



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS  
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA  
SECCIÓN DE MECATRÓNICA

# Modelado y control de un robot omnidireccional sometido a perturbaciones en las ruedas

TESIS

Que presenta  
**César Brayan Bárcenas Presteguí**

Para obtener el grado de  
**Maestro en ciencias**

En la especialidad de  
**Ingeniería Eléctrica**

Directores de Tesis:  
**Dr. Martín Velasco Villa**  
**Dr. Jaime González Sierra**

Ciudad de México

Noviembre, 2024



---

# Dedicatoria

*Ami padre, quien, aunque no está físicamente presente, sus enseñanzas siguen guiándome día a día*

*Ami madre por su dedicación y apoyo incondicional*

*Ami hermana por su comprensión y cariño*

*Amis abuelos por acompañarme desde el inicio*



---

# Agradecimientos

- A mis padres por la confianza, dedicación y apoyo incondicional, por los valores y enseñanzas que me han inculcado y animado a superarme personal y profesionalmente.
- A mi hermana por su comprensión y tolerancia, por estar siempre para mí y ser parte importante de mi vida.
- A mis abuelos por su cariño y por compartir conmigo su experiencia de vida, por aconsejarme y guiarme a lo largo de mi vida.
- A Marielena por ser parte en esta etapa de mi vida, por su paciencia y apoyo.
- A el Departamento de Ingeniería Eléctrica, sección Mecatrónica del CINVESTAV unidad Zacatenco por permitirme seguir desarrollando mis habilidades y aptitudes, por enriquecer mis conocimientos y compartir nuevas experiencias.
- A mis directores de tesis por sus correcciones, observaciones, sugerencias y apoyo que me guiaron en todo momento durante la realización de este trabajo.
- A la Ing. Martha Angélica Chávez González, por su invaluable apoyo en la gestión y mantenimiento del laboratorio, así como por proporcionarnos siempre los materiales necesarios. Su dedicación y compromiso han sido fundamentales para la realización de este trabajo.
- A el CONAHCYT que me brindó el soporte económico para realizar este trabajo.



---

# Resumen

Este trabajo se centra en el desarrollo del modelo cinemático y dinámico de un robot móvil omnidireccional, considerando perturbaciones de deslizamiento lateral y longitudinal en el cuerpo del robot, así como de patinado en las ruedas. Estas perturbaciones pueden afectar significativamente el rendimiento del robot, por lo que es crucial modelarlas y controlarlas adecuadamente para garantizar un funcionamiento óptimo.

La estrategia de control propuesta se basa en el diseño de un Observador Integral Proporcional Generalizado (GPIO, por sus siglas en inglés), que permite estimar las perturbaciones modeladas. Este observador es esencial para identificar y compensar las perturbaciones en tiempo real, mejorando así la precisión y estabilidad del robot.

Posteriormente, se implementa la metodología de Control de Rechazo Activo de Perturbaciones (ADRC, por sus siglas en inglés) en el modelo cinemático, y la estrategia de control de Par Calculado en el modelo dinámico, para resolver el problema de seguimiento de trayectoria. Teóricamente, se demuestra que los errores de posición convergen a una vecindad cercana al origen, lo que indica que el robot puede seguir trayectorias predefinidas, incluso en presencia de perturbaciones.

Se presentan simulaciones numéricas que validan los modelos obtenidos y el desempeño de las estrategias de control, logrando el seguimiento de la trayectoria deseada incluso en presencia de perturbaciones. Estas simulaciones son fundamentales para verificar la efectividad de los modelos y estrategias antes de su implementación en un entorno real.

Finalmente, se muestran los resultados obtenidos a través de una plataforma experimental en tiempo real, comparándolos con los resultados teóricos y de simulación. Esta comparación permite evaluar la consistencia y robustez de las estrategias de control en condiciones reales, proporcionando una validación integral del enfoque propuesto.





---

# Abstract

This work focuses on the development of the kinematic and dynamic model of an omnidirectional mobile robot, considering lateral and longitudinal slip disturbances on the robot's body, as well as wheel slippage. These disturbances can significantly affect the robot's performance, making it crucial to model and control them adequately to ensure optimal operation.

The proposed control strategy is based on the design of a Generalized Proportional Integral Observer (GPIO), which allows for the estimation of the modeled disturbances. This observer is essential for identifying and compensating for disturbances in real-time, thereby improving the robot's precision and stability.

Subsequently, the Active Disturbance Rejection Control (ADRC) methodology is implemented in the kinematic model, and the Computed Torque control strategy is applied in the dynamic model to solve the trajectory tracking problem. Theoretically, it is demonstrated that the position errors converge to a neighborhood close to the origin, indicating that the robot can follow predefined trajectories even in the presence of disturbances.

Numerical simulations are presented to validate the obtained models and the performance of the control strategies, achieving the desired trajectory tracking even in the presence of disturbances. These simulations are fundamental to verify the effectiveness of the models and strategies before their implementation in a real environment.

Finally, the results obtained through a real-time experimental platform are shown, comparing them with the theoretical and simulation results. This comparison allows for the evaluation of the consistency and robustness of the control strategies under real conditions, providing a comprehensive validation of the proposed approach.



# Índice general

Resumen . . . . .	V
Índice general . . . . .	X
Índice de figuras . . . . .	XIII
Índice de tablas . . . . .	XV
Lista de símbolos . . . . .	XVII
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Estado del arte . . . . .	3
1.2. Objetivos . . . . .	5
1.3. Justificación . . . . .	6
1.4. Planteamiento del problema . . . . .	6
<b>2. Preliminares matemáticos</b>	<b>9</b>
2.1. Ruedas suecas . . . . .	9
2.2. Estabilidad de Lyapunov . . . . .	10
2.3. Identidad matricial de Woodbury . . . . .	14
2.4. Modelo cinemático . . . . .	15
2.5. Modelo dinámico . . . . .	18
2.6. Control por linealización mediante retroalimentación de estados para el modelo cinemático . . . . .	21
2.7. Control par calculado para el modelo dinámico . . . . .	22
<b>3. Modelado del robot omnidireccional afectado por perturbaciones de patinado y deslizamiento</b>	<b>25</b>
3.1. Modelo cinemático perturbado . . . . .	25
3.1.1. Perturbaciones en el deslizamiento . . . . .	25
3.1.2. Perturbaciones en el patinado . . . . .	27
3.1.3. Perturbaciones de deslizamiento y patinado . . . . .	28
3.2. Modelo dinámico perturbado . . . . .	29
3.2.1. Perturbaciones en el deslizamiento . . . . .	29
3.2.2. Perturbaciones en el patinado . . . . .	30
3.2.3. Perturbaciones de deslizamiento y patinado . . . . .	32
<b>4. Diseño de la estrategia de control</b>	<b>35</b>
4.1. Observador de perturbaciones para el modelo cinemático . . . . .	35

4.2. Observador de perturbaciones para el modelo dinámico . . . . .	37
4.3. Estrategia de control para el modelo cinemático perturbado . . . . .	38
4.4. Estrategia de control para el modelo dinámico perturbado . . . . .	39
<b>5. Experimentos mediante simulaciones numéricas</b>	<b>41</b>
5.1. Diseño 2D y 3D del RMO . . . . .	41
5.2. Control del modelo cinemático sin perturbaciones . . . . .	42
5.3. Control del modelo dinámico sin perturbaciones . . . . .	46
5.4. Modelo cinemático con observador de perturbaciones . . . . .	48
5.5. Modelo dinámico con observador de perturbaciones . . . . .	52
5.6. Control del modelo cinemático con perturbaciones . . . . .	54
5.7. Control del modelo dinámico con perturbaciones . . . . .	57
<b>6. Experimentos en tiempo real</b>	<b>61</b>
6.1. Plataforma experimental . . . . .	61
6.2. Observador de perturbaciones para el modelo cinemático . . . . .	64
6.3. Control del modelo cinemático sin compensación de perturbaciones . . . . .	66
6.3.1. Trayectoria circular . . . . .	66
6.3.2. Trayectoria tipo lemniscata . . . . .	69
6.3.3. Trayectoria tipo flor . . . . .	71
6.4. Control del modelo cinemático con compensación de perturbaciones . . . . .	73
6.4.1. Trayectoria circular . . . . .	73
6.4.2. Trayectoria tipo lemniscata . . . . .	75
6.4.3. Trayectoria tipo flor . . . . .	77
6.5. Control del modelo cinemático con compensación de perturbaciones aplican- do fuerzas externas . . . . .	79
6.5.1. Trayectoria circular . . . . .	79
6.5.2. Trayectoria tipo lemniscata . . . . .	81
6.5.3. Trayectoria tipo flor . . . . .	83
6.6. Discusión de los resultados . . . . .	85
<b>7. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>87</b>
Bibliografía . . . . .	92

# Índice de figuras

1.1. Diagrama del robot omnidireccional. . . . .	7
2.1. Rueda sueca. . . . .	9
2.2. Punto de equilibrio estable. . . . .	11
2.3. Punto de equilibrio asintóticamente estable. . . . .	11
2.4. Punto de equilibrio inestable. . . . .	12
2.5. Diagrama del robot omnidireccional. . . . .	16
2.6. Posición de las ruedas con respecto al marco móvil. . . . .	17
2.7. Diagrama del robot móvil para obtener el modelo dinámico. . . . .	18
3.1. Diagrama considerando perturbaciones de desplazamiento. . . . .	26
3.2. Diagrama considerando perturbaciones de patinado. . . . .	27
5.1. Representaciones del robot móvil omnidireccional. . . . .	41
5.2. Representación del seguimiento de trayectorias. . . . .	42
5.3. Diagrama de bloques para el seguimiento de trayectorias. . . . .	43
5.4. Comparación entre la trayectoria deseada y la real. . . . .	43
5.5. Señales de error de seguimiento. . . . .	44
5.6. Señales de control. . . . .	44
5.7. Comparación entre la trayectoria deseada y la real. . . . .	45
5.8. Señales del error de seguimiento. . . . .	45
5.9. Señales de control. . . . .	45
5.10. Comparación entre la trayectoria deseada y la real. . . . .	46
5.11. Diagrama de bloques para el modelo dinámico sin perturbaciones. . . . .	46
5.12. Comparación entre la trayectoria deseada y la real. . . . .	47
5.13. Señales del error de seguimiento. . . . .	47
5.14. Señales de control. . . . .	48
5.15. Diagrama de bloques para la evaluación de los observadores. . . . .	49
5.16. Perturbaciones inyectadas en el modelo. . . . .	50
5.17. Errores entre la perturbación real y la estimada. . . . .	51
5.18. Comparación entre la trayectoria deseada y la real. . . . .	51
5.19. Diagrama de bloques para la evaluación del observador. . . . .	52
5.20. Perturbaciones inyectadas en el modelo. . . . .	53
5.21. Errores entre la perturbación real y la estimada. . . . .	53
5.22. Diagrama de bloques del control con observador de perturbaciones. . . . .	54

5.23. Estimación de las perturbaciones con el observador. . . . .	55
5.24. Comparación entre la trayectoria deseada y la real. . . . .	56
5.25. Señales del error de seguimiento. . . . .	56
5.26. Señales de control. . . . .	56
5.27. Diagrama de bloques del control con observador de perturbaciones. . . . .	57
5.28. Estimación de las perturbaciones con el observador. . . . .	58
5.29. Comparación entre la trayectoria deseada y la real. . . . .	59
5.30. Señales del error de seguimiento. . . . .	59
5.31. Señales de control. . . . .	60
6.1. Diagrama general de la plataforma experimental. . . . .	61
6.2. Marcadores infrarrojos. . . . .	63
6.3. Componentes del robot móvil omnidireccional. . . . .	63
6.4. Robot móvil omnidireccional. . . . .	64
6.5. Señales de control. . . . .	65
6.6. Comparación entre las trayectoria. . . . .	65
6.7. Estimación de las perturbaciones con el observador. . . . .	66
6.8. Comparación entre el seguimiento de trayectoria. . . . .	67
6.9. Errores de seguimiento de trayectoria. . . . .	67
6.10. Señales de control. . . . .	68
6.11. Estimación de las perturbaciones con el observador. . . . .	68
6.12. Comparación entre el seguimiento de trayectoria. . . . .	69
6.13. Errores de seguimiento de trayectoria. . . . .	69
6.14. Señales de control. . . . .	70
6.15. Estimación de las perturbaciones con el observador. . . . .	70
6.16. Comparación entre el seguimiento de trayectoria. . . . .	71
6.17. Errores de seguimiento de trayectoria. . . . .	71
6.18. Señales de control. . . . .	72
6.19. Estimación de las perturbaciones con el observador. . . . .	72
6.20. Comparación entre el seguimiento de trayectoria. . . . .	73
6.21. Errores de seguimiento de trayectoria. . . . .	74
6.22. Señales de control. . . . .	74
6.23. Estimación de las perturbaciones con el observador. . . . .	75
6.24. Comparación entre el seguimiento de trayectoria. . . . .	76
6.25. Errores de seguimiento de trayectoria. . . . .	76
6.26. Señales de control. . . . .	76
6.27. Estimación de las perturbaciones con el observador. . . . .	77
6.28. Comparación entre el seguimiento de trayectoria. . . . .	78
6.29. Errores de seguimiento de trayectoria. . . . .	78
6.30. Señales de control. . . . .	78
6.31. Estimación de las perturbaciones con el observador. . . . .	79
6.32. Comparación entre el seguimiento de trayectoria. . . . .	80

6.33. Errores de seguimiento de trayectoria. . . . .	80
6.34. Señales de control. . . . .	80
6.35. Estimación de las perturbaciones con el observador. . . . .	81
6.36. Comparación entre el seguimiento de trayectoria. . . . .	82
6.37. Errores de seguimiento de trayectoria. . . . .	82
6.38. Señales de control. . . . .	82
6.39. Estimación de las perturbaciones con el observador. . . . .	83
6.40. Comparación entre el seguimiento de trayectoria. . . . .	84
6.41. Errores de seguimiento de trayectoria. . . . .	84
6.42. Señales de control. . . . .	84
6.43. Estimación de las perturbaciones con el observador. . . . .	85





# Índice de tablas

2.1. Parámetros de las ruedas del robot omnidireccional. . . . .	17
6.1. Especificaciones del robot móvil omnidireccional. . . . .	64



# Lista de símbolos

$(X_b, Y_b)$	Marco de coordenadas base
$(X_m, Y_m)$	Marco de coordenadas móvil
$(x, y)$	Posición en el plano del robot
$\xi = [x \ y \ \theta]^\top$	Coordenadas de posición
$\xi_d = [x_d \ y_d \ \theta_d]^\top$	Coordenadas de posición deseada
$\phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3]^\top$	Posición angular de las ruedas
$\mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ v_3]^\top$	Velocidad lineal de las ruedas
$\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^\top$	Velocidades lineales y de rotación del robot
$\tau_r = [\tau_{r1} \ \tau_{r2} \ \tau_{r3}]^\top$	Torque de las ruedas
$\{\gamma, \rho\}$	Perturbaciones de deslizamiento
$\text{diag}\{a_1, a_2, a_3\}$	Perturbaciones de patinado
$R(\theta)$	Matriz de rotación
$\theta$	Ángulo de orientación del robot
$\Phi$	Perturbaciones del modelo cinemático
$\Psi$	Perturbaciones del modelo dinámico
$\hat{\Phi}$	Estados estimados del modelo cinemático
$\hat{\Psi}$	Estados estimados del modelo dinámico



# Capítulo 1

## Introducción

La robótica móvil se considera actualmente un área de la tecnología avanzada manejadora de problemas de alta complejidad. Sus productos se constituyen en aplicaciones de las áreas de control, programación, inteligencia artificial, percepción e instrumentación, y sirven de base para el avance en diversos campos de la industria, aportando soluciones tecnológicas innovadoras orientadas al desarrollo de mejores robots y a la ampliación del abanico de aplicaciones disponibles [1]. Por lo tanto, este campo de la investigación está desarrollándose en todo momento, quedando aún mucho que recorrer.

Así, es común ver robots móviles realizando distintas tareas, tales como inspeccionar y/o limpiar tuberías o piscinas, fungir como aspiradoras hogareñas autónomas, trabajar en hospitales como enfermeros de apoyo o en almacenes como montacargas. También se utilizan para transportar material, seguir trayectorias sin la necesidad de un operador y para vigilar y/u observar en el área militar y en el ámbito urbano, entre otros [1], [2].

A diferencia de los robots manipuladores, que se especializan en la manipulación física de objetos en entornos industriales y domésticos, los robots móviles se centran en la movilidad y la logística. Las principales ventajas de los robots móviles sobre los robots manipuladores son que tienen mayor flexibilidad ya que pueden adaptarse a diferentes entornos y tareas sin modificaciones significativas, pueden optimizar rutas y minimizar tiempos de transporte, se pueden agregar o quitar robots según la demanda, y pueden colaborar entre sí para lograr objetivos comunes [3].

Los robots móviles se clasifican, de acuerdo al entorno en donde se desenvuelven, en aéreos, acuáticos y terrestres. En el caso de los robots terrestres, su clasificación se basa en el tipo de locomoción que utilizan: robots con orugas, robots con patas y robots con ruedas [4]. Un robot móvil con ruedas es un vehículo capaz de realizar un movimiento autónomo (sin conductor humano externo) porque está equipado, para su movimiento, con actuadores impulsados por una computadora a bordo [5]. Dentro de los arreglos cinemáticos se encuentran diversas configuraciones que han sido de interés en múltiples estudios, entre los cuales destacan la configuración ackerman, triciclo, skid steer, síncrona, tracción diferencial y tracción omnidireccional. Un robot móvil omnidireccional es un tipo de robot que puede moverse en cualquier dirección sin necesidad de rotar su cuerpo, esto se logra gracias a un sistema de ruedas especial, conocido como ruedas omnidireccionales, estas ruedas permiten al robot desplazarse hacia adelante, hacia atrás, y de lado, lo que

hace muy ágil y eficiente en ambientes con obstáculos. En el contexto de robots móviles, los conceptos de grado de movilidad y grado de direccionabilidad son fundamentales [6].

El grado de movilidad es el número de grados de libertad que el robot posee. Cada grado de libertad corresponde a una dirección o eje en la que el robot puede moverse, por ejemplo, un robot móvil con 3 grados de libertad puede moverse en el plano (adelante/atrás, derecha, izquierda) tanto mediante rotaciones como traslaciones. Por otra parte, el grado de direccionabilidad se relaciona con las ruedas o mecanismos de movimiento que permiten al robot cambiar su dirección, por ejemplo, un robot omnidireccional puede moverse libremente en cualquier dirección, incluso de forma perpendicular a sus ruedas normales.

Con base en los conceptos previamente definidos, se puede demostrar que, a pesar de la variedad de posibles construcciones de robots y configuraciones de ruedas, el conjunto de robots móviles con ruedas se puede dividir en cinco clases [5]:

- **Robot tipo** (3, 0). También conocido como robot móvil omnidireccional, es aquel que no cuenta con ruedas fijas ni volantes, esto quiere decir, que todas sus ruedas son omnidireccionales (también conocidas como ruedas suecas), permitiendo contar con tres grados de movilidad. El nombre *omnidireccional* se refiere a que tienen total movilidad en el plano cartesiano, por lo que no poseen restricciones no-holónomas, a diferencia de otros tipos de robots móviles, lo que le permite moverse en cada instante en cualquier dirección sin la necesidad de reorientarse.
- **Robot tipo** (2, 0). También conocidos como robots diferenciales, estos robots no tienen volantes, pero si cuentan con una o varias ruedas fijas que comparten un mismo eje. A diferencia del robot tipo (3, 0) posee una restricción en su movilidad en el sentido en que para cualquier trayectoria admisible su velocidad debe permanecer bidireccional, es decir, que el robot debe ser capaz de moverse en ambas direcciones (hacia adelante y hacia atrás) mediante el control independiente de las velocidades de sus ruedas.
- **Robot tipo** (2, 1). En el caso contrario de los robots (2, 0), este tipo de robots cuenta con un volante, pero no tiene ruedas fijas, sin embargo, también cuenta con la misma restricción de movilidad.
- **Robot tipo** (1, 1). La característica principal de estos robots, es que pueden contar con una o varias ruedas fijas con un solo eje en común, así como con uno o varios volante, pero, con la condición de que el centro de uno de ellos no esté ubicado sobre el eje de las ruedas fijas. También cuenta con una restricción, que esta dada por la distribución unidireccional que debe tener la velocidad, siendo este tipo de robots móviles los que se construyen sobre el modelo de un automóvil convencional.
- **Robot tipo** (1, 2). Estos robots no tienen ruedas fijas y cuentan con al menos dos volantes. Su velocidad debe permanecer unidireccional y parametrizada por la orientación de dos volantes, los cuales son elegidos arbitrariamente.

El desarrollo de este trabajo se centra en el estudio del modelo y control del robot móvil omnidireccional. A diferencia de otros robots móviles que requieren girar o cambiar de orientación para moverse en diferentes direcciones, los robots omnidireccionales pueden desplazarse en cualquier dirección sin necesidad de rotación, teniendo algunas ventajas sobre los demás robots móviles, tales como el poder moverse en todas las direcciones (adelante, atrás, lateralmente) sin restricciones, tienen una mayor eficiencia para optimizar rutas y minimizar tiempos de desplazamiento, también son ideales para entornos congestionados o con poco espacio y permiten un posicionamiento preciso en áreas estrechas [3].

### 1.1. Estado del arte

El modelado matemático de un sistema, representado por ecuaciones diferenciales, permite conocer el comportamiento de dicho sistema al variar cada una de sus señales de control. Específicamente, en el estudio de robots móviles terrestres accionados por ruedas, este modelo matemático da una idea de cómo será el movimiento de los robots. Por ejemplo, en los trabajos [7] y [8] se obtiene el modelo cinemático y dinámico de un robot omnidireccional, empleando técnicas como el método de Euler-Lagrange o Newton-Euler. Sin embargo, estos modelos son muy idealistas ya que consideran que las ruedas giran sin deformarse o que las ruedas no presentan deslizamiento. De hecho, se asume que el controlador diseñado tiene la capacidad de manejar estas perturbaciones. Considerar estos fenómenos es de vital importancia para que los robots puedan realizar su tarea de la mejor forma posible. A pesar de que hay una gran variedad de trabajos reportados en la literatura concernientes al modelado y control de robots diferenciales con perturbaciones en las ruedas [5], [9] y [10], existe una brecha por cubrir en el estudio del modelado y control de los robots omnidireccionales considerando las perturbaciones antes mencionadas.

Con base en lo anterior mencionado, algunos trabajos que han considerado el modelado cinemático de robots omnidireccionales, se pueden encontrar en [11], donde se propone un método de resolución de la fuerza de reacción entre el suelo y el punto de contacto de las ruedas del robot utilizando el estado de movimiento de dicho robot. Dado que con la fuerza de reacción resultante y la medición de la estabilidad fuerza-ángulo se puede evaluar la estabilidad de deslizamiento y vuelco del robot, sin embargo, con este método, el actuador llega a saturarse, por lo que si se espera que el robot móvil omnidireccional pueda funcionar bien para prevenir dicha saturación, reduciendo el error en la trayectoria, y aumentar el deslizamiento y la estabilidad de vuelco, es necesaria una optimización del modelo. En [12] se menciona que el deslizamiento en las ruedas se puede tratar como una perturbación debido a que no hay forma de medirlo directamente y pueden emplearse métodos de control sólidos, por ejemplo, el método de control de rechazo activo de perturbaciones lineal (LADRC por sus siglas en inglés).

Por otra parte, algunos trabajos han abordado el control del modelo dinámico con perturbaciones. Concretamente, en [13] se hace un estudio dedicado a medir los coeficientes de fricción y la fuerza necesaria para provocar el patinado en las ruedas de algunos modelos

dinámicos en robots móviles. Dicha técnica permite desarrollar un método dinámico de fricción mejorado, lo cual permite comprobar que no solo la alta velocidad y aceleración del robot gobiernan el movimiento del patinado resultante, si no que también influye el material rígido existente en las discontinuidades entre los rodillos de las ruedas omnidireccionales, incluso a velocidades y aceleraciones bajas. En [14] se desarrolló un modelo de tracción que, junto con las ecuaciones dinámicas de movimiento de un robot omnidireccional, se puede simular dicho movimiento. De manera similar, en [15] se habla de la importancia de obtener un modelo dinámico no lineal tomando en cuenta el patinado ya que permite investigar dicho efecto y aplicar controles convencionales y el uso de controladores deslizantes o adaptativos para mejorar el rendimiento en una amplia variedad de superficies planas y duras en función del patinado de las ruedas. Otro caso de estudio se presenta en un robot móvil de cuatro ruedas que se mueve sobre una superficie horizontal cuando sus ruedas patinan [16], cuyo objetivo es diseñar un control para seguimiento de trayectoria tomando en cuenta su modelo dinámico con patinado de las ruedas durante el frenado. El movimiento de las ruedas está controlado por cuatro motores independientes de corriente directa. Además, los pares resultantes por los motores son lineales con respecto a la corriente suministrada al motor y la velocidad angular del rotor. El método de control se basa en la función de Lyapunov, se construye una ley de control no lineal y se demuestra la estabilidad del equilibrio del sistema en lazo cerrado. Para dicho control se considera el movimiento del robot con ruedas en un espacio de fase cilíndrico debido a la presencia de la coordenada angular del cuerpo, lo cual permite obtener el controlador no lineal tal que el conjunto de todas las posiciones de equilibrio del sistema en un circuito cerrado sea uniformemente asintóticamente estable. El problema anterior también es abordado en [17] pero considerando un vehículo omnidireccional equipado con ruedas Mecanum. Aumentar el modelo del vehículo considerando propiedades de patinado de las ruedas permite un mejor seguimiento de la trayectoria, mientras que la complejidad reducida del modelo permite una estimación de parámetros manejable y una planificación del movimiento con tiempos de cálculo más bajos. Se analiza el procedimiento de estimación de los parámetros del modelo de patinado para estas superficies y se demuestra la aplicación efectiva de estos modelos en la planificación óptima del movimiento. Los resultados alientan el uso de modelos simplificados de patinado de ruedas en problemas de planificación de movimiento para mantener bajo el tiempo de cálculo y aumentar la precisión de la posición, lo que reduce la necesidad de retroalimentación posicional y una rápida replanificación del movimiento en línea si se produjera un patinado.

Finalmente, algunos trabajos que han considerado tanto el modelo cinemático como el dinámico de robots omnidireccionales se presentan en [18]-[21]. En [18] se describe el caso de un robot móvil holonómico y omnidireccional con tres conjuntos de ruedas ortogonales laterales, y que se destacan los métodos de control de aceleración resuelta, el control PID y el control difuso. El control PID utiliza una combinación de tres términos: el término proporcional, el término integral y el término derivativo, para ajustar la dirección del robot (véase [19]). Mientras que el control difuso se basa en la lógica difusa, que permite que los valores de entrada y salida del sistema sean valores difusos en lugar de valores precisos;



este control utiliza una serie de reglas para determinar la velocidad y la dirección del robot en función de las entradas del sistema como se implementó en [20]. El control cinemático y dinámico son dos enfoques comunes para el control de aceleración, y la modificación de la velocidad de las ruedas del robot es una forma de lograrlo como se desarrolla en [19]. Por último, en [21], se realiza la investigación de una base móvil omnidireccional tanto con su modelo cinemático como dinámico impulsados por 4 ruedas giratorias motorizadas, también conocidas como PCW (Powered Caster Wheels). Tiene dos modelos cinemáticos que resultan en diferentes sensibilidades de la posición inicial, a los cuales se les evalúa el error de posición en la articulación, con el fin de que dado un robot con movimiento deseado, el control dinámico tenga la capacidad de distribuir un par articular de manera uniforme, en comparación con el control cinemático. El patinado también se reduce eligiendo una solución que minimiza las diferencias entre el contacto medido de las velocidades de las ruedas (con el suelo) de las deseadas. Estos méritos de la distribución del par y la minimización del patinado mejoran la precisión de la odometría de la base móvil, ya que reducen las posibilidades de patinado del piso de las ruedas.

Otra forma de abordar el problema del patinado sobre las ruedas de un robot omnidireccional se aborda en [16] utilizando un control robusto que utiliza la combinación entre la técnica de retroceso y el algoritmo de control de modo deslizante. El control de modo deslizante tiene como finalidad atenuar o eliminar las perturbaciones externas e incertidumbres paramétricas para garantizar la robustez del sistema [22].

Algunos otros académicos han utilizado métodos de control no lineales para diseñar otro tipo de controladores de seguimiento de trayectoria y estabilidad para robots móviles con ruedas tales como el control adaptativo [23] y [24], el control de redes neuronales [25] y [26], entre otros.

## 1.2. Objetivos

El objetivo general de este trabajo es modelar, diseñar, analizar e implementar una estrategia de control que compense el deslizamiento y patinado de las ruedas de un robot móvil omnidireccional.

Para cumplir con el objetivo general, se establecen los siguientes objetivos específicos:

- Determinar el modelo cinemático sujeto al deslizamiento y patinado de las ruedas.
- Determinar el modelo dinámico sujeto al deslizamiento y patinado de las ruedas.
- Integrar el modelo cinemático y dinámico con deslizamiento y patinado de las ruedas.
- Diseñar estrategias de control que compensen los efectos de deslizamiento y patinado de las ruedas para el seguimiento de trayectorias.
- Analizar la estabilidad del punto de equilibrio del sistema descrito en los errores de seguimiento.

- De ser posible, implementar la estrategia de control en una plataforma experimental.

### 1.3. Justificación

Hoy en día, los robots móviles con ruedas, como es el caso del robot omnidireccional, se están utilizando en aplicaciones de alta velocidad, sin embargo, uno de los problemas que conllevan a un mal control en el seguimiento de trayectorias, es el patinado que se produce en las ruedas, ya sea por cambios bruscos en la dirección del robot o por la fricción que se produce entre las ruedas y el punto de apoyo por el tipo de superficie.

Al obtener el modelo cinemático y dinámico de este tipo de robots móviles suele tomarse en cuenta la suposición de que las ruedas del robot ruedan sin deslizarse, lo que se vuelve un problema cuando el robot acelera, desacelera o gira a alta velocidad. En ese sentido, debido a que no se consideran dichas perturbaciones, los robots pueden colisionar o no cumplir con la tarea especificada.

Es importante destacar que la mayoría de los trabajos reportados en la literatura se centran en obtener un modelo sujeto a estas perturbaciones considerando robots móviles diferenciales. Por lo tanto, hay un área de oportunidad para modelar estas perturbaciones en robots móviles omnidireccionales.

### 1.4. Planteamiento del problema

Considere un robot móvil omnidireccional con 3 ruedas con  $\boldsymbol{\xi} = [x \ y \ \theta]^\top$  como el vector de estado que representa la posición  $(x, y)$  en el plano y  $\theta$  la orientación del robot con respecto al eje  $X_b$  (ver Figura 1.1). El problema consiste en, a partir del modelo cinemático y dinámico perturbado, diseñar estrategias de control que aseguren que el robot siga una trayectoria deseada ante el deslizamiento y patinado de las ruedas. Definiendo el error de seguimiento como,

$$\mathbf{e} = \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_d, \quad (1.1)$$

donde  $\boldsymbol{\xi}_d = [x_d \ y_d \ \theta_d]^\top \in \mathbb{R}^3$  es la trayectoria deseada, la cual es al menos dos veces diferenciable. Entonces, matemáticamente, se tiene que el problema de control a resolver puede escribirse como,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e} = 0$$

adicionalmente puede pedirse que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{e}} = 0$ , es decir, que tanto el error de posición  $\mathbf{e}$  como el error de velocidad  $\dot{\mathbf{e}}$  converjan asintóticamente a cero conforme el tiempo tiende a infinito.

## 1.4 Planteamiento del problema

---

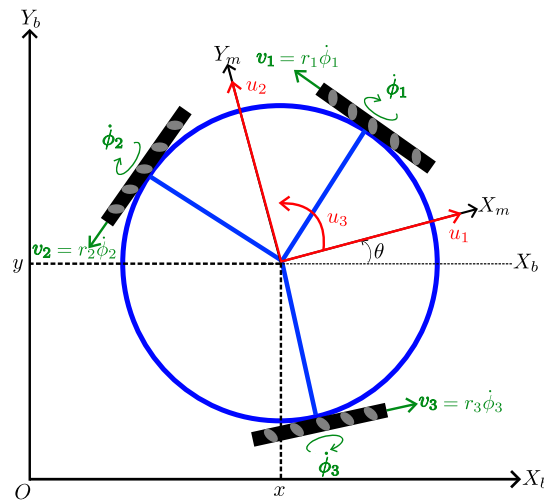


Figura 1.1: Diagrama del robot omnidireccional.



## Capítulo 2

# Preliminares matemáticos

En este capítulo se presentan las herramientas matemáticas que se utilizarán para el desarrollo de este trabajo. En primera instancia, se presenta el comportamiento de una rueda sueca, después se presentan algunos conceptos de estabilidad en el sentido de Lyapunov. Posteriormente, se desarrollan el modelo cinemático y dinámico del robot omnidireccional sin considerar perturbaciones.

### 2.1. Ruedas suecas

Existen diversos tipos de ruedas empleadas en los robots móviles [5], sin embargo, para el desarrollo de este trabajo y por el tipo de robot móvil a utilizar, el interés radica en las llamadas ruedas suecas.

La posición de la rueda sueca respecto al robot móvil se describe, mediante 3 parámetros constantes:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $L$  y un parámetro adicional  $\gamma$  como se muestra en la Figura 2.1, donde  $L$  es la distancia entre el origen del marco móvil y el centro de las ruedas,  $\alpha$  es el ángulo entre el eje  $X_m$  y el eje  $L$ ,  $\beta$  es la orientación del plano de la rueda con respecto a  $L$ , y  $\gamma$  es la dirección con respecto al plano de la rueda de la componente cero de la velocidad del punto de contacto.

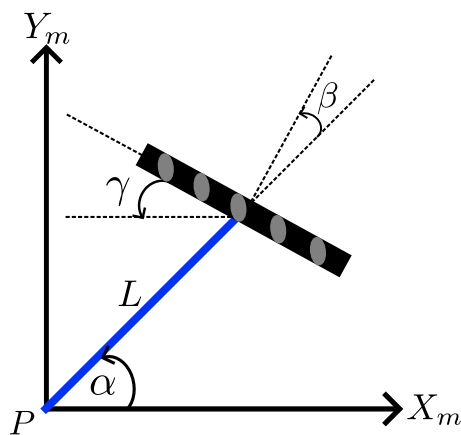


Figura 2.1: Rueda sueca.

Por lo tanto, con la descripción anterior, tenemos que la componente de la velocidad del punto de contacto que se encuentra en el plano de la rueda es [5],

$$\begin{bmatrix} -\sin(\alpha + \beta + \gamma) & \cos(\alpha + \beta + \gamma) & L \cos(\beta + \gamma) \end{bmatrix} R(\theta) \dot{\boldsymbol{\xi}} + r \dot{\phi} \cos \gamma = 0. \quad (2.1)$$

con,

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En donde  $R(\theta)$  es la matriz de rotación que expresa la orientación del marco base con respecto al marco móvil,  $\boldsymbol{\xi}$  es el vector de coordenadas de postura,  $r$  el radio de las ruedas y,  $\phi_i$  la posición angular de giro de las ruedas.

## 2.2. Estabilidad de Lyapunov

La teoría de Lyapunov es útil para el análisis de estabilidad de los sistemas de control descritos por ecuaciones en espacio de estados, en nuestro caso, sistemas de control para robots móviles [27]. Se pueden utilizar dos métodos:

1. Primer método. Se usa en procedimientos que utilizan las formas explícitas de las soluciones de las ecuaciones diferenciales para el análisis.
2. Segundo método. No requiere de las soluciones de las ecuaciones diferenciales, lo cual es más útil en la práctica. Es aplicable tanto a sistemas lineales como no lineales, variantes o invariantes en el tiempo. Además, es indispensable para el análisis de estabilidad de sistemas no lineales en los que las soluciones exactas no son posibles.

El teorema de Lyapunov sirve para el estudio de sistemas dinámicos de la forma,

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(t, \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (2.2)$$

en donde  $f$  es el vector de funciones de  $\boldsymbol{x}$  y del tiempo  $t$  y  $\boldsymbol{x}$  es el vector de estado, así mismo  $\mathbb{R}$  se refiere a los reales y  $\mathbb{R}_+$  a los reales positivos. Para cada tiempo inicial  $t_0$ , y para cada condición inicial  $\boldsymbol{x}_0$ , existe una solución única cuando  $f(t, \boldsymbol{x})$  es una función Lipschitz. Si  $f$  no depende explícitamente del tiempo,  $f(t, \boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ , entonces se tiene un sistema autónomo, es decir

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t_0 = 0. \quad (2.3)$$

**Definición 1** *Estado de equilibrio* [28]. Un vector constante  $\boldsymbol{x}_e \in \mathbb{R}^n$  es estado de equilibrio del sistema (2.2) si,

$$f(t, \boldsymbol{x}_e) = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.4)$$

**Definición 2** *Estabilidad en el sentido de Lyapunov [29].* Tiene que ver con el comportamiento de la solución de la ecuación diferencial.

Si, para la condición inicial cercana del estado de equilibrio, la solución permanece dentro de la región  $S(\epsilon)$  entonces  $x_e$  es un punto de equilibrio estable (Figura 2.2).

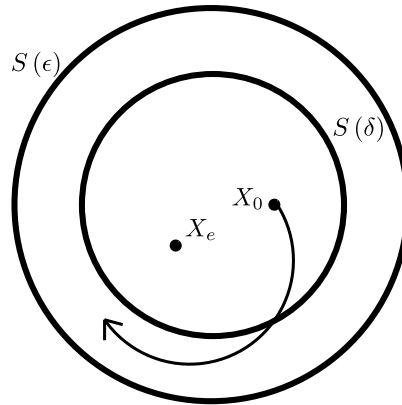


Figura 2.2: Punto de equilibrio estable.

Por otro lado, si la solución es atraída por el estado de equilibrio se le conoce como estabilidad asintótica (Figura 2.3).

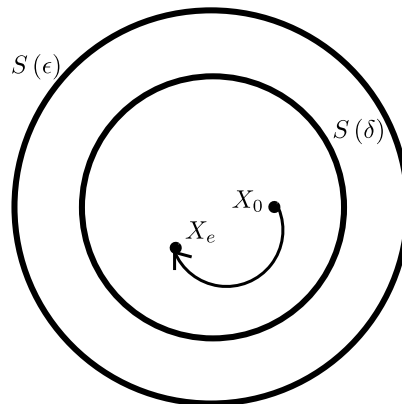


Figura 2.3: Punto de equilibrio asintóticamente estable.

Y, si la solución para la condición inicial sale de las regiones  $S(\delta)$  y  $S(\epsilon)$ , entonces el sistema es inestable (Figura 2.4).

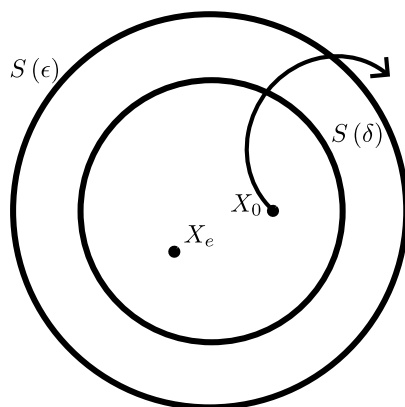


Figura 2.4: Punto de equilibrio inestable.

**Definición 3** *Función candidata de Lyapunov* [27]. Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio para  $\dot{x} = f(x)$  donde  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función Lipschitz local de un dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$  que contiene  $x = 0$ . Sea  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable tal,

$$V(0) = 0 \quad \text{y} \quad V(x) > 0 \quad \text{en} \quad D - \{0\} \quad (2.5)$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad \text{en} \quad D \quad (2.6)$$

Entonces,  $x = 0$  es estable. Además, si,

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \text{en} \quad D - \{0\} \quad (2.7)$$

entonces es asintóticamente estable.

En resumen, una función candidata de Lyapunov es una función  $V(x)$  continuamente diferenciable que satisface 2.5 y 2.6.

**Teorema 1** *Teoremas de estabilidad de Lyapunov* [29], [28].

1. Estabilidad:

El origen  $\mathbf{x} = 0 \in \mathbb{R}^n$  es un estado de equilibrio estable del sistema  $\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x})$  si existe una función candidata de Lyapunov  $V(t, \mathbf{x})$  tal que su derivada temporal satisfaga,

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall t \geq 0.$$

**Definición 4** *Se toma en cuenta lo siguiente:*

- $V(\mathbf{x})$  es definida positiva si  $V(0) = 0$  y  $V(\mathbf{x}) > 0$  si  $\mathbf{x} \neq 0$ ,
- $V(\mathbf{x})$  es semidefinida positiva si  $V(0) = 0$  y  $V(\mathbf{x}) \geq 0$ ,



## 2.2 Estabilidad de Lyapunov

---

- $V(\mathbf{x})$  es definida negativa o semidefinida negativa si  $-V(\mathbf{x})$  es definida positiva o semidefinida positiva.

En otras palabras, el punto de equilibrio  $\mathbf{x} = 0$  es estable si  $\exists V(\mathbf{x})$  definida positiva continuamente diferenciable tal que  $\dot{V}(\mathbf{x})$  es semidefinida negativa y, asintóticamente estable si  $\dot{V}(\mathbf{x})$  es definida negativa.

### 2. Estabilidad en la primera aproximación:

Sea  $\mathbf{x} = 0$  un punto de equilibrio de (2.3),  $\mathbf{A} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}|_{\mathbf{x}=0}$ , y sea  $\mathbb{R}\{\lambda_i(\mathbf{A})\}$  la parte real de los valores propios  $\lambda_i$  (eigenvalores) de  $\mathbf{A}$ . Entonces,

- $\mathbf{x} = 0$  es asintóticamente estable si  $\mathbb{R}\{\lambda_i(\mathbf{A})\} < 0$ ,
- $\mathbf{x} = 0$  es inestable si  $\mathbb{R}\{\lambda_i(\mathbf{A})\} > 0$  para algún valor propio  $\lambda_i$  de  $\mathbf{A}$ .

### 3. Estabilidad exponencial:

El punto de equilibrio  $\mathbf{x} = 0$  de (2.3) es exponencialmente estable si,

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq k\|\mathbf{x}(0)\|e^{\lambda t}, \forall t \geq 0, k \geq 1, \forall \|\mathbf{x}(0)\| < c.$$

donde  $\lambda$  es el parámetro característico de la distribución exponencial, el cual indica el número de veces que se espera que ocurra el fenómeno estudiado durante un periodo de tiempo determinado, y  $c = c(0)$  es una constante que acota la exponencial para todo  $t \geq 0$ . El punto de equilibrio es globalmente exponencialmente estable si la desigualdad anterior se satisface para todo estado inicial.

### 4. Estabilidad asintótica global:

El origen  $\mathbf{x} = 0 \in \mathbb{R}^n$  es un estado de equilibrio asintóticamente estable en forma global del sistema (2.2), si existe una función candidata de Lyapunov  $V(t, \mathbf{x})$  definida positiva globalmente y radialmente no acotada, tal que su derivada temporal satisfaga:

- $\dot{V}(t, 0) = 0 \quad \forall t \geq 0,$
- $\dot{V}(t, \mathbf{x}) < 0 \quad \forall t \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \neq 0 \in \mathbb{R}^n.$

### 5. Principio de invarianza de Krasovskii-LaSalle

Cuando se requiere determinar la estabilidad asintótica global o local en un sistema que es autónomo y que tiene solamente un estado de equilibrio estable debido a que existe una función candidata de Lyapunov que cumple con las propiedades anteriormente mencionadas, pero que su derivada es semidefinida negativa, entonces se utiliza el principio de invarianza de LaSalle, el cual determina las condiciones para determinar estabilidad asintótica global a pesar de que la derivada de la función de Lyapunov no sea definida negativa.

Considere la ecuación diferencial autónoma (2.3) cuyo origen  $\mathbf{x} = 0 \in \mathbb{R}^n$  es un estado de equilibrio. Se asume que existe una función globalmente definida positiva y radialmente no acotada  $V(\mathbf{x})$ , tal que,

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces, se define el conjunto  $\Omega$  como,

$$\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Si  $\mathbf{x}(0)$  es el único estado inicial en  $\Omega$  cuya solución correspondiente,  $\mathbf{x}(t)$ , permanece siempre en  $\Omega$  (es decir,  $\mathbf{x}(t) \in \Omega$  para todo  $t \geq 0$ ) entonces el origen  $\mathbf{x} = 0 \in \mathbb{R}^n$  es globalmente asintóticamente estable.

La estabilidad es la capacidad de un sistema para mantenerse en equilibrio o regresar a su posición original de forma natural después de ser perturbado.

El enfoque de Lyapunov nos dice que podemos estudiar la estabilidad de un sistema a partir de una medida similar de energía cinética disipada,

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 \approx V(x(t)) = \frac{1}{2}x(t)^2. \quad (2.8)$$

En donde  $E_K$  es la energía cinética y  $V(x(t))$  la función candidata de Lyapunov.

## 2.3. Identidad matricial de Woodbury

La identidad matricial de Woodbury, también conocida como el Lema de inversión de matrices o la Fórmula de Sherman-Morrison-Woodbury, es una herramienta poderosa en álgebra lineal para simplificar la inversión de matrices [30].

La identidad de Woodbury se expresa generalmente como,

$$(A + UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}$$

donde  $A$  es una matriz  $n \times n$ ,  $U$  es una matriz  $n \times k$ ,  $C$  es una matriz  $k \times k$  y  $V$  es una matriz  $k \times n$ .

Dicha identidad surge de la necesidad de simplificar la inversión de matrices que han sido perturbadas por una corrección de rango bajo, esto quiere decir que la matriz original  $A$  sufre una pequeña modificación que no cambia significativamente su estructura, dicha modificación se describe mediante las matrices  $U$ ,  $C$  y  $V$ , las cuales no afectan a todas las filas y columnas de la matriz original, por ejemplo, si se tiene  $A$  como una matriz  $3 \times 3$  y se quiere aplicar una corrección de rango bajo con matrices  $U$ ,  $C$  y  $V$  de tamaño  $3 \times 1$ ,  $1 \times 1$  y  $1 \times 3$  respectivamente, entonces la identidad de Woodbury nos permite encontrar la inversa de  $A + UCB$  de manera exacta y eficiente. Esta identidad permite calcular la inversa de

una matriz modificada utilizando la inversa de la matriz original y algunas operaciones adicionales.

Considerando  $U = -I$ ,  $C = I$  y  $V = B$  y sustituyendo estos valores en la identidad general, se obtiene,

$$(A - B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}(-I) (I^{-1} + BA^{-1}(-I))^{-1} (-I)A^{-1}$$

Simplificando los términos, se llega a,

$$(A - B)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}B(A - B)^{-1} \quad (2.9)$$

Para que la identidad (2.9) sea aplicable, la matriz  $A$  debe ser invertible (no singular). Esto es crucial porque la identidad se basa en la existencia de  $A^{-1}$ . Si  $A$  fuera singular,  $A^{-1}$  no existiría y la identidad no se podría aplicar. Además, la identidad de Woodbury sigue siendo válida independientemente de si  $B$  es singular, ya que no se requiere la inversa de  $B$  en la fórmula.

Para comprobar formalmente la identidad, primero se factoriza el lado derecho de (2.9),

$$A^{-1} + A^{-1}B(A - B)^{-1} = A^{-1} (I + B(A - B)^{-1}) \quad (2.10)$$

ahora si se multiplica (2.9) por  $A$  se tiene,

$$A(A - B)^{-1} = I + B(A - B)^{-1} \quad (2.11)$$

sustituyendo (2.11) en (2.10) resulta,

$$A^{-1} + A^{-1}B(A - B)^{-1} = A^{-1} (A(A - B)^{-1}) \quad (2.12)$$

y sustituyendo (2.12) en (2.9) se obtiene,

$$(A - B)^{-1} = (A - B)^{-1} \quad (2.13)$$

finalmente, multiplicando por la izquierda ambos lados de (2.13) por  $(A - B)$  se tiene que,

$$I = I$$

con esto se demuestra que la identidad es correcta. La clave está en la correcta aplicación de la identidad de Woodbury y la simplificación de los términos.

## 2.4. Modelo cinemático

El modelo cinemático del robot omnidireccional puede obtenerse de manera sencilla considerando la representación geométrica dada en la Figura 2.5 y está dado por,

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = R^{\top}(\theta) \mathbf{u}, \quad (2.14)$$

donde  $\boldsymbol{\xi} = [x \ y \ \theta]^\top \in \mathbb{R}^3$  es el vector de estado que representa la posición  $(x, y)$  en el plano y  $\theta$  es la orientación del robot medido a partir del eje  $X_b$  hacia el eje  $X_m$ ,  $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^\top \in \mathbb{R}^3$  es el vector de entradas de control, con  $u_1$  la velocidad longitudinal,  $u_2$  la velocidad lateral y  $u_3$  la velocidad angular y la matriz  $R^\top(\theta)$  está dada por,

$$R^\top(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

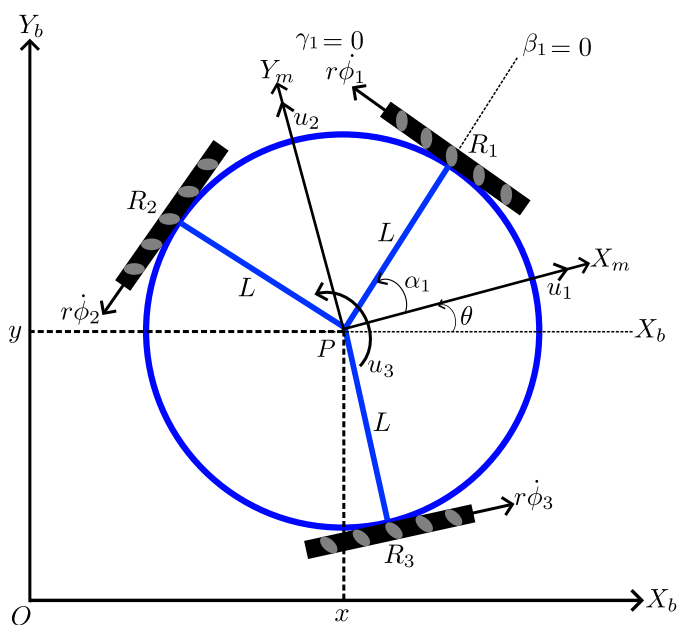


Figura 2.5: Diagrama del robot omnidireccional.

En cambio, a partir de las restricciones de velocidad en el plano de la rueda, se puede determinar la relación entre las velocidades del cuerpo  $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^\top$  y las velocidades angulares de las ruedas  $\dot{\boldsymbol{\phi}} = [\dot{\phi}_1 \ \dot{\phi}_2 \ \dot{\phi}_3]^\top$  donde  $\dot{\phi}_i$  representa la posición angular de cada rueda. En ese sentido, y de acuerdo a [5], la restricción de velocidad para cada rueda omnidireccional es como se muestra en (2.1).

Considerando el marco móvil  $(X_m, Y_m)$  se tiene la configuración mostrada en la Figura 2.6. La Tabla 2.1 presenta los parámetros asociados a cada una de las ruedas.

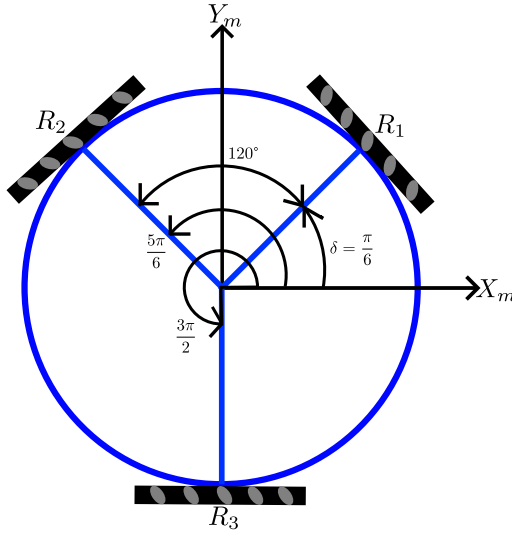


Figura 2.6: Posición de las ruedas con respecto al marco móvil.

Tabla 2.1: Parámetros de las ruedas del robot omnidireccional.

Rueda	Parámetros		
	$\alpha_i$	$\beta_i$	$\gamma_i$
$R_1$	$\frac{\pi}{6}$	0	0
$R_2$	$\frac{5\pi}{6}$	0	0
$R_3$	$\frac{3\pi}{2}$	0	0

Por lo tanto, al sustituir los valores de la Tabla 2.1 en (2.1) se obtiene el siguiente conjunto de restricciones,

$$J_1 R(\theta) \dot{\xi} + J_2 \dot{\phi} = 0, \quad (2.15)$$

donde,

$$J_1 = \begin{bmatrix} -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & L \\ -\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) & \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) & L \\ -\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) & L \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}.$$

Considerando que  $\delta = \frac{\pi}{6}$  la matriz  $J_1$  se reescribe como,

$$J_1 = \begin{bmatrix} -\sin \delta & \cos \delta & L \\ -\sin \delta & -\cos \delta & L \\ 1 & 0 & L \end{bmatrix}.$$

A partir de (2.15), se despeja  $\dot{\phi}$  y se sustituye (2.14), obteniendo la relación entre velocidades del cuerpo y velocidades de las ruedas, la cual, está dada por,

$$\dot{\phi} = T\mathbf{u}, \quad (2.16)$$

donde  $T = -J_2^{-1}J_1$  y está dada por,

$$T = \begin{bmatrix} \frac{\sin \delta}{r} & -\frac{\cos \delta}{r} & -\frac{L}{r} \\ \frac{\sin \delta}{r} & \frac{\cos \delta}{r} & -\frac{L}{r} \\ -\frac{1}{r} & 0 & -\frac{L}{r} \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

## 2.5. Modelo dinámico

Para obtener el modelo dinámico del robot omnidireccional considere el diagrama de las Figuras 2.6 y 2.7.

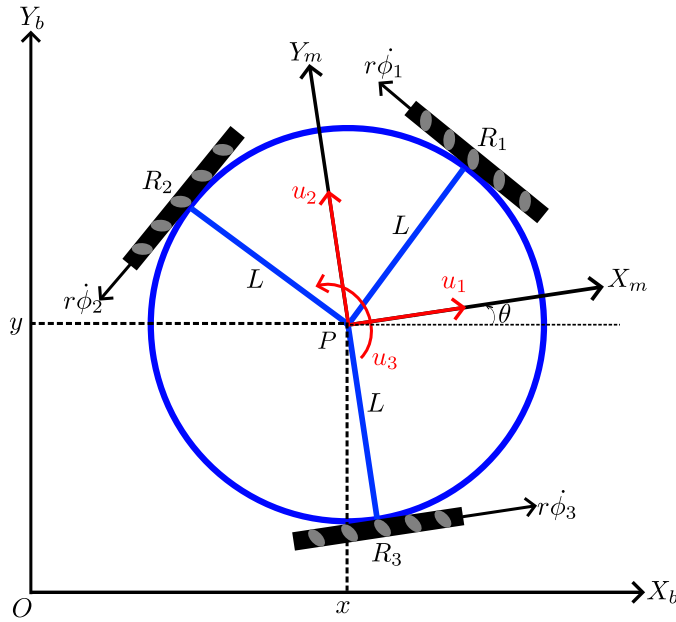


Figura 2.7: Diagrama del robot móvil para obtener el modelo dinámico.

Dicho modelo se puede obtener a partir de la metodología de Euler-Lagrange, considerando el centro de masa  $P$  localizado en el origen de los ejes de referencia móviles  $X_m - Y_m$ .

La ecuación de Euler-Lagrange es,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}_j} = \mathbf{F}_j \quad (2.18)$$

para este caso,  $\mathbf{F}_j = [F_t, F_t r + \boldsymbol{\tau}_r]$  es el conjunto de fuerzas generalizadas para  $j = 1, \dots, 6$  con  $F_t$  como la fuerza de tracción sobre las ruedas dada por  $F_t = N\mu_a$ , donde  $\mu_a$  es el coeficiente de fricción y  $N$  es la reacción normal;  $\boldsymbol{\tau}_r$  es igual a la entrada del par aplicado a cada una de las ruedas y  $r$  es su radio. Suponiendo fuerzas de reacción unitarias, y tomando en cuenta (2.15) para sus direcciones, las fuerzas generalizadas son  $[R^\top(\theta) J_1^\top \mu_a, J_2^\top \mu_a + \boldsymbol{\tau}_r]$ . Por otra parte,  $\mathbf{q}_j$  corresponde a cada uno de los elementos del vector  $q = [x_m \ y_m \ \theta \ \phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3]^\top$  y, la variable  $\mathcal{L}$  es el Lagrangiano, resultado de la diferencia entre la energía cinética  $K$  y la energía potencial  $U$ , y está dado por,

$$\mathcal{L} = K - U. \quad (2.19)$$

En este caso, la energía potencial es igual a cero debido a que se considera que el robot se desplaza en un plano horizontal. Por otra parte, la energía cinética esta compuesta por la energía traslacional y rotacional del cuerpo del robot, así como de la energía rotacional de las llantas. De manera general, la energía cinética de la plataforma  $K_p$  resulta,

$$K_p = \frac{1}{2} M_p V^2 + \frac{1}{2} I_p u_3^2$$

donde  $M_p$  es la masa de la plataforma,  $V$  es la velocidad lineal que de acuerdo con el diagrama de la Figura 2.7, es decir,  $V = [\dot{x}_m \ \dot{y}_m]^\top$  con  $\dot{x}_m$  como la velocidad lineal en el eje  $X_m$ ,  $\dot{y}_m$  la velocidad lineal en el eje  $Y_m$ ,  $I_p$  es el momento de inercia alrededor del origen de  $X_m - Y_m$  y  $u_3$  es la velocidad angular de la plataforma. Además, la energía cinética relacionada con las ruedas es,

$$K_w = \frac{1}{2} I_{r_1} \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} I_{r_2} \dot{\phi}_2^2 + \frac{1}{2} I_{r_3} \dot{\phi}_3^2$$

donde  $I_{r_i}$  es el momento de inercia de las ruedas y  $\dot{\phi}_i$  es la velocidad angular de las ruedas, con  $i = 1, 2, 3$ . Por lo tanto, la energía cinética total del sistema es

$$K = \frac{1}{2} M_P (\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2) + \frac{1}{2} I_P u_3^2 + \frac{1}{2} I_{r_1} \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} I_{r_2} \dot{\phi}_2^2 + \frac{1}{2} I_{r_3} \dot{\phi}_3^2. \quad (2.20)$$

Sustituyendo (2.20) en (2.19) tenemos que,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} M_P (\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2) + \frac{1}{2} I_P u_3^2 + \frac{1}{2} I_{r_1} \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} I_{r_2} \dot{\phi}_2^2 + \frac{1}{2} I_{r_3} \dot{\phi}_3^2$$

o, de manera vectorial, como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\xi}}_m^\top M \dot{\boldsymbol{\xi}}_m + \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\phi}}^\top I_r \dot{\boldsymbol{\phi}}, \quad (2.21)$$

donde,

$$M = \begin{bmatrix} M_P & 0 & 0 \\ 0 & M_P & 0 \\ 0 & 0 & I_P \end{bmatrix}, I_r = \begin{bmatrix} I_{r_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{r_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{r_3} \end{bmatrix}, \dot{\boldsymbol{\xi}}_m = \begin{bmatrix} \dot{x}_m \\ \dot{y}_m \\ u_3 \end{bmatrix}, \dot{\boldsymbol{\phi}} = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \end{bmatrix}.$$

Considerando ahora el eje de coordenadas fijo  $(x, y)$ , se tiene la transformación,

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_m = R(\theta) \dot{\boldsymbol{\xi}}, \quad R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}.$$

Por lo que finalmente (2.21) en los ejes inerciales toma la forma,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\xi}}^\top R^\top(\theta) M R(\theta) \dot{\boldsymbol{\xi}} + \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\phi}}^\top I_r \dot{\boldsymbol{\phi}}$$

sin embargo, debido a las propiedades de la matriz  $R(\theta)$ , se tiene que  $R^\top(\theta) M R(\theta) = M$ , por lo tanto, el Lagrangiano se reescribe como,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\xi}}^\top M \dot{\boldsymbol{\xi}} + \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\phi}}^\top I_r \dot{\boldsymbol{\phi}}. \quad (2.22)$$

A partir del Lagrangiano (2.22), se obtiene lo siguiente,

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{\xi}}} \right)^\top &= M \dot{\boldsymbol{\xi}}, & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{\xi}}} \right)^\top &= M \ddot{\boldsymbol{\xi}}, & \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right)^\top &= 0 \\ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{\phi}}} \right)^\top &= I_r \dot{\boldsymbol{\phi}}, & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{\phi}}} \right)^\top &= I_r \ddot{\boldsymbol{\phi}}, & \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\phi}} \right)^\top &= 0 \end{aligned}$$

por lo tanto, (2.18) se expresa como,

$$M \ddot{\boldsymbol{\xi}} = R^\top(\theta) J_1^\top \mu_a \quad (2.23)$$

$$I_r \ddot{\boldsymbol{\phi}} = J_2^\top \mu_a + \boldsymbol{\tau}_r. \quad (2.24)$$

Multiplicando (2.23) por  $R(\theta)$  por la izquierda y (2.24) por  $T^\top = -J_1^\top (J_2^{-1})^\top$  por la izquierda, y sabiendo que  $(J_2^{-1})^\top J_2^\top = I_3$ , donde  $I_3$  es la matriz identidad de  $3 \times 3$ , entonces, se tiene que,

$$R(\theta) M \ddot{\boldsymbol{\xi}} = J_1^\top \mu_a \quad (2.25)$$

$$T^\top I_r \ddot{\boldsymbol{\phi}} = -J_1^\top (J_2^{-1})^\top J_2^\top \mu_a + T^\top \boldsymbol{\tau}_r = -J_1^\top \mu_a + T^\top \boldsymbol{\tau}_r. \quad (2.26)$$

Ahora, sumando (2.25) y (2.26) se tiene que,

$$R(\theta) M \ddot{\boldsymbol{\xi}} + T^\top I_r \ddot{\boldsymbol{\phi}} = T^\top \boldsymbol{\tau}_r. \quad (2.27)$$



Por otra parte, a partir de (2.14) se obtiene la siguiente relación,

$$\mathbf{u} = R(\theta) \dot{\boldsymbol{\xi}}, \quad \dot{\mathbf{u}} = \dot{R}(\theta) \dot{\boldsymbol{\xi}} + R(\theta) \ddot{\boldsymbol{\xi}} \quad (2.28)$$

y, a partir de (2.16)  $\ddot{\boldsymbol{\phi}} = T\dot{\mathbf{u}}$ . Sustituyendo (2.28) en  $\ddot{\boldsymbol{\phi}}$  se obtiene la siguiente expresión,

$$\ddot{\boldsymbol{\phi}} = T \left( \dot{R}(\theta) \dot{\boldsymbol{\xi}} + R(\theta) \ddot{\boldsymbol{\xi}} \right). \quad (2.29)$$

Sustituyendo (2.29) en (2.27), se obtiene,

$$\left( R(\theta) M + T^\top I_r T R(\theta) \right) \ddot{\boldsymbol{\xi}} + T^\top I_r T \dot{R}(\theta) \dot{\boldsymbol{\xi}} = T^\top \boldsymbol{\tau}_r. \quad (2.30)$$

Multiplicando (2.30) por la izquierda por  $R^\top(\theta)$ , considerando  $\delta = \frac{\pi}{6}$ ,  $I_{r1} = I_{r2} = I_{r3} = I_w$  y haciendo las operaciones correspondientes, el modelo dinámico sin perturbaciones está dado por,

$$D_e \ddot{\boldsymbol{\xi}} + C_e \left( \dot{\boldsymbol{\xi}} \right) \dot{\boldsymbol{\xi}} = B_e \boldsymbol{\tau}_r \quad (2.31)$$

donde,

$$D_e = \begin{bmatrix} M_P + \frac{3I_r}{2r^2} & 0 & 0 \\ 0 & M_P + \frac{3I_r}{2r^2} & 0 \\ 0 & 0 & I_P + \frac{3L^2 I_r}{r^2} \end{bmatrix}, \quad C_e = \frac{3}{2r^2} \begin{bmatrix} 0 & I_w \dot{\theta} & 0 \\ -I_w \dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_e = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \sin(\theta + \pi/6) & -\sin(\theta - \pi/6) & -\cos\theta \\ -\cos(\theta + \pi/6) & \cos(\theta - \pi/6) & -\sin\theta \\ -L & -L & -L \end{bmatrix}.$$

## 2.6. Control por linealización mediante retroalimentación de estados para el modelo cinemático

La dinámica del error definido en (1.1) está dada por  $\dot{\mathbf{e}} = \dot{\boldsymbol{\xi}} - \dot{\boldsymbol{\xi}}_d$  y, al sustituir (2.14) se obtiene,

$$\dot{\mathbf{e}} = R^\top(\theta) \mathbf{u} - \dot{\boldsymbol{\xi}}_d. \quad (2.32)$$

A partir de (2.32) se diseña un control  $\mathbf{u}$  por medio de una retroalimentación de estados, dado por,

$$\mathbf{u} = R(\theta) \left[ \dot{\boldsymbol{\xi}}_d - k_p \mathbf{e} \right] \quad (2.33)$$

donde  $k_p = \text{diag}(k_x, k_y, k_\theta) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es la matriz de ganancias del controlador con  $k_x, k_y, k_\theta > 0$ . Al sustituir (2.33) en (2.32) se obtiene el siguiente sistema lineal,

$$\dot{\mathbf{e}} = -k_p \mathbf{e}. \quad (2.34)$$

Debido a que  $k_p > 0$ , entonces  $-k_p$  es una matriz Hurwitz y, por lo tanto, los errores de posición convergerán de manera exponencial a cero. Esto quiere decir que el robot realizará el seguimiento de la trayectoria deseada.

Siguiendo un procedimiento parecido, también es posible llegar a la conclusión de que la retroalimentación,

$$\mathbf{u} = R(\theta) \left[ \dot{\boldsymbol{\xi}}_d - k_p \tanh(\mathbf{e}) \right]. \quad (2.35)$$

es adecuada para realizar seguimiento de trayectoria en un robot móvil omnidireccional.

## 2.7. Control por calculado para el modelo dinámico

La dinámica del error definido en (1.1) está dada por  $\ddot{\mathbf{e}} = \ddot{\boldsymbol{\xi}} - \ddot{\boldsymbol{\xi}}_d$  y, al sustituir (2.31) se obtiene,

$$\ddot{\mathbf{e}} = D_e^{-1} \left( B_e \boldsymbol{\tau}_r - C_e \left( \dot{\boldsymbol{\xi}} \right) \dot{\boldsymbol{\xi}} \right) - \ddot{\boldsymbol{\xi}}_d. \quad (2.36)$$

A partir de (2.36) se diseña un control  $\boldsymbol{\tau}_r$  por medio del enfoque de par calculado dado por,

$$\boldsymbol{\tau}_r = B_e^{-1} \left[ D_e \left( \ddot{\boldsymbol{\xi}}_d - k_d \dot{\mathbf{e}} - k_p \mathbf{e} \right) + C_e \left( \dot{\boldsymbol{\xi}} \right) \dot{\boldsymbol{\xi}} \right] \quad (2.37)$$

donde  $k_p$  y  $k_d \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  son matrices definidas positivas definidas como  $k_p = \text{diag}(k_x, k_y, k_\theta)$  y  $k_d = \text{diag}(k_{\dot{x}}, k_{\dot{y}}, k_{\dot{\theta}})$ . Sustituyendo (2.37) en (2.36) se tiene lo siguiente,

$$\ddot{\mathbf{e}} = -k_d \dot{\mathbf{e}} - k_p \mathbf{e}. \quad (2.38)$$

Definiendo  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}$  y  $\mathbf{e}_2 = \dot{\mathbf{e}}$  el sistema (2.38) se reescribe como,

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}}_1 \\ \dot{\mathbf{e}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 \\ -k_p & -k_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

donde el punto de equilibrio es  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 = 0$ . Una manera de determinar la estabilidad del punto de equilibrio es proponiendo la siguiente función candidata de Lyapunov,

$$V = \frac{1}{2} \left( \mathbf{e}_1^\top k_p \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2^\top \mathbf{e}_2 \right)$$

cuya derivada, a lo largo de las trayectorias del sistema (2.39), resulta en,

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{e}_1^\top k_p \dot{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{e}_2^\top \dot{\mathbf{e}}_2, \\ \dot{V} &= -\mathbf{e}_2^\top k_d \mathbf{e}_2 \leq 0. \end{aligned}$$

Debido a que  $\dot{V}$  es semidefinida negativa, se aplica el Principio de Invarianza de LaSalle. Entonces,  $\dot{V} = 0$  implica que  $\mathbf{e}_2 = 0$  y  $\dot{\mathbf{e}}_2 = 0$ . Sea  $\Omega = \{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \in D \mid \mathbf{e}_2 = 0\}$  en un dominio  $D \in \mathbb{R}^6$ . A partir de (2.38), el hecho de que  $\mathbf{e}_2 = \dot{\mathbf{e}}_2 = 0$  implica que  $\mathbf{e}_1 = 0$ . Por lo

## 2.7 Control por calculado para el modelo dinámico

---

tanto, la única solución que permanece en  $D$  en  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \equiv 0$  y el origen es asintóticamente estable.



## Capítulo 3

# Modelado del robot omnidireccional afectado por perturbaciones de patinado y deslizamiento

En la primera parte de este capítulo se desarrolla el modelo cinemático del robot omnidireccional considerando las perturbaciones en el deslizamiento del cuerpo del robot y las perturbaciones en el patinado. Posteriormente, la segunda parte se centra en el desarrollo del modelo dinámico sometido a estas perturbaciones.

### 3.1. Modelo cinemático perturbado

En principio, para obtener el modelo cinemático con perturbaciones, debemos dividirlos en perturbaciones de desplazamiento y de patinado, siendo las primeras sobre el cuerpo del robot, es decir, elementos externos que lo desplazan de su trayectoria en el plano, y las segundas son elementos que se oponen al giro de las ruedas. Es importante mencionar que el propósito de este modelado, es identificar qué estados del modelo cinemático pueden estar afectados por estas perturbaciones externas las cuales no son posible de medir directamente y de las cuales tampoco se puede precisar los tiempos en los que ocurrirán.

#### 3.1.1. Perturbaciones en el deslizamiento

Con base en el diagrama de cuerpo libre mostrado en la Figura 3.1, considerando que el cuerpo del robot es una partícula en el centro del plano  $X_m - Y_m$ , puede verse que el vector de velocidad  $\bar{u}$  es el vector resultante de las velocidades perturbadas  $\bar{u}_1$  y  $\bar{u}_2$  producidas por una desviación en las velocidades reales  $u_1$  y  $u_2$  sobre el marco de de coordenadas  $X_m - Y_m$  dadas las perturbaciones angulares  $\alpha_x$  y  $\alpha_y$ .

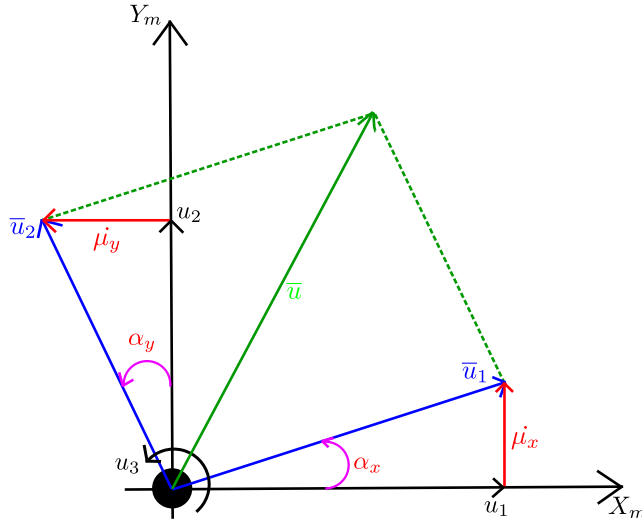


Figura 3.1: Diagrama considerando perturbaciones de desplazamiento.

A partir de lo anterior se obtiene,

$$\begin{aligned} \sin \alpha_x &= \frac{\dot{\mu}_x}{\bar{u}_1}, & \sin \alpha_y &= -\frac{\dot{\mu}_y}{\bar{u}_2} \\ \cos \alpha_x &= \frac{u_1}{\bar{u}_1}, & \cos \alpha_y &= \frac{u_2}{\bar{u}_2}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Considerando el modelo cinemático sin perturbaciones dado en (2.14) en conjunto con los desplazamientos ilustrados en la Figura 3.1, se obtiene la siguiente relación,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \bar{u}_1 \cos(\theta + \alpha_x) - \bar{u}_2 \sin(\theta + \alpha_y) \\ \dot{y} &= \bar{u}_1 \sin(\theta + \alpha_x) + \bar{u}_2 \cos(\theta + \alpha_y) \\ \dot{\theta} &= u_3 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Usando las identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned} \sin(A \pm B) &= \sin A \cos B \pm \sin B \cos A \\ \cos(A \pm B) &= \cos A \cos B \mp \sin A \sin B \end{aligned}$$

y, sustituyendo en (3.2), se obtiene,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \bar{u}_1 (\cos \theta \cos \alpha_x - \sin \theta \sin \alpha_x) - \bar{u}_2 (\sin \theta \cos \alpha_y + \sin \alpha_y \cos \theta) \\ \dot{y} &= \bar{u}_1 (\sin \theta \cos \alpha_x + \cos \theta \sin \alpha_x) + \bar{u}_2 (\cos \theta \cos \alpha_y - \sin \alpha_y \sin \theta) \\ \dot{\theta} &= u_3. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Por otra parte, a partir de (3.1) se obtienen la siguientes relaciones,

$$\dot{\mu}_x = \bar{u}_1 \sin \alpha_x, \quad \dot{\mu}_y = -\bar{u}_2 \sin \alpha_y, \quad \bar{u}_1 = \frac{u_1}{\cos \alpha_x}, \quad \bar{u}_2 = \frac{u_2}{\cos \alpha_y}$$

### 3.1 Modelo cinemático perturbado

por lo que,

$$\dot{\mu}_x = \frac{u_1}{\cos \alpha_x} \sin \alpha_x = u_1 \tan \alpha_x, \quad \dot{\mu}_y = -\frac{u_2}{\cos \alpha_y} \sin \alpha_y = -u_2 \tan \alpha_y.$$

Por lo tanto, al sustituir en (3.3) se obtiene el modelo cinemático con perturbaciones de deslizamiento, dado por,

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = R^\top(\theta) \mathbf{u} + R_3(\gamma, \rho, \theta) \mathbf{u} \quad (3.4)$$

donde  $R_3$  es la perturbación dada por el deslizamiento y está definida como

$$R_3(\gamma, \rho, \theta) = \begin{bmatrix} -\gamma \sin \theta & -\rho \cos \theta & 0 \\ \gamma \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde  $\gamma = \tan \alpha_x$  y  $\rho = \tan \alpha_y$ . Note que en el modelo (3.4), no existe perturbación que afecte a la orientación  $\theta$  del robot, por lo que se puede concluir que las perturbaciones solamente afectan al movimiento longitudinal y lateral del robot.

#### 3.1.2. Perturbaciones en el patinado

Una vez obtenido el modelo cinemático considerando el deslizamiento longitudinal y lateral del robot, se procede a determinar el modelo considerando el patinado de las ruedas. En ese sentido, y con base en el diagrama de la Figura 3.2, se obtienen las siguientes relaciones de velocidades lineales de las ruedas con patinado [31],

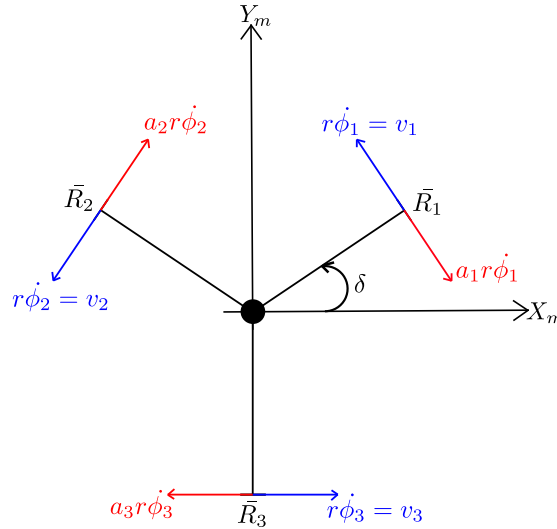


Figura 3.2: Diagrama considerando perturbaciones de patinado.

$$v_i^s = v_i(1 - a_i), \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.5)$$

donde  $a_i \in [0, 1)$  es el coeficiente de patinado que depende de la superficie sobre la que se desplaza el robot móvil y que provoca las perturbaciones sobre él mismo, y  $v_i = r\dot{\phi}_i$  es la velocidad lineal de cada rueda. Recordando la relación que existe entre las velocidades de cuerpo y velocidades de las ruedas, dada por,

$$\mathbf{v}^s = R_2 \mathbf{u}, \quad (3.6)$$

donde  $\mathbf{v}^s = [v_1^s \ v_2^s \ v_3^s]^\top$  y

$$R_2 = \begin{bmatrix} \sin \delta & -\cos \delta & -L \\ \sin \delta & \cos \delta & -L \\ -1 & 0 & -L \end{bmatrix}.$$

Al despejar  $\mathbf{u}$  de (3.6) y, considerando (3.5), se tiene lo siguiente,

$$\mathbf{u} = R_2^{-1}(\delta, L) \mathbf{v} - a R_2^{-1}(\delta, L) \mathbf{v} \quad (3.7)$$

con  $a = \text{diag}\{a_1, a_2, a_3\}$  y  $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ v_3]^\top$  como el vector de velocidades lineales de las ruedas. Sustituyendo (3.7) en (2.14), se obtiene el modelo cinemático con patinado en las ruedas,

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = R^\top(\theta) R_2^{-1}(\delta, L) \mathbf{v} - a R^\top(\theta) R_2^{-1}(\delta, L) \mathbf{v}. \quad (3.8)$$

Es importante destacar que el modelo dado en (3.8) considera como entradas de control las velocidades lineales de cada una de las ruedas.

Note, además, que si el coeficiente de patinado  $a_i = 0$ , entonces el patinado de las ruedas es nulo. Por otra parte, si  $a_i \rightarrow 1$ , las ruedas tendrán un grado de patinado mayor.

### 3.1.3. Perturbaciones de deslizamiento y patinado

Hasta este punto, se ha obtenido, de manera independiente, un modelo cinemático que considera deslizamiento longitudinal y lateral, y un modelo que considera el patinado de las ruedas, por lo que es necesario determinar un modelo que contemple ambas perturbaciones. En ese sentido, sustituyendo (3.7) en (3.4), se obtiene un modelo cinemático el cual contempla el deslizamiento y el patinado de las ruedas, dado por,

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = R_4(\theta, \delta, L) \mathbf{v} + \boldsymbol{\Phi}(\theta, \delta, L, \gamma, \rho, v_i, a_i), \quad (3.9)$$

donde,

$$R_4(\theta, \delta, L) = R^\top(\theta) R_2^{-1}(\delta, L)$$

y,



$$\Phi(\theta, \delta, L, \gamma, \rho, v_i, a_i) = -R^\top(\theta) R_2^{-1}(\delta, L) \mathbf{a}\mathbf{v} + R_3(\gamma, \rho, \theta) R_2^{-1}(\delta, L) [\mathbf{v} - \mathbf{a}\mathbf{v}].$$

Note que también en este caso las entradas de control están dadas por el vector  $\mathbf{v}$  correspondiente a las velocidades lineales de cada rueda.

## 3.2. Modelo dinámico perturbado

Al igual que en la Sección 3.1, en primera instancia se obtiene el modelo dinámico considerando las perturbaciones de deslizamiento lateral y longitudinal. Después, se desarrolla el modelo tomando en cuenta las perturbaciones de las ruedas, y, finalmente, un modelo dinámico que incluya ambas perturbaciones.

### 3.2.1. Perturbaciones en el deslizamiento

Las perturbaciones de deslizamiento lateral y longitudinal en el cuerpo del robot móvil omnidireccional se pueden añadir al modelo dinámico sin perturbaciones (2.27) obtenido anteriormente usando la ecuación del modelo cinemático con perturbaciones de deslizamiento sobre la plataforma del robot móvil omnidireccional (3.4) y la relación cinemática sin perturbaciones de patinado sobre las ruedas (2.16).

A partir de (3.4) se obtiene la siguiente relación,

$$\mathbf{u}(t) = [R^\top(\theta) + R_3(\gamma, \rho, \theta)]^{-1} \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) \quad (3.10)$$

aplicando el caso especial de la identidad matricial de Woodbury de la inversa de la diferencia de dos matrices (2.9),  $(A - B)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}B(A - B)^{-1}$ , con  $A$  y  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  en donde  $B$  puede ser una matriz singular, y asimilando con (3.10) se tiene que  $A = R^\top(\theta)$  y  $B = -R_3(\gamma, \rho, \theta)$ , por lo tanto,

$$\mathbf{u}(t) = \{R(\theta) - R(\theta) R_3(\gamma, \rho, \theta) [R^\top(\theta) + R_3(\gamma, \rho, \theta)]^{-1}\} \dot{\boldsymbol{\xi}}$$

lo que produce,

$$\mathbf{u}(t) = [R(\theta) + \bar{R}_3(\gamma, \rho, \theta)] \dot{\boldsymbol{\xi}} \quad (3.11)$$

con  $\bar{R}_3(\gamma, \rho, \theta) = -R(\theta) R_3(\gamma, \rho, \theta) [R^\top(\theta) + R_3(\gamma, \rho, \theta)]^{-1}$  como el término asociado a las perturbaciones. Realizando el producto de las matrices involucradas resulta,

$$\bar{R}_3 = \frac{1}{\gamma\rho + 1} \begin{bmatrix} -\rho(\sin\theta + \gamma\cos\theta) & \rho(\cos\theta - \gamma\sin\theta) & 0 \\ -\gamma(\cos\theta - \rho\sin\theta) & -\gamma(\sin\theta + \rho\cos\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Tomando la derivada de (3.11) se obtiene,

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \left[ \dot{R}(\theta) + \dot{\bar{R}}_3(\gamma, \rho, \theta) \right] \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) + [R(\theta) + \bar{R}_3(\gamma, \rho, \theta)] \ddot{\boldsymbol{\xi}} \quad (3.13)$$

con,

$$\dot{\bar{R}}_3 = \frac{\dot{\theta}}{\gamma\rho + 1} \begin{bmatrix} -\rho(\cos\theta - \gamma\sin\theta) & -\rho(\sin\theta + \gamma\cos\theta) & 0 \\ \gamma(\sin\theta + \rho\cos\theta) & -\gamma(\cos\theta - \rho\sin\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

y, al derivar (2.16) se tiene,

$$\ddot{\phi}(t) = T\dot{\mathbf{u}}(t) \quad (3.15)$$

donde  $T$  se definió en (2.17). Sustituyendo (3.13) en (3.15) resulta que,

$$\ddot{\phi}(t) = T\left\{\dot{R}(\theta) + \dot{\bar{R}}_3(\gamma, \rho, \theta)\right\}\dot{\xi}(t) + [R(\theta) + \bar{R}_3(\gamma, \rho, \theta)]\ddot{\xi}(t) \quad (3.16)$$

y, sustituyendo (3.16) en (2.27) se obtiene,

$$R(\theta)M\ddot{\xi}(t) + T^\top I_r \{T\left\{\dot{R}(\theta) + \dot{\bar{R}}_3(\gamma, \rho, \theta)\right\}\dot{\xi}(t) + [R(\theta) + \bar{R}_3(\gamma, \rho, \theta)]\ddot{\xi}(t)\} = T^\top \boldsymbol{\tau}_r$$

lo que produce,

$$\begin{aligned} [R(\theta)M + T^\top I_r T R(\theta)]\ddot{\xi}(t) + T^\top I_r T \dot{R}(\theta)\dot{\xi}(t) + T^\top I_r T \bar{R}_3(\gamma, \rho, \theta)\ddot{\xi}(t) + \\ T^\top I_r T \dot{\bar{R}}_3(\gamma, \rho, \theta)\dot{\xi}(t) = T^\top \boldsymbol{\tau}_r. \end{aligned}$$

Multiplicando el resultado anterior por la izquierda por  $R^\top(\theta)$ , considerando  $\delta = \frac{\pi}{6}$ ,  $I_{r1}, I_{r2}, I_{r3} = I_w$  y haciendo las operaciones correspondientes, el modelo dinámico con perturbaciones de deslizamiento está dado por,

$$\begin{aligned} [M + T^\top I_r T]\ddot{\xi}(t) + R^\top(\theta)T^\top I_r T \dot{R}(\theta)\dot{\xi}(t) + R^\top(\theta)T^\top I_r T \bar{R}_3(\gamma, \rho, \theta)\ddot{\xi}(t) + \\ R^\top(\theta)T^\top I_r T \dot{\bar{R}}_3(\gamma, \rho, \theta)\dot{\xi}(t) = R^\top(\theta)T^\top \boldsymbol{\tau}_r \end{aligned}$$

que se puede simplificar como,

$$D_e \ddot{\xi} + C_e \left(\dot{\xi}\right) \dot{\xi} + D_{e1} \ddot{\xi} + C_{e1} \left(\dot{\xi}\right) \dot{\xi} = B_e \boldsymbol{\tau}_r \quad (3.17)$$

donde  $D_{e1} = R^\top(\theta)T^\top I_r T \bar{R}_3(\gamma, \rho, \theta)$  y  $C_{e1} \left(\dot{\xi}\right) = R^\top(\theta)T^\top I_r T \dot{\bar{R}}_3(\gamma, \rho, \theta)$  son las matrices que conforman la parte con perturbaciones de deslizamiento en el modelo dinámico.

### 3.2.2. Perturbaciones en el patinado

Para representar los efectos combinados de rodadura y patinado del robot móvil omnidireccional se parte del modelo dinámico sin perturbaciones dado en (2.27), así como del modelo cinemático sin perturbaciones de deslizamiento sobre la plataforma o cuerpo del robot (2.14) y, la siguiente relación entre (2.16) y (3.7),

$$\dot{\phi}(t) = (I - a)^{-1} T\mathbf{u}(t). \quad (3.18)$$

### 3.2 Modelo dinámico perturbado

Aplicando la identidad matricial de Woodbury  $(A - B)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}B(A - B)^{-1}$ , siendo  $A = I$  y  $B = a$ , por lo tanto,

$$\dot{\phi}(t) = T\mathbf{u} - \bar{a}T\mathbf{u} \quad (3.19)$$

donde  $\bar{a} = \text{diag} \left( \frac{a_1}{a_1 - 1}, \frac{a_2}{a_2 - 1}, \frac{a_3}{a_3 - 1} \right)$ .

Por otra parte, a partir de (2.14) se obtiene la siguiente relación,

$$\mathbf{u}(t) = R(\theta) \dot{\xi}(t)$$

lo que produce la derivada temporal,

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \dot{R}(\theta) \dot{\xi}(t) + R(\theta) \ddot{\xi}(t) \quad (3.20)$$

mientras que, a partir de (3.19) se tiene,

$$\ddot{\phi}(t) = T\dot{\mathbf{u}} - \bar{a}T\dot{\mathbf{u}}. \quad (3.21)$$

Sustituyendo (3.20) en (3.21), se obtiene la siguiente expresión,

$$\ddot{\phi}(t) = T \left[ \dot{R}(\theta) \dot{\xi}(t) + R(\theta) \ddot{\xi}(t) \right] - \bar{a}T \left[ \dot{R}(\theta) \dot{\xi}(t) + R(\theta) \ddot{\xi}(t) \right]. \quad (3.22)$$

Sustituyendo (3.22) en (2.27) se tiene,

$$R(\theta) M \ddot{\xi}(t) + T^\top I_r \{ T \left[ \dot{R}(\theta) \dot{\xi}(t) + R(\theta) \ddot{\xi}(t) \right] - \bar{a}T \left[ \dot{R}(\theta) \dot{\xi}(t) + R(\theta) \ddot{\xi}(t) \right] \} = T^\top \boldsymbol{\tau}_r$$

lo que produce,

$$\left[ R(\theta) M + T^\top I_r T R(\theta) \right] \ddot{\xi}(t) + T^\top I_r T \dot{R}(\theta) \dot{\xi}(t) - T^\top I_r \bar{a} T R(\theta) \ddot{\xi}(t) - T^\top I_r \bar{a} T \dot{R}(\theta) \dot{\xi}(t) = T^\top \boldsymbol{\tau}_r.$$

Multiplicando la expresión anterior por la izquierda por  $R^\top(\theta)$ , considerando  $\delta = \frac{\pi}{6}$ ,  $I_{r_1}, I_{r_2}, I_{r_3} = I_w$  y haciendo las operaciones correspondientes, el modelo dinámico con perturbaciones de patinado está dado por,

$$\begin{aligned} [M + T^\top I_r T] \ddot{\xi}(t) + R^\top(\theta) T^\top I_r T \dot{R}(\theta) \dot{\xi}(t) - R^\top(\theta) T^\top I_r \bar{a} T R(\theta) \ddot{\xi}(t) - \\ R^\top(\theta) T^\top I_r \bar{a} T \dot{R}(\theta) \dot{\xi}(t) = R^\top(\theta) T^\top \boldsymbol{\tau}_r \end{aligned}$$

que se puede simplificar como,

$$D_e \ddot{\xi} + C_e \left( \dot{\xi} \right) \dot{\xi} + D_{e_2} \ddot{\xi} + C_{e_2} \left( \dot{\xi} \right) \dot{\xi} = B_e \boldsymbol{\tau}_r \quad (3.23)$$

donde  $D_{e_2} = -R^\top(\theta) T^\top I_r \bar{a} T R(\theta)$  y  $C_{e_2} \left( \dot{\xi} \right) = -R^\top(\theta) T^\top I_r \bar{a} T \dot{R}(\theta)$  son las matrices que conforman la parte con perturbaciones de patinado en el modelo dinámico.

### 3.2.3. Perturbaciones de deslizamiento y patinado

Finalmente, se pueden unir las ecuaciones cinemáticas de deslizamiento y patinado para obtener el modelo dinámico con perturbaciones en las ruedas y en el cuerpo del robot. Para tal fin, se toma la velocidad lineal (3.4) y la velocidad angular de (3.19) así como las derivadas obtenidas en (3.13) y (3.21),

Sustituyendo (3.13) en (3.21) se obtiene la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}(t) = T^{\top} \left\{ \left[ \dot{R}(\theta) + \dot{\bar{R}}_3(\gamma, \rho, \theta) \right] \dot{\xi}(t) + [R(\theta) + \bar{R}_3(\gamma, \rho, \theta)] \ddot{\xi} \right\} - \\ \bar{a}T \left\{ \left[ \dot{R}(\theta) + \dot{\bar{R}}_3(\gamma, \rho, \theta) \right] \dot{\xi}(t) + [R(\theta) + \bar{R}_3(\gamma, \rho, \theta)] \ddot{\xi} \right\} \end{aligned}$$

Sustituyendo la expresión anterior en (2.27) se obtiene,

$$\begin{aligned} R(\theta) M \ddot{\xi} + T^{\top} I_r \left\{ T \left\{ \left[ \dot{R}(\theta) + \dot{\bar{R}}_3(\gamma, \rho, \theta) \right] \dot{\xi}(t) + [R(\theta) + \bar{R}_3(\gamma, \rho, \theta)] \ddot{\xi} \right\} - \right. \\ \left. \bar{a}T \left\{ \left[ \dot{R}(\theta) + \dot{\bar{R}}_3(\gamma, \rho, \theta) \right] \dot{\xi}(t) + [R(\theta) + \bar{R}_3(\gamma, \rho, \theta)] \ddot{\xi} \right\} \right\} = T^{\top} \tau_r \end{aligned}$$

lo que produce,

$$\begin{aligned} [R(\theta) M + T^{\top} I_r T R(\theta)] \ddot{\xi} + T^{\top} I_r T \dot{R}(\theta) \dot{\xi} + T^{\top} I_r \{ T \bar{R}_3(\gamma, \rho, \theta) - \\ \bar{a}T [R(\theta) + \bar{R}_3(\gamma, \rho, \theta)] \} \ddot{\xi} + T^{\top} I_r \{ T \dot{\bar{R}}_3(\gamma, \rho, \theta) - \bar{a}T [\dot{R}(\theta) + \dot{\bar{R}}_3(\gamma, \rho, \theta)] \} \dot{\xi} = T^{\top} \tau_r. \end{aligned}$$

y, multiplicando por la izquierda por  $R^{\top}(\theta)$ , considerando  $\delta = \frac{\pi}{6}$ ,  $I_{r1}, I_{r2}, I_{r3} = I_w$  y haciendo las operaciones correspondientes, el modelo dinámico con perturbaciones de deslizamiento y patinado está dado por,

$$\begin{aligned} [M + T^{\top} I_r T] \ddot{\xi} + R^{\top}(\theta) T^{\top} I_r T \dot{R}(\theta) \dot{\xi} + \\ R^{\top}(\theta) T^{\top} I_r \{ T \bar{R}_3(\gamma, \rho, \theta) - \bar{a}T [R(\theta) + \bar{R}_3(\gamma, \rho, \theta)] \} \ddot{\xi} + \\ R^{\top}(\theta) T^{\top} I_r \{ T \dot{\bar{R}}_3(\gamma, \rho, \theta) - \bar{a}T [\dot{R}(\theta) + \dot{\bar{R}}_3(\gamma, \rho, \theta)] \} \dot{\xi} = R^{\top}(\theta) T^{\top} \tau_r \end{aligned}$$

que se puede simplificar como,

$$D_e \ddot{\xi} + C_e \left( \dot{\xi} \right) \dot{\xi} + D_{e3} \ddot{\xi} + C_{e3} \left( \dot{\xi} \right) \dot{\xi} = B_e \tau_r \quad (3.24)$$

donde las matrices que conforman la parte con perturbaciones de deslizamiento y patinado en el modelo dinámico son

$$\begin{aligned} D_{e3} &= R^{\top}(\theta) T^{\top} I_r \left\{ T \bar{R}_3(\gamma, \rho, \theta) - \bar{a}T [R(\theta) + \bar{R}_3(\gamma, \rho, \theta)] \right\} \\ C_{e3} \left( \dot{\xi} \right) &= R^{\top}(\theta) T^{\top} I_r \left\{ T \dot{\bar{R}}_3(\gamma, \rho, \theta) - \bar{a}T [\dot{R}(\theta) + \dot{\bar{R}}_3(\gamma, \rho, \theta)] \right\} \end{aligned}$$

Partiendo de (3.24) se tiene que,

$$[D_e + D_{e3}] \ddot{\xi} + [C_e \left( \dot{\xi} \right) + C_{e3} \left( \dot{\xi} \right)] \dot{\xi} = B_e \tau_r$$

despejando  $\ddot{\xi}$  se obtiene,

$$\ddot{\xi} = [D_3 + D_{e_3}]^{-1} \left[ B_e \tau_r - \left( C_e \left( \dot{\xi} \right) + C_{e_3} \left( \dot{\xi} \right) \right) \dot{\xi} \right]. \quad (3.25)$$

Aplicando la identidad matricial de Woodbury  $(A - B)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}B(A - B)^{-1}$  sobre la inversa de la suma de las matrices  $[D_3 + D_{e_3}]^{-1}$  con  $A = D_3$  y  $B = D_{e_3}$  se tiene que,

$$[D_3 + D_{e_3}]^{-1} = D_e^{-1} - D_e^{-1}D_{e_3}(D_e + D_{e_3})^{-1}$$

lo que se puede simplificar como,

$$[D_3 + D_{e_3}]^{-1} = D_e^{-1} + \bar{D}_{e_3} \quad (3.26)$$

con  $\bar{D}_{e_3} = -D_e^{-1}D_{e_3}(D_e + D_{e_3})^{-1}$  como la parte perturbada. Sustituyendo (3.26) en (3.25) se obtiene la siguiente expresión

$$\ddot{\xi} = [D_e^{-1} + \bar{D}_{e_3}] \left[ B_e \tau_r - \left( C_e \left( \dot{\xi} \right) + C_{e_3} \left( \dot{\xi} \right) \right) \dot{\xi} \right].$$

Al desarrollar el producto de las matrices se tiene lo siguiente,

$$\ddot{\xi} = D_e^{-1}B_e \tau_r - D_e^{-1} \left[ C_e \left( \dot{\xi} \right) + C_{e_3} \left( \dot{\xi} \right) \right] \dot{\xi} + \bar{D}_{e_3} \left[ B_e \tau_r - \left( C_e \left( \dot{\xi} \right) + C_{e_3} \left( \dot{\xi} \right) \right) \dot{\xi} \right]$$

o, de manera matricial,

$$\ddot{\xi} = D_e^{-1}B_e \tau_r + \Psi \quad (3.27)$$

con,

$$\Psi = -D_e^{-1} \left[ C_e \left( \dot{\xi} \right) + C_{e_3} \left( \dot{\xi} \right) \right] \dot{\xi} + \bar{D}_{e_3} \left[ B_e \tau_r - \left( C_e \left( \dot{\xi} \right) + C_{e_3} \left( \dot{\xi} \right) \right) \dot{\xi} \right]$$

como las perturbaciones del modelo dinámico.



## Capítulo 4

# Diseño de la estrategia de control

Este capítulo se enfoca en el diseño y validación teórica de la estrategia de control. Para cumplir este objetivo, en primera instancia, se implementa un observador, basado en la metodología del Observador Proporcional-Integral Generalizado (GPIO por sus siglas en inglés Generalized Proportional-Integral Observer), que permita estimar las velocidades y perturbaciones del sistema. Posteriormente, se desarrolla el esquema de control que permite al robot omnidireccional seguir una trayectoria deseada.

### 4.1. Observador de perturbaciones para el modelo cinemático

Las perturbaciones presentes en el modelo cinemático, dado en (3.9), se pueden estimar implementando un observador. En ese sentido, se propone utilizar el enfoque de GPIO. Los GPIO son observadores lineales que se caracterizan por un modelo polinomial de tiempo interno, autoactualizable, cuyas perturbaciones desconocidas y uniformemente acotadas, incluso si son dependientes de estado o de fase variable capaces de realizar estimaciones precisas en línea [32]. Los GPIO se pueden aplicar al control de sistemas no lineales perturbados diferencialmente planos con salidas planas medibles. Con base en lo anterior, entonces es posible aplicar esta metodología al caso del robot móvil omnidireccional.

Se diseña el observador partiendo del modelo cinemático del robot móvil omnidireccional con perturbaciones dado en (3.9). Recordando que el error de posición está definido como  $\mathbf{e} = \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_d$ , entonces, la dinámica del error, considerando el modelo perturbado (3.9), está dada por,

$$\dot{\mathbf{e}} = R_4 \mathbf{v} + \boldsymbol{\Phi}_T \quad (4.1)$$

donde  $\boldsymbol{\Phi}_T = \boldsymbol{\Phi} - \dot{\boldsymbol{\xi}}_d$  es la perturbación total.

**Suposición 1** *Se considera que la perturbación  $\boldsymbol{\Phi}_T$  es una señal suave y acotada. Por lo tanto, existe un número positivo de tal manera que  $\sup_t \|\boldsymbol{\Phi}_T\| \leq K$ .*

**Suposición 2** *Las perturbaciones  $\boldsymbol{\Phi}_T$  pueden ser modeladas como una familia de polinomios de la serie de Taylor de grado fijo de orden  $m - 1$ , las cuales satisfacen que  $\frac{d^m}{dt^m} \boldsymbol{\Phi}_T = \frac{d^m}{dt^m} \mathbf{r}(t) \approx 0$  donde  $\mathbf{r}(t)$  es un vector de términos residuales [33].*

**Observación 1** Note que la perturbación  $\Phi_T$  depende de la velocidad lineal  $\mathbf{v}$  de las ruedas así como de parámetros como la longitud de los ejes, su orientación y de la derivada de la trayectoria deseada. Aunado a lo anterior, para no dañar los actuadores, es válido asumir que las señales que éstos reciben están acotadas. Por todo lo anterior, se puede asumir que  $\Phi_T$  es suave y acotada, cumpliendo con la Suposición 1. Por otra parte, debido a que la perturbación  $\Phi_T$  se puede escribir en términos de  $\xi$ , un número finito de sus derivadas, la trayectoria deseada  $\xi_d$  y la entrada de control  $\mathbf{v}$ , entonces  $\Phi_T$  es observable [34] y cumple con la Suposición 2.

Con base en lo anterior, la estructura del observador es la siguiente

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{\mathbf{e}}} &= R_4 \mathbf{v} + \hat{\Phi}_1 + \lambda_m (\mathbf{e} - \hat{\mathbf{e}}) \\
 \dot{\hat{\Phi}}_1 &= \hat{\Phi}_2 + \lambda_{m-1} (\mathbf{e} - \hat{\mathbf{e}}) \\
 \dot{\hat{\Phi}}_2 &= \hat{\Phi}_3 + \lambda_{m-2} (\mathbf{e} - \hat{\mathbf{e}}) \\
 &\vdots \\
 \dot{\hat{\Phi}}_{m-1} &= \hat{\Phi}_m + \lambda_1 (\mathbf{e} - \hat{\mathbf{e}}) \\
 \dot{\hat{\Phi}}_m &= \lambda_0 (\mathbf{e} - \hat{\mathbf{e}})
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde  $\hat{\Phi}_1$  es la estimación de la perturbación  $\Phi_T$ . Por otra parte,  $\lambda_j \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , con  $j = 0, 1, \dots, m$  son matrices diagonales que corresponden a las ganancias del observador. Definiendo el error de observación como  $\tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{e} - \hat{\mathbf{e}}$ , su dinámica está dada por,

$$\tilde{\mathbf{e}}^{(m+1)} + \lambda_m \tilde{\mathbf{e}}^{(m)} + \lambda_{m-1} \tilde{\mathbf{e}}^{(m-1)} + \dots + \lambda_0 \tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{r}^{(m)} \approx 0$$

por lo que puede obtenerse un polinomio de grado  $m + 1$  dado por [35]

$$I_3 s^{(m+1)} + \lambda_m s^{(m)} + \dots + \lambda_1 s + \lambda_0 = (I_3 s^2 + I_3 \zeta_d \omega_n s^2 + I_3 \omega_n^2) (I_3 s + p_d)^{m-1} \tag{4.3}$$

donde  $I_3$  es la matriz identidad de  $3 \times 3$ ,  $\zeta_d$  es el factor de amortiguamiento deseado,  $\omega_n$  es la frecuencia natural no amortiguada deseada y  $p_d \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es una matriz diagonal la cual corresponde a los valores de los polos deseados. Los polos del sistema  $I_3 s^{(m+1)} + \lambda_m s^{(m)} + \dots + \lambda_1 s + \lambda_0$  se deben de elegir de tal manera que la parte real se encuentre en la parte izquierda del plano complejo  $s$  y lo suficientemente alejados del eje imaginario. Esto genera que el error de estimación  $\tilde{\mathbf{e}}$ , converja asintóticamente a una vecindad arbitrariamente pequeña del origen, y, por lo tanto,  $\hat{\Phi}_1 \rightarrow \Phi_T$  y  $\hat{\mathbf{e}} \rightarrow \mathbf{e}$ , [33]. Una manera de elegir estos parámetros es, a partir de establecer un factor de amortiguamiento deseado  $\zeta_d$  y un tiempo de establecimiento deseado  $t_{ss}$ , de tal manera que la frecuencia natural no amortiguada se puede calcular a partir de

$$\omega_n = \frac{4}{\zeta_d t_{ss}}.$$



Además, para calcular  $p_d$  se puede ocupar la siguiente relación,  $p_d > 10\zeta_d\omega_n$ , de tal manera que  $p_d$  sea un polo no dominante.

**Observación 2** *Note que, con base en las Suposiciones 1 y 2, la ecuación (4.3) resulta, de manera aproximada a una ecuación tipo homogénea, lo que permite asegurar la convergencia del error  $\tilde{\mathbf{e}}$  a una vecindad del origen, independientemente del valor de la señal de control  $\mathbf{v}$ . Bajo estas condiciones, la estrategia de control establece un principio de separación para el diseño de la ley de control (que se detallará más adelante) y el diseño del observador. Es decir, la estrategia de control puede ser diseñada de manera independiente de la estrategia de observación.*

## 4.2. Observador de perturbaciones para el modelo dinámico

Al igual que con el modelo cinemático perturbado, las perturbaciones presentes en el modelo dinámico dado en (3.27), se pueden estimar implementando un observador, sin embargo, al tratarse de un sistema de segundo orden, es necesario agregar un nuevo estado. En ese sentido, y, recordando que el error de posición está definido como  $\mathbf{e} = \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_d$ , entonces, la dinámica del error, tomando en cuenta que  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \dot{\mathbf{e}}$ , está dada por,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}_1 &= \mathbf{e}_2 \\ \dot{\mathbf{e}}_2 &= D_e^{-1}B_e\boldsymbol{\tau}_r + \boldsymbol{\Psi}_T\end{aligned}\quad (4.4)$$

donde  $\boldsymbol{\Psi}_T = \boldsymbol{\Psi} - \ddot{\boldsymbol{\xi}}_d$  es la perturbación total. Se propone el GPIO como,

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{e}}}_1 &= \hat{\mathbf{e}}_2 + \lambda_{m+1}(\mathbf{e}_1 - \hat{\mathbf{e}}_1) \\ \dot{\hat{\mathbf{e}}}_2 &= D_e^{-1}B_e\boldsymbol{\tau}_r + \hat{\boldsymbol{\Psi}}_T + \lambda_m(\mathbf{e}_1 - \hat{\mathbf{e}}_1) \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\Psi}}}_T &= \hat{\boldsymbol{\Psi}}_2 + \lambda_{m-1}(\mathbf{e} - \hat{\mathbf{e}}) \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\Psi}}}_2 &= \hat{\boldsymbol{\Psi}}_3 + \lambda_{m-2}(\mathbf{e} - \hat{\mathbf{e}}) \\ &\vdots \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\Psi}}}_{m-1} &= \hat{\boldsymbol{\Psi}}_m + \lambda_1(\mathbf{e} - \hat{\mathbf{e}}) \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\Psi}}}_m &= \lambda_0(\mathbf{e} - \hat{\mathbf{e}})\end{aligned}\quad (4.5)$$

con  $\lambda_j \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  como matrices diagonales que corresponde a las ganancias del observador,  $j = 0, 1, \dots, m$ . Definiendo el error de observación como  $\tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{e} - \hat{\mathbf{e}}$ , su dinámica está dada por,

$$\tilde{\mathbf{e}}^{(m+2)} + \lambda_{m+1}\tilde{\mathbf{e}}^{(m+1)} + \lambda_m\tilde{\mathbf{e}}^{(m)} + \lambda_{m-1}\tilde{\mathbf{e}}^{(m-1)} + \dots + \lambda_0\tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{r}^{(m)} \approx 0$$

por lo que puede obtenerse un polinomio de grado  $m + 2$  dado por

$$s^{(m+2)} + \lambda_{m+1}s^{(m+1)} + \lambda_ms^{(m)} + \dots + \lambda_0 = (I_3s^2 + I_3\zeta_d\omega_ns + I_3\omega_n^2)(I_3s + p_d)^m$$

donde  $\zeta_d$  es el factor de amortiguamiento deseado,  $\omega_n$  es la frecuencia natural no amortiguada deseada y  $p_d$  corresponde al valor del polo deseado. Al igual que en el caso anterior, los polos del sistema  $I_3 s^{(m+2)} + \lambda_{m+1} s^{(m+1)} + \dots + \lambda_1 s + \lambda_0$  se deben de elegir de tal manera que la parte real se encuentre en la parte izquierda del plano complejo  $s$  y lo suficientemente alejados del eje imaginario. Esto genera que el error de estimación  $\tilde{\mathbf{e}}$  y sus derivadas, converjan asintóticamente a una vecindad arbitrariamente pequeña del origen, y, por lo tanto, los valores estimados converjan a los valores reales [33].

### 4.3. Estrategia de control para el modelo cinemático perturbado

Con base en el modelo definido en (4.1), se diseña un control  $\mathbf{v}$  de tal manera que el robot móvil omnidireccional siga una trayectoria deseada. En ese sentido, el control  $\mathbf{v}$  se puede definir a partir de una retroalimentación dada por,

$$\mathbf{v} = -R_4^{-1} \left( k_p \mathbf{e} + \hat{\Phi}_1 \right) \quad (4.6)$$

donde  $k_p = \text{diag}\{k_x, k_y, k_\theta\}$  es la ganancia del controlador con  $k_x, k_y, k_\theta > 0$ . Sustituyendo el control (4.6) en el sistema (4.1), se obtiene el siguiente sistema en lazo cerrado,

$$\dot{\mathbf{e}} = -k_p \mathbf{e} + \tilde{\Phi} \quad (4.7)$$

donde  $\tilde{\Phi} = \Phi_T - \hat{\Phi}_1$ . Note que si  $\tilde{\Phi} = 0$ , el origen del sistema (4.7) es globalmente exponencialmente estable debido a que la matriz  $k_p$  es definida positiva, y, por lo tanto, los errores de seguimiento convergen a cero de manera exponencial. Para la convergencia del sistema en lazo cerrado compuesto de los sistemas (4.1)-(4.2)-(4.6) se utiliza el resultado presentado en [36], el cual es un caso especial del Teorema 2.1 de [37].

**Teorema 2** [36] Asuma que existe una constante positiva  $C$  de tal manera que  $\|\mathbf{e}(0)\| \leq C$ ,  $\sup_{t \geq 0} \|\tilde{\Phi}(t)\| \leq C$  y  $\sup_{t \geq 0} \|(\xi_d(t), \dot{\xi}_d(t))\| \leq C$ . Entonces, el sistema en lazo cerrado compuesto de los sistemas (4.1)-(4.2)-(4.6) tiene la siguiente convergencia

1. El estado  $\mathbf{e}$  está acotado, es decir,  $\|\mathbf{e}\| \leq \Gamma$ , para todo  $t \geq 0$  donde  $\Gamma$  es una constante positiva.
2. Los estados  $\xi$  siguen prácticamente la señal de referencia  $\xi_d$  en el sentido que, por cada  $\sigma > 0$ , existe una constante  $\varepsilon^*$  tal que por cada  $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$

$$\|\xi - \xi_d\| \leq \sigma \text{ uniformemente en } t \in [t_\varepsilon, \infty]$$

donde  $t_\varepsilon$  es una constante dependiente de  $\varepsilon$ . En particular, se tiene que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\xi - \xi_d\| \leq \sigma.$$

**Observación 3** Cabe destacar que la ley de control  $\mathbf{v}$  se puede diseñar de diferentes formas y siguiendo diferentes metodologías. Por ejemplo, se puede proponer una función no lineal para que el error de posición se mantenga acotado, es decir,  $\mathbf{v}$  se puede diseñar como

$$\mathbf{v} = -R_4^{-1} \left[ k_p \tanh(\mathbf{e}) + \hat{\Phi}_1 \right]. \quad (4.8)$$

Sustituyendo (4.8) en (4.1), se obtiene el siguiente sistema en lazo cerrado

$$\dot{\mathbf{e}} = -k_p \tanh(\mathbf{e}) + \tilde{\Phi}. \quad (4.9)$$

De nueva cuenta, si  $\tilde{\Phi} = 0$ , el origen del sistema (4.9) es globalmente exponencialmente estable debido a que la matriz  $k_p$  es definida positiva [38], y, por lo tanto, los errores de seguimiento convergen a cero de manera exponencial.

## 4.4. Estrategia de control para el modelo dinámico perturbado

Con base en el modelo basado en el error, definido en (4.4), se diseña un control  $\tau_r$  de tal manera que el robot móvil omnidireccional siga una trayectoria deseada. Para este fin, se utiliza el enfoque de par calculado [39] con compensación de la perturbación, por lo que se obtiene la siguiente expresión,

$$\tau_r = -B_e^{-1} D_e \left[ k_d \hat{\mathbf{e}}_2 + k_p \mathbf{e} + \hat{\Psi}_T \right] \quad (4.10)$$

donde  $k_p$  y  $k_d \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  son matrices diagonales definidas positivas, con  $k_p = \text{diag}(k_x, k_y, k_\theta)$  y  $k_d = \text{diag}(k_{\dot{x}}, k_{\dot{y}}, k_{\dot{\theta}})$ ;  $\hat{\mathbf{e}}_2$  es el valor estimado del error de velocidad y  $\hat{\Psi}_T$  es la estimación de las perturbaciones. Sustituyendo (4.10) en (4.4) se obtiene lo siguiente,

$$\ddot{\mathbf{e}} = -k_d \hat{\mathbf{e}}_2 - k_p \mathbf{e} + \tilde{\Psi}. \quad (4.11)$$

donde  $\tilde{\Psi} = \Psi_T - \hat{\Psi}_T$ .

Recordando que  $\hat{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{e}_2 - \tilde{\mathbf{e}}_2$  y, sustituyendo esta expresión en (4.11) se obtiene,

$$\dot{\mathbf{e}}_q = \hat{A} \mathbf{e}_q + \Gamma(\tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\Psi}) \quad (4.12)$$

donde  $\mathbf{e}_q = [\mathbf{e}_1^\top \quad \mathbf{e}_2^\top]^\top$  y matrices,

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & I_3 \\ -k_p & -k_d \end{bmatrix}, \quad \Gamma(\tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\Psi}) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 1} \\ k_d \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\Psi} \end{bmatrix}$$

donde  $0_{3 \times 1}$  es un vector cero de  $3 \times 1$ . Note que  $\Gamma(\tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\Psi}) = 0$  en  $\tilde{\mathbf{e}}_2 = 0$  y  $\tilde{\Psi} = 0$ , por lo tanto, el origen de (4.12) es globalmente exponencialmente estable. Para la convergencia del sistema extendido se utiliza el resultado presentado en [27] con el siguiente Teorema.

**Teorema 3** [27]. Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio exponencialmente estable del sistema nominal  $\dot{x} = f(t, x)$ . Sea  $V(t, x)$  una función de Lyapunov del sistema nominal que satisface de (4.13) a (4.15). Supóngase que el término de perturbación  $g(t, x)$  satisface (4.16) y (4.17). Entonces, el origen es un punto de equilibrio exponencialmente estable del sistema perturbado  $\dot{x} = f(t, x) + g(t, x)$ . Además, si todos los supuestos se cumplen globalmente, entonces el origen es globalmente exponencialmente estable.

$$c_1 \|x\|^2 \leq V(t, x) \leq c_2 \|x\|^2 \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -c_3 \|x\|^2 \quad (4.14)$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq c_4 \|x\| \quad (4.15)$$

$$\|g(t, x)\| \leq \gamma \|x\|, \forall t \geq 0, \forall x \in D \quad (4.16)$$

$$\gamma < \frac{c_3}{c_4} \quad (4.17)$$

para todo  $(t, x) \in [0, \infty) \times D$  para constantes positivas  $c_1, c_2, c_3$  y  $c_4$ .

Aplicando los resultados del Teorema 3, se puede asegurar la estabilidad exponencial del sistema extendido, cuyo vector de estado es  $\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}}_q^\top & \dot{\Psi}^\top \end{bmatrix}^\top$ .

**Observación 4** *Es importante aclarar que la parte medular de este trabajo radica en la obtención de un modelo que tenga contemplado las perturbaciones de deslizamiento y patinado de las ruedas del robot omnidireccional. Para la parte de control, se utilizaron técnicas y enfoques ampliamente estudiados en la literatura. Por lo tanto, es natural pensar que como trabajo futuro se diseñen estrategias de control que contemplen, por ejemplo, el ahorro de energía, la optimización de la trayectoria, entradas y salidas acotadas, por mencionar algunos.*

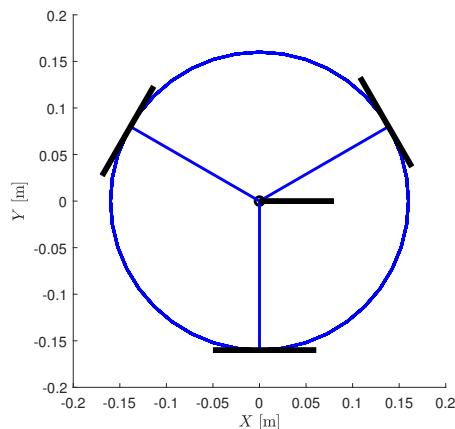
## Capítulo 5

# Experimentos mediante simulaciones numéricas

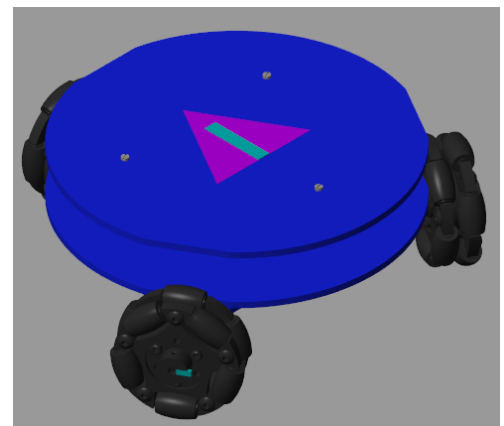
En primera instancia, en este capítulo se presentan las simulaciones del modelo cinemático y dinámico en lazo abierto para determinar el desempeño del observador, propuesto en el Capítulo 3. Posteriormente, se muestran las simulaciones de los modelos en lazo cerrado con la estrategia de control diseñada en el Capítulo 4.

### 5.1. Diseño 2D y 3D del RMO

Para visualizar de forma más clara tanto el desplazamiento como el giro del cuerpo o plataforma del robot sobre el plano se puede diseñar una representación en 2D de la estructura del robot móvil como se aprecia en la Figura 5.1a, sin embargo, si también se desea apreciar el giro de las ruedas, se puede diseñar un ensamble o modelo 3D como el que se muestra en la Figura 5.1b hecho en el software de Inventor<sup>©</sup> y posteriormente importado al entorno de Matlab/Simulink<sup>©</sup>.



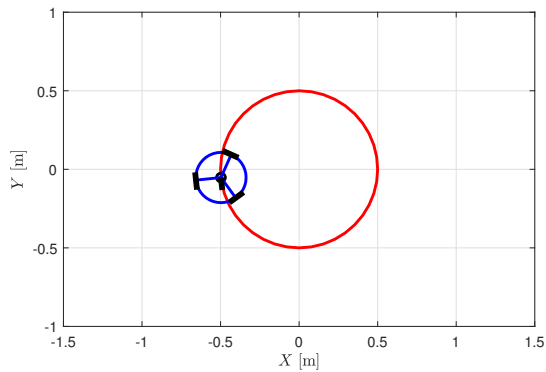
(a) Diseño 2D.



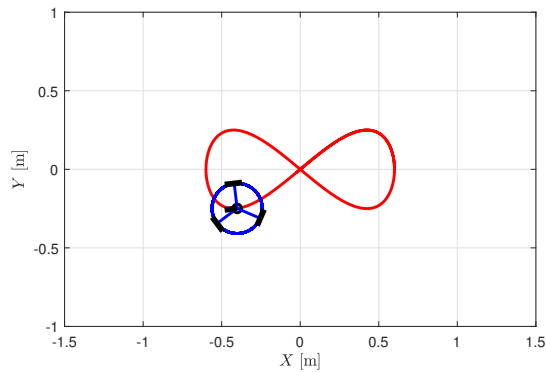
(b) Diseño 3D.

Figura 5.1: Representaciones del robot móvil omnidireccional.

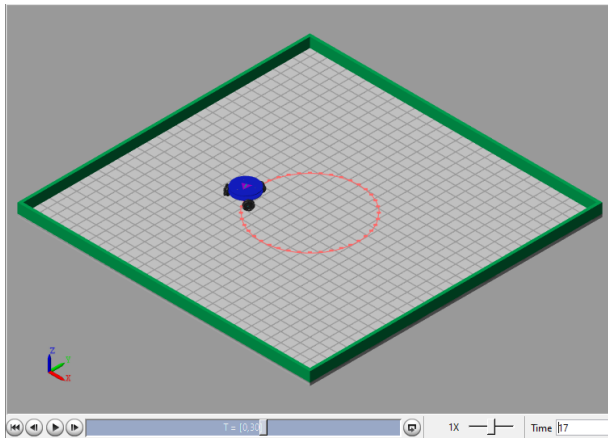
Dichos modelos se desplazan y giran al mismo tiempo en que se ejecutan las simulaciones, tal y como se ve en la Figura 5.2, esto da una mejor perspectiva del movimiento y seguimiento de trayectoria del robot tal y como lo haría de forma física.



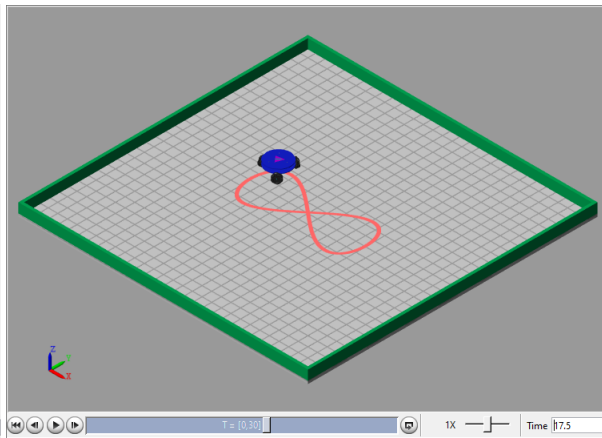
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.2: Representación del seguimiento de trayectorias.

## 5.2. Control del modelo cinemático sin perturbaciones

Con el fin de validar los resultados obtenidos en el cálculo del modelo cinemático sin perturbaciones (2.14) y el diseño del control mediante linealización por retroalimentación de estados (2.33), se llevó a cabo una simulación en el entorno de Matlab/Simulink<sup>®</sup>, para lo cual se diseñó el diagrama de bloques mostrado en la Figura 5.4:

## 5.2 Control del modelo cinemático sin perturbaciones

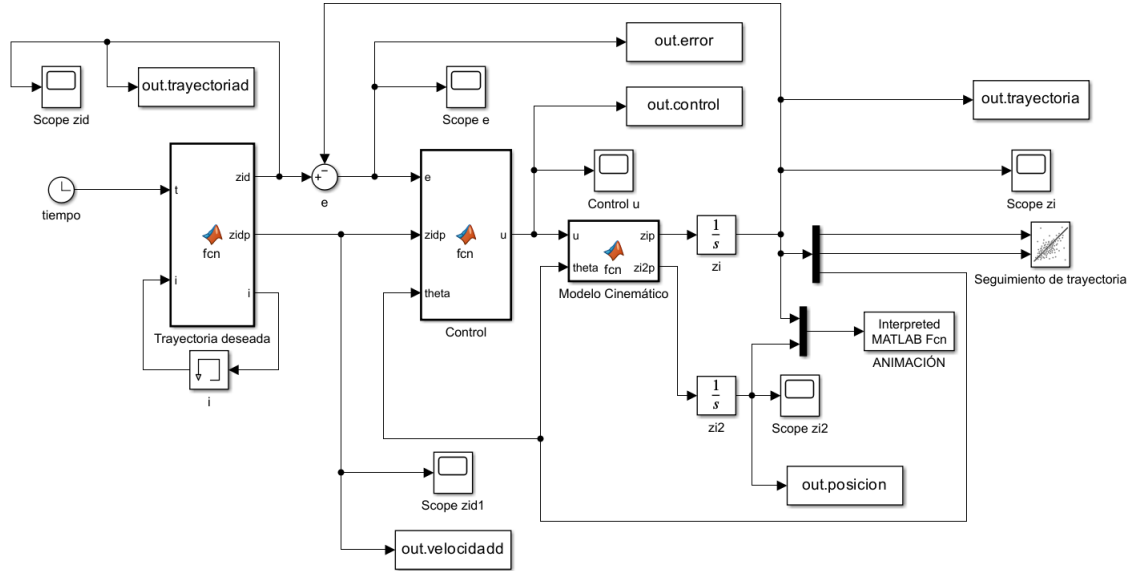
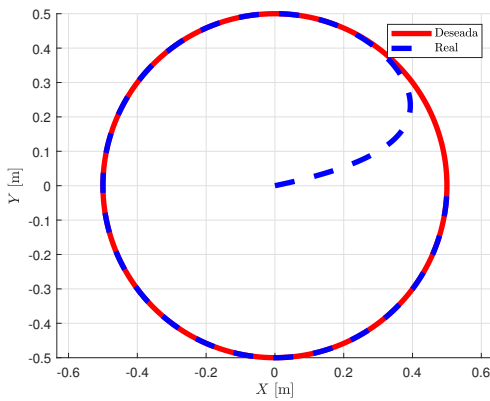
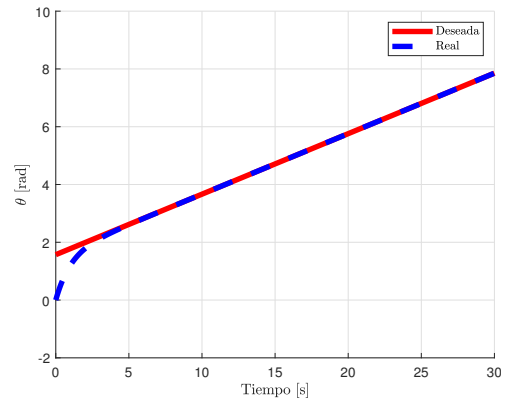


Figura 5.3: Diagrama de bloques para el seguimiento de trayectorias.

En la Figura 5.4a se aprecia la trayectoria real del robot en comparación con la trayectoria deseada, con ganancias del controlador  $k_p = \text{diag}\{1, 1, 1\}$  y condiciones iniciales  $\xi(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$ , los parámetros del robot móvil  $r = 0.05$  m,  $L = 0.125$  m,  $\delta = \frac{\pi}{6}$  donde es evidente que el robot logra seguir la trayectoria deseada. Por otra parte, en la Figura 5.4b, la orientación real converge a la orientación deseada.



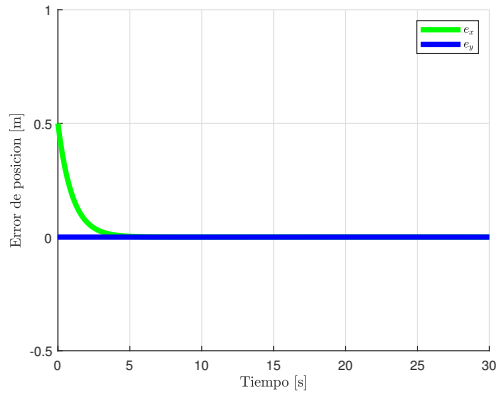
(a)



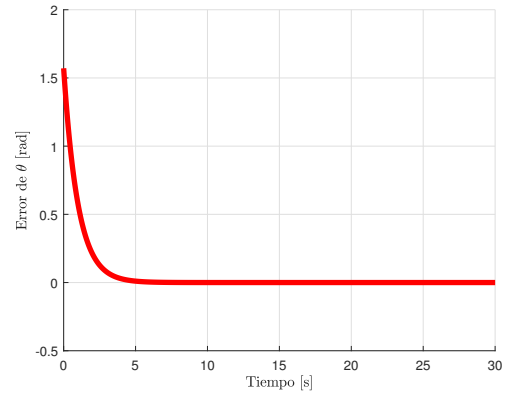
(b)

Figura 5.4: Comparación entre la trayectoria deseada y la real.

Este comportamiento se aprecia mejor en la Figura 5.5. Concretamente, en la Figura 5.5a, los errores de posición convergen a cero mientras que en la Figura 5.5b el error de orientación también converge a cero. Las señales de control requeridas por el robot para realizar su movimiento, se ilustran en la Figura 5.6.

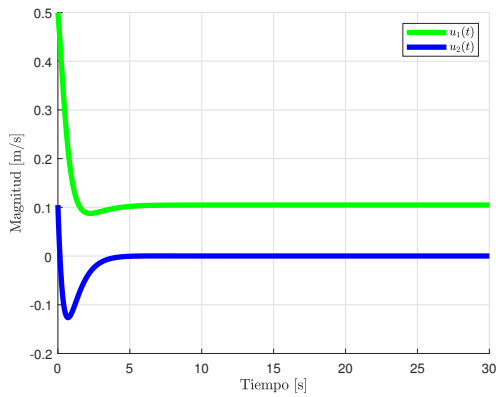


(a)

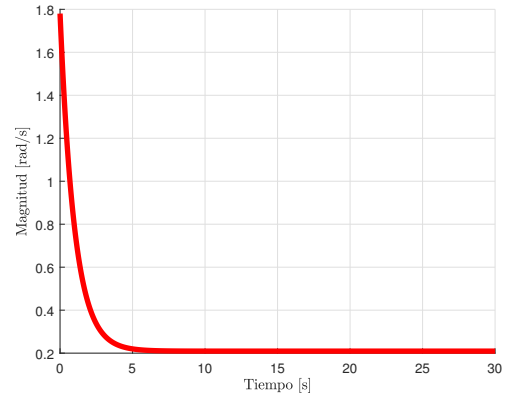


(b)

Figura 5.5: Señales de error de seguimiento.



(a)



(b)

Figura 5.6: Señales de control.

Finalmente, se hizo la prueba con una trayectoria diferente y usando el control que contiene a la tangente hiperbólica (2.35) considerando los mismos parámetros para las ganancias del control y las mismas condiciones iniciales del robot. Los resultados se muestran en las Figuras de la 5.7 a la 5.9.



## 5.2 Control del modelo cinemático sin perturbaciones

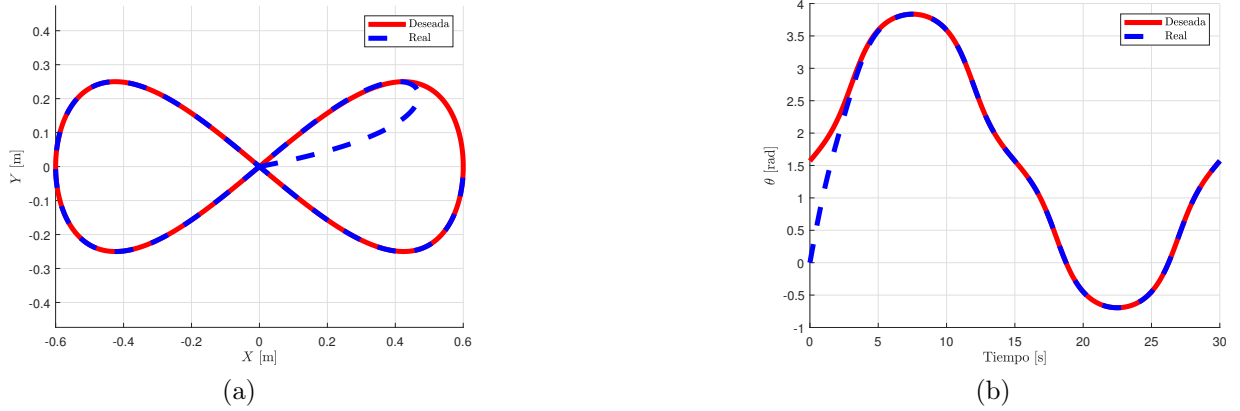


Figura 5.7: Comparación entre la trayectoria deseada y la real.

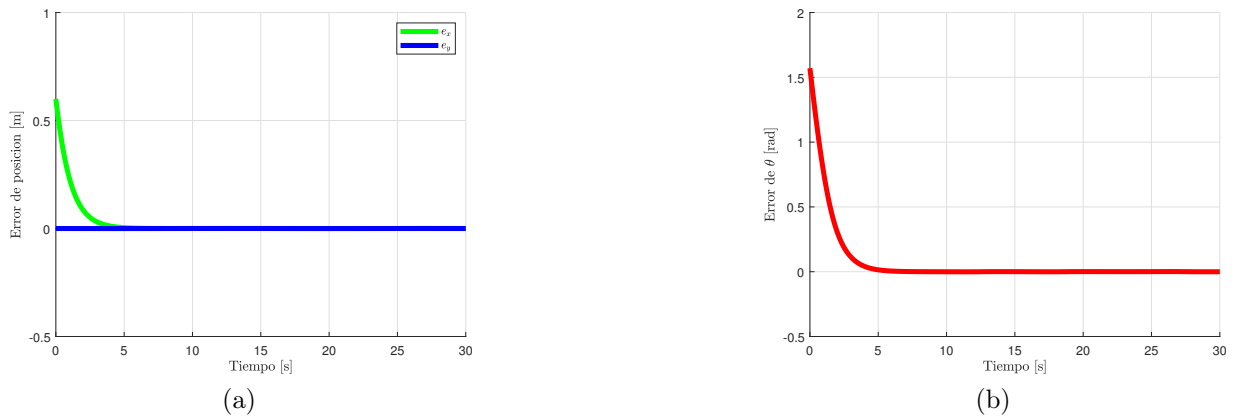


Figura 5.8: Señales del error de seguimiento.

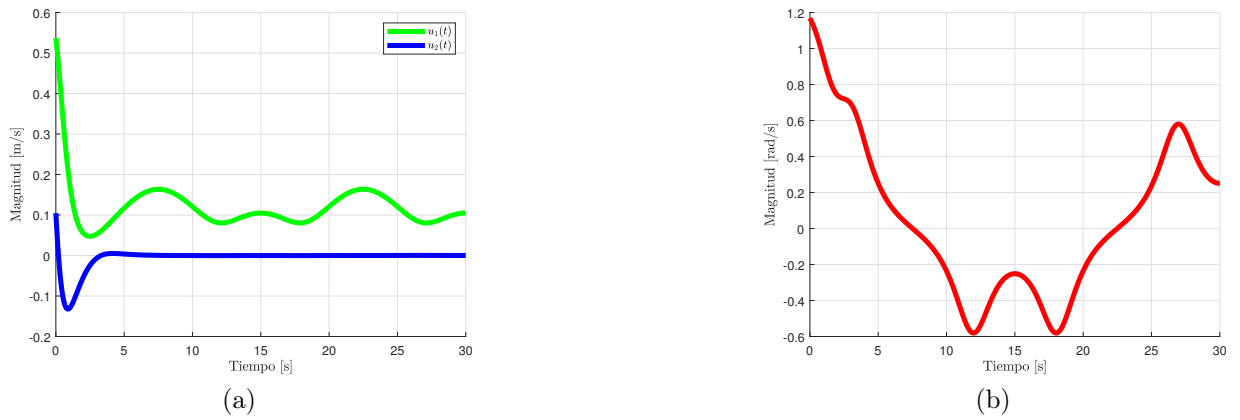


Figura 5.9: Señales de control.

En ambos casos se puede apreciar que el error converge a cero, sin embargo, aun podemos ajustar más las ganancias del controlador para una convergencia del error de seguimiento más rápida, por ejemplo,  $k_p = \text{diag}\{10, 10, 10\}$  nos da los resultados mostrados en la Figura 5.10.

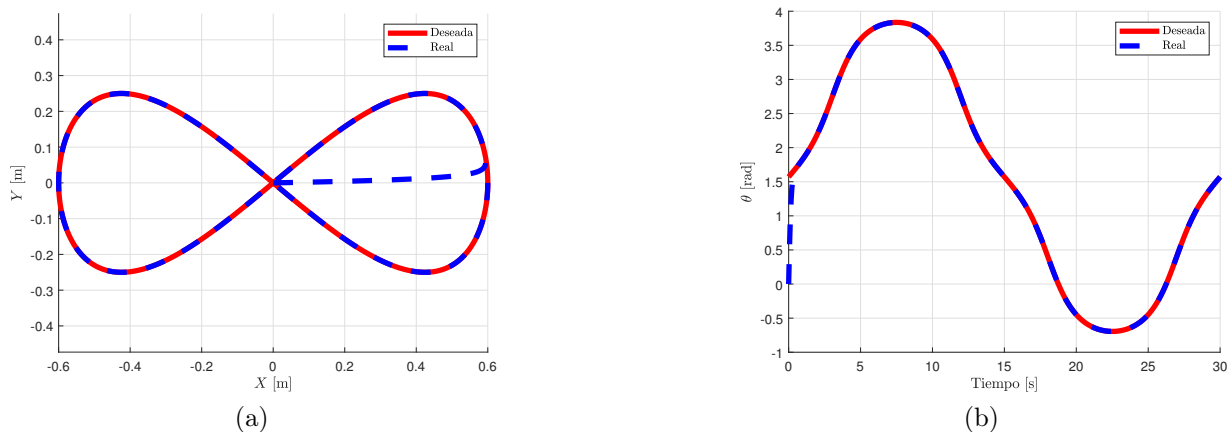


Figura 5.10: Comparación entre la trayectoria deseada y la real.

### 5.3. Control del modelo dinámico sin perturbaciones

Ahora, para verificar que el modelo dinámico sin perturbaciones (2.31) y el control obtenido en (2.37) es correcto, se realizó una simulación en Matlab/Simulink© con el diagrama de bloques mostrado en la Figura 5.11.

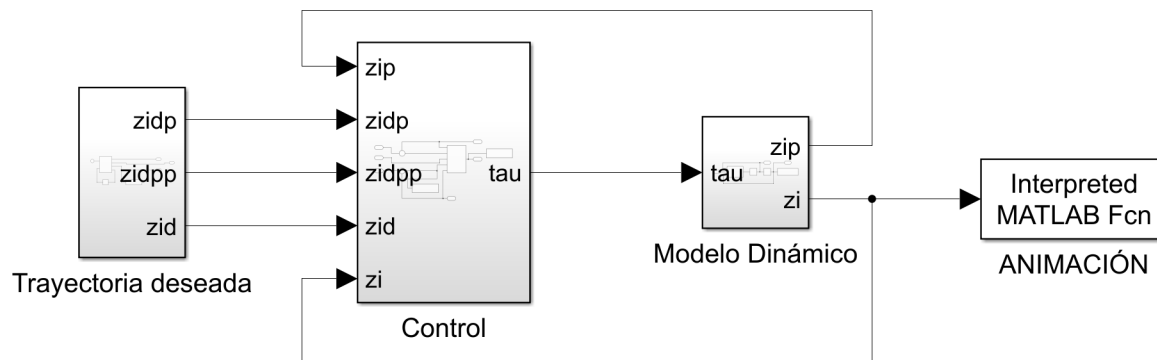


Figura 5.11: Diagrama de bloques para el modelo dinámico sin perturbaciones.

Las ganancias del controlador se eligieron como  $k_p = \text{diag}\{25, 25, 150\}$  y  $k_d = 2\sqrt{k_p}$  y los parámetros del robot móvil son  $M = 1.67$  kg,  $m = 0.68$  kg,  $r = 0.05$  m,  $L = 0.125$  m,  $\delta = \frac{\pi}{6}$ , por último, las condiciones iniciales son  $\dot{\xi}(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$  y  $\xi(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$ . En

### 5.3 Control del modelo dinámico sin perturbaciones

la Figura 5.12a se aprecia el seguimiento de trayectoria en el plano  $X - Y$  y en la Figura 5.12b en  $\theta$ .

Las gráficas de las Figuras 5.13a y 5.13b muestran el error del seguimiento de trayectoria con respecto al tiempo de la posición en  $X$  y  $Y$  y orientación en  $\theta$  respectivamente.

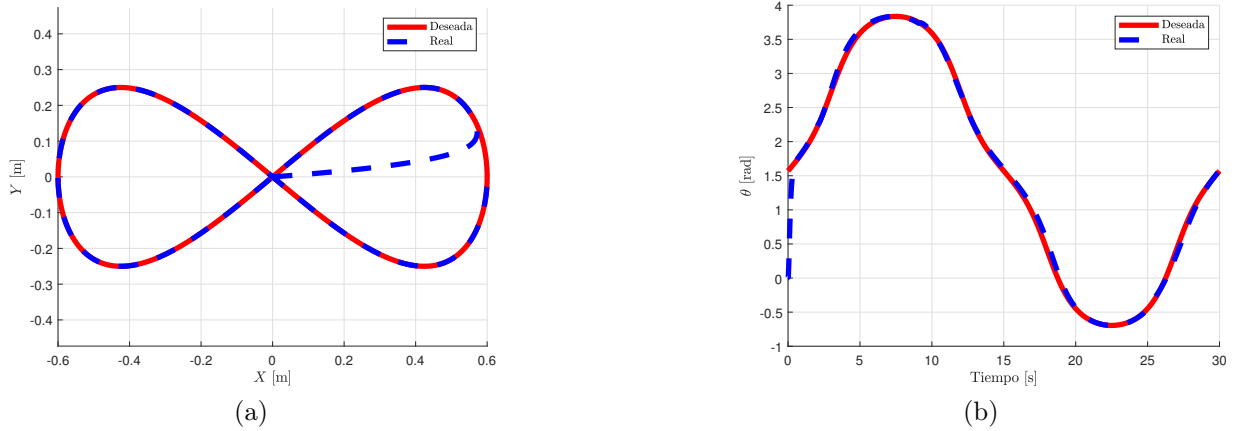


Figura 5.12: Comparación entre la trayectoria deseada y la real.

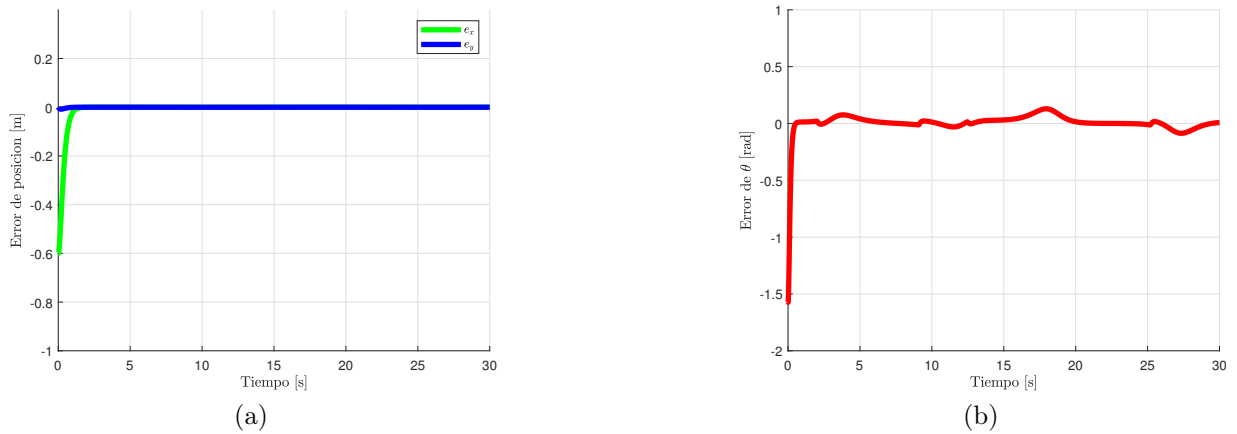


Figura 5.13: Señales del error de seguimiento.

Finalmente, la Figura 5.14a nos muestra las señales de control  $\tau_r$  en cada una de las ruedas del robot móvil omnidireccional, mientras que la Figura 5.14b nos muestra un zoom de las señales de control a partir de 1 segundo.

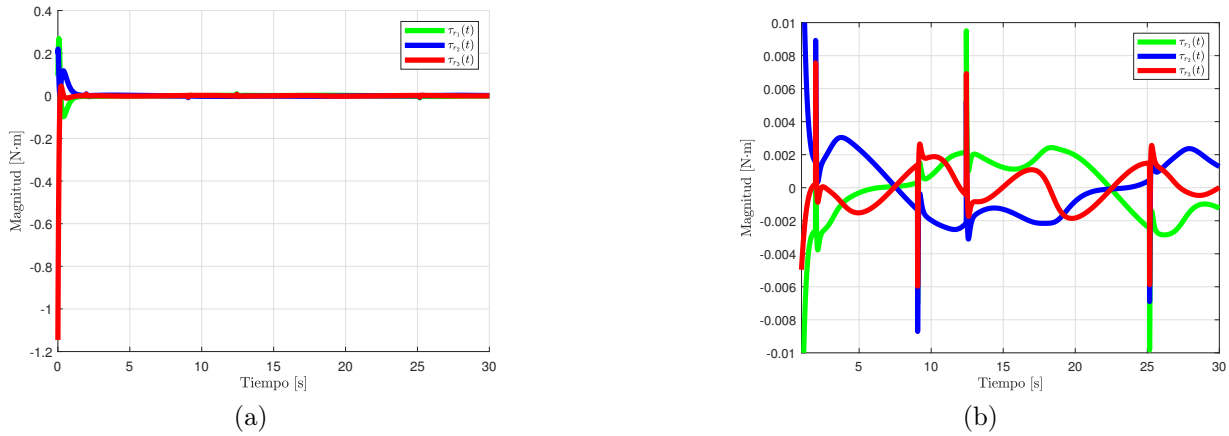


Figura 5.14: Señales de control.

## 5.4. Modelo cinemático con observador de perturbaciones

Para evaluar el modelo cinemático perturbado (3.9) con observador de perturbaciones, se realiza una simulación a partir del diagrama de bloques mostrado en la Figura 5.15. Para tal fin, los parámetros del robot que se consideraron son los siguientes:  $r = 0.05$  m,  $L = 0.125$  m,  $\delta = \frac{\pi}{6}$  rad. La condición inicial del robot está dada por:  $\boldsymbol{\xi}(0) = [0 \ 0 \ 0]^\top$ . Las entradas de control se establecen en  $\mathbf{v} = [r \ r \ r]^\top$  m/s, con esta elección, el robot se moverá formando una curva de Lissajous tipo Lemniscata. Por otra parte, los parámetros del observador son:  $\omega_n = 2$  rad/s,  $\zeta_d = 20$  y  $p_d = 50$ .

## 5.4 Modelo cinemático con observador de perturbaciones

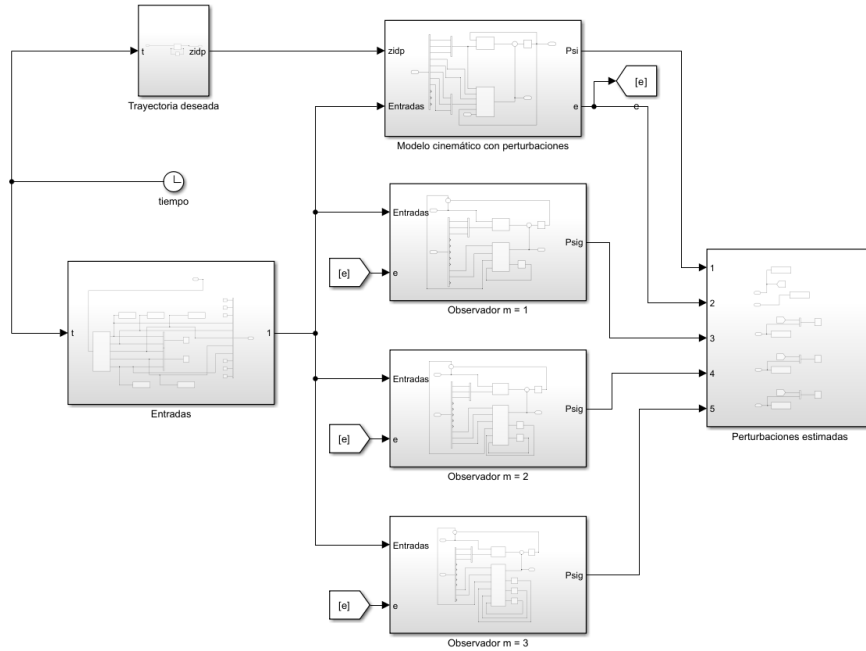
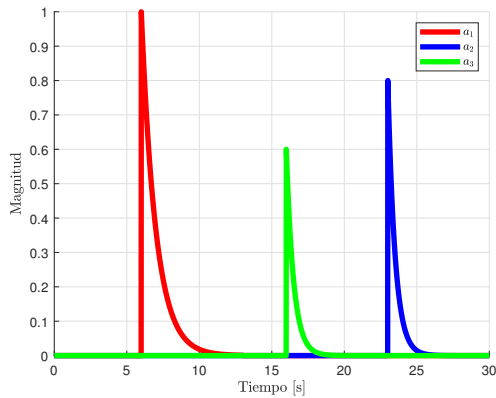


Figura 5.15: Diagrama de bloques para la evaluación de los observadores.

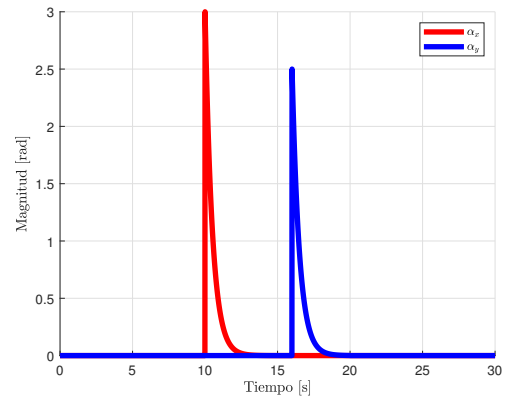
Las perturbaciones introducidas en el desplazamiento  $\alpha_x$  y  $\alpha_y$ , así como las perturbaciones de patinado  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$  se propusieron de la siguiente forma,

$$\begin{aligned}
 \alpha_x &= 3e^{-2(t-10)} & \text{para } 10 \leq t < 25 \\
 \alpha_y &= 2.5e^{-2(t-16)} & \text{para } 16 \leq t < 20 \\
 a_1 &= e^{-(t-6)} & \text{para } 6 \leq t < 13 \\
 a_2 &= 0.8e^{-2(t-23)} & \text{para } 23 \leq t < 28 \\
 a_3 &= 0.6e^{-2(t-16)} & \text{para } 16 \leq t < 23
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Las perturbaciones (5.1) toman la forma mostrada en la Figura 5.16.



(a) Perturbaciones de patinado.



(b) Perturbaciones de deslizamiento.

Figura 5.16: Perturbaciones inyectadas en el modelo.

La Figura 5.17 ilustra el error entre la estimación de la perturbación y la perturbación inyectada al modelo, con diferentes órdenes del observador, es decir, se consideró  $m = 1, 2, 3$ , teniendo resultados muy similares. Sin embargo, se puede concluir que el observador que mejor estima las perturbaciones es el de tercer orden  $m = 3$  ya que el error converge a cero en menor tiempo y presenta menos oscilaciones en estado estacionario, en comparación con el orden  $m = 1$  y  $m = 2$ .

## 5.4 Modelo cinemático con observador de perturbaciones

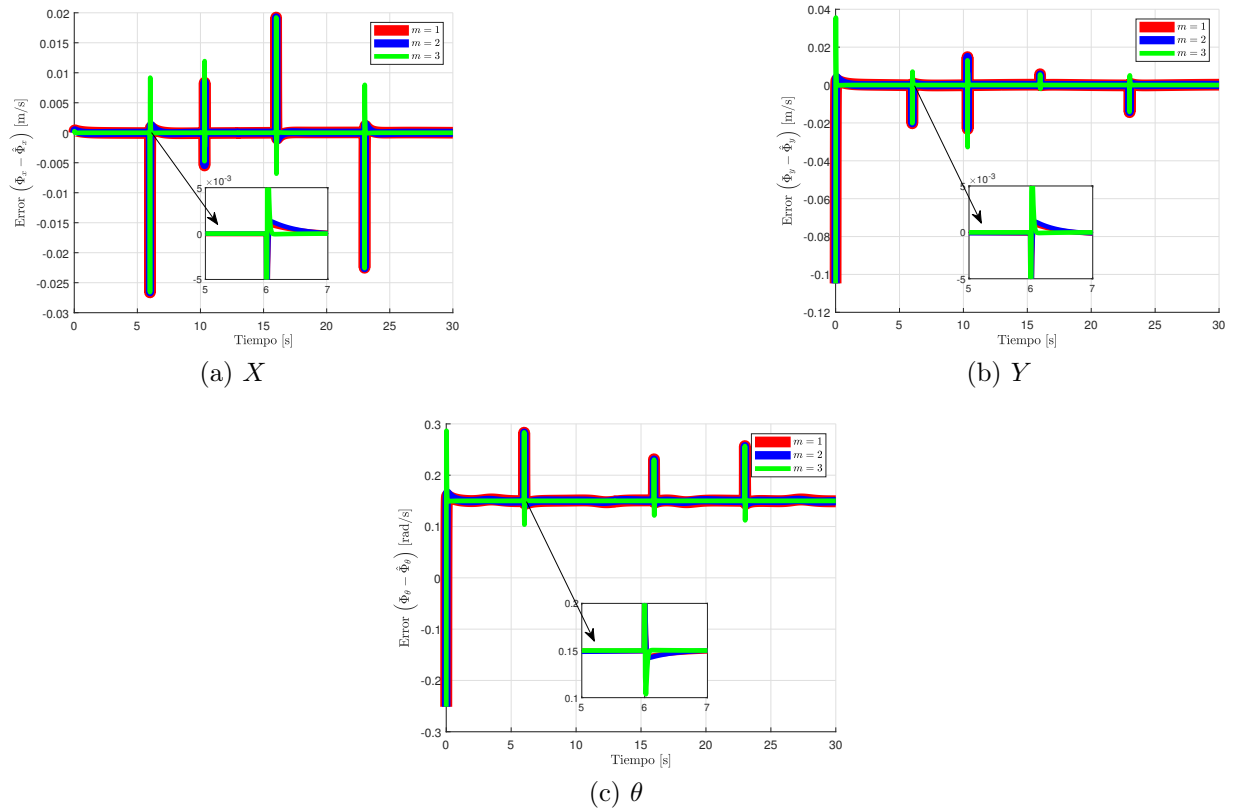


Figura 5.17: Errores entre la perturbación real y la estimada.

Finalmente, en la Figura 5.18 se muestra la comparación entre la trayectoria ideal (sin perturbaciones) y la trayectoria con las perturbaciones, en donde puede observarse claramente que el robot móvil se desvía de la trayectoria debido a que no hay ninguna compensación de las perturbaciones.

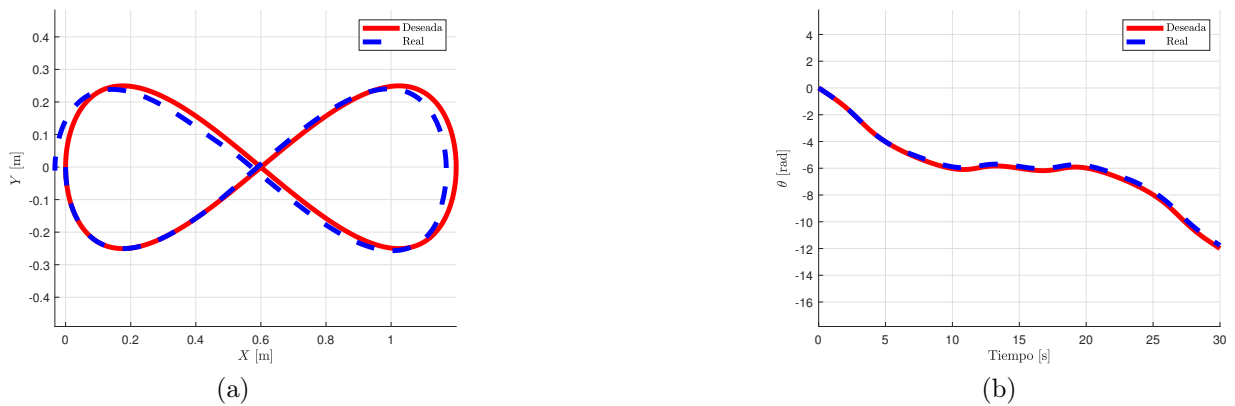


Figura 5.18: Comparación entre la trayectoria deseada y la real.

## 5.5. Modelo dinámico con observador de perturbaciones

Para evaluar el observador con etapa  $m = 3$  para el modelo dinámico perturbado (3.27) se realizó una simulación a partir del diagrama de bloques mostrado en la Figura 5.19, los parámetros del robot son  $M_P = 1.67$  kg,  $M_r = 0.068$  kg,  $r = 0.05$  m,  $L = 0.125$  m,  $I_w = 0.00009$  kg·m<sup>2</sup>,  $I_P = 0.0071$  kg·m<sup>2</sup>,  $\delta = \frac{\pi}{6}$  rad con condiciones iniciales  $\boldsymbol{\xi}(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$ , y los parámetros del observador, con  $m = 3$ , son:  $\omega_n = 1$  rad/s,  $\zeta_d = 30$  y  $p_d = 180$ .

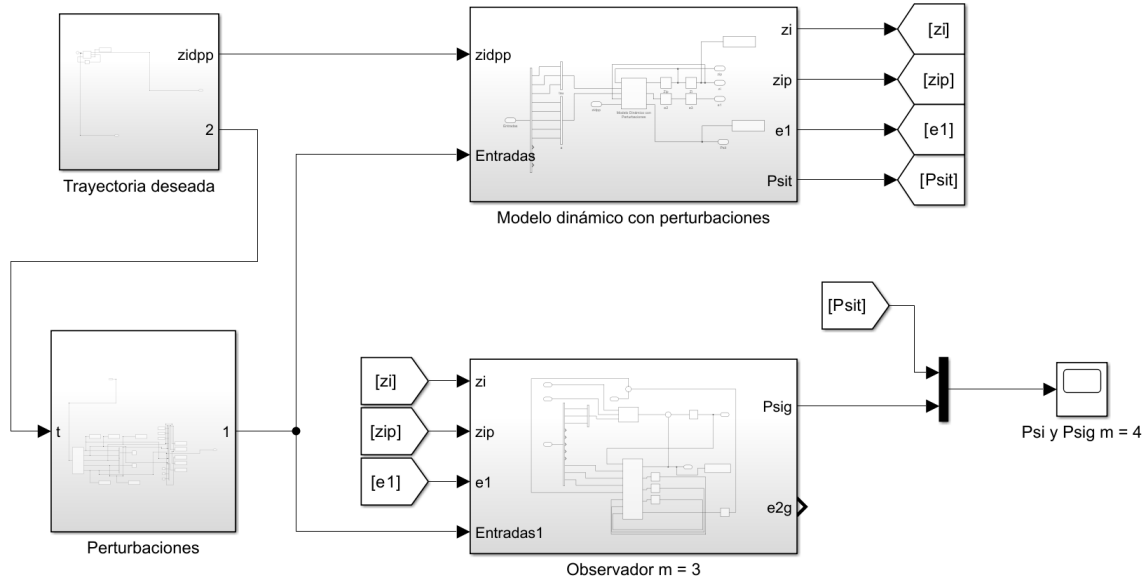


Figura 5.19: Diagrama de bloques para la evaluación del observador.

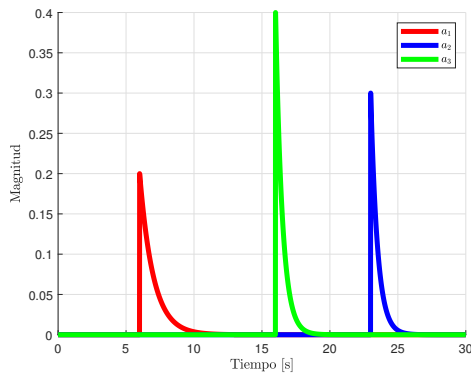
Las perturbaciones introducidas en el desplazamiento  $\alpha_x$  y  $\alpha_y$ , así como las perturbaciones de patinado  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$  se propusieron de la siguiente forma,

$$\begin{aligned}
 \alpha_x &= \frac{\pi}{4} e^{-2(t-10)} & \text{para } 10 \leq t < 25 \\
 \alpha_y &= \frac{\pi}{3} e^{-2(t-16)} & \text{para } 16 \leq t < 20 \\
 a_1 &= 0.2 e^{-(t-6)} & \text{para } 6 \leq t < 13 \\
 a_2 &= 0.3 e^{-2(t-23)} & \text{para } 23 \leq t < 28 \\
 a_3 &= 0.4 e^{-2(t-16)} & \text{para } 16 \leq t < 23
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

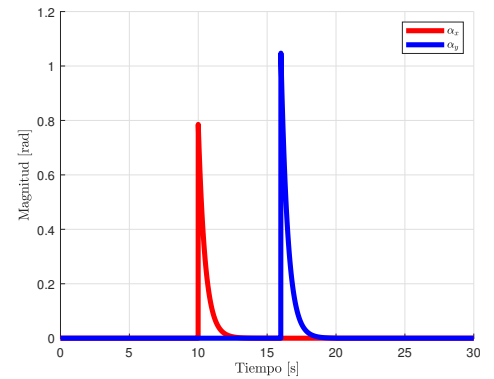
Las perturbaciones (5.2) toman la forma mostrada en la Figura 5.20.



## 5.5 Modelo dinámico con observador de perturbaciones



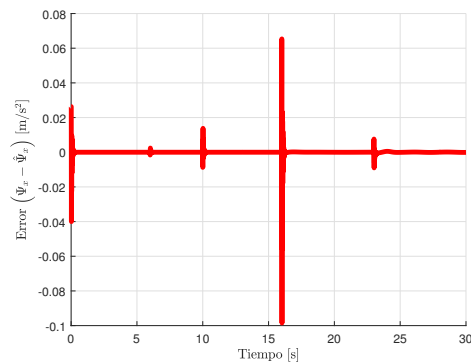
(a) Perturbaciones de patinados.



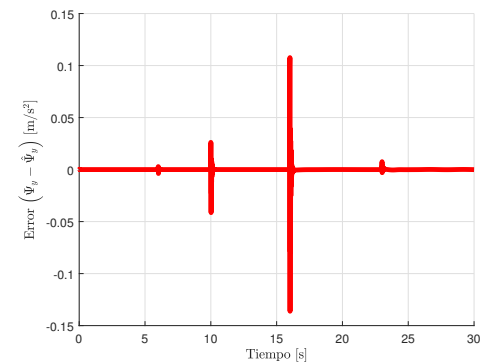
(b) Perturbaciones de deslizamiento.

Figura 5.20: Perturbaciones inyectadas en el modelo.

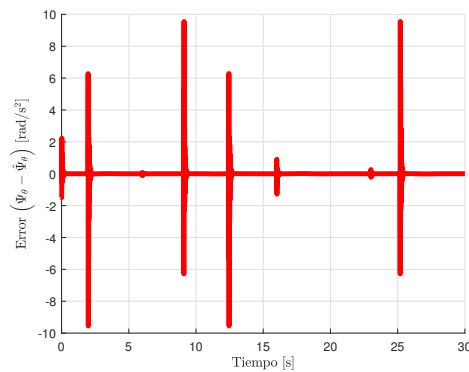
Los resultados del observador se muestran en la Figura 5.21, en donde pueden apreciarse los errores entre las perturbaciones reales y las perturbaciones estimadas por el observador.



(a)  $X$



(b)  $Y$



(c)  $\theta$

Figura 5.21: Errores entre la perturbación real y la estimada.

De la Figura 5.21 se puede concluir que el observador estima las perturbaciones (5.2) justo en los tiempos 6, 10, 16 y 23 segundos, tiempos en que fueron introducidas, sin embargo, en  $\theta$ , llega a detectar algunas estimaciones más debido a la vibración del robot.

## 5.6. Control del modelo cinemático con perturbaciones

El control (4.6) junto con el modelo cinemático perturbado (3.9) se simuló con ayuda del diagrama de bloques mostrado en la Figura 5.22.

Los parámetros están dados por: las perturbaciones (5.1),  $\delta = \frac{\pi}{6}$  rad,  $L = 0.125$  m,  $r = 0.05$  m, y condiciones iniciales  $\xi(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$ . La trayectoria deseada es una Lemniscata cuya ecuación paramétrica es  $\xi_d = [A \cos(\omega t) \ B \sin(2\omega t) \ \arctan(\dot{y}_d/\dot{x}_d)]^T$  con una amplitud  $A = 0.6$  m en el eje  $X$ , una amplitud  $B = 0.25$  m en el eje  $Y$ , un periodo  $T = 30$  s, y una frecuencia angular  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ . Las ganancias del controlador se establecieron como  $k_p = \text{diag}\{1, 1, 1\}$  mientras que, debido a que se consideró un observador de orden  $m = 3$ , sus ganancias son  $\omega_n = 2$  rad/s y  $\zeta_d = 20$ .

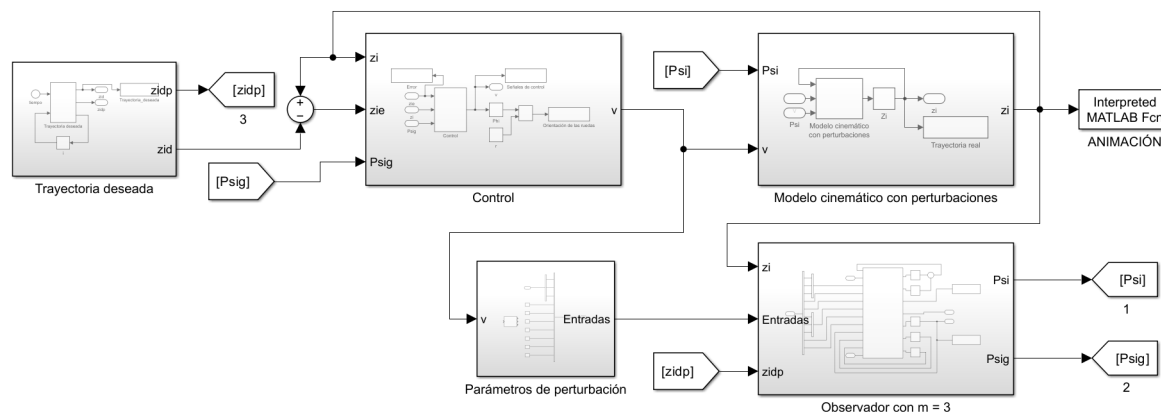
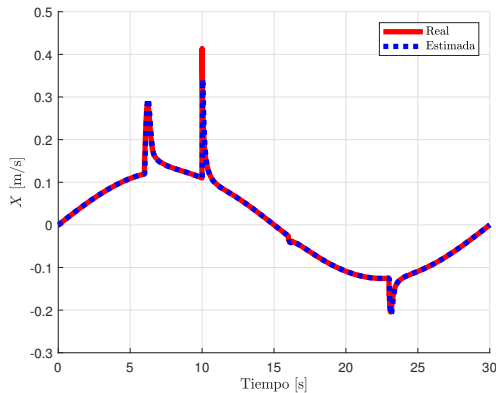


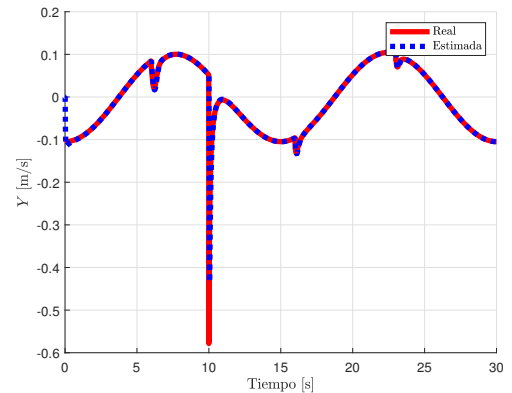
Figura 5.22: Diagrama de bloques del control con observador de perturbaciones.

La Figura 5.23 presenta una comparación entre la estimación de las perturbaciones y las perturbaciones simuladas. Note que, después de 1 segundo, las perturbaciones estimadas convergen al valor de las perturbaciones simuladas.

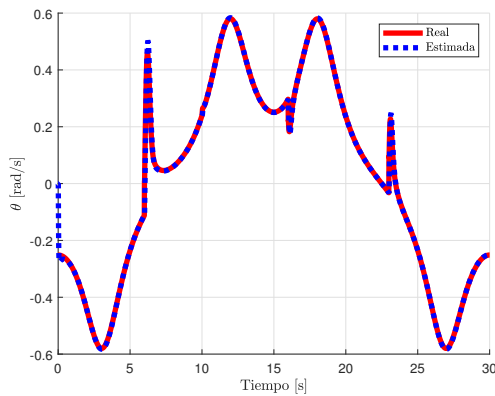
## 5.6 Control del modelo cinemático con perturbaciones



(a) Perturbaciones en  $X$



(b) Perturbaciones en  $Y$



(c) Perturbaciones en  $\theta$

Figura 5.23: Estimación de las perturbaciones con el observador.

Por otro lado, la Figura 5.24a muestra una comparación entre la trayectoria seguida por el robot y la trayectoria deseada, mientras que la Figura 5.24b ilustra la comparación entre la orientación real y la deseada. Es importante apreciar que, a pesar de las perturbaciones presentes en el sistema, el robot logra seguir la trayectoria deseada. Además, los errores de posición y de orientación se presentan en la Figura 5.25a y 5.25b respectivamente, donde es evidente que convergen a cero.

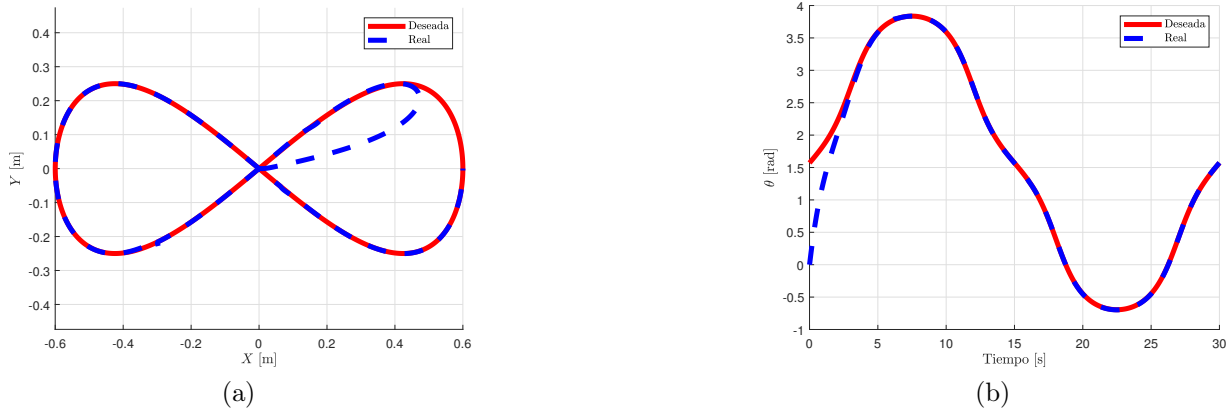


Figura 5.24: Comparación entre la trayectoria deseada y la real.

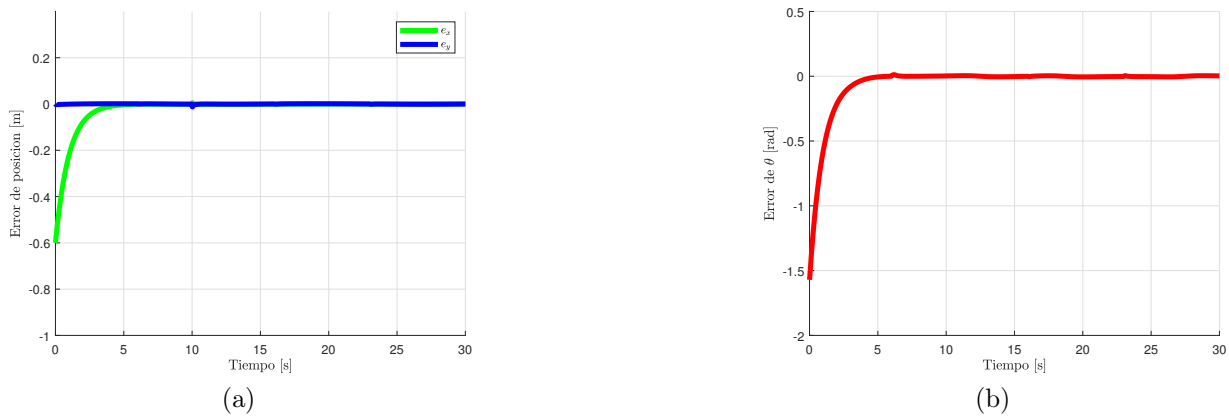


Figura 5.25: Señales del error de seguimiento.

Finalmente, la Figura 5.26 muestra las señales de control que son necesarias para que el robot omnidireccional realice el seguimiento de trayectoria.

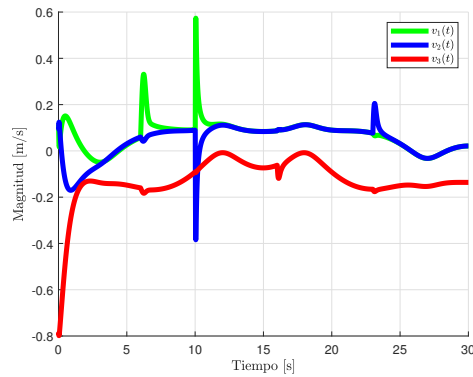


Figura 5.26: Señales de control.

## 5.7. Control del modelo dinámico con perturbaciones

La estrategia de control de par calculado con observador (4.10) para el modelo dinámico perturbado (3.27) se simuló con ayuda del diagrama de bloques mostrado en la Figura 5.27.

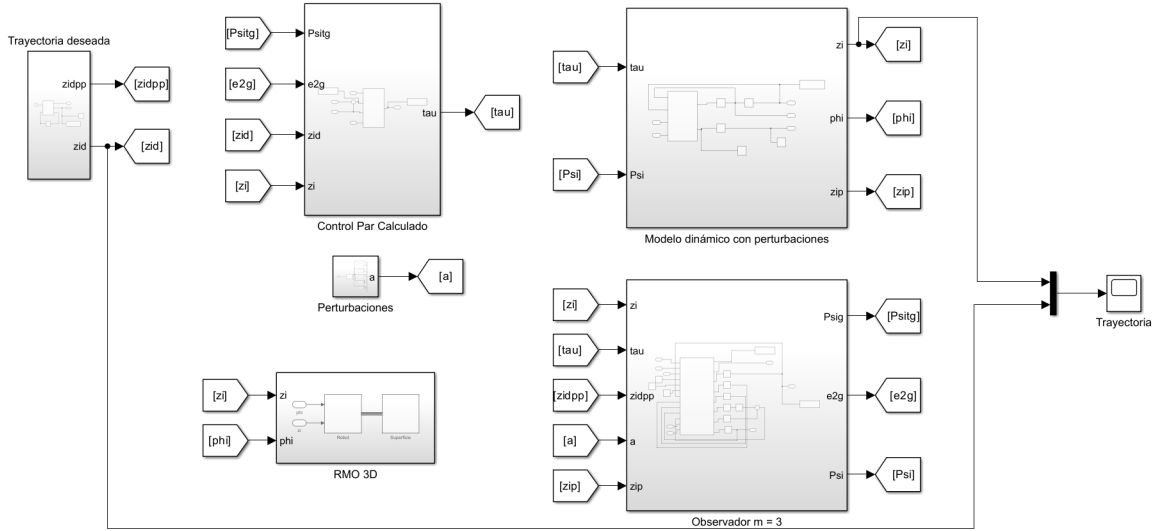
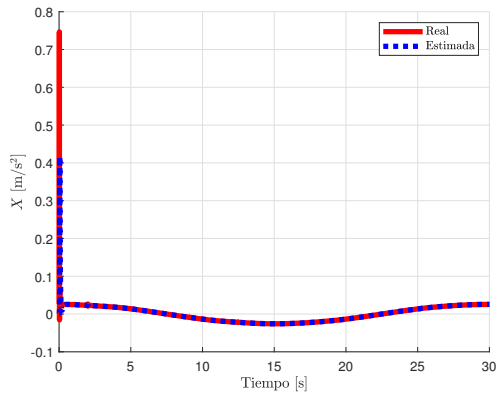


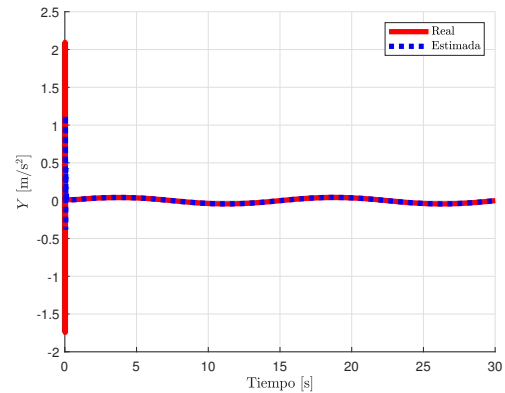
Figura 5.27: Diagrama de bloques del control con observador de perturbaciones.

Los parámetros están dados por las perturbaciones (5.2),  $M_P = 1.67$  kg,  $M_r = 0.068$  kg,  $r = 0.05$  m,  $L = 0.125$  m,  $I_w 0.00009 = \text{kg}\cdot\text{m}^2$ ,  $I_P = 0.0071 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ ,  $\delta = \frac{\pi}{6}$  rad y condiciones iniciales  $\xi(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$ . La trayectoria deseada es la misma que en la simulación anterior. Las ganancias del controlador se establecieron como  $k_p = \text{diag}\{50, 50, 100\}$  y  $k_d = 2\sqrt{k_p}$  mientras que, debido a que se consideró un observador con orden  $m = 3$ , las ganancias del observador son  $\omega_n = 1$  rad/s,  $\zeta_d = 30$  y  $p_d = 160$ .

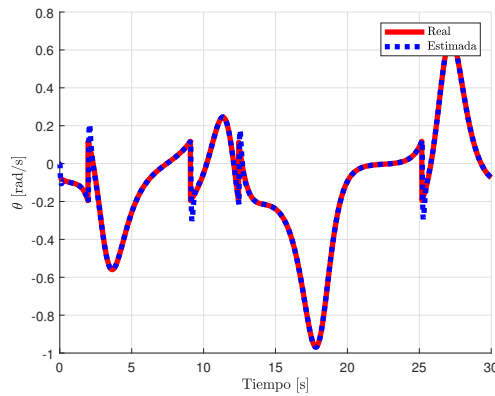
La Figura 5.28 presenta una comparación entre la estimación de las perturbaciones y las perturbaciones simuladas.



(a) Perturbaciones en  $X$



(b) Perturbaciones en  $Y$



(c) Perturbaciones en  $\theta$

Figura 5.28: Estimación de las perturbaciones con el observador.

Por otro lado, la Figura 5.29a muestra una comparación entre la trayectoria seguida por el robot y la trayectoria deseada, mientras que la Figura 5.29b ilustra la comparación entre la orientación real y la deseada. También se nota que, aunque las perturbaciones afectan al sistema, el robot logra seguir la trayectoria deseada. Además, los errores de posición y de orientación se presentan en la Figura 5.30a y 5.30b respectivamente, donde es evidente que convergen a cero.

## 5.7 Control del modelo dinámico con perturbaciones

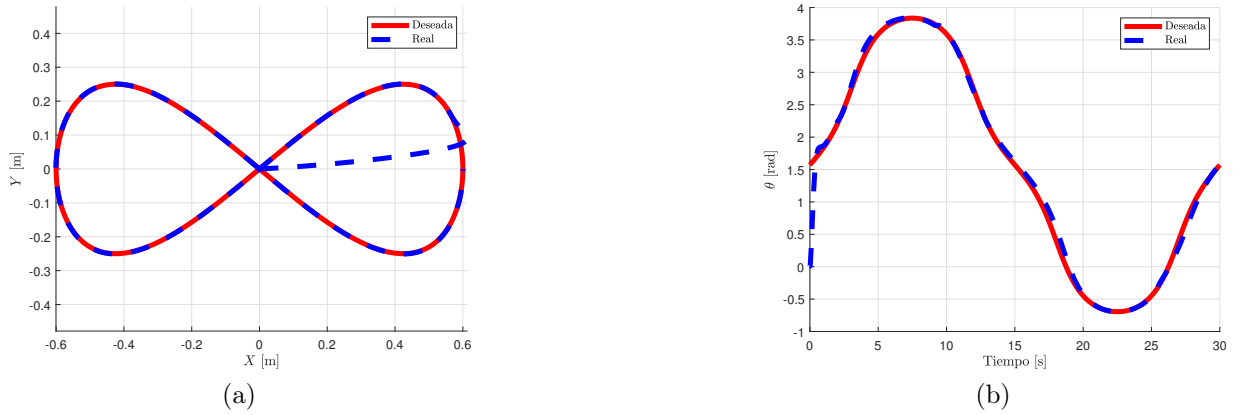


Figura 5.29: Comparación entre la trayectoria deseada y la real.

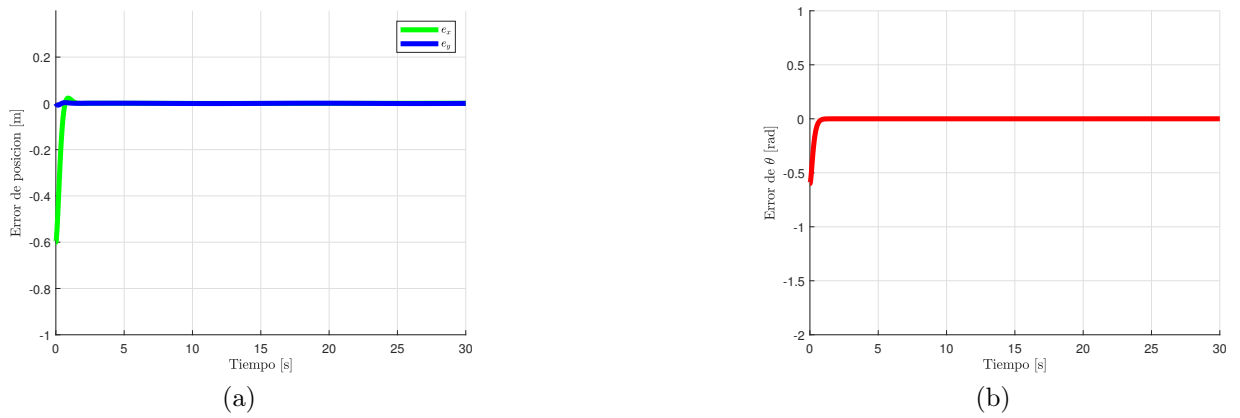
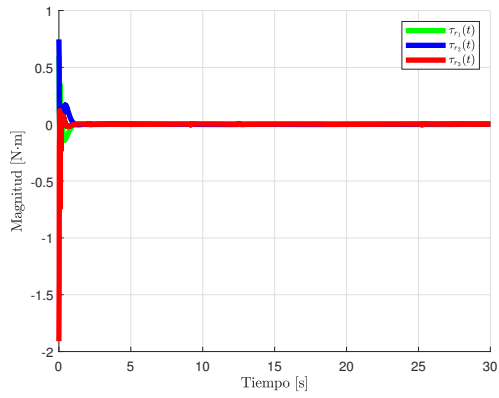
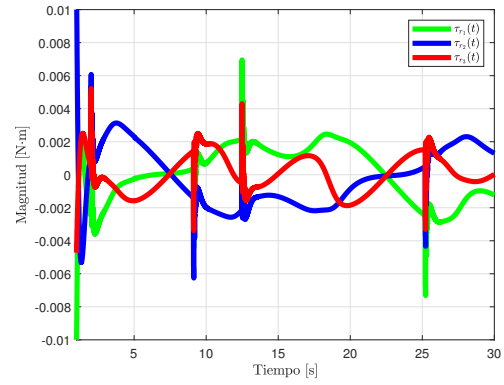


Figura 5.30: Señales del error de seguimiento.

Finalmente, la Figura 5.31a muestra las señales de control que son necesarias para que el robot omnidireccional realice el seguimiento de trayectoria, mientras que la Figura 5.31b muestra un zoom de las señales de control a partir de 1 segundo.



(a)



(b)

Figura 5.31: Señales de control.



## Capítulo 6

# Experimentos en tiempo real

La primera parte de este capítulo describe la plataforma experimental utilizada para realizar los experimentos. Después, se ilustran los resultados en lazo abierto para determinar el desempeño del observador. Finalmente, se describen los resultados obtenidos utilizando el control definido en el Capítulo 4 con estimación y sin estimación de las perturbaciones.

### 6.1. Plataforma experimental

La plataforma experimental utilizada para evaluar el modelo y el control con observador de perturbaciones diseñados a lo largo de este trabajo consta de tres elementos principales: computadora central, sistema de captura de movimiento y robot móvil omnidireccional.

La Figura 6.1 muestra de manera general la interacción entre los elementos de la plataforma experimental, siendo el sistema de captura de movimiento un sistema de cuatro cámaras *Optitrack* que captura la posición y trayectoria seguida por el robot para, posteriormente, transmitir dicha información por medio de una red *Wifi* a la computadora central, la cual, utiliza *ROS* para procesar los datos y enviar al robot móvil omnidireccional la velocidad requerida por los motores de cada una de las ruedas para realizar su movimiento.

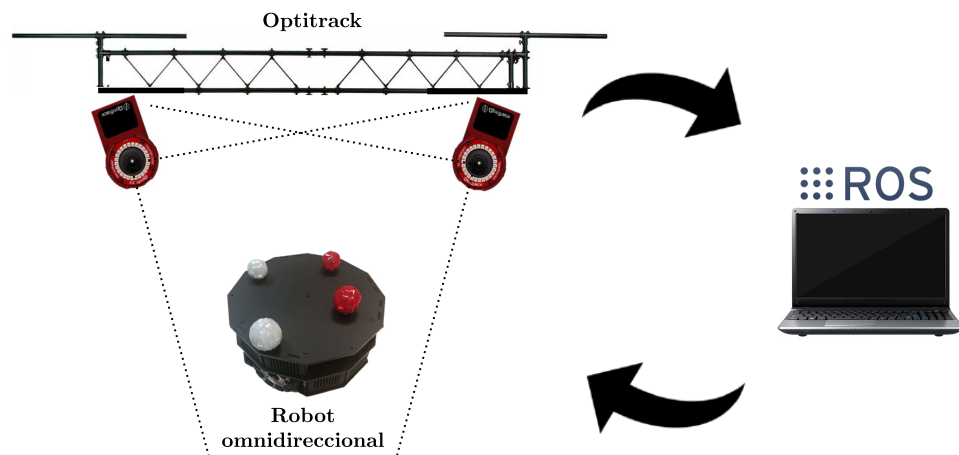


Figura 6.1: Diagrama general de la plataforma experimental.

A continuación, se describe de forma más detallada a cada uno de los elementos de la plataforma experimental.

- **Computadora central.** Es el componente encargado de recibir y procesar toda la información, para luego retroalimentar al robot móvil omnidireccional. Esta unidad está equipada con el sistema operativo Ubuntu 20.04 y ROS Noetic, lo que garantiza un entorno moderno y eficiente para el desarrollo y operación del robot.

El Robot Operating System (ROS) es un conjunto de software de código abierto que proporciona servicios esenciales para el desarrollo de software robótico. Aunque no es un sistema operativo en sí, ROS ofrece una infraestructura similar a la de un sistema operativo, incluyendo abstracción de hardware, control de dispositivos de bajo nivel, implementación de funcionalidades comunes, paso de mensajes entre procesos y gestión de paquetes [40].

La terminología principal de ROS es,

- **Nodo:** Un proceso que realiza computación. En ROS, los nodos se comunican entre sí mediante el paso de mensajes.
  - **Mensaje:** La unidad de datos que se envía entre nodos. Los mensajes pueden contener datos de sensores, comandos de control, estados, etc.
  - **Tópico:** Un canal de comunicación que los nodos utilizan para intercambiar mensajes. Los nodos pueden publicar o suscribirse a tópicos.
  - **Servicio:** Una comunicación sincrónica entre nodos. Un nodo puede solicitar una operación específica a otro nodo y esperar una respuesta.
  - **Acción:** Similar a los servicios, pero permite operaciones que pueden tomar un tiempo indeterminado, proporcionando feedback continuo.
  - **Paquete:** Una colección de nodos, bibliotecas, y otros archivos que proporcionan una funcionalidad específica.
  - **Master:** Un nodo especial que actúa como registro para otros nodos, permitiendo la localización y comunicación entre ellos.
- **Sistema de captura de movimiento.** La posición del robot móvil omnidireccional se obtiene utilizando un sistema *Optitrack* de la empresa Natural Point Inc®. Este sistema está compuesto por cuatro cámaras Flex 3 Optitrack, las cuales detectan luz infrarroja. Cada cámara tiene una resolución de  $640 \times 480$  píxeles y puede capturar hasta 100 imágenes por segundo.

Las cámaras emiten luz infrarroja que es reflejada por marcadores especiales colocados en el robot móvil omnidireccional, como se ilustra en la Figura 6.2. Estos reflejos son capturados por las cámaras y procesados mediante el software Motive, que determina la ubicación precisa de los marcadores. La información de posición resultante se envía

## 6.1 Plataforma experimental

---

a la computadora central a través de una Red Periférica de Realidad Virtual (VRPN, por sus siglas en inglés), utilizando ROS para la comunicación.

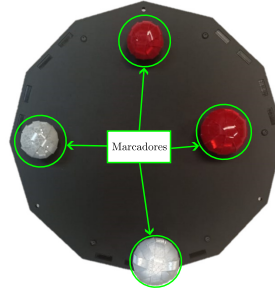


Figura 6.2: Marcadores infrarrojos.

- **Robot móvil omnidireccional.** Para realizar los experimentos, se emplea un robot móvil omnidireccional de tres ruedas como la que se muestra en la Figura 6.3a alimentado con una batería de 24 V y, diseñado específicamente para su uso en plataformas experimentales y educativas. Cada una de las ruedas es actuada por un motorreductor metálico con encoder de cuadratura como el que se muestra en la Figura 6.3b controlado por microcontroladores de la marca Basicmicro Motion Control© como el de la Figura 6.3c. Además, para poder hacer la comunicación entre todos los componentes se utiliza un ordenador de placa única de la marca Raspberry Pi igual al de la Figura 6.3d.

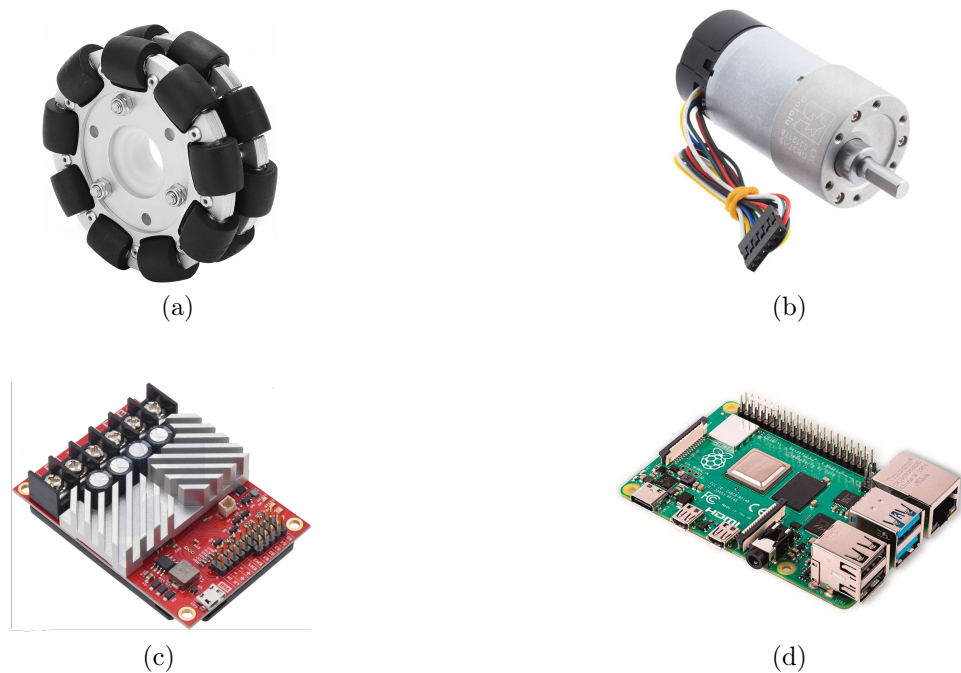


Figura 6.3: Componentes del robot móvil omnidireccional.

La integración de todos los componentes puede verse en la Figura 6.4. Este robot es ideal para investigaciones y prácticas debido a su versatilidad y capacidad de movimiento en todas las direcciones.



Figura 6.4: Robot móvil omnidireccional.

Las especificaciones más relevantes de este robot se detallan en la Tabla 6.1.

Tabla 6.1: Especificaciones del robot móvil omnidireccional.

Dimensiones	$l$ [m]	$r$ [m]	$\delta$ [rad]
		0.125	0.05
Peso	3.5 kg		
Fuente de alimentación	Batería de 24 V		
Tarjeta única	Raspberry Pi 4 Model B		
Actuadores	3 x Pololu 19:1 37D x 68L mm, 24 V		
Codificador de cuadratura	64 CPR en el eje del motor		
Rendimiento sin carga	530 RPM, 100 mA		
Microcontrolador	1 x RoboClaw 2x30A Motor Controller		
	1 x RoboClaw 2x15A Motor Controller		
Tiempo de funcionamiento	2 hrs.		

## 6.2. Observador de perturbaciones para el modelo cinemático

El primer experimento consiste en validar el observador de perturbaciones de orden  $m = 3$  diseñado para el modelo cinemático. Para ello se introdujeron las señales de control  $\mathbf{v} = rT [-r\omega \sin(\omega t) \quad r\omega \cos(\omega t) \quad \omega]^\top$  m/s con  $T$  igual a la matriz de transformación (2.17) y  $r$  el radio de la rueda, durante un periodo de  $T_p = 15$  s con  $\omega = \frac{2\pi}{T_p}$  mostradas en la Figura 6.5, las cuales producen que el robot siga la trayectoria de un círculo con

## 6.2 Observador de perturbaciones para el modelo cinemático

radio  $r_c = 0.6$  m, con centro en  $c = (-0.6, 0)$  en el plano  $X - Y$  y una orientación en la dirección de  $\theta$ . La Figura 6.6a muestra tanto la trayectoria ideal (sin perturbaciones de fuerzas externas) como la trayectoria a la que se le aplicaron fuerzas externas a través de un cable sujeto al robot que se jalaba cada cierto tiempo para hacer que se deslizara o patinara desviándolo de su trayectoria. En ambos experimentos puede apreciarse que el robot se desvía de la trayectoria deseada debido a perturbaciones de patinado, en el caso ideal, y a perturbaciones de deslizamiento y patinado en el caso perturbado. La Figura 6.6b muestra la orientación seguida por el robot.

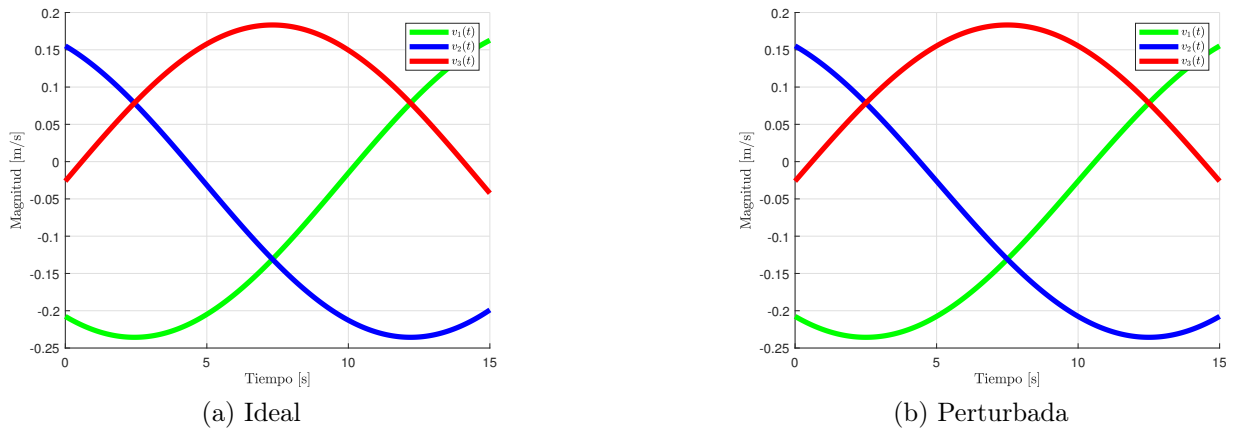


Figura 6.5: Señales de control.

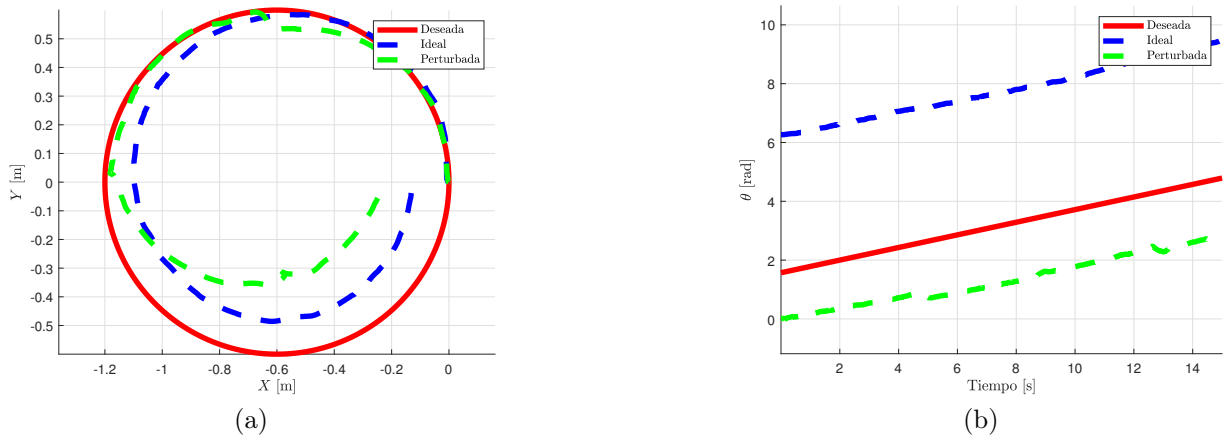


Figura 6.6: Comparación entre las trayectoria.

Tomando en cuenta que existen fuerzas externas que desplazan y frenan al robot móvil omnidireccional al igual que en el modelo cinemático perturbado (3.9) se introduce el observador, cuyas estimaciones de perturbación se muestran en las gráficas de la Figura 6.7.

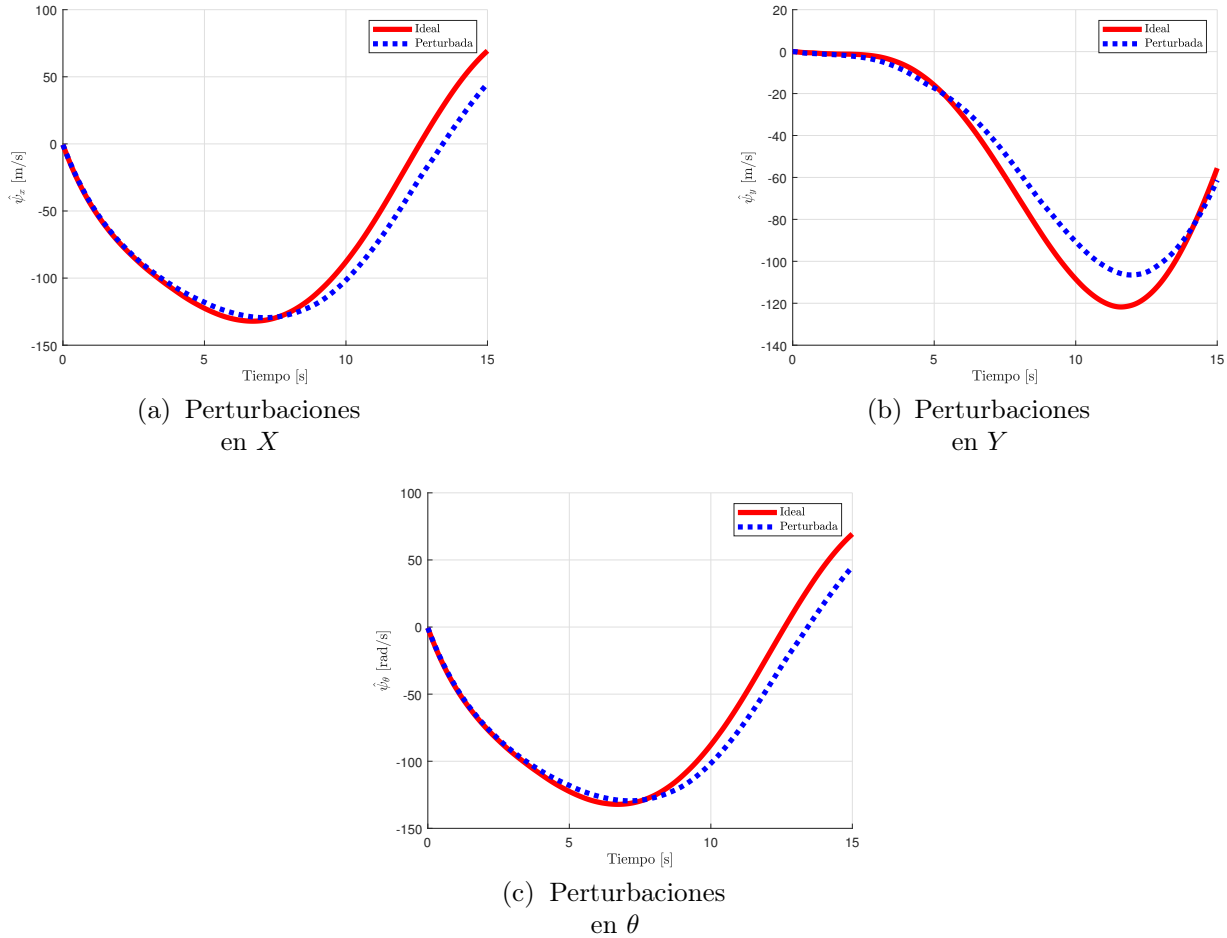


Figura 6.7: Estimación de las perturbaciones con el observador.

### 6.3. Control del modelo cinemático sin compensación de perturbaciones

El segundo experimento consiste en aplicar el control cinemático sin perturbaciones (2.33) con un observador de orden  $m = 3$  para el seguimiento de trayectorias en un periodo de 30 s sin compensar la estimación de las perturbaciones. Los parámetros del robot son  $l = 0.125$  m,  $r = 0.05$  m, y  $\delta = \frac{\pi}{6}$  rad con condiciones iniciales cercanas al origen. Las trayectorias propuesta, así como los resultados, se describen a continuación.

#### 6.3.1. Trayectoria circular

La trayectoria deseada es un círculo de radio  $r_c = 0.5$  m, las ganancias del controlador son  $k_p = \text{diag}\{1, 1, 1\}$  mientras que los parámetros del observador son  $\zeta_d = 10$  y  $\omega_n = 0.4$  con

### 6.3 Control del modelo cinemático sin compensación de perturbaciones

ganancias  $\lambda_0 = \text{diag}\{0.0256, 0.0256, 0.0256\}$  (rad/s)<sup>4</sup>,  $\lambda_1 = \text{diag}\{2.56, 2.56, 2.56\}$  (rad/s)<sup>3</sup>,  $\lambda_2 = \text{diag}\{64.32, 64.32, 64.32\}$  (rad/s)<sup>2</sup> y  $\lambda_3 = \text{diag}\{16, 16, 16\}$  rad/s.

En la Figura 6.8 se muestra la trayectoria seguida en el plano  $X - Y$  y la orientación en  $\theta$  en donde podemos ver que la trayectoria real sigue a la trayectoria deseada, lo cual se aprecia de mejor forma en la Figura 6.9 con la convergencia de los errores de seguimiento a cero.

Por otra parte, las señales de control se presentan en la Figura 6.10 y las perturbaciones estimadas por el observador en la Figura 6.11.

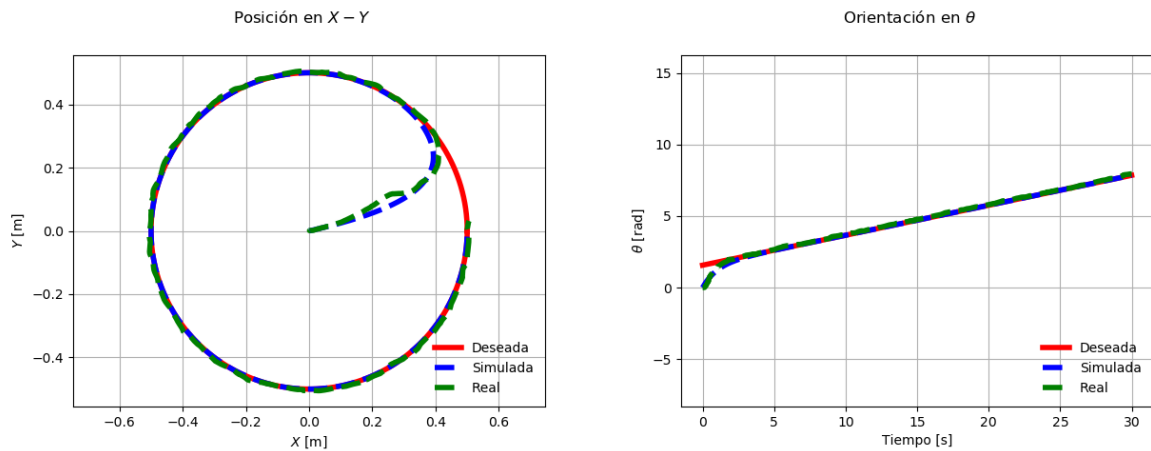


Figura 6.8: Comparación entre el seguimiento de trayectoria.

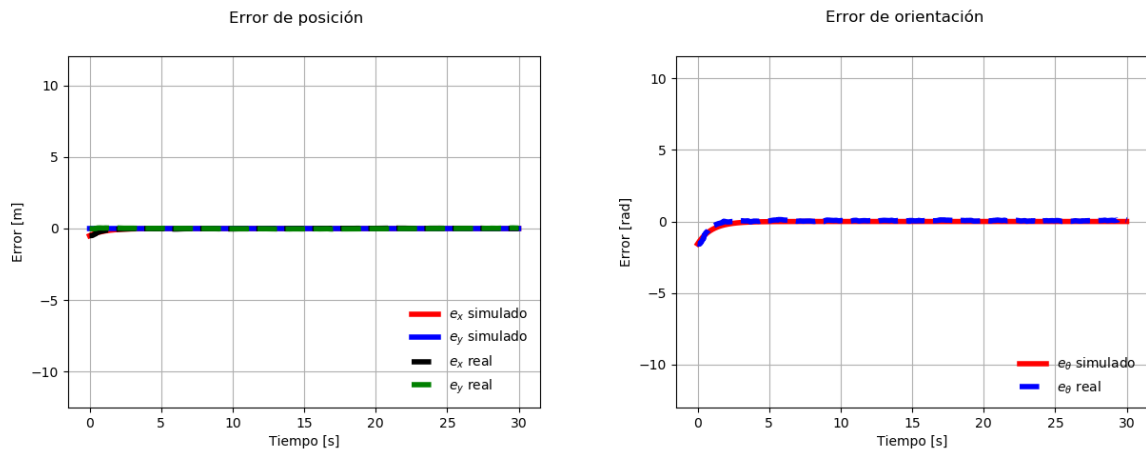


Figura 6.9: Errores de seguimiento de trayectoria.

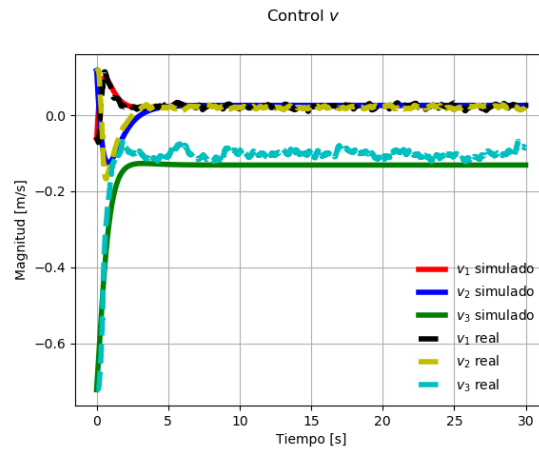


Figura 6.10: Señales de control.

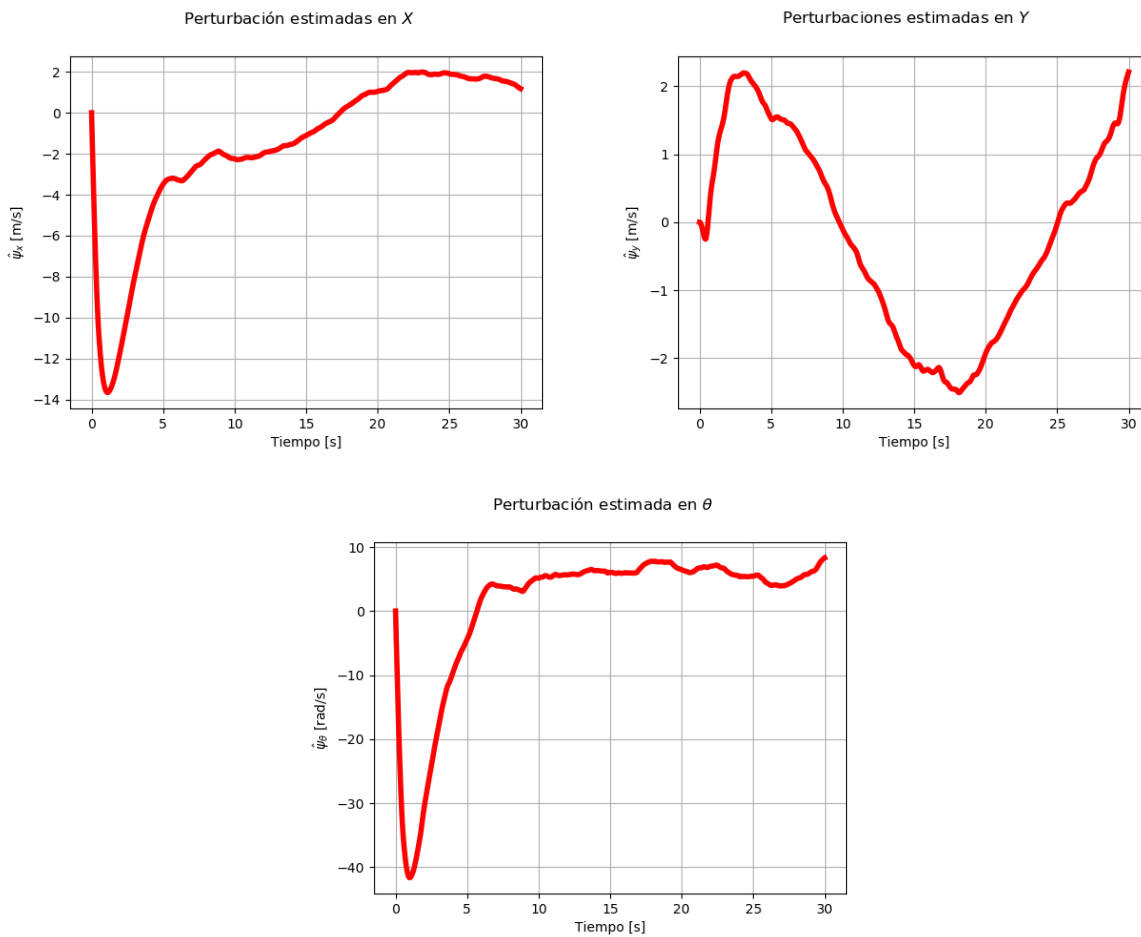


Figura 6.11: Estimación de las perturbaciones con el observador.



### 6.3.2. Trayectoria tipo lemniscata

Para este experimento, la trayectoria deseada es una Lemniscata con un ancho  $A = 0.6$  m y alto de  $B = 0.25$  m, las ganancias del controlador son  $k_p = \text{diag} \{1.5, 1.5, 1.5\}$  mientras que los parámetros del observador son los mismo que para el círculo.

Los resultados del seguimiento de trayectoria se muestran en la Figura 6.12 y en la Figura 6.13 puede observarse que los errores de seguimiento convergen a cero gracias a las señales de control de la Figura 6.14 a pesar de las perturbaciones que se presentan en el robot, las cuáles se muestran en la Figura 6.15.

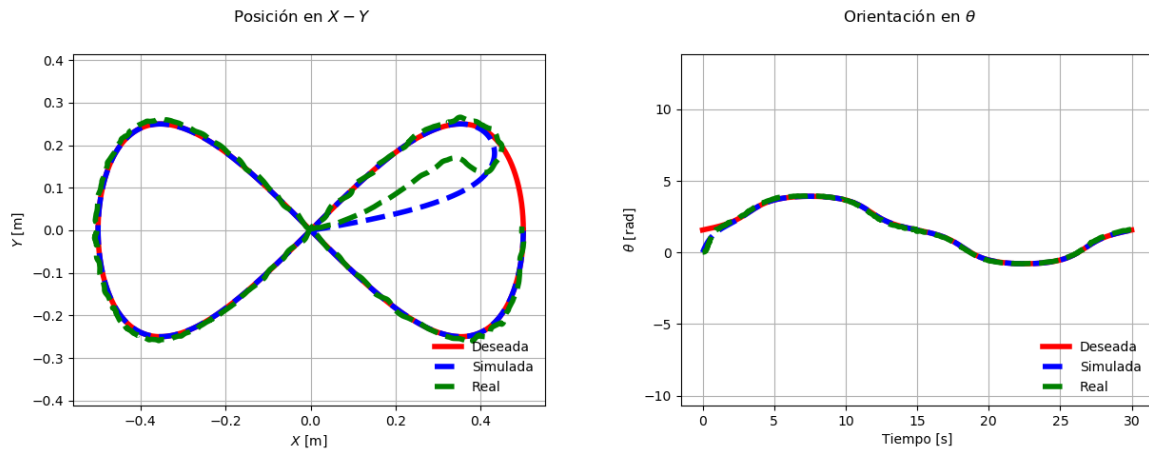


Figura 6.12: Comparación entre el seguimiento de trayectoria.

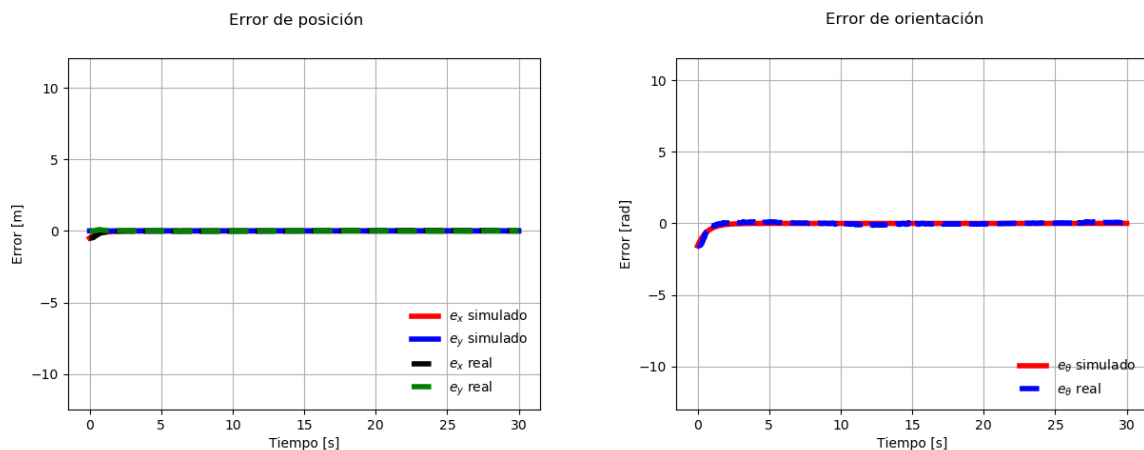


Figura 6.13: Errores de seguimiento de trayectoria.

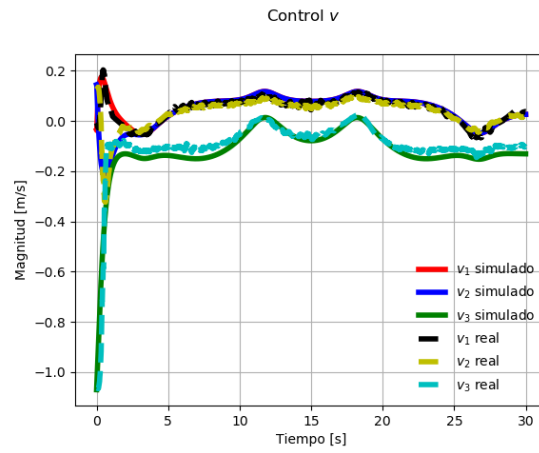


Figura 6.14: Señales de control.

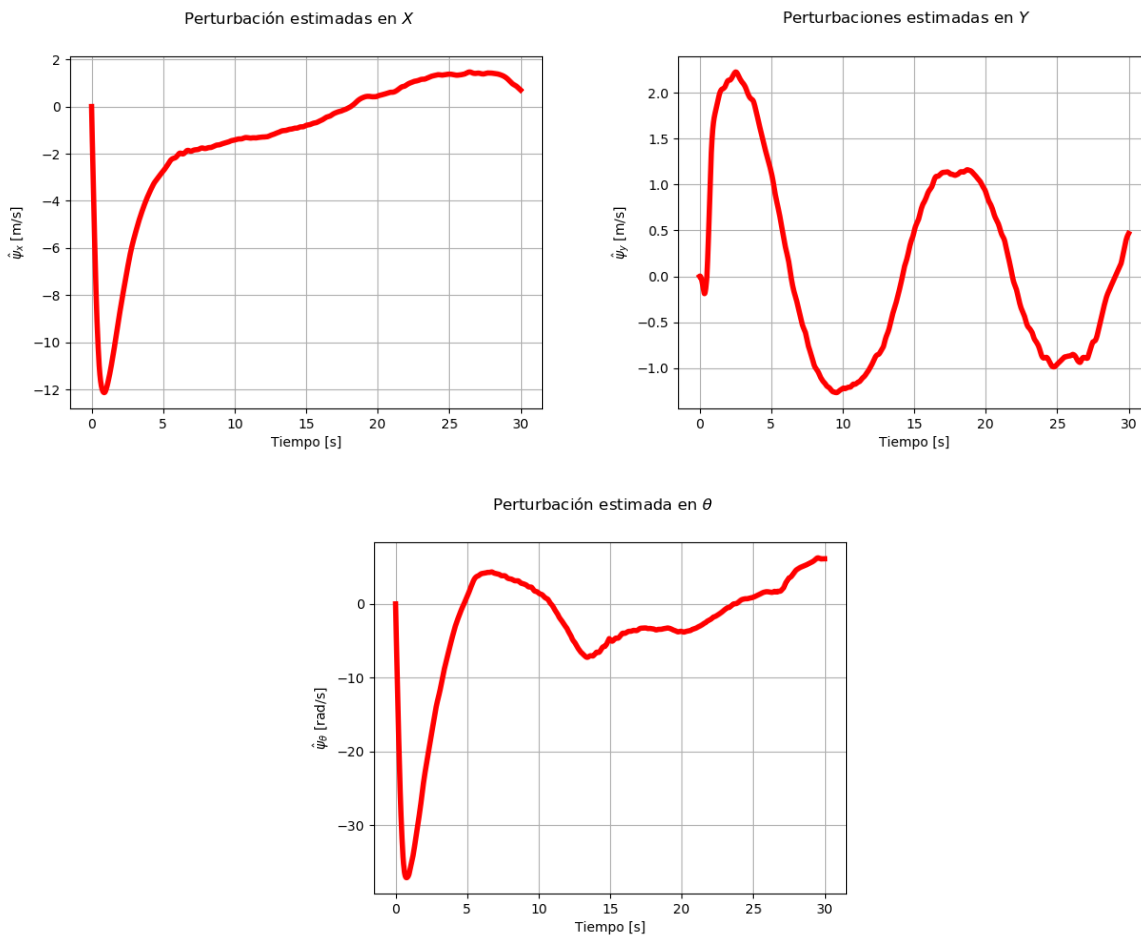


Figura 6.15: Estimación de las perturbaciones con el observador.

### 6.3.3. Trayectoria tipo flor

En este experimento se consideró como trayectoria deseada una flor de cuatro pétalos, cuya ecuación paramétrica es  $\xi_d = [\rho \cos(\omega t) \quad \rho \sin(\omega t) \quad \frac{\pi}{4}]^T$  con  $\rho = A \cos(\omega n t) + B$ ,  $A = \frac{0.8}{3}$  m,  $B = \frac{1.6}{3}$  m,  $T = 30$  s,  $\omega = \frac{2\pi}{4}$  y  $n = 4$ , las ganancias del controlador son  $k_p = \text{diag}\{2, 2, 2\}$  mientras que los parámetros del observador son los mismo que para el círculo y la lemniscata.

En la Figura 6.16 se aprecia que el seguimiento de trayectoria deseado se cumple tanto en el plano  $X - Y$  como en  $\theta$ , lo cual puede comprobarse en la Figura 6.17 en donde los errores de seguimiento convergen a cero.

Por otro lado, la Figura 6.18 muestra las señales de control y la Figura 6.19 las perturbaciones presentes durante el experimento.

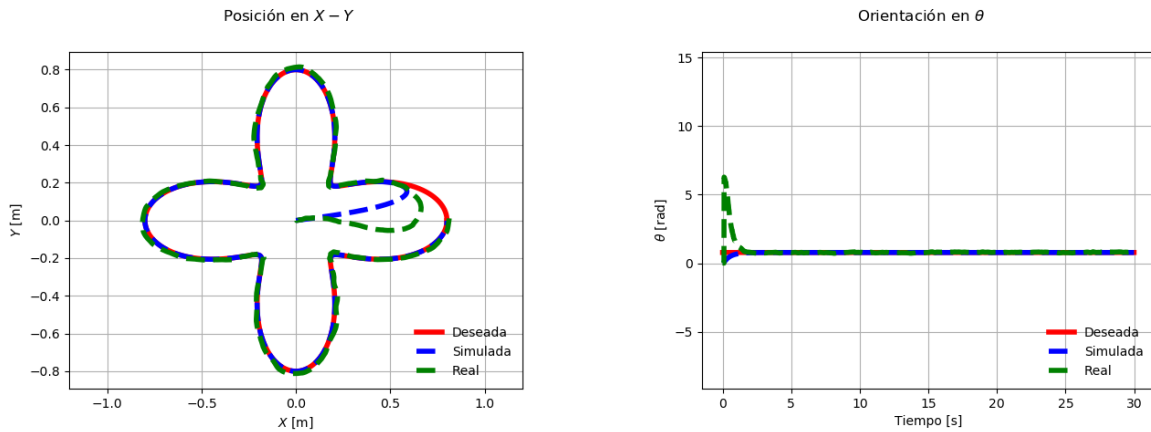


Figura 6.16: Comparación entre el seguimiento de trayectoria.

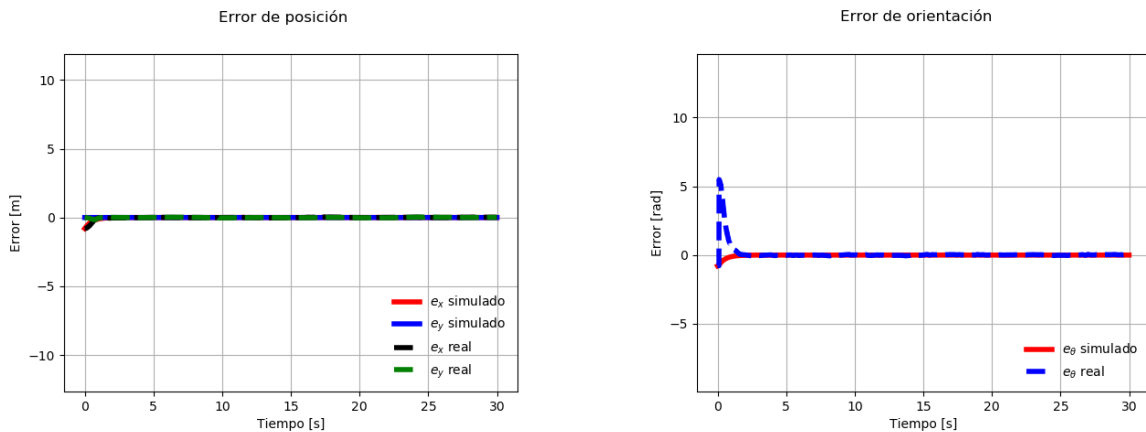


Figura 6.17: Errores de seguimiento de trayectoria.

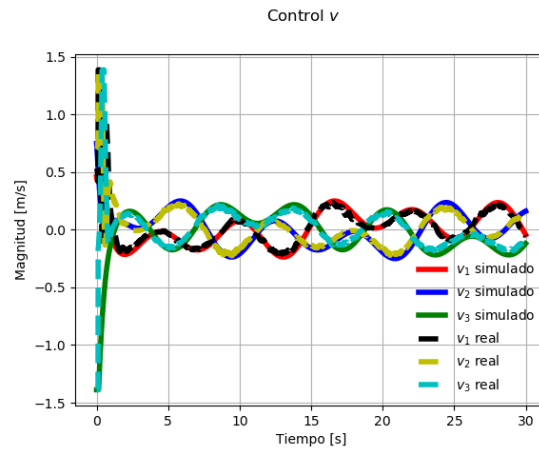


Figura 6.18: Señales de control.

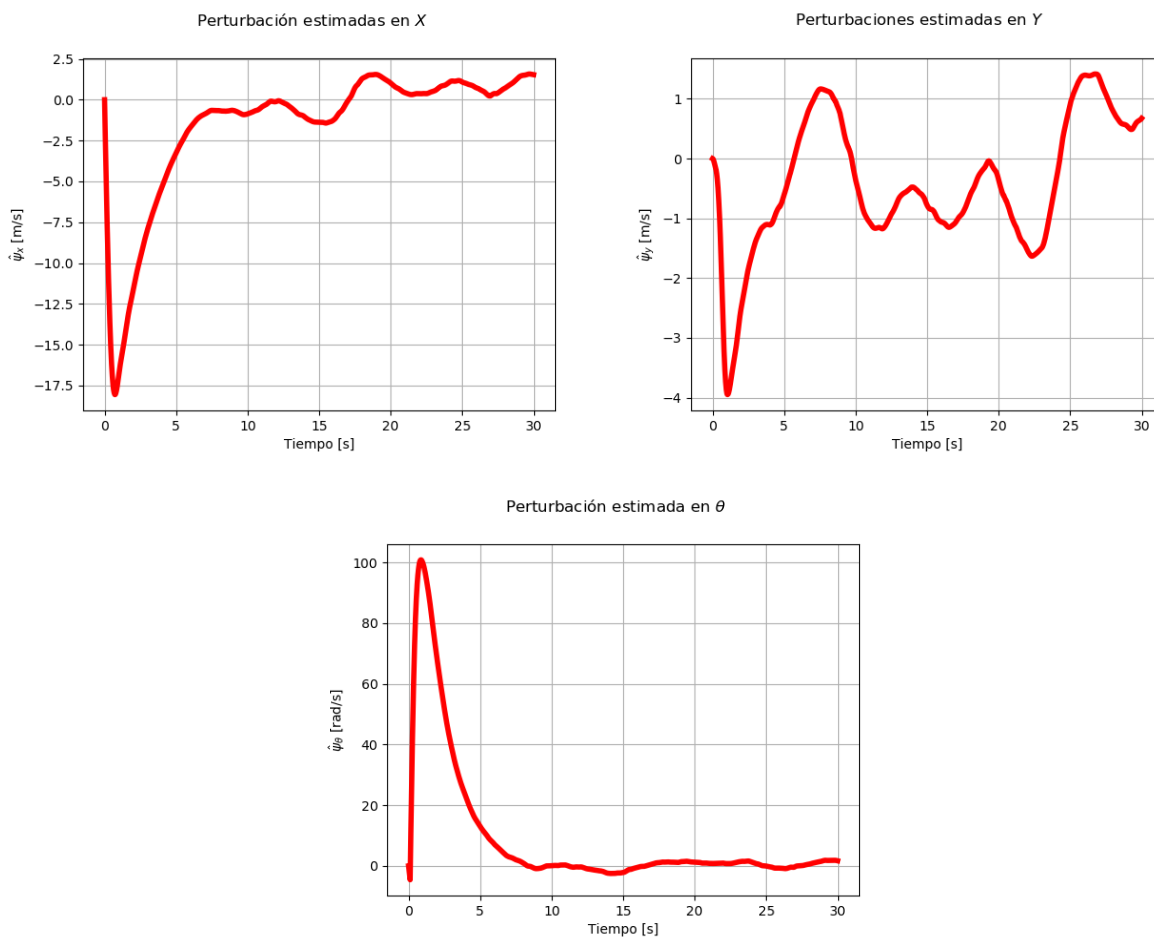


Figura 6.19: Estimación de las perturbaciones con el observador.

## 6.4. Control del modelo cinemático con compensación de perturbaciones

En esta sección se implementa el control dado en (4.6) con un observador de orden  $m = 3$  para el seguimiento de trayectorias en un periodo de 30 s. Los parámetros del robot son los mismos que los definidos anteriormente mientras que la condición inicial está cerca del origen. Las trayectorias propuesta, así como los resultados, se describen a continuación.

### 6.4.1. Trayectoria circular

La trayectoria deseada es un círculo de radio  $r_c = 0.5$  m, las ganancias del controlador son  $k_p = \text{diag}\{0.5, 0.5, 0.5\}$  mientras que los parámetros del observador son  $\zeta_d = 10$  y  $\omega_n = 0.4$  con ganancias  $\lambda_0 = \text{diag}\{0.0256, 0.0256, 0.0256\}$  (rad/s)<sup>4</sup>,  $\lambda_1 = \text{diag}\{2.56, 2.56, 2.56\}$  (rad/s)<sup>3</sup>,  $\lambda_2 = \text{diag}\{64.32, 64.32, 64.32\}$  (rad/s)<sup>2</sup> y  $\lambda_3 = \text{diag}\{16, 16, 16\}$  rad/s.

En la Figura 6.20 se muestra la trayectoria seguida en el plano  $X - Y$  y la orientación en  $\theta$  en donde podemos ver que la trayectoria real sigue a la trayectoria deseada, lo cual se aprecia de mejor forma en la Figura 6.21 con la convergencia de los errores de seguimiento a cero.

Por otra parte, las señales de control se presentan en la 6.22 y las perturbaciones estimadas por el observador en la Figura 6.23.

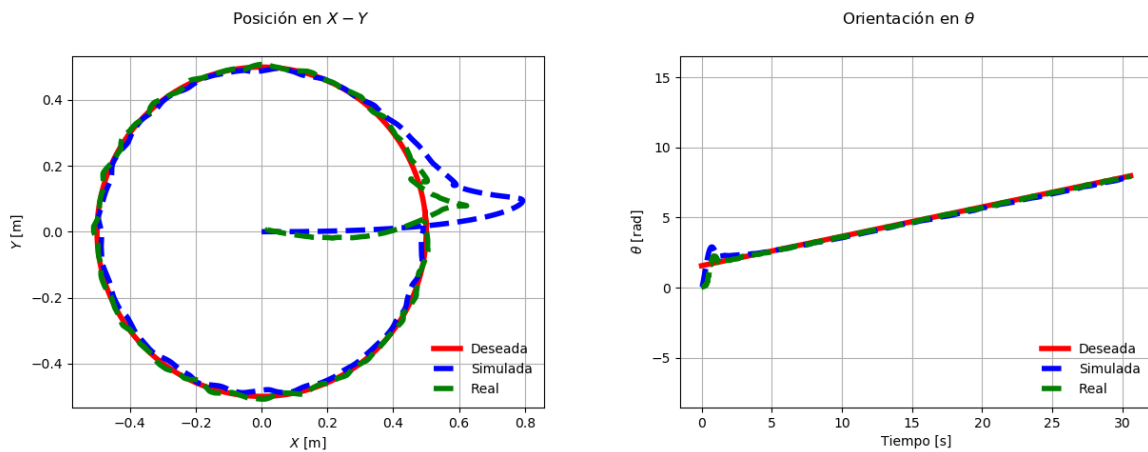


Figura 6.20: Comparación entre el seguimiento de trayectoria.

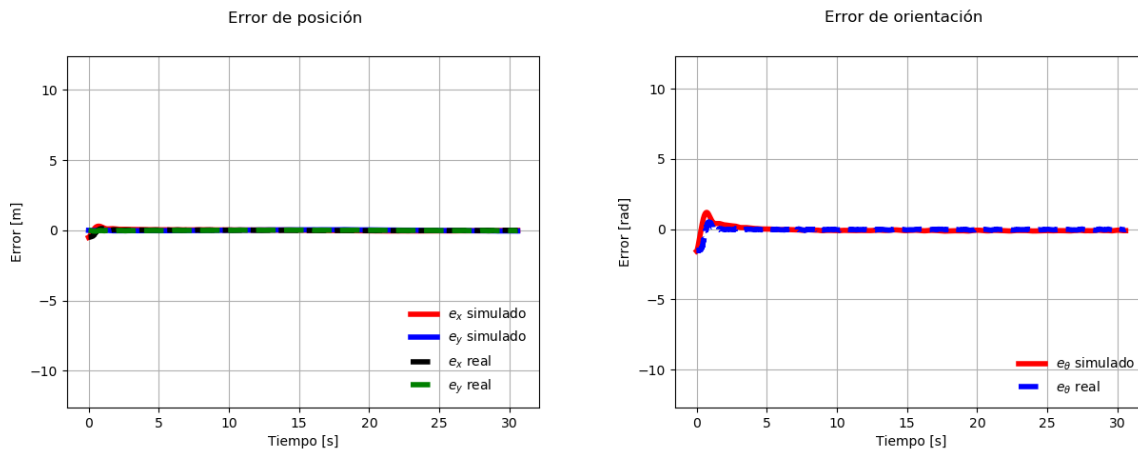


Figura 6.21: Errores de seguimiento de trayectoria.

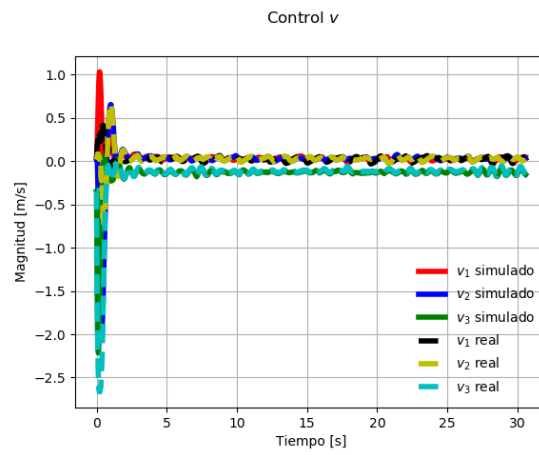


Figura 6.22: Señales de control.

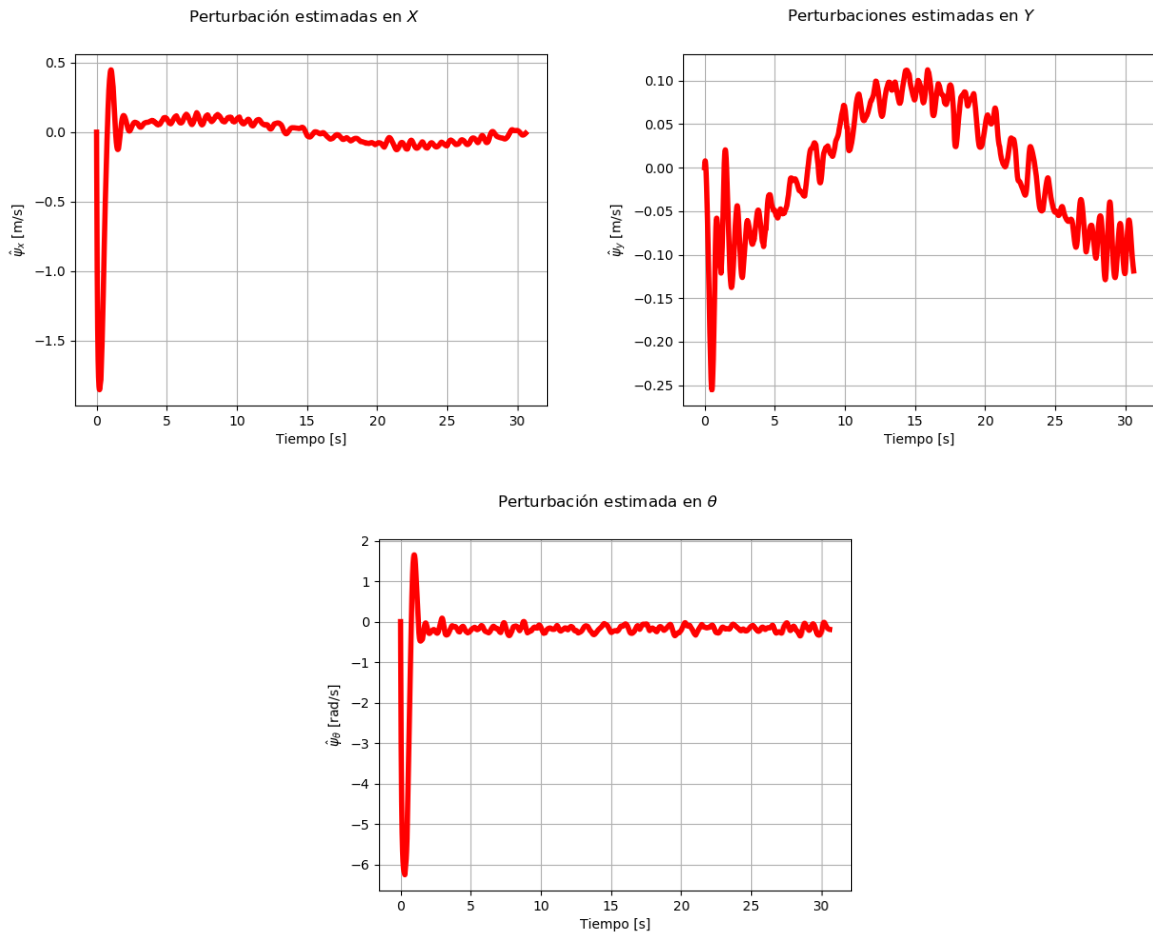


Figura 6.23: Estimación de las perturbaciones con el observador.

### 6.4.2. Trayectoria tipo lemniscata

La trayectoria deseada es una lemniscata de ancho  $A = 0.5$  m y alto de  $B = 0.25$  m, las ganancias del controlador son  $k_p = \text{diag}\{1, 1, 1\}$  mientras que los parámetros del observador son los mismos que para el círculo.

El seguimiento de la trayectoria se puede ver en la Figura 6.24 tanto en el plano  $X - Y$  como en  $\theta$ , en la Figura 6.25 se observa que los errores de seguimiento convergen a cero, en la Figura 6.26 se ven las señales de control y en la Figura 6.27 las perturbaciones estimadas por el observador.

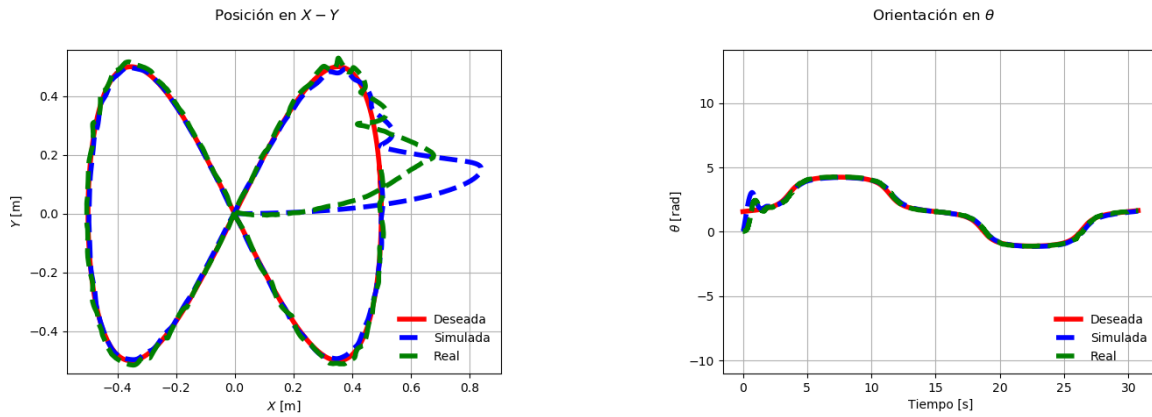


Figura 6.24: Comparación entre el seguimiento de trayectoria.

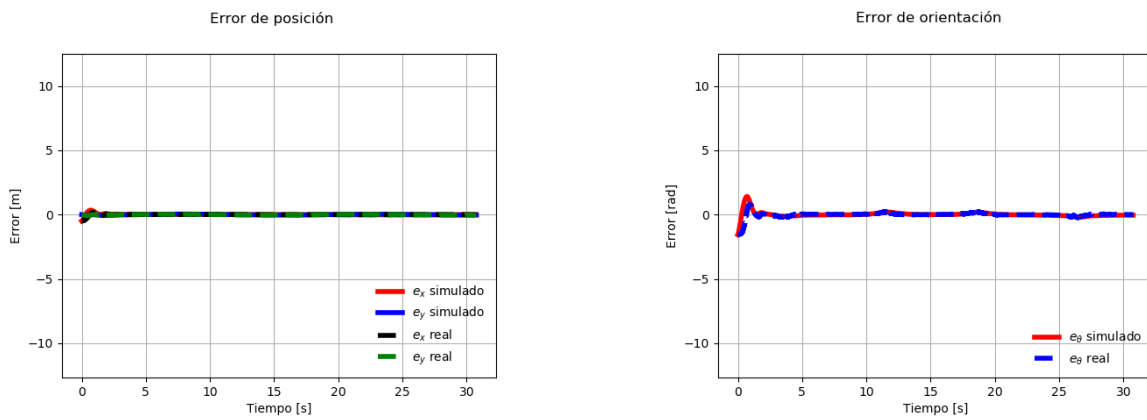


Figura 6.25: Errores de seguimiento de trayectoria.

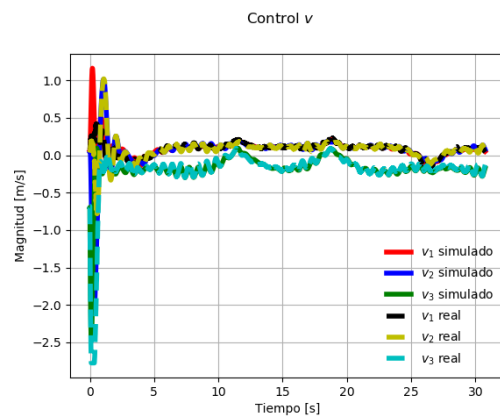


Figura 6.26: Señales de control.



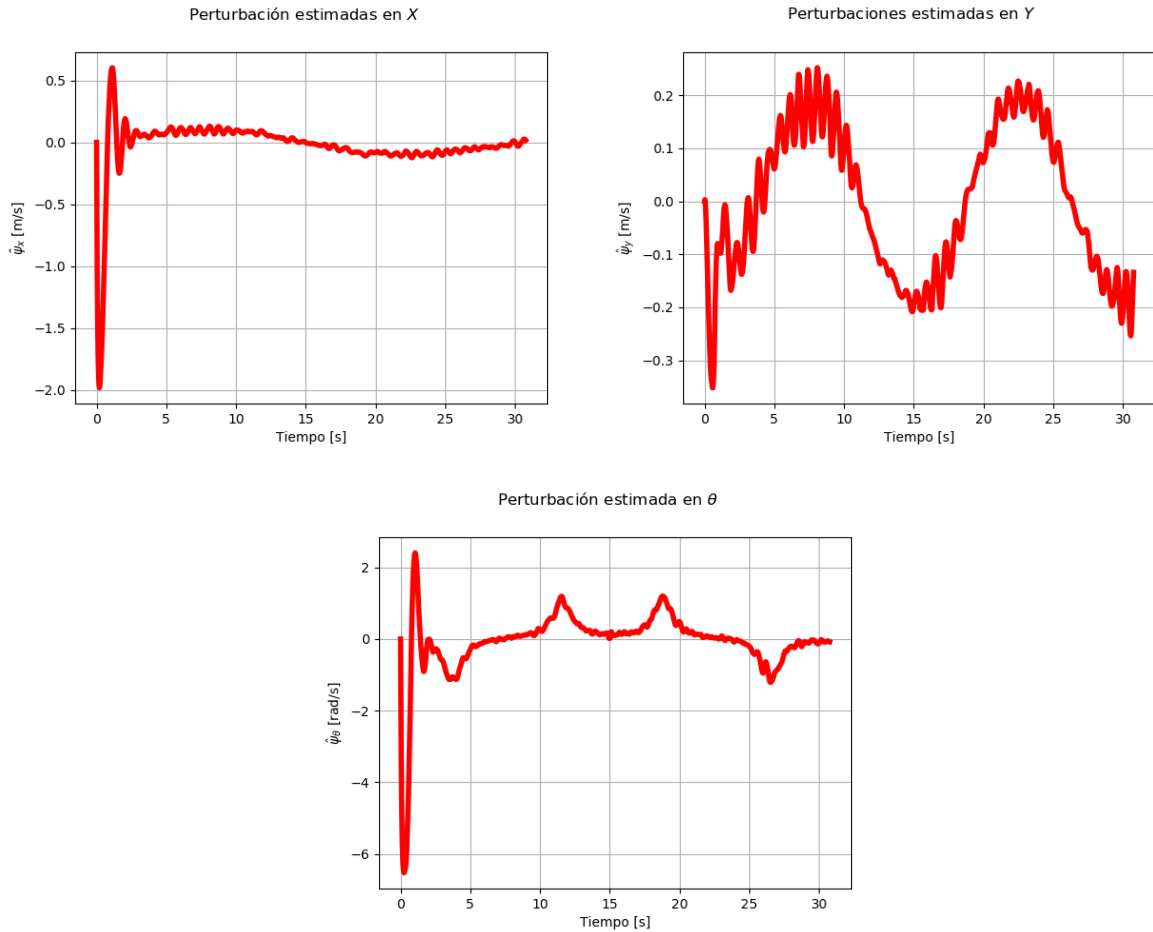


Figura 6.27: Estimación de las perturbaciones con el observador.

### 6.4.3. Trayectoria tipo flor

La trayectoria deseada es una flor de cuatro pétalos con parámetros  $A = \frac{0.8}{3}$  m y  $B = \frac{1.6}{3}$  m, las ganancias del controlador son  $k_p = \text{diag}\{1, 1, 1\}$  mientras que los parámetros del observador son  $\zeta_d = 7$  y  $\omega_n = 0.58$  con ganancias  $\lambda_0 = \text{diag}\{0.113, 0.113, 0.113\}$  (rad/s)<sup>4</sup>,  $\lambda_1 = \text{diag}\{5.463, 5.463, 5.463\}$  (rad/s)<sup>3</sup>,  $\lambda_2 = \text{diag}\{66.60, 66.60, 66.60\}$  (rad/s)<sup>2</sup> y  $\lambda_3 = \text{diag}\{16.24, 16.24, 16.24\}$  rad/s.

Los resultados del seguimiento de la trayectoria deseada se muestran en la Figura 6.28 mientras que los errores de seguimiento se muestran en la Figura 6.29.

Las señales de control se pueden apreciar en la Figura 6.30 mientras que las perturbaciones estimadas por el observador en la Figura 6.31.

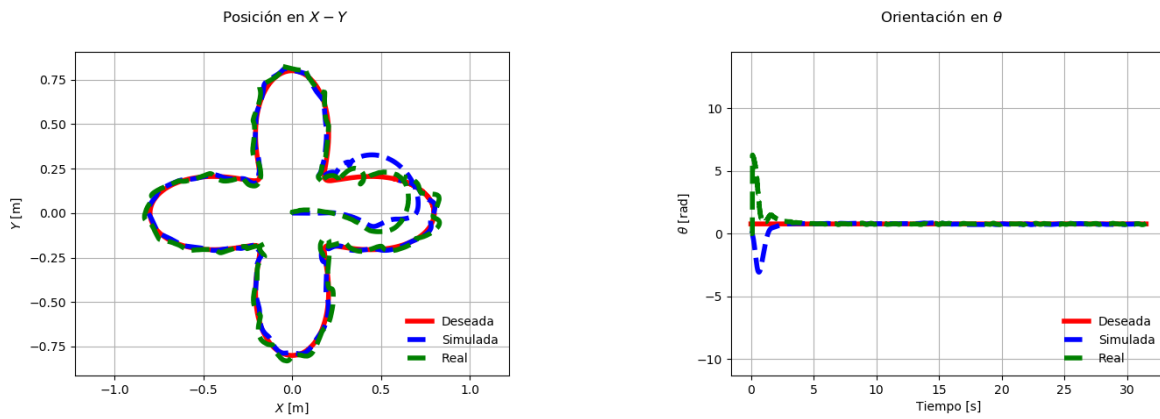


Figura 6.28: Comparación entre el seguimiento de trayectoria.

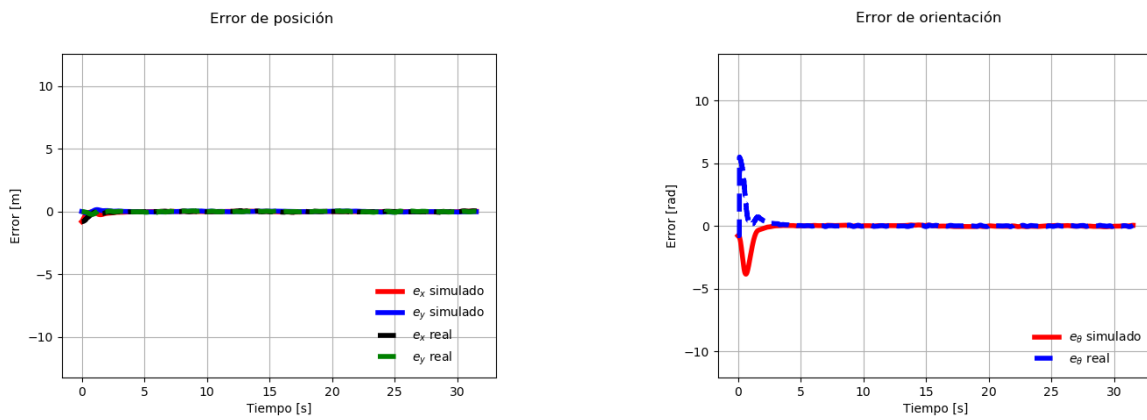


Figura 6.29: Errores de seguimiento de trayectoria.

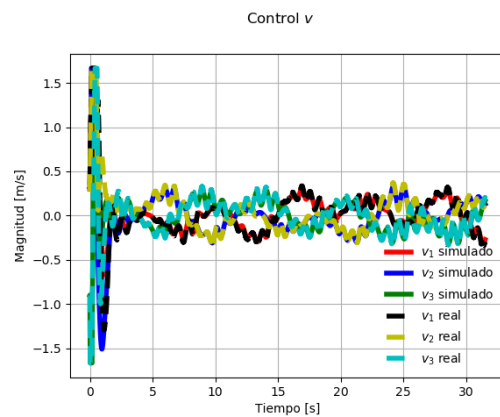


Figura 6.30: Señales de control.

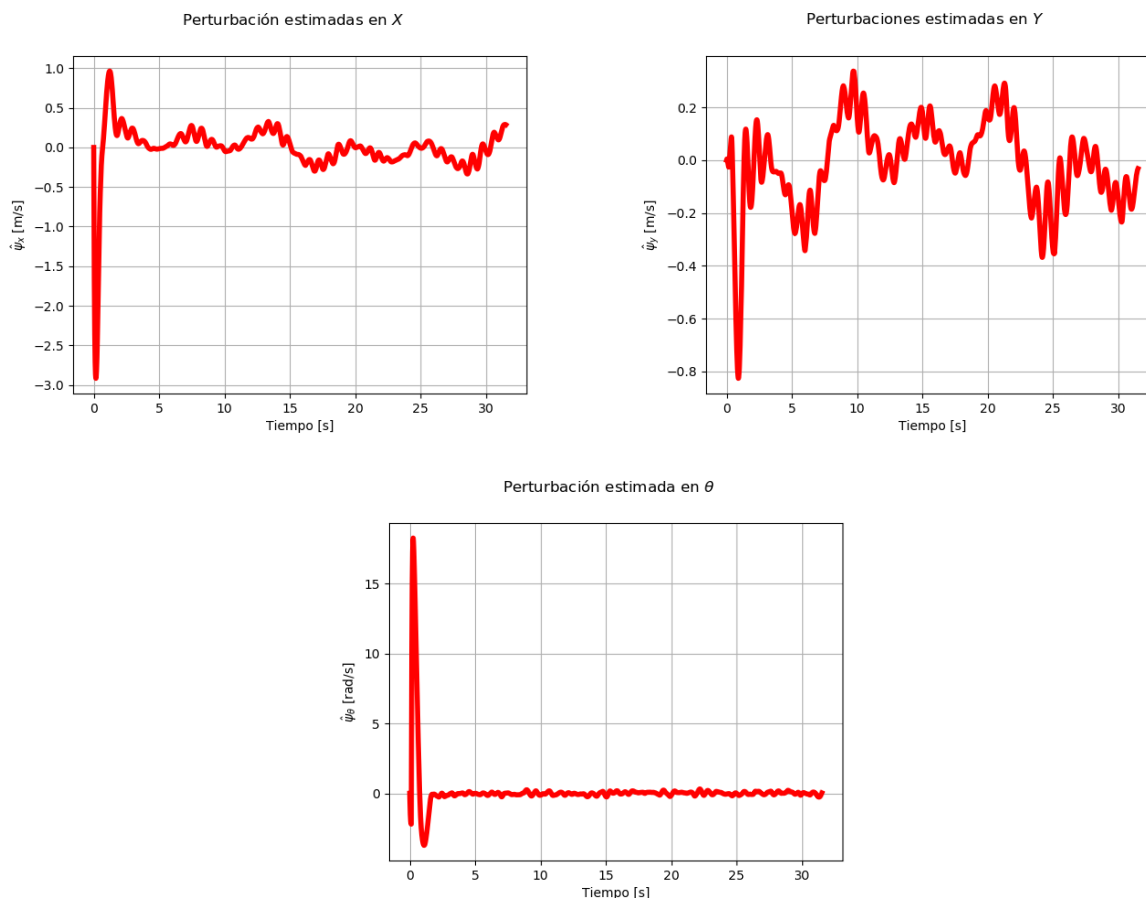


Figura 6.31: Estimación de las perturbaciones con el observador.

## 6.5. Control del modelo cinemático con compensación de perturbaciones aplicando fuerzas externas

Finalmente, se realizaron los mismos experimentos de la Sección 6.4 pero, aplicando fuerzas externas a través de un cable sujeto al cuerpo del robot, el cual era arrastrado para deslizar y patinar al robot. Dichos resultados se muestran a continuación.

### 6.5.1. Trayectoria circular

En la Figura 6.32 se puede apreciar que el seguimiento de trayectoria sufre algunas desviaciones debido a las fuerzas externas aplicadas, sin embargo, en la Figura 6.33 se observa que el error de seguimiento vuelve a converger a cero gracias a las señales de control mostradas en la Figura 6.34. Además, las perturbaciones externas se pueden apreciar en las gráficas de la Figura 6.35, en donde el observador de perturbaciones es capaz de detectarlas.

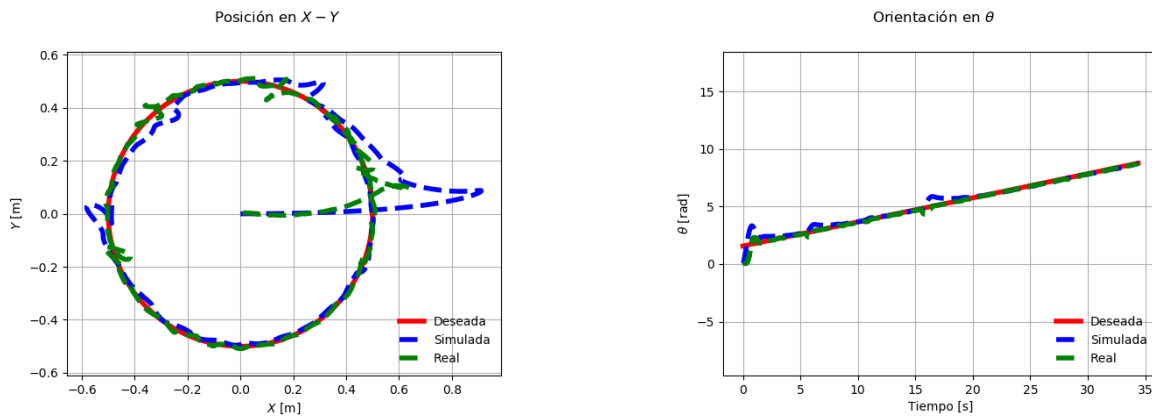


Figura 6.32: Comparación entre el seguimiento de trayectoria.

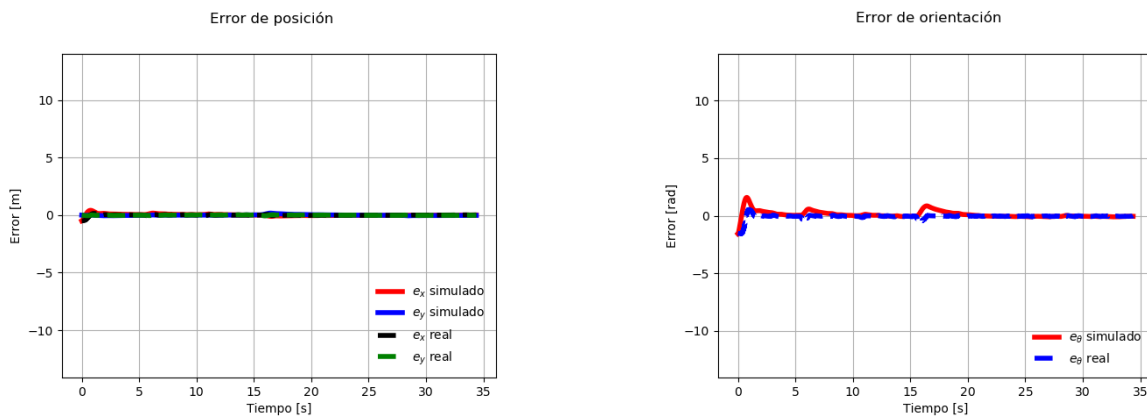


Figura 6.33: Errores de seguimiento de trayectoria.

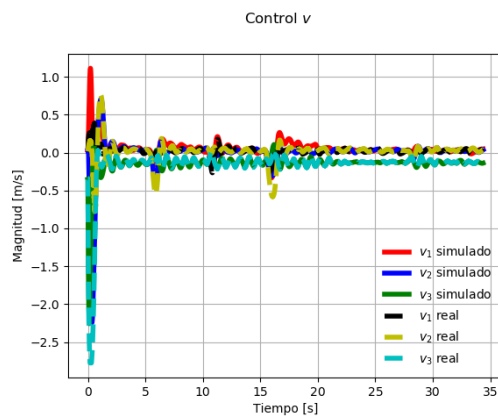


Figura 6.34: Señales de control.

## 6.5 Control del modelo cinemático con compensación de perturbaciones aplicando fuerzas externas

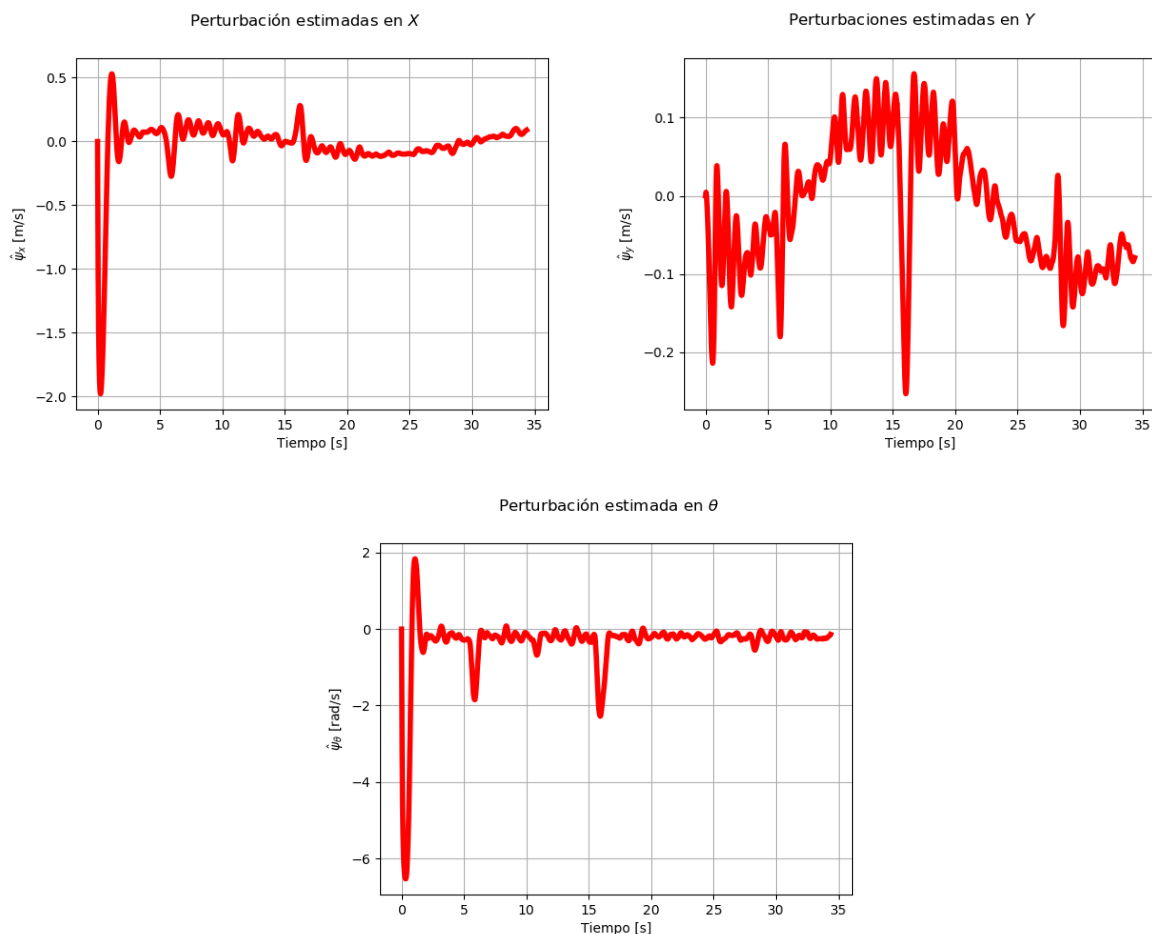


Figura 6.35: Estimación de las perturbaciones con el observador.

### 6.5.2. Trayectoria tipo lemniscata

Las perturbaciones externas aplicadas al seguimiento de trayectoria se pueden ver en la Figura 6.36, el error de seguimiento se muestra en la Figura 6.37, las señales de control en la Figura 6.38 y la estimación de las perturbaciones en las gráficas de la Figura 6.39.

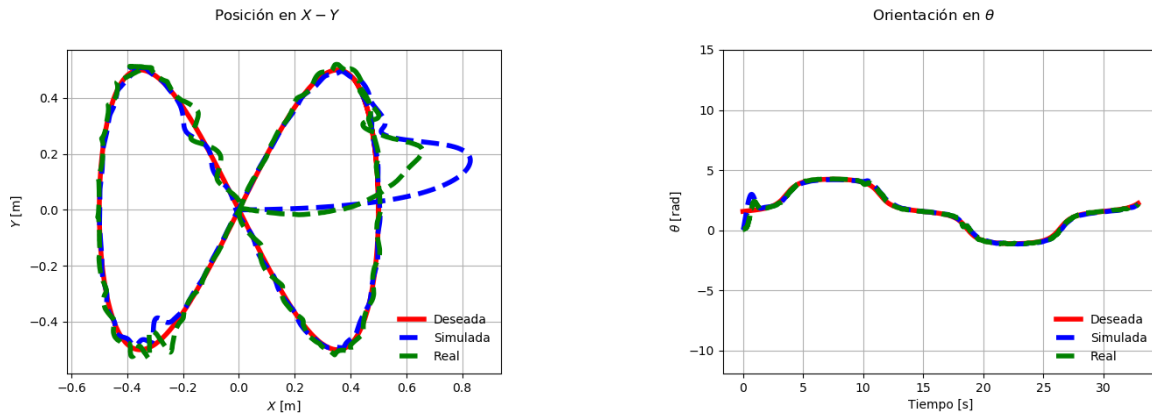


Figura 6.36: Comparación entre el seguimiento de trayectoria.

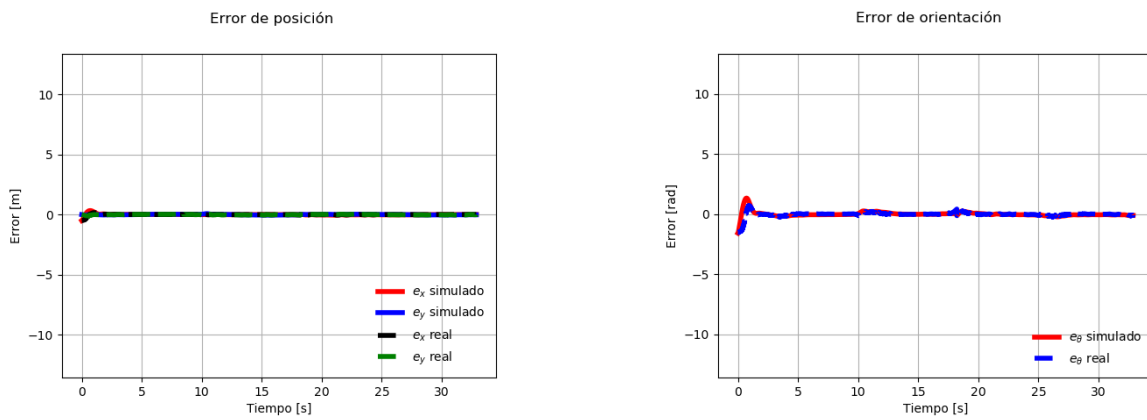


Figura 6.37: Errores de seguimiento de trayectoria.

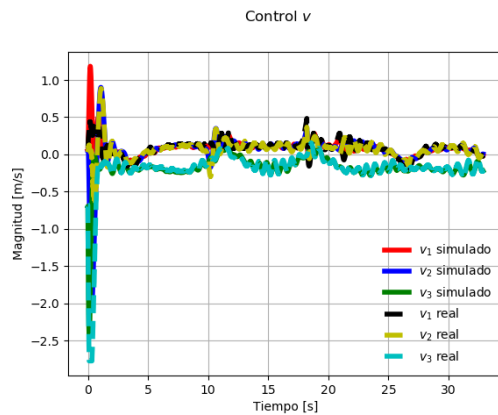


Figura 6.38: Señales de control.

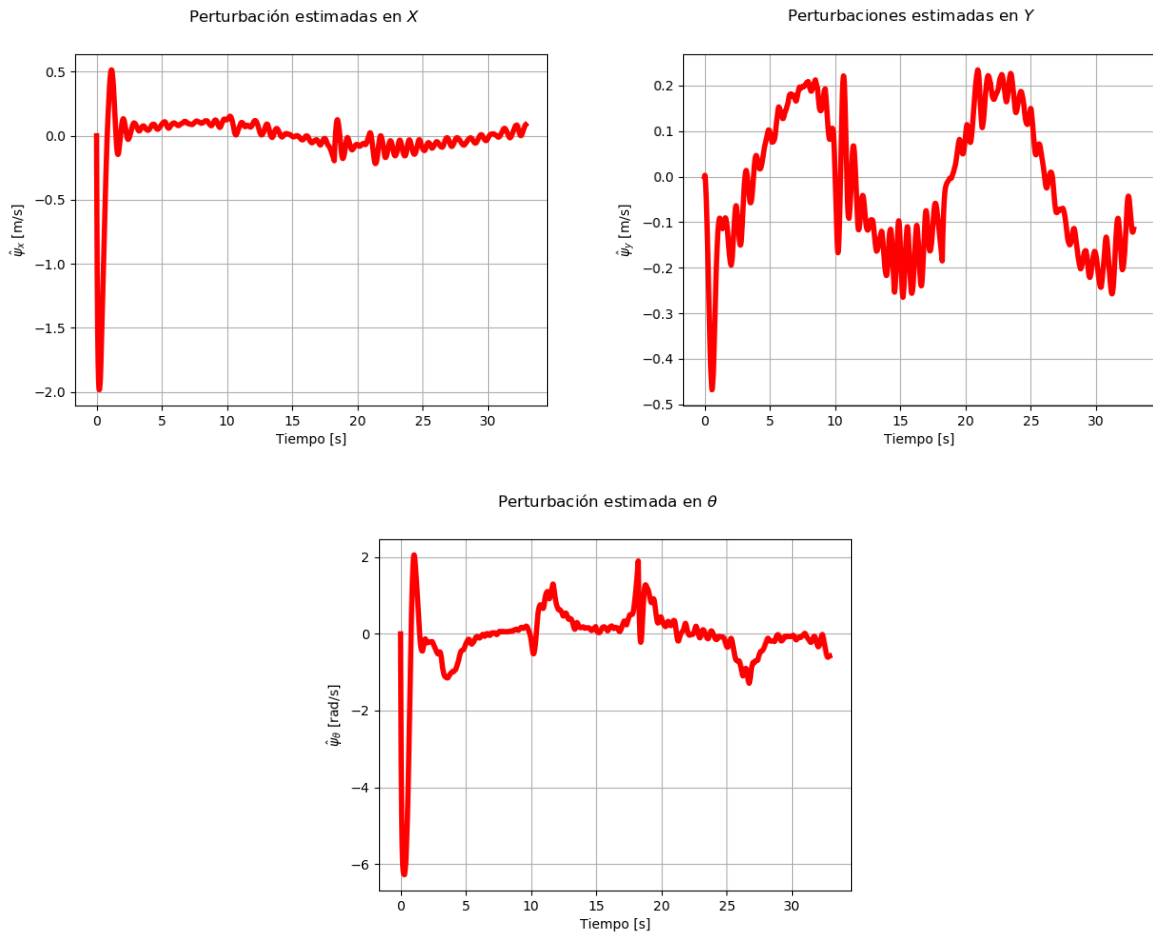


Figura 6.39: Estimación de las perturbaciones con el observador.

### 6.5.3. Trayectoria tipo flor

El seguimiento de trayectoria tanto en el plano  $X - Y$  como en  $\theta$  se observa en la Figura 6.40, en donde a pesar de las fuerzas externas aplicadas podemos ver que los errores de seguimiento mostrados en la Figura 6.41 vuelven a converger en cero.

Las señales de control aplicadas se encuentran en la Figura 6.42, las cuales se vuelven más grandes cada que el observador detecta alguna perturbación como las que se muestran en la Figura 6.43 con el fin de que el seguimiento de la trayectoria vuelva a converger.

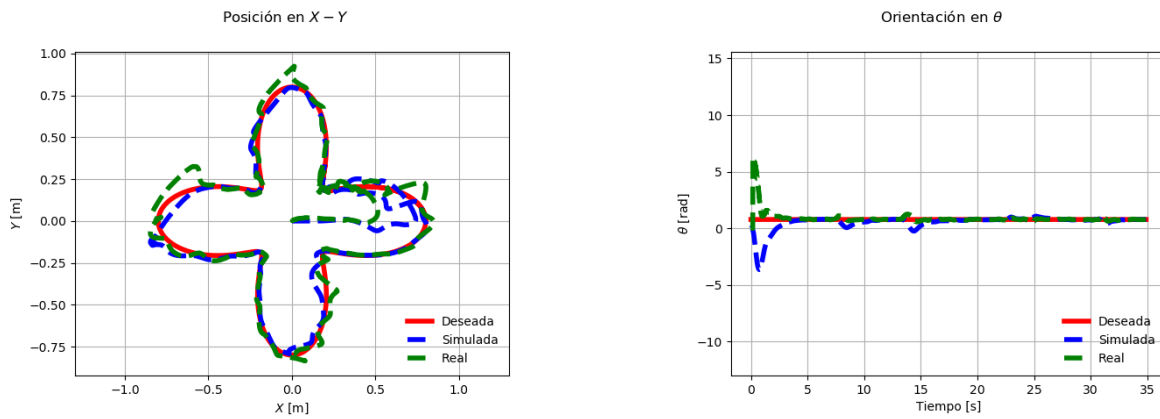


Figura 6.40: Comparación entre el seguimiento de trayectoria.

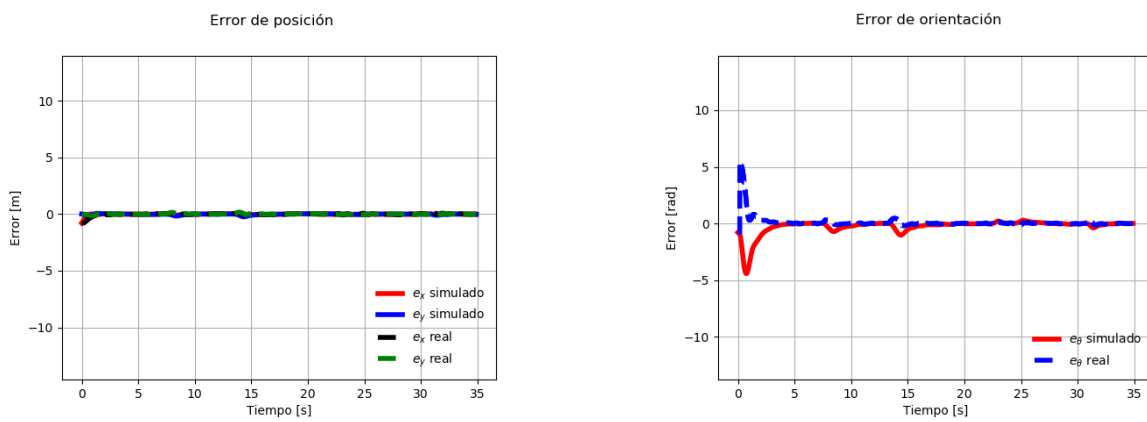


Figura 6.41: Errores de seguimiento de trayectoria.

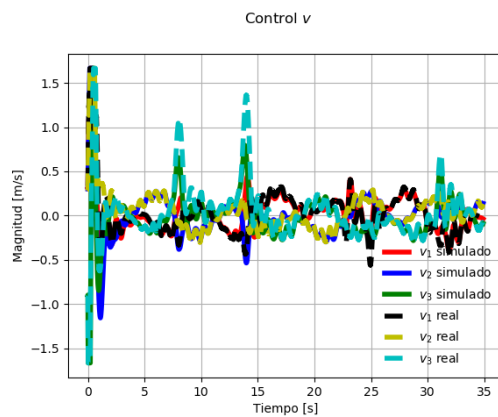


Figura 6.42: Señales de control.



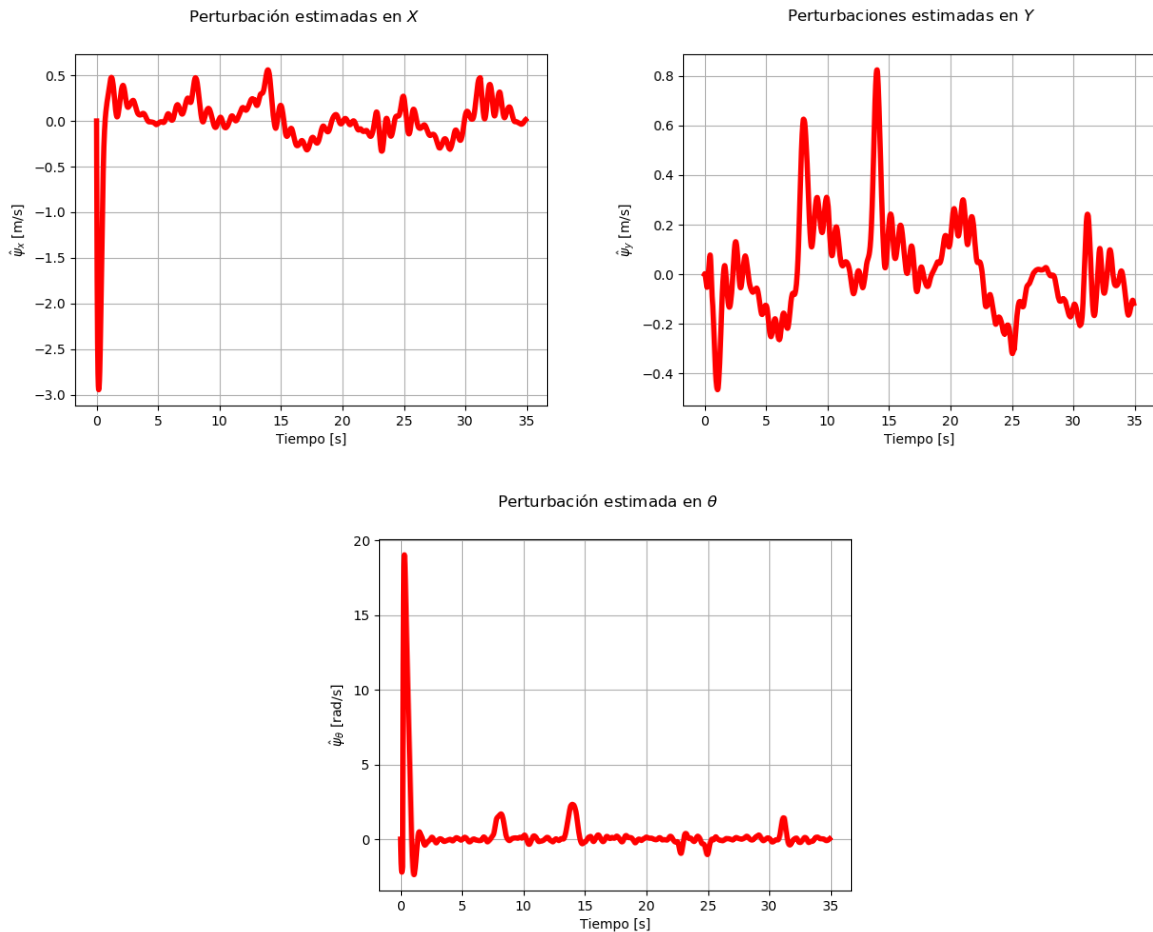


Figura 6.43: Estimación de las perturbaciones con el observador.

## 6.6. Discusión de los resultados

Una vez realizados los experimentos de control cinemático con perturbaciones de deslizamiento y patinado para seguimiento de trayectorias con y sin compensación de perturbaciones se puede observar que el objetivo de seguimiento se cumple en ambos casos. Sin embargo, al no considerar las perturbaciones, las señales de control presentan una mayor amplitud, en comparación con las señales de control con compensación de las perturbaciones.

Por otra parte, en los resultados mostrados para el control sin compensación de perturbaciones, se puede apreciar que dichas perturbaciones se encuentran presentes, aún sin aplicar ninguna fuerza externa. Esto se puede corregir implementado un observador que permita estimar las perturbaciones y de esta manera agregarlas al control para que se cancelen con las perturbaciones reales.

Con el fin de evaluar el rendimiento del control para el modelo cinemático con observador de perturbaciones se propusieron tres trayectorias diferentes, el círculo, siendo una trayectoria sencilla no presentó mayor dificultad para llevar a cabo el seguimiento a pesar de agregar fuerzas externas, por otro lado, la lemniscata nos mostró que incluso sin aplicar cargas externas existen perturbaciones al momento en el que el robot gira en sus extremos derecho e izquierdo debido a la velocidad en la que va el robot y, finalmente, con la flor de cuatro pétalos al ser una trayectoria más compleja se pudo notar que el robot prácticamente se detiene o reduce considerablemente su velocidad en las curvas más pequeñas para posteriormente continuar con el seguimiento.

Finalmente, es importante destacar que los experimentos en tiempo real para el modelo dinámico no se llevaron a cabo debido a que la plataforma experimental del robot no cuenta con el equipo necesario para poder aplicar un par sobre las ruedas y así generar las señales de control.

## Capítulo 7

# Conclusiones y trabajo futuro

Las conclusiones de esta trabajo se enlistan a continuación.

- A partir del análisis de la cinemática del robot móvil omnidireccional, se desarrolló un modelo que considera tanto el deslizamiento longitudinal y lateral del cuerpo así como el patinado en las ruedas. Este enfoque permite una representación más completa y precisa del comportamiento del robot. Además, el desarrollo del modelo dinámico perturbado proporciona un análisis más exhaustivo al incluir parámetros físicos del robot, como las masas y los momentos de inercia.
- Dado que las perturbaciones son desconocidas, el diseño de observadores GPIO permitió aproximar su comportamiento. Esto facilitó su consideración en el controlador. Por una parte, en el modelo cinemático mediante una retroalimentación de estados, mientras que en el modelo dinámico, a través de la estrategia de par calculado, lo que permitió un seguimiento preciso de la trayectoria. Cabe destacar que el observador para el modelo cinemático se diseñó considerando diferentes órdenes  $m = 1, 2, 3$ , siendo  $m = 3$  el que mejor se aproximó al sistema real. Con base en lo anterior, para el modelo dinámico se diseñó directamente un observador de orden ( $m = 3$ ). Asimismo, las ganancias de los observadores y controladores se ajustaron para mejorar el seguimiento de la trayectoria.
- Las estrategias de control desarrolladas se probaron en una plataforma experimental, lo que permitió validar los resultados teóricos y de simulación. A pesar de algunas fallas internas en la plataforma del robot, los resultados obtenidos demostraron una buena estimación de las perturbaciones y un control efectivo en el seguimiento de las trayectorias.
- Debido a que las señales de control del modelo dinámico obtenido son pares, no fue posible realizar experimentos en tiempo real. Sin embargo, las simulaciones numéricas mostraron resultados esperados. Es importante resaltar que el modelo dinámico se dejó únicamente en función de la matriz de masa, la matriz de transformación y las señales de control, permitiendo que el vector de velocidad fuera estimado por el mismo observador como una perturbación. Esto facilita futuros experimentos en tiempo real, donde solo es posible medir la posición.

Con base en las conclusiones obtenidas, se identifican varias áreas de investigación y desarrollo que podrían explorarse en futuros trabajos. En ese sentido, a continuación, se presentan algunas ideas:

- **Experimentos en tiempo real del modelo dinámico:** Adaptar el algoritmo de control y observación para su implementación en la plataforma experimental y validar los resultados obtenidos de forma teórica.
- **Pruebas en diferentes entornos:** Realizar pruebas sobre distintas superficies y con trayectorias más complejas para validar la robustez y efectividad de los modelos y estrategias de control desarrolladas.
- **Optimización de ganancias:** Desarrollar métodos automáticos para la optimización de las ganancias de los controladores y observadores, con el fin de mejorar el rendimiento del sistema en tiempo real.

# Bibliografía

- [1] G. Bermudez et al., «Robots móviles. Teoría, aplicaciones y experiencias,» *Tecnura*, vol. 5, n.º 10, págs. 6-17, 2002.
- [2] V. R. Barrientos-Sotelo, J. R. García-Sánchez y R. Silva-Ortigoza, «Robots móviles: Evolución y estado del arte,» *Polibits*, n.º 35, págs. 12-17, 2007.
- [3] A. Ollero-Baturone, *Robótica: manipuladores y robots móviles*. Marcombo, 2005.
- [4] C. M. Sánchez. «Robots móviles de ruedas: Generalidades.» (2014), dirección: <https://www.boletin.upiita.ipn.mx/index.php/ciencia/593-cyt-numero-45/1081-robots-moviles-de-ruedas-generalidades> (visitado 22-02-2024).
- [5] C. Canudas de Wit, B. Siciliano y G. Bastin, *Theory of robot control*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [6] D. Garcia Silla, J. E. Vargas Soto, G. Díaz Delgado y A. Gonzalez Gutiérrez, *Diseño Mecatrónico de un Robot Móvil*. Universidad Autónoma de Querétaro, 2016.
- [7] D. A. Alvarado-Juarez, M. G. Villarreal-Cervantes y G. Sepúlveda Cervantes, «Modelo cinemático y dinámico de un robot móvil omnidireccional.,»
- [8] V. Muñoz-Martínez, G. Gil-Gómez y A. García-Cerezo, «MODELADO CINE-MATICO Y DINAMICO DE UN ROBOT MÓVIL OMNI-DIRECCIONAL.,» *Malaga*, vol. 9, 2003.
- [9] D. Garcia-Olivares, M. Velasco-Villa y R. Castro-Linares, «Tracking Control for Differential Mobile Robots With Skidding and Slipping effects,» en *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático*, 2020, págs. 1-6.
- [10] H. Ríos-Barajas, «Diseño de Control Robusto para Robots Móviles Diferenciales,» 2019.
- [11] Y. Suyang, Y. Changlong, J. Chunying y L. Han, «A study on slippage and tip-over stability for an omnidirectional mobile robot with longitudinal MY-wheels,» en *2019 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation (ICMA)*, IEEE, 2019, págs. 1484-1489.
- [12] C. Chen, H. Gao, L. Ding et al., «Tracking Control of Wheeled Mobile Robots with Slippage Based on Active Disturbance Rejection Control,» en *2017 IEEE 7th Annual International Conference on CYBER Technology in Automation, Control, and Intelligent Systems (CYBER)*, IEEE, 2017, págs. 1591-1596.

- 
- [13] R. L. Williams, B. E. Carter, P. Gallina y G. Rosati, «Dynamic model with slip for wheeled omnidirectional robots,» *IEEE transactions on Robotics and Automation*, vol. 18, n.º 3, págs. 285-293, 2002.
- [14] R. Balakrishna y A. Ghosal, «Modeling of slip for wheeled mobile robots,» *IEEE transactions on Robotics and Automation*, vol. 11, n.º 1, págs. 126-132, 1995.
- [15] D. Stonier, S.-H. Cho, S.-L. Choi, N. S. Kuppaswamy y J.-H. Kim, «Nonlinear slip dynamics for an omniwheel mobile robot platform,» en *Proceedings 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, IEEE, 2007, págs. 2367-2372.
- [16] A. Andreev y O. Peregudova, «On the trajectory tracking control of a wheeled mobile robot based on a dynamic model with slip,» en *2020 15th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference)(STAB)*, IEEE, 2020, págs. 1-4.
- [17] B. Vandewal, J. Gillis, G. Pipeleers y J. Swevers, «Simplified Wheel Slip Modeling and Estimation for Omnidirectional Vehicles,» en *2022 IEEE 17th International Conference on Advanced Motion Control (AMC)*, IEEE, 2022, págs. 389-395.
- [18] K. Watanabe, «Control of an omnidirectional mobile robot,» en *1998 Second International Conference. Knowledge-Based Intelligent Electronic Systems. Proceedings KES'98 (Cat. No. 98EX111)*, IEEE, vol. 1, 1998, págs. 51-60.
- [19] L. F. L. Sánchez. «Control cinemático y dinámico de robots omnidireccionales.» (), dirección: [https://femexrobotica.org/eir2016-2017/wp-content/uploads/robots\\_omnidireccionales.pdf](https://femexrobotica.org/eir2016-2017/wp-content/uploads/robots_omnidireccionales.pdf). (accessed: 15.12.2023).
- [20] C. Morales e I. Soto, «Control difuso para el seguimiento de trayectoria de un robot móvil,» *Universidad Autónoma de Ciudad Juárez*, págs. 1-13, 2020.
- [21] Y. P. Li, D. Oetomo, M. Ang y C. W. Lim, «Torque distribution and slip minimization in an omnidirectional mobile base,» en *ICAR'05. Proceedings., 12th International Conference on Advanced Robotics, 2005.*, IEEE, 2005, págs. 567-572.
- [22] K. D. Thi et al., «Trajectory tracking control for four-wheeled omnidirectional mobile robot using Backstepping technique aggregated with sliding mode control,» en *2019 First International Symposium on Instrumentation, Control, Artificial Intelligence, and Robotics (ICA-SYMP)*, IEEE, 2019, págs. 131-134.
- [23] H. Wang, K. Xu y H. Zhang, «Adaptive finite-time tracking control of nonlinear systems with dynamics uncertainties,» *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2022.
- [24] Q. Tan, C. Qiu, J. Huang, Y. Yin, X. Zhang y H. Liu, «Path tracking control strategy for off-road 4WS4WD vehicle based on robust model predictive control,» *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 158, pág. 104 267, 2022.

- [25] D. Ma, L. Dong, L. Wang, X. Liu y H. Wang, «RBF neural network adaptive PD tracking control for mobile robot [J],» *Control engineering*, vol. 27, n.º 12, págs. 2092-2098, 2020.
- [26] J. Cornejo, J. Magallanes, E. Denegri y R. Canahuire, «Trajectory tracking control of a differential wheeled mobile robot: a polar coordinates control and lqr comparison,» en *2018 IEEE XXV International Conference on Electronics, Electrical Engineering and Computing (INTERCON)*, IEEE, 2018, págs. 1-4.
- [27] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2002.
- [28] B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani y G. Oriolo, *Robotics: Modelling, Planning and Control*. Springer, 2010.
- [29] K. Ogata, *Ingeniería de control moderna*. Pearson educación, 2003.
- [30] J. R. Schott, *Matrix analysis for statistics*. John Wiley & Sons, 2016.
- [31] M. Cui, R. Huang, H. Liu, X. Liu y D. Sun, «Adaptive tracking control of wheeled mobile robots with unknown longitudinal and lateral slipping parameters,» *Nonlinear Dynamics*, vol. 78, págs. 1811-1826, nov. de 2014.
- [32] M. Fliess, R. Marquez, E. Delaleau y H. Sira-Ramírez, «Correcteurs proportionnels-intégraux généralisés,» *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, vol. 7, págs. 23-41, 2002.
- [33] H. Sira-Ramírez, M. Ramírez-Neria y A. Rodríguez-Angeles, «On the linear control of nonlinear mechanical systems,» en *49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, IEEE, 2010, págs. 1999-2004.
- [34] S. Diop y M. Fliess, «Nonlinear observability, identifiability, and persistent trajectories,» en *[1991] Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, 1991, 714-719 vol.1. DOI: [10.1109/CDC.1991.261405](https://doi.org/10.1109/CDC.1991.261405).
- [35] G. Zhiqiang, «Scaling and bandwidth-parameterization based controller tuning,» *Proceedings of the American Control Conference*, vol. 6, págs. 4989-4996, 2003. DOI: [10.1109/ACC.2003.1242516](https://doi.org/10.1109/ACC.2003.1242516).
- [36] Z.-H. Wu, H.-C. Zhou, B.-Z. Guo y F. Deng, «Review and new theoretical perspectives on active disturbance rejection control for uncertain finite-dimensional and infinite-dimensional systems,» *Nonlinear Dynamics*, vol. 101, págs. 935-959, 2020. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05845-7>.
- [37] B.-Z. Guo y Z.-H. Wu, «Output tracking for a class of nonlinear systems with mismatched uncertainties by active disturbance rejection control,» *Systems & Control Letters*, vol. 100, págs. 21-31, 2017, ISSN: 0167-6911. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2016.12.002>.

- [38] J. F. Flores-Resendiz y E. Aranda-Bricaire, «A General Solution to the Formation Control Problem Without Collisions for First-Order Multi-Agent Systems,» *Robotica*, vol. 38, n.º 6, págs. 1123-1137, 2020. DOI: 10.1017/S0263574719001280.
- [39] R. Kelly y V. Santibáñez, *Control de movimiento de robots manipuladores* (Automática robótica). Pearson Educación, 2003, ISBN: 9788420538310. dirección: <https://books.google.com.mx/books?id=LPwMAAAACAAJ>.
- [40] O. R. Willow Garage Stanford Artificial Intelligence Laboratory, *Robot Operating System*, 2023. dirección: [https://en.wikipedia.org/wiki/Robot\\_Operating\\_System](https://en.wikipedia.org/wiki/Robot_Operating_System).