CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE
MATEMÁTICA EDUCATIVA

Validez mediada por representaciones digitales

T E S I S

Que presenta

MARÍA ALEJANDRA CALDERÓN GONZALEZ

Para obtener el grado de

DOCTORA EN CIENCIAS

EN LA ESPECIALIDAD DE
MATEMÁTICA EDUCATIVA

Director de la tesis: Dr. Luis Moreno Armella

Ciudad de México Octubre, 2024

Agradecimientos

A ***mi familia*** *mis padres, mis hermanos y mis abuelos*, quienes han sido mi fuerza y motivación a lo largo de este camino, su apoyo constante y sus palabras de aliento han sido fundamentales en cada paso que he dado. Agradezco a cada uno de ustedes por sus sacrificios y ayuda en los momentos más difíciles, esta tesis es también un reflejo de su apoyo y amor.

A ***mi asesor***, *el Dr. Luis Moreno Armella*, por su orientación y apoyo durante el desarrollo de esta tesis. Su conocimiento, sus consejos, y sus reflexiones me han permitido crecer como investigadora y como persona.

A ***mis sinodales***, por enriquecer mi trabajo con sus observaciones, sugerencias y aportes durante el proceso de evaluación de esta tesis. Adicionalmente, al Dr. Santillán, por su colaboración y disposición con el desarrollo de la parte experimental de este trabajo.

A ***los estudiantes*** *que participaron en este estudio*, por su tiempo y disposición para solucionar las actividades en espacios extraescolares.

A ***mis amigos***, por su capacidad para motivarme y por ayudarme a sobrellevar el tiempo lejos de mi familia. Particularmente, a Andrea, por su apoyo hasta el último momento, por escucharme y por levantarme cuando fue necesario. A Carlos, Paquito y Eleany por el tiempo compartido, por las discusiones académicas y por compartir nuevas perspectivas que ampliaron mis horizontes.

A ***Adrianita***, por su diligencia y ayuda durante todo mi proceso y por su compromiso con cada uno de los estudiantes del departamento.

Agradecimiento especial al Consejo Nacional de Humanidades Ciencia y Tecnología (CONAHCYT) por el apoyo brindado al otorgarme la beca para la realización de mis estudios de Doctorado en Ciencias en el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN

Becario: 940743

Tabla de contenido

RESUMEN

La presencia de las tecnologías digitales ha cambiado la forma en la que llevamos a cabo diversas actividades en nuestro diario vivir. La Matemática Educativa es una de las áreas de la educación interesadas en analizar el impacto que ocasiona la inclusión de dichas tecnologías al aula de clase.

Las investigaciones han provocado que las tecnologías digitales sean incluidas en diferentes dimensiones del trabajo matemático escolar, sin embargo, la prueba y la argumentación es una de las áreas que más se ha resistido al cambio tecnológico. Esto se debe a una concepción formalista que proviene de las matemáticas formales, sin embargo, desde el punto de vista educativo puede analizarse el rol de las tecnologías digitales y su contribución en todo el proceso de validación de una afirmación.

En este proyecto describimos y analizamos *la interacción* de un grupo de estudiantes de secundaria y preparatoria con representaciones dinámicas (como las que se encuentran incrustadas en GeoGebra), para determinar su influencia en la validación de afirmaciones geométricas. Los resultados muestran que la ejecutabilidad de la representación permite una co-acción que contribuye de en el proceso de validación: generando nuevos conocimientos, adquiriendo certeza de los hechos, acercando a nuevas herramientas de validación y generando estrategias distintas a las que se tenían con las representaciones estáticas.

ABSTRACT

Digital technology has changed the way we perform various activities in our daily lives. Mathematics education is one of the educational fields that analyze the impact of these technologies in the classroom.

Research has led to the inclusion of digital technologies in various dimensions of mathematical work in schools. However, demonstration and proof is one of the areas that has been most resistant to technological change. This is due to a formalist vision that emerges from formal mathematics. But, from a pedagogical point of view, the role of digital technologies and their contribution to the entire process of validating a statement can be analyzed.

In this project, we describe and analyze the interaction of a group of high school students with dynamic representations (such as those embedded in GeoGebra) to determine their influence on the validation of geometric statements. The results show that the executable representation enables a co-action that contributes to the validation process: generating new knowledge, gaining certainty about the facts, approaching new validation tools and generating different strategies than those with static representations.

CAPÍTULO 1

VALIDEZ SITUADA: PRIMERA DISCUSIÓN SOBRE EL PROBLEMA

La validez es un elemento central en la discusión sobre la argumentación y prueba, por ejemplo, la RAE define un argumento como los razonamientos que se usan para probar y/o convencer de lo que se niega o se afirma, es decir validar una declaración. Pero cuando se habla de validez también está la validez asociada a los razonamientos usados, que depende de la comunidad en la que se realice la afirmación y del proceso continuo de la formación/adquisición de conceptos.

En el contenido de este capítulo se presentan reflexiones relevantes para hablar de argumentación y prueba en matemática, presentadas mediante ejemplos históricos (sin pretender que esta investigación se entienda como una investigación histórico-documental). Resaltamos factores que están asociados a la argumentación matemática, tales como: los artefactos con los que contamos, la concepción de los objetos matemáticos, los sistemas axiomáticos, entre otros. Es de resaltar que no pretendemos ser exhaustivos sobre dichos factores, solo ejemplificamos aquellos que nos permiten presentar nuestro punto de partida para abordar una problemática. Esta última centrada en los cambios que conlleva incluir una tecnología como GeoGebra en una comunidad como el aula de clase.

1.1. LA MEDIACIÓN DE ARTEFACTOS EN LA VALIDACIÓN MATEMÁTICA

Las afirmaciones sobre los objetos matemáticos y cómo validarlas son ideas que han cambiado con la aparición de nuevos métodos y conocimientos, basta con ver los argumentos propuestos para justificar una idea desde la geometría sintética y los de la geometría analítica para afirmar que los artefactos materiales y simbólicos afectan la argumentación y la prueba. Un ejemplo que ilustra esta idea son los llamados "problemas clásicos de la matemática antigua" (a saber, la trisección de un ángulo, la cuadratura del círculo y la duplicación del cubo), ya que durante mucho tiempo se intentaron solucionar y validar las soluciones usando solamente regla y compás (por los artefactos predilectos en esa época). Durante siglos diferentes matemáticos abordaron estos problemas sin éxito, pero cuando desarrollaron los métodos algebraicos se pudo probar contundentemente la imposibilidad de solucionarlos con esos artefactos de construcción. En este caso, los métodos algebraicos (artefactos simbólicos) permitieron tener una prueba de la imposibilidad de su solución con regla y compás (artefactos materiales); de modo que la inclusión de un nuevo artefacto cambió *lo que se debía validar y cómo validarlo.*

Los métodos algebraicos, al igual que una fórmula, son artefactos que pueden funcionar como herramientas cuando se usan para hacer algo (Monaghan et al., 2016). Por ejemplo, podríamos usar una fórmula para calcular el área de un terreno con forma de trapecio isósceles que tiene una altura de $4u$ y bases de $7u$ y $13\ u$ (a saber $A = h \times \frac{B+b}{2}$), basta con reemplazar los valores y realizar las operaciones correspondientes para obtener como resultado un valor numérico. Este método de solución es posible gracias a que hemos desarrollado artefactos simbólicos que nos permiten tener la fórmula y reemplazar los valores. Otra forma de solucionar el problema es determinar el área del rectángulo formado por la base mayor y al resultado restarle el área de los triángulos sombreados (ver Imagen 1), los cuales forman un rectángulo de tres unidades por cuatro unidades.

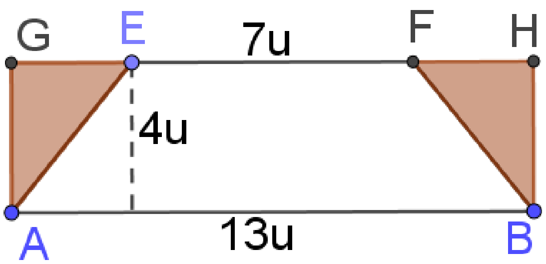


Imagen 1.Método para hallar el área de terreno en forma de trapecio isósceles

Cada solución mencionada usa artefactos diferentes y conllevar argumentos diferentes. Por ejemplo, en el caso de la fórmula se podría cuestionar al estudiante sobre los métodos algebraicos utilizados, llevándolo a presentar argumentos para justificar por qué su resultado es correcto. De manera similar, en la segunda solución se le podría cuestionar a un estudiante por qué los triángulos sombreados permiten completar un rectángulo y en este caso tendría que presentar una serie de argumentos centrados en sus conocimientos geométricos.

Hay muchos artefactos simbólicos que pueden mediar un proceso de argumentación y se asocian a un cierto nivel de rigor y formalidad. Por ejemplo, en las series infinitas, los métodos y argumentos como los de Euler son aceptados y valorados, pero aquellos que hacen uso de teoremas del cálculo infinitesimal son considerados más formales al hacer uso de una forma más rigurosa de argumentación matemática (Umland y Sriraman, 2020). Esto muestra que el desarrollo y evolución de diferentes artefactos simbólicos ha permeado en diferentes aspectos de la argumentación y prueba matemática, tales como: *qué afirmaciones se realizan, cómo validarlas, bajo qué nivel de formalidad, entre otros.*

En cuanto a los artefactos materiales, también se puede ver su influencia en la evolución de la prueba y la argumentación matemática (qué se afirma y cómo se valida). Por ejemplo, en los Elementos de Euclides se presentan dos proposiciones (proposición 2 y 3) en las que se validan los métodos para construir dos segmentos de igual longitud y para “restar” un segmento de otro, sin embargo, con el compás actual estos métodos no son necesarios, ya que para construir un segmento congruente a otro basta con abrir el compás de manera que sus puntas coincidan con los extremos del segmento dado y después “trasladar” esa medida a cualquier otro punto, lo que haría innecesario el método descrito en la segunda proposición y su prueba.

Aquí presentamos un ejemplo en el que un artefacto material (como el compás actual) hace innecesario validar un hecho que en la época griega se consideró parte fundamental dentro de la obra de Euclides. Desde un punto educativo cabe cuestionarse si hay que presentar a los estudiantes actuales las proposiciones 2 y 3 cuando se sigue una enseñanza de la geometría como la presentada en el libro de Euclides; ya que aceptar que no es necesario incluir dichas argumentaciones implica reconocer y aceptar que la argumentación matemática (qué se afirma y cómo se valida) depende de los artefactos con los que se cuenta y de la comunidad en la que se están desarrollando las ideas.

Aceptar —desde un punto de vista educativo— que la argumentación matemática puede variar dependiendo de los instrumentos con los que contamos, implica la necesidad de ahondar en los cambios que se presentan cuando la actividad del estudiante se desarrolla en un medio como GeoGebra en el que hay una gran variedad de artefactos materiales y simbólicos que permiten una interacción diferente a la que se tiene con las representaciones en el papel.

Esperamos que los ejemplos sirvan para que el lector reflexione sobre la influencia de los artefactos materiales y simbólicos en la argumentación y prueba matemática, ya que son uno de los factores esenciales en esta discusión. En el siguiente apartado presentamos la conceptualización de las ideas matemáticas como otro factor relevante, ya que se ve afectada por los instrumentos de mediación e influye en la validación de ideas.

1.2. La forma de validar asociada a la concepción de los objetos sobre los que se realiza la afirmación

Los artefactos de mediación a los que tenemos acceso influyen en nuestras formas de conocimiento, por ejemplo, si hablamos de artefactos materiales, una persona que trabaja en un observatorio con acceso a un telescopio de alto alcance tiene un conocimiento distinto al que puede tener una persona que todas las noches mira el cielo con un telescopio casero. Ambos pueden realizar afirmaciones sobre los objetos celestes, sin embargo, no serán las mismas afirmaciones ni justificaciones, ya que sus observaciones van a estar ligadas a los artefactos de mediación. El hombre del observatorio puede notar pequeños movimientos en los objetos y tomar medidas precisas gracias a sus artefactos, mientras el otro hombre sólo notará cambios considerables después de mucho tiempo.

La experiencia de los dos hombres los lleva a tener conocimientos distintos sobre objetos celestes y proponer justificaciones distintas. El hombre del observatorio tiene datos y conocimientos que le permiten hacer afirmaciones justificadas sobre los objetos celestes, el hombre del telescopio tiene ideas básicas de su experiencia y su razonamiento, pero una persona que nunca se ha relacionado con estos objetos puede encontrarlos tan abstractos como la gravedad.

En un contexto cotidiano es posible aceptar la validez de un cierto razonamiento porque se considera evidente, intuitivamente plausible o por lo menos más coherente que su contrario (Hanna, 2020). Dicha intuición o evidencia proviene de las experiencias que se tiene con el mundo material (dentro de una comunidad) y que se perciben a través de los sentidos, por ejemplo, alguien podría afirmar que el hierro es más pesado que la madera y sin necesidad de mencionar las densidades de los materiales, podría realizar un experimento (pesar un bloque de cada uno de los materiales) que le permita validar la afirmación. En este caso la materialidad de los elementos sobre los que se realiza la afirmación permite que la evidencia empírica sea una fuente de validez.

En matemáticas, los objetos tienen una existencia distinta a la de los objetos materiales, ya que no existen por sí solos, son las representaciones las que nos permite referirnos a ellos (Duval, 2017), es decir que no podemos referirnos a un objeto matemático sin usar de una de sus representaciones. En un sentido amplio, las representaciones se pueden definir como producciones perceptibles —diagramas, líneas numéricas, gráficos, palabras escritas, expresiones matemáticas, fórmulas y ecuaciones, etc.— que encarnan ideas o relaciones matemáticas (Goldin, 2020), de modo que referirnos a una de estas representaciones es referirnos a un significado matemático (atribuido dentro de esta comunidad).

Las ideas y resultados matemáticos encarnados en las representaciones tienen una historia que en sus inicios estuvo vinculada con el mundo material, por ejemplo, la idea de área asociada a los terrenos. Sin embargo, poco a poco estas ideas matemáticas se volvieron cada vez más abstractas y sus asociaciones con el mundo material se volvieron solo un caso de aplicación, como el área asociada a diferentes superficies, las cuales pueden tener forma rectangular como los terrenos, los tableros, algunas mesas, etc. Dicho cambio en la forma de conocer sobre las ideas matemáticas ha permitido que las formas de *validación* sean diferentes en cada momento. A continuación, identificamos tres formas de entender las ideas matemáticas y los métodos de validación empleados en cada una de ellas.

1.2.1. Ideas matemáticas como algo "práctico": métodos empíricos de validación

Desde un punto de vista práctico se puede reconocer la presencia de ideas matemáticas en el mundo material, por ejemplo, cuando un albañil levanta las paredes de una habitación estas forman ángulos rectos. De acuerdo con Covián Chávez y Romo Vázquez (2017) los bañiles construyen triángulos con lados de 3, 4 y 5 unidades (terna pitagórica) y a pesar de que no conocer sobre el teorema de Pitágoras validan la técnica porque "siempre" ha funcionado, es decir que existen validaciones, justificaciones y explicaciones asociadas al uso de técnicas.

En la historia se pueden ver algunos ejemplos de validación de ideas matemáticas a partir de su uso en la solución de problemas del mundo material. Reid y Knipping (2010) afirman que en algunas culturas como: la egipcia, Babilónica y China, aceptaban la evidencia observacional como fuente de validez de sus conocimientos matemáticos. Por ejemplo, los egipcios con las inundaciones ocasionadas por el rio Nilo perdían las marcas establecidas para la división de terrenos, por lo que usaban conocimientos geométricos para conocer el área correspondiente para cada persona y rehacer las marcas después de la inundación (Edwards, 2012).

El método usado por los egipcios se centraba en la construcción de rectángulos. Para medir los lados se usaban cuerdas con nudos equidistantes que permitían determinar un cierto número de unidades (la distancia entre un nudo y otro era la unidad = un codo Real, aprox. 0.524m) y establecer las marcas de un terreno con ciertas unidades de ancho o lago. Para garantizar que el ángulo formado en los cuatro vértices del cuadrilátero fuese recto, se construían triángulos de lados 3, 4 y 5 unidades (o cualquier múltiplo como 6, 8 y 10), los cuales corresponden a una terna pitagórica y por tanto determinan un triángulo rectángulo (ver Imagen 2).

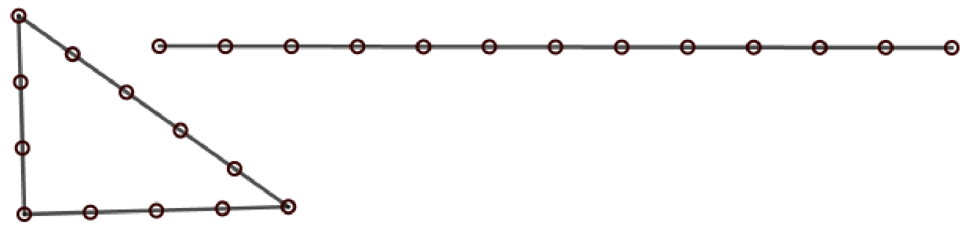


Imagen 2. Terna pitagórica para determinar ángulos rectos.

Este ejemplo es solo uno de los que se pueden encontrar en la historia, ya que en las culturas mencionadas los conocimientos matemáticos fueron aplicados en construcciones más complejas: como las pirámides. Se podría pensar que muchas construcciones eran la materialización de ciertos conocimientos matemáticos y en estos casos la veracidad de los hechos está dada porque se pude *ver* un resultado adecuado al usar una idea matemática, es decir que, aunque los egipcios no conocían el teorema de Pitágoras ni ninguna de las pruebas que hoy conocemos, podían garantizar perpendicularidad en sus construcciones (al igual que los albañiles) usando el método descrito anteriormente.

Establecer la veracidad de un hecho gracias a la evidencia observacional es posible por una concepción de los objetos matemáticos ligados a las situaciones del mundo material. Aquí la fuente de validez es la observación repetida de que el resultado siempre es el mismo en las diferentes situaciones en las que se aplica un cierto conocimiento. También existe una visión de los objetos como entidades abstractas y requieren otras pruebas para establecer la veracidad de los hechos matemáticos. Estas dos visiones sobre los objetos matemáticos son descritas por algunos autores (Hershkowitz, 2014; Sánchez, 2012) que distinguen entre aspecto práctico y el aspecto lógico-formal de las matemáticas, en el primero los conocimientos son prácticos y están relacionados con la intuición, mientras que en el segundo prima la lógica y los desarrollos deductivos. En este último aspecto consideramos pertinente distinguir dos formas de entender los objetos matemáticos: el primero como una abstracción de experiencias y el segundo como entes abstractos.

1.2.2. Ideas matemáticas como abstracciones de las experiencias con el mundo material: métodos de validación enfocados en ilustrar generalidad a partir de una representación.

Desde este punto de vista las ideas matemáticas se presentan como proposiciones que se validan con una serie de argumentos centrado en desarrollos lógicos y teóricos. Hershkowitz

(2014) menciona que algunos de los precursores más relevantes de este punto de vista son Tales de Mileto y Euclides, quienes son dos grandes representantes de la matemática griega que empezaron a desarrollar ideas cada vez más abstractas, pero manteniendo la relación de las matemáticas con el mundo material.

En términos de Moreno-Armella (2016), en la época griega, las ideas matemáticas eran una abstracción del espacio físico, por ejemplo, se podía usar el mismo conocimiento matemático (como teorema de Tales) para determinar la altura de una pirámide y calcular la distancia a la que hay un barco, sin considerar las especificidades de cada situación (como viento, material, superficie, etc.).Haga clic o pulse aquí para escribir texto. Para profundizar en esta idea vamos a suponer que un matemático de la época griega desea saber la distancia a la que se encuentran los barcos enemigos para poder calibrar las catapultas y atacar. Para solucionar este problema se pueden usar dos varas unidas en un ángulo recto y ubicarlas de tal manera que se haga coincidir una de las varas con la vertical del observador y la otra con la horizontal (OV y VC en Imagen 3). Sobre el extremo más alto de la vara vertical se mira al barco y se hace una marca sobre la vara horizontal en donde es intersecada por la visual del observador (el punto E en la Imagen 3). Después de tener estos datos se puede establecer la siguiente proporción: la distancia desde el suelo a final de la vara vertical entre la distancia del observador al barco es igual a la longitud de la vara vertical entre la longitud de la parte de la vara horizontal que fue intersecada por la visual del observador —con la notación actual sería $\frac{OP}{PB} = \frac{OV}{VE}$. Como el único valor desconocido es la distancia del observador al barco, se puede tener fácilmente un valor.

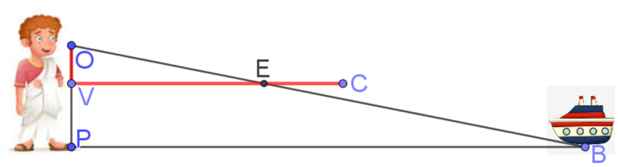


Imagen 3. Ilustración de la solución al problema del barco

De manera similar que en el caso anterior se puede saber cuál es la altura de una pirámide si a cierta hora del día se ubica una vara verticalmente en la arena (ver EV en Imagen 4) de modo que la sombra proyectada por la pirámide y la sombra de la vara coincidan en un punto (en este caso O). Esta configuración permite establecer una proporción que relaciona las alturas con las longitudes de las sombras, de manera que: la altura de la pirámide entre la longitud de la vara es igual a la longitud de la sombra de la pirámide entre la longitud de la sombra proyectada por la vara, por lo tanto, se puede calcular la altura de la pirámide ya que los otros tres datos se pueden obtener por medición directa.

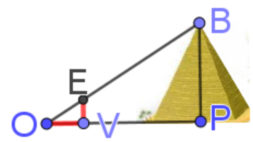


Imagen 4. Ilustración de la solución al problema de la pirámide

De acuerdo con algunos conocedores de la historia de la matemática ambos problemas son atribuidos a Tales de Mileto (Boyer, 1968), quien se cree que usó el que hoy conocemos como “teorema de Tales” para darles solución, sin embargo, el procedimiento exacto es desconocido. Aquí presentamos una forma de resolver los problemas sin considerar particularidades como la profundidad del mar, el tamaño del barco, el viento, el material de las varas, etc., sino que se logran *abstraer* los datos más relevantes de la situación concreta para establecer un modelo matemático aplicable a diversas situaciones (como las presentadas anteriormente). Es decir que una combinación de situaciones y razonamientos que permiten “extraer las matemáticas” y establecer como una generalidad la relación de proporcionalidad existente entre los lados de dos triángulos semejantes sin considerar las particularidades de la situación. Otro resultado relevante en esta dirección es la aproximación al radio de la tierra dada por Eratóstenes (ver Moreno-Armella, 2016).

La capacidad de ver lo general, a través de lo particular (como en los ejemplos anteriores), fue la que permitió establecer una generalidad del conocimiento matemático y fue crucial para desarrollar pruebas deductivas como las del libro de Euclides. A diferencia de los ejemplos presentados en el subcapítulo anterior (a saber, la construcción de ángulos rectos usando el teorema de Pitágoras), aquí la validez está dada por los argumentos que se presentan deductivamente y no por el uso de ideas matemáticas en el mundo materia. Resaltamos la capacidad de ver lo *particular en lo general* porque las pruebas del libro de Euclides se centran en presentar argumentos que ilustran la *generalidad* de un hecho a partir de una *representación particular*. Esta idea también es mencionada por (Netz, 1998) quién ha estudiado el papel de los “diagramas” en las matemáticas griegas y resalta el papel crucial que desempeñan en pruebas, ya que para los griegos el diagrama es la esencia de la prueba por ser un caso particular que sirve para ilustrar la generalidad de un hecho, de modo que sin el diagrama no se podría tenerse una prueba. En estos casos el discurso es general y la representación permiten entenderlo, pero el discurso es aplicable a cualquier representación, igual que el teorema de Thales es aplicable a cualquier situación como las mencionadas anteriormente.

Estas formas de argumentación pueden verse como una forma de validación basada en la deducción y la generalidad, sin embargo, las ideas matemáticas tienen sus raíces en el plano de lo *sensorio -motor* (a través de los sentidos y las acciones) en donde las experiencias con los diagramas desempeñan un papel tan importante como el de los argumentos teóricos que se presentan. Sánchez (2012) menciona que la experiencia de colocar dos puntos, trazar el segmento que los conecta y alargar la línea hasta donde sea posible (según en tamaño de la hoja) permite tener una idea intuitiva sobre el comportamiento de las rectas y aceptar fácilmente el segundo y tercer axioma de Euclides. Es decir que, esta forma de validar ideas matemáticas está vinculada a la realidad sensible, permitiendo la organización de ideas intuitivas como axiomas y nociones comunes, para que a partir de ellas se pueda desencadenar un proceso deductivo que concluya en la validación de teoremas.

En general, resaltamos la presencia de razonamientos deductivos a partir de ideas asociadas al mundo material, pero también podemos tener estos razonamientos asociados a ideas teóricas como presentamos en el siguiente apartado.

1.2.3. Conceptos e ideas matemáticas definidas a través de axiomas: métodos de validación teórico-deductivos.

Las pruebas Euclidianas fueron durante muchos años un ejemplo de rigor y formalidad, sin embargo, en el siglo XIX se presentaron diversos trabajos en los que se resaltaban algunas “deficiencias lógicas” de la obra, por ejemplo, que dados los axiomas de Euclides no se puede garantizar que la intersección de dos circunferencias exista o que sean dos puntos. En dicha época la lógica formal y la argumentación matemática iba en ascenso y alcanzó su cúspide con los trabajos de David Hilbert y otros formalistas que presentaron propuestas en donde se corregían las inconsistencias de la obra de Euclides (Umland y Sriraman, 2020) y en donde las ideas matemáticas dejaban de lado la materialidad que las vio crecer.

Algunos autores como Sánchez (2012) mencionan que no se puede comparar la obra de Hilbert con la de Euclides, ya que esta última “es un sistema axiomático material, pues las nociones básicas tienen contenido, mientras que la axiomática de Hilbert es formal, ya que las nociones primitivas o indefinidas (…) se presentan como sistemas de entes que se caracterizarán a través de los axiomas y podrían tener más de una interpretación.” (p. 89). Es decir que, en el sistema de Euclides los objetos se definen por experiencias con el mundo material y diagramas (como lo mencionamos en el subcapítulo 1.2.2), mientras que en el otro sistema los objetos se definen por la formalidad matemática y después los diagramas dependerán de la interpretación de las definiciones. Aquí las afirmaciones que se realizan y la forma de validarlas se da a partir de la lógica y sin tener en cuenta las representaciones gráficas.

Otro ejemplo, en este sentido, son las geometrías no euclidianas, que surgieron al intentar probar el quinto postulado de Euclides por reducción al absurdo, asumiendo que el quinto postulado era falso y buscando llegar a una contradicción. Sin embargo, los desarrollos lógicos no llevaron a ninguna contradicción y permitieron concluir que la nueva geometría era tan coherente como la geometría Euclidiana. Aquí los objetos están definidos a partir de la lógica, por lo que los desarrollos teóricos y deductivos son los artefactos que se usan para poder presentar argumentos que validen las afirmaciones sobre los objetos. Estas ideas ponen de manifiesto una visión de *cada vez más abstracta* de los objetos matemáticos, ya que se aleja de las representaciones y de las experiencias con estas y con el mundo material.

En general, es este apartado se ha intentado ilustrar cómo las experiencias con el mundo material, la mediación de representaciones gráficas y de definiciones influye en la concepción de ideas matemáticas y en las formas en que se validan las afirmaciones. Para esto se han resaltado tres visiones: la primera en donde el conocimiento visto como algo “práctico” hace uso de métodos empíricos de validación; una segunda en donde los objetos son abstraídos de las experiencias con el mundo y los métodos de validación se enfocan en ilustrar la generalidad del hecho a partir de algo particular; y una tercera en la que los objetos se pueden ver como entes que se caracterizan a través de axiomas y por tanto los métodos de validación se basan en la axiomática y las reglas lógicas preestablecidas. Ahora bien, como las formas de validación se ven influenciadas por las formas de entender las ideas y los objetos matemáticos, vale la pena cuestionarse cómo la mediación de representaciones dinámicas afecta el conocimiento del estudiante sobre los objetos geométricos y cómo esto influye en las afirmaciones que realiza y la forma de validarlas.

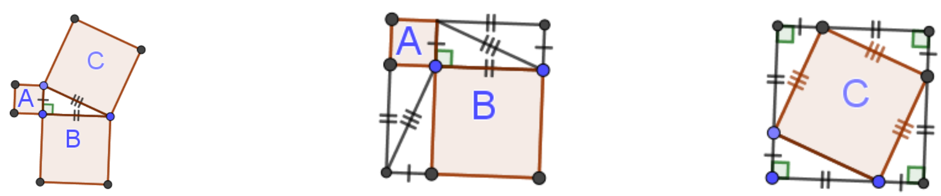
1.3. La forma de validar asociada a la construcción de un "sistema axiomático" dentro de una comunidad específica

En el apartado anterior presentamos algunos ejemplos de cómo las formas de validar afirmaciones dependen del punto de vista que se tiene sobre las ideas matemáticas, el cual puede ser inclinado hacia lo práctico o hacia lo lógico-formal (Hershkowitz, 2014; Sánchez, 2012). Desde la publicación de los Elementos de Euclides, los teoremas se han posicionado como predilectos para justificar afirmaciones, la comunidad matemática no aceptaba resultados conocidos como verdaderos hasta que se presentaba una demostración al estilo de Euclides. Un ejemplo de esto es el llamado "método mecánico de Arquímedes" (Arquímedes, 1978) que era desconocido por los matemáticos de su época y fue descubierto hasta 1906 cuando se encontró una carta que había compartido con su amigo Eratóstenes en la que describía su método para hallar áreas y volúmenes antes de presentar una demostración a sus colegas.

Para explicar el método supongamos que se tiene una figura o un cuerpo del que se conoce una forma de obtener su área o volumen (según el caso) junto con sus centros de gravedad, y un segundo cuerpo o figura para el que se desconocen estas fórmulas. El método se centra en dividir a ambos objetos en elementos pequeños (por ejemplo, una esfera en circunferencias de diferentes radios) y comparar las partes de uno de los objetos con las partes correspondientes del otro, buscando un equilibrio. Este método permitió que Arquímedes hiciera grandes descubrimientos, pero en sus palabras: es un método para hallar los resultados y no para presentarlos, por lo que, tras obtenerlos, buscaba proposiciones Euclidianas que le permitieran presentar los resultados a sus colegas. Este es un ejemplo de que la validez ya no se refiere solo a la veracidad de una afirmación, sino que incluye la aceptación de las formas de razonamiento en una comunidad, los teoremas se han convertido en artefactos predilectos para presentar hechos revelados mediante observación, experimentación o generalización (Torres Alcaraz, 2004).

Desde el punto de vista de las matemáticas los teoremas asociados a un sistema axiomático son los artefactos privilegiados para validar afirmaciones, pero ¿debería ser igual en la escuela? Sánchez (2012) presenta una justificación del teorema de Pitágoras que difiere de la presentada en los Elementos de Euclides (proposición 47 del libro 1). Los argumentos se apoyan completamente en la representación gráfica, mientras que en el caso de Euclides se presentan una serie de teoremas que ha probado con anterioridad y que le permiten establecer la generalidad del diagrama, probando el teorema de una forma más “rigurosa”. La autora menciona que es una prueba intuitivamente clara y accesible un público escolar (como estudiantes de secundaria) aun cuando no se considera rigurosa por no basarse en un sistema axiomático como el de Euclides.

En la propuesta de Sánchez (2012) se busca probar que el área del cuadrado sobre la hipotenusa (C) es igual a la suma de áreas (A más B) de los cuadrados sobre los catetos (ver Imagen 5a). Con este propósito se construyen de forma estratégica algunos triángulos que permiten obtener dos cuadrados cuyos lados miden $b + a$, de tal manera que uno contiene el área A y B (ver Imagen 5b) y el otro contiene el área C (ver Imagen 5c). Ahora bien, como sabemos que "si a cosas iguales le restamos cosas iguales, obtenemos cosas iguales", entonces al restar los cuatro triángulos en cada uno de los cuadrados (Imagen 5b e Imagen 5c) resulta que el área C es igual a la suma de áreas A más B.



(a) (b) (c)

Imagen 5. Prueba del teorema de Pitágoras

Desde un punto de vista riguroso y formal los razonamientos anteriores no serían aceptados como una prueba formal en una comunidad matemática, pero desde el punto educativo pueden ser comprensibles para estudiantes de secundaria, quienes usualmente no siguen el sistema axiomático propuesto en los Elementos de Euclides. De acuerdo con algunos autores como Duval (1999) en la escuela no se usa un sistema axiomático como el de los Elementos, sino que se usan definiciones y hechos sobre los que se adquiere un cierto valor de verdad. Estas definiciones y hechos componen lo que denominamos *organizaciones locales*, que son pequeños sistemas axiomáticos cuyos cimientos no se centran en ideas primarias como las de la geometría Euclidiana.

Las organizaciones locales se obtienen al establecer conexiones lógicas entre ciertos hechos, de manera que al asumir algunos como ciertos (aquellos que son aceptados sin necesidad de una prueba) se puedan probar otros lógicamente. Por ejemplo, vamos a suponer que se debe probar la siguiente *afirmación*: si un triángulo está inscrito en una semi circunferencia de tal manera que uno de los lados contiene al centro de la semi circunferencia, entonces el triángulo es rectángulo (ver Imagen 6).

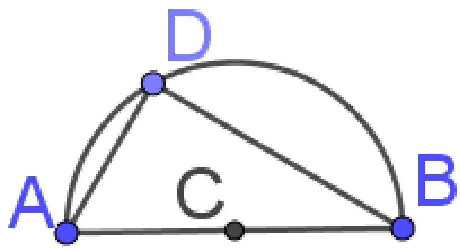


Imagen 6. Triángulo en una semicircunferencia

Una forma de validar el hecho a nivel escolar es construir el radio CD para determinar dos triángulos ΔACD y ΔDCB, que son isósceles debido a que dos de sus lados son radios de la circunferencia. Ahora, como los triángulos isósceles tienen dos ángulos congruentes entonces se tiene que las medidas de los ángulos en el triángulo ADB son α, β y $\alpha + \beta$ (ver Imagen 7). Por último, como la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos rectos, entonces $\alpha + \ \beta$ determina un ángulo recto. Es decir que el ángulo en D es recto y por lo tanto el triángulo ABD es rectángulo.

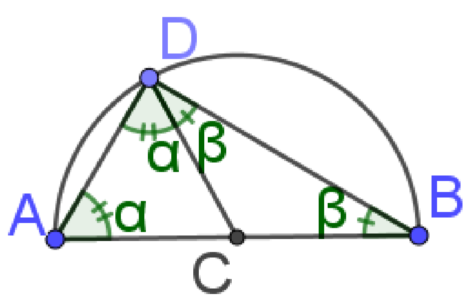


Imagen 7.Relación de ángulos del triángulo en una semicircunferencia

Para presentar una validación como este es necesario establecer la conexión entre diferentes hechos matemáticos y tener certeza sobre la veracidad de estos, por ejemplo: que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos rectos, que en un triángulo isósceles dos ángulos son congruentes y algunas definiciones como las de triángulos isósceles y triángulo rectángulo. Sin embargo, al leerla no se puede saber si la certeza sobre los hechos mencionado está dada porque se han establecido pruebas de cada uno de éstos, porque se leyó en algún libro, porque el profesor los "impuso" o porque se han probado empíricamente. De modo que esta justificación podría pertenecer a una *organización local* (propuesta en un aula de clase) en la que la suma de los ángulos internos de un triángulo y la propiedad de los triángulos isósceles se asumen como axiomas.

Otra forma de probar he hecho es usando el que hoy conocemos como teorema del ángulo central, ya que se sabe que el ángulo en D es la mitad del ángulo que se forma en C (ver Imagen 6) y como el ángulo en C es igual a dos rectos entonces el ángulo en D tiene que ser recto. En este caso basta con usar la definición de triángulo rectángulo y el teorema del ángulo central para poder validar el hecho de que el ángulo inscrito es recto. Igual que en el caso anterior se podría establecer una organización local donde el teorema del ángulo central se considera un axioma y, junto con algunas definiciones, probar el teorema mencionado y otros asociados a los cuadriláteros cíclicos.

Desde un punto de vista educativo, las dos formas de validar la afirmación sobre ángulo inscrito en una semicircunferencia son igualmente validas y podrían ser presentadas en diferentes comunidades (por ejemplo, del salón de clases) donde los hechos aceptados y los *artefactos teóricos* son distintos. Esto revela una idea desarrollada en este capítulo: el conocimiento es una construcción social y como las sociedades son dinámicas, las formas que adopta el conocimiento cambian con el tiempo y con las experiencias dentro de una comunidad.

Nosotros estamos en una cultura en la que las tecnologías digitales median diversas actividades que realizamos y nos permiten usar *artefactos* diferentes a los que teníamos para conocer sobre los objetos matemáticos y para validar nuestras ideas acerca de ellos. Por lo tanto, en el siguiente apartado se presenta una síntesis de las investigaciones asociadas a la presencia de las tecnologías digitales en el desarrollo de pruebas y argumentos geométricos.

CAPÍTULO 2

VALIDEZ MEDIADA POR ARTEFACTOS DIGITALES: VOCES DE LA COMUNIDAD

En el capítulo anterior presentamos ejemplos que ilustran cómo la prueba y la argumentación son ideas permeadas por factores establecidos en una comunidad específica (por ejemplo, la presencia de artefactos simbólicos y materiales). Particularmente, en cada apartado nos cuestionamos cómo la presencia de un *artefacto digital* puede influir en esos factores y en consecuencia en la forma en la que los estudiantes pueden validar afirmaciones.

En este capítulo nos situamos dentro del campo de la educación matemática. Empezamos presentando algunos cambios generados por el uso de tecnologías digitales, especialmente en lo que se refiere a la validación; vemos el caso de la geometría como un caso particular y luego presentamos tres tipos de investigaciones en las que se usa esta tecnología en clases de geometría que involucran la prueba y/o argumentación. Por último, mencionamos los objetivos de esta investigación vinculados a una problemática dentro de la comunidad.

2.1. LAS PRUEBAS Y/O ARGUMENTOS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA: ORÍGENES

La idea de argumentación y/o prueba en educación matemática se hereda de la propia ciencia (las matemáticas), donde influyeron diferentes factores (como los mencionados en el capítulo anterior) que permitieron tener una idea clara de lo aceptado como un razonamiento válido.

Actualmente la *lógica* y la *intuición* son dos de los componentes que se mencionan cuando se habla de pruebas y argumentos. Por ejemplo, algunos autores como Umland y Sriraman (2020) definen la argumentación matemática como el *proceso* de producir un argumento, es decir: sacar conclusiones basadas en una cadena de *razonamientos*, los cuales en su forma final se juzgan únicamente por su coherencia *lógica.* Aquí se resalta la *lógica formal* como un componente esencial en la argumentación matemática, sin embargo, estos mismos autores resaltan que los matemáticos usan *métodos intuitivos* (ej. ensayo y error) para convencerse a sí mismos de que un hecho es cierto.

La presencia de los componentes lógico e intuitivos no es nueva en la comunidad matemática, ya que algunos matemáticos de la historia, tales como Arquímedes (ver Arquímedes, 1978), usaban métodos informales (guiados por la intuición) para tener certeza sobre un hecho, sin embargo, los presentaban a la comunidad matemática con la formalidad requerida en la época, es decir al estilo de Euclides. Umland y Sriraman (2020) presentan un ejemplo similar con el trabajo de Euler y mencionan que comunidad matemática ha otorgado en numerosas ocasiones valor epistémico[1] de cierto a algunos resultados antes de que fueran lógicamente consistentes con otros resultados relacionados que dan crédito a su valor lógico. Es decir que por una parte se valoran los resultados y los razonamientos que permitieron generar conocimiento y por otra parte se da crédito a poder sustentar la afirmación con elementos de un sistema axiomático (principalmente teoremas).

Estos dos puntos de vista constituyen lo que algunos autores como Sinclair et al. (2016) denominaron la *tensión existente entre la naturaleza teórica y empírica* de las matemáticas,

[1] Los términos de valor lógico y valor epistémico serán discutidos más adelante en los siguientes capítulos.

pues una persona puede pensar que es más valioso poder justificar una afirmación con otros hechos matemáticos, mientras que otra persona puede valorar los razonamientos que se realizan para determinar que la afirmación es correcta y que le permitieron convencerse a sí mismo de su veracidad (por ejemplo, cuando se razona sobre un caso particular). Una discusión similar se dio entre Henri Poincaré y Bertrand Russell, ya que uno de ellos defendía su punto de vista sobre la naturaleza intuitiva de las matemáticas, mientras que el otro defendía su naturaleza lógica (Torres Alcaraz, 2004).

En general, existe una gran diferencia entre la forma en que los matemáticos se convencen a sí mismo y como presentan sus ideas matemáticas (Umland y Sriraman, 2020), entonces ¿cuál se debe valorar más? Hanna (2014) afirma que la mayoría de los matemáticos —y educadores matemáticos— piensan que un argumento es más valioso cuando conduce a la comprensión, la cual proviene usualmente de los métodos más intuitivos. Sin embargo, desde el punto de vista de las matemáticas, la tensión podría inclinarse hacia lo teórico, ya que existen unos teoremas probados formalmente y que se deben usar para validar una afirmación. En otras palabras, la *comprensión* es uno de los elementos que hace parte de la discusión, sin embargo, la comunidad matemática se ha inclinado hacia aspectos más formales.

Desde el punto de vista educativo no existe una clara inclinación hacia lo teórico o lo empírico, ya que se suman aspectos como: el nivel educativo de los estudiantes, las razones de argumentar afirmaciones, quién valida la coherencia lógica de los argumentos, los artefactos que se tienen a disposición, entre otros. Pareciera que las opiniones sobre lo que es un argumento válido desempeñan un papel importante, por ejemplo, Hanna (2014) afirma que en la comunidad educativa hay una inclinación hacia valorar los argumentos que conducen a la comprensión, sin embargo (Dickerson y Doerr, 2014) encontraron que esto no siempre ocurre, ya que los profesores con menos de 10 años de experiencia son más propensos a valorar las pruebas escritas con argumentos formales; mientras que aquelloas con más de 20 años de servicio suelen estar satisfechos con argumentos menos formales y valorar la comprensión de un hecho.

Es indiscutible que la comprensión y la formalidad son de los elementos para tener en cuenta al momento de referirnos a la argumentación y /o prueba en educación matemática. Estos elementos se pueden entender como dos puntos de vista opuestos que provienen de la tensión existente entre la naturaleza teórica (asociada a la formalidad) y empírica (asociada al descubrimiento) de las matemáticas. Ahora bien, la presencia de las tecnologías digitales ha provocado que esta tensión incremente, ya que algunos autores que reconocen las virtudes del medio digital para realizar pruebas en el aula (Hanna et al., 2019a), mientras que otros lo ven solamente como una herramienta que permite proponer conjeturas que deben ser probadas de forma tradicional (ver reporte realizado por Hanna y Sidoli, 2007). Estos puntos de vista han provocado que la prueba sea uno de los aspectos de la actividad matemática que más se ha resistido al cambio tecnológico y que se convierta en un tema de interés en la comunidad. (véase, por ejemplo, Hanna et al., 2019b)

La inclusión de las tecnologías digitales en clase de matemáticas es un tema amplio y que no se debe tratar a la ligera, ya que estas tecnologías han generado grandes cambios a nivel educativo, dos de los más relevantes son: la consolidación de entornos diferentes para promover el aprendizaje (como clases a distancia y las clases remotas[2]) y la inclusión de programas o softwares especializados (como Derive o Matlab en el caso de las matemáticas). Estos aspectos determinan líneas de investigación que se estudian de manera profunda, un ejemplo desde el punto de vista de la validación es la investigación de Dello Iacono (2021) quién analizó los argumentos de un grupo de estudiantes que trabajaron en un ambiente remoto y con el uso de un software especializado (GeoGebra).

En general, la variedad de tecnologías y las diferentes posturas sobre la prueba y la argumentación hacen que las líneas de investigación, que surgen al relacionar estos aspectos, sean bastante numerosas. Nos enfocaremos en las investigaciones de pruebas y/o argumentos en clase de geometría, ya que, según algunas propuestas como la de la NCTM (2000), es el escenario predilecto para desarrollar estas habilidades.

2.2. La clase de geometría y los artefactos digitales

La geometría es el área de las matemáticas en la que más se promueve el desarrollo de pruebas y argumentos a nivel escolar (Hershkowitz, 2014; NCTM, 2000) y con la presencia

[2] Se diferencian de las clases a distancia porque la interacción no se da de manera simultánea.

de las tecnologías digitales las investigaciones sobre esta área han aumentado, particularmente con el uso de DGE (entornos de geometría dinámica) como GeoGebra, Sketchpad y Cabri-Geometry.

De acuerdo con Moreno-Armella et al. (2008) los entornos geometría dinámica ofrecen artefactos que premien apuntar y "hacer clic" para construir objetos geométricos que son estructurales, es decir que pueden arrastrar con el uso del ratón y conservan las relaciones matemáticas definidas por el usuario (invariantes directos[3]) junto con otras que aparecen por a la estructuralidad de la representación (invariantes indirectos). Aquí los estudiantes pueden acceder a conjeturas y generalizaciones al hacer clic y arrastrar uno de los puntos de la figura, ya que la información en la pantalla se va actualizando a medida que el usuario arrastra. Es decir que el estudiante puede plantear una hipótesis sobre el cumplimiento de una propiedad y arrastrar para ver si la propiedad se sigue cumpliendo, por esta razón es que algunos autores (como Acosta et al., 2013) se refieren a esta geometría dinámica como una geometría experimental donde se pueden plantear y poner a prueba las hipótesis.

Incluir una geometría experimental al aula permite que los estudiantes tengan acceso a ideas geométricas cada vez más complejas, gracias a la mediación de las representaciones dinámicas en el proceso de aprendizaje (Moreno-Armella y Brady, 2018). Estas ideas han permitido que la geometría dinámica sea usada en procesos de conjeturación, sin embargo, desde el punto de vista de la validación, las llamadas pruebas experimentales son discutidas desde la tensión entre la naturaleza teórica y empírica de las matemáticas y por tanto son tema de interés en diversas investigaciones (Sinclair et al., 2016). En las investigaciones que incluyen el uso de entornos de geometría dinámica en los procesos de prueba identificamos tres tendencias: la primera en donde los argumentos o pruebas son clasificados de acuerdo con ciertos criterios, una segunda donde el uso de geometría dinámica se limita a la etapa de conjeturación y la última donde el uso de geometría dinámica se incluye como parte de la prueba. Estas tres tendencias son descritas a continuación.

---

[3] Laborde y Sträßer (1990) definen los invariantes directos como aquellas relaciones geométricas que son definidas por los comandos usados para construir la figura, mientras que los invariantes indirectos son una consecuencia de que la figura construida conserve las relaciones de la geometría Euclidiana.

2.2.1. Clasificación de argumentos al usar un DGE

En este tipo de investigaciones se busca encasillar las producciones de los estudiantes de acuerdo con ciertos niveles o tipos de pruebas (y/o argumentos) que resaltan aspectos teóricos, empíricos, formales, intuitivos, entre otros. Un ejemplo lo presenta Wittmann (2021) quien afirma que algunos de los tipos de prueba más relevantes son: las pruebas experimentales (donde se verifican varios ejemplos), las pruebas intuitivas u operativas (donde se aplica resultados que por intuición son aplicables a todo tipo de ejemplos) y las pruebas científicas (formales).

En estas investigaciones los niveles o categorías son previas a la inclusión de softwares de geometría dinámica, ya que se toman categorías desarrolladas en entornos de papel y se busca que los argumentos que han sido mediados por un DEG puedan entrar en esas categorías. Por ejemplo, en su investigación Morales Ramírez et al. (2021) tipificaron los argumentos de estudiantes de secundaria cuando realizaban una actividad de teselados haciendo uso de software de geometría dinámica. Ellos usaron los siguientes tipos de argumentos:

- Autoritario: El argumento depende de la autoridad que lo realiza (libro de texto, profesor o compañero).
- Simbólicos: Usa lenguaje matemático y símbolos poco claros, sin llegar a la conclusión deseada.
- Fácticos: Usa hechos evidentes o pasos secuenciales como parte de su explicación o justificación.
- Empíricos: Usa hechos físicos o presentes en la figura como un argumento y no una parte de este.
- Analíticos: Usa razonamientos lógico-deductivos sin que necesariamente se llegue a la conclusión deseada.

Para el análisis los investigadores clasificaron los argumentos y encontraron que la mayoría eran empíricos, ya que para los estudiantes la construcción realizada era suficiente para validar una afirmación. Además, los autores concluyen que el uso de geometría dinámica promueve la producción de argumentos aun cuando estos no sean lógicos o correctos.

Los resultados de la investigación no resultan sorprendentes, ya que algunos investigadores como Arzarello et al. (2002) mencionan que el trabajo en entornos de geometría dinámica como Cabrí es suficiente para que los estudiantes se sientan convencidos de que una afirmación es cierta, dejando las justificaciones en un nivel perceptivo-empírico. En otras palabras, con la geometría dinámica se pueden preferir argumentos empíricos para justificar afirmaciones.

Otra tendencia de este tipo de investigaciones es identificar la estructura general de los argumentos a partir de la relación entre sus partes, analizando el argumento no como una unidad, sino a partir de los elementos que posee. De acuerdo con algunos autores como Knipping (2008) y Toulmin (2003) los argumentos poseen por lo menos los siguientes tres elementos:

- Conclusiones o aserción: Afirmación que se realiza.
- Datos: Datos que se tienen para poder llegar a la afirmación.
- Garantías: Hechos conocidos que permiten relacionar los datos con la aserción.

Además de estos tres elementos, algunas vecen incluyen respaldos (muestran que la garantía es válida y relevante), calificativos (palabras que dan fuerza a la aserción) y refutaciones (son los casos en donde no es válida la afirmación). De modo que cuando se justifica una afirmación se proponen diferentes argumentos, cuyas partes se relacionan para conformar diferentes estructuras de argumentación.

Con la inclusión de los entornos de geometría dinámica se han encontrado nuevas estructuras de argumentación. Por ejemplo, Erkek y Işıksal Bostan (2019) realizaron un estudio con un grupo de profesores y encontraron que muchos de los participantes relacionaban los argumentos de manera lineal y esta es una estructura que no había sido reportada en el ambiente de papel. Además, los autores mencionan que con el uso de geometría dinámica hay una tendencia a proponer argumentos aislados.

En general, las investigaciones mencionadas en este apartado buscan encasillar las producciones de los estudiantes en una clasificación establecida en un ambiente de papel. Esto para analizar la tendencia cuando se tiene entornos dinámicos y en algunas ocasiones descubrir elementos que se deben incluir cuando se trabaja en este tipo de ambientes. Con esto último se reconocen cambios provocados por el uso de la geometría dinámica, sin embargo, pareciera que la tensión entre los empíricos y lo teórico permanece y se hace más visible con la forma en que se clasifican las pruebas y los argumentos.

Existen otro tipo de investigaciones en las que se aborda de manera explícita la tensión entre los aspectos empíricos y teóricos de la geometría, aquí se ve a la geometría dinámica como un puente que permite relacionar estos dos aspectos. Este tipo de investigaciones son las que presentamos a continuación.

2.2.2. DGE como parte del trabajo empírico y puente que lleva hacia aspectos teóricos

Como mencionamos anteriormente, la tensión entre los aspectos teóricos y empíricos de las matemáticas es una de las problemáticas de interés en la investigación acerca de la prueba y/o argumentación. Con la tecnología digital algunos investigadores han encontrado en esta un "puente" entre dicha tensión, ya que no solamente se usa como un espacio de exploración en el que se puede producir conjeturas, sino como un espacio de exploración para encontrar elementos teóricos que sirvan para producir la prueba. Sinclair y Robutti (2012) mencionan que en este tipo de investigaciones el trabajo de los estudiantes es dividido en dos fases: la primera enfocada a la conjeturación (donde hay un fuerte uso de tecnología) y la segunda enfocada al desarrollo de pruebas, en donde el uso de la tecnología es para *auxiliar* al estudiante.

Entre la fase de conjeturación y la de prueba algunos autores (Boero et al. 1996) proponen la existencia de una Unidad Cognitiva donde los argumentos de la primera fase sirven para la prueba de la segunda fase, en otras palabras, cuando se trabaja con geometría dinámica se producen argumentos que sirven para la prueba posterior, ya que la observación de invariantes que pueden servir para encontrar hechos geométricos asociados a la afirmación que se intenta probar. Un ejemplo, de este tipo de investigación, fue desarrollado por Acosta et al. (2013) quien afirma que la posibilidad de trabajar con representaciones dinámicas (particularmente con la técnica de lugar geométrico) permite realizar construcciones rígidas[4] y buscar relaciones teóricas que al ser formalizadas e incluidas al sistema teórico permiten probar afirmaciones de forma teórica.

En estos casos, la prueba (como producto) es equivalente a las propuestas en un medio de papel, con la ventaja de que la geometría dinámica permite (1) encontrar argumentos que deben refinarse y (2) encontrar elementos teóricos que deben formalizarse para ser parte de la prueba. En estas pruebas, algunos autores como Arzarello et al. (2002), resaltan la importancia del rol docente en la transición de lo empírico a lo teórico, ya que con el dinamismo los estudiantes quedan convencidos de que una proposición es verdadera y las justificaciones pueden quedarse en lo perceptivo, convirtiendo a los DGE en un obstáculo en la transición del pensamiento empírico al teórico.

Hasta este punto, la geometría dinámica como puente entre lo teórico y lo empírico se presenta en situaciones en las que hay una fase de conjeturación y otra de justificación. Sin embargo, también incluye otros casos como el presentado por Baccaglini-Frank et al. (2018), quienes realizaron una investigación centrada en las pruebas por contradicción usando un DGE y notaron la existencia de lo que denominaron un "pseudo-objeto", con el que se pueden fomentar procesos de argumentación que culminen en pruebas. De acuerdo con los autores un "pseudo-objeto" es una figura geométrica que tiene asociadas propiedades que son contradictorias con la geometría Euclidiana, por ejemplo, en su investigación solicitaron a un estudiante que construyera triángulo con dos bisectrices ortogonales y en caso de no ser posible explicara por qué. El participante construyó un triángulo con sus bisectrices y usando el arrastre buscó que las dos rectas fueran perpendiculares, pero al darse cuenta de que no era posible empezó a razonar sobre el triángulo construido (el pseudo-objeto), pensando en lo que pasaría si cumpliera las condiciones solicitadas. El estudiante concluyó que, si las bisectrices fueran perpendiculares, entonces la suma de los ángulos internos tendría que ser mayor a 180 grados, lo cual contradice un teorema asociado a los triángulos. En este último caso la prueba (como producto) sigue siendo equivalente a una prueba presentada en el papel.

---

[4] Usa el termino rígido en oposición a las construcciones "blandas" que se destruyen con el arrastre, es decir que con el término "rígido" se refiere a construcciones estructurales que conservan sus propiedades ante el arrastre.

En general, estas ideas tienden a que las pruebas producidas con la mediación de artefactos digitales se puedan validar sin necesidad del medio digital, una tendencia a traducir de un medio a otro. Esta tendencia también se presenta en investigaciones asociadas a problemas de construcción, por ejemplo, Stylianides y Stylianides (2005), proponen que cuando se trabajan problemas de construcción usando software de geometría dinámica la construcción es válida sí y solo sí supera la prueba del arrastre y los artefactos de construcción son equivalentes al uso de regla y compás. Es decir que, para construir una bisectriz no se puede usar la herramienta de construcción predefinida por el software, a excepción de que previamente se haya realizado la construcción clásica (como la de los Elementos) y se haya establecido como un "teorema" que es usado para problemas más complejos.

En los casos expuestos, la geometría dinámica se usa como auxiliar en el proceso de prueba, pero en el producto no se reconoce la mediación digital, ya que la prueba (como producto) es equivalente a una prueba de lápiz y papel. Es decir, que en estos casos se reconocen las virtudes del medio digital para *apoyar* en la producción de pruebas: primero en la etapa de conjeturación y luego siendo un puente que permite llegar a aspectos más teóricos. Ahora bien, identificamos otro tipo de investigaciones en las que se reconoce una *integración* del pensamiento del estudiante con el medio dinámico, de modo que este se hace presente en todo el proceso de prueba. A continuación, se presentan este tipo de investigaciones.

2.2.3. DGE como parte esencial de la prueba

Al igual que en investigaciones anteriores, el uso de geometría dinámica se considera una herramienta para relacionar aspectos teóricos y empíricos de la matemática. Sin embargo, aquí se reconoce que la interacción entre el sujeto y las representaciones dinámicas cambia el razonamiento del sujeto y en ese sentido las pruebas que se producen son diferentes a las que se desarrollan sin mediación digital. Un ejemplo lo presenta Laborde (2002), quien propuso una actividad en lápiz y papel, seguida de geometría dinámica y después otra actividad a lápiz y papel. Los resultados de la investigación muestran que tras el uso de DGE, los participantes mostraron un razonamiento dinámico, aunque la última actividad se desarrollaba en lápiz y papel, así que el DGE empezó a tener un rol cognitivo y transformador.

Bajo esta misma línea de investigación Leung y Or (2007) analizaron el discurso de los estudiantes (la explicación oral y las pruebas) para entender las relaciones entre lo teórico y lo empírico cuando se trabaja en un ambiente de geometría dinámica. Ellos encontraron que posterior al trabajo dinámico, la cognición de los estudiantes se encuentra inmersa en el entorno, por lo que sus declaraciones escritas pueden estar asociadas al dinamismo de la figura. En ese sentido los autores proponen que las producciones escritas deben ser analizadas de forma diferente, por ejemplo, cuando un estudiante se refiere al triángulo ABC, esta declaración debe ser interpretada como una afirmación general “para cualquier triángulo ABC”.

Bajo la idea de que las producciones de los estudiantes deben ser analizadas de manera diferente cuando se trabaja con geometría dinámica, algunas investigaciones reconocen la presencia de artefactos tecnológicos como parte de un argumento. Por ejemplo, en la investigación de (Smith and Sutherland, 2013) se describen diferentes usos del DGE en las diferentes tareas desarrolladas por un grupo de estudiantes de octavo grado involucrados en el proceso de argumentación. Ellos encontraron que los estudiantes:

- Usan la *apariencia* de la figura en argumentos asociados a tareas de predicción (por ejemplo, argumentar que un triángulo con medidas 3u, 4u y 4u no existe porque no aparece un triángulo en la pantalla).
- Usan la función de *medición* en argumentos asociados tareas de describir (por ejemplo, usar las medidas de un triángulo como *dato* para afirmar que es isósceles).
- Usan el *arrastre y la medición* como un conjunto que permite argumentar en las tareas de producir (por ejemplo, arrastran la figura para mostrar que la construcción cumple las condiciones).
- No usan la tecnología en tareas de generalizar o justificar.

Aquí es de resaltar los autores esperaban que los estudiantes usaran la tecnología en las tareas de justificación y generalización, sin embargo, esto no se presentó. Ellos afirman que puede deberse a la falta de experiencia de los estudiantes en el uso de la tecnología cuando se les solicita justificar una afirmación.

Estas investigaciones dan cuenta de algunos de los cambios que se dan cuando se usa la tecnología digital en clase de geometría. Sin embargo, es necesario reflexionar sobre el nivel de presencia que tienen las herramientas tecnológicas en las pruebas. En ese sentido Hofstadter (1992) diferencia entre los hechos descubiertos y probados *por* una computadora y los que se dan *a través de* una computadora. Esta diferencia es presentada en ilustrada con la descripción de su experiencia.

En el artículo Hoftadter (1992) describe cómo usó Sketchpad para encontrar la recta que contiene al incentro, el punto de Nagel y el baricentro (tal y como la Recta de Euler que contiene al ortocentro, baricentro y circuncentro). Este proceso le permitió encontrar lo que denominó como el "hemolic crystal" y descubrir teoremas asociados. Sobre las pruebas de los teoremas el autor afirma lo siguiente:

> "So not only had I now discovered some new facts, I also had a clear understanding of *why* these facts were true. In other words, as new results started pouring in, so did proofs of them! I couldn't have asked for more." [Ahora no solo había descubierto hechos nuevos, y tenía una mejor comprensión de por qué estos hechos eran ciertos. Conforme surgieron nuevos resultados, ¡sus pruebas se hicieron evidentes! No podría haber pedido más.] (Hoftadter, 1992, p.19)

Aquí la prueba es vista como un razonamiento que permite relacionar diferentes ideas y afirmar por qué un hecho es cierto, lo cual se puede hacer con la mediación de un artefacto digital. Ahora bien, continuando con el trabajo de Hoftadter, el autor se cuestiona si su cristal es un descubrimiento genuino o si ya había sido reportado, por lo que empieza una búsqueda en la que encuentra con el trabajo del matemático Clark Kimberling, quién introdujo a un programa de computadora las características algebraicas y trigonométricas de 91 puntos asociados a los triángulos con la finalidad de que el programa le proporcionara diferentes relaciones entre los puntos y así producir teoremas, que se probaron usando un programa.

En la reflexión que presenta Hoftadter (1992) sobre el trabajo de Kimberling, sostiene que no se puede afirmar que los teoremas hayan sido solamente descubiertos y probados por una computadora, ya que se le estarían atribuyendo propiedades mentales a una computadora y no se tendría en cuenta el trabajo que realizó el matemático. Sin embargo, reconoce una gran diferencia entre el uso de la tecnología para descubrir y probar los teoremas del "hemolic crystal" y el uso de la tecnología en los teoremas de Kimberling. En este sentido se distinguen ambos procesos afirmando que el primero se da *por* una computadora y el segundo *a través.*

2.3. LA PROBLEMÁTICA

La argumentación y/o prueba en educación matemática es un tema de interés, ya que algunos diseños curriculares los incluyen como uno de los principios que deben integrarse para que una persona tenga una educación matemática de calidad (por ejemplo, NCTM, 2000). Pero, más allá de proponer pruebas "aceptables" lo que parecen buscar estos diseños curriculares es el desarrollo de distintos tipos de razonamientos que permitan que los estudiantes comprendan por qué una proposición es cierta (Hanna, 2014).

Estos razonamientos se asocian a una tensión entre la naturaleza teórica y empírica de la prueba (Sinclair et al., 2016), ya que una persona puede poner en marcha diferentes tipos de razonamientos para determinar una propiedad y su validez, pero estos no necesariamente son teóricos o formales. La tensión se presenta cuando algunos formalistas valoran solo la parte teórica, dejando de lado la parte empírica y los razonamientos que el estudiante pone en juego al determinar las propiedades que se cumplen. La discrepancia entre la postura teórica y empírica de la prueba ha ocasionado que a nivel escolar se diferencien los diversos propósitos que puede tener al ser llevada al aula (véase (Steele and Rogers, 2012) lo que han provocado que sea un tema controversial dentro del campo y a su vez fuente de múltiples definiciones.

En geometría la representación gráfica es uno de los elementos relevantes en el desarrollo de pruebas, ya que son fuente de nociones y conocimientos (Duval, 2016), aquí el estudiante razona sobre lo que se ve en la figura, debido a que "los métodos geométricos son, hasta cierto punto, una combinación de ver y razonar, ya que, allí, la razón comprueba los desarrollos lógicos, y los guía sobre lo que los ojos ven en la figura" (Northrop, 1968, p.131). Previo a la integración tecnológica al aula de clase, resultaba propicio solicitar a los estudiantes pruebas teóricas de sus afirmaciones para validar sus razonamientos sobre el cumplimiento de una propiedad, ya que podían llegar a conclusiones erróneas o no generalizables al razonar sobre una figura particular o sobre un caso atípico; por ejemplo, afirmar que en todos los cuadriláteros las diagonales se bisecan cuando se razona sobre la representación de un paralelogramo (todo esto en el papel).

La presencia de las tecnologías digitales ha permitido que el estudiante desarrolle nuevas formas de razonamiento, ya que disponen de un continuo de casos particulares ofrecidos por algunos softwares de geometría que han incorporado el arrastre de puntos y objetos como una de sus características. En estos entornos de geometría dinámica —como GeoGebra— las representaciones pueden verse como figuras estructurales que se comportan de acuerdo con la geometría que está incrustada en el medio (la que viene en su programación) y por lo tanto permiten obtener la convicción de que un hecho es cierto a partir del arrastre sobre un objeto geométrico (Hershkowitz, 2014).

El grado de certeza y convicción que se tiene al usar geometría dinámica es tan fuerte que puede superar la certeza dada por la prueba teórica (Sinclair y Robutti, 2012), es decir que la certeza de que un hecho es cierto no necesariamente se da por la prueba teórica. En ese sentido, algunos autores distinguen dos fases que se pueden dar al producir una prueba: en la primera el estudiante conjetura y con exploración adquiere *certeza* de que su conjetura es un hecho geométrico y en la segunda debe producir una prueba en la que se presenten razonamientos que expliquen *por qué* el hecho es cierto.

La presencia de DGE en clase de geometría ha ocasionado que algunos autores (como los del apartado 2.2.3) reconozcan las virtudes de estas tecnologías para realizar pruebas que expliquen por qué un hecho es cierto; mientras que otros valoran la capacidad de interactuar con representaciones dinámicas, realizar conjeturas y reconocer hechos teóricos que sirven para probar las afirmaciones de forma tradicional (como se harían en el papel). Ambas posturas reconocen al entorno de geometría dinámica como un medio que relaciona aspectos teóricos y empíricos de la matemática, contribuyendo a disminuir la tensión entre estos.

Aportar a la tensión no implica apoyar el uso de las tecnologías digitales desde el punto de vista teórico o empírico, lo que se busca en las diferentes investigaciones es resaltar las ventajas que tiene el uso de entornos de geometría dinámica en el desarrollo de pruebas geométricas (sin importar hacía que parte se inclinen). Mas allá de aceptar la presencia de la herramienta digital en la prueba (como producto) como una decisión guiada por ideas formalistas de la matemática, creemos que es necesario ***analizar profundamente la relación que existe entre el estudiante y el medio dinámico al proponer pruebas y/o argumentos***, ya que se vinculan las nociones geométricas del estudiante y el conocimiento incrustado en el medio digital, reorientando y replanteando el pensamiento matemático del estudiante (Jacinto y Carreira, 2017).

En general, los recursos del medio digital (como el arrastre, el dinamismo, los lugares geométricos, macro construcciones, traza, entre otros) permiten una interacción diferente a la que permitían los dibujos (o figuras) en el papel. Nuestra hipótesis es que la interacción con este tipo de representaciones puede cambiar la forma en la que el estudiante razona y en consecuencia los argumentos y pruebas geométricas que presenta. Por lo tanto, consideramos relevante realizar un estudio para analizar la mediación del DGE en las justificaciones que presentan los estudiantes, ya que según algunos autores (como Hanna, 2020) este es uno de los objetivos primordiales en la realización de pruebas.

2.3.1. Propósito y metas del estudio

La meta que pretendemos alcanzar con el desarrollo de este proyecto es analizar cómo la interacción del estudiante con las representaciones dinámicas influye en las pruebas o argumentos geométricos que proponen. Esta es una idea innovadora ya que nos posicionamos desde un punto de vista amplio en donde el DGE se puede ver como una herramienta que *auxilia* al estudiante o puede verse como una herramienta que se "fusiona" con el razonamiento del estudiante.

Para el logro de la meta consideramos pertinente plantear las siguientes acciones:

- Diseñar problemas donde los estudiantes se familiaricen con el uso de GeoGebra y adquieran conocimientos sobre propiedades geométricas.
- Plantear actividades en las que los estudiantes deban justificar afirmaciones geométricas.
- Describir la interacción que tienen los estudiantes con las representaciones dinámicas, poniendo énfasis en la justificación de afirmaciones.
- Crear categorías que den cuenta de la relación que se establece entre el estudiante y la representación dinámica al momento de proponer un argumento o una prueba.

2.3.2. Preguntas de investigación

En resonancia con las consideraciones anteriores se proponen las siguientes preguntas de investigación:

¿Cómo es la **mediación de artefactos que se encuentran en un entorno de geometría dinámica** durante el proceso en el que unos estudiantes de secundaria validan **una afirmación geométrica**?

¿Cómo se ve afectado el **razonamiento** de los estudiantes de secundaria cuando su actividad es mediada por **un entorno de geometría dinámica**, particularmente cuando justifican una **afirmación geométrica**?

CAPÍTULO 3

SOBRE LOS ARTEFACTOS Y LA ACTIVIDAD MEDIADA

En el capítulo anterior presentamos algunas investigaciones en matemática educativa que se centran en el uso de la tecnología digital en procesos de prueba y/o argumentación geométrica. Estas investigaciones nos llevaron a plantear la necesidad de analizar profundamente la relación que establece el estudiante con artefactos digitales para proponer pruebas y/o argumentos geométricos. De acuerdo con estos intereses, debemos abarcar dentro de los aspectos teóricos dos elementos fundamentales: uno asociado a los artefactos y otro asociado a la prueba.

En este capítulo presentamos algunos referentes teóricos asociados a la mediación de artefactos en la clase de matemáticas. Primero empezamos hablando de los artefactos a nivel general, luego nos encaminamos hacia los artefactos vinculados al quehacer matemático escolar y por último nos referimos a aquellos artefactos que se encuentran en un medio digital. En general no pretendemos ser exhaustivos en las ideas vinculadas con la mediación, por lo que solo presentamos aquellas que dan contexto al trabajo y que son relevantes para el análisis.

3.1. LA MEDIACIÓN DE ARTEFACTOS

La actividad cognitiva de los seres humanos ha sido siempre una *actividad mediada*. Tal vez los primeros ejemplos se traducen en marcar huesos (hacerles hendiduras con un objeto afilado) como un recurso para extender la memoria a un medio externo. Muy posteriormente, el desarrollo de la escritura y la representación simbólica de los números constituyen ejemplos más destacados.

La mediación instrumental es una idea acuñada desde el campo de la psicología y que ha sido estudiada dentro de educación debido a que algunos autores como Vygotsky (1995) que afirman que las funciones superiores del ser humano, como la *formación de conceptos*, son producto de una actividad instrumentalmente mediada. Para dicho autor, los instrumentos pueden ser materiales (como un ábaco) o psicológicos (como los sistemas de lenguaje y signos), pero son los segundos los que transforman la cognición del ser humano. La formación individual y colectiva de instrumentos psicológicos se da gracias a un proceso de *internalización* en el que las *acciones externas* mediadas por artefactos materiales se transforman en funciones psicológicas internas, que posteriormente se ven reflejadas en actividades externas Vygotsky (1995). Por ejemplo, cuando aprendemos a contar podemos empezar utilizando nuestros dedos (artefacto material), pero después de un proceso de internalización logramos hacerlo sin necesidad de éstos, llegando a contar cantidades superiores al número de dedos que poseemos. Aquí el conteo es un concepto que hace parte de la cultura y que con la mediación de distintos artefactos (como los dedos) se incorpora a la cognición del sujeto.

El uso de instrumentos y la transformación de nuestra cognición a partir de su uso se refiere a procesos complejos, por lo que una de las primeras ideas que se desarrolla en esta dirección es analizar el proceso mediante el cual un *artefacto* se convierte en *instrumento*. Rabardel y Beguin (2005) proponen que un instrumento es una entidad mixta que consta de un artefacto (físico o simbólico) y uno o más esquemas que pueden ser una apropiación de una práctica social en la que se usa el artefacto.

El uso de artefactos tiene lugar dentro de una cultura, por ejemplo, si nunca hemos empleado algo tan simple como una cuchara, nada significa para nosotros, es la comunidad en donde vivimos la que originalmente le otorga significado y hace que nos inclinemos por aprender a usarla. Es decir, transformar la cuchara en un instrumento o herramienta de mediación para nosotros. Después, cuando tengamos que emplear una cuchara, ya no importa que sea la misma que aprendimos a usar inicialmente, reconoceremos la nueva y aplicaremos los esquemas que antes habíamos desarrollado. En una comunidad específica como el salón de clases estas ideas se pueden ejemplificar cuando usamos la ecuación $x = \frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y reemplazamos los valores de a, b y c para determinar las raíces de una ecuación cuadrática. Sin importar los coeficientes reales o complejos de la ecuación, el estudiante puede determinar las raíces de cualquier ecuación de segundo grado aplicando los esquemas que ya ha desarrollado, aun cuando sus primeros acercamientos hayan sido con ecuaciones de coeficientes reales. Del mismo modo se puede pensar en un artefacto material como el compás, ya que después de que se convierte en un instrumento/herramienta para el estudiante, puede usar cualquier compás para diferentes actividades como construir circunferencias, mediatrices, bisectrices, entre otros.

Hasta el momento nos hemos referido a diferentes artefactos (como el lenguaje, un compás, una ecuación, una cuchara, entre otros) que, al usarse aplicando algún esquema, se pueden considerar *instrumentos/herramientas de mediación*. Sin embargo, algunos de ellos pueden mediar actividades materiales (como una cuchara) y otros pueden transformar la cognición (como el lenguaje). Para diferenciar estas dos ideas consideramos necesario definir algunos términos asociados a la idea de mediación, tales como artefactos, instrumentos y herramientas.

3.1.1. Los artefactos

En educación matemática, la idea de mediación instrumental se ha estudiado profundamente, pues el estudiante dispone de artefactos materiales o simbólicos, como calculadoras, compás, una representación, un algoritmo, signos, entre otros. Monaghan et al. (2016) definen un *artefacto* como un objeto material creado por la humanidad para un *propósito* específico, por ejemplo, un lápiz que es creado para escribir. Según los autores, la materialidad del artefacto no se refiere a poder tocarlo, se refiere a la posibilidad de materializarlo, por ejemplo, el algoritmo de la suma es un artefacto cuya materialidad está dada por la posibilidad de escribirse o programarse en una computadora mediante sus representaciones.

Los artefactos son sociales ya que se crean y/o usan para atender un *propósito* dentro de una comunidad con ciertas condiciones. Desde su creación (o inclusión a la comunidad) los artefactos poseen un *espacio potencial de acción*, el cual se refiere a las diferentes situaciones en las que se puede usar, por ejemplo, el espacio potencial de acción de una cuchara es llevar los alimentos del plato a la boca (el propósito). Este espacio de acción no es estático, ya que pueden presentarse nuevas situaciones donde se pueda usar el artefacto, por ejemplo, usar la cuchara para enchinarse las pestañas, lo que conlleva una ampliación del espacio de acción del artefacto. Estas mismas ideas son expresadas por Moreno-Armella y Hegedus (2009) quienes hablan de la zona de desarrollo próximo del artefacto (ZPDA).

El término artefacto está asociado solo al objeto, ya que cuando se usa con un propósito, a partir de las acciones de un sujeto, los investigadores usan otros términos como herramienta o instrumento. En algunos casos estos dos términos se usan indistintamente y en otros casos el término de herramienta se usa como sinónimos de artefacto (por ejemplo, la investigación de Richard et al. (2019)), pero en esta investigación consideramos necesario distinguir cada término.

3.1.2. Los artefactos como herramientas o como instrumentos

Un artefacto se convierte en una *herramienta* cuando es *usado* por una persona para un propósito específico, lo que establece una relación inseparable entre el *sujeto*, el *propósito* y el *artefacto* (Monaghan et al., 2016). De acuerdo con Moreno-Armella y Hegedus (2009) los artefactos vienen cargados con un uso predeterminado —ya que han sido diseñados en una comunidad específica—, sin embargo, cuando hay una redefinición del propósito también hay una redefinición de la herramienta como tal. Un artefacto puede ser potencialmente una herramienta por sí misma, pero es el sujeto quien le otorga ese estatus *con su acción*. Por ejemplo, un compás es un artefacto que potencialmente puede ser una herramienta para construir circunferencias, pero un estudiante puede usarlo para tal propósito o puede usarlo para pinchar a uno de sus compañeros. En el primer caso es una herramienta de construcción de figuras geométricas y el segundo es una herramienta de agresión, por lo tanto, se puede afirmar que un *mismo artefacto puede mediar dos actividades diferentes en relación con su propósito*, esta idea se ilustra en la Imagen 8.

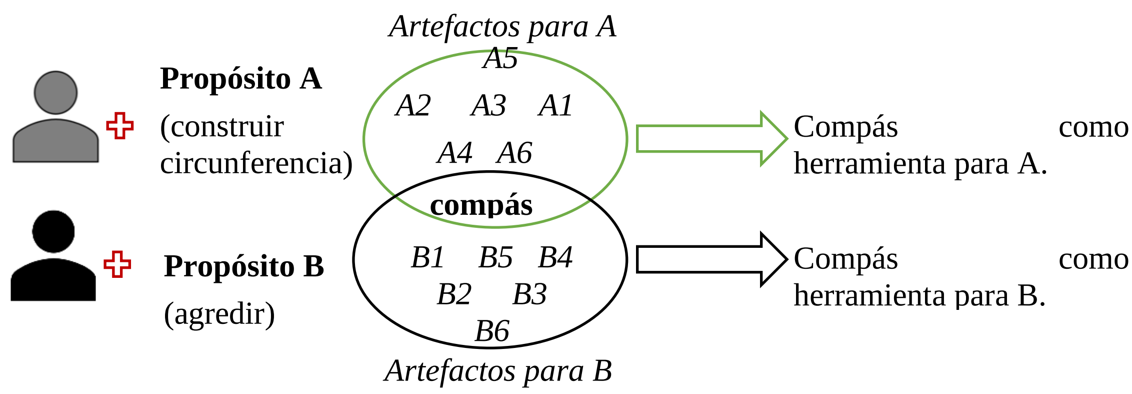


Imagen 8. Un artefacto y diferentes propósitos

Del mismo modo que un artefacto puede usarse para mediar dos actividades diferentes, también podemos tener diferentes artefactos para desarrollar una misma actividad. En el segundo capítulo del libro "herramientas y matemáticas", Monaghan (2016) ilustra esta idea presentando cuatro herramientas que se usaron con el propósito de bisecar un ángulo, estas son: regla y compás, transportador, un entorno de geometría dinámica y un libro (ver Imagen 9). El autor afirma que desde el punto de vista de la estética y la transparencia matemática algunas herramientas pueden considerarse mejor que otras, sin embargo, desde el punto de vista del *propósito* todas lo cumplen y por lo tanto están en igualdad de condiciones.

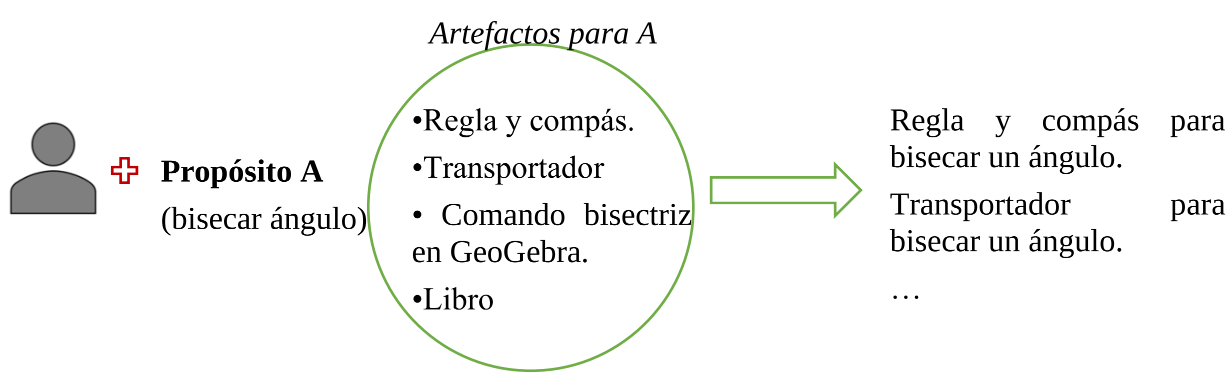


Imagen 9. Un propósito y diferentes artefactos

Para usar los artefactos como herramientas para es necesario tener el artefacto material y conocimiento sobre su uso. Por ejemplo, para bisecar un ángulo usando regla y compás, el estudiante además de tener a disposición estos artefactos materiales, debe conocer una secuencia de pasos (un esquema asociado al uso de la herramienta) que hacen posible la bisección del ángulo. Este mismo conocimiento es requerido al usar el libro, ya que el estudiante termina construyendo dos triángulos rectángulos congruentes (ver Imagen 10) tal y como lo haría con la regla y compás. Es decir que, con el conocimiento y el propósito el artefacto material puede ser reemplazable, en el ejemplo, el proceso de solución hace necesarias herramientas materiales de construcción que permitan copiar medidas y construir ángulos rectos, por ejemplo: una escuadra, un libro, una regla no graduada con un compás, entro otros.

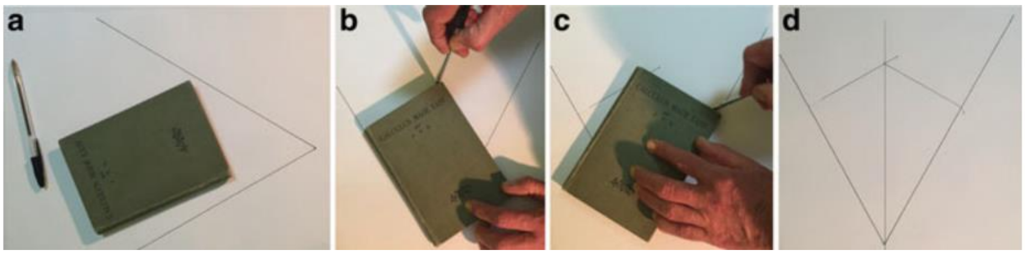


Imagen 10. Bisecando un ángulo con un libro

En cuanto a los instrumentos, Monaghan et al. (2016) proponen que, tras un proceso de apropiación del artefacto se logra tener un instrumento, el cual es definido como una entidad mixta compuesta por el *artefacto y el conocimiento asociado* (conocimiento sobre el artefacto y sobre la tarea construida al usar el artefacto). La apropiación del artefacto se da mediante la génesis instrumental (Rabardel y Beguin, 2005) que consta de un proceso de instrumentación y un proceso de instrumentalización, los cuales se desarrollan de manera simultánea durante la actividad del sujeto. La génesis instrumental se refiere a un proceso dialéctico entre el artefacto y sujeto, la instrumentación dirigida hacia el sujeto y la instrumentalización dirigida hacia el artefacto, en términos de Trouche (2020) la instrumentación se refiere a la huella que deja el artefacto en la actividad del sujeto, mientras que la instrumentalización se refiere a la huella que deja la actividad del sujeto en el artefacto.

Cuando se tiene un instrumento hay una huella que deja el artefacto en el sujeto y viceversa, la cual desde un punto de *vista cognitivo* puede ser entendida como una reorganización de la estructura cognitiva del sujeto, en otras palabras “el pensamiento de quien usa la herramienta queda afectado radicalmente por la presencia de aquélla” (Moreno-Armella, 2003, p. 268), de modo que la cognición ahora es un hibrido. Esta reorganización no debe confundirse con los esquemas mentales que posee el sujeto para usar el artefacto como una herramienta, ya que los esquemas se refieren a información que sirve para poder usar el artefacto y que no necesariamente modifica el pensamiento.

A nivel del instrumento, el artefacto queda disuelto en la actividad del sujeto y se vuelve inseparable de este, es decir que desaparece en su acción. Por ejemplo, una persona puede empezar a tocar el piano y, poco a poco, apropiarse de esquemas mentales que posteriormente le permiten tocar algunas piezas musicales, hasta aquí el piano (artefacto) sirve al sujeto para tocar ciertas melodías (el propósito), es decir es usado como una herramienta. Sin embargo, el uso del artefacto como herramienta musical posteriormente puede hacer que el pianista pueda hacer otras cosas como: notar cuando un piano está desafinado, producir sus propias tonadas, expresar sus pensamientos musicalmente, entre otros; aquí "el piano 'forma parte' del pianista" (*ídem)* y se ha convertido en un instrumento. La unidad constituida por el pianista y el piano es única e implica que no todos los pianistas van a expresar sus pensamientos musicales de la misma manera, ya que es una relación única.

Sintetizando, un instrumento resulta de la apropiación de un artefacto, lo que implica una modificación del pensamiento por parte del sujeto; y una herramienta se refiere al uso de un artefacto para un propósito especifico. Monaghan et al. (2016) dicen que la herramienta está en un punto entre el artefacto y el instrumento, afirmación con la que coincidimos porque consideramos que el constante uso del artefacto (como herramienta) permite su apropiación y que posteriormente se convierta en instrumento. Sin embargo, consideramos que no es un proceso lineal, en el que después de que el artefacto se convierte en instrumento para el sujeto ya no puede ser *usado* como herramienta, por ejemplo, en el caso del pianista, él puede volver a usar el piano para tocar alguna obra de Beethoven o de otro compositor (sin ninguna modificación) y en esa situación no se verían los efectos reorganizadores causados por el uso del artefacto.

De acuerdo con las ideas expresadas anteriormente, se puede decir que un artefacto está siendo usado como una herramienta cuando:

- El propósito y los esquemas son previos al uso del artefacto (la actividad y el artefacto son separables). Por ejemplo, cuando tenemos el propósito de construir una circunferencia podemos usar un compás, una moneda o cualquier objeto redondo que sirva para tal propósito.

- El sujeto y el artefacto de mediación son separables. Es decir que, un estudiante A puede usar el artefacto igual que un estudiante B porque usan los mismos esquemas.

Ahora bien, en cuanto al artefacto visto como un instrumento, sus efectos son visibles cuando:

- Se usa el artefacto para un propósito que se ha construido a partir de su apropiación (la actividad es inseparable del artefacto de mediación). Por ejemplo, la internalización del sistema de escritura puede llevar a una persona a escribir una novela.
- El sujeto y el artefacto de mediación son inseparables. Es decir que después de usar un mismo artefacto un estudiante A puede desarrollar nuevas estrategias para solucionar problemas, mientras que un estudiante B puede desarrollar una comprensión diferente de los objetos matemáticos, desarrollando propósitos distintos a partir de la apropiación de la herramienta.

Las herramientas y los instrumentos son parte esencial del análisis y se retomarán después cuando se profundice sobre las tecnologías digitales y los artefactos que encontramos en los entornos de geometría dinámica.

3.2. NUEVOS ARTEFACTOS Y LAS TECNOLOGÍAS DIGITALES

La inclusión de tecnologías digitales a la clase de matemática conlleva la presencia de una variedad de artefactos distintos a los que se tenían con el papel, lo que debe provocar una reflexión sobre la influencia de los nuevos artefactos en las ideas matemáticas. De acuerdo con Vygotski (1930) la inclusión de nuevos artefactos provoca una serie de cambios en la acción instrumental, en términos del autor:

> La inclusión del instrumento en el proceso de comportamiento provoca en primer lugar la actividad de toda una serie de funciones nuevas, relacionadas con la utilización del mencionado instrumento y de su manejo. En segundo lugar, suprime haciendo innecesaria toda una serie de procesos naturales, cuya labor pasa a ser desempeñada por el instrumento. En tercer lugar, modifica el curso y las distintas

> características (intensidad, duración, secuencias, etc) de todos los procesos psíquicos que forman parte del acto instrumental, sustituyendo unas funciones por otras. Es decir, recrea y reconstruye por completo toda la estructura del comportamiento, de igual modo que el instrumento técnico recrea totalmente el sistema de las operaciones de trabajo. (p.67)

En primer lugar, hay una adquisición de nuevos esquemas asociados al uso del nuevo artefacto. En segundo lugar, se abre un espacio de acción para el uso del artefacto, haciendo que algunas actividades que no eran instrumentalmente mediadas ahora lo sean o que las que eran mediadas por un artefacto ahora incluyan la presencia de otro. En tercer lugar, hay un impacto en el uso del nuevo artefacto y por tanto la generación de nuevos instrumentos (con todo lo que el acto instrumental conlleva). En otras palabras, hay nuevos esquemas, nuevas herramientas y nuevos instrumentos que deben ser estudiados.

En general estos aspectos son parte de la discusión sobre las tecnologías digitales en educación matemática, sin embargo, la variedad de tecnologías y a la amplitud del espacio de acción que cada una puede tener, hacen que sea un tema bastante extenso. Por ejemplo, con un computador se puede acceder a internet, escribir documentos, hacer tablas dinámicas y cálculos, usar softwares especializados en matemáticas, etc. Esta variedad de actividades ha provocado que desde la educación matemática algunos autores (como los que se presentan en el siguiente apartado) realicen una primera distinción, la cual se refiere a entender a las tecnologías como amplificadores o como reorganizadoras.

3.2.1. Dos caras de una misma moneda: la amplificación y la reorganización

La reorganización y la amplificación son conceptos asociados al uso de tecnologías, propuestos en educación matemática por la presencia de tecnologías digitales como las calculadoras. De acuerdo con Pea (1987) entender las tecnologías digitales como *amplificadoras* se refiere a un enfoque en el que se reconoce que la tecnología permite que el estudiante sea más eficiente, pueda aplicar algoritmos más rápidamente, evite errores algebraicos, entre otros. Por otra parte, desde el enfoque de la *reorganización* se reconoce que la tecnología provoca un cambio en la cognición de los estudiantes y en las actividades que realiza. Para ilustrar estas ideas Moreno-Armella y Santos-Trigo (2015) proponen el ejemplo de una lupa y un microscopio, afirmando que la lupa tiene efectos amplificadores ya que el usuario puede ver de manera amplificada lo mismo que veía sin ella; mientras que el microscopio permite ver lo que no era posible sin este, abriendo la posibilidad para obtener nuevo conocimiento.

Las tecnologías digitales, como los entornos de geometría dinámica, las calculadoras, etc., pueden ser amplificadoras y reorganizadoras a la vez, ya que tienen integrados diferentes funcionalidades que permiten que el usuario sea más eficiente, pero también puede llegar a un conocimiento nuevo; así dependerá de cómo el usuario use el artefacto tecnológico. De acuerdo con Moreno-Armella (2003) un ejemplo de los efectos *amplificadores* de la tecnología se presenta cuando un estudiante se *auxilia* de una calculadora para realizar ciertos cálculos y encontrar la solución a un problema, aquí la calculadora se puede interpretar como un *auxiliar* de su cognición al ayudar con sus capacidades operatorias. Por otra parte, la calculadora puede cambiar la forma en que el estudiante soluciona los problemas o plantea nuevos problemas, de modo que hay una *modificación* en su cognición y un reconocimiento de los efectos *reorganizadores* provocados por la tecnología.

La idea de amplificación y reorganización se relacionan con las ideas de herramienta e instrumento (respectivamente) en la medida que en unas el foco está en el *uso* del artefacto (o tecnología digital[5]) y en las otras el foco está en los *cambios cognitivos* que provocan. Por esta similitud, algunos autores como Moreno-Armella (2003) realizan la distinción entre las herramientas y los artefactos a través de la metáfora de la amplificación y la reorganización.

Ahora bien, sumado a las ideas expresadas anteriormente decimos que un artefacto se puede considerar como una herramienta cuando:

- En su uso se reconocen efectos *amplificadores*, es decir que permite ampliar ciertas capacidades sin modificarlas. Por ejemplo, cuando una calculadora nos permite

---

[5] En un sentido amplio la tecnología incluye una serie artefactos y otros elementos que permiten solucionar problemas o satisfacer una necesidad. En algunos casos se pueden considerar las tecnologías y los artefactos indistintamente (con las calculadoras básicas) y en otros casos hay que distinguir los términos por la variedad de artefactos que pueden coexistir en una determinada tecnología digital (por ejemplo, los DGE).

hacer operaciones de manera más rápida y eficiente, amplificando nuestra capacidad operatoria.

Por otra parte, se puede decir que un artefacto es un instrumento cuando:

- En su uso se reconocen efectos *reorganizadores*, es decir que permite adquirir ideas o conocimientos que no tenía previo al uso del artefacto. Por ejemplo, usar el compás y transformar la idea de circunferencia como algo "redondo" por la idea de que en una circunferencia los puntos equidistan de un punto dado. Otro ejemplo podría ser el usar GeoGebra para proponer problemas distintos a los que se proponen en lápiz y papel.

Cabe aclarar que estas ideas sobre las herramientas e instrumentos son complementarias a las presentadas en el apartado 3.1.2., ya que allí no se excluye la presencia de lo digital, sino que lo abarca de un modo más general. Ahora bien, cuando se integran las tecnologías digitales al aula de clase aparecen una serie de artefacto de este mismo tipo, sobre los cuales profundizaremos en los siguientes apartados.

3.2.2. Los artefactos digitales en un DGE y Co-acción: la importancia del medio

Como mencionamos anteriormente la relación entre el artefacto y el sujeto es variada, ya que puede llevar a que se use el artefacto como una herramienta o se incorpore a su cognición y se convierta en un instrumento. Bajo estas nociones Hegedus & Moreno-Armella (2010) proponen la idea de co-acción como una noción que resalta la importancia del *medio* en el que está siendo usado el artefacto, ya que puede presentarse una relación dialéctica entre **el medio, el usuario y el artefacto**.

El medio o entorno es un aspecto importante en el estudio de la acción mediada, ya que su presencia conlleva cambios en las situaciones a las que se podría enfrentar el estudiante y la forma de abordarlas. Por ejemplo, cuando se empezó a llevar la tecnología digital al aula de matemáticas empezaron a aparecer representaciones gráficas "extrañas" e interpretaciones que llevaron a concepciones erróneas sobre algunas ideas, esto a causa del efecto de los pixeles y a la búsqueda de una traducción del trabajo en el papel al ambiente digital (Trouche y Drijvers, 2010).

El medio puede restringir o ampliar la interacción que puede tener el usuario y el artefacto, pero también puede modificarla. Hegedus & Moreno-Armella (2010) mencionan que algunos medios como entornos de geometría dinámica ofrecen una “retroalimentación” a las acciones estudiante, de modo que cuando arrastra uno de los puntos de la figura, obtiene una re-construcción que ha sido desarrollada por el medio y no por el usuario, es decir que el estudiante obtiene una *respuesta* por parte del *medio* a sus *acciones*. Los autores mencionan que este tipo de medios digitales permiten que las representaciones sean dinámicas gracias a que integran características como:

- *Navegación*: Permite desplazarse por la pantalla, mover figuras, acercar y alejar las representaciones.
- *Anotación:* Permite asignar marcas, nombres, letras o números a partes de las figuras.
- *Simulación:* Permite modelar datos o animar representaciones y observar una simulación de estos.
- *Interacción:* Permite arrastrar o manipular las representaciones.
- *Construcción:* Permite construir figuras o diagramas matemáticos que conservan propiedades.
- *Manipulación:* Asociado a la característica anterior, permite interactuar con la representación manteniendo las propiedades matemáticas establecidas en la construcción.

Las características del medio digital permiten crear representaciones *estructurales*, es decir una representación con una infraestructura[6] que sigue las reglas matemáticas. El usuario puede hacer visible la estructuralidad de la representación cuando al ser arrastrada y modificada no pierde las propiedades con las que fue construida. Por ejemplo, un estudiante puede construir un triángulo isósceles usando dos radios de una circunferencia y una cuerda (ver Imagen 11) y sin importar como arrastre los puntos de la construcción el triángulo siempre tendrá dos lados congruentes, ya que así fue construido. Además, si se miden los ángulos en los vértices B y C estos también serán congruentes y permanecerán así ante el arrastre, ya que esta es una propiedad matemática de los triángulos isósceles. Aquí el

[6] Los autores definen la infraestructura como un conjunto de reglas y modos de acción/reacción que redefinen continuamente la relación entre el entorno y el usuario.

movimiento y *la invariancia* son dos aspectos fundamentales que nos permiten ver la estructura de las representaciones (Hegedus et. al, 2017).

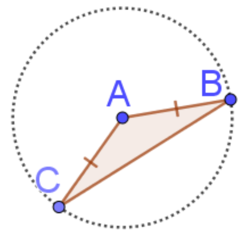


Imagen 11. Construcción estructural de un triángulo isósceles usando una circunferencia

Bajo la idea de la co-acción, Hegedus & Moreno-Armella (2010) proponen que tanto el usuario como el medio actúan y reaccionan entre sí, de modo que las acciones del usuario coexisten con las acciones del medio, es decir que las acciones son conjuntas. Estas son posibles por la existencia de al menos un punto clave (Hot-spots), definido como un punto que ofrece una "mano invisible" que permite acceder a la *estructura* de la representación mediante las *acciones del usuario*. Por ejemplo, un estudiante puede construir un segmento y su punto medio usando algunos comandos de GeoGebra (ver Imagen 12a) aquí las *acciones del usuario* se refieren al uso de los comandos y las *acciones del medio* (respuesta) se refieren a la ubicación del punto E como punto medio del segmento CD. Ahora bien, cuando el usuario arrastra alguno de los extremos del segmento (los Hot-spots), no necesita volver a construir el punto medio, porque de manera inmediata el *medio* responde a las acciones continuas del usuario y mantiene la equidistancia del punto E a los puntos C y D (ver Imagen 12b). Es decir que la representación muestra que el punto E es punto medio, no solo como consecuencia de las acciones del usuario, sino también incluye las acciones del medio que co-existen de manera simultánea con las acciones del usuario.

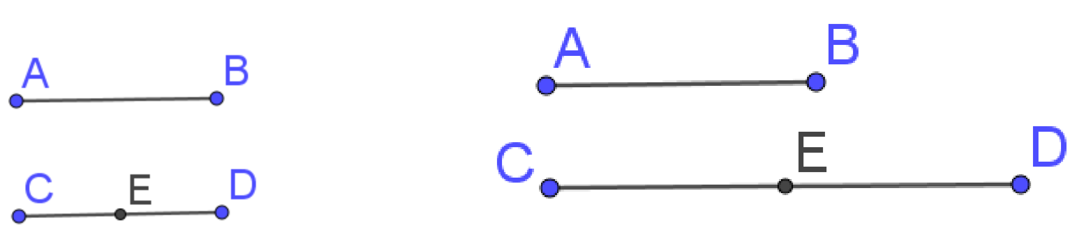


Imagen 12. Construcción estructural de un punto medio

De acuerdo con Hegedus et. al, (2017) es importante que el movimiento sea inducido por el alumno, quien puede aprovechar la ejecutabilidad[7] de la representación digital para revelar la estructura y el significado, lo que convierte a *la representación en un mediador semiótico; e*s decir, que la co-acción sobre la representación (como artefacto) puede generar significado para el estudiante y convertirse en un *instrumento* de mediación en la adquisición de conocimientos.

En general, en este apartado destacamos la relación dialéctica entre el artefacto, el medio y el sujeto, y mencionamos a la co-acción como uno de los elementos teóricos que considera en esta relación. El paso siguiente sería referirnos a esta relación en términos de herramientas e instrumentos, pero, como mencionamos, dependerá de la actividad que se esté mediando y tendríamos que entrar en el terreno de la prueba y/o argumentación, tema que abordaremos en el siguiente capítulo.

[7] Este término es usado para referirnos a la continua capacidad de respuesta del medio, de modo que cuando el estudiante arrastra, las acciones del medio sobre la representación son inmediatas.

CAPÍTULO 4

SOBRE LA VALIDEZ, LAS PRUEBAS Y LOS ARGUMENTOS

A lo largo de este trabajo hemos mencionado nuestro interés en la mediación de artefactos digitales en los procesos de prueba y/o argumentación geométrica. En el capítulo anterior presentamos elementos teóricos asociados a la mediación de artefactos digitales en el aprendizaje de las matemáticas y en este capítulo presentaremos aquellos elementos asociados a la idea de prueba y argumentación.

Empezamos hablando del valor epistémico y el valor lógico de las afirmaciones, los cuales nos permiten diferenciar la validez de la afirmación y la validez asociada a los razonamientos. Después presentamos un punto de vista amplio sobre las pruebas y los argumentos que permiten dar una definición y distinción sobre estos términos. Por último, incluimos algunos aspectos teóricos relacionados al uso de artefactos en el desarrollo de pruebas geométricas.

4.1. LA VALIDACIÓN DE AFIRMACIONES

Cuando se habla de argumentación y prueba usualmente se busca determinar la verdad o falsedad de lo que se afirma, establecer si la afirmación es *válida* o no a partir de razonamientos. Pero, la validez no solo se asocia a la afirmación que se realiza, también se refiere a los razonamientos, que son cambiantes y dependen de la comunidad en la que se produce la afirmación (estas ideas se profundizan en el capítulo 1). En otras palabras, para aceptar una afirmación hay que *validarla* con *razonamientos válidos* en una comunidad especifica.

En matemáticas, los razonamientos validos suelen ser lógicos, que usan hechos y teoremas previamente demostrados. Pero también existen razonamientos que no son de este tipo y permiten establecer la validez del hecho. Un ejemplo de esto es el caso de Arquímedes, quien en El Método presenta los razonamientos que le permiten establecer la validez de sus afirmaciones, sin embargo, estos razonamientos no son válidos para establecer la verdad en la comunidad matemática y por lo tanto ve la necesidad de presentar sus resultados al estilo de Euclides (que era el referente para las pruebas en su época).

Ejemplos como el de Arquímedes han llevado a discutir sobre cuáles razonamientos deben valorarse desde un punto de vista educativo, esto desde la tensión existente entre la naturaleza teórica y empírica de las matemáticas (ver apartado 2.1). En general algunos autores, como Torres Alcaraz (2004), mencionan que esta discusión es innecesaria ya que ambos aspectos son importantes y están presentes en la actividad del estudiante. Nosotros estamos de acuerdo con esta postura, ya que consideramos necesario valorar los razonamientos que permiten determinar que un hecho es cierto y los que permiten vincularlos con elementos de una teoría para presentarlos a una comunidad y que esta los acepte.

En consecuencia, con lo expresado anteriormente es necesario distinguir la validez asociada a la afirmación y la validez de los razonamientos que permiten validar la afirmación. Dos conceptos pertinentes para ello son los de valor epistémico y valor lógico, que se presentan en el siguiente apartado.

4.1.1. Valor epistémico y valor lógico

Como mencionamos anteriormente existen razonamientos que permiten establecer que una afirmación es cierta (como los presentados por Arquímedes en el *Método*) y existen otros que se presentan con un cierto grado de formalidad y que permiten relacionar un hecho con otros; en ambas situaciones la misma afirmación adquiere un valor distinto[8]. De acuerdo

---

[8] En nuestros términos diríamos que se refiere a una validez distinta, sin embargo, a partir de este momento usaremos el término de “valor” que es el usado en la teoría.

con Duval (1999) los valores asociados a la comprensión de una afirmación[9] (no necesariamente teórica ni matemática) son el *valor epistémico* y el *valor lógico*. El primero se refiere a la certeza, posibilidad o imposibilidad de la **afirmación**; y el segundo, al valor de falsedad o de verdad establecido a partir de unos **razonamientos** presentados. En términos del autor el valor epistémico es:

> El **valor epistémico** es el grado de fiabilidad que posee lo que se enuncia en la proposición. En el instante mismo de su aprehensión el contenido de una proposición puede parecer evidente, cierto o solo verosímil, plausible o simplemente posible, imposible, o incluso absurdo… Así cuando un enunciado se "comprende", lo es como el enunciado de un hecho establecido, o como una simple hipótesis, una representación puramente imaginaria, una creencia, una trivialidad, una regla, una convención, una incoherencia, una inverosimilitud, etc. Eso depende del estado de los conocimientos de que dispone quien lo aprende. Naturalmente una misma proposición no necesariamente tiene el mismo valor epistémico para 2 personas distintas. Así una misma proposición puede tener valores epistémicos diferente según los interlocutores. (p.182)

Es pertinente aclarar que el autor propone la definición en un contexto no matemático, donde dos personas pueden conversar y una afirmación puede ser evidente para uno de los interlocutores, mientras que para otro puede ser absurda, ya que el valor epistémico (a nivel general) se refiere al valor que se da a una afirmación. Este valor se hace evidente ante la *presencia de un conflicto* o la *necesidad de una escogencia de un valor* y se hace a través de actitudes proposicionales como: "yo creo que…", "se admite que…", "estoy seguro de que…", "es evidente que…", "es imposible que…", etc.

Por otra parte, el valor lógico o valor de verdad se refiere de manera explícita a procedimientos o acciones específicas que permiten determinar si el hecho es verdadero o falso en la comunidad, ya que en términos de Duval (1999) el **valor lógico**:

---

[9] Duval (1999) se refiere al "sentido" de una "proposición", sin embargo, por coherencia con las partes anteriores de este documento nosotros nos vamos a referir a "comprensión" de una "afirmación"

> Alude al hecho de que la proposición sea verdadera o falsa. A diferencia de valor epistémico, el valor lógico de una proposición no depende solo de la comprensión de su contenido, sino que resulta de *procedimientos específicos de verificación o de prueba* clásicamente se han considerados dos grandes clases de procedimientos. Uno *relativo a la percepción*: más allá del registro de la lengua, hay un acceso a lo representado dado por el contenido de las proposiciones. Este acceso puede ser inmediato o instrumental, directo o sometido a procedimientos experimentales. El otro, *relativo al razonamiento*: la proposición puede estar situado deductivamente en una serie de otras proposiciones, donde las proposiciones anteriores tienen un valor de verdad. (p. 183)

Es decir que el valor lógico de verdad se refiere a los procedimientos o acciones que dan cuenta de los razonamientos que permiten determinar que una proposición es falsa o verdadera ante una comunidad. Estos procedimientos pueden ser de dos tipos:

- *Procedimientos o acciones relativos a la precepción:* Consisten en *mostrar* que lo que se afirma es verdadero o falso. Por ejemplo, establecer la validez de una afirmación sobre la gravedad mostrando como actúa sobre los objetos. Aquí va a depender de la naturaleza de los objetos sobre los que se realizan las afirmaciones (ver apartado 1.2)
- *Procedimiento o acciones relativos al razonamiento:* Consisten en usar métodos deductivos y otras proposiciones (que tienen un valor previamente establecido), para determinar que la afirmación es verdadera o falsa.

Al igual que el valor epistémico, este valor lógico se hace explícito cuando en el razonamiento se hace uso de *expresiones de actitud proposicional* como: "es cierto que…", "es falso que…", "… es verdad", "sabemos que …" "aún no se ha demostrado que…" etc.

El valor epistémico se asocia al contenido de la proposición (o afirmación); mientras que el valor lógico se refiere a los métodos o procedimientos específicos que permiten determinar el valor de verdad o falsedad de la proposición en una comunidad.

4.1.2. Acciones y procedimientos que otorgan un cierto valor a una afirmación

Según lo expuesto, el valor epistémico y el valor lógico se refieren a una afirmación o proposición ya enunciada, particularmente se refieren a la comprensión o validez de su contenido por parte de los interlocutores. Al principio pareciera que las acciones y procedimientos de validación de una afirmación solo corresponden a otorgar un valor lógico, pero también existen acciones y procedimientos previos a la enunciación de la afirmación que son un precedente para dar un valor epistémico y que pueden servir para presentar el valor lógico, por ejemplo, el caso de Arquímedes.

En la carta de Arquímedes a Eratóstenes (ver Arquímedes, 1978) describe el desarrollo de ciertos procedimientos geométricos y mecánicos que le permitieron encontrar relaciones matemáticas (entre áreas, volúmenes y centros de gravedad); y así después proponer una demostración acorde con los lineamientos establecidos. En términos de Arquímedes:

> "…he creído conveniente exponerte por escrito e ilustrarte en este libro la particularidad de un método, según el cual te será posible captar ciertas cuestiones matemáticas por medios mecánicos, lo cual, estoy convencido, de que será útil también para demostrar los mismos teoremas. Yo mismo, algunas de las cosas que descubrí primero por vía mecánica, las demostré luego geométricamente, ya que la investigación hecha por este método no implica verdadera demostración. Pero es más fácil, una vez adquirido por este método un cierto conocimiento de los problemas, dar luego la demostración, que buscarla sin ningún conocimiento previo." (p.34)

En esta cita, Arquímedes afirma haber *captado* ciertas ideas matemáticas gracias a su método, lo que facilita proponer demostraciones después. El proceso de descubrir nuevos resultados matemáticos lo llevó a tener un *valor epistémico* sobre dichas ideas y luego darle un *valor lógico* mediante una demostración. Una pregunta que puede surgir en este punto del discurso es: ¿Arquímedes hubiera podido presentar *El Método*, para que además de otorgar valor epistémico, otorgara un valor lógico a las proposiciones enunciadas? La respuesta a esta pregunta depende de la perspectiva que se esté adoptando, ya que desde la definición amplia de valor lógico (citada anteriormente) se deben presentar procedimientos específicos de verificación y prueba, los cuales aparecen en "El método". Sin embargo, desde una perspectiva matemática (como ciencia) el valor lógico está determinado por la consistencia lógica que tiene un resultado en relación con otros resultados que han sido demostrado con anterioridad (Umland y Sriraman, 2020). Es decir que los razonamientos descritos en “El método” pueden servir para otorgar valor lógico cuando se trabaja desde una perspectiva general, pero no sirven para tal fin cuando se habla desde una perspectiva matemática.

Hasta este punto, nosotros adoptamos una postura general en donde las acciones y procedimientos que se usan para otorgarle un estatus de conocimiento a una afirmación (otorgarle valor epistémico) se pueden presentar para otorgarle un estatus de verdad o falsedad (otorgarle un valor lógico). Para diferenciar las acciones y procedimientos tendremos en cuenta las siguientes ideas:

1. Si las acciones o procedimientos son previos a la enunciación de la proposición, podrían estar vinculadas a otorgar un valor epistémico.
2. Si las acciones o procedimientos permiten que los estudiantes se convenzan a sí mismos entonces podrían estar vinculadas al valor epistémico.
3. Es necesario analizar las *expresiones de actitud proposicional* (mencionadas en el apartado anterior) vinculadas a las acciones y procedimientos de los estudiantes para determinar si buscan establecer valor lógico o valor epistémico.

Es pertinente aclarar que algunos autores como Duval (1999) adoptan una visión particular del valor epistémico y lógico cuando las proposiciones son enunciadas en un *contexto teórico*, lo que permite distinguir entre los argumentos y las demostraciones o pruebas (tema que será abordado en los siguientes apartados).

4.1.3. Valor epistémico en contextos teóricos

El valor epistémico se refiere al valor que adquiere una afirmación después de ser enunciada o escuchada, sin embargo, la aceptación o negación debe estar asociada a la comprensión de lo que se está afirmando. A veces una afirmación puede aceptarse porque la enuncia alguien de confianza, pero en este caso no hablaríamos del valor epistémico. En términos de Duval (1999):

> “hay proposiciones de las que se “acepta” la verdad, sin que por eso tengan algún valor epistémico para quien lo acepta. Pero si se examina esta situación, se observa que se trata siempre de proposiciones cuyo contenido no se comprende sea por el vocabulario empleado o bien porque hace falta conocimientos previos. […] En estas

> condiciones, la aceptación de la verdad de una proposición se basa sólo en la confianza que se tiene en la competencia y la fiabilidad de quien la enuncia." (p.91)

El valor epistémico está vinculado a la comprensión de la afirmación. Según el autor, cuando esta afirmación está dentro de una teoría (por ejemplo, cuando se realiza una afirmación que es una propiedad dentro de la geometría euclidiana) adquiere un *estatus teórico* y *operatorio*.

El estatus teórico se refiere a un estatus que adquiere todas las afirmaciones asociadas a una teoría, que servirán para producir razonamientos que dan cuenta del valor lógico de otras afirmaciones. Este estatus puede ser de definición, axioma, teorema, conjetura, hipótesis, etc. Ahora bien, el *estatus operatorio* es un estatus que adquieren las afirmaciones dentro de un razonamiento el cual puede ser de: premisa, tercer enunciado o conclusión.

- La premisa, se refiere a los datos de los que se parte para producir el razonamiento
- La conclusión, es lo que se obtiene del razonamiento
- El tercer enunciado, es el conocimiento que permite el paso de las premisas a la conclusión.

Este razonamiento puede ser ejemplificado cuando se tiene un triángulo con dos lados congruentes (premisa) y se afirma que el triángulo es isósceles (conclusión) usando la *definición*, la cual adquiere en este caso un estatus operatorio de tercer enunciado (ver Imagen 13)

En el triángulo ABC AB y AC son congruentes

Definición de triángulo isósceles

↓

En el triángulo ABC es isósceles

Imagen 13. Adaptación de diagrama propuesto por Duval.

En general, estas ideas mencionan el estatus que puede tomar una afirmación dentro de un razonamiento, o sea, cómo se usarán para establecer el valor lógico de otras afirmaciones relacionadas en un contexto teórico. Según los propósitos de este estudio, nosotros no situaremos explícitamente las ideas matemáticas en un contexto teórico, por la poca apertura que pueden tener para el uso de artefactos digitales. Sin embargo, estas ideas serán relevantes para analizar las formas en las que los estudiantes determinan el valor lógico en sus afirmaciones. Estos temas se profundizarán en los próximos capítulos.

4.1.4. Argumentos, pruebas y otros términos usados en educación matemática

La poca claridad sobre lo que caracteriza un argumento en educación matemática ha provocado que se empiecen a usar algunos términos como demostración, prueba, argumentación, justificación, argumento formal, argumento informal, etc. Algunos autores los usan para referirse a cosas similares y otros para referirse a cosas totalmente distintas. Según Hanna (2020) en el sentido más amplio la *argumentación* incluye cualquier técnica que tenga como objetivo persuadir a otros de que un razonamiento es correcto. Además, afirma que particularmente la *prueba matemática* (o prueba) es una derivación lógica de una afirmación, dada a partir de axiomas y una cadena explícita de inferencias que obedecen a reglas de deducción aceptadas; de modo que el concepto amplio de argumentación abarca la prueba matemática como un caso particular. Sin embargo, de acuerdo con la autora, en los últimos años los educadores matemáticos han usado el termino de argumentación para referirse a algo que no es una prueba, lo que ha provocado que surjan los siguientes puntos de vista respecto a la relación entre dichos términos:

1. La argumentación es un paso en el aprendizaje de la prueba ya que ayuda a su comprensión.
2. Conjeturar y argumentar puede ser un obstáculo en la comprensión de pruebas.

Esta distinción surge desde una postura en donde la prueba tiene un carácter teórico y lógico que no es otorgado a los argumentos. Desde nuestra perspectiva consideramos necesario distinguir los procesos que pretenden que los estudiantes organicen el conocimiento a partir de axiomas y reglas de deducción aceptada de aquellos que buscan la comprensión y justificación de afirmaciones. Esto debido a que los estudiantes pueden creer innecesaria la organización axiomática del conocimiento después de haber comprendido y justificado por qué un hecho es cierto.

Esta distinción no solo se presenta en la definición de términos como prueba y argumentación, sino en los propósitos de incluir estas ideas en el aula de clase. Particularmente algunas investigaciones y documentos dirigidos a profesores (NCTM, 2000; Steele y Rogers, 2012) resaltan propósitos que nosotros sintetizamos de la siguiente manera:

- Establecer certeza: Usar alguna técnica para comprobar o confirmar que una afirmación es verdadera.
- Comunicar ideas: Ayudar a otros a comprender una idea matemática.
- Organizar el conocimiento: Crear una organización local que permita relacionar un resultado con axiomas y resultados anteriores.
- Ganar comprensión: Comprender un resultado, por ejemplo: al saber por qué es cierto, al relacionarlo con resultados anteriores, entre otros.
- Crear conocimiento: Se refiere a producir conocimiento nuevo dentro de su comunidad (el salón), a partir de producir conjeturas y confirmarlas.
- Explicar por qué: se refiere a dar razones de por qué una afirmación es verdadera.

Estos propósitos al igual que la definición de los términos **no son excluyentes**, pero sí determinan diferentes puntos de partida dentro de la investigación de la prueba y/o argumentación en educación. Por ejemplo, desde un enfoque formalista donde se considera esencial la organización del conocimiento a partir de axiomas y teoremas que justifiquen afirmaciones, hay que definir la prueba bajo estos términos y diferenciarlo de razonamientos que no usen reglas de deducción y elementos de una organización local.

Particularmente, nosotros al igual que Duval (1999) reconocemos como dos razonamientos diferentes:

1. aquellos que buscan justificar la certeza de un hecho, y
2. aquellos que buscan una organización lógica y teórica del conocimiento.

Esta distinción no implica que cuando se justifica sobre la certeza de un hecho no se usen elementos teóricos, sino que la organización lógica no es el propósito primordial para incluir la prueba en una determinada comunidad (como el aula de clase). En otras palabras, se valora y se promueve la comprensión de los hechos por sobre la estructura lógica y teórica que los vincula con otros hechos demostrados.

Nosotros nos vamos a situar desde el punto de vista en que organizar el conocimiento a partir de axiomas y teoremas no es esencial, debido a que este punto de vista está inclinado hacia el formalismo y en consecuencia el papel de los artefactos digitales en el desarrollo de pruebas no se puede analizar desde un punto de vista amplio. Es decir, limitaríamos la prueba (como producto) al medio del papel (ver sección 2.2.2). En los siguientes apartados definiremos algunos términos asociados a este punto de partida y que serán útiles para el análisis.

4.1.5. Valor lógico: Los argumentos y las pruebas

Como mencionamos en apartados anteriores (ver sección 4.1.2) consideraremos los razonamientos que permiten llegar a una afirmación y darle un cierto valor epistémico, junto con aquellos posteriores a la su enunciación y que permiten validar la afirmación dentro de una comunidad. Estos últimos son los que permiten establecer el valor lógico y los que vamos a diferenciar como pruebas o argumentos (según sea el caso).

Como nuestra visión sobre la prueba no ese centra en la organización del conocimiento, partimos de una perspectiva educativa en la que la *prueba* se define como un *argumento* que aumenta el grado de coherencia de un fragmento de conocimiento previo que posea un estudiante (Moreno-Armella, 2018). Esta definición es similar a la definición de argumento presentada por Duval (1999), quien la define como un razonamiento así:

> La argumentación tiene como propósito modificar la naturaleza o el grado de convicción que un interlocutor tiene sobre una proposición, de manera que la acepte o la rechace. Dicho de otra manera, la argumentación tiene el propósito de hacer cambiar el valor epistémico semántico que un enunciado-objeto puede tener para el interlocutor al que se dirige: hacer aceptar como plausible lo que él estime imposible, hacer reconocer como poco plausible lo que él considera evidente, absurdo lo consideraba verosímil o incluso cierto…El logro esta modificación depende de dos factores: el "peso" de los argumentos desarrollados y la distancia entre el valor epistémico inicial y el valor epistémico que se quiere hacer reconocer. (p. 192)

Cabe aclarar que, desde el punto de vista de Duval, estos razonamientos que pretenden convencer se les llama argumentos y aquellos que articulan proposiciones enunciadas en un contexto teórico se les llama pruebas. Sobre esto, rescatamos la importancia de distinguir razonamientos que usan elementos teóricos de los que no, sin embargo, como mencionamos, según los propósitos del estudio, nosotros no buscamos establecer un contexto teórico y formal dentro de esta investigación. por lo tanto, adaptamos esta postura y diferenciamos los dos términos de la siguiente manera: vamos a entender a las *pruebas* como razonamientos que articulan proposiciones previamente enunciadas y con un cierto valor epistémico; mientras que los *argumentos* podrán hacer uso de otros elementos, como los visuales, para convencer de que la afirmación es verdadera. En ambos casos el objetivo es cambiar el valor epistémico de una proposición y en consecuencia el valor lógico[10], ahora bien, para identificar este tipo de razonamientos usaremos algunas de las ideas presentadas por Duval (1999) quién en su libro distingue los razonamientos de otras formas lingüísticas, estas ideas fueron sintetizadas de la siguiente manera:

- Se hace uso de conectivos comunes que dan “razón”, algunos de los más comunes son: porque…, debido a…, ya que…, etc.
- El propósito es modificar el valor epistémico de uno de los interlocutores y no solamente aportar nueva información sobre el enunciado o el objeto al que se refiere (como en el caso de la descripción).
- Siempre está ligado al uso del lenguaje.
- Desarrolla relaciones de dependencia y no solo describe relaciones de causalidad entre los fenómenos.

Como hemos establecido las diferencias en lo que se considerará como prueba o argumento ampliaremos estas ideas incluyendo la presencia de artefactos.

[10] Duval (1999) afirma que la modificación del valor epistémico semántico o teórico tiene como consecuencia la modificación del valor de verdad (lógico) **cuando se cumplen ciertas condiciones de organización discursiva**. Sin embargo, como nuestro interés no está en la **forma** de la organización discursiva entonces diremos que la modificación del valor epistémico implica la modificación del valor de verdad.

4.2. La validación de afirmaciones geométricas y artefactos

Como mencionamos en capítulos anteriores la relación entre los artefactos y la validez matemática no es nueva, ya que su presencia modifica lo que se valida y como se valida (ver sección 1.1). Los artefactos predilectos para desarrollar pruebas teóricas y formales son los teoremas, pero, en geometría, las figuras o representaciones son un tema en discusión. De acuerdo con Duval (1999) en el caso de la geometría las pruebas[11] se basan en una lectura razonada del dibujo, en donde interactúa el *registro discursivo* y el *registro de las figuras*, dejando paso a la "evidencia" como un recurso presente, es decir que las figuras junto con el discurso son los artefactos predilectos para probar en geometría.

La geometría es uno de los campos de la matemática en donde la representación gráfica ha desempeñado un papel esencial en el desarrollo de métodos y pruebas, un ejemplo de esto son las pruebas de Euclides en donde las figuras son consideradas como parte de la prueba (Netz, 1998). Por esto, la geometría es una de las áreas más influenciadas por la inclusión de representaciones dinámicas en el aula de clase y el número de investigaciones sobre estos temas aumentó con su presencia (De la Torre, 2013).

Las representaciones matemáticas evolucionaron desde inscripciones estáticas e inertes, a representaciones interactivas, construibles y manipulables (Moreno-Armella et al., 2008). Estas representaciones dinámicas ofrecen al estudiante la posibilidad de interactuar con estructuras matemáticas, de modo que afecta al ciclo de exploración, conjeturación, explicación y justificación (Hegedus et al., 2017), por ejemplo si un estudiante tiene una representación dinámica de un triángulo isósceles que es estructural, este triángulo tendrá propiedades como: dos de sus lados y ángulos congruentes, dos bisectrices congruentes, una mediatriz que coincide con una bisectriz, etc., con las que el estudiante podrá interactuar de forma distinta a como lo hacía en el papel.

En la geometría, el estudiante usa el discurso para mostrar la generalidad de una propiedad ilustrada con una figura estática; pero ahora que las representaciones son dinámicas, hay una modificación en la forma en que el discurso y la representación se relacionan. Uno de

[11] Nos referimos a las pruebas al estilo de Euclides, sin embargo, el autor también hace la distinción con las pruebas sin dibujo, las cuales no son de nuestro interés debido a los propósitos del estudio.

los cambios más reportado es que al interactuar con representaciones dinámicas los estudiantes no ven la necesidad de presentar un discurso que muestre la generalidad de la propiedad, debido al alto nivel de certeza que adquieren al trabajar con estas representaciones (De villiers, 2004). Pero, como hemos mencionado, hay otros cambios que deben estudiarse y analizarse.

Es necesario analizar el papel de las representaciones dinámicas como artefactos que pueden hacer parte del proceso de prueba, por lo que en el siguiente apartado nos enfocaremos en este tipo de representaciones.

4.2.1. Representaciones dinámicas como artefactos

En un sentido amplio las representaciones se definen como una manera de denotar o evocar objetos (Duval, 1999). Cuando un grupo de representaciones tienen en común algún aspecto que deja ver una característica del objeto representado se dice que todas las representaciones hacen parte de un mismo registro de representación (Duval, 2017). Dentro de los distintos registros de representación se distingue el registro gráfico, el algebraico, entre otros.

Una representación no necesariamente es una herramienta o un instrumento matemático, pero de acuerdo con Monaghan et al. (2016) se puede considerar como tal cuando es usada para hacer algo (generalmente matemático), sin embargo, se debe tener cuidado porque también tiene otras funciones en la que no se ve como herramienta, como *señalar* un objeto. Por ejemplo, la representación de una recta como $y = mx + b$ *señala* un conjunto de rectas, pero también puede servir como una *herramienta* para identificar rectas paralelas o para identificar la pendiente de una recta (al llevarla a esta forma).

En general, hay muchas representaciones, pero por los intereses de este trabajo nos enfocaremos en las que incluyen a las *figuras* y los *dibujos*, pues son esenciales en el estudio de los objetos geométricos (Duval, 1999). Cuando hablemos de *representación* (en este trabajo) nos referiremos exclusivamente a las representaciones gráficas y de manera específica hablaremos de *representaciones estructurales* cuando la representación conserve las propiedades asociadas al objeto geométrico. Por ejemplo, *la representación estructural* de un triángulo equilátero es aquella que mantiene sus tres lados congruentes cuando sus vértices se arrastran en un entorno como GeoGebra (lo análogo en el papel sería construir un triángulo equilátero con regla y compás).

Como mencionamos anteriormente, el *medio* es un elemento importante en la relación usuario-artefacto (ver sección 3.2.2), por lo que hay que distinguir las representaciones que se encuentran en un medio digital/dinámico de las de papel/estáticas. Entendemos como *representación digita*l la que está incrustada en un medio digital, pero como las posibilidades de interacción dependen de las limitaciones del medio en el que se encuentra incrustada, reconocemos que es posible tener una representación de un triángulo en un medio digital y tener la misma interacción que con un triángulo dibujado en el papel (por ejemplo, si dibujamos en un programa como Paint). En ese sentido, definimos a las *representaciones dinámicas* como un tipo especial de representaciones digitales en las que el medio posee características que permiten interacción con la representación, tales como: navegación, interacción, anotación, construcción, simulación y manipulación (Hegedus & Moreno-Armella, 2010). Por ejemplo, medios como GeoGebra, Cabri y Sketchpad son medios dinámicos[12] permiten construir e *interactuar* con representaciones que obedecen a leyes geométricas, es decir que son estructurales.

Las representaciones dinámicas se considerarán instrumentos o herramientas en el proceso de prueba cuando el estudiante interactúe con estas y use el dinamismo para establecer el valor lógico o epistémico de una afirmación. Ahora bien, si el dinamismo y el medio no influyen directamente en establecer cualquier valor, se podrá comparar con el trabajo en el papel y con las pruebas al estilo de Euclides. Aunque la representación esté en un medio digital se analizará como una representación estática, ya que no se utilizan las virtudes del medio para establecer valor lógico o epistémico.

Dentro de las posibilidades en el uso de la representación dinámica como artefactos no tenemos información precisa, sin embargo, vamos a retomar una idea presentada por Hegedus et. al, (2017), quienes afirman que la posibilidad de respuesta y de co-acción que ofrece el medio digital permite que el estudiante pueda obtener nuevos conocimientos al interactuar con representaciones dinámicas, es decir permite que la representación dinámica

[12] Aunque reconocemos las diferencias entre medio digital y medio dinámico (o representación digital y representación dinámica) los usaremos indistintamente, ya que hemos aclarado que nuestro interés está en aquellos que permiten una interacción con la representación.

se convierta en un *instrumento* para el estudiante. A continuación, retomamos las ideas relacionadas con los artefactos con las pruebas matemáticas, ya que pueden servir dentro del análisis considerando ambos tipos de artefactos (los digitales y los no digitales).

4.2.2. Artefactos y pruebas

Los artefactos hacen parte de la historia de la humanidad y han sido de utilidad para desarrollar diferentes actividades. Particularmente desde el punto de vista de la argumentación y la prueba, Richard et al. (2019) mencionan que la influencia de los artefactos en las pruebas matemáticas se remonta a la época de Arquímedes y continua vigente con los nuevos artefactos digitales, por lo que proponen tres distinciones sobre la prueba cuando se trabaja con la mediación de un artefacto (lápiz y papel, tabletas, calculadoras, etc.), estos son:

- Pruebas discursivo-gráficas: En este tipo de pruebas hay una estrecha relación entre lo que "se ve" y el discurso, el cual está vinculado a un sistema de referencia. Aquí la representación gráfica se puede ver como un instrumento que permite que el estudiante realice conexiones en su razonamiento. Para comprender la articulación de dichas conexiones es necesario que el autor presente una redacción de su razonamiento, use colores, texturas, flechas, o cualquier otro símbolo que le permita al lector centrarse en los elementos significativos de la prueba. Un ejemplo de estas son las pruebas al estilo de Euclides y en un medio digital podría ser cuando el estudiante *muestra* la ortogonalidad entre el radio de una circunferencia y la recta tangente usando los nodos de la cuadrícula (ver Imagen 14).

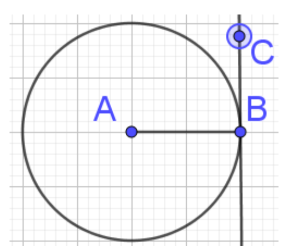


Imagen 14.Prueba graficas de la ortogonalidad del radio y la tangente a la circunferencia

- Pruebas mecánicas: En esta prueba se destaca principalmente el uso del artefacto a partir de las *acciones del sujeto*, de modo que lo importante no es el método o el modelo que brinda el artefacto, sino la forma en que se usa y la explicación de sus razonamientos. Un ejemplo podrían ser el método descrito por Arquímedes en su carta a Eratóstenes, ahora bien, en un ambiente computacional se pueden presentar este tipo de pruebas cuando el estudiante mueve el punto C (ver Imagen 14) oscilando entre configuraciones satisfactorias (rectas que son tangentes) e insatisfactorias (rectas que no son tangentes), de modo que las propiedades invariantes son las que le permiten *inducir* la propiedad.

- Pruebas algorítmicas: En este caso, el artefacto digital controla la validez, aquí no es validar el algoritmo sino relacionar ideas matemáticas gracias a la prueba del programa. La relación es lógica y no se asocia a ideas gráficas. Un ejemplo de estas pruebas se presenta al usar probadores de teoremas automatizados.

En estos tipos de pruebas se reconoce que el rol que desempeña el artefacto es diferente en cada caso. Por ejemplo, en las pruebas algorítmicas el artefacto es digital y controla la validez lógica de la prueba, así que su presencia y su infraestructura lógica son algunos elementos determinantes en este tipo de prueba. En las pruebas mecánicas, la presencia del artefacto (no necesariamente digital) y su uso son los aspectos más importantes porque el razonamiento del sujeto está estrechamente relacionado a su interacción con el artefacto. Por último, los aspectos relevantes en las pruebas discursivo- gráficas se refieren a “lo que se ve” y el sistema de referencia asociado, de modo que la presencia del artefacto digital se enfoca en apoyar aspectos asociados a la visualización que permiten desarrollar una prueba que podría presentarse dentro o fuera del medio digital (pruebas traducibles).

En general, Richard et al. (2019) resaltan que el medio es un factor para tener en cuenta en la relación entre el artefacto y la prueba. Aunque los autores no distinguen claramente entre los artefactos digitales y los no digitales al clasificar, reconocen que el medio puede provocar que los estudiantes privilegien formas de validar el cumplimiento de propiedades, por ejemplo, usar la cuadricula para validar la ortogonalidad. Estas y otras ideas expuestas en este capítulo se considerarán en el análisis de los datos, que se presentan en los próximos apartados.

CAPÍTULO 5

ELEMENTOS METODOLÓGICOS

En los capítulos anteriores presentamos algunas reflexiones que nos permitieron situar este trabajo dentro de las investigaciones en matemática educativa, en especial en lo referente a la validación de afirmaciones. Además, presentamos elementos teóricos usados en investigaciones relacionadas con las pruebas, los argumentos y los artefactos, elementos fundamentales en esta investigación.

En este capítulo presentamos una delimitación del tipo de estudio y una descripción de los elementos asociados a la toma de datos, tales como: los participantes, las actividades y los procedimientos e instrumentos de recolección de datos. Finalmente, presentamos una descripción de los procedimientos usados para analizar los datos.

5.1. TIPO DE ESTUDIO

Con este trabajo se busca caracterizar y describir la mediación de artefactos digitales, incrustados en un medio de geometría dinámica, para proponer argumentos o pruebas geométricas. Esto nos plantea la necesidad de analizar las acciones de los estudiantes y su interacción con artefactos digitales, lo que permitirá describir la mediación de las representaciones y caracterizarla según lo que los participantes consideran una prueba o argumento válido. Esta necesidad de describir los sucesos e intentar comprender los puntos de vista de los estudiantes nos lleva a enmarcar esta investigación como un estudio de tipo **cualitativo.**

Desde una perspectiva amplia las investigaciones de corte cualitativo se enfocan en comprender, profundizar y describir fenómenos a través de la perspectiva de los participantes (Hernández et al., 2014). En este caso se busca comprender y describir la mediación de artefactos digitales en los argumentos o pruebas que presentan los participantes. Dentro los diferentes alcances que pueden tener este tipo de investigaciones, nos situamos en las investigaciones **exploratorias y descriptivas**, las cuales de acuerdo con Steffe & Thompson (2000) y Hernández et al. (2014) son apropiadas cuando se estudian fenómenos desde una perspectiva novedosa, para obtener información mientras hay una familiarización con los modos y formas de operar de los participantes en una determinada actividad matemática, que en nuestro caso es la producción de pruebas o argumentos.

Caracterizamos la investigación como exploratoria en la medida en que analizamos la presencia de artefactos digitales desde una perspectiva *amplia* y *novedosa,* en la que se considera su presencia en todo el proceso de prueba y no solo como parte del trabajo empírico (ver sección 2.2 y 2.3); además es descriptiva en la medida en que buscamos especificar y caracterizar dicha presencia dentro del proceso de prueba y argumentación.

Hernández et al. (2014) mencionan que cuando una investigación tiene un alcance exploratorio y descriptivo es necesario especificar el contexto particular bajo el que se desarrolla, ya que estas investigaciones sirven de punto de partida para otras que deseen estudiar el fenómeno desde la misma perspectiva. Dentro de las especificaciones que se deben considerar están la descripción de: los participantes, dónde y cómo se recolectaron los datos, cuáles fueron los datos recolectados, cuál fue el tratamiento que se le dio a estos últimos, entre otros. Estas especificaciones serán presentadas en los siguientes apartados.

5.2. CARACTERIZACIÓN Y CONTEXTO DE LOS PARTICIPANTES

Los resultados que se presentan en este documento están asociados a dos momentos experimentales. El primero se llevó a cabo en tiempos de pandemia por lo que se priorizó el trabajo individual, es decir que la mayoría de las sesiones se desarrollaron entre la investigadora y cada uno de los participantes de manera virtual; mientras que el segundo momento experimental se desarrolló en un aula de clase con el fin de que las afirmaciones fueran validadas dentro de una pequeña comunidad y no solamente por la investigadora.

Los participantes del primer estudio fueron dos estudiantes de segundo de secundaria a quienes llamamos Alicia y Santiago[13]. Eran de dos instituciones educativas diferentes, pero ninguno estaba familiarizado con el uso de entornos de geometría dinámica (DGE). En cuanto a sus conocimientos geométricos recordaban ideas sobre los tipos de ángulos, cuadriláteros y triángulo, pero cuando se les preguntó sobre las diferencias entre ángulos y triángulos se evidenció que ambos participantes confundían ciertos términos. En un principio había otro estudiante (Pedro) con experiencia usando GeoGebra, pero solo participó de la primera sesión y se retiró debido a compromisos escolares.

En el segundo estudio, los participantes fueron estudiantes de primeros años del CCH (una preparatoria en México) que estaban tomando un curso de álgebra y voluntariamente participaron en el desarrollo de la investigación. Ellos no habían tomado cursos de geometría a nivel preparatorio y, como los estudiantes del primer estudio, no conocían el uso de GeoGebra, sin embargo, tenían más claridad sobre algunas definiciones geométricas de triángulos y cuadriláteros.

En ambos estudios decidimos trabajar con estudiantes que no tuvieran una visión establecida de la prueba geométrica, ya que nuestro interés está en analizar la mediación de artefactos digitales en la producción de pruebas y argumentos geométricos desde un punto de vista amplio (ver sección 2.2). La revisión de la literatura nos llevó a caracterizar a los participantes como estudiantes que no tuvieran una visión sesgada sobre la prueba y los argumentos (bien sea hacia lo intuitivo o hacia lo formal).

Los estudiantes de primeros años de preparatoria y secundaria son ideales para el desarrollo de este estudio ya que según la NCTM (2000) en estas etapas empiezan a construir cadenas de razonamientos relativamente complejas y proporcionan argumentos matemáticos. Es decir que, estos estudiantes están en un punto donde empiezan a proponer pruebas y

[13] Para el desarrollo de este trabajo se usaron seudónimos con el fin de proteger la identidad de los participantes.

argumentos sin tener una visión inclinada hacia la formalidad (un punto de tránsito entre lo intuitivo y lo formal).

5.3. DISEÑO DE ACTIVIDADES

Para el diseño de las actividades consideramos tres factores que intervienen en el desarrollo de la investigación: la integración de artefactos digitales a la clase, elementos asociados al desarrollo de pruebas o argumentos y una integración entre los dos anteriores.

La integración de artefactos digitales en el aula de clase es un proceso complejo que ha sido ampliamente estudiado por diversos autores, particularmente Guin y Trouche, (1998) y Leung y Or (2007) afirman que el éxito de esta integración en una actividad matemática puede deberse a la familiaridad que los estudiantes logran tener con los artefactos. Ahora bien, como nuestros participantes no habían trabajado con estos artefactos, vimos la necesidad de plantear una serie de actividades en la que tuvieran que explorar el medio, las herramientas de construcción, las acciones que pueden realizar, entre otras. Particularmente nosotros elegimos usar GeoGebra[14] porque es un programa especializado de acceso abierto que se puede usar desde diferentes dispositivos (como las tabletas, los computadores y los celulares) y se puede descargar fácilmente.

Por otra parte, sobre las investigaciones centradas en el estudio de pruebas y argumentos Duval (1999) afirma que cuando se valida una idea, los razonamientos se apoyan en proposiciones con un determinado valor epistémico, es decir que tienen un determinado grado de certeza y que son conocidos por los estudiantes. En nuestro caso, los participantes del estudio mostraron no tener un amplio bagaje geométrico, por lo que consideramos relevante diseñar actividades para que se familiaricen con ciertos objetos y den valor epistémico a afirmaciones geométricas que posteriormente sirvan para validar afirmaciones.

Por último, reconocemos que una de las dificultades que se presenta al incluir la tecnología digital en actividades de prueba y argumentación es que al interactuar con las representaciones estructurales los estudiantes quedan tan convencidos de que el hecho es cierto que no ven la necesidad de presentar una prueba o un argumento (De Villiers, 2004).

[14] Cabe resaltar que las actividades pueden ser adaptadas a otros entornos de geometría dinámica similares.

Para evitar estas dificultades adoptamos ideas del trabajo de Hofstadter (1992) sobre las pruebas y los argumentos, en donde se afirma que probar que un hecho es cierto no es lo mismo que comprender *por qué es cierto*. En ese sentido, incluimos actividades en las que los estudiantes tuvieran que explicar *por qué* se cumple una determinada propiedad geométrica y no solamente “probar” que se cumple.

Considerando lo expuesto anteriormente, diseñamos las actividades presentadas a continuación, cabe aclara que esta propuesta es producto de las dos experimentaciones realizadas.

5.3.1. Actividad 1. Familiarización con las herramientas de GeoGebra

Como las actividades son diseñadas para estudiantes que no están familiarizados con GeoGebra buscamos que su primer acercamiento no fuera guiado, sino que pudieran interactuar con los objetos del medio de manera libre y conocer sus posibilidades. Con este propósito dividimos la exploración en tres etapas:

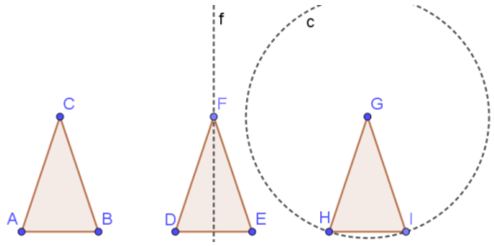
Etapa de exploración libre: Aquí se les da a los estudiantes 10 minutos para explorar qué cosas pueden hacer en GeoGebra.

Etapa de síntesis: Se socializan las ideas de la primera etapa, resaltando las características incorporadas que posee el medio (mencionadas por Hegedus & Moreno-Armella, 2010) y la presencia de algunas herramientas de construcción que se encuentran en el menú y que pueden ser usadas más adelante, tales como: punto, medio o centro, recta, segmento, paralela, perpendicular, mediatriz, circunferencia, entre otras.

Etapa de refuerzo[15]: La intención es que los estudiantes noten la necesidad de arrastrar para ver si una propiedad aparente se sigue cumpliendo con el arrastre. En ese sentido, se presentan a los estudiantes tres triángulos aparentemente isósceles: uno que no es isósceles, uno construido con la mediatriz y otro construido con una circunferencia (Imagen 15a). Se muestran a los estudiantes como tres triángulos aparentemente iguales (Imagen 15b) y luego se les empieza a cuestionar sobre sus características, invitándolos a medir y a arrastrar mientras se les cuestiona sobre el movimiento de los puntos.

[15] Incluida en la segunda experimentación debido a que en la primera experiencia los estudiantes reconocían que el medio les permitía arrastrar los puntos, pero no necesariamente lo hacían.

a.



b.

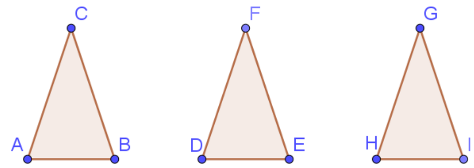


Imagen 15. Tres triángulos aparentemente isósceles

Conforme se desarrolla la actividad hay que enfatizar en las propiedades que *son* y las propiedades que *parecen*, rescatando la importancia de arrastrar los puntos de la construcción.

5.3.2. Actividad 2. Los radios de la circunferencia son congruentes

El propósito de esta actividad es que los participantes establezcan un valor epistémico de cierto al *hecho* de que todos los radios de una circunferencia son congruentes. Para tal propósito, nosotros proponemos llevar a cabo las siguientes tres etapas:

Etapa de Construcción: En esta parte se le solicita los participantes que construyan una circunferencia con un radio y arrastren los puntos de su construcción. Después se les solicita que traten de definir el radio de una circunferencia mientras se les cuestiona lo que sucede cuando arrastran su extremo sobre la circunferencia, esto último para que noten que el radio no cambia de tamaño.

Etapa de familiarización[16]*:* En la misma página de GeoGebra se propone a los estudiantes que construyan un punto libre (color rojo) y que construyan otros siete puntos que estén a la misma distancia del punto rojo. La idea es que los estudiantes asocien los puntos que están a la misma distancia con los puntos de una circunferencia y en caso de que la asociación no sea inmediata se les puede pedir que construyan más puntos que se encuentren a la misma distancia.

Etapa de Comparación y síntesis: Después de establecer que los puntos de la circunferencia equidistan del centro, se les solicita que construyan dos radios y que traten de decir cuál es

[16] Etapa incluida en la segunda experiencia con el fin de que la idea (que los radios de la circunferencia son congruentes) tenga más fuerza y no se limite a comparar dos segmentos.

más grande. El objetivo es que lleguen a que ambos radios son congruentes y que relacionen la idea de equidistancia con la de congruencia. Si es necesario, se podría medir o construir más radios que permitan que los estudiantes lleguen a que en una circunferencia los radios siempre serán congruentes. Hecho que se debe establecer como cierto dentro de la comunidad.

5.3.3. Actividad 3. El punto medio

El propósito de esta actividad es que los estudiantes logren *caracterizar* el punto medio de acuerdo con las dos propiedades que lo definen, es decir que lo caractericen como un punto que:

i) se encuentra a la misma distancia de dos puntos dados y,

ii) es colineal con dichos puntos.

Para esto proponemos llevar a cabo las siguientes etapas:

Etapa de construcción: Se les solicita a los estudiantes que construyan dos puntos y que después usen la herramienta “medio o centro” dando clic a cada uno de los puntos. Cuando aparezca el punto medio, se les invita a arrastrar los puntos y a decir cuáles son sus características principales.

Etapa de caracterización: En esta etapa se busca que los estudiantes mencionen las dos características del punto medio con preguntas como: ¿Dónde está el punto?, ¿cuál es la relación que tiene con los extremos?, ¿es cualquier punto entre los puntos que construiste?, ¿es cualquier punto que equidista de los puntos que construiste?, entre otras. Si es necesario, los estudiantes podrán medir o usar cualquier otra estrategia que les permita afirmar que el punto medio cumple con las dos características mencionadas anteriormente.

5.3.4. Actividad 4. Rectas paralelas y perpendiculares

El propósito de esta actividad es que los estudiantes *caractericen* y diferencien las rectas paralelas y perpendiculares. Las primeras como dos rectas que nunca se intersecan y las segundas como dos rectas que se intersecan y además forman un ángulo recto. Para esto planteamos las siguientes etapas:

*Etapa de construcción: S*e les solicita a los estudiantes construir rectas paralelas o perpendiculares (según sea el caso) y que arrastren cada uno de los puntos que se puedan arrastrar, buscando que determinen las relaciones que se mantienen cuando se arrastran los puntos.

Etapa de caracterización: Aquí se espera que los estudiantes mencionen las características de cada recta. Para ello se proponen las siguientes preguntas orientadoras: ¿las rectas se pueden cruzar?, ¿pueden ser la misma recta?, ¿las rectas siempre se cruzan? ¿qué tipo de ángulo forman si se cruzan?, ¿la medida del ángulo siempre es la misma?, entre otras. Durante el proceso se espera que los estudiantes tomen medidas y enuncien las características asociadas a estas rectas.

5.3.5. Actividad 5. Construir un triángulo isósceles

El propósito de esta actividad es que los estudiantes *usen* algunos de los conocimientos previos para realizar una construcción y validarla. Consideramos incluir este tipo de problemas ya que fueron los que se analizaron en la tesis de maestría (Calderón González, 2020) y cuyos resultados podrían ser una base para establecer una relación más general entre los artefactos digitales y la argumentación (o prueba) geométrica. De acuerdo con lo anterior, consideramos pertinente llevar a cabo las siguientes etapas:

Etapa de construcción: Se propone el reto de construir un triángulo isósceles de tal manera que al arrastrar los puntos de la construcción el triángulo siempre sea isósceles y no que solamente parezca isósceles.

Etapa de justificación: Se busca que los estudiantes expliquen *por qué* con los métodos y herramientas de construcción usadas se puede afirmar que el triángulo es isósceles. Aquí se espera que hagan una lectura razonada de la representación y logren establecer relaciones geométricas asociadas a los elementos presentes en la construcción.

5.3.6. Actividad 6. La mediatriz

El propósito de esta actividad es que los participantes *caractericen* a la mediatriz de un segmento de acuerdo con las propiedades que la definen, es decir como una recta que:

i) Es perpendicular al segmento,
ii) Y pasa por su punto medio.

Para esto consideramos desarrollar una etapa de construcción y una etapa de caracterización de manera similar a las diseñadas para la Actividad 3.

5.3.7. Actividad 7. Construir un triángulo equilátero

El propósito de esta actividad es que los estudiantes *usen* algunos de los conocimientos previos para realizar una construcción y validarla. En este caso, la congruencia de los radios en una circunferencia o la equidistancia de los puntos de la mediatriz a los extremos del segmento. Aquí se guiará a los estudiantes para que primero construya un triángulo isósceles y luego evalúen el caso en el que el triángulo es equilátero, desarrollando las mismas etapas de la actividad 5.

5.3.8. Actividad 8. Suma de los ángulos internos de un triángulo

El propósito de esta actividad es que los participantes logren establecer un valor epistémico de cierto al hecho de que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°. Para el diseño de la actividad adaptamos la propuesta de Smith y Sutherland (2013) y planteamos las siguientes tres etapas:

Etapa de familiarización: Se empieza presentando la herramienta de “ángulo dada su amplitud” y construyendo ángulos con medidas aleatorias. Después se solicita a los estudiantes que construyan ángulos y triángulos como se muestra a continuación:

1. Construir un ángulo de 40 grados usando la herramienta de GeoGebra “ángulo dada su amplitud”.
2. Construir un triángulo que tenga un ángulo de 40°.
3. Construir un triángulo rectángulo.

Etapa de construcción y justificación: En esta etapa los estudiantes deben anticipar la construcción de triángulos con ciertas características y justificar sus respuestas. Se espera que a medida que avancen noten la relación existente entre los triángulos que se pueden construir y la suma de sus ángulos internos.

1. ¿Es posible construir un triángulo con dos ángulos de 60°? Justifique su respuesta.
4. ¿Es posible construir un triángulo con dos ángulos de 90°? Justifique su respuesta.
5. ¿Es posible construir un triángulo con dos ángulos de 85°? Justifique su respuesta.
6. ¿Es posible construir un triángulo con dos ángulos de 120°? Justifique su respuesta.

7. ¿Es posible construir un triángulo con un ángulo de 60° y uno de 90°? Justifique su respuesta.
8. ¿Es posible construir un triángulo con un ángulo de 80° y uno de 120°? Justifique su respuesta.
9. ¿Es posible construir un triángulo con un ángulo de 115° y uno de 30°? Justifique su respuesta.
10. ¿Es posible construir un triángulo con un ángulo de 20°, uno de 35° y otro de 115°? Justifique su respuesta.

Etapa de enunciar la conjetura y justificar: En esta etapa se espera que los participantes enuncien la conjetura general sobre la suma de los ángulos internos de un triángulo y realicen acciones que permitan determinar el valor lógico de esta.

11. Plantea una conjetura sobre los triángulos que se pueden construir. ¿cómo puede asegurar que esa idea es cierta?

5.3.9. Actividad 9. Relación ángulo central y ángulo inscrito

El propósito de esta actividad es que los participantes logren establecer un valor epistémico de cierto al hecho que el ángulo inscrito es la mitad del ángulo central (conocido como el "Teorema del ángulo central"). Para esto se platean las siguientes etapas:

Etapa asociada al ángulo central: En esta etapa se le presenta a los participantes el ángulo central, se les solicita que lo midan y arrastren cada uno de los puntos. En este caso se podrá observar que las medidas del ángulo siempre cambian.

Etapa asociada al ángulo inscrito: Se ocultan las líneas asociadas al ángulo central y se solicita a los estudiantes que construyan otro punto en la circunferencia para que ahora el vértice del ángulo se encuentre en la circunferencia. Se les menciona que a esos ángulos se les llama inscritos.

Después de construir y medir el ángulo inscrito se propone que arrastren cada uno de los 3 puntos que resultan estar en la circunferencia (en la Imagen 16 serian A, B y C). La idea es que noten que la medida del ángulo central no cambia cuando arrastran el vértice del ángulo (C) sobre el mismo arco determinado por los otros dos puntos (B y D); y que cuando cambia la medida también permanece constante en el otro arco.

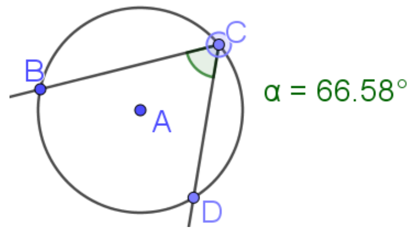


Imagen 16. Representación de un ángulo central

Por último, se espera que los estudiantes noten que las dos medidas posibles del ángulo inscrito (C) suman 180° y que otorguen un cierto valor epistémico a este hecho. Para esto algunas de las preguntas que se pueden plantear son:

1. ¿Qué pasa si la medida inicial del ángulo es 20°? ¿cuánto va a medir del otro lado?
2. ¿Qué pasa si la medida inicial del ángulo es 60°? ¿cuánto va a medir del otro lado?
3. ¿Qué pasa si la medida inicial del ángulo es 180°? ¿cuánto va a medir del otro lado? (caso límite) ¿El ángulo inscrito puede medir 200°?

Etapa en la que se relacionando los dos ángulos: Se les solicita a los participantes que vuelvan a mostrar el ángulo central (que habían ocultado), tal y como se muestra en la Imagen 17.

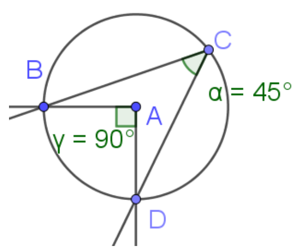


Imagen 17. Construcción que relaciona el ángulo central con el ángulo inscrito

Para que el estudiante logre afirmar que el ángulo inscrito es la mitad del central, se les plantearán los siguientes cuestionamientos:

1. ¿Qué pasa con el ángulo central cuando el inscrito mide 60°?
2. ¿Se puede construir un ángulo central de 120° y que el inscrito sea de 50°?
3. ¿Qué pasa con el ángulo inscrito cuando el central mide 100°?
4. ¿Qué pasa con el ángulo inscrito cuando el central mide 90°?
5. ¿Podrías establecer una relación general entre el ángulo central y el ángulo inscrito? Explica tu respuesta.

5.3.10. Actividad 10: Explicar por qué

Más que una actividad, este es un conjunto de actividades que tienen el objetivo plantear situaciones específicas en las que los estudiantes tienen que explicar *por qué* se cumple una determinada propiedad. Estas son las actividades finales ya que se espera que los estudiantes tengan un nivel de apropiación de los artefactos tecnológicos y conocimiento geométrico para dar razones de por qué una representación cumple ciertas características según la forma en que se construyó. Estas razones darán cuenta del valor lógico asicado a una determinada afirmación.

En la primera actividad de este tipo se hace una modificación de la Actividad 5 para que el énfasis esté en los razonamientos y no en la construcción. Para la tercera y quinta actividad nos inspiramos en las propuestas de Saorín et al. (2017) y Komatsu (2017), quienes plantearon estos problemas a estudiantes de secundaria (no necesariamente en entornos dinámicos) y mencionan el uso de algunos hechos como los que se abordaron en las actividades anteriores. En cuanto a la segunda y cuarta actividad fueron propuestas en la segunda experimentación por estar relacionadas con los elementos abordados en las sesiones. A continuación, se presenta el planteamiento de las actividades mencionadas.

5.3.10.1. Triángulo isósceles

En la construcción se presenta un triángulo ABC de modo que dos de sus lados (AC y AB) son radios de una circunferencia con centro en A (ver Imagen 18). Aquí los estudiantes deben explicar por qué el triángulo es isósceles.

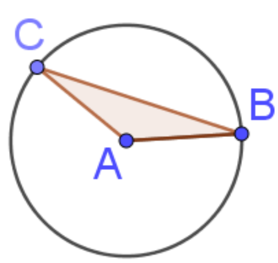


Imagen 18. Triángulo isósceles presentado a los estudiantes.

5.3.10.2. Rombo

En la construcción se presenta un rombo $FEGD$ de modo que F, D y G son puntos de la circunferencia con centro en E; y los F, E y G son puntos de la circunferencia con centro en D (ver Imagen 19Imagen 20). Aquí el estudiante debe explicar por qué el cuadrilátero $FEGD$ es un rombo.

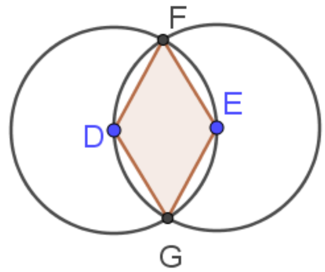


Imagen 19. Construcción de un rombo

5.3.10.3. Triángulo rectángulo

En la construcción se presenta un triángulo FGE inscrito en una circunferencia (ver Imagen 20), de modo que el lado FE es diámetro. Aquí el estudiante debe explicar por qué el ángulo en G es recto.

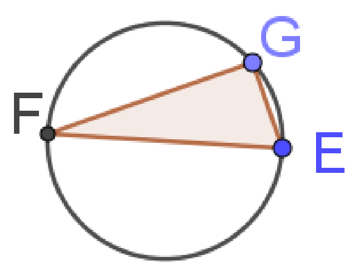


Imagen 20.Construcción de un triángulo rectángulo.

5.3.10.4. Rectángulo

En la construcción se presenta un rectángulo $LOMP$ inscrito en una circunferencia (ver Imagen 20) de manera que la diagonal LM y PO pasan por el centro de la circunferencia. Aquí el estudiante debe explicar por qué el cuadrilátero $LOMP$ es rectángulo.

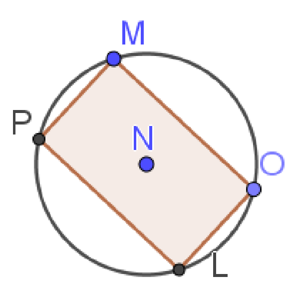


Imagen 21. Construcción de un rectángulo

5.3.10.5. *Ángulos congruentes - triángulos semejantes*

En la construcción se presentan dos circunferencias que se intersecan en I y en J. Los puntos M y L se encuentran en una de las circunferencias y permiten determinar las rectas LI y MI. Los puntos O y N se determinan como puntos de intersección de las rectas y la otra circunferencia (ver Imagen 22). Aquí el estudiante debe explicar por qué en los triángulos MJN y LJO se cumple que $\measuredangle M \cong \measuredangle L$.

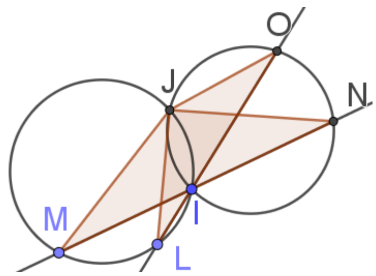


Imagen 22. Construcción de dos triángulos semejantes.

En este problema se puede agregar un poco de complejidad solicitando al estudiante que explique por qué en los triángulos MJN y LJO también se cumple que $\measuredangle N \cong \measuredangle O$ y los dos ángulos en J son congruentes (esto se puede proponer dentro del mismo problema o como otro diferente).

5.4. SOBRE LA IMPLEMENTACIÓN DE LAS ACTIVIDADES

Como mencionamos anteriormente, se llevaron a cabo dos experimentaciones para el desarrollo del proyecto. A continuación, se presenta una breve descripción de cada una.

5.4.1. Primera experimentación

La primera implementación se hizo en un ambiente virtual vía Zoom entre el estudiante y la investigadora y cada uno de los estudiantes, esto debido a la pandemia y a que acorde a los propósitos del estudio teníamos la necesidad de grabar la pantalla de los estudiantes. También desarrollamos una sesión grupal-virtual (la número 5) para confrontar los diferentes puntos de vista que tenían los estudiantes sobre una afirmación, ya que de acuerdo con Duval (1999) la confrontación de dos valores epistémicos propicia la producción de razonamientos que dan cuenta del valor lógico.

Se llevaron a cabo nueve actividades, ya que en la planeación inicial no estaba la actividad 7. Además, en la actividad 10 se propusieron tres problemas, ya que hasta ese punto sólo estaba propuesto el del triángulo isósceles (sección 5.3.10.1), el triángulo rectángulo (sección 5.3.10.3) y los ángulos congruentes (5.3.10.5). En total, la implementación de las actividades tardó unas 11 horas distribuidas en 7 u 8 sesiones con cada estudiante. Se llevaron a cabo: 1 sesión grupal, 6 sesiones individuales con Alicia y 7 sesiones con Santiago, las cuales tuvieron un tiempo variado (ver Tabla 1) y se desarrollaron una o dos veces por semana (en abril y mayo de 2022) según la disponibilidad de los participantes. Como las sesiones se hicieron por Zoom se hizo una grabación de cada una de estas con la herramienta que ofrece el programa para tal fin. Al inicio de cada sesión se le solicitó a cada estudiante que compartiera su pantalla para obtener registro de su interacción con el medio digital. En el caso de la sesión grupal el foco estuvo en la pantalla de Santiago ya que era su sesión y Alicia estuvo de invitada, sin embargo, en algunos momentos ella también compartió su pantalla.

Tabla 1. Relación entre el número de sesiones con cada participante

	Alicia	**Santiago**
Sesión 1	1 hora y 55 minutos	1 hora y 45 minutos
Sesión 2	1 hora y 45 minutos	1 hora y 40 minutos
Sesión 3	1 hora	1 hora y 25 minutos
Sesión 4	1 hora y 30 minutos	55 minutos
Sesión 5	1 hora y 20 minutos	1 hora y 20 minutos
Sesión 6	1 hora y 50 minutos	1 hora y 25 minutos
Sesión 7	1 hora y 40 minutos	1 hora
Sesión 8	---	1 hora
TOTAL	**11 HORAS**	**10 HORAS Y 30 MINUTOS**

En general, los datos recolectados se obtuvieron de la videograbación de las sesiones de Zoom.

5.4.2. Segunda experimentación

La reflexión sobre la primera experimentación y las ideas de Duval (1999) sobre la importancia de la confrontación de valores epistémicos diferentes sobre una misma afirmación, nos llevó a que la segunda experiencia se llevara a cabo en una comunidad como el salón de clases. Como con la primera experiencia, consideramos necesario grabar la pantalla de los estudiantes, pero en este caso escogimos que hubiera una cámara grabando el proceso de dos estudiantes (Camilo y Daniela) y otra que grabara la clase (en los momentos de socialización) y a las demás parejas (en la solución de problemas).

Se llevaron a cabo seis actividades, ya que nos centramos en aquellas que se relacionaban em mayor medida con la última actividad de explicación. Particularmente las actividades de: familiarización, los radios de la circunferencia, el triángulo isósceles, el triángulo equilátero, la relación entre el ángulo central y el ángulo inscrito y la actividad de explicar por qué. En total, se usaron 8 horas para la implementación de las actividades, distribuidas en sesiones de dos horas cada 3 o 4 días. Al inicio de cada sesión se hacía un recuento de las definiciones y hechos que se habían aceptado como ciertos. Cabe aclara que, aunque no se planeó, durante la actividad del triángulo equilátero se presentó una discusión sobre los cuadriláteros y sus definiciones, por lo que se consideró pertinente incluirlos en las actividades finales.

En el siguiente apartado mencionamos como fueron depurados y analizados los datos.

5.5. PROCEDIMIENTOS DE ANÁLISIS DE DATOS

Teniendo en cuenta que el trabajo geométrico involucra la interacción del registro gráfico y el discursivo (Duval, 1999), consideramos relevante centrar nuestra atención en el *discurso* de los estudiantes (verbal o escrito) y las representaciones vinculadas a ese discurso. Por los intereses de nuestra investigación, estas representaciones se encuentran incrustadas en un entorno de geometría dinámica donde las acciones del usuario coexisten con las acciones del medio, por eso consideramos necesario incluir las acciones del usuario y del medio (las respuestas del medio) como elementos de interés.

Considerando a las acciones y el discurso como dos de nuestros intereses, establecemos a las videograbaciones y los escritos de los estudiantes como nuestra principal fuente de datos. Para las grabaciones realizamos las trascripciones de las sesiones teniendo en cuenta el discurso de los estudiantes y las acciones que se apreciaban en la pantalla, tales como: construir, arrastrar, medir, mover el ratón, entre otras. Para la transcripción usamos un código que detallamos en la siguiente tabla:

Tabla 2. Códigos usados para las transcripciones

Código	***Significado***
A, S, P, C, D	Primera letra de los nombres de cada participante. Se usan para denotar sus intervenciones en una conversación.
I	Letra utilizada para las intervenciones de la investigadora.
(…)	Se usan cuando la persona que está hablando hace una pausa y luego continúa con su intervención. La cantidad de puntos depende de si la pausa fue corta (menos de 10 segundos), moderada (entre 10 y 30 segundos) o larga (mayor a 30 segundos).
(… …)	
(… … …)	
[…]	Se usan para omitir algunas intervenciones que no son relevantes y que desvían la atención de la idea que ser desea resaltar. La cantidad de puntos depende de si las intervenciones omitidas fueron pocas (menos de 3), moderadas (entre 3 y 5) o muchas (más de 5).
[… …]	
[… … …]	
[ ]	Se escribe entre corchete una aclaración de algo que no es observable pero que se infiere por el contexto de la conversación.
( )	Se escribe entre paréntesis alguna acción realizada por el participante y que resulta relevante dentro de la conversación.

Una vez realizada la transcripción de las sesiones, identificamos y aislamos los episodios en los que se otorga valor epistémico o valor lógico a una afirmación. Para esto tuvimos en cuenta algunos indicadores que presentamos en los capítulos anteriores (ver sección 4.1.1 y 4.1.2) y que condensamos en la siguiente tabla.

Tabla 3. Elementos usados para identificar episodios de valor epistémico y lógico

Aspectos asociados al valor	**Indicador**
Valor epistémico	✓ Hay un conflicto de valores epistémicos entre la investigadora y el estudiante (o entre dos estudiantes) y ven la necesidad de plantear sus posturas. ✓ La investigadora o algún estudiante plantea la necesidad de escogencia de un valor para una afirmación y por tanto la respuesta del estudiante fue de sí o no. ✓ El estudiante menciona una expresión de actitud proposicional como: "yo creo que…", "se admite que…", "estoy seguro de que…", "es evidente que…", "es imposible que…", "es posible …", "es evidente…", "es lógico…" etc. ✓ El estudiante realiza acciones que lo llevan a determinar un valor epistémico sobre una afirmación.
Valor lógico	✓ El estudiante realiza acciones o procedimientos para defender su punto de vista después de presentada la afirmación, los cuales pueden ser relativos al razonamiento o relativos a la percepción. ✓ En el discurso el estudiante hace uso de expresiones de actitud proposicional como: "es cierto que…", "es falso que…", "… es verdad", "sabemos que …" "aún no se ha demostrado que…" etc.

Como se puede apreciar en la tabla anterior, hay acciones asociadas al valor epistémico y otras al valor lógico, diferenciadas de acuerdo con lo que se plantea en la sección 4.1.2. Después de seleccionar los episodios de interés (en los que se otorga un determinado valor a una afirmación), analizamos la interacción del estudiante con los artefactos digitales y su uso, para determinar si estaban actuando como herramientas o como instrumentos (ver capítulo 3). Para esto diseñamos la siguiente tabla:

Tabla 4. Uso de artefactos digitales

<table>
<tr><td colspan="5">Artefacto 1:</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Acciones y Co-acciones</td><td colspan="2"><u>Acciones</u> del usuario sobre el artefacto y sus intenciones</td><td colspan="2" rowspan="2">Sirvió al estudiante para… [propósito]</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Acciones</u> del medio sobre el artefacto (respuesta)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Herramienta</td><td></td><td>Instrumento</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">✓ ¿El propósito estaba contemplado previo al uso del artefacto?
✓ ¿El artefacto cumplirá el mismo propósito al ser usado por otro estudiante?
✓ ¿Hay una ampliación o reorganización? ¿Qué se amplía o reorganiza?</td></tr>
</table>

Después de identificar los episodios en los que se le otorga un valor epistémico y/o lógico a una afirmación y enfocarnos en el uso de artefactos en estos episodios, organizamos la información de manera que pudiera dar un panorama amplio del proceso de los estudiantes, relacionando el valor otorgado con el uso de artefactos (ver Tabla 5).

Tabla 5. Tabla que relaciona el valor y los artefactos

<table>
<tr><td colspan="2">Nombre de la actividad:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción del contexto:</td></tr>
<tr><td>Afirmación:</td><td>[afirmación o proposición a la que se le establece un valor epistémico o teórico]</td></tr>
<tr><td colspan="2">Valor epistémico</td></tr>
<tr><td>¿cuál es el valor?
[Ej. probable]</td><td>Descripción de acciones y procedimientos:</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>¿Cómo se evidenció dicho valor?
[Información de Tabla 3]</td><td colspan="2">[A acciones y procedimientos previos a la afirmación. Aquí incluir una descripción de la información de Tabla 4]</td></tr>
<tr><td colspan="3">Valor lógico</td></tr>
<tr><td>¿cuál es el valor?</td><td colspan="2">[Ej. cierto]</td></tr>
<tr><td colspan="3">¿Cómo se estableció dicho valor?</td></tr>
<tr><td>Sobre la representación:</td><td>[Acciones y procedimientos asociados a la representación usando la información de Tabla 4]</td><td rowspan="3">[Realizar una descripción de cómo es la relación del discurso y la representación]</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Sobre el discurso:</td><td>[Conocimientos geométricos que esté usando en el discurso, incluir el valor que adquirieron]</td></tr>
<tr><td>[Describir el razonamiento usando la información de la página 60]</td></tr>
</table>

Por último, usamos la información de la Tabla 5 para poder afirmar si lo que se presentó para otorgar valor lógico fue una prueba o un argumento. Para establecer esta diferencia usamos las ideas de Hofstadter (1992) junto con la información del capítulo 4 y la sintetizamos en la siguiente tabla.

Tabla 6. Pruebas y argumentos

Aspectos asociados al valor lógico	**Indicador**
Argumento	✓ El estudiante busca convencer de que el hecho es cierto.

	✓ El estudiante muestra que se cumple una propiedad o definición. ✓ El razonamiento no necesariamente incluye una relación entre registro discursivo o gráfico. ✓ La afirmación es sobre un caso particular.
Prueba	✓ El estudiante establece *por qué* el hecho tiene un cierto valor. ✓ Articulan proposiciones previamente enunciadas y con un valor epistémico de cierto ✓ Necesariamente hay presencia del registro discursivo. ✓ Establece relaciones de dependencia. ✓ La afirmación es sobre un hecho general de la geometría.

Cabe aclarar que para el análisis usamos las tablas como un referente que nos permitiera organizar el discurso en relación con los aspectos analizados. En ese sentido en el siguiente capítulo presentamos el análisis como un discurso asociado a los episodios en los que se otorgó un determinado valor a una afirmación.

CAPÍTULO 6

DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LOS DATOS

En el apartado anterior presentamos las condiciones bajo las que se realizó la toma de datos y especificamos cómo se analizarían. Esto último teniendo en cuenta los elementos teóricos que presentamos sobre la actividad mediada (capítulo 3) y las pruebas y argumentos (capítulo 4).

En este capítulo presentamos una descripción de los datos junto con el análisis (en cursiva), presentado en forma de texto dentro de la descripción de los datos para que el lector siga el discurso. Decidimos presentar los datos dividiendo el trabajo de cada estudiante para que se pudiera vislumbrar cómo es la apropiación de los artefactos y el razonamiento de los participantes a medida que avanzan en el desarrollo de las actividades. Empezamos describiendo el trabajo de cada participante de la primera experimentación y después presentamos el trabajo grupal que se dio en la segunda experimentación.

6.1. EL TRABAJO DE PEDRO

Como mencionamos en el capítulo anterior, Pedro es un estudiante de la primera experimentación que sólo estuvo en la primera sesión. Sin embargo, gracias a que estaba familiarizado con el uso de GeoGebra y con ciertas ideas geométricas pudimos analizar un episodio asociado al valor epistémico y lógico de una afirmación.

6.1.1. Los radios de la circunferencia son congruentes

Durante la segunda fase de la actividad 1 (ver apastado 5.3.1) Pedro afirma que la herramienta de GeoGebra llamada: segmento de longitud dada, se puede usar para construir radios. Esto desencadena una conversación en la que la investigadora le solicita construir una circunferencia y le pregunta qué pasaría si construye el radio, Pedro responde: "¿¡mostrará la longitud del centro a la circunferencia!?". Cuando la investigadora le pregunta si esa longitud es siempre la misma, el estudiante afirma con toda certeza que sí, entonces la investigadora le solicita que pruebe que ese hecho es cierto.

Hasta aquí se puede afirmar que Pedro ha otorgado un ***valor epistémico*** *de cierto a la* ***afirmación*** *de que la longitud del centro a la circunferencia es constante. Este valor ha sido explícito cuando respondió de forma afirmativa a la* ***necesidad de escogencia*** *que provocó la investigadora con su pregunta. Además, la investigadora es quien le solicita que de cuentas del* ***valor lógico*** *de la afirmación.*

Para cumplir con la petición de la investigadora, Pedro presenta su estrategia diciendo:

P: creo que podría crear un segmento de (…) empezando desde el punto hacia cualquier lado de la circunferencia y moverlo (el estudiante construye un radio AB y arrastra B alrededor de la circunferencia ver Imagen 23).

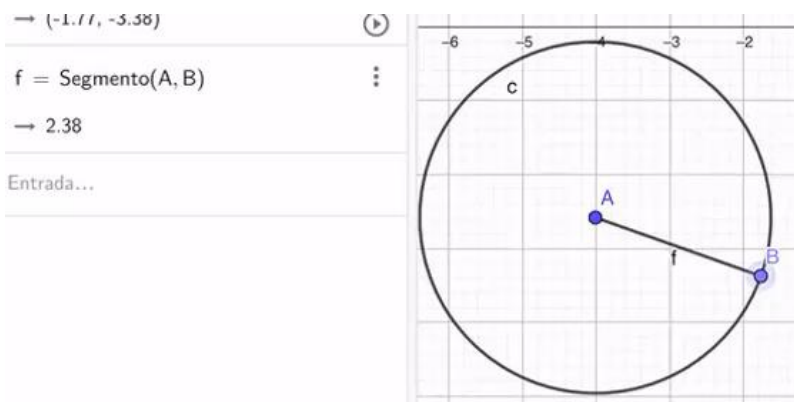


Imagen 23.Prueba de Pedro

La investigadora le pregunta a Pedro qué está intentando mostrar y dice:

P: “el radio es f a la izquierda [se refiere a la vista algebraica] y siempre se mantiene en 2.38 aunque lo mueva (arrastra B alrededor de la circunferencia) el punto B que siempre está en la circunferencia siempre va a tener la misma longitud de 2.38”.

Por último, la investigadora pregunta si al construir otro segmento va a medir 2.38 y el estudiante le dice: “no, va a depender del tamaño del círculo”.

Aquí el estudiante realiza acciones específicas para mostrar que el hecho es cierto. Estas acciones son ***relativas a la percepción*** *ya que usa la representación para* ***mostrar*** *la estructuralidad de la propiedad. Además, usa la palabra “siempre” como una expresión de actitud proposicional que le permite establecer como verdadero el contenido de la proposición. Es decir que establece una relación en la que, aunque mueva el punto B que siempre está en la circunferencia, el resultado el resultado es que la longitud de del segmento va a ser siempre de 2.38.*

Para presentar como verdadero el hecho ante la investigadora, Pedro usa la representación y su estructuralidad, la cual es visible cuando se presenta una ***co-acción*** *en la que el estudiante* ***arrastra*** *y la* ***medida*** *(que se ve en la vista algebraica) no cambia. En este caso el medio* ***amplifica*** *la capacidad de Pedro para tomar medidas exactas y junto con el arrastre le permite mostrar que esa medida es constante, por lo que la representación dinámica, en este caso, es una* ***herramienta*** *usada con el* ***propósito*** *(previamente establecido) de mostrar la estructuralidad de la propiedad y de esta manera* ***convencer*** *a la investigadora de que en una circunferencia la longitud del centro a la circunferencia es constante.*

En este caso se puede afirmar que Pedro presenta un ***argumento*** *relativo a la percepción que le permite dar cuenta del valor lógico de la afirmación.*

6.2. El trabajo de Alicia

Alicia es la participante de la primera experimentación que tuvo mayor éxito en la integración de los artefactos digitales a su práctica. En las actividades finales (ver a detalle en el apartado 5.3.10) ella logró dar explicaciones en los tres problemas que se plantearon usando elementos abordados en las sesiones anteriores. A continuación, presentamos el análisis de las actividades que se relacionan con las actividades finales y particularmente el análisis de algunos episodios asociados al valor epistémico y lógico de una afirmación.

6.2.1. Los radios de la circunferencia son congruentes

Durante la primera etapa de la actividad 1 (apartado 5.3.1) Alicia construye una circunferencia, la investigadora le pregunta si sabe lo que es un radio de una circunferencia, le solicita que construya uno y ella dice “es de cualquier punto al centro (construye el segmento AD ver Imagen 24)”. La investigadora la cuestiona sobre qué pasa cuando se arrastran los puntos, así que Alicia arrastra el centro de la circunferencia (A) y dice “pues se hace más grande el circulo”. Entonces la investigadora le pide que solo arrastre D para ver qué pasa con la longitud y el comentario es: “nada, porque no puedo hacerlo más grande […] solo se mueve de lugar”.

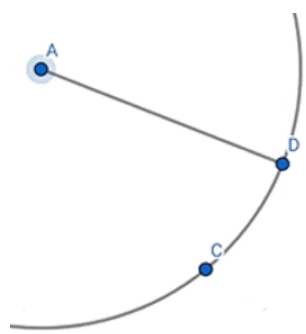


Imagen 24. Construcción de Alicia de un radio en una circunferencia

*Hasta este punto Alicia realiza **acciones** sobre la representación y hay una **respuesta** por parte del medio que se refieren a la no modificación de la longitud del radio cuando la estudiante arrastra. Sin embargo, estas repuestas y acciones no están en términos de una co-acción porque la representación no está siendo usada con un propósito particular; a diferencia del caso de Pedro que usaba la representación para **mostrar** la estructuralidad de una propiedad. Hasta ahora la representación dinámica no funciona como herramienta o instrumento.*

Continuando con la actividad la investigadora pide a Alicia que construya otro radio y diga cual es más largo. Alicia construye el segmento AB (ver Imagen 25), arrastra B y dice: “ninguno, son del mismo tamaño”. Ante tal afirmación la investigadora le pregunta si es un fenómeno que siempre ocurre y al obtener una respuesta afirmativa le pregunta si está segura o lo cree y dice “lo creo”.

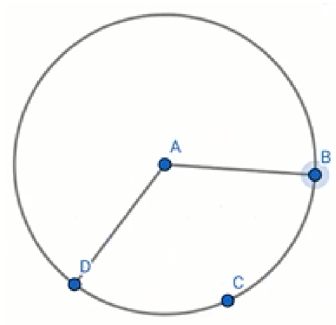


Imagen 25.Construcción de Alicia de una circunferencia y dos radios

*Aquí Alicia ha otorgado un **valor epistémico** de probable a la **afirmación** de que los radios de una circunferencia siempre son del mismo tamaño. Este valor se hace explícito cuando ella dice "lo creo", ya que se refiere a una **actitud proposicional** que fue evocada debido a la **necesidad de escogencia** provocada por la investigadora.*

*Para otorgar este valor epistémico, la representación desempeñó un papel fundamental ya que hubo una **co-acción** sobre la representación que permitió que la estudiante adquiriera un conocimiento nuevo. Dicha co-acción se centró en el **arrastre** y la **comparación** de dos segmentos, que le permitió a Alicia establecer como probable el hecho de que los radios de una circunferencia siempre son congruentes.*

*En este caso, hay efectos **reorganizadores** del artefacto (la representación dinámica), ya que por el dinamismo la estudiante pudo adquirir ideas matemáticas. Además, adquirir estas ideas no era un propósito contemplado por Alicia antes, por lo que se puede afirmar que en este caso la representación es un instrumento de aprendizaje.*

Continuando, la investigadora le pregunta a Alicia cómo podrían hacer para estar seguras de que la hipótesis es cierta y ella dice:

A: "pues (…) porque están conectados al centro y del centro a la circunferencia TENDRÍA que ser la misma distancia, así que no importa en donde esté acomodado el punto".

Aquí parece que Alicia se refiere a un conocimiento previo sobre el comportamiento de los radios de una circunferencia, pero también puede ser consecuencia de la experiencia con la representación dinámica. Por lo tanto, no podemos afirmar con certeza que esta sea una forma de establecer valor lógico relativo al razonamiento.

Después de la explicación de Alicia, la investigadora le solicita que tome la medida de los dos segmentos y luego arrastre los puntos alrededor de la circunferencia, al hacerlo se puede observar que los dos segmentos mantienen el mismo tamaño de 29.9, así que Alicia dice "sí, se mantiene". Por último, la investigadora enfatiza en que una de las propiedades más importantes de la circunferencia es que sus radios son congruentes, es decir que miden lo mismo.

En esta última parte, la investigadora da indicaciones a Alicia para que realice acciones relativas a la percepción que le permitan cambiar el valor epistémico de la afirmación de probable a cierto. Y aunque no se hace explicito el valor, al final Alicia dice "sí, se mantiene" como una expresión que contrasta con su idea inicial, cuando dijo "lo creo". De modo que gracias a la experiencia con la representación dinámica Alicia tuvo un cambio en el valor epistémico.

6.2.2. El punto medio

La investigadora solicita a Alicia que use la herramienta de construcción "medio o centro" (ver Imagen 26) y le pregunta por las características del punto medio, así que ella dice: "pues que está a la mitad de dos puntos, por algo se llama punto medio. Que entre un lado y el otro es la misma distancia". Después la afirmación de Alicia, la investigadora le pregunta cómo es posible saber que está a la mitad y ella dice: "mira, si muevo esto para para cualquier lugar siempre se va a mantener en el medio (mueve H y G aleatoriamente)". La investigadora cuestiona a Alicia sobre cómo sabe que el punto se encuentra en el centro y no muy cerca del centro, entonces Alicia toma las medidas, arrastra H y al ver que las medidas de GI y GH son las mismas ella dice "ahí está".

Imagen 26. Alicia usa la herramienta de construcción "medio o centro"

Aquí no se hace explicito el ***valor epistémico*** *que Alicia está otorgando a la afirmación de que el punto I está a la misma distancia de G y de H. Sin embargo, especulamos que el valor otorgado es de un hecho evidente, ya que ella dice "por algo se llama punto medio" como una implicación obvia que relaciona el nombre de la herramienta de GeoGebra con la propiedad de equidistancia.*

En este caso la representación no juega un papel importante referente a establecer como una ***afirmación*** *que si I es punto medio de GH entonces equidista de dichos puntos. Sin embargo, es útil para* ***mostrar*** *la estructuralidad de la propiedad, lo cual es posible gracias a una* ***co-acción*** *en la que la estudiante* ***arrastra*** *el punto H y la* ***medida*** *(que se ve en la pantalla) no cambia. Es decir que la estudiante realiza acciones específicas para mostrar que el hecho es cierto y estas acciones son* ***relativas a la percepción****, lo que le permite presentar un* ***argumento*** *y establecer un* ***valor lógico*** *para el hecho.*

En este caso el medio ***amplifica*** *la capacidad que tiene Alicia para tomar medidas exactas y junto con el arrastre le permite mostrar que las medidas siempre son las mismas, es decir que en este caso la representación se puede entender como una* ***herramienta*** *que es usada con el* ***propósito*** *(previamente establecido) de mostrar la estructuralidad de la propiedad.*

La investigadora le pregunta a Alicia qué hubiera hecho si no pudiera medir y ella dice:

A: Pues podríamos ver (…) bueno, es que podría mover el centro de la circunferencia [se refiere a una circunferencia que tenía construida en su pantalla, ver Imagen 27] al (…) este puntito en centro (acerca la pantalla y muestra a I) y si fueran iguales, los dos puntitos de los lados estarían tocando la circunferencia.

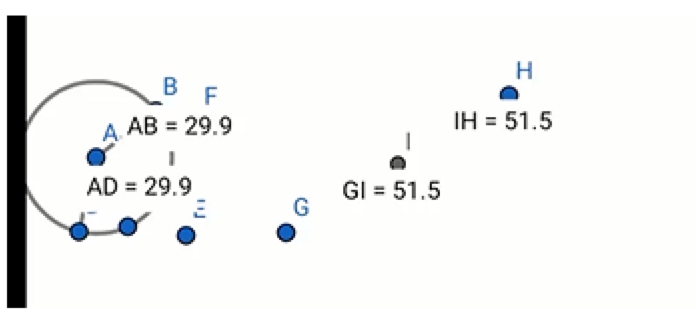


Imagen 27. Construcciones en la pantalla de Alicia cuando usa punto medio

Alicia pone en marcha su propuesta así que arrastra a A sobre I y busca una posición en la que H y G parecen estar en la circunferencia con centro en A. Sin embargo, al querer arrastrar H los puntos dejan de pertenecer a la circunferencia ya que el centro es A y no el punto I.. La investigadora le sugiere a la estudiante usar I como centro y después de algunas dificultades (ya que aparecían muchos puntos) ella logra construir una circunferencia con centro en I y radio GI (ver Imagen 28) y dice "¡¡ya!!" mientras arrastra G y H por la pantalla mostrando que los dos puntos siempre están en la circunferencia.

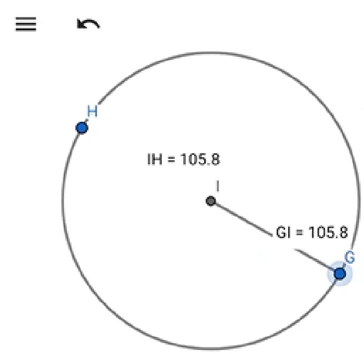


Imagen 28. Construcción de Alicia de una circunferencia para probar equidistancia

Aquí Alicia presenta otras acciones que dan cuenta del ***valor lógico*** *de la* ***afirmación*** *acerca de que el punto I equidista de G y H. En esta ocasión tiene la restricción de que no puede medir, así que Alicia realiza la acción de* ***construir*** *una circunferencia con centro en I y la* ***respuesta*** *del medio es que cuando* ***arrastra*** *los puntos* ***permanecen*** *en la circunferencia. Esta* ***co-acción*** *permite que Alicia estructure un razonamiento que se puede presentar como una* ***prueba*** *que no es traducible al lápiz y papel ya que los datos son resultado de una co-acción (ver* Imagen 29*).*

H y G son puntos de la circunferencia con centro en I, es decir que HI y GI son radios

[Resultado de una CO-ACCION]

En una circunferencia los radios son congruentes

"un radio de un círculo siempre va a medir lo mismo no importa su posición"

$$HI = GI$$

"y si fueran iguales, los dos puntitos de los lados estarían tocando la circunferencia."

Imagen 29. Alicia presenta un razonamiento asociado al punto medio

*En este caso, el medio **amplifica** la capacidad de Alicia para realizar construcciones precisas y, junto con el arrastre, muestra la relación entre los objetos (que los puntos pertenecen a la circunferencia), la representación puede entenderse como una **herramienta** usada con el **propósito** (previamente establecido) de mostrar una relación. También se vislumbra una **reorganización** porque Alicia adquiere nuevas formar de razonar vinculadas al uso de GeoGebra, ya que otorga un **estatus operatorio** a la circunferencia cuando la usa para establecer la certeza de una afirmación.*

Mientras Alicia arrastra los puntos dice "No los puedo mover del lugar" y cuando la investigadora le pide una aclaración ella agrega "O sea, los otros les podía dar vueltas y estos no", de modo que parece referirse a que los puntos no dejan de ser colineales cuando los arrastra. La investigadora aclara que esa es otra de las características del punto medio y ella dice "Ah ok, creo que ya entendí. Siempre van a estar como en línea ¿no? No puedo mover de lugar este para que haga como un ángulo". Después de esta declaración la investigadora le dice a Alicia que construya una recta y le muestra que efectivamente los tres puntos están en la recta.

*Aquí se presenta una **co-acción** en donde Alicia **arrastra** los puntos de la construcción y su **predicción** acerca del movimiento de los puntos no se cumple, ya que permanecen colineales. Esta confrontación del movimiento esperado de los puntos con el movimiento real le permite acceder a otra de las características del punto medio. Así que la representación dinámica sirve como **instrumento** que media el acceso a un conocimiento nuevo.*

Alicia ha otorgado un ***valor epistémico*** *de cierta a la afirmación de que los tres puntos siempre van a ser colineales. Este valor ha sido adquirido gracias a la interacción con la representación dinámica y aunque no se hace explícito a través de una actitud proposicional se interpreta que está aceptando el contenido de la afirmación cuando dice "ya entendí" y expresa con sus palabras la idea de colinealidad.*

6.2.3. Construir un triángulo isósceles

Después de presentar la actividad, la investigadora le pregunta a Alicia si sabe cuáles son los triángulos isósceles y ella dice: "Los que en 2 lados son iguales y uno es diferente". Mientras habla construye un triángulo ABC que aparentemente cumple las condiciones y cuando la investigadora le solicita que lo mueva, lo hace de tal manera que siempre parece tener dos lados congruentes (ver Imagen 30).

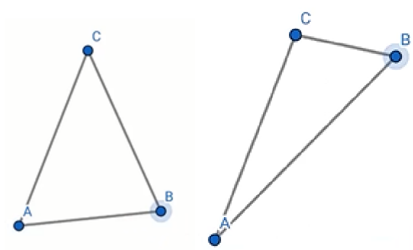


Imagen 30. Primer intento de Alicia para construir un triángulo isósceles

La investigadora le aclara a Alicia que debe usar alguna herramienta para que al construir el triángulo siempre sea isósceles, así que ella empieza a **ver las diferentes herramientas de GeoGebra** (las que se trabajaron con anterioridad). Inicialmente rechaza la idea de usar rectas paralelas porque "no se cruzan"; después decide evaluar "el medio o centro" y dice:

A: Pero creo que tampoco va a funcionar […] porque si se mueve (…) o sea, no puedo moverlos a los lados para hacerlos un triángulo […] va a quedar en recta, y eso no me sirve.

Alicia decide evaluar la idea de usar rectas perpendiculares ya que "se van a cruzar", pero luego descarta esa idea porque dice:

A: O sea, la perpendicular se cruza, pero habíamos dicho que era en un ángulo de 90°, entonces se podría hacer un triángulo en donde se cruce, pero para unirlo (…) cuando ya haga el triángulo se le ponga la otra línea, pues ya va a ser diferente.

Hasta este punto, Alicia no ha acabado su construcción, sin embargo, el menú de GeoGebra está sirviendo como un banco de propiedades que le permite buscar ideas para solucionar el problema. El ***propósito*** *es buscar un artefacto que le permita construir dos segmentos congruentes, pero no colineales, así que GeoGebra* ***amplifica*** *la capacidad de ver los artefactos de solución disponibles.*

Alicia continúa buscando en las herramientas de GeoGebra y dice que va a usar una circunferencia y cuando la investigadora le pregunta como lo va a hacer ella construye una circunferencia con centro en A, radios AB y AC y cuerda CB (ver Imagen 31). La investigadora le pregunta si el triángulo construido es isósceles y ella dice "voy a ver" y mide el segmento AC, pero antes de que mida el otro segmento la investigadora le preguntó por qué usó la circunferencia y ella dice:

A: Éste es el círculo y está el centro, entonces 2 lados están unidos al centro y ya dijimos que el centro siempre va a permanecer con la misma distancia desde el centro a la circunferencia, no importa si lo muevas. Y ya la tercera [se refiere a BC] está unida a los dos puntos, pero no está unida al centro, entonces cambia de lado, va a cambiar la de abajo, o sea del punto C y B, pero no va a cambiar las demás. O sea, del A y B no va a cambiar y de la AC no va a cambiar, pero sí puede cambiar el del C al B y estarían 2 iguales y uno diferente

Después de la explicación, Alicia afirma que está 100% segura de que cuando midan el segmento AB va a tener la misma medida que el segmento AC, y cuando lo hace en la pantalla aparecen dos medidas iguales que permanecen con el arrastre de los puntos.

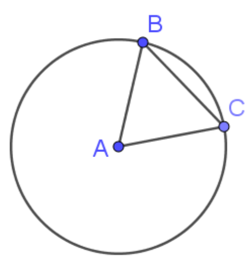


Imagen 31. Construcción de Alicia de un triángulo isósceles

Aquí la ***afirmación*** *que está en discusión es que el triángulo ABC (construido por Alicia) es isósceles. Inicialmente Alicia otorga un* ***valor epistémico*** *de probable a la afirmación,* *ya que cuando la investigadora le pregunta si es triangulo es isósceles su respuesta es "voy a ver", estableciendo como una posibilidad que sea isósceles o que no lo sea.*

Alicia presenta una ***prueba*** *de que el triángulo construido es isósceles. Para esto usa como* ***dato*** *de partida que hay dos segmentos que son radios de la circunferencia y* ***concluye*** *que esos dos segmentos tienen la misma medida gracias a un hecho establecido con anterioridad (tercer-enunciado), el cual se refiere a la congruencia de los radios de la circunferencia (ver* Imagen 32*).*

AB y AC son radios de la circunferencia con centro en A

"este es el círculo y está el centro, entonces 2 lados están unidos al centro"

BC no es radio de la circunferencia con centro en A

"la tercera está unida a los dos puntos, pero no está unida al centro"

En una circunferencia los radios son congruentes

"ya dijimos que el centro siempre va a permanecer con la misma distancia desde el centro a la circunferencia, no importa si lo muevas"

En el triángulo ABC, $AB = AC \neq BC$

"del A y B no va a cambiar y de la AC no va a cambiar, pero sí puede cambiar el del C al B y estarían 2 iguales y uno diferente"

Imagen 32. Esquematización del razonamiento de Alicia para probar que el triángulo es isósceles

La representación en este caso sirve para ilustrar la generalidad del hecho, permitiendo el entendimiento del discurso, es decir que al igual que en las pruebas Euclidianas es una parte esencial de la prueba. En cuanto al dinamismo, se puede afirmar que se usa directamente en el desarrollo de la prueba, pero fue parte del proceso para que Alicia adquiriera certeza sobre el hecho de que los radios de la circunferencia son congruentes (ver apartado 6.2.1). Ahora bien, debido a la falta de la presencia de co-acciones en la prueba presentada por Alicia, se puede afirmar que esta es una prueba ***traducible*** *a una prueba de papel y lápiz.*

Por último, al final de su discurso Alicia afirma que está 100% segura de que los segmentos AB y AC van a ser congruentes, esto implica que ella ahora ha otorgado un ***valor epistémico*** *de cierto a la afirmación. En este caso se ve explícitamente un cambio de valor epistémico por parte de Alicia, provocado por su propio razonamiento.*

6.2.4. Mediatriz

Alicia construye la mediatriz y cuando la investigadora le pregunta cuáles son las características de esa recta se da la siguiente conversación:

A: ¿No es como la perpendicular?

I: ¿Estás segura?

A: A ver déjame muevo (arrastra uno de los extremos del segmento por la pantalla), que cruza a la mitad.

I: Ok, esas son tus hipótesis.

A: O sea, que cruzan la mitad porque la perpendicular pues podría estar como más abajo. Bueno, a ver, podría ser que solamente yo la puse a la mitad (borra la recta mediatriz y la vuelve a construir). No, efectivamente está en la mitad porque no la puedo quitar.

I: Ok tú crees que esas son las 2 cosas que caracterizan a la mediatriz.

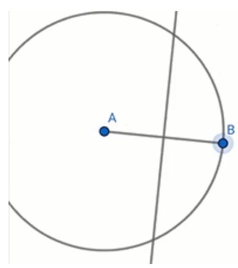


Imagen 33. Primera construcción de Alicia para la mediatriz

La investigadora le pregunta a Alicia cómo pueden saber que la recta efectivamente pasa por la mitad y ella dice que, con una circunferencia, pero al hacerlo usa el segmento AB como el radio de la circunferencia (ver Imagen 33) y dice "No, se cancela toda mi teoría no es lo que yo decía".

Hasta este punto la representación digital ha desempeñado un papel esencial en el proceso de Alicia, ya que se presenta una ***co-acción*** *en la que ella* ***construye*** *la recta mediatriz,* ***arrastra*** *y la recta se mantiene perpendicular por el punto medio. La estudiante cree que el hecho de que la recta pase por el punto medio no es una respuesta del* ***medio****, sino una condición que ella impuso a su construcción; pero, al hacerlo nuevamente y* ***arrastrar****, se da cuenta de que la respuesta que le ofrece es la misma. Esta experiencia le permite a Alicia acceder a las características de la mediatriz, de modo que la representación dinámica se puede ver como un* ***instrumento*** *que permite el acceso a un conocimiento nuevo.*

El valor epistémico no se hace explícito con alguna actitud proposicional expresada por Alicia, sin embargo, pareciera que ella ha otorgado un ***valor epistémico*** *de cierto a la* ***afirmación*** *de que la mediatriz pasa por la mitad y es perpendicular. Esto debido a que en un momento del dialogo ella afirma que "efectivamente" la recta pasa a la mitad, lo que se puede interpretar como una confirmación de su hipótesis.*

En cuanto al establecimiento de un ***valor lógico*** *se puede afirmar que es la investigadora quien promueve el desarrollo de acciones que permitan establecer la certeza de la afirmación. Al principio Alicia propone usar la circunferencia como* ***herramienta*** *para* ***mostrar*** *que la recta pasa por el punto medio, pero aún muestra dificultad en usarla y escoge el centro erróneamente. Como en la actividad anterior, ella busca usar la circunferencia como herramienta para probar afirmaciones asociadas a la equidistancia, pero aún no se ha apropiado del todo de esta herramienta.*

Al ver que la estrategia no funciona, Alicia borra lo construido e intenta otras ideas. Después de algunos intentos fallidos la investigadora le pregunta nuevamente cómo podrían hacer para probar que la recta sí pasa por la mitad y ella dice:

A Pues, midiéndolo.

I: ¿y si no podemos medir, ¿cómo lo hacemos? O bueno, mídelo.

A: (Pone el cursor sobre la mediatriz en un punto que aparentemente se ve como el punto medio de AB) ¡Ya sé!, bueno, a ver. Se me ocurre algo con el punto medio (construye C como punto medio de AB y arrastra los extremos del segmento).

I: Y, qué pasa con el punto medio, que se te ocurrió, explícame, Ilústrame.

A: Pues dije, el punto medio pasa (…) está justo en la mitad, como ya habíamos dicho. Si está (…) dónde está la mediatriz, es que sí pasa justamente a la mitad.

Aquí hay una ***co-acción*** *en la que Alicia construye el punto medio y cuando* ***arrastra*** *el punto* ***coincide*** *con el punto de intersección de la mediatriz y el segmento. En este caso la representación dinámica es una* ***herramienta*** *que es usada con el* ***propósito (****previamente establecido) de* ***mostrar*** *la coincidencia de dos elementos y de esta manera "convencer" a la investigadora de que la mediatriz pasa por la mitad del segmento. Además, se puede decir que en este caso el medio está* ***amplificando*** *la capacidad de Alicia para construir objetos con precisión.*

*Aquí Alicia presenta acciones que dan cuenta del **valor lógico** de la **afirmación** de que la mediatriz pasa por la mitad del segmento. Estas acciones se centran en **construir** el punto medio del segmento y la **respuesta** del medio es que cuando **arrastra** el punto medio **permanecen** en la recta. Esta **co-acción** permite que Alicia estructure un razonamiento que se puede presentar como una **prueba** que no es traducible al lápiz y papel ya que los datos son resultado de una co-acción (ver* Imagen 34*).*

C que es punto medio, también es punto de la mediatriz de AB
[Resultado de una CO-ACCION]

El punto medio equidista de los extremos del segmento
", el punto medio pasa (…) está justo en la mitad, como ya habíamos dicho"

↓

$$HI = GI$$
"Si está (…) dónde está la mediatriz, es que sí pasa justamente a la mitad."

Imagen 34. Esquematización del razonamiento de Alicia para probar que la mediatriz pasa por el punto medio

Para probar que la recta es perpendicular Alicia hace una nueva construcción y trata de medir el ángulo, pero toma los ángulos de forma incorrecta y cuando arrastra uno de los puntos de la construcción, nota que el ángulo que mide no es el que desea (ver Imagen 35a). Después de algunos intentos, Alicia logra medir el ángulo correctamente y dice: "ahí está 90°, deja lo muevo (arrastra el punto D sobre la recta y arrastra C libremente y en ambos casos la media se mantiene. Ver Imagen 35b). Bueno, sí son 90°."

(a) (b)

Imagen 35. Primer intento de Alicia para probar la perpendicularidad de la mediatriz

En este caso Alicia muestra la estructuralidad de la propiedad (a saber, que la mediatriz es perpendicular al segmento) gracias a una ***co-acción*** *en la que al* ***arrastrar*** *los puntos de la construcción y la* ***medida*** *del ángulo en E se mantiene en 90. La estudiante realiza* ***acciones relativas*** *a la percepción que le permiten mostrar que el hecho es cierto, lo que se refiere a darle un* ***valor lógico****.*

Por otra parte, la ***representación*** *está siendo usada con el* ***propósito*** *de mostrar la estructuralidad de la propiedad, de modo que* ***amplifica*** *la capacidad de Alicia para tomar medidas exactas. Es decir que la representación está siendo usada como una* ***herramienta*** *que le permite convencer a otros de que una propiedad es estructural gracias a un* ***argumento*** *centrado en la percepción y estructuralidad de la representación.*

La investigadora le pregunta a Alicia cómo haría la prueba si no pudiera medir y ella dice que lo haría con un polígono regular "¡un cuadrado!, pues es un ángulo recto, tienen que ser 90°, entonces lo pondría (…) una esquinita del cuadrado en esta esquinita donde se juntan C, D y E [se refiere a las rectas CE y DE en Imagen 36a]". Alicia pone en marcha su estrategia (ver Imagen 36b) y cuando la investigadora le pregunta que por qué hizo el cuadrado ella dice:

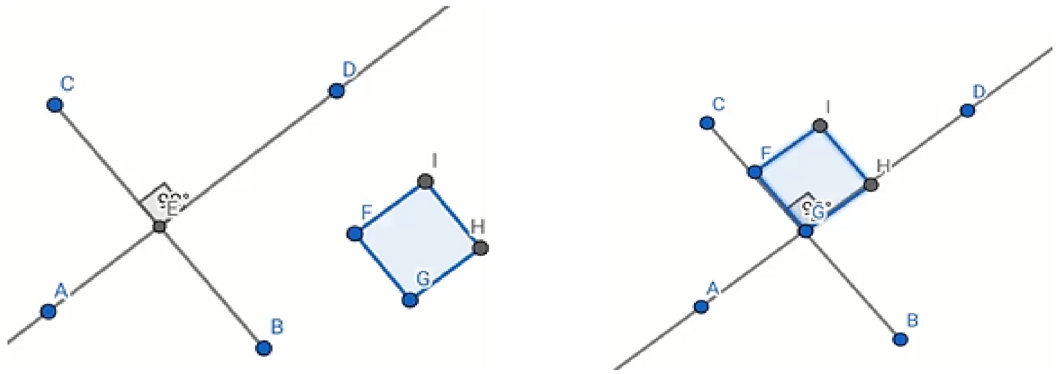
A: A: Para ver que si eran 90°.

I: Y, ¿qué hace el cuadrado luego?

A: Pues como tiene un ángulo recto, sus ángulos son rectos, no importa el tamaño que tenga siempre van a ser rectos, del mismo tamaño todos. Pues podríamos ver que la recta si es recta, valga la redundancia.

I: Que si es perpendicular [corrige a Alicia].

A: Aja, o sea que sí son los 90°



(a) (b)

Imagen 36. Segundo intento de Alicia para probar la perpendicularidad de la mediatriz

*En este caso la estrategia de Alicia consiste en usar un cuadrado como una **herramienta** que le permite **mostrar** que el ángulo en E es recto. Aunque Alicia logra su propósito debido a la falta de experiencia con los objetos de GeoGebra, se puede afirmar que con sus acciones ella pretendía usar la respuesta del medio para mostrar que los lados del cuadrado siempre pertenecen al segmento y a la mediatriz, de modo que en este caso el medio estaría **amplificando** su capacidad de realizar construcciones precisas y el razonamiento sería similar al presentado en la Imagen 34, pero aquí el tercer enunciado sería la definición de cuadrado.*

6.2.5. Suma de los ángulos internos de un triángulo

En la sesión se le explica a Alicia cómo usar la herramienta de "ángulo dada su amplitud" y se le pide que construya triángulos con ciertas características. Debido a dificultades técnicas la sesión se empieza a grabar después de que Alicia ha construido un triángulo con dos ángulos de 60° (ver actividad en el apartado 5.3.7), así que la investigadora le solicita que le recuerde cuál era su hipótesis y ella dice:

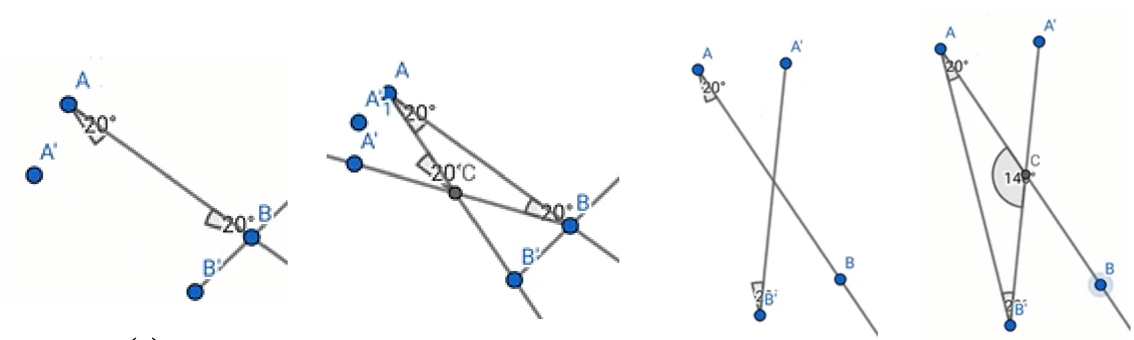
A: Ah, sí, que (…) o sea, cuando hacías un triángulo con dos ángulos de 60 automáticamente el tercero también era de 60 porque los triángulos (…) este cómo se llaman: equilátero son de 60° y como los 3 pues miden lo mismo los 3 son de 60 e iba a comprobarlo con esto, pero al parecer ya no puedo.

I: ¿Qué querías comprobar? ¿Qué está sucediendo ahí? ¿luego qué estás intentando?

A: Lo mismo, que los de 60 (…) pero con 20 [trata de construir un triángulo con tres ángulos de 20°]

En la pantalla, Alicia parece estar construyendo un triángulo con dos ángulos de 20° (ver Imagen 37a), pero después intenta que el tercer ángulo también sea de 20° (ver Imagen 37b) y dice “no, es que me está saliendo mal”. Alicia borra lo construido y hace un nuevo intento (ver Imagen 37c) pero al obtener el mismo resultado dice: “pues, creo que no se puede”, cuando la investigadora le pregunta por qué ella construye el triángulo y dice:

A: “Ahí está. El A y el B con una comillita se juntan, ¿no? y aquí entre esto (acerca hacia la intersección y construye C como punto de intersección (ver Imagen 37d) en esta unión se hace el triángulo ¿no?, pero como están muy cerradas al unirse se queda un espacio muy abierto, entonces este ángulo del C no es de 20, es más grande, entonces yo creo que sí, sólo se pueden hacer los triángulos equiláteros de 60, porque por lo menos con 20 no resultó”



(a) (b) (c) (d)

Imagen 37. Alicia trata de construir un triángulo con tres ángulos de 20 grados

Después de la experiencia, la investigadora le solicita a Alicia que sintetice su respuesta a la pregunta de que si es posible construir un triángulo con dos ángulos de 60° y ella dice: Sí es posible, pero el tercero también va a ser de 60. O sea, no puedes hacer uno de 60, 60 y 20. Bueno, o sea quizá si lo puedas hacer, pero, o sea, por lo menos si los 2 son de 60 estoy casi 100% segura que el tercero también va a ser de 60 y vas a tener un triángulo equilátero.”.

*Hasta este punto se está evaluando la posibilidad de construir dos ángulos de 60°, aquí hay una **co-acción** en la que Alicia construye dos ángulos y al **arrastrar** la **medida** del tercer* *ángulo resulta ser de 60°. La respuesta del medio lleva a Alicia a* ***cuestionarse*** *sobre la posibilidad de que el fenómeno se dé con otras medidas de ángulos.*

La estudiante plantea una ***hipótesis*** *en la que* ***afirma*** *que al construir un triángulo con dos ángulos de 20° entonces el tercer ángulo también será de 20°. En este caso ha otorgado un* ***valor epistémico*** *de probable a su nueva afirmación y gracias a la mediación digital hay una* ***co-acción*** *en la que ella construye dos ángulos de 20° y la* ***medida*** *del tercer ángulo no resulta ser 20°. Estas acciones le permiten otorgar un nuevo valor de imposible a su hipótesis.*

Es de resaltar que la interacción entre Alicia y el medio se ha modificado, ya que ahora es capaz de establecer hipótesis y usar las respuestas del medio para confirmarlas o para descartarlas. Es decir que se reconocen los efectos ***reorganizadores*** *en las estrategias de plantear y solucionar problemas.*

La investigadora pregunta si será posible construir un triángulo con dos ángulos de 90° y ella dice:

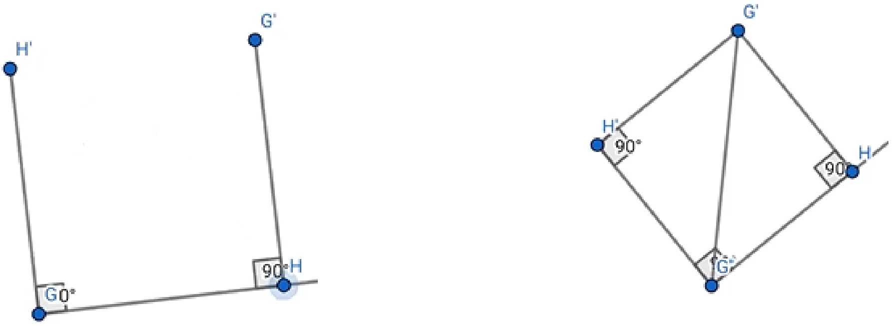
A: “Bueno desde (…) bueno, antes de hacer cualquier cosa yo creo que no, pero ahorita voy a ver y comprobar. Porque, o sea es recto ¿no?, en todo caso si hubiera 2 sería como un cuadrado sin la parte de arriba […] más que un triángulo quedaría como un cuadrado ¿no?

En esta nueva interacción se está evaluando la ***afirmación*** *de que si es posible construir un triángulo con dos ángulos de 90° y hasta este punto del dialogo la estudiante ha otorgado un* ***valor epistémico*** *de imposible a la afirmación. Este valor ha sido explicito con una* ***actitud proposicional*** *que se evidencia cuando ella dice “yo creo que no, y la cual es provocada con la* ***necesidad de escogencia*** *que provocó la investigadora.*

Alicia decide construir dos ángulos de 90 (ver Imagen 38a) y reafirma su teoría, así que dice:

A: Mi teoría es que no se puede. Puedes hacerlo con un ángulo, pero con dos no. O sea, aquí es un cuadrado y para hacerlo un triángulo pues lo parto en diagonal (construye un segmento G’G’’ ver Imagen 38b). Ahí hay un ángulo de 90° en uno, pero (…)

pero ya dos no, porque del G no son 90 grados porque no es recto, y la G con dos comillitas qué está abajo, tampoco. Yo digo que no, que no se puede.



(a) (b)

Imagen 38. Alicia trata de construir un triángulo con dos ángulos rectos

Aquí Alicia realiza acciones relativas a la percepción, que le permiten usar la representación para ***mostrar*** *que las rectas no se cruzan y por lo tanto* ***argumentar*** *que no es posible construir un triángulo con dos ángulos de 90°.*

Después la investigadora le pregunta a Alicia si es posible construir el triángulo con dos ángulos de 85° y ella dice:

A: Podría ser. No estoy segura, es que bueno, tomando en cuenta como el de las medidas de 90°, si es 85 pues solamente se le quitan 5° y está ya casi recto, no del todo. Lo que yo pienso es que no se puede, o sea, te saldría uno de 85 y los otros 2 serían diferentes. Pero, no sé, quizás sí se pueda y yo estoy diciendo que no

Después de dar su primera opinión Alicia realiza la construcción y nota que es posible construir el triángulo (ver Imagen 39), así que en contraste con su primer argumento ella dice:

A: Es que está más recto ¿no? Un ángulo de 90. O sea, desde aquí se cruzan poquito hasta arriba, arriba, arriba, el de 90 siento que no se cruzan nada, nada, nada. Como que hacen un rectángulo.

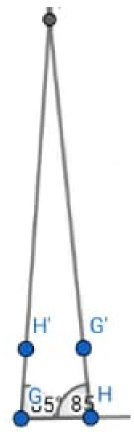


Imagen 39. Alicia construye un triángulo con dos ángulos de 85 grados

Aquí se puede afirmar que Alicia ha otorgado un ***valor epistémico*** *de probable a la* ***afirmación*** *de que es posible construir un triángulo con dos ángulos de 85°. Este valor ha sido explícito debido a que en su discurso usa actitudes proposicionales como: "podría ser" "no estoy segura", "lo que yo pienso es que no se puede… pero no sé, quizás sí…". En general estas actitudes muestran una tendencia a pensar que la afirmación es falsa, pero dejando espacio para que se pueda dar otro resultado.*

Alicia realiza acciones ***relativas a la percepción*** *y nota que es posible construir el triángulo, ya que se presenta una* ***co-acción*** *en la que ella construye los dos ángulos y la* ***respuesta*** *que le ofrece el* ***medio*** *es la intersección de las dos semirrectas que permiten formar el triángulo. Aquí la* ***representación*** *está sirviendo como una* ***herramienta*** *que amplifica su capacidad de representación y con la que puede establecer un dialogo para* ***mostrar*** *que la afirmación es cierta.*

Como siguiente problema la investigadora pregunta a Alicia si es posible construir un triángulo con dos ángulos de 120°. Inicialmente ella manifiesta no tener certeza y al realizar la construcción nota que es un caso similar al de 90° así que construye un triángulo que resulta tener como medidas 120°, 30° y 30° (ver Imagen 40) y dice:

A: Bueno, me acabo de dar cuenta de algo, pero (…) no sé. A ver, espera, espera (no dice nada y parece estar escribiendo). Los ángulos de los triángulos isósceles entre los 3, ¿siempre tienen que sumar 180? Es que, bueno, por ejemplo, el de 120 cuando es un triángulo isósceles son 120, 30 y 30 y 30 más 30 son 60 y 60 más 120 son 180.

Y, luego el triángulo isósceles de los 2 de 85, o sea 85 más 85 son 170 más los 10, 180.

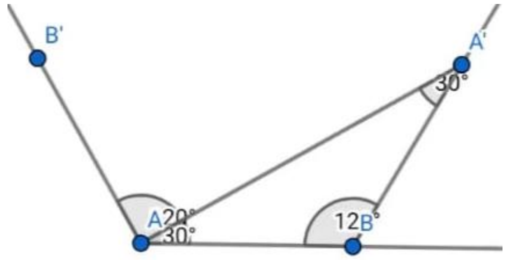


Imagen 40. Alicia trata de construir un triángulo con dos ángulos de 120°

En este caso la ***representación*** *es una* ***herramienta*** *que le permite a Alicia notar que no es posible construir un triángulo con dos ángulos de medida 120° de la misma manera que no era posible construir el de 90°. Aquí el* ***medio*** *amplifica la capacidad de Alicia para realizar construcciones precisas y como* ***respuesta*** *a sus acciones le presenta dos semi rectas que no se intersecan.*

En este caso, al igual que en el caso de los 90°, ella construye un segmento que conecta un punto y su rotación (A y A' en la Imagen 40) lo que permite la construcción de un triángulo que es isósceles. Las medidas que presenta el ***medio*** *como* ***respuesta*** *a las acciones de Alicia le permiten plantear una hipótesis de que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°. Esta hipótesis no estaba contemplada en los* ***propósitos*** *con los que la estudiante estaba empleando la representación, por lo que su experiencia con las representaciones digitales se convirtió en un* ***instrumento*** *que la acercaron a un conocimiento nuevo, el cual se refiere a establecer una hipótesis sobre la posibilidad o imposibilidad de construir un triángulo.*

La investigadora no confirma ni rechaza la hipótesis, sino que cuestiona a la estudiante sobre la certeza de esta. Alicia se queda unos minutos en silencio y luego se presenta la siguiente conversación:

A: ¡Mira! Sí son. Sí son, porque te acuerdas de que para el de 60 habíamos tratado de hacerlo con dos de 20 y eran 20 y 20 igual a 40, y el ángulo que nos salió que era muy grande, daba 140. Entonces, 20 y 20, 40, y 40 más 140 da 180.

E: Ah mira, entonces yo creo que es algo que podríamos escribir. Ponerlo ahí en tu hoja dónde estás escribiendo y pues tenerlo como una idea ya que tenemos (…) no tenemos dudas de ese hecho.

A: Ok, ¡entonces podríamos ocuparlo para otras preguntas que se pueden tener de dos! O sea, por ejemplo, de 90 y 90 ya dan 180 entonces no puedes tener un tercer ángulo porque ya se va a pasar de 180 y de 120 es lo mismo no puedes sumar 120 y 120 porque se va a pasar de 180 y ya no te puede dar un tercer ángulo.

Aquí Alicia ha otorgado un ***valor epistémico*** *de cierto a su* ***afirmación*** *de que la suma de los ángulos internos de un triángulo isósceles es 180°. Esto es posible porque evalúa diferentes* ***respuestas*** *ofrecidas por el* ***medio*** *y al hacer la suma de los ángulos se da cuenta que el 180 se mantiene en todos los casos. Además, ella propone asignarle un* ***estatus operatorio*** *a su afirmación, ya que le servirá para poder argumentar por qué no es posible construir un triángulo con ciertas medidas.*

En estos casos la representación ofrecida por el ***medio*** *fue de gran importancia ya que con la construcción de los ángulos aparecen una semirrecta y un punto que es la rotación de punto inicial, el cual invita a la estudiante a formar triángulos que resultan isósceles y en consecuencia la llevó a proponer su afirmación sobre la suma de los ángulos internos de los triángulos isósceles.*

Dejando de lado los triángulos isósceles la investigadora pregunta Alicia si es posible construir un triángulo con un ángulo de 90° y uno de 60°. La hipótesis inicial de Alicia es que, si es posible, diciendo "Porque en mi cuaderno hice un rápido dibujito y yo digo que sí se puede". La estudiante construye el triángulo solicitado y mide los ángulos los cuales son 90°, 60° y 30°, desencadenando la siguiente conversación:

A: Ajá. De que sí se puede, pero es que quiero ver algo.

I: ¿Qué quieres ver?

A: Ya ves que habíamos dicho que los triángulos isósceles daban 180. No sé si todos los triángulos den 180 entonces quería ver.

I: Ah, ok. Pero este no es isósceles.

A: No, es que ahí va mi (…) ahí va mi justificación. Si te da, pero tiene el de 30, ¿no? Y aquí era lo que yo iba a decir, que todos los triángulos suman 180 entre sus 3

> ángulos. Entonces, por ejemplo, ya desde la pregunta ¿es posible construir uno con […] 60 y 90? Suma 60 y 90 y te da 15, bueno 150, entonces todavía le falta para el 180. Entonces sí se puede, pero tendrá un ángulo más chico que serían los 30 para completar los 180. Por ejemplo (…), porque por ejemplo si te preguntaran: es posible construir un triángulo con 2 ángulos de 120, ¡no! porque ya se pasa, o sea si sumas 120 ya se pasa de 180.

*Aquí se presenta una **co-acción** en la que Alicia construye el triángulo con dos medidas y la **respuesta** del medio se refiere a presentar la tercera medida y mantenerla ante el arrastre. Estos son usos de la representación están al nivel de una **herramienta** ya que está **amplificando** su exactitud en la construcción y medición de ángulos.*

*Por otra parte, sus experiencias anteriores le permiten **plantear** una nueva hipótesis sobre la suma de los ángulos internos de un triángulo. Esta **afirmación** es distinta a la anterior ya que esta se refiere a los triángulos en general y no solamente a los isósceles. Plantear esta hipótesis y contrastarla con la información presente en la representación resulta ser un **propósito** que no estaba contemplado y por lo tanto las diferentes representaciones ofrecidas por el medio se han convertido en un **instrumento** de aprendizaje, que le permite adquirir un **valor epistémico** de cierto sobre una afirmación general.*

Después de establecer su conjetura, Alicia la usa para poder argumentar la posibilidad o imposibilidad de construir ciertos triángulos. Un ejemplo de esto se da cuando se le pregunta si es posible construir un triángulo con un ángulo de 80° y uno de 120°, ya que ella dice:

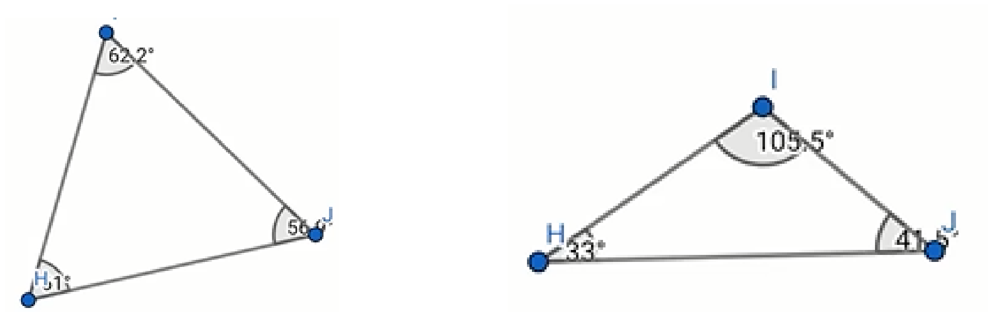
> A: No, porque ya se pasa de 180, ya son 200. Y siguiendo la lógica de que todos los triángulos suman entre sus 3 ángulos 180 no se podría."

*Aquí Alicia ha usado el hecho de que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180° para estructurar un razonamiento que le permite evaluar la **afirmación** de si es posible construir un triángulo con un ángulo de 80° y 120°. A esta última ella ha otorgado un **valor epistémico** de imposible gracias a su razonamiento, el cual se centra en establecer la relación de que si suma dos medidas es menos que 180 entonces se puede construir el triángulo ($p \rightarrow q$), ahora bien, como en el caso de 120° y 80° no se cumple la condición entonces el resultado no es posible ($\neg p \rightarrow \neg q$).*

Para probar que su conjetura de la suma de los ángulos internos de un triángulo es cierta, Alicia construye un triángulo IJH junto con las medidas de sus ángulos ($I = 62.2, J = 56.9$, $h = 61$, ver Imagen 41a), pero al ver que la suma de los ángulos da 180.1 arrastra el punto J y se detiene en un triángulo cuyas medidas suman 180° (ver Imagen 41b) y dice:

A: Espera, espera. Ah, mira, ahí ya da 180 cerrado. Conclusión en el triángulo anterior estaba mal y la aplicación está mal y yo estoy bien.

Nuevamente arrastra los puntos de la construcción y se detiene en un triángulo con medidas 56.2, 42.7 y 81, las cuales suman 179.9; al ver este resultado la investigadora le pregunta a Alicia por qué cree que ocurre ese fenómeno y ella dice “no sé, quizás sólo sean aproximaciones”.



(a) (b)

Imagen 41. Alicia construye un triángulo y toma las medidas de los ángulos internos

Como Alicia se refirió a las aproximaciones, la investigadora le enseña como mostrar más decimales. Alicia empieza a sumar manualmente cifras con gran cantidad de decimales para comprobar su hipótesis. Después de que Alicia mostrara su punto la investigadora le explica como GeoGebra puede sumar las cantidades por ella y hacen que la suma sea un resultado de GeoGebra (ver Imagen 42). Al ver el resultado Alicia exclama ¡180!, arrastra el punto J constantemente y al ver que la medida no cambia dice: “Entonces estaba bien yo.”

Imagen 42. Suma de los ángulos internos de un triángulo

Inicialmente Alicia pretende usar la representación para ***mostrar*** *la estructuralidad de la propiedad, de modo que realiza acciones específicas* ***relativas a la percepción*** *como la construcción de un triángulo y la toma de medidas. Sin embargo, en esta* ***co-acción*** *ella* ***arrastra*** *y las* ***medidas*** *que aparecen en la pantalla no siempre suman 180°, lo que la lleva a un conflicto cognitivo que posteriormente se resuelve con sumar los valores en el medio digital.*

Al final cuando la suma es efectuada por GeoGebra ella puede usar la representación con el ***propósito*** *que había anticipado, el cual era mostrar la estructuralidad, la cual es visible cuando se presenta una* ***co-acción*** *en la que* ***arrastra*** *y la suma de las medidas (que se ve en la vista algebraica) permanece en 180. En este caso la representación dinámica es una* ***herramienta*** *que es usada con el propósito de mostrar la estructuralidad de la propiedad y de esta manera "convencer" a la investigadora de que su hipótesis es cierta, es decir, que Alicia realiza acciones relativas a la percepción que dan cuenta del* ***valor lógico*** *de la afirmación.*

6.2.6. Relación ángulo central y ángulo inscrito

La investigadora le da instrucciones a Alicia para que construya un ángulo inscrito (el ángulo CBD que mide 76°) y le pregunta qué pasa con la medida del ángulo cuando arrastra los puntos. Cuando Alicia arrastra B (solamente en uno de los arcos determinados por DC) dice "No se cambia el ángulo" (ver Imagen 43a), la investigadora le pregunta si esa medida NUNCA cambia, ella arrastra B hasta el otro arco determinado por DC y ahora la medida de $B = 104$° (ver Imagen 43b), entonces dice

A: Si lo cambio del otro lado, o sea B puede estar del mismo tamaño yendo de C a D, pero si le doy la vuelta entonces se hace más grande.

I: ¿Qué tanto más grande?

A: 104. Entonces (pone el ángulo del otro lado, de modo que $B = 76$), otra vez son los de los 180° (arrastra B y en ocasiones es 76 y en otras 104).".

(a) (b)

Imagen 43. Alicia construye un ángulo inscrito

La investigadora le pregunta a Alicia si está segura de su hipótesis y ella decide arrastrara C y cambiar la medida del ángulo de manera que en una posición $B = 48.3°$ y en otra es $B = 131.7$; como los números no son exactos ella decide cambiar nuevamente el ángulo y las dos medidas posibles para el ángulo B son 52° y 128°. Inicialmente ella ve el 128 y dice: “Ahí el 128. Debería dar (…) espera (…) 52 (arrastra B y lo pone en el otro lado del arco CD) Ahí está, 52.”

Hasta este punto la representación ha funcionado como un ***instrumento*** *que acerca a Alicia a un nuevo conocimiento gracias una* ***co-acción*** *en la que ella* ***arrastra*** *uno de los puntos de la construcción y la* ***medida*** *se mantiene contante (en un cierto rango). La representación permite que Alicia se acerque a una propiedad estructural de los ángulos inscritos y establezca relaciones, ya que la representación está cargada de significado. Es decir que la representación está siendo mediadora en la adquisición de conocimientos nuevos por parte de Alicia, lo cual se refiere a un efecto* ***reorganizador*** *por parte del artefacto.*

Esta experiencia permite que Alicia otorgue ***valor epistémico*** *de cierto a la afirmación de que las dos medidas posibles del ángulo inscrito suman 180°.*

Después de determinar que el ángulo inscrito no cambia, la investigadora le presenta a Alicia los ángulos centrales y posteriormente le pide que realice una construcción donde el ángulo central y el inscrito compartan puntos en los lados. La investigadora le pregunta a Alicia si es posible mover los puntos de tal manera que el ángulo central sea 120° pero el inscrito no sea 60° y ella dice:

A: Sí se puede mientras el vértice del ángulo inscrito esté del lado contrario (…) bueno depende de dónde lo veas que sea el lado contrario […] O sea si lo pones aquí arriba (ver Imagen 44a), afuera del ángulo por decirlo (…) del ángulo inscrito, sí te va a dar pues 60, pero si lo pones abajo (arrastra H para el otro arco determinado por G y F, ver Imagen 44b), bueno ahorita porque tiene decimal, pero sería 120

(a) (b)

Imagen 44. Alicia construye un ángulo central de 120 y uno inscrito que no sea de 60

Aquí la representación sirve como ***herramienta*** *para que Alicia cumpla con su* ***propósito*** *de* ***mostrar*** *una idea adquirida con la experiencia del ángulo inscrito, centrada en que el ángulo inscrito cambia cuando el vértice se mueve al otro arco determinado por los puntos. Esta idea le sirve para* ***mostrar*** *a la investigadora un caso en el que el ángulo central es de 120 y el inscrito no es de 60.*

Después la investigadora cuestiona por qué pasa si el ángulo central mide 100° entonces Alicia arrastra para que se cumplan las condiciones del problema y dice que serán 50° después de verlo en la pantalla y aclara “bueno, si lo paso para abajo cambia” refiriéndose al otro arco determinado por F y G. Después la investigadora le pregunta por la situación en la que el ángulo inscrito sea 20 y nuevamente trata de arrastrar los puntos para que cumplan con las condiciones del problema (ver Imagen 45), sin embargo, solo logra dejarlo en 20.3 y dice “Bueno, supongo que sería 40”.

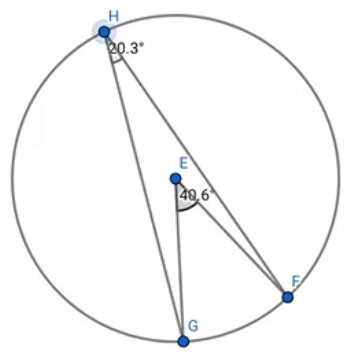


Imagen 45. Alicia construye un ángulo inscrito de 20 grados

Las diferentes experiencias con las representaciones dinámicas no solo sirven a Alicia como ***herramienta*** *para* ***mostrar*** *la posibilidad o imposibilidad de tener un determinado ángulo central con uno inscrito. También le sirven como un* ***instrumento*** *que le permite acercarse a nuevas ideas matemáticas. En este caso, el* ***hecho*** *que la medida del ángulo central es la mitad del ángulo inscrito. Esta idea se ve más claramente en el dialogo que siguió después.*

La investigadora pregunta por qué sabía que era 40, en qué hipótesis está basando su respuesta. Alicia arrastra nuevamente para evaluar otros casos y cuando la investigadora repite la pregunta se da la siguiente conversación:

A: Bueno, pues cuando estaba en 30, iba a medir 60 (…). Sería más o menos como el doble, yo pienso, porque cuando estaba en 30 estaba creo que en 59.9 y ahorita está en 25 y el doble de 25 es 50 y en 20 estaba como 40 entonces ha de ser el doble.

I: Ah de ser el doble, a ver, ¿estás 100% segura?

A: Este (…) sí, ha de ser el doble.

En el diálogo con la investigadora Alicia ha otorgado un ***valor epistémico*** *de cierto a la* ***afirmación*** *de que el ángulo central será el doble del ángulo inscrito, la cual es una modificación del hecho mencionado anteriormente. Este valor ha sido explícito cuando respondió de forma afirmativa a la* ***necesidad de escogencia*** *que provocó la investigadora con su pregunta.*

En este caso la representación fue crucial para que Alicia lograra llegar a su afirmación, ya que las respuestas en los casos evaluados la llevaron a un nuevo conocimiento matemático y a usar las representaciones como ***instrumento.***

La investigadora le pregunta qué va a pasar con el ángulo inscrito si el central mide 90° y ella dice:

A: Ah, 45 porque 90 es la mitad. O sea, el central va a ser más grande que el (…) ¡Ay!, ¿cómo se llama? [se refiere al inscrito].

Alicia trata de ubicar los puntos para que el ángulo central sea de 90° y al no poder se le sugiere que use la herramienta de “ángulo dada su amplitud” y ella lo usa para realizar la construcción (ver Imagen 46) y efectivamente el ángulo es de 45°. Alicia intenta explicar este fenómeno construyendo un ángulo JIL y dice “porque, es como si sacáramos a la mitad por aquí, lo moví tantito no me queda exacto 45 (…) es como si sacáramos este ángulo que está aquí para arriba.”

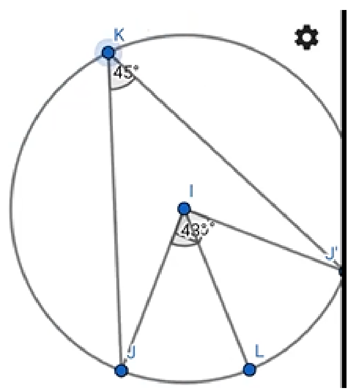


Imagen 46.Alicia construye un ángulo central de 90 grados

Aquí Alicia trata de decir por qué ocurre el fenómeno que relaciona el ángulo central con el ángulo inscrito, pero no posee los conocimientos para dar una razón teórica, sin embargo, usa este hecho como una ***herramienta*** *que le permite predecir la medida del ángulo inscrito cuando se le da el ángulo central, es decir que hay un cambio en el estatus de la afirmación a un* ***estatus operatorio.*** *Además, usa la representación para* ***mostrar*** *a la investigadora que su predicción era correcta y por tanto le permite tener más certeza de que su hipótesis es cierta.*

6.2.7. Explicar por qué: Triángulo isósceles

Inicialmente Alicia toma la medida de los ángulos en el triángulo y en la pantalla aparece $A = 143.57$, $B = 18.22$ y $C = 18.22$. Ella afirma que es un triángulo isósceles porque: “los triángulos isósceles tienen 2 ángulos iguales y uno diferente y pues A es el diferente al B y al C”. En el dialogo con la investigadora reafirma su argumento al decir: “Pues, es que lo único que se me ocurre (…), pues es su característica principal ¿no? que dos ángulos son menores que (…) o sea dos ángulos iguales, uno más grande o chico, pero hay dos iguales. Entonces, pues aquí está el más grande que es A y los otros dos C y B"

El primer ***argumento*** *de Alicia usa la* ***respuesta*** *del medio digital para afirmar que la representación cumple con la definición de triángulo isósceles. Aquí Alicia aprovecha la estructuralidad de la representación que vive en el medio de GeoGebra para* ***mostrar*** *que se cumple la definición gracias a una* ***co-acción*** *en la que al* ***arrastra*** *y la* ***medida*** *(que corresponde a dos lados del triángulo) es siempre la misma.*

En este caso, la representación dinámica es una ***herramienta*** *usada con el* ***propósito*** *de mostrar que dos de los lados se mantienen iguales. Este es un propósito pensado con anterioridad ya que la intención de Alicia era mostrar que la representación cumple con la definición de triángulo isósceles que ella conoce. Además, se reconoce que el medio le está permitiendo* ***amplificar*** *su capacidad de medir con exactitud.*

En busca de otro argumento, la investigadora solicita a Alicia que construya un triángulo parecido al dado, así que ella construye PQR (ver Imagen 47) y anticipándose a la pregunta de la investigadora ella dice:

A: Igual, no puedo estar segura de que sea un isósceles porque, aunque se parece mucho en forma, puede ser un escaleno. Por ejemplo, P puede medir 19 y R 20, y ya no serían iguales.

La investigadora le pregunta a Alicia por qué no se puede afirmar que el triángulo PQR es isósceles mientras que el ABC sí se puede afirmar.

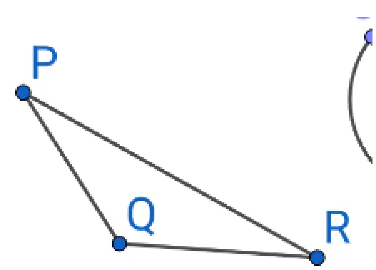


Imagen 47. Alicia construye un triángulo aparentemente isósceles

Inmediatamente ella decide arrastrar el punto B haciendo la circunferencia cada vez más grande o pequeña y dice:

A: bueno, es un círculo ¿no? y tiene el centro y como cualquier punto del centro cualquier parte del círculo mide lo mismo, entonces [...] de A a C mide lo mismo que de A a B

Después de esa afirmación Alicia trata de establecer una relación entre los ángulos del triángulo, así que la investigadora le pregunta a Alicia cuál es la definición de triángulo isósceles y ella para estar segura decide buscar en internet y después de leer una definición asociada a los lados del triángulo dice:

A: pues, aquí están los 2 lados de igual longitud, de C a A y de A a B tienen la misma longitud por ser un radio de un círculo y un radio de un círculo siempre va a medir lo mismo no importa su posición. O sea, si yo pongo C aquí va a medir lo mismo que si yo pongo C acá (arrastra C sobre la circunferencia).

La investigadora pregunta si esa afirmación es válida siempre y Alicia dice:

A: Sí, porque es un radio. O sea, si la rayita de C mientras siempre esté conectada al centro va a medir lo mismo. O sea, obviamente si conectas C a la mitad de (…) no, no a la mitad, un poquito más abajo de la mitad, digamos, no va a medir lo mismo. Pero, mientras sea un radio siempre va a medir lo mismo no importa en qué parte del círculo esté.

Para confirmar la respuesta de Alicia la investigadora le pregunta si el triángulo siempre será isósceles, así que ella arrastra C hasta que el triángulo parece equilátero (ver Imagen 48) y dice: "No, si mueves C muy cerca de (…) bueno no. Sí, siempre es isósceles, porque ahí decía por lo menos 2 iguales. Entonces, por lo menos 2 iguales, Pues aquí tienes cualquiera de los 3 iguales, entonces también es isósceles.

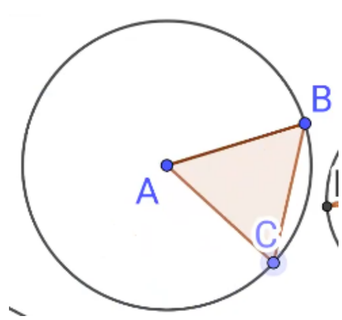


Imagen 48, Alicia ubica C de tal manera que el triángulo parece isósceles

En este caso al igual que en el anterior, Alicia se enfoca en argumentar que la representación digital cumple con la definición. Sin embargo, aquí no usa las medidas, sino que establece la congruencia a partir de un hecho que ella conoce. Usa como ***dato*** *la información de la representación dinámica que le muestra que los puntos B y C son puntos de la circunferencia y extremos de dos radios; esto para* ***concluir*** *que los dos segmentos tienen la misma longitud. Todo esto respaldándose en un hecho que ella conocía con anterioridad sobre la circunferencia (ver Imagen 49)*

AB y AC son radios de la circunferencia con centro en A

"de C a A y de A a B [...] por ser un radio de un círculo [...]porque es un radio. O sea, si la rayita de C mientras siempre esté conectada al centro va a medir lo mismo"

En una circunferencia los radios son congruentes

"un radio de un círculo siempre va a medir lo mismo no importa su posición"

En el triángulo ABC, $CA = AB$

"pues, aquí están los 2 lados de igual longitud, de C a A y de A a B tienen la misma longitud por ser un radio de un círculo"

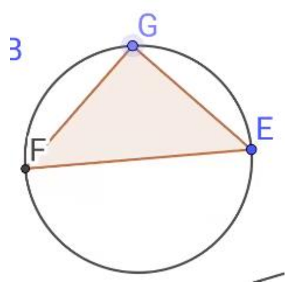
Imagen 49. Esquematización del razonamiento de Alicia para probar por qué el triángulo es isósceles

En este caso la representación dinámica parece no desempeñar un rol determinante en la prueba que presenta Alicia, ya que su razonamiento se podría ***traducir*** *a un problema de lápiz y papel. Sin embargo, no podemos afirmar que el dinamismo no haya influido en que ella recordara el hecho asociado a la circunferencia. En general, la representación es parte de la prueba, igual que las representaciones en las pruebas euclidianas.*

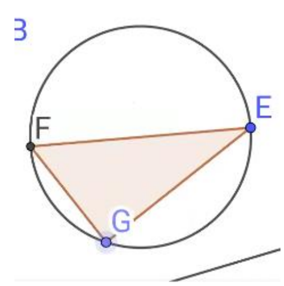
6.2.8. Explicar por qué: Triángulo rectángulo

La primera idea de Alicia consiste en medir el ángulo, sin embargo, como parece muy sencillo pregunta si tiene la restricción de usar medidas y la investigadora aclara que sí ya que la idea no es mostrar que es recto sino explicar por qué es recto. Así que Alicia propone una estrategia asociada a la construcción de un cuadrado, ya que dice: "por ejemplo podría poner un cuadrado y la esquina quedaría justamente en los lados del cuadrado", sin embargo, cuando la investigadora aclara que el hecho debe ser probado sin importar la posición de G Alicia arrastra el punto G sobre la circunferencia y dice:

A: ¡Ahhh! Ok, ya. Bueno, pues porque ayer habíamos visto (…) que sí en un ángulo inscrito de medio círculo, bueno, haces un ángulo inscrito en medio círculo, siempre va a dar 90 donde esté. Porque, se podría decir que es la mitad de (…) del 90. Ya ves que habíamos dicho que está un ángulo central, que en este caso sería la mitad del círculo, que son 180° y un ángulo inscrito del ángulo de 180°, cómo le llamamos para arriba o hacia afuera [se refiere a una configuración como en la Imagen 50 a], va a ser la mitad del ángulo inscrito ¿no? y hacia adentro [se refiere a una configuración como en la Imagen 50 b] va a ser el número que falte (…) que le falte a la mitad del ángulo central para hacer los 180. Entonces, no importa si está aquí o está acá (arrastra G para mostrar las dos posiciones que se muestran en la Imagen 50). Como el ángulo central es 180, pues porque está recto pasando por el punto que aquí es imaginario [se refiere al centro de la circunferencia], digamos, del centro del círculo. Entonces, no importa por donde lo veas, si está arriba o por afuera (arrastra G), la mitad de 180 es 90 ¿no? y digamos que esto es por abajo (arrastra G como se muestra en la Imagen 50 b) o por adentro, ¿Cuánto le falta a 90 para llegar a 180? pues 90, entonces no importa en qué parte de lo pongas va a medir 90.



(a)



(b)

Imagen 50. Alicia arrastra G para mostrar dos posiciones posibles

La primera idea de Alicia consiste en ***mostrar*** *de manera directa que el ángulo en G es de 90 grados, lo que cumple con la definición de triángulo rectángulo. Sin embargo, al no poder medir su estrategia se centra en usar un cuadrado como una* ***herramienta*** *que le permita* ***mostrar*** *que el ángulo es recto. Esta estrategia es descartada porque se le ocurre una nueva relacionada al ángulo central y al ángulo inscrito.*

En la nueva estrategia, Alicia trata de explicar por qué el ángulo es de 90°. Para esto usa como ***dato*** *de partida que el ángulo en G es un ángulo inscrito asociado a un ángulo central de 180° y* ***concluye*** *que el ángulo en G tiene que ser de 90°. Para esto usa un conocimiento que tiene un valor epistémico de cierto (ver apartado 6.2.6) y que se conoce en geometría como el teorema del ángulo inscrito. Además, ella usa otro conocimiento que ha adquirido, pero que no se relaciona a un teorema enunciado de manera explícita en la geometría, el cual se refiere a que las dos posibles medidas del ángulo inscrito son suplementarias; este conocimiento fue adquirido porque en su experiencia con los ángulos inscritos al arrastrar siempre habían dos medidas posibles dependiendo del arco de circunferencia en que estuviera el vértice del ángulo (ver sección 6.2.6), de modo que ella considera importante probar que el ángulo va a ser de 90° para cualquier posición de G y lo hace usando dos hechos a los que había otorgado un valor epistémico de cierto (ver Imagen 51).*

El ángulo en G es un ángulo inscrito asociado a un ángulo central de 180°

"un ángulo central, que en este caso sería la mitad del círculo, que son 180°

El ángulo inscrito es la mitad del ángulo central

"Ya ves que habíamos dicho que está un ángulo central […] y un ángulo inscrito […] va a ser la mitad del ángulo central"

Los dos posibles ángulos inscritos son suplementarios

"y hacia adentro va a ser el número que falte (…) que le falte a la mitad del ángulo central para hacer los 180."

El ángulo en G mide 90°

"Entonces, no importa por donde lo veas, si está arriba o por afuera la mitad de 180 es 90 ¿no? y digamos que esto es por abajo o por adentro, ¿Cuánto le falta a 90 para llegar a 180? pues 90, entonces no importa en qué parte de lo pongas va a medir 90."

Imagen 51. Razonamiento de Alicia para probar que el ángulo inscrito en una semicircunferencia es de 90°

Sobre la representación se puede afirmar que permite el entendimiento del discurso y al igual que en las pruebas Euclidianas es una parte esencial de la ***prueba*** *sirviendo como una* ***herramienta*** *de referencia. En cuanto al dinamismo se puede afirmar que cambió la forma en la que la estudiante entendió la afirmación, ya que debía probar que sin importar la posición de G el ángulo siempre es de 90°, lo que la llevó a usar el segundo hecho* *mencionado en la Imagen 51. Sin embargo, no se presentó ninguna co-acción que fuera esencial en la prueba de Alicia, por lo que se puede afirmar que esta es una prueba **traducible** a una prueba de papel y lápiz.*

6.2.9. Explicar por qué: Triángulos semejantes

La estudiante observa la pantalla y afirma que la distancia de J a L y de J a M es la misma, pero cuando la investigadora le pregunta por qué lo sabe ella arrastra L y hace coincidir ambos triángulos (ver Imagen 52) y dice "Ya […] pues que, si le giras aquí, ya se hacen del mismo tamaño"

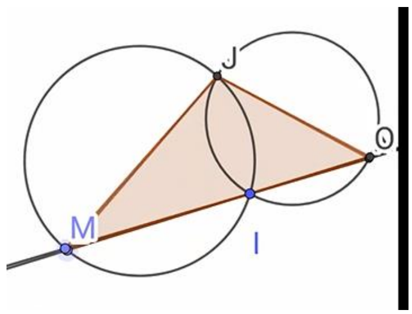


Imagen 52. Alicia arrastra para que los triángulos se superpongan

*Hasta este punto se desarrolla una **co-acción** en la que Alicia **arrastra** uno de los puntos de la construcción y hay una posición en la que los dos triángulos **coinciden.** Esto le permite a Alicia usar la representación como una **herramienta** para **mostrar** que en esa posición los ángulos miden lo mismo ya que los dos triángulos se pueden superponer.*

Sin embargo, la investigadora aclara a Alicia que su argumento es válido solo en ese caso, ya que no siempre coinciden, entonces ella arrastra L haciendo que un triángulo se vea más pequeño que el otro (ver Imagen 53) y dice:

A: "bueno, a ver, L y M están en una circunferencia, y O y N están en otra. Su (…) como vértice en común es J que está en la unión de las dos circunferencias (arrastra constantemente L). Ok, bueno, Supongo yo que miden lo mismo, porque (…) M y L están en el círculo del mismo tamaño y N y O también están en el círculo del mismo tamaño".

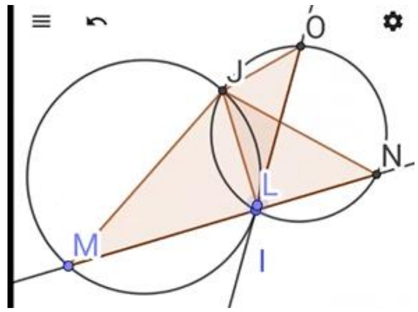


Imagen 53. Alicia arrastra para que los dos triángulos se diferencien

La investigadora pregunta si estar en la misma circunferencia los hace iguales y Alicia dice: "no, son ángulos inscritos" y cuando la investigadora le pregunta que implica que sean inscritos ella afirma que:

A: Pues que tienen sus segmentos que hacen el triángulo en el círculo sin tocar el centro del círculo […], entonces, cómo están unidos al mismo punto L y M, que el punto sería J, medirían lo mismo […]. Y lo mismo pasa con la otra circunferencia que es J y O y J y N, por eso mide lo mismo porque están unidas al mismo punto […] como la línea que los une pasa justamente por la unión de los círculos, también, pues como que es proporcional al movimiento de cualquiera de los 2 en el círculo.

Se da una conversación entre la investigadora y la estudiante en la que se aclara que se está intentando probar la congruencia de los ángulos, pero se está refiriendo a segmentos, lo que da paso a las siguientes líneas:

A: Miden lo mismo, porque no se cambia la inclinación de J ni de I que es por donde se unen los 2 círculos. o sea, si yo hiciera a J más hacia la izquierda en sentido del círculo, pues ya sería más grande el ángulo de L y de M, porque están unidos ahí. Lo mismo pasa con N y O y lo mismo pasaría si yo moviera I alrededor (arrastra I, ver Imagen 54) o sea, ya viste se hace más chico o grande, pero como los 2 están unidos a lo mismo, a J y J no se mueve, entonces pues siguen siendo iguales los ángulos.

E: ¿Quién es igual con quién?

A: El ángulo de JMI y el ángulo de JLI […] Porque los otros vértices que es J e I, que hacen prácticamente el ángulo con la rayita, o sea estas rayitas (señala el que sería un segmento JI) que hacen el ángulo no se están moviendo, […] y M y L están conectados de las mismas (…) de los mismos puntos que no se mueven, y no se hacen más grandes, por eso miden lo mismo, aunque esté uno más alejado del otro.

E: Y ¿eso cuando lo vimos? O ¿a qué te refieres? o ¿qué hecho estás poniendo juego? porque no me quedó muy claro.

A: Es de los ángulos inscritos que habíamos visto, que mientras no se pase para adentro del ángulo central no cambia [se refiere a que no cambien de arco].

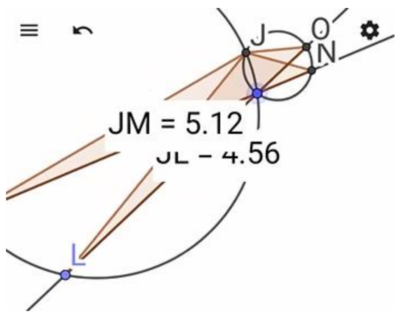


Imagen 54. Alicia arrastra para cambiar el tamaño de las circunferencias

Alicia logra determinar la congruencia de dos pares de ángulos, pero no logra asociar esto al hecho de que la suma de todos los ángulos internos de un triángulo es 180° para así probar la congruencia de los ángulos faltantes (los que tienen vértice en J). Ella logra probar que cada par de ángulos son congruentes usando como ***dato*** *que son ángulos inscritos en una misma circunferencia y que comparten extremos (J e I), para* ***concluir*** *que tiene la misma medida, es decir que $\angle JMI = \angle JLI$ y que $\angle JNI = \angle JOI$. Esta conclusión es posible gracias a un conocimiento establecido con anterioridad y que tenía el* ***valor epistémico*** *de cierto (ver sección 6.2.6), el cual se refiere a que los ángulos inscritos mantienen la misma medida ante el arrastre (ver* Imagen 55*).*

$\angle JMI$ y $\angle JLI$ son inscritos en una circunferencia; $\angle JNI$ y $\angle JOI$ son inscritos en otra circunferencia

“M y L están en el círculo del mismo tamaño y N y O también están en el círculo del mismo tamaño” “son ángulos inscritos”

La media del ángulo inscrito no cambia

“*porque no se cambia La inclinación de J ni de I que es por donde se unen los 2 círculos [… …]Es de los ángulos inscritos que habíamos visto, que mientras no se pase para adentro del ángulo central no cambia”*

$$\angle JMI = \angle JLI, \angle JNI = \angle JOI$$

“Miden lo mismo [……] el ángulo de L y de M, porque están unidos ahí. lo mismo pasa con N y O.” “entonces pues siguen siendo iguales los ángulos […]El ángulo de JMI y el ángulo de JLI”

Imagen 55. Razonamiento de Alicia para probar que la medida de dos pares de ángulos es la misma

La representación en este caso es esencial para plantear el problema y la prueba de Alicia, ya que ilustra la generalidad del hecho asociado a los ángulos inscritos y facilita el entendimiento del discurso, o sea, que, igual que en las pruebas Euclidianas es esencial. En cuanto al dinamismo, no se usa directamente en el desarrollo de la ***prueba****, pero fue esencial para que Alicia pudiera ilustrar que le permite garantizar que los ángulos son iguales. Por la ausencia del dinamismo en la prueba final, se puede afirmar que Alicia logró dar cuentas del* ***valor lógico*** *de la afirmación con una prueba* ***traducible*** *a una prueba de papel y lápiz.*

6.2.10. Síntesis del trabajo de Alicia

Para condensar la información sobre la interacción de Alicia con las representaciones dinámicas decidimos realizar la siguiente tabla, en donde relacionamos las acciones del usuario con los propósitos y las respuestas del medio dinámico con cada una de las afirmaciones realizadas (ver Tabla 7. Síntesis del trabajo de Alicia Tabla 7).

Tabla 7. Síntesis del trabajo de Alicia

		1	2		3	4	5		6		7	8	9	10	11	12		13	14	
Valores	V. epistémico	X			x		x				x	x	x	X	X					
	V. lógico		X	x		X		x	x	x						x	x	x	X	x
Acción	Arrastrar				x	X	x										x	x	X	x
	Medir y arrastrar	x	X						x		x	x	x	X	X	x				
	Construir y arrastrar			x				x		x										
	Búsqueda en el menú					X														
Respuesta	Sin cambio	X	X						x			x	x	X	X	x				
	Cambio constante																			
	Comportamiento inesperado				x		x				x	x	X		x					
	Pertenencia, contenencia o coincidencia			x				x		x									X	
Sirve para…	Obtener nuevas ideas geométricas	X			x		x				x	x	x	X	X					
	Encontrar una estrategia			x				x		x							x	x		
	Mostrar la estructuralidad de la propiedad		x						x							x			X	
	Usar un hecho con cierto valor epistémico			1		1		2		x							1	10 y 11		11

Las afirmaciones que relacionamos en la tabla son:

1. Los radios de la circunferencia son congruentes.

2. El punto medio está en la mitad.
3. Tres puntos serán colineales
4. El triángulo construido es isósceles.
5. La mediatriz pasa por la mitad de dos puntos
6. La mediatriz es perpendicular al segmento
7. Al construir un triángulo con dos ángulos congruentes el tercero tendrá la misma medida.
8. Es posible construir un triángulo con dos ángulos de 90°.
9. La suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°
10. Las dos medidas posibles de un ángulo inscrito suman 180°.
11. El ángulo inscrito es la mitad del central
12. Por qué: triángulo isósceles
13. Por qué: triángulo rectángulo
14. Por qué: triángulos semejantes

6.3. El trabajo de Santiago

Santiago es un estudiante que participó durante todo el proceso, sin embargo, tuvo dificultades con la integración de los artefactos tecnológicos a su práctica. En las actividades finales (ver a detalle en el apartado 5.3.10) solo logró dar explicaciones a uno de los problemas usando elementos abordados en las sesiones anteriores. A continuación, presentamos el análisis de dos actividades relacionada con la circunferencia, la actividad grupal y las tres actividades finales.

6.3.1. Los radios de la circunferencia son congruentes

La entrevista le solicita a Santiago que construya una circunferencia y un radio, al hacerlo arrastra uno de los extremos del segmento y afirma que efectivamente el punto permanece en la circunferencia. La investigadora le solicita que construya un segundo radio (ver Imagen 56) y le pregunta cuál es la relación entre esos segmentos, el estudiante arrastra uno de los puntos de la circunferencia mientras dice: “pues que giran […] están en el mismo circulo”.

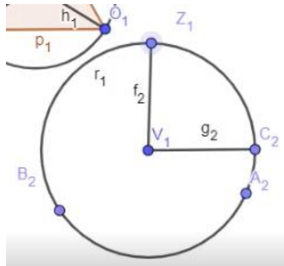


Imagen 56. Santiago construye una circunferencia y dos radios

*Hasta este punto Santiago realiza acciones como el **arrastre** de los puntos y el medio **responde** haciendo que estos permanezcan en la circunferencia y no se altere su longitud. Sin embargo, acá solo hay dos acciones aisladas que no se complementan para algún propósito especifico, por lo tanto, no se puede afirmar que haya una co-acción.*

Continuando, la investigadora pregunta específicamente por la relación entre las medidas y pregunta si alguno va a medir más que el otro, así que Santiago arrastra los puntos Z_1 y C_2, estima una medida de 4 centímetros y afirma que ambos segmentos van a medir lo mismo sin importar la posición. Por último, Santiago mide los segmentos para mostrar que su hipótesis es correcta y al hacerlo en aparecer en la pantalla 22.96 como medida de cada uno de los segmentos, el estudiante arrastra uno de los puntos de la circunferencia y dice “ahí está siempre son iguales”.

*Acá se puede ver la presencia de una **co-acción** en la que el estudiante **arrastra** y la **longitud** del segmento se mantiene aparentemente constante al ser **comparada**, lo que le permite al estudiante presentar la hipótesis (**afirmación**) de que los segmentos van a tener siempre la misma longitud; está hipótesis se refiere a un conocimiento nuevo al que Santiago se acerca por su interacción con la representación, por lo que se pueden ver los efectos **reorganizadores** del artefacto (la representación dinámica), ya que como consecuencia del dinamismo el estudiante pudo adquirir ciertas ideas matemáticas. La representación dinámica se usa como **instrumento** de aprendizaje.*

*Sobre la **afirmación** de que los radios de una circunferencia siempre miden lo mismo sin importar su posición, no se puede afirmar con certeza si ha otorgado un cierto valor epistémico. Sin embargo, al final realiza acciones **relativas a la percepción** en la que la representación dinámica le permiten **mostrar** la estructuralidad de la propiedad gracias a una **co-acción** en la que el estudiante **arrastra** los puntos de la construcción (Z_1 y C_2) y la*

***medida** permanece en 22.96. En este caso, el medio dinámico **amplifica** la capacidad del estudiante para medir segmentos con precisión, por lo que el artefacto (la representación dinámica) está sirviendo como una **herramienta** para mostrar que la hipótesis es correcta.*

6.3.2. Construir un triángulo isósceles

Santiago usa la herramienta "polígono" para construir un triángulo que aparentemente es isósceles (ver Imagen 57) y dice "estos son los que tienen dos lados iguales y uno diferente". La investigadora lo cuestiona sobre si el triángulo siempre será isósceles, así que arrastra el punto C y afirma que el triángulo es isósceles siempre y cuando no lo muevan.

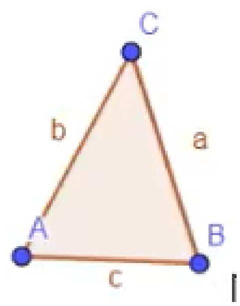


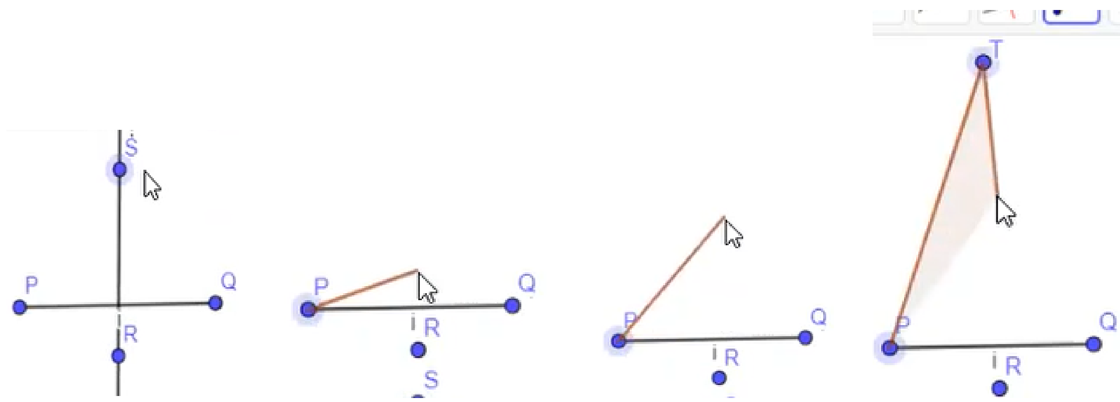
Imagen 57. Santiago construye un triángulo aparentemente isósceles

La investigadora le solicita al estudiante que construya un triángulo que se mantenga isósceles ante el movimiento, entonces Santiago da un vistazo a todas las herramientas de construcción y decide usar "polígono rígido" para construir uno a partir de los puntos D y E (ver Imagen 58a). El estudiante arrastra el punto E y todo el triángulo se mueve por la pantalla sin modificar su apariencia por lo que afirma que el triángulo es isósceles. Para mostrar que el triángulo construido cumple con las condiciones para ser isósceles Santiago decide medir los ángulos y al hacerlo en la pantalla aparecen las medidas de 73.27, 70.11 y 36.62 (ver Imagen 58 b), por lo que decide hace un nuevo intento, pero el resultado es el mismo (esto lo hace dos veces más).

Imagen 58. Santiago usa "polígono rígido" para construir un triángulo aparentemente isósceles con la herramienta

Aquí Santiago trata de usar la ***medida,*** *que GeoGebra ofrece como respuesta a sus acciones, como una* ***herramienta*** *para* ***mostrar*** *que el triángulo efectivamente es isósceles. Sin embargo, la medida presentada no cumple con la definición que el mismo propone ("que tienen dos lados iguales y uno diferente") por lo que no le es posible usar el artefacto (la representación) con el* ***propósito*** *que había dispuesto.*

Santiago intenta otra estrategia y construye un segmento PQ, junto con una recta que aparentemente parece mediatriz (ver Imagen 59a). Sin embargo, borra la recta y usando "polígono rígido" construye un triángulo que aparentemente es isósceles. El tercer punto que construye no es arbitrario, ya que mueve el cursor sobre una mediatriz imaginaria (ver Imagen 58 b, c, d), sin embargo, después de construirlo dice: "me quedó chueco (borra el polígono) es que con mi laptop estoy utilizando una regla para que quede derecho". Intenta una segunda vez, pero nuevamente falla.



(a) (b) (c) (d)

Imagen 59. Santiago usa una "mediatriz" para construir lo que parece un triángulo isósceles

Santiago trata de usar la misma estrategia por tercera vez, pero la investigadora le dice que puede usar la herramienta "mediatriz" para ya no usar la regla, pero que debe probar que el triángulo efectivamente es isósceles sin usar medidas. El estudiante usa la mediatriz (ver Imagen 60) y dice: "y para saber que es isósceles tengo un transportador", sin embargo, la investigadora le aclara que debe probarlo de tal manera que ella pueda ver lo que está haciendo, así que el estudiante hace una búsqueda por el menú y después de algunos intentos decide darse por vencido.

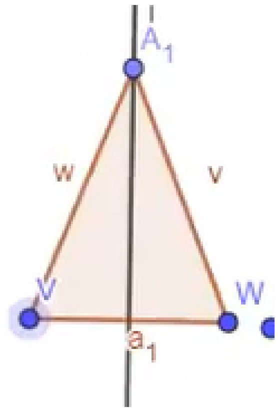


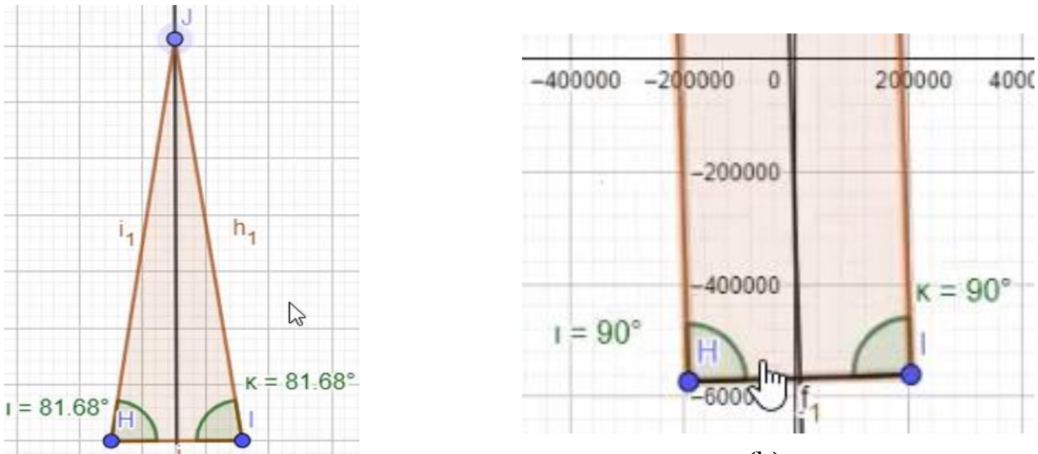
Imagen 60. Santiago usa una mediatriz para construir el triángulo isósceles

En esta parte, Santiago trata de recrear sus experiencias de construcción en papel y lápiz. Primero con la construcción de una recta que parece la mediatriz y luego al usar una regla sobre la pantalla de la computadora, como si esta reemplazara el papel (cuando dice: me quedó chueco, es que con mi laptop estoy utilizando una regla para que quede derecho). Sin embargo, sus estrategias no funcionaron porque no había una garantía de que la recta pasa por la mitad del segmento, como puede suceder cuando se usa un papel cuadriculado.

En general, se puede decir que el ***medio*** *estaba siendo un obstáculo para Santiago, ya que no podía usar* ***las herramientas*** *de construcción de la misma manera que usaba sus análogas en el papel. En ese sentido cuando logra realizar la construcción usando la recta mediatriz, no puede probar que el triángulo es isósceles debido a que en su experiencia aún no había creado conciencia del por qué al construir el tercer punto en esa posición especifica (sobre la mediatriz) resultaba un triángulo isósceles.*

6.3.3. Suma de los ángulos internos de un triángulo

Santiago aprende a usar la herramienta de construcción de GeoGebra (ver etapa de familiarización, apartado 5.3.7) y cuando la investigadora le pregunta por la posibilidad de construir un triángulo con dos ángulos de 60° dice: “no es posible porque son iguales”; cuando se le pregunta por uno con dos de 90° dice “no, porque sería un rectángulo” y cuando la investigadora llega a la pregunta sobre un triángulo con dos ángulos 85° repite la respuesta dada con el de 60°. Ante las respuestas de Santiago la investigadora le pregunta que: si no es posible construir un triángulo con dos ángulos iguales, entonces por qué es posible construir un triángulo isósceles. El estudiante decide cambiar su estrategia y construye un triángulo isósceles usando una mediatriz (ver Imagen 61a) y arrastra J sobre la mediatriz hasta que los ángulos de la base muestran ser de 90° (ver Imagen 61b).



(a) (b)

Imagen 61. Santiago construye triángulos con dos ángulos del mismo tamaño

En la siguiente sesión Alicia asistió y la investigadora retoma la pregunta de si es posible construir un triángulo con dos ángulos de 90° y Santiago dice: "sí se puede, pero son muy muy largos". Santiago explica su construcción mientras construye un triángulo isósceles MNO (similar al que se presenta en Imagen 61 a) y cuando la investigadora le pregunta por qué construyó un triángulo de ese tipo, él dice: "porque dos ángulos son iguales y uno no". Santiago mide los ángulos del triángulo y arrastra el punto O mientras dice: "se puede construir un triángulo con dos ángulos de 90 pero sería muy (…) muy grande". La investigadora le pregunta con qué intención arrastra O y responde "va a llegar a (…) va a llegar a los 90°". Mientras Santiago arrastra la investigadora le pregunta si podrá construir un triángulo con dos ángulos de 100° y su respuesta es "sí" afirmando que es solo cuestión de alejar a O cada vez más.

Hasta aquí se están evaluando las ***afirmaciones*** *sobre la posibilidad de construir un triángulo con dos ángulos de 90° o dos ángulos de 100°. Las cuales tienen un* ***valor epistémico*** *de cierto para Santiago, ya que ante la* ***necesidad de escogencia*** *provocada por la investigadora responde de manera afirmativa.*

En la sesión individual Santiago construye el triángulo y al ***arrastrar*** *el punto J, el medio le responde con un* ***incremento*** *en la medida de los ángulos congruentes, hasta el punto en* *el que la medida que se ve es de 90°. Esta experiencia lleva a que Santiago otorgue un valor epistémico de cierto a las afirmaciones aun cuando son falsas. Para otorgar* ***valor lógico*** *y convencer a Alicia de que sus afirmaciones son "ciertas", Santiago decide realizar* ***acciones relativas a la precepción*** *y construye un triángulo isósceles buscando que con el arrastre pueda "mostrar" que es posible construir un triángulo con dos ángulos rectos.*

La investigadora le pregunta a Alicia qué opina de la estrategia de su compañero y ella dice: "sobre el triángulo con dos ángulos de 90 […] yo había dicho que no se podía". Buscando un debate de argumentos la investigadora pregunta cómo saber cuál de los dos está en lo correcto, así que Alicia dice" yo sigo con mi idea de que no se puede (…) pero quizás si le sigue moviendo sí se pueda […]ver para creer".

Santiago continúa arrastrando O y mientras lo hace, Alicia comparte su pantalla (ver Imagen 62) y explica: "como los dos son rectos, van para arriba. Aunque se haga muy muy largo (aleja la pantalla) nunca se van a tocar, porque van para arriba […] justamente ahorita Santiago estaba subiendo el punto, pero, aunque ya estuviera super cera del 90, igual había como una rayita (…) que hacía que no estuviera completamente recto, o sea, todavía está inclinado poquito"

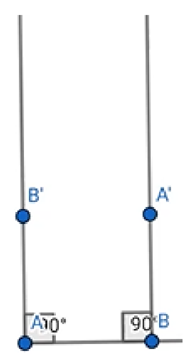


Imagen 62. Pantalla de Alicia en la sesión grupal

Aquí Alicia manifiesta que para ella la ***afirmación*** *tiene un valor epistémico de falso el cual hace evidente gracias al* ***conflicto*** *que hay entre su valor y el otorgado por Santiago. Para establecer un* ***valor lógico*** *sobre su afirmación ella decide realizar acciones* ***relativas a la percepción****, en las que muestra dos rectas que parecen paralelas y que según sus afirmaciones nunca se van a encontrar.*

Hasta aquí ambos estudiantes basan sus argumentos en representaciones que consideran lo que va a pasar más allá de lo que se puede ver la pantalla. Por una parte, Alicia afirma que las rectas siempre van a ser paralelas, mientas que Santiago afirma que al alejar el punto se van a lograr tener dos ángulos de 90°.

Después de que cada estudiante escucha la versión del otro no hay un cambio en la opinión propia, ya que Santiago dice: “yo sigo con mi teoría de que sí se puede […] creo que es posible llegar, pero no es posible guardarlo” y por su parte Alicia dice: “yo sigo en mi idea, de que no se puede. Porque (…) por esto de los 180° […], que todos los triángulos de sus ángulos internos suman 180°”. La investigadora pregunta a Santiago qué opina de la afirmación de su compañera y él dice: “es correcta, pero yo sigo en mi idea de que se puede el triángulo, se puede, toma mucho pero mucho tiempo hacer”. La investigadora pregunta a Santiago cuánto mediría el tercer ángulo cuando logre que los otros 2 sean de 90° y él dice que 1°, pero al darse cuenta de que la suma sería 181° se corrige y dice “no mediría nada, pero ahí estaría”

Alicia parece usar elementos teóricos de la geometría (que ya tienen un cierto valor para ella) con el propósito de estructurar su razonamiento. Por su parte, Santiago parece aceptar este nuevo conocimiento asociado a la suma de los ángulos internos de un triángulo, sin embargo, lo rechaza como una idea que pueste articular a su razonamiento, ya que afirma que el ángulo no mediría nada, pero aun así existiría.

Santiago y Alicia no se ponen de acuerdo en el caso de los 90°, pero Alicia le enseña a usar la herramienta de construcción “ángulo dada su amplitud” y Santiago lo usa para construir un triángulo con dos ángulos de 60 y otro con dos de 85 y al hacer el segundo dice: “sí, básicamente porque 85 no es como 90 entonces se puede”. Después la investigadora le pregunta a Santiago si es posible construir un triángulo con dos ángulos de 120° y dice:

S: yo diría que sí es posible (…) ¡no!, espera, no […] porque los ángulos estarían muy abiertos para poder conectarse y sería una especie de polígono con 5 o 6 lados [parece referirse a que los ángulos de un hexágono son más grandes]

Después la investigadora pregunta por un triángulo con un ángulo de 90° y uno de 60° y Santiago dice: “yo diría que se puede […] porque no son dos 90”, entonces construye el triángulo (ver Imagen 63) “ahí está”.

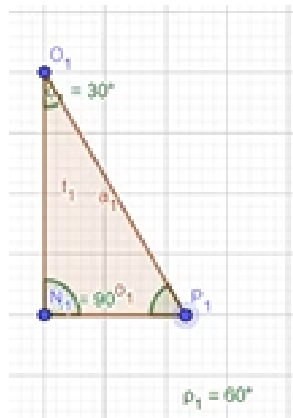


Imagen 63. Santiago construye un triángulo con un ángulo de 30° y uno de 60°

Después de evaluar otros casos la investigadora le pregunta a Santiago si es posible construir un triángulo con un ángulo de 115° y otro de 30° y antes de empezar a construir dice: "yo creo que no, pero lo voy a intentar". Pero Alicia lo interrumpe y dice:

A: "yo digo que, si se puede, otra vez por lo de los 180° […] Algo que yo hice, ya que descubrí lo de los 180° era sumar los ángulos que me daban en la pregunta, y si me daban menos de 180 decía que sí se podía hacer y hay un tercer ángulo con el valor que falta para 180".

Después de la explicación, Santiago construye el triángulo y usa la idea de Alicia sobre la suma de los ángulos internos de un triángulo para determinar la posibilidad de construcción de un triángulo, por ejemplo, con las medidas 20°, 35° y 115° dice: "no se puede, porque no da 180".

Por último, la investigadora retoma la discusión cobre la construcción del triángulo con dos ángulos de 90° y Santiago dice:

S: pues al final quedamos que no se podía construir […], básicamente porque no va a tener una punta en ese triángulo, se va a transformar en un cuadrado (…) digo rectángulo.

Aquí parece que Santiago ha cambiado el ***valor epistémico*** *asociado a la afirmación sobre la posibilidad de construir un triángulo con dos ángulos rectos, ya que al final dice que no es posible construir el triángulo y hace referencia al hecho en el que la suma de los ángulos es 180°. Sin embargo, esto puede deberse a una aceptación de la verdad sin que se haya* *comprendido el contenido de la afirmación. En consecuencia, no podemos realizar declaraciones sobre el valor epistémico o lógico establecido por Santiago.*

6.3.4. Explicar por qué: Triángulo isósceles

El estudiante abre el archivo y cuando la investigadora le solicita que explique por qué el triángulo es isósceles, él dice: “porque tienen dos lados iguales”. Cuando la investigadora pregunta por qué puede afirmar dicha igualdad, el estudiante toma la medida de los ángulos y en la pantalla aparece $A = 143.57°$, $B = 18.22°$ y $C = 18.22°$ y dice:

S: porque la conexión entre C y A y B y A miden los mismo, eso significaría que son dos lados iguales, lo cual significa que es un triángulo isósceles

En la conversación la investigadora le pregunta al estudiante como sabe que los lados son iguales, ya que se midieron ángulos y el responde: “Si son dos lados iguales deben tener dos ángulos iguales”.

En la primera parte Santiago afirma que el triángulo es isósceles porque tiene dos lados iguales, haciendo alusión la ***definición*** *asociada a este tipo de triángulos. Para determinar que el triángulo tiene dos lados iguales usa la* ***respuesta*** *del medio digital, primero* ***muestra*** *que la* ***medida*** *correspondiente a dos ángulos del triángulo es siempre la misma y luego afirma como consecuencia que los dos lados son iguales, lo que es posible debido a la relación que existe entre los lados y los ángulos de los triángulos (una propiedad).*

En este caso el medio ***amplifica*** *la capacidad de Santiago para medir con precisión, por lo que la representación digital se usa como* ***herramienta*** *para mostrar que dos ángulos miden lo mismo (el propósito).*

La investigadora pregunta a Santiago cuál sería su explicación si no tuviera la medida y él dice: “sin medir, así seguiría siendo lo mismo (arrastra el punto C sobre la circunferencia), modificándolo, seguirían siendo iguales los dos lados, a simple vista también. Son iguales al (…) la circunferencia no alterar el tipo de triángulo, porque el centro hace que no se pueda cambiar, que siga siendo siempre lo mismo”. La investigadora le pregunta a qué se refiere con que no cambia y él dice:

S: Simplemente, al este (señala el punto A) estar en el centro y estos dos estar en la circunferencia (señala B y C) no afecta el este (parece señalar el segmento AC y arrastra C sobre la circunferencia) (…). Sí, son iguales, son iguales no importa cuánto los mueva, aquí son iguales (deja de arrastrar C por un momento) son iguales por la distancia. Si A es el centro la distancia será la misma, no importa en donde se ubique el punto […]. De la distancia entre el punto C o B al punto A, ya que el A es el centro, haciendo que siempre mida esto lo mismo (mientras habla arrastra el punto C)"

La investigadora pregunta si los dos lados iguales permiten probar que el triángulo es isósceles, así que él dice: "Sí, al tener dos lados iguales que miden lo mismo".

Nuevamente Santiago se enfoca en argumentar que la representación digital cumple con la definición de que los dos lados de un triángulo isósceles miden lo mismo. En este caso establece la congruencia a partir de un conocimiento que tiene sobre los radios de la circunferencia. Usa como ***dato*** *la información de la representación dinámica que le muestra que los puntos B y C son puntos de la circunferencia que tiene centro en A; esto para* ***concluir*** *que los dos segmentos tienen la misma longitud (ver Imagen 64).*

AB y AC son radios de la circunferencia con centro en A

"este (señala el punto A) estar en el centro y estos dos estar en la circunferencia (señala B y C)"

En una circunferencia los radios son congruentes

"la circunferencia no alterar el tipo de triángulo, porque el centro hace que no se pueda cambiar, que siga siendo siempre lo mismo"

En el triángulo ABC, $CA = AB$

"Si A es el centro la distancia será la misma, no importa en donde se ubique el punto […]. De la distancia entre el punto C o B al punto A, ya que el A es el centro"

Imagen 64. Esquematización del razonamiento de Santiago para probar por qué el triángulo es isósceles

En este caso la representación permite entender el discurso, es decir, que, igual que en las pruebas Euclidianas es esencial de la prueba; pero, a diferencia de la representación Euclidiana, el dinamismo fue esencial para que Santiago tuviera certeza y pudiera ilustrar que los radios de la circunferencia son congruentes.

6.3.5. Explicar por qué: Triángulo rectángulo

Inicialmente el estudiante afirma que el triángulo no es rectángulo, sin embargo, después de un momento de silencio cambia su respuesta, por lo que la investigadora le pregunta la razón de dicho cambio y él dice:

S: pues básicamente aquí medí con (…) bueno, fuera de mi computadora medí con (…) medí con dos palitos que tengo aquí […] haciendo que me diera 90 grados

La investigadora aclara que es diferente su auto convencimiento a la explicación a los demás, por lo que el estudiante construye una recta PG y ubica a P de tal manera que parece estar sobre la recta FG (ver Imagen 65). El estudiante intenta usar la herramienta mediatriz en diferentes ocasiones porque aparentemente quiere construir un cuadrado, ya que dice:

S: se ve como es una esquina totalmente (…) si me dejara hacer un cuadrado podría hacerlo fácil

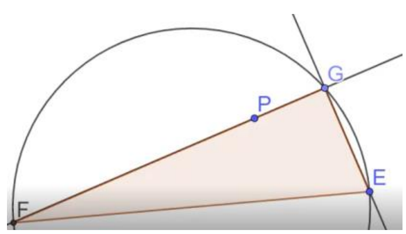


Imagen 65.Primer intento de Santiago para afirmar que el ángulo en G es recto.

Después de desistir del uso de la "mediatriz" y hacer una búsqueda rápida por el menú decide construir lo que aparentemente es un rectángulo (ver Imagen 66). El estudiante afirma que el cuadrilátero construido es un rectángulo porque tiene la "la misma forma", así que la investigadora sugiere medir el ángulo en Q el cual resulta ser igual a 90.94° lo que provoca que el estudiante note que el cuadrilátero construido no es un rectángulo.

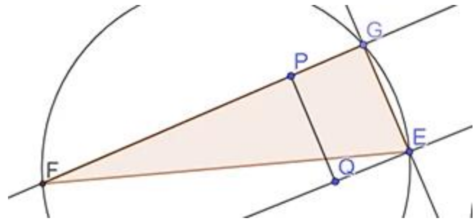


Imagen 66. Santiago construye un cuadrilátero que aparentemente es un rectángulo.

Después de tener el espacio para pensar en una nueva estrategia, el estudiante dice: "si es un triángulo rectángulo, pero no sabría como demostrarlo sin medir". Santiago toma la medida del ángulo en G y al ver que la medida es de 90 grados, dice que si eso fuera permitido el diría que: "este es un triángulo rectángulo simplemente por el hecho de tener un (…) un ángulo de 90°"

Hasta aquí el argumento hipotético de Santiago consiste en realizar acciones específicas para mostrar que el ángulo es recto. Estas acciones son ***relativas a la percepción*** *ya que Santiago usa la representación para* ***mostrar*** *que la* ***medida*** *es de 90° gracias a una* ***co-acción*** *en la que el medio y la estructuralidad de la representación* ***responden*** *con dicha medida. En este caso el medio* ***amplifica*** *la capacidad de pedro para tomar medidas exactas, por lo que la representación se puede ver como una* ***herramienta*** *usada con el* ***propósito*** *(previamente establecido) de mostrar la estructuralidad de la propiedad y de esta manera afirmar que el triángulo es rectángulo* ***porque*** *tiene un ángulo recto.*

En este caso se puede afirmar que Santiago quiere presentar un ***argumento*** *relativo a la percepción que le permita dar cuenta del valor lógico de la afirmación.*

Sin embargo, como esto no es posible debido a las limitaciones del problema, el estudiante borra el "rectángulo" construido y la investigadora intenta que proponga otro argumento. En el dialogo el estudiante dice: "Con que esto fuera una parte del cuadrado (señala el punto G) ya demostraría". La investigadora sugiere usar la herramienta de polígono regular, así que el estudiante construye el cuadrado $GEUV$ (ver Imagen 67) y afirma que su construcción es la prueba ya que

S: Es que básicamente al tener la misma inclinación esto (pasa el cursor sobre el segmento GV) que esto (pasa el cursor sobre el segmento FG)

Antes de que continue, la investigadora cuestiona a Santiago sobre cómo sabe que es la misma inclinación y durante la conversación el estudiante dice: “al ser una continuación de GF, GV es como si fuera parte de la misma línea, parte de la misma raíz, lo cual hace que si esto mide de un lado va a medir del otro […] al ser iguales ambos lados”.

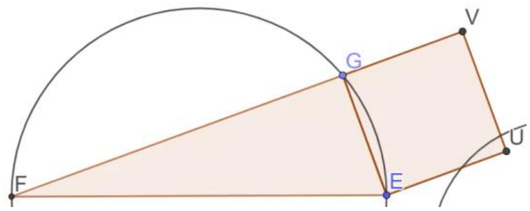
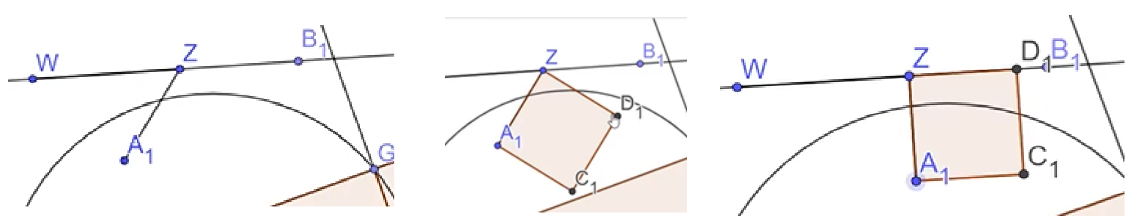


Imagen 67. Santiago construye un cuadrado para argumentar que el ángulo en G es recto.

Como el estudiante continúa su argumento basándose en la colinealidad de los puntos F, G y V, la investigadora lo orienta para que construya una configuración similar en donde los ángulos que se forman no son rectos (ver Imagen 68 a). Usando la nueva configuración cuestiona al estudiante sobre si el ángulo construido es recto, así que dice:

S: “No, en este caso de esta línea no son rectos […] ya que si hago esto (con la herramienta de polígono regular construye un cuadrado a partir de ZA_1, ver Imagen 68 b). Ves esto, no está conectado con el cuadrado. Si estuviera en un caso conectado con el cuadrado, si estuviera así (arrastra A_1 hasta que D_1 parece estar en la recta ver Imagen 68 c) y acá estuviera B, donde está D. Aquí ya sería un ángulo recto”



(a) (b) (c)

Imagen 68. Santiago explica por qué no cualquier par de ángulos suplementarios van a medir 90°

La investigadora solicita al estudiante que escriba su argumento en una hoja y mientras lo hace se le ocurre construir el cuadrado del otro lado de GE (ver Imagen 69). En el dialogo con la investigadora dice:

S: Esto demuestra que (…) que esta parte es un ángulo recto […] F, G y E o sea, que se ángulo sería recto […] por el hecho de que se embona con el cuadrado. El cuadrado a fuerzas tiene (…) todos sus ángulos son de 90, entonces significa que, si esos ángulos embonan bien con el cuadrado, son de 90

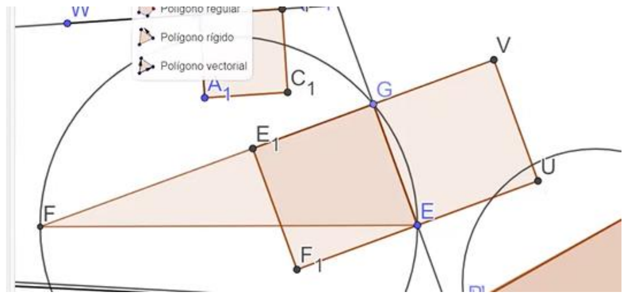


Imagen 69. Santiago construye un cuadrado de modo que uno de sus ángulos coincide con el ángulo en G

Aquí Santiago presenta acciones que dan cuenta del ***valor lógico*** *de la* ***afirmación*** *acerca de que el ángulo en* G *es recto. El estudiante realiza la acción de* ***construir*** *un cuadrado con lado* GE *y la* ***respuesta*** *del medio es que* GV ***pertenece*** *a la recta* FG*. Esta* ***co-acción*** *permitiría que Santiago estructurara un razonamiento en el que haría uso de la definición de ángulos suplementarios y de cuadrado para proponer una prueba no es traducible al lápiz y papel. Sin embargo, como el estudiante no posee estos conocimientos teóricos lo único que hace es establecer como conclusión que el ángulo en* G *es recto.*

Más adelante Santiago realiza un nuevo intento y ***construye*** *otro cuadrado con lado* GE*, pero en este caso la* ***respuesta*** *del medio es que* GE_1 ***pertenece*** *al segmento* FG*, es decir que dos lados del cuadrado pertenecen a los lados del triángulo dado. Esta* ***co-acción*** *permite que Santiago estructure un razonamiento en el que usa como dato la información visual y usando la definición de cuadrado puede concluir que el ángulo en el triángulo también es de 90° (ver* Imagen 70*).*

El ángulo G del cuadrado coincide con el ángulo G del triángulo dado

[Resultado de una CO-ACCION]

En una cuadrado todos los ángulos son de 90°

"*El cuadrado a fuerzas tiene (...) todos sus ángulos son de 90*"

El ángulo G del triángulo EFG es recto

"si esos ángulos embonan bien con el cuadrado, son de 90."

Imagen 70. Esquematización del razonamiento de Santiago para probar por qué el ángulo es recto

En este caso el medio ***amplifica*** *la capacidad de Santiago para realizar construcciones precisas, permitiéndole mostrar la relación entre algunos objetos (de contenencia o pertenencia), es decir que en este caso la representación se puede entender como una* ***herramienta*** *de mediación que es usada con el* ***propósito*** *(previamente establecido) de validar la hipótesis de que el ángulo es recto.*

Cabe aclarar que las acciones presentadas por Santiago dan cuentas de la verdad de la afirmación, sin embargo, no establecen un por qué asociado a la comprensión.

6.3.6. Explicar por qué: Triángulos semejantes

Santiago observa la construcción y sin haber arrastrado dice:

S: son lo mismo porque los triángulos (…) es lo mismo, el triángulo es el mismo. Porque si muevo esto aquí (arrastra el punto L para que los dos triángulos coincidan) encajan, ahí está (ver Imagen 71), porque es el mismo triángulo.

La investigadora hace que el estudiante coloque el triángulo LJO en una posición en la que se ve mucho más pequeño en comparación con MJN y le pregunta al estudiante por qué en esa posición los ángulos tienen la misma medida, a lo que dice: "porque el triángulo al ser movido no se altera, simplemente lo que se altera es su tamaño no las medidas (arrastra L mientras habla)".

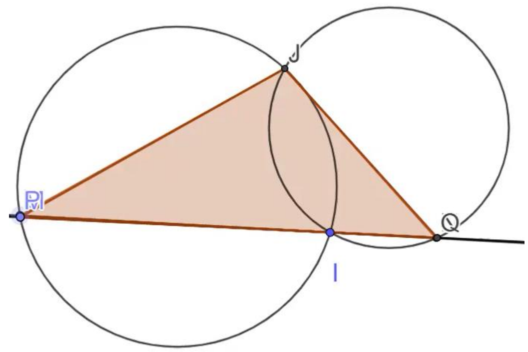


Imagen 71. Santiago arrastra para que los dos triángulos coincidan

Hasta este punto Santiago ha usado la representación, como ***herramienta,*** *para* ***mostrar*** *una posición en la que los triángulos se superponen y en consecuencia afirmar que los ángulos miden lo mismo. Esto gracias a una* ***co-acción*** *en la que el estudiante* ***arrastra*** *uno de los puntos de la construcción y la* ***respuesta*** *del medio muestra una posición en la que los dos triángulos* ***coinciden.*** *Por otra parte, Santiago describe la semejanza que se mantiene entre los triángulos cuando arrastra uno de los puntos, sin embargo, aún no logra estructurar un razonamiento que le permita explicar por qué ocurre este fenómeno.*

Buscando mejorar su explicación, Santiago arrastra continuamente L sobre la circunferencia y dice:

S: Porque (…) porque todos están ligados al punto J (…) es como su base, se podría decir que el punto J (…) siento que si los muevo no se altera el tamaño, es por J.

Ante tal afirmación la investigadora le pregunta si cualquier o triángulo un pase por J va a cumplir con la congruencia de los ángulos y dice:

S: Debe haber un punto aquí (señala la circunferencia de la derecha) un punto acá (señala la circunferencia de la izquierda) y que estén conectados por J, a eso es a lo que me refiero […] debe haber una conexión que causa que sean el mismo triángulo

El estudiante construye un punto en cada una de las circunferencias y así determina el triángulo PJQ (ver Imagen 72 a), después usa el "candado" para que Q no se mueva y arrastra a P, pero al ver que Q no se movía cuando arrastraba P dice:

S: Es que no (…) no sé cómo hacer que se mueva junto con este […] que haga esto (arrastra M y en consecuencia N también se mueve). ¡Ah, ya vi por qué! Ya vi aquí la cosa, no la había visto, me acabo de dar cuenta. Primeramente, se utilizó una recta y no había visto la recta

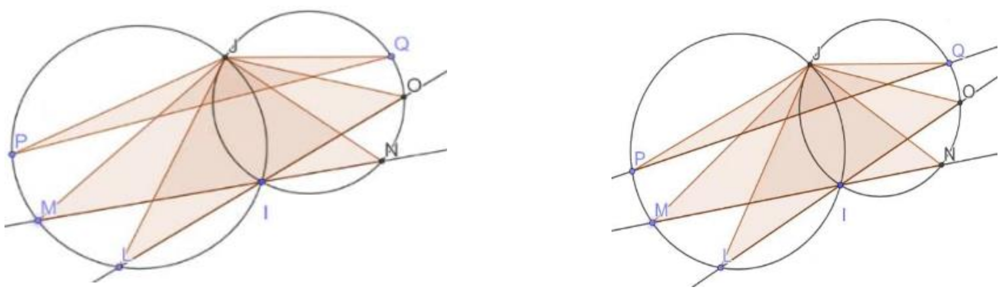


Imagen 72. Santiago construye un triángulo que pasa por J

El estudiante borra el triángulo PJQ, construye la recta PQ y nuevamente hace el triángulo (ver Imagen 72 b), pero al arrastrar P nota que Q permanece sin moverse, así que arrastra M y dice: "ya vi, necesito que pase por I". El estudiante elimina la recta PQ e intenta construir una recta que pase por los tres puntos —a saber, I, P y Q— pero al notar que no es posible, decide eliminar Q y construirlo como punto de intersección de la recta PI y otra circunferencia. Cuando acaba su construcción (ver Imagen 73) arrastra P y al notar que Q se mueve dice "y así fue como se hizo"

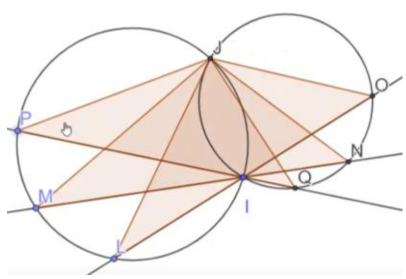


Imagen 73. Santiago construye un tercer triángulo semejante

Aquí se presentó un proceso en el que Santiago usaba la representación como una ***herramienta*** *que le permite determinar los elementos importantes de la construcción, esto a partir de dos* **co-***acciones, las primeras en las que* ***arrastra*** *los puntos de la configuración inicial y nota que la semejanza se mantiene y las segundas donde realiza la misma acción* *sobre el triángulo construido y la* ***respuesta*** *del medio no es la misma que cuando mueve puntos como M.*

La comparación en las respuestas que le ofrece el medio digital lleva a Santiago a ***describir*** *información importante sobre los triángulos MNJ y LOJ. La primera idea referente a que los triángulos pasar por J y los otros dos puntos están en cada circunferencia; la segunda idea sobre la importancia de usar una recta para conectar los puntos que están en cada circunferencia y la tercera acerca de que el punto I debe pertenecer a la recta mencionada anteriormente. En general, todas estas ideas son descripciones sobre cómo fue construido cada triángulo, pero no responden a la pregunta inicial de por qué lo ángulos son congruentes.*

Continuando, la investigadora le aclara a Santiago que su discurso corresponde a la pregunta de cómo se hizo la construcción, pero no responde por qué los ángulos son congruentes así que superpone los tres triángulos y dice:

S: Porque como dije, parten del mismo punto, de I, sus rectas parten de I. De ahí la conexión con todo parte de J. Todos son (…) aquí como se ve todos tienen la misma base, nada más es el movimiento que los altera (arrastra P) pero son exactamente el mismo triángulo los tres

Aquí Santiago no presenta un razonamiento claro que le permita afirmar por qué los ángulos son congruentes. Sin embargo, de acuerdo con su proceso planteamos dos hipótesis: en la primera afirmamos que Santiago presenta un razonamiento inductivo basado en el movimiento que lo hace pensar que como el triángulo es el mismo en una cierta posición, entonces siempre va a tener las mismas medidas. Por otra parte, en la segunda hipótesis creemos que no hay un entendimiento de lo que se debe argumentar, ya que para él los dos objetos son el mismo al estar construido de la misma manera y por lo tanto no tiene sentido argumentar por qué el mismo objeto tiene ángulos iguales.

6.3.7. Síntesis del trabajo de Santiago

De la misma manera que con el trabajo de Alicia, en la Tabla 8 presentamos la síntesis del trabajo de Santiago, el cual está asociado a las siguientes afirmaciones:

1. Los radios de la circunferencia son congruentes.

2. El triángulo construido es isósceles.
3. Es posible construir un triángulo con dos ángulos de 90°.
4. Por qué: triángulo isósceles
5. Por qué: triángulo rectángulo
6. Por qué: triángulos semejantes

Tabla 8. Síntesis del trabajo de Santiago

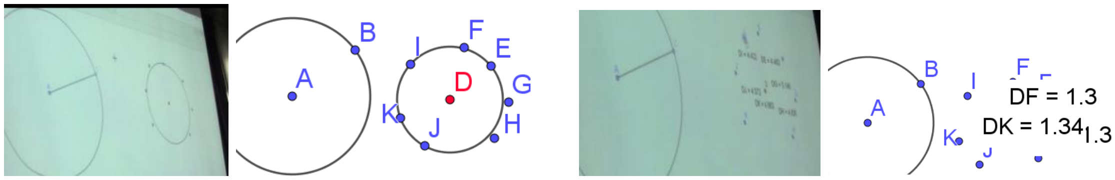
		1	2	3	4		5	6
Valores	V. epistémico	X	x	X				
	V. lógico				X	X	X	X
Acción	Arrastrar					X		X
	Medir y arrastrar	X	X	X	X			
	Construir y arrastrar						X	
	Búsqueda en el menú							
Respuesta	Sin cambio	X			X			
	Cambio constante			X				
	Comportamiento inesperado		x					
	Pertenencia, contenencia o coincidencia						X	X
Sirve para…	Obtener nuevas ideas	X		X				
	Encontrar una estrategia					x	x	
	Mostrar la estructuralidad de la propiedad		X		x			X
	Usar un hecho con cierto valor epistémico					1	X	

6.4. TRABAJO EN EL AULA

6.4.1. Los radios de la circunferencia son congruentes

Durante la segunda etapa de la actividad 1 (apartado 5.3.1) Daniela pasa al frente y muestra cómo construir una circunferencia y un radio. Más adelante en la tercera etapa construye siete puntos a la misma distancia de un punto dado (como se propone en la actividad). La investigadora pregunta cómo están seguros de que están a la misma distancia y Daniela afirma que puede medir con GeoGebra, así que construye una circunferencia (ver Imagen 74a) y dice:

D: porque (…) bien, técnicamente pues al ser una circunferencia tendría como (…) pues, o sea, del punto rojo al punto azul tendría que ser la misma distancia y se tendría que intersecar con los demás puntos.



(a) (b)

Imagen 74. Construcción de Daniela de los siete puntos (tomada desde la cámara y recreada en GeoGebra)

Camilo propone mejor tomar medidas y borrar la circunferencia (ver Imagen 74b). Al hacerlo las medidas no son las mismas y deciden arrastrar los puntos para que las medidas coincidan. Más allá de las medidas la investigadora pregunta qué va a pasar si se ponen más puntos, entonces los estudiantes se refieren a una circunferencia. La investigadora pregunta por qué hablan de circunferencia si solo son puntos y se da la siguiente intervención:

D: porque al tener la misma distancia (…) del punto rojo, bueno el punto D con el punto E y si queremos que tenga la misma distancia el punto D y el punto G que tuvieron el punto D y E, este (…) y vamos formando 4, 5, 6 puntos, se terminaría formando una circunferencia.

La investigadora pregunta cómo saben eso y Camilo dice: "Todos los puntos que están en una circunferencia tienen la misma distancia hacia el centro". La investigadora escribe la propiedad en el tablero y pregunta a los demás estudiantes si están de acuerdo con ese conocimiento propuesto por Camilo y todos responden de manera afirmativa. Además, se pregunta a la clase cómo saben que el hecho enunciado por Camilo es cierto y Daniela dice que lo pueden comprobar con una circunferencia.

*Hasta este punto los estudiantes han otorgado un **valor epistémico** de cierto a la **afirmación/hecho** enunciado por Camilo (a saber, que todos los puntos de una circunferencia equidistan del centro). El valor se hace explicito cuando los estudiantes responden de manera afirmativa a la **necesidad de escogencia** provocada por la investigadora.*

Para establecer dicho valor los estudiantes construyeron puntos equidistantes a un punto dado; observaron la circunferencia construida por Daniela donde algunos puntos coincidían con la circunferencia y midieron la distancia de D a cada uno de los puntos. No *podemos saber cuál fue la experiencia que permitió los estudiantes tuvieron la certeza de que el resultado final sería una circunferencia, por lo que analizamos todo el proceso.*

Para la construcción de los puntos y de la circunferencia, el dinamismo no fue un elemento esencial, por lo que el ***medio*** *se puede ver como un lienzo de la misma manera que se vería a una hoja de papel. Sin embargo, en la última parte la exactitud de las* ***medidas*** *y el* ***arrastre*** *fueron elementos de una* ***co-acción*** *que permitió tener los puntos en el lugar preciso y que los estudiantes razonaran sobre una representación adecuada.*

Continuando, Daniela afirma que va a mostrar que el hecho enunciado es cierto, así que construye una circunferencia con centro en D y mueve los puntos para que aparentemente estén en la circunferencia, pero al hacerlo las medidas no resultan ser las mismas. La investigadora expresa duda de la certeza del hecho, ya que las medidas no son las mismas, entonces Camilo afirma que el hecho sí es cierto, pasa al frente y construye otra circunferencia, pone los seis puntos sobre la circunferencia, toma las medidas y arrastra los puntos mostrando que los valores asociados a las distancias coinciden (ver Imagen 75). Por último, la investigadora le pregunta si la medida siempre va a ser 9.416 y el estudiante afirma que "va a depender del tamaño del círculo".

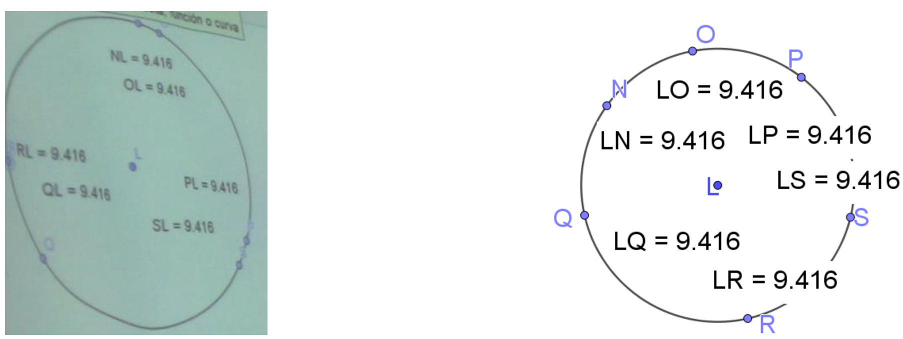


Imagen 75. Construcción de Camilo ante la clase (tomada desde la cámara y recreada en GeoGebra)

Aquí la investigadora plantea un ***conflicto de valores epistémicos*** *cuando manifiesta duda sobre la certeza del hecho (una duda falsa), lo que motiva a que Camilo realice acciones para dar cuentas del* ***valor lógico*** *del hecho. Las acciones fueron* ***relativas a la percepción,*** *ya que estaban centradas en* ***mostrar*** *que la medida es la misma, esto gracias a una* ***co-acción*** *en la que arrastra los puntos de la circunferencia y la* ***medida*** *(que se ve en la pantalla) no cambia.*

En este caso el medio ***amplifica*** *la capacidad de los estudiantes para tomar medidas exactas y junto con el arrastre permite mostrar la invariancia de las medidas, es decir que en este caso la representación se usa como una* ***herramienta*** *con el* ***propósito*** *(previamente establecido) de mostrar la estructuralidad de la propiedad y así presentar un* ***argumento*** *que cambiara el valor epistémico manifestado por la investigadora.*

En la segunda sesión la investigadora recuerda el **hecho** de que los radios de una circunferencia son congruentes (institucionalizado y copiado en el tablero la sesión anterior). La investigadora pregunta a los estudiantes si la implicación se cumple en el otro sentido[17], es decir: si dos segmentos son congruentes entonces son radios de una circunferencia.

Daniela dice que la afirmación es muy general porque también puede referirse a rectas "paralelas". Ella pasa al frente y en un archivo donde había una circunferencia con dos radios construye dos segmentos aparentemente de la misma medida (ver Imagen 76), pero al arrastrar nota que la medida no se mantienen, así que decide ilustrar su idea con dos diámetros como se ve en la imagen.

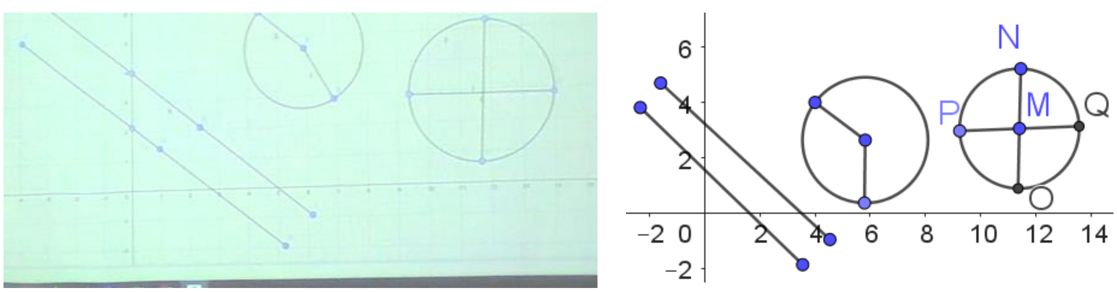


Imagen 76. Construcción de Daniela de segmentos congruentes (tomada desde la cámara y recreada en GeoGebra)

Después de la explicación de Daniela la investigadora retoma la afirmación y pregunta si es cierto o falso que: si dos segmentos son segmentos congruentes entonces son radios. Camilo dice "no, no se cumple. O sea, con lo que nos quiere mostrar ella no se cumple" y los demás estudiantes apoyan a su compañero.

Hasta este punto se ha evaluado la ***afirmación*** *de que si dos segmentos son congruentes entonces son radios. Los estudiantes han otorgado* ***valor epistémico*** *de falsa a la afirmación*

[17] El dialogo sobre las implicaciones duró cerca de 30 minutos, pero decidimos no incluirlo ya que no se relaciona con el uso de artefactos digitales.

gracias a la explicación de Daniela. En este caso la representación sirve para el ***propósito*** *de ilustrar ejemplos que contradicen la afirmación, por lo que el dinamismo no se hace presente. Para ello se hubiera podido hacer un dibujo a mano alzada en papel, de manera que la representación actúa como* ***herramienta*** *para ilustrar ejemplos.*

Continuando con la clase la investigadora ayuda a Daniela a construir los diámetros (dejando los mismos nombres de puntos) y pregunta a todos los estudiantes cómo pueden estar seguros de que NO y PQ son congruentes. Los estudiantes trabajan en parejas y las soluciones de algunos grupos se presentan a continuación.

El equipo de Camilo y Miguel:

Cuando la investigadora pregunta si ya tienen una respuesta Camilo dice:

C: quedamos en que son congruentes porque tienen la misma longitud y comparten (…) o sea, son dos diámetros que comparten la misma circunferencia [Para decir la parte final Camilo fue ayudado por su compañero Miguel].

La investigadora pregunta si siempre se cumple que si dos diámetros comparten la misma circunferencia entonces son congruentes y los estudiantes responden de forma afirmativa en varias ocasiones. Después la investigadora pregunta cómo están seguros y Miguel dice:

M: porque si ahorita muevo la circunferencia (arrastra el centro de la circunferencia- ver Imagen 77) sigue siendo la misma (…) la misma longitud en ambos.

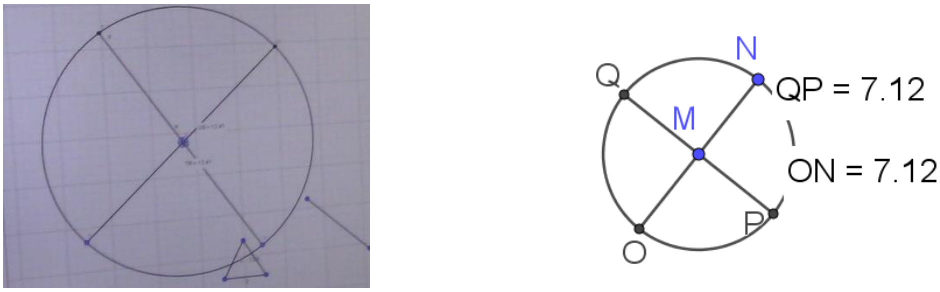


Imagen 77. Construcción de Camilo y Miguel de dos diámetros (tomada desde la cámara y recreada en GeoGebra)

En este caso los estudiantes manifiestan tener certeza (valor epistémico) de que si dos segmentos son diámetros entonces son congruentes (afirmación) debido a una ***necesidad de escogencia*** *planteada por la investigadora. Ellos establecen la certeza sobre la* *afirmación a partir de* ***acciones relativas a la percepción*** *que les permiten* ***mostrar*** *que los dos diámetros siempre tienen la misma medida. Esto gracias a una co-acción en la que los estudiantes* ***arrastran*** *y la* ***medida*** *(que corresponde a dos diámetros) es siempre la misma*[18]*.*

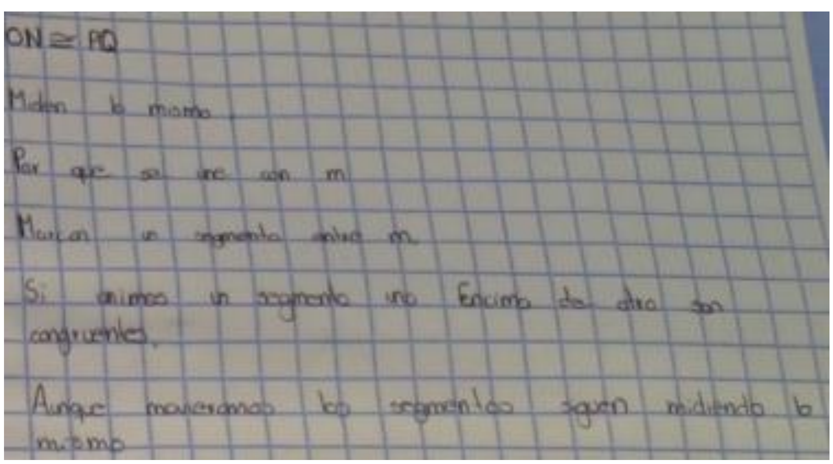
En este caso, la representación estructural sirve como una ***herramienta*** *para cumplir el* ***propósito*** *previamente establecido de mostrar que los dos segmentos siempre mantienen la misma medida. En este caso el medio* ***amplifica*** *la capacidad de los estudiantes de tomar medidas con precisión y evaluar múltiples casos.*

El equipo de Luis y Rosa:

Cuando la investigadora se acerca al grupo los estudiantes tienen la representación como la de Camilo (ver Imagen 77) pero sin medidas. Cuando se les pregunta cómo pueden estar seguros de que NO y PQ son congruentes Luis dice:

L: “porque ON y PQ ambas están unidas por (…) bueno sí, se unen con M. También si uno [arrastra O para que los dos segmentos coincidan], o sea si pongo uno encima de otro podemos notar que (…) como que son congruentes. Y si yo muevo va a seguir midiendo lo mismo”.

Cuando la investigadora pregunta cómo saben que miden lo mismo la compañera de Luis dice “porque no salen de la circunferencia” y él reafirma la idea. Además, los estudiantes muestran sus ideas de forma escrita (ver Imagen 78 e Imagen 79)



[18] Esta misma estrategia de medir para argumentar la certeza del hecho es presentada por otros dos equipos que no presentamos aquí para no ser repetitivos.

Imagen 78. Justificación de Luis y Rosa a la congruencia de dos Diámetros.

$ON \cong PQ$
Miden lo mismo
Porque se unen con m
Marcan un segmento entre m
Si unimos un segmento uno encima de otro, son congruentes.
Aunque moviéramos los segmentos siguen midiendo lo mismo

Imagen 79. Transcripción de la justificación de Luis y Rosa a la congruencia de dos Diámetros.

Al igual que en el equipo de Camilo, los estudiantes realizan ***acciones relativas a la percepción*** *para* ***mostrar*** *que los diámetros miden lo mismo. Se presenta una co-acción en la que los estudiantes* ***arrastran*** *uno de los extremos de un diámetro y la respuesta del medio es la* ***no modificación de la longitud,*** *de modo que al arrastrar y poner un punto sobre otro los diámetros coinciden.*

En este caso, el ***propósito (****establecido con anterioridad) era mostrar que los dos diámetros median lo mismo y el medio* ***amplificó*** *la capacidad de los estudiantes para realizar construcciones precisas y evaluar distintos casos. Es decir que la representación, su dinamismo y su estructuralidad sirven como* ***herramientas*** *para mostrar que siempre se cumple que dos diámetros son congruentes.*

Daniela:

La investigadora se acerca al computador de Daniela y ella tiene su construcción con algunas medidas (ver Imagen 80). Daniela empieza hablando sobre la congruencia de los ángulos, pero la investigadora le pregunta cómo eso sirve para afirmar que, NO y PQ son de la misma longitud, entonces ella dice:

D: bueno, y aparte, por ejemplo, si M y N es (…) pues digamos así nada más, un radio, del centro a la circunferencia y ya vimos que todos los radios son iguales entonces (…) M y O es otro radio, entonces (…) pues bueno, son dos radios y entonces tenemos que N y O (…) son una medida (…) Bueno son una relación N y O al igual que Q y P. Tienen la misma relación.

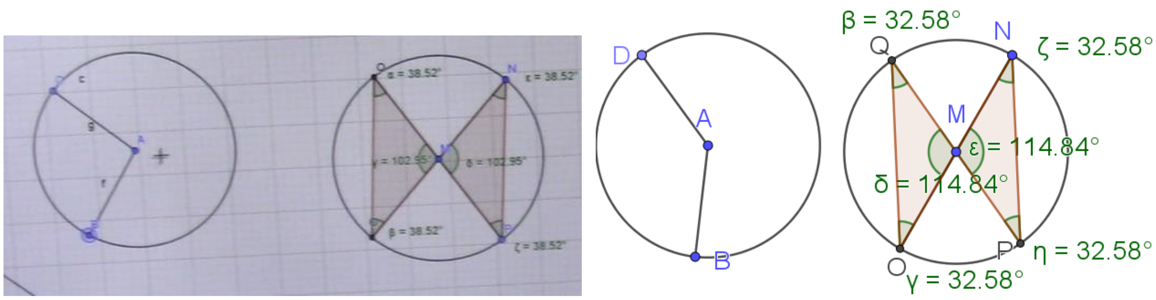


Imagen 80. Construcción de Daniela de dos diámetros (tomada desde la cámara y recreada en GeoGebra)

La investigadora manifiesta estar perdida con la explicación y pregunta cuál sería la medida de NO, y Daniela dice: “dos radios al igual que dé Q a P”. Entonces se le cuestiona a Daniela si su discurso es suficiente para poder afirmar la congruencia de los segmentos y ella afirma que sí. Además, ella añade:

D: si no fuera una (…) bueno, hecho como una recta y bueno acá en este caso [arrastra B-ver Imagen 80] y lo pudiéramos mover, sigue equivaliendo lo mismo desde A hasta B.

Daniela logra determinar que la medida de cada diámetro es igual a dos radios, lo que le sirve para ***probar*** *que en una circunferencia los diámetros son congruentes. Ella logra establecer que la medida de cada segmento es igual a dos radios usando como* ***dato*** *que cada segmento está formado por dos radios y que son colineales, la colinealidad la interpretamos de la expresión “son una medida” ya que parece referirse a que dos radios se pueden ver como un único segmento. Con esos datos logra* ***concluir*** *que cada segmento es igual a dos radios y por consiguiente son congruentes. Esta conclusión es posible gracias a un conocimiento establecido con anterioridad y que tenía el* ***valor epistémico*** *de cierto, el cual se refiere a que los radios de una circunferencia son congruentes (ver* Imagen 55*).*

MN y MO son radios y son colineales

“si M y N es este (…) pues digamos así nada más, un radio del centro a la circunferencia […] M y O es otro radio” “son una medida (…) Bueno son una relación N y O”

Todos los radios son congruentes

“ya vimos que todos los radios son iguales”

$\boldsymbol{NO = 2r}$

“dos radios al igual que de Q a P”

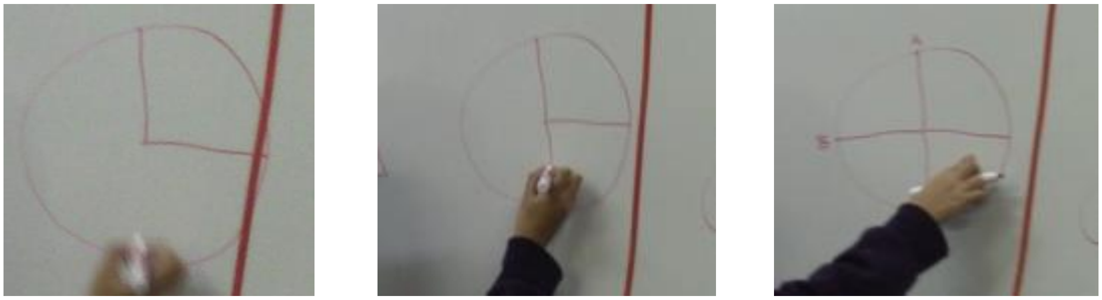
Imagen 81. Razonamiento de Daniela para probar que dos diámetros son congruentes

La representación en este sirve para ilustrar la generalidad del hecho asociado a los radios de una circunferencia, facilitando el entendimiento del discurso igual que en las pruebas sin el uso de geometría dinámica. En cuanto al dinamismo, no se usa directamente en el desarrollo de la ***prueba****, pero parece que fue esencial para que Daniela pudiera proponerla, ya que en la parte final ella arrastra una representación de una circunferencia con dos radios y parece mostrar que el caso explicado es solo una posición particular para dos radios (una posición en la que son colineales).*

Por la ausencia del dinamismo en la prueba final, se puede afirmar que Alicia logró dar cuentas del ***valor lógico*** *de la afirmación con una prueba* ***traducible*** *a una prueba de papel y lápiz (traducción que hace en el tablero más adelante).*

Continuando con la clase, Daniela decide pasar al frente a explicar a sus compañeros su solución, pero decide hacerlo en el tablero y con un marcador. Ella dice:

D: un radio mide lo mismo que todos los demás radios [dibuja una circunferencia y dos radios – ver Imagen 82a]. Bueno y si (…) si lo hacemos como justo en frente [dibuja otro radio de manera que parece tener un diámetro – ver Imagen 82b] ahí ya tenemos dos radios y se forma un diámetro y bueno, podemos decir que éste es un segmento. Y podemos decir que acá se forma otro radio [hace lo mismo para el otro radio – ver Imagen 82c] que se convierte en un diámetro, este es otro segmento. Entonces pues bueno, son dos radios que es lo mismo [señala uno de los diámetros] y acá otros dos radios que es lo mismo. Entonces podemos decir que es lo mismo (…) pues al ser un diámetro y otro diámetro.



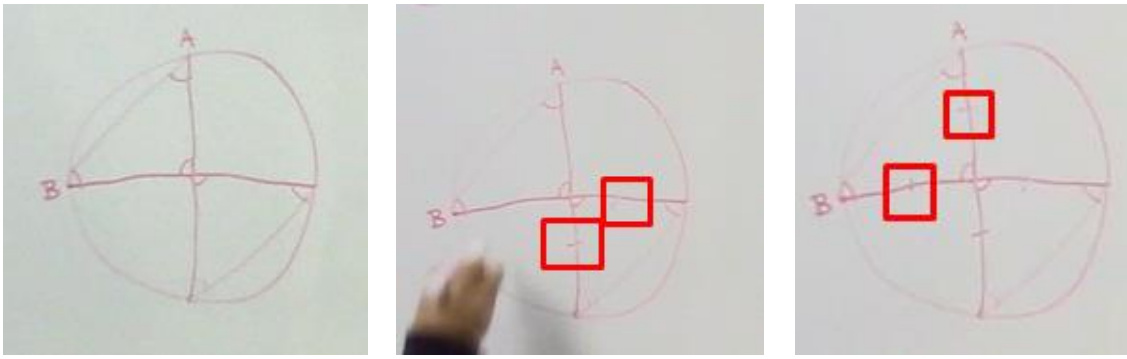
(a) (b) (c)

Imagen 82. Construcción que Daniela hace para explicar la congruencia de dos diámetros

Esta ***prueba*** *presentada por Daniela es esencialmente la misma que presentó en el trabajo individual (ver* Imagen 81*), pero sin el componente dinámico presente en la representación que le sirve para ilustrar la generalidad del hecho. Sin embargo, acá es más clara la huella de la experiencia que tuvo Daniela arrastrando dos radios de una circunferencia, ya que su idea de diámetro parece ser la de dos radios "acomodados" colinealmente.*

Daniela ofrece una segunda explicación diciendo que ella midió los ángulos que señala (a saber, A y B en Imagen 83a) y dice: "no importa si los movieras. O, al moverlos (…) lo podemos ver ahí en GeoGebra, los ángulos entre sí son congruentes". La investigadora pregunta por qué es importante la congruencia de los ángulos y ella dice:

D: Ya que, como vimos la vez pasada una característica de los triángulos isósceles era que dos de sus lados, al igual que dos de sus ángulos son iguales o congruentes. Entonces tendríamos que este lado y este lado son congruentes [hace la marca de congruencia entre un par de lados Imagen 83b] al igual que este lado y este lado son congruentes [hace la marca en el otro par de lados Imagen 83c]. Lo cual tenemos que todo esto es una recta, entonces al igual que dije con los radios pues son congruentes.



(a) (b) (c)

Imagen 83. Construcción de Daniela para la segunda explicación

Todos los compañeros de Daniela afirman comprender y estar de acuerdo con su explicación.

En segunda explicación de Daniela, para otorga ***valor lógico*** *a la afirmación usa como* ***dato*** *de partida que en uno de los triángulos el ángulo en A es congruente al ángulo en B, porque lo comprobó en GeoGebra (usando una representación que podría ser como la de la Imagen 84). Esos datos le permiten* ***concluir*** *que el triángulo (ABC) es isósceles y más adelante determinar la congruencia de los segmentos gracias a un conocimiento previamente socializado y aceptado sobre el triángulo isósceles.*

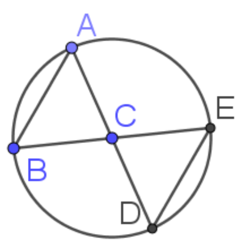


Imagen 84. Construcción de Daniela recreada en GeoGebra con nombres que permitan el análisis

En su discurso Daniela relata una ***co-acción*** *en la ella arrastró los puntos de su construcción y la medida de los ángulos no cambiaba. En este caso el arrastre y la medida sirven para* ***afirmar*** *que una propiedad se cumple, pero a diferencia de los casos anteriores no es la propiedad enunciada (sobre los lados), sino otra propiedad (sobre los ángulos). En el momento de la explicación el relato sobre la representación dinámica sirve como* ***herramienta*** *para afirmar que se cumple una relación entre los ángulos (****propósito*** *previamente establecido); sin embargo, en el proceso de Daniela la representación* *dinámica sirvió para que ella notara dicha propiedad y generara una estrategia de prueba que no habría podido tener con una representación en papel (**propósito** que surge de la actividad), por lo que en ese caso se vislumbran los efectos **reorganizadores** del **instrumento**.*

*Tener la certeza de la congruencia de los ángulos le permite a Daniela estructura una prueba que es similar a las que se presentan sin el uso de la tecnología digital, sin embargo, la prueba de Daniela no es traducible al papel y lápiz porque los datos son resultado de una **co-acción**. Un refinamiento del razonamiento de Daniela sobre la representación de la Imagen 84 podría verse como se presenta a continuación.*

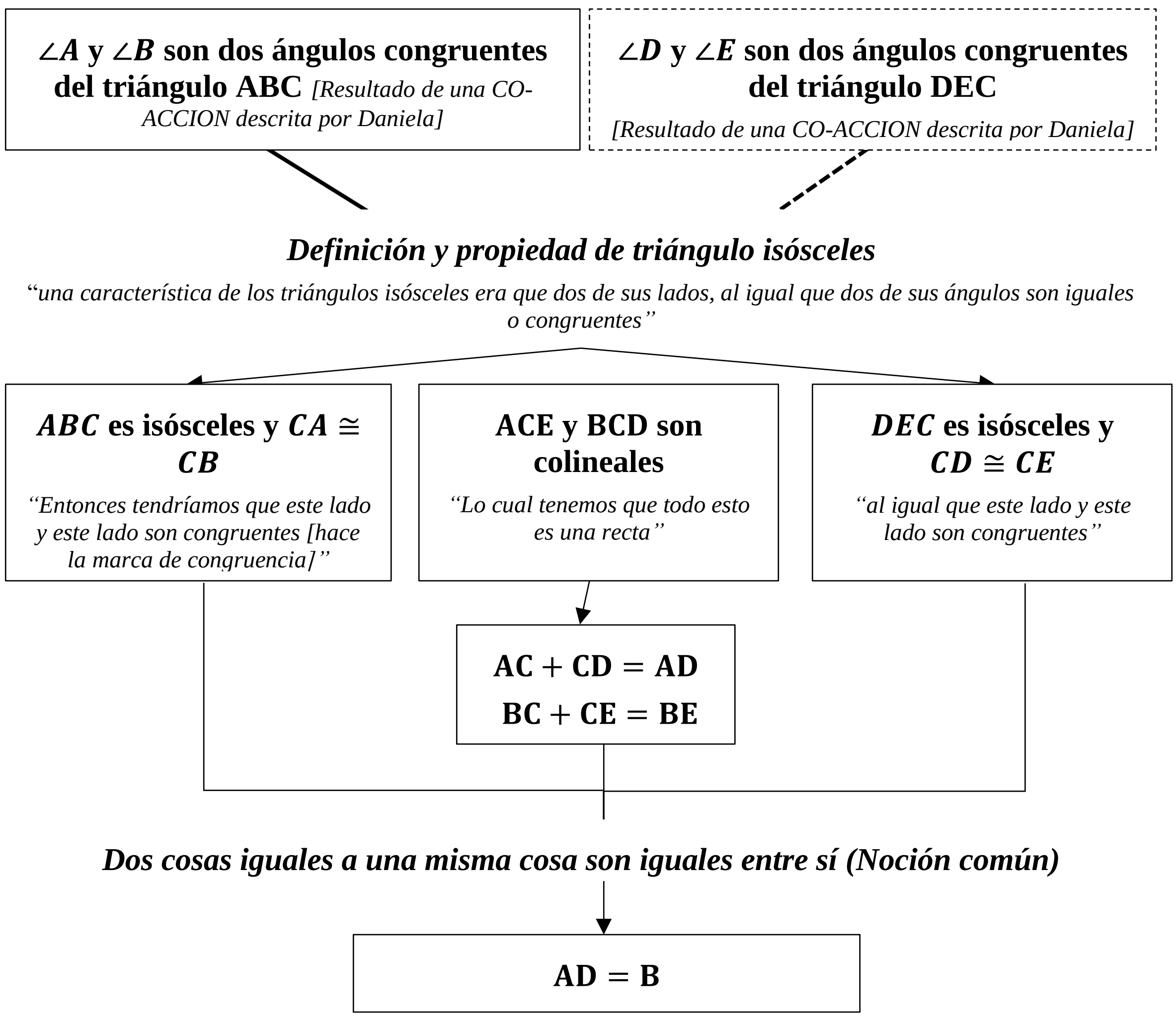


Imagen 85. Esquematización de una prueba que tienen los componentes mencionados por Daniela

Cabe aclarar que esta esquematización se refiere a un refinamiento de las ideas presentadas por Daniela, y aunque no es la prueba que ella presentó decidimos construirlo para que se pudiera observar claramente las relaciones que está estableciendo.

6.4.2. Construir un triángulo isósceles

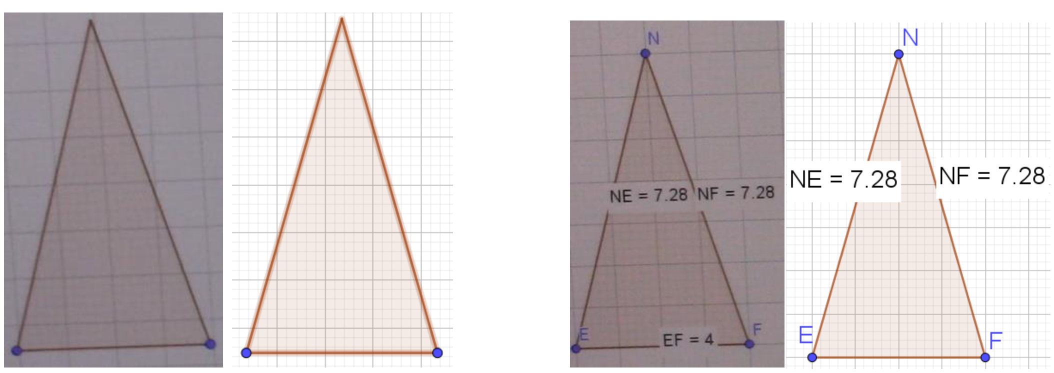
En el desarrollo de la sesión, la investigadora propone el reto de construir un triángulo isósceles y poder justificar por qué es isósceles de acuerdo con cómo fue construido. A continuación, se presentan algunas de las ideas presentadas por los grupos.

El equipo de Víctor y Fabiola:

Los estudiantes usaron la herramienta de polígono rígido para que su construcción no se deformara con el arrastre (ver Imagen 86a).

Cuando la investigadora les pregunta por qué el triángulo construido es isósceles el estudiante dice: "porque dos de sus lados son iguales y uno es diferente". La investigadora pregunta cómo están seguros de que dos lados son iguales y Sebastián arrastra la construcción para que coincida con la cuadrícula, toma las medidas de los lados (ver Imagen 86b) y dice "porque miden lo mismo".

La investigadora pregunta cómo justificaría si no pudiera medir y el estudiante cuenta los cuadros y muestra que tiene la misma cantidad de cuadros.



(a) (b)

Imagen 86. Construcción del equipo de Víctor

En este caso los estudiantes buscan establecer certeza sobre la ***afirmación*** *de que el triángulo es isósceles haciendo alusión a la* ***definición*** *que conoce de este tipo de triángulos (que tienen dos lados iguales y uno desigual). Para esto realizan* ***acciones relativas a la***

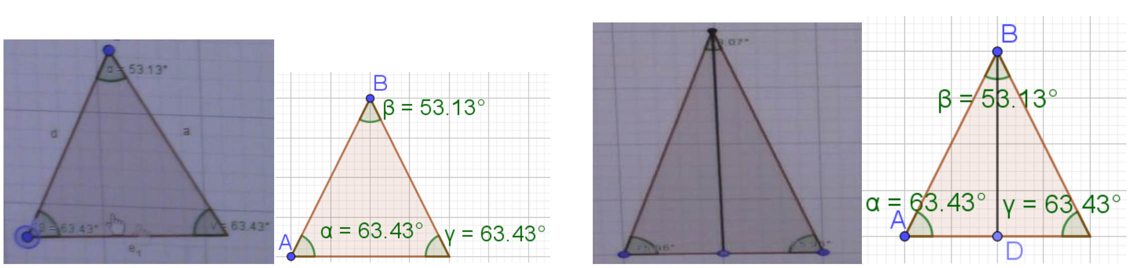
percepción *en donde usan la* ***respuesta*** *del medio digital, ociada a la* ***medida*** *de los lados, para poder afirmar que dos lados miden lo mismo y por lo tanto cumplen con la definición de triángulo isósceles. De igual manera cuando se les restringe el uso de las medidas cuentan los cuadrados de la cuadrícula como una forma indirecta de medir los lados del triángulo y nuevamente comprobar que el triángulo cumple con la definición de isósceles gracias a una* ***co-acción.***

En este caso el medio está ***amplificando*** *la capacidad de los estudiantes para tomar medidas con precisión y la capacidad de mover una figura después de construida. En el papel la medida no sería precisa y la construcción tendría que hacerse nuevamente. Así que en este caso la representación se usa como* ***herramienta*** *que permite mostrar la medida precisa de los lados y mover un triángulo después de construido.*

Equipo de Luis y Rosa:

De igual forma que el equipo de Víctor, los estudiantes usaron polígono rígido, pero tomaron la medida de los ángulos del triángulo y no de los lados (ver Imagen 87a). Cuando la investigadora pregunta cómo están seguros de que el triángulo es isósceles Luis dice “porque sus ángulos son iguales”, entonces se les pregunta cómo justificarían sin la medida. Rosa dice:

R: sí lo doblas a la mitad, uno tendría que estar perfectamente encima del otro sin que hubiera bordes (construye un segmento que parece estar ubicado en la mediatriz de la base - ver Imagen 87b). Es como si lo partieras a la mitad (…) representado acá en la computadora, para que tu puedas ver que es un triángulo isósceles.



(a) (b)

Imagen 87. Construcción del equipo de Carlos

En la primera parte, los estudiantes usan la ***medida (****que presenta GeoGebra como respuesta a sus acciones) como una* ***herramienta*** *para* ***mostrar*** *que el triángulo es isósceles ya que cumple con el hecho de que dos de sus ángulos son congruentes, el cual parece ser un* ***propósito*** *previamente establecido por los estudiantes.*

Cuando la investigadora restringe el uso de medidas, el ***medio*** *se convierte en un obstáculo para presentar una prueba que (para ellos) sería válida en el papel, la cual se refiere a doblar el triángulo a la mitad y observar que las dos mitades se pueden superponer. En este caso la representación dígital y el segmento construido sirven para ilustrar la idea de lo que harían en en papel. A pesar de que el segmento construido podría referirse a la mediatriz y servir para presentar una prueba, en este caso no fue posible.*

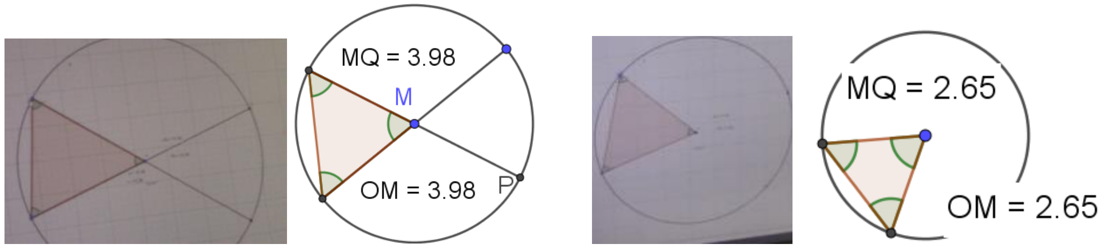
El equipo de Camilo con Miguel y socialización de Miguel:

En el trabajo en parejas Camilo construye un triángulo, mide sus lados (y ángulos) y después arrastra los vértices hasta que dos de las medidas parecen coincidir y dice "ahí está", pero su compañero le solicita que arrastre uno de los vértices y al hacerlo las medidas no se mantienen.

Hasta este punto se está evaluando la ***afirmación*** *de que el triángulo construido es isósceles, sobre la que Camilo parece tener un* ***valor epistémico*** *de cierto, sin embargo, Miguel presenta una* ***co-acción*** *en la que arrastra uno de los puntos de la construcción y la* ***respuesta*** *del medio es que la medida de los segmentos no es siempre la misma. Esta respuesta le permite modificar el valor epistémico de su compañero y reconocer que la propiedad no es estructural.*

Después de algunos minutos Miguel explica algo (que no se entiende por el tono de voz) y cuando la investigadora se acerca a los estudiantes construyen un triángulo sobre la construcción del problema anterior (ver Imagen 88a) y Miguel explica su idea diciendo:

M: fue lo del triángulo isósceles y es que si dos puntos (…) o sea, el punto de la circunferencia al centro de un círculo es el radio y el radio siempre va a ser igual, si comparte la misma circunferencia, entonces un triángulo isósceles que tiene dos lados iguales, en este caso los dos radios, y su otro ladito no es igual, pero estos dos son iguales.



(a) (b)

Imagen 88. Representación del equipo de Camilo

La investigadora pregunta por qué construyeron los otros dos radios que no son lados del triángulo y Miguel después de reflexionar dice que no va a necesitarlos y los borra (ver Imagen 88b). Al borrar los segmentos Miguel arrastra uno de los puntos y dice:

M: las muevo y sigue la misma medida […] porque este [arrastra uno de los radios] son dos radios y son iguales y en el triángulo isósceles tiene dos lados iguales.

Ahora Miguel ofrece una justificación en la que busca establecer certeza sobre la ***afirmación*** *de que el triángulo construido es efectivamente isósceles. Para esto presenta una representación y un* ***razonamiento*** *asociado donde usa como* ***dato*** *que MQ y OM son radios de la circunferencia con centro en M y logra* ***concluir*** *que el triángulo es isósceles. Para esto alude al* ***hecho*** *que los radios de una circunferencia son congruentes y que en el triángulo isósceles dos de sus lados son congruentes.*

En la justificación de Miguel (como producto) la representación actúa como acompañante del discurso de la misma manera que en las ***pruebas*** *euclidianas. Pero, es la interacción con la representación dinámica del problema anterior (de los dos diámetros), la que permite crear una estrategia de solución del problema, un* ***propósito*** *que no se había establecido antes, por lo que la representación, en este caso, sirve como* ***instrumento*** *para buscar estrategias de justificación.*

Además, al final la representación ***muestra*** *que la medida de los lados permanece de la misma medida,* ***amplificando*** *la capacidad de los estudiantes para evaluar múltiples casos de manear simultanea y tomar medidas con exactitud.*

Cuando Miguel pasa al frente y realiza la construcción en GeoGebra (ver Imagen 89). Manifiesta su intención de medir los lados, pero la investigadora lo detiene y le pregunta si es necesario. Miguel al igual que sus compañeros dicen que es necesario para comprobar y él añade

M: pero ya tenemos el conocimiento de que el radio de un circulo siempre va a ser el mismo o sea de un punto de la circunferencia al centro siempre va a ser lo mismo

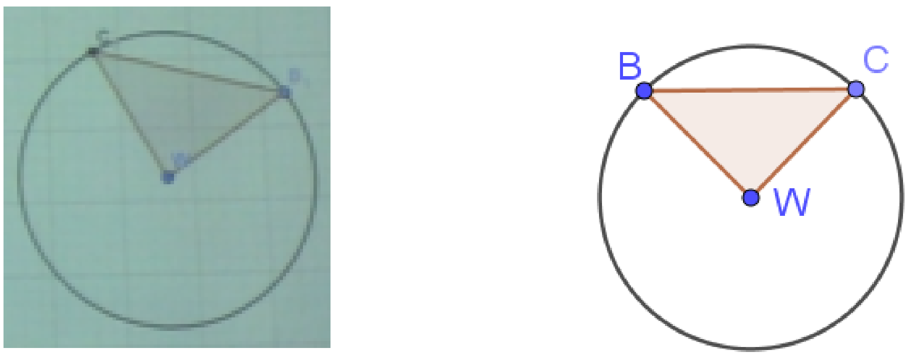


Imagen 89. Construcción del Miguel para socializar triángulo isósceles (tomada desde la cámara y recreada en GeoGebra)

La investigadora pregunta directamente a Miguel si es necesario medir y su respuesta es:

M: No, porque vemos que está en la circunferencia entonces eso me dice que esto ya es el radio y ambos son iguales […] CW es igual a WB porque ambos son radios y en un triángulo isósceles (…) que es lo que estamos viendo, dos de sus lados son iguales. El lado CB no es igual a los otros dos y eso hace que sea un triángulo isósceles.

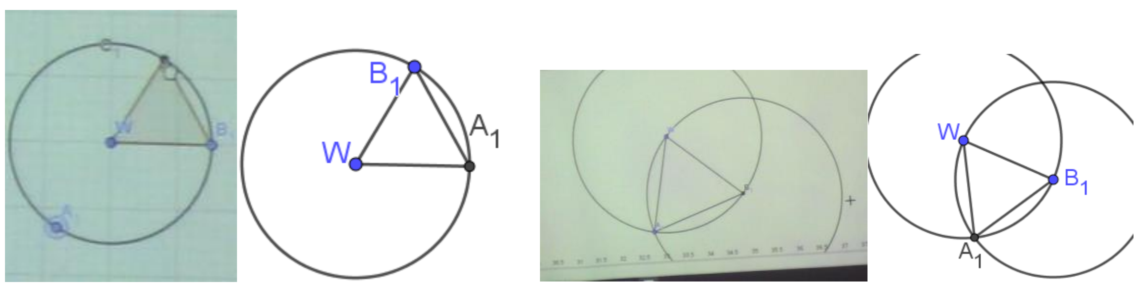
Después de la explicación Miguel decide toma la medida de los lados y muestra que dos de las medias son iguales y arrastra los puntos de la circunferencia y dice “Y siguen siendo lo mismo, ambos lados son iguales, este no [se refiere a BC], pero los otros dos sí. Y eso es un triángulo isósceles que tiene dos lados iguales”

Los estudiantes afirman estar de acuerdo con la explicación, entonces la investigadora arrastra el triángulo de tal manera que parece equilátero, lo que permite introducir otro problema.

En este caso, destaca que en la parte grupal Miguel estableció la certeza de su afirmación gracias a acciones relativas al razonamiento, sin embargo, cuando va a convencer a sus compañeros decide empezar ***midiendo*** *y* ***mostrando*** *que la propiedad se cumple, e incluso después de mencionar la justificación centrada en la circunferencia decide medir y mostrar la congruencia entre ambos radios.*

6.4.3. Construir un triángulo equilátero

Durante la socialización del problema del triángulo isósceles surge una discusión sobre el triángulo equilátero. Esta situación lleva a que la investigadora modifique el triángulo de Miguel, usando una mediatriz (que después oculta), para que ahora sea equilátero (ver Imagen 90 a).



(a) (b)

Imagen 90. Modificación de triángulo isósceles para que ahora sea equilátero

La investigadora pregunta cómo se podría hacer para probar que el triángulo es equilátero y Daniela pasa al frente y dice: "ya vimos que los radios miden lo mismo entonces pondríamos otro círculo acá (trata de construir una circunferencia con centro en W) no, acá no era. Era de acá para acá (construye una circunferencia con centro en B_1 que pasa por A_1 – ver Imagen 90 b) este es un radio igual [señala el segmento A_1B_1] y pues (...) podemos ver que mide igual que los demás (…) y podemos confirmarlo igual (construye la tercera circunferencia con centro en A_1 que pasa por B_1 – ver Imagen 91)".

Aquí Daniela empieza el discurso reafirmando un hecho que ya se había establecido con el problema anterior, que se refiere a que WB_1 y WA_1 son congruentes debido a que los radios son congruentes (ver problema anterior 6.4.3) por lo que el problema parece estar en probar que el segmento A_1B_1 es congruente a los otros dos para poder probar la ***afirmación*** *de que el triángulo es equilátero.*

Daniela basa su prueba en ***acciones relativas a la percepción,*** *en donde primero construye una circunferencia con centro en B_1 que pasa por A_1 y la* ***respuesta*** *del medio se refiere a mostrar que W pertenece a dicha circunferencia, lo cual le sirve para establecer una congruencia entre el segmento deseado y uno de los radios.*

En este caso la representación sirve para el ***propósito*** *de mostrar que efectivamente W pertenece a la circunferencia y posteriormente estructurar una justificación. De modo que hay una* ***co-acción*** *en la que el medio* ***amplifica*** *la capacidad de Daniela para realizar construcciones precisas y evaluar muchos casos de manera simultánea, por lo tanto, se puede afirmar que la representación está siendo usada como una* ***herramienta*** *para garantizar una relación y estructurar un razonamiento basado en un hecho con un valor epistémico de cierto (la congruencia de los radios).*

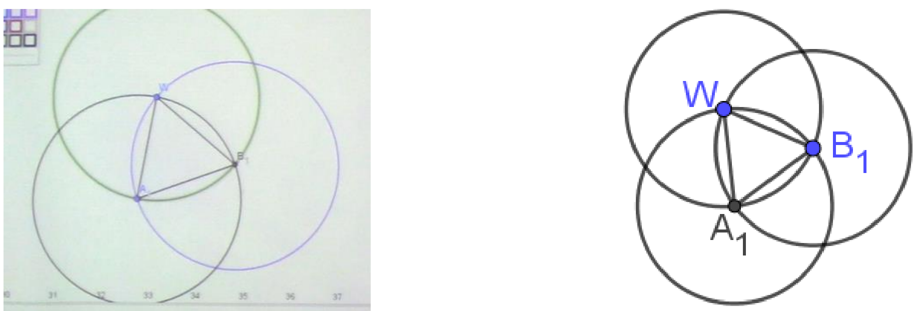
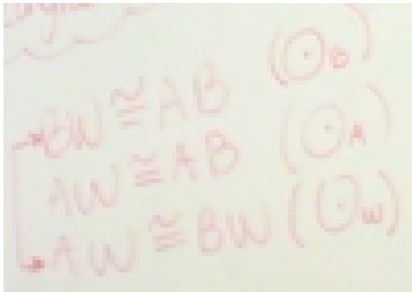


Imagen 91. Daniela construye dos circunferencias para probar que el triángulo es equilátero

Todos los estudiantes manifiestan estar de acuerdo con la explicación de Daniela, por lo que la investigadora decide escribir las ideas de forma más organizada. Empieza preguntando por la conclusión a la que se debe llegar y los estudiantes dicen: "a que todos son congruentes entre sí", entonces escribe en el tablero la relaciones y mientras lo hace Camilo dice: "BW y AB ambos se relacionan con B". La investigadora pide a Camilo que explique a qué se refiere y el estudiante dice: "que ambos son radios" y especifica más diciendo: "que son congruentes". La investigadora escribe $BW \cong AB$ y pregunta por qué se puede afirmar esa relación, así que Camilo dice: "por la circunferencia de centro en B".

Continuando Fabiola dice: "puede ser también la de AW, sería congruente (…) con BW", pero afirma que es por la circunferencia con centro en A. Al escuchar la afirmación Camilo dice que no y se escuchan voces de estudiantes diciendo "sería AW y AB". La última relación es mencionada por Rosa y se escriben el tablero (ver Imagen 92).



$$BW \cong AB \quad (\odot_B)$$

$$AW \cong AB \quad (\odot_A)$$

$$AW \cong BW \quad (\odot_W)$$

Imagen 92. Justificación escrita en el tablero

La investigadora pregunta si ya se llegó a la conclusión deseada y Camilo dice: “ya […] hasta el momento estaríamos demostrando que el triángulo sí es equilátero”, y Daniela añade: “con la del tercero y el primero, en el tercero tenemos AW es congruente a BW y el de BW es igual a AB está hasta arriba”. Finalmente, la estudiante añade que se puede con cualquier pareja, solo que las letras estarían en otro orden.

En esta parte los estudiantes (con ayuda de la profesora) ofrecen una prueba realizada en el papel (ver Imagen 92*), ya que* ***concluyen*** *la congruencia de algunas parejas de lados gracias al* ***hecho*** *de que los radios de cada circunferencia son congruentes. Este razonamiento sirve para establecer un valor lógico sobre la* ***afirmación*** *de que el triángulo es equilátero, sin embargo, el* ***dato*** *que se usa es que los segmentos son radios y no hay que olvidar que se pudo afirmar que W pertenecía a la circunferencia con centro en A_1 y con centro en B_1 gracias a una* ***co-acción*** *entre las acciones de Daniela y la respuesta del medio digital. Entonces, la representación dinámica es una* ***herramienta*** *que le permite a* ***todos*** *los estudiantes presentar una prueba conjunta de que en triángulo es equilátero.*

En la siguiente sesión se propone el reto de construir un triángulo equilátero y todos los equipos usan la intersección de tres circunferencias y una justificación resulta ser similar a la descrita anteriormente.

6.4.4. Explicar por qué: triángulo isósceles

Antes de iniciar la actividad, la investigadora realizó cada construcción para que los estudiantes siguieran los pasos y todos usaran los mismos nombres de los puntos. En un primer momento de la actividad los estudiantes trabajaron en un equipo determinado, pero con el fin de enriquecer los argumentos se decidió que, en un segundo momento, los equipos se mezclaran. Para esta actividad la figura es la que se presenta en la Imagen 93.

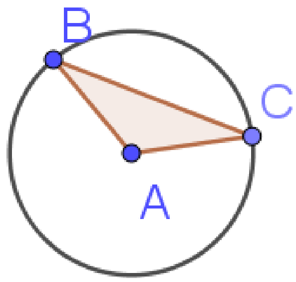


Imagen 93. Figura usada para la actividad "explicar por qué: triángulo isósceles"

En el equipo de Daniela (con Luis y Rosa), ella empieza a escribir en una hoja y después de un tiempo explica a sus compañeros y ellos aceptan la solución sin inconvenientes.

D: yo le puse que el ABC es isósceles ya que el triángulo isósceles, como ya vimos acá en la definición, tiene dos lados congruentes que (…) bueno ya vimos que están formados por radios, ya que, si te centras en la circunferencia con centro A, el segmento AC es un radio y el segmento AB es otro radio y acá en la definición los radios vimos que todos los radios son congruentes [definición mencionada por simultáneamente por Daniela y Luis], ese es el hecho. Por lo que, al ser congruentes o iguales, los radios y dos (…) lados (…) son congruentes, se forma el triángulo isósceles, por eso es por lo que es isósceles.

Para establecer el valor ***lógico*** *sobre la* ***afirmación*** *de que el triángulo construido es isósceles, Daniela usa como* ***dato inicial*** *que AB y AC son radios de la circunferencia con centro en A y al final* ***concluye*** *que el triángulo es isósceles; esto usando como* ***garantías*** *el hecho de la circunferencia y la definición de triángulo isósceles (ver* Imagen 94*).*

En la ***prueba*** *de Daniela la representación es auxiliar al discurso, permitiendo ilustrar la generalidad del hecho de la misma forma que lo haría una figura en el papel. En este caso el dinamismo no se usa directamente, ya que ella no arrastra ninguno de los puntos de la construcción. Es decir, que esta es una prueba que podría ser traducible al papel. Cabe resaltan que en este caso la estudiante presenta un razonamiento estructurado y con alusión específica a hechos y definiciones que le sirven para otorgar un cierto valor lógico a la afirmación.*

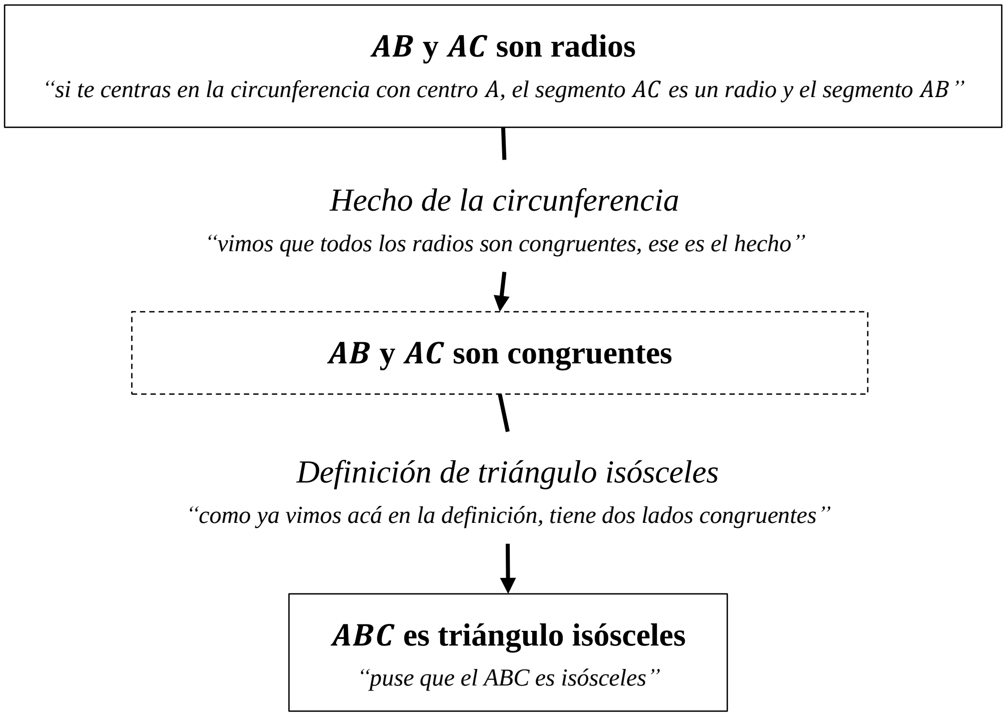


Imagen 94. Esquematización del razonamiento de Daniela para probar que el triángulo es isósceles.

Por otra parte, en el equipo de Camilo (Con Juan y Fabiola), Juan mide los lados del triángulo y arrastra uno de los puntos sobre la circunferencia, lo que se ve en la pantalla es la no modificación de dichas medidas. Después eso Camilo empieza a hablar mientas escribe, así que dice:

C: La explicación de porque es isósceles es porque cumple con las características (…) con la definición [escribe en una hoja] de tener dos lados congruentes.

Se está evaluando la misma ***afirmación*** *que en el caso de Daniela, pero aquí los estudiantes no recurren a procedimientos relativos al razonamiento, sino que recurren a acciones* ***relativas a la percepción.*** *Se presenta una* ***co-acción*** *en la que los estudiantes miden los lados del triángulo, arrastran los puntos y la* ***respuesta*** *del medio se refiere a que dos de las medidas permanecen iguales. Esta igualdad de medidas, que es visible gracias a la interacción con la representación, permite que se pueda determinar que el triángulo cumple con la definición.*

En este caso el medio ***amplifica*** *la capacidad que tienen los estudiantes para tomar medidas exactas y junto con el arrastre permite* ***mostrar*** *que las medidas de los lados son siempre iguales, es decir que en este caso la representación sirve como una* ***herramienta*** *que es* *usada con el **propósito** previamente establecido de **mostrar** la estructuralidad de la propiedad.*

La investigadora pasa por el grupo y dice que efectivamente todos los problemas cumplen con las definiciones, que eso ya se sabe de antemano y aclara que el reto está en explicar por qué se cumple la definición. Los estudiantes arrastran uno de los puntos sobre la circunferencia desencadenando las siguientes intervenciones de Juan y Camilo:

J: ¿No sería porque se hace una congruencia, al ser radios congruentes no van a cambiar, estos (señala AB y AC)?.

C: Y este no es un radio […] Este es un segmento que se forma de uno a otro (señala CB), por eso es que estos radios son iguales y al estar en una circunferencia sabemos que es isósceles.

*Aquí los estudiantes han pasado de las acciones relativas a la percepción para enfocarse en aquellas **relativas al razonamiento** y presentar una prueba similar a la presentada por Daniela (ilustrada en la Imagen 94) pero con menos detalles en el discurso. Sin embargo, a diferencia del proceso de Daniela, en este caso la **representación** fue determinante para el desarrollo de la estrategia, ya que después del **arrastre** los estudiantes notan la congruencia de los segmentos garantizada por la circunferencia. En este caso se presentó una **co-acción** en la que los estudiantes arrastraron un punto y este se mantuvo sobre la circunferencia, lo que sirvió para el **propósito** (no decretado con anterioridad) de establecer una nueva estrategia de justificación. En este caso, la representación actúa como **instrument**o para los estudiantes.*

Después de mezclar los grupos, Camilo en su nuevo grupo (con Daniela y Miguel) decide explicar y al hacerlo sus compañeros manifiestan estar de acuerdo porque en esencia fue lo mismo que ellos hicieron. En su explicación, Camilo dice:

C: "quedamos en que este es isósceles porque D y C son radios y todos los radios son congruentes dentro de la circunferencia y a la hora de medirlos [tratan de tomar medida de los lados, pero parecen no poder y entonces cambian de computador] y lo podemos comprobar con la mediada de B y C (arrastra los puntos). Vas a tener la misma medida y esto nos ayuda con la definición, además que si tiene dos ángulos

> congruentes es isósceles, (…) ahora había dicho lo de los ángulos, para comprobar que si estamos bien (toma la medida de los ángulos y arrastra). Igual tenemos ahí los ángulos congruentes entonces podemos decir que si, estamos en un isósceles, porque tiene dos lados, dos segmentos que son radios, de la misma longitud, son congruentes, forman un tercer segmento que obviamente no va a ser congruente con estos dos, sus ángulos son congruentes y si lo movemos por la circunferencia, aunque cambie seguirán siendo congruentes.

En esta parte Camilo combina las ideas presentadas en su primer grupo, analizadas antes; pero decidimos incluirlo porque llama la atención que, aunque ya ha probado el hecho usando relaciones geométricas decide incluir la medida como parte de su discurso.

6.4.5. Explicar por qué: rombo

Para esta actividad los estudiantes debían explicar por qué el cuadrilátero $DFEG$ es rombo (ver Imagen 95).

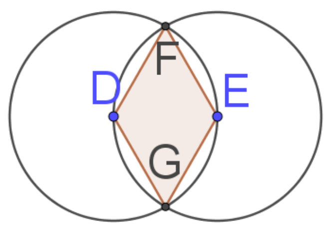


Imagen 95. Figura usada para la actividad "explicar por qué: rombo"

Aquí solo se obtuvo registro de una de las cámaras ya que en la otra los estudiantes hablaban a un volumen bajo. Pero de acuerdo con lo que escribieron en la hoja (ver Imagen 96) pareciera que notaron que DF, DE y DG eran radios de la circunferencia con centro en D, y lo mismo para la otra circunferencia, sin embargo, no estructuraron un texto donde fuera clara la relación de dependencia establecida, por lo tanto, su producción se queda al nivel de lo que Duval (1999) define como una descripción.

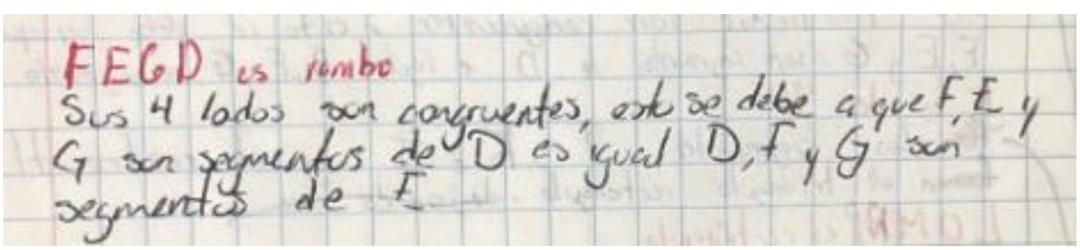


Imagen 96. Escrito del grupo de Camilo para explicar por qué FEGD es rombo

En el otro grupo (de Daniela, Luis y Rosa), Daniela escribe la respuesta en una hoja y dice:

D: Yo puse que es un rombo porque el segmento DF que (…) bueno, si nos centramos en la circunferencia con centro D el segmento DF es un radio y el segmento DG es otro radio, por lo que (…) igual como ya vimos son congruentes, los radios. Y si nos centramos en la circunferencia con centro en E podemos observar que EF, el segmento EF es un radio y EG es otro radio, entonces ya se forman cuatro radios y al ser los cuatro radios congruentes, ya vimos que la definición del rombo es que todos sus los lados son congruentes. Entonces ahí todos los radios son congruentes por eso es por lo que es rombo.

L: Okey, y también sus dos ángulos son congruentes dos a dos, ¿no? [Esta afirmación se da ya que Luis hizo su propia construcción en la que midió los ángulos del cuadrilátero y arrastró]

D: También pero no lo pusimos en la definición, es hecho, entonces no lo conté.

La investigadora escucha la explicación y cuestiona a los estudiantes cómo saben que los cuatros lados son iguales ya que inicialmente se establece que en parejas son iguales. Inicialmente Daniela repite la explicación de los radios congruentes, así que la investigadora empieza a hacer una construcción similar donde las circunferencias no son congruentes y mientras lo hace Daniela dice: "Porque las circunferencias pasan (…) o sea el (…) si te das cuenta entre DE, si tuviéramos un segmento se formaría radio, entonces sería congruente"

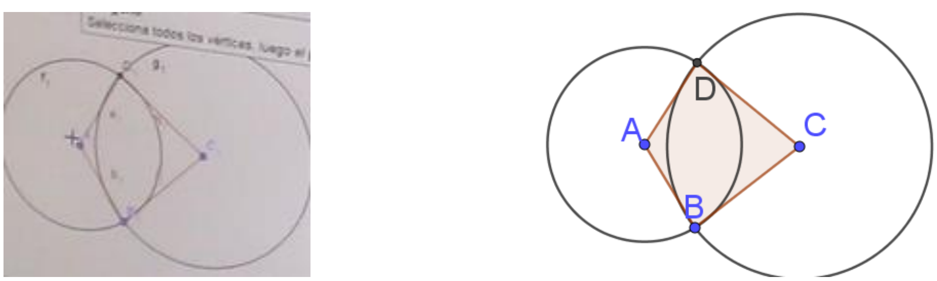


Imagen 97. Ejemplo presentado porla investigadora para aclarar su pregunta

Cuando la investigadora acaba la construcción (ver Imagen 97) Daniela menciona que en ese caso AC no es radio y por tanto no se podría decir que todos son congruentes.

Aquí la ***afirmación*** *que está en discusión es que el cuadrilátero* $DFEG$ *es rombo. Para* ***probar*** *esta afirmación Daniela usa como* **dato** *de partida que hay varios segmentos que son radios de dos circunferencias y* **concluye** *que todos tienen la misma medida gracias al* ***hecho*** *que los radios de una circunferencia son congruentes entre sí (ver* Imagen 98Imagen 32*). En el razonamiento inicial, Daniela establece la congruencia de dos parejas de lados congruentes, pero no queda claro cómo relaciona la congruencia entre las dos parejas para así poder concluir que todos son congruentes. Sin embargo, cuando la investigadora le pregunta manifiesta estar relacionando ambas parejas con* DE *y así logra establecer un razonamiento que esquematizado podría verse como en la* Imagen 98.

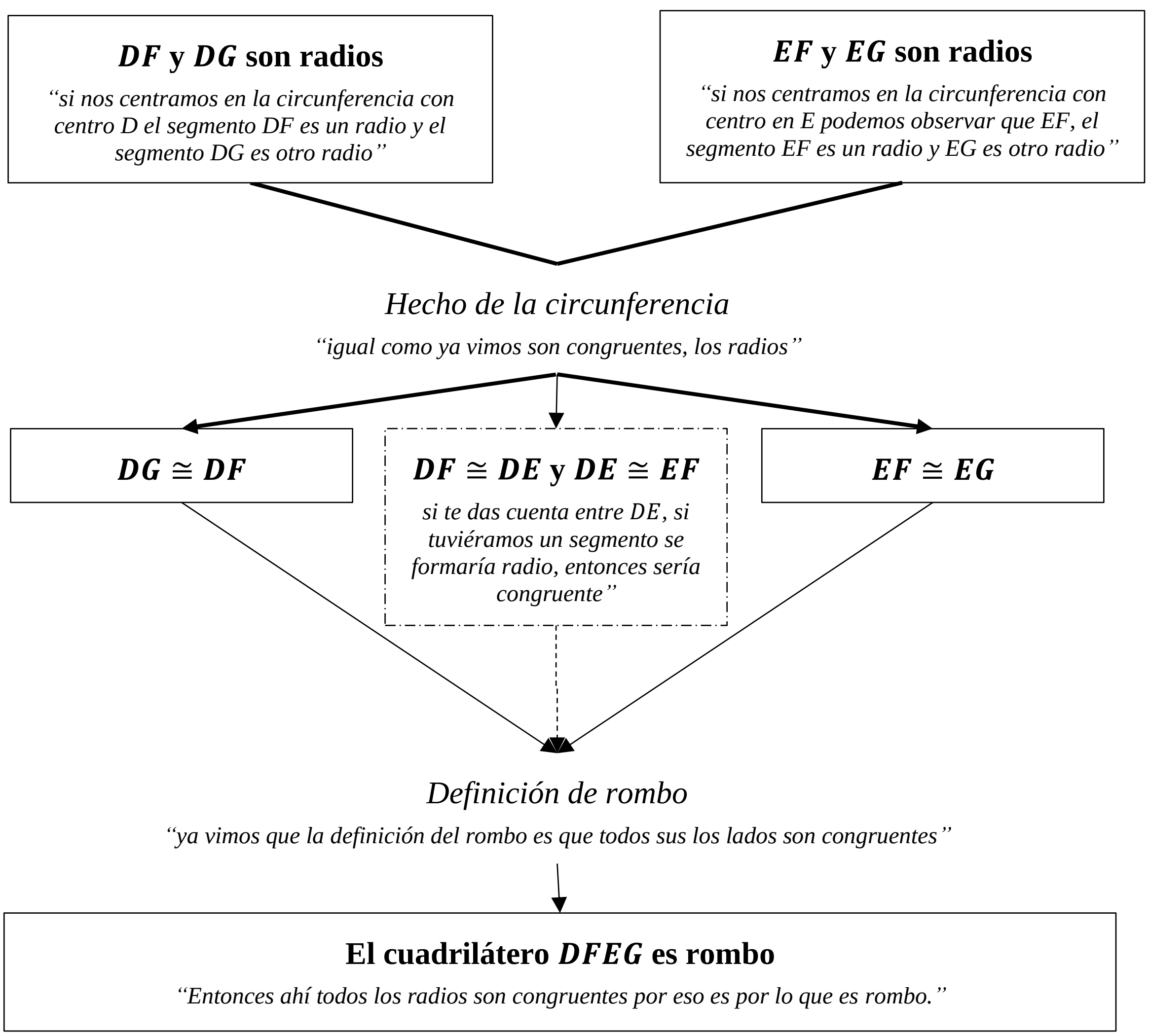


Imagen 98. Esquematización del razonamiento de Daniela para probar por qué el cuadrilátero es rombo

En este caso la representación y el discurso ilustran la generalidad del hecho, de la misma forma que en las pruebas Euclidianas. Hasta este punto el dinamismo de la representación no se ha usado de forma directa en el desarrollo de la prueba, por lo que se puede afirmar que es una prueba ***traducible*** *a una prueba de papel y lápiz.*

Continuando con la clase, en la parte grupal, Daniela es quién explica y empieza mencionando la congruencia de EG con EF y DG con DF de la misma manera que lo hizo en el primer grupo, pero esta vez incluye la relación con DE. Sin embargo, al acabar su explicación añade:

D: Igual algo que habíamos inferido y que no pusimos ahí es que los ángulos eran dos a dos (mide los ángulos y arrastra- ver Imagen 99) y acá podemos ver que igual estamos 2 a 2, 60 con 60 y 120 con 120.

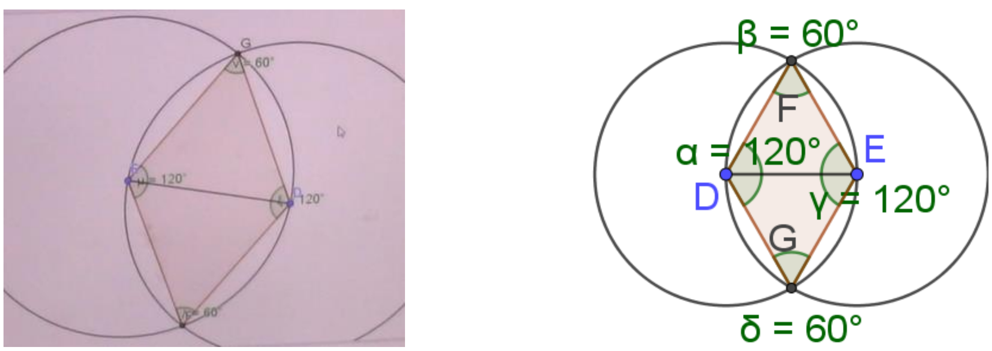


Imagen 99.En el grupo de Daniela miden los ángulos internos del rombo

En este caso es relevante resaltar que la representación dinámica parece estar presente en dos momentos, el primero donde Daniela adquiere nuevas ideas matemáticas (no registrado en cámara) y el segundo dónde explica a sus compañeros el hecho encontrado. Sobre el primer momento podemos afirmar que se reconocen los efectos ***reorganizadores*** *de las representaciones dinámicas, ya que Daniela lo usa para reconocer elementos estructurales de la representación y así poder acercase a nuevos conocimientos geométricos,* ***propósito*** *que se ha formado con el avance de las sesiones; de modo que la representación dinámica en este caso es un* ***instrumento*** *de aprendizaje.*

Por otra parte, Daniela ***mide y arrastra*** *elementos de su construcción para compartir un hecho descubierto, por lo que afirmamos que la representación se usa como* ***herramienta*** *para mostrar a sus compañeros que se cumple la propiedad.*

6.4.6. Explicar por qué: triángulo rectángulo

Para esta actividad se les solicitó a los estudiantes que explicaran por qué el ángulo en K es de 90° (ver Imagen 100)

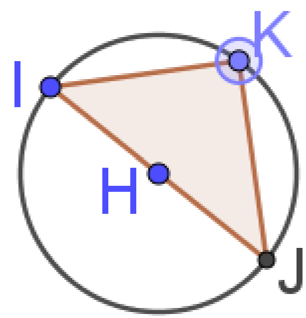


Imagen 100. Figura usada para la actividad "explicar por qué: triángulo rectángulo"

En el grupo de Daniela (con Luis y Rosa) ella empieza su explicación resaltando la presencia de dos triángulos isósceles, ya que se da la siguiente conversación:

I: ¿Y cómo sabes que es de 90?

D: Porque estás formando (…) un diámetro, dos radios. Y si agarras uno y formas otro segmento entre HK, podemos ver que se forma otro radio. Entonces, pues podemos ver que técnicamente acá es este (señala el diámetro), o sea esto de HJ tenemos la misma distancia que de HI y tenemos la misma distancia que de HK. Entonces, pues se forma (…) un triángulo isósceles.

I: Bueno, en realidad son dos triángulos isósceles

D: Entonces, ajá, puede tener acá un radio de HK. Podemos ver que esa misma distancia, entonces podemos ver que se forma un ángulo de 90.

I: Y, ¿dónde dice que con la misma distancia da un ángulo de 90°?

Daniela reflexiona y afirma que no puede establecer la relación, así que mientras intenta buscar una mejor explicación termina pasando al siguiente problema.

*En este caso, Daniela aportó nueva información sobre el problema, ya que logra determinar una relación entre los lados congruentes y la presencia de dos triángulos isósceles. Sin embargo, esta relación no le permite llegar al hecho de que el ángulo es 90° y por lo tanto se queda a nivel de una relación de causalidad que no constituye un argumento (*Duval, 1999).

En la parte grupal, Miguel empieza explicando a Camilo y Daniela y dice:

M: Acá era 90° porque su ángulo central es un diámetro y mide 180° y el ángulo (…) inscrito es la mitad del ángulo central, y pues este mide (…) que es un diámetro, mide 180° y la mitad son 90°. Entonces el ángulo inscrito mide 90° y el central es lo doble del inscrito, 180°.

Después de acabar la explicación Daniela añade que podrían medir el ángulo central para confirmar.

En este caso Miguel tiene el ***propósito*** *de explicar por qué el ángulo en K es de 90°, estableciendo un razonamiento que relaciona la información de la representación con un hecho conocido (ver* Imagen 101*). Empieza resaltando que IJ es un diámetro y que el ángulo en H es de 180°, esto se sirve como* **dato** *para* **concluir** *que el ángulo en K mide 90° gracias al* **hecho** *que relaciona el ángulo central y el ángulo inscrito. Este hecho ya se había abordado en clases pasadas y adquirió un valor epistémico para muchos de los participantes.*

***H* es un ángulo central de 180° y *K* es un ángulo inscrito**

"porque su ángulo central es un diámetro y mide 180°"

Hecho del ángulo central

"el ángulo (...) inscrito es la mitad del ángulo central,"

***K* mide 90°**

"ángulo inscrito mide 90°"

Imagen 101. Razonamiento de Miguel para probar que el ángulo es de 90°

Durante la explicación de Miguel a sus compañeros no se presentó ninguna co-acción, por lo que la representación sirvió para el entendimiento del discurso como parte de la ***prueba*** *(al igual que en las pruebas Euclidianas), sin embargo, resaltamos la importancia del dinamismo para poder establecer como cierto el hecho de que el ángulo inscrito es la mitad del ángulo central.*

6.4.7. Explicar por qué: rectángulo

Para esta actividad los estudiantes deben explicar por qué el cuadrilátero $LOMP$ es rectángulo (ver Imagen 102).

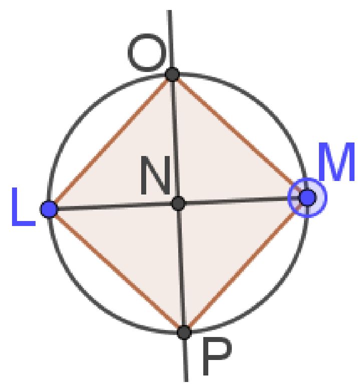


Imagen 102. Figura usada para la actividad "explicar por qué: rectángulo"

Para dar solución a este problema todos los equipos midieron los ángulos, de manera que determinaron que el cuadrilátero era rectángulo al tener todos sus ángulos rectos (ver Imagen 103).

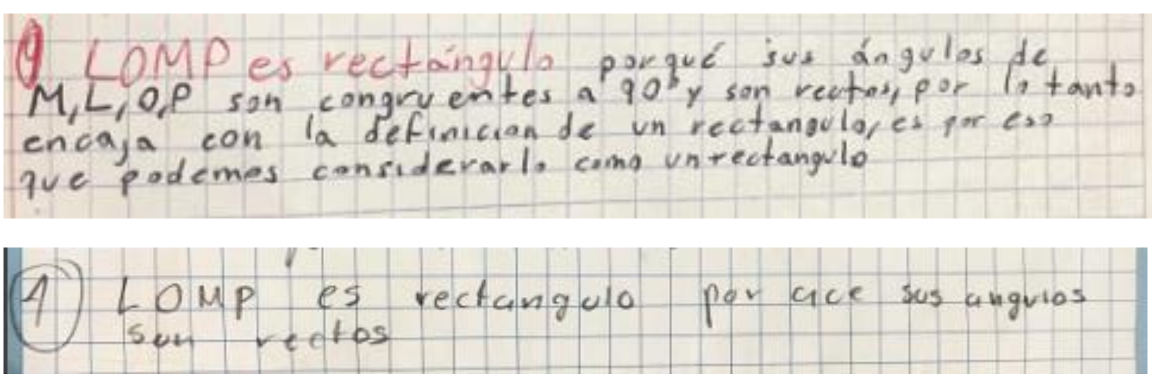


Imagen 103. Solución de los grupos al cuarto problema

En este caso los equipos recurren a acciones ***relativas a la percepción,*** *en donde miden los lados del triángulo, arrastran los puntos y la* ***respuesta*** *del medio se refiere a que dos de las medidas permanecen iguales. Esta igualdad de medidas, que es visible gracias a la* *interacción con la representación, permite que se pueda determinar que el cuadrilátero tiene todos sus ángulos rectos. En este caso la representación sirve como una* ***herramienta*** *que es usada con el* ***propósito*** *previamente establecido de* ***mostrar*** *la estructuralidad de la propiedad.*

6.4.8. Explicar por qué: ángulos congruentes

Para esta actividad los estudiantes debían explicar por qué en la construcción el ángulo T es congruente con el ángulo U.

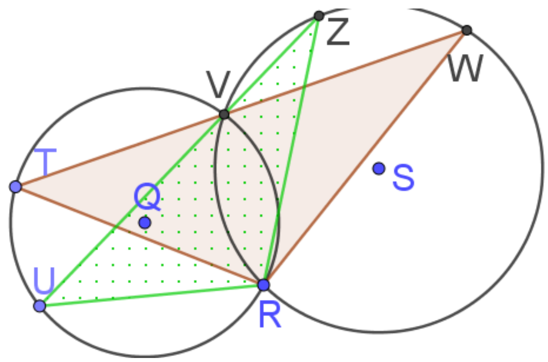


Imagen 104. Figura usada para la actividad "explicar por qué: ángulos congruentes"

Ninguno de los equipos tuvo tiempo de llegar a este problema durante la primera parte de la actividad. En la segunda parte, Camilo empieza arrastrando los puntos de la construcción y describiendo algunas relaciones entre las circunferencias, tales como puntos que comparten y en un momento del discurso dice:

C: Al juntar las circunferencias nos podemos percatar de que van a ser iguales (trata de arrastrar un punto, pero al no poder decide arrastrar a U y sobrepone ambos triángulos). Al este moverse por la circunferencia necesitas tener intersecciones en ambas circunferencias para que ahora sí al moverlo van a ser iguales, es lo mismo. Bueno, más o menos eso deduje yo.

Aquí Camilo está tratando de establecer una relación entre los elementos de la representación que le permitan justificar por qué los dos ángulos son congruentes. En el proceso se desarrolla una ***co-acción*** *en la que Camilo* ***arrastra*** *uno de los puntos sobre la circunferencia y en una de las posiciones los dos triángulos* ***coinciden.*** *Esto le permite a Camilo estructurar un* ***argumento*** *basado en* ***acciones relativas a la percepción****, así que el* *estudiante usa la representación para* ***mostrar*** *que en esa posición los ángulos miden igual, ya que los dos triángulos se pueden superponer.*

Aquí Camilo presenta acciones que dan cuenta del ***valor lógico*** *de la* ***afirmación*** *acerca de que el ángulo en U es congruente con el ángulo en T. El estudiante* ***arrastra*** *y la* ***respuesta*** *del medio es que los dos triángulos a lo que pertenecen dichos ángulos terminan coincidiendo. Así que el medio* ***amplifica*** *la capacidad del estudiante para realizar construcciones precisas de la infinidad de triángulos (de diferentes tamaños) que se pueden formar.*

En este caso las acciones presentadas por Camilo dan cuentas de la certeza de la afirmación, pero no establecen un por qué asociado a la comprensión, por lo que clasificamos este tipo de justificación como un ***argumento.***

Cabe aclarar que otro de los grupos se logró dar una explicación centrada en la presencia de ángulos centrales (ver Imagen 105), sin embargo, por la falta de registro en video de esta solución decidimos no analizarla, ya que no se puede tener certeza del rol desempeñado por la representación dinámica.

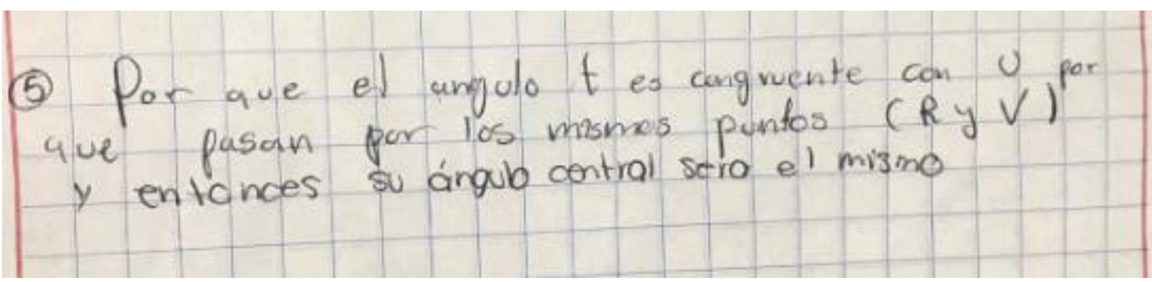


Imagen 105. Solución Luis y Juan al problema de explicar por qué: ángulos congruentes

6.4.9. Síntesis del trabajo en el aula

Al igual que en los análisis de la primera experimentación, presentamos una síntesis de la información analizada (ver Tabla 9). En este caso usamos "X" para denotar procesos en los que participaron varios estudiantes y usamos la inicial de cada estudiante en los procesos individuales. En general las afirmaciones que se tuvieron en cuenta fueron:

1. Los puntos de una circunferencia equidistan del centro
2. Dos diámetros son congruentes

3. El triángulo es isósceles
4. Es triángulo es equilátero
5. Por qué: triángulo isósceles
6. Por qué: rombo
7. Por qué: triángulo rectángulo
8. Por qué: ángulos congruentes

Tabla 9. Síntesis del trabajo en el Aula

		1		2				3			4	5			6		7	8
Valores	V. epistémico	X														D		
	V. lógico		X	C	L	D	D	V	L	M	X	D	C	C	D	D	M	C
Acción	Arrastrar				L	D				M				C				C
	Medir y arrastrar	X	X	C			D	V	L				C			D	~~M~~	
	Construir y arrastrar										X							
	Búsqueda en el menú																	
Respuesta	Sin cambio		X	C			D	V	L				C			D		
	Cambio constante																	
	Comportamiento inesperado	X				D												
	Pertenencia, contenencia o coincidencia		X		L						X							C
Sirve para…	Obtener nuevas ideas geométricas	X														D		
	Encontrar una estrategia				L	D				M	X			C				
	Mostrar la estructuralidad de la propiedad		X	C	L			V	L				C			D		C
	Usar un hecho con cierto valor epistémico					1	1			1	1	1		1			M	

CAPÍTULO 7

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En el apartado anterior presentamos la descripción y el análisis de las actividades llevadas a cabo en las dos experimentaciones. Particularmente nos centramos en los episodios de las dos experimentaciones en los que los participantes dieron cuenta del valor epistémico o valor lógico a una afirmación.

En este capítulo presentamos una síntesis de los resultados que se obtuvieron en el capítulo anterior, después usamos estos resultados como elementos que nos permiten dar respuestas preliminares a las preguntas de investigación. Por último, presentamos algunos resultados relevantes que no están asociados directamente con nuestras preguntas, pero que fueron notorios durante el análisis.

7.1. Síntesis de resultados

La presencia de artefactos tecnológicos en el aula de clase ha modificado la forma de desarrollar diferentes actividades, ya que ahora tenemos nuevas formas de comunicarnos, acceso a gran cantidad de información, la presencia de nuevos artefactos, versiones digitales de los artefactos conocidos, entre otros. Esto no solo ha modificado nuestras acciones sino también nuestra actividad cognitiva, por lo tanto, la presencia de las tecnologías digitales es un tema de interés en la educación y particularmente en la educación matemática.

Los registros de representación pueden entenderse como los mediadores cognitivos en el quehacer matemático, ya que gracias a estos logramos adquirir comprensión sobre las ideas matemáticas. La acción cognitiva que emerge depende del mediador y del medio en el cual se encuentra incrustado, ya que este último es el que permite la interacción que se puede llegar a tener con una representación.

Particularmente, en el caso de la geometría hay una interacción entre el registro de las figuras y registro discursivo que les permite ser mediadores en la adquisición y comunicación del conocimiento. Ahora bien, con los nuevos medios digitales esta interacción se ve modificada, ya que ahora las representaciones pueden estar incrustadas en medios (como los Entornos de Geometría Dinámica) que responden a las acciones del estudiante sobre la representación y por tanto lo que el estudiante ve en la pantalla es el resultado de su acción y la acción del medio dinámico sobre la representación que es estructural. Es decir que se presenta una co-acción que puede dar paso al desarrollo de nuevas formas de entender las ideas matemáticas, nuevas estrategias de solución a problemas, nuevas formas de argumentación y prueba, entre otras.

La capacidad del medio dinámico hace que la representación ahora esté cargada de significados a los que el estudiante puede acceder a través de sus acciones, por ejemplo, puede arrastrar la representación de un triángulo isósceles y a partir del arrastre de los puntos acceder a la propiedad asociada a sus ángulos. Como mencionamos desde el primer capítulo, la forma de acceder a los conocimientos geométricos modifica su forma en que validan, por lo que en esta investigación analizamos, desde un punto de vista amplio, la relación entre el estudiante y los artefactos dinámicos al validar afirmaciones.

Nuestro punto de vista es amplio en la medida en que no limitamos que el rol desempeñado por el medio digital a la etapa de conjeturación, sino que lo consideramos como parte de todo el proceso. En ese sentido diseñamos, describimos y analizamos una serie de actividades para que los estudiantes se vieran inmersos en el proceso y donde se viera la interacción con elementos en un entorno dinámico como GeoGebra. El análisis del trabajo de los estudiantes de secundaria y preparatoria (ver capítulo 6) y particularmente las tablas que sintetizan la información (ver Tabla 7, Tabla 8 y Tabla 9) nos llevó a determinar cuatro maneras en las que los estudiantes se relacionaron con los artefactos dinámicos.

7.1.1. La representación dinámica como un objeto geométrico

En el apartado 1.2 discutimos cómo la concepción de los objetos sobre los que se realiza una afirmación puede afectar la idea de validación dentro de una comunidad. Particularmente las representaciones desempeñan un papel crucial en el acceso a las ideas matemáticas (Duval, 2017) y en el caso de la prueba es usual que el registro discursivo y de las figuras conformen una prueba, ya que el discurso ilustra la generalidad de la figura (Duval, 1999). Sin embargo, con las representaciones dinámicas la generalidad puede verse mediante el arrastre.

En las producciones de los estudiantes analizados, encontramos que la estructuralidad de la representación dinámica puede provocar que ésta sea entendida como el objeto sobre el que se está realizando la afirmación. En consecuencia, la evidencia observacional se vuelve una fuente de validez de sus conocimientos matemáticos, de la misma forma que lo harían con los objetos materiales (ver apartado 1.2.1).

El estudiante usa la estructuralidad de la representación para *mostrar* que el hecho que se está afirmando es cierto, esta estructuralidad se hace presente gracias a una *co-acción* en donde el estudiante arrastra uno de los puntos de la construcción y el medio *responde* manteniendo las relaciones geométricas que se están examinando. Asociado al *arrastre* viene la acción de *medir* y *comparar* para mostrar invariantes entre ángulos o segmentos y así poder establecer la certeza de las afirmaciones.

En este caso, el dinamismo y la estructuralidad de la representación permiten que sea usada con el *propósito* de *mostrar* que se cumple o no se cumple una propiedad geométrica, de manera que el medio *amplifica* la capacidad que tiene el estudiante para medir con exactitud y de evaluar una infinidad de casos; es decir, que la representación funciona como *herramienta* de validación para determinar la certeza de una afirmación centrada en acciones relativas a la percepción.

En estos casos el estudiante logra establecer lo que es cierto, pero no se afirma por qué es cierto, por lo tanto, decimos que aquí se valida la afirmación con un *argumento* centrado en la precepción y la estructuralidad de la representación. Se establece el valor lógico de la afirmación a partir de acciones relativas a la percepción y que no podrían traducirse al papel. Algunos ejemplos representativos de este tipo de interacción se presentan en el trabajo de

Pedro y de Santiago (apartados 6.1.1 y 6.3.1), en el trabajo de Alicia (apartado 6.2.2) y en el trabajo de camilo (apartado 6.4.1 y 6.4.4). En todos estos casos los estudiantes arrastran para mostrar que en la representación se cumple la relación enunciada.

Cabe aclarar que este tipo de resultados ya se han mencionado por otros investigadores como Arzarello et al. (2002) quienes mencionan que con los entornos de geometría dinámica los estudiantes quedan tan convencidos de que la afirmación es cierta que dejan las justificaciones en un nivel perceptivo-empírico, sin embargo, más allá de la certeza consideramos que la discusión debería centrarse en cómo se conciben los objetos sobre los que se está realizando la afirmación.

7.1.2. La representación dinámica como un mediador semiótico

En el apartado 3.2.2 mencionamos cómo las representaciones dinámicas pueden ser estructurales si poseen propiedades o características que hacen parte de la estructura del objeto y no necesariamente son garantizadas por el usuario en su construcción (por ejemplo, construir un triángulo con dos lados congruentes y que resulten congruentes dos ángulos). En consecuencia, la representación está cargada de una serie de significados, que de acuerdo con Hegedus et al. (2017) son accesibles al estudiante gracias al arrastre y otras características incorporadas en el medio digital. La representación se puede entender como un mediador semiótico que al estar incrustado en un medio dinámico le permite al estudiante acceder a ciertas ideas geométricas a través de sus acciones.

En las producciones analizadas encontramos que el dialogo con la representación se basa en una serie de *co-acciones* en las que el medio proporciona respuestas que *modifican* las ideas geométricas del estudiante, lo que se convierte en el *propósito* final con el que se usa el artefacto (la representación dinámica). En este caso la representación se usa como instrumento para adquirir nuevos conocimientos geométricos, los cuales pueden variar de un estudiante a otro debido a que el impacto de la representación es único y la reorganización de ideas de cada estudiante es distinta (depende de sus ideas iniciales).

Notamos que las *acciones* que realiza el estudiante sobre la representación no son arbitrarias, van acompañadas de una intencionalidad (como comparar o confirmar una predicción) que permite establecer un *dialogo* con la representación y en consecuencia notar una relación, confirmar una hipótesis o contrastar una idea errónea y modificarla.

En estos casos la interacción con la representación dinámica permite que el estudiante llegue a un conocimiento nuevo y proponga *afirmaciones* sobre el comportamiento de los objetos geométricos. La certeza y comprensión que adquieren los estudiantes los lleva a establecer un valor epistémico sobre las afirmaciones, que pueden servir para que estudiante estructure su razonamiento y consecuentemente adquiera un estatus operativo. Algunos ejemplos representativos de esto se refieren al trabajo de Alicia en las actividades 2, 6 y 7 (ver apartados 6.2.1, 6.2.4 y 6.2.5) y al trabajo de Daniela asociado al hecho de que los radios de la circunferencia con congruentes (ver apartados 6.4.1, 6.4.2, 6.4.3, 6.4.4).

En este caso, la representación se usa con el *propósito* de *mostrar* si se cumple o no una propiedad geométrica, de modo que el medio *amplifica* la capacidad del estudiante para medir con exactitud y evaluar una infinidad de casos, es decir, que la representación sirve como *herramienta* de validación para determinar la certeza de una afirmación.

Cabe resaltar que en estos casos no nos referimos a la prueba como producto, sino al proceso completo en donde adquirir un valor epistémico sobre ciertos hechos geométricos (gracias a la interacción con representaciones dinámicas) permite que sean usados en afirmaciones posteriores.

7.1.3. Una guía para entender los razonamientos

En el apartado 4.2 mencionamos como las pruebas geométricas relacionan el registro de las figuras y el discurso, de modo que la prueba en papel y lápiz se puede ver como una lectura razonada del dibujo (Duval, 1999). En los casos analizados notamos esta misma tendencia con representaciones en un medio dinámico, ya que al momento de validar una afirmación el estudiante articula sus conocimientos geométricos con la información que aparece en la pantalla, de manera similar a como se haría en un entorno de lápiz y papel.

En muchos casos los estudiantes no arrastraban los elementos de la construcción y en otros hablaban mientras arrastraban puntos, sin embargo, en estos últimos parecían hacerlo para remarcar un hecho conocido (por ejemplo, arrastrar un radio de una circunferencia mientras enuncian que los radios son congruentes). Es decir que las acciones de los estudiantes sobre la representación buscan acompañar el discurso para que sea más entendible, pero no son parte esencial para establecer validez ante un interlocutor.

El estudiante hace alusión a hechos que conoce y sobre los que tiene un cierto valor epistémico, de modo que la representación se usa con el propósito de acompañar el discurso y no establecer la validez de un hecho. En ese sentido el papel de la representación dinámica es el mismo que desempeñan las representaciones en las pruebas Euclidianas como parte de la prueba.

En general el estudiante usa los *datos* iniciales para presentar una *conclusión*, ya que usa algún *hecho* conocido (tercer-enunciado) con un valor epistémico de cierto. Por lo tanto, decimos que estas pruebas podrían traducirse al papel, sin embargo, esta traducción no necesariamente se puede dar de manera directa, ya que los estudiantes pueden usar conocimientos que están asociados a hechos geométricos de manera implícita. Un ejemplo de esto es cuando Alicia usa como hecho que los dos posibles ángulos inscritos son suplementarios para probar que un ángulo *siempre* es rectángulo (ver apartado 6.2.8). Otros ejemplos también se presentan en el trabajo de Santiago en el problema de explicar para el triángulo isósceles (apartado 6.3.4). También se presenta de manera clara en las explicaciones de Daniela en el primer grupo (apartado 6.4.4 y 6.4.5) cuando no arrastra ninguno de los puntos de la construcción y solo escribe una solución a los problemas propuestos.

7.1.4. Otros artefactos para validar

En el apartado 3.2.2 mencionamos una serie de características que poseen los entornos de geometría dinámica que permiten una interacción distinta con las representaciones y las ideas geométricas. En los casos analizados encontramos que en algunas ocasiones el estudiante usa representaciones que están preestablecidas en el "menú" de GeoGebra con el fin de establecer una relación y la articula con sus conocimientos geométricos para presentar una prueba que relaciona el conocimiento que poseía con la afirmación que se está evaluando. A diferencia del primer caso (ver 7.1.1) las acciones del estudiante no se enfocan en *mostrar* que una propiedad se cumple, se centran en *mostrar* una relación (de pertenencia, contenencia o igualdad) que depende de los elementos involucrados.

El estudiante realiza una construcción adicional y usa la estructuralidad de las representaciones para *mostrar* que una relación se cumple gracias a una *co-acción* en la que el estudiante construye una representación auxiliar y con el arrastre el medio *responde* manteniendo la relación. Por ejemplo, el estudiante puede mostrar que dos puntos siempre pertenecen a una circunferencia para probar que hay una equidistancia de puntos gracias a un *hecho* que conoce sobre las circunferencias y que tiene un valor epistémico de cierto.

La representación es usada con el *propósito* (previamente establecido) de mostrar que se cumple una relación, de manera que el medio *amplifica* la capacidad que tiene el estudiante de realizar construcciones precisas y la representación se puede ver como una *herramienta* de validación que permite determinar relaciones.

Este caso la información visual que resulta de la *co-accion* sirve de punto de partida (dato) para presentar una conclusión a partir de un *hecho* conocido (tercer-enunciado). Por lo tanto, decimos que aquí el estudiante establece la certeza de la afirmación con una prueba que relaciona la información visual-dinámica con su conocimiento teórico, es decir, que. Es decir que a diferencia del caso anterior (ver 7.1.3) en este caso el dinamismo, la exactitud en la construcción, evaluar múltiples casos (y otras características del medio) son determinantes para el desarrollo de pruebas debido a que el resultado de la co-acción es el punto de partida para estructurar los razonamientos.

En este caso se establece el valor lógico de la afirmación a partir de acciones relativas a la percepción y a los razonamientos que no podrían ser traducibles al papel. Algunos ejemplos de esta interacción se presentaron en el trabajo de Alicia en la actividad 3 cuando usa la circunferencia y en la actividad 6 cuando usa el punto medio (ver apartados 6.2.2 y 6.2.4), se presenta en una de las actividades finales del trabajo de Santiago cuando usa un cuadrado (ver apartado 6.3.5), y se presenta en las explicaciones grupales cuando Daniela usa una circunferencia como punto de partida para probar que el triángulo es equilátero (ver apartado 6.4.3) o cuando usa la medida de dos ángulos para afirmar la existencia de dos triángulos isósceles y así determinar que dos diámetros son congruentes (ver apartado 6.4.1).

En general, el estudiante usa los datos iniciales para presentar una conclusión y hace este paso usando algún hecho conocido (tercer-enunciado) que posea un valor epistémico de cierto. Por lo tanto, decimos que estas pruebas podrían ser traducibles al papel, pero no necesariamente se puede dar de manera directa, ya que los estudiantes pueden usar conocimientos asociados a hechos geométricos, pero no de manera directa. Un ejemplo es cuando Alicia usa como hecho que los dos posibles ángulos inscritos son suplementarios para probar que un ángulo *siempre* es rectángulo (ver apartado 6.2.8). Otros ejemplos también se presentan en el trabajo de Santiago en el problema de explicar para el triángulo isósceles (apartado 6.3.4) y en general, en las actividades finales de Alicia.

7.1.5. Otras estrategias de validación

En el apartado 4.2 discutimos que el discurso y la figura son elementos determinantes en las pruebas debido a que en el discurso se presentan razonamientos que ilustran la generalidad de la figura. Cómo se llega a estos razonamientos es un tema ampliamente estudiado dentro de la disciplina, particularmente nosotros encontramos que en algunos casos la experiencia con las representaciones dinámicas servía con el *propósito* de evocar en los estudiantes relaciones que posteriormente servían para proponer pruebas o argumentos.

La experiencia de arrastre, el comportamiento de los objetos, acceso a construcciones del "menú", entre otros fueron experiencias clave para que los estudiantes presentaran una justificación. Un ejemplo se presenta cuando Daniela describe que el arrastre de dos radios le sirvió para solucionar el problema de los diámetros, ya que relaciona la idea de un diámetro con dos radios colineales y esto le permite estructurar su razonamiento (ver apartado 6.4.1). En este caso la representación dinámica sirve como un *instrumento* que modifica las estrategias de justificación.

Este resultado se vincula con el presentado en el apartado 2.2.2 donde mencionamos que el trabajo en entornos de geometría dinámica puede ser un puente que lleva al estudiante hacia aspectos teóricos, ya que permite encontrar relaciones que al ser formalizadas sirven para probar afirmaciones de forma teórica (Acosta et al., 2013). Sin embargo, como hemos mencionado a lo largo de este trabajo, nosotros no nos limitamos a una visión teórica de la prueba, por lo que incluimos aquellas relaciones que conllevan a un argumento visual y solamente los que desembocan en pruebas teóricas.

7.2. Sobre las preguntas de investigación

De acuerdo con la delimitación del estudio (ver apartado 2.3) la primera pregunta planteada se enfoca en entender cómo es la mediación de artefactos dinámicos en la validación de afirmaciones geométricas, es decir que buscamos caracterizar cómo es la mediación de los artefactos digitales en el **proceso** de validación. El análisis del proceso de los estudiantes que participaron en el estudio no llevó a la caracterización detallada en el apartado anterior (a saber, apartado 7.1). Sin embargo, rescatamos las siguientes ideas.

- ✓ En repetidas ocasiones, los estudiantes que participaron en el estudio determinaron la certeza de una afirmación mostrando que la propiedad sobre la que se está basando la afirmación se cumplía en una representación estructural. En este caso la validez se enfoca en acciones centradas completamente en la percepción, la estructuralidad de la representación y el dinamismo.
- ✓ Como resultado de la interacción con representaciones dinámicas, algunos de los estudiantes establecieron un “dialogo” con la representación que evocó el acceso a ciertas ideas geométricas, esto debido a que las representaciones pueden verse como instrumentos semióticos. Estas hacen parte del proceso de prueba, ya que estas ideas se adquieren por la mediación dinámica y se incorporan a la estructura cognitiva del estudiante, convirtiéndose en artefactos para validar afirmaciones.
- ✓ Algunos estudiantes como Daniela y Alicia lograron establecer la certeza de las afirmaciones presentando una prueba conjunta, en donde los razonamientos y la representación se usaron para validar afirmaciones, y aunque en la prueba (como producto) el dinamismo no desempeñó un papel fundamental, fue determinante en el proceso de adquisición de conocimientos.
- ✓ Algunos de los estudiantes establecieron un razonamiento centrado en el uso de hechos geométricos conocidos, sin embargo, para realizarlo partieron del resultado de una co-acción como punto de partida. Esto hace que la prueba no sea traducible a una prueba de papel y lápiz.
- ✓ Algunos de los participantes lograron que sus estrategias de argumentación estuvieran mediadas por la interacción con las representaciones dinámicas, lo que favorece la interacción con representaciones dinámicas en la validación de ideas geométricas.

Es importante resaltar que el tipo de mediación depende del propósito que tengan los estudiantes y las limitaciones del problema. Por ejemplo, en algunos casos los estudiantes querían validar la afirmación de que dos segmentos eran congruentes usando la representación dinámica y mostrando que las medidas siempre eran las mismas, sin embargo, debido a la restricción de medir se vieron en la necesidad de proponer otra forma de validación y buscar otra forma de usar la representación.

Por otra parte, nuestra segunda pregunta de investigación se enfoca en el razonamiento de los participantes cuando validan afirmaciones. Al respecto decimos que los resultados muestran que hay un cambio en lo que se valida y cómo se valida ya que:

- ✓ Se presento una reorganizaron de la estructura cognitiva de los estudiantes como consecuencia del dialogo que establecen con la representación. Adquirieron nuevos conocimientos.
- ✓ Las ideas geométricas de los estudiantes tenían una huella digital. Por ejemplo, los estudiantes no decían que los radios de la circunferencia son siempre congruentes, decían que el radio va a medir lo mismo sin importar donde lo mueva. Esto nos hace cuestionar si con esta nueva forma de entender la geometría el estudiante está pensando en los radios como dos distintos o como el mismo solo que en otra posición, ya que como vimos en el primer apartado, esto modificaría la forma en la que se establece la validez de un hecho.
- ✓ Las pruebas ya no solo las propone el estudiante, ahora hay una cognición hibrida que se da de la relación entre el estudiante y el medio.
- ✓ Los estudiantes acceden a versiones distintas de los hechos geométricos. Por ejemplo, para Alicia el teorema del ángulo inscrito tiene un corolario que es producto del dinamismo, ya que para ella ese ángulo puede tomar dos medidas distintas cuando se arrastra.

En general, estas ideas presentan los resultados obtenidos, ya que la descripción profunda se presentó en el apartado anterior.

Referencias

Acosta, M. E., Mejia, C., & Rodriguez, C. W. (2013). Lugares geométricos en la solución de un problema de construcción: presentación de una posible técnica de una praxeología de geometría dinámica. *Educación Matemática*, *25*(2), 141–160.

Arquímedes. (1978). *El "método."* BALSAL EDITORES, S.A.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in cabri environments. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *34*(3), 66–72. https://doi.org/10.1007/BF02655708

Baccaglini-Frank, A., Antonini, S., Leung, A., & Mariotti, M. A. (2018). From Pseudo-Objects in Dynamic Explorations to Proof by Contradiction. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *4*(2–3), 87–109. https://doi.org/10.1007/s40751-018-0039-2

Boyer, C. B. (1968). *A History Of Mathematics*. John Wiley & Sons, Inc.

Calderón González, M. A. (2020). *Construcciones geométricas y Pruebas Situadas* [Tesis de maestría]. CINVESTAV.

Covián Chávez, O., & Romo Vázquez, A. (2017). Matemáticas para la vida. Una propuesta para la profesionalización docente de profesores de matemáticas. *Innovación Educativa*, *17*(73), 17–47.

De Villiers, M. (2004). Using dynamic geometry to expand mathematics teachers' understanding of proof. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *35*(5), 703–724. https://doi.org/10.1080/0020739042000232556

Dello Iacono, U. (2021). From Argumentation to Proof in Geometry Within a Collaborative Computer-Based Environment. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *7*(3), 395–426. https://doi.org/10.1007/S40751-021-00090-Y

Dickerson, D. S., & Doerr, H. M. (2014). High school mathematics teachers' perspectives on the purposes of mathematical proof in school mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(4), 711–733. https://doi.org/10.1007/S13394-013-0091-6/TABLES/1

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros Semióticos y Apendizajes Intelectuales*. Universidad del Valle.

Duval, R. (2016). *Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. Desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos*.

Duval, R. (2017). Understanding the mathematical way of thinking - The registers of semiotic representations. In *Understanding the Mathematical Way of Thinking - The Registers of Semiotic Representations*. Springer Cham. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9

Edwards, C. J. (2012). *The Historical Development of the Calculus*. Springer Science & Business Media.

Erkek, Ö., & Işıksal Bostan, M. (2019). Prospective Middle School Mathematics Teachers' Global Argumentation Structures. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *17*(3), 613–633. https://doi.org/10.1007/s10763-018-9884-0

Goldin, G. A. (2020). Mathematical Representations. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 566–572). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_103

Guin, D., & Trouche, L. (1998). Complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *3*(3), 195–227. https://doi.org/https://doi.org/10.1023/A:1009892720043

Hanna, G. (2014). The width of a Proof. *PNA*, *9*(1), 29–39. https://doi.org/10.30827/pna.v9i1.6109

Hanna, G. (2020). Mathematical Proof, Argumentation, and Reasoning. In *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 561–566). Springer, Cham. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_102

Hanna, G., Reid, D. A., & de Villiers, M. (2019a). Proof Technology: Implications for Teaching. In G. Hanna, D. Reid, & M. de Villiers (Eds.), *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching. Mathematics Education in the Digital Era* (Vol.

14, pp. 3–9). Springer, Cham. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-030-28483-1_1

Hanna, G., Reid, D. A., & de Villiers, M. (Eds.). (2019b). *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching* (Vol. 14). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-28483-1

Hanna, G., & Sidoli, N. (2007). Visualisation and proof: a brief survey of philosophical perspectives. *ZDM Mathematics Education*, *39*, 73–78. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s11858-006-0005-0

Hegedus, S., Laborde, C., Brady, C., Dalton, S., Siller, H.-S., Tabach, M., Trgalova, J., & Moreno-Armella, L. (2017). Uses of technology in upper secondary mathematics education. *ICME-13 Topical Surveys*. https://doi.org/10.1109/WiSPNET.2017.8299878

Hegedus, S., & Moreno-Armella, L. (2010). Accommodating the instrumental genesis framework within dynamic technological environments. *For the Learning of Mathematics*, *30*(1), 26–31.

Hernández, R. S., Fernández, C. C., & Baptista, P. L. (2014). *Metodología de la investigación* (6th ed.). McGRAW-HILL.

Hershkowitz, R. (2014). Shape and Space – Geometry Teaching and Learning. In *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 542–547). Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_138

Hofstadter, D. R. (1992). From Euler to Ulam: Discovery and Dissection of a Geometric Gem. *Center for Research on Concepts & Cognition* .

Knipping, C. (2008). A method for revealing structures of argumentations in classroom proving processes. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 427–441. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s11858-008-0095-y

Komatsu, K. (2017). Fostering empirical examination after proof construction in secondary school geometry. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(2), 129–144. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9731-6

Leung, A., & Or, C. M. (2007). FROM CONSTRUCTION TO PROOF: EXPLANATIONS IN DYNAMIC GEOMETRY ENVIRONMENT. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. (Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 177–184). PME.

Monaghan, J. (2016). Doing Mathematics with Tools: One Task, Four Tools. In *Tools and Mathematics* (Vol. 110, pp. 13–22). Springer, Cham. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-319-02396-0_2

Monaghan, J., Trouche, L., & Borwein, J. M. (2016). *Tools and Mathematics* (1st ed., Vol. 110). Springer Cham. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-319-02396-0

Morales Ramírez, G., Rubio Goycochea, N., & Larios Osorio, V. (2021). Tipificación de argumentos producidos por las prácticas matemáticas de alumnos del nivel medio en ambientes de geometría dinámica. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *35*(70), 664–689. https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a06

Moreno-Armella, L. (2003). Cognición y mediación instrumental. In E. Weiss (Ed.), *VI Congreso Nacional de Investigación Educativa Conferencias Magistrales.* (pp. 257–274).

Moreno-Armella, L. (2016). De territorios, mapas y la naturaleza de las matemáticas. *Revista C2*. https://www.revistac2.com/de-territorios-mapas-y-la-naturaleza-de-las-matematicas/

Moreno-Armella, L., & Brady, C. (2018). Technological Supports for Mathematical Thinking and Learning: Co-action and Designing to Democratize Access to Powerful Ideas. In L. Ball, P. Drijvers, S. Ladel, HS. Siller, M. Tabach, & C. Vale (Eds.), *Uses of Technology in Primary and Secondary Mathematics Education. ICME-13 Monographs.* (Springer, pp. 339–350). https://doi.org/10.1007/978-3-319-76575-4_19

Moreno-Armella, L., & Hegedus, S. J. (2009). Co-action with digital technologies. *ZDM Mathematics Education*, *41*(4), 505–519. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s11858-009-0200-x

Moreno-Armella, L., Hegedus, S. J., & Kaput, J. J. (2008). From static to dynamic mathematics: historical and representational perspectives. *Educ Stud Math*, *68*, 99–111. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s10649-008-9116-6

Moreno-Armella, L., & Santos-Trigo, M. (2015). The use of digital technology in mathematical practices: Reconciling traditional and emerging approaches. In L. D. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd ed., pp. 607–628). Routledge. https://doi.org/https://doi.org/10.4324/9780203448946

NCTM. (2000). *Principios y Estándares para la educación matemática* (M. F. Reyes, Trans.). Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Netz, R. (1998). Greek Mathematical Diagrams: Their Use and Their Meaning. *For the Learning of Mathematics*, *18*(3), 33–39.

Rabardel, P., & Beguin, P. (2005). Instrument mediated activity: from subject development to anthropocentric design. *Theoretical Issues in Ergonomics Science*, *6*(5), 429–461. https://doi.org/10.1080/14639220500078179

Reid, D. A., & Knipping, C. (2010). *Proof in Mathematics Education: Research, Learning and Teaching* (Netherland). Sense Publishers.

Richard, P. R., Venant, F., & Gagnon, M. (2019). Issues and Challenges in Instrumental Proof. In G. Hanna, D. Reid, & M. de Villiers (Eds.), *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching* (Vol. 14, pp. 139–172). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-28483-1_7

Sánchez, C. H. (2012). La historia como recurso didáctico: el caso de los Elementos de Euclides. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, *32*, 71–92. http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0121-38142012000200006&lng=en&nrm=iso&tlng=es

Saorín, A., Torregrosa, G., & Quesada, H. (2017). Razonamiento configural y argumentación en procesos de prueba en contexto geométrico. In Muñoz-Escolano., José M., & et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI. SEIEM* (pp. 467–476).

Sinclair, N., Bartolini Bussi, M. G., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., & Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM - Mathematics Education*, *48*(5), 691–719. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0796-6

Sinclair, N., & Robutti, O. (2012). Technology and the Role of Proof: The Case of Dynamic Geometry. In M. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (Vol. 27, pp. 571–596). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2_19

Smith, R. C., & Sutherland, P. (2013). The Relationships between students' uses of technology, their task and the arguments they create. In M. Martinez & A. Castro Superfne (Eds.), *Proceedings of the 35th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (pp. 1149–1156).

Steele, M. D., & Rogers, K. C. (2012). Relationships Between Mathematical Knowledge for Teaching and Teaching Practice: The Case of Proof. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *15*(2), 159–180. https://doi.org/10.1007/S10857-012-9204-5/TABLES/7

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267–307). Hillsdale.

Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2005). Validation of Solutions of Construction Problems in Dynamic Geometry Environments. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *10*(1), 31–47. https://doi.org/10.1007/s10758-004-6999-x

Torres Alcaraz, C. (2004). Lo visual y lo deductivo en las matemáticas. *Miscelanea Matemática*, *40*, 1–27.

Toulmin, S. E. (2003). *The Uses of Argument*. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511840005

Umland, K., & Sriraman, B. (2020). Argumentation in mathematics. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 63–66). Springer, Cham. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_10

Vygotsky, L. (1995). *Pensamiento y lenguaje* (1st ed.). Ediciones Paidós.

Wittmann, E. C. (2021). When Is a Proof a Proof? In *Connecting Mathematics and Mathematics Education* (pp. 61–76). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-61570-3_5