



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS  
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

SECCIÓN DE MECATRÓNICA

**Sistemas Mecánicos Esencialmente  
No Lineales: el Problema de Absorción de  
Vibraciones**

TESIS

que presenta el ingeniero

**Osnaider Alvarez Alvarez**

Para obtener el grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS**

EN LA ESPECIALIDAD DE:  
**INGENIERÍA ELÉCTRICA**

Director de la Tesis:

**Dr. Gerardo Silva Navarro**



*No te hagas trampas, ni juegues más a la inocencia.  
Cada pelo de tu ser es responsable del destino del mundo.  
Tus actos son soberanos y tienen el poder infinito de elegir el mundo que sueñas,  
en el que anhelas vivir.  
Sólo de ti depende vivir en una tumba o en un templo,  
digno o envilecido.  
En tus manos está elegir tu destino y el de tu patria.*

**Gonzalo Arango.**



# Dedicatoria

*A mis Padres, con Amor sublime.*

*A Susy... Todo!*



# Agradecimientos

Expreso mi más sincero sentimiento de agradecimiento a mis padres, por forjar en mí el carácter de temple, por despertar en mí la capacidad de sentir las injusticias, pero, sobre todo, por adjudicar en mí las ganas de vivir en dignidad y caminar hacia los sueños. Por el amor incondicional, los valores, el sacrificio y entrega, que hacen posible mi transitar por esta tierra, ¡Siempre Gracias!

Agradezco inmensamente al Dr. Gerardo Silva Navarro por la orientación y el conocimiento impartido en este proceso de formación. Gracias por tanta enseñanza, por la amistad y el apoyo en los momentos cruciales, por impartir con su ejemplo la idea de no permitir que la situación me supere. A usted, toda la admiración y el respeto.

De la manera más fraterna, extiendo mis agradecimientos al Dr. Martín Velasco Villa y al Dr. Juan Fernando Peza Solís, por haber aceptado formar parte del jurado de tesis. Por la revisión del documento y las observaciones realizadas, Gracias.

Presento mi agradecimiento al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) por haber financiado mis estudios de maestría a través de la beca otorgada. De igual manera, agradezco al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav). por haberme brindado la posibilidad de formarme como maestro en ciencias en tan prestigiosa institución.

Al pueblo de México, por ser el terruño que me ha permitido alcanzar tan anhelado logro ¡Gracias Totales!





# Resumen

El presente trabajo trata sobre el análisis de los sistemas esencialmente no lineales, evaluando su desempeño dinámico como absorbedores de vibraciones para sistemas primarios lineales y no lineales. Se toma como referente el desarrollo de una serie de casos de absorbedores de vibraciones. Primero, se realiza una revisión cronológica de las definiciones, resultados y aplicaciones reportadas en la literatura. Asimismo, se presentan dos casos típicos de estudio que revelan características no lineales de amortiguamiento y rigidez, empleando el método de escalas múltiples para el análisis de la respuesta en frecuencia, evidenciando la dependencia existente de la amplitud de respuesta con la frecuencia y la amplitud de excitación. A fin de implementar un sistema esencialmente no lineal, se considera un sistema tipo Duffing amortiguado clásico, con sus variaciones, ya sea con y sin rigidez lineal, para obtener las funciones de respuesta en frecuencia no lineal. Se analiza el caso de esquemas de control retroalimentado, donde las no linealidades podrían usarse para diferentes objetivos de control como la inyección de amortiguamiento y/o de rigidez, lineal o no lineal. Finalmente, se verifica el análisis con algunos resultados numéricos y experimentales.



# Abstract

This paper deals with the analysis of the so-called essentially nonlinear systems, evaluating their dynamic performance as vibration absorbers for linear and nonlinear primary systems. The development of a serie of cases of vibration absorbers is taken as a reference. First, a chronological review of the definitions, results and applications reported in the literature is carried out. Likewise, two typical cases studies, which reveal nonlinear characteristics on damping and stiffness are presented, using the method of multiple scales for frequency response analysis, evidencing the dependence of the response amplitude on the amplitude and frequency of excitation. In order to implement an essentially nonlinear system, the classical damped Duffing system is considered, with its variations, that is, with and without linear stiffness, to obtain the nonlinear frequency response functions. The application of feedback control schemes is briefly analyzed, where the nonlinearities could be used for different control objectives, as for linear or nonlinear damping and/or stiffness injection. Finally, the analysis is verified with some numerical and experimental results.



# Contenido

	<b>Página</b>
<b>Dedicatoria</b>	<b>v</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>vii</b>
<b>Resumen</b>	<b>ix</b>
<b>Abstract</b>	<b>xi</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción general . . . . .	1
1.2. Sistemas Mecánicos Esencialmente No lineales . . . . .	3
1.2.1. Vibraciones en los Sistemas Mecánicos Esencialmente No lineales	4
1.2.2. Métodos de análisis frecuencial de los Sistemas Mecánicos Esencialmente No lineales . . . . .	5
1.3. Absorbedores de vibraciones . . . . .	6
1.3.1. Clasificación de los absorbedores de vibraciones . . . . .	7
1.3.2. Absorbedores de vibraciones no lineales . . . . .	10
1.4. Antecedentes de los Sistemas Mecánicos Esencialmente No lineales . .	18
1.5. Motivación del proyecto . . . . .	21
1.6. Formulación del problema general . . . . .	22
1.7. Objetivos . . . . .	24
1.8. Organización de la tesis . . . . .	25
<b>2. Preliminares</b>	<b>27</b>
2.1. Discusión sobre los sistemas no lineales . . . . .	27
2.2. Análisis frecuencial aproximado . . . . .	29

2.2.1.	Método de escalas múltiples . . . . .	29
2.2.2.	El sistema Duffing . . . . .	33
2.2.3.	El oscilador de van der Pol . . . . .	44
2.3.	Análisis de estabilidad . . . . .	50
2.3.1.	Análisis de estabilidad en el sistema Duffing . . . . .	51
2.4.	Modos normales de vibraciones no lineales . . . . .	57
<b>3.</b>	<b>Absorbedor esencialmente no lineal para sistemas tipo Duffing</b>	<b>59</b>
3.1.	Descripción del sistema . . . . .	59
3.1.1.	Absorbedor de vibraciones Duffing amortiguado . . . . .	61
3.2.	Sistema Duffing acoplado a un absorbedor pasivo esencialmente no lineal . . . . .	62
3.2.1.	Resultados de simulación . . . . .	62
3.3.	Sistema Duffing acoplado a un absorbedor pasivo/activo esencialmente no lineal . . . . .	65
<b>4.</b>	<b>Aplicación de absorbedores de vibraciones a sistemas mecánicos</b>	<b>67</b>
4.1.	Descripción de los casos de estudio . . . . .	67
4.2.	Construcción y caracterización de los subsistemas . . . . .	68
4.2.1.	Sistema primario lineal . . . . .	69
4.2.2.	Absorbedor pasivo lineal . . . . .	72
4.2.3.	Sistema primario no lineal, tipo Duffing . . . . .	75
4.2.4.	Absorbedor pasivo no lineal, tipo Duffing . . . . .	79
4.2.5.	Desarrollo constructivo y caracterización de los resortes no lineales . . . . .	82
4.3.	Evaluación experimental de absorbedores de vibraciones . . . . .	86
4.3.1.	Caso 1: Sistema primario lineal - Absorbedor pasivo lineal . . . . .	86
4.3.2.	Caso 2: Sistema primario lineal - Absorbedor pasivo tipo Duffing . . . . .	88
4.3.3.	Caso 3: Sistema primario tipo Duffing - Absorbedor pasivo tipo Duffing . . . . .	91
4.3.4.	Caso 4: Sistema primario tipo Duffing - Absorbedor pasivo lineal . . . . .	93
4.3.5.	Caso 5: Sistema primario tipo Duffing - Absorbedor esencialmente no lineal . . . . .	95

<b>5. Conclusiones</b>	<b>99</b>
5.1. Trabajo futuro . . . . .	101
<b>6. Bibliografía</b>	<b>111</b>
<b>A. Lista de Publicaciones</b>	<b>113</b>
A.1. Publicación en congreso internacional . . . . .	113





# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Introducción general

La frase, *si quieres encontrar los secretos del universo, piensa en términos de energía, frecuencia y vibración*, suele atribuirse al inventor, físico e ingeniero Nikola Tesla, aunque no existe evidencia que demuestre que el genio la haya dicho o escrito textualmente. Sin embargo, esta puede ser una interpretación moderna de sus ideas y deja ver lo trascendental que ha sido a través del desarrollo histórico del conocimiento, el estudio de las vibraciones.

El problema de control de vibraciones en sistemas y estructuras mecánicas ha sido abordado desde hace mucho tiempo mediante la aplicación de absorbedores dinámicos de vibraciones, también llamados *amortiguadores de masa sintonizada* (TMD, por sus siglas en inglés), típicamente lineales y, en algunos escasos casos, no lineales, utilizando elementos o acoplamientos no lineales, con cambios en la inercia, amortiguamiento y/o rigidez, o agregando términos cuadráticos o cúbicos, lo cual conlleva al inherente fenómeno de la no linealidad y a los absorbedores de vibraciones no lineales.

Debido a que los absorbedores lineales de vibraciones presentan falta de robustez y, en general, poseen diversas limitaciones prácticas, especialmente frente a eventuales variaciones en la amplitud de la fuerza aplicada o cambios en la frecuencia de excitación, destacando aquéllas cercanas a las frecuencias resonantes del sistema primario o del absorbedor [1, 2, 3, 4, 5], algunos estudios han arrojado como resultado posibles soluciones para superar tales dificultades, mediante el uso de elementos

no lineales para mejorar el desempeño dinámico de los absorbedores de vibraciones [4, 6, 7, 8, 9].

El constante desarrollo de nuevos materiales, en los cuales la relación carga-deformación no es linealmente elástica, al igual que la permanente ambición de la ingeniería moderna por desarrollar nuevas y desafiantes aplicaciones, han resultado en un motivo de impulso para la investigación entorno a la supresión y atenuación de vibraciones mediante el uso de absorbedores de vibraciones no lineales. Aunque a principios del siglo XIX ya se mencionaba la importante necesidad por el estudio de los sistemas no lineales, no fue sino hasta mediados del mismo que se analizó y empleó la rigidez no lineal para extender el rango de frecuencia del absorbedor de vibraciones [1]. Como consecuencia, se afirma que el absorbedor de vibraciones no lineal puede diseñarse para incrementar los rangos de frecuencia operacional del sistema primario [2].

En términos generales, un absorbedor no lineal de vibraciones puede diseñarse para aumentar el rango de frecuencia operativa, introducir resonancias internas o fenómenos de saturación [10], disipar altos niveles de energía en el contexto de los *drenajes no lineales de energía* (NES, por sus siglas en inglés) [11] y la *transferencia de energía dirigida* (TET, por sus siglas en inglés) [8]. Recientemente, han sido objeto de estudio los *absorbedores esencialmente no lineales* (ENA, por sus siglas en inglés) [9, 12], los cuales son sistemas sin una aproximación lineal, por lo cual no pueden diseñarse localmente como en el caso de los absorbedores lineales de vibraciones, aunque poseen otras propiedades interesantes, como el denominado *fenómeno de saturación*, que permite acotar la respuesta, aún bajo condiciones de resonancia [2].

En general, la presencia de no linealidades en los sistemas mecánicos representa una dificultad para su análisis teórico y práctico, al igual que su estabilidad, la obtención de la función de respuesta frecuencial y las formas de los modos normales de vibración [13]. Además, el uso de absorbedores no lineales de vibraciones no siempre conduce a mejoras en el desempeño del sistema, por lo que resulta conveniente explorar la aplicación de absorbedores activos de vibraciones mediante esquemas de control que permitan alcanzar estabilidad y robustez del sistema completo [10, 14, 15, 16].

El presente trabajo comprende el análisis de los *Sistemas Mecánicos Esencial-*

*mente No lineales* como absorbedores de vibraciones para sistemas primarios con amortiguamiento del tipo Duffing. Se abordará una breve revisión del estado del arte, definiciones, resultados y algunas de las aplicaciones reportadas en la literatura. Se analizará también el problema de absorción de vibraciones en un sistema primario tipo Duffing amortiguado, conectado a un absorbedor tipo Duffing esencialmente no lineal, con esquemas de control de vibraciones pasivos y activos. Finalmente, se verificará el análisis con algunos resultados numéricos y experimentales.

## 1.2. Sistemas Mecánicos Esencialmente No lineales

Algunos de los trabajos recientemente publicados, referentes a los aspectos principales de los absorbedores no lineales de vibraciones y sus aplicaciones, describen desde absorbedores tipo viga, con no linealidades de tipo geométrico, acoplados a sistemas tipo masa-resorte, hasta absorbedores de vibraciones centrífugas del tipo péndulo para la reducción de vibraciones torsionales en maquinaria rotativa y motores de combustión interna de cuatro cilindros, como lo presentan Mikhlin, *et al* [9]. Sin embargo, muy pocos presentan una definición concreta de los Sistemas Mecánicos Esencialmente No lineales. En Martynyuk [12] se cita el trabajo realizado por Kamenkov [17] sobre estabilidad y oscilaciones en sistemas no lineales, donde se define los Sistemas Mecánicos Esencialmente No lineales, como el sistema de ecuaciones para el movimiento perturbado, que no son lineales cuando el parámetro de perturbación pequeña tiende a cero, es decir, que tiende a una aproximación u oscilador lineal.

En los Sistemas Mecánicos Esencialmente No lineales, las no linealidades no pueden tratarse como una perturbación o corrección de un comportamiento lineal. En estos sistemas las propiedades no lineales son fundamentales y dominan el comportamiento del sistema en casi todas las condiciones de operación.

Para fines del presente trabajo, los Sistemas Mecánicos Esencialmente No lineales se definen como sistemas que carecen de aproximación lineal, por lo cual no pueden ser diseñados localmente, como es el caso de los absorbedores lineales de vibraciones.

## 1.2.1. Vibraciones en los Sistemas Mecánicos Esencialmente No lineales

Las vibraciones en los Sistemas Mecánicos Esencialmente No lineales son un campo complejo y fascinante para la comprensión de la dinámica de sistemas y estructuras mecánicas. A diferencia de los sistemas lineales, los sistemas no lineales presentan una relación no proporcional entre la fuerza aplicada y la respuesta del sistema, lo que conduce a una variedad de comportamientos dinámicos que no se observan en sistemas lineales. Es importante mencionar que el principio de superposición no es aplicable para el estudio de las vibraciones no lineales, lo cual significa que la respuesta del sistema a una combinación de entradas no es igual a la suma de las respuestas a las entradas individuales. El comportamiento dinámico propio de las no linealidades hace que los sistemas presenten un alto nivel de sensibilidad ante condiciones iniciales, conllevando a respuestas significativamente diferentes ante pequeños cambios. Otra particularidad interesante son las resonancias no lineales, es decir, que las frecuencias de resonancia están directamente condicionadas por la amplitud de la fuerza de excitación, dando lugar a fenómenos como la resonancia subarmónica y superarmónica [18]. Los sistemas no lineales pueden exhibir una variedad de comportamientos complejos, incluyendo bifurcaciones, caos (ver [19]) y soluciones multi-estables. El trabajo realizado por Rega, *et al* (2003) presenta información detallada al respecto.

Como caso ilustrativo, considere el sistema tipo masa-resorte-amortiguador de un grado de libertad

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + K(x) = f \cos(\Omega t) \quad (1.1)$$

donde  $x$  es el desplazamiento,  $F(t) = f \cos(\Omega t)$  es una fuerza de excitación armónica con amplitud  $f$  y frecuencia de excitación  $\Omega$ . Los parámetros del sistema son la masa  $m$ , el amortiguamiento de tipo viscoso  $c$  y, en este caso,  $K(x) = k_1x + k_3x^3$  es una función de rigidez no lineal, con  $k_1$  y  $k_3$  denotando constantes de rigidez lineal y cúbica, respectivamente. En la Figura 1.1 se muestra la respuesta frecuencial (numérica) del sistema tipo Duffing con y sin rigidez lineal.

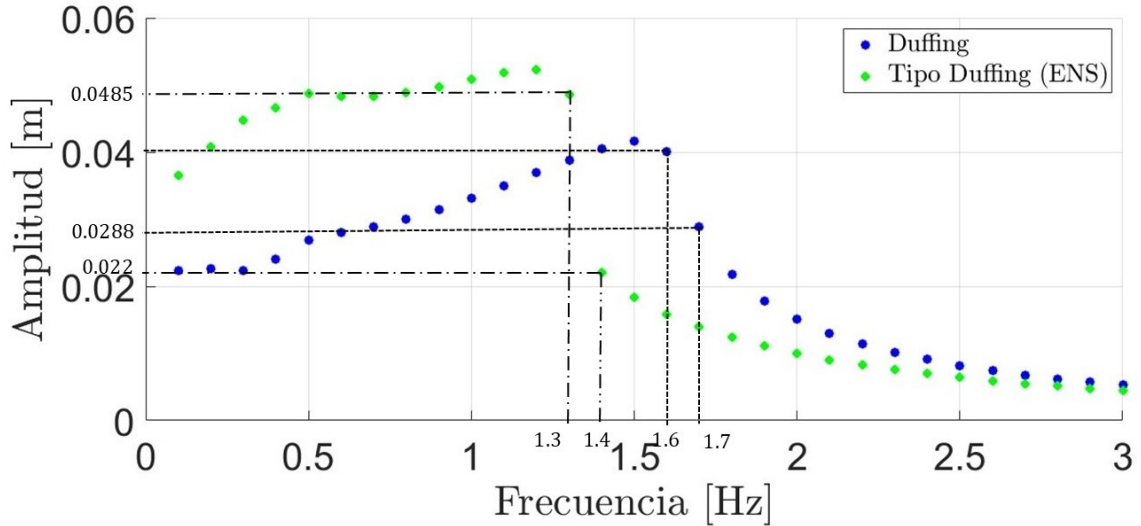


Figura 1.1: Respuesta frecuencial del sistema tipo Duffing para  $m = 2.9461$  kg,  $c = 2.4$  N.s/m, cuando a)  $k_1 = 166$  N/m y  $k_3 = 10^5$  N/m<sup>3</sup> (color azul), y b)  $k_1 \equiv 0$  y  $k_3 = 10^5$  N/m<sup>3</sup> (color verde).

Es importante destacar los puntos críticos para cada caso, los cuales pretenden subrayar la presencia de un cambio brusco en la amplitud de respuesta, al cual se le conoce como efecto de *salto*, propio del fenómeno de saturación en un sistema no lineal, que en el caso del sistema esencialmente no lineal es más notorio.

En particular, observe que cuando  $k_1 \equiv 0$  la frecuencia paramétrica principal (o lineal) del sistema (1.1) es  $\omega = \sqrt{\frac{k_1}{m}} = 0$ , lo que conduce a complicaciones evidentes en la obtención de la respuesta frecuencial usando métodos de aproximación local alrededor de una solución armónica.

### 1.2.2. Métodos de análisis frecuencial de los Sistemas Mecánicos Esencialmente No lineales

Al igual que en los sistemas no lineales, las ecuaciones que modelan el comportamiento de los Sistemas Mecánicos Esencialmente No lineales se estudian mediante métodos de solución analítica o métodos de aproximación, también conocidos como *métodos de perturbación aproximada*. Entre los métodos de solución analítica más empleados y ampliamente estudiados, están los siguientes [6]:

- Expansión directa o *straight-forward*.
- El método de Lindstedt-Poincaré.

- El método de escalas múltiples.
- El método de promediación o *averaging*.
- El método de balance armónico.

Para sistemas de ecuaciones con mayor complejidad se han realizado algunas versiones mejoradas de los métodos de análisis frecuencial, tales como:

- El método de Lindstedt-Poincaré modificado.
- El método de balance armónico intrínseco.
- El método de balance armónico generalizado.
- El método de escalas múltiples - balance armónico.

El método de escalas múltiples (de tiempo), aunque representa una mayor dificultad matemática, tiene la capacidad de tratar convenientemente sistemas con amortiguamiento [6]. Por lo tanto, para efectos de este trabajo es el método de solución analítica empleado.

### 1.3. Absorbedores de vibraciones

La tarea de disminuir o incluso cancelar las vibraciones mecánicas, producto de las fuerzas externas con las que interactúan las máquinas y estructuras, ha sido caso de estudio de amplio interés [2]. El 18 de abril de 1911, la oficina de patentes de los Estados Unidos de América registró la patente con número 989.958, de lo que se conoce como el primer absorbedor de vibraciones mecánicas [20]. Sin embargo, fue años antes, el 30 de octubre de 1909 el día en que su inventor, el ingeniero alemán Hermann Frahm presentó la solicitud con el nombre de *dispositivo para amortiguar las vibraciones de los cuerpos*. Dicho dispositivo consistía de un elemento de inercia (masa) acoplado al sistema principal mediante un elemento rígido (resorte). Al ser tan sencillo, este dispositivo solo era efectivo en un problema acotado para un rango de operación limitado (frecuencia natural del sistema), por lo que el desempeño empeoraba drásticamente cuando la frecuencia de la fuerza de excitación variaba. Una

manera de afrontar esta restricción, y aportar una solución más robusta, fue mediante la instalación de un amortiguador viscoso entre el dispositivo y la estructura principal [21].

Algunas aplicaciones que utilizan absorbedores de vibraciones son las máquinas reciprocantes (cilindro-émbolo), tales como compactadoras, lijadoras, herramientas tipo sierras, e incluso los grandes motores de combustión interna, que funcionan a velocidad constante, con el propósito de reducir al mínimo el consumo de combustible. Sin un absorbedor de vibraciones, resultaría imposible mantener o controlar cualquiera de estas máquinas y herramientas, debido a la presencia de fuerzas reciprocantes desbalanceadas. La situación es aún más crítica cuando la máquina debe atravesar u operar cerca de alguna de sus frecuencias de resonancia.

### 1.3.1. Clasificación de los absorbedores de vibraciones

El asunto de los absorbedores de vibraciones mecánicas resulta ser un tema de gran importancia, debido a su naturaleza práctica, necesaria para garantizar los estándares de calidad que brinden certeza frente a la seguridad del operario o personas en el medio en que interactúa la máquina o estructura, y, por supuesto, para garantizar el ciclo de vida útil del mismo. Debido a su importancia, amplios estudios realizados al respecto han presentado la posibilidad de clasificar muy generalmente a los absorbedores de vibraciones en dos tipos: absorbedores pasivos y absorbedores activos de vibraciones [4, 22, 23]. A continuación se presenta brevemente una descripción, bastante general, de cada uno de estos.

#### **Absorbedor pasivo de vibraciones**

En el año 2007, la empresa francesa *Airbus Helicopters* (*Eurocopter*, hasta 2014) publicó un trabajo interesante sobre el control activo y pasivo de vibraciones mecánicas, haciendo gran énfasis en su aplicación en la industria (ver [24]), en el cual se mencionan dos maneras de realizar control pasivo: la primera mediante la optimización de la estructura del sistema, a fin de disminuir los niveles de vibración en puntos específicos, para lo cual se sugieren cambios en la distribución de masa o la modificación de las geometrías (rigidez), teniendo incidencia directa en las frecuencias naturales y sus formas modales; sin embargo, esto es aplicable únicamente para

proyectos en su etapa de diseño. Para casos en los que los parámetros de masa y rigidez no pueden modificarse directamente existen los *absorbedores dinámicos de vibraciones* (DVA, por sus siglas en inglés) [4, 10, 14], los cuales constituyen un apéndice mecánico conformado comúnmente por un elemento tipo masa (inercia) y un elemento elástico o resorte (rigidez), sintonizados entre sí para una frecuencia en particular mediante la expresión  $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Es bastante usual incluir un elemento amortiguador, que se encarga de disipar cierta cantidad de energía en cada ciclo de vibración y, por tanto, mejorar las propiedades de estabilidad. Para los casos en los que se incluye el elemento disipativo, el absorbedor recibe el nombre de *amortiguador de masa sintonizada* (TMD, por sus siglas en inglés). Un sistema amortiguado representa un sistema no conservativo y, por lo tanto, se requiere la presencia permanente de una fuerza externa que permita mantener un estado estacionario de la respuesta vibratoria [4, 21, 23].

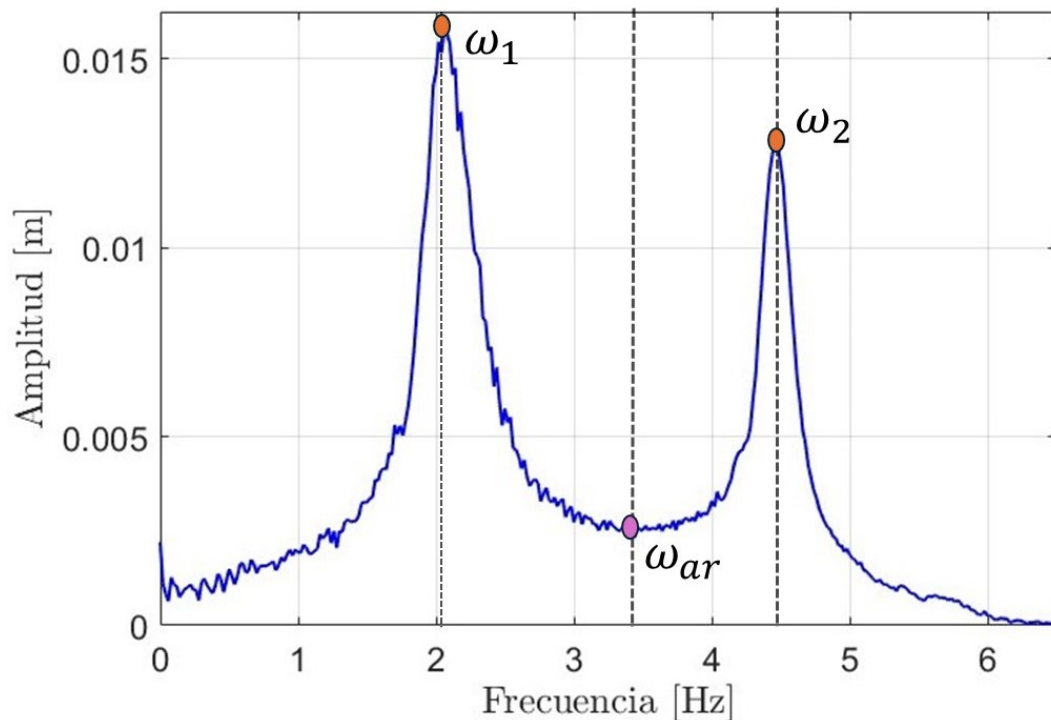


Figura 1.2: Respuesta frecuencial de un sistema primario lineal acoplado a un absorbedor dinámico de vibraciones.

Debido a que el absorbedor pasivo de vibraciones constituye en sí un sistema tipo masa-resorte-amortiguador, su acoplamiento a un sistema primario de  $n$  grados de libertad implica agregar un grado de libertad, por lo que el sistema acoplado tendrá



$n + 1$  grados de libertad. En el caso de un sistema de un grado de libertad, el sistema resultante será de dos grados de libertad y, por lo tanto, su dinámica estará descrita por dos frecuencias naturales, pertenecientes al sistema primario y al absorbedor, y una anti-resonancia, la cual tendrá un valor de frecuencia entre las dos frecuencias naturales y una amplitud en razón del amortiguamiento presente en el sistema (ver Figura 1.2). La presencia de amortiguamiento elevado, aunque mejora la estabilidad, empeora la capacidad de transferencia de energía del sistema primario al absorbedor de vibraciones, inutilizando la función del absorbedor pasivo.

### **Absorbedor activo de vibraciones**

Los absorbedores pasivos de vibraciones son dispositivos comúnmente empleados para suprimir vibraciones armónicas en una frecuencia de sintonización o diseño, de una forma simple y eficiente. Sin embargo, el acoplamiento del absorbedor al sistema primario modifica indefectiblemente la respuesta estructural del sistema y adiciona una nueva frecuencia natural, en la cual las amplitudes de vibración pueden llegar a ser notablemente grandes, con tendencia a incrementarse conforme al amortiguamiento es más pequeño, teóricamente al infinito cuando el amortiguamiento es cero [14]. Lo adverso de las limitaciones aparecen con la imposibilidad de cancelar las vibraciones presentes ante varias frecuencias de excitación, especialmente cerca de las resonancias. Para ello se emplean distintas técnicas de control activo de vibraciones basadas en emplear las señales de medición de sensores, cuya tarea es permitir obtener valores de desplazamiento, velocidad y/o aceleración en tiempo real, y con ello controlar la dinámica mediante actuadores y transductores, los cuales, mediante la inyección de energía cinética y potencial, modifican convenientemente la dinámica del sistema y suprimen/cancelan las vibraciones que lo afectan. Diversas técnicas de control por retroalimentación y/o prealimentación han sido ampliamente estudiadas y aplicadas en ingeniería. Claramente, la principal desventaja del absorbedor activo de vibraciones radica en el costo de los componentes y sus limitaciones físicas, lo cual se compensa con la seguridad que brinda un control más robusto de vibraciones [24].

La empresa estadounidense *HERZAN*, entre un amplio campo de aplicaciones, ofrece una mesa de control activo de vibraciones tipo escritorio, modelo TS150, pro-

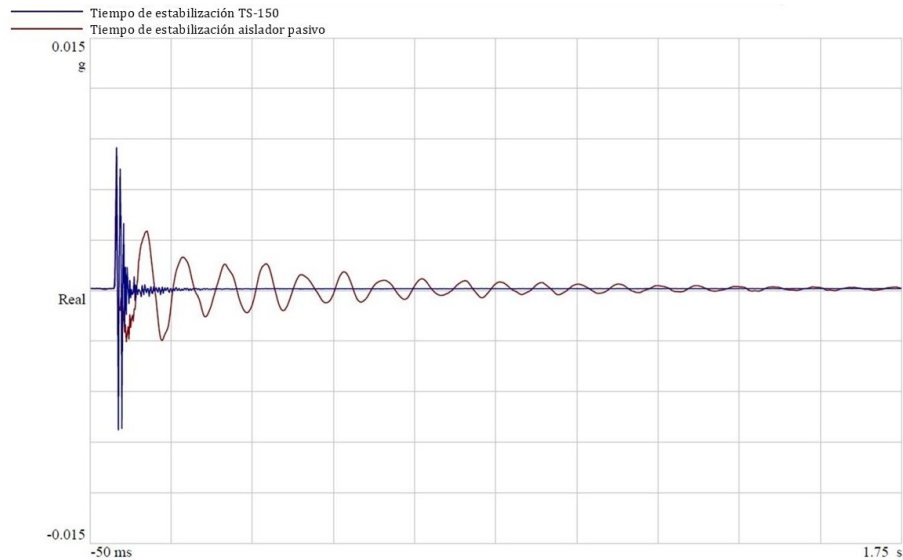


Figura 1.3: Diferencia de comportamiento en el tiempo de estabilización de un sistema con absorción pasiva y activa. [25]

pio para la operación de sistemas de alta precisión como las balanzas analíticas o experimentos de holografía, las cuales requieren resolución en términos de micro/pico gramos y resultan altamente sensibles a vibraciones de naturaleza exógena. Dicho sistema emplea un *aislador de vibraciones activo/pasivo* con capacidad de estabilización en un rango de 5 a 20 ms, empleando un esquema de control prealimentado. La Figura 1.3 describe los tiempos de estabilización de la TS150 y del sistema con absorción pasiva.

En Silva-Navarro, *et al* [15] se presenta como caso de estudio un absorbedor de vibraciones activo/pasivo tipo Duffing, el cual se acopla al sistema primario tipo Duffing, dejando ver que en algunas situaciones la combinación de los beneficios del absorbedor pasivo de vibraciones, con la flexibilidad de un esquema de control activo, mejora la robustez general del sistema contra cambios en la frecuencia de excitación o cambios en los parámetros del sistema, y también se mejora la respuesta dinámica del sistema primario. En términos generales, presentan una relación costo-beneficio bastante favorable, dependiendo de la aplicación.

### 1.3.2. Absorbedores de vibraciones no lineales

La falta de robustez y las limitaciones prácticas de los absorbedores dinámicos de vibraciones lineales, especialmente ante variaciones en la amplitud y la frecuencia de

excitación, particularmente cercanas a cualquiera de las frecuencias resonantes del sistema primario y del absorbedor, han sido ampliamente analizadas en la literatura [1, 2, 3, 4, 5, 6].

Algunas posibles soluciones, para superar estas dificultades, consisten en utilizar elementos no lineales (masa/inercia, rigidez y/o amortiguamiento) para mejorar el desempeño dinámico de los absorbedores de vibraciones. Véase, por ejemplo, [5, 6, 7, 8, 9].

Por lo tanto, es posible diseñar un absorbedor no lineal para aumentar el rango de frecuencias de operación, introducir resonancias internas o fenómenos de saturación, y disipar niveles de energía más altos en el contexto de los drenajes de energía no lineal, la transferencia de energía dirigida y, más recientemente, los llamados *Absorbedores Esencialmente No Lineales*. Desafortunadamente, los fenómenos no lineales en los sistemas mecánicos dificultan la teoría, el análisis, la estabilidad y la determinación de las funciones de respuesta frecuencial y modos normales de vibración no lineales (NNM, por sus siglas en inglés). En la práctica, sin embargo, la aplicación de absorbedores no lineales no conduce necesariamente a mejores resultados y, a veces, la alternativa de utilizar esquemas de control activo de vibraciones puede mejorar la estabilidad y robustez del sistema mecánico general [10, 14, 15, 16].

### **Aplicación de rigidez no lineal**

En 1952, Robert E. Roberson [1], quien se encontraba adscrito en la división de mecánica del laboratorio de investigación de la naval estadounidense, sometió ante el Departamento de Mecánica Aplicada de la Universidad de Washington una porción del documento final, requisito para la obtención del grado de Doctor en Filosofía, titulado *Síntesis de un absorbedor dinámico de vibraciones no lineal*. Tal documento consigna el primer caso de análisis y aplicación de un elemento de rigidez no lineal para incrementar el rango de frecuencias de operación del absorbedor dinámico de vibraciones, señalando que *el absorbedor cúbico es quizás la generalización más simple del absorbedor lineal, y puede realizarse aproximadamente por un resorte físico*. Un trabajo que abriría camino a un amplio y vasto campo, lleno de increíbles bondades. Sin embargo, es preciso mencionar que la presencia de no linealidades introduce riesgos de inestabilidad, los cuales pueden llegar a provocar mayores complicaciones

que la reducción de las amplitudes de las vibraciones [5, 26, 27], por lo que es necesario un diseño eficiente del absorbedor no lineal de vibraciones con rigidez cúbica, para lo cual es requisito un procedimiento analítico que garantice la estabilidad del sistema y una respuesta apropiada en estado estacionario [4, 6].

En Natsiavas [5] se presenta el estudio de las oscilaciones en estado estacionario y de la estabilidad de los absorbedores dinámicos de vibraciones no lineales, mediante el método de promediación (*averaging*), para el caso de un sistema tipo Duffing en el que el amortiguamiento es lineal y la rigidez es no lineal. En Nayfeh, *et al* [26] se muestra el estudio del absorbedor dinámico de vibraciones con no linealidad cúbica, dejando ver puntualmente que para el caso en que el sistema primario se excita en la resonancia primaria y la frecuencia natural del absorbedor es aproximadamente igual al de la planta, se presenta el fenómeno de saturación o salto brusco. Se emplea el método de escalas múltiples para encontrar una solución aproximada de primer orden en el estado estacionario y se estudia la estabilidad del sistema, el cual presenta dinámicas complejas que comprenden bifurcaciones, intermitencias y respuestas de tipo caótico [26].

En Koo, *et al* [28] se analiza el desempeño dinámico del *absorbedor sintonizado de vibraciones* (TVA, por sus siglas en inglés) no lineal, siendo este un sistema de control de vibraciones activo/pasivo, en el cual se controla la inyección de amortiguamiento, definiéndose así una relación inversamente proporcional entre el desempeño efectivo del absorbedor y el amortiguamiento, por lo que es posible pensar en el parámetro de rigidez como el candidato para aportar la naturaleza no lineal al absorbedor de vibraciones.

En el trabajo presentado por Saeed, *et al* [16] se estudia el caso en el que el absorbedor de vibraciones con rigidez no lineal, con términos cuadráticos y cúbicos, se acopla a un sistema primario sujeto a múltiples fuerzas externas de excitación, con resonancias primaria e interna, simultáneamente (ver también [29]). Otros estudios del absorbedor de vibraciones con rigidez no lineal se describen por [27, 30, 31, 32].

## **Drenajes de energía no lineal**

Al referir a los *Drenajes de Energía No lineal* es necesario consultar el trabajo de Gendelman, *et al* [33], en el que se presenta evidencia numérica del bombeo de ener-

gía en osciladores mecánicos (débil y esencialmente) no lineales acoplados, es decir, de una *canalización* unidireccional (irreversible) de energía impartida externamente desde la parte lineal a la no lineal del sistema, siempre que la energía esté por encima de un nivel crítico. Este fenómeno es claramente imposible de presentarse en los sistemas lineales. Luego de examinar el sistema considerado como no amortiguado, los resultados exponen la existencia de una órbita subarmónica estable, principal responsable del llamado fenómeno de *bombeo de energía*. Dicha órbita es generada por la captura de una resonancia transitoria, por lo que no puede llegar a excitarse con niveles bajos de energía. Como consecuencia de estos resultados, Gendelman, *et al* [33] y Vakakis & Gendelman [34] presentan la segunda parte de la investigación, en la que mediante dos diferentes técnicas analíticas (transformación al sistema hamiltoniano y promediado) estudian y explican el fenómeno de la *captura de resonancia* y su relación con la respuesta (dinámica) rápida del sistema, durante la cual se genera la región de atracción que origina el bombeo de energía.

Luego de este trabajo en conjunto, Vakakis & Gendelman [34] presentan lo que tal vez sea el primer NES estudiado, desarrollado y evaluado experimentalmente. El caso refiere a un sistema primario lineal acoplado a un absorbedor pasivo lineal de vibraciones dotado por un *anclaje* esencialmente no lineal (con rigidez cúbica). Se estudia la importancia del cruce por cero de la frecuencia de modulación, al generar la aparición instantánea de una dinámica de cuerpo rígido. De igual forma, se desarrolla el caso para una cadena de osciladores lineales en presencia del *anclaje* y se discute la aplicación del fenómeno de bombeo de energía en problemas prácticos de ingeniería [35]. Es preciso resaltar que el *anclaje* actúa esencialmente como un NES, cuya transferencia de energía es referida como bombeo de energía no lineal [36].

Es importante señalar que han sido varios los casos de aplicación de NES para el control pasivo de vibraciones en máquinas y estructuras. En Vakakis [37] se presenta un trabajo sobre estrategias de mitigación para sistemas sometidos a cargas vibratorias, de choque y sísmicas, en el que se estudia una estructura tipo edificio de tres pisos, construida de acero y polipropileno, instalada sobre una mesa de vibraciones a fin de generar un ambiente de vibraciones sísmicas. Se aplican dos configuraciones diferentes para la atenuación efectiva de vibraciones en la base, como se describe en

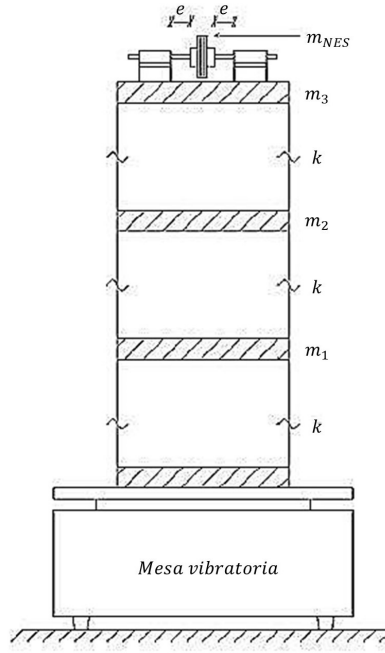
la Figura 1.4 y la Figura 1.5. El bombeo de energía de un sistema primario lineal hacia un NES biestable y aterrizado, actuando como su acoplamiento, se presenta en [38]. La Figura 1.6 deja ver que el NES biestable y aterrizado es una especie de arreglo de elementos mecánicos con rigidez, y abre con ello una ventana de posibilidades inmensas de configuraciones para la construcción de nuevos NES.

La versatilidad y robustez de los NES es tal que su aplicación se ha popularizado en diversos campos. El trabajo recientemente realizado por Saeed, *et al* [16], presenta una clasificación de diez tipos diferentes de NES y sus aplicaciones, haciendo gran énfasis en los de base rotativa y de impacto, debido a que presentan un comportamiento fuertemente no lineal y robustez en la transferencia de energía dirigida. El estudio trata más de veinte casos de diseño, análisis y aplicación de NES en naves espaciales, inestabilidades aeroelásticas, vibraciones inducidas por vórtices (VIV), sistemas con volantes de inercia, maquinaria rotatoria, vigas (e.g, en edificios y puentes), turbinas de viento, trenes de aterrizaje, entre otros. La Figura 1.7 presenta diagramas esquemáticos de diferentes tipos de NES acoplados a un sistema primario de un grado de libertad.

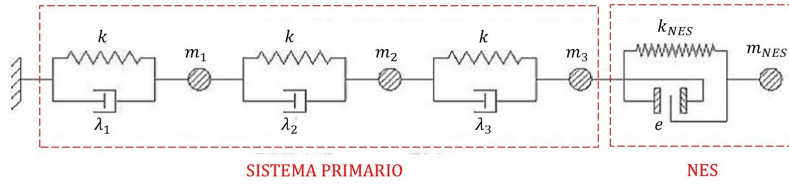
### **Transferencia de energía dirigida**

Si se toma en consideración el caso de múltiples sistemas no lineales acoplados entre sí (múltiples grados de libertad), como producto de la interacción entre las no linealidades propias de cada sistema, se pueden presentar eventos de resonancias adicionales, tales como resonancias internas y resonancias combinadas. Lo que sucede en una resonancia interna es que las frecuencias naturales del sistema general satisfacen una determinada relación de frecuencia. Por otra parte, en una resonancia combinada, tanto las frecuencias del sistema como la(s) frecuencia(s) de excitación están involucradas en la relación de frecuencia. Tales relaciones de frecuencia se denominan, en términos generales, como *interacciones modales* y desempeñan una labor muy importante, ya que *proporcionan un mecanismo para el intercambio de energía entre los modos del sistema* mediante determinadas no linealidades (ver [2, 8, 11]). La resonancia interna de un sistema puede caracterizarse de acuerdo con el tipo de no linealidad y el grado de no linealidad presente en éste [39].

Para sistemas con no linealidades como la rigidez cúbica, puede surgir una reso-



(a) Bosquejo



(b) Esquemático

Figura 1.4: Estructura tipo edificio de tres pisos con NES acoplado. [37]

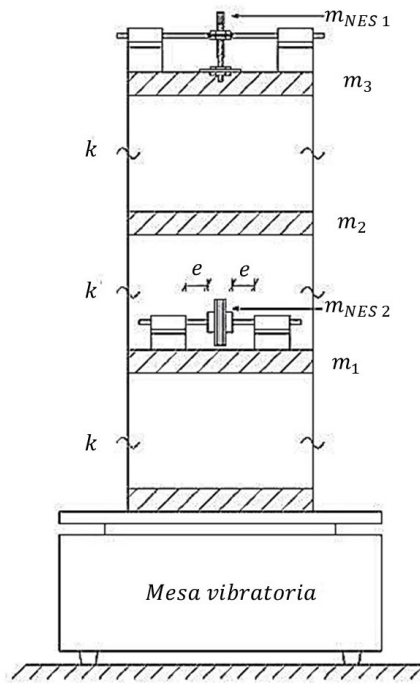
nancia interna si [8, 11, 39]:

$$\omega_{n1} \approx 3\omega_{n2} \approx |\pm 2\omega_{n2} \pm \omega_{n3}| \approx |\pm \omega_{n2} \pm \omega_{n3} \pm \omega_{n4}| \quad (1.2)$$

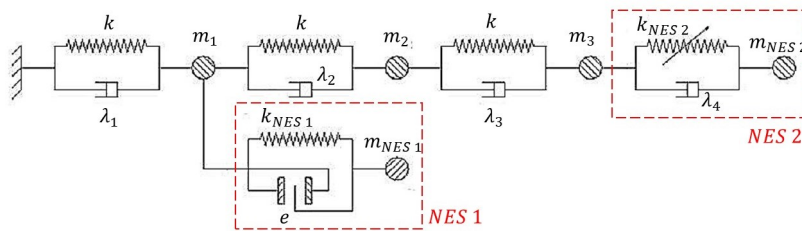
Cuando las no linealidades del sistema general son de orden cuadrático, puede aparecer una resonancia interna bajo las siguientes relaciones de frecuencia:

$$\omega_{n1} \approx \omega_{n2} \approx |\pm 2\omega_{n2} \pm \omega_{n3}| \quad (1.3)$$

En ambos casos  $\omega_{n1}$ ,  $\omega_{n2}$ ,  $\omega_{n3}$ ,... corresponden a valores de frecuencias naturales lineales del sistema. Por otra parte, cuando el sistema es excitado mediante una fuerza armónica, cuya frecuencia está definida por  $\Omega$ , pueden surgir resonancias combinadas en los casos en que:



(a) Bosquejo



(b) Esquemático

Figura 1.5: Estructura tipo edificio de tres pisos con 2 NES acoplados. [37]

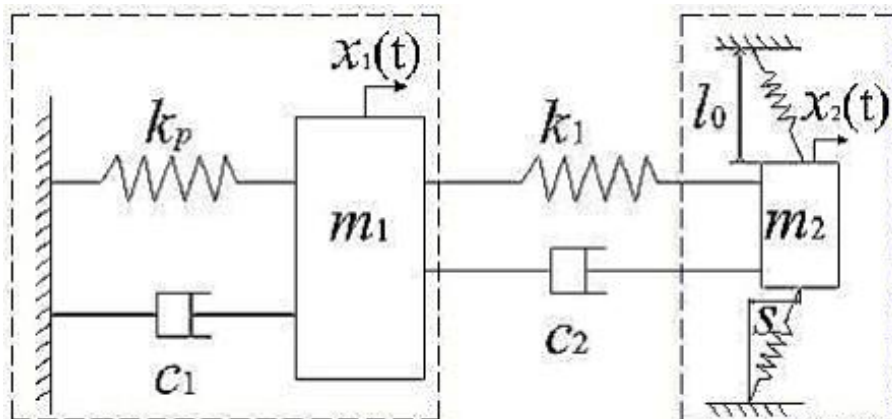


Figura 1.6: Sistema mecánico de 2 grados de libertad con un NES biestable y aterrizado. [38]



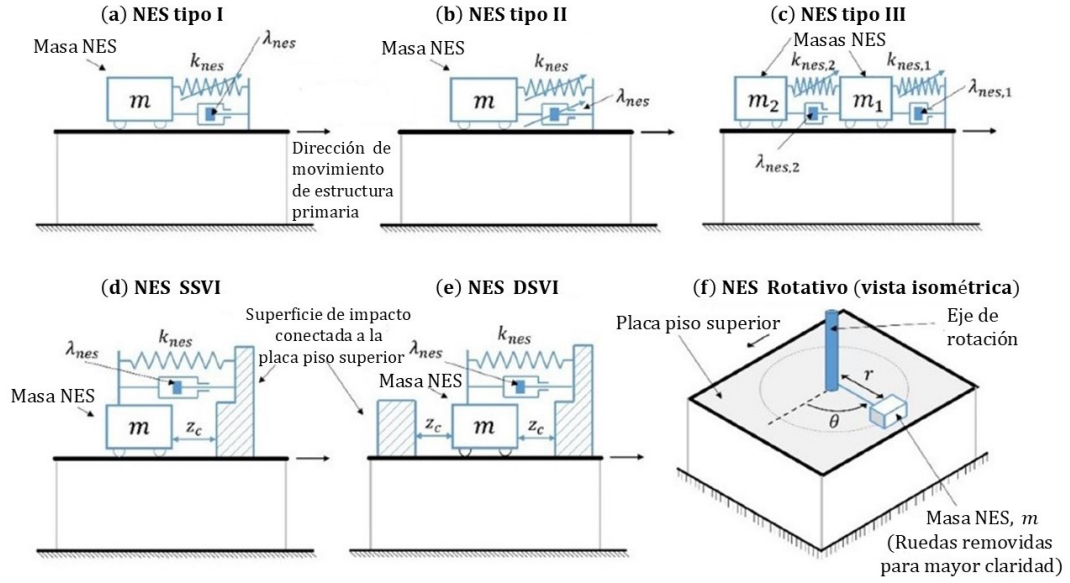


Figura 1.7: Algunos tipos de NES. [16]

- No linealidad cúbica:

$$\Omega \approx \frac{1}{2} |\pm \omega_{n1} \pm \omega_{n2}| \approx |\pm 2\omega_{n1} \pm \omega_{n2}| \approx |\pm \omega_{n1} \pm \omega_{n2} \pm \omega_{n3}| \quad (1.4)$$

- No linealidad cuadrática:

$$\Omega \approx |\pm \omega_{n1} \pm \omega_{n2}| \quad (1.5)$$

Cuando se presentan las interacciones modales, y como consecuencia existe una resonancia interna o combinada, los modos que no se excitan directamente por la fuerza externa, también pueden sufrir oscilaciones de gran amplitud. Sin embargo, tales cambios en la posición tienen lugar únicamente cuando la amplitud de la fuerza de excitación alcanza un nivel crítico mínimo y se produce una transición de bifurcación en forma de horquilla, de una respuesta de modo simple a una de modo acoplado. Es importante mencionar que estos movimientos son predominantes, lo que significa que el mecanismo de transferencia de energía es efectivo cuando la frecuencia de excitación está cerca de una resonancia exacta, con una frecuencia natural adecuada del sistema.

Se presenta como uno de los primeros estudios de la *Transferencia de Energía Dirigida*, el trabajo realizado por Gendelman [40], en el cual se expone la importante aparición del fenómeno de distribución o *bombeo* de la energía en la dinámica del sistema, gracias a la interacción entre los modos normales de vibración no lineal.

Asimismo, se realiza un análisis mediante el método de balance armónico, que relaciona el efecto del amortiguamiento en la transferencia eficiente de la energía, para un sistema no lineal con dos grados de libertad. Desde entonces, es bien sabido que el fenómeno de transición de energía entre modos lineales es imposible, debido a que la distribución modal de la energía es constante. Lo anterior implica que para conocer la manera de *dirigir* la energía transferida, resulta preciso entender la dinámica del sistema no lineal y, con ello, el concepto de modos normales no lineales de vibración, lo cual puede entenderse como una extensión no lineal del concepto de modos normales lineales de vibración [39].

Una serie de trabajos experimentales desarrollados por un equipo de investigadores de la *Acoustical Society of America* ha demostrado la aplicación práctica de los TET en sistemas mecánicos no lineales, fuertemente no lineales y esencialmente no lineales [11, 36, 41]. En los trabajos presentados por [42, 43, 44, 45] se abordan casos de estudio en vigas y sistemas fuertemente no lineales. Una revisión al estado del arte y las nuevas perspectivas de los denominados TET no lineales se expone en Vakakis, *et al* [46].

## 1.4. Antecedentes de los Sistemas Mecánicos Esencialmente No lineales

Hablar de sistemas mecánicos en presencia de no linealidades, implica entender el espíritu investigador de Robert E. Roberson (1952), al preocuparse por la limitación que presentaba el absorbedor de vibraciones de Frham. Una preocupación que de seguro era producto del deseo de conocimiento y entendimiento de la dinámica en vibraciones mecánicas y de estructuras; el problema del ancho de banda. Este es, sin lugar a duda, el primer antecedente de los sistemas mecánicos no lineales, tras emplear un elemento de rigidez compuesto por un término lineal y un término cúbico, el cual presenta como gran conclusión la importante mejora del sistema absorbedor si se pudiera lograr que el término de rigidez no lineal sea de orden mucho mayor al término lineal, lo cual conlleva a pensar en un absorbedor constituido por un resorte no lineal puro, un Sistema Mecánico Esencialmente No Lineal. En 1981, tras casi 30 años, Hunt & Nissen [3] presentaron la aplicación del absorbedor no lineal de vibra-

ciones mecánicas, describiendo textualmente que "*el propósito de este documento es por lo tanto, describir un medio por el cual el ancho de banda de supresión puede ser apreciablemente ampliado mediante el uso de un resorte no lineal conectado en paralelo con un amortiguador viscoso entre la máquina y el absorbedor*", lo cual se logró mediante un arreglo de arandelas tipo Belleville (las cuales se pueden conocer como resortes de disco Belleville o arandelas de resorte Belleville).

Estos primeros trabajos dejan ver la parte práctica del asunto, sin embargo, uno de los documentos de mayor estudio en la literatura es sin lugar a duda la obra conjunta de el distinguido profesor de universidad, Nayfeh, A.H y su colega del Virginia Polytechnic Institute, el profesor Mook, D.T., publicada en el año de 1979, titulada *Nonlinear Oscillations* [6]. Un libro digno de riguroso estudio gracias a su contenido bastante amplio en el que se presentan casos de estudio en sistemas débilmente, fuertemente y esencialmente no lineales, empleando técnicas de análisis cualitativo y cuantitativo con una naturaleza matemática bastante compleja.

A fin de comprender a fondo la dinámica no lineal que brinda la rigidez cúbica, en el año de 1999, Nayfeh, *et al* [26] desarrollaron un trabajo experimental en el que estudiaban la dinámica de un absorbedor no lineal de vibraciones, basado en una ley de control por retroalimentación cúbica, presentando de esta manera el primer caso de absorbedor activo de vibraciones no lineal. Entre otras cosas, identifican la aparición del fenómeno de saturación cuando la planta es excitada en la resonancia primaria, y la frecuencia del absorbedor es aproximadamente igual a la frecuencia natural de la planta, relacionándolo directamente con los modos de vibración. Encuentran la solución aproximada del modelo de ecuaciones diferenciales que gobiernan la dinámica del sistema, mediante el método de escalas múltiples.

Los vehículos aéreos constituyen un área con gran presencia de dinámica altamente no lineal, razón por la cual la oficina de investigación científica de la fuerza aérea (AFOSR, por sus siglas en inglés) de los Estados Unidos financió una importante investigación al respecto, tarea la cual fue encomendada a la Iowa State University (ISU) y el Massachusetts Institute of Technology (MIT). Esta investigación estuvo a cargo del Doctor Alexander Megretski, quien en octubre de 1997 presentó el documento de informe final del trabajo desarrollado en la ISU bajo el título: *Robustness Analysis and Synthesis for Essentially Nonlinear Systems*[47]. Tal informe presenta

el desarrollo de una teoría avanzada para el análisis de estabilidad y desempeño de sistemas con dinámica no lineal importante. Luego, en el MIT, el mismo Doctor Megretski, presentó los resultados de la segunda parte de la investigación realizada entre octubre de 1997 y septiembre de 1999: *Analysis of Essentially Nonlinear Systems* [48]. Este documento de informe final presentaba ante la AFOSR, el desarrollo de un paquete de computo capaz de analizar y diseñar sistemas esencialmente no lineales.

La investigación realizada por Gendelman [40] representa un antes y un después en la materia, ya que por primera vez se vislumbra la existencia del bombeo (transferencia) de energía existente entre modos normales de vibración no lineales. Se presenta el análisis para el caso de modo resonante localizado y se estudia el efecto del amortiguamiento a fin de identificar condiciones para una eficiente transferencia de energía. Luego de esto, Gendelman (2001) da continuidad al estudio de la transferencia de energía en osciladores mecánicos y, junto con Vakakis (2001) realizan un estudio riguroso presentado en [33] y [34], donde se conecta un absorbedor esencialmente no lineal a un sistema primario lineal, identificando condiciones de resonancia de captura y con ello evidencia numérica de la transferencia de energía irreversible desde el sistema primario hacia el ENA.

El camino recorrido hasta el momento dejaba ver la importancia de las bondades escondidas tras las no linealidades y los NNMs, por lo que Vakakis (2001) ofrece una perspectiva más clara al respecto [39]. En términos generales, las investigaciones y aplicaciones al respecto de Sistemas Mecánicos Esencialmente No lineales se orientan al estudio del fenómeno de la transferencia de energía dirigida, tal y como lo presentan [11, 36, 42, 44, 49, 50]. Sin embargo, es de resaltar el trabajo realizado en el año 2022 por Vakakis, *et al* [46], en el que, se presenta un estado del arte de los TET, para luego mostrar un análisis de la relación de no reciprocidad no lineal en relación con estos. Asimismo, se menciona el asunto del ancho de banda no lineal en el contexto de los TET.

Gracias a las bondades de las no linealidades, se abrió paso al estudio de sistemas con rigidez no lineal cúbica. Estos son, en gran manera, acoplados a sistemas primarios, los cuales requieren ser protegidos contra amplitudes de onda lo suficientemente agresivas. Dichos sistemas son conocidos como drenajes de energía no lineal (NES)

y han sido debidamente estudiados por [11, 35, 42, 51]. Una representación de un NES, sin lugar a duda es el caso de los absorbedores de vibraciones esencialmente no lineales (ENA), los cuales son osciladores acoplados entre sí mediante elementos de no linealidad pura (como se presenta en [30, 41, 52, 53, 54, 55, 56]) o *anclajes* esencialmente no lineales (lo cual es tratado en [9, 49, 50, 57, 58]).

La referencia [59] contiene un documento interesante que se enfoca en varias clases de Sistemas Mecánicos Esencialmente No lineales a fin de estudiar los modos esencialmente no lineales de vibración, presentado por Avramov & Mikhlin (2010). Por otra parte, un caso bastante interesante de aplicación de cosechadores de energía mediante Sistemas Mecánicos Esencialmente No lineales, se presenta en [60]. En un trabajo reciente (2023), Martynyuk [12] ha realizado un estudio bastante interesante referente a los alcances y la estabilidad de sistemas esencialmente no lineales.

En el ámbito de los Sistemas Mecánicos Esencialmente No lineales es importante ejecutar correctamente la identificación del sistema, asunto bastante bien tratado por Vakakis [37]. Otros libros de estudio pueden ser consultados en [24][61][62].

## 1.5. Motivación del proyecto

En el ámbito de la ingeniería se cuenta con un sustento teórico bastante bien definido para el caso de absorción de vibraciones de los sistemas lineales. Sin embargo, las no linealidades inherentes, presentes en un sistema dinámico, conducen a la aplicación de métodos de aproximación basados en procesos de linealización local, lo cual pudiera conllevar a un tipo de *mutilación* del sistema original. Ciertamente, una gran cantidad de sistemas dinámicos no lineales podrían analizarse y operarse vía aproximaciones lineales de manera bastante satisfactoria, cumpliendo así con el propósito de diseño, claro, con algunas limitaciones. En problemas de absorción de vibraciones en sistemas mecánicos lineales y no lineales se busca mejorar la respuesta transitoria, atenuando los efectos adversos de las vibraciones armónicas externas, con una o varias frecuencias de excitación armónica, empleando predominantemente absorbedores pasivos y, cuando resulta conveniente, absorbedores activos. Naturalmente, en casos de operación extrema, como ocurre cerca de las frecuencias resonantes del sistema, es conveniente la aplicación de absorbedores de

vibraciones no lineales que garanticen estabilidad y un desempeño adecuado.

En problemas de absorción de vibraciones mecánicas, se ha demostrado que la introducción adecuada de elementos no lineales (e.g., con énfasis en la rigidez cúbica), que modifican las condiciones de operación de un esquema de absorción pasiva acoplado a un sistema primario, resulta útil para proteger al sistema contra vibraciones con amplitudes indeseadas y bajo condiciones de resonancia. Este enfoque permite mejorar el desempeño dinámico con bajos costos de implementación mediante elementos pasivos.

Es preciso mencionar que, aunque los sistemas no lineales encuentran fronteras con el caos y aún así presentan fenómenos de gran interés y beneficio práctico, son escasos los trabajos reportados sobre el análisis y evaluación experimental de sistemas mecánicos con *no linealidades esenciales o puras*. Por lo tanto, la motivación del presente trabajo de tesis consiste en abordar los Sistemas Mecánicos Esencialmente No lineales como absorbedores de vibraciones no lineales.

## 1.6. Formulación del problema general

Un esquema de control pasivo/activo de vibraciones no lineales puede describirse mediante el diagrama de bloques general en la Figura 1.8. Este esquema de absorción consiste en un sistema primario no lineal acoplado a un absorbedor pasivo de vibraciones, no lineal. En general, la interconexión de los dos subsistemas es no lineal, ya que se realiza a través de elementos no lineales, que implican masa/inercia, amortiguamiento y/o rigidez. El diseño y la síntesis se orientan a la atenuación o supresión de la respuesta del sistema primario, para una frecuencia de excitación o componentes en una banda de frecuencia. Dependiendo del sistema primario y del tipo de excitación, el absorbedor de vibraciones puede ser lineal, no lineal, paramétrico, autparamétrico, etc. En algunos casos se combina un esquema de control activo de vibraciones con el absorbedor de vibraciones pasivo, para mejorar la estabilidad y robustez del sistema completo en lazo cerrado en presencia de variaciones en los parámetros y/o fuerzas de excitación (frecuencia y/o amplitud).

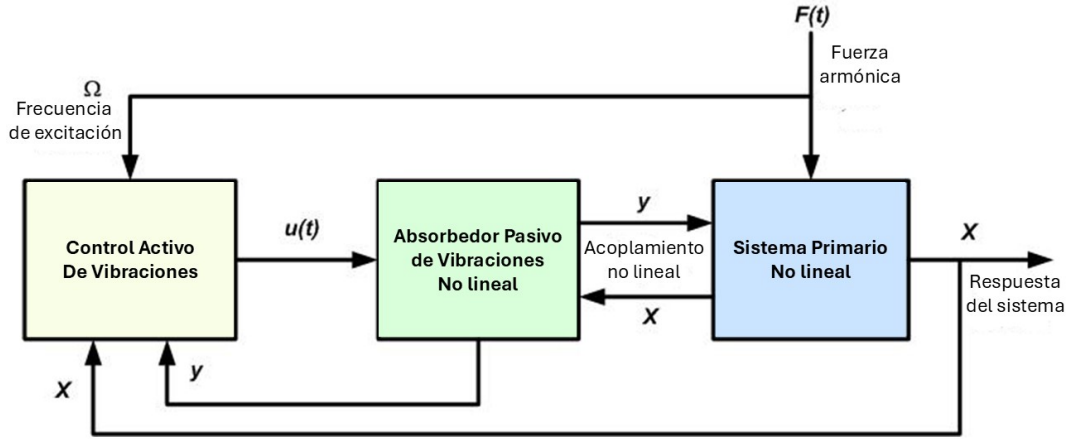


Figura 1.8: Diagrama esquemático de un sistema de absorción pasivo/activo de vibraciones no lineales.

En forma general, el sistema primario no lineal puede considerarse como un sistema mecánico de  $n_1$  grados de libertad, acoplado a un absorbedor no lineal de vibraciones con  $n_2$  grados de libertad. Así, el sistema no lineal con un absorbedor pasivo/activo no lineal de vibraciones puede describirse de la siguiente manera:

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) + \Phi_1(x) + \Phi_2(x, y) = B_f F(t) \quad (1.6)$$

$$M_a\ddot{y}(t) + C_a\dot{y}(t) + K_a x(t) + \Psi_1(y) + \Psi_2(x, y) = B_c u(t) \quad (1.7)$$

donde  $x \in R^{n_1}$  y  $F \in R^{p_1}$  son, el vector de coordenadas generalizadas y de fuerzas externas (indeseables) que actúan sobre el sistema primario, respectivamente. De manera similar,  $y \in R^{n_2}$  y  $u \in R^{p_2}$  son el vector de coordenadas generalizadas y fuerzas externas (control) que actúan sobre el absorbedor de vibraciones no lineal, respectivamente. Aquí las matrices  $M$ ,  $C$  y  $K$ , son matrices de masa, amortiguamiento y rigidez de  $n_1 \times n_1$ , respectivamente, para el sistema primario. Las matrices  $M_a$ ,  $C_a$  y  $K_a$  son matrices de masa, amortiguamiento y rigidez de  $n_2 \times n_2$ , respectivamente, para el absorbedor de vibraciones pasivo/activo. Las matrices  $B_f$  y  $B_c$  tienen dimensiones de  $n_1 \times p_1$  y  $n_2 \times p_2$ , respectivamente, y se utilizan para describir los grados de libertad afectados por las fuerzas externas  $F$  y las fuerzas de control  $u$ , respectivamente.

Las funciones no lineales  $\Phi_1(x)$  y  $\Psi_1(y)$  representan no linealidades internas,

propias de cada subsistema, las cuales pueden resultar de acoplamientos elásticos no lineales adicionales, que constituyan a los *Sistemas Mecánicos Esencialmente No Lineales*. Por el contrario, las funciones de acoplamiento no lineal  $\Phi_2(x, y)$  y  $\Psi_2(x, y)$  denotan acoplamientos no lineales entre el sistema primario y el absorbedor de vibraciones.

El amortiguamiento en el sistema mecánico descrito por las Ecuaciones (1.6) y (1.7) se supone lo más bajo posible, ya que la presencia de amortiguamiento lineal (viscoso) elevado afectaría la respuesta general del sistema, mejorando la estabilidad general pero reduciendo las amplitudes en resonancia, aumentando los ángulos de fase y, por lo tanto, dificultando la implementación de absorbedores dinámicos de vibraciones (sintonización y sincronización).

## 1.7. Objetivos

El objetivo general del presente trabajo de tesis es el estudio de los Sistemas Mecánicos Esencialmente No lineales, tomando como referente algunos casos de estudio bien establecidos en la literatura. Asimismo, realizar el análisis y desarrollo de absorbedores de vibraciones esencialmente no lineales destacando su desempeño.

Para tal fin, se definen los siguientes objetivos específicos:

1. Encontrar una base de documentos que fundamenten los antecedentes y preliminares de los Sistemas Mecánicos Esencialmente No lineales, obteniendo los conceptos y fundamentos necesarios para su comprensión y estudio.
2. Establecer casos de estudio que conduzcan a la comprensión del fenómeno no lineal, destacando el caso del problema general: *Absorbedor Esencialmente No lineal para sistemas tipo Duffing*
3. Construcción física de elementos de rigidez cuya función esté dada por la suma de un término lineal y un término cúbico. Es imperativo que el término no lineal sea lo suficientemente grande, de tal manera que predomine en la dinámica del sistema.
4. Implementar un sistema Masa-Resorte-Amortiguador de dos grados de libertad a fin de establecer una comparativa entre los diferentes casos posibles:



Lineal-Lineal, Lineal-No lineal, No lineal-Lineal, No lineal-No lineal, No lineal-Esencialmente no lineal, como una manera de abordar el problema de absorción de vibraciones.

5. Realizar análisis numérico computacional de los casos de estudio en cuestión, a fin de validar los conceptos establecidos por la teoría de control de vibraciones mecánicas y los resultados experimentales obtenidos.

## 1.8. Organización de la tesis

El trabajo de tesis se compone de 5 capítulos. En el Capítulo 1 se presenta una introducción general sobre los Sistemas Mecánicos Esencialmente No lineales. Se muestran antecedentes que sirven como panorama general en relación al problema del ancho de banda en absorbedores pasivos de vibraciones, en los cuales se describen algunas características importantes sobre la presencia de fenómenos inherentes a las no linealidades. Una caracterización de los absorbedores no lineales de vibración, al igual que la formulación y la motivación para el desarrollo de esta tesis, son descritos. Por ultimo, se explica el objetivo general y los objetivos específicos requeridos para su alcance.

El Capítulo 2 presenta las herramientas para el análisis cualitativo y cuantitativo de Sistemas Mecánicos Esencialmente No lineales: análisis frecuencial aproximado empleando el método de escalas múltiples, para lo cual se presentan dos casos típicos de estudio en la literatura. Para cada caso se presenta específicamente su función de respuesta en frecuencia obtenida mediante el método de escalas múltiples, en la cual se evidencia la dependencia entre amplitud y frecuencia, propio de la presencia de no linealidades. Se desarrolla el análisis de estabilidad para el sistema Duffing en presencia de oscilaciones forzadas. Por ultimo, se presentan los NNMs y su fundamental importancia.

En el Capítulo 3 se expone el caso general de estudio de la presente tesis. Trata del estudio y la aplicación de un *Absorbedor Esencialmente No lineal para sistemas tipo Duffing*. Se presentan los casos en que el ENA se desarrolla de manera pasiva y activa, y se exponen algunos resultados de simulación.

Los resultados experimentales, al igual que la plataforma experimental, se pre-

sentan y discuten en el Capítulo 4. Además, se describe una serie de comentarios con puntualidades sobre el desarrollo práctico al momento de abordar el problema de absorción de vibraciones, incluyendo la construcción de elementos elásticos cuya función de rigidez presenta una fuerte no linealidad cúbica.

Finalmente, el Capítulo 5 expone las conclusiones a las que llega el desarrollo del presente trabajo de tesis.

# Capítulo 2

## Preliminares

### 2.1. Discusión sobre los sistemas no lineales

El hecho de que la solución general de las ecuaciones diferenciales lineales esté siempre disponible, hace que el análisis de la dinámica de sistemas lineales se facilite en gran medida. Sin embargo, es importante señalar que, cuando los sistemas lineales se mueven más allá de sus condiciones de operación, el comportamiento global puede determinarse mediante su comportamiento local bajo pequeñas perturbaciones [63, 64, 65], lo cual dio origen al estudio de las no linealidades.

Es bastante válido afirmar que, la naturaleza es esencialmente no lineal, y al igual que en el estudio de la naturaleza, mediante el estudio de los sistemas no lineales, se gana intuición real acerca de sus procesos. Debido a que los sistemas no lineales proporcionan nuevos y distintivos fenómenos, resulta útil la introducción de no linealidades o funciones de control no lineal. Estos avances en la teoría del control no lineal encuentran reivindicación en sus aplicaciones, como en el control de torpedos, aeronaves, en cinética de reactores nucleares, misiles guiados y otros sistemas [66]. Básicamente, todos los problemas en mecánica son, en esencia, no lineales [67]. Sin embargo, por mucho tiempo, se han despreciado las bondades que brindan las no linealidades.

Si un sistema es inherentemente no lineal, la idealización lineal conduce a resultados equívocos. Por lo tanto, el análisis de estos sistemas debe realizarse mediante un modelo no lineal, descrito por el correspondiente conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales [65]. Sin embargo, desde que las ecuaciones diferenciales que

describen los sistemas, son no lineales y generalmente no se pueden resolver con exactitud, debemos conformarnos con soluciones aproximadas que proporcionen información adecuada para el estudio y comprensión de las oscilaciones no lineales [67]. Tales soluciones aproximadas pueden ser vistas como expansiones, las cuales se han hecho uniformemente válidas gracias a que investigadores de diferentes ramas de la física, ingeniería y matemática aplicada han desarrollado varias técnicas (las diferentes técnicas son descritas como procedimientos formales sin ninguna intención de justificarlas rigurosamente. De hecho, aún no hay justificaciones matemáticas rigurosas disponibles para las expansiones obtenidas [63]), entre las cuales algunas son radicalmente distintas, mientras que otras son interpretaciones diferentes de una misma idea básica [63]. En el año de 1899, Poincaré estudió la dinámica no lineal en el contexto del problema de los  $n$ -cuerpos en la mecánica celeste. Además de desarrollar e ilustrar el uso de los métodos de perturbación, deja ver un punto de vista cualitativo inspirado en la geometría [68].

Con la llegada de las computadoras de alta velocidad, resulta rutinario la obtención de una solución particular para un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales y determinar el movimiento del sistema bajo condiciones estáticas. Sin embargo, el uso eficiente de las computadoras para la simulación y análisis de sistemas no lineales depende crucialmente de los avances generados en esta dirección [65], por lo que parte importante para resolver problemas modernos implican la creación de modelamientos matemáticos adecuados para ofrecerle al ordenador. Este proceso involucra mantener ciertos elementos, despreciando algunos, y aproximando otros. Para lograr este importante paso, se necesita decidir el orden de magnitud de los diferentes elementos del sistema, comparándolos entre ellos, así como con los elementos básicos del sistema. Este proceso se denomina adimensionalización de las variables del sistema. Como consecuencia, en todo caso es preciso introducir variables adimensionales, antes de intentar hacer cualquier aproximación [64]. Las ecuaciones en forma adimensional permiten identificar con certeza la importancia de los parámetros adimensionales que gobiernan la dinámica del sistema. Incluso si no se está interesado en aproximaciones, se recomienda hacer este paso antes de analizar el sistema o presentar datos experimentales [64].

Existen muchos enfoques para el estudio de los sistemas no lineales, pero to-

dos ellos pueden dividirse en dos grandes clases: cualitativos y cuantitativos. En el enfoque cualitativo, el interés no radica tanto en la historia temporal explícita del movimiento del sistema como en una afirmación sobre si el movimiento en las proximidades de una solución conocida es estable o inestable. En su mayor parte, la solución conocida representa una posición de equilibrio.

Por otra parte, el enfoque cuantitativo se ocupa sólo del comportamiento transitorio del sistema. Cuando las no linealidades del sistema son relativamente pequeñas, es posible obtener una solución mediante una técnica de perturbación, por la que la respuesta se expande en una serie en términos de un parámetro pequeño que representa una medida de la magnitud de la no linealidad. Aquí resulta de especial interés el caso donde se sabe que la solución real es periódica. Cuando las no linealidades no son pequeñas, el comportamiento dinámico se pueden obtener mediante integración numérica, donde frecuentemente se requiere que las ecuaciones de movimiento se expresen en forma de espacio de estados [69]. En este capítulo, se abordan brevemente tanto las técnicas cualitativas como las cuantitativas, de análisis transitorio y frecuencial.

## 2.2. Análisis frecuencial aproximado

Cuando se trata de un sistema de ecuaciones diferenciales que gobiernan no linealidades, aparecen una serie de dificultades que imposibilitan su solución exacta. Ante la dificultad, es preciso recurrir a una forma de aproximación, una solución numérica, o una combinación entre ambas [63]. Como herramienta para el análisis cuantitativo, en el presente trabajo de tesis se emplea el método de escalas múltiples. La idea básica es tratar un problema gobernado por ecuaciones diferenciales parciales como un problema de múltiples ecuaciones diferenciales ordinarias. Esto se logra considerando una solución en forma de expansiones en términos de múltiples escalas temporales independientes, en lugar de una sola variable  $t$  independiente.

### 2.2.1. Método de escalas múltiples

El principio fundamental del método de las múltiples escalas de tiempo consiste en considerar la expansión que representa la respuesta de un sistema dinámico como

una función de múltiples variables independientes, o escalas de tiempo, en lugar de una sola variable. Este método, aunque es un poco más complicado, se encuentra en ventaja sobre el método de Lindstedt-Poincaré, ya que puede tratar de forma conveniente con los sistemas amortiguados [6]. Por otra parte, el método de balance armónico, además de ser de tediosa formulación, requiere de saber *a priori* cual es el armónico en cuestión para ser incluido en el análisis. El método averaging es aplicable cuando la amplitud y la fase de una oscilación varían lentamente en el tiempo. El método del balance armónico es una consecuencia directa del método de promediado o *averaging* y es frecuentemente usado para obtener soluciones periódicas en sistemas con oscilaciones forzadas.

En relación con el principio del balance armónico, se describe el método de escalas múltiples de tiempo, como un método que mejora la precisión en la aproximación de las soluciones periódicas, las cuales se pueden relacionar con ciclos límite o puntos particulares, al igual que oscilaciones transitorias con curvas integrales que tienden a ellos con el tiempo [67].

Una descripción interesante del método es realizada por el profesor Silva-Navarro [70], quien lo refiere como una forma de analizar la respuesta frecuencial cerca de las resonancias (condición de resonancia interna o conmensurabilidad) de los sistemas vibratorios no lineales. "Se trata de una aproximación mediante la cual la solución se expresa en términos de series de potencias, alrededor de un parámetro pequeño (perturbación  $\varepsilon$ ) que permite analizar los términos no lineales presentes en el sistema, como acoplamientos inerciales, viscosos o elásticos. Con este método se obtienen expresiones uniformes, válidas en términos de una función de varias variables, en vez de una solo variable. La idea básica del método de escalas múltiples consiste en evitar la introducción de no uniformidades asociadas con la expansión de funciones (soluciones o respuestas), al preservar las combinaciones de términos con coeficientes que dependen de las potencias  $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2, etc.$  como variables de las que dependen estas funciones.

Estas combinaciones se denominan escalas y se denotan de la siguiente manera

$$T_0 = \varepsilon^0 t = t, T_1 = \varepsilon t, T_2 = \varepsilon^2 t, \dots \quad (2.1)$$

donde  $T_0 = t$  corresponde a la escala de tiempo rápida y  $T_n = \varepsilon^n t$  a escalas de

tiempo lentas.

El método tiene como objetivo hacer válida una solución específica en un rango o intervalo definido por el parámetro  $0 \leq \varepsilon < 1$ . Esta región de validez de la solución cambia dependiendo del orden de la aproximación  $n$ , es decir, de la precisión considerada. A través del escalamiento en el tiempo se introducen operadores diferenciales en diferentes escalas de tiempo, definidos como

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \dots = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots \quad (2.2)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \left( \frac{\partial}{\partial T_0} \right)^2 + 2\varepsilon \left( \frac{\partial}{\partial T_1} \right) \left( \frac{\partial}{\partial T_0} \right) + \dots = D_0^2 + 2\varepsilon D_1 D_0 + \dots \quad (2.3)$$

donde los operadores diferenciales se denotan como  $D_k = \frac{\partial}{\partial T_k}$ .

Se puede entonces obtener una solución para cada intervalo o región de validez de tiempo. El número de escalas de tiempo necesarias depende del orden de la aproximación en series de potencias. Si la expresión se realiza hasta  $O(\varepsilon^2)$ , entonces solamente se requieren las escalas de tiempo  $T_0$  y  $T_1$ . De esta manera, se pueden asignar soluciones de la forma general

$$x_j = x_{j0}(T_0, T_1) + \varepsilon x_{j1}(T_0, T_1) + O(\varepsilon^2) \quad (2.4)$$

donde aparecen los términos de perturbación como los coeficientes de las soluciones, los cuales se expresan en las distintas escalas de tiempo, y el índice  $j$  expresa el número de variables del sistema de ecuaciones diferenciales original (coordenadas generalizadas).

Al aplicar los operadores diferenciales en el sistema dinámico, se obtendrán términos semejantes en las potencias de  $\varepsilon$ , lo que produce sistemas de ecuaciones diferenciales parciales acopladas.

El siguiente paso consiste en buscar la forma de las soluciones propuestas  $x_{j0}(T_0, T_1)$ ,  $x_{j1}(T_0, T_1)$ , etc. al ser sustituidas en las ecuaciones dinámicas del sistema.

Posteriormente, se factorizan los términos relativos a las potencias de  $\varepsilon$ , dando como resultado un sistema de ecuaciones diferenciales parciales acopladas, descritas en su escala de tiempo correspondiente.

Partiendo de las ecuaciones en derivadas parciales de orden cero (correspondientes a  $\varepsilon^0$ ) se buscan las soluciones para las ecuaciones acopladas, resultado de reemplazar la solución general  $x_j(T_0, T_1)$ . Esto se realiza proponiendo soluciones del

tipo exponencial (en las escalas de tiempo) y sustituyendo en las ecuaciones diferenciales parciales correspondientes al orden de la perturbación que sigue  $\varepsilon^1$ , es decir, para la siguiente escala de tiempo.

Dado que se buscan soluciones asintóticas (o acotadas) de las ecuaciones anteriores se extraen las condiciones que permiten determinar soluciones uniformes (por ejemplo, convergentes o estables). Estas condiciones se conocen como condiciones de resolución, las cuales garantizan la convergencia exponencial hacia la solución exacta.

Las condiciones de resolución se pueden expresar en forma de sistemas de ecuaciones diferenciales en las distintas escalas de tiempo para garantizar convergencia exponencial, estas se seleccionan de tal manera que se eliminen términos seculares (términos no acotados que crecen de manera indefinida en el tiempo).

Los productos de la forma general

$$T_n e^{\pm i w_0 T_0} \quad (2.5)$$

se denominan términos seculares o redundantes.

El método de escalas múltiples proporciona soluciones cuyas expansiones son uniformes. Se busca entonces que la solución se defina por la forma de las funciones en las que la amplitud de la respuesta se asocia a una de las escalas de tiempo, por ejemplo  $A_i(T_n)$ .

Las condiciones de resolución permiten conocer el desempeño del sistema para frecuencias específicas como son las frecuencias resonantes. Para manejar las soluciones para valores cercanos de la frecuencia de resonancia se utiliza un parámetro de acoplamiento, conocido como desintonizador (o detuning en inglés), el cual se designa por  $\sigma$ , que a su vez se relaciona directamente con la perturbación paramétrica  $\varepsilon$ . Por ejemplo, si se desea conocer el comportamiento de un sistema para frecuencias alrededor de su frecuencia resonante (condición de resonancia externa), en la resolución se debe considerar

$$\Omega = w_n + \sigma \varepsilon \quad (2.6)$$

para  $\sigma$  pequeño, que equivale a parametrizar la cercanía de la frecuencia de excitación  $\Omega$  con los valores de la frecuencia resonante  $w_n$  [70].

A continuación se presentan dos casos de estudio típicos en la literatura [6, 14, 15,



61, 71]. Los casos han sido estudiados en búsqueda de la comprensión de la dinámica no lineal, al igual que del método de perturbación por escalas múltiples de tiempo. Nótese que en cada caso la aproximación presenta la relación de dependencia entre la amplitud de la respuesta y la frecuencia/amplitud de excitación.

### 2.2.2. El sistema Duffing

Los sistemas que presentan no linealidades pueden desarrollar comportamiento caótico o impredecible. Es importante mencionar que, un sistema es caótico cuando es sensible a cambios en las condiciones iniciales, lo cual significa que pequeños cambios en ellas se traducen en grandes diferencias en la respuesta del sistema. Por lo tanto, es posible afirmar que los sistemas caóticos son deterministas, ya que la secuencia que les da origen puede ser conocida de forma precisa, es decir, se conoce su evolución en el tiempo. Sin embargo, estos sistemas resultan impredecibles para periodos largos de tiempo. Esto se debe a que, la diferencia entre valores que inicialmente están muy próximos unos de otros, crece exponencialmente con el paso del tiempo, produciendo así un comportamiento en el sistema imposible de conocer de antemano [72].

Un caso bien conocido de oscilador caótico, es el oscilador Duffing, el cual es un sistema dinámico no lineal, que puede presentar un comportamiento caótico en función de los valores que tomen sus variables (vibraciones libres). De igual forma, para el caso en que este oscilador es excitado (forzado) periódicamente, también puede presentar un comportamiento caótico. Cuando oscilaciones pequeñas afectan el sistema, su comportamiento puede ser (aproximadamente) lineal, sin embargo, a medida que van incrementando, el caos va teniendo lugar en la dinámica.

#### Sistema Duffing en presencia de vibraciones libres

A fin de estudiar las oscilaciones libres en sistemas no lineales, se estudia el caso del sistema conservativo descrito por la Ecuación (2.7).

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x + \varepsilon x^3 = 0 \quad (2.7)$$

Empleando el método de escalas múltiples de tiempo, la solución aproximada de

primer orden puede ser dada mediante (2.8)

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + o(\varepsilon^3) \quad (2.8)$$

Tomando la escala de tiempo consignada en la expresión (2.9), a través del escalamiento en el tiempo se introducen operadores diferenciales en diferentes escalas de tiempo, definidos como

$$T_n = \varepsilon^n t \quad (2.9)$$

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots, D_n = \frac{\partial}{\partial T_n} \quad (2.10)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \quad (2.11)$$

Sustituyendo las Ecuaciones (2.8), (2.9), (2.10) y (2.11), en la (2.7), y separando los términos con diferente orden de  $\varepsilon$ , se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones:

- Términos del orden  $\varepsilon^0$

$$D_0^2 x_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad (2.12)$$

- Términos del orden  $\varepsilon^1$

$$D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = -2D_0 D_1 x_0 - x_0^3 \quad (2.13)$$

- Términos del orden  $\varepsilon^2$

$$D_0^2 x_2 + \omega_0^2 x_2 = -2D_0 D_1 x_1 - 2D_0 D_2 x_0 - D_1^2 x_0 - 3x_0^2 x_1 \quad (2.14)$$

Una solución posible para la Ecuación (2.12) es dada mediante (2.15)

$$x_0 = A(T_1, T_2, \dots) e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}(T_1, T_2, \dots) e^{-i\omega_0 T_0} \quad (2.15)$$

Se sustituye la Ecuación (2.15) en (2.13) y se obtiene (2.16), donde  $cc$  constituye los términos complejos conjugados

$$D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = -[2i\omega_0 D_1 A + 3A^2 \bar{A}] e^{i\omega_0 T_0} - A^3 e^{3i\omega_0 T_0} + cc \quad (2.16)$$

Para eliminar los términos seculares (coeficientes de  $e^{i\omega_0 T_0}$ ), los términos marcados en azul, deben ser igualados a cero,

$$2i\omega_0 D_1 A + 3A^2 \bar{A} = 0 \quad (2.17)$$

de esta manera, la Ecuación (2.16) puede ser re escrita como

$$x_1 = \frac{A^3}{8\omega_0^2} e^{3i\omega_0 T_0} + cc \quad (2.18)$$

Ahora, sustituyendo  $A = \frac{1}{2}a \exp(i\beta)$  (donde  $a$  y  $\beta$  son números reales) en la Ecuación (2.17), y separando las partes real e imaginaria, se obtiene

$$\frac{\partial a}{\partial T_1} = 0, \quad -\omega_0 a \frac{\partial \beta}{\partial T_1} + \frac{3}{8}a^3 = 0 \quad (2.19)$$

Nótese que  $a$  no es función de  $T_0$  y  $T_1$ , por lo que la Ecuación (2.19) puede ser escrita de la siguiente manera

$$a = a(T_2), \quad \beta = \frac{3}{8\omega_0^2} a^2 T_1 + \beta_0(T_2) \quad (2.20)$$

Al sustituir las Ecuaciones (2.15) y (2.18) en la Ecuación (2.14), resulta la siguiente expresión

$$D_0^2 x_2 + \omega_0^2 x_2 = - \underbrace{\left( 2i\omega_0 D_2 A - \frac{15A^3 \bar{A}^2}{8\omega_0^2} \right)}_{\text{Términos seculares}} e^{i\omega_0 T_0} + \frac{21}{8\omega_0^2} A^4 \bar{A} e^{3i\omega_0 T_0} - \frac{3}{8\omega_0^2} A^5 e^{5i\omega_0 T_0} + cc \quad (2.21)$$

donde, nuevamente los términos seculares se igualan a cero,

$$2i\omega_0 D_2 A - \frac{15A^3 \bar{A}^2}{8\omega_0^2} = 0 \quad (2.22)$$

La parte restante de la Ecuación (2.21) es,

$$x_2 = -\frac{A^5}{64\omega_0^4} e^{5i\omega_0 T_0} + \frac{21}{64\omega_0^4} A^4 \bar{A} e^{3i\omega_0 T_0} + cc \quad (2.23)$$

Sustituyendo  $A = \frac{1}{2}a \exp(i\beta)$  (donde  $a$  y  $\beta$  son números reales) en la Ecuación (2.22), y separando las partes real e imaginaria, se obtiene,

$$\frac{\partial a}{\partial T_2} = 0, \quad -\omega_0 \frac{\partial \beta}{\partial T_2} = \frac{15}{256\omega_0^2} a^4 \quad (2.24)$$

de esta manera,  $a$  corresponde a una constante.

Si ahora se emplean las Ecuaciones (2.20) y (2.24),  $\beta_0$  se puede escribir de la siguiente manera

$$\beta_0 = -\frac{15}{256\omega_0^3} a^4 T_2 + \gamma \quad (2.25)$$

con lo que, la Ecuación (2.20) se modifica de la siguiente manera

$$\beta = \frac{3}{8\omega_0} a^2 T_1 - \frac{15}{256\omega_0^3} a^4 T_2 + \gamma \quad (2.26)$$

En consecuencia, la solución del sistema puede ser escrita así

$$x = a \cos(\omega t + \gamma) + \frac{\varepsilon a^3}{32\omega_0^2} \left(1 - \varepsilon \frac{21a^2}{32\omega_0^2}\right) \cos 3(\omega t + \gamma) + \frac{\varepsilon^2 a^5}{1024\omega_0^4} \cos 5(\omega t + \gamma) + o(\varepsilon^3) \quad (2.27)$$

donde,

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \frac{3a^2}{8\omega_0} - \varepsilon^2 \frac{15a^4}{256\omega_0^3} + o(\varepsilon^3) \quad (2.28)$$

Es importante resaltar que la Ecuación (2.28) deja ver que la frecuencia está en función de la amplitud de oscilación. Lo cual contrasta con el caso lineal, donde la frecuencia del sistema es independiente de la amplitud de las vibraciones.

Con la ayuda de la herramienta computacional MATLAB<sup>©</sup> se realiza la simulación numérica para este caso, con  $\omega = 1Hz$ , para valores de  $a = 0.009$  y  $a = 0.029$ . La Figura 2.1 muestra la variación de la amplitud en razón de la frecuencia. Por otra parte, las Figuras 2.2 y 2.3, presentan la respuesta en el tiempo y el plano de fase, respectivamente, para la respuesta periódica considerando solamente la solución de primer orden.

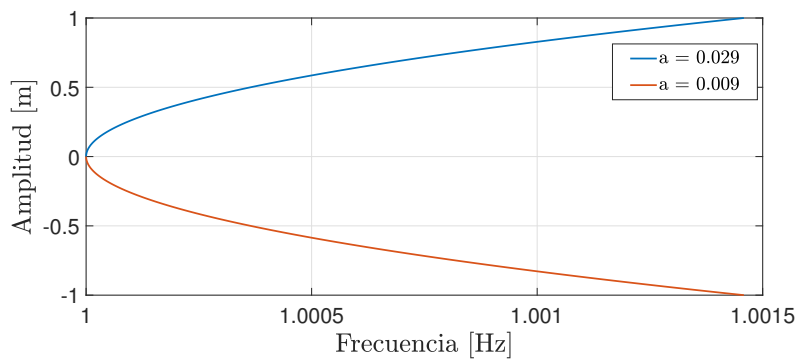


Figura 2.1: Relación Frecuencia-Amplitud sistema Duffing.

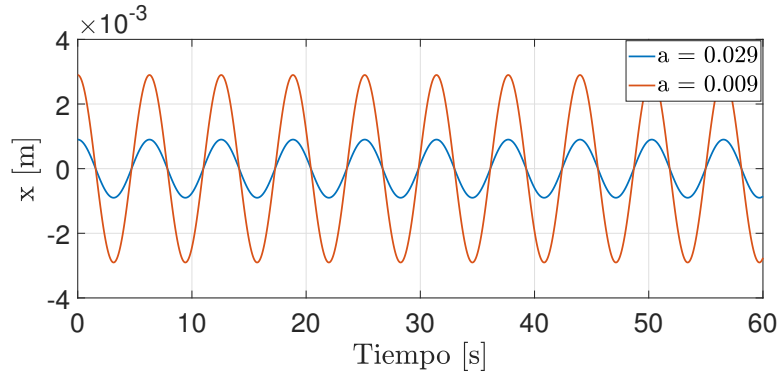


Figura 2.2: Respuesta en el tiempo, sistema Duffing.

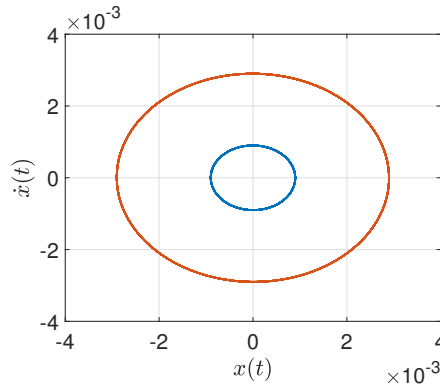


Figura 2.3: Plano de fase, sistema Duffing.

### Sistema Duffing en presencia de vibraciones forzadas

El sistema Duffing bajo vibraciones forzadas es descrito por la Ecuación normalizada (2.29). El amortiguamiento viscoso es considerado pequeño.

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\mu\dot{x} + \omega^2x + \varepsilon\alpha x^3 = \varepsilon f \cos(\Omega t) \quad (2.29)$$

Nótese que, cuando  $\alpha$  tiene valores positivos el elemento rígido es un resorte duro (caso de interés en este trabajo de tesis), mientras que para valores negativos se trata de un resorte blando.

Se busca obtener la solución aproximada de la Ecuación (2.29) empleando las siguientes escalas múltiples de tiempo

$$x(t; \varepsilon) = x_0(T_0, T_1) + \varepsilon x_1(T_0, T_1) + \dots \quad (2.30)$$

donde,  $T_0 = t$  y  $T_1 = \varepsilon t$ .

Para el caso de resonancia primaria externa se considera  $\Omega = \omega + \varepsilon\sigma$ , por lo que la fuerza de excitación, normalizada y perturbada, se expresa así

$$F(t) = \varepsilon f \cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_1) \quad (2.31)$$

Se sustituyen las escalas de tiempo (2.30) y la perturbación de la fuerza de excitación (2.31) en la ecuación normalizada del sistema (2.29) y separando los términos con diferente orden de  $\varepsilon$ , se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones:

- Términos del orden  $\varepsilon^0$

$$\omega_0^2 x_0(T_0, T_1) + \mathbf{D}_0 \mathbf{D}_1 x_0(T_0, T_1) = 0 \quad (2.32)$$

- Términos del orden  $\varepsilon^1$

$$\begin{aligned} \omega_0^2 x_1(T_0, T_1) + \mathbf{D}_0 \mathbf{D}_1 x_1(T_0, T_1) = & -\alpha (x_0(T_0, T_1))^3 \\ & - 2\mu \mathbf{D}_0 x_0(T_0, T_1) + f \cos(T_0 \omega_0 + T_1 \sigma) - 2\mathbf{D}_0 \mathbf{D}_1 x_0(T_0, T_1) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Nótese que, como resultado del ordenamiento de los términos con diferente orden de  $\varepsilon$ , en la Ecuación (2.33) aparecen la fuerza de excitación, el amortiguamiento y los términos no lineales.

La solución general de la Ecuación (2.32) se expresa de la siguiente manera

$$x_0 = A_0(T_1) e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}_0(T_1) e^{-i\omega_0 T_0} \quad (2.34)$$

Con el objetivo de determinar  $A_0(T_1)$  se eliminan los términos seculares de  $x_1$ . Sustituyendo  $x_0$  en la Ecuación (2.33) y expresando  $\cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_1)$  en forma compleja, se obtiene

$$\begin{aligned} \omega_0^2 x_1(T_0, T_1) + \mathbf{D}_0^2 x_1(T_0, T_1) = & \\ & - [3\alpha (A_0(T_1))^2 \bar{A}_0(T_1) + 2i\omega_0 (\mu A_0(T_1) + A_0'(T_1))] e^{i\omega_0 T_0} \\ & - \alpha (A_0(T_1))^3 e^{3i\omega_0 T_0} + \frac{1}{2} f e^{i(\omega_0 T_0 + \sigma T_1)} + cc \end{aligned} \quad (2.35)$$

donde  $cc$  está dado por el complejo conjugado de los términos anteriores. En la solución particular de la Ecuación (2.35) los términos seculares son eliminados cuando  $A$  es seleccionada para ser una solución de

$$3\alpha (A_0(T_1))^2 \bar{A}_0(T_1) + 2i\omega_0 (A_0'(T_1) + \mu A_0(T_1)) - \frac{1}{2} f e^{i(\sigma T_1)} = 0 \quad (2.36)$$

La solución de la Ecuación (2.36) se obtiene escribiendo  $A$  en la forma polar,

$$A_0(T_1) = \frac{1}{2} a(T_1) e^{i\phi(T_1)} \quad (2.37)$$

donde  $a(T_1)$  y  $\phi(T_1)$  son funciones reales. Sustituyendo (2.37) en (2.36), para luego dividir el resultado en  $\omega_0 e^{i\phi(T_1)}$ , se obtiene

$$-\frac{3}{8} \frac{\alpha (a(T_1))^3}{\omega_0} - i\mu a(T_1) - ia'(T_1) + a(T_1) \phi'(T_1) + \frac{1}{2} \frac{f e^{-i(\sigma T_1 + \phi(T_1))}}{\omega_0} = 0 \quad (2.38)$$

Aplicando la identidad de Euler, la excitación se expresa en forma trigonométrica

$$0 = -\frac{3}{8} \frac{\alpha (a(T_1))^3}{\omega_0} - i\mu a(T_1) - ia'(T_1) + a(T_1) \phi'(T_1) + \frac{1}{2} \frac{f [\cos(T_1\sigma - \phi(T_1)) + i \sin(T_1\sigma - \phi(T_1))]}{\omega_0} \quad (2.39)$$

Al separar la parte real e imaginaria de la ecuación anterior se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{aligned} a(T_1) \phi'(T_1) &= \frac{3}{8} \frac{\alpha (a(T_1))^3}{\omega_0} - \frac{1}{2} \frac{f \cos(T_1\sigma - \phi(T_1))}{\omega_0} \\ a'(T_1) &= -\mu a(T_1) + \frac{1}{2} \frac{f \sin(T_1\sigma - \phi(T_1))}{\omega_0} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Nótese que el anterior sistema de ecuaciones es no autónomo ya que depende explícitamente de la escala de tiempo  $T_1$ . A fin de transformarlo en un sistema autónomo, se realiza el siguiente cambio de variable

$$\beta(T_1) = T_1\sigma - \phi(T_1) \quad (2.41)$$

obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a(T_1) (\beta'(T_1) - \sigma) &= \frac{3}{8} \frac{\alpha (a(T_1))^3}{\omega_0} - \frac{1}{2} \frac{f \cos(\beta(T_1))}{\omega_0} \\ a'(T_1) &= -\mu a(T_1) + \frac{1}{2} \frac{f \sin(\beta(T_1))}{\omega_0} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Ya que el caso de estudio trata de un sistema excitado por una fuerza estacionaria, la respuesta transitoria se desvanece hasta llegar a estado estacionario, en el cual, la amplitud  $a(T_1)$  y la fase  $\beta(T_1)$  se mantienen constantes (invariantes en el tiempo), por lo que  $a'(T_1) = \beta'(T_1) = 0$  describen un punto de equilibrio. Bajo esta consideración el sistema de ecuaciones (2.42) se modifica así

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma a + \frac{3}{8} \frac{\alpha a^3}{\omega_0} - \frac{1}{2} \frac{f \cos(\beta)}{\omega_0} \\ 0 &= -\mu a + \frac{1}{2} \frac{f \sin(\beta)}{\omega_0} \end{aligned} \quad (2.43)$$

En (2.43) los términos trigonométricos son ubicados del lado derecho, y se elevan ambas ecuaciones al cuadrado, resultando

$$\begin{aligned} \left[ \left( \sigma + \frac{3}{8} \frac{\alpha a^2}{\omega_0} \right) a \right]^2 &= \left( \frac{1}{2} \frac{f \cos(\beta)}{\omega_0} \right)^2 \\ (\mu a)^2 &= \left( \frac{1}{2} \frac{f \sin(\beta)}{\omega_0} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.44)$$

Sumando término a término las dos ecuaciones, se obtiene

$$\left( \sigma + \frac{3}{8} \frac{\alpha a^2}{\omega_0} \right)^2 a^2 + \mu^2 a^2 = \frac{1}{4} \frac{f^2}{\omega_0^2} (\cos^2(\beta) + \sin^2(\beta)) \quad (2.45)$$

Finalmente, empleando la identidad trigonométrica de Pitágoras, resulta la ecuación de la respuesta frecuencial aproximada, donde la amplitud de la respuesta  $a$ , está en función de la amplitud de la fuerza de excitación  $f$  y del parámetro de desintonización  $\sigma$

$$\left[ \left( \sigma + \frac{3}{8} \frac{\alpha a^2}{\omega_0} \right)^2 + \mu^2 \right] a^2 = \frac{1}{4} \frac{f^2}{\omega_0^2} \quad (2.46)$$

Sustituyendo (2.41) y  $\Omega = \omega + \varepsilon\sigma$  en (2.40), se encuentra que la primera aproximación para la solución en estado estable está dada por

$$x(t; \varepsilon) = a \cos((\varepsilon\sigma + \omega_0)t - \beta) + O(\varepsilon) \quad (2.47)$$

$$x(t; \varepsilon) = a \cos(\Omega t - \beta) + O(\varepsilon) \quad (2.48)$$

La Ecuación (2.48) hace evidente que la respuesta en estado estacionario está ajustada a la frecuencia de excitación  $\Omega$ , sin embargo, se encuentra desfasada por  $-\beta$ .

Empleando la herramienta computacional Maple<sup>©</sup> se realiza la simulación numérica de la Ecuación algebraica (2.46), evaluando la influencia de los parámetros del sistema (amplitud de fuerza de excitación  $f$ , amortiguamiento  $\mu$  y coeficiente de no linealidad  $\alpha$ ) sobre la respuesta en estado estacionario. Cada punto de la curva de respuesta en frecuencia corresponde a un punto de equilibrio en un diferente plano de estado, es decir que existe un plano de estados para cada combinación de parámetros.

La Figura 2.4 presenta la respuesta en frecuencia para el caso lineal ( $\alpha = 0$ ) contra el caso de no linealidad dura (rigidez cúbica positiva) en términos de la amplitud, donde se puede apreciar que en el caso no lineal existe una amplitud de



respuesta multivaluada, ya que para un mismo nivel de frecuencia existen dos o tres valores diferentes de amplitud. Lo mismo ocurre en términos de la fase, ya que como lo presenta la Figura 2.5, en el caso no lineal existe una fase de respuesta multivaluada, lo que significa que para un mismo nivel de frecuencia existen dos o tres valores correspondientes de fase.

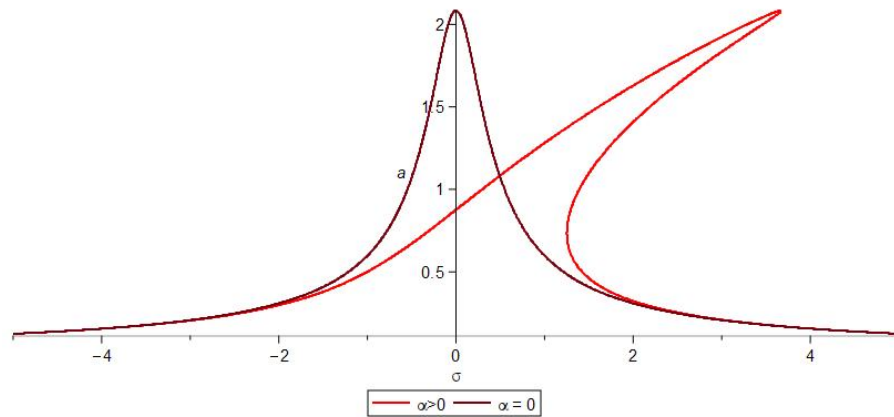


Figura 2.4: Comparación de las curvas de respuesta lineal y no lineal, en términos de la amplitud.

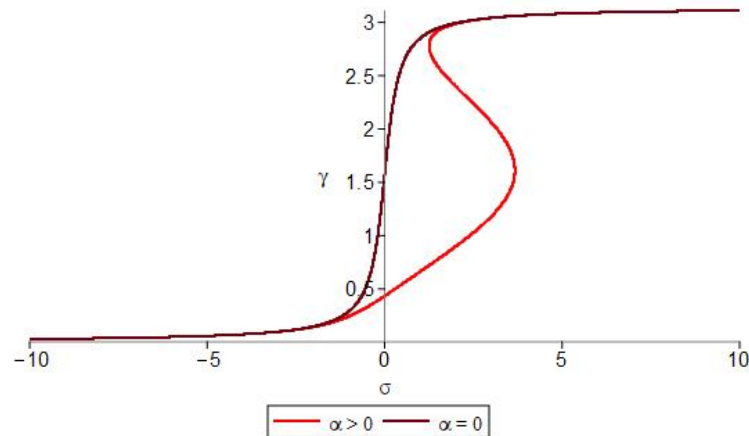


Figura 2.5: Comparación de las curvas de respuesta lineal y no lineal, en términos de la fase.

La Figura 2.6 superpone las curvas de amplitud y fase de la respuesta, mostrando que en la parte multivaluada las condiciones iniciales son las que determinan los puntos de las curvas correspondientes.

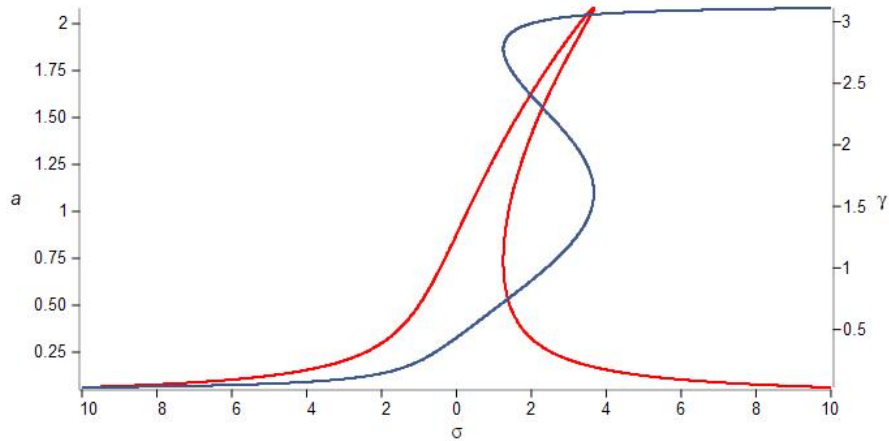


Figura 2.6: Curvas de respuesta en frecuencia no lineal.

El efecto que el coeficiente de la no linealidad  $\alpha$  tiene sobre la respuesta del sistema, es presentado en la Figura 2.7. Allí se observa que en el caso de un resorte blando en el cual el coeficiente es negativo, la curva de respuesta se dobla a la izquierda, mientras que en el caso de un resorte duro, se dobla a la derecha. Otro efecto que se observa, es que a medida que la no linealidad aumenta, la respuesta presenta una curvatura más pronunciada, es decir que se manifiesta con mayor intensidad el fenómeno de saturación.

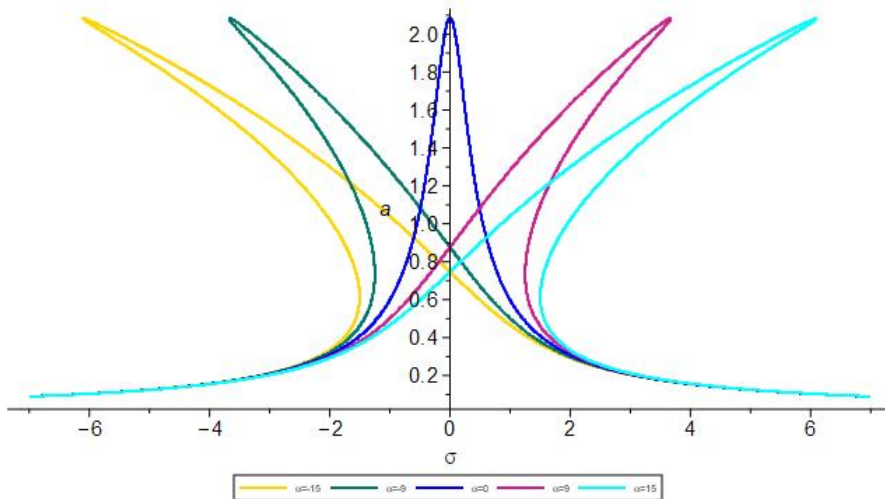


Figura 2.7: Efectos de la no linealidad para valores de  $\alpha = -15, -9, 0, 9$  y  $15$ , de izquierda a derecha.

La Figura 2.8 revela los efectos del amortiguamiento. Se aprecia que el amortiguamiento reduce notablemente el efecto de la no linealidad, lo que significa que una

alta presencia de amortiguamiento en el sistema, reduce la relación de dependencia entre frecuencia y amplitud.

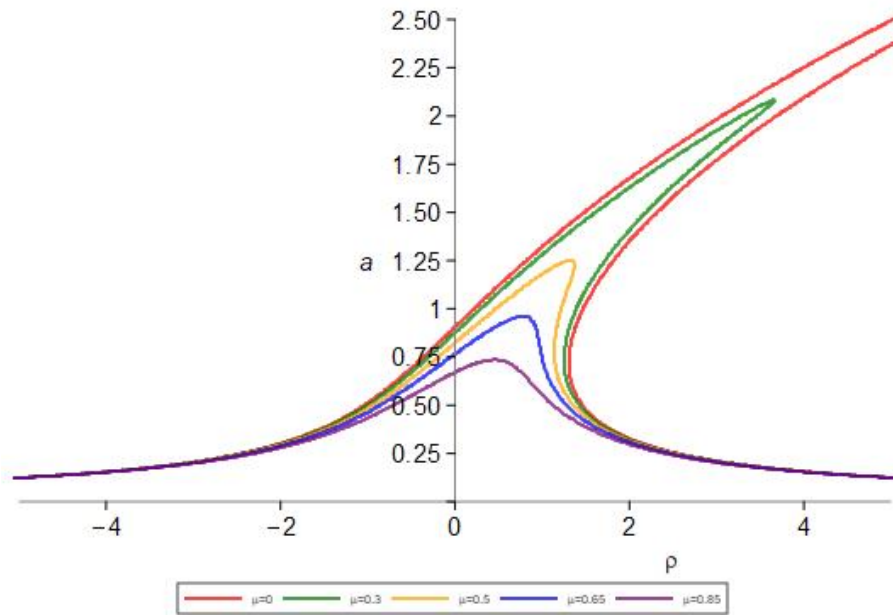


Figura 2.8: Efectos del amortiguamiento para valores de  $\mu = 0, 0.3, 0.5, 0.65$  y  $0.85$ , en orden descendente.

Cuando la amplitud de la fuerza de excitación  $f$  se incrementa, el sistema experimenta una respuesta multivaluada con un ancho de banda más amplio, como lo presenta la Figura 2.9.

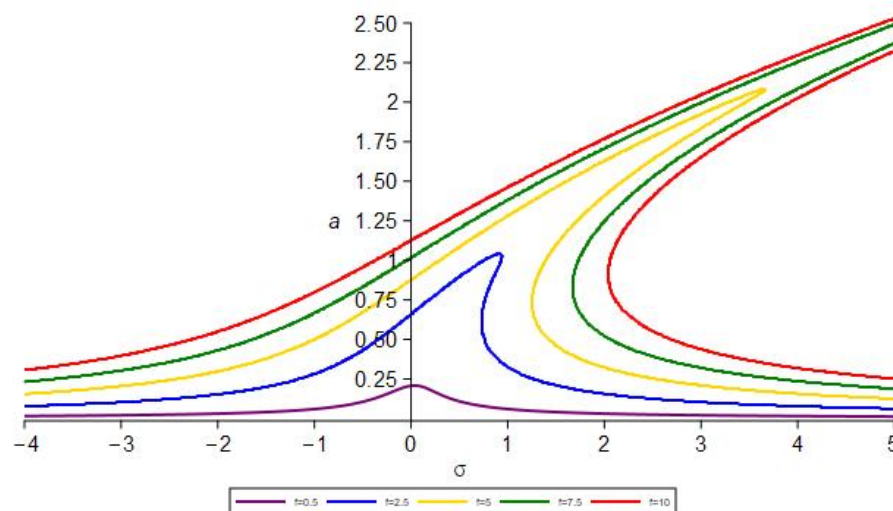


Figura 2.9: Efectos de la amplitud de excitación para valores de  $f = 0.5, 2.5, 5, 7.5$  y  $10$ , en orden ascendente.

La Figura 2.10 muestra la variación de la amplitud de la respuesta con la amplitud de la excitación para varios valores de  $\sigma$ . Los valores de  $\alpha$  y  $\mu$  son los mismos para todas las curvas. Nótese que, dependiendo del valor de  $\sigma$ , algunas curvas son multivaluadas, mientras que otras tienen un único valor.

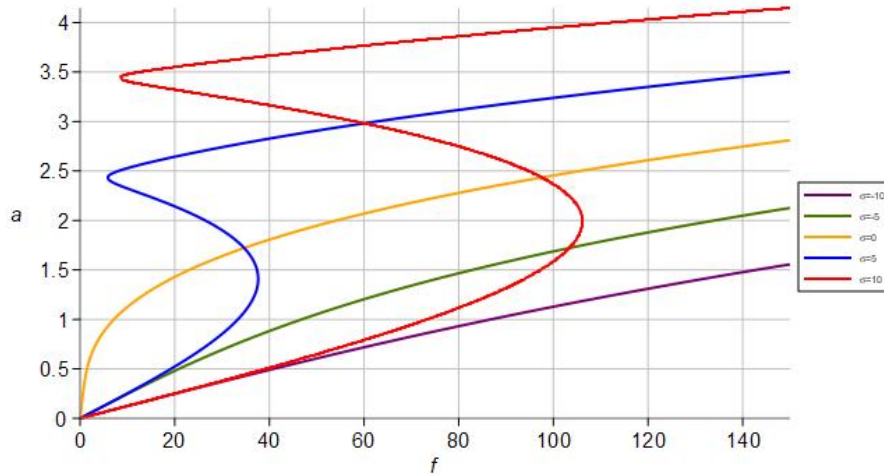


Figura 2.10: Efectos de la amplitud de excitación para valores de  $\sigma = -10, -5, 0, 5$  y  $10$ .

### 2.2.3. El oscilador de van der Pol

La Ecuación 2.49 describe un sistema que muestra oscilaciones auto-sostenidas, con no linealidades que amortiguan grandes oscilaciones y amplifican pequeñas, en el que  $x$  define la posición, función del tiempo  $t$ , y  $\varepsilon$  es un parámetro escalar que rige la no linealidad, y con ello el amortiguamiento.

Se trata del oscilador de van der Pol [73], el cual puede ser interpretado como un oscilador con amortiguamiento variable, hecho que afecta directamente la amplitud de respuesta del sistema, mediante el término

$$\varepsilon(1 - x^2)$$

Para el caso en que  $|x| < 1$  el coeficiente de amortiguamiento del sistema es de magnitud positiva, generando una tendencia al incremento de la amplitud de movimiento. Por otra parte, cuando  $|x| > 1$  el coeficiente de amortiguamiento es negativo, influyendo en la reducción de la amplitud de respuesta del sistema. Esta situación lleva a la deducción de la presencia de un ciclo límite.

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \quad (2.49)$$

Llevando el sistema al espacio de estados, se definen las siguientes variables de estado

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x} \quad (2.50)$$

La representación del sistema en espacio de estados es

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2.51)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \mu(1 - x_1^2)x_2 \quad (2.52)$$

Los estados de equilibrio son determinados cuando las variables de estado experimentan velocidad cero

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 \equiv 0 \quad (2.53)$$

por lo tanto, de las ecuaciones de estado se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= x_2 \\ 0 &= -x_1 + \mu(1 - x_1^2)x_2 \end{aligned} \quad (2.54)$$

El equilibrio del sistema se encuentra en

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.55)$$

La aproximación lineal alrededor del punto de equilibrio está definida por la matriz  $A$ , así

$$A = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - \mu(-2x_1)x_2 & \mu(1 - x_1^2) \end{bmatrix}_{(x_1=0, x_2=0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

Los valores propios de  $A$ , son

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda - \mu \end{bmatrix} = \lambda^2 - \mu\lambda + 1 = 0 \quad (2.57)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu}{2}\right)^2 - 1} \quad (2.58)$$

Nótese que cuando  $\mu > 2$ ,  $A$  presenta valores propios  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  ubicados sobre el eje de los reales positivos, por lo que el origen es un nodo inestable. Cuando  $\mu < 2$ , los valores propios  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son complejos conjugados con parte real positiva, de tal

forma que el origen es un foco inestable. Esto significa que para cualquier valor de  $\mu$  el origen representa un equilibrio inestable y por lo tanto, para cualquier condición inicial cercana a una pequeña vecindad del origen, las trayectorias del sistema se alejarán hasta alcanzar el ciclo límite. Dividiendo la Ecuación (2.52) en (2.51), se obtiene la ecuación que describe la trayectoria del ciclo límite (Ecuación (2.59)), la cual no tiene una solución analítica en forma cerrada, sin embargo puede ser graficada numéricamente con el propósito de determinar los ciclos límite alcanzados para distintos valores de  $\mu$ .

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = \mu(1 - x_1^2) - \frac{x_1}{x_2} \quad (2.59)$$

La gráfica de los ciclos límite puede ser obtenida numéricamente mediante el método de escalas múltiples [6]. La solución a la Ecuación 2.49 se halla a partir de las siguientes escalas de tiempo,

$$x(t; \varepsilon) = x_0(T_0, T_1) + \varepsilon x_1(T_0, T_1) + \dots \quad (2.60)$$

donde  $T_n = \varepsilon^n t$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

Usando la Ecuación (2.60) en la Ecuación (2.49) y separando los términos con diferente orden de  $\varepsilon$ , se obtienen el siguiente conjunto de ecuaciones.

$$D_0^2 x_0 + x_0 = 0 \quad (2.61)$$

$$D_0^2 x_1 + x_1 = -2D_0 D_1 x_0 + (1 - x_0^2) D_0 x_0 \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 x_2 + x_2 = & -2D_0 D_1 x_1 - D_1^2 x_0 - 2D_0 D_2 x_0 \\ & + (1 - x_0^2) D_0 x_1 + (1 - x_0^2) D_1 x_0 - 2x_0 x_1 D_0 x_0 \end{aligned} \quad (2.63)$$

Una solución para la Ecuación (2.61) se puede escribir como,

$$x_0 = A(T_1, T_2, \dots) e^{iT_0} + \bar{A}(T_1, T_2, \dots) e^{-iT_0} \quad (2.64)$$

por lo que, sustituyendo la Ecuación (2.64) en (2.62), se obtiene la siguiente expresión

$$D_0^2 x_1 + x_1 = \underbrace{-i(2D_1 A - A + A^2 \bar{A})}_{\text{Términos seculares}} e^{iT_0} - iA^3 e^{3iT_0} + cc \quad (2.65)$$

Eliminando los términos seculares marcados en la Ecuación (2.65), resulta

$$2D_1 A = A - A^2 \bar{A} \quad (2.66)$$

así que ahora, la solución de la Ecuación (2.65) se expresa mediante (2.67)

$$x_1 = B(T_1, T_2)e^{iT_0} + \frac{1}{8}iA^3e^{3iT_0} + cc \quad (2.67)$$

$$A = \frac{1}{2}a(T_1, T_2) \exp(i\phi(T_1, T_2)) \quad (2.68)$$

Sustituyendo la Ecuación (2.68) en (2.66), resulta

$$\begin{aligned} 2 \left( \frac{1}{2} \frac{\partial a}{\partial T_1} \exp(i\phi) + \frac{1}{2} ia \frac{\partial \phi}{\partial T_1} \exp(i\phi) \right) = \\ \frac{1}{2} a \exp(i\phi) - \left( \frac{1}{2} a \exp(i\phi) \right)^2 \frac{1}{2} a \exp(-i\phi) \end{aligned} \quad (2.69)$$

Separando los términos real e imaginario, se obtiene

$$\frac{\partial \phi}{\partial T_1} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial T_1} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{4} a^2 \right) a \quad (2.70)$$

por lo tanto,

$$\phi = \phi(T_2), \quad y \quad a^2 = \frac{4}{1 + c(T_2)e^{-T_1}} \quad (2.71)$$

De esta manera, la solución de primer orden del sistema está dada por

$$x = a \cos(t) + o(\varepsilon) \quad (2.72)$$

donde,

$$a^2 = \frac{4}{1 + \left( \frac{4}{a_0^2} - 1 \right) \exp(-\varepsilon t)} \quad (2.73)$$

Para obtener la solución del segundo o mayor orden, se puede utilizar la expresión para  $x_0$  y  $x_1$  en la Ecuación (2.63), lo cual resulta en la siguiente ecuación

$$D_0^2 x_2 + x_2 = Q(T_1, T_2, )e^{iT_0} + \bar{Q}(T_1, T_2, )e^{iT_0} + TNS \quad (2.74)$$

donde TNS contiene términos no seculares

$$\begin{aligned} Q = -2iD_1 B + i(1 - 2A\bar{A})B - iA^2\bar{B} - 2iD_2 A - D_1^2 A + \\ (1 - 2A\bar{A})D_1 A - A^2 D_1 \bar{A} + \frac{A^3 \bar{A}^2}{8} \end{aligned} \quad (2.75)$$

Ahora, sustituyendo la Ecuación (2.68) en el término secular de la Ecuación (2.74) y separando las partes real e imaginaria de la ecuación resultante, se obtiene la siguiente expresión

$$\frac{\partial a}{\partial T_2} = 0, \quad a = a(T_3) \quad (2.76)$$

Desarrollando, resulta

$$2\frac{\partial b}{\partial T_1} - \frac{2}{a}\frac{da}{dT_1}b = -2a\left(\frac{d\phi}{dT_2} + \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{7}{16}a^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{da}{dT_1} \quad (2.77)$$

$$d\left(\frac{b}{a}\right) = -\left(\frac{d\phi}{dT_2} + \frac{1}{16}\right)dT_1 + \left(\frac{7}{32}a - \frac{1}{8a}\right)da \quad (2.78)$$

Integrando,  $b$  se define como sigue

$$b = -a\left(\frac{d\phi}{dT_2} + \frac{1}{16}\right)T_1 + \frac{7}{64}a^3 - \frac{1}{8}a \ln a + ab_0(T_2) \quad (2.79)$$

Para que la solución sea acotada para todas las  $T_1$ , el coeficiente de  $T_1$  en la Ecuación (2.79) debe desaparecer, es decir que se obtiene  $\left(\frac{d\phi}{dT_2} + \frac{1}{16}\right) = 0$ . Por lo tanto,

$$\phi = -\frac{1}{16}T_2 + \phi_0 \quad (2.80)$$

donde,  $\phi_0$  es una constante.

Ahora, usando la expresión para  $x_0$  y  $x_1$ , la solución de segundo orden está dada por:

$$x = a \cos \left[ \left(1 - \frac{1}{16}\varepsilon^2\right)t + \phi_0 \right] - \varepsilon \left( \left(\frac{7}{64}a^2 - \frac{1}{8} \ln a + ab_0\right) \sin \left[ \left(1 - \frac{1}{16}\varepsilon^2\right)t + \phi_0 \right] + \frac{1}{32}a^3 \sin 3 \left[ \left(1 - \frac{1}{16}\varepsilon^2\right)t + \phi_0 \right] \right) + o(\varepsilon^2) \quad (2.81)$$

aquí,  $a$  puede estar dada por la Ecuación (2.73). La Ecuación (2.81) también puede escribirse como

$$x = a \cos(t - \theta) - \frac{1}{32}\varepsilon a^3 \sin 3(t - \theta) + o(\varepsilon^2) \quad (2.82)$$

donde,

$$\theta = \frac{1}{16}\varepsilon^2 t + \frac{1}{8}\varepsilon \ln a - \frac{7}{64}\varepsilon a^2 + \theta_0 \quad (2.83)$$

Los ciclos límite obtenidos numéricamente mediante el método de escalas múltiples, para valores de  $\varepsilon = 0$ ,  $\varepsilon = 0.2$ ,  $\varepsilon = 0.5$  y  $\varepsilon = 1$ , se ilustran con los siguientes planos de fase (ver Figura 2.11).



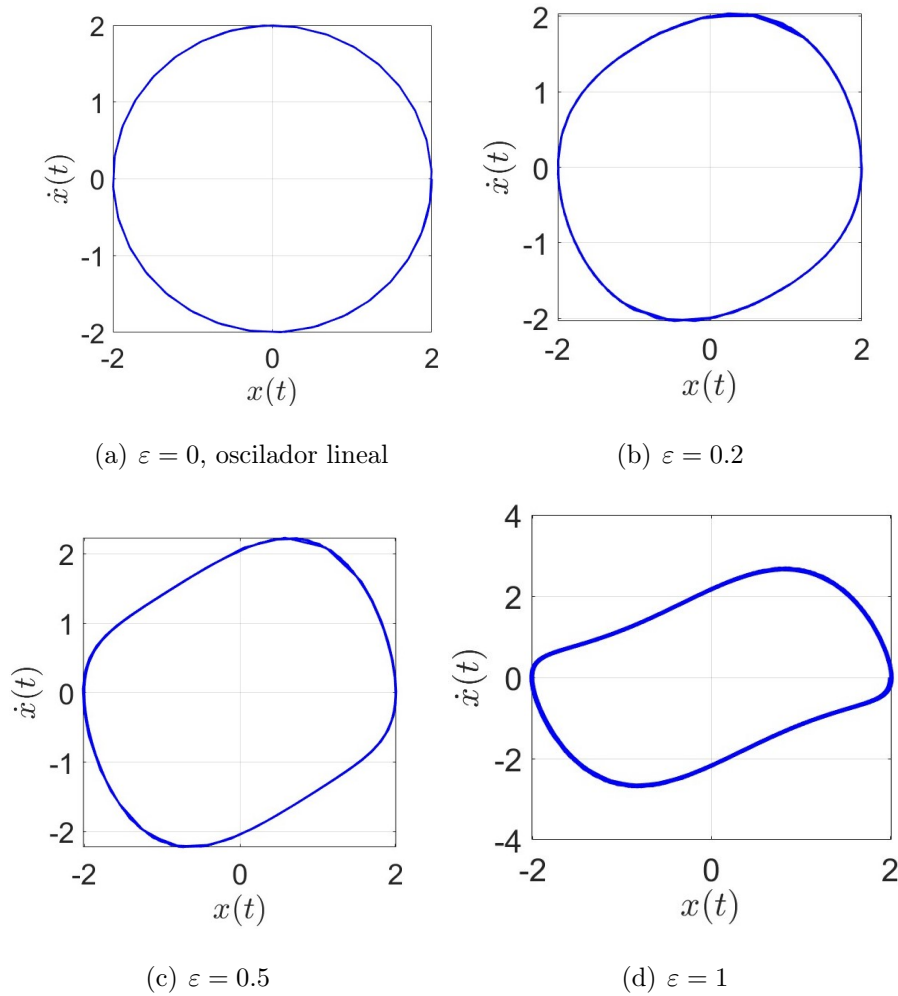


Figura 2.11: Plano de fase para diferentes valores del coeficiente no lineal  $\varepsilon$ .

Nótese que, para el caso en que  $\varepsilon = 0$ , se obtiene el oscilador lineal, por lo cual no es posible constituir un sistema esencialmente no lineal a partir de este. Sin embargo, resulta ser un caso de estudio bastante interesante para comprender cómo las no linealidades presentes en el amortiguamiento del sistema afectan su respuesta.

Un problema poco estudiado consiste en la unificación de las características no lineales de un sistema con rigidez cúbica pura y amortiguamiento no lineal. Un sistema ENA - van der Pol, cuyas características de rigidez cúbica pura y amortiguamiento no lineal, se combinan, dando lugar a la aparición de diversos fenómenos impredecibles, en forma simultánea.

Es importante señalar que aunque el oscilador de van der Pol no representa un sistema esencialmente no lineal, es muy buen ejemplo de un sistema no lineal para el cual la linealización al rededor del equilibrio es totalmente inadecuado, ya que

un análisis al sistema linealizado arrojará como resultado la predicción de inestabilidad debido al incremento del movimiento, sin límites, ignorando por completo la existencia de un ciclo límite. Asimismo, es importante mencionar que la forma del ciclo límite depende únicamente del parámetro  $\mu$ , por lo que las condiciones iniciales no tienen ningún efecto en la amplitud del movimiento luego de que el sistema ha alcanzado el ciclo límite.

## 2.3. Análisis de estabilidad

El asunto de la estabilidad es particularmente importante en el estudio de las oscilaciones periódicas en sistemas no lineales. Esto implica la resolución de una ecuación variacional, que caracteriza pequeñas desviaciones desde los estados de equilibrio periódico [67].

El comportamiento global de los sistemas no lineales no puede ser predicho a partir de su comportamiento local y, además, la solución general de las ecuaciones diferenciales no lineales generalmente no está disponible. Por lo tanto, la principal tarea de un método para analizar un sistema no lineal es obtener un panorama comprensivo (si no cuantitativo, al menos cualitativo) de su comportamiento global [65].

Las no linealidades pueden conducir a nuevos efectos cualitativos como la inestabilidad de modos cooperativos y la aparición de modos localizados. Además, resulta tener lugar la transferencia de energía por arriba o debajo de la escala de frecuencia. Dicha transferencia ocurre tanto a resonancias subarmónicas, como superarmónicas, e involucra (por lo menos) dos frecuencias en el proceso. Asimismo, puede conducir a bifurcaciones de diferentes tipos, acompañadas por una ruptura simétrica. En particular, la ruptura simétrica se puede ver en la inestabilidad de ciertos modos y en la aparición de modos esencialmente no lineales [74].

El estudio de los sistemas no lineales ha sido fuertemente animado por el fenómeno del caos, pues tras su aparición reactivó el interés en la dinámica no lineal, siendo esto evidente con el aumento de libros y artículos publicados en las últimas décadas [68]. Una frase que podría describir el caos, dice que "*pequeñas razones involucran grandes consecuencias*". Estas pequeñas razones en realidad hacen re-

ferencia a las pequeñas fuerzas o pequeños cambios en los parámetros del sistema, conduciendo a generar grandes acciones debido a la coordinación especial de sus ritmos con las oscilaciones internas características del sistema [74]. Las observaciones de Poincaré mencionan que pequeños cambios en las condiciones iniciales pueden ocasionar cambios significativos en el fenómeno final, lo cual es una característica conocida de los sistemas con comportamiento caótico. En el año de 1945, los investigadores Cartwright y Littlewood [75], mientras estudiaban las oscilaciones forzadas en el oscilador de van der Pol, evidenciaron la presencia de un *comportamiento restringido aleatorio*, haciendo referencia a un comportamiento incomprendido, al cual decidieron llamar *Caos*.

La gran familia de osciladores del tipo Duffing y van der Pol, excitados armónicamente, ha sido ampliamente estudiada desde su aparición, razón por la cual, cuando investigadores descubrieron en ellos la presencia de regímenes bastante grandes de caos, se evidenció que, mediante el análisis clásico de ecuaciones diferenciales ordinarias, ocurre una pérdida significativa de información [76], o sea, una especie de mutilación (en la interpretación) del sistema original. En numerosas referencias, como en [77, 78, 79, 80, 81, 82], se estudia la estabilidad de sistemas no lineales mediante varios métodos de perturbación.

### 2.3.1. Análisis de estabilidad en el sistema Duffing

Considere el sistema primario no lineal Duffing

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \varphi(x) = F(t) \quad (2.84)$$

donde  $x \in \mathbb{R}$  es el desplazamiento,  $F \in \mathbb{R}$  es una fuerza armónica externa,  $m$  y  $c$  son los parámetros de masa y amortiguamiento viscoso del sistema, respectivamente. La función de rigidez no lineal está dada por

$$\varphi(x) = k_1x + k_3x^3 \quad (2.85)$$

La Figura 2.12 muestra la forma en que la función de rigidez no lineal representa un resorte blando (curva de color rojo), un resorte duro (curva de color azul) y un resorte lineal (curva de color verde). Estos tres casos toman lugar cuando  $k_3$  cobra valores negativos ( $\varphi_1(x) = 1100x - 1.22 \times 10^6x^3$ ), positivos ( $\varphi_2(x) = 1100x + 1.22 \times 10^6x^3$ ) y

cero ( $\varphi_3(x) = 1100x - 0x^3$ ), respectivamente. Por otra parte, cuando en las funciones  $\varphi_1(x)$  y  $\varphi_2(x)$  el término lineal  $k_1$  vale cero, se dice que la rigidez es esencialmente no lineal. Lo anterior se ilustra en la Figura 2.13.

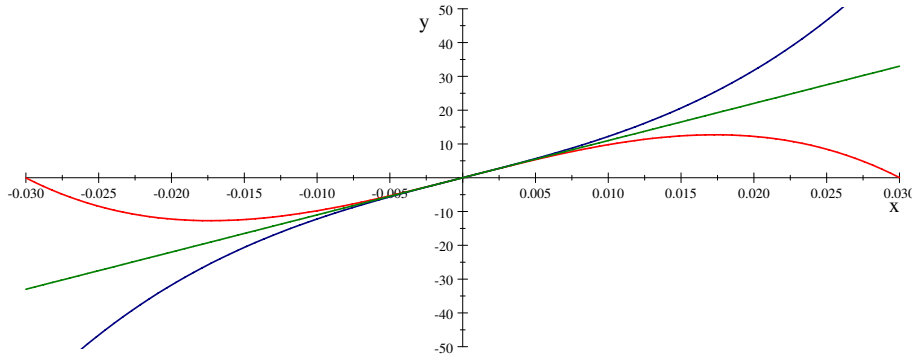


Figura 2.12: Función de rigidez lineal (color verde), función de rigidez blanda (color rojo) y función de rigidez dura (color azul).

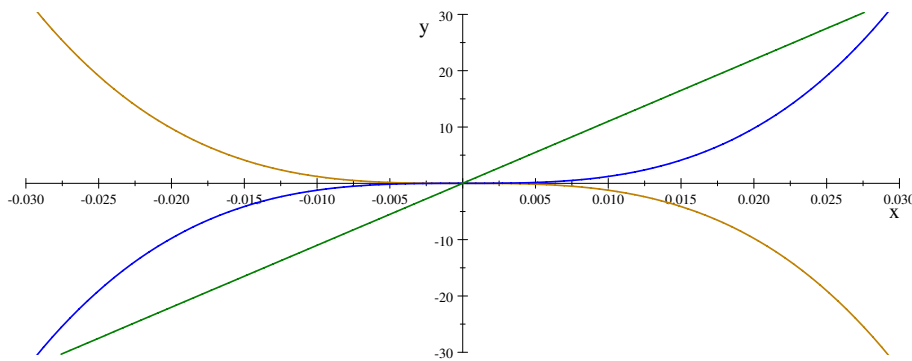


Figura 2.13: Función de rigidez lineal (color verde), función de rigidez esencialmente no lineal blanda (color amarillo) y función de rigidez esencialmente no lineal dura (color azul).

Nótese que el resorte blando esencialmente no lineal ( $\varphi_1(x) = 0x - 1.22 \times 10^6 x^3$ ) presenta un comportamiento indeseado, ya que describe deformaciones positivas frente a fuerzas de compresión, mientras que las deformaciones son negativas para cargas a tensión. Tal comportamiento es una clara evidencia de inestabilidad constructiva para un sistema con esta característica. Sin embargo, no constituye un criterio de validez suficiente, por lo que se procede a realizar un análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov.

La descripción del espacio de estados, para los estados  $z_1 = x$  y  $z_2 = \dot{x}$ , se expresa

de la siguiente manera

$$\dot{z}_1 = z_2 \quad (2.86)$$

$$\dot{z}_2 = -\frac{k_1}{m}z_1 - \frac{k_3}{m}z_1^3 - \frac{c}{m}z_2 + \frac{1}{m}F(t) \quad (2.87)$$

Nótese que cuando  $F(t) \equiv 0$ , el estado de equilibrio se obtiene como

$$\begin{aligned} 0 &= z_2 \\ 0 &= -\frac{k_1}{m}z_1 - \frac{k_3}{m}z_1^3 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$k_1z_1 + k_3z_1^3 = (k_1 + k_3z_1^2)z_1 = 0$$

Lo anterior permite evidenciar que el sistema tiene un estado de equilibrio trivial en el origen  $z_{1e} = z_{2e} = 0$ . Nótese, sin embargo, que

$$z_1 = \sqrt{-\frac{k_1}{k_3}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (k_1 > 0, k_3 < 0) \text{ o } (k_1 < 0, k_3 > 0)$$

el estado de equilibrio no trivial está dado por

$$z_{1e} = \sqrt{-\frac{k_1}{k_3}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (k_1 > 0, k_3 < 0) \text{ o } (k_1 < 0, k_3 > 0) \quad (2.88)$$

$$z_{2e} = 0 \quad (2.89)$$

Dicho de otra forma, existen estados de equilibrios no triviales cuando  $sign(k_1) = -sign(k_3)$ . Estos casos no se estudiarán porque no conducen a respuestas estables cuando se tienen sistemas esencialmente no lineales.

### Análisis de estabilidad de Lyapunov

Considere la siguiente función candidata de Lyapunov para el sistema Duffing

$$V(z) = \frac{1}{2}k_1z_1^2 + \frac{1}{4}k_3z_1^4 + \frac{1}{2}mz_2^2, \quad V(0) = 0 \quad (2.90)$$

la cual es una función definida positiva, cuando  $m$ ,  $k_1$  y  $k_3$  tienen valor positivo, es decir, que

$$V(z) > 0 \Leftrightarrow m > 0, k_1 > 0 \text{ \& } k_3 > 0 \quad (2.91)$$

Nótese que la condición  $k_3 > 0$  implica solamente *resortes duros*. De lo contrario,  $V(z)$  no sería definida positiva.

La derivada con respecto al tiempo de  $V(z)$  a lo largo de las trayectorias del sistema Duffing se obtiene como

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= k_1 z_1 \dot{z}_1 + k_3 z_1^3 \dot{z}_1 + m z_2 \dot{z}_2 \\
&= (k_1 z_1 + k_3 z_1^3) \dot{z}_1 + m z_2 \dot{z}_2 \\
&= (k_1 z_1 + k_3 z_1^3) z_2 + (-k_1 z_1 - k_3 z_1^3 - c z_2) z_2 \\
&= -c z_2^2 \\
\frac{dV}{dt} &= -c z_2^2 \tag{2.92}
\end{aligned}$$

Nótese que

$$\frac{dV}{dt} = -c z_2^2 \leq 0$$

Por lo tanto, el estado de equilibrio  $(0, 0)$  es estable.

Además, aplicando el teorema de Lasalle, se obtiene que

$$\frac{dV}{dt} = -c z_2^2 = 0 \Leftrightarrow z_2(t) = 0, \text{ cuando } c > 0$$

de tal manera que, el origen  $(0, 0)$  es asintóticamente estable.

### Análisis de estabilidad de la solución aproximada

A continuación se estudian las condiciones de estabilidad para un sistema tipo Duffing sometido a fuerzas externas (Ecuación (2.93)), empleando el método de escalas múltiples.

$$\ddot{x} + \omega^2 x + 2\varepsilon\mu\dot{x} + \varepsilon\alpha x^3 = \varepsilon f \cos(\Omega t) \tag{2.93}$$

Similar al caso de los sistemas lineales, aquí se considera el comportamiento del sistema cerca de la condición de resonancia, por ejemplo, cuando la frecuencia de excitación es igual a la frecuencia natural del sistema. Esta condición es conocida como la condición de resonancia primaria ( $\Omega \approx \omega_0$ ). En el caso de un sistema de múltiples grados de libertad, se pueden emplear técnicas y métodos para reducir el sistema en forma equivalente a uno de un solo grado de libertad y continuar el procedimiento como se describe a continuación.

Para estudiar el comportamiento del sistema en la condición de resonancia primaria, se emplea un parámetro de desintonización  $\sigma$ , el cual representa la proximidad

de la frecuencia externa a la frecuencia natural. Por lo tanto, se puede escribir lo siguiente:

$$\Omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma \quad (2.94)$$

Usando el método de escalas múltiples, la solución de la Ecuación (2.93) es

$$x(t; \varepsilon) = x_0(T_0, T_1) + \varepsilon x_1(T_0, T_1) + \dots \quad (2.95)$$

donde  $T_n = \varepsilon^n t$ .

Sustituyendo la Ecuación (2.95) en la Ecuación (2.93) y separando los términos con diferente orden de  $\varepsilon$ , se obtiene la siguiente ecuación:

$$D_0^2 x_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad (2.96)$$

$$D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = -2D_0 D_1 x_0 - 2\mu D_0 x_0 - \alpha x_0^3 + f \cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_1) \quad (2.97)$$

La solución de la Ecuación (2.96) se puede escribir como:

$$x_0 = A(T_1)e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}(T_1)e^{-i\omega_0 T_0} \quad (2.98)$$

Sustituyendo la Ecuación (2.98) en la Ecuación (2.97) se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = & \underbrace{-[2i\omega_0(A' + A\mu) + 3\alpha A^2 \bar{A}]e^{i\omega_0 T_0}}_{\text{Término secular}} \\ & - \alpha A^3 e^{3i\omega_0 T_0} + \underbrace{\frac{1}{2} f e^{i(\omega_0 T_0 + \sigma T_1)}}_{\text{Término secular mezclado}} + cc \end{aligned} \quad (2.99)$$

Para eliminar los términos seculares de la Ecuación (2.99), se puede escribir

$$2i\omega_0(A' + \mu A) + 3\alpha A^2 \bar{A} - \frac{1}{2} f e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (2.100)$$

Ahora, sustituyendo  $A = \frac{1}{2} a e^{i\beta}$  en la Ecuación (2.100) y separando las partes imaginaria y real, se obtienen las siguientes ecuaciones

$$a' = -\mu a + \frac{1}{2} \frac{f}{\omega_0} \sin(\sigma T_1 - \beta) \quad (2.101)$$

$$a\beta' = \frac{3}{8} \frac{\alpha}{\omega_0} a^3 - \frac{1}{2} \frac{f}{\omega_0} \cos(\sigma T_1 - \beta) \quad (2.102)$$

Para escribir estas dos ecuaciones en su forma autónoma, se puede usar  $\gamma = \sigma T_1 - \beta$  y obtener las siguientes ecuaciones

$$a' = -\mu a + \frac{1}{2} \frac{f}{\omega_0} \sin(\gamma) \quad (2.103)$$

$$a\gamma' = \sigma a - \frac{3}{8} \frac{\alpha}{\omega_0} a^3 + \frac{1}{2} \frac{f}{\omega_0} \cos(\gamma) \quad (2.104)$$

Las dos ecuaciones anteriores se deben resolver para obtener  $a$  y  $\gamma$ , permitiendo escribir la solución de primer orden del sistema de la siguiente manera

$$\begin{aligned} x &= a \cos(\omega_0 t + \beta) + O(\varepsilon) = a \cos(\omega_0 t + \sigma T_1 - \gamma) + O(\varepsilon) \\ &= a \cos(\omega_0 t + \varepsilon \sigma t - \gamma) + O(\varepsilon) = a \cos(\Omega t - \gamma) + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (2.105)$$

Bajo condiciones de régimen permanente  $a'$  y  $\gamma'$  son iguales a cero, por lo que resultan las siguientes igualdades

$$\mu a = \frac{1}{2} \frac{f}{\omega_0} \sin(\gamma) \quad (2.106)$$

$$\sigma a - \frac{3}{8} \frac{\alpha}{\omega_0} a^3 = -\frac{1}{2} \frac{f}{\omega_0} \cos(\gamma) \quad (2.107)$$

Ahora, eliminando  $\gamma$  de las ecuaciones anteriores, se obtiene

$$\left[ \mu^2 + \left( \sigma - \frac{3}{8} \frac{\alpha}{\omega_0} a^2 \right)^2 \right] a^2 = \frac{f^2}{4\omega_0^2} \quad (2.108)$$

Se puede apreciar que la Ecuación (2.108) es de sexto orden polinomial con respecto de  $a$ . Sin embargo, se trata de una ecuación cuadrática si se mira respecto de  $\sigma$ . Por lo tanto, la expresión para la respuesta en frecuencia está dada por

$$\sigma = \frac{3}{8} \frac{\alpha}{\omega_0} a^2 \pm \left( \frac{f^2}{4\omega_0^2 a^2} - \mu^2 \right)^{1/2} \quad (2.109)$$

En la Ecuación (2.109) se puede analizar que, para un valor particular del parámetro de desintonización, existen varios valores de amplitud y fase en la respuesta.

Finalmente, para chequear la estabilidad de la respuesta en estado estable obtenida, se perturban las Ecuaciones (2.103) y (2.104), aprovechando las expresiones resultantes para la construcción de la matriz Jacobiana

$$J = \begin{vmatrix} -\mu & -a_0 \left( \sigma - \frac{3\alpha a_0^2}{8\omega_0} \right) \\ \frac{1}{a_0} \left( \sigma - \frac{9\alpha a_0^2}{8\omega_0} \right) & -\mu \end{vmatrix} \quad (2.110)$$



Ahora que se conoce la matriz  $J$ , la situación se corresponde con un eigenproblema, dado para la matriz  $J - \lambda I$ . Entonces, la expresión cuadrática que modela los valores propios del sistema es

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda + \mu^2 + \left(\sigma - \frac{3\alpha a_0^2}{8\omega_0}\right) \left(\sigma - \frac{9\alpha a_0^2}{8\omega_0}\right) = 0 \quad (2.111)$$

Por lo tanto, la estabilidad depende de que los valores propios del sistema cuenten con parte real negativa, dando lugar así a la siguiente restricción

$$\left(\sigma - \frac{3\alpha a_0^2}{8\omega_0}\right) \left(\sigma - \frac{9\alpha a_0^2}{8\omega_0}\right) + \mu^2 < 0 \quad (2.112)$$

## 2.4. Modos normales de vibraciones no lineales

El concepto más general de los Modos Normales No lineales de vibración (NNMs, por sus siglas en inglés) funge como una extensión del concepto de modos normales lineales de vibración que desarrolla la teoría clásica de vibraciones [39]. Sin embargo, si se pudiera definir los NNMs, no podría poseer las mismas propiedades ya que el teorema de superposición falla en el caso no lineal. [83]. Además, en la teoría lineal los modos normales de vibración no exceden el número de grados de libertad del sistema, mientras que en la contraparte, los NNMs, sí [84]. Visto de otra forma, los NNMs se pueden identificar mediante la solución particular del conjunto de ecuaciones no lineales, por lo que existieran tantos NNMs como soluciones particulares; en consecuencia, es válido afirmar que un NNM es la solución particular del conjunto de ecuaciones que gobiernan un sistema no lineal.

De manera más específica, el concepto de NNMs es empleado para el estudio de resonancias forzadas de sistemas no lineales y la localización de la energía vibracional no lineal, lo cual implica una condición de eficiencia para el diseño de los TET. El estudio de las vibraciones forzadas en los sistemas no lineales, es particularmente interesante ya que comúnmente los NNMs tiene lugar como soluciones periódicas en la vecindad de un punto de equilibrio estable [84].

En la teoría de vibraciones existe el concepto de *línea modal*, y en el caso no lineal representa la oscilación sincrona del sistema en el espacio de configuración durante el movimiento de un NNM. Usualmente, los NNMs pueden ser excitados directamente, o como consecuencia de la ruptura de algún régimen cooperativo de

vibración, pues, como se presenta en Gendelman [40], un NNM puede ser excitado mientras que la energía es almacenada en otro NNM estable. Esta situación da a los NNMs una importancia práctica ya que usualmente es indeseado, en la dinámica de sistemas reales, por motivos de seguridad. Además de ser una herramienta teórica de importante valor para la comprensión y modelado de la dinámica de osciladores no lineales, los NNMs encuentran aplicación en el análisis modal, reducción de modelos, y diseño de aisladores de choques y vibraciones [39].

Finalmente, los preliminares enunciados representan la base necesaria para el estudio de los sistemas no lineales. Asimismo, son requisito fundamental para la comprensión e implementación de drenajes de energía no lineal, como es el caso del absorbedor de vibraciones esencialmente no lineal, gracias al fenómeno de transferencia de energía dirigida, lo cual ha sido descrito en el capítulo introductorio. El dominio de los principios teóricos resulta indispensable al momento de interpretar la información experimental recolectada, por lo tanto, los preliminares son de gran importancia para el desarrollo del presente trabajo de tesis.

## Capítulo 3

# Absorbedor esencialmente no lineal para sistemas tipo Duffing

A continuación, se describe el problema general del presente documento de tesis. Mediante un diagrama, se presenta el esquema de control de vibraciones no lineales. Posteriormente, se definen cada uno de los componentes que conforman el sistema general de dos grados de libertad, y se presentan algunos resultados numéricos obtenidos.

### 3.1. Descripción del sistema

Considere el sistema mecánico no lineal de la Figura 3.1, el cual consiste de un sistema primario tipo Duffing conectado a un absorbedor de vibraciones pasivo/activo tipo Duffing que presenta un anclaje no lineal. Análisis similares para sistemas Duffing interconectados se han realizados en [10, 14], pero en esta ocasión se considera el anclaje elástico no lineal (resorte cúbico). De la figura mencionada se puede decir que,  $x$  y  $y$  indican los desplazamientos respecto de la posición de equilibrio estático de las masas,  $M$  de la planta y  $m_a$  del ENA, respectivamente. Por lo tanto, representan las coordenadas generalizadas del sistema. Además, los coeficientes de amortiguamiento viscoso están dados por  $c_1$  para el primario y  $c_a$  para el absorbedor. La rigidez de ambos sistemas está dada por la suma de dos términos, uno lineal y el otro cúbico. La función de rigidez no lineal del sistema primario se presenta en la Ecuación (3.1), mientras que (3.2) muestra la función de rigidez del

ENA, resaltando en ella la presencia protagónica de  $k_{ac}$ , quien desempeña el papel del anclaje cúbico puro.  $F$  indica la presencia de una fuerza periódica de naturaleza exógena que actúa directamente sobre  $M$ . De manera muy similar,  $u$  indica la existencia de una ley de control que actúa directamente sobre  $m_a$ , la cual se emplea para mejorar las propiedades de robustez contra las posibles variaciones de  $F$  en amplitud y/o en frecuencia. Con esto, se ha descrito el esquema de absorción pasivo ( $u \equiv 0$ )/activo ( $u \neq 0$ ) que comprende el problema general del presente trabajo.

$$f_{10} = k_1x + k_3x^3 \quad (3.1)$$

$$f_{21} = k_a\delta + k_{a3}\delta^3 + f_{ac}, \quad f_{ac} = k_{ac}y^3 \quad (3.2)$$

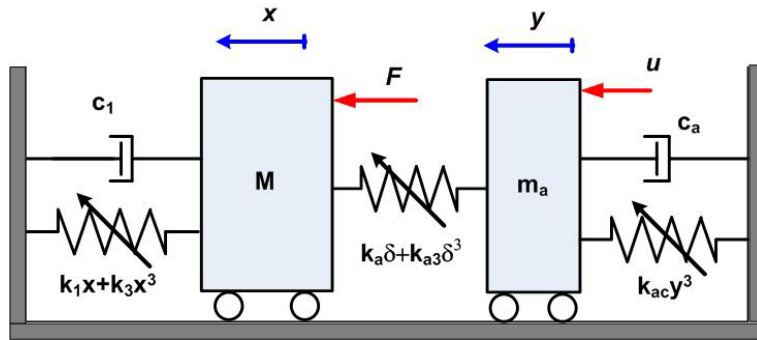


Figura 3.1: Diagrama esquemático de un esquema de control de vibraciones no lineales donde,  $\delta = (y - x)$ .

Las ecuaciones de movimiento del sistema mecánico de dos grados de libertad descrito anteriormente son definidas a continuación. Recuérdese que  $\delta = (y - x)$ , tal y como se presenta en el esquema general.

$$M\ddot{x} + c_1\dot{x} + k_1x + k_3x^3 - k_a(y - x) - k_{a3}(y - x)^3 = F(t) \quad (3.3)$$

$$m_a\ddot{y} + c_a\dot{y} + k_{ac}y^3 + k_a(y - x) + k_{a3}(y - x)^3 = u(t) \quad (3.4)$$

En la Ecuación (3.3),  $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$  es la fuerza de excitación armónica con amplitud  $F_0$  y frecuencia de excitación  $\Omega$  cercana a la frecuencia natural lineal del sistema primario  $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{M}}$ . La entrada de control  $u(t)$  hace posible la aplicación de estrategias de control feedback para mejorar la respuesta general del sistema.

Los parámetros del absorbedor de vibraciones Duffing (Ecuación (3.4)) pueden ser seleccionados para reducir la amplitud de respuesta del sistema primario alrededor de la condición de resonancia externa dada por la expresión  $\Omega \approx \omega_1$ . Esto se puede lograr mediante la metodología de diseño reportada por Vigiúé & Kerchen [85], y también desde otros enfoques disponibles en la literatura.

### 3.1.1. Absorbedor de vibraciones Duffing amortiguado

Ahora, se considera un sistema Duffing amortiguado, como un absorbedor de vibraciones no lineal controlado, descrito así

$$m_a \ddot{y} + c_a \dot{y} + k_a y + k_{a3} y^3 = u(t) \quad (3.5)$$

donde,  $y$  es el desplazamiento y  $u(t) = U_0 \cos(\Omega t)$  es una fuerza de excitación, o entrada de control, con amplitud  $U_0$  y frecuencia de excitación  $\Omega$  próxima a la frecuencia natural lineal  $\omega_a = \sqrt{\frac{k_a}{m_a}}$ . Cuando la fuerza  $u(t)$  es una acción de control retroalimentado, se puede modificar los parámetros asociados al absorbedor no lineal de vibraciones (por ejemplo, valores efectivos para  $k_a$  y  $k_{a3}$ ), y, por otra parte, para un diseño pasivo  $u \equiv 0$ . En la sección 2.3.1 se define que el sistema es estable en el sentido de Lyapunov cuando la rigidez cúbica  $k_{a3}$  es positiva, por lo que se trata de un resorte duro. Nótese que, cuando la rigidez lineal  $k_a$  es pequeña o tiende a cero, la frecuencia natural lineal  $\omega_a$  también se hace pequeña o tendiente a cero.

Como ha sido presentado durante el desarrollo del presente documento, la función de respuesta frecuencial no lineal aproximada del sistema Duffing alrededor de su frecuencia natural ha sido extensamente estudiada en la literatura. Para ello se realiza el proceso de normalización de la Ecuación del sistema (3.5), obteniendo el modelo del sistema en forma adimensional

$$\ddot{y} + 2\varepsilon\zeta_1 \dot{y} + \omega_{20}^2 y + \varepsilon\alpha_1 y^3 = \varepsilon u_0 \cos(\Omega t) \quad (3.6)$$

En la Ecuación (3.6),  $\varepsilon$  representa un valor pequeño no sujeto a dimensiones, de tal manera que

$$2\varepsilon\zeta_1 = \frac{c_a}{m_a}, \quad \omega_{20}^2 = \frac{k_a}{m_a}, \quad \varepsilon\alpha_1 = \frac{k_{a3}}{m_a}, \quad \varepsilon u_0 = \frac{U_0}{m_a} \quad (3.7)$$

donde,  $\omega_{20}$  obedece a la resonancia primaria del absorbedor tipo Duffing. Para este caso, la resonancia primaria externa se representa mediante la expresión  $\Omega = \omega_{20} + \varepsilon\sigma$ , aquí,  $\sigma$  es llamado parámetro de *desintonización*.

Para el caso en cuestión, mediante el método de escalas múltiples, la respuesta frecuencial aproximada se define mediante la solución de la siguiente ecuación algebraica, (ver, *e.g.*, [6])

$$\left\{ (\varepsilon\zeta_1)^2 + \left[ (\varepsilon\sigma) - \frac{3(\varepsilon\alpha_1)a_1^2}{8\omega_{20}} \right]^2 \right\} a_1^2 - \frac{(\varepsilon f_0)^2}{4\omega_{20}^2} = 0 \quad (3.8)$$

Para la solución aproximada en cuestión,  $a_1$  representa la amplitud de la respuesta en estado estable, y depende estrechamente de los parámetros del sistema y la amplitud de la entrada de control  $U_0$ .

## 3.2. Sistema Duffing acoplado a un absorbedor pasivo esencialmente no lineal

Tomando como referencia la Figura 3.1, para el caso en que  $u \equiv 0$  se obtiene el esquema de control pasivo de vibraciones no lineales. Así, partiendo de las Ecuaciones (3.3) y (3.4), se obtiene:

$$M\ddot{x} + c_1\dot{x} + k_1x + k_3x^3 - k_a(y - x) - k_{a3}(y - x)^3 = F(t) \quad (3.9)$$

$$m_a\ddot{y} + c_a\dot{y} + k_{ac}y^3 + k_a(y - x) + k_{a3}(y - x)^3 = 0 \quad (3.10)$$

### 3.2.1. Resultados de simulación

Considere los parámetros del sistema consignados en la Tabla 3.1. Nótese que  $m_a$  es lo suficientemente pequeño para alcanzar el comportamiento dinámico de un ENA. Empleando la herramienta matemática computacional Maple<sup>©</sup>, se obtiene las curvas de respuesta frecuencial no lineal aproximada del sistema de Ecuaciones (3.9) y (3.10), como se muestra en las Figuras 3.2 y 3.3, para la planta Duffing y el ENA, respectivamente. Nótese que, el eje horizontal se corresponde con los valores de frecuencia alrededor de la frecuencia natural lineal principal, mientras el eje vertical describe la amplitud  $x$  para la planta y  $y$  para el ENA.

Tabla 3.1: Parámetros del sistema para el esquema de control pasivo.

$M = 2.9371kg$	$c_1 = 12.03N.s/m$	$k_1 = 1100N/m$
$k_3 = 1.22 \times 10^6 N/m^3$	$\omega_1 = 3.08Hz$	$F_0 = 4.8107N$
$k_{a3} = 9.5 \times 10^4 N/m^4$	$k_{ac} = 1 \times 10^4 N/m^3$	$\omega_a = 3.048Hz$

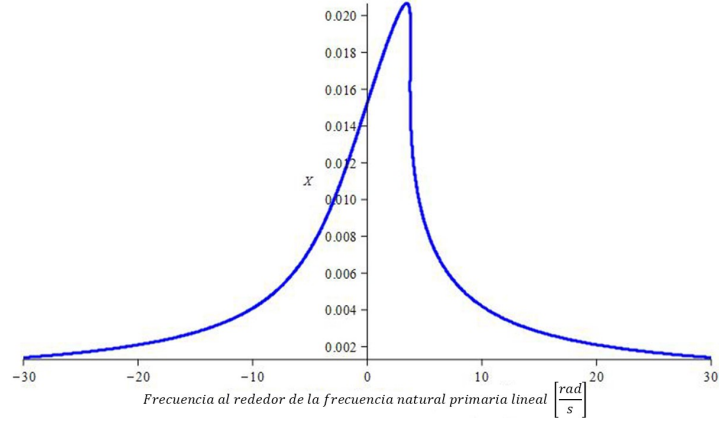


Figura 3.2: Curva de respuesta del sistema primario.

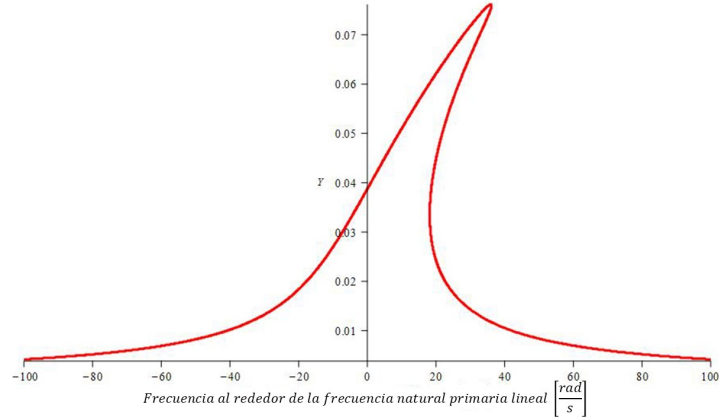
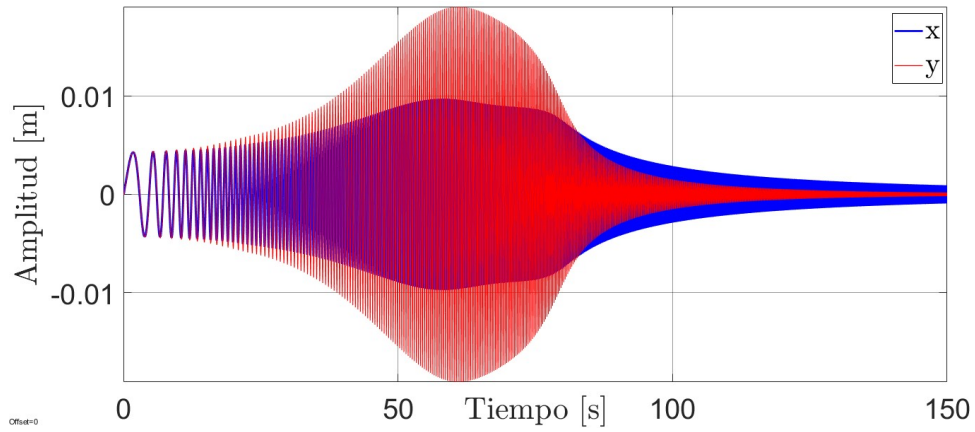
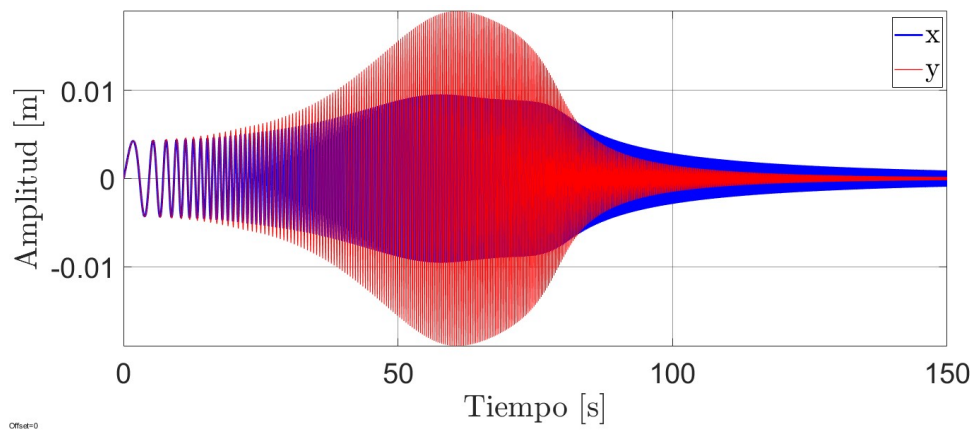


Figura 3.3: Curva de respuesta del ENA.

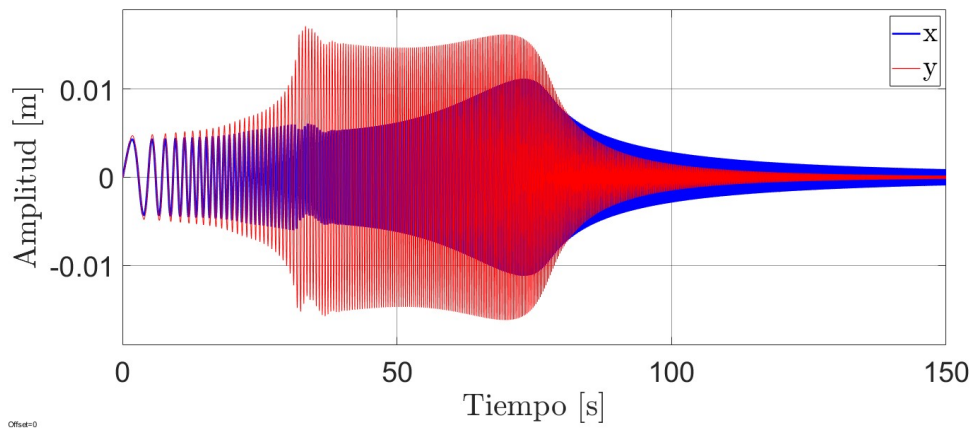
Con el fin de ilustrar el anclaje cúbico  $k_{ac}$ , al interior del absorbedor de vibraciones Duffing, algunos valores fueron asumidos para evaluar el desempeño de la dinámica general. Así, los casos en los que  $k_{ac} = 0$ ,  $k_{ac} = 1 \times 10^4 N/m^3$  y  $k_{ac} = 4 \times 10^5 N/m^3$ , han sido considerados. Mediante MATLAB<sup>®</sup>, ejecutando barrido frecuencial para  $0.1Hz < \Omega < 5Hz$ , se obtuvieron los resultados numéricos mostrados en la Figura 3.4.



(a)  $k_{ac} = 0$



(b)  $k_{ac} = 1 \times 10^4 N/m^3$



(c)  $k_{ac} = 4 \times 10^5 N/m^3$

Figura 3.4: Barrido frecuencial  $0.1Hz < \Omega < 5Hz$ , para distintos valores de  $k_{ac}$ .

Se puede apreciar que conforme el anclaje incrementa su valor, la respuesta del sistema es modificada, incrementando el fenómeno de saturación.



### 3.3. Sistema Duffing acoplado a un absorbedor pasivo/activo esencialmente no lineal

Para efectuar el control activo de las vibraciones indeseadas que puedan tener lugar en el sistema primario Duffing vinculado a un ENA, descrito por las Ecuaciones (3.3) y (3.4), se considera la estrategia de control por retroalimentación positiva de la posición (PPF, por sus siglas en ingles), a fin de compensar las vibraciones armónicas alrededor de la resonancia principal ( $\Omega = \omega_{10}$ ). Es preciso recordar que esta estrategia no afecta de ninguna manera las componentes no lineales presentes en el sistema.

El Control por retroalimentación positiva de la posición tiene por objetivo reducir las vibraciones de los NNMs mediante un actuador. Para ello, en la práctica se puede realizar la identificación de un término comúnmente llamado *ganancia modal*, el cual se emplea para proporcionar una entrada de control al actuador y observar la respuesta del sistema en estado estable para cada modo de vibración.

La idea general es tratar a  $q$  como una coordenada de la posición de un modo altamente amortiguado en el sistema, de tal manera que la expresión que modela a  $q$  está dada por

$$\ddot{q}(t) + 2\zeta_c\omega_c\dot{q}(t) + \omega_c^2q(t) = \omega_c^2gz_j$$

donde  $\zeta_c$  es el parámetro de amortiguamientos del controlador,  $\omega_c$  la frecuencia del controlador y  $g$  es la ganancia de control.

Luego, al acoplar este controlador a los modos estructurales del sistema, se puede introducir amortiguamiento a los modos localizados. La principal ventaja es que el controlador actúa como un filtro, con una reducción rápida en frecuencias superiores a la resonancia, lo que significa que los efectos de spillover se reducen en comparación con otras técnicas, como la retroalimentación directa de la velocidad.

Tomando como salida  $z = x$ , la estrategia de control pasivo/activo en lazo cerrado, para el controlador tipo PPF, se describe a través del siguiente sistema de ecuaciones

$$M\ddot{x} + c_1\dot{x} + k_1x + k_3x^3 - k_a(y - x) - k_{a3}(y - x)^3 = F(t) \quad (3.11)$$

$$m_a\ddot{y} + c_a\dot{y} + k_{ac}y^3 + k_a(y - x) + k_{a3}(y - x)^3 = u(t) \quad (3.12)$$

$$\ddot{q} + 2\zeta_c\omega_c\dot{q} + \omega_c^2q = \omega_c^2gz \quad (3.13)$$

$$u = \omega_c^2gq \quad (3.14)$$

La descripción del problema general, destaca la necesidad por construir elementos de rigidez no lineal que tengan la capacidad de influenciar la dinámica del sistema general en todo instante de tiempo. Por otra parte, en la sección 4.3, las ecuaciones que describen el problema general de esta tesis (Ecuaciones (3.3) y (3.4)) son modificadas con el propósito de crear una serie de casos que sirvan de herramienta para la evaluación experimental del desempeño del absorbedor de vibraciones esencialmente no lineal.

# Capítulo 4

## Aplicación de absorbedores de vibraciones a sistemas mecánicos

### 4.1. Descripción de los casos de estudio

Tomando como punto de partida las ecuaciones que modelan el absorbedor esencialmente no lineal para sistemas tipo Duffing (3.3)(3.4), bajo condiciones en las cuales algunos términos cobran valor nulo, es posible desarrollar una serie de casos en los que el sistema primario y el absorbedor llegan a presentar dinámica lineal/no lineal.

Para tales efectos, cuando los términos  $k_{a3} = 0$  para ambas ecuaciones, y además  $k_3 = k_{ac} = u = 0$ , se obtiene el caso 1, en el que el sistema primario y el absorbedor pasivo, presentan dinámica lineal. Ahora, un segundo caso, en el que el sistema primario lineal está vinculado al absorbedor pasivo tipo Duffing, emerge cuando en la ecuación que modela la dinámica del sistema primario (3.3), el término  $k_3 = 0$ , y para el absorbedor  $k_{ac} = u = 0$ .

Por otra parte, un tercer caso, en el que dos sistemas tipo Duffing son acoplados, aparece cuando  $k_{ac} = u = 0$ . El caso 4 comprende el sistema primario tipo Duffing conectado a un absorbedor pasivo lineal, teniendo lugar cuando los términos  $k_{ac}$  y  $k_{a3}$  en la ecuación del absorbedor (3.4), valen cero.

Por último, el caso general de estudio (caso 5), constituido por un *absorbedor esencialmente no lineal para sistemas tipo Duffing*, presenta dos variantes en las que el ENA es pasivo ( $u \equiv 0$ ) o activo ( $u \neq 0$ ). La Tabla 4.1 presenta en forma ordenada,

la naturaleza dinámica, lineal o no lineal, del primario y el absorbedor, para cada caso.

Tabla 4.1: Casos abordados.

	<b>Sistema primario</b>	<b>Absorbedor</b>
Caso 1.	Lineal	Lineal
Caso 2.	Lineal	No lineal
Caso 3.	No lineal	No lineal
Caso 4.	No lineal	Lineal
Caso 5.	No lineal	ENA

Estos casos son abordados en el presente capítulo, empleando la planta rectilínea modelo 210-D de *Educational Control Products* (ver Figura 4.1), existente en el laboratorio de control de vibraciones.

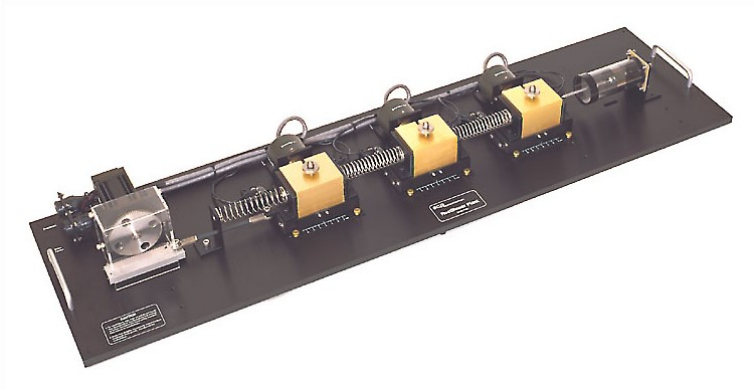


Figura 4.1: Plataforma experimental [86].

## 4.2. Construcción y caracterización de los subsistemas

A continuación se describe el desarrollo experimental de un sistema primario lineal, un absorbedor pasivo de vibraciones lineal, un sistema primario tipo duffing y un absorbedor pasivo de vibraciones tipo Duffing. Cada uno de estos es empleado para la implementación de los casos en mención del presente capítulo.

De igual forma, se describe el desarrollo constructivo y la caracterización del conjunto de resortes no lineales empleados en la constitución de los sistemas tipo

Duffing, cuya relación fuerza-deformación es función de la suma de un término lineal y un término cúbico, siendo este último un elemento influyente para la dinámica del sistema en todo instante de tiempo, superando así, la importancia del término lineal.

#### 4.2.1. Sistema primario lineal

El sistema lineal descrito en la Ecuación (4.1), desempeña el rol de sistema primario, con los valores de parámetros presentes en la Tabla 4.2.

$$M\ddot{x} + c_1\dot{x} + k_1x = F(t) \quad (4.1)$$

Tabla 4.2: Parámetros sistema primario lineal.

$M = 2.709 \text{ [kg]}$
$k_1 = 166 \text{ [N/m]}$
$c_1 = 0.322 \text{ [N.m/s]}$

Conociendo los parámetros de masa y rigidez del sistema, se evalúa teóricamente su respectiva frecuencia natural mediante la expresión  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  [21]. De esta manera, se obtiene

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_1}{M}} = \sqrt{\frac{166 \text{ [N/m]}}{2.709 \text{ [kg]}}} = 7.828 \text{ [rad/s]} = 1.2458 \text{ [Hz]} \quad (4.2)$$

El resultado teórico expuesto en (4.2), es validado de manera experimental. Para ello, el sistema es excitado mediante una fuerza externa sinusoidal con amplitud  $F_0 = 0.7908 \text{ N}$ , aplicando un barrido frecuencial entre los 0.1 y los 5 Hz (ver Tabla 4.3).

Tabla 4.3: Parámetros de excitación, barrido frecuencial sistema primario lineal.

$F = 0.7908 \text{ [N]} \sin(\Omega t)$
$\Omega = 0.1 \sim 5 \text{ [Hz]}$

La información sensada mediante la ECP, permite construir la respuesta en el tiempo (ver Figura 4.2), identificando una amplitud máxima de  $x \approx 0.031 \text{ m}$ , tras 27.749 s de operación, indicando la presencia de resonancia,  $\Omega = \omega_n$ .

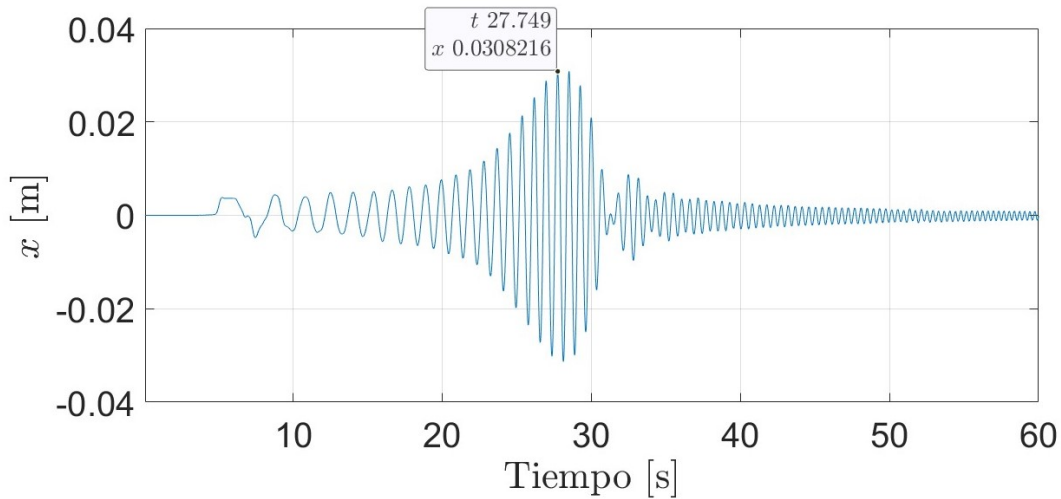


Figura 4.2: Respuesta en el tiempo, barrido frecuencial.

Con la ayuda de MATLAB<sup>®</sup>, se obtiene la respuesta en frecuencia, para lo cual se aplica el algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT, por sus siglas en inglés) a la respuesta en el tiempo del barrido frecuencial [23]. Este procedimiento permite determinar la frecuencia natural del sistema.

Como lo presenta la Figura 4.3, la frecuencia natural del sistema primario lineal es  $\omega_n = 1.24132$  Hz, lo cual es coherente con el análisis teórico (4.2).

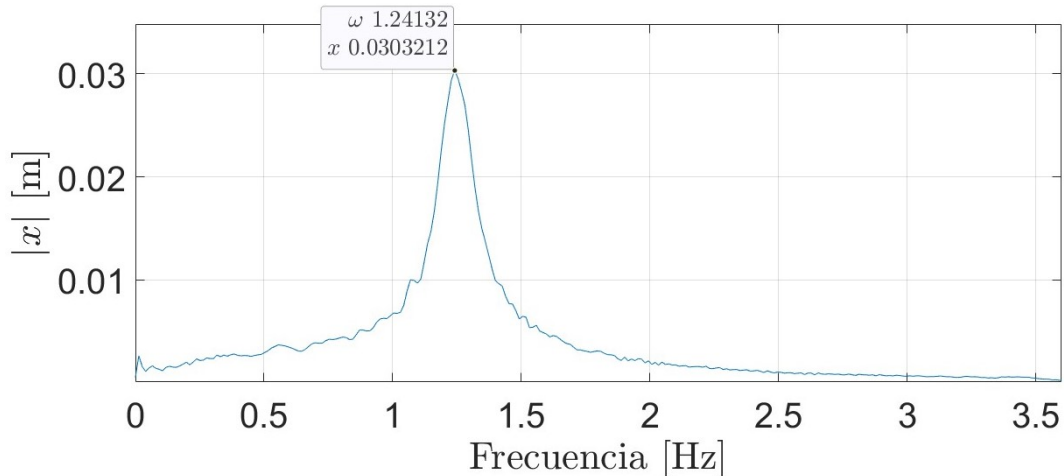


Figura 4.3: Identificación de  $\omega_n$  mediante la respuesta en frecuencia.

Ahora que  $\omega_n$  es conocido, el sistema es excitado a la condición de resonancia mediante una fuerza externa sinusoidal con amplitud  $F_0 = 0.659$  N y frecuencia  $\Omega = \omega_n = 1.24$  Hz, registrando una amplitud máxima de oscilación periódica en  $x \approx 0.0317$  m, como se presenta en la Figura 4.4. Es importante resaltar que para el

caso del barrido frecuencial  $F_0$  es de mayor amplitud que para el caso bajo excitación  $\Omega = \omega_n$  constante. Sin embargo, la amplitud  $x$  es mayor en el caso de la excitación con valor frecuencial constante, lo cual evidencia, tal y como lo presenta la literatura [2, 4, 18], que la frecuencia natural en sistemas lineales es independiente a la amplitud de la fuerza de excitación.

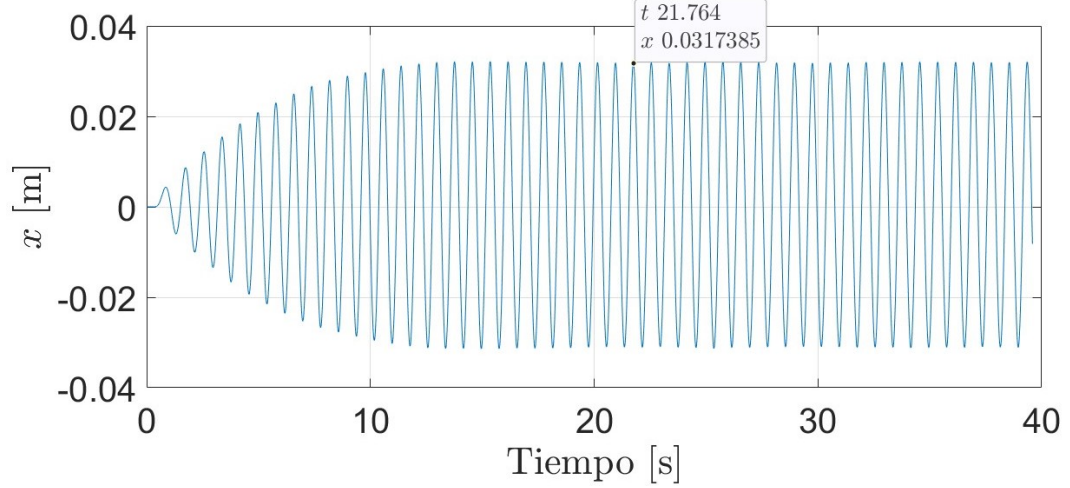


Figura 4.4: Respuesta en el tiempo bajo condición de resonancia,  $\Omega = \omega_n = 1.24$  Hz.

Con el propósito de conocer el coeficiente de amortiguamiento del sistema,  $c_1$ , se encuentra la función de respuesta en frecuencia (FRF, por sus siglas en inglés) para el sistema excitado en la resonancia [87]. La Figura 4.5 presenta la FRF del sistema, develando así, la magnitud de las frecuencias laterales (parte real de la FRF) y la frecuencia natural (parte imaginaria de la FRF).

$$f_{l1} = 1.1885 \text{ [Hz]}$$

$$f_{l2} = 1.30734 \text{ [Hz]}$$

De la relación:  $2\zeta_1\omega_n = c_1/M = f_{l2} - f_{l1}$  [87], se obtiene

$$c_1 = M(f_{l2} - f_{l1}) = 2.709(1.30734 - 1.1885) \text{ [kg/s]} = 0.322 \text{ [N.s/m]}$$

$$c_1 = 0.322 \text{ [N.s/m]} \quad (4.3)$$

por lo tanto, la razón de amortiguamiento es

$$\zeta_1 = (f_{l2} - f_{l1})/2\omega_n$$

$$\zeta_1 = 0.0479$$

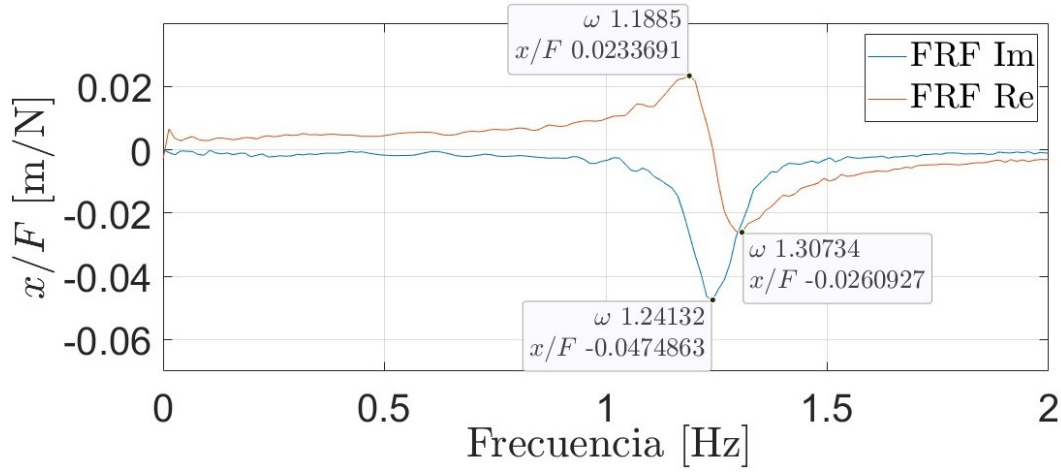


Figura 4.5: Gráfica de función de respuesta en frecuencia (FRF).

#### 4.2.2. Absorbedor pasivo lineal

La Ecuación (4.4), modela la dinámica del absorbedor pasivo de vibraciones lineal, con los valores de parámetros presentes en la Tabla 4.4.

$$m_a \ddot{y} + c_a \dot{y} + k_a y = F(t) \quad (4.4)$$

Tabla 4.4: Parámetros absorbedor pasivo lineal.

$m_a = 0.8326$ [kg]
$k_a = 297$ [N/m]
$c_a = 0.176$ [N.m/s]

Teóricamente, la frecuencia natural del absorbedor es obtenida mediante la expresión  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . De tal forma que,

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k_a}{m_a}} = \sqrt{\frac{297 \text{ [N/m]}}{0.8326 \text{ [kg]}}} = 18.887 \text{ [rad/s]} = 3.01 \text{ [Hz]} \quad (4.5)$$

Aplicando un barrido frecuencial entre los 0.1 y los 7 Hz ( ver Tabla 4.5), el sistema es excitado mediante una fuerza externa sinusoidal con amplitud  $F_0 = 0.7908$  N.



Tabla 4.5: Parámetros de excitación absorbedor pasivo lineal.

$F = 0.7908 [N] \sin(\Omega t)$
$\Omega = 0.1 \sim 7 [Hz]$

La gráfica de respuesta en el tiempo (ver Figura 4.6) exhibe, tras 45.55 s de operación del barrido, la presencia de resonancia,  $\Omega = \omega_a$ , en la cual  $m_a$  alcanza una amplitud máxima de  $y \approx 0.022$  m.

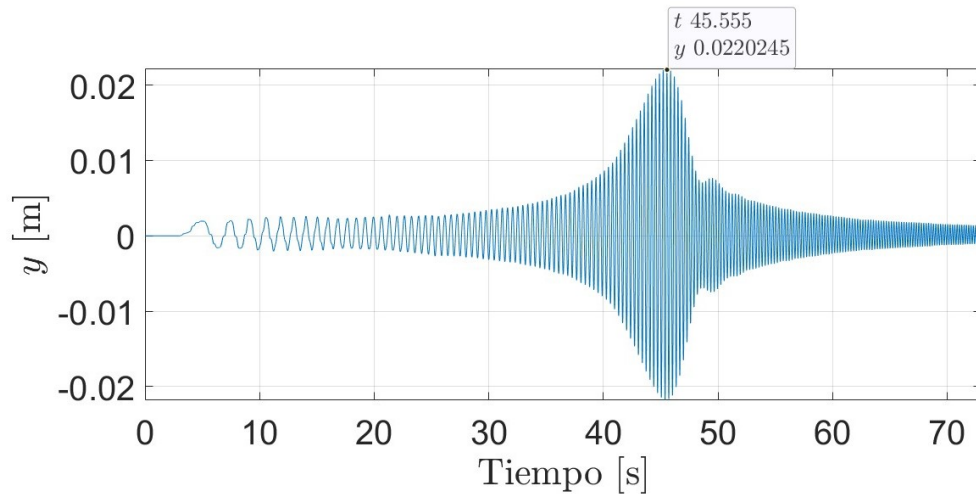


Figura 4.6: Respuesta en el tiempo, barrido frecuencial.

Aplicando la FFT, se determina la frecuencia natural del absorbedor de forma experimental. Como lo presenta la respuesta en frecuencia (ver Figura 4.7), la frecuencia natural del absorbedor pasivo lineal es  $\omega_a \approx 2.97$  Hz, lo cual es coincidente con el análisis teórico (4.5).

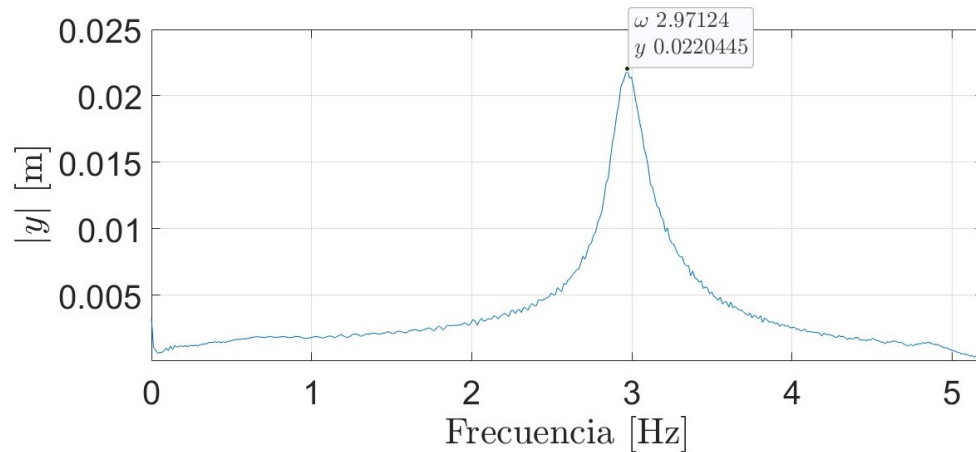


Figura 4.7: Identificación de  $\omega_a$  mediante la respuesta en frecuencia.

Ahora que  $\omega_a$  es conocido, el sistema es excitado a la condición de resonancia mediante una fuerza externa sinusoidal con amplitud  $F_0 = 0.7908$  N y frecuencia  $\Omega = \omega_a = 2.97$  Hz, registrando una amplitud máxima de oscilación periódica en  $y \approx 0.027$  m, como se presenta en la Figura 4.8. Se evidencia que, aunque  $F_0$  se mantuvo idéntico en ambas pruebas, bajo condición de resonancia la amplitud de oscilación,  $y$ , es mayor.

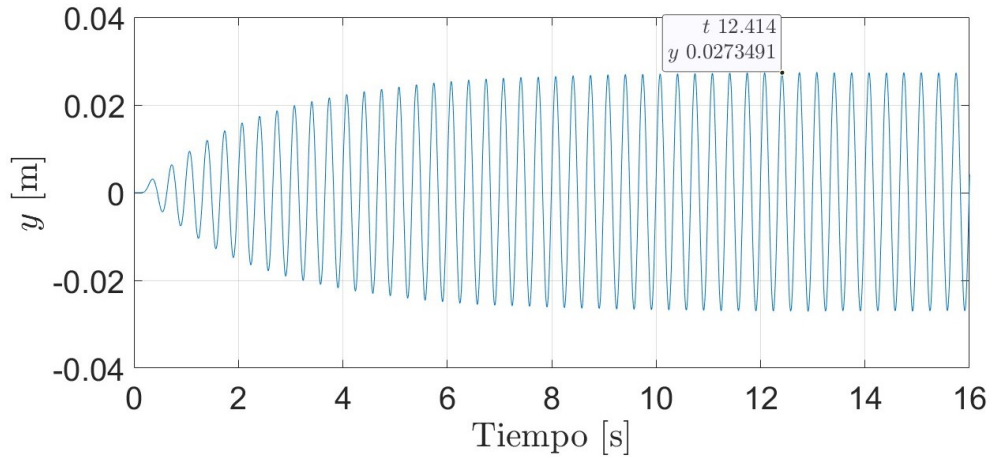


Figura 4.8: Respuesta en el tiempo bajo condición de resonancia,  $\Omega = \omega_a = 1.24$  Hz.

El coeficiente de amortiguamiento del sistema,  $c_a$ , se obtiene al aplicar la FRF al histórico de datos de la respuesta en el tiempo bajo condición de resonancia. La magnitud de las frecuencias laterales, se obtiene de la gráfica de la función de respuesta en frecuencia (ver Figura 4.9),

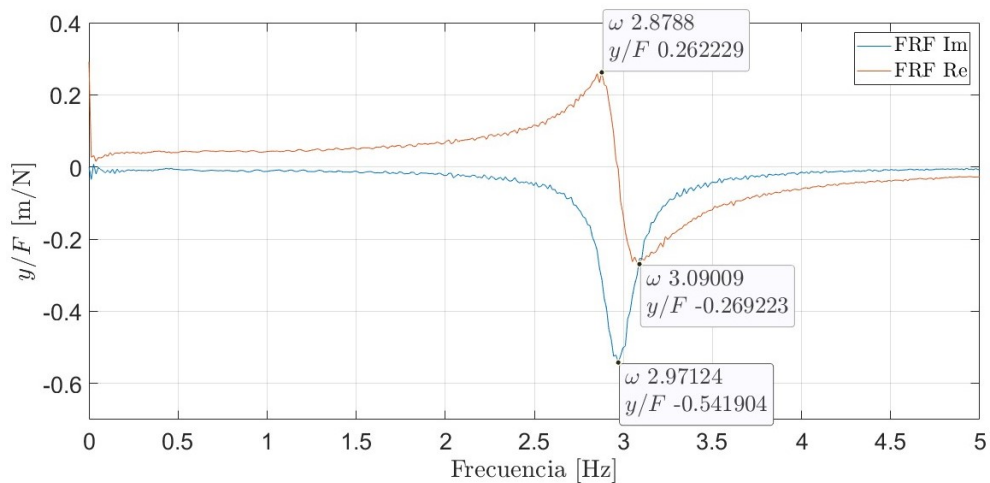


Figura 4.9: Gráfica de función de respuesta en frecuencia (FRF).

$$f_{a1} = 2.8788 \text{ [Hz]}$$

$$f_{a2} = 3.09009 \text{ [Hz]}$$

De la relación:  $2\zeta_a\omega_a = c_a/m_a = f_{a2} - f_{a1}$ , se obtiene

$$c_a = m_a(f_{a2} - f_{a1}) = 0.8326(3.09009 - 2.8788) \text{ [kg/s]} = 0.176 \text{ [N.s/m]}$$

$$c_a = 0.176 \text{ [N.s/m]} \tag{4.6}$$

Por lo tanto,

$$\zeta_a = (f_{a2} - f_{a1})/2\omega_a$$

$$\zeta_a = 0.03557$$

### 4.2.3. Sistema primario no lineal, tipo Duffing

Suele nombrarse como sistema tipo Duffing, a aquel cuya función de rigidez está dada por la suma de dos términos, un término lineal y otro cúbico [15, 71]. Para efectos del sistema primario no lineal, tipo Duffing, la Ecuación (4.7) modela su dinámica, donde  $k_1$  y  $k_3$  son, el término lineal y el término cúbico de rigidez, respectivamente.

$$M\ddot{x} + c_1\dot{x} + k_1x + k_3x^3 = F(t) \tag{4.7}$$

La Tabla 4.6, presenta los valores de los parámetros físicos del sistema primario Duffing. Nótese que, los términos de rigidez son, ambos de magnitud positiva, lo cual indica la presencia de un resorte duro.

Tabla 4.6: Parámetros sistema primario no lineal, tipo Duffing.

$M = 2.947 \text{ [kg]}$
$k_1 = 830 \text{ [N/m]}$
$k_3 = 4.3833 \times 10^5 \text{ [N/m}^3\text{]}$
$c_1 = 2.1015 \text{ [N.m/s]}$

Se estima teóricamente la frecuencia principal aproximada del sistema, empleando la relación descrita para el caso lineal,  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , donde  $k$  corresponde al término lineal de rigidez  $k_1$ . De esta manera, se obtiene

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_1}{M}} = \sqrt{\frac{830 \text{ [N/m]}}{2.947 \text{ [kg]}}} = 16.7822 \text{ [rad/s]} = 2.67 \text{ [Hz]} \quad (4.8)$$

El sistema es excitado mediante una fuerza externa sinusoidal con amplitud  $F_0 = 6.59 \text{ N}$ , aplicando un barrido frecuencial entre los 0.1 y los 10 Hz ( ver Tabla 4.7), presentando la respuesta en el tiempo que describe la Figura 4.10.

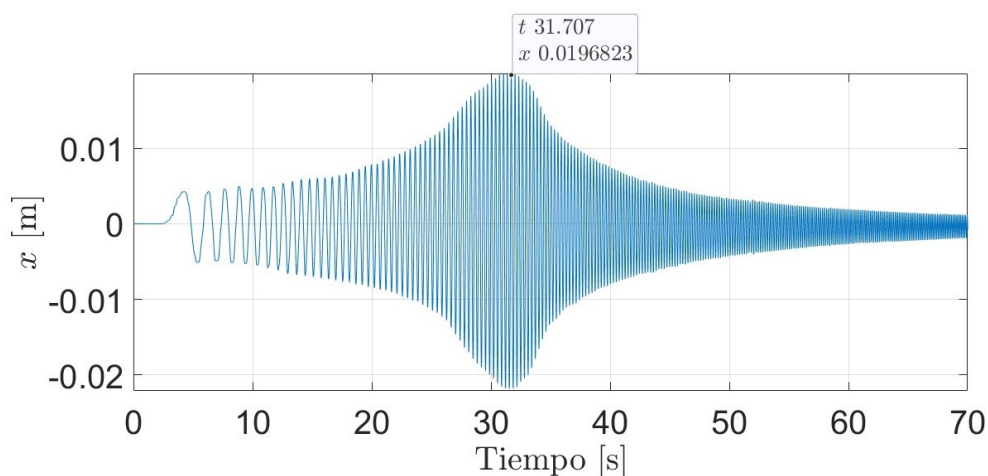


Figura 4.10: Respuesta en el tiempo del sistema primario Duffing ante barrido frecuencial.

Tabla 4.7: Parámetros de excitación sistema primario no lineal, tipo Duffing.

$F = 6.59 \text{ [N]} \sin(\Omega t)$
$\Omega = 0.1 \sim 10 \text{ [Hz]}$

Debido a que la transformada de Fourier es una construcción lineal, la respuesta en frecuencia no ofrece resultados exactos para el estudio de sistemas no lineales [23]. Sin embargo, permite tener indicios del espectro de frecuencias que afectan al sistema.

La respuesta en el tiempo (ver Figura 4.10) muestra una amplitud máxima de  $x \approx 0.0197 \text{ m}$ , tras 31.707 s de operación. A diferencia del caso lineal, esta amplitud puede tener lugar debido a la presencia de resonancia principal ( $\Omega = \omega_n$ ), resonancia

super-armónica ( $\Omega = \frac{1}{3}\omega_n$ ), o, resonancia sub-armónica ( $\Omega = 3\omega_n$ ) [6]. Obteniendo la respuesta en frecuencia, se determina de forma aproximada, la frecuencia en la cual el sistema no lineal presenta la oscilación de mayor amplitud.

La Figura 4.11 presenta un pico resonante en  $\omega_n \approx 2.98$  Hz. Comparando este valor de frecuencia con el valor teórico obtenido (Ecuación (4.8)), se puede determinar que la situación en cuestión obedece a la presencia de resonancia primaria,  $\Omega \approx \omega_n$ . Ahora, es correcto esperar que para diferentes valores en la amplitud de excitación  $F_0$ , la frecuencia principal  $\omega_n$  tome valores a la izquierda o a la derecha del valor experimental obtenido; al interior del ancho de banda.

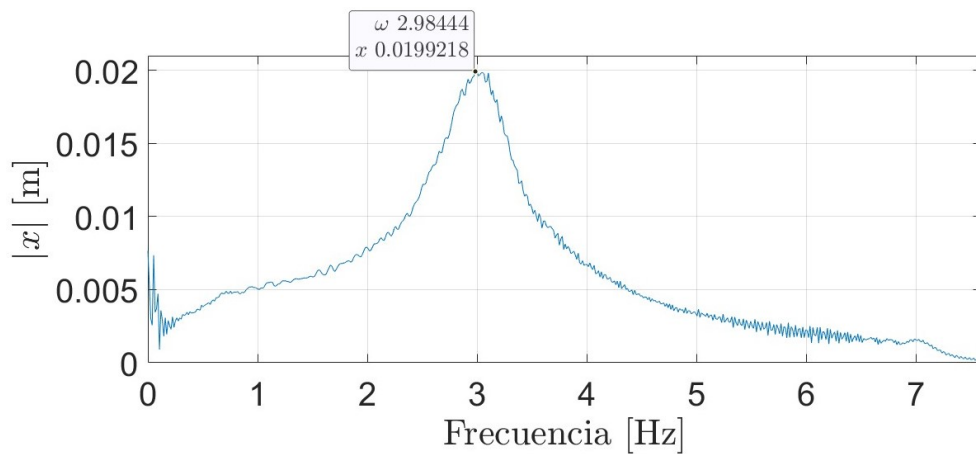


Figura 4.11: Identificación de  $\omega_n$  mediante la respuesta en frecuencia.

El sistema es excitado a la condición de resonancia principal mediante una fuerza externa sinusoidal con amplitud  $F_0 = 0.659$  N y frecuencia  $\Omega = \omega_n = 2.98$  Hz, registrando una amplitud máxima de oscilación periódica en  $x \approx 0.0209$  m, como se presenta en la Figura 4.12.

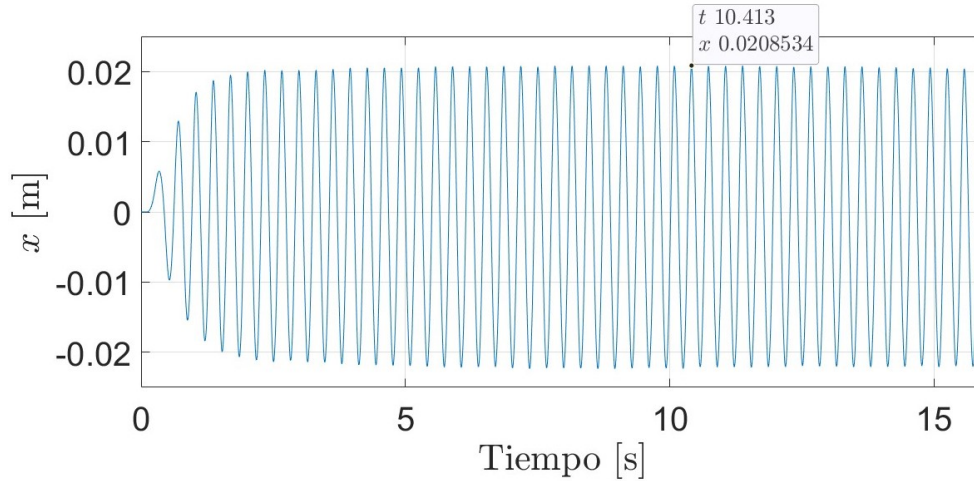


Figura 4.12: Respuesta en el tiempo bajo condición de resonancia,  $\Omega = \omega_n = 2.98$  Hz.

Con el propósito de estimar el coeficiente de amortiguamiento ( $c_1$ ) del sistema, se encuentra la función de respuesta en frecuencia para el sistema excitado. La Figura 4.13 presenta la FRF del sistema. La magnitud de las frecuencias laterales, son

$$f_{l1} = 2.50905 \text{ [Hz]}$$

$$f_{l2} = 3.22214 \text{ [Hz]}$$

De la relación:  $2\zeta_1\omega_n = c_1/M = f_{l2} - f_{l1}$ , se obtiene

$$c_1 = M(f_{l2} - f_{l1}) = 2.947(3.22214 - 2.50905) \text{ [kg/s]} = 2.1015 \text{ [N.s/m]}$$

$$c_1 = 2.1015 \text{ [N.s/m]} \quad (4.9)$$

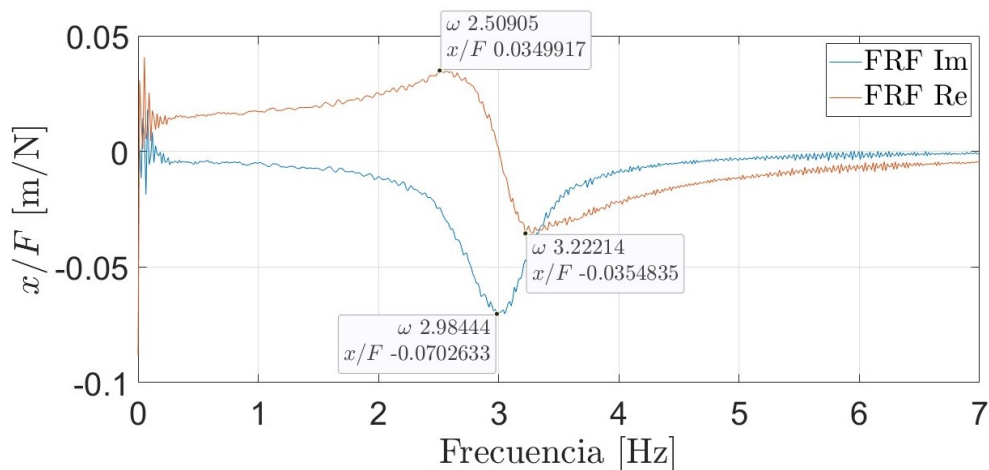


Figura 4.13: Gráfica de función de respuesta en frecuencia (FRF).

#### 4.2.4. Absorbedor pasivo no lineal, tipo Duffing

El absorbedor pasivo de vibraciones no lineal tipo Duffing es descrito por la Ecuación (4.10), y cuenta con los valores de parámetros físicos consignados en la Tabla 4.8.

$$m_a \ddot{y} + c_a \dot{y} + k_a y + k_{a3} y^3 = F(t) \quad (4.10)$$

Tabla 4.8: Parámetros físicos del absorbedor pasivo no lineal tipo Duffing.

$m_a = 1.5826 \text{ [kg]}$
$k_a = 718 \text{ [N/m]}$
$k_{a3} = 3.0912 \times 10^5 \text{ [N/m}^3\text{]}$
$c_a = 0.96135 \text{ [N.m/s]}$

Tomando las mismas consideraciones de análisis que para el sistema primario no lineal, la frecuencia principal del absorbedor tipo Duffing se estima a continuación

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k_a}{m_a}} = \sqrt{\frac{718 \text{ [N/m]}}{1.5826 \text{ [kg]}}} = 21.2998 \text{ [rad/s]} = 3.39 \text{ [Hz]} \quad (4.11)$$

El sistema es excitado mediante una fuerza externa sinusoidal con amplitud  $F_0 = 1.977 \text{ N}$ , aplicando un barrido frecuencial entre los 0.1 y los 10 Hz ( ver Tabla 4.9).

Tabla 4.9: Parámetros del barrido frecuencial aplicado al absorbedor pasivo no lineal tipo Duffing.

$F = 1.977 \text{ [N]} \sin(\Omega t)$
$\Omega = 0.1 \sim 10 \text{ [Hz]}$

El histórico de la respuesta en el tiempo (ver Figura 4.14) muestra una amplitud máxima de  $y \approx 0.0101 \text{ m}$ , tras 42.296 s de operación, lo cual indica la presencia de resonancia.

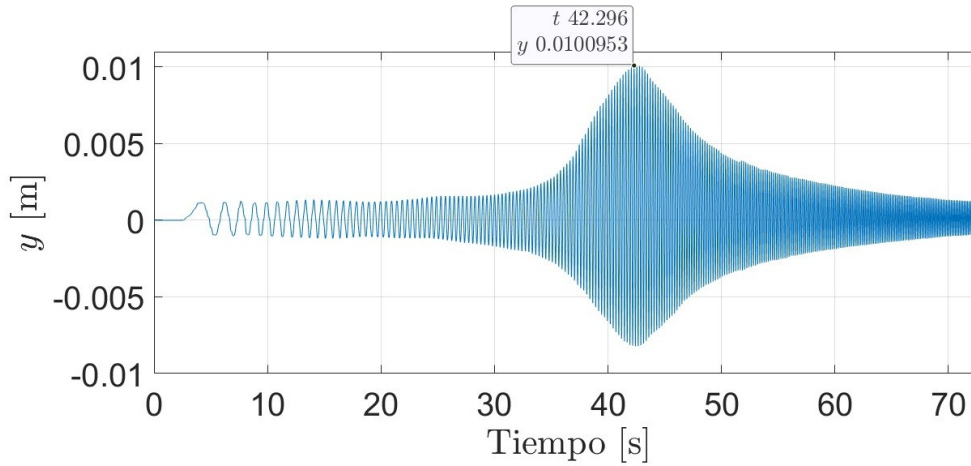


Figura 4.14: Respuesta en el tiempo, barrido frecuencial.

La respuesta frecuencial (aproximada) (ver Figura 4.15), permite identificar la ubicación de la frecuencia principal del absorbedor pasivo no lineal, alrededor de  $\omega_{an} = 4.04088$  Hz. Sin embargo, es posible evidenciar una segunda resonancia en  $\omega_{am} \approx 7.01$  Hz. De tal forma que, la presencia de una segunda resonancia puede estar relacionada con los NNMs (ver índice 2.4), o bien, con la masa propia del resorte no lineal. Es importante recordar que, para este caso se pueden presentar resonancias internas cuando  $\omega_{an} \approx 3\omega_{am}$  [2]. De igual forma, el sistema puede exhibir resonancias combinadas cuando  $\Omega \approx \frac{1}{2}|\pm\omega_{an} \pm \omega_{am}| \approx |\pm 2\omega_{an} \pm \omega_{am}|$

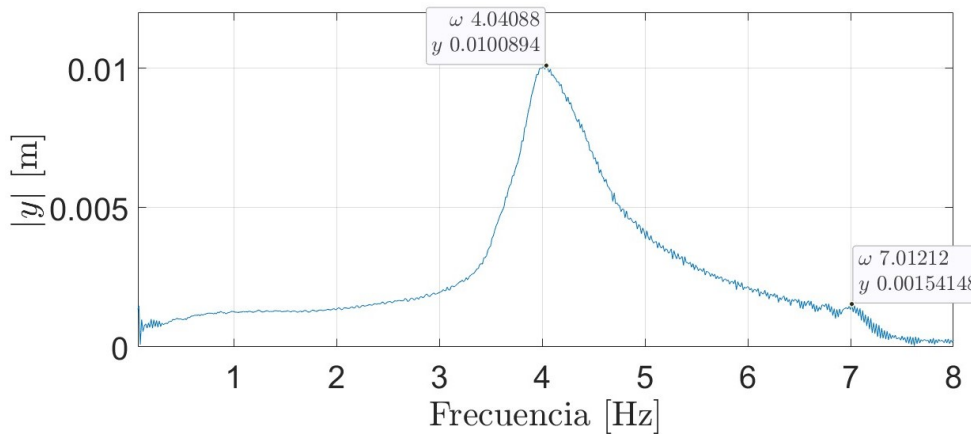


Figura 4.15: Identificación de  $\omega_a$  mediante la respuesta frecuencial (aproximada).

El sistema es excitado a la condición de resonancia mediante una fuerza externa sinusoidal con amplitud  $F_0 = 1.977$  N y frecuencia  $\Omega \approx \omega_a \approx 4.04088$  Hz, se registra una amplitud máxima de oscilación periódica en  $y \approx 0.0097$  m, como se presenta en la Figura 4.16.



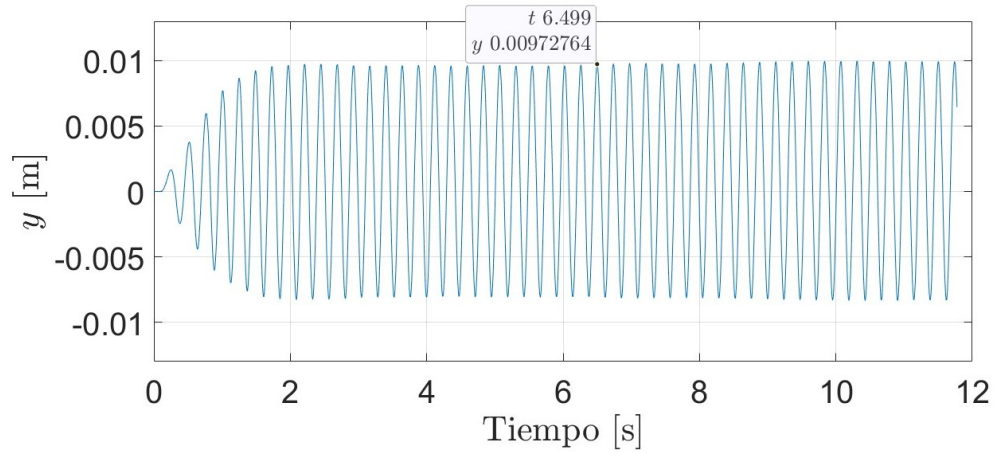


Figura 4.16: Respuesta en el tiempo bajo condición de resonancia principal.

Las frecuencias laterales expuestas por la FRF en la Figura 4.17, son

$$f_{a1} = 3.80319 \text{ [Hz]}$$

$$f_{a2} = 4.41064 \text{ [Hz]}$$

De la relación:  $2\zeta_a\omega_a = c_a/m_a = f_{a2} - f_{a1}$ , se obtiene

$$c_a = m_a(f_{a2} - f_{a1}) = 1.5826(4.41064 - 3.80319) \text{ [kg/s]} = 0.96135 \text{ [N.s/m]}$$

$$c_a = 0.96135 \text{ [N.s/m]} \quad (4.12)$$

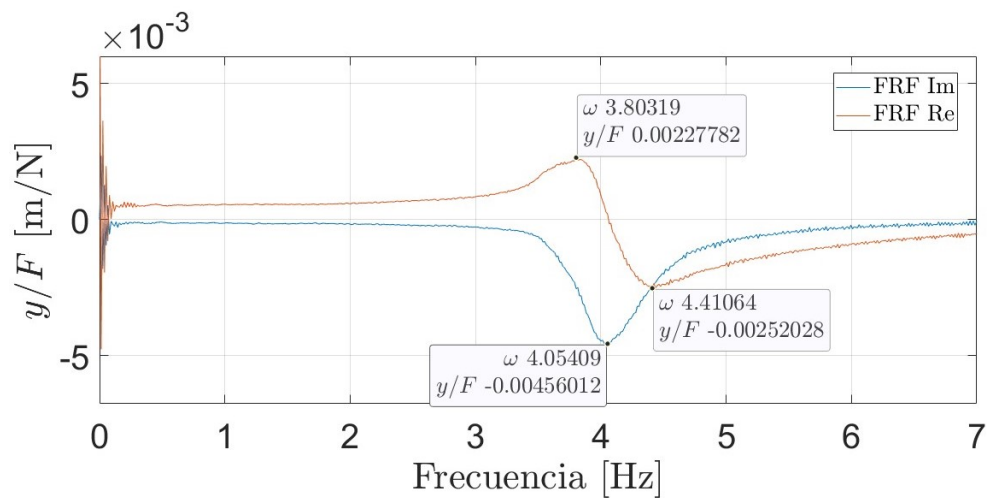


Figura 4.17: Gráfica de función de respuesta en frecuencia (FRF).

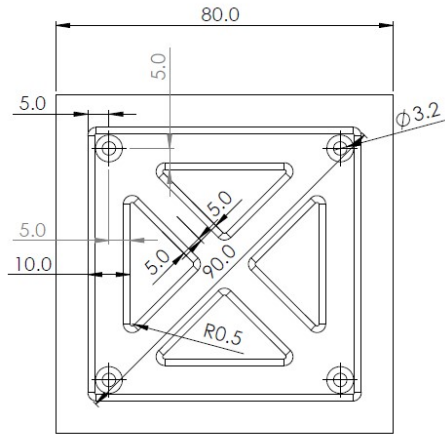
#### 4.2.5. Desarrollo constructivo y caracterización de los resortes no lineales

La construcción de los resortes no lineales, con función de rigidez compuesta por la suma de un término lineal y un término cúbico, ambos con magnitud positiva, toma como punto de partida las dimensiones físicas de la plataforma experimental. La planta rectilínea modelo 210-D, presenta la condición de diseño por la cual la distancia entre masas ( $M$  y  $m_a$ ), definida físicamente por los elementos de rigidez, debe ser de alrededor de 12 centímetros.

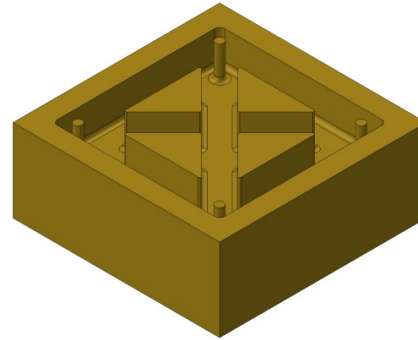
Por otra parte, Braun, *et al* [2], definen los tres tipos más comunes de no linealidades en sistemas mecánicos: no linealidad de tipo geométrico, la cual puede afectar significativamente la dinámica del sistema, frecuentemente relacionada con grandes deformaciones o rotaciones. No linealidad inercial, la cual tiene mayor presencia en relación con la dinámica de los fluidos. No linealidad natural/propia del material, en la cual la relación esfuerzo-deformación del material, no obedece a la ley generalizada de Hooke, como es el caso de los materiales elasto-plásticos.

Con base en estas consideraciones, y luego de varias pruebas con diferentes materiales, metales y elastómeros, se construye un conjunto de (3) resortes no lineales, combinando la no linealidad de tipo geométrico, propio de la estructura tipo  $X$  que forman cuatro placas metálicas vinculadas en forma de romboide, y la no linealidad de materiales elastómeros, en un arreglo en paralelo.

Un arreglo de placas (vigas), quienes se encargan de la disposición de bandas de neopreno, precargadas, a tensión (1 banda) y compresión (2 bandas), junto a un pieza de silicona caracterizada por ofrecer una gran capacidad de oposición al desgarre. La capa de silicona se obtiene luego de un proceso de mezclado de los componentes del polímero, para enseguida ser vertido en una matriz de resina acetal, con las dimensiones expuestas en la Figura 4.18. Una vez que la pieza se ha secado, se encuentra lista para ser empleada en la construcción del resorte. La Figura 4.19 presenta evidencia del proceso constructivo y la caracterización estática de la relación fuerza-deformación del resorte.



(a) Dimensiones de la matriz

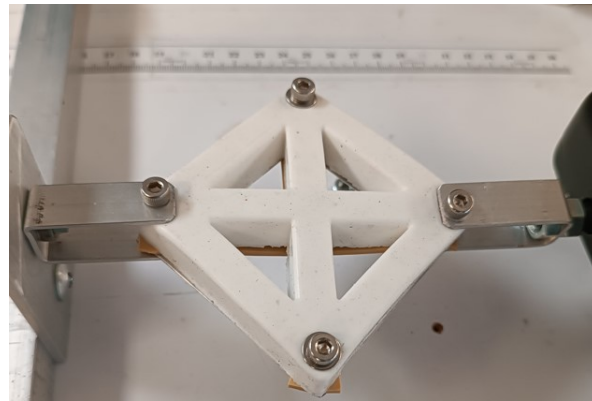


(b) Vista 3D de la matriz

Figura 4.18: Matriz para la pieza de silicona.



(a) Secado de la pieza de silicona



(b) Caracterización estática, fuerza vs. deformación

Figura 4.19: Evidencia constructiva y de caracterización.

Los resortes son referidos como  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ . A continuación se presenta una descripción de los materiales empleados para la construcción de cada resorte no lineal. De igual manera, se describe el resultado de la aproximación polinomial realizada mediante la herramienta *Curve Fitter* de MATLAB<sup>®</sup>.

### Resortes R1 y R3

Se trata de una pareja de resorte de silicona, la cual actúa en paralelo con bandas de neopreno y placas de bronce de 0.6 mm de espesor, vinculadas en forma de rom-

boide. Su función de rigidez es obtenida teniendo en cuenta simplemente términos de primer y tercer orden.

La Figura 4.20 muestra la data correspondiente a  $R_1$  y su respectiva curva de ajuste, cuya función determina la función de rigidez no lineal (Ecuación (4.13)).

$$f(x) = 718.0811x + 3.0912 \times 10^5 x^3 \quad (4.13)$$

Aunque  $R_1$  y  $R_3$  han sido construidos bajos las mismas consideraciones, su comportamiento no lineal es descrito por diferentes funciones. Para el caso de  $R_3$ , la Figura 4.21 presenta su curva de ajuste polinomial, descrita por la siguiente función

$$f(x) = 1.264110^3 x + 2.8926 \times 10^5 x^3 \quad (4.14)$$

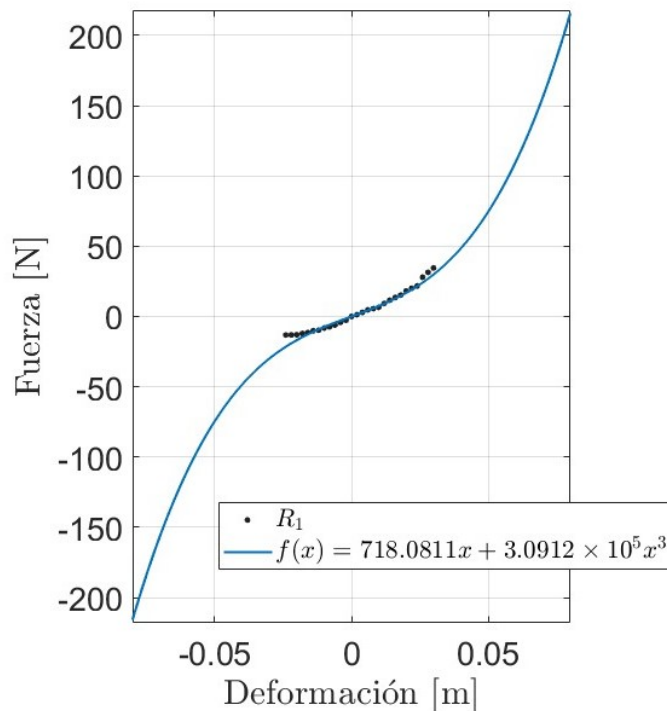


Figura 4.20: Gráfica de ajuste polinomial para R1.

## Resorte R2

Resorte de silicona, el cual actúa en paralelo con bandas de neopreno y placas de acero blando de 0.9 mm de espesor, vinculadas en forma de romboide. Su función de rigidez es obtenida teniendo en cuenta simplemente términos de primer y tercer orden.

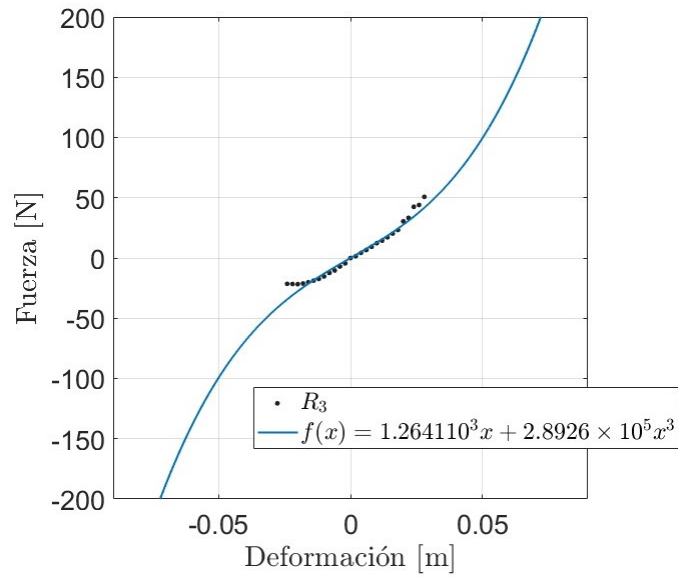


Figura 4.21: Gráfica de ajuste polinomial para  $R_3$ .

La Figura 4.22 muestra la data correspondiente a  $R_2$  y su respectiva curva de ajuste, cuya función no lineal se describe en la Ecuación (4.15).

$$f(x) = 830.2784x + 4.3833 \times 10^5 x^3 \quad (4.15)$$

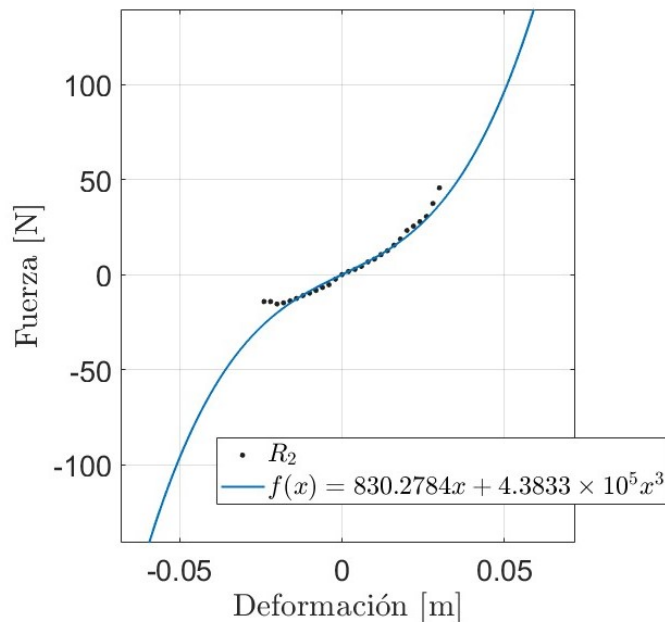


Figura 4.22: Gráfica de ajuste polinomial para  $R_2$ .

Es importante mencionar que  $R_2$  y  $R_1$ , son empleados en la constitución del sistema primario tipo Duffing y el absorbedor tipo Duffing, respectivamente.

### 4.3. Evaluación experimental de absorbedores de vibraciones

A continuación se describe el desarrollo experimental de cada uno de los cinco casos que comprende este capítulo. En cada caso se estudia la situación de operación en resonancia y se evalúa el desempeño del sistema secundario, como absorbedor de las vibraciones que afectan al sistema primario.

#### 4.3.1. Caso 1: Sistema primario lineal - Absorbedor pasivo lineal

Las ecuaciones que modelan el sistema de dos grados de libertad, en el que ambos sub-sistemas presentan dinámica lineal, surge tras la suposición de que las Ecuaciones (3.3) y (3.4) presentan las siguientes modificaciones

$$M\ddot{x} + c_1\dot{x} + k_1x + \cancel{k_3}x^3 - k_a(y - x) - \cancel{k_{a3}}(y - x)^3 = F(t)$$

$$m_a\ddot{y} + c_a\dot{y} + \cancel{k_{ac}}y^3 + k_a(y - x) + \cancel{k_{a3}}(y - x)^3 = u(t)$$

Como resultado se obtiene el conjunto de ecuaciones (4.16) y (4.17). La Figura 4.23 presenta una fotografía de la plataforma experimental, señalando los componentes físicos que conforman el sistema. Es importante recordar que la frecuencia natural, de ambos sistemas, es previamente identificada y registrada en (4.2) y (4.5), para el sistema primario y el absorbedor, respectivamente. Al igual que el valor físicos de los parámetros (ver Tablas 4.2 y 4.4).

$$M\ddot{x} + c_1\dot{x} + k_1x - k_a(y - x) = F(t) \quad (4.16)$$

$$m_a\ddot{y} + c_a\dot{y} + k_a(y - x) = 0 \quad (4.17)$$

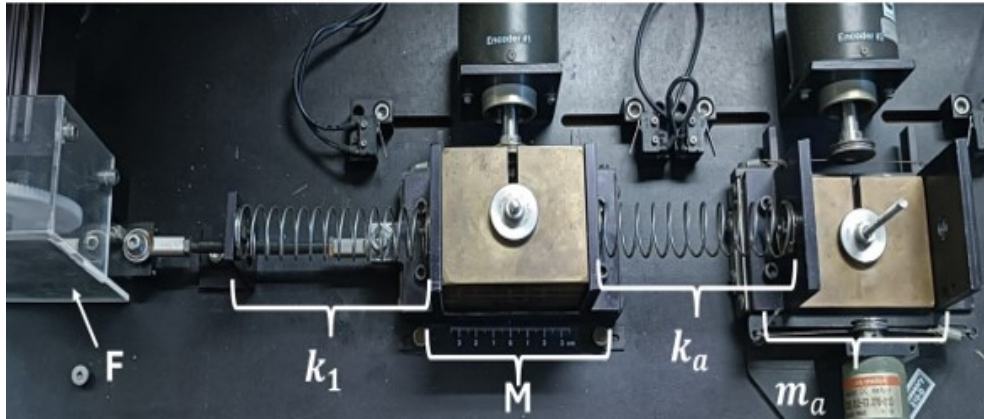


Figura 4.23: Plataforma experimental, Caso 1.

El sistema es excitado mediante un barrido frecuencial para  $0.1 < \Omega < 7$  Hz, con una amplitud de la fuerza externa de  $F_0 = 0.7908$  N. La Figura 4.24 expone la presencia de dos resonancias, las cuales corresponden al sistema primario ( $\Omega = \omega_n$ ) y el absorbedor ( $\Omega = \omega_a$ ).

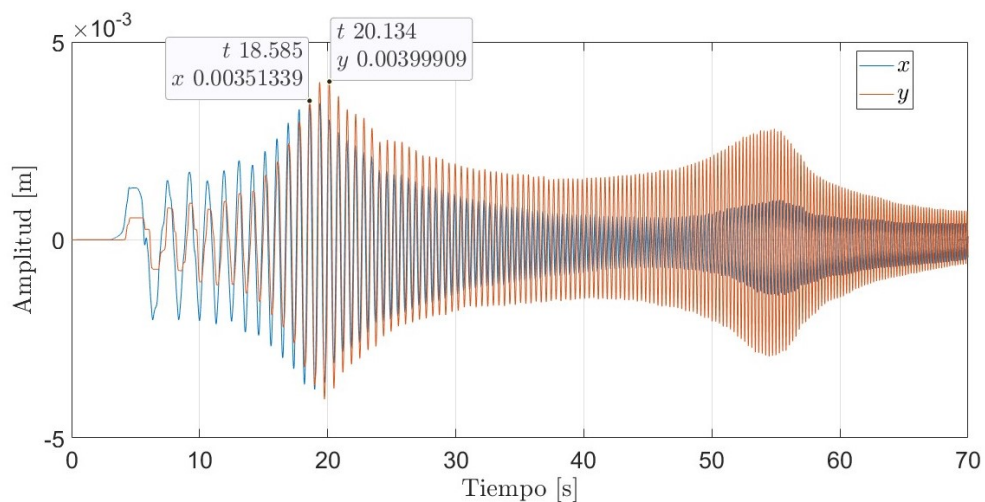


Figura 4.24: Barrido frecuencial para  $0.1 < \Omega < 7$  Hz.

La condición de operación más interesante, es el caso de resonancia del sistema primario, el cual tiene lugar cuando  $\Omega = \omega_n = 1.24$  Hz. Bajo esta condición y conservando la amplitud de la fuerza de excitación, el sistema exhibe la dinámica descrita por la Figura 4.25, en la cual se aprecia que la amplitud de las oscilaciones son de alrededor de 3.7 mm, para ambos subsistemas.

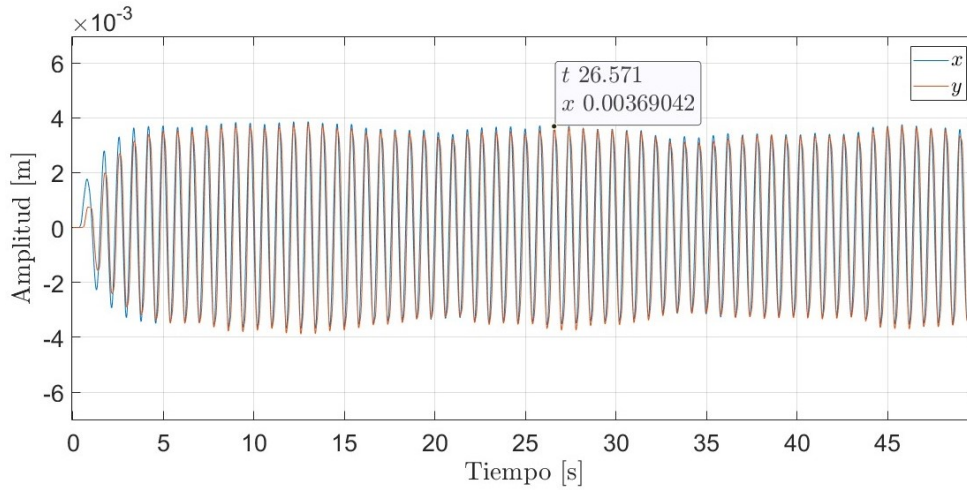


Figura 4.25: Respuesta en el tiempo,  $\Omega = \omega_n = 1.24$  Hz.

Una comparativa de las oscilaciones que experimenta el sistema primario lineal, sin y con absorbedor pasivo de vibraciones, es presentada en la Figura 4.26. Se hace evidente el correcto desempeño del absorbedor pasivo de vibraciones al reducir notoriamente la amplitud de respuesta del sistema primario lineal, alrededor de la frecuencia de operación.

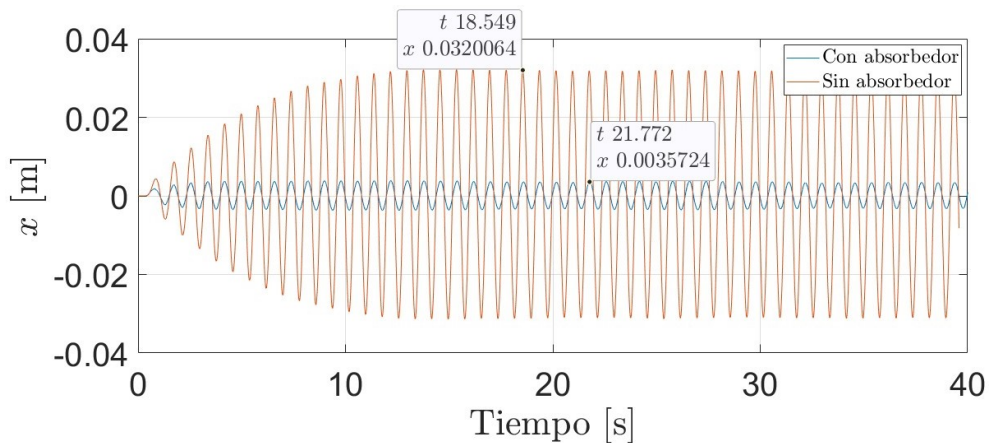


Figura 4.26: Respuesta en el tiempo del sistema primario, sin y con absorbedor pasivo de vibraciones.

### 4.3.2. Caso 2: Sistema primario lineal - Absorbedor pasivo tipo Duffing

El absorbedor pasivo de vibraciones tipo Duffing es acoplado al sistema primario lineal. Situación que es descrita a partir de las Ecuaciones (3.3) y (3.4), luego de dar



valor nulo a algunos de sus términos, como se muestra a continuación

$$M\ddot{x} + c_1\dot{x} + k_1x + k_3x^3 - k_a(y-x) - k_{a3}(y-x)^3 = F(t)$$

$$m_a\ddot{y} + c_a\dot{y} + k_{ac}y^3 + k_a(y-x) + k_{a3}(y-x)^3 = u(t)$$

por lo tanto, la dinámica del sistema general, es:

$$M\ddot{x} + c_1\dot{x} + k_1x - k_a(y-x) - k_{a3}(y-x)^3 = F(t) \quad (4.18)$$

$$m_a\ddot{y} + c_a\dot{y} + k_a(y-x) + k_{a3}(y-x)^3 = 0 \quad (4.19)$$

La Figura 4.27 presenta una fotografía de la plataforma experimental, señalando los componentes físicos que conforman el sistema. Es importante recordar que la frecuencia natural de ambos sistemas, es identificada y registrada en (4.2) y (4.11), para el sistema primario y el absorbedor, respectivamente. Al igual que el valor físicos de los parámetros (ver Tablas 4.2 y 4.8).

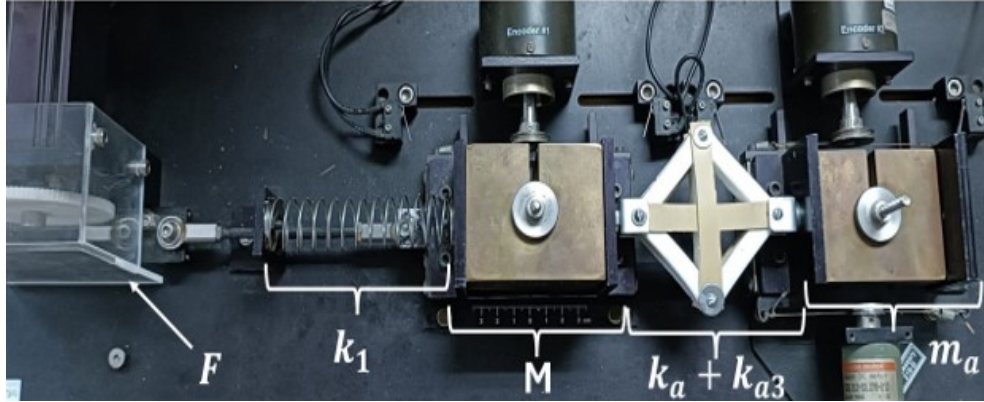
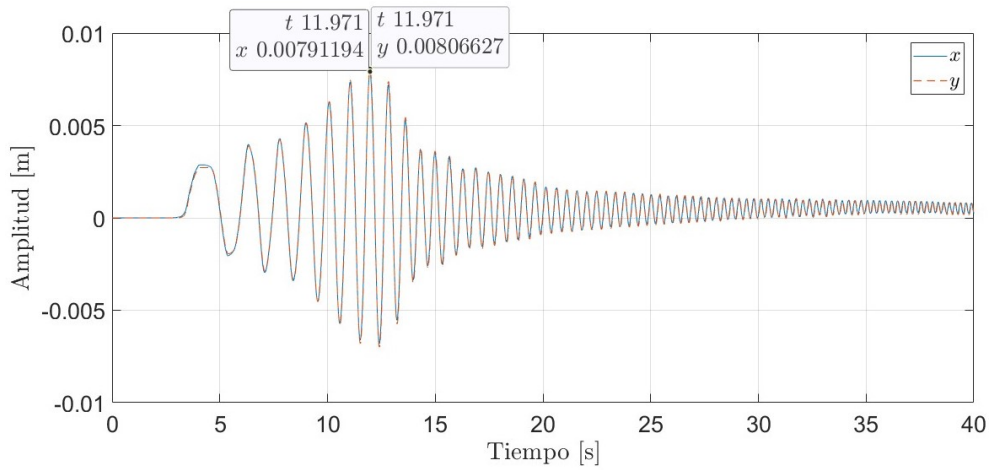
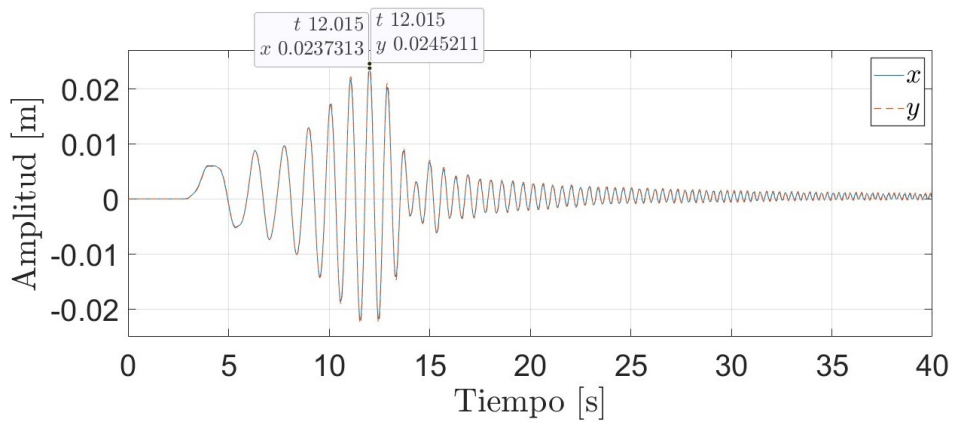


Figura 4.27: Plataforma experimental, Caso 2.

En un primer momento, el sistema es excitado mediante un barrido frecuencial para  $0.1 < \Omega < 10$  Hz, con amplitud de la fuerza externa de excitación  $F_0 = 0.7908$  N, presentando la respuesta en el tiempo que muestra la Figura 4.28(a). Sin embargo, tras obtener la respuesta frecuencial, se identifica solamente un pico de resonancia (ver Figura 4.29). Esta situación motiva el desarrollo de una nueva prueba en la que la amplitud de la excitación se incrementa,  $F_0 = 1.318$  N, y se obtiene el histórico de datos que presenta la Figura 4.28(b).



(a)  $F_0 = 0.7908$  N



(b)  $F_0 = 1.318$  N

Figura 4.28: Barrido frecuencial para  $0.1 < \Omega < 10$  Hz.

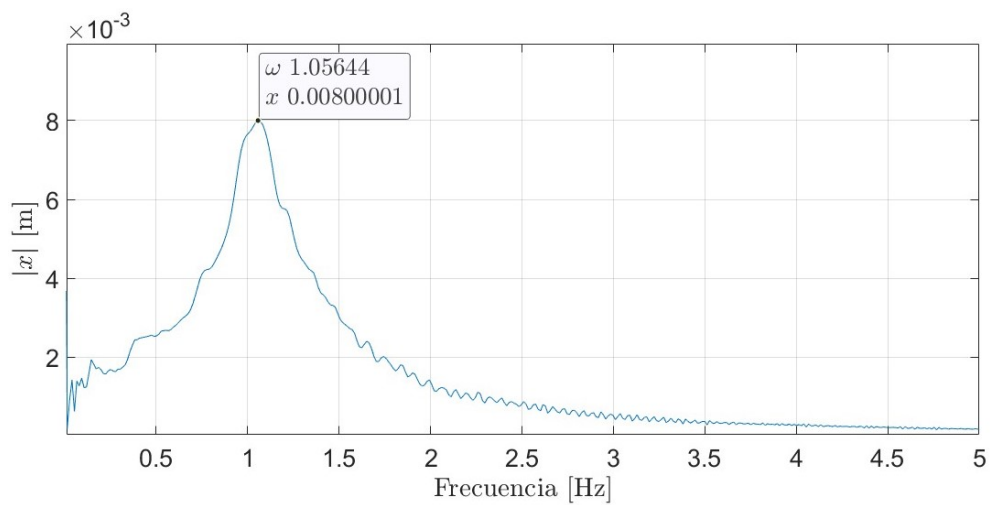


Figura 4.29: Respuesta frecuencial, Caso 2.

Estas dos pruebas permiten identificar que el acople entre sistemas se efectúa de tal forma que las dos masas se desplazan en conjunto, lo cual puede ser interpretado como un único elemento de inercia, modificando así la frecuencia de resonancia del sistema general a  $\omega_n \approx 1$  Hz. Este efecto es probablemente debido al elevado factor de amortiguamiento del absorbedor tipo Duffing.

Para este caso, es preciso concluir que el absorbedor pasivo de vibraciones tipo Duffing, solamente extiende el rango de frecuencia operacional, con un pobre desempeño.

### 4.3.3. Caso 3: Sistema primario tipo Duffing - Absorbedor pasivo tipo Duffing

Se trata del absorbedor pasivo de vibraciones tipo Duffing acoplado al sistema primario no lineal tipo Duffing. Este caso se acerca al problema general de estudio, pues es descrito a partir de las Ecuaciones (3.3) y (3.4), luego de dar valor cero al anclaje  $k_{ac}$  y el control  $u$ , como se muestra a continuación

$$M\ddot{x} + c_1\dot{x} + k_1x + k_3x^3 - k_a(y - x) - k_{a3}(y - x)^3 = F(t)$$

$$m_a\ddot{y} + c_a\dot{y} + \cancel{k_{ac}y^3} + k_a(y - x) + k_{a3}(y - x)^3 = \cancel{u(t)}$$

de esta manera, la dinámica del sistema general de dos grados de libertad, es descrita por las Ecuaciones (4.20) y (4.21).

$$M\ddot{x} + c_1\dot{x} + k_1x + k_3x^3 - k_a(y - x) - k_{a3}(y - x)^3 = F(t) \quad (4.20)$$

$$m_a\ddot{y} + c_a\dot{y} + k_a(y - x) + k_{a3}(y - x)^3 = 0 \quad (4.21)$$

La plataforma experimental se presenta en la Figura 4.30, indicando los componentes físicos que conforman el sistema, cuyos valores se encuentran registrados en las Tablas 4.6 y 4.8. Es importante recordar que la frecuencia natural, de ambos sistemas, es identificada y registrada en (4.8) y (4.11), para el sistema primario y el absorbedor, respectivamente.

Un barrido frecuencial desde 0.1 hasta 10 Hz, con fuerza  $F_0 = 6.59$  N, es aplicado al sistema, obteniendo la respuesta en el tiempo de la Figura 4.31. A simple vista, no

es posible obtener mayor información de ello, hasta que la respuesta frecuencial deja ver la presencia picos resonantes (ver Figura 4.32) en  $\omega = 2.25$  Hz y  $\omega = 5.9$  Hz, lo cual difiere de la caracterización previa realizada. Ante esta situación, es importante mencionar que, es propio de los sistemas no lineales contar con un ancho de banda de operación, por lo tanto no es probable hablar de una única frecuencia natural.

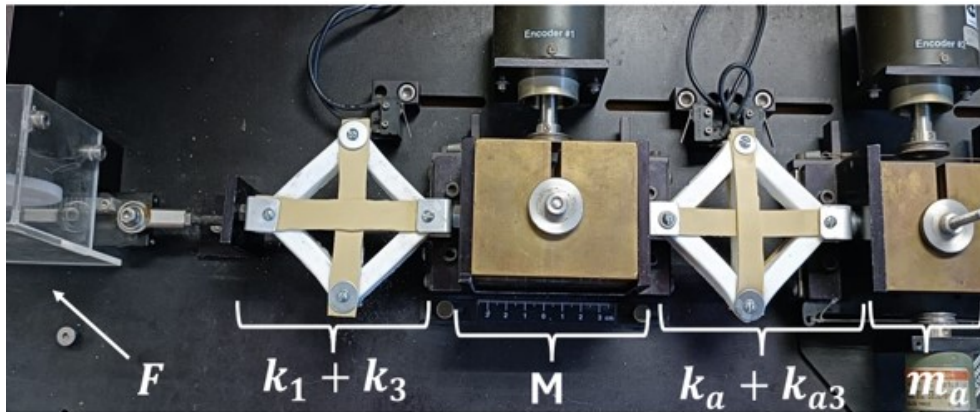


Figura 4.30: Plataforma experimental, Caso 3.

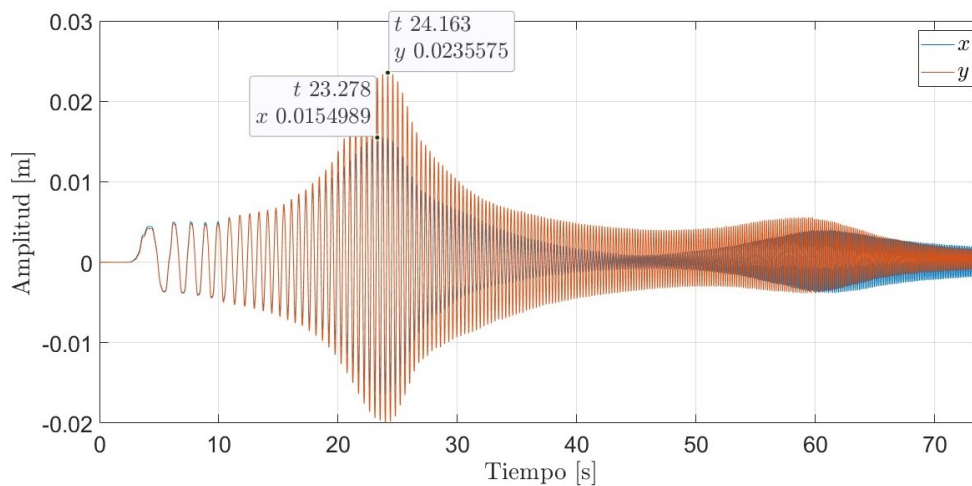


Figura 4.31: Barrido frecuencial para  $0.1 < \Omega < 10$  Hz.

A continuación, en la Figura 4.33 se presenta la respuesta en el tiempo del sistema primario tipo Duffing acoplado al absorbedor tipo Duffing, y sin el absorbedor, con el propósito de evaluar su desempeño.

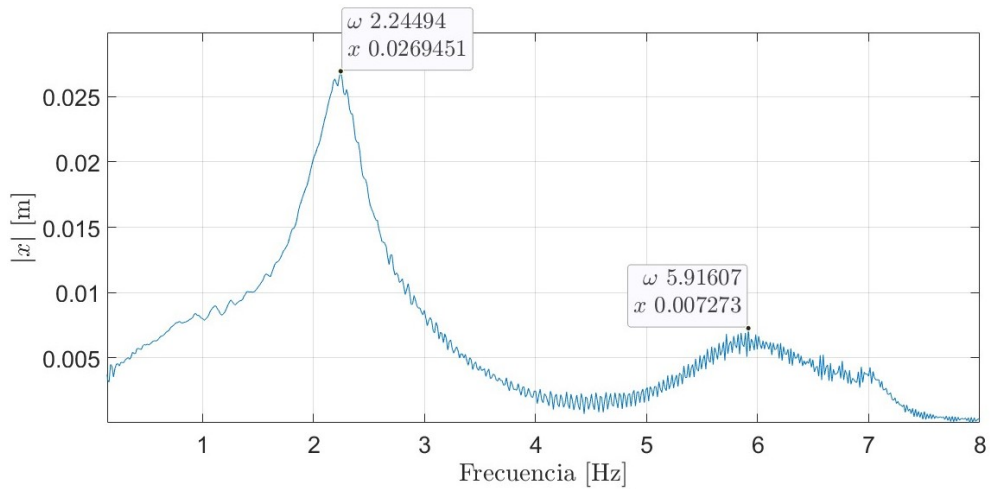


Figura 4.32: Respuesta en frecuencia, sistema primario tipo Duffing.

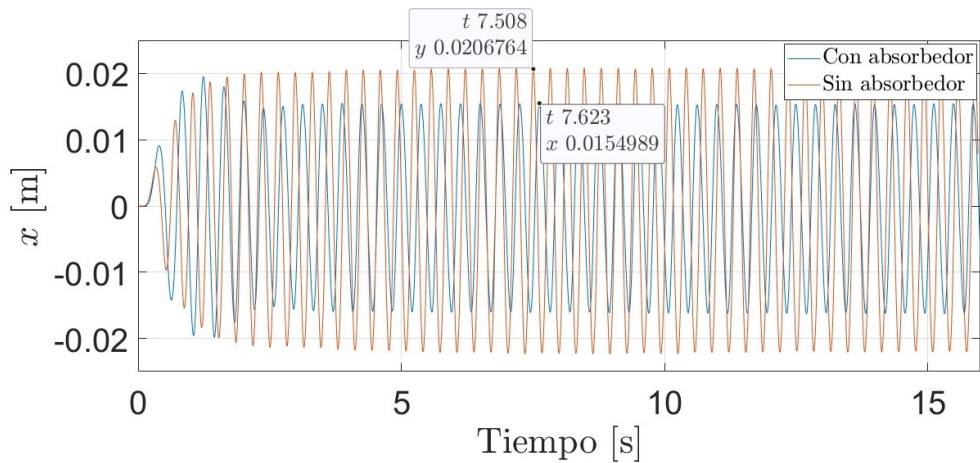


Figura 4.33: Respuesta en el tiempo del sistema primario tipo Duffing, sin y con absorbedor pasivo de vibraciones tipo Duffing.

Una observación general del caso, deja ver que, el absorbedor pasivo de vibraciones tipo Duffing, mejora ligeramente la respuesta dinámica del sistema primario Duffing.

#### 4.3.4. Caso 4: Sistema primario tipo Duffing - Absorbedor pasivo lineal

En este caso se evalúa el desempeño del absorbedor lineal de vibraciones al proteger un sistema tipo Duffing de la presencia de oscilaciones con amplitudes indeseadas. Este caso funge luego de modificar las Ecuaciones (3.3) y (3.4), como se

presenta a continuación

$$M\ddot{x} + c_1\dot{x} + k_1x + k_3x^3 - k_a(y - x) - k_{a3}(y - x)^3 = F(t)$$

$$m_a\ddot{y} + c_a\dot{y} + k_{ac}y^3 + k_a(y - x) + k_{a3}(y - x)^3 = u(t)$$

El sistema general es modelado por las siguientes ecuaciones

$$M\ddot{x} + c_1\dot{x} + k_1x + k_3x^3 - k_a(y - x) = F(t)$$

$$m_a\ddot{y} + c_a\dot{y} + k_a(y - x) = 0$$

La Figura 4.34 presenta la plataforma experimental, e indica los respectivos componentes físicos que conforman el sistema, los cuales obedecen a los valores registrados en las Tablas 4.6 y 4.4. La frecuencia natural, de ambos sistemas, es identificada y registrada en (4.8) y (4.5), para el sistema primario y el absorbedor, respectivamente.

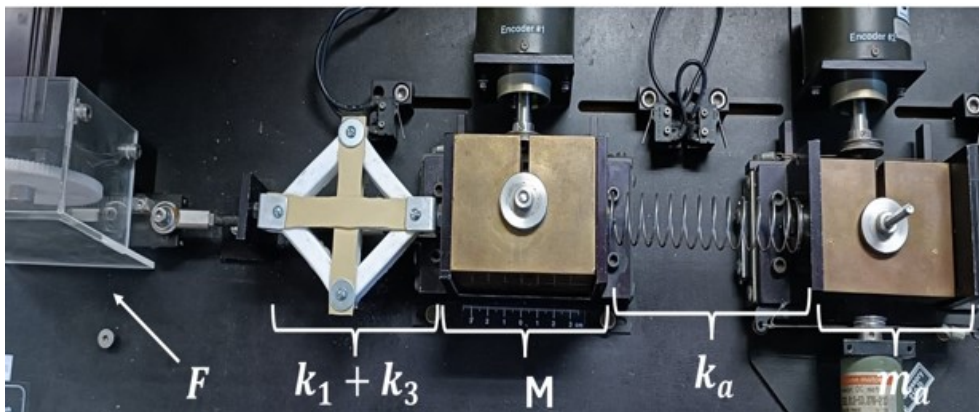


Figura 4.34: Plataforma experimental, Caso 4.

Continuando con la secuencia lógica de estudio aplicada a los casos anteriores, el sistema es excitado mediante un barrido frecuencial entre 0.1 y 3 Hz, con una amplitud de 3.3 N, como lo presenta la Figura 4.35. Allí, se puede evidenciar que el absorbedor pasivo lineal presenta un desempeño insuficiente a la hora de contrarrestar las vibraciones que afectan al sistema primario Duffing.

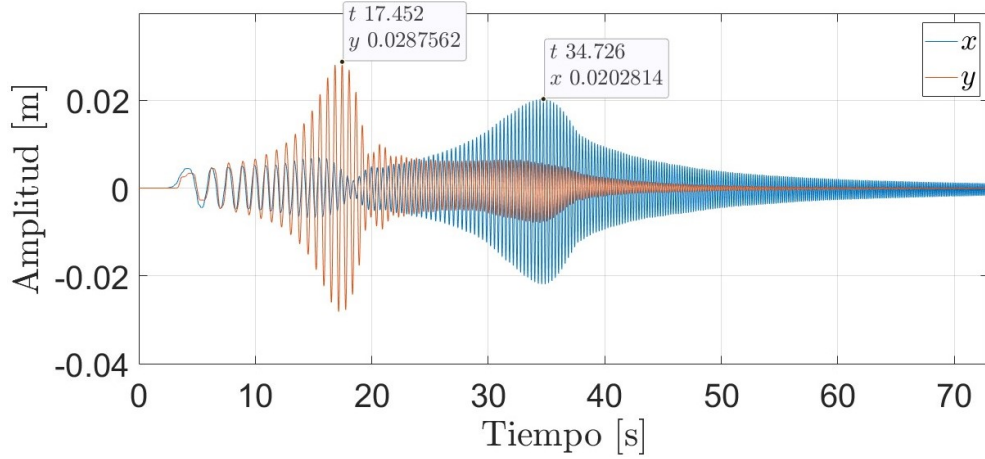


Figura 4.35: Barrido frecuencial para  $0.1 < \Omega < 10$  Hz.

En este caso, ambos sistemas adolecen las vibraciones ocasionadas por la fuerza de excitación externa, de manera independiente. Por lo que, el absorbedor lineal pasivo de vibraciones no es útil para el caso de absorción de vibraciones no lineales.

#### 4.3.5. Caso 5: Sistema primario tipo Duffing - Absorbedor esencialmente no lineal

Finalmente, el problema general de estudio, descrito por las Ecuaciones (3.3) y (3.4), es tratado a continuación. Para este caso, es posible implementar el ENA de manera física o en forma virtual. Sin embargo, la construcción física de un resorte con las características propias del anclaje esencialmente no lineal, resulta ser una tarea con un amplio grado de dificultad. Por otra parte, la implementación virtual del absorbedor esencialmente no lineal se hace posible mediante un actuador.

$$M\ddot{x} + c_1\dot{x} + k_1x + k_3x^3 - k_a(y - x) - k_{a3}(y - x)^3 = F(t)$$

$$m_a\ddot{y} + c_a\dot{y} + k_{ac}y^3 + k_a(y - x) + k_{a3}(y - x)^3 = u(t)$$

Mediante la aplicación de una ley de control retroalimentado se inyecta rigidez cúbica pura al absorbedor. Para tales efectos, se puede ver que la Figura 4.36 presenta la plataforma experimental, destacando en ella la presencia de un actuador eléctrico encargado de la implementación del anclaje  $k_{ac}$ .

El desempeño del ENA es evaluado para diferentes valores de  $k_{ac}$ , como se presenta en la Figura 4.37. En ella se aprecia que, valores de  $k_{ac} = -1 \times 10^7$ ,  $k_{ac} = -3 \times 10^7$



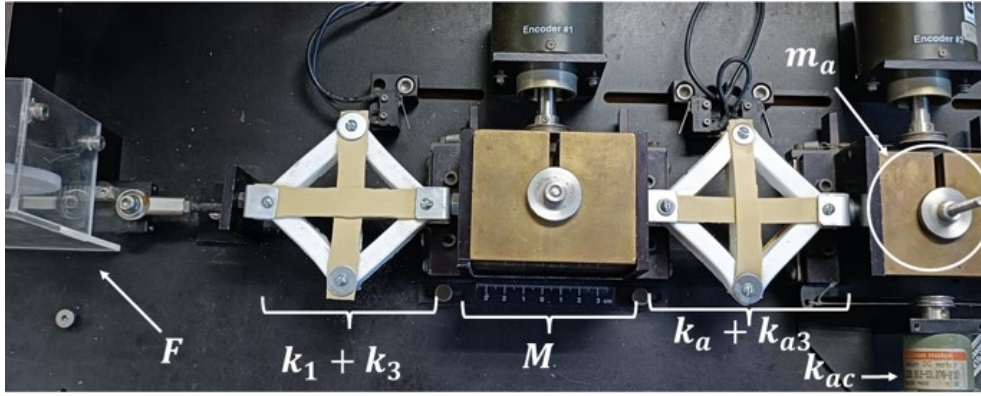


Figura 4.36: Plataforma experimental, Caso 5.

y  $k_{ac} = -5 \times 10^7$ , son implementados, destacando que la magnitud de  $k_{ac}$  afecta la amplitud de respuesta del sistema primario de manera inversamente proporcional. Es decir que, cuanto más grande es el anclaje, mayor capacidad presenta el ENA de proteger reducir las oscilaciones que tienen lugar en el sistema Duffing primario.

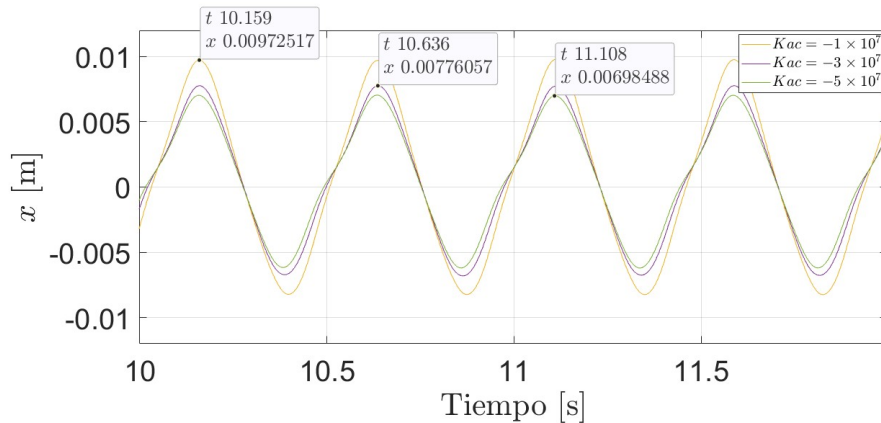


Figura 4.37: Respuesta ante diferentes valores del anclaje  $k_{ac}$ .

El efectivo desempeño del absorbidor esencialmente lineal acoplado al sistema primario Duffing, motiva el desarrollo de una ley de control por retroalimentación positiva de la posición, que se encargue de ajustar los valores del coeficiente  $k_{ac}$ , con el fin de garantizar el correcto funcionamiento del sistema ante variaciones de amplitud y frecuencia, en la fuerza de excitación.

Es importante resaltar que el desarrollo de los casos descritos en este capítulo, permite aterrizar los conceptos establecidos en la literatura, alrededor de las vibraciones mecánicas de naturaleza lineal y no lineal. El desarrollo experimental hace evidente



que la teoría clásica de vibraciones no cuenta con las herramientas necesarias para el estudio de vibraciones (esencialmente) no lineales, por lo que el análisis y construcción de nuevas y mejoradas técnicas que permitan su comprensión, son objeto de investigación vigente en todo el mundo.

Con el propósito de presentar una comparativa que permita destacar con mayor claridad el importante desempeño del absorbedor esencialmente no lineal, se reúnen los históricos de respuesta en el tiempo para los casos en mención y se exponen en la Figura 4.38

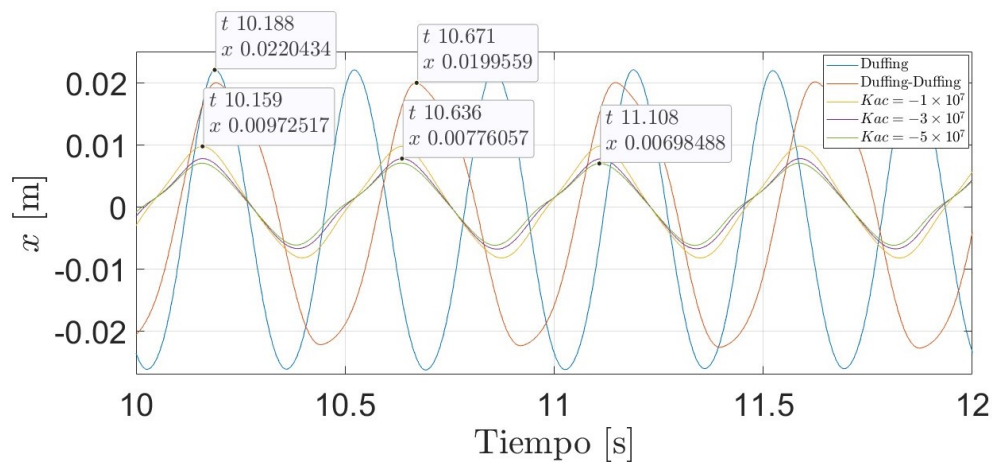


Figura 4.38: Diversas respuestas en el tiempo del sistema primario Duffing.

Se aprecia que el sistema primario Duffing mejora ligeramente su respuesta dinámica al contar con un absorbedor pasivo de vibraciones tipo Duffing como apéndice. Sin embargo, el anclaje presenta un desempeño bastante favorable al reducir exitosamente las amplitudes de oscilación que afectan al sistema primario no lineal.

El desarrollo de este capítulo permite identificar puntualidades prácticas del problema de absorción de vibraciones, mostrando las dificultades que han surgido a través del desarrollo de la teoría y la forma en que estas han sido rebasadas. Se hace evidente que el esquema de control activo/pasivo representa una solución bastante satisfactoria para el problema de absorción de vibraciones no lineales en máquinas y estructuras.



# Capítulo 5

## Conclusiones

La manera en que los sistemas no lineales son tratados a través de la teoría clásica de control, en ocasiones conduce a análisis con resultados equívocos, ya que el conjunto de ecuaciones diferenciales que modela el sistema no lineal, durante el proceso de linealización, es sometido a ajustes que permiten controlar el sistema mediante la suposición de la no linealidad como una perturbación, o empleando técnicas para la corrección del comportamiento lineal. Como consecuencia de la linealización, los sistemas no lineales son mutilados a través del tratamiento matemático, ocasionando una pérdida considerable de información, la cual puede llegar a ser crucial para garantizar una óptima condición operativa del sistema, empleando poco recurso de control. Sin embargo, en el caso de los sistemas esencialmente no lineales las técnicas de linealización no cumplen el objetivo de control, debido a que las no linealidades rigen la dinámica del sistema en todo instante de tiempo.

Los fenómenos de resonancias internas, caos, saltos en la respuesta, bifurcaciones, entre otras, tienen lugar debido a la estrecha relación entre la frecuencia y la energía, que presentan los sistemas no lineales. Las no linealidades tienen fuerte presencia en cohetes, aviones, torpedos, y un sin número de aplicaciones de ingeniería, en las cuales resulta fundamental el desarrollo de modelos matemáticos completos, que incluyan la presencia de las no linealidades, incentivando diseños que hagan provecho de sus bondades. De esta manera, la identificación de las no linealidades presentes en los sistemas, al igual que la localización de los modos normales de vibración no lineal, permiten desarrollar diseños bajo consideraciones operativas críticas, haciendo uso de la transferencia de energía dirigida para canalizar las vibraciones indeseadas

que perturben al sistema. Asimismo, dan condiciones óptimas para el diseño de dispositivos NES, que contribuyen enormemente en la solución del problema de absorción de vibraciones, de manera pasiva, y a bajo costo.

Los sistemas no lineales representan un área de investigación importante, que brinda herramientas significativas, con aplicaciones en diversas áreas de la ciencia e ingeniería. Esto se debe a que, los fenómenos no lineales presentan particularidades interesantes, como el fenómeno de saturación, el cual permite mejorar el desempeño de los absorbedores pasivos de vibraciones, al incrementar su ancho de banda de frecuencia operativa.

Es sabido que, los acoplamientos entre sistemas pueden ser dinámicos o estáticos, según sea la interacción entre masa/inercia, amortiguamiento y/o rigidez, de los subsistema. Para el caso del absorbedor pasivo de vibraciones tipo Duffing (esencialmente no lineal) adjunto al sistema primario Duffing, el acoplamiento se da a través del elemento de rigidez cúbica, debido a que proporciona una ruptura en la simetría, en presencia de niveles altos de energía.

La literatura tiene bien establecidas las relaciones de frecuencia que definen la interacción modal del sistema, y con ello el intercambio de energía entre los modos del sistema, al rededor de las frecuencias naturales lineales de cada subsistema. Sin embargo, no se presentan procedimientos, técnicas o métodos, que permitan identificar las relaciones frecuenciales de los sistemas esencialmente no lineales, lo cual conduce al cuestionamiento de qué sucede cuando los sistemas en cadena corresponden a sistemas esencialmente no lineales, cómo es el caso de la rigidez cúbica, sabiendo que la frecuencia natural lineal de cada subsistema, es cero.

La linealización alrededor de los equilibrios de un sistema es un método que se utiliza para estudiar la estabilidad local de un punto de equilibrio en un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales. Sin embargo, este método es ineficiente para el estudio de algunos casos en los que la no linealidad es fuerte, presentando dinámicas que limitan estrechamente con el caos, como es el caso del oscilador de van der Pol. Además, la linealización alrededor de los equilibrios, no hace evidente la relación frecuencia-energía que identifica a los sistemas no lineales. Debido a esto, se emplean métodos y técnicas de perturbación, que permiten obtener una solución aproximada del conjunto de ecuaciones que modelan el sistema no lineal. Sin embar-

go, estas técnicas y métodos se basan en realizar análisis de aproximación alrededor de la frecuencia paramétrica principal, en condición de resonancia. Esto conduce al interrogante de si en realidad los sistemas esencialmente no lineales, cuya frecuencia paramétrica se encuentra en la vecindad del cero, son correctamente abordados empleando estas métodos, o por el contrario, hace evidente la necesidad de crear de nuevas herramientas para el estudio de estos.

El desarrollo del presente trabajo de tesis permite concluir que el uso de *anclajes* esencialmente no lineales para afrontar el problema de absorción de vibraciones, mejora notablemente el desempeño del absorbedor pasivo de vibraciones no lineal, contribuyendo a la reducción significativa de la amplitud de respuesta en el sistema primario. Sin embargo, su implementación física representa una tarea de gran dificultad constructiva, por lo que es preciso adoptar esquemas que control activo/pasivo, que permitan su implementación virtual mediante leyes de control retroalimentado de la posición cúbica.

## 5.1. Trabajo futuro

Como trabajo futuro, que podría contribuir a mejorar los resultados reportados en el presente trabajo de tesis, se considera lo siguiente:

- Construir resortes con rigidez esencialmente no lineal, especialmente con rigidez cúbica pura, con el más bajo coeficiente de amortiguamiento posible, a fin de apreciar con mayor claridad el fenómeno de saturación.
- Implementar una trama de control activo por retroalimentación positiva de la posición, que permita la sintonización del anclaje ante eventuales cambios de frecuencia y/o amplitud en la excitación.
- Explorar la aplicación de vigas como elementos de rigidez cúbica frente a grandes deformaciones.
- Realizar el análisis matemático del sistema Duffing esencialmente no lineal empleando diferentes técnicas de perturbación, con el fin de establecer un análisis comparativo.

- Desarrollar la solución frecuencial aproximada de segundo orden para el sistema Duffing, empleando el método de escalas múltiples.
- Estudiar el problema de absorción de vibraciones en estructuras tipo edificio con acoplamiento lateral entre sí, mediante elementos con rigidez no lineal.
- Explorar la aplicabilidad de sistemas tipo Duffing - van der Pol como absorbedor de vibraciones.

# Bibliografía

- [1] Roberson, R.E., “Synthesis of a nonlinear dynamic vibration absorber,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 254, no. 3, pp. 205–220, (1952).
- [2] Braun, S.G., Ewins, D.J., and Rao, S.S., *Encyclopedia of Vibration*. San Diego, CA: Academic Press, (2001), vol. 1-3.
- [3] Hunt, J.B. and Nissen, J.C., “The broadband dynamic vibration absorber,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 83, no. 4, pp. 573–578, (1982).
- [4] Korenev, B.G. and Reznikov, L.M., *Dynamic Vibration Absorbers: Theory and Technical Applications*. London: John Wiley and Sons, (1993).
- [5] Natsiavas, S., “Steady state oscillations and stability of non-linear dynamic vibration absorbers,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 156, no. 2, pp. 227–245, (1992).
- [6] Nayfeh, A.H. and Mook, D.T., *Nonlinear Oscillations*. NY: Wiley Interscience, (1979).
- [7] Cartmell, M.P., *Introduction to linear, parametric and nonlinear vibrations*. London: Chapman and Hall, (1990).
- [8] Gendelman, O.V., Sapsis, T., Vakakis, A.F., and Bergman, L.A., “Enhanced passive targeted energy transfer in strongly nonlinear mechanical oscillators,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 330, no. 1, pp. 1–8, (2011).
- [9] Mikhlin, Y.V. and Reshetnikova, S.N., “Dynamical interaction of an elastic system and essentially nonlinear absorber,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 283, no. 1, pp. 91–120, (2005).

- [10] Ji, J.C. and Zhang, N., “Suppression of the primary resonance vibrations of a forced nonlinear system using a dynamic vibration absorber,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 329, no. 11, pp. 2044–2056, (2010).
- [11] Vakakis, A.F., *Nonlinear Targeted Energy Transfer in Mechanical and Structural Systems*. Dordrecht: Springer, (2009).
- [12] Martynyuk, A.A., “Analysis of equiboundedness and stability of the motion of essentially nonlinear systems,” *International Applied Mechanics*, vol. 59, no. 1, p. 59–67, (2003).
- [13] Vakakis, A.F., Manevitch, L.I., Mikhlin, Y.V., Pilipchuk, V.N., and Zevin, A.A., *Normal modes and localization in nonlinear systems*. Toronto, Canada: John Wiley & Sons, Inc., (1996).
- [14] Beltran-Carbajal, F. and Silva-Navarro, G., “Active vibration control in Duffing mechanical systems using dynamic vibration absorbers,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 333, no. 14, pp. 3019–3030, (2014).
- [15] Beltran-Carbajal, F., Silva-Navarro, G., and Abundis-Fong, H.F., “Application of passive/active Duffing vibration absorbers in Duffing mechanical systems,” *Proceedings of the 22nd International Congress on Sound and Vibration (ICSV22)*, (2015).
- [16] Saeed, A.S., Abdul Nasar, R., and AL-Shudeifat, M.A., “A review on nonlinear energy sinks: designs, analysis and applications of impact and rotary types,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 111, pp. 1–37, (2023).
- [17] Kamenkov, G.V., *Stability and Oscillations of Nonlinear Systems [in Russian]*. Nauka, Moscow: International Applied Mechanics, (1972).
- [18] Den Hartog, J.P., *Mechanical Vibrations*. NY and London: McGraw Hill Book Company, Inc., (1947).
- [19] Kaplan, D. and Glass, L., *Understanding Nonlinear Dynamics*. NY: Springer-Verlag, (1995).



- [20] Frahm, H., “Device for damping vibrations of bodies,” *United States patent office*, no. 989.958, p. 9 pags., (1911).
- [21] Ormondroyd, J. and Den Hartog, J.P., “The theory of the dynamic vibration absorber,” *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, (1928).
- [22] Cartmell, M.P., “An adaptive autoparametric vibration absorber,” *Second conference on recent advances in active control of sound and vibrations*, pp. 495–505, (1993).
- [23] Balachandran, B. and Magrab, E.B., *Vibrations*. Toronto, Canada: Cengage Learning, (2009).
- [24] Kryszynski, T. and Malburet, F., *Mechanical Vibrations; Active and Passive Control*. Newport Beach, California: ISTE ltd., (2007).
- [25] Herzan LLC, “herzan.com,” 2015, accessed on November 10, 2024. [Online]. Available: <https://i0.wp.com/new.herzan.com/wp-content/uploads/2015/12/Settling-Time-TS-vs.-Passive.jpg>
- [26] Nayfeh, A.H., Oueini, S.S., and Chin, CH.M., “Dynamics of a cubic nonlinear vibration absorber,” *Nonlinear Dynamics*, no. 20, pp. 283–295, (1999).
- [27] Oueini, S.S. and Nayfeh, A.H., “Analysis and application of a nonlinear vibration absorber,” *Journal of Vibration and Control*, no. 6, p. 99–1016, (2000).
- [28] Koo, J.H., Shukla, A., and Ahmadian, M., “Dynamic performance analysis of non-linear tuned vibration absorbers,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, no. 13, p. 1929–1937, (2008).
- [29] Amer, Y.A. and EL-Sayed, A.T., “Vibration suppression of non-linear system via non-linear absorber,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, no. 13, p. 1948–1963, (2008).
- [30] Viguié, R. and Kerschen, G., “Nonlinear vibration absorber coupled to a nonlinear primary system: A tuning methodology,” *Journal of Sound and Vibration*, no. 326, p. 780–793, (2009).

- [31] Habib, G., Detroux, T., Vigiúé, R., and Kerschen, G., “Nonlinear generalization of den hartog’s equal-peak method,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, no. 52-53, p. 17–28, (2015).
- [32] Grappasonni, C., Habib, G., Detroux, T., Wang, F., Kerschen, G., and Jensen, J.S., “Practical design of a nonlinear tuned vibration absorber,” *ISMA International Conference on Noise and Vibration Engineering*, no. 26, pp. 3029–3046, (2014).
- [33] Gendelman, O., Manevitch, L.I., Vakakis, A.F., and M’Closkey, R., “Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators: part I — dynamics of the underlying hamiltonian systems,” *ASME Journal of Applied Mechanics*, no. 68, pp. 34–41, (2001).
- [34] Vakakis, A.F. and Gendelman, O., “Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators: part II — resonance capture,” *ASME Journal of Applied Mechanics*, no. 68, pp. 42–48, (2001).
- [35] Vakakis, A.F., “Inducing passive nonlinear energy sinks in vibrating systems,” *ASME Journal of Vibration and Acoustics.*, no. 123, pp. 324–332, (2001).
- [36] Kerschen, G., Lee, Y.S., Vakakis, A.F., McFarland, D.M., and Bergman, L.A., “Irreversible passive energy transfer in coupled oscillators with essential nonlinearity,” *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 66, no. 2, p. 648–679, (2006).
- [37] Vakakis, A.F., *Advanced Nonlinear Strategies for Vibration Mitigation and System Identification*. Illinois, USA: Springer Wien NewYork, (2010).
- [38] Li, S., Zhou, X., and Chen, J., “Hamiltonian dynamics and targeted energy transfer of a grounded bistable nonlinear energy sink,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 117, p. 106898, (2023).
- [39] Vakakis, A.F., “Nonlinear normal modes,” *Academic Press*, pp. 918–924, (2001).
- [40] Gendelman, O.V., “Transition of energy to a nonlinear localized mode in a highly asymmetric system of two oscillators,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 25, p. 237–253, (2001).

- [41] McFarland, D.M., Kowtko, J.J., Lee, Y.S., Bergman, L.A., and Vakakis, A.F., “Experimental investigation of targeted energy transfers in strongly and nonlinearly coupled oscillators,” *Acoustical Society of America*, vol. 43, p. 791–799, (2005).
- [42] Lamarque, C.H., Thouverez, F., Rozier, B., and Dimitrijevic, Z., “Targeted energy transfer in a 2-dof mechanical system coupled to a non-linear energy sink with varying stiffness,” *Journal of Vibration and Control*, vol. I-II, pp. 1–11, (2015).
- [43] Hong, D., Hill, T.L., and Neild, S.A., “Understanding targeted energy transfer from a symmetry breaking perspective,” *The Royal Society*, vol. I, pp. 1–21, (2021).
- [44] Sapsis, T.P., Vakakis, A.F., Gendelman, O.V., Bergman, L.A., Kerschen, G., and Quinn, D.D., “Efficiency of targeted energy transfers in coupled nonlinear oscillators associated with 1:1 resonance captures: Part II, analytical study,” *ASME Journal of Sound and Vibration*, vol. 325, p. 297–320, (2009).
- [45] Lamarque, C.H., Gendelman, O.V., Savadkoobi, A.T., and Etcheverria, E., “Targeted energy transfer in mechanical systems by means of non-smooth nonlinear energy sink,” pp. 175–200, (2011).
- [46] Vakakis, A.F., Gendelman, O.V., Bergman, L.A., Mojahed, A., and Gzal, M., “Nonlinear targeted energy transfer: state of the art and new perspectives,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 108, p. 711–741, (2022).
- [47] Megretski, A., “Robustness analysis and synthesis for essentially nonlinear systems - final report,” *Department of Electrical and Computer Engineering of Iowa State University*, pp. 1–9, (1997).
- [48] Megretski, A., “Analysis of essentially nonlinear systems,” *Department of Electrical and Computer Engineering of Massachusetts Institute of Technology*, pp. 1–8, (1999).

- [49] Sapsis, T.P., Vakakis, A.F., and Bergman, L.A., “Effect of stochasticity on targeted energy transfer from a linear medium to a strongly nonlinear attachment,” *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 26, pp. 119–133, (2011).
- [50] Lin, D.C. and Oguamanam, D.C.D., “Targeted energy transfer efficiency in a low-dimensional mechanical system with an essentially nonlinear attachment,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 82, p. 971–986, (2015).
- [51] Ding, H. and Chen, L.Q., “Designs, analysis, and applications of nonlinear energy sinks,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 100, p. 3061–3107, (2020).
- [52] Manevitch, L.I. and Gendelman, O.V., “Oscillatory models of vibro-impact type for essentially non-linear systems,” *Mechanical Engineering Science*, vol. 222, pp. 2007–2043, (2007).
- [53] Avramov, K.V. and Gendelman, O.V., “On interaction of vibrating beam with essentially nonlinear absorber,” *Meccanica*, vol. 45, p. 355–365, (2010).
- [54] Sapsis, T.P. and Vakakis, A.F., “Subharmonic orbits of a strongly nonlinear oscillator forced by closely spaced harmonics,” *ASME Computational and Nonlinear Dynamics*, vol. 6, pp. 011 014–1 – 011 014–10, (2011).
- [55] Sapsis, T.P., Quinn, D.D., Vakakis, A.F., and Bergman, L.A., “Effective stiffening and damping enhancement of structures with strongly nonlinear local attachments,” *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 134, pp. 011 016–1 – 011 016–12, (2012).
- [56] Remick, K., Vakakis, A.F., Bergman, L., McFarland, D.M., Quinn, D.D., and Sapsis, T.P., “Sustained high-frequency dynamic instability of a nonlinear system of coupled oscillators forced by single or repeated impulses: Theoretical and experimental results,” *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 136, pp. 011 013–1 – 011 013–15, (2014).
- [57] Lee, Y.S., Kerschen, G., Vakakis, A.F., Panagopoulos, P., Bergman, L., and McFarland, D.M., “Complicated dynamics of a linear oscillator with a light, essentially nonlinear attachment,” *Physica D*, vol. 204, p. 41–69, (2005).

- [58] Malatkar, P. and Nayfeh, A.H., “Steady-state dynamics of a linear structure weakly coupled to an essentially nonlinear oscillator,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 47, p. 167–179, (2007).
- [59] Avramov, K. and Mikhlin, Y., “Nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. Review of theoretical developments,” *Applied Mechanics Reviews*, pp. 1–21, (2016).
- [60] Kluger, J.M., Sapsis, T.P., and Slocum, A.H., “Robust energy harvesting from walking vibrations by means of nonlinear cantilever beams,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 341, p. 174–194, (2015).
- [61] Cveticanin, L., *Strongly Nonlinear Oscillators*. Switzerland: Springer, (2014).
- [62] Jing, X., *The Bio-inspired X-Structure/Mechanism Approach for Exploring Nonlinear Benefits in Engineering*. Singapore: Springer, (2024).
- [63] Nayfeh, A., *Perturbation Methods*. New York, NY: John Wiley & Sons, (1973).
- [64] Nayfeh, A. H., *Introduction to Perturbation Techniques*. New York, NY: John Wiley & Son, (1981).
- [65] Siljak, D.D., *Nonlinear Systems*. New York, NY: John Wiley & Son, (1969).
- [66] Ku, Y. H., *Analysis And Control Of Nonlinear Systems*. New York, NY: The Ronald Press Company, (1958).
- [67] Hayashi, C., *Nonlinear Oscillations in Physical Systems*. New York, NY: McGraw-Hill Inc., (1964).
- [68] Nayfeh, A. H. and Balachandran, B., *Applied Nonlinear Dynamics*. New York, NY: John Wiley & Son, (1995).
- [69] Meirovitch, L., *Fundamentals of Vibrations*. New York, NY: McGraw-Hill, (2001).
- [70] Silva-Navarro, G., “Mecánica Computacional: Análisis, Control y Aplicaciones de Dinámica Estructural,” *Curso de Maestría en Mecatrónica, Cinvestav*, (2023).

- [71] Kovacic, I. and Brennan, M.J., *The Duffing Equation. Nonlinear Oscillators and their Behaviour*. Chichester, U.K.: John Wiley & Sons, (2011).
- [72] Rega, G. and Vestroni, F., *Chaotics Dynamics and Control of Systems and Processes in Mechanics*. Rome, Italy: Solid Mechanics and It's Applications, (2003), vol. 122.
- [73] Meirovitch, L., *Fundamentals of Vibrations*. NY: McGraw Hill, (2000).
- [74] Manevich, A. I. and Manevich, L. I., *The Mechanics of Nonlinear Systems with Internal Resonances*. London: Imperial College Press, (2005).
- [75] Cartwright, M.L. and Littlewood, J.E., "On nonlinear differential equations of second order," *Lond. Math. Soc.*, vol. 269, pp. 180–189, (1945).
- [76] Thompson, J. M. T. and Stewart, H. B., *Nonlinear Dynamics and Chaos: Geometrical Methods for Engineers and Scientists*. Chichester, Eng: John Wiley & Son, (1986).
- [77] Ferreyra, R.T. and Prato, C.A, "Aplicación del método de escalas multiples (E.M.) a la solución de las ecuaciones no lineales de una membrana por elementos finitos (E.F.)," *X Congreso sobre métodos numéricos y sus aplicaciones, Mecánica Computacional*, vol. 18, pp. 787–798, (1997).
- [78] Cartmell, M.P., Ziegler, S.W., Khanin, R., and Forehand, D.I.M., "Multiple scales analyses of the dynamics of weakly nonlinear mechanical systems," *ASME Appl Mech Rev*, vol. 56, no. 5, pp. 455–492, (2003).
- [79] Sanders, J.A. and Verhulst, F., "Averaging methods in nonlinear dynamical systems," *Applied Mathematical Sciences*, vol. 59, no. 1, p. 259, (1985).
- [80] Sanders, J.A., Verhulst, F., and J. Murdock, "Averaging methods in nonlinear dynamical systems," *Applied Mathematical Sciences*, vol. 59, no. 2, p. 446, (2007).
- [81] Bohner, M. and Martynyuk, A.A., "Elements of stability theory of A.M. Liapunov for dynamic equations on time scales," *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, vol. 7, no. 3, pp. 225–251, (2007).

- [82] Wang, S. and Huseyin, K., “‘MAPLE’ analysis of nonlinear oscillations,” *Mathl. Comput. Modelling*, vol. 16, no. 11, pp. 9–57, (1992).
- [83] Rosenberg, R.M., “Normal modes of nonlinear dual-mode systems,” *Applied Mechanics*, vol. 11, pp. 263–268, (1960).
- [84] Vakakis, F., “Non-Linear Normal Modes (NNMs) and their applications in vibration theory: an overview,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 11, p. 211, (1997).
- [85] Viguié, R. and Kerchen, G, “Nonlinear vibration absorber coupled to a nonlinear primary system: a tuning methodology,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 326, p. 780–793, (2009).
- [86] Educational Control Products, “Manual for Model 210/210a: Rectilinear Dynamic System,” *ECP*, (2004).
- [87] Schmitz, T.L. and Scott, K., *Mechanical Vibrations. Modeling and Measurement*. New York, NY: Springer, (2012).





# Apéndice A

## Lista de Publicaciones

El siguiente artículo ha sido publicado con resultados obtenidos del presente trabajo de tesis.

### A.1. Publicación en congreso internacional

1. **Osnaider Alvarez-Alvarez** and Gerardo Silva-Navarro. *On the vibration absorption on essentially nonlinear systems*. Proceedings of the 30th International Congress on Sound and Vibration (ICSV 30). The International Institute of Acoustics and Vibration, Amsterdam, The Netherlands, July 2024

