaptación (6.87)- (6.93). Experimento 1.	99
6.2. Desempeño del algoritmos CADASM-VR y CADASD. Experimento 1 y 2. Sintonización manual.	112
A.1. Variables y parámetros de un motor de CD.	117

Notación

\mathbb{R}	Conjunto de números reales
\mathbb{R}^+	Conjunto de números reales positivos
$\mathbb{R}_{\geq 0}$	Conjunto de números reales positivos incluyendo al cero
\mathbb{R}^n	Espacio real de dimensión n con entradas en \mathbb{R}
$\mathbb{R}^{n \times n}$	Espacio real de matrices $n \times n$ con entradas en \mathbb{R}
\mathbb{C}	Conjunto de números complejos
A^\top	Transpuesta de la matriz A
A^*	Matriz Hermitiana adjunta de la matriz A
$A > 0$	Matriz A simétrica definida positiva
$\lambda_{\min}(A)$	Valor propio mínimo de la matriz A
$\lambda_{\max}(A)$	Valor propio máximo de la matriz A
\mathcal{H}	Matriz Hermitiana en el espacio $\mathbb{C}^{n \times n}$
$\Re(z)$	Parte real de un número complejo $z \in \mathbb{C}$
$f'(\cdot)$	Derivada de $f(\cdot)$

Abreviaturas

PID	Proporcional Integral Derivativo
CD	Corriente Directa
DC	Direct Current
ADRC	Active Disturbance Rejection Controller
PSO	Particle Swarm Optimization
SARC	Servomotor Analógico de Radio Control
OP	Observador de Perturbaciones
LQR	Linear Quadratic Regulator
CADMR	Control Adaptable Directo por Modelo de Referencia

Resumen

En este trabajo de tesis se presenta el diseño y sintonización de algoritmos de control implementados en un prototipo experimental basado en un servomotor de Corriente Directa (CD). En el caso del prototipo experimental se selecciona un servomotor tras un estudio comparativo de tres servomotores de bajo costo y de diferentes marcas. Los servomotores se evalúan en lazo cerrado mediante un Controlador Proporcional Integral Derivativo y un Controlador Adaptable por Modelo de Referencia y se escoge uno de ellos de acuerdo con sus características técnicas y al desempeño que producen bajo estas leyes de control.

Se estudia la sintonización de un Controlador por Rechazo Activo de Perturbaciones compuesto por un observador de estados y un observador de perturbaciones cuyo objetivo es rechazar perturbaciones e imponer una dinámica deseada en un sistema en lazo cerrado. La sintonización de este controlador se realiza mediante el algoritmo denominado Optimización por Enjambre de Partículas. Una característica de la sintonización es que el espacio de búsqueda del algoritmo se define de acuerdo con las restricciones impuestas por las condiciones de estabilidad del sistema en lazo cerrado. Esto permite obtener un conjunto de ganancias del controlador que producen una respuesta óptima y al mismo tiempo garantizan estabilidad.

También se proponen dos algoritmos de control adaptable con leyes de adaptación dotadas de la clásica modificación e y la propuesta de una técnica de proyección suave para limitar los valores de los parámetros estimados. En la primera propuesta el vector regresor del algoritmo adaptable está compuesto por señales medidas como lo son las salidas en posición y velocidad del servomotor. Por otro lado, la segunda propuesta resalta el uso de la aceleración y velocidad de la trayectoria deseada para construir el vector regresor. Las ganancias de los controladores propuestos fueron sintonizadas de manera manual lográndose así el objetivo de seguimiento de trayectoria.

Los experimentos reportados en la tesis demuestran el desempeño de los algoritmos estudiados en condiciones reales, mostrando aspectos no observados en simulaciones numéricas como lo son perturbaciones, fenómenos de fricción y ruidos de medición, entre otros.

Abstract

This thesis work presents the design and tuning of control algorithms implemented in an experimental prototype based on a Direct Current (DC) servomotor. In the case of the experimental prototype, a servomotor is selected after a comparative study of three low-cost servomotors of different brands. The servomotors are evaluated in closed loop by means of a Proportional Integral Derivative Controller and a Model Reference Adaptive Controller, and one of them is chosen according to its technical characteristics and its performance it produces under these control laws.

The tuning of an Active Disturbance Rejection Controller composed by a state and a disturbance observers, whose objective is to reject disturbances and impose a desired dynamics in a closed loop system, is studied. The tuning of this controller is performed by the Particle Swarm Optimization algorithm. A feature of the tuning is that the search space of the algorithm is defined according to the constraints imposed by the stability conditions of the closed-loop system. This allows obtaining a set of controller gains that produce an optimal response while guaranteeing stability.

Two adaptive control algorithms are also propose with adaptive laws endowed with the classical e modification and the proposal of a soft projection technique to constrain the estimated parameter values. In the first proposal, the regressor vector of the adaptive algorithm is composed of measured signals such as the servomotor position and velocity outputs. On the other hand, the second proposal highlights the use of the acceleration and velocity of the desired trajectory to construct the regressor vector. The gains of the proposed controllers were tuned manually, thus achieving the objective of trajectory tracking.

The experiments reported in the thesis demonstrate the performance of the studied algorithms in real conditions, showing aspects not observed in numerical simulations such as disturbances, friction phenomena and measurement noise, among others.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Estado del arte

El Control Automático forma parte integral en los sistemas Mecatrónicos, vehículos espaciales y en cualquier sistema industrial que requiera control de temperatura, de posición, velocidad, humedad, flujo, entre otros. Por esta razón se ha convertido en una parte fundamental en la ingeniería y en la ciencia. En el proceso enseñanza-aprendizaje y en la investigación en las áreas del Control Automático, Robótica y Mecatrónica se requiere de plataformas equipadas con *hardware* y *software* especializados para la evaluación de los algoritmos de control en tiempo real. Lo anterior permite a los estudiantes e investigadores apreciar aspectos no observados en simulaciones numéricas como pueden ser dinámicas no modeladas, perturbaciones, incertidumbres, ruidos de medición, entre otros.

Existen en la literatura varias plataformas educativas orientadas a la enseñanza del Control Automático. La referencia [3] presenta experimentos utilizando un prototipo de bajo costo el cual consta de un motor de imán permanente controlado mediante un microcontrolador. En el trabajo presentado en [4] se describe el desarrollo de un prototipo de laboratorio para la prueba de algoritmos de control el cual pueda ser asequible a estudiantes de nivel licenciatura. El prototipo consta de una tarjeta Raspberry Pi, un motor de Corriente Directa (CD) y varios circuitos necesarios para las prácticas de laboratorio. En [5] se presenta el desarrollo de un laboratorio de aprendizaje avanzado para un motor de CD que permite a los estudiantes realizar experimentos de manera remota. En [6] se describe el *hardware* utilizado en laboratorios experimentales del control, este consiste en un motor y un servoamplificador de CD sin escobillas, un codificador óptico para la lectura de mediciones de posición y un microcontrolador STM32F4. La referencia [7] presenta un kit de laboratorio basado en un microcontrolador para el control de un motor de Corriente Directa con un costo menor a \$100 USD. La referencia [8] expone una plataforma experimental portátil basada en un motor de CD para la implementación de algoritmos de control. Los prototipos presentados anteriormente están enfocados en la evaluación del control en velocidad y posición de sistemas mecánicos. Además, se consideran que son prototipos de bajo costo de fácil accesibilidad. Sin embargo, el bajo costo de las plataformas genera dudas respecto a la eficiencia de la evaluación de los algoritmos de control avanzados al utilizarse componentes baratos o limitados en su mecanismo [9]. En trabajos previos solo se han probado algoritmos básicos como el controlador Proporcional Integral Derivativo (PID) [3, 10].

Existen en la literatura una variedad de algoritmos de control avanzados que permiten es-

timar las perturbaciones externas e internas de un sistema dinámico a partir de las mediciones de entrada-salida. En [11, 12], el Control por Rechazo Activo de Perturbaciones (ADRC por sus siglas en inglés) se basa en el diseño de un Observador de Perturbaciones (OP) que permite estimar la perturbación para poder contrarrestarla a través del sistema de control. En la referencia [13] se encuentra un estudio teórico del ADRC en donde se realiza un análisis detallado del desempeño del algoritmo de control para sistemas lineales invariantes en el tiempo, comparando dicho desempeño con otros controladores existentes.

En la referencias [14, 15] se analiza la equivalencia entre diferentes métodos de control, específicamente filtros planos y controladores PID basados en derivadas sucias, Control por Rechazo Activo de Perturbaciones (ADRC), y control por modos deslizantes basado en un reconstructor integral. Este análisis se realiza en el contexto de sistemas SISO (*Single Input-Single Output*) de segundo orden, perturbados y con integración pura. La investigación concluye que existe una equivalencia válida entre estos controladores para cualquier sistema de integración pura de orden finito. En [16], los autores utilizan un OP combinado con un Observador de Luenberger (OL) para la implementación de un ADRC para el control de movimiento de un motor ultrasónico. Los resultados experimentales presentados en ese trabajo muestran que el ADRC propuesto es fácil de implementar y sintonizar. Además, puede ser considerado como un algoritmo de control robusto para una clase de plantas lineales invariantes en el tiempo (LTI por sus siglas en inglés).

Por otro lado, dentro de las técnicas avanzadas de control se encuentran los controladores adaptables los cuales proporcionan un mecanismo de adaptación para estimar los parámetros del modelo de una planta cuando estos se desconocen. Los controladores adaptables prescinden del conocimiento exacto de los parámetros de la planta y pueden mejorar el rendimiento ante cambios paramétricos [17, 18, 19]. Un problema con los controladores adaptables en presencia de perturbaciones es que pueden exhibir deriva paramétrica, es decir, los parámetros estimados no permanecen acotados y su valor aumenta con el tiempo. Una forma de enfrentar este problema es modificar la ley de adaptación mediante la modificación $-e$ [18]. Sin embargo, aunque el empleo de la modificación $-e$ hace estable un sistema de control adaptable, aún quedan algunas cuestiones prácticas por resolver. La primera cuestión está relacionada con el vector regresor empleado en la ley de control adaptable, que en muchos casos se construye a partir de señales medidas. En el caso del control adaptable de manipuladores robóticos, la Ley de Adaptación a la Compensación Deseada (DCAL por sus siglas en inglés) [20], [21] emplea la posición, velocidad y aceleración de la trayectoria deseada, lo que permite calcular fuera de línea los términos no lineales relacionados con las matrices de inercia y Coriolis, así como el vector de gravedad, reduciendo de este modo la carga al calcular el DCAL. Además, el uso de señales deseadas en lugar de medidas reduce el efecto del ruido de medición [22].

La segunda cuestión está relacionada con la respuesta transitoria de los controladores adaptables ya que en ciertas ocasiones generan valores elevados de la señal de control que en la práctica puede ser demasiado agresiva. Este comportamiento puede solucionarse añadiendo mecanismos de proyección de parámetros en la ley de adaptación [23], [24]. El objetivo de la proyección es limitar los valores tomados por las estimaciones de los parámetros a límites conocidos [25]. Esta técnica se ha utilizado en [26] para el control anti-caos de un servo-motor. Otro enfoque utiliza una proyección de parámetros basada en la función arcotangente para un controlador adaptable de inmersión e invariancia aplicado a un motor lineal [27]. Un inconveniente del controlador anterior es que no hay disposiciones explícitas para contrarrestar el efecto de las perturbaciones

de los parámetros. La proyección de parámetros utilizada en este enfoque limita las estimaciones de los parámetros, pero debido a las perturbaciones los parámetros estimados pueden permanecer en sus valores máximos o mínimos lo cual hace que se pierda la capacidad de adaptación del controlador adaptable. Este enfoque se presentó por primera vez para plantas lineales de orden n en [28]. Otro controlador adaptable interesante se presenta en [29]. En este caso los autores emplean la proyección de parámetros propuesta en [30], y sólo se presentan resultados de simulación numérica.

Ahora bien, en el diseño de los algoritmos de control la sintonización de sus ganancias juega un papel importante en el desempeño del sistema en lazo cerrado. En el caso del controlador Proporcional Integral Derivativo (PID) y del control por realimentación de estados existen técnicas de sintonización incluyendo la técnica de asignación de polos, el método de Ziegler y Nichols [31], y técnicas de sintonización óptima como el Regulador Cuadrático Lineal entre otras [32, 33, 34]. Curiosamente, en [35, 12], el observador de perturbaciones se utiliza como técnica de sintonización para controladores difusos. Por otro lado, en lo que respecta al diseño de un controlador adaptable, la sintonización de sus ganancias se realiza mediante técnicas clásicas como las reglas de Ziegler-Nichols, un enfoque aplicado a los auto-sintonizadores [36], y la sintonía estadística o heurística [37]. Actualmente, el uso de técnicas de optimización inteligente en el área del Control Automático y la Mecatrónica se ha convertido en una herramienta útil para sintonizar las ganancias de los algoritmos de control. Existe una gran variedad de técnicas de optimización inteligente en la literatura, relacionadas con la sintonización de controladores clásicos PID [38], [39], algoritmos de Control por Rechazo Activo de Perturbaciones [40], [41], y Controladores Adaptables [42], [43]. Las técnicas de optimización inteligente como el recocido simulado, la búsqueda de patrones, el algoritmo genético y la Optimización por enjambre de Partículas (PSO por sus siglas en inglés) se utilizan actualmente en varias áreas del control automático y en aplicaciones industriales para mejorar la estabilidad de los sistemas, para la identificación de parámetros y para el ajuste de controladores [44, 45, 46, 47, 39, 48, 49, 50]. El algoritmo PSO ha tenido éxito debido a la simplicidad de su implementación, su eficiencia computacional y su capacidad para buscar grandes espacios de soluciones potenciales [51].

1.2. Motivación

El motor de Corriente Directa es un elemento que tienen en común algunos de los prototipos mencionados en la sección anterior. Es un componente fácil de estudiar y controlar para su aplicación en la construcción de prototipos, además, el uso de un motor de CD en plataformas educativas permite a los estudiantes observar el efecto de perturbaciones, dinámicas no modeladas, ruidos de medición, fricción, entre otros. Este puede ser descrito matemáticamente mediante modelos lineales basados en funciones de transferencia o en variables de estado. Esta característica permite el empleo de una alta variedad de estrategias de control lineal descritas en libros de texto [52], [32], [53].

Con respecto a los algoritmos de control, los prototipos de laboratorio reportados en la literatura no han reportado la implementación de algoritmos de control avanzados robustos ante perturbaciones o controladores adaptables. Lo anterior motiva este trabajo de tesis en el sentido de evaluar algoritmos avanzados de control en un prototipo de laboratorio dotado de un prototipo basado en un servomotor de CD de bajo costo.

Otra motivación de este trabajo de tesis es la sintonización de controladores empleando el algoritmo PSO. Una de las características clave de la metodología de sintonización propuesta basada en este algoritmo y que lo hace diferente de los métodos de sintonización reportados en la literatura basados en metaheurísticas es el empleo de las condiciones derivadas de un análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado para definir el conjunto factible de soluciones. De este modo, los algoritmos PSO producirán ganancias que garantizan estabilidad en lazo cerrado minimizando simultáneamente una función de desempeño.

En relación al Control Adaptable, algunas deficiencias de los enfoques adaptables estudiados en las referencias mencionadas son las siguientes. Las proyecciones de parámetros reportadas no son suaves. Además, algunos de estos controladores no toman en cuenta las perturbaciones que afectan a la planta bajo control lo cual puede producir deriva paramétrica e inestabilidad en lazo cerrado. Lo anterior motiva la propuesta de algoritmos de Control Adaptable que garanticen estabilidad ante perturbaciones, y que limiten de manera suave los valores de los parámetros estimados.

1.3. Objetivo de la tesis

Este trabajo tiene como objetivo diseñar y sintonizar algoritmos de control avanzados implementados en una plataforma experimental de bajo costo.

1.4. Objetivos principales

- i Realizar un estudio comparativo de tres servomotores de Corriente Directa de bajo costo y seleccionar el que tenga las mejores características técnicas y que produzca el mejor desempeño en lazo cerrado.
- ii Sintonizar un algoritmo basado en el rechazo activo de perturbaciones mediante la Optimización por Enjambre de Partículas.
- iii Proponer el diseño de nuevos algoritmos de control adaptable con una ley de adaptación basada en una nueva técnica de proyección suave combinada con la modificación-*e* para contrarrestar el efecto de perturbaciones acotadas.

1.5. Publicaciones

1.5.1. Congresos Nacionales

- Olga L Jiménez, J Maldonado, Garrido Rubén. Evaluación de un controlador adaptable por modelo de referencia mediante servomotores de CD de bajo costo. Congreso Nacional de Control Automático. Memorias del 2022 CNCA. Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México.
- Olga L Jiménez, Diego Tristán-Rodríguez, Rubén Garrido. Experimental evaluation of an adrc law using a teaching platform. 2022 XXIV Robotics Mexican Congress (COMRob). IEEE 2022, pp. 78-83. Mineral de la Reforma, Hidalgo, México.

- Diego Tristán Rodríguez, Olga Jiménez Morales, Rubén Garrido, Efrén Mezura-Montes, Eduardo Aranda-Bricaire. Tuning of a State Feedback Controller Using MOPSO. 2023 XXV Robotics Mexican Congress (COMRob). IEEE 2023, pp. 105-109. Xalapa, Veracruz, México.
- Olga Lidia Jiménez-Morales, Diego Tristán-Rodríguez, Ruben Garrido, Efrén Mezura-Montes, 2023. Optimal Tuning of a Bounded e-Modified Adaptive Control Law using a Particle Swarm Optimization algorithm. *Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI*. Doi: <https://doi.org/10.29057/icbi.v11iEspecial2.10713>, pp. 32-38.

1.5.2. Congresos Internacionales

- Olga L Jiménez, J Maldonado, Garrido Rubén. Estudio comparativo de servomotores de CD orientados a la construcción de prototipos educativos. 7° Congreso Internacional de Robótica y computación (CIRC-2020). IEEE, 2020. Instituto Tecnológico de la Paz, Baja California, Mex.
- Olga Jiménez Morales, J Maldonado, R Garrido. Robust adaptive control of servo systems. 2022 19th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE). IEEE, pp. 1-6. Mexico City, Mexico.
- Abraham Rivera, Olga Jiménez Morales, Rubén Garrido. Parameter Identification of a DC servomechanism using a Robust Least Squares Algorithm with Variable Forgetting Factor. 2023 20th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE). IEEE, pp. 1-6. Mexico City, Mexico.
- Olga Jiménez-Morales, Rubén Garrido. A Bounded e-Modification Applied to Adaptive Control of Servo Systems. 2023 9th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT). IEEE & IFAC, pp. 858-863. Rome, Italy.
- Diego Tristán-Rodríguez, Olga Jiménez, Rubén Garrido, Efrén Mezura-Montes. Active Disturbance Rejection Control: Tuning by PSO Considering Stability Conditions. 2023 9th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT). IEEE & IFAC, pp. 932-937. Rome, Italy.

1.5.3. Capítulo de libro

- Olga L Jiménez Morales, Diego Tristán Rodríguez, Rubén Garrido, Efrén Mezura-Montes. Optimal Tuning of an Active Disturbance Rejection Controller Using a Particle Swarm Optimization Algorithm. *Hybrid Intelligent Systems Based on Extensions of Fuzzy Logic, Neural Networks and Metaheuristics*. pp. 165-186. Springer Nature Switzerland, 2023.

1.6. Estructura de la tesis

La tesis se divide de la siguiente manera: En el Capítulo 2 se introducen los preliminares matemáticos utilizados en el análisis de estabilidad de los algoritmos de control abordados en este trabajo. En el Capítulo 3 se presenta un estudio comparativo de tres servomotores de Corriente Directa evaluando costos, disponibilidad en el mercado nacional y su desempeño en la implementación de algoritmos de control clásicos. En el Capítulo 4 se exhiben los antecedentes, conceptos y aplicaciones de las meta-heurísticas, en especial la técnica de Optimización por Enjambre de Partículas. En el Capítulo 5 se describe el algoritmo de control por Rechazo Activo de Perturbaciones el cual se sintoniza mediante el algoritmo PSO y se presentan los resultados experimentales de su implementación. En el Capítulo 6 se expone la propuesta de dos algoritmos de Control Adaptable robusto ante perturbaciones con una ley de adaptación basado en una proyección suave combinado con la modificación $-e$ implementado en un servosistema. Finalmente, en el Capítulo 7 se comentan las conclusiones generales de la tesis y el trabajo a futuro.

Capítulo 2

Preliminares

El objetivo de este capítulo es presentar los preliminares matemáticos correspondientes a los resultados de estabilidad que permitirá el análisis de los controladores estudiados en capítulos posteriores de la tesis. Estos se apoyan en la notación presentada en la sección inicial de la tesis.

El capítulo se divide de la manera siguiente: en la sección 2.1 se define la norma vectorial y la desigualdad de Cauchy-Schwarz. En la Sección 2.2 se describen las normas matriciales como lo son la norma inducida, la norma-2 y el teorema de Rayleigh-Ritz. En la Sección 2.3 se presentan las definiciones de funciones de clase \mathcal{K} y \mathcal{KL} . En la Sección 2.4 se definen las funciones logarítmicas. En la Sección 2.5 se describe una función convexa y sus propiedades. En la Sección 2.6 se exhiben las definiciones y propiedades de la funciones hiperbólicas. En la Sección 2.8 se reporta el teorema de estabilidad exponencial para un sistema Lineal Invariante en el Tiempo (LTI por sus siglas en inglés). En la Sección 2.9 se presentan los teoremas con respecto a la estabilidad de sistemas variantes en el tiempo. Finalmente, en la Sección 2.10 se muestra la definición del espectro de un sistema lineal.

2.1. Norma vectorial

Sean $\mathcal{X} = \{\chi_1, \dots, \chi_n\}$, $\mathcal{Y} = \{y_1, \dots, y_n\} \in \mathbb{R}^n$. Una norma vectorial es una función $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ que satisface las siguientes propiedades [54]:

- $\|\mathcal{X}\| \geq 0$ y $\|\mathcal{X}\| = 0 \iff \mathcal{X} = 0$
- $\|\alpha\mathcal{X}\| = |\alpha|\|\mathcal{X}\|$ para cualquier valor de $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $\|\mathcal{X} + \mathcal{Y}\| \leq \|\mathcal{X}\| + \|\mathcal{Y}\|$
- $\|-\mathcal{X}\| = \|\mathcal{X}\|$
- $|\|\mathcal{X}\| - \|\mathcal{Y}\|| \leq \|\mathcal{X} - \mathcal{Y}\|$

2.1.1. Norma Euclidiana

Definición 2.1 Se define a la Norma Euclidiana en \mathbb{R}^n como [55]:

$$\|\mathcal{X}\| = \sqrt{\chi_1^2 + \cdots + \chi_n^2} \quad (2.1)$$

2.1.2. Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Definición 2.2 [56] El producto escalar de dos vectores \mathcal{X} y \mathcal{Y} denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se define como:

$$\langle \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle = \mathcal{X}^\top \mathcal{Y} = \chi_1 \cdot y_1 + \chi_2 \cdot y_2 + \cdots + \chi_n \cdot y_n \quad (2.2)$$

también llamado producto punto o producto interno entre dos vectores en \mathbb{R}^n .

Teorema 1 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz en \mathbb{R}^n [56]) Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathbb{R}^n$ entonces:

- $|\langle \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle| = \mathcal{X}^\top \mathcal{Y} \leq \|\mathcal{X}\| \|\mathcal{Y}\|$
- $|\langle \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle| = \mathcal{X}^\top \mathcal{Y} = \|\mathcal{X}\| \|\mathcal{Y}\| \iff \mathcal{X} = 0 \text{ o } \mathcal{X} = \lambda \mathcal{Y} \text{ para } \lambda \in \mathbb{R}$

2.2. Normas matriciales

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Una norma matricial es una función $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ la cual satisface las siguientes propiedades: [54, 57, 58]:

- $\|A\| \geq 0$ y $\|A\| = 0 \iff A = 0$
- $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$ para cualquier valor de α escalar.
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ para matrices del mismo tamaño.
- $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ para todas las matrices A y B en $\mathbb{R}^{n \times n}$.

2.2.1. Norma matricial inducida

Definición 2.3 Se denomina norma matricial en $\mathbb{C}^{m \times n}$ inducida por una norma vectorial como [58]:

$$\|\mathcal{A}\| = \max_{\|x\|=1} \|\mathcal{A}x\| \quad \text{para } \mathcal{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}, x \in \mathbb{C}^{n \times 1} \quad (2.3)$$

Una norma matricial inducida es compatible con una norma vectorial en el sentido de que [58]:

$$\|\mathcal{A}x\| \leq \|\mathcal{A}\| \|x\| \quad (2.4)$$

2.2.2. Norma-2 de una matriz

Definición 2.4 Sea $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Entonces, la norma de una matriz inducida por la norma Eucladiana de un vector es [54, 58]:

$$\|\mathcal{A}\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|\mathcal{A}x\|_2 \quad (2.5)$$

Esta norma también se conoce como norma espectral. La norma espectral $\|\mathcal{A}\|_2$ también puede expresarse en términos del valor propio máximo de la matriz $\mathcal{A}^* \mathcal{A}$, donde \mathcal{A}^* es la matriz conjugada transpuesta de \mathcal{A} , es decir:

$$\|\mathcal{A}\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathcal{A}^* \mathcal{A})} \quad (2.6)$$

en donde λ_{\max} representa el máximo valor propio de la matriz $\mathcal{A}^* \mathcal{A}$.

Si $\mathcal{A} > 0$, una matriz definida positiva, cuyos valores propios son todos estrictamente positivos. Entonces $\sqrt{\lambda_{\max}(\mathcal{A}^* \mathcal{A})} = \lambda_{\max}(\mathcal{A})$. Consecuentemente, a partir de (2.4) es posible escribir:

$$\|\mathcal{A}x\|_2 \leq \|\mathcal{A}\| \|x\| = \lambda_{\max}(\mathcal{A}) \|x\|, \mathcal{A} > 0 \quad (2.7)$$

2.2.3. Teorema de Rayleigh-Ritz

Teorema 2 [54] Sea $A \in \mathcal{H}$, una matriz hermitiana, es decir, $A = A^*$ entonces:

- Para todo $x \in \mathbb{C}^n$, $\lambda_{\min}(A) \|x\|^2 \leq x^\top A x \leq \lambda_{\max}(A) \|x\|^2$
- $\lambda_{\max}(A) = \max_{x \neq 0} \frac{x^\top A x}{x^\top x} = \max_{\|x\|=1} (x^\top A x)$
- $\lambda_{\min}(A) = \min_{x \neq 0} \frac{x^\top A x}{x^\top x} = \min_{\|x\|=1} (x^\top A x)$

con $\lambda_{\min}(A)$, el menor valor propio de A .

2.3. Funciones de clase \mathcal{K} y clase \mathcal{KL}

Definición 2.5 Una función continua $\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ es de clase \mathcal{K} si [18, 59]:

- $\alpha(0) = 0$.
- $\alpha(\sigma) > 0 \forall \sigma > 0$.

- α es estrictamente creciente, es decir:

$$\sigma_1 < \sigma_2 \implies \alpha(\sigma_1) < \alpha(\sigma_2)$$

Definición 2.6 [59] Una función escalar $\beta(r, s)$, es decir, su salida es un número real y está definida para $r \in [0, a)$ y $s \in [0, \infty)$ pertenece a la clase \mathcal{KL} si para cada valor fijo de s el mapeo de $\beta(r, s)$ pertenece a la clase \mathcal{K} con respecto a r , y para cada valor fijo de r , el mapeo de $\beta(r, s)$ es decreciente con respecto a s y $\beta(r, s) \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow \infty$.

2.4. Funciones logarítmicas

Definición 2.7 [60] Sea $a \in \mathbb{R}_{>0, \neq 1}$, $x_l > 0$. Una función logarítmica, denotada por $\log_a(\cdot)$, se define como el inverso de una función exponencial $x_l = a^m$, esto es:

$$\log_a x_l = m \iff a^m = x_l$$

El término a se denomina base.

2.4.1. Logaritmos naturales

Se denominan logaritmos naturales a aquellos cuya base es el número e y tienen la escritura siguiente:

$$\log_e x_l = \ln x_l$$

2.5. Funciones convexas

Definición 2.8 Un conjunto \mathcal{C} en un espacio vectorial \mathbb{R}^n es convexo si, para cualquier par de puntos a_1 y a_2 en \mathcal{C} , el segmento de línea que conecta a_1 y a_2 también está completamente contenido dentro de \mathcal{C} [60].

Definición 2.9 [61] Una función $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa si su dominio $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ es convexo y para todo $a_1, a_2 \in \mathcal{D}$ se cumple:

$$f((1 - \lambda)a_1 + \lambda a_2) \leq (1 - \lambda)f(a_1) + \lambda f(a_2) \tag{2.8}$$

para $\lambda \in [0, 1]$. Además, es estrictamente convexa si la desigualdad (2.8) se cumple siempre que a_1 y a_2 sean puntos distintos y $\lambda \in (0, 1)$.

Lema 2.1 [62] Sea $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable sobre un dominio convexo y abierto \mathcal{D} . Entonces, f es convexa si y solo si:

$$f(a_1) \geq f(a_2) + f'(a_2)(a_1 - a_2)$$

$\forall a_1, a_2 \in \mathcal{D}$.

Lema 2.2 [62] Sea $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable cuya segunda derivada existe para cada punto sobre un dominio abierto \mathcal{D} . Entonces, f es convexa si y solo si su dominio \mathcal{D} es convexo y su segunda derivada f'' es semidefinida positiva, es decir:

$$f''(x) \geq 0 \tag{2.9}$$

$\forall x \in \mathcal{D}$.

Ejemplo 1 Considerese la siguiente función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \ln \cosh x \tag{2.10}$$

en donde su segunda derivada está dada por [63]:

$$f''(x) = \operatorname{sech}^2 x \tag{2.11}$$

en donde $f'' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Por lo tanto, $f''(x) \geq 0$ satisface el Lema 2.2 lo cual implica que (2.10) es convexa $\forall x \in \mathbb{R}$.

En la Fig. 2.1 se presenta la representación gráfica de la función $f(x)$ y su segunda derivada, tal como se expone en el Ejemplo 1. En esta figura, se puede observar que la función (2.10) satisface la Definición 2.8, mientras que su segunda derivada cumple con lo establecido en el Lema 2.2.

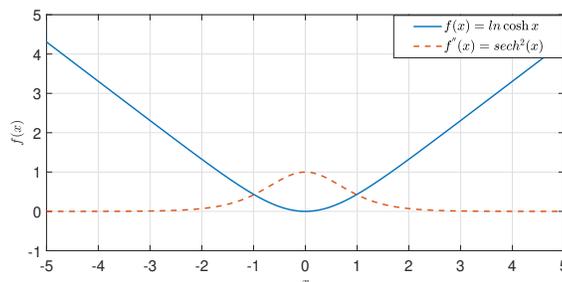


Figura 2.1: Gráficas de la función $f(x)$ (2.10) y su derivada (2.11).

2.5.1. Teorema del valor medio

Teorema 3 [64] Sea $f(x)$ una función continua en $[x_1, x_2]$ y diferenciable en (x_1, x_2) . Existe $c_1 \in (x_1, x_2)$ tal que:

$$f'(c_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (2.12)$$

2.6. Funciones hiperbólicas

Las funciones hiperbólicas se definen a partir de la función exponencial y son análogas a las funciones trigonométricas pero definidas usando la hipérbola en lugar del círculo [65].

Definición 2.10 [65] Para $\varphi \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\begin{aligned} \sinh \varphi &\equiv \frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{2} \\ \cosh \varphi &\equiv \frac{e^\varphi + e^{-\varphi}}{2} \\ \tanh \varphi &\equiv \frac{\sinh \varphi}{\cosh \varphi} = \frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{e^\varphi + e^{-\varphi}} \end{aligned} \quad (2.13)$$

en donde \sinh , \cosh y \tanh representan respectivamente las funciones seno hiperbólico, coseno hiperbólico y tangente hiperbólico.

2.6.1. Propiedades de las funciones hiperbólicas

Las funciones hiperbólicas (2.13) tienen los límites mostrados en la Tabla 2.1.

	$\varphi = 0$	$\varphi \rightarrow -\infty$	$\varphi \rightarrow +\infty$
$\sinh \varphi$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\cosh \varphi$	1	$+\infty$	$+\infty$
$\tanh \varphi$	0	-1	1

Tabla 2.1: Límites de las funciones hiperbólicas.

Además, se cumplen las siguientes propiedades:

▪

$$|\tanh \varphi| \leq 1 \quad (2.14)$$

▪

$$|\ln \cosh \varphi_2 - \ln \cosh \varphi_1| \leq |\varphi_2 - \varphi_1| \quad (2.15)$$

■

$$\ln \cosh \varphi \leq |\varphi| \quad (2.16)$$

donde $\ln \cosh \varphi$ es una función convexa demostrada en el Ejemplo 1.

Demostración de las desigualdades (2.16): Sea $f(\varphi) = \ln \cosh \varphi$ una función continua y diferenciable en (φ_1, φ_2) con $\bar{c} \in (\varphi_1, \varphi_2)$. Entonces, aplicando el Teorema 3 del valor medio se tiene:

$$\frac{\ln \cosh \varphi_2 - \ln \cosh \varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_1} = \tanh \bar{c}; \bar{c} \in [\varphi_1, \varphi_2] \quad (2.17)$$

Considerando el absoluto de (2.17) genera:

$$\frac{|\ln \cosh \varphi_2 - \ln \cosh \varphi_1|}{|\varphi_2 - \varphi_1|} = |\tanh \bar{c}| \quad (2.18)$$

Mayorizando (2.18) y a partir de la cota (2.14) produce:

$$\frac{|\ln \cosh \varphi_2 - \ln \cosh \varphi_1|}{|\varphi_2 - \varphi_1|} \leq 1 \quad (2.19)$$

Despejando el término $|\varphi_2 - \varphi_1|$ de (2.19) se obtiene:

$$|\ln \cosh \varphi_2 - \ln \cosh \varphi_1| \leq |\varphi_2 - \varphi_1| \quad (2.20)$$

lo cual demuestra la desigualdad (2.15). Ahora bien, si $\varphi_1 = 0$ entonces:

$$|\ln \cosh \varphi_2| \leq |\varphi_2| \quad (2.21)$$

y por lo tanto se cumple la cota (2.16).

2.7. Sistemas lineales invariantes y variantes en el tiempo

Un sistema se denomina lineal si cumple con dos propiedades fundamentales:

- Principio de Superposición [66]: establece que la respuesta de un sistema lineal a la suma de dos entradas es igual a la suma de las respuestas individuales a cada una de esas entradas. Es decir, dadas:

$$y_1(t) = f(u_1(t))$$

$$y_2(t) = f(u_2(t))$$

entonces el principio de superposición establece que si se aplica la entrada combinada $u_1(t) + u_2(t)$ la salida será:

$$f(u_1(t) + u_2(t)) = y_1(t) + y_2(t)$$

en donde $u_1(t)$, $u_2(t)$ corresponden a las entradas del sistema y $y_1(t)$, $y_2(t)$ representan la salida.

- Propiedad de Homogeneidad: afirma que, si una entrada $u(t)$ es proporcional por un factor constante ϖ , la salida $y(t)$ también es proporcional por el mismo factor [66]. Es decir:

$$\varpi y(t) = f(\varpi u(t))$$

Por lo tanto, un sistema es lineal si cumple ambas propiedades simultáneamente: superposición y homogeneidad [32]. Es decir, para cualquier conjunto de entradas $u_1(t)$, $u_2(t)$ y para cualquier constante ϖ , el sistema debe satisfacer:

$$f(\varpi u_1(t) + \varpi u_2(t)) = \varpi y_1(t) + \varpi y_2(t)$$

2.7.1. Sistema lineal invariante en el tiempo

Un sistema Lineal invariante en el tiempo (LTI, por sus siglas en inglés Linear Time Invariant) es invariante en el tiempo si su dinámica no depende explícitamente del tiempo. Es decir, si su entrada es desplazada en el tiempo t_0 , la salida se desplazará en el tiempo de la misma manera, pero no cambiará su forma. Esto es:

$$y(t - t_0) = f(u(t - t_0))$$

Los sistemas LTI continuos suelen ser representados mediante ecuaciones en el espacio de estados. La ecuación diferencial que describe un sistema LTI en el espacio de estados es:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{2.22}$$

en donde $x(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ representa el vector de estados del sistema, con n el número de variables de estado. $u(t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ es el vector de entrada, donde m es el número de entradas al sistema. $y(t) \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ es el vector de salida, con p el número de salidas del sistema. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ y $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ son matrices constantes que definen las propiedades del sistema.

2.7.2. Sistema lineal variante en el tiempo

Un sistema lineal variante en el tiempo (LTV por sus siglas en inglés Linear Time Variant) es un sistema cuya dinámica cambia con el tiempo, es decir, las matrices que describen al sistema son funciones del tiempo. Es decir :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t)\end{aligned}\tag{2.23}$$

en donde, las matrices $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ y $D(t)$ no son constantes, lo cual significa que el comportamiento del sistema puede cambiar en diferentes momentos.

2.8. Estabilidad exponencial

La estabilidad exponencial es un concepto clave en la teoría de control y análisis de sistemas dinámicos. Se refiere a cómo las soluciones de un sistema regresan al equilibrio a una tasa exponencial a medida que pasa el tiempo.

2.8.1. Ecuación de Lyapunov

La ecuación de Lyapunov está relacionada con la existencia de una función de Lyapunov cuadrática $V(x)$ que demuestra la estabilidad exponencial del sistema.

Para un sistema LTI (2.22), la función de Lyapunov candidata es de la forma cuadrática:

$$V(x) = x^T P x\tag{2.24}$$

donde $P > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz simétrica y definida positiva. Para garantizar la estabilidad del sistema (2.22), la derivada de (2.24) debe ser definida negativa, es decir $\dot{V}(x) < 0$. A partir de esta condición se deriva la ecuación de Lyapunov:

$$A^T P + P A = -Q\tag{2.25}$$

donde Q es una matriz simétrica definida positiva.

Teorema 4 [59] *La matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ del sistema LTI (2.22) es Hurwitz estable si y sólo si para cada matriz simétrica definida positiva Q existe una matriz simétrica definida positiva P , la cual es solución única de la ecuación de Lyapunov (2.25).*

2.9. Estabilidad de sistemas variantes en el tiempo

La siguiente definición permite formalizar las nociones de soluciones acotada y últimamente acotada de sistemas no lineales de dimensión n .

Definición 2.11 [59] *Considérese el sistema no lineal variante en el tiempo:*

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.26)$$

en donde $t_0 \geq 0$, la función f es continua a trozos en t y localmente Lipschitz en $x \forall t \geq 0$, $x \in \mathcal{D}$, en donde $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio que contiene el origen. Las soluciones de (2.26) son:

- *Uniformemente Acotadas* si existe $c > 0$, independientemente de t_0 , y para cada $\mathcal{A} \in (0, c)$ existe $\mathcal{B} > 0$ dependiente de \mathcal{A} , esto es, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{A}) > 0$ pero independiente de t_0 , tal que:

$$\|x(t_0)\| \leq \mathcal{A} \implies \|x(t)\| \leq \mathcal{B}, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.27)$$

- *Globalmente Uniformemente Acotada*, si (2.27) se cumple para \mathcal{A} arbitrariamente grande.
- *Uniformemente Últimamente Acotada con cota última D* si existen constantes $D > 0$ y $c > 0$ donde c es independiente de t_0 , y para todo $\mathcal{A} \in (0, c)$ existe $T = T(\mathcal{A}, D) \geq 0$ independiente de t_0 , tal que:

$$\|x(t_0)\| \leq \mathcal{A} \implies \|x(t)\| \leq D, \quad \forall t \geq t_0 + T \quad (2.28)$$

- *Global Uniformemente Últimamente Acotada*, si (2.28) es válida para \mathcal{A} arbitrariamente grande.

Definición 2.12 [59, 67] *Un conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es positivamente invariante con respecto al sistema (2.26) si y solo si toda solución $x(t)$ que inicie dentro del conjunto Ω permanece dentro de este para todo $t \geq 0$, es decir:*

$$\forall x(t_0) \in \Omega \implies x(t) \in \Omega \quad \forall t \geq 0$$

De manera informal, la Definición 2.12 se refiere a que toda solución del sistema (2.26) con condición inicial dentro del conjunto Ω permanece en Ω para todo tiempo futuro.

El siguiente Teorema presenta las condiciones de estabilidad Uniformemente Últimamente Acotada (UUA) y Últimamente Acotada del sistema (2.26).

Teorema 5 [59] *Considérese el sistema (2.26) y el dominio de atracción $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ que contiene al origen y la función continua diferenciable $V(x)$ tal que;*

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -W_3(x), \quad \forall x \in \mathcal{D} \text{ con } \|x(t)\| \geq \mu, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.30)$$

donde $\alpha_1(\cdot)$ y $\alpha_2(\cdot)$ son funciones de clase \mathcal{K} y $W_3(x)$ es una función continua definida positiva. Elíjase $C > 0$ tal que $\Omega_C = \{x \in \mathbb{R}^n | V(x) \leq C\}$ es un conjunto compacto y contenido en el dominio \mathcal{D} y se supone que $\mu < \alpha_2^{-1}(C)$. Entonces, Ω_C es positivamente invariante con respecto al sistema (2.26) y existe una función \mathcal{B} de clase \mathcal{KL} tal que para cada estado inicial $x(t_0) \in \Omega_C$ la solución de (2.26) satisface:

$$\|x(t)\| \leq \mathcal{B}(\|x(t_0)\|, t - t_0) \quad \forall t_0 \leq t \leq T + t_0 \quad (2.31)$$

$$\|x(t)\| \leq (\alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu))) \quad \forall t \geq t_0 + T \quad (2.32)$$

Si $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$ y $V(x)$ es radialmente no acotada, entonces (2.31) se cumple para cualquier estado inicial $x(t_0)$, sin restricción en el valor de μ .

2.10. Espectro de un sistema lineal

Considérese una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ cuyos valores propios son λ_i los cuales satisfacen la ecuación característica:

$$\det(A - \lambda_i I) = 0 \quad (2.33)$$

con $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz identidad. El conjunto de valores propios λ_i denotados por $\text{spec}(A)$ es llamado el espectro de A .

Definición 2.13 *Dada una matriz A con espectro $\text{spec}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, el valor $\sigma_{sa}(A) = \max_i \{\Re(\lambda_i)\}$, $i = 1, \dots, n$ se denomina abcisa espectral de A y corresponde a su valor propio que se encuentra más a la derecha en el plano complejo.*

Lema 2.3 [68] *sea A una matriz asintóticamente estable y :*

$$A^T P + P A = -2I \quad (2.34)$$

con $P = P^T$ una matriz definida positiva, entonces:

$$\frac{1}{\lambda_{\max}(P)} \leq -\sigma_{sa}(A) \quad (2.35)$$

Capítulo 3

Estudio comparativo de servomotores de CD

El objetivo de este capítulo es presentar un estudio comparativo de tres servomotores de CD para seleccionar el más idóneo para los experimentos llevados a cabo en este trabajo y para determinar cuál de ellos es el más adecuado para la construcción de prototipos para la enseñanza del Control Automático. Los servomotores que se comparan son un servomotor *Make Block* modelo *180 SMART ENCODER MOTOR*, un servomotor *Lego* modelo *NXT* y por último un servomotor Analógico de Radio Control (*SARC*). En dicho estudio se evalúan costos, disponibilidad en el mercado nacional y su desempeño en la implementación de algoritmos de control tanto básicos como avanzados.

El Capítulo se divide de la manera siguiente. En la Sección 3.1 se presentan las características técnicas de cada uno de los servomotores de CD empleados en el estudio. En la Sección 3.2 se describe la plataforma experimental utilizada en el estudio comparativo. En la Sección 3.3 se presentan los algoritmos de control implementados en cada uno de los servomotores de CD. En la Sección 3.4 se describen los resultados experimentales correspondientes a evaluación de los algoritmos de control en los servomotores de CD. En la Sección 3.5 se muestra el desempeño de cada uno de los algoritmos de control. La Sección 3.6 presenta el estudio comparativo de cada uno de los servomotores de CD, mostrando ventajas y desventajas de cada uno de estos. El Capítulo finaliza con las conclusiones y la elección del servomotor.

3.1. Características de los servomotores de CD empleados en el estudio comparativo

A continuación se describen las principales características de los servomotores de CD empleados en el estudio comparativo.

3.1.1. Servomotor *Make Block*

El servomotor de la marca *Make Block* (Fig. 3.1), cuenta con un codificador óptico como sensor de medición de la posición angular, tiene un eje de salida de acero especial que permite la instalación de engranes y poleas. Además, cuenta con una caja de engranajes hecha de un material anti-abrasivo, lo que permite que el ruido acústico sea menor. Sus especificaciones técnicas se presentan en la Tabla 3.1 [69].

3.1.2. Servomotor *LEGO*

El servomotor modelo *NXT* mostrado en la Fig. 3.2 incluye un codificador óptico acoplado al eje de salida del motor a través de un engrane (ver Fig. 3.2b) el cual permite la medición de la posición angular del motor. Su diseño hace posible el acoplamiento mecánico de piezas de la marca *LEGO* tales como engranes y poleas (ver Fig. 3.2b). En la Tabla 3.1 se muestran sus características técnicas [70].

3.1.3. Servomotor Analógico de Radio Control (*SARC*)

El servomotor Analógico de Radio Control (*SARC*) marca Hitec modelo HS-485HB (Fig. 3.3a) está compuesto por un motor de CD, una caja de engranajes, un potenciómetro conectado al eje de salida de la caja de engranajes, que es utilizado para medir la posición. Este motor cuenta con un circuito de control (ver Fig. 3.3b) [71]. Para propósitos de comparación y con el objetivo de tener acceso directo al potenciómetro y al motor de CD por separado, el circuito de control es eliminado [1] [72] . Sus especificaciones técnicas se encuentran en la Tabla 3.1.

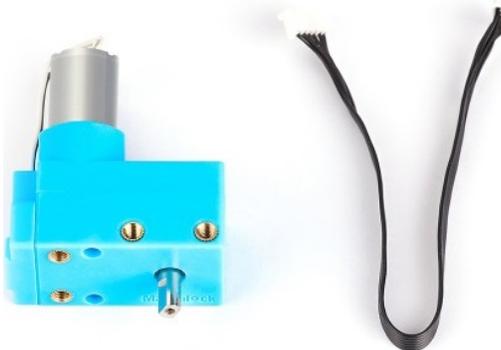


Figura 3.1: Servomotor marca *Make Block* .

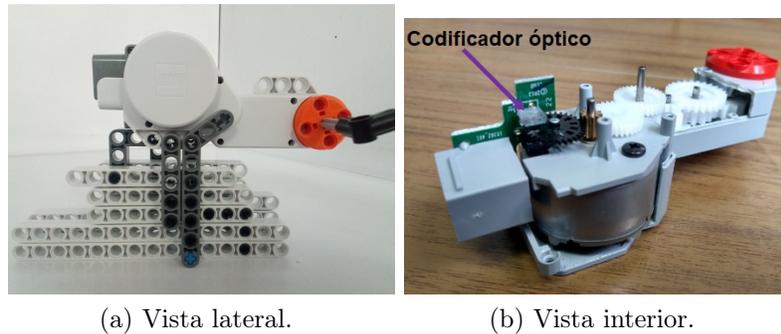
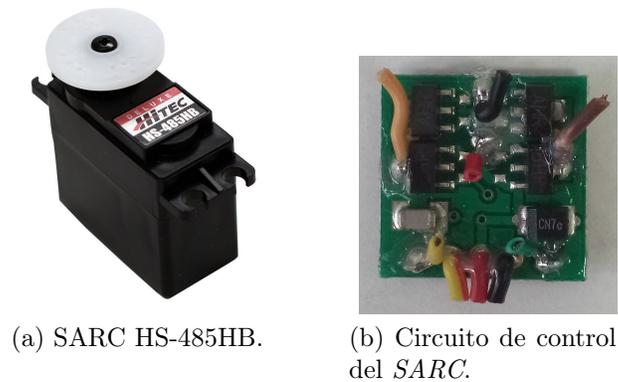
Figura 3.2: Servomotor marca *LEGO*.

Figura 3.3: SARC HS-485HB.

Especificaciones	<i>MakeBlock</i>	<i>LEGO NXT</i>	<i>SARC</i>
Voltaje nominal	7.4 V	9 V	4.8 V-6.0 V
Corriente de consumo sin carga	240 mA	60 mA	150mA-180mA
Velocidad de rotación	178 ± 10 RPM	170 RPM	0.22-0.18 sec/60°
Par de arranque	5 kg·cm	50 N·cm	4.8-6.0 kg·cm
Realimentación	codificador óptico	codificador óptico	Potenciómetro de 5 K Ω
Rotación	ilimitada	ilimitada	limitada
Resolución del codificador	360 ppr	180 ppr	—
Rango de Movimiento	ilimitada	ilimitada	180°
Peso	0.0615 kg	0.080 kg	0.0451 kg

Tabla 3.1: Especificaciones técnicas de los servomotores utilizados en el estudio comparativo.

3.2. Plataforma Experimental utilizada en el estudio comparativo

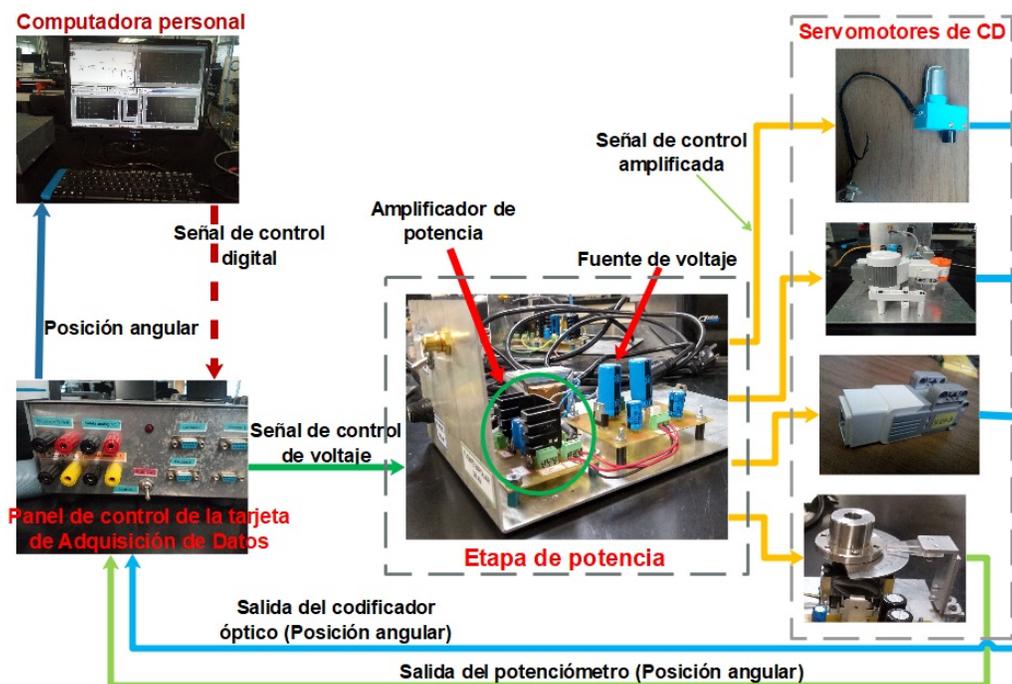


Figura 3.4: Plataforma experimental utilizada para la aplicación de algoritmos de control a los servomotores de CD.

La plataforma experimental utilizada para realizar los experimentos en la evaluación de los servomotores, ilustrada en la Fig. 3.4, consta de una computadora personal equipada con una tarjeta de adquisición de datos marca *Sensoray* modelo 626, encargada de convertir la señal de control digital en señal de voltaje, y de adquirir las señales de posición angular de los servomotores obtenidas de los sensores de medición. La señal de control producida por la tarjeta de adquisición de datos es procesada por una etapa de potencia para accionar a los servomotores. Los algoritmos de control son codificados en la plataforma de programación MATLAB/SIMULINK bajo el ambiente en tiempo real *QUARC* de *Quanser Consulting* con un tiempo de muestreo de 1 ms y el método de integración Euler01. Cabe resaltar que cada uno de los servomotores cuenta con su propia etapa de potencia y fuente de alimentación de acuerdo a sus características técnicas. En la Tabla 3.2 se muestran los voltajes máximos aplicados al amplificador de potencia LM675 así como los componentes principales de las fuentes de alimentación. De acuerdo al diagrama eléctrico de la implementación del amplificador de potencia presentado en la Fig. 3.6, su ganancia es igual a $K_a = 10$, además cuenta con un divisor de voltaje en la entrada de la señal de control, este cuenta con dos resistencias fijas de $100k\Omega$ y $1k\Omega$ y una resistencia variable

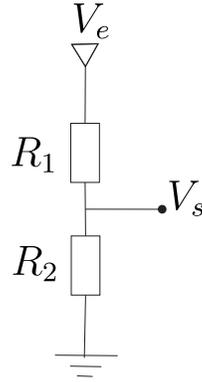


Figura 3.5: Circuito de un divisor de voltaje.

de $47k\Omega$. El ajuste de la resistencia variable se realiza con base en la relación entre la entrada y salida de voltaje, según lo mostrado en el diagrama de la Fig. 3.5. Esto es:

$$V_s = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_e \quad (3.1)$$

donde V_e es el voltaje de entrada, que corresponde al voltaje máximo de entrada al amplificador de potencia asociado a cada servomotor. V_s es el voltaje de salida del divisor del voltaje, el cual es inversamente proporcional a la ganancia de amplificación K_a y directamente proporcional a V_e . Es decir:

$$V_s = \frac{1}{K_a} V_e \quad (3.2)$$

Los valores de las resistencias son $R_1 = 100k\Omega$ y $R_2 = 1k\Omega + R_v$, donde R_v es la resistencia variable. Entonces, al sustituir (3.2) en la ecuación (3.1) y despejando R_2 , se obtiene:

$$R_2 = \frac{R_1}{K_a - 1} \quad (3.3)$$

Sustituyendo los valores correspondientes a las resistencias y la ganancia K_a , produce:

$$1k\Omega + R_v = \frac{100k\Omega}{10 - 1} \quad (3.4)$$

$$R_v = 10.11k\Omega$$

La salida de los servomotores con codificadores ópticos está dada en pulsos mientras que la posición del *SARC* se mide en voltios usando al potenciómetro que mide su posición como divisor de voltaje, por lo que para tener una evaluación del desempeño de los servomotores se realizaron las conversiones correspondientes. En la Tabla 3.3 se muestran las relaciones pulsos \rightarrow grados y voltios \rightarrow grados correspondientes a cada uno de los servomotores utilizados en los experimentos.

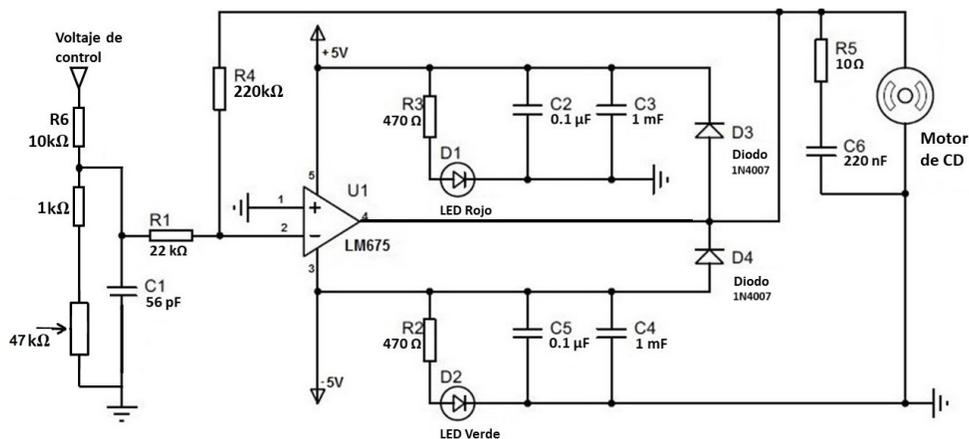


Figura 3.6: Diagrama eléctrico del amplificador de potencia para alimentar a los servomotores de CD [1].

Servomotor (marca)	Tensión de alimentación	Rango de entrada al amplificador de potencia	Componentes de la fuente de alimentación
<i>Make Block</i>	± 8 V	± 7.8 V	Trasformador de 28 V-CA 1 A. Reguladores de voltaje LM7808 y LM7908 Ω
<i>LEGO</i>	± 9 V	± 8.8 V	Trasformador de 24 V-CA 1 A. Reguladores de voltaje LM7809 y LM7909 Ω
<i>SARC</i>	± 5 V	± 4.8 V	Trasformador de 12 V-CA 500 mA. Reguladores de voltaje LM7805 y LM7905 Ω

Tabla 3.2: Voltajes de alimentación para el circuito de amplificación de potencia basado en el circuito integrado LM675.

Servomotor	Tipo de sensor	Rotación (pulsos)	Grados	Voltios
<i>MakeBlock</i>	Codificador óptico	360 ppr	360°	–
<i>LEGO</i>	Codificador óptico	180 ppr	360°	–
<i>SARC</i>	Potenciometro	–	180°	3 V

Tabla 3.3: Tabla de relaciones pulsos-grados, grados-voltios correspondiente a los servomotores de CD.

3.3. Algoritmos de control implementados en los servomotores de CD

En esta sección se presenta el diseño de un controlador PID sintonizado mediante técnicas basadas en el Regulador Cuadrático Lineal y un algoritmo de Control Adaptable por Modelo de Referencia.

3.3.1. Controlador PID sintonizado mediante técnicas basadas en el Regulador Cuadrático Lineal

El controlador Proporcional Integral Derivativo (PID) es uno de los más utilizados en la actualidad, tanto en los procesos industriales como en la enseñanza de la teoría de control. Para la sintonización de sus ganancias se han desarrollado diferentes métodos de sintonización [32], dentro de los cuales se encuentran las técnicas de sintonización basadas en el Regulador Cuadrático Lineal (RLC), la cual es comúnmente conocida como LQR (Linear Quadratic Regulator).

Algoritmo de control PID

La expresión matemática que define al algoritmo de control PID está dada por [73]:

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\tau) d\tau + k_d \frac{de(t)}{dt} \quad (3.5)$$

donde k_i es la ganancia integral, k_d es la ganancia derivativa y k_p representa la ganancia proporcional al error definido por:

$$e = r_c - y$$

$$\dot{e} = -\dot{y}$$

$$\ddot{e} = -\ddot{y}$$

con y como la salida y r_c una señal de referencia constante. En el caso de los servomotores y corresponde a la posición angular.

Para evitar problemas debidos a la acción derivativa cuando se produce un cambio brusco de la señal de referencia r_c , se propone el empleo de la siguiente ley de control Proporcional Integral con Realimentación Taquimétrica:

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\tau) d\tau - k_d \dot{y}_{ef} \quad (3.6)$$

En la implementación de este controlador, el término \dot{y}_{ef} es un estimado de la velocidad \dot{y} y es obtenido mediante el filtrado de la posición angular y utilizando la ecuación (3.7) compuesta por un filtro pasa altas en cascada con un filtro pasa bajas [74].

$$y \rightarrow \left[\frac{f_{01}s}{s + f_{01}} \right] \left[\frac{f_{02}}{s + f_{02}} \right] \rightarrow \dot{y}_{ef} \quad (3.7)$$

con f_{01} y f_{02} constantes reales positivas. A continuación, se describen de manera resumida los efectos de cada uno de los términos que componen la ecuación (3.6).

Acción Proporcional: Esta acción se define por:

$$u_p(t) = k_p e(t) \quad (3.8)$$

El objetivo de esta acción es incrementar la señal de control cuando el error e en estado estacionario es grande, lo anterior provoca que el transitorio sea más rápido. Sin embargo, el principal inconveniente de utilizar un controlador proporcional puro es que para valores elevados de k_p pueden producir oscilaciones.

Acción Integral: Esta es proporcional a la integral del error e y permite la eliminación del error en estado estacionario cuando existen perturbaciones constantes en la planta a controlar. Esta acción de control se describe como:

$$u_i(t) = k_i \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (3.9)$$

Un valor elevado de la ganancia integral puede generar una respuesta oscilatoria.

Acción Derivativa: En el caso de los servomotores, el objetivo de la acción derivativa es mejorar la estabilidad en lazo cerrado. En este caso la acción derivativa se expresa como:

$$u_d(t) = -k_d \frac{dy(t)}{dt} = -k_d \dot{y}_{ef} \quad (3.10)$$

La acción derivativa inyecta amortiguamiento.

Al combinar las tres acciones de control descritas anteriormente y con una sintonización adecuada se obtiene un controlador que no tiene error en estado estacionario y disminuye la tendencia a que se produzcan oscilaciones [75].

Ahora bien la sintonización de las ganancias del controlador PID puede realizarse a partir de diferentes técnicas encontradas en la literatura, en este trabajo de tesis fueron obtenidas mediante la teoría del Regulador Cuadrático Lineal. Para la implementación de dicha técnica es necesario utilizar el modelo matemático del servomotor presentado en el Apéndice A ecuación

(A.18) en su representación en variables de estados a partir de la dinámica del error e :

$$\ddot{e} = -a\dot{e} - bu \quad (3.11)$$

lo cual produce:

$$\begin{aligned} x_1 &= e & \dot{x}_1 &= -\dot{y} = x_3 \\ x_2 &= \int_0^t e(\tau) d\tau & \dot{x}_2 &= e = x_1 \\ x_3 &= \dot{e} = -\dot{y} & \dot{x}_3 &= -ax_3 - bu \end{aligned} \quad (3.12)$$

el cual tiene la siguiente escritura alternativa:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -b \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0], \quad y \quad x = \begin{bmatrix} e \\ \int_0^t e(\tau) d\tau \\ -\dot{y}_{ef} \end{bmatrix}$$

Sintonización del controlador PID

La teoría del RCL permite calcular las ganancias de realimentación de estado minimizando el criterio de desempeño [34]:

$$J = \int_0^\infty (x^\top Qx + u^\top Ru) \quad (3.14)$$

en donde $Q \geq 0$ y $R > 0$ son matrices de ponderación. Las matrices Q y R ponderan respectivamente la dinámica del estado x y el gasto de la energía asociado a la señal de control u . La ley de control de realimentación que minimiza el valor de la función de costo está dada por:

$$u = -Kx \quad (3.15)$$

en donde K de acuerdo a la ley de control (3.6) corresponde a:

$$K = \begin{bmatrix} k_p \\ k_i \\ k_d \end{bmatrix}$$

La minimización del criterio de desempeño J corresponde a la solución $S = S^T > 0$ de la ecuación de Ricatti:

$$A^T S + SA - SBR^{-1}B^T S + Q = 0 \quad (3.16)$$

la cual permite calcular la ganancia de realimentación de estado K a partir de la siguiente ecuación:

$$K = R^{-1}B^T S \quad (3.17)$$

Cabe mencionar que el programa Matlab [76] dispone de un comando para obtener la ganancia K , es decir:

$$[K, S, E] = lqr(A, B, Q, R) \quad (3.18)$$

en donde S representa la solución de la ecuación de Ricatti (3.16) y E es un vector cuyas entradas corresponden a los polos del sistema en lazo cerrado.

Para el caso de un servomotor el cual es un sistema una entrada-una salida, se cumple que $Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y $R \in \mathbb{R}$. De lo anterior se define a la matriz Q como:

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & q_{33} \end{bmatrix}$$

3.3.2. Control Adaptable por Modelo de Referencia

El algoritmo de Control Adaptable Directo por Modelo de Referencia (CADMR) tiene dos lazos, el primer lazo se refiere a la ley de control la cual se obtiene de la definición del error $e = y_m - y$, donde y_m corresponden a la salida del modelo de referencia y y la salida de la planta a controlar. El segundo lazo corresponde a la ley de adaptación, es decir, a la estimación de parámetros en línea, la cual se define mediante la teoría de estabilidad de Lyapunov. Cabe señalar que en esta ley de control adaptable los parámetros del controlador se ajustan directamente [77].

De acuerdo con el modelo matemático del servosistema expuesto en el Apéndice A ecuación (A.18) y considerando que el sistema es sometido a perturbaciones se tiene:

$$\ddot{y} = -a\dot{y} + bu + d \quad (3.19)$$

donde $|d| \leq D$ representa la perturbación en el sistema, a y b constantes positivas. Se define el modelo de referencia dado por la ecuación diferencial siguiente:

$$\ddot{y}_m = -\alpha_{m2}\dot{y}_m - \alpha_{m1}y_m + \alpha_m r_a \quad (3.20)$$

donde α_{m1} , α_{m2} y α_m son constantes reales positivas y r_a una señal de referencia acotada.

Se espera que el sistema en lazo cerrado tenga un comportamiento estable y la ley de control se diseña a partir de la dinámica del error e de seguimiento de modelo:

$$e = y_m - y \quad (3.21)$$

$$\dot{e} = \dot{y}_m - \dot{y} \quad (3.22)$$

$$\ddot{e} = \ddot{y}_m - \ddot{y} \quad (3.23)$$

Sustituyendo en (3.23) las ecuaciones (3.19) y (3.20) e igualando a una dinámica estable deseada del error se tiene:

$$\ddot{e} = -\alpha_{m2}\dot{y}_m - \alpha_{m1}y_m + \alpha_m r_a + a\dot{y} - bu - d \quad (3.24)$$

$$-\varsigma_1 e - \varsigma_2 \dot{e} = -\alpha_{m2}\dot{y}_m - \alpha_{m1}y_m + \alpha_m r_m + a\dot{y} - bu - d \quad (3.25)$$

donde $\varsigma_1, \varsigma_2 > 0$.

De (3.25), se produce la siguiente ley de control u :

$$u = \frac{1}{b}[-\alpha_{m2}\dot{y}_m - \alpha_{m1}y_m + \alpha_m r_a + a\dot{y} + \varsigma_1 e + \varsigma_2 \dot{e}] \quad (3.26)$$

Supóngase que los parámetros a y b son conocidos y considérese la siguiente parametrización de la ley de control (3.26):

$$u = \theta_1 \dot{y} + \theta_2 z \quad (3.27)$$

donde

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{a}{b} \\ \theta_2 &= \frac{1}{b} \end{aligned} \quad (3.28)$$

y $z = -\alpha_{m2}\dot{y}_m - \alpha_{m1}y_m + \alpha_m r_m + \varsigma_1 e + \varsigma_2 \dot{e}$.

Sin embargo, cuando a y b son desconocidos no es posible calcular la ley de control (3.27). Supóngase ahora que esta ley de control se calcula mediante parámetros estimados $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ de θ_1 y θ_2 respectivamente, i.e.:

$$u = \hat{\theta}_1 \dot{y} + \hat{\theta}_2 z \quad (3.29)$$

Defínanse los errores paramétricos:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_1 &= \hat{\theta}_1 - \theta_1 \\ \tilde{\theta}_2 &= \hat{\theta}_2 - \theta_2 \end{aligned} \quad (3.30)$$

de donde se obtiene:

$$\hat{\theta}_1 = \tilde{\theta}_1 + \theta_1 \quad (3.31)$$

$$\hat{\theta}_2 = \tilde{\theta}_2 + \theta_2 \quad (3.32)$$

o en forma vectorial:

$$\hat{\theta} = \tilde{\theta} + \theta \quad (3.33)$$

Sustituyendo (3.31) y (3.32) en (3.29) conlleva a:

$$u = \hat{\theta}_1 \dot{y} + \hat{\theta}_2 z = (\tilde{\theta}_1 + \theta_1) \dot{y} + (\tilde{\theta}_2 + \theta_2) z \quad (3.34)$$

Considérese de nuevo la dinámica del error de seguimiento del modelo (3.24). Sustituyendo la ley de control (3.34) en (3.24) y utilizando la definición de θ_1 y θ_2 presentadas en (3.28), permite obtener:

$$\ddot{e} = -\alpha_{m2} \dot{y}_m - \alpha_{m1} y_m + \alpha_m r_a + a \dot{y} - b[(\tilde{\theta}_1 + \theta_1) \dot{y} + (\tilde{\theta}_2 + \theta_2) z] - d$$

$$\ddot{e} = -\alpha_{m2} \dot{y}_m - \alpha_{m1} y_m + \alpha_m r_a + a \dot{y} - b[\theta_1 \dot{y} + \theta_2 z] - b[\tilde{\theta}_1 \dot{y} + \tilde{\theta}_2 z] - d$$

$$\ddot{e} = -\alpha_{m2} \dot{y}_m - \alpha_{m1} y_m + \alpha_m r_a + a \dot{y} - a \dot{y} - z - b[\tilde{\theta}_1 \dot{y} + \tilde{\theta}_2 z] - d$$

$$\ddot{e} = -\alpha_{m2} \dot{y}_m - \alpha_{m1} y_m + \alpha_m r_a - [-\alpha_{m2} \dot{y}_m - \alpha_{m1} y_m + \alpha_m r_a + \varsigma_1 e + \varsigma_2 \dot{e}] - b[\tilde{\theta}_1 \dot{y} + \tilde{\theta}_2 z] - d$$

Entonces:

$$\ddot{e} = -\varsigma_1 e - \varsigma_2 \dot{e} - b[\tilde{\theta}_1 \dot{y} + \tilde{\theta}_2 z] - d = -\varsigma_1 e - \varsigma_2 \dot{e} - b\tilde{\theta}^\top \phi - d \quad (3.35)$$

donde $\tilde{\theta} = [\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2]^\top$ y $\phi = [\dot{y}, z]^\top$.

Lo anterior permite reescribir la dinámica del error (3.35) en el formalismo de variables de estados:

$$E = \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} \rightarrow \dot{E} = AE - b\tilde{\theta}^\top \phi \bar{V} - \bar{d} \quad (3.36)$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\varsigma_1 & -\varsigma_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{V} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix}$$

con A una matriz Hurwitz estable. Notar que $|\bar{d}| \leq D$.

Análisis de estabilidad

El análisis de estabilidad del sistema (3.19) en lazo cerrado con la ley de control (3.34) permite la obtención de la ley de adaptación para generar los estimados $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$.

Considérese la siguiente función candidata de Lyapunov definida positiva:

$$V = E^\top P E + |b| \tilde{\theta}^\top \Gamma^{-1} \tilde{\theta}, \Gamma > 0 \quad (3.37)$$

Derivando respecto al tiempo se obtiene:

$$\dot{V} = \dot{E}^\top P E + E^\top P \dot{E} + |b| \dot{\tilde{\theta}}^\top \Gamma^{-1} \tilde{\theta} + |b| \tilde{\theta}^\top \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} \quad (3.38)$$

Sustituyendo (3.36) en (3.38) y empleando (2.25) del Teorema 4 produce:

$$\dot{V} = \underbrace{-E^\top Q E - 2\bar{d}^\top P E}_{T_I} - \underbrace{2|b| \tilde{\theta}^\top (\text{sign}(b) \phi \bar{V}^\top P E - \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}})}_{T_{II}} \quad (3.39)$$

donde $b = |b| \text{sign}(b)$. Se iguala el término T_{II} a cero para obtener:

$$\begin{aligned} 2|b| \tilde{\theta}^\top (\text{sign}(b) \phi \bar{V}^\top P E - \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}}) &= 0 \\ \text{sign}(b) \phi \bar{V}^\top P E - \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} &= 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

Despejando la derivada del error paramétrico $\tilde{\theta}$ se consigue:

$$\dot{\tilde{\theta}} = \hat{\tilde{\theta}} = \text{sign}(b) \Gamma \phi \bar{V}^\top P E \quad (3.41)$$

Sustituyendo (3.41) en (3.39):

$$\dot{V} = -E^\top Q E - 2\bar{d}^\top P E \quad (3.42)$$

Sin embargo, el empleo de esta actualización de parámetros estimados obtenida del análisis de estabilidad puede producir deriva paramétrica. Por esta razón, se agrega un término el cual en la literatura se denomina modificación $-e$ el cual evita este problema [26, 18]:

$$\hat{\tilde{\theta}} = \text{sign}(b) \Gamma \phi \bar{V}^\top P E - \varepsilon \Gamma \|E\| \hat{\tilde{\theta}} \quad (3.43)$$

con $\varepsilon > 0$. Entonces, sustituyendo (3.43) en (3.39), se tiene:

$$\dot{V} = -E^\top Q E - 2\bar{d}^\top P E - 2|b| \varepsilon \|E\| \tilde{\theta}^\top \hat{\tilde{\theta}} \quad (3.44)$$

Se realiza el análisis de las soluciones del sistema en lazo cerrado (3.36) y la ley de adaptación (3.43) aplicando el Teorema 5 en la función de Lyapunov propuesta (3.37) y su respectiva derivada (3.44). Lo anterior se lleva a cabo mediante los pasos siguientes:

1. La función de Lyapunov propuesta (3.37) es acotada por dos funciones de clase \mathcal{K} , esto se observa a partir de lo siguiente:

- Definiendo el estado del sistema en lazo cerrado (3.36) como:

$$x = \begin{bmatrix} E \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

en donde, a partir de las propiedades de normas y mayorizando se tiene:

$$\begin{aligned} E^\top E &= \|E\|^2 \leq \|x\|^2 \\ \tilde{\theta}^\top \tilde{\theta} &= \|\tilde{\theta}\|^2 \leq \|x\|^2 \end{aligned} \quad (3.46)$$

Por lo tanto:

$$\beta_1 \|x\|^2 \leq V(t) \leq \beta_2 \|x\|^2 \quad (3.47)$$

Se puede apreciar que $\beta_1 \|x\|^2$ y $\beta_2 \|x\|^2$ son dos funciones de clase \mathcal{K} donde:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \lambda_{\min}(P) + |b| \lambda_{\min}(\Gamma^{-1}) \\ \beta_2 &= \lambda_{\max}(P) + |b| \lambda_{\max}(\Gamma^{-1}) \end{aligned}$$

2. Para obtener la desigualdad (2.30) se utilizan el Teorema de Rayleigh-Ritz (Teorema 2) y la desigualdad (2.7):

$$\begin{aligned} -E^\top Q E &\leq -\lambda_{\min}(Q) \|E\|^2 \\ -2\bar{d}^\top P E &\leq 2D \lambda_{\max}(P) \|E\| \end{aligned}$$

En el caso del término $-2|b|\varepsilon \|E\| \tilde{\theta}^\top \hat{\theta}$ se emplea la ecuación (3.33) para obtener:

$$-2|b|\varepsilon \|E\| \tilde{\theta}^\top \hat{\theta} = -2|b|\varepsilon \|E\| (\tilde{\theta}^\top \tilde{\theta} + \tilde{\theta}^\top \theta)$$

Además, si se supone que existe una cota superior de los parámetros θ , es decir $\|\theta\| < \kappa_\theta$, entonces $\tilde{\theta}^\top \theta \leq \kappa_\theta \|\tilde{\theta}\|$.

Empleando los resultados anteriores para mayorizar $-2|b|\varepsilon\|E\|\tilde{\theta}^\top\hat{\theta}$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
-2|b|\varepsilon\|E\|\tilde{\theta}^\top\hat{\theta} &\leq -2|b|\varepsilon\|E\|\|\tilde{\theta}\|^2 + 2|b|\varepsilon\kappa_\theta\|E\|\|\tilde{\theta}\| \\
&\leq -2|b|\varepsilon\|E\| \left(\|\tilde{\theta}\|^2 - \kappa_\theta\|\tilde{\theta}\| \right) \\
&\leq -2|b|\varepsilon\|E\| \left(\|\tilde{\theta}\|^2 - \kappa_\theta\|\tilde{\theta}\| \pm \frac{1}{4}\kappa_\theta^2 \right) \\
&\leq -2|b|\varepsilon\|E\| \left(\|\tilde{\theta}\| - \frac{1}{2}\kappa_\theta \right)^2 + \frac{1}{2}|b|\varepsilon\|E\|\kappa_\theta^2
\end{aligned}$$

Lo anterior permite la mayoración de \dot{V} :

$$\dot{V}(t) \leq -\lambda_{\min}(Q)\|E\|^2 + 2D\lambda_{\max}(P)\|E\| - 2|b|\varepsilon\|E\| \left(\|\tilde{\theta}\| - \frac{1}{2}\kappa_\theta \right)^2 + \frac{1}{2}|b|\varepsilon\|E\|\kappa_\theta^2 \quad (3.48)$$

Defínase:

$$\begin{aligned}
W_3(x) &= \lambda_{\min}(Q)\|E\| \left(\|E\| - \frac{\lambda}{\lambda_{\min}(Q)} \right) + 2|b|\varepsilon\|E\| \left(\|\tilde{\theta}\| - \frac{1}{2}\kappa_\theta \right)^2 \\
\lambda &= 2D\lambda_{\max}(P) + \frac{1}{2}|b|\varepsilon\kappa_\theta^2
\end{aligned}$$

Entonces $\dot{V}(t) \leq -W_3(x)$. Por lo tanto, $\dot{V}(t) \leq 0$ si:

$$\|E\| - \frac{\lambda}{\lambda_{\min}(Q)} > 0 \implies \|E\| \geq \frac{\lambda}{\lambda_{\min}(Q)} \quad (3.49)$$

$W_3(x)$ es una función definida positiva si se cumple (3.49).

Lo anterior y el Teorema 5 permiten concluir el siguiente resultado:

Teorema 6 *Las trayectorias del sistema en lazo cerrado (3.36) conformado por la planta (3.19), la ley de control (3.34) y la ley de adaptación (3.43) son Uniforme Ultimamente Acotadas (UUA) si se cumple la condición (3.49).*

3.4. Resultados experimentales

En esta sección se presentan los resultados experimentales de la evaluación de los algoritmos de control PID y CADMR en cada uno de los servomotores de CD utilizados en el estudio comparativo.

3.4.1. Resultados experimentales con el Algoritmo de control PID

En la Tabla 3.4 se presentan las ganancias de realimentación del controlador PID obtenidas a partir de la metodología del Regulador Cuadrático Lineal. Las matrices de ponderación Q y R se escogieron en cada caso para lograr el error de posicionamiento más pequeño correspondiente a cada servomotor. Es importante mencionar que los parámetros del modelo matemático de los servomotores fueron obtenidos utilizando el algoritmo de Mínimos Cuadrados fuera de línea [78]. En la Tabla 3.5 se muestran los parámetros estimados de los modelos de los servomotores empleados en el estudio [79]. El filtro (3.50) utilizado para obtener estimaciones de la velocidad angular de los servomotores está dado por:

$$y \rightarrow \left[\frac{160s}{s+160} \right] \left[\frac{160}{s+160} \right] \rightarrow \dot{y}_f \quad (3.50)$$

Con respecto al servomotor de radio control (*SARC*), la señal de posición angular medida por el potenciómetro fue procesada por un filtro pasa bajas con una frecuencia de corte de 160 rad/s, lo anterior con el objetivo de atenuar el ruido de medición.

Como señal de referencia se utiliza una señal de onda cuadrada con una amplitud de 0.78 rad (45°) y una frecuencia de 0.15 Hz, procesada mediante un filtro pasa bajas de primer orden con frecuencia de corte de 10 rad/s.

En la Fig. 3.8 se muestran los resultados experimentales de la implementación del controlador PID (3.6) en el servomotor *Makeblock*, éstas corresponden a la salida en posición (Fig. 3.8a), la señal de control (Fig. 3.8b) y el error de posición (Fig. 3.8c). La Fig. 3.9 muestra las señales obtenidas de la implementación del algoritmo de control PID en el servomotor *LEGO*, las Fig. 3.9a, 3.9b y 3.9c muestran respectivamente la salida en posición, la señal de control y el error de posición del servomotor. Finalmente, en las Fig. 3.10a, 3.10b, 3.10c se muestran la salida en posición, la señal de control y el error de posición respectivamente correspondientes al *SARC*. Cabe resaltar que la señal de control presentada en las Fig. 3.8b, 3.9b y 3.10b corresponde a la señal de entrada al amplificador de potencia.

De acuerdo a los resultados experimentales se puede observar que las salidas en posición angular de los servomotores *Makeblock* y *LEGO* los cuales cuentan con codificadores ópticos, se aproximan más a la señal de referencia, a diferencia del servomotor *SARC* dotado por un potenciómetro. Lo anterior puede deberse al ruido de medición provocado por la lectura de medición del potenciómetro y a valores elevados de fricción no lineal en la caja de engranajes de este servomotor. El efecto de ruido de medición también puede observarse en la señal de control correspondiente al *SARC* (Fig. 3.10b). Cabe resaltar que en la Fig. 3.9b, la cual representa la señal de control del servomotor *LEGO*, se observan pequeñas variaciones, sin embargo, en este caso estas se deben a la naturaleza discreta de las mediciones producidas por un codificador

óptico.

En la Fig. 3.7 se muestra el diagrama de bloques utilizado para la implementación del algoritmo de control PID (3.6) aplicado a cada uno de los servomotores de CD.

Servomotor	Q	R	k_p	k_i	k_d
<i>MakeBlock</i>	diag(50,0.5,0.1)	1	7.2618	0.7071	0.36
<i>LEGO</i>	diag(160,1.5,0.5)	1	13.0706	1.2247	0.7224
<i>SARC</i>	diag(170,30,0.7)	30	2.6030	1	0.1343

Tabla 3.4: Ganancias del controlador PID (3.6) sintonizadas mediante la teoría del Regulador Cuadrático Lineal.

Servomotor	Ganancias del Controlador PD		Parámetros estimados	
	k_p	k_d	a	b
<i>MakeBlock</i>	1.75	0.074	19.25	12.28
<i>LEGO</i>	2	0.1	18.02	4.88
<i>SARC</i>	1.72	0.006	10.34	68.4

Tabla 3.5: Parámetros estimados correspondientes a los modelos de los servomotores de CD y ganancias del controlador PD utilizado para realizar la identificación.

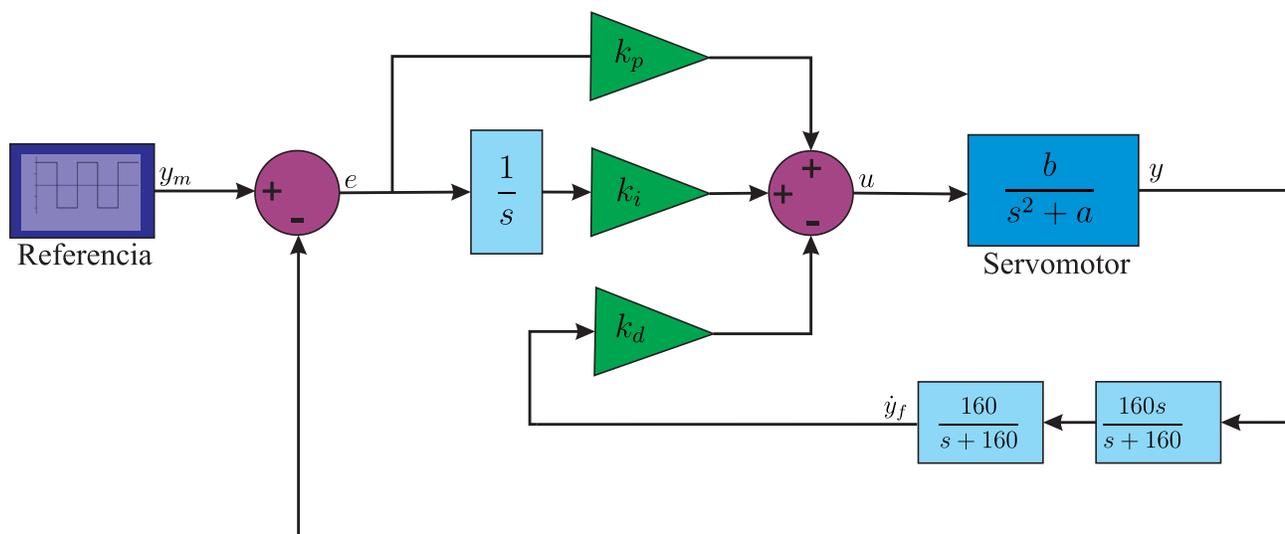
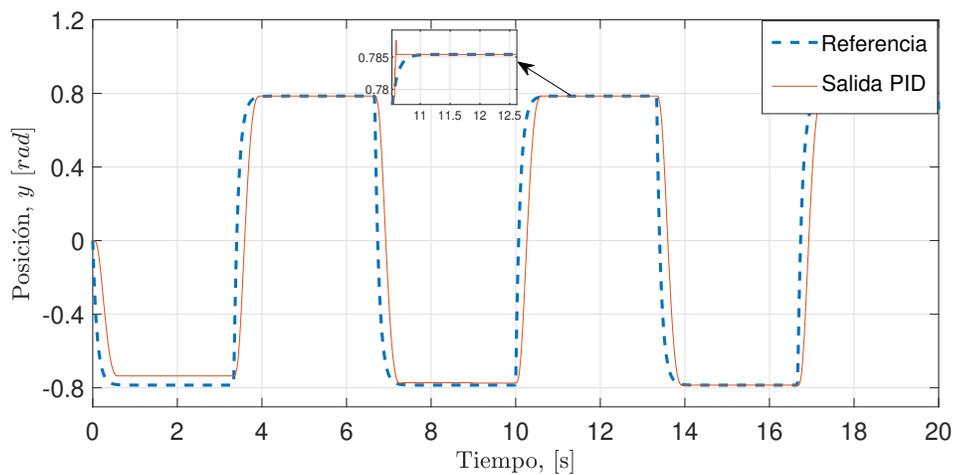
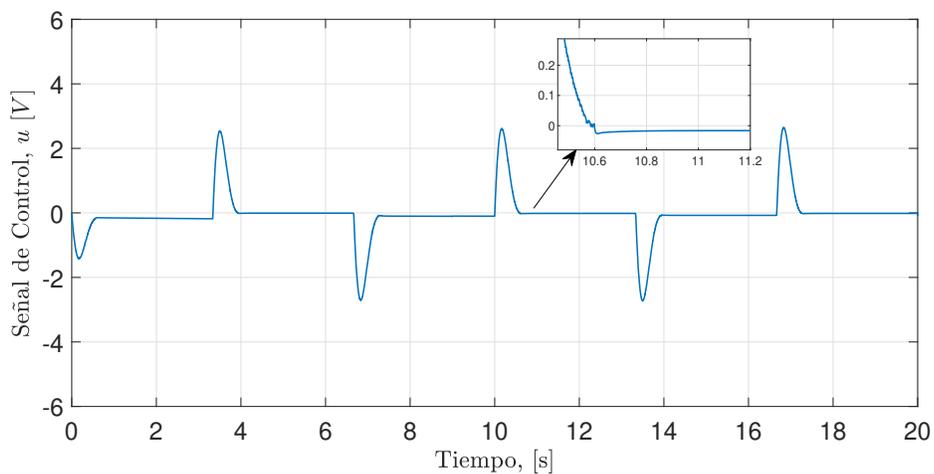


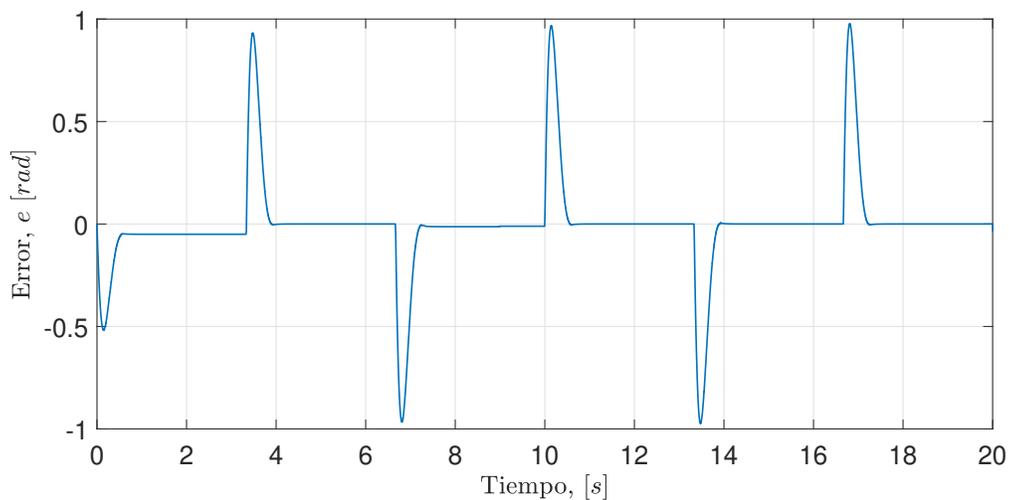
Figura 3.7: Diagrama esquemático de la implementación del algoritmo de control PID (3.6).



(a) Referencia r_c vs salida en posición y del servomotor.

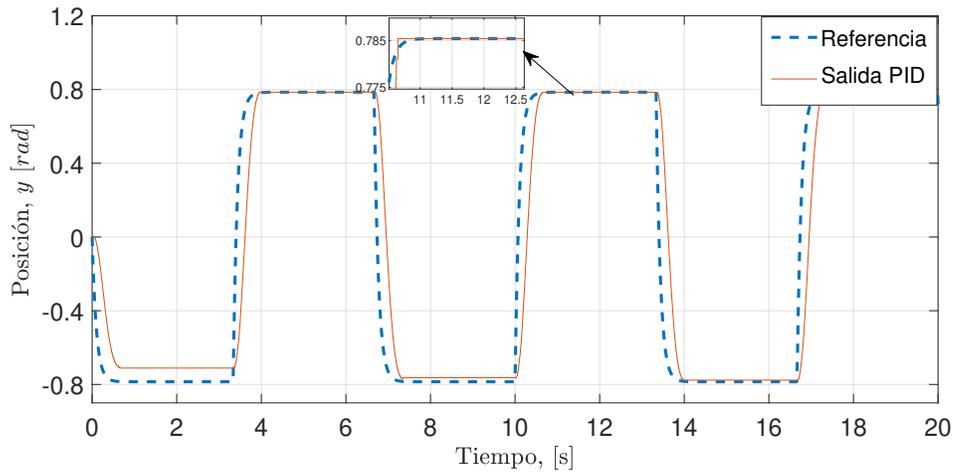


(b) Señal de control u .

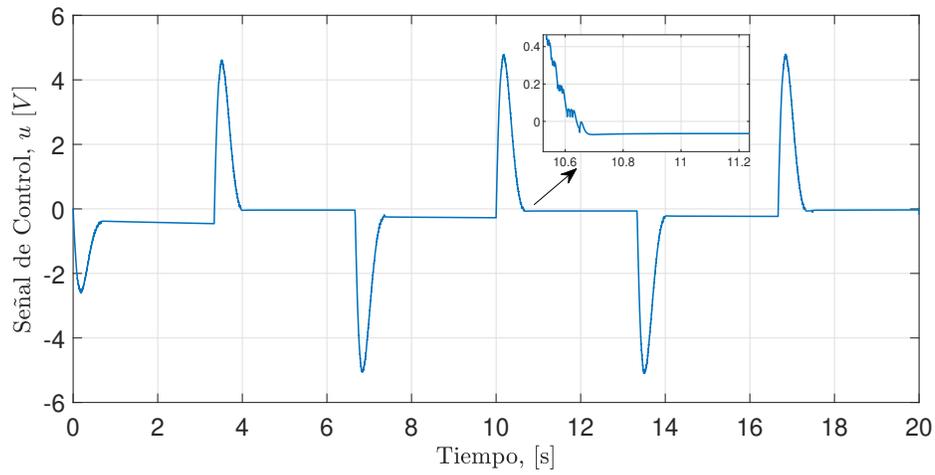


(c) Error en posición e .

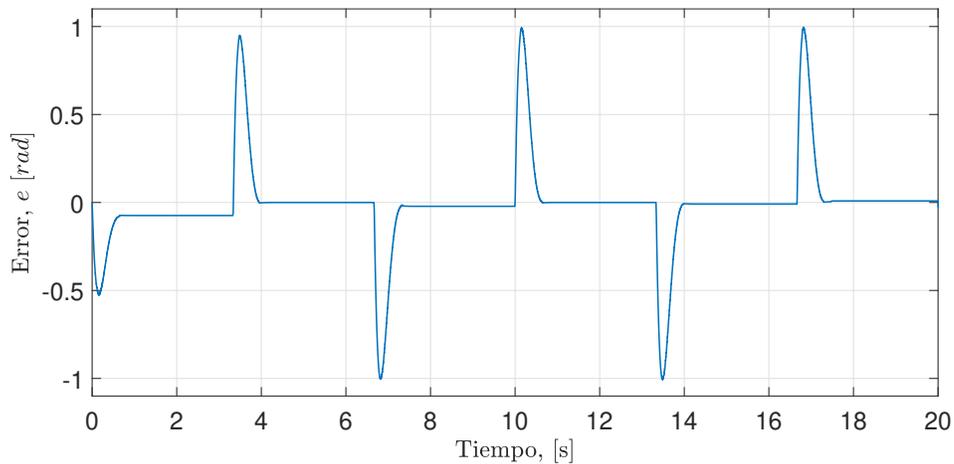
Figura 3.8: Evaluación del controlador PID (3.15) en el servomotor *MakeBlock*.



(a) Referencia r_c vs salida en posición y del servomotor.

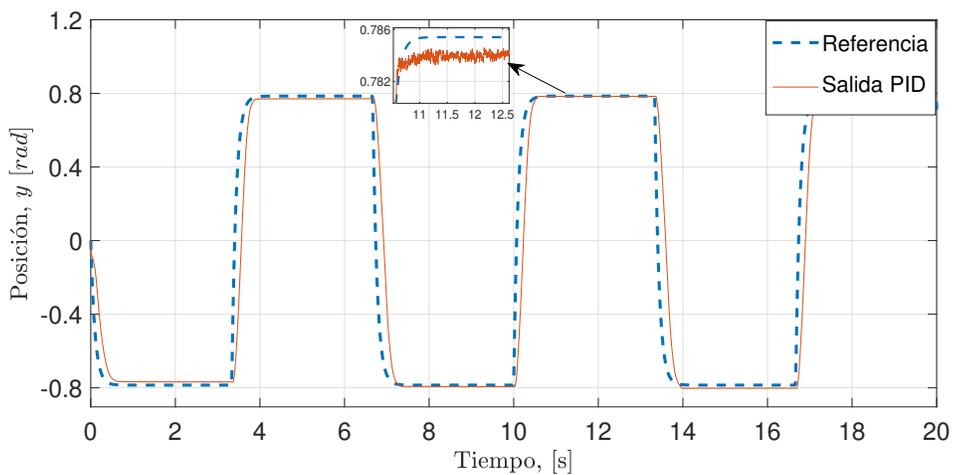


(b) Señal del control u .

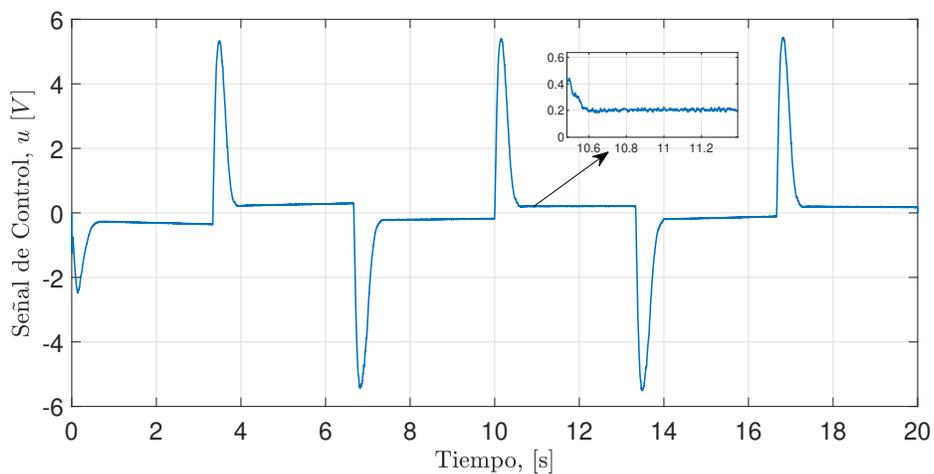


(c) Error en posición e .

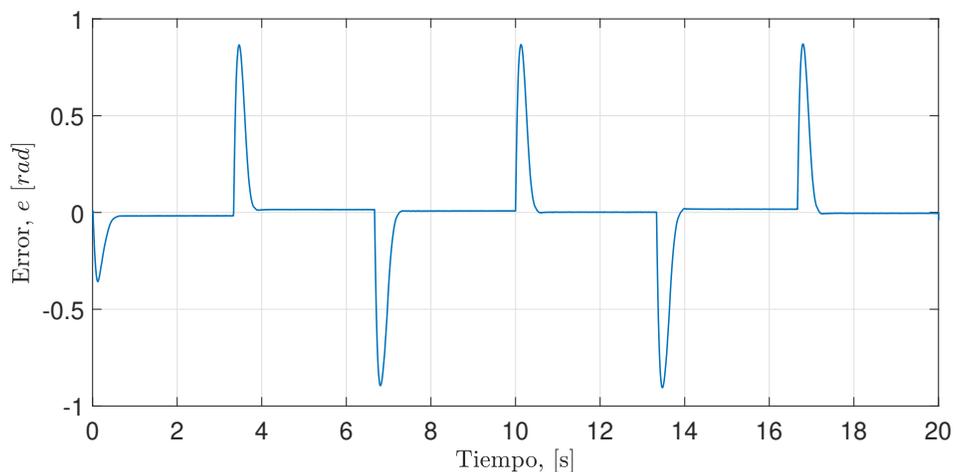
Figura 3.9: Evaluación del controlador PID (3.15) en el servomotor *LEGO*.



(a) Referencia r_c vs salida en posición y del Servomotor.



(b) Señal del control u .



(c) Error en posición e .

Figura 3.10: Evaluación del controlador PID (3.15) del *SARC*.

3.4.2. Resultados experimentales del Control Adaptable por Modelo de Referencia

El CADMR, el cual está compuesto por la ley de control (3.34) y la ley de adaptación (3.43), se implementó de la manera siguiente. La solución única de P de la ecuación de Lyapunov (2.25) fue obtenida utilizando el comando *lyap* en el editor del *software* MATLAB.

Se define:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \text{lyap}(A', Q)$$

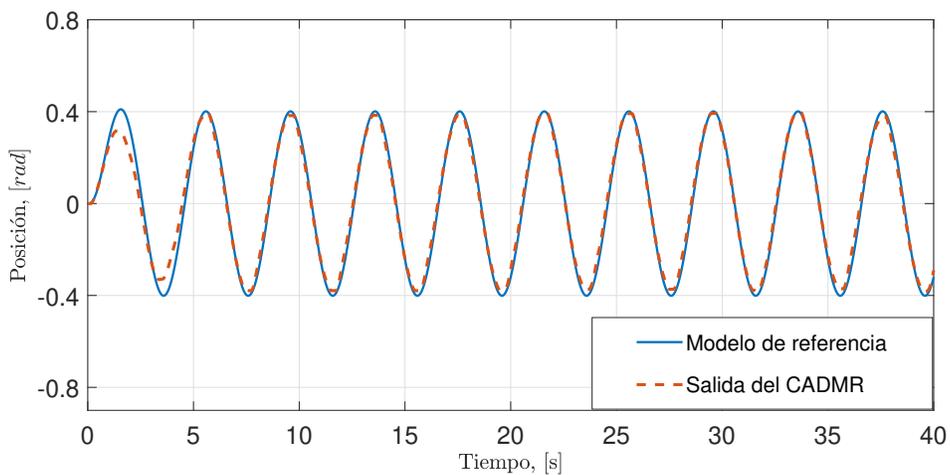
El modelo de referencia descrito en (3.20) está dado por:

$$\ddot{y}_m = -6.3246\dot{y}_m - 10y_m + 10r_a \quad (3.51)$$

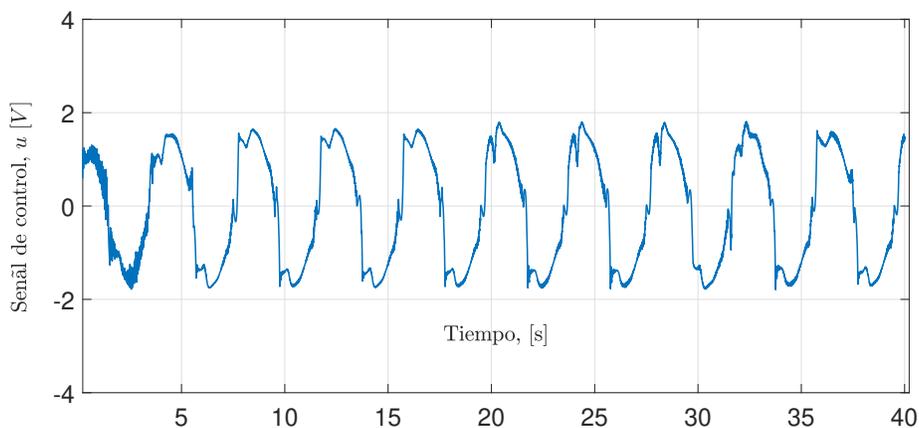
En la tabla 3.6 se presentan las variables utilizadas en el algoritmo de control adaptable correspondientes a cada uno de los servomotores estudiados. En las Fig. 3.11a, 3.11b, 3.11c se muestra la señal de salida en posición la señal de control y la señal del error en seguimiento de modelo correspondientes al servomotor *Make Block*. Las Fig. 3.12a, 3.12b, 3.12c presentan los resultados correspondientes al servomotor *LEGO*. Los resultados del *SARC* se encuentran en las Fig. 3.13a, 3.13b y 3.13c. En las Fig. 3.14a, 3.14b y 3.14c se muestran las gráficas de los estimados de $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ obtenidos de la ley de adaptación para cada una de las implementaciones.

Servomotor	Γ_1	Γ_2	α_{m1}	α_{m2}	p_{11}	p_{12}	p_{22}	ε
<i>MakeBlock</i>	250	250	2	5	0.45	0.1	0.05	0.1
<i>LEGO</i>	700	150	9	6	0.8	0.08	0.009	0.5
<i>SARC</i>	190	1.5	45	10	2.26	0.05	0.0011	0.05

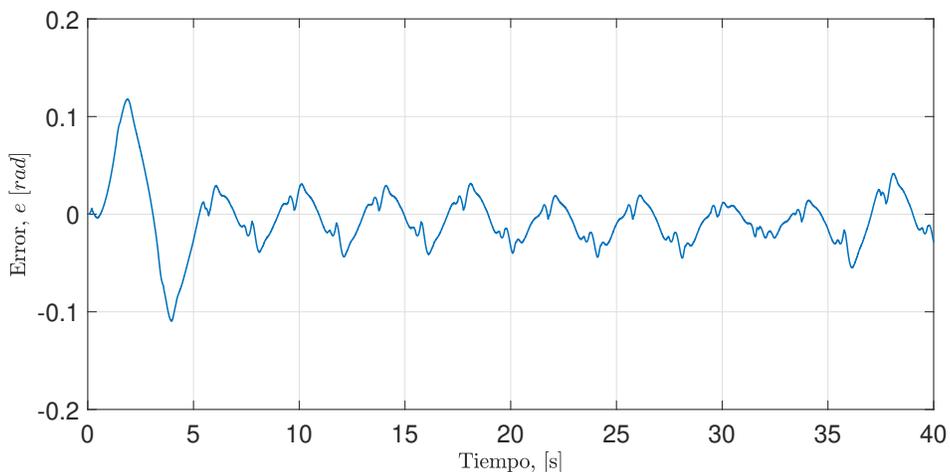
Tabla 3.6: Variables utilizadas en el algoritmo de control adaptable.



(a) Señal de referencia y_m vs salida y .

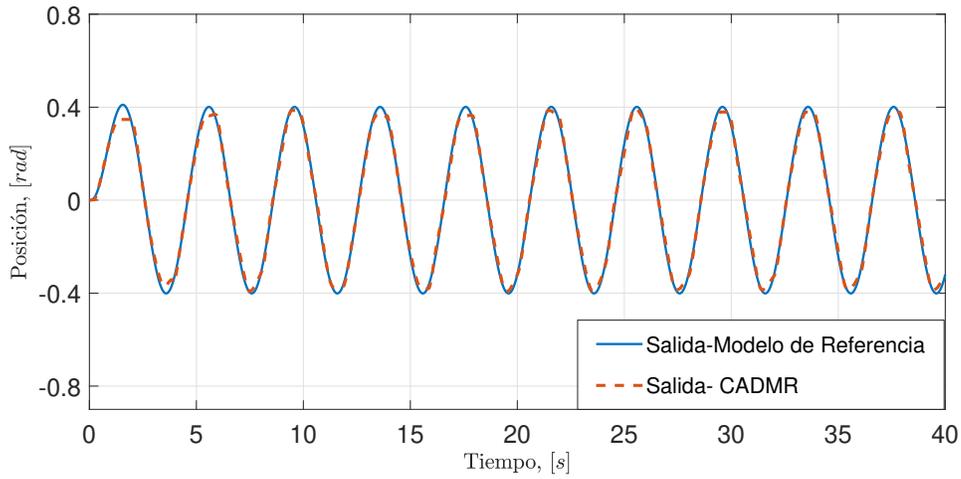


(b) Señal de control del CADMR (3.34).

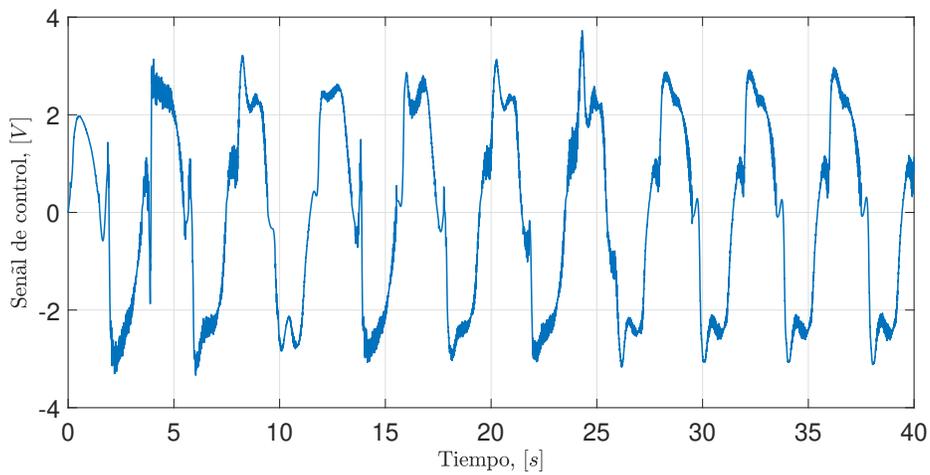


(c) Error de seguimiento de modelo e .

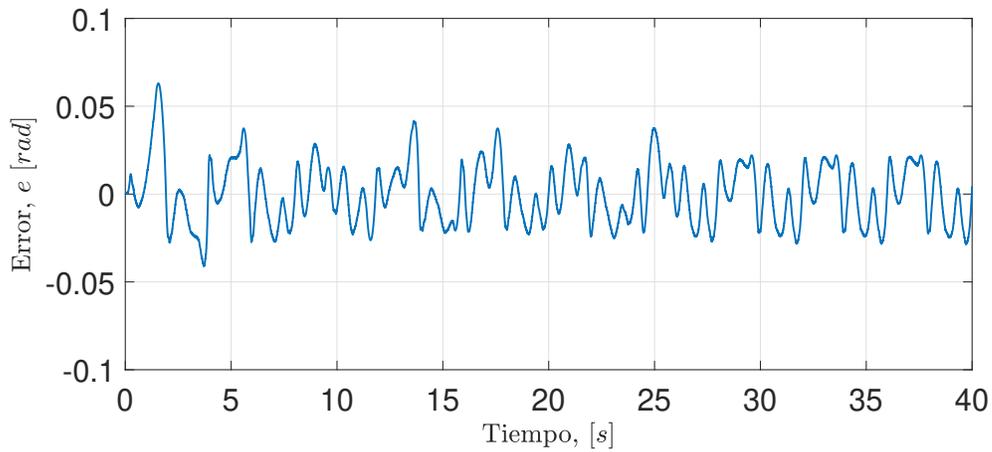
Figura 3.11: Evaluación del CADMR en el servomotor *MakeBlock*.



(a) Señal de referencia y_m vs salida y .

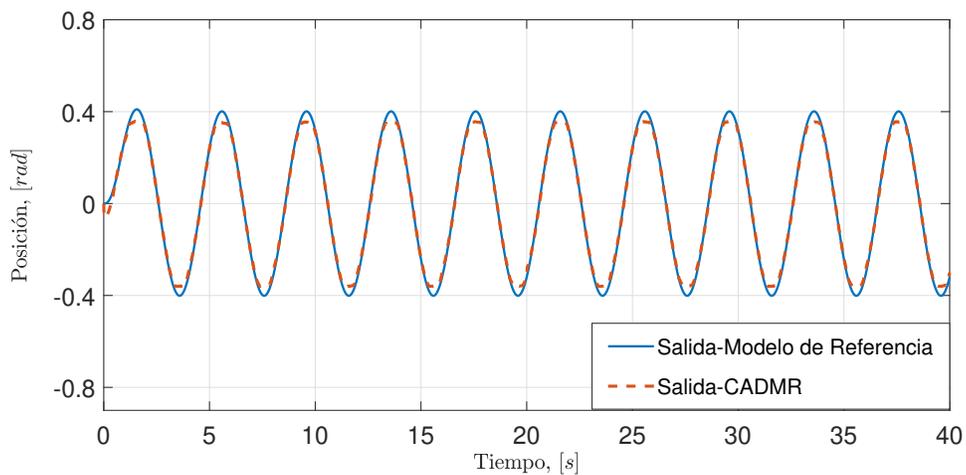


(b) Señal de control del CADMR (3.34).

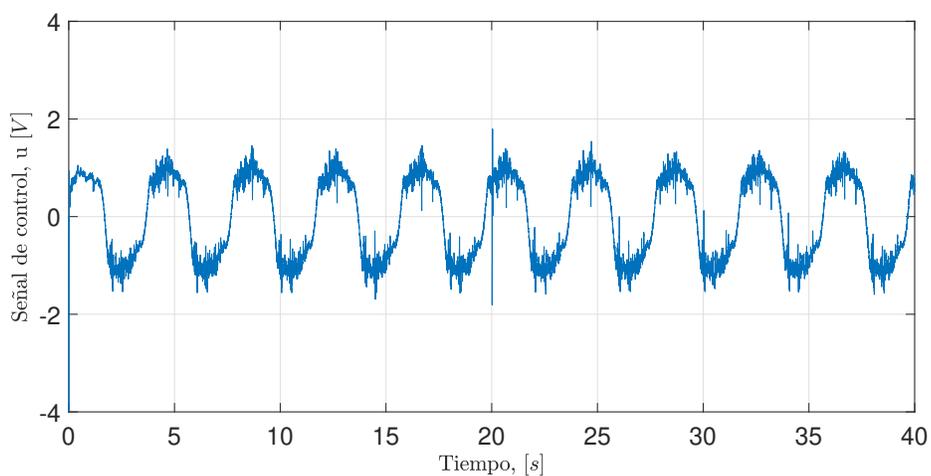


(c) Error de seguimiento de modelo e .

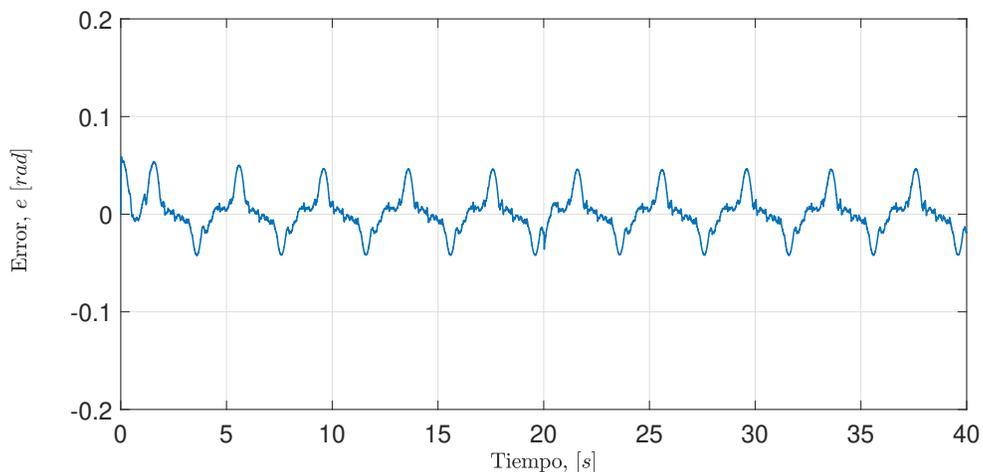
Figura 3.12: Evaluación del CADMR en el servomotor *LEGO*.



(a) Señal de referencia y_m vs salida y .



(b) Señal de control del CADMR (3.34).



(c) Error de seguimiento de modelo e .

Figura 3.13: Evaluación del CADMR en el *SARC*.

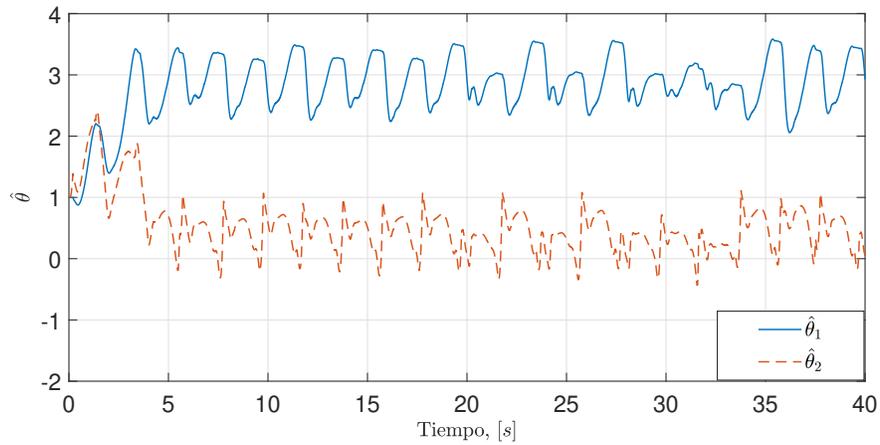
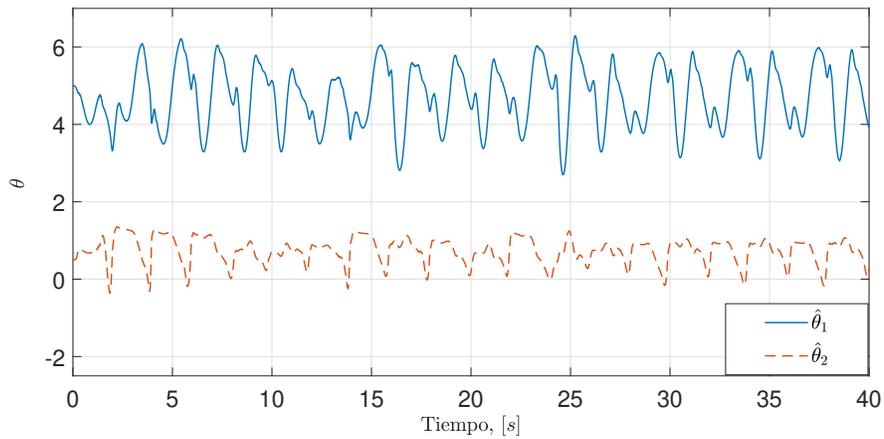
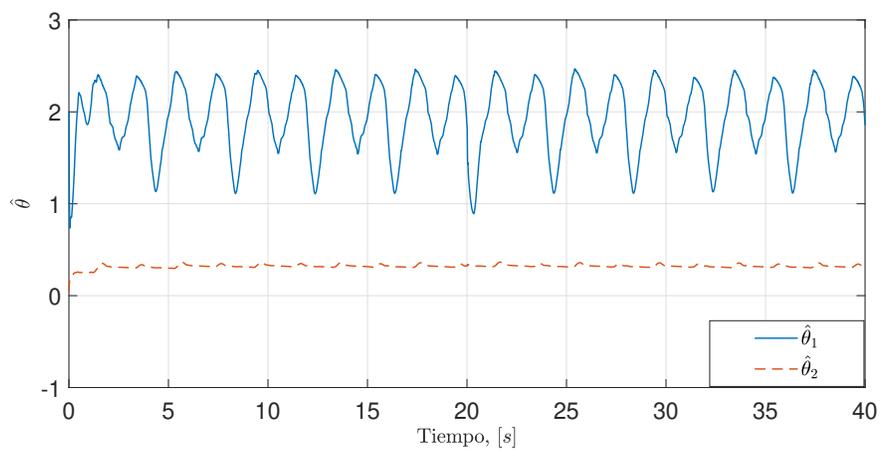
(a) Parámetros estimados $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ del servomotor *MakeBlock*.(b) Parámetros estimados $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ del servomotor *LEGO*.(c) Parámetros estimados $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ del *SARC*.

Figura 3.14: Parámetros estimados $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ obtenidos de algoritmo CADMR correspondientes a cada uno de los servomotores.

3.5. Análisis de los resultados experimentales

Para medir el desempeño del controlador PID (3.6) y el controlador Adaptable Directo por Modelo de Referencia aplicados a los servomotores de CD se utilizaron los criterios de desempeño siguientes: La Integral del Error Cuadrático (IEC), la Integral del Valor Absoluto del Control (IAC) y la Integral de la Derivada del Valor Absoluto del Control (IDAC). Estos índices están expresados matemáticamente como sigue:

$$IEC = \int_{T_1}^{T_2} \bar{k}[e(t)]^2 dt \quad (3.52)$$

$$IAC = \int_{T_1}^{T_2} |u(t)| dt \quad (3.53)$$

$$IDAC = \int_{T_1}^{T_2} \left| \frac{du(t)}{dt} \right| dt \quad (3.54)$$

en donde \bar{k} representa un factor de escalamiento y $\{T_1, T_2\}$ definen un intervalo de tiempo durante el cual se calculan los índices de desempeño. Para el estudio comparativo se utiliza un valor de $\bar{k} = 100$ con intervalos de tiempo $T_2 - T_1 = 15s - 10s = 5s$.

En la Tabla 3.7 se muestran el desempeño de los controladores PID (3.6) y CADMR (3.34) correspondientes a cada uno de los servomotores de CD empleados en el estudio. Se puede observar que tanto en el caso del algoritmo de control PID y el Adaptable, los índices IEC, IAC e IDAC más pequeños los produce el servomotor *MakeBlock*, el cual está dotado de un codificador óptico. Es importante recordar que el servomotor *LEGO* también emplea un codificador óptico, sin embargo, su resolución es la mitad del valor correspondiente al servomotor *MakeBlock* (ver Tabla 3.1). Este hecho podría explicar el mejor desempeño del servomotor *MakeBlock* respecto del servomotor *LEGO*.

Notar también que el *SARC* exhibe el desempeño más pobre. Los altos niveles de ruido de medición que produce el potenciómetro que mide su posición angular se ven reflejados en el índice de desempeño IDAC, el cual mide la variación de la señal de control. Por otro lado, los valores de los índices de desempeño pueden cambiar con una sintonización diferente de los controladores, por lo que los valores reportados se deben considerar únicamente como ejemplos y es posible que el desempeño mejore con otras sintonizaciones. Sin embargo, el empleo de un potenciómetro como sensor de posición afecta considerablemente el desempeño del *SARC* comparado con los servomotores *MakeBlock* y *LEGO* que emplean un codificador óptico.

Servomotor	PID			CADMR		
	IEC	IAC	IDAC	IEC	IAC	IDAC
<i>MakeBlock</i>	0.162	1.774	9.498	0.842	0.956	24.75
<i>LEGO</i>	0.193	3.859	24.468	2.054	1.341	25.54
<i>SARC</i>	0.906	4.111	37.305	7.937	1.724	25.72

Tabla 3.7: Desempeños de los controladores PID y CADMR.

3.6. Estudio comparativo de los servomotores de CD

La Tabla 3.8 muestra el estudio comparativo de los servomotores de CD empleados en este trabajo respecto a costos, voltaje de alimentación, tipo de sensor de posición y su disponibilidad en el mercado nacional. El servomotor marca *LEGO* se puede obtener a través de proveedores nacionales, el servomotor *MakeBlock* en la actualidad es posible adquirirlo con proveedores nacionales a través de su tienda oficial de la misma marca. Los servomotores Analógicos de Radio Control son de fácil adquisición y se encuentran ampliamente disponibles en el mercado nacional.

A continuación se resumen las ventajas y desventajas de cada uno de los servomotores.

- Servomotor *MakeBlock*.

- Ventajas: Compatibilidad mecánica con otros productos *MakeBlock*, empleo de un codificador óptico el cual tiene la mejor resolución con 360 pulsos por revolución, lo cual se traduce en mejor precisión de posicionamiento, precio de adquisición moderado y produce niveles de ruido acústico bajos cuando funciona.
- Desventajas: No está altamente disponible en el mercado nacional, su costo es algo elevado en comparación con los otros servomotores.

- Servomotor *LEGO*.

- Ventajas: Compatibilidad mecánica con otros productos marca *LEGO*, empleo de un codificador óptico lo cual se traduce en la ausencia de ruido de medición.
- Desventajas: Precio de adquisición elevado, no está ampliamente disponible en el mercado nacional. Compatibilidad limitada la cual hace difícil el montaje de otros materiales que no sean de la marca *LEGO*.

- Servomotor de RC.

- Ventajas: Ampliamente disponible en el mercado nacional, mecánicamente robusto, es posible obtener modelos de este tipo de servomotores con engranes de metal.

- Desventajas: Emplea un potenciómetro como sensor de posición lo cual tiene como consecuencia elevados niveles de ruido de medición y rotación limitada.

Servomotor	Costo	Voltaje	Sensor	Disponibilidad
<i>MakeBlock</i>	\$799.99	7.8 V	Codificador óptico	Disponible
<i>LEGO</i>	\$549.00	9 V	Codificador óptico	Difícilmente disponible
<i>SARC</i>	\$330.00	5 V	Potenciómetro	Fácilmente disponible

Tabla 3.8: Tabla comparativa de costos en pesos mexicanos (MXN), voltaje de alimentación, tipo de sensor en posición y disponibilidad de los servomotores de CD en el mercado nacional.

3.7. Conclusiones

De acuerdo a los resultados experimentales, se pudo observar que los servomotores *MakeBlock* y *LEGO* dotados de codificadores ópticos representan una ventaja respecto al *SARC* que emplea un potenciómetro. Lo anterior se debe a que los codificadores ópticos no presentan ruido de medición en tanto que el potenciómetro genera niveles elevados de ruido el cual disminuye el desempeño en lazo cerrado, aún si la medición del potenciómetro se procesa mediante filtros. Además otra de las desventajas que se observa en el *SARC* es que su rotación está limitada a 180 °. Por otro lado, considerando los costos y disponibilidad en el mercado nacional, el *SARC* presenta una ventaja ante los servomotores de la marca *MakeBlock* y *LEGO*.

Es interesante mencionar que, a diferencia de los servomotores de CD dotados de un codificador óptico, el servomotor de Radio Control (*SARC*) tiene la característica de tener señales de voltaje tanto en la entrada como en la salida. Esto posibilita el empleo de controladores basados en circuitos analógicos para su control, aspecto de posible utilidad para que los estudiantes empleen conocimientos de electrónica analógica en el desarrollo de prácticas de laboratorio.

Por lo tanto, de acuerdo al trabajo desarrollado en este capítulo se concluye que los tres servomotores son útiles para la implementación de algoritmos de control, tanto clásicos como avanzados, la elección de estos depende de los requerimientos de la aplicación. En este trabajo de tesis se utilizará el servomotor *MakeBlock* para la evaluación de los controladores estudiados en esta tesis.

Capítulo 4

Optimización por Enjambre de Partículas

El objetivo de este capítulo es presentar antecedentes, conceptos y aplicaciones de las metaheurísticas, en especial la técnica de Optimización por Enjambre de Partículas, también conocido como PSO, para posteriormente aplicarlas a la sintonización de los algoritmos de control estudiados en esta tesis.

El capítulo se distribuye de la siguiente manera: en la sección 4.1 se introduce conceptos y aplicaciones de la metaheurística en el Control Automático. En la sección 4.2 se describe el algoritmo PSO. En la sección 4.3 se define qué es el problema de optimización utilizado en el algoritmo PSO. En la sección 4.4 se presentan tres de las variantes del algoritmo PSO. Finalmente, en la sección 4.5 se introduce el enfoque del algoritmo PSO en la sintonización de los controladores.

4.1. Metaheurísticas aplicadas a la optimización

En las áreas de la Informática y la Inteligencia Artificial las metaheurísticas son técnicas utilizadas para encontrar soluciones a un problema de optimización. Una metaheurística es un método de exploración general, frecuentemente estocástico, que se aplica de la misma manera a muchos problemas diferentes [80]. Otra definición [81] establece que una metaheurística es un marco algorítmico de alto nivel, independiente del problema a resolver, que provee directrices y estrategias para desarrollar algoritmos de optimización heurística.

Las metaheurísticas incluyen una variedad de algoritmos tales como los Algoritmos Genéticos, la Optimización por Enjambre de Partículas, el Recocido Simulado y la Optimización por Colonias de Hormigas, entre otros. Cada una de estas técnicas tiene sus propias características y se adapta mejor a ciertos tipos de problemas. En la actualidad estas técnicas se emplean en Control Automático y en aplicaciones industriales para sintonizar controladores y para la identificación de parámetros [44, 45, 46, 47, 39, 48, 49, 50].

Existe una literatura interesante relacionada con la sintonización de parámetros de controladores realimentados empleando metaheurísticas. Los controladores PID se han sintonizado utilizando varias técnicas de optimización incluyendo el algoritmo de Optimización Mariposa Modificado [82], y el algoritmo PSO [83, 38]. Por otro lado, se han empleado varias metaheurísticas incluyendo los Algoritmos Genéticos, el Recocido Simulado y la Búsqueda Tabú para la sintonización de controladores PID aplicados al control de bioprocesos [84]. Un estudio interesante sobre la aplicación de técnicas de optimización inteligente al ajuste de ganancias de controladores PID se encuentra en [85] mientras que la referencia [86] explica cómo aplicar la optimización multiobjetivo a la sintonización de controladores.

4.2. Optimización por Enjambre de Partículas

El algoritmo PSO es uno de los métodos de inteligencia de enjambre más utilizados. Este ha sido capaz de resolver una gran variedad de problemas complejos de optimización en diferentes áreas [87]. Otros aspectos que lo han hecho popular son su simplicidad de implementación, su eficiencia computacional y su capacidad para buscar en grandes espacios de soluciones potenciales.

Este algoritmo fue propuesto por Kennedy y Eberhart [88] y se basa en la simulación del comportamiento social de las bandadas de pájaros y de los cardúmenes de peces. El algoritmo PSO se compone de un enjambre de partículas que evolucionan en un conjunto de soluciones factibles donde se desea encontrar un mínimo o un máximo de una función de desempeño. Cada una de las partículas es una solución potencial al problema de optimización. Los movimientos del enjambre en el espacio de búsqueda se denominan vuelos y se producen a partir de las mejores posiciones individuales de las partículas, de las mejores posiciones globales correspondientes a todas las partículas del enjambre y de los valores de las posiciones pasadas. La actualización de las mejores posiciones, individuales y globales, se realiza mediante la evaluación de una función de desempeño. Es importante mencionar que cada una de las partículas tiene dos componentes importantes, su posición y su velocidad, las cuales permiten al algoritmo PSO la capacidad de buscar soluciones óptimas en un espacio de búsqueda grande y complejo.

Si el número de partículas en el enjambre es N y la posición de cada una de ellas en el espacio L -dimensional se representa como $z_n(k) = [z_{n,1}, \dots, z_{n,L}]^T$, donde $n \in [1, \dots, N]$, y el vector de velocidad se define como $v_n(k) = [v_{n,1}, \dots, v_{n,L}]^T$, entonces, el comportamiento del algoritmo *PSO* se rige por el siguiente sistema dinámico en tiempo discreto propuesto por Kennedy y

Eberhart [89, 90]:

$$\begin{aligned}
 v_n(k+1) &= \underbrace{v_n(k)}_I + \underbrace{c_1 \text{rand}(0,1)(\text{pBest}(k,n) - z_n(k))}_{II} + \underbrace{c_2 \text{rand}(0,1)(\text{gBest}(k) - z_n(k))}_{III} \\
 z_n(k+1) &= z_n(k) + v_n(k+1)
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

con

$$\text{pBest}(k,n) = \arg \min_{0 \leq s \leq k} J(z_n(s)) \tag{4.3}$$

$$\text{gBest}(k) = \arg \min_{0 \leq s \leq k, 1 \leq j \leq n} J(z_j(s)) \tag{4.4}$$

en donde $J(\cdot)$ representa la función de desempeño y el término $\text{rand}(0,1)$ genera un número aleatorio en el intervalo $[0, 1]$. Los valores de c_1 y c_2 se denominan factores de aprendizaje. En esta versión del algoritmo PSO cada individuo se considera una partícula sin masa ni volumen. El término $\text{pBest}(k,n) \in \mathbb{R}^L$ es el mejor valor de posición que ha alcanzado la partícula n hasta la iteración k , este se utiliza para que cada partícula actualice su movimiento y dirección en función de su experiencia individual. Por otro lado, el término $\text{gBest}(k) \in \mathbb{R}^L$ representa la mejor solución encontrada hasta el momento por cualquier partícula en todo el enjambre, es decir, corresponde al óptimo global dentro del espacio de búsqueda.

Analizando individualmente los términos del comportamiento de las partículas (4.1) se observa que:

- El término *I* se denomina momento, el cual se refiere a la influencia de la velocidad actual de la partícula en la velocidad futura.
- El término *II* se define como la parte cognitiva, la cual se refiere a la capacidad de cada partícula para aprender y utilizar su propia experiencia pasada como guía para explorar el espacio de soluciones en busca de soluciones óptimas.
- El término *III* es el componente social del algoritmo PSO, este se refiere a la capacidad de las partículas para influirse mutuamente compartiendo información sobre las mejores soluciones encontradas en el proceso de optimización, permitiendo así una búsqueda más eficiente y colaborativa.

4.3. Problema de optimización

El algoritmo PSO es una metaheurística que se utiliza para encontrar soluciones aproximadas a problemas de optimización global o local, y consiste en resolver un problema específico

mediante la minimización o maximización de un criterio de desempeño. Por ejemplo en las áreas de Control Automático, Robótica y Mecatrónica, la función objetivo puede relacionarse con la minimización del consumo de energía o la convergencia del error de regulación o seguimiento a cero, entre otros aspectos.

El problema de optimización se representa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \min J(\cdot) \\ \text{sujeto a } \Omega \end{aligned} \quad (4.5)$$

en donde $J(\cdot)$ corresponde a la función objetivo y Ω define el espacio de búsqueda el cual representa el conjunto de todas las posibles soluciones que cumplen con las restricciones del problema de optimización.

En un problema de optimización generalmente existen restricciones en la búsqueda de las soluciones óptimas las cuales se deben cumplir. Estas pueden relacionarse con límites en las variables de decisión o con cualquier otra condición específica del problema. El conjunto de soluciones factibles en el algoritmo PSO se refiere a todas las posibles soluciones que cumplen con esas restricciones. Durante la ejecución del algoritmo las partículas del enjambre se mueven a través del espacio de búsqueda Ω para encontrar la mejor solución posible. Al limitar el movimiento de las partículas a soluciones en Ω se asegura que el algoritmo converge a soluciones que cumplen con las condiciones del problema.

4.3.1. Conjunto de soluciones factibles

Los algoritmos de optimización inspirados en la naturaleza suelen emplear operadores de variación para explorar de la mejor manera el espacio de búsqueda. En ocasiones, estos producen soluciones fuera de Ω . En este caso es necesario aplicar algún método de manejo de restricciones de contorno para corregir las soluciones de manera que las soluciones corregidas estén en Ω . En este trabajo, se utiliza el método denominado *Projection Boundary* para limitar las posiciones de las partículas al conjunto Ω el cual se describe por las siguientes expresiones [91, 92] :

$$\bar{z}_{n,l}(k+1) = \begin{cases} z_{n,l}(k+1) & \text{si } \min(\Omega_{n,l}) \leq z_{n,l}(k+1) \leq \max(\Omega_{n,l}) \\ \min(\Omega_{n,l}) & \text{si } \min(\Omega_{n,l}) > z_{n,l}(k+1) \\ \max(\Omega_{n,l}) & \text{si } \max(\Omega_{n,l}) < z_{n,l}(k+1) \end{cases} \quad (4.6)$$

donde $\bar{z}_{n,l}(k+1)$ es la posición proyectada de la l -ésima partícula $z_{n,l}(k+1)$ con $l \in [1, \dots, L]$. Los límites $\min(\Omega_{n,l})$ y $\max(\Omega_{n,l})$ son los límites inferior y superior correspondiente a cada partícula. En esta técnica, si un elemento $z_{n,l}(k+1)$ de la solución $z_n(k+1)$ no pertenece a $\Omega \in R^L$, el método *Projection Boundary* lo proyecta a la frontera de Ω . Este método se utiliza

después de que se calculan las nuevas posiciones de las partículas en cada iteración.

El pseudocódigo del algoritmo PSO incluyendo el método *Projection Boundary* se muestra en el Algorithm 1.

Algorithm 1 Algoritmo PSO

```
1: Inicio
2: Crear un conjunto de partículas iniciales de manera aleatoria  $z_n(k) \forall n$ 
3: Evaluar la función objetivo  $J(z_n(k)) \forall n$ 
4: Calcular pBest( $k, n$ )  $\forall n$ 
5: Calcular gBest( $k$ )
6: while condición de finalizar== falso do
7:   for  $n = 1$  to  $N$  do
8:     Calcular el vector de velocidad  $v_n(k + 1)$ 
9:     Efectuar el vuelo  $z_n(k + 1)$ 
10:    Aplicar el método Projection Boundary (4.6) para obtener  $\bar{z}_n(k + 1)$ .
11:    Calcular la función objetivo  $J(\bar{z}_n(k + 1))$ 
12:    Calcular pBest( $k, n$ )
13:  end for
14:  Calcular gBest( $k$ )
15: end while
```

4.4. Variantes del algoritmo PSO

Con el objetivo de mejorar la convergencia del algoritmo PSO de Kennedy y Eberhart (4.1), (4.2), en la literatura se reportan variantes de las cuales tres de ellas se describen en las siguientes subsecciones.

4.4.1. Algoritmo ω -PSO

Esta variante se denomina algoritmo ω -PSO y emplea un término inercial ω en la ecuación de la velocidad (4.1), es decir:

$$v_n(k + 1) = \omega v_n(k) + c_1 \text{rand}() (\text{pBest}(k, n) - z_n(k)) + c_2 \text{rand}() (\text{gBest}(k) - z_n(k)) \quad (4.7)$$

$$z_n(k + 1) = z_n(k) + v_n(k + 1) \quad (4.8)$$

en donde las condiciones iniciales son $z_{n,l}(0) = \text{rand}()$ y $v_{n,l}(0) = 0$ con $l \in [1, \dots, L]$. La función $\text{rand}()$ genera números aleatorios distribuidos uniformemente y el peso inercial toma valores en el intervalo $\omega \in [0, 1]$.

4.4.2. Algoritmo PSO Fraccionario

El algoritmo PSO Fraccionario (FPSO por sus siglas en inglés) fue desarrollado a partir del cálculo fraccional [93] el cual utiliza derivadas fraccionarias para controlar la tasa de convergencia del PSO. En este caso, el cálculo de la velocidad se realiza mediante derivadas fraccionarias considerando los cuatro primeros términos de la derivada diferencial fraccionaria [94]. El sistema dinámico discreto que representa al algoritmo FPSO es el siguiente:

$$v_n(k+1) = \alpha v_n(k) + \frac{1}{2} \alpha v_n(k-1) + \frac{1}{6} \alpha (1-\alpha) v_n(k-2) + \frac{1}{24} \alpha (1-\alpha) (2-\alpha) v_n(k-3) \\ + c_1 \text{rand}() (\text{pBest}(k, n) - z_n(k)) + c_2 \text{rand}() (\text{gBest}(k) - z_n(k)) \quad (4.9)$$

$$z_n(k+1) = z_n(k) + v_n(k+1) \quad (4.10)$$

en donde las condiciones iniciales son $z_{n,l}(0) = \text{rand}()$ y $v_{n,l}(0) = 0$ y $\text{rand}()$ es la función de números aleatorios distribuidos uniformemente. Los términos $\text{pBest}(k, n) \in \mathbb{R}^L$ y $\text{gBest}(k) \in \mathbb{R}^L$ son definidos en (4.3) y (4.4). Los factores de aprendizaje c_1 y c_2 se obtienen a partir de:

$$c_j = (c_{ji} - c_{jf}) \frac{k_{\max} - k}{k_{\max}} + c_{jf}, \quad j = 1, 2 \quad (4.11)$$

Los términos c_{ji} y c_{jf} corresponden a los valores iniciales (i) y finales (f) de los factores de aprendizaje respectivamente con $j = 1, 2$. La constante k_{\max} representa la iteración máxima y α es una variable que se ajusta en función del estado evolutivo del enjambre y se ajusta a partir de la siguiente ecuación [94]:

$$\alpha = 0.9 - \frac{k}{(1 + e^{-E_f(k)}) k_{\max}} \quad (4.12)$$

donde $E_f(k)$ indica un factor evolutivo que refleja el estado de evolución del enjambre en la k -ésima iteración y se calcula a partir de:

$$E_f(k) = \frac{d_{gb}(k) - d_{\min}(k)}{d_{\max}(k) - d_{\min}(k)} \quad (4.13)$$

en el cual $d_{\max}(k)$ y $d_{\min}(k)$ denotan el valor máximo y mínimo de la distancia media de una partícula a otras dentro del enjambre respectivamente. El término $d_{gb}(k)$ representa la distancia media de la mejor posición global (gBest). Por otro lado, la distancia media de la k -ésima iteración descrita por $d_i(k)$ se calcula para la i -ésima partícula de la manera siguiente:

$$d_i(z_n(k)) = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1, j \neq n}^N \|z_n(k) - z_j(k)\| \quad (4.14)$$

donde N indica el tamaño de la población del enjambre de partículas. De la definición anterior se tiene que:

$$d_{gb}(k) = d_i(\text{gBest}(k)) \quad (4.15)$$

$$d_{\min}(k) = \min_{1 \leq s \leq n} d_i(z_s(k)) \quad (4.16)$$

$$d_{\max}(k) = \max_{1 \leq s \leq n} d_i(z_s(k)) \quad (4.17)$$

4.4.3. Algoritmo PSO-AWDV

El algoritmo PSO con velocidad de retardo ponderada adaptable (PSO-AWDV por sus siglas en inglés) se propone en [95] con el fin de hacer frente a problemas en la optimización tales como la convergencia prematura y el estancamiento local. Es decir, evita una rápida convergencia hacia zonas que no contienen un óptimo global. La idea detrás de este algoritmo es ajustar dinámicamente la velocidad de las partículas para mejorar la capacidad de búsqueda. Su dinámica en tiempo discreto se representa como:

$$v_n(k+1) = \omega v_n(k) + (1-\omega)v_n(k-1) + c_1 \text{rand}(0,1)(\text{pBest}(k,n) - z_n(k)) + c_2 \text{rand}(0,1)(\text{gBest}(k) - z_n(k)) \quad (4.18)$$

$$z_n(k+1) = z_n(k) + v_n(k+1) \quad (4.19)$$

Las condiciones iniciales son las mismas que las empleadas en los algoritmos ω -PSO (4.8) y FPSO (4.9). Los factores de aprendizaje c_1 y c_2 decrecen linealmente y se obtienen a partir de la ecuación (4.11) presentada en el algoritmo FPSO, $\text{rand}(0,1)$ es una función que genera números aleatorios entre $[0, 1]$. Por otro lado, la inercia ω de la velocidad se adapta de acuerdo con el estado evolutivo en la optimización y se calcula de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$\omega = 1 - \frac{a_p}{1 + e^{b_p E(k)}} \quad (4.20)$$

donde a_p y b_p son dos parámetros que se sintonizan para ajustar el rendimiento de búsqueda del algoritmo PSO. $E(k)$ es el valor de estimación del estado evolutivo en la k -ésima iteración y se obtiene de acuerdo a la expresión siguiente:

$$E(k) = \frac{\max_{1 \leq s \leq N} J(z_s(k)) - \min_{1 \leq s \leq N} J(z_s(k))}{\max_{1 \leq s \leq N} J(z_s(k))} \quad (4.21)$$

donde $\max_{1 \leq s \leq N} J(z_s(k))$ y $\min_{1 \leq s \leq N} J(z_s(k))$ representan el máximo y mínimo respectivamente de la aptitud de las partículas en la k -ésima iteración.

4.5. Algoritmo PSO aplicado a la sintonización de controladores

Los objetivos principales en el diseño de algoritmos de control realimentados son garantizar la estabilidad de la respuesta del sistema en lazo cerrado formado por el sistema a controlar y el algoritmo de control, y la obtención de un desempeño adecuado. La estabilidad es el primer requisito que debe cumplir un sistema de control en lazo cerrado. Por otro lado, el desempeño adecuado del sistema se refiere al cumplimiento de especificaciones tales como respuesta transitoria, respuesta en estado estacionario, minimización del consumo de energía y rechazo de las perturbaciones que afectan al sistema bajo control. Para cumplir con los objetivos antes mencionados es necesaria una sintonización adecuada de los parámetros del algoritmo de control.

En la literatura es posible encontrar técnicas de sintonización analíticas y numéricas de controladores [32, 77, 96]. Sin embargo, las dificultades en su sintonización radican en la complejidad del sistema dinámico a controlar. En muchos casos estos últimos poseen estructuras que incluyen comportamientos no lineales, un gran número de parámetros a sintonizar y un gran número de entradas y salidas. Además, pueden estar sujetos a condiciones ambientales u operativas como incertidumbres y perturbaciones. Estas características dificultan la búsqueda de parámetros adecuados de un controlador que permitan obtener el desempeño deseado.

El problema general de sintonización de un controlador puede plantearse como un problema de optimización con restricciones. Uno de los enfoques clásicos de optimización aplicado a la sintonización de controladores es el Regulador Cuadrático Lineal (LQR) [34] cuya función de desempeño se muestra en (3.14).

El algoritmo PSO se ha utilizado ampliamente para resolver muchos problemas de optimización. Lo anterior se debe a su funcionamiento paralelizable y relativamente sencillo y su capacidad de manejar problemas complejos. Por lo tanto, gracias a estas características este algoritmo es una alternativa viable para la sintonización de algoritmos de control.

El problema de optimización que se plantea en el caso de la sintonización de controladores se puede expresar como la minimización de una función objetivo $J(\cdot)$ que representa el error de seguimiento o el desempeño general del sistema, y se encuentra sujeto a un conjunto de restricciones Ω . Las expresiones correspondientes se detallan a continuación:

$$\begin{aligned} & \min_{\Theta_n(k)} J(\Theta_n(k)) \\ & \text{sujeto a } \Theta_n(k) \in \Omega \end{aligned} \tag{4.22}$$

Donde:

- $\Theta_n(k)$ representa el vector de parámetros del controlador a sintonizar (por ejemplo, ganancias k_p , k_d y k_i en un controlador PID, o parámetros de la matriz Q y R en un controlador LQR). Por lo tanto, las soluciones $\bar{z}_n(k)$ generadas por los algoritmos PSO (4.1)-(4.2), (4.7)-(4.8), (4.9)-(4.10) y (4.18)-(4.19) y el algoritmo *Projection Boundary* (4.6) corresponden a las ganancias del controlador que se desea sintonizar, es decir:

$$\bar{z}_n(k) = \Theta_n(k) \quad (4.23)$$

- $J(\Theta_n(k))$ es la función de desempeño del sistema, que puede ser definida de diferentes maneras dependiendo de los objetivos específicos de la sintonización. Algunas definiciones de J empleadas típicamente en la sintonización y evaluación del desempeño de controladores son:

$$J = \int_{T_i}^{T_f} e^2(t) dt \quad (4.24)$$

$$J = \int_{T_i}^{T_f} |e(t)| dt \quad (4.25)$$

$$J = \int_{T_i}^{T_f} t |e(t)| dt \quad (4.26)$$

$$J = \int_{T_i}^{T_f} (|e| + |u|) dt \quad (4.27)$$

En las expresiones anteriores e corresponde al error definido como $e = y_d - y$, donde y_d es la referencia, y es la salida del sistema. El término u es la señal de control. Es posible utilizar otras variables en la función de costo además de e y u de acuerdo al problema de optimización a abordar. Ejemplos de estas funciones se darán en los capítulos siguientes.

- Para definir el conjunto de soluciones factibles Ω es importante considerar los límites en las partículas en el algoritmo PSO, que en el caso de la sintonización de controladores corresponden a las ganancias del algoritmo de control. Los límites se definen de acuerdo a las condiciones de estabilidad del sistema en lazo cerrado. Las condiciones de estabilidad pueden obtenerse a partir del criterio de estabilidad de Ruth-Hurwitz [32, 52] o del segundo método de estabilidad de Lyapunov [19].

En la Fig. 4.1 se presenta el diagrama de bloques del algoritmo PSO aplicado a la sintonización de algoritmos de control y el pseudocódigo correspondiente se muestra en el Algoritmo 2. La diferencia importante entre este y el Algoritmo 1 es la inclusión de la simulación numérica del sistema en lazo cerrado mencionada en el paso 11.

Algorithm 2 Algoritmo PSO: sintonización de controladores

```

1: Inicio
2: Crear un conjunto de partículas iniciales de manera aleatoria  $z_n(k) \forall n$ 
3: Evaluar la función objetivo  $J(z_n(k)) \forall n$ 
4: Calcular pBest( $k, n$ )  $\forall n$ 
5: Calcular gBest( $k$ )
6: while condición de finalizar== falso do
7:   for  $n = 1$  to  $N$  do
8:     Calcular el vector de velocidad  $v_n(k + 1)$ 
9:     Efectuar el vuelo  $z_n(k + 1)$ 
10:    Aplicar el método Projection Boundary (4.6) para obtener  $\bar{z}_n(k + 1)$ 
11:    Ejecutar la simulación dinámica del sistema en lazo cerrado
12:    Calcular la función objetivo  $J(\bar{z}_n(k + 1))$  a partir de los datos generados por la
    simulación dinámica
13:    Calcular pBest( $k, n$ )
14:  end for
15:  Calcular gBest( $k$ )
16: end while

```

Como se puede observar en la Fig. 4.1, el bloque Algoritmo PSO contiene la ecuación de actualización de la velocidad (4.1) y la ecuación de posición de cada partícula (4.2). De esta manera se generan las soluciones $\bar{z}_n(k) = \Theta(k)$ en la iteración k correspondientes a las ganancias del controlador. Cada solución se evalúa mediante el bloque *Simulación Dinámica* el cual corresponde al sistema en lazo cerrado formado por el modelo de la planta $P(s)$ y el controlador $C(s, \Theta(k))$. La simulación dinámica provee los datos necesarios para evaluar la función de costo J . Estos corresponden a secuencias de valores discretos debido a que la simulación se ejecuta en un procesador digital. Por ejemplo, si la función de costo es (4.27), entonces los valores de interés en la simulación dinámica corresponden a las señales de error y de control, i.e.:

$$\begin{aligned} e(k) &= \{e(1), \dots, e(n)\} \\ u(k) &= \{u(1), \dots, u(n)\} \end{aligned} \quad (4.28)$$

La evaluación de J permite calcular los términos pBest (4.3) y gBest (4.4) los cuales hacen referencia a la mejor posición de cada partícula individual y la mejor posición global de las partículas en el enjambre respectivamente. Consecuentemente, los términos e_p y e_g en la Fig. 4.1 se calculan mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} e_p &= \text{pBest}(k, n) - \bar{z}_n(k) \\ e_g &= \text{gBest}(k, n) - \bar{z}_n(k) \end{aligned}$$

que representan los errores de posición individual y global de la partícula $z_n(k)$ y permiten el cálculo de la nueva solución $z_n(k+1)$ en la siguiente iteración del algoritmo PSO.

Es importante mencionar que el modelo de la planta $P(s)$ es conocido a priori y los parámetros de esta se pueden obtener a partir de datos experimentales mediante algoritmos de Identificación Paramétrica, por ejemplo, el algoritmo de Mínimos Cuadrados [78]. Además, las variantes del algoritmo PSO descritas en la Subsección 4.4 se aplican para la sintonización de controladores siguiendo un pseudocódigo similar al usado en el Algorithm 2.

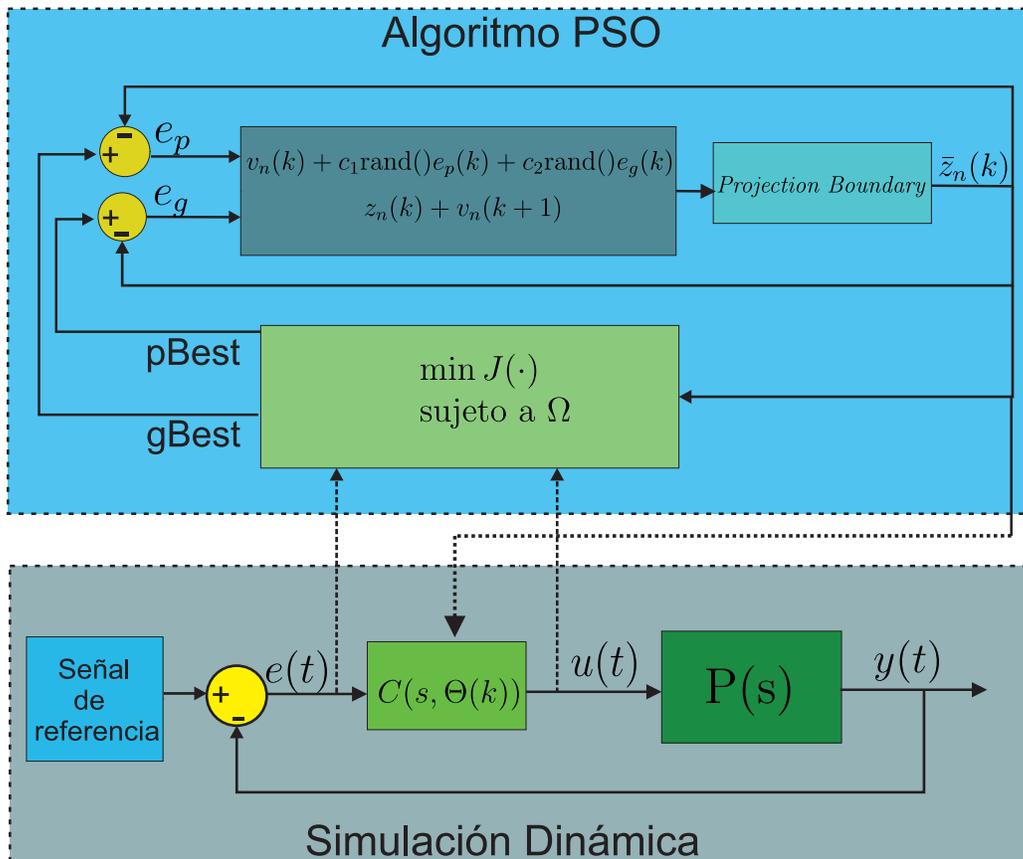


Figura 4.1: Representación del algoritmo PSO.

Capítulo 5

Algoritmo de Control por Rechazo Activo de Perturbaciones sintonizado mediante algoritmos PSO

El objetivo de este capítulo es presentar la evaluación de un algoritmo de Control por Rechazo Activo de Perturbaciones (ADRC por sus siglas en inglés *Active Disturbance Rejection Controller*) aplicado a un servosistema. Las ganancias del algoritmo de control se sintonizan mediante el algoritmo PSO.

El capítulo se organiza de la siguiente manera: en la sección 5.1 se presentan los inicios y la definición del ADRC. La sección 5.2 describe la idea principal del ADRC en su forma general. En la sección 5.3 se introduce la implementación del algoritmo ADRC en un servosistema que incluye un servomotor de CD como actuador. La sección 5.4 muestra los resultados experimentales de la implementación del ADRC, sintonizado tanto de forma manual como mediante el algoritmo PSO. En la sección 5.5 se analiza el desempeño del algoritmo ADRC en el servosistema. Finalmente, en la sección 5.6 se presentan las conclusiones sobre el desempeño del algoritmo ADRC sintonizado mediante el algoritmo PSO.

5.1. Preliminares

Las referencias [97, 98] presentan las primeras propuestas de un Observador de Perturbaciones el cual permite estimar las perturbaciones de entrada a un servo sistema. Posteriormente, en [99, 100, 101, 102] y [103] se estudia el Control por Rechazo Activo de Perturbaciones como una mejora respecto al control PID. Un algoritmo de Control por Rechazo Activo de Perturbaciones combina una ley de control y un observador de perturbaciones.

En [104] se describe al Algoritmo de Control por Rechazo de Perturbaciones como un nuevo paradigma debido a que este no emplea un modelo exacto de la planta a controlar, sino un

modelo nominal sin perturbaciones. A partir de las señales de entrada y salida, el observador de perturbaciones estima mediante un solo término las perturbaciones exógenas y endógenas que afectan a la planta. La perturbación conjunta estimada se utiliza en la ley de control para compensar los efectos de la perturbación real y de esta manera se fuerza a la planta a comportarse como su modelo nominal. Posteriormente, se diseña un controlador empleando el modelo nominal y se aplica a la planta junto con la compensación de perturbaciones.

También es interesante mencionar trabajos en donde se reporta la relación entre un controlador PID y un controlador basado en un Observador de Perturbaciones (OP) [105, 2, 74].

5.2. Idea principal del ADRC

Como se mencionó con anterioridad, un Controlador por Rechazo Activo de Perturbaciones está compuesto de dos partes, un controlador $C(s)$ el cual se diseña a partir del modelo nominal sin perturbaciones de la planta y un observador de perturbaciones (ver Fig. 5.1). La salida de la planta $P(s)$ está dada por:

$$Y(s) = P(s)[U(s) + D(s)] \quad (5.1)$$

donde se supone que la Transformada de Laplace existe para todas las señales. $P(s)$ es la función de transferencia de la planta, $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}$ y $U(s) = \mathcal{L}\{u\}$ son las transformadas de Laplace de la salida y y la entrada de control u respectivamente, $D(s) = \mathcal{L}\{d\}$ y $\hat{D}(s) = \mathcal{L}\{\hat{d}\}$ corresponde a la transformada de Laplace de la perturbación d y su estimado \hat{d} , $\mathcal{L}\{\cdot\}$ representa el operador de Laplace.

Si $P(s)$ es de fase mínima, entonces un estimado $\hat{D}(s)$ de la perturbación $D(s)$ podría obtenerse como sigue:

$$\hat{D}(s) = P^{-1}(s)Y(s) - U(s) \quad (5.2)$$

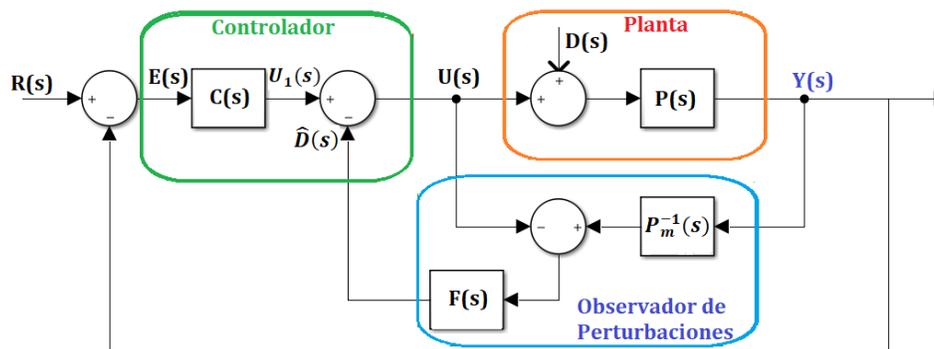


Figura 5.1: Diagrama de bloques del Controlador por Rechazo Activo de Perturbaciones [2]

en donde se emplean mediciones de la entrada y la salida de la planta.

Uno de los problemas que presenta esta expresión es que la inversa de la planta $P(s)$ no es propia y consecuentemente se requieren mediciones de las derivadas de la salida para estimar la perturbación. Por ejemplo, en el caso de los servo sistemas sería necesario medir la aceleración y la velocidad. Para evitar estos problemas la estimación de la perturbación se expresa como:

$$\hat{D}(s) = [P_m^{-1}(s)Y(s) - U(s)]F(s) \quad (5.3)$$

en donde P_m es el modelo nominal de la planta $P(s)$. El orden, el grado relativo y los parámetros de P_m se conocen *a priori*. En particular, estos parámetros se pueden estimar mediante algún algoritmo de identificación [78, 84, 19, 18]. La función de transferencia $F(s)$ es un filtro estable estrictamente propio con grado del polinomio característico $n_f \geq n$ donde n corresponde al orden de la ecuación característica de $P_m(s)$. Esta condición garantiza una función de transferencia $P_m^{-1}(s)F(s)$ propia o estrictamente propia.

5.3. ADRC aplicado a un servo sistema basado en un motor de CD

El esquema de control descrito en esta subsección está reportado en [16]. Considérese el modelo matemático reportado en el Apéndice A ecuación (3.19), que está basado en el modelo (A.18), y que se reescribe a continuación:

$$\ddot{y} = -a\dot{y} + bu + d \quad (5.4)$$

Se supone que el término a , que está relacionado al coeficiente de la fricción viscosa del motor de CD, se desconoce. Por lo tanto, el modelo (5.4) se simplifica a:

$$\ddot{y} = bu + d_e \quad (5.5)$$

en donde $d_e = d - a\dot{y}$. El término $-a\dot{y}$ corresponde a una perturbación endógena y d_e representa a la perturbación total que afecta al servo sistema. Además, de la ecuación (5.5) se tiene que el modelo sin perturbaciones de la planta es:

$$\ddot{y} = bu \quad (5.6)$$

Para aplicar el ADRC considérese la transformada de Laplace de (5.5):

$$s^2Y(s) = bU(s) + D_e(s) \quad (5.7)$$

De manera similar a lo descrito en la subsección 5.2, una manera de estimar D_e es empleando mediciones de entrada y de salida, esto es:

$$\hat{D}_e(s) = s^2Y(s) - bU(s) \quad (5.8)$$

Esta estimación requiere la medición de la aceleración \ddot{y} cuya transformada de Laplace es $s^2Y(s)$, lo cual no es posible en la mayoría de las situaciones prácticas. El problema se evita agregando un filtro $F(s)$ a la estimación:

$$\hat{D}_e(s) = [s^2Y(s) - bU(s)]F(s) \quad (5.9)$$

donde:

$$F(s) = \frac{\beta}{s + \beta} \quad (5.10)$$

que es un filtro de primer orden con frecuencia de corte $\beta > 0$. Sustituyendo (5.10) en (5.9) da como resultado:

$$\hat{D}_e(s) = \frac{\beta s}{s + \beta} sY(s) - \frac{\beta b}{s + \beta} U(s) \quad (5.11)$$

La representación del observador de perturbaciones (5.11) en el dominio de tiempo es:

$$\dot{\hat{d}}_e = -\beta \hat{d}_e + \beta(\ddot{y} - bu) \quad (5.12)$$

La ley de control por Rechazo Activo de Perturbaciones aplicada al modelo (5.5) del servo sistema es:

$$u = \frac{1}{b}[u_n - \hat{d}_e] \quad (5.13)$$

donde u_n corresponde a la señal generada por el controlador diseñado para el modelo nominal, y el observador de incertidumbres (5.12) genera la perturbación estimada \hat{d}_e .

El modelo nominal se obtiene a partir del sistema (5.6) y la propuesta de la ley de control (5.13) haciendo $d_e = 0$, es decir:

$$u = \frac{u_n}{b} \quad (5.14)$$

Sustituyendo (5.14) en (5.6) se tiene el siguiente modelo nominal:

$$\ddot{y} = u_n \quad (5.15)$$

La ley de control u_n para el seguimiento de trayectoria que permite que el sistema en lazo cerrado tenga una dinámica Hurwitz estable está dada por:

$$u_n = \ddot{r} + \alpha_{n1}\dot{e} + \alpha_{n2}e \quad (5.16)$$

en donde $e = r - y$ y $\dot{e} = \dot{r} - \dot{y}$ son el error de seguimiento y su primer derivada respectivamente. Con r , \dot{r} y \ddot{r} son la señal de referencia y sus derivadas, α_{n1} , α_{n2} son constantes positivas.

Ahora bien, sustituyendo (5.16) en (5.15) se obtiene la siguiente dinámica en lazo cerrado del sistema sin perturbaciones:

$$\ddot{e} = -\alpha_{n1}\dot{e} - \alpha_{n2}e \quad (5.17)$$

el cual tiene el siguiente polinomio Hurwitz estable:

$$P_c(s) = s^2 + \alpha_{n1}s + \alpha_{n2} \quad (5.18)$$

Notar que en (5.12) y en (5.16) se utilizan respectivamente la segunda y la primera derivada de la salida y las cuales representan la aceleración y la velocidad angular del servomotor. Sin embargo, en el caso del servosistema utilizado en esta tesis únicamente se tiene acceso a las mediciones de la posición y . Para enfrentar este problema considérese el sistema nominal (5.15) escrito en variables de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u_n \end{aligned} \quad (5.19)$$

Lo anterior permite escribir (5.16) como:

$$u_n = \ddot{r} + \alpha_{n1}(\dot{r} - x_2) + \alpha_{n2}(r - x_1) \quad (5.20)$$

Un observador de estados para el sistema (5.19) es:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + \gamma_1\epsilon_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 &= u_n + \gamma_2\epsilon_1 \\ \hat{y} &= \hat{x}_1 \end{aligned} \quad (5.21)$$

donde los errores de observación están dados por:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= y - \hat{y} = x_1 - \hat{x}_1 \\ \epsilon_2 &= x_2 - \hat{x}_2 \end{aligned} \quad (5.22)$$

El observador de estados (5.21) permite obtener estimados de los estados $x_1 = y$ y $x_2 = \dot{y}$ así

como el estimado de la aceleración $\ddot{y} = \dot{x}_2$. Los términos ϵ_1, ϵ_2 son los errores de observación y las ganancias $\gamma_1 > 0$ y $\gamma_2 > 0$ son los coeficientes asociados al siguiente polinomio del observador de estados el cual es Hurwitz estable:

$$P_{do}(s) = s^2 + \gamma_1 s + \gamma_2 \quad (5.23)$$

Entonces, la ley de control nominal en términos de los estados estimados es:

$$u_n = \ddot{r} + \alpha_{n1}(\dot{r} - \hat{x}_2) + \alpha_{n2}(r - \hat{x}_1) \quad (5.24)$$

y el controlador por Rechazo Activo de Perturbaciones en términos de los estados estimados está dado por:

$$u = \frac{1}{b}[\ddot{r} + \alpha_{n1}(\dot{r} - \hat{x}_2) + \alpha_{n2}(r - \hat{x}_1) - \hat{d}_e] \quad (5.25)$$

donde el observador de incertidumbres (5.12) se escribe como:

$$\dot{\hat{d}}_e = -\beta\hat{d}_e + \beta(\dot{\hat{x}}_2 - bu) \quad (5.26)$$

donde se emplea $\dot{\hat{x}}_2$ en lugar de \ddot{y} .

5.3.1. Análisis de estabilidad en lazo cerrado

A partir del análisis de estabilidad estudiado en [16], en este trabajo se desarrolla el análisis para sistemas de orden $n = 2$:

La dinámica del error de seguimiento en lazo cerrado se obtiene a partir de la sustitución de la ley de control (5.13) en (5.5):

$$\begin{aligned} e &= r - y \\ \dot{e} &= \dot{r} - \dot{y} \\ \ddot{e} &= \ddot{r} - \ddot{y} = \ddot{r} - bu - \ddot{d}_e = \ddot{r} - u_n - \tilde{d}_e \end{aligned} \quad (5.27)$$

donde $\tilde{d}_e = d_e - \hat{d}_e$ es el error de estimación de la incertidumbre, y su representación en variables de estados es:

$$\dot{e}_1 = e_2 \quad (5.28)$$

$$\dot{e}_2 = \ddot{r} - u_n - \tilde{d}_e \quad (5.29)$$

donde $e_1 = e$ y $e_2 = \dot{e}$.

Ahora bien, con el objetivo de expresar la dinámica del error en lazo cerrado (5.29) en términos de los errores de observación se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} r - \hat{x}_1 &= e + \epsilon_1 = e_1 + \epsilon_1 \\ \dot{r} - \hat{x}_2 &= \dot{e} + \epsilon_2 = e_2 + \epsilon_2 \end{aligned} \quad (5.30)$$

Sustituyendo (5.30) en la ley de control (5.16) se obtiene:

$$u_n = \ddot{r} + \alpha_{n1}(e_2 + \epsilon_2) + \alpha_{n2}(e_1 + \epsilon_1) \quad (5.31)$$

Reemplazando (5.31) en la ecuación (5.29) produce:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= -\alpha_{n2}e_1 - \alpha_{n1}e_2 - \alpha_{n2}\epsilon_1 - \alpha_{n1}\epsilon_2 - \tilde{d}_e \end{aligned} \quad (5.32)$$

que se expresa en forma matricial como:

$$\dot{E}_c = A_c E_c + A_\epsilon E_\epsilon \quad (5.33)$$

donde

$$\begin{aligned} E_c &= \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} & A_c &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_{n2} & -\alpha_{n1} \end{bmatrix} \\ E_\epsilon &= \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \tilde{d}_e \end{bmatrix} & A_\epsilon &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_{n2} & -\alpha_{n1} & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El polinomio característico de la ecuación (5.33) es:

$$P_c(s) = \det[sI - A_c] = s^2 + \alpha_{n1}s + \alpha_{n2} \quad (5.34)$$

Por otro lado, la dinámica del error de observación se obtiene a partir de (5.22) y el observador de estados (5.21):

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{\hat{x}}_1 = x_2 - \hat{x}_2 - \gamma_1 \epsilon_1 = \epsilon_2 - \gamma_1 \epsilon_1 \\ \dot{\epsilon}_2 &= \dot{x}_2 - \dot{\hat{x}}_2 = u_n - \tilde{d}_e - u_n - \gamma_2 \epsilon_1 = \tilde{d}_e - \gamma_2 \epsilon_1 \end{aligned} \quad (5.35)$$

Sustituyendo $\dot{\hat{x}}_2$ dada en (5.21) y la ley de control (5.13) en (5.12) produce:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{d}}_e &= -\beta\hat{d}_e + \beta[u_n + \gamma_2\epsilon_1 - b(\frac{1}{b}(u_n - \hat{d}_e))] \\ \dot{\hat{d}}_e &= \beta\gamma_2\epsilon_1\end{aligned}\tag{5.36}$$

lo cual permite obtener:

$$\dot{\tilde{d}}_e = \dot{d}_e - \dot{\hat{d}}_e\tag{5.37}$$

Concatenando la dinámica del error de observación (5.35) y la dinámica del error de estimación de la incertidumbre (5.37) \tilde{d}_e se obtiene:

$$\dot{E}_\epsilon = A_o E_\epsilon + D_o\tag{5.38}$$

donde

$$A_o = \begin{bmatrix} -\gamma_1 & 1 & 0 \\ -\gamma_2 & 0 & 1 \\ -\beta\gamma_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{d}_e \end{bmatrix}^T\tag{5.39}$$

Notar que $\|D_o\| = |\dot{d}_e|$, en consecuencia:

$$\|D_o\| \leq D\tag{5.40}$$

El polinomio característico de la ecuación (5.38) es:

$$P_o(s) = \det[sI - A_o] = s^3 + \gamma_1 s^2 + \gamma_2 s + \beta\gamma_2\tag{5.41}$$

Aplicando el teorema de Routh Hurwitz [32] para el análisis de estabilidad del polinomio (5.41) se obtienen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &> 0 \\ \gamma_2 &> 0 \\ \beta &> \gamma_1\end{aligned}\tag{5.42}$$

Para llevar a cabo el análisis de estabilidad del sistema global en lazo cerrado (5.19) se concatenan los errores de observación (5.38) y seguimiento (5.33), es decir:

$$\dot{E} = AE + \bar{D}_o\tag{5.43}$$

donde

$$E = \begin{bmatrix} E_c & E_\epsilon \end{bmatrix}^T \quad A = \begin{bmatrix} A_c & A_\epsilon \\ 0 & A_o \end{bmatrix} \quad \bar{D}_o = \begin{bmatrix} 0 & D_o^T \end{bmatrix}^T$$

con $E \in \mathbb{R}^{5 \times 1}$, $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ y $\bar{D}_o \in \mathbb{R}^{5 \times 1}$, $\|\bar{D}_o\| \leq D$. Consecuentemente, el polinomio característico del sistema (5.43) corresponde a:

$$\det[sI - A] = \det \begin{bmatrix} sI - A_c & -A_\epsilon \\ 0 & sI - A_o \end{bmatrix} = \det[sI - A_c] \det[sI - A_o] = P_c(s)P_o(s) \quad (5.44)$$

Si $P_c(s)$ y $P_o(s)$ definidos en (5.34) y (5.41) son Hurwitz estables, entonces sucede lo mismo para $P_c(s)P_o(s)$. Lo anterior, implica que los valores propios de la matriz A corresponden a los valores propios de A_c y A_o .

Para llevar a cabo el análisis de estabilidad se propone la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V = E^T P E \quad (5.45)$$

con $P \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ una matriz simétrica definida positiva, la cual es solución única de la ecuación de Lyapunov presentada en el Teorema 4 Capítulo 2, reescrita a continuación [106]:

$$A^T P + P A = -2I \quad (5.46)$$

Derivando (5.45) respecto al tiempo se obtiene:

$$\dot{V} = \dot{E}^T P E + E^T P \dot{E} \quad (5.47)$$

Sustituyendo (5.43) en (5.47) conlleva a:

$$\dot{V} = [AE + \bar{D}_o]^T P E + E^T P [AE + \bar{D}_o] = -2 \underbrace{E^T E}_I + 2 \underbrace{E^T P \bar{D}_o}_{II} \quad (5.48)$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwartz presentada en el Teorema 1 Capítulo 2 a los términos del lado derecho de (5.48) se tiene que:

- Término *I*:

$$E^T E \leq \|E\| \|E\| = \|E\|^2$$

- Término *II*:

$$E^T P \bar{D}_o \leq \|E\| \|P \bar{D}_o\|$$

Aplicando la definición de norma matricial inducida (2.7) a PD_o se obtiene:

$$\|E\| \|P\bar{D}_o\| \leq \|E\| \|P\|_s \|\bar{D}_o\|$$

Por lo tanto

$$\dot{V} \leq -2\|E\|^2 + 2\|E\| \|P\|_s \|\bar{D}_o\| \quad (5.49)$$

En el segundo término se aplica la definición de norma espectral definida en (2.7) a la matriz P y se emplea la cota (5.40), lo cual produce:

$$2\|E\| \|P\|_s \|\bar{D}_o\| \leq 2\lambda_{\max}(P)D\|E\| \quad (5.50)$$

Sustituyendo (5.50) en (5.49) se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -2\|E\|^2 + 2\lambda_{\max}(P)D\|E\| \\ &\leq -2\|E\| (\|E\| - \lambda_{\max}(P)D) \end{aligned} \quad (5.51)$$

Entonces $\dot{V} \leq 0$ si $\|E\| \geq \lambda_{\max}(P)D$, o equivalentemente:

$$\frac{D}{\|E\|} \leq \frac{1}{\lambda_{\max}(P)} \quad (5.52)$$

A partir de la Definición 2.13 y el Lema 2.3, para (5.52) se concluye que:

$$\frac{D}{\|E\|} \leq -\sigma_{sa}(A) \quad (5.53)$$

Para concluir el análisis de estabilidad se emplea la teoría de estabilidad de sistemas variantes en el tiempo presentado en la Sección 2.9 Capítulo 2:

- Aplicando el Teorema 2 de Rayleigh-Ritz a la función candidata de Lyapunov (5.45), se obtiene:

$$\lambda_{\min}(P)\|E\|^2 \leq E^T P E \leq \lambda_{\max}(P)\|E\|^2 \quad (5.54)$$

en donde:

$$\begin{aligned} \alpha_1(\|E\|) &= \lambda_{\min}(P)\|E\|^2 \\ \alpha_2(\|E\|) &= \lambda_{\max}(P)\|E\|^2 \end{aligned} \quad (5.55)$$

con $\alpha_1(\cdot)$ y $\alpha_2(\cdot)$ funciones de clase \mathcal{K} . Lo anterior implica que se cumple la condición (2.29) del Teorema 5.

- La derivada de la función (5.45) es semidefinida negativa si se cumple la condición (5.52).

Por lo tanto se cumple (2.30).

Definiendo:

$$\mu = \lambda_{\max}(P)D \quad (5.56)$$

- Ahora bien, considérese el dominio de atracción $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ que contiene al origen y $C > 0$ tal que $\Omega_C \subset \mathcal{D}$ un conjunto compacto contenido en \mathbb{R}^n . A partir de (5.55) se tiene:

$$\begin{aligned} \alpha_2(\mu) &= \lambda_{\max}(P)\mu^2 \\ \alpha_1(C) &= \lambda_{\min}(P)C^2 \end{aligned} \quad (5.57)$$

Por lo tanto a partir de Teorema 5 se tiene:

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}(P)\mu^2 &\leq \lambda_{\min}(P)C^2 \\ \mu^2 &\leq \frac{\lambda_{\min}(P)}{\lambda_{\max}(P)}C^2 \\ \mu &\leq \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(P)}{\lambda_{\max}(P)}}C \end{aligned} \quad (5.58)$$

Sustituyendo μ de (5.56) en (5.58) se tiene:

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}(P)D &\leq \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(P)}{\lambda_{\max}(P)}}C \\ C &\geq \frac{\lambda_{\max}(P)D}{\sqrt{\frac{\lambda_{\min}(P)}{\lambda_{\max}(P)}}} \end{aligned} \quad (5.59)$$

Por lo tanto, se escoge $C > 0$ para cumplir la condición (5.59). Entonces, las soluciones del sistema (5.43) con condición inicial dentro del conjunto Ω_C permanecen en este último para todo tiempo t . Entonces, el sistema en lazo cerrado es Uniformemente Últimamente Acotado (UUB) [59].

Proposición 1 *Sea (5.4) un sistema dinámico controlado por la ley de control (5.13) descrito a partir de los estados estimados que proporciona el observador de estados (5.21) y un Observador de Perturbaciones (5.12). Si se cumple con la condición (5.53), entonces el sistema en lazo cerrado es Uniformemente Últimamente Acotado (UUB).*

Es fundamental recordar que para asegurar una convergencia rápida de las estimaciones de estado, mantener la estabilidad del sistema y mejorar el desempeño del sistema en lazo cerrado

los polos del observador deben ser más rápidos que los polos del controlador. En consecuencia, los polos dominantes y la abscisa espectral de la matriz A corresponderán a los polos del polinomio $P_c(s)$. Por otra parte, de acuerdo con la condición de estabilidad (5.52), situar los valores propios de A de manera que la abscisa espectral $\sigma_{sa}(A)$ esté más a la izquierda del eje imaginario del plano complejo, reducirá el tamaño de la región donde converge el error E .

5.4. Experimentos

5.4.1. Condiciones experimentales

Para la evaluación del algoritmo ADRC, se utiliza el servomotor de la marca *MakeBlock* descrito en el Capítulo 3. La plataforma experimental mostrada en la Fig. 5.2 está compuesta por una computadora personal con el sistema operativo Windows 7, conectada a una tarjeta de Adquisición de Datos Quanser Consulting Q2-USB a través de un puerto USB. La tarjeta de Adquisición permite leer las mediciones de un codificador óptico acoplado a un servomotor de la marca *MakeBlock* 180 descrito en el capítulo 3 que es accionado por un circuito integrado amplificador lineal LM675 de *Texas Instruments*. El motor acciona un disco metálico de inercia. La señal de entrada al amplificador LM675, que corresponde a la señal de control analógica, se genera a través de la tarjeta de Adquisición de Datos. Los algoritmos de control están codificados en la plataforma de programación MATLAB/SIMULINK bajo el entorno de tiempo real QUARC de Quanser con un tiempo de muestreo de 1 ms y el método de integración Euler01. Se utiliza un aislador galvánico para proteger tanto a la computadora como a la tarjeta de adquisición de datos del amplificador de potencia.

El sistema dinámico de segundo orden que se presenta a continuación genera una señal de referencia r junto con sus derivadas temporales primera y segunda:

$$\ddot{r} = -2\zeta\omega_n\dot{r} - \omega_n^2 r + \omega_n^2 r_m \quad (5.60)$$

en donde se utiliza un factor de amortiguamiento $\zeta = 1$ para no generar sobreimpulsos en la señal de referencia y una frecuencia natural no amortiguada $\omega_n = 5$ para que la señal de referencia r sea lo más parecida posible a la referencia $r_m = 0,8 \sin(0,2t)$.

Las ganancias del observador (5.21) se obtienen mediante la fórmula de Ackerman [32]. Para ello se define el polinomio característico deseado que se representa por:

$$P_{do}(s) = s^2 + 2\zeta_o\omega_{no} + \omega_{no}^2 \quad (5.61)$$

donde el término $\zeta_o = 1$ representa el factor de amortiguamiento y $\omega_{no} = 80$ la frecuencia

natural no amortiguada del observador. La fórmula de Ackerman puede calcularse utilizando el comando $acker(A', B', J)$ en el editor de *MATLAB*. Igualando el polinomio característico (5.61) a (5.23) se obtiene:

$$\begin{aligned} 2\zeta_0\omega_{no} &= \gamma_1 = 160 \\ \omega_{no}^2 &= \gamma_2 = 6400 \end{aligned} \quad (5.62)$$

En la Fig. 5.3 se muestra el diagrama esquemático del algoritmo de control por Rechazo Activo de Perturbaciones y el Observador de estados. Como se puede observar en el diagrama y de acuerdo al algoritmo ADRC (5.13), es necesario tener el conocimiento a priori de la ganancia de entrada la cual es de $b = 12.2809$.

5.4.2. Resultados experimentales de la sintonización del ADRC utilizando el algoritmo PSO

Existe una gran cantidad de técnicas de sintonización de controladores para sistemas lineales como lo son la asignación de polos, el método de Ziegler y Nichols, y técnicas de sintonización óptimo como el Regulador Cuadrático Lineal entre otras [32, 34, 33, 31]. Sin embargo, la sin-

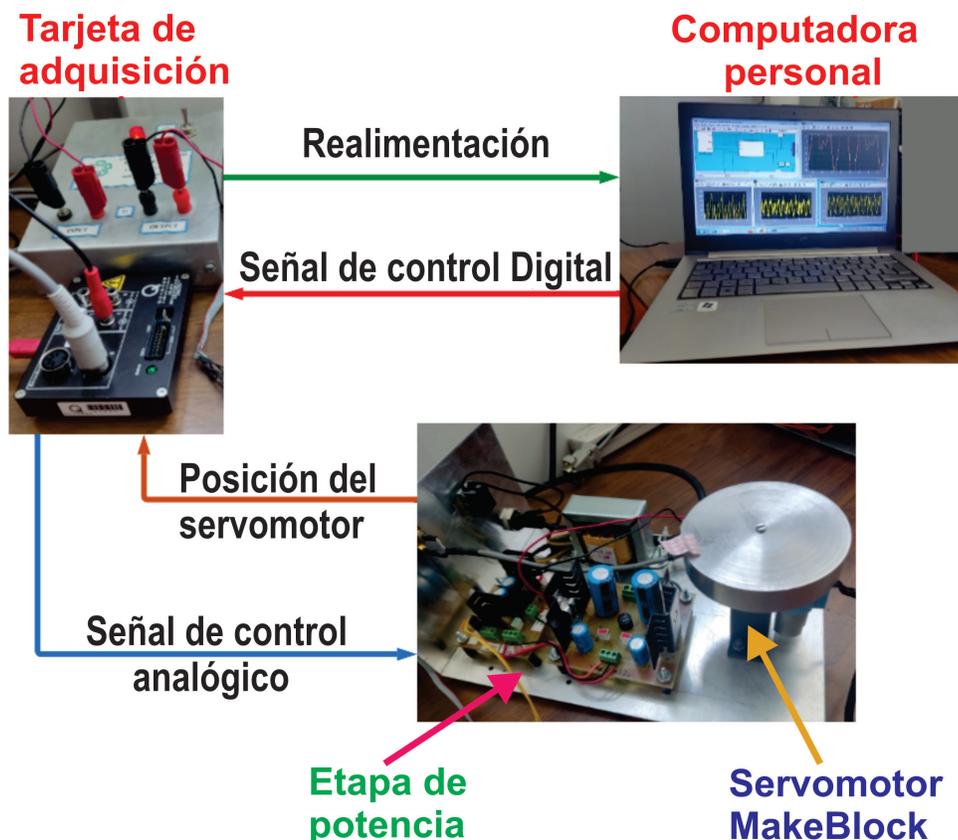


Figura 5.2: Plataforma experimental para la implementación del ADRC.

tonización de un algoritmo ADRC para obtener un rendimiento óptimo mediante el empleo de las técnicas antes mencionadas no es una tarea trivial, sobre todo si la función de desempeño contiene términos no cuadráticos. Lo anterior se debe a que el ADRC requiere la sintonización simultánea de las ganancias del controlador más las del observador de perturbaciones. Una manera de abordar este problema es mediante el empleo de técnicas metaheurísticas como el algoritmo PSO el cual permite realizar una sintonización óptima bajo un criterio de desempeño y puede emplear funciones de desempeño no cuadráticas.

Sintonización del ADRC utilizando el algoritmo PSO

Las ganancias α_{n1} , α_{n2} del controlador u_n en la ecuación (5.16) y la frecuencia de corte β del Observador de Perturbaciones en la ecuación (5.11) son sintonizadas mediante los algoritmos ω -PSO (4.7), PSO-Fraccionario (4.9) y PSO-AWDV (4.18). Las partículas en los algoritmos PSO se definen como:

$$z_n = [\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \beta]^T \quad (5.63)$$

y la función de desempeño utilizada para la optimización está dada por:

$$J(z_n) = \int_0^T \left(w_1|e| + w_2|\dot{e}| + w_3|u| + w_4\left|\frac{du}{dt}\right| \right) dt \quad (5.64)$$

donde e y \dot{e} son el error de seguimiento y el error de velocidad del sistema dinámico (5.19) en lazo cerrado con (5.25) respectivamente, u es la señal de control (5.13) y el último término es su derivada temporal. Los términos w_i , con $i = 1, \dots, 4$, representan un peso en cada uno de los elementos de la función de desempeño, estos permiten dar más o menos importancia a cada uno de los términos de la integral. En este caso, el considerar a la señal de control en la función de

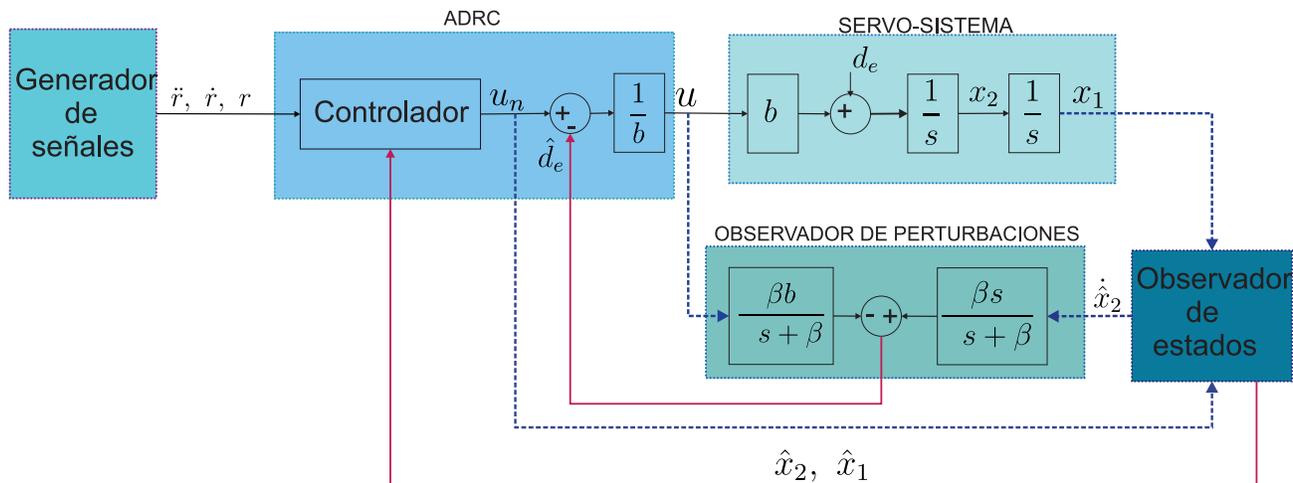


Figura 5.3: Diagrama de bloques del ADRC.

desempeño permite evitar un consumo excesivo de energía, y la derivada de la señal de control permite reducir el impacto del ruido de medición en el sistema en lazo cerrado. Si dicho término no se tiene en cuenta, entonces β puede tomar valores elevados los cuales producen altos niveles de castaño en la señal de control disminuyendo así el rendimiento del sistema en lazo cerrado.

El proceso de optimización para la sintonización de los parámetros α_{n1} , α_{n2} y β sigue los siguientes pasos:

- Condiciones de simulación dinámica: para realizar la simulación dinámica del servomotor CD empleado en el procedimiento de optimización 2 se considera el modelo (5.19) bajo las siguientes condiciones:
 - Se añade a la simulación un cuantificador con un intervalo de 1440 para simular la salida de un codificador incremental óptico utilizado para medir la posición angular del servomotor.
 - En la simulación se consideran los valores a y b del modelo del servosistema (A.18), obtenidos mediante el algoritmo de mínimos cuadrados presentado en el Apéndice B.
 - Las ganancias empleadas en el observador de estados (5.21) corresponden a las dadas en (5.62).
 - La perturbación d se simula de acuerdo con el siguiente modelo:

$$d = 0.05 \sin 2t + 0.1 \sin 0.2t + 0.1 \sin 0.5t + 0.1 \quad (5.65)$$

Este último representa una perturbación genérica y no corresponde necesariamente a las perturbaciones encontradas en los servomotores reales. Sin embargo, ayuda a ajustar el algoritmo ADRC.

- La simulación dinámica es realizada a partir del algoritmo presentado en el Apéndice C.
- Definición del problema de optimización: definir el conjunto de soluciones factibles empleando las restricciones sobre $\alpha_{n1} > 0$, $\alpha_{n2} > 0$ asociadas al polinomio característico (5.18), y β , que es una constante positiva según (5.10), y cuya restricción impuesta por el análisis de estabilidad corresponde a la desigualdad (5.42):

$$\Omega = [\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \beta | \alpha_{n1} \in (0, \infty), \alpha_{n2} \in (0, \infty), \beta \in (0, \gamma_1)] \quad (5.66)$$

Se realiza una simulación dinámica de 6 segundos del modelo del servomotor en lazo cerrado con el algoritmo ADRC con cada partícula generada por los algoritmos PSO. Las condiciones

iniciales del modelo del servomotor y del observador de estados son $x(0) = [1, 1]^T$, $\hat{x}(0) = [1, 1]^T$, la referencia r y su derivadas temporales \dot{r} y \ddot{r} utilizadas en la ley de control (5.13) fueron generadas mediante el sistema dinámico (5.60). Se utiliza el método de integración Euler01 con un tiempo de muestreo de 1 ms. Durante la simulación se almacenan en un archivo las señales e , \dot{e} , y u . Posteriormente se calcula la derivada temporal $\frac{du}{dt}$. Las señales anteriores permiten calcular la función de desempeño (5.64) y los términos pBest y gBest utilizados en los algoritmos PSO (4.7), (4.9) y (4.18).

Se inicia la búsqueda de las partículas (5.63) con los algoritmos PSO (4.7), (4.9) y (4.18). Con los pesos $w_1 = 100$, $w_2 = 10$, $w_3 = 0.1$ y $w_4 = 0.1$ en la función de desempeño (5.64).

Los parámetros de los algoritmos PSO se establecen utilizando el paquete IRACE [107]. En el caso del algoritmo ω -PSO los parámetros son $\omega = 0,7$, $c_1 = 0,7$, $c_2 = 0,9$, $N = 23$ y un número máximo de iteraciones $MI = 180$. En el caso del algoritmo FPSO los parámetros son $c_{1i} = 0,9$, $c_{1f} = 0,7$, $c_{2i} = 0,9$, $c_{2f} = 0,8$, $N = 18$ y un número máximo de iteraciones $MI = 180$. Los parámetros del algoritmo PSO-AWDV son $c_{1i} = 0,9$, $c_{1f} = 0,5$, $c_{2i} = 0,9$, $c_{2f} = 0,8$, $N = 16$ e $MI = 180$. Cada ejecución del algoritmo se detiene después de $(N \times MI)$ evaluaciones. Se realiza una prueba estadística con 30 ejecuciones de cada algoritmo para asegurar que se obtienen resultados óptimos de las partículas (5.63). Se emplea procesamiento paralelo con 6 núcleos de una computadora personal que funciona a 4,5GHz, las 30 ejecuciones de cada algoritmo se ejecutan en 26 min.

La tabla 5.1 muestra los resultados para cada algoritmo PSO. Se observa que los tres algoritmos PSO (4.8), (4.10) y (4.18) produjeron valores mínimos de la función de desempeño muy parecidos al igual que las ganancias sintonizadas las cuales muestran resultados similares. Sin embargo, tomando a 4 cifras significativas se considera al algoritmo ω -PSO con una pequeña diferencia a los demás, por lo que en este caso se seleccionan los resultados obtenidos de dicho algoritmo. En la Tabla 5.2 se presentan las ganancias seleccionadas.

	ω -PSO	FPSO	PSO-AWDV
α_{n1}	32.62	32.50	32.2454
α_{n2}	307.42	305.69	301.6532
β	71.89	72.0607	72.1876
Evaluación del mínimo de $J(z_n)$	29.9782	29.9823	29.9797
Evaluación de la mediana de $J(z_n)$	29.9888	30.0119	29.9837
Evaluación de la media de $J(z_n)$	29.9985	30.0090	29.9893
Evaluación de la desviación estándar de $J(z_n)$	$2.28e^{-2}$	$2.20e^{-2}$	$1.47e^{-2}$

Tabla 5.1: Resultados de la sintonización

Ganancias	ω -PSO
α_{n1}	32.62
α_{n2}	307.42
β	71.89

Tabla 5.2: Ganancias utilizadas en la implementación del algoritmo ADRC.

Resultados experimentales de la implementación del ADRC sintonizado por el algoritmo PSO

La Fig. 5.4 muestra los resultados de la salida en posición del seguimiento de trayectoria del servomotor de CD. Las ganancias producen un seguimiento razonable de la señal de referencia. La Fig. 5.6 reporta la señal de error de seguimiento la cual muestra que los errores son menores a ± 0.02 rad. La Fig. 5.5 muestra la señal de control del algoritmo ADRC donde se aprecian pequeños picos y además se observa un pequeño castaño, sin embargo, esta no supera los límites de voltaje $\pm 7.4V$ del amplificador de potencia.

5.5. Análisis de los resultados experimentales del ADRC sintonizado por el algoritmo PSO

Para medir el rendimiento del algoritmo ADRC implementado en el servomotor de CD, se utilizaron los siguientes índices: la Integral del valor Absoluto del Error (*IAE*), la Integral del

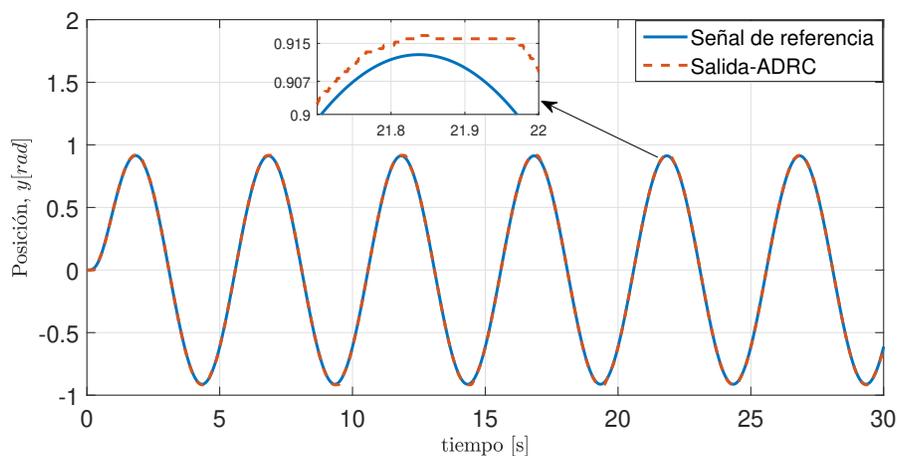


Figura 5.4: Señal de Referencia r vs Señal de salida del servomotor y utilizando el ADRC (5.11) correspondiente al conjunto de ganancias mostradas en la Tabla 5.2. Sintonización con el algoritmo $\omega - PSO$

Valor Absoluto de Control (IAC) y la Integral del Valor Absoluto de la Variación de Control ($IAVC$). Estos índices se expresan matemáticamente de la siguiente manera:

$$IAE = \int_{T_1}^{T_2} \bar{k} |e(t)| dt \quad (5.67)$$

$$IAC = \int_{T_1}^{T_2} |u(t)| dt \quad (5.68)$$

$$IAVC = \int_{T_1}^{T_2} \left| \frac{du(t)}{dt} \right| dt \quad (5.69)$$

en donde \bar{k} representa un factor de escalamiento y $\{T_1, T_2\}$ definen un intervalo de tiempo durante el cual se calculan los índices de desempeño. Para el estudio comparativo se utiliza un valor de $\bar{k} = 100$ con intervalos de tiempo $T_2 - T_1 = 25s - 20s = 5s$.

La tabla 5.3 muestra los índices de desempeño generados por el ADRC. Como se puede observar, el índice IAE es relativamente pequeño lo cual indica un buen seguimiento de la señal de referencia, corroborado por los resultados mostrados en las Fig. 5.4 y Fig. 5.6. Por otro lado, los índices IAC e $IACV$ reflejan las variaciones en la señal de control tales como los pequeños castaños observados en la Fig. 5.5.

Es importante mencionar que en la sintonización de las ganancias mediante los algoritmos PSO existe un compromiso entre error de seguimiento y la señal de control, es decir, si se requiere mejorar el índice IAE , habría que asignar mayor peso a las variables correspondientes a la señal del error en la función de desempeño (5.64) utilizada en el algoritmo de sintonización. De la misma manera, si se desea reducir el costo de energía se debe dar valores más elevados

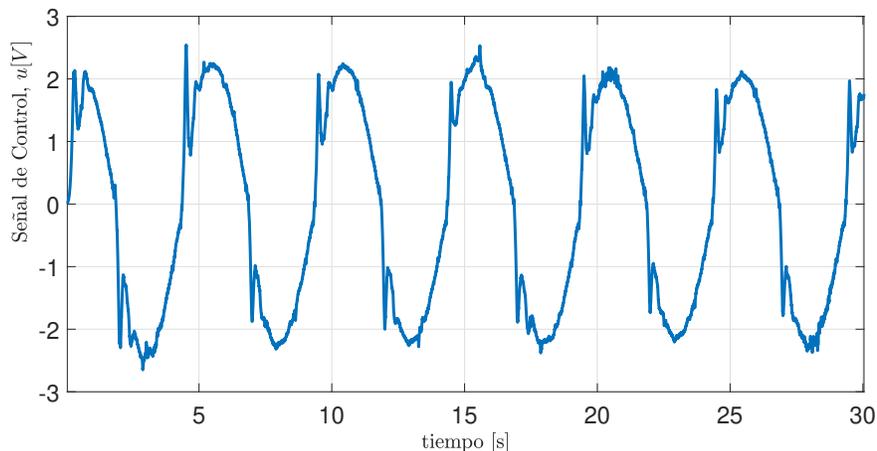


Figura 5.5: Señal de Control ADRC u . Sintonización con el algoritmo $\omega - PSO$.

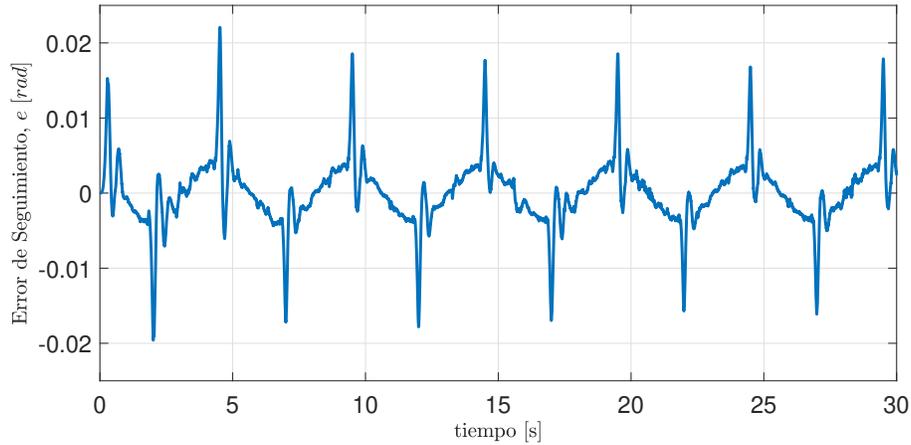


Figura 5.6: Error de seguimiento e del ADRC. Sintonización con el algoritmo $\omega - PSO$

a los pesos correspondientes a la señal de control. Sin embargo, es interesante tener en cuenta que al mejorar el índice IAE podríamos afectar de manera notable los índices IAC e $IACV$. Como se observa en estos resultados, no es una tarea trivial encontrar un balance en los índices de desempeño al utilizar un único criterio.

Ley de control	IAE	IAC	$IACV$
ADRC	1.376	7.108	38.07

Tabla 5.3: Desempeño del ADRC empleando la sintonización mediante el algoritmo PSO.

5.6. Conclusiones

Los experimentos realizados para evaluar el desempeño de el algoritmo de Control por Rechazo Activo de Perturbaciones dotado de un observador de Perturbaciones y un Observador de estados permitieron observar las prestaciones de este enfoque, en donde el hecho de que sólo se requieren medidas de entrada y salida, además del conocimiento de la ganancia de entrada del servosistema, lo hace especialmente atractivo en entornos prácticos y educativos. Además, los experimentos permitieron estudiar el efecto del Observador de Perturbaciones en el desempeño del controlador demostrando así su relevancia para mejorar la eficiencia y robustez del sistema en lazo cerrado.

Con respecto a la sintonización del ADRC por medio del algoritmo PSO, los resultados reportados en este capítulo muestran que la sintonización producida por el algoritmo de Optimización por Enjambre de Partículas (PSO) es capaz de generar ganancias óptimas en un algoritmo de

Control por Rechazo Activo de Perturbaciones. Estas producen un buen rendimiento en un prototipo educativo de bajo costo. Además, la función de desempeño propuesta así como el uso de un modelo de servomotor realista, el cual incluye el modelo de un codificador óptico, mejoran el procedimiento de optimización. Una característica destacada del procedimiento de optimización propuesto es que tiene en cuenta las condiciones de estabilidad del algoritmo ADRC para definir el conjunto de soluciones factibles. También cabe destacar que los tres algoritmos PSO producen resultados similares, sin embargo, el algoritmo ω -PSO generó el valor más bajo de la función de desempeño.

Capítulo 6

Control adaptable robusto que emplea la modificación- e y proyección suave de parámetros

El objetivo de este capítulo es presentar dos propuestas de algoritmos de control adaptable robusto ante perturbaciones desarrolladas para un servosistema. Estas emplean simultáneamente la modificación- e y una proyección suave para confinar los parámetros estimados dentro de un conjunto convexo predeterminado.

La primera propuesta del algoritmo de control adaptable utiliza un vector regresor construido mediante señales medidas el cual se denomina CADASM-VR (Control Adaptable Acotado con Señales Medidas en el Vector Regresor). En el segundo algoritmo el vector regresor contiene señales de la trayectoria deseada las cuales están libres de ruido de medición, este algoritmo se denomina CADASD-VR (Control Adaptable Acotado con Señales Deseadas en el Vector Regresor).

Se presentan los resultados experimentales obtenidos mediante un algoritmo clásico de control adaptable con modificación- e así como de los dos algoritmos antes mencionados. Los tres algoritmos se sintonizan manualmente. También se realiza un experimento adicional en el que el algoritmo CADASM-VR se sintoniza mediante el algoritmo PSO.

El capítulo se distribuye de la siguiente manera: en la Sección 6.1 se presentan los preliminares sobre control adaptable. En la Sección 6.2 se expone el algoritmo de control adaptable robusto utilizando la modificación- e en el mecanismo de adaptación. En la Sección 6.3 se describen las dos propuestas del algoritmo control adaptable acotado. En la Sección 6.4 se realiza el análisis de estabilidad en lazo cerrado de ambos algoritmos. En la Sección 6.5 se muestran los resultados experimentales de los algoritmos de control adaptables propuestos. En la Sección 6.6 se presenta el análisis de desempeño de los algoritmos de control adaptable. Finalmente en la Sección 6.7 se dan las conclusiones del capítulo.

6.1. Preliminares

La teoría de control adaptable desde los años 1950 a la actualidad se ha encargado de diseñar algoritmos de control que se ajusten conforme a los cambios en los parámetros de un sistema dinámico, o cuando estos se desconocen pero son constantes. En [108] se define un controlador adaptable como un algoritmo de control con parámetros ajustables y un mecanismo encargado del ajuste de estos. En la Fig. 6.1 se muestra la estructura de un algoritmo de control adaptable la cual se divide en dos lazos, el primer lazo se refiere al mecanismo de identificación de parámetros en línea y el segundo lazo corresponde al controlador con ganancias ajustables y un bucle de realimentación. El proceso de identificación y el controlador pueden diseñarse para resolver el problema de seguimiento de trayectoria o el problema de regulación.

La combinación del controlador y el mecanismo de identificación, el cual corresponde a la ley de adaptación, da lugar a dos enfoques diferentes. El primer enfoque se refiere a un controlador adaptable indirecto en donde los parámetros de la planta se estiman en línea y son utilizados de manera explícita en la ley de control. En el segundo enfoque denominado control adaptable directo el modelo de la planta se parametriza en términos de las ganancias del controlador las cuales se estiman directamente sin cálculos intermedios que impliquen estimaciones de los parámetros de la planta [109].

En la década de los 70's surgieron dudas sobre la capacidad de un algoritmo de control adaptable para mantener la estabilidad de un sistema en lazo cerrado ante perturbaciones ya que fácilmente se volvía inestable en presencia de estas [110]. Lo anterior dio pie al desarrollo de modificaciones a los algoritmos de control adaptable para darles robustez ante el efecto de dinámicas no modeladas y perturbaciones [111, 112]. Se propusieron y analizaron varios rediseños y modificaciones que dieron lugar a un enfoque conocido como control adaptable robusto [113, 114, 109]. Dentro de las propuestas de modificación de la ley de control adaptable se encuentra la conocida modificación- ϵ [24, 115] que añade un término extra a la ley de control el cual depende del error de seguimiento .

6.2. Control Adaptable Robusto

En la literatura se encuentran diferentes métodos que permiten mejorar la robustez de los algoritmos de control clásico. Entre ellos se encuentran el método de la zona muerta y el método de proyección de parámetros [116]. El método de la zona muerta evita la actualización continua de los parámetros en respuesta a pequeños errores, es decir, impide la adaptación cuando la norma del error de seguimiento cae por debajo de un determinado umbral. Lo anterior evita que pequeños errores debidos al ruido en las mediciones causen ajustes innecesarios en los parámetros

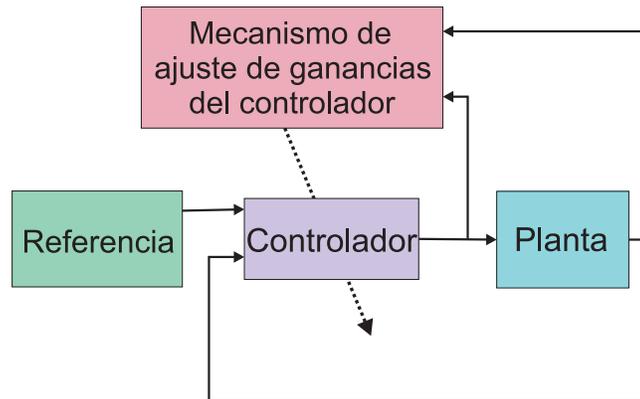


Figura 6.1: Diagrama esquemático de un controlador adaptable.

del controlador. Además, proporciona una respuesta más suave del sistema ya que solo cambios significativos en el error desencadenan ajustes en los parámetros. El método de proyección es una técnica que permite garantizar que los parámetros permanezcan en un rango predeterminado. Lo anterior implica ajustar los parámetros estimados de manera que se proyecten dentro de un conjunto convexo. Si en algún momento la actualización de los parámetros los lleva fuera de este conjunto, estos se proyectan para que permanezcan dentro de este último.

Por otro lado, existen técnicas de modificación robusta basadas en el principio de añadir un término adicional a la ley de adaptación para evitar que los parámetros estimados crezcan indefinidamente, esto último se conoce como deriva paramétrica. Dos de estas técnicas son la modificación- σ y modificación- e , que en inglés se denominan σ -modification y e -modification respectivamente. La modificación- e fue desarrollada por Narendra y Annaswamy [117] a partir de la investigación realizada por Ioannou y Kokotovic en donde estudiaron la inestabilidad de los sistemas adaptables ante dinámicas no modeladas. La modificación- e añade un mecanismo de amortiguamiento en la ley de adaptación para limitar los parámetros estimados. La modificación- σ se utiliza para mitigar la inestabilidad que puede surgir debido a la acumulación de grandes errores o la variabilidad en los parámetros del sistema. Esta técnica añade a la ley de adaptación un término de penalización proporcional al valor actual de los parámetros estimados, lo que ayuda a regular su crecimiento y a mantener la estabilidad del sistema.

En condiciones ideales uno de los objetivos más importantes de un controlador adaptable es permitir que el error de seguimiento converja a cero. Sin embargo, el efecto de las perturbaciones y del ruido de medición impide alcanzar este objetivo al producir deriva paramétrica. Por lo tanto, de acuerdo a lo mencionado en párrafos anteriores, la técnica que permite contrarrestar el fenómeno de la deriva paramétrica es la modificación- e [24, 115], que añade un término extra dependiente del error de seguimiento a la ley de control. Lo anterior, motivó a que este trabajo de tesis se enfoque en el control adaptable con modificación- e . Esta modificación fue empleada

en la ley de adaptación (3.43) reportada en la Subsección 3.3.2.

6.3. Propuestas de algoritmos de control adaptable con modificación- e y proyección suave de parámetros

Como se mencionó en secciones anteriores, la solución para evitar la deriva paramétrica es el empleo de la modificación- e . Sin embargo, a pesar de eliminar la deriva paramétrica y garantizar la convergencia del error de seguimiento a cero, en la práctica existe otra problemática referente a la respuesta transitoria de los controladores adaptables la cual puede ser demasiado agresiva. Una forma de afrontar este problema es el empleo de técnicas de proyección de parámetros en la ley adaptable [23, 24, 18]. El objetivo de la proyección es limitar los valores producidos por las estimaciones de los parámetros a límites conocidos. Esta técnica se ha utilizado en [26] para el control anti-caos de un servo-motor. Otro enfoque utiliza una proyección de parámetros basada en la función arcotangente para un controlador adaptable de inmersión e invariancia aplicado a un motor lineal [27]. Un inconveniente del controlador anterior es que no hay un mecanismo explícito para contrarrestar el efecto de las perturbaciones en los parámetros estimados. La técnica de proyección utilizada en este enfoque unicamente utiliza valores máximos y mínimos de los parámetros para limitar sus estimados. Sin embargo, las perturbaciones que afectan al sistema en lazo cerrado pueden producir que los estimados permanezcan en alguno de los límites máximos o mínimos lo cual provoca que se pierda la capacidad de adaptación del controlador. Este enfoque se presentó por primera vez para el control adaptable de plantas lineales de orden n en [28]. Otro controlador adaptable interesante se presenta en [29]. En este caso los autores emplean la proyección de parámetros propuesta en [30] y solo se presentan resultados de simulación numérica.

Los resultados anteriores motivaron la propuesta de nuevos algoritmos de control adaptable robusto. La característica clave del enfoque propuesto es el uso de una ley de adaptación, que se basa en la modificación- e estándar, pero añade una función de saturación suave para limitar los valores de las estimaciones de los parámetros. Este nuevo enfoque no depende de las técnicas estándar de proyección de parámetros [25]. De este modo, el controlador propuesto es robusto frente a perturbaciones y al mismo tiempo la señal de control no presenta sobretiros grandes. Cabe señalar que la ley de actualización propuesta no se ha descrito en ninguna referencia hasta la fecha. Además, se proponen dos algoritmos de control adaptable. En la primera propuesta el vector regresor está compuesto por señales medidas como lo son la salida en posición y la velocidad del servosistema. Por otro lado, en la segunda propuesta el vector regresor está compuesto por señales deseadas, es decir, la velocidad y la aceleración de la trayectoria deseada.

Los algoritmos de control adaptable propuestos se implementan en un servosistema compuesto por un motor de CD cuyo modelo (3.19) se escribe alternativamente de la manera siguiente:

$$\theta_1 \ddot{y} + \theta_2 \dot{y} = u + \bar{d} \quad (6.1)$$

con:

$$\theta_2 = \frac{a}{b} > 0; \theta_1 = \frac{1}{b} > 0; \bar{d} = \frac{d}{b}; |\bar{d}| \leq D \quad (6.2)$$

en donde a y b representa la fricción viscosa y la ganancia de entrada del motor respectivamente. Mientras que d representa las perturbaciones externas del servosistema.

6.3.1. Algoritmo CADASM-VR

Para la primer propuesta del algoritmo de control adaptable con modificación-*e* acotado que emplea señales medidas en el vector regresor se propone la siguiente ley de control para el servosistema (6.1) suponiendo que θ_1 y θ_2 son conocidos:

$$u = \theta_1 \dot{v} + \theta_2 v + K_d r_1 \quad (6.3)$$

en donde

$$\begin{aligned} v &= \dot{y}_d + \epsilon(y_d - y) \\ \dot{v} &= \ddot{y}_d + \epsilon(\dot{y}_d - \dot{y}) \\ e &= y_d - y \\ r_1 &= v - \dot{y} = \dot{e} + \epsilon e. \end{aligned} \quad (6.4)$$

con $\epsilon > 0$, y_d , \dot{y}_d y \ddot{y}_d la señal de referencia y su primera y segunda derivadas temporales respectivamente. De lo anterior se tiene que:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= v - r_1 \\ \ddot{y} &= \dot{v} - \dot{r}_1 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Sustituyendo la ley de control que emplea parámetros conocidos (6.3) en el modelo de la

planta (6.1) y utilizando las igualdades (6.5) se obtiene el sistema en lazo cerrado:

$$\begin{aligned}
 \theta_1 \ddot{y} + \theta_2 \dot{y} - \bar{d} &= \theta_1 \dot{v} + \theta_2 v + K_d r_1 \\
 \theta_1 (\dot{v} - \dot{r}_1) + \theta_2 (v - r_1) - \bar{d} &= \theta_1 \dot{v} + \theta_2 v + K_d r_1 \\
 -\theta_1 \dot{r}_1 - \theta_2 r_1 + \theta_1 \dot{v} + \theta_2 v - \bar{d} &= \theta_1 \dot{v} + \theta_2 v + K_d r_1 \\
 \theta_1 \dot{r}_1 + \theta_2 r_1 - \theta_1 \dot{v} - \theta_2 v + \bar{d} &= -\theta_1 \dot{v} - \theta_2 v - K_d r_1 \\
 \theta_1 \dot{r}_1 + \theta_2 r_1 + K_d r_1 &= -\bar{d}
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

El cual tiene el siguiente polinomio característico :

$$\theta_1 s + \theta_2 + K_d = 0$$

el cual es Hurwitz estable si $K_d + \theta_2 > 0$.

Por otro lado, considérese la ley de control propuesta (6.3) cuando emplea parámetros estimados, es decir:

$$u = \hat{\theta}_1 \dot{v} + \hat{\theta}_2 v + \underbrace{K_d r_1}_{R_1} \tag{6.7}$$

Notar que el término R_1 , que corresponde a la parte de realimentación del controlador (6.7), es equivalente a un controlador Proporcional Derivativo estándar, es decir:

$$K_d r_1 = K_d (\dot{e} + \epsilon e) = K_d \epsilon e + K_d \dot{e} \tag{6.8}$$

las ganancias proporcional y derivativa corresponden a $k_p = K_d \epsilon$ y $k_d = K_d$ respectivamente. Realizando el mismo procedimiento que en (6.6), pero sustituyendo (6.7) en (6.1) y utilizando (6.5) se obtiene la siguiente dinámica de error:

$$\begin{aligned}
 \theta_1 \ddot{y} + \theta_2 \dot{y} - \bar{d} &= \hat{\theta}_1 \dot{v} + \hat{\theta}_2 v + K_d r_1 \\
 \theta_1 \dot{r}_1 &= -\theta_2 r_1 - \bar{d} - K_d r_1 - \tilde{\theta}_1 \dot{v} - \tilde{\theta}_2 v
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

donde

$$\tilde{\theta} = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_1 \\ \tilde{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 - \theta_1 \\ \hat{\theta}_2 - \theta_2 \end{bmatrix} \tag{6.10}$$

son los errores paramétricos. Reescribiendo la ley de control propuesta (6.7) produce:

$$u = \hat{\theta}^\top \phi_m + K_d r_1 \tag{6.11}$$

con

$$\begin{aligned}\phi_m &= \begin{bmatrix} \dot{v} & v \end{bmatrix}^\top \\ \hat{\theta} &= \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 & \hat{\theta}_2 \end{bmatrix}^\top\end{aligned}\tag{6.12}$$

en donde $\hat{\theta}$ es el vector de parámetros estimados y ϕ_m es un vector regresor.

6.3.2. Algoritmo CADASD-VR

Como ya se ha mencionado, en esta segunda propuesta se utilizan señales conocidas libres de ruido de medición que corresponden a la velocidad y aceleración de la trayectoria deseada. Se propone el siguiente algoritmo de control suponiendo conocidos los parámetros del servosistema (6.1):

$$u = \underbrace{k_P e + K r_2}_{\text{Realimentación}} + \underbrace{\theta_1 \ddot{y}_d + \theta_2 \dot{y}_d}_{\text{Prealimentación}}\tag{6.13}$$

con

$$\begin{aligned}e &= y_d - y \\ r_2 &= e + \dot{e} \\ \dot{r}_2 &= \dot{e} + \ddot{e} \\ \dot{e} &= r_2 - e\end{aligned}\tag{6.14}$$

La estructura del controlador está dada por la combinación de una realimentación y una prealimentación. Vale la pena señalar que la parte de realimentación del controlador (6.13) es equivalente a un controlador Proporcional Derivativo estándar, es decir:

$$k_P e + K r_2 = k_P e + K(\dot{e} + e) = (k_P + K)e + K\dot{e}\tag{6.15}$$

las ganancias proporcional y derivativa corresponden a $k_p = k_P + K$ y $k_d = K$ respectivamente.

Ahora bien, reescribiendo la ley de control (6.13) utilizando los parámetros estimados $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ de θ_1 y θ_2 produce la ley de control siguiente:

$$u = \underbrace{k_P e + K r_2}_{\substack{\text{Realimentación} \\ \text{no adaptable}}} + \underbrace{\hat{\theta}_1 \ddot{y}_d + \hat{\theta}_2 \dot{y}_d}_{\substack{\text{Prealimentación} \\ \text{adaptable}}}\tag{6.16}$$

Sin embargo, note que la adaptación en los parámetros solo se aplica en la prealimentación lo cual permite mantener a la realimentación libre de variaciones de parámetros estimados. Este hecho contrasta con la ley de control adaptable (6.7) en donde la realimentación sí depende de parámetros estimados.

Sustituyendo (6.16) en (6.1) se obtiene la dinámica en lazo cerrado:

$$\theta_1 \ddot{y} + \theta_2 \dot{y} = Kr_2 + k_P e + \hat{\theta}_1 \ddot{y}_d + \hat{\theta}_2 \dot{y}_d + \bar{d} \quad (6.17)$$

Sumando y restando $\theta_1 \ddot{y}_d$ y $\theta_2 \dot{y}_d$ del lado derecho en (6.17), considerando el error de seguimiento e , su derivada temporal y los errores paramétricos definidos en (6.14) y (6.10) respectivamente, se obtiene:

$$\begin{aligned} \theta_1 \ddot{y} \pm \theta_1 \ddot{y}_d + \theta_2 \dot{y} \pm \theta_2 \dot{y}_d &= Kr_2 + k_P e + \hat{\theta}_1 \ddot{y}_d + \hat{\theta}_2 \dot{y}_d + \bar{d} \\ \theta_1 (\ddot{y} - \ddot{y}_d) + \theta_2 (\dot{y} - \dot{y}_d) + \theta_1 \ddot{y}_d + \theta_2 \dot{y}_d &= Kr_2 + k_P e + \hat{\theta}_1 \ddot{y}_d + \hat{\theta}_2 \dot{y}_d + \bar{d} \\ -\theta_1 \ddot{e} - \theta_2 \dot{e} + \theta_1 \ddot{y}_d + \theta_2 \dot{y}_d &= Kr_2 + k_P e + \hat{\theta}_1 \ddot{y}_d + \hat{\theta}_2 \dot{y}_d + \bar{d} \\ \theta_1 \ddot{e} + \theta_2 \dot{e} - \theta_1 \ddot{y}_d - \theta_2 \dot{y}_d &= -Kr_2 - k_P e - \hat{\theta}_1 \ddot{y}_d - \hat{\theta}_2 \dot{y}_d - \bar{d} \\ \theta_1 \ddot{e} + \theta_2 \dot{e} &= \theta_1 \ddot{y}_d + \theta_2 \dot{y}_d - Kr_2 - k_P e - \hat{\theta}_1 \ddot{y}_d - \hat{\theta}_2 \dot{y}_d - \bar{d} \\ \theta_1 \ddot{e} + \theta_2 \dot{e} &= -Kr_2 - k_P e - \tilde{\theta}_1 \ddot{y}_d - \tilde{\theta}_2 \dot{y}_d - \bar{d} \end{aligned} \quad (6.18)$$

Sustituyendo $\ddot{e} = \dot{r}_2 - \dot{e}$ y $\dot{e} = r_2 - e$, definidos en (6.14), en (6.18) produce:

$$\theta_1 \dot{r}_2 + \theta_2 r_2 = \theta_1 \dot{e} + \theta_2 e - \tilde{\theta}_1 \dot{y}_d - \tilde{\theta}_2 \dot{y}_d - Kr_2 - k_P e - \bar{d} \quad (6.19)$$

Se definen:

$$\phi_d = \begin{bmatrix} \ddot{y}_d & \dot{y}_d \end{bmatrix}^\top \quad (6.20)$$

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 \end{bmatrix}^\top \quad (6.21)$$

$$\Phi = \theta_1 \dot{e} + \theta_2 e \quad (6.22)$$

Las definiciones anteriores permiten escribir (6.19) de la siguiente manera:

$$\theta_1 \dot{r}_2 = -\theta_2 r_2 + \Phi - \phi_d^\top \tilde{\theta} - Kr_2 - k_P e - \bar{d} \quad (6.23)$$

donde $\tilde{\theta}$ está definido en (6.10).

6.3.3. Propuesta de leyes de adaptación

De acuerdo con las propuestas de los algoritmos de control adaptable (6.7) y (6.16), en esta sección se presentan las leyes de adaptación propuestas en esta tesis.

Considerando la siguiente suposición :

Suposición 1 *Los parámetros $\theta_i, i = 1, 2$ tienen límites superiores e inferiores conocidos tales*

que:

$$0 < \theta_{\min i} \leq \theta_i \leq \theta_{\max i} \quad (6.24)$$

Se define la siguiente función:

$$\begin{aligned} \theta_i &= f(\eta_i) = \sigma_i[1 + \tanh(\eta_i)] + \theta_{\min i} \\ \sigma_i &= \frac{1}{2}[\theta_{\max i} - \theta_{\min i}], \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (6.25)$$

para $\theta_i, \eta_i, i = 1, 2$. La función (6.25) garantiza que para cualquier valor de η_i los valores de θ_i permanecen en un conjunto $\Omega_i = [\theta_{\min i}, \theta_{\max i}]$, $i = 1, 2$. La función $\tanh(\cdot)$ corresponde a la tangente hiperbólica. La función $f(\eta_i)$ motivará la propuesta de proyección de parámetros que se describe en los párrafos siguientes.

Dada la siguiente función:

$$V_{si} = \ln \cosh(\hat{\eta}_i) - \ln \cosh(\eta_i) - (\hat{\eta}_i - \eta_i) \tanh(\eta_i) \quad i = 1, 2 \quad (6.26)$$

la cual está relacionada con (6.25), es definida positiva con un mínimo $\hat{\eta}_i = \eta_i$ $i = 1, 2$. Lo anterior se demuestra observando que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{si}}{\partial \hat{\eta}_i} &= \tanh(\hat{\eta}_i) - \tanh(\eta_i) = 0 \Rightarrow \hat{\eta}_i = \eta_i \\ \frac{\partial^2 V_{si}}{\partial^2 \hat{\eta}_i} &= \operatorname{sech}(\hat{\eta}_i) \Rightarrow \operatorname{sech}(\hat{\eta}_i) > 0; |\hat{\eta}_i| < \infty \end{aligned} \quad (6.27)$$

Entonces, V_{si} tiene un mínimo en $\hat{\eta}_i = \eta_i$ y $V_{si}(\hat{\eta}_i) = 0$. Ahora bien, defínanse los errores paramétricos como:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_i &= \hat{\theta}_i - \theta_i \\ &= \sigma_i[1 + \tanh(\hat{\eta}_i)] + \theta_{\min i} - \sigma_i[1 + \tanh(\eta_i)] - \theta_{\min i} \\ &= \sigma_i[\tanh(\hat{\eta}_i) - \tanh(\eta_i)] \end{aligned} \quad (6.28)$$

donde $\hat{\theta}_i$ es un estimado de θ_i .

Teniendo en cuenta (6.25), el cálculo de la estimación $\hat{\theta}_i$ de θ_i para $i = 1, 2$ se realiza de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_i &= \sigma_i[1 + \tanh(\hat{\eta}_i)] + \theta_{\min i} \\ \sigma_i &= \frac{1}{2}[\theta_{\max i} - \theta_{\min i}], \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (6.29)$$

Entonces, la propuesta de la ley de adaptación para el algoritmo CADASM-VR (6.7) es la siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\eta}}_1 &= \delta_1 \dot{v} r_1 - \delta_1 \kappa |r_1| \hat{\theta}_1 \\ \dot{\hat{\eta}}_2 &= \delta_2 v r_1 - \delta_2 \kappa |r_1| \hat{\theta}_2\end{aligned}\tag{6.30}$$

mientras que la ley de adaptación para el algoritmo CADASD-VR (6.16) está dada por:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\eta}}_1 &= \delta_1 \dot{y}_d r_2 - \delta_1 \kappa |r_2| \hat{\theta}_1 \\ \dot{\hat{\eta}}_2 &= \delta_2 \dot{y}_d r_2 - \delta_2 \kappa |r_2| \hat{\theta}_2\end{aligned}\tag{6.31}$$

Es conveniente mencionar que la proyección de parámetros (6.29) se basa en la función (6.25) y mapea un estimado $\hat{\eta}_i$ en $\hat{\theta}_i$ perteneciente al conjunto $\Omega_i = [\theta_{\min i}, \theta_{\max i}]$, $i = 1, 2$.

6.4. Análisis de estabilidad

6.4.1. Análisis de estabilidad del algoritmo CADASM-VR

El análisis de estabilidad del sistema (6.1) en lazo cerrado con la ley de control (6.7) y la ley de adaptación (6.29)-(6.30) es realizado a partir de la siguiente propuesta de la función candidata de Lyapunov:

$$V_1 = \frac{1}{2} \theta_1 r_1^2 + \frac{\sigma_1}{\delta_1} V_{s1} + \frac{\sigma_2}{\delta_2} V_{s2}\tag{6.32}$$

con $\theta_1, \sigma_1, \sigma_2, \delta_1$ y δ_2 son constantes positivas.

Su derivada temporal es:

$$\dot{V}_1 = \theta_1 r_1 \dot{r}_1 + \frac{\sigma_1}{\delta_1} \frac{\partial V_{s1}}{\partial \hat{\eta}_1} \dot{\hat{\eta}}_1 + \frac{\sigma_2}{\delta_2} \frac{\partial V_{s2}}{\partial \hat{\eta}_2} \dot{\hat{\eta}}_2\tag{6.33}$$

Sustituyendo (6.27) y (6.9) en (6.33) produce:

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= \theta_1 r_1 \dot{r}_1 + \frac{\sigma_1}{\delta_1} (\tanh(\hat{\eta}_1) - \tanh(\eta_1)) \dot{\hat{\eta}}_1 + \frac{\sigma_2}{\delta_2} (\tanh(\hat{\eta}_2) - \tanh(\eta_2)) \dot{\hat{\eta}}_2 \\ \dot{V}_1 &= r_1 (-\theta_2 r_1 - \bar{d} - K_d r_1 - \tilde{\theta}_1 \dot{v} - \tilde{\theta}_2 v) + \frac{1}{\delta_1} \tilde{\theta}_1 \dot{\hat{\eta}}_1 + \frac{1}{\delta_2} \tilde{\theta}_2 \dot{\hat{\eta}}_2 \\ \dot{V}_1 &= -\psi r_1^2 - \bar{d} r_1 - \tilde{\theta}_1 r_1 \dot{v} - \tilde{\theta}_2 r_1 v + \frac{1}{\delta_1} \tilde{\theta}_1 \dot{\hat{\eta}}_1 + \frac{1}{\delta_2} \tilde{\theta}_2 \dot{\hat{\eta}}_2\end{aligned}\tag{6.34}$$

donde $\psi = K_d + \theta_2 > 0$.

Reemplazando (6.28) y la ley de adaptación (6.30) correspondiente al algoritmo CADASM-

VR en (6.34) genera:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_1 &= -\psi r_1^2 - \bar{d}r_1 - \tilde{\theta}_1 r_1 \dot{v} - \tilde{\theta}_2 r_1 v + \frac{1}{\delta_1} \tilde{\theta}_1 (\delta_1 \dot{v} r_1 - \delta_1 \kappa |r_1| \hat{\theta}_1) + \frac{1}{\delta_2} \tilde{\theta}_2 (\delta_2 v r_1 - \delta_2 \kappa |r_1| \hat{\theta}_2) \\
 \dot{V}_1 &= -\psi r_1^2 - \bar{d}r_1 - \tilde{\theta}_1 r_1 \dot{v} - \tilde{\theta}_2 r_1 v + \tilde{\theta}_1 \dot{v} r_1 - \kappa |r_1| \tilde{\theta}_1 \hat{\theta}_1 + \tilde{\theta}_2 v r_1 - \kappa |r_1| \tilde{\theta}_2 \hat{\theta}_2 \\
 \dot{V}_1 &= -\psi r_1^2 - \bar{d}r_1 - \kappa |r_1| \tilde{\theta}_1 \hat{\theta}_1 - \kappa |r_1| \tilde{\theta}_2 \hat{\theta}_2
 \end{aligned} \tag{6.35}$$

Considérese la escritura alternativa de los términos siguientes:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\theta}_1 \hat{\theta}_1 &= \tilde{\theta}_1 (\tilde{\theta}_1 + \theta_1) \\
 &= \tilde{\theta}_1^2 + \tilde{\theta}_1 \theta_1 + \frac{1}{4} \theta_1^2 - \frac{1}{4} \theta_1^2 \\
 &= (\tilde{\theta}_1 + \frac{1}{2} \theta_1)^2 - \frac{1}{4} \theta_1^2
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \tilde{\theta}_2 \hat{\theta}_2 &= \tilde{\theta}_2 (\tilde{\theta}_2 + \theta_2) \\
 &= \tilde{\theta}_2^2 + \tilde{\theta}_2 \theta_2 + \frac{1}{4} \theta_2^2 - \frac{1}{4} \theta_2^2 \\
 &= (\tilde{\theta}_2 + \frac{1}{2} \theta_2)^2 - \frac{1}{4} \theta_2^2
 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 -\kappa |r_1| \tilde{\theta}_1 \hat{\theta}_1 &= -\kappa |r_1| \left[(\tilde{\theta}_1 + \frac{1}{2} \theta_1)^2 - \frac{1}{4} \theta_1^2 \right] \\
 -\kappa |r_1| \tilde{\theta}_2 \hat{\theta}_2 &= -\kappa |r_1| \left[(\tilde{\theta}_2 + \frac{1}{2} \theta_2)^2 - \frac{1}{4} \theta_2^2 \right]
 \end{aligned} \tag{6.36}$$

Sustituyendo (6.36) en (6.35) se consigue:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_1 &= -\psi r_1^2 - \bar{d}r_1 - \kappa |r_1| \left[(\tilde{\theta}_1 + \frac{1}{2} \theta_1)^2 - \frac{1}{4} \theta_1^2 \right] - \kappa |r_1| \left[(\tilde{\theta}_2 + \frac{1}{2} \theta_2)^2 - \frac{1}{4} \theta_2^2 \right] \\
 \dot{V}_1 &= -\psi r_1^2 - \underbrace{\bar{d}r_1}_{T_D} + \frac{\kappa}{4} |r_1| \theta_1^2 + \frac{\kappa}{4} |r_1| \theta_2^2 - \kappa |r_1| (\tilde{\theta}_1 + \frac{1}{2} \theta_1)^2 - \kappa |r_1| (\tilde{\theta}_2 + \frac{1}{2} \theta_2)^2
 \end{aligned} \tag{6.37}$$

Recordar que \bar{d} está acotada por D . Entonces, el término T_D se acota de la manera siguiente empleando (6.2):

$$-\bar{d}r_1 \leq D|r_1| \tag{6.38}$$

Mayorizando \dot{V}_1 se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &\leq -\psi|r_1|^2 + D|r_1| + \frac{\kappa}{4}|r_1|\theta_{\max 1}^2 + \frac{\kappa}{4}|r_1|\theta_{\max 2}^2 - \kappa|r_1|(\tilde{\theta}_1 + \frac{1}{2}\theta_{\max 1})^2 - \kappa|r_1|(\tilde{\theta}_2 + \frac{1}{2}\theta_{\max 2})^2 \\ \dot{V}_1 &\leq -\psi|r_1| \left[|r_1| - \frac{1}{\psi}(D + \frac{\kappa}{4}\theta_{\max 1}^2 + \frac{\kappa}{4}\theta_{\max 2}^2) \right] - \kappa|r_1|(\tilde{\theta}_1 + \frac{1}{2}\theta_{\max 1})^2 - \kappa|r_1|(\tilde{\theta}_2 + \frac{1}{2}\theta_{\max 2})^2\end{aligned}\quad (6.39)$$

Entonces, $\dot{V}_1 < 0$ si se cumple:

$$|r_1| \geq \frac{1}{\psi}(D + \frac{\kappa}{4}\theta_{\max 1}^2 + \frac{\kappa}{4}\theta_{\max 2}^2) \quad (6.40)$$

Notar que la región en donde converge $|r_1|$ se puede reducir al incrementarse el valor de $\psi = K_d + \theta_2 > 0$ mediante el aumento de la ganancia k_d .

Para concluir el análisis de estabilidad se emplea la teoría de estabilidad de sistemas variantes en el tiempo presentado en la Sección 2.9, Capítulo 2:

- La cota superior de la función de Lyapunov (6.32) es:

$$V_1 \leq \frac{1}{2}\theta_{\max 1}|r_1|^2 + \frac{\sigma_1}{\delta_1}|V_{s1}| + \frac{\sigma_2}{\delta_2}|V_{s2}| \quad (6.41)$$

Para obtener cotas superiores para los términos $|V_{si}|$, estos se reescriben a continuación:

$$|V_{si}| = |\ln \cosh(\hat{\eta}_i) - \ln \cosh(\eta_i) - (\hat{\eta}_i - \eta_i) \tanh(\eta_i)| \quad (6.42)$$

Aplicando las propiedades (2.14) y (2.15) presentadas en la Subsección 2.6.1 se obtiene:

$$\begin{aligned}|V_{si}| &\leq |\ln \cosh(\hat{\eta}_i) - \ln \cosh(\eta_i)| - |(\hat{\eta}_i - \eta_i) \tanh(\eta_i)| \\ &\leq |\hat{\eta}_i - \eta_i| + |\hat{\eta}_i - \eta_i| \leq 2|\hat{\eta}_i - \eta_i|\end{aligned}\quad (6.43)$$

Sustituyendo (6.43) en (6.41) se concluye:

$$V_1 \leq \frac{1}{2}\theta_{\max 1}|r_1|^2 + \frac{2\sigma_1}{\delta_1}|\hat{\eta}_1 - \eta_1| + \frac{2\sigma_2}{\delta_2}|\hat{\eta}_2 - \eta_2| \quad (6.44)$$

Ahora bien, con respecto a la cota inferior de V_1 , a partir de la Definición 2.9 y el Lema 2.1 referentes a las funciones convexas presentadas en la sección 2.5 se infiere:

$$\ln \cosh(\hat{\eta}_i) \geq \ln \cosh(\eta_i) + (\hat{\eta}_i - \eta_i) \tanh(\eta_i)$$

de donde es posible obtener:

$$\ln \cosh(\hat{\eta}_i) - \ln \cosh(\eta_i) - (\hat{\eta}_i - \eta_i) \tanh(\eta_i) \geq 0 \quad (6.45)$$

Entonces, la función de Lyapunov (6.47) está acotada como sigue:

$$\frac{1}{2}\theta_{\min 1}|r_1|^2 \leq V_1 \leq \frac{1}{2}\theta_{\max 1}|r_1|^2 + \frac{2\sigma_1}{\delta_1}|\hat{\eta}_1 - \eta_1| + \frac{2\sigma_2}{\delta_2}|\hat{\eta}_2 - \eta_2| \quad (6.46)$$

Lo anterior implica que se cumple la condición (2.29) del Teorema 5.

- Con respecto a la condición (2.30) del Teorema 5, defínase:

$$W_{31}(x) = \psi|r_1| \left[|r_1| - \frac{1}{\psi} \left(D + \frac{\kappa}{4}\theta_{\max 1}^2 + \frac{\kappa}{4}\theta_{\max 2}^2 \right) \right] + \kappa|r_1|(\tilde{\theta}_1 + \frac{1}{2}\theta_{\max 1})^2 + \kappa|r_1|(\tilde{\theta}_2 + \frac{1}{2}\theta_{\max 2})^2$$

Entonces $\dot{V}_1(t) \leq -W_{31}(x)$ si se cumple (6.40).

La proposición siguiente resume el resultado de estabilidad.

Proposición 2 Sea (6.1) un sistema dinámico controlado por el algoritmo CADASM-VR (6.7) y la ley de adaptación (6.29)-(6.30). Si se cumple con la condición (6.40), entonces las trayectorias del sistema en lazo cerrado (6.9) son Uniformemente Últimamente Acotadas (UUA).

6.4.2. Análisis de estabilidad del algoritmo CADASD-VR

El análisis de estabilidad del sistema (6.1) compuesto por el algoritmo CADASD-VR (6.16) con la ley de adaptación (6.29)-(6.31) es efectuado a partir de la siguiente función de Lyapunov:

$$V_2 = \frac{1}{2}\theta_1 r_2^2 + \frac{1}{2}k_P e^2 + \frac{\sigma_1}{\delta_1}V_{s1} + \frac{\sigma_2}{\delta_2}V_{s2} \quad (6.47)$$

Al derivar (6.47) con respecto al tiempo, remplazar la dinámica del sistema en lazo cerrado (6.23) y la ley de adaptación propuesta (6.31) y empleando (6.27) se obtiene el siguiente

resultado:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2 &= \theta_1 r_2 \dot{r}_2 + k_P e \dot{e} + \frac{\sigma_1}{\delta_1} (\tanh(\hat{\eta}_1) - \tanh(\eta_1)) \dot{\eta}_1 + \frac{\sigma_2}{\delta_2} (\tanh(\hat{\eta}_2) - \tanh(\eta_2)) \dot{\eta}_2 \\
&= r_2 \left[-\theta_2 r_2 + \Phi - \phi_d^\top \tilde{\theta} - K r_2 - k_P e - \bar{d} \right] + k_P e \dot{e} + \frac{1}{\delta_1} \tilde{\theta}_1 \dot{\eta}_1 + \frac{1}{\delta_2} \tilde{\theta}_2 \dot{\eta}_2 \\
&= -\theta_2 r_2^2 + r_2 \Phi - r_2 \phi_d^\top \tilde{\theta} - K r_2^2 - k_P r_2 e - r_2 \bar{d} + k_P e \dot{e} + \frac{1}{\delta_1} \tilde{\theta}_1 \dot{\eta}_1 + \frac{1}{\delta_2} \tilde{\theta}_2 \dot{\eta}_2 \\
&= \underbrace{-(\theta_2 + K) r_2^2 + r_2 \Phi - k_P r_2 e + k_P e \dot{e}}_{T_I} \underbrace{- r_2 \bar{d} - r_2 \phi_d^\top \tilde{\theta}}_{T_{II}} \underbrace{+ \frac{1}{\delta_1} \tilde{\theta}_1 \dot{\eta}_1 + \frac{1}{\delta_2} \tilde{\theta}_2 \dot{\eta}_2}_{T_{III}}
\end{aligned} \tag{6.48}$$

A continuación se analiza cada uno de los términos de (6.48):

- Término T_I : Sustituyendo Φ definido en (6.22) y posteriormente sustituyendo r_2 dado en (6.14) produce:

$$\begin{aligned}
& -(\theta_2 + K) r_2^2 + (e + \dot{e})(\theta_1 \dot{e} + \theta_2 e) - k_P (e + \dot{e}) e + k_P e \dot{e} \\
&= -(\theta_2 + K) r_2^2 + \theta_1 \dot{e}^2 + \theta_2 e^2 + (\theta_1 + \theta_2) e \dot{e} - k_P e^2
\end{aligned} \tag{6.49}$$

Remplazado \dot{e} (6.14) en (6.49) da como resultado:

$$\begin{aligned}
& -(\theta_2 + K) r_2^2 + \theta_1 (r_2 - e)^2 + \theta_2 e^2 + (\theta_1 + \theta_2) (r_2 - e) e - k_P e^2 \\
&= -K r_2^2 - (\theta_2 - \theta_1) r_2^2 - k_P e^2 + (\theta_2 - \theta_1) r_2 e \\
&= -\frac{K}{4} r_2^2 - \underbrace{\left(\frac{K}{4} + \theta_2 - \theta_1 \right) r_2^2}_{T_{IV}} \underbrace{- \frac{K}{2} r_2^2 + (\theta_2 - \theta_1) r_2 e - \frac{k_P}{2} e^2}_{T_V} - \frac{k_P}{2} e^2
\end{aligned} \tag{6.50}$$

Notar que:

$$\theta_2 - \theta_1 \leq |\theta_2 - \theta_1| \leq |\theta_1| + |\theta_2| \leq \theta_{\max 1} + \theta_{\max 2} \tag{6.51}$$

donde se emplean las cotas (6.24). Por lo tanto, el término T_{IV} es positivo si:

$$K > 4(\theta_{\max 1} + \theta_{\max 2}) \tag{6.52}$$

Además, el término T_V se acota empleando (6.51), i.e.:

$$-\frac{K}{2} r_2^2 + (\theta_2 - \theta_1) r_2 e - \frac{k_P}{2} e^2 \leq -\frac{K}{2} r_2^2 + (\theta_{\max 1} + \theta_{\max 2}) r_2 e - \frac{k_P}{2} e^2 \tag{6.53}$$

Completando cuadrados se obtiene la expresión siguiente :

$$\begin{aligned}
 & -\frac{K}{2}r_2^2 + (\theta_{\max 1} + \theta_{\max 2})r_2e - \frac{k_P}{2}e^2 \\
 = & -\frac{K}{2}\left[r_2^2 - 2\frac{\theta_{\max 1} + \theta_{\max 2}}{K}r_2e + \frac{k_P}{K}e^2\right] \\
 = & -\frac{K}{2}\left[r_2^2 - 2\frac{\theta_{\max 1} + \theta_{\max 2}}{K}r_2e \pm \frac{(\theta_{\max 1} + \theta_{\max 2})^2}{K^2}e^2 + \frac{k_P}{K}e^2\right] \\
 = & -\frac{K}{2}\left[r_2 - \frac{\theta_{\max 1} + \theta_{\max 2}}{K}e\right]^2 - \frac{K}{2}\left[\frac{k_P}{K} - \frac{(\theta_{\max 1} + \theta_{\max 2})^2}{K^2}\right]e^2 \\
 = & -\frac{K}{2}\left[r_2 - \frac{\theta_{\max 1} + \theta_{\max 2}}{K}e\right]^2 - \underbrace{\frac{1}{2}\left[k_P - \frac{(\theta_{\max 1} + \theta_{\max 2})^2}{K}\right]}_{T_{VI}}e^2
 \end{aligned} \tag{6.54}$$

Entonces, el término T_{VI} es positivo si:

$$K > \frac{1}{k_P}(\theta_{\max 1} + \theta_{\max 2})^2 \tag{6.55}$$

Observar que K está acotada por (6.52) y (6.55). De estas dos cotas se selecciona la cota más grande, i. e.:

$$K > \max\{4(\theta_{\max 1} + \theta_{\max 2}), \frac{1}{k_P}(\theta_{\max 1} + \theta_{\max 2})^2\} \tag{6.56}$$

Por lo tanto, el término T_I en (6.48) está acotado por la expresión:

$$-\frac{K}{4}r_2^2 - \left(\frac{K}{4} + \theta_2 - \theta_1\right)r_2^2 - \frac{K}{2}\left[r_2 - \frac{\theta_{\max 1} + \theta_{\max 2}}{K}e\right]^2 - \frac{1}{2}\left[k_P - \frac{(\theta_{\max 1} + \theta_{\max 2})^2}{K}\right]e^2 \tag{6.57}$$

la cual es semidefinida negativa si se cumplen las desigualdades (6.52) y (6.55).

- Término T_{II} . Este se acota de la manera siguiente empleando (6.2):

$$-r_2\bar{d} \leq \underbrace{D|r_2|}_{T_{VII}} \tag{6.58}$$

- Término T_{III} . Sustituyendo la ley adaptable propuesta (6.31) para el algoritmo CADASD-VR en el término T_{III} de (6.48) y utilizando las definiciones para ϕ_d en (6.20), $\tilde{\theta}_1$ y $\tilde{\theta}_2$

en (6.10) se infiere:

$$\begin{aligned} & -r_2(\tilde{\theta}_1\ddot{y}_d + \tilde{\theta}_2\dot{y}_d) + \frac{1}{\delta_1}\tilde{\theta}_1(\delta_1r_2\ddot{y}_d - \delta_1\kappa\hat{\theta}_1|r_2|) + \frac{1}{\delta_2}\tilde{\theta}_2(\delta_2r_2\dot{y}_d - \delta_2\kappa\hat{\theta}_2|r_2|) \\ & = -\kappa\tilde{\theta}_1\hat{\theta}_1|r_2| - \kappa\tilde{\theta}_2\hat{\theta}_2|r_2| \end{aligned} \quad (6.59)$$

Despejando $\hat{\theta}_i$ de los errores paramétricos (6.10) genera:

$$\hat{\theta}_1 = \tilde{\theta}_1 + \theta_1 \quad (6.60)$$

$$\hat{\theta}_2 = \tilde{\theta}_2 + \theta_2 \quad (6.61)$$

Sustituyendo (6.60) y (6.61) en (6.59) produce:

$$-\kappa|r_2|\tilde{\theta}_1\hat{\theta}_1 = -\kappa|r_2|\tilde{\theta}_1^2 - \kappa|r_2|\theta_1\tilde{\theta}_1 \quad (6.62)$$

$$-\kappa|r_2|\tilde{\theta}_2\hat{\theta}_2 = -\kappa|r_2|\tilde{\theta}_2^2 - \kappa|r_2|\theta_2\tilde{\theta}_2 \quad (6.63)$$

Una cota superior para (6.62) se obtiene de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} -\kappa|r_2|\tilde{\theta}_1^2 - \kappa|r_2|\tilde{\theta}_1\theta_1 & \leq -\kappa|r_2|\tilde{\theta}_1^2 + \kappa|r_2|\theta_{\max 1}|\tilde{\theta}_1| \\ & \leq -\kappa|r_2|\left[\tilde{\theta}_1^2 - \theta_{\max 1}|\tilde{\theta}_1| + \frac{1}{4}\theta_{\max 1}^2 - \frac{1}{4}\theta_{\max 1}^2 \right] \\ & \leq -\kappa|r_2|\underbrace{\left(|\tilde{\theta}_1| - \frac{1}{2}\theta_{\max 1} \right)^2}_{T_{VIII}} + \frac{1}{4}\kappa|r_2|\theta_{\max 1}^2 \end{aligned} \quad (6.64)$$

Se aplica el mismo procedimiento para obtener una cota superior para (6.63), entonces:

$$-\kappa|r_2|\tilde{\theta}_2^2 - \kappa|r_2|\tilde{\theta}_2\theta_2 \leq -\kappa|r_2|\underbrace{\left(|\tilde{\theta}_2| - \frac{1}{2}\theta_{\max 2} \right)^2}_{T_{IX}} + \frac{1}{4}\kappa|r_2|\theta_{\max 2}^2 \quad (6.65)$$

De acuerdo al análisis precedente, la derivada \dot{V}_2 está acotada por (6.57), el término T_{VII} en

(6.58), el término T_{VIII} en (6.64) y el término T_{IX} en (6.65), esto es:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_2 &\leq -\frac{K}{4}r_2^2 - \left(\frac{K}{4} + \theta_2 - \theta_1\right)r_2^2 - \frac{K}{2}\left[r_2 - \frac{\theta_{\max 1} + \theta_{\max 2}}{K}e\right]^2 - \frac{1}{2}\left[k_P - \frac{(\theta_{\max 1} + \theta_{\max 2})^2}{K}\right]e^2 \\
 &\quad + D|r_2| - \kappa|r_2|\left(|\tilde{\theta}_1| - \frac{1}{2}\theta_{\max 1}\right)^2 + \frac{1}{4}\kappa|r_2|\theta_{\max 1}^2 - \kappa|r_2|\left(|\tilde{\theta}_2| - \frac{1}{2}\theta_{\max 2}\right)^2 + \frac{1}{4}\kappa|r_2|\theta_{\max 2}^2 \\
 &= -\underbrace{\frac{K}{4}|r_2|(|r_2| - \Lambda)}_{T_X} - \left(\frac{K}{4} + \theta_2 - \theta_1\right)r_2^2 - \frac{K}{2}\left[r_2 - \frac{\theta_{\max 1} + \theta_{\max 2}}{K}e\right]^2 \\
 &\quad - \frac{1}{2}\left[k_P - \frac{(\theta_{\max 1} + \theta_{\max 2})^2}{K}\right]e^2 - \kappa|r_2|\left(|\tilde{\theta}_1| - \frac{1}{2}\theta_{\max 1}\right)^2 - \kappa|r_2|\left(|\tilde{\theta}_2| - \frac{1}{2}\theta_{\max 2}\right)^2
 \end{aligned} \tag{6.66}$$

donde:

$$\Lambda = \frac{4}{K}\left[D + \frac{\kappa}{4}(\theta_{\max 1}^2 + \theta_{\max 2}^2)\right] \tag{6.67}$$

Entonces, $\dot{V}_2 < 0$ si se cumplen las desigualdades (6.52) y (6.55) y si el término T_X es positivo, i.e. si se cumple:

$$|r_2| > \Lambda \tag{6.68}$$

Notar que la región donde converge $|r_2|$ se puede reducir al incrementarse el valor de K .

Para concluir el análisis se emplea la teoría de estabilidad presentada en la Sección 2.9 capítulo 2:

- La cota superior de la función de Lyapunov (6.47) es:

$$V_2 \leq \frac{1}{2}\theta_{\max 1}|r_2|^2 + \frac{1}{2}k_P|e|^2 + \frac{\sigma_1}{\delta_1}|V_{s1}| + \frac{\sigma_2}{\delta_2}|V_{s2}| \tag{6.69}$$

A partir de las cotas de V_{si} presentadas en (6.43) para el algoritmo CADASM-VR se concluye que (6.47) está acotada por:

$$V_2 \leq \frac{1}{2}\theta_{\max 1}|r_2|^2 + \frac{1}{2}k_P|e|^2 + \frac{2\sigma_1}{\delta_1}(|\hat{\eta}_1 - \eta_1|) + \frac{2\sigma_2}{\delta_2}(|\hat{\eta}_2 - \eta_2|) \tag{6.70}$$

Ahora bien, con respecto a la cota inferior de V_{si} mostrada en (6.45) y considerando que:

$$k_P > 0$$

entonces

$$\frac{1}{2}\theta_{\min 1}|r_2|^2 \leq V_2 \leq \frac{1}{2}\theta_{\max 1}|r_2|^2 + \frac{1}{2}k_P|e|^2 + \frac{2\sigma_1}{\delta_1}|\hat{\eta}_1 - \eta_1| + \frac{2\sigma_2}{\delta_2}|\hat{\eta}_2 - \eta_2| \tag{6.71}$$

Por lo que se cumple la condición (2.29) del Teorema 5.

- Para la derivada de la función de Lyapunov (6.66) se define:

$$W_{32} = -\frac{K}{4}|r_2|(|r_2| - \Lambda) - \left(\frac{K}{4} + \theta_2 - \theta_1\right)r_2^2 - \frac{K}{2}\left[r_2 - \frac{\theta_{\max 1} + \theta_{\max 2}}{K}e\right]^2 - \frac{1}{2}\left[k_P - \frac{(\theta_{\max 1} + \theta_{\max 2})^2}{K}\right]e^2 - \kappa|r_2|\left[\left(|\tilde{\theta}_1| - \frac{1}{2}\theta_{\max 1}\right)^2 + \left(|\tilde{\theta}_2| - \frac{1}{2}\theta_{\max 2}\right)^2\right]$$

$W_{32}(x)$ es definida positiva si se cumplen (6.52), (6.55) y (6.68). Entonces $\dot{V}_2 \leq -W_3(x)$ por lo tanto $\dot{V}_2 \leq 0$.

La proposición siguiente resume el resultado de estabilidad del algoritmo CADASD-VR.

Proposición 3 *Sea (6.1) un sistema dinámico controlado por el algoritmo CADASD-VR (6.16) y la ley de adaptación (6.29)-(6.31). Si las condiciones de diseño y las ganancias del controlador cumplen con las desigualdades (6.56) y (6.68), entonces las trayectorias del sistema en lazo cerrado (6.23) son Uniformemente Últimamente Acotadas (UUA).*

6.4.3. Prueba de estabilidad alternativa del algoritmo CADASD-VR

A continuación se presenta una alternativa al análisis de estabilidad del algoritmo CADASD-VR analizando el término T_I en (6.48) de una manera diferente a lo presentado en la Subsección 6.4.2. El segundo renglón en (6.50) se reescribe de la siguiente manera considerando la :

$$\begin{aligned} & -Kr_2^2 - (\theta_2 - \theta_1)r_2^2 + (\theta_2 - \theta_1)r_2e - k_Pe^2 \\ & = -Kr_2^2 - k_P \left(\underbrace{e^2 - \frac{\theta_2 - \theta_1}{k_P}r_2e + \frac{\theta_2 - \theta_1}{k_P}r_2^2}_{T_{AI}} \right) \end{aligned} \quad (6.72)$$

Completando cuadrados considerando el término T_{AI} se obtiene:

$$\begin{aligned} & -Kr_2^2 - k_P \left(e^2 - \frac{\theta_2 - \theta_1}{k_P}r_2e \pm \frac{(\theta_2 - \theta_1)^2}{4k_P^2}r_2^2 + \frac{\theta_2 - \theta_1}{k_P}r_2^2 \right) \\ & = -k_P \left(e - \frac{\theta_2 - \theta_1}{2k_P}r_2 \right)^2 - \left(\underbrace{K + \theta_2 - \theta_1 - \frac{(\theta_2 - \theta_1)^2}{4k_P}}_{T_{AII}} \right) r_2^2 \end{aligned} \quad (6.73)$$

Notar que:

$$(\theta_2 - \theta_1)^2 \leq \theta_2^2 - 2\theta_1\theta_2 + \theta_1^2 \leq \theta_{\max 2}^2 + 2\theta_{\max 1}\theta_{\max 2} + \theta_{\max 1} \leq (\theta_{\max 1} + \theta_{\max 2})^2 \quad (6.74)$$

Ahora bien, el término T_{AII} definido como :

$$\Upsilon = K + \theta_2 - \theta_1 - \frac{(\theta_2 - \theta_1)^2}{4k_P} \quad (6.75)$$

es positivo si:

$$K > \theta_{\max 1} + \theta_{\max 2} + \frac{(\theta_{\max 1} + \theta_{\max 2})^2}{4k_P} \quad (6.76)$$

Por lo tanto, el término T_I en (6.48) está dado por:

$$-k_P \left(e - \frac{\theta_2 - \theta_1}{2k_P} r_2 \right)^2 - \Upsilon r_2^2 \quad (6.77)$$

De acuerdo al análisis para los términos T_{II} , T_{III} en (6.48) presentados en la subsección 6.4.2 y el análisis alternativo de T_I en (6.48) presentado en esta sección, la derivada \dot{V}_2 está acotada por (6.77) por los términos T_{VII} en (6.58), el término T_{VIII} en (6.64) y el término T_{IX} en (6.65), esto es:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq -W_{32A} &= -k_P \left(e - \frac{\theta_2 - \theta_1}{2k_P} r_2 \right)^2 - \Upsilon r_2^2 + D|r_2| - \kappa|r_2| \left(|\tilde{\theta}_1| - \frac{1}{2}\theta_{\max 1} \right)^2 + \frac{1}{4}\kappa|r_2|\theta_{\max 1}^2 \\ &\quad - \kappa|r_2| \left(|\tilde{\theta}_2| - \frac{1}{2}\theta_{\max 2} \right)^2 + \frac{1}{4}\kappa|r_2|\theta_{\max 2}^2 \\ &= -\Upsilon|r_2| \underbrace{\left(|r_2| - \Lambda_A \right)}_{T_{AIII}} - k_P \left(e - \frac{\theta_2 - \theta_1}{2k_P} r_2 \right)^2 - \kappa|r_2| \left(|\tilde{\theta}_1| - \frac{1}{2}\theta_{\max 1} \right)^2 \\ &\quad - \kappa|r_2| \left(|\tilde{\theta}_2| - \frac{1}{2}\theta_{\max 2} \right)^2 \end{aligned} \quad (6.78)$$

con Λ_A definida por:

$$\Lambda_A = \frac{1}{\Upsilon} \left(D + \frac{1}{4}\kappa\theta_{\max 1}^2 + \frac{1}{4}\kappa\theta_{\max 2}^2 \right) \quad (6.79)$$

entonces, $\dot{V}_2 < 0$ si se cumple la desigualdad (6.76) y si el término T_{AIII} es positivo, i.e. si se cumple:

$$|r_2| > \Lambda_A \quad (6.80)$$

Notar que la región donde converge $|r_2|$ se puede reducir al aumentarse el valor de Υ mediante el incremento de la ganancia K y K_P . La región de convergencia también se puede reducir

disminuyendo el valor de κ y empleando valores $\theta_{\max 1}$ y $\theta_{\max 2}$ más pequeños.

El resultado de estabilidad del algoritmo CADASD-VR bajo las desigualdades (6.76) y (6.80) se resume en la siguiente proposición:

Proposición 4 *Sea (6.1) un sistema dinámico controlado por el algoritmo CADASD-VR (6.16) y la ley de adaptación (6.29)-(6.31). Si las ganancias del controlador cumplen con la desigualdades (6.76) y (6.80), entonces las trayectorias del sistema en lazo cerrado (6.23) son Uniformemente Últimamente Acotadas (UUA).*

6.5. Experimentos

Con el objetivo de evaluar el desempeño de los algoritmos de control adaptables CADASM-VR y CADASD-VR así como de identificar las principales diferencias producidas por el empleo de un vector regresor compuesto por señales medidas de posición y velocidad del servosistema en comparación con uno compuesto por señales de la trayectoria deseada, se realizaron pruebas experimentales en el servomotor de la marca *MakeBlock*. Las ganancias de cada algoritmo fueron sintonizadas manualmente considerando la Proposición 2 y Proposición 4 para el algoritmo CADASM-VR y CADASD-VR respectivamente.

6.5.1. Condiciones experimentales

La implementación de los algoritmos de control adaptable CADASM-VR (6.88) y CADASD-VR (6.91) con las leyes de adaptación propuestas (6.87), (6.90) y (6.93) se llevan a cabo en la plataforma experimental mostrada en la Fig. 5.2 en el Capítulo 5.

Se utiliza el siguiente sistema dinámico de segundo orden para generar la señal de referencia y_d y sus derivadas temporales:

$$\ddot{y}_d = -2\zeta\omega_n\dot{y}_d - \omega_n^2 y_d + \omega_n^2 r_m \quad (6.81)$$

en donde la señal de entrada

$$r_m = 0.7 \sin(0.2t) + 0.5 \sin(0.3t) + 0.3 \sin(0.5t)$$

es una suma de señales sinusoidales procesada por un filtro paso bajo con una frecuencia de corte de 5 rad/s. El sistema (6.81) utiliza un factor de amortiguación $\zeta = 1$ y una frecuencia natural $\omega_n = 5$. La velocidad angular del servomotor \dot{y} se estima a partir de las mediciones de

posición mediante un filtro pasa bajo en cascada con un filtro pasa alto:

$$G_f(s) = \frac{300s}{s+300} \frac{300}{s+300} \quad (6.82)$$

donde el filtro paso alto estima la velocidad angular, mientras que el filtro paso bajo atenúa las frecuencias altas.

La obtención del conjunto $\Omega_i = [\theta_{\min i}, \theta_{\max i}]$ se lleva a partir de la identificación paramétrica de la planta (6.1) fuera de línea presentada en el Apéndice B. Entonces, aplicando el método de Mínimos Cuadrados explicado en el Apéndice (B.6) al modelo del servomotor *MakeBlock* presentado en la ecuación (A.18) del Apéndice A correspondiente a la plataforma experimental de la Fig. 5.2, se obtienen las siguientes estimaciones:

$$\hat{\theta}_{LS} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{LS1} \\ \hat{\theta}_{LS2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19.858 \\ 12.254 \end{bmatrix} \quad (6.83)$$

Para obtener los valores de $\theta_{\min i}$ y $\theta_{\max i}$ utilizados en la evaluación de los controladores CADASM-VR y CADASD-VR se considera lo siguiente:

$$\begin{aligned} \theta_{\min 1} &= \frac{1}{8} \hat{\theta}_I, \quad \theta_{\max 1} = 5 \hat{\theta}_I \\ \theta_{\min 2} &= \frac{1}{2} \hat{\theta}_{2I}, \quad \theta_{\max 2} = 2 \hat{\theta}_{2I} \end{aligned} \quad (6.84)$$

donde:

$$\hat{\theta}_I = \frac{1}{\hat{\theta}_{LS2}} = 0.081, \quad \hat{\theta}_{2I} = \frac{\hat{\theta}_{LS1}}{\hat{\theta}_{LS2}} = 1.62 \quad (6.85)$$

Entonces, sustituyendo (6.85) en (6.84) se obtiene:

$$\begin{aligned} \theta_{\min 1} &= 0.01, \quad \theta_{\max 1} = 0.4 \\ \theta_{\min 2} &= 0.78, \quad \theta_{\max 2} = 3.12 \end{aligned} \quad (6.86)$$

Los límites en (6.86) se eligieron para permitir la evolución de los parámetros estimados en la ley de adaptación propuesta y considerar posibles cambios en la inercia J_{eq} del modelo presentado en la ecuación (A.18) del Apéndice A.

6.5.2. Algoritmos CADASM-VR y CADASD-VR

Con el propósito de analizar cada una de las propuestas de las leyes de adaptación y observar el efecto del uso de señales medidas en el vector regresor en comparación con señales deseadas, se realizaron dos experimentos.

En el primer experimento se utilizaron ganancias relativamente pequeñas en las leyes de adaptación de los algoritmos CADASM-VR y CADASD-VR. En el segundo experimento, dichas ganancias se incrementaron en ambos algoritmos respecto al primer experimento. Esto permite analizar la sensibilidad de los algoritmos propuestos ante el uso de ganancias elevadas. Cabe destacar que el ajuste de las ganancias se realizó únicamente en la ley de adaptación, ya que en ella radica la principal diferencia entre ambos algoritmos en cuanto a las señales utilizadas en los vectores regresores.

A continuación se reescriben los algoritmos de control adaptable propuestos:

Proyección de parámetros

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_i &= \sigma_i[1 + \tanh(\hat{\eta}_i)] + \theta_{\min i} \\ \sigma_i &= \frac{1}{2}[\theta_{\max i} - \theta_{\min i}], \quad i = 1, 2\end{aligned}\quad (6.87)$$

Algoritmo CADASM-VR

$$u = \underbrace{\hat{\theta}_1 \dot{v} + \hat{\theta}_2 v}_{U_{Adaptable}} + \underbrace{K_d r_1}_{U_{noadaptable}} \quad (6.88)$$

donde

$$\begin{aligned}v &= \dot{y}_d + \epsilon(y_d - y) \\ \dot{v} &= \ddot{y}_d + \epsilon(\dot{y}_d - \dot{y}) \\ e &= y_d - y \\ r_1 &= v - \dot{y} = \dot{e} + \epsilon e.\end{aligned}\quad (6.89)$$

Con la ley de adaptación:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\eta}}_1 &= \delta_1 \dot{v} r_1 - \delta_1 \kappa |r_1| \hat{\theta}_1 \\ \dot{\hat{\eta}}_2 &= \delta_2 v r_1 - \delta_2 \kappa |r_1| \hat{\theta}_2\end{aligned}\quad (6.90)$$

Algoritmo CADASD-VR

$$u = \underbrace{k_p e + K r_2}_{\text{Realimentación no adaptable}} + \underbrace{\hat{\theta}_1 \ddot{y}_d + \hat{\theta}_2 \dot{y}_d}_{\text{Prealimentación adaptable}} \quad (6.91)$$

en donde

$$r_2 = e + \dot{e} \quad (6.92)$$

Con la ley de adaptación:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\eta}}_1 &= \delta_1 \ddot{y}_d r_2 - \delta_1 \kappa |r_2| \hat{\theta}_1 \\ \dot{\hat{\eta}}_2 &= \delta_2 \dot{y}_d r_2 - \delta_2 \kappa |r_2| \hat{\theta}_2\end{aligned}\quad (6.93)$$

En ambos algoritmos la estimación de $\hat{\theta}_i$ se realiza empleando la proyección de parámetros (6.87).

Experimento 1

Las ganancias de ambos algoritmos de control adaptable CADASM-VR y CADASD-VR fueron sintonizadas bajo las mismas condiciones. En este sentido, a las ganancias $\delta_i, i = 1, 2$ de ambas leyes de adaptación se les asignó el mismo valor. Por otro lado, con respecto a las ganancias de los términos $U_{noadaptable}$ y la realimentación no adaptable de los algoritmos de control CADASM-VR y CADASD-VR respectivamente, se sintonizaron considerando las siguientes igualdades:

$$K_d r_1 = K_d(\dot{e} + \epsilon e) = K_d \epsilon e + K_d \dot{e} \quad (6.94)$$

y

$$k_P e + K r_2 = k_P e + K(\dot{e} + e) = (k_P + K)e + K\dot{e} \quad (6.95)$$

Entonces, la sintonización se realizó asignando el mismo valor para K y K_d y para $K_d \epsilon$ y $K_P + K$. En la Tabla 6.1 se encuentran las ganancias utilizadas en el algoritmo CADASM-VR (6.88) y los parámetros de la ley de adaptación (6.90) y las ganancias del algoritmo CADASD-VR (6.91) y los parámetros de la ley de adaptación (6.93). Las condiciones iniciales en ambos algoritmos se fijan de la manera siguiente para evaluar el efecto de la proyección de parámetros (6.87):

$$\eta_1(0) = -10 \quad \eta_2(0) = 10 \quad (6.96)$$

Notar que a una de las condiciones iniciales se le asignó un valor negativo a pesar de que los parámetros en el modelo (6.1) son positivos con el fin de verificar si los parámetros estimados $\hat{\theta}_i$ permanecen dentro de los límites impuestos por la proyección de parámetros (6.87).

Ganancias del Experimento 1	
Ganancias del algoritmo CADASM-VR.	Ganancias del algoritmo CADASD-VR
$\epsilon = 6$	$k_P = 20$
$K_d = 4$	$K = 4$
Variables de la ley de adaptación	
$\delta_1 = \delta_2 = 50$	
$\kappa = 0.01$	

Tabla 6.1: Ganancias utilizadas en la implementación del algoritmo CADASM-VR (6.88) con la ley de adaptación (6.87)-(6.90) y del algoritmo CADASD-VR (6.91) y la ley de adaptación (6.87)- (6.93). **Experimento 1.**

Las Fig. 6.2 y Fig. 6.3 muestran la señal de referencia y_d y la señal de salida y en posición del servomotor con los algoritmos CADASM-VR (6.88) y CADASD-VR (6.91) con las leyes de adaptación (6.87)-(6.90) y (6.87)-(6.93) respectivamente. A primera vista se puede observar que ambas cumplen el objetivo de seguimiento de la señal de referencia.

Por otro lado, las Fig. 6.4 y 6.5 muestran el error de seguimiento el cual decrece con el tiempo en ambos casos. Es importante resaltar que los errores elevados de seguimiento al inicio de las pruebas con ambos algoritmos se deben a las condiciones iniciales (6.96), cuyos valores son más grandes que los valores máximos y mínimos mostrados en (6.86). Además, se observa una diferencia entre ambos errores, lo que sugiere que el algoritmo CADASM-VR presenta una mejor respuesta en el seguimiento de la trayectoria deseada.

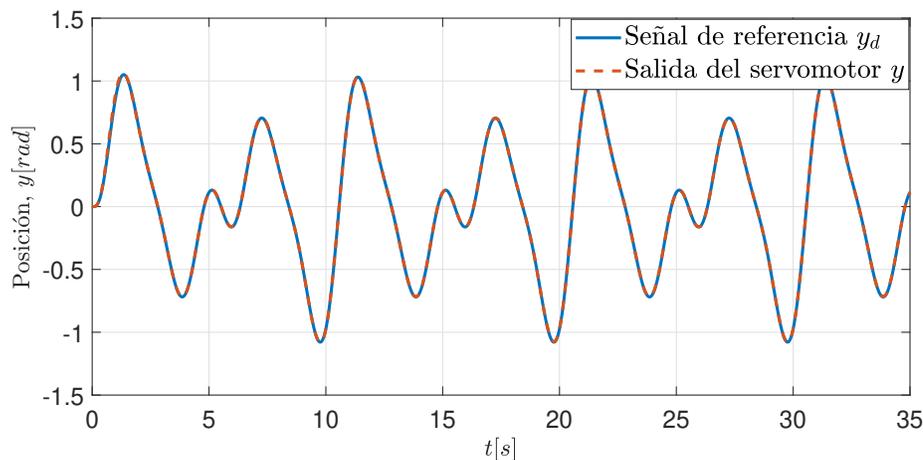


Figura 6.2: Señal de Referencia deseada y_d vs salida de posición del servomotor y utilizando el algoritmo CADASM-VR (6.88) con la ley de adaptación (6.87)-(6.90). **Experimento 1.**

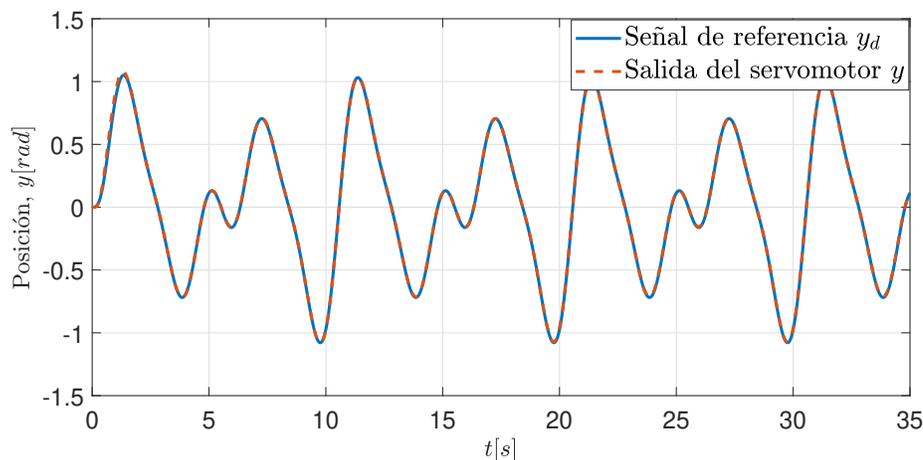


Figura 6.3: Señal de Referencia deseada y_d vs salida de posición del servomotor y utilizando el algoritmo CADASD-VR (6.91) con la ley de adaptación (6.87)-(6.93). **Experimento 1.**

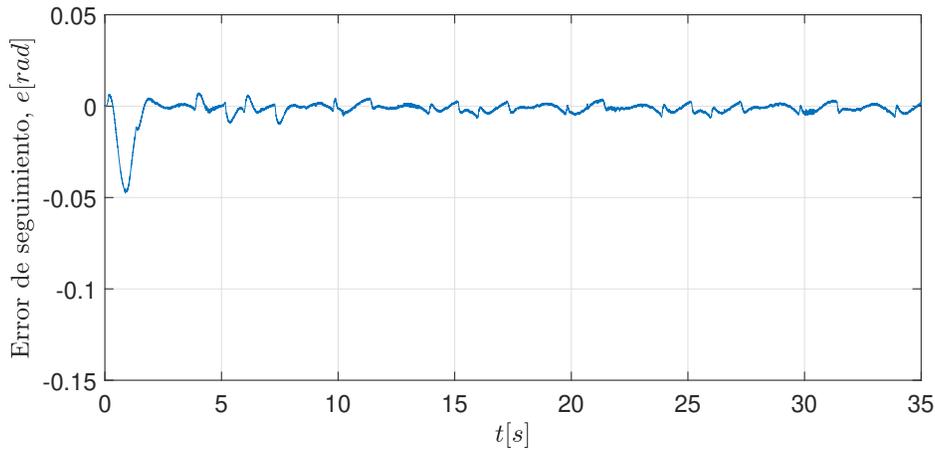


Figura 6.4: Error de seguimiento e utilizando el algoritmo CADASM-VR (6.88) con la ley de adaptación (6.87)-(6.90). **Experimento 1.**

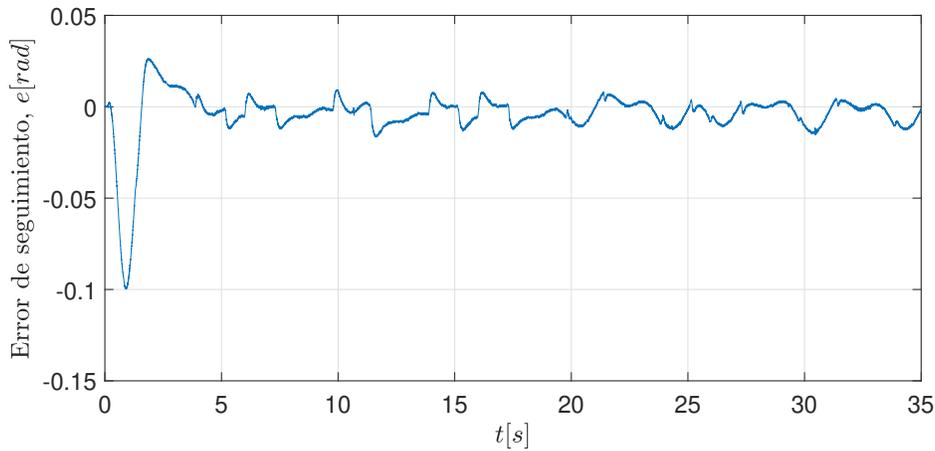


Figura 6.5: Error de seguimiento e utilizando el algoritmo CADASD-VR (6.91) con la ley de adaptación (6.87)- (6.93). **Experimento 1.**

Las Figuras 6.6 y 6.7 muestran las señales producidas por las leyes de control CADASM-VR y CADASD-VR. Se observa que existe una diferencia apreciable entre ambas. El algoritmo CADASM-VR produce una señal con mayor castaño y amplitud que la señal de control producida por el algoritmo CADASD-VR. Lo anterior se debe a la estimación de la velocidad angular a partir de la señal de posición. Este efecto se abordará con mayor detalle en el experimento 2 donde se analizará la influencia de utilizar un vector regresor que utiliza señales medidas respecto a un vector regresor que emplea señales deseadas al incrementarse las ganancias de las leyes de adaptación.

Las Fig. 6.8 y 6.9 muestran el estimado $\hat{\theta}_1$ producido por las leyes de adaptación (6.87)-(6.90) y (6.87)-(6.93). Notar que $\hat{\theta}_1$ permanece en su límite inferior $\theta_{\min 1}$ durante los primeros segundos de los experimentos debido a la condición inicial $\hat{\eta}_1(0) = -10$, la cual es menor que

el límite inferior $\theta_{\min 1} = 0.01$. Posteriormente ambos estimados se encuentran dentro de los límites $\theta_{\min 1}$ y $\theta_{\max 1}$.

El estimado $\hat{\theta}_1$ generado por el algoritmo CADASM-VR utilizando la ley de adaptación (6.87)-(6.90) se establece dentro de los límites en aproximadamente los primeros 10 segundos. En cambio, el estimado obtenido con el algoritmo CADASD-VR empleando la ley de adaptación (6.87)-(6.93) presenta una respuesta más lenta y tarda 10 segundos adicionales en establecerse dentro de los límites. Es probable que esta respuesta del algoritmo CADASD-VR pueda ser más rápida si se incrementan las ganancias del algoritmo de control adaptable, lo cual se analizará más adelante en el Experimento 2.

En el caso de los estimados $\hat{\theta}_2$ producidos por ambos algoritmos, presentados en las Fig. 6.10 y Fig. 6.11 estos permanecen los primeros segundos en el límite superior $\theta_{\max 2}$ y posteriormente

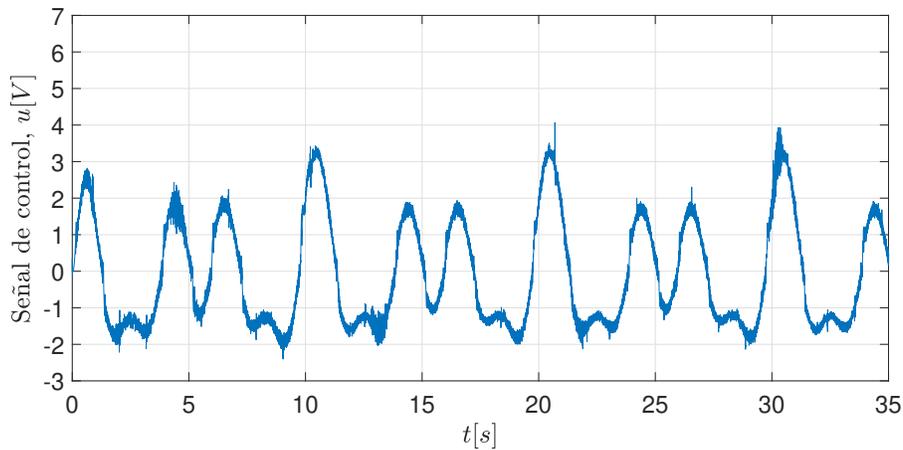


Figura 6.6: Señal de control u producida por el algoritmo CADASM-VR (6.7) con la ley de adaptación (6.30). **Experimento 1.**

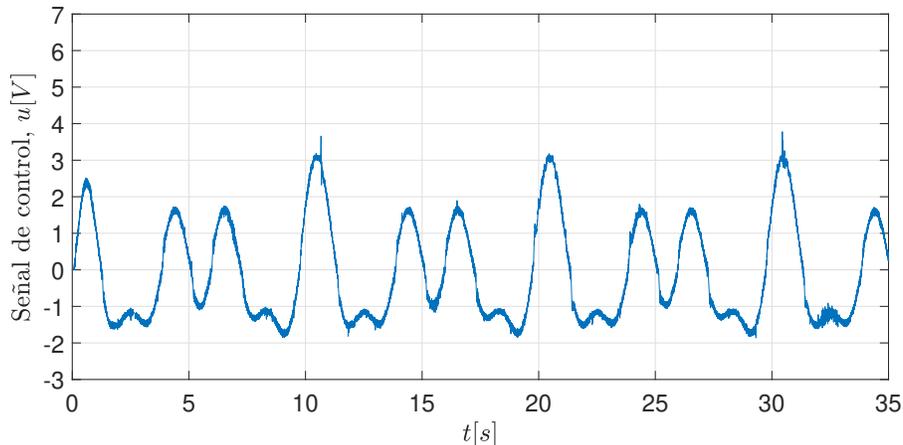


Figura 6.7: Señal de control u producida por el algoritmo CADASD-VR (6.16) con la ley de adaptación (6.31). **Experimento 1.**

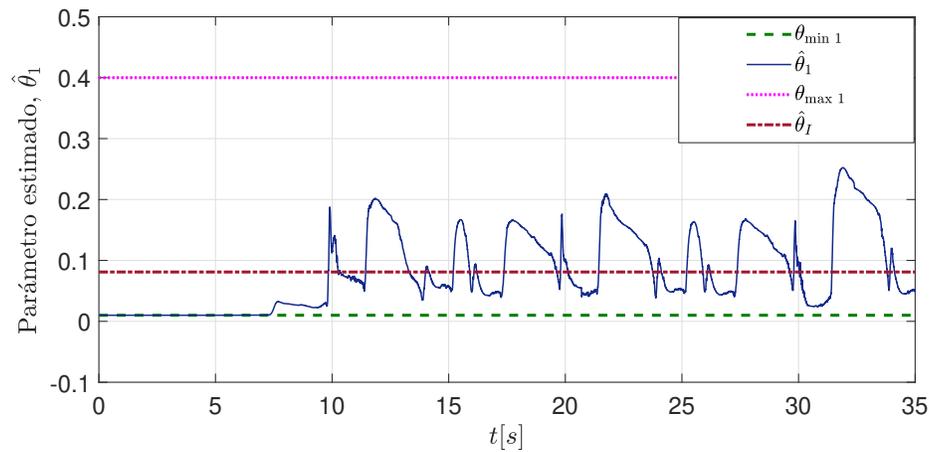


Figura 6.8: Parámetro estimado $\hat{\theta}_1$ acotado por $[\theta_{\min 1}, \theta_{\max 1}]$ producidos por la ley de adaptación (6.29)-(6.30). Algoritmo CADASM-VR. **Experimento 1**. Sintonización manual.

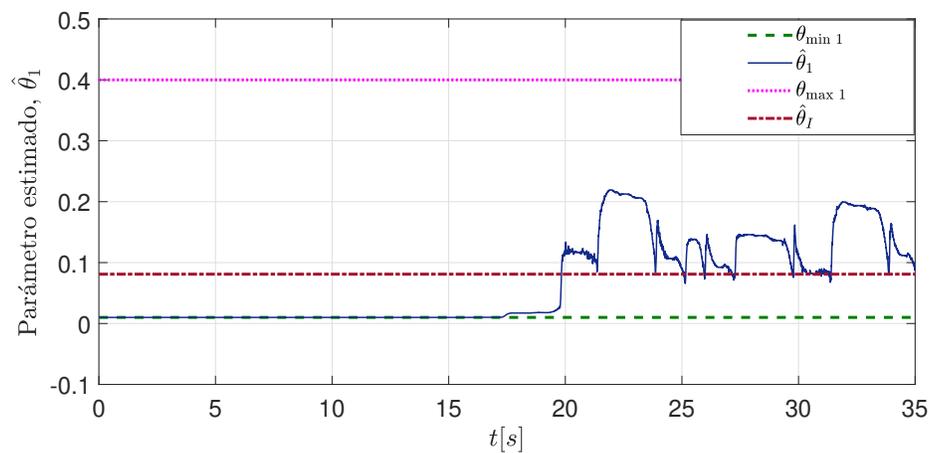


Figura 6.9: Parámetro estimado $\hat{\theta}_1$ acotado por $[\theta_{\min 1}, \theta_{\max 1}]$ producidos por la ley de adaptación (6.29)-(6.31). Algoritmo CADASD-VR. **Experimento 1**. Sintonización manual.

evolucionan dentro de los límites $\theta_{\min 2}$ y $\theta_{\max 2}$. Notar que a diferencia de $\hat{\theta}_1$, los estimados $\hat{\theta}_2$ presentan un comportamiento menos oscilatorio y son más rápidos en establecerse dentro de los límites.

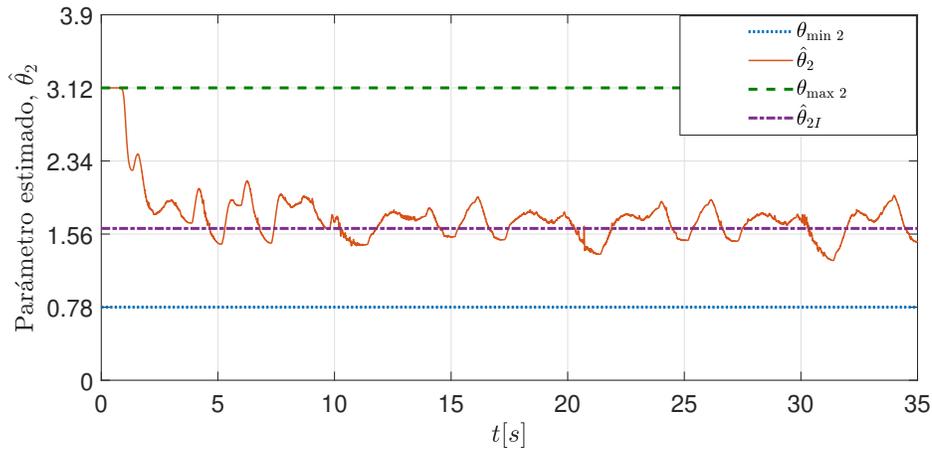


Figura 6.10: Parámetro estimado $\hat{\theta}_2$ acotado por $[\theta_{\min 2}, \theta_{\max 2}]$ producidos por la ley de adaptación (6.29)-(6.30). Algoritmo CADASM-VR.

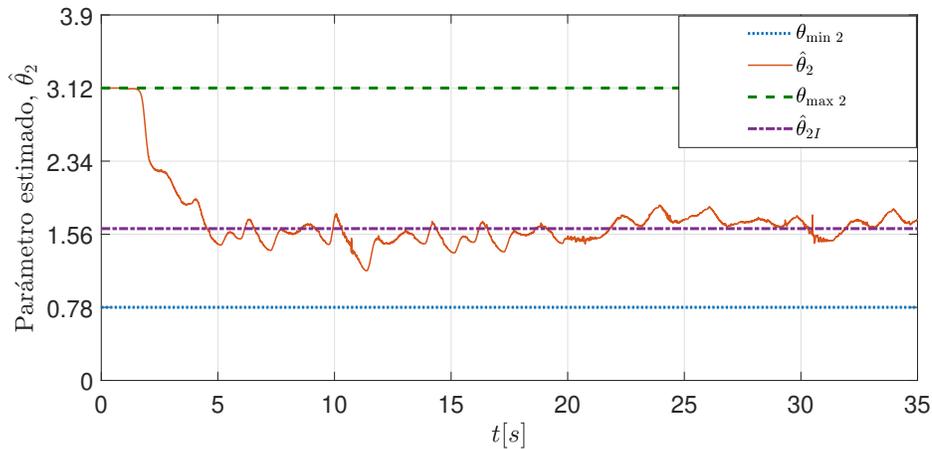


Figura 6.11: Parámetro estimado $\hat{\theta}_2$ acotado por $[\theta_{\min 2}, \theta_{\max 2}]$ producidos por la ley de adaptación (6.29)-(6.31). Algoritmo CADASD-VR.

Experimento 2

En el segundo experimento las ganancias correspondientes a los términos no adaptables en los algoritmos CADASM-VR y CADASD-VR se mantuvieron iguales a las utilizadas en el experimento 1, mientras que las ganancias de la ley de adaptación δ_i , $i = 1, 2$ se incrementaron 4 veces, es decir:

$$\delta_1 = \delta_2 = 200$$

Como se mencionó anteriormente, este ajuste en las ganancias de la ley de adaptación se realizó debido a que en ellas radica la principal diferencia en el uso de señales medidas y deseadas en el vector regresor. Así, las ganancias de los términos no adaptables para ambos algoritmos son las presentadas en la tabla (5.2), con excepción de las ganancias δ_i .

En la Fig. 6.12 y Fig. 6.13 se presentan el resultado del seguimiento de la señal de referencia y_d y la salida en posición del servomotor y correspondiente a los algoritmos CADASM-VR y CADASD-VR respectivamente. Nuevamente, al igual que en el experimento 1 ambos resultados muestran que se cumple el objetivo de seguimiento y no existe una diferencia significativa.

Así mismo, las Fig. 6.14 y 6.15 muestran el error de seguimiento el cual decrece con el tiempo en ambos casos. De la misma manera que en el experimento 1, los errores elevados de seguimiento al inicio de las pruebas con ambos algoritmos se deben a las condiciones iniciales (6.96), cuyos valores son más grandes que los valores máximos y mínimos mostrados en (6.86). A simple vista, se observa que ambos errores de seguimiento disminuyen con respecto a los obtenidos en el Experimento 1.

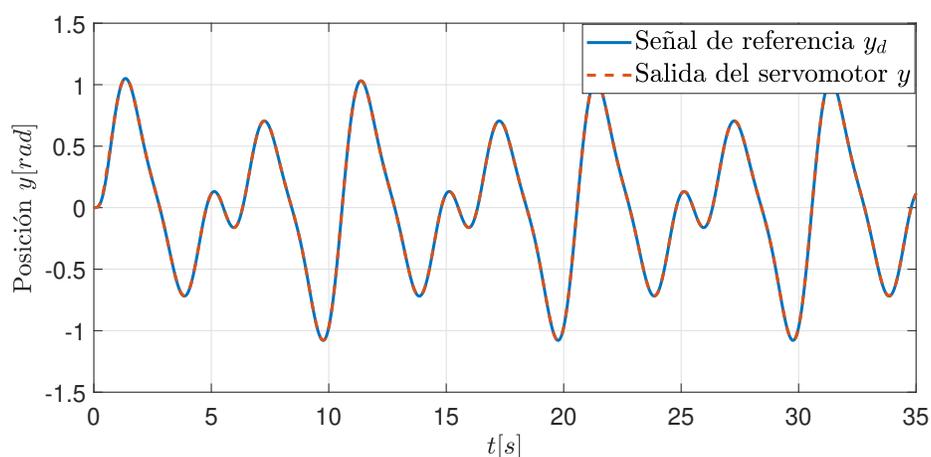


Figura 6.12: Señal de Referencia deseada y_d vs Salida de posición del servomotor y utilizando el algoritmo CADASM-VR (6.88) con la ley de adaptación (6.90). **Experimento 2.**

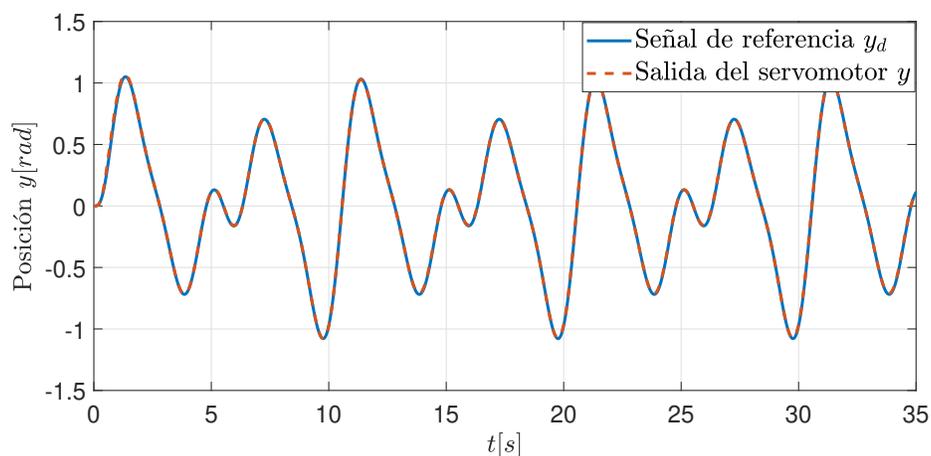


Figura 6.13: Señal de Referencia deseada y_d vs Salida de posición del servomotor y utilizando el algoritmo CADASD-VR (6.91) con la ley de adaptación (6.93). **Experimento 2.**

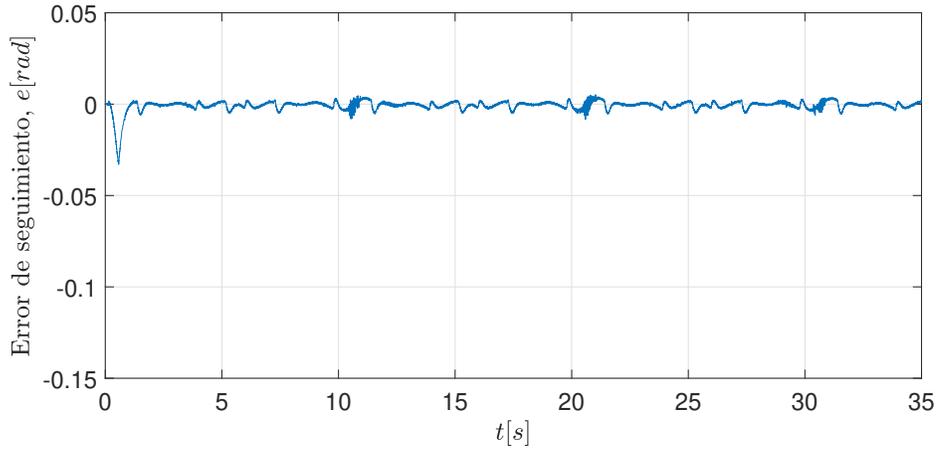


Figura 6.14: Error de seguimiento e utilizando el algoritmo CADASM-VR (6.88) con la ley de adaptación (6.90). **Experimento 2.**

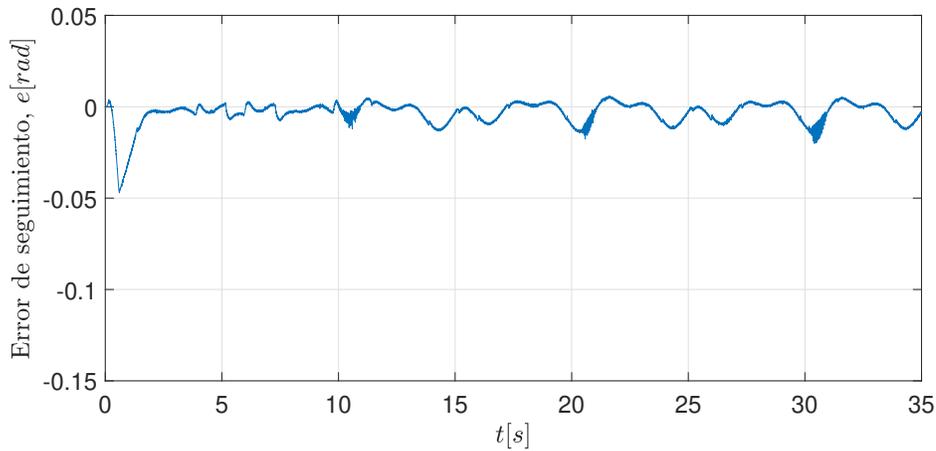


Figura 6.15: Error de seguimiento e utilizando el algoritmo CADASM-VR (6.91) con la ley de adaptación (6.93). **Experimento 2.**

En las Fig. 6.16 y 6.17 las señales producidas por las leyes de control CADASM-VR y CADASD-VR presentan una gran diferencia entre ambos algoritmos. El algoritmo CADASM-VR produce una señal con mayor castaño que la señal de control producida por el algoritmo CADASD-VR. Además, se observa que la señal de control producida por el algoritmo CADASM-VR en el Experimento 1 tiene menor amplitud y presenta menos niveles de castaño en comparación con la señal producida en el Experimento 2.

Las Fig. 6.18 y 6.19 muestran el estimado $\hat{\theta}_1$ producido por las leyes de adaptación (6.87)-(6.90) y (6.87)-(6.93). Es importante notar que en este caso el estimado $\hat{\theta}_1$ producido por la ley de adaptación (6.87)-(6.90) correspondiente al algoritmo CADASM-VR permanece en su límite inferior $\theta_{\min 1}$ durante toda la ejecución del algoritmo, lo que provoca la pérdida de la capacidad de adaptación del controlador. Este efecto se le atribuye al término $\delta_1 \dot{v} r_1$ en la

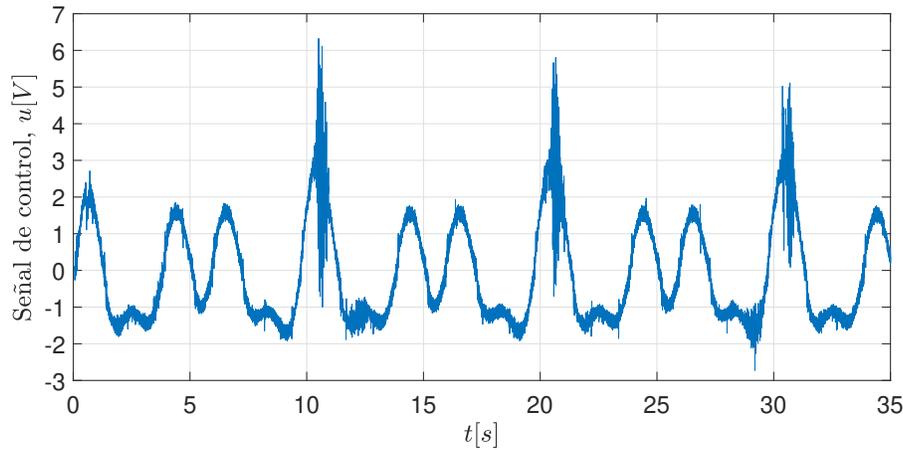


Figura 6.16: Señal de control u producida por el algoritmo CADASM-VR (6.88) con la ley de adaptación (6.90). **Experimento 2.**

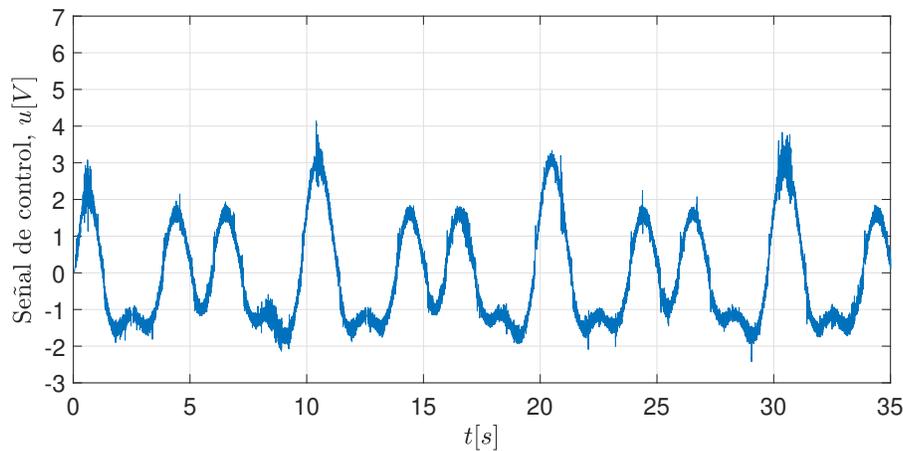


Figura 6.17: Señal de control u producida por el algoritmo CADASD-VR (6.91) con la ley de adaptación (6.93). **Experimento 2.**

ley de adaptación (6.90), el cual genera cambios violentos en la señal de control (6.88), dicho efecto será abordado a detalle en la discusión de ambos experimentos. En contraste, con el estimado $\hat{\theta}_1$ producido por la ley de adaptación (6.87)-(6.93) se mantiene en su límite inferior durante los primeros segundos del experimento debido a la condición inicial $\hat{\eta}_1(0) = -10$, que es menor que el límite inferior $\theta_{\min 1} = 0.01$. Sin embargo, después de este periodo de tiempo el estimado se encuentra dentro de los límites $\theta_{\min 1}$ y $\theta_{\max 1}$. Además, en el presente experimento dicho estimado se establece aproximadamente 10 segundos más rápido en comparación con el Experimento 1, lo que permite concluir que el algoritmo CADASD-VR, al utilizar una alta ganancia acelera el mecanismo de adaptación sin afectar de manera significativa la señal de control. En contraste, el algoritmo CADASM-VR, el aumento en la ganancia de adaptación incrementa considerablemente los niveles de ruido en la señal de control, lo que provoca una

pérdida de adaptación en el estimado $\hat{\theta}_1$.

En el caso de los estimados $\hat{\theta}_2$ presentados en las Fig. 6.20 y Fig. 6.21 producido por ambos algoritmos CADASM-VR y CADASD-VR, estos al igual que en el Experimento 1 permanecen los primeros segundos en el límite superior $\theta_{\max 2}$ y posteriormente evolucionan dentro de los límites $\theta_{\min 2}$ y $\theta_{\max 2}$. Cabe destacar que aunque el estimado producido por el algoritmo CADASM-VR se establece más rapido en comparación respecto al producido por el algoritmo CADASD-VR, presenta mayores oscilaciones. Además, se observa una notable diferencia en el comportamiento del estimado mostrado en la Fig. (6.20) en comparación con el obtenido en el Experimento 1.

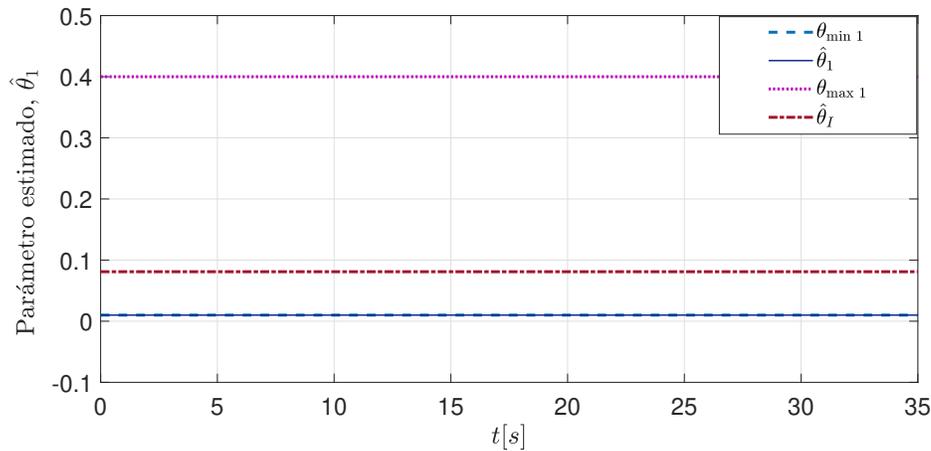


Figura 6.18: Parámetro estimado $\hat{\theta}_1$ acotado por $[\theta_{\min 1}, \theta_{\max 1}]$ producidos por la ley de adaptación (6.87)-(6.90). Algoritmo CADASM-VR. **Experimento 2**. Sintonización manual.

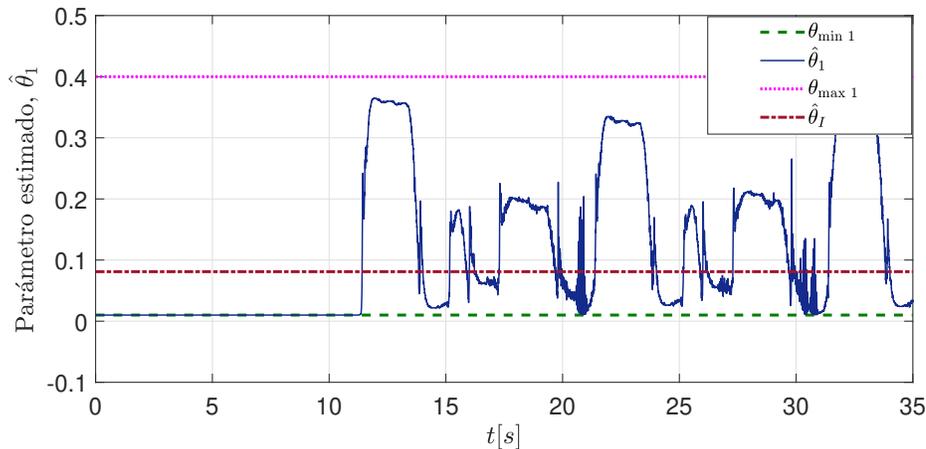


Figura 6.19: Parámetro estimado $\hat{\theta}_1$ acotado por $[\theta_{\min 1}, \theta_{\max 1}]$ producidos por la ley de adaptación (6.87)-(6.93). Algoritmo CADASD-VR. **Experimento 2**. Sintonización manual.

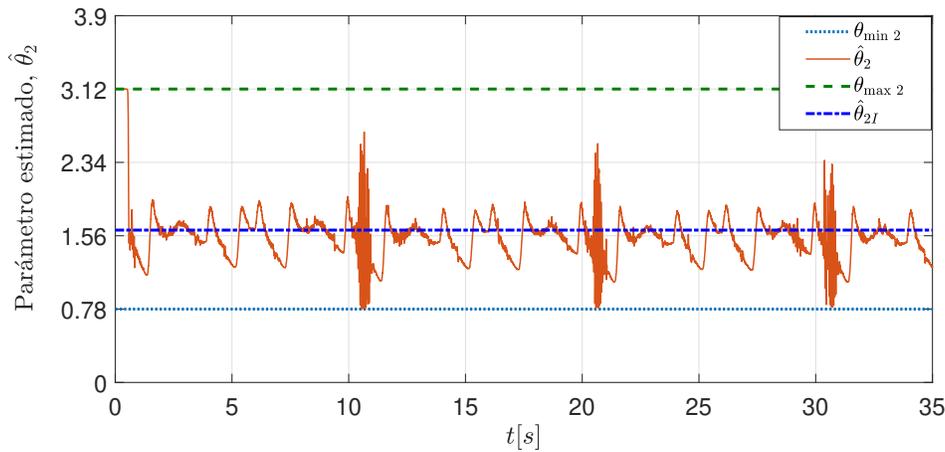


Figura 6.20: Parámetro estimado $\hat{\theta}_2$ acotado por $[\theta_{\min 2}, \theta_{\max 2}]$ producidos por la ley de adaptación (6.87)-(6.90). Algoritmo CADASM-VR. **Experimento 2**. Sintonización manual.

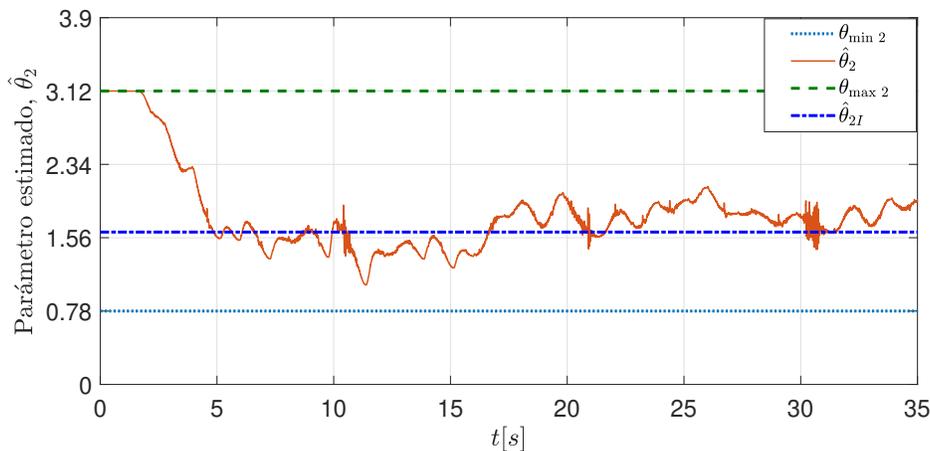


Figura 6.21: Parámetro estimado $\hat{\theta}_2$ acotado por $[\theta_{\min 2}, \theta_{\max 2}]$ producidos por la ley de adaptación (6.87)-(6.93). Algoritmo CADASD-VR. **Experimento 2**. Sintonización manual.

Discusión de los resultados obtenidos en los Experimentos 1 y 2

De acuerdo con los resultados presentados en ambos Experimentos, se evidenció el efecto del aumento en las ganancias de adaptación. De los dos algoritmos, el que experimentó mayores cambios tanto en el desempeño de la señal de control como en el comportamiento de los estimados fue el algoritmo CADASM-VR (6.88), que utiliza la ley de adaptación (6.87)-(6.90) con señales medidas en el vector regresor. Para explicar el castaño en el algoritmo CADASM-VR, es necesario considerar varios aspectos. Primeramente, la relación entre la posición angular real del motor y la medición producida por un codificador óptico es discontinua. Esto tiene como consecuencia que la señal de posición medida tenga cambios muy rápidos y cuando se procesa por el filtro (6.82), este último produce estimados de velocidad de alto contenido frecuencial con

cambios aún más rápidos que los que aparecen en la señal de posición. Este comportamiento es más pronunciado cuando la posición angular del servomotor cambia rápidamente. En consecuencia, los estimados de la velocidad exhiben castaño el cual puede considerarse como ruido de medición. Cabe mencionar que el servomotor MakeBlock empleado en los experimentos posee un codificador óptico incremental para medir su posición angular (ver Tabla 3.1), y que cualquier codificador de este tipo posee una relación discontinua entre la posición real y la posición medida.

El segundo aspecto sobre el castaño está relacionado con la señal \dot{v} en la ley de adaptación (6.90), la cual está multiplicada por r_1 definido en (6.89) y que depende de la velocidad angular \dot{y} . Este producto produce:

$$\begin{aligned}
 \dot{v}r_1 &= [\ddot{y}_d + \epsilon(\dot{y}_d - \dot{y})](\epsilon e + \dot{y}_d - \dot{y}) \\
 &= [(\ddot{y}_d + \epsilon\dot{y}_d) - \epsilon\dot{y}][(\epsilon e + \dot{y}_d) - \dot{y}] \\
 &= (\ddot{y}_d + \epsilon\dot{y}_d)(\epsilon e + \dot{y}_d) - (\ddot{y}_d + \epsilon\dot{y}_d)\dot{y} - (\epsilon e + \dot{y}_d)\epsilon\dot{y} + \epsilon\dot{y}^2 \\
 &= (\ddot{y}_d + \epsilon\dot{y}_d)(\epsilon e + \dot{y}_d) - (\ddot{y}_d + 2\epsilon\dot{y}_d + \epsilon^2 e)\dot{y} + \epsilon\dot{y}^2
 \end{aligned} \tag{6.97}$$

en donde, se puede observar que la velocidad \dot{y} aparece en un término cuadrático el cual se compone por un término libre de ruido \dot{y}_{sr} y el ruido η , i.e.:

$$\begin{aligned}
 \epsilon\dot{y}^2 &= \epsilon(\dot{y}_{sr} + \eta)^2 \\
 &= \epsilon\dot{y}_{sr}^2 + 2\epsilon\dot{y}_{sr}\eta + \epsilon\eta^2
 \end{aligned} \tag{6.98}$$

Entonces, de (6.98) se concluye que si el estimado de \dot{y} tiene niveles importantes de ruido de medición, su efecto se incrementa debido al término cuadrático $\epsilon\eta^2$. Además, valores elevados de ϵ aumentan el efecto de η^2 . Notar también que el producto $\epsilon\dot{v}r_1$ en (6.90) está multiplicado por la ganancia δ_1 , i.e. $\delta_1\epsilon\dot{v}r_1$, consecuentemente, valores considerables de esta ganancia amplificarán ulteriormente el efecto del ruido. Lo anterior, explica el comportamiento de los resultados del algoritmo CADASM-VR obtenidos en el Experimento 2 al incrementar cuatro veces la ganancia de adaptación. Sin embargo, este efecto no influyó en el seguimiento de la señal de referencia debido a la proyección suave de los parámetros y a la compensación del estimado $\hat{\theta}_2$.

Es importante resaltar que el ruido generado por la estimación de la velocidad no afecta de la misma manera al algoritmo CADASD-VR. Notar que la ley de adaptación (6.93) solo depende de la velocidad \dot{y} a través de variable r_2 , esto es $r_2 = e + \dot{e} = e + \dot{y}_d - \dot{y}$ y no existen términos cuadráticos dependientes de ruido como en el caso del algoritmo CADASM-VR. Lo anterior representa una ventaja del algoritmo CADASD-VR respecto del algoritmo CADASM-VR.

6.6. Análisis de desempeño de los algoritmos CADASM-VR y CADASD-VR

Para evaluar el desempeño de los algoritmos CADASM-VR y CADASM-VR sintonizados de manera manual se utilizan los siguientes criterios de desempeño: la Integral del Valor Absoluto del Error Cuadrático (IAE), la Integral del Valor Absoluto de la señal de control (IAC), la Integral del Valor Absoluto de la Variación de la señal de control ($IAVC$) y la Integral del Valor Absoluto de la Variación de Parámetros Estimados ($IAVPE$). Estos índices se expresan como sigue:

$$IAE = \int_{T_1}^{T_2} k|e(t)|dt \quad (6.99)$$

$$IAC = \int_{T_1}^{T_2} |u(t)|dt \quad (6.100)$$

$$IAVC = \int_{T_1}^{T_2} \left| \frac{du(t)}{dt} \right| dt \quad (6.101)$$

$$IAVPE = \int_{T_1}^{T_2} \left| \dot{\hat{\theta}}_i \right| dt, i = 1, 2 \quad (6.102)$$

donde e es el error de seguimiento, u la señal de control y $\dot{\hat{\theta}}_i$ es la variación del parámetro estimado i . El parámetro k representa un factor de escala y $\{T_1, T_2\}$ define un intervalo de tiempo en el que se calculan los índices de rendimiento. Se utiliza un valor de $k = 100$ con $T_1 = 20s$ y $T_2 = 30s$.

La tabla 6.2 muestra los índices de desempeño correspondientes a los algoritmos CADASM-VR y CADASD-VR producidos en los Experimentos 1 y 2. En el Experimento 1 se observa que el índice IAE es menor en el algoritmo CADASM-VR. El índice IAC en ambos algoritmos presenta una diferencia pequeña lo cual es razonable dado que ambos generan señales de control con amplitudes similares. Sin embargo, existen diferencias notables en el caso de los índices $IAVC$: el valor producido por el algoritmo CADASD-VR es aproximadamente un 33 % menor que el generado por el algoritmo CADASM-VR. Esto se atribuye a que este último no emplea mediciones de la velocidad en el vector regresor. En cuanto a los índices $IAVPE$ correspondientes a los estimados $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$, sus valores no son muy diferentes lo que indica que ambos algoritmos tienen un comportamiento similar.

Con respecto a los índices obtenidos en el Experimento 2, se observar que los índices IAE decrecen en comparación con los valores obtenidos en el Experimento 1, mientras que los índices IAC se mantienen con muy poca variación respecto a los obtenidos en el Experimento 1. Esto se debe al aumento de la ganancia de adaptación δ_i lo cual acelerar el mecanismo de adaptación

Ley de control Adaptable	IAE	IAC	$IVAC$	$IAVPE$	
				$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$
CADASM-VR (6.88) con la ley de adaptación (6.90). Experimento 1	1.8446	13.0428	704.69	2.2794	9.772
CADASD-VR (6.91) con la ley de adaptación (6.93). Experimento 1	4.3804	12.245	404.534	2.9306	9.1652
CADASM-VR (6.88) con la ley de adaptación (6.90). Experimento 2	1.298	12.59	971.4	0	58.7
CADASD-VR (6.91) con la ley de adaptación (6.93). Experimento 2	3.79	12.29	789.9	10.16	20.44

Tabla 6.2: Desempeño del algoritmos CADASM-VR y CADASD. Experimento 1 y 2. Sintonización manual.

y los parámetros estimados cambian más rápido para así disminuir el error de seguimiento. Sin embargo, esta mejora trae consigo un aumento en la sensibilidad al ruido como se refleja en los valores del índice $IVAC$. El valor producido por el algoritmo CADASM-VR es aproximadamente un 25 % mayor que el obtenido en el Experimento 1, mientras que el $IVAC$ generado por el CADASD-VR aumenta en un 12 % aproximadamente en comparación con el mismo experimento. Por otro lado, en el Experimento 2 se siguen observado diferencias en los valores de los índices $IVAC$ generados por ambos algoritmos CADASM-VR y CADASD-VR. En este caso, el índice más pequeño lo produce el algoritmo CADASD-VR.

Otro problema derivado del incremento de las ganancias en las leyes de adaptación es el comportamiento de los parámetros estimados. EL valor del $IAVPE$ para el estimado $\hat{\theta}_1$ generado por la ley de adaptación (6.87)-(6.90) es cero, ya que este deja de actualizarse debido a que la alta ganancia lo mantienen en su límite inferior. Por otro lado, el $IAVPE$ del estimado $\hat{\theta}_1$ generado por el algoritmo CADASD-VR se incrementa cinco veces más con respecto al obtenido en el Experimento 1, este parámetro presenta oscilaciones pero se mantiene su actualización sin permanecer en los límites que impone la saturación. Esto resulta una de las ventajas mencionadas del algoritmo CADASD-VR sobre el CADASM-VR.

El índice $IAVPE$ para el estimado $\hat{\theta}_2$ producido por el algoritmo CADASM-VR se incrementa seis veces en comparación con el valor obtenido en el Experimento 1. Mientras tanto, el índice $IAVPE$ para el estimado $\hat{\theta}_2$ producido por el algoritmo CADASD-VR solo aumenta el doble.

En conclusión, la principal diferencia entre los algoritmos CADASM-VR (6.88) y CADASD-VR (6.91) radica en que el primero emplea un control adaptable saturado utilizando señales medidas en el vector regresor lo cual se traduce en un mayor castaño en los estimados y

en la señal de control comparado con el segundo, en donde se emplean señales asociadas a la trayectoria deseada. Además, es importante considerar una sintonización adecuada de las ganancias de adaptación para mantener un buen desempeño del algoritmo CADASM-VR, pues valores elevados pueden producir que se pierda la capacidad de adaptación.

6.7. Conclusiones

Los resultados presentados indican que los algoritmos de control Adaptable propuestos CADASM-VR y CADASD-VR garantizan la estabilidad del sistema en el sentido de que sus trayectorias en lazo cerrado están Uniformemente Últimamente Acotadas. Además, los experimentos muestran que ambos controladores propuestos producen un error de seguimiento que es decreciente a lo largo del tiempo, lo que significa que el mecanismo de adaptación mejora el rendimiento de seguimiento. Sin embargo, comparando las dos propuestas, los experimentos revelan que al emplear señales medidas en el vector regresor junto con el uso de ganancias de adaptación elevadas en el algoritmo CADASM-VR produce altos niveles de castaño en la señal de control. Además, los parámetros estimados convergen a los límites impuestos por la proyección de parámetros manteniéndose en esos valores perdiéndose así la capacidad de adaptación de la ley de control.

Capítulo 7

Conclusiones y trabajo a futuro

7.1. Conclusiones

Las conclusiones generales del presente trabajo correspondiente al estudio comparativo de servomotores de CD de bajo costo, los resultados experimentales obtenidos de la implementación del algoritmo de control por Rechazo Activo de Perturbaciones en un prototipo de bajo costo y el desempeño de las propuestas de algoritmos de control adaptable con modificación- e utilizando una técnica de acotamiento suave, se resumen a continuación:

- De acuerdo al estudio comparativo realizado en esta tesis, las ventajas que posee el servomotor de la marca *MakeBlock* contra el servomotor de la marca *LEGO* y el *SARC* permitió su elección para la construcción de una plataforma de experimentación de bajo costo y la implementación de algoritmos de control clásicos y avanzados. Como se pudo observar, el hecho de que este motor posea un sensor óptico con una resolución de 360 ppr permitió obtener desempeños adecuados en cada uno de los experimentos realizados. Por otro lado, a pesar que su costo es mayor respecto a los servomotores *LEGO* y *SARC*, este motor sigue siendo una opción adecuada para el desarrollo de plataformas de experimentación de bajo costo. También se observó que es posible implementar sin dificultades particulares los algoritmos de control Proporcional Integral Derivativo (PID) y Control adaptable por Modelo de Referencia, además de la evaluación de algoritmos de control avanzados como el Control por Rechazo Activo de Perturbaciones y los Controladores Adaptables con modificación- e y con proyección suave de parámetros.
- Los resultados experimentales de la evaluación del algoritmo de Control por Rechazo Activo de Perturbaciones (ADRC) sintonizado por los algoritmos ω -PSO, PSO-Fraccionario y PSO-AWDV muestran un desempeño adecuado del sistema en lazo cerrado. Por otro lado, este esquema solo requiere mediciones entrada-salida y el conocimiento de la ganancia de entrada del servosistema, lo cual hace fácil su implementación para efectos prácticos y educativos. El empleo de los algoritmos PSO permitió encontrar ganancias óptimas en un espacio de búsqueda restringido por las condiciones de estabilidad del sistema en lazo cerrado y además esta sintonización permitió proporcionar un rendimiento óptimo en el algoritmo ADCR con respecto a la minimización del error de seguimiento y del castaño en la señal de control.

- En relación con las propuestas de algoritmos de control adaptable con modificación—e utilizando una técnica de acotamiento suave en los parámetros estimados, es importante destacar que si no se acotan las estimaciones de los parámetros, éstos pueden producir grandes picos en la señal de control que pueden traducirse en un comportamiento oscilatorio o brusco en el sistema en lazo cerrado. La implementación de una proyección suave de los parámetros previene que este comportamiento comprometa el desempeño del sistema y de esta manera se logró cumplir el objetivo de seguimiento de trayectoria. Por otro lado, el uso de señales deseadas en lugar de medidas en el regresor de uno de los algoritmos de control adaptable garantiza un comportamiento suave de la señal de control. Cabe destacar que se obtiene un buen rendimiento del controlador adaptable propuesto a pesar del bajo costo del servomotor empleado en los experimentos y de la baja resolución de su codificador óptico. Una dificultad en la implementación de la proyección de parámetros suave es la necesidad de determinar los límites inferior y superior de los parámetros del servo sistema. Este problema puede abordarse utilizando estimadores de parámetros fuera de línea estándar.

7.2. Trabajo futuro

De acuerdo con los resultados favorables obtenidos en la propuestas de controladores adaptables que utilizan una técnica de acotamiento suave y señales deseadas en el vector regresor, se proponen los siguientes objetivos para trabajos futuros :

- Diseño de un control adaptable que considere un modelo extendido del servomecanismo, incluyendo el término de fricción de Coulomb. Se espera que esta extensión mejore el desempeño del sistema en lazo cerrado.
- Desarrollo de la propuesta de controladores adaptables para sistemas lineales de orden arbitrario y para sistemas electromecánicos incluyendo robots manipuladores, cuadrotores y submarinos.
- Sintonizar las ganancias de los algoritmos de control adaptable CADASM-VR y CADASD-VR utilizando el algoritmo de PSO. El objetivo es determinar una función de desempeño que permita encontrar un equilibrio entre la convergencia del error, el comportamiento de los parámetros estimados y el consumo de energía.

Apéndice A

Modelo matemático de un motor de CD de imanes permanentes

Un motor de Corriente Directa (CD) es una máquina encargada de convertir energía eléctrica en mecánica. Este consiste de varias espiras de alambre de cobre que giran de manera libre en medio del campo magnético generado por un imán permanente. Las espiras de alambre se montan en las ranuras de un cilindro de material magnético conocido como armadura. Los extremos de las espiras de la armadura se conectan con los segmentos adyacentes de un anillo segmentado denominado conmutador y el contacto eléctrico con los segmentos se logra mediante contactos de carbón llamadas escobillas. La dirección de rotación del motor de CD cambia de sentido al invertirse el voltaje aplicado a las escobillas [118].

En la Fig. A.1 se muestra un circuito eléctrico equivalente a un motor de CD, es decir, la armadura se modela como un circuito con resistencia R_a conectada en serie a una inductancia L_a y a una fuente de voltaje e_b que representa la fuerza contraelectromotriz cuando el rotor gira. El campo magnético se representa mediante una bobina y una corriente i_f . Las variables y parámetros del motor se definen en la Tabla A.1: Puesto que la armadura, la cual conduce

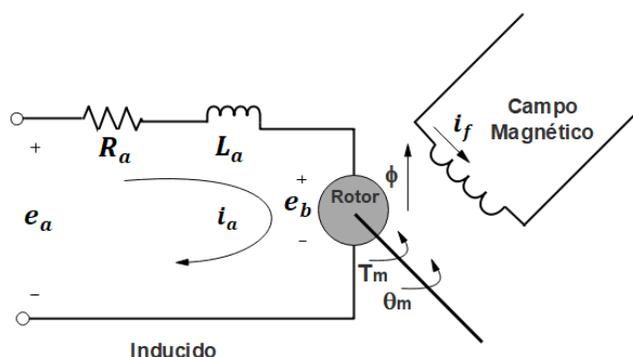


Figura A.1: Diagrama de un motor de CD.

Variables	Descripción (Unidad de medida)
T_m	Par electromagnético del motor (N-m)
ϕ	Flujo magnético (Wb)
i_f	Corriente de excitación (A)
i_a	Corriente de armadura (A)
L_a	Inductancia (H)
R_a	Resistencia (Ω)
k_m	Constante de par (N-m/A)
k_c	Constante de la fuerza contraelectromotriz (V-s/rad)
e_b	Fuerza contraelectromotriz (V)
e_a	Señal de control (V)
ω_m	Velocidad angular (rad/s)
J_m	Momento de inercia del motor (kg-m ²)
b_m	Coefficiente de fricción viscosa del motor (N-m-s)
θ_m	Desplazamiento angular del motor (rad).

Tabla A.1: Variables y parámetros de un motor de CD.

corriente, gira dentro de un campo magnético se induce una fuerza contraelectromotriz e_b que es proporcional a la velocidad angular ω_m de la armadura:

$$e_b = k_c \omega_m = k_c \frac{d\theta_m}{dt} \quad (\text{A.1})$$

Aplicando la ley de Kirchhoff de mallas al circuito de la armadura se cumple que:

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_b = e_a \quad (\text{A.2})$$

o bien:

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + k_c \frac{d\theta_m}{dt} = e_a \quad (\text{A.3})$$

Para un análisis lineal se supone que el par T_m desarrollado en el eje del motor es directamente proporcional al flujo ϕ en el campo y a la corriente de armadura i_a :

$$T_m = k_1 i_a \phi \quad (\text{A.4})$$

donde

$$\phi = k_f i_f$$

Considerando que el motor de CD tiene imanes permanentes, se utiliza la corriente de armadura i_a como la variable de control. Lo anterior implica una corriente i_f constante en la

bobina de excitación por lo que la densidad de flujo de campo ϕ es constante. Por lo tanto, el par generado por el motor es proporcional a la corriente de armadura. Entonces la ecuación A.4 puede escribirse como:

$$T_m = k_m i_a \quad (\text{A.5})$$

Ahora bien, la ecuación que relaciona a los pares del motor es:

$$J_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + b_m \frac{d\theta_m}{dt} = T_m = k_m i_a \quad (\text{A.6})$$

Aplicando la transformada de Laplace a las ecuaciones (A.3 y A.6) suponiendo condiciones iniciales iguales a cero, se obtiene:

$$L_a s I_a(s) + R_a I_a(s) + k_c s \Theta_m(s) = E_a(s) \quad (\text{A.7})$$

y

$$J_m s^2 \Theta_m(s) + b_m s \Theta_m(s) = k_m I_a(s) \quad (\text{A.8})$$

donde $I_a(s) = \mathcal{L}\{i_a\}$, $\Theta_m(s) = \mathcal{L}\{\theta_m\}$, $E_a(s) = \mathcal{L}\{e_a\}$ y el operador $\mathcal{L}\{\bullet\}$ corresponde a la transformada de Laplace.

Despejando $I_a(s)$ de A.7 y A.8 e igualando ambas ecuaciones se tiene:

$$\frac{E_a(s) - k_c s \Theta_m(s)}{L_a s + R_a} = \frac{J_m s^2 + b_m s}{k_m} \Theta_m(s) \quad (\text{A.9})$$

$$E_a(s) = \frac{[(L_a s + R_a)(J_m s^2 + b_m s) + k_m k_c s] \Theta_m(s)}{k_m} \quad (\text{A.10})$$

A partir de la ecuación A.10 se obtiene la función de transferencia entre el desplazamiento angular del eje del motor $\Theta_m(s)$ y el voltaje de entrada $E_a(s)$.

$$\frac{\Theta_m(s)}{E_a(s)} = \frac{k_m}{s(L_a s + R_a)(J_m s + b_m) + k_c k_m s} \quad (\text{A.11})$$

Ahora bien, si el motor de CD tiene acoplado una carga por medio de un juego de engranajes como se muestra en la Fig. A.2, entonces, el momento de inercia J_L y el coeficiente de fricción viscosa B_L de la carga se pueden reflejar en la armadura como una inercia y un amortiguamiento equivalente. El momento de inercia y el coeficiente de fricción viscosa del conjunto de engranajes se incluyen en los de la carga, es decir:

$$J_{eq} = J_m + n^2 J_L$$

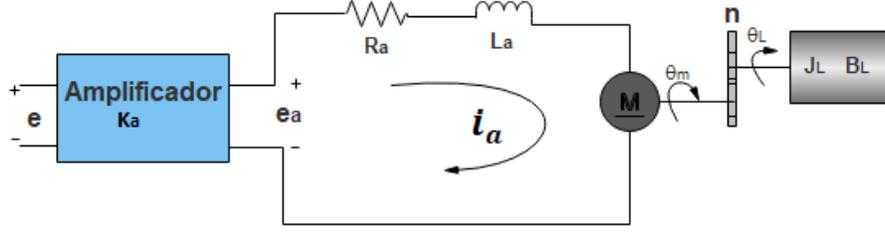


Figura A.2: Representación esquemática de un motor de CD con carga.

$$b_{eq} = b_m + n^2 B_L$$

Donde se tiene que la relación de engranajes es tal que la flecha de salida conectada a la carga gira n veces por cada revolución de la flecha del motor. Entonces:

$$\Theta_L(s) = n\Theta_m(s) \quad (\text{A.12})$$

En consecuencia, la ecuación A.11 se escribe como:

$$\frac{\Theta_L(s)}{E_a(s)} = \frac{nk_m}{s(L_a s + R_a)(J_{eq} s + b_{eq}) + k_c k_m s} \quad (\text{A.13})$$

Como se logra ver en la Fig. A.2 se incluye un amplificador de potencia, el cual se representa mediante una ganancia k_a . Por lo tanto, el voltaje de entrada $E_a(s)$ es proporcional al voltaje de referencia $E(s)$, esto es:

$$E_a(s) = K_a E(s) \quad (\text{A.14})$$

En consecuencia se tiene que:

$$\frac{\Theta_L(s)}{E(s)} = \frac{nK_a k_m}{s(L_a s + R_a)(J_{eq} s + b_{eq}) + k_c k_m s} \quad (\text{A.15})$$

Dividiendo la función de transferencia A.15 entre R_a produce:

$$\frac{\Theta_L(s)}{E(s)} = \frac{nK_a k_m}{R_a s \left(\frac{L_a}{R_a} s + 1 \right) (J_{eq} s + b_{eq}) + k_c k_m s} \quad (\text{A.16})$$

Finalmente, considerando que los servomotores empleados en este trabajo son pequeños, lo anterior implica que la inductancia de armadura L_a es pequeña en comparación con la resistencia R_a [32], entonces el cociente $\frac{L_a}{R_a}$ es pequeño. Entonces, la función de transferencia A.16 se reduce

a:

$$G(s) = \frac{\Theta_L(s)}{E(s)} = \frac{\frac{nK_a k_m}{R_a}}{s(J_{eq}s + b_{eq} + \frac{k_c k_m}{R_a})}$$

Por lo que simplificando se llega a:

$$G(s) = \frac{b}{s(s+a)} \tag{A.17}$$

en donde:

$$b = \frac{K_a k_m n}{R_a J_{eq}}$$
$$a = \frac{b_{eq} + \frac{k_m k_c}{R_a}}{J_{eq}}$$

Aplicando la Transformada Inversa de Laplace a la función de transferencia (A.17) produce:

$$\ddot{y} = -a\dot{y} + bu \tag{A.18}$$

Notar que el término $a > 0$ está relacionado a la fricción viscosa y a la fuerza contraelectromotriz, y $b > 0$ es la ganancia de entrada y es proporcional a la ganancia del amplificador.

Apéndice B

Identificación Paramétrica de un Servomotor de CD

Considérese el modelo matemático del servosistema (A.18). Debido a que el sistema es marginalmente estable este se estabiliza mediante un controlador Proporcional Derivativo y llevar a cabo la identificación de parámetros.

La identificación de parámetros es realizada a partir del método de Mínimos Cuadrados [19], [78], [119]. Para la aplicación de este método son necesarias las mediciones de la señal de control u la salida de la planta y y sus derivadas que corresponden a la velocidad angular \dot{y} y la aceleración angular \ddot{y} en instantes de tiempos diferentes para formar un sistema sobredeterminado. Estas variables se estiman mediante filtros lineales para generar una expresión que contenga los parámetros desconocidos [23].

Los filtros están definidos a partir de la siguiente función de transferencia:

$$F(s) = \frac{f_2}{s^2 + f_1s + f_2} \quad (\text{B.1})$$

con f_1 y f_2 constantes positivas.

Aplicando el filtro al modelo (A.18) se obtiene:

$$\ddot{y}_f + a\dot{y}_f = bu_f \quad (\text{B.2})$$

Los filtros utilizados para generar las señales u_f , \ddot{y}_f y \dot{y}_f son los siguientes:

$$\begin{aligned} y &\rightarrow \frac{-f_2s}{s^2 + f_1s + f_2} \rightarrow -\dot{y}_f \\ y &\rightarrow \frac{f_2s^2}{s^2 + f_1s + f_2} \rightarrow \ddot{y}_f \\ u &\rightarrow \frac{f_2}{s^2 + f_1s + f_2} \rightarrow u_f \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

El modelo filtrado dado por (B.2) permite obtener una regresión lineal basada en las señales disponibles, es decir:

$$z(t) = \phi_{LS}^\top(t)\theta_{LS} \quad (\text{B.4})$$

en donde:

$$z(t) = \ddot{y}_f$$

$$\phi_{LS}(t) = \begin{bmatrix} -\dot{y}_f \\ u_f \end{bmatrix}, \quad \theta_{LS} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{LS1} \\ \theta_{LS2} \end{bmatrix}$$

El término $\phi_{LS}(t)$ corresponde al vector regresor de funciones conocidas y $\theta_{LS} \in \mathfrak{R}^2$ es un vector de parámetros desconocidos.

La ecuación (B.4) es válida para todo tiempo t , además también lo es para los momentos de tiempo $T, 2T, \dots, (k-1)T, kT$, donde T es el periodo de muestro usado en la adquisición de los datos experimentales. La observación anterior permite escribir (B.4) como:

$$z(k) = \phi^T(k)\theta_{LS} \quad (\text{B.5})$$

en donde se ha eliminado T para simplificar la notación.

Las mediciones y y u se realizan en los instantes $1, 2, \dots, (k-1), k$ y los valores correspondientes de \dot{y}_f , \ddot{y}_f y u_f se calculan en estos instantes. Lo anterior permite formar el siguiente sistema sobredeterminado donde θ_1 y θ_2 son las incógnitas:

$$\begin{aligned} -\dot{y}_f(1)\theta_1 + u_f(1)\theta_2 &= \ddot{y}_f(1) \\ -\dot{y}_f(2)\theta_1 + u_f(2)\theta_2 &= \ddot{y}_f(2) \\ &\vdots \\ -\dot{y}_f(k)\theta_1 + u_f(k)\theta_2 &= \ddot{y}_f(k) \end{aligned}$$

el cual puede ser expresado como:

$$\begin{bmatrix} \phi_{LS}^T(1) \\ \phi_{LS}^T(2) \\ \vdots \\ \phi_{LS}^T(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(1) \\ z(2) \\ \vdots \\ z(k) \end{bmatrix}$$

Por último, la solución en el sentido de Mínimos Cuadrados para el sistema sobredeterminado corresponde a [78], [120]:

$$\hat{\theta}_{LS} = (A^T A)^{-1} A^T Y \quad (\text{B.6})$$

con

$$A = \begin{bmatrix} \phi_{LS}^T(1) \\ \phi_{LS}^T(2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_{LS}^T(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 2}; \quad Y = \begin{bmatrix} z(1) \\ z(2) \\ \cdot \\ \cdot \\ z(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

Apéndice C

Algoritmo de la simulación dinámica del ADRC

```
Kpso = [38.93, 342.87, 92.14];  
[J,x,ref,refp,u,t] = ints(Kpso);  
figure  
hold on  
plot(t,ref);  
plot(t,x(1,:),"—");  
  
ylabel("x")  
legend  
figure  
hold on  
plot(t,refp);  
plot(t,x(2,:),"—");  
  
ylabel("xp")  
legend  
figure  
hold on  
plot(t,u);  
xlabel("time")  
ylabel("control_signal")  
legend
```

```

function [J,x,ref,refp,u,t] = ints(Kpso)
    //-----Datos del sistema-----
    a=19.2519;
    b=12.2809;
    A=[0 1;
        0 -a];
    B=[0;b];
    xi=1;
    wn=5;
    gamma1=160;
    gamma2=6400;
    q=1/1440;
    //-----Parametros de integracion-----
    x0=[1;
    1]; //Condicion inicial
    tspan=0.001;
    tf=10; //Tiempo final
    numVarSys=2; //Numero de variables del sistema dinamico
    //-----Variables necesarias para integracion-----
    x=zeros(numVarSys,tf/tspan);
    t=0:tspan:tf;
    len=tf/tspan;
    x=zeros(numVarSys,len);
    xO=zeros(numVarSys,len);
    x(:,1)=x0;
    xO(:,1)=x0;
    un=zeros(1,len);
    u=zeros(1,len);
    du=zeros(1,len);
    dV=zeros(1,len);
    refpp=0;
    refp=zeros(1,len);
    ref=zeros(1,len);
    de=zeros(1,len);
    d=zeros(1,len);
    dg=zeros(1,len);

```

```

    w=zeros(1,len);
    J=0;
    for i=1:len
ti=i*tspan;

refpp=0-2*xi*wn*refp(i)-wn^2*ref(i)+wn^2*0.8*sin(0.2*ti*pi*2);

de(i)=0.05*sin(2*ti*pi*2)+0.1*sin(.2*ti*pi*2)
+0.1*sin(0.5*ti*pi*2)+0.1;
d(i+1)=de(i)-a*x(2,i);
w(i+1)=w(i)-Kpso(3)*(dg(i)+b*u(i))*tspan;
dg(i+1)=w(i)+Kpso(3)*xO(2,i);
un(i+1)=refpp+Kpso(1)*(refp(i)-xO(2,i))+Kpso(2)*(ref(i)-xO(1,i));
u(i+1)=(un(i+1)-dg(i))/b;
x(:,i+1)=x(:,i)+(A*x(:,i)+B*u(i)+[0;1]*de(i))*tspan;
xMedida=q*round(x(1,i)/q); %quantizer
epsilon=xMedida-xO(1,i);
refp(i+1)=refp(i)+refpp*tspan;
ref(i+1)=ref(i)+refp(i)*tspan;
xO(:,i+1)=xO(:,i)+([0 1;0 0]*xO(:,i)
+[gamma1;gamma2]*epsilon+[0;un(i)])*tspan;
    end
    for i=1:len-1
        du(i+1)=(u(i+1)-u(i))/tspan;
    end
    for i=1:len-1
        J=J+(100*abs(x(1,i)-ref(i))+10*abs(xO(2,i)
-refp(i))+0.1*abs(du(i))+0.1*abs(u(i)))*tspan;

//Integracion de funcion objetivo
    end
    if isnan(J)
        J=inf;
    end
end
end

```

Bibliografía

- [1] Jessica J. Maldonado and Rubén Garrido. Prototipo educativo basado en un servomotor analógico de radio control. *Congreso Nacional de Control Automático*, 2017.
- [2] Luis Luna and Rubén Garrido. On the equivalence between P+ DOB and set point weighted PI controllers for velocity control of servodrives under load disturbances. In *2018 XX Congreso Mexicano de Robótica (COMRob)*, pages 1–6. IEEE, 2018.
- [3] M. Gunasekaran and R. Potluri. Low cost undergraduate control systems experiments using microcontroller based control of a dc motor. *IEEE Transactions on Education*, 55(4):508–516, November 2012.
- [4] Rebecca M. Reck and Ramavarapu S. Sreenivas. Developing a new affordable dc motor laboratory kit for an existing undergraduate controls course. In *American Control Conference*. IEEE, 2015.
- [5] S. Sagiroglu I. Colak, S. Demirbas and Erdal Irmak. A novel web-based laboratory for dc motor experiments. *Computer Applications in Engineering Education*, 2011.
- [6] Dale Schinostock, Sydney Schinostock, and Warren N White. Micro-controller based update of inexpensive undergraduate control systems laboratory hardware. In *2015 American Control Conference (ACC)*, pages 2807–2812. IEEE, 2015.
- [7] Michael D Cook, Jennifer L Bonniwell, Luis A Rodriguez, Daniel W Williams, and Jacob Pribbernow. Low-cost dc motor system for teaching automatic controls. In *2020 American Control Conference (ACC)*, pages 4283–4288. IEEE, 2020.
- [8] Shi Wang, Fan Zhang, Qiu Tang, Xiaogang Zhang, and Renxin Zhao. A take-home motor control teaching experiment platform for control engineering-related courses. *IEEE Transactions on Education*, 65(2):115–123, 2021.
- [9] Dale Schinostock, Shane Smith, and Warren N White. Does inexpensive hardware obfuscate simple experiments for control systems laboratories? In *2017 American Control Conference (ACC)*, pages 5355–5360. IEEE, 2017.
- [10] Nikola D Jović and Milan S Matijević. Lego web laboratory at university of kragujevac. In *2017 IEEE Global Engineering Education Conference (EDUCON)*, pages 1359–1362. IEEE, 2017.

- [11] Emre Sariyildiz and Kouhei Ohnishi. Stability and robustness of disturbance-observer-based motion control systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 62(1):414–422, 2014.
- [12] Young Seok Lee, Dong Soo Kim, and Seok-Kyoon Kim. Disturbance observer-based proportional-type position tracking controller for dc motor. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 16(5):2169–2176, 2018.
- [13] Wenchao Xue and Yi Huang. Performance analysis of active disturbance rejection tracking control for a class of uncertain lti systems. *ISA transactions*, 58:133–154, 2015.
- [14] Hebertt Sira-Ramirez, Eric William Zurita-Bustamante, and Congzhi Huang. Equivalence among flat filters, dirty derivative-based pid controllers, adrc, and integral reconstructor-based sliding mode control. *IEEE Transactions on control systems technology*, 28(5):1696–1710, 2019.
- [15] Hebertt Sira-Ramírez, BC Gomez León, MA Aguilar-Orduña, and Eric William Zurita-Bustamante. Equivalence between reduced order extended state observer based active disturbance rejection control and disturbance observers based control schemes. In *2021 IEEE Conference on Control Technology and Applications (CCTA)*, pages 447–452. IEEE, 2021.
- [16] RubÃn Garrido and Luis Luna. Robust ultra-precision motion control of linear ultrasonic motors: A combined adrc-luenberger observer approach. *Control Engineering Practice*, 111:104–812, 2021.
- [17] Karl J Åström and Björn Wittenmark. *Adaptive control*. Courier Corporation, 2013.
- [18] Kumpati S Narendra. *Adaptive and learning systems: theory and applications*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [19] Shankar Sastry and Marc Bodson. *Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness*. Courier Corporation, 2011.
- [20] N Sadegh and R Horowitz. An exponentially stable adaptive control law for robot manipulators. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 6(4):491–496, 1990.
- [21] Frank L Lewis, Darren M Dawson, and Chaouki T Abdallah. *Robot manipulator control: theory and practice*. CRC Press, 2003.
- [22] Ruben Garrido, Dora Calderon, and Alberto Soria. Servomotor velocity tracking using adaptive fuzzy techniques. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 20(4, 5):201–209, 2009.
- [23] Shankar Sastry. *Adaptive Control; Stability, Convergence and Robustness*. Prentice Hall Information and System Sciences Series, 1989.
- [24] Petros A. Ioannou Jing Sun. *Robust Adaptive Control*. Prentice Hall, 1995.
- [25] Hassan K Khalil. Adaptive output feedback control of nonlinear systems represented by input-output models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(2):177–188, 1996.

-
- [26] Erick Asiain and Rubén Garrido. Anti-chaos control of a servo system using nonlinear model reference adaptive control. *Chaos, Solitons & Fractals*, 143:110581, 2021.
- [27] Xingyu Zhou, Heran Shen, Zejiang Wang, Hyunjin Ahn, and Junmin Wang. Linear motor command tracking: A novel immersion and invariance adaptive control method with arctangent-function-based parameter projection. *IFAC-PapersOnLine*, 55(37):264–269, 2022.
- [28] Xingyu Zhou, Zejiang Wang, Heran Shen, and Junmin Wang. Systematic synthesis of a class of smooth parameter projection operators for stable adaptive systems. *ASME Letters in Dynamic Systems and Control*, 2(3):031009, 2022.
- [29] Patrizio Tomei and Riccardo Marino. Adaptive nonlinear control with constrained parallel parameter estimates. *Systems & Control Letters*, 143:104739, 2020.
- [30] R Bakker and Anuradha M Annaswamy. Stability and robustness properties of a simple adaptive controller. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(9):1352–1358, 1996.
- [31] Vishakha Vijay Patel. Ziegler-nichols tuning method. *Resonance*, 25(10):1385–1397, 2020.
- [32] Katsuhiko Ogata. *Ingeniería de Control Moderna*. Pearson Education, S.A., Madrid, 2010.
- [33] PM Meshram and Rohit G Kanojiya. Tuning of pid controller using ziegler-nichols method for speed control of dc motor. In *IEEE-international conference on advances in engineering, science and management (ICAESM-2012)*, pages 117–122. IEEE, 2012.
- [34] Alexander S Poznyak. *Advanced mathematical tools for automatic control engineers: Stochastic techniques*. Elsevier, 2009.
- [35] Bong Keun Kim, Wan Kyun Chung, and Kohtaro Ohba. Design and performance tuning of sliding-mode controller for high-speed and high-accuracy positioning systems in disturbance observer framework. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 56(10):3798–3809, 2009.
- [36] K Johan Astrom. Adaptive feedback control. *Proceedings of the IEEE*, 75(2):185–217, 1987.
- [37] Karl Johan Åström, Tore Hägglund, Chang C Hang, and Weng K Ho. Automatic tuning and adaptation for pid controllers-a survey. *Control Engineering Practice*, 1(4):699–714, 1993.
- [38] Wei-Der Chang. An improved particle swarm optimization with multiple strategies for pid control system design. *International Journal of Modeling and Optimization*, 12(2), 2022.
- [39] Muhammed A Ibrahim, Ausama Kh Mahmood, and Nashwan Saleh Sultan. Optimal pid controller of a brushless dc motor using genetic algorithm. *Int J Pow Elec & Dri Syst ISSN*, 2088(8694):8694, 2019.

- [40] Xinpeng Liu, Qiang Gao, Yuehui Ji, Yu Song, and Junjie Liu. Active disturbance rejection control of quadrotor uav based on whale optimization algorithm. In *2022 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation (ICMA)*, pages 351–356. IEEE, 2022.
- [41] Jia Hu, Wentao Chen, et al. Design of active disturbance rejection controller for dynamic positioning based on improved particle swarm optimization. *Mathematical Problems in Engineering*, 2022, 2022.
- [42] K Asan Mohideen, G Saravanakumar, K Valarmathi, D Devaraj, and TK Radhakrishnan. Real-coded genetic algorithm for system identification and tuning of a modified model reference adaptive controller for a hybrid tank system. *Applied Mathematical Modelling*, 37(6):3829–3847, 2013.
- [43] Alejandro Rodríguez-Molina, Miguel G Villarreal-Cervantes, Efrén Mezura-Montes, and Mario Aldape-Pérez. Adaptive controller tuning method based on online multiobjective optimization: A case study of the four-bar mechanism. *IEEE transactions on cybernetics*, 51(3):1272–1285, 2019.
- [44] Mahesh Singh, R. N. Patel, and Rajkumar Jhapte. Performance comparison of optimized controller tuning techniques for voltage stability. In *2016 IEEE First International Conference on Control, Measurement and Instrumentation (CMI)*, pages 11–15, 2016.
- [45] Khalil Amine. Multiobjective simulated annealing: Principles and algorithm variants. *Advances in Operations Research*, 2019, 2019.
- [46] Sonalika Mishra, Ramesh Chandra Prusty, and Sidhartha Panda. Design and analysis of 2dof-pid controller for frequency regulation of multi-microgrid using hybrid dragonfly and pattern search algorithm. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 31(3):813–827, 2020.
- [47] Amir Mohammad Beigi and Ali Maroosi. Parameter identification for solar cells and module using a hybrid firefly and pattern search algorithms. *Solar Energy*, 171:435–446, 2018.
- [48] H Ramesh and S Xavier. Optimal tuning of servo motor based linear motion system using optimization algorithm. *Journal of Electrical Engineering & Technology*, pages 1–16, 2022.
- [49] BE Nyong-Basse and AM Epemu. Systems identification of servomechanism parameters using jellyfish, particle swarm and constraint optimization. *Nigerian Journal of Technology*, 41(3):569–577, 2022.
- [50] Ricardo Cortez, Rubén Garrido, and Efrén Mezura-Montes. Spectral richness pso algorithm for parameter identification of dynamical systems under non-ideal excitation conditions. *Applied Soft Computing*, 128:109–490, 2022.
- [51] Grigori Sidorov. *Artificial Intelligence*. Alfa-Omega, 2018.

-
- [52] Benjamin C. Kuo. *Sistemas de Control Automatico*. Prentice Hall Hispanoamericana, S.A, 1996.
- [53] Mark W Spong, Seth Hutchinson, and Mathukumalli Vidyasagar. *Robot modeling and control*. John Wiley & Sons, 2020.
- [54] Roger A Horn and Charles R Johnson. *Matrix analysis*. Cambridge university press, 2012.
- [55] Rajendra Bhatia. *Matrix analysis*, volume 169. Springer Science & Business Media, 2013.
- [56] Stanley Grossman, I Stanley, et al. *Algebra lineal*. McGraw-Hill Interamericana Editores México, 2019.
- [57] Peter Lancaster and Miron Tismenetsky. *The theory of matrices: with applications*. Elsevier, 1985.
- [58] Carl D Meyer and Ian Stewart. *Matrix analysis and applied linear algebra*. SIAM, 2023.
- [59] Hassan K. Khalil. *Nonlinear Control*. Pearson India Education Services, 2019.
- [60] Gabor Toth. Exponential and logarithmic functions. *Elements of Mathematics: A Problem-Centered Approach to History and Foundations*, pages 423–468, 2021.
- [61] Constantin Niculescu and Lars-Erik Persson. *Convex functions and their applications*, volume 23. Springer, 2006.
- [62] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe. *Convex optimization*. Cambridge university press, 2004.
- [63] William Anthony Granville, Percey F Smith, William Raymond Longley, Steven T Byington, Antonio Romero Juárez, and Marcelo Santaló Sors. *Cálculo diferencial e integral*. Uteha, 1963.
- [64] Edwin J Purcell, Dale Varberg, and Steven E Rigdon. *Cálculo diferencial e integral*. Pearson Educación, 2007.
- [65] Milton Abramowitz and Irene A Stegun. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, volume 55. US Government printing office, 1968.
- [66] Chi-Tsong Chen. *Linear system theory and design*. Saunders college publishing, 1984.
- [67] Abdellah Benzaouia. *Saturated switching systems*, volume 426. Springer Science & Business Media, 2012.
- [68] RV Patel and M Toda. Quantitative measures of robustness for multivariable systems. In *Joint Automatic Control Conference*, page 35, 1980. paper no. 17.
- [69] Makeblock. 180 optical encoder motor. <https://www.application-datasheet.com/pdf/makeblock/81340.pdf>, 2019.

- [70] LEGO. Nxt-motor internals. <https://www.philohome.com/nxtmotor/nxtmotor.htm>, 2006.
- [71] ServoDatabase.com. Hitec hs-485hb. <https://servodatabase.com/servo/hitec/hs-485hb>.
- [72] C. Urrea and J. Kern. Characterization, simulation and implementation of a new dynamic model for a dc servomotor. *IEEE Latin America Transactions*, September 2014.
- [73] K. Johan Astrom and C. Canudas De Wit. *Revisitings the LuGre friction model*. IEEE Control systems, 2008.
- [74] Rubén Garrido and J Luis Luna. On the equivalence between PD+ DOB and PID controllers applied to servo drives. *IFAC-PapersOnLine*, 51(4):95–100, 2018.
- [75] Antonio Visioli. *Practical PID Control*. Springer, 2006.
- [76] MATLAB. *9.7.0.1190202 (R2019b)*. The MathWorks Inc., Natick, Massachusetts, 2018.
- [77] Karl Johan Åström and Tore Hägglund. *Control PID avanzado*. Pearson, Madrid, 2009.
- [78] Rolf Isermann and Marco Münchhof. *Identification of dynamic systems: an introduction with applications*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [79] Olga L Jiménez J Maldonado and Garrido Rubén. Estudio comparativo de servomotores de cd orientados a la construcción de prototipos educativos. In *Congreso Internacional de Robótica y computación (CIRC-2020)*, pages 32–40. IEEE, 2020.
- [80] Bastien Chopard and Marco Tomassini. *An introduction to metaheuristics for optimization*. Springer, 2018.
- [81] Kenneth Sörensen and Fred Glover. Metaheuristics. *Encyclopedia of operations research and management science*, 62:960–970, 2013.
- [82] J Arulvadvu, S Manoharan, R Lal Raja Singh, and S Giriprasad. Optimal design of proportional integral derivative acceleration controller for higher-order nonlinear time delay system using m-mboa technique. *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*, page e3016, 2022.
- [83] Soufiene Bouallègue, Joseph Haggège, Mounir Ayadi, and Mohamed Benrejeb. Pid-type fuzzy logic controller tuning based on particle swarm optimization. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 25(3):484–493, 2012.
- [84] Olympia Roeva and Tsonyo Slavov. Pid controller tuning based on metaheuristic algorithms for bioprocess control. *Biotechnology & Biotechnological Equipment*, 26(5):3267–3277, 2012.
- [85] Stephen Bassi Joseph, Emmanuel Gbenga Dada, Afeez Abidemi, David Opeoluwa Oyewola, and Ban Mohammed Khammas. Metaheuristic algorithms for pid controller parameters tuning: Review, approaches and open problems. *Heliyon*, pages 309–399, 2022.

-
- [86] Alejandro Rodríguez-Molina, Efrén Mezura-Montes, Miguel G Villarreal-Cervantes, and Mario Aldape-Pérez. Multi-objective meta-heuristic optimization in intelligent control: A survey on the controller tuning problem. *Applied Soft Computing*, 93:106–342, 2020.
- [87] Dongshu Wang, Dapei Tan, and Lei Liu. Particle swarm optimization algorithm: an overview. *Soft computing*, 22(2):387–408, 2018.
- [88] J. Kennedy and R. Eberhart. Particle swarm optimization. In *Proceedings of ICNN'95 - International Conference on Neural Networks*, volume 4, pages 1942–1948, 1995.
- [89] Maurice Clerc and James Kennedy. The particle swarm-explosion, stability, and convergence in a multidimensional complex space. *IEEE transactions on Evolutionary Computation*, 6(1):58–73, 2002.
- [90] Dongshu Wang, Dapei Tan, and Lei Liu. Particle swarm optimization algorithm: an overview. *Soft computing*, 22:387–408, 2018.
- [91] Efrén Juárez-Castillo, HÁctor Acosta-Mesa, and EfrÁn Mezura-Montes. Adaptive boundary constraint-handling scheme for constrained optimization. *Soft Computing*, pages 1–34, 09 2019.
- [92] Wen-Jun Zhang, Xiao-Feng Xie, and De-Chun Bi. Handling boundary constraints for numerical optimization by particle swarm flying in periodic search space. In *Proceedings of the 2004 Congress on Evolutionary Computation (IEEE Cat. No. 04TH8753)*, volume 2, pages 2307–2311. IEEE, 2004.
- [93] E. Pires, JosÁl Tenreiro Machado, Paulo Moura Oliveira, J. Cunha, and Luis Mendes. Particle swarm optimization with fractional-order velocity. *Nonlinear Dynamics*, 61:295–301, 07 2010.
- [94] Baoye Song, Zidong Wang, and Lei Zou. An improved pso algorithm for smooth path planning of mobile robots using continuous high-degree bezier curve. *Appl. Soft Comput.*, 100:106–960, 2021.
- [95] Lin Xu, Baoye Song, and Maoyong Cao. An improved particle swarm optimization algorithm with adaptive weighted delay velocity. *Systems Science & Control Engineering*, 9(1):188–197, 2021.
- [96] Miguel G Villarreal-Cervantes and Jaime Alvarez-Gallegos. Off-line pid control tuning for a planar parallel robot using de variants. *Expert Systems with Applications*, 64:444–454, 2016.
- [97] Kiyoshi Ohishi, Kouhei Ohnishi, and Kunio Miyachi. Adaptive dc servo drive control taking force disturbance suppression into account. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 24(1):171–176, 1988.
- [98] Kouhei Ohnishi, Masaaki Shibata, and Toshiyuki Murakami. Motion control for advanced mechatronics. *IEEE/ASME transactions on mechatronics*, 1(1):56–67, 1996.

- [99] Han Jingqing. Auto-disturbances-rejection controller and its applications. *Control and decision*, 13(1):19–23, 1998.
- [100] Han Jingqing. From pid technique to auto disturbances rejection control technique [j]. *Control engineering*, 9(3):13–18, 2002.
- [101] JQ Han. From pid technique to active disturbances rejection control technique. *Control engineering of China*, 9(3):13–18, 2002.
- [102] Jingqing Han. From pid to active disturbance rejection control. *IEEE transactions on Industrial Electronics*, 56(3):900–906, 2009.
- [103] Zhiqiang Gao, Yi Huang, and Jingqing Han. An alternative paradigm for control system design. In *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No.01CH37228)*, volume 5, pages 4578–4585 vol.5, 2001.
- [104] Zhiqiang Gao. Active disturbance rejection control: a paradigm shift in feedback control system design. In *2006 American control conference*, pages 7–pp. IEEE, 2006.
- [105] Koji Yamada, Satoshi Komada, Muneaki Ishida, and Takamasa Hori. Analysis and classical control design of servo system using high order disturbance observer. In *Proceedings of the IECON'97 23rd International Conference on Industrial Electronics, Control, and Instrumentation (Cat. No. 97CH36066)*, volume 1, pages 4–9. IEEE, 1997.
- [106] Wassim M Haddad and VijaySekhar Chellaboina. *Nonlinear dynamical systems and control: a Lyapunov-based approach*. Princeton university press, 2008.
- [107] et al. Manuel LÃşpez IbÃşez, Leslie PÃşrez CÃşceres. *The irace Package: User Guide*. UniversitÃş Libre de Bruxelles, Brussels, Belgium. McGraw-Hill, , 2020.
- [108] B. Wittenmark K. J. Astrom. *Adaptive Control*. Addison Esley, 1989.
- [109] Petros A Ioannou and Jing Sun. *Robust adaptive control*. Courier Corporation, Mineola, New York., 2012.
- [110] Bo Egardt. *Stability of adaptive controllers*. Springer, 1979.
- [111] Petros A Ioannou and Petar V Kokotovic. *Adaptive systems with reduced models*. Springer, 1983.
- [112] C Rohrs, Lena Valavani, Michael Athans, and Gunter Stein. Robustness of continuous-time adaptive control algorithms in the presence of unmodeled dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30(9):881–889, 1985.
- [113] Gerhard Kreisselmeier. A robust indirect adaptive-control approach. *International Journal of Control*, 43(1):161–175, 1986.
- [114] Petros A Ioannou and Jing Sun. *Robust adaptive control*, volume 1. PTR Prentice-Hall Upper Saddle River, NJ, 1996.

- [115] Kumpati S Narendra and Anuradha M Annaswamy. *Stable adaptive systems*. Courier Corporation, 2012.
- [116] Nhan T Nguyen and Nhan T Nguyen. *Model-reference adaptive control*. Springer, 2018.
- [117] Kumpatis Narendra and Anuradham Annaswamy. A new adaptive law for robust adaptation without persistent excitation. *IEEE Transactions on Automatic control*, 32(2):134–145, 1987.
- [118] W. Bolton. *Mecatrónica, Sistemas de Control Electrónico en Ingeniería Mecánica y Eléctrica*. AlfaOmega, 2001.
- [119] Lennart Ljung. System identification. *Wiley Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering*, pages 1–19, 1999.
- [120] R Vallejo et al. Identificación paramétrica de sistemas dinámicos. *Revista Científica Ingeniería y Desarrollo*, pages 10–22, 2011. paper no. 2.