



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS  
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemáticas

**Proyecciones en el álgebra de Toeplitz**

T E S I S

que presenta

**Diana Marcela Erazo Borja**

para obtener el grado de

**Maestra en Ciencias en la  
especialidad de Matemáticas**

Directora de Tesis

**Dra. Maribel Loaiza Leyva**

Ciudad de México

Enero 2025



# Agradecimientos

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYHT) por haberme otorgado el apoyo económico, lo que me permitió llevar a cabo mis estudios de maestría y dedicarme plenamente a mi formación académica y profesional.

A mis padres Adriana y Armando, les debo todo lo que soy. Gracias por su apoyo incondicional, por su amor infinito y por creer en mí en cada paso de este camino. A mi familia, quienes han sido siempre mi refugio y mi mayor fuente de inspiración, gracias por su cariño, paciencia y por motivarme a perseguir mis sueños.

A la Dra Maribel Loaiza, mi asesora, gracias por su guía a lo largo de este proceso. Sus enseñanzas y consejos fueron esenciales para culminar este proyecto.

Extiendo también mi gratitud a mis compañeros y amigos, quienes compartieron conmigo esta experiencia de aprendizaje, por su apoyo, compañía y palabras de ánimo en los momentos más desafiantes.

Finalmente, agradezco a todas aquellas personas que, de una y otra manera, contribuyeron mi formación y al desarrollo de este trabajo. Su influencia ha sido invaluable en mi camino hacia la realización de este logro.



# Resumen

En esta tesis se estudian ciertos tipos de símbolos para los cuales el operador de Toeplitz es una proyección sobre el espacio de Hilbert de todas las funciones analíticas  $L^2$ -integrables, llamado el espacio de Bergman  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ .

Este trabajo amplía los resultados presentados en [7], al considerar distintos casos particulares para el símbolo del operador de Toeplitz. En particular, se analiza cuando el símbolo es una función radial en el disco unitario  $\mathbb{D}$ , una función homogénea o vertical sobre el semiplano superior  $\Pi$ , y una función continua sobre el disco unitario cerrado  $\overline{\mathbb{D}}$ . Los resultados obtenidos muestran que, para que el operador de Toeplitz actúe como una proyección en estos casos, el símbolo debe ser necesariamente la función cero o la identidad, es decir, las únicas soluciones posibles son las triviales.

# Abstract

In this thesis, certain types of symbols are studied for which the Toeplitz operator acts as a projection onto the Hilbert space of all  $L^2$ -integrable analytic functions, known as the Bergman space  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ .

This work extends the results presented in [7] by considering various specific cases for the symbol of the Toeplitz operator. In particular, it analyzes cases where the symbol is a radial function on the unit disk  $\mathbb{D}$ , a homogeneous or a vertical function on the upper half-plane  $\Pi$ , and a continuous function on the closed unit disk  $\overline{\mathbb{D}}$ . The results obtained show that, for the Toeplitz operator to act as a projection in these cases, the symbol must necessarily be either the zero function or the identity function; in other words, the only possible solutions are trivial.



# Contenido

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introducción</b>  | <b>9</b>  |
| <b>1. Operadores lineales y proyecciones</b>                           | <b>11</b> |
| 1.1. Operadores lineales en espacios de Hilbert . . . . .              | 11        |
| 1.2. Proyecciones ortogonales . . . . .                                | 15        |
| 1.3. Operadores compactos . . . . .                                    | 21        |
| 1.4. Álgebras cociente y el espectro esencial de un operador . . . . . | 22        |
| 1.5. Espacios de Hilbert con núcleo reproductor . . . . .              | 24        |
| 1.6. Funciones Armónicas . . . . .                                     | 27        |
| <b>2. El espacio de Bergman</b>  | <b>31</b> |
| 2.1. El espacio de Bergman con peso . . . . .                          | 32        |
| 2.2. El espacio de Bergman como espacio de Hilbert . . . . .           | 35        |
| 2.3. Proyección Ortogonal de Bergman . . . . .                         | 38        |
| <b>3. Operadores de Toeplitz</b>                                       | <b>40</b> |
| 3.1. Operadores de Toeplitz y de Hankel . . . . .                      | 40        |
| 3.2. La subálgebra $AQ$ . . . . .                                      | 44        |
| 3.3. La transformada de Berezin y sus propiedades . . . . .            | 45        |
| 3.4. Operadores de Toeplitz de rango finito . . . . .                  | 47        |
| <b>4. Algunos símbolos particulares</b>                                | <b>55</b> |
| 4.1. Símbolos radiales . . . . .                                       | 55        |
| 4.2. Símbolos homogéneos . . . . .                                     | 60        |
| 4.3. Símbolos verticales . . . . .                                     | 61        |
| 4.4. Símbolo continuo en el disco cerrado . . . . .                    | 62        |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>5. Proyecciones en el álgebra de Toeplitz</b>            | <b>63</b> |
| 5.1. Operadores de Toeplitz que son proyecciones . . . . .  | 63        |
| 5.1.1. Algunos símbolos especiales . . . . .                | 64        |
| 5.1.2. Símbolos radiales, verticales y homogéneos . . . . . | 65        |
| 5.2. Producto de operadores de Toeplitz . . . . .           | 68        |
| <b>Bibliografía</b>   | <b>77</b> |

# Introducción

Los operadores de Toeplitz derivan de la investigación en teoría de matrices infinitas y, con el tiempo, han evolucionado para desempeñar un papel crucial en diversas áreas de las matemáticas y sus aplicaciones. Estos operadores reciben su nombre en honor al matemático alemán Otto Toeplitz, quien trabajó en diversos aspectos del álgebra lineal y análisis durante la primera mitad del siglo XX.

Por otro lado, las proyecciones son una herramienta esencial en el análisis funcional debido a su capacidad para descomponer espacios, simplificar problemas complejos y analizar propiedades específicas de subespacios. En particular, desempeñan un papel destacado en la teoría espectral, especialmente en la descomposición de operadores autoadjuntos y normales en espacios de Hilbert. Esto plantea una pregunta natural: ¿bajo qué condiciones un operador de Toeplitz actúa como una proyección?

El objetivo principal de esta tesis es estudiar ciertos símbolos acotados específicos para los cuales el operador de Toeplitz asociado a estos símbolos sea una proyección en el espacio de Bergman  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ . Este trabajo se basó en los resultados presentados en [7], ampliándolos al considerar casos particulares de interés.

En el Capítulo 1 se exponen resultados fundamentales de la teoría de operadores, proporcionando las herramientas básicas y necesarias para abordar ciertos aspectos clave de la teoría espectral. Además, se estudian los operadores compactos los cuales son esenciales para definir el álgebra de Calkin, y así poder hablar sobre el espectro esencial de un operador. Se incluye una breve introducción a los espacios de Hilbert con núcleo reproductor, ya que esta propiedad es característica de los espacios de Bergman. Por último, se realiza una breve discusión sobre las funciones armónicas, las cuales serán indispensables para analizar el producto de dos operadores de Toeplitz.

En el Capítulo 2 se definen los espacios de Bergman  $\mathcal{A}_\alpha^p(\mathbb{D})$ , definidos para un parámetro fijo  $\alpha > -1$ . En particular, el espacio de Bergman  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$  se destaca por ser un espacio de Hilbert, lo que permite abordar conceptos como el núcleo reproductor y la proyección del espacio  $L^2(\mathbb{D}, dA)$  sobre  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ . Se presenta una base ortonormal para este espacio, y, además, se proporciona la fórmula integral explícita para el núcleo reproductor y la proyección de Bergman.

En el Capítulo 3 se introducen los operadores de Toeplitz, que constituyen el tema principal de esa tesis. También se definen los operadores de Hankel, los cuales están estrechamente relacionados con los de Toeplitz a través del semiconmutador. Se analiza la subálgebra compuesta por los símbolos que hacen que el operador de Hankel sea compacto. Además, se introduce la transformada de Berezin, destacando su conexión con las funciones armónicas y su propiedad fundamental de conmutar con el operador laplaciano invariante. Finalmente, se estudian los operadores de Toeplitz y de Hankel en el caso particular en que poseen rango finito.

En el Capítulo 4, se estudian los operadores de Toeplitz en diferentes contextos, considerando cuatro casos principales para el símbolo:

1. Cuando el símbolo es una función radial en el disco unitario
2. Cuando es una función homogénea y vertical definida en el semiplano superior.
3. Cuando es una función continua en el disco unitario cerrado del plano complejo.

Para los primeros tres casos, se toman como base los resultados presentados en [13], donde se demuestra que el operador de Toeplitz se transforma unitariamente mediante un operador de multiplicación, lo que facilita el estudio de su comportamiento y propiedades. En el caso de las funciones continuas sobre el disco unitario cerrado, el enfoque sigue del estudio en [10], donde se caracteriza el álgebra cociente  $\mathcal{T}/\mathcal{K}$  por medio de las funciones continuas en la frontera del disco unitario.

Finalmente, en el Capítulo 5 se estudia en detalle bajo qué condiciones un operador de Toeplitz actúa como una proyección en el espacio de Bergman, considerando diferentes casos particulares para el símbolo del operador.

# Capítulo 1

## Operadores lineales y proyecciones

El estudio de operadores lineales acotados en espacios de Hilbert es fundamental en el análisis funcional, por lo que en este capítulo damos una breve introducción a estos operadores mostrando sus propiedades elementales. Nos enfocamos en el estudio de proyecciones ortogonales pues son indispensables en el estudio de operadores de Toeplitz. También estudiamos algunas de las propiedades de los operadores compactos y de las álgebras cociente. Por último se definen los espacios de Hilbert con núcleo reproductor y se estudian algunas de las propiedades principales, tales como la existencia y unicidad del núcleo reproductor.

El objetivo de este capítulo es establecer una base sólida para estudiar operadores lineales más complejos como los operadores de Toeplitz.

### 1.1. Operadores lineales en espacios de Hilbert

Un operador lineal  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ , con  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert, se dice *acotado* si existe una constante  $c > 0$  tal que

$$\|Tx\| \leq c\|x\|, \tag{1.1}$$

para todo  $x \in \mathcal{H}$ . Por lo tanto, definimos *la norma del operador*  $T$  como

$$\|T\| := \inf\{c > 0 : c \text{ cumple (1.1)}\}.$$

La norma anterior también puede calcularse con las siguientes fórmulas:

$$\|T\| = \sup_{x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|. \quad (1.2)$$

La colección de todos los operadores lineales acotados definidos en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  se denota por  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Este conjunto es un espacio de Banach con la norma definida en (1.2). De hecho, definiendo la multiplicación como la composición de operadores

$$(ST)(x) = S(T(x)),$$

se tiene que  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  es un álgebra de Banach con identidad  $I$  [15, Ejemplo 2.3].

Un ejemplo de un operador lineal acotado es el operador de multiplicación, el cual se usa frecuentemente en el desarrollo de este trabajo y es fundamental para definir los operadores de Toeplitz.

**Ejemplo 1.** Sea  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  un espacio de medida  $\sigma$ -finita y  $\phi \in L^\infty(X, \mu)$ . El operador de multiplicación por la función  $\phi$ ,  $M_\phi : L^2(X, \mu) \rightarrow L^2(X, \mu)$ , se define mediante la siguiente fórmula:

$$M_\phi(f) := \phi f,$$

para toda  $f \in L^2(X, \mu)$ . Es claro que  $M_\phi$  es un operador lineal. Además es acotado, pues

$$\|M_\phi(f)\|^2 = \int_X |\phi f|^2 d\mu \leq \|\phi\|_\infty \|f\|^2.$$

Entonces  $M_\phi \in \mathcal{B}(L^2(X, \mu))$  y  $\|M_\phi\| \leq \|\phi\|_\infty$ . De hecho,  $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$ . Para ver esto, supongamos que  $\alpha < \|\phi\|_\infty$ . Note que el conjunto  $E := \{x \in X : |\phi(x)| > \alpha\}$  es tal que  $\mu(E) > 0$ . Como  $\mu$  es  $\sigma$ -finita, podemos tomar un subconjunto  $F$  de  $E$  tal que  $0 < \mu(F) < \infty$ . Luego, la función característica de  $F$ , denotada por  $\chi_F$  pertenece a  $L^2(X, \mu)$  y tenemos que

$$\|M_\phi(\chi_F)\|^2 = \int_X |\phi \chi_F|^2 d\mu = \int_F |\phi|^2 d\mu > \alpha^2 \mu(F) = \int_X |\chi_F|^2 d\mu.$$

Entonces  $\|M_\phi\| > \alpha$ , para todo  $\alpha < \|\phi\|_\infty$ . Por lo tanto  $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$ .

Un concepto importante al estudiar operadores lineales y que interesa mucho conocer es su espectro, ya que proporciona información esencial sobre las propiedades y el comportamiento del operador.

El *espectro* de un operador  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  es el conjunto de números complejos  $\lambda$  para los cuales  $T - \lambda I$  no es invertible. Este conjunto lo denotamos por  $\sigma(T)$ . El complemento de  $\sigma(T)$  en  $\mathbb{C}$  se llama el *resolvente* de  $T$  y se denota por  $\rho(T)$ .

En el siguiente ejemplo examinamos el espectro del operador de multiplicación  $M_\phi$ , definido en el Ejemplo 1, y su relación con el rango esencial de la función  $\phi$ , denotado por  $\mathcal{ER}(\phi)$ . Recuerde que el rango esencial de  $\phi$  consiste en todos los números  $\lambda \in \mathbb{C}$  tales que para todo  $\epsilon > 0$ ,

$$\mu(\{x \in X : |\phi(x) - \lambda| < \epsilon\}) > 0.$$

**Ejemplo 2.** El espectro del operador de multiplicación  $M_\phi$  es el rango esencial de  $\phi$ . Para  $\lambda$  fuera de este espectro, el inverso de  $M_\phi - \lambda I$  es el operador de multiplicación  $M_{\frac{1}{\phi - \lambda}}$ .

Para demostrar lo anterior, note que si  $\lambda \notin \mathcal{ER}(\phi)$ , entonces existe  $\epsilon > 0$  tal que  $|\phi(x) - \lambda| \geq \epsilon$ ,  $x \in X$  (c.t.p.). Luego, la función  $\psi = \frac{1}{\phi - \lambda} \in L^\infty(X, \mu)$ , por lo que el operador  $M_\psi$  está bien definido y es acotado. Es fácil ver que

$$M_\psi(M_\phi - \lambda I) = (M_\phi - \lambda I)M_\psi = I.$$

Por lo que  $M_\psi$  es el inverso del operador  $M_\phi - \lambda I$  y así tenemos que  $\lambda \in \rho(M_\phi)$ . Hemos probado que  $\sigma(M_\phi) \subset \mathcal{ER}(\phi)$ .

Por otro lado, si  $\lambda \in \mathcal{ER}(\phi)$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que

$$\mu\left(\left\{x \in X : |\phi(x) - \lambda| < \frac{1}{n}\right\}\right) > 0.$$

Como  $\mu$  es  $\sigma$ -finita, podemos encontrar un subconjunto medible  $E_n \subseteq \{x \in X : |\phi(x) - \lambda| < 1/n\}$  tal que  $0 < \mu(E_n) < \infty$  y definir  $h_n(x) := \frac{\chi_{E_n}(x)}{(\mu(E_n))^{\frac{1}{2}}}$ .

Es claro que  $\|h_n\|_{n \in \mathbb{N}} = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Además

$$\|(\phi - \lambda)(h_n)\|^2 = \int_X |(\phi - \lambda)h_n|^2 d\mu \leq \frac{1}{n} \|h_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Por lo tanto  $M_\phi - \lambda I$  no es invertible y así  $\lambda \in \sigma(M_\phi)$ .

**Ejemplo 3.** Sea  $\mathcal{K}$  un conjunto compacto y Hausdorff. Denotamos por  $C(\mathcal{K})$  el conjunto de funciones complejo valuadas, continuas y definidas en  $\mathcal{K}$ . Note que si  $f \in C(\mathcal{K})$ ,

$$\rho(f) = \{\lambda \in \mathbb{C} : f(x) \neq \lambda, \forall x \in \mathcal{K}\}.$$

De esto se concluye que  $\sigma(f) = f(\mathcal{K})$ , para cada  $f \in C(\mathcal{K})$ .

Sea  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  y  $y \in \mathcal{H}$  fijo. La fórmula  $x \mapsto \langle Tx, y \rangle$  define un funcional lineal acotado. El Teorema de Representación de Riesz garantiza que existe un único elemento  $y^* \in \mathcal{H}$  tal que  $\langle Tx, y \rangle = \langle x, y^* \rangle$ . El operador  $y \mapsto y^*$  se llama el *operador adjunto de  $T$*  y se denota por  $T^*$ . Este operador es lineal y acotado. Además,  $\|T\| = \|T^*\|$  y  $\|T^*T\| = \|T\|^2$  (Véase [6, Sección 3.9]).

**Teorema 1.1.** *Sea  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Entonces  $T - \lambda I$  es invertible sí y solo si  $T^* - \bar{\lambda}I$  es invertible, es decir,  $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$ .*

*Demostración.* El operador  $T^* - \bar{\lambda}I$  es invertible si y solo si existe  $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  tal que  $(T^* - \bar{\lambda}I)S = I$ , lo cual es equivalente a  $S^*(T - \lambda I) = I$ . Es decir,  $\lambda \notin \sigma(T)$ .  $\square$

Si un operador  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  tiene norma menor que 1, la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$  existe y es fácil verificar que es el operador inverso de  $I - T$ . Esto implica que, si  $\lambda \in \mathbb{C}$  es tal que  $|\lambda| > \|T\|$ ,  $\lambda \notin \sigma(T)$ . Para ser precisos, si  $|\lambda| > \|T\|$ , entonces  $\|\frac{T}{\lambda}\| < 1$  y por ello  $I - \frac{T}{\lambda}$  es invertible, es decir que  $\lambda I - T$  es invertible, implicando que  $\lambda \notin \sigma(T)$ . Como resultado principal tenemos que

$$\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\|\}.$$

Lo anterior nos asegura que el espectro de cualquier elemento  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  está contenido en el disco cerrado con radio  $\|T\|$  y con centro en el origen. De hecho, se tiene el siguiente teorema (Véase [6, Sección 7.3]).

**Teorema 1.2.** *El espectro de un operador es compacto y no vacío.*

Definimos el *radio espectral* de  $T$  como

$$r(T) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

El siguiente teorema da una fórmula para el radio espectral en términos de la norma del operador. Su demostración se puede encontrar en [9, Teorema 5.15].

**Teorema 1.3 (Fórmula del radio espectral).** Para  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ,

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

Observe que si  $S, T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  satisfacen que  $ST = TS$ , entonces es fácil ver que la fórmula del radio espectral implica que  $r(ST) \leq r(S)r(T)$ .

**Teorema 1.4.** Sea  $T$  un operador normal en  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Entonces

$$r(T) = \|T\|.$$

*Demostración.* Primero supongamos que  $T$  es un operador autoadjunto. Es fácil demostrar que

$$\|T\|^2 = \|TT^*\| = \|T^2\|. \quad (1.3)$$

Es claro que  $T^2$  también es autoadjunto, así que podemos reemplazar  $T$  por  $T^2$  en (1.3) y tenemos que  $\|T\|^4 = \|T^4\|$ . Por inducción podemos ver que si  $n \geq 1$

$$\|T^{2^n}\| = \|T\|^{2^n}.$$

Usando la fórmula del radio espectral (Teorema 1.3), tenemos que

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^{2^n}\|^{1/2^n} = \|T\|.$$

Supongamos ahora que  $T$  es un operador normal. Es claro que  $T^*T$  es autoadjunto, y por la conclusión anterior,  $r(T^*T) = \|T^*T\|$ . Entonces, teniendo en cuenta que  $T$  conmuta con  $T^*$

$$r(T)^2 = r(T^*)r(T) \geq r(T^*T) = \|T^*T\| = \|T\|^2.$$

Por otro lado,  $r(T) \leq \|T\|$ . Concluyendo que  $r(T) = \|T\|$ .  $\square$

## 1.2. Proyecciones ortogonales

Un subconjunto  $M$  de un espacio vectorial  $V$  es un *conjunto convexo* si para cada  $m_1, m_2 \in M$ , el segmento que une a  $m_1$  y  $m_2$  también está en  $M$ , es decir,  $tm_1 + (1-t)m_2 \in M$  para cualquier  $t \in [0, 1]$ . Es claro que cada subespacio vectorial es convexo y cada bola en un espacio lineal normado es convexa.

Si  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert y  $Y$  un subconjunto cerrado de  $\mathcal{H}$ , definimos la distancia de cualquier vector  $x$  en  $\mathcal{H}$  al conjunto  $Y$  como

$$\text{dist}(x, Y) := \inf_{y \in Y} \|x - y\|.$$

El siguiente resultado, tomado de [6, Sección 3.3], nos da una propiedad importante que se cumple en espacios con producto interno, en particular en espacios de Hilbert.

**Teorema 1.5.** *Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert y  $Y$  un subconjunto de  $\mathcal{H}$  no vacío, cerrado y convexo. Entonces para cada  $x \in \mathcal{H}$ , existe un único elemento  $y \in Y$  tal que*

$$\|x - y\| = \text{dist}(x, Y).$$

*Demostración.* Sea  $x \in \mathcal{H}$  fijo y definamos  $\delta := \text{dist}(x, Y)$ . Sea  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de elementos en  $Y$  tal que si  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\|x - y_n\| \rightarrow \delta. \tag{1.4}$$

Veamos que  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy en  $Y$ . Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $v_n := y_n - x$ . Es claro que para cualquier  $m$  y  $n \in \mathbb{N}$ , se cumplen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \|v_n - v_m\| &= \|y_n - y_m\|, \\ \|v_n + v_m\| &= \|y_n + y_m - 2x\| = 2 \left\| \frac{y_n + y_m}{2} - x \right\|. \end{aligned}$$

Por la convexidad de  $Y$ ,  $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in Y$ , luego,

$$\left\| \frac{y_n + y_m}{2} - x \right\| \geq \delta.$$

Ahora, por la identidad del paralelogramo y la desigualdad anterior

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= \|v_n - v_m\|^2 = 2\|v_n\|^2 + 2\|v_m\|^2 - \|v_n + v_m\|^2 \\ &\leq 2(\|v_n\|^2 + \|v_m\|^2) - 4\delta^2. \end{aligned}$$

Tomando el límite en la última desigualdad cuando  $m, n \rightarrow \infty$  y usando (1.4), se obtiene que

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2(\delta^2 + \delta^2) - 4\delta^2 = 0;$$

luego  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy en  $Y$ . Por hipótesis  $Y$  es cerrado, así que la sucesión  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  debe converger a algún  $y \in Y$ . Por la definición de  $\delta$  se tiene que  $\|x - y\| \geq \delta$ . Por otro lado, usando (1.4),

$$\|x - y\| \leq \|x - y_n\| + \|y_n - y\| \rightarrow \delta.$$

Esto muestra que  $\|x - y\| = \delta$ .

Ya hemos demostrado que existe  $y \in Y$  con las propiedades deseadas. Para demostrar que  $y$  es único, supongamos que existen  $y$  y  $y_0$  en  $Y$  tales que

$$\|x - y\| = \|x - y_0\| = \delta.$$

Usando la identidad del paralelogramo y teniendo en cuenta que  $\frac{1}{2}(y + y_0) \in Y$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \|y - y_0\|^2 &= \|(y - x) - (y_0 - x)\|^2 \\ &= 2\|y - x\|^2 + 2\|y_0 - x\|^2 - \|(y - x) + (y_0 - x)\|^2 \\ &= 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\left\|\frac{y + y_0}{2} - x\right\|^2 \\ &\leq 4\delta^2 - 4\delta^2 = 0. \end{aligned}$$

Luego  $\|y - y_0\|^2 = 0$  y de aquí tenemos que  $y = y_0$ .  $\square$

El siguiente lema nos asegura que si  $z = x - y$ , donde  $y$  es el único elemento de  $Y$  más cercano a  $x$ , entonces  $z$  es ortogonal al subespacio  $Y$ .

**Lema 1.6** (*Ortogonalidad*). *Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert y  $Y$  un subespacio de  $\mathcal{H}$  cerrado. Entonces para cada  $x \in \mathcal{H}$  fijo, el vector  $z = x - y$  es ortogonal a  $Y$ , donde  $y$  es el único elemento en  $Y$  más cercano a  $x$  (dado por el Teorema 1.5).*

*Demostración.* Supongamos que  $z = x - y$  no es ortogonal a  $Y$ . Por lo tanto, existe  $y_1 \in Y \setminus \{0\}$  tal que  $\beta := \langle z, y_1 \rangle \neq 0$ . Sea  $\alpha \in \mathbb{C}$  y note que

$$\begin{aligned} \|z - \alpha y_1\|^2 &= \langle z - \alpha y_1, z - \alpha y_1 \rangle \\ &= \|z\|^2 - \bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta} + |\alpha|^2\|y_1\|^2. \end{aligned}$$

Como  $y_1 \neq 0$ , podemos definir  $\alpha := \frac{\bar{\beta}}{\|y_1\|^2}$ . Así tenemos que

$$\|z - \alpha y_1\|^2 = \|z\|^2 - \frac{|\beta|^2}{\|y_1\|^2} < \|z\|^2 = \delta^2.$$

Pero por otro lado, como  $y - \alpha y_1 \in Y$ ,

$$\|z - \alpha y_1\|^2 = \|x - (y - \alpha y_1)\|^2 \leq \delta^2.$$

Por el Teorema 1.5  $y$  es único, entonces  $\|z - \alpha y_1\| = \|x - (y - \alpha y_1)\| = \delta$  si y solo si  $y_1 = 0$ ; lo cual es una contradicción, así que  $x - y \perp Y$ .  $\square$

Si  $Y$  es un subconjunto de  $\mathcal{H}$ , definimos *el complemento ortogonal* de  $Y$  como

$$Y^\perp := \{z \in \mathcal{H} : z \perp Y\}.$$

La continuidad del producto interno en un espacio de Hilbert implica que  $Y^\perp$  es un subespacio cerrado de  $\mathcal{H}$ .

**Teorema 1.7** (Suma Directa). *Cada espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , se puede representar como la suma directa de un subespacio cerrado  $Y \subseteq \mathcal{H}$  y su complemento ortogonal  $Y^\perp$ , es decir*

$$\mathcal{H} := Y \oplus Y^\perp.$$

*Demostración.* Sabemos que  $Y \subseteq \mathcal{H}$  es cerrado y  $\mathcal{H}$  es completo, entonces  $Y$  es completo. Como  $Y$  es convexo, por los Teoremas 1.5 y 1.6, para cada  $x \in \mathcal{H}$ , existe  $y \in Y$  tal que  $x = y + z$ , con  $z \in Y^\perp$ .

Esta representación es única, pues si adicionalmente existen  $y' \in Y$  y  $z' \in Y^\perp$  tal que  $x = y' + z'$ , tenemos que  $y - y' = z - z'$ . Pero  $z - z' \in Y^\perp$  lo que implica que  $y - y' \in Y$  y en  $Y^\perp$ . Entonces

$$y - y' \in Y \cap Y^\perp \iff y - y' \in 0 \iff y = y'.$$

Por lo tanto  $y = y'$  y  $z = z'$ .  $\square$

Por (1.7), para cada  $x \in \mathcal{H}$ , existen únicos  $y \in Y$  y  $z \in Y^\perp$  tal que

$$x = y + z. \tag{1.5}$$

La ecuación anterior da lugar a la función  $P_Y : \mathcal{H} \rightarrow Y$ , tal que  $P_Y x = y$ , donde  $y$  está dado por (1.5). El operador  $P_Y$  se llama *la proyección ortogonal* de  $\mathcal{H}$  sobre  $Y$ .

Es sencillo demostrar, usando la unicidad de la descomposición en (1.5), que  $P_Y$  es un operador lineal y la definición de  $P_Y$  implica que su espacio nulo o núcleo es  $Y^\perp$ . Además  $P_Y y = y$  para todo  $y \in Y$ . Esto implica que

$$P_Y^2 x = P_Y(P_Y x) = P_Y x,$$

por lo que  $P_Y^2 = P_Y$ . Esto es,  $P_Y$  es idempotente. Por otro lado, dado que  $P_Y x \in Y$  para todo  $x \in \mathcal{H}$  y  $P_Y y = y$  para todo  $y \in Y$ , se tiene que la imagen o rango de  $P_Y$  es precisamente  $Y$ .

La Ecuación 1.5 implica que

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2,$$

por lo que  $\|y\|^2 \leq \|x\|^2$  o  $\|P_Y x\|^2 \leq \|x\|^2$ . Esto último implica que  $P_Y$  es un operador acotado y  $\|P_Y\| \leq 1$ . Más aún, como  $P_Y y = y$  para todo  $y \in Y$ , tenemos que

$$\|P_Y\| = 1.$$

Por otro lado  $P_Y$  es autoadjunto, pues usando (1.5)

$$\langle P_Y x_1, x_2 \rangle = \langle P_Y(y_1 + z_1), x_2 \rangle = \langle y_1, y_2 + z_2 \rangle = \langle y_1, y_2 \rangle = \langle x_1, P_Y x_2 \rangle,$$

donde  $x_k = y_k + z_k$  es la descomposición (1.5) para  $x_k$  con  $k = 1, 2$ . En conclusión tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 1.8.** *Si  $Y$  es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , la proyección ortogonal  $P_Y$  cumple*

- a)  $P_Y$  es acotado y  $\|P_Y\| = 1$ .
- b)  $P_Y = P_Y^2 = P_Y^*$ .
- c)  $P_Y(\mathcal{H}) = Y$ .
- d) El espacio nulo de  $P_Y$  es  $Y^\perp$ .

**Teorema 1.9.** *Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert. Un operador acotado  $P : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  es una proyección si y solo si  $P$  es autoadjunto ( $P = P^*$ ) e idempotente ( $P = P^2$ ).*

*Demostración.* Por el Teorema 1.8, si  $P$  es proyección entonces es autoadjunto e idempotente. Para demostrar el recíproco, supongamos que  $P = P^* = P^2$  y definamos  $Y := \text{Im}(P) = P(\mathcal{H})$ . Para ver que  $Y$  es cerrado, sea  $(Px_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de Cauchy en  $Y$  tal que  $Px_n \rightarrow y$ . Note que

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} P^2 x_n = P \lim_{n \rightarrow \infty} P x_n = P y.$$

Por lo tanto  $y \in Y$ , por lo que  $Y$  es cerrado. Ahora veamos que  $P_Y = P$ . Si  $x \in \mathcal{H}$ , existen  $y \in Y$  y  $z \in Y^\perp$  tales que  $x = y + z$ . Como  $y \in Y$ , debe existir  $w \in \mathcal{H}$  tal que  $Pw = y$ . Por lo tanto tenemos que

$$x = Pw + z. \quad (1.6)$$

Como  $z \in Y^\perp$

$$\|Pz\|^2 = \langle Pz, Pz \rangle = \langle z, P^2z \rangle = \langle z, Pz \rangle = 0;$$

por lo tanto,  $Pz = 0$ . Aplicando el operador  $P$  a (1.6), tenemos que

$$Px = P^2w + Pz = Pw = y.$$

Y por otro lado,  $P_Yx = y$ , así que  $P_Y = P$ .  $\square$

Una de las propiedades clave de las proyecciones es el comportamiento de su espectro. El siguiente teorema establece que los únicos valores posibles en el espectro de una proyección son 0 y 1.

**Teorema 1.10.** *Si  $P$  es una proyección, entonces  $\sigma(P) \subset \{0, 1\}$ .*

*Demostración.* Sea  $P$  una proyección y consideremos el polinomio  $q(z) = z^2 - z$ . Note que  $q(P) = 0$ , por lo tanto  $\sigma(q(P)) = \{0\}$ . Además, note que

$$q(z) - q(\lambda) = (z - \lambda)(z - (1 - \lambda)).$$

Esta última igualdad implica que

$$q(P) - q(\lambda)I = (P - \lambda I)(P - (1 - \lambda)I).$$

Entonces si  $\lambda \in \sigma(P)$ , tenemos que  $q(P) - q(\lambda)I$  no es invertible. Por lo tanto,  $q(\lambda) \in \sigma(q(P))$  y así tenemos que

$$q(\sigma(P)) \subseteq \sigma(q(P)).$$

Pero ya habíamos visto que  $\sigma(q(P)) = \{0\}$ , entonces  $q(\sigma(P)) = \{0\}$ . Y  $q(\lambda) = 0$  si y solamente si  $\lambda = 0$  o  $\lambda = 1$ , lo cual completa la demostración.  $\square$

### 1.3. Operadores compactos

Un operador compacto es, en esencia, una transformación lineal entre espacios de Banach que tiene la propiedad de convertir conjuntos acotados en conjuntos cuya cerradura es compacta. Esta propiedad los hace similares a los operadores en espacios de dimensión finita, lo que permite un análisis detallado de su estructura y comportamiento.

En esta sección, exploramos las propiedades fundamentales de los operadores compactos definidos en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , comenzando con su definición formal y se presentan algunos teoremas clave que caracterizan su comportamiento. Para un desarrollo más amplio en esta teoría pueden consultarse las fuentes [9] y [2].

Un operador  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  se dice *compacto* si  $T$  es lineal y si para cada subconjunto acotado  $M$  de  $\mathcal{H}$ , la imagen  $T(M)$  es tal que la clausura de  $T(M)$ , denotada por  $\overline{T(M)}$ , es compacta.

**Teorema 1.11.** *Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert y  $T$  un operador lineal definido en  $\mathcal{H}$ . Entonces  $T$  es un operador compacto si y solamente si siempre que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sea una sucesión acotada en  $\mathcal{H}$ , entonces  $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tiene una subsucesión convergente.*

*Demostración.* Sea  $T$  un operador compacto y  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión acotada en  $\mathcal{H}$ . Entonces  $\overline{(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}}$  es compacto, por lo que contiene una subsucesión convergente.

Por otro lado, consideremos un conjunto acotado  $M \subset \mathcal{H}$  y una sucesión arbitraria  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en  $T(M)$ . Entonces,  $y_n = Tx_n$  para algún  $x_n \in M$  y; como  $M$  es acotado, la sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  también es acotada. Por la hipótesis de que  $T$  es compacto,  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  debe tener una subsucesión convergente implicando que  $\overline{T(M)}$  es compacto. Esto demuestra que  $T$  es un operador compacto.  $\square$

**Teorema 1.12.** *Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert. Si  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  es un operador compacto entonces  $T$  es acotado y, por lo tanto, continuo.*

*Demostración.* Consideremos la esfera unitaria  $U := \{x \in \mathcal{H} : \|x\| = 1\}$ . Como  $U$  es un conjunto acotado y  $T$  es compacto,  $\overline{T(U)}$  es compacto. Luego  $\overline{T(U)}$  es cerrado y acotado. Entonces se tiene que  $\sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| < \infty$ , de donde podemos concluir que  $T$  es acotado.  $\square$

Otra propiedad interesante de los operadores compactos es que convierten sucesiones que convergen débilmente en sucesiones que convergen fuertemente [6, Teorema 8.1-7].

**Teorema 1.13.** *Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert y  $T$  un operador lineal definido en  $\mathcal{H}$ . Si  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión en  $\mathcal{H}$  que converge débilmente a  $x$ , entonces  $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge fuertemente a  $Tx$ .*

Note que si el operador identidad  $I$  es compacto, debido a que la bola cerrada unitaria  $B := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$  es acotada, entonces  $\overline{I(B)} = \overline{B}$  es compacto, por lo tanto  $\mathcal{H}$  tendría dimensión finita. En otras palabras, si la dimensión de  $\mathcal{H}$  es infinita, entonces el operador identidad  $I$  no es compacto [6, Teorema 2.5-5].

**Teorema 1.14.** *Una proyección  $P$  es compacta si y solamente si tiene rango finito.*

*Demostración.* Sea  $Y := \text{Im}(P)$ . Supongamos que  $P : \mathcal{H} \rightarrow Y$  es una proyección tal que  $Y$  tiene rango finito. Sea  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}$  una sucesión acotada. Como  $P$  es acotada,

$$\|Px_n\| \leq \|P\| \sup_{x \in \mathbb{N}} \|x_n\|.$$

Luego el conjunto  $M := \overline{(Px_n)_{n \in \mathbb{N}}}$  es cerrado y acotado. Como la dimensión de  $Y$  es finita entonces  $M$  es un conjunto compacto. Por lo tanto  $(Px_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tiene una subsucesión convergente, así que  $P$  es un operador compacto.

Para demostrar el recíproco procederemos por reducción al absurdo. Esto es,  $P$  es una proyección compacta con rango  $Y$  cuya dimensión no es finita. Entonces existe una base ortonormal infinita  $\{y_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  de  $Y$ . De este conjunto podemos extraer una sucesión  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Como cada  $y_n \in Y$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$  debe existir un  $x_n \in \mathcal{H}$  tal que  $Px_n = y_n$ . Note que

$$Py_n = P(Px_n) = Px_n = y_n$$

y como  $P$  es compacta,  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  debe tener una subsucesión convergente, lo cual es imposible, pues si  $m \neq n$ ,  $\|b_n - b_m\| = \sqrt{2}$ .  $\square$

## 1.4. Álgebras cociente y el espectro esencial de un operador

Recordemos que, si  $\mathcal{A}$  es un álgebra de Banach e  $\mathcal{I}$  es un subespacio vectorial de  $\mathcal{A}$ , se dice que  $\mathcal{I}$  es un *ideal bilateral* si cumple que  $xy, yx \in \mathcal{I}$

para todo  $x \in \mathcal{A}$  y  $y \in \mathcal{I}$ . Además, si  $\mathcal{I}$  es un ideal propio y cerrado en  $\mathcal{A}$ , el espacio cociente

$$\mathcal{A}/\mathcal{I} = \{x + \mathcal{I} : x \in \mathcal{A}\}$$

es un álgebra de Banach con las operaciones suma y producto dadas por

$$(x + \mathcal{I}) + (y + \mathcal{I}) = (x + y) + \mathcal{I}$$

$$(x + \mathcal{I}) \cdot (y + \mathcal{I}) = (xy + \mathcal{I}),$$

y la norma

$$\|x + \mathcal{I}\| := \inf\{\|x + y\| : y \in \mathcal{I}\}.$$

Si  $\mathcal{A}$  tiene identidad  $e$ , entonces  $\mathcal{A}/\mathcal{I}$  es un álgebra de Banach con identidad  $e + \mathcal{I}$ . Si  $x$  es un elemento de un álgebra de Banach  $\mathcal{A}$  con identidad  $e$ , su espectro, que denotamos como antes por  $\sigma(x)$ , es el conjunto

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda e \text{ no es invertible}\}.$$

Al igual que en el caso de un operador acotado  $T$ ,  $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\|\}$  (la demostración es idéntica a la correspondiente a operadores acotados).

Como mencionamos antes, si  $\mathcal{I}$  es un ideal bilateral cerrado de un álgebra de Banach  $\mathcal{A}$  con identidad  $e$ , entonces  $\mathcal{A}/\mathcal{I}$  es un álgebra de Banach con identidad  $e + \mathcal{I}$ . Por ello, también se puede definir el espectro de un elemento en  $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ .

**Teorema 1.15.** *Sea  $\mathcal{I}$  un ideal bilateral cerrado de un álgebra de Banach  $\mathcal{A}$  con identidad  $e$ . Entonces*

$$\sigma(x + \mathcal{I}) \subset \sigma(x).$$

*Demostración.* Basta demostrar que

$$\rho(x) \subset \rho(x + \mathcal{I}).$$

Sea  $\lambda \in \rho(x)$ , entonces  $x - \lambda e$  es invertible. Denotaremos por  $y$  a su inverso. Así

$$y(x - \lambda e) = (x - \lambda e)y = e.$$

Esto implica que

$$(y + \mathcal{I})(x - \lambda e + \mathcal{I}) = (x - \lambda e + \mathcal{I})(y + \mathcal{I}) = e + \mathcal{I}.$$

Esto es

$$\lambda \in \rho(x + \mathcal{I}).$$

□

Denotaremos por  $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathcal{H})$  al conjunto de operadores compactos definidos en  $\mathcal{H}$ . Este conjunto forma un subespacio de  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Más aún, si  $K \in \mathcal{K}$  se cumple que

$$TK \in \mathcal{K} \quad \text{y} \quad KT \in \mathcal{K},$$

para todo  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Es decir,  $\mathcal{K}$  es un ideal del álgebra de Banach  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Por lo tanto, podemos definir el cociente  $\mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{K}$ , que se llama *el álgebra de Calkin* y *el espectro esencial de  $T$*  es el espectro de  $T + \mathcal{K}$  en el álgebra de Calkin, el cual se denota por  $\sigma_e(T)$ .

El espectro esencial es importante porque describe las propiedades del operador que son estables bajo ciertas perturbaciones. Por ejemplo, si consideramos un operador  $T$  y le sumamos un operador compacto  $K$ , es posible que el espectro total cambie, pero el espectro esencial no lo hace. El siguiente corolario asegura que, aunque el espectro total puede contener elementos adicionales, el espectro esencial siempre será un subconjunto del espectro completo.

**Corolario 1.16.** *El espectro esencial de un operador acotado  $T$  está contenido en el espectro de  $T$ . Esto es  $\sigma_e(T) \subset \sigma(T)$ .*

## 1.5. Espacios de Hilbert con núcleo reproductor

A continuación presentamos una pequeña introducción a los espacios de Hilbert con núcleo reproductor. Estos espacios tienen una herramienta muy útil y es que permiten representar cada función del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  como una combinación de un conjunto de funciones base, conocidas como núcleos reproductores. Para esto, a partir de ahora consideramos espacios de Hilbert de funciones complejas definidas en un conjunto  $\Omega$ , es decir, los elementos de  $\mathcal{H}$  serán funciones  $f \in \mathcal{H}^\Omega$ , donde  $\mathcal{H}^\Omega$  es el conjunto de las funciones de  $\Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . En el Teorema 1.17 se demuestra que es necesario y suficiente que cada evaluación puntual sea acotada para que exista el núcleo reproductor de un espacio de Hilbert de funciones.

Una familia  $(K_z)_{z \in \Omega} \in \mathcal{H}^\Omega$  se llama *núcleo reproductor* de  $\mathcal{H}$  si para cada  $f \in \mathcal{H}$  y  $z \in \Omega$  se tiene que

$$f(z) = \langle f, K_z \rangle. \quad (1.7)$$

la Ecuación 1.7 se llama la *propiedad reproductora*.

El *funcional de evaluación*  $E_z$  se define como

$$E_z(f) = f(z),$$

para cada  $z \in \Omega$  y  $f \in \mathcal{H}$ .

**Teorema 1.17.** *Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert de funciones definidas en un dominio  $\Omega$ . El núcleo reproductor de  $\mathcal{H}$  existe si y solamente si el funcional de evaluación  $E_z$  es acotado, para cada  $z \in \Omega$ .*

*Demostración.* Si el funcional de evaluación  $E_z$  es acotado, por el Teorema de Representación de Riesz, existe un único elemento  $K_z \in \mathcal{H}$  tal que para toda  $f \in \mathcal{H}$

$$f(z) = E_z(f) = \langle f, K_z \rangle.$$

Por lo tanto, existe el núcleo reproductor.

Por otro lado, supongamos que  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor  $(K_z)_{z \in \Omega}$  y sea  $z \in \Omega$  fijo. Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que

$$|E_z(f)| = |f(z)| = |\langle f, K_z \rangle| \leq \|f\| \|K_z\|, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Entonces,  $\|E_z\| \leq \|K_z\|$ . □

**Proposición 1.18.** *Para cada  $z, w \in \Omega$ , el núcleo reproductor cumple lo siguiente*

1.  $K_w(z) = \langle K_w, K_z \rangle$ .
2.  $K_w(z) = \overline{K_z(w)}$ .
3.  $\|K_z\|^2 = K_z(z)$ .

*Demostración.* El inciso 1 se sigue de (1.7) tomando  $f = K_w$ . Además, utilizando 1

$$K_w(z) = \langle K_w, K_z \rangle = \overline{\langle K_z, K_w \rangle} = \overline{K_z(w)}.$$

Finalmente, por la propiedad reproductora

$$\|K_z\|^2 = \langle K_z, K_z \rangle = K_z(z).$$

□

Si el núcleo reproductor existe, es único. En efecto, si suponemos que existe otro núcleo reproductor  $(K'_z)_{z \in \Omega}$ , entonces para todo  $z, w \in \Omega$

$$K'_z(w) = \langle K'_z, K_w \rangle = \overline{\langle K_w, K'_z \rangle} = \overline{K_w(z)} = K_z(w).$$

Con lo cual concluimos que  $K'_z = K_z$ , para todo  $z \in \Omega$ .

Si tenemos una base ortonormal de un espacio de Hilbert con núcleo reproductor, podemos encontrar una fórmula para el núcleo reproductor en términos de esta base.

**Proposición 1.19.** *Sea  $\Omega$  un conjunto arbitrario y sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert separable con núcleo reproductor de funciones complejo-valuadas definidas en  $\Omega$ . Sea  $(e_n(z))_{n=1}^{\infty}$  una base ortonormal de  $\mathcal{H}$ , entonces para todo  $z, w \in \Omega$*

$$K_w(z) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(z) \overline{e_n(w)}.$$

*Demostración.* Como  $K_z$  y  $K_w \in \mathcal{H}$  para todo  $z, w \in \Omega$

$$K_z = \sum_{n=1}^{\infty} \langle K_z, e_n \rangle e_n \quad \text{y} \quad K_w = \sum_{m=1}^{\infty} \langle K_w, e_m \rangle e_m.$$

Luego, se tiene que

$$\begin{aligned} K_w(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \langle K_z, e_n \rangle \overline{\langle K_w, e_m \rangle} \langle e_n, e_m \rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle K_z, e_n \rangle \overline{\langle K_w, e_n \rangle} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{e_n(w)} e_n(z). \end{aligned}$$

□

## 1.6. Funciones Armónicas

Como hemos mencionado previamente, el objetivo principal de este trabajo es caracterizar los símbolos de los operadores de Toeplitz que son proyecciones. En particular, cuando el símbolo es una función armónica acotada, disponemos de condiciones necesarias y suficientes para determinar cuándo el producto de dos operadores de Toeplitz es una proyección (Capítulo 5). Por ello, en esta sección introducimos el concepto de función armónica complejo valuada y analizamos algunas de sus propiedades fundamentales.

Sea  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  una función dos veces diferenciable, es decir, de clase  $C^2$ . El *laplaciano de  $f$* , denotado por  $\Delta f$ , se define como

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad z = x + iy.$$

Decimos que  $f$  es una función *armónica* si  $\Delta f \equiv 0$  en  $\mathbb{D}$ . En particular, si escribimos  $f$  en su forma real e imaginaria como  $f = f_1 + if_2$ , con  $f_1, f_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces  $f$  es armónica si y solo si tanto  $f_1$  como  $f_2$  son funciones armónicas reales.

Introduzcamos los operadores de Wirtinger

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Con estos operadores, podemos expresar el operador laplaciano como

$$\Delta = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = 4 \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z}.$$

Esto implica que

- Si  $f$  es una función analítica ( $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = 0$ ), entonces  $f$  es armónica.
- Si  $f$  es una función antianalítica ( $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ ), también es armónica.

Definimos el operador *Laplaciano invariante*, denotado por  $\tilde{\Delta}$ , como

$$\tilde{\Delta} = (1 - |z|^2)^2 \Delta = 4(1 - |z|^2)^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z}. \quad (1.8)$$

El siguiente teorema establece que las funciones armónicas complejo valuadas se pueden representar como la suma de una función analítica y una antianalítica.

**Teorema 1.20.** Sea  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  una función armónica. Entonces, existen  $f_1, f_2 : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ , funciones analíticas, tales que

$$f = f_1 + \overline{f_2}.$$

Más aún,  $f_1$  y  $f_2$  son únicas salvo constantes.

*Demostración.* Dado que  $f$  es una función armónica, existen  $u_1, u_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ , funciones armónicas reales, tales que

$$f = u_1 + iu_2.$$

Sean  $v_1$  y  $v_2$  las conjugadas armónicas de  $u_1$  y  $u_2$ , respectivamente. Entonces, las funciones

$$U = u_1 + iv_1 \quad \text{y} \quad V = i(u_2 + iv_2)$$

son analíticas en  $\mathbb{D}$ . Ahora, definamos

$$f_1 := \frac{U + V}{2} \quad \text{y} \quad f_2 := \frac{U - V}{2}.$$

Con estas definiciones, verificamos que

$$f_1 + \overline{f_2} = \frac{(u_1 + iv_1 - v_2 + iu_2) + (u_1 - iv_1 + v_2 + iu_2)}{2} = u_1 + iu_2 = f.$$

De esta forma, obtenemos la descomposición deseada  $f = f_1 + \overline{f_2}$ , con  $f_1$  y  $f_2$  analíticas.

Para demostrar la unicidad salvo adición de constantes, supongamos que existen  $g_1, g_2 : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ , funciones analíticas, tales que

$$f = g_1 + \overline{g_2}.$$

En este caso, se cumple que

$$f_1 - g_1 = \overline{f_2} - \overline{g_2}.$$

El lado izquierdo de la ecuación es analítico, mientras que el lado derecho es antianalítico. Por lo tanto, ambos lados deben ser constantes, lo que implica que

$$f_1 - g_1 = \text{constante y } f_2 - g_2 = \text{constante}.$$

Esto prueba que  $f_1$  y  $f_2$  son únicas salvo por términos constantes, completando la demostración.  $\square$

De hecho, las funciones  $f_1$  y  $f_2$  pertenecen al *espacio de Bloch*  $\mathcal{B}$ , es decir, son funciones analíticas en  $\mathbb{D}$  que satisfacen la condición

$$\|f_k\|_{\mathcal{B}} := \sup\{z \in \mathbb{D} : (1 - |z|^2)^2 |f'_k(z)|\} < \infty, \quad k = 1, 2. \quad (1.9)$$

**Corolario 1.21.** *Cualquier función  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  que sea analítica y acotada pertenece al espacio de Bloch. Es decir, la norma en (1.9) es finita.*

*Demostración.* Sea  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  una función analítica y acotada. Si  $f \neq 0$ , definimos la función  $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  como

$$g(z) := \frac{f(z)}{\|f\|_{\infty}}.$$

Por el principio del módulo máximo, se cumple que  $|g(z)| \leq 1$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ . Dado que  $g$  es analítica en  $\mathbb{D}$ , el Lema de Schwarz-Pick implica que

$$\frac{|g'(z)|}{1 - |g(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Reescribiendo esta desigualdad, obtenemos

$$\frac{\frac{|f'(z)|}{\|f\|_{\infty}}}{1 - \left|\frac{f(z)}{\|f\|_{\infty}}\right|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}.$$

Por lo tanto, se deduce que

$$(1 - |z|^2)^2 |f'(z)| \leq (1 - |z|^2) |f'(z)| \leq \|f\|_{\infty} - \frac{|f(z)|^2}{\|f\|_{\infty}} \leq \|f\|_{\infty}.$$

Esto es, cada función analítica acotada es de Bloch.  $\square$

El siguiente Lema es de gran utilidad al analizar operadores de Toeplitz con rango finito.

**Lema 1.22.** *Sean  $f, g$  funciones armónicas acotadas en el disco unitario  $\mathbb{D}$ . Entonces el operador  $\tilde{\Delta}(\overline{f_2}g_1) \in L^{\infty}(\mathbb{D}, dA)$ , donde  $g_1$  y  $f_2$  están dadas por la descomposición en 1.20.*

*Demostración.* Como  $f$  y  $g$  son funciones armónicas acotadas en el disco unitario,  $g_1$  y  $f_2$  pertenecen al espacio de Bloch  $\mathcal{B}$ . Además

$$\tilde{\Delta}(\overline{f_2}g_1) = (1 - |z|^2)^2 \overline{f_2'}(z)g_1'(z).$$

De la ecuación anterior se tiene que  $\tilde{\Delta}(\overline{f_2}g_1) \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ . □

Otra propiedad importante que satisfacen las funciones armónicas es la propiedad del valor medio. Esta propiedad también la cumplen las funciones analíticas, su demostración está en la Proposición 2.1.

**Teorema 1.23** (Propiedad del valor medio para funciones armónicas). *Si  $f \in C^2(\Omega)$  es una función armónica definida en un subconjunto abierto  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  tal que para  $z \in \Omega$  y  $r > 0$  se tiene que  $B_r(z) \subset \Omega$ , entonces*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) d\theta.$$

# Capítulo 2

## El espacio de Bergman

Los espacios de Bergman comenzaron a estudiarse en el contexto de la teoría de funciones de variable compleja, específicamente en la teoría de funciones analíticas. Estos espacios se introdujeron como una generalización y extensión del concepto de espacio de Hardy, otro tipo de espacio de funciones analíticas.

En este capítulo estudiamos los espacios de Bergman, comúnmente denotados como  $\mathcal{A}^p(\mathbb{D})$ , los cuales fueron introducidos por el matemático Stefan Bergman en la década de 1920, y mostramos sus propiedades más importantes sobre el disco unitario  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  en el plano complejo  $\mathbb{C}$ . Como primer paso definimos los espacios de Bergman con peso  $\mathcal{A}_\alpha^p(\mathbb{D})$ , para  $0 < p < \infty$  y  $\alpha > -1$ . El caso más estudiado es cuando  $p = 2$ , conocido como el espacio de Bergman cuadrado integrable. Aquí demostramos que es un subespacio cerrado del espacio de Hilbert  $L_\alpha^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ , donde  $dA_\alpha$  es una función de peso que depende de la medida de Lebesgue dos-dimensional normalizada.

En la Sección 2.2 nos centramos particularmente en el espacio de Bergman sin peso  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ . Este espacio tiene núcleo reproductor y usando las técnicas del capítulo anterior damos la fórmula explícita para dicho núcleo. Esto a su vez nos permite representar en forma integral la proyección ortogonal de  $L^2(\mathbb{D}, dA)$  sobre  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ . Las definiciones y resultados de este capítulo están basados en [16] y [5].

## 2.1. El espacio de Bergman con peso

A partir de ahora denotamos por  $B_r(z) := \{\lambda \in \mathbb{C} : |z - \lambda| < r\}$  al disco en el plano complejo centrado en  $z$  y de radio  $r$ . La circunferencia centrada en  $z$  y de radio  $r$  se denota por  $\partial B_r(z) := \{\lambda \in \mathbb{C} : |z - \lambda| = r\}$  y el disco cerrado se denota por  $\overline{B_r(z)}$ .

Si  $\alpha > -1$ , la *función de peso*, con parámetro  $\alpha$ ,  $\omega_\alpha : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  se define como sigue

$$\omega_\alpha(z) = (\alpha + 1)(1 - |z|^2)^\alpha, \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Con esta función, definimos la medida  $dA_\alpha(z)$  sobre el disco unitario  $\mathbb{D}$  como

$$dA_\alpha(z) = \omega_\alpha(z)dA(z). \quad (2.1)$$

En (2.1),  $dA(z)$  representa la medida de área en  $\mathbb{D}$  normalizada. En términos de coordenadas rectangulares y polares

$$dA(z) = \frac{1}{\pi} dx dy = \frac{1}{\pi} r dr d\theta,$$

con  $z = x + iy = re^{i\theta}$ .

Sea  $0 < p < \infty$  y  $-1 < \alpha < \infty$ . El *espacio de Bergman con peso*  $\mathcal{A}_\alpha^p(\mathbb{D})$  es el conjunto

$$\mathcal{A}_\alpha^p(\mathbb{D}) := \left\{ f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es analítica y } \int_{\mathbb{D}} |f|^p dA_\alpha < +\infty \right\},$$

donde  $dA_\alpha$  está definida por (2.1). Es claro que  $\mathcal{A}_\alpha^p(\mathbb{D})$  es un subespacio vectorial de  $L_\alpha^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ , con las operaciones definidas puntualmente. Cuando  $p \geq 1$ ,  $L_\alpha^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$  es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left( \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA_\alpha(z) \right)^{1/p}.$$

En el Teorema 2.3 mostramos que, si  $p \geq 1$ ,  $\mathcal{A}_\alpha^p(\mathbb{D})$  es un espacio de Banach con la norma heredada de  $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ . Para esto necesitamos la propiedad del valor medio para las funciones analíticas.

**Proposición 2.1** (Propiedad del valor medio para funciones analíticas). *Sea  $f$  una función analítica en algún disco cerrado  $\overline{B_r(z_0)} \subset \mathbb{D}$ , con  $r > 0$  y  $z_0 \in \mathbb{D}$ . Entonces*

$$f(z_0) = \frac{1}{r^2} \int_{B_r(z_0)} f(z) dA(z).$$

*Demostración.* Como consecuencia de la Fórmula Integral de Cauchy y haciendo  $z = z_0 + re^{i\theta}$  tenemos que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Por otro lado, usando coordenadas polares y utilizando la igualdad anterior se cumple que

$$\begin{aligned} \int_{B_r(z_0)} f(z) dA(z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^r \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) s d\theta ds \\ &= 2 \int_0^r s f(z_0) ds \\ &= r^2 f(z_0). \end{aligned}$$

Con lo que obtenemos el resultado deseado.  $\square$

Con esta propiedad podemos obtener el siguiente corolario que relaciona la convergencia en  $L^2(\mathbb{D}, dA)$  y la convergencia uniforme en compactos; además nos asegura que cada funcional de evaluación es acotado en  $\mathcal{A}_\alpha^p(\mathbb{D})$ .

**Corolario 2.2.** *Sea  $0 < p < \infty$  y  $-1 < \alpha < \infty$ . Si  $K$  es un subconjunto compacto de  $\mathbb{D}$  y  $n \in \mathbb{N}$ , entonces existe una constante positiva  $c \equiv c(n, K, \alpha, p)$  tal que para cada  $f \in \mathcal{A}_\alpha^p(\mathbb{D})$*

$$\sup\{|f^{(n)}(z)| : z \in K\} \leq c \|f\|_{p,\alpha}.$$

*En particular, cada evaluación puntual en  $\mathbb{D}$  es un funcional lineal acotado sobre  $\mathcal{A}_\alpha^p(\mathbb{D})$ .*

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad, definamos  $K := \overline{B_r(0)}$  para algún  $r \in (0, 1)$ , el cual es un subconjunto compacto de  $\mathbb{D}$ . Primero probaremos el resultado para  $n = 0$ . Sea  $\sigma_r = \frac{1-r}{2}$  para que el disco  $\overline{B_{\sigma_r}(z)}$  esté contenido en  $\mathbb{D}$  para todo  $z \in K$ . Por la Proposición 2.1, tenemos que para todo  $z \in K$

$$|f(z)|^p \leq \frac{1}{\sigma_r^2} \int_{B_{\sigma_r}(z)} |f(w)|^p dA(w). \quad (2.2)$$

Es fácil ver que

$$dA(w) \leq \frac{1}{\sigma_r^\alpha(\alpha+1)} dA_\alpha(w).$$

Por lo tanto, de (2.2)

$$|f(z)|^p \leq \frac{1}{\sigma_r^{2+\alpha}(\alpha+1)} \int_{\mathbb{D}} |f(w)|^p dA_\alpha(w).$$

Luego, para todo  $z \in K$

$$|f(z)| \leq c_0 \left[ \int_{\mathbb{D}} |f(w)|^p dA_\alpha(w) \right]^{1/p} = c_0 \|f\|_{p,\alpha},$$

con  $c_0 = \left( \frac{(\alpha+1)^{-1}}{\sigma_r^{2+\alpha}} \right)^{\frac{1}{p}}$ . Finalmente se obtiene el resultado para  $n = 0$ , tomando el supremo sobre todos los  $z \in K$ , esto es

$$\sup_{z \in K} |f(z)| \leq c_0 \|f\|_{p,\alpha}.$$

Por el caso anterior, existe una constante  $c_0 > 0$  tal que

$$|f(w)| \leq c_0 \|f\|_{p,\alpha},$$

para todo  $w \in \partial B_R(0)$ , donde  $R = \frac{1+r}{2}$ . Entonces por la Fórmula Integral de Cauchy

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi} \oint_{\partial B_R(0)} \frac{|f(w)|}{|w-z|^{n+1}} |dw| \leq \frac{n!c_0R}{\sigma_r^{n+1}} \|f\|_{p,\alpha}.$$

para todo  $z \in K$  y  $f \in \mathcal{A}_\alpha^p(\mathbb{D})$ , lo que concluye la demostración.  $\square$

Como consecuencia de este corolario, veamos que el espacio de Bergman  $\mathcal{A}_\alpha^p(\mathbb{D})$  es un espacio de Banach para  $1 \leq p < \infty$ .

**Teorema 2.3.** *Para cada  $1 \leq p < \infty$  y  $\alpha > -1$ , el espacio de Bergman  $\mathcal{A}_\alpha^p(\mathbb{D})$  es cerrado en  $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ .*

*Demostración.* Tomemos una sucesión  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}_\alpha^p(\mathbb{D})$  tal que  $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ , para alguna  $f \in L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ . Veamos que  $f$  es analítica en  $\mathbb{D}$ .

Como  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en un espacio completo, entonces es una sucesión de Cauchy en  $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ , es decir que dados  $m, n \in \mathbb{N}$ , existe un  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $m, n > N$ , se tiene que

$$\|f_n - f_m\| < \epsilon.$$

Por otro lado, si fijamos cualquier  $r \in (0, 1)$ , usando el Corolario 2.2, tenemos que para todo  $z \in \overline{B_r(0)}$  se cumple que

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq \frac{1}{1-r} \|f_n - f_m\|.$$

Esto dice que la sucesión  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente a una función analítica en cada subconjunto compacto de  $\mathbb{D}$ . Por el Teorema de Morera,  $f$  debe ser analítica en  $\mathbb{D}$ .  $\square$

## 2.2. El espacio de Bergman como espacio de Hilbert

En esta sección nos centramos en el caso particular cuando  $p = 2$ , es decir, en el conjunto de todas las funciones analíticas  $f$  definidas en el disco unitario tal que  $f \in L^2(\mathbb{D}, dA)$ .

Por el Teorema 2.3, con  $p = 2$  y  $\alpha = 0$ ,  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$  es un subespacio cerrado del espacio de Hilbert  $L^2(\mathbb{D}, dA)$ . Por lo tanto  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$  es un espacio de Hilbert con el producto interno heredado de  $L^2(\mathbb{D}, dA)$ , esto es

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{D}} f(z) \overline{g(z)} dA(z).$$

El Corolario 2.2 nos asegura que la evaluación puntual  $E_z : f \mapsto f(z)$  es un funcional lineal acotado, y como  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$  es un espacio de Hilbert de funciones complejas, por el Teorema 1.17 existe el núcleo reproductor de  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ . Entonces tenemos que para toda  $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$  y  $z \in \mathbb{D}$

$$f(z) = \langle f, K_z \rangle = \int_{\mathbb{D}} f(w) \overline{K_z(w)} dA(w).$$

Sea  $K(z, w) : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$K(z, w) = \overline{K_z(w)} = K_w(z).$$

Esta función se llama *el núcleo de Bergman* o *el núcleo reproductor* de  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ .

Note que, para cada  $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ , las funciones  $f_n(z) = z^n$  pertenecen al espacio de Bergman  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ . Además, se tiene que

$$\|f_n\|^2 = \int_{\mathbb{D}} |w|^{2n} dA(w) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^{2n+1} dr d\theta = \frac{1}{n+1}.$$

Por lo tanto, para cada  $n \in \mathbb{N}_0$ , definimos la función  $e_n$  como

$$e_n(z) := \sqrt{n+1} z^n. \quad (2.3)$$

Es claro que  $\|e_n\| = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ .

**Teorema 2.4.** *La sucesión  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  forma una base ortonormal para el espacio de Bergman  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ .*

*Demostración.* Primero veamos que  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  forma un conjunto ortonormal. Ya sabemos que  $\|e_n\| = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ . Sean  $n, m \in \mathbb{N}$  tales que  $n \neq m$ , entonces

$$\langle e_n, e_m \rangle = \frac{\sqrt{(n+1)(m+1)}}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^{n+m+1} e^{i(n-m)\theta} d\theta = 0.$$

La última igualdad se obtiene porque

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = 0.$$

Por lo tanto  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  es una sucesión ortonormal. Veamos ahora que es maximal, es decir, que su complemento ortogonal es la función cero. Supongamos que  $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$  es tal que para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $\langle f, e_n \rangle = 0$ . Note que para  $r \in (0, 1)$  se satisface

$$\int_{\mathbb{D}} f(z) \bar{z}^n dA(z) = \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_{B_r(0)} f(z) \bar{z}^n dA(z). \quad (2.4)$$

Además se tiene que  $\frac{d}{dz} \left( \frac{z^{n+1}}{n+1} \right) = z^n$ . Aplicando el Teorema de Green de Análisis Complejo, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{B_r(0)} f(z) \bar{z}^n dA(z) &= \frac{1}{\pi} \int_{B_r(0)} f(z) \overline{\frac{d}{dz} \left( \frac{z^{n+1}}{n+1} \right)} dA(z) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_r(0)} f(z) \overline{\left( \frac{z^{n+1}}{n+1} \right)} dz. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Por lo que usando (2.4) y (2.5) tenemos que

$$\begin{aligned}\langle f, e_n \rangle &= \sqrt{n+1} \int_{\mathbb{D}} f(z) \bar{z}^n dA(z) \\ &= \sqrt{n+1} \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_{B_r(0)} f(z) \bar{z}^n dA(z) \\ &= \sqrt{n+1} \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_r(0)} f(z) \overline{\left(\frac{z^{n+1}}{n+1}\right)} dz.\end{aligned}$$

Es fácil ver que para todo  $z \in \partial B_r(0)$ ,  $\overline{z^{n+1}} = r^{2(n+1)} z^{-(n+1)}$ , así que

$$\langle f, e_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{r^{2(n+1)}}{2\pi i} \oint_{\partial B_r(0)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz.$$

Debido a que  $f$  es analítica en  $B_r(0)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ , el  $n$ -ésimo coeficiente de la serie de potencias de  $f$  centrada en cero, está dado por

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_r(0)} \frac{f(w)}{w^{k+1}} dw.$$

Por lo tanto

$$\langle f, e_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \lim_{r \rightarrow 1^-} r^{2(n+1)} f_n = \frac{f_n}{\sqrt{n+1}}.$$

Por hipótesis, la última igualdad es cero si y solamente si  $f_n = 0$ , para todo  $k \in \mathbb{N}_0$ , lo que implica que  $f = 0$ . Por lo tanto  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  es completo.  $\square$

**Proposición 2.5.** *El núcleo reproductor de  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$  está dado por*

$$K(z, w) := \frac{1}{(1 - z\bar{w})^2}.$$

*Demostración.* Derivando ambos lados de la serie  $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$  se obtiene que

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n. \quad (2.6)$$

Por el Teorema 2.4,  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  es una base ortonormal para  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$  y por la Proposición 1.19 se tiene que

$$K(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(z\bar{w})^n.$$

Haciendo  $z = z\bar{w}$  en (2.6) tenemos el resultado deseado.  $\square$

La propiedad reproductora nos dice entonces que cada  $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$  se puede representar como

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - z\bar{w})^2} dA(w).$$

Note que para cada  $z \in \mathbb{C}$ , usando la propiedad reproductora se tiene que

$$\|K_z\|^2 = \langle K_z, K_z \rangle = K_z(z).$$

Por lo tanto, podemos dar una fórmula para el *núcleo reproductor normalizado* de  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$  como la función dada por

$$k_z(w) := \frac{K_z(w)}{\sqrt{K_z(z)}} = \frac{1 - |z|^2}{(1 - w\bar{z})^2}, \quad w \in \mathbb{D}.$$

**Proposición 2.6.** *Los núcleos normalizados  $k_z$  convergen a 0 débilmente en  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$  si  $|z| \rightarrow 1^-$ . Es decir, para toda  $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$*

$$\langle f, k_z \rangle \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad |z| \rightarrow 1^-.$$

*Demostración.* Sea  $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$  y  $\epsilon > 0$ . Como el espacio  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  es denso en  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ , existe una función  $h \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  tal que  $\|f - h\| < \epsilon$ . Ahora, note que

$$\begin{aligned} |\langle h, k_z \rangle| &= (1 - |z|^2) \left| \int_{\mathbb{D}} h(w) \overline{K_z(w)} dA(w) \right| \\ &= (1 - |z|^2) |h(z)|. \end{aligned}$$

Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} |\langle f, k_z \rangle| &\leq |\langle f - h, k_z \rangle| + |\langle h, k_z \rangle| \\ &\leq \|f - h\| + (1 - |z|^2) |h(z)| \\ &< \epsilon + (1 - |z|^2) \|h\|_\infty. \end{aligned}$$

Haciendo  $|z| \rightarrow 1^-$ , tenemos que  $|\langle f, k_z \rangle| \rightarrow 0$ . □

## 2.3. Proyección Ortogonal de Bergman

Por el Teorema 2.3, sabemos que  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$  es un subespacio cerrado de  $L^2(\mathbb{D}, dA)$ , así que existe la proyección ortogonal sobre  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ , la cual es llamada la *proyección de Bergman*.

**Proposición 2.7.** Para toda  $f \in L^2(\mathbb{D}, dA)$  y  $z \in \mathbb{D}$ , la proyección de Bergman tiene la siguiente representación integral:

$$Pf(z) = \int_{\mathbb{D}} f(w) \overline{K_z(w)} dA(w) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - z\bar{w})^2} dA(w).$$

*Demostración.* Teniendo en cuenta que  $K_z \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$  y por la propiedad reproductora,

$$Pf(z) = \langle Pf, K_z \rangle = \langle f, K_z \rangle = \int_{\mathbb{D}} f(w) \overline{K_z(w)} dA(w).$$

De (2.5) se tiene la igualdad. □

# Capítulo 3

## Operadores de Toeplitz

La interacción entre los operadores de Toeplitz y los espacios de Bergman es rica y profunda. En estos espacios, los operadores de Toeplitz preservan la naturaleza analítica de las funciones, lo que les da un papel crucial en el análisis complejo. Por otro lado, los operadores de Hankel y los operadores de Toeplitz, aunque tienen estructuras distintas y capturan diferentes aspectos de funciones en espacios como los de Hardy y Bergman, están estrechamente relacionados en teoría de operadores. Además, mientras que muchos operadores de Toeplitz no son compactos, ciertos operadores de Hankel son compactos o pueden aproximarse bien mediante operadores de rango finito. Esto hace que los operadores de Hankel sean útiles para estudiar las propiedades de compactación y espectrales en espacios de funciones. En este capítulo centramos nuestra atención en estos operadores, particularmente cuando su símbolo es acotado, presentamos su definición y las propiedades elementales que se usan con frecuencia en lo que sigue. Adicionalmente se estudian condiciones para las cuales ciertos operadores, de Toeplitz y de Hankel, tengan rango finito.

### 3.1. Operadores de Toeplitz y de Hankel

Sea  $\phi \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ . El *operador de Toeplitz*  $T_\phi$  con símbolo  $\phi$  definido en el espacio de Bergman  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$  está dado por la expresión

$$T_\phi f = P(\phi f),$$

para toda  $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ . Aquí  $P$  es la proyección ortogonal de  $L^2(\mathbb{D}, dA)$  sobre  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ . Usando la representación integral de la proyección de Bergman  $P$ , dada en la Proposición 2.7, podemos escribir al operador de Toeplitz como el operador integral

$$T_\phi f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)\phi(w)}{(1 - z\bar{w})^2} dA(w),$$

para toda  $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ . Note que

$$\|T_\phi\| \leq \|PM_\phi\| \leq \|P\| \|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty,$$

donde  $M_\phi$  es el operador de multiplicación definido en el Ejemplo 1. Por lo tanto, el operador de Toeplitz  $T_\phi$  es acotado si  $\phi \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ .

Observe que si  $\phi$  es una función analítica, el operador de Toeplitz coincide con el operador de multiplicación, esto es

$$T_\phi = M_\phi|_{\mathcal{A}^2(\mathbb{D})}.$$

El siguiente teorema, cuya demostración es sencilla, muestra algunas propiedades importantes que cumplen los operadores de Toeplitz. Denotamos al conjunto de funciones analíticas y esencialmente acotadas por  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ .

**Proposición 3.1.** Sean  $\lambda, \beta \in \mathbb{C}$  y  $\phi, \psi$  funciones acotadas en  $\mathbb{D}$ . Entonces,

1.  $T_{\lambda\phi + \beta\psi} = \lambda T_\phi + \beta T_\psi$ .
2.  $T_\phi^* = T_{\bar{\phi}}$ .
3.  $T_\phi \geq 0$  si  $\phi \geq 0$ .

Más aún, si  $\phi \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ , entonces

4.  $T_\psi T_\phi = T_{\psi\phi}$ .
5.  $T_{\bar{\phi}} T_\psi = T_{\bar{\phi}\psi}$ .

Sea  $\phi \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ . Se define el *operador de Hankel*  $H_\phi$  con símbolo  $\phi$ , como el operador  $H_\phi : \mathcal{A}^2(\mathbb{D}) \rightarrow \mathcal{A}^2(\mathbb{D})^\perp$  dado por la expresión

$$H_\phi f = (I - P)(\phi f),$$

para toda  $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ . En otras palabras,  $H_\phi f$  representa el complemento ortogonal de  $\phi f$  respecto al subespacio de las funciones analíticas. Usando la representación integral de  $P$ , podemos escribir el operador de Hankel como el operador integral

$$H_\phi f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{\phi(z) - \phi(w)}{(1 - z\bar{w})^2} f(w) dA(w),$$

para toda  $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ . Como en el caso del operador de Toeplitz, es fácil ver que si  $\phi \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ , el operador de Hankel  $H_\phi$  es acotado con  $\|H_\phi\| \leq \|\phi\|_\infty$ . Además, dadas  $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$  y  $g \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})^\perp$  se cumple que

$$\langle f, H_\phi^* g \rangle = \langle H_\phi f, g \rangle = \langle \phi f - P(\phi f), g \rangle = \langle f, \bar{\phi} g \rangle = \langle P f, \bar{\phi} g \rangle = \langle f, P(\bar{\phi} g) \rangle.$$

Por lo tanto, el operador de Hankel adjunto  $H_\phi^* : \mathcal{A}^2(\mathbb{D})^\perp \rightarrow \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$  está dado por la regla

$$H_\phi^*(f) = P(\bar{\phi} f),$$

para toda  $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})^\perp$ . Equivalentemente, se tiene que

$$H_\phi^*(f) = P(\phi f),$$

para toda  $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})^\perp$ .

Definimos el operador  $S_\phi : \mathcal{A}^2(\mathbb{D})^\perp \rightarrow \mathcal{A}^2(\mathbb{D})^\perp$  que actúa mediante la siguiente fórmula:

$$S_\phi(f) = (I - P)(\phi f),$$

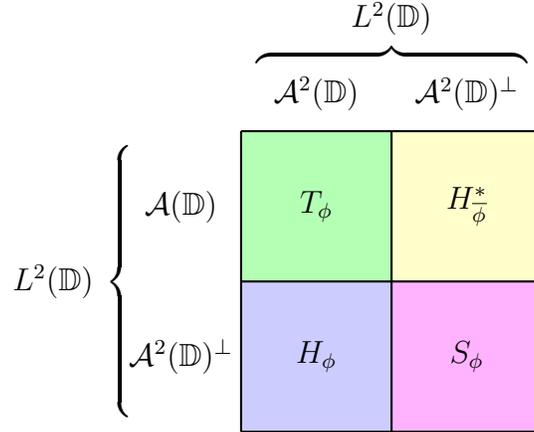
para toda  $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})^\perp$ . Este operador juega un rol clave para determinar cómo  $\phi$  actúa fuera del espacio analítico  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ , a diferencia del operador de Hankel. Este operador es de gran utilidad en la sección 3.2.

La acción de multiplicar por  $\phi$  en  $L^2(\mathbb{D}, dA)$  puede descomponerse completamente en términos de los operadores  $T_\phi$ ,  $H_\phi$  y  $S_\phi$  definidos anteriormente. Esta descomposición permite estudiar la acción de  $\phi$  de manera separada en

los subespacios  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$  y  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})^\perp$ . Para ser precisos, si consideramos el operador de multiplicación  $M_\phi$  y escribimos la función  $f \in L^2(\mathbb{D})$  como  $f = f_1 + f_2$ , donde  $f_1 \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$  y  $f_2 \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})^\perp$ , entonces se tiene que

$$\begin{aligned} M_\phi(f) &= \phi f_1 + \phi f_2 \\ &= P(\phi f_1) + (I - P)(\phi f_1) + P(\phi f_2) + (I - P)(\phi f_2) \\ &= T_\phi f_1 + H_\phi f_1 + H_{\bar{\phi}} f_2 + S_\phi f_2. \end{aligned}$$

En conclusión, tenemos el siguiente esquema:



Dadas  $\phi, \psi \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ , definimos el *semiconmutador* y el *conmutador* de los operadores de Toeplitz  $T_\phi$  y  $T_\psi$  como

$$(T_\phi, T_\psi] := T_{\phi\psi} - T_\phi T_\psi, \tag{3.1}$$

y

$$[T_\phi, T_\psi] := T_\phi T_\psi - T_\psi T_\phi,$$

respectivamente.

En el Capítulo 5, particularmente en el Teorema 5.12, daremos condiciones para que el semiconmutador sea una proyección.

La relación entre los operadores de Toeplitz y los operadores de Hankel se establece mediante la siguiente igualdad.

**Proposición 3.2.** Sean  $\phi, \psi \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ . Entonces, se cumple que

$$(T_\phi, T_\psi] = H_\phi^* H_\psi.$$

*Demostración.* Observe que dada  $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ ,

$$H_\phi^* H_\psi(f) = PM_{\phi\psi}(f) - PM_\phi PM_\psi(f) = T_{\phi\psi}(f) - T_\phi T_\psi(f).$$

Esto demuestra la igualdad del lema.  $\square$

**Corolario 3.3.** Si  $\phi, \psi \in C(\overline{\mathbb{D}})$ , entonces el semiconmutador  $(T_\phi, T_\psi]$  es compacto.

*Demostración.* Se sigue de la Proposición 3.2 y teniendo en cuenta que el operador de Hankel  $H_\psi$  es compacto [10, Proposición 6.11].  $\square$

## 3.2. La subálgebra $AQ$

El conjunto de funciones esencialmente acotadas que hacen compacto al operador de Hankel forma una subálgebra cerrada de  $L^\infty(\mathbb{D}, dA)$  (véase la Proposición 3.5). Denotamos este conjunto como  $AQ(\mathbb{D})$ . Es decir,

$$AQ(\mathbb{D}) = \{\varphi \in L^\infty(\mathbb{D}, dA) : H_\varphi \text{ es compacto}\}.$$

El siguiente lema es clave para la demostración de la Proposición 3.5.

**Lema 3.4.** Sean  $\phi, \psi \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ . Entonces, se cumple la relación

$$H_{\phi\psi} = S_\phi H_\psi + H_\phi T_\psi.$$

*Demostración.* Sea  $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ . Por definición del operador de Hankel, tenemos

$$H_{\phi\psi}(f) = (I - P)(\phi\psi f) = \phi\psi f - P(\phi\psi f).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} (S_\phi H_\psi + H_\phi T_\psi)(f) &= S_\phi[\psi f - P(\psi f)] + H_\phi[P(\psi f)] \\ &= (I - P)(\phi\psi f) - (I - P)(\phi P(\psi f)) + (I - P)(\phi P(\psi f)) \\ &= \phi\psi f - P(\phi\psi f). \end{aligned}$$

Con esto tenemos la igualdad deseada.  $\square$

**Proposición 3.5.**  $AQ(\mathbb{D})$  es una subálgebra cerrada de  $L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ .

*Demostración.* Es fácil ver que si  $\phi, \psi \in AQ(\mathbb{D})$ , entonces  $\phi + \psi \in AQ(\mathbb{D})$ . Por el lema anterior, se tiene que  $H_{\phi\psi}$  es un operador compacto si  $\phi, \psi \in AQ(\mathbb{D})$  y por lo tanto  $AQ(\mathbb{D})$  es una subálgebra de  $L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ . Veamos que es cerrada. Sea  $\phi_n \in AQ(\mathbb{D})$  tal que  $\|\phi_n - \phi\|_\infty \rightarrow 0$  si  $n \rightarrow \infty$ . Note que

$$\|H_{\phi_n - \phi}(h)\| \leq \|I - P\| \|\phi_n - \phi\| \|h\|_2 \leq \|\phi_n - \phi\| \|\phi\|_2.$$

Por lo que  $H_{\phi_n}$  converge uniformemente a  $H_\phi$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $H_{\phi_n}$  es compacto y por lo tanto  $H_\phi$  es compacto, concluyendo que  $\phi \in AQ(\mathbb{D})$ .  $\square$

Dado que para cada  $\phi \in C(\overline{\mathbb{D}})$  el operador de Hankel  $H_\phi$  es compacto, se tiene que  $C(\overline{\mathbb{D}}) \subset AQ(\mathbb{D})$ .

### 3.3. La transformada de Berezin y sus propiedades

La transformada de Berezin se ha convertido en una herramienta muy importante en el estudio de operadores definidos en espacios de Hilbert con núcleo reproductor. En nuestro contexto la utilizamos para encontrar condiciones para la compacidad de productos de operadores de Toeplitz.

Sea  $S$  un operador lineal en  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ , no necesariamente acotado, cuyo dominio contiene a  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ . Entonces  $S$  induce la función  $B_S : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$B_S(z) = \langle Sk_z, k_z \rangle, \quad z \in \mathbb{D},$$

donde  $k_z$  es el núcleo reproductor normalizado de  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$  dado por

$$k_z := \frac{1 - |z|^2}{(1 - w\bar{z})^2}, \quad w \in \mathbb{D}.$$

Esta función es llamada *la transformada de Berezin de S*. Además, note que

$$|B_S(z)| = |\langle Sk_z, k_z \rangle| \leq \|Sk_z\| \|k_z\| = \|Sk_z\|.$$

Por lo tanto  $B_S$  es acotada si  $S$  es acotado.

Dada una función  $\phi \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ , se puede definir su transformada de Berezin por medio de la integral

$$B\phi(z) = \int_{\mathbb{D}} \phi(w) \frac{(1 - |z|^2)^2}{|1 - w\bar{z}|^4} dA(w). \quad (3.2)$$

Para cada  $z \in \mathbb{D}$ , definimos la transformación de Möbius  $\Phi_z : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  por

$$\Phi_z(w) = \frac{z - w}{1 - \bar{z}w}, \quad \forall w \in \mathbb{D}.$$

Estas funciones son automorfismos del disco unitario. Es fácil ver que cada  $\Phi_z$  es una involución:  $\Phi_z(\Phi_z(w)) = w$  para todo  $w \in \mathbb{D}$ . También note que  $\Phi_z(z) = 0$  y  $\Phi_z(0) = z$ , es decir; intercambia el origen con  $z$ . La función  $\Phi_z$  tiene derivada

$$\Phi'_z(w) = \frac{|z|^2 - 1}{(1 - \bar{z}w)^2},$$

entonces tiene Jacobiano real dado por

$$\Phi'_z(w)\overline{\Phi'_z(w)} = |\Phi'_z(w)|^2 = \frac{(1 - |z|^2)^2}{|1 - \bar{z}w|^4}.$$

Por lo tanto, por el teorema de cambio de variable se tiene que para  $\phi \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$

$$\int_{\mathbb{D}} \phi \circ \Phi_z(w) dA(w) = \int_{\mathbb{D}} \phi \left( \frac{z - w}{1 - \bar{z}w} \right) dA(w) = \int_{\mathbb{D}} \phi(w) \frac{(1 - |z|^2)^2}{|1 - \bar{z}w|^4} dA(w).$$

La última igualdad coincide con (3.2). En conclusión, tenemos la siguiente proposición.

**Proposición 3.6.** *Si  $\phi$  es una función integrable acotada definida en  $\mathbb{D}$ , entonces*

$$B\phi(z) = \int_{\mathbb{D}} \phi \circ \Phi_z(w) dA(w).$$

*Observación.* Note que la transformada de Berezin de la función  $\phi$  coincide con la transformada de Berezin del operador de Toeplitz  $T_\phi$ . Esto se sigue de

$$B_{T_\phi}(z) = \langle T_\phi k_z, k_z \rangle = \langle P(\phi k_z), k_z \rangle = \langle \phi k_z, k_z \rangle.$$

**Proposición 3.7** (Transformada de Berezin de una función armónica). *Sea  $f$  una función armónica y acotada. Entonces,*

$$Bf = f.$$

*Demostración.* Como  $f$  es una función armónica, entonces  $f \circ \Phi_z$  también es una función armónica, por lo que cumple la propiedad del valor medio [Teorema 1.23]. Esto implica que para todo  $z \in \mathbb{D}$

$$f(z) = f(\Phi_z(0)) = (f \circ \Phi_z)(0) = \int_{\mathbb{D}} (f \circ \Phi_z)(w) dA(w) = Bf(z).$$

□

Una propiedad fundamental de la transformada de Berezin es que conmuta con el operador laplaciano invariante definido en (1.8). La demostración de este resultado se puede ver en [1, Lema 1].

**Proposición 3.8.** *Sea  $f$  una función continua dos veces diferenciable en  $\mathbb{D}$  tal que  $f, \tilde{\Delta}f \in L^1(\mathbb{D}, dA)$ . Entonces la transformada de Berezin conmuta con el operador Laplaciano invariante. En otras palabras,*

$$\tilde{\Delta}Bf = B(\tilde{\Delta}f).$$

### 3.4. Operadores de Toeplitz de rango finito

Un operador lineal  $T$  definido en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  se dice de *rango finito* si  $\dim(T(H)) < \infty$ .

**Ejemplo 4.** Sean  $x, y \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ . Se define el operador  $x \otimes y$  en  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$  por la relación

$$(x \otimes y)f = \langle f, y \rangle x, \quad f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D}).$$

Este operador tiene rango uno siempre que  $x \neq 0$ .

Los operadores de Toeplitz también se pueden definir para símbolos que son medidas finitas sobre el disco unitario  $\mathbb{D}$ . En particular, si  $\mu$  es una medida de Borel regular y compleja en  $\mathbb{D}$ , se define el *operador de Toeplitz*  $T_\mu$  en  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$  como

$$T_\mu f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - z\bar{w})^2} d\mu(w), \quad f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D}).$$

Observe que, si  $d\mu = \phi dA$ , con  $\phi \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ , el operador  $T_\mu$  coincide con el operador de Toeplitz con símbolo  $\phi$ . Es decir,  $T_\mu = T_\phi$ .

En particular, podemos considerar la medida  $\mu$  como una *combinación lineal de masas puntuales*. Esto significa que  $\mu$  se escribe como

$$\mu = \sum_{k=1}^N \lambda_k \delta_{z_k}, \quad \lambda_k \neq 0, \quad (3.3)$$

donde  $\delta_{z_k}$  es la delta de Dirac centrada en  $z_k$  y  $\lambda_k \in \mathbb{C}$  para todo  $k = 1, \dots, N$ .

**Proposición 3.9.** *Sea  $\mu$  una combinación lineal de masas puntuales como en (3.3). Entonces, el operador de Toeplitz  $T_\mu$  tiene rango finito. Más específicamente, la imagen de  $T_\mu$  es generada por  $K_{z_1}, K_{z_2}, \dots, K_{z_N}$ , donde  $K_{z_k}$  son los núcleos reproductores definidos en la Proposición 2.5.*

*Demostración.* Dado que  $\mu$  tiene la forma indicada en (3.3), se tiene que

$$T_\mu f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - \bar{w}z)^2} d\mu(w) = \sum_{k=1}^N \frac{\lambda_k f(z_k)}{(1 - \bar{z}_k z)^2} = \sum_{k=1}^N \lambda_k f(z_k) K_{z_k}(z).$$

Esto implica que la imagen de  $T_\mu$  está contenida en el subespacio generado por  $\{K_{z_k} : k = 1, \dots, N\}$ . Por lo tanto,  $T_\mu$  tiene rango a lo más  $N$  y por ello es un operador de rango finito.  $\square$

El recíproco de la Proposición 3.9 se demostró en [8, Teorema A tated)] para un caso más general. En particular, se tiene el siguiente teorema.

**Teorema 3.10.** *El operador de Toeplitz  $T_\mu$  tiene rango finito si y solo si  $\mu$  es una combinación lineal de masas puntuales.*

Como consecuencia de este resultado, se tiene el siguiente corolario el cual es fundamental en los resultados del Capítulo 5.

**Corolario 3.11.** *Sea  $\phi \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ . Si  $T_\phi$  tiene rango finito, entonces  $\phi = 0$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $\mu = \phi dA$ , de modo que  $T_\mu = T_\phi$ . Si  $T_\phi$  tiene rango finito entonces  $T_\mu$  también lo tiene. Por el Teorema 3.10,  $\mu$  debe ser una combinación lineal de masas puntuales. Note que para cada  $k = 1, \dots, N$ ,

$$\lambda_k = \mu(\{z_k\}) = \int_{\{z_k\}} \phi dA = 0.$$

Lo que implica que  $\mu = \sum_{k=1}^N \lambda_k \delta_{z_k} = 0$ , entonces  $\phi dA = 0$ . Así  $|\phi| dA = 0$ . Si definimos el conjunto medible  $M = \{z \in \mathbb{D} : |\phi(z)| \neq 0\}$ , se tiene que  $\int_M |\phi| dA = 0$ . Por lo que  $\phi = 0$  en casi todo punto.  $\square$

Finalmente, al considerar operadores de Toeplitz con símbolos armónicos en  $\mathbb{D}$ , se puede analizar el rango del semiconmutador. El Teorema 3.17 caracteriza cuándo el producto de dos operadores de Hankel tiene rango finito, lo cual equivale a determinar cuándo un operador de Toeplitz específico posee esta propiedad.

Del Teorema 1.20 y el Corolario 1.21, sabemos que cada función armónica y acotada se puede escribir como la suma de una función analítica y una antianalítica, donde ambas funciones son acotadas (pertenecen al espacio de Bloch).

En adelante, para simplificar la notación, si  $f$  y  $g$  son funciones armónicas, entonces  $f_1, f_2, g_1$ , y  $g_2$  denotarán las funciones analíticas y acotadas tal que

$$f = f_1 + \overline{f_2} \quad \text{y} \quad g = g_1 + \overline{g_2}.$$

Los siguientes lemas serán de utilidad para demostrar el Teorema 3.17. Estos resultados se tomaron de [4].

**Lema 3.12.** *Sea  $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$  y  $z \in \mathbb{D}$ . Entonces, se cumple que*

$$P(\overline{f}K_z) = \overline{f(z)}K_z,$$

donde  $P$  es la proyección de Bergman y  $K_z$  es el núcleo reproductor del espacio de Bergman.

*Demostración.* Para toda función  $g \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ , se verifica que

$$\langle P(\overline{f}K_z), g \rangle = \overline{\langle g, \overline{f}K_z \rangle} = \overline{f(z)g(z)} = \overline{f(z)}\overline{\langle g, K_z \rangle} = \langle \overline{f(z)}K_z, g \rangle.$$

De aquí se deduce la igualdad deseada.  $\square$

**Lema 3.13.** *Sea  $f$  una función armónica y acotada en  $\mathbb{D}$ . Entonces, se cumple que*

$$T_f k_z = (f_1 + \overline{f_2}(z))k_z,$$

donde  $k_z$  es el núcleo reproductor normalizado del espacio de Bergman.

*Demostración.* Usando el Lema 3.12, la propiedad reproductora del núcleo de Bergman, y observando que  $f_1 k_z \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ , obtenemos que para todo  $z \in \mathbb{D}$

$$T_f k_z = P(f_1 k_z) + P(\overline{f_2} k_z) = f_1 k_z + \overline{f_2}(z)k_z = (f_1 + \overline{f_2}(z))k_z.$$

Esto concluye la demostración.  $\square$

**Lema 3.14.** Sean  $f$  y  $g$  funciones armónicas y acotadas en el disco unitario  $\mathbb{D}$ . La transformada de Berezin del operador  $T_f T_g$  está dada por

$$B(T_f T_g)(z) = (f_1 g_1)(z) + (f_1 \overline{g_2})(z) + (\overline{f_2 g_2})(z) + B(\overline{f_2 g_1})(z). \quad (3.4)$$

*Demostración.* Desarrollemos la transformada de Berezin del producto  $T_f T_g$ . Usando el Lema 3.13 y las propiedades del núcleo reproductor normalizado, tenemos

$$\begin{aligned} B(T_f T_g)(z) &= \langle T_g k_z, T_{\overline{f}} k_z \rangle \\ &= \langle (g_1 + \overline{g_2}(z)) k_z, P(\overline{f} k_z) \rangle \\ &= \langle (g_1 + \overline{g_2}(z)) k_z, \overline{f} k_z \rangle \\ &= \langle (f_1 + \overline{f_2})(g_1 + \overline{g_2}(z)) k_z, k_z \rangle \\ &= \langle f_1 g_1 k_z, k_z \rangle + \overline{g_2}(z) \langle f_1 k_z, k_z \rangle + \langle \overline{f_2} g_1 k_z, k_z \rangle + \overline{g_2}(z) \langle \overline{f_2} k_z, k_z \rangle \\ &= (f_1 g_1)(z) + (f_1 \overline{g_2})(z) + (\overline{f_2 g_2})(z) + \langle \overline{f_2} g_1 k_z, k_z \rangle. \end{aligned}$$

Dado que  $B(\overline{f_2 g_1})(z) = \langle \overline{f_2} g_1 k_z, k_z \rangle$ , se tiene la igualdad (3.4).  $\square$

**Lema 3.15.** Sean  $f$  y  $g$  funciones armónicas y acotadas en el disco unitario  $\mathbb{D}$ . La transformada de Berezin del operador  $T_{fg}$  está dada por

$$B(T_{fg})(z) = (f_1 g_1)(z) + B(f_1 \overline{g_2})(z) + B(\overline{f_2} g_1)(z) + (\overline{f_2 g_2})(z). \quad (3.5)$$

*Demostración.* Desarrollemos la transformada de Berezin del operador  $T_{fg}$ .

$$\begin{aligned} B(T_{fg})(z) &= \langle T_{fg} k_z, k_z \rangle \\ &= \langle fg k_z, k_z \rangle \\ &= \langle f_1 g_1 k_z, k_z \rangle + \langle f_1 \overline{g_2} k_z, k_z \rangle + \langle \overline{f_2} g_1 k_z, k_z \rangle + \langle \overline{f_2} g_2 k_z, k_z \rangle \\ &= (f_1 g_1)(z) + B(f_1 \overline{g_2})(z) + B(\overline{f_2} g_1)(z) + (\overline{f_2 g_2})(z). \end{aligned}$$

Con lo que se tiene la igualdad (3.5).  $\square$

**Lema 3.16.** Sean  $f$  y  $g$  funciones armónicas y acotadas en el disco unitario  $\mathbb{D}$ . La transformada de Berezin del semiconmutador  $(T_f, T_g]$  está dada por

$$B((T_f, T_g])(z) = B(f_1 \overline{g_2})(z) - (f_1 \overline{g_2})(z).$$

*Demostración.* Se obtiene de los Lemas 3.14 y 3.15.  $\square$

**Teorema 3.17.** Sean  $f$  y  $g$  funciones armónicas acotadas en el disco unitario  $\mathbb{D}$ . Si el operador  $H_g^*H_f$  tiene rango finito, entonces el operador  $T_{\tilde{\Delta}(\overline{f_2g_1})}$  tiene rango finito.

*Demostración.* El operador  $\tilde{\Delta}(\overline{f_2g_1}) \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$  por el Lema 1.22, lo que implica que el operador de Toeplitz  $T_{\tilde{\Delta}(\overline{f_2g_1})}$  es acotado en el espacio de Bergman  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ .

Del Lema 3.16, la transformada de Berezin del semiconmutador es

$$B((T_g, T_f])(z) = B(g_1\overline{f_2})(z) - (g_1\overline{f_2})(z).$$

De la Proposición 3.2 se tiene la igualdad

$$B(H_g^*H_f)(z) = B((T_g, T_f])(z).$$

Luego, se tiene que para todo  $z \in \mathbb{D}$

$$B(H_g^*H_f)(z) = B(g_1\overline{f_2})(z) - (g_1\overline{f_2})(z).$$

Aplicando el laplaciano invariante en ambos lados de la ecuación anterior y teniendo en cuenta que este operador  $\tilde{\Delta}$  conmuta con la transformada de Berezin (Proposición 3.8), se tiene que

$$\tilde{\Delta}B(H_g^*H_f)(z) = B(\tilde{\Delta}g_1\overline{f_2})(z) - (1 - |z|^2)^2g_1'(z)\overline{f_2'(z)},$$

o equivalentemente, utilizando la definición de la transformada de Berezin,

$$\left\langle T_{\tilde{\Delta}(g_1\overline{f_2})}k_z, k_z \right\rangle = (1 - |z|^2)^2g_1'(z)\overline{f_2'(z)} + \tilde{\Delta}B(H_g^*H_f)(z). \quad (3.6)$$

Sean  $x, y \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ . Entonces

$$\begin{aligned} B(x \otimes y)(z) &= \langle (x \otimes y)k_z, k_z \rangle \\ &= (1 - |z|^2)^2 \langle (x \otimes y)K_z, K_z \rangle \\ &= (1 - |z|^2)^2 \langle K_z, y \rangle \langle x, K_z \rangle \\ &= (1 - |z|^2)^2 x(z)\overline{y(z)}, \end{aligned}$$

donde  $x \otimes y$  es el operador de rango uno definido en el Ejemplo 4.

Supongamos que el operador  $H_g^* H_f$  tiene rango  $N$ . Entonces, existen funciones  $x_j, y_j \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$  para  $j = 1, 2, \dots, N$  tal que

$$H_g^* H_f = \sum_{j=1}^N x_j \otimes y_j.$$

Aplicando la transformada de Berezin a la igualdad anterior se tiene que  $B(H_g^* H_f)(z)$  se puede escribir de la forma

$$B(H_g^* H_f)(z) = (1 - |z|^2)^2 \left( \sum_{j=1}^N x_j(z) \overline{y_j(z)} \right) = \sum_{j=1}^{3N} \hat{x}_j(z) \overline{\hat{y}_j(z)},$$

para algunas  $\hat{x}_j, \hat{y}_j \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ . Luego de (3.6), tenemos que

$$\left\langle T_{\tilde{\Delta}(g_1 \bar{f}_2)} k_z, k_z \right\rangle = (1 - |z|^2)^2 g_1'(z) \overline{f_2'(z)} + (1 - |z|^2)^2 \left( \sum_{j=1}^{3N} \hat{x}_j(z) \overline{\hat{y}_j(z)} \right).$$

Dividiendo por  $(1 - |z|^2)^2$ , obtenemos

$$\left\langle T_{\tilde{\Delta}(g_1 \bar{f}_2)} K_z, K_z \right\rangle = g_1'(z) \overline{f_2'(z)} + \left( \sum_{j=1}^{3N} \hat{x}_j(z) \overline{\hat{y}_j(z)} \right). \quad (3.7)$$

Definamos la función de dos variables  $h : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  como

$$h(z, \bar{w}) = \left\langle T_{\tilde{\Delta}(g_1 \bar{f}_2)} K_w, K_z \right\rangle - g_1'(z) \overline{f_2'(w)} - \left( \sum_{j=1}^{3N} \hat{x}_j(z) \overline{\hat{y}_j(w)} \right).$$

Se puede comprobar que  $h(z, \bar{w})$  es analítica en  $z$  y antianalítica en  $w$ ; además, por (3.7),  $h(z, \bar{z}) = 0$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ . Luego,  $h = 0$  (véase [11, Lema 2.3]). Así, para todo  $z, w \in \mathbb{D}$  se cumple

$$\left\langle T_{\tilde{\Delta}(g_1 \bar{f}_2)} K_w, K_z \right\rangle = g_1'(z) \overline{f_2'(w)} + \left( \sum_{j=1}^{3N} \hat{x}_j(z) \overline{\hat{y}_j(w)} \right). \quad (3.8)$$

Derivando (3.8)  $n$  veces respecto a  $\bar{w}$  y evaluando en  $\bar{w} = 0$ , se obtiene

$$T_{\tilde{\Delta}(g_1 \bar{f}_2)} \xi^n(z) = a_n g_1'(z) + \sum_{j=1}^{3N} b_{n,j} \hat{x}_j'(z),$$

donde  $a_n, b_{n_j}$  son constantes.

Note que las funciones  $g'_1$  y  $\hat{x}'_j$  pueden no ser analíticas. Sin embargo, tomando  $0 < r < 1$ , las funciones  $g'_1, \hat{x}'_j$  son continuas en  $\overline{r\mathbb{D}}$ . Esto implica que son acotadas y se tiene que  $g'_1, \hat{x}'_j \in \mathcal{A}^2(r\mathbb{D})$  para todo  $j = 1, \dots, N$ .

Afirmación: El operador de Toeplitz  $T_{\tilde{\Delta}(g_1\overline{f_2})}$  tiene a lo más rango  $3N + 1$ .

Supongamos que existen  $3N + 2$  funciones linealmente independientes  $\{\phi_k\}_{k=1}^{3N+2}$  en el rango de  $T_{\tilde{\Delta}(g_1\overline{f_2})}$ . En particular, para cada  $0 < r < 1$ ,  $\{\phi_k|_{r\mathbb{D}}\}_{k=1}^{3N+2}$  son linealmente independientes en el espacio  $\mathcal{A}^2(r\mathbb{D})$ . Como los polinomios son densos en  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ , para cada  $k = 1, \dots, N$ , existen polinomios  $p_{k_n}$  tal que  $T_{\tilde{\Delta}(g_1\overline{f_2})}p_{k_n} \rightarrow \phi_k$ , si  $n \rightarrow \infty$ . Entonces  $T_{\tilde{\Delta}(g_1\overline{f_2})}p_{k_n}$  converge uniformemente a  $\phi_k$  sobre cada subconjunto compacto del disco unitario  $\mathbb{D}$ . Se tiene entonces que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{r\mathbb{D}} |T_{\tilde{\Delta}(g_1\overline{f_2})}p_{k_n}(z) - \phi_k(z)|^2 dA(z) = 0.$$

Pero por otro lado,  $T_{\tilde{\Delta}(g_1\overline{f_2})}p_{k_n}|_{r\mathbb{D}}$  está contenido en el subespacio generado por el conjunto  $\{g'_1, \hat{x}'_j : j = 1, \dots, N\}$ . Este subespacio tiene dimensión a lo más  $3N + 1$ . Esto contradice que las funciones  $\{\phi_k|_{r\mathbb{D}}\}_{k=1}^{3N+2}$  sean linealmente independientes. En conclusión,  $T_{\tilde{\Delta}(g_1\overline{f_2})}$  tiene rango finito.  $\square$

**Teorema 3.18.** *Sean  $f$  y  $g$  funciones armónicas acotadas en el disco unitario  $\mathbb{D}$ . El semiconmutador  $(T_f, T_g]$  tiene rango finito si y solo si  $f$  es antianalítica o  $g$  es analítica en  $\mathbb{D}$ .*

*Demostración.* Si  $f$  es antianalítica o  $g$  es analítica en  $\mathbb{D}$ , usando las propiedades de la Proposición 3.1, el semiconmutador  $(T_f, T_g]$  es igual a cero y por lo tanto tiene rango finito.

Recíprocamente, si  $(T_f, T_g]$  tiene rango finito, por la Proposición 3.2, el operador  $H_{\overline{f}}^* H_g$  tiene rango finito. Entonces, por el Teorema 3.17, el operador de Toeplitz  $T_{\tilde{\Delta}(f_1\overline{g_2})}$  tiene rango finito, donde  $f_1$  y  $\overline{g_2}$  se determinan por la descomposición de las funciones armónicas,

$$f = f_1 + \overline{f_2} \quad \text{y} \quad g = g_1 + \overline{g_2}. \quad (3.9)$$

Dado que  $\tilde{\Delta}(f_1\overline{g_2}) \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ , el Corolario 3.11 implica que

$$0 = \tilde{\Delta}(f_1\overline{g_2})(z) = (1 - |z|^2)^2 f'_1(z) \overline{g'_2(z)}.$$

Esto implica que  $f_1'(z)\overline{g_2'(z)} = 0$  en  $\mathbb{D}$ .

Sean  $Z_{f_1'}$  y  $Z_{g_2'}$  los ceros de  $f_1'$  y  $g_2'$ , respectivamente. De nuevo se tiene que  $Z_{f_1'} \cup Z_{g_2'} = \mathbb{D}$ , por lo que alguno de los dos conjuntos debe tener puntos de acumulación. Debido a que  $f_1'$  y  $g_2'$  son funciones analíticas, por el Teorema de identidad clásico de Análisis Complejo, se tiene que  $f_1' \equiv 0$  o  $g_2' \equiv 0$  en  $\mathbb{D}$ . Esto implica que  $f_1$  es constante o  $g_2$  es constante. Si  $f_1$  es constante, de (3.9) se concluye que  $f$  es antianalítica; y similarmente si  $g_2$  es constante entonces  $g$  es analítica. Lo que concluye la demostración.  $\square$

# Capítulo 4

## Algunos símbolos particulares

En este capítulo se estudian los operadores de Toeplitz cuyos símbolos son funciones radiales definidas en el disco unitario  $\mathbb{D}$ , verticales u homogéneas definidas en el semiplano superior  $\Pi$ , y funciones continuas en el disco cerrado  $\bar{\mathbb{D}}$ . En particular, para el caso vertical y homogéneo, en [13] se construyó un operador unitario que reduce cada operador de Toeplitz a un operador de multiplicación específico, proporcionando así una representación de tipo espectral. Esta herramienta es de gran utilidad, ya que permite analizar de manera sistemática la mayoría de las propiedades importantes de los operadores de Toeplitz considerados en este capítulo. Para el caso de funciones continuas en el disco cerrado nos basamos en los resultados de [10]. El objetivo principal de este capítulo es estudiar y analizar cada operador de Toeplitz para así poder dar condiciones para que sean proyección (Capítulo 5).

### 4.1. Símbolos radiales

Una función  $a \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$  se denomina *función radial* si depende únicamente de la magnitud del vector, es decir,  $a(z) = a(|z|)$ .

De acuerdo con el Teorema 2.4, la base canónica de  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$  está formada por los monomios normalizados dados por (2.3):

$$e_n(z) = \sqrt{n+1}z^n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

**Proposición 4.1.** *Sea  $a \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$  una función radial y  $T_a$  el operador de Toeplitz definido en  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ . Entonces,  $T_a$  es un operador diagonal respecto a la base ortonormal (2.3).*

*Demostración.* Sean  $m, n \in \mathbb{N}_0$ . Consideremos el producto interno

$$\langle T_a(e_n), e_m \rangle = \langle ae_n, e_m \rangle = \sqrt{n+1}\sqrt{m+1} \int_{\mathbb{D}} a(z)z^n \overline{z^m}, dA(z).$$

Dado que  $a$  es radial, podemos expresar la integral en coordenadas polares haciendo  $z = re^{i\theta}$ , donde  $dA(z) = r dr d\theta$ , obteniendo

$$\langle T_a(e_n), e_m \rangle = 2\sqrt{n+1}\sqrt{m+1} \int_0^1 a(r)r^{n+m+1} dr \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\theta(n-m)} d\theta \right).$$

Aquí, el término angular  $\int_0^{2\pi} e^{i\theta(n-m)} d\theta$  es igual a  $2\pi$  si  $n = m$  y 0 en caso contrario. Por lo tanto

$$\langle T_a(e_n), e_m \rangle = \begin{cases} 2\sqrt{n+1}\sqrt{m+1} \int_0^1 a(r)r^{2n+1} dr, & \text{si } n = m, \\ 0 & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$

Esto implica que  $\langle T_a(e_n), e_m \rangle = 0$  para  $n \neq m$ , por lo que  $T_a$  es diagonal en la base ortonormal (2.3). Además, los elementos diagonales de  $T_a$  están dados por

$$\langle T_a(e_n), e_n \rangle = 2(n+1) \int_0^1 a(r)r^{2n+1} dr. \quad (4.1)$$

□

De (4.1) se deduce que

$$T_a(e_n) = \gamma_a(n)(e_n), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.2)$$

donde los correspondientes valores propios  $\gamma_a(n)$  están dados por

$$\gamma_a(n) = 2(n+1) \int_0^1 a(r)r^{2n+1} dr. \quad (4.3)$$

Definamos el operador  $R : \mathcal{A}^2(\mathbb{D}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N}_0)$  dado por la regla

$$R(g) = (\langle g, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}_0}. \quad (4.4)$$

Esto es, el operador  $R$  asocia a cada elemento del espacio de Bergman la sucesión formada por sus coeficientes de Fourier con respecto a la base (2.3). El operador inverso  $R^{-1} = R^* : \ell^2(\mathbb{N}_0) \rightarrow \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$  está dado por

$$R^*(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n. \quad (4.5)$$

Note que  $R$  y  $R^*$  son isomorfismos entre espacios de Hilbert; más aún

$$\begin{aligned} RR^* &= I : \ell^2(\mathbb{N}_0) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N}_0), \\ R^*R &= I : \mathcal{A}^2(\mathbb{D}) \rightarrow \mathcal{A}^2(\mathbb{D}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 4.2.** *Sea  $a = a(r) \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$  una función radial. Entonces el operador de Toeplitz  $T_a$  que actúa en  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$  es unitariamente equivalente al operador de multiplicación  $M_{\gamma_a} = RT_aR^*$ , que actúa en  $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ , donde  $R$  y  $R^*$  están dados por (4.4) y (4.5) respectivamente. La sucesión  $\gamma_a = (\gamma_a(n))_{n \in \mathbb{N}_0}$  está dada por*

$$\gamma_a(n) = (n+1) \int_0^1 a(\sqrt{r}) r^n dr, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (4.6)$$

*Demostración.* Es claro que el operador  $T_a$  es unitariamente equivalente al operador  $RT_aR^*$ . Más aún, dado que  $T_a$  es un operador continuo y usando (4.2) se sigue que  $M_{\gamma_a} = RT_aR^*$ , donde la sucesión  $\gamma_a$  está dada por (4.3), es decir

$$\gamma_a(n) = 2(n+1) \int_0^1 a(t)t^{2n+1} dt.$$

Haciendo el cambio de variable  $t = r^{1/2}$  en la ecuación anterior se obtiene el resultado.  $\square$

**Corolario 4.3.** *Sea  $a \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$  una función radial. Entonces, el espectro del operador de Toeplitz  $T_a$  está dado por*

$$\sigma(T_a) = \overline{\{\gamma_a(n) : n \in \mathbb{N}_0\}},$$

donde  $\gamma_a(n)$  está dado por (4.6) para cada  $n \in \mathbb{N}_0$ .

*Demostración.* De (4.2) se deduce que  $\overline{\{\gamma_a(n) : n \in \mathbb{N}_0\}} \subset \sigma(T_a)$ .

Para demostrar el recíproco, supongamos que  $\lambda \notin \overline{\{\gamma_a(n) : n \in \mathbb{N}_0\}}$ . En ese caso, existe  $\epsilon > 0$  tal que  $|\lambda - \gamma_a(n)| > \epsilon$  para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ . Por ello,  $\frac{1}{|\lambda - \gamma_a(n)|} < 1/\epsilon$  para todo  $n$ , lo que implica que el operador  $N : \ell^2 \rightarrow \ell^2$  definido por la regla

$$N((c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}) = \left( \frac{c_n}{\lambda - \gamma_a(n)} \right)_{n \in \mathbb{N}_0}$$

es acotado. Es fácil comprobar que  $N$  es el inverso del operador  $M_{\gamma_a} - \lambda I$ . Por lo tanto,  $\lambda \notin \sigma(M_{\gamma_a}) = \sigma(T_a)$ . Hemos probado que si  $\lambda \in \sigma(T_a)$  entonces  $\lambda \in \overline{\{\gamma_a(n) : n \in \mathbb{N}_0\}}$ .  $\square$

**Corolario 4.4.** Sea  $a \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ . Entonces  $\gamma_a$  satisface

$$\|\gamma_a\|_\infty \leq \|a\|_\infty.$$

*Demostración.* De (4.3) tenemos que

$$|\gamma_a(n)| \leq 2\|a\|_\infty(n+1) \int_0^1 r^{2n+1} dr = \|a\|_\infty.$$

□

La sucesión  $\gamma_a$  se puede escribir de una forma alternativa haciendo el cambio de variable  $b(u) = a(\sqrt{u})$  en (4.6). Entonces se tiene

$$\gamma_a(n) = (n+1) \int_0^1 b(u)u^n du, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (4.7)$$

El Teorema de representación de Markov garantiza que el espacio dual de las funciones continuas en  $[0, 1]$  coincide con el espacio de medidas de Borel, regular, complejas en  $[0, 1]$ , es decir a cada medida  $\mu$  se asocia el funcional  $\phi_\mu$  dado por

$$\phi_\mu(f) = \int f d\mu,$$

y la norma de  $\phi_\mu$  coincide con la variación total de  $\mu$ . Para el caso particular donde  $\mu = gds$ , con  $g \in L^1[0, 1]$ , se tiene que

$$|\mu|([0, 1]) = \int_0^1 |g| ds = \|g\|_1.$$

Con esto se tiene el siguiente lema.

**Lema 4.5.** Sea  $g \in L^1[0, 1]$  y  $f \in C[0, 1]$  tal que

$$\int_0^1 g(s)f(s)ds = 0.$$

Entonces  $g = 0$  c.t.p.

**Teorema 4.6.** Sean  $n_0 \in \mathbb{N}_0$  y  $d \in \mathbb{N}$  fijos. Suponga que

$$\gamma_a(n_k) = 0,$$

con  $n_k = n_0 + dk$  para todo  $k \in \mathbb{N}_0$ . Entonces  $b(u) = 0$  casi en todas partes.

*Demostración.* De la representación en (4.7), se tiene que

$$0 = \gamma_a(n_k) = \int_0^1 b(u)u^{n_0}u^{dk} du.$$

Haciendo el cambio de variable  $u = s^{1/d}$  en la integral anterior, para cada  $k \in \mathbb{N}_0$  se cumple que

$$\int_0^1 b(s^{1/d})s^{\frac{n_0+1-d}{d}}s^k ds = 0. \quad (4.8)$$

Sea  $g(s) := b(s^{1/d})s^{\frac{n_0+1-d}{d}}$ . Haciendo de nuevo el cambio de variable  $u = s^{1/d}$ , se puede ver que la función  $g \in L^1[0, 1]$ , pues

$$\left| \int_0^1 g(s)ds \right| \leq \int_0^1 |b(u)u^{n_0}d| du < \infty.$$

Ahora, dado que cualquier función continua se puede aproximar por un polinomio, de (4.8), se tiene que para cualquier  $f \in C[0, 1]$ ,

$$\int_0^1 g(s)f(s)ds = 0.$$

Por el Lema 4.5, se concluye que  $g = 0$  c.t.p., por lo que  $b(u) = 0$  c.t.p.  $\square$

El siguiente teorema, tomado de [3], garantiza que las sucesiones de valores propios son Lipschitz continuas respecto a la métrica  $\rho_1(j, k)$  sobre  $\mathbb{N}_0$  dada por

$$\rho_1(j, k) = \frac{|j - k|}{\max(j + 1, k + 1)}. \quad (4.9)$$

**Teorema 4.7.** *Sea  $a \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ . Entonces, para todos  $j, k \in \mathbb{N}_0$  se cumple que*

$$|\gamma_a(j) - \gamma_a(k)| \leq 2\|a\|_\infty \rho_1(j, k). \quad (4.10)$$

*Demostración.* Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $j < k$ . Entonces

$$\begin{aligned} |\gamma_a(j) - \gamma_a(k)| &= \left| \int_0^1 2a(r)((j+1)r^{2j+1} - (k+1)r^{2k+1})dr \right| \\ &\leq 2\|a\|_\infty \int_0^1 |(j+1)r^{2j+1} - (k+1)r^{2k+1}| dr. \end{aligned} \quad (4.11)$$

La ecuación  $(j+1)r^{2j+1} - (k+1)r^{2k+1} = 0$  tiene una única solución en el intervalo  $(0, 1)$ , dada por

$$r_0 = \left( \frac{j+1}{k+1} \right)^{\frac{1}{2(k-j)}}.$$

Además, la función  $r \mapsto (j+1)r^{2j+1} - (k+1)r^{2k+1}$  es positiva en  $(0, r_0)$  y negativa en  $(r_0, 1)$ . Dividiendo la integral (4.11) en estos dos intervalos, obtenemos

$$|\gamma_a(j) - \gamma_a(k)| \leq 2\|a\|_\infty (r_0^{2j+2} - r_0^{2k+2}),$$

donde

$$r_0^{2j+2} - r_0^{2k+2} = r_0^{2j+2} (1 - r_0^{2(k-j)}) = r_0^{2j+2} \left( 1 - \frac{1+j}{1+k} \right) = r_0^{2j+2} \rho_1(j, k).$$

Finalmente, dado que  $r_0 < 1$ , se concluye que

$$|\gamma_a(j) - \gamma_a(k)| \leq 2\|a\|_\infty \rho_1(j, k),$$

verificando así la desigualdad (4.10). □

## 4.2. Símbolos homogéneos

Ahora pasamos a los operadores de Toeplitz con símbolos homogéneos, es decir, funciones que dependen únicamente de la parte angular. El teorema principal de esta sección se tomó de [13, Teorema 7.2.1].

Sea  $\Pi$  el semiplano superior en  $\mathbb{C}$ , esto es

$$\Pi = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\} = \{x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}.$$

Consideremos el espacio  $L^2(\Pi)$  con la medida de Lebesgue usual  $dA(z) = dx dy$ , donde  $z = x + iy$ , y sea  $\mathcal{A}^2(\Pi)$  el espacio de Bergman sobre  $\Pi$  (véase [13, Sección 3.1]).

**Teorema 4.8.** *Sea  $a = a(\theta) \in L^\infty(\Pi)$  una función homogénea. Entonces, existe un operador unitario  $R : \mathcal{A}^2(\Pi) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  tal que el operador de Toeplitz  $T_a$  actuando sobre  $\mathcal{A}^2(\Pi)$  es unitariamente equivalente al operador de*

multiplicación  $M_{\gamma_a} = RT_aR^*$  actuando sobre  $L^2(\mathbb{R})$ . La función  $\gamma_a(\lambda)$  está dada por

$$\gamma_a(\lambda) = \begin{cases} \frac{2\lambda}{1 - e^{-2\pi\lambda}} \int_0^\pi a(\theta)e^{-2\lambda\theta} d\theta, & \text{si } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \frac{1}{\pi} \int_0^\pi a(\theta) d\theta, & \text{si } \lambda = 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

**Teorema 4.9.** *La función  $\gamma_a$  definida en (4.12) es continua.*

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $\lambda < \lambda_0$ . Entonces

$$|\gamma_a(\lambda) - \gamma_a(\lambda_0)| \leq \|a\|_\infty \int_0^\pi (e^{-2\theta\lambda} - e^{-2\theta\lambda_0}) d\theta = \frac{1 - e^{-2\pi\lambda}}{2\lambda} - \frac{1 - e^{-2\pi\lambda_0}}{2\lambda_0}.$$

Por lo tanto,  $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} |\gamma_a(\lambda) - \gamma_a(\lambda_0)| = 0$ . □

### 4.3. Símbolos verticales

Los *operadores de Toeplitz con símbolos verticales*  $T_b$ , que actúan en el espacio de Bergman  $\mathcal{A}^2(\Pi)$ , son aquellos cuyos símbolos acotados dependen solamente de la parte imaginaria del argumento, es decir

$$b(z) = b(y), \quad z = x + iy.$$

Este tipo de operadores también se pueden diagonalizar por medio de un operador unitario, como se hizo en [13, Teorema 5.2.1].

**Teorema 4.10.** *Sea  $a = a(\text{Im } z) = a(y) \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$ . Entonces el operador de Toeplitz  $T_a$  es unitariamente equivalente al operador de multiplicación  $M_{\gamma_a} = RT_aR^*$ , donde*

$$R : \mathcal{A}^2(\Pi) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^+)$$

está dado por

$$(R\varphi)(x) = \sqrt{x} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\Pi} \varphi(w) e^{-i\bar{w} \cdot x} d\mu(w).$$

y

$$R^* : L^2(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{A}^2(\Pi)$$

está dado por

$$(R^*f)(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^+} \sqrt{\xi} f(\xi) e^{iz \cdot \xi} d\xi.$$

La función  $\gamma_a$  está dada por

$$\gamma_a(x) = \int_{\mathbb{R}^+} a\left(\frac{\nu}{2x}\right) e^{-\nu} d\nu, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (4.13)$$

**Teorema 4.11.** *La función  $\gamma_a$  definida en (4.13) es continua.*

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $x < x_0$ . Entonces

$$|\gamma_a(x) - \gamma_a(x_0)| \leq \|a\|_\infty \int_0^\infty |e^{-xt} - e^{-x_0t}| dt = \|a\|_\infty \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right).$$

Por lo tanto,  $\lim_{x \rightarrow x_0} |\gamma_a(x) - \gamma_a(x_0)| = 0$ . □

## 4.4. Símbolo continuo en el disco cerrado

Denotamos por  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(C(\overline{\mathbb{D}}))$  al álgebra  $C^*$  generada por todos los operadores de Toeplitz en el espacio de Bergman  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$  con símbolos continuos en  $\overline{\mathbb{D}}$ . Decimos que el álgebra  $\mathcal{T}$  es *irreducible* si cada proyección  $P$  que conmuta con cada operador de Toeplitz  $T_a$ , con  $a \in C(\overline{\mathbb{D}})$ , es una proyección trivial; esto es,  $P = 0$  o  $P = I$ . El siguiente lema se puede encontrar en [13].

**Lema 4.12.** *El álgebra  $C^*$   $\mathcal{T}$  es irreducible y contiene al ideal  $\mathcal{K}(\mathcal{A}^2(\mathbb{D}))$ .*

El lema anterior es un resultado fundamental en el estudio de las álgebras de operadores de Toeplitz para poder definir el cociente  $\mathcal{T}/\mathcal{K}$ , el cual es isomorfo a  $C(\partial\mathbb{D})$  [10, Teorema 6.15]

**Teorema 4.13.** *Existe un  $*$ -isomorfismo isométrico entre el Álgebra de Calkin  $\mathcal{T}/\mathcal{K}$  y el álgebra  $C(\partial\mathbb{D})$ . El isomorfismo está dado por*

$$\Phi(T_a + \mathcal{K}) = a|_{\partial\mathbb{D}}.$$

**Corolario 4.14.** *Sea  $f \in C(\overline{\mathbb{D}})$ . Entonces,*

$$\sigma_e(T_f) = \{f(z) : z \in \partial\mathbb{D}\}.$$

**Corolario 4.15.** *El operador de Toeplitz es compacto si y solo si  $f \in C(\overline{\mathbb{D}})$  y  $f|_{\partial\mathbb{D}} = 0$ .*

# Capítulo 5

## Proyecciones en el álgebra de Toeplitz

Una pregunta natural al estudiar operadores de Toeplitz es determinar cuáles de ellos son proyecciones ortogonales. Esta propiedad impone restricciones significativas sobre el símbolo asociado al operador. Con el objetivo de identificar y encontrar dichas condiciones, se analizó el trabajo de Liu en [7], donde se establecen estas condiciones para ciertos tipos de símbolos. Además, también se estudian productos de operadores de Toeplitz que son proyección; para esta última parte es necesario considerar operadores de Toeplitz cuyos símbolos son funciones armónicas.

Además de los casos mencionados anteriormente, en este trabajo analizamos otro tipo de símbolos que han sido de interés en la teoría de operadores, lo que abre nuevas perspectivas en esta área de estudio.

### 5.1. Operadores de Toeplitz que son proyecciones

En esta sección presentamos los resultados de [7] y ampliamos el análisis incluyendo otros casos que han sido de gran interés en el estudio de operadores de Toeplitz. Estos casos adicionales están relacionados con álgebras  $C^*$  conmutativas generadas por este tipo de operadores. De esta forma, describimos las características que debe tener un símbolo para que el operador de

Toeplitz correspondiente sea una proyección, considerando escenarios en los que el símbolo sea una función radial, homogénea o vertical.

### 5.1.1. Algunos símbolos especiales

**Teorema 5.1.** *Sea  $f$  una función en  $L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ . Si el operador de Toeplitz  $T_f$  es una proyección en  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$  y el espectro esencial  $\sigma_e(T_f)$  es conexo, entonces se tiene que  $f \equiv 0$  o  $f \equiv 1$  en el disco unitario  $\mathbb{D}$ .*

*Demostración.* Como  $T_f$  es una proyección, por el Teorema 1.10 y el Corolario 1.16 tenemos que

$$\sigma_e(T_f) \subset \sigma(T_f) \subset \{0, 1\}.$$

Por hipótesis  $\sigma_e(T_f)$  es conexo, así que  $\sigma_e(T_f) = \{0\}$  o  $\sigma_e(T_f) = \{1\}$ , ya que son los únicos subconjuntos conexos posibles de  $\{0, 1\}$ . Es fácil ver que  $T_f + \mathcal{K}$  es autoadjunto, y por la fórmula del radio espectral tenemos que  $r_e(T_f) = \|T_f\|_e$ . Si  $\sigma_e(T_f) = \{0\}$ , entonces  $\|T_f\|_e = 0$  y por lo tanto  $T_f$  es una proyección compacta. Por el Teorema 1.14,  $T_f$  tiene rango finito, y por el Teorema 3.10, esto ocurre cuando  $f \equiv 0$  en el disco unitario. De forma análoga, si  $\sigma_e(T_f) = \{1\}$ , tenemos que  $T_{1-f}$  tiene rango finito y de aquí se concluye que  $f \equiv 1$  en el disco unitario.  $\square$

En [12], Stroethoff y Zheng estudiaron el espectro esencial del operador de Toeplitz  $T_f$  para  $f \in AQ(\mathbb{D})$ , la subálgebra de  $L^\infty(\mathbb{D}, dA)$  definida en la Sección 3.2, y obtuvieron el siguiente resultado.

**Teorema 5.2.** *Si  $f \in AQ(\mathbb{D})$ , entonces el espectro esencial de  $T_f$  es conexo.*

**Corolario 5.3.** *Sea  $f \in AQ(\mathbb{D})$  y  $T_f$  una proyección en el espacio de Bergman. Entonces  $f \equiv 0$  o  $f \equiv 1$  en el disco unitario  $\mathbb{D}$ .*

*Demostración.* Se sigue del Teorema 5.1.  $\square$

Abordamos ahora la situación en que el símbolo es una función continua en el disco unitario cerrado. El siguiente teorema muestra que bajo esta condición, el operador de Toeplitz es una proyección cuando el símbolo es una función constante en disco unitario, tomando valores exclusivamente en el conjunto  $\{0, 1\}$ .

**Teorema 5.4.** *Sea  $f \in C(\overline{\mathbb{D}})$  tal que  $T_f$  es una proyección en  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ . Entonces  $f \equiv 0$  o  $f \equiv 1$  en el disco unitario  $\mathbb{D}$ .*

*Demostración.* Sea  $f \in C(\overline{\mathbb{D}})$ . Usando el isomorfismo isométrico del Teorema 4.13 y teniendo en cuenta que  $\partial\mathbb{D}$  es un conjunto compacto (Ejemplo 3) se tiene que

$$\sigma_e(T_f) = \sigma(f|_{\partial\mathbb{D}}) = f(\partial\mathbb{D}) \subseteq \sigma(T_f) \subseteq \{0, 1\}.$$

Como  $f$  es una función continua, si  $f(\partial\mathbb{D}) \subseteq \{0, 1\}$  entonces  $f$  debe ser una función constante, tomando el valor 0 o 1 en  $\partial\mathbb{D}$ . Si  $f \equiv 0$  en  $\partial\mathbb{D}$ , entonces por el Corolario 4.15 se tiene que  $T_f$  es una proyección compacta. De acuerdo al Teorema 1.14,  $T_f$  debe ser de rango finito y así  $f \equiv 0$  en  $\mathbb{D}$ . Por otro lado, usando el mismo argumento, si  $f \equiv 1$  en  $\partial\mathbb{D}$ , el operador  $T_{f-1}$  es una proyección compacta y por lo tanto  $f \equiv 1$  en  $\mathbb{D}$ .  $\square$

El siguiente teorema da una condición necesaria y suficiente para que un operador de Toeplitz sea una proyección cuando su símbolo es no negativo.

**Teorema 5.5.** *Sea  $f \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$  una función no negativa. El operador de Toeplitz  $T_f$  es una proyección en el espacio de Bergman si y solo si  $f \equiv 0$  c.t.p. o  $f \equiv 1$  c.t.p. en el disco unitario  $\mathbb{D}$ .*

*Demostración.* Si  $f \equiv 0$  c.t.p. o  $f \equiv 1$  c.t.p. en  $\mathbb{D}$ , es claro que  $T_f$  es una proyección en  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ . Para probar el recíproco, si el operador de Toeplitz es la identidad, entonces  $f \equiv 1$  c.t.p. en el disco unitario. Si  $T_f$  es una proyección diferente de la identidad, entonces existe un subespacio cerrado propio  $M \subset \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$  tal que  $T_f = P_M$ , donde  $P_M$  es la proyección ortogonal sobre  $M$ . Como  $M$  es propio,  $M^\perp \neq \{0\}$  y como  $\ker P_M = M^\perp$  tenemos que existe una función  $g \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D}) \setminus \{0\}$  tal que  $T_f(g) = 0$ . Como  $T_f$  es una proyección, tenemos que

$$0 = \langle T_f g, g \rangle = \langle f g, g \rangle = \int_{\mathbb{D}} f(z) |g(z)|^2 dA(z).$$

Por lo tanto,  $f(z) |g(z)|^2 = 0$  para c.t.p.  $z \in \mathbb{D}$ . Pero  $g \neq 0$ , luego  $f \equiv 0$  c.t.p.  $\square$

### 5.1.2. Símbolos radiales, verticales y homogéneos

Los siguientes tres teoremas caracterizan las propiedades de los símbolos de los operadores de Toeplitz que actúan como proyecciones en distintos contextos: cuando el símbolo es una función radial definida sobre el disco unitario  $\mathbb{D}$ , una función homogénea y una función vertical, en estos últimos

casos definidas sobre el semiplano superior  $\mathbb{H}$ . Esta parte se basa en los resultados de [13] que se resumen en el Capítulo 4, donde se muestra que cada uno de estos operadores puede ser visto como un operador de multiplicación. Este hecho implica que el espectro de estos operadores queda completamente determinado por la imagen de la función correspondiente.

De la Sección 4.1, se obtuvo que si  $a$  es una función radial, el operador de Toeplitz  $T_a$  es unitariamente equivalente al operador de multiplicación  $M_{\gamma_a}$ , donde

$$\gamma_a(n) = (n+1) \int_0^1 a(\sqrt{r}) r^n dr, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Un caso particular del Teorema 4.7 es cuando  $j = k+1$ , así la condición en (4.10) se convierte en la desigualdad

$$|\gamma_a(k+1) - \gamma_a(k)| \leq 2\|a\|_\infty \rho_1(k+1, k),$$

donde  $\rho_1$  es la métrica definida en (4.9). En este caso particular se tiene que  $\rho_1(k+1, k) = \frac{1}{k+2}$ . Por lo tanto tenemos que

$$|\gamma_a(k+1) - \gamma_a(k)| \leq \frac{2\|a\|_\infty}{k+2}. \quad (5.1)$$

**Lema 5.6.** *Supongamos que  $\gamma_a(n) \in \{0, 1\}$  para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ . Entonces existe  $m \in \mathbb{N}_0$  tal que  $\gamma_a(k) = \gamma_a(m)$  para todo  $k > m$ .*

*Demostración.* Supongamos que existe  $k \in \mathbb{N}_0$  tal que  $\gamma_a(k) \neq \gamma_a(k+1)$ , entonces por (5.1) se tiene que

$$k \leq 2(\|a\|_\infty - 1).$$

Basta tomar cualquier  $m \in \mathbb{N}_0$  tal que  $m \geq 2(\|a\|_\infty - 1)$  para que se cumpla la hipótesis.  $\square$

**Teorema 5.7.** *Sea  $a \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$  una función radial. El operador de Toeplitz  $T_a$  es una proyección si y solo si  $a \equiv 0$  o  $a \equiv 1$  en el disco unitario  $\mathbb{D}$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $T_a$  es una proyección no trivial. Entonces, por el Corolario 4.3, se tiene que

$$\sigma(T_a) = \overline{\{\gamma_a(n) : n \in \mathbb{N}_0\}} = \{0, 1\}.$$

Esto implica que  $\gamma_a(n) \in \{0, 1\}$  para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Por el Lema 5.6, si  $m > 2(\|a\|_\infty - 1)$ , entonces  $\gamma_a(k) = \gamma_a(m)$  para todo  $k > m$ .

**Caso 1:** Supongamos que  $\gamma_a(k) = 0$  para todo  $k > m$ . En este caso, elegimos  $n_0 = m$  y  $d = 1$  en el Teorema 4.6. Como  $\gamma_a(m+k) = 0$  para todo  $k \in \mathbb{N}_0$ , se concluye que  $a \equiv 0$ .

**Caso 2:** Supongamos que  $\gamma_a(k) = 1$  para todo  $k > m$ . Entonces  $1 - \gamma_a(k) = 0$  para todo  $k > m$ . Aplicando el caso 1 a  $\gamma_{1-a}(k)$  se concluye que  $a \equiv 1$ .

Recíprocamente, si  $a \equiv 0$  o  $a \equiv 1$ , es inmediato verificar que  $T_a$  es una proyección. Esto concluye la demostración.  $\square$

En los siguientes dos teoremas se usará el espectro del operador de multiplicación que se explicó en el Ejemplo 2.

**Teorema 5.8.** *Sea  $a \in L^\infty(\Pi, dA)$  una función vertical. El operador de Toeplitz  $T_a$  es una proyección si y solo si  $a \equiv 0$  o  $a \equiv 1$  en el semiplano superior  $\Pi$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $T_a$  es una proyección no trivial, entonces  $\sigma(T_a) = \{0, 1\}$ . Por el Teorema 4.10, el operador  $T_a$  es unitariamente equivalente al operador de multiplicación  $M_{\gamma_a}$ , donde la función  $\gamma_a$  está dada por

$$\gamma_a(x) = \int_{\mathbb{R}^+} a\left(\frac{\nu}{2x}\right) e^{-\nu} d\nu, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Como el espectro se preserva bajo equivalencia unitaria y  $\gamma_a$  es una función continua (Teorema 4.11), se tiene que

$$\{0, 1\} = \sigma(T_a) = \sigma(M_{\gamma_a}) = \mathcal{ER}(\gamma_a) = \overline{\gamma_a(\mathbb{R}^+)}.$$

Dado que  $\mathbb{R}^+$  es conexo, se tiene que  $\overline{\gamma_a(\mathbb{R}^+)}$  es conexo. Esto implica que  $\gamma_a(\mathbb{R}^+) = \{0\}$  o  $\gamma_a(\mathbb{R}^+) = \{1\}$ .

Si  $\gamma_a(\mathbb{R}^+) = \{0\}$ , entonces  $M_{\gamma_a} = 0$ . Esto implica que  $T_a = 0$  obteniendo que  $a \equiv 0$  en  $\Pi$ .

En otro caso, si  $\gamma_a(\mathbb{R}^+) = \{1\}$ , entonces  $M_{\gamma_a-1} = 0$ . Esto implica que  $T_{a-1} = 0$  obteniendo que  $a \equiv 1$  en  $\Pi$ .

Recíprocamente, si  $a \equiv 0$  o  $a \equiv 1$  en  $\Pi$ , es inmediato verificar que  $T_a$  es una proyección. Esto concluye la demostración.  $\square$

**Teorema 5.9.** *Sea  $a \in L^\infty(\Pi, dA)$  una función homogénea. El operador de Toeplitz  $T_a$  es una proyección si y solo si  $a \equiv 0$  o  $a \equiv 1$  en el semiplano superior  $\Pi$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $T_a$  es una proyección no trivial, entonces  $\sigma(T_a) = \{0, 1\}$ . Por el Teorema 4.8, el operador  $T_a$  es unitariamente equivalente al operador de multiplicación  $M_{\gamma_a}$ , donde la función  $\gamma_a$  está dada por

$$\gamma_a(\lambda) = \begin{cases} \frac{2\lambda}{1 - e^{-2\pi\lambda}} \int_0^\pi a(\theta) e^{-2\lambda\theta} d\theta, & \text{si } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \frac{1}{\pi} \int_0^\pi a(\theta) d\theta, & \text{si } \lambda = 0. \end{cases}$$

Como el espectro se preserva bajo equivalencia unitaria y  $\gamma_a$  es una función continua (Teorema 4.8), se tiene que

$$\{0, 1\} = \sigma(T_a) = \sigma(M_{\gamma_a}) = \mathcal{ER}(\gamma_a) = \overline{\gamma_a(\mathbb{R})}.$$

Dado que  $\mathbb{R}$  es conexo, se tiene que  $\overline{\gamma_a(\mathbb{R})}$  es conexo. Esto implica que  $\gamma_a(\mathbb{R}) = \{0\}$  o  $\gamma_a(\mathbb{R}) = \{1\}$ .

Si  $\gamma_a(\mathbb{R}) = \{0\}$ , entonces  $M_{\gamma_a} = 0$ . Esto implica que  $T_a = 0$  obteniendo que  $a \equiv 0$  en  $\Pi$ .

En otro caso, si  $\gamma_a(\mathbb{R}) = \{1\}$ , entonces  $M_{\gamma_a-1} = 0$ . Esto implica que  $T_{a-1} = 0$  obteniendo que  $a \equiv 1$  en  $\Pi$ .

Por el contrario, si  $a \equiv 0$  o  $a \equiv 1$ , es inmediato verificar que  $T_a$  es una proyección. Esto concluye la demostración.  $\square$

## 5.2. Producto de operadores de Toeplitz

En esta sección estudiamos las condiciones bajo las cuales el producto de dos operadores de Toeplitz  $T_f$  y  $T_g$  resulta en una proyección en el espacio de Bergman  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ . El Teorema 5.10 proporciona condiciones necesarias y suficientes para que dicho producto sea autoadjunto cuando los símbolos  $f$  y  $g$  son funciones armónicas. Para su demostración, se requieren los lemas de la Sección 3.4.

**Teorema 5.10.** Sean  $f$  y  $g$  funciones armónicas y acotadas en el disco unitario  $\mathbb{D}$ . Entonces,  $T_f T_g$  es un operador autoadjunto si y solo si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

- (A)  $f$  es una función antianalítica y  $fg$  es real-valuada en  $\mathbb{D}$ ;
- (B)  $g$  es una función analítica y  $fg$  es real-valuada en  $\mathbb{D}$ ;
- (C) Existen una constante  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  y una función analítica  $h$  tales que  $f = \lambda \bar{g} + \bar{h}$  y  $\bar{h}g$  es real-valuada en  $\mathbb{D}$ .

*Demostración.* Primero, demostraremos que cada condición implica que  $T_f T_g$  es autoadjunto:

Si se cumple (A) o (B), las propiedades de los operadores de Toeplitz (Proposición 3.1) garantizan que

$$T_f T_g = T_{fg} = T_{\bar{f}\bar{g}} = T_{\bar{g}} T_{\bar{f}} = (T_f T_g)^*.$$

Por lo tanto,  $T_f T_g$  es autoadjunto.

Si se cumple (C), usando que  $h$  es analítica, obtenemos

$$T_f T_g = T_{\lambda \bar{g} + \bar{h}} T_g = \lambda T_{\bar{g}} T_g + T_{\bar{h}} T_g = \lambda T_{\bar{g}} T_g + T_{\bar{h}g}.$$

Además, como  $\bar{h}g$  es real-valuada, se tiene que

$$(T_f T_g)^* = T_{\bar{g}} T_{\lambda g + h} = \lambda T_{\bar{g}} T_g + T_{\bar{g}h} = \lambda T_{\bar{g}} T_g + T_{\bar{h}g}.$$

Así,  $T_f T_g = (T_f T_g)^*$ , es decir,  $T_f T_g$  es autoadjunto.

Ahora probamos el recíproco. Supongamos que  $T_f T_g$  es autoadjunto. Dado que  $f$  y  $g$  son funciones armónicas y acotadas, por el Teorema 1.20 y el Corolario 1.21 existen funciones analíticas y acotadas  $f_1, f_2, g_1, g_2$  tales que:

$$f = f_1 + \bar{f}_2 \quad \text{y} \quad g = g_1 + \bar{g}_2.$$

Por el Lema 3.14, se tiene que

$$B(T_f T_g)(z) = (f_1 g_1)(z) + (f_1 \bar{g}_2)(z) + (\bar{f}_2 g_2)(z) + B(\bar{f}_2 g_1)(z). \quad (5.2)$$

Similarmente, para  $B((T_f T_g)^*)(z)$ , se tiene

$$B((T_f T_g)^*)(z) = (\bar{f}_1 g_1)(z) + (\bar{f}_1 g_2)(z) + (f_2 g_2)(z) + B(f_2 \bar{g}_1)(z). \quad (5.3)$$

De (5.3) y (5.2) se tiene respectivamente

$$(\overline{f_1 g_2})(z) = B((T_f T_g)^*)(z) - \overline{(f_1 g_1)}(z) - (f_2 g_2)(z) - B(f_2 \overline{g_1})(z). \quad (5.4)$$

y

$$(f_1 \overline{g_2})(z) = B(T_f T_g)(z) - (f_1 g_1)(z) - \overline{(f_2 g_2)}(z) - B(\overline{f_2 g_1})(z). \quad (5.5)$$

Como  $T_f T_g$  es autoadjunto,  $B(T_f T_g)(z) = B((T_f T_g)^*)(z)$ . Por lo tanto, restando (5.4) y (5.5) se tiene que

$$\overline{f_1}(z)g_2(z) - f_1(z)\overline{g_2}(z) = B(\overline{f_2 g_1} - f_2 \overline{g_1}) + (f_1 g_1 - \overline{f_1 g_1} + \overline{f_2 g_2} - f_2 g_2)(z).$$

Note que si  $h := f_1 g_1 - \overline{f_1 g_1} + \overline{f_2 g_2} - f_2 g_2$ , es fácil ver que  $h$  es una función armónica. Por la Proposición 3.7, para todo  $z \in \mathbb{D}$  se cumple que  $Bh(z) = h(z)$ .

En conclusión tenemos la siguiente igualdad:

$$\overline{f_1}(z)g_2(z) - f_1(z)\overline{g_2}(z) = B(\overline{f_2 g_1} - f_2 \overline{g_1} + f_1 g_1 - \overline{f_1 g_1} + \overline{f_2 g_2} - f_2 g_2)(z).$$

Aplicando el laplaciano invariante en ambos lados de la ecuación anterior y utilizando la conmutatividad de la transformada de Berezin con el laplaciano invariante (Proposición 3.8), llegamos a

$$(1 - |z|^2)^2 \left( \overline{f_1'(z)g_2'(z)} - f_1'(z)\overline{g_2'(z)} \right) = B \left( \tilde{\Delta}(\overline{f_2 g_1} - f_2 \overline{g_1}) \right) (z),$$

o, equivalentemente, para todo  $z \in \mathbb{D}$

$$\overline{f_1'(z)g_2'(z)} - f_1'(z)\overline{g_2'(z)} = \int_{\mathbb{D}} \frac{\tilde{\Delta}(\overline{f_2 g_1} - f_2 \overline{g_1})(\xi)}{|1 - \bar{\xi}z|^4} dA(\xi). \quad (5.6)$$

Como en la demostración del Teorema 3.17, para todo  $z, w \in \mathbb{D}$ , se cumple la siguiente igualdad:

$$\overline{f_1'(w)g_2'(z)} - f_1'(z)\overline{g_2'(w)} = \int_{\mathbb{D}} \frac{\tilde{\Delta}(\overline{f_2 g_1} - f_2 \overline{g_1})(\xi)}{(1 - \bar{\xi}z)^2(1 - \xi w)^2} dA(\xi). \quad (5.7)$$

Derivando  $n$  veces (5.7) con respecto a  $w$  y evaluando en  $w = 0$ , se obtiene

$$a_n g_2'(z) - b_n f_1'(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{\xi^n \tilde{\Delta}(\overline{f_2 g_1} - f_2 \overline{g_1})(\xi)}{(1 - \bar{\xi}z)^2} dA(\xi),$$

donde  $a_n, b_n$  son constantes para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

El operador de Toeplitz  $T_{\tilde{\Delta}(\overline{f_2g_1 - f_2\overline{g_1}})}$  es acotado en el espacio de Bergman  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$  (Lema 1.22). Por lo tanto, la ecuación anterior puede reescribirse como

$$T_{\tilde{\Delta}(\overline{f_2g_1 - f_2\overline{g_1}})}\xi^n(z) = a_n g_2'(z) - b_n f_1'(z).$$

A continuación, analizamos varios casos para las constantes.

**Caso I.** Si  $a_n = b_n = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces

$$T_{\tilde{\Delta}(\overline{f_2g_1 - f_2\overline{g_1}})}\xi^n(z) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Debido a que los polinomios son densos en el espacio de Bergman  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ , esta ecuación se extiende a todas las funciones en dicho espacio. Dado que la correspondencia entre los operadores de Toeplitz y sus símbolos es uno a uno (Teorema 2.8.2 [13]), se tiene que  $\tilde{\Delta}(\overline{f_2g_1 - f_2\overline{g_1}}) = 0$ . Sustituyendo en (5.6), obtenemos

$$\overline{f_1'(z)}g_2'(z) - f_1'(z)\overline{g_2'(z)} = 0.$$

**Caso II.** Supongamos que existe un  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $a_m \neq 0$  y  $b_n = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . En este caso

$$T_{\tilde{\Delta}(\overline{f_2g_1 - f_2\overline{g_1}})}\xi^m(z) = a_m g_2'(z),$$

lo que implica que  $g_2' \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ . Así,  $T_{\tilde{\Delta}(\overline{f_2g_1 - f_2\overline{g_1}})}$  es un operador de rango uno, y por el Corolario 3.11, se concluye que  $\tilde{\Delta}(\overline{f_2g_1 - f_2\overline{g_1}}) = 0$ , lo cual nuevamente lleva a

$$\overline{f_1'(z)}g_2'(z) - f_1'(z)\overline{g_2'(z)} = 0.$$

Análogamente si existe algún  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $b_m \neq 0$ , pero  $a_n = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , también obtenemos que

$$\overline{f_1'(z)}g_2'(z) - f_1'(z)\overline{g_2'(z)} = 0.$$

**Caso III.** Si existen  $m, n \in \mathbb{N}$  (con  $m \neq n$ ) tales que  $a_m \neq 0$  y  $b_n \neq 0$ , obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} T_{\tilde{\Delta}(\overline{f_2g_1 - f_2\overline{g_1}})}\xi^m(z) &= a_m g_2'(z) - b_m f_1'(z). \\ T_{\tilde{\Delta}(\overline{f_2g_1 - f_2\overline{g_1}})}\xi^n(z) &= a_n g_2'(z) - b_n f_1'(z). \end{aligned}$$

Si  $a_m = b_n = 0$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , entonces es claro que  $f'_1$  y  $g'_2$  pertenecen al espacio de Bergman  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ . Pero si  $a_m \neq 0$  y  $b_n \neq 0$  para algún  $n$  y  $m$ , se puede resolver el sistema y en tal caso  $f'_1$  y  $g'_2$  también pertenecerán al espacio de Bergman  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ . En cualquiera de los casos, el operador de Toeplitz tiene rango a lo más dos. Esto implica que

$$\overline{f'_1(z)}g'_2(z) - f'_1(z)\overline{g'_2(z)} = 0.$$

De todos los casos analizados previamente, podemos concluir que

$$\overline{f'_1(z)}g'_2(z) - f'_1(z)\overline{g'_2(z)} = 0. \quad (5.8)$$

Con esta relación, procedemos con la demostración del teorema.

(A) Si  $f'_1(z) = 0$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ , entonces  $f_1$  es constante, lo que implica que  $f$  es antianalítica. En este caso, usando las propiedades de la Proposición 3.1, se tiene que

$$T_{fg} = T_f T_g = T_{\bar{g}} T_{\bar{f}} = T_{\bar{g}\bar{f}}.$$

Esto muestra que  $fg = \overline{g\bar{f}}$ , por lo que  $fg$  es una función real-valuada.

(B) Análogamente, si  $g'_2(z) = 0$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ , entonces  $g$  es analítica. En este caso,

$$T_{fg} = T_f T_g = T_{\bar{g}} T_{\bar{f}} = T_{\bar{g}\bar{f}}.$$

Por lo que  $fg = \overline{g\bar{f}}$  y así  $fg$  es real-valuada.

(C) Si  $g'_2(z) \neq 0$  y  $f'_1(z) \neq 0$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ , entonces de (5.8) se tiene que

$$\overline{\left(\frac{f'_1(z)}{g'_2(z)}\right)} = \frac{f'_1(z)}{g'_2(z)}.$$

Esto implica que  $\frac{f'_1(z)}{g'_2(z)}$  es una función analítica y real-valuada, por lo que debe ser constante. Sea  $\lambda := \frac{f'_1(z)}{g'_2(z)}$ ; es claro que  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto

$$f_1(z) = \lambda g_2(z) + \overline{h_0(z)},$$

donde  $h_0$  es una función analítica. Entonces, escribimos a  $f$  como

$$f = f_1 + \bar{f}_2 = \lambda g_2 + \bar{h}_0 + \bar{f}_2.$$

Definamos  $h = h_0 + f_2 - \lambda g_1$ . Dado que  $h$  es analítica, podemos expresar a  $f$  como

$$f = \lambda \bar{g} + \bar{h}.$$

Además,  $\bar{h}g$  es una función real valuada. Para verlo, observemos que

$$T_{\bar{h}g} = T_{\bar{h}}T_g = T_{\bar{g}}T_h = T_{\bar{g}h}.$$

Con lo que se concluye la demostración.  $\square$

El siguiente Teorema nos da las condiciones suficientes y necesarias para que el producto de dos operadores de Toeplitz con símbolos armónicos continuos sea una proyección en  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ .

**Teorema 5.11.** *Sean  $f$  y  $g$  funciones armónicas en  $\mathbb{D}$  y continuas en  $\bar{\mathbb{D}}$ . El producto  $T_fT_g$  es una proyección si y solo si se satisface alguna de las siguientes condiciones:*

- (i)  $f \equiv 0$  o  $g \equiv 0$  en el disco unitario cerrado  $\bar{\mathbb{D}}$ ;
- (ii)  $f$  y  $g$  son funciones analíticas con  $fg \equiv 1$  en  $\bar{\mathbb{D}}$  o  $f$  y  $g$  son funciones antianalíticas con  $fg \equiv 1$  en  $\bar{\mathbb{D}}$ .

*Demostración.* Si  $f \equiv 0$  o  $g \equiv 0$  en  $\bar{\mathbb{D}}$ , es claro que  $T_fT_g = 0$ . Por otro lado, si  $f$  y  $g$  son analíticas o antianalíticas con  $fg \equiv 1$  en  $\bar{\mathbb{D}}$  entonces se cumple la igualdad  $T_fT_g = T_{fg} = I$ . Por lo tanto, en ambos casos, el operador de Toeplitz  $T_fT_g$  es una proyección.

Recíprocamente, si  $T_fT_g$  es una proyección, entonces  $T_fT_g$  debe ser autoadjunto. Por lo tanto debe cumplirse alguna de las tres condiciones del Teorema 5.10.

Supongamos que se cumple **(A)** del Teorema 5.10:  $f$  antianalítica y  $fg$  real valuada. En este caso, por la Proposición 3.1 se tiene que  $T_fT_g = T_{fg}$ . Como  $fg \in C(\bar{\mathbb{D}})$ , el operador de Hankel  $H_{fg}$  es compacto. Esto significa que la función  $fg \in AQ(\mathbb{D})$  y se tiene que  $\sigma_e(T_{fg})$  es conexo. Note que se cumplen las hipótesis del Teorema 5.1, por lo que  $fg \equiv 0$  o  $fg \equiv 1$  en  $\bar{\mathbb{D}}$ . Supongamos que  $fg \equiv 0$ . Definamos los conjuntos

$$Z_f := \{z \in \mathbb{D} : f(z) = 0\} \quad \text{y} \quad Z_g := \{z \in \mathbb{D} : g(z) = 0\}.$$

Si  $Z_f$  tiene al menos un punto de acumulación, por el principio de identidad concluimos que  $f \equiv 0$ . Por otro lado, si  $Z_f = \emptyset$ , esto implica que  $g \equiv 0$ .

Podemos concluir entonces (i). Si  $fg \equiv 1$ , como  $f$  es antianalítica entonces  $g$  también será antianalítica y tenemos (ii).

Análogamente, si se cumple (B) del Teorema 5.10 ( $g$  analítica y  $fg$  real valuada), entonces  $fg \equiv 0$  o  $fg \equiv 1$  en  $\overline{\mathbb{D}}$ , de donde podemos concluir (i) y (ii).

Supongamos que se cumple (C) del Teorema 5.10, esto es, existe  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  y una función analítica  $h$  tal que  $f = \lambda\bar{g} + \bar{h}$  y  $\bar{h}g$  es una función real valuada en  $\mathbb{D}$ . Como  $f, g \in C(\overline{\mathbb{D}})$ , se tiene que el semiconmutador  $T_{fg} - T_fT_g$  es compacto [Corolario 3.3]. Por ello,  $\sigma_e(T_fT_g) = \sigma_e(T_{fg})$ , esto es

$$\sigma_e(T_fT_g) = \{f(z)g(z) : z \in \partial\mathbb{D}\}.$$

Por hipótesis,  $T_fT_g$  es una proyección, entonces  $\sigma_e(T_fT_g) \subset \{0, 1\}$ . Lo que implica que  $fg \equiv 0$  o  $fg \equiv 1$  en  $\partial\mathbb{D}$ . Si se satisface la primer igualdad, entonces

$$T_fT_g = \lambda T_{\bar{g}}T_g - \lambda T_{\bar{g}g} + \lambda T_{\bar{g}g} + T_{\bar{h}g} = -\lambda H_g^* H_g + T_{fg}.$$

Como  $fg \in C(\overline{\mathbb{D}})$  y  $fg \equiv 0$  en  $\partial\mathbb{D}$ , por el Corolario 4.15, el operador  $T_{fg}$  es compacto y dado que  $g \in C(\overline{\mathbb{D}})$ , el operador  $H_g$  es compacto. Así, podemos concluir que  $T_fT_g$  es una proyección compacta, lo que implica que  $T_fT_g$  tiene rango finito. Del Teorema 7 de [4] se concluye que  $f \equiv 0$  o  $g \equiv 0$ . En el otro caso, si  $fg \equiv 1$  en  $\partial\mathbb{D}$ , entonces por la igualdad

$$I - T_fT_g = T_{1-fg} + \lambda(H_g^* H_g),$$

se tiene que  $I - T_fT_g$  es una proyección compacta, por ello debe ser de rango finito. Supongamos que el operador  $I - T_fT_g$  tiene rango  $N$ , entonces existen funciones  $x_j \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$  para  $j = 1, \dots, N$ , tal que

$$I - T_fT_g = x_1 \otimes x_1 + \dots + x_n \otimes x_n,$$

donde el conjunto  $\{x_1, \dots, x_N\}$  es ortonormal. De los resultados de [14] se deben cumplir las siguientes condiciones:

- (a)  $\overline{f_2}g_1$  es armónica,
- (b)  $f(z)g(z) = 1 + (1 - |z|^2)^2 + (|x_1(z)|^2 + \dots + |x_n(z)|^2)$  para  $z \in \mathbb{D}$ .

Por (a), el laplaciano de  $\overline{f_2}g_1$  es cero, por lo que para todo  $z \in \mathbb{D}$  se tiene que

$$\overline{f_2'(z)}g_1'(z) = 0$$

Por un argumento similar en la demostración del Teorema 3.18, se tiene que  $f_2' \equiv 0$  o  $g_1' \equiv 0$  en  $\mathbb{D}$ , lo que implica que  $f$  es analítica o  $g$  es antianalítica. Si  $f$  es analítica, note que la función

$$fh = \lambda\overline{g}h + |h|^2$$

es analítica y real-valuada en  $\mathbb{D}$ , por ello  $fh$  es una constante real en  $\overline{\mathbb{D}}$ . Por lo tanto, teniendo en cuenta que  $fg \equiv 1$  en  $\partial\mathbb{D}$ ,

$$|f|^2 = \lambda\overline{f}g + \overline{f}h = \lambda + \overline{f}h.$$

Con esto se tiene que  $|f|^2$  es una constante real en  $\partial\mathbb{D}$ . Además, la condición (b) implica que  $f$  no tiene ceros en  $\mathbb{D}$ . Por el principio del módulo máximo, se tiene que  $f$  es constante en  $\overline{\mathbb{D}}$  y de aquí,  $g$  es constante con  $fg \equiv 1$  sobre  $\overline{\mathbb{D}}$ . Análogamente, si  $g$  es antianalítica, se tiene que tanto  $f$  como  $g$  son constantes con  $fg \equiv 1$  sobre  $\overline{\mathbb{D}}$ , concluyendo (ii).  $\square$

Veamos las condiciones para que el semiconmutador, definido en (3.1), de dos operadores de Toeplitz con símbolos armónicos continuos sean una proyección en el espacio de Bergman.

**Teorema 5.12.** *Sean  $f$  y  $g$  funciones armónicas en  $\mathbb{D}$  y continuas en  $\overline{\mathbb{D}}$ . El semiconmutador  $(T_f, T_g]$  es una proyección si y solo si  $f$  es antianalítica o  $g$  es analítica en el disco unitario  $\mathbb{D}$ .*

*Demostración.* Si  $f$  es antianalítica o  $g$  es analítica, entonces, por las propiedades de los operadores de Toeplitz (Proposición 3.1),  $T_{fg} = T_f T_g$ , por lo que el semiconmutador  $(T_f, T_g] = T_{fg} - T_f T_g = 0$ . Se sigue que  $(T_f, T_g]$  es una proyección.

Por otro lado, si  $f, g \in C(\overline{\mathbb{D}})$ , se tiene que  $T_{fg} - T_f T_g \in \mathcal{K}$ . Por lo tanto, si el semiconmutador  $(T_f, T_g]$  es una proyección, entonces

$$\sigma_e(T_{fg} - T_f T_g) = \{0\}.$$

Luego  $(T_f, T_g]$  es una proyección de rango finito en  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ . Se sigue del Teorema 3.18 que  $f$  es antianalítica en  $\mathbb{D}$  o  $g$  es analítica en  $\mathbb{D}$ .  $\square$

# Conclusiones

En este trabajo se analizaron los operadores de Toeplitz con diferentes tipos de símbolos acotados. Dichos símbolos son los más utilizados en el estudio de este tipo de operadores. En todos los casos analizados se obtiene que no existen operadores de Toeplitz que sean proyecciones no triviales, quedando abierta la pregunta si existe una función acotada cuyo correspondiente operador de Toeplitz sea una proyección no trivial.

# Bibliografía

- [1] AHERN, P., AND ČUČKOVIĆ, Ž. A theorem of Brown-Halmos type for Bergman space Toeplitz operators. *J. Funct. Anal.* 187, 1 (2001), 200–210.
- [2] DOUGLAS, R. G. *Banach algebra techniques in operator theory*, second ed., vol. 179 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [3] GRUDSKY, S. M., MAXIMENKO, E. A., AND VASILEVSKI, N. L. Radial Toeplitz operators on the unit ball and slowly oscillating sequences. *Commun. Math. Anal.* 14, 2 (2013), 77–94.
- [4] GUO, K., SUN, S., AND ZHENG, D. Finite rank commutators and semicommutators of Toeplitz operators with harmonic symbols. *Illinois J. Math.* 51, 2 (2007), 583–596.
- [5] HEDENMALM, H., KORENBLUM, B., AND ZHU, K. *Theory of Bergman spaces*, vol. 199 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [6] KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis with applications*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.
- [7] LIU, L. Projection Toeplitz operators on the Bergman space. *Complex Anal. Oper. Theory* 15, 3 (2021), Paper No. 41, 10.
- [8] LUECKING, D. H. Finite rank Toeplitz operators on the Bergman space. *Proc. Amer. Math. Soc.* 136, 5 (2008), 1717–1723.
- [9] MACCLUER, B. D. *Elementary functional analysis*, vol. 253 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2009.

- [10] RODRIGUEZ, M. Operadores de Toeplitz con símbolo continuo en el disco unitario cerrado en el espacio de Bergman sobre el disco unitario. *Apuntes* (2017). [https://esfm.egormaximenko.com/students/Rodriguez\\_Rodriguez\\_2017\\_operadores\\_de\\_Toeplitz\\_con\\_simbolo\\_continuo\\_en\\_el\\_disco\\_unitario\\_cerrado.pdf](https://esfm.egormaximenko.com/students/Rodriguez_Rodriguez_2017_operadores_de_Toeplitz_con_simbolo_continuo_en_el_disco_unitario_cerrado.pdf).
- [11] STROETHOFF, K. The Berezin transform and operators on spaces of analytic functions. *Banach Center Publications* 38, 1 (1997), 361–380.
- [12] STROETHOFF, K., AND ZHENG, D. C. Toeplitz and Hankel operators on Bergman spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* 329, 2 (1992), 773–794.
- [13] VASILEVSKI, N. L. *Commutative algebras of Toeplitz operators on the Bergman space*, vol. 185 of *Operator Theory: Advances and Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.
- [14] ČUČKOVIĆ, Ž. Finite Rank Perturbations of Toeplitz Operators. *Integral Equations and Operator Theory* 59, 3 (2007), 345–353.
- [15] ZHU, K. *An Introduction to Operator Algebras*, 1st ed. CRC Press, 1993.
- [16] ZHU, K. *Operator theory in function spaces*, second ed., vol. 138 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.