



AE-15647



**CINVESTAV I. P. U.**  
**SECCION DE INFORMACION  
Y DOCUMENTACION**



**CINVESTAV-IPN**  
CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS AVANZADOS DEL IPN

---

**LABORATORIO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y CIENCIAS DE  
LA COMPUTACIÓN**

**CONTROL DE UN SISTEMA  
ELECTROMECAÁNICO PLANAR DE DOS  
GRADOS DE LIBERTAD.**

**TESIS QUE PRESENTA  
ING. JOSÉ ANTONIO PINTOR JARAMILLO\***

**PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS**

**EN LA ESPECIALIDAD DE  
INGENIERÍA ELÉCTRICA**

**\* BECARIO DE CONACYT  
Guadalajara, Jal., 1998**

CLASIF.	
ADQUIS.	TESIS-1998
FECHA:	17-VIII-98
PROCED.	Depto. Servicios Bibliográficos

Depto. Servicios Bibliográficos

***Dedico esta tesis a mis padres Federico Pintor Cuevas y María Asunción Jaramillo Chaves, a mis hermanos Guadalupe, Martín, Rosa, Lorena y Carlos. Con Amor para mi novia Norma Araceli Martínez Ceja.***

## AGRADECIMIENTOS:

*Agradezco a mi asesor el Dr. Bernardino Castillo Toledo, por la asesoría brindada para la realización de este proyecto de tesis, por sus valiosos comentarios que en general contribuyeron a mejorar la redacción de esta tesis y por sus consejos de manera personal.*

*A los doctores Ofelia Begovich Mendoza, Arturo Ramón Messina, Alexander Loukianov y al M.C. Alejandro Malo Tamayo, por el tiempo dedicado a la revisión de este trabajo.*

*A mis compañeros de generación, Rosa María Córdova, J. Carlos González, Fabio Fernández, Bernardo Haro, Carlos A. Hernández, Bernardo Montoya, Carlos Ortega, y Elvia R. Palacios por su amistad y por la unión de equipo que formamos durante la maestría.*

*Al Dr. Antonio Ramírez por su sencillez y amistad.*

*Al CONACYT, CINVESTAV del IPN (México), y al CINVESTAV-Guadalajara por el apoyo material y humano.*

*En general, a todas aquellas personas que de alguna forma contribuyeron a la realización de este trabajo de tesis.*

Ing. José Antonio Pintor Jaramillo  
Guadalajara, Jal. a 20 de Marzo de 1998.

# Índice General

<b>1</b>	<b>Introducción.</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Problema del Regulador y Modos deslizantes.</b>	<b>5</b>
2.1	El problema de regulación en la salida.	5
2.1.1	Regulación de la salida por retroalimentación del estado (PRRS).	6
2.1.2	Regulación de la salida por retroalimentación del error (PRRE).	8
2.1.3	Problema de la regulación robusta de la salida.	9
2.2	El problema del regulador no lineal.	11
2.2.1	Problema del regulador no lineal por retroalimentación del estado.	13
2.2.2	Problema del regulador no lineal por retroalimentación del error.	14
2.3	Modos deslizantes.	16
2.3.1	Problema de regularización.	17
2.3.2	Método de control equivalente.	18
2.4	Conclusiones.	19
<b>3</b>	<b>Descripción del Problema</b>	<b>21</b>
3.1	Descripción del Sistema	21
3.2	Modelo Matemático.	23
3.3	Identificación de parámetros.	26
3.3.1	Obtención de los parámetros del motor	27
3.3.2	Obtención de los parámetros del sistema.	30
3.3.3	Validación del Modelo.	35
3.3.4	Representación no lineal del sistema.	35
3.4	Conclusiones.	37
<b>4</b>	<b>Algoritmo de control.</b>	<b>39</b>
4.1	Diseño del regulador lineal	39
4.1.1	Diseño del regulador por retroalimentación del estado.	40
4.1.2	Diseño del regulador por retroalimentación del error	43
4.1.3	Diseño del regulador robusto.	44
4.2	Diseño del regulador no lineal	45
4.3	Diseño de modos deslizantes	48
4.4	Conclusiones.	49



<b>5</b>	<b>Aplicaciones</b>	<b>51</b>
5.1	Resultados en simulación.	51
5.1.1	Regulador lineal por retroalimentación del estado y modos deslizantes.	51
5.1.2	Regulador por retroalimentación del error, regulación robusto y modos deslizantes.	54
5.1.3	Regulador no lineal y modos deslizantes.	57
5.2	Resultados en tiempo real.	62
5.2.1	Regulador por retroalimentación del estado y modos deslizantes.	63
5.2.2	Regulador por retroalimentación del error y regulador robusto.	66
5.2.3	Regulador no lineal y modos deslizantes.	66
5.3	Conclusiones.	69
<b>6</b>	<b>Conclusiones generales y perspectivas.</b>	<b>75</b>
<b>A</b>	<b>Funcionamiento del servopropulsor</b>	<b>77</b>
<b>B</b>	<b>Programas empleados para el diseño de controladores.</b>	<b>81</b>
	<b>Bibliografía.</b>	<b>93</b>

# Capítulo 1

## Introducción.

El control de sistemas electromecánicos representa una parte importante de las aplicaciones de control automático, dado que es fundamental garantizar que dichos mecanismos se comporten de acuerdo a un criterio preestablecido. Diferentes técnicas se pueden encontrar en la literatura, aún cuando en las aplicaciones reales, éstas se limitan a técnicas clásicas de control, tales como los controladores PID, todo-nada, filtros compensadores lineales, etc., que, aunque brindan un desempeño aceptable, en algunas circunstancias, como por ejemplo la presencia de variaciones en los parámetros del sistema (desgastes, carga variable, etc), no garantizan un error de seguimiento de trayectorias adecuado.

En particular, el problema de regulación de salida consiste en hallar una ley de control que garantice el seguimiento asintótico de una trayectoria de referencia en presencia de perturbaciones internas y externas al sistema. Este problema ha sido resuelto para el caso lineal en [3], mientras que para el caso de sistemas no lineales, dicha solución puede encontrarse, entre otros, en [6]. De la misma manera, es conocido que la técnica de modos deslizantes es efectiva para reducir el error de seguimiento en presencia de discontinuidades dinámicas con respecto a los estados del proceso, como por ejemplo, en el sistema en estudio que presenta fricción de Coulomb cuya fuerza de resistencia puede tomar uno u otro de los valores de signo opuesto que dependen de la dirección de movimiento, y de incertidumbres en los valores de los coeficientes del modelo [17]. Las técnicas de regulación han sido utilizadas en algunas aplicaciones en tiempo real, entre los que se pueden mencionar, el sistema Balancín-Péndulo Invertido [12] y el sistema pendubot [15], entre otros.

En esta memoria de tesis se presenta el problema de control de trayectorias de un sistema electromecánico planar de dos grados de libertad, que presenta la particularidad de estar desacoplado mecánicamente. El objetivo principal que se persigue es el de obtener seguimiento asintótico de trayectorias deseadas utilizando las técnicas de regulación con las modificaciones de modos deslizantes para reducir el error debido a variaciones en parámetros del sistema. Algunas observaciones y conclusiones se derivan de la comparación de los resultados obtenidos tanto en simulación numérica, como en la aplicación en tiempo real.

La metodología seguida en este trabajo consistió en las siguientes etapas:

1. Estudio del sistema electromecánico y modelado matemático.
2. Análisis de las características dinámicas del modelo obtenido.
3. Identificación de los parámetros del sistema.
4. Diseño de las estructuras de control.
5. Simulación numérica de las estructuras de control.
6. Aplicación en tiempo real de las estructuras de control.

La memoria de esta tesis se encuentra organizada de la siguiente manera:

En el capítulo 2 se dan algunos resultados básicos de la teoría de regulación para sistemas lineales y no lineales invariantes en el tiempo, así como también de la teoría de modos deslizantes. A partir de estos resultados se diseñarán leyes de control para el sistema electromecánico. En el capítulo 3 se describe el funcionamiento del sistema electromecánico, se da una breve explicación de los componentes y se presenta el análisis para la obtención del modelo matemático del sistema. El proceso de identificación de los parámetros, aplicando señales conocidas al sistema en lazo abierto también se desarrolla en este capítulo. En el capítulo 4 se presentan los diseños del regulador lineal, no lineal y por modos deslizantes que se utilizan para realizar seguimiento de trayectorias para el sistema electromecánico planar de dos grados de libertad, mientras que en el capítulo 5 se presentan los resultados de la aplicación de estos algoritmos tanto en simulación como experimentales; se comparan estos resultados y se discuten las ventajas y desventajas de cada uno en el contexto de la aplicación estudiada. En el capítulo 6 se dan algunas conclusiones y perspectivas generales del trabajo y finalmente, en el Apéndice A se presentan algunos resultados de aplicar la modalidad de control de velocidad del servopropulsor utilizado y se explica brevemente la correspondencia con las estructuras diseñadas.

# Capítulo 2

## Problema del Regulador y Modos deslizantes.

En este capítulo se dan algunos resultados básicos de la teoría de regulación para sistemas lineales y no lineales invariantes en el tiempo, así como también de la teoría de modos deslizantes. A partir de estos resultados se diseñarán leyes de control para el sistema electromecánico cuyo modelo será presentado en el capítulo 3.

La organización de este capítulo es la siguiente. En la sección 2.1 se presenta la teoría del regulador lineal, incluyendo además, un resultado con el cual se asegura la existencia de un regulador robusto para el sistema en lazo cerrado en presencia de variaciones paramétricas. En la sección 2.2 se presenta la extensión de los resultados anteriores al caso de sistemas no lineales. En la sección 2.3 se presenta la teoría de modos deslizantes, y finalmente en la sección 2.4 se presentan algunas conclusiones.

### 2.1 El problema de regulación en la salida.

En esta sección se presentan los resultados de la teoría del problema de regulación en la salida, esta sección se divide en tres partes en las cuales se presentan el problema de regulación por retroalimentación del estado, el problema de regulación por retroalimentación del error y el problema de regulación robusta.

Considérese el *sistema lineal* descrito por ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Pw \\ e &= Cx + Qw, \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde la primera ecuación describe una *planta* con estado interno  $x(t) \in \mathbf{R}^n$ , *entrada de control*  $u(t) \in \mathbf{R}^m$  y sujeta a un conjunto de variables de *entradas exógenas*  $w \in \mathbf{R}^r$  que incluye *perturbaciones* (a ser rechazadas) y/o *referencias* (a ser seguidas). La segunda ecuación define una variable de *error*  $e \in \mathbf{R}^p$ , la cual se expresa como una combinación lineal de la planta  $x$  y de la entrada exógena  $w$ .



La acción de control para el sistema (2.1) esta dada por un subsistema que procesa la información recibida de la planta para generar la entrada apropiada. La estructura del compensador depende de la cantidad de información disponible para retroalimentar. La situación más favorable, desde el punto de vista del diseño de retroalimentación, ocurre cuando el conjunto de variables medibles incluye todas las componentes del estado  $x$  de la planta y de las entradas *exógenas*  $w$ . En este caso, el controlador es provisto con toda la información y es modelado por una relación de la forma

$$u = Kx + Lw. \quad (2.2)$$

Una situación más realista es cuando sólo las componentes del error  $e$  son disponibles para medir. En este caso, el controlador es provisto con *retroalimentación del error* y modelado por ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= F\xi + Ge \\ u &= H\xi \end{aligned} \quad (2.3)$$

con estado interno  $\xi \in \mathbf{R}^v$

La combinación de la planta (2.1) con cualquiera de estos dos controladores resulta un nuevo sistema lineal llamado *sistema en lazo cerrado*, con entrada  $w$ , estado interno  $x$  y salida  $e$ . El propósito del control es garantizar que el sistema en lazo cerrado sea *asintóticamente estable* y que la variable de error vista como una función del tiempo, *decaiga asintóticamente a cero* cuando el tiempo tiende a infinito, para cualquier condición inicial posible del estado y para cualquier entrada posible exógena en una familia prescrita de funciones del tiempo. Este requisito es también conocido como propiedad de *regulación en la salida*. Por simplicidad matemática y también porque un número grande de situaciones prácticas pueden ser cubiertas, se asume que la familia de las entradas exógenas  $w(\cdot)$  que afectan la planta es modelada por la familia de todas las funciones del tiempo, que son solución de la ecuación diferencial lineal homogénea

$$\dot{w} = Sw \quad (2.4)$$

para toda posible condición inicial  $w(0) \in \mathbf{R}^f$ . Este sistema, el cual es visto como un modelo matemático de un “generador” para todas las posibles funciones de entradas exógenas, es llamado el *exosistema*.

En la figura 2.1 se muestra un diagrama esquemático de los sistemas en lazo cerrado resultante al utilizar la ley de control (2.2) y (2.3).

### 2.1.1 Regulación de la salida por retroalimentación del estado (PRRS).

En esta parte se dan las condiciones bajo las cuales el problema de regulación en la salida por retroalimentación del estado puede resolverse.



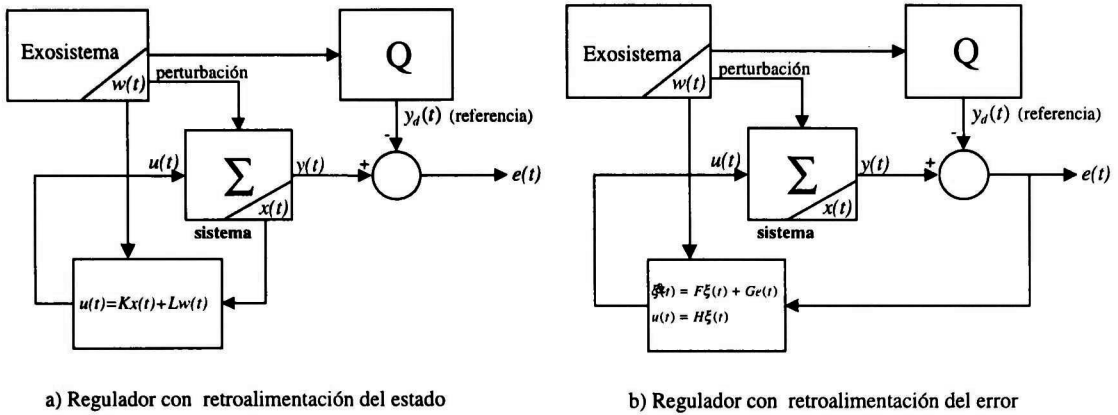


Figura ~2.1: Esquema del regulador lineal

El problema de encontrar un controlador para lograr el objetivo puede ser formalmente enunciado de la siguiente manera.

Dadas  $[A, B, C, P, Q, S]$  encontrar, si es posible, dos matrices  $K$  y  $L$  tales que

$(S_{sL})$  La matriz  $A + BK$  tenga todos sus valores propios en  $\mathbb{C}^-$

$(R_{sL})$  Para cada  $(x^0, w^0)$ , la solución  $(x(t), w(t))$  de

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + BK)x + (P + BL)w \\ \dot{w} &= Sw \end{aligned} \tag{2.5}$$

satisfaciendo  $(x(0), w(0)) = (x^0, w^0)$  es tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (Cx(t) + Qw(t)) = 0.$$

Las condiciones necesarias y suficientes para que exista una solución al PRRS están dadas en el siguiente teorema, cuya demostración está dada en [11] (Cap.1, Sección 1.3).

**Teorema 1** [11] *Supóngase que se satisfacen las hipótesis siguientes*

$(H1_L)$  *La parte real de los valores propios de  $S$  están contenidos en el semiplano derecho cerrado del plano complejo, es decir*

$$\text{Re}\{\sigma(S)\} \in \text{clos}(\mathbb{C}^+) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Re}[\lambda] \geq 0\} \tag{2.6}$$

$(H2_L)$  *El par  $(A, B)$  es estabilizable. Es decir, existe una matriz  $K$  tal que la matriz  $(A + BK)$  tiene todos sus valores propios en  $\mathbb{C}^-$*

Entonces el problema de regulación de la salida por retroalimentación del estado tiene solución si y solo si existen matrices  $\Pi$  y  $\Gamma$  que resuelven las ecuaciones lineales matriciales

$$\begin{aligned}\Pi S &= A\Pi + B\Gamma + P \\ 0 &= C\Pi + Q.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Mas aún, la ley de control que garantiza que  $(S_{sL})$  y  $(R_{sL})$  se cumplan está dada por

$$u(t) = Kx(t) + Lw(t)\tag{2.8}$$

donde  $K$  es una matriz constante tal que  $(A + BK)$  tiene todos sus valores propios en el semiplano izquierdo y  $L = (\Gamma - K\Pi)$ .

### 2.1.2 Regulación de la salida por retroalimentación del error (PRRE).

El problema de regulación de la salida por retroalimentación del error es de mayor utilidad, desde el punto de vista de control de procesos, ya que, en la práctica, sólo se tiene disponible la salida del sistema. En esta parte, al igual que en la anterior, se dan las condiciones bajo las cuales se pueden resolver este problema.

Dadas  $[A, B, C, P, Q, S]$  encontrar, si es posible tres matrices  $F, G$  y  $H$  tales que

$(S_{eL})$  La matriz

$$\begin{bmatrix} A & BH \\ GC & F \end{bmatrix}\tag{2.9}$$

tenga todos sus valores propios en  $\mathbb{C}^-$

$(R_{eL})$  Para cada  $(x^0, w^0)$ , la solución  $(x(t), \xi(t), w(t))$  de

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + BH\xi + Pw \\ \dot{\xi} &= GCx + F\xi + GQw \\ \dot{w} &= Sw\end{aligned}$$

satisfaciendo  $(x(0), \xi(0), w(0)) = (x^0, \xi^0, w^0)$  es tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (Cx(t) + Qw(t)) = 0.\tag{2.10}$$

De igual forma que para el PRRS, las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una solución al PRRE están dadas en el siguiente resultado cuya demostración también se encuentra en [9] (Cap.1, Sección 1.4).

**Teorema 2** [9] Supóngase que  $(H1_L)$  y  $(H2_L)$  se satisfacen junto con la hipótesis siguiente  $(H3_L)$  El par

$$\left( [C \quad Q] \begin{bmatrix} A & P \\ 0 & S \end{bmatrix} \right)$$

es detectable.

Entonces el problema de regulación de la salida por retroalimentación del error tiene solución si y solo si existen matrices  $\Pi$  y  $\Gamma$  que resuelven las ecuaciones lineales matriciales (2.7). La estructura del controlador que resuelve el problema está dada por

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= F\xi(t) + Ge(t) \\ u(t) &= H\xi(t)\end{aligned}\quad (2.11)$$

donde

$$\begin{aligned}\xi &= \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \end{bmatrix}, H = [K \ L], L = \Gamma - K\Pi \\ F &= \begin{bmatrix} A & P \\ 0 & S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} [K \ L] - \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \end{bmatrix} [C \ Q]\end{aligned}$$

siendo  $K$  y  $G$  matrices que aseguran que las matrices

$$(A + BK) \text{ y } \left( \begin{bmatrix} A & P \\ 0 & S \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \end{bmatrix} [C \ Q] \right)$$

tengan todos sus valores propios en el semiplano izquierdo.

### 2.1.3 Problema de la regulación robusta de la salida.

La existencia de una solución para el PRRS y para el PRRE no garantiza, sin embargo, que el error se mantenga igual a cero en presencia de variaciones paramétricas del sistema. Cuando se trata de controlar un sistema físico, es común que el modelo del mismo tenga variaciones paramétricas, por lo que es necesario diseñar un controlador capaz de contrarrestar dichos efectos.

Los valores de los coeficientes que caracterizan el sistema (2.1) pueden ser determinados dentro de una cierta tolerancia alrededor de los valores nominales del sistema si se considera al conjunto de matrices  $\{A, B, C, P, Q\}$  como un elemento de *espacio de parámetros*

$$\mathcal{P} = \mathcal{R}^{n \times n} \times \mathcal{R}^{n \times m} \times \mathcal{R}^{p \times n} \times \mathcal{R}^{n \times r} \times \mathcal{R}^{p \times r}$$

y las incertidumbres paramétricas pueden ser expresadas al extender el conjunto  $\{A, B, C, P, Q\}$  en alguna vecindad  $\mathcal{P}_0$  de un conjunto nominal de parámetros  $\{A_0, B_0, C_0, P_0, Q_0\}$  en  $\mathcal{P}$  como

$$\{A, B, C, P, Q\} = \{A_0 + \delta A, B_0 + \delta B, C_0 + \delta C, P_0 + \delta P, Q_0 + \delta Q\}.$$

La idea básica para el diseño del regulador robusto es tener un controlador *fijo* que resuelva el problema de regulación de la salida para una familia de plantas, por ejemplo la familia de todas las plantas cuyos parámetros varían en alguna vecindad abierta alrededor de un conjunto de valores nominales. Esta idea puede ser formalizada, para el caso más importante de regulación vía retroalimentación del error, por medio del enunciado siguiente.

**Regulación Robusta de la salida.** Un control fijo de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= F\xi + Ge \\ u &= H\xi \end{aligned}$$

es un regulador robusto en  $\{A_0, B_0, C_0, P_0, Q_0\}$  si:

- (i) Resuelve el problema de regulación de la salida por retroalimentación del error para la planta caracterizada por el conjunto nominal de parametros

$$\{A_0, B_0, C_0, P_0, Q_0\}$$

- (ii) Resuelve el problema de regulación de salida por retroalimentación del error para cada conjunto de parámetros perturbados  $\{A_0 + \delta A, B_0 + \delta B, C_0 + \delta C, P_0 + \delta P, Q_0 + \delta Q\}$  mientras que la perturbación  $\{\delta A, \delta B, \delta C, \delta P, \delta Q\}$  sea tal que el sistema en lazo cerrado permanezca asintóticamente estable, es decir, es tal que la matriz

$$\begin{bmatrix} A + \delta A & (B + \delta B)H \\ G(C + \delta C) & F \end{bmatrix}$$

tenga todos sus valores propios con parte real negativa.

La solución al problema enunciado está garantizado por el siguiente resultado cuya demostración se encuentra en [9] (Cap.1, Sección 1.7).

**Teorema 3** [9] *Supóngase que el exosistema satisface la hipótesis  $(H1_L)$  y que las hipótesis  $(H2_L)$  y  $(H3_L)$  se satisfacen para  $\{A, B, C, P, Q\} = \{A_0, B_0, C_0, P_0, Q_0\}$ . Entonces existe un regulador robusto en  $\{A_0, B_0, C_0, P_0, Q_0\}$  si y solo si los renglones de la matriz*

$$\begin{bmatrix} A_0 - \lambda I & B_0 \\ C_0 & 0 \end{bmatrix}$$

*son linealmente independientes para cada valor propio  $\lambda$  de  $S$ .*

**Construcción del Regulador Robusto.**

A continuación se describe el procedimiento que permite construir un regulador robusto de la salida por retroalimentación del error.

- (i) Se encuentra una matriz de tal forma que el par  $A_0 + B_0K$  tenga sus valores propios en  $\mathbb{C}^-$
- (ii) Se construyen las matrices

$$A_e = \begin{bmatrix} A_0 & P_1 & \cdots & P_p \\ 0 & S & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & S \end{bmatrix}, B_e = \begin{bmatrix} B_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, C_e = [ C_0 \ 0 \ \cdots \ 0 ]$$

donde  $P_1, \dots, P_p$  se escogen de tal forma que el par  $(A_e, C_e)$  sea detectable. Esto quiere decir que existe una matriz

$$G_e = \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ \vdots \\ G_p \end{bmatrix}$$

tal que  $(A_e - G_e C_e)$  tenga sus valores propios en  $\mathbb{C}^-$

(iii) Se resuelve la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} \Pi_1 & \cdots & \Pi_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & S \end{bmatrix} = A_0 \begin{bmatrix} \Pi_1 & \cdots & \Pi_p \end{bmatrix} + B_0 \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \cdots & \Gamma_p \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} P_1 & \cdots & P_p \end{bmatrix} \\ C_0 \begin{bmatrix} \Pi_1 & \cdots & \Pi_p \end{bmatrix} = 0$$

para  $\Pi_1, \dots, \Pi_p$  y  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_p$ . Esto es equivalente a resolver los subsistemas

$$\begin{aligned} \Pi_i S &= A \Pi_i + B \Gamma_i + P_i \\ C \Pi_i &= 0 \end{aligned}$$

para  $\Pi_i$  y  $\Gamma_i$  y para  $i = 1, \dots, p$ .

(iv) Finalmente el controlador está dado por

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= F \xi + G e \\ u &= H \xi \end{aligned}$$

Con  $G = G_e$  y

$$H = \begin{bmatrix} K \\ \Gamma_1 - K \Pi_1 \\ \vdots \\ \Gamma_p - K \Pi_p \end{bmatrix}^T, F = A_e + B_e H - G_e C_e.$$

## 2.2 El problema del regulador no lineal.

En esta sección se discute el análogo no lineal del problema tratado para el regulador lineal, es decir se considera un sistema no lineal



Considérese un sistema no lineal multivariable

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u + p(x)w \\ \dot{w} &= s(w) \\ e &= h(x) + q(w) \end{aligned} \tag{2.12}$$

La primera ecuación describe a la planta, con estado  $x$  y entrada  $u$ , definidas en las vecindades  $x \in \mathbf{X} \subset \mathbf{R}^n$  y  $u \in U \subset \mathbf{R}^m$  respectivamente, sujeta al efecto de una perturbación representada por el campo vectorial  $p(x)w$ . La segunda ecuación describe un sistema autónomo denominado exosistema, definido en una vecindad  $\mathbf{W}$  del origen  $\mathbf{R}^s$  que modela la clase de señales de referencia y de perturbaciones. La tercera ecuación define el error  $e \in \mathbf{R}^p$  entre la salida de la planta  $h(x)$  y una señal de referencia  $q(w)$ . Los campos vectoriales  $f(x), g(x), p(x)$  son  $C^\infty$  sobre una vecindad  $\mathbf{X}$  del origen  $\mathbf{R}^n$ , y  $s(w)$  también es un campo vectorial suave en  $\mathbf{W}$ . Los mapeos  $h(x)$  y  $q(w)$  también son suaves sobre  $\mathbf{X}$  y  $\mathbf{W}$ . Se supone también que  $f(0) = 0$ ,  $s(0) = 0$ ,  $h(0) = 0$  y  $q(0) = 0$ , así que para  $u = 0$ , el sistema (2.12) tiene un estado de equilibrio  $(x, w) = (0, 0)$  que a su vez produce un error igual a cero.

La acción de control para el sistema (2.12) puede generarse por medio de una retroalimentación del estado o por medio de una retroalimentación del error. La acción de control por *retroalimentación del estado* está dada por

$$u = \alpha(x, w) \tag{2.13}$$

donde  $\alpha(x, w)$  es un mapeo  $C^k$  (para  $k \geq 2$ ) definido sobre  $\mathbf{X} \times \mathbf{W}$ . Con este control se obtiene el sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)\alpha(x, w) + p(x)w \\ \dot{w} &= s(w) \end{aligned} \tag{2.14}$$

Por consecuencia, se supone que  $\alpha(0, 0) = 0$  de tal manera que se preserve el origen  $(x, w) = (0, 0)$  como equilibrio del sistema en lazo cerrado. Un controlador por retroalimentación del error tiene la forma

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \eta(z, e) \\ u &= \theta(z) \end{aligned} \tag{2.15}$$

i.e., es un sistema dinámico con estado  $z$ , definido en una vecindad  $\mathcal{Z}$  del origen de  $\mathbf{R}^v$  y los mapeos  $\theta(z)$  y  $\eta(z, e)$  son de clase  $C^k$  (para  $k \geq 2$ ). La composición de (2.12) con (2.15) conduce al sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)\theta(z) + p(x)w \\ \dot{z} &= \eta(z, h(x) + q(w)) \\ \dot{w} &= s(w) \end{aligned} \tag{2.16}$$

donde de nuevo, se supone que  $\eta(0, 0) = 0$  y  $\theta(0)$ , de tal manera que la tripleta  $(x, z, w) = (0, 0, 0)$  es un equilibrio del sistema en lazo cerrado. Mediante el compensador (2.15) se tiene la ventaja de que solo es necesario la medición del vector de errores, y no de todo el vector de estado, como ocurre con (2.13). Sin embargo, la solución es más complicada debido a que

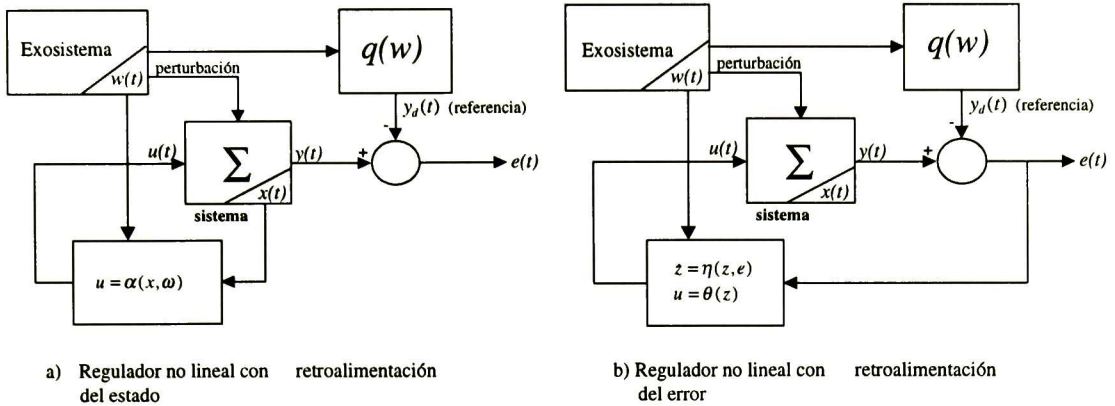


Figura 2.2: Esquema del regulador no lineal

el número de ecuaciones diferenciales parciales a resolver se incrementa en la dimensión del estado del compensador (2.15) [7]. El objetivo de control en el regulador no lineal consiste en alcanzar la estabilidad asintótica local del sistema en lazo cerrado y la regulación de la salida de la planta.

En la figura 2.2 se muestra un diagrama esquemático de los sistemas en lazo cerrado resultante al utilizar la ley de control (2.13) y (2.15).

### 2.2.1 Problema del regulador no lineal por retroalimentación del estado.

En esta parte se dan las condiciones bajo las cuales el problema de regulación no lineal por retroalimentación del estado pueden resolverse.

Encontrar, si es posible, un control  $\alpha(x, w)$  tal que:

$(S_{sNL})$  El equilibrio  $x = 0$  de

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\alpha(x, 0)$$

sea exponencialmente estable.

$(R_{sNL})$  Exista una vecindad  $U \subset X \times W$  del origen  $(0, 0)$  tal que, para cualquier condición inicial  $(x(0), w(0)) \in U$ , la solución del sistema en lazo cerrado (2.14) satisfaga

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(x(t)) + q(w(t)) = 0$$

$(H1_{NL})$  El par  $f(x), g(x)$  tiene una aproximación lineal estabilizable en  $x = 0$ .

( $H2_{NL}$ ) El equilibrio  $\omega = 0$  es estable según lyapunov, es decir, la matriz

$$S = \left. \frac{\partial s(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=0}$$

tiene todos sus valores propios sobre el eje imaginario del plano-complejo.

Las condiciones suficientes para la existencia de una solución para el PRRS-NL están dadas por el siguiente teorema cuya demostración se encuentra en [7].

**Teorema 4** [7] *Supóngase que ( $H1_{NL}$ ) y ( $H2_{NL}$ ) se satisfacen, entonces, el PRRS-NL tiene solución si existen mapeos  $C^k$  ( $k \geq 2$ ),  $x = \pi(w)$  y  $u = c(w)$ , con  $\pi(0) = 0$  y  $c(0) = 0$ , definidos en una vecindad  $\mathbf{W}^0 \subset \mathbf{W}$  de 0, que satisfacen las siguientes condiciones*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial w} s(w) &= f(\pi(w)) + g(\pi(w))c(w) + p(\pi(w))w \\ 0 &= h(\pi(w)) + q(w). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Mas aún, la ley de control que garantizan ( $S_{sNL}$ ) y ( $R_{sNL}$ ) está dada por

$$u = \alpha(x, w) = c(w) + K(x - \pi(w))$$

donde  $K$  es la matriz que estabiliza la aproximación lineal del sistema

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u.$$

## 2.2.2 Problema del regulador no lineal por retroalimentación del error.

En esta parte, al igual que en la anterior, se dan las condiciones bajo las cuales se puede resolver el problema del regulador no lineal por retroalimentación del error.

Encontrar, si es posible, dos mapeos  $\theta(z)$  y  $\eta(z, e)$ , tales que:

( $S_{eNL}$ ) El equilibrio  $(x, z) = (0, 0)$  de

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)\theta(z) \\ \dot{z} &= \eta(z, h(x)) \end{aligned}$$

sea exponencialmente estable.

( $R_{eNL}$ ) Exista una vecindad  $\mathbf{U} \subset \mathbf{X} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{W}$  del origen  $(0, 0, 0)$  tal que, para cualquier condición inicial  $(x(0), z(0), w(0)) \in \mathbf{U}$ , la solución del sistema en lazo cerrado (2.16) satisfaga

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(x(t)) + q(w(t)) = 0$$



( $H3_{NL}$ ) El par

$$\begin{pmatrix} f(x) + g(x)w \\ s(w) \end{pmatrix}, (h(x) + q(w))$$

tiene una aproximación lineal detectable en  $(x, w) = (0, 0)$ .

Las condiciones suficientes para la existencia de una solución del PRRE-NL están dadas en el siguiente teorema cuya demostración también se encuentra en [7].

**Teorema 5** [7] *Supóngase que  $(H1_{NL})$ ,  $(H2_{NL})$  y  $(H3_{NL})$  se satisfacen, entonces el PRRE-NL tiene solución si y solo si existen mapeos  $C^k$  ( $k \geq 2$ ),  $x = \pi(w)$  y  $u = c(w)$ , con  $\pi(0) = 0$  y  $c(0) = 0$ , definidos en una vecindad  $\mathbf{W}^0 \subset \mathbf{W}$  de 0, que resuelven el sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales (2.17) y el controlador que garantiza que  $(S_{eNL})$  y  $(R_{eNL})$  se satisfacen está dado por*

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \eta(z, e) \\ u &= \theta(z) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} z &= \text{col}(z_1, z_2), \quad \eta(z, e) = \text{col}(\eta_1(z_1, z_2, e), \eta_2(z_1, z_2, e)) \\ \theta(z) &= c(z_2) + K(z_1 - \pi(z_2)) \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \eta_1(z_1, z_2, e) &= f(z_1) + p(z_1)z_2 + g(z_1)(c(z_2) + Kz_1 - K\pi(z_2)) - \\ &\quad G_0(h(z_1) - q(z_2) - e), \\ \eta_2(z_1, z_2, e) &= s(z_2) - G_1(h(z_1) - q(z_2) - e), \end{aligned}$$

definiéndose a  $K$ , como la matriz de ganancias de retroalimentación que proporciona estabilidad asintótica del sistema en lazo cerrado, y a  $G = [G_0 \ G_1]^T$  como la matriz que asegura que la aproximación lineal de

$$\begin{pmatrix} f(x) + p(x)w \\ s(w) \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \end{bmatrix} (h(x) + q(w))$$

tienen valores propios en el semiplano izquierdo.

Se ha probado que la solución al problema del regulador no lineal es una propiedad de la dinámica cero del sistema no lineal  $f(x) + g(x)u$ ,  $y = h(x)$  [7], ya que si el sistema cumple con las hipótesis planteadas y su dinámica cero se encuentra bien definida en una vecindad  $\mathbf{U} \subset \mathbf{X} \times \mathbf{W}$  de 0, donde  $\mathbf{X}$  y  $\mathbf{W}$  representan el espacio de estado de la planta y del exosistema respectivamente, entonces el problema del regulador con retroalimentación del estado y del error es soluble, si la dinámica cero del sistema posee un equilibrio hiperbólico en  $x = 0$ .

## 2.3 Modos deslizantes.

Algunos procesos en la mecánica, eléctrica y otras áreas están caracterizadas por el hecho, de que los estados del proceso presentan dinámicas con discontinuidad, como por ejemplo, en un sistema mecánico que tenga una fricción en seco (Coulomb) cuya fuerza de resistencia puede tomar uno u otro de los dos valores de signo opuesto que dependen de la dirección del movimiento, otro ejemplo similar es el uso de relevadores en los primeros reguladores diseñados, que se aplicaban por la necesidad de hacer su implementación lo más simple posible, lo cual ocasionaba dinámicas con discontinuidad en los estados del proceso, esto ha forzado a los especialistas de la teoría del control a pensar en una adecuada descripción del comportamiento del sistema en los límites de discontinuidad.

Formalmente, tal sistema dinámico con discontinuidades puede ser escrito por la ecuación

$$\dot{x} = f(x, t, u) \quad (2.18)$$

donde  $x \in \mathbf{R}^n$   $t$  es el tiempo y  $u \in \mathbf{R}^m$

Sea

$$s_i(x, t) = 0, \quad s_i(x, t) \in R^1 \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.19)$$

el conjunto de superficies discontinuas, y un control discontinuo

$$u_i = \begin{cases} u_i^+(x, t) & \text{si } s_i(x) > 0 \\ u_i^-(x, t) & \text{si } s_i(x) < 0 \end{cases}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.20)$$

donde  $u^T = (u_1, \dots, u_m)$  y las funciones  $u_i^+(x, t)$  y  $u_i^-(x, t)$  son todas continuas.

Un diseño para el sistema (2.18), (2.19) y (2.20) consiste de dos pasos:

- (i) Se determina la superficie de discontinuidad  $s = 0$  en el espacio de estado.
- (ii) Se selecciona la función de control continua  $u_i^+(x, t)$  y  $u_i^-(x, t)$  con  $i = 1, \dots, m$ .

El vector de estado de tales sistemas puede permanecer sobre la superficie de discontinuidad o sus intersecciones dentro de un tiempo límite. Por ejemplo, las trayectorias del vector de estado del sistema pertenecen a alguna superficie de discontinuidad  $s_i(x) = 0$  si la vecindad de los vectores velocidad  $f(x, u^+, t)$  y  $f(x, u^-, t)$  son dirigidos el uno hacia el otro (figura 2.3.a). Otro ejemplo se refiere al caso con dos superficies de discontinuidad (figura 2.3.b) que están ilustradas a lo largo de una sola superficie de discontinuidad (arcos ab y cb) y la intersección de las dos superficies (arco bd).

Como una evidencia de estos ejemplos, las trayectorias de movimiento que pertenecen al conjunto de puntos de discontinuidad son singulares ya que en alguna combinación de los controles continuos  $u_i^+(x, t)$  y  $u_i^-(x, t)$  las difiere de las trayectorias del sistema. El movimiento de las trayectorias que pertenece al conjunto de discontinuidades es llamado *modo deslizante*.



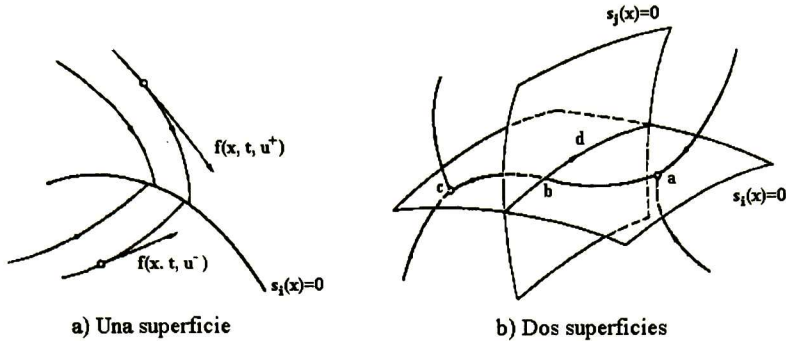


Figura 2.3: Superficies de discontinuidad

Un modo deslizante existe sobre una superficie de discontinuidad cuando la distancia a esta superficie y la velocidad de su cambio  $\dot{s}$  son de signo opuesto, i.e. cuando

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0^-} \dot{s} &> 0 \\ \lim_{s \rightarrow 0^+} \dot{s} &< 0, \end{aligned}$$

o sea que

$$s\dot{s} < 0.$$

### 2.3.1 Problema de regularización.

Se ha notado que el comportamiento del sistema (2.18), (2.20) sobre las superficies de discontinuidad no pueden ser adecuadamente descritas en términos de la teoría clásica de ecuaciones diferenciales. Para resolver este problema, son sugeridos varios métodos que reducen el problema a una forma tal que resulte una solución cerrada al problema original y el cual permite el uso de clásicos análisis técnicos, una substitución del problema es llamado *regularización*.

A continuación se dará una consideración para el esquema de regularización el cual hace uso de una capa límite. Este esquema será empleado para obtener la ecuación de modos deslizantes sobre los límites de discontinuidad en el sistema (2.18) y (2.20). Se asume un modo deslizante que ocurre en las intersecciones de todas las superficies de discontinuidad

$$s(x) = 0, \quad s^T(x) = [s_1(x), \dots, s_m(x)] \quad (2.21)$$

sustituyendo el modelo ideal (2.18) y (2.20) en uno más preciso

$$\dot{x} = f(t, \tilde{u}, t)$$

el cual toma en cuenta todas las posibles imperfecciones en el nuevo control,  $\tilde{u}$ , e.g. retardos, histéresis, dispositivos de conmutación, incompleta correspondencia entra el modelo y la

planta actual, imprecisión en la medición de los instrumentos, etc. Sin embargo, el “costo” de tal regularización es el movimiento no estrictamente sobre la superficie  $s(x) = 0$ , pero si en alguna vecindad de esta superficie

$$\|s(x)\| \leq \Delta, \quad \|s(x)\| = (s^T s)^{\frac{1}{2}},$$

donde  $\Delta$  es un número pequeño que depende de las imperfecciones introducidas. En contraste al movimiento real, esta será referido como movimiento deslizante real. Si el valor de  $\Delta$  tiende a cero el modo deslizante real tenderá al ideal.

### 2.3.2 Método de control equivalente.

Se asume que un modo deslizante existe en una superficie (2.21). Encontrar un control continuo tal que bajo la posición inicial del vector de estado sobre esta superficie, resulte igual a cero la derivada con respecto al tiempo del vector  $s(x)$  a lo largo de las trayectorias del sistema:

$$\dot{s} = Gf(x, t, u) = 0, \tag{2.22}$$

donde las líneas de la matriz  $(m \times n)$   $G = \left\{ \frac{\partial s}{\partial x} \right\}$  son los gradientes de las funciones  $s_i(x)$ .

Se asume que una solución (o número de soluciones) del sistema (2.22) con respecto al control  $m$  dimensional existe.

Usando esta solución, de aquí en adelante se referirá como control equivalente  $u_{eq}(x, t)$ , en el sistema (2.18) en lugar de  $u$ :

$$\dot{x} = f[x, t, u_{eq}(x, t)]. \tag{2.23}$$

Es bastante obvio que, por virtud de la condición (2.22), un movimiento que empieza en  $s[x(t_0)] = 0$  se mantendrá a lo largo de la trayectoria sobre la superficie  $s(x) = 0$ . El procedimiento anterior se le llamará *método de control equivalente* y la ecuación (2.23) es obtenida como resultado de aplicar este método que será considerado como la *ecuación de modos deslizantes* que describe el movimiento sobre la intersección de las superficies de discontinuidad

$$s_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Considerando el procedimiento de control equivalente para un importante caso particular de un sistema discontinuo no lineal, la parte derecha de estas ecuaciones diferenciales es una función lineal del control

$$\dot{x} = f(x, t) + B(x, t)u, \tag{2.24}$$

donde  $f(x, t)$  y  $B(x, t)$  son vectores y matriz continuos de dimensión  $(n \times 1)$  y  $(n \times m)$ , respectivamente, y el control discontinuo  $u$  cambia en complacencia con (2.20). El control equivalente (2.22) para el caso (2.24) puede ser escrito como

$$\dot{s} = Gf + GBu = 0 \tag{2.25}$$

Asumiendo que la matriz  $GB$  es no singular para todo  $x$  y  $t$ , se encuentra el siguiente control equivalente de (2.25):

$$u_{eq}(x, t) = -[G(x)B(x, t)]^{-1}G(x)f(x, t).$$

Sustituyendo este control en (2.24) resulta la ecuación

$$\dot{x} = f - B(GB)^{-1}Gf,$$

el cual describe el modo deslizante sobre la superficie  $s = 0$ .

## 2.4 Conclusiones.

En este capítulo se ha presentado un resumen de resultados y propiedades acerca del problema de regulación en la salida, así como también resultados básicos de modos deslizantes, para un sistema dinámico. En particular se dan los resultados obtenidos por Knobloch-Isidoro-Flockersi [9], Isidoro-Byrnes [7] y Utkin [17]. Para entender los resultados de la regulación no lineal, se presentó primero el problema de regulación lineal, ya que la existencia de una solución al problema de regulación es equivalente a la existencia de la solución de un conjunto de ecuaciones lineales o no lineales según sea el caso. Los resultados de modos deslizantes pueden ser útiles a sistemas lineales, como también a sistemas no lineales.





# Capítulo 3

## Descripción del Problema

En este capítulo se presenta el desarrollo para la obtención del modelo matemático del sistema electromecánico considerado. Se describe el sistema estudiado y se presenta una breve explicación de los componentes.

El capítulo está organizado como sigue: En la sección 3.1 se describe el sistema electromecánico planar de dos grados de libertad, detallando las componentes electrónicas, eléctricas y mecánicas. En la sección 3.2 se obtiene el modelo matemático del sistema, mientras que en la sección 3.3 se presenta la identificación de los parámetros del modelo, en base a experimentos sobre el sistema real. Finalmente en la sección 3.4 se dan las conclusiones sobre el capítulo.

### 3.1 Descripción del Sistema

El diagrama esquemático del sistema se muestra en la figura 3.1

El sistema consiste de dos ejes de movimiento (X,Y), que son perpendiculares entre sí y desacoplados mecánicamente. Sobre el eje X el sistema consta de una mesa rectangular móvil, que se desplaza libremente sobre una pista de recorrido por medio de baleros para disminuir la fricción. Dicha mesa es el área de trabajo del sistema. El eje Y consiste de un carro móvil con un soporte fijo donde puede ir montada una herramienta (Trazador, cortador, taladro, etc.). Las coordenadas del punto de fijación de la herramienta está determinada por la posición de ambos ejes respecto a un punto de referencia escogido.

La posición relativa de cada eje se mide por medio de un sensor de posición que consta de un codificador (encoder) incremental y un contador de 16 Bits con una resolución de  $10\mu m$ . El actuador en cada eje es un motor de corriente continua, que transmite la potencia mecánica a la masa de cada eje a través de un acoplamiento de poleas acopladas a presión (figura 3.1).

En la figura 3.2 se observa un diagrama de conexión eléctrica del sistema.

Debido a que la resolución de los codificadores es de 16 bits, y que el puerto de entrada a la computadora es de 8 bits, se diseñó un circuito electrónico para dividir la lectura de la



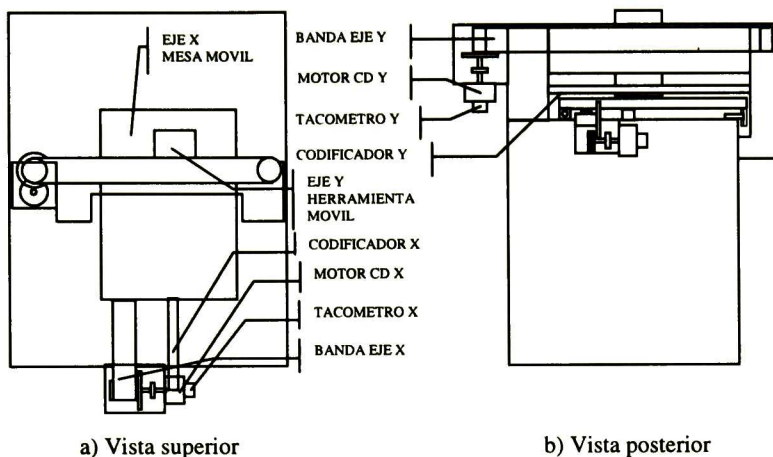


Figura 3.1: Diagrama esquemático del sistema

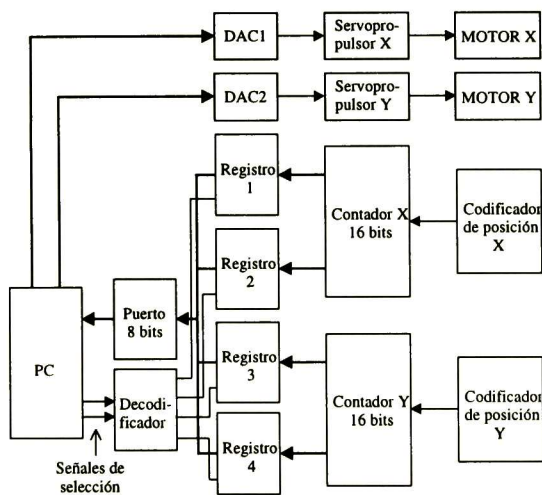


Figura 3.2: Diagrama a bloques del sistema

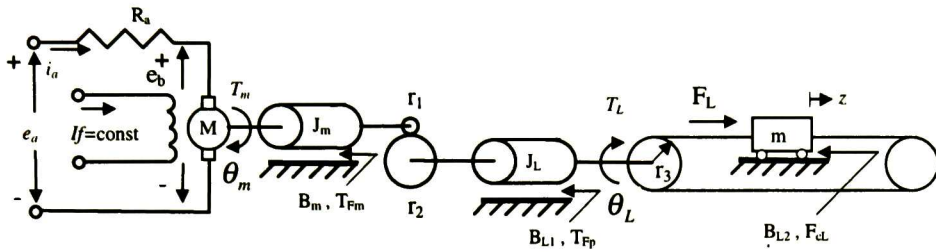


Figura 3.3: Diagrama electromecánico del sistema

posición de cada eje en dos bytes (alto y bajo de 8 bits cada uno) y guardarlos en registros, los cuales posteriormente se integran en la computadora, (figura 3.2).

## 3.2 Modelo Matemático.

En general, el diseño de un algoritmo de control involucra la predicción de su funcionamiento antes de que pueda diseñarse en detalle o construirse físicamente. Tal predicción se basa en una descripción matemática de las características dinámicas del sistema bajo estudio. A esta descripción matemática se le llama *modelo matemático*. Para los sistemas físicos, la mayoría de los modelos matemáticos que resultan útiles se describen en términos de ecuaciones diferenciales o de diferencias.

Para el sistema objeto de este trabajo, el modelado tomará en cuenta la característica de desacoplamiento mecánico del sistema, es decir, el procedimiento consistirá en modelar independientemente cada subsistema relativo a cada eje.

Considérese la figura 3.3, que describe esquemáticamente un subsistema relativo a un eje:

La notación que se usará para este sistema se da en la siguiente tabla:

Notación	Variable	Unidad
$R_a$	Resistencia de la armadura	$\Omega$
$i_a(t)$	Corriente de la armadura	<i>Amp</i>
$I_f$	Corriente del campo	<i>Amp</i>
$e_a(t)$	Voltaje aplicado a la armadura	<i>Volts</i>
$e_b(t)$	Fuerza contra-electromotriz	<i>Volts</i>
$T_m(t)$	Par desarrollado por el motor	<i>N-m</i>
$T_L(t)$	Par aplicado a la carga	<i>N-m</i>
$\theta_m(t)$	Desplazamiento angular del eje del motor	<i>rad</i>
$\theta_L(t)$	Desplazamiento angular del eje de la carga	<i>rad</i>
$\omega_m(t)$	Velocidad angular del motor	<i>rad/seg</i>
$\omega_L(t)$	Velocidad angular del eje de la carga	<i>rad/seg</i>
$J_m$	Momento de inercia del eje del motor	<i>Kg-m<sup>2</sup></i>
$J_L$	Momento de inercia del eje de la carga	<i>Kg-m<sup>2</sup></i>
$B_m$	Coefficiente de fricción viscosa del eje del motor	<i>N-m/rad/seg</i>
$B_{L1}$	Coefficiente de fricción viscosa del eje de la carga	<i>N-m/rad/seg</i>
$T_{Fm}$	Coefficiente de la fricción de Coulomb del eje del motor	<i>N-m</i>
$T_{Fp}$	Coefficiente de la fricción de Coulomb del eje de la carga	<i>N-m</i>
$K_i$	Constante del par	<i>N-m/Amp</i>
$K_b$	Constante de la fuerza contraelectromotriz	<i>Volts/rad/seg</i>
$r_1$	Radio del eje del motor	<i>m</i>
$r_2$	Radio de la polea de la carga	<i>m</i>
$r_3$	Radio de las poleas de la banda	<i>m</i>
$z(t)$	Desplazamiento del carro	<i>m</i>
$m$	Masa del carro	<i>Kg</i>
$B_{L2}$	Coefficiente de fricción viscosa del carro	<i>N/m/seg</i>
$F_{cL}$	Coefficiente de la fricción de Coulomb del carro	<i>N</i>

El par  $T_m(t)$  desarrollado por el motor es proporcional al producto de  $i_a(t)$  y el flujo  $\phi$  en el entrehierro, el que a su vez es proporcional a la corriente de campo, o sea  $\phi = K_f I_f$ , con  $K_f$  constante, y dado que  $I_f$  también es constante, el par  $T_m(t)$  por lo tanto, se puede escribir como

$$T_m(t) = K_i i_a(t) \quad (3.1)$$

donde  $K_i$  denota la constante del par motriz.

Cuando la armadura está girando, se induce en ella una tensión proporcional al producto del flujo por la velocidad angular. Para un flujo constante la tensión inducida  $e_b(t)$  es directamente proporcional a la velocidad angular, o sea

$$e_b(t) = K_b \dot{\theta}_m(t), \quad (3.2)$$

mientras que para la malla de entrada, el comportamiento sigue la ecuación diferencial del circuito de armadura

$$e_a(t) = R_a i_a(t) + e_b(t) \quad (3.3)$$

Para la parte mecánica del subsistema, las ecuaciones que describen las dinámicas del eje del motor, el eje de la carga, así como el movimiento traslacional están dados por

$$T_m(t) = J_m \ddot{\theta}_m(t) + B_m \dot{\theta}_m(t) + T_{Fm} + T_1(t) \quad (3.4)$$

$$T_2(t) = J_L \ddot{\theta}_L(t) + B_{L1} \dot{\theta}_L(t) + T_{Fp} + T_L(t) \quad (3.5)$$

$$F_L(t) = m\ddot{z}(t) + B_{L2}\dot{z}(t) + F_{cL} \quad (3.6)$$

donde  $T_1(t)$  es el par de la carga en la polea del motor y  $T_2(t)$  es el par transmitido a la polea de la carga. Considerando que la distancia sobre la superficie que viaja cada polea es la misma y que el trabajo realizado por una polea es igual al que realiza la otra polea, se obtiene que

$$\theta_L(t) = \frac{r_1}{r_2} \theta_m(t) \quad (3.7)$$

$$T_1(t) = \frac{r_1}{r_2} T_2(t) \quad (3.8)$$

las cuales, junto con la ecuación (3.5) al ser sustituidas en la ecuación (3.4) se obtiene

$$T_m(t) = J_{eq} \ddot{\theta}_m(t) + B_{eq} \dot{\theta}_m(t) + T_{Feq} + nT_L(t) \quad (3.9)$$

donde  $n = \frac{r_1}{r_2}$ ,  $J_{eq} = J_m + n^2 J_L$ ,  $B_{eq} = B_m + n^2 B_{L1}$ ,  $T_{Feq} = (T_{Fm} + nT_{Fp})$ .

Ahora, considerando que la distancia que se recorre en el eje traslacional es igual al radio de la polea de la banda por los radianes recorridos de dicha polea y utilizando la ecuación (3.7), la relación que existe entre el desplazamiento del carro y el desplazamiento del motor es la siguiente

$$z(t) = nr_3 \theta_m(t) \quad (3.10)$$

Por otro lado, la fuerza que se trasmite hacia el móvil es igual a el par transmitido entre el radio de la polea de la banda, esto es

$$F_L(t) = \frac{T_L(t)}{r_3(t)}. \quad (3.11)$$

Esta ecuación, junto con las ecuaciones (3.6), (3.10) aplicadas a la ecuación (3.9) resulta en

$$T_m(t) = \frac{I_T}{nr_3} \ddot{z}(t) + \frac{B_T}{nr_3} \dot{z}(t) + T_F \quad (3.12)$$

donde

$$I_T = J_{eq} + n^2 r_3^2 m, \quad B_T = B_{eq} + n^2 r_3^2 B_{L2}, \quad T_F = T_{Feq} + nr_3 F_{cL},$$

que junto con las ecuaciones (3.1), (3.2) y (3.3) describen la dinámica del subsistema asociado a cada eje.

Para expresar la ecuación anterior en variables de estado, se definen

$$\begin{aligned} x_1(t) &= z(t) \\ x_2(t) &= \dot{z}(t) \\ u(t) &= e_a(t), \end{aligned}$$



de donde al sustituir directamente y al eliminar la variables que no son de estado de las ecuaciones (3.1), (3.2), (3.3) y (3.12), toman la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T_S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{n r_3 K_S}{T_S} \end{bmatrix} [u(t) - u_{NL}] \quad (3.13)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

con

$$\begin{aligned} K_S &= \frac{K_i}{R_a B_T + K_i K_b} & T_S &= \frac{R_a I_T}{R_a B_T + K_i K_b} \\ u_{NL} &= \frac{T_F R_a}{K_i} y \\ T_F &= \begin{cases} T_F & \text{si } x_2 > 0 \\ -T_F & \text{si } x_2 < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Como puede observarse, el sistema no es afín en la entrada, por la presencia del término  $u_{NL}$ . Este comportamiento, modelado por la constante  $T_F$  es debido a la fricción de Coulomb, que representa una fuerza de oposición al movimiento del carro; cuando hay un cambio en la dirección de movimiento, el término  $T_F$  cambia de signo. Si se representa este sistema en el dominio de la frecuencia, se obtiene la siguiente función de transferencia

$$\frac{X_1(s)}{U(s) - u_{NL}} = \frac{n r_3 K_S}{s(T_S s + 1)} \quad (3.15)$$

en la cual se observa que la respuesta de velocidad del carro con respecto a la señal de entrada tiene un comportamiento de primer orden.

### 3.3 Identificación de parámetros.

En esta sección se presenta el procedimiento para la obtención de los valores de los parámetros del modelo del sistema, para lo cual se harán pruebas al sistema real en lazo abierto y se analizará el comportamiento tanto en la respuesta transitoria como en la respuesta en estado estable. En particular, los valores de algunos parámetros pueden ser obtenidos directamente del sistema, como por ejemplo, los parámetros  $r_1$ ,  $r_2$ , y  $r_3$ , cuyos valores físicos son

$$\begin{aligned} r_1 &= 5.95 \text{ mm}, \\ r_2 &= 76.15 \text{ mm y} \\ r_3 &= 32.4 \text{ mm}. \end{aligned}$$

de donde

$$n = \frac{r_1}{r_2} = 0.078. \quad (3.16)$$



### 3.3.1 Obtención de los parámetros del motor

En el trabajo actual, los parámetros del motor que se consideran son  $R_a$ ,  $K_b$ ,  $K_i$ ,  $B_m$  y  $J_m$ . La estimación de estos parámetros depende del tipo de éstos, como se explica a continuación:

- **Resistencia de armadura  $R_a$ :** El método consiste en aplicar diferentes voltajes ( $e_a$ ) en las terminales del motor con el motor bloqueado, medir  $i_a$  y calcular  $R_a$  de la ecuación  $e_a = R_a i_a$ . En la figura 3.4 se muestran las gráficas correspondientes, de donde el valor de  $R_a$  se obtiene interpolando linealmente los resultados y promediando los coeficientes asociados a cada interpolación. Estos valores son

$$\begin{aligned} i_a &= 0.93(e_a - 0.52) \\ -i_a &= -0.89(e_a - 0.58) \\ i_a &= 0.89(e_a - 0.56) \\ -i_a &= -0.86(e_a - 0.64), \end{aligned}$$

de donde el promedio resulta  $\pm i_a = \pm 0.89(e_a - 0.57)$ . Analizando este resultado se observa una pérdida de voltaje, definida como  $E_p$ , que puede ser debida al contacto físico de las escobillas con la armadura, y cuyo valor es de

$$E_p = \begin{cases} +0.57 & \text{si } i_a > 0 \\ -0.57 & \text{si } i_a < 0. \end{cases}$$

Finalmente, el valor de la resistencia de armadura es  $R_a = \frac{1}{0.89} = 1.1\Omega$ .

- **Constante de la fuerza contraelectromotriz  $K_b$ :** Para obtener este parámetro se sustituye la ecuación 3.2 en la ecuación 3.3 y se despeja  $K_b$ , pero ahora se considera el voltaje  $E_p$  por lo que

$$K_b = \frac{e_a - E_p - R_a i_a}{\omega_m}$$

para este experimento se aplicaron diferentes voltajes en las terminales del motor tanto positivos como negativos para ambos motores X y Y, y se midieron  $i_a$  y  $\omega_m$  (figura 3.5). Al tomar un valor promedio de los valores obtenidos se tiene que

$$K_b = 0.042 \frac{\text{volts}}{\text{rad/s}} \quad (3.17)$$

- **Constante del par  $K_i$ :** Para un motor dado, existe una relación entre  $K_i$  y  $K_b$ ; para mostrar esta relación, la potencia mecánica desarrollada en la armadura se escribe como:

$$P = e_b(t)i_a(t), \quad (3.18)$$

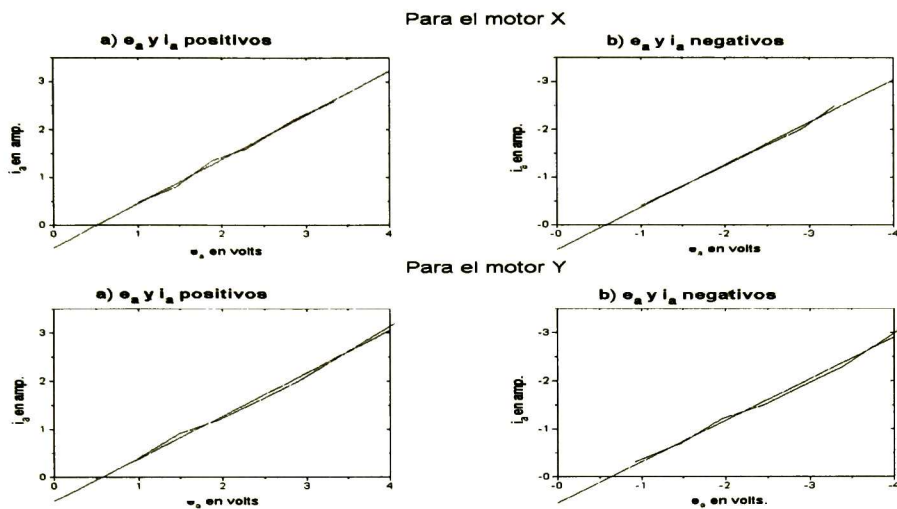


Figura 3.4: Resistencia de armadura

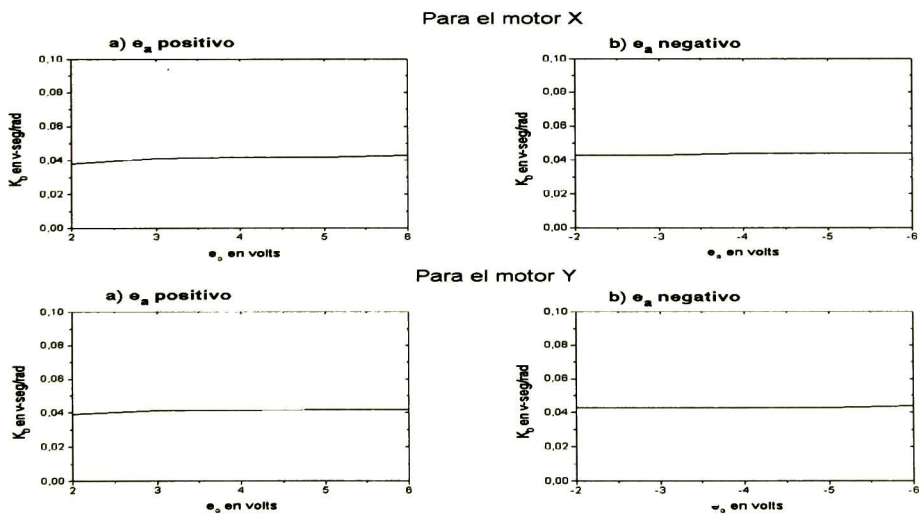


Figura 3.5:  $K_b$  para diferentes voltajes.

que también puede expresarse como:

$$P = T_m(t)\omega_m(t) \quad (3.19)$$

sustituyendo las ecuaciones (3.1) y (3.2) en la ecuación (3.18), se obtiene:

$$P = T_m(t)\omega_m(t) = K_b\omega_m(t)\frac{T_m(t)}{K_i} \quad (3.20)$$

de donde

$$K_i = K_b \quad (3.21)$$

por lo tanto

$$K_i = 0.042 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{Amp}. \quad (3.22)$$

• **Coefficiente de fricción viscosa  $B_m$  y momento de inercia  $J_m$ :**

Para obtener estos parámetros, se utiliza la ecuación (3.1) y se sustituye en la ecuación (3.4), con  $T_1(t) = 0$ , debido a que el motor está sin carga, por lo tanto se tiene lo siguiente

$$K_i i_a = J_m \dot{\omega}_m + B_m \omega_m + T_{Fm} \quad (3.23)$$

transformando esta al dominio de la frecuencia y obteniendo su función de transferencia resulta lo siguiente

$$\frac{\Omega_m(s)}{I_a(s) - I_{Fc}} = \frac{K_i}{J_m s + B_m} \quad (3.24)$$

con  $I_{Fc} = \frac{T_{Fm}}{K_i}$ , analizando esta ecuación, se observa que es un sistema de primer orden, por lo tanto ante una entrada escalón, la salida tendrá una respuesta exponencial, como se muestra en la figura 3.6, la cual tiene la siguiente expresión matemática

$$\omega_m(t) = \frac{K_i(i_a - I_{Fc})}{B_m} (1 - e^{-B_m/J_m t}). \quad (3.25)$$

Para obtener  $B_m$ , se aplican diferentes corrientes  $i_a$  positivos y negativos, a ambos motores, y se mide  $\omega_m$  para los distintos casos en estado estable, o sea, cuando  $t$  tiende a infinito, como se muestra en la figura 3.6. Los resultados de este experimento se muestran en la figura 3.7, donde se observa que existen no linealidades, sin embargo, para obtener  $B_m$  se interpoló linealmente con los siguientes resultados

$$\begin{aligned} \omega_m &= 338.8(i_a - 0.36) \\ -\omega_m &= -443.2(i_a - 0.39) \\ \omega_m &= 416.3(i_a - 0.41) \\ -\omega_m &= -428.4(i_a - 0.38) \end{aligned}$$

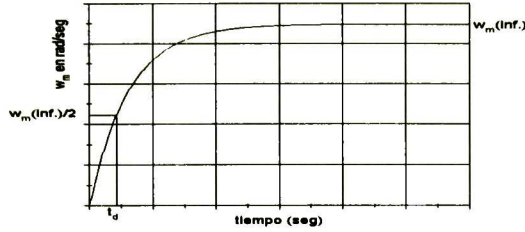


Figura 3.6: Respuesta de  $\omega_m$  vs tiempo.

de los cuales, promediando resulta

$$\pm\omega_m = \pm 406.7(i_a - 0.39), \quad (3.26)$$

y por lo tanto

$$B_m = \frac{K_i}{406.7} = 0.1 \times 10^{-3} \frac{N \cdot m}{rad/seg} \text{ y} \quad (3.27)$$

$$T_{Fm} = \begin{cases} K_i(+0.39) = +0.016 N \cdot m \text{ si } \omega_m > 0 \\ K_i(-0.39) = -0.016 N \cdot m \text{ si } \omega_m < 0. \end{cases} \quad (3.28)$$

Para obtener  $J_m$ , se mide el tiempo  $t_d$  que transcurre cuando  $\omega_m(\text{inf})$  alcanza la mitad de su valor (figura 3.6), para el cual se verifica fácilmente que

$$J_m = \frac{B_m t_d}{\ln 2}. \quad (3.29)$$

En la figura 3.8 se muestran los valores de  $t_d$  medidos para diferentes corrientes de armadura, de donde se observa que  $t_d$  varía de 2 a 3 segundos, por lo tanto se tomó un promedio de  $t_d = 2.5$  segundos, para dar un

$$J_m = 0.37 \times 10^{-3} Kg \cdot m^2 \quad (3.30)$$

Los valores de los parámetros del motor que se han obtenido, han sido aproximaciones a su valor real, debido a que estos presentan incertidumbres, así como también se observaron no linealidades en la relación de la velocidad angular y corriente de armadura, por tal motivo mas adelante se obtendrá el modelo en forma general.

### 3.3.2 Obtención de los parámetros del sistema.

En esta subsección se obtendrá el modelo del sistema en forma general, es decir que se obtendrán parámetros que involucren a otros parámetros mas particulares, entre ellos los



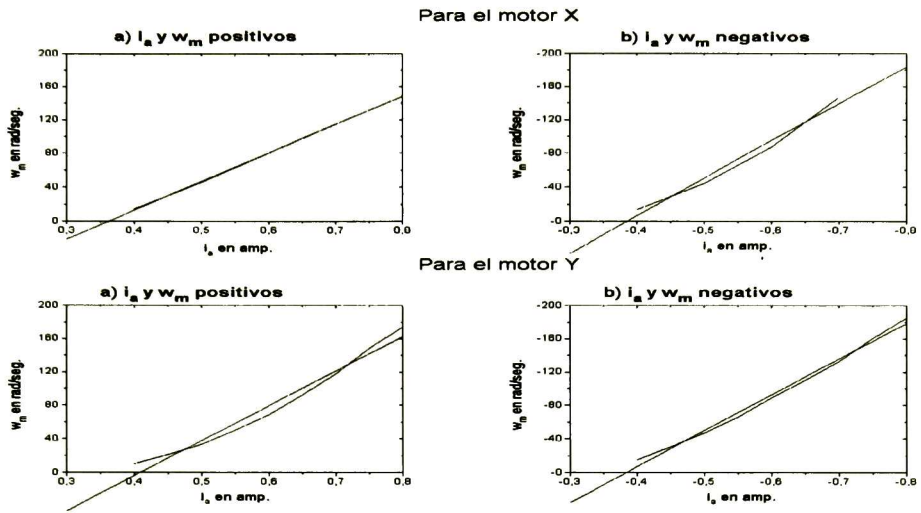


Figura 3.7: Gráficas de  $\omega_m$  vs  $i_a$  en estado estable

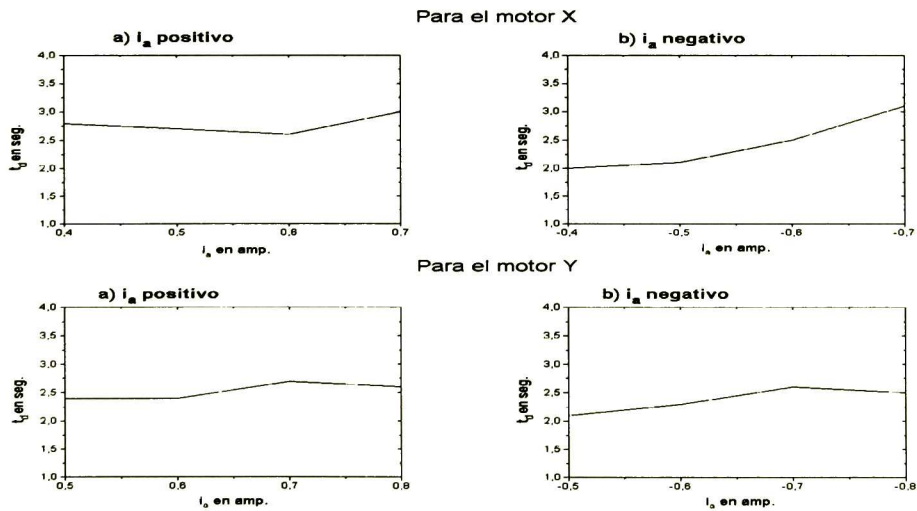


Figura 3.8: Tiempo  $t_d$  de la respuesta de  $\omega_m$  vs  $i_a$

del motor. Como se ha mencionado el sistema electromecánico planar de dos grados de libertad, está desacoplado mecánicamente, por lo tanto se puede obtener los parámetros de cada subsistema X y Y por separado.

### Obtención de los parámetros del subsistema X

Retomando la función de transferencia (3.15), y considerando que  $x_1(t) = nr_3\omega_m(t)$  y  $u(t) = e_a(t)$ , se tiene que

$$\frac{\Omega_m(s)}{E_a(s) - u_{NL}} = \frac{K_s}{s(T_s s + 1)},$$

de donde se observa que los parámetros que determinan el comportamiento del subsistema son  $K_s$ ,  $T_s$  y  $u_{NL}$ , para hacer una estimación de estos parámetros se transforma la ecuación anterior al dominio del tiempo, es decir

$$\omega_m(t) = K_s(e_a - u_{NL})(1 - e^{-t/T_s}),$$

de donde  $K_s$  y  $u_{NL}$  se obtienen de forma similar al procedimiento realizado para la obtención de  $B_m$ , y cuyos resultados se encuentran en la figura 3.9, el cual para  $e_a$  positivos resultó que  $\omega_m = 19.98(e_a - 1.25)$ , mientras que para  $e_a$  negativos resultó que  $-\omega_m = -19.85(e_a - 1.35)$ , con un promedio de

$$\pm\omega_m = \pm 19.92(e_a - 1.3)$$

por lo tanto

$$K_s = 19.92 \frac{\text{rad/seg}}{\text{volts}} \text{ y}$$

$$u_{NL} = \begin{cases} +1.3 \text{ volts} & \text{si } \omega_m > 0 \\ -1.3 \text{ volts} & \text{si } \omega_m < 0 \end{cases}$$

Para obtener  $T_s$  se realiza el mismo procedimiento que para obtener  $J_m$ , pero ahora

$$T_s = \frac{t_d}{\ln 2},$$

los resultados para este parámetro se muestran en la figura 3.10, donde al obtener un valor promedio de  $t_d$  para los diferentes voltajes fue de 0.4 segundos, y que da como resultado

$$T_s = 0.58 \text{ seg.}$$

### Obtención de los parámetros del subsistema Y.

Los parámetros para el subsistema Y se obtienen de la misma manera que para el subsistema X.

Los resultados obtenidos para  $K_s$  y  $u_{NL}$  se muestran en la figura 3.11, donde las ecuaciones que describen el comportamiento son  $\omega_m = 20.33(e_a - 1.61)$  para voltajes positivos y  $-\omega_m = -20.5(e_a - 1.67)$  para negativos, con un promedio de

$$\pm\omega_m = \pm 20.4(e_a - 1.64)$$

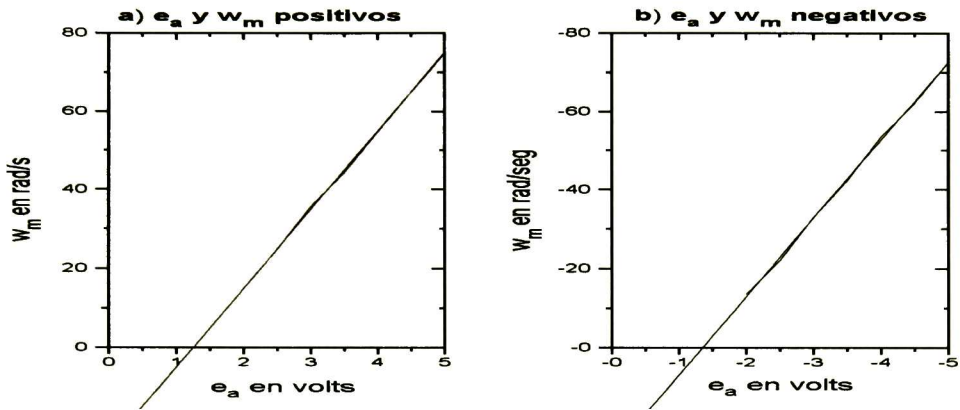


Figura 3.9: Respuesta de  $\omega_m$  vs  $e_a$  en estado estable para el subsistema X.

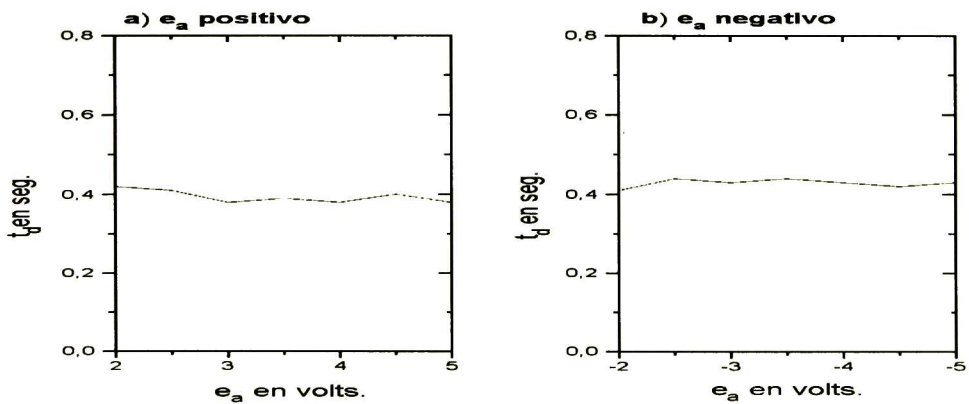


Figura 3.10: Medición de  $t_d$  de la respuesta de  $\omega_m$  vs  $e_a$  para el subsistema X.

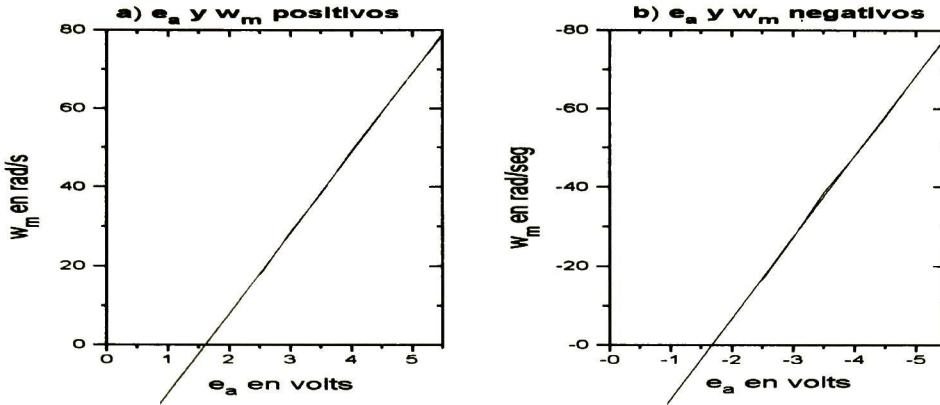


Figura 3.11: Respuesta de  $\omega_m$  vs  $e_a$  en estado estable para el subsistema Y.

por lo tanto

$$K_s = 20.4 \frac{\text{rad/seg}}{\text{volts}} \text{ y}$$

$$u_{NL} = \begin{cases} +1.64 \text{ volts} & \text{si } \omega_m > 0 \\ -1.64 \text{ volts} & \text{si } \omega_m < 0 \end{cases}$$

Los resultados para  $T_s$  se muestran en la figura 3.12, donde se observa un  $t_d$  aproximado de 0.38 segundos, y que da como resultado que

$$T_s = 0.55 \text{ seg.}$$

### Representación del sistema en variables de estado.

La representación en variables de estado de los dos subsistemas X y Y como un solo sistema queda finalmente así

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1.73 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1.82 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 86.8 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 93.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (u_1 - u_{1NL}) \\ (u_2 - u_{2NL}) \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

donde

- $x_1$  = Posición del eje X, en mm.
- $x_2$  = Velocidad del eje X, en mm/seg.
- $x_3$  = Posición del eje Y, en mm.
- $x_4$  = Velocidad del eje Y, en mm/seg.



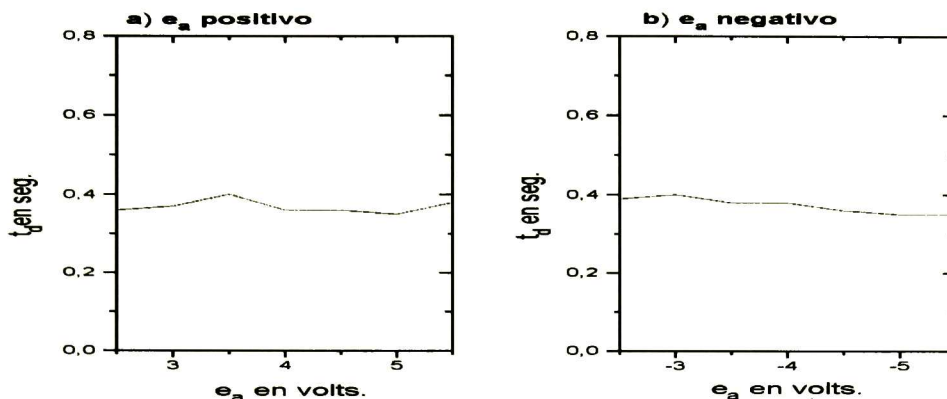


Figura 3.12: Medición de  $t_d$  de la respuesta de  $\omega_m$  vs  $e_a$  para el subsistema Y.

$$u_{1NL} = 1.3\text{sign}(x_2) \text{ y } u_{2NL} = 1.64\text{sign}(x_4)$$

### 3.3.3 Validación del Modelo.

Para proporcionar un buen desempeño al sistema con las leyes de control que se diseñarán en el capítulo 4 es necesario hacer una validación del modelo, este procedimiento consiste en aplicar diferentes entradas conocidas al sistema tanto en simulación como en tiempo real, y verificar que ambos comportamientos sean similares. Para este caso se aplicaron las siguientes señales para cada subsistema

$$u = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 < t \leq 5 \\ -2 & \text{si } 5 < t \leq 10 \\ 2 & \text{si } 10 < t \leq 15 \\ 3 & \text{si } 15 < t \leq 20 \\ -3.5 & \text{si } 20 < t \leq 25 \end{cases} \text{ y}$$

$$u = 3 \sin(t)$$

Los resultados de aplicar estas señales se muestran en la figura 3.13 para el subsistema X, y en la figura 3.14 para el subsistema Y. De estas figuras se concluye que el modelo es una aproximación al sistema real, esto motiva a la utilización de la técnica de modos deslizantes para eliminar la inexactitud en los parámetros.

### 3.3.4 Representación no lineal del sistema.

Como se ha observado, la respuesta de la velocidad angular del motor de cada subsistema en estado estable, tiene una zona muerta como se observa en las figuras 3.15 y 3.16, el cual dificulta el control lineal del sistema, por consiguiente se obtendrá una aproximación

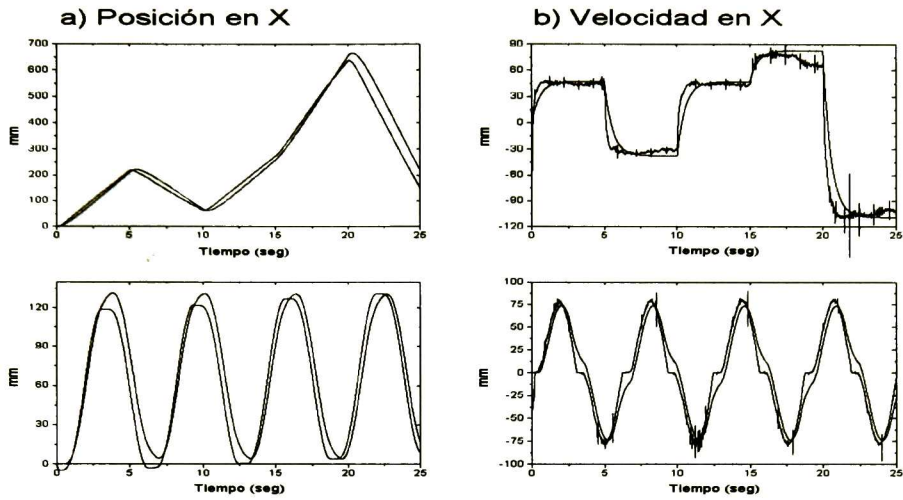


Figura 3.13: Respuestas de la simulación y tiempo real del subsistema X en lazo abierto ante señales de entrada escalón y senoidal.

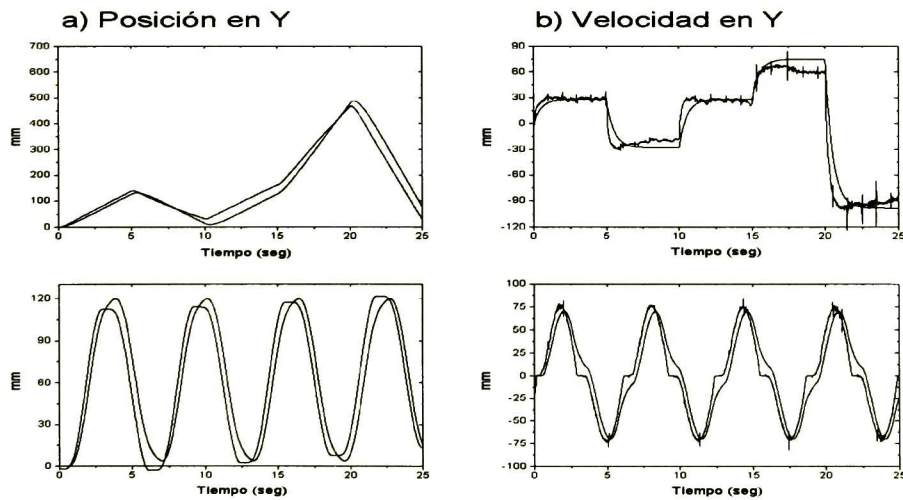


Figura 3.14: Respuestas de la simulación y tiempo real del subsistema Y en lazo abierto ante señales de entrada escalón y senoidal.

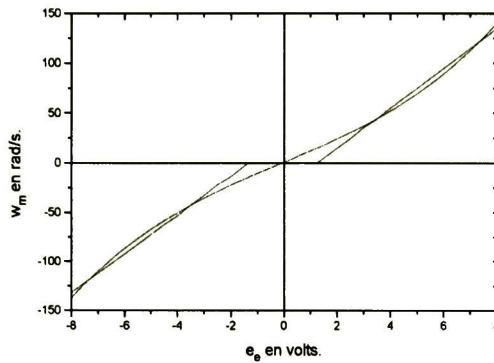


Figura 3.15: Aproximación polinomial de la respuesta de  $\omega_m$  vs  $e_a$  en estado estable para el subsistema X.

polinomial para cada subsistema, para poder aplicar el problema del regulador no lineal que se verá en el siguiente capítulo.

Los resultados de la aproximación polinomial para cada subsistema X y Y, son los siguientes

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= -1.73x_2 + 49.14u_x + 0.052u_x^2 + 0.41u_x^3 \\
 y_x &= x_1
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_3 &= x_4 \\
 \dot{x}_4 &= -1.82x_4 + 45.72u_y - 0.046u_y^2 + .51u_y^3 \\
 y_y &= x_3
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

### 3.4 Conclusiones.

En este capítulo se ha presentado toda una descripción del sistema electromecánico de dos grados de libertad, se explicaron las partes que lo forman, tanto mecánico, eléctrico como las interfaces de comunicación de la computadora con el sistema. Respecto al modelado se despreció el efecto que produce la inductancia del motor, esto para obtener un modelo mas simplificado del sistema al tener dos variables de estado menos. Los valores de los parámetros que se obtuvieron en la identificación también son aproximados, debido tanto

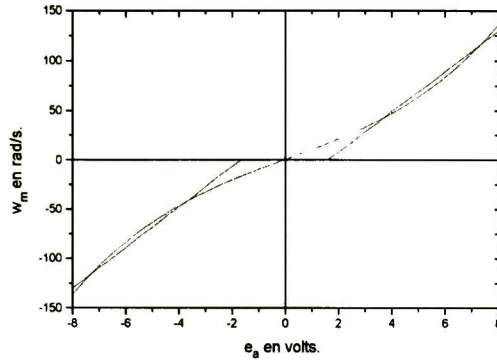


Figura 3.16: Aproximación polinomial de la respuesta de  $\omega_m$  vs  $e_a$  en estado estable para el subsistema Y.

a errores como a incertidumbres de medición, por lo que a la hora de aplicar el diseño de control se presentarán pequeños errores que serán eliminados por medio de la aplicación de modos deslizantes.



# Capítulo 4

## Algoritmo de control.

En este capítulo se presentan los diseños del regulador lineal, del regulador no lineal y control por modos deslizantes que se utilizarán para realizar seguimiento de trayectorias para el sistema electromecánico planar de dos grados de libertad, modelado en el capítulo anterior. Para el diseño de los algoritmos, se considerará que el sistema está desacoplado mecánicamente, por lo que las señales de control serán calculadas independientemente para cada eje.

Este capítulo se encuentra estructurado en 4 secciones. En la sección 4.1 se presenta el diseño de la ley de control para el problema del regulador en la salida, por retroalimentación del estado, por retroalimentación del error y regulación robusta. En la sección 4.2 se presenta el diseño del regulador no lineal por retroalimentación del estado. En la sección 4.3 se presenta el diseño de una ley de control basado en la teoría de modos deslizantes. Y finalmente en la sección 4.4 se presentan las conclusiones sobre el capítulo.

### 4.1 Diseño del regulador lineal

En esta sección se presenta el diseño de la ley de control para el problema del regulador lineal por retroalimentación del estado, por retroalimentación del error y regulación robusta.

El modelo del sistema electromecánico que se obtuvo en el capítulo anterior tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} A_x & 0 \\ 0 & A_y \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_x & 0 \\ 0 & B_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (u_x - u_{1NL}) \\ (u_y - u_{2NL}) \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} C_x & 0 \\ 0 & C_y \end{bmatrix} x \end{aligned} \quad (4.1)$$

o equivalentemente para el subsistema X

$$\begin{aligned} \dot{x}_x &= A_x x_x + B_x (u_x - u_{1NL}) \\ y_x &= C_x x_x \end{aligned} \quad (4.2)$$

y para el subsistema Y

$$\begin{aligned}\dot{x}_y &= A_y x_y + B_y (u_y - u_{2NL}) \\ y_y &= C_y x_y\end{aligned}\quad (4.3)$$

donde

$$x_x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad x_y = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}A_x &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1.73 \end{bmatrix} & B_x &= \begin{bmatrix} 0 \\ 86.8 \end{bmatrix}, & C_x &= [ 1 \ 0 ] \\ A_y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1.82 \end{bmatrix} & B_y &= \begin{bmatrix} 0 \\ 93.7 \end{bmatrix} & C_y &= [ 1 \ 0 ]\end{aligned}$$

$$u_{1NL} = 1.3 \text{sign}(x_2) \quad u_{2NL} = 1.64 \text{sign}(x_4)$$

Como puede observarse del modelo del sistema, éste es no lineal debido a la presencia de los términos  $\text{sign}(\cdot)$ . Para el diseño del regulador lineal es necesario linealizar alrededor del punto de operación, pero en este caso se usará un esquema conocido como par calculado, que consiste en cancelar con una prealimentación los términos no lineales. En este caso, se usarán la entradas

$$u_x = 1.3 \text{sign}(x_2) + v_x \quad \text{y} \quad u_y = 1.64 \text{sign}(x_4) + v_y$$

que cancelan los términos no lineales. De esto, la ecuación lineal del sistema resulta en

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} A_x & 0 \\ 0 & A_y \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_x & 0 \\ 0 & B_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} C_x & 0 \\ 0 & C_y \end{bmatrix} x\end{aligned}\quad (4.4)$$

que es lineal.

#### 4.1.1 Diseño del regulador por retroalimentación del estado.

Es importante mencionar que para una trayectoria de referencia dada en el plano X-Y, es necesario parametrizar en función de las coordenadas respectivas para cada eje de manera tal que la combinación de ambas resulte en la trayectoria X-Y deseada.

##### a) Señal de referencia rampa.

Para el caso de una rampa, se toma el exosistema como

$$\dot{w} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} w \quad (4.5)$$

con las condiciones iniciales  $w_1(0) = 0$  y  $w_2(0) = \delta$ , donde  $\delta$  representa la pendiente de la rampa; los valores propios están en 0, por lo que el sistema (4.5) satisface la hipótesis ( $H1_L$ ). Al verificar la hipótesis ( $H2_L$ ), se tiene que

$$|\mathcal{C}(A_x, B_x)| = |[ B_x \quad A_x B_x ]| = -(86.8)^2$$

por lo tanto ( $H2_L$ ) se satisface.

Como se desea hacer regulación de la posición del eje X, el error de seguimiento está dado por

$$e = C_x x_x + Qw = x_1 - w_1$$

por lo que

$$Q = [ -1 \quad 0 ]$$

El PRRS se reduce a encontrar la solución del sistema de ecuaciones matriciales

$$\Pi S = A_x \Pi + B_x \Gamma + P \quad (4.6)$$

$$0 = C_x \Pi + Q \quad (4.7)$$

con  $P = 0$ , debido a que el modelo (4.1) no se ve afectado por las perturbaciones generadas por el exosistema (4.5).

Resolviendo la ecuación (4.7)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{bmatrix}$$

se obtiene que

$$\pi_{11} = 1$$

$$\pi_{12} = 0$$

y de la ecuación (4.6)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1.73 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 86.8 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 \end{bmatrix}$$

se obtienen los parámetros restantes, por lo tanto

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } \Gamma = [ 0 \quad .02 ]$$

$K$  se escoge de tal manera que  $(A_x - B_x K)$  tenga sus polos en el semiplano izquierdo; escogiendo los polos en  $[-4, -5]$ , se obtiene que

$$K = [ -0.23 \quad -0.08 ]$$

y el controlador  $v_x$  que resuelve el problema de regulación esta dado por

$$v_x = Kx_x + [\Gamma - K\Pi]w = \begin{bmatrix} -0.23 & -0.08 & 0.23 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_x \\ w \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

por lo tanto la entrada al sistema es

$$u_x = v_x + 1.3\text{sign}(x_2) \quad (4.9)$$

**b) Señal de referencia senoidal.**

Al considerar ahora que la señal de referencia es una señal senoidal, se tiene que

$$\dot{w} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} w, \text{ con } \alpha > 0 \quad (4.10)$$

el cual  $\alpha$  representa la frecuencia de oscilación de la señal de la solución del exosistema; los valores propios de (4.2) están en  $\pm j\alpha$ , por lo que la hipótesis  $H1_L$  se cumple. Y sea el siguiente error de seguimiento

$$e = Cx_x + Qw = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_x + \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} w$$

entonces, aplicando el mismo procedimiento del caso anterior, se obtienen

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \text{ y } \Gamma = \begin{bmatrix} 0.01\alpha^2 & 0.02\alpha \end{bmatrix}$$

y el controlador que resuelve el problema de regulación para un  $\alpha = 1$  está dado por

$$u_x = \begin{bmatrix} -0.23 & -0.08 & 0.22 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_x \\ w \end{bmatrix} + 1.3\text{sign}(x_2). \quad (4.11)$$

Ahora bien, para el subsistema Y, se aplicarán las siguientes señales de seguimiento.

**c) Señal de referencia constante.**

El exosistema para una referencia constante es el siguiente

$$\dot{w} = 0, \text{ con } w(0) = c.$$

como se puede observar  $S = 0$  del exosistema (2.4). El par  $(A_y, B_y)$  al igual que para el subsistema X, también satisface la hipótesis ( $H2_L$ ). Y aplicando el mismo procedimiento que en los casos anteriores, donde en este caso el error es  $e = x_y - w$  se obtienen

$$\Gamma = 0, \Pi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} -0.21 & -0.08 \end{bmatrix} \text{ y}$$

$$L = [\Gamma - K\Pi] = 0.21$$



por lo tanto la ley de control que resuelve el problema es la siguiente

$$u_y = \begin{bmatrix} -0.21 & -0.08 & 0.21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_y \\ w \end{bmatrix} + 1.64 \text{sign}(x_4). \quad (4.12)$$

**d) Señal de referencia cosenoidal.**

La ley de control para este caso es

$$u_y = \begin{bmatrix} -0.21 & -0.08 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_y \\ w \end{bmatrix} + 1.64 \text{sign}(x_4) \quad (4.13)$$

donde  $w$  es generado por el exosistema (4.10) con condiciones iniciales  $w_1(0) = 100$  y  $w_2(0) = 0$ .

### 4.1.2 Diseño del regulador por retroalimentación del error

En esta subsección se diseñará una ley de control por medio del problema del regulador por retroalimentación del error para una referencia senoidal al subsistema (4.2). Al igual que para el caso de regulación por retroalimentación del estado, las hipótesis ( $H1_L$ ) y ( $H2_L$ ) se satisfacen. La hipótesis ( $H3_L$ ) implica que

$$\left( C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & -1 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & -1.73 & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \vdots & -\alpha & 0 \end{bmatrix} \right)$$

debe ser detectable. Para esto la matriz de observabilidad, es

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & -1.73 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & \alpha^3 \end{bmatrix}$$

cuyo determinante es  $\alpha^5 + 3\alpha^3$  por lo que  $H3_L$  se satisface. Aplicando el procedimiento expuesto en el capítulo 2, resulta

$$G = \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13.96 \\ -0.14 \\ \dots \\ 5.69 \\ -19.84 \end{bmatrix} \text{ y} \quad (4.14)$$

$$F = \begin{bmatrix} A_x + B_x K - G_0 C_x & P + B_x L + G_0 Q \\ -G_1 C_x & S + G_1 Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13.96 & 1 & 13.96 & 0 \\ -19.86 & -9 & 18.86 & 9 \\ -5.69 & 0 & 5.69 & 1 \\ 19.84 & 0 & -20.84 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Finalmente la ley de control que resuelve el problema del regulador por retroalimentación del error es

$$u_x = \begin{bmatrix} -0.21 & -0.08 & -0.1 & 0.2 \end{bmatrix} \xi + 1.3 \text{sign}(x_2) \quad (4.16)$$

### 4.1.3 Diseño del regulador robusto.

En esta subsección se diseñará un controlador robusto para el subsistema (4.2). De acuerdo al teorema 3, la hipótesis ( $H2_L$ ) y ( $H3_L$ ) se satisfacen para  $\{A_x, B_x, C_x, P, Q\} = \{A_{x0}, B_{x0}, C_{x0}, P_0, Q_0\}$ . Para poder diseñar el controlador robusto, se verifica en primer lugar que la matriz

$$\begin{bmatrix} A_{x0} - \lambda_i I & B_{x0} \\ C_{x0} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_i & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & -1.73 - \lambda_i & \vdots & 86.7 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

tenga rango pleno para cada valor propio del exosistema, lo cual se satisface, ya que esta matriz no pierde rango en  $\lambda = \pm j$ , que son los valores propios de  $S$ .

Para la construcción del regulador se forman las matrices

$$A_e = \begin{bmatrix} A_{x0} & P_1 \\ 0 & S \end{bmatrix} \quad B_e = \begin{bmatrix} B_{x0} \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_e = \begin{bmatrix} C_{x0} & 0 \end{bmatrix}$$

donde  $P_1$  se escoge de tal manera que el par  $(A_e, C_e)$  sea detectable, es decir, de manera que se pueda encontrar una matriz  $G_e$  tal que  $(A_e - G_e C_e)$  sea estable. En este caso, se escogió

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con la cual la matriz  $G_e$  que hace que  $(A_e - G_e C_e)$  sea estable resulta

$$G_e = \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.27 \\ -0.14 \\ \dots \\ 19.84 \\ 5.69 \end{bmatrix}$$

Continuando con el procedimiento y recordando que

$$S = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\Pi_1 S &= A_x \Pi_1 + B_x \Gamma_1 + P_1 \\ C_x \Pi_1 &= 0\end{aligned}\quad (4.19)$$

es

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \Gamma_1 = [ -0.02 \quad -0.01\alpha ]$$

con lo cual el regulador robusto se construirá de la forma

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= F\xi + G_e e \\ u_x &= H\xi\end{aligned}\quad (4.20)$$

donde

$$H = [ K \quad \Gamma_1 - K\Pi_1 ] = [ -0.23 \quad -0.08 \quad -0.1 \quad -0.01 ]$$

y

$$\begin{aligned}F &= \begin{bmatrix} A_{x0} + B_{x0}K - G_0 C_{x0} & P_1 + B_{x0}(\Gamma_1 - K\Pi_1) \\ -G_1 C_{x0} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -8.27 & 1 & 1 & 0 \\ -19.86 & -9 & -9 & -1 \\ -19.84 & 0 & 0 & 1 \\ -5.69 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (4.21)$$

La ley de control final para el subsistema (4.2) está entonces dada, utilizando el mismo procedimiento anterior, por

$$u_x = H\xi + 1.3\text{sign}(x_2). \quad (4.22)$$

Es conveniente aclarar que aun cuando este diseño es robusto para el modelo lineal obtenido a partir de la prealimentación que cancela los términos no lineales, no lo es cuando se presenta una variación en estos términos, ya que la cancelación se supuso exacta.

## 4.2 Diseño del regulador no lineal

En esta sección se presenta el diseño del regulador no lineal por retroalimentación del estado para los subsistemas X y Y cuyo modelo fue presentado en el capítulo 3.

En este caso se procederá como en el caso lineal, es decir, se realizarán los cálculos para diferentes trayectorias de referencia.

### a) Referencia senoidal para el subsistema X.

Recordando las ecuaciones del subsistema (3.31)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a_{x1}x_2 + b_{x1}u_x + b_{x2}u_x^2 + b_{x3}u_x^3 \\ y_x &= x_1\end{aligned}\quad (4.23)$$

con  $a_{x1} = 1.73$ ,  $b_{x1} = 49.14$ ,  $b_{x2} = 0.052$   $b_{x3} = 0.41$ , y el exosistema

$$\begin{aligned}\dot{w}_1 &= \alpha w_2 \\ \dot{w}_2 &= -\alpha w_1\end{aligned}\quad (4.24)$$

con condiciones iniciales  $w_1(0) = 0$  y  $w_2(0) = 100$ , se procederá a verificar las hipótesis del teorema 4 del capítulo 2. En primer lugar se tiene que tanto  $(H1_{NL})$  como  $(H2_{NL})$  se satisfacen, por lo que el PRRS-NL tiene solución si y solo si existen los mapeos  $x = \pi(w)$  y  $u = c(w)$ , con  $\pi(0) = 0$  y  $c(0) = 0$ , que son solución del sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales (2.17). Para este caso, el error de seguimiento está dado por

$$e = x1 - w1,$$

de donde

$$x_1 = w_1 = \pi_1. \quad (4.25)$$

Derivando con respecto al tiempo (4.25), resulta

$$\dot{\pi}_1 = \frac{\partial \pi_1}{\partial w} s(w) = \alpha w_2 = \pi_2$$

por lo tanto

$$\pi(w) = \begin{bmatrix} w_1 \\ \alpha w_2 \end{bmatrix}$$

de lo cual derivando  $\pi_2$  con respecto al tiempo, se tiene que

$$\dot{\pi}_2 = \frac{\partial \pi_2}{\partial w} s(w) = -a_{x1}(\alpha w_2) + b_{x1}u + b_{x2}u^2 + b_{x3}u^3 = -\alpha^2 w_1. \quad (4.26)$$

De esta última ecuación, es necesario calcular la solución exacta  $u = c(w)$ , pero para efectos del presente trabajo, se buscará una aproximación polinomial de la solución, expandiendo  $c(w)$  hasta los términos de orden tres, de lo cual resulta

$$u_x = c(w) = aw_1 + bw_2 + cw_1^2 + dw_1w_2 + ew_2^2 + fw_1^3 + gw_1^2w_2 + hw_1w_2^2 + iw_2^3 \quad (4.27)$$

cuyos coeficientes de  $u$  se obtienen elevando  $u$  al cuadrado y al cubo, por lo tanto

$$\begin{aligned}u_x^2 &= a^2w_1^2 + b^2w_2^2 + 2abw_1w_2 + 2acw_1^3 + 2(ad + bc)w_1^2w_2 \\ &\quad + 2(ae + bd)w_1w_2^2 + 2bew_2^3 + o(4)\end{aligned}$$

$$u_x^3 = a^3w_1^3 + 3a^2bw_1^2w_2 + 3ab^2w_1w_2^2 + b^3w_2^3 + o(4)$$

los cuales sustituyendo en la ecuación (4.26), e igualando coeficientes, producen el conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned}-\alpha^2 &= b_{x1}a \\ \alpha a_{x1} &= b_{x1}b\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
0 &= b_{x1}c + b_{x2}a^2 \\
0 &= b_{x1}d + 2b_{x2}ab \\
0 &= b_{x1}e + b_{x2}b^2 \\
0 &= b_{x1}f + 2b_{x2}ac + b_{x3}a^3 \\
0 &= b_{x1}g + 2b_{x2}(ad + bc) + 3b_{x3}a^2b \\
0 &= b_{x1}h + 2b_{x2}(ae + bd) + 3b_{x3}ab^2 \\
0 &= b_{x1}i + 2b_{x2}be + b_{x3}b^3
\end{aligned} \tag{4.28}$$

cuya solución está dada por

$a = \frac{-\alpha^2}{b_{x1}} = -0.02$	$b = \frac{\alpha a_{x1}}{b_{x1}} = 0.035$	$c = \frac{-b_{x2}a^2}{b_{x1}} = 0$
$d = \frac{-2b_{x2}ab}{b_{x1}} = 2 \times 10^{-6}$	$e = \frac{-b_{x2}b^2}{b_{x1}} = -1 \times 10^{-6}$	$f = \frac{-2b_{x2}ac - b_{x3}a^3}{b_{x1}} = 0$
$g = \frac{-2b_{x2}(ad+bc) - 3b_{x3}a^2b}{b_{x1}} = 0$	$h = \frac{-2b_{x2}(ae+bd) - 3b_{x3}ab^2}{b_{x1}} = 1 \times 10^{-6}$	$i = \frac{-2b_{x2}be - b_{x3}b^3}{b_{x1}} = 0$

y la ley de control que resuelve el PRRS-NL con  $\alpha = 1$  está dado por

$$\begin{aligned}
u_x &= c(w) - K(x_x - \pi(w)) \\
&= -0.02w_1 + 0.035w_2 + 2 \times 10^{-6}w_1w_2 - 1 \times 10^{-6}w_2^2 + 1 \times 10^{-6}w_1w_2^2 \\
&\quad - 0.41(x_1 - w_1) - 0.15(x_2 - w_2).
\end{aligned} \tag{4.29}$$

### b) Referencia cosenoidal para el subsistema Y.

Retomando las ecuaciones del subsistema (3.32)

$$\begin{aligned}
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= -a_{y1}x_4 + b_{y1}u_y + b_{y2}u_y^2 + b_{y3}u_y^3 \\
y_y &= x_3,
\end{aligned} \tag{4.30}$$

con

$$a_{y1} = 1.82, b_{x1} = 45.72, b_{x2} = -0.046 \text{ y } b_{x3} = 0.51$$

y el exosistema (4.24) con las condiciones iniciales  $w_1(0) = 100$  y  $w_2(0) = 0$  que genera una señal cosenoidal en  $w_1$  y realizando el mismo procedimiento descrito anteriormente, se obtienen para este caso

$$u_y = c(w) - K(x_y - \pi(w)) \tag{4.31}$$

con

$$\begin{aligned}
c(w) &= -0.022w_1 + 0.04w_2 - 2 \times 10^{-6}w_1w_2 + 2 \times 10^{-6}w_2^2 \\
&\quad - 1 \times 10^{-6}w_1^2w_2 + 1 \times 10^{-6}w_1w_2^2 - 1 \times 10^{-6}w_2^3
\end{aligned}$$

$$K = \begin{bmatrix} -0.44 & -0.16 \end{bmatrix} \text{ y } \pi(w) = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

### 4.3 Diseño de modos deslizantes

En esta sección se diseñará una ley de control basada en la teoría de modos deslizantes, y que podrá ser utilizada en combinación con las otras leyes de control diseñadas utilizando los métodos presentados anteriormente. La técnica de los modos deslizantes es conveniente cuando el modelo tiene discontinuidades, incertidumbres e inexactitud, ya que garantiza, bajo ciertas condiciones, errores de seguimiento acotados.

Recordando que el modelo linealizado del subsistema tiene la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -ax_2 + bu \\ y &= x_1,\end{aligned}\tag{4.32}$$

se escoge la superficie de deslizamiento como

$$s = C_1 e + \dot{e} = C_1 e_1 + e_2\tag{4.33}$$

donde  $e = x_1 - \omega$  es el error seguimiento entre la salida del sistema y la señal de referencia.

Es posible mostrar que una ley de control del tipo

$$\begin{aligned}u_d &= -u_0 |e_1| \text{sign}(s) \\ \text{con } u_0 &> 0\end{aligned}\tag{4.34}$$

garantiza que  $s(e, \dot{e})$  es una superficie de desplazamiento. De hecho, satisface que  $s\dot{s} < 0$ , ya que se tiene que

$$\dot{s}(x) = C_1 \dot{e}_2 + \dot{e}_2 = C_1 \dot{e}_2 - \ddot{\omega} - ax_2 + bu$$

donde  $u$  debe ser tal de

satisfacer  $s\dot{s} < 0$ . Seleccionando  $u = u_{eq} + u_d$ , donde  $u_{eq}$  satisface que  $\dot{s}(x) = 0$ , es decir  $C_1 \dot{e}_2 - \ddot{\omega} - ax_2 + bu_{eq} = 0$ , se verifica que  $s\dot{s} = s \cdot bu_d < 0$ , de donde

$$bs(-u_0 |e_1| \text{sign}(s)) = -u_0 b |e_1| |s| < 0,$$

como sucede en el subsistema bajo estudio.

Finalmente, la ley de control final a ser aplicada al subsistema es

$$u = u_{eq} + u_d\tag{4.35}$$

donde  $u_{eq}$  es la ley de control diseñada por cualquiera de los métodos de regulación lineal y no lineal, presentados anteriormente y  $u_d$  es la ley de control de modos deslizantes. Las constantes fueron escogidas como  $C_1 = 20$  y  $u_0 = 16$ .

## **4.4 Conclusiones.**

En este capítulo se ha presentado el diseño de diferentes esquemas de control para los dos subsistemas modelados en el capítulo anterior; el diseño se llevó a cabo utilizando los resultados del problema de regulación y de modos deslizantes, resumidos en el capítulo 2. Se presentaron los casos de diseño para el sistema linealizado y el sistema no lineal con la modificación de un esquema basado en modos deslizantes con el objeto de comparar los resultados proporcionados en cada caso.



# Capítulo 5

## Aplicaciones

En este capítulo se presentan los resultados de la aplicación de los algoritmos de control desarrollados en el capítulo 4, se comparan estos resultados y se discuten las ventajas y desventajas de cada uno en el contexto de la aplicación estudiada.

La organización de este capítulo es la siguiente. En la sección (5.1) se presentan resultados de simulación numérica, mientras que en la sección (5.2) se presentan los resultados en tiempo real. En la sección (5.3) se dan las conclusiones del capítulo.

### 5.1 Resultados en simulación.

#### 5.1.1 Regulador lineal por retroalimentación del estado y modos deslizantes.

Para efectos de un mejor desempeño, los métodos de regulación y modos deslizantes, se aplicarán de tal forma que el efecto de modos deslizantes comience cuando el error es pequeño. En algunas gráficas notará que el error se muestra a partir de cuando éste tiende a ser pequeño, esto con el fin de poder visualizar el error en estado estable.

##### a) Resultados del seguimiento de una exponencial para el sistema X-Y.

Los resultados de aplicar la ley de control (4.9) y (4.12) al sistema dado por (4.1), se muestran en las figuras 5.1, 5.2, 5.3. En la figura 5.1 se muestra el comportamiento del error de seguimiento, cuando se utiliza como señal de referencia una rampa en el eje X, y en la figura 5.2 se muestra el comportamiento del error de seguimiento al utilizar un escalón como señal de referencia en el eje Y. De estas gráficas se concluye que el error disminuye considerablemente al aplicar la técnica de modos deslizantes al problema del regulador. En la figura 5.3 se muestra la relación X-Y, de donde se observa la generación de una exponencial al relacionar los movimientos de Y contra X.

##### b) Resultados del seguimiento de un círculo.

Los resultados de aplicar la ley de control (4.11) y (4.13) al sistema dado por (4.1), se muestran en las figuras 5.4, 5.5, 5.6. En la figura 5.4 se muestra el comportamiento del error de seguimiento, cuando se utiliza como señal de referencia una senoidal en el eje X, y en la



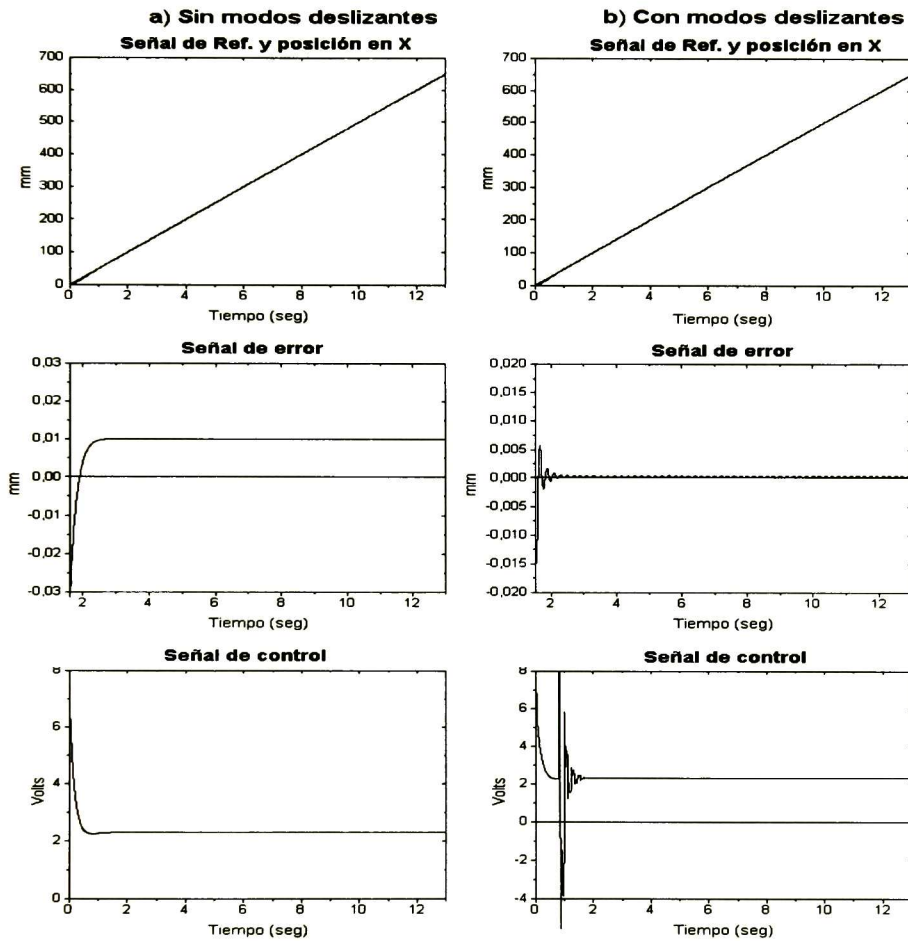


Figura 5.1: Simulación de la aplicación del regulador lineal con retroalimentación del estado para el subsistema X, con referencia de una rampa.

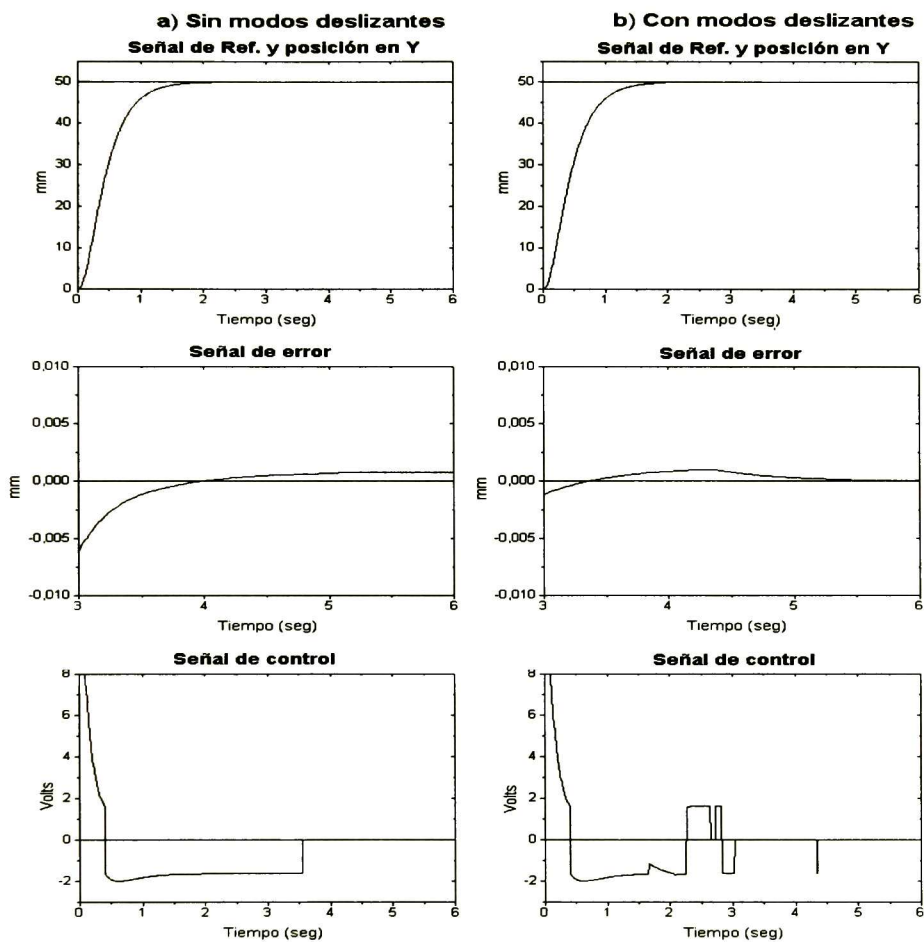


Figura 5.2: Simulación de la aplicación del regulador lineal con retroalimentación del estado para el subsistema Y, con referencia de un escalón.

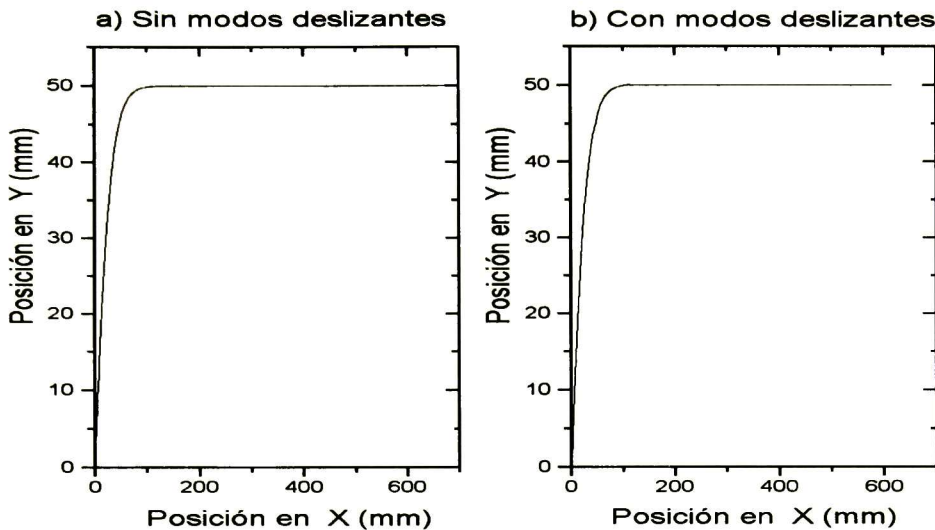


Figura 5.3: Relación X-Y de la señales de referencia escalón en Y contra rampa en X.

figura 5.5 se muestra el comportamiento del error para una señal coseno. En estas gráficas también se observa que al adicionar la técnica de modos deslizantes a las leyes de control del regulador, el error de seguimiento disminuye considerablemente. En la figura 5.6 se muestra la generación del círculo, con relación a los movimientos X-Y.

En las figuras de la ley de control se puede observar la acción del par calculado que se utilizó para eliminar los efectos no lineales del sistema, esto se ve en los cambios de polaridad. También se puede observar el momento en que empieza la acción de modos deslizantes, esto se ve cuando empiezan las oscilaciones de alta frecuencia en la ley de control.

### 5.1.2 Regulador por retroalimentación del error, regulación robusto y modos deslizantes.

En la figura 5.7 se muestra el desempeño del subsistema (4.2) al aplicarle la ley de control del regulador por retroalimentación del error (4.16) con el exosistema (4.10) el cual genera una señal senoidal con una frecuencia de 1 rad/seg. Para la aplicación de modos deslizantes se tomó la superficie de deslizamiento  $s = Ce$  ya que solo se tiene disponible el error de seguimiento, y como se puede observar en el inciso b) de la figura 5.7 el error de seguimiento no mejoró, esto se debe a que la condición  $s\dot{s} < 0$  no se satisface porque la ley de control no aparece en  $\dot{s}$ . Actualmente se está trabajando sobre la solución de este problema.

En la figura (5.8) se muestra el desempeño del subsistema (4.2) al aplicarle la ley de control del regulador robusto (4.22) con el exosistema (4.10) el cual genera una señal senoidal con una frecuencia de 1 rad/seg. En esta aplicación se considera el caso de que los

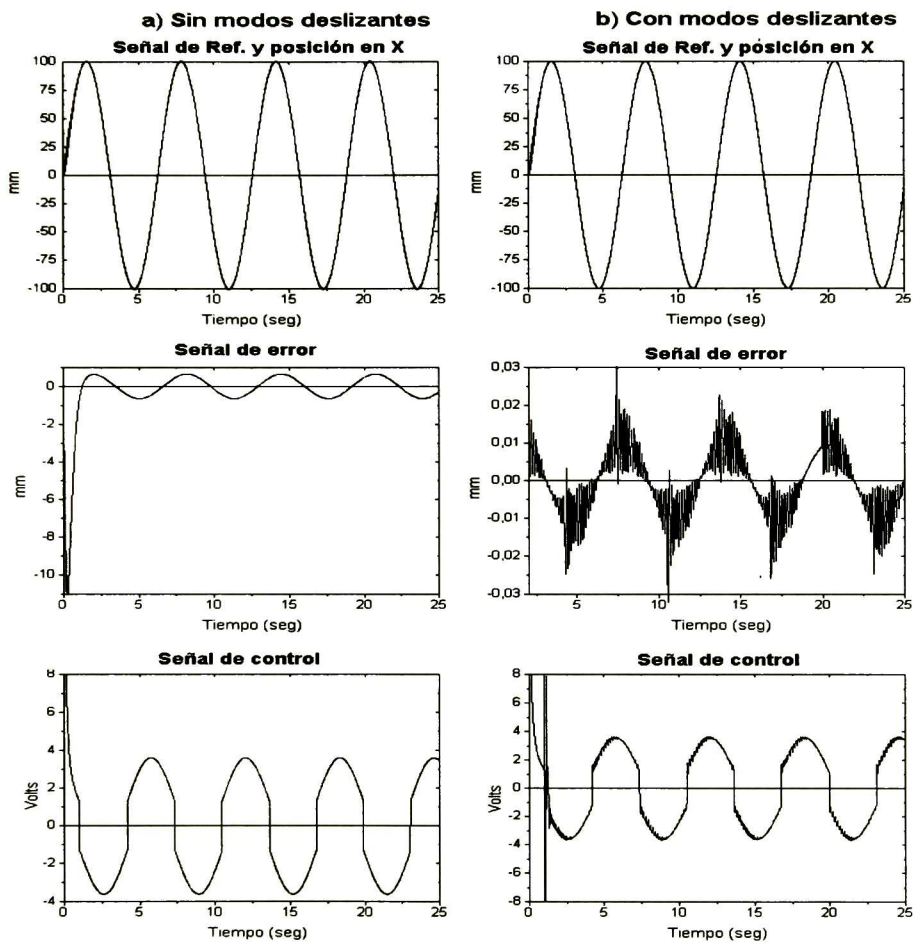


Figura 5.4: Simulación de la aplicación del regulador lineal con retroalimentación del estado para el subsistema X, con referencia senoidal.

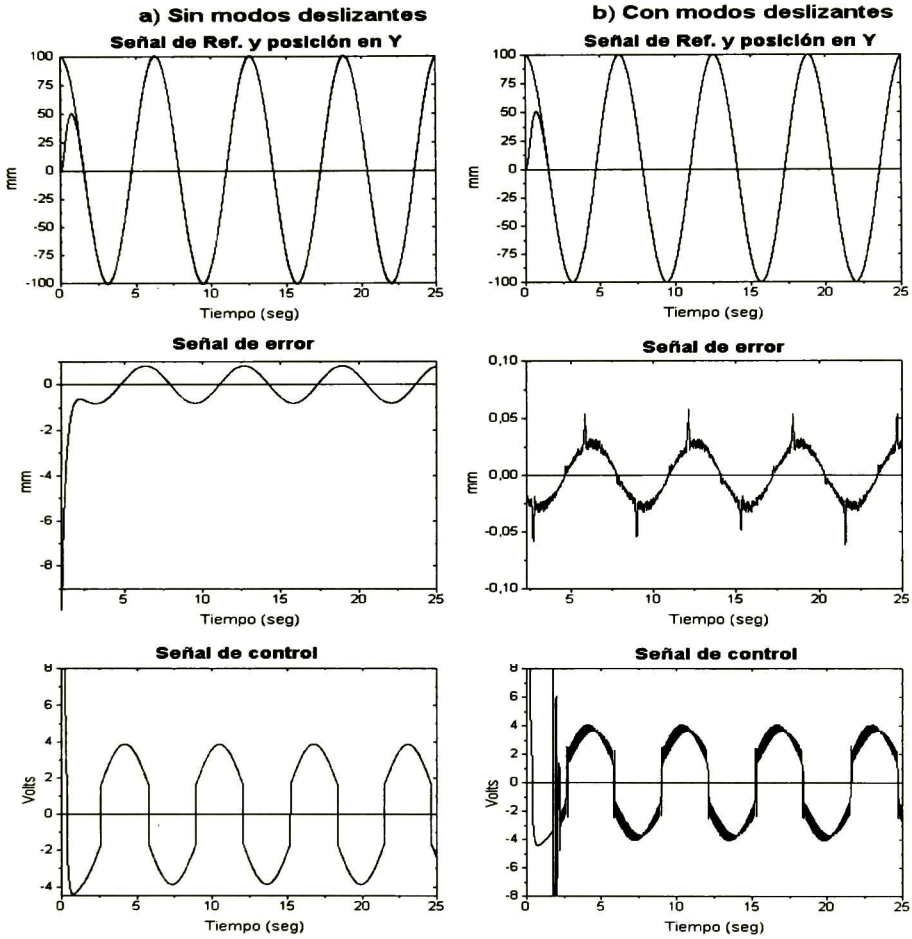


Figura 5.5: Simulación de la aplicación del regulador lineal con retroalimentación del estado para el subsistema Y, con referencia cosenoidal.



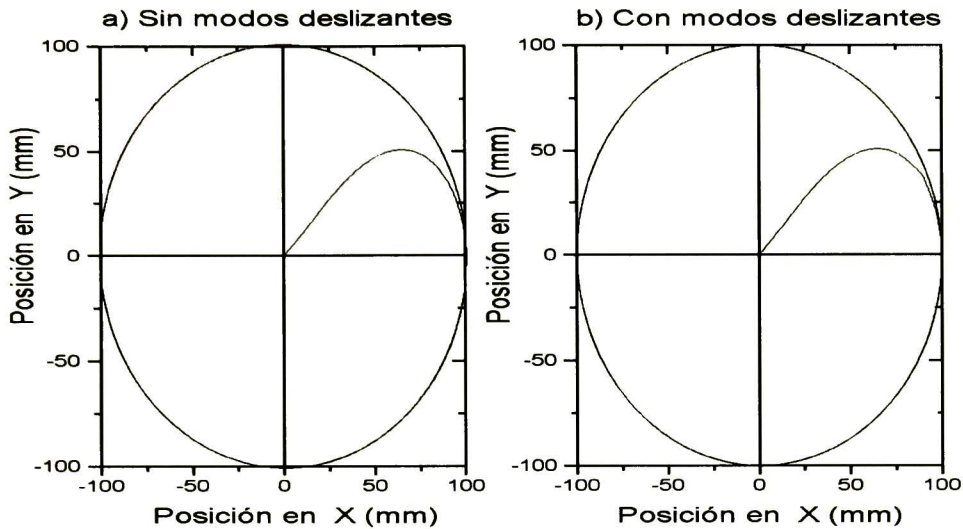


Figura 5.6: Relación X-Y de la señales de referencia cosenoidal en Y contra senoidal en X.

parámetros  $T_S$  y  $u_{NL}$  de la ecuación (3.13) sufren una variación paramétrica del +20% y +10% respectivamente en un tiempo  $t \geq 15 \text{ seg}$ . De las gráficas del inciso a) se concluye que el controlador diseñado efectivamente cubre el objetivo propuesto, es decir, que el control consigue que la salida realice seguimiento a la señal de referencia. De las gráficas del inciso b) se concluye que si la prealimentación no elimina por completo el término  $u_{NL}$ , el controlador no será robusto para el sistema. Para este caso no se aplicó la técnica de modos deslizantes, ya que presenta el mismo problema que para el regulador por retroalimentación del error.

### 5.1.3 Regulador no lineal y modos deslizantes.

Los resultados de aplicar la ley de control (4.29) y (4.31) a los subsistemas dados por (4.23) y (4.30), se muestran en las figuras 5.9, 5.10, 5.11. En la figura 5.9 se muestra el comportamiento del error de seguimiento, cuando se utiliza como señal de referencia una senoidal con una frecuencia 1 rad/seg en el eje X, y en la figura 5.10 se muestra el comportamiento del error de seguimiento al utilizar un señal coseno como señal de referencia en el eje Y. En la figura 5.11 se muestra la trayectoria de un círculo al relacionar los movimientos X-Y. De estas gráficas se puede concluir que estos resultados muestran un menor desempeño que el regulador lineal con prealimentación, ya que el error de seguimiento es mayor.

De la aplicación en simulación se concluye que la aplicación de modos deslizantes mejora el desempeño del sistema. Los controladores que realizan un mejor desempeño sin la aplicación de la técnica de modos deslizantes, son el regulador robusto y el regulador por retroalimentación del estado, mientras que, aplicando la técnica de modos deslizantes el

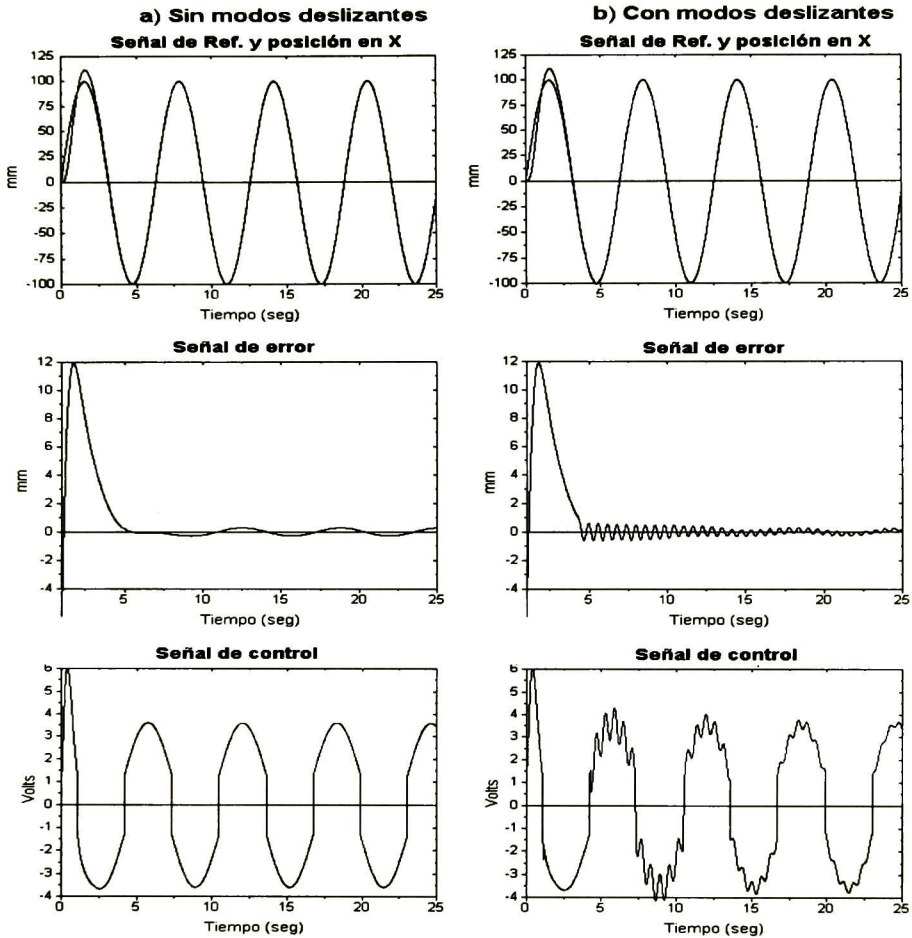


Figura 5.7: Simulación de la aplicación del regulador lineal con retroalimentación del error para el subsistema X, con referencia senoidal.

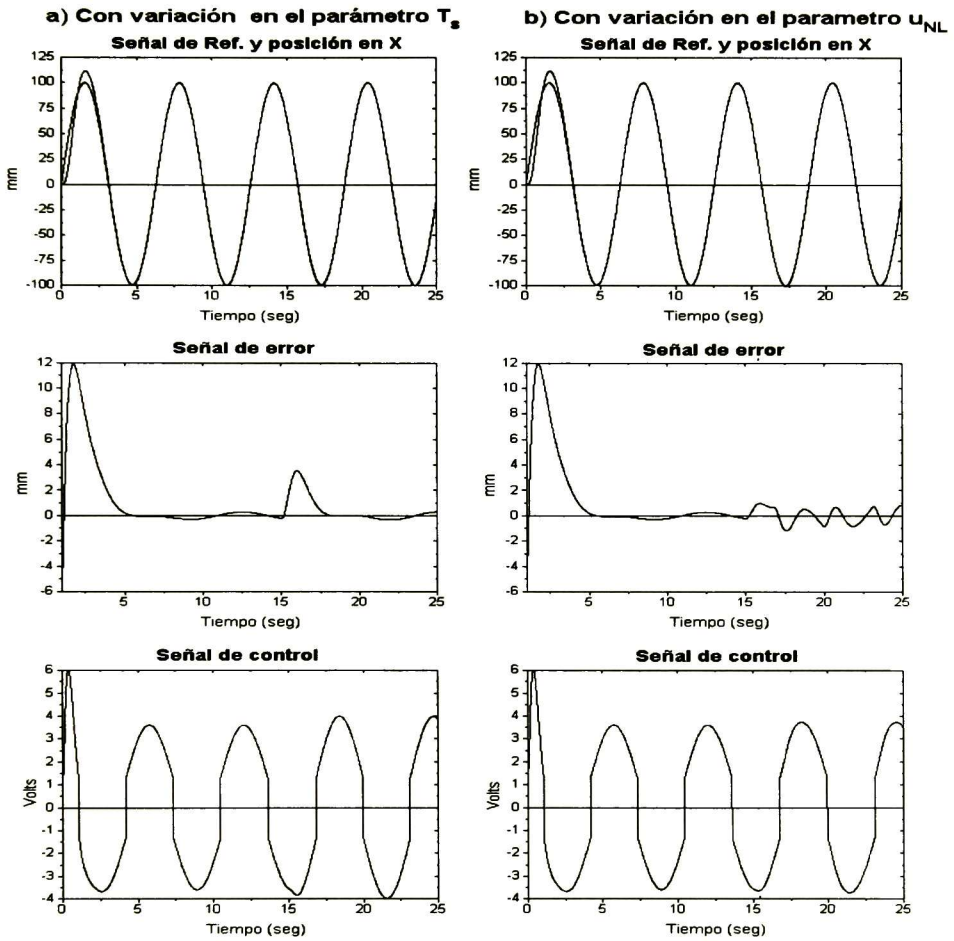


Figura 5.8: Simulación de la aplicación del regulador lineal robusto para el subsistema X, con referencia senoidal.

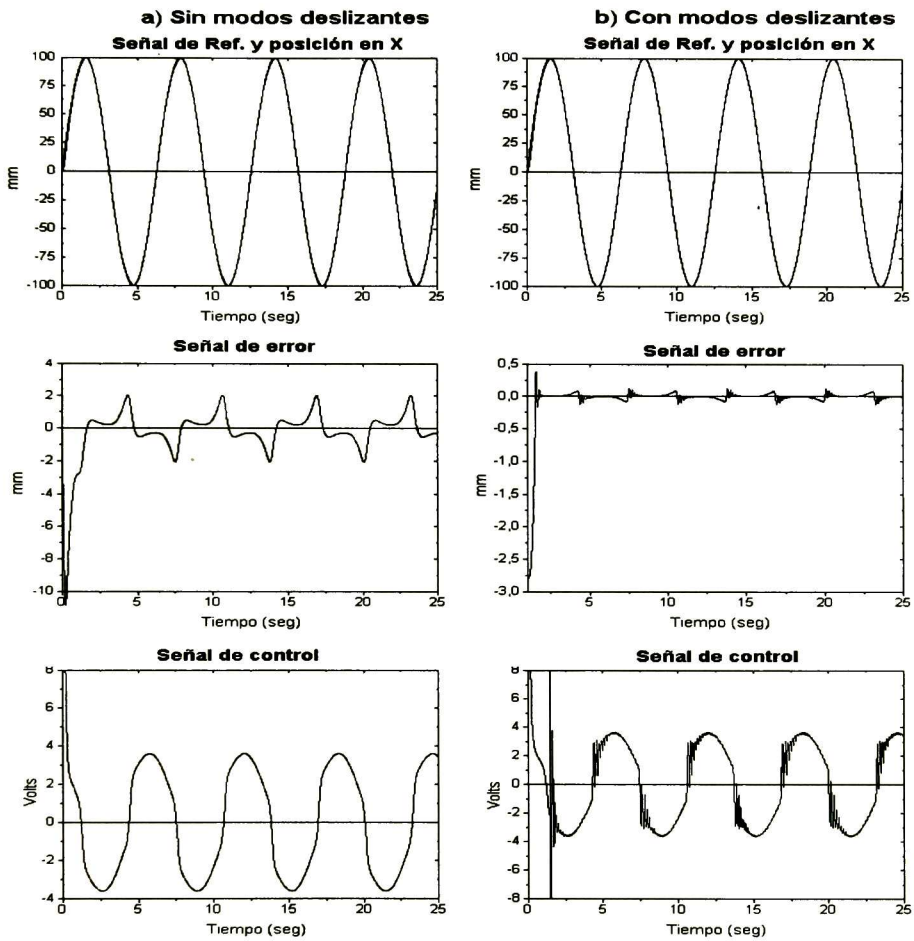


Figura 5.9: Simulación de la aplicación del regulador no lineal con retroalimentación del estado para el subsistema X, con referencia senoidal.

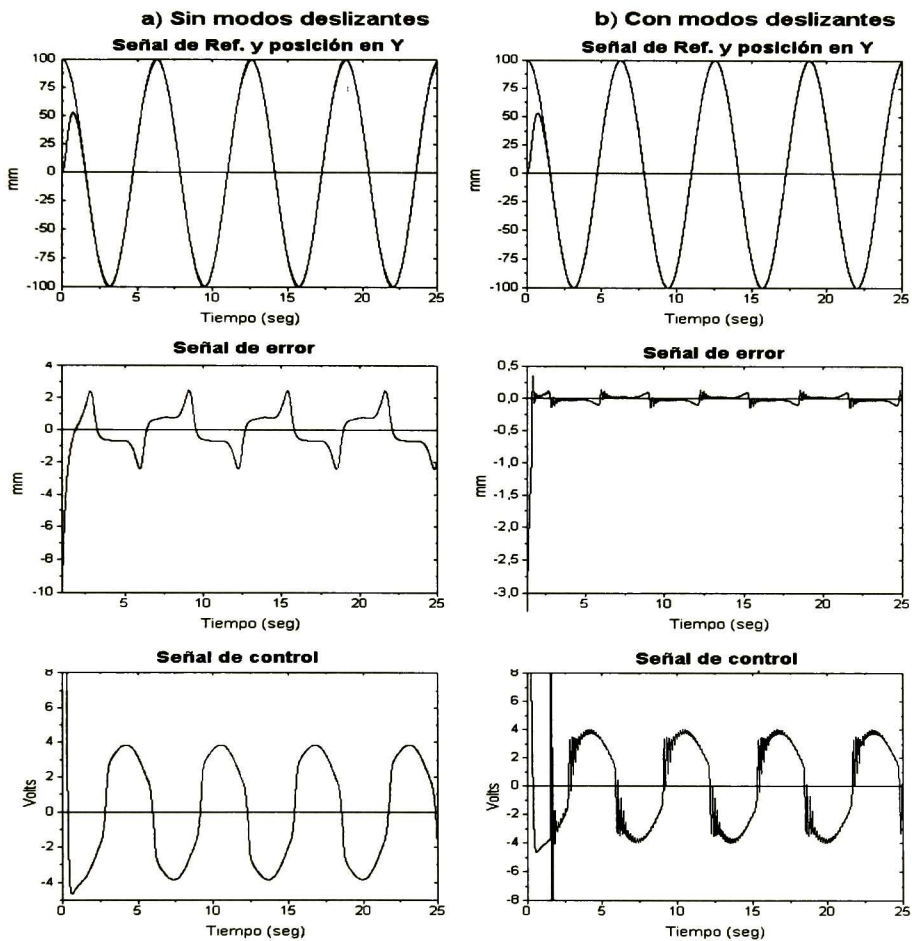


Figura 5.10: Simulación de la aplicación del regulador no lineal con retroalimentación del estado para el subsistema Y, con referencia cosenoidal.



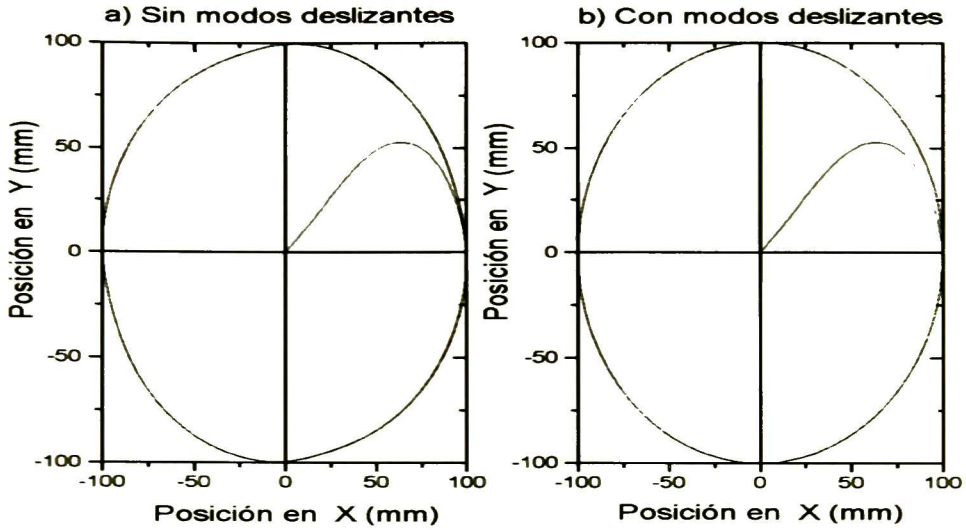


Figura 5.11: Relación X-Y de la señales de referencia cosenoidal en Y, contra senoidal en X.

regulador por retroalimentación del estado es el que proporciona un mejor desempeño.

## 5.2 Resultados en tiempo real.

Como ya se mencionó en el Capítulo 3, el sistema cuenta con convertidores de digital a analógico, por lo tanto la señal de control se mantiene constante entre periodos de muestreo. por tal motivo el diseño de las leyes de control se hicieron a partir del modelo dinámico continuo en el tiempo.

Para la selección del periodo de muestreo se consideran varios factores como son: La dinámica de la planta y el tiempo del algoritmo de control. La dinámica de la planta establece el ancho de banda de las señales a medir el cual fija el límite superior del periodo de muestreo. El tiempo que dura el algoritmo de control en lazo cerrado imponen un límite inferior en el periodo de muestreo. En [5] (Cap. 10, Sección 10.3) se propone que la selección de la secuencia de muestreo está dada en base a la expresión

$$6\omega_d \leq \omega_s \leq 40\omega_d$$

donde  $\omega_d$  es la frecuencia máxima del ancho de banda y  $\omega_s$  es la frecuencia de muestreo. A partir de la relación anterior, se ajustó la frecuencia de muestreo en 100 Hz quedando así el periodo de muestreo en 10 mseg.

En algunos esquemas de control diseñados en el capítulo 4, se suponen el acceso total del estado, pero como los subsistemas a ser controlados solo cuentan con sensores de posición se

hace necesaria la reconstrucción de las velocidades respectivas. Para tal situación se empleó la aproximación de la derivada siguiente

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T}$$

donde  $k$  es el número de la muestra,  $T$  es el periodo de muestreo  $x(kT)$  es el valor de la señal  $x(t)$  en un tiempo  $kT$  y  $x((k-1)T)$  es el valor de la señal  $x(t)$  en el tiempo  $(k-1)T$

### 5.2.1 Regulador por retroalimentación del estado y modos deslizantes.

En esta parte se presentan los resultados equivalentes de la subsección 5.1.1, con los siguientes resultados:

#### a) Resultados del seguimiento de una exponencial para el sistema X-Y.

Los resultados de aplicar la ley de control (4.9) y (4.12) al sistema dado por (4.1), se muestran en las figuras 5.12, 5.13, 5.14. En la figura 5.12 se muestra el comportamiento del error de seguimiento, cuando se utiliza como señal de referencia una rampa en el eje X, se observa que la técnicas de modos deslizantes elimina las incertidumbres del sistema llevando el error de 1 mm a 0.07 mm, lo cual es satisfactorio. En la figura 5.13 se muestra el comportamiento del error de seguimiento al utilizar un escalón como señal de referencia en el eje Y, se observa un error en estado estable de 0.0038 para ambos casos, pero con la ayuda de modos deslizantes el error se estabiliza mas rápido. Las oscilaciones que se observan en la ley de control se debe a la prealimentación que elimina los efectos de la fricción de Coulomb. Para este caso se tiene la condición de hacer que la ley de control sea cero cuando  $e < 0.05$  mm, como se muestra en estas figuras. El resultado de estas dos señales en X y Y se muestra en la figura 5.14, lo cual da como resultado una señal exponencial.

#### b) Resultados del seguimiento de un círculo.

Los resultados de aplicar la ley de control (4.11) y (4.13) al sistema dado por (4.1), se muestran en las figuras 5.15, 5.16, 5.17. Para estas aplicaciones se aplicó una perturbación al colocar una masa de aproximadamente 10 Kg sobre el carro móvil de cada eje en un tiempo  $t \geq 12$  seg. En la figura 5.15 se muestra el comportamiento del error de seguimiento, cuando se utiliza como señal de referencia senoidal en el eje X, y en la figura 5.5 se muestra el comportamiento para una señal coseno. De estas gráficas se concluye que sin la ayuda de modos deslizantes, los resultados no son buenos, ya que esta técnica elimina la inexactitud e incertidumbres del sistema, también se observa que la perturbación aplicada a cada eje no afecta el error de seguimiento, esto se debe al buen diseño mecánico del sistema. En la figura 5.17 se muestra el círculo generado al relacionar el movimiento X-Y. Con la aplicación de modos deslizantes se tiene un error absoluto de 0.2 mm en X y 0.29 mm en Y, lo cual son aceptables para la aplicación que se le pueda dar al sistema.

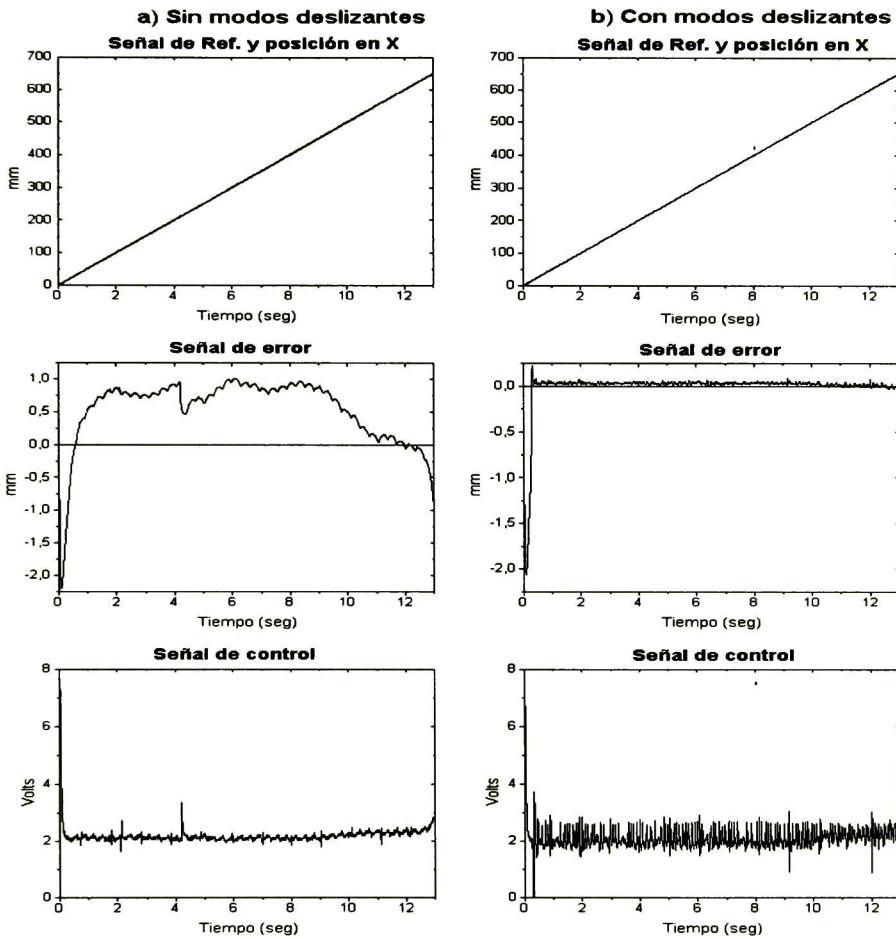


Figura 5.12: Aplicación en tiempo real del regulador lineal con retroalimentación del estado para el subsistema X, con referencia de una rampa.

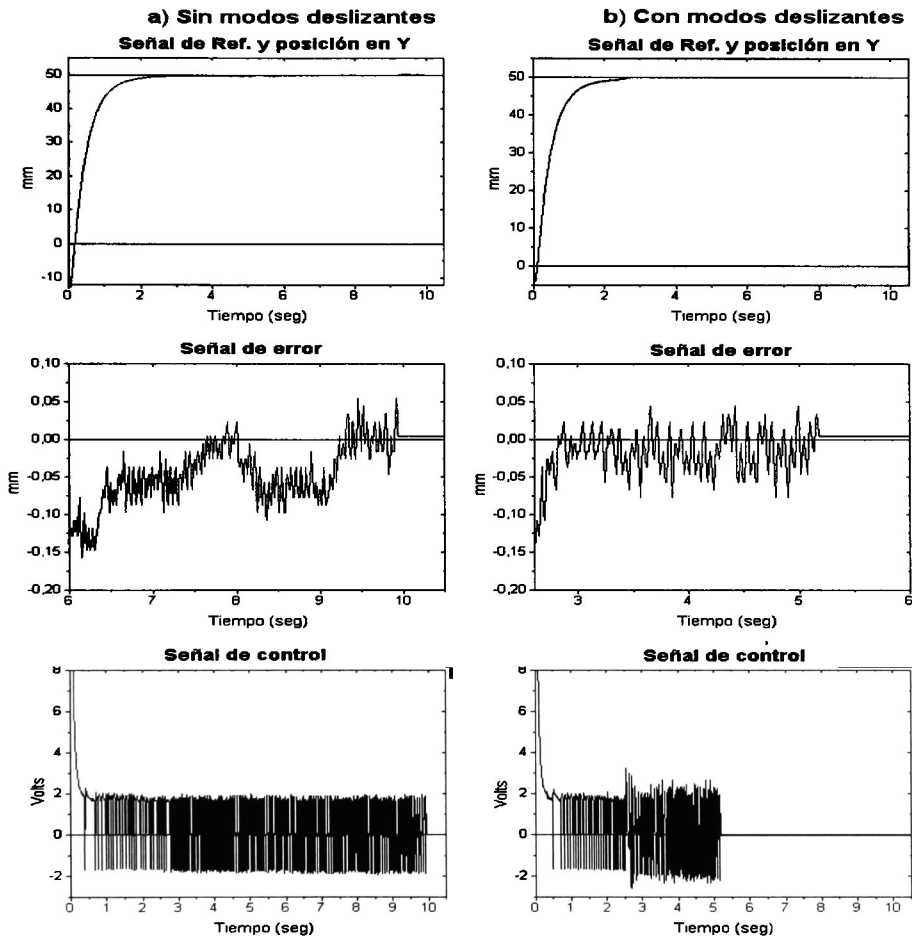


Figura 5.13: Aplicación en tiempo real del regulador lineal con retroalimentación del estado para el subsistema Y, con referencia de un escalón.



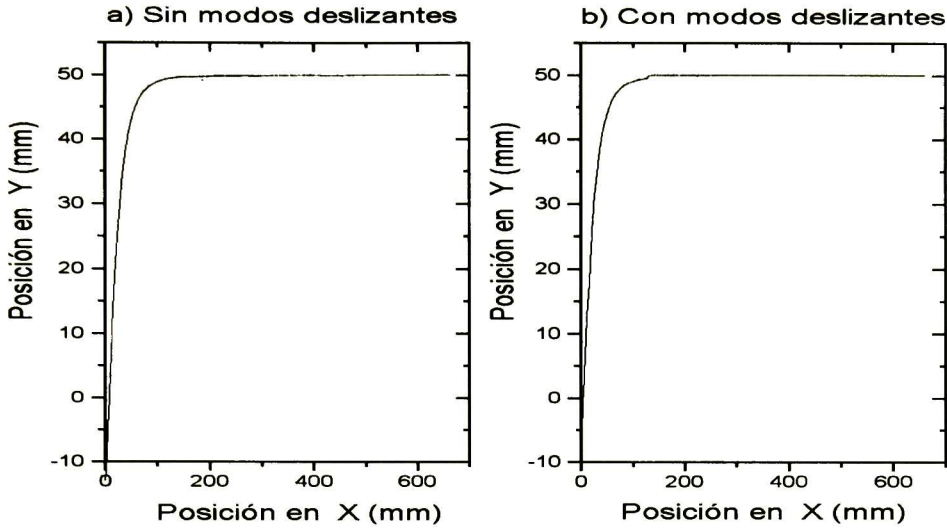


Figura 5.14: Relación X-Y de la señales de referencia escalón en Y contra rampa en X.

## 5.2.2 Regulador por retroalimentación del error y regulador robusto.

En esta parte se presentan los resultados equivalentes de la subsección 5.1.2, con los siguientes resultados:

En la figura (5.18) se muestra el desempeño del subsistema (4.2) al aplicarle las leyes de control del regulador robusto (4.22) y del regulador por retroalimentación del error con el exosistema (4.10) el cual genera una señal senoidal con una frecuencia de 1 rad/seg. De donde se observa lo comentado en la subsección 5.1.2, es decir que, estos controles no son robustos ante las incertidumbres del termino  $u_{NL}$  que modela la fricción del sistema, ya que no es eliminado por la prealimentación como se esperaba, y se concluye que esta aplicación no genera buenos resultados. Para estos casos no se aplicó la técnica de modos deslizantes debido a que no proporciona buenos resultados como se observó en la aplicación en simulación.

## 5.2.3 Regulador no lineal y modos deslizantes.

En esta parte se presentan los resultados equivalentes de la subsección 5.1.3, con los siguientes resultados:

Los resultados de aplicar la ley de control (4.29) y (4.31) a los subsistemas dados por (4.23) y (4.30), se muestran en las figuras 5.19, 5.20, 5.21. Para estas aplicaciones se aplicó una perturbación al aplicarle una fuerza de oposición al movimiento del carro de cada eje. En la figura 5.19 se muestra el comportamiento del error de seguimiento, cuando se utiliza como señal de referencia una senoidal con una frecuencia de oscilación de 1 rad/seg en el eje X, y



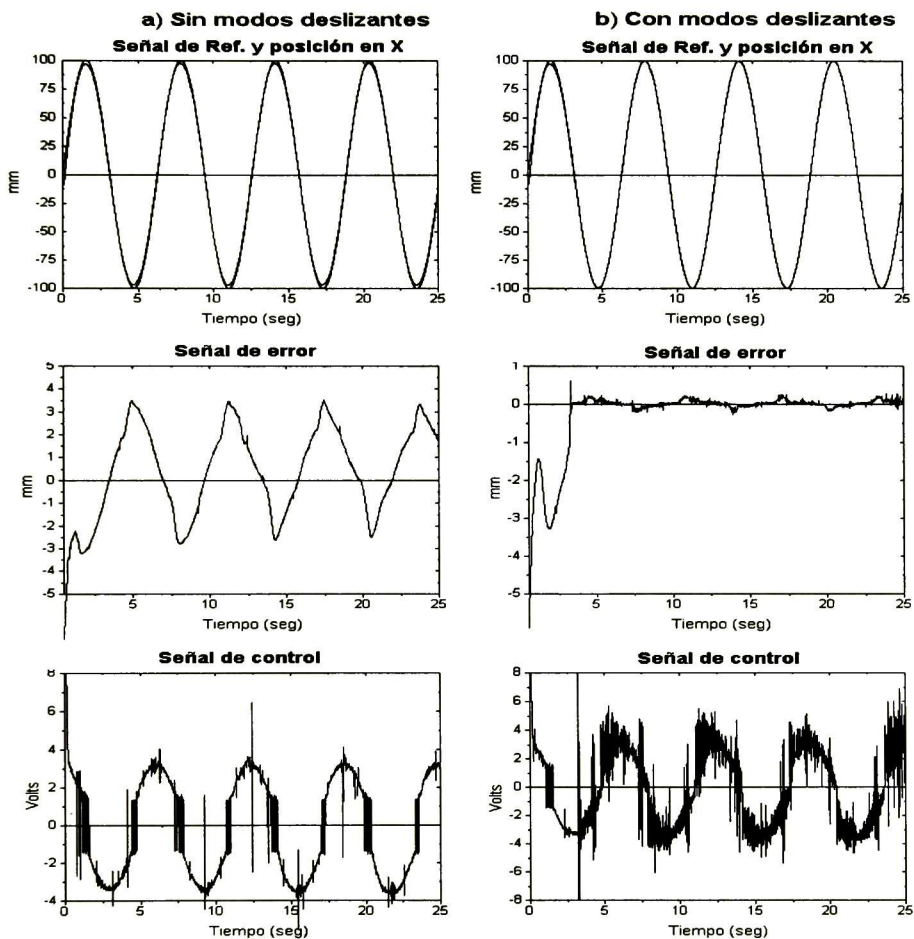


Figura 5.15: Aplicación en tiempo real del regulador lineal con retroalimentación del estado para el subsistema X, con referencia senoidal.

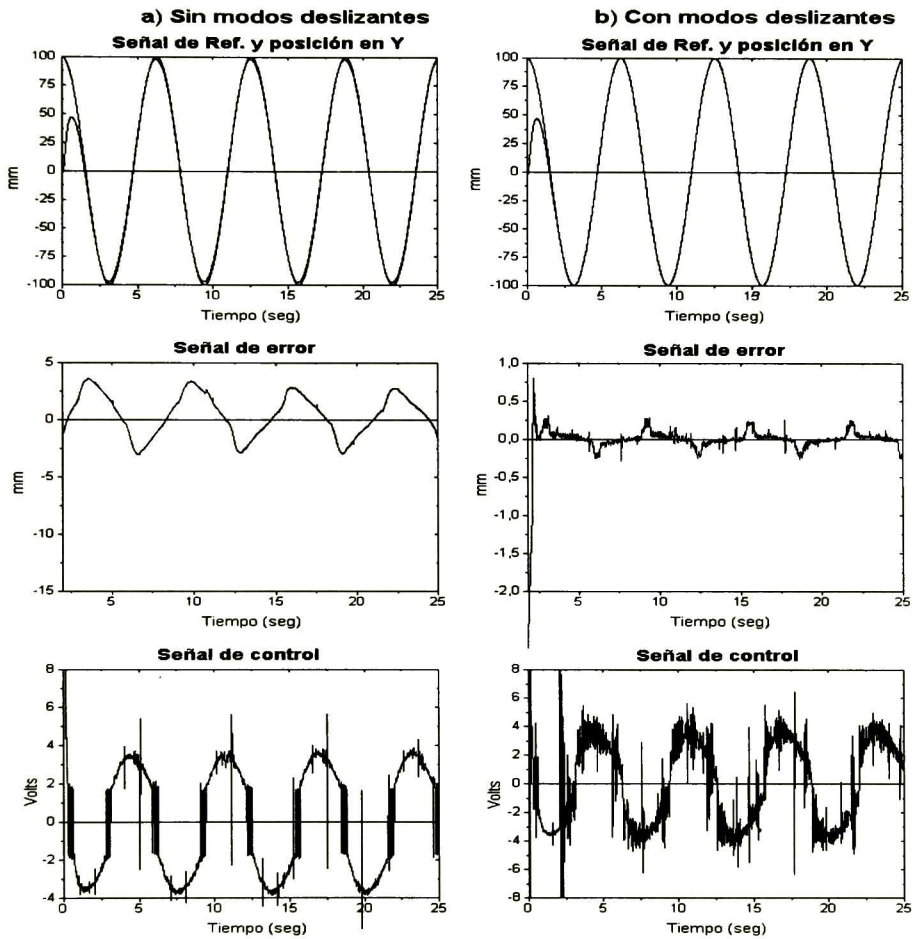


Figura 5.16: Aplicación en tiempo real del regulador lineal con retroalimentación del estado para el subsistema Y, con referencia cosenoidal.

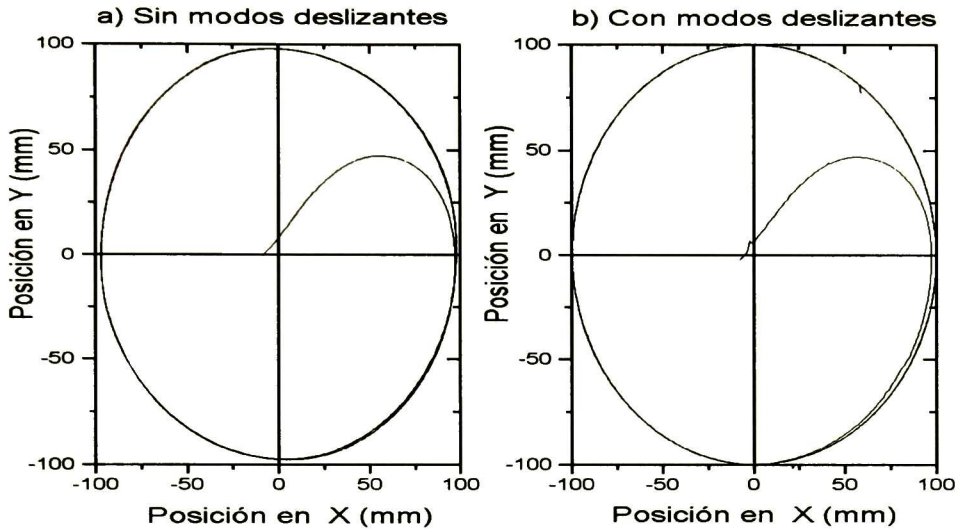


Figura 5.17: Relación X-Y de la señales de referencia cosenoidal en Y contra senoidal en X.

en la figura 5.20 se muestra el comportamiento del error de seguimiento al utilizar una señal coseno como señal de referencia en el eje Y. De estas gráficas se concluye que estos controles al igual que los anteriores pueden restablecer el error de estado estable cuando desaparece la perturbación. En la figura 5.21 se muestra la trayectoria del círculo al relacionar los movimientos X-Y. Con la aplicación de modos deslizantes se tiene un error absoluto en estado estable de 0.21 mm en X y 0.23 mm en Y.

### 5.3 Conclusiones.

De la aplicación en tiempo real se concluye que sin la ayuda de modos deslizantes los resultados no son buenos para una aplicación al sistema. Las aplicaciones del regulador por retroalimentación del error y del regulador robusto no proporcionan un buen desempeño debido a que el término  $u_{NL}$  que presenta incertidumbres no se tomó en cuenta para el diseño de los controladores lineales. Al igual que en simulación el mejor desempeño lo proporcionó el regulador por retroalimentación del estado vía modos deslizantes.

Como es sabido, el desempeño ideal de una planta física nunca es alcanzado, ya que existen varios factores que generalmente no se consideran en la etapa del diseño del controlador, entre los que se pueden nombrar son: Aproximación del modelo, incertidumbres en los coeficientes de fricción, resolución de los convertidores D/A y la acumulación de errores aritméticos al emplear métodos numéricos.

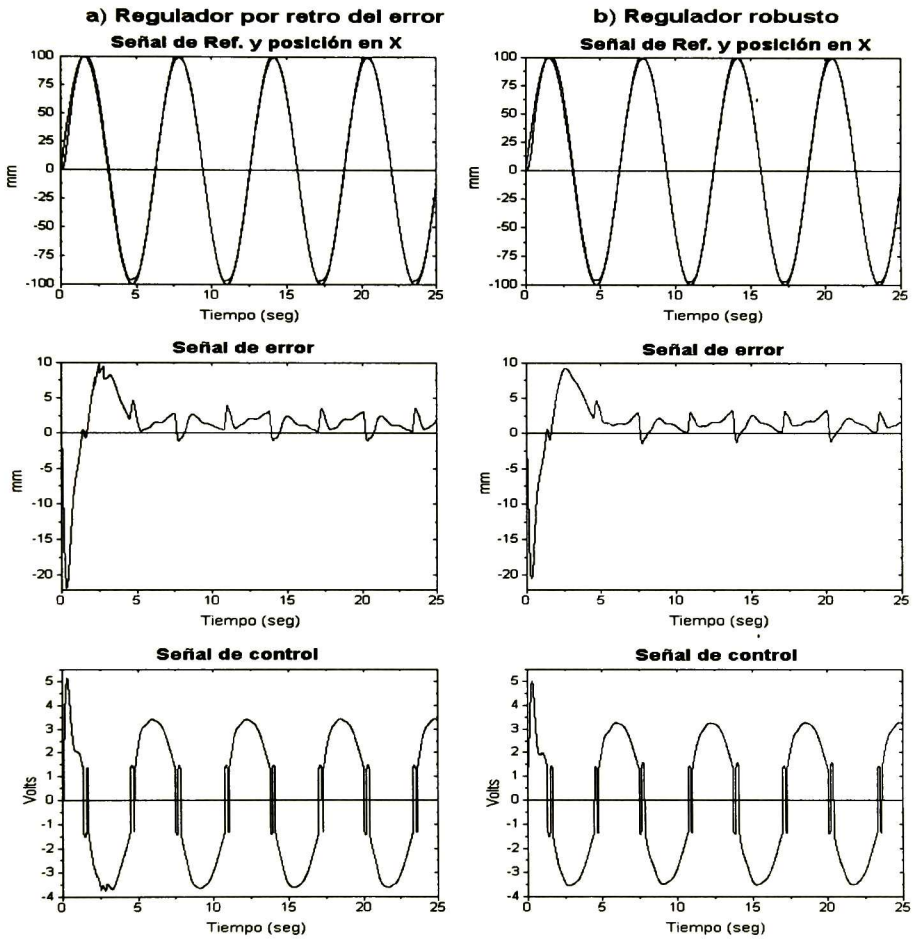


Figura 5.18: Aplicación en tiempo real del regulador lineal con retroalimentación del error y regulador robusto para el subsistema X, con referencia senoidal.

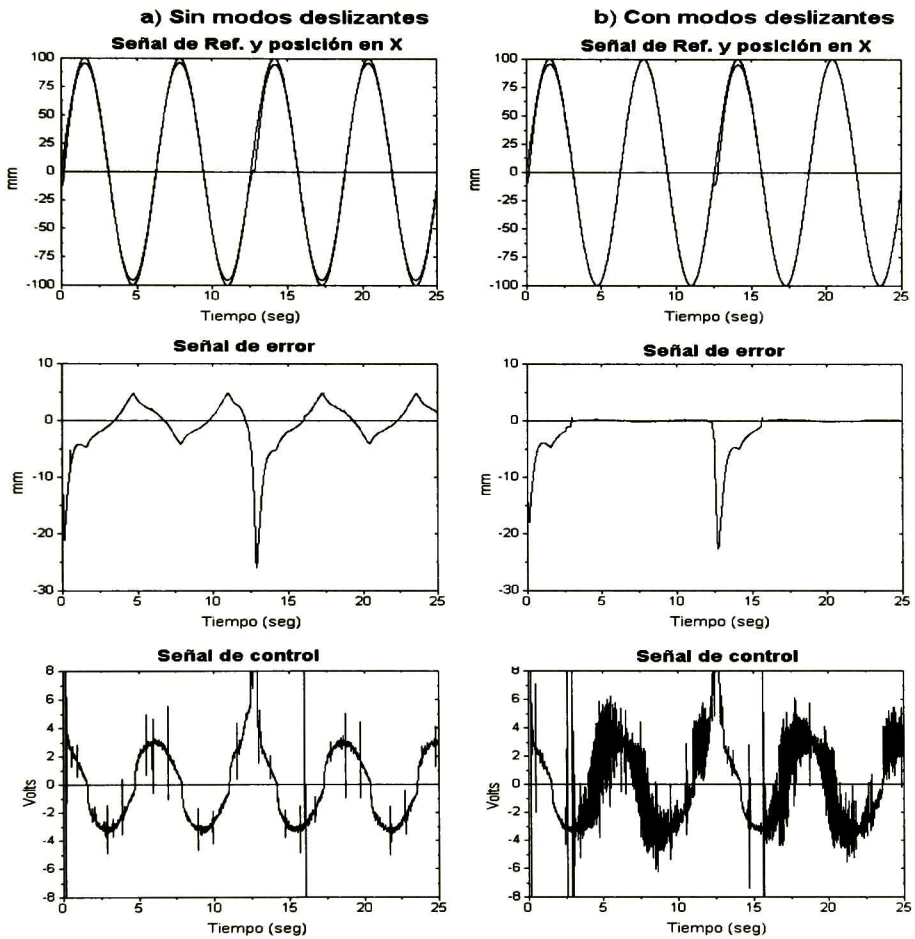


Figura 5.19: Aplicación en tiempo real del regulador no lineal con retroalimentación del estado para el subsistema X, con referencia senoidal.



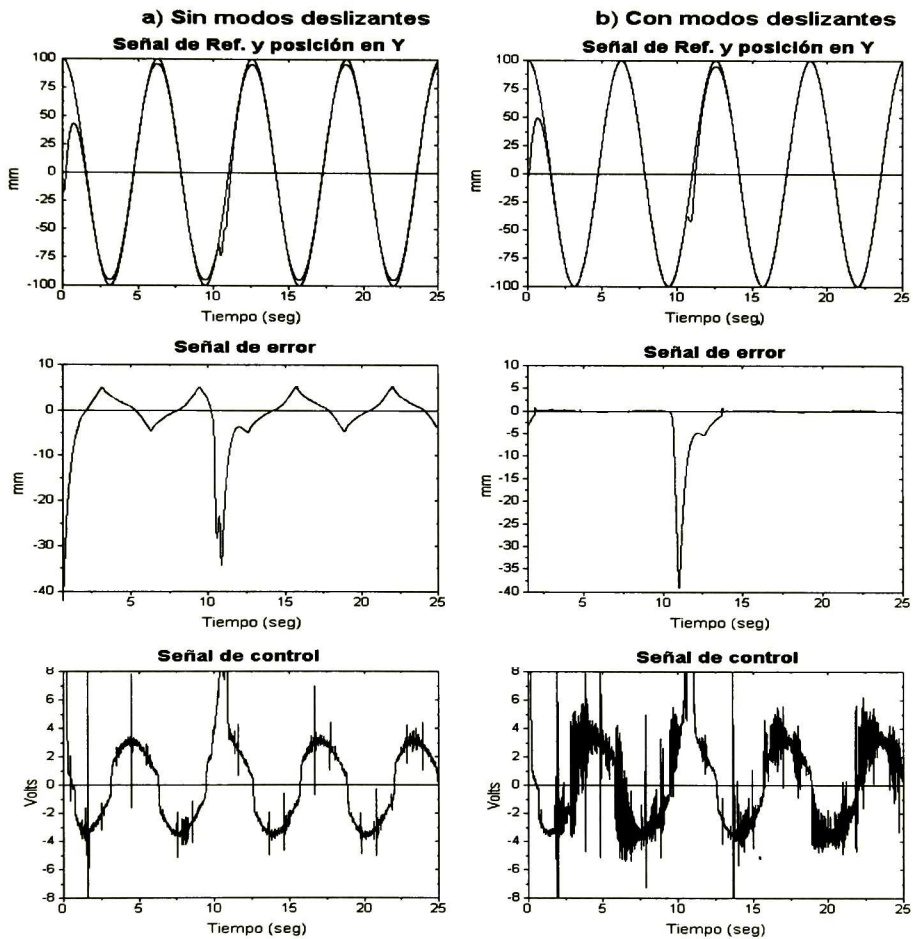


Figura 5.20: Aplicación en tiempo real del regulador no lineal con retroalimentación del estado para el subsistema Y, con referencia cosenoidal.

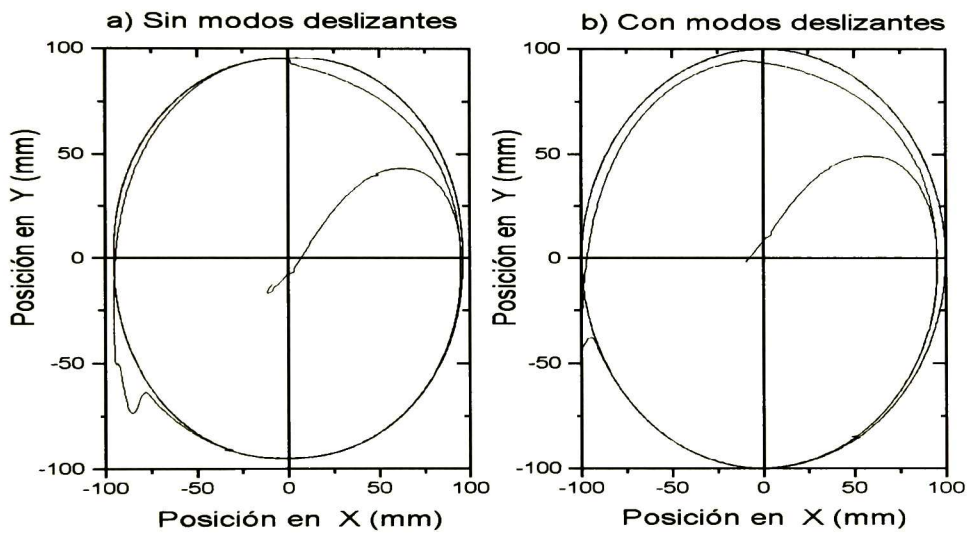


Figura 5.21: Relación X-Y de la señales de referencia cosenoidal en Y contra senoidal en X.



## Capítulo 6

# Conclusiones generales y perspectivas.

En este trabajo de tesis se ha presentado el modelado y control de un sistema electromecánico planar de dos grados de libertad usando las técnicas de regulación lineal y no lineal, además de la técnica de modos deslizantes.

Es interesante recalcar el hecho de la incertidumbre en la determinación de los parámetros del modelo, ya que los experimentos realizados para la identificación de los mismos arrojaron diferentes resultados para diferentes condiciones de excitación del sistema. Los valores nominales se escogieron entonces tomando un promedio de los valores correspondientes a cada parámetro, y por consiguiente, como una consecuencia de esto, se introdujeron incertidumbres en el modelo matemático obtenido. Esto motivó el uso de la técnica de los modos deslizantes en el lazo de control por regulación previamente usado, obteniéndose resultados adecuados, es decir, que se logró reducir la influencia de las incertidumbres en el error de seguimiento de las trayectorias deseadas.

Asimismo, debido a la presencia de una no linealidad del tipo de zona muerta, se utilizó una aproximación polinomial de éste término para aplicar el método del regulador.

Tomando en cuenta estas consideraciones los resultados en simulación mostraron que las técnicas del regulador por retroalimentación del error y el regulador robusto presentaron un mejor desempeño con respecto a los demás. Sin embargo, en presencia de perturbaciones en el sistema, la introducción de los modos deslizantes mejoró considerablemente el desempeño para los reguladores por retroalimentación del estado lineal y no lineal, pero para el regulador por retroalimentación del error y el regulador robusto, el algoritmo propuesto no fue satisfactorio ya que solo se tiene disponible el error de seguimiento. El problema de una ley de control por regulación con retroalimentación del error y modificación de modos deslizantes es objeto de investigación actual.

Por lo que respecta a los resultados obtenidos en el laboratorio mostraron que sin la ayuda de modos deslizantes los desempeños no son en general satisfactorios, ya que mostraron errores de seguimiento apreciables, debido a la inexactitud del modelo obtenido y como ya se mencionó, a las incertidumbres de los parámetros. Corroborando los resultados obtenidos en la simulación numérica, con la modificación de los modos deslizantes se compensaron las inexactitudes e incertidumbres de los parámetros y los resultados fueron aceptables para las

aplicaciones que se le pudieran dar al sistema. La técnica de regulación que obtuvo un mejor desempeño fue el regulador lineal por retroalimentación del estado vía modos deslizantes con una magnitud de error de 0.2 mm.

Concluyendo, se puede asegurar que las técnicas del regulador lineal y no lineal dan buenos resultados cuando el modelo representa de manera bastante aproximada el comportamiento dinámico del sistema, y que la introducción de técnicas de compensación de incertidumbres, tales como los modos deslizantes, es una opción adecuada para la solución de problemas de seguimiento de trayectorias en presencia de incertidumbres en el sistema.

Como posible continuación al presente trabajo se pueden mencionar los siguientes puntos:

- Realización del control de posición del eje Z, y posiblemente el control de fuerza considerando el uso de un elemento final (herramientas ,etc)
- Extensión de la aplicación al caso de retroalimentación del error con modos deslizantes.
- Uso de otras técnicas, tales como lógica difusa o redes neuronales.



# Apéndice A

## Funcionamiento del servopropulsor

El servopropulsor utilizado para proveer la potencia de entrada a los motores del sistema electromecánico es un dispositivo de marca ADVANCED, el cual amplifica el voltaje de entrada de baja potencia a un voltaje o corriente de alta potencia por medio de modulación de ancho de pulso (PWM).

El servopropulsor está diseñado para trabajar en diferentes modos de operación, de los cuales los más utilizados son el modo voltaje, que proporciona un voltaje en las terminales del motor proporcional al voltaje de entrada del dispositivo (figura A.1.a), el modo corriente, que proporciona una corriente de armadura proporcional al voltaje de entrada del dispositivo (figura A.1.b) y el modo velocidad, en el cual la velocidad angular del motor es proporcional al voltaje de entrada del dispositivo (figura A.1.c).

Es conveniente resaltar el hecho de que para el sistema bajo estudio, es posible obtener resultados similares a los presentados anteriormente utilizando la configuración *modo velocidad* del servopropulsor, con la ventaja de que la estructura de control es más simple. Hay que aclarar, sin embargo, que las leyes de control presentadas en este trabajo de tesis son realizadas de manera digital, es decir, todo el algoritmo se calcula en la computadora digital y solamente la señal de control es alimentada al servopropulsor que funciona en este caso como un amplificador solamente. En el modo velocidad sin embargo, la computadora digital solo calcula el error de posición, y las demás funciones están construidas analógicamente en el servopropulsor.

El modo velocidad consiste en retroalimentar la señal de velocidad al servopropulsor, por lo cual, la velocidad del carro móvil es proporcional al voltaje de entrada al dispositivo, es decir,

$$\dot{z} = Ku \tag{A.1}$$

donde  $z$  es el desplazamiento del carro y  $u$  es la entrada al servopropulsor, que es la señal de control a ser calculada. El valor de la constante de proporcionalidad  $K$  fue obtenido experimentalmente, obteniéndose un valor de  $0.4(1/seg)$ .

Para el seguimiento de trayectorias, se procede a definir una señal de error de seguimiento como

$$e = z - \omega \tag{A.2}$$

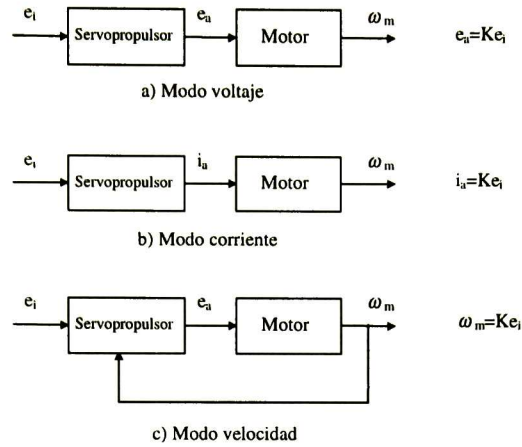


Figura A.1: Modos de funcionamiento del servopulsor

de donde

$$\dot{e} = \dot{z} - \dot{\omega} = Ku - \dot{\omega}. \quad (\text{A.3})$$

Si  $ku - \dot{\omega}$  se iguala a un término  $\alpha e$ , con  $\alpha < 0$ , para llevar el error a cero, se puede encontrar el valor de  $u$  como

$$u = \frac{\alpha e + \dot{\omega}}{K} \quad (\text{A.4})$$

Cabe aclarar que debido a que existe una retroalimentación de velocidad, se puede ver que la señal  $e_a$  será igual a

$$e_a = u + \beta \dot{z}, \quad (\text{A.5})$$

por lo que  $e_a = \alpha e/K + \beta \dot{z} + \dot{\omega}/K = \alpha e/K + \beta \dot{e} + \frac{\beta K + 1}{K} \dot{\omega}$ , esto es, una señal de la forma

$$e_a = c(\omega) + k(x - \pi(\omega)) \quad (\text{A.6})$$

que es similar a la usada anteriormente.

En particular para el seguimiento de un círculo, el subsistema X seguirá una señal cosenoidal negativa y el subsistema Y seguirá una señal senoidal, y el procedimiento para diseñar la ley de control es igual que para el caso anterior. Los resultados se muestran en las figuras A.2, A.3 y A.4, de donde se observa las señales correspondientes en cada subsistema y el círculo que es el resultado de la relación de la posición en Y con respecto de X, y donde se observa un error absoluto de 0.15 mm que es aceptable para este sistema.

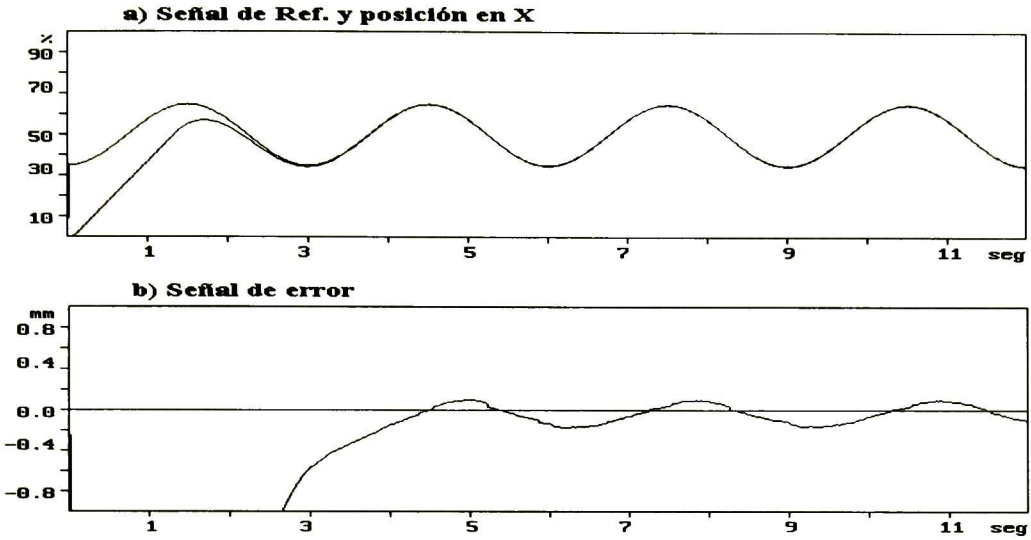


Figura A.2: Aplicación en tiempo real del seguimiento de una señal de referencia cosenoidal negativa, para el subsistema X.

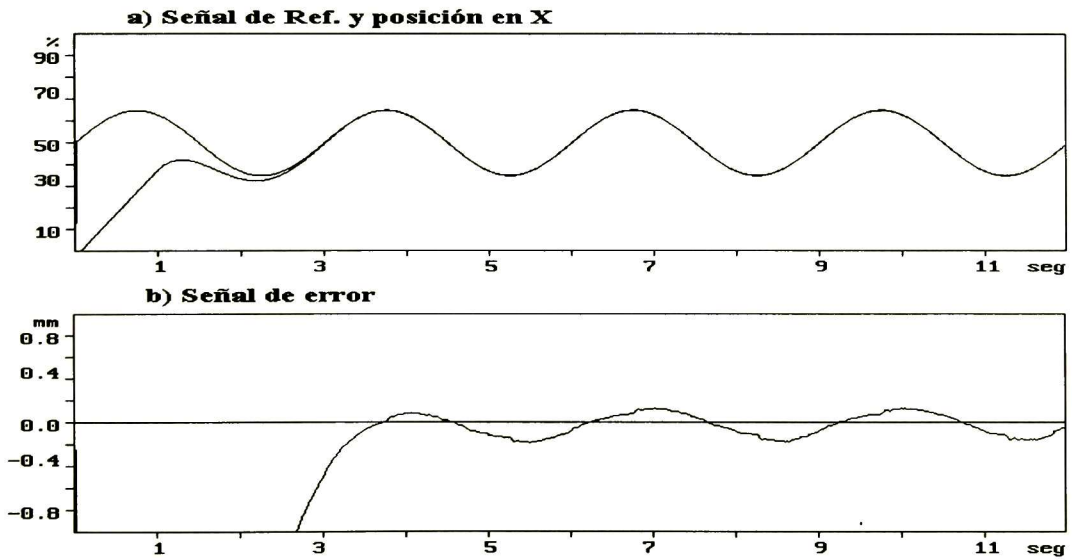


Figura A.3: Aplicación en tiempo real del seguimiento de una señal de referencia senoidal, para el subsistema Y.

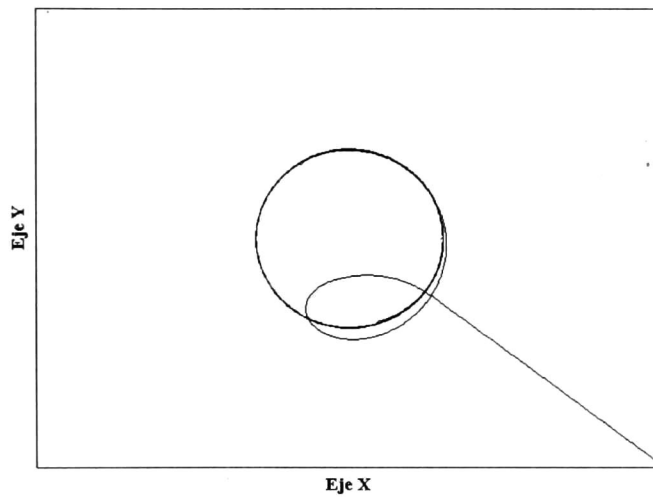


Figura A.4: Aplicación en tiempo real del seguimiento de un círculo, tomando la señal de Y con respecto de X.

# Apéndice B

## Programas empleados para el diseño de controladores.

En este apéndice se incluyen los programas empleados para el cálculo de las leyes de control y los programas que realizan el cálculo de la señal de control en simulación y tiempo real para el sistema electromecánico planar de dos grados de libertad. Los programas *nombre.m* son ejecutables en ambiente **Matlab 4.2** para Windows y los *nombre.cpp* son programas desarrollados en **Visual C++ 1.52**.

En la siguiente tabla se enlistan los programas desarrollados para el sistema.

Nombre del programa	Aplicación
pregsen.m	Solución al PRRS y PRRE
pregrs.m	Solución al PR Robusto
prmxs.cpp	Control en simulación y tiempo real para el PRRS
premxs.cpp	Control en simulación y tiempo real para el PRRE
prrmxs.cpp	Control en simulación y tiempo real para el PR Robusto
prnmxs.cpp	Control en simulación y tiempo real para el PRRS-NL

### **PROGRAMA** `pregsen.m`

`% Calculo de los RRS y RRE`

`a=1.73;`

`b=86.8;`

`al=1;`

`A=[0 1;0 -a];`

`B=[0;b];`

`C=[1 0];`

`R=[1 0];`

`S=[0 al;-al 0];`

`P=[0 0 ; 0 0];`

`PI=[1 0;0 al]`

`GA=[-al*al/b a*al/b]`

`PC=[-4 -5];`



## 82 APÉNDICE B. PROGRAMAS EMPLEADOS PARA EL DISEÑO DE CONTROLADORES.

```
K1=-place(A,B,PC)
K2=GA-K1*PI
Z=zeros(2,2);
AA=[A P;Z S]
CR=[C -R]
PO=[-1 -2 -3 -4];
G=place(AA',CR',PO)'
BB=[B;0;0]
H=[K1 K2]
F=AA+BB*H-G*CR
PROGRAMA pregrs.m
% Calculo del regulador robusto
a=1.73;
b=86.8;
al=1;
p1=1;
p2=0;
A=[0 1;0 -a];
B=[0;b];
C=[1 0];
S=[0 al;-al 0];
P=[p1 p2 ; 0 0];
PI=[0 0;-p1 -p2]
GA=[(-a*p1+al*p2)/b (-a*p2-al*p1)/b]
PC=[-4 -5];
K1=-place(A,B,PC)
K2=GA-K1*PI
Z=zeros(2,2);
AA=[A P;Z S]
CR=[C 0 0]
PO=[-1 -2 -3 -4];
G=place(AA',CR',PO)'
BB=[B;0;0]
H=[K1 K2]
F=AA+BB*H-G*CR
```

Los programas nombre.cpp contienen el mismo programa principal y las mismas subrutinas, lo que cambia es la subrutina que calcula la ley de control, por tal motivo, primero se presenta lo que es común para todos los controladores y posteriormente se presentan las subrutinas que calculan la ley de control para cada controlador. También es necesario aclarar que los programas que se presentan en este apéndice son los que se utilizaron para el subsistema X, ya que los programas para el subsistema Y son similares, lo que cambia son los valores de los parámetros.

## PROGRAMA PRINCIPAL Y SUBROUTINAS PARA LOS CONTROLADORES

```

#include <stdio.h>
#include <dos.h>
#include <conio.h>
#include <math.h>
#include <ctype.h>
#include <graph.h>
#include <stdlib.h>
#include <io.h>
#include <time.h>
#include <istream.h>
#define T (float)10e-3
int entrada();
void configurar();
void cambiar();
void graficar(float,float,float,float);
void grafico(void);
void calculo(void);
void control(float);
float entradax(void);
float entraday(void);
float velocx(void);
float velocy(void);
void salidax(int);
void saliday(int);
int base=0x260;
int port_A=base+0x10,port_B=base+0x11,port_C=base+0x12,conf=base+0x13;
int dac0l=base+4,dac0h=base+5,dac1l=base+6,dac1h=base+7,CA2=base+0X16;
int COMR1=base,COMR2=base+1,COMR3=base+2,COMR4=base+0XF,
    DMATC=base+0XA,TICR=base+0XC,STAT=base;
int ADCCR=base+8,ADCFIFO=base+0XA,CA0=base+0X14,CAMOD=base+0X17,
    CB0=base+0X18,CBMOD=base+0X1B;
int pw1=240,pw2=240,px1=479,px2=449,pu1=240,pu2=240,pv1=240,pv2=240;
float posxa=0,posya=0,x1=0,x2=0,w1=0,w2=100,r=50,t=0,t1=0,t2=0,timer=0;
char buffer [40];
FILE *stream;
void main(){
int vol_dec=0,davail=0;
_setvideomode(_VRES16COLOR);
grafico();
configurar();

```

## 84 APÉNDICE B. PROGRAMAS EMPLEADOS PARA EL DISEÑO DE CONTROLADORES.

```
stream = fopen( "prxsrn.dat" "w" );
while(r!=9){
do{
davail=inp(STAT);
davail=davail&1;
}while(!davail);
vol_dec=entrada();
cambiar();
t=t+T;
calculo();
}
salidax(0x7FF);
saliday(0x7FF);
_setvideomode( _DEFAULTMODE );
fclose(stream);
}
void configurar(void){// Subrutina para configurar la targeta SAD
outp(COMR1,0);
outp(COMR2,0);
outp(COMR3,0);
outp(COMR4,0);
outp(CAMOD,0X34);
outp(CA0,0X10);
outp(CA0,0X27);
outp(CAMOD,0X70);
outp(ADCCR,0);
inp(ADCFIFO);
inp(ADCFIFO);
outp(COMR2,4);
outp(conf,0x99); /*Configuracion, PtoA y PtoC=Ent.,PtoB=Sal.*/
}
int entrada(void){ // subrutina para leer la velocidad del motor
int P_baja,P_alta;
P_baja=inp(ADCFIFO); /*Ent. parte baja*/
P_alta=inp(ADCFIFO); /*Ent. parte alta*/
P_alta=P_alta<<8;
P_alta=P_alta&0xFF00;
return P_baja|P_alta; /*Volt. en decimal*/
}
void grafico(void){// Subrutina para preparar modo gráfico
_setbkcolor(_WHITE);
_clearscreen(_GCLEARSCREEN);
```

```

/*INICIALIZACION DE MODO GRAFICO*/
_rectangle(_GBORDER,0,0,639,479);
_moveto(1,240);
_lineto(638,240);
}
void graficar(float w,float x,float u,float dx){ // Subrutina para graficar
pw2=478-(int)((float)477*((float)100+w)/(float)200);
px2=478-(int)((float)477*((float)100+x)/(float)200);
pu2=478-(int)((float)477*((float)100+u)/(float)200);
pv2=478-(int)((float)477*((float)100+dx)/(float)200);
timer=timer+1;
if(timer>5){
if(t2>639){
t1=0;t2=0;
grafico();
}
t2=t2+1;
_setcolor(8);
_moveto(t1,pw1);_lineto(t2,pw2);
_setcolor(12);
_moveto(t1,px1);_lineto(t2,px2);
_setcolor(14);
_moveto(t1,pu1);_lineto(t2,pu2);
_setcolor(9);
_moveto(t1,pv1);_lineto(t2,pv2);
t1=t2;pw1=pw2;px1=px2;pu1=pu2;pv1=pv2;
timer=0;
}
_setcolor(15);
}
void control(float u){ // Subrutina de salida del control
int vol_sal,rango,zs,zi,z=0,li=0x6FF,ls=0x8FF;
float res;
if(u>200)
u=200;
if(u<-200)
u=-200;
if(u>0){
zs=0x7FF+z;
rango=ls-zs;
res=(float)rango/(float)100.0; /*Resolucion de salida*/
vol_sal=(int)(res*u)+zs; /*Salida del controlador*/

```

## 86 APÉNDICE B. PROGRAMAS EMPLEADOS PARA EL DISEÑO DE CONTROLADORES.

```
salidax(vol_sal);
}
else if(u<0){
zi=0x7FF-z;
rango=zi-li;
res=(float)rango/(float)100.0; /*Resolucion de salida*/
vol_sal=zi+(int)(res*u); /*Salida del controlador*/
salidax(vol_sal);
}
else
salidax(0x7FF);
}
float entradax(void){// Subrutina para leer posición en X
unsigned int P_baja,P_alta,max_x=0xFE65,pos_dec;
int pos_dec;
outp(port_B,0xF0); /*Habilitar parte baja de la pos.*/
P_baja=inp(port_A); /*Ent. parte baja*/
outp(port_B,0xF1); /*Habilit. parte alta*/
P_alta=inp(port_A); /*Ent. parte alta*/
P_alta=P_alta<<8;
P_alta=P_alta&0xFF00;
pos_dec=P_baja|P_alta; /*Pos. en decimal*/
if(pos_dec>0XFF00){
pos_dec=pos_dec;
return (float)pos_dec/(float)max_x*(float)100.0;
}
return (float)pos_dec/(float)max_x*(float)100.0; /*Posicion en Porcentaje*/
}
float entraday(void){// Subrutina para leer posición en Y
unsigned int P_baja,P_alta,pos_decy,max_y=0XC41C;
int pos_dec;
outp(port_B,0xF2); /*Habilitar parte baja de la pos.*/
P_baja=inp(port_A); /*Ent. parte baja*/
outp(port_B,0xF3); /*Habilit. parte alta*/
P_alta=inp(port_A); /*Ent. parte alta*/
P_alta=P_alta<<8;
P_alta=P_alta&0xFF00;
pos_decy=P_baja|P_alta; /*Pos. en decimal*/
if(pos_decy>0XFF00){
pos_dec=pos_decy;
return (float)pos_dec/(float)max_y*(float)100.0;
}
}
```



```

return (float)pos_decy/(float)max_y*(float)100.0; /*Posicion en Porcentaje*/
}
float velocx(){// Subrutina para leer la velocidad en X
float posx,v;
posx=entradax();
v=(posx-posxa)/T;
posxa=posx;
return v;
}
float velocity(){// Subrutina para leer la velocidad en Y
float posy,v;
posy=entraday();
v=(posy-posya)/T;
posya=posy;
return v;
}
void salidax(int vol_sal){// Subrutina para enviar voltaje al servopropulsor X
int sal1,sal2;
sal1=vol_sal&0xFF;
sal2=vol_sal>>8;
sal2=sal2&0xFF;
outp(dac0l,sal1);
outp(dac0h,sal2);
}
void saliday(int vol_sal){ // Subrutina para enviar voltaje al servopropulsor Y
int sal1,sal2;
sal1=vol_sal&0xFF;
sal2=vol_sal>>8;
sal2=sal2&0xFF;
outp(dac1l,sal1);
outp(dac1h,sal2);
}
void cambiar(void){ // Subrutina para cambiar la referencia
_settextposition( 2,2 );
sprintf(buffer,"ref=%0.4f ",r);
_outtext(buffer);
if(kbhit()){ /*Cambio de la Referencia*/
_settextposition( 2,2+4 );
scanf("%f",&r);
_settextposition( 2,2 );
sprintf(buffer,"u=%0.4f ",r);
_outtext(buffer);
}
}

```

```
}
}
```

**Subrutina del PROGRAMA PRMXS.CPP para calcular la ley de control del PRRS.**

```
void calculo(void){ // Calculo de la ley de control
float e,de,u,fu,fe,w1a,w2a,x1a,x2a,k1=-.23,k2=-.08,k3=.22,k4=.1;
float al=1,a=1.73,b=86.8,s,sign,M,C=20,ep=1;
x1=(entradax()-(float)50)*6.61;
x2=velocx()*6.61;
w1a=w1+T*(al*w2);
w2a=w2+T*(-al*w1);
w1=w1a;w2=w2a;
e=x1-w1;
de=x2-al*w2;
s=C*e+de;
if(s>0) sign=1;
else sign=-1;
u=k1*x1+k2*x2+k3*w1+k4*w2;
if(u>0) fe=1.3;
else if(u<0) fe=-1.3;
else fe=0;
if(fabs(e)>ep) M=0;
else M=16;
u=u-M*sign*fabs(e)+fe;
if(u>8) u=8;
if(u<-8) u=-8;
if(u>1.3) fu=b*1.3;
else if(u<-1.3) fu=-b*1.3;
else fu=b*u;
graficar(w1,x1,e*10,u*10);
//x1a=x1+T*x2;
//x2a=x2+T*(-a*x2+b*u-fu);
//x1=x1a;x2=x2a;
fprintf(stream,"%f %f %f %f %f\n",t,w1,x1,e,u);
control(u*25);
}
```

**Subrutina del PROGRAMA PREMXS.CPP para calcular la ley de control del PRRE.**

```
void calculo(void){
float al=1,a=1.73,b=86.8,u,fu,e,de,fe,s,sign,M,C=20,ep=1;
float w1a,w2a,x1a,x2a,z1a,z2a,z3a,z4a,k1=-.23,k2=-0.08,k3=.22,k4=.1;
float f11=-13.96,f12=1,f13=13.96,g1=13.96,f21=-19.86,
```

```

    f22=-9,f23=18.86,f24=9,g2=-.14;
float f31=-5.69,f33=5.69,f34=1,g3=5.69,f41=19.84,f43=-20.84,g4=-19.84;
//x1=(entradox()-(float)50)*6.61;
//x2=velocx()*6.61;
w1a=w1+T*(al*w2);
w2a=w2+T*(-al*w1);
w1=w1a;w2=w2a;
e=x1-w1;
s=C*e;
if(s>0) sign=1;
else sign=-1;
if(fabs(e)>ep) M=0;
else M=0;
z1a=z1+T*(f11*z1+f12*z2+f13*z3+g1*e);
z2a=z2+T*(f21*z1+f22*z2+f23*z3+f24*z4+g2*e);
z3a=z3+T*(f31*z1+f33*z3+f34*z4+g3*e);
z4a=z4+T*(f41*z1+f43*z3+g4*e);
u=k1*z1+k2*z2+k3*z3+k4*z4;
z1=z1a;z2=z2a;z3=z3a;z4=z4a;
if(u>0) fe=1.3;
else if(u<0) fe=-1.3;
else fe=0;
u=u-M*fabs(e)*sign+fe;
if(u>8) u=8;
if(u<-8) u=-8;
if(u>1.3) fu=b*1.3;
else if(u<-1.3) fu=-b*1.3;
else fu=b*u;
graficar(w1,x1,e*10,u*10);
x1a=x1+T*x2;
x2a=x2+T*(-a*x2+b*u-fu);
x1=x1a;x2=x2a;
fprintf(stream,"%f %f %f %f %f\n",t,w1,x1,e,u);
//control(u*12.5);
}

```

**Subrutina del PROGRAMA PRRMXS.CPP para calcular la ley de control del regulador robusto.**

```

void calculo(void){
float a=1.73,b=86.8,al=1,u,fu,e,de,fe,s,sign,M,C=4,ep=1;
float w1a,w2a,x1a,x2a,z1a,z2a,z3a,z4a,k1=-.23,k2=-0.08,k3=-.1,k4=-.01;
float f11=-8.27,f12=1,f13=1,g1=8.27,f21=-19.86,f22=-9,f23=-9,f24=-1,g2=-.14;
float f31=-19.84,f33=0,f34=1,g3=19.84,f41=-5.69,f43=-1,g4=5.69;

```

## 90 APÉNDICE B. PROGRAMAS EMPLEADOS PARA EL DISEÑO DE CONTROLADORES.

```
x1=(entradax()-(float)50)*6.61;
x2=velocx()*6.61;
w1a=w1+T*(al*w2);
w2a=w2+T*(-al*w1);
w1=w1a;w2=w2a;
e=x1-w1;
z1a=z1+T*(f11*z1+f12*z2+f13*z3+g1*e);
z2a=z2+T*(f21*z1+f22*z2+f23*z3+f24*z4+g2*e);
z3a=z3+T*(f31*z1+f33*z3+f34*z4+g3*e);
z4a=z4+T*(f41*z1+f43*z3+g4*e);
u=k1*z1+k2*z2+k3*z3+k4*z4;
z1=z1a;z2=z2a;z3=z3a;z4=z4a;
s=C*e;
if(s>0) sign=1;
else sign=-1;
if(fabs(e)>ep) M=0;
else M=2;
if(u>0) fe=1.3;
else if(u<0) fe=-1.3;
else fe=0;
u=u+fe-M*fabs(e)*sign;
if(u>8) u=8;
if(u<-8) u=-8;
if(u>1.3) fu=b*1.3;
else if(u<-1.3) fu=-b*1.3;
else fu=b*u;
graficar(w1,x1,e*10,u*10);
x1a=x1+T*x2;
x2a=x2+T*(-a*x2+b*u-fu);
x1=x1a;x2=x2a;
fprintf(stream,"%f %f %f %f %f\n",t,w1,x1,e,u);
//control(u*12.5);
}
```

**Subrutina del PROGRAMA PRNMXS.CPP para calcular la ley de control del PRRS-NL.**

```
void calculo(void){
float e1,e2,ga,u,fu,w1a,w2a,x1a,x2a,k1=-.41,k2=-.15;
float s,sign,M,C=40,ep=1;
x1=(entradax()-(float)50)*6.61;
x2=velocx()*6.61;
w1a=w1+T*(al*w2);
w2a=w2+T*(-al*w1);
```

```

w1=w1a;w2=w2a;
e1=x1-w1;
e2=x2-a1*w2;
s=C*e1+e2;
if(s>0) sign=1;
else sign=-1;
if(fabs(e1)>ep) M=0;
else M=16;
ga=a*w1+b*w2+c*w1*w1+d*w1*w2+e*w2*w2+f*w1*w1*w1
  +g*w1*w1*w2+h*w1*w2*w2+i*w2*w2*w2;
u=ga+k1*e1+k2*e2-M*fabs(e1)*sign;
if(u>8) u=8;
if(u<-8) u=-8;
if(u>1.3) fu=b*1.3;
else if(u<-1.3) fu=-b*1.3;
else fu=b0*u;
x1a=x1+T*x2;
x2a=x2+T*(-a1*x2+b0*u-fu);//+b2*u*u+b3*u*u*u);
x1=x1a;x2=x2a;
graficar(w1,x1,e1*10,u*10);
fprintf(stream,"%f %f %f %f %f\n",t,w1,x1,e1,u);
control(u*12.5);
}

```





# Bibliografía

- [1] **Castillo Bernardino**, (1997). “*Almost Tracking Through Singular Points Via the Nonlinear Regulator Theory*”, IV Congreso Latinoamericano de Control Automático, Vol.2, Puebla, Pue. México, Nov. 1990.
- [2] **Ceballos Francisco J.**,(1997). “*Visual C++ Aplicaciones para windows*”, Alfa Omega grupo editor.
- [3] **Fitzgerald, Kingsley, Umans**, Cuarta Ed. (1985). “*Electric Machinery*”, Mc. Graw Hill.
- [4] **Francis B. A.**, (1977). “*The linear multivariable regulator problem*”, SIAM J. Contr. Optimiz., Vol. 2, pp. 486-505.
- [5] **Francis B. A. y Wonham W. M.**, (1975). “*The internal model principle for linear multivariable regulators*”, J. Appl. Math. Optimiz., Vol. 2, pp. 170-194.
- [6] **Franklin G.F., Powell J.D., Workman M.L.**, (1990). “*Digital Control of Dynamic Systems*”, 2nd., Adison-Wesley Publishing Co., Inc.
- [7] **Isidori A.**, (1989). “*Nonlinear Control Systems*”, An Introduction. 2nd Ed. Springer-Verlag, N. Y. Inc.
- [8] **Isidori A., Byrnes C. I.**, (1990). “*Output Regulation of Nonlinear Systems*”,IEEE Trans. Automatic Control, Vol. 35, No. 2, pp. 131-140.
- [9] **Kailath Thomas**, (1980). “*Linear Systems*”, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- [10] **Kernighan Brian, Ritchie Dennis**, Segunda Ed. (1988). “*El lenguaje de programación C*”, Prentice Hall.
- [11] **Knobloch H., Isidori A.,Flockersi D.**, (1993). “*Topics in Control Theory*”, Birkhäuser Verlag.
- [12] **Kuo Benjamin C.**, Segunda Ed. (1991). “*Sistemas Automáticos de control*”, CECSA.
- [13] **Lab-PC+ User Manual**, (1994). “*Low-cost Multifunction I/O Board for PC/XT/AT and IBM PS/2 Computers*”, NATIONAL INSTRUMENTS.

- [14] **Negrete Salvador**, (1996). "*Aplicación de Técnicas de Regulación Lineal y No Lineal para el Sistema Balancín-Péndulo Invertido*" Tesis de Maestría, CINVESTAV-IPN, Depto. de Ing. Eléctrica, México, D.F.
- [15] **Ogata Katsuhiko**, Primera Ed. (1987). "*Dinámica de sistemas*", Prentice Hall.
- [16] **Ogata Katsuhiko**, Segunda Ed. (1993). "*Ingeniería de Control Moderno*", Prentice Hall.
- [17] **Ramos L. E., Castillo Bernardino\***, (1997). "*Robust regulation via sliding mode for an underactuated system*", CINVESTAV-IPN, Unidad Guadalajara.
- [18] **The MathWorks**, (1991). "*Control System Toolbox*", Inc. 386-Matlab.
- [19] **Utkin Vadim I.**, (1992). "*Sliding Modes in Control Optimization*", Springer-Verlag Berlin.



**CENTRO DE INVESTIGACION Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL IPN  
UNIDAD GUADALAJARA**

El Jurado designado por el Laboratorio de Ingeniería Eléctrica y Ciencias de la Computación del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, aprobó la tesis: "Control de un Sistema Electromecánico Planar de Dos Grados de Libertad", el día 3 de abril de 1998.

  
Dra. Ofelia Begovich Mendoza

  
Dr. Arturo Román Messina

  
Dr. Alexander Loukianov

  
M.en C. Alejandro Malo Tamayo



CINVESTAV  
BIBLIOTECA CENTRAL



SSIT000003829