



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
SECCIÓN DE MECATRÓNICA

Pelotón de Robots Móviles sin Mediciones Inerciales

TESIS

Que presenta

Jose Eduardo Ruiz Ruiz

Para obtener el grado de
Maestro en ciencias

En la especialidad de
Ingeniería Eléctrica

Directores de Tesis:

Dr. Martín Velasco Villa

Ciudad de México

Diciembre, 2024

Resumen

En este trabajo de tesis se estudia el problema de un pelotón de robots móviles que, durante el seguimiento de una trayectoria, pueden sufrir perturbaciones como deslizamiento o patinado. En primer lugar, se propone y analiza el seguimiento de una configuración líder-seguidor conformado por 2 robots móviles de tipo diferencial (2,0). En el segundo caso, se utiliza un esquema similar aplicado a un pelotón de 3 robots.

Se propone como una posible solución la estimación de las perturbaciones que pueda sufrir alguno de los miembros del pelotón. Dicha perturbación será inyectada en la estrategia de seguimiento para reducir los inconvenientes que se presenten durante la trayectoria. De esta manera, es posible que el pelotón continúe su camino sin importar las condiciones del entorno.

Se demuestra formalmente la convergencia de los estados perturbados a los estados reales de ambos sistemas. Posteriormente, se utilizan estos estados para proponer una ley de control que solucione el problema de seguimiento de trayectoria en cada robot. Para el caso de los robots diferenciales, se demuestra la estabilidad del sistema utilizando una retroalimentación basada en los estados perturbados, mostrando la convergencia de los errores de perturbación y seguimiento.

Se realizan simulaciones numéricas para validar la eficacia del esquema de estimación para diferentes valores de perturbación, demostrando que el seguimiento de la trayectoria puede efectuarse sin importar el momento o el lugar donde se presente la perturbación.

Finalmente, se presentan resultados experimentales considerando robots móviles diferenciales tipo (2,0) que corroboran los resultados obtenidos en las simulaciones numéricas y, por lo tanto, la eficiencia de la estimación y corrección propuesta.

Abstract

In this thesis, the problem of a platoon of mobile robots is studied, where they may experience disturbances such as slipping or skidding while following a desired trajectory. Two cases are considered, the leader-follower formation of two differential mobile robots (2,0) is proposed and analyzed. In the second case, a similar scheme is applied to a platoon of three mobile robots.

First of all, it is proposed the estimation of possible external disturbances affecting the formation. This estimate disturbance will be considered to propose a novel tracking strategy to reduce the issues that arise during the time the disturbance is present. With this strategy, it is intended that the platoon can continue its path regardless of the environmental conditions.

The convergence of the perturbed states to the real states of both systems is formally demonstrated. Subsequently, these states are used to propose a control law that solves the trajectory tracking problem for each robot. For the differential robots, the system's stability is obtained by using feedback law based on the perturbed states, showing the convergence of the perturbation and tracking errors.

Numerical simulations are performed to validate the effectiveness of the estimation scheme for several disturbance values, demonstrating that trajectory tracking can be carried out regardless of the time or place where the disturbance occurs.

Finally, experimental results with differential drive mobile robots are presented, corroborating the results obtained in the numerical simulations and, therefore, the efficiency of the proposed estimation.

Agradecimientos

A mis padres y familia

Por todo el apoyo y confianza que me brindaron a lo largo de todo mi posgrado.

Al doctor Martín Velasco Villa

Por su guía y lecciones que me permitieron realizar este trabajo.

Al jurado evaluador

Por su tiempo y valiosas observaciones.

A mis compañeros y amigos

Por toda aquellos momentos vividos y el apoyo que me brindaron para seguir avanzando durante el posgrado.

A la Ing. Martha A. Chávez González

Por su ayuda en la organización del laboratorio.

A la sección de Mecatrónica

Por permitirme ser parte y por todas las enseñanzas académicas y personales que aprendí dentro de ella.

Al CONAHCYT

Por su apoyo económico que hizo posible mis estudios de posgrado.

Nomenclatura y abreviaturas

A continuación, se presenta de forma general la notación, nomenclatura y abreviaturas utilizadas en el documento, con la finalidad de facilitar el entendimiento de las diversas variables y conceptos.

R_i	Robot líder
R_{i+1}	Robot seguidor
R_τ	Robot virtual atrasado τ unidades de tiempo
V_i	Velocidad lineal del robot líder
ω_i	Velocidad angular del robot líder
V_i^{i+1}	Velocidad lineal del robot seguidor
ω_i^{i+1}	Velocidad angular del robot seguidor
τ	Tiempo de retardo entre el robot R_i y R_{i+1}
$\dot{\gamma}_x$	Perturbación en ejes globales, en términos de velocidades, presente en el eje X
$\dot{\gamma}_y$	Perturbación en ejes globales, en términos de velocidades, presente en el eje Y
$\dot{\gamma}_\theta$	Perturbación en ejes globales, presente la orientación θ
$\dot{\eta}_x$	Perturbación en ejes móviles, en términos de velocidades, presente en el eje X
$\dot{\eta}_y$	Perturbación en ejes móviles, en términos de velocidades, presente en el eje Y
$\dot{\eta}_\theta$	Perturbación en ejes móviles, presente la orientación θ
x_i^{i+1}	Distancia relativa x entre el robot líder y el robot seguidor.
y_i^{i+1}	Distancia relativa y entre el robot líder y el robot seguidor.
x_i^τ	Distancia relativa x entre el robot líder y el robot virtual.
y_i^τ	Distancia relativa y entre el robot líder y el robot virtual.
x_τ^{i+1}	Distancia relativa x entre el robot seguidor y el robot virtual.
y_τ^{i+1}	Distancia relativa y entre el robot seguidor y el robot virtual.
\dot{x}_i^{i+1}	Dinámica relativa x entre el robot líder y el robot seguidor.
\dot{y}_i^{i+1}	Dinámica relativa y entre el robot líder y el robot seguidor.
\dot{x}_i^τ	Dinámica relativa x entre el robot líder y el robot virtual.
\dot{y}_i^τ	Dinámica relativa y entre el robot líder y el robot virtual.
\dot{x}_τ^{i+1}	Dinámica relativa x entre el robot seguidor y el robot virtual.
\dot{y}_τ^{i+1}	Dinámica relativa y entre el robot seguidor y el robot virtual.

Contenido

Resumen	III
Abstract	V
Agradecimientos	VII
Nomenclatura y abreviaturas	IX
Contenido	XIII
Lista de figuras	XVII
Lista de tablas	XIX
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	3
1.1.1. Robot móvil	3
1.1.2. Modelo cinemático	4
1.1.3. Perturbación	5
1.1.3.1. Tipos de perturbaciones	5
1.1.3.2. Patinado	5
1.1.3.3. Deslizamiento	5
1.1.4. Estabilidad por Lyapunov	5
1.1.5. Estrategias de seguimiento	6
1.1.6. Estrategias de control	6
1.1.6.1. Ecuaciones de Control	7
1.2. Estado del arte	7
1.3. Motivación	8
1.4. Objetivos	8
1.4.1. Objetivo general	8
1.4.2. Objetivos específicos	9
1.5. Justificación	9
1.6. Planteamiento del problema	10
1.7. Organización de la tesis	10

2. Modelos Cinemático	11
2.1. Robot móvil tipo (2,0)	11
2.2. Estrategias de seguimiento	14
2.2.1. Seguimiento hacia adelante y seguimiento hacia atrás	14
2.2.2. Problema de formación con trayectoria retardada	16
2.2.3. Hipótesis sobre las velocidades del robot líder	18
2.3. Implementación del problema de formación	18
2.4. Perturbaciones consideradas	20
2.4.1. Naturaleza de la perturbación	20
2.4.2. Efectos de la perturbación	20
2.4.3. Obtención de la perturbación	21
2.5. Conclusiones del capítulo	22
3. Perturbación externa afectando una formación Líder-Seguidor	23
3.1. Problema de formación líder-seguidor	23
3.2. Consideración de perturbaciones en el modelo cinemático del robot líder	26
3.3. Simulaciones numéricas	28
3.3.1. Simulación 1: Formación líder-seguidor mediante tiempos de separación	30
3.3.2. Simulación 2: Formación líder-seguidor mediante tiempos de separación con presencia de perturbaciones externas	33
3.4. Conclusiones del capítulo	35
4. Esquema de estimación de perturbación	37
4.1. Perturbaciones en coordenadas globales	37
4.2. Esquema de estimación de perturbaciones	39
4.3. Solución alterna al problema de estimación de perturbaciones	40
4.4. Problema líder-seguidor mediante tiempo de separación	41
4.4.1. Dinámica relativa retrasada considerando perturbaciones	43
4.5. Solución basada en la dinámica retrasada	45
4.6. Convergencia de $X_{i\tau}^{i+1}$ utilizando la dinámica perturbada	48
4.7. Obtención alternativa de la velocidad angular	49
4.8. Simulaciones numéricas	51
4.8.1. Simulación sin estimación de la perturbación	51
4.8.2. Simulación con compensación de la perturbación	55
4.9. Conclusiones del capítulo	57
5. Fase Experimental	61
5.1. Plataforma experimental	61
5.2. Computadora central	62
5.2.1. Robot Operating System (ROS)	62
5.3. Conexión VRPN	63
5.3.1. Robots móviles considerados	64

5.3.2. Sistema Optitrack	64
5.4. Experimento 1: Formación líder-seguidor sin estimaciones de la perturbación. .	67
5.4.1. Seguimiento de trayectoria sin la presencia de perturbaciones externas .	67
5.4.2. Seguimiento de trayectoria con la presencia de perturbaciones externas.	74
5.5. Experimento 2: Formación líder-seguidor con compensación de la perturbación.	81
5.6. Conclusiones del capítulo.	83
6. Conclusiones y perspectivas	89
6.1. Conclusiones	89
6.2. Trabajo futuro	90

Lista de Figuras

1.1. Tipos de Robots	3
1.2. Tipos de Ruedas	4
2.1. Ejemplo de robot móvil diferencial tipo (2,0).	12
2.2. Diagrama del robot móvil diferencial.	13
2.3. Estrategia de formación líder-seguidor con mediciones hacia atrás.	15
2.4. Estrategia de seguimiento hacia adelante.	15
2.5. Resultados de ambas estrategias de seguimiento.	16
2.6. Estrategia de seguimiento con tiempo de separación implementando la medición de las distancias relativas.	17
2.7. Esquema líder-seguidor con referencia global y en los ejes locales $X_{i+1} - Y_{i+1}$	19
2.8. Diagrama del desplazamiento en la trayectoria.	21
2.9. Ejemplos de perturbaciones tipo Gauss.	22
3.1. Esquema líder-seguidor con distancias relativas.	24
3.2. Formación líder-seguidor.	26
3.3. Imagen retrasada R_τ del robot líder τ unidades de tiempo.	27
3.4. Perturbaciones presentes durante la simulación.	30
3.5. Trayectoria en el plano X-Y	31
3.6. Posición y orientación de los robots	32
3.7. Errores de seguimiento	32
3.8. Velocidad angular y lineal de los robots.	33
3.9. Trayectoria en el plano X-Y con la presencia de perturbaciones externas.	34
3.10. Posición y orientación de los robots ante la presencia de una perturbación externa.	34
3.11. Errores de seguimiento ante la presencia de una perturbación externa.	35
3.12. Velocidad angular y lineal ante la presencia de una perturbación externa.	36
4.1. Vectores de perturbación $\dot{\eta}_{i_x}, \dot{\eta}_{i_y}, \dot{\eta}_{i_\theta}$ en ejes móviles.	40
4.2. Formación líder-seguidor basada en tiempo de retardo.	42
4.3. Medición entre el robot líder y el robot con retardo τ	43
4.4. Distancia geométrica $X_{1\tau}^{i+1}$	46
4.5. Medición entre el robot seguidor y el robot con retardo τ	49
4.6. Perturbaciones desconocidas $\dot{\gamma}_i(t)$ y perturbaciones estimadas $\dot{\eta}_i(t)$	53
4.7. Velocidades lineales v_i y angulares ω_i en la formación.	53
4.8. Posiciones y orientaciones de cada robot en los ejes inerciales.	54

4.9. Dinámica relativa entre robots.	54
4.10. Errores de seguimiento entre los robots.	55
4.11. Trayectoria en el plano $X - Y$ sin compensación de la perturbación	56
4.12. Perturbación empleada	56
4.13. Posición y orientación de los robots.	57
4.14. Dinámica relativa entre robots	58
4.15. Errores de seguimiento entre los robots	58
4.16. Trayectoria en el plano $X - Y$ sin compensación de la perturbación	59
5.1. Esquema general de la plataforma experimental	62
5.2. Representación del sistema basado en nodos de ROS.	64
5.3. Robots diferenciales Turtlebot 3, en sus modelos Waffle PI y Burger	65
5.4. Elementos principales del sistema Optitrack, conformado por las cámaras modelo Flex 3 y su software para seguimiento del movimiento Motive.	66
5.5. Muestra del colocado de los marcadores para la detección por el software, mostrando la elección de figuras antisimétricas evitando de esta forma errores en la detección.	66
5.6. Evolución en el plano $X - Y$ de la formación líder-seguidor sin consideración de perturbaciones.	68
5.7. Velocidad lineal presentada por ambos robots durante la evaluación experimental	68
5.8. Evolución experimental de la velocidad angular de ambos robots	69
5.9. Evolución de las posiciones en las ordenadas X y Y de ambos robots en el tiempo.	70
5.10. Orientación de ambos robots a lo largo de la evaluación experimental.	71
5.11. Evolución de las distancias relativas entre el robot líder y el robot seguidor a lo largo del seguimiento de trayectoria.	72
5.12. Errores de seguimiento presentados durante el seguimiento de la trayectoria sin la presencia de perturbaciones.	73
5.13. Evaluación en el plano $X - Y$ del experimento con la presencia de perturbaciones.	75
5.14. Velocidad lineal presentada por ambos robots durante la evaluación experimental con la presencia de perturbaciones.	75
5.15. Evaluación experimental de la velocidad angular de ambos robots.	76
5.16. Evolución de las posiciones en las ordenadas $x_i(t)$ y $y_i(t)$ de ambos robots en el tiempo.	77
5.17. Orientación de ambos robots a lo largo de la evaluación experimental.	78
5.18. Evolución de las distancias relativas entre el robot líder y el robot seguidor a lo largo del seguimiento de trayectoria.	79
5.19. Errores de seguimiento presentados durante el seguimiento de la trayectoria sin la presencia de perturbaciones.	80
5.20. perturbaciones desconocidas $\dot{\gamma}_i$	82
5.21. Estimación de las perturbaciones $\dot{\eta}_i$	83
5.22. Evolución en el plano $X - Y$ con la compensación de perturbaciones	84

5.23. Velocidad lineal presentada por ambos robots durante la evaluación experimental implementando la estimación de las perturbaciones.	84
5.24. Evaluación experimental de la velocidad angular implementando la estimación de la perturbación.	85
5.25. Evolución de las posiciones en las ordenadas X y Y de ambos robots con la estimación de la perturbación.	86
5.26. Orientación de ambos robots a lo largo de la evaluación experimental implementando la estimación de las perturbaciones.	87
5.27. Errores de seguimiento presentados durante el seguimiento de la trayectoria con la estimación de las perturbaciones.	88

Lista de Tablas

3.1. Parámetros iniciales de los robots.	29
3.2. Parámetros de la perturbación.	30
4.1. Parámetros iniciales de los robots.	52
5.1. Parámetros iniciales de los robots.	65
5.2. Parámetros iniciales de los robots.	67
5.3. Parámetros iniciales de los robots.	74
5.4. Parámetros iniciales de los robots.	81

Capítulo 1

Introducción

En los últimos años, uno de los principales problemas que podemos encontrar tanto en las grandes ciudades como en la industria ha sido la demanda de productos y servicios, lo que genera una necesidad de servicios de transporte o abastecimiento capaces de satisfacer todas las necesidades, cruciales para el desarrollo económico [1]. Se estima que más del 60 % de todo el transporte de mercancías se realiza a través de carreteras, situación que puede generar congestión vial, ocasionando demoras y accidentes [2].

Por estas razones, se han buscado soluciones para resolver todos aquellos problemas de circulación, que van desde normas y políticas restrictivas, desarrollo de sistemas de gestión y control vehicular, hasta, en acciones más recientes, la implementación de la navegación autónoma. Esta última se basa en optimizar el flujo de vehículos en las carreteras, considerando la distancia entre vehículos, logrando así que estos mantengan una velocidad de avance uniforme. Entre algunos de sus beneficios se encuentran el ahorro de combustible, la reducción de gases de efecto invernadero y la disminución, o en algunos casos, la prevención de accidentes [3], [4].

Lo anterior se ha realizado en pelotones de vehículos con control de crucero, principalmente camiones pesados, considerando el control de crucero adaptativo (ACC) o esquemas del tipo adaptativo como los CACC (Control de Crucero Adaptativo Cooperativo) [5].

Sin embargo, como se mencionó al inicio, este tema es de igual interés para el ámbito industrial, donde los robots móviles son ampliamente empleados para realizar tareas de producción, distribución, atención a problemas o abastecimiento de materias primas. Algunos ejemplos de dichas aplicaciones se pueden encontrar en los robots de Kiva Systems [6], donde los robots son empleados para transportar estantes completos desde el inventario directamente a los trabajadores, permitiendo así un ahorro de tiempo al evitar que los trabajadores se desplacen, aumentando así la producción y eficiencia. Otro uso es el visto en [7], donde los robots pueden ser usados para detectar y responder a incendios de manera más eficiente, o una de las más comunes es el seguimiento de un líder para completar tareas en común [8].

Cabe resaltar que los robots móviles poseen una diversa variedad de modelos y clasificaciones, la cual depende principalmente del entorno donde se requiera su apoyo, ya que pueden ser empleados tanto en entornos terrestres, acuáticos o aéreos, siendo los de mayor interés para el presente trabajo los robots móviles terrestres con ruedas, los cuales están diseñados para desplazarse sobre superficies terrestres utilizando ruedas como medio de locomoción. Estos robots son muy comunes debido a su simplicidad y eficiencia en terrenos planos y duros [9].

A continuación, se presenta una lista de los tipos de robots móviles que se pueden encontrar actualmente, los cuales se observan en la Figura (1.1), junto con una breve descripción de cada uno de ellos:

- **Robots (2,0):** Estos robots tienen dos ruedas motrices y ninguna rueda de apoyo. Son conocidos como **robots diferenciales**. Cada rueda puede moverse de manera independiente, lo que permite giros precisos y maniobras en espacios reducidos. Son comunes en aplicaciones de investigación y educación debido a su simplicidad y versatilidad.
- **Robots (3,0):** También conocidos como **robots omnidireccionales**. Estos robots tienen al menos tres ruedas motrices, lo que les proporciona una mayor estabilidad y tracción en comparación con los robots diferenciales. Son menos comunes, pero pueden ser útiles en terrenos más difíciles donde se requiere una mayor capacidad de tracción.
- **Robots (1,2):** Conocidos como **robots triciclo** o **robots triciclo motorizado**. Este tipo de robot tiene una rueda motriz y dos ruedas de apoyo. Un ejemplo típico es el robot triciclo, donde la rueda delantera es motriz y las dos traseras proporcionan estabilidad. Este diseño es simple y eficiente para aplicaciones en interiores y terrenos planos.
- **Robots (2,1):** A menudo llamados **robots de tracción diferencial con rueda de apoyo**. Estos robots tienen dos ruedas motrices y una rueda de apoyo. Son similares a los robots diferenciales, pero con una rueda adicional para mejorar la estabilidad. Este diseño es útil en aplicaciones donde se requiere un equilibrio adicional sin sacrificar la maniobrabilidad.
- **Robots (1,1):** Este tipo de robot tiene una rueda motriz y una rueda de apoyo. Es menos común debido a su limitada estabilidad y capacidad de maniobra. Sin embargo, puede ser útil en aplicaciones específicas donde el espacio y el peso son factores críticos. Pueden ser referidos como **robots monociclo con rueda de apoyo**.
- **Robots Ackerman:** El sistema de dirección Ackerman es similar al utilizado en los automóviles. Tiene dos ruedas delanteras que giran para dirigir el robot y dos ruedas traseras motrices. Este diseño es ideal para aplicaciones que requieren movimientos suaves y precisos, como la navegación en entornos urbanos.
- **Robots Skid Steer:** Estos robots tienen todas las ruedas motrices y giran al variar la velocidad de las ruedas en cada lado, similar a un tanque. Son robustos y pueden manejar terrenos difíciles, lo que los hace ideales para aplicaciones de exploración y rescate.

Para el desarrollo del presente trabajo, se hará énfasis en el estudio del modelo y control del robot móvil diferencial. Que suelen ser más usados gracias a su practicad y modelo cinemático que facilita su empleo en diversas aplicaciones, tomando como punto de interés una formación de un pelotón al cual se le podrán asignar la misión de realizar un seguimiento de trayectoria simulando ya sea una línea de suministro o el control vehicular de un grupo de automóviles en las zonas urbanas.

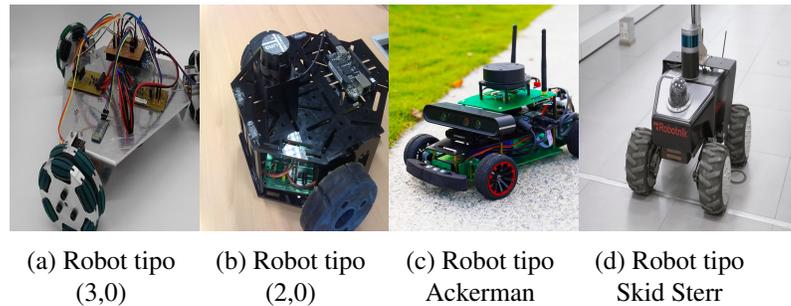


Figura 1.1: Tipos de Robots

1.1. Antecedentes

Como se mencionó anteriormente, actualmente se buscan alternativas las cuales puedan facilitar la solución de tareas en los diversos ámbitos (social, industrial, entre otros), entre las técnicas de solución podemos encontrar algunos métodos como el CACC o el ACC, las políticas de separación o sincronizan.

Por ende, para poder plantear una solución a los problemas es necesario abordar algunos temas importantes que permitan facilitar la comprensión de dichas soluciones.

1.1.1. Robot móvil

Un robot móvil se describe como un sistema robótico capaz de moverse de manera autónoma en su entorno. Estos robots utilizan modelos matemáticos para describir su movimiento y cinemática diferencial para entender cómo se desplazan y orientan. Además, emplean sensores y actuadores para interactuar con su entorno, lo que les permite navegar y localizarse en espacios desconocidos o dinámicos [10].

Como se mencionó anteriormente, pueden existir diferentes clases de robots móviles, los cuales dependen del entorno donde se requiera su ayuda, pero para fines del presente trabajo se estudiarán los modelos terrestres que poseen ruedas, donde es importante mencionar la importancia que llegan a tener estas mismas en lo que respecta a la locomoción, ya que en base al tipo de rueda, el movimiento de los robots móviles puede contar con mayor libertad de movimiento o recibir limitaciones en el mismo [11].

Con respecto a las ruedas, podemos encontrar diversos tipos los cuales se muestran en la Figura 1.2, mencionando algunos ejemplos tenemos:

- **Ruedas Estándar:** Son las más comunes y se utilizan en robots que requieren movimientos simples y directos. Estas ruedas giran alrededor de un eje fijo y son ideales para superficies planas y lisas.
- **Ruedas Castor:** Estas ruedas tienen dos grados de libertad, permitiendo rotación alrededor de una articulación de dirección. Son útiles para maniobras en espacios reducidos y se encuentran en robots que necesitan cambiar de dirección con frecuencia.

- **Ruedas Mecanum:** Permiten movimientos omnidireccionales gracias a los rodillos montados en ángulo alrededor de su perímetro. Son ideales para aplicaciones que requieren alta maniobrabilidad en todas las direcciones.
- **Ruedas Omni:** Similar a las ruedas mecanum, estas ruedas tienen rodillos que permiten movimientos en múltiples direcciones. Son utilizadas en robots que necesitan moverse lateralmente sin cambiar su orientación.
- **Ruedas Esféricas:** Ofrecen una maniobrabilidad superior al permitir movimientos en cualquier dirección sin restricciones. Aunque son menos comunes, son muy útiles en aplicaciones que requieren movimientos complejos y precisos.



Figura 1.2: Tipos de Ruedas

1.1.2. Modelo cinemático

Un modelo cinemático es una representación matemática que describe la relación entre las velocidades de las ruedas de un robot móvil y las velocidades del robot en su conjunto. Este modelo es crucial para entender y controlar el movimiento del robot en su entorno. Los modelos cinemáticos gobiernan la relación entre las velocidades de las ruedas y las velocidades del robot, permitiendo la planificación de movimientos y el control de retroalimentación para robots móviles con ruedas [10, 12].

La importancia del modelado cinemático en la robótica móvil radica en su capacidad para modelar el movimiento general del cuerpo del robot y los movimientos internos de los mecanismos asociados con la suspensión, dirección, propulsión e implementos. Esto es esencial para diseñar y controlar robots que puedan navegar de manera eficiente y precisa en diversos entornos [13].

Además, los modelos cinemáticos permiten la optimización de la configuración del robot y la detección de colisiones, mejorando así la seguridad y la eficiencia operativa. Estos modelos son fundamentales para el desarrollo de robots móviles avanzados que pueden operar en entornos dinámicos y complejos [14, 15].

1.1.3. Perturbación

Una perturbación en la trayectoria se refiere a cualquier fuerza o influencia externa que altera el movimiento previsto de un objeto. En el contexto de la robótica móvil y la dinámica orbital, las perturbaciones pueden incluir factores como la resistencia del aire, las irregularidades gravitacionales, las fuerzas de marea, y otras influencias externas que desvían al objeto de su trayectoria ideal. Estas perturbaciones son cruciales de considerar para mantener la precisión y estabilidad en la navegación y el control de trayectorias [16–18].

1.1.3.1. Tipos de perturbaciones

Al conocer que pueden existir diversos tipos de perturbaciones y que estas pueden afectar de manera significativa el seguimiento de una trayectoria, es importante resaltar que debido al punto de interés del presente trabajo, se abordan dos tipos de perturbaciones las cuales suelen ser comunes en los robots móviles terrestres con ruedas, las cuales son las perturbaciones de tipo deslizamiento o patinado las cuales son fenómenos críticos que afectan la precisión y estabilidad del movimiento de los robots. A continuación, se describen estos tipos de perturbaciones:

1.1.3.2. Patinado

El patinado se refiere a la pérdida de tracción en la dirección de avance, resultando en que las ruedas giren sin desplazar el robot adecuadamente. Este fenómeno es común en superficies con baja fricción, como arena o barro, y puede ser causado por aceleraciones o desaceleraciones bruscas. El patinado afecta la capacidad del robot para seguir una trayectoria precisa y puede llevar a un desgaste prematuro de las ruedas y otros componentes mecánicos [19, 20].

1.1.3.3. Deslizamiento

El deslizamiento ocurre cuando las ruedas del robot pierden tracción lateral, lo que provoca un movimiento no deseado en esa dirección. Este fenómeno puede ser causado por superficies resbaladizas, como hielo o aceite, o por una fuerza lateral excesiva.

El deslizamiento afecta la precisión del control del robot y puede desviar su trayectoria planificada. Es crucial considerar este fenómeno en el diseño de sistemas de control para asegurar la estabilidad y precisión del robot [20, 21].

1.1.4. Estabilidad por Lyapunov

La teoría de estabilidad de Lyapunov es fundamental en la teoría de sistemas y la ingeniería. Esta teoría se utiliza para determinar la estabilidad de puntos de equilibrio en sistemas dinámicos. Un punto de equilibrio es estable si todas las soluciones que comienzan cerca de este punto permanecen cerca de él. Si además, estas soluciones tienden hacia el punto de equilibrio a medida que el tiempo tiende a infinito, el punto de equilibrio se considera asintóticamente estable [22].

Consideremos un sistema dinámico descrito por la ecuación diferencial:

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.1)$$

donde $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función localmente Lipschitz en un dominio $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Sea $x^* = 0$ un punto de equilibrio, es decir, $f(x^*) = 0$. Para estudiar la estabilidad de x^* , se define una función $V : D \rightarrow \mathbb{R}$, conocida como función de Lyapunov, que satisface las siguientes condiciones:

1. $V(x) > 0$ para $x \neq x^*$ y $V(x^*) = 0$.
2. La derivada de V a lo largo de las trayectorias del sistema, $\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x)$, es negativa semidefinida, es decir, $\dot{V}(x) \leq 0$.

Si estas condiciones se cumplen, el punto de equilibrio x^* es estable. Si además $\dot{V}(x) < 0$ para $x \neq x^*$, el punto de equilibrio es asintóticamente estable [23].

1.1.5. Estrategias de seguimiento

El seguimiento de trayectorias es una tarea esencial en la robótica móvil, donde el objetivo es que un robot siga una trayectoria predefinida con precisión. Esto implica el uso de diversas estrategias de control para asegurar que el robot pueda ajustar su movimiento en tiempo real y mantenerse en la trayectoria deseada.

El seguimiento de trayectorias se basa en la capacidad del robot para percibir su entorno y medir su posición y orientación en relación con la trayectoria deseada. Los sensores juegan un papel crucial en esta tarea, proporcionando datos en tiempo real que permiten al robot corregir su curso y evitar obstáculos. Los actuadores, como motores y servomecanismos, ejecutan las órdenes de movimiento calculadas por la unidad de procesamiento del robot [24].

Las aplicaciones del seguimiento de trayectorias en robótica móvil son numerosas y variadas. En la navegación autónoma, por ejemplo, un robot móvil puede utilizar una combinación de sensores y algoritmos de control para seguir una trayectoria predefinida mientras evita obstáculos. Esto es especialmente útil en entornos dinámicos y complejos, donde la capacidad de adaptarse rápidamente a cambios en el entorno es crucial [24].

Además, el seguimiento de trayectorias es fundamental en tareas de manipulación de objetos y en la interacción con humanos. En la manipulación de objetos, un robot puede necesitar seguir una trayectoria precisa para recoger y colocar objetos en ubicaciones específicas. En la interacción con humanos, el seguimiento de trayectorias permite a los robots moverse de manera segura y eficiente en entornos compartidos con personas, evitando colisiones y asegurando una cooperación fluida [25].

1.1.6. Estrategias de control

Una estrategia de control para robótica móvil se refiere a los métodos y algoritmos utilizados para dirigir y controlar el movimiento de robots móviles. Estas estrategias son esenciales para

asegurar que los robots puedan navegar de manera autónoma y precisa en su entorno, evitando obstáculos y alcanzando objetivos específicos. Para fines de este trabajo se propondrá una estrategia de control inspirada en el trabajo de Samson [26] diseñada para el caso de ejes cartesianos.

La Ley de Control de Samson [26] es una estrategia de control utilizada en robótica móvil, especialmente para robots con ruedas. Esta ley se basa en la teoría de Lyapunov y se utiliza para estabilizar y controlar la trayectoria de un robot móvil. Se define mediante una serie de ecuaciones que relacionan las velocidades lineales y angulares del robot con los errores de posición y orientación [27].

1.1.6.1. Ecuaciones de Control

Para un robot móvil con ruedas descrito en coordenadas cartesianas puede definirse la retroalimentación [27]

$$v = k_1 \cos(\theta_e) e_x + k_2 e_y \quad (1.2)$$

$$\omega = k_3 \theta_e + k_4 \sin(\theta_e) e_x \quad (1.3)$$

donde:

- v es la velocidad lineal del robot.
- ω es la velocidad angular del robot.
- $e_x = x_d - x_r$ y $e_y = y_d - y_r$ son los errores de posición en los ejes x e y , respectivamente, siendo x_d, y_d la posición deseada y x_r, y_r la posición real.
- θ_e es el error de orientación.
- k_1, k_2, k_3, k_4 son ganancias de control que deben ser ajustadas para asegurar la estabilidad del sistema [27].

1.2. Estado del arte

Actualmente, la navegación autónoma ha experimentado un notable avance gracias a sistemas de formación más sofisticados y versátiles, estos sistemas permiten la coordinación y cooperación entre múltiples unidades. Gracias a esto es posible dar una solución a diversas problemáticas modernas que se presentan o realizar mejoras en las soluciones con las que se cuenta actualmente. Mencionando algunos ejemplos en las grandes urbes, o en el ámbito relacionado a los transportes civiles sin olvidar aquel relacionado a la industria. En [28] se muestra la evaluación del potencial de ahorro de combustible en la formación de camiones semiautomatizados, al reducir la resistencia aerodinámica al agrupar vehículos y disminuir la distancia entre ellos mediante el uso de acoplamiento electrónico, lo que permite que varios vehículos aceleren o frenen simultáneamente.

Considerando la perspectiva industrial, la implementación de robots móviles como parte de los procesos de producción, mediante un esquema de líder-seguidor ya sea en la transportación o distribución de insumos dentro del complejo, se ejemplifica en [29] la utilización de los enjambres de robots para distribuir los artículos del inventario aumentando la eficiencia de la producción.

Diversos autores abordan el tema con distintos enfoques, por ejemplo: [30] desarrolla una ley de control para mantener una separación inter-vehicular constante enfocándose en la estabilidad del pelotón [30]; [31] implementa un control con una separación constante de tipo Control Crucero Adaptativo Cooperativo (CACCC) así como la prueba de estructuras de comunicación.

Otra manera de abordar el tema es el análisis del modelo cinemático para un vehículo, donde se han desarrollado esquemas para robots diferenciales basados en tiempos de separación constante o variante [32], [33]. Aunque una de las principales limitantes de dichos trabajos es que todo el desarrollo se realiza mediante los ejes inerciales, lo cual, limita la capacidad de solución unicamente a entornos controlados de laboratorio. Siendo una alternativa lo visto en [34], donde se presenta una estrategia de formación en cadena para un conjunto de n robots móviles de tracción diferencial. La estrategia se basa en marcos móviles ubicados en los vehículos, de modo que la posición de un robot R_i se determina con respecto al marco ubicado en el robot R_{i+1} . A su vez, para corregir las limitantes relacionadas a las coordenadas globales, se implementan sistemas de visión artificial los cuales permiten llevar este problema fuera de un laboratorio [35]. Sin embargo, las estrategias anteriormente mencionadas siguen contando con un problema, el cual es la falta de compensación ante perturbaciones que pudiesen presentarse en uno de los robots.

1.3. Motivación

La formación líder-Seguidor en los robots móviles, ha sido ampliamente utilizada y estudiada, ya sea principalmente mediante una referencia global o en algunos casos presidiendo de estas referencias, sin embargo no se ha considerado dentro de los modelos las perturbaciones sufridas por los integrantes de la formación. Debido a esto, se propone una variación del modelo cinemático del robot móvil tipo (2,0), la cual cuente con una estimación que proporcione como beneficio, asegurar un seguimiento óptimo de trayectorias sin importar que alguno de los miembros pueda sufrir una perturbación. Por lo que este trabajo propone un esquema basado en el modelo cinemático de un robot diferencial, que ofrece ventajas en el control de trayectorias, ya que al poder estimar las perturbaciones que lleguen a presentarse, se realizaran las correcciones pertinentes en la trayectoria de los seguidores garantizando un seguimiento correcto de caminos.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo general

Considerando ejes móviles de referencia sobre los robots, desarrollar, implementar y validar un sistema capaz de detectar las perturbaciones de tipo patinado o deslizamiento que alguno de

los integrantes del pelotón sufra, las cuales puedan presentarse durante el seguimiento de una trayectoria deseada.

1.4.2. Objetivos específicos

- Obtener el modelo cinemático del robot móvil.
- Obtener un modelo cinemático que describa las dinámicas relativas entre un par de robots.
- Inducir las perturbaciones en las ecuaciones del modelo cinemático.
- Considerando ejes móviles realizar la estimación de las posibles perturbaciones que pueda sufrir el pelotón.
- Inyectar las perturbaciones en un robot virtual que proveerá la trayectoria deseada al robot seguidor.
- Implementar un observador para obtener información de los estados pasados y poder realizar un seguimiento correcto de la trayectoria, se desea que el robot seguidor siga la trayectoria deseada por el robot líder retrasada τ unidades de tiempo.
- Analizar la dinámica de los errores de seguimiento ante la presencia de perturbaciones para validar su convergencia a cero.
- Realizar una evaluación experimental para verificar la eficiencia del esquema de observación y seguimiento de trayectorias en la formación líder-seguidor considerada.

1.5. Justificación

Debido a la gran cantidad de aplicaciones que se le pueden dar a los robots móviles, en la actualidad se han estudiado y realizado diversas formas de control para poder cumplir con los objetivos planteados para todos los problemas presentes en sus aplicaciones, sin embargo, uno de los problemas que poco se aborda durante el seguimiento de trayectorias, es analizar y tratar de reducir las perturbaciones externas que se le puedan presentar a los robots, dichas perturbaciones pueden ser un patinado, la evasión de un objeto no previsto en la trayectoria o el cambio brusco de la dirección debido a situaciones externas.

Si se consideran dichas perturbaciones y estas pueden ser implementadas en los modelos cinemáticos de los robots empleados en el pelotón, se puede generar una corrección de la trayectoria de los seguidores de una manera mas suave, la cual mejoraría la eficiencia de los pelotones evitando pérdidas de tiempo en las correcciones de trayectoria realizadas por los robots.

Es importante destacar que existen pocos trabajos los cuales consideran la estimación de las perturbaciones dentro de los modelos cinemáticos de los robots móviles de tipo diferencial, por lo cual se encuentra un área de oportunidad para el análisis y trabajo futuro del presente proyecto.

1.6. Planteamiento del problema

Como ya se presentó anteriormente, la problemática a solucionar en este trabajo de tesis es desarrollar una estrategia de control, la cual considere una estimación de los valores de perturbación que se presentan en los robots móviles de tipo diferencial, durante un seguimiento de trayectoria, sin la consideración de ejes de referencia globales.

Por lo tanto, considere una cadena de robots móviles de tipo diferencial R_i , donde $i = 1, 2, 3, \dots, n$ es el número de robot en la cadena, los cuales poseen una trayectoria en el plano $X - Y$, la cual es producida por las velocidades $v_i(t)$ y $\omega_i(t)$.

Considerando que durante el seguimiento de la trayectoria se presentan perturbaciones (γ_x, γ_y) las cuales pueden afectar el desplazamiento de cualquier miembro de la cadena, se requiere diseñar una estrategia de control, la cual sea capaz de estimar y compensar o eliminarlas, para de esta forma lograr un correcto seguimiento de la trayectoria.

1.7. Organización de la tesis

Este trabajo de tesis se desarrolla de la siguiente manera.

En el Capítulo 2 se presenta el modelo cinemático del robot móvil que será empleado a lo largo de los siguientes capítulos, así como la estrategia de seguimiento y una breve descripción del tipo de perturbación que será considerada para el trabajo.

En el Capítulo 3 se aborda una visión más específica del tipo de robot elegido para su estudio, se definen las estrategias a seguir así como se realiza una introducción a la perturbación que será empleada durante el presente trabajo. Se realizan simulaciones numéricas para poder observar de esta forma los efectos de la perturbación en el seguimiento de trayectorias.

En el Capítulo 4 se realiza un análisis y estimación de las perturbaciones, considerando la obtención de la misma tanto en ejes globales, como en ejes locales, se realiza la implementación de esta estimación a la formación seleccionada, se verifica la convergencia de los errores de seguimiento a cero y finalmente se realizan pruebas mediante simulación numérica.

En el Capítulo 5 se describe la plataforma experimental utilizada y se presentan los experimentos realizados para la validación de la estimación de las perturbaciones.

Finalmente, en el Capítulo 6 se presentan las conclusiones generales de este trabajo de tesis así como las perspectivas a futuro para darle continuidad y mejorar el proyecto.

Capítulo 2

Modelos Cinemático

En el ámbito de la robótica móvil, los robots diferenciales han ganado una notable atención debido a su simplicidad y versatilidad. Este capítulo se centra en el estudio de los robots diferenciales, abordando su modelo cinemático y la restricción no holónoma que los define.

Además, se explorarán diversas estrategias de seguimiento que se pueden emplear para guiar a estos robots a lo largo de trayectorias deseadas. Estas estrategias son esenciales para aplicaciones prácticas, donde la precisión y la eficiencia del movimiento son cruciales. Se revisarán trabajos previos que han contribuido significativamente al desarrollo de estas técnicas, proporcionando un contexto histórico y técnico para el lector.

Así mismo un aspecto de particular interés en este capítulo es la presentación de las perturbaciones que pueden afectar a los robots móviles diferenciales

2.1. Robot móvil tipo (2,0)

Los robots móviles como el que se muestra en la Figura 2.1 son sistemas robóticos que pueden desplazarse en distintos entornos y cuentan con distintas capacidades que les permiten ejecutar tareas complejas, ya sea de forma autónoma o controlados por un operador. Estos sistemas cuentan con sensores y actuadores que los dotan de capacidades para conocer el entorno y modificarlo. Los sensores son dispositivos que permiten recabar información del ambiente para su posterior procesamiento, mientras que los actuadores son dispositivos que dotan al robot de la capacidad de modificar su entorno.

En particular, los robots diferenciales o robots (2,0) son un tipo de robot móvil que ha ganado mucha relevancia en la robótica. Este tipo de robots se caracterizan por tener dos ruedas motrices y una o más ruedas de apoyo. Las ruedas motrices están colocadas en el mismo eje y cada una es controlada por un motor independiente. Esto permite que el robot pueda cambiar de dirección girando las ruedas a velocidades diferentes.

El control de un robot diferencial puede realizarse de varias maneras, una de las más comunes es utilizando un punto central en el eje de las ruedas. Además, estos robots pueden ser equipados con diversos sensores y actuadores para realizar tareas más complejas, como evitar obstáculos o seguir una trayectoria específica.

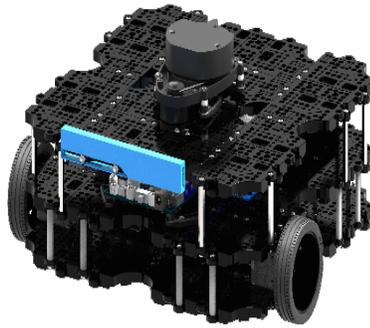


Figura 2.1: Ejemplo de robot móvil diferencial tipo (2,0).

Para poder lograr un control adecuado del robot tipo (2,0), se suele usar el modelo cinemático, empleándolo para un robot como el mostrado en la Figura 2.2, y siguiendo la metodología presentada en [36], [37] es posible obtener el modelo,

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= v_i \cos \theta_i \\ \dot{y}_i &= v_i \sin \theta_i \\ \dot{\theta}_i &= \omega_i\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde x_i e y_i corresponden a la posición cartesiana del “ i -ésimo robot” en el plano X-Y, θ_i corresponde a la orientación del robot con respecto al eje X y tanto v_i , ω_i corresponden a las velocidades lineales y angulares que representan las señales de control. Se asume que el robot se desplaza en una superficie plana libre de patinados o deslizamientos, por lo que se considera un contacto puntual de las ruedas y la superficie de trabajo.

Como un punto relevante para el estudio de estos robots, se debe tener siempre el concepto de la restricción no holónoma. Esta restricción se refiere a las limitaciones de velocidad en los movimientos de un robot que no pueden ser integradas en restricciones de posición. En otras palabras, un robot móvil diferencial no puede moverse libremente en todas las direcciones instantáneamente debido a su configuración y mecanismos de movimiento.

Para un robot móvil diferencial, la restricción no holónoma se manifiesta en su incapacidad para deslizarse lateralmente. Esto significa que el robot solo puede moverse hacia adelante o hacia atrás y girar sobre su eje, pero no puede desplazarse directamente hacia los lados. Esta característica impone desafíos adicionales en el diseño de trayectorias y en el desarrollo de algoritmos de control, ya que se deben considerar estas limitaciones al planificar los movimientos del robot.

Bajo estas consideración el robot móvil, dado por (2.1) satisface la restricción no-holónoma,

$$\dot{x}_i \sin \theta_i - \dot{y}_i \cos \theta_i = 0.\tag{2.2}$$

La cual deberá ser respetada en todo momento ya que los robots móviles tipo diferencial, como los robots con ruedas, tienen restricciones físicas inherentes debido a su diseño. Ignorar

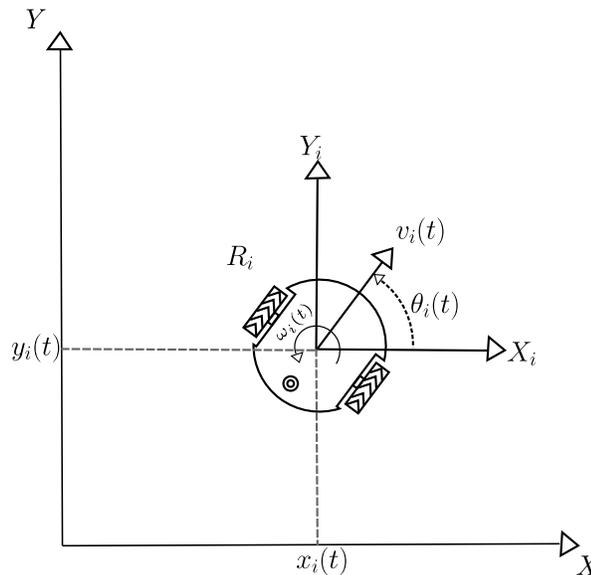


Figura 2.2: Diagrama del robot móvil diferencial.

estas restricciones puede llevar a modelos inexactos que no reflejan el movimiento real del robot, lo que puede resultar en errores significativos en la planificación y control de trayectorias.

Ahora bien, se puede observar que a pesar de que la posición y orientación del robot puede ser descrita a través de sus coordenadas $x(t)$, $y(t)$ y $\theta(t)$, se utilizan las velocidades para el control de un robot móvil tipo diferencial esto se debe a varios factores clave relacionados con la dinámica del movimiento y la implementación práctica del control como lo son:

Con respecto a la dinámica del movimiento,

- **Naturaleza dinámica del sistema:** La posición y orientación (x, y, θ) describen el estado del robot en un momento dado, pero no proporcionan información sobre cómo cambiará este estado en el tiempo. Las velocidades lineales y angulares (v y ω) describen cómo se está moviendo el robot y son esenciales para predecir su movimiento futuro.

Para la implementación del control,

- **Control en tiempo real:** En la práctica, los controladores de robots móviles operan en tiempo real y necesitan ajustar continuamente las velocidades para corregir la trayectoria del robot. Las velocidades son las variables de control que se pueden modificar directamente mediante los actuadores del robot (motores).
- **Respuesta rápida y precisa:** Controlar las velocidades permite una respuesta más rápida y precisa a los cambios en el entorno y a las perturbaciones. Ajustar las velocidades en lugar de las posiciones permite al controlador reaccionar de manera inmediata a las desviaciones de la trayectoria deseada.

- **Estabilidad y robustez:** Los algoritmos de control, como el control PID y el control basado en modelos, utilizan las velocidades para asegurar la estabilidad y robustez del sistema. Estos algoritmos ajustan las velocidades para minimizar el error entre la trayectoria deseada y la real, garantizando un seguimiento preciso.

En este trabajo se analiza el problema de formación en cadena de un conjunto de n robots diferenciales. Numerando el conjunto de robots de 1 a n , el análisis que se llevará a cabo, involucra un par de robots consecutivos en la formación, esto es, un robot líder R_i y un robot seguidor R_{i+1} .

2.2. Estrategias de seguimiento

Como se mencionó en el Capítulo 1, las estrategias de seguimiento tienen como objetivo que los robots sigan una trayectoria definida por el usuario. Una estrategia muy común en el uso de robots diferenciales es la estrategia líder-seguidor. Este enfoque en robótica móvil consiste en que un robot líder sigue una trayectoria predefinida, mientras que uno o más robots seguidores ajustan su movimiento para mantener una formación específica respecto al líder. Los objetivos principales de esta estrategia son mantener la formación, adaptarse a cambios en la trayectoria del líder y ser robustos ante errores de medición y dinámicas no modeladas.

La estrategia líder-seguidor es ampliamente utilizada en aplicaciones donde es crucial que un grupo de robots mantenga una formación específica mientras se desplaza. La capacidad de los robots seguidores para adaptarse a la trayectoria del líder y corregir su posición en tiempo real es fundamental para el éxito de estas misiones.

Dentro de la estrategia líder-seguidor, se pueden encontrar diversas metodologías para realizar el seguimiento. En las secciones posteriores se abordan algunas metodologías las cuales han sido empleadas en robots móviles de tipo diferencial.

2.2.1. Seguimiento hacia adelante y seguimiento hacia atrás

El seguimiento de trayectorias con robots diferenciales ha sido un tema ampliamente estudiado a lo largo de los años.

Un trabajo reciente, realizado por Infante-Jacobo [38] en su trabajo de tesis, presenta dos estrategias para mantener la formación en cadena, para ambas estrategias se requiere mantener una distancia de separación entre ambos robots mediante distancia relativas entre ambos robots.

La primera de estas estrategias es el seguimiento hacia atrás, donde, la obtención de la distancia de separación entre ambos robots será tomada con respecto al robot líder R_i , dichas distancias se pueden observar en la Figura 2.3, donde a través de mediciones a partir del líder se obtienen las distancias l_x y l_y las cuales rigen la distancia de separación, la cual, se desea exista entre ambos robots con la finalidad de evitar colisiones.

Dichas distancias son las encargadas de generar tanto los errores de seguimiento como la retroalimentación necesaria para obtener las velocidades que regirán el movimiento del robot seguidor.

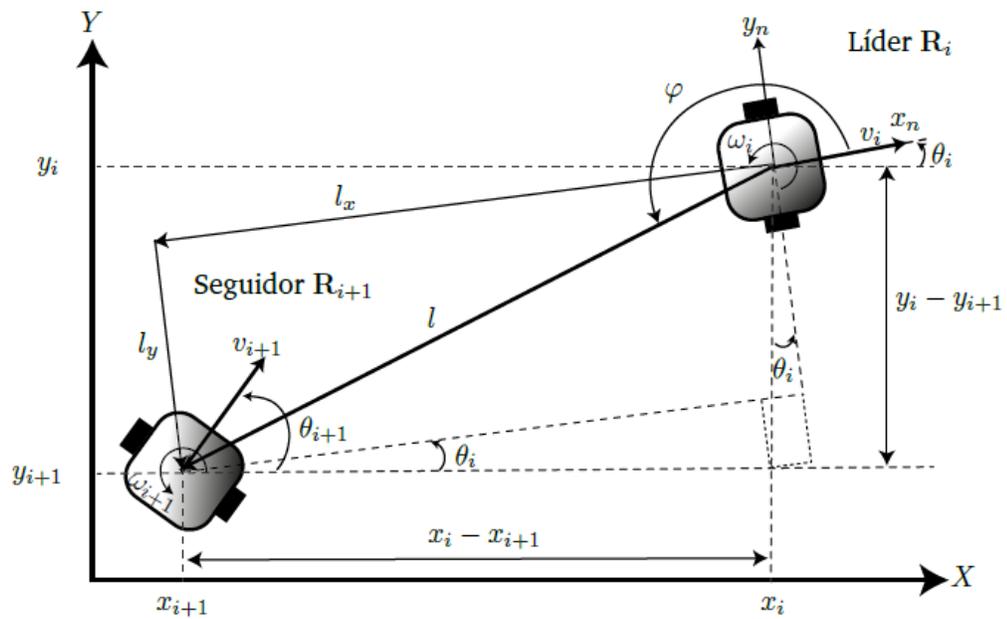


Figura 2.3: Estrategia de formación líder-seguidor con mediciones hacia atrás.

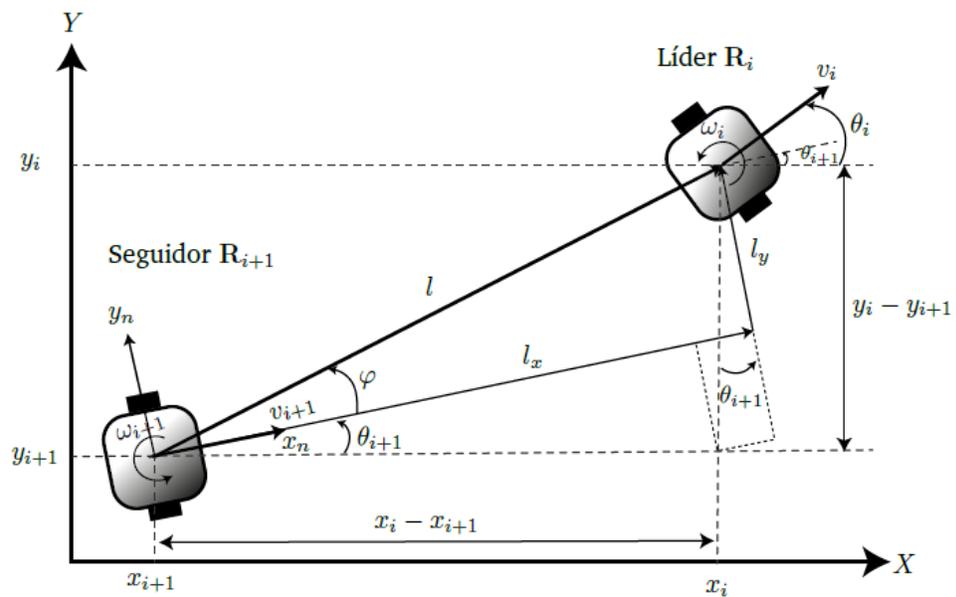


Figura 2.4: Estrategia de seguimiento hacia adelante.

Mientras que, su contraparte, el seguimiento hacia adelante, realiza las mismas mediciones, considerando esta vez las mediciones desde la perspectiva del seguidor (véase la Figura 2.4), siendo esta una forma más natural de poder realizar las mediciones. Infante-Jacobo muestra los resultados obtenidos de sus simulaciones numéricas, así como menciona las ventajas o desventajas de cada uno de estas estrategias.

Dentro de las simulaciones el autor proporciona una vista de como se realiza la estrategia de seguimiento, la cual mantienen en todo momento la distancia establecida, con la peculiaridad que, en el seguimiento de las curvas presentadas el robot seguidor no mantiene la misma trayectoria.

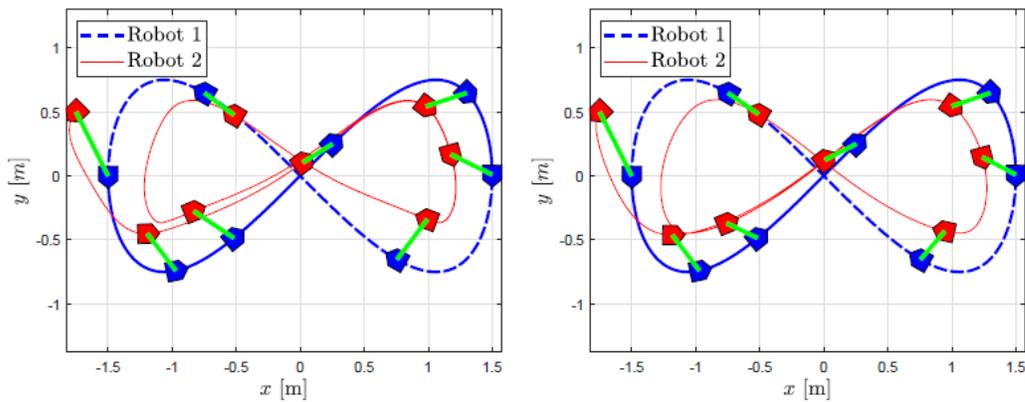


Figura 2.5: Resultados de ambas estrategias de seguimiento.

A pesar de que el seguidor no converge a la misma trayectoria del líder, se obtiene una ventana de posibilidades para dar solución a la problemática de seguimiento de trayectorias, mediante la medición de las distancias relativas.

2.2.2. Problema de formación con trayectoria retardada

Como se mencionó en la sección anterior, otra estrategia de solución para la formación líder-seguidor, es la consideración de una trayectoria retardada, como el trabajo presentado por Domínguez-Ortega [39], donde muestra una estrategia de control para un convoy de n robots móviles tipo (2,0), donde cada robot actúa como líder para el robot que le sigue, formando una cadena de vehículos. La estrategia se centra en mantener un tiempo variable de separación, $\tau(t)$, entre los robots. Este enfoque mejora el rendimiento del convoy en comparación con esquemas de separación de distancia fija o tiempo constante, y garantiza que no haya colisiones entre los robots.

Para esta estrategia, se emplea un robot virtual, el cual estará formado por los valores en el pasado del robot líder, es decir, se almacena la información referente a sus velocidades τ unidades de tiempo, las cuales posteriormente serán empleadas para generar la referencia para el seguidor,

Dicho trabajo proporciona una herramienta útil para el seguimiento de trayectorias ya que, al estar siguiendo una referencia virtual, se eliminan completamente los problemas de colisiones, así como garantizar que la formación en cadena se mantenga durante toda la trayectoria.

Dicha estrategia puede combinarse con lo realizado por Infante-Jacobo [40] y su cálculo de las distancias relativas, generando una estrategia de seguimiento la cual contempla tanto el tiempo de separación como la medición de las distancias relativas. Tomando como referencia la Figura 2.5, incluyendo un robot virtual a la formación, se puede garantizar una convergencia al esquema líder-seguidor de manera correcta.

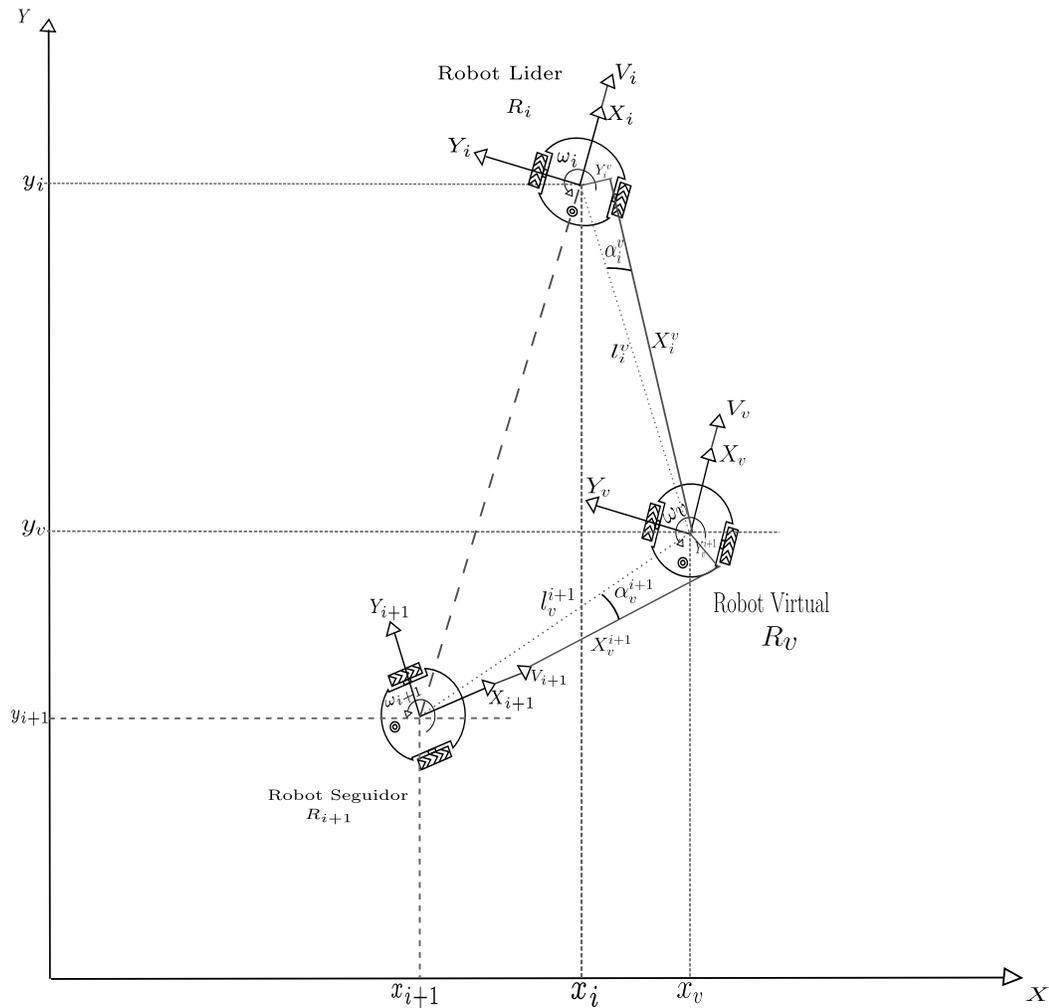


Figura 2.6: Estrategia de seguimiento con tiempo de separación implementando la medición de las distancias relativas.

2.2.3. Hipótesis sobre las velocidades del robot líder

Para analizar la formación en cadena, se considera que para cada par de robots consecutivos se tiene una formación líder-seguidor. En este contexto, el robot líder R_i describe una trayectoria en el plano X-Y generada por velocidades lineal y angulares acotadas de la siguiente forma:

$$\sup_{t \geq 0} v_i(t) = \bar{v}_i \quad \sup_{t \geq 0} \omega_i(t) = \bar{\omega}_i. \quad (2.3)$$

Estas condiciones aseguran que el movimiento del robot líder está limitado por velocidades máximas, lo que es crucial para garantizar la estabilidad y seguridad de la formación. La velocidad lineal máxima \bar{v}_i y la velocidad angular máxima $\bar{\omega}_i$ son parámetros que deben ser cuidadosamente seleccionados en función de las capacidades del robot y las características del entorno.

Bajo estas condiciones, se desea que el robot seguidor R_{i+1} siga la trayectoria del robot líder R_i con un retraso de τ unidades de tiempo. Esta formación se basa en un tiempo de separación, lo que significa que el seguidor ajusta su trayectoria para coincidir con la del líder después de un cierto retraso temporal. Este enfoque es útil en situaciones donde es necesario mantener una distancia segura entre los robots para evitar colisiones y permitir maniobras suaves.

Para implementar esta estrategia, es fundamental desarrollar algoritmos de control que permitan al robot seguidor ajustar su posición y velocidad en función de la trayectoria del líder. Estos algoritmos deben ser capaces de manejar las dinámicas no modeladas y los errores de medición, asegurando que el seguidor pueda corregir su trayectoria de manera eficiente.

Es importante notar que si la estrategia descrita se aplica a cada par de robots consecutivos en la formación, se obtendrá una formación en cadena de todos los robots. En este esquema, el robot seguidor R_{i+1} convergerá a la trayectoria retrasada de su robot líder R_i . La convergencia a la trayectoria retrasada implica que, a pesar de las perturbaciones y errores de medición, el seguidor será capaz de ajustar su posición y velocidad para alinearse con la trayectoria del líder después del tiempo de retraso τ .

2.3. Implementación del problema de formación

En este capítulo, se aborda el problema descrito anteriormente, considerando que no se tiene disponible, en el plano $X - Y$, la posición y orientación de los robots involucrados. Se asume que el robot seguidor cuenta con sensores como lo son una cámara y un sensor lidar, capaz de proveer el valor de la distancia y orientación relativa entre los dos robots. Nótese que bajo estas consideraciones, el problema de formación puede resolverse en ambientes no sujetos a condiciones de laboratorio, sino que puede atacarse en exteriores.

El esquema de formación líder-seguidor descrito anteriormente se muestra en el plano cartesiano en la Figura 2.7, donde l_i^{i+1} y α_i^{i+1} representan la posición y orientación relativa del robot líder con respecto al robot seguidor, medidos con respecto a los ejes móviles $X_{i+1} - Y_{i+1}$ montados sobre el robot seguidor.

Obteniendo las distancias relativas entre los robots,

con k_1, k_2 y $k_3 > 0$ son ganancias reales del controlar e_x , e_y y e_θ son los errores de seguimiento entre el robot líder y el robot seguidor.

$$e_{l_x} = x_i^{i+1} \quad e_{l_y} = y_i^{i+1} \quad e_{l_\theta} = \alpha_i^{i+1}. \quad (2.7)$$

Con esto, la ecuación (2.6) permite obtener las velocidades del robot seguidor, generando así la cadena para el objeto de estudio.

2.4. Perturbaciones consideradas

2.4.1. Naturaleza de la perturbación

En la robótica móvil, los robots terrestres con ruedas tipo $(2, 0)$ (diferenciales) pueden enfrentar diversas perturbaciones que afectan su capacidad para seguir trayectorias planificadas [20], [19]. Las principales perturbaciones incluyen:

- **Deslizamiento de las ruedas (skidding):** Ocurre cuando las ruedas pierden tracción con la superficie, lo que provoca que el robot se desplace lateralmente o no avance según lo esperado. Esto puede ser causado por superficies resbaladizas o cambios bruscos en la dirección.
- **Patinado de las ruedas (slipping):** Similar al deslizamiento, pero en este caso, las ruedas giran sin que el robot se desplace adecuadamente. Esto puede suceder en superficies con baja fricción o cuando se aplica demasiada fuerza de aceleración.
- **Perturbaciones externas:** Incluyen fuerzas externas como viento, colisiones con objetos, o variaciones en el terreno que pueden desviar al robot de su trayectoria planificada.
- **Errores de modelado:** Las inexactitudes en el modelo matemático del robot pueden llevar a errores en la estimación de su comportamiento, afectando la precisión del control.
- **Interferencias electromagnéticas:** Pueden afectar los sensores y actuadores del robot, causando errores en la percepción y en la ejecución de movimientos.

2.4.2. Efectos de la perturbación

Como se ha mencionado, una problemática asociada a los sistemas que utilizan robots móviles tipo diferencial puede surgir durante el seguimiento de trayectorias. Estas perturbaciones pueden incluir deslizamientos, patinazos o fuerzas externas que alteran la posición del robot.

En la Figura 2.8 se ejemplifica esta problemática. La línea roja indica la trayectoria que se desea que siga el robot diferencial. Sin embargo, al recibir una fuerza externa, el movimiento del robot se perturba, generando la línea azul, que representa la nueva trayectoria que el robot seguirá debido a la fuerza que alteró su ubicación, como resultado, el robot continuará siguiendo su trayectoria programada, pero no será capaz de percatarse del desplazamiento sufrido.

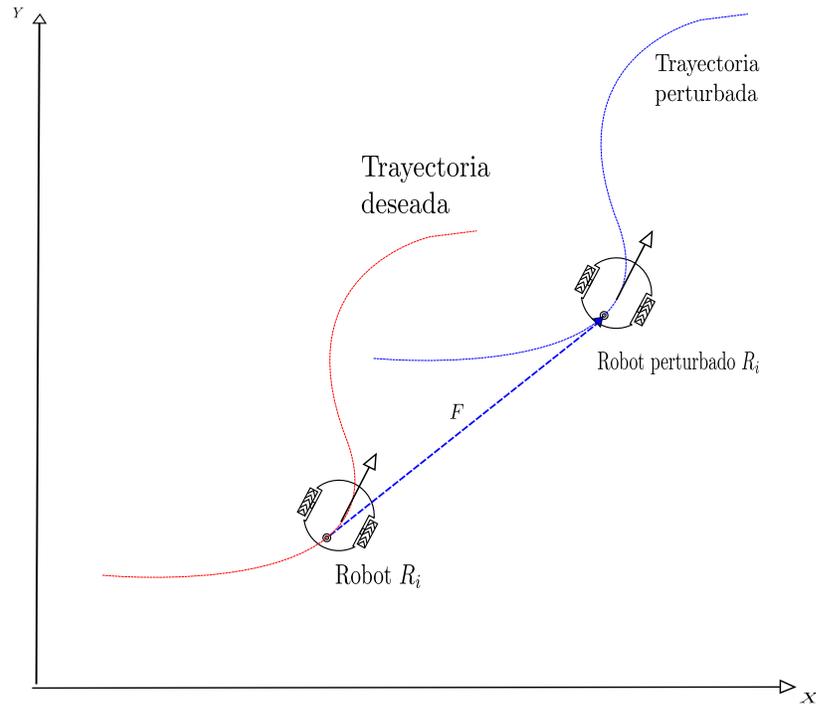


Figura 2.8: Diagrama del desplazamiento en la trayectoria.

2.4.3. Obtención de la perturbación

Para modelar fuerzas externas desconocidas, en una simulación numérica, afectando el comportamiento del robot, es posible implementar una perturbación de tipo Gauss, también conocida como perturbación gaussiana. Esta se refiere a una alteración o ruido que sigue una distribución normal o gaussiana. En términos matemáticos, una distribución gaussiana se caracteriza por su media (μ) y su desviación estándar (σ), y su función de densidad de probabilidad está dada por,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.8)$$

En el contexto de la robótica móvil, una perturbación gaussiana podría representar, por ejemplo, el ruido en las mediciones de sensores o en los actuadores, que afecta la trayectoria del robot de manera aleatoria, pero siguiendo esta distribución específica. Este tipo de perturbación es comúnmente asumida en muchos modelos debido a su prevalencia en fenómenos naturales y su simplicidad matemática para análisis y simulaciones.

La perturbación gaussiana puede visualizarse como una campana, como se muestra en la Figura 2.9. Al alterar sus parámetros, se puede conseguir una mayor amplitud, y al limitarla a un breve periodo de tiempo, es posible obtener lo equivalente a una fuerza que efectúa el cambio de posición del robot.

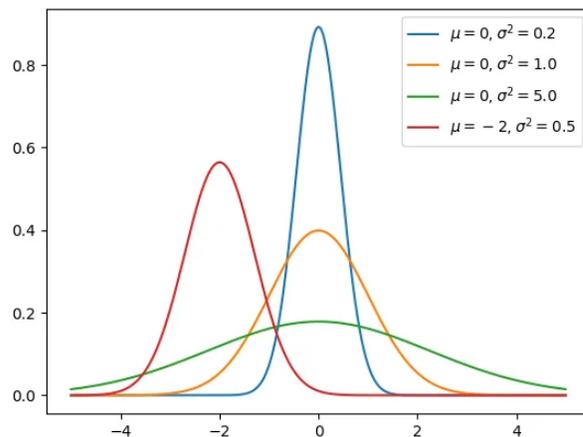


Figura 2.9: Ejemplos de perturbaciones tipo Gauss.

2.5. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se ha presentado una breve recapitulación del modelo cinemático que posee el robot móvil tipo $(2, 0)$, así como algunos aspectos relevantes como la restricción no holónoma y el tipo de perturbación que se empleará para simular una fuerza externa. Estos elementos son fundamentales para comprender los desafíos y soluciones en el seguimiento de trayectorias de robots diferenciales.

Así mismo se abordó el tema de la formación líder-seguidor con distancias relativas las cuales proporcionan una ayuda para la estimación de la posición de los robots y de esta forma relacionarlas en base a una referencia global o local la referencia para el robot seguidor.

Se ha destacado la problemática de las perturbaciones, incluyendo deslizamientos, patinazos y fuerzas externas, y cómo estas pueden afectar la trayectoria del robot. La implementación de perturbaciones gaussianas se ha propuesto como una herramienta útil para modelar y simular el impacto de estas fuerzas externas, proporcionando una base sólida para el análisis y desarrollo de estrategias de mitigación.

En resumen, este capítulo ha proporcionado una visión integral de los desafíos asociados con las perturbaciones en robots móviles tipo diferencial y las estrategias para mitigarlas. La comprensión y modelado de estas perturbaciones, junto con el desarrollo de algoritmos de control robustos, son fundamentales para mejorar la estabilidad y precisión de los sistemas de seguimiento de trayectorias. Estos conceptos y técnicas sentarán las bases para los esquemas y ecuaciones que se utilizarán en capítulos posteriores.

Capítulo 3

Perturbación externa afectando una formación Líder-Seguidor

En este capítulo, se aborda el análisis de perturbaciones afectando una formación líder-seguidor dentro del contexto de un sistema de robots móviles. Partiendo del análisis previo sobre los modelos cinemáticos y las estrategias de control, se exploran las implicaciones de introducir perturbaciones en la dinámica de alguno de los robots en la formación. Estas perturbaciones por simplicidad se modelan mediante distribuciones Gaussianas, lo que permite simular condiciones reales de operación donde las incertidumbres y ruidos son inevitables.

El objetivo principal de este capítulo es evaluar cómo las perturbaciones afectan el comportamiento del robot líder y, por ende, la coordinación del grupo de robots. Para ello, se utilizan las distancias relativas previamente definidas como métricas clave para analizar la estabilidad y robustez del sistema ante dichas perturbaciones. A través de análisis teóricos y simulaciones, se busca proporcionar una comprensión profunda de las dinámicas emergentes y las posibles estrategias de mitigación.

3.1. Problema de formación líder-seguidor

Partiendo de la Figura 3.1 y empleando la ecuación (2.4),

$$\begin{aligned}x_i^{i+1} &= (x_i - x_{i+1}) \cos \theta_{i+1} + (y_i - y_{i+1}) \sin \theta_{i+1} \\y_i^{i+1} &= -(x_i - x_{i+1}) \sin \theta_{i+1} + (y_i - y_{i+1}) \cos \theta_{i+1}\end{aligned}$$

es posible obtener la dinámica de las distancias relativas x_i^{i+1} y y_i^{i+1} al considerar su derivada con respecto al tiempo, esto es,

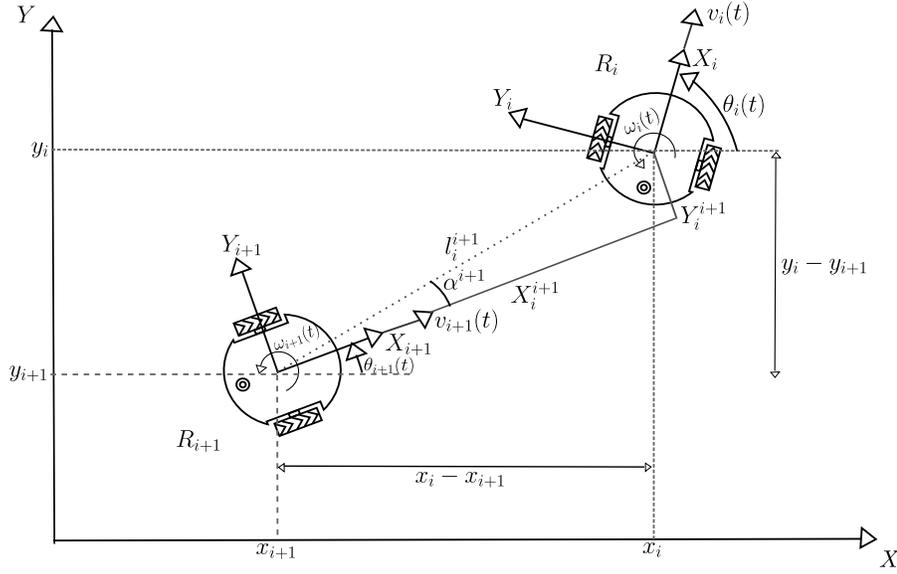


Figura 3.1: Esquema líder-seguidor con distancias relativas.

$$\begin{aligned}
\dot{x}_i^{i+1} &= -(x_i - x_{i+1})\dot{\theta}_{i+1} \sin \theta_{i+1} + (\dot{x}_i - \dot{x}_{i+1}) \cos \theta_{i+1} + (y_i - y_{i+1})\dot{\theta}_{i+1} \cos \theta_{i+1} + (\dot{y}_i - \dot{y}_{i+1}) \sin \theta_{i+1} \\
&= -(x_i - x_{i+1})\omega_{i+1} \sin \theta_{i+1} + (v_i \cos \theta_i - v_{i+1} \cos \theta_{i+1}) \cos \theta_{i+1} + (y_i - y_{i+1})\omega_{i+1} \cos \theta_{i+1} \\
&\quad + (v_i \sin \theta_i - v_{i+1} \sin \theta_{i+1}) \sin \theta_{i+1} \\
&= -(x_i - x_{i+1}) \sin \theta_{i+1} + (y_i - y_{i+1}) \cos \theta_{i+1} \omega_{i+1} + v_i (\cos \theta_i \cos \theta_{i+1} + \sin \theta_i \sin \theta_{i+1}) \\
&\quad - v_{i+1} (\cos^2 \theta_{i+1} + \sin^2 \theta_{i+1}) \\
&= y_i^{i+1} \omega_{i+1} + v_i \cos(\theta_i - \theta_{i+1}) - v_{i+1}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
\dot{y}_i^{i+1} &= -(\dot{x}_i - \dot{x}_{i+1}) \sin \theta_{i+1} - (x_i - x_{i+1}) \cos \theta_{i+1} \cdot \dot{\theta}_{i+1} + (\dot{y}_i - \dot{y}_{i+1}) \cos \theta_{i+1} - (y_i - y_{i+1}) \sin \theta_{i+1} \\
&= -(v_i \cos \theta_i - v_{i+1} \cos \theta_{i+1}) \sin \theta_{i+1} - (x_i - x_{i+1}) \omega_{i+1} \cos \theta_{i+1} \\
&\quad + (v_i \sin \theta_i - v_{i+1} \sin \theta_{i+1}) \cos \theta_{i+1} - (y_i - y_{i+1}) \omega_{i+1} \sin \theta_{i+1} \\
&= -v_i \cos \theta_i \sin \theta_{i+1} + v_{i+1} \cos \theta_{i+1} \sin \theta_{i+1} - (x_i - x_{i+1}) \omega_{i+1} \cos \theta_{i+1} \\
&\quad + v_i \sin \theta_i \cos \theta_{i+1} - v_{i+1} \sin \theta_{i+1} \cos \theta_{i+1} - (y_i - y_{i+1}) \omega_{i+1} \sin \theta_{i+1} \\
&= v_i (\sin \theta_i \cos \theta_{i+1} - \cos \theta_i \sin \theta_{i+1}) - v_{i+1} (\sin \theta_{i+1} \cos \theta_{i+1} - \cos \theta_{i+1} \sin \theta_{i+1}) \\
&\quad - (x_i - x_{i+1}) \omega_{i+1} \cos \theta_{i+1} - (y_i - y_{i+1}) \omega_{i+1} \sin \theta_{i+1} \\
&= v_i \sin(\theta_i - \theta_{i+1}) - v_{i+1} \cdot - (x_i - x_{i+1}) \omega_{i+1} \cos \theta_{i+1} - (y_i - y_{i+1}) \omega_{i+1} \sin \theta_{i+1} \\
&= v_i \sin(\theta_i - \theta_{i+1}) - (x_i - x_{i+1}) \omega_{i+1} \cos \theta_{i+1} - (y_i - y_{i+1}) \omega_{i+1} \sin \theta_{i+1} \\
&= v_i \sin(\theta_i - \theta_{i+1}) - x_{i+1} \omega_{i+1}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Además, definiendo la orientación relativa entre los robots R_i y R_{i+1} como,

$$\alpha_i^{i+1} = \theta_i - \theta_{i+1} \tag{3.3}$$

se obtiene,

$$\dot{\alpha}_i^{i+1} = \omega_i - \omega_{i+1}.$$

Por lo tanto, la dinámica relativa entre los robots R_i y R_{i+1} con respecto a los ejes móviles $x_{i+1} - y_{i+1}$ resulta,

$$\begin{aligned}
\dot{x}_i^{i+1} &= y_i^{i+1} \omega_{i+1} + v_i \cos \alpha_i^{i+1} - v_{i+1} \\
\dot{y}_i^{i+1} &= -x_i^{i+1} \omega_{i+1} + v_i \sin \alpha_i^{i+1} \\
\dot{\alpha}_i^{i+1} &= \omega_i - \omega_{i+1}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Siguiendo el trabajo mediante tiempo de separación propuesto por [32] como se describe en la Figura 3.2, nótese que, si la estrategia descrita se aplica a cada par de robots consecutivos en la formación, se obtendrá la formación de toda la cadena de robots, donde el robot seguidor R_{i+1} convergerá a la trayectoria retrasada de su robot líder R_i .

Para abordar el problema de formación, se toma en cuenta lo siguiente:

Suposición 1. *En el plano $X - Y$, no se cuenta con la posición ni orientación de los robots involucrados, y se usarán los dispositivos disponibles en el robot, como una cámara o lidar, capaces de medir la distancia entre los dos robots.*

Observación 1. *Es importante resaltar que, bajo estas consideraciones, el problema de formación puede resolverse en ambientes no sujetos a condiciones de laboratorio, sino que puede abordarse de igual manera en exteriores.*

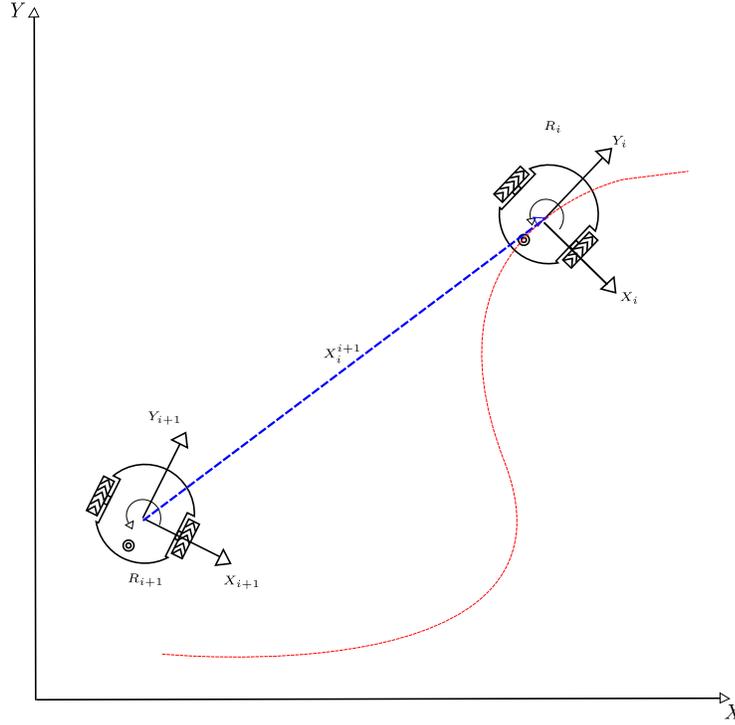


Figura 3.2: Formación líder-seguidor.

3.2. Consideración de perturbaciones en el modelo cinemático del robot líder

Para determinar el posible patinado y deslizamiento del robot líder R_i y, de esta manera, poder compensar el desplazamiento del robot virtual retrasado $R_{i\tau}$, el cual surge de la implementación de la estrategia de tiempos de separación en la cual almacenan las posiciones del robot líder generando así una referencia virtual como se muestra en la Figura 3.3, se considera la configuración líder-seguidor con el robot líder sometido a perturbaciones externas. Para esto, se utiliza el modelo cinemático presentado en la ecuación (2.1), donde el robot líder toma la forma,

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= v_i \cos(\theta_i) + \dot{\gamma}_{i_x} \\ \dot{y}_i &= v_i \sin(\theta_i) + \dot{\gamma}_{i_y} \\ \dot{\theta}_i &= \omega_i + \dot{\gamma}_\theta\end{aligned}\quad (3.5)$$

Donde $\dot{\gamma}_{i_x}$, $\dot{\gamma}_{i_y}$ y $\dot{\gamma}_\theta$ son perturbaciones de velocidades externas, las cuales son desconocidas pero que podrían afectar al robot en diferentes instantes de tiempo.

Considerando que el robot seguidor no posee una perturbación en su modelo cinemático, se tiene el siguiente modelo,

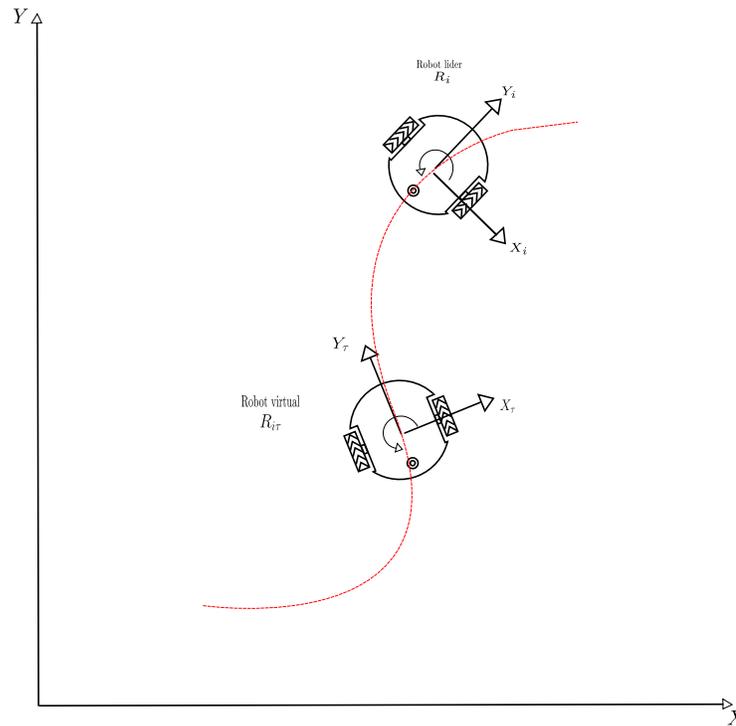


Figura 3.3: Imagen retrasada R_τ del robot líder τ unidades de tiempo.

$$\begin{aligned}\dot{x}_{i+1} &= v_{i+1} \cos(\theta_{i+1}) \\ \dot{y}_{i+1} &= v_{i+1} \sin(\theta_{i+1}) \\ \dot{\theta}_{i+1} &= \omega_{i+1}.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Tomando en cuenta las distancias relativas obtenidas de (3.2),

$$\begin{aligned}x_i^{i+1} &= (x_i - x_{i+1}) \cos \theta_{i+1} + (y_i - y_{i+1}) \sin \theta_{i+1}, \\ y_i^{i+1} &= -(x_i - x_{i+1}) \sin \theta_{i+1} + (y_i - y_{i+1}) \cos \theta_{i+1},\end{aligned}$$

la derivada con respecto al tiempo para x_i^{i+1} resulta,

$$\begin{aligned}
\dot{x}_i^{i+1} &= -(x_i - x_{i+1})\dot{\theta}_{i+1} \sin \theta_{i+1} + (\dot{x}_i - \dot{x}_{i+1}) \cos \theta_{i+1} + (y_i - y_{i+1})\dot{\theta}_{i+1} \cos \theta_{i+1} \\
&\quad + (\dot{y}_i - \dot{y}_{i+1}) \sin \theta_{i+1} \\
&= -(x_i - x_{i+1})\omega_{i+1} \sin \theta_{i+1} + (v_i \cos(\theta_i) + \dot{\gamma}_{i_x} - v_{i+1} \cos \theta_{i+1}) \cos \theta_{i+1} \\
&\quad + (y_i - y_{i+1})\omega_{i+1} \cos \theta_{i+1} + (v_i \sin(\theta_i) + \dot{\gamma}_{i_y} - v_{i+1} \sin \theta_{i+1}) \sin \theta_{i+1} \\
&= -(x_i - x_{i+1}) \sin \theta_{i+1} + (y_i - y_{i+1}) \cos \theta_{i+1} \omega_{i+1} + v_i(\cos(\theta_i) \cos \theta_{i+1} \\
&\quad + \sin(\theta_i) \sin \theta_{i+1}) - v_{i+1} + \dot{\gamma}_{i_x} \cos \theta_{i+1} + \dot{\gamma}_{i_y} \sin \theta_{i+1} \\
&= y_i^{i+1} \omega_{i+1} - v_{i+1} + v_i \cos(\theta_i - \theta_{i+1}) + \dot{\gamma}_{i_x} \cos \theta_{i+1} + \dot{\gamma}_{i_y} \sin \theta_{i+1}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

En el caso de y_i^{i+1} se tiene,

$$\begin{aligned}
\dot{y}_i^{i+1} &= -(x_i - x_{i+1})\omega_{i+1} \cos \theta_{i+1} - (\dot{x}_i - \dot{x}_{i+1}) \sin \theta_{i+1} - (y_i - y_{i+1})\omega_{i+1} \cos \theta_{i+1} \\
&\quad + (\dot{y}_i - \dot{y}_{i+1}) \cos \theta_{i+1} \\
&= -[(x_i - x_{i+1}) \cos \theta_{i+1} - (y_i - y_{i+1}) \sin \theta_{i+1}] \omega_{i+1} - (v_i \cos(\theta_i) + \dot{\gamma}_{i_x} \\
&\quad - v_{i+1} \cos \theta_{i+1}) \sin \theta_{i+1} + (v_i \sin(\theta_i) + \dot{\gamma}_{i_y} - v_{i+1} \sin \theta_{i+1}) \cos \theta_{i+1} \\
&= -\dot{x}_i^{i+1} \omega_{i+1} - (v_i \cos(\theta_i) + \dot{\gamma}_{i_x}) \sin \theta_{i+1} + (v_i \sin(\theta_i) + \dot{\gamma}_{i_y}) \cos \theta_{i+1} \\
&= -\dot{x}_i^{i+1} \omega_{i+1} + v_i \sin(\theta_i - \theta_{i+1}) + \dot{\gamma}_{i_y} \cos \theta_{i+1} - \dot{\gamma}_{i_x} \sin \theta_{i+1}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Finalmente, considerando, $\alpha_i^{i+1} = \theta_i - \theta_{i+1}$, se obtiene,

$$\dot{\alpha}_i^{i+1} = \omega_i - \omega_{i+1} + \dot{\gamma}_{i_\theta}. \tag{3.9}$$

Por lo tanto, el modelo cinemático relativo sujeto a perturbaciones externas resulta,

$$\begin{aligned}
\dot{x}_i^{i+1} &= y_i^{i+1} \omega_{i+1} - v_{i+1} + v_i \cos(\alpha_i^{i+1}) + \dot{\gamma}_{i_x} \cos \theta_{i+1} + \dot{\gamma}_{i_y} \sin \theta_{i+1} \\
\dot{y}_i^{i+1} &= -\dot{x}_i^{i+1} \omega_{i+1} + v_i \sin(\alpha_i^{i+1}) + \dot{\gamma}_{i_y} \cos \theta_{i+1} - \dot{\gamma}_{i_x} \sin \theta_{i+1} \\
\dot{\alpha}_i^{i+1} &= \omega_i - \omega_{i+1} + \dot{\gamma}_{i_\theta}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

3.3. Simulaciones numéricas

En esta sección, se presentan los resultados de las simulaciones realizadas utilizando los modelos obtenidos y la retroalimentación descrita en la Sección 1.1.6. Aunque el robot líder es libre de seguir cualquier trayectoria deseada generada por $v_i(t)$ y $\omega_i(t)$ acotadas, la trayectoria deseada para el robot líder es una lemniscata, una curva en forma de "8" que es ideal para evaluar el desempeño del sistema debido a sus cambios continuos de dirección y velocidad.

Las ecuaciones paramétricas de la lemniscata son,

$$\begin{aligned}x_d(t) &= a \sin(pt) \\y_d(t) &= b \sin(2pt),\end{aligned}\tag{3.11}$$

donde los parámetros de la lemniscata son: $a = 0.8$ m, $b = 0.6$ m y $p = \frac{2\pi}{50}$ rad/seg.

Para poder realizar la simulación numérica se requiere de las señales de entrada $v_1(t)$ y $\omega_1(t)$, las cuales se obtienen a partir de las derivadas de la función de la trayectoria deseada. Estas señales son cruciales para asegurar que el robot líder siga la trayectoria deseada. Las expresiones para $v_1(t)$ y $\omega_1(t)$ son las siguientes:

$$\begin{aligned}v_1(t) &= \sqrt{\dot{x}_d^2(t) + \dot{y}_d^2(t)} \\ \omega_1(t) &= \frac{\ddot{y}_d(t)\dot{x}_d(t) - \ddot{x}_d(t)\dot{y}_d(t)}{\dot{x}_d^2(t) + \dot{y}_d^2(t)}.\end{aligned}\tag{3.12}$$

Donde $\dot{x}_d(t)$ y $\dot{y}_d(t)$ son las derivadas de las coordenadas de la trayectoria deseada con respecto al tiempo, y $\ddot{x}_d(t)$ y $\ddot{y}_d(t)$ son las segundas derivadas. Estas derivadas se calculan a partir de la ecuación paramétrica de la lemniscata:

$$\begin{aligned}\dot{x}_d(t) &= ap \cos(pt) \\ \dot{y}_d(t) &= 2bp \cos(2pt) \\ \ddot{x}_d(t) &= -ap^2 \sin(pt) \\ \ddot{y}_d(t) &= -4bp^2 \sin(2pt).\end{aligned}\tag{3.13}$$

Las simulaciones se realizaron utilizando un entorno de simulación que permite modelar tanto las dinámicas del robot como las perturbaciones externas.

Se desea que el robot seguidor R_{i+1} siga al robot R_i , manteniendo una distancia de seguridad proporcionada por las distancias relativas, con el fin de evitar posibles colisiones entre los miembros de la cadena.

Las condiciones iniciales para el robot líder y el seguidor empleadas en la simulación se muestran en la Tabla 3.1 mientras que las perturbaciones externas se describen en la Tabla 3.2

°	R_i	R_{i+1}
$x(0)$	0	-0.1
$y(0)$	0	-0.2
$\theta(0)$	0	$\pi/2$

Tabla 3.1: Parámetros iniciales de los robots.

Para mostrar las perturbaciones externas desconocidas, se asumirá que en $t = 10$ ocurren perturbaciones afectando al robot R_1 .

En la Tabla 3.2 $a_{1x} = 0.8$ y $a_{1y} = 1.28$.

\circ	R_i
$\dot{\gamma}_{1x}(t)$	$\frac{a_{1x}}{\sqrt{2\pi a_{1x}^2}} e^{-\frac{t^2}{2a_{1x}^2}}$
$\dot{\gamma}_{1y}(t)$	$\frac{a_{1y}}{\sqrt{2\pi a_{1y}^2}} e^{-\frac{t^2}{2a_{1y}^2}}$
$\dot{\gamma}_{1\theta}(t)$	0

Tabla 3.2: Parámetros de la perturbación.

Con los valores establecidos, se puede observar que la perturbación estará presente en los ejes X y Y. Dicha perturbación solo se encuentra presente durante un pequeño periodo de tiempo y posteriormente desaparece, lo cual podría ser equivalente a un tirón o una fuerza que desplaza al robot líder de su trayectoria deseada. Estas perturbaciones pueden observarse en la Figura 3.4, donde se muestra el instante de tiempo en el cual se presentan las perturbaciones.

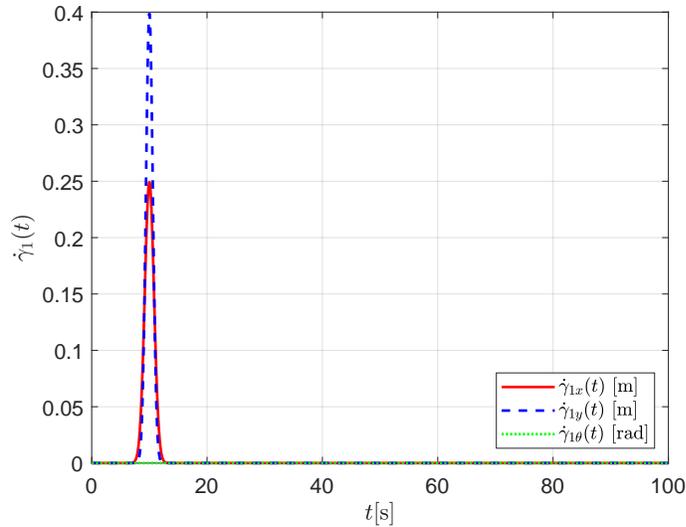


Figura 3.4: Perturbaciones presentes durante la simulación.

3.3.1. Simulación 1: Formación líder-seguidor mediante tiempos de separación

Para el primer caso de análisis, se parte de la estrategia de seguimiento por tiempos de separación mencionada en capítulos anteriores (2.6), aplicando la retroalimentación propuesta por [35],

$$v_{i+1} = k_1 x_i^{i+1} + v_d \cos(\alpha_i^{i+1}),$$

$$\omega_{i+1} = \omega_d + k_2 v_d \frac{\sin(\alpha_i^{i+1})}{\alpha_i^{i+1}} y_i^{i+1} - k_3 \alpha_i^{i+1}.$$

Considerando como condiciones iniciales las propuestas en la Tabla 3.1 a un par de robots diferenciales los cuales seguirán como trayectoria deseada una lemniscata, considerando un tiempo de separación entre ambos robots de $\tau = 3\text{seg}$, así mismo las ganancias empleadas serán $k_1 = 2$, $k_2 = 2$ y $k_3 = 25$.

Bajo estas consideraciones se observa en la Figura 3.5 la evolución de la trayectoria en el plano $X - Y$ de ambos robots, mostrando también la correcta convergencia de la retroalimentación empleada bajo condiciones ideales.

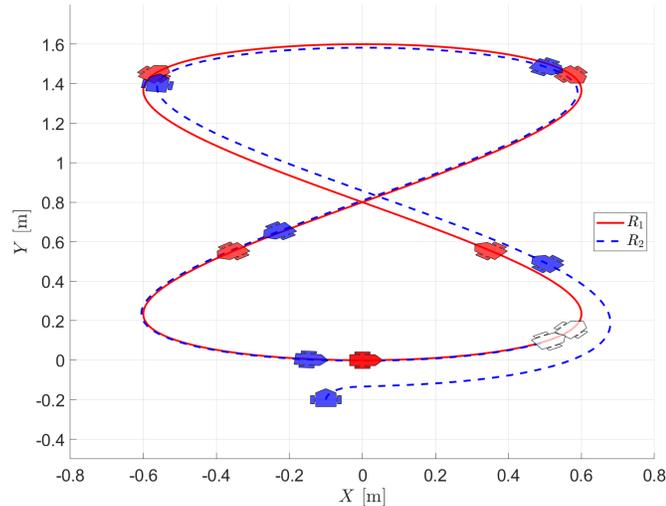


Figura 3.5: Trayectoria en el plano X-Y

Así mismo se muestra la posición y orientación de cada uno de los miembros de la formación Figura 3.6, verificando que ambos robots siguen la misma trayectoria, notando que ambas señales nunca estarán sobrepuestas debido a la estrategia empleada, la cual considera un desfase entre señales de 3 segundos.

La Figura 3.7 muestra los errores de seguimientos obtenidos, así como la convergencia de los mismos a cero, demostrando así un correcto seguimiento de la trayectoria.

Finalmente, en la Figura 3.8 se observa como la velocidad angular y lineal de ambos robots son, al igual que en el caso de la orientación y posición, idénticas en lo que respecta a sus valores, pero nuevamente se encuentran desfasadas debido al tiempo de separación empleada para la estrategia de seguimiento.

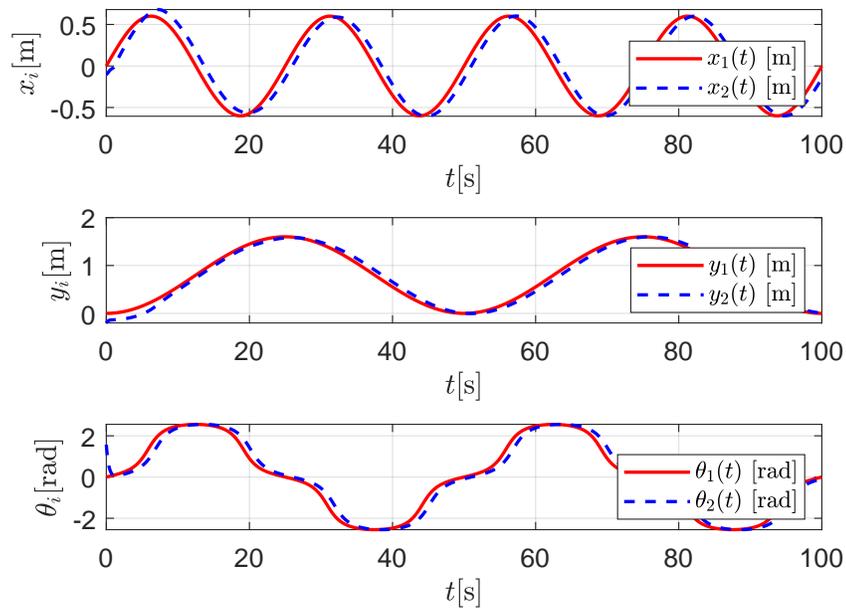


Figura 3.6: Posición y orientación de los robots

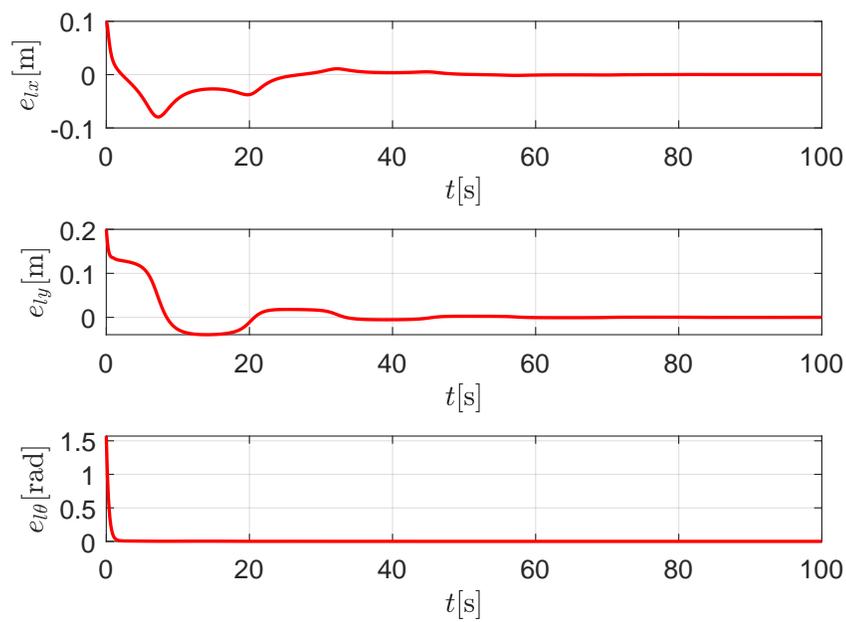


Figura 3.7: Errores de seguimiento

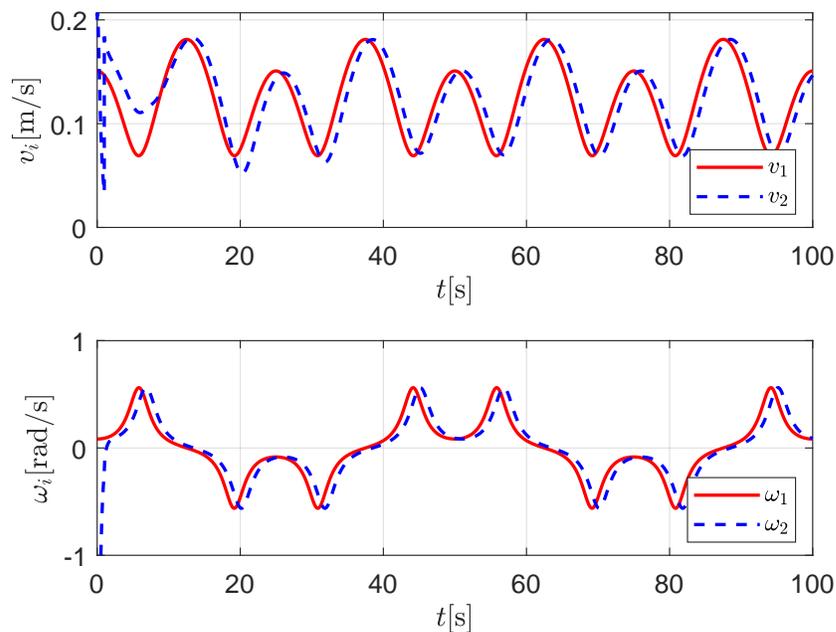


Figura 3.8: Velocidad angular y lineal de los robots.

3.3.2. Simulación 2: Formación líder-seguidor mediante tiempos de separación con presencia de perturbaciones externas

Para este segundo caso, se emplea nuevamente la retroalimentación empleada para la primera simulación, así como la misma trayectoria y los parámetros iniciales para ambos robots. A su vez, se considera que en $t = 10$ se producirá una perturbación externa al robot líder, esto con la finalidad de observar el comportamiento de robot seguidor.

En la Figura 3.9 se observa que, al presentarse la perturbación, externa el robot seguidor pierde la referencia de seguimiento, por lo tanto, la trayectoria deseada no se puede seguir de una forma correcta a pesar de que el seguidor logra converger nuevamente a la trayectoria del robot líder de una forma muy lenta.

Así mismo, en la Figura 3.10 se observa el efecto de la perturbación durante el seguimiento de la trayectoria, donde se observa que aunque la retroalimentación es capaz de volver a converger a la trayectoria deseada, esto lleva demasiado tiempo por lo cual el seguimiento no se realiza de la manera correcta.

Con respecto a los errores de seguimiento, se observa en la Figura 3.11, que es evidente como ante la presencia de una perturbación, la retroalimentación tarda un mayor periodo de tiempo en converger a cero.

Finalmente en la Figura 3.12, se observa que debido al instante donde se presenta la perturbación externa, la única velocidad que sufre alteraciones es la velocidad lineal, mientras que la

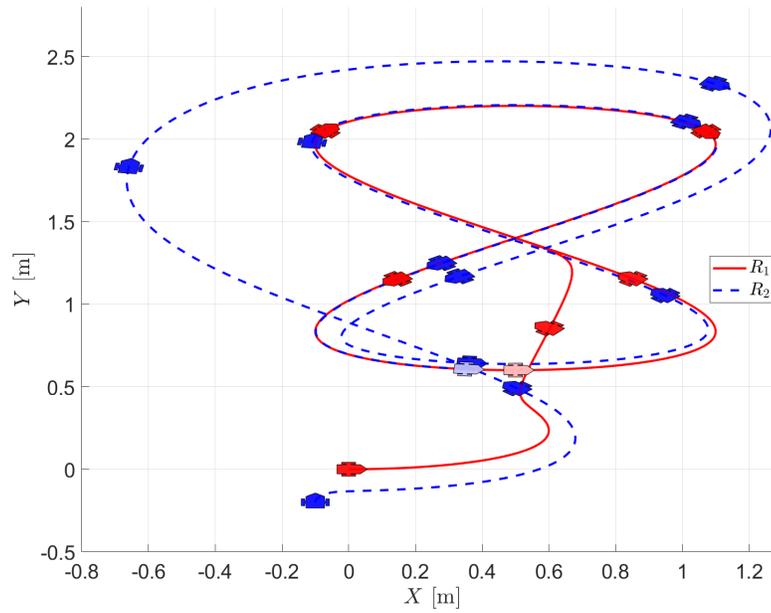


Figura 3.9: Trayectoria en el plano X-Y con la presencia de perturbaciones externas.

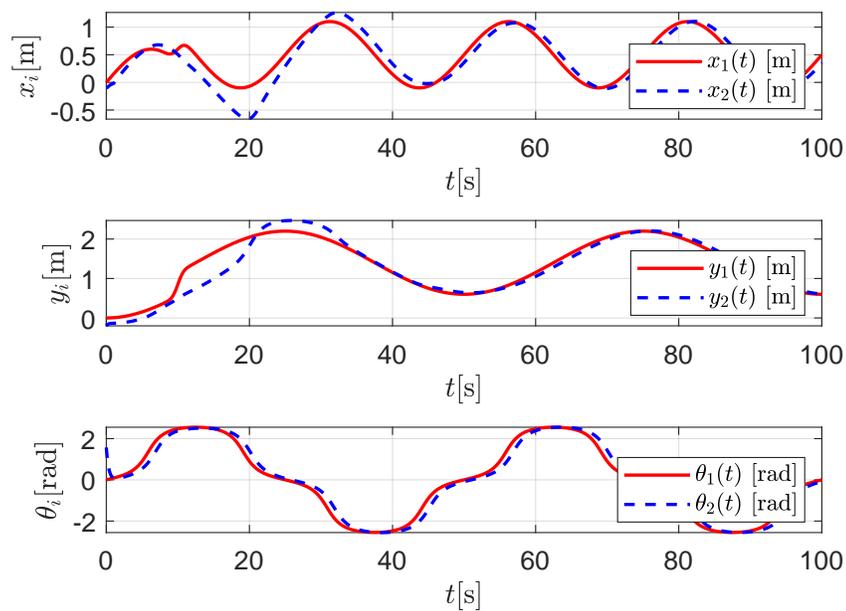


Figura 3.10: Posición y orientación de los robots ante la presencia de una perturbación externa.

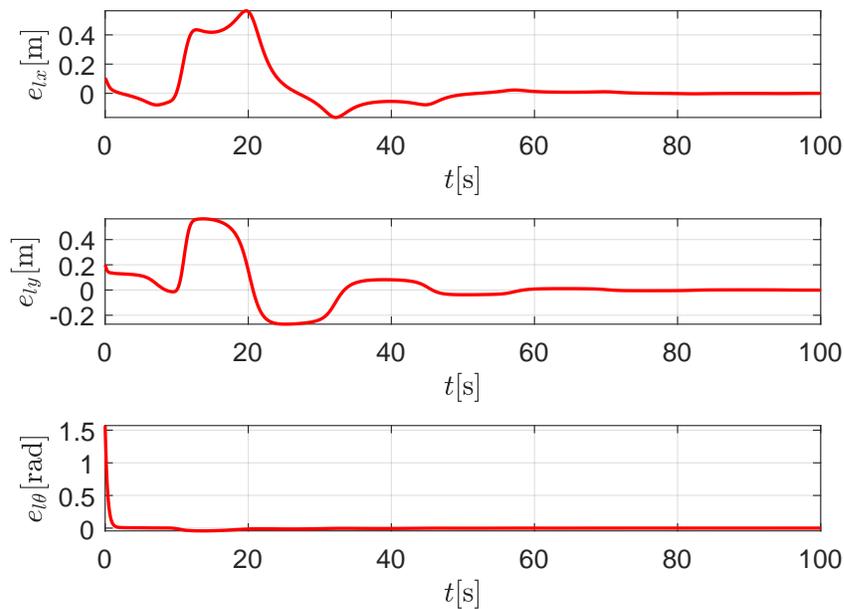


Figura 3.11: Errores de seguimiento ante la presencia de una perturbación externa.

velocidad angular no detecta dicha perturbación.

De las simulaciones anteriores se puede observar cómo, sin la presencia de las perturbaciones, la retroalimentación propuesta por [35], bajo condiciones ideales, es capaz de realizar un correcto seguimiento, pero ante perturbaciones externas, esta estrategia presenta deficiencias, por lo tanto es importante el desarrollo de una modificación a dicha retroalimentación la cual pueda ser capaz de mitigar o minimizar el impacto de las perturbaciones, para que de esta manera mejorar la estabilidad y precisión del sistema en entornos reales.

Se pudo observar en la simulación 2, que las perturbaciones pueden causar que el seguidor tenga dificultades para mantener la distancia de seguridad con el robot líder lo cual puede llevar a un aumento en los errores de seguimiento o, en caso de que se cuente con una mayor cantidad de robots dentro del pelotón, se lleguen a presentar colisiones.

3.4. Conclusiones del capítulo

En este capítulo, se implementó la perturbación al robot líder y se obtuvieron las distancias relativas que debe mantener el seguidor. Se presentó la metodología para obtener las ecuaciones necesarias para realizar la formación líder-seguidor, así como la comparación de dos simulaciones, donde se observó que, a pesar de la perturbación, el esquema es capaz de corregir la trayectoria, aunque el tiempo requerido para lograrlo es considerable.

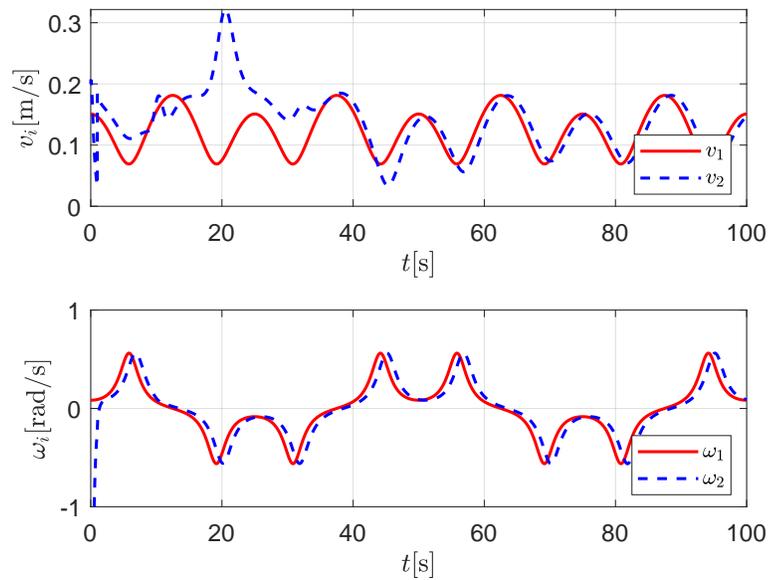


Figura 3.12: Velocidad angular y lineal ante la presencia de una perturbación externa.

Se identificó que el control implementado es lo suficientemente robusto para corregir la trayectoria del robot líder después de una perturbación. Sin embargo, el tiempo de corrección es significativo, lo que puede afectar la eficiencia del sistema en aplicaciones prácticas. Además, se observó que el robot seguidor también sufre al realizar la formación líder-seguidor debido a las perturbaciones en el líder, lo que puede llevar a un aumento en el error de seguimiento y posibles colisiones.

Por lo tanto, se determinó que es necesario desarrollar un método para que el robot seguidor pueda compensar la perturbación y corregir la trayectoria de manera más rápida y eficiente. Esto implica la implementación de estrategias adicionales que ayuden a mitigar las perturbaciones y mejoren la estabilidad y precisión del sistema en entornos reales.

Capítulo 4

Esquema de estimación de perturbación

En los capítulos anteriores, se ha discutido cómo el robot R_i puede verse afectado por fuerzas externas que alteran su trayectoria prevista. Estas perturbaciones pueden deberse a diversos factores, como irregularidades en el terreno, colisiones con objetos o fuerzas externas. La presencia de estas fuerzas externas no solo afecta al robot líder, sino que también tiene un impacto significativo en el comportamiento del robot seguidor, que debe ajustar su trayectoria en consecuencia.

Para mitigar los efectos de estas perturbaciones y mejorar la precisión del seguimiento, es esencial desarrollar métodos efectivos para la estimación de las perturbaciones. Este capítulo se centra en proponer una técnica para identificar estas perturbaciones, permitiendo así ajustar los modelos de control y mejorar la convergencia en la formación.

4.1. Perturbaciones en coordenadas globales

En el Capítulo 3 se observó lo que ocurría al aplicar una perturbación en el robot R_i , es importante remarcar que estas perturbaciones son aplicadas y medidas en un marco donde se realizan las mediciones a través de las coordenadas globales del sistema, pero debido al enfoque del presente trabajo, es necesario transportar esa perturbación al marco montado sobre el robot R_{i+1} .

Para determinar el posible patinado y deslizamiento del robot líder R_i y de esta manera poder compensar el desplazamiento del robot virtual retrasado $R_{i\tau}$, considere de nuevo el sistema perturbado (4.1), donde x_i , y_i y θ_i corresponden a los valores reales del robot líder y $\dot{\gamma}_x$, $\dot{\gamma}_y$, $\dot{\gamma}_\theta$ corresponden a los valores de perturbación afectando a cada una de las coordenadas involucradas,

Considere ahora la configuración líder-seguidor con el robot líder sometido a perturbaciones externas, esto es, el robot líder toma la forma,

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= v_i \cos \theta_i + \dot{\gamma}_x \\ \dot{y}_i &= v_i \sin \theta_i + \dot{\gamma}_y \\ \dot{\theta}_i &= \omega_i + \dot{\gamma}_\theta.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Para abordar el problema de formación líder-seguidor considere el robot R_{i+1} libre de perturbaciones descrito en (2.1) en la forma,

$$\begin{aligned}\dot{x}_{i+1} &= v_{i+1} \cos \theta_{i+1} \\ \dot{y}_{i+1} &= v_{i+1} \sin \theta_{i+1} \\ \dot{\theta}_{i+1} &= \omega_{i+1}.\end{aligned}\tag{4.2}$$

Tomando en cuenta la medición de las distancias relativas planteadas en (3.2), se obtienen las derivadas correspondientes para obtener la dinámica relativa entre los robots, (3.7-3.8-3.9), las cuales se muestran a continuación.

$$\begin{aligned}\dot{x}_i^{i+1} &= y_i^{i+1} \omega_{i+1} - v_{i+1} + v_i \cos(\theta_i - \theta_{i+1}) + \dot{\gamma}_{ix} \cos \theta_{i+1} + \dot{\gamma}_{iy} \sin \theta_{i+1} \\ \dot{y}_i^{i+1} &= -x_i^{i+1} \omega_{i+1} + v_i \sin(\theta_i - \theta_{i+1}) + \dot{\gamma}_{iy} \cos \theta_{i+1} - \dot{\gamma}_{ix} \sin \theta_{i+1} \\ \dot{\alpha}_i^{i+1} &= \omega_i - \omega_{i+1} + \dot{\gamma}_{i\theta}.\end{aligned}$$

Definiendo los términos afectados por las perturbaciones $\dot{\gamma}_{ix}, \dot{\gamma}_{iy}, \dot{\gamma}_{i\theta}$ como,

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_{ix} &= \dot{\gamma}_{ix} \cos \theta_{i+1} + \dot{\gamma}_{iy} \sin \theta_{i+1} \\ \dot{\eta}_{iy} &= -\dot{\gamma}_{ix} \sin \theta_{i+1} + \dot{\gamma}_{iy} \cos \theta_{i+1} \\ \dot{\eta}_{i\theta} &= \dot{\gamma}_{i\theta}\end{aligned}\tag{4.3}$$

es posible reescribir la dinámica relativa en la forma,

$$\begin{aligned}\dot{x}_i^{i+1} &= y_i^{i+1} \omega_{i+1} - v_{i+1} + v_i \cos(\theta_i - \theta_{i+1}) + \dot{\eta}_{ix} \\ \dot{y}_i^{i+1} &= -x_i^{i+1} \omega_{i+1} + v_i \sin(\theta_i - \theta_{i+1}) + \dot{\eta}_{iy} \\ \dot{\alpha}_i^{i+1} &= \omega_i - \omega_{i+1} + \dot{\eta}_{i\theta}\end{aligned}\tag{4.4}$$

Nótese que las perturbaciones $\dot{\gamma}_{ij}$ definidas en los ejes cartesianos $X - Y$ se mapean a los ejes móviles $x_{i+1} - y_{i+1}$ produciendo la representación $\dot{\eta}_{ij}$. La transformación de la perturbación en los ejes considerados se realiza mediante,

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta}_x \\ \dot{\eta}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{i+1} & \sin \theta_{i+1} \\ -\sin \theta_{i+1} & \cos \theta_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_x \\ \dot{\gamma}_y \end{bmatrix}\tag{4.5}$$

Con la transformación inversa,

$$\begin{bmatrix} \dot{\gamma}_x \\ \dot{\gamma}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{i+1} & -\sin \theta_{i+1} \\ \sin \theta_{i+1} & \cos \theta_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\eta}_x \\ \dot{\eta}_y \end{bmatrix}\tag{4.6}$$

esto es,

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_x &= \dot{\eta}_x \cos \theta_{i+1} - \dot{\eta}_y \sin \theta_{i+1} \\ \dot{\gamma}_y &= \dot{\eta}_x \sin \theta_{i+1} + \dot{\eta}_y \cos \theta_{i+1}.\end{aligned}\tag{4.7}$$

4.2. Esquema de estimación de perturbaciones

Nótese que a partir de las mediciones x_i^{i+1} , y_i^{i+1} , α_i^{i+1} , tomadas a partir del robot seguidor R_{i+1} , es posible reconstruir $\hat{x}_i^{i+\tau}$, $\hat{y}_i^{i+\tau}$, $\hat{\alpha}_i^{i+\tau}$ bajo el conocimiento de las velocidades de ambos robots.

De lo anterior, es posible describir el caso ideal, libre de perturbaciones, en la forma, Sistema sin perturbaciones

$$\begin{aligned}\dot{x}_i^{i+1} &= y_i^{i+1}\omega_{i+1} + v_i \cos \alpha_i^{i+1} - v_{i+1} \\ \dot{y}_i^{i+1} &= x_i^{i+1}\omega_{i+1} + v_i \sin \alpha_i^{i+1} - v_{i+1} \\ \dot{\alpha}_i^{i+1} &= \omega_i - \omega_{i+1}\end{aligned}\tag{4.8}$$

y el caso con perturbaciones queda descrito como,

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_i^{i+1} &= \hat{y}_i^{i+1}\omega_{i+1} + v_i \cos \alpha_i^{i+1} - v_{i+1} + \dot{\eta}_x \\ \dot{\hat{y}}_i^{i+1} &= -\hat{x}_i^{i+1}\omega_{i+1} + v_i \sin \alpha_i^{i+1} + \dot{\eta}_y \\ \dot{\hat{\alpha}}_i^{i+1} &= \omega_i - \omega_{i+1} + \dot{\eta}_\theta\end{aligned}\tag{4.9}$$

Se puede observar en la Figura 4.1 como es que se realizan las mediciones de las distancias relativas entre ambos robots, así como se pueden apreciar los vectores de la perturbación presentes en el robot líder.

A partir de los modelos (4.8)-(4.9) es posible establecer,

$$\begin{aligned}\dot{x}_i^{i+1} - \dot{\hat{x}}_i^{i+1} &= y_i^{i+1}\omega_{i+1} + v_i \cos \alpha_i^{i+1} - v_{i+1} - \hat{y}_i^{i+1}\omega_{i+1} - v_i \cos \hat{\alpha}_i^{i+1} + v_{i+1}v_i - \dot{\eta}_x \\ &= (y_i^{i+1} - \hat{y}_i^{i+1})\omega_{i+1} + (\cos \alpha_i^{i+1} - \cos \hat{\alpha}_i^{i+1})v_i - \dot{\eta}_x \\ \dot{y}_i^{i+1} - \dot{\hat{y}}_i^{i+1} &= -x_i^{i+1}\omega_{i+1} + v_i \sin \alpha_i^{i+1} + \hat{x}_i^{i+1}\omega_{i+1} - v_i \sin \hat{\alpha}_i^{i+1} - \dot{\eta}_y \\ &= -(x_i^{i+1} - \hat{x}_i^{i+1})\omega_{i+1} + (\sin \alpha_i^{i+1} - \sin \hat{\alpha}_i^{i+1})v_i - \dot{\eta}_y \\ \dot{\alpha}_i^{i+1} - \dot{\hat{\alpha}}_i^{i+1} &= \omega_i - \omega_{i+1} - (\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_{i+1}) - \dot{\eta}_\theta \\ &= \dot{\eta}_\theta.\end{aligned}\tag{4.10}$$

Lo anterior produce la estimación de las perturbaciones en la forma,

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_x &= (y_i^{i+1} - \hat{y}_i^{i+1})\omega_{i+1} + (\cos \alpha_i^{i+1} - \cos \hat{\alpha}_i^{i+1})v_i - (\dot{x}_i^{i+1} - \dot{\hat{x}}_i^{i+1}) \\ \dot{\eta}_y &= -(x_i^{i+1} - \hat{x}_i^{i+1})\omega_{i+1} + (\sin \alpha_i^{i+1} - \sin \hat{\alpha}_i^{i+1})v_i - (\dot{y}_i^{i+1} - \dot{\hat{y}}_i^{i+1}) \\ \dot{\eta}_\theta &= -(\dot{\alpha}_i^{i+1} - \dot{\hat{\alpha}}_i^{i+1}).\end{aligned}\tag{4.11}$$

Nótese que el modelo (4.8) se reconstruye con base v_i , ω_{i+1} mientras que el modelo (4.9) se reconstruye mediante las mediciones efectuadas.

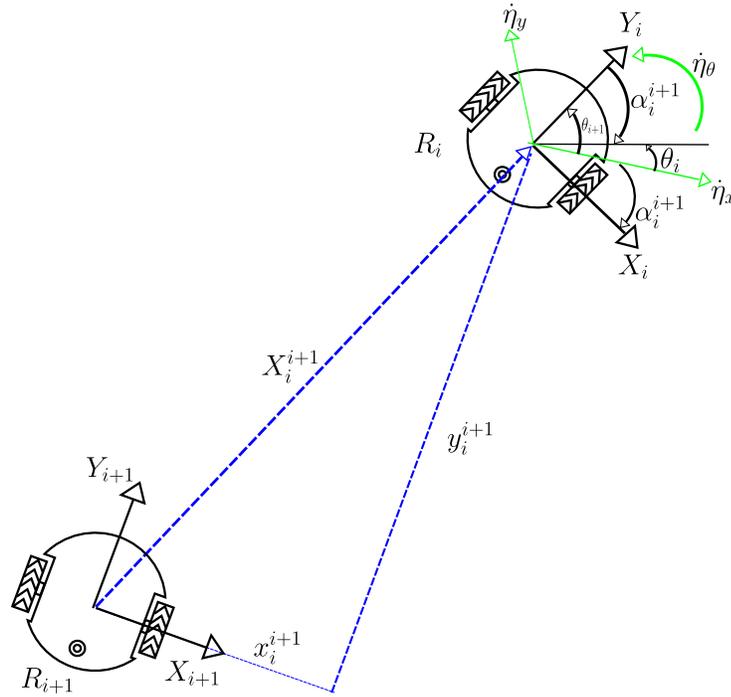


Figura 4.1: Vectores de perturbación $\hat{\eta}_x$, $\hat{\eta}_y$, $\hat{\eta}_\theta$ en ejes móviles.

4.3. Solución alternativa al problema de estimación de perturbaciones

Considerando que es posible medir las distancias y orientaciones relativas,

$$\hat{x}_i^{i+1}, \quad \hat{y}_i^{i+1}, \quad \hat{\alpha}_i^{i+1}$$

con,

$$\hat{\alpha}_i^{i+1} = \theta_i - \theta_{i+1}.$$

Y que por medio de una derivada aproximada es posible obtener sus vectores de velocidad asociados,

$$\hat{\dot{x}}_i^{i+1}, \quad \hat{\dot{y}}_i^{i+1}, \quad \hat{\dot{\alpha}}_i^{i+1}.$$

Ante la aparición de perturbaciones de velocidades externas, se modifica el desplazamiento original del robot, pero no cambian directamente a v_i y ω_i . Por lo tanto, a partir de las mediciones realizadas, se puede escribir,

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_{i_m}^{i+1} &= \hat{y}_{i_m}^{i+1} \omega_{i+1} + v_{i_m} \cos \hat{\alpha}_{i_m}^{i+1} - v_{i+1} + \dot{\eta}_x \\ \dot{\hat{y}}_{i_m}^{i+1} &= -\hat{x}_{i_m}^{i+1} \omega_{i+1} + v_{i_m} \sin \hat{\alpha}_{i_m}^{i+1} + \dot{\eta}_y \\ \dot{\hat{\alpha}}_{i_m}^{i+1} &= \omega_{i_m} - \omega_{i+1} + \dot{\eta}_\theta.\end{aligned}$$

Con lo cual, las perturbaciones resultan,

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_x &= \hat{x}_{i_m}^{i+1} - \hat{y}_{i_m}^{i+1} \omega_{i+1} - v_{i_m} \cos \hat{\alpha}_{i_m}^{i+1} + v_{i+1} \\ \dot{\eta}_y &= \hat{y}_{i_m}^{i+1} + \hat{x}_{i_m}^{i+1} \omega_{i+1} - v_{i_m} \sin \hat{\alpha}_{i_m}^{i+1} \\ \dot{\eta}_\theta &= \hat{\alpha}_{i_m}^{i+1} - \omega_{i_m} + \omega_{i+1}.\end{aligned}$$

De esta forma, las perturbaciones externas pueden estimarse en función de las mediciones realizadas a partir del robot seguidor y las velocidades de control de los robots. Nótese que estas perturbaciones están referenciadas a los ejes $X_{i+1} - Y_{i+1}$.

La estimación precisa de los parámetros de la perturbación es fundamental para mejorar la estabilidad de la formación y el control de los robots móviles. A partir de las mediciones de las posiciones relativas x_i^{i+1} , y_i^{i+1} , α_i^{i+1} obtenidas del robot seguidor, es posible reconstruir las velocidades \dot{x}_i^{i+1} , \dot{y}_i^{i+1} , $\dot{\alpha}_i^{i+1}$ utilizando el conocimiento de las velocidades lineales y angulares de ambos robots. Esta reconstrucción se puede realizar mediante el sistema (4.4), y la dinámica perturbada se describe de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i^{i+1} &= y_i^{i+1} \omega_{i+1} + v_i \cos \alpha_i^{i+1} - v_{i+1} + \dot{\eta}_{i_x} \\ \dot{y}_i^{i+1} &= -x_i^{i+1} \omega_{i+1} + v_i \sin \alpha_i^{i+1} + \dot{\eta}_{i_y} \\ \dot{\alpha}_i^{i+1} &= \omega_i - \omega_{i+1} + \dot{\eta}_{i_\theta}.\end{aligned}\tag{4.12}$$

La dirección de los vectores de perturbación $\dot{\eta}_i$ en los ejes móviles $X_i^{i+1} - Y_i^{i+1}$ puede verse en la Figura 4.1.

4.4. Problema líder-seguidor mediante tiempo de separación

Para resolver el problema de formación retardada, considere ahora el diagrama mostrado en la Figura 4.2, donde además del robot líder R_i y el robot seguidor R_{i+1} se muestra un robot virtual $R_{i\tau}$ que representa la imagen retardada τ , unidades de tiempo, del robot líder.

En la Figura 4.2, X_i^{i+1} representa un vector referenciado en un eje móvil montado sobre el robot R_{i+1} que apunta a la posición del robot R_i , está dado en la forma,

$$X_i^{i+1} = \begin{bmatrix} x_i^{i+1} \\ y_i^{i+1} \end{bmatrix}.$$

A partir de la Figura 4.2, puede describirse la estrategia de formación:

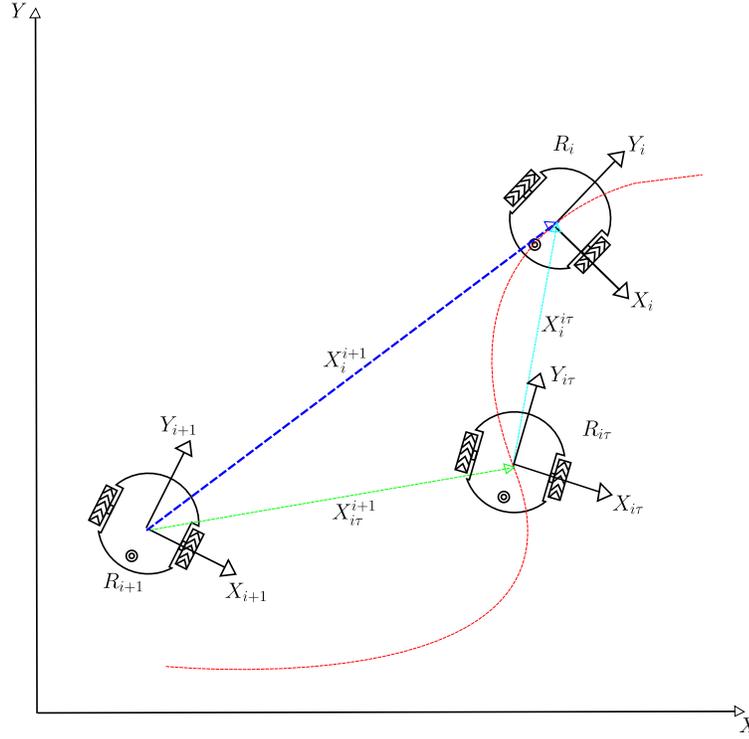


Figura 4.2: Formación líder-seguidor basada en tiempo de retardo.

- i Considerando la posición del robot líder $R_i(t)$ y la del robot retardado $R_{i\tau}(t) = R_i(t - \tau)$, obtener la dinámica relativa entre los dos robots.
- ii Considerando la relación X_i^{i+1} y la estimación $X_{i\tau}^{i+1}$ obtener la distancia $X_{i\tau}^{i+1}$.
- iii Proponer una retroalimentación basada en $X_{i\tau}^{i+1}$ para lograr que R_{i+1} converja a la posición de $R_{i\tau}$.

Siguiendo los desarrollos presentados anteriormente la dinámica entre el robot R_i y su dinámica retrasada $R_{i\tau}$, en el caso libre de perturbaciones toma la forma,

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_i^{i\tau} &= -v_i(\bar{\tau}) + v_i(t) \cos \alpha_i^{i\tau}(t) + \omega_i(\bar{\tau}) y_i^{i\tau}(t) \\
 \dot{y}_i^{i\tau} &= v_i(t) \sin \alpha_i^{i\tau}(t) - \omega_i(\bar{\tau}) x_i^{i\tau}(t) \\
 \dot{\alpha}_i^{i\tau} &= \omega_i(t) - \omega_i(\bar{\tau})
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

donde,

$$\bar{\tau} = t - \tau \quad y \quad \alpha_i^{i\tau} = \theta_i - \theta_{i\tau}. \tag{4.14}$$

Nótese que la estimación de las distancias $x_i^{i\tau}$, $y_i^{i\tau}$ y la orientación relativa, está basada en las velocidades aplicadas actuales $v(t)$, $w(t)$ y sus valores retrasados $v(t - \tau)$, $w(t - \tau)$.

En una implementación en tiempo real, debido a la naturaleza cinemática del análisis realizado, las velocidades aplicadas no corresponden a los desplazamientos reales del robot debido a la no consideración de masas, inercias, etc, por lo tanto, existirá un error en la estimación de $x_i^{i\tau}$, $y_i^{i\tau}$, $\alpha_i^{i\tau}$. Aunado a lo anterior, este error se inyectará ante la posible aparición de patinados y deslizamientos del robot líder.

4.4.1. Dinámica relativa retrasada considerando perturbaciones

Considere la formación mostrada en la Figura 4.3, y considere el modelo del robot líder en los ejes $X - Y$, sujeto a perturbaciones,

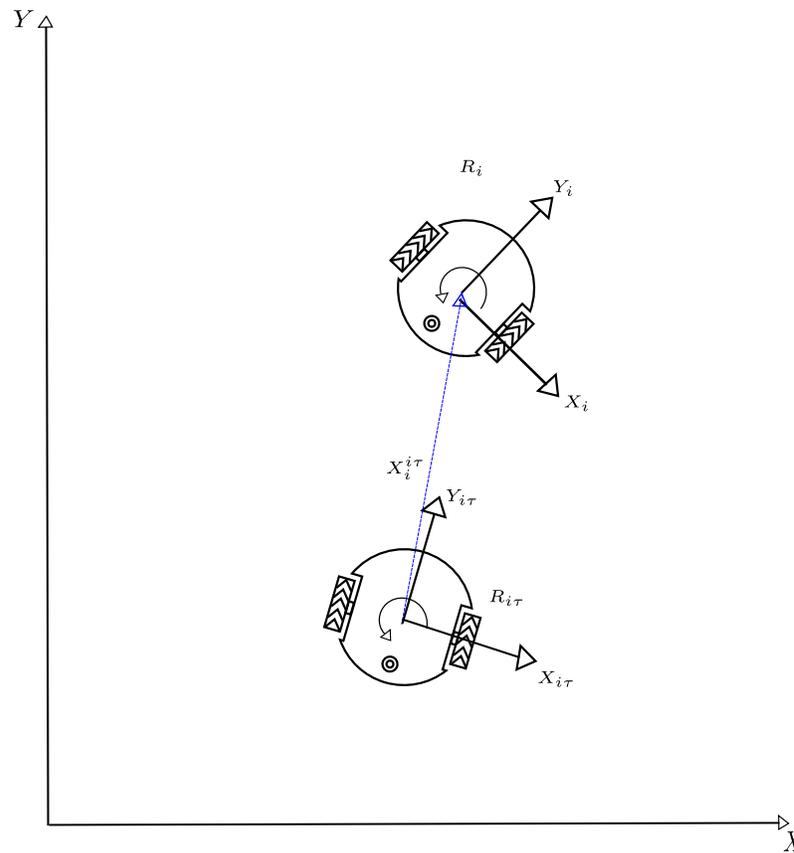


Figura 4.3: Medición entre el robot líder y el robot con retardo τ

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= v_i \cos(\theta_i) + \dot{\gamma}_{i_x} \\ \dot{y}_i &= v_i \sin(\theta_i) + \dot{\gamma}_{i_y} \\ \dot{\theta}_i &= \omega_i + \dot{\gamma}_{i_\theta}.\end{aligned}\tag{4.15}$$

La dinámica retrasada del robot líder, τ unidades de tiempo, R_τ puede describirse en la forma,

$$\begin{aligned}
\dot{x}_i &= v_i(t - \tau) \cos(\theta_i(t - \tau)) + \dot{\gamma}_{i_x}(t - \tau) \\
\dot{y}_i &= v_i(t - \tau) \sin(\theta_i(t - \tau)) + \dot{\gamma}_{i_y}(t - \tau) \\
\dot{\theta}_i &= \omega_i(t - \tau) + \dot{\gamma}_\theta(t - \tau).
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Se busca encontrar la dinámica relativa entre (4.15) y (4.16), por lo cual se usa nuevamente el cálculo de las distancias relativas,

$$\begin{aligned}
x_i^{i\tau} &= (x_i - x_{i\tau}) \cos \theta_{i\tau} + (y_i - y_{i\tau}) \sin \theta_{i\tau} \\
y_i^{i\tau} &= -(x_i - x_{i\tau}) \sin \theta_{i\tau} + (y_i - y_{i\tau}) \cos \theta_{i\tau}.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Para simplificar la notación considere en general que para la función $f(t)$, la notación $\bar{f}(t)$ se representa $\bar{f}(t) = \bar{f}(t - \tau)$. Tomando las derivadas con respecto al tiempo se obtiene,

$$\begin{aligned}
\dot{x}_i^{i+1} &= -(x_i - x_{i\tau}) \dot{\bar{\omega}}_{i\tau} \sin \bar{\theta}_{i\tau} - [v_i \cos \theta_i + \dot{\gamma}_x - \bar{v}_{i\tau} \cos(\bar{\theta}_{i\tau}) - \dot{\gamma}_x] \cos \bar{\theta}_{i\tau} \\
&\quad - (y_i - y_{i\tau}) \dot{\bar{\omega}}_{i\tau} \cos \bar{\theta}_{i\tau} + [v_i \sin \theta_i + \dot{\gamma}_y - \bar{v}_{i\tau} \sin(\bar{\theta}_{i\tau}) - \dot{\gamma}_y] \sin \bar{\theta}_{i\tau} \\
&= [-(x_i - x_{i\tau}) \cos \bar{\theta}_{i\tau} + (y_i - y_{i\tau}) \sin \bar{\theta}_{i\tau}] \dot{\bar{\omega}}_{i\tau} + [\cos(\theta_i) \cos(\bar{\theta}_{i\tau}) + \sin(\theta_i) \sin(\bar{\theta}_{i\tau})] v_i \\
&\quad - [\cos^2(\bar{\theta}_{i\tau}) + \sin^2(\bar{\theta}_{i\tau})] \bar{v}_{i\tau} + (\dot{\gamma}_x - \dot{\gamma}_x) \cos(\bar{\theta}_{i\tau}) + (\dot{\gamma}_y - \dot{\gamma}_y) \sin(\bar{\theta}_{i\tau}) \\
&= y_i^{i\tau} \dot{\bar{\omega}}_{i\tau} + v_i \cos(\theta_i - \bar{\theta}_{i\tau}) - \bar{v}_{i\tau} \cos(\bar{\theta}_{i\tau} - \bar{\theta}_{i\tau}) + (\dot{\gamma}_x - \dot{\gamma}_x) \cos(\bar{\theta}_{i\tau}) + (\dot{\gamma}_y - \dot{\gamma}_y) \sin(\bar{\theta}_{i\tau}) \\
&= y_i^{i\tau} \dot{\bar{\omega}}_{i\tau} + v_i \cos(\theta_i - \bar{\theta}_{i\tau}) - \bar{v}_{i\tau} + (\dot{\gamma}_x - \dot{\gamma}_x) \cos(\bar{\theta}_{i\tau}) + (\dot{\gamma}_y - \dot{\gamma}_y) \sin(\bar{\theta}_{i\tau})
\end{aligned} \tag{4.18}$$

y

$$\begin{aligned}
\dot{y}_i^{i+1} &= -(x_i - x_{i\tau}) \dot{\bar{\omega}}_{i\tau} \cos \bar{\theta}_{i\tau} - [v_i \cos \theta_i + \dot{\gamma}_x - \bar{v}_{i\tau} \cos(\bar{\theta}_{i\tau}) - \dot{\gamma}_x] \sin \bar{\theta}_{i\tau} \\
&\quad + (y_i - y_{i\tau}) \dot{\bar{\omega}}_{i\tau} \sin \bar{\theta}_{i\tau} + [v_i \sin \theta_i + \dot{\gamma}_y - \bar{v}_{i\tau} \sin(\bar{\theta}_{i\tau}) - \dot{\gamma}_y] \cos \bar{\theta}_{i\tau} \\
&= [-(x_i - x_{i\tau}) \cos \theta_{i\tau} + (y_i - y_{i\tau}) \sin \theta_{i\tau}] \dot{\bar{\omega}}_{i\tau} + [-\cos(\theta_i) \sin(\bar{\theta}_{i\tau}) + \sin(\theta_i) \cos(\bar{\theta}_{i\tau})] v_i \\
&\quad + [\cos(\bar{\theta}_{i\tau}) \sin(\bar{\theta}_{i\tau}) - \sin(\bar{\theta}_{i\tau}) \cos(\bar{\theta}_{i\tau})] \bar{v}_{i\tau} - (\dot{\gamma}_x - \dot{\gamma}_x) \sin \bar{\theta}_{i\tau} + (\dot{\gamma}_y - \dot{\gamma}_y) \cos(\bar{\theta}_{i\tau}) \\
&= -x_i^{i\tau} \dot{\bar{\omega}}_{i\tau} + v_i \sin(\theta_i - \bar{\theta}_{i\tau}) - (\dot{\gamma}_x - \dot{\gamma}_x) \sin(\bar{\theta}_{i\tau}) + (\dot{\gamma}_y - \dot{\gamma}_y) \cos(\bar{\theta}_{i\tau}) \\
&= -x_i^{i\tau} \dot{\bar{\omega}}_{i\tau} + v_i \sin(\theta_i - \bar{\theta}_{i\tau}) - (\dot{\gamma}_x - \dot{\gamma}_x) \sin(\bar{\theta}_{i\tau}) + (\dot{\gamma}_y - \dot{\gamma}_y) \cos(\bar{\theta}_{i\tau}).
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Considerando además, $\alpha_i^{i\tau} = \dot{\theta}_i - \dot{\theta}_{i\tau}$, se obtiene,

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha}_i^{i\tau} &= \theta_i - \dot{\bar{\theta}}_{i\tau} = \omega_i + \dot{\gamma}_\theta - \bar{\omega}_{i\tau} - \dot{\gamma}_\theta \\
&= \omega_i - \bar{\omega}_{i\tau} + \dot{\gamma}_\theta - \dot{\gamma}_\theta.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Por lo tanto, la dinámica perturbada del robot líder R_i relativa al robot virtual $R_{i\tau}$ toma la forma,

$$\begin{aligned}
\dot{x}_i^{i\tau} &= y_i^{i\tau} \bar{\omega}_{i\tau} + \cos \alpha_i^{i\tau} v_i - \bar{v}_{i\tau} + (\dot{\gamma}_{ix} - \dot{\gamma}_{ix}) \cos \bar{\theta}_{i\tau} + (\dot{\gamma}_{iy} - \dot{\gamma}_{iy}) \sin \bar{\theta}_{i\tau} \\
\dot{y}_i^{i\tau} &= -x_i^{i\tau} \bar{\omega}_{i\tau} + \sin \alpha_i^{i\tau} v_i - (\dot{\gamma}_{ix} - \dot{\gamma}_{ix}) \sin \bar{\theta}_{i\tau} + (\dot{\gamma}_{iy} - \dot{\gamma}_{iy}) \cos \bar{\theta}_{i\tau} \\
\dot{\alpha}_i^{i\tau} &= \omega_i - \bar{\omega}_{i\tau} - \dot{\gamma}_{i\theta}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

la cual incluye el efecto de las perturbaciones, modificando la cinemática descrita en el sistema (4.21) con respecto al sistema original (4.13) libre de perturbaciones.

4.5. Solución basada en la dinámica retrasada

Nótese que la dinámica X_i^{i+1} está disponible a partir de mediciones efectuadas sobre el robot R_{i+1} y que la dinámica $X_i^{i\tau}$ se puede obtener mediante las ecuaciones (4.21) en las cuales ya se considera el efecto de las perturbaciones $\dot{\gamma}$ afectando al robot R_i .

Se desea ahora que,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_i^{i+1} = 0. \tag{4.22}$$

Nótese a partir de la Figura 4.4, que $X_{i\tau}^{i+1}$ puede obtenerse geoméricamente como,

$$X_{i\tau}^{i+1} = X_i^{i+1} - R(C_i) X_i^{i\tau} \tag{4.23}$$

con,

$$C_i = \alpha_i^{i+1} - \alpha_i^{i\tau}. \tag{4.24}$$

La convergencia (4.22) puede lograrse al considerar que sobre la trayectoria perturbada del punto $P_{i\tau}$ se encuentra un robot virtual $R_{i\tau_v}$ libre de perturbaciones, dado que la perturbacion ya ha modificado la trayectoria del punto $P_{i\tau}$.

La dinámica entre el robot R_{i+1} y $R_{i\tau-v}$ puede describirse en la forma,

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{i\tau_v}^{i+1} &= y_{i\tau_v}^{i+1} \omega_{i+1} - v_{i+1} + \bar{v}_{i\tau_v} \cos \alpha_{i\tau_v}^{i+1} \\
\dot{y}_{i\tau_v}^{i+1} &= x_{i\tau_v}^{i+1} \omega_{i+1} + \bar{v}_{i\tau_v} \sin \alpha_{i\tau_v}^{i+1} \\
\dot{\alpha}_{i\tau_v}^{i+1} &= \bar{\omega}_{i\tau_v} - \omega_{i+1}.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Siguiendo los resultados en [34] y [41], para el caso libre de perturbaciones, es posible proponer la retroalimentación,

$$\begin{aligned}
v_{i+1} &= \bar{v}_{i\tau_v} \cos \alpha_{i\tau_v}^{i+1} + k_1 X_{i\tau_v}^{i+1} \\
\omega_{i+1} &= k_2 \alpha_{i\tau_v}^{i+1} + k_3 y_{i\tau_v}^{i+1} \bar{v}_{i\tau_v} \frac{\sin \alpha_{i\tau_v}^{i+1}}{\alpha_{i\tau_v}^{i+1}} + \bar{\omega}_{i\tau_v}.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

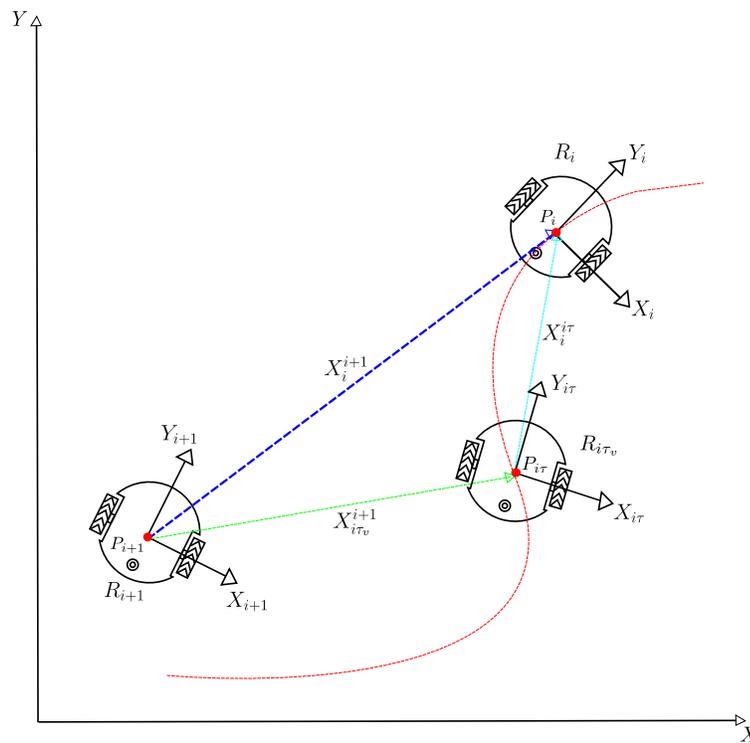


Figura 4.4: Distancia geométrica $X_{i\tau}^{i+1}$.

Sustituyendo (4.26) en (4.25),

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{i\tau_v}^{i+1} &= y_{i\tau_v}^{i+1}(k_2\alpha_{i\tau_v}^{i+1} + k_3y_{i\tau_v}^{i+1}\bar{v}_{i\tau_v}\frac{\sin\alpha_{i\tau_v}^{i+1}}{\alpha_{i\tau_v}^{i+1}} + \bar{\omega}_{i\tau_v}) - (\bar{v}_{i\tau_v}\cos\alpha_{i\tau_v}^{i+1} + k_1X_{i\tau_v}^{i+1}) + \bar{v}_{i\tau_v}\cos\alpha_{i\tau_v}^{i+1} \\
&= -k_1x_{i\tau_v}^{i+1} + k_2y_{i\tau_v}^{i+1}\alpha_{i\tau_v}^{i+1} + k_3y_{i\tau_v}^{i+1}\bar{v}_{i\tau_v}\frac{\sin\alpha_{i\tau_v}^{i+1}}{\alpha_{i\tau_v}^{i+1}} + \bar{\omega}_{i\tau_v}y_{i\tau_v}^{i+1} \\
\dot{y}_{i\tau_v}^{i+1} &= x_{i\tau_v}^{i+1}(k_2\alpha_{i\tau_v}^{i+1} + k_3y_{i\tau_v}^{i+1}\bar{v}_{i\tau_v}\frac{\sin\alpha_{i\tau_v}^{i+1}}{\alpha_{i\tau_v}^{i+1}} + \bar{\omega}_{i\tau_v}) + \bar{v}_{i\tau_v}\sin\alpha_{i\tau_v}^{i+1} \\
&= \bar{v}_{i\tau_v}\sin\alpha_{i\tau_v}^{i+1} - k_2x_{i\tau_v}^{i+1}\alpha_{i\tau_v}^{i+1} - k_3y_{i\tau_v}^{i+1}\bar{v}_{i\tau_v}\frac{\sin\alpha_{i\tau_v}^{i+1}}{\alpha_{i\tau_v}^{i+1}} + \bar{\omega}_{i\tau_v}) - \bar{v}_{i\tau_v}\sin\alpha_{i\tau_v}^{i+1} \\
\dot{\alpha}_{i\tau_v}^{i+1} &= \bar{\omega}_{i\tau_v} - (k_2\alpha_{i\tau_v}^{i+1} + k_3y_{i\tau_v}^{i+1}\bar{v}_{i\tau_v}\frac{\sin\alpha_{i\tau_v}^{i+1}}{\alpha_{i\tau_v}^{i+1}} + \bar{\omega}_{i\tau_v}) \\
&= -k_2\alpha_{i\tau_v}^{i+1} - k_3y_{i\tau_v}^{i+1}\bar{v}_{i\tau_v}\frac{\sin\alpha_{i\tau_v}^{i+1}}{\alpha_{i\tau_v}^{i+1}}.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Por lo tanto el sistema en lazo cerrado queda de la forma,

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{i\tau_v}^{i+1} &= -k_1x_{i\tau_v}^{i+1} + k_2y_{i\tau_v}^{i+1}\alpha_{i\tau_v}^{i+1} + k_3y_{i\tau_v}^{i+1}\bar{v}_{i\tau_v}\frac{\sin\alpha_{i\tau_v}^{i+1}}{\alpha_{i\tau_v}^{i+1}} + \bar{\omega}_{i\tau_v}y_{i\tau_v}^{i+1} \\
\dot{y}_{i\tau_v}^{i+1} &= \bar{v}_{i\tau_v}\sin\alpha_{i\tau_v}^{i+1} - k_2x_{i\tau_v}^{i+1}\alpha_{i\tau_v}^{i+1} - k_3y_{i\tau_v}^{i+1}\bar{v}_{i\tau_v}\frac{\sin\alpha_{i\tau_v}^{i+1}}{\alpha_{i\tau_v}^{i+1}} + \bar{\omega}_{i\tau_v}) - \bar{v}_{i\tau_v}\sin\alpha_{i\tau_v}^{i+1} \\
\dot{\alpha}_{i\tau_v}^{i+1} &= -k_2\alpha_{i\tau_v}^{i+1} - k_3y_{i\tau_v}^{i+1}\bar{v}_{i\tau_v}\frac{\sin\alpha_{i\tau_v}^{i+1}}{\alpha_{i\tau_v}^{i+1}}.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Proponiendo la función de Lyapunov

$$V(t) = \frac{k_3}{2}((x_{i\tau_v}^{i+1})^2 + (y_{i\tau_v}^{i+1})^2) + \frac{1}{2}((\alpha_{i\tau_v}^{i+1})^2) \tag{4.29}$$

se obtiene,

$$\dot{V}(t) = -k_1k_3(x_{i\tau_v}^{i+1})^2 - k_2(\alpha_{i\tau_v}^{i+1})^2. \tag{4.30}$$

Lo que muestra que el sistema (4.27) es al menos estable. La consideración del lema de Barbalat muestra que como \dot{V} es acotada, \dot{V} es uniformemente continua y por lo tanto $\dot{V} \rightarrow 0$

cuando $t \rightarrow \infty$. Entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_{i\tau_v}^{i+1} = y = \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_{i\tau_v}^{i+1}. \quad (4.31)$$

Nótese que a partir de (4.27), considerando la tercera ecuación en (4.31) se tiene,

$$y_{i\tau_v}^{i+1} \bar{v}_{i\tau_v} = 0. \quad (4.32)$$

La primera ecuación en (4.31) produce,

$$k_3 y_{i\tau_v}^{i+1} \bar{v}_{i\tau_v} + \omega_{i\tau_v} y_{i\tau_v}^{i+1} = 0. \quad (4.33)$$

por lo tanto, a partir de (4.32) se tiene,

$$\omega_{i\tau_v} y_{i\tau_v}^{i+1} = 0. \quad (4.34)$$

Entonces, considerando que $\bar{v}_{i\tau_v}^{i+1} \neq 0$ ó $\bar{\omega}_{i\tau_v}^{i+1} \neq 0$ en (4.32) y (4.34) respectivamente, se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{i\tau_v}^{i+1} = 0. \quad (4.35)$$

Con lo cual se obtiene la convergencia buscada.

4.6. Convergencia de $X_{i\tau}^{i+1}$ utilizando la dinámica perturbada

Con la estimación calculada entre el robot líder R_i y el robot virtual o líder con retardo $R_{i\tau}$, de igual forma, es requerido el cálculo de las distancias relativas entre el robot virtual y el robot seguidor, para de esta forma completar la estrategia de seguimiento para lo cual, en este caso se considera el robot virtual (líder) retrasado,

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i\tau} &= \bar{v}_{i\tau} \cos \bar{\theta}_{i\tau} + \dot{\gamma}_x \\ \dot{y}_{i\tau} &= \bar{v}_{i\tau} \sin \bar{\theta}_{i\tau} + \dot{\gamma}_y \\ \dot{\theta}_{i\tau} &= \bar{\omega}_{i\tau} + \dot{\gamma}_\theta \end{aligned}$$

y el correspondiente robot seguidor,

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i+1} &= v_{i+1} \cos \theta_{i+1} \\ \dot{y}_{i+1} &= v_{i+1} \sin \theta_{i+1} \\ \dot{\theta}_{i+1} &= \omega_{i+1}. \end{aligned}$$

Aplicando nuevamente la medición de las distancias relativas tomando como referencia los vectores que se observan en la Figura 5.1,

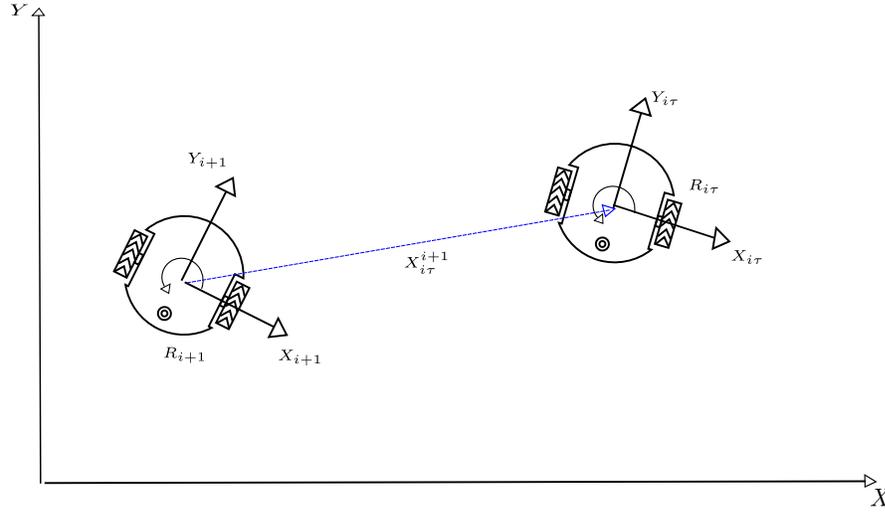


Figura 4.5: Medición entre el robot seguidor y el robot con retardo τ .

$$\begin{aligned} x_{i\tau}^{i+1} &= (x_{i\tau} - x_{i+1}) \cos \theta_{i+1} + (y_{i\tau} - y_{i+1}) \sin \theta_{i+1} \\ y_{i\tau}^{i+1} &= -(x_{i\tau} - x_{i+1}) \sin \theta_{i+1} + (y_{i\tau} - y_{i+1}) \cos \theta_{i+1}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Adaptando los desarrollos de las ecuaciones (3.7), (3.8), (3.9), se obtiene,

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i\tau}^{i+1} &= y_{i\tau}^{i+1} \omega_{i+1} + \bar{v}_{i\tau} \cos \alpha_{i\tau}^{i+1} - v_{i+1} + \dot{\eta}_{i_x} \\ \dot{y}_{i\tau}^{i+1} &= -x_{i\tau}^{i+1} \omega_{i+1} + \bar{v}_{i\tau} \sin \alpha_{i\tau}^{i+1} + \dot{\eta}_{i_y} \\ \dot{\alpha}_{i\tau}^{i+1} &= \bar{\omega}_{i\tau} - \omega_{i+1} + \dot{\eta}_{i_\theta}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

con,

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_x &= \dot{\gamma}_x \cos \theta_{i+1} + \dot{\gamma}_y \sin \theta_{i+1} \\ \dot{\eta}_y &= -\dot{\gamma}_x \sin \theta_{i+1} + \dot{\gamma}_y \cos \theta_{i+1}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Para lograr que R_{i+1} tienda a $R_{i\tau}$ se requiere ahora que,

$$\lim_{t \rightarrow 0} x_{i\tau}^{i+1} = 0 \quad \lim_{t \rightarrow 0} y_{i\tau}^{i+1} = 0 \quad \lim_{t \rightarrow 0} \alpha_{i\tau}^{i+1} = 0. \quad (4.39)$$

4.7. Obtención alternativa de la velocidad angular

Para mostrar la convergencia al origen del modelo perturbado de la dinámica $X_{i\tau}^{i+1}$ dada en (4.37), considere de nuevo una función candidata de Lyapunov en la forma,

$$V(t) = \frac{k_3}{2}((x_{i\tau_v}^{i+1})^2 + (y_{i\tau_v}^{i+1})^2) + \frac{1}{2}((\alpha_{i\tau_v}^{i+1})^2). \quad (4.40)$$

Tomando la derivada con respecto al tiempo se tiene,

$$\begin{aligned} \dot{V} &= k_3(X_{i\tau}^{i+1}\dot{X}_{i\tau}^{i+1} + Y_{i\tau}^{i+1}\dot{Y}_{i\tau}^{i+1}) + \alpha_{i\tau}^{i+1}\dot{\alpha}_{i\tau}^{i+1} \\ &= k_3x_{i\tau}^{i+1}(y_{i\tau}^{i+1}\omega_{i+1} - v_{i+1} + \bar{v}_{i\tau}\cos\alpha_{i\tau}^{i+1} + \dot{\eta}_x) + k_3y_{i\tau}^{i+1}(-x_{i\tau}^{i+1}\omega_{i+1} \\ &\quad - \bar{v}_{i\tau}\sin\alpha_{i\tau}^{i+1} + \dot{\eta}_y) + \alpha_{i\tau}^{i+1}(\bar{\omega}_{i\tau} - \omega_{i+1} + \dot{\gamma}_\theta) \\ &= k_3x_{i\tau}^{i+1}(-v_{i+1} + \bar{v}_{i\tau}\cos\alpha_{i\tau}^{i+1} + \dot{\eta}_x) + k_3y_{i\tau}^{i+1}(\bar{v}_{i\tau}\sin\alpha_{i\tau}^{i+1} + \dot{\eta}_y) \\ &\quad + \alpha_{i\tau}^{i+1}(\bar{\omega}_{i\tau} - \omega_{i+1} + \dot{\gamma}_\theta). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Defináse entonces la retroalimentación

$$v_{i+1} = \bar{v}_{i\tau}\cos\alpha_{i\tau}^{i+1} + k_1x_{i\tau}^{i+1} + \dot{\eta}_x \quad (4.42)$$

se obtiene entonces,

$$\dot{V} = -k_1k_3x_{i\tau}^{i+1} + k_3y_{i\tau}^{i+1}(\bar{v}_{i\tau}\sin\alpha_{i\tau}^{i+1} + \dot{\eta}_y) + \alpha_{i\tau}^{i+1}(\bar{\omega}_{i\tau} - \omega_{i+1} + \dot{\gamma}_\theta). \quad (4.43)$$

Por otra parte, considere,

$$\omega_{i+1} = -k_2\alpha_{i\tau}^{i+1} + k_3y_{i\tau}^{i+1}\left(\bar{v}_{i\tau}\frac{\sin\alpha_{i\tau}^{i+1}}{\alpha_{i\tau}^{i+1}} + \dot{\eta}_y\right) + \bar{\omega}_{i\tau} + \dot{\gamma}_\theta \quad (4.44)$$

con lo cual se obtiene,

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -k_1k_3(x_{i\tau}^{i+1})^2 + k_3y_{i\tau}^{i+1}(\bar{v}_{i\tau}\sin\alpha_{i\tau}^{i+1} + \dot{\eta}_y) + \alpha_{i\tau}^{i+1}(\bar{\omega}_{i\tau} - k_2\alpha_{i\tau}^{i+1} - k_3y_{i\tau}^{i+1}) \\ &\quad \left(\bar{v}_{i\tau}\frac{\sin\alpha_{i\tau}^{i+1}}{\alpha_{i\tau}^{i+1}} + \dot{\eta}_y - \bar{\omega}_{i\tau} - \dot{\gamma}_\theta + \dot{\gamma}_\theta\right) \\ &= -k_1k_3(x_{i\tau}^{i+1})^2 + k_3y_{i\tau}^{i+1}(\bar{v}_{i\tau}\sin\alpha_{i\tau}^{i+1} + \dot{\eta}_y) + \alpha_{i\tau}^{i+1}(-k_2\alpha_{i\tau}^{i+1} \\ &\quad - k_3y_{i\tau}^{i+1}\left(\frac{\sin\alpha_{i\tau}^{i+1}}{\alpha_{i\tau}^{i+1}} + \dot{\eta}_y\right)) \\ &= -k_1k_3(x_{i\tau}^{i+1})^2 + k_3y_{i\tau}^{i+1}(\bar{v}_{i\tau}\sin\alpha_{i\tau}^{i+1} + \dot{\eta}_y) - k_2\alpha_{i\tau}^{i+1} - k_3y_{i\tau}^{i+1}(\bar{v}_{i\tau}\sin\alpha_{i\tau}^{i+1} + \dot{\eta}_y\alpha_{i\tau}^{i+1}) \\ &= -k_1k_3(x_{i\tau}^{i+1})^2 - k_2\alpha_{i\tau}^{i+1} + k_3y_{i\tau}^{i+1}(\dot{\eta}_y - \dot{\eta}_y\alpha_{i\tau}^{i+1}) \\ &= -k_1k_3(x_{i\tau}^{i+1})^2 - k_2\alpha_{i\tau}^{i+1} + k_3y_{i\tau}^{i+1}\dot{\eta}_y(1 - \alpha_{i\tau}^{i+1}). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Considere ahora la retroalimentación,

$$\omega_{i+1} = -k_2 \alpha_{i\tau}^{i+1} + k_3 y_{i\tau}^{i+1} \left(\bar{v}_{i\tau} \frac{\sin \alpha_{i\tau}^{i+1}}{\alpha_{i\tau}^{i+1}} + \frac{\dot{\eta}_y}{\alpha_{i\tau}^{i+1}} \right) + \bar{\omega}_{i\tau} + \dot{\gamma}_\theta. \quad (4.46)$$

Entonces, se obtiene,

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -k_1 k_3 (x_{i\tau}^{i+1})^2 + k_3 y_{i\tau}^{i+1} (\bar{v}_{i\tau} \sin \alpha_{i\tau}^{i+1} + \dot{\eta}_y) - k_2 \alpha_{i\tau}^{i+1} - k_3 y_{i\tau}^{i+1} \left(\bar{v}_{i\tau} \sin \alpha_{i\tau}^{i+1} + \frac{\dot{\eta}_y}{\alpha_{i\tau}^{i+1}} \alpha_{i\tau}^{i+1} \right) \\ &= -k_1 k_3 (x_{i\tau}^{i+1})^2 - k_2 \alpha_{i\tau}^{i+1} + k_3 y_{i\tau}^{i+1} (\dot{\eta}_y - \dot{\eta}_y) \\ &= -k_1 k_3 (x_{i\tau}^{i+1})^2 - k_2 \alpha_{i\tau}^{i+1} + k_3 y_{i\tau}^{i+1}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

La consideración del lema de Barbalat, en la misma forma que en la retroalimentación anterior (4.47) permite demostrar que la convergencia al origen de $X_{i\tau}^{i+1}$

Observación 2. *Nótese que el termino,*

$$\frac{\dot{\eta}_y}{\alpha_{i\tau}^{i+1}}$$

nunca se indetermina ya que cuando $\dot{\eta}_y \neq 0$ se tiene que $\alpha_{i\tau}^{i+1} \neq 0$ y el termino es nulo cuando $\dot{\eta}_y = 0$.

4.8. Simulaciones numéricas

4.8.1. Simulación sin estimación de la perturbación

A continuación se presentan los resultados de las simulaciones realizadas utilizando las distancias relativas obtenidas, para un pelotón de robots, nuevamente se emplea la ley de control (4.36)-(4.38). Asimismo, la trayectoria deseada para el robot líder es una lemniscata. Los parámetros de la lemniscata son: $a = 0.8$ m, $b = 0.6$ m y $p = \frac{2\pi}{50}$ rad/seg.

Las señales de entrada $v_{1_d}(t)$ y $\omega_{1_d}(t)$ se obtienen a partir de las derivadas de la función de la trayectoria deseada. Estas señales son cruciales para asegurar que el robot líder siga la trayectoria de manera precisa. Las expresiones para $v_{1_d}(t)$ y $\omega_{1_d}(t)$ son las siguientes:

$$\begin{aligned} v_{1_d}(t) &= \sqrt{\dot{x}_d^2(t) + \dot{y}_d^2(t)} \\ \omega_{1_d}(t) &= \frac{\dot{y}_d(t)\dot{x}_d(t) - \ddot{x}_d(t)\dot{y}_d(t)}{\dot{x}_d^2(t) + \dot{y}_d^2(t)}. \end{aligned}$$

Se muestran a continuación dos simulaciones numéricas con la finalidad de comparar lo obtenido en el presente capítulo, la primera simulación, muestra el comportamiento de un pelotón

de 3 robots, cuando no existe la estimación de la perturbación, mientras que en la segunda se aplican las estimaciones pertinentes.

Las condiciones iniciales para el robot líder y el seguidor empleadas en la simulación están dadas en la Tabla 4.1.

°	R_i	R_{i+1}
$x(0)$	0	-0.1
$y(0)$	0	-0.2
$\theta(0)$	0	$\pi/2$

Tabla 4.1: Parámetros iniciales de los robots.

En la formación en cadena propuesta, se desea que el robot R_2 siga la trayectoria retardada del robot R_1 y que el robot R_3 siga la trayectoria retrasada del robot R_2 , en ambos casos con un retardo de $\tau = 3$ segundos.

Para mostrar la estimación y compensación de las perturbaciones externas desconocidas, se asumirá que en $t = 10$ ocurren perturbaciones afectando al robot R_1 de la forma,

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_{1x}(t) &= \frac{a_{1x}}{\sqrt{2\pi\alpha_{1x}^2}} e^{-\frac{t^2}{2\alpha_{1x}^2}} \\ \dot{\gamma}_{1y}(t) &= \frac{a_{1y}}{\sqrt{2\pi\alpha_{1y}^2}} e^{-\frac{t^2}{2\alpha_{1y}^2}} \\ \dot{\gamma}_{1\theta}(t) &= 0.\end{aligned}\tag{4.48}$$

La evolución temporal de las perturbaciones desconocidas $\dot{\gamma}_{1i}(t)$ en (4.48), tratan de asemejarse a un movimiento repentino, que altere la posición del robot afectado. La estimación de las perturbaciones actuando en el robot R_1 calculadas a partir de mediciones sobre el eje móvil $X_2 - Y_2$ colocado sobre el robot R_2 se muestran en la Figura 4.6.

La evolución de la velocidad lineal y angular de cada uno de los robots se muestran en la Figura 4.7, donde se observa que el robot líder no detecta la perturbación efectuada.

El cambio en la posición y orientación de cada robot se observa en la Figura 4.8, en ella se muestran como el robot líder no detecta la perturbación sufrida, mientras que el robot seguidor si percibe un cambio en la orientación.

La evolución de las señales obtenidas por los estimadores de las trayectorias deseadas retardadas $X_1^{1\tau}(t)$ para la dinámica entre el robot R_1 y su imagen retardada $R_{1\tau}$ y la dinámica relativa entre el robot R_2 y su imagen retardada $R_{2\tau}$ dada por $X_2^{2\tau}(t)$, obtenidas con respecto a los ejes $X_1 - Y_1$ y $X_2 - Y_2$ respectivamente, se muestran en la Figura 4.9.

Los errores de seguimiento del robot R_2 a la imagen retardada del Robot R_1 , $X_{1\tau}^2(t)$ y del robot R_3 a la imagen retardadas del robot R_2 dada por $X_{2\tau}^3(t)$ pueden verse en la Figura 4.10.

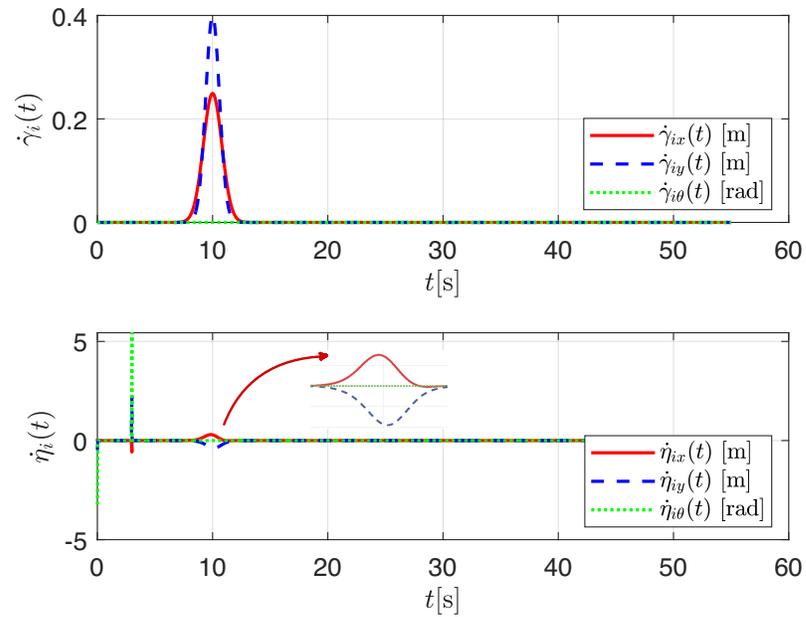


Figura 4.6: Perturbaciones desconocidas $\dot{\gamma}_i(t)$ y perturbaciones estimadas $\dot{\eta}_i(t)$.

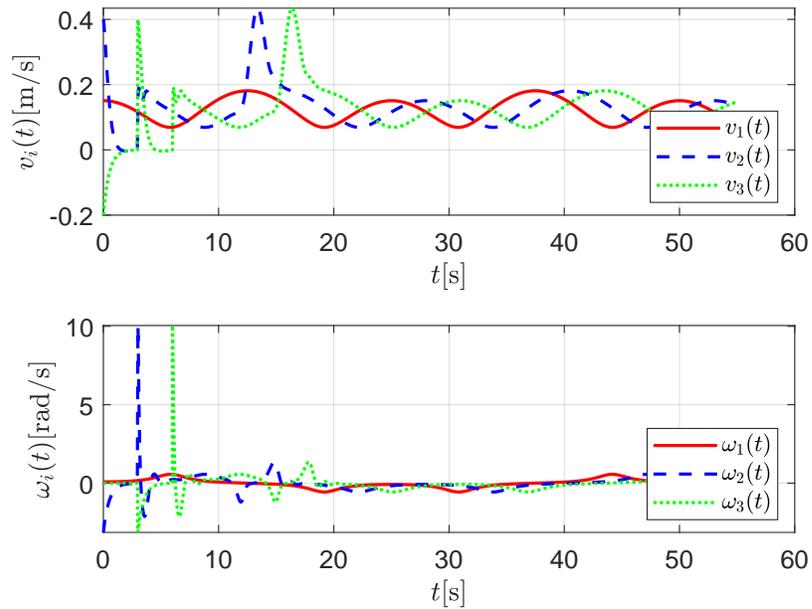


Figura 4.7: Velocidades lineales v_i y angulares ω_i en la formación.

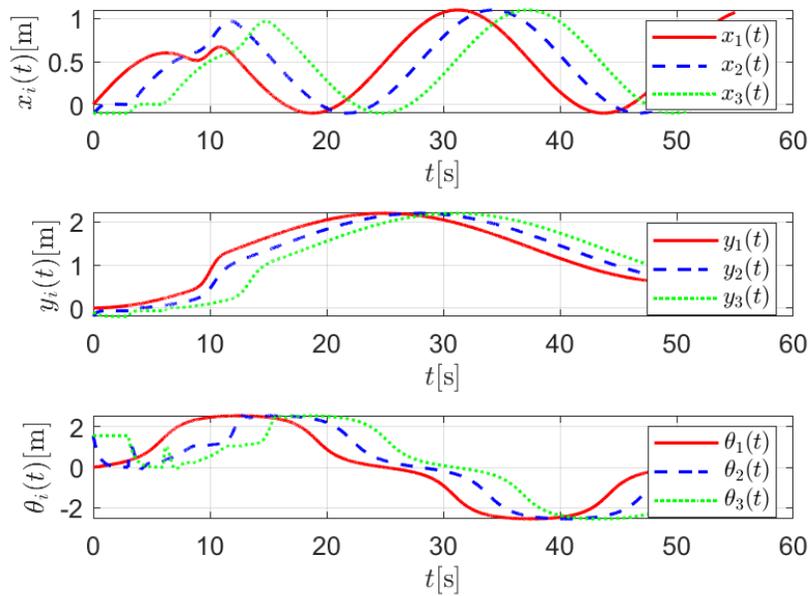


Figura 4.8: Posiciones y orientaciones de cada robot en los ejes inerciales.

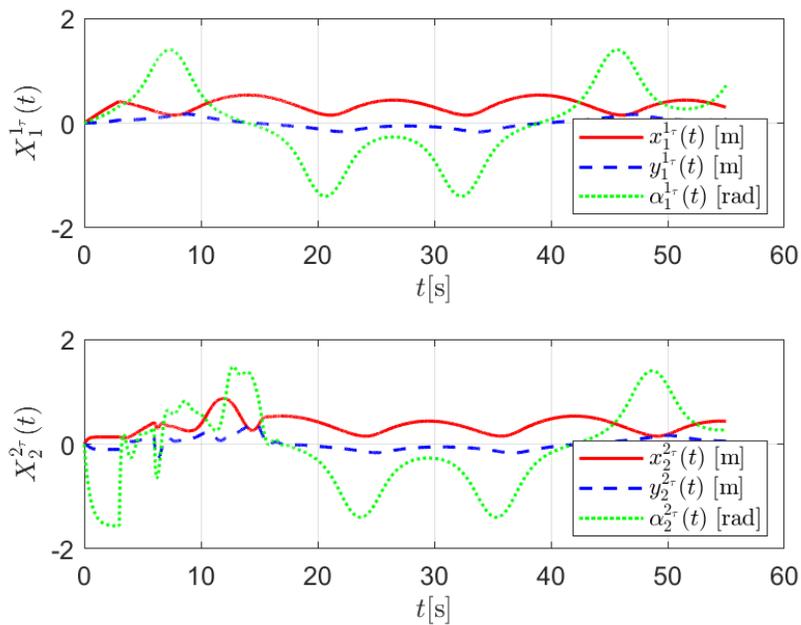


Figura 4.9: Dinámica relativa entre robots.

Nótese la que el error $X_{1\tau}^2(t)$ es medido a partir del eje móvil $X_2 - Y_2$ y el error $X_{2\tau}^3(t)$ es medido sobre el eje $X_3 - Y_3$. La convergencia de estos errores es clara para los periodos donde no existen perturbaciones, mientras que el error $X_{1\tau}^2(t)$ permanece acotado cuando estas actúan. El error $X_{2\tau}^3(t)$ nunca es afectado por las perturbaciones.

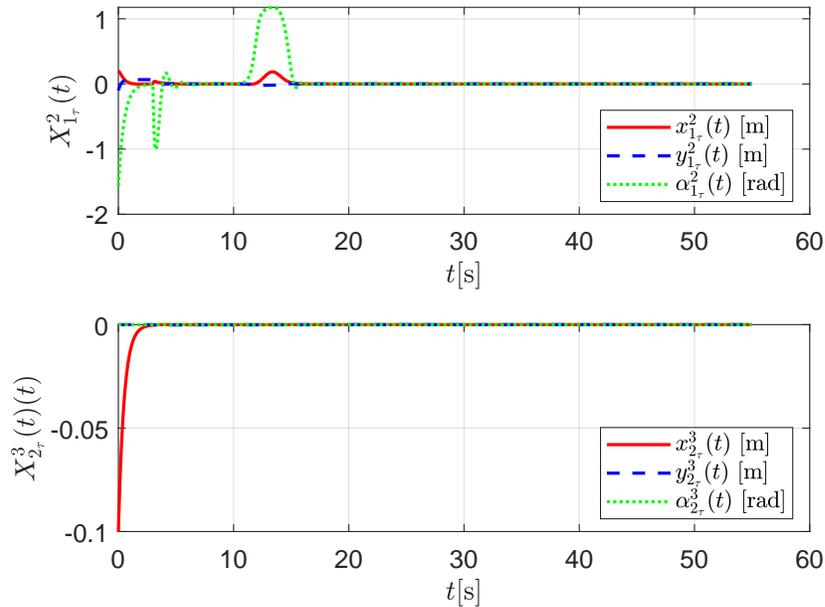


Figura 4.10: Errores de seguimiento entre los robots.

Aun cuando con la estrategia móvil presentada, no es posible tener el comportamiento de los robots sobre los ejes inerciales $X - Y$, tomando los datos necesarios a partir de la simulación, es posible mostrar esta evolución en la Figura 4.11, donde se muestra el efecto de la perturbación sin aplicar la estrategia de compensación de este trabajo.

4.8.2. Simulación con compensación de la perturbación

Implementando la misma trayectoria y perturbación de la simulación anterior, se realizan nuevamente las simulaciones implementando la compensación de la estimación de la perturbación realizada en el capítulo anterior, las perturbaciones desconocidas $\hat{\gamma}_i$ y las perturbaciones estimadas $\hat{\eta}_i$ se muestran en la Figura (4.6)

El comportamiento de la velocidad angular ω_i y la velocidad lineal v_i de cada uno de los miembros de la formación se muestran en la Figura 4.12.

La posición y orientación de cada robot en los ejes $X - Y$ se muestra en la Figura 4.13, en ella se observa que, con la compensación de la perturbación, el robot seguidor es capaz de realizar un correcto seguimiento del robot líder, se observa que el seguidor presenta una menor alteración en la orientación con respecto a la simulación anterior.

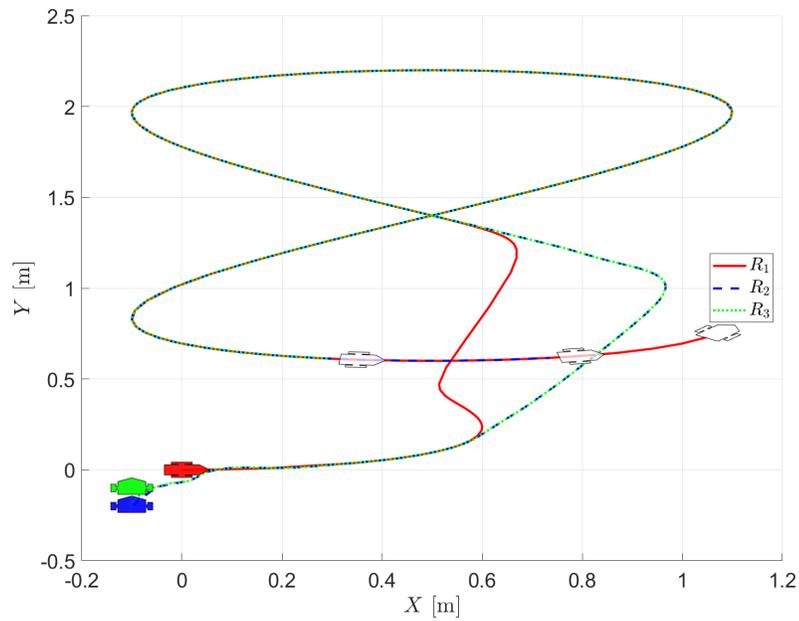
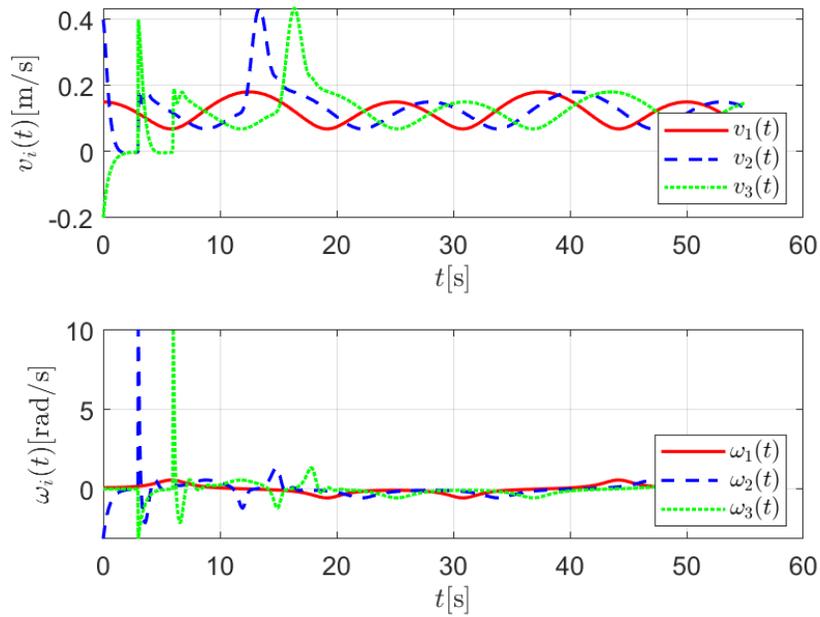
Figura 4.11: Trayectoria en el plano $X - Y$ sin compensación de la perturbación

Figura 4.12: Perturbación empleada

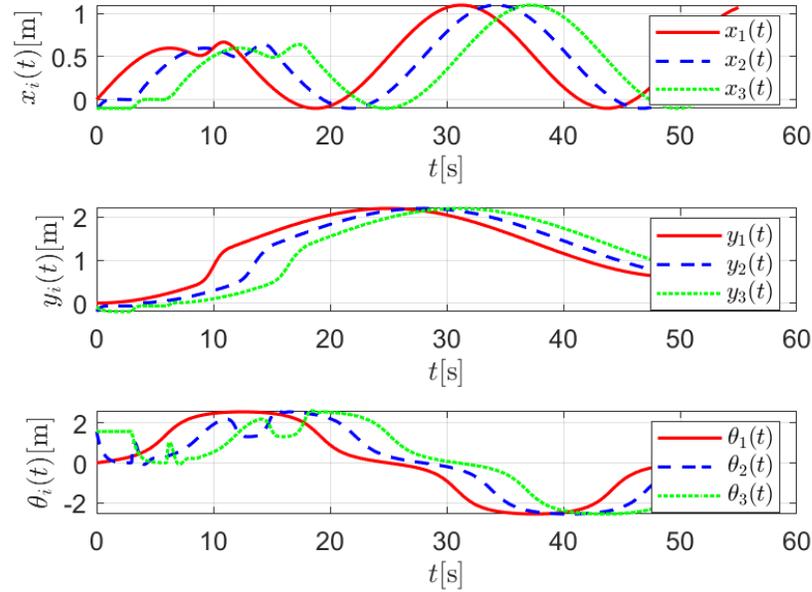


Figura 4.13: Posición y orientación de los robots.

La dinámica relativa entre el robot líder R_1 y su imagen retardada $X_1^{1\tau}(t)$ y la dinámica relativa entre el robot R_2 con su imagen retardada $R_{2\tau}$, se muestran en la Figura 4.14, en esta se observa como las mediciones de los estimadores en comparación con las mediciones realizadas sin estimación de perturbaciones, las dinámicas relativas son capaces de percibir las alteraciones que puedan sufrir el robot R_1 .

Los errores de seguimiento del robot R_2 a la imagen retardada del Robot R_1 , $X_{1\tau}^2(t)$ y del robot R_3 a la imagen retardadas del robot R_2 dada por $X_{2\tau}^3(t)$ pueden verse en la Figura 4.15. Nótese que el error $X_{2\tau}^3(t)$ nunca es afectado por las perturbaciones.

Finalmente, en la Figura 4.16 se muestra el efecto de la compensación de las perturbaciones en el pelotón de robots, donde se observa una mejora considerable en las estrategias de seguimiento, siendo esta capaz de realizar la corrección en la trayectoria en un menor tiempo.

De las simulaciones anteriores se observa como la estimación propuesta mejora significativamente el desempeño del pelotón ante la presencia de perturbaciones externas, logrando un mejor seguimiento de las trayectorias y evitando de esta forma que durante el seguimiento se puedan presentar accidentes.

4.9. Conclusiones del capítulo

Para concluir este capítulo, es fundamental resaltar que la investigación sobre las perturbaciones que afectan al robot líder ha demostrado ser crucial tanto desde una perspectiva global

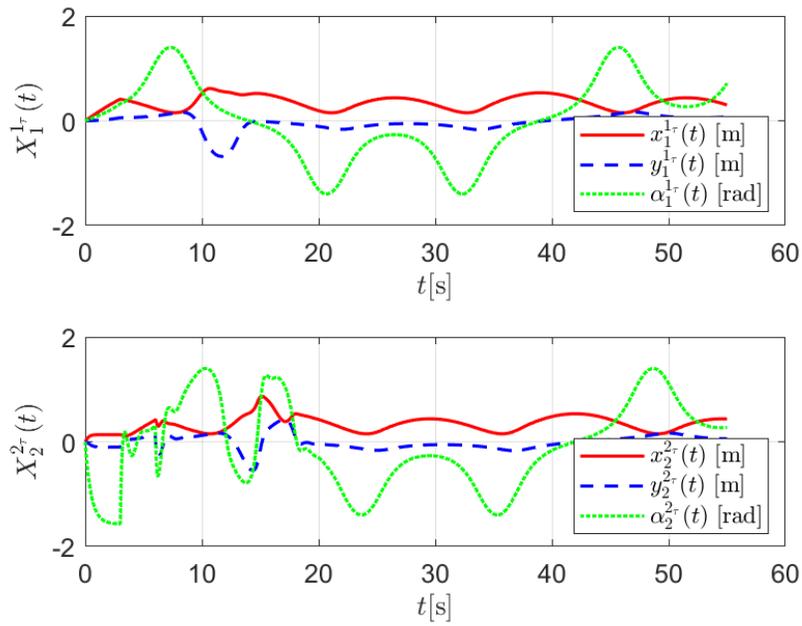


Figura 4.14: Dinámica relativa entre robots

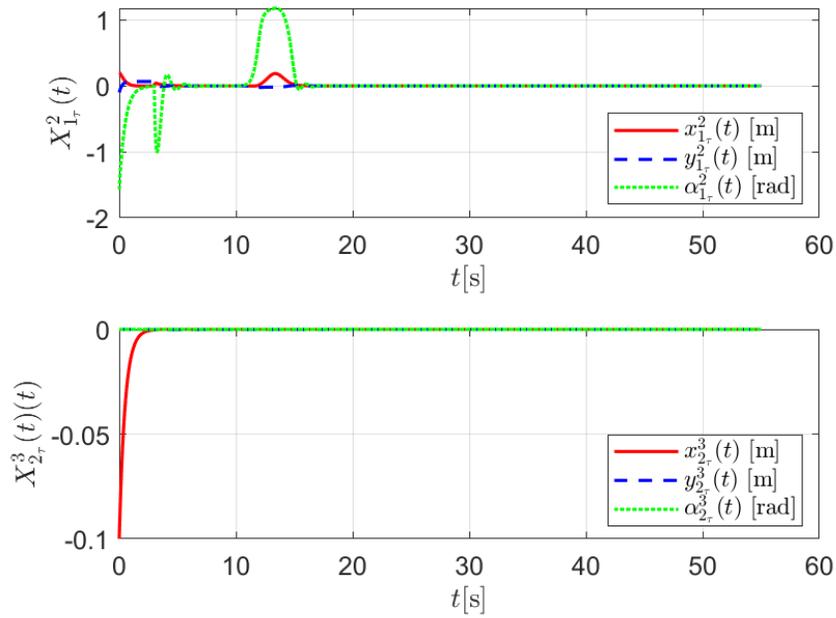


Figura 4.15: Errores de seguimiento entre los robots

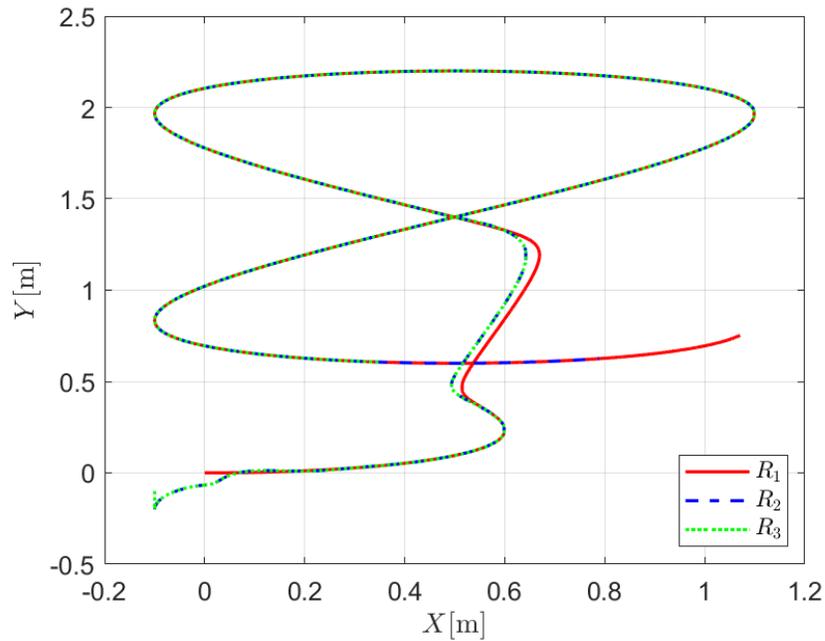


Figura 4.16: Trayectoria en el plano $X - Y$ sin compensación de la perturbación

como en su transformación para medir dichas perturbaciones en coordenadas móviles. Las simulaciones numéricas validaron la eficacia de la estrategia propuesta, mostrando que el robot seguidor puede mitigar efectivamente los efectos de las perturbaciones y realizar un seguimiento preciso del robot líder. Esto resalta la solidez de la metodología aplicada y su potencial para mejorar el desempeño en aplicaciones prácticas.

Capítulo 5

Fase Experimental

En este capítulo, se aborda todo lo relacionado a la evaluación experimental, proporcionando detalles acerca de los robots, la plataforma y los resultados obtenidos. Se comienza con una descripción de la plataforma, donde se explica su funcionamiento, características, observaciones importantes y se destacan sus componentes principales, a su vez, se proporciona información acerca del software empleado para el control de los robots.

A continuación, se describen los robots empleados, mencionando características importantes, actuadores que lo conforman y su sistema de control utilizado y así mismo se mencionan algunos puntos importantes sobre la programación.

Enseguida se habla del procedimiento en que se llevan a cabo los experimentos y como se mide el rendimiento de los robots diferenciales en el escenario. Se describen las condiciones empleadas para cada experimento, los parámetros medidos y se obtienen las gráficas que servirán para validar el experimento.

Finalmente, se discuten las implicaciones de los resultados experimentales donde se trata de abordar las fortalezas y limitaciones de la plataforma evaluada.

5.1. Plataforma experimental

La evaluación se realiza bajo condiciones de laboratorio, donde se cuenta con un entorno controlado en el cual se pueden observar 4 elementos principales, como lo son:

- Sistema para la captura de movimiento.
- Computadora central.
- Sistema de enlace entre dispositivos.
- Robots móviles de tipo diferencial.

En forma general, la plataforma consiste en cámaras infrarrojas las cuales obtienen la posición y orientación de los robots mediante imagen y la reflexión de rayos infrarrojos, esta información se envía mediante una conexión VRPN a la computadora central, la cual cuenta con el sistema operativo requerido para el control de los robots y una vez que ésta recibe la información, la procesa y posteriormente compara los datos recibidos de cada uno de los robots, con lo

cual calcula la señal de control y posteriormente reenvía la información a cada robot, para de esta forma cerrar el lazo.

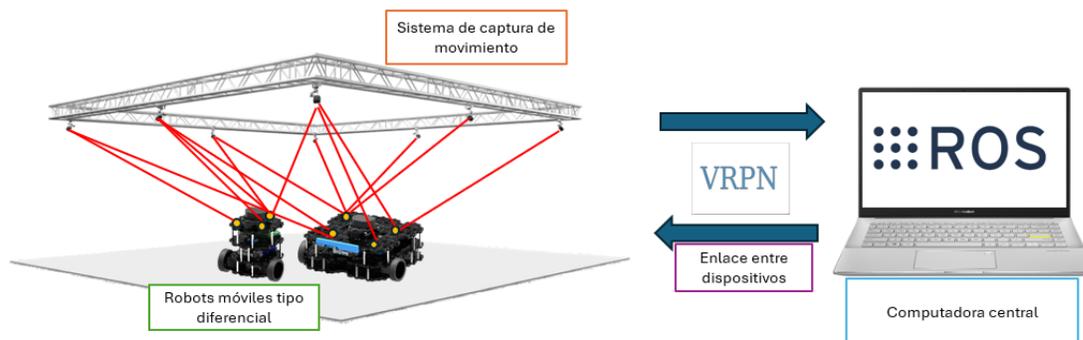


Figura 5.1: Esquema general de la plataforma experimental

A continuación, se aborda de manera más detallada cada uno de los elementos anteriormente mencionados.

5.2. Computadora central

La computadora central es, aquel elemento de la plataforma donde se realiza principalmente la parte de procesamiento y cálculos, dicha computadora es la encargada de recibir la formación de posición y orientación de cada uno de los robots en tiempo real, proporcionada por el sistema de captura de movimiento. Una vez que posee dicha información realiza las operaciones necesarias para posteriormente retroalimentar a cada uno de los robots diferenciales.

Para esta plataforma se cuenta con una Laptop Dell inspiron, la cual cuenta con el sistema operativo Ubuntu 16.04 y a su vez se ha instalado la paquetería de ROS kinetic para su empleo en el control de los robots.

5.2.1. Robot Operating System (ROS)

Como lo describe el fabricante [42], ROS es un sistema operativo de código libre, el cual está basado en arquitectura de grados, donde todos los procesos pueden ser visto como un nodo donde se puede enviar o recibir información, el cual contiene todas las características básicas de un sistema operativo, teniendo, entre todas sus características, la capacidad de obtener, ejecutar y escribir código entre distintos dispositivos. Esta última característica es de gran importancia ya que permite conectar a todos los elementos de la plataforma experimental, por tal motivo, ROS es el encargado de intercambiar y procesar la información.

Entre algunas de sus ventajas, ROS cuenta con una gran variedad de librerías y herramientas las cuales ayudan al desarrollo de aplicaciones especializadas en robots. Dentro del sistema ROS, existen diferentes terminologías las cuales son importantes para poder comprender como es que

se realiza tanto la escritura como la lectura dentro de cada uno de los nodos de comunicación, donde a pesar de existir una gran variedad de términos, a continuación, se presentan algunos de los más relevantes, los cuales son principalmente usados para esta evaluación experimental [43].

- **Nodo:** Es una de las unidades de procesamiento, es decir, cada uno de los códigos empleados para el control del robot puede ser considerado un nodo.
- **Master:** Servidor principal donde se conectan todos los nodos, o en otras palabras, la computadora central.
- **Mensaje:** Son los datos que se envían entre nodos para comunicarse, al igual que en programación, estos datos pueden ser de diferentes tipos, para fines de este trabajo los datos será únicamente enteros, flotantes o booleanos.
- **Tópico:** Son los encargados de distribuir la informaciones entre cada uno de los nodos, o en otras palabras, son los lugares donde se escriben los mensajes.
- **Publisher:** Son los nodos encargados de publicar un mensaje en los tópicos que contiene el master.
- **Suscriptor:** Son los nodos que pueden recibir mensajes desde el master.

Ahora que se cuenta con las definiciones anteriores, es posible entender de una manera más sencilla como es el funcionamiento de ROS, siendo este, un sistema operativo en el cual, la computadora central será el "master", y cada uno de los códigos empleados para el control de los robots serán nodos, los cuales estarán compartiendo información entre ellos para lograr así una retroalimentación a los robots. Así mismo, el robot móvil será considerado un nodo suscriptor ya que este recibe mensajes desde la computadora central ("master") mientras que el sistema de captura de movimiento será un nodo publisher, ya que este estará constantemente enviando información al máster sobre la posición de los robots en todo momento.

Un punto para resaltar es que, actualmente existen diferentes versiones de ROS, pero en esta plataforma se emplea la versión Kinetic ya que es la recomendada por el fabricante de los robots para su correcto funcionamiento.

5.3. Conexión VRPN

VRPN, significa *Virtual-Reality Peripheral Network*, es un sistema que permite la comunicación entre dispositivos de realidad virtual (VR) y aplicaciones. Fue desarrollado para proporcionar una interfaz estándar para una variedad de dispositivos de entrada y salida utilizados en entornos de realidad virtual.

Entre sus características principales tenemos,

- **Interfaz Estándar:** VRPN proporciona una interfaz común para diferentes dispositivos, lo que facilita la integración y el desarrollo de aplicaciones VR.

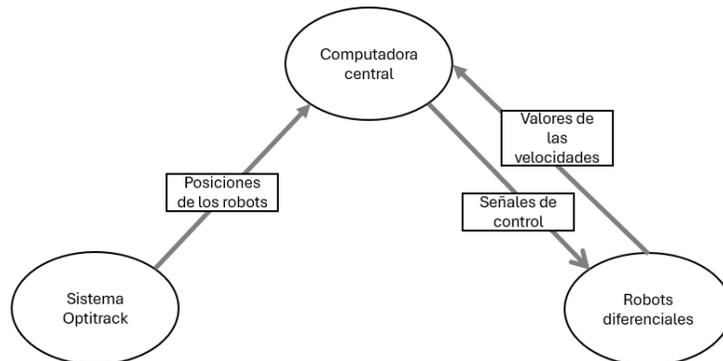


Figura 5.2: Representación del sistema basado en nodos de ROS.

- **Soporte Multiplataforma:** Funciona en múltiples sistemas operativos, incluyendo Windows, Linux y macOS.
- **Flexibilidad:** Permite la adición de nuevos dispositivos sin necesidad de modificar las aplicaciones existentes.
- **Reducción de Latencia:** Optimiza la comunicación para minimizar la latencia, lo cual es crucial en aplicaciones de realidad virtual.

En resumen, la conexión VRPN utiliza un modelo cliente-servidor donde los dispositivos actúan como servidores y las aplicaciones como clientes. La comunicación se realiza a través de una red, permitiendo que los dispositivos y las aplicaciones se encuentren en diferentes máquinas.

5.3.1. Robots móviles considerados

Para realizar los experimentos de esta tesis, dentro del laboratorio se cuenta con robots diferenciales como lo son los Turtlebot 3 [44] en sus dos presentaciones (Waffle Pi y Burger Pi), de la marca ROBOTIS. Estos robots son ampliamente utilizados para cuestiones académicas gracias a su bajo costo, código abierto el cual es capaz de adaptarse a una gran variedad de plataformas experimentales. A su vez y gracias a su centro de control, el cual está conformado por una microcomputadora Raspberry Pi 3, la cual es compatible con el sistema ROS permitiendo así el envío de información con la computadora central.

A continuación, en la Tabla 5.1 se describen algunas de las características más relevantes de cada uno de los robots empleados.

5.3.2. Sistema Optitrack

Los datos obtenidos del movimiento de los robots diferenciales, como lo son la posición y orientación, se obtienen a través del sistema Optitrack, el cual es desarrollado por la empresa

Característica	Robot Burger	Robot Waffle
Velocidad lineal máxima	0.22[m/s]	0.26[m/s]
Velocidad angular máxima	02.84[rad/s]	1.82[rad/s]
Carga máxima	15[kg]	30[kg]
Peso	1[kg]	1.8[kg]
Duración de la batería	2.5[h]	2[h]
Dimensiones (Largo x Ancho x Alto)	138x178x192[mm]	281x306x141[mm]
Actuadores	Dynamixel XL430 – W250	Dynamixel XL430 – W250

Tabla 5.1: Parámetros iniciales de los robots.

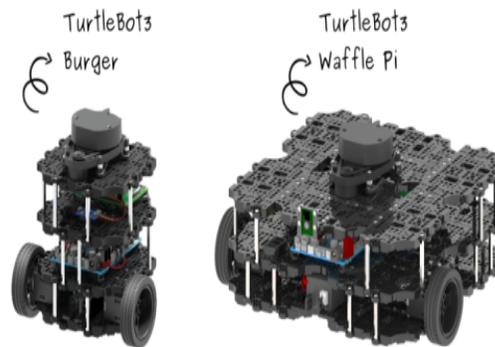


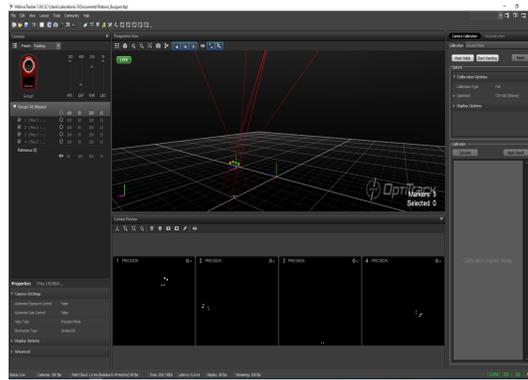
Figura 5.3: Robots diferenciales Turtlebot 3, en sus modelos Waffle PI y Burger

Natural Point Inc. El sistema está conformado por 4 cámaras infrarrojas del modelo Flex-3, las cuales cuentan con una resolución de 640 x 480 pixeles y una frecuencia para captura de 100 FPS las cuales se montan en el techo apuntando hacia un área cuadrada de 2x2 metros, dicha área se encuentra delimitada por un tapete de foami, esto debido a que las cámaras emiten luz infrarroja y al recibir el reflejo es posible triangular la posición del objeto desea, es por esto mismo que el tapete es de suma importancia ya que en caso de que este no existiera, las mediciones serían inexactas debido al reflejo de los rayos infrarrojos por parte del suelo.

Para lograr que el sistema reconozca a los robots, es necesario colocar marcadores reflejantes sobre ellos, siendo un dato importante que, estos marcadores deben colocarse sobre el robot, formando una figura para la cual su centroide debe coincidir con el centro del eje de las ruedas del mismo, así mismo, se recomienda al lector que, en caso de que se requiera variar la posición de los marcadores, de debe procurar no tener figuras regulares debido a que esto genera conflictos en la orientación durante las mediciones.

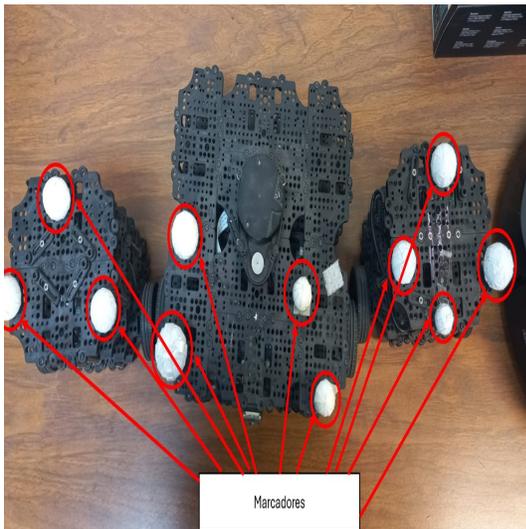


(a)

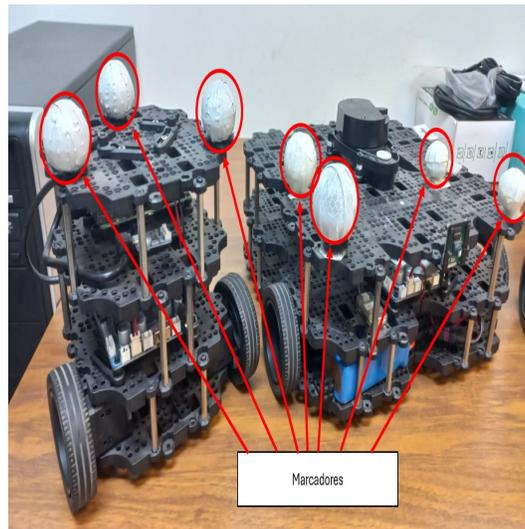


(b)

Figura 5.4: Elementos principales del sistema Optitrack, conformado por las cámaras modelo Flex 3 y su software para seguimiento del movimiento Motive.



(a)



(b)

Figura 5.5: Muestra del colocado de los marcadores para la detección por el software, mostrando la elección de figuras antisimétricas evitando de esta forma errores en la detección.

5.4. Experimento 1: Formación líder-seguidor sin estimaciones de la perturbación.

5.4.1. Seguimiento de trayectoria sin la presencia de perturbaciones externas

En esta sección se muestran los resultados experimentales obtenidos en tiempo real para lo desarrollado en el Capítulo 3. Para llevar a cabo estos experimentos, se emplean 2 robots turtlebot3, siendo estos un robot tipo Waffle Pi el robot líder y un robot Burger el seguidor. Las ganancias para las retroalimentaciones empleadas en las ecuaciones presentadas en (2.6) fueron $k_1 = 0.5$, $k_2 = 3.5$, $k_3 = 35$, con una frecuencia de procesamiento de 50 Hz en las computadoras de cada robot y un periodo de muestreo de 0.01 segundos.

Con respecto al experimento, se desarrolla de manera similar al mostrado en las simulaciones de la Sección 3.3, realizando en primera instancia el análisis del comportamiento del sistema sin la presencia de perturbaciones, para posteriormente realizar la misma prueba agregando perturbaciones externas, para verificar el comportamiento de los robots, así como el tiempo de convergencia de los errores de seguimiento. El experimento consiste en que el robot líder siga una trayectoria tipo lemniscata descrita por las ecuaciones presentadas en (3.12), considerando $a = 0.7$, $b = 0.4$ y $p = \frac{\pi}{20}$. Las condiciones iniciales para cada uno de los robots se describen en la Tabla 5.2

\circ	R_1	R_2
$x(0)$	0.21	0.72
$y(0)$	-0.77	-0.89
$\theta(0)$	$\pi/12$	$3\pi/5$

Tabla 5.2: Parámetros iniciales de los robots.

En la Figura 5.6 se muestra la trayectoria seguida por los robots en el plano X-Y, donde se puede observar que la convergencia es más lenta a comparación de las simulaciones, esto debido a que al no encontrarse en el caso ideal existen parámetros los cuales no fueron considerados en simulaciones, como puede ser la fricción, la carga de las baterías, el peso del robot, sin embargo, estos logran realizar un correcto seguimiento de la trayectoria.

La evolución de la velocidad lineal, en la cual se aprecia nuevamente un desfase entre la velocidad del robot líder y el robot seguidor, como se observa en la Figura 5.7 esto debido a la estrategia de seguimiento de trayectoria. Así mismo se observan pequeños picos en los puntos donde los robots transcurren las curvas de la trayectoria. Estos se deben a cambios bruscos en la velocidad.

La velocidad angular se observa en la Figura 5.8, nuevamente existe un desfase entre ambos robots debido a la estrategia, así mismo, los picos altos presentes al inicio del experimento se deben a la ubicación del robot seguidor, el cual, mantiene tanto su velocidad angular como lineal

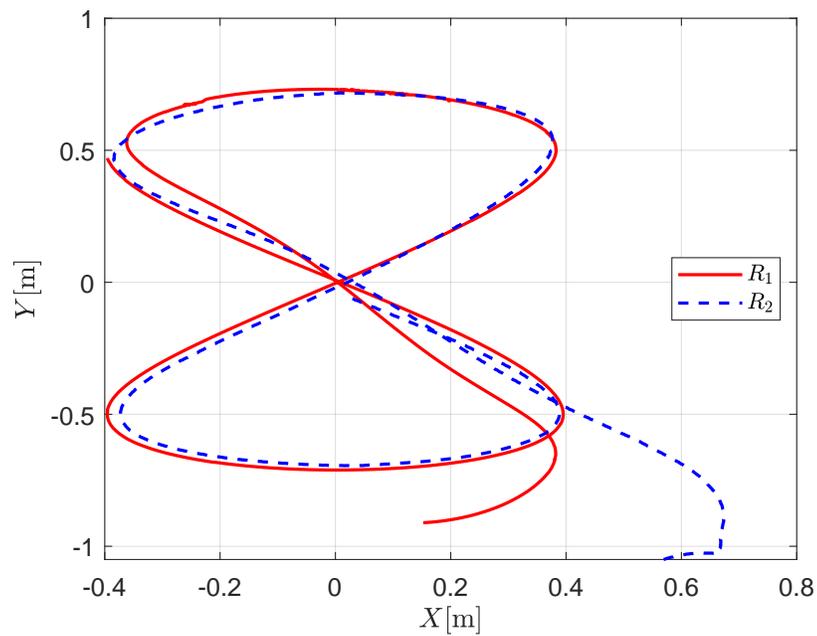


Figura 5.6: Evolución en el plano $X - Y$ de la formación líder-seguidor sin consideración de perturbaciones.

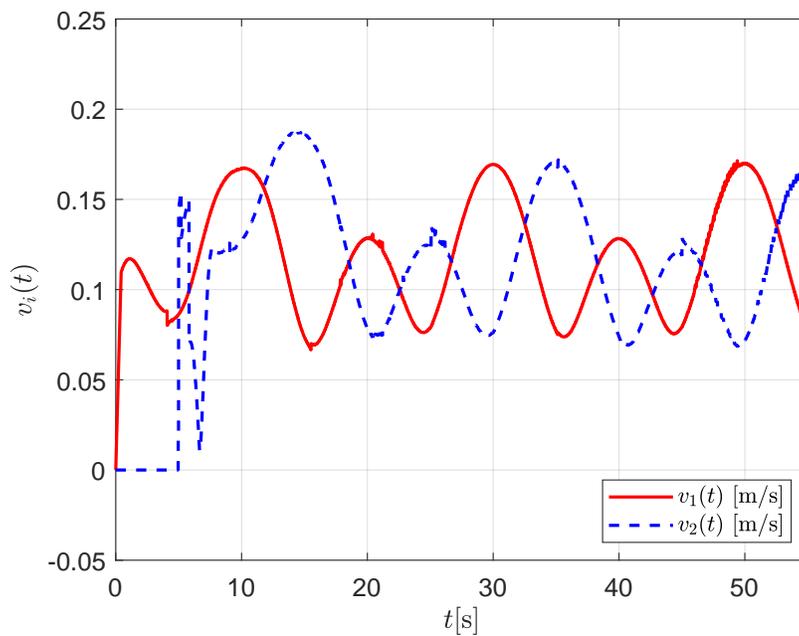


Figura 5.7: Velocidad lineal presentada por ambos robots durante la evaluación experimental

en cero hasta que, transcurra el tiempo $\tau = 5[s]$ antes de iniciar su movimiento, debido a esto el robot seguidor arranca de manera abrupta y busca seguir las coordenadas del robot virtual. El robot seguidor rota un poco cerca de su ubicación actual antes de realizar la estrategia de seguimiento.

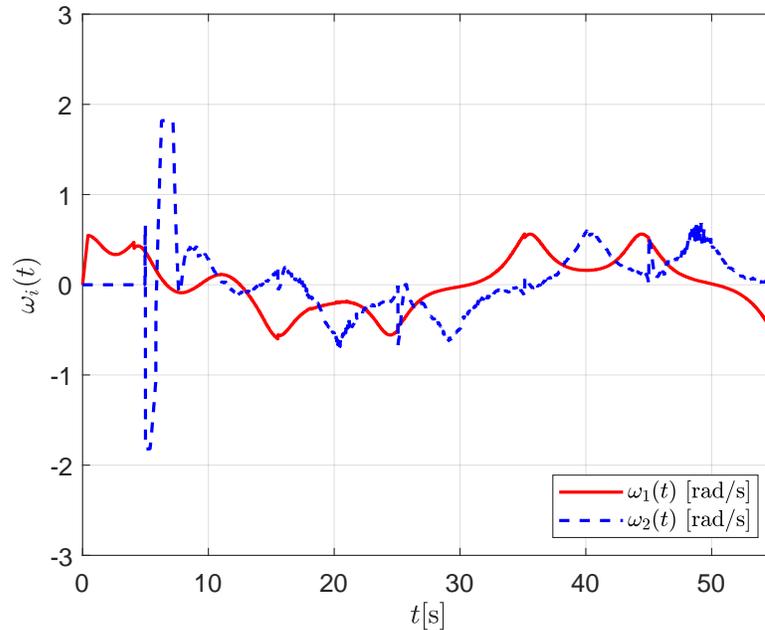


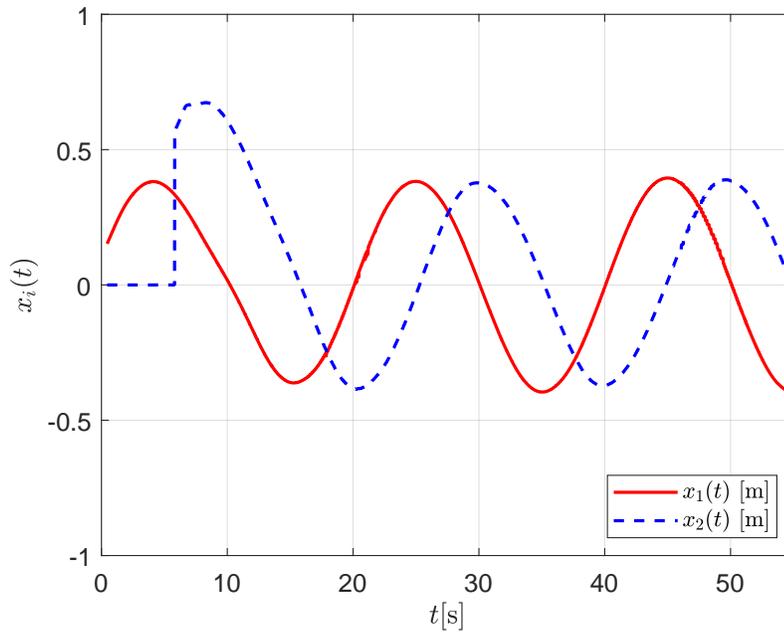
Figura 5.8: Evolución experimental de la velocidad angular de ambos robots

El cambio en la posición de las ordenadas X y Y de ambos robots se observa en la Figura 5.9 en donde se verifica que el sistema realiza un correcto seguimiento de la trayectoria propuesta. En la Figura 5.9a se muestra la evolución con respecto a la coordenada X mientras que en la Figura 5.9b, la evolución en la coordenada Y .

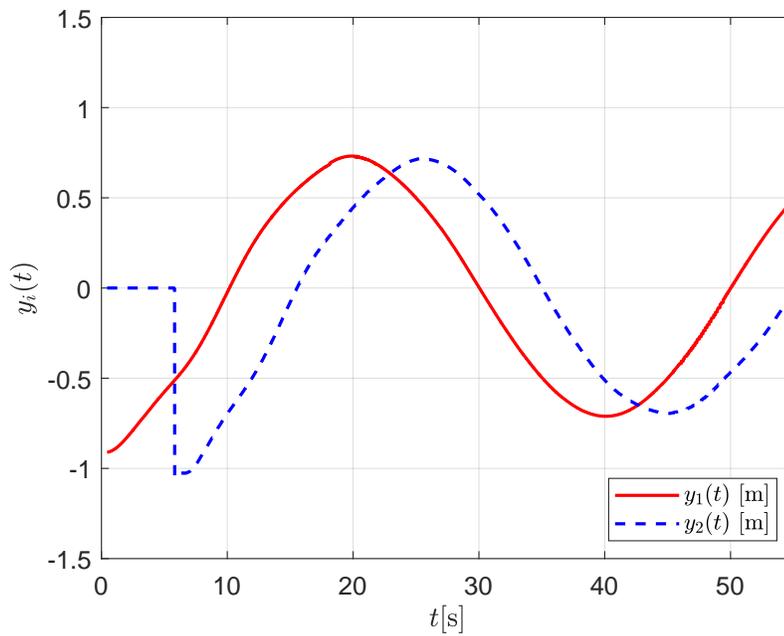
La evolución de la orientación de ambos robots a lo largo del seguimiento de la trayectoria se observa en la Figura 5.10.

Con respecto a las distancias relativas, su evolución se observa en la Figura 5.11. Siendo la Figura 5.11a la distancia relativa x_i^{i+1} y la Figura 5.11b la distancia y_i^{i+1} .

Finalmente en la Figura 5.12 se observan los errores de seguimiento, donde, la Figura 5.12a corresponde al error de seguimiento $e_x = x_1 - x_2$, la Figura 5.12b corresponde al error de seguimiento $e_y = y_1 - y_2$ en mientras que la Figura 5.12c corresponde al error de seguimiento $e_\theta = \theta_1 - \theta_2$ en la orientación θ del robot.



(a)



(b)

Figura 5.9: Evolución de las posiciones en las ordenadas X y Y de ambos robots en el tiempo.

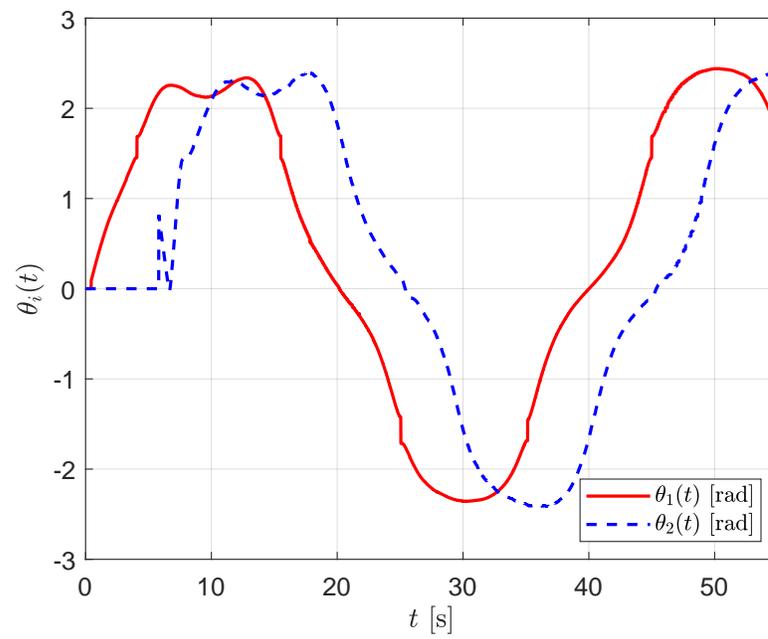
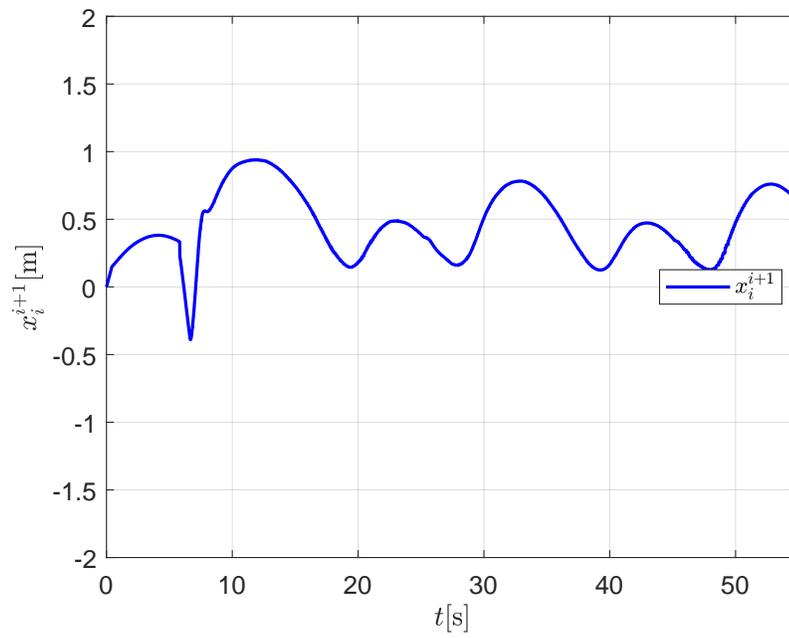
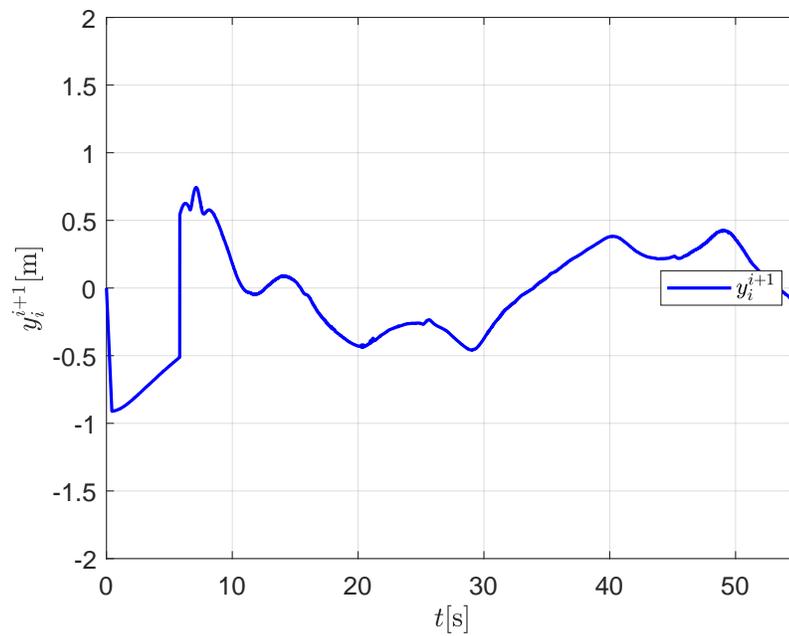


Figura 5.10: Orientación de ambos robots a lo largo de la evaluación experimental.

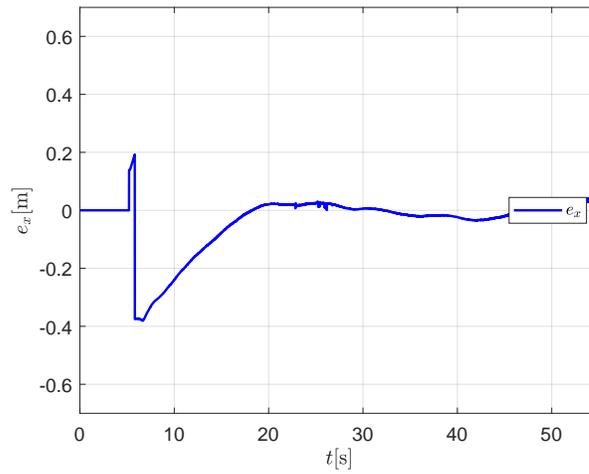


(a)

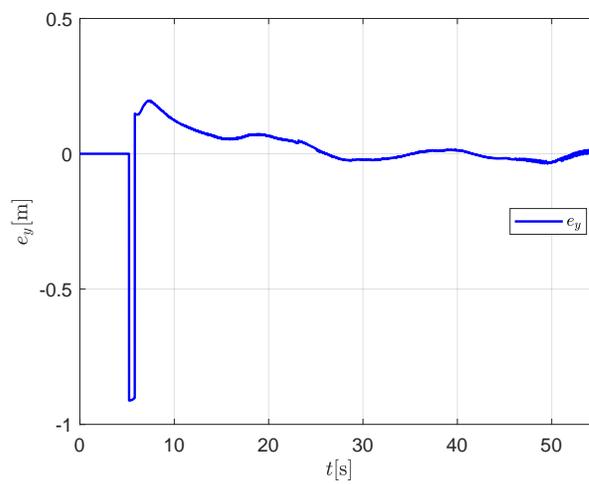


(b)

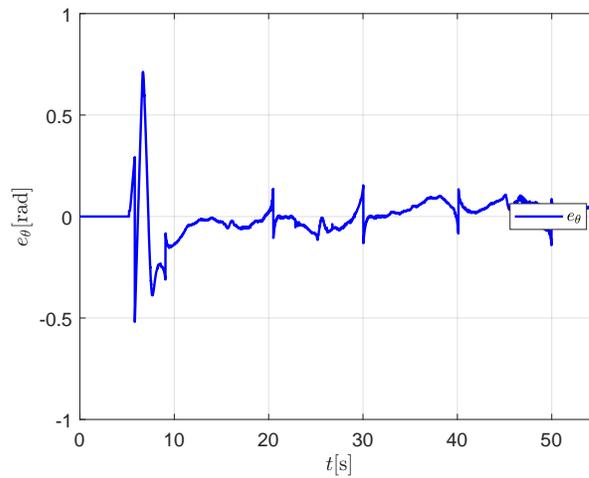
Figura 5.11: Evolución de las distancias relativas entre el robot líder y el robot seguidor a lo largo del seguimiento de trayectoria.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.12: Errores de seguimiento presentados durante el seguimiento de la trayectoria sin la presencia de perturbaciones.

5.4.2. Seguimiento de trayectoria con la presencia de perturbaciones externas.

A continuación se realiza nuevamente el experimento como se presentó en el Capítulo 3, con la modificación que durante el seguimiento de la trayectoria se presentará una perturbación externa en $t = 30$ la cual altere el movimiento del robot líder. Siendo un punto a mencionar que, debido a la dinámica lenta de los robots empleados, no es posible implementar mediante código las perturbaciones para la evaluación del experimento. Por lo tanto será necesario aplicar una fuerza externa al robot líder durante el seguimiento de la trayectoria, dicha fuerza trata de asemejar los efectos del deslizamiento o patinado de las ruedas, pero no afecta la orientación del robot líder. Las condiciones iniciales para el siguiente experimento se muestran en la Tabla 5.3

$^{\circ}$	R_1	R_2
$x(0)$	0.20	0.86
$y(0)$	-0.84	-0.80
$\theta(0)$	$\pi/30$	$3\pi/10$

Tabla 5.3: Parámetros iniciales de los robots.

En la Figura 5.13 se muestra la trayectoria seguida por los robots en el plano X-Y, en este caso se observa que al no ser empleada la estimación de la perturbación, el robot seguidor no es capaz de realizar una correcta corrección de la trayectoria, donde además, se llega a presentar incluso una colisión entre los agentes ya que, la estrategia de seguimiento empleada a pesar de poseer la capacidad de volver a converger con el tiempo, dicho tiempo es de aproximadamente 10 a 15 segundos, en los cuales pueden suscitarse errores o accidentes.

Con respecto a la velocidad lineal v_i de cada uno de los robots, se observa en la Figura 5.14, al cumplirse $t = 5$ segundos el robot seguidor comienza su movimiento, pero al estar cerca del robot líder, este se detiene un instante mientras el robot líder continúa avanzando, posterior a esto comienza el seguimiento de la trayectoria presentando una diferencia inicial en la velocidad, esto debido al inicio tan abrupto. Posterior a esto se muestra en la gráfica que la velocidad del seguidor es capaz de asemejarse a la velocidad del líder, notando únicamente un cambio en $t = 45$ segundos, instante en el cual, debido a la perturbación, el robot seguidor no es capaz de realizar un correcto seguimiento ocasionando que ambos robots choquen.

En la Figura 5.15, se muestra la velocidad angular ω_i , la cual a diferencia del caso sin perturbación, se ve mayormente afectada, al presentarse la perturbación realiza una alteración significativa por lo que se observa que el robot seguidor R_2 es incapaz de converger a la velocidad del robot líder de una manera eficiente.

El cambio en la posición de las coordenadas X y Y de ambos robots se observa en la Figura 5.16. En ella se observa que el robot líder se ve más afectado en su coordenada X, mientras que en Y el efecto es mínimo. Así mismo, a pesar de que el seguidor intenta realizar el seguimiento, no es capaz de detectar, de manera eficiente los cambios en la posición sufridos por el robot

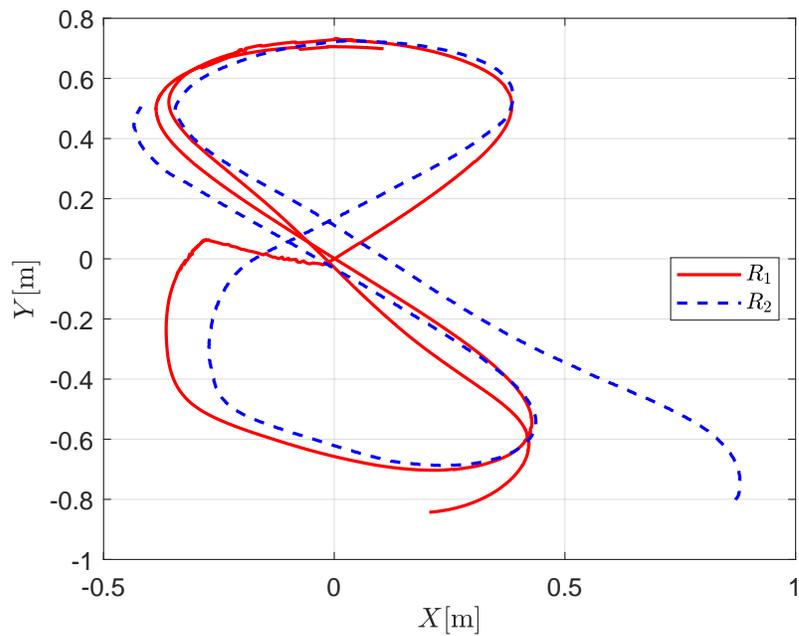


Figura 5.13: Evaluación en el plano $X - Y$ del experimento con la presencia de perturbaciones.

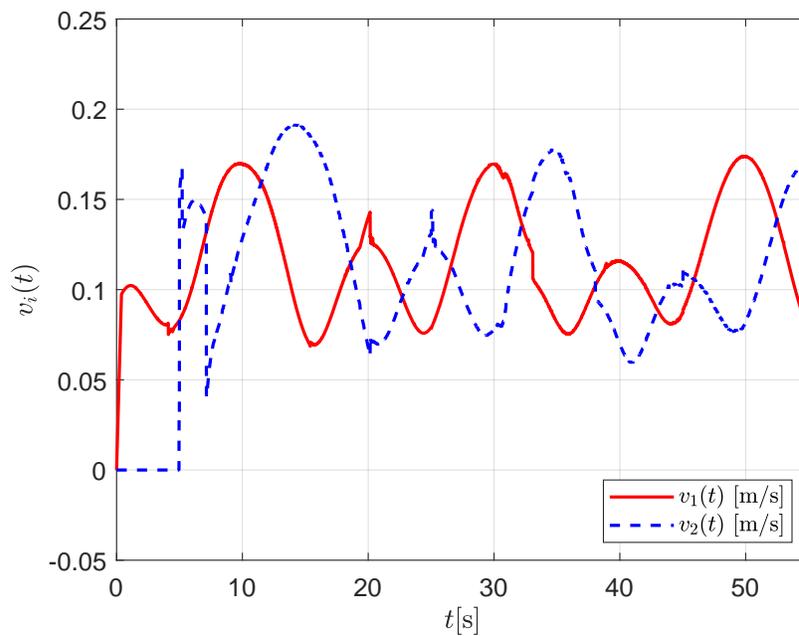


Figura 5.14: Velocidad lineal presentada por ambos robots durante la evaluación experimental con la presencia de perturbaciones.

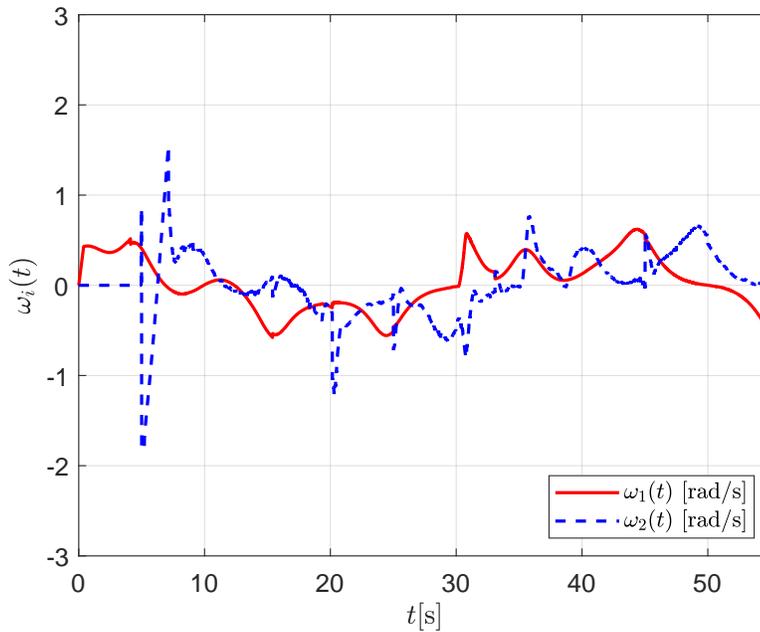


Figura 5.15: Evaluación experimental de la velocidad angular de ambos robots.

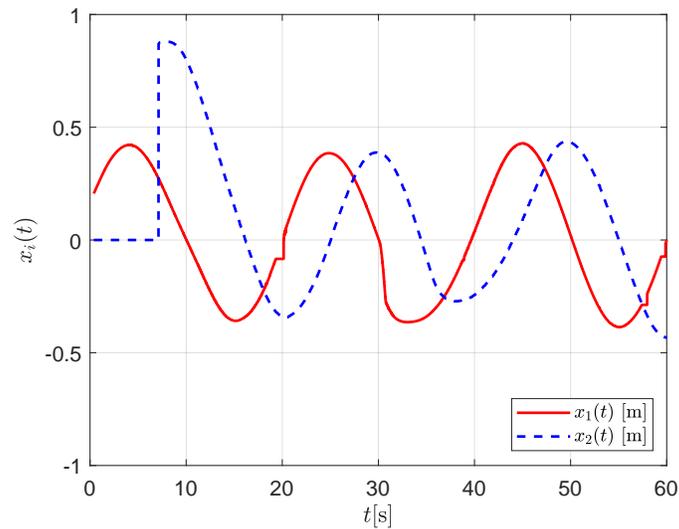
líder. En la Figura 5.16a se muestra el cambio con respecto a la coordenada $x_i(t)$ mientras que en la Figura 5.16b, la evolución en la coordenada $y_i(t)$.

La evolución de la orientación de ambos robots a lo largo del seguimiento se observa en la Figura 5.10, donde se observa que al presentarse una perturbación, no se altera la orientación del robot.

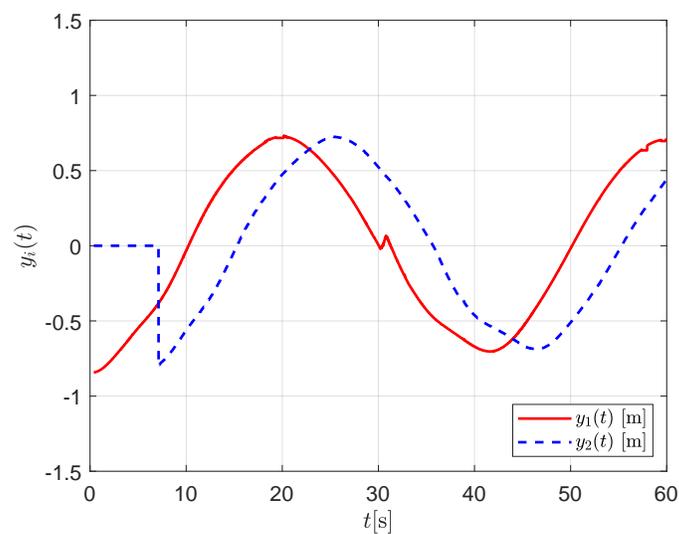
La evolución de las distancias relativas se muestra en la Figura 5.18. Siendo la Figura 5.18a la distancia relativa x_i^{i+1} y la Figura 5.18b la distancia y_i^{i+1} .

Finalmente, en la Figura 5.27 se observan los errores de seguimiento e_x , e_y y e_θ . En ella se observa que todas las figuras presentan una alteración considerable en $t = 5$ segundos, esto debido al instante donde el robot seguidor comienza a moverse. la Figura 5.19a corresponde al error de seguimiento e_x el cual está dado por $x_1 - x_2$ donde se observa la perturbación y esta tarda en promedio 15 segundos antes de volver a converger a cero una vez esta se presenta sobre el robot líder, la misma situación se presenta en la Figura 5.19b la cual corresponde al error de seguimiento $e_y = y_1 - y_2$ mientras que la Figura (5.19c), que corresponde al error de seguimiento en la orientación $e_\theta = \theta_1 - \theta_2$ del robot.

Observación 3. *Se observa que en el error e_θ se presentan perturbaciones en la orientación, esto, a pesar de que al robot líder, solo se le aplica una fuerza externa la cual asemeja un deslizamiento o patinado en el robot, esto es debido a que, al no realizarse el experimento en condiciones ideales, existen diversos factores los cuales modifican el comportamiento del robot, dichos factores pueden ser, la ubicación real del centro de masa del robot, que las ruedas no*



(a)



(b)

Figura 5.16: Evolución de las posiciones en las ordenadas $x_i(t)$ y $y_i(t)$ de ambos robots en el tiempo.

realizan un contacto puntual con la superficie, así como que la superficie donde se realiza el experimento es rugosa, siendo también otro aspecto importante a considerar, que debido al modelo de robot empleado, no es posible aplicar la fuerza externa directamente al centro del eje de las ruedas, por lo tanto, la fuerza aplicada puede llegar a generar torques que modifiquen la orientación del robot seguidor.

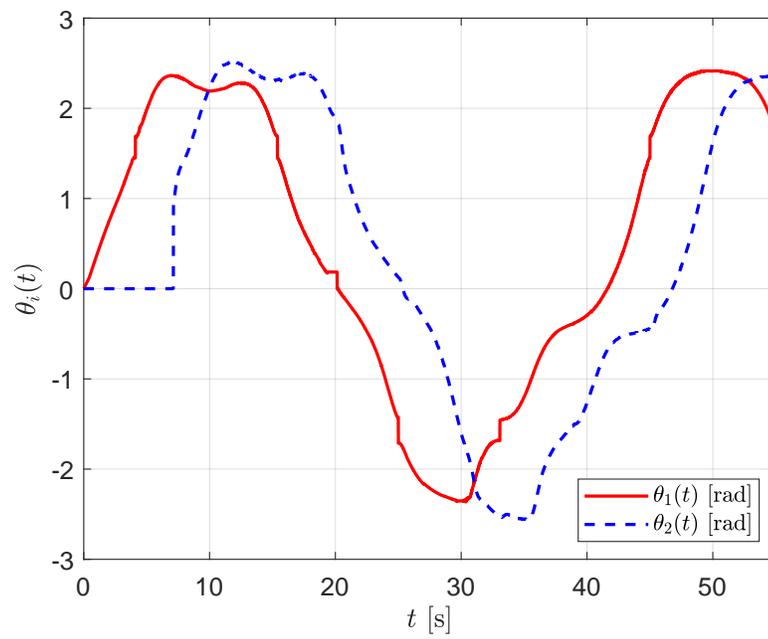
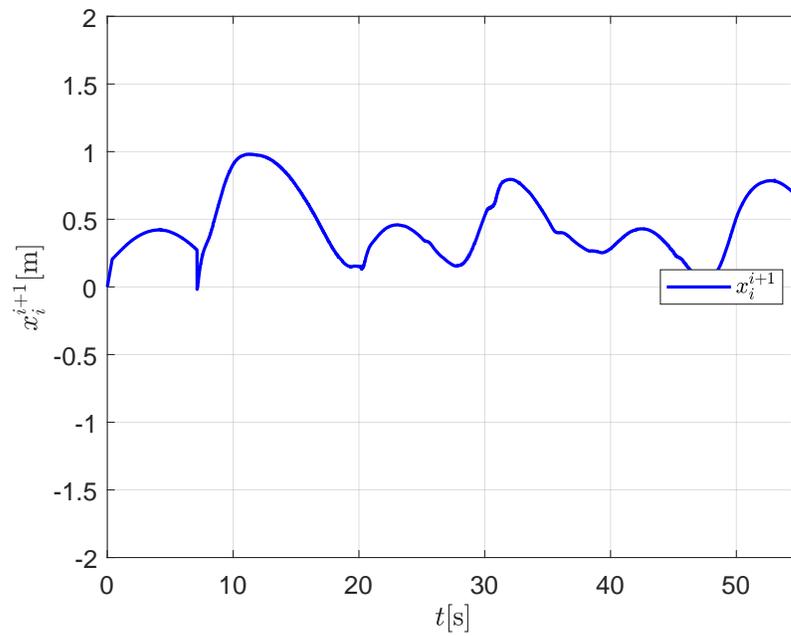
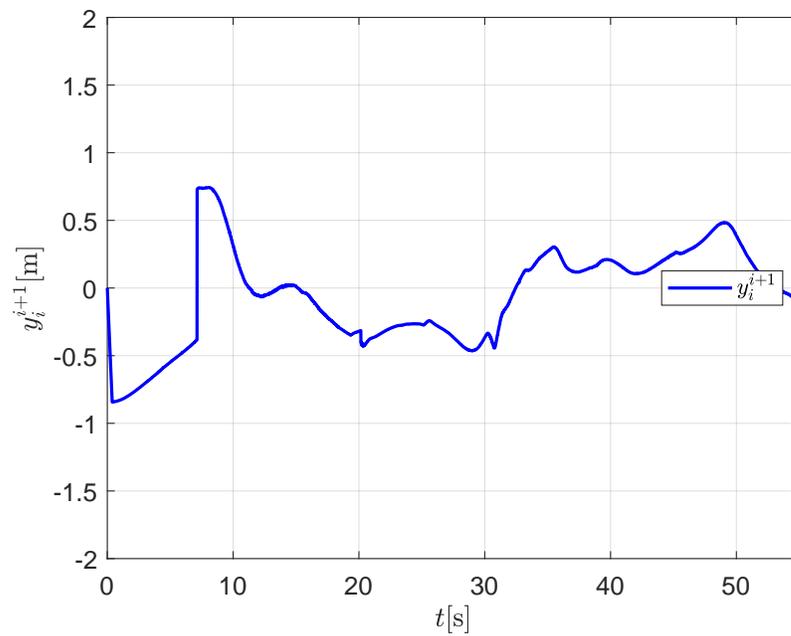


Figura 5.17: Orientación de ambos robots a lo largo de la evaluación experimental.

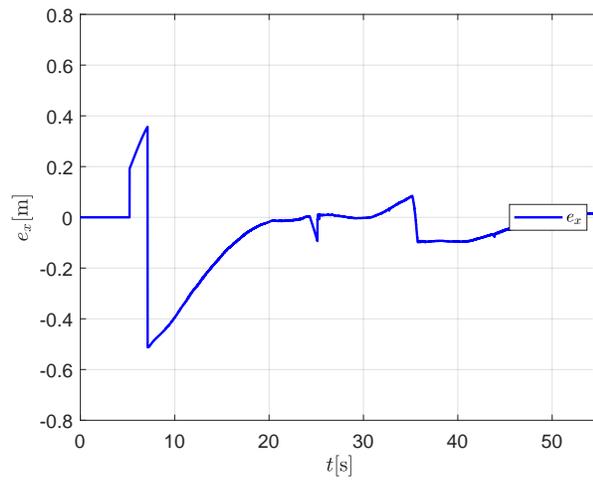


(a)

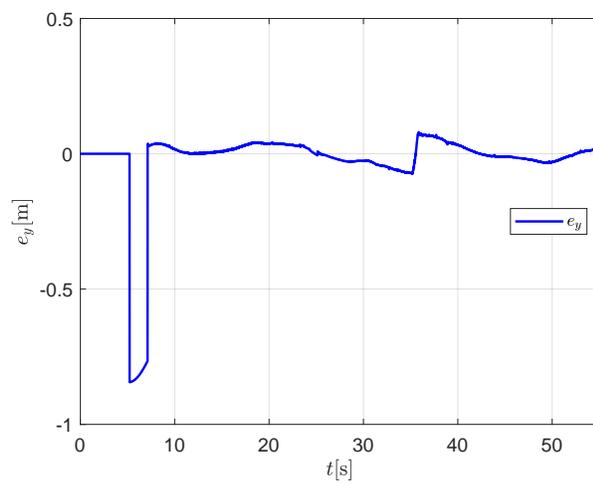


(b)

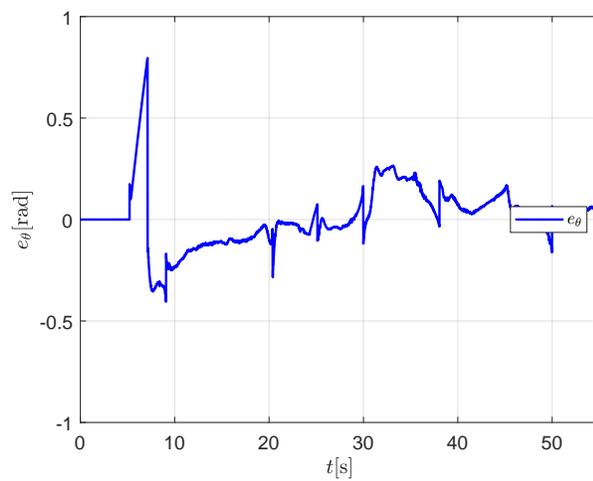
Figura 5.18: Evolución de las distancias relativas entre el robot líder y el robot seguidor a lo largo del seguimiento de trayectoria.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.19: Errores de seguimiento presentados durante el seguimiento de la trayectoria sin la presencia de perturbaciones.

5.5. Experimento 2: Formación líder-seguidor con compensación de la perturbación.

A continuación, se presentan los resultados obtenidos para el experimento correspondiente al seguimiento de trayectoria con la compensación de perturbaciones, aplicando la estimación de perturbaciones obtenida en el Capítulo 4. Es importante mencionar que, los experimentos fueron realizados mediante perturbaciones generadas por fuerzas externas.

Otra consideración para tomar es la aplicación de varios filtros media móvil, para suavizar los valores obtenidos durante las simulaciones, esto debido a la implementación de la derivada aproximada, lo que generaba un mayor ruido durante los experimentos.

Al igual que el experimento anterior, se realiza el seguimiento de una trayectoria tipo lemniscata descrita por la ecuación (3.12), empleando $a = 0.7$, $b = 0.4$ y $p = \frac{\pi}{20}$. Las ganancias de control empleadas para las ecuaciones (4.42) y (4.46) fueron $k_1 = 0.2$, $k_2 = 0.5$, $k_3 = 0.5$, con una frecuencia de procesamiento de 50 Hz.

Las condiciones iniciales para el siguiente experimento se muestran en la Tabla 5.4

\circ	R_1	R_2
$x(0)$	0.15	0.84
$y(0)$	0.76	-0.92
$\theta(0)$	$\pi/36$	$23\pi/36$

Tabla 5.4: Parámetros iniciales de los robots.

Las perturbaciones estimadas se muestran en la Figura 5.20. Se observa en la Figura 5.21a el efecto de la estimación de la perturbación. Así mismo, en la Figura 5.21b se observa que a pesar de no recibir directamente una perturbación en la orientación, la estimación y su posterior compensación atenúan los efectos de la perturbación.

Así mismo, la estimación de las perturbaciones se muestra en la Figura 5.21

En la Figura 5.22 se muestra la trayectoria seguida por los robots en el plano X-Y, en este caso, se observa un mejor seguimiento, el robot seguidor es capaz de realizar una correcta corrección de la trayectoria, donde, además se observa una convergencia más rápida a la trayectoria del robot líder.

La evolución de la velocidad lineal, en la cual se aprecia nuevamente un desfase entre la velocidad del robot líder y el robot seguidor, se observa en la Figura 5.23 en este caso es más evidente que al presentarse la perturbación, el robot líder no percibe la perturbación sufrida. Sin embargo, se observa que cuando la velocidad del robot líder se ve afectada, el robot seguidor es capaz de percibir y corregir su velocidad en función de la del robot líder, reduciendo los picos presentes durante la evolución de la misma así como una convergencia más rápida.

La velocidad angular se observa en la Figura 5.24, se aprecian sobre picos presentes al inicio del experimento debido a la ubicación del robot seguidor, el cual, mantiene tanto su velocidad

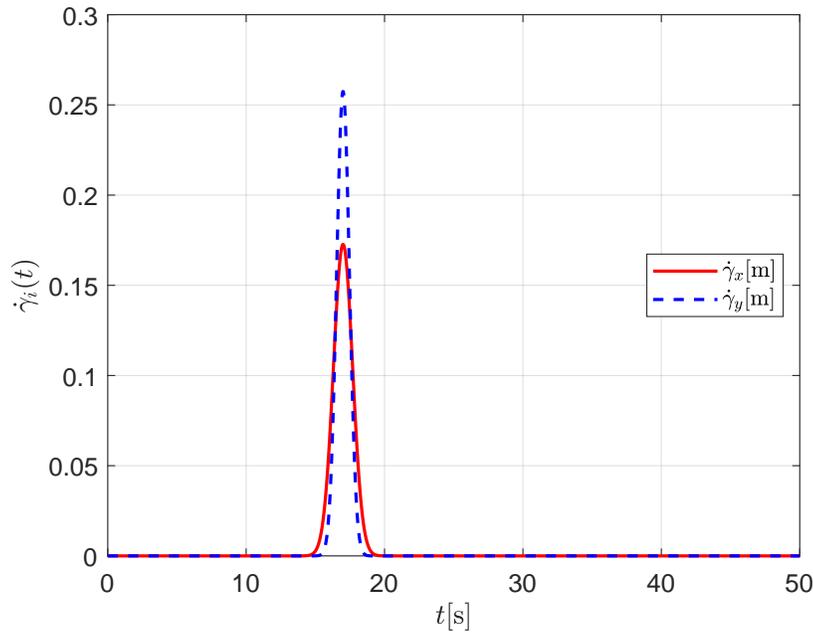


Figura 5.20: perturbaciones desconocidas $\dot{\gamma}_i$.

angular como lineal en cero hasta que, transcurra el tiempo $\tau = 5[s]$. En este caso, a diferencia del experimento anterior, se observa como la velocidad angular es capaz de no sufrir una alteración tan fuerte durante la presencia de la perturbación, siendo esta capaz de realizar el seguimiento de trayectoria de manera más eficiente.

El cambio en la posición de las ordenadas X y Y de ambos robots se muestra en la Figura 5.25, donde se observa los efectos de la perturbación en las coordenadas del robot líder y las del robot seguidor, a su vez se observa una mejora en el seguimiento de las coordenadas mediante la aplicación de la estimación, dicha mejora es visible en la Figura (5.25a) que muestra la evolución de x_i mientras que en la Figura (5.25b), se muestra la evolución en la coordenada y_i .

La evolución de la orientación de ambos robots a lo largo del seguimiento de la trayectoria se observa en la Figura 5.26, donde como se mencionó en el experimento anterior al presentarse una fuerza externa, no se altera la orientación del robot. Sin embargo, la estimación de la perturbación mejora de manera significativa el seguimiento, mostrando una mayor similitud en la orientación de ambos robots.

Finalmente, en la Figura 5.27 se muestran los errores de seguimiento, se observa que todas las figuras presentan una alteración considerable en $t = 5$ segundos, esto debido al instante donde el robot seguidor comienza a moverse. La Figura 5.27a corresponde al error de seguimiento e_x donde se observa la perturbación y como ésta posee un menor efecto sobre el seguimiento. La misma situación se presenta en la Figura 5.27b la cual corresponde al error de seguimiento e_y mientras que la Figura 5.27c, corresponde al error de seguimiento e_θ . Es importante resaltar que, la estimación propuesta, es capaz de compensar dichas perturbaciones generadas y atenuar

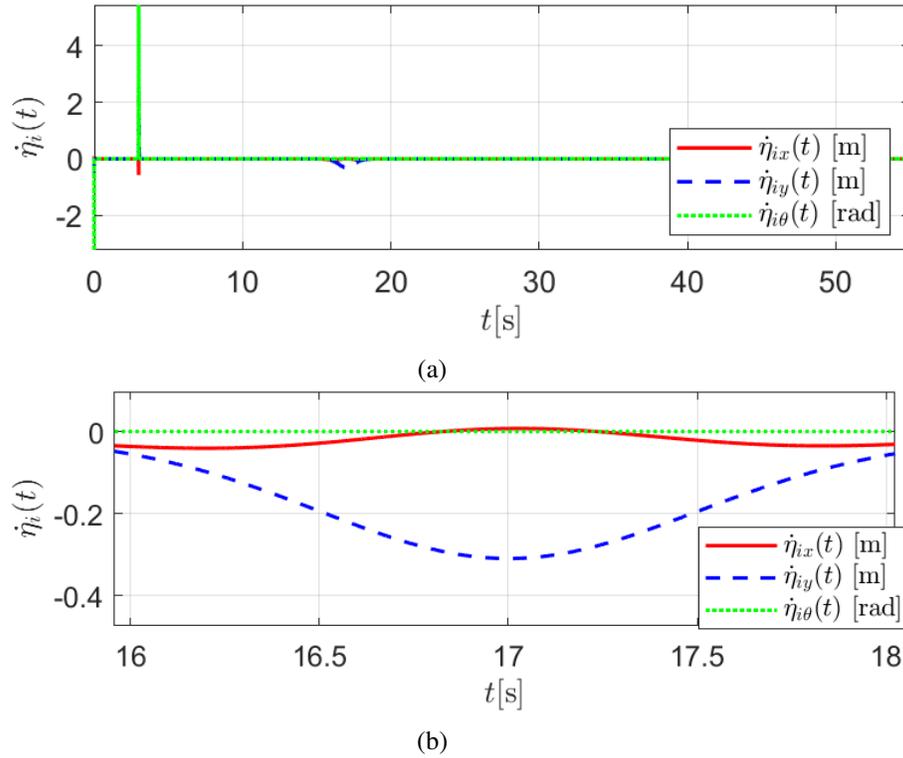


Figura 5.21: Estimación de las perturbaciones $\dot{\eta}_i$.

de forma correcta para continuar con un correcto seguimiento de la trayectoria deseada.

5.6. Conclusiones del capítulo.

A lo largo de este capítulo se abordaron aspectos acerca de la plataforma experimental empleada para realizar los experimentos en tiempo real, se detallaron los componentes más importantes de la misma, así como se definió que robot sería el líder y seguidor durante los experimentos. Se presentaron resultados experimentales en tiempo real para los esquemas que no consideran la estimación de la perturbación, así como el esquema desarrollado en el capítulo anterior el cual, considera una estimación de la perturbación y su posterior comparación, mostrando la mejoría en el seguimiento de trayectoria. Es importante notar que, como se mencionó durante los experimentos, a pesar de no introducir una perturbación la cual modifique la orientación del robot líder, se presenta errores de seguimiento con respecto a la orientación. Esto se debe a las condiciones presentes en el laboratorio, las cuales son factores no considerados durante el caso ideal considerado en las simulaciones numéricas.

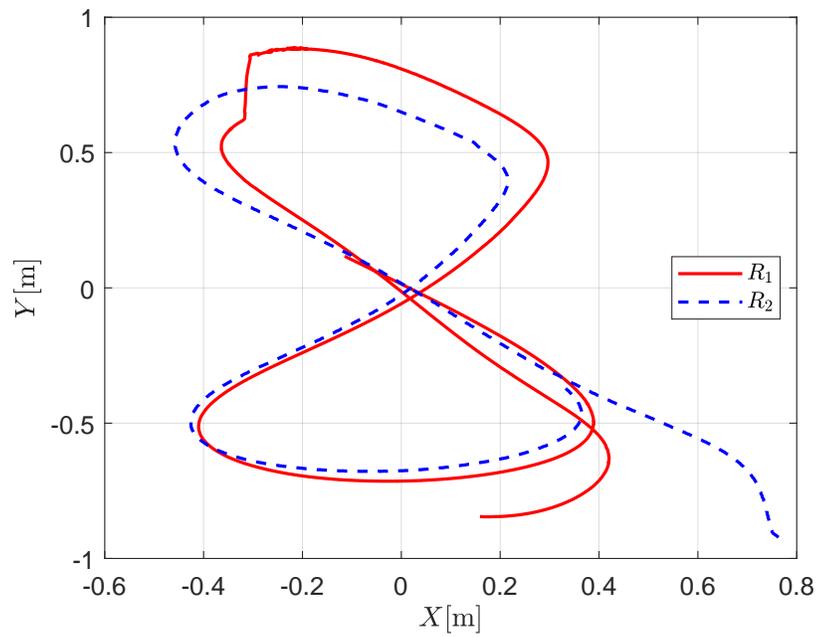


Figura 5.22: Evolución en el plano $X - Y$ con la compensación de perturbaciones

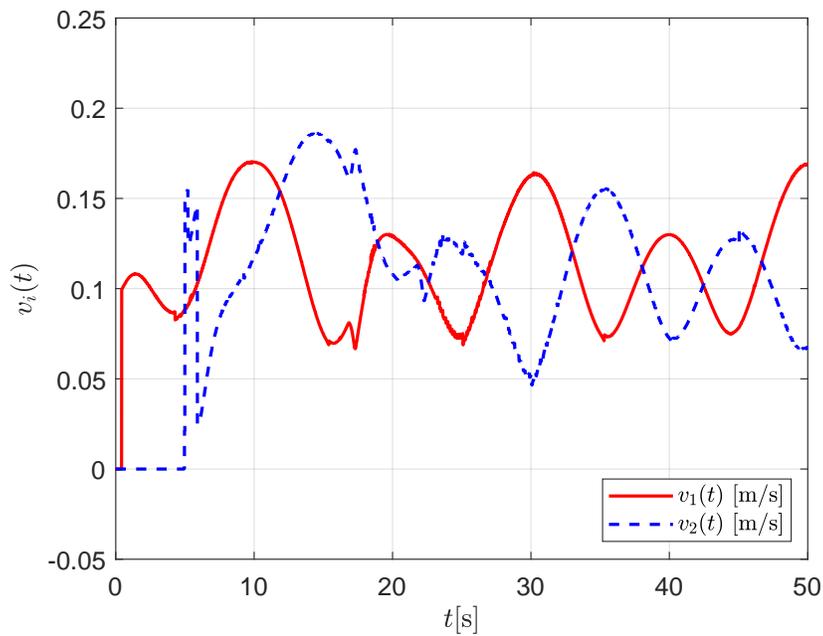


Figura 5.23: Velocidad lineal presentada por ambos robots durante la evaluación experimental implementando la estimación de las perturbaciones.

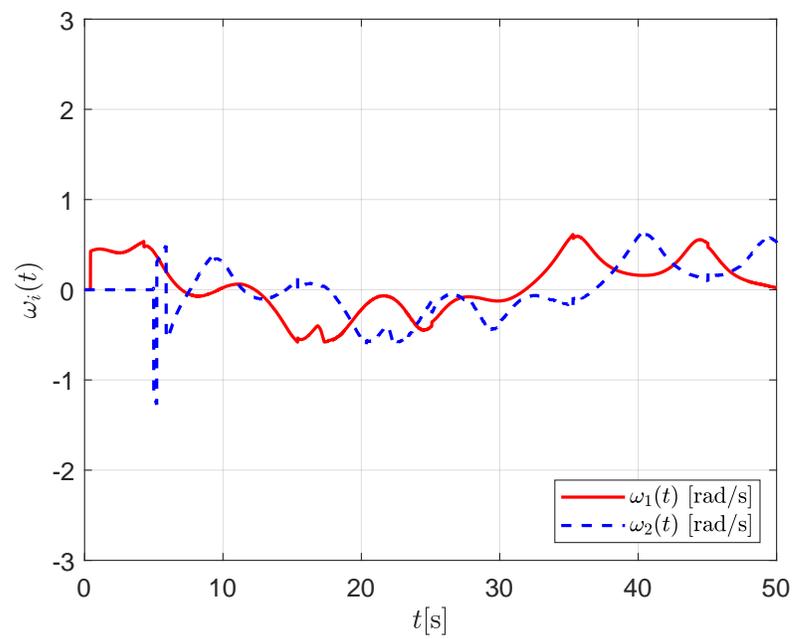
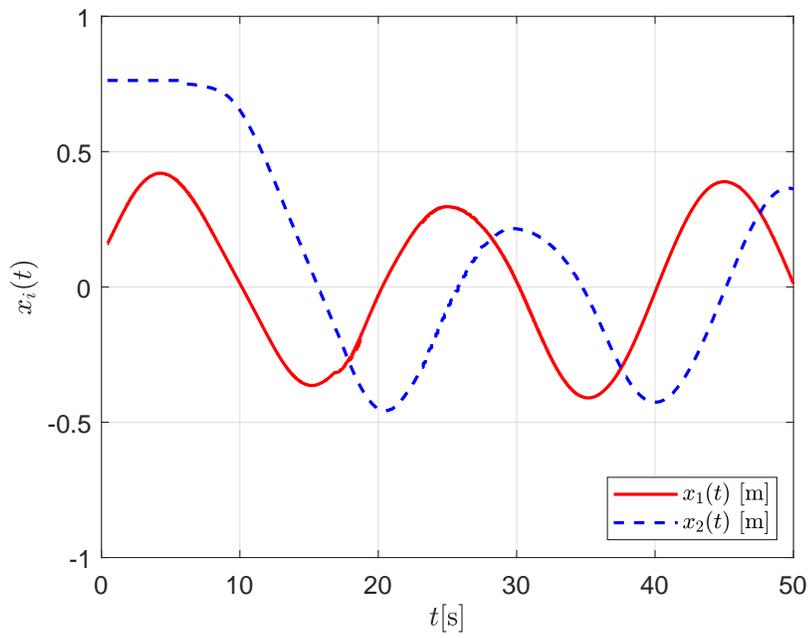
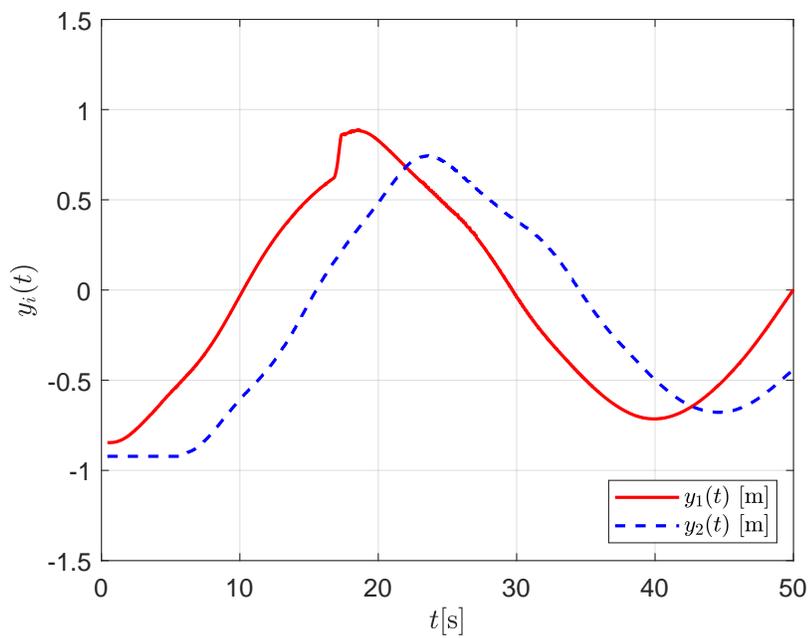


Figura 5.24: Evaluación experimental de la velocidad angular implementando la estimación de la perturbación.



(a)



(b)

Figura 5.25: Evolución de las posiciones en las ordenadas X y Y de ambos robots con la estimación de la perturbación.

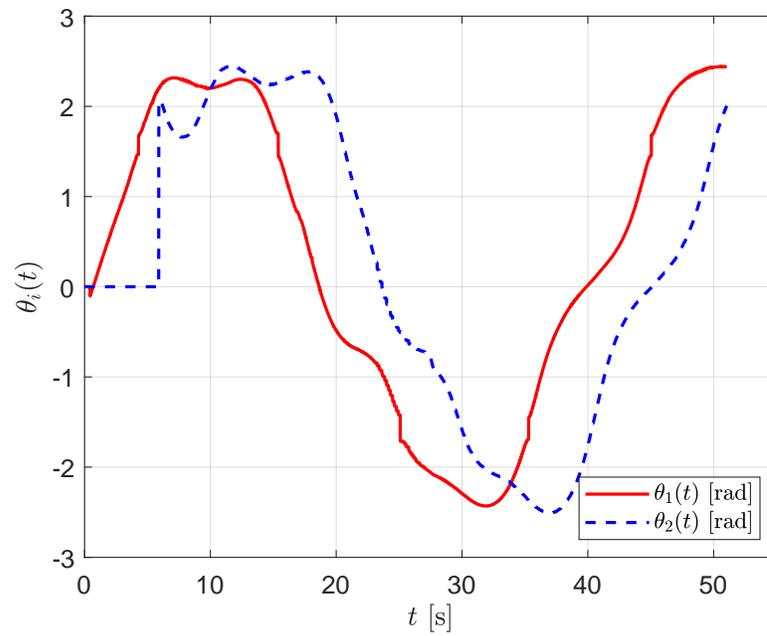
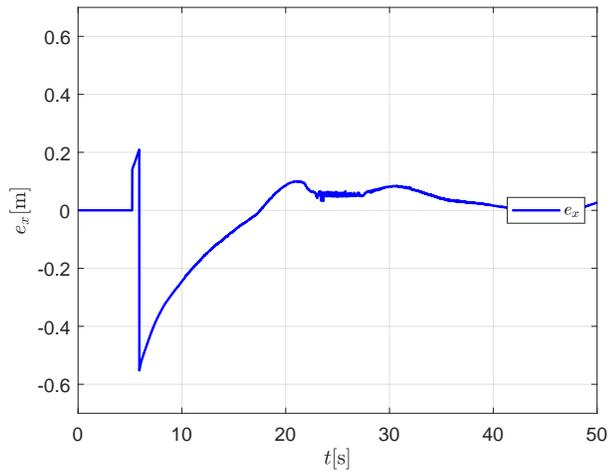
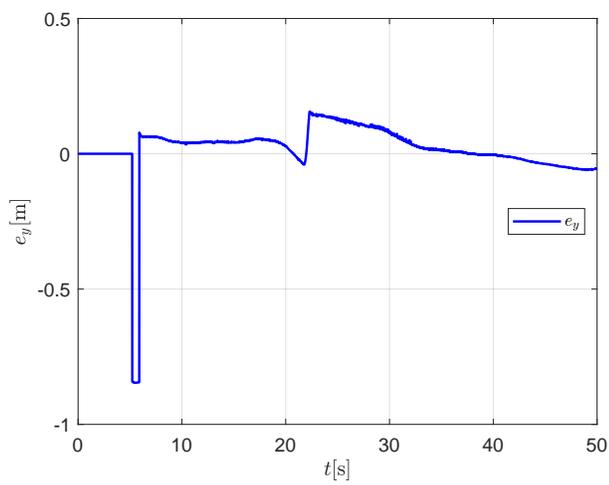


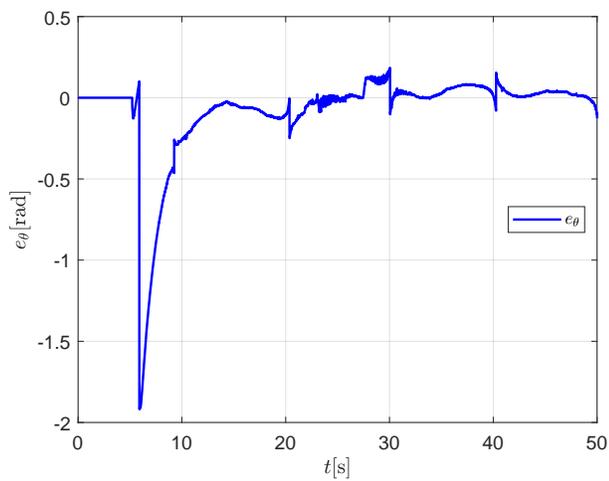
Figura 5.26: Orientación de ambos robots a lo largo de la evaluación experimental implementando la estimación de las perturbaciones.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.27: Errores de seguimiento presentados durante el seguimiento de la trayectoria con la estimación de las perturbaciones.

Capítulo 6

Conclusiones y perspectivas

6.1. Conclusiones

En este trabajo se realizó un estudio de la formación Líder-Seguidor sin mediciones inerciales, considerando la estimación de posibles perturbaciones que puedan sufrir los miembros de la formación durante su desplazamiento. El estudio de este esquema se llevó a cabo en distintas fases. En el Capítulo 2 se introdujo la información general sobre los robots móviles tipo diferencial, se abordó la estrategia de seguimiento a emplear durante el desarrollo de la presente tesis y se consideraron trabajos previos referentes al tema. De los trabajos previos se considera la medición de las distancias relativas las cuales consisten en tomar mediciones desde el robot seguidor hacia el robot líder que, aunado a la estrategia de seguimiento por tiempos de separación, permite realizar un seguimiento de trayectorias, el cual respeta la restricción no-holónoma de los robots. Mediante esta técnica es posible mantener una distancia y orientación deseada entre vehículos mientras se conserva la formación. Además, se planteó un tipo de perturbación la cual pudiera ser empleada durante las simulaciones numéricas, la cual pudiera asemejarse a un deslizamiento o patinado en el robot líder. En el Capítulo 3, se presentó el esquema de formación líder-seguidor, de una manera más detallada, donde el problema recae en las velocidades deseadas que el robot seguidor debe tener para respetar las restricciones. Así mismo, se introdujo un modelo cinemático, el cual considera las perturbaciones externas que pudiera sufrir cualquiera de los vehículos. Dicho modelo fue empleado para la obtención de las nuevas distancias relativas y posteriormente se evaluó de manera numérica el comportamiento del sistema. Dicha evaluación demostró que las retroalimentaciones empleadas por los trabajos pasados, si bien poseen robustez para el seguimiento de las trayectorias, ante la presencia de una perturbación externa estas tardan un periodo de tiempo considerable para converger nuevamente a la trayectoria deseada. En el Capítulo 4 se abordó una estrategia para la estimación de las perturbaciones medidas a través de ejes móviles y su posterior transformacional a ejes globales, todo esto con la finalidad de poder realizar una medición de las perturbaciones que llegan a sufrir los robots. Con dichas perturbaciones medidas, se mejora la estrategia de seguimiento presentada anteriormente, esto mediante la división de la estimación en dos etapas, siendo la primera, la inyección de las perturbaciones vistas por el robot seguidor en el robot virtual. Para posteriormente realizar la estrategia de seguimiento entre el robot seguidor y el robot virtual. Posterior a esto, se obtiene

una ley de control la cual se probó mediante técnicas de Lyapunov y de dicha prueba se obtiene 2 retroalimentaciones para las velocidades del robot seguidor. Finalmente, en el Capítulo 5 se presentó la plataforma experimental utilizada para el desarrollo de los experimentos de esta tesis, se describió brevemente cada uno de los elementos que conforman dicha plataforma y se presentó también, las evaluaciones experimentales de cada una de las simulaciones presentadas previamente, las cuales permitieron validar el funcionamiento físico de la teoría desarrollada en los capítulos anteriores.

6.2. Trabajo futuro

A continuación, se listan las propuestas de trabajo futuro a realizar en investigaciones posteriores.

- Mejorar la estimación de la perturbación, considerando las variables observadas durante la fase experimental, la cual mejore el estimador y por ende, el seguimiento de las trayectorias.
- Cambio en los robots utilizados durante la fase experimental, considerando los modelos Turtlebot4, los cuales poseen una dinámica más rápida.
- Implementar sensores a bordo de cada robot seguidor, como pueden ser la cámara integrada, para aplicación de técnicas como la visión artificial para la medición de las distancias relativas, el sensor LIDAR, como radar para la evasión de colisiones entre los miembros de la formación.
- Probar diferentes tipos de perturbaciones las cuales permitan evaluar de una mejor manera el comportamiento de los robots seguidores a lo largo del seguimiento de trayectorias.
- Implementar un nuevo tipo de derivada la cual permita tener valores más precisos durante la estimación de la perturbación.
- Incluir el modelo dinámico de los robots en el análisis de la formación, esto con la finalidad de utilizar las velocidades y maniobras significativas las cuales puedan ser desarrolladas por un vehículo fuera de un entorno de laboratorio.

Bibliografía

- [1] J. Ibáñez, S. Zeadally, and J. Contreras-Castillo, “Integration challenges of intelligent transportation systems with connected vehicle, cloud computing, and internet of things technologies,,” *IEEE Wireless Communications*, December 2015.
- [2] J. Nilsson, M. Brännström, E. Coelingh, and J. Fredriksson, “Lane change maneuvers for automated vehicles,” *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 18, no. 5, pp. 1087–1096, may 2017.
- [3] A. Alam, B. Besselink, V. Turri, J. Martensson, and K. H. Johansson, “Heavy-duty vehicle platooning for sustainable freight transportation,” *IEEE Control Systems Magazine*, December 2015.
- [4] M. P. Lammert, J. D. A. Duran, K. Burton, and A. Nicholson, “Effect of platooning on fuel consumption of class 8 vehicles over a range of speeds, following distances, and mass,” *SAE International Journal of Commercial Vehicles*, vol. 7, no. 2, October 2014.
- [5] C. Nowakowski, S. E. Shladover, and X.-Y. Lu, “Cooperative adaptive cruise control (cacc) for truck platooning: Operational concept alternatives,” *IEEE Transactions on Intelligent Transportation System*, vol. 22, 2015.
- [6] E. Guizzo, “Three engineers, hundreds of robots, one warehouse,” *IEEE Spectrum*, vol. 45, no. 7, pp. 26–34, 2008.
- [7] H. Jung-Hoon, J. Sewoong, K. Seuing-Hun, C. Donghoon, J. Kaehoon, and L. Jongbae, “Novel fire detection device for robotic fire fighting,” *Proceedings of the International Conference on Control Automation and Systems (ICCAS)*, pp. 96–100, 2010.
- [8] A. Garrell and A. Sanfeliu, “Local optimization of cooperative robot movements for guiding and regrouping people in a guiding mission,” *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pp. 3294–3299, 2010.
- [9] L. Martínez, A. Pérez, A. Roa, and A. Marín, “Robots móviles de ruedas: generalidades,” *Boletín UPIITA-IPN*, vol. 45, 2020.
- [10] B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, and G. Oriolo, *Robotics: Modelling, Planning and Control*, 1st ed. Springer Publishing Company, Incorporated, 2008.

- [11] L. Tagliavini, G. Colucci, A. Botta, P. Cavallone, L. Baglieri, and G. Quaglia, “Wheeled mobile robots: State of the art overview and kinematic comparison among three omnidirectional locomotion strategies,” *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, vol. 106, p. Article 57, 2022.
- [12] K. M. Lynch and F. C. Park, *Modern Robotics: Mechanics, Planning, and Control*. Cambridge University Press, 2017.
- [13] R. Siegwart, I. R. Nourbakhsh, and D. Scaramuzza, *Mobile Robotics: Mathematics, Models, and Methods*, 2nd ed. Springer, 2011.
- [14] L. Qiao, X. Luo, Q. Luo, M. Li, and J. Jiang, “Optimizing kinematic modeling and self-collision detection of a mobile manipulator robot by considering the actual physical structure,” *Applied Sciences*, vol. 11, no. 22, p. 10591, 2021.
- [15] L. Gracia and J. Tornero, “Kinematic models and isotropy analysis of wheeled mobile robots,” *Robotica*, vol. 26, no. 5, pp. 587–599, 2008.
- [16] J. Tatum, *Teoría general de la perturbación*. University of Victoria, 2023. [Online]. Available: [https://bing.com/search?q=Definici%
c3%b3n+de+Perturbaci%
c3%b3n+en+la+Trayectoria](https://bing.com/search?q=Definici%c3%b3n+de+Perturbaci%c3%b3n+en+la+Trayectoria)
- [17] C. Quinzacara, “Trayectoria en física: qué es, tipos, ejemplos, ejercicios,” *Lifeder*, 2023. [Online]. Available: <https://www.lifeder.com/trayectoria-en-fisica/>
- [18] “Definición de perturbación,” *edu.lat*, 2023. [Online]. Available: <https://definicion.edu.lat/definicion/perturbacion.html>
- [19] J. Aguilar-Pérez, M. Velasco-Villa, and R. Castro-Linares, “Fractional order tracking control for differential mobile robots with skidding and slipping effects,” *Revista Digital AMCA*, pp. 1–6, 2023. [Online]. Available: <https://revistadigital.amca.mx/wp-content/uploads/2023/12/0104.pdf>
- [20] J. Aguilar-Pérez, M. Velasco-Villa, R. Castro-Linares, and J. González-Sierra, “Dynamic modeling and backstepping control of a wheeled mobile robot with skidding and slipping effects,” *Revista Digital AMCA*, pp. 1–6, 2022. [Online]. Available: <https://revistadigital.amca.mx/wp-content/uploads/2022/11/0047.pdf>
- [21] D. García-Olivares, M. Velasco-Villa, and R. Castro-Linares, “Tracking control for differential mobile robots with skidding and slipping effects,” *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático*, pp. 1–6, 2020. [Online]. Available: <https://revistadigital.amca.mx/tracking-control-for-differential-mobile-robots-with-skidding-and-slipping-effects/>
- [22] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, 2nd ed. Prentice-Hall, 1996.
- [23] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, 3rd ed. Springer-Verlag, 1995.

- [24] J. Guerrero-Castellanos, M. Villarreal-Cervantes, J. Sánchez-Santana, and S. Ramírez-Martínez, “Seguimiento de trayectorias de un robot móvil (3,0) mediante control acotado,” *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, vol. 11, no. 4, pp. 426–434, 2014.
- [25] A. Yandún and N. Sotomayor, “Planeación y seguimiento de trayectorias para un robot móvil,” <https://www.eng.newcastle.edu.au/~jhb519/teaching/snolin/material/cap03.pdf>, 2014, accedido: 2024-10-03.
- [26] C. Samson, “Control of chained systems: Application to path following and time-varying point-stabilization of mobile robots,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 40, no. 1, pp. 64–77, 1991.
- [27] C. Samson and K. Ait-Abderrahim, “Feedback control of a nonholonomic wheeled cart in cartesian space,” *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1136–1141, 1995.
- [28] M. Lammert, J. Gonder, K. Kelly, K. Salari, and J. Ortega, “Class 8 tractor trailer platooning: Effects, impacts, and improvements,” 2016.
- [29] E. Guizzo, “Three engineers, hundreds of robots, one warehouse,” *IEEE Spectrum*, vol. 45, no. 7, pp. 26–34, 2008.
- [30] S. Stüdli, M. Seron, and R. Middleton, “Vehicular platoons in cyclic interconnections with constant inter-vehicle spacing,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 50, pp. 2511–2516, 07 2017.
- [31] M. Mohd Ariffin, M. A. Abdul Rahman, and H. Zamzuri, “Effect of leader information broadcasted throughout vehicle platoon in a constant spacing policy,” *IEEE International Symposium on Robotics and Intelligent Sensors*, pp. 132–137, 10 2015.
- [32] C. A. Domínguez-Ortega, R. D. Cruz-Morales, A. Rodríguez-Angeles, and M. Velasco-Villa., “Control de un convoy de robots móviles con tiempo variable de separación.” *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático*, pp. 140–145, 2018.
- [33] R. Cruz-Morales, M. Velasco-Villa, and A. Rodríguez-Ángeles, “Chain formation control for a platoon of robots using time-gap separation,” *International Journal of Advanced Robotic Systems*, vol. 15, p. 172988141877085, 04 2018.
- [34] M. Velasco-Villa, A. Rodríguez-Angeles, I. Z. Maruri-Lopez, J. A. Baez-Hernandez, and R. D. Cruz-Morales, “Leader-follower formation control based on non-inertial frames for non-holonomic mobile robots,” *Plos One*, vol. 19, January 2024.
- [35] I. Z. Maruri-López, M. Velasco-Villa, and A. Rodríguez-Angeles., “Leader-follower formation of mobile robots on a mobile axis system,” *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático*, pp. 1–6, 2020.

- [36] G. Campion, G. Bastin, and B. Dandrea-Novet, “Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots,” *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 12, no. 1, pp. 47–62, 1996.
- [37] C. Canudas de Wit, G. Bastin, and B. Siciliano, Eds., *Theory of Robot Control*, 1st ed. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1996.
- [38] M. I. Jacobo, “Formación de vehículos con parámetros de seguimiento variables utilizando mediciones relativas,” Tesis de Maestría, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (CINVESTAV), 2019.
- [39] C. A. Domínguez-Ortega, R. D. Cruz-Morales, A. Rodríguez-Angeles, and M. Velasco-Villa, “Control de un convoy de robots móviles con tiempo variable de separación,” *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático*, pp. 140–145, 2018.
- [40] M. Infante-Jacobo, R. D. Cruz-Morales, A. Rodríguez-Angeles, and M. Velasco-Villa, “Formación de vehículos mediante tiempos de separación utilizando mediciones relativas.” *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático*, pp. 45–50, 2021.
- [41] I. Z. M. López, “Formación de vehículos con parámetros de seguimiento variables utilizando mediciones relativas,” Tesis de Maestría, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (CINVESTAV), 2021.
- [42] “Ros introduction,” Online, last accessed: 11-10-2019. [Online]. Available: <http://wiki.ros.org/ROS/Introduction>
- [43] Y. Pyo, H. Cho, R. Jung, and T. Lim, *ROS Robot Programming*. ROBOTIS, 2017.
- [44] “Turtlebot3 features,” Online, last accessed: 07-10-2024. [Online]. Available: <https://emanual.robotis.com/docs/en/platform/turtlebot3/features/>