Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
Unidad Zacatenco
Departamento de Matemática Educativa

Estudio Histórico-Epistemológico de Plimpton 322. Un análisis de la prototrigonometría babilónica

Tesis que presenta
Ana Lilia Gámez Báez

Para obtener el grado de
Maestra en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa

Directora de tesis
Gisela Montiel Espinosa

Ciudad de México *Noviembre 2024*

DEDICATORIA

A mi madre, Ana Lilia, mi fortaleza y fuente de inspiración;

a mi padre, José, mi mayor ejemplo valentía, fuerza y perseverancia;

a mi hermana, Mónica, mi pequeño gran orgullo y mi mayor motivación;

a mi hermano, Antonio, mi soporte constante y compañero de aventuras;

y a mi perrito, Haru, mi compañía más leal.

AGRADECIMIENTOS

*A mis padres, **Ana Lilia** y **José**, y a mis hermanos, **Mónica** y **Antonio**,*

por apoyarme en cada uno de mis proyectos

y motivarme a ser mejor cada día.

*A la **Dra. Gricelda Mendivil Rosas**, por motivarme a realizar mis estudios de posgrado a*

través de su enseñanza y guía durante mis estudios de licenciatura.

*Con profunda admiración y respeto, a mi asesora, la **Dra. Gisela Montiel Espinosa**,*

por su confianza, consejo y guía durante mi formación como investigadora.

*A mis amigos, **Grisel López**, **Gerardo Cruz**, **Selvin Galo**, **Andrea Ortiz** y **Cristian Paredes**,*

por los consejos, el apoyo y las risas. En especial, agradezco a mi compañero,

*amigo y vecino, **Melvin Cruz**, por estar siempre, por cada consejo,*

aventura y, sobre todo, por el pan y cafecito compartido.

*A mis compañeros, **Evelyn Soto**, **Carlos González** y **Stheven Rodríguez**,*

por el tiempo compartido durante este trayecto

y sobre todo, por brindarme su amistad.

*A mis amigas, **Fernanda Canizales**, **Yajahira Huape** y **Kenia Ortiz**,*

por cada palabra de aliento y motivación, por siempre creer en mí

y brindarme su apoyo incondicional incluso a la distancia.

*A mis sinodales, la **Dra. Diana Torres-Corrales** y el **Dr. Luis Moreno**, por su tiempo,*

dedicación y valiosas observaciones durante la revisión de este trabajo.

*Finalmente, agradezco a **Adriana Parra Hernández**, por su sencillez,*

carisma y amabilidad en todo momento.

A todas y todos ustedes, gracias por ser parte de esta aventura.

Ana Lilia Gámez Báez

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnología (Conahcyt), por el apoyo brindado para la realización de esta investigación.

Ana Lilia Gámez Báez – CVU: 1148187

Agradezco al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN), por recibirme como estudiante de maestría y permitirme formar parte del mejor centro de investigación en México.

ÍNDICE

RESUMEN

En esta investigación realizamos un estudio de corte histórico enmarcado en la *Teoría Socioepistemológica* con el propósito de identificar las *prácticas* que anteceden y acompañan la construcción matemática de Plimpton 322. Debido al tipo de estudio, objetivo y postura teórica elegida, la ruta metódica consistió en una configuración particular del análisis cualitativo de contenido que considerara nuestro objeto de estudio y elementos teóricos particulares de nuestra investigación. En consecuencia, el método configurado precisó la elección de *Mathematical Cuneiform Texts* como fuente primaria de datos, la recolección de fuentes de datos secundarias y terciarias, y la consolidación de las unidades de análisis.

El análisis de los datos se dividió en dos momentos: *análisis contextual* y *análisis textual*. El primero consistió en el estudio del *contexto* de Plimpton 322 con la finalidad de identificar los sucesos sociales y culturales que influyeron en su *construcción social* como saber prototrigonométrico. Por otro lado, el segundo se llevó a cabo a través de una

reconstrucción pragmática de la actividad matemática donde se reprodujo la construcción de cada una de las *Columnas* de Plimpton 322 con la finalidad identificar *acciones* y *actividades*.

Como resultados planteamos que *el uso del triángulo rectángulo como herramienta de construcción de modelos, aunado al cálculo y estudio de las relaciones y variaciones de sus medidas de longitud, permiten construir una base de significación para el desarrollo posterior de la razón trigonométrica.*

ABSTRACT

In this research we conducted a historical study framed in the *Socioepistemological Theory* with the purpose of identifying the *practices* that precede and accompany the mathematical construction of Plimpton 322. Due to the type of study, objective and theoretical position chosen, the methodical route consisted of a particular configuration of qualitative content analysis that considered our object of study and particular theoretical elements of our research. Consequently, the configured method required the choice of *Mathematical Cuneiform Texts* as the primary data source, the collection of secondary and tertiary data sources, and the consolidation of the units of analysis.

The data analysis was divided into two stages: *contextual analysis* and *textual analysis.* The first consisted of the study of the *context* of Plimpton 322 in order to identify the social and cultural events that influenced its social construction as prototrigonometric knowledge. On the other hand, the second was carried out through a *pragmatic reconstruction* of the mathematical activity where the construction of each of the Plimpton 322 Columns was reproduced in order to identify *actions* and *activities*.

As results, we propose that *the use of the right triangle as a tool for the construction of models together with the calculation and study of the relationships and variations of its length measures allow the construction of a meaningful basis for the subsequent development of the trigonometric ratio*.

INTRODUCCIÓN

Los estudios en la línea de *lo trigonométrico* han dado cuenta del proceso complejo del rediseño, sobre todo por la relevancia del trabajo directo con la razón trigonométrica, por ejemplo, en el quehacer docente dada la demanda del currículo (Montiel, 2016) o por su *uso situado* en prácticas como las de la Ingeniería (Torres-Corrales y Montiel-Espinosa, 2022).

Tomando como referente la investigación de Cruz-Márquez y Montiel-Espinosa (2022), donde se problematizó la geometría en el problema trigonométrico que aborda Ptolomeo en el *Almagesto*, para construir una hipótesis epistemológica –basada en prácticas– con la que se han fundamentado los diseños didácticos; nos proponemos ahora problematizar la razón como base de significado trigonométrico, buscando una ruta que no promueva los fenómenos didácticos ya reportados en la literatura. En esa dirección, organizamos esta investigación en los siguientes siete capítulos.

En el *capítulo uno,* nombrado *Consideraciones iniciales*, describimos una problemática general y desarrollamos una revisión de literatura alrededor de la investigación didáctica en torno a las nociones trigonométricas con la finalidad de delimitar un problema de investigación y plantear una pregunta y objetivo de investigación.

En el *capítulo dos,* denominado *Consideraciones teóricas*, exponemos nuestro posicionamiento teórico -*la Teoría Socioepistemológica*-, así como los elementos teóricos particulares utilizados para el análisis de la investigación.

En el *capítulo tres,* titulado *Consideraciones metodológicas*, presentamos la metodología articulada con el enfoque teórico elegido, así como la ruta metódica configurada para llevar a cabo el análisis de nuestros datos.

En el *capítulo cuatro,* nombrado *Recolección y preanálisis de datos,* presentamos las primeras tres etapas de nuestra ruta metódica, es decir, describimos nuestra recolección, organización y familiarización de nuestras fuentes de datos. Mientras que la etapa de análisis que conlleva la reconstrucción matemática de nuestro *texto* a analizar, así como los resultados de nuestro análisis de datos textual y contextual son presentados en el *capítulo cinco,* titulado *Análisis de datos.*

En el *capítulo seis,* denominado *Resultados y conclusiones*, damos respuesta a la pregunta de investigación y planteamos la hipótesis epistemológica como resultado de nuestro estudio de corte histórico.

Finalmente, en el *capítulo siete,* titulado *Prospectivas,* narramos las preguntas que emergen de la investigación, así como posibles investigaciones futuras que consideramos son importantes y aportan a la línea de investigación sobre *lo trigonométrico*.

CAPÍTULO UNO.

CONSIDERACIONES INICIALES

Problemática

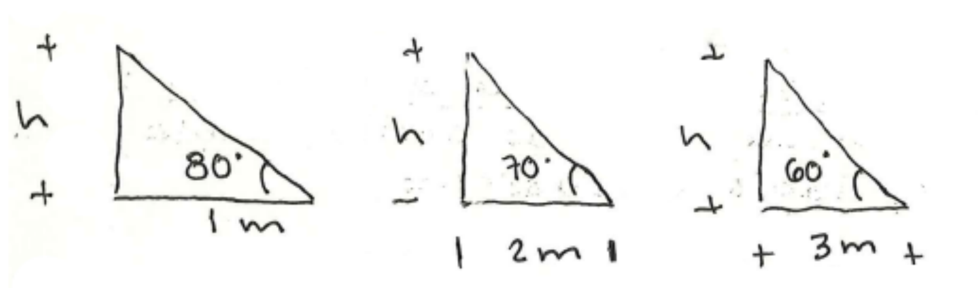
En la literatura especializada en Matemática Educativa se han reportado diversos fenómenos que aluden a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las nociones trigonométricas. A continuación, describimos algunas investigaciones que se han realizado en la *Teoría Socioepistemológica*, en específico dentro de la línea de investigación sobre *lo trigonométrico* y que son base de la investigación que nos proponemos realizar.

Construcción Social del Conocimiento Trigonométrico

En la línea de investigación sobre la *construcción social del conocimiento trigonométrico* Montiel (2011) realizó un estudio histórico-epistemológico en torno a este saber; en su análisis, identificó que un escenario de emergencia del problema trigonométrico fue el problema de los astrónomos para calcular distancias inaccesibles de objetos no manipulables; como resultado de dicho análisis la autora plantea como hipótesis epistemológica inicial que: *el trabajo geométrico es el contexto de significación de la relación trigonométrica (ángulo-cateto o ángulo-cuerda).* Posterior a este estudio surgieron otros dentro de la misma línea con la intención de robustecer dicha hipótesis.

Jácome (2011) aplicó una experiencia didáctica con profesores del nivel medio superior que consistía en trabajar con relaciones de proporcionalidad resolviendo una situación-problema tradicional sobre el cálculo de distancias inaccesibles a través de la construcción de modelos geométricos. En su análisis identifica en los profesores un *significado lineal* (Figura 1) en la relación ángulo-distancia, es decir, se considera que hay una relación constante de crecimiento y decrecimiento entre el ángulo y su cateto adyacente (Montiel y Jácome, 2014).

Figura 1
El fenómeno del significado lineal



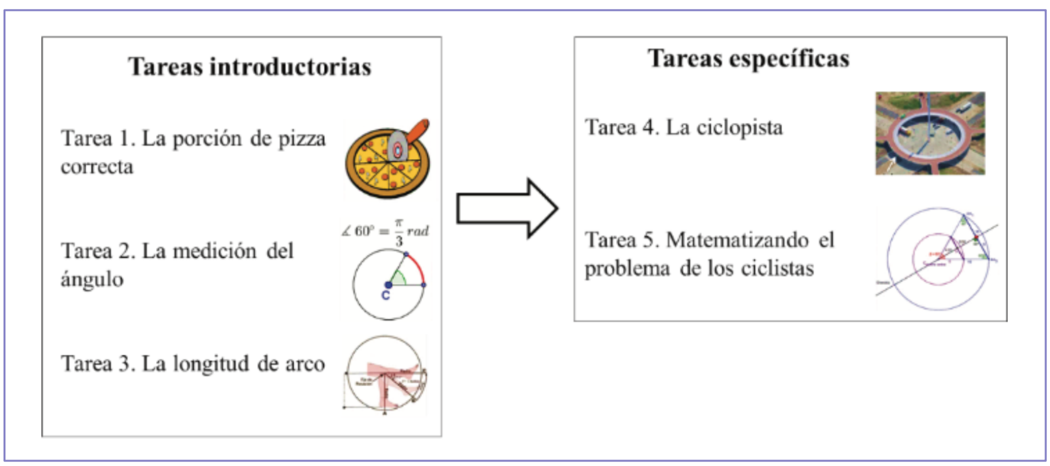
Nota. Adaptada de Triángulos ilustrativos para el cálculo de la altura faltante (p.1203), de G. Montiel y G. Jácome, 2014, *Boletim de Educação Matemática*, 28(50).

Con el objetivo de atender el *significado lineal*, Scholz (2014) diseñó una secuencia didáctica para estudiantes del nivel medio superior que consistió en medir y calcular la distancia entre distintas posiciones de dos pelotas y una persona, en un modelo físico. En sus resultados identifica que la incorporación de procesos de construcción geométricos está acompañada de diversos razonamientos matemáticos que dotan de significado a lo trigonométrico.

Por su parte, Torres-Corrales (2014) diseñó una actividad matemática para estudiantes de primer año de ingeniería con la finalidad de atender el fenómeno didáctico *aritmetización trigonométrica* –que refiere a la pérdida de los procesos geométricos para la construcción de las nociones trigonométricas y que provoca la admisión de un *significado lineal* y la promoción de un *significado aritmético*–.

La actividad constó de cinco tareas divididas en dos secciones: tareas inductorias y tareas específicas (Figura 2).

Figura 2
Tareas del diseño para resignificar la razón trigonométrica



Nota. Tomada de Resignificación de la razón trigonométrica en estudiantes de primer año de Ingeniería, 213, por D. Torres-Corrales y G. Montiel-Espinosa, 2021, *Educación Matemática*, 33(3).

A partir de la evidencia recolectada, reconoce que las construcciones geométricas permiten resignificar la razón trigonométrica y en consecuencia contrarrestar el fenómeno de *aritmetización trigonométrica*, dado que al ser el medio natural en el que emergen las razones trigonométricas permite a los estudiantes identificar que la relación trigonométrica es una "herramienta proporcional para estudiar y cuantificar una relación no proporcional, a partir de reconocer y comparar que la relación entre ángulo-arco es proporcional mientras que ángulo-cuerda no lo es" (Torres-Corrales y Montiel-Espinosa, 2021, p.21).

Los resultados obtenidos de las investigaciones de maestría de Torres-Corrales (2014) y Scholz (2014) llevaron a replantear –dentro de la línea de investigación– aquello que se estaba pensando por integración de la geometría en la trigonometría. Por consiguiente, en la investigación de Cruz-Márquez (2018) se decide regresar de nuevo a la historia y problematizar la geometría en el problema trigonométrico con la intención de reconocer aquellos usos de lo geométrico en la resolución de lo trigonométrico. En consecuencia, Cruz-Márquez realiza un estudio de corte histórico situado en los preliminares matemáticos del *Almagesto* de Ptolomeo en el que identifica "la medición indirecta de distancias en el círculo constituye un entorno de significación natural para las nociones trigonométricas" (p.6).

Posteriormente, en su investigación doctoral, Torres-Corrales (2020) realizó un estudio enfocado en identificar los usos de las nociones trigonométricas que se dan en la Ingeniería Mecatrónica. Como parte de sus resultados, identifica que: "a través del razonamiento espacial al estudiar el movimiento circular, los estudiantes de Ingeniería Mecatrónica reconocen la naturaleza de la noción trigonométrica ángulo-distancia, y ello constituye un escenario donde es posible confrontar el *significado lineal*" (Torres-Corrales y Montiel, 2020, p.53).

Planteamiento Inicial

Con la intención de dar seguimiento a los resultados de la línea de investigación sobre la *construcción social del conocimiento trigonométrico*, nos planteamos realizar un estudio sobre la *razón* con el propósito de identificar la base de significados mediante los cuales se construyó ese *saber*, que después sirvan como sustento para el rediseño del *discurso matemático escolar*.

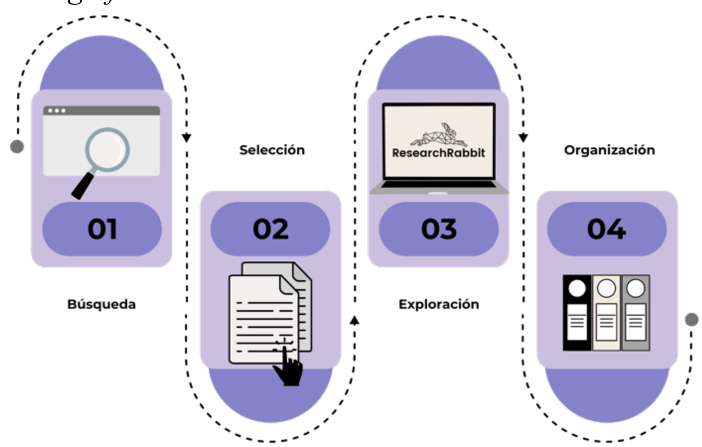
Bajo estas consideraciones, realizamos una revisión bibliográfica con el objetivo de ubicarnos en la realidad educativa y poder documentarnos alrededor de lo que se investiga y reporta sobre *lo trigonométrico* y, en consecuencia, plantear un problema de investigación.

Revisión Bibliográfica

La revisión bibliográfica se divide en cuatro categorías: *niveles de comprensión, dificultades en el aprendizaje de las nociones trigonométricas, análisis de libros de texto y propuestas de diseños.*

Para llevar a cabo la revisión se tomaron en cuenta cuatro momentos: *búsqueda, selección, exploración y organización* (Figura 3). En el primer momento se realizó una *búsqueda* de artículos científicos en bases de datos especializadas y memorias de eventos académicos con las palabras *"nociones trigonométricas"* y *"razones trigonométricas"*, –siendo los artículos recopilados en idioma inglés, español y portugués–. En un segundo momento se *seleccionaron* los artículos que serían de interés para la revisión, para ello se realizó una primera lectura poniendo atención en el objeto de estudio y los resultados de cada investigación. Después, en un tercer momento, con la finalidad de robustecer la revisión se realizó una *exploración* en Research Rabbit, donde por medio de la plataforma se revisaron artículos de investigación científica que tuvieran relación con los ya elegidos. Posteriormente, en un cuarto momento, para *organizar* los documentos seleccionados se realizaron fichas bibliográficas en Word de cada artículo, identificando la problemática, objetivos y/o preguntas de investigación, fundamentos teóricos, métodos de recolección, organización y análisis de datos, resultados y conclusiones; una vez identificado cada uno de estos elementos se realizó una selección y separación de documentos por categorías –mencionadas anteriormente– en Excel.

Figura 3
Proceso de revisión bibliográfica



Niveles de Comprensión

De Kee et al. (1996) llevaron a cabo un estudio enfocado en establecer los niveles de comprensión de las nociones seno y coseno en estudiantes de secundaria canadienses. Para determinar los niveles de comprensión, se basaron en el modelo constructivista propuesto por Herscovics y Bergeron (1998), citado en De Kee, et al. (1996), que se compone de cinco niveles: comprensión inicial, comprensión del procedimiento, abstracción, formalización y comprensión global. Como resultado de su estudio reportan que los estudiantes tienen bajos niveles de comprensión en las nociones seno y coseno –ubicándose en el nivel de comprensión inicial– tanto en el contexto del triángulo rectángulo como en el del círculo trigonométrico, siendo un poco más alto en el primer contexto.

Por otro lado, en un experimento sobre la introducción de las nociones trigonométricas, Weber (2005) busca identificar el nivel de comprensión (procedimiento, proceso y procepto) que tienen estudiantes universitarios por medio de la articulación del círculo y el triángulo rectángulo. Como resultados encuentra que por medio del trabajo gráfico –al que el autor se refiere como trabajo geométrico– se logra promover una comprensión robusta de las funciones trigonométricas ya que son capaces de resolver los problemas y justificarlos, consiguiendo ubicarlos en el nivel más alto de comprensión –el procepto–. De igual manera, Yiğit (2016) realizó un estudio para identificar estos mismos niveles de comprensión, pero con profesores estadounidenses. La autora señala que los profesores se encuentran en el nivel de procedimiento dado que pueden resolver problema, pero su comprensión es limitada sin importar el contexto en el que hubiera sido su enseñanza.

Al igual que Weber (2005) y Yiğit (2016), Araya et al. (2007) realizaron un estudio enfocado en identificar los niveles de comprensión (instrumental, relacional y formal) de las razones trigonométricas que evidencian estudiantes universitarios. En sus resultados reconocieron que la mayor parte de los estudiantes se encuentran en el nivel instrumental dado que logran resolver la tarea, pero no consiguen justificar el proceso. Las autoras argumentan que esto se debe a que en el currículo se favorecen las tareas de memorización y aplicación de definiciones.

Estos y otros problemas reportados en diversas investigaciones han sido abordados por trabajos cuyo objeto de estudio son las dificultades en el aprendizaje de las nociones trigonométricas.

Dificultades en el Aprendizaje de las Nociones Trigonométricas

Brito y Barbosa (2004) identificaron que docentes brasileños presentan dificultades en trigonometría y que estas están asociadas a conceptos geométricos como simetría y semejanza. En consecuencia, las autoras argumentan que el acompañar la enseñanza de las razones trigonométricas con tareas geométricas que permitan medir y reflexionar sobre el crecimiento del ángulo mediante la construcción de triángulos rectángulos permite que se dé en los estudiantes un aprendizaje significativo de la razón trigonométrica.

Por su parte, De Kee et al. (1996) señalan que estudiantes de secundaria presentan dificultades en las nociones básicas de seno y coseno; una de las principales dificultades reportadas es que no distinguen entre una razón y una función trigonométrica, misma observación que realiza Maldonado (2005) en un estudio realizado en estudiantes de nivel medio superior, Jácome (2011) en un estudio con profesores de bachillerato y Juárez y Cruz (2019) con estudiantes de ingeniería civil.

Por otro lado, Gur (2009) declara que estudiantes de nivel medio tienen dificultades en el aprendizaje de las nociones trigonométricas debido al conocimiento previo que poseen –idea que también sostienen De Kee et al. (1996)– en particular debido al manejo simbólico.

Análisis de Libros de Texto

Maldonado (2009) realizó un análisis de libros de texto y programas de estudio de media superior con la finalidad de inferir la presencia de las nociones trigonométricas en este nivel. Entre los resultados de su análisis encontró que en los libros de texto domina la carga algorítmica "limitando al estudiante de poder significar los conceptos necesarios para el estudio de la función trigonométrica, orillándolo a formarse conceptos carentes de significado y de esta manera no lograr la aprehensión del concepto" (p.177). Aunado a lo anterior, señala que el procedimiento para enseñar a la función trigonométrica en los libros de texto es primero con el triángulo rectángulo y su ángulo en grados –llamándole razón– y después se presenta como función con el círculo y su ángulo en radianes, lo que hace confuso el tratamiento de ambos para los estudiantes.

En otro estudio relacionado, Montiel y Jácome (2014) realizaron un análisis de la organización didáctica y el tipo de actividades propuestas en el Programa de Estudios y algunos libros de texto –avalados por la Secretaría de Educación Pública (SEP)– de educación secundaria de México. Su análisis develó que la introducción a la razón trigonométrica es por medio del triángulo rectángulo, donde el objetivo es calcular un valor faltante del mismo, siendo la mayoría de las actividades en un contexto de proporcionalidad.

Adicionalmente, en uno de los libros de texto revisados (Filloy et al., 2009) identificaron que se presentan de manera indistinta a las Funciones y Razones Trigonométricas (Figura 4), sin hacer reflexión en su concepto y naturaleza.

Figura 4

Presentación de las *Razones Trigonométricas* como *Funciones Trigonométricas*

La trigonometría se aplica en áreas donde se requieren medidas de precisión: por ejemplo, se utiliza para medir distancias a estrellas próximas, en la medición de distancias entre puntos geográficos y en sistemas de navegación por satélites.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS	
Fundamentales	**Recíprocas**
$\text{sen } x = \dfrac{\text{cat. op.}}{\text{hip.}}$	$\csc x = \dfrac{\text{hip.}}{\text{cat. op.}}$
$\cos x = \dfrac{\text{cat. ady.}}{\text{hip.}}$	$\sec x = \dfrac{\text{hip.}}{\text{cat. ady.}}$
$\tan x = \dfrac{\text{cat. op.}}{\text{cat. ady.}}$	$\cot x = \dfrac{\text{cat. ady.}}{\text{cat. op.}}$

En la tabla se resumen las seis funciones trigonométricas para cualquiera de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo.

Nota. Tomada de *Matemáticas 3°* (p.206), por E. Filloy et al., 2009, Ediciones Pedagógicas / McGraw-Hill.

Propuestas de Diseños

Kendal y Stacey (1998) realizaron un experimento didáctico con estudiantes de educación media superior para determinar cuál método de enseñanza de la trigonometría (el triángulo rectángulo o el círculo trigonométrico) promueve una mejor comprensión de las razones trigonométricas. Las autoras reportan que los estudiantes tienen un mayor dominio en el método de la proporción dado que presentan múltiples errores en el método del círculo, sin embargo, coinciden con otros autores (Martín et al., 2016; De Kee et al., 1996; Weber, 2005) en que se deben articular ambos métodos para que en la enseñanza se dé un aprendizaje más robusto.

Quinlan (2004) plantea un diseño sobre razones trigonométricas que consta de tres etapas: medir físicamente, introducir la terminología del tema y comprobar los cálculos previos. Como resultados reporta que al seguir estas etapas se da un aprendizaje significativo, dado que el estudio de las propiedades geométricas de las figuras (triángulos y círculos) es lo que lo permite.

Moore (2014) elaboró un experimento de enseñanza para estudiantes universitarios a partir del reconocimiento de la falta de comprensión y dificultades encontradas en el aprendizaje de las nociones trigonométricas. Como resultados de su estudio, destaca la relevancia de los acercamientos cuantitativo y covariacional al trabajar con el círculo, ya que estos permiten a los estudiantes construir significados en torno a la función de seno.

En estudios más recientes, Meza y Silva-Crocci (2016) destacan la necesidad de utilizar un enfoque dinámico al abordar el tema de razones trigonométricas. En consecuencia, proponen un rediseño de situación sobre las razones trigonométricas basado en la construcción de la razón incorporando elementos geométricos de la circunferencia y semejanza de triángulos con la finalidad de resignificar las razones trigonométricas como una herramienta que precisa de un contexto geométrico –el de la circunferencia y de la propiedad de semejanza de triángulos–.

En el mismo orden de ideas, Juárez y Cruz (2019) realizan una propuesta de diseño que también se enfoca en la resignificación de la razón trigonométrica en estudiantes de ingeniería civil. Como resultados los autores señalan que las actividades planteadas: Medir Altura, Comparar y Analizar permiten resignificar la comprensión de las razones trigonométricas.

Planteamiento del Problema de Investigación

La revisión bibliográfica realizada nos permitió identificar que durante muchos años la discusión disciplinar se ha mantenido alrededor de qué método de enseñanza —círculo trigonométrico o triángulo rectángulo— es mejor o cuál debería enseñarse primero (Kendal y Stacey, 1998; Martín et al., 2016; De Kee et al., 1996; Weber, 2005), por ejemplo, la investigación de Moore (2014) señala que hay que trabajar contextos donde se puedan hacer las dos cosas. En síntesis, los resultados de investigación nos muestran que existe un debate inconcluso del que todavía hay reflexiones que lo mantienen vivo.

En relación con lo anterior, en una revisión histórica alrededor del desarrollo histórico de la trigonometría Bressoud (2010) señala que históricamente la trigonometría nace con la implementación del círculo trigonométrico a partir de buscar entender y explicar fenómenos astronómicos y de navegación por medio de construcciones geométricas. En consecuencia, el autor indica que se debe reconsiderar el estudio de la trigonometría dado que la evidencia histórica apunta que primero se trabajó con el círculo después con el triángulo y, por ende, argumenta que en ese orden deberían enseñarse en la escuela, no explicita cómo o de qué manera, solo basa su reflexión en el análisis histórico que realizó.

Por otro lado, en estudios más recientes la comunidad matemática reconoció a la tablilla babilónica Plimpton 322 como un estudio prototrigonométrico (Mansfield, 2021) datada en 1800 a.C., mucho más de un milenio antes de Hiparco —nombrado padre de la trigonometría por su “tabla de acordes”—y mucho más antigua que el *Almagesto* de Ptolomeo, obra considerada como la evidencia más antigua del nacimiento de la trigonometría.

En consecuencia, dado que se considera la investigación de corte histórico como un escenario de estudio al que se acude cuando surge una interrogante con relación al saber, reconociendo que la matemática no tiene una única historia y, por lo tanto, puede vincularse con diversos contextos sociales y culturales de la actividad humana que la dotan de funcionalidad (Arcos et al., 2021), en esta investigación nos plantearemos un estudio de corte histórico que se centre en comprender la naturaleza de las prácticas matemáticas que podamos reconocer en el trabajo histórico de los colegas, con la finalidad de entender los significados que subyacen a las prácticas que anteceden y acompañan a la tablilla Plimpton 322 y después poder integrar esos significados relativos a la razón que acompañen a los procesos de construcción geométrica sin seguir cayendo en *significados lineales* que no ponen atención a la relación no proporcional y no lineal entre la medida angular y la medida de longitud.

Tomando en cuenta lo anterior, nos proponemos atender la siguiente pregunta y objetivo de investigación:

Pregunta de Investigación

— *¿Qué prácticas anteceden y acompañan la construcción matemática de la tablilla Plimpton 322?*

Objetivo de Investigación

— *Identificar las prácticas que anteceden y acompañan la construcción matemática de la tablilla Plimpton 322.*

CAPÍTULO DOS.

CONSIDERACIONES TEÓRICAS

En este capítulo presentaremos los elementos teóricos enmarcados en la Teoría Socioepistemológica que fundamentan la investigación y nos permitirán atender nuestra pregunta y objetivo de investigación.

La Teoría Socioepistemológica

La *Teoría Socioepistemológica* o *Socioepistemología* estudia la *construcción social del conocimiento matemático* y busca clarificar el problema de construcción de significado relativo al objeto matemático. Desde este enfoque se asume que el conocimiento matemático se construye socialmente, dentro y fuera del entorno escolar, a través de las *prácticas* que anteceden y acompañan a los objetos matemáticos (Cantoral, 2013). Por lo tanto, se acepta como válida toda forma de *saber* —también denominado *conocimiento puesto en uso—,* ya sea popular, técnico o culto, dado que se considera que en su conjunto constituyen la sabiduría humana (Cantoral et al., 2015). Bajo estas consideraciones, desde un posicionamiento Socioepistemológico se estudia la construcción del conocimiento matemático en ***escenarios históricos*** (v. g. Farfán, 1997; Buendía, 2006; Espinoza, 2009; Montiel, 2011; Cruz-Márquez, 2018; Piña-Aguirre, 2021; Vargas-Zambrano y Montiel-Espinosa, 2022; López-Acosta y Montiel-Espinosa, 2022), ***profesionales*** (v. g. Mendoza y Cordero, 2018; Cordero et al., 2019; Torres-Corrales, 2020; Moreno, 2021), ***escolares*** (v. g. Montiel y Scholz, 2021; Torres-Corrales y Montiel-Espinosa, 2021; Montiel y Jácome, 2014), entre otros.

Los estudios en *escenarios históricos* se centran en investigar las bases de significación subyacentes a los procesos y conceptos matemáticos inherentes a la construcción de conocimiento matemático en su génesis, enfocados en develar la naturaleza epistemológica del saber en términos de *prácticas*. Por otro lado, aquellos que se centran en *escenarios profesionales* buscan caracterizar la actividad matemática a través de la resolución de situaciones relativas a la profesión, así como identificar los mecanismos propios del grupo que ejerce dicha profesión. Por último, los relativos a *escenarios escolares* estudian la interacción del sistema didáctico y están centrados en el análisis de los usos que los estudiantes hacen de un determinado conocimiento adquirido en la escuela durante su interacción con el profesorado y su función en la transmisión del *saber* (Montiel y Buendía, 2013).

Esta visión centrada en develar los *usos* del conocimiento matemático desde su estudio en diversos escenarios requiere un cambio de centración, se transita del estudio exclusivo del dominio de los conceptos matemáticos al estudio de las *prácticas* (matemáticas) que acompañan su producción (Cantoral, 2013) para evidenciar los procesos de construcción del saber y así lograr su significación. De esta manera, para la *Teoría Socioepistemológica* el significado no es una característica propia del objeto matemático sino un emergente de su *uso situado*.

En este sentido, al hablar de *uso situado* se hace referencia a las formas en que se utiliza una noción matemática dentro de un contexto específico (Cabañas, 2011). Estos usos se reconocen como funcionales ya que dan respuesta a las demandas matemáticas de las tareas (Torres-Corrales y Montiel-Espinosa, 2021) en sus diferentes contextos. En consecuencia, "el *uso situado* de una noción matemática se explica a través de las *prácticas* y el *contexto* que lo enmarca" (Cruz-Márquez y Montiel-Espinosa, 2024, p.140).

Para el análisis particular de las *prácticas* (de naturaleza matemática), la *Socioepistemología* propone un modelo para explicar la construcción social de una noción matemática específica mediante su *uso situado*, al que denomina *modelo de anidación de prácticas*.

En este estudio nos centraremos en la progresión pragmática *"acción-actividad-práctica socialmente compartida"* (Figura 5) del *modelo de anidación de prácticas* ya que sus dos primeros niveles nos permitirán inferir el quehacer matemático que se llevó a cabo en la construcción matemática de Plimpton 322.

Figura 5

Progresión pragmática "acción-actividad-práctica socialmente compartida" del modelo de anidación de prácticas

Nota. Adaptada de *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento* (p.334), por R. Cantoral, 2013, Gedisa.

En este modelo, las *acciones* son entendidas como las interacciones del sujeto —individual, social o histórico— con el objeto (matemático). Por su parte, las *actividades* refieren a la organización de *acciones* que lleva a cabo el sujeto con la intención de resolver una tarea matemática específica. Por último, la *práctica socialmente compartida* alude al conjunto de *actividades* organizadas que realiza el sujeto de manera intencional e iterada al atender una situación o tarea matemática.

Una Epistemología de Prácticas para la Trigonometría

Montiel (2011) realizó un estudio sobre el conocimiento trigonométrico en un escenario histórico con la finalidad de acercarse a las circunstancias en que dicho conocimiento fue construido y con base en ellas, construir una *hipótesis epistemológica* basada en *prácticas* que recuperara los significados que le son propios al *saber* y se perdieron en su transposición didáctica.

Producto de su estudio, la autora reconoce que el origen y significación del saber trigonométrico se da en el estudio de la relación no proporcional entre un ángulo central y la longitud de la cuerda que subtiende a un círculo, mediante el trabajo geométrico.

A partir de sus resultados, propone investigaciones que se centren en elementos particulares de la construcción de conocimiento asociado a las nociones trigonométricas (triángulo, círculo, ángulo, etc.) que sirvan como antecedente para el diseño de secuencias de aprendizaje donde se construyan y signifiquen dichos conceptos.

Una investigación posterior que buscaba confrontar la epistemología de prácticas planteada en Montiel (2011) evidenció que escolarmente el tratamiento de las razones trigonométricas carece de construcciones geométricas y domina un tratamiento algebraico y aritmético que provoca la concepción de un *significado lineal* (Montiel y Jácome, 2014).

Aunque este fenómeno también se identificó en otras investigaciones, solo en las socioepistemológicas se atendió problematizando la naturaleza del saber como pieza fundamental del fenómeno didáctico. Esto implicó que las investigaciones transitaran de reforzar la comprensión o el dominio de *la razón* trigonométrica hacia, primero, estudiar la naturaleza de la relación entre medida angular y medida de longitud y, después, calcular la medida de longitud dada la medida angular a través de prácticas geométricas (Torres-Corrales y Montiel-Espinosa, 2021; Montiel y Scholz, 2021).

CAPÍTULO TRES.

CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS

En este capítulo expondremos las principales decisiones metodológicas tomadas con base en el planteamiento de investigación, así como el método utilizado para el análisis de nuestro estudio de corte histórico.

Metodología

Como hemos expuesto en capítulos anteriores, nuestro estudio tiene como propósito *identificar las prácticas que preceden y acompañan a la construcción matemática de Plimpton 322*. Por consiguiente, desde la postura teórica que tomamos —la *Teoría Socioepistemológica*— se estudia el *uso del conocimiento matemático situado en prácticas contextualizadas*, dado que reconoce que es en esos contextos donde se identifican los matices que puede tomar el *saber*.

Para estudiar el *conocimiento puesto en uso*, la perspectiva *Socioepistemológica* emplea la *problematización del saber* como aparato metodológico para la identificación de aquellos usos y significados que le son propios al *saber* en cuestión y se han diluido, transformado o perdido en el discurso escolar (Montiel y Buendía, 2013).

Bajo estas consideraciones, problematizar el *saber* permite dotar de significados a los objetos matemáticos, dado que se reconoce que el conocimiento emerge en diferentes escenarios y se diferencia de acuerdo con los contextos. En consecuencia, desde este enfoque se asume que la relación entre los sujetos y el *saber* es dependiente del contexto en que se encuentren, en este sentido, el contexto determina el tipo de racionalidad con la cual el sujeto construye conocimiento (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015).

Para entender dicha dependencia, bajo el principio de *racionalidad contextualizada* que plantea la *Teoría Socioepistemológica*, Torres-Corrales y Montiel (2020) organizan el contexto en tres niveles que permiten explicar cómo se condiciona la construcción y uso de conocimiento matemático: *contexto cultural, contexto situacional y contexto de significación.*

El ***contexto cultural*** refiere al conjunto de características que dan pertenencia a grupos sociales (creencias, valores, cultura) específicos e influye en su racionalidad; por su parte, el ***contexto situacional*** define el conjunto de circunstancias particulares del entorno; en este contexto se reconoce la influencia del tiempo, lugar y condiciones donde se lleva a cabo la actividad matemática que son determinadas por el saber que se estudia. Por último, el ***contexto de significación*** es el que da forma y significado a la matemática puesta en juego.

El Análisis de la Actividad Matemática

El análisis de la actividad matemática del *saber* en el *texto* se realiza a partir de una reconstrucción pragmática de la actividad matemática. La *reconstrucción pragmática* de la actividad matemática es una forma de reconstrucción enmarcada en la Matemática, la Matemática Educativa y la Historia de la Matemática. En Matemática Educativa, esta reconstrucción busca la reproducción de la actividad matemática en términos de la *función pragmática* de la *práctica*; en ella se caracterizan las *acciones*, *actividades* y ─de ser posible─ las *prácticas socialmente compartidas* (Vargas-Zambrano, 2021).

En particular, nuestra reconstrucción se compone de dos fases adaptadas de Cantoral et al. (2015), similares a las de Vargas-Zambrano (2021).

Fase descriptiva. En esta fase se contextualiza y sitúa el *texto* (Cantoral et al., 2015). En nuestro caso se describirán la lista de pasos configurados ─con base en nuestras fuentes consultadas─ para la reconstrucción matemática del *texto*.

Fase cualitativa. Siguiendo a Cantoral et al. (2015) se empleará el *modelo de anidación de prácticas* para el análisis las acciones que ─inferimos─ llevó a cabo el autor o autora del *texto*. Para la inferencia de las *acciones* se preguntará ¿qué hizo? y ¿cómo lo hizo?, mientras que para la inferencia de las *actividades* ¿para qué lo hizo?

Método

Al ser la presente una investigación de tipo documental y estar enmarcada en la *Teoría Socioepistemológica* que no utiliza un método exclusivo para el desarrollo de estudios de corte histórico, la ruta metódica para llevar a cabo el análisis de los datos será una configuración particular del análisis cualitativo de contenido que considere nuestro objeto de estudio y los elementos teóricos específicos de nuestra investigación basada en las metodologías que se han ido desarrollando en algunas investigaciones de corte histórico-epistemológico en la *Socioepistemología* (v. g. Espinoza y Cantoral, 2010; Cruz-Márquez, 2018; López-Acosta, 2019 y Vargas-Zambrano, 2021).

En consecuencia, nuestro análisis de contenido se conformará de cinco etapas que transitarán desde la *elección del texto de análisis* hasta la *interpretación e inferencia* del análisis de los datos (Figura 6).

Figura 6
Etapas para nuestro análisis de contenido

Nota. Esquema metodológico para estudios históricos-epistemológicos de la Teoría Socioepistemológica con base en Cruz-Márquez (2018), López-Acosta (2019) y Vargas-Zambrano (2021).

Determinación de un Objeto de Análisis

La primera etapa del método implica una revisión de literatura sobre el *saber matemático* que se pretende *problematizar* y tiene como finalidad la elección del objeto de análisis que puede ser un fenómeno o comunicación concreta (Cruz-Márquez, 2018). La revisión recopila artículos, tesis, capítulos de libro, libros y reseñas que brinden un panorama general del *saber matemático*, particularmente de su génesis (Vargas-Zambrano, 2021); está delimitada por el propósito de investigación y dados los resultados obtenidos se debe llevar a cabo la elección del *texto* que fungirá como fuente primaria.

Para justificar la elección del *texto*, Vargas-Zambrano (2021, p.116) señala se deben tomar en cuenta los siguientes aspectos: el *aspecto relativo a la investigación,* el *aspecto teórico* y el *aspecto relativo a la pieza matemática*.

El *aspecto relativo a la investigación* se refiere a la recolección de datos, que es una decisión metodológica crucial en cualquier tipo de investigación, ya que el *texto* es la fuente primaria que otorga características particulares a los estudios documentales. El *aspecto técnico* está vinculado a la forma en la que se accede al texto, ya sea en su formato físico o digital, así como al idioma y las traducciones a las que se tiene acceso. Por último, el *aspecto relativo a la pieza matemática* se concierne al qué se va a leer y por qué se ha elegido ese *texto* en particular.

Recolección y Selección de Fuente de Datos

Además de la selección del *texto* que tendrá el rol de fuente primaria, en los estudios de corte histórico enmarcados en la *Teoría Socioepistemológica* se recurre a la búsqueda de fuentes adicionales que proporcionen información sobre las circunstancias sociales, políticas y culturales que rodean al *saber*.

En consecuencia, la segunda etapa del método implica la búsqueda y selección de documentos adicionales a la *fuente primaria* que servirán como fuentes de datos secundarias y terciarias que, además de brindar información propia del *saber*, detallarán las condiciones contextuales en las que se enmarca. Esta revisión proporcionará diversos documentos como traducciones, versiones del *texto*, interpretaciones, reseñas, entre otros, con el fin de ampliar la comprensión y obtener una perspectiva más completa.

A continuación, se describen los criterios de distinción y clasificación de fuentes de datos para estudios de corte histórico-epistemológico:

Las ***fuentes primarias*** son piezas matemáticas históricas que engloban todo tipo de pruebas que las personas han dejado de sus actividades pasadas (escritos, fotografías, entrevistas, testimonios, artefactos, grabaciones entre otros); este tipo de fuentes son producidas durante el periodo estudiado (Wardhaugh, 2010).

Las ***fuentes secundarias*** hacen referencia al periodo estudiado, pero se crean con posterioridad o se alejan de algún modo de los acontecimientos reales en los que se centran, en consecuencia, son documentos que interpretan o analizan fuentes primarias (Wardhaugh, 2010). Este tipo de fuentes proporcionan una perspectiva o contexto adicional sobre el *saber* estudiado.

Las ***fuentes terciarias*** son recursos que recopilan información de diversas fuentes primarias y secundarias (Wardhaugh, 2010); ofrecen una visión general del tema y pueden ayudar a identificar fuentes adicionales para la investigación.

En síntesis, las *fuentes primarias* proporcionarán los datos necesarios para el análisis. Por su parte, las *fuentes secundarias* permitirán comprender tanto el contenido matemático textual como el contexto en que se enmarca el *texto.* Por último, las *fuentes terciarias* ayudarán a encontrar y validar las fuentes primarias.

Preanálisis de los Datos (Contextual y Textual)

La tercera etapa del análisis tiene como objetivo preparar y organizar la información recolectada, en este sentido, implica procesos de selección de datos, su tratamiento, categorización, traducción y transcripción (Cruz-Márquez, 2018). En esta etapa serán organizados y descritos los acercamientos que se han hecho a los datos en dos tipos de familiarización: "una con el *texto* enfocada en la lectura del contenido de la fuente primaria y otra con el *contexto* enfocada en los factores en torno a la producción de contenido" (Vargas-Zambrano, 2021, p.125).

La ***familiarización con el contexto*** implica entender el entorno histórico, social, cultural y político en el que se produjo el texto o registro que se investiga, proporcionando una perspectiva más amplia que ayude a interpretar la información recopilada adecuadamente.

Al reconocer al *texto* como *una producción con historia* es natural que surjan preguntas relacionadas con el conjunto de circunstancias, factores y condiciones que rodean al documento y le otorgan un significado específico, esto puede ir desde preguntas relacionadas al autor o autora del *texto*, así como del periodo histórico que enmarca la vida del autor o autora y su obra (Vargas-Zambrano, 2021). Para dar respuesta a estas preguntas será necesario recurrir a la lectura de fuentes secundarias y terciarias.

Aunque en los estudios documentales es deseable conocer la autoría de la obra dado que puede proporcionarnos información relevante sobre su perspectiva, intenciones y credibilidad, puede suceder que no se tenga información clara sobre quién es el o la autora de una obra en particular. En tales situaciones, es importante considerar otras estrategias y enfoques para abordar la investigación, por ejemplo *fuentes secundarias* a la obra que proporcionen información relevante sobre el posible origen o contexto en que fue creada al compararla con otros trabajos conocidos en el campo o periodo de estudio; en este sentido, el *análisis de contenido* puede proporcionar pistas sobre su naturaleza y propósito, examinar características formales y estilo, es decir, la forma en que presenta el *texto*, su estructura, lenguaje entre otros.

Por su parte, la ***familiarización con el texto*** conlleva adquirir un conocimiento profundo y detallado del contenido y la estructura del documento en cuestión. Consiste en leer, analizar y comprender el texto en su totalidad para extraer información relevante y comprender su significado. En este sentido, implica considerar el contexto en el que se creó el documento, dado que esto permite interpretar el *texto* dentro de su marco de referencia y comprender cómo esos factores influyen en su contenido y mensaje.

A la estructura u organización del *texto* se le conoce como ***estructura discursiva macro*** *o* ***género***. El ***género*** de escritura matemática se refiere a la forma particular en que se comunica y se presenta el conocimiento matemático por escrito. El *género* indicará las posibles funcionalidades del documento: ¿para qué o quién fue escrito?, ¿con qué intención?

Es importante destacar que el *género* de escritura matemática puede variar dependiendo del contexto y el público al que se dirige.

A su vez, el *texto* también puede estar compuesto por estructuras más pequeñas y específicas a las que se les denomina ***estructura discursiva micro*** o ***mini-géneros***; estos escritos son breves y pueden estar destinados a un uso personal o como material de apoyo para el estudio o resolución de problemas matemáticos.

Entender estas estructuras es esencial para el análisis de los textos y la comprensión de los elementos y patrones que contribuyen al propósito general del *texto*.

Por último, como resultado de la *familiarización con el texto* y el *contexto*, en el proceso del preanálisis del *texto* se configuran las **unidades de análisis**. Las unidades de análisis serán los elementos o fragmentos de información que se extraerán de los documentos y que serán el objeto de estudio o análisis de la investigación, en consecuencia, se requiere un proceso de agrupación, organización y síntesis de la información recopilada a partir de las fuentes documentales (primarias, secundarias y terciarias).

En las investigaciones de corte histórico, “la unidad de análisis corresponderá a la sección, fragmento o apartado del *texto*, que cuente con su propia *estructura discursiva micro* o *mini-género,* y suministre los datos necesarios para responder la pregunta de investigación, en tanto debe favorecer una *reconstrucción pragmática* de la actividad matemática” (Vargas-Zambrano, 2021, p.137).

Análisis de los Datos (Contextual y Textual)

Esta cuarta etapa corresponde al centro de la herramienta metodológica; implica el examen y la interpretación sistemática de la información recopilada a partir de las fuentes documentales. Este proceso tiene como objetivo responder a las preguntas de investigación, obtener conclusiones y generar conocimiento a partir de los datos documentales.

Aunado a lo anterior y consecuencia de reconocer el texto como *una producción con historia*, el análisis se dividirá en dos momentos: *análisis contextual* y *análisis textual*. El primero será a través de la organización del contexto planteada por Torres-Corrales (2020), y el segundo será mediante la ruta metodológica configurada para el análisis y las fases planteadas por Cantoral et al. (2015).

Análisis Contextual. El análisis contextual busca comprender y examinar los eventos y fenómenos del pasado en relación con su contexto histórico más amplio, en este sentido implica considerar los sucesos sociales, culturales, políticos y económicos que incidieron en la escritura del texto.

Este análisis se basa en la premisa de que los eventos históricos no pueden ser comprendidos de manera aislada, sino que deben ser situados y comprendidos en relación con las condiciones y circunstancias en las que ocurrieron. Al examinar el contexto histórico, se busca obtener una visión más completa y precisa de los eventos, así como comprender la causa, motivaciones e implicaciones de estos.

Contexto Cultural. Para caracterizar este contexto nos preguntaremos: ¿qué características tuvo la época en que fue datado el *texto*?, ¿qué sucesos filosóficos, políticos sociales y económicos caracterizaron esta época?, ¿cuál es o son las ubicaciones geográficas donde se llevaron a cabo dichos sucesos?, ¿en estos sucesos previos pudo haber personas o circunstancias que influyeran posteriormente en el *texto*? (López-Acosta, 2019; Vargas-Zambrano, 2021).

Contexto Situacional. Para configurar este contexto, con base en Cruz-Márquez y Montiel (2017), López-Acosta (2019) y Vargas-Zambrano (2021), nos preguntaremos: ¿quién es o pudo haber sido el autor o la autora del *texto*?, ¿qué relación guarda este *texto* matemático con otros de la época?, ¿qué teorías existen alrededor de la construcción del documento?, ¿cambian los tratamientos matemáticos del *texto* respecto a otros previos?, ¿en qué se diferencian?, ¿en qué son iguales?

Contexto de Significación. Por último, para describir el *contexto de significación* nos preguntaremos: ¿en el *texto* surge una idea nueva antes no explorada?, ¿qué hace único al *texto*?, ¿en qué contribuye el *texto* respecto a la construcción del saber?, ¿qué hizo diferente el o la autora –relativo al saber– respecto a *textos* previos?, ¿cómo se utilizaban estos conocimientos en contextos prácticos?

Análisis Textual: la Reconstrucción Pragmática de la Actividad Matemática. El análisis textual estará centrado en las unidades de análisis definidas a partir de la identificación de la *estructura discursiva micro* o *mini género*. Para cada unidad se realizará una *reconstrucción pragmática* de la actividad matemática junto a las prácticas que preceden y acompañan al saber.

La *reconstrucción pragmática* constará de dos fases: una descriptiva y una cualitativa. En la **fase descriptiva** se narrarán –segmentando por unidad de análisis– los pasos a seguir para la reconstrucción matemática del *texto*. Por otro lado, la **fase cualitativa** constará de dos niveles de análisis: uno analítico y otro inferencial. En el primer nivel de análisis se caracterizarán las *acciones* por medio de las preguntas ¿qué hizo? y ¿cómo lo hizo?; y las *actividades* a través de la pregunta ¿para qué lo hizo? Las acciones definirán en términos de *prácticas* la construcción del objeto matemático; por su parte, las *actividades* evidenciarán en cada unidad la organización intencional de *acciones* matemáticas permeadas por elementos situacionales del *contexto* (Tabla 1).

Tabla 1
Instrumento para el análisis textual

<table>
<tr><th colspan="4">Primer nivel de análisis</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Unidad de análisis</th><th rowspan="2">Paso</th><th colspan="2">Acciones</th></tr>
<tr><th>¿Qué hizo?</th><th>¿Cómo lo hizo?</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Nombre y número de Columna</td><td>Número de paso</td><td></td><td></td></tr>
<tr><th colspan="3">Actividades</th></tr>
<tr><th colspan="3">¿Para qué lo hizo?</th></tr>
<tr><td colspan="3"></td></tr>
<tr><th colspan="4">Segundo nivel de análisis</th></tr>
</table>

El segundo nivel de análisis tendrá la función de inferir la construcción de las bases de significación para *lo trigonométrico* en el *texto*. Este nivel de análisis será narrado agrupando las unidades de análisis que compartan elementos del *contexto* que inciden en la construcción matemática de Plimpton 322.

Interpretación e Inferencia: el Planteamiento de la Hipótesis Epistemológica

Por último, en la quinta etapa se realiza una interpretación e inferencia de los datos analizados en la etapa anterior. En consecuencia, como resultado del estudio de corte histórico se planteará una *hipótesis epistemológica* que se fundamentará en las *prácticas* identificadas en la *reconstrucción pragmática* de la actividad matemática realizada a la luz del *análisis textual* y estudiadas a partir del *contexto*, a la que también se denomina *epistemología de prácticas.*

CAPÍTULO CUATRO.

RECOLECCIÓN Y PREANÁLISIS DE LOS DATOS

A continuación, considerando las cinco etapas que conforman el análisis de contenido establecido como herramienta metódica de nuestra investigación (Figura 6), presentamos nuestra *determinación de objeto y texto de análisis, recolección de fuentes* y *preanálisis de los datos* en los siguientes tres apartados.

Determinación del Objeto de Análisis. Plimpton 322 y Mathematical Cuneiform Texts

La elección de *Plimpton 322* como objeto de estudio surge a partir del estudio de Mansfield y Wildberger (2017) y posteriormente Mansfield (2021). En estas investigaciones se reconoce a la tablilla Plimpton 322 como un documento que se remonta a la civilización de la Antigua Babilonia que destaca por su contenido matemático identificado como un estudio prototrigonométrico.

En concordancia con nuestro propósito, identificamos que *Mathematical Cuneiform Texts (MCT)* es reconocido por la comunidad matemática como el primer referente que estudia a Plimpton 322. *MCT* es un libro centrado en la interpretación y análisis de algunos textos matemáticos en escritura cuneiforme (una forma de escritura en forma de cuñas utilizada en la antigua Mesopotamia) que datan de la Antigua Babilonia; se compone de cinco capítulos en los que se presentan transcripciones, traducciones y análisis detallados de estos textos. Particularmente en su tercer capítulo estudian a Plimpton 322; en él se consideran diferentes aspectos como su transcripción, descripción física y textual, así como su posible método de reconstrucción matemática.

Con base en el *aspecto relativo a la investigación*, *MCT* aporta datos para atender nuestro propósito planteado y es un libro validado por la comunidad matemática. Por otro lado, en lo que concierne al *aspecto técnico*, *MCT* es un libro físico escrito originalmente en 1945; se puede encontrar en su versión física y digital en algunas bibliotecas. Por último, referente al *aspecto relativo a la pieza matemática*, *MCT* estudia la tablilla babilónica Plimpton 322 y proporciona una propuesta de reconstrucción que ha sido validada y robustecida por la comunidad matemática en análisis posteriores. Así pues, con base en esos aspectos, seleccionamos a *MCT* como nuestra fuente principal de análisis.

Recolección de Fuentes de Datos: Traducciones e Interpretaciones de Plimpton 322

La segunda etapa refiere a la revisión de literatura para la recolección de fuentes de datos ligadas a la tablilla babilónica Plimpton 322. Esta revisión se basó en las fuentes que citan a Neugebauer y Sachs (1945) –nuestra fuente primaria– y que están citadas en los artículos de Mansfield y Wildberger (2017) y Mansfield (2021) respectivamente –investigaciones desde las que parte nuestra investigación–.

A partir de estas fuentes, la recopilación de estudios consideró aquellos que retoman ideas de *MCT*; investigaciones en Historia de las Matemáticas que traducen, reconstruyen e interpretan a Plimpton 322; y documentos que relatan información alrededor del periodo histórico en que fue construida la tablilla.

La búsqueda de versiones de la fuente primaria se realizó en bases de datos especializadas y bibliotecas digitales de acceso abierto. Además de las versiones de *MCT,* se consideraron artículos y libros que proponen otra forma de reconstruir Plimpton 322 o en su defecto, robustecen el método planteado por Neugebauer y Sachs (1945).

La Matemática en Plimpton 322

A partir de la revisión de literatura alrededor de Plimpton 322 identificamos que a lo largo de la historia se han propuesto diferentes métodos para reconstruir la matemática contenida en Plimpton 322 (Neugebauer y Sachs, 1945; Bruins, 1949) y posteriores investigaciones han buscado robustecer o ampliar dichas teorías (de Solla Price, 1964; Proust, 2011; Robson, 2001; Mansfield y Wildberger, 2017; Britton et al., 2011, Mansfield, 2021) algunas de ellas tomando en cuenta elementos contextuales de la civilización y de la época que permitan construir métodos más cercanos a su construcción.

Al ir a la historia en busca de los significados que se han perdido en la matemática escolar y que son ajenos al *discurso matemático escolar* es importante ver al *texto* con los lentes más cercanos a la civilización en que fue datada. En consecuencia, dada la perspectiva teórica que hemos tomado y el aparato metodológico configurado, el acercamiento a la matemática contenida en Plimpton 322 debe ser coherente con sus elementos contextuales. De esta manera, las fuentes que nos permitan relatar la historia más cercana al contexto de Plimpton 322 serán las fuentes indicadas para estudiarla (Vargas-Zambrano, 2021).

Sobre las Fuentes de Datos: Primarias, Secundarias y Terciarias

Con base en los argumentos expuestos anteriormente, los trabajos de Neugebauer y Sachs (1945), Proust (2011), Mansfield y Wildberger (2017) y Mansfield (2021) resultaron los más apropiados para llevar a cabo la *reconstrucción pragmática* de la actividad matemática de Plimpton 322 en esta investigación.

A continuación, en la Tabla 2, se muestra la organización de las fuentes seleccionadas para llevar a cabo los análisis textual y contextual de Plimpton 332.

A grandes rasgos, en nuestras fuentes secundarias destacamos investigaciones que estudian e interpretan los métodos y análisis expuestos en nuestra fuente primaria –*MCT*– (de Solla Price, 1964; Mansfield y Wildberger, 2017; Mansfield, 2021; Proust, 2011; Bruins, 1949; Proust, 2022), mientras que nuestras fuentes terciarias (Proust, 2011; Britton et al., 2011; Friberg, 1981; Friberg, 2007; Stewart, 2007; Van Brummelen, 2009; Leick, 2002), además de interpretar nuestras fuentes secundarias, exponen elementos propios de la cultura en que se enmarca el *texto*.

Tabla 2
Organización de fuentes de datos

Fuente	Nombre	Autor (es/as)	Año
Primaria	Mathematical Cuneiform Texts	Neugebauer y Sachs	1945
Secundaria	The Babylonian "Pythagorean Triangle" Tablet	de Solla Price	1964
	Plimpton 322 is Babylonian exact sexagesimal trigonometry.	Mansfield y Wildberger	2017
	Plimpton 322: A Study of Rectangles	Mansfield	2021
	Perpendicular Lines and Diagonal Triples in Old Babylonian Surveying	Mansfield	2020
	On the nature of the table Plimpton 322	Proust	2011
	On Plimpton 322. Pythagorean Numbers in Babylonian Mathematics	Bruins	1949
	The sexagesimal place-value notation and abstract numbers in mathematical cuneiform text	Proust	2022
Terciaria	Interpretation of reverse algorithms in several Mesopotamian texts	Proust	2011
	Plimpton 322: a review and different perspective	Britton, Proust y Shnider	2011
	Methods and traditions of Babylonian Mathematics	Friberg	1981
	A remarkable collection of Babylonian Mathematical Texts	Friberg	2007
	Historia de las matemáticas	Stewart	2007
	The Mathematics of the Heavens and the Earth	Van Brummelen	2009
	Mesopotamia. La invención de la ciudad	Leick	2002

Preanálisis de Plimpton 322

Una vez seleccionado el texto *Mathematical Cuneiform Texts* como fuente primaria y categorizadas las otras fuentes en secundarias y terciarias, se procedió con la lectura y organización de la información, elección de las unidades de análisis, traducción y transcripción de la información, así como la familiarización e interpretación con el sistema numérico de los datos.

Familiarización con el Contexto

Al reconocer a Plimpton 322 como una producción con historia se rastrearon las circunstancias (sociales, políticas, filosóficas y religiosas) que influyeron en la escritura de la tablilla. De esta manera, y en afinidad con nuestro propósito de análisis, el contexto alrededor de Plimpton 322 se acotó a la civilización mesopotámica.

Aunque la civilización mesopotámica se extendió por más de 3000 años, a lo largo de su historia experimentó varias etapas y periodos significativos. Leick (2002) identifica los siguientes periodos históricos: Época sumeria (hacia 3500 a.C. - 2350 a.C.), Periodo Acadio (hacia 2350 a.C. – 2000 a.C.), Imperio Ur III (2150 a.C. – 2000 a.C.), primer Imperio Babilónico o Antigua Babilonia (hacia 2000 a.C. – 1600 a.C.), Dinastía casita (hacia 1600 a.C. – 1155 a.C.), Segunda dinastía de Isin (hacia 1155 a.C. – 1027 a.C.), Segunda Dinastía del País del Mar (hacia 1026 a.C. – 1006 a.C.), Dinastía de E (hacia 979 a.C. – 732 a.C.), Dominación asiria (hacia 732 a.C. – 626 a.C.) y la Dinastía neobabilónica (hacia 626 a.C. – 539 a.C.).

Con esta visión general y dada la revisión de literatura donde los historiadores matemáticos establecen al Periodo Antiguo Babilónico como el periodo en que fue datada Plimpton 322, nos interesamos por estudiar la civilización mesopotámica desde sus inicios en la Época Sumeria (3500 a.C. - 2350 a.C.) hasta la Antigua Babilonia (2000 a.C. – 1600 a.C.).

Durante el transcurso de estos periodos identificamos un conjunto de sucesos históricos y necesidades que pudieron incidir en la construcción de Plimpton 322: el inicio de escritura cuneiforme debido al requerimiento de llevar un registro y control de la cosecha y ganadería; el desarrollo de un sistema sexagesimal para llevar la contabilidad de los productos de intercambio; la división catastral para delimitar la propiedad privada que generó la necesidad de trazar planos con líneas perpendiculares para mayor exactitud en las mediciones de terrenos; y la construcción de Plimpton 322 posiblemente creada por la necesidad de la medición práctica de terrenos.

Familiarización con el Texto

La *familiarización con el texto* está vinculada a la *familiarización con el contexto*. En consecuencia, la producción matemática del contenido en Plimpton 322 está estrechamente relacionada con los factores culturales, sociales, políticos e históricos que influyeron directamente en ella. Desde esta perspectiva y bajo el enfoque teórico que hemos tomado –la *Teoría Socioepistemológica*– se estudiará tanto el contenido matemático de Plimpton 322 como los factores que fueron motivo de su escritura, es decir, las intenciones **subyacentes** en su escritura.

En esta línea de ideas, a partir de la *familiarización con el contexto*, se procedió a explorar y comprender tanto la **estructura** como el contenido matemático de la tablilla Plimpton 322. Para *familiarizarnos con el texto* utilizamos la versión de 1945 de

Mathematical Cuneiform Texts de Neugebauer y Sachs –nuestra fuente primaria–. Aunado a ella contamos con los estudios de Proust (2011), de Solla Price (1964), Mansfield y Wildberger (2017) y Mansfield (2020 y 2021) que hacen interpretaciones y análisis de la tablilla tomando como base lo expuesto en la fuente primaria, sin embargo, antes de profundizar en la comprensión de las interpretaciones primero estudiamos la reconstrucción propuesta en *MCT* –el primer análisis de Plimpton 322–.

A partir del estudio de Neugebauer y Sachs (1945) se identificó que la tablilla Plimpton 322 es un antiguo artefacto que se caracteriza por su contenido numérico y matemático. Aunque no sigue una estructura narrativa o argumentativa como lo haría un tipo de texto u otros tipos de obras matemáticas conocidas y estudiadas de otras épocas y culturas, Plimpton 322 presenta una estructura propia de los *textos* matemáticos mesopotámicos (Proust, 2015; Mansfield, 2021): una distribución de números organizados en columnas y filas, con anotaciones cuneiformes (encabezados) que proporcionan información contextual o instrucciones sobre cálculos matemáticos.

En su contenido se pueden identificar patrones numéricos que sugieren que la tablilla se utilizó para realizar cálculos matemáticos, posiblemente relacionados con medidas geométricas. Aunque su propósito exacto y función aún son objeto de debate en la comunidad académica, su ***género*** alude a un documento técnico o matemático que refleja el conocimiento matemático de la época en que fue creado.

Bajo esta premisa, la ***estructura discursiva macro o género*** de Plimpton 322 puede estar asociada a su propósito o funcionalidad. A continuación, describimos algunas de las hipótesis alrededor del propósito o funcionalidad de Plimpton 322.

Una Lista de Profesores. Uno de los argumentos mayormente presentados es que Plimpton 322 es un documento matemático utilizado para enseñar y estudiar conceptos geométricos y/o trigonométricos que sirvió como lista de profesores (de Solla Price, 1964; Friberg, 2007; Robson, 2001).

En un contexto práctico, de Solla Price (1964) infirió que Plimpton 322 podía estar relacionada con la medición práctica de los terrenos, sin embargo, su idea fue abandonada ante la posibilidad de que fuera utilizada por profesores como una lista de problemas geométricos con soluciones exactas utilizadas.

Por ejemplo, Robson (2002) y Buck (1980) estipularon que pudo ser utilizada como una lista de profesores para resolver problemas cuadráticos argumentando que la primera columna de la tablilla permitiría que el profesor comprobara el trabajo para una construcción geométrica del alumno.

En la misma línea de ideas, otros autores han expuesto que Plimpton 322 es una tablilla dedicada a la clasificación de triángulos rectángulos normalizados, que pudo ser utilizada por profesores para plantear y resolver problemas que involucraran triángulos rectángulos (Friberg, 1981) o rectángulos (Britton et al., 2001, p.561).

Por otro lado, investigadores han planteado la posibilidad de que la tablilla fuera trigonométrica (Buck, 1980), inclusive algunos de ellos abandonando el sistema de medición basado en círculos y ángulos (Mansfield y Wildberger, 2017). Sin embargo, tal afirmación ha sido descartada por otros autores al señalar que durante el Periodo Antiguo Babilónico no existía un marco conceptual para el ángulo medible (Robson, 2001) y, por tanto, Plimpton 322 no pudo haber sido una tabla trigonométrica (Van Brummelen, 2009).

Un Documento Teórico. Neugebauer (1969) y Britton et al. (2011) sostenían la idea de que Plimpton 322 era un documento teórico sobre triples diagonales con lados regulares[1] que buscaban mostrar la regularidad de sus lados reduciendo todos sus factores comunes. Sin embargo, Friberg (2007) contrapuso esa idea al señalar que de tratarse de un documento teórico sobre triples diagonales cuyos factores comunes fueron descartados, entonces los valores de la fila 11 deberían ser 3 y 5 respectivamente y no 45 y 1.15 como aparece en la tablilla.

Por su parte, Mansfield (2021) propone la hipótesis de que Plimpton 322 se trata de una "investigación teórica sobre un determinado problema en la medición práctica de terrenos" (p.998, traducción propia[2]), idea que como señalamos antes, ya había sido planteada y descartada (de Solla Price, 1964).

Su conjetura se basa en la evidencia del estudio de rectángulos en las tablillas encontradas en Mesopotamia (Proust, 2020) y el estudio de un plano de campo sobre la compra y venta de un terreno. Se cree que estas tablillas eran utilizadas por agrimensores de la época, así como escribas que tenían conocimientos sobre la medición de terrenos.

En cuanto a la **autoría** de Plimpton 322, Robson (2002) destaca que, puesto que en la Antigua Mesopotamia se daba más importancia a mantener la tradición anónima que individual, es casi improbable que se conozca el nombre del autor o su historia de vida.

---

1 Triple de números en notación sexagesimal (b, l, d) correspondientes a los lados y diagonal de un rectángulo donde $b^2 + l^2 = d^2$ con $b < 1$ siempre.

2 Esta y todas las citas de documentos escritos en un idioma diferente al español son traducciones propias.

Sin embargo, aunque no se puede conocer con exactitud quien fue el autor o autora del *texto*, destaca que se pueden conocer características más generales, por ejemplo, para el caso de Plimpton 322 se puede plantear que el autor era varón dado que las escribas femeninas conocidas habitaban en una zona mucho más al norte de donde fue datada la tablilla.

Por otro lado, los métodos utilizados para la construcción matemática de la tablilla apuntan a que el autor era un escriba practicante o un profesor, ya que su estructura organizativa se asemeja más a documentos denominados "listas de profesores" (Robson, 2002, p.118). Siguiendo las ideas de Robson, el autor de Plimpton 322 pudo ser un escriba varón, por lo que de aquí en adelante nos referiremos al autor de Plimpton 322 como "el escriba".

En lo que respecta a la **estructura *micro o mini-género,*** identificamos que Plimpton 322 está compuesta por: encabezados; columnas y filas; números y relaciones; y líneas divisoras (Figura 7Figura 7).

Encabezados. Proporcionan información contextual relevante. Pueden incluir la fecha o periodo al que refiere la tablilla y posiblemente el propósito o contenido general del texto.

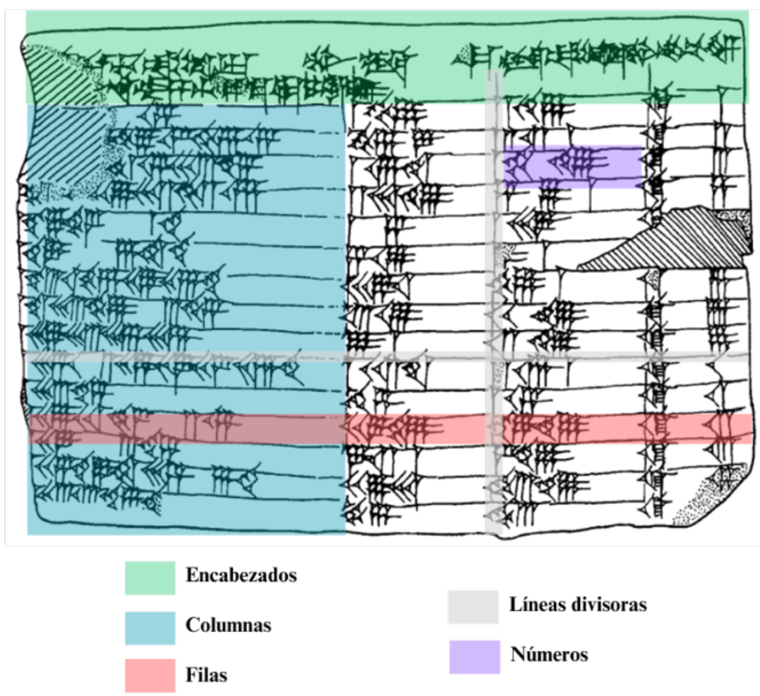
Columnas y Filas. En estas secciones se organiza la información para que sea clara y legible. Los *textos* se registran en columnas y filas utilizando marcas cuneiformes para representar palabras, números y símbolos matemáticos.

Números y Relaciones. Serie de números en notación sexagesimal (base 60) organizados en una estructura tabular que se cree representan relaciones matemáticas, como posibles valores para una tabla de cálculos. Producto de su sistema de notación, para separar los dígitos de un número se utiliza el punto "." aunque algunos autores suelen utilizar dos puntos ":" o el punto y coma ";". Por otro lado, para representar valores nulos se utilizan los espacios en blanco.

Líneas Divisoras. Para distinguir secciones o elementos específicos dentro de la tabilla (como las Columnas y encabezados en Plimpton 322) se utilizan líneas que ayudan a estructurar la información facilitando la referencia y comprensión del contenido.

Figura 7

Estructura micro de Plimpton 322



Nota. Adaptada de "Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A reassessment of Plimpton 323", p.171, por Robson, 2001, *Historia Mathematica.*

Unidades de Análisis

Producto de la familiarización textual y contextual realizada en el preanálisis de los datos, determinamos como *unidades de análisis* cada una de las columnas reconocidas en nuestro objeto de análisis e identificadas como cada una de las partes en las que se representan las triples diagonales de quince rectángulos regulares.

Con la finalidad de distinguir las unidades de análisis nos referiremos a ellas como: *Columna I, Columna II, Columna III y Columna IV* respectivamente. El análisis de cada *Columna* se realiza de forma individual y a partir de su *reconstrucción pragmática.*

CAPÍTULO CINCO.

ANÁLISIS DE LOS DATOS

El presente capítulo corresponde al análisis textual y contextual de Plimpton 322. Con base en los elementos teóricos, conceptuales y metodológicos se organiza el contexto partiendo de sucesos sociales y culturales de los periodos que influyeron en la construcción y consolidación de Plimpton 322 como saber prototrigonométrico y que permean la *reconstrucción pragmática* de las *unidades de análisis*.

Análisis Contextual: el Contexto de Plimpton 322

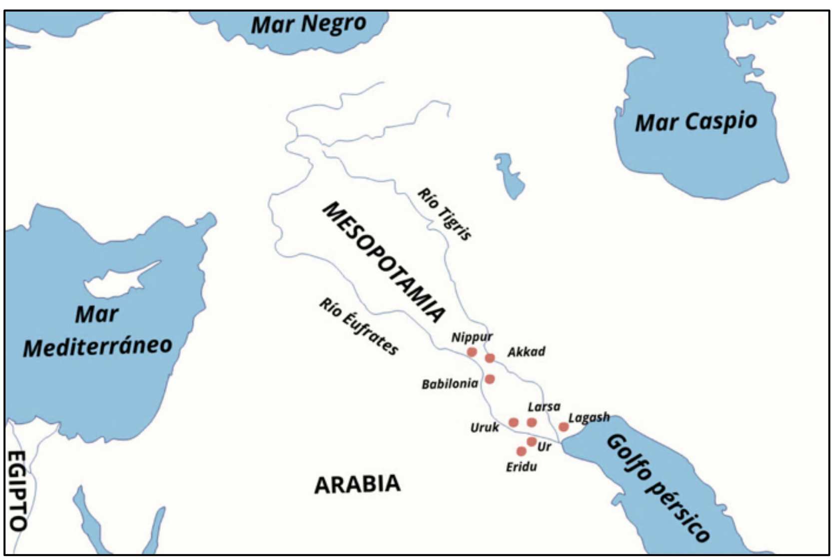
A lo largo de este análisis, se destacarán los distintos sucesos sociales, políticos y económicos clave que marcaron la civilización Mesopotámica –desde la Época Sumeria hasta la Antigua Babilonia–, con el objetivo de facilitar la comprensión de cómo estos se relacionan entre sí y pudieron influir en la creación del *texto* matemático Plimpton 322.

Contexto Cultural

Mesopotamia estaba localizada entre los ríos Tigris y Éufrates –actualmente al sur de Irak– y fue una de las regiones más antiguas que fue hogar de diversas civilizaciones a lo largo de la historia. Algunas de las civilizaciones más destacadas que habitaron Mesopotamia fueron los sumerios, los acadios, los babilonios, los asirios y los persas. Su cultura dejó un legado en diversas áreas como la escritura, religión, política y tecnología.

Los Sumerios: La cuna de la Civilización. Los sumerios fueron los primeros habitantes de Mesopotamia. Algunas de las ciudades más importantes donde los sumerios establecieron sus civilizaciones fueron Eridu, Uruk, Ur, Nippur y Lagash (Figura 8).

Figura 8
Civilizaciones de la Antigua Mesopotamia



Para los sumerios, el universo era ordenado por los dioses quienes tenían un papel activo en la creación y mantenimiento del mundo, en consecuencia, cada aspecto de la vida cotidiana –incluyendo la astronomía– estaba influenciado por estas creencias religiosas.

Se cree que la primera construcción sumeria fue un templo dedicado al dios Enki, un lugar de culto y peregrinación, ubicado en Eridu, también conocida como “El Edén Mesopotámico” y considerada la primera ciudad fundada por los dioses –según la mitología sumeria–.

A pesar de que no existen muchos registros propios de la época de Eridu, en pasajes posteriores se cuenta que la ciudad estaba situada en el límite de la llanura aluvial y muy cerca de los pantanos, en una zona de transición entre la tierra y el mar, donde durante los meses de subida de agua se convertía en un lago de gran tamaño. Dicha ubicación les permitía tener acceso a tres entornos físicos distintos: desierto, pantanos y llanura aluvial y, en consecuencia, a tres modelos de subsistencia: la agricultura, el pastoreo nómada y la pesca.

Debido a la zona geográfica en la que se localizaba Eridu, se cree que las comunidades locales y las construidas posteriormente eran autosuficientes en términos de producción alimentaria dado que explotaban hábilmente el potencial natural de su entorno. Sin embargo, cuando otras ciudades como Uruk y Ur cobraron importancia, Eridu tuvo un descenso de población hasta ser abandonada, sin volver a ser habitada posteriormente.

Una de las ciudades más relevantes de la época sumeria fue Uruk. La cultura Uruk se extendió aproximadamente desde el año 3800 hasta el 3200 a.C., desde el sudoeste de Irán hasta el norte de Siria y el sur de Anatolia.

Fue un importante centro urbano en la región donde, debido a su ubicación geográfica y formas de subsistencia, las principales formas de compensación económica eran la distribución y el intercambio.

Consecuencia de su forma de subsistencia económica, uno de los acontecimientos más importantes de este periodo fue la invención de la burocracia. Aunque no existe certeza de que hubieran existido élites en esa época ni que existieran distinciones por jerarquías de poder, por algunos sellos hallados en los templos se sugiere que había personas responsables de las transacciones.

Debido a la necesidad de llevar una contabilidad en el sistema de intercambio económico, se inventaron el sello y la escritura. Los sellos eran diseños basados en figuras humanas y animales. Los animales como leones, gacelas y aves reflejaban el intercambio de ganado; por su parte, las figuras humanas referían a diferentes ocupaciones personas realizando diversas activades como mujeres tejiendo, hombres con arco, lanzas, juguetes etc.

Figura 9
Cilindro de caliza con escenas de caza y pastoreo grabadas

Nota. Tomada de *Mesopotamia: La Invención de la Ciudad* (p.194), por G. Leick, 2002, Paidós.

Un ejemplo específico es el hallazgo de un sello cilíndrico (Figura 9); una pieza oblonga de piedra con escenas pictóricas o diseños grabados que aparecen en relieve cuando se pasa el cilindro sobre una superficie de arcilla húmeda.[3]

En cuanto a la escritura, las tablillas encontradas pertenecientes a la época sugieren que eran utilizadas para el comercio eran desechables y no contenían un discurso en sí, sino más bien, un sistema de notación en vez de escritura, lo que indicaría un indicio de primitivismo en cuanto al desarrollo de escritura completa (Leick, 2002).

Algunas de las tablillas matemáticas encontradas que datan de la Época Sumeria, específicamente del Periodo Dinástico Temprano (cerca de 2900 a.C. al 2334 a.C.) –antes del declive de Uruk–, muestran que existía un particular interés por el estudio de rectángulos, pudiendo ser las tablas de rectángulos los primeros textos matemáticos (Proust, 2020).[4]

Periodo Acadio. A pesar de que no existe ningún tipo de testimonio arqueológico sobre la existencia de Akkad, Leick (2002) señala que la gran diversidad de documentos pertenecientes al Periodo Antiguo Babilónico apunta a que fue una de las ciudades más famosas de Mesopotamia.

Según las escrituras, Akkad fue fundada por el rey Sargón alrededor del año 2334 a.C. Se dice que conquistó varias ciudades sumerias y las unificó para crear el Imperio Acadio –el primer imperio conocido en la historia–. Durante su reinado y posteriormente el de sus

[3] Véase un ejemplo de impresión de un sello cilíndrico en Leick (2002, p.192).
[4] Ejemplo de ello, se encuentran las tablas Feilu (2012), VAT 12593 (Deimel, 1923, p.82) y MS 3047 (Friberg, 2007, p.160).

sucesores, se estableció un sistema administrativo centralizado y una estructura política que estaban regidos por un código legal y algunas leyes que regulaban la vida en el imperio.

En comparación con la Época Sumeria, donde las ciudades-estado eran independientes entre sí, durante el Imperio Acadio existió una definida estructura de gobierno. La estructura política establecida por Sargón era monárquica y estaba caracterizada por una centralización significativa de poder; el rey tenía poder absoluto y era considerado el representante de los dioses en la Tierra. A su vez, las tierras conquistadas –por medio de su ejército centralizado– eran gobernadas por dirigentes designados por el rey, quienes eran responsables de mantener el orden en la región y recolectar los impuestos.

En concordancia con las tablillas encontradas alusivas a este periodo, para llevar a cabo el registro de las transacciones comerciales y registros legales, los acadios adaptaron los caracteres cuneiformes para representar la lengua acadia, heredaron y desarrollaron el sistema sexagesimal de base 60 de los sumerios.

Sin embargo, pese a que Akkad creció rápidamente y se buscó popularizar el gobierno de Sargón, el exceso de expansión territorial provocó un agotamiento de recursos provocando conflictos dentro del imperio que como consecuencia causó una debilitación en el poder centralizado de los reyes acadios. La pérdida de autoridad y la incapacidad de mantener el orden, aunado a la escasez de recursos, provocó el colapso del imperio hacia el 2000 a.C.

Imperio Ur III. Ur fue fundada alrededor de 3800 a.C. en la región sur de Mesopotamia, cerca de lo que hoy es Narisiya, Irak. Fue una de las ciudades más grandes y poderosas de Mesopotamia. Uno de los periodos más notables en la historia de Ur fue durante la Tercera Dinastía de Ur, también conocida como Dinastía Ur III. Durante este periodo, Ur-Nammu y su sucesor Shulgi gobernaron la ciudad de Ur y gran parte de Mesopotamia.

Durante su gobierno, Ur-Nammu (desde 2112 a.C. al 2094 a.C) se dedicó a la reconstrucción y desarrollo de la ciudad, convirtiéndola en un importante centro económico y cultural de Mesopotamia. Entre sus proyectos más destacables están la construcción y restauración de templos y mejora de infraestructura.

Posteriormente, durante el gobierno de Shulgi (desde 2097 a.C. a 2047 a.C.) el imperio alcanzó su máxima extensión territorial; fomentó la enseñanza y erudición, lo que llevó a un florecimiento de la literatura, la poesía y escritura cuneiforme; se establecieron bibliotecas y escuelas en las ciudades imperiales, así como un sistema de correos y mensajeros para la mejora de la comunicación en el reino.

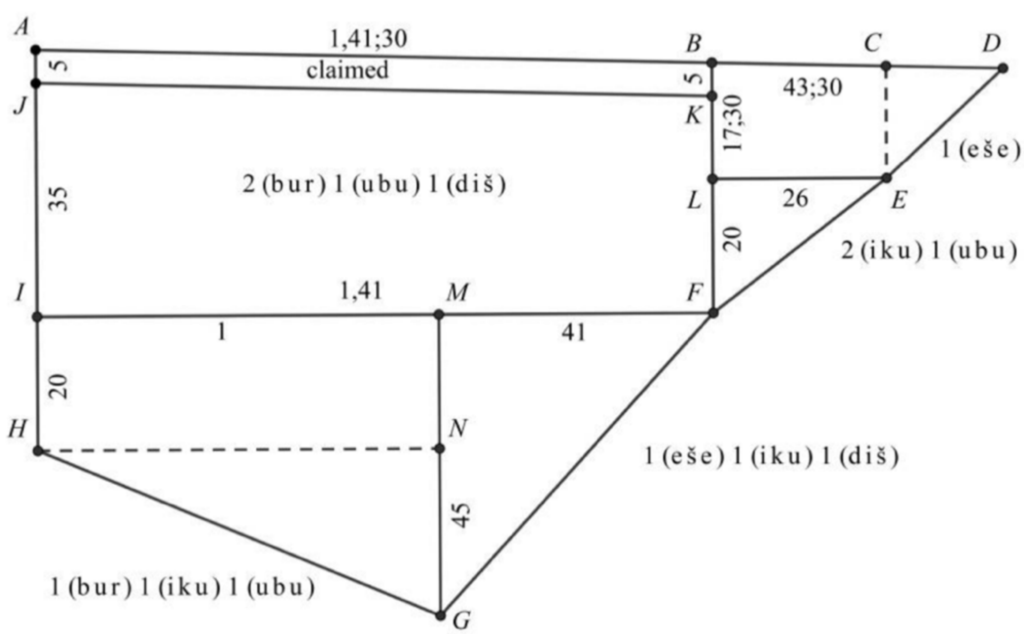
Al igual que en periodos anteriores y en otras ciudades, durante el Imperio Ur III el comercio por medio de la distribución y el intercambio era la principal actividad económica. Debido a la localización geográfica de la ciudad, la producción agrícola principal era de cebada.

Su sistema administrativo seguía estando basado en la escritura cuneiforme y el sistema base 60 para llevar a cabo los registros contables. A diferencia del Periodo Acadio, estos registros plasmados en tablillas de arcilla ya contaban con textos más claros, dado que ya existía un sistema de escritura más completo.

Debido a la importancia de la agricultura en Mesopotamia, la topografía se volvió una profesión muy importante y respetada en la región. Los agrimensores utilizaban las tablillas matemáticas para medir terrenos con la intención de estimar el tamaño esperado de la cosecha.

Una de las técnicas utilizadas para facilitar la medición de terrenos era por medio de la división de los campos en figuras que son aproximaciones de rectángulos, triángulos rectángulos y trapecios rectos. Dunham (1986) menciona que se denominan aproximaciones dado que los lados de las figuras no tenían lados iguales y los ángulos no eran verdaderamente rectos. Uno de los ejemplos más conocidos sobre planos de campo pertenecientes al periodo UR III es YOS 1,22 (Figura 10).

Figura 10
Croquis de YOS 1,22



Nota. Dibujado a escala por Mansfield (2020, p.90) con base en (Robson, 2008, p.63) y (Stephens, 1953, p.2)

Como se puede observar en la Figura 10, *JKFI* es un cuasi-rectángulo (Stephens, 1953), esto debido a que las medidas de las longitudes de sus lados opuestos son similares pero desiguales. Al respecto Mansfield (2020) señala que esto quizá sucedía dado que "estos primeros topógrafos no querían o no podían construir líneas perpendiculares con suficiente precisión como para que los lados opuestos de un rectángulo tuvieran la misma longitud" (p.90). Del mismo modo, esto podría deberse a que la tarea principal de los topógrafos de la época era únicamente aproximar el área, por lo que no había necesidad de que los lados de los rectángulos tuvieran longitudes exactamente iguales. Sin embargo, a finales del Periodo Ur III la tierra comenzó a volverse privada y generó una importancia en la división catastral con precisión para evitar disputas, lo que implicaba la necesidad de trazar líneas perpendiculares.

Periodo Antiguo Babilónico. La primera referencia sobre Babilonia como ciudad data del Periodo Acadio alrededor del siglo XIX. Babilonia estaba situada a las orillas del río Éufrates al sur de Bagdad, actualmente la capital de Irak; fue una pequeña ciudad-estado sumeria que alcanzó su máximo esplendor durante la Dinastía Hammurabi (1800 a.C. – 1600 a.C.) convirtiéndose en un importante centro de comercio y cultura mesopotámica.

Durante varios periodos fue la capital del Imperio Babilónico, fundado por el rey Hammurabi quien es popularmente conocido por ser el autor del Código Hammurabi; uno de los primeros códigos de leyes conocidos en la historia. Este código contenía un conjunto de leyes civiles y penales que regulaban la vida cotidiana de la sociedad babilónica.

A lo largo de la Dinastía Hammurabi hubo grandes avances matemáticos centrados en áreas prácticas y comerciales. Muestra de ello son las numerosas tablillas de arcilla con problemas escritos en cuneiforme que develan el desarrollo de un sistema de numeración posicional sexagesimal que dejaron los babilonios. Estos problemas incluían cálculos de áreas, volúmenes, proporciones y ecuaciones cuadráticas, evidenciando su habilidad para aplicar matemáticas en la resolución de problemas prácticos de su vida cotidiana.

Para resolver problemas cotidianos como las transacciones comerciales los babilonios realizaban cálculos aritméticos básicos. Algunas de las tablillas evidencian que tenían conocimientos en geometría práctica, especialmente para la resolución de problemas relacionados con la agricultura y la construcción, así como la medición de áreas de campos para la estimación de cosechas y la división de terrenos dada la propiedad privada (Stewart, 2007).

A pesar de que –como mencionamos antes– el concepto de propiedad privada comienza a ser evidente a finales del *Imperio Ur III*, la variedad de planos encontrados que datan de dicho periodo demuestra que todos eran bosquejos con aproximaciones de figuras como cuasi-rectángulos.

Contexto Situacional

Las Matemáticas Babilónicas. Antes de adentrarnos en el estudio de Plimpton 322, describimos algunos conceptos que forman parte de las matemáticas babilónicas y que nos permitirán contextualizar y explicitar su contenido matemático. Al familiarizarnos con estos términos y métodos podremos relacionar el *texto* matemático con su contexto y técnicas empleadas por los escribas babilónicos.

Números. El sistema de numeración utilizado por los escribas babilónicos era el **Sistema Numérico Sexagesimal (base 60).** En este sistema un número es escrito como una secuencia finita de dígitos donde el dígito a la derecha del punto representa unidades que son sesenta veces menores que el dígito a la izquierda; el dígito nulo era representado por un espacio en blanco (Stewart, 2007) y la representación de la parte fraccionaria de un número era determinada por el contexto.

En este estudio, para representar el sistema de numeración utilizamos los números del 1 al 59 y separamos los dígitos con un punto "." para denotar el valor posicional. Para representar el dígito nulo usamos el cero "0" –omitiendo cualquier cero al inicio de cualquier dígito de un número–; y el punto y coma ";" para separar la parte entera de la fraccionaria.

Números Regulares. Se denomina regular a un número n tal que $n\bar{n} = 1$, donde $\bar{n}$ es el recíproco de n. En la Antigua Babilonia los **números regulares** ocupaban un papel importante para la resolución de cálculos aritméticos como la división. Por ejemplo, para dividir un número regular n el escriba buscaba su recíproco $\bar{n}$ en tablas recíprocas seguida de una búsqueda de tablas de multiplicar para n (Mansfield y Wildberger, 2017).

Tablas Recíprocas y de Multiplicar. Un ejemplo de este tipo de tablas es la tabla estándar de recíprocos (Tabla 3), una pieza canon memorizada por los escribas del Periodo Antiguo Babilónico que enumera los números regulares y sus recíprocos para todos los números regulares del 2 al 1.21.

Tabla 3
Tabla estándar de recíprocos

n	$\bar{n}$	n	$\bar{n}$	n	$\bar{n}$
2	30	16	3.45	45	1.20
3	20	18	3.20	48	1.15
4	15	20	3	50	1.12
5	12	24	2.30	54	1.06.40
6	10	25	2.24	1.00	1.00
8	7.30	27	2.13.20	1.04	56.15
9	6.40	30	2.00	1.12	50
10	6	32	1.52.30	1.15	48
12	5	36	1.40	1.20	45
15	4	40	1.30	1.21	44.26.40

Nota. Tomada de "Plimpton 322 is Babylonian exact sexagesimal trigonometry" (p.401), por D. Mansfield y N. Wildberger, 2017, *Historia Mathematica*, 44.

Además de las tablas recíprocas, los babilonios contaban con listas llamadas **tablas de multiplicar**. Estas tablas eran memorizadas para facilitar la multiplicación, así como reconocer los múltiplos de ciertos valores haciéndolos coincidir con los dígitos finales de la tabla. Un ejemplo de este tipo de tablas es CBS 6095 (Tabla 4), una tabla de multiplicación de 3.45.

Tabla 4
Tabla de multiplicar 3.45

1	3.45	6	22.30	11	41.15	16	1	30	1.52.30
2	7.30	7	26.15	12	45	17	1.03.45	40	2.30
3	11.15	8	30	13	48.45	18	1.07.30	50	3.07.30
4	15	9	33.45	14	52.30	19	1.11.15		
5	18.45	10	37.30	15	56.15	20	1.15		

Nota. Tomada de *Mathematical Cuneiform Texts* (p.23), por O. Neugebauer y A.J. Sachs, 1945, American Oriental Series, 49.

De igual manera, otro tipo de pieza estándar del Periodo Antiguo Babilónico es la **tabla combinada**. Esta tabla "consiste en la tabla estándar de recíprocos seguida de una sección homogénea de unas cuarentas tablas de multiplicar" (Mansfield, 2021, p.981).

En términos de funcionalidad, Friberg (2007) argumenta que la tabla combinada pudo haber sido utilizada para facilitar la división, mientras que Mansfield (2021) señala que la tabla combinada pudo servir como referencia para la multiplicación, así como para la identificación y eliminación de factores.

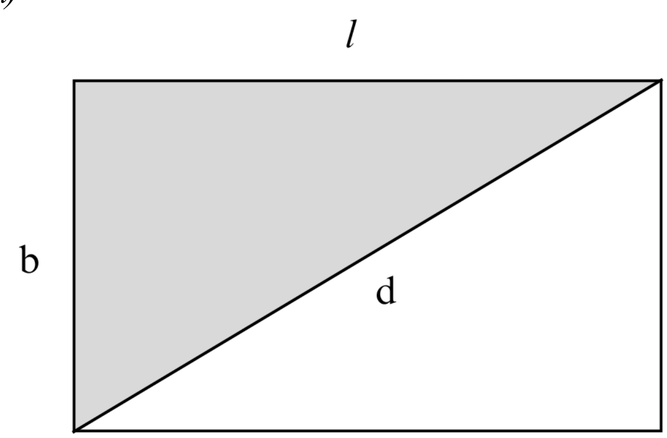
Factorización. En el contexto de los babilonios, la factorización consiste en "el proceso de simplificar un gran problema a través de la identificación y eliminación repetida de factores, que se detiene una vez que el problema es lo suficientemente simple como para resolverse directamente" mediante tablas estándar (Mansfield, 2021, p.982).

Para factorizar, el escriba utilizaba tablas de recíprocos y de multiplicar o en su defecto, tablas combinadas. El proceso consistía en identificar el dígito menos significativo del número que se quería factorizar y multiplicarlo por su recíproco. Este proceso se repetía de forma iterada hasta que el dígito se reducía lo suficiente para que el problema pudiera ser resuelto mediante tablas estándar.

En síntesis, este tipo de cálculos y formas de operar demuestran que los babilonios sabían que ciertos números se hacían más pequeños cuando se multiplicaban por ciertos recíprocos. De esta manera, su capacidad para reducir números se basó en una comprensión de factores y múltiplos a través del uso de tablas recíprocas y de multiplicar.

Triples Diagonales. Se le llama triple pitagórico a un triángulo rectángulo cuyos tres lados son todos números enteros positivos, donde se establece que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de sus catetos (los otros dos lados). En contraste, en el contexto mesopotámico la percepción de este objeto difiere. Se le denomina **triple diagonal** a un triplete de números en el sistema de numeración sexagesimal de valor posicional correspondiente a los lados y la diagonal de un rectángulo (b, l, d)[5], donde $b^2 + l^2 = d^2$ con $b < 1$ (Figura 11).

Figura 11
Triple diagonal (b, l, d)



Si $l = 1$ se dice que el triple esta normalizado y se usa la notación especial $(\beta, 1, \delta)$ (Mansfield, 2021). Evidencia del conocimiento de esta relación se ha identificado en la tablilla MS 3971 perteneciente al Periodo Antiguo Babilónico.

MS 3971. Es una secuencia de ejercicios escolares publicados y estudiados por Friberg en 2007 (pp.252-253). Algunos autores han destacado y discutido el gran parecido

[5] Donde b es lado corto, l el lado largo y d la diagonal.

de su parte *§*3 con la tablilla Plimpton 322 (Proust, 2011; Britton et al., 2011 y Friberg, 2007) llegando incluso a llamarlo un "pequeño Plimpton 322" (Mansfield, 2021, p.987).

En la parte *§*3 de MS 3971 se explicita la generación de cinco triples diagonales a partir de cinco números regulares, evidenciando que durante ese periodo se tenía conocimiento de que un número regular x generaba un triple diagonal normalizado donde

$$\delta = \bar{2}(x + \bar{x}) \quad y \quad \beta = \bar{2}(x - \bar{x})$$

Por otro lado, en el ejercicio de la parte §4 se indica buscar un rectángulo con diagonal igual a 7, en consecuencia, se debe "encontrar un rectángulo que se pueda escalar a un factor de $7d$" (Mansfield, 2021, p.987). Si bien el ejercicio se resuelve tomando el triple diagonal $(3,4,5)$, además de ese, Mansfield señala que otro triple diagonal que puede escalarse para obtener un rectángulo con diagonal igual a 7 es el generado en el apartado *§ 3d*[6] (Tabla 5).

Tabla 5
Parámetros de generación, valores intermedios y resultados correspondientes al ejercicio escolar MS 3971 §3.

Subsección	x	δ	β^2	β
§ 3a	1.04	1.00.07.30	1.00.15.00.56.15	3.52.30
§ 3b	1.40	1.08	1.17.04	32
§ 3c	1.30	1.05	1.10.25	25
§ 3d	1.20	1.02.30	1.05.06.15	17.30
§ 3e	1.12	1.01	1.02.01	11

Nota. Tomada de "Plimpton 322: A Study of Rectangles" (p.986), por D.F. Mansfield, 2021, *Foundations of Science*, 26.

6 Para más detalles sobre la traducción del documento consultar Mansfield (2021, p.986).

Al respecto, concluye que los ejercicios de ambas partes (§3 y §4) destacan la importancia de los números regulares dado que "solo los lados regulares pueden escalarse a longitudes arbitrarias" (2021, p.988).

Evidencia de estos conocimientos y ejemplo de su uso en problemas prácticos del Periodo Antiguo Babilónico ha sido encontrado en Si.427.

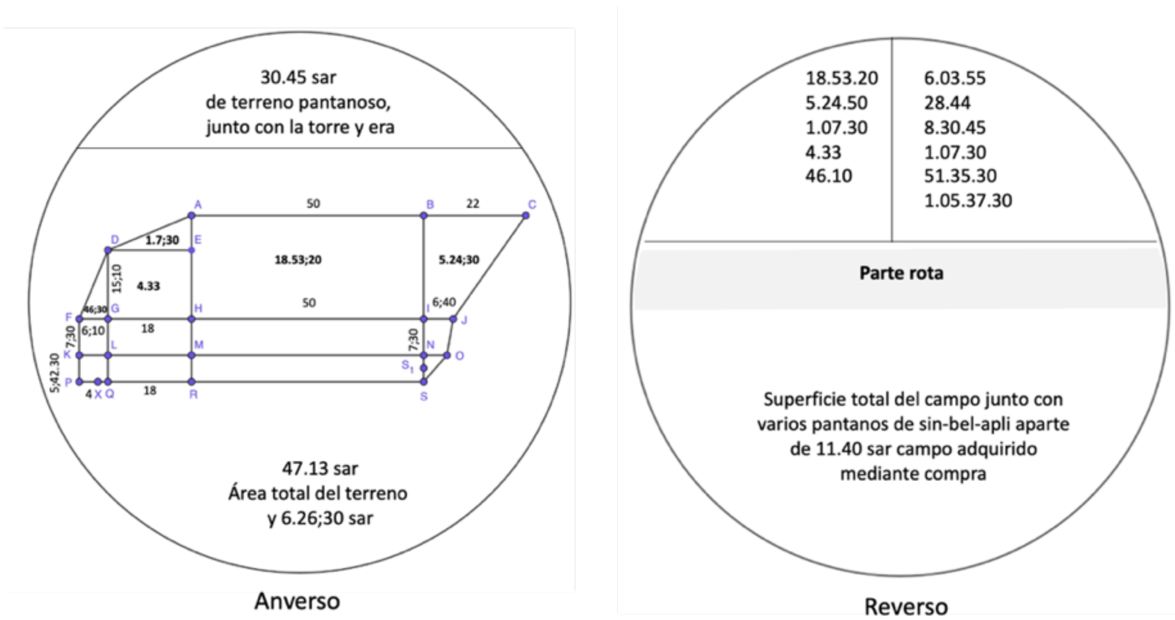
Si.427. El primer plano preciso encontrado es Si.427 (Figura 12). Ha sido catalogado como "uno de los ejemplos más completos de geometría aplicada" (Mansfield, 2021, p.1001) que data del Periodo Antiguo Babilónico, específicamente durante la Dinastía Hammurabi.

Figura 12
Si.427 anverso y reverso

Nota. Tomadas y adaptadas de "Perpendicular lines and diagonal triples in Old Babylonian surveying" (p.95), por D. Mansfield, *School of Mathematics and Statistics.*

Si.427 es un plano de campo asociado a la venta de terrenos privados que contiene la subdivisión de un terreno en triángulos rectángulos, trapecios rectos y rectángulos precisos (Figura 13), es decir, rectángulos con lados opuestos de igual longitud y evidentes líneas perpendiculares en las demás figuras. Esto sugiere que los topógrafos de la Antigua Babilonia encontraron una forma de trazar líneas perpendiculares con mayor exactitud que el periodo anterior, pero ¿cómo fue posible esto?

Figura 13
Traducción de Si.427



Nota. Construida con base en *Si.427 - one of the oldest and most complete examples of applied geometry from the ancient world* [Video], por D. Mansfield, YouTube (https://youtu.be/fSRMJcpKA3s?si=bYJ-LniaynmIzUWI).

Mansfield (2020) señala que la respuesta sobre cómo pudieron los babilonios construir líneas perpendiculares en Si.427 radica en la construcción de dos rectángulos (*GHLM* y el adyacente a *FK*) y un triángulo rectángulo (*ADE*) con las dimensiones de triples diagonales. De manera que, probablemente se extendieron los lados perpendiculares de estas figuras para formar las líneas que se encuentran en las subdivisiones (Figura 14).

Figura 14
Extensión de líneas perpendiculares del triple diagonal ADE

Nota. Adaptada de "Perpendicular lines and diagonal triples in Old Babylonian surveying" (p.95), por D. Mansfield, *School of Mathematics and Statistics.*

Esta conjetura es consistente puesto que existe evidencia de que durante el Periodo Antiguo Babilónico ya se tenía conocimiento de la noción de perpendicularidad. Al respecto Horyup (2002) destaca que los babilonios utilizaban la palabra "mutarrittum" cuyo significado es "dirección de plomada" para referirse al lado perpendicular de una figura, haciendo especial énfasis en la construcción de dibujos geométricos.

Para la construcción de rectángulos utilizaban la "regla de la diagonal" que aproximadamente mil años después sería conocida como Teorema de Pitágoras. En contraste con la utilidad del Teorema de Pitágoras (normalmente en triángulos rectángulos), la regla de la diagonal era utilizada por los antiguos babilonios mayormente en el contexto de los rectángulos y rara vez en el contexto de los triángulos rectángulos.

Uno de los documentos más populares y conocidos de la época en el que aparece la regla de la diagonal es Plimpton 322 (Figura 15). Aunque su propósito sigue siendo debate entre la comunidad matemática, Mansfield (2020) plantea que el estudio del contenido matemático de Si.427 y su posible uso práctico sugiere que esta tablilla pudo haber existido antes que Plimpton 322 y ser los problemas topográficos los que posiblemente inspiraron a la creación de Plimpton 322.

Plimpton 322. El *texto* matemático Plimpton 322 es un fragmento de una tabla de arcilla conservada en la biblioteca de la Universidad de Columbia cuya procedencia y autoría es desconocida.

De Solla Price (1964) señala que la escritura apunta a un dialecto meridional, probablemente originario de Larsa, por lo que considera que la escritura pertenece a la Antigua Babilonia, y que probablemente fue datada entre 1900 a.C. y 1600 a.C.

En cuanto a sus características físicas, la tablilla mide $12.7cm \times 8.8\,cm$ y está inscrita únicamente en su lado anverso que consta de cuatro columnas –con sus respectivos encabezados– y quince filas. Aunque el reverso no está inscrito, las líneas verticales del anverso se prolongan en el reverso (Figura 15), lo que podría sugerir que la tablilla no está terminada (de Solla Price, 1964 y Proust, 2011).

Figura 15
Plimpton 322

Anverso Reverso

Nota. Adaptada de fotografías de Christine Proust en "Plimpton 322: a review and a different perspective (p.564), J. P. Britton, C. Proust y S. Shnider, (2011), *Archive for History of Exact Sciences*, 65.

En ese sentido, algunas investigaciones se han dedicado a traducir e interpretar el contenido de Plimpton 322 y con base en ello, proponer métodos de generación del contenido matemático de los escribas.

Interpretaciones. Los encabezados de las columnas han sido considerados "crípticos" (de Solla Price, 1964, p.219) debido a la antigüedad del tipo de escritura y la dificultad para traducirlos –considerando que algunos fragmentos están rotos–. Al respecto, se ha buscado darles sentido de acuerdo con el contenido matemático de cada columna.

Desde la perspectiva de Mansfield (2021, p.989) los títulos de las columnas podrían traducirse de la siguiente manera: *Columna I: "El cuadrado de la diagonal. Resta 1 y luego sale el cuadrado del lado corto"; Columna II: "íb-si del lado corto"; Columna III: "íb-si de la diagonal";* y *Columna IV: "Fila"* (Tabla 6).

Siguiendo la interpretación de Mansfield (2021) el encabezado de la *Columna I* indica que el *texto* hace referencia a los lados cortos y diagonales de rectángulos que satisfacen la relación $d^2 - 1 = b^2$, apuntando a que el contenido del *texto* es sobre triples diagonales normalizados $(\beta, 1, \delta)$.

En cuanto a las *Columnas II* y *III,* señala que ambos encabezados contienen el término "*íb-si*" que ha sido traducido de diferentes formas en tablillas mesopotámicas para referirse al resultado de operaciones diversas: de la raíz cuadrada (Robson, 2001; Friberg, 2007; Britton et al. 2011); de alguna operación aritmética extraña (Friberg, 2007); de operaciones exponenciales o logarítmicas (Neugebauer y Sachs, 1945); o simplemente de alguna operación cualesquiera, sin especificar cuál (Neugebauer y Sachs, 1945; Mansfield, 2021). Para fines de nuestra reconstrucción tomaremos la última traducción mencionada del término *íb-si.*

Por último, señala que el encabezado de la *Columna IV* hace referencia a la numeración de cada una de las filas de Plimpton 322 (Tabla 6), una práctica común en las tablillas mesopotámicas.

Tabla 6
Traducción de Plimpton 322

Columna I	*Columna II*	*Columna III*	*Columna IV*
Cuadrado de la diagonal. Restar 1 y sale el cuadrado del lado corto	*El íb-si del lado corto*	*El íb-si de la diagonal*	*Fila*
1.59.00.15	1.59	2.49	1
1.56.56.58.14.**56**.15	56.07	3.**12.01**	2
1.55.07.41.15.33.45	1.16.41	1.50.49	3
1.53.10.29.32.52.16	3.31.49	5.09.01	4
1.48.54.01.40	1.05	1.37	5
1.47.06.41.40	5.19	8.01	6
1.43.11.56.28.26.40	38.11	59.01	7
1.41.33.**59**.03.45	13.19	20.49	8
1.38.33.36.36	**9**.01	12.49	9
1.35.10.02.28.27.24.26.40	1.22.41	2.16.01	10
1.33.45	45	1.15	11
1.29.21.54.02.15	27.59	48.49	12
1.27.00.03.45	**7.12.01**	4.49	13
1.25.48.51.35.06.40	29.31	53.49	14
1.23.13.46.40	56	53	15

Nota. Adaptada de "Plimpton 322: a Study of Rectangles" (p.989), por D. Mansfield, 2021, *Foundations of Science,* 26.

Errores. Se han identificado algunos errores en la tablilla Plimpton 322 que han sido objeto de estudio de algunas investigaciones que los han categorizado en dos tipos: como errores de cálculo o como errores de copia. Los errores de copia hacen referencia a la transferencia sin cuidado de los números a la tablilla. Mientras que dentro de los errores de cálculo se desglosan tres tipos: la fusión de dígitos consecutivos, la inserción de un dígito nulo extraño y la omisión de un dígito; y se conocen como tipo 1, 2 o 3, respectivamente.[7]

[7] Más detalles y ejemplos sobre los tipos de errores identificados en Plimpton pueden consultarse en y Proust (2000, p.298), Friberg (2007, p.21) y Mansfield (2021, pp.991-993).

Generación de las Columnas. Existen diversos estudios y teorías sobre la generación de las columnas de Plimpton 322. A continuación, describiremos algunas de las ideas propuestas.

En 1945 Neugebauer y Sachs sugieren que los números contenidos en Plimpton 322 se generaron a partir de la fórmula:

$$(A) \qquad l^2 + b^2 = d^2$$

Dentro de su análisis encuentran que los valores l, b y d son números enteros que se generan a partir de los parámetros r y s,[8] de manera que:

$$(B) \qquad l = 2rs \qquad b = r^2 - s^2 \qquad d = r^2 + s^2$$

Donde r y s corresponden a números regulares, de la forma: $2^a 3^b 5^c$, relativamente primos[9]; y con $r > s$, no siendo ambos simultáneamente impares.

Desde su interpretación, la *Columna II* y *Columna III* de Plimpton 322 corresponden a los valores b y d.

8 Denominados con la notación p y q en Neugebauer y Sachs (1945).

9 También denominados primos relativos, coprimos o primos entre sí, refieren a un par de números cuyo factor común entre ambos es 1.

Por otro lado, para calcular la *Columna I*, sugieren que utilizaron (B) para generar:

$$(C) \qquad \frac{d}{l} = \frac{1}{2}(r\bar{s} + s\bar{r})$$

donde $\bar{r}$ y $\bar{s}$ representan los recíprocos de r y s, respectivamente.

En este orden de ideas, argumentan que la parte faltante de la tablilla podría contener una columna con los valores de l; además, agregan que para que los valores de l, b y d sean triples pitagóricos, r y s deben ser números regulares (Neugebauer y Sachs, 1945).

Al finalizar, añaden que otra forma de producir triples pitagóricos es por medio de un parámetro y su recíproco, donde el valor del parámetro es igual a r/s; sin embargo, señalan que para producir los parámetros y sus recíprocos es necesario contar con los valores de los generadores, descartando esa posibilidad debido a la cantidad de posiciones en los dígitos. Esta idea sería retomada años más tarde por otros autores y será abordada más adelante.

En 1964, de Solla Price siguiendo las ideas de Neugebauer y Sachs (1945) añade que todos los pares de números regulares y primos entre sí deben cumplir con las siguientes desigualdades:

$$1 < r < 60$$

$$1 < \frac{r}{s} < 1 + \sqrt{2}$$

De acuerdo con su idea, encuentra que existen 38 pares de parámetros (Tabla 7) que cumplen con las delimitaciones señaladas, siendo los primeros 15 valores, los que corresponden a la *Columna I* de Plimpton 322.

Tabla 7
Pares de parámetros que permiten la construcción de Plimpton 322

r	s				
	Sobre la propuesta de continuación de la tablilla			**En la tablilla**	
2	3				
3	4	5			
4	5			**9**	
5	6	8		**9**	**12**
8	9			**15**	
9	10	16		**20**	
12				**25**	
15	16			**32**	
16	25	27			
18	25				
20	27				
24	25				
25	27	32	36	**48**	**54**
27	32	40		**50**	**1.4**
30				**1.00**	
32	45			**1.15**	
40				**1.21**	
45	1.04				
50	1.21				
54				**2.05**	

Nota. Adaptada de "The Babylonian "Pythagorean Triangle" Tablet" (pp.222-223), por D. de Solla Price, 1964, *Centaurus*, 10.

De esta manera, sugiere que la tablilla completa constaría de 38 filas y posiblemente 6 columnas en total (de Solla Price, 1964, p.224). Las dos columnas faltantes serían las correspondientes a los valores del lado l y el área del cuadrado del lado b (equivalente al área del cuadrado de la diagonal menos la unidad).

Aunque años más tarde Proust (2011) coincide con de Solla Price (1964) sobre los generadores r y s, argumenta que su razonamiento está basado en conceptos modernos y desconocidos por los escribas babilónicos y, en consecuencia, se tendría que pensar en algún método cercano a la época en que fue datada Plimpton 322. Al respecto, expone que los números más utilizados por los babilonios eran los regulares de posición 1 y posición 2 hasta el 2.5:

> {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}, {8}, {9}, {10}, {12}, {15}, {16}, {18}, {20}, {24}, {25}, {27}, {30}, {32}, {36}, {40}, {45}, {48}, {50}, {54}, {1.4}, {1.12}, {1.15}, {1.20}, {1.21}, {1.30}, {1.36}, {1.40}, {1.48}, {2}, {2.5} ($lista\ A$).

En esta línea de ideas, argumenta que un método con herramientas conocidas por los escribas del Periodo Antiguo Babilónico era el uso de una tabla de pares recíprocos correspondientes a las relaciones r/s y s/r de la lista propuesta por de Solla Price (1964, pp.222-223).

De esta manera, al dividir los números de la $lista\ A$ por números regulares de posición 1; eliminar todos los valores duplicados; seleccionar los valores comprendidos entre 1 y 2.25 (1 y $1+\sqrt{2}$); y reordenar en orden descendiente los valores resultantes, se obtienen 38 valores que corresponden a los valores r/s obtenidos por de Solla Price ($lista\ B$) –siendo los primeros 15 valores de esta lista los que generan las filas de Plimpton 322–. Concluyendo entonces que "así, utilizando únicamente herramientas conocidas por los escribas, obtenemos la lista de pares recíprocos que genera la tabla ampliada" (Proust, 2011, p.664):

{2.24}, {2.22.13.20}, {2.20.37.30}, {2.18.53.20}, {2.15}, {2.13.20}, {2.9.36}, {2.8}, {2.5}, {2.1.30}, {2}, {1.55.12}, {1.52.30}, {1.51.6.40}, {1.48}, {1.46.40}, {1.41.15}, {1.40}, {1.37.12}, {1.36}, {1.33.45}, {1.30}, {1.28.53.20}, {1.26.24}, {1.25.20}, {1.24.22.30}, {1.23.20}, {1.21}, {1.20}, {1.16.48}, {1.15}, {1.12}, {1.11.6.40}, {1.7.30}, {1.6.40}, {1.4.48}, {1.4}, {1.2.30} $(lista\ B)$.

Desde otro punto de vista, la interpretación de Bruins en 1949 retoma la idea de que Plimpton 322 se generó a partir de un parámetro (x) y su recíproco $\left(\frac{1}{x}\right)$ –idea que como mencionamos anteriormente, había sido descartada por Neugebauer y Sachs (1945) –.

Bruins señala que al poner $l = 1$ en (A) tenemos:

$$(D) \qquad 1 = d^2 - b^2 = (d+b)(d-b)$$

Así cuando $d + b = x$, entonces $d - b = 1/x$ y, en consecuencia:

$$(E) \qquad d = 1/2\left(x + \frac{1}{x}\right) \qquad b = 1/2\left(x - \frac{1}{x}\right) \qquad l = 1$$

números racionales, siempre que x sea un número racional.

Justifica su propuesta señalando que la tablilla **AO 6456** –una tabla de 6 columnas con valores de cuatro posiciones y sus recíprocos–, contiene los valores reducidos de $x + 1/x$ y $x - 1/x$ correspondientes a las *Columnas IV*, *III* y *II* de Plimpton 322.

En 2001, Robson, siguiendo la idea de pares recíprocos que señala Bruins, argumenta que la interpretación de Bruins es un tanto precipitada y carente de fundamento con métodos poco prácticos y difíciles de llevar a cabo durante la época en que fue datada la tablilla.

La propuesta de Robson sobre el uso de pares recíprocos para generar Plimpton 322 se basa en "La Técnica" de Sachs (1947), un método que expone cómo se podían generar recíprocos de hasta cuatro posiciones durante el Periodo Antiguo Babilónico. Con base en este método, concluye que "aunque no se conocen tablas de cuatro posiciones de recíprocos, un escriba de la Antigua Babilonia podía generar fácilmente pares de recíprocos regulares y ordenarlos" (Robson, 2001, p.194).

Años más tarde, Mansfield y Wildberger (2017) retomando las ideas de los autores anteriores y ampliando el trabajo de Proust (2011), combinan ambos métodos y proponen once pasos para reconstruir Plimpton 322 (pp.405-406).

Su método sugiere que los escribas utilizaron una tabla recíproca estándar para encontrar todos los pares recíprocos $(s, \overline{s})$ y $(r, \overline{r})$; después, utilizaron tablas de multiplicación de $\overline{s}$ para encontrar $r\overline{s}$ (donde r satisface tanto $s < r$ y $r\overline{s} <$ 2.24) y tablas de multiplicación de $\overline{r}$ para encontrar $s\overline{r}$.

Al eliminar todos los valores duplicados de la lista de valores $(r\overline{s}, \overline{r}s)$ se calcularon los valores de $\beta = \overline{2}(r\overline{s} - s\overline{r})$ y $\delta = \overline{2}(r\overline{s} + s\overline{r})$ hasta obtener $(\beta, \delta) = (45, 1.15)$. Posteriormente, al ordenar los valores (β, δ) en orden decreciente. Para cada valor de (β, δ) se utilizó el "algoritmo de la parte final" para encontrar b y d (los valores de *las Columnas II y III*).

En un estudio más reciente, Mansfield (2021) sugiere que para la generación de los valores de b y d, los escribas babilonios utilizaron el método de factorización de manera individual para cada columna (*Columna II* y *III*) hasta encontrar su primer factor regular. Siguiendo esta idea se reduce el número de errores detectados en la tablilla a únicamente cinco.[10]

En este orden de ideas, sugieren que la tablilla estaba originalmente compuesta por 6 columnas y 38 filas. Las dos columnas faltantes serían las correspondientes a los valores $\beta\ y\ \delta$, (Mansfield y Wildberger, 2017; Mansfield, 2021) no siendo necesaria una columna para el lado largo ya que "es regular por construcción" (Mansfield, 2021, p.1002).

Contexto de Significación

Plimpton 322 es una tabla de "triples diagonales" datada un milenio antes del nacimiento de Pitágoras. Una de sus características más relevantes es su precisión numérica, contrario a otras tablillas de su época que presentan aproximaciones.

Aunque los estudios alrededor de su propósito son especulativos puesto que el *texto* por sí mismo no proporciona una respuesta sobre su funcionalidad, se ha buscado interpretar su contenido recuperando elementos propios del contexto matemático babilónico.

Su posible vinculación con otros *textos* matemáticos de la misma época sugiere que Plimpton 322 es una muestra de que los babilonios desarrollaron su propia **prototrigonometría** para resolver problemas prácticos sobre la medición del suelo, no del

[10] Para más detalles consultar Mansfield (2021, p.991-993).

cielo, como fue el caso de los astrónomos griegos años después Mansfield (2021). En este orden de ideas, Plimpton 322 podría tratarse de un estudio teórico sobre rectángulos con lados regulares probablemente motivado por la medición práctica de terrenos.

Siguiendo esta idea, del estudio del contexto cultural y situacional de Plimpton 322 reconocemos que una problemática emergente en la cultura mesopotámica durante el Imperio Ur III fue la necesidad de construir y medir figuras exactas. Hacer mediciones exactas requería la construcción de planos precisos con figuras que tuvieran lados perpendiculares.

Ante esta necesidad y al no contar con una noción de ángulo medible, en un periodo posterior, los babilonios resolvieron este problema haciendo uso de la noción de triple diagonal **como herramienta de construcción**.

Análisis Textual: la Reconstrucción Pragmática de la Actividad Matemática

Para llevar a cabo el *Análisis Textual* se realizará una *reconstrucción pragmática* de la actividad matemática de cada una de las *unidades de análisis*. Para la reconstrucción matemática de Plimpton 322 utilizaremos los pasos propuestos por Mansfield y Wildberger (2017, p.407) adecuados con la propuesta de Mansfield (2021, pp.993-995) para la construcción de las *Columnas II y III*; en consecuencia, añadiremos dos unidades de análisis más –además de las cuatro señaladas en nuestro preanálisis– que denominaremos *Columna I´* y *Columna II´*.

Aunque estas columnas no se encuentran físicamente en Plimpton 322, seguimos la idea de Mansfield y Wildberger (2017) y Mansfield (2021) al suponer que sí estaban ahí y podrían ser las columnas faltantes, ambas ubicadas a la izquierda de las columnas originales.

A continuación, mostramos el análisis de la actividad matemática de Plimpton 322 –en sus dos fases: descriptiva y cualitativa– empleando el instrumento de análisis para el análisis textual (Tabla 1).

La reconstrucción completa con las tablas generadas o utilizadas para sus cálculos se puede consultar en el Anexo 1.

Columna I′: El lado corto o base ($\boldsymbol{\beta}$) de un triple diagonal normalizado ($\boldsymbol{\beta}, \mathbf{1}, \boldsymbol{\delta}$)

Paso 1. Recorre todas las entradas de una tabla recíproca estándar, (empezando por el primer par recíproco $(\mathbf{s}, \overline{\mathbf{s}}) = (\mathbf{2}, \mathbf{30})$.

Paso 2. Para cada valor de $\boldsymbol{s}$, consulta la tabla de multiplicación de $\overline{\boldsymbol{s}}$ para encontrar $\boldsymbol{r}\overline{\boldsymbol{s}}$, donde $\boldsymbol{r}$ satisface: $\boldsymbol{r} > \boldsymbol{s}$ y $\mathbf{1} < \boldsymbol{r}\overline{\boldsymbol{s}} < \mathbf{2.24}$.

Paso 3. Para cada valor de $\boldsymbol{r}$, busca $\overline{\boldsymbol{r}}$ en la tabla recíproca estándar y encuentra $\boldsymbol{s}\overline{\boldsymbol{r}}$ en la tabla de multiplicar apropiada.

Paso 4. Elimina cualquier duplicación en la lista de valores $(\boldsymbol{r}\overline{\boldsymbol{s}}, \boldsymbol{s}\overline{\boldsymbol{r}})$.

Paso 5. Calcula los valores para $\boldsymbol{\beta}$ usando: $\boldsymbol{\beta} = \overline{\mathbf{2}}(\boldsymbol{r}\overline{\boldsymbol{s}} - \boldsymbol{s}\overline{\boldsymbol{r}})$.

Paso 6. Ordena los valores de $\boldsymbol{\beta}$ en orden decreciente.

Tabla 8

Análisis textual de la Columna I´

Primer nivel de análisis			
Unidad de análisis	**Paso**	**Acciones**	
		¿Qué hizo?	**¿Cómo lo hizo?**
Columna I´: *El lado corto o base* (β) *de un triple diagonal normalizado* $(\beta, 1, \delta)$.	1.	Identificar todos los posibles pares recíprocos $(s, \bar{s})$ de los números regulares del 2 hasta el 2.05.	Recorriendo todas las entradas de una tabla recíproca estándar para todos los números regulares desde 2 hasta 2.05.
	2.	Identificar $r\bar{s}$ en la tabla de multiplicar apropiada.	Buscando en la tabla de multiplicar de $\bar{s}$ todos los productos de $r\bar{s}$ que satisfacen: $r > s$ $1 < r\bar{s} < 2.24$
	3.	Encontrar $s\bar{r}$ en la tabla de multiplicar apropiada.	Buscando en la tabla de multiplicación de $\bar{r}$ todos los productos de $s\bar{r}$.
	4.	Eliminar cualquier duplicación en la lista de valores $(r\bar{s}, s\bar{r})$.	Identificando y descartando los valores que se repiten en la lista $(r\bar{s}, s\bar{r})$.
	5.	Calcular los valores del lado corto de un triple diagonal normalizado.	Utilizando $\beta = \bar{2}\,(r\bar{s} - s\bar{r})$.
	6.	Organizar los valores de β en orden decreciente.	Comparando y reorganizando los valores obtenidos para β de forma iterada hasta que la lista esté ordenada del mayor al menor valor.
	Actividades		
	¿Para qué lo hizo?		
	Calcular el valor del lado corto de 38 triples diagonales normalizados.		

Columna II´: La diagonal $(\boldsymbol{\delta})$ ***de un triple diagonal normalizado*** $(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{1}, \boldsymbol{\delta})$

Paso 7. Calcula los valores para la diagonal del triple diagonal normalizado usando: $\boldsymbol{\delta} = \overline{\mathbf{2}}(\boldsymbol{r\overline{s}} + \boldsymbol{s\overline{r}})$.

Paso 8. Organiza los valores de $\boldsymbol{\delta}$ en orden decreciente.

Tabla 9
Análisis textual de la Columna II´

Primer nivel de análisis			
Unidad de análisis	**Paso**	**Acciones**	
		¿Qué hizo?	**¿Cómo lo hizo?**
Columna II´: *La diagonal* (δ) *de un triple diagonal normalizado* $(\beta, 1, \delta)$.	7.	**Calcular** los valores de las diagonales de un triple diagonal normalizado.	Utilizando $\delta = \overline{2}(r\overline{s} + s\overline{r})$.
	8.	**Organizar** los valores de δ en orden decreciente.	Comparando y reorganizando los valores obtenidos para δ de forma iterada hasta que la lista esté ordenada del mayor al menor valor.
	Actividades		
	¿Para qué lo hizo?		
	Calcular el valor de la diagonal de 38 triples diagonales normalizados.		

Segundo nivel de análisis

Una característica particular de las matemáticas mesopotámicas es que se basan en listas (Proust, 2015), construidas y utilizadas para la resolución de problemas prácticos. Algunas de estas tablas son consideradas piezas canon que eran memorizadas por los escribas durante su entrenamiento, por ejemplo, la tabla combinada que "consiste en la tabla estándar de recíprocos seguida de una selección homogénea de unas cuarenta tablas de multiplicar" (Mansfield, 2021, p.981).

Para la construcción de estas primeras dos columnas *(Columna I´ y Columna II´)* inferimos que el escriba usó este tipo de tablas para identificar valores que le permitieran **calcular** los lados cortos (β) y diagonales (δ) de 38 triples diagonales normalizados $(\beta, 1, \delta)$, puesto que tenía conocimiento sobre cómo se relacionaban estas medidas y cómo calcularlas.

Columna I: “El cuadrado de la diagonal. Resta 1 y luego sale el cuadrado del lado corto”

Paso 9. Calcula el cuadrado de la diagonal ($\boldsymbol{\delta^2}$) o $\boldsymbol{\beta^2 + 1}$ para cada par $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\delta})$.

Tabla 10
Análisis textual de la Columna I

<table>
<tr><th colspan="4">Primer nivel de análisis</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Unidad de análisis</th><th rowspan="2">Paso</th><th colspan="2">Acciones</th></tr>
<tr><th>¿Qué hizo?</th><th>¿Cómo lo hizo?</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Columna I: “El cuadrado de la diagonal. Resta 1 y luego sale el cuadrado del lado corto”.</td><td>9.</td><td>Calcular $\boldsymbol{\delta^2}$ para cada par (β, δ).</td><td>Elevando cada valor de δ al cuadrado de forma iterada.</td></tr>
<tr><th colspan="3">Actividades</th></tr>
<tr><th colspan="3">¿Para qué lo hizo?</th></tr>
<tr><td colspan="3">Dar sentido a β y δ verificando que satisfacen la relación de triple diagonal $\delta^2 - 1 = \beta^2$ y especificar que la tabla es de triples regulares genuinos y no simplemente rectángulos.</td></tr>
</table>

Segundo nivel de análisis

Robson (2001) argumenta que cualquier teoría sobre la generación del contenido matemático de Plimpton 322 debe respetar el orden tabular utilizado generalmente en las tablas matemáticas de la Antigua Babilonia: “[…] todas las tablas numéricas, […], se ordenan de arriba abajo, y de izquierda a derecha, y se clasifican en orden numérico ascendente o descendente por el contenido de la primera columna, es decir, la más a la izquierda" (p.176). Así, el método universal para ordenar las tablas numéricas en la Antigua Babilonia explica el hecho de que la *Columna I* esté ordenada desde su valor mayor hasta su valor menor, mientras que las *Columnas II* y *III* no lo están (Robson, 2001).

Para la construcción de esta columna *(Columna I),* inferimos que el escriba **eleva al cuadrado** los valores de la diagonal de 38 triples diagonales normalizados. Por otro lado, la inclusión de la *Columna I* para los valores de δ^2 puede ser causa de la necesidad de especificar que la tabla es de triples regulares genuinos y no simplemente rectángulos (Mansfield, 2021 y Britton et al. 2011).

Columna II: El "íb-si del lado corto"

Paso 10. Factoriza los valores de $\boldsymbol{\beta}$.

Tabla 11
Análisis textual de la Columna II

Primer nivel de análisis			
Unidad de análisis	**Paso**	**Acciones**	
		¿Qué hizo?	**¿Cómo lo hizo?**
***Columna II:** "Los íb-si del lado corto"*	10.	Factorizar los valores de β.	Multiplicando β por el recíproco de sus últimos dos dígitos de forma repetida hasta encontrar su primer factor regular.
	Actividades		
	¿Para qué lo hizo?		
	Reducir el valor del lado corto (β) y encontrar b.		

Columna III: El "íb-si de la diagonal"

Paso 11. Factoriza los valores de $\boldsymbol{\delta}$.

Tabla 12
Análisis textual de la Columna III

<table>
<tr><th colspan="4">Primer nivel de análisis</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Unidad de análisis</th><th rowspan="2">Paso</th><th colspan="2">Acciones</th></tr>
<tr><th>¿Qué hizo?</th><th>¿Cómo lo hizo?</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Columna III: "Los Íb-si de la diagonal"</td><td>11.</td><td>Factorizar los valores de δ.</td><td>Multiplicando δ por el recíproco de su dígito menos significativo de forma repetida hasta encontrar su primer factor regular.</td></tr>
<tr><th colspan="3">Actividades</th></tr>
<tr><th colspan="3">¿Para qué lo hizo?</th></tr>
<tr><td colspan="3">Reducir el valor de la diagonal (δ) y encontrar d.</td></tr>
</table>

Segundo nivel de análisis

Los escribas babilónicos utilizaban la factorización como un medio para simplificar un problema a través de la identificación y eliminación repetida de factores. El proceso de factorización consistía identificar el dígito menos significativo y multiplicarlo por su recíproco y repetir el proceso iterativamente hasta encontrar valores pequeños que pudieran ser calculados mediante tablas estándar (Mansfield, 2021).

En Plimpton 322, la **reducción** de los números para β y δ se realizaba de forma individual, hasta encontrar su primer factor regular (Mansfield, 2021). En este orden de ideas la intención de colocar los valores reducidos de β y δ en las *Columnas III* y *IV* podría ser mostrar que son valores regulares y por tanto pueden escalarse a longitudes arbitrarias o buscar ser reducidos para simplificar su valor y poder resolver el problema mediante tablas estándar.

Columna IV: "Fila"

Paso 12. Enumera las filas.

Tabla 13

Análisis textual de la Columna IV

<table>
<tr><th colspan="4">Primer nivel de análisis</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Unidad de análisis</th><th rowspan="2">Paso</th><th colspan="2">Acciones</th></tr>
<tr><th>¿Qué hizo?</th><th>¿Cómo lo hizo?</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Columna IV: "Fila"</td><td>12.</td><td>Enumerar las filas.</td><td>Anotando en cada fila su número correspondiente.</td></tr>
<tr><th colspan="3">Actividades</th></tr>
<tr><th colspan="3">¿Para qué lo hizo?</th></tr>
<tr><td colspan="3">Organizar la información obtenida de manera que permita identificar o clasificar los rectángulos.</td></tr>
</table>

Segundo nivel de análisis

La numeración de las filas es una tradición babilónica asociada a indicar el número de la fila (Robson, 2001) facilitando la lectura e interpretación del contenido de la tablilla.

Enumerar las filas en Plimpton 322 permitiría **organizar** los grupos de valores de cada triple diagonal.

La Reconstrucción Completa de Plimpton 322

Paso 13. Registra los valores de $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\delta^2}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}$ y número de fila en la columna que correspondan.

Tabla 14

Reconstrucción completa de Plimpton 322

Columna I′	*Columna II′*	*Columna I*	*Columna II*	*Columna III*	*Columna IV*
$(\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{Lado\ corto}$	$(\boldsymbol{\delta})\boldsymbol{Diagonal}$	$(\boldsymbol{\delta^2})\boldsymbol{Diagonal\ cuadrada}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{d}$	$\boldsymbol{Fila}$
59.30	1.24.30	1.59.00.15	1.59	2.49	1
58.27.17.30	1.23.46.02.30	1.56.56.58.14.50.06.15	56.07	3.13	2
57.30.45	1.23.06.45	1.55.07.41.15.33.45	1.16.41	1.50.49	3
56.29.04	1.22.24.16	1.53.10.29.32.52.16	3.31.49	5.09.01	4
54.10	1.20.50	1.48.54.01.40	1.05	1.37	5
53.10	1.20.10	1.47.06.41.40	5.19	8.01	6
50.54.40	1.18.41.20	1.43.11.56.28.26.40	38.11	59.01	7
49.56.15	1.18.03.45	1.41.33.45.14.03.45	13.19	20.49	8
48.06.00	1.16.54	1.38.33.36.36	8.01	12.49	9
45.56.06.40	1.15.33.53.20	1.35.10.02.28.27.24.26.40	1.22.41	2.16.01	10
45	1.15	1.33.45	45	1.15	11
41.58.30	1.13.13.30	1.29.21.54.02.15	27.59	48.49	12
40.15	1.12.15	1.27.00.03.45	2.41	4.49	13
39.21.20	1.11.45.20	1.25.48.51.35.06.40	29.31	53.49	14
37.20	1.10.40	1.23.13.46.40	56	53	15
36.27.30	1.10.12.30	1.22.08.12.36.15	35	5.37	16
32.50.50	1.08.24.10	1.17.58.17.38.24.10	7.53	3.17	17
32	1.08	1.17.04	32	1.08	18
30.04.53.20	1.07.07.05.40	1.15.04.53.43.54.04.26.40	1.07.41	2.31.01	19
29.15	1.06.45	1.14.15.33.45	39	1.29	20
27.40.30	1.06.04.30	1.12.45.54.20.15	41	14.41	21
25	1.05	1.10.25	25	1.05	22
24.11.40	1.04.41.40	1.09.45.22.16.00.40	14.31	38.49	23
22.22	1.04.02	1.08.16.16.04	11.11	32.01	24
21.34.22.30	1.03.45.37.30	1.07.44.29.13.08.26.15	34.31	1.42.01	25
20.51.15	1.03.31.15	1.07.14.53.46.33.45	16.41	50.49	26
20.04	1.03.16	1.06.42.40.16	5.01	15.49	27
18.16.40	1.02.43.20	1.05.34.04.37.26.40	5.29	18.49	28
17.30	1.02.30	1.05.06.15.22.03.45	35	25	29
14.57.45	1.01.50.15	1.03.42.55	2.13	27.29	30
13.30	1.01.30	1.03.02.15	27	41	31
11	1.01	1.02.01	11	1.01	32
10.14.35	1.00.52.05	1.01.44.55.12.40.25	59	29.13	33
07.05	1.00.25	1.01.12.15	17	29	34
06.20	1.00.20	1.00.40.06.40	19	3.01	35
04.37.20	1.00.10.40	1.00.21.21.53.46.40	52	11.17	36
03.52.30	1.00.07.30	1.00.15.00.56.15	31	8.01	37
02.27	1.00.03	1.00.06.00.09	49	20.01	38

Esta sugerencia de reconstrucción completa (Tabla 14) requiere únicamente de métodos conocidos durante el Periodo Antiguo Babilónico. Además, respeta el requisito que señala Robson (2001) sobre el orden tabular de las tablillas matemáticas de la Antigua Babilonia, donde los valores de la *Columna I´* (Lado corto) se organizan en orden descendente sin afectar el orden de las columnas que aparecen originalmente en el *texto* (*Columna I, Columna II, Columna III y Columna IV*).

Por otro lado, siguiendo la idea de Mansfield (2021) sobre factorizar los valores de β y δ de forma individual hasta encontrar valores de b y d que mostraran su regularidad se reduce el número de errores identificados en Plimpton 322.[11]

De esta manera concluimos que, la construcción matemática de Plimpton 322 implicaba que el escriba usara tablas combinadas (tablas de multiplicar y tablas recíprocas) como herramientas aritméticas. Con ayuda de estas tablas, primero calculaba los valores de las longitudes de triples diagonales normalizados y después, mediante un proceso de factorización, reducía los valores de las medidas de longitud con el propósito, quizá, de que estas medidas reducidas sirvieran como herramienta para la construcción y medición de terrenos rectangulares.

[11] Más detalles sobre la reducción del número de errores se pueden consultar en Mansfield (2021, pp.991-993).

CAPÍTULO SEIS.

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

A la luz del análisis de los datos, en este capítulo presentamos los resultados del estudio en tres secciones. Primero, respondemos la pregunta de investigación que ha sido eje central del presente trabajo. Posteriormente, como resultado de la última etapa de la ruta metodológica empleada, conjeturamos una *hipótesis epistemológica*. Por último, con la finalidad de robustecer nuestros resultados de investigación, realizamos una revisión del tratamiento del Teorema de Pitágoras en algunos Libros de Texto.

Respuesta a la Pregunta de Investigación

En este proyecto nos propusimos responder la pregunta *¿qué prácticas anteceden y acompañan la construcción matemática de Plimpton 322?* Al concebir a Plimpton 322 como un estudio prototrigonométrico, —desde el enfoque teórico que elegimos— reconocemos que todas las prácticas (de naturaleza matemática) que identificamos en la construcción de la tablilla **preceden a la trigonometría**. No obstante, para responder a la pregunta de investigación, distinguimos las prácticas que **anteceden** a Plimpton 322 —aquellas propias de la época en que fue construida— y las prácticas que **acompañan** a Plimpton 322 —aquellas que refieren propiamente a su construcción matemática—.

Las Prácticas que Acompañan y Anteceden la Construcción Matemática de Plimpton 322

A partir del análisis de los cuestionamientos ¿qué hizo?, ¿cómo lo hizo? y ¿para qué lo hizo? realizados a cada una de las unidades de análisis de Plimpton 322, reportamos tres *prácticas* en el nivel de *actividades* que acompañan su construcción matemática: *calcular*, *reducir* y *organizar*. Cada una de estas *actividades* organizan un conjunto de *acciones* que –a través de la reconstrucción–, inferimos, llevó a cabo el escriba.

Como se muestra en la Tabla 15, las *actividades* **calcular** y **reducir** se conforman de *acciones* que conllevan un quehacer aritmético. Estas *prácticas* provienen de una tradición babilónica antes mencionada relativa al uso de listas matemáticas para la simplificación de problemas numéricos grandes a problemas más pequeños que pudieran resolverse de manera simple a través del uso de tablas estándar que implicaban cálculos aritméticos básicos.

Por su parte, la *actividad* **organizar** es una *práctica* que muestra la relación que hay entre los datos en las Columnas. Esta organización a su vez antecede a *prácticas* mesopotámicas anteriores como *listar* tablas matemáticas.

Tabla 15

Las prácticas que acompañan y anteceden la construcción matemática de Plimpton 322

ACTIVIDADES	ACCIONES
Calcular las diagonales y lados cortos de 38 triples diagonales normalizados.	**Identificar** todos los pares $(s, \bar{s})$ en tablas recíprocas. **Identificar** $r\bar{s}$ y $s\bar{r}$ en tablas de multiplicación. **Eliminar** valores repetidos de la lista de valores $(r\bar{s}, s\bar{r})$. **Utilizar** $\beta = \bar{2}\ (r\bar{s} - s\bar{r})$ y $\delta\ =\ \bar{2}(r\bar{s} + s\bar{r})$.
Calcular el cuadrado de la diagonal.	**Elevar al cuadrado** cada valor de δ.
Reducir las diagonales y lados cortos de 38 triples diagonales normalizados.	**Factorizar** las diagonales y lados cortos de manera individual multiplicando cada valor por el recíproco de su dígito menos significativo. **Iterar** el proceso hasta que el valor sea lo suficientemente pequeño.
Organizar las filas.	**Enumerar** las filas con valores del 1 al 38.

Por otro lado, aunque es clara la ausencia de la **medida angular** en el contexto babilónico, identificamos que en la construcción matemática de Plimpton 322 sí hay un quehacer geométrico y aritmético en torno al análisis de la relación y variación de las medidas del triángulo, donde el **triángulo rectángulo se usa como herramienta para modelar o construir modelos de situaciones en las que se necesita medir**.

En consecuencia, aunque reconocemos que al variar las medidas de longitud también hay una variación implícita del ángulo, a partir de nuestro estudio de corte histórico-epistemológico identificamos que en un escenario de construcción de significado prototrigonométrico no es necesario trabajar con la noción de ángulo, sino hasta una fase posterior donde se aborde la razón trigonométrica.

Interpretación e Inferencia del Análisis de Plimpton 322

Como producto del *contexto situacional* reconocemos que Plimpton 322 es una tablilla matemática datada en el Periodo Antiguo Babilónico que contiene una serie de relaciones numéricas sobre triples diagonales.

Debido a la tradición mesopotámica de construir y utilizar tablillas matemáticas para resolver problemas cotidianos vinculados a la administración y contabilidad de recursos, así como tareas relacionadas con la agricultura y construcción, consideramos que la intención principal del escriba al construir Plimpton 322 podría tener como finalidad resolver un problema práctico de la época.

Siguiendo estas ideas y considerando su *contexto cultural*, identificamos que a finales del *Imperio Ur III* los babilonios se encontraron con el obstáculo de construir figuras geométricas exactas para la medición práctica de terrenos que permitiera la división catastral precisa; producto de esta problemática surge la necesidad de trazar líneas perpendiculares sin contar con una noción de ángulo medible.

Para atender dicha problemática, los escribas del *Periodo Antiguo Babilónico* pusieron en funcionamiento la noción de triple diagonal como herramienta de construcción para trazar rectángulos con lados exactos y líneas perpendiculares. Esta herramienta además de permitirles construir figuras con lados perpendiculares les permitiría escalar o variar las medidas de los lados; de manera geométrica probablemente extendiendo los lados perpendiculares –del triple diagonal– (Figura 11), o a través de *prácticas aritméticas* reduciendo los valores de sus lados por medio de un proceso de factorización –como fue el caso de Plimpton 322–.

Con base en lo expuesto, y considerando el uso del triángulo rectángulo desde su función como herramienta en el contexto babilónico, postulamos como hipótesis epistemológica al *estudio de las relaciones y variaciones de las medidas de los lados del triángulo rectángulo como base de significación para el desarrollo posterior de la razón trigonométrica,* donde se estudia la relación lado-ángulo de un triángulo rectángulo.

Revisión de Libros de Texto

Con el objetivo de robustecer los resultados de investigación, pondremos en funcionamiento nuestra *hipótesis epistemológica* como lente para hacer una revisión de algunos Libros de Texto del sistema educativo mexicano de nivel básico-secundaria donde se presentan por primera vez las razones trigonométricas; en particular, pondremos atención en los momentos previos cuando se aborda el Teorema de Pitágoras, identificado en el análisis de Plimpton 322 y reconocido por la comunidad como el precedente inmediato de **la regla de la diagonal**.

La revisión abarcará ocho libros de tercero de secundaria enmarcados en el plan y programa de estudio de Matemáticas para la Educación Básica en México del 2017 y el nuevo libro propuesto por la Secretaría de Educación Pública (SEP) de acuerdo con el plan y programa de estudio de Matemáticas para la Educación Básica del 2022; todos disponibles en su versión digital en la página de los Libros de Texto SEP y la Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos (Conaliteg) (2024).

En la Tabla 16 describimos los nueve libros de texto seleccionados. En la primera columna colocamos su nombre; en la segunda, su editorial; en la tercera, sus autoras/es; en la cuarta, su serie; en la quinta, el año de edición; en la sexta columna el bloque, trimestre o unidad en que se ubica el contenido sobre el Teorema de Pitágoras y, por último, en la séptima columna el plan de estudios en el que se enmarca.

Tabla 16
Descripción general de los Libros de Texto

Editorial	Nombre y serie	Autor (as/es)	Año de edición	Bloque, Trimestre, Unidad o Módulo	Plan
Santillana	Matemáticas 3. *Espacios Creativos*	Riva y Santana	2021	Trimestre 2	2017
Santillana	Matemáticas 3. *Fortaleza académica*	Trigueros, Sandoval, Lozano, Cortés, Jinich y Schulmaister	2021	Bloque 2	2017
Santillana	Matemáticas 3. *Espiral del saber*	Carrasco y Marván	2021	Trimestre 1	2017
Castillo	Matemáticas 3. *Infinita Secundaria*	Bosch y Meda	2021	Unidad 3	2017
Castillo	Matemáticas 3. *Travesías*	Medel, García y Gómez	2021	Bloque 2	2017
Castillo	Matemáticas 3. *Sin fronteras*	Calderón	2021	Bloque 2	2017
SM	Matemáticas 3. *Conecta más*	Balbuena, Block, García, García, Mendoza	2021	Bloque 2	2017
Correo del maestro	Matemáticas 3	García, Enríquez y Cañas	2021	Módulo 3	2017
SEP	Pensamiento científico. *Colección Nanahatzin*	SEP	2023a	N/A	2022
SEP	Nuestro libro de proyectos. *Colección Nanahatzin*	SEP	2023b	N/A	2022

La revisión será de naturaleza descriptiva y se presentará en dos apartados: un primer apartado que contextualiza y sitúa el tema del Teorema de Pitágoras en el sistema educativo mexicano de nivel secundaria en los planes del 2017 y 2022; un segundo apartado dedicado a la descripción de las tareas que se presentan en los libros de texto relacionadas con el Teorema de Pitágoras.

Programa de Estudios de Matemáticas para la Educación Básica

Plan del 2017. En este programa los contenidos de la asignatura Matemáticas se organizan en tres ejes temáticos: *Número, álgebra y variación; Forma, espacio y medida;* y *Análisis de datos*. Cada uno de los ejes temáticos se desglosan en temas y estos a su vez en aprendizajes esperados que varían según el año escolar. Los temas se ordenan en bloques, unidades o trimestres según el grado y el libro en que se aborden.

En particular, para nuestra revisión consideramos el eje *Forma, espacio y medida*, donde se ubica el aprendizaje esperado relacionado con la enseñanza del Teorema de Pitágoras (Tabla 17), ubicado en el segundo bloque o trimestre.

Tabla 17
Aprendizajes esperados Matemáticas Tercer Grado. Eje forma, espacio y medida. Programa de Matemáticas para la Educación Básica Secundaria.

Matemáticas. Secundaria. 3°		
Ejes	**Temas**	**Aprendizajes esperados**
Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos geométricos	• Construye polígonos semejantes. Determina y usa criterios de semejanza de triángulos. • Resuelve problemas utilizando las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
	Magnitudes y medidas	• Formula, justifica y usa el teorema de Pitágoras.

Nota. Adaptado de *Aprendizajes clave para la educación integral. Plan y programas de estudio para la educación básica* (p.324), por SEP, 2017.

Plan del 2022. Este programa de estudios se conforma por cuatro campos formativos: *Lenguajes; Ética, Naturaleza y Sociedad; Saberes y Pensamiento Científico* y; *De lo Humano y lo Comunitario.* Cada uno de estos campos formativos se separan en asignaturas.

Su propuesta es el trabajo por proyectos a partir de temas que pudieran ser cercanos y de interés para el alumnado. Así, lo relativo al estudio de las Matemáticas debe identificarse en *"Nuestro libro de proyectos"* y el libro *"Saberes y Pensamiento Científico".* De acuerdo con esta propuesta, el primero norma el trabajo en el aula mientras que el segundo funciona como apoyo para la consulta o profundización de los contenidos.

En específico, los contenidos del campo formativo *Saberes y Pensamiento Científico* de tercer año de secundaria están segmentados por las asignaturas *Matemáticas y Química.* En cuanto a la estructura en la asignatura de Matemáticas, los temas no se organizan por bloques ni se presentan secuencias de tareas, aparecen en formas de definiciones y algunos de ellos se acompañan de ejemplos y procedimientos para su resolución matemática.

El Teorema de Pitágoras en los Libros de Texto

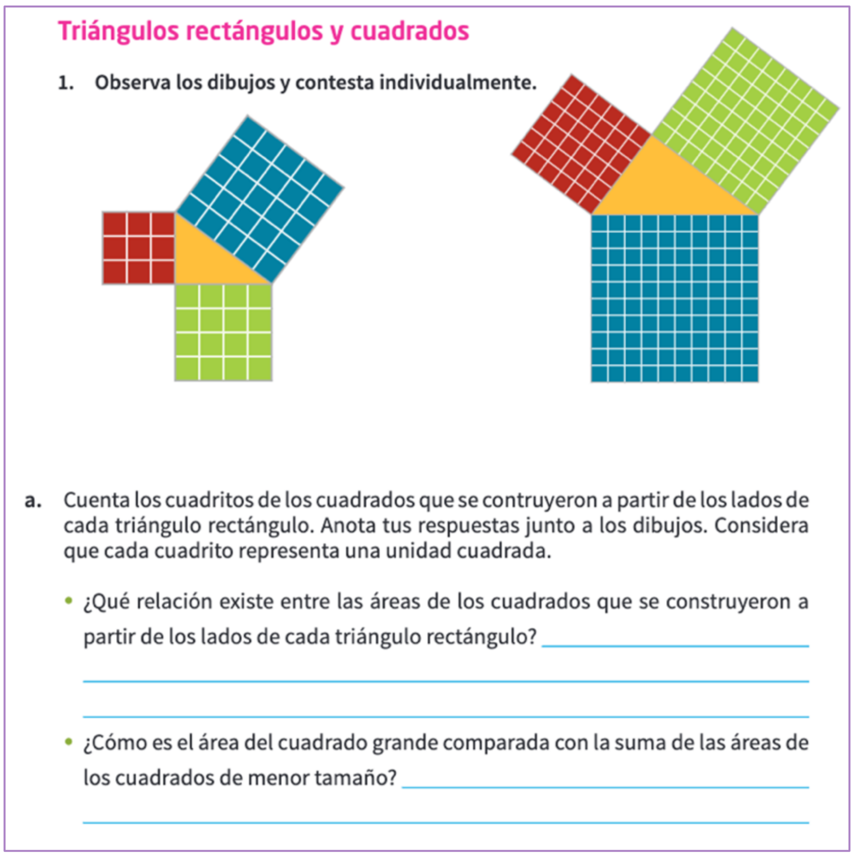
Conforme el Plan y programa de estudios 2017. Identificamos y describimos la organización del contenido en tres momentos: *de formulación, de justificación* y *de aplicación* del Teorema de Pitágoras.

El primer momento, de formulación, implica que primero se mida o cuenten las unidades del área de los cuadrados que se forman en los lados de un triángulo rectángulo

(Figura 16) o en algunos libros, que primero se construya la figura a escala y después se calculen las áreas (Figura 17) (Bosch y Meda, 2021; Balbuena et al., 2021).

Estas tareas tienen como finalidad que después, a través de la comparación se *formule* la expresión algebraica que representa la relación de las áreas de los cuadrados que se forman en los lados de un triángulo rectángulo (ver figura 15, segundo punto del inciso a).

Figura 16
Tarea de formulación 1



Triángulos rectángulos y cuadrados

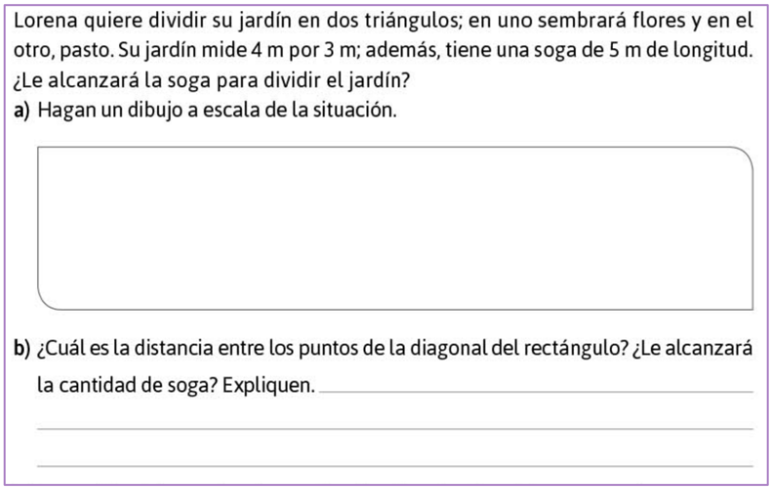
1. **Observa los dibujos y contesta individualmente.**

a. Cuenta los cuadritos de los cuadrados que se contruyeron a partir de los lados de cada triángulo rectángulo. Anota tus respuestas junto a los dibujos. Considera que cada cuadrito representa una unidad cuadrada.

- ¿Qué relación existe entre las áreas de los cuadrados que se construyeron a partir de los lados de cada triángulo rectángulo? ______________________
- ¿Cómo es el área del cuadrado grande comparada con la suma de las áreas de los cuadrados de menor tamaño? ______________________

Nota. Tomado de *Matemáticas 3. Fortaleza Académica*(pp.162-163), por M. Trigueros et al., 2021, Editorial Santillana.

Figura 17
Tarea de formulación 2



Lorena quiere dividir su jardín en dos triángulos; en uno sembrará flores y en el otro, pasto. Su jardín mide 4 m por 3 m; además, tiene una soga de 5 m de longitud. ¿Le alcanzará la soga para dividir el jardín?

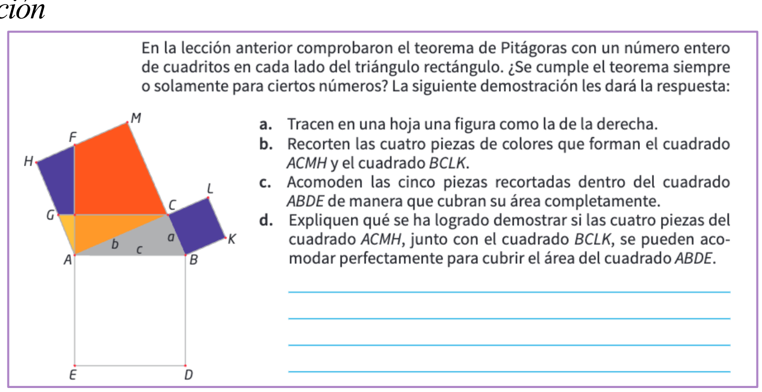
a) Hagan un dibujo a escala de la situación.

b) ¿Cuál es la distancia entre los puntos de la diagonal del rectángulo? ¿Le alcanzará la cantidad de soga? Expliquen.

Nota. Tomado de *Matemáticas 3. Infinita Secundaria* (p.214), de C. Bosch y A. Meda, 2021, Ediciones Castillo.

En un segundo momento, de justificación, se pretende que se demuestre que la relación formulada en el momento anterior se cumple siempre para todos los triángulos rectángulos (Figura 18). Para ello se plantea que se estudie y relacionen las áreas de diferentes figuras que se forman con los lados de diferentes triángulos rectángulos.

Figura 18
Tarea de justificación



En la lección anterior comprobaron el teorema de Pitágoras con un número entero de cuadritos en cada lado del triángulo rectángulo. ¿Se cumple el teorema siempre o solamente para ciertos números? La siguiente demostración les dará la respuesta:

a. Tracen en una hoja una figura como la de la derecha.
b. Recorten las cuatro piezas de colores que forman el cuadrado *ACMH* y el cuadrado *BCLK*.
c. Acomoden las cinco piezas recortadas dentro del cuadrado *ABDE* de manera que cubran su área completamente.
d. Expliquen qué se ha logrado demostrar si las cuatro piezas del cuadrado *ACMH*, junto con el cuadrado *BCLK*, se pueden acomodar perfectamente para cubrir el área del cuadrado *ABDE*.

Nota. Tomado de *Matemáticas 3. Fortaleza Académica* (p.164), por M. Trigueros et al., 2021, Editorial Santillana.

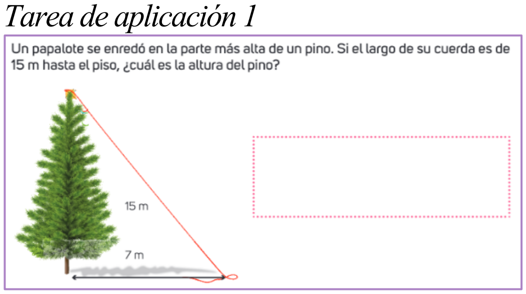
Por último, el tercer momento consta de tareas de aplicación del Teorema de Pitágoras. En este momento identificamos tareas dedicadas al cálculo de los valores de alguno de los lados (catetos, hipotenusa o diagonal) o la altura de un triángulo rectángulo.

De esta categoría de tarea identificamos dos tipos: aquellas que incluyen un problema relacionado con situaciones de la vida cotidiana (Bosch y Meda, 2021; Medel et al., 2021; Riva y Santana, 2021; Trigueros et al., 2021; Calderón, 2021) y aquellas donde solo aparece la figura geométrica, sin contexto (Riva y Santana*,* 2021; Carrasco y Marván, 2021).

Del primer tipo (Figuras 18 y 19) observamos que en los problemas se dibuja el triángulo rectángulo encima de la ilustración referente al problema a resolver y en la redacción del problema e incluso en la misma ilustración, se dan las medidas necesarias para operar en la fórmula; así, a través de despejes algebraicos y cálculos aritméticos se busca que se encuentre el valor faltante.

Figura 19

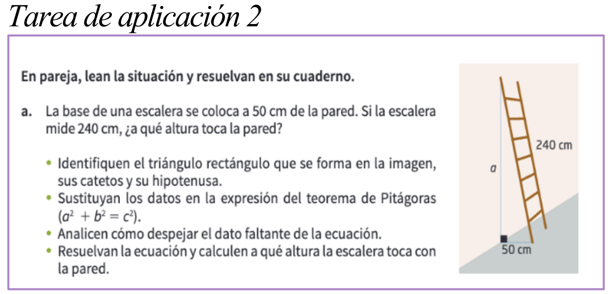
Tarea de aplicación 1



Nota. Tomada de *Matemáticas 3. Espacios Creativos* (p.165), por M. Riva y Santana, 2021, Editorial Santillana.

Figura 20

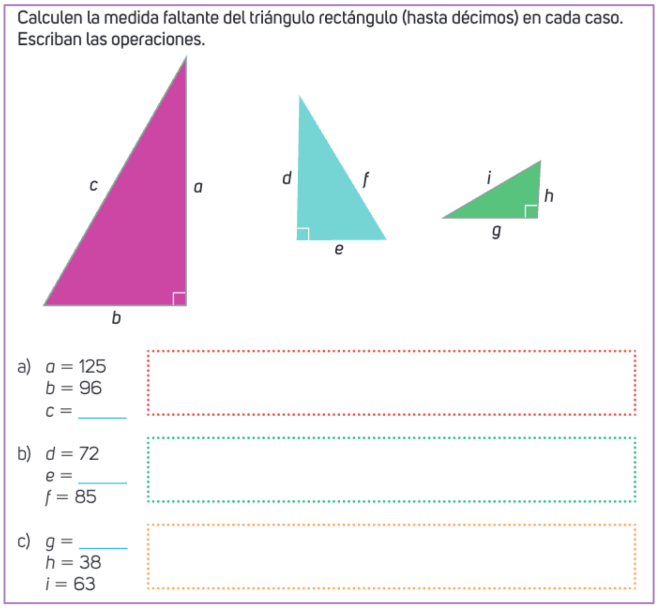
Tarea de aplicación 2



Nota. Tomado de *Matemáticas 3. Fortaleza Académica* (p.169), por M. Trigueros et al., 2021, Editorial Santillana.

Por otro lado, en las tareas asociadas al segundo tipo (Figura 21) observamos que se da la imagen del triángulo rectángulo y dos de las medidas de sus lados, para que así, a través de los cálculos aritméticos se encuentre el valor del tercer lado.

Figura 21
Tarea de aplicación 3



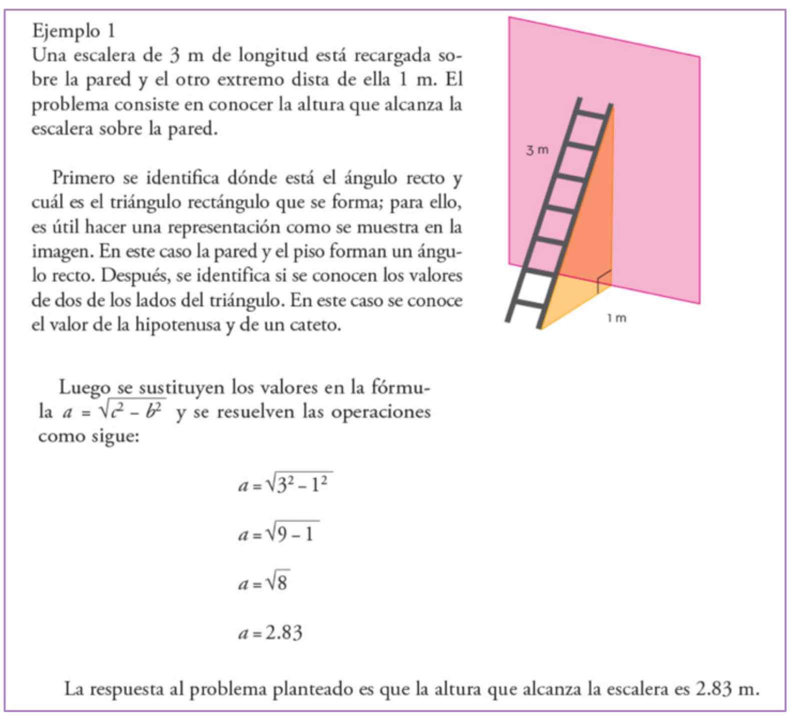
Nota. Tomado de *Matemáticas 3. Espacios Creativos* (p.164), por M. Riva y Santana, 2021, Editorial Santillana.

Conforme el Plan y programa de estudios 2022. Identificamos que el Teorema de Pitágoras en el libro *Pensamiento Científico* no contiene tareas para que la o el estudiante trabaje. Aunque sigue la misma secuencia que los libros de texto conforme el plan de 2017: *formular, justificar y usar el Teorema de Pitágoras al resolver problemas*, se aborda de forma distinta.

Primero enuncia la formulación y demostración algebraica y geométrica de la relación de las áreas de un triángulo rectángulo a través de la definición del teorema y señalando algunos datos del contexto histórico en que se enmarca. Después, en la sección de resolución de problemas que implican el uso del Teorema de Pitágoras únicamente se plantean dos ejemplos donde se emplea la fórmula para resolver tareas que implican el cálculo de distancias. El primero de ellos relacionado con el cálculo del valor de un cateto y el segundo para el valor de la hipotenusa.

Como se observa en la Figura 22, el ejemplo cuenta con la narración del problema con los valores de las medidas; la imagen que representa el problema con el triángulo rectángulo resaltado; una explicación de los pasos a seguir para resolverlo y; por último, su resolución matemática.

Figura 22
Ejemplo de aplicación del Teorema de Pitágoras


Ejemplo 1
Una escalera de 3 m de longitud está recargada sobre la pared y el otro extremo dista de ella 1 m. El problema consiste en conocer la altura que alcanza la escalera sobre la pared.

Primero se identifica dónde está el ángulo recto y cuál es el triángulo rectángulo que se forma; para ello, es útil hacer una representación como se muestra en la imagen. En este caso la pared y el piso forman un ángulo recto. Después, se identifica si se conocen los valores de dos de los lados del triángulo. En este caso se conoce el valor de la hipotenusa y de un cateto.

Luego se sustituyen los valores en la fórmula $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ y se resuelven las operaciones como sigue:

$$a = \sqrt{3^2 - 1^2}$$

$$a = \sqrt{9 - 1}$$

$$a = \sqrt{8}$$

$$a = 2.83$$

La respuesta al problema planteado es que la altura que alcanza la escalera es 2.83 m.

Nota. Tomado *de Saberes y Pensamiento Científico* (p.61), por Secretaría de Educación Pública, 2023, SEP.

En cuanto a *Nuestro Libro de Proyectos*, no identificamos una propuesta de proyecto para abordar el Teorema de Pitágoras. Al no contar con ejercicios de aplicación o propuestas de proyectos en los Libros de Texto, los docentes son libres de implementar tareas de acuerdo con el contexto de los estudiantes.

Reflexiones Finales

El análisis del proceder matemático que inferimos llevó a cabo el escriba para construir Plimpton 322 nos permitió reconocer las *prácticas* que anteceden y acompañan su construcción matemática y que están permeadas por la racionalidad que imperaba en la época. Así pues, nuestro estudio de corte histórico nos permitió identificar que el uso del triángulo rectángulo desde su función como herramienta es base de significación de la razón trigonométrica.

Derivado de lo anterior, con la intención de robustecer nuestros resultados nos interesamos en hacer una revisión de los libros de matemáticas de tercer año de secundaria. En esta revisión identificamos tres aspectos que destacan en las tareas planteadas en los Libros de Texto: las tareas se plantean en su mayoría en el contexto del triángulo proporcionando el triángulo rectángulo para representar la situación; las tareas no demandan la construcción de modelos; y, por último, las secuencias de tareas dan muchos ejemplos con casos distintos donde la actividad matemática está centrada en operar con la fórmula para calcular el valor faltante de alguna de las medidas del triángulo rectángulo.

En consecuencia, a la luz de la *hipótesis epistemológica* propuesta anteriormente y con base en la revisión de los libros de matemáticas de tercer año de secundaria, concluimos que para tener un escenario de construcción de significados que sean base de (o articulación con) la razón trigonométrica, además de las tareas identificadas en los momentos de *formulación, justificación y aplicación* del Teorema de Pitágoras, sería necesario integrar tareas que demanden el uso del triángulo rectángulo como herramienta de construcción de modelos que representen situaciones en las que se necesite medir. Sumado a ello, también consideramos la incorporación de tareas que además de calcular o medir el valor de los lados del triángulo rectángulo, impliquen variar sus medidas de longitud.

A partir de lo expuesto, como producto de la revisión robustecemos nuestra *hipótesis epistemológica* postulada anteriormente planteando que *"el uso del triángulo rectángulo como herramienta de construcción de modelos aunado al cálculo y estudio de las relaciones y variaciones de sus medidas de longitud permite construir una base de significación para el desarrollo posterior de la razón trigonométrica".*

CAPÍTULO SIETE.

PROSPECTIVAS

Este proyecto se propuso problematizar la razón como base de significado trigonométrico por medio de un estudio de corte histórico. Esto conllevó a realizar una revisión de literatura sobre las nociones trigonométricas con el propósito de plantear un problema de investigación. Dada nuestra pregunta y propósito de investigación, elegimos la *Teoría Socioepistemológica* como herramienta teórica-metodológica; además, dado nuestro tipo de estudio, objetivo y postura teórica tomada, la ruta metódica para llevar a cabo el análisis de los datos consistió en una configuración particular del análisis cualitativo de contenido basada en las metodologías que se han ido desarrollando en algunas investigaciones de corte histórico-epistemológico en la *Socioepistemología,* que nos permitiera identificar las prácticas (de naturaleza matemática) que preceden y acompañan a la tablilla babilónica Plimpton 322; mediante este método se determinó el objeto de estudio, se recolectaron, seleccionaron y analizaron nuestras fuentes de datos concluyendo en el planteamiento de una *hipótesis epistemológica*.

A continuación, derivado de las conclusiones y a manera de prospectivas exponemos las posibles direcciones para investigaciones futuras.

Con relación al tratamiento del Teorema de Pitágoras en los Libros de Texto revisados, nos parece importante profundizar en la dimensión didáctica haciendo un análisis del discurso Matemático Escolar (adME) con observación en el aula, con el propósito de analizar cómo vive ese *saber* en el aula, respondiendo preguntas tales como: ¿cómo se genera la actividad matemática de aula con estas nuevas propuestas?, ¿a qué recursos o herramientas recurre el profesor?, ¿qué se permite hacer al estudiante y qué significados se están construyendo?

Además, posterior a esa observación, se puede plantear una Investigación de Diseño cuyos instrumentos se fundamenten en los resultados previos (adME e Hipótesis Epistemológica –HE–), con la que podamos aportar hacia el rediseño del discurso Matemático Escolar, relativo a la introducción a la Trigonometría, que vincule la enseñanza del Teorema de Pitágoras con las razones trigonométricas; y, principalmente, a la línea sobre la construcción social del conocimiento trigonométrico, robusteciendo la HE con los resultados empíricos.

REFERENCIAS

Araya, A., Monge, A. y Morales, C. (2007). *Comprensión de las razones trigonométricas: Niveles de comprensión, indicadores y tareas para su análisis. Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación*, 7(2). https://doi.org/10.15517/aie.v7i2.9274

Arcos, J., Hinojos, J., Montiel, G., Rodríguez, F. y Zubillaga, E. (2022). La investigación histórica: enfoques para la enseñanza y aprendizaje de la matemática en México en R. Gutiérrez y J. Prieto (Comps.), *Memorias del VI Congreso Iberoamericano de Historia de la Educación Matemática (1ª ed., Vol. 1, pp.*144–156). Asociación Aprende en Red. https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/23072

Balbuena, H., Block, D., García, S., Cruz, J. y Mendoza, T. (2021). *Matemáticas 3. Conecta más*. Ediciones SM.

Bosch, C. y Meda, A. (2021). *Matemáticas 3. Infinita Secundaria.* Ediciones Castillo.

Bressoud, D. (2010). Historical Reflections on Teaching Trigonometry. *Mathematics teacher*, 104(2), 106-112. https://doi.org/10.5951/MT.104.2.0106

Brito, J. y Barbosa, B. (2004). Trigonometria: dificuldades dos professores de matemática do ensino fundamental. *Revista Horizontes*, 22(1), 65-70. https://www.usf.edu.br/publicacoes/edicoes-exibir/75269794/horizontes+volume+22+numero+01+2004.htm

Britton, J., Proust, C. y Shnider, S. (2011). Plimpton 322: A review and a different perspective. *Archive for History of Exact Sciences, 65*(5), 519–566. https://doi.org/10.1007/s00407-011-0083-4

Bruins, E. (1949). On Plimpton 322: Pythagorean numbers in Babylonian mathematics. *Proceedings of Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, 52*, 629–632.

Buck, R. (1980). Sherlock Holmes in Babylon and Other Tales of Mathematical History. *The American Mathematical Monthly,* 87, 335–345. https://doi.org/10.5948/UPO9781614445036

Buendía, G. (2006). Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *9*(2), 227-251. https://relime.org/index.php/relime/article/view/460

Cabañas, G. (2011). *El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socioepistemológico*. [Tesis de doctorado, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional].

Calderón, F. (2021). *Matemáticas 3. Sin fronteras.* Ediciones Castillo

Cantoral, R. (2013). Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento. *Gedisa*, Barcelona.

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamérica. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 18(1), 5-17. https://www.doi.org/10.12802/relime.13.1810

Carrasco, G. y Marván, M. (2021). *Matemáticas 3. Espiral del saber*. Editorial Santillana.

Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos. (20 de marzo de 2024). Catálogo de Libros de Texto. Secundaria. Ciclo Escolar 2023 – 2024.

Cordero, F., del Valle, T. y Morales, A. (2019). Usos de la optimización de ingenieros en formación: el rol de la ingeniería mecatrónica y de la obra de Lagrange. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *22*(2), 185-212. https://doi.org/10.12802/relime.19.2223

Cruz-Márquez, G., y Montiel, G. (2017). Emergencia de las Nociones Trigonométricas en el Almagesto. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* 30, 981-989. *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.* https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1148393/Cruz2017Emergencia.pdf

Cruz-Márquez, G. (2018). *De Sirio a Ptolomeo: Una problematización de las nociones trigonométricas*. [Tesis de maestría, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional]. https://repositorio.cinvestav.mx/handle/cinvestav/1012

Cruz-Márquez, G. y Montiel-Espinosa, G. (2022). Medición Indirecta de Distancias y el Trabajo Geométrico en la Construcción de las Nociones Trigonométricas. *Acta Scientiae* 24(4), 81-108. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6911.

Deimel, A. (1922). *Die inschriften von Fara: Schultexte aus Fara*. II: Wissenschaftliche Veröffentlichung der Deutschen Orient-Gesellschaft. J. C. Hinrichs'she.

De Kee, S., Mura, R. y Dionne, J. (1996). La comprehension des notions de sinus et cosinuschez des élèves du secondaire. *For the Learning of Mathematics*, 16(2), 19-27. https://www.jstor.org/stable/40248201

de Solla Price, D. (1964). The Babylonian "Pythagorean triangle" Tablet. *Centaurus, 10,* 219–231. https://doi.org/10.1111/j.1600-0498.1964.tb00385.x

Espinoza, L. (2009). *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico*. [Tesis de maestría, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional].

Espinoza, L., y Cantoral, R. (2010). Una propuesta metodológica para estudios socio históricos: el caso de la teoría de funciones de Lagrange. En P. Lestón, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (24 ed., pp.889-896). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Farfán, R. (1997). *Ingeniería didáctica: un estudio de la variación y el cambio*. Grupo Editorial Iberoamérica.

Feliu, L. (2012). A new early dynastic iiib metro-mathematical table tablet of area measures from zabalam. *Altorientalische Forschungen, 39*(2), 218–225. https://doi.org/10.1524/aofo.2012.0014.

Filloy, E., Rojano, T., Ojeda, A., Zubieta, G. y Figueras, O. (2009). *Matemáticas 3º.* Ediciones pedagógicas / Mcgraw-Hill.

Friberg, J. (1981). Methods and traditions of Babylonian mathematics: Plimpton 322, Pythagorean triples and the Babylonian triangle parameter equations. *Historia Mathematica, 8,* 277–318. https://doi.org/10.1016/0315-0860(81)90069-0

Friberg, J. (2007). *A remarkable collection of Babylonian mathematical texts*. Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-0-387-48977-3

García, R., Enríquez, J., y Cañas, M. (2021). *Matemáticas 3.* Correo del maestro.

Gur, H. (2009). Trigonometry Learning. *New Horizons in Education*, 57(1), 67-80.

Herscovics, N. y Bergeron, J. (1988). An extended model of understanding en C. Lacompagne y M. Behr (Eds.), *Proceedings of PME-NA 10*, Northern lllinois University, 15-22.

Høyrup, J. (2002). *Lengths, widths, surfaces. A portrait of old babylonian algebra and its Kin*. New York: Springer-Verlag.

Jácome, G. (2011). *Estudio Socioepistemológico a las relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo. Un acercamiento a los significados construidos por el profesor.* [Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional].

Juárez, M. y Cruz, C. (2019). Resignificación de la razón trigonométrica con estudiantes de la facultad de ingeniería UNACH. *Revista digital PAKBAL*, 46, 23-29. https://ingenieria.unach.mx/index.php?option=com_content&view=article&id=115 &catid=2

Kendal, M. y Stacey, K. (1998). Teaching trigonometry. *Australian Mathematics Teacher*, 54(1), 34- 39. https://search.informit.org/doi/10.3316/informit.919900974186280

Leick, G. (2002). *Mesopotamia: La invención de la ciudad*. Paidós Ibérica.

López-Acosta, L. (2019). *Un acercamiento epistemológico y lingüístico para el estudio del Pensamiento y Lenguaje Algebraico. El caso del Análisis Algebraico de Viète y Descartes* [Memoria predoctoral no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional].

López-Acosta, L. y **Montiel-Espinosa, G.** (2022). Emergencia de las ecuaciones paramétricas en Viète y Descartes: elementos para repensar la actividad analítica-algebraica. *Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias*, 17(3), 539–559. https://doi.org/10.14483/23464712.17062

Maldonado, E. (2009). Análisis didáctico y cognitivo de los elementos de trigonometría, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 22, 169-178. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/analisis-didactico-y-cognitivo-de-los-elementos-de-trigonometria/

Mansfield, D. y Wildberger, N. (2017). Plimpton 322 is Babylonian exact sexagesimal trigonometry. *Historia Mathematica*, 44(4), 395-419. https://www.doi.org/10.1016/j.hm.2017.08.001

Mansfield, D. (2020). Perpendicular Lines and Diagonal Triples in Old Babylonian Surveying. *Journal of Cuneiform Studies*, 72, 87-99. https://doi.org/10.1086/709309

Mansfield, D. (2021). Plimpton 322: A Study of Rectangles. *Foundations of Science*, *26*, 977-1005. https://doi.org/10.1007/s10699-021-09806-0

Mansfield, D. [Dan Mansfield]. (13 de agosto de 2021). *Si.427 - one of the oldest and most complete examples of applied geometry from the ancient world* [Video]. YouTube https://www.youtube.com/watch?v=fSRMJcpKA3s&ab_channel=DanMansfield

Martín, E., Ruiz, J. y Rico, L. (2016). Significado escolar de las razones trigonométricas elementales. *Enseñanza de las Ciencias*, 34(3), 51-71. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1871

Medel, R., García, R. y Gómez, I. (2021). *Matemáticas 3*. *Travesías*. Ediciones Castillo.

Mendoza, J. y Cordero, F. (2018). La modelación en las comunidades de conocimiento matemático. El uso de las matemáticas en ingenieros biónicos. El caso de la estabilidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 11(1), 36-61.

Meza, G. y Silva-Crocci, H. (2016). Razones trigonométricas: un rediseño de situación desde la construcción social del conocimiento matemático. *XX Jornadas de Educación Matemática*, 237-242.

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica* [Tesis de Doctorado, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional].

Montiel, G. (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio Socioepistemológico.* Ediciones Díaz de Santos.

Montiel, G. (2016). Condiciones para la innovación educativa en el posgrado. El caso de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria, en Oaxaca. *Perfiles Educativos 38*, 101-115. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=13250921007

Montiel, G., y Buendía, G. (2013). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: ejemplos e ilustraciones. En M. Rosas y A. Romo. (Eds.), *Metodología en Matemática Educativa: Visiones y Reflexiones* (pp.61-79). Lectorum.

Montiel, G. y Jácome, G. (2014). Significados trigonométricos en el profesor. *Boletim de Educação Matemática Bolema* 28(50), 1193-1216. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a10

Montiel, G. y Scholz, M. (2021). Entre la razón y la función. Construcción de significados sobre la relación trigonométrica en bachillerato. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas 91*, 10-17.

Moore, K. (2014). Quantitative reasoning and the sine function: The case of Zac. *Journal for Research in Mathematics Education*, 45(1), 102-138. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.45.1.0102

Moreno, A. (2021). Cardiología, Matemáticas y Matemática Educativa: Una base de significados para la angularidad. *Sahuarus*, *5*(1). https://doi.org/10.36788/sah.v5i1.107

Neugebauer, O. y Sachs, A. (1945). Mathematical Cuneiform Texts, *American Oriental Series*, 49. *Pub. jointly by the American Oriental Society and the American Schools of Oriental Research.*

Neugebauer, O. (1969). *The exact sciences in antiquity*. Dover Publications.

Piña-Aguirre, G. (2021). *Un estudio histórico-epistemológico sobre la Construcción Social de conocimiento en Variable Compleja: El caso del Teorema Integral de Cauchy.* [Tesis de maestría, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional]. https://repositorio.cinvestav.mx/handle/cinvestav/3900

Proust, C. (2011). On the nature of the table Plimpton 322. *Matematiches Forschunginstitut Oberwolfach*, *Oberwolfach Report*, 12(2011), 664-666.

Proust, C. (2015). Mathematical lists: from archiving to innovation en A. Archi (ed.) *Tradition and Innovation in the Ancient Near East.* Proceedings of the 57th Rencontre Assyriologique Internationale. https://doi.org/10.5325/j.ctv1bxgx2w

Proust, C. (2020). Early-dynastic tables from southern mesopotamia, or the multiple facets of the quantification of surfaces en K. Chemla y C. Michel (Eds.), *Mathematics, administrative and economic activities in ancient worlds*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-48389-0_1

Riva, M. (2021). *Matemáticas 3. Espacios Creativos.* Editorial Santillana.

Robson, E. (2001). Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A reassessment of Plimpton 323. *Historia Mathematica, 28,* 167–206. https://doi.org/10.1006/hmat.2001.2317

Robson, E. (2002). Words and pictures: New light on Plimpton 322. *American Mathematical Monthly, 109,* 105–120. https://doi.org/10.2307/2695324

Robson, E. (2008). *Mathematics in ancient Iraq: A social history*. Princeton University Press. https://doi.org/10.2307/j.ctv10qqzk0

Rotaeche, R. (2012). *Construcción de conocimiento matemático en escenarios escolares. El caso de la angularidad en el nivel básico*. [Documento Predoctoral no publicado, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional].

Rotaeche, R. y Montiel, G. (2017). Aprendizaje del concepto escolar de ángulo en estudiantes mexicanos de nivel secundaria. *Educación Matemática*, 29(1), 171 – 199. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40550442008

Sachs, A. (1947). Babylonian Mathematical Texts I: Reciprocals of regular sexagesimal numbers. *Journal of Cuneiform Studies, 1,* 219–240. https://doi.org/10.2307/1359434

Scholz, O. (2014). *Construcción de significados para lo trigonométrico en el contexto geométrico del círculo.* [Tesis de maestría, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional]. https://www.cicata.ipn.mx/assets/files/cicata/ProME/docs/tesis/tesis_maestria/2014/scholz_2014.pdf

Secretaría de Educación Pública. (2017). *Matemáticas Educación Secundaria. Plan y programa de estudios, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación*. SEP. https://www.sep.gob.mx/work/models/sep1/Resource/10933/1/images/Aprendizajes_clave_para_la_educacion_integral.pdf

Secretaría de Educación Pública. (2022). Plan de estudio para la educación preescolar, primaria y secundaria 2022. SEP. https://www.sep.gob.mx/marcocurricular/

Secretaría de Educación Pública. (2023a). *Nuestro libro de proyectos. Colección Nanahuatzin***.** SEP.

Secretaría de Educación Pública. (2023b). *Saberes y Pensamiento Científico. Colección Nanahuatzin***.** SEP.

Secretaría de Educación Pública y Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos. (2024). *Libros de Texto SEP/CONALITEG 2023 – 2024 para la Educación Básica*. https://librosep.org/secundaria

Stephens, F. (1953). A Surveyor's Map of a Field. *Journal of Cuneiform Studies*, 7 (1), 1–4. doi.org/10.2307/1359476

Stewart, I. (2008). *Historia de las matemáticas: en los últimos 10.000 años.* Editorial Crítica.

Torres-Corrales, D. (2014). *Un entorno geométrico para la resignificación de las razones trigonométricas en estudiantes de Ingeniería.* [Tesis de maestría, Instituto Tecnológico de Sonora]. https://www.doi.org/10.13140/RG.2.1.2993.5603/1

Torres-Corrales, D. y Montiel. G. (2020). La desarticulación matemática en Ingeniería. Una alternativa para su estudio y atención, desde la Matemática Educativa. *Nóesis. Revista de Ciencias Sociales y Humanidades, 29* (58-1), 24-55. https://dx.doi.org/10.20983/noesis.2020.3.2

Torres-Corrales, D. y Montiel-Espinosa, G. (2021). Resignificación de la razón trigonométrica en estudiantes de primer año de Ingeniería. *Educación Matemática* 33(3), 202-232. https://doi.org/10.24844/EM3303.08

Torres-Corrales, D. y Montiel-Espinosa, G. (2022). Características matemáticas y contextuales de la Trigonometría en el repaso para Robótica en Ingeniería Mecatrónica. *Innovación Educativa 22*(90), 82-103.

Trigueros, M., Sandoval, I., Lozano, M., Cortés, M., Jinich, E. y Schulmasiter, M. (2021). *Matemáticas 3. Fortaleza Académica.* Editorial Santillana.

Tuyub, I. y Buendía, G. (2017). Gráficas lineales: un proceso de significación a partir de su uso en ingeniería. *Revista de Investigación Educativa de la Rediech,* 8(15), 11-28. https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v8i15.44

Quinlan, C. (2004). Sparking interest in trigonometry. *The Australian Mathematics Teacher*, 60(3), 17–20.

Van Brummelen, G. (2009). *The mathematics of the heavens and the earth: The early history of trigonometry*. Princeton University Press.

Vargas-Zambrano, **L.** (2021). Un estudio histórico-epistemológico sobre la construcción social de las secciones cónicas en geometría del espacio. [Tesis de maestría, Centro de Investigación y Estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional]. https://repositorio.cinvestav.mx/handle/cinvestav/3903

Vargas Zambrano, L. y Montiel-Espinosa, G. (2022). LOS CORTES DEL CONO EN LA GEOMETRÍA GRIEGA: una caracterización de usos y significados más allá de la anécdota. Revista De História Da Educação Matemática, 8, 1-23. https://www.histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/514

Wardhaugh, B. (2010). *How to read Historical Mathematics.* Princeton University Press.

Weber, K. (2005). Student's understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal*, 7(3), 91-112. https://doi.org/10.1007/BF03217423

Yiğit, M. (2016). Mathematics education graduate students' understanding of trigonometric ratios. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 47(7), 1028- 1047. https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1155774

ANEXOS

ANEXO 1: La Reconstrucción Matemática de Plimpton 322

Columna I´: El lado corto o base ($\boldsymbol{\beta}$) de un triple diagonal normalizado ($\boldsymbol{\beta}, \mathbf{1}, \boldsymbol{\delta}$)

Paso 1. Recorre todas las entradas de una tabla recíproca estándar, (empezando por el primer par recíproco $(\mathbf{s}, \overline{\mathbf{s}}) = (\mathbf{2}, \mathbf{30})$.

Tabla 18

Tabla recíproca estándar

$\boldsymbol{n}$	$\overline{\boldsymbol{n}}$	$\boldsymbol{n}$	$\overline{\boldsymbol{n}}$	$\boldsymbol{n}$	$\overline{\boldsymbol{n}}$	$\boldsymbol{n}$	$\overline{\boldsymbol{n}}$
2	30	15	4	36	1.40	1.15	48
3	20	16	3.45	40	1.30	1.20	45
4	15	18	3.20	45	1.20	1.21	44.26.40
5	12	20	3	48	1.15	1.30	40
6	10	24	2.30	50	1.12	1.36	37.36
8	7.30	25	2.24	54	1.06.40	1.40	36
9	6.40	27	2.13.20	1.00	1.00	1.48	33.20
10	6	30	2.00	1.04	56.15	2.00	30
12	5	32	1.52.30	1.12	50	2.05	28.48

Nota. Construida a partir de los números señalados en "On the nature of the Tablet Plimpton 322" (p.664), por C. Proust, 2011, *Mathematisches Forschunginstitut Oberwolfach, Oberwolfach Report*, 12.

Paso 2. Para cada valor de $\boldsymbol{s}$, consulta la tabla de multiplicación de $\bar{s}$ para encontrar $\boldsymbol{r\bar{s}}$, donde $\boldsymbol{r}$ satisface: $\boldsymbol{r > s}$ y $\boldsymbol{1 < r\bar{s} < 2.24}$.

Valores donde $r > s$ y $1 < r\bar{s} < 2.24$

Valores de $1 < r\bar{s} < 2.24$ repetidos

Tabla 19

Tabla de multiplicación de $r\bar{s}$ (para los valores desde 1 al 18)

		r																		
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**16**	**18**	**20**	**24**	**25**	**27**	**30**	**32**
s	**$\bar{s}$**	$r\bar{s}$																		
1	**1**	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	27	30	32
2	**30**	30	1	1.30	2	2.30	3	4	4.30	5	6	7.30	8	9	10	12	12.30	13.30	15	16
3	**20**	20	40	1	1.20	1.40	2	2.40	3	3.20	4	5	5.20	6	6.40	8	8.20	9	10	10.40
4	**15**	15	30	45	1	1.15	1.30	2	2.15	2.30	3	3.45	4	4.30	5	6	6.15	6.45	7.30	8
5	**12**	12	24	36	48	1	1.12	1.36	1.48	2	2.24	3	3.12	3.36	4	4.48	5	5.24	6	6.24
6	**10**	10	20	30	40	50	1	1.20	1.30	1.40	2	2.30	2.40	3	3.20	4	4.10	4.30	5	5.20
8	**7.30**	7.30	15	22.30	30	37.30	45	1	1.07.30	1.15	1.30	1.52.30	2	2.15	2.30	3	3.07.30	3.22.30	3.45	4
9	**6.40**	6.40	13.20	20	26.40	33.20	40	53.20	1	1.06.40	1.20	1.40	1.46.40	2	2.13.20	2.40	2.46.40	3	3.20	3.33.20
10	**6**	6	12	18	24	30	36	48	54	1	1.12	1.30	1.36	1.48	2	2.24	2.30	2.42	3	3.12
12	**5**	5	10	15	20	25	30	40	45	50	1	1.15	1.20	1.30	1.40	2	2.05	2.15	2.30	2.40
15	**4**	4	8	12	16	20	24	32	36	40	48	1	1.04	1.12	1.20	1.36	1.40	1.48	2	2.08
16	**3.45**	3.45	7.30	11.15	15	18.45	22.30	30	33.45	37.03	45	56.15	1	1.07.30	1.15	1.30	1.33.45	1.41.15	1.52.30	2
18	**3.20**	3.20	6.40	10	13.20	16.40	20	26.40	30	33.20	40	50	53.20	1	1.06.40	1.20	1.23.20	1.30	1.40	1.46.40
20	**3**	3	6	9	12	15	18	24	27	30	36	45	48	54	1	1.12	1.15	1.21	1.30	1.36
24	**2.30**	2.30	5	7.30	10	12.30	15	20	22.30	25	30	37.30	40	45	50	1	1.02.30	1.07.30	1.15	1.20
25	**2.24**	2.24	4.48	7.12	9.36	12	14.24	19.12	21.36	24	28.48	36	38.24	43.12	48	57.36	1	1.04.48	1.12	1.16.48
27	**2.13.20**	2.13.20	4.26.40	6.40	8.53.20	11.06.40	13.20	17.46.40	20	22.13.20	26.40	33.20	35.33.20	40	44.26.40	53.20	55.33.20	1	1.06.40	1.11.06.40
30	**2**	2	4	6	8	10	12	16	18	20	24	30	32	36	40	48	50	54	1	1.04
32	**1.52.30**	1.52.30	3.45	5.37.30	7.30	9.22.30	11.15	15	16.52.30	18.45	22.30	28.07.30	30	33.45	37.30	45	46.52.30	50.37.30	56.15	1
36	**1.40**	1.40	3.20	5	6.40	8.20	9.40	13.20	15	16.40	20	25	26.40	30	33.20	40	41.40	45	50	53.20
40	**1.30**	1.30	3	4.30	6	7.30	9	12	13.30	15	18	22.30	24	27	30	36	37.20	40.30	45	48
45	**1.20**	1.20	2.40	4	5.20	6.40	8	10.40	12	13.20	16	20	21.20	24	26.40	32	33.20	36	40	42.40
48	**1.15**	1.15	2.30	3.45	5	6.15	7.30	10	11.15	12.30	15	18.45	20	22.30	25	30	31.15	33.45	37.30	40
50	**1.12**	1.12	2.24	3.36	4.48	6	7.12	9.36	10.48	12	14.24	18	19.12	21.36	24	28.48	30	32.24	36	38.24
54	**1.06.40**	1.06.40	1.13.20	3.20	4.26.40	5.33.20	6.40	8.53.20	10	11.06.40	13.20	16.40	17.46.40	20	22.13.20	23.40	27.46.40	30	33.20	35.33.20

		r																
		36	**40**	**45**	**48**	**50**	**54**	**1.04**	**1.12**	**1.15**	**1.20**	**1.21**	**1.30**	**1.36**	**1.40**	**1.48**	**2**	**2.05**
s	$\bar{s}$	$r\bar{s}$																
1	**1**	*36*	*40*	*45*	*48*	*50*	*54*	*1.04*	*1.12*	*1.15*	*1.20*	*1.21*	*1.30*	*1.36*	*1.40*	*1.48*	*2*	*2.05*
2	**30**	*18*	*20*	*22.30*	*24*	*25*	*27*	*32*	*36*	*37.30*	*40*	*40.30*	*45*	*48*	*50*	*54*	*1*	*1.02.30*
3	**20**	*12*	*13.20*	*15*	*16*	*16.40*	*18*	*21.20*	*24*	*25*	*26.40*	*27*	*30*	*32*	*33.20*	*36*	*40*	*41.40*
4	**15**	*9*	*10*	*11.15*	*12*	*12.30*	*13.30*	*16*	*18*	*18.45*	*20*	*20.15*	*22.30*	*48*	*25*	*27*	*30*	*30.15*
5	**12**	*7.12*	*8*	*9*	*9.36*	*10*	*10.48*	*12.48*	*14.24*	*15*	*16*	*16.12*	*18*	*19.12*	*20*	*21.36*	*24*	*25*
6	**10**	*6*	*6.40*	*7.30*	*8*	*8.20*	*9*	*10.40*	*12*	*12.30*	*13.20*	*13.30*	*15*	*16*	*16.40*	*18*	*20*	*20.50*
8	**7.30**	*4.30*	*5*	*5.37.30*	*6*	*6.1*	*6.45*	*8*	*9*	*9.22.30*	*10*	*10.07.30*	*11.15*	*12*	*12.30*	*13.30*	*15*	*15.37.30*
9	**6.40**	*4*	*4.30*	*5*	*5.20*	*5.33.20*	*6*	*7.06.40*	*8*	*8.20*	*8.53.20*	*9*	*10*	*10.40*	*11.06.40*	*12*	*13.20*	*13.53.20*
10	**6**	*3.36*	*4*	*4.30*	*4.48*	*5*	*5.24*	*6.24*	*7.12*	*7.30*	*8*	*8.06*	*9*	*9.36*	*10*	*10.48*	*12*	*12.30*
12	**5**	*3*	*3.20*	*3.45*	*4*	*4.10*	*4.30*	*5.20*	*6*	*6.15*	*6.40*	*6.45*	*7.30*	*8*	*8.20*	*9*	*10*	*10.25*
15	**4**	*2.24*	*2.40*	*3*	*3.12*	*3.20*	*3.36*	*4.16*	*4.48*	*5*	*5.20*	*5.24*	*6*	*6.24*	*6.40*	*7.12*	*8*	*8.20*
16	**3.45**	*2.15*	*2.30*	*2.48.45*	*3*	*3.07.30*	*3.22.30*	*4*	*4.30*	*4.41.15*	*5*	*5.03.45*	*5.37.30*	*6*	*6.15*	*6.45*	*7.30*	*7.48.45*
18	**3.20**	*2.16*	*2.13.20*	*2.30.36*	*2.40*	*2.46.40*	*3*	*3.33.20*	*4*	*4.10*	*4.26.40*	*4.30*	*5*	*5.20*	*5.33.20*	*6*	*6.40*	*6.56.40*
20	**3**	*1.48*	*2*	*2.15*	*2.24*	*2.30*	*2.42*	*3.12*	*3.36*	*3.45*	*4*	*4.03*	*4.30*	*4.48*	*5*	*5.24*	*6*	*6.15*
24	**2.30**	*1.30*	*1.40*	*1.52.30*	*2*	*2.05*	*2.15*	*2.40*	*3*	*3.07.30*	*3.20*	*3.22.30*	*3.45*	*4*	*4.10*	*4.30*	*5*	*5.12.30*
25	**2.24**	*1.26.24*	*1.36*	*1.48*	*1.55.12*	*2*	*2.09.36*	*2.33.36*	*2.52.48*	*3*	*3.12*	*3.14.24*	*3.36*	*3.50.24*	*4*	*4.19.12*	*4.48*	*5*
27	**2.13.20**	*1.20*	*1.28.53.20*	*1.40*	*1.46.40*	*1.51.06.40*	*2*	*2.22.13.20*	*2.40*	*2.46.40*	*2.57.46.40*	*3*	*3.20*	*3.33.20*	*3.42.13.20*	*4*	*4.26.40*	*4.37.46.40*
30	**2**	*1.12*	*1.20*	*1.30*	*1.36*	*1.40*	*1.48*	*2.08*	*2.24*	*2.30.36*	*2.40*	*2.42*	*3*	*3.12*	*3.20*	*3.36*	*4*	*4.10*
32	**1.52.30**	*1.07.30*	*1.15*	*1.24.22.30*	*1.30*	*1.33.45*	*1.41.15*	*2*	*2.15*	*2.20.37.30*	*2.30*	*2.31.52.30*	*2.48.45*	*3*	*3.07.30*	*3.22.30*	*3.45*	*3.54.22.30*
36	**1.40**	*1*	*1.06.40*	*1.15*	*1.20*	*1.23.20*	*1.30*	*1.46.40*	*2*	*2.05*	*2.13.20*	*2.15*	*2.30.36*	*2.40*	*2.46.40*	*3*	*3.20*	*3.28.20*
40	**1.30**	*54*	*1*	*1.07.30*	*1.12*	*1.15*	*1.21*	*1.36*	*1.48*	*1.52.30*	*2*	*2.01.30*	*2.15*	*2.24*	*2.30.36*	*2.42*	*3*	*3.07.30*
45	**1.20**	*48*	*53.20*	*1*	*1.04*	*1.06.40*	*1.12*	*1.25.20*	*1.36*	*1.40*	*1.46.40*	*1.48*	*2*	*2.08*	*2.13.20*	*2.24*	*2.40*	*2.46.40*
48	**1.15**	*45*	*50*	*56.15*	*1*	*1.02.30*	*1.07.30*	*1.20*	*1.30*	*1.33.45*	*1.40*	*1.41.15*	*1.52.30*	*2*	*2.05*	*2.15*	*2.30.36*	*2.36.15*
50	**1.12**	*43.12*	*48*	*54*	*57.36*	*1*	*1.04.48*	*1.16.48*	*1.26.24*	*1.30*	*1.36*	*1.37.12*	*1.48*	*1.55.12*	*2*	*2.09.36*	*2.24*	*2.30.36*
54	**1.06.40**	*40*	*44.26.40*	*50*	*53.20*	*53.33.20*	*1*	*1.11.06.40*	*1.20*	*1.23.20*	*1.28.53.20*	*1.30*	*1.40*	*1.46.40*	*1.51.06.40*	*2*	*2.13.20*	*2.18.53.20*

Paso 3. Para cada valor de r, busca $\bar{r}$ en la tabla recíproca estándar y encuentra $s\bar{r}$ en la tabla de multiplicar apropiada**.**

Valores donde $r > s$ y $1 < s\bar{r} < 2.24$

Valores de $1 < s\bar{r} < 2.24$ repetidos

Tabla 20

Tabla de multiplicación de $s\bar{r}$ (para los valores de r del 1 al 36)

r	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**16**	**18**	**20**	**24**	**25**	**27**	**30**	**32**	**36**
$\bar{r}$	**1**	**30**	**20**	**15**	**12**	**10**	**7.30**	**6.40**	**6**	**5**	**4**	**3.45**	**3.20**	**3**	**2.30**	**2.24**	**2.13.20**	**2.00**	**1.52.30**	**1.40**
s \ $s\bar{r}$																				
1	1	30	20	15	12	10	7.30	6.40	6	5	4	3.45	3.20	3	2.30	2.24	2.13.20	2	1.52.30	1.40
2	2	1	40	30	24	20	15	13.20	12	10	8	7.30	6.40	6	05	4.48	4.26.40	4	3.45	3.20
3	3	1.30	1	45	36	30	22.30	20	18	15	12	11.15	10	9	7.30	7.12	6.40	6	5.37.30	5
4	4	2	1.20	1	48	40	30	26.40	24	20	16	15	13.20	12	10	9.36	8.53.20	8	7.30	6.40
5	5	2.30	1.40	1.15	1	50	37.30	33.20	30	25	20	18.45	16.40	15	12.30	12	11.06.40	10	9.22.30	8.20
6	6	3	2	1.30	1.12	1	45	40	36	30	24	22.30	20	18	15	14.24	13.20	12	11.15	9.40
8	8	4	2.40	2	1.36	1.20	1	53.20	48	40	32	30	26.40	24	20	19.12	17.46.40	16	15	13.20
9	9	4.30	3	2.15	1.48	1.30	1.07.30	1	54	45	36	33.45	30	27	22.30	21.36	20	18	16.52.30	15
10	10	5	3.20	2.30	2.00	1.40	1.15	1.06.40	1	50	40	37.3	33.20	30	25	24	22.13.20	20	18.45	16.40
12	12	6	4	3	2.24	2	1.30	1.20	1.12	1	48	45	40	36	30	28.48	26.40	24	22.30	20
15	15	7.30	5	3.45	3	2.30	1.52.30	1.40	1.30	1.15	1	56.15	50	45	37.30	36	33.20	30	28.07.30	25
16	16	8	5.20	4	3.12	2.40	2	1.46.40	1.36	1.20	1.04	1	53.20	48	40	38.24	35.33.20	32	30	26.40
18	18	9	6	4.30	3.36	3	2.15	2	1.48	1.30	1.12	1.07.30	1	54	45	43.12	40	36	33.45	30
20	20	10	6.40	5	4	3.20	2.30	2.13.20	2	1.40	1.20	1.15	1.06.40	1	50	48	44.26.40	40	37.30	33.20
24	24	12	8	6	4.48	4	3	2.40	2.24	2	1.36	1.30	1.20	1.12	1	57.36	53.20	48	45	40
25	25	12.30	8.20	6.15	5	4.10	3.07.30	2.46.40	2.30	2.05	1.40	1.33.45	1.23.20	1.15	1.02.30	1	55.33.20	50	46.52.30	41.40
27	27	13.30	9	6.45	5.24	4.30	3.22.30	3	2.42	2.15	1.48	1.41.15	1.30	1.21	1.07.30	1.04.48	1	54	50.37.30	45
30	30	15	10	7.30	6	5	3.45	3.20	3	2.30	2.00	1.52.30	1.40	1.30	1.15	1.12	1.06.40	1	56.15	50
32	32	16	10.40	8	6.24	5.20	4	3.33.20	3.12	2.40	2.08	2	1.46.40	1.36	1.20	1.16.48	1.11.06.40	1.04	1	53.20
36	36	18	12	9	7.12	6	4.30	4	3.36	3	2.24	2.15	2	1.48	1.30	1.26.24	1.20	1.12.	1.07.30	1
40	40	20	13.20	10	8	6.40	5	4.30	4	3.20	2.40	2.30	2.13.20	2	1.40	1.36	1.28.53.20	1.20	1.1	1.06.40
45	45	22.30	15	11.15	9	7.30	5.37.30	5	4.30	3.45	3.00	2.48.45	2.30.36	2.15	1.52.30	1.48	1.40	1.30	1.24.22.30	1.15
48	48	24	16	12	9.36	8	6	5.20	4.48	4.00	3.12	3	2.40.00	2.24	2	1.55.12	1.46.40	1.36	1.30	1.20
50	50	25	16.40	12.30	10	8.20	6.15	5.33.20	5	4.10	3.20	3.07.30	2.46.40	2.30	2.05	2	1.51.06.40	1.40	1.33.45	1.23.20
54	54	27	18	13.30	10.48	9	6.45	6	5.24	4.30	3.36	3.22.30	3	2.42	2.15	2.09.36	2	1.48	1.41.15	1.30

Tabla 21

Tabla de multiplicación de $s\overline{r}$ (para los valores de r del 40 al 2.05)

		r	**40**	**45**	**48**	**50**	**54**	**1.4**	**1.12**	**1.15**	**1.20**	**1.21**	**1.30**	**1.36**	**1.40**	**1.48**	**2.00**	**2.05**
		$\overline{r}$	**1.30**	**1.20**	**1.15**	**1.12**	**1.06.40**	**56.15**	**50**	**48**	**45**	**44.26.40**	**40**	**37.3**	**36**	**33.20**	**0.30**	**28.48**
	1		*1.30*	*1.20*	*1.15*	*1.12*	*1.06.40*	*56.15*	*50*	*48*	*45*	*44.26.40*	*40*	*37.30*	*36*	*33.20*	*30*	*28.48*
	2		*3*	*2.40*	*2.30*	*2.24*	*1.13.20*	*1.52.30*	*1.40*	*1.36*	*1.30*	*1.28.53.20*	*1.20*	*1.15*	*1.12*	*1.06.40*	*1*	*57.36*
	3		*4.30*	*4*	*3.45*	*3.36*	*3.20*	*2.48.45*	*2.30*	*2.24*	*2.15*	*2.13.20*	*2*	*1.52.30*	*1.48*	*1.40*	*1.30*	*86.24*
	4		*6*	*5.20*	*5*	*4.48*	*4.26.40*	*3.45*	*3.20*	*3.12*	*3*	*2.57.46.40*	*2.40*	*2.30*	*2.24*	*2.13.20*	*2*	*1.55.12*
	5		*7.30*	*6.40*	*6.15*	*6*	*5.33.20*	*4.41.15*	*4.10*	*4*	*3.45*	*3.42.13.20*	*3.20*	*3.07.30*	*3*	*2.46.40*	*2.30*	*2.24*
	6		*9*	*8*	*7.30*	*7.12*	*6.40*	*5.37.30*	*5*	*4.48*	*4.30*	*4.26.40*	*4*	*3.45*	*3.36*	*3.20*	*3*	*2.52.48*
	8		*12*	*10.40*	*10*	*9.36*	*8.53.20*	*7.30*	*6.40*	*6.24*	*6*	*5.55.33.20*	*5.20*	*5*	*4.48*	*4.26.40*	*4*	*3.50.24*
	9		*13.30*	*12*	*11.15*	*10.48*	*10*	*8.26.15*	*7.30*	*7.12*	*6.45*	*6.40*	*6*	*5.37.30*	*5.24*	*5*	*4.30*	*4.19.12*
	10		*15*	*13.20*	*12.30*	*12*	*11.06.40*	*9.22.30*	*8.20*	*8*	*7.30*	*7.24.26.40*	*6.40*	*6.15*	*6*	*5.33.20*	*5*	*4.48*
	12		*18*	*16*	*15*	*14.24*	*13.20*	*11.15*	*9.40*	*9.36*	*9*	*8.53.20*	*8*	*7.30*	*7.12*	*6.40*	*6*	*5.45.36*
	15		*22.30*	*20*	*18.45*	*18*	*16.40*	*14.03.45*	*12.30*	*12*	*11.15*	*11.06.40*	*10*	*9.22.30*	*9*	*8.20*	*7.30*	*7.12*
	16		*24*	*21.20*	*20*	*19.12*	*17.46.40*	*15*	*13.20*	*12.48*	*12*	*11.51.06.40*	*10.40*	*10*	*9.36*	*8.53.20*	*8*	*7.40.48*
s	**18**	*$s\overline{r}$*	*27*	*24*	*22.30*	*21.36*	*20*	*16.52.30*	*15.00*	*14.24*	*13.30*	*13.20*	*12*	*11.15*	*10.48*	*10*	*9*	*8.38.24*
	20		*30*	*26.40*	*25*	*24*	*22.13.20*	*18.45*	*16.40*	*16*	*15*	*14.48.53.20*	*13.20*	*12.30*	*12*	*11.06.40*	*10*	*9.36*
	24		*36*	*32*	*30*	*28.48*	*23.40*	*22.30*	*20*	*19.12*	*18*	*17.46.40*	*16*	*15*	*72*	*13.20*	*12*	*11.31.12*
	25		*37.30*	*33.20*	*31.15*	*30*	*27.46.40*	*23.26.15*	*20.50*	*20*	*18.45*	*18.31.06.40*	*16.40*	*15.37.30*	*15*	*13.53.20*	*12.30*	*12*
	27		*40.30*	*36*	*33.45*	*32.24*	*30*	*25.18.45*	*22.30*	*21.36*	*20.15*	*20*	*18*	*16.52.30*	*16.12*	*15*	*13.30*	*12.57.36*
	30		*45*	*40*	*37.30*	*36*	*33.20*	*28.07.30*	*25*	*24*	*22.30*	*22.13.20*	*20*	*18.45*	*18*	*16.40*	*15*	*14.24*
	32		*48*	*42.40*	*40*	*38.24*	*35.33.20*	*30*	*26.40*	*25.36*	*24*	*23.42.13.20*	*21.20*	*20*	*19.12*	*17.46.40*	*16*	*15.36*
	36		*54*	*48*	*45*	*43.12*	*40*	*33.45*	*30*	*28.48*	*27*	*26.40*	*24*	*22.30*	*21.36*	*20*	*18*	*17.28*
	40		*1*	*53.20*	*50*	*48*	*44.26.40*	*37.30*	*33.20*	*32*	*30*	*29.37.46.40*	*26.40*	*25*	*24*	*22.13.20*	*20*	*19.12*
	45		*1.07.30*	*1*	*56.15*	*54*	*50*	*42.11.15*	*37.30*	*36*	*33.45*	*33.20*	*30*	*28.07.30*	*27*	*25*	*22.30*	*21.36*
	48		*1.72*	*1.04*	*1*	*57.36*	*53.20.*	*45*	*40*	*38.24*	*36.00*	*35.33.20*	*32*	*30*	*28.48*	*26.40*	*24*	*23.02.24*
	50		*1.15*	*1.06.40*	*1.02.30*	*1*	*55.33.20*	*46.52.30*	*41.40*	*40*	*37.30*	*37.02.13.20*	*33.20*	*31.15*	*30*	*27.46.40*	*25*	*24*
	54		*1.21*	*1.12*	*1.07.30*	*1.04.48*	*1*	*50.37.30*	*45*	*43.12*	*40.30*	*40*	*36*	*33.45*	*62.24*	*30*	*27*	*25.55.12*

Paso 4. Elimina cualquier duplicación en la lista de valores $(\boldsymbol{r\bar{s}}, \boldsymbol{s\bar{r}})$.

Tabla 22

Lista de valores $(r\bar{s}, s\bar{r})$ *sin valores duplicados*

s	*r*	*s*	*r*	*s*	*r*
2	3	15	16, 32	36	
3	4, 5	16	25, 27	40	1.21
4	5, 9	18	25	45	1.04
5	6, 8, 9, 12	20	27	48	
6		24	25	50	1.21
8	9, 15	25	27, 32, 36, 48, 54	54	2.05
9	10, 16, 20	27	32, 40, 50, 1.04	1	2
10		30			
12	25	32	45, 1.15		

Nota. Adaptada de "Plimpton 322 is Babylonian exact sexagesimal trigonometry" (pp.395-419), por D. Mansfield y N. Wildberger, 2017, Historia Mathematica, 44(4).

Paso 5. Calcula los valores para $\boldsymbol{\beta}$ usando: $\boldsymbol{\beta} = \overline{\mathbf{2}}(\boldsymbol{r\bar{s}} - \boldsymbol{s\bar{r}})$.

Tabla 23

Tabla de $\beta = \overline{2}(r\bar{s} - s\bar{r})$

$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{s}$	$\overline{\mathbf{2}}(\boldsymbol{r\bar{s}} - \boldsymbol{s\bar{r}})$	$\boldsymbol{\beta}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{s}$	$\overline{\mathbf{2}}(\boldsymbol{r\bar{s}} - \boldsymbol{s\bar{r}})$	$\boldsymbol{\beta}$
3	2	30 (1.30 - 40)	25	27	16	30 (1.41.15 - 35.33.20)	32.50.50
4	3	30 (1.20 - 45)	17.30	27	20	30 (1.21 - 44.26.40)	18.16.40
5	3	30 (1.40 - 36)	32	27	25	30 (1.04.48 - 55.33.20)	04.37.20
5	4	30 (1.15 - 48)	13.30	32	15	30 (2.08 - 28.07.30)	49.56.15
6	5	30 (1.12 - 50)	11	32	25	30 (1.16.48 - 46.52.30)	14.57.45
8	5	30 (1.36 - 37.30)	29.15	32	27	30 (1.11.06.40 - 50.37.30)	10.14.35
9	4	30 (2.15 - 26.40)	54.10	36	25	30 (1.26.24 - 41.40)	22.22
9	5	30 (1.48 - 33.20)	37.20	40	27	30 (1.28.53.20 - 40.30)	24.11.40
9	8	30 (1.07.30 - 53.20)	07.05	45	32	30 (1.24.22.30 - 42.40)	20.51.15
10	9	30 (1.06.40 - 54)	06.20	48	25	30 (1.55.12 - 31.15)	41.58.30
12	5	30 (2.24 - 25)	59.30	50	27	30 (1.51.06.40 - 32.24)	39.21.20
15	8	30 (1.52.30 - 32)	40.15	54	25	30 (2.09.36 - 27.46.40)	50.54.40
16	9	30 (1.46.40 - 33.45)	36.27.30	1.04	27	30 (2.22.13.20 - 25.18.45)	58.27.17.30
16	15	30 (1.04 - 56.15)	03.52.30	1.04	45	30 (1.25.20 - 42.11.15)	21.34.22.30
20	9	30 (2.13.20 - 27)	53.10	1.15	32	30 (2.20.37.30 - 25.36)	57.30.45
25	12	30 (2.05 - 28.48)	48.06	1.21	40	30 (2.01.30 - 29.37.46.40)	45.56.06.40
25	16	30 (1.33.45 - 38.24)	27.40.30	1.21	50	30 (1.37.12 - 37.02.13.20)	30.0.53.20
25	18	30 (1.23.20 - 43.12)	20.04	2.05	54	30 (2.18.53.20 - 25.55.12)	56.29.04
25	24	30 (1.02.30 - 57.36)	02.27	2	1	30 (2 - 30)	45

Paso 6. Ordena los valores de $\boldsymbol{\beta}$ en orden decreciente.

Tabla 24

Valores de β en orden decreciente

$\boldsymbol{\beta}$
59.30
58.27.17.30
57.30.45
56.29.04
54.10
53.10
50.54.40
49.56.15
48.06.00
45.56.06.40
45
41.58.30
40.15
39.21.20
37.20
36.27.30
32.50.50
32
30.04.53.20
29.15
27.40.30
25
24.11.40
22.22
21.34.22.30
20.51.15
20.04
18.16.40
17.30
14.57.45
13.30
11
10.14.35
07.05
06.20
04.37.20
03.52.30
02.27

Columna II´: La diagonal $(\boldsymbol{\delta})$ de un triple diagonal normalizado $(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{1}, \boldsymbol{\delta})$

Paso 7. Calcula los valores para la diagonal utilizando: $\boldsymbol{\delta} = \overline{\mathbf{2}}(\boldsymbol{r}\overline{\boldsymbol{s}} + \boldsymbol{s}\overline{\boldsymbol{r}})$.

Tabla 25

Tabla de $\delta = \overline{2}(r\overline{s} + s\overline{r})$

$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{s}$	$\overline{\mathbf{2}}(\boldsymbol{r}\overline{\boldsymbol{s}} + \boldsymbol{s}\overline{\boldsymbol{r}})$	$\boldsymbol{\delta}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{s}$	$\overline{\mathbf{2}}(\boldsymbol{r}\overline{\boldsymbol{s}} + \boldsymbol{s}\overline{\boldsymbol{r}})$	$\boldsymbol{\delta}$
3	2	30 (1.30 + 40)	1.05	27	16	30 (1.41.15.00 + 35.33.20)	1.08.24.10
4	3	30 (1.20 + 45)	1.02.30	27	20	30 (1.21.00.00 + 44.26.40)	1.02.43.20
5	3	30 (1.40 + 36)	1.08	27	25	30 (1.04.48.00 + 55.33.20)	1.00.10.40
5	4	30 (1.15 + 48)	1.01.30	32	15	30 (2.08.00.00 + 28.07.30)	1.18.03.45
6	5	30 (1.12 + 50)	1.01	32	25	30 (1.16.48.00 + 46.52.30)	1.01.50.15
8	5	30 (1.36.00 + 37.30)	1.06.45	32	27	30 (1.11.06.40 + 50.37.30)	1.00.52.05
9	4	30 (2.15.00 + 26.40)	1.20.50	36	25	30 (1.26.24 + 41.40)	1.04.02
9	5	30 (1.48.00 + 33.20)	1.10.40	40	27	30 (1.28.53.20 + 40.30)	1.04.41.40
9	8	30 (1.07.30 + 53.20)	1.00.25	45	32	30 (1.24.22.30 + 42.40)	1.03.31.15
10	9	30 (1.06.40 + 54)	1.00.20	48	25	30 (1.55.12 + 31.15)	1.13.13.30
12	5	30 (2.24 + 25)	1.24.30	50	27	30 (1.51.06.40 + 32.24)	1.11.45.20
15	8	30 (1.52.30 + 32)	1.12.15	54	25	30 (2.09.36.00 + 27.46.40)	1.18.41.20
16	9	30 (1.46.40 + 33.45)	1.10.12.30	1.04	27	30 (2.22.13.20 + 25.18.45)	1.23.46.02.30
16	15	30 (1.04.00 + 56.15)	1.00.07.30	1.04	45	30 (1.25.20.00 + 42.11.15)	1.03.45.37.30
20	9	30 (2.13.20 + 27)	1.20.10	1.15	32	30 (2.20.37.30 + 25.36)	1.23.06.45
25	12	30 (2.05.00 + 28.48)	1.16.54	1.21	40	30 (2.01.30.00.00 + 29.37.46.40)	1.15.33.53.20
25	16	30 (1.33.45 + 38.24)	1.06.04.30	1.21	50	30 (1.37.12.00.00 + 37.02.13.20)	1.07.07.06.40
25	18	30 (1.23.20 + 43.12)	1.03.16	2.05	54	30 (2.18.53.20 + 25.55.12)	1.22.24.16
25	24	30 (1.02.30 + 57.36)	1.00.03	2	1	30 (2.00 + 30)	1.15

Paso 8. Ordena los valores de $\boldsymbol{\delta}$ en orden decreciente.

Tabla 26

Valores de δ en orden decreciente

δ
1.24.30
1.23.46.02.30
1.23.06.45
1.22.24.16
1.20.50
1.20.10
1.18.41.20
1.18.03.45
1.16.54
1.15.33.53.20
1.15
1.13.13.30
1.12.15
1.11.45.20
1.10.40
1.10.12.30
1.08.24.10
1.08
1.07.07.05.40
1.06.45
1.06.04.30
1.05
1.04.41.40
1.04.02
1.03.45.37.30
1.03.31.15
1.03.16
1.02.43.20
1.02.30
1.01.50.15
1.01.30
1.01
1.00.52.05
1.00.25
1.00.20
1.00.10.40
1.00.07.30
1.00.03

Columna I: "El cuadrado de la diagonal. Resta 1 y luego sale el cuadrado del lado corto"

Paso 9. Calcula el cuadrado de la diagonal ($\boldsymbol{\delta^2}$) para cada par ($\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\delta}$).

Tabla 27

Valores de δ^2 en orden decreciente

$\boldsymbol{\delta^2}$
1.59.00.15
1.56.56.58.14.50.06.15
1.55.07.41.15.33.45
1.53.10.29.32.52.16
1.48.54.01.40
1.47.06.41.40
1.43.11.56.28.26.40
1.41.33.45.14.03.45
1.38.33.36.36
1.35.10.02.28.27.24.26.40
1.33.45
1.29.21.54.02.15
1.27.00.03.45
1.25.48.51.35.06.40
1.23.13.46.40
1.22.09.12.36.15
1.17.58.56.24.01.40
1.17.04
1.15.04.53.43.54.04.26.40
1.14.15.33.45
1.12.45.54.20.15
1.10.25
1.09.45.22.16.06.40
1.08.20.16.04
1.07.45.23.26.38.26.15
1.07.14.53.46.33.45
1.06.42.40.16
1.05.34.04.37.46.40
1.05.06.15
1.03.43.52.35.03.45
1.03.02.15
1.02.01
1.01.44.55.12.40.25
1.00.50.10.25
1.00.40.06.40
1.00.21.21.53.46.40
1.00.15.00.56.15
1.00.06.00.09

Columna II: El "íb-si del lado corto"

Paso 10. Factoriza los valores de $\boldsymbol{\beta}$.

Tabla 28

Posible factorización de todos los valores de β

Fila	Factorización		Fila	Factorización		Fila	Factorización	
1	59.**30** 1.59	2	**14**	39.21.**20** 1.58.**04** 29.31	3 15	**26**	20.51.**15** 1.23.2**5** 16.41	4 12
2	58.27.17.**30** 1.56.54.**35** 23.22.**55** 4.40.**35** 56.07	2 12 12 12	**15**	37.**20** 1.52 56	3 30	**27**	20.**04** 5.01	15
3	57.30.**45** 3.50.**03** 1.16.41	4 20	**16**	36.27.**30** 1.12.**55** 14.**35** 2.**55** 35	2 12 12 12	**28**	18.16.**40** 54.**50** 5.29	3 6
4	56.29.**04** 14.07.**16** 3.31.49	15 15	**17**	32.50.**50** 3.17.**05** 39.**25** 7.53	6 12 12	**29**	17.**30** 35	2
5	54.**10** 5.0**5** 1.05	6 12	**18** **18**	32 32		**30**	14.57.**45** 59.**51** 19.**57** 6.**39** 2.13	4 20 20 20
6	53.**10** 5.19	6	**19**	30.04.53.**20** 1.30.14.**40** 4.30.**44** 1.07.41	3 3 15	**31**	13.**30** 27	2
7	50.54.**40** 2.32.**44** 38.11	3 15	**20**	29.**15** 5.**51** 1.**57** 39	12 20 20	**32**	11	
8	49.56.**15** 3.19.**45** 13.19	4 4	**21**	27.40.**30** 55.**21** 18.**27** 6.**09** 2.03 41	2 20 20 20 20	**33**	10.14.**35** 24.**35** 4.**55** 59	12 12 12
9	48.0**6** 8.01	10	**22**	25		**34**	7.**05** 1.**25** 17	12 12
10	45.56.06.**40** 2.17.48.**20** 2.53.**25** 1.22.41	3 3 12	**23**	24.11.**40** 1.12.**35** 14.31	3 12	**35**	6.**20** 19	3
11	45		**24**	22.2**2** 11.11	30	**36**	4.37.**20** 13.**52** 6.**56** 3.**28** 1.**44** 52	3 30 30 30 30
12	41.58.**30** 1.23.**57** 27.59	2 20	**25**	21.34.22.**30** 43.08.**45** 2.52.**35** 34.31	2 4 12	**37**	03.52.**30** 7.**45** 31	2 4
13	40.**15** 2.41	4				**38**	02.27 49	20

Columna III: El “íb-si de la diagonal”

Paso 11. Factoriza los valores de $\boldsymbol{\delta}$.

Tabla 29

Posible factorización de los valores de δ

Fila	Factorización	
1	1.24.**30** 2.49	2
2	1.23.46.02.**30** 2.47.32.**05** 33.30.**25** 6.42.**05** 1.20.**25** 16.**05** 3.13	2 12 12 12 12 12
3	1.23.06.**45** 5.32.**27** 1.50.49	4 20
4	1.22.24.**16** 20.36.**04** 5.09.01	15 15
5	1.20.**50** 8.**05** 1.37	6 12
6	1.20.**10** 8.01	6
7	1.18.41.**20** 3.56.**04** 59.01	3 15
8	1.18.03.**45** 5.12.**15** 20.49	4 4
9	1.16.**54** 12.49	10
10	1.15.33.53.**20** 3.46.41.**40** 11.20.**05** 2.16.01	3 3 12 3
11	1.15	
12	1.13.13.**30** 2.26.**27** 48.49	2 20
13	1.12.**15** 4.49	4
14	1.11.45.**20** 3.35.**16** 53.49	3 15
15	1.10.**40** **3.32** 1.46 53	3 30 30
16	1.10.12.**30** 2.20.**25** 28.**05** 5.37	2 12 12
17	1.08.24.**10** 6.50.**25** 1.22.**05** 16.**25** 3.17	6 12 12 12
18	1.08	
19	1.07.07.06.**40** 3.21.21.**20** 10.04.**04** 2.31.01	3 3 15
20	1.06.**45** 13.**21** 4.**27** 1.29	12 20 20
21	1.06.04.**30** 2.12.**09** 44.43	2 20 20
22	14.41 1.05	
23	1.04.41.**40** 3.14.**05** 38.49	3 12
24	1.04.**02** 32.01	30
25	2.07.31.**15** 8.30.**05** 1.42.01	4 12
26	1.03.31.**15** 4.14.**05** 50.49	4 12
27	1.03.**16** 15.49	15
28	1.02.43.**20** 3.08.**10** 18.49	3 6
29	1.02.**30** 2.**5** 25	2 12
30	1.01.50.**15** 4.07.**21** 1.22.**27** 27.29	4 20 20
31	1.01.**30** 2.**03** 41	2 20
32	1.01	
33	1.00.52.**05** 12.10.**25** 2.26.**05** 29.13	12 12 12
34	1.00.**25** 12.**05** 2.**25** 29	12 12 12
35	1.00.**20** 3.01	3
36	1.00.10.**40** 3.00.**32** 1.30.**16** 22.34 11.17	3 30 15 30
37	1.00.07.**30** 30.03.**45** 40.**05** 8.01	2 1.20 12
38	1.00.**03** 20.01	20

Columna IV: "Fila"

Paso 12. Registra los valores de $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\delta^2}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}$ y el **número de fila** en las columnas correspondientes.

Tabla 30

Reconstrucción completa de Plimpton 322

Columna I´	*Columna II´*	*Columna I*	*Columna II*	*Columna III*	*Columna IV*
($\boldsymbol{\beta}$) Lado corto	**($\boldsymbol{\delta}$) *Diagonal***	**($\boldsymbol{\delta^2}$) *Diagonal cuadrada***	***b***	***d***	***Fila***
59.30	1.24.30	1.59.00.15	1.59	2.49	1
58.27.17.30	1.23.46.02.30	1.56.56.58.14.50.06.15	56.07	3.13	2
57.30.45	1.23.06.45	1.55.07.41.15.33.45	1.16.41	1.50.49	3
56.29.04	1.22.24.16	1.53.10.29.32.52.16	3.31.49	5.09.01	4
54.10	1.20.50	1.48.54.01.40	1.05	1.37	5
53.10	1.20.10	1.47.06.41.40	5.19	8.01	6
50.54.40	1.18.41.20	1.43.11.56.28.26.40	38.11	59.01	7
49.56.15	1.18.03.45	1.41.33.45.14.03.45	13.19	20.49	8
48.06.00	1.16.54	1.38.33.36.36	8.01	12.49	9
45.56.06.40	1.15.33.53.20	1.35.10.02.28.27.24.26.40	1.22.41	2.16.01	10
45	1.15	1.33.45	45	1.15	11
41.58.30	1.13.13.30	1.29.21.54.02.15	27.59	48.49	12
40.15	1.12.15	1.27.00.03.45	2.41	4.49	13
39.21.20	1.11.45.20	1.25.48.51.35.06.40	29.31	53.49	14
37.20	1.10.40	1.23.13.46.40	56	53	15
36.27.30	1.10.12.30	1.22.08.12.36.15	35	5.37	16
32.50.50	1.08.24.10	1.17.58.17.38.24.10	7.53	3.17	17
32	1.08	1.17.04	32	1.08	18
30.04.53.20	1.07.07.05.40	1.15.04.53.43.54.04.26.40	1.07.41	2.31.01	19
29.15	1.06.45	1.14.15.33.45	39	1.29	20
27.40.30	1.06.04.30	1.12.45.54.20.15	41	14.41	21
25	1.05	1.10.25	25	1.05	22
24.11.40	1.04.41.40	1.09.45.22.16.00.40	14.31	38.49	23
22.22	1.04.02	1.08.16.16.04	11.11	32.01	24
21.34.22.30	1.03.45.37.30	1.07.44.29.13.08.26.15	34.31	1.42.01	25
20.51.15	1.03.31.15	1.07.14.53.46.33.45	16.41	50.49	26
20.04	1.03.16	1.06.42.40.16	5.01	15.49	27
18.16.40	1.02.43.20	1.05.34.04.37.26.40	5.29	18.49	28
17.30	1.02.30	1.05.06.15.22.03.45	35	25	29
14.57.45	1.01.50.15	1.03.42.55	2.13	27.29	30
13.30	1.01.30	1.03.02.15	27	41	31
11	1.01	1.02.01	11	1.01	32
10.14.35	1.00.52.05	1.01.44.55.12.40.25	59	29.13	33
07.05	1.00.25	1.01.12.15	17	29	34
06.20	1.00.20	1.00.40.06.40	19	3.01	35
04.37.20	1.00.10.40	1.00.21.21.53.46.40	52	11.17	36
03.52.30	1.00.07.30	1.00.15.00.56.15	31	8.01	37
02.27	1.00.03	1.00.06.00.09	49	20.01	38

ÍNDICE DE FIGURAS Y TABLAS

Figuras

Tablas