



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

**UNIDAD ZACATENCO
PROGRAMA DE SISTEMAS AUTÓNOMOS DE NAVEGACIÓN
AÉREA Y SUBMARINA**

**“Control del modelo no lineal lateral de la bicicleta para
vehículos terrestres”**

TESIS

Que presenta

M. en C. Lorien Revueltas Crooks

Para obtener el grado de

**Doctora en Ciencias
en Sistemas Autónomos de Navegación Aérea y
Submarina**

Director de la Tesis:

**Dr. Rogelio Lozano Leal
Dr. Sergio Rosario Salazar Cruz**

Ciudad de México

DICIEMBRE, 2024.

Agradecimientos

Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (Conahcyt) por el apoyo económico a través de la beca de posgrado que se me otorgó.

Al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (CINVESTAV) por el apoyo brindado durante mi estadía en esta institución y en especial al Departamento de Investigación y Estudios Multidisciplinarios (DIEM) por haberme recibido en su programa de doctorado en Sistemas Autónomos en Navegación Aérea y Submarina.

A mis asesores el Dr. Rogelio Lozano Leal, el Dr. Sergio Salazar Cruz por la orientación y ayuda que me brindaron para la realización de esta tesis y a los sinodales el Dr. Omar Jacobo Santos Sánchez, el Dr. Moisés Bonilla Estrada, el Dr. Antonio Osorio Cordero y el Dr. Iván González Hernández, por sus comentarios y correcciones para mejorar este trabajo de tesis y por su valiosa participación en el examen de grado.

A mi familia, por haberme apoyado por tantos años, mostrándome que siempre hay que seguir adelante y esforzarme en todo lo que haga.

A mis amigos por la compañía que me brindaron.

A Dios, por todo.

Resumen

Durante el desarrollo de este trabajo de tesis se propusieron dos algoritmos de control para el modelo lateral de la bicicleta para vehículos terrestres que evitan el uso de la linealización por ángulos pequeños del modelo. El primer algoritmo de control, presentado en este escrito, fue propuesto bajo el esquema de Control Óptimo, y presenta buenos resultados en las simulaciones numéricas además de que mantiene un valor pequeño en la entrada de control del vehículo. El segundo algoritmo es un control no lineal que reduce el valor del error de orientación usando una función positiva mientras que para el error de posición utiliza saturaciones anidadas y tiene una región de convergencia mayor a la del control lineal por retroalimentación de estados. Este algoritmo de control se encuentra en espera de ser publicado por lo que no se incluye en este escrito.

Abstract

During the development of this thesis work, two control algorithms were proposed for the lateral bicycle model for land vehicles that avoid using linearization by small angles. The first control algorithm, presented in this writing, was proposed under the scheme of Optimal Control and presents good results in the numeric simulations furthermore, it maintains a small value in the control entry. The second algorithm is a nonlinear control that reduces the orientation error using a positive function. In contrast, the position error is corrected using nested saturations and has a convergence region bigger than the convergence region of the linear control by state feedback. This control algorithm is awaiting publication, so it is not included in this writing.

Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	IV
Abstract	V
1. Introducción	1
1.1. Planteamiento del problema	1
1.2. Justificación	1
1.3. Motivación del trabajo de investigación	2
1.4. Antecedentes	2
1.5. Propuesta de solución	6
1.6. Hipótesis	6
1.7. Objetivo general	7
1.7.1. Objetivos particulares	7
2. Modelo del vehículo	8
2.1. Modelo lateral	8
2.1.1. Modelo cinemático lateral del vehículo	9
2.1.2. Dinámica lateral del vehículo	11
2.1.3. Modelo dinámico en términos del error con respecto al camino	14

3. Algoritmos de Control para el vehículo	16
3.1. Control lineal por Retroalimentación de estado	16
3.1.1. Simulación numérica de un cambio en $\dot{\psi}_{des}$ con el control por retroali- mentación de estado	17
3.2. Algoritmo de control subóptimo	19
3.2.1. Control no lineal discreto subóptimo para sistemas afines	19
3.2.2. Control subóptimo aplicado al modelo lateral	22
3.2.3. Simulación numérica de una variación en $\dot{\psi}_{des}$ utilizando el control subóptimo	27
4. Simulaciones Numéricas	29
4.1. Regulación del error lateral e_1	29
4.1.1. Simulación numérica utilizando el control lineal para la regulación de e_1	30
4.1.2. Simulación numérica utilizando el control subóptimo para la regulación de e_1	31
4.1.3. Comparación del comportamiento del sistema en la regulación de e_1 . .	33
4.2. Seguimiento de una curva de velocidad	34
4.2.1. Simulación numérica utilizando el control lineal para el seguimiento de un curva de velocidad	35
4.2.2. Simulación numérica utilizando el control subóptimo para el segui- miento de un curva de velocidad	36
4.3. Seguimiento de una trayectoria circular	38
4.3.1. Simulación numérica utilizando el control lineal para el seguimiento de trayectoria circular	38
4.3.2. Simulación numérica utilizando el control subóptimo para el segui- miento de trayectoria circular	40
5. Percepción y localización cooperativa	42
5.1. Antecedentes de la percepción y localización cooperativa	42

5.2. Simulaciones de algoritmos de percepción y localización cooperativa	45
5.2.1. Simulación de filtros SCIF y Kalman	45
5.2.2. Simulación algoritmo ICP	47
5.2.3. Simulación algoritmo PSM	50
5.2.4. Simulación de Análisis de Intervalos	51
6. Conclusiones y trabajo a futuro	56
6.1. Conclusiones	56
6.2. Trabajo a futuro	57
6.3. Artículos derivados	57
A. Desarrollo del modelo lateral	58
A.1. Desarrollo del modelo lateral con las variables y y ψ	58
A.2. Desarrollo del modelo dinámico en términos del error con respecto al camino .	61
B. Cálculo de la región de convergencia del control lineal	64
Bibliografía	72

Introducción

1.1. Planteamiento del problema

En la actualidad, gracias al avance de la tecnología se ha incrementado la cantidad de tareas que son delegadas a computadoras y controladores autónomos, por lo que no es de extrañarse que la tarea de conducir un vehículo se encontraría también en vías de desarrollo para conseguir que no requiera de un ser humano para su ejecución. Conducir un vehículo es una tarea compleja donde el conductor debe manejar la posición lateral y la velocidad del vehículo, al mismo tiempo que debe evitar obstáculos, seguir una ruta y obedecer los reglamentos de tránsito. Al centrarnos en la posición lateral que el vehículo tiene al desplazarse podemos notar que se han hecho una gran diversidad de propuestas para controlar la dinámica lateral que es la que permite cambiar la dirección y posición lateral del vehículo. Sin embargo, muchas de estas propuestas recurren a la linealización del modelo, por lo que, desde el punto de vista del control, el intervalo de convergencia se ve limitado. De esta manera se ha visto truncado el desarrollo del control de vehículos en este sentido.

1.2. Justificación

La investigación en vehículos autónomos en ambientes urbanos se ha convertido en foco de interés de muchas investigaciones en los últimos años, y ha avanzado a tal punto que ya conta-

mos con vehículos que no necesitan de la intervención humana para llegar de un punto a otro. El trabajo en esta área también ha revelado la complejidad de las tareas que debe realizar un conductor, donde el entorno más complejo es el urbano. Para un vehículo autónomo la complejidad en estos entornos aumenta al compartir el terreno con conductores humanos, que por falta de pericia o por una violación a los reglamentos de tránsito generan situaciones que terminan en accidentes que pueden costar la vida de las personas. Aún con los avances que se tienen en el área, este tipo de sistemas son susceptibles a fallos. Un fallo en el control de un vehículo puede desencadenar un accidente, y se sabe que los sistemas autónomos no son ajenos a ellos [2], por lo que mejorar sus sistemas de control se ha visto como algo necesario para reducir la probabilidad de un accidente y evitar el deterioro en la percepción pública de estos sistemas.

1.3. Motivación del trabajo de investigación

Los errores cometidos por conductores humanos pueden terminar en accidentes costosos, tanto en vidas humanas como en pérdidas materiales. Dado que los vehículos autónomos pueden reducir la cifra de accidentes que se reportan por esta causa cada año (en los años 2019, 2020 y 2021 más del 87 % de los accidentes ocurridos en zonas urbanas y suburbanas de México fueron por causas atribuibles al conductor [1]) es necesario que los vehículos autónomos estén equipados con sistemas de control y la capacidad de reconocer adecuadamente su entorno, incluyendo los demás vehículos que se encuentren circulando, las personas, inmuebles y objetos que se encuentran alrededor.

1.4. Antecedentes

Diferentes algoritmos de control se han desarrollado para los vehículos autónomos para mejorar la respuesta del control ante las dinámicas no lineales del sistema, las incertidumbres de modelos, y otros problemas que pueden surgir al implementar el modelo matemático en el sistema físico. Dentro de estos algoritmos en los últimos años se han desarrollado estrategias

basadas en control lineal, control no lineal, control neurodifuso, así como estrategias que adaptan el uso de observadores o filtros para mejorar la precisión con la que se conoce el estado del vehículo. Xiong et al. [3] utilizando la información de una Unidad de Medición Inercial («IMU» por sus siglas en inglés) de alta fidelidad desarrollaron un estimador del ángulo de deslizamiento y del posicionamiento del vehículo, sus estimadores están basados en el modelo dinámico del vehículo e incluyen un estimador del retraso para mejorar el desempeño ante estimaciones anormales que ocurren cuando el cambio de dirección del vehículo es crítico. Bascetta et al. [4] utilizaron la herramienta ley de linealización de retroalimentación para controlar el modelo lateral en un carril simple. El uso de esta herramienta simplifica el uso del modelo pues ya solo se depende de la posición del centro de gravedad y tiene una estructura asintóticamente estable. Lombard et al. [5] en su trabajo utilizaron un enfoque geométrico, ya que este enfoque permite tener robustez a las perturbaciones y estabilidad. Su enfoque geométrico mejoró el seguimiento de curvaturas, al ser capaz de manejar tareas complejas, y con esto aseguraron la calidad de los resultados y esa calidad se mantiene independientemente del camino. Moreno-Gonzales et al. [6] partiendo del paradigma de control libre de modelos, donde se reduce un modelo dinámico complejo con no-linealidades fuertes a un modelo simple con actualización en línea que asegure la estabilidad a diferentes velocidades o restricciones dinámicas, para la creación de un modelo desacoplado. Los resultados demuestran que se puede usar para seguimiento de trayectoria, estabilidad y seguridad. Jin, C., et al. [7] diseñaron un observador para estimar el ángulo de deslizamiento y el coeficiente de fricción del camino. Para conseguirlo el estado y la estimación de parámetros se formulan como un problema de optimización no convexo. El observador obtenido para el modelo nominal mantiene el error de estimación sin crecimiento incluso cuando el sistema carece de observabilidad. Gagliardi et al. [8] combinaron diferentes estrategias de control con el objetivo de resolver el seguimiento de trayectoria con una distancia de seguridad con respecto al vehículo que los precede. Para mantener la distancia se utiliza un control óptimo, mientras que para las dinámicas laterales se utiliza un control «feedforward» que utiliza la cinemática inversa del modelo, finalmente para la dinámica longitudinal se utiliza un control por retroalimentación. Piscini et al. [9] utilizando las espirales de Euler desarrollaron un

algoritmo de control de seguimiento y un algoritmo de planeación de trayectorias. Utilizan un modelo similar al de la bicicleta donde el cambio de dirección se realiza con las ruedas traseras. Sus resultados en líneas les permitieron acercarse a la respuesta de un generador de trayectorias óptimo fuera de línea. En su propuesta Pauca et al. [10] trabajaron con dos controles predictivos de modelos (MPC por sus siglas en inglés). El primer MPC usado para seguir una referencia en velocidad estaba basado en el modelo longitudinal. El segundo MPC, utilizado para controlar la posición lateral fue diseñado con el modelo lineal de la dinámica lateral del vehículo. La combinación de estos dos controles es capaz de mantener la trayectoria deseada bajo restricciones específicas. El trabajo realizado por Wang et al. [11] combina dos métodos: el primero trabaja la fuerza de los neumáticos con una regla de distribución que se basa en un modelo de una llanta que combina la dinámica con el deslizamiento, y el segundo es un MPC de seguimiento de ruta con tiempo variable, el modelo utilizado para este control es una linealización del modelo por medio de la expansión de Taylor. Kovacs and Vajk [12] con una estructura de cascada de forma que se tuviera un lazo de control externo y un lazo de control interno. Con el lazo de control externo se transforma el MPC a varias series de optimización evitando la necesidad de ajustar cada parámetro del sistema. Mientras que el lazo interno maneja la dinámica del sistema incluyendo las no-linealidades con un control interno de modelo (IMC). Lee et al. [13] usaron un control tipo MPC que con el modelo de la bicicleta basado en los errores calcula el ángulo de dirección óptimo para el seguimiento de trayectorias. Su trabajo tiene un enfoque similar a como conduce un ser humano pues utiliza el error lateral previo y el ángulo de orientación ψ , y estos valores son considerados con un factor de ponderación. Qazani et al. [14] utilizaron un MPC con pesos variables. Para controlar el cambio en los pesos usaron un controlador de lógica difusa, y con eso lograron disminuir el error de seguimiento. El trabajo de Etienne, L., et al. [15] utiliza un vehículo equipado con dirección delantera activa (AFS) y vectorización de par trasero (RTV), pues permiten un control activo del chasis del vehículo. Se estima el coeficiente de fricción lateral neumático en tiempo finito mediante un diferenciador de modo deslizante de alto orden. Con base en esta estimación, se obtiene un controlador de modo deslizante de alto orden diseñado para rastrear las referencias deseadas. Chen et al. [16] utilizando una ar-

arquitectura jerárquica para tener un mejor rendimiento energético. Su estructura incluye para el momento de guiñada y la fuerza total el uso de un control por modos deslizantes, mientras que para optimizar la eficiencia energética y al mismo tiempo reducir la pérdida de potencia se utiliza la combinación de un mapa de eficiencia del motor con la disminución de la fuerza lateral en donde se controla el freno. Para esta última parte de su propuesta utilizaron un modelo lineal. Barari et al. [17] propusieron utilizar un control jerárquico dividido por capas, una capa para manejar las incertidumbres paramétricas y otra para la dirección activa y el momento de la guiñada. Las incertidumbres paramétricas consideradas en la primera capa son respecto a la masa, la rigidez de los neumáticos en las curvas y el momento de inercia, y el control utilizado en esta capa es un « super-twisting sliding mode» autoajutable. Para la segunda o capa inferior se utiliza un MPC. Shao, K., et al. [18] propusieron un control robusto que también reduce la aceleración lateral con el objetivo de reducir el riesgo volcadura, esto se consigue con un control de modos deslizante adaptativo que compensa las incertidumbres del sistema y para reducir la aceleración se usa un sistema de dirección por cable, el correcto ajuste de los dos sistemas permite reducir el riesgo de volcadura y también el de colisiones. La propuesta de Zhang [19] incluye el uso de un brazo robótico para controlar el volante del vehículo e implementó una estrategia de control de seguimiento lateral. La estrategia de control es capaz de restringir el error en orientación y posición lateral usando matrices de desigualdades lineales, mientras que se usa un control robusto con ganancias programadas para controlar las variables. En su trabajo, Li et al. [20] propusieron un control robusto con aprendizaje adaptativo. El control propuesto es robusto a las dinámicas no modeladas, a las perturbaciones externas y a las restricciones de las entradas, y está basado en un modelo parametrizado que se deriva del modelo de la bicicleta. Mincheol Park y Yeonsik Kang [21] desarrollaron un sistema que permite tomar las vueltas de forma rápida al deslizar la rueda trasera de forma intencional lo que también resulta beneficioso en una carretera resbaladiza, el control anticipativo se obtuvo derivando el estado para encontrar la entrada de control adecuada para el deslizamiento y se añade un controlador de retroalimentación basado en el método del regulador cuadrático lineal para seguir la trayectoria circular y mantener estados de equilibrio. Mientras que Nguyen, A., et al. [22] usando el control difuso

para hacer un seguimiento de trayectoria, proponen un nuevo esquema de retroalimentación de salida estática difusa para reducir el uso de sensores al contrarrestar las incertidumbres dinámicas especialmente aquellas debidas a la fuerza en las llantas . El desarrollo teórico incluye el uso de funciones difusas de Lyapunov y el concepto de control de compensación distribuida no paralela. En el área del control con redes neuronales, Zhao, S., et al. [23], y basándose en la programación dinámica aproximada y se considera como un problema de control de seguimiento óptimo robusto para sistemas conmutados con incertidumbres en el horizonte finito. Se utiliza un identificador basado en una red neuronal (NN) para estimar la dinámica desconocida de los sistemas conmutados. Mientras que el enfoque de iteración converge a la solución única en un intervalo de tiempo de muestreo suficientemente pequeño. Taghavifar et al. [24] optaron por un control difuso, una red neuronal difusa que mejora el rendimiento en el seguimiento de rutas, esta red se basa en el diseño del control de modos deslizantes exponencial desde el enfoque de las redes neuronales difusas. El «chattering» es eliminado usando una ley de control de convergencia ajustada con la variable exponencial del control. Para la estabilidad en lazo cerrado se usa un control jerárquico que fue diseñado usando el enfoque de Lyapunov.

1.5. Propuesta de solución

Se procederá al diseño y comparación de diversas propuestas de control lateral para el vehículo terrestre. Los métodos de planteamiento de dichas propuestas serán desde una perspectiva de control no lineal y otra desde el planteamiento del control óptimo. Estos controles se compararán en simulación al mantener las condiciones de estabilidad en diferentes tareas: llevar el error al origen, seguimiento de curvas de velocidad.

1.6. Hipótesis

La implementación de algoritmos de control que consideren las incertidumbres y no-linealidades del sistema permitirán tener un desempeño estable del vehículo y reducir la señal

de entrada necesaria para realizar diferentes tareas de control.

1.7. Objetivo general

Desarrollar estrategias de control óptimo y no lineal en vehículos inteligentes que permitan el uso del modelo lateral del vehículo sin recurrir a la linealización del modelo.

1.7.1. Objetivos particulares

- Analizar el modelo lateral de la bicicleta para vehículos.
- Desarrollar una rutina de control subóptimo que permita la estabilización de los estados del modelo lateral de la bicicleta.
- Desarrollar una rutina de control no lineal que permita la estabilización de los estados del modelo lateral de la bicicleta.
- Realizar la comparación de los resultados obtenidos con los diferentes algoritmos de control en diferentes tareas.
- Analizar algoritmos de percepción y localización que permitan reducir el error en la medición del estado.

Modelo del vehículo

Para poder implementar una ley de control es recomendable conocer la dinámica y cinética que rige el sistema al que se le pretende aplicar dicho control. En el caso de los vehículos terrestres automotrices se suele considerar que cuentan con una tracción delantera y el modelo más extendido para su estudio es el modelo de la bicicleta. Este modelo se considera la cinemática y la dinámica del vehículo en diferentes ecuaciones, y a su vez divide la dinámica del vehículo en lateral y longitudinal. Aún así el modelo presenta no-linealidades y se clasifica como un sistema sub-actuado.

2.1. Modelo lateral

El análisis de las dinámicas que se ven involucradas en el modelo lateral del vehículo son muy útiles para generar sistemas de control que mantengan el vehículo en el centro del carril, estos sistemas de control pueden emitir una alerta para el conductor cuando el vehículo está saliendo inadvertidamente del carril (conocido en inglés como «Lane departure warning») o automáticamente controlar la dirección del vehículo para mantener el carril (en inglés son conocidos como "Lane keeping systems"), o estabilizar el ángulo de guiñada en una vuelta o en terrenos con fricción baja.

2.1.1. Modelo cinemático lateral del vehículo

Considerando la figura 2.1 y de manera similar a una bicicleta, las dos llantas delanteras son representadas por una sola llanta en el punto A . Igualmente las llantas traseras son representadas en el punto B . El ángulo de la orientación de las llantas delanteras y traseras son representadas por δ_f y δ_r respectivamente. Para el modelo cinemático se asume que se puede cambiar la dirección de ambos pares de llantas. El centro de gravedad (c.g.) está en el punto C . La distancia de A a C es ℓ_f y la distancia entre el punto B y el punto C es ℓ_r . La base del vehículo es $L = \ell_f + \ell_r$.

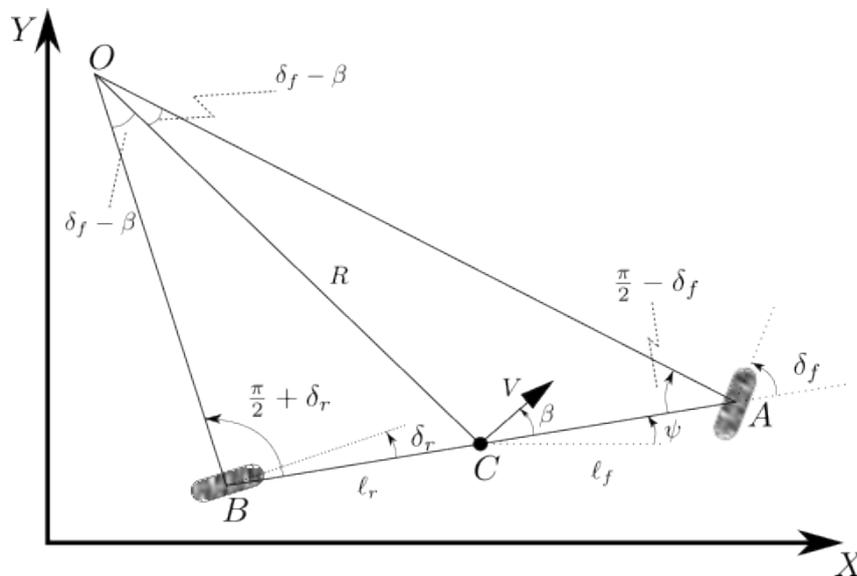


Figura 2.1: Cinemática del movimiento lateral del vehículo.

Se considera que el movimiento es en un solo plano así que para describir su movimiento se usa X , Y y ψ . (X, Y) son las coordenadas inerciales de la posición del centro de gravedad y ψ es la orientación del vehículo. La velocidad es denotada por V , β es el ángulo que forma la velocidad V con el eje longitudinal, β es llamado el ángulo de deslizamiento del vehículo. Se asume que los vectores de velocidad en las llantas tienen la misma dirección que éstas. Para manejar en cualquier camino circular de radio R , la fuerza lateral en ambas llantas es:

$$\frac{mV^2}{R} \quad (2.1)$$

El punto O es el centro de rotación y aplicando la ley de senos se llega a la siguiente expresión:

$$\{\tan \delta_f - \tan \delta_r\} \cos(\beta) = \frac{\ell_f + \ell_r}{R} \quad (2.2)$$

Como la velocidad angular del vehículo es

$$\dot{\psi} = \frac{V}{R} \quad (2.3)$$

Podemos reescribir la ecuación como

$$\dot{\psi} = \frac{V \cos(\beta)}{\ell_f + \ell_r} \{\tan \delta_f - \tan \delta_r\} \quad (2.4)$$

Las ecuaciones de movimiento están dadas por

$$\dot{X} = V \cos(\psi + \beta) \quad (2.5)$$

$$\dot{Y} = V \sin(\psi + \beta) \quad (2.6)$$

$$\dot{\psi} = \frac{V \cos(\beta)}{\ell_f + \ell_r} \{\tan \delta_f - \tan \delta_r\} \quad (2.7)$$

En el modelo se tienen tres entradas δ_f , δ_r y V . V se asume como una función variable en el tiempo o que puede ser obtenida del modelo longitudinal[25]. El ángulo de deslizamiento es descrito por:

$$\beta = \tan \left(\frac{\ell_f \tan \delta_r + \ell_r \tan \delta_f}{\ell_f + \ell_r} \right) \quad (2.8)$$

2.1.2. Dinámica lateral del vehículo

Considerando dos grados de libertad: y la posición lateral del vehículo respecto a un eje de rotación en el infinito ¹ y ψ el ángulo de guiñada medido con respecto al eje global X . La velocidad longitudinal del vehículo en el c.g. es denotada V_x , figura 2.2. Partiendo de la segunda

¹La Y presentada en la ec. (2.6) representa la coordenada inercial del vehículo, por lo que es distinta de la y presentada en esta sección.

ley de Newton:

$$ma_y = F_{yf} + F_{yr} \quad (2.9)$$

Donde la aceleración $a_y = (d^2y/dt^2)_{inercial}$ es la aceleración inercial del vehículo en el cen-

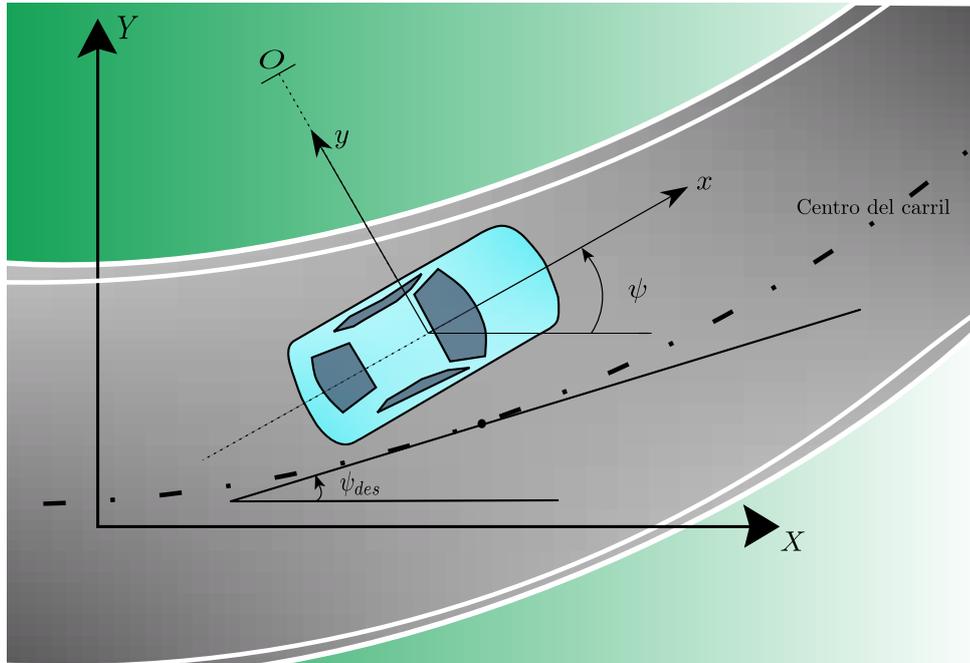


Figura 2.2: Dinámica lateral del vehículo.

tro de gravedad en la dirección del eje y y F_{yf} junto con F_{yr} son las fuerzas laterales en las llantas frontales y traseras. Los términos que contribuyen a a_y son la aceleración \ddot{y} debida al movimiento sobre el eje y la aceleración centrípeta $V_x\dot{\psi}$.

$$a_y = \ddot{y} + V_x\dot{\psi} \quad (2.10)$$

Sustituyendo obtenemos

$$m(\ddot{y} + V_x\dot{\psi}) = F_{yf} + F_{yr} \quad (2.11)$$

El balance de momentos respecto al eje z nos da una ecuación para la dinámica de la guiñada:

$$I_z\ddot{\psi} = \ell_f F_{yf} - \ell_r F_{yr} \quad (2.12)$$

El ángulo de deslizamiento de la llanta delantera es

$$\alpha_f = \delta - \theta_{Vf} \quad (2.13)$$

donde θ_{Vf} es el ángulo que el vector de velocidad forma con el eje longitudinal del vehículo

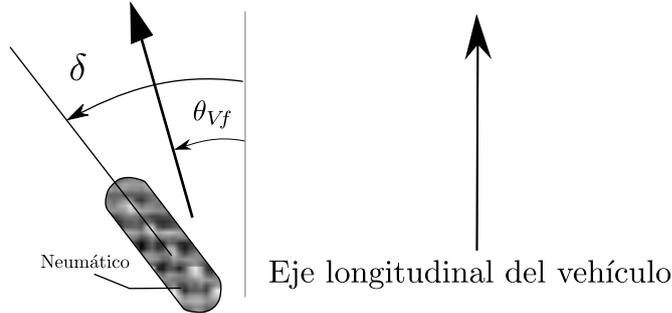


Figura 2.3: Ángulo de deslizamiento del neumático.

y δ el ángulo de deslizamiento de la llanta frontal, figura 2.3. El ángulo de deslizamiento de la llanta trasera es:

$$\alpha_r = -\theta_{Vr} \quad (2.14)$$

La fuerza lateral sobre las llantas delanteras es:

$$F_{yf} = 2C_{\alpha f}(\delta - \theta_{Vf}) \quad (2.15)$$

$C_{\alpha f}$ es una constante de proporcionalidad de la rigidez en las curvas del neumático delantero.

De forma similar para la llanta trasera:

$$F_{yr} = 2C_{\alpha r}(-\theta_{Vr}) \quad (2.16)$$

Donde $C_{\alpha r}$ es la rigidez en las curvas del neumático delantero. Las siguientes relaciones se pueden utilizar para calcular θ_{Vf} y θ_{Vr}

$$\tan(\theta_{Vf}) = \frac{V_y + \ell_f \dot{\psi}}{V_x} \quad (2.17)$$

$$\tan(\theta_{Vr}) = \frac{V_y - \ell_r \dot{\psi}}{V_x} \quad (2.18)$$

Sustituyendo lo anterior y con la notación $V_y = \dot{y}$, las ecuaciones del modelo son

$$m(\ddot{y} + \dot{\psi}V_x) = 2C_{\alpha f} \left(\delta - \arctan \frac{\dot{y} + \ell_f \dot{\psi}}{V_x} \right) + 2C_{\alpha r} \left(-\arctan \frac{\dot{y} - \ell_r \dot{\psi}}{V_x} \right) \quad (2.19)$$

$$I\ddot{\psi} = 2C_{\alpha f}\ell_f \left(\delta - \arctan \frac{\dot{y} + \ell_f \dot{\psi}}{V_x} \right) - 2C_{\alpha r}\ell_r \left(-\arctan \frac{\dot{y} - \ell_r \dot{\psi}}{V_x} \right) \quad (2.20)$$

Debido a las no linealidades del modelo anterior suele usarse la aproximación de ángulos pequeños

$$\theta_{Vf} = \frac{\dot{y} + \ell_f \dot{\psi}}{V_x} \quad (2.21)$$

$$\theta_{Vr} = \frac{\dot{y} - \ell_r \dot{\psi}}{V_x} \quad (2.22)$$

Finalmente se llega a la siguiente representación en espacio de estados

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \psi \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2C_{\alpha f} + 2C_{\alpha r}}{mV_x} & 0 & -V_x - \frac{2C_{\alpha f}\ell_f - 2C_{\alpha r}\ell_r}{mV_x} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2C_{\alpha f}\ell_f - 2C_{\alpha r}\ell_r}{I_z V_x} & 0 & -\frac{2C_{\alpha f}\ell_f^2 + 2C_{\alpha r}\ell_r^2}{I_z V_x} \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{2C_{\alpha f}}{m} \\ 0 \\ \frac{2\ell_f C_{\alpha f}}{I_z} \end{Bmatrix} \delta \quad (2.23)$$

2.1.3. Modelo dinámico en términos del error con respecto al camino

Se establecen las variables:

e_1 , distancia lateral del centro de gravedad del vehículo al centro del carril.

e_2 , error entre la orientación del vehículo y el camino.

La razón de cambio deseada en la orientación es:

$$\dot{\psi}_{des} = \frac{V_x}{R} \quad (2.24)$$

R es el radio constante del camino. La aceleración centrípeta es descrita por:

$$\frac{V_x^2}{R} = V_x \dot{\psi}_{des} \quad (2.25)$$

Se define \ddot{e}_1 y e_2 como:

$$\ddot{e}_1 = \left(\ddot{y} + V_x \dot{\psi} \right) - \frac{V_x^2}{R} = \ddot{y} + V_x \left(\dot{\psi} - \dot{\psi}_{des} \right) \quad (2.26)$$

$$e_2 = \psi - \psi_{des} \quad (2.27)$$

Por lo tanto

$$\dot{e}_1 = \dot{y} + V_x (\psi - \psi_{des}) \quad (2.28)$$

Si V_x no fuera constante

$$\dot{e} = \dot{y} + \int V_x e_2 dt \quad (2.29)$$

Retomando la ecuación (2.28), tenemos que

$$\dot{y} = \dot{e}_1 - V_x e_2 \quad (2.30)$$

$$\ddot{y} = \ddot{e}_1 - V_x \dot{e}_2 \quad (2.31)$$

$\dot{\psi}$ queda expresado de la siguiente manera

$$\dot{\psi} = \dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des} \quad (2.32)$$

Sustituyendo lo anterior en (2.19) y (2.20)

$$m \left(\ddot{e}_1 + V_x \dot{\psi}_{des} \right) = 2C_{\alpha f} \left(\delta - \arctan \frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 + l_f (\dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des})}{V_x} \right) + 2C_{\alpha r} \left(- \arctan \frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 - l_r (\dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des})}{V_x} \right) \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned}
I\ddot{e}_2 = & 2\ell_f C_{\alpha_f} \left(\delta - \arctan \frac{(\dot{e}_1 - V_x(e_2)) + \ell_f (\dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des})}{V_x} \right) \\
& - 2\ell_r C_{\alpha_r} \left(-\arctan \frac{(\dot{e}_1 - V_x e_2) - \ell_r (\dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des})}{V_x} \right)
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Utilizando la aproximación de ángulos pequeños formamos el modelo espacio estado:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_1 \\ \dot{e}_1 \\ e_2 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2C_{\alpha_f} + 2C_{\alpha_r}}{mV_x} & \frac{2C_{\alpha_f} + 2C_{\alpha_r}}{m} & -\frac{2C_{\alpha_f}\ell_f - 2C_{\alpha_r}\ell_r}{mV_x} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2C_{\alpha_f}\ell_f - 2C_{\alpha_r}\ell_r}{I_z V_x} & \frac{2C_{\alpha_f}\ell_f - 2C_{\alpha_r}\ell_r}{I_z} & -\frac{2C_{\alpha_f}\ell_f^2 + 2C_{\alpha_r}\ell_r^2}{I_z V_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ \dot{e}_1 \\ e_2 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2C_{\alpha_f}}{m} \\ 0 \\ \frac{2C_{\alpha_f}\ell_f}{I_z} \end{bmatrix} \delta \\
& + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2C_{\alpha_f}\ell_f - 2C_{\alpha_r}\ell_r}{mV_x} - V_x \\ 0 \\ -\frac{2C_{\alpha_f}\ell_f^2 + 2C_{\alpha_r}\ell_r^2}{I_z V_x} \end{bmatrix} \dot{\psi}_{des}
\end{aligned} \tag{2.35}$$

[25]

Algoritmos de Control para el vehículo

Una vez que se ha definido el modelo del sistema se le pueden aplicar diferentes leyes de control para lograr la estabilidad y permitir que pueda realizar diferentes tareas como el seguimiento de una trayectoria, cambios de velocidades y demás. En este capítulo se presentan diferentes propuestas de algoritmos de control para el vehículo, partiendo del más sencillo y posteriormente analizando las nuevas propuestas.

3.1. Control lineal por Retroalimentación de estado

Uno de los controles más ampliamente utilizados en el modelo lateral basado en el error es la retroalimentación de estado:

$$\delta = -k_1 e_1 - k_2 \dot{e}_1 - k_3 e_2 - k_4 \dot{e}_2 \quad (3.1)$$

Recordando que las variables en términos del error están definidas como:

- e_1 es la distancia del centro de gravedad al centro del carril
- e_2 es el error de orientación del vehículo con respecto al camino

Y la razón de cambio deseado de la orientación está definida como:

$$\dot{\psi}_{des} = \frac{V_x}{R} \quad (3.2)$$

El modelo sobre el cual se implementa esta ley es el correspondiente al representado en espacio de estados en la ecuación (2.35). Definimos $x = \{e_1 \ \dot{e}_1 \ e_2 \ \dot{e}_2\}^T$ con lo que la representación del modelo es:

$$\dot{x} = Ax + B_1\delta + B_2\dot{\psi}_{des} \quad (3.3)$$

Utilizando la retroalimentación de estado como $\delta = -Kx$, llegamos a:

$$\dot{x} = (A - B_1K)x + B_2\dot{\psi}_{des} \quad (3.4)$$

Donde la presencia del término $B_2\dot{\psi}_{des}$ nos indica que el error de seguimiento no converge totalmente al origen, aunque la matriz $(A - B_1K)$ es estable, los errores de estado estacionario e_1 y e_2 son distintos de cero por la entrada debida a la curvatura del camino $\dot{\psi}_{des}$. [25]

3.1.1. Simulación numérica de un cambio en $\dot{\psi}_{des}$ con el control por retroalimentación de estado

Se realiza la simulación con los parámetros mostrados en la tabla 3.1 y con una velocidad longitudinal $V_x = 30$ m/s.

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
m	1573 kg	I_z	2873 kgm ²
ℓ_f	1.1 m	ℓ_r	1.58 m
$C_{\alpha f}$	80000 N/rad	$C_{\alpha r}$	80000 N/rad

Tabla 3.1: Parámetros de simulación

El camino recorrido por el vehículo es inicialmente recto y después pasa a ser una curva de 1000m de radio por lo que $\dot{\psi}_{des}$ pasa de 0 a 0.03 rad/s. [25].

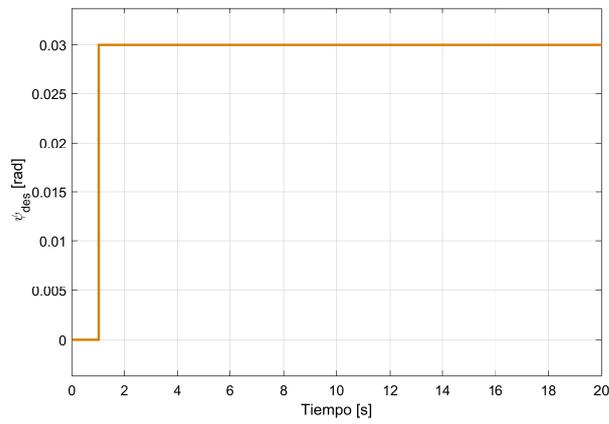


Figura 3.1: Representación de la velocidad angular deseada.

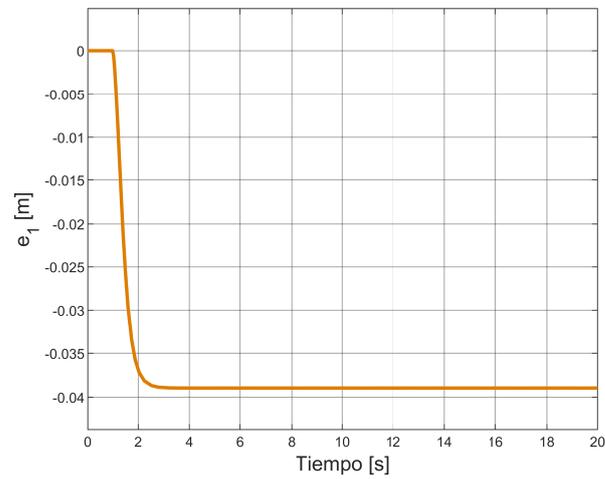


Figura 3.2: Error de posición lateral.

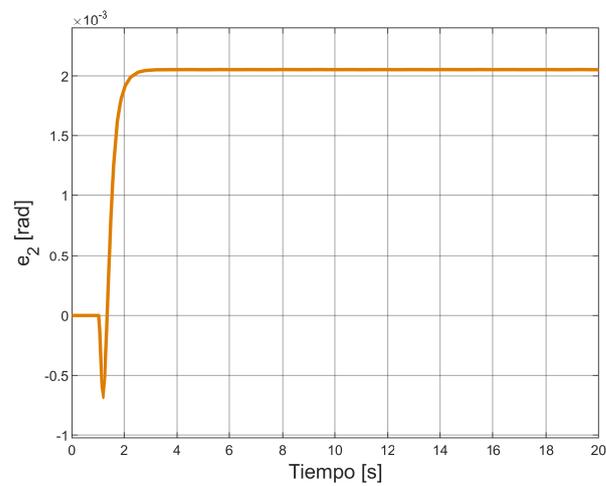


Figura 3.3: Error de orientación entre el vehículo y el camino.

Esto confirma que cuando la entrada $\dot{\psi}_{des}$ es distinta de cero, figura 3.1, los errores de seguimiento en estado estacionario también son distintos de cero, figuras 3.2 y 3.3, no obstante, el control muestra un buen desempeño.

3.2. Algoritmo de control subóptimo

Esta alternativa para el control del vehículo presentada en [26], considera las no-linealidades del sistema a la vez que reduce el tamaño de la señal de entrada δ , pues es subóptimo con respecto a ésta.

3.2.1. Control no lineal discreto subóptimo para sistemas afines

Empezando por la definición básica de la controlabilidad de los sistemas discretos:

Definición 1. El par (x_0, x_1) es controlable si existe un control admisible $u(k)$ tal que el sistema definido por $x(k+1) = f(x(k), u(k))$ pasa de x_0 a x_1 en N un número finito de pasos. Donde $x(k), f(\cdot, \cdot) \in R^n, u(k) \in R^m$.

Se considera que un control admisible está acotado. Además, se tiene el siguiente sistema discreto del tipo afín:

$$\bar{x}(k+1) = f_0(\bar{x}(k)) + f_1(\bar{x}(k))u(k), \quad (3.5)$$

donde $k = 0, 1, \dots, N, \bar{x}(k), f_0(\bar{x}(k)) \in R^n, f_1(\bar{x}(k)) \in R^{n \times m}$ y $u(k) \in R^m$, se define T_s como el tiempo de muestreo para este sistema discreto. También se define el siguiente índice cuadrático de desempeño

$$J = \frac{1}{2} \bar{x}^T(N) S \bar{x}(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \{ \bar{x}^T(k) Q \bar{x}(k) + u^T(k) R u(k) \}, \quad (3.6)$$

El horizonte de tiempo finito es $t_f = T_s N$, N es algún entero, finalmente $Q, S \geq 0$ y $R > 0$ son matrices de las dimensiones apropiadas. Supóngase que la Definición 1 se satisface por el par de puntos (x_0, x_{t_f}) del sistema discreto no lineal (3.5). Este desarrollo fue propuesto en [27], y

aplicado en [28], [29] y [30].

Se define el valor óptimo de J en el tiempo discreto N como

$$J_{N,N}^* = \frac{1}{2} \bar{x}^T(N) S \bar{x}(N), \quad (3.7)$$

Este término no depende de la ley de control en el tiempo discreto N , es decir $u(N)$. Para el siguiente paso llamado $N - 1$, el valor óptimo de J es definido como:

$$\begin{aligned} J_{N-1,N}^* &= \min_{u(N-1)} \left\{ \frac{1}{2} \bar{x}^T(N) S \bar{x}(N) + \frac{1}{2} \bar{x}^T(N-1) Q \bar{x}(N-1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} u^T(N-1) R u(N-1) \right\}, \\ &= \min_{u(N-1)} \left\{ J_{N,N}^* + \frac{1}{2} \bar{x}^T(N-1) Q \bar{x}(N-1) + \frac{1}{2} u^T(N-1) R u(N-1) \right\}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

Utilizando la ecuación espacio estado dada por (3.5) se realiza el cálculo del valor del estado $\bar{x}(N)$:

$$\begin{aligned} J_{N-1,N}^*(\bar{x}(N-1), u(N-1)) &= \min_{u(N-1)} \left\{ \frac{1}{2} [f_0(\bar{x}(N-1)) + \right. \\ &\quad \left. + f_1(\bar{x}(N-1)) u(N-1)]^T S \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot [f_0(\bar{x}(N-1)) + f_1(\bar{x}(N-1)) u(N-1)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \bar{x}^T(N-1) Q \bar{x}(N-1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} u^T(N-1) R u(N-1) \right\}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

A continuación se calcula el valor mínimo de $J_{N-1,N}$.

$$\begin{aligned} u^*(N-1) &= - [f_1^T(\bar{x}(N-1)) S f_1(\bar{x}(N-1)) + R]^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot f_1^T(\bar{x}(N-1)) S f_0(\bar{x}(N-1)), \end{aligned} \quad (3.10)$$

Se garantiza que $[f_1^T(\bar{x}(N-1)) S f_1(\bar{x}(N-1)) + R]^{-1}$ existe debido a que la matriz R es

definida positiva. Y el control dado por (3.10) es el control óptimo:

$$\frac{\partial^2 J_{N-1,N}(\bar{x}(N-1), u(N-1))}{\partial^2 u(N-1)} = R > 0, \quad (3.11)$$

La existencia del mínimo está garantizada porque el lado derecho de (3.9) es fuertemente convexo con respecto a $u(N-1)$. Para el siguiente paso llamado $N-2$, el valor de $u^*(N-1)$ es el valor óptimo en el paso $N-1$, de acuerdo con el principio de optimización de Bellman el control genera el valor óptimo para $\bar{x}(N-1)$. Entonces a continuación se tiene que:

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{N-2,N}(\bar{x}(N-2), u(N-1), u(N-2)) = \min_{u(N-1), u(N-2)} & \left\{ \frac{1}{2} \bar{x}(N)^T S \bar{x}(N) + \right. \\ & + \frac{1}{2} \bar{x}^T(N-1) Q \bar{x}(N-1) + \\ & + \frac{1}{2} \bar{x}^T(N-2) Q \bar{x}(N-2) + \\ & + \frac{1}{2} u^T(N-1) R u(N-1) + \\ & \left. + \frac{1}{2} u^T(N-2) R u(N-2) \right\}, \quad (3.12) \end{aligned}$$

Nótese que el término $\bar{x}(N)$, depende del control $u(N-1)$, y de manera sucesiva, el término con $\bar{x}(N-2)$ depende del control $u(N-3)$, y solo el término con $\bar{x}(N-1)$ depende de $u(N-2)$. Aún así, el control $u(N-1)$ encontrado anteriormente es óptimo y $\bar{x}(N-1)$ está dado por la ecuación de estado (3.5), por lo que se tiene que:

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{N-2,N}(\bar{x}(N-2), u(N-2)) = \min_{u(N-2)} & \left\{ \frac{1}{2} \bar{x}(N)^T S \bar{x}(N) + \frac{1}{2} [f_0(\bar{x}(N-2)) + \right. \\ & + f_1(\bar{x}(N-2)) u(N-2)]^T Q \cdot \\ & \cdot [f_0(\bar{x}(N-2)) + f_1(\bar{x}(N-2)) u(N-2)] + \\ & + \frac{1}{2} \bar{x}^T(N-2) Q \bar{x}(N-2) + \\ & + \frac{1}{2} u^T(N-1) R u(N-1) + \\ & \left. + \frac{1}{2} u^T(N-2) R u(N-2) \right\}, \quad (3.13) \end{aligned}$$

Se utiliza la ecuación $u(N-2)$ para obtener el control subóptimo en este paso, para no depender de resolver la ecuación de Riccati. (3.13) es fuertemente convexa con respecto a $u(N-2)$ lo que garantiza la existencia del mínimo. Se procede a obtener el control subóptimo $u(N-2)$:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(N-2) = & - [f_1^T(\bar{x}(N-2)) Q f_1(\bar{x}(N-2)) + R]^{-1} \cdot \\ & \cdot f_1^T(\bar{x}(N-2)) Q f_0(\bar{x}(N-2)), \end{aligned} \quad (3.14)$$

Por lo tanto, la ecuación general es:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(N-k) = & - [f_1^T(\bar{x}(N-k)) Q f_1(\bar{x}(N-k)) + R]^{-1} \cdot \\ & \cdot f_1^T(\bar{x}(N-k)) Q f_0(\bar{x}(N-k)), \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{N-k,N}(\bar{x}(N-k), u(N-k)) = & \tilde{J}_{N-k+1,N} + \frac{1}{2} \{ \bar{x}^T(N-k) Q \bar{x}(N-k) + \\ & + \tilde{u}^T(N-k) R \tilde{u}(N-k) \} \end{aligned} \quad (3.16)$$

para $k = 2, \dots, N$.

La secuencia subóptima obtenida garantiza que la aproximación al valor mínimo del índice de rendimiento (3.6) se alcanza, ecuación (3.11).

3.2.2. Control subóptimo aplicado al modelo lateral

Partiendo del modelo matemático en términos del error en 2.33 y 2.34 . Se define el vector de estado como:

$$\begin{aligned} x &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T, \\ x_1 &= e_1, \quad x_2 = \dot{e}_1, \quad x_3 = e_2, \quad x_4 = \dot{e}_2, \quad u = \delta, \end{aligned}$$

entonces

$$\dot{x} = \tilde{f}_0(x) + \tilde{f}_1 u, \quad (3.17)$$

donde

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{f}_0(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{1}{m}\eta - \frac{1}{m}\mu - V_x \dot{\psi}_{des} \\ x_4 \\ -\frac{\ell_f}{I_z}\eta + \frac{\ell_r}{I_z}\mu \end{bmatrix},$$

$$\tilde{f}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2C_{\alpha f}}{m} \\ 0 \\ \frac{2C_{\alpha f}\ell_f}{I_z} \end{bmatrix},$$

$$\eta = 2C_{\alpha f} \arctan \left(\frac{x_2 - V_x x_3 + \ell_f(x_4 + \dot{\psi}_{des})}{V_x} \right),$$

$$\mu = 2C_{\alpha r} \arctan \left(\frac{x_2 - V_x x_3 - \ell_r(x_4 + \dot{\psi}_{des})}{V_x} \right),$$

Usando la aproximación de Euler $\dot{\bar{x}} \approx \frac{\bar{x}(k+1) - \bar{x}(k)}{T_s}$, donde T_s es el tiempo de muestreo, por lo tanto:

$$\bar{x}(k+1) = \underbrace{T_s \bar{f}_0(\bar{x}(k)) + \bar{x}(k)}_{f_0(\bar{x}(k))} + \underbrace{T_s \bar{f}_1}_{f_1} u(k), \quad (3.18)$$

donde $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, entonces

$$\bar{x}(k+1) = f_0(\bar{x}(k)) + f_1 u(k), \quad (3.19)$$

donde

$$f_0(\bar{x}(k)) = \begin{bmatrix} T_s x_2(k) + x_1(k) \\ -\frac{1}{m}\eta(k) - \frac{1}{m}\mu(k) - T_s V_x \dot{\psi}_{des} + x_2(k) \\ T_s x_4(k) + x_3(k) \\ -\frac{\ell_f}{I_z}\eta(k) + \frac{\ell_r}{I_z}\mu(k) + x_4(k) \end{bmatrix},$$

$$f_1^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{m}T_s C_{\alpha f} & 0 & \frac{2}{I_z}\ell_f T_s C_{\alpha f} \end{bmatrix},$$

$$\eta(k) = 2T_s C_{\alpha f} \arctan\left(\frac{x_2(k) - V_x x_3(k) + \ell_f(x_4(k) + \dot{\psi}_{des})}{V_x}\right),$$

$$\mu(k) = 2T_s C_{\alpha r} \arctan\left(\frac{x_2(k) - V_x x_3(k) - \ell_r(x_4(k) + \dot{\psi}_{des})}{V_x}\right),$$

Usando el control dado por (3.10), el control subóptimo en el tiempo discreto $N - 1$, como función del error $\tilde{x} = x - x_{t_f}$:

$$u^*(N-1) = -[T^T S T + R]^{-1} T^T S f_0(\bar{x}(N-1)), \quad (3.20)$$

donde

$$T = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{m}T_s C_{\alpha f} \\ 0 \\ \frac{2}{I_z}\ell_f T_s C_{\alpha f} \end{bmatrix},$$

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & 0 & 0 \\ s_{21} & s_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{33} & s_{34} \\ 0 & 0 & s_{43} & s_{44} \end{bmatrix},$$

$$f_0(\bar{x}(N-1)) = \begin{bmatrix} T_s \tilde{x}_2(N-1) + \tilde{x}_1(N-1) \\ -\frac{1}{m} \tilde{\eta}(N-1) - \frac{1}{m} \tilde{\mu}(N-1) - \tilde{a}_1(N-1) \\ T_s \tilde{x}_4(N-1) + \tilde{x}_3(N-1) \\ -\frac{\ell_f}{I_z} \tilde{\eta}(N-1) + \frac{\ell_r}{I_z} \tilde{\mu}(N-1) + \tilde{x}_4(N-1) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\eta}(N-1) = 2T_s C_{\alpha f} \arctan \left(\frac{\tilde{b}_1(N-1) + \ell_f(\tilde{x}_4(N-1) + \dot{\psi}_{des})}{V_x} \right),$$

$$\tilde{\mu}(N-1) = 2T_s C_{\alpha r} \arctan \left(\frac{\tilde{b}_1(N-1) - \ell_r(\tilde{x}_4(N-1) + \dot{\psi}_{des})}{V_x} \right),$$

$$\tilde{a}_1(N-1) = T_s V_x \dot{\psi}_{des} + \tilde{x}_2(N-1),$$

$$\tilde{b}_1(N-1) = \tilde{x}_2(N-1) - V_x \tilde{x}_3(N-1),$$

$$u^*(N-1) = -m^2 \frac{I_z^2}{Rm^2 I_z^2 + 4s_{44}m^2 \ell_f^2 T_s^2 C_{\alpha f}^2 + 4s_{22}I_z^2 T_s^2 C_{\alpha f}^2} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \frac{2}{m} s_{21} T_s C_{\alpha f} [\tilde{x}_1(N-1) + T_s \tilde{x}_2(N-1)] + \right.$$

$$+ \frac{2}{m} s_{22} T_s C_{\alpha f} \left[\tilde{x}_2(N-1) - T_s V_x \dot{\psi}_{des} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{m} \tilde{\eta}(N-1) - \frac{1}{m} \tilde{\mu}(N-1) \right] +$$

$$+ \frac{2}{I_z} \ell_f s_{43} T_s C_{\alpha f} [\tilde{x}_3(N-1) + \tilde{x}_4 T_s(N-1)] -$$

$$- \frac{2}{I_z} \ell_f s_{44} T_s C_{\alpha f} \left[-\frac{1}{I_z} \ell_r \tilde{\mu}(N-1) + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{I_z} \ell_f \tilde{\eta}(N-1) - \tilde{x}_4(N-1) \right] \right\}, \quad (3.21)$$

Para $N - k$, donde $k = 2, 3, \dots, N$ se tiene que:

$$\tilde{u}(N - k) = - [T^T Q T + R]^{-1} T^T Q f_0(\bar{x}(N - k)), \quad (3.22)$$

donde

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & 0 & 0 \\ q_{21} & q_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{33} & q_{34} \\ 0 & 0 & q_{43} & q_{44} \end{bmatrix},$$

$$f_0(\bar{x}(N - k)) = \begin{bmatrix} T_s \tilde{x}_2(N - k) + \tilde{x}_1(N - k) \\ -\frac{1}{m} \tilde{\eta}(N - k) - \frac{1}{m} \tilde{\mu}(N - k) - \tilde{a}_1(N - k) \\ T_s \tilde{x}_4(N - k) + \tilde{x}_3(N - k) \\ -\frac{\ell_f}{I_z} \tilde{\eta}(N - k) + \frac{\ell_r}{I_z} \tilde{\mu}(N - k) + \tilde{x}_4(N - k) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\eta}(N - k) = 2T_s C_{\alpha f} \arctan \left(\frac{\tilde{b}_1(N - k) + \ell_f(\tilde{x}_4(N - k) + \dot{\psi}_{des})}{V_x} \right),$$

$$\tilde{\mu}(N - k) = 2T_s C_{\alpha r} \arctan \left(\frac{\tilde{b}_1(N - k) - \ell_r(\tilde{x}_4(N - k) + \dot{\psi}_{des})}{V_x} \right),$$

$$\tilde{a}_1(N - k) = T_s V_x \tilde{x}_4(N - k) + \tilde{x}_2(N - k),$$

$$\tilde{b}_1(N - k) = \tilde{x}_2(N - k) - V_x \tilde{x}_3(N - k),$$

Entonces

$$\begin{aligned}
u^*(N-k) = & -m^2 \frac{I_z^2}{Rm^2 I_z^2 + 4q_{44}m^2 \ell_f^2 T_s^2 C_{\alpha f}^2 + 4q_{22}I_z^2 T_s^2 C_{\alpha f}^2} \cdot \\
& \cdot \left\{ \frac{2}{m} q_{21} T_s C_{\alpha f} [\tilde{x}_1(N-k) + \tilde{x}_2 T_s(N-k)] + \right. \\
& + \frac{2}{m} q_{22} T_s C_{\alpha f} [\tilde{x}_2(N-k) - T_s V_x \dot{\psi}_{des} - \\
& - \frac{1}{m} \tilde{\eta}(N-k) + \frac{1}{m} \tilde{\mu}(N-k)] + \\
& + \frac{2}{I_z} \ell_f q_{43} T_s C_{\alpha f} [\tilde{x}_3(N-k) + \tilde{x}_4 T_s(N-k)] - \\
& - \frac{2}{I_z} \ell_f q_{44} T_s C_{\alpha f} \left[\frac{1}{I_z} \ell_r \tilde{\eta}(N-k) + \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{I_z} \ell_f \tilde{\mu}(N-k) - \tilde{x}_4(N-k) \right] \right\}, \tag{3.23}
\end{aligned}$$

para $k = 2, 3, \dots, N$. Las matrices S y Q deben ser matrices semidefinidas positivas y simétricas. Por lo que $\text{eig}\{S\}$ son $\text{eig}\{Q\}$ valores positivos y reales, y $q_{12} = q_{21}$, $q_{34} = q_{43}$, $s_{12} = s_{21}$, $s_{34} = s_{43}$.

3.2.3. Simulación numérica de una variación en $\dot{\psi}_{des}$ utilizando el control subóptimo

Se realizó la simulación con los parámetros mostrados anteriormente en la tabla 3.1 y con una velocidad longitudinal $V_x = 30$ m/s. Se utilizó para $\dot{\psi}_{des}$ la señal mostrada en la figura 3.1, que representa el cambio de curvatura. Las matrices Q y R deben ser seleccionadas para que sean definidas positivas, y para la simulación se utilizaron los siguientes valores:

$$Q = \begin{bmatrix} 2,5 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0,8 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5,25 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,3 \end{bmatrix}, R = 1$$

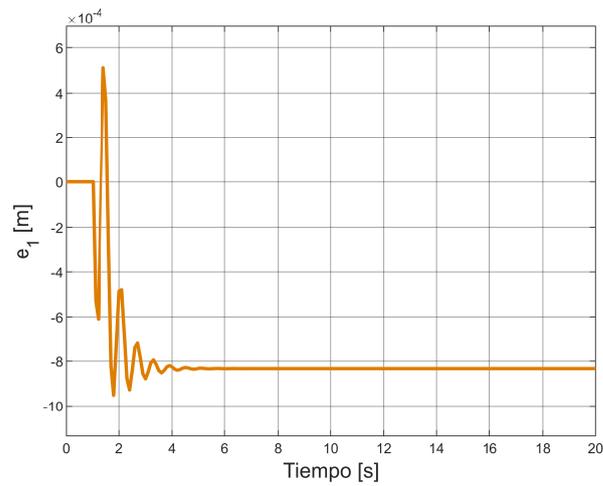


Figura 3.4: Error de posición lateral.

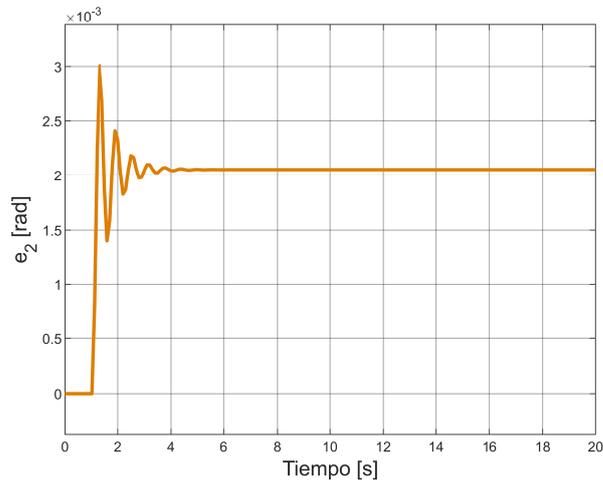


Figura 3.5: Error de orientación entre el vehículo y el camino.

En el caso del control subóptimo, se observa en las figuras 3.4 y 3.5 que, aunque los valores de e_1 y e_2 no regresan al origen después del cambio de curvatura, el valor de e_1 se encuentra en el orden de 10^{-4} , superando en precisión el valor obtenido por el control lineal en la misma variable, figura 3.2.

Simulaciones Numéricas

Las simulaciones numéricas nos permiten observar el comportamiento del modelo al utilizar los controles propuestos, por lo mismo se utilizan diferentes escenarios que son normales en la conducción de un vehículo autónomo como la corrección de posición o el seguimiento de curvas.

4.1. Regulación del error lateral e_1

Una de las primeras tareas que un vehículo autónomo debe poder realizar es la corrección de su posición lateral al recorrer un camino recto. Por lo tanto, en este capítulo se presentan los resultados de la simulación de cada uno de los controles descritos en la sección anterior al realizar la tarea de llevar el valor de e_1 al origen. Posteriormente, se realiza una comparación entre los resultados obtenidos. El escenario propuesto para verificar la capacidad de los controles de llevar el valor de e_1 al origen consiste en que al partir de $e_1(0) = -3,6$ m, con una velocidad longitudinal $V_x = 30$ m/s el control debe llevar al estado e_1 al origen. Para las simulaciones se usan los parámetros de la tabla 3.1.

4.1.1. Simulación numérica utilizando el control lineal para la regulación de e_1

Al utilizar el control por retroalimentación de estado de (3.1), el error lateral e_1 , figura 4.1, llega al origen en un periodo de tiempo corto, menos de tres segundos. Para el error de orientación e_2 , figura 4.2, se espera que se aleje del origen para permitir la corrección del error de e_1 y luego regresa al origen. Finalmente, respecto a la señal de control δ , figura 4.3, se observa que su magnitud inicial, $\delta(0) = 0,7204$ rad, es mayor al límite físico que un vehículo puede tener de rotación en las llantas².

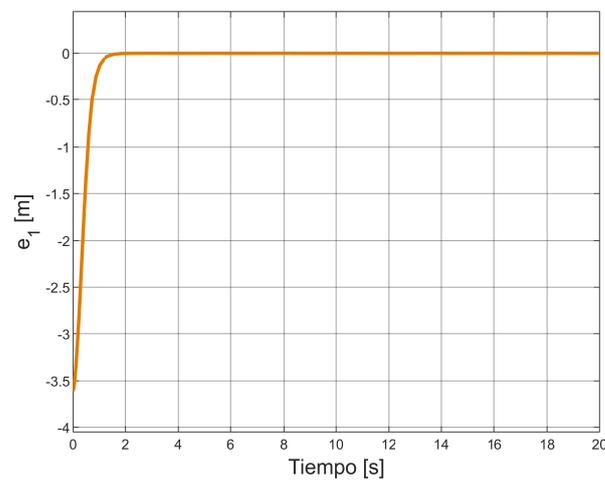


Figura 4.1: Respuesta del estado e_1 en simulación.

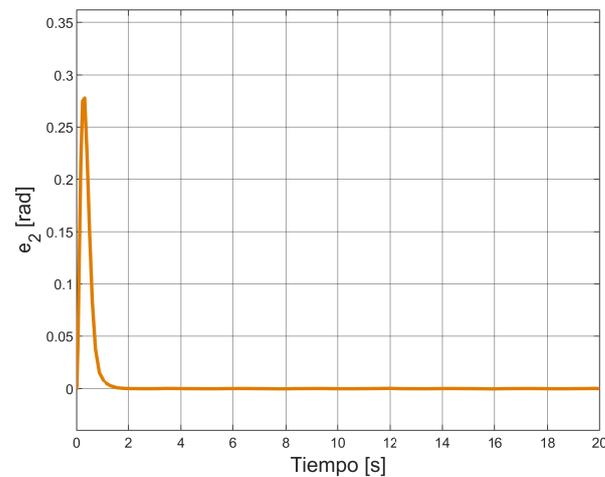


Figura 4.2: Respuesta del estado e_2 .

²El radio máximo de rotación de un vehículo es de 0,7 rad.[33]

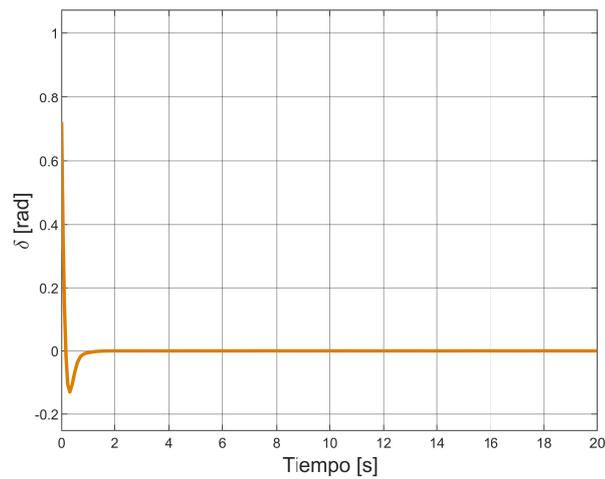


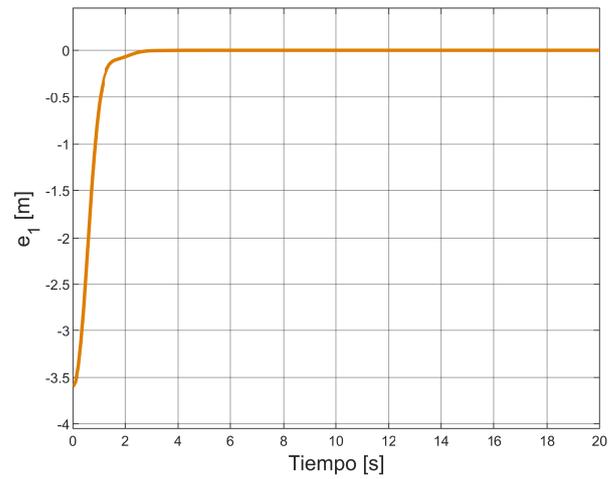
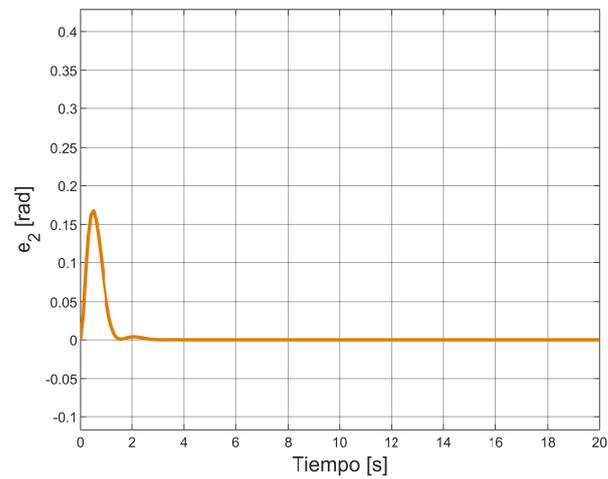
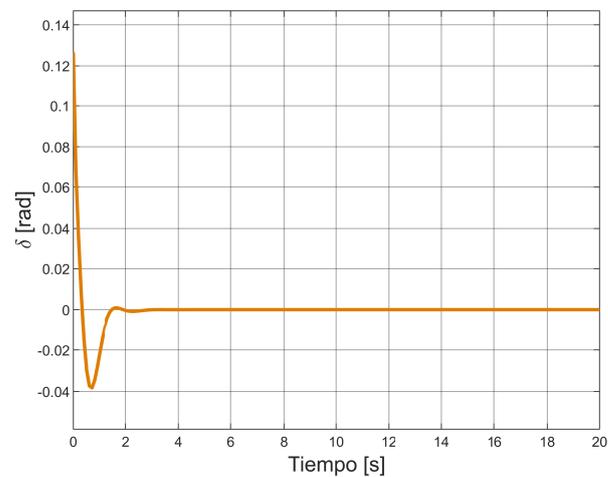
Figura 4.3: Señal de entrada δ generada por el control lineal por retroalimentación de estado.

4.1.2. Simulación numérica utilizando el control subóptimo para la regulación de e_1

Al usar el control subóptimo de (3.23), los valores de Q y R son

$$Q = \begin{bmatrix} 2,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5,25 & 0,9 \\ 0 & 0 & 0,9 & 3 \end{bmatrix}, R = 1$$

Para el estado e_1 , según se observa en la figura 4.4, se llega al origen en un periodo corto de tiempo, y como se esperaba el valor de e_2 crece al cambiar la dirección para llevar al vehículo al origen, figura 4.5. En el caso de la señal de control δ su magnitud inicial es también su valor máximo $\delta = 0,1266$ rad, y se mantiene dentro de la restricción física del vehículo.

Figura 4.4: Respuesta del estado e_1 en simulación.Figura 4.5: Respuesta del estado e_2 en simulación.Figura 4.6: Señal de entrada δ generada por el control subóptimo.

4.1.3. Comparación del comportamiento del sistema en la regulación de

e_1

Considerando los resultados obtenidos en simulación de cada control se pueden hacer las siguientes observaciones:

- El estado e_1 converge en un periodo de tiempo corto tanto para el control lineal por retroalimentación como para el control subóptimo, figura 4.7, aun así el tiempo de convergencia es menor para el control lineal.
- El estado e_2 con el control subóptimo experimenta un cambio de menor magnitud y presenta oscilaciones a diferencia del control lineal por retroalimentación de estado; estas oscilaciones se pueden disminuir cambiando los valores de Q y R pero el tiempo de convergencia aumenta.
- La señal de entrada generada por el control subóptimo tiene una magnitud menor y se encuentra dentro de la restricción física del vehículo, mientras que el control lineal por retroalimentación excede dicha condición.

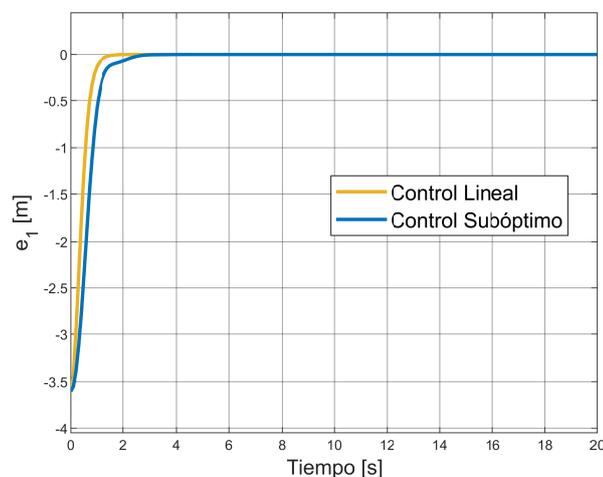
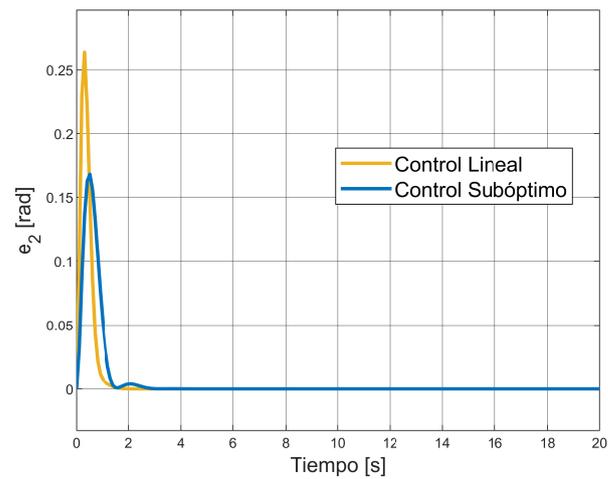
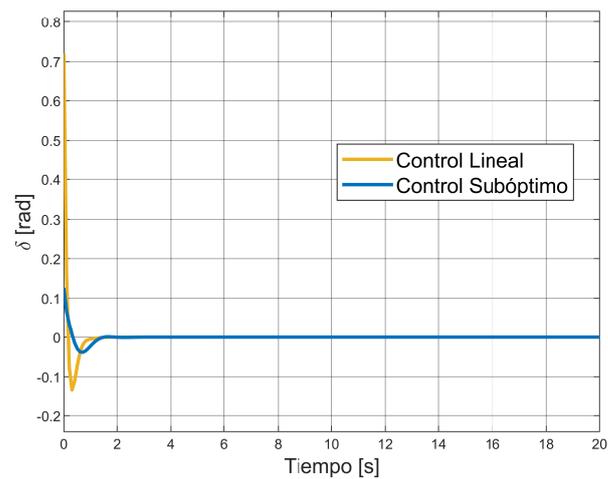


Figura 4.7: Estado e_1 .

Figura 4.8: Estado e_2 .Figura 4.9: Señal de entrada δ .

4.2. Seguimiento de una curva de velocidad

Para el seguimiento de trayectoria de los vehículos autónomos se pueden usar curvas de velocidad lateral, por lo que en esta sección se analiza la respuesta del sistema al seguir una curva de velocidad utilizando el control subóptimo en 3.23. La curva de velocidad utilizada es la que se muestra en la figura 4.10, los parámetros del vehículo son los de la tabla 3.1.

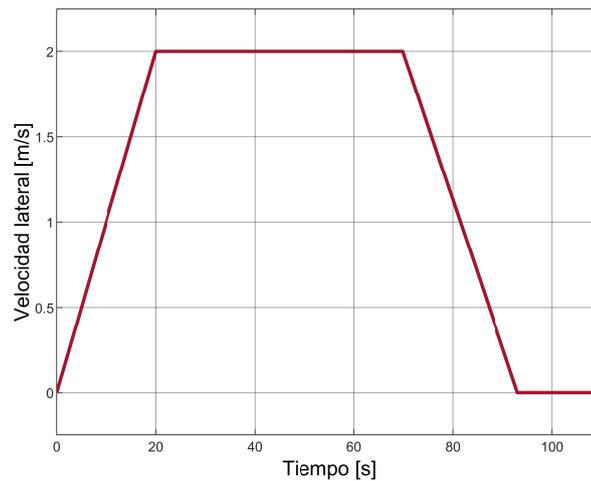
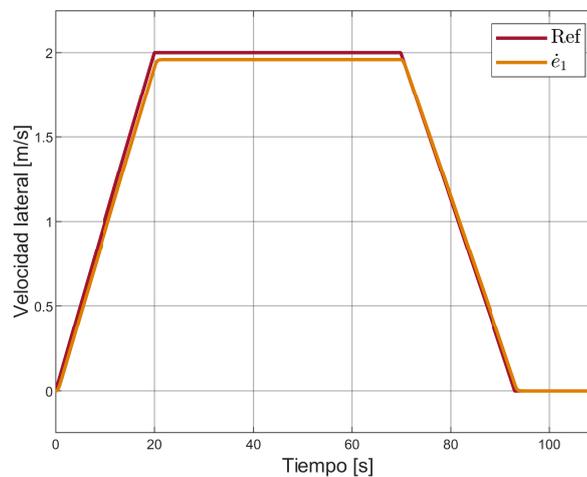


Figura 4.10: Perfil de velocidad prediseñado.

4.2.1. Simulación numérica utilizando el control lineal para el seguimiento de una curva de velocidad

Los resultados obtenidos al usar el control lineal en el seguimiento de una curva de velocidad se muestran en las figuras 4.11 a 4.13. La figura 4.11 muestra que el valor se acerca bastante a la referencia, mientras que en la figura 4.12 se observa que la señal de control es de un valor pequeño. Finalmente en la figura 4.13 vemos que el valor de e_1 corresponde a la integral de la velocidad de e_1 .

Figura 4.11: Respuesta del estado e_1 en simulación de seguimiento de velocidad lateral.

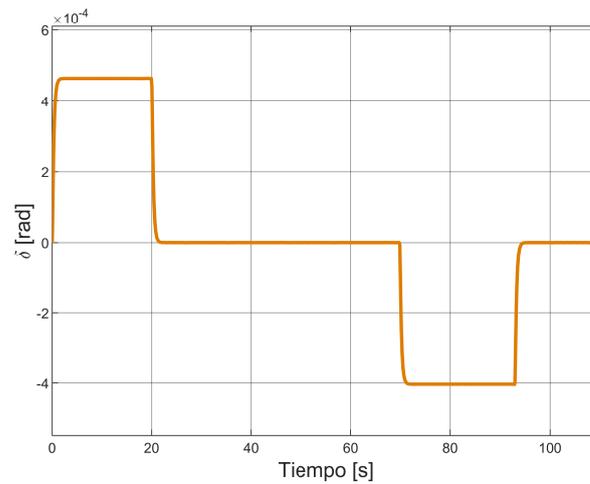


Figura 4.12: Señal de entrada de control generada por el control lineal para la simulación de seguimiento de velocidad.

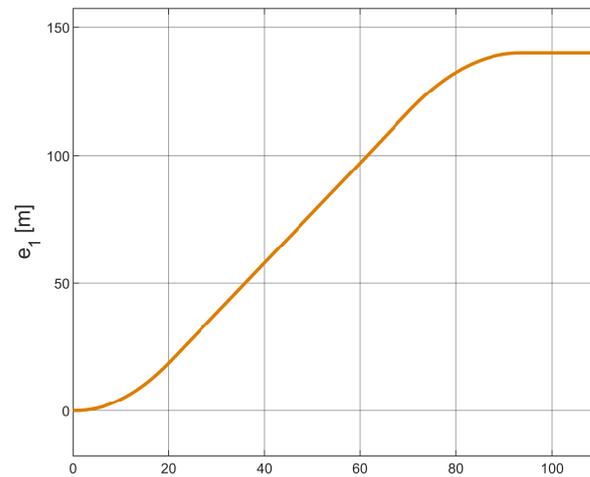


Figura 4.13: Respuesta del estado e_1 en la simulación de seguimiento de velocidad con el control lineal.

4.2.2. Simulación numérica utilizando el control subóptimo para el seguimiento de una curva de velocidad

Para el seguimiento de la curva de velocidad lateral, los valores de las matrices Q y R fueron designados como:

$$Q = \begin{bmatrix} 2,5 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0,8 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5,25 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,3 \end{bmatrix}, R = 1$$

Al añadir el perfil de velocidad deseado al control subóptimo se obtuvieron los resultados mostrados en las figuras 4.14 y 4.15. Como puede observarse, el control sigue el perfil de velocidad, ver figura 4.14. La energía del control, la señal de entrada del sistema, se mantiene en un valor pequeño, figura 4.15. En esta prueba, e_1 sigue el comportamiento de la integración del perfil de velocidad, figura 4.16.

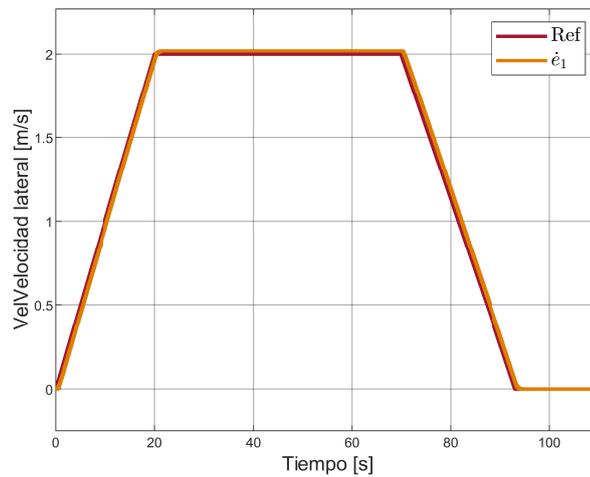


Figura 4.14: Respuesta del estado e_1 en simulación de seguimiento de velocidad lateral.

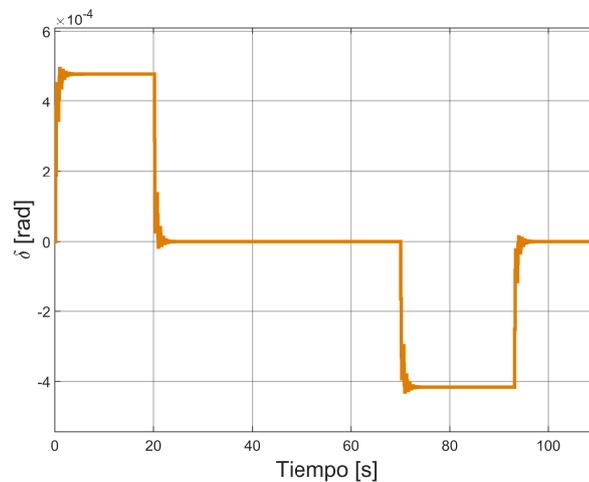


Figura 4.15: Señal de entrada de control generada por el control subóptimo para la simulación de seguimiento de velocidad.

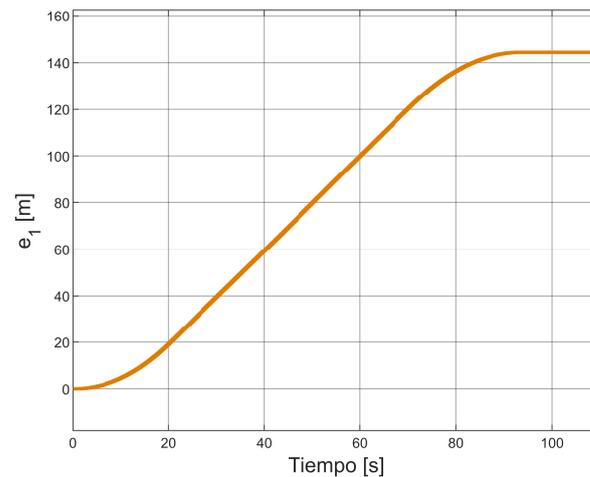


Figura 4.16: Respuesta del estado e_1 en la simulación de seguimiento de velocidad con el control subóptimo.

4.3. Seguimiento de una trayectoria circular

Con la regulación del error lateral e_1 se garantiza que el vehículo pueda seguir una línea recta por lo que resta ver el comportamiento del modelo al seguir una circunferencia. En este caso el vehículo debe transitar por una circunferencia de radio $r = 350$ m, los parámetros del vehículo son los de la tabla 3.1.

4.3.1. Simulación numérica utilizando el control lineal para el seguimiento de trayectoria circular

Con el control lineal se obtuvieron los resultados mostrados en las figuras 4.17 y 4.18. En la figura 4.17 se observa que se sigue la trayectoria deseada con un valor de error constante. El valor del error se puede observar en la figura 4.18 que es de 0,11 m.

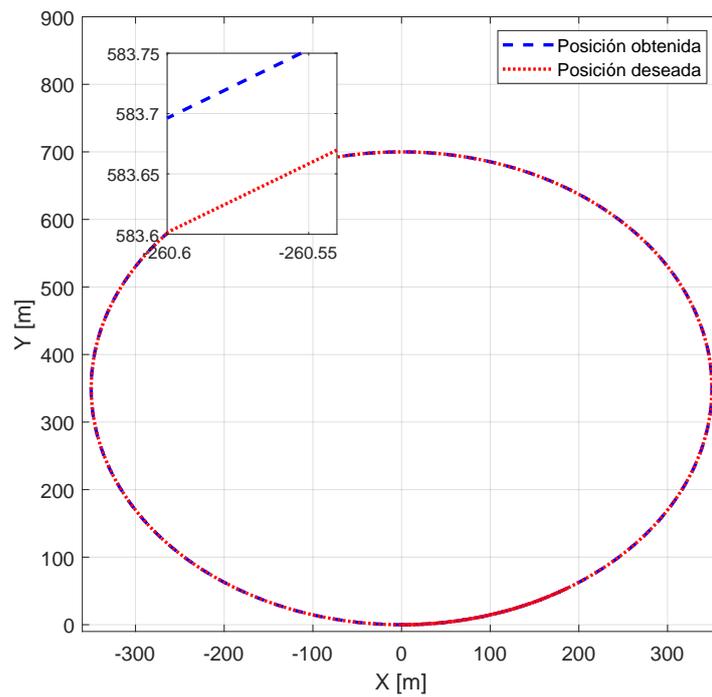


Figura 4.17: Comparación entre la trayectoria y la respuesta del modelo con el control lineal en la simulación de seguimiento de una trayectoria circular.

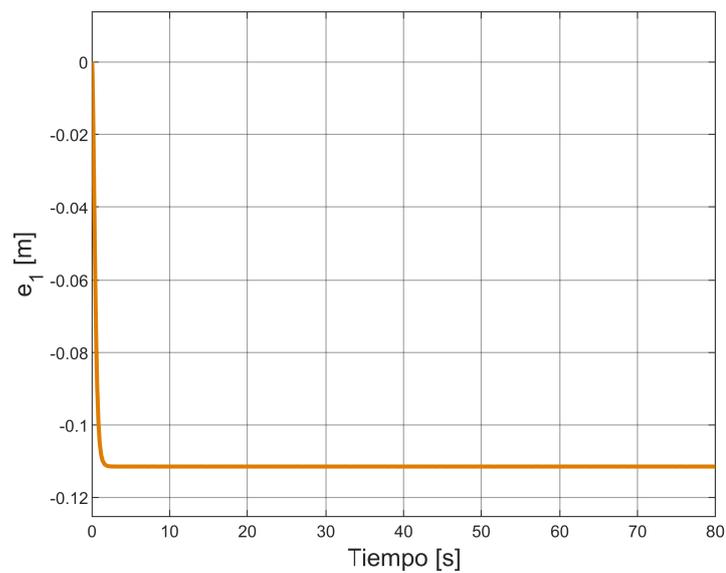


Figura 4.18: Respuesta del estado e_1 en la simulación de seguimiento de velocidad con el control lineal.

4.3.2. Simulación numérica utilizando el control subóptimo para el seguimiento de trayectoria circular

Para el seguimiento de la trayectoria circular, los valores de las matrices Q y R fueron designados como:

$$Q = \begin{bmatrix} 2,5 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0,8 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5,25 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,3 \end{bmatrix}, R = 1$$

Con el control subóptimo se obtuvieron los resultados mostrados en las figuras 4.19 y 4.20. Como puede observarse, el control sigue la trayectoria, ver figura 4.19. El error e_1 es muy pequeño, figura 4.20, menor a 1×10^{-3} m.

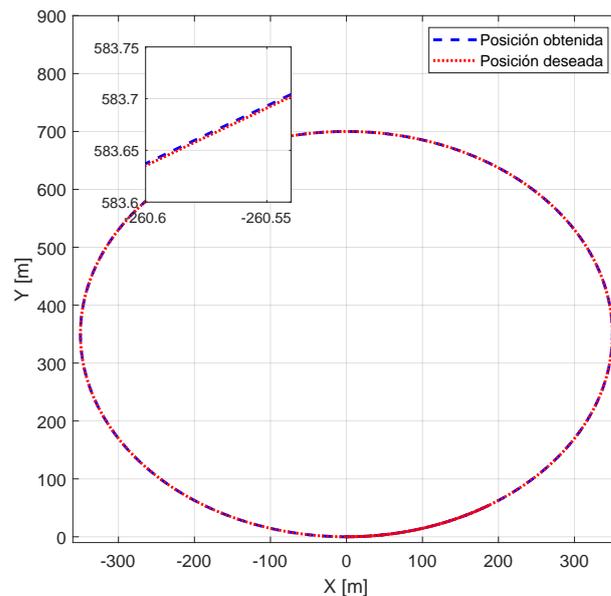


Figura 4.19: Comparación entre la trayectoria y la respuesta del modelo con el control subóptimo en la simulación de seguimiento de una trayectoria circular.

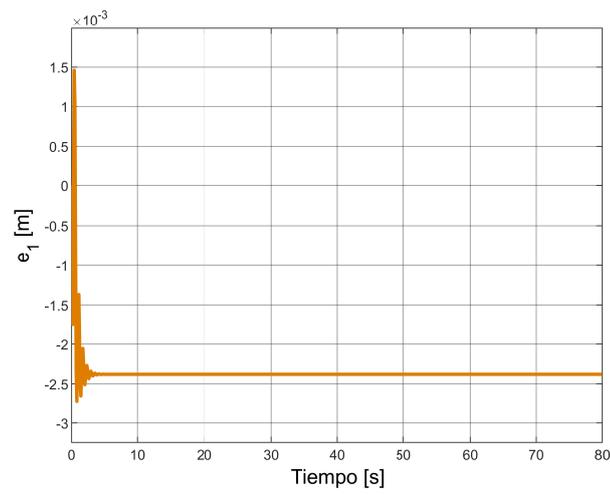


Figura 4.20: Respuesta del estado e_1 en la simulación de seguimiento de una trayectoria circular con el control subóptimo.

Percepción y localización cooperativa

Para poder aplicar correctamente los algoritmos de control desarrollados se debe tener el estado del vehículo: posición, orientación y sus respectivas velocidades. Por lo tanto, es necesario tener la medición del estado y un algoritmo para reducir su ruido. Los algoritmos de percepción y localización son herramientas que permiten usar la información de posición de diferentes sensores y de diferentes fuentes para identificar y localizar diferentes objetos en el entorno. En el caso de la percepción el objetivo es conocer los objetos que componen el entorno, sean móviles o no, mientras que en la localización se busca saber las coordenadas. En este capítulo se estudian algunas de las propuestas que se han hecho y posteriormente se presentan simulaciones numéricas para observar su desempeño y complejidad.

5.1. Antecedentes de la percepción y localización cooperativa

Se han realizado muchos trabajos para incrementar la habilidad de los vehículos para conocer su posición, la posición de otros vehículos y su entorno, y actualmente se desarrollan métodos de localización cooperativa que fusionan la información de diferentes sensores para dar una aproximación más precisa del estado de la posición del vehículo. Muchos de estos métodos utilizan una estimación local para cada vehículo, donde solo registran la posición propia y de los vehículos vecinos, usando normalmente el GPS y algún sensor tipo Lidar, y la información compartida con otras fuentes les permite tener una mejor estimación de la posición.

En 2013 Li, H., & Nashashibi, F. [34] presentaron un algoritmo con un filtro de intersección de covarianza dividida («Split Covariance Intersection Filter SCIF»), este algoritmo se basa en el filtro de intersección de covarianza («Covariance Intersection Filter CIF»), pero en él se considera que no toda la información está correlacionada y por lo tanto debe haber una parte de la covarianza que sea independiente y una parte que sea dependiente, por ello la ponderación utilizada (el peso w) en el CIF normal solo se aplica a la parte de la información que es dependiente. Con este algoritmo, prueban que su propuesta tiene un error menor que el filtro de Kalman y puede mejorar la precisión de un vehículo en presencia de otro vehículo con mejores sensores. El CIF es un algoritmo de estimación cuando se desconoce el error de correlación cruzada entre dos variables, fue introducido por Julier, S.J. et. al, 1997[35] y usando una combinación convexa de las covarianzas y medias de las variables para obtener una estimación consistente en escenarios donde el filtro de Kalman no puede operar.

El trabajo de Kim, S., et. al., 2015 [36] presenta una arquitectura de sistema de conducción cooperativa de varios vehículos que por medio del sistema de percepción puede proporcionar diferentes vistas para el conductor o el planificador de movimiento en vehículos autónomos: una vista de representación estructural donde para cada vehículo se utilizan un poliedro vacío lo que permite ver a través de los otros vehículos, una vista que representa la imagen resultante de elevar el asiento del conductor por encima de la altura del vehículo, una vista satelital y una vista panorámica. El sistema también proporciona, utilizando la información de alcance extendido del sistema, una advertencia de colisión frontal, asistencia para rebasar/cambiar de carril y evasión automática de obstáculos ocultos mediante la combinación de mapas. Al tener un mapa para la navegación de vehículos, que consiste en el conjunto de puntos obtenidos y filtrados de los sensores, su percepción cooperativa fusiona los mapas utilizando la pose relativa con dos enfoques diferentes al problema. El primero, el algoritmo del punto más cercano iterativo («Iterative Closest Point ICP») busca la pose relativa que minimiza la distancia entre los puntos que se encuentran en ambos mapas. El segundo es el «Probabilistic Scan Matching», donde el objetivo es encontrar una pose en la que la observación actual sea máxima en el parecido o más probable según la observación anterior, encuentra el máximo global evaluando todo

el espacio de búsqueda y pueda proporcionar una solución sólida incluso con un gran error de inicialización.

Miller, A., et. al., 2020[37] diseñaron un algoritmo para mejorar la percepción y localización de un vehículo L2 con los datos del sensor del vehículo L4 en las carreteras. Con la presunción de que los vehículos con sensores avanzados (L4) y aquellos con sensores de baja fidelidad (L2), pueden utilizar la comunicación entre vehículos (v2v). La información sobre la posición de los vehículos es representada por una función de densidad de probabilidad; esto incluye también los vehículos detectados por los L2 y los L4. Su algoritmo usa el tiempo desde la última medición de ambos vehículos y usa un Filtro Kalman Extendido para fusionar la información de las diferentes fuentes.

Uno de los trabajos más recientes realizado por Héry, E., et al., 2021 [38] utiliza «Local Dynamic Maps» (LDM) para mejorar la localización a través de la fusión de datos. El LDM contiene información dinámica, con la que el vehículo puede interactuar, y se define como una superposición del mapa estático. Además, los procesos de estimación de los LDM son descentralizados y asincrónicos mientras se mantiene un marco de referencia ENU («East, North, Up») común. Con la información de un sensor integrado, el estado se extrapola en el momento de la adquisición de esta observación antes de fusionarse. Si la observación es un LDM de otro vehículo, generalmente tiene un retraso, este LDM se extrapola en el momento del estado. El modelo de evolución utiliza su vector cinético y se supone que los valores cinéticos son constantes hasta que se dispone de una nueva observación. Existe cierta incertidumbre en los valores cinéticos para otros vehículos en cuanto a si permanecen constantes, pero esto se tiene en cuenta como parte de un modelo de ruido más grande. Las observaciones del sensor se combinan utilizando un filtro Kalman extendido (EKF) en el caso de los sensores integrados, y los LDM comunicados se fusionan mediante un filtro de intersección de covarianza (CIF).

Una propuesta realizada Lassoued, K., et al., 2017 [39], utiliza un modelo no lineal para la medición y para el modelo del sistema, junto con la comunicación entre vehículos para mejorar la estimación de la posición de los vehículos. La información intercambiada por los vehículos es la corrección de distancia a los satélites del sistema global de navegación satelital (GNSS por

sus siglas en inglés) a través de la red de comunicación entre vehículos. La corrección de estas distancias se logra usando la estimación del movimiento local de los vehículos o seguimiento de estos vehículos, la información se distribuye en toda la red usando técnicas de propagación de restricciones e inversión de conjuntos. El error aditivo estimado también es distribuido en la red, y toda la información se maneja en intervalos con un error acotado, y esto permite el cálculo de dominios de confianza altamente fiables.

5.2. Simulaciones de algoritmos de percepción y localización cooperativa

Las simulaciones numéricas presentadas a continuación fueron realizadas en el entorno de MATLAB, siguiendo los métodos descritos anteriormente para la fusión de datos. Para mantener la fidelidad de los métodos en algunos casos fue necesario recurrir a bases de datos con información recopilada de diferentes sensores.

5.2.1. Simulación de filtros SCIF y Kalman

Para comprobar el funcionamiento del CIF/SCIF se realizó un programa para hacer la comparación con el filtro de Kalman. Los datos de la posición real del vehículo corresponden con el vehículo líder en `csv_sync.zip`[40]. La posición real es medida por un "sensor virtual", que toma el valor real con ruido agregado, cada 0.4085 segundos, entre mediciones el programa sigue actualizando la posición usando el modelo del sistema. Cada nueva medición se agrega usando el filtro de Kalman. Cada 1.3889 segundos se recibe una medición de otro vehículo (esta posición de datos corresponde con los datos medidos desde el vehículo seguidor usando el Lidar para ubicar el vehículo líder), estas mediciones se fusionan usando el filtro de covarianza dividido. Dado que la posición del seguidor no se actualiza con la posición registrada por el líder, no se espera que la correlación sea alta, pero este conjunto de datos permite tener diferentes fuentes de información e implementar ambos filtros. Los conjuntos de ecuaciones que se utilizan en

este programa son:

$$x_t = x_{t-1} + \Delta d_t \cos(\theta_{t-1} + \Delta\theta_{t/2}) \quad (5.1)$$

$$y_t = y_{t-1} + \Delta d_t \sin(\theta_{t-1} + \Delta\theta_{t/2}) \quad (5.2)$$

$$\theta_t = \theta_{t-1} + \Delta\theta_t \quad (5.3)$$

$$P_{E(t)} = G_{X_e} P_{E(t)} G_{X_e}^T + G_u \Sigma_u G_u^T + R_{E(t)} \quad (5.4)$$

$$P_{iE(t)} = G_{X_e} P_{iE(t-1)} G_{X_e}^T + G_u \Sigma_u G_u^T + R_{iE(t)} \quad (5.5)$$

$P_{E(t)}$ y $P_{iE(t)}$ son las matrices de covarianza completa y la matriz de covarianza de la parte independiente del estado. G_{X_e} y G_u son respectivamente las matrices jacobianas de la función G formada de las ecuaciones 5.1-5.3, mismas que representan el modelo de movimiento del vehículo en posición y orientación, con respecto a X_e y $u_{E(t)}$; las matrices $R_{E(t)}$ y $R_{iE(t)}$ caracterizan el error del modelo de movimiento. Σ_u es el error asociado al vector cinético $u_{E(t)}$. Ecuaciones para fusionar la nueva medición del "sensor virtual" usando el filtro de Kalman.

$$Z_{A(t)} = H_A X_{E(t)} + R_A \quad (5.6)$$

$$K = P_{E(t)} H_A^T (H_A P_{E(t)} H_A^T + \Sigma_A)^{-1} \quad (5.7)$$

$$X_{E(t)} = X_{E(t)} + K (Z_A - H_A X_{E(t)}) \quad (5.8)$$

$$P_{E(t)} = (I - K H_A) P_{E(t)} \quad (5.9)$$

$$P_{iE(t)} = (I - K H_A) P_{iE(t)} (I - K H_A)^T + K \Sigma_A K^T \quad (5.10)$$

$$P_{dE(t)} = P_{E(t)} - P_{iE(t)} \quad (5.11)$$

Donde $Z_{A(t)}$ es la medición, H_A es la matriz de observación y Σ_A es el error asociado a la medición.

Las ecuaciones para fusionar una medida externa usando el filtro de intersección de cova-

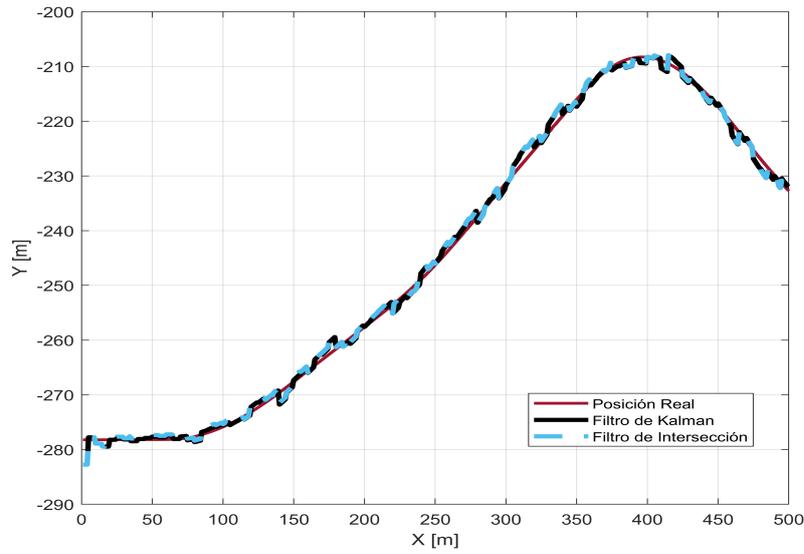


Figura 5.1: Trayectoria en x

rianza dividida se presentan a continuación.

$$X_{EI} = X_{CE} \oplus Z_R = \begin{bmatrix} x_{ce} \\ y_{ce} \\ \theta_{ce} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \Delta x_R \\ \Delta y_R \\ \Delta \theta_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x_R \cos(\theta_{ce}) - \Delta y_R \sin(\theta_{ce}) + x_{ce} \\ \Delta x_R \sin(\theta_{ce}) + \Delta y_R \cos(\theta_{ce}) + y_{ce} \\ \Delta \theta_R + \theta_{ce} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

$$P_{EI} = \frac{\partial X_{EI}}{\partial X_{CE}} P_{CE} \left(\frac{\partial X_{EI}}{\partial X_{CE}} \right)^T + \frac{\partial X_{EI}}{\partial Z_R} \Sigma_R \left(\frac{\partial X_{EI}}{\partial Z_R} \right)^T \quad (5.13)$$

$$P_{iEI} = \frac{\partial X_{EI}}{\partial X_{CE}} P_{iCE} \left(\frac{\partial X_{EI}}{\partial X_{CE}} \right)^T + \frac{\partial X_{EI}}{\partial Z_{iR}} \Sigma_R \left(\frac{\partial X_{EI}}{\partial Z_{iR}} \right)^T \quad (5.14)$$

El resultado se observa en la Figura 5.1, donde el color rojo muestra la posición real, el color negro muestra la estimación con el filtro de Kalman y el color azul el filtro de intersección de covarianza dividida.

5.2.2. Simulación algoritmo ICP

Como se mencionó anteriormente, el algoritmo ICP busca la pose relativa que minimiza la distancia entre los puntos de dos mapas, los cuales representan dos mediciones diferentes del

entorno. Para lograrlo trabaja con las siguientes ecuaciones:

$$q_{(i,j)}^* = \arg \min_{q_{i,j}} \sum_{m_j \in M_j} \|C_{M_i}(m_j) - m_j \otimes q_{i,j}\| \quad (5.15)$$

Donde $\|\cdot\|$ es la norma l_2 y $C_{M_i}(m_j)$ es un punto en M_i que corresponde a m_j , es decir se busca la posición y la orientación $q_{i,j}$ que hace que la distancia entre el punto $C_{M_i}(m_j)$ y $m_j \otimes q_{i,j}$ sea mínima. La implementación de esta distancia mínima es limitada por un umbral de distancia $d_t h$, de modo que:

$$q_{(i,j)}^* = \arg \min_{q_{i,j}} \sum_{m_j \in M_j} d_{m_i}(m_j) \|C_{M_i}(m_j) - m_j \otimes q_{i,j}\| \quad (5.16)$$

Donde

$$d_{m_i}(m_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } \min_{m_i \in M_i} \|m_i - m_j\| < d_t \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (5.17)$$

Finalmente se puede formular la métrica S como:

$$S(M_i, M_j, q_{i,j}) = \sum_p d_{M_i}(m_j) \|M_i[p] - C_{M-j \otimes q_{i,j}(p)}\| \quad (5.18)$$

(Kim 2014[36])

Para el desarrollo de esta simulación se utilizan las mediciones en Lidar de la práctica de Mathworks «Build a Map from Lidar Data», la cual contiene aproximadamente 100s de información registrada con el Lidar (MathWorks [41]). En la figura 5.2 observamos una de las mediciones hechas por el Lidar. Se procesan los datos adquiridos por el Lidar y se resuelve la ecuación (5.18) para la pose entre dos mediciones, con la pose se actualiza la posición del vehículo con respecto al punto de inicio y se puede determinar la trayectoria recorrida. El tiempo para estimar la pose es en promedio: 1.0775s

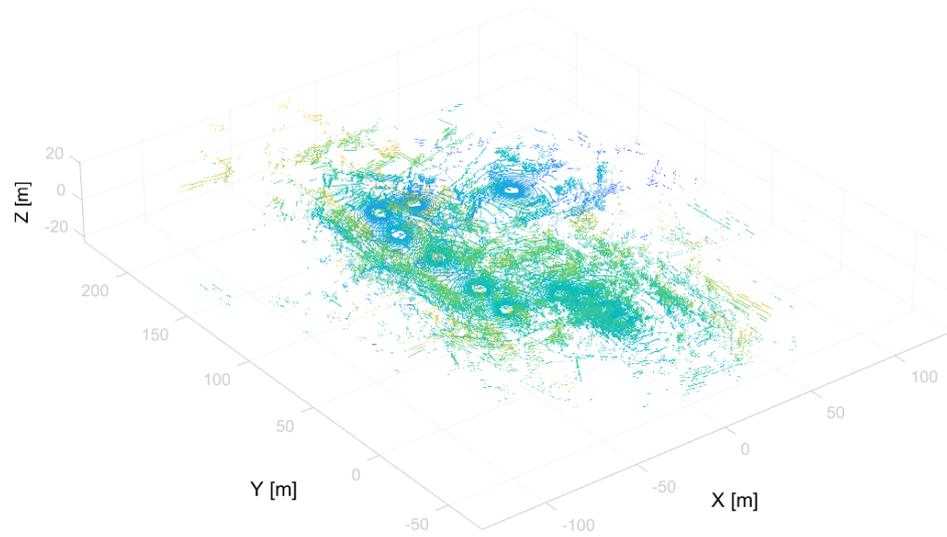


Figura 5.2: Medición realizada por el Lidar de la práctica de Mathworks «Build a Map from Lidar Data».[41]

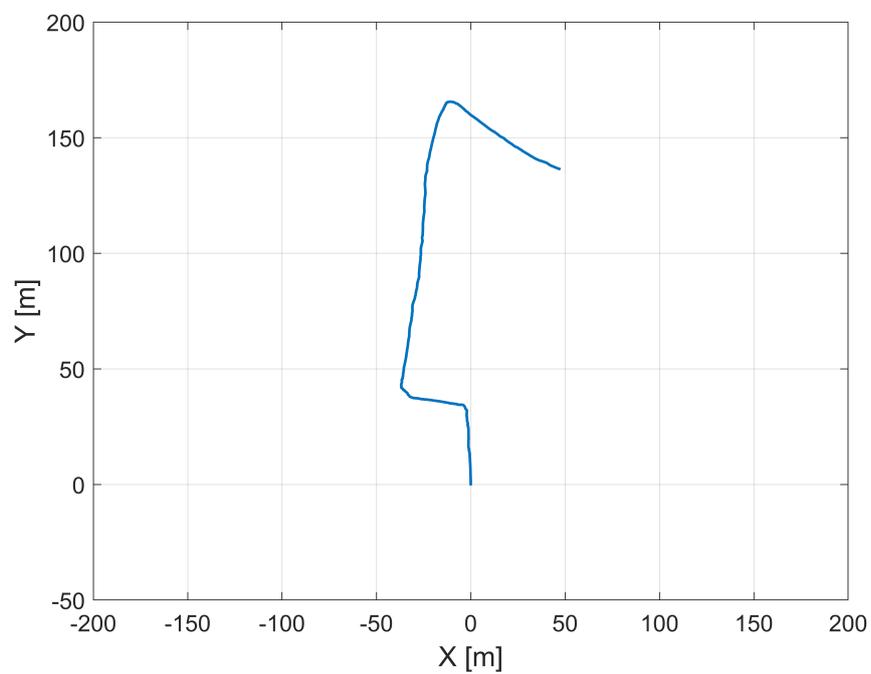


Figura 5.3: Trayectoria estimada

5.2.3. Simulación algoritmo PSM

Este algoritmo se centra en encontrar la orientación y posición en la que la observación actual tiene el máximo parecido al ser comparado con una observación anterior como suele ser un mapa. Esta idea se puede formular de la siguiente manera:

$$x^* = \underset{q_{i,j}}{\operatorname{arg\,m\acute{a}x}} P(z|x, M) \quad (5.19)$$

Donde $P(z|x, M)$ es el modelo de observación, x es la posición y orientación del observador (también llamada pose), z es la lectura del sensor, y M es un mapa. El algoritmo encuentra el máximo global después de evaluar toda la zona de búsqueda, lo que permite que sea una solución robusta aún con un error de inicialización grande. Para determinar el máximo parecido se utiliza la correlación para comparar entre los puntos que se obtuvieron de la medición y los puntos almacenados en el mapa. Para reducir el costo computacional el algoritmo se divide en dos etapas de escaneo, la primera se realiza en un mapa de baja resolución y cuando se encuentra el máximo parecido en este mapa, en la segunda etapa se escanea en un mapa de alta resolución el máximo parecido encontrado en la etapa anterior para una solución más precisa (Kim 2014[36]).

Para poder simular este algoritmo se requiere tener la medición del entorno y un mapa de puntos para la comparación, por lo cual se optó por utilizar la información de LidarExplorer, la cual contiene las medidas de Lidar de ciudades y estados en los Estados Unidos de América (USGS[42]). Con la información se genera una trayectoria para el vehículo y se obtienen las mediciones que el vehículo tendría en esa posición sin considerar los efectos de la orientación. Posteriormente la información del mapa y de la medición del Lidar es convertida a un plano 2D para realizar la correlación y de ésta se obtiene la posición estimada.

Como se observa en la figura 5.4, el algoritmo es capaz de determinar la trayectoria propuesta del vehículo con un error cuadrático medio de la trayectoria de 3.88m en x y 4.55 en y , la desventaja es que para determinar la posición puede tomar más de 20 segundos.



Figura 5.4: Trayectoria del vehículo. Los puntos en rosa representan la posición real y los puntos en verde la estimada por el algoritmo. El mapa fue formado con la información de LidarExplorer.[42]

5.2.4. Simulación de Análisis de Intervalos

Siguiendo la propuesta realizada Lassoued et al [39], la ecuación de la pseudomedición es:

$$\rho_i^j = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} + b^j + d_i + \beta^j \quad (5.20)$$

Donde las coordenadas de cada vehículo son $p_i = [x_i, y_i, z_i]$, las coordenadas de los satélites son $p^j = [x^j, y^j, z^j]$, la compensación del reloj es d_i , el error común aditivo es b^j y el ruido de la medición es β^j . El vector de n_s pseudo mediciones es ${}^i y \in \mathbb{R}^{n_s}$ y ${}^i x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado del vehículo i . El modelo de observación en tiempo discreto es definido como:

$${}^i y_k = g({}^i x_k) \quad (5.21)$$

Se asume que cada vehículo cuenta con sensores que le permiten saber su velocidad y orien-

tación ${}^i\mathbf{u} = [v_i \ \psi_i]^T$. Para la evolución del modelo se utiliza el modelo 2D monociclo para los componentes de la pose, un modelo lineal para la compensación del reloj y un modelo autorregresivo del error, esto concatenado en la función f en un marco ENU («East, North, UP»):

$$f({}^i\mathbf{x}, {}^i\mathbf{u}) = \begin{cases} \dot{x}_i = v_i \cos(\psi_i); \dot{y}_i = v_i \sin(\psi_i); \dot{z}_i = 0 \\ \dot{d}_i = dr_i; \dot{dr}_i = 0; \dot{b}^j = ab^j \end{cases} \quad (5.22)$$

d_i y dr_i son respectivamente la compensación del reloj del receptor y su deriva a ser estimada. El parámetro del modelo autoregresivo $a = e^{-T_e/\tau}$, T_e es el tiempo de muestreo y τ es la constante de tiempo del modelo del sesgo b^j ($a = 0,9995$, $\tau = 6,2 \text{ min}$). Los índices de los vehículos y satélites en común son denotados respectivamente $i \in \{1 \dots n_r\}$ y $j \in \{1 \dots n_s\}$

Para realizar la estimación de estado en un marco de error acotado con análisis de intervalos se resuelve un problema de inversión de conjuntos. Usando una función de inclusión $[f]$ de la función f , se puede identificar la factibilidad de que las cajas o intervalos realicen las siguientes pruebas: Si $[f]([x]) \subset \mathbb{Y}$ entonces $[x]$ es factible Si $[f]([x]) \cap \mathbb{Y} = \emptyset$ entonces $[x]$ es inviable En cualquier otro caso $[x]$ es indeterminado. Se resuelve el problema de inversión de conjuntos probando de forma recursiva la viabilidad de las cajas candidatas, partiendo de una caja inicial arbitrariamente grande $[x_0]$ [43]. Si una caja es factible, se almacena en el conjunto de soluciones interno \mathbb{X} . Si una caja no es factible, se descarta. Si una caja es indeterminada se divide en dos subcajas y se almacena en una lista \mathcal{L} esperando a ser tratado. Por esto se usa el algoritmo conocido como SiviaP, un Sivia («Set Inversion Via Interval Analysis») con Propagación de Restricciones (CP) en intervalos. CP es muy eficiente en términos de cálculo y reduce el número de bisecciones necesarias mediante la contratación de cajas para acelerar el procesamiento. SiviaP implica la formalización de un Problema de Satisfacción de Restricciones (cuyas siglas en inglés son CSP). Un CSP se denota por \mathcal{H} (siguiente ecuación) y proporciona el cuadro $[x]$ que satisface todas las restricciones F .

$$CSP : \{ \mathcal{H} : (F(x) = 0 | x \in [x]) \} \quad (5.23)$$

Contraer \mathcal{H} significa reemplazar $[x]$ por un dominio más pequeño $[x_0]$ de manera que el conjunto de soluciones permanece sin cambios. Los métodos de contracción usados en este trabajo son la propagación «Forward-Backward» y el algoritmo de Waltz. El algoritmo implementado en los vehículos es el siguiente:

- Se obtiene la lectura del sensor de velocidad y orientación.
- Se realiza la predicción utilizando el estado y el modelo (ecuación 5.22).
- Se hace el seguimiento de la posición de otros vehículos.
- Cuando hay una nueva medición del sistema de posicionamiento global:

Se obtienen las mediciones de los satélites $\rho_1^1, \dots, \rho_1^{n_s}$.

Se determina si son útiles y se guardan en el vector y .

Se hace la contracción por SiviaP usando las siguientes ecuaciones como restricciones:

$$(i) \quad {}^i x_{ego,k} = f_k({}^i x_{ego,k-1}, {}^i u_{ego})$$

$$(ii) \quad {}^i y_k = g({}^i x_{ego,k})$$

y aproxima el vector de estado ${}^i x_{ego,k}$ (que se refiere al vector de estado del propio vehículo) de tal forma que $g({}^i x_{ego}) \subseteq [{}^i y_k]$ usando un contractor «Forward-Backward». Y el conjunto del CSP es:

$$\begin{aligned} CSP &= \{ {}^i x_{ego,k} \subseteq [{}^i x_{ego,k}] \setminus g({}^i x_{ego,k}) \subseteq [{}^i y_k] \} \\ &= g^{-1}([{}^i y_k]) \cap [{}^i x_{ego,k}] \end{aligned} \quad (5.24)$$

- Se intercambia la información con los otros vehículos.
- Se actualiza la ubicación de los otros vehículos.
- Se fusiona la información del sesgo de los satélites (${}^i b$).

Se realizaron dos simulaciones con análisis de intervalos, en la primera se tiene un vehículo con desplazamiento en x y y , y se compara el resultado obtenido utilizando análisis de intervalos

en comparación con el filtro de Kalman. La medición tiene un ruido con varianza igual a 1. En la figura 5.5 vemos el resultado de ambos procedimientos, en color rojo está la trayectoria real, los círculos en color azul muestran las mediciones realizadas por el sensor, en color negro se encuentra la estimación del filtro de Kalman y en color verde la estimación por análisis de intervalos. El error cuadrático medio del filtro de Kalman fue de 0.5523, mientras que el del análisis de intervalos es de 0.2551 .

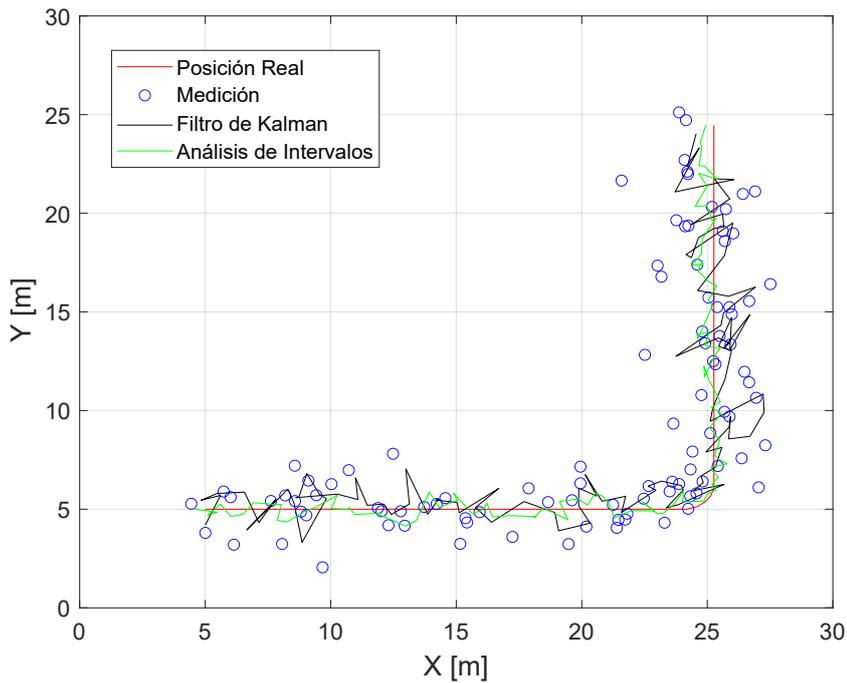


Figura 5.5: Simulación comparativa entre el filtro de Kalman y Análisis de intervalos

En la segunda simulación se compara la estimación de posición de un vehículo contra un vehículo usando localización cooperativa. Para esto se repite el mismo experimento bajo dos diferentes circunstancias, en la primera se tienen dos vehículos que estiman su propia posición, en la segunda aparte de estimar su posición intercambian con el otro vehículo la posición en la que lo detectaron y se asume que la distancia entre los vehículos es fija y conocida. En ambas circunstancias la varianza de la medición es de 5. En la figura 5.6, observamos la comparación entre ambos experimentos, en color rojo tenemos la estimación en solitario, en color negro la estimación en cooperativo y el valor real no se observa por la cercanía de la estimación en cooperativo al valor real. El error cuadrático medio en solitario es de 3.8394 y el error cuadrático

medio en cooperativo es de 0.0227.

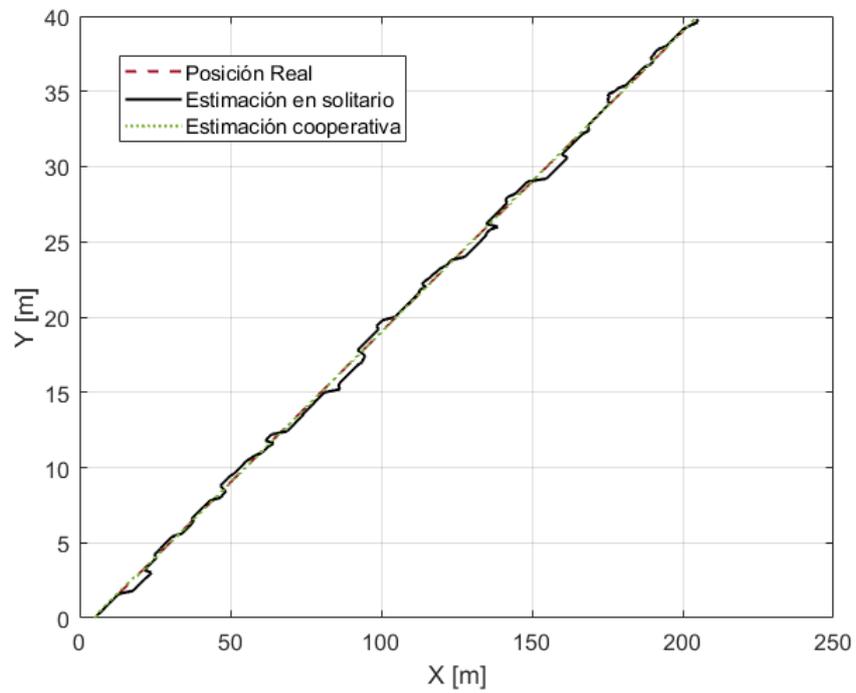


Figura 5.6: Simulación comparativa entre la estimación de posición en solitario y en cooperativo, gráfica de posición contra tiempo.

Conclusiones y trabajo a futuro

6.1. Conclusiones

El estudio del modelo dinámico lateral de la bicicleta permite entender las no linealidades del sistema y su efecto en sistemas sub-actuados, dado que cualquier cambio en la posición lateral implica un cambio en la orientación y viceversa, y esto debe ser considerado en el planteamiento de las tareas que se deseen controlar como cambios de posición, el seguimiento de curvas o de trayectorias. Debido a lo anterior es común la linealización del sistema para poder encontrar algún algoritmo de control, pero se pierde de vista la región en la que esta aproximación es válida. En el control propuesto en el trabajo no se considera la linealización por lo que los algoritmos tienen una región de atracción mayor.

La rutina de control subóptimo muestra buenos resultados en los tres escenarios propuestos: la regulación del estado, seguimiento de una curva de velocidad y seguimiento de una trayectoria circular, y mantiene los valores de la señal de control, la entrada δ , muy por debajo de la restricción física, situación que no ocurre con el control lineal por retroalimentación en la regulación del estado.

En cuanto a la comparación entre los algoritmos de control, los controles presentados muestran un desempeño aceptable en términos de velocidad y convergencia para alcanzar el origen. las diferencias más notables son en la magnitud de la señal de control δ y el cambio en e_2 al llevar a e_1 al origen.

Los algoritmos de percepción analizados tienen diferentes ventajas: Los algoritmos SCIF, Kalman y el análisis por intervalos son más rápidos en su ejecución pero requieren de un sistema lineal por lo que funcionan mejor con el modelo cinemático del vehículo. Mientras que los algoritmos ICP y PSM son robustos ante un error grande de la posición inicial, pues estiman su posición contra mapas, la desventaja es que son más lentos.

6.2. Trabajo a futuro

Como trabajo a futuro de esta tesis se propone la integración entre los algoritmos de control y percepción como un solo sistema.

6.3. Artículos derivados

Derivado de este trabajo de tesis se publicó el siguiente artículo:

Revueltas, L., Santos-Sánchez, O. J., Salazar, S., & Lozano, R. (2023).

Optimizing nonlinear lateral control for an autonomous vehicle.

Vehicles, 5(3), 978-993.[26]

Y se tiene el siguiente artículo en revisión:

Revueltas, L., Lozano, R., & Salazar, S.

Stabilization of the Bicycle Lateral Model Using Nested Saturations.

Desarrollo del modelo lateral

A.1. Desarrollo del modelo lateral con las variables y y ψ

Para una mejor comprensión del modelo lateral se hizo el desarrollo de las ecuaciones paso por paso, desde las ecuaciones obtenidas por las leyes de Newton hasta el modelo espacio estado lineal. Ecuaciones derivadas de las leyes de newton:

$$m(\ddot{y} + V_x \dot{\psi}) = F_{yf} + F_{yr} \quad (\text{A.1})$$

$$I_z \ddot{\psi} = \ell_f F_{yf} - \ell_r F_{yr} \quad (\text{A.2})$$

Donde y es la posición lateral, ψ es el ángulo de guiñada, m es la masa del vehículo, I_z el momento inercial de guiñada del vehículo, V_x es la velocidad longitudinal, ℓ_f y ℓ_r son la distancia del centro de gravedad a la llanta delantera y a la llanta trasera respectivamente, F_{yf} y F_{yr} son la fuerza lateral en la llanta delantera y la llanta trasera respectivamente.

Ángulo de deslizamiento en la llanta frontal:

$$\alpha_f = \delta - \theta_{Vf} \quad (\text{A.3})$$

Ángulo de deslizamiento de la llanta trasera:

$$\alpha_r = -\theta_{V_r} \quad (\text{A.4})$$

θ_{V_f} y θ_{V_r} representa el ángulo que hace el vector de velocidad con el eje longitudinal. δ es el ángulo de orientación de la llanta frontal. Fuerzas laterales en las llantas.

$$F_{yf} = 2C_{\alpha_f}(\delta - \theta_{V_f}) \quad (\text{A.5})$$

$$F_{yr} = 2C_{\alpha_r}(-\theta_{V_r}) \quad (\text{A.6})$$

C_{α_f} y C_{α_r} son las constantes de proporcionalidad de la rigidez en las curvas de cada llanta frontal y trasera respectivamente. Para calcular θ_{V_f} y θ_{V_r} :

$$\tan(\theta_{V_f}) = \frac{V_y + \ell_f \dot{\psi}}{V_x} \quad (\text{A.7})$$

$$\tan(\theta_{V_r}) = \frac{V_y - \ell_r \dot{\psi}}{V_x} \quad (\text{A.8})$$

Se linealiza la expresión bajo la consideración de ángulos pequeños:

$$\theta_{V_f} = \frac{\dot{y} + \ell_f \dot{\psi}}{V_x} \quad (\text{A.9})$$

$$\theta_{V_r} = \frac{\dot{y} - \ell_r \dot{\psi}}{V_x} \quad (\text{A.10})$$

Sustituyendo F_{yf} y F_{yr} en (A.1) y (A.2)

$$m(\ddot{y} + V_x \dot{\psi}) = 2C_{\alpha_f}(\delta - \theta_{V_f}) + 2C_{\alpha_r}(-\theta_{V_r}) \quad (\text{A.11})$$

$$I_z \ddot{\psi} = 2C_{\alpha_f} \ell_f (\delta - \theta_{V_f}) - 2C_{\alpha_r} \ell_r (-\theta_{V_r}) \quad (\text{A.12})$$

Sustituyendo θ_{V_f} y θ_{V_r} en las ecuaciones anteriores

$$m(\ddot{y} + V_x \dot{\psi}) = 2C_{\alpha f} \left(\delta - \frac{\dot{y} + \ell_f \dot{\psi}}{V_x} \right) + 2C_{\alpha r} \left(-\frac{\dot{y} - \ell_r \dot{\psi}}{V_x} \right) \quad (\text{A.13})$$

$$I_z \ddot{\psi} = 2C_{\alpha f} \ell_f \left(\delta - \frac{\dot{y} + \ell_f \dot{\psi}}{V_x} \right) - 2C_{\alpha r} \ell_r \left(-\frac{\dot{y} - \ell_r \dot{\psi}}{V_x} \right) \quad (\text{A.14})$$

Desarrollando la ecuación (A.13)

$$\begin{aligned} m(\ddot{y} + V_x \dot{\psi}) &= 2C_{\alpha f} \left(\delta - \frac{\dot{y} + \ell_f \dot{\psi}}{V_x} \right) + 2C_{\alpha r} \left(-\frac{\dot{y} - \ell_r \dot{\psi}}{V_x} \right) \\ m\ddot{y} &= 2C_{\alpha f} \left(\delta - \frac{\dot{y} + \ell_f \dot{\psi}}{V_x} \right) + 2C_{\alpha r} \left(-\frac{\dot{y} - \ell_r \dot{\psi}}{V_x} \right) - mV_x \dot{\psi} \\ m\ddot{y} &= 2C_{\alpha f} \delta - 2C_{\alpha f} \left(\frac{\dot{y}}{V_x} + \frac{\ell_f \dot{\psi}}{V_x} \right) - 2C_{\alpha r} \left(\frac{\dot{y}}{V_x} - \frac{\ell_r \dot{\psi}}{V_x} \right) - mV_x \dot{\psi} \\ m\ddot{y} &= -2C_{\alpha f} \left(\frac{\dot{y}}{V_x} \right) - 2C_{\alpha r} \left(\frac{\dot{y}}{V_x} \right) - 2C_{\alpha f} \left(\frac{\ell_f \dot{\psi}}{V_x} \right) - 2C_{\alpha r} \left(-\frac{\ell_r \dot{\psi}}{V_x} \right) + 2C_{\alpha f} \delta - mV_x \dot{\psi} \\ m\ddot{y} &= \left(-\frac{2C_{\alpha f} + 2C_{\alpha r}}{V_x} \right) \dot{y} + \left(-\frac{2C_{\alpha f} \ell_f - 2C_{\alpha r} \ell_r}{V_x} - mV_x \right) \dot{\psi} + 2C_{\alpha f} \delta \\ \ddot{y} &= \left(-\frac{2C_{\alpha f} + 2C_{\alpha r}}{mV_x} \right) \dot{y} + \left(-\frac{2C_{\alpha f} \ell_f - 2C_{\alpha r} \ell_r}{mV_x} - V_x \right) \dot{\psi} + \frac{2C_{\alpha f}}{m} \delta \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Desarrollando la ecuación (A.14)

$$\begin{aligned} I_z \ddot{\psi} &= 2C_{\alpha f} \ell_f \left(\delta - \frac{\dot{y} + \ell_f \dot{\psi}}{V_x} \right) - 2C_{\alpha r} \ell_r \left(-\frac{\dot{y} - \ell_r \dot{\psi}}{V_x} \right) \\ I_z \ddot{\psi} &= 2C_{\alpha f} \ell_f \delta + 2C_{\alpha f} \ell_f \left(-\frac{\dot{y} + \ell_f \dot{\psi}}{V_x} \right) - 2C_{\alpha r} \ell_r \left(-\frac{\dot{y} - \ell_r \dot{\psi}}{V_x} \right) \\ I_z \ddot{\psi} &= 2C_{\alpha f} \ell_f \delta - 2C_{\alpha f} \ell_f \left(-\frac{\dot{y}}{V_x} \right) - 2C_{\alpha f} \ell_f \left(-\frac{\ell_f \dot{\psi}}{V_x} \right) - 2C_{\alpha r} \ell_r \left(-\frac{\dot{y}}{V_x} \right) - 2C_{\alpha r} \ell_r \left(\frac{\ell_r \dot{\psi}}{V_x} \right) \\ I_z \ddot{\psi} &= \left(-\frac{2C_{\alpha f} \ell_f - 2C_{\alpha r} \ell_r}{V_x} \right) \dot{y} + \left(-\frac{2C_{\alpha f} \ell_f^2 + 2C_{\alpha r} \ell_r^2}{V_x} \right) \dot{\psi} + 2C_{\alpha f} \ell_f \delta \\ \ddot{\psi} &= \left(-\frac{2C_{\alpha f} \ell_f - 2C_{\alpha r} \ell_r}{I_z V_x} \right) \dot{y} + \left(-\frac{2C_{\alpha f} \ell_f^2 + 2C_{\alpha r} \ell_r^2}{I_z V_x} \right) \dot{\psi} + \frac{2C_{\alpha f} \ell_f}{I_z} \delta \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Con las ecuaciones (A.15) y (A.16), formamos el modelo espacio estado:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2C_{\alpha f} + 2C_{\alpha r}}{mV_x} & 0 & -V_x - \frac{2C_{\alpha f}\ell_f - 2C_{\alpha r}\ell_r}{mV_x} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2C_{\alpha f}\ell_f - 2C_{\alpha r}\ell_r}{I_z V_x} & 0 & -\frac{2C_{\alpha f}\ell_f^2 + 2C_{\alpha r}\ell_r^2}{I_z V_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2C_{\alpha f}}{m} \\ 0 \\ \frac{2C_{\alpha f}\ell_f}{I_z} \end{bmatrix} \delta \quad (\text{A.17})$$

A.2. Desarrollo del modelo dinámico en términos del error con respecto al camino

Se establecen las variables:

e_1 , distancia del centro de gravedad al centro del carril.

e_2 , error de orientación del vehículo con respecto al camino.

La razón de cambio deseada en la orientación es:

$$\dot{\psi}_{des} = \frac{V_x}{R} \quad (\text{A.18})$$

R es el radio constante del camino. La aceleración centrípeta es descrita por:

$$\frac{V_x^2}{R} = V_x \dot{\psi}_{des} \quad (\text{A.19})$$

Se define \ddot{e}_1 y e_2 como:

$$\ddot{e}_1 = \left(\ddot{y} + V_x \dot{\psi} \right) - \frac{V_x^2}{R} = \ddot{y} + V_x \left(\dot{\psi} - \dot{\psi}_{des} \right) \quad (\text{A.20})$$

$$e_2 = \psi - \psi_{des} \quad (\text{A.21})$$

Por lo tanto

$$\dot{e}_1 = \dot{y} + V_x (\psi - \psi_{des}) \quad (\text{A.22})$$

Si V_x no fuera constante

$$\dot{e} = \dot{y} + \int V_x e_2 dt \quad (\text{A.23})$$

Retomando la ecuación (A.22), tenemos que

$$\dot{y} = \dot{e}_1 - V_x e_2 \quad (\text{A.24})$$

$$\ddot{y} = \ddot{e}_1 - V_x \dot{e}_2 \quad (\text{A.25})$$

Y $\dot{\psi}$ queda expresado de la siguiente manera

$$\dot{\psi} = \dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des} \quad (\text{A.26})$$

Sustituyendo (A.24),(A.25) y (A.26) en (A.15)

$$\begin{aligned} \ddot{e}_1 - V_x \dot{e}_2 &= \left(-\frac{2C_{\alpha f} + 2C_{\alpha r}}{mV_x} \right) (\dot{e}_1 - V_x e_2) + \left(-\frac{2C_{\alpha f} \ell_f - 2C_{\alpha r} \ell_r}{mV_x} - V_x \right) (\dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des}) + \frac{2C_{\alpha f}}{m} \delta \\ \ddot{e}_1 - V_x \dot{e}_2 &= \left(-\frac{2C_{\alpha f} + 2C_{\alpha r}}{mV_x} \right) \dot{e}_1 - \left(-\frac{2C_{\alpha f} + 2C_{\alpha r}}{mV_x} \right) V_x e_2 + \left(-\frac{2C_{\alpha f} \ell_f - 2C_{\alpha r} \ell_r}{mV_x} \right) \dot{e}_2 \\ &\quad + \left(-\frac{2C_{\alpha f} \ell_f - 2C_{\alpha r} \ell_r}{mV_x} \right) \dot{\psi}_{des} - V_x \dot{e}_2 - V_x \dot{\psi}_{des} + \frac{2C_{\alpha f}}{m} \delta \\ \ddot{e}_1 &= \left(-\frac{2C_{\alpha f} + 2C_{\alpha r}}{mV_x} \right) \dot{e}_1 + \left(\frac{2C_{\alpha f} + 2C_{\alpha r}}{m} \right) e_2 + \left(-\frac{2C_{\alpha f} \ell_f - 2C_{\alpha r} \ell_r}{mV_x} \right) \dot{e}_2 \\ &\quad + \left(-\frac{2C_{\alpha f} \ell_f - 2C_{\alpha r} \ell_r}{mV_x} - V_x \right) \dot{\psi}_{des} + \frac{2C_{\alpha f}}{m} \delta \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Sustituyendo (A.24) y (A.26) en (A.16)

$$\ddot{e}_2 = \left(-\frac{2C_{\alpha f} \ell_f - 2C_{\alpha r} \ell_r}{I_z V_x} \right) (\dot{e}_1 - V_x e_2) + \left(-\frac{2C_{\alpha f} \ell_f^2 + 2C_{\alpha r} \ell_r^2}{I_z V_x} \right) (\dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des}) + \frac{2C_{\alpha f} \ell_f}{I_z} \delta$$

$$\begin{aligned}
\ddot{e}_2 &= \left(-\frac{2C_{\alpha f}l_f - 2C_{\alpha r}l_r}{I_z V_x} \right) \dot{e}_1 + \left(-\frac{2C_{\alpha f}l_f - 2C_{\alpha r}l_r}{I_z V_x} \right) V_x e_2 + \left(-\frac{2C_{\alpha f}l_f^2 + 2C_{\alpha r}l_r^2}{I_z V_x} \right) \dot{e}_2 \\
&\quad + \left(-\frac{2C_{\alpha f}l_f^2 + 2C_{\alpha r}l_r^2}{I_z V_x} \right) \dot{\psi}_{des} + \frac{2C_{\alpha f}l_f}{I_z} \delta \\
\ddot{e}_2 &= \left(-\frac{2C_{\alpha f}l_f - 2C_{\alpha r}l_r}{I_z V_x} \right) \dot{e}_1 + \left(-\frac{2C_{\alpha f}l_f - 2C_{\alpha r}l_r}{I_z} \right) e_2 + \left(-\frac{2C_{\alpha f}l_f^2 + 2C_{\alpha r}l_r^2}{I_z V_x} \right) \dot{e}_2 \\
&\quad + \left(-\frac{2C_{\alpha f}l_f^2 + 2C_{\alpha r}l_r^2}{I_z V_x} \right) \dot{\psi}_{des} + \frac{2C_{\alpha f}l_f}{I_z} \delta \tag{A.28}
\end{aligned}$$

Con las ecuaciones (A.27) y (A.28), formamos el modelo espacio estado:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_1 \\ \dot{e}_1 \\ e_2 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2C_{\alpha f} + 2C_{\alpha r}}{mV_x} & \frac{2C_{\alpha f} + 2C_{\alpha r}}{m} & -\frac{2C_{\alpha f}l_f - 2C_{\alpha r}l_r}{mV_x} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2C_{\alpha f}l_f - 2C_{\alpha r}l_r}{I_z V_x} & -\frac{2C_{\alpha f}l_f - 2C_{\alpha r}l_r}{I_z} & -\frac{2C_{\alpha f}l_f^2 + 2C_{\alpha r}l_r^2}{I_z V_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ \dot{e}_1 \\ e_2 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2C_{\alpha f}}{m} \\ 0 \\ \frac{2C_{\alpha f}l_f}{I_z} \end{bmatrix} \delta \\
&\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2C_{\alpha f}l_f - 2C_{\alpha r}l_r}{mV_x} - V_x \\ 0 \\ -\frac{2C_{\alpha f}l_f^2 + 2C_{\alpha r}l_r^2}{I_z V_x} \end{bmatrix} \dot{\psi}_{des} \tag{A.29}
\end{aligned}$$

Cálculo de la región de convergencia del control lineal

Se tiene el modelo no lineal definido por la siguiente ecuación de espacio-estado:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_1 \\ \dot{e}_1 \\ e_2 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ \dot{e}_1 \\ e_2 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2C_{\alpha f}}{m} \\ 0 \\ \frac{2C_{\alpha f} \ell_f}{I_z} \end{bmatrix} \delta + \begin{bmatrix} 0 \\ -V_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\psi}_{des} \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2C_{\alpha f}}{m} \left(-\arctan \left(\frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 + \ell_f (\dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des})}{V_x} \right) \right) + \frac{2C_{\alpha r}}{m} \left(-\arctan \left(\frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 - \ell_r (\dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des})}{V_x} \right) \right) \\ 0 \\ \frac{2C_{\alpha f} \ell_f}{I_z} \left(-\arctan \left(\frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 + \ell_f (\dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des})}{V_x} \right) \right) - \frac{2C_{\alpha r} \ell_r}{I_z} \left(-\arctan \left(\frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 - \ell_r (\dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des})}{V_x} \right) \right) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

Se busca que el modelo no lineal tome la forma de una versión perturbada del modelo lineal, es decir:

$$f(x) = Ax + g(x) \tag{B.2}$$

Donde A es una matriz real con $Re\lambda_i < 0$ [32]. Por lo tanto, partiendo del modelo no lineal, se suma y resta el argumento de la función $arctan$ con sus constantes.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_1 \\ \dot{e}_1 \\ e_2 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ \dot{e}_1 \\ e_2 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2C_{\alpha f}}{m} \\ 0 \\ \frac{2C_{\alpha f} \ell_f}{I_z} \end{bmatrix} \delta + \begin{bmatrix} 0 \\ -V_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\psi}_{des} \\
&+ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2C_{\alpha f}}{m} \left(-\arctan \left(\frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 + \ell_f (\dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des})}{V_x} \right) \right) + \frac{2C_{\alpha r}}{m} \left(-\arctan \left(\frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 - \ell_r (\dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des})}{V_x} \right) \right) \\ 0 \\ \frac{2C_{\alpha f} \ell_f}{I_z} \left(-\arctan \left(\frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 + \ell_f (\dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des})}{V_x} \right) \right) - \frac{2C_{\alpha r} \ell_r}{I_z} \left(-\arctan \left(\frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 - \ell_r (\dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des})}{V_x} \right) \right) \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2C_{\alpha f}}{m} \left(-\frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 + \ell_f (\dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des})}{V_x} \right) + \frac{2C_{\alpha r}}{m} \left(-\frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 - \ell_r (\dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des})}{V_x} \right) \\ 0 \\ \frac{2C_{\alpha f} \ell_f}{I_z} \left(-\frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 + \ell_f (\dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des})}{V_x} \right) - \frac{2C_{\alpha r} \ell_r}{I_z} \left(-\frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 - \ell_r (\dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des})}{V_x} \right) \end{bmatrix} \\
&- \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2C_{\alpha f}}{m} \left(-\frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 + \ell_f (\dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des})}{V_x} \right) + \frac{2C_{\alpha r}}{m} \left(-\frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 - \ell_r (\dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des})}{V_x} \right) \\ 0 \\ \frac{2C_{\alpha f} \ell_f}{I_z} \left(-\frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 + \ell_f (\dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des})}{V_x} \right) - \frac{2C_{\alpha r} \ell_r}{I_z} \left(-\frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 - \ell_r (\dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des})}{V_x} \right) \end{bmatrix} \tag{B.3}
\end{aligned}$$

Usando la ley de control utilizada en la simulación $\delta = -Kx = -k_1e_1 - k_2\dot{e}_1 - k_3e_2 - k_4\dot{e}_2$ y reagrupando términos se llega a la forma:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_1 \\ \dot{e}_1 \\ e_2 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2C_{\alpha f}k_1}{m} & -\frac{2C_{\alpha f}+2C_{\alpha r}+2C_{\alpha f}V_xk_2}{mV_x} & \frac{2C_{\alpha f}+2C_{\alpha r}-2C_{\alpha f}k_3}{m} & -\frac{2C_{\alpha f}\ell_f-2C_{\alpha r}\ell_r+2C_{\alpha f}V_xk_4}{mV_x} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{2\ell_fC_{\alpha f}k_1}{I_z} & -\frac{2C_{\alpha f}\ell_f-2C_{\alpha r}\ell_r+2\ell_fC_{\alpha f}V_xk_2}{I_zV_x} & \frac{2C_{\alpha f}\ell_f-2C_{\alpha r}\ell_r-2\ell_fC_{\alpha f}k_3}{I_z} & -\frac{2C_{\alpha f}\ell_f^2+2C_{\alpha r}\ell_r^2+2\ell_f+C_{\alpha f}V_xk_4}{I_zV_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ \dot{e}_1 \\ e_2 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2C_{\alpha f}}{m} \left(-\arctan \left(\frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 + \ell_f (\dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des})}{V_x} \right) \right) + \frac{2C_{\alpha r}}{m} \left(-\arctan \left(\frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 - \ell_r (\dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des})}{V_x} \right) \right) \\ 0 \\ \frac{2C_{\alpha f}\ell_f}{I_z} \left(-\arctan \left(\frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 + \ell_f (\dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des})}{V_x} \right) \right) - \frac{2C_{\alpha r}\ell_r}{I_z} \left(-\arctan \left(\frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 - \ell_r (\dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des})}{V_x} \right) \right) \end{bmatrix} \\
&- \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2C_{\alpha f}}{m} \left(-\frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 + \ell_f (\dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des})}{V_x} \right) + \frac{2C_{\alpha r}}{m} \left(-\frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 - \ell_r (\dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des})}{V_x} \right) \\ 0 \\ \frac{2C_{\alpha f}\ell_f}{I_z} \left(-\frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 + \ell_f (\dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des})}{V_x} \right) - \frac{2C_{\alpha r}\ell_r}{I_z} \left(-\frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 - \ell_r (\dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des})}{V_x} \right) \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2C_{\alpha f}\ell_f-2C_{\alpha r}\ell_r}{mV_x} - V_x \\ 0 \\ -\frac{2C_{\alpha f}\ell_f^2+2C_{\alpha r}\ell_r^2}{I_zV_x} \end{bmatrix} \dot{\psi}_{des} \tag{B.4}
\end{aligned}$$

De la ecuación (B.4), podemos separar A (cuyos valores propios son $Re\lambda_i < 0$ [25]) y $g(e)$. Se utiliza la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(e) = e^T P e \quad (\text{B.5})$$

Donde P es una matriz real, simétrica y definida positiva que cumple con:

$$PA + A^T P = -Q \quad (\text{B.6})$$

Y Q también es una matriz real, simétrica y definida positiva. Entonces \dot{V} es:

$$\dot{V}(e) = e^T P (Ae + G(e)) + e^T (A^T + G^T(e)) P e \quad (\text{B.7})$$

$$\dot{V}(e) = -e^T Q e + 2e^T P G(e) \quad (\text{B.8})$$

Donde $G(e)$ es

$$G(e) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2C_{\alpha f}}{m} \arctan\left(\frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 + l_f(\dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des})}{V_x}\right) - \frac{2C_{\alpha r}}{m} \arctan\left(\frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 - l_r(\dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des})}{V_x}\right) - V_x \dot{\psi}_{des} \\ 0 \\ -\frac{2l_f C_{\alpha f}}{I_z} \arctan\left(\frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 + l_f(\dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des})}{V_x}\right) + \frac{2l_r C_{\alpha r}}{I_z} \arctan\left(\frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 - l_r(\dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des})}{V_x}\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2l_f C_{\alpha f} - 2l_r C_{\alpha r}}{m V_x} \\ 0 \\ -\frac{2l_f^2 C_{\alpha f} + 2l_r^2 C_{\alpha r}}{I_z V_x} \end{bmatrix} \dot{\psi}_{des} - \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2C_{\alpha f}}{m} \frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 + l_f(\dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des})}{V_x} - \frac{2C_{\alpha r}}{m} \frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 - l_r(\dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des})}{V_x} \\ 0 \\ -\frac{2l_f C_{\alpha f}}{I_z} \frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 + l_f(\dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des})}{V_x} + \frac{2l_r C_{\alpha r}}{I_z} \frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 - l_r(\dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des})}{V_x} \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

Al tratarse de un trayectoria sobre un camino recto $\dot{\psi}_{des} = 0$, por lo tanto

$$G(e) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2C_{\alpha f}}{m} \arctan\left(\frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 + l_f \dot{e}_2}{V_x}\right) - \frac{2C_{\alpha r}}{m} \arctan\left(\frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 - l_r \dot{e}_2}{V_x}\right) \\ 0 \\ -\frac{2l_f C_{\alpha f}}{I_z} \arctan\left(\frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 + l_f \dot{e}_2}{V_x}\right) + \frac{2l_r C_{\alpha r}}{I_z} \arctan\left(\frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 - l_r \dot{e}_2}{V_x}\right) \end{bmatrix} \quad (B.10)$$

$$- \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2C_{\alpha f}}{m} \frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 + l_f \dot{e}_2}{V_x} - \frac{2C_{\alpha r}}{m} \frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 - l_r \dot{e}_2}{V_x} \\ 0 \\ -\frac{2l_f C_{\alpha f}}{I_z} \frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 + l_f \dot{e}_2}{V_x} + \frac{2l_r C_{\alpha r}}{I_z} \frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 - l_r \dot{e}_2}{V_x} \end{bmatrix}$$

La norma de $G(e)$ depende de

$$f = h - \arctan h \quad (B.11)$$

Y h está definida como:

$$h = \frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 \pm l_i \dot{e}_2}{V_x} = c^T e \quad (B.12)$$

Donde l_i representa la distancia del centro de gravedad a la llanta delantera (l_f) o a la llanta trasera (l_r), y c representa un vector constante. Se debe notar que y es una función creciente.

$$\frac{df}{dh} = 1 - \frac{1}{1+h^2} = \frac{h^2}{1+h^2} \geq 0 \quad (B.13)$$

Considerando lo anterior se llega a la desigualdad

$$|f| = |h - \arctan(h)| \leq k(f) |f| \leq k(\|e\|) \|e\| \quad (B.14)$$

Donde k representa una función que depende de $\|e\|$ y $0 < k(\|e\|) < 1$.

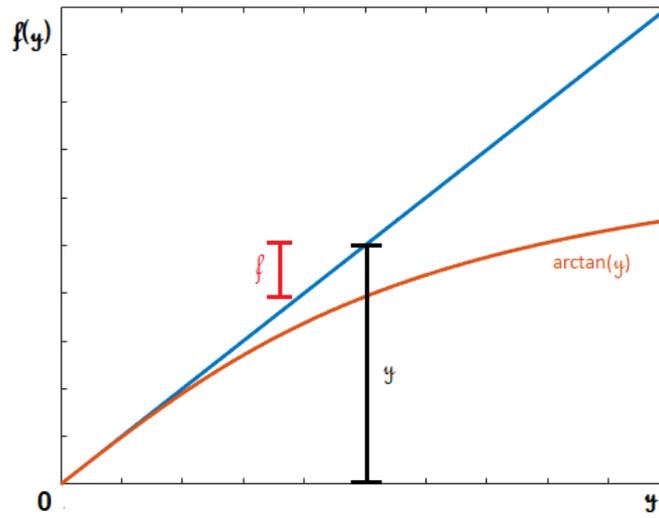


Figura B.1: Representación gráfica de la función f . En la figura se ha graficado h en color azul en color naranja $\arctan h$, el segmento en color rojo representa $f(h) = h - \arctan h$, esta representación nos permite observar que f es un porcentaje del valor de h que va creciendo de forma lineal conforme h crece

Entonces al desarrollar la norma de $G(e)$

$$\begin{aligned} & \|G(e)\| \\ = & \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2C_{\alpha f}}{m} \left(\arctan \left(\frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 + \ell_f \dot{e}_2}{V_x} \right) - \frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 + \ell_f \dot{e}_2}{V_x} \right) - \frac{2C_{\alpha r}}{m} \left(\arctan \left(\frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 - \ell_r \dot{e}_2}{V_x} \right) - \frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 - \ell_r \dot{e}_2}{V_x} \right) \\ 0 \\ -\frac{2\ell_f C_{\alpha f}}{I_z} \left(\arctan \left(\frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 + \ell_f \dot{e}_2}{V_x} \right) - \frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 + \ell_f \dot{e}_2}{V_x} \right) + \frac{2\ell_r C_{\alpha r}}{I_z} \left(\arctan \left(\frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 - \ell_r \dot{e}_2}{V_x} \right) - \frac{\dot{e}_1 - V_x e_2 - \ell_r \dot{e}_2}{V_x} \right) \end{bmatrix} \right\| \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Podemos utilizar la desigualdad (B.14) para obtener:

$$\|G(e)\| \leq \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ \left(\frac{2C_{\alpha f}}{m} + \frac{2C_{\alpha r}}{m} \right) k(\|e\|) \|e\| \\ 0 \\ \left(\frac{2\ell_f C_{\alpha f}}{I_z} - \frac{2\ell_r C_{\alpha r}}{I_z} \right) k(\|e\|) \|e\| \end{bmatrix} \right\| \quad (\text{B.16})$$

Utilizando la definición de la norma euclidiana

$$\|G(e)\| \leq \sqrt{2} \left(\frac{2C_{\alpha f}}{m} + \frac{2C_{\alpha r}}{m} \right) |k(\|e\|)| \|e\| \quad (\text{B.17})$$

Regresando a \dot{V}

$$\dot{V}(e) \leq -\lambda_{\min}(Q) \|e\|^2 + 2 \|e\| \|P\| \|G(e)\| \quad (\text{B.18})$$

$$\dot{V}(e) \leq -\lambda_{\min}(Q) \|e\|^2 + 2 \|e\| \|P\| \sqrt{2} \left(\frac{2C_{\alpha f}}{m} + \frac{2C_{\alpha r}}{m} \right) |k(\|e\|)| \|e\| \quad (\text{B.19})$$

Finalmente se llega a

$$\dot{V}(e) \leq -\|e\|^2 \left(\lambda_{\min}(Q) - 2\sqrt{2}\lambda_{\max}(P) \|H\| \right) \quad (\text{B.20})$$

Donde

$$H = \left(\frac{2C_{\alpha f}}{m} + \frac{2C_{\alpha r}}{m} \right) |k(\|e\|)| \quad (\text{B.21})$$

Entonces se necesita que

$$\lambda_{\min}(Q) - 2\sqrt{2}\lambda_{\max}(P) \|H\| \geq 0 \quad (\text{B.22})$$

$$2\sqrt{2}\lambda_{\max}(P) \|H\| \leq \lambda_{\min}(Q) \quad (\text{B.23})$$

$$\|H\| \leq \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\sqrt{2}\lambda_{\max}(P)} \quad (\text{B.24})$$

Se va a considerar un dominio para los valores de la norma de e , tales que se verifique la desigualdad:

$$|k(\|e\|)| \leq \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\sqrt{2}\lambda_{\max}(P) \left(\frac{2C_{\alpha f}}{m} + \frac{2C_{\alpha r}}{m} \right)} \quad (\text{B.25})$$

Entonces existe un valor $k(\|e\|)$ pequeño, tal que cuando $k(\|e\|) \leq \epsilon$ se satisface (B.25). El valor máximo de $\|x\|$ para el que se sigue cumpliendo (B.14) con $k(\|x\|) \leq \epsilon$ lo llamaremos e_{max} (el

valor numérico de ϵ y de e_{max} depende de las constantes del vehículo). Entonces $V(x(0))$ debe ser tal que

$$\sqrt{\frac{V(e(0))}{\lambda_{min}P}} = e_{max} \geq \|e\| \quad (\text{B.26})$$

y con las consideraciones anteriores se cumple que $\dot{V} \leq 0$ y por lo tanto V es decreciente o constante y la $\|e\|$ es menor o igual que e_{max} .

Bibliografía

- [1] INEGI. Accidentes de tránsito terrestre en zonas urbanas y suburbanas. <https://www.inegi.org.mx/>, jul 2022.
- [2] Juan Martín Gordo, Agustín Malvaso, Chiara Mazzarella, Agustín Salvidio, and Cecilia Sangineto. Accidentes producidos por vehículos autónomos. *Universidad Tecnológica Nacional: Buenos Aires, Argentina*, 2019.
- [3] Lu Xiong, Xin Xia, Yishi Lu, Wei Liu, Letian Gao, Shunhui Song, Yanqun Han, and Zhuoping Yu. Imu-based automated vehicle slip angle and attitude estimation aided by vehicle dynamics. *Sensors*, 19(8):1930, 2019.
- [4] Luca Bascetta, Marcello Farina, Alessandro Gabrielli, and Matteo Matteucci. A feedback linearisation algorithm for single-track models with structural stability properties. *Control Engineering Practice*, 128:105318, 2022.
- [5] Alexandre Lombard, Jocelyn Buisson, Abdeljalil Abbas-Turki, Stéphane Galland, and Abderrafiaa Koukam. Curvature-based geometric approach for the lateral control of autonomous cars. *Journal of the Franklin Institute*, 357(14):9378–9398, 2020.
- [6] Marcos Moreno-Gonzalez, Antonio Artuñedo, Jorge Villagra, Cédric Join, and Michel Fliess. Speed-adaptive model-free path-tracking control for autonomous vehicles: analysis and design. *Vehicles*, 5(2):698–717, 2023.

- [7] Chi Jin, Liang Shao, Cornelia Lex, and Arno Eichberger. Vehicle side slip angle observation with road friction adaptation. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1):3406–3411, 2017.
- [8] Gianfranco Gagliardi, Alessandro Casavola, and Simone Toscano. Linear parameter varying control strategies for combined longitudinal and lateral dynamics of autonomous vehicles. In *2022 European Control Conference (ECC)*, pages 181–186. IEEE, 2022.
- [9] Davide Piscini, Edoardo Pagot, Giammarco Valenti, and Francesco Biral. Experimental comparison of trajectory control and planning algorithms for autonomous vehicles. In *IECON 2019-45th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, volume 1, pages 5217–5222. IEEE, 2019.
- [10] Ovidiu Pauca, Constantin F Caruntu, and Corneliu Lazar. Predictive control for the lateral and longitudinal dynamics in automated vehicles. In *2019 23rd international conference on system theory, control and computing (ICSTCC)*, pages 797–802. IEEE, 2019.
- [11] Guodong Wang, Li Liu, Yu Meng, Qing Gu, and Guoxing Bai. Integrated path tracking control of steering and differential braking based on tire force distribution. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 20(2):536–550, 2022.
- [12] Adorján Kovács and István Vajk. Tuning parameter-free model predictive control with nonlinear internal model control structure for vehicle lateral control. *Acta Polytechnica Hungarica*, 20(2):185–204, 2023.
- [13] Jiung Lee, Sehwan Kim, and Kwangseok Oh. Development of a human-like model predictive path tracking control algorithm for autonomous vehicles with self-tuning of control period. In *2023 23rd International Conference on Control, Automation and Systems (IC-CAS)*, pages 1444–1448. IEEE, 2023.
- [14] Mohammad Reza Chalak Qazani, Houshyar Asadi, Arian Shajari, Zoran Najdovski, Chee Peng Lim, and Saeid Nahavandi. A development of time-varying weight model predictive control for autonomous vehicles. In *2023 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC)*, pages 3480–3486. IEEE, 2023.

- [15] Lucien Etienne, Cuauhtémoc Acosta Lúa, Stefano Di Gennaro, and Jean-Pierre Barbot. A super-twisting controller for active control of ground vehicles with lateral tire-road friction estimation and carsim validation. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 18:1177–1189, 2020.
- [16] Guoying Chen, Min Hua, Changfu Zong, Buyang Zhang, and Yanjun Huang. Comprehensive chassis control strategy of fwic-ev based on sliding mode control. *IET Intelligent Transport Systems*, 13(4):703–713, 2019.
- [17] Ali Barari, Sajad Saraygord Afshari, and Xihui Liang. Coordinated control for path-following of an autonomous four in-wheel motor drive electric vehicle. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of mechanical engineering science*, 236(11):6335–6346, 2022.
- [18] Ke Shao, Jinchuan Zheng, Bin Deng, Kang Huang, and Han Zhao. Active steering control for vehicle rollover risk reduction based on slip angle estimation. *IET Cyber-Systems and Robotics*, 2(3):132–139, 2020.
- [19] Wei Zhang. A robust lateral tracking control strategy for autonomous driving vehicles. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 150:107238, 2021.
- [20] Xuefang Li, Hongbo Li, Deyuan Meng, and Guodong Feng. Robust learning-based lateral tracking control for autonomous driving with input constraints. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 33(7):4228–4244, 2023.
- [21] Mincheol Park and Yeonsik Kang. Experimental verification of a drift controller for autonomous vehicle tracking: A circular trajectory using lqr method. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 19:404–416, 2021.
- [22] Anh-Tu Nguyen, Jagat Rath, Thierry-Marie Guerra, Reinaldo Palhares, and Hui Zhang. Robust set-invariance based fuzzy output tracking control for vehicle autonomous driving under uncertain lateral forces and steering constraints. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 22(9):5849–5860, 2020.

- [23] Shangwei Zhao, Jingcheng Wang, Haotian Xu, and Hongyuan Wang. Finite horizon robust optimal tracking control based on approximate dynamic programming for switched systems with uncertainties. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 20(4):1051–1062, 2022.
- [24] Hamid Taghavifar and Subhash Rakheja. Path-tracking of autonomous vehicles using a novel adaptive robust exponential-like-sliding-mode fuzzy type-2 neural network controller. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 130:41–55, 2019.
- [25] Rajesh Rajamani. *Vehicle dynamics and control*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [26] Lorien Revueltas, Omar-Jacobo Santos-Sánchez, Sergio Salazar, and Rogelio Lozano. Optimizing nonlinear lateral control for an autonomous vehicle. *Vehicles*, 5(3):978–993, 2023.
- [27] Donald E Kirk. *Optimal control theory: an introduction*. Courier Corporation, 2004.
- [28] Omar Santos-Sánchez, Orlando García, Hugo Romero, Sergio Salazar, and Rogelio Lozano. Finite horizon nonlinear optimal control for a quadrotor: Experimental results. *Optimal Control Applications and Methods*, 42(1):54–80, 2021.
- [29] David Ángeles-Rojas, Omar-Jacobo Santos-Sánchez, Sergio Salazar, and Rogelio Lozano. Finite horizon nonlinear suboptimal control for an autonomous soaring uav. *Mathematical Problems in Engineering*, 2022, 2022.
- [30] Fermín Castillo, Ricardo López-Gutiérrez, Omar-Jacobo Santos-Sánchez, Antonio Osorio, Sergio Salazar, and Rogelio Lozano. Finite horizon nonlinear energy optimizing control in a force augmenting hybrid exoskeleton for the elbow joint. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 28(6):2681–2688, 2019.
- [31] Jo Yung Wong. *Theory of ground vehicles*. John Wiley & Sons, 2008.
- [32] Hassan K Khalil. *Nonlinear Systems third edition*. Prentice Hall, 2002.

- [33] Dainis Berjoza et al. Research in kinematics of turn for vehicles and semitrailers. In *Proceedings of 7th International Scientific Conference on Engineering for Rural Development*, pages 29–30, 2008.
- [34] Hao Li and Fawzi Nashashibi. Cooperative multi-vehicle localization using split covariance intersection filter. *IEEE Intelligent transportation systems magazine*, 5(2):33–44, 2013.
- [35] Simon J Julier and Jeffrey K Uhlmann. A non-divergent estimation algorithm in the presence of unknown correlations. In *Proceedings of the 1997 American Control Conference (Cat. No. 97CH36041)*, volume 4, pages 2369–2373. IEEE, 1997.
- [36] Seong-Woo Kim, Baoxing Qin, Zhuang Jie Chong, Xiaotong Shen, Wei Liu, Marcelo H Ang, Emilio Frazzoli, and Daniela Rus. Multivehicle cooperative driving using cooperative perception: Design and experimental validation. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 16(2):663–680, 2014.
- [37] Aaron Miller, Kyungzun Rim, Parth Chopra, Paritosh Kelkar, and Maxim Likhachev. Cooperative perception and localization for cooperative driving. In *2020 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 1256–1262. IEEE, 2020.
- [38] Elwan Héry, Philippe Xu, and Philippe Bonnifait. Consistent decentralized cooperative localization for autonomous vehicles using lidar, gnss, and hd maps. *Journal of Field Robotics*, 2021.
- [39] Khaoula Lassoued, Philippe Bonnifait, and Isabelle Fantoni. Cooperative localization with reliable confidence domains between vehicles sharing gnss pseudorange errors with no base station. *IEEE Intelligent Transportation Systems Magazine*, 9(1):22–34, 2017.
- [40] Elwan Hery. Cooperative localization 2018, 2018.
- [41] The MathWorks Inc <https://la.mathworks.com/help/driving/ug/build-a-map-from-lidar-data.html>. Build a map from lidar data.

-
- [42] USGS science for a changing world <https://prdtnm.s3.amazonaws.com/LidarExplorer/index.html/>.
Lidarexplorer.
- [43] Luc Jaulin and Eric Walter. Set inversion via interval analysis for nonlinear bounded-error estimation. *Automatica*, 29(4):1053–1064, 1993.