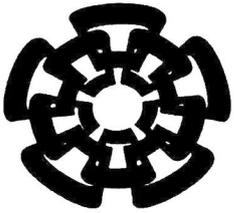




xx(110530.1)



**CINVESTAV**

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN  
Unidad Guadalajara

---

**EL PROBLEMA DE CONTROL DE  
VELOCIDAD DE UN AUTOMÓVIL**

TESIS QUE PRESENTA  
**IVÁN VÁZQUEZ ÁLVAREZ**

PARA OBTENER EL GRADO DE  
**MAESTRO EN CIENCIAS**

EN LA ESPECIALIDAD DE  
**INGENIERÍA ELÉCTRICA**

DIRECTORES DE TESIS  
**DR. ALEXANDER GEORGIEVICH LOUKIANOV**  
**DR. BERNARDINO CASTILLO TOLEDO**

**CINVESTAV  
IPN  
ADQUISICION  
DE LIBROS**

**CINVESTAV I.P.N.  
SECCION DE INFORMACION  
Y DOCUMENTACION**

Guadalajara, Jal. Junio de 2003.

CLASIF.:	TK165.68 v39 2003
ADQUIS.:	SS1 - 262
FECHA:	20-X-2003
PROCED.:	Don. - 2003
\$	

# **EL PROBLEMA DE CONTROL DE VELOCIDAD DE UN AUTOMÓVIL**

**Tesis de Maestría en Ciencias  
Ingeniería Eléctrica**

**Por:**

**Iván Vázquez Álvarez**

**Ingeniero en Electrónica  
Universidad Autónoma Metropolitana - Azcapotzalco.**

**Becario de CONACYT, expediente No. 144009**

**Directores de Tesis:**

**Dr. Alexander Georgievich Loukianov  
Dr. Bernardino Castillo Toledo**

**CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Junio de 2003.**

# Índice General

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Modelo</b>	<b>7</b>
2.1	Motor	7
2.1.1	Motor de cuatro tiempos.	8
2.1.2	Modelo matemático	9
2.2	Transmisión	11
2.2.1	Convertidor de torque	12
2.2.2	Engranaje	13
2.2.3	Operación en primera .	13
2.2.4	Fase de torque .	14
2.2.5	Fase de cambio	15
2.2.6	Operación en segunda	15
2.3	Tren motriz	16
2.4	Modelo completo	17
2.5	Simulación en lazo abierto	18
<b>3</b>	<b>Métodos de control</b>	<b>27</b>
3.1	Control por bloques	27
3.1.1	Forma no lineal controlable por bloques .	28
3.1.2	Diseño de superficie no lineal	29
3.1.3	Diseño de control discontinuo	31
3.2	Takagi-Sugeno	32
3.3	Sistemas con perturbaciones singulares	34
3.3.1	Variedad integral	37
3.4	PID y PID difuso	38
3.4.1	PID	38

3.4.2	Método de Ziegler y Nichols.	39
3.4.3	PID difuso (programación de ganancias)	40
<b>4</b>	<b>Aplicación</b>	<b>43</b>
4.1	Colocación de polos	43
4.2	Control a bloques	50
4.3	Takagi-Sugeno	51
4.4	Reducción del modelo	58
4.4.1	Modelo de operación en primera	58
4.4.2	Modelo de operación en segunda	61
4.4.3	Análisis de estabilidad	64
4.5	PID-PID difuso	65
4.5.1	Programación de ganancias	67
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>75</b>
5.1	Trabajo a futuro	76

*Dedicado a Karina con mucho cariño*

# Agradezco

*A mis asesores, el Dr. Alexander Loukianov y el Dr. Bernardino Castillo.*

*A todos profesores durante la maestría*

*A CONACYT*

*A mis amigos:*

*Aurora y Ross*

*Carlos y Alejandra*

*Wicho y Cecy*

*Jaime, Omar, George, Juan Carlos, Salvador, Victor, Bernardo, Jorge*

*Y muy especialmente a:*

*Italia*

*Andrea*

*Además de mi familia y Sori*

*A todos ellos, y los que faltaron, muchas gracias*

*"No bird soars if he soars with his own wings"*

*-William Blake*

# Capítulo 1

## Introducción

El presente trabajo aborda de forma preliminar el problema de control de velocidad de un automóvil.

En la actualidad hay mucho interés en el área de vehículos autónomos, existen proyectos importantes tanto en Estados Unidos como en Europa al respecto, una parte importante es el control de velocidad de los automóviles. Dado que cada vez hay más autos y menos espacio para circular se hace necesario optimizar el espacio en las carreteras, lo cual es posible si se logra mantener una distancia constante entre un vehículo y otro, o sea si se consigue que la velocidad sea la misma. En este trabajo solo se trata el problema de la velocidad en un eje; además de eso las variaciones en la velocidad no pueden ser muy grandes ya que el modelo con que se trabaja carece de frenos, el único control es la válvula de admisión de combustible, de una forma más coloquial podríamos decir que corresponde al pedal del acelerador, las variaciones que se pueden realizar al oprimirlo o soltarlo son las que se podrán llevar a cabo mediante el control que se propone.

En el segundo capítulo se explica el funcionamiento del modelo de automóvil. Existen trabajos al respecto (por ejemplo [5], [6], [11], [13], [14]), sin embargo se optó por ese debido a que su comportamiento es muy parecido a la realidad, si bien resulta un modelo muy complejo se buscó simplificarlo tanto como fuera posible. Además de las ecuaciones que describen la dinámica se da una breve explicación acerca del funcionamiento con el fin de comprender mejor el sistema, así como la simulación del sistema en lazo abierto, tanto de forma global, como en cada uno de los submodelos.

En el capítulo tercero se describen los diferentes métodos de control que se plantearon para aplicar a este modelo, se presentan las bases teóricas de

cada uno de ellos: técnica de control por bloques combinada con modos deslizantes [3], [9], [10], control difuso Takagi-Sugeno [15], [17], técnica de sistemas con perturbaciones singulares y variedad integral [7], [8], técnica de diseño de controlador PID con lógica difusa [12], [16], [17]

El capítulo cuarto muestra la aplicación de los diferentes esquemas de control propuestos en este modelo específico, no en todos se llega a resultados favorables debido a la complejidad del modelo.

Finalmente se tienen las conclusiones y el trabajo que se puede llevar a cabo a partir de los resultados obtenidos.

# Capítulo 2

## Modelo

*En este capítulo se describe el modelo utilizado a lo largo de ltrabajo, partiendo de cada una de sus partes, se presenta una breve explicación acerca del funcionamiento de sus bloques principales, así como las ecuaciones físicas que lo generan, finalmente se tiene el modelo completo, su simulación en lazo abierto para dos entradas diferentes y la respuesta de cada uno de los submodelos que lo integran.*

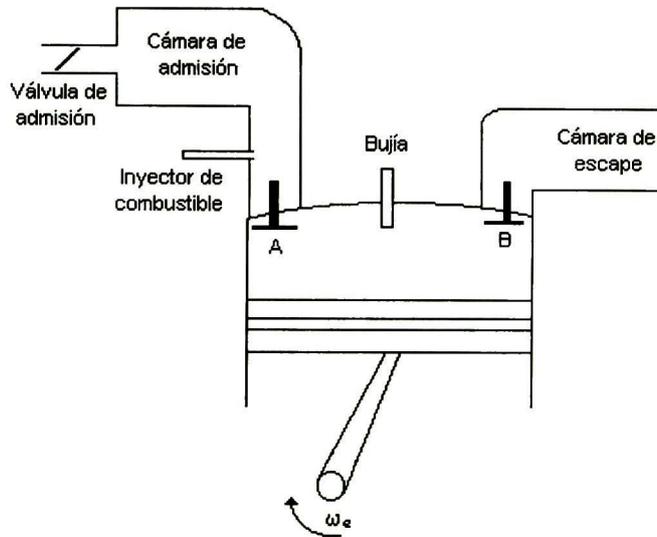
*El modelo que se presenta está dividido en tres partes; motor, transmisión y tren motriz. Tiene siete estados y una entrada de control. Representa un automóvil de transmisión automática con dos velocidades y un motor de inyección electrónica, sin embargo no se considera la dinámica de los frenos ni un modelo de las llantas, con el objeto de que el modelo sea lo más simple posible. Si bien pueden existir diferencias entre un vehículo y otro, éste modelo puede ser utilizado solo haciendo algunas correcciones en constantes como la masa del vehículo o la altura de las ruedas. [5], [6], [13], [14], [11].*

### 2.1 Motor

Antes de comenzar con la descripción del modelo matemático es conveniente hacer una breve exposición acerca del funcionamiento del sistema que está siendo representado.

### 2.1.1 Motor de cuatro tiempos.

El sistema que se tomó como referencia para obtener el modelo es un motor de cuatro tiempos con inyección electrónica, como se muestra en el siguiente diagrama:



Esquema general del motor

Para que el motor funcione por sí solo es necesario que el pistón haga cuatro recorridos: dos de arriba abajo y dos de abajo arriba; en cada uno de ellos ocurre en el interior del cilindro una operación distinta, por eso se llama ciclo de cuatro tiempos o de Otto, quien fue su realizador.

#### Primer tiempo (Admisión)

El pistón está en el punto muerto superior y empieza a descender; en ese instante se abre la válvula de admisión A y los gases de la cámara de admisión (la mezcla de aire y gasolina) son aspirados por el pistón que desciende, con lo cual se va llenando el cilindro. Cuando el émbolo llega al punto muerto inferior se cierra la válvula de admisión.

En el tiempo de admisión el pistón ha bajado del punto muerto superior al inferior y el cigüeñal ha dado media vuelta.

### Segundo tiempo (Compresión)

El pistón sube desde el punto muerto inferior al superior mientras las dos válvulas están cerradas. Los gases que llenan el cilindro van ocupando un espacio cada vez más reducido, comprimiéndose hasta llenar solo el que queda entre la cara superior del pistón en punto muerto superior y en fondo del cilindro. Este espacio se llama cámara de compresión o de explosión.

Durante la compresión, el pistón ha subido del punto muerto inferior al superior y el cigüeñal ha dado otra media vuelta.

Debido a la compresión cuando la mezcla ocupa la cámara de compresión su temperatura aumenta, así mismo, la mezcla es más homogénea, con lo que se encuentra en las mejores condiciones para la explosión.

### Tercer tiempo (Explosión)

En el momento en que los gases se encuentran fuertemente comprimidos en la cámara de explosión, se produce una chispa en la bujía que inflama la mezcla; la fuerza de explosión lanza el pistón del punto muerto superior al inferior, produciendo la tercera media vuelta en el cigüeñal.

### Cuarto tiempo (Escape)

Al iniciarse este tiempo el pistón está en el punto muerto inferior, se abre la válvula de escape  $B$  y el pistón al subir empuja los gases quemados expulsándolos a través de la cámara de escape. Cuando el émbolo alcanza el punto muerto superior la válvula de escape se cierra.

En la carrera del pistón durante el escape, del punto muerto inferior al superior el cigüeñal gira media vuelta más.

Cuando el pistón empieza a bajar de nuevo se abre la válvula de admisión y se repiten todas las fases anteriores en la misma forma y en el mismo orden:

## 2.1.2 Modelo matemático

El motor cuenta con dos estados:  $\omega_e$  (velocidad del motor) y  $m_a$  (masa de aire en la cámara de admisión), representados respectivamente por  $x_6$  y  $x_7$ . La entrada para este sistema es el ángulo en la válvula de admisión:  $\alpha$

La ecuación de estado para  $m_a$  se obtiene a partir de la conservación de masa, con lo que tenemos:

$$\dot{m}_a = \dot{m}_{ai} - \dot{m}_{ao} \quad (2.1)$$

donde  $\dot{m}_{ai}$  es la masa de aire que entra a la cámara de admisión y  $\dot{m}_{ao}$  es la masa de aire que sale (por lo tanto la que entra a la cámara de combustión).  $\dot{m}_{ai}$  está modelada de la siguiente forma:

$$\dot{m}_{ai} = MAX \ TC \ PRI \quad (2.2)$$

donde  $MAX$  es la razón de flujo máximo, tiene un valor constante que depende de cada motor, para este caso específico tomamos  $MAX = 0.1843 Kg/s$ .  $TC$  es el ángulo de la válvula de admisión normalizado, es una función de  $\alpha$  y está representado por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} TC &= 1 - \cos(1.14459\alpha - 1.060) && \text{para } \alpha \leq 79.46^\circ \\ TC &= 1 && \text{para } \alpha > 79.46^\circ \end{aligned}$$

$PRI$ , la presión normalizada, es el flujo de aire que se comprime al pasar por un orificio, tiene la siguiente expresión:

$$PRI = 1 - \exp\left(9 \left(\frac{P_m}{P_{atm}} - 1\right)\right)$$

donde  $P_m$  representa la presión en la cámara de admisión y  $P_{atm}$  la presión atmosférica.

Para  $\dot{m}_{ao}$  tenemos la siguiente ecuación:

$$\dot{m}_{ao} = c_1 \cdot \eta_{vol} \cdot m_a \cdot \omega_e \quad (2.3)$$

$c_1$  es una constante física definida como:

$$c_1 = \frac{V_e}{4\pi V_m}$$

donde  $V_e$  es el desplazamiento del motor y  $V_m$  es el volumen de la cámara de admisión, tenemos los siguientes valores:  $V_e = 0.0038m^3$  y  $V_m = 0.0027m^3$

$\eta_{vol}$  (eficiencia volumétrica) es una medida de la efectividad del proceso de inducción del motor y se define como la relación del volumen del flujo de aire dentro del motor dividido por el volumen desplazado por el pistón. La eficiencia volumétrica por si misma representa un problema muy complejo, lo que se utiliza aquí es una expresión obtenida empíricamente:

$$\eta_{vol} = (24.5\omega_e - 3.1e4) m_a^2 + (-0.167\omega_e + 222) m_a + (8.1e - 4\omega_e + 0.352)$$

El segundo estado se relaciona con la dinámica rotacional del motor:

$$\dot{\omega}_e = \frac{T_i - T_f - T_a - T_p}{I_e} \quad (2.4)$$

$T_i$  es el torque debido al motor:

$$T_i = c_T \frac{\dot{m}_{ao}}{\omega_e}$$

$T_f$  es el torque debido a fricción

$T_a$  es el torque de accesorios

$T_p$  es el torque debido a la bomba del convertidor de torque

$c_T$  representa la capacidad máxima de torque para una masa de aire y velocidad de motor dadas, para este caso

$c_T = 498636 N \cdot m / (kg/s)$ .  $I_e = 0.1454 kg \cdot m^2$  es la inercia efectiva del motor.

## 2.2 Transmisión

La transmisión está formada básicamente de dos partes; el convertidor de torque y el engranaje. El modelo de la transmisión está dividido en cuatro partes que representan cada una de las etapas de funcionamiento: operación en primera, fase de torque, fase de cambio y operación en segunda. El automóvil solo puede estar en una de las etapas a la vez. El modelo consta de dos estados:  $\omega_t$  (velocidad en la turbina) y  $\omega_{cr}$  (velocidad en el engrane) representados por  $x_5$  y  $x_4$  respectivamente.

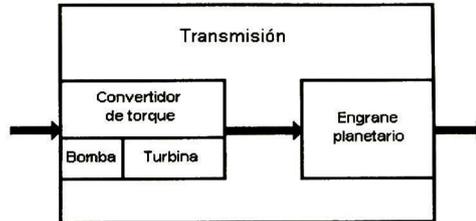
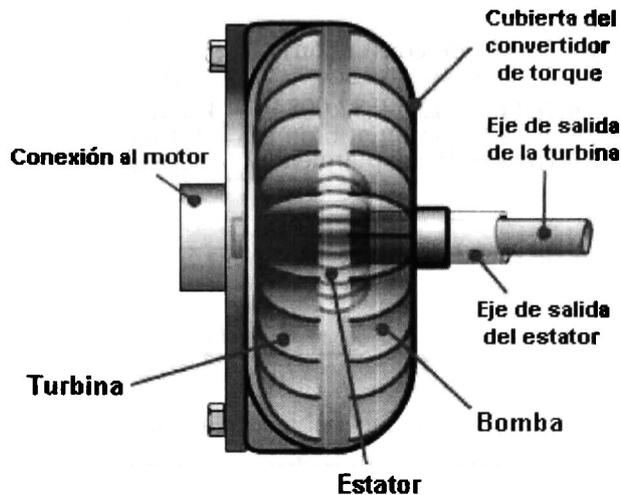


Diagrama general

### 2.2.1 Convertidor de torque

El fundamento es el mismo que hace girar un rehilete cuando se le sopla, la corriente de aire incide en las aspas inclinadas, que comienzan a girar rápidamente. Lo mismo ocurre si se conecta un ventilador eléctrico y frente a él se coloca otro desconectado, el primero envía una corriente de aire cuya velocidad obliga a girar al segundo. El primer ventilador está funcionando como bomba o impulso, el segundo gira como el rotor de una turbina cuando recibe una corriente de agua entre sus paletas.

Si en vez de aire ahora tenemos las hélices sumergidas en aceite, el líquido que impulsa la primer hélice obligará a girar a la segunda sin que exista un enlace mecánico entre ellas; es el fluido en movimiento lo que comunica el giro.



(2.5)

Esquema del convertidor de torque

### 2.2.2 Engranaje

La mecánica de la transmisión se basa en un sistema de engranes planetarios controlados por un grupo de bandas y embragues. Las bandas mantienen los engranes en su lugar, mientras los embragues permiten que los engranes se muevan.

### 2.2.3 Operación en primera

Se asume que el automóvil se encuentra funcionando en la primera velocidad al inicio, esto significa que no se parte del reposo, sino de una velocidad muy baja y se mantiene así mientras se cumpla la siguiente condición:

$$T_{c1} \geq T_t \quad (2.6)$$

donde  $T_t$  (Torque en la turbina está dado por)

$$T_t = 5.7656e - 3\omega_e^2 + 0.3107e - 3\omega_t - 5.4323e - 3\omega_t^2$$

para  $\frac{\omega_t}{\omega_e} < 0.9$  (modo de conversión)

$$T_t = -6.7644e - 3\omega_e^2 + 32.0084e - 3\omega_e\omega_t - 25.2441e - 3\omega_t^2$$

para  $\frac{\omega_t}{\omega_e} \geq 0.9$  (modo de acoplamiento)

y

Las ecuaciones de estado son:

$$\dot{\omega}_t = \frac{T_t - R_1 R_d T_s}{I_{t1}} \quad (2.7)$$

$$\dot{\omega}_{cr} = R_1 \dot{\omega}_t \quad (2.8)$$

$I_{t1}$  (inercia efectiva de la turbina en primera) tiene la siguiente expresión

$$I_{t1} = I_t + I_{si} + R_1^2 I_{cr} + \frac{R_1^2}{R_2^2} I_{ci}$$

$R_1 = 0.3424$  (Relación de reducción de velocidad de primera)

$R_2 = 0.6379$  (Relación de reducción de velocidad de segunda)

$R_d = 0.3521$  (Relación de reducción de velocidad final)

$I_t = 0.05326 \text{kgm}^2$  (Inercia efectiva de la turbina)

$I_{si} = 0.001020 \text{kgm}^2$  (Inercia efectiva del engrane solar)

$I_{ci} = 0.009020 \text{kgm}^2$  (Inercia efectiva del engrane periférico)

$I_{cr} = 0.005806 \text{kgm}^2$  (Inercia efectiva del engranaje)

### 2.2.4 Fase de torque

Cuando el vehículo alcance cierta velocidad predeterminada deja de cumplirse 2.6 y comienza el cambio de primera-segunda. El modelo tiene ahora las ecuaciones:

$$\dot{\omega}_t = \frac{T_t - R_1 R_d T_s - \left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right) T_{c2}}{I_{t1}} \quad (2.9)$$

Para  $\omega_{cr}$  tenemos nuevamente 2.8

$T_{c2}$  (inercia efectiva de la turbina en segunda) está dado por

$$T_{c2} = AR_2\mu_2P_{c2}sgn(\Delta\omega_{c2})$$

$AR_2 = 4.125m^3$  (área total del embrague por el radio efectivo)

$\mu_2 = 0.1316 + 0.0001748 |\Delta\omega_{c2}|$

$\Delta\omega_{c2} = \omega_t - \frac{\omega_{cr}}{R_2}$

$P_{c2} = 1000 \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{0.045}\right)\right) kPa$  (Perfil de presión basado en datos empíricos)

### 2.2.5 Fase de cambio

Conforme va aumentando la capacidad del segundo embrague se transmite más potencia de la turbina del convertidor de torque

$$\dot{\omega}_t = \frac{T_t - T_{c2}}{I_t} \quad (2.10)$$

$$\dot{\omega}_{cr} = \frac{\frac{T_{c2}}{R_2} - R_d T_s}{I_{cr12}} \quad (2.11)$$

donde  $I_{cr12}$  está dado por

$$I_{cr12} = I_{cr} + \frac{1}{R_1^2} I_{si} + \frac{1}{R_2^2} I_{cr}$$

### 2.2.6 Operación en segunda

El automóvil se encuentra ahora funcionando en segunda y se mantiene así mientras se cumpla la siguiente condición:

$$T_{c2} > I_{ci12} \frac{\dot{\omega}_{cr}}{R_2} - \frac{R_2}{R_1} T_{c1} + R_2 R_d T_s \quad (2.12)$$

donde  $I_{ci12} = 0.01492kgm^2$

Las ecuaciones de estado son las siguientes:

$$\dot{\omega}_t = \frac{T_t - R_2 R_d T_s}{I_{t2}} \quad (2.13)$$

$$\dot{\omega}_{cr} = R_2 \dot{\omega}_t \quad (2.14)$$

$I_{t2}$  (inercia efectiva de la turbina en segunda) tiene la siguiente expresión

$$I_{t2} = I_t + I_{ci} + R_2^2 I_{cr} + \frac{R_2^2}{R_1^2} I_{ci}$$

## 2.3 Tren motriz

El tren motriz es un dispositivo que transfiere la potencia entre la transmisión y el vehículo, hay factores que no fueron considerados, como las diferencias en la longitud de los ejes, cambios geométricos en la suspensión y las vibraciones del motor, aún cuando estos factores tienen un efecto en el funcionamiento fueron omitidos para hacer el modelo menos complejo.

El modelo tiene tres estados;  $T_s$  (torque en el eje),  $\omega_{wf}$  (velocidad en las ruedas) y  $V$  (velocidad del automóvil)

$$\dot{T}_s = K_s (R_d \omega_{cr} - \omega_{wf}) \quad (2.15)$$

$$\dot{\omega}_{wf} = \frac{T_s - h_f F_{tf} - T_{rf}}{I_{wf}} \quad (2.16)$$

$$\dot{V} = \frac{F_{tf} - F_{tr} - F_a}{M} \quad (2.17)$$

Donde:

$h_f = 0.310m$  (Altura de la rueda delantera)

$I_w = 2.8kgm^2$  (Inercia de las ruedas)

$M = 1644kg$  (Masa del vehículo)

$F_a = 0.4298V^2N$  (Coeficiente aerodinámico)  
 $T_{rf} = 0.001546MgNm$  (Resistencia al rodamiento de las llantas delanteras)  
 $K_i = 80000N$  (Fuerza generada por las llantas)  
 $K_s = 6742Nm/rad$  (Dureza del eje)  
 $F_{tr}$  está dado por la siguiente expresión:

$$F_{tr} = -(K_i i_r)$$

con

$$i_r = 1 - \left( \frac{V}{h_r \omega_{\omega r}} \right)$$

$F_{tf}$  está dado por la siguiente expresión:

$$F_{tf} = K_i i_f \tag{2.18}$$

con

$$i_f = 1 - \left( \frac{V}{h_f \omega_{\omega f}} \right)$$

## 2.4 Modelo completo

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= a_1 \frac{x_1}{x_2} + a_2 x_1^2 + d_1 \\
 \dot{x}_2 &= a_3 \frac{x_1}{x_2} + a_4 x_3 + d_2 \\
 \dot{x}_3 &= a_5 x_2 + a_6 x_4 \\
 \dot{x}_4 &= f(x_3, x_4, x_5, x_6) \\
 \dot{x}_5 &= g(x_3, x_4, x_5, x_6) \\
 \dot{x}_6 &= a_7 x_7 x_6 + a_8 x_7 + a_9 x_6 + d_3 \\
 \dot{x}_7 &= a_{10} x_7 x_6^2 + a_{11} x_7 x_6 + bu
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Las funciones  $f$  y  $g$  cambian para los diferentes submodelos de la siguiente forma

**Modelo de operación en primera**

$$\begin{aligned} f(x_3, x_4, x_5, x_6) &= a_1 x_6^2 + a_2 x_5 x_6 + a_3 x_5^2 + a_4 x_3 \\ g(x_3, x_4, x_5, x_6) &= a_5 x_6^2 + a_6 x_5 x_6 + a_7 x_5^2 + a_8 x_3 \end{aligned}$$

**Modelo de fase de torque**

$$\begin{aligned} f(x_3, x_4, x_5, x_6) &= a_1 x_6^2 + a_2 x_5 x_6 + a_3 x_5^2 + a_4 x_3 \\ g(x_3, x_4, x_5, x_6) &= a_5 x_6^2 + a_6 x_5 x_6 + a_7 x_5^2 + a_8 x_3 \\ &\quad + \bar{d}_1 + \bar{d}_2 (\bar{d}_3 + \bar{d}_4 |a_9 x_4 - x_5|) 1000 (1 - e^{-22.2t}) \end{aligned}$$

**Modelo de fase de cambio**

$$\begin{aligned} f(x_3, x_4, x_5, x_6) &= \bar{d}_5 (\bar{d}_3 + \bar{d}_4 |a_9 x_4 - x_5|) 1000 (1 - e^{-22.2t}) + a_{10} x_3 \\ g(x_3, x_4, x_5, x_6) &= a_{11} x_6^2 + a_{12} x_5 x_6 + a_{13} x_5^2 \\ &\quad + \bar{d}_6 (\bar{d}_3 + \bar{d}_4 |a_9 x_4 - x_5|) 1000 (1 - e^{-22.2t}) \end{aligned}$$

**Modelo de operación es segunda**

$$\begin{aligned} f(x_3, x_4, x_5, x_6) &= a_{14} x_6^2 + a_{15} x_5 x_6 + a_{16} x_5^2 + a_{17} x_3 \\ g(x_3, x_4, x_5, x_6) &= a_{18} x_6^2 + a_{19} x_5 x_6 + a_{20} x_5^2 + a_{21} x_3 \end{aligned}$$

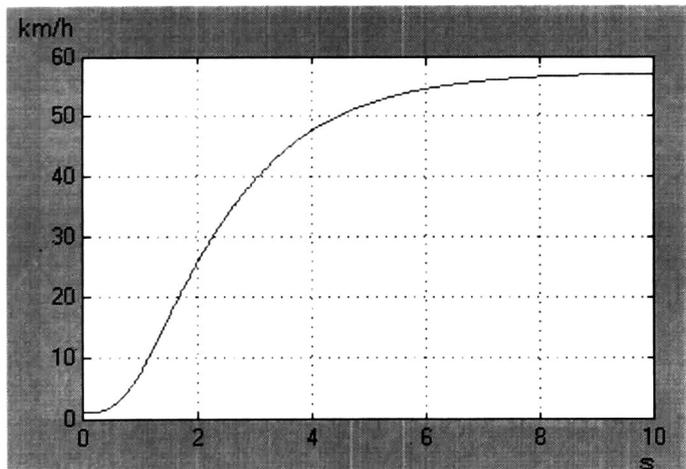
**2.5 Simulación en lazo abierto**

Las simulaciones se realizaron tomando en cuenta los siguientes parámetros:

$a_1 = -156.97355$	$a_2 = -0.0002614355231$	$a_3 = 28571.42858$
$a_4 = 0.3571428571$	$a_5 = 2373.8582$	$a_6 = -6742$
$a_7 = 309.4158$	$a_8 = 134461.644647$	$a_9 = 0.7262723$
$a_{10} = -0.000090718$	$a_{11} = -0.039423268$	$b = 0.18430$
$d_1 = 48.61366737$	$d_2 = -8866045074$	$d_3 = -114.16781$

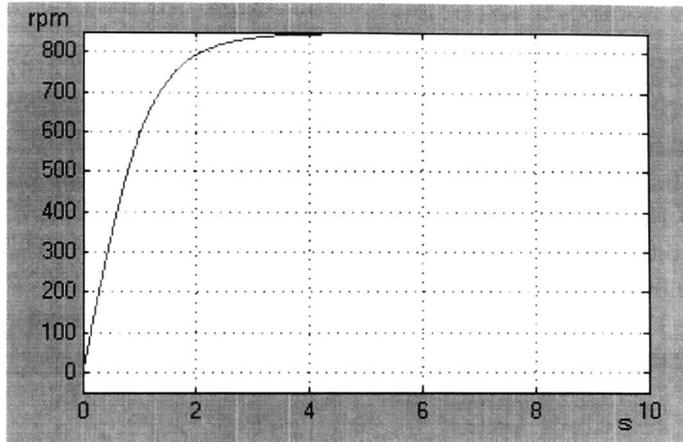
$a_1 = 0.03429742903$	$a_2 = 0.001848239$	$a_3 = -0.03231475$
$a_4 = -0.7171612$	$a_5 = 0.100167725$	$a_6 = 0.005397896$
$a_7 = -0.09437719$	$a_8 = -2.0945131$	$a_9 = 1.5676$
$a_{10} = -9.59923664$	$a_{11} = 0.1082538491$	$a_{12} = 0.05833646264$
$a_{13} = -0.1019958693$	$a_{14} = 0.05169186$	$a_{15} = 0.002785601$
$a_{16} = -0.04870364$	$a_{17} = -2.013707$	$a_{18} = 0.08103443$
$a_{19} = 0.00436683$	$a_{20} = -0.07634996$	$a_{21} = -3.156775$
$\bar{d}_1 = -17.37333$	$\bar{d}_2 = 38467.0079$	$\bar{d}_3 = 0.1316$
$\bar{d}_4 = 0.0001748$	$\bar{d}_5 = 176295.8234$	$\bar{d}_6 = -77450.244$

La simulación en lazo abierto se hizo en simulink, para la primer prueba se utilizó como entrada un escalón de  $\frac{\pi}{2}$ , solo se consideran 10s ya que a partir de ahí el modelo se mantiene estable.



velocidad final (seg vs km/h)

(2.20)

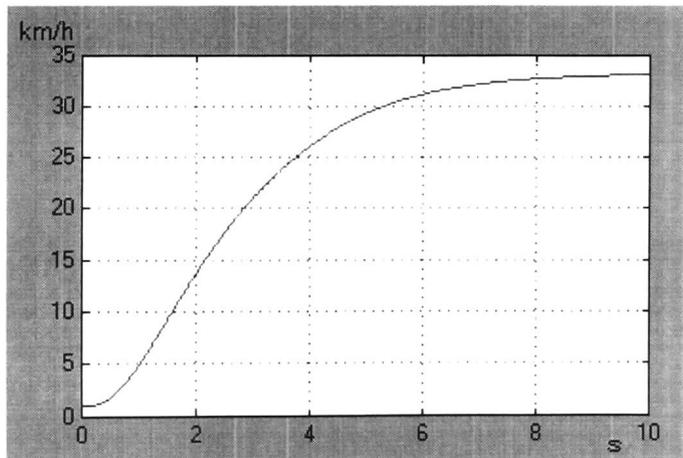


(2.21)

velocidad del motor (seg vs rpm)

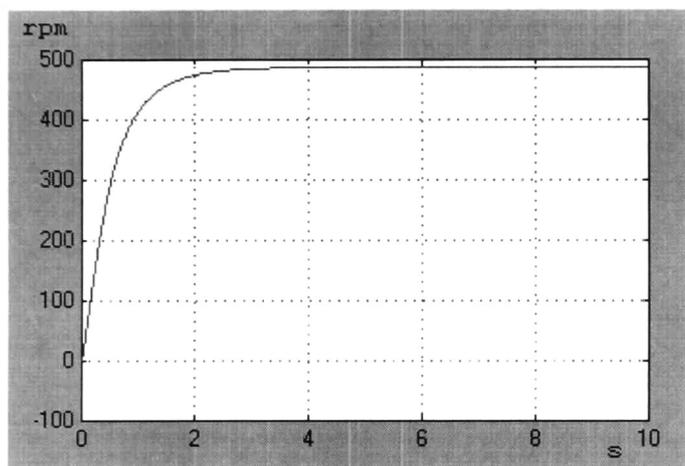
Como se observa en las gráficas el modelo solo se mantiene estable al alcanzar la velocidad máxima (57 km/h), lo cual no es deseable, así que se considera que el sistema no tiene puntos de equilibrio.

La segunda simulación es con un escalón de  $\frac{\pi}{4}$ , con el fin de observar qué tanto varía la velocidad final de acuerdo a una variación en el ángulo de la válvula de admisión.



(2.22)

velocidad final (seg vs km/h)

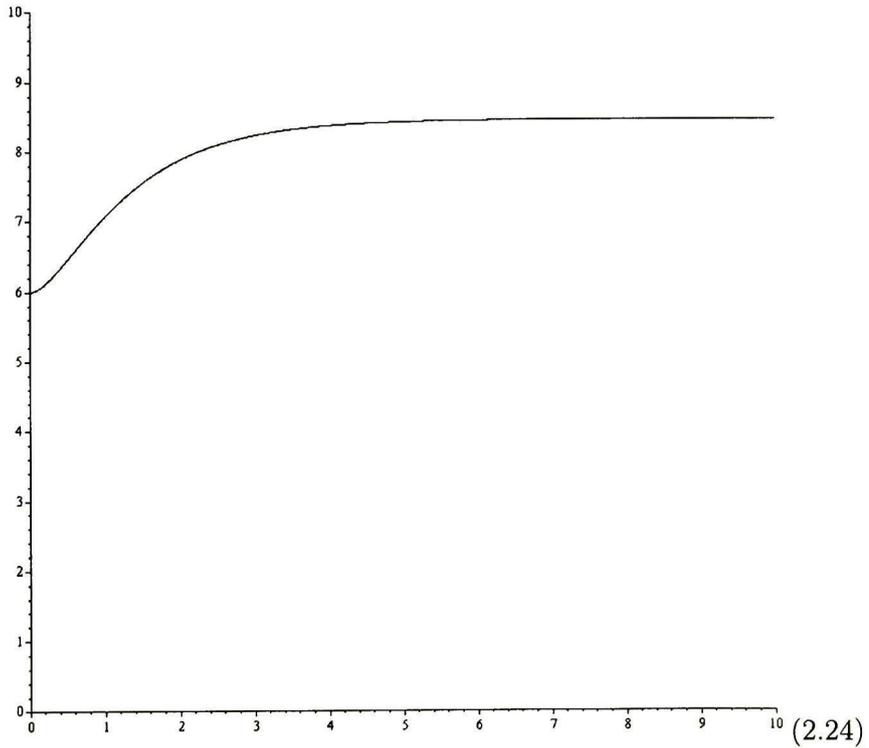


(2.23)

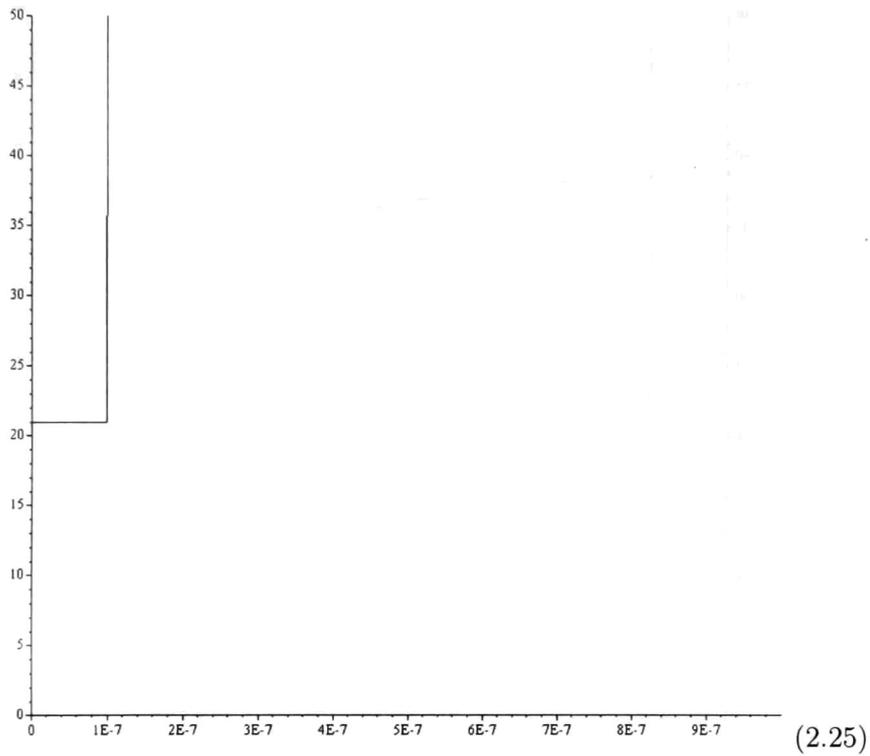
velocidad del motor (seg vs rpm)

El sistema se comporta igual, solo que ahora la velocidad máxima que alcanza es de 33km/h

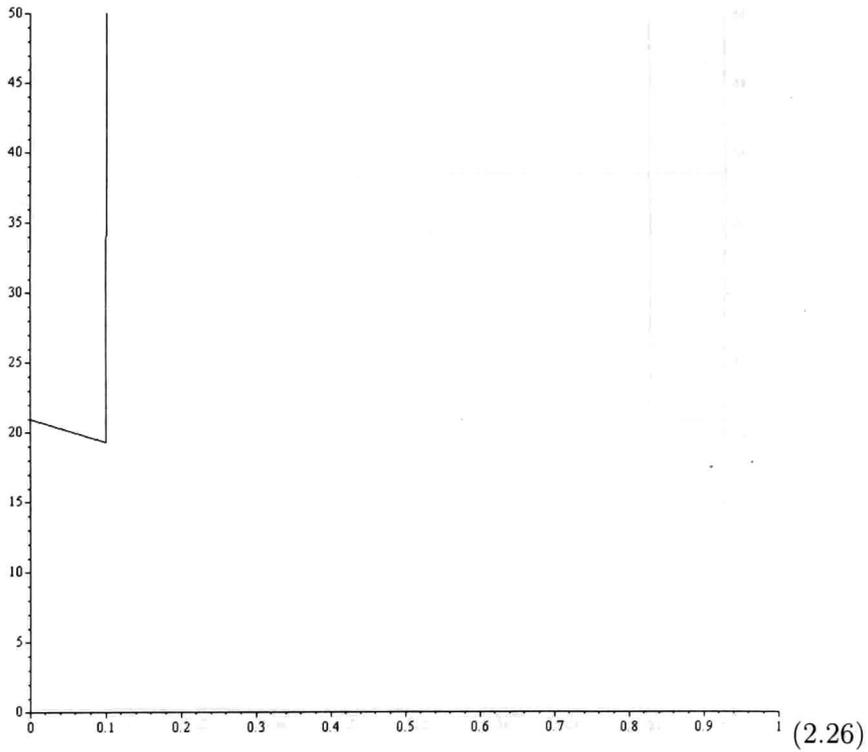
A continuación se muestra la simulación de cada uno de los modelos por separado, en cada caso se muestran las condiciones iniciales empleadas.



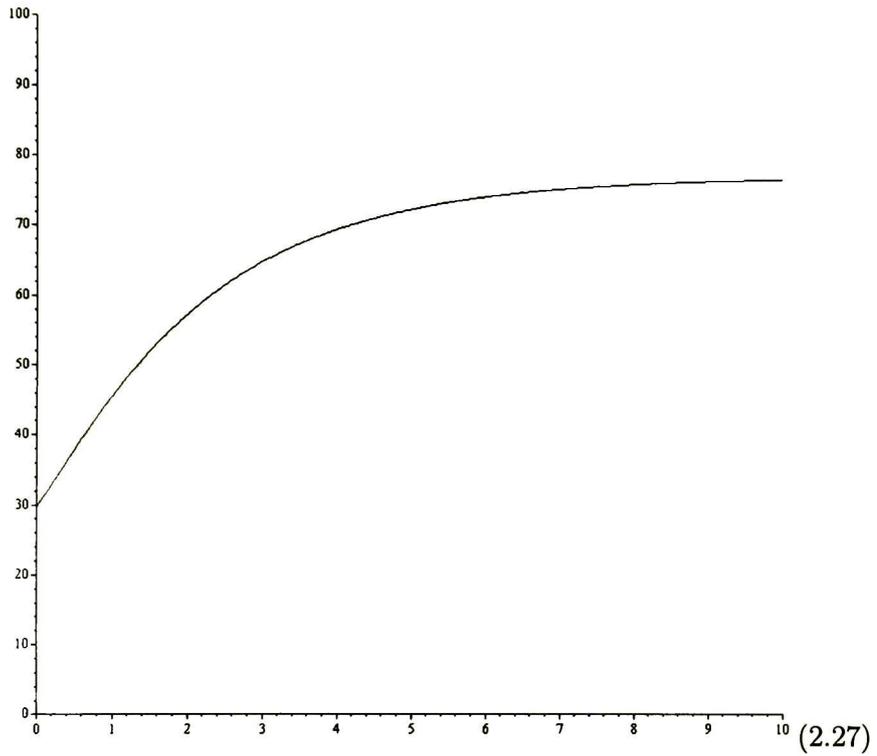
$$\begin{aligned}x_1 &= 6 \\x_2 &= 19.37775385 \\x_3 &= 54.253343580 \\x_4 &= 55.034802003 \\x_5 &= 236.69273398 \\x_6 &= 225.91526898 \\x_7 &= 0.1361516808\end{aligned}$$



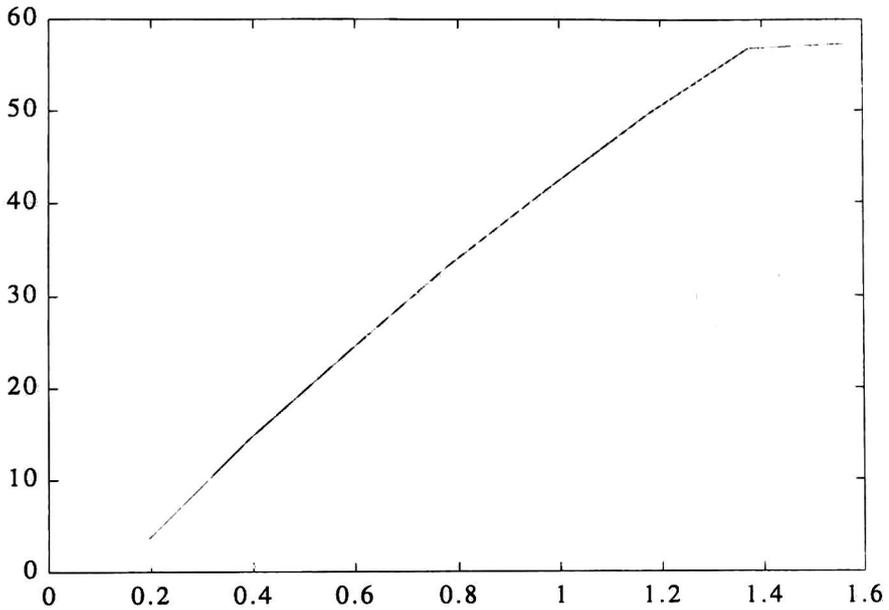
$x_1 = 21$
$x_2 = 109.8$
$x_3 = 9740.91$
$x_4 = 310.6$
$x_5 = 486.9$
$x_6 = 766.2$
$x_7 = 0.001883$



$$\begin{aligned}x_1 &= 22 \\x_2 &= 67.9702071 \\x_3 &= 108.214733 \\x_4 &= 193.042337 \\x_5 &= 904.309013 \\x_6 &= 855.043184 \\x_7 &= 0.18423983\end{aligned}$$



$x_1 = 29.8$
$x_2 = 141.3$
$x_3 = 8046.19$
$x_4 = 399.1$
$x_5 = 625.7$
$x_6 = 810.8$
$x_7 = 0.001763$



(2.28)

Para esta gráfica se consideró la velocidad final alcanzada con diferentes aperturas de la válvula de admisión de combustible, se tomaron intervalos de  $\frac{\pi}{16}$ , desde  $\frac{\pi}{16}$  hasta  $\frac{\pi}{2}$ .

# Capítulo 3

## Métodos de control

*En éste capítulo se presentan los diferentes métodos de control propuestos para solucionar el problema, se da una breve explicación sobre el porqué de la selección de cada uno de ellos y se muestran los principales aspectos teóricos de cada uno de ellos*

### 3.1 Control por bloques

Debido a que el modelo de automóvil es no lineal y la estructura del modelo está dividida en bloques, se pensó que era apropiado intentar el método de control por bloques combinado con modos deslizantes. Este método permite diseñar una de superficies no lineal tal que el movimiento sobre esta superficie es descrito por un sistema lineal con la dinámica deseada. Es importante mencionar que el sistema en lazo cerrado es robusto con respecto a incertidumbres, [3], [9], [10].

Considere el caso de estabilización de sistemas no lineales que pueden ser representados por la siguiente ecuación:

$$\dot{x} = f(x, t) + b(x, t)u(t) \quad (3.1)$$

Donde  $x \in D_x \subset R^n$ ,  $u \in R$ . El campo vector  $f : D_x \times R \rightarrow R^n$  y  $b_i : D_x \times R \rightarrow R^n$  son mapeos suficientemente suaves.

### 3.1.1 Forma no lineal controlable por bloques

Suponemos que el sistema no lineal (3.1) esta presentado en la siguiente forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, t) + b_1(x_1, t)x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, t) + b_2(x_1, x_2, t)x_3 \\ \dot{x}_i &= f_i(x_1, x_2, \dots, x_i, t) + b_i(x_1, x_2, \dots, x_i, t)x_{i+1}, \quad i = 3, \dots, r-1 \\ \dot{x}_r &= f_r(x_1, x_2, \dots, x_r, t) + b_r(x_1, x_2, \dots, x_r, t)u\end{aligned}\tag{3.2}$$

donde  $x_i \in D_{x_i} \subset R^1$ ,  $u \in R^1$ ,  $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , se dice que está en la *Forma no lineal controlable por bloques* (FNCB), si:

$$b_i \neq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{para } x_i \in D_{x_i}\tag{3.3}$$

Es importante mencionar que muchos sistemas físicos, en especial los electromecánicos tienen la forma 3.2.

La ley de control que asegura trayectorias de movimiento por modos deslizantes estable para el sistema 3.2 está definida por:

**Teorema 1** *Suponga que*

1-La condición 3.3 se satisface;

2- $f_i(x_1, x_2, \dots, x_i, t)$  y  $b_i(x_1, x_2, \dots, x_i, t)$  son funciones continuas y diferenciables de orden  $i-1$ ,  $i = 1, \dots, r$  con respecto a todos los argumentos sobre el intervalo de tiempo  $t \in [0, \infty)$ , y todas las derivadas son acotadas.

Entonces existe una transformación difeomórfica  $\phi : D_x \times R \rightarrow R^n$  tal que  $D_x = \phi(D_x)$  y

$$z = \phi(x, t)\tag{3.4}$$

y una ley de control discontinua

$$u = -kM(x, t) \text{sign}(s)\tag{3.5}$$

con una superficie

$$s(x, t) = 0, \quad s \in R^{nr} \quad (3.6)$$

que garantiza modos deslizantes sobre la superficie 3.6 en un tiempo finito y una dinámica de modos deslizantes descrita por un sistema reducido de orden  $n - 1$ , con el espectro deseado

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -k_1 z_1 + z_2 \\ \dot{z}_i &= -k_i z_i + z_{i+1}, \quad i = 2, \dots, n-2 \\ \dot{z}_{n-1} &= -k_{n-1} z_{n-1} \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde  $z^T = (z_1, \dots, z_n)$ ,  $z_i \in D_{z_i} \subset R$ ,  $i = 1, \dots, n$ , y todas las  $k_i$  son constantes positivas.

### 3.1.2 Diseño de superficie no lineal

Suponga que se satisfacen las condiciones 1 y 2. Bajo estas condiciones la transformación 3.4 se puede encontrar paso a paso considerando el estado  $x_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  como un control ficticio en el  $i$ -ésimo bloque del sistema 3.2, a través del siguiente procedimiento.

#### Paso 1

Se define  $z_1 = x_1$  y se elige  $x_2$  como el control ficticio del primer bloque de 3.2

$$x_2 = -b_1^{-1}(x_1, t) f_1(x_1, t) + b_1^{-1}(x_1, t) (-k_1 z_1 + z_2) \quad (3.8)$$

donde  $b_1^{-1}$  es la función inversa de  $b_1$ .

El control ficticio  $x_2$  en 3.8 está formado por dos partes, la primera diseñada para eliminar la dinámica anterior del sistema y obtener  $\dot{z}_1 = 0$  sobre la trayectoria del primer bloque de 3.2. La segunda parte genera la nueva dinámica deseada. Al aplicar la transformación, el primer bloque, en términos de las coordenadas  $z_1$  y  $z_2$  queda:

$$\dot{z}_1 = -k_1 z_1 + z_2 \quad (3.9)$$

Ahora la variable  $z_2$  se obtiene a partir de 3.8

$$z_2 = f_1(x_1, t) + k_1 x_1 + b_1(x_1, t) x_2 = \phi(x_1, x_2, t) \quad (3.10)$$

### Paso 2

Derivando  $z_2$  sobre la trayectoria del sistema 3.2, se tiene:

$$\dot{z}_2 = \bar{f}_2(x_1, x_2, t) + \bar{b}_2(x_1, x_2, t) x_3 \quad (3.11)$$

donde  $\bar{f}_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} [-k_1 x_1 + \phi(x_1, x_2, t)] + b_1 f_2$  y  $\bar{b}_2 = b_1 b_2$ . Ahora se elige el control ficticio  $x_3$  en 3.11.

$$x_3 = -\bar{b}_2^{-1}(x_1, x_2, t) \bar{f}_2(x_1, x_2, t) + \bar{b}_2^{-1}(-k_2 z_2 + z_3) \quad (3.12)$$

la ecuación 3.11 queda

$$\dot{z}_2 = -k_2 z_2 + z_3 \quad (3.13)$$

que es la dinámica deseada. Con la transformación inversa de 3.12 se obtiene  $z_3$

$$z_3 = \bar{f}_2(x_1, x_2, t) + k_2 \phi(x_1, x_2, t) + \bar{b}_2(x_1, x_2, t) x_3 = \phi_3(x_1, x_2, x_3, t). \quad (3.14)$$

En el tercer paso se toma la derivada de  $z_3$  y así sucesivamente.

Se desarrolla hasta  $z_n$ , entonces

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= -\bar{b}_i^{-1}(x_1, \dots, x_i, t) \bar{f}_i(x_1, \dots, x_i, t) \\ &\quad + \bar{b}_i^{-1}(x_1, \dots, x_i, t) (-k_i z_i + z_{i+1}), \\ i &= 3, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde  $\bar{b}_i = \bar{b}_{i-1} b_i = b_1 b_2 \dots b_i$  con este procedimiento se logra la transformación no lineal de las variables de estado  $\phi$ ,  $\phi^T = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ , quedando de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
z_1 &= x_1 := \phi_1(x_1) \\
z_2 &= f_1(x_1, t) + k_1 x_1 + b_1(x_1, t) x_2 := \phi_2(x_1, x_2, t) \\
z_3 &= \bar{f}_2(x_1, x_2, t) + k_2 \phi_2(x_1, x_2, t) + \bar{b}_2(x_1, x_2, t) x_3 := \phi_3(x_1, x_2, x_3, t) \\
z_{i+1} &= \bar{f}_i(x_1, \dots, x_i, t) + k_i \phi_i(x_1, \dots, x_i, t) + \bar{b}_i(x_1, \dots, x_i, t) x_{i+1} := \phi_{i+1}(x_1, \dots, x_{i+1}, t) \\
i &= 3, \dots, n-1.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

El sistema 3.2 con las coordenadas  $z$  queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= -k_1 z_1 + z_2 \\
\dot{z}_i &= -k_i z_i + z_{i+1} \quad i = 2, \dots, n-2 \\
\dot{z}_{n-1} &= -k_{n-1} z_{n-1} + s \\
\dot{z}_n &= \bar{f}_n(x, t) + \bar{b}_n(x, t) u
\end{aligned} \tag{3.17}$$

donde  $\bar{b}_n = b_1 b_2 \dots b_n$ , y  $\bar{f}_r$  es una función continua y acotada

### 3.1.3 Diseño de control discontinuo

Con la transformación 3.16 se obtiene la superficie 3.6 como

$$z_n = \bar{f}_{n-1}(x_1, \dots, x_n, t) + k_{n-1} \phi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, t) + \bar{b}_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, t) x_n := s(x, t) \tag{3.18}$$

Bajo la condición 2 existe una constante positiva  $\gamma_0$  tal que

$$\|\bar{f}_r(x, t)\| \leq \gamma_0. \tag{3.19}$$

Se elige la estrategia de control igual que en 3.5 con  $M(x, t) = \bar{b}_n^{-1}(x, t)$

$$u = -k_r \bar{b}_n^{-1} \text{sign}(s). \tag{3.20}$$

Entonces la proyección de la trayectoria de movimiento del sistema cerrado 3.17 y 3.20 en el subespacio  $s$  se describe como

$$\dot{s} = \bar{f}_r(x, t) - k_r \text{sign}(s) \quad (3.21)$$

Para obtener las condiciones de estabilidad de 3.21 sobre  $s = 0$ , se escoge como candidata la función de Lyapunov

$$V_r = \frac{1}{2} s^T s. \quad (3.22)$$

La derivada sobre la trayectoria de 3.21 es

$$\dot{V}_r = s^T \bar{f}_r - k_r s^T \text{sign}(s). \quad (3.23)$$

Al utilizar el acotamiento indicado en 3.19 y  $\|s\|_1 \geq \|s\|_2$  se tiene

$$\dot{V}_r \leq -k_r \|s\|_2 + \|s\| \|\bar{f}_r\|_2 \leq -(k_r - \gamma_0) \|s\|_2. \quad (3.24)$$

Por lo tanto  $\dot{V}_r$  es definida negativa si

$$k_r > \gamma_0 \quad (3.25)$$

Bajo de esta condición el vector del estado del sistema en lazo cerrado alcanza la superficie  $s = 0$  en un tiempo finito, y despues aparece el movimiento por modos deslizantes descrito por sistema lineal (3.7) con la dinámica deseada.

## 3.2 Takagi-Sugeno

Por otro lado para diseñar un controlador para sistemas no lineales se puede usar el método de Takagi-Sugeno. Este metodo básicamente trabaja con modelos linealizados del sistema no lineal (3.1) autónomo en diferentes puntos de operación:

$$\dot{x} = A_i x + b_i u, \quad i = 1, \dots, M. \quad (3.26)$$

El sistema difuso de Takagi-Sugeno (TS) se construye a partir de las siguientes reglas:

$$\text{IF } x_1 \text{ es } C_1^l \wedge \dots \wedge x_n \text{ es } C_n^l, \text{ THEN } y^l = c_0^l + c_1^l x_1 + \dots + c_n^l x_n \quad (3.27)$$

donde  $C_i^l$  son conjuntos difusos,  $c_i^l$  son constantes, y  $l = 1, 2, \dots, M$ . Esto es, las partes *IF* de las reglas son las mismas que en las reglas *IF – THEN* difusas ordinarias, sin embargo las partes *THEN* son combinaciones lineales de las variables de entrada.

Dada una entrada  $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in U \subset R^n$ , la salida  $h(x) \in V \subset R$  del sistema difuso TS se calcula como el porcentaje ponderado de los términos  $y^l$  en 3.27, esto es:

$$h(x) = \frac{\sum_{l=1}^M y^l w^l}{\sum_{l=1}^M w^l} \quad (3.28)$$

donde los pesos  $w^l$  son calculados como

$$w^l = \prod_{i=1}^n \mu_{C_i^l}(x_i). \quad (3.29)$$

Se observa que el sistema difuso TS es todavía un mapeo de  $U \subset R^n$  a  $V \subset R$ . El significado físico de la regla 3.27 es que cuando  $x$  es restringido al rango difuso caracterizado por la parte *IF* de la regla, la salida es una función lineal de las variables de entrada. Por lo tanto el sistema difuso TS puede ser visto como una especie de función lineal por partes, donde el cambio de una parte a otra es más suave que abrupto.

Si  $c_i^l = 0$  para  $i = 1, 2, \dots, n$  y  $c_0^l$  es igual al centro de  $\bar{y}^l$  del conjunto difuso  $B^l$  en la regla *IF – THEN* ordinaria

$$\text{IF } x_1 \text{ es } A_1^l \wedge \dots \wedge x_n \text{ es } A_n^l, \text{ THEN } y \text{ es } B^l \quad (3.30)$$

entonces el sistema difuso TS es idéntico al sistema difuso con mecanismo de producto de inferencia, fuzzificador de conjunto único y defuzzificador de promedio central [1], [15].

Si la salida de un sistema difuso TS aparece como una de sus entradas se obtiene el llamado sistema difuso TS dinámico. Específicamente, un sistema difuso TS dinámico se construye a partir de las siguientes reglas:

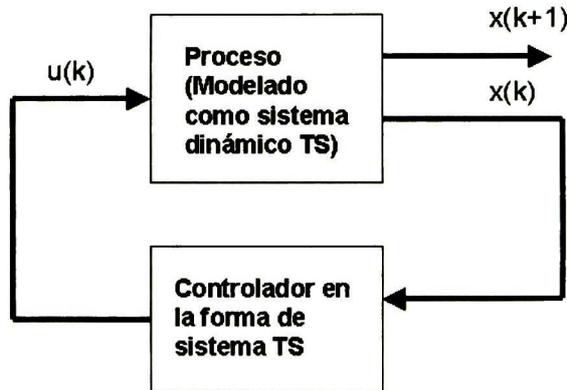
IF  $x(k)$  es  $A_1^p \wedge \dots \wedge x(k-n+1)$  es  $A_n^p \wedge u(k)$  es  $B^p$   
 THEN  $x^p(k+1) = a_1^p x(k) + \dots + a_n^p x(k-n+1) + b^p u(k)$

donde  $A_i^p$  y  $B^p$  son conjuntos difusos,  $a_i^p$  y  $b^p$  son constantes,  $p = 1, 2, \dots, N$ ,  $u(k)$  es la entrada del sistema y  $x(k) = (x(k), x(k-1), \dots, x(k-n+1))^T \in R^n$  es el vector de estado del sistema. La salida se calcula de la siguiente forma:

$$x(k+1) = \frac{\sum_{p=1}^N x^p(k+1) v^p}{\sum_{p=1}^N v^p} \quad (3.31)$$

donde  $x^p(k+1)$  está dado por ?? y

$$v^p = \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^p} [x(k-i+1)] \mu_{B^p} [h(k)]. \quad (3.32)$$



### 3.3 Sistemas con perturbaciones singulares

Se cuenta con un sistema de orden alto, y además de eso, intuitivamente se cree que existen dinámicas más rápidas que otras, por lo que en este caso es

útil usar el método de sistemas con perturbaciones singulares. Este método permite reducir el modelo a uno de orden menor, y después, basado en este modelo reducido se puede diseñar un controlador simplificado.

Un tratamiento formal del problema en la teoría de ecuaciones con perturbaciones inicia con el análisis de sistemas dinámicos de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, z, u) \\ \mu \dot{z} &= g(x, z, u)\end{aligned}\tag{3.33}$$

donde  $x \in R^n$ ,  $z \in R^l$ ,  $u \in R$  y  $\mu$  es un parámetro escalar positivo que depende de masas, constantes de tiempo pequeñas de los instrumentos, etc. [7]

Cuando  $\mu$  es relativamente pequeño y  $g \neq 0$ , el vector  $z$  tiene una razón de cambio alta con respecto al vector  $x$  y se produce un movimiento diferente en la solución. Cuando  $\mu = 0$ , el orden del sistema 3.33 disminuye porque la ecuación diferencial se convierte en algebraica:

$$0 = g(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{u}).\tag{3.34}$$

En esta ecuación los vectores  $\tilde{x}$  y  $\tilde{z}$  representan respectivamente al estado del sistema singular en la variedad de movimientos lentos. Asumiendo que  $\det \left\{ \frac{\partial g}{\partial z} \right\} \neq 0$  se puede encontrar una solución a 3.34 con respecto a  $\tilde{z}$ :

$$\tilde{z} = \varphi(\tilde{x}, \tilde{u}).\tag{3.35}$$

Sustituyendo esta solución en 3.33 se produce una ecuación del modelo de orden  $n$ -ésimo del sistema

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \bar{f}(\tilde{x}, \tilde{u}), \quad \bar{f}(\tilde{x}) = f(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x}), \tilde{u})\tag{3.36}$$

El control se elige como función de variables lentas:

$$\tilde{u} = \alpha(\tilde{x})$$

de tal manera que el sistema

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \tilde{f}(\tilde{x}), \quad \tilde{f}(\tilde{x}) = \bar{f}(\tilde{x}, \alpha(\tilde{x})) \quad (3.37)$$

es asintóticamente estable. Este modelo representa el movimiento lento en el sistema inicial y a veces es llamado *modelo lento* o modelo cuasi-estado-estable porque  $z$ , cuya velocidad es  $\dot{z} = \frac{-g}{\mu}$ , puede ser grande cuando  $\mu$  es pequeño y puede convergir rápidamente a la variedad 3.35. Esto muestra que en la teoría de sistemas con perturbaciones singulares la ecuación ?? es aplicable para describir movimientos lentos a lo largo de la variedad 3.35 en el espacio dimensional  $(n + 1)$  proporcionando movimientos rápidos sobre el estado asintótico. Es decir, un cambio rápido de  $z$  resulta en la convergencia de la trayectorias del vector de estados en la variedad. Entonces la solución de los sistemas 3.33 para un intervalo de tiempo finito  $[t_0, t_0 + T]$  puede presentarse como:

$$\begin{aligned} x(t) &= \tilde{x}(t) + O(\mu) \\ z(t) &= \varphi(\tilde{x}, \tilde{u}(\alpha(\tilde{x}))) + \prod z(\tau) + O(\mu) \end{aligned}$$

donde  $\tau = \frac{t}{\mu}$   $\tilde{x}(t)$  es la solución del sistema reducido (3.37) y

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} O(\mu) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \prod z(\tau) = 0 \quad (3.38)$$

La función  $\prod z(\tau)$  representa el movimiento rápido donde la razón del amortiguamiento crece con la disminución de  $\mu$  porque  $t = \mu\tau$ , así que se tiene

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} x(t) = \tilde{x}(t), \quad t_0 \leq t \leq T$$

y para cualquier  $t_1$  tal que  $t_0 < t_1 < t_0 + T$

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} z(t) = \varphi(\tilde{x}(t)), \quad t \in [t_1, t_0 + T]$$

Así, con  $\mu$  bastante pequeño, la solución del sistema inicial de orden  $(n + 1)$  con respecto a  $x$  realmente está cerca del orden  $n$ -ésimo de ?? mientras el vector  $z$  tiende a  $\tilde{z}$  3.35 queda fuera del intervalo de tiempo inicial

$[t_0, t_1]$  con que disminuye  $\mu$ . Este intervalo de tiempo inicial corresponde al movimiento rápido que desprecia al modelo del movimiento lento ???. Las condiciones suficientes para la estabilidad en el movimiento rápido son:

El equilibrio  $z = 0$  en el sistema

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = g(\tilde{x}, \tilde{z} + \lambda(\tau)), \quad \lambda = z - \tilde{z}$$

será asintóticamente estable en el punto  $x(t_0), z(t_0), t_0$ .

El vector  $\lambda(0) = z(t_0) - \tilde{z}(t_0)$  pertenece al dominio de atracción y los valores propios de la matriz  $\left\{\frac{\partial g}{\partial z}\right\}$  tienen partes reales negativas. Entonces el movimiento rápido en sistemas con perturbaciones singulares y con control continuo bajo las condiciones anteriores se desvanece rápido.

### 3.3.1 Variedad integral

Otra posibilidad para reducir el orden de un sistema dinámico con coordenadas  $z$  y  $x$  en  $R^n$

$$\dot{z} = g(x, z, t) \tag{3.39}$$

$$\dot{x} = f(x, z, t) \tag{3.40}$$

contiene un variedad integral, donde  $z \in R^m$  y  $x \in R^s$ ;  $m + s = n$ ,  $f$  y  $g$  son apropiadamente diferenciables,

Consideramos una superficie  $S$  suave,  $s$ -dimensional en el espacio  $R^n$ , que está definido por  $m = n - s$  ecuaciones algebraicas. En su forma más simple, estas ecuaciones expresan ciertas  $m$  coordenadas  $z$  como  $m$  funciones explícitas de las restantes  $s$  coordenadas  $x$ , esto es, definen  $S$  por su gráfica:

$$S : z = h(x, t), \quad z \in R^m; \quad x \in R^s \quad m + s = n \tag{3.41}$$

Se asume que, para todo  $x$  en un dominio de interes, existe  $\frac{\partial h}{\partial x}$  y tiene rango completo  $m$ .

La superficie  $S$  y el sistema (3.39)-(3.40) han sido introducidos entonces como dos entidades sin relación entre ellas. Lo que resulta de interés en este caso es cuando existe una relación muy útil entre  $S$  y (3.39)-(3.40), más específicamente cuando  $S$  es una variedad integral de (3.39)-(3.40), [8].

**Definición 2** La superficie  $S$  es una variedad integral de (3.39)-(3.40) si cada solución  $z(t), x(t)$  de (3.39)-(3.40) que está en  $S$  en  $t = t_0$

$$z(t_0) = h(x(t_0), t_0) \quad (3.42)$$

permanece en  $S$  para todo  $t \in (t_0, t_1)$ , esto es

$$z(t) = h(x(t), t), \quad t \in (t_0, t_1) \quad (3.43)$$

Si  $h(x, t)$  satisface la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} f(x, h(x, t), t) = g(x, h(x, t), t) \quad (3.44)$$

entonces, la superficie  $S$  es una variedad integral del sistema dinámico (3.39)-(3.40). En este caso se puede sustituir  $z(t) = h(x(t), t)$  (3.43) en subsistema (3.40) que resulta en sistema de orden reducido

$$\dot{x} = \bar{f}(x, t), \quad \bar{f}(x, t) = f(x, h(x, t), t) \quad (3.45)$$

Este sistema se usa para diseñar un control simplificado.

## 3.4 PID y PID difuso

### 3.4.1 PID

En caso cuando el sistema dinámico reducido por método de sistemas con perturbaciones singulares (3.36) o por el método de sistemas con variedad integral (3.45), tiene orden dos, se puede aplicar el control PID (Proporcional-Integral-Derivativo). Este ley de control es ampliamente usado para controlar los sistemas dinámicos debido a su simplicidad y efectividad. Se requiere conocer el error y su derivada para construir el controlador PID de la forma

$$u = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t) dt + K_d \dot{e}(t) \quad (3.46)$$

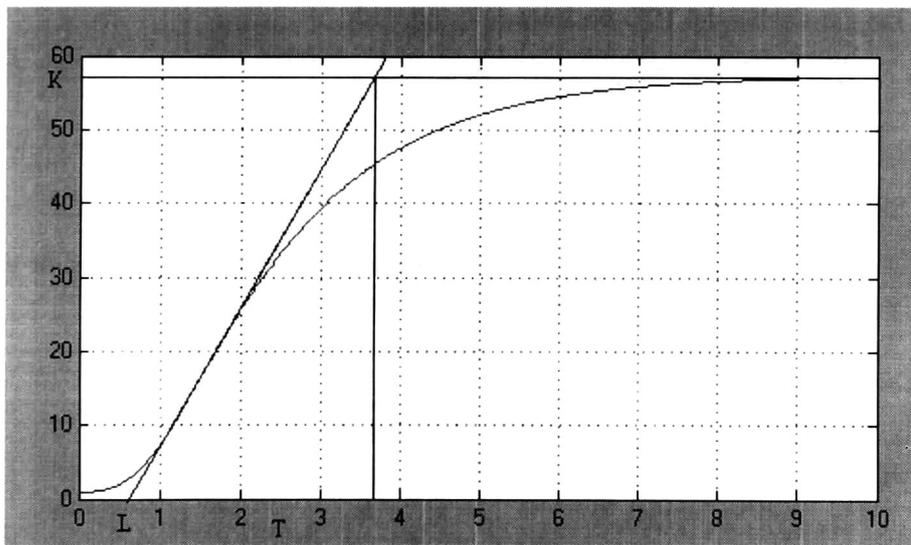
donde el error de control está definido como

$$e(t) = x_{ref}(t) - x(t) \quad (3.47)$$

y  $K_p$ ,  $K_i$ ,  $K_d$  son constantes que deben ajustarse para sintonizar el control. Una forma de hacerlo es mediante un proceso de prueba-error. Sin embargo, puede resultar muy tardado, en este caso se utiliza el método de Ziegler y Nichols, que calcula las constantes mediante una aproximación a un sistema de primer orden, como se tiene un error al hacer la aproximación es necesario hacer un ajuste fino con las constantes que se obtienen.

### 3.4.2 Método de Ziegler y Nichols.

Dado que no se puede obtener función de transferencia del sistema original los cálculos se hicieron basados en la gráfica de la respuesta en lazo abierto, con lo cual tenemos:



Respuesta del sistema

(3.48)

Ahora con la siguiente tabla calculamos las constantes de acuerdo a los valores de  $L$  y  $T$  de la gráfica.

Tipo de controlador	$K_p$	$T_d$	$T_i$	
$P$	$\frac{T}{L}$	$\infty$	$0$	(3.49)
$PI$	$\frac{0.9T}{L}$	$\frac{L}{0.3}$	$0$	
$PID$	$\frac{1.2T}{L}$	$2L$	$0.5L$	

### 3.4.3 PID difuso (programación de ganancias)

El PID difuso, al igual que el PID, requiere solo de conocer el error y su derivada, la aplicación de este método es sencilla, aunque es necesario conocer bien el comportamiento del sistema con el que se trabaja para proponer las funciones de membresía y las reglas de cambio difuso que proporcionen la mejor respuesta.

Mediante un análisis de la respuesta típica del sistema se obtiene un conjunto de reglas difusas IF-THEN para las ganancias del PID, posteriormente estas reglas se combinan en un sistema difuso que es utilizado para ajustar las ganancias del PID en línea [17], [2], [12].

Supóngase que podemos determinar los rangos

$$[K_{p\min}, K_{p\max}] \subset R \text{ y } [K_{d\min}, K_{d\max}] \subset R$$

tal que la ganancia proporcional

$$K_p \in [K_{p\min}, K_{p\max}]$$

y la ganancia derivativa

$$K_d \in [K_{d\min}, K_{d\max}].$$

Por conveniencia  $K_p$  y  $K_d$  son normalizados para tener un valor entre 1 y 0 a través de la siguiente transformación lineal:

$$K'_p = \frac{K_p - K_{p\min}}{K_{p\max} - K_{p\min}} \quad (3.50)$$

$$K'_d = \frac{K_d - K_{d\min}}{K_{d\max} - K_{d\min}} \quad (3.51)$$

Asumiendo que la constante integral de tiempo se obtiene de la constante derivativa de tiempo por:

$$T_i = \alpha T_d \quad (3.52)$$

donde

$$T_d = \frac{K_p}{K_d}, \quad T_i = \frac{K_p}{K_i}. \quad (3.53)$$

y  $\alpha$  es un parametro auxiliar, que define mas adelante. De aquí se obtiene:

$$K_i = \frac{K_p}{\alpha T_d} = \frac{K_p^2}{\alpha K_d} \quad (3.54)$$

Así que los parámetros que serán cambiados por el sistema difuso son  $K'_p$ ,  $K'_d$  y  $\alpha'$ . Si las entradas del sistema son  $e(t)$  y  $\dot{e}(t)$  tenemos un sistema formado a su vez por tres sistemas difusos de dos entradas y una salida, como se muestra en la siguiente figura

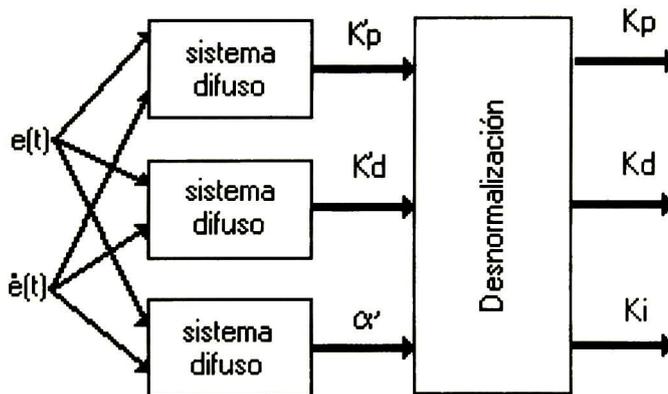


Diagrama general

Ahora se pueden construir las reglas difusas IF-THEN que constituyen los sistemas difusos, tales reglas son de la siguiente forma:

IF  $e(t)$  es  $A^l$  y  $\dot{e}(t)$  es  $B^l$ , THEN  $K'_p$  es  $C^l$ ,  $K'_d$  es  $D^l$ ,  $\alpha'$  es  $E^l$   
 donde  $A^l$ ,  $B^l$ ,  $C^l$ ,  $D^l$  y  $E^l$  son conjuntos difusos, y  $l = 1, 2, \dots, M$ .

Supóngase que los rangos de interés de  $e(t)$  y  $\dot{e}(t)$  son  $[e^-_M \cdot e^+_M]$  y  $[e^-_{Md} \cdot e^+_{Md}]$  respectivamente, se definen conjuntos difusos para cubrir dichos rangos, una vez que han sido definidos se pueden establecer las reglas.

Las reglas se derivan experimentalmente basándose en la respuesta típica al escalón de el proceso.

Finalmente, se combinan las reglas en cada conjunto mediante el producto de inferencia, fuzzificador de conjunto único y defuzzificador de centro promedio, con lo que se tienen las siguientes expresiones:

$$K'_p(t) = \frac{\sum_{l=1}^{25} \bar{y}_p^l \mu_{A^l}(e(t)) \mu_{B^l}(\dot{e}(t))}{\sum_{l=1}^{25} \mu_{A^l}(e(t)) \mu_{B^l}(\dot{e}(t))} \quad (3.55)$$

$$K'_d(t) = \frac{\sum_{l=1}^{25} \bar{y}_d^l \mu_{A^l}(e(t)) \mu_{B^l}(\dot{e}(t))}{\sum_{l=1}^{25} \mu_{A^l}(e(t)) \mu_{B^l}(\dot{e}(t))} \quad (3.56)$$

$$\alpha(t) = \frac{\sum_{l=1}^{25} \bar{y}_\alpha^l \mu_{A^l}(e(t)) \mu_{B^l}(\dot{e}(t))}{\sum_{l=1}^{25} \mu_{A^l}(e(t)) \mu_{B^l}(\dot{e}(t))} \quad (3.57)$$

Es necesario desnormalizar estos parámetros para obtener las constantes  $K_p$ ,  $K_d$  y  $K_i$  del controlador.

# Capítulo 4

## Aplicación

*Este capítulo muestra la aplicación de los diferentes métodos de control descritos en el capítulo anterior, se presenta el desarrollo matemático, y en los casos donde fue posible obtener un controlador se muestran las gráficas con el desempeño del mismo, si bien, no todos los métodos resultaron útiles se incluyen los desarrollos de aquellos que no pudieron aplicarse con el fin de mostrar dónde falla cada uno de los métodos y así tener un antecedente para trabajos futuros.*

### 4.1 Colocación de polos

Este esquema de control se aplica a sistemas lineales, la idea básicamente es linealizar cada uno de los submodelos y aplicar la técnica a cada uno de ellos para posteriormente conmutar de un control a otro de acuerdo a la condición en que se encuentre el automóvil. [4]

Debido a que existen términos constantes en las ecuaciones de estado es necesario hacer un cambio de coordenadas para eliminarlos.

Comenzamos tomando como valores iniciales  $\bar{x}_1 = 10.717$  y  $\bar{u} = 0.2$ , sustituimos en las ecuaciones y calculamos el valor de las demás variables de estado, tenemos los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
\bar{x}_2 &= 34.6265845848310899902827549783 \\
\bar{x}_3 &= 64.7597046911343809523809523440 \\
\bar{x}_4 &= 98.3430405703808292822571853972 \\
\bar{x}_5 &= 363.206096576036060764385202307 \\
\bar{x}_6 &= 344.815651341909527260788664523 \\
\bar{x}_7 &= 0.00151189676074518529168001921276
\end{aligned}$$

Ahora hacemos el siguiente cambio de variable :

$$\delta x_i = x_i - \bar{x}_i$$

Multiplicando  $\dot{x}_1$  por  $x_2$  y haciendo el cambio de variable tenemos:

$$\begin{aligned}
\delta \dot{x}_1 (\delta x_2 + \bar{x}_2) &= 48.61366737 (\delta x_2 + \bar{x}_2) - 156.9735500 (\delta x_1 + \bar{x}_1) \\
&\quad - .0002614355231 (\delta x_1 + \bar{x}_1)^2 (\delta x_2 + \bar{x}_2)
\end{aligned}$$

Despejando  $\delta \dot{x}_1$

$$\begin{aligned}
\delta \dot{x}_1 &= \frac{48.61366737 (\delta x_2 + \bar{x}_2)}{(\delta x_2 + \bar{x}_2)} - \frac{156.9735500 (\delta x_1 + \bar{x}_1)}{(\delta x_2 + \bar{x}_2)} \\
&\quad - \frac{.0002614355231 (\delta^3 \bar{x}_1^2 \bar{x}_2 + 3\delta^2 \bar{x}_1^2 \bar{x}_2 + 3\delta x_1^2 \bar{x}_2 + \bar{x}_1^2 \bar{x}_2)}{(\delta x_2 + \bar{x}_2)}
\end{aligned}$$

Como los valores  $\bar{x}_i$  fueron escogidos para que el sistema tenga una condición de equilibrio finalmente llegamos a

$$\begin{aligned}
\delta \dot{x}_1 &= \frac{48.61366737 \delta x_2}{(\delta x_2 + \bar{x}_2)} - \frac{156.9735500 \delta x_1}{(\delta x_2 + \bar{x}_2)} \\
&\quad - \frac{.0002614355231 (\delta^3 \bar{x}_1^2 \bar{x}_2 + 3\delta^2 \bar{x}_1^2 \bar{x}_2 + 3\delta x_1^2 \bar{x}_2)}{(\delta x_2 + \bar{x}_2)} \quad (4.1)
\end{aligned}$$

Haciendo algo similar para las ecuaciones restantes y obtenemos:

$$\delta \dot{x}_2 = \frac{.0625(17857142855\delta x_3\delta x_2}{3125000000000000000000000000\delta x_2 + 13459622430299157173303733261} + \frac{76912128163908585609530482287\delta x_3}{3125000000000000000000000000\delta x_2 + 13459622430299157173303733261} - \frac{44199658436318095923200171238300\delta x_2}{3125000000000000000000000000\delta x_2 + 13459622430299157173303733261} + \frac{14285714290000000000000000000000\delta x_1}{3125000000000000000000000000\delta x_2 + 13459622430299157173303733261} \quad (4.2)$$

$$\delta \dot{x}_3 = 2373.8582\delta x_4 - 6742\delta x_2 \quad (4.3)$$

$$\delta \dot{x}_4 = .03429742903\delta x_6^2 + 15.9324069912926550659860682636\delta x_6 + .001848239767\delta x_6\delta x_5 - 14.8209102451389273736753859983\delta x_5 - .03231475019\delta x_5^2 - .7171612873\delta x_3 \quad (4.4)$$

$$\delta \dot{x}_5 = .1001677250\delta x_6^2 + 46.5315624873480794411451347831\delta x_6 + .005397896514\delta x_6\delta x_5 - 43.2853686949879933063257252534\delta x_5 - .09437719097\delta x_5^2 - 2.094513105\delta x_3 \quad (4.5)$$

$$\delta \dot{x}_6 = 309.4145799613026319542595384\delta x_6\delta x_7 - .304999200540080619827101905\delta x_6 + 204363.122684696111980170851836\delta x_7 \quad (4.6)$$

$$\delta \dot{x}_7 = .1843\delta u - .0000907183175490113261685445369177\delta x_6^2\delta x_7 - .0804125750825314768282944213\delta x_6\delta x_7 - .0000001235145142251060989370373439\delta x_6^2 - .000109483072628004104572968537\delta x_6 - 13.5363734591933670861490215462\delta x_7 \quad (4.7)$$

Obteniendo el jacobiano y sustituyendo  $\delta x_i = 0$  tenemos:

$$\begin{bmatrix} -8.10384 & 2.50825 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1474.444 & -456.537 & .35714285 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6742. & 0 & 2373.858 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.7171612 & 0 & -14.87978 & 15.934090 & 0 \\ 0 & 0 & -2.094513 & 0 & -43.45732 & 46.536479 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.3049992 & 204363.122 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.0001094 & -13.536373 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Ahora verificamos que el sistema lineal obtenido sea controlable, para la cual calculamos su matriz de controlabilidad:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6924643518 & -.361424e13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2760746672 & -.141857e13 & .6538234e15 \\ 0 & 0 & 0 & 7730090684 & -.4429241e12 & -.112485e14 & .9983195e16 \\ 0 & 0 & 3256340.53 & -186584067 & 3102281409 & .1765851e12 & .4653320e12 \\ 0 & 0 & 9510340.36 & -544930103 & 9060401301 & .5157277e12 & .1359030e13 \\ 0 & 204363.12 & -2828666.1 & 33736409.63 & -391990402.3 & 4531573026 & -.523343e11 \\ 1 & -13.5363 & 160.85910 & -1867.75783 & 21589.10184 & -249321.831 & 2878782.878 \end{bmatrix}$$

El rango de la matriz de controlabilidad es 7, por lo que el sistema no controlable, y los polos están ubicados en:

$$\begin{aligned} & -459.5361800 \\ & -23.80478134 + 37.08905320i \\ & -23.80478134 - 37.08905320i \\ & -.9528040566 \\ & .5722116555e - 10 \\ & -2.295428113 \\ & -11.54594454 \end{aligned}$$

uno de los polos es positivo, sin embargo su valor es muy cercano a cero, se calculan las ganancias de retroalimentación para mover ese polo a 0.01, el

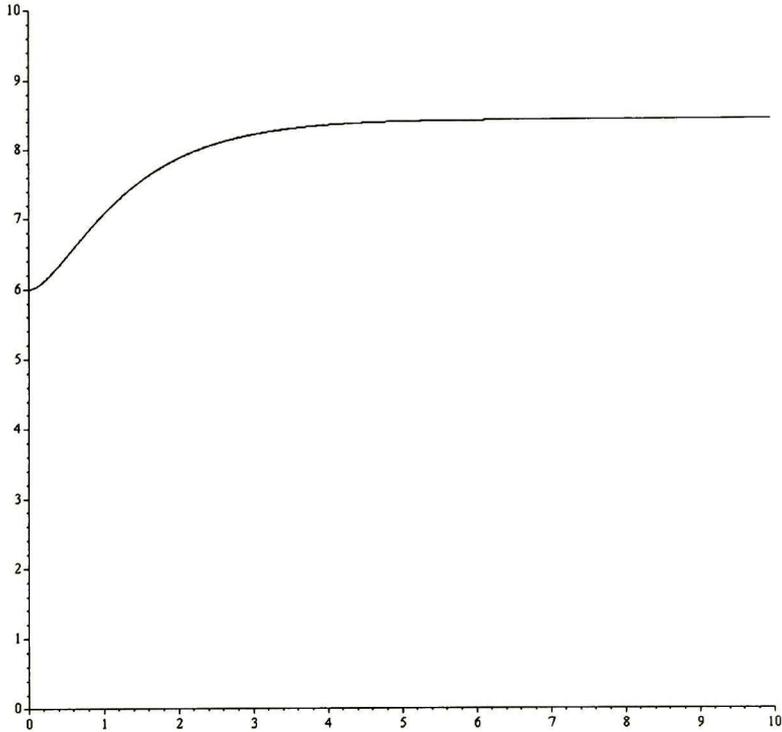
resto de los polos se propone en la misma ubicación, con lo que se tienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
 &.4701770323e - 4 \\
 &.1309192239e - 7 \\
 &.1783419963e - 9 \\
 &-276.3285303 \\
 &94.61488883 \\
 &.3594086096e - 5 \\
 &.5426034473e - 1
 \end{aligned}$$

ahora el valor de los polos en el sistema retroalimentado es:

$$\begin{aligned}
 &-459.5361800 \\
 &-23.80478532 + 37.08905461 * i \\
 &-23.80478532 - 37.08905461 * i \\
 &-11.54593469 \\
 &-2.295448175 \\
 &-.1000011156e - 1 \\
 &-.9527859664
 \end{aligned}$$

La respuesta del sistema es la siguiente:



Velocidad final (seg vs km/h)

Para el segundo submodelo se aplica el mismo método solo que ahora se toman los siguientes valores iniciales para calcular el resto de los estados:

$$\bar{x}_1 = 21 \text{ y } \bar{u} = 1$$

y obtenemos los siguientes valores:

$$\bar{x}_2 = 67.9702071721894552598058592366$$

$$\bar{x}_3 = 108.214733580952380952380952344$$

$$\bar{x}_4 = 193.042337893182207497318543699$$

$$\bar{x}_5 = 904.309013905756138170092390990$$

$$\bar{x}_6 = 855.043184287688171357067781684$$

$$\bar{x}_7 = .184239837000620960506941000365e - 2$$

El sistema linealizado queda:

$$\begin{bmatrix} -2.32042 & .713524 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 420.3522 & -129.871 & .357142 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6742. & 0 & 2373.858 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.71716 & 0 & -56.8647 & 60.3229 & 0 \\ 0 & 0 & -2.0945 & -20620.45 & 18049.971 & 176.176 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.156207 & 399024.472 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.3584e - 3 & -100.0326 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

La matriz de controlabilidad del sistema linealizado es la siguiente

$$1 \times 10^{24} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0019 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0144 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0003 & 4.5775 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y los polos quedan ubicados en

-116  
-1  
-40 + 41i  
-40 - 41i  
18115  
-2  
-99

Este sistema tampoco es controlable y además uno de sus polos tiene un valor positivo muy grande, por lo cual no tiene caso continuar analizando por este método.

## 4.2 Control a bloques

La dinámica del automóvil se puede presentar como un sistema formado por 7 bloques:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= f_1(x_1, d_1) + b_1(x_1) \frac{1}{x_2} \\
 \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, d_2) + b_2 x_3 \\
 \dot{x}_3 &= f_3(x_2) + b_3 x_4 \\
 \dot{x}_4 &= f_4(x_3, x_4, x_5, x_6) \\
 \dot{x}_5 &= f_5(x_3, x_4, x_5, x_6) \\
 \dot{x}_6 &= f_6(x_6, d_3) + b_6(x_7) \\
 \dot{x}_7 &= f_7(x_6, x_7) + b_7(u),
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

donde  $f_1(x_1, d_1) = a_2 x_1^2 + d_1$ ,  $b_1(x_1) = a_1 x_1$ ,  $f_2(x_1, x_2, d_2) = a_3 \frac{x_1}{x_2} + d_2$ ,  $b_2 = a_4$ ,  $f_3(x_2) = a_5 x_2$ ,  $b_3 = a_6$ ,  $f_6(x_6, d_3) = a_9 x_6 + d_3$ ,  $b_6(x_6) = a_7 x_6 + a_8$ ,  $f_7(x_6, x_7) = a_{10} x_7 x_6^2 + a_{11} x_7 x_6$ ,  $b_7 = b$ .

Se puede ver, que la sistema (4.10) tiene casi la forma controlable por bloques, pero el problema es que las funciones  $f_4$  y  $f_5$  cambian dependiendo de régimen de operación:

operacion en primera

$$\begin{aligned}
 f_4 &= a_1 x_6^2 + a_2 x_5 x_6 + a_3 x_5^2 + a_4 x_3 \\
 f_5 &= a_5 x_6^2 + a_6 x_5 x_6 + a_7 x_5^2 + a_8 x_3
 \end{aligned}$$

fase de torque

$$\begin{aligned}
 f_4 &= a_1 x_6^2 + a_2 x_5 x_6 + a_3 x_5^2 + a_4 x_3 \\
 f_5 &= a_5 x_6^2 + a_6 x_5 x_6 + a_7 x_5^2 + a_8 x_3 \\
 &\quad + \check{d}_1 + \check{d}_2 (\check{d}_3 + \check{d}_4 |a_9 x_4 - x_5|) 1000 (1 - e^{-22.2t})
 \end{aligned}$$

fase de cambio

$$\begin{aligned}
 f_4 &= \check{d}_5 (\check{d}_3 + \check{d}_4 |a_9 x_4 - x_5|) 1000 (1 - e^{-22.2t}) + a_{10} x_3 \\
 f_5 &= a_{11} x_6^2 + a_{12} x_5 x_6 + a_{13} x_5^2 \\
 &\quad + \check{d}_6 (\check{d}_3 + \check{d}_4 |a_9 x_4 - x_5|) 1000 (1 - e^{-22.2t})
 \end{aligned}$$

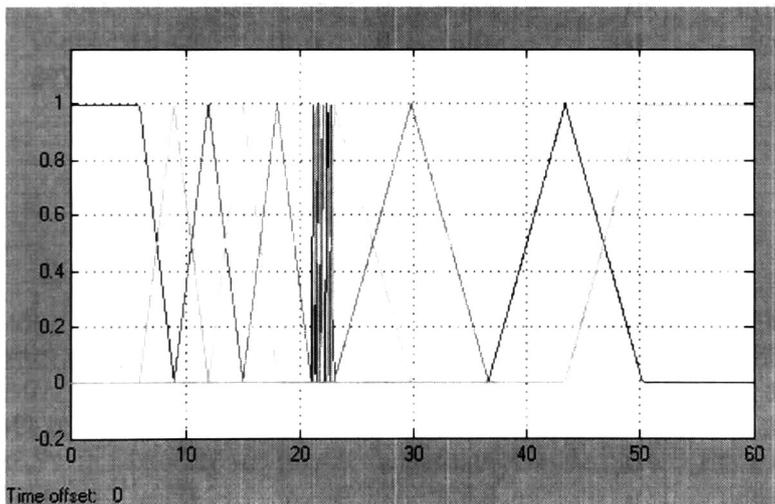
y operacion en segunda

$$\begin{aligned} f_4 &= a_{14}x_6^2 + a_{15}x_5x_6 + a_{16}x_5^2 + a_{17}x_3 \\ f_5 &= a_{18}x_6^2 + a_{19}x_5x_6 + a_{20}x_5^2 + a_{21}x_3 \end{aligned}$$

Este conmutación de las funciones  $f_4$  y  $f_5$  no permite aplicar la técnica de control por bloques.

### 4.3 Takagi-Sugeno

Para aplicar el metodo de Takagi-Sugeno es necesario construir un modelo difuso mediante la obtención de modelos lineales en diferentes puntos de equilibrio que permitan una buena descripción del modelo original [1], [15]. En el caso del automóvil, al no existir puntos de equilibrio se seleccionaron puntos de operación, basados en el comportamiento del sistema en la simulación de lazo abierto, de esta forma los puntos de operación que tenemos para  $x_1$  son: 6, 9, 12, 15, 18, 21, 21.2, 21.4, 21.6, 21.8, 22, 22.2, 22.4, 22.6, 22.8, 23, 29.8, 36.6, 43.4, 50.2. Así tenemos las siguientes funciones de membresía:



(4.11)

Funciones de pertenencia

Lo primero es obtener los modelos lineales, de forma similar a como se hizo en la colocación de polos, solo que en este caso tendremos 16 modelos, cada uno de los cuales corresponde a un punto de operación distinto:

$$\begin{bmatrix} -5.71958 & 1.24904 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1040.474 & -227.3432 & .3571428 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6742 & 0 & 2373.8582 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.717161 & 0 & -7.29979 & 38.5004 & 0 \\ 0 & 0 & -2.09451 & 0 & -21.3194 & 112.442 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .029318 & 307053.097 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.00034 & -50.216472 \end{bmatrix}$$

Modelo para  $x_1 = 6$

$$\begin{bmatrix} -3.47834 & .691805 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 632.2511 & -125.918 & .3571428 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6742 & 2373.8582 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.7171612 & 0 & -12.124358 & 43.560461 & 0 \\ 0 & 0 & -2.094513 & 0 & -35.409925 & 127.22097 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.02544832 & 329238.1228 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.00034798 & -60.7659181 \end{bmatrix}$$

Modelo para  $x_1 = 9$

$$\begin{bmatrix} -2.48454 & .4695173 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 451.0803 & -85.4588 & .3571428 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6742 & 0 & 2373.8582 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.717161 & 0 & -17.65503 & 26.4949 & 0 \\ 0 & 0 & -2.09451 & 0 & -51.5626 & 77.38 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.0669098 & 251606.004 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.0002303 & -27.92902 \end{bmatrix}$$

Modelo para  $x_1 = 12$

$$\begin{bmatrix} -1.95661 & .362899 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 354.7042 & -66.0529 & .3571428 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6742 & 0 & 2373.8582 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.7171612 & 0 & -21.86092 & 49.71514 & 0 \\ 0 & 0 & -2.09451 & 0 & -63.84616 & 145.1961 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.099088 & 355724.0107 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.000342 & -74.5820250 \end{bmatrix}$$

Modelo para  $x_1 = 15$

$$\begin{bmatrix} -1.64336 & .3061423 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 297.4021 & -55.72228 & .3571428 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6742 & 0 & 2373.8582 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.7171612 & 0 & -26.20324 & 51.78892 & 0 \\ 0 & 0 & -2.09451 & 0 & -76.52815 & 151.2526 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.12384216 & 364511.384 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.0003394 & -79.459583 \end{bmatrix}$$

Modelo para  $x_1 = 18$

$$\begin{bmatrix} -1.44061 & .2734268 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 260.2133 & -49.7675 & .3571428 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6742 & 0 & 2373.8582 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.094513 & 0 & 87.768640 & -156.1252576 & 0 \\ 0 & 0 & -2.09451 & -7936.032 & 4974.6264 & 156.1252576 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.1436446979 & 371535.095 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.0003360025 & -83.463425 \end{bmatrix}$$

Modelo para  $x_1 = 21$

$$\begin{bmatrix} -1.43037 & .2720521 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 258.3311 & -49.51736 & .35714285 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6742 & 0 & 2373.8582 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.0945131 & 0 & 88.47888 & -156.4062 & 0 \\ 0 & 0 & -2.094513 & -7936.3972 & 4974.148 & 156.4062 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.14457294 & 371937.334 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.00033591 & -83.69555 \end{bmatrix}$$

Modelo para  $x_1 = 21.2$

$$\begin{bmatrix} -1.419023 & .2702032 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 256.24599 & -49.18084 & .35714285 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6742 & 0 & 2373.858 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.0945131 & 0 & 89.16972 & -156.7066 & 0 \\ 0 & 0 & -2.0945131 & -7936.552 & 4973.557 & 156.7066 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.1458106 & 372370.515 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.0003356 & -83.945874 \end{bmatrix}$$

Modelo para  $x_1 = 21.4$

$$\begin{bmatrix} -1.409099 & .2688566 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 254.4205 & -48.9357 & .3571428 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6742 & 0 & 2373.8582 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.094513 & 0 & 89.86109 & -156.98705 & 0 \\ 0 & 0 & -2.094513 & -7937.073 & 4973.198 & 156.98705 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.14704825 & 372772.754 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.000335398 & -84.178637 \end{bmatrix}$$

Modelo para  $x_1 = 21.6$

$$\begin{bmatrix} -1.399316 & .26752092 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 252.62094 & -48.69263 & .35714285 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6742 & 0 & 2373.8582 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.094513 & 0 & 90.55247 & -157.2674 & 0 \\ 0 & 0 & -2.094513 & -7935.876 & 4971.7433 & 157.2674 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.1479765 & 373174.993 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.0003353 & -84.411705 \end{bmatrix}$$

Modelo para  $x_1 = 21.8$

$$\begin{bmatrix} -1.388464 & .2657293 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 250.62656 & -48.36653 & .357142 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6742 & 0 & 2373.8582 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9.5992 & -36370.977 & 23201.046 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15978.4900 & -10291.26 & 170.2654 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.1492141 & 373577.23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.0003350 & -84.64508 \end{bmatrix}$$

Modelo para  $x_1 = 22$

$$\begin{bmatrix} -1.378973 & .2644208 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 248.88003 & -48.1283 & .3571428 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6742 & 0 & 2373.8582 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9.59923 & -36371.516 & 23201.390 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15978.7269 & -10292.14 & 170.5462 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.150142 & 373948.52 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.000334 & -84.8607 \end{bmatrix}$$

Modelo para  $x_1 = 22.2$

$$\begin{bmatrix} -1.369614 & .2631230 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 247.15768 & -47.8921 & .3571428 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6742 & 0 & 2373.8582 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9.59923 & -36372.05 & 23201.734 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15978.963 & -10293.024 & 170.827 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.15138 & 374319.82 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.000334 & -85.07673 \end{bmatrix}$$

Modelo para  $x_1 = 22.4$

$$\begin{bmatrix} -1.36038 & .261835 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 245.459 & -47.6578 & .3571428 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6742 & 0 & 2373.8582 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9.59923 & -36373.226 & 23202.4811 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15979.4781 & -10294.059 & 171.1289 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.1523083 & 374722.06 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.0003344 & -85.31098 \end{bmatrix}$$

Modelo para  $x_1 = 22.6$

$$\begin{bmatrix} -1.351286 & .2605590 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 243.7835 & -47.4254 & .357142 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6742 & 0 & 2373.8582 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9.5992 & -36377.311 & 23205.086 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15981.272 & -10295.911 & 171.4091 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.1532365 & 375093.363 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.0003343 & -85.52748 \end{bmatrix}$$

Modelo para  $x_1 = 22.8$

$$\begin{bmatrix} -1.343438 & .2597327 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 242.33612 & -47.2750 & .35714285 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6742 & 0 & 2373.858 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.7171612 & 0 & -32.36809 & 54.39534 & 0 \\ 0 & 0 & -2.094513 & 0 & -94.53299 & 158.8649 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.1544742 & 375464.66 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.00033401 & -85.744245 \end{bmatrix}$$

Modelo para  $x_1 = 23$

$$\begin{bmatrix} -1.128869 & .2352905 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 202.63424 & -42.8262 & .3571428 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6742 & 0 & 2373.858 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.7171612 & 0 & -38.94012 & 56.7731545 & 0 \\ 0 & 0 & -2.094513 & 0 & -113.727 & 165.809446 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.18077444 & 385334.98 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.00032885 & -91.6023 \end{bmatrix}$$

Modelo para  $x_1 = 29.8$

$$\begin{bmatrix} -1.008258 & .2281149 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 180.0342 & -41.5201 & .3571428 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6742 & 0 & 2373.858 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.7171612 & 0 & -44.01 & 58.249905 & 0 \\ 0 & 0 & -2.094513 & 0 & -128.533 & 170.12238 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.1965545 & 391337.628 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.0003253 & -95.255168 \end{bmatrix}$$

Modelo para  $x_1 = 36.6$

$$\begin{bmatrix} -.9358604 & .2305496 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 166.2095 & -41.9633 & .3571428 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6742 & 0 & 2373.858 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.717161 & 0 & -47.79671 & 59.099591 & 0 \\ 0 & 0 & -2.09451 & 0 & -139.5932 & 172.60394 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.2049087 & 394679.306 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.0003235 & -97.318311 \end{bmatrix}$$

Modelo para  $x_1 = 43.4$

$$\begin{bmatrix} -.8935053 & .2405321 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 157.8531 & -43.7802 & .357142 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6742 & 0 & 2373.858 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.717161 & 0 & -50.46959 & 59.519267 & 0 \\ 0 & 0 & -2.09451 & 0 & -147.3995 & 173.82963 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.1161068 & 396226.379 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.0003804 & -98.280636 \end{bmatrix}$$

Modelo para  $x_1 = 50.2$

sin embargo al obtener el modelo final, y simularlo el resultado es que se pierden dinámicas del sistema debido a la linealización, así que no es posible aplicar el esquema de regulación que se tenía previsto.

## 4.4 Reducción del modelo

### 4.4.1 Modelo de operación en primera

Para diseñar un PID controlador aplicamos primero el método de sistemas con variedad integral y después el método de sistemas con perturbaciones

singulares al modelo linealizado y presentado como

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\
 \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{122}x_2 + a_{23}x_3 \\
 \dot{x}_3 &= a_{32}x_2 + a_{34}x_4 \\
 \dot{x}_4 &= a_{43}x_3 + a_{45}x_5 + a_{46}x_6 \\
 \dot{x}_5 &= c_5a_{43}x_3 + c_5a_{45}x_5 + c_5a_{46}x_6 \\
 \dot{x}_6 &= a_{66}x_6 + a_{67}x_7 \\
 \dot{x}_7 &= a_{76}x_6 + a_{77}x_7 + b_7u
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Observamos que existe la variedad integral  $S$  escrito como

$$x_5 = c_5x_4 \tag{4.13}$$

Se puede ver que la condicion (3.44) se satisface. Entonces substituimos (4.13) en (4.12) e introducimos los constantes del tiempo en las ecuaciones que contienen movimientos rápidos [8], obtenemos el sistema de sexto orden de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + d_1 \\
 \tau_2\dot{x}_2 &= \bar{a}_{21}x_1 + x_2 + \bar{a}_{23}x_3 + d_2 \\
 \tau_3\dot{x}_3 &= \bar{a}_{32}x_2 + a_{34}x_4 \\
 \tau_4\dot{x}_4 &= a_{43}x_3 + c_5a_{45}x_4 + a_{46}x_6 \\
 \dot{x}_6 &= a_{66}x_6 + a_{67}x_7 + d_6 \\
 \tau_7\dot{x}_7 &= a_{76}x_6 + a_{77}x_7 + b_7u
 \end{aligned}$$

donde  $\tau_2 = \frac{1}{a_{22}}$ ,  $\tau_3 = \frac{1}{c_3}$ ,  $\bar{a}_{33} = \frac{a_{33}}{c_3}$  Introduciendo nuevo variable  $\dot{x}_4$

$$\dot{x}_4 = -3x_4 + x_5 \tag{4.14}$$

$\dot{x}_4$  es una constante, y por simplicidad le asignamos el valor de cero, Entonces se tiene:

$$3x_4 = x_5 \tag{4.15}$$

El término  $\tau$  para los estados que tienen una constante de tiempo rápida es prácticamente 0, por lo que podemos hacer:

$$x_7 = -0.067706867e - 5x_6 + 0.367011477e - 2u \quad (4.16)$$

sustituyendo 4.16 en  $\dot{x}_6$

$$\dot{x}_6 = -2.10827832557x_6 + 1126.918782949u \quad (4.17)$$

como  $\dot{x}_4$  es una dinámica rápida se puede despreciar su efecto igualando a cero, despejando  $x_3$

$$x_3 = -10.1787467231x_5 + 53.684533437x_6 \quad (4.18)$$

Haciendo  $\dot{x}_3 = 0$

$$x_4 = 2.84010224x_2 \quad (4.19)$$

sustituyendo 4.15 y 4.19 en 4.18

$$x_3 = -86.7260441067x_2 + 53.684533437x_6 \quad (4.20)$$

ahora 4.20 en  $\dot{x}_2$

$$x_2 = 4.02789779x_1 + 0.07422963761x_6 \quad (4.21)$$

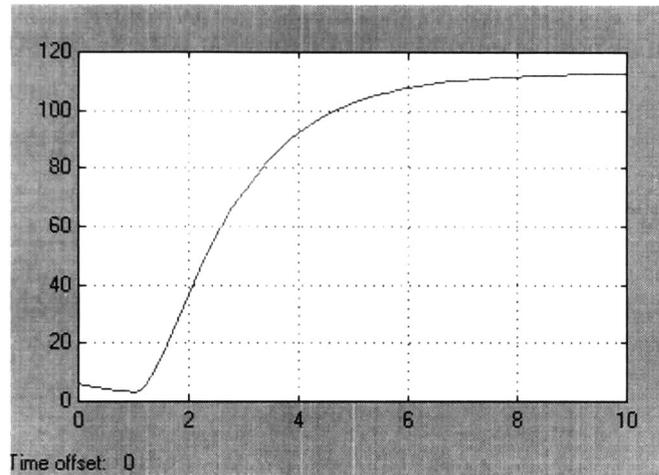
finalmente al sustituir 4.21 en  $\dot{x}_1$  se obtiene un sistema de segundo orden

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -0.68857453971035x_1 + 0.0927074506x_6 + d_1 \\ \dot{x}_6 &= -2.10827832557x_6 + 1126.918782949u \end{aligned} \quad (4.22)$$

Los valores propios del sistema están en

$$-2.10827832557000$$

$$-0.68857453971035$$



(4.23)

Velocidad del sistema en lazo abierto(seg vs km/h)

por lo que el sistema es estable.

#### 4.4.2 Modelo de operación en segunda

Se tiene el modelo lineal

$$\dot{x}_1 = -1.128869146x_1 + 0.2352905683x_2 \quad (4.24)$$

$$\dot{x}_2 = 202.6342452x_1 - 42.82624473x_2 + 0.3571428571x_3$$

$$\dot{x}_3 = -6742x_2 + 2373.8582x_4$$

$$\dot{x}_4 = -0.71716x_3 - 38.94012559x_5 + 56.77315454x_6$$

$$\dot{x}_5 = -2.094513105x_3 - 113.7270023x_5 + 165.8094467x_6$$

$$\dot{x}_6 = -0.1807744477x_6 + 385334.9858x_7$$

$$\dot{x}_7 = -0.0003288560793x_6 - 91.6023035x_7 + 0.1843u$$

Analizando el modelo al igual que se hizo con el modelo de operación en primera se observa que es posible aplicar el método de perturbación singular.[7]

La dinámica de  $\dot{x}_7$  es rápida, así que se deprecia, con lo que se tiene

$$0 = -0.0003288560793x_6 - 91.6023035x_7 + 0.1843u$$

de aquí es posible encontrar una expresión para  $x_7$  en terminos de  $x_6$  y  $u$

$$x_7 = -3.59004158994x_6 + 0.00201195813815u \quad (4.25)$$

sustituyendo 4.25 en  $\dot{x}_6$

$$\dot{x}_6 = -1.56414307278386x_6 + 775.2778605942248u \quad (4.26)$$

con  $\dot{x}_5 = 0$  depejamos  $x_3$

$$x_3 = -54.2975844975x_5 + 79.163718911178x_6 \quad (4.27)$$

Al igual que en modelo anterior, las ecuaciones de  $\dot{x}_4$  y  $\dot{x}_5$  son dependientes, así que se propone nuevamente 4.14 [8], y al sutituir 4.15 en 4.27 se tiene

$$x_3 = -162.8927534927x_4 + 79.163718911178x_6 \quad (4.28)$$

al igualar  $\dot{x}_3 = 0$  se encuentra una expresión para  $x_4$

$$x_4 = 2.84010244x_2 \quad (4.29)$$

y al sustituir 4.29 en 4.28 se tiene

$$x_3 = -462.63207467x_2 + 79.163718911178x_6 \quad (4.30)$$

$\dot{x}_2$  también es una dinámica rápida, por lo que se iguala a cero y se obtiene

$$x_2 = 0.97395967912616x_1 + 0.13589275132467x_6 \quad (4.31)$$

finalmente se sutituye 4.31 en  $\dot{x}_1$

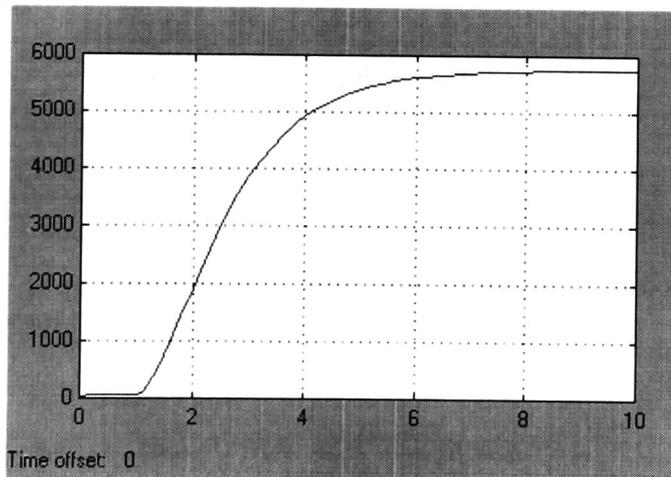
$$\dot{x}_1 = -0.8997056195712x_1 + 6.65231300325625x_6 \quad (4.32)$$

así que se tiene el sistema de segundo orden

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -0.8997056195712x_1 + 6.65231300325625x_6 + d_1 \\ \dot{x}_6 &= -1.56414307278386x_6 + 775.2778605942248u \end{aligned} \quad (4.33)$$

Los valores propios de este nuevo sistema son

$$\begin{aligned} &-1.56414307278386 \\ &-0.89970561957120 \end{aligned}$$



(4.34)

Velocidad en lazo abierto (seg vs km/h)

### 4.4.3 Análisis de estabilidad

Se tiene el sistema reducido presentado como:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{16}x_6 + d_1 \\ \dot{x}_6 &= a_{66}x_6 + b_6u\end{aligned}\quad (4.35)$$

Definimos el error de la siguiente forma:

$$e_1 = x_{1ref} - x_1 \quad (4.36)$$

por lo que

$$x_1 = e_1 + x_{1ref} \quad (4.37)$$

así que tenemos

$$\dot{e}_1 = a_{11}e_1 + a_{16}x_6 + d_1 - a_{11}x_{1ref} \quad (4.38)$$

$$\dot{e}_2 = a_{66}x_6 + b_6u \quad (4.39)$$

Se propone:

$$u = K_p e_1 + K_d \dot{e}_1 + K_i \int_0^t e_1 dt \quad (4.40)$$

$$\dot{e}_0 = e_1 \quad (4.41)$$

$$\dot{e}_1 = e_2 \quad (4.42)$$

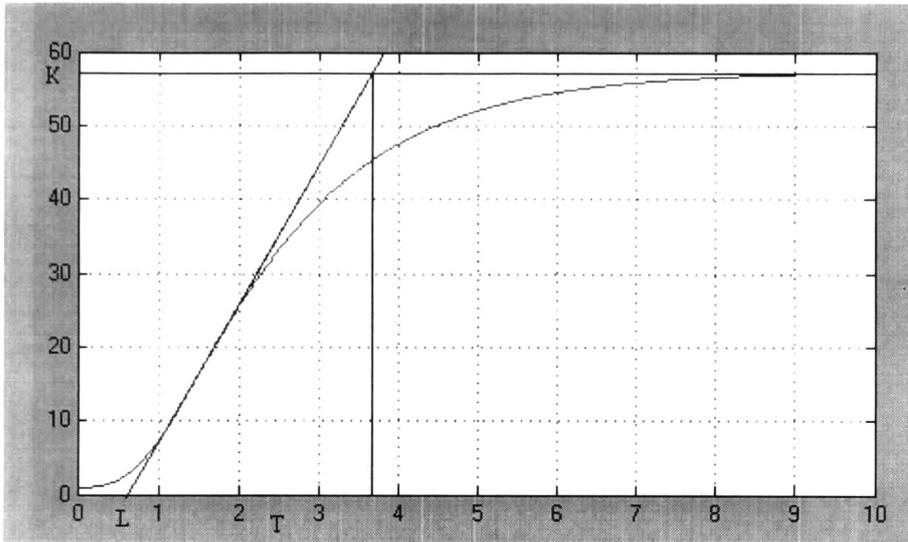
$$\dot{e}_2 = \bar{a}_{21}e_1 + \bar{a}_{22}e_2 + a_{20}e_0 + b_6u \quad (4.43)$$

Por lo que

$$u = K_p e_1 + K_d e_2 + K_i \int_0^t e_0 dt \quad (4.44)$$

y el sistema en lazo cerrado es estable.

## 4.5 PID-PID difuso



Respuesta del sistema (seg vs km/h)

(4.45)

Utilizando los valores de  $L$  y  $T$  de la gráfica. ( $L = 0.65$ ,  $T = 3$ ) calculamos las ganancias

$$K_p = 5.538461538$$

$$T_d = 1.3$$

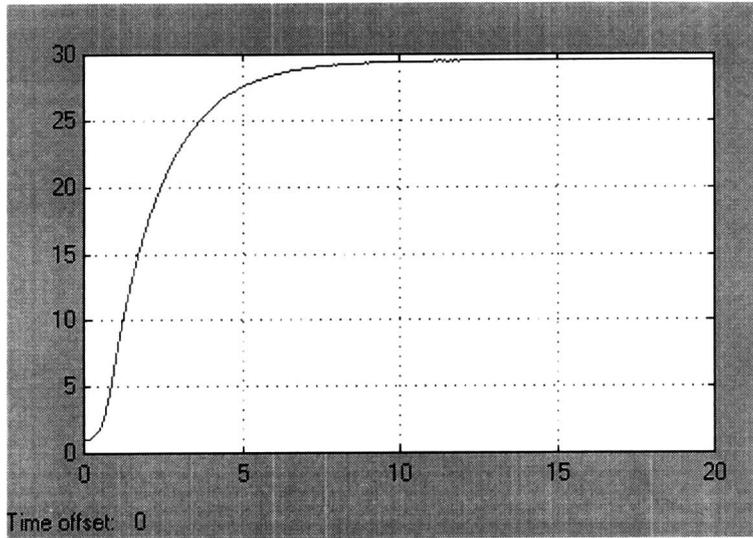
$$T_i = .325$$

Después de muchos ajustes se obtuvieron los siguientes valores de ganancia que generan la respuesta que se muestra a continuación:

$$\dot{K}_p = 0.738461$$

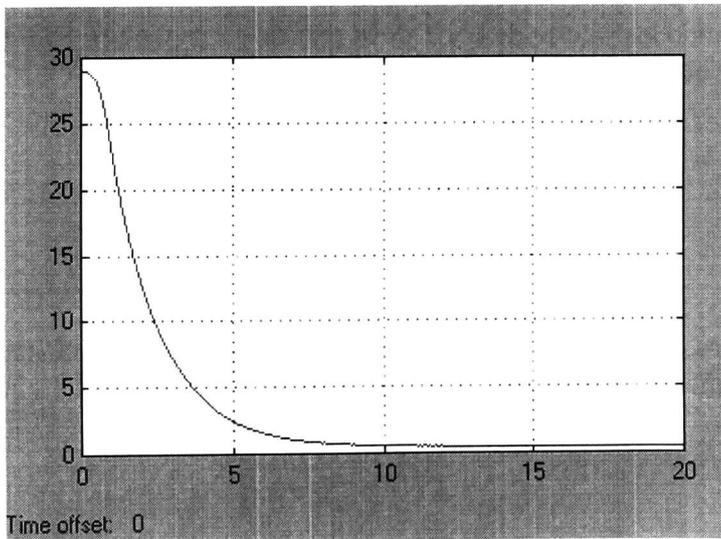
$$\dot{K}_d = 0.004142$$

$$\dot{K}_i = 1.2$$



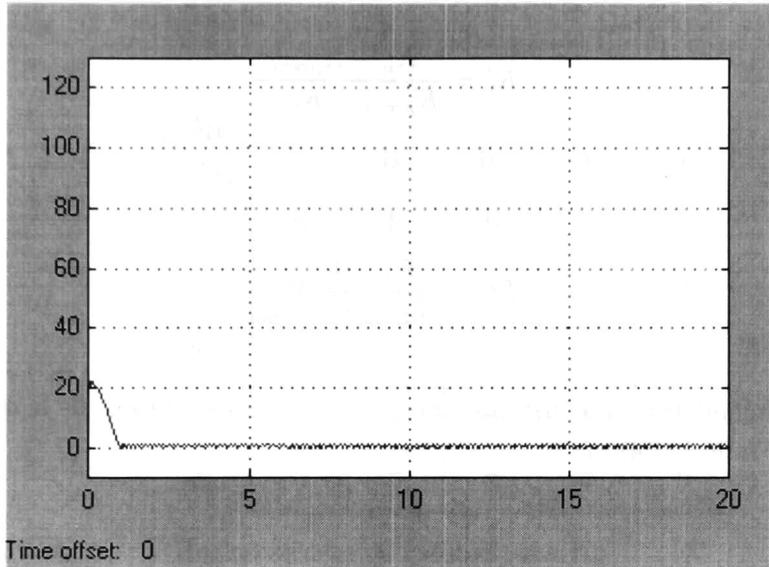
(4.46)

Velocidad final (seg vs km/h)



(4.47)

error  $e(t)$  (seg vs km/h)



(4.48)

control  $u(t)$  (seg vs rad)

Se observa que el controlador PID responde muy bien, se utilizaron diferentes valores de ganancias, y en algunas la respuesta era más rápida, sin embargo se presentaba un sobreimpulso, que tratándose del sistema representaría un problema de seguridad.

#### 4.5.1 Programación de ganancias

Mediante un análisis de la respuesta típica del sistema se obtiene un conjunto de reglas difusas IF-THEN para las ganancias del PID [2], [17], [12], posteriormente estas reglas se combinan en un sistema difuso que es utilizado para ajustar las ganancias del PID en línea.

Supóngase que podemos determinar los rangos

$$[K_{p\min}, K_{p\max}] \subset R \text{ y } [K_{d\min}, K_{d\max}] \subset R$$

tal que la ganancia proporcional

$$K_p \in [K_{p\min}, K_{p\max}]$$

y la ganancia derivativa

$$K_d \in [K_{d\min}, K_{d\max}]$$

Por conveniencia  $K_p$  y  $K_d$  son normalizados para tener un valor entre 1 y 0 a través de la siguiente transformación lineal:

$$K'_p = \frac{K_p - K_{p\min}}{K_{p\max} - K_{p\min}} \quad (4.49)$$

$$K'_d = \frac{K_d - K_{d\min}}{K_{d\max} - K_{d\min}} \quad (4.50)$$

Asumiendo que la constante integral de tiempo se obtiene de la constante derivativa de tiempo por:

$$T_i = \alpha T_d \quad (4.51)$$

de donde se obtiene:

$$K_i = \frac{K_p}{\alpha T_d} = \frac{K_p^2}{\alpha K_d} \quad (4.52)$$

Así que los parámetros que serán cambiados por el sistema difuso son  $K'_p$ ,  $K'_d$  y  $\alpha$ . Si las entradas del sistema son  $e(t)$  y  $\dot{e}(t)$  tenemos un sistema formado a su vez por tres sistemas difusos de dos entradas y una salida.

Ahora se pueden construir las reglas difusas IF-THEN que constituyen los sistemas difusos, tales reglas son de la siguiente forma:

IF  $e(t)$  es  $A^l$  y  $\dot{e}(t)$  es  $B^l$  THEN  $K'_p$  es  $C^l$ ,  $K'_d$  es  $D^l$ ,  $\alpha$  es  $E^l$

donde  $A^l$ ,  $B^l$ ,  $C^l$ ,  $D^l$  y  $E^l$  son conjuntos difusos, y  $l = 1, 2, \dots, M$

En nuestro caso formamos los siguientes conjuntos de reglas difusas de cambio para cada uno de los parámetros:

	$\dot{e}(t)$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$
$e(t)$						
$a_1$		b	b	b	b	b
$a_2$		s	s	s	s	b
$a_3$		s	b	s	s	b
$a_4$		b	s	s	s	b
$a_5$		b	b	b	b	b

(4.53)

Reglas difusas de cambio para  $K_p'$

	$\dot{e}(t)$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$
$e(t)$						
$a_1$		s	s	s	s	s
$a_2$		b	b	b	b	s
$a_3$		b	s	b	b	s
$a_4$		s	b	b	b	s
$a_5$		s	s	s	s	s

(4.54)

Reglas difusas de cambio para  $K_d'$

$e(t) \backslash \dot{e}(t)$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$
$a_1$	b	b	b	b	b
$a_2$	s	s	s	s	b
$a_3$	b	b	b	b	b
$a_4$	s	s	s	s	b
$a_5$	b	b	b	b	b

(4.55)

Reglas difusas de cambio para  $\alpha$

donde

$$a_1 = b_1 = -1$$

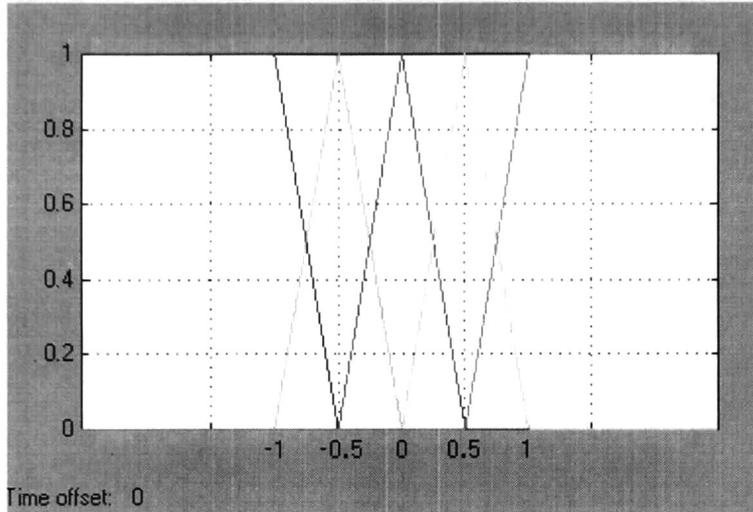
$$a_2 = b_2 = -0.5$$

$$a_3 = b_3 = 0$$

$$a_4 = b_4 = 0.5$$

$$a_5 = b_5 = 1$$

de forma que las funciones de membresía tanto para  $e(t)$  como para  $\dot{e}(t)$  son:



(4.56)

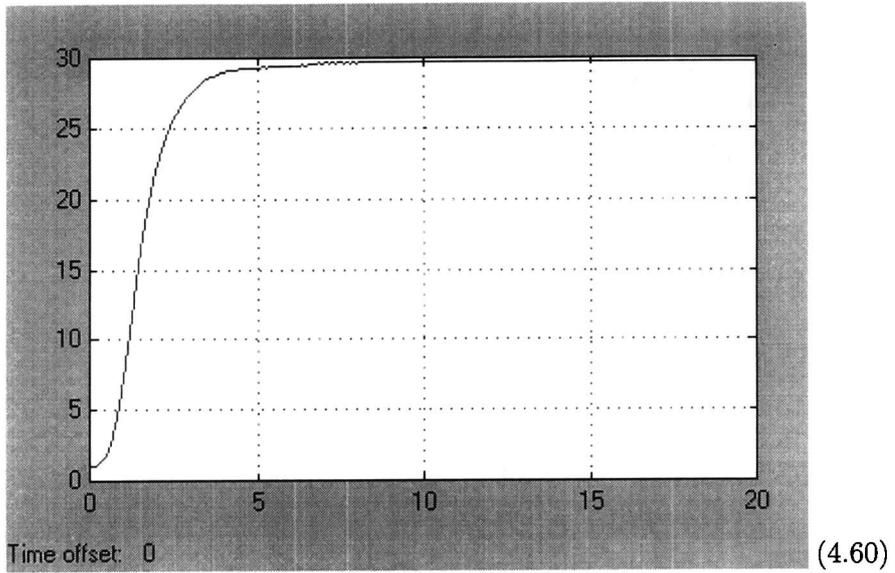
Funciones de pertenencia

Se combinan las 25 reglas en cada conjunto mediante el producto de inferencia, fuzzificador de conjunto único y defuzzificador de centro promedio, con lo que se tienen las siguientes expresiones:

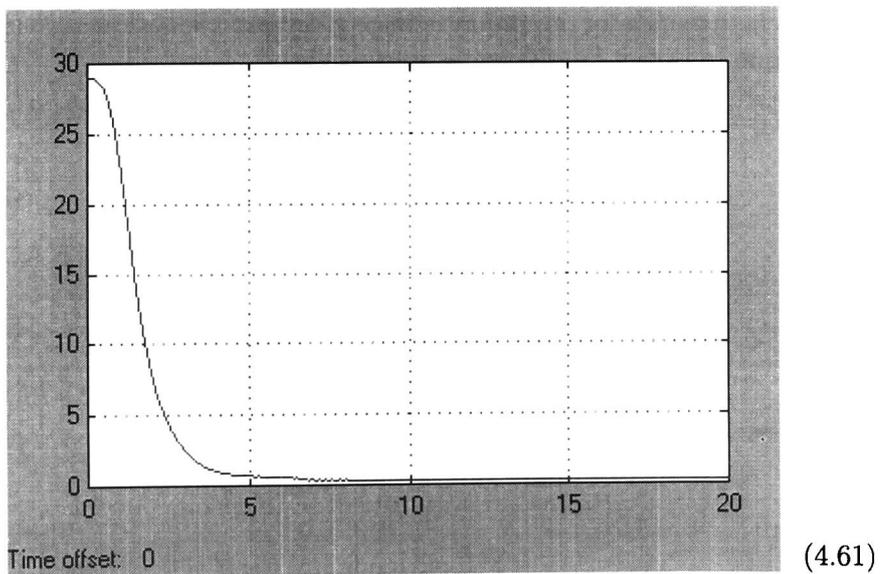
$$K'_p(t) = \frac{\sum_{l=1}^{25} \bar{y}_p^l \mu_{A^l}(e(t)) \mu_{B^l}(\dot{e}(t))}{\sum_{l=1}^{25} \mu_{A^l}(e(t)) \mu_{B^l}(\dot{e}(t))} \quad (4.57)$$

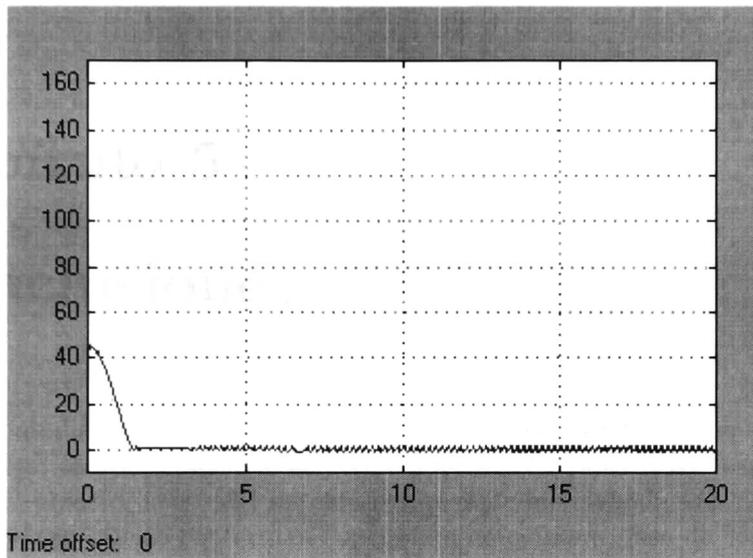
$$K'_d(t) = \frac{\sum_{l=1}^{25} \bar{y}_d^l \mu_{A^l}(e(t)) \mu_{B^l}(\dot{e}(t))}{\sum_{l=1}^{25} \mu_{A^l}(e(t)) \mu_{B^l}(\dot{e}(t))} \quad (4.58)$$

$$\alpha(t) = \frac{\sum_{l=1}^{25} \bar{y}_\alpha^l \mu_{A^l}(e(t)) \mu_{B^l}(\dot{e}(t))}{\sum_{l=1}^{25} \mu_{A^l}(e(t)) \mu_{B^l}(\dot{e}(t))} \quad (4.59)$$



Velocidad final (seg vs km/h)

error  $e(t)$  (seg vs km/h)



(4.62)

control  $u(t)$  (seg vs rad)

El comportamiento del controlador es aún mejor que el PID convencional, la respuesta es más rápida y en ningún caso se presentaron sobreimpulsos, además de eso se introdujo un cambio de parámetros (altura de las ruedas) y el sistema se comportó como si no hubiera existido la perturbación, esta perturbación podría representar algunos cambios sufridos por el vehículo al iniciar una subida o una bajada en la carretera.



# Capítulo 5

## Conclusiones

- Se analizó un modelo de automóvil, formado por tres bloques principales; motor, transmisión y tren motriz. Se obtuvo su respuesta en lazo abierto, tanto del sistema completo como de cada uno de los submodelos que lo conforman (operación en primera, fase de torque, fase de cambio y operación en segunda). Se encontró que de los cuatro submodelos, los de operación en primera y en segunda son estables, mientras que los dos restantes son inestables, sin embargo, debido a que el modelo conmuta de un submodelo a otro, éste se comporta adecuadamente.
- Se analizaron diferentes métodos de control que pudieran servir como alternativas para resolver el problema del control de velocidad; control por bloques, Takagi-Sugeno, perturbación singular, PID y PID difuso.
- Se aplicó cada uno de los métodos de control al modelo, es importante mencionar, que debido a las características del modelo no fue posible obtener resultados satisfactorios en todos los métodos, sin embargo se incluyen los que no resultaron útiles con el fin de tener un antecedente para trabajos posteriores.
- Se redujo el modelo del sistema de orden 7 a orden 2, mediante la aplicación de los métodos de perturbación singular y variedad integral.
- Se diseñó un controlador PID, si bien se logró obtener una respuesta más rápida, ésta presentaba un sobreimpulso, y dado que eso podría provocar un accidente se tomó como una restricción de seguridad.

- Se diseñó un controlador PID difuso, que resultó tener mejor desempeño que el anterior, además es robusto a perturbaciones tales como cambio de masa y cambio en la altura de las ruedas, que pueden presentarse al cambiar las condiciones del camino por donde circula el automóvil.

## 5.1 Trabajo a futuro

Aún queda mucho por hacer en el tema, solo se mencionan algunas cosas, que a mi juicio son lo más importante:

- Incluir un modelo de frenos dentro del sistema, en principio para contar con un modelo más real, pero además se podría tener un seguimiento de trayectoria mucho mejor, al poder manejar un rango de velocidad mayor.
- Control de navegación, ya que este es solo un parte del trabajo dentro de automatización de autopistas, aún hace falta controlar la dirección del vehículo
- Obtención de un modelo de las llantas
- Extensión a un automóvil automático con tres velocidades, que son los más comunes, además, el rango de velocidades que se manejan dentro de este trabajo es muy pequeño, para una aplicación más real, es necesario alcanzar velocidades de alrededor de 100 km/h que es una velocidad promedio en carretera
- Simulación en tiempo real del controlador obtenido.

# Bibliografía

- [1] Begovich O., Sánchez E.N. y Maldonado M., *Takagi-Sugeno Fuzzy Scheme for Real-Time Trajectory Tracking of an Underactuated Robot*, IEEE Transactions on Control systems Technology, Vol 10, No. 1, Enero 2002, pps 14-20
- [2] Carvajal J., Chen G. y Ogmen H., *Fuzzy PID controler: Design, performance evaluation, and stability analysis*, Information Sciences, vol 132, 2000, pps 249-269
- [3] Castillo-Toledo B., Loukianov A. y Espinosa-Guerra O. *Robust Decomposition Sliding Mode Regulation*, NOLCOS
- [4] Chen C.T., *Linear System Theory and Design*, Saunders College Publishing, 1984, ISBN 0-03-060289-0
- [5] Cho D. y Hedrick J.K., *Automotive Powertrain Modeling for control*, Transactions of ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Vol 111, No. 4, Diciembre 1989, pps 568-576.
- [6] Hedrick J.K., McMahon D.H., Naredran V. and Swaroop D., *Longitudinal Vehicle Controller Design for IHVS Systems*. American Control Conference 1991
- [7] Khalil H., *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, 1996, ISBN 0-13-228024-8
- [8] Kokotovic P., *Integral Manifold as a Tool for Reduced-Order Modeling of Nonlinear Systems: A Synchronus Machine Case Study*, IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol 36, No 3, Marzo 1989, pp 403-410
- [9] Loukianov A.G., Dodds S.J. y Vitek J., *An Sliding Mode Engine Speed Control*, Preprints of the 3rd IFAC Symposium on Intelligent Autonomous Vehicles, 1998

- [10] Loukianov A.G., Dodds S.J., Hosny W. y Vitek J., *A Robust Automotive Controller Design*, Proceedings of the 1997 IEEE International Conference on Control Applications, 1997, pps 806-811
- [11] McMahon D.H., Hedrick J.K. y Shladover S.E., *Vehicle Modeling and Control for Automated Highway Systems*, Proceedings of the 1990 ACC, San Diego, CA, Mayo 1990
- [12] Mizumoto M., *Realization of PID controls by fuzzy control methods*, Fuzzy sets and systems, vol 70, 1995, pps 171-182
- [13] Moskwa J.J. y Hedrick J.K., *Nonlinear Algorithms for Automotive Engine Control*, IEEE Control Systems Magazine, Abril 1990, pps 88-93
- [14] Onder C.H. y Geering H.P., *Model-Based Multivariable Speed and Air-to-Fuel Ratio Control of an SI Engine*, Swiss Federal Institute of Technology
- [15] Passino K, Yurkovich S., *Fuzzy Control*, Adisson Wesley, 1997, ISBN 0-201-18074-X
- [16] Xu J., Hang C. y Liu C., *Parallel structure and tuning of a fuzzy PID controller*, Automatica, vol 36, 2000, pps 673-684
- [17] Wang L., *A course in fuzzy systems and control*, Prentice Hall, 1997, ISBN 0-13-540882-2
- [18] Marino R. y Tomei P., *Nonlinear Control Design*, Prentice Hall 1995, ISBN 0-13-342635-1



**Centro de Investigación y de Estudios Avanzados  
del IPN**

**Unidad Guadalajara**

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, aprobó la tesis: EL PROBLEMA DE CONTROL DE VELOCIDAD DE UN AUTOMÓVIL del(a) C. Iván VAZQUEZ ALVAREZ el día 27 de Junio de 2003 .

DR. BERNARDINO CASTILLO  
TOLEDO  
INVESTIGADOR CINVESTAV  
3B  
CINVESTAV GDL  
ZAPOPAN

DR. ALEXANDER  
GEORGIEVICH LOUKIANOV  
INVESTIGADOR  
CINVESTAV 3B  
CINVESTAV GDL  
GUADALAJARA

DR. JUAN MANUEL RAMÍREZ  
ARREDONDO  
INVESTIGADOR CINVESTAV  
3A  
CINVESTAV GDL  
GUADALAJARA

DR. JOSÉ JAVIER RUIZ  
LEÓN  
INVESTIGADOR  
CINVESTAV 2C  
CINVESTAV GDL  
GUADALAJARA



CINVESTAV  
BIBLIOTECA CENTRAL



SSIT000004779