

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del  
Instituto Politécnico Nacional

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemáticas

# Topología Computacional de Espacios de Configuraciones vía Teoría de Morse Discreta

Tesis que presenta

EMILIO JOSÉ GONZÁLEZ RIVERO

Para obtener el grado de

DOCTOR EN CIENCIAS

EN LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICAS

Director de Tesis: Dr. Jesús González Espino Barros

*A mis abuelos Juana Ruíz y José Luis González, donde quiera que estén.*

# Agradecimientos

Quiero agradecer al Consejo Nacional de Humanidades Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) por el apoyo económico proporcionado que me permitió realizar este trabajo.

Quiero agradecer también al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV), a cada persona que me acompañó en la realización de este trabajo, muy en especial al doctor Jesús González por su paciencia, dedicación y por permitirme desarrollar bajo su dirección y orientación este trabajo de grado. Agradezco además a todos los profesores que he tenido en Cuba y en México, a la Universidad Central de las Villas en Cuba por formarme como Licenciado, a todos los amigos que me han acompañado en estos años y en especial a mi familia por su amor y apoyo.



# Resumen

En este trabajo, introducimos y estudiamos un algoritmo que construye campos gradiente discretos en cualquier complejo poliédrico (potencias de complejos simpliciales). Estos campos gradiente son siempre máximos, y en muchos casos, también son óptimos, y notamos que su complejidad computacional es similar a los métodos existentes. Primero, estudiamos el espacio de configuraciones  $\text{Conf}(K_m, 2)$  de pares ordenados de partículas no colisionantes que se mueven en el grafo completo  $K_m$ , proporcionando un análisis detallado de su álgebra de cohomología  $H^*(\text{Conf}(K_m, 2); R)$  para cualquier anillo unitario conmutativo  $R$ , y demostrando que sus complejidades topológicas son máximas cuando  $m \geq 4$ . Además, extendemos nuestro análisis a los espacios de configuración discretizados de Abrams  $\text{DConf}(K, n)$ , aplicando el algoritmo al caso de  $K = \Delta^{m,d}$ , el  $d$ -esqueleto de un simplex completo de dimensión  $m$ . Nuestros resultados muestran que  $\text{DConf}(\Delta^{m,d}, 2)$  es  $(\min\{d, m-1\} - 1)$ -conexo, tiene homología libre de torsión y admite una estructura celular mínima. También calculamos los números de Betti y mostramos que, para ciertos valores de  $d$ ,  $\text{DConf}(\Delta^{m,d}, 2)$  es homotópicamente equivalente a un wedge de esferas de dimensiones variables.



# Abstract

In this work, we introduce and study an algorithm that constructs discrete gradient fields on any polyhedral complex (powers of simplicial complexes). These gradient fields are always maximal, and in many cases, they are also optimal and we note that they have computational complexity similar to existing methods. First, we study the configuration space  $\text{Conf}(K_m, 2)$  of ordered pairs of non-colliding particles moving on the complete graph  $K_m$ , providing a detailed analysis of its cohomology algebra  $H^*(\text{Conf}(K_m, 2); R)$  for any commutative unital ring  $R$ , and demonstrating that its topological complexities are maximal when  $m \geq 4$ . Additionally, we extend our analysis to Abrams' discretized configuration spaces  $\text{DConf}(K, n)$ , applying the algorithm to the case of  $K = \Delta^{m,d}$ , the  $d$ -skeleton of a full  $m$ -dimensional simplex. Our results show that  $\text{DConf}(\Delta^{m,d}, 2)$  is  $(\min\{d, m-1\} - 1)$ -connected, has torsion-free homology, and admits a minimal cell structure. We also compute the Betti numbers and show that, for certain values of  $d$ ,  $\text{DConf}(\Delta^{m,d}, 2)$  is homotopy equivalent to a wedge of spheres of varying dimensions.



# Índice

<b>Resumen</b>	<b>5</b>
<b>Abstract</b>	<b>7</b>
<b>Introducción</b>	<b>11</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>13</b>
1.1 Modelo de Munkres para los espacios de configuraciones de 2 partículas . . . . .	13
1.2 Modelo discreto de Abrams para espacios de configuraciones . . . . .	14
1.3 Teoría de Morse discreta . . . . .	14
<b>2 Campo gradiente discreto algorítmico y el álgebra de cohomología de los espacios de configuraciones de dos puntos en grafos completos</b>	<b>19</b>
2.1 Campo Gradiente algorítmico . . . . .	19
2.1.1 El campo y su aciclicidad . . . . .	20
2.1.2 Campo gradiente mediante un algoritmo más rápido . . . . .	22
2.1.3 Complejidad computacional y rendimiento . . . . .	27
2.1.4 Condiciones de colapsabilidad . . . . .	28
2.2 Aplicación a espacios de configuraciones . . . . .	31
2.2.1 Campo gradiente en el modelo simplicial homotópico de Munkres . . . . .	31
2.2.2 Cohomología del complejo de Morse . . . . .	33
2.2.3 Bases de cohomología . . . . .	34
2.2.4 Anillo de cohomología . . . . .	43
2.3 Complejidad topológica . . . . .	48
<b>3 Campo gradiente discreto algorítmico sobre espacios poliédricos y la topología de las configuraciones de pares de puntos en esqueletos de simplejos</b>	<b>51</b>
3.1 El campo gradiente . . . . .	52
3.1.1 Construcción algorítmica . . . . .	53
3.1.2 Aciclicidad . . . . .	54
3.2 Clasificación de celdas . . . . .	55
3.2.1 Conteo de celdas críticas . . . . .	61
3.3 Flujo gradiente . . . . .	64



# Introducción

Desde el desarrollo de la teoría de Morse discreta (DMT) por R. Forman en [19], el concepto de campo gradiente discreto (DGF) se ha convertido en una herramienta esencial en una amplia variedad de disciplinas matemáticas y científicas. Nacido como un análogo combinatorio de los campos gradientes suaves en topología diferencial, los DGFs han demostrado su versatilidad, desempeñando un papel crucial en técnicas de topología computacional, tales como la reducción de ruido [8], el análisis topológico de datos [30], y aplicaciones como la visualización topológica y la compresión de mallas [34]. Además, los DGFs han encontrado importantes aplicaciones teóricas, particularmente en el estudio de espacios de configuraciones y arreglos de hiperplanos [14, 36, 40, 41], contribuyendo también a la determinación de bases de homología explícitas para complejos de grafos bi-conexos, estructuras relevantes para el estudio de nudos en espacios tridimensionales [42, 43, 44, 45]. Sin embargo el problema de dado un complejo celular construir un campo gradiente "razonablemente bueno" (en términos de la optimalidad de la estructura celular resultante o de la complejidad computacional de su implementación, según sea su caso de uso) es complejo y sin una metodología general que garantice un resultado eficiente. En este trabajo introducimos y estudiamos un algoritmo (con sus generalizaciones) que construye un campo gradiente discreto sobre cualquier complejo poliédrico (potencias de complejos simpliciales). Este campo gradiente siempre es maximal y en muchos casos también produce una estructura celular óptima. Las propiedades anteriores se pueden lograr mediante una implementación eficiente sin sacrificar la complejidad computacional como veremos en la sección 2.1.3. En este trabajo nos centramos en las aplicaciones teóricas de los DGFs al estudio de los espacios de configuraciones. En este sentido algunos de los resultados más importantes obtenidos son la descripción del algebra de cohomología  $H^*(\text{Conf}(K_m, 2); R)$  para  $R$  un anillo conmutativo unitario y donde  $\text{Conf}(K_m, 2)$  es el espacio de configuraciones ordenadas de dos puntos en una gráfica completa, además probamos que cuando  $m \geq 4$  su complejidad topológica es maximal (secciones 2.2 y 2.3). Por otro lado en el Capítulo 3 extendemos nuestro análisis a los espacios de configuraciones discretizados  $\text{DConf}(K, n)$ , aplicando el algoritmo al esqueleto de un simplejo  $\Delta^{m,d}$ . En esta dirección obtenemos que  $\text{DConf}(\Delta^{m,d}, 2)$  es  $(\min\{d, m - 1\} - 1)$ -conexo, tiene homología libre de torsión y admite una estructura celular mínima. También calculamos los números de Betti y demostramos que, para ciertos valores de  $d$ ,  $\text{DConf}(\Delta^{m,d}, 2)$  es homotópico a un wedge de esferas de diversas dimensiones.

Este trabajo constituye mi tesis para obtener el grado de Doctor en Ciencias En la Especialidad de Matemáticas. Los resultados que aquí se muestran han sido obtenidos durante mis estudios de doctorado y están basados en los artículos [26] y [27], desarrollados y publicados en coautoría con mi asesor y director de tesis el Dr. Jesús González Espino Barros.



# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1 Modelo de Munkres para los espacios de configuraciones de 2 partículas

Sea  $D$  un subcomplejo completo de un complejo simplicial abstracto dado  $X$ , es decir, asumimos que todo simplejo de  $X$ , cuyos vértices están en  $D$ , es en sí mismo un simplejo de  $D$ . Consideremos el subcomplejo (necesariamente completo)  $C$  de  $X$  que consiste en los simplejos  $\sigma$  de  $X$  cuya realización geométrica  $|\sigma|$  es disjunta de  $|D|$ . Los vértices de  $X$  se dividen en aquellos de  $D$  y aquellos de  $C$ , y, como se observa en [38, Lemma 70.1], la homotopía lineal

$$H: (|X| - |D|) \times [0, 1] \rightarrow |X| - |D|, \quad H(x, s) = (1 - s) \cdot x + s \cdot \sum_{i=1}^r \frac{t_i}{\sum_{k=1}^r t_k} c_i,$$

muestra a  $|C|$  como un retracto por deformación fuerte de  $|X| - |D|$ . Aquí,  $x = \sum_{i=1}^r t_i c_i + \sum_{j=1}^{\rho} \tau_j d_j$  es la expresión baricéntrica de  $x \in |X| - |D|$  teniendo  $t_i > 0 < \tau_j$  para todos los  $i$  y  $j$ , con  $c_1, \dots, c_r$  vértices de  $C$  ( $r \geq 1$ ) y  $d_1, \dots, d_{\rho}$  vértices de  $D$  ( $\rho \geq 0$ ).

Sea  $K$  un complejo simplicial abstracto *ordenado* finito, es decir, el conjunto de vértices  $V$  de  $K$  está equipado con un orden parcial  $\preceq$ , que es lineal al restringirse a cualquier cara. Más adelante usaremos el modelo de Munkres  $C$  mencionado arriba cuando  $X = K \times K$  es el producto ordenado, con  $D$  correspondiendo al subcomplejo cuya realización geométrica es la diagonal  $\Delta_{|K|}$  en  $|K \times K| = |K| \times |K|$ . El conjunto de vértices de  $K \times K$  es  $V \times V$ , con elementos denotados como columnas, mientras que un  $k$ -simplejo de  $K \times K$  es una matriz

$$\begin{bmatrix} v_{0,1} & v_{1,1} & \dots & v_{k,1} \\ v_{0,2} & v_{1,2} & \dots & v_{k,2} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

de elementos en  $V$  que satisface:

- Para  $i = 1, 2$ ,  $v_{0,i} \preceq v_{1,i} \preceq \dots \preceq v_{k,i}$  con  $\{v_{0,i}, v_{1,i}, \dots, v_{k,i}\}$  una  $\ell$ -cara de  $K$  (posiblemente con  $\ell \leq k$ ).
- Para  $j = 0, 1, \dots, k-1$ , al menos una de las desigualdades  $v_{j,1} \preceq v_{j+1,1}$  y  $v_{j,2} \preceq v_{j+1,2}$  es estricta.

Tal simplejo de tipo matriz pertenece a  $D$  siempre que sus dos filas estén repetidas:  $v_{j,1} = v_{j,2}$  para  $j = 0, 1, \dots, k$ . En particular,  $D$  es un subcomplejo completo de  $K \times K$ , y obtenemos una

equivalencia homotópica

$$|C| \simeq \text{Conf}(|K|, 2). \quad (1.2)$$

Nótese que un simplejo (1.1) pertenece a  $C$  precisamente cuando  $v_{j,1} \neq v_{j,2}$  para  $j = 0, 1, \dots, k$ . En particular, el conjunto de vértices de  $C$  es  $V \times V \setminus \Delta_V$  (con elementos denotados como matrices columna).

## 1.2 Modelo discreto de Abrams para espacios de configuraciones

Para un complejo celular  $X$  y un número entero positivo  $n$ , un análogo discreto del espacio de configuraciones

$$\text{Conf}(X, n) = \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n : x_i \neq x_j \text{ para } i \neq j\} \quad (1.3)$$

fue introducido en la tesis doctoral de Abrams [1]. El modelo de Abrams, aquí denotado por  $\text{DConf}(X, n)$ , es el subcomplejo del complejo producto  $X^n$  resultante de eliminar todas las celdas abiertas cuya clausura intersecta la diagonal gorda  $X^n \setminus \text{Conf}(X, n)$ . En otras palabras,  $\text{DConf}(X, n)$  es el subcomplejo más grande de  $X^n$  contenido en  $\text{Conf}(X, n)$ .

Los espacios de configuraciones discretos de Abrams son objetos particularmente interesantes por derecho propio, que han demostrado ser una herramienta muy valiosa para comprender las propiedades de la topología algebraica de los espacios clasificantes de grupos de trenzas de grafos, es decir, de los espacios (1.3) para complejos unidimensionales  $X$  ([18, 28, 29, 32]). Además, y desde un punto de vista más práctico, los espacios de configuraciones discretos tienen ciertas ventajas sobre sus contrapartes clásicas. Por ejemplo, considere  $n$  robots autónomos moviéndose en un sistema de vías que forman un grafo  $G$ . Entonces, al usar  $\text{DConf}(G, n)$  como un modelo para el correspondiente problema de planificación de movimientos sin colisiones, forzamos una regla de *seguridad*, es decir, el requisito de que el camino más corto entre dos robots siempre incluya una arista completa de  $G$ . Esto nos permite reemplazar la noción (en principio, sin dimensión) de “robot” por trenes reales cuyos longitudes no sean mayores que la arista más corta en  $G$ .

En general, el tipo de homotopía de  $\text{DConf}(X, n)$  puede ser diferente del de  $\text{Conf}(X, n)$ . Cuando  $\dim(X) = 1$ , existen condiciones bien entendidas (de tipo subdivisión) que aseguran que el modelo discreto de Abrams capture el tipo de homotopía de su contraparte clásica (1.3), ver [28, Theorem 2.4] y [5]. Sin embargo, para complejos de mayor dimensión  $X$ , no se conocen condiciones análogas que impliquen una posible equivalencia homotópica  $\text{Conf}(X, n) \simeq \text{DConf}(X, n)$ . La situación para  $n = 2$  y  $X$  un complejo *simplicial* arbitrario es excepcional, ya que se sabe desde hace mucho tiempo que  $\text{DConf}(X, 2)$  se encuentra dentro del “producto borrado”  $\text{Conf}(X, 2)$  como un retracto por deformación fuerte (ver [10, Theorem 11.2] para el caso de  $X$  finito y, para un complejo simplicial general, [11, Lemma 2.1], notando la corrección en [48]). Este último caso será el modelo que estaremos usando en el Capítulo 3.

## 1.3 Teoría de Morse discreta

En esta sección vamos a revisar la notación y los conceptos de la teoría de Morse discreta de Forman que necesitaremos más adelante. Para mayores detalles puede consultarse [19, 20].

Como en la subsección anterior, sea  $K$  un complejo simplicial abstracto finito y ordenado con conjunto de vértices ordenado  $(V, \preceq)$ . Sea  $(\mathcal{F}, \subseteq)$  el poset de caras de  $K$ , es decir,  $\mathcal{F}$  es el conjunto de caras de  $K$  parcialmente ordenado por la inclusión. Para una cara  $\alpha \in \mathcal{F}$ , escribimos  $\alpha^{(p)}$  para indicar que  $\alpha$  es de dimensión  $p$ , y usamos la notación  $\alpha = [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p]$ , donde

$$\alpha_0 \prec \alpha_1 \prec \dots \prec \alpha_p \quad (1.4)$$

es la lista ordenada de vértices de  $\alpha$ . Elegimos la orientación en  $\alpha$  determinada por (1.4). Para las caras  $\alpha^{(p)} \subset \beta^{(p+1)}$ , consideramos el número de incidencia  $\iota_{\alpha,\beta}$  de  $\alpha$  y  $\beta$ , es decir, el coeficiente  $\pm 1$  de  $\alpha$  en la expresión de  $\partial(\beta)$ . Aquí  $\partial$  representa el operador frontera estándar en el complejo de cadenas simplicial orientado  $C_*(K)$ , es decir,

$$\partial([v_0, v_1, \dots, v_i]) = \sum_{0 \leq j \leq i} (-1)^j \partial_{v_j}([v_0, v_1, \dots, v_i]) = \sum_{0 \leq j \leq i} (-1)^j [v_0, \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_i],$$

donde  $\partial_{v_j}([v_0, v_1, \dots, v_i]) = [v_0, \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_i]$  es la cara obtenida al eliminar  $v_j$  de  $[v_0, v_1, \dots, v_i]$ .

Consideramos el diagrama de Hasse  $H_{\mathcal{F}}$  del poset  $\mathcal{F}$  como un grafo dirigido: el conjunto de vértices de  $H_{\mathcal{F}}$  es  $\mathcal{F}$  y los arcos dirigidos son los pares ordenados  $(\alpha^{(p+1)}, \beta^{(p)})$  con  $\beta \subset \alpha$ . Tal arco dirigido se denotará como  $\alpha^{(p+1)} \searrow \beta^{(p)}$ .

**Definición 1.3.1.** *Un emparejamiento parcial  $W$  en  $H_{\mathcal{F}}$  es un subgrafo dirigido de  $H_{\mathcal{F}}$  cuyos vértices tienen grado 1. El diagrama de Hasse modificado por  $W$ ,  $H_{\mathcal{F},W}$ , es el grafo dirigido obtenido de  $H_{\mathcal{F}}$  invirtiendo la orientación de todos los arcos de  $W$ .*

Nótese que el conjunto de vértices de  $W$  puede ser un subconjunto propio de  $\mathcal{F}$ . En tal caso, las caras en  $\mathcal{F}$  que no son vértices de  $W$  se denominan *críticas en  $W$* . Por otro lado, un arco invertido se denota como  $\beta^{(p)} \nearrow \alpha^{(p+1)}$ , en cuyo caso se dice que  $\alpha$  es *colapsable en  $W$*  y  $\beta$  es *redundante en  $W$* . Las palabras “crítica”, “colapsable” y “redundante” también se usarán cuando el emparejamiento parcial  $W$  sea implícito en el contexto.

**Definición 1.3.2.** *Sea  $W$  un emparejamiento parcial en  $H_{\mathcal{F}}$ . Un camino en  $W$  es una cadena alternada de arcos dirigidos ascendentes y descendentes de  $H_{\mathcal{F},W}$  de cualquiera de las dos formas*

$$\alpha_0 \nearrow \beta_1 \searrow \alpha_1 \nearrow \cdots \nearrow \beta_k \searrow \alpha_k \quad \text{o} \quad \gamma_0 \searrow \delta_1 \nearrow \gamma_1 \searrow \cdots \searrow \delta_k \nearrow \gamma_k. \quad (1.5)$$

*Un camino en  $W$  como el de la izquierda (respectivamente, derecha) en (1.5) se llama camino superior (respectivamente, camino inferior) en  $W$ , y el camino en  $W$  se llama elemental (respectivamente, constante) cuando  $k = 1$  (respectivamente, cuando  $k = 0$ ). Un camino mixto en  $W$ ,  $\tilde{\lambda}$ , desde una cara  $\beta^{(p+1)}$  a una cara  $\alpha^{(p)}$  es la concatenación de un arco dirigido  $\beta \searrow \gamma$  en  $H_{\mathcal{F},W}$  y un camino superior en  $W$ ,  $\lambda$ , desde  $\gamma$  hasta  $\alpha$ .*

Como antes, usamos el término “camino” como sinónimo de “camino en  $W$ ” cuando la correspondencia parcial es implícita en el contexto. Los conjuntos de caminos superiores e inferiores que comienzan en una  $p$ -celda  $\alpha$  y terminan en una  $p$ -celda  $\beta$  se denotan por  $\overline{\Gamma}(\alpha, \beta)$  y  $\underline{\Gamma}(\alpha, \beta)$ , respectivamente. Nótese que la concatenación de caminos superiores/inferiores produce mapeos producto

$$\overline{\Gamma}(\alpha, \beta) \times \overline{\Gamma}(\beta, \gamma) \rightarrow \overline{\Gamma}(\alpha, \gamma) \quad \text{y} \quad \underline{\Gamma}(\alpha, \beta) \times \underline{\Gamma}(\beta, \gamma) \rightarrow \underline{\Gamma}(\alpha, \gamma). \quad (1.6)$$

Por ejemplo, cualquier camino superior/inferior no constante es un producto de los correspondientes caminos elementales.

**Definición 1.3.3.** *La multiplicidad de un camino constante  $\gamma$  es  $\mu(\gamma) := 1$ , y de caminos superiores/inferiores elementales es*

$$\mu(\alpha_0 \nearrow \beta_1 \searrow \alpha_1) := -\iota_{\alpha_0, \beta_1} \cdot \iota_{\alpha_1, \beta_1} \quad \text{y} \quad \mu(\gamma_0 \searrow \delta_1 \nearrow \gamma_1) := -\iota_{\delta_1, \gamma_0} \cdot \iota_{\delta_1, \gamma_1}.$$

*La multiplicidad de caminos no elementales y no constantes se define como una función multiplicativa con respecto a los mapeos producto (1.6). Del mismo modo,  $\mu(\tilde{\lambda}) := \iota_{\gamma, \beta} \cdot \mu(\lambda)$  define la multiplicidad del camino mixto  $\tilde{\lambda}$  dado por la concatenación del arco  $\beta \searrow \gamma$  y el camino superior  $\lambda \in \overline{\Gamma}(\gamma, \alpha)$ .*

Los campos gradientes discretos son la herramienta central en este trabajo:

**Definición 1.3.4.** *Un camino no constante como en (1.5) se llama ciclo si  $\alpha_0 = \alpha_k$  en el caso superior, o  $\gamma_0 = \gamma_k$  en el caso inferior. Nótese que la condición de ciclo solo puede darse con  $k > 1$ . Un emparejamiento parcial  $W$  se dice que es un campo gradiente en  $K$  si ningún camino no constante es un ciclo. En tal caso, los caminos se denominan caminos gradientes.*

Nótese que  $W$  es un campo gradiente si y solo si  $H_{\mathcal{F},W}$  no tiene ciclos (como grafo dirigido).

**Teorema 1.3.5** ([19, Corollary 3.5]). *Un campo gradiente discreto  $W$  en un complejo  $CW$  regular finito  $X$  determina una equivalencia homotópica  $X \simeq Y$ , donde el complejo  $CW Y$  tiene una celda  $p$ -dimensional para cada cara crítica  $p$ -dimensional de  $X$ .*

Cerramos esta sección preliminar recordando (Definición 1.3.6 y Proposición 1.3.8) la manera en que la estructura de caras críticas y de caminos gradientes entre ellas pueden usarse para ensamblar un complejo de (co)cadenas que recupere la (co)homología de  $K$ .

**Definición 1.3.6.** *Sea  $R$  un anillo conmutativo unitario<sup>1</sup>. Como un  $R$ -módulo aditivo graduado, el complejo de cadenas de Morse  $(\mu_*(K), \partial)$  es  $R$ -libre por grados, con base en la dimensión  $p \geq 0$  dada por las caras críticas orientadas  $\alpha^{(p)}$  de  $K$ , y con mapeo frontera de Morse  $\partial: \mu_*(K) \rightarrow \mu_{*-1}(K)$  dado en una cara crítica  $\alpha^{(p)}$  por*

$$\partial(\alpha^{(p)}) = \sum_{\beta^{(p-1)}} \left( \sum_{\tilde{\lambda}} \mu(\tilde{\lambda}) \right) \cdot \beta, \quad (1.7)$$

donde la suma exterior recorre todas las caras críticas  $\beta^{(p-1)}$ , y la suma interior recorre todos los caminos gradientes mixtos  $\tilde{\lambda}$  desde  $\alpha$  hasta  $\beta$ . El complejo de cocadenas de Morse  $(\mu^*(K), \delta)$  es el  $R$ -dual<sup>2</sup> de  $(\mu_*(K), \partial)$ .

Así,  $\mu^p(K)$  es  $R$ -libre con base dada por los duales de las caras críticas orientadas  $\alpha^{(p)}$  de  $K$ . El valor del mapeo cofrontera de Morse  $\delta: \mu^*(K) \rightarrow \mu^{*+1}(K)$  en una cara crítica (dualizada)  $\alpha^{(p)}$  es

$$\delta(\alpha^{(p)}) = \sum_{\beta^{(p+1)}} \left( \sum_{\tilde{\lambda}} \mu(\tilde{\lambda}) \right) \cdot \beta, \quad (1.8)$$

donde la suma exterior recorre todas las caras críticas (dualizadas)  $\beta^{(p+1)}$ , y la suma interior recorre todos los caminos gradientes mixtos  $\tilde{\lambda}$  desde  $\beta$  hasta  $\alpha$ .

**Nota 1.3.7.** Para las caras críticas  $\gamma_1^{(p)}$  y  $\gamma_2^{(p+1)}$ , el número de caminos gradientes mixtos contados con multiplicidad  $\lambda$  desde  $\gamma_2$  hasta  $\gamma_1$ , es decir, la suma  $[\gamma_1; \gamma_2] := \sum_{\lambda} \mu(\lambda)$ , se llama el *número de incidencia de Morse* de  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ . En estos términos, (1.7) y (1.8) toman las formas más familiares

$$\partial(\alpha^{(p)}) = \sum_{\beta^{(p-1)}} [\beta; \alpha] \cdot \beta \quad \text{y} \quad \delta(\alpha^{(p)}) = \sum_{\beta^{(p+1)}} [\alpha; \beta] \cdot \beta. \quad (1.9)$$

Los caminos gradientes producen una equivalencia homotópica entre el complejo de cocadenas de Morse  $\mu^*(K)$  y el complejo de cocadenas simplicial usual  $C^*(K)$ . Para nuestros propósitos necesitamos:

<sup>1</sup>Nos restringimos a coeficientes de anillos, ya que en última instancia estaremos interesados en productos copas.

<sup>2</sup>Para abreviar, omitiremos consistentemente escribir asteriscos para los objetos dualizados; el contexto aclara el significado pretendido.

---

**Proposición 1.3.8.** *Las fórmulas*

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}(\alpha^{(p)}) &= \sum_{\beta^{(p)}} \left( \sum_{\lambda \in \bar{\Gamma}(\beta, \alpha)} \mu(\lambda) \right) \cdot \beta, \quad (\alpha \text{ crítica}, \beta \text{ arbitraria}), \\ \underline{\Phi}(\beta^{(p)}) &= \sum_{\alpha^{(p)}} \left( \sum_{\lambda \in \underline{\Gamma}(\alpha, \beta)} \mu(\lambda) \right) \cdot \alpha, \quad (\beta \text{ arbitraria}, \alpha \text{ crítica})\end{aligned}\tag{1.10}$$

determinan mapeos de cocadenas  $\bar{\Phi}: \mu^*(K) \rightarrow C^*(K)$  y  $\underline{\Phi}: C^*(K) \rightarrow \mu^*(K)$  que inducen isomorfismos en cohomología  $\bar{\Phi}^*$  y  $\underline{\Phi}^*$  con  $(\underline{\Phi}^*)^{-1} = \bar{\Phi}^*$ .

En particular, los productos copas pueden evaluarse directamente a nivel del complejo de cocadenas de Morse  $\mu^*(K)$ . De hecho, dados los cociclos de Morse  $x, y \in \mu^*(K)$  que representan las respectivas clases de cohomología  $x', y' \in H^*(\mu^*(K))$ , el producto copa en cohomología teórico de Morse  $x' \cdot y'$  está representado por el cociclo de Morse

$$x \overset{\mu}{\smile} y := \underline{\Phi} \left( \bar{\Phi}(x) \smile \bar{\Phi}(y) \right) \in \mu^*(K),\tag{1.11}$$

donde  $\smile$  representa el producto copa simplicial.



## Capítulo 2

# Campo gradiente discreto algorítmico y el álgebra de cohomología de los espacios de configuraciones de dos puntos en grafos completos

Este capítulo está basado en [26]. Aquí presentamos y estudiamos un algoritmo que construye un campo gradiente discreto sobre cualquier complejo simplicial. Con una complejidad computacional similar a la de los métodos existentes, nuestro campo gradiente es siempre maximal y, en varios casos, incluso óptimo. Realizamos un análisis exhaustivo del campo gradiente resultante en el caso del modelo discreto de Munkres para  $\text{Conf}(K_m, 2)$ , el espacio de configuración de pares ordenados de partículas no colisionantes que se mueven sobre el grafo completo  $K_m$  con  $m$  vértices. Este enfoque nos permite describir en detalle el álgebra de cohomología  $H^*(\text{Conf}(K_m, 2); R)$  para cualquier anillo unitario conmutativo  $R$ . Como aplicación, demostramos que, aunque  $\text{Conf}(K_m, 2)$  se encuentra fuera del régimen "estable", todas sus complejidades topológicas son máximas cuando  $m \geq 4$ .

### 2.1 Campo Gradiente algorítmico

Sea  $K$  un complejo simplicial abstracto ordenado y finito de dimensión  $d$  con conjunto de vértices ordenado  $(V, \preceq)$ , donde el orden parcial  $\preceq$  se restringe a un orden lineal en los simplejos de  $K$ . En esta sección, describimos y estudiamos un algoritmo  $\mathcal{A}$  que construye un campo gradiente discreto  $W$  (que depende de  $\preceq$ ) en  $K$ .

Por el principio de extensión de orden, podemos asumir que  $\preceq$  es lineal sobre  $V$ . Sea  $\mathcal{F}^i$  el conjunto de caras de dimensión  $i$  de  $K$ . Recordemos que una cara  $\alpha^{(i)} \in \mathcal{F}^i$  se identifica con la tupla ordenada  $[\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_i]$ ,  $\alpha_0 \prec \alpha_1 \prec \dots \prec \alpha_i$ , de sus vértices. En este contexto, decimos que  $\alpha_r$  aparece en la posición  $r$  de  $\alpha$ . La notación de tuplas ordenadas nos permite extender lexicográficamente  $\preceq$  a un orden lineal (también denotado por  $\preceq$ ) en el conjunto  $\mathcal{F}$  de caras de  $K$ . Escribimos  $\prec$  para la versión estricta de  $\preceq$ .

Para un vértice  $v \in V$ , una cara  $\alpha \in \mathcal{F}^i$  y un entero  $r \geq 0$ , definimos

$$\iota_r(v, \alpha) = \begin{cases} \alpha \cup \{v\}, & \text{si } \alpha \cup \{v\} \in \mathcal{F}^{i+1}, \text{ con } v \text{ apareciendo en la posición } r \text{ de } \alpha \cup \{v\}; \\ \emptyset, & \text{de lo contrario.} \end{cases}$$

### 2.1.1 El campo y su aciclicidad

Al inicio del algoritmo, establecemos  $W := \emptyset$  e inicializamos las variables auxiliares  $F^i := \mathcal{F}^i$  para  $0 \leq i \leq d$ , las cuales, en cualquier momento del algoritmo, rastrean las caras de dimensión  $i$  que no forman parte de un emparejamiento en  $W$ . A lo largo del algoritmo  $\mathcal{A}$ , se añaden emparejamientos  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{F}^i \times \mathcal{F}^{i+1}$  a  $W$  mediante una familia de procesos  $\mathcal{P}^i$  que se ejecutan para  $i = d-1, d-2, \dots, 1, 0$  (en ese orden), donde  $\mathcal{P}^i$  se ejecuta siempre que (en ese momento) tanto  $F^i$  como  $F^{i+1}$  no estén vacíos (de modo que haya posibilidad de añadir nuevos emparejamientos a  $W$ ). El proceso  $\mathcal{P}^i$  consta de tres niveles de subprocesos anidados:

1. En el nivel más externo,  $\mathcal{P}^i$  consiste en una familia de procesos  $\mathcal{P}^{i,r}$  para  $i+1 \geq r \geq 0$ , ejecutados en orden descendente respecto a  $r$ .
2. A su vez, cada  $\mathcal{P}^{i,r}$  consiste en una familia de subprocesos  $\mathcal{P}^{i,r,v}$  para  $v \in V$ , ejecutados desde el vértice mayor según  $\preceq$  hasta el menor.
3. En el nivel más interno, cada proceso  $\mathcal{P}^{i,r,v}$  consiste en una familia de instrucciones  $\mathcal{P}^{i,r,v,\alpha}$  para  $\alpha \in \mathcal{F}^i$ , ejecutadas siguiendo el orden lexicográfico  $\preceq$ .

La instrucción  $\mathcal{P}^{i,r,v,\alpha}$  verifica si, en el momento de su ejecución,  $(\alpha, \iota_r(v, \alpha)) \in F^i \times F^{i+1}$ , es decir, si  $(\alpha, \iota_r(v, \alpha))$  está "disponible" como un nuevo emparejamiento. Si es así, el emparejamiento  $\alpha \nearrow \iota_r(v, \alpha)$  se añade a  $W$ , mientras que  $\alpha$  e  $\iota_r(v, \alpha)$  se eliminan de  $F^i$  y  $F^{i+1}$ , respectivamente. Dos consecuencias inmediatas se derivan de la construcción anterior. A saber, al final del algoritmo,

- (1) la familia resultante de pares  $W$  es un emparejamiento parcial en  $\mathcal{F}$ , y
- (2) todas las caras y co-caras de una celda no emparejada están involucradas en un emparejamiento de  $W$ .

Como es de imaginarse, por la introducción al capítulo, en los siguientes párrafos se demostrará que el emparejamiento antes descrito construye un campo gradiente discreto sobre  $K$ . En este sentido la Definición 2.1.1 y el Lema 2.1.2 juegan un rol fundamental.

**Definición 2.1.1.** Sea  $W_{i,r,v}$  la colección de emparejamientos  $\alpha \nearrow \beta$  en  $W$  construidos durante el proceso  $\mathcal{P}^{i,r,v}$ . Consideremos también la colección  $P_{i,r,v}$  de pares  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{F}^i \times \mathcal{F}^{i+1}$  tales que  $\beta \setminus \alpha = v$  con  $v$  apareciendo en la posición  $r$  de  $\beta$ . Así,  $W_{i,r,v} = P_{i,r,v} \cap W$ .

**Lema 2.1.2.** Sea  $\alpha = [\alpha_0, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_i] \nearrow \beta = [\alpha_0, \dots, \alpha_r, \beta_0, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_i]$  un emparejamiento en  $W_{i,r+1,\beta_0}$  y sea  $\gamma$  una cara de  $\beta$  con  $\gamma = [\alpha_0, \dots, \alpha_r, \beta_0, \alpha_{r+1}, \dots, \widehat{\alpha}_j, \dots, \alpha_i]$  para  $r+1 \leq j \leq i$ , i.e.,  $\gamma \prec \alpha$ . Entonces existe un entero  $\ell \in \{j+1, j+2, \dots, i+1\}$  y un vértice  $\delta_0$  con  $\alpha_j \prec \delta_0$  tal que

$$\gamma \nearrow \delta := [\alpha_0, \dots, \alpha_r, \beta_0, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_{j-1}, \widehat{\alpha}_j, \dots, \delta_0, \dots]$$

está en  $W_{i,\ell,\delta_0}$ . En particular, el apareo  $\gamma \nearrow \delta$  se construye (según  $\mathcal{A}$ ) primero que el apareo  $\alpha \nearrow \beta$ .

*Demostración.* Previo a la instrucción  $\mathcal{P}^{i,r+1,\beta_0,\alpha}$  que construye  $\alpha \nearrow \beta$ , el algoritmo  $\mathcal{A}$  ejecuta la instrucción  $\mathcal{P}^{i,j+1,\alpha_j,\gamma}$  que evalúa el par potencial  $(\gamma, \beta) \in P_{i,j+1,\alpha_j}$ . Este último no es un elemento de  $W$ , ya que  $\beta$  permanece disponible hasta una etapa posterior en  $\mathcal{A}$ . Por lo tanto,  $\gamma$  debe ser emparejada por una instrucción  $\mathcal{P}^{i,\ell,\delta_0,\gamma}$  anterior a  $\mathcal{P}^{i,j+1,\alpha_j,\gamma}$ , lo que fuerza la conclusión.  $\square$

El Lema 2.1.2 nos está diciendo que en el momento en que  $\mathcal{A}$  construye un emparejamiento  $\alpha \nearrow \beta$ ,  $\alpha$  es, de hecho, la menor (con respecto a  $\preceq$ ) de las caras de  $\beta$  que permanecen no emparejadas.

**Proposición 2.1.3.**  *$W$  es un campo gradiente discreto.*

*Prueba de la Proposición 2.1.3.* Supongamos, para obtener una contradicción, que existe un ciclo en  $W$

$$\alpha^0 \nearrow \beta^0 \searrow \alpha^1 \nearrow \beta^1 \searrow \alpha^2 \nearrow \cdots \nearrow \beta^n \searrow \alpha^{n+1} = \alpha^0 \quad (2.1)$$

(la condición  $n \geq 1$  está forzada por la definición de un camino gradiente). Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $\alpha^0 \nearrow \beta^0$  es construido por  $\mathcal{A}$  antes que cualquier otro emparejamiento  $\alpha^j \nearrow \beta^j$  con  $1 \leq j \leq n$ . Así, el Lema 2.1.2 obliga a que el inicio del ciclo tenga la forma

$$\begin{aligned} \alpha^0 &= [\alpha_0^0, \dots, \alpha_{j_0+1}^0, \dots, \alpha_k^0], \\ \beta^0 &= [\alpha_0^0, \dots, \alpha_{j_0}^0, \beta_0^0, \alpha_{j_0+1}^0, \dots, \alpha_k^0], \\ \alpha^1 &= [\alpha_0^0, \dots, \widehat{\alpha_\ell^0}, \dots, \alpha_{j_0}^0, \beta_0^0, \alpha_{j_0+1}^0, \dots, \alpha_k^0]. \end{aligned}$$

Supongamos inductivamente que  $\alpha^j \nearrow [\cdots, \beta_0^0, \alpha_{j_0+1}^0, \dots, \alpha_k^0]$  con  $\beta_0^0$  apareciendo en la posición  $j_0$  (por lo tanto,  $\alpha^j \neq \alpha^0$ ). La elección de  $\alpha^0 \nearrow \beta^0$  implica que  $\beta^j$  se obtiene de  $\alpha^j$  insertando un vértice  $v$  a la izquierda de  $\beta_0^0$  (es decir,  $v < \beta_0^0$ ). Una nueva aplicación del Lema 2.1.2 (junto con la elección de  $\alpha^0 \nearrow \beta^0$ ) muestra entonces que  $\alpha^{j+1}$  debe obtenerse de  $\beta^j$  eliminando un vértice diferente de  $\beta_0^0, \alpha_{j_0+1}^0, \dots, \alpha_k^0$ . Así  $\alpha^{j+1} = [\cdots, \beta_0^0, \alpha_{j_0+1}^0, \dots, \alpha_k^0]$ , lo que nuevamente es diferente de  $\alpha_0$ . Iterando, obtenemos una situación incompatible con la igualdad en (2.1).  $\square$

**Teorema 2.1.4.** *El campo gradiente discreto  $W$  es maximal. De hecho, todas las caras y todas las co-caras de una cara crítica de  $W$  están involucradas en un emparejamiento de Morse.*

*Demostración.* La prueba de este teorema ha sido notada en el inciso 2.1.1 arriba de la Definición 2.1.1.  $\square$

Notemos que, cuando  $K$  es un simplejo completo,  $\mathcal{A}$  construye el campo gradiente estándar (y óptimo) determinado por la inclusión-exclusión de un vértice fijo (el más grande en el orden seleccionado  $\preceq$ ). Como se ilustra en los Ejemplos 2.1.5 a continuación, también se alcanza la optimalidad en otras situaciones estándares. El Ejemplo 2.1.7 y el Corolario 2.2.2 a continuación tratan con instancias ligeramente menos estándares, mientras que [24] trata con situaciones novedosas en las que nuestro campo gradiente es óptimo.

**Ejemplos 2.1.5.** La Figura 2.1 (izquierda) muestra una triangulación del plano proyectivo  $\mathbb{R}P^2$ . El campo gradiente mostrado por las flechas gruesas está determinado por  $\mathcal{A}$  usando el orden de vértices indicado. Las únicas caras críticas son [6] (en dimensión 0), [2, 5] (en dimensión 1) y [1, 3, 4] (en dimensión 2), por lo que la optimalidad del campo se deduce de la conocida homología mod-2 de  $\mathbb{R}P^2$ . Aunque el campo gradiente depende del orden de los vértices, hemos verificado con la ayuda de una computadora que, en este caso, todos los posibles 720 campos gradientes (derivados de los correspondientes 6! órdenes posibles de los vértices) son óptimos. En la Figura 2.1 (derecha) se muestra un campo gradiente óptimo correspondiente en el 2-toro (y el orden de vértices que lo genera). Esta vez las caras críticas son [9] (en dimensión 0), [2, 8] y [5, 8] (en dimensión 1) y [1, 3, 7] (en dimensión 2). El caso del toro es interesante ya que hay órdenes de vértices que producen campos gradientes no óptimos. En general, una estrategia plausible para elegir un orden conveniente de los vértices consiste en asegurar el mayor número posible de vértices con una alta  $\preceq$ -etiqueta, de modo que no haya dos de esos vértices en una misma cara. Por ejemplo, en nuestro ejemplo del toro, ningún par de vértices tomados de 7, 8 y 9 se encuentra en una sola cara.

La opción  $\alpha \prec \gamma$  descartada por las hipótesis en el Lema 2.1.2 se aborda en el siguiente lema:

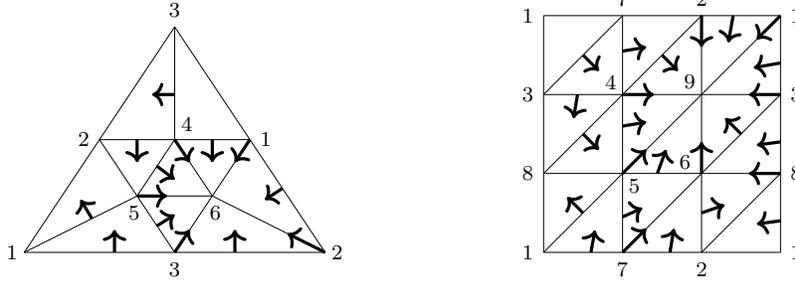


Figura 2.1: Campos gradientes algorítmicos: plano proyectivo (izquierda), 2-toro (derecha)

**Lema 2.1.6.** Sea  $\alpha = [\alpha_0, \dots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_k] \nearrow \beta = [\alpha_0, \dots, \alpha_i, \beta_0, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_k]$  un elemento en  $W_{k,i+1,\beta_0}$  y sea  $\gamma$  una cara de  $\beta$  con  $\alpha \prec \gamma$ , es decir,  $\gamma = [\alpha_0, \dots, \widehat{\alpha}_j, \dots, \alpha_i, \beta_0, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_k]$  para  $0 \leq j \leq i$ . Supongamos que  $\gamma \nearrow \delta$  es una pareja construida después de la pareja  $\alpha \nearrow \beta$ . Entonces  $\delta$  se obtiene de  $\gamma$  insertando un vértice  $\delta_0$  que es más pequeño que  $\beta_0$  en el orden  $\prec$ , es decir,  $\delta = (\dots, \delta_0, \dots, \beta_0, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_k)$ .

*Demostración.* La afirmación se sigue de la definición del algoritmo  $\mathcal{A}$  al notar que  $\alpha_{i+1}$  aparece en la posición  $i+1$  en  $\gamma$ .  $\square$

### 2.1.2 Campo gradiente mediante un algoritmo más rápido

La demostración de la Proposición 2.1.3 hace un uso crítico de la "temporalización" en la construcción de los pares de  $W$  dentro del algoritmo  $\mathcal{A}$ . Dicha característica será modificada a continuación para obtener una versión más eficiente y rápida de  $\mathcal{A}$ . Aunque la "temporalización" de la construcción de los pares  $W$  se alterará, mostraremos que el nuevo algoritmo construye el mismo campo gradiente.

El algoritmo  $\overline{\mathcal{A}}$  en esta subsección, inicializado con variables auxiliares  $\overline{W}$  y  $\overline{F}^i$  análogas a las de su contraparte  $\mathcal{A}$ , consiste en una familia de procesos  $\overline{\mathcal{P}}^i$  que se ejecutan para  $i = d-1, d-2, \dots, 1, 0$  (en ese orden). Cada  $\overline{\mathcal{P}}^i$  se ejecuta bajo las mismas condiciones (con respecto a  $\overline{F}^i$  y  $\overline{F}^{i+1}$ ) que su análogo  $\mathcal{P}^i$ , pero consiste solo de dos (en lugar de tres) niveles de subprocesos anidados. Es decir, en el nivel más externo,  $\overline{\mathcal{P}}^i$  consiste en una familia de procesos  $\overline{\mathcal{P}}^{i,v}$  para  $v \in V$ , ejecutados desde el vértice más grande en  $\preceq$  hasta el más pequeño. A su vez, cada proceso  $\overline{\mathcal{P}}^{i,v}$  consiste en una familia de instrucciones  $\overline{\mathcal{P}}^{i,v,\alpha}$  para  $\alpha \in \mathcal{F}^i$ , ejecutadas siguiendo el orden lexicográfico basado en  $\preceq$ . La instrucción  $\overline{\mathcal{P}}^{i,v,\alpha}$  verifica si, en ese momento,  $(\alpha, \{v\} \cup \alpha) \in \overline{F}^i \times \overline{F}^{i+1}$  (es decir, disponibilidad). Si es así, el emparejamiento  $\alpha \nearrow \{v\} \cup \alpha$  se añade a  $\overline{W}$ , mientras que  $\alpha$  y  $\{v\} \cup \alpha$  se eliminan de  $\overline{F}^i$  y  $\overline{F}^{i+1}$ , respectivamente. Así, la diferencia con el algoritmo  $\mathcal{A}$  es que, para construir un emparejamiento  $\alpha \nearrow \{v\} \cup \alpha$  en  $\overline{W}$ , no se toma en cuenta la posición de  $v$  en  $\{v\} \cup \alpha$ . Como explicaremos a continuación, tal situación significa que el algoritmo  $\overline{\mathcal{A}}$  construye algunos emparejamientos  $\alpha \nearrow \beta$  antes de lo que los construiría  $\mathcal{A}$ , evitando así la necesidad de realizar instrucciones de prueba posteriores relacionadas con  $\alpha$  o  $\beta$ .

**Ejemplo 2.1.7.** Consideremos la triangulación del plano proyectivo perforado que se muestra en la Figura 2.2. En el algoritmo  $\mathcal{A}$ , el emparejamiento  $[2, 3] \nearrow [2, 3, 4]$ , que se construye durante el proceso  $\mathcal{P}^{1,2,4}$ , ocurre antes que el emparejamiento  $[1, 5] \nearrow [1, 4, 5]$ , que se construye durante el proceso  $\mathcal{P}^{1,1,4}$ . En cambio, estos dos emparejamientos se producen en el orden inverso en el algoritmo  $\overline{\mathcal{A}}$ , y ambos se construyen durante el proceso  $\mathcal{P}^{1,4}$ . Como se puede comprobar fácilmente, el campo

gradiente resultante (común) tiene solo dos caras críticas, a saber, [6] y [4, 5], y por lo tanto es óptimo (ya que el plano proyectivo perforado tiene el tipo de homotopía del círculo  $S^1$ ).

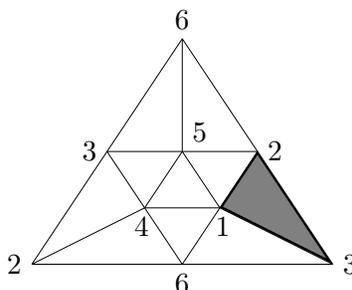


Figura 2.2: El orden de los vértices en el plano proyectivo con la cara [1, 2, 3] eliminada

El objetivo de esta subsección es demostrar el Teorema 2.1.8 a continuación, es decir, el hecho de que  $W = \overline{W}$  al final de ambos algoritmos. La demostración se organiza mejor estableciendo  $\overline{W}_{i,r,v} := P_{i,r,v} \cap \overline{W}$  (cf. Definición 2.1.1), así como

$$W_{k,v} := \bigsqcup_r W_{k,r,v} \quad \text{y} \quad \overline{W}_{k,v} := \bigsqcup_r \overline{W}_{k,r,v}.$$

**Teorema 2.1.8.** *Los emparejamientos contruidos por  $\mathcal{A}$  y  $\overline{\mathcal{A}}$  coinciden:  $W_{k,r,v} = \overline{W}_{k,r,v}$  para todos los índices relevantes  $k, r$  y  $v$ . En particular,  $\overline{W}$  es acíclico.*

La demostración del Teorema 2.1.8 hace uso de las siguientes observaciones elementales válidas para los vértices  $v$  y  $w$  con  $v \preceq w$ :

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) \in P_{k,r,v} \quad \text{y} \quad (\alpha, \gamma) \in P_{k,s,w} &\implies r \leq s, \text{ con igualdad cuando } v = w. \\ (\alpha, \beta) \in P_{k,r,v} \quad \text{y} \quad (\gamma, \beta) \in P_{k,s,w} &\implies r \leq s, \text{ con igualdad cuando } v = w. \end{aligned} \tag{2.2}$$

**Nota 2.1.9.** En la demostración del Teorema 2.1.8, será conveniente tener en cuenta la siguiente visión más cercana de la parte medular de los algoritmos  $\mathcal{A}$  y  $\overline{\mathcal{A}}$ . A saber, en el caso de  $\mathcal{A}$ , una manera eficiente de ejecutar un proceso  $\mathcal{P}^{k,r,v}$  es ensamblar el conjunto  $N_{k,r,v}$  de caras  $(k+1)$ -dimensionales  $\gamma$  que contienen a  $v$  en la posición  $r$  y tal que tanto  $\gamma$  como  $\partial_v(\gamma)$  están disponibles, es decir, ni  $\gamma$  ni  $\partial_v(\gamma)$  han sido emparejadas antes del inicio de  $\mathcal{P}^{k,r,v}$ . Con dicha preparación,  $\mathcal{P}^{k,r,v}$  simplemente añade<sup>1</sup> a  $W$  todos los pares  $(\partial_v(\gamma), \gamma)$  con  $\gamma \in N_{k,r,v}$  (construcción de nuevos emparejamientos), y elimina todas las caras  $\gamma$  y  $\partial_v(\gamma)$ , para  $\gamma \in N_{k,r,v}$ , de las listas correspondientes de caras no emparejadas (actualización de caras disponibles). De manera similar, una forma eficiente de ejecutar el proceso  $\overline{\mathcal{P}}^{k,v}$  en  $\overline{\mathcal{A}}$  es ensamblar el conjunto  $\overline{N}_{k,v}$  de caras  $(k+1)$ -dimensionales  $\gamma$  que contienen a  $v$  como un vértice (en cualquier posición) y tal que tanto  $\gamma$  como  $\partial_v(\gamma)$  están disponibles al inicio de  $\overline{\mathcal{P}}^{k,v}$ . Con dicha preparación, el Lema 2.1.10 a continuación muestra que  $\overline{\mathcal{P}}^{k,v}$  simplemente añade a  $\overline{W}$  (en orden lexicográfico) todos los emparejamientos  $(\partial_v(\gamma), \gamma)$  con  $\gamma \in \overline{N}_{k,v}$  (construcción de nuevos emparejamientos), y elimina todas las caras  $\gamma$  y  $\partial_v(\gamma)$ , para  $\gamma \in \overline{N}_{k,v}$ , de las listas correspondientes de caras no emparejadas (actualización de caras disponibles). En particular,  $N_{k,r,v}$  (respectivamente  $\overline{N}_{k,v}$ ) es el conjunto de caras colapsables para el bloque de emparejamiento construido por  $\mathcal{P}^{k,r,v}$  (respectivamente  $\overline{\mathcal{P}}^{k,v}$ ), mientras que las caras  $\partial_v(\beta)$  para  $\beta \in N_{k,r,v}$  (respectivamente  $\beta \in \overline{N}_{k,v}$ ) son las caras redundantes correspondientes.

<sup>1</sup>La adición de pares se realiza siguiendo el orden lexicográfico  $\preceq$  (cf. Lema 2.1.10), aunque esto es irrelevante en este punto.

---

**Lema 2.1.10.** Sean  $\alpha$  y  $\beta$  caras  $(k+1)$ -dimensionales que contienen a  $v$  como vértice (en cualquier posición). En términos del orden  $\preceq$ -lexicográfico, la condición  $\alpha \prec \beta$  se cumple si y solo si  $\partial_v(\alpha) \prec \partial_v(\beta)$ .

*Demostración.* El orden lexicográfico es lineal (lo hemos asumido a nivel de vértices), por lo que basta mostrar que  $\partial_v(\alpha) \prec \partial_v(\beta)$  siempre que se cumpla  $\alpha \prec \beta$ . Supongamos que  $v$  aparece en las posiciones  $i$  y  $j$  en  $\alpha$  y  $\beta$ , respectivamente. El resultado es obvio si  $i = j$  (por eso no necesitamos el lema en nuestro análisis más cercano de  $\mathcal{A}$ ), o si la decisión lexicográfica para la desigualdad  $\alpha \prec \beta$  se toma en una posición menor que  $m := \min\{i, j\}$ . Así, podemos asumir que  $i \neq j$ , siendo  $\alpha$  y  $\beta$  idénticas hasta la posición  $m - 1$ . La desigualdad  $\alpha \prec \beta$  fuerza entonces que  $i > j = m$ . Así,  $\partial_v(\alpha)$  y  $\partial_v(\beta)$  son idénticas hasta la posición  $j - 1$ , mientras que en la posición  $j$ :

- $\partial_v(\alpha)$  tiene el vértice  $\alpha_j$ , que es menor que  $v = \alpha_i$ , y
- $\partial_v(\beta)$  tiene el vértice  $\beta_{j+1}$ , que es mayor que  $v = \beta_j$ .

En consecuencia,  $\partial_v(\alpha) \prec \partial_v(\beta)$ . □

*Demostración del Teorema 2.1.8.* Recordemos que  $d$  representa la dimensión del complejo simplicial bajo consideración. Fijemos  $i \in \{0, 1, \dots, d-1\}$  y supongamos que

$$\text{la igualdad } W_{k,r,v} = \overline{W}_{k,r,v} \text{ es válida siempre que } k > i \quad (2.3)$$

para todos los valores relevantes de  $r$  y  $v$ . El objetivo inductivo es demostrar

$$W_{i,r,v} = \overline{W}_{i,r,v}, \text{ para todo } v \in V \text{ y todo } r \in \{0, 1, \dots, i+1\}. \quad (2.4)$$

(La inducción se fundamenta vacuamente en el hecho de que  $W_{d,r,v} = \emptyset = \overline{W}_{d,r,v}$  al inicio de ambos algoritmos.) Comenzamos argumentando el caso  $r = i+1$  en (2.4), que, a su vez, se hará mediante inducción en el orden inverso de los vértices (es decir, comenzando desde el vértice más grande  $v_{\max}$ ) y a través de una comparación de las acciones correspondientes de  $\mathcal{A}$  y  $\overline{\mathcal{A}}$  durante la ejecución *simultánea* de estos algoritmos. En detalle:

**Caso I:**  $r = i+1$  y  $v = v_{\max}$  en (2.4). Los emparejamientos en  $W_{i,i+1,v_{\max}}$  se construyen durante la ejecución del proceso  $\mathcal{P}^{i,i+1,v_{\max}}$ , mientras que aquellos en  $\overline{W}_{i,i+1,v_{\max}}$  se construyen durante la ejecución del proceso  $\overline{\mathcal{P}}^{i,v_{\max}}$ . En principio, el último proceso también podría construir emparejamientos fuera de  $\overline{W}_{i,i+1,v_{\max}}$ . Sin embargo, tal posibilidad se elimina debido a que  $v_{\max}$  solo puede aparecer en la última posición de cualquier cara. Teniendo en cuenta la suposición inductiva (2.3), esto significa que los procesos  $\mathcal{P}^{i,i+1,v_{\max}}$  en  $\mathcal{A}$  y  $\overline{\mathcal{P}}^{i,v_{\max}}$  en  $\overline{\mathcal{A}}$  construyen los mismos nuevos emparejamientos y, en consecuencia, realizan la misma actualización de los conjuntos de caras disponibles (esto justifica el abuso de notación  $\mathcal{P}^{i,i+1,v_{\max}} = \overline{\mathcal{P}}^{i,v_{\max}}$ ). Además, después de que estos procesos concluyen, no se pueden construir más emparejamientos mediante la inserción de  $v_{\max}$  (ya sea en  $\mathcal{A}$  o en  $\overline{\mathcal{A}}$ ). Por lo tanto, de hecho

$$W_{i,v_{\max}} = W_{i,i+1,v_{\max}} = \overline{W}_{i,i+1,v_{\max}} = \overline{W}_{i,v_{\max}} \quad (2.5)$$

lo cual, en particular, fundamenta el argumento inductivo (sobre los vértices) para el caso  $r = i+1$  en (2.4). Como se explicó en el párrafo anterior al Lema 2.1.10, las entradas redundantes en (2.5) son las caras  $\alpha$  de dimensión  $i$  tales que  $\alpha \cup \{v_{\max}\}$  es una cara de dimensión  $(i+1)$  (por lo tanto,  $v_{\max} \notin \alpha$ ) disponible al inicio del proceso  $\mathcal{P}^{i,i+1,v_{\max}} = \overline{\mathcal{P}}^{i,v_{\max}}$  (todas las caras de dimensión  $i$  están

disponibles en este punto), mientras que las entradas colapsables en (2.5) son las caras de dimensión  $(i + 1)$  disponibles al inicio de  $\mathcal{P}^{i,i+1,v_{\max}} = \overline{\mathcal{P}}^{i,v_{\max}}$  que contienen a  $v_{\max}$  como vértice.

La situación anterior cambia ligeramente en las etapas posteriores de los algoritmos y, para apreciar mejor las sutilezas, es muy ilustrativo dedicar un poco de tiempo a analizar en detalle algunos de los emparejamientos construidos justo después de (2.5).

**Caso II:  $r = i + 1$  y  $v = v_{\max - 1}$  en (2.4).** Sea  $v_1, v_2, \dots, v_{\max - 1}, v_{\max}$  los elementos del conjunto de vértices  $V$  ordenados crecientemente según  $\preceq$ . Los emparejamientos en  $W_{i,i+1,v_{\max - 1}}$  (respectivamente  $\overline{W}_{i,i+1,v_{\max - 1}}$ ) se construyen durante la ejecución del proceso  $\mathcal{P}^{i,i+1,v_{\max - 1}}$  (respectivamente  $\overline{\mathcal{P}}^{i,v_{\max - 1}}$ ). En ambos procesos, la construcción se realiza considerando la inserción de  $v_{\max - 1}$  entre las caras disponibles (estas son comunes a ambos algoritmos hasta este punto), ya sea en la posición  $i + 1$  en el caso de  $\mathcal{A}$ , o en cualquier posición en el caso de  $\overline{\mathcal{A}}$ . Como en el Caso I,

$$\overline{\mathcal{P}}^{i,v_{\max - 1}} \text{ podría construir emparejamientos fuera de } \overline{W}_{i,i+1,v_{\max - 1}}, \quad (2.6)$$

y

$$\text{cualquier emparejamiento de este tipo tendría que estar en } \overline{W}_{i,i,v_{\max - 1}}, \quad (2.7)$$

ya que  $v_{\max - 1}$  no puede aparecer en una posición menor que  $i$  en una cara de dimensión  $(i + 1)$ . En términos de la notación introducida en el párrafo anterior al Lema 2.1.10, la posibilidad en (2.6) se traduce en una inclusión estricta  $N_{i,i+1,v_{\max - 1}} \subset \overline{N}_{i,v_{\max - 1}}$ . Sin embargo, un elemento en  $\overline{N}_{i,v_{\max - 1}} \setminus N_{i,i+1,v_{\max - 1}}$  se ve obligado a ser una cara de dimensión  $(i + 1)$  que, además de estar disponible al inicio de  $\mathcal{P}^{i,i+1,v_{\max - 1}}$  y  $\overline{\mathcal{P}}^{i,v_{\max - 1}}$ , tiene a  $v_{\max}$  apareciendo en la última posición (ya que, como se indica en (2.7),  $v_{\max - 1}$  aparece en la penúltima posición). Esta situación entra en conflicto con la descripción de las caras colapsables señaladas al final del Caso I, descartando la posibilidad en (2.6). Así pues, al igual que antes,  $\mathcal{P}^{i,i+1,v_{\max - 1}} = \overline{\mathcal{P}}^{i,v_{\max - 1}}$  y

$$W_{i,v_{\max - 1}} = W_{i,i+1,v_{\max - 1}} = \overline{W}_{i,i+1,v_{\max - 1}} = \overline{W}_{i,v_{\max - 1}}. \quad (2.8)$$

Aunque los Casos I y II son esencialmente idénticos, la construcción de los emparejamientos subsiguientes tiene un giro cuya solución se aprecia mejor al observar rápidamente el siguiente bloque de emparejamientos, es decir, aquellos construidos por  $\mathcal{P}^{i,i+1,v_{\max - 2}}$  en el caso de  $\mathcal{A}$  y por  $\overline{\mathcal{P}}^{i,v_{\max - 2}}$  en el caso de  $\overline{\mathcal{A}}$ . En este caso, la inclusión

$$N_{i,i+1,v_{\max - 2}} \subseteq \overline{N}_{i,v_{\max - 2}} \quad (2.9)$$

puede no ser en realidad una igualdad, como se ilustra en el Ejemplo 2.1.7. Como resultado, la forma particularmente fuerte de las afirmaciones (2.5) y (2.8) ya no se sostiene para los bloques de emparejamientos posteriores. En cualquier caso, lo que recuperamos de (2.9) —y la discusión previa al Lema 2.1.10— es el hecho de que  $W_{i,i+1,v_{\max - 2}} = \overline{W}_{i,i+1,v_{\max - 2}}$ . Luego extendemos inductivamente esta conclusión a otros vértices y, a continuación, explicamos cómo los emparejamientos tempranos construidos en  $\overline{\mathcal{A}}$  se recuperan eventualmente en  $\mathcal{A}$ .

**Caso III: Paso inductivo que resuelve (2.4) para  $r = i + 1$ .** Fijemos un vértice  $v \in V$  y supongamos que

$$\overline{W}_{i,i+1,w} = W_{i,i+1,w} \quad (2.10)$$

siempre que  $v \prec w$ , lo que permite la posibilidad de que el proceso  $\overline{\mathcal{P}}^{i,w}$  en  $\overline{\mathcal{A}}$  construya más emparejamientos que el proceso correspondiente  $\mathcal{P}^{i,i+1,w}$  en  $\mathcal{A}$ . En este escenario, las caras disponibles al inicio de  $\overline{\mathcal{P}}^{i,v}$  son necesariamente las disponibles al inicio de  $\mathcal{P}^{i,i+1,v}$ , por lo que

$$\overline{W}_{i,i+1,v} \subseteq W_{i,i+1,v}. \quad (2.11)$$

Supongamos, para obtener una contradicción, que la inclusión anterior es estricta, y seleccionemos un emparejamiento

$$(\alpha, \beta) \text{ en } W_{i,i+1,v} \text{ pero no en } \overline{W}_{i,i+1,v}. \quad (2.12)$$

Esto significa que  $\alpha$  o  $\beta$  (o ambos) no están disponibles al inicio de  $\overline{\mathcal{P}}^{i,v}$  y, en vista de (2.3), esto solo puede suceder si

- (i)  $(\alpha, \beta') \in \overline{W}_{i,r,w} \subseteq P_{i,r,w}$  para alguna cara  $\beta'$ , algún vértice  $w$  y alguna posición  $r$ , o
- (ii)  $(\alpha', \beta) \in \overline{W}_{i,r,w} \subseteq P_{i,r,w}$  para alguna cara  $\alpha'$ , algún vértice  $w$  y alguna posición  $r$ ,

donde, en ambos casos,  $v \prec w$  y  $r \leq i + 1$ . Pero  $(\alpha, \beta) \in W_{i,i+1,v} \subseteq P_{i,i+1,v}$ , por lo que (2.2) implica en realidad que  $i + 1 = r$ . Así,  $\alpha$  o  $\beta$  forman parte de un emparejamiento en  $\overline{W}_{i,r,w} = \overline{W}_{i,i+1,w} = W_{i,i+1,w}$ , donde la última igualdad proviene de (2.10), pero esto contradice (2.12). Así, (2.11) es una igualdad. Cabe señalar que el argumento anterior no descarta la posibilidad de que  $\overline{\mathcal{P}}^{i,v}$  construya más emparejamientos (insertando  $v$  en una posición menor que  $i + 1$ ) que aquellos construidos por  $\mathcal{P}^{i,i+1,v}$ .

La conclusión de la demostración del Teorema 2.1.8, es decir, la prueba de (2.4) para  $r \leq i$ , procede por inducción inversa sobre  $r$ , con la discusión anterior para  $r = i + 1$  fundamentando la inducción. El nuevo argumento inductivo requiere un enfoque completamente diferente derivado del siguiente hecho: En  $\mathcal{A}$ , después de que  $\mathcal{P}^{i,i+1,v_1}$  termina, el proceso  $\mathcal{P}^i$  continúa con muchos más subprocesos, el primero de los cuales es  $\mathcal{P}^{i,i,v_{\max}}$ . Sin embargo, en  $\overline{\mathcal{A}}$ , el proceso  $\overline{\mathcal{P}}^i$  finaliza tan pronto como  $\overline{\mathcal{P}}^{i,v_1}$  termina, es decir, cuando la etapa inductiva final en el Caso III concluye. Por lo tanto, nuestra estrategia de prueba a partir de este punto requiere pausar  $\overline{\mathcal{A}}$  para analizar el resto de las acciones en  $\mathcal{P}^i$ . En particular, explicamos a continuación cómo  $\mathcal{P}^i$  alcanza todos los emparejamientos “tempranos”  $\cup_v (\overline{W}_{i,v} \setminus W_{i,i+1,v})$  construidos por  $\overline{\mathcal{P}}^i$ .

**Caso IV: (Paso inductivo doble que resuelve (2.4) para cualquier  $r$ ).** Fijemos  $r \in \{0, 1, \dots, i\}$  y supongamos inductivamente que, a medida que  $\mathcal{P}^i$  progresa,  $\mathcal{P}^{i,\rho}$  produce  $\overline{W}_{i,\rho,w} = W_{i,\rho,w}$  para cualquier vértice  $w$  y cualquier posición de inserción  $\rho > r$ . (La inducción se fundamenta en el Caso III anterior.) El objetivo es demostrar

$$\overline{W}_{i,r,w} = W_{i,r,w} \text{ para todos los vértices } w. \quad (2.13)$$

Dado que  $r \leq i$ , obtenemos  $\overline{W}_{i,r,v_{\max}} = \emptyset = W_{i,r,v_{\max}}$ . Por lo tanto, podemos asumir en un segundo nivel inductivo que, para algún vértice  $v$  con  $v \prec v_{\max}$ , (2.13) es cierto para todos los vértices  $w$  con  $v \prec w$ . El objetivo actualizado es demostrar que  $\overline{W}_{i,r,v} = W_{i,r,v}$ .

*Inclusión  $\overline{W}_{i,r,v} \subseteq W_{i,r,v}$ :* Supongamos, para obtener una contradicción, que

$$(\alpha, \beta) \in \overline{W}_{i,r,v} \quad (2.14)$$

es un emparejamiento “tempranero” (construido durante la ejecución de  $\overline{\mathcal{P}}^{i,v}$ ) que no puede ser construido durante la ejecución de  $\mathcal{P}^{i,r,v}$ . Entonces  $\alpha$  o  $\beta$  (o ambos) deben estar involucrados en un emparejamiento de algún  $W_{i,s,w}$  con  $s \geq r$  y, además, con  $v \prec w$  si de hecho  $s = r$ . La igualdad inductiva doble  $W_{i,s,w} = \overline{W}_{i,s,w}$ , la dinámica de  $\overline{\mathcal{A}}$  y (2.14) entonces obligan a que  $v = w$  y, en consecuencia,  $s > r$ . Pero esta última desigualdad contradice (2.2) ya que  $\overline{W}_{i,r,v} \subseteq P_{i,r,v}$  y  $\overline{W}_{i,s,w} \subseteq P_{i,s,w}$ .

*Inclusión  $W_{i,r,v} \subseteq \overline{W}_{i,r,v}$ :* Supongamos, para obtener una contradicción, que

$$(\alpha, \beta) \in W_{i,r,v} \quad (2.15)$$

no es uno de los emparejamientos “tempraneros” construidos durante la ejecución de  $\overline{\mathcal{P}}^{i,v}$ . Entonces  $\alpha$  o  $\beta$  (o ambos) deben estar involucrados en un emparejamiento de algún  $\overline{W}_{i,s,w}$  con  $v \prec w$ . Como en el párrafo anterior, (2.2) entonces implica que  $r \leq s$ . A su vez, la hipótesis inductiva doble da  $\overline{W}_{i,s,w} = W_{i,s,w}$ , lo que implica que dicho emparejamiento incluye a  $\alpha$  o  $\beta$ , en contradicción con (2.15).  $\square$

### 2.1.3 Complejidad computacional y rendimiento

El diseño de algoritmos eficientes y la implementación de softwares rápidos para el procesamiento homológico de grandes conjuntos de datos es un desafío tecnológico dinámico. Con esto en mente, ahora estudiamos la complejidad computacional de nuestro algoritmo y la comparamos con una técnica estrechamente relacionada utilizada en aplicaciones actuales.

Harker *et al.* describen y estudian en [30] una forma eficiente de calcular la homología de complejos. En el corazón de su método, hay un algoritmo  $\mathcal{H}$  para construir campos gradientes discretos en una clase bien adaptada de complejos (al estilo de Tucker). La idea se basa en una extensión de la teoría de Morse del método de correducción introducido en [37]. En concreto, las celdas  $\alpha$  y  $\beta$  forman un par de correducción de un complejo  $K$  siempre que  $\alpha$  sea una cara libre de codimensión 1 de  $\beta$  en  $K$ . Inicializando  $K$  como el complejo completo inicial, el algoritmo  $\mathcal{H}$  construye emparejamientos de Morse  $\alpha \nearrow \beta$  siempre que  $\alpha$  y  $\beta$  formen un par de correducción en  $K$ . Cada vez que se encuentra un par de correducción, sus entradas se eliminan de  $K$  antes de buscar el siguiente par de celdas de correducción. Si en algún momento no existen pares de correducción en  $K$ , las caras de  $K$  que no tienen frontera en  $K$  se declaran críticas (y se eliminan de  $K$ ) hasta crear nuevos pares de correducción. El algoritmo se repite hasta que  $K$  queda vacío, lo que completa el proceso básico (iterativo)  $\mathcal{H}_0$  de  $\mathcal{H}$ .

Aunque tanto  $\overline{\mathcal{A}}$  como  $\mathcal{H}$  se basan en la búsqueda heurística de pares de Morse, los campos gradiente correspondientes no se parecen en nada entre sí. De hecho, la heurística de correducción en  $\mathcal{H}$  se reemplaza en  $\overline{\mathcal{A}}$  por una estrategia de inclusión-exclusión guiada por el orden de los vértices, una vez fijado  $\preceq$ . Más precisamente, a continuación destacamos las principales diferencias conceptuales y similitudes aparentes entre  $\overline{\mathcal{A}}$  y  $\mathcal{H}$ . Para empezar, obsérvese que no hay razón para esperar (y de hecho, generalmente no es el caso) que  $\mathcal{H}_0$  produzca un campo gradiente razonablemente eficiente en el complejo original. No obstante, la perspectiva de Tucker sobre los complejos permite a Harker *et al.* iterar  $\mathcal{H}_0$  y, al hacerlo, el campo gradiente eventualmente estabilizado resulta ser razonablemente eficiente —óptimo en algunos casos. Por otro lado, como se ilustra en los Ejemplos 2.1.5 y se formaliza en el Teorema 2.1.4, la propiedad de eficiencia correspondiente se alcanza con  $\overline{\mathcal{A}}$  como resultado de la búsqueda guiada por  $\preceq$  de pares de Morse. Pero el aspecto más importante a destacar al comparar  $\overline{\mathcal{A}}$  y  $\mathcal{H}$  se refiere a la complejidad computacional. Además de

- (a) el costo de iterar  $\mathcal{H}_0$  hasta alcanzar un campo gradiente estable, y
- (b) el costo de procesar el complejo de Morse resultante al concluir cada aplicación de  $\mathcal{H}_0$  para reunir la información de Tucker necesaria para la siguiente aplicación de  $\mathcal{H}_0$ ,

el costo computacional de aplicar  $\mathcal{H}_0$  (por ejemplo, por primera vez) es lineal en la *masa del complejo* inicial

$$m_K = \text{card} \left\{ (\alpha^{p+1}, \beta^p) : p \geq 0 \text{ y } \alpha, \beta \text{ son caras de } K \text{ con } \beta \subset \alpha \right\} \quad (2.16)$$

(ver [30, Proposición 5.1]). Probamos (Proposición 2.1.11 a continuación) que, si pensamos en la

instrucción básica  $\overline{\mathcal{P}}^{i,v,\alpha}$  del algoritmo  $\overline{\mathcal{A}}$  en la Subsección 2.1.2 como ejecutada en tiempo  $O(1)^2$ , entonces  $\overline{\mathcal{A}}$  también se ejecuta en tiempo  $O(m_K)$ . En consecuencia, para implementaciones prácticas, una estrategia rentable para reducir los costos computacionales provenientes de (a) y (b) arriba puede basarse en una combinación de los algoritmos  $\overline{\mathcal{A}}$  y  $\mathcal{H}$ . De hecho, la condición de maximalidad del campo gradiente  $W$  resultante de una aplicación inicial de  $\overline{\mathcal{A}}$  puede potencialmente ser superada (y posiblemente convertida en una condición de optimalidad) mediante una aplicación subsiguiente (y mucho más rápida) de  $\mathcal{H}$  sobre el complejo de Morse-Tucker resultante de  $W$ .

**Proposición 2.1.11.** *Para un complejo simplicial abstracto finito ordenado  $K$  con masa de complejo (2.16), el algoritmo  $\overline{\mathcal{A}}$  se ejecuta en tiempo  $O(m_K)$ .*

*Demostración.* Una implementación eficiente de  $\overline{\mathcal{A}}$  requiere la inicialización de un par de funciones  $f(\sigma)$  y  $g(i, v)$ . La primera función es binaria y responde, en cualquier momento del algoritmo, a la pregunta de si una cara dada  $\sigma$  del complejo original pertenece al conjunto de caras “disponibles”  $\overline{F}^{\dim(\sigma)}$  (aquí y a continuación reutilizamos la notación establecida en la Subsección 2.1.2). La segunda función informa, en cualquier momento del algoritmo, la lista de caras disponibles en una dimensión dada  $i$  que contienen un vértice dado  $v$ . El costo de inicializar  $f$  (con valores TRUE) es lineal en el número de caras del complejo original y, por lo tanto, puede ignorarse para los fines de esta prueba. Por otro lado, para una dimensión dada  $i$ , comenzamos configurando  $g(i, v) = \emptyset$  para todos los vértices  $v$ . Luego, para cada cara  $\sigma \in \mathcal{F}^i$  y para cada vértice  $v \in \sigma$ , añadimos  $\sigma$  a  $g(i, v)$ . Esta tarea toma tiempo  $O(\sum_{\sigma \in \mathcal{F}^i} m_\sigma)$ , donde  $m_\sigma$  representa la *masa de la frontera* de  $\sigma$ , es decir, la cardinalidad del conjunto de caras de  $\sigma$ . Por lo tanto, inicializar  $g$  (y  $f$ ) toma tiempo  $O(m_K)$ . Con esta preparación,  $\overline{\mathcal{A}}$  puede entonces ejecutarse en tiempo  $O(m_K)$  siguiendo las indicaciones en la Observación 2.1.9. Específicamente, para ejecutar el proceso  $\overline{\mathcal{P}}^{i,v}$ , selecciona las caras  $\sigma \in g(i+1, v)$  con  $f(\partial_v(\sigma)) = \text{TRUE}$ , de modo que

$$\partial_v(\sigma) \nearrow \sigma \tag{2.17}$$

es un nuevo par de Morse —en cuyo caso se deben actualizar los valores correspondientes de  $f$  y  $g$ . Naturalmente, algunas caras  $\sigma \in g(i+1, v)$  no llevarán al emparejamiento de Morse “de tipo  $v$ ” (2.17) y deberán ser consideradas por procesos posteriores  $\overline{\mathcal{P}}^{i,w}$  (es decir, con  $w < v$ ). Pero, al igual que en la inicialización de  $g$ , una  $\sigma$  fija deberá ser procesada a lo sumo  $m_\sigma$  veces. Por lo tanto, el algoritmo real  $\overline{\mathcal{A}}$  también se ejecuta en tiempo  $O(m_K)$ .  $\square$

Hay que tener en cuenta que la estimación  $O(m_K)$  para la complejidad computacional en la parte final de la prueba anterior es bastante aproximada. De hecho, ninguna de las caras redundantes de dimensión  $i$  emparejadas durante la ejecución de  $\overline{\mathcal{P}}^i$  tendrá que ser procesada durante la ejecución de  $\overline{\mathcal{P}}^{i-1}$ . Es en este sentido que la maximalidad de nuestro algoritmo (Teorema 2.1.4) conduce, paradójicamente, a una complejidad computacional que, en situaciones prácticas, es menor de lo estimado aquí.

## 2.1.4 Condiciones de colapsabilidad

Esta sección está dedicada a aspectos teóricos de nuestro campo gradiente. En particular, describimos un conjunto de condiciones “locales” que nos permiten identificar emparejamientos en nuestro campo gradiente sin necesidad de ejecutar ninguna de las dos versiones de nuestro algoritmo. Nuestras

---

<sup>2</sup>Tal suposición se logra fácilmente mediante una implementación eficiente de  $\overline{\mathcal{A}}$ , ver la prueba de la Proposición 2.1.11.

condiciones locales determinan completamente el campo gradiente en una serie de casos<sup>3</sup>. El principal resultado de esta sección (Teorema 2.1.20) se presenta a través de una serie de resultados preliminares que aumentan en complejidad para aislar el papel de cada uno de los ingredientes de las condiciones.

**Definición 2.1.12.** *Se dice que un vértice  $\alpha_i$  de una cara  $\alpha = [\alpha_0, \dots, \alpha_k] \in \mathcal{F}^k$  es máximo en  $\alpha$  si  $\partial_{\alpha_i}(\alpha) \cup \{v\} \notin \mathcal{F}^k$  para todos los vértices  $v$  con  $\alpha_i \prec v$ . Cuando  $\alpha_i$  no es máximo en  $\alpha$ , escribimos  $\alpha(i) := \partial_{\alpha_i}(\alpha) \cup \{\alpha^i\}$ , donde*

$$\alpha^i := \max\{v \in V : \alpha_i \prec v \text{ y } \partial_{\alpha_i}(\alpha) \cup \{v\} \in \mathcal{F}^k\}.$$

*Nótese que  $\alpha^i$  es máximo en  $\alpha(i)$ , y que  $\alpha^i$  no es un vértice de  $\alpha$ . Iterando la construcción, para una cara dada  $\alpha = [\alpha_0, \dots, \alpha_k] \in \mathcal{F}^k$  y una secuencia de enteros  $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq k$ , decimos que la cara  $[\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_p}]$  no es máxima en  $\alpha$  siempre que:*

- $\alpha_{i_1}$  no es máxima en  $\alpha$ , por lo que podemos formar la cara  $\alpha(i_1)$ ;
- $\alpha_{i_2}$  no es máxima en  $\alpha(i_1)$ , por lo que podemos formar la cara  $\alpha(i_1, i_2) := \alpha(i_1)(i_2)$ ;
- ...
- $\alpha_{i_p}$  no es máxima en  $\alpha(i_1, \dots, i_{p-1})$ , por lo que podemos formar la cara  $\alpha(i_1, \dots, i_p) := \alpha(i_1, \dots, i_{p-1})(i_p)$ .

*Cuando  $p = 0$  (es decir, no hay proceso de construcción),  $\alpha(i_1, i_2, \dots, i_p)$  se interpreta como  $\alpha$ .*

**Lema 2.1.13.** *Ningún vértice de una  $k$ -cara redundante  $\alpha \in \mathcal{F}^k$  es máximo en  $\alpha$ .*

*Demostración.* Supongamos un emparejamiento  $\alpha = [\alpha_0, \dots, \alpha_k] \nearrow \beta = [\alpha_0, \dots, \alpha_{r-1}, \beta_0, \alpha_r, \dots, \alpha_k]$  y consideremos un vértice  $\alpha_i$  de  $\alpha$ . Si  $i < r$ , la  $k$ -cara  $\partial_{\alpha_i}(\beta) = [\alpha_0, \dots, \widehat{\alpha}_i, \dots, \alpha_{r-1}, \beta_0, \alpha_r, \dots, \alpha_k]$  muestra que el vértice  $\alpha_i$  no es máximo en  $\alpha$ . Si  $i \geq r$ , el Lema 2.1.2 da un emparejamiento

$$\gamma := [\alpha_0, \dots, \alpha_{r-1}, \beta_0, \alpha_r, \dots, \widehat{\alpha}_i, \dots, \alpha_k] \nearrow [\alpha_0, \dots, \alpha_{r-1}, \beta_0, \alpha_r, \dots, \widehat{\alpha}_i, \dots, \delta_0, \dots] =: \delta$$

mediante la inserción de un vértice  $\delta_0$  con  $\alpha_i \prec \delta_0$ , de modo que la  $k$ -cara  $\partial_{\beta_0}(\delta)$  muestra que el vértice  $\alpha_i$  no es máximo en  $\alpha$ .  $\square$

Mientras que los vértices máximos en una cara  $\alpha$  pueden considerarse como obstrucciones a la redundancia de  $\alpha$ , la maximalidad del vértice más grande en  $\alpha$  es en realidad equivalente a la colapsabilidad de  $\alpha$  de una manera específica:

**Corolario 2.1.14.** *Las siguientes condiciones son equivalentes para una  $k$ -cara  $\alpha = [\alpha_0, \dots, \alpha_k] \in \mathcal{F}^k$ :*

- (1)  $\alpha_k$  es máximo en  $\alpha$ .
- (2)  $\partial_{\alpha_k}(\alpha) \nearrow \alpha$ .

*Demostración.* Asumiendo (1), tanto  $\alpha$  como  $\partial_{\alpha_k}(\alpha)$  están disponibles al inicio del proceso  $\mathcal{P}^{k-1, k, \alpha_k}$ ; la primera cara en vista del Lema 2.1.13, y la segunda cara por la hipótesis de maximalidad. El emparejamiento  $W$  en (2) es por lo tanto construido por el proceso  $\mathcal{P}^{k-1, k, \alpha_k}$ . Por otro lado, si (1) falla, hay un vértice  $v$  de  $K$  que es máximo con respecto a las condiciones  $\alpha_k \prec v$  y  $\partial_{\alpha_k}(\alpha) \cup \{v\} \in \mathcal{F}^k$ . Como  $v$  es máximo en  $\partial_{\alpha_k}(\alpha) \cup \{v\} = [\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}, v]$ , el argumento en el párrafo anterior da  $[\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}] \nearrow [\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}, v]$ , descartando así el emparejamiento  $W$  en (2).  $\square$

<sup>3</sup>Esto es cierto, por ejemplo, en el caso del plano proyectivo y el toro en los Ejemplos 2.1.5, así como en nuestra aplicación a los espacios de pares ordenados de puntos en grafos completos, ver Subsección 2.2.1.

Bajo restricciones adicionales (explicadas en (2.18) abajo), la maximalidad de otros vértices también fuerza la colapsabilidad de una manera específica. Comenzamos con el caso del penúltimo vértice, donde las restricciones adicionales son simples, pero se pierde la condición de necesidad y satisfacción en el Corolario 2.1.14 (ver la Nota 2.1.16 abajo).

**Proposición 2.1.15.** *Sea  $\alpha = [\alpha_0, \dots, \alpha_k] \in \mathcal{F}^k$ . Si  $\alpha_{k-1}$  es máximo en  $\alpha$  pero  $\alpha_k$  no lo es, entonces  $\partial_{\alpha_{k-1}}(\alpha) \nearrow \alpha$ .*

*Demostración.* Por el Lema 2.1.13,  $\alpha$  está disponible al inicio del proceso  $\mathcal{P}^{k-1}$  y, de hecho, al inicio del proceso  $\mathcal{P}^{k-1, k-1, \alpha_{k-1}}$ , en vista del Corolario 2.1.14 y la hipótesis sobre  $\alpha_k$ . El emparejamiento afirmado se sigue ya que  $\partial_{\alpha_{k-1}}(\alpha) = [\alpha_0, \dots, \widehat{\alpha_{k-1}}, \alpha_k]$  también está disponible al inicio del proceso  $\mathcal{P}^{k-1, k-1, \alpha_{k-1}}$ . De hecho, un posible emparejamiento  $\partial_{\alpha_{k-1}}(\alpha) \nearrow \partial_{\alpha_{k-1}}(\alpha) \cup \{v\}$  construido en una etapa anterior a  $\mathcal{P}^{k-1, k-1, \alpha_{k-1}}$  tendría  $\alpha_{k-1} \prec v$ , contradiciendo la maximalidad de  $\alpha_{k-1}$  en  $\alpha$ .  $\square$

**Nota 2.1.16.** Consideremos el campo gradiente en el plano proyectivo en los Ejemplos 2.1.5. Ni 5 ni 2 son máximos en  $[1, 2, 5]$  (debido a las caras  $[1, 2, 6]$  y  $[1, 3, 5]$ ), sin embargo, el emparejamiento  $[1, 5] \nearrow [1, 2, 5]$  se realiza.

Más generalmente,

**Proposición 2.1.17.** *Para una cara  $\alpha = [\alpha_0, \dots, \alpha_k] \in \mathcal{F}^k$  y un entero  $r \in \{0, 1, \dots, k\}$  con  $\alpha_r$  máximo en  $\alpha$ , el emparejamiento  $\partial_{\alpha_r}(\alpha) \nearrow \alpha$  se produce siempre que*

$$\text{para cualquier secuencia } r+1 \leq t_1 < \dots < t_p \leq k, \text{ la cara } [\alpha_{t_1}, \dots, \alpha_{t_p}] \text{ no sea máxima en } \alpha. \quad (2.18)$$

*Demostración.* La prueba se hará por inducción decreciente en  $r = k, k-1, \dots, 0$ . Los casos base  $r = k$  y  $r = k-1$  están cubiertos por el Corolario 2.1.14 y la Proposición 2.1.15, respectivamente. Para el paso inductivo, la maximalidad de  $\alpha_r$  en  $\alpha$  asegura tanto que  $\alpha$  esté disponible al inicio de  $\mathcal{P}^{k-1}$  (Lema 2.1.13), como que  $\partial_{\alpha_r}(\alpha)$  esté disponible al inicio de  $\mathcal{P}^{k-1, r, \alpha_r}$ . Por lo tanto, basta con notar que (2.18) implica que  $\alpha$  también esté disponible al inicio de  $\mathcal{P}^{k-1, r, \alpha_r}$ . Pero un posible emparejamiento  $[\alpha_0, \dots, \widehat{\alpha_{t_1}}, \dots, \alpha_k] \nearrow [\alpha_0, \dots, \alpha_k]$  previo en  $\mathcal{A}$  al emparejamiento previsto  $\partial_{\alpha_r}(\alpha) \nearrow \alpha$ , es decir, con  $t_1 \in \{r+1, \dots, k\}$  es inductivamente descartado por el (aún más anterior en  $\mathcal{A}$ ) emparejamiento

$$[\alpha_0, \dots, \widehat{\alpha_{t_1}}, \dots, \alpha_k] \nearrow \alpha(t_1) = [\alpha_0, \dots, \widehat{\alpha_{t_1}}, \{\alpha^{t_1}, \alpha_{t_1+1}, \dots, \alpha_k\}],$$

donde el uso de llaves indica que  $\alpha^{t_1}$  puede ocupar cualquier posición entre los vértices ordenados  $\alpha_{t_1+1}, \dots, \alpha_k$ .  $\square$

No todas las condiciones en (2.18) serían necesarias en casos concretos de la Proposición 2.1.17. Por ejemplo, este será (recursivamente) el caso si, en la prueba anterior, algún  $\alpha^{t_1}$  resulta ser mayor que algunos de los vértices  $\alpha_{t_1+1}, \dots, \alpha_k$ .

**Ejemplo 2.1.18.** El emparejamiento  $\partial_{\alpha_{k-2}}(\alpha) \nearrow \alpha = [\alpha_0, \dots, \alpha_k]$  se produce siempre que (i)  $\alpha_{k-2}$  sea máximo en  $\alpha$ , (ii)  $\alpha_{k-1}$  no sea máximo en  $\alpha$ , y (iii)  $\alpha_k$  no sea máximo en  $\alpha$  ni en  $\alpha(k-1)$ . Nótese que (ii) se utiliza para enunciar (iii).

El Teorema 2.1.20 a continuación, una extensión de gran alcance de la Proposición 2.1.17, proporciona condiciones suficientes que nos permiten identificar emparejamientos “excepcionales” como el señalado en el Nota 2.1.16.

**Definición 2.1.19.** Se dice que un vértice  $\alpha_r$  de una cara  $\alpha = [\alpha_0, \dots, \alpha_k] \in \mathcal{F}^k$  es colapsante en  $\alpha$  siempre que (i) la cara  $\alpha$  no sea redundante, (ii) se cumpla la condición (2.18) y (iii) para cada  $v$  con  $\alpha_r \prec v$  y  $\partial_{\alpha_r}(\alpha) \cup \{v\} \in \mathcal{F}^k$ , exista un vértice  $\alpha_j$  de  $\alpha$  con  $v \prec \alpha_j$  tal que  $\alpha_j$  sea colapsante en  $\partial_{\alpha_r}(\alpha) \cup \{v\}$ .

Las primeras y terceras condiciones en la Definición 2.1.19 se cumplen cuando  $\alpha_r$  es máximo en  $\alpha$ . Nótese la naturaleza recursiva de la Definición 2.1.19.

**Teorema 2.1.20.** Si  $\alpha_r$  es colapsante en  $\alpha$ , entonces  $\partial_{\alpha_r}(\alpha) \nearrow \alpha$ .

*Demostración.* La prueba es paralela a la de la Proposición 2.1.17. Esta vez la inducción se fundamenta en el Corolario 2.1.14 y la observación de que, cuando  $r = k$ , la condición (iii) en la Definición 2.1.19 implica de hecho que  $\alpha_k$  es máximo en  $\alpha$ . El resto del argumento en la prueba de la Proposición 2.1.17 se aplica con dos ajustes menores. Primero, el Lema 2.1.13 no es necesario —ni puede aplicarse— en vista de la condición (i). Segundo, el hecho de que  $\partial_{\alpha_r}(\alpha)$  esté disponible al inicio de  $\mathcal{P}^{k-1, r, \alpha_r}$  proviene directamente de (iii) y la inducción.  $\square$

## 2.2 Aplicación a espacios de configuraciones

Usamos el campo gradiente de la sección anterior para describir el anillo de cohomología del espacio de configuraciones de pares ordenados de puntos en un grafo completo.

### 2.2.1 Campo gradiente en el modelo simplicial homotópico de Munkres

Sea  $K_m$  el esqueleto 1-dimensional del simplejo completo de dimensión  $(m - 1)$  sobre los vértices  $V_m = \{1, 2, \dots, m\}$ . Así,  $|K_m|$  es el grafo completo sobre los  $m$  vértices. El tipo de homotopía de  $\text{Conf}(|K_m|, 2)$  es bien conocida para  $m \leq 3$ , por lo que asumimos  $m \geq 4$  de ahora en adelante. Pensamos en  $K_m$  como un complejo simplicial ordenado con el orden natural en  $V_m$ , y estudiamos  $\text{Conf}(|K_m|, 2)$  a través de su modelo simplicial de homotopía  $C_m$  en (1.2). La condición  $m \geq 4$  implica que  $C_m$  es un complejo puro 2-dimensional, es decir, todas sus caras maximales tienen dimensión 2. Además, las caras 2-dimensionales de  $C_m$  tienen una de las formas

$$\begin{bmatrix} a & a & d \\ b & c & c \end{bmatrix} \quad \circ \quad \begin{bmatrix} a' & c' & c' \\ b' & b' & d' \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

donde

$$d > a \notin \{b, c\}, \quad b < c \neq d, \quad d' > b' \notin \{a', c'\} \quad \text{y} \quad a' < c' \neq d'. \quad (2.20)$$

Nótese que la notación tipo matriz en (2.19) es compatible con la notación  $\alpha = [\alpha_0, \dots, \alpha_k]$  en secciones anteriores; cada  $\alpha_i$  ahora representa un vértice tipo columna  $\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}$  (con  $a \neq b$ ). En lo que sigue, las condiciones en (2.20) sobre los enteros  $a, b, c, d, a', b', c', d' \in V_m$  generalmente serán implícitas y omitidas al escribir un 2-simplejo o una de sus caras. Por ejemplo, las relaciones forzadas  $a \neq b < d \neq a$  se omiten en el inciso (a) de:

**Proposición 2.2.1.** Sea  $W_m$  el campo gradiente en  $C_m$  construido en la Sección 2.1 con respecto al orden lexicográfico en los vértices  $\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} = (a, b) \in V_m \times V_m \setminus \Delta_{V_m}$  de  $C_m$ . La lista completa de emparejamientos  $W_m$  es:

(a)  $\begin{bmatrix} a & a \\ b & d \end{bmatrix} \nearrow \begin{bmatrix} a & a & m \\ b & d & d \end{bmatrix}$ , para  $a < m > d$ .

(b)  $\begin{bmatrix} a & a \\ b & m \end{bmatrix} \nearrow \begin{bmatrix} a & a & m-1 \\ b & m & m \end{bmatrix}$ , para  $a < m - 1$ .

- (c)  $\begin{bmatrix} a & c \\ b & b \end{bmatrix} \nearrow \begin{bmatrix} a & c & c \\ b & b & m \end{bmatrix}$ , para  $b < m > c$ .
- (d)  $\begin{bmatrix} a & m \\ b & b \end{bmatrix} \nearrow \begin{bmatrix} a & m & m \\ b & b & m-1 \end{bmatrix}$ , para  $b < m - 1$ .
- (e)  $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \nearrow \begin{bmatrix} a & c & c \\ b & b & d \end{bmatrix}$ , para  $a < c$ ,  $b < d$ ,  $b \neq c$  y ya sea  $c < m > d$  o  $c = m > d + 1$ .
- (f)  $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \nearrow \begin{bmatrix} a & a & c \\ b & d & d \end{bmatrix}$ , para  $a < c$ ,  $b < d$ ,  $a \neq d$  y ya sea  $b = c < m > d$  o  $c + 1 < m = d$ .
- (g)  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \nearrow \begin{bmatrix} a & m \\ b & m-1 \end{bmatrix}$ , para ya sea  $b < m - 1$  o  $a < m - 1 = b$ .
- (h)  $\begin{bmatrix} a \\ m \end{bmatrix} \nearrow \begin{bmatrix} a & m-1 \\ m & m \end{bmatrix}$ , para  $a < m - 1$ .
- (i)  $\begin{bmatrix} m-1 \\ m \end{bmatrix} \nearrow \begin{bmatrix} m-1 & m-1 \\ m-2 & m \end{bmatrix}$ .

En particular, las caras críticas son:

- (j) En dimensión 0, el vértice  $\begin{bmatrix} m \\ m-1 \end{bmatrix}$ .
- (k) En dimensión 1, los simplejos:
- (k.1)  $\begin{bmatrix} a & m-1 \\ b & m \end{bmatrix}$ , con ya sea  $a = m - 1 > b + 1$  o  $a < m - 1 \geq b$ .
- (k.2)  $\begin{bmatrix} m & m \\ b & d \end{bmatrix}$ , con  $d < m - 1$ .
- (k.3)  $\begin{bmatrix} a & c \\ m & m \end{bmatrix}$ , con  $c < m - 1$ .
- (l) En dimensión 2, los simplejos  $\begin{bmatrix} a & a & c \\ b & d & d \end{bmatrix}$  con  $b \neq c < m > d$ .

Nótese que la condición  $a \neq d$  en el inciso (f) anterior se ve obligada a darse en la forma más fuerte  $a < d$ .

*Demostración.* Todos los emparejamientos, excepto el de (f) cuando  $b \neq c$  (de modo que  $c + 1 < m = d$ ), están dados por el Corolario 2.1.14 y la Proposición 2.1.15. El caso excepcional requiere el Teorema 2.1.20 más fuerte. Por otro lado, la inspección directa muestra que las caras listadas como críticas son precisamente aquellas que no forman parte de la lista de emparejamientos  $W_m$ . La prueba se completa entonces al observar que la criticidad de cualquier cara  $d$ -dimensional  $\alpha$  en (j)–(l) es forzada por el hecho de que todas las posibles  $(d - 1)$ -caras y todas las posibles  $(d + 1)$ -co-caras de  $\alpha$  están involucradas en uno de los emparejamientos (a)–(i). Por ejemplo, una cara  $\begin{bmatrix} a & a & c \\ b & d & d \end{bmatrix}$  en (l) no es colapsable ya que los tres emparejamientos potenciales

$$\begin{bmatrix} a & a \\ b & d \end{bmatrix} \nearrow \begin{bmatrix} a & a & c \\ b & d & d \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \nearrow \begin{bmatrix} a & a & c \\ b & d & d \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} a & c \\ d & d \end{bmatrix} \nearrow \begin{bmatrix} a & a & c \\ b & d & d \end{bmatrix}$$

son descartados por (a), (e) y (c), respectivamente.  $\square$

La penúltima oración en la prueba anterior refleja la maximalidad de  $W_m$  en el Teorema 2.1.4. Por otro lado, un recuento directo muestra que el número  $c_d$  de caras críticas en dimensión  $d \in \{0, 1, 2\}$  está dado por

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 2(m - 2)^2 - 1 \quad \text{y} \quad c_2 = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{4}. \quad (2.21)$$

En particular, la característica de Euler de  $\text{Conf}(|K_m|, 2)$  está dada por

$$\frac{m(m^3 - 10m^2 + 27m - 18)}{4},$$

lo que produce una expresión explícita para la conclusión de [6, Corollary 1.2] en el caso de grafos completos. Nótese en particular que el campo gradiente  $W_4$  es óptimo:

**Corolario 2.2.2.** *Existe una equivalencia homotópica  $\text{Conf}(|K_4|, 2) \simeq \mathbb{V}_7 S^1$ .*

El Corolario 2.2.2 debe compararse con el hecho de que el espacio de configuraciones de pares *no ordenados* de puntos en  $|K_4|$  tiene el tipo de homotopía de  $\mathbb{V}_4 S^1$  (cf. [16, Example 4.5].)

## 2.2.2 Cohomología del complejo de Morse

El mapeo de cofrontera de Morse  $\delta: \mu^i(C_m) \rightarrow \mu^{i+1}(C_m)$  está forzado a anularse para  $i = 0$  ya que  $c_0 = 1$ . Es más interesante describir la situación para  $i = 1$ :

**Proposición 2.2.3.** *La cofrontera  $\delta: \mu^1(C_m) \rightarrow \mu^2(C_m)$  se anula en los duales de las caras críticas de los tipos (k.2) y (k.3) en la Proposición 2.2.1. Para los duales de las caras críticas del tipo (k.1) tenemos*

$$\delta \left( \begin{bmatrix} a & m-1 \\ b & m \end{bmatrix} \right) = \sum \begin{bmatrix} a & a & x \\ y & b & b \end{bmatrix} - \sum \begin{bmatrix} a & a & x \\ b & y & y \end{bmatrix} + \sum \begin{bmatrix} x & x & a \\ b & y & y \end{bmatrix} - \sum \begin{bmatrix} x & x & a \\ y & b & b \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

donde todos los cuatro sumandos en el lado derecho de (2.22) recorren todos los enteros  $x$  e  $y$  que producen caras críticas 2-dimensionales. Explícitamente,  $a < x < m$  en la primera y segunda sumas,  $x < a$  en la tercera y cuarta sumas,  $b < y < m$  en la segunda y tercera sumas,  $y < b$  en la primera y cuarta sumas, y  $b \neq x \neq y \neq a$  en las cuatro sumas.

Cabe señalar que las dos primeras sumas en (2.22) son vacías cuando  $a = m - 1$  (por lo tanto  $b < m - 2$ ).

*Demostración.* Los árboles completos de caminos mixtos  $\beta \searrow \nearrow \cdots \nearrow \searrow \alpha$  desde caras críticas bidimensionales  $\beta$  hasta caras unidimensionales críticas o colapsables  $\alpha$  se detallan en las Figuras 2.3–2.11. En las figuras, indicamos una cara positiva (respectivamente negativa) con una flecha en negrita (respectivamente regular). Los tipos de emparejamientos involucrados se indican utilizando los nombres de los incisos  $(a)$ – $(i)$  en la Proposición 2.2.1. Al final de cada rama, indicamos el tipo de emparejamiento que muestra que  $\alpha$  es colapsable o, si  $\alpha$  es crítica, la multiplicidad con la que se debe tener en cuenta en (1.7) y (1.8).

La primera afirmación de la proposición se sigue observando que, en las Figuras 2.3–2.11, hay dos caminos mixtos que parten de una cara bidimensional crítica fija y llegan a una cara unidimensional crítica fija de la forma (k.2) o (k.3). Estos dos caminos mixtos tienen multiplicidades opuestas, por lo que se cancelan entre sí en (1.8). Por ejemplo, cada camino mixto desde  $\begin{bmatrix} a & a & c \\ b & d & d \end{bmatrix}$  a  $\begin{bmatrix} a & c \\ m & m \end{bmatrix}$  en la Figura 2.3 se cancela con el camino correspondiente en la Figura 2.4.

Para llegar a (2.22), comencemos notando en las Figuras 2.3–2.11 que solo hay cuatro tipos de caminos mixtos que parten de una cara crítica bidimensional  $\begin{bmatrix} a & a & c \\ b & d & d \end{bmatrix}$  y llegan a algunas caras unidimensionales críticas del tipo (k.1). A saber,

- hay un camino mixto  $\begin{bmatrix} a & a & c \\ b & d & d \end{bmatrix} \searrow \nearrow \cdots \nearrow \searrow \begin{bmatrix} a & m-1 \\ d & m \end{bmatrix}$  con multiplicidad  $+1$  (Figuras 2.3, 2.6 y 2.9);
- hay un camino mixto  $\begin{bmatrix} a & a & c \\ b & d & d \end{bmatrix} \searrow \nearrow \cdots \nearrow \searrow \begin{bmatrix} a & m-1 \\ b & m \end{bmatrix}$  con multiplicidad  $-1$  (Figuras 2.4, 2.7 y 2.10);

- hay un camino mixto  $\begin{bmatrix} a & a & c \\ b & d & d \end{bmatrix} \searrow \nearrow \cdots \nearrow \searrow \begin{bmatrix} c & m-1 \\ d & m \end{bmatrix}$  con multiplicidad  $+1$  (Figuras 2.4, 2.7 y 2.10);
- hay un camino mixto  $\begin{bmatrix} a & a & c \\ b & d & d \end{bmatrix} \searrow \nearrow \cdots \nearrow \searrow \begin{bmatrix} c & m-1 \\ d & m \end{bmatrix}$  con multiplicidad  $-1$  siempre que  $(c, d) \neq (m-1, m-2)$  (Figuras 2.3, 2.6 y 2.9).

Por lo tanto, el valor del mapeo de frontera  $\partial: \mu_2(C_m) \rightarrow \mu_1(C_m)$  en una cara crítica  $\begin{bmatrix} a & a & c \\ b & d & d \end{bmatrix}$  ( $b \neq c < m > d$ ) con  $(c, d) \neq (m-1, m-2)$  es

$$\partial \left( \begin{bmatrix} a & a & c \\ b & d & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & m-1 \\ d & m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & m-1 \\ b & m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & m-1 \\ b & m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c & m-1 \\ d & m \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

mientras que, para  $(c, d) = (m-1, m-2)$ ,

$$\partial \left( \begin{bmatrix} a & a & m-1 \\ b & m-2 & m-2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & m-1 \\ m-2 & m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & m-1 \\ b & m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m-1 & m-1 \\ b & m \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

(Se debe tener en cuenta que la expresión (2.23) es válida cuando  $(c, d) = (m-1, m-2)$ , siempre que se omita el cuarto término no crítico

$$\begin{bmatrix} m-1 & m-1 \\ m-2 & m \end{bmatrix}.)$$

Por último, verificar que la expresión afirmada (2.22) se sigue de dualizar (2.23) y (2.24) es un ejercicio sencillo de algebra lineal que se omite.  $\square$

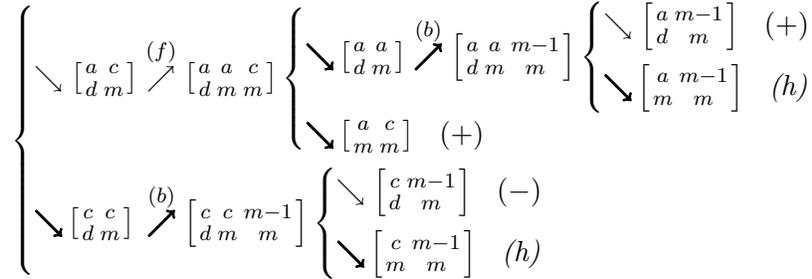


Figura 2.3: Caminos gradientes que evolucionan desde  $\begin{bmatrix} a & a & c \\ b & d & d \end{bmatrix} \searrow \begin{bmatrix} a & c \\ d & d \end{bmatrix} \nearrow \begin{bmatrix} a & c & c \\ d & d & m \end{bmatrix}$  para  $b \neq c \leq m-2 \geq d$

### 2.2.3 Bases de cohomología

Por el Corolario 2.2.2, podemos asumir que  $m \geq 5$ . Comenzamos identificando (en el Corolario 2.2.7 a continuación) una base explícita para  $H^1(\text{Conf}(|K_m|, 2))$ , es decir, para el núcleo de la aplicación de cofrontera de Morse  $\delta: \mu^1(C_m) \rightarrow \mu^2(C_m)$ . Según la Proposición 2.2.3, es suficiente centrarse en el submódulo  $\mu_0^1(C_m)$  de  $\mu^1(C_m)$  generado por los duales de los elementos base del tipo (k.1). Así,  $\mu_0^1(C_m)$  es libre en los elementos  $\left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\}$  que satisfacen  $a < m > b \neq a$  y  $(a, b) \neq (m-1, m-2)$ , donde  $\left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\}$  representa el dual de  $\begin{bmatrix} a & m-1 \\ b & m \end{bmatrix}$ .

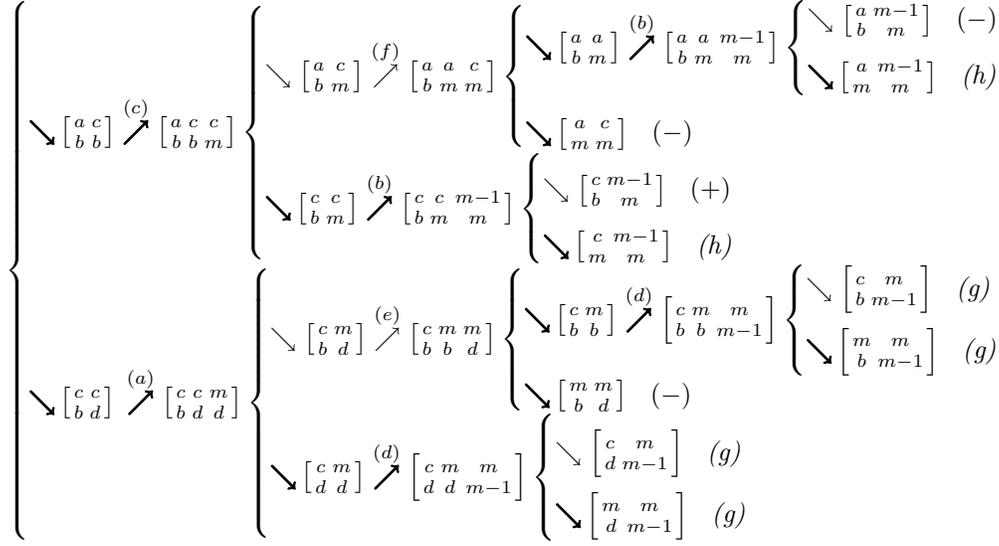


Figura 2.4: Caminos gradientes que evolucionan desde  $\begin{bmatrix} a & a & c \\ b & d & d \end{bmatrix} \searrow \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \xrightarrow{(e)} \begin{bmatrix} a & c & c \\ b & b & d \end{bmatrix}$  para  $b \neq c \leq m-2 \geq d$

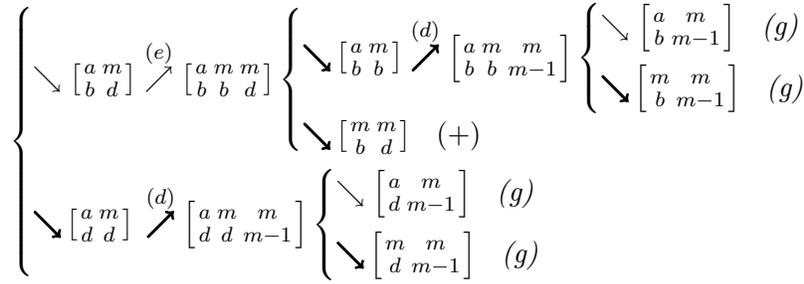


Figura 2.5: Caminos gradientes que evolucionan desde  $\begin{bmatrix} a & a & c \\ b & d & d \end{bmatrix} \searrow \begin{bmatrix} a & a \\ b & d \end{bmatrix} \xrightarrow{(a)} \begin{bmatrix} a & a & m \\ b & d & d \end{bmatrix}$  para  $b \neq c \leq m-2 \geq d$

$$\left\{ \begin{array}{l} \searrow \begin{bmatrix} a & m-1 \\ d & m \end{bmatrix} \quad (+) \\ \searrow \begin{bmatrix} m-1 & m-1 \\ d & m \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} (-), \text{ si } d < m-2 \\ (i), \text{ si } d = m-2 \end{array} \end{array} \right.$$

Figura 2.6: Caminos gradientes que evolucionan desde  $\begin{bmatrix} a & a & m-1 \\ b & d & d \end{bmatrix} \searrow \begin{bmatrix} a & m-1 \\ d & d \end{bmatrix} \xrightarrow{(c)} \begin{bmatrix} a & m-1 & m-1 \\ d & d & m \end{bmatrix}$  para  $b \neq m-1 > d$

**Definición 2.2.4.** *Considérense los elementos  $\langle \begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \rangle \in \mu_0^1(C_m)$  definidos para  $a < m > b \neq a$  y  $(a, b) \neq (m-1, m-2)$  según los siguientes casos (ver Figura 2.12):*

(R<sub>1</sub>) Para  $1 \leq a \leq 2$ , o para  $1 \leq a \leq m-3$  con  $b = m-1$ , o para  $(a, b) = (3, 1)$ ,

$$\langle \begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \rangle := \sum_{a \neq j \leq b} \{ \begin{smallmatrix} a \\ j \end{smallmatrix} \}.$$

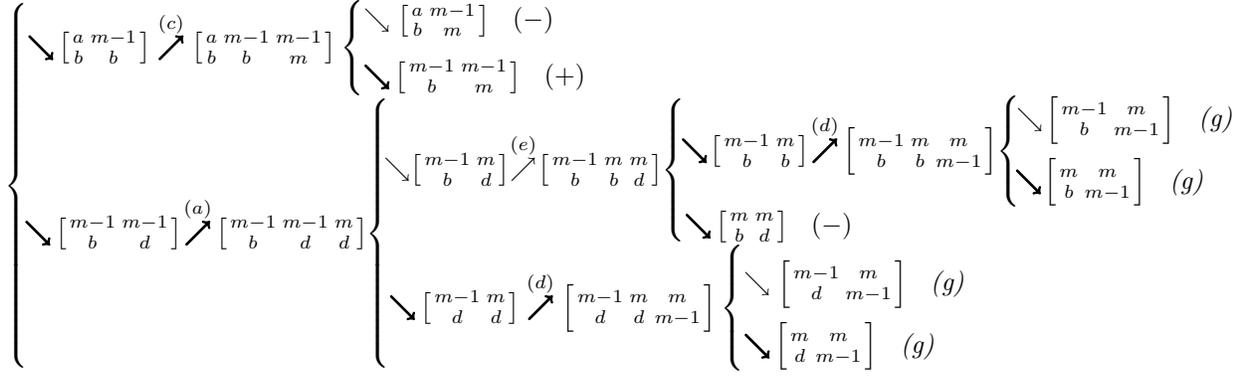


Figura 2.7: Caminos gradientes que evolucionan desde  $[a \ a \ m-1; b \ d \ d] \searrow [a \ m-1; b \ d] \nearrow [a \ m-1 \ m-1; b \ b \ d]$  para  $b \neq m-1 > d$

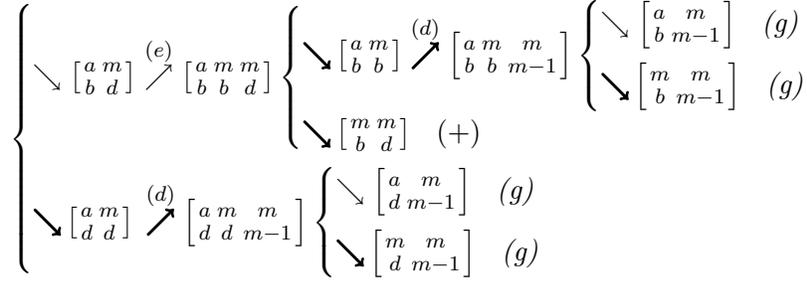


Figura 2.8: Caminos gradientes que evolucionan desde  $[a \ a \ m-1; b \ d \ d] \searrow [a \ a; b \ d] \nearrow [a \ a \ m; b \ d \ d]$  para  $b \neq m-1 > d$

(R<sub>2</sub>) Para  $4 \leq a \leq m-1$  con  $b=1$ , o para  $a=m-1$  con  $1 \leq b \leq m-4$ ,

$$\langle a \rangle_b := \sum_{b \neq i \leq a} \{i\}_b.$$

(R<sub>3</sub>)  $\langle 3 \rangle_2 := \{3\}_2 + \{3\}_1 + \{2\}_3 + \{2\}_1 + \{1\}_3 + \{1\}_2.$

(R<sub>4</sub>) Para  $4 \leq a \leq m-2$ ,

$$\langle a \rangle_2 := \sum_{2 \neq i \leq a} \{2\}_i + \sum_{i \leq a-1} \{i\}_a.$$

(R<sub>5</sub>) Para  $a, b \in \{3, 4, \dots, m-2\}$ ,

$$\langle a \rangle_b := \sum_{j \neq i \leq a \neq j \leq b} \{j\}_i + \sum_{i \leq a-1} \{i\}_a.$$

(R<sub>6</sub>)  $\langle m-1 \rangle_{m-3} := \{m-1\}_{m-3} - \sum_{i,j} \{i\}_j$ , donde la suma corre sobre  $i$  y  $j$  con  $m-3 \neq j \neq i \leq m-2 \geq j$ .

(R<sub>7</sub>)  $\langle m-2 \rangle_{m-1} := \{m-2\}_{m-1} - \sum_{i,j} \{i\}_j$ , donde la suma corre sobre  $i$  y  $j$  con  $m-2 \geq j \neq i \leq m-3$ .

Una inspección directa de las fórmulas definitorias produce:

$$\left\{ \begin{array}{l} \searrow \left[ \begin{array}{ccc} a & c & \\ m-1 & m & \end{array} \right] \xrightarrow{(f)} \left[ \begin{array}{ccc} a & a & c \\ m-1 & m & m \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \searrow \left[ \begin{array}{ccc} a & a & \\ m-1 & m & \end{array} \right] \xrightarrow{(b)} \left[ \begin{array}{ccc} a & a & m-1 \\ m-1 & m & m \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \searrow \left[ \begin{array}{cc} a & m-1 \\ m-1 & m \end{array} \right] \quad (+) \\ \searrow \left[ \begin{array}{cc} a & m-1 \\ m & m \end{array} \right] \quad (h) \end{array} \right. \\ \searrow \left[ \begin{array}{cc} a & c \\ m & m \end{array} \right] \quad (+) \end{array} \right. \\ \searrow \left[ \begin{array}{ccc} c & c & \\ m-1 & m & \end{array} \right] \xrightarrow{(b)} \left[ \begin{array}{ccc} c & c & m-1 \\ m-1 & m & m \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \searrow \left[ \begin{array}{cc} c & m-1 \\ m-1 & m \end{array} \right] \quad (-) \\ \searrow \left[ \begin{array}{cc} c & m-1 \\ m & m \end{array} \right] \quad (h) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Figura 2.9: Caminos gradientes que evolucionan desde  $\left[ \begin{array}{ccc} a & a & c \\ b & m-1 & m-1 \end{array} \right] \searrow \left[ \begin{array}{cc} a & c \\ m-1 & m-1 \end{array} \right] \xrightarrow{(c)} \left[ \begin{array}{ccc} a & c & c \\ m-1 & m-1 & m \end{array} \right]$  para  $b \neq c < m - 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \searrow \left[ \begin{array}{cc} a & c \\ b & b \end{array} \right] \xrightarrow{(c)} \left[ \begin{array}{ccc} a & c & c \\ b & b & m \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \searrow \left[ \begin{array}{cc} a & c \\ b & m \end{array} \right] \xrightarrow{(f)} \left[ \begin{array}{ccc} a & a & c \\ b & m & m \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \searrow \left[ \begin{array}{ccc} a & a & \\ b & m & \end{array} \right] \xrightarrow{(b)} \left[ \begin{array}{ccc} a & a & m-1 \\ b & m & m \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \searrow \left[ \begin{array}{cc} a & m-1 \\ b & m \end{array} \right] \quad (-) \\ \searrow \left[ \begin{array}{cc} a & m-1 \\ m & m \end{array} \right] \quad (h) \end{array} \right. \\ \searrow \left[ \begin{array}{cc} a & c \\ m & m \end{array} \right] \quad (-) \end{array} \right. \\ \searrow \left[ \begin{array}{ccc} c & c & \\ b & m & \end{array} \right] \xrightarrow{(b)} \left[ \begin{array}{ccc} c & c & m-1 \\ b & m & m \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \searrow \left[ \begin{array}{cc} c & m-1 \\ b & m \end{array} \right] \quad (+) \\ \searrow \left[ \begin{array}{cc} c & m-1 \\ m & m \end{array} \right] \quad (h) \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \searrow \left[ \begin{array}{ccc} c & c & \\ b & m-1 & \end{array} \right] \xrightarrow{(a)} \left[ \begin{array}{ccc} c & c & m \\ b & m-1 & m-1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \searrow \left[ \begin{array}{cc} c & m \\ b & m-1 \end{array} \right] \quad (g) \\ \searrow \left[ \begin{array}{cc} c & m \\ m-1 & m-1 \end{array} \right] \quad (g) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Figura 2.10: Caminos gradientes que evolucionan desde  $\left[ \begin{array}{ccc} a & a & c \\ b & m-1 & m-1 \end{array} \right] \searrow \left[ \begin{array}{cc} a & c \\ b & m-1 \end{array} \right] \xrightarrow{(e)} \left[ \begin{array}{ccc} a & c & c \\ b & b & m-1 \end{array} \right]$  para  $b \neq c < m - 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \searrow \left[ \begin{array}{cc} a & m \\ b & m-1 \end{array} \right] \quad (g) \\ \searrow \left[ \begin{array}{cc} a & m \\ m-1 & m-1 \end{array} \right] \quad (g) \end{array} \right.$$

Figura 2.11: Caminos gradientes que evolucionan desde  $\left[ \begin{array}{ccc} a & a & c \\ b & m-1 & m-1 \end{array} \right] \searrow \left[ \begin{array}{cc} a & a \\ b & m-1 \end{array} \right] \xrightarrow{(a)} \left[ \begin{array}{ccc} a & a & m \\ b & m-1 & m-1 \end{array} \right]$  para  $b \neq c < m - 1$

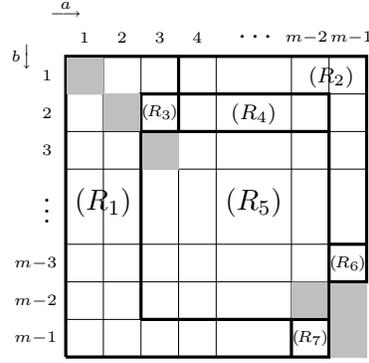


Figura 2.12: Regiones definitorias para los elementos base  $\langle \begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \rangle$

**Lema 2.2.5.** *Las siguientes relaciones se cumplen bajo las condiciones indicadas:*

$$(i) \langle \begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \rangle - \langle \begin{smallmatrix} a \\ b-1 \end{smallmatrix} \rangle = \sum_{b \neq i \leq a} \{ \begin{smallmatrix} i \\ b \end{smallmatrix} \}, \text{ siempre que } 3 \leq a \leq m-2 \text{ y } 4 \leq b \leq m-2 \text{ con } a \neq b \neq a+1.$$

$$(ii) \langle \begin{smallmatrix} a \\ 3 \end{smallmatrix} \rangle - \langle \begin{smallmatrix} a \\ 2 \end{smallmatrix} \rangle - \langle \begin{smallmatrix} a \\ 1 \end{smallmatrix} \rangle = \sum_{3 \neq i \leq a} \{ \begin{smallmatrix} i \\ 3 \end{smallmatrix} \}, \text{ siempre que } 4 \leq a \leq m-2.$$

$$(iii) \langle \begin{smallmatrix} b-1 \\ b \end{smallmatrix} \rangle - \langle \begin{smallmatrix} b-1 \\ b-2 \end{smallmatrix} \rangle = \sum_{i < b} \{ \begin{smallmatrix} i \\ b \end{smallmatrix} \}, \text{ siempre que } 5 \leq b \leq m-2.$$

$$(iv) \langle \begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix} \rangle - \langle \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \rangle = \sum_{i \leq 3} \{ \begin{smallmatrix} i \\ 4 \end{smallmatrix} \}, \text{ siempre que } m \geq 6.$$

**Proposición 2.2.6.** *Los elementos  $\langle \begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \rangle$  para  $a < m > b \neq a$  y  $(a, b) \neq (m-1, m-2)$  forman una base de  $\mu_0^1(C_m)$ .*

*Demostración.* En vista de la correspondencia uno-a-uno  $\{ \begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \} \leftrightarrow \langle \begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \rangle$ , es suficiente comprobar que

$$\text{cada } \{ \begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \} \text{ es una combinación } \mathbb{Z}\text{-lineal de los elementos } \langle \begin{smallmatrix} a' \\ b' \end{smallmatrix} \rangle. \quad (2.25)$$

A su vez, el hecho en (2.25) se sigue en la mayoría de los casos mediante un simple argumento recursivo basado en la observación de que, en todos los casos,

$$\{ \begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \} = \langle \begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \rangle + \sum_{(a', b') \neq (a, b)} (\pm 1) \cdot \{ \begin{smallmatrix} a' \\ b' \end{smallmatrix} \}. \quad (2.26)$$

Es decir, el argumento recursivo se aplica para  $(R_1)$  cuando  $a \leq 2$  o  $b = 1$ , para  $(R_2)$  cuando  $b = 1$ , y para  $(R_3)$ . El argumento recursivo también se aplica en los casos  $(R_6)$  y  $(R_7)$ , así como en los casos restantes de  $(R_1)$  y  $(R_2)$ , siempre que

$$(2.25) \text{ es válido cuando } a \text{ y } b \text{ pertenecen a los casos } (R_4) \text{ y } (R_5). \quad (2.27)$$

Dado que los casos  $(R_4)$  y  $(R_5)$  son vacíos para  $m = 5$ , solo necesitamos verificar (2.27) asumiendo  $m \geq 6$ .

Cálculo directo da  $\{ \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix} \} = \langle \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix} \rangle - \langle \begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix} \rangle + \langle \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \rangle + \langle \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \rangle + \langle \begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix} \rangle - \langle \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \rangle$ , mientras que los incisos (iii) y (iv) del Lema 2.2.5 nos dan

$$\{ \begin{smallmatrix} a \\ 2 \end{smallmatrix} \} = \left( \langle \begin{smallmatrix} a \\ 2 \end{smallmatrix} \rangle - \langle \begin{smallmatrix} a-1 \\ 2 \end{smallmatrix} \rangle \right) + \left( \langle \begin{smallmatrix} a-2 \\ a-1 \end{smallmatrix} \rangle - \langle \begin{smallmatrix} a-2 \\ a-3 \end{smallmatrix} \rangle \right) - \left( \langle \begin{smallmatrix} a-1 \\ a \end{smallmatrix} \rangle - \langle \begin{smallmatrix} a-1 \\ a-2 \end{smallmatrix} \rangle \right)$$

para  $5 \leq a \leq m-2$ , lo que establece (2.27) en el caso de  $(R_4)$ . La validez de (2.27) en el caso  $a = 3$  de  $(R_5)$  se establece de manera similar: Primero, obsérvese que la idea del argumento recursivo basado en (2.26) funciona para dar (2.27) para  $(a, b) = (3, 4)$ ; luego, úsese el inciso (i) en el Lema 2.2.5 para obtener

$$\langle 3 \rangle_b = \left( \langle 3 \rangle_b - \langle 3 \rangle_{b-1} \right) - \langle 2 \rangle_b + \langle 2 \rangle_{b-1} - \langle 1 \rangle_b + \langle 1 \rangle_{b-1}$$

para  $5 \leq b \leq m-2$ . La validez de (2.27) en el caso  $b = 3$  de  $(R_5)$  se establece utilizando la idea en el argumento recursivo al principio de la prueba, excepto que (2.26) se reemplaza por la expresión

$$\langle 3 \rangle_a = \langle 3 \rangle_a - \langle 2 \rangle_a - \langle 1 \rangle_a - \sum_{3 \neq i < a} \langle 3 \rangle_i$$

proveniente del inciso (ii) en el Lema 2.2.5. Finalmente, la validez de (2.27) en el caso restante  $a, b \in \{4, \dots, m-2\}$  de  $(R_5)$  se establece mediante las fórmulas:

- $\langle a \rangle_b = \left( \langle a \rangle_b - \langle a \rangle_{b-1} \right) - \left( \langle a-1 \rangle_b - \langle a-1 \rangle_{b-1} \right)$ , cuando  $a+1 \neq b \neq a-1$ ;
- $\langle a \rangle_b = \left( \langle a \rangle_{a-1} - \langle a \rangle_{a-2} \right) - \left( \langle a-2 \rangle_{a-1} - \langle a-2 \rangle_{a-3} \right)$ , cuando  $b = a-1$  (así  $a \geq 5$ );
- $\langle a \rangle_b = \left( \langle a \rangle_{a+1} - \langle a \rangle_{a-1} \right) - \left( \langle a-1 \rangle_{a+1} - \langle a-1 \rangle_a \right)$ , cuando  $b = a+1$  (así  $a \leq m-3$ ),

que usan los incisos (i), (iii) y (iv) del Lema 2.2.5. □

Recordemos que la aplicación de cofrontera de Morse  $\delta: \mu^0(C_m) \rightarrow \mu^1(C_m)$  es trivial, por lo que la cohomología de dimensión 1 de  $\text{Conf}(|K_m|, 2)$  está dada por el núcleo de  $\delta: \mu^1(C_m) \rightarrow \mu^2(C_m)$ .

**Corolario 2.2.7.** *Una base para  $H^1(\text{Conf}(|K_m|, 2))$  está dada por:*

- (1) *Los duales de las caras críticas de dimensión 1 del tipo (k.2) y (k.3) en la Proposición 2.2.1 y*
- (2) *Los elementos (ya dualizados)  $\langle a \rangle_b$  que satisfacen ya sea  $a = m-1$ , o  $b = m-1$ , o  $(a, b) = (m-2, m-3)$ .*

*Demostración.* Recordemos que  $m \geq 5$ . Un conteo directo muestra que el número de elementos en (1) y (2) arriba es  $(m-1)(m-2)$ , que es también el primer número de Betti de  $\text{Conf}(|K_m|, 2)$  —cf. [13, Corollary 23]. Dado que la homología de  $\text{Conf}(|K_m|, 2)$  es libre de torsión ([13, Proposition 2]), la Proposición 2.2.6 implica que la prueba estará completa una vez se verifique que  $\delta: \mu^1(C_m) \rightarrow \mu^2(C_m)$  se anula en cada uno de los elementos en (1) y (2). De hecho, este hecho implica que  $\delta$  es inyectiva en el submódulo generado por los elementos base  $\langle a \rangle_b$  no incluidos en (2).

La anulación de  $\delta$  en los elementos en (1) proviene directamente de la Proposición 2.2.3, mientras que la anulación de  $\delta$  en los elementos en (2) se verifica mediante cálculo directo usando la expresión de  $\delta$  en la Proposición 2.2.3. Las manipulaciones aritméticas necesarias se ilustran a continuación en un caso representativo, a saber, el de  $\langle m-1 \rangle_{m-3}$ .

Usando la Proposición 2.2.3 y la fórmula definitoria  $(R_6)$  obtenemos:

$$\begin{aligned} \delta \langle m-1 \rangle_{m-3} = & \sum_{x,y} \begin{bmatrix} x & x & m-1 \\ m-3 & y & y \end{bmatrix} - \sum_{x,y} \begin{bmatrix} x & x & m-1 \\ y & m-3 & m-3 \end{bmatrix} - \\ & \sum_{m-3 \neq j \neq i \leq m-2 \geq j} \left( \sum_{x,y} \begin{bmatrix} i & i & x \\ y & j & j \end{bmatrix} - \sum_{x,y} \begin{bmatrix} i & i & x \\ j & y & y \end{bmatrix} + \sum_{x,y} \begin{bmatrix} x & x & i \\ j & y & y \end{bmatrix} - \sum_{x,y} \begin{bmatrix} x & x & i \\ y & j & j \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

Los sumandos con  $y = m - 1$  en la segunda suma interna cancelan los correspondientes en la tercera suma interna. (El hecho correspondiente para  $y < m - 1$ , tratado a continuación, es más sutil ya que  $i \leq m - 2$  en la tercera suma interna, mientras que  $x \leq m - 1$  en la segunda suma interna.) Además, notando que  $y = m - 2$  está forzado en la primera suma externa, obtenemos:

$$\delta\langle_{m-3}^{m-1}\rangle = \sum_x \left[ \begin{array}{ccc} x & x & m-1 \\ m-3 & m-2 & m-2 \end{array} \right] - \sum_{x,y} \left[ \begin{array}{ccc} x & x & m-1 \\ y & m-3 & m-3 \end{array} \right] - \sum_{m-3 \neq j \neq i \leq m-2 \geq j} \left( \sum_{x,y} \left[ \begin{array}{ccc} i & i & x \\ y & j & j \end{array} \right] - \sum_{\substack{x \\ y \leq m-2}} \left[ \begin{array}{ccc} i & i & x \\ j & y & y \end{array} \right] + \sum_{\substack{x \\ y \leq m-2}} \left[ \begin{array}{ccc} x & x & i \\ j & y & y \end{array} \right] - \sum_{x,y} \left[ \begin{array}{ccc} x & x & i \\ y & j & j \end{array} \right] \right).$$

En la última expresión, los sumandos con  $x \leq m - 2$  en la segunda suma interna cancelan la tercera suma interna, por lo que:

$$\delta\langle_{m-3}^{m-1}\rangle = \sum_x \left[ \begin{array}{ccc} x & x & m-1 \\ m-3 & m-2 & m-2 \end{array} \right] - \sum_{x,y} \left[ \begin{array}{ccc} x & x & m-1 \\ y & m-3 & m-3 \end{array} \right] - \sum_{m-3 \neq j \neq i \leq m-2 \geq j} \left( \sum_{x,y} \left[ \begin{array}{ccc} i & i & x \\ y & j & j \end{array} \right] - \sum_{y \leq m-2} \left[ \begin{array}{ccc} i & i & m-1 \\ j & y & y \end{array} \right] - \sum_{x,y} \left[ \begin{array}{ccc} x & x & i \\ y & j & j \end{array} \right] \right).$$

De igual manera, en la última expresión, los sumandos con  $x \leq m - 2$  en la primera suma interna cancelan la tercera suma interna, por lo que:

$$\delta\langle_{m-3}^{m-1}\rangle = \sum_x \left[ \begin{array}{ccc} x & x & m-1 \\ m-3 & m-2 & m-2 \end{array} \right] - \sum_{x,y} \left[ \begin{array}{ccc} x & x & m-1 \\ y & m-3 & m-3 \end{array} \right] - \sum_{m-3 \neq j \neq i \leq m-2 \geq j} \left( \sum_y \left[ \begin{array}{ccc} i & i & m-1 \\ y & j & j \end{array} \right] - \sum_{y \leq m-2} \left[ \begin{array}{ccc} i & i & m-1 \\ j & y & y \end{array} \right] \right).$$

Por último, combinamos la primera (segunda, respectivamente) suma externa y la segunda (primera, respectivamente) suma interna en la última expresión para obtener:

$$\delta\langle_{m-3}^{m-1}\rangle = \sum_{j \neq i \leq m-2 \geq y} \left[ \begin{array}{ccc} i & i & m-1 \\ j & y & y \end{array} \right] - \sum_{j \neq i \leq m-2 \geq j} \left[ \begin{array}{ccc} i & i & m-1 \\ y & j & j \end{array} \right] = 0,$$

como se afirmó.  $\square$

Como siguiente paso, identificamos (en el Corolario 2.2.11 a continuación) una base explícita para  $H^2(\text{Conf}(|K_m|, 2))$ , es decir, para el cociente de la aplicación de cofrontera de Morse  $\delta: \mu^1(C_m) \rightarrow \mu^2(C_m)$ . En lo que sigue, las condiciones  $1 \leq a < c < m$ ,  $1 \leq b < d < m$  y  $c \neq d \neq a \neq b \neq c < m > d$  para las caras críticas  $\begin{bmatrix} a & a & c \\ b & d & d \end{bmatrix}$  identificadas en el inciso (l) de la Proposición 2.2.1 serán implícitas (y generalmente omitidas).

**Definición 2.2.8.** Sea  $\mathcal{C}$  la colección de las caras críticas  $\begin{bmatrix} a & a & c \\ b & d & d \end{bmatrix}$  de uno de los siguientes cuatro tipos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & c \\ 2 & d & d \end{bmatrix}, \text{ con } c, d \in \{3, 4, \dots, m-1\}; \quad (2.28)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & d & d \end{bmatrix}, \text{ con } d \in \{4, 5, \dots, m-1\}; \quad (2.29)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & c \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \text{ con } c \in \{4, 5, \dots, m-1\}; \quad (2.30)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

y sea  $\mathcal{B}$  la colección de todas las demás caras críticas  $\begin{bmatrix} a & a & c \\ b & d & d \end{bmatrix}$ .



Una inspección directa muestra que

$$\text{cada } \begin{pmatrix} a & a & c \\ b & d & d \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} a & a & c \\ b & d & d \end{bmatrix} \text{ es una combinación lineal de elementos base en } \mathcal{C}. \quad (2.32)$$

Por lo tanto,  $\mathcal{B}' \cup \mathcal{C}$  es una nueva base de  $\mu_2(C_m)$ , donde  $\mathcal{B}'$  representa la colección de elementos  $\begin{pmatrix} a & a & c \\ b & d & d \end{pmatrix}$ . Además, verificaciones rutinarias utilizando (2.23) y (2.24) muestran que  $\mathcal{B}'$  está en el núcleo de  $\partial: \mu_2(C_m) \rightarrow \mu_1(C_m)$ . De hecho:

**Lema 2.2.10.**  $\mathcal{B}'$  es una base del núcleo de la aplicación de cofrontera de Morse  $\partial: \mu_2(C_m) \rightarrow \mu_1(C_m)$ .

*Demostración.* El argumento es paralelo al de la prueba del Corolario 2.2.7. Es decir, mediante un conteo directo, la cardinalidad de  $\mathcal{C}$  es  $|\mathcal{C}| = m^2 - 5m + 5$ . En vista de (2.21), esto lleva a:

$$|\mathcal{B}'| = |\mathcal{B}| = \frac{m(m-2)(m-3)(m-5)}{4} + 1,$$

que es el segundo número de Betti de  $\text{Conf}(|K_m|, 2)$  —cf. [13, Corollary 23]. En consecuencia,  $\partial: \mu_2(C_m) \rightarrow \mu_1(C_m)$  se ve forzada a ser inyectiva en el submódulo generado por  $\mathcal{C}$  y, en particular,  $\mathcal{B}'$  genera (y, por lo tanto, es una base de)  $\ker(\partial: \mu_2(C_m) \rightarrow \mu_1(C_m))$ .  $\square$

Las dos secuencias

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H_2(\text{Conf}(|K_m|, 2)) \xleftarrow{\iota} \mu_2(C_m) \xrightarrow{\partial} \mu_1(C_m) \\ 0 &\longleftarrow H^2(\text{Conf}(|K_m|, 2)) \xleftarrow{\iota^*} \mu^2(C_m) \xleftarrow{\delta} \mu^1(C_m) \end{aligned} \quad (2.33)$$

son exactas; la primera por definición, y la segunda, que es el dual de la primera, debido a que  $H_1(\text{Conf}(|K_m|, 2))$  es libre de torsión. Por lo tanto, la clase de cohomología representada por un elemento  $e \in \mu^2(C_m)$  está dada por la imagen de  $\iota^*$ . Tal interpretación de las clases de cohomología se utiliza en la prueba de:

**Corolario 2.2.11.** Una base de  $H^2(\text{Conf}(|K_m|, 2))$  está dada por las clases representadas por los duales de las caras críticas en  $\mathcal{B}$ . Además, la expresión (como combinación lineal de elementos base) de la clase de cohomología representada por el dual de una cara crítica en  $\mathcal{C}$  se obtiene a partir de las ecuaciones  $(E_i)$ ,  $1 \leq i \leq 6$ , que son congruencias módulo la imagen de  $\delta: \mu^1(C_m) \rightarrow \mu^2(C_m)$ .

$$(E_1) \quad \sum_x \begin{bmatrix} x & x & c \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} - \sum_x \begin{bmatrix} c & c & x \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \equiv \sum_{\substack{y \neq 3 \\ z \in \{1,3\}}} \left( \sum_x \begin{bmatrix} x & x & c \\ z & y & y \end{bmatrix} - \sum_x \begin{bmatrix} c & c & x \\ z & y & y \end{bmatrix} \right), \text{ para } c > 3.$$

$$(E_2) \quad \sum_x \begin{bmatrix} x & x & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} - \sum_x \begin{bmatrix} 3 & 3 & x \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \equiv \sum_{\substack{y \neq 4 \\ z \in \{1,4\}}} \left( \sum_x \begin{bmatrix} x & x & 3 \\ z & y & y \end{bmatrix} - \sum_x \begin{bmatrix} 3 & 3 & x \\ z & y & y \end{bmatrix} \right).$$

$$(E_3) \quad \sum_{x,y} \begin{bmatrix} x & x & c \\ y & d & d \end{bmatrix} - \sum_{x,y} \begin{bmatrix} c & c & x \\ y & d & d \end{bmatrix} \equiv \sum_{x,y} \begin{bmatrix} x & x & c \\ d & y & y \end{bmatrix} - \sum_{x,y} \begin{bmatrix} c & c & x \\ d & y & y \end{bmatrix}, \text{ para } 3 \leq c \neq d \leq 4 \text{ con } (c, d) \neq (3, 4).$$

$$(E_4) \quad \sum_{x,y} \begin{bmatrix} x & x & 2 \\ y & 4 & 4 \end{bmatrix} - \sum_{(x,y) \neq (3,1)} \begin{bmatrix} 2 & 2 & x \\ y & 4 & 4 \end{bmatrix} \equiv \left( \sum_{x,y} \begin{bmatrix} x & x & 2 \\ 4 & y & y \end{bmatrix} - \sum_{x,y} \begin{bmatrix} 2 & 2 & x \\ 4 & y & y \end{bmatrix} \right) - \left( \sum_{\substack{y > 4 \\ x}} \begin{bmatrix} x & x & 3 \\ 1 & y & y \end{bmatrix} - \sum_{x,y} \begin{bmatrix} 3 & 3 & x \\ 1 & y & y \end{bmatrix} \right).$$

$$(E_5) \quad \sum_{x,y} \begin{bmatrix} x & x & 2 \\ y & d & d \end{bmatrix} - \sum_{x,y} \begin{bmatrix} 2 & 2 & x \\ y & d & d \end{bmatrix} \equiv \sum_{x,y} \begin{bmatrix} x & x & 2 \\ d & y & y \end{bmatrix} - \sum_{x,y} \begin{bmatrix} 2 & 2 & x \\ d & y & y \end{bmatrix}, \text{ para } d > 4.$$

$$(E_6) \quad \sum_{x,y} \begin{bmatrix} x & x & c \\ 1 & y & y \end{bmatrix} \equiv \sum_{x,y} \begin{bmatrix} c & c & x \\ 1 & y & y \end{bmatrix}, \text{ para } c > 2.$$

Note que  $(E_5)$  dice que la congruencia en  $(E_3)$  también se cumple para  $c = 2$  siempre que  $d > 4$ . De igual manera, las congruencias  $(E_1)$  y  $(E_2)$  se pueden enunciar simultáneamente como:

$$\sum_x \begin{bmatrix} x & x & c \\ 2 & q & q \end{bmatrix} - \sum_x \begin{bmatrix} c & c & x \\ 2 & q & q \end{bmatrix} \equiv \sum_{\substack{y \neq q \\ z \in \{1, q\}}} \left( \sum_x \begin{bmatrix} x & x & c \\ z & y & y \end{bmatrix} - \sum_x \begin{bmatrix} c & c & x \\ z & y & y \end{bmatrix} \right),$$

con  $c > 3 = q$  o  $c = 3 = q - 1$ . Hemos elegido la estructura indicada en  $(E_1)$ – $(E_6)$  para fines de organización de pruebas (ver Figura 2.13).

$i$	1	2	3	4	5	6	6
$s_i$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & c \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & c \\ 2 & d & d \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & d & d \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 2 & c \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$
tipo	(2.28)	(2.28)	(2.28)	(2.29)	(2.29)	(2.30)	(2.31)
restricciones	$c > 3$		$3 \leq c \neq d \geq 4$ $(c,d) \neq (3,4)$		$d > 4$	$c > 3$	

Figura 2.13: Elementos provenientes de  $\mathcal{C}$  en las congruencias  $(E_i)$  del Corolario 2.2.11.

*Demostración.* La primera afirmación se sigue de (2.32) y (2.33). Para la segunda afirmación, comencemos por notar que las congruencias listadas se obtienen al dualizar las 16 fórmulas (en la Definición 2.2.9) que describen la inclusión  $\iota$ . De hecho, la validez de las congruencias se obtiene mediante una verificación directa (que se omite) del hecho de que ambos lados de cada congruencia evalúan lo mismo en cada elemento base  $\begin{bmatrix} a & a & c \\ b & d & d \end{bmatrix}$ . Además, una inspección directa muestra que, en cada ecuación  $(E_i)$ , hay un solo sumando  $s_i$  (escrito en la Figura 2.13) que no proviene de  $\mathcal{B}$ . Por lo tanto,  $(E_i)$  puede considerarse como la expresión de la clase de cohomología representada por  $s_i$  como una combinación  $\mathbb{Z}$ -lineal de elementos base. La segunda afirmación del corolario se sigue entonces al observar, a partir de la Figura 2.13, que cada elemento en  $\mathcal{C}$  surge como uno, y solo uno, de los sumandos especiales  $s_i$ .  $\square$

## 2.2.4 Anillo de cohomología

En secciones anteriores hemos descrito cociclos explícitos en  $\mu^*(C_m)$  que representan elementos base en la cohomología. Ahora utilizamos (1.11) para evaluar los correspondientes productos copas —tanto a nivel de cocadenas críticas como a nivel de homología. Dado que los productos copas en  $C^*(C_m)$  son elementales (ver Nota 2.2.12 a continuación), la mayor parte del trabajo consiste en dar una descripción (adecuada) de los mapeos de cocadenas  $\bar{\Phi}: \mu^*(C_m) \rightarrow C^*(C_m)$  y  $\underline{\Phi}: C^*(C_m) \rightarrow \mu^*(C_m)$ .

**Nota 2.2.12.** Recordemos que los elementos base en  $C^1(C_m)$  están dados por las caras dualizadas de dimensión uno  $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ . (Como en partes anteriores de este trabajo, se omiten los asteriscos superiores para los elementos dualizados, y se suelen omitir las restricciones aritméticas entre los números que ensamblan las caras críticas). A partir de la fórmula usual para productos copas en el entorno simplicial, vemos que los únicos productos no triviales en  $C^*(C_m)$  tienen la forma

$$\begin{bmatrix} a & a \\ b & d \end{bmatrix} \smile \begin{bmatrix} a & c \\ d & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a & c \\ b & d & d \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{bmatrix} a & c \\ b & b \end{bmatrix} \smile \begin{bmatrix} c & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c & c \\ b & b & d \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

(Por lo tanto, cada 2-cara es, de manera única, un producto de dos 1-caras). En particular, para los propósitos de aplicar (1.11), todos los elementos base  $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$  con  $a < c$  y  $b < d$  pueden ser ignorados en la expresión de  $\bar{\Phi}$ .

**Proposición 2.2.13.** *Los valores del mapeo de cocadenas  $\bar{\Phi}: \mu^1(C_m) \rightarrow C^1(C_m)$  sobre los elementos base (k.1)–(k.3) de la Proposición 2.2.1 satisfacen la siguiente familia de congruencias tomadas módulo los elementos base  $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$  con  $a < c$  y  $b < d$ :*

- (i)  $\bar{\Phi}\left(\begin{bmatrix} a & m-1 \\ b & m \end{bmatrix}\right) \equiv \begin{bmatrix} a & a \\ b & m \end{bmatrix} + \sum \begin{bmatrix} a & x \\ b & b \end{bmatrix} - \sum \begin{bmatrix} y & a \\ b & b \end{bmatrix}$ , donde la primera suma corre sobre enteros  $x \in \{1, \dots, m-1\}$  con  $a < x \neq b$ , y la segunda suma corre sobre enteros  $y \in \{1, \dots, m-1\}$  con  $b \neq y < a$ ;
- (ii)  $\bar{\Phi}\left(\begin{bmatrix} m & m \\ b & d \end{bmatrix}\right) \equiv \sum \begin{bmatrix} x & x \\ b & d \end{bmatrix}$ , donde la suma corre sobre enteros  $x \in \{1, \dots, m\}$  con  $b \neq x \neq d$ ;
- (iii)  $\bar{\Phi}\left(\begin{bmatrix} a & c \\ m & m \end{bmatrix}\right) \equiv \sum \begin{bmatrix} a & c \\ y & y \end{bmatrix}$ , donde la suma corre sobre enteros  $y \in \{1, \dots, m\}$  con  $a \neq y \neq c$ ,

*Demostración.* Las congruencias se derivan de (1.10) y de la inspección directa de las Figuras 2.14–2.17, donde detallamos los árboles completos de caminos gradientes que aterrizan en caras críticas de dimensión 1. Aquí seguimos las convenciones de notación usadas en las Figuras 2.3–2.11, excepto que ahora seguimos las restricciones numéricas relevantes y, al inicio de cada camino, indicamos la razón que impide que el camino retroceda un paso más.  $\square$

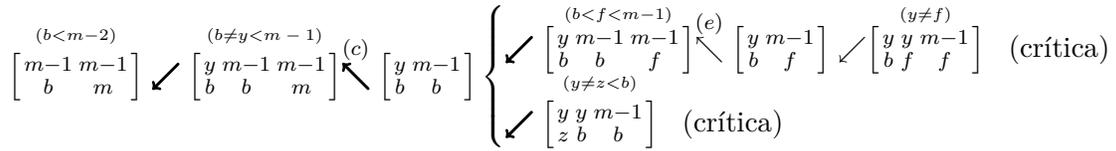


Figura 2.14: Caminos gradientes que aterrizan en una celda crítica  $\begin{bmatrix} m-1 & m-1 \\ b & m \end{bmatrix}$  de tipo (k.1) con  $b < m-2$

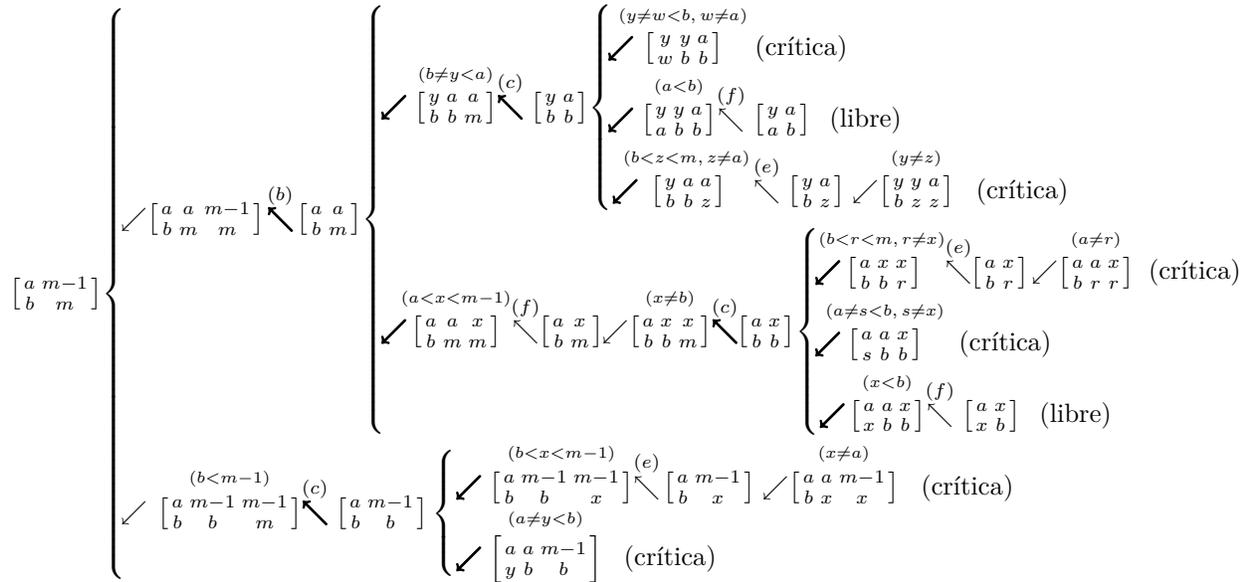


Figura 2.15: Caminos gradientes que aterrizan en una celda crítica  $\begin{bmatrix} a & m-1 \\ b & m \end{bmatrix}$  de tipo (k.1) con  $a < m-1 \geq b$

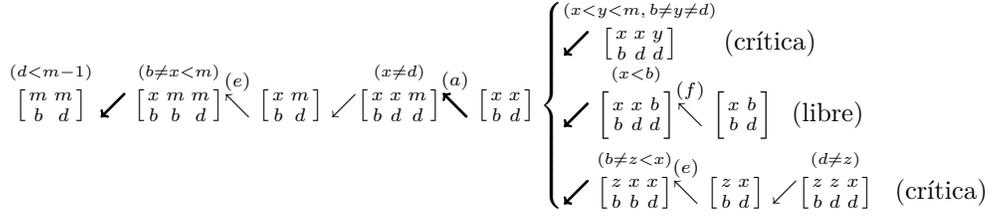


Figura 2.16: Caminos gradientes que aterrizan en una celda crítica  $\begin{bmatrix} m & m \\ b & d \end{bmatrix}$  de tipo  $(k.2)$

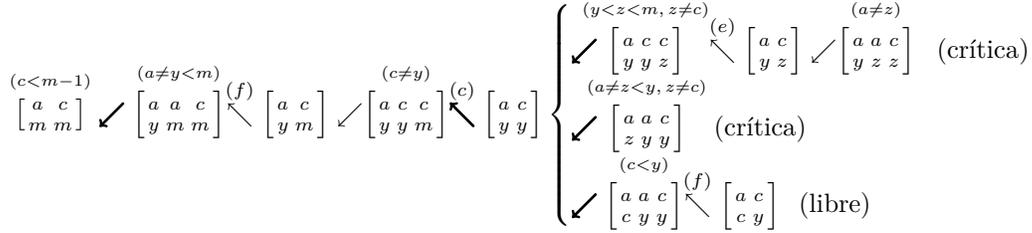


Figura 2.17: Caminos gradientes que aterrizan en una celda crítica  $\begin{bmatrix} a & c \\ m & m \end{bmatrix}$  de tipo  $(k.3)$

**Proposición 2.2.14.** *Para caras críticas de dimensión 1  $x$  e  $y$ , el producto  $\bar{\Phi}(x) \smile \bar{\Phi}(y)$  que aparece en (1.11) es una combinación lineal  $\sum \pm z$  de caras de dimensión 2 dualizadas  $z$  cada una de las cuales tiene una de las siguientes formas:*

- (i)  $\begin{bmatrix} a & a & c \\ b & d & d \end{bmatrix}$  para  $a < c < m > d > b$  y  $b \neq a \neq d \neq c$ , con imagen trivial bajo  $\underline{\Phi}$  a menos que  $b \neq c$ , en cuyo caso

$$\underline{\Phi} \left( \begin{bmatrix} a & a & c \\ b & d & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & a & c \\ b & d & d \end{bmatrix}.$$

- (ii)  $\begin{bmatrix} a & c & c \\ b & b & d \end{bmatrix}$  para  $a < c \leq m - 1 > d > b$  y  $a \neq b \neq c \neq d$ , con imagen trivial bajo  $\underline{\Phi}$  a menos que  $a \neq d$ , en cuyo caso

$$\underline{\Phi} \left( \begin{bmatrix} a & c & c \\ b & b & d \end{bmatrix} \right) = - \begin{bmatrix} a & a & c \\ b & d & d \end{bmatrix}.$$

- (iii)  $\begin{bmatrix} a & a & c \\ b & m & m \end{bmatrix}$  para  $a < c < m - 1 \geq b$  y  $b \neq a \neq m \neq c$ , con imagen trivial bajo  $\underline{\Phi}$  a menos que  $b \neq c$ , en cuyo caso

$$\underline{\Phi} \left( \begin{bmatrix} a & a & c \\ b & m & m \end{bmatrix} \right) = \sum_{\substack{y < b \\ a \neq y \neq c}} \begin{bmatrix} a & a & c \\ y & b & b \end{bmatrix} - \sum_{\substack{b < x < m \\ a \neq x \neq c}} \begin{bmatrix} a & a & c \\ b & x & x \end{bmatrix}.$$

- (iv)  $\begin{bmatrix} a & c & c \\ b & b & m \end{bmatrix}$  para  $a < c \leq m - 1 \geq b$ ,  $a \neq b \neq c$  y ya sea  $c < m - 1$  o  $c = m - 1 > b + 1$ , con imagen bajo  $\underline{\Phi}$

$$\underline{\Phi} \left( \begin{bmatrix} a & c & c \\ b & b & m \end{bmatrix} \right) = \sum_{\substack{b < x < m \\ a \neq x \neq c}} \begin{bmatrix} a & a & c \\ b & x & x \end{bmatrix} - \sum_{\substack{y < b \\ a \neq y \neq c}} \begin{bmatrix} a & a & c \\ y & b & b \end{bmatrix}.$$

*Demostración.* Por (2.34), las únicas 1-caras en la expresión de  $\bar{\Phi}(\delta)$  que pueden conducir a un sumando  $\pm \begin{bmatrix} r & r & t \\ s & u & u \end{bmatrix}$  en el producto  $\bar{\Phi}(\gamma) \smile \bar{\Phi}(\delta)$  tienen la forma  $\pm \begin{bmatrix} r & t \\ u & u \end{bmatrix}$ . A partir de las expresiones de  $\bar{\Phi}$  en la Proposición 2.2.13, esto puede suceder solo con  $t < m$  y de hecho  $t < m - 1$  siempre que  $u = m$ , en vista de la forma de los elementos base de tipo  $(k.3)$ . Entonces  $\begin{bmatrix} r & r & t \\ s & u & u \end{bmatrix}$  se ajusta a (i) o (iii). Del mismo modo, las únicas 1-caras en la expresión de  $\bar{\Phi}(\delta)$  que pueden conducir a un sumando  $\pm \begin{bmatrix} r & t & t \\ s & s & u \end{bmatrix}$  en  $\bar{\Phi}(\gamma) \smile \bar{\Phi}(\delta)$  tienen la forma  $\pm \begin{bmatrix} t & t \\ s & u \end{bmatrix}$ , lo cual puede suceder solo bajo una de las siguientes condiciones:

- $u = m$  y  $t \leq m - 1$ , así como  $s < m - 2$  si  $t = m - 1$  (recuérdese la forma de los elementos base de tipo  $(k.1)$ );
- $u < m - 1$  (recuérdese la forma de los elementos base de tipo  $(k.2)$ ).

En la primera posibilidad,  $\begin{bmatrix} r & t & t \\ s & s & u \end{bmatrix}$  se ajusta a *(iv)*. En la segunda posibilidad,  $\begin{bmatrix} r & t & t \\ s & s & u \end{bmatrix}$  se ajusta a *(ii)* a menos que  $t = m$ , en cuyo caso

$$\text{la expresión de } \overline{\Phi}(\gamma) \text{ debería incluir un sumando de la forma } \pm \begin{bmatrix} r & m \\ s & s \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

Pero la inspección de las expresiones de  $\overline{\Phi}$  en la Proposición 2.2.13 descarta (2.35). Por último, las cuatro expresiones afirmadas para el mapeo de cofronteras  $\underline{\Phi}$  se siguen de (1.10) y del análisis de los caminos gradientes en las Figuras 2.3–2.11.  $\square$

**Ejemplo 2.2.15.** Para  $m = 5$ , los Corolarios 2.2.7 y 2.2.11 presentan la siguiente lista de cociclos que representan una base graduada para  $H^*(\text{Conf}(|K_m|, 2))$ . En dimensión 2, hay un solo cociclo  $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$  mientras que, en dimensión 1, hay doce cociclos:

$$\begin{aligned} \delta_{12} &:= \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, & v_{12} &:= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}, \\ \delta_{13} &:= \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, & v_{13} &:= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}, \\ \delta_{23} &:= \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, & v_{23} &:= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}, \\ \lambda_{14} &:= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, & \lambda_{24} &:= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \\ \lambda_{41} &:= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, & \lambda_{42} &:= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \\ \lambda_{32} &:= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, & \lambda_{34} &:= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces, la estructura completa del álgebra de  $H^*(\text{Conf}(|K_m|, 2))$  se detalla con la siguiente matriz de productos copa:

	$\lambda_{41}$	$\lambda_{42}$	$\lambda_{14}$	$\lambda_{24}$	$\lambda_{34}$	$\lambda_{32}$	$\delta_{12}$	$\delta_{13}$	$\delta_{23}$	$v_{12}$	$v_{13}$	$v_{23}$
$\lambda_{41}$												$-g$
$\lambda_{42}$							$g$	$-g$	$g$	$g$		$g$
$\lambda_{14}$									$-g$			
$\lambda_{24}$								$g$				
$\lambda_{34}$								$-g$	$g$	$g$	$-g$	$g$
$\lambda_{32}$							$-g$	$g$	$-g$	$-g$	$g$	$-g$
$\delta_{12}$		$-g$					$g$					
$\delta_{13}$		$g$		$-g$	$g$	$-g$						
$\delta_{23}$		$-g$	$g$		$-g$	$g$						
$v_{12}$		$-g$			$-g$	$g$						
$v_{13}$					$g$	$-g$						
$v_{23}$	$g$	$-g$			$-g$	$g$						

donde  $g$  representa el generador de  $H^2(\text{Conf}(|K_m|, 2))$ , no se muestran los ceros, y se omiten los corchetes para las clases de cohomología. En particular, reemplazando  $\lambda_{42}$  por  $\lambda'_{42} := \lambda_{42} + \lambda_{41} +$

$\lambda_{34} + \lambda_{32} + \lambda_{24} + \lambda_{14}$ ,  $\lambda_{34}$  por  $\lambda'_{34} := \lambda_{34} + \lambda_{32}$  y  $\lambda_{32}$  por  $\lambda'_{32} := \lambda_{32} + \lambda_{42}$ , obtenemos una base de cohomología cuyos únicos productos no triviales<sup>4</sup> son

$$\lambda'_{42} \smile v_{12} = \lambda_{24} \smile \delta_{13} = \lambda'_{32} \smile v_{13} = g \text{ y } \lambda_{14} \smile \delta_{23} = \lambda_{41} \smile v_{23} = \lambda'_{34} \smile \delta_{12} = -g. \quad (2.36)$$

Esta situación es por supuesto un reflejo del hecho notado por A. Abrams en su tesis doctoral [1] de que  $\text{Conf}(|K_m|, 2)$  es en realidad una superficie cerrada orientable de genero 6.

El anillo de cohomología  $H^*(\text{Conf}(|K_m|, 2))$  se enriquece a medida que aumenta el valor de  $m$  (con  $\text{Conf}(|K_m|, 2)$  ya no teniendo la homotopía de una superficie cerrada). Sin embargo, algunos aspectos de la estructura particularmente simple en (2.36) se mantienen para todo  $m > 5$ . Explícitamente, sea  $v_{a,c}$ ,  $\delta_{b,d}$  y  $\lambda_{e,f}$  los elementos base de  $H^1(\text{Conf}(|K_m|, 2))$  representados, respectivamente, por los 1-cociclos  $\begin{bmatrix} a & c \\ m & m \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} m & m \\ b & d \end{bmatrix}$  y  $\langle e \rangle$  descritos en el Corolario 2.2.7. Entonces:

**Corolario 2.2.16.** *Cualquier producto copa de la forma  $\delta_{b_1,d_1} \cdot \delta_{b_2,d_2}$ ,  $v_{a_1,c_1} \cdot v_{a_2,c_2}$  o  $\lambda_{e_1,f_1} \cdot \lambda_{e_2,f_2}$  se anula. Por otro lado, un producto copa de la forma  $\delta_{b,d} \cdot v_{a,c}$  es no nulo si y solo si  $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$ , en cuyo caso  $\delta_{b,d} \cdot v_{a,c}$  está representado por  $\begin{bmatrix} a & a & c \\ b & d & d \end{bmatrix}$ .*

*Demostración.* Este es un cálculo sencillo usando la Proposición 2.2.13. A continuación solo indicamos los dos principales pasos para su verificación. En lo que sigue, asumimos  $m \geq 6$ . Primero, la congruencia (i) en la Proposición 2.2.13 se utiliza para comprobar que, módulo 1-caras que no participan en productos no nulos (2.34),  $\overline{\Phi} \langle e \rangle_f$  es congruente a:

- $\sum_{i < m} \begin{bmatrix} i & i \\ f & m \end{bmatrix}$ , para  $e = m - 1$  y  $1 \leq f \leq m - 4$ ;
- $\sum_{j < m} \left( \begin{bmatrix} e & e \\ j & m \end{bmatrix} + \sum_{x < m} \begin{bmatrix} e & x \\ j & j \end{bmatrix} - \sum_{y < m} \begin{bmatrix} y & e \\ j & j \end{bmatrix} \right)$ , para  $1 \leq e \leq m - 3$  y  $f = m - 1$ ;
- $\begin{bmatrix} m-1 & m-1 \\ m-3 & m \end{bmatrix} - \sum_{\substack{i < m-1 > j \\ j \neq m-3}} \begin{bmatrix} i & i \\ j & m \end{bmatrix} - \sum_{i < m-1 > j} \begin{bmatrix} i & m-1 \\ j & j \end{bmatrix}$ , para  $(e, f) = (m - 1, m - 3)$ ;
- $\begin{bmatrix} m-2 & m-2 \\ m-1 & m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m-2 & m-1 \\ m-1 & m-1 \end{bmatrix} - \sum_y \begin{bmatrix} y & m-2 \\ m-1 & m-1 \end{bmatrix} - \sum_{\substack{i < m-1 > j \\ i \neq m-2}} \left( \begin{bmatrix} i & i \\ j & m \end{bmatrix} + \sum_{\substack{x=m-\epsilon \\ \epsilon \in \{1,2\}}} \begin{bmatrix} i & x \\ j & j \end{bmatrix} \right)$ , para  $(e, f) = (m - 2, m - 1)$ ;
- $\sum_{i < m-1 > j} \left( \begin{bmatrix} i & i \\ j & m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & m-1 \\ j & j \end{bmatrix} \right)$ , para  $(e, f) = (m - 2, m - 3)$ .

Las congruencias anteriores, junto con las de los elementos (ii) y (iii) de la Proposición 2.2.13, se utilizan para comprobar que cada uno de los productos que se afirma que se anulan lo hacen porque no hay espacio para productos no nulos (2.34) en la correspondiente porción  $\overline{\Phi}(x) \smile \overline{\Phi}(y)$  de (1.11). Tal afirmación es fácilmente visible para los productos  $\delta_{b_1,d_1} \cdot \delta_{b_2,d_2}$  y  $v_{a_1,c_1} \cdot v_{a_2,c_2}$ , pero los detalles explícitos no son tan directos para  $\delta_{b,d} \cdot v_{a,c}$  y  $\lambda_{e_1,f_1} \cdot \lambda_{e_2,f_2}$ . De hecho, en los dos últimos casos, se necesita elegir un orden conveniente de factores para asegurar la anulación de la correspondiente  $\overline{\Phi}(x) \smile \overline{\Phi}(y)$ . Véase la tabla a continuación. El orden elegido es irrelevante para la conclusión de tener un producto trivial, ya que los productos copas en cohomología son anticomutativos. Téngase en cuenta que  $H^*(\text{Conf}(|K_m|, 2))$  es libre de torsión, por lo que los cuadrados por productos copa de clases de dimensión 1 son triviales por defecto.

<sup>4</sup>Salvo la anticomutatividad.

$\delta_{b,d} \cdot v_{a,c}, a \in \{b, d\}$	$v_{a,c} \cdot \delta_{b,d}, c \in \{b, d\}$
$\lambda_{m-1,f_1} \cdot \lambda_{m-1,f_2}, 1 \leq f_i \leq m-4$	$\lambda_{m-1,f} \cdot \lambda_{e,m-1}, 1 \leq f \leq m-4$ y $1 \leq e \leq m-3$
$\lambda_{m-1,f} \cdot \lambda_{m-1,m-3}, 1 \leq f \leq m-4$	
$\lambda_{m-1,f} \cdot \lambda_{m-2,m-3}, 1 \leq f \leq m-4$	
$\lambda_{m-1,f} \cdot \lambda_{m-2,m-1}, 1 \leq f \leq m-4$	
$\lambda_{m-1,m-3} \cdot \lambda_{m-2,m-3}$	$\lambda_{m-1,m-3} \cdot \lambda_{e,m-1}, 1 \leq e \leq m-3$
$\lambda_{m-1,m-3} \cdot \lambda_{m-2,m-1}$	
	$\lambda_{e_1,m-1} \cdot \lambda_{e_2,m-1}, 1 \leq e_i \leq m-3$ con $e_1 > e_2$
$\lambda_{m-2,m-3} \cdot \lambda_{m-2,m-1}$	$\lambda_{m-2,m-3} \cdot \lambda_{e,m-1}, 1 \leq e \leq m-3$
	$\lambda_{m-2,m-1} \cdot \lambda_{e,m-1}, 1 \leq e \leq m-3$

Por último, el hecho de que  $\delta_{b,d} \cdot v_{a,c}$  esté representado por  $\begin{bmatrix} a & a & c \\ b & d & d \end{bmatrix}$  cuando  $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$  se sigue al notar que  $\underline{\Phi} \left( \overline{\Phi} \begin{bmatrix} m & m \\ b & d \end{bmatrix} \smile \overline{\Phi} \begin{bmatrix} a & c \\ m & m \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & a & c \\ b & d & d \end{bmatrix}$ . Aquí  $\begin{bmatrix} a & a & c \\ b & d & d \end{bmatrix}$  no representa uno de nuestros elementos base cuando  $(a, b) = (1, 2)$  o  $(a, b, c) = (1, 3, 2)$  o  $(a, b, d) = (2, 1, 3)$  o  $(a, b, c, d) = (2, 1, 3, 4)$  (recuérdese que (2.28)–(2.31)). En cada uno de estos casos, una de las relaciones  $(E_1)$ – $(E_6)$  en el Corolario 2.2.11 se aplica para escribir (la clase de cohomología de)  $\begin{bmatrix} a & a & c \\ b & d & d \end{bmatrix}$  en términos de elementos base. De cualquier manera, la inspección de las relaciones  $(E_1)$ – $(E_6)$  muestra que  $\begin{bmatrix} a & a & c \\ b & d & d \end{bmatrix}$  representa una clase de cohomología no nula.  $\square$

## 2.3 Complejidad topológica

Fijemos un entero positivo  $s \geq 2$  y un espacio  $X$  conexo por trayectorias. La  $s$ -ésima complejidad topológica  $\text{TC}_s(X)$  de  $X$  es la categoría seccional del mapeo de evaluación  $e_s: PX \rightarrow X^s$  que envía un camino (libre) en  $X$ ,  $\gamma \in PX$ , a

$$e_s(\gamma) = \left( \gamma \left( \frac{0}{s-1} \right), \gamma \left( \frac{1}{s-1} \right), \dots, \gamma \left( \frac{s-1}{s-1} \right) \right).$$

El término “categoría seccional” se utiliza en el sentido reducido, de modo que  $\text{TC}_s(X) + 1$  representa el menor número de conjuntos abiertos que cubren  $X^s$  en cada uno de los cuales  $e_s$  admite una sección. Por ejemplo, la categoría de Lusternik-Schnirelmann (reducida)  $\text{cat}(X)$  de  $X$  es la categoría seccional del mapeo de evaluación  $e_1: P_0X \rightarrow X$  que envía un camino basado  $\gamma \in P_0X$  (es decir,  $\gamma(0) = \star$ , para un punto base fijo  $\star \in X$ ) a  $e_1(\gamma) = \gamma(1)$ .

**Proposición 2.3.1** ([7, Theorem 3.9]). *Para un espacio  $X$   $c$ -conexo que tiene el tipo de homotopía de un complejo CW,*

$$\text{cl}(X) \leq \text{cat}(X) \leq \text{hdim}(X)/(c+1) \quad \text{y} \quad \text{zcl}_s(X) \leq \text{TC}_s(X) \leq s \cdot \text{cat}(X).$$

Aquí  $\text{hdim}(X)$  denota la dimensión mínima de los complejos celulares homotópicamente equivalentes a  $X$ , mientras que  $\text{cl}(X)$  es el mayor entero  $\ell \geq 0$  tal que existen clases<sup>5</sup>  $c_j \in \tilde{H}^*(X)$ ,  $1 \leq j \leq \ell$ , con producto copa no nulo. Del mismo modo,  $\text{zcl}_s(X)$  es el mayor entero  $\ell \geq 0$  tal que existen clases  $z_j \in H^*(X^s)$ ,  $1 \leq j \leq \ell$  con producto copa no nulo y de modo que cada factor se restrinja trivialmente bajo la diagonal  $X \hookrightarrow X^s$  (“divisores nulos”).

<sup>5</sup>Para los propósitos de esta sección, la cohomología se tomará con coeficientes módulo 2.

Sea  $\Gamma$  un complejo celular de dimensión uno —un grafo. Mientras que el grupo fundamental de  $\text{Conf}(\Gamma, n)$  es un personaje central en la teoría geométrica de grupos, la complejidad topológica de  $\text{Conf}(\Gamma, n)$  se vuelve relevante para la tarea de planificar el movimiento sin colisiones de  $n$  agentes autónomos distinguibles que se mueven en un sistema de rieles con forma de  $\Gamma$ . Se sabe que  $\text{hdim}(\text{Conf}(\Gamma, n))$  está acotada superiormente por  $m = m(\Gamma)$ , el número de vértices esenciales de  $\Gamma$  (ver, por ejemplo, [16, Teorema 4.4]). Así, la Proposición 2.3.1 produce

$$\text{TC}_s(\text{Conf}(\Gamma, n)) \leq s \cdot m. \quad (2.37)$$

Para  $s = 2$ , Farber demostró en [12] que (2.37) es una igualdad cuando  $\Gamma$  es un árbol y  $n \geq 2m$ , con la única (y bien conocida) excepción de  $(n, m) = (2, 1)$  donde el (único) vértice esencial de  $\Gamma$  tiene valencia 3 —lo que llamamos la “excepción  $Y_2$ ”. Farber también conjeturó que la limitación a considerar únicamente árboles al árbol sería superflua para tener igualdad en (2.37). La conjetura ha sido confirmada recientemente en [31] por Knudsen, quien demostró la igualdad en (2.37) para cualquier  $s \geq 2$  y cualquier grafo  $\Gamma$ , siempre que se mantenga la restricción “estable”  $n \geq 2m$  (y se evite la excepción  $Y_2$ ). Hay que tener en cuenta que la condición de estabilidad fuerza a que  $\text{hdim}(\text{Conf}(\Gamma, n)) = m$ . Más generalmente, sería interesante caracterizar las ternas  $(s, \Gamma, n)$  para las cuales la cota mejorada (en principio)

$$\text{TC}_s(\text{Conf}(\Gamma, n)) \leq s \cdot \text{hdim}(\text{Conf}(\Gamma, n)) \quad (2.38)$$

se cumple como una igualdad, preferiblemente determinando el valor de  $\text{hdim}(\text{Conf}(\Gamma, n))$ . Por ejemplo, se sabe por [3, Sección 5] que, para cualquier  $s$  y  $n$  (posiblemente con  $n < 2m$ ),

$$\text{hdim}(\text{Conf}(\Gamma, n)) = \text{cat}(\text{Conf}(\Gamma, n)) = \min\{\lfloor n/2 \rfloor, m\} \quad (2.39)$$

cuando  $\Gamma$  es un árbol, en cuyo caso (2.38) es una igualdad —la excepción  $Y_2$  sigue aplicándose. El objetivo de esta sección es probar el Teorema 2.3.2, que añade una nueva y completamente diferente familia de casos en los que se cumple la igualdad en (2.38) fuera del régimen estable  $n \geq 2m$ .

**Teorema 2.3.2.** *Para  $m \geq 4$  y  $s \geq 2$ ,*

$$\text{TC}_s(\text{Conf}(|K_m|, 2)) = s \cdot \text{hdim}(\text{Conf}(|K_m|, 2)) = \begin{cases} s, & \text{if } m = 4; \\ 2s, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Notemos que  $\text{Conf}(|K_m|, 2)$  es vacío para  $m = 1$ , y desconexo para  $m = 2$ , mientras que  $\text{Conf}(|K_3|, 2)$  es equivalente a la excepción  $Y_2$ . Por otro lado, los casos  $m = 4$  y  $m = 5$  en el Teorema 2.3.2 son bien conocidos en vista del Corolario 2.2.2 y la última afirmación en el Ejemplo 2.2.15. Probamos el Teorema 2.3.2 para  $m \geq 6$  construyendo  $2s$  divisores nulos en  $\text{Conf}(|K_m|, 2)$  con un producto copa no nulo, y utilizando la Proposición 2.3.1 junto con el hecho obvio de que  $\text{hdim}(\text{Conf}(|K_m|, 2)) \leq 2$ . Es natural pensar que la esperada riqueza de productos copa en los espacios de configuraciones de grafos en general podría llevar a muchos más casos en los que (2.38) se cumpliría como una igualdad —incluso si  $n < 2m$ .

Para enteros  $1 \leq i \leq s \geq 2$  y una clase de cohomología  $x$  en un espacio  $X$ , considere el producto tensorial exterior  $x_{(i)} := 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes x \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \in H^*(X)^{\otimes s} = H^*(X^s)$ , donde el factor tensorial  $x$  aparece en la  $i$ -ésima posición. El siguiente resultado es fácil de verificar:

---

**Lema 2.3.3.** Sean  $x, y, z, w$  cuatro elementos en la cohomología módulo 2 de un espacio  $X$  que satisfacen las relaciones  $x^2 = y^2 = xz = yz = yw = 0$ , entonces

$$\begin{aligned} & \left( \prod_{i=2}^s (x_{(1)} + x_{(i)}) \right) \left( \prod_{i=2}^s (y_{(1)} + y_{(i)}) \right) (z_{(1)} + z_{(s)}) (w_{(1)} + w_{(s)}) \\ &= zw \otimes xy \otimes xy \otimes xy \otimes \cdots \otimes xy \\ &+ xy \otimes xy \otimes xy \otimes \cdots \otimes xy \otimes zw. \end{aligned}$$

*Prueba del Teorema 2.3.2 para  $m \geq 6$ .* En vista del Corolario 2.2.16 y del Lema 2.3.3, los elementos base 1-dimensionales  $x := \delta_{1,2}$ ,  $y := v_{3,4}$ ,  $z := v_{1,3}$ ,  $w := \delta_{2,4} \in H^* \text{Conf}(|K_m|, 2)$  producen un producto de  $2s$  divisores nulos, con representante del producto

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

El factor tensorial  $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$  representa uno de los elementos base en la sección anterior. Sin embargo, como se indicó en la Figura 2.13, necesitamos aplicar la relación  $(E_2)$  en el Corolario 2.2.11 para escribir (la clase de cohomología de) el factor tensorial  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$  como una suma  $\sum b_i$  de elementos base  $b_i$  (recordemos que trabajamos módulo 2). Si  $m \geq 6$ , el elemento base  $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$  aparece como un sumando  $b_i$ , de lo cual se deduce la no trivialidad de la clase de cohomología representada por (2.40).  $\square$

## Capítulo 3

# Campo gradiente discreto algorítmico sobre espacios poliédricos y la topología de las configuraciones de pares de puntos en esqueletos de simplejos

Este capítulo está basado en [27]. Aquí describimos un procedimiento algorítmico para construir un campo gradiente discreto maximal sobre el espacio de configuración discretizado de Abrams  $\text{DConf}(K, n)$  1.2, donde  $n$  es un entero positivo y  $K$  es un complejo simplicial finito. En particular, lo utilizamos para el caso  $n = 2$  y  $K = \Delta^{m,d}$ , el esqueleto  $d$ -dimensional del simplejo  $m$ -dimensional. Con esta técnica logramos demostrar que  $\text{DConf}(\Delta^{m,d}, 2)$  es  $(\min\{d, m - 1\} - 1)$ -conexo, tiene homología libre de torsión y admite una estructura celular mínima. También calculamos los números de Betti de  $\text{DConf}(\Delta^{m,d}, 2)$  y, para ciertos valores de  $d$ , demostramos que  $\text{DConf}(\Delta^{m,d}, 2)$  es homotópico a un wedge de esferas (no necesariamente equidimensionales).

Como se sugiere en [2], un estudio sistemático de los espacios de configuraciones discretos podría comenzar considerando el caso de los simplejos, los bloques de construcción básicos de los complejos. En esa dirección, Abrams, Gay y Hower han demostrado que el espacio de configuración discreto  $\text{DConf}(\Delta^m, n)$  asociado al simplejo  $m$ -dimensional  $\Delta^m$  se descompone, salvo homotopía, como la suma de unión en un punto de esferas todas de la misma dimensión. Si bien sus técnicas se basan en la teoría clásica de homotopía, surge el problema de encontrar un argumento con sabor combinatorio (ver [2, page 1085]). En este capítulo, allanamos el camino para abordar ese desafío (ver Teorema 3.1.4 a continuación). En particular, para  $1 \leq d \leq m$ , estudiamos, desde una perspectiva puramente de topología computacional, el tipo de homotopía de  $\text{DConf}(\Delta^{m,d}, 2)$ , donde  $\Delta^{m,d}$  representa el esqueleto  $d$ -dimensional de  $\Delta^m$ . Esto nos lleva a una gran generalización de los resultados mostrados en el capítulo anterior sobre la topología algebraica de espacios de configuraciones de 2 puntos en grafos completos (es decir, esqueletos 1-dimensionales  $\Delta^{m,1}$ ).

Gran parte de nuestro interés en el complejo  $\Delta^{m,d}$  proviene del hecho de que cualquier complejo simplicial finito  $X$  puede ser considerado como un subcomplejo de  $\Delta^{m,d}$ , donde  $d = \dim(X)$  y  $m$  es uno menos que el número de vértices de  $X$ . Así,  $\text{DConf}(X, 2)$  de Abrams (o  $\text{DConf}(X, n)$ , para el caso) se convierte en un subcomplejo de  $\text{DConf}(\Delta^{m,d}, 2)$  (respectivamente, de  $\text{DConf}(\Delta^{m,d}, n)$ ). En otras palabras, en lugar de considerar bloques de construcción básicos de complejos, proponemos enfocarnos en complejos universalmente grandes.

### 3.1 El campo gradiente

Los complejos regulares que nos interesan surgen como subcomplejos de potencias de complejos simpliciales. Fijamos la notación en tal contexto. Sea  $K$  un complejo simplicial (abstracto) finito, con conjunto de simplejos  $F$  y con un orden lineal elegido  $\preceq$  en su conjunto de vértices  $V$ . Sin pérdida de generalidad, también podemos suponer  $V = \{1, 2, \dots, m\}$ , con  $\preceq$  correspondiendo al orden usual de los enteros. Como antes, escribimos  $\alpha^{(p)}$  para indicar que  $\alpha \in F$  es  $p$ -dimensional, y usamos la notación en lista

$$\alpha = \alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_p,$$

donde  $\alpha$  está orientado según la lista ordenada

$$\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_p$$

de sus vértices. En estos términos, el conjunto de simplejos  $p$ -dimensionales está ordenado lexicográficamente. Es decir,  $\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_p < \beta_0 \beta_1 \cdots \beta_p$  si y solo si existe  $\ell \in \{0, 1, \dots, p\}$  con  $\alpha_\ell < \beta_\ell$  pero  $\alpha_i = \beta_i$  para  $0 \leq i < \ell$ . Este orden se extiende entonces a todo  $F$  declarando que cualquier simplejo  $p$ -dimensional es menor que cualquier simplejo  $q$ -dimensional siempre que  $p < q$ .

A continuación, tomamos el producto de la descomposición celular en la  $n$ -ésima potencia  $K^n$  de  $K$ . Por lo tanto, las celdas de  $K^n$  son productos similares a prismas de simplejos  $\alpha = \alpha_1 \times \alpha_2 \times \cdots \times \alpha_n$ , con cada  $\alpha_i$  siendo un simplejo de  $K$ . Será conveniente usar la notación  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  o, más explícitamente,

$$\alpha = (\alpha_{1,0} \alpha_{1,1} \cdots \alpha_{1,p_1}, \alpha_{2,0} \alpha_{2,1} \cdots \alpha_{2,p_2}, \dots, \alpha_{n,0} \alpha_{n,1} \cdots \alpha_{n,p_n}). \quad (3.1)$$

Para  $1 \leq i \leq n$  y  $0 \leq j \leq p_i$ , la cara de codimensión 1  $(i, j)$  de  $\alpha$ , denotada por  $\partial_{i,j}(\alpha)$ , se obtiene eliminando el vértice  $j$  de la coordenada  $i$  de (3.1). Explícitamente,

$$\partial_{i,j}(\alpha) = (\alpha_{1,0} \cdots \alpha_{1,p_1}, \dots, \alpha_{i,0} \cdots \widehat{\alpha_{i,j}} \cdots \alpha_{i,p_i}, \dots, \alpha_{n,0} \alpha_{n,1} \cdots \alpha_{n,p_n}).$$

Por ejemplo, con las orientaciones elegidas, el número de incidencia de  $\alpha$  y  $\partial_{i,j}(\alpha)$  está dado por  $[\alpha: \partial_{i,j}(\alpha)] = (-1)^{\epsilon_{i,j}}$ , donde  $\epsilon_{i,j} = p_1 + \cdots + p_{i-1} + j$ . Finalmente, el orden lexicográfico en  $F$  definido al final del párrafo anterior se extiende, nuevamente de manera lexicográfica sobre las  $n$  coordenadas, a todas las celdas (3.1).

El objetivo en esta sección es la construcción de un campo gradiente discreto  $W(K, n)$  en el subcomplejo  $\text{DConf}(K, n)$  de  $K^n$ . Aunque no es explícito en la notación,  $W(K, n)$  depende de  $\preceq$ , es decir, el orden de vértices elegido que lleva a la identificación del conjunto de vértices de  $K$  con  $\{1, 2, \dots, m\}$ .

Por definición, la celda  $(p_1 + \cdots + p_n)$ -dimensional  $\alpha$  en (3.1) pertenece a  $\text{DConf}(K, n)$  precisamente cuando los  $n$  conjuntos de vértices

$$\{\alpha_{1,0}, \dots, \alpha_{1,p_1}\}, \dots, \{\alpha_{n,0}, \dots, \alpha_{n,p_n}\} \quad (3.2)$$

son disjuntos entre sí. Sea  $V(\alpha)$  la unión de los conjuntos en (3.2). Para  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  y un vértice  $v \notin V(\alpha)$  tal que  $\{\alpha_{i,0}, \dots, \alpha_{i,p_i}\} \cup \{v\}$  es un simplejo de  $K$ , definimos

$$\alpha +_i v \quad (3.3)$$

como la celda de  $\text{DConf}(K, n)$  obtenida de (3.1) al insertar el vértice  $v$  en la lista de vértices en la entrada  $i$  de  $\alpha$ . Por supuesto, en términos de la notación tipo lista que vimos antes, la inserción de  $v$  se realiza en una posición que genera una lista ordenada de vértices, de acuerdo a esto último, la cara  $\partial_{i,j}(\alpha)$  también se denotará como

$$\alpha -_i \alpha_{i,j}. \quad (3.4)$$

Necesitaremos iterar la notación en (3.3) y (3.4). Por ejemplo, escribiremos  $\alpha -_i u +_j v$  como una abreviatura de  $(\alpha -_i u) +_j v$ , siempre que las construcciones tengan sentido.

### 3.1.1 Construcción algorítmica

Con la preparación anterior, establecemos  $d := \dim(X)$  donde  $X := \text{DConf}(K, n)$ . El campo  $W := W(K, n)$  se construye mediante un procedimiento algorítmico que se inicializa con  $W := \emptyset$ , junto con la inicialización de variables auxiliares  $A^p := F^p$ , para  $0 \leq p \leq d$ . Aquí  $F^p$  representa el conjunto de celdas  $p$ -dimensionales de  $\text{DConf}(K, n)$  con el orden heredado de las celdas de  $K^n$  discutido en las consideraciones previas. A lo largo de la construcción de  $W$ , eliminaremos elementos de cada  $A^p$ , manteniendo el orden restringido en los conjuntos resultantes  $A^p$ . El papel de  $A^p$  es hacer un seguimiento de las caras  $p$ -dimensionales de  $\text{DConf}(K, n)$  que están *disponibles* en una etapa determinada del algoritmo, es decir, caras  $p$ -dimensionales de  $\text{DConf}(K, n)$  que, en la etapa dada, no forman parte de ningún apareamiento (hasta ese momento) en  $W$ . A lo largo del algoritmo, se agregan nuevos apareamientos

$$\alpha^{(p)} \nearrow \beta^{(p+1)},$$

con  $(\alpha, \beta) \in A^p \times A^{p+1}$ , a  $W$  mediante una familia de procesos  $\mathcal{P}(p)$  ejecutados para  $p = d - 1, d - 2, \dots, 1, 0$  (en ese orden). El proceso  $\mathcal{P}(p)$ , que se ejecuta siempre que los conjuntos de caras disponibles  $A^p$  y  $A^{p+1}$  no estén vacíos al momento de intentar correr el proceso  $\mathcal{P}(p)$  (para que exista la posibilidad de agregar nuevos apareamientos a  $W$ ), consiste en una familia de subprocesos  $\mathcal{P}(p, r)$  ejecutados para  $r = n, n - 1, \dots, 1$  (en ese orden). El objetivo de  $\mathcal{P}(p, r)$  es agregar a  $W$  apareamientos de la forma

$$\alpha^{(p)} \nearrow \alpha^{(p)} +_r u, \quad (3.5)$$

para algún vértice  $u \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Para lograrlo,  $\mathcal{P}(p, r)$  consiste en una familia de subprocesos  $\mathcal{P}(p, r, u)$  ejecutados para  $u = m, m - 1, \dots, 1$  (en ese orden), mientras que cada  $\mathcal{P}(p, r, u)$  consiste en una familia de instrucciones  $\mathcal{P}(p, r, u, \alpha)$  ejecutadas para  $\alpha$  corriendo en el  $A^p$  de ese momento y siguiendo su orden lexicográfico, aunque esta vez desde la celda más pequeña hasta la más grande. En el corazón de la familia anidada de procesos,  $\mathcal{P}(p, r, u, \alpha)$  verifica si, en el momento de su ejecución,

$$(\alpha, \alpha +_r u) \in A^p \times A^{p+1}, \quad (3.6)$$

es decir, si (3.5) está disponible para formar un nuevo apareamiento. Si es así,  $\mathcal{P}(p, r, u, \alpha)$  agrega (3.5) a  $W$  y establece que  $\alpha$  y  $\alpha +_r u$  ya no están disponibles eliminándolas de  $A^p$  y  $A^{p+1}$ , respectivamente.

De su construcción, vemos que la familia  $W$  de apareamientos resultantes al final del algoritmo forma un campo discreto. Además, si  $\alpha^{(p)}$  es una celda crítica, es decir, una celda en un  $A^p$  final, entonces ninguna cara  $\beta^{(p-1)}$  ni ninguna co-cara  $\gamma^{(p+1)}$  de  $\alpha$  puede ser crítica. Esto dará lugar al Teorema 3.1.4 en vista de la Proposición 3.1.3, ambas en la siguiente sección.

En preparación para los argumentos en el resto de este capítulo, el lector encontrará particularmente esclarecedor el siguiente caso:

**Ejemplo 3.1.1.** Consideremos el caso del complejo  $\text{DConf}(K_3, 2)$  para el grafo completo  $K_3$ . Dado que  $\dim(\text{DConf}(K_3, 2)) = 1$ , la construcción de  $W(K_3, 2)$  se reduce al proceso  $\mathcal{P}(0)$ . Al inicio de la construcción, la lista ordenada de caras disponibles es

$$A^0 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$$

y

$$A^1 = \{(1, 23), (2, 13), (3, 12), (12, 3), (13, 2), (23, 1)\}.$$

Entonces  $\mathcal{P}(0)$  evoluciona en el siguiente orden:

- $\mathcal{P}(0, 2, 3)$  construye los apareamientos  $(1, 2) \nearrow (1, 23)$  y  $(2, 1) \nearrow (2, 13)$  (en ese orden), lo que deja  $A^0 = \{(1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$  y  $A^1 = \{(3, 12), (12, 3), (13, 2), (23, 1)\}$ .
- $\mathcal{P}(0, 2, 2)$  construye el apareamiento  $(3, 1) \nearrow (3, 12)$ , lo que deja  $A^0 = \{(1, 3), (2, 3), (3, 2)\}$  y  $A^1 = \{(12, 3), (13, 2), (23, 1)\}$ .
- $\mathcal{P}(0, 1, 2)$  construye el apareamiento  $(1, 3) \nearrow (12, 3)$ , lo que deja  $A^0 = \{(2, 3), (3, 2)\}$  y  $A^1 = \{(13, 2), (23, 1)\}$ .
- $\mathcal{P}(0, 1, 1)$  construye el apareamiento  $(3, 2) \nearrow (13, 2)$ , lo que deja las celdas críticas  $(2, 3)$  y  $(23, 1)$  en dimensiones 0 y 1, respectivamente. Esto es, por supuesto, compatible con la conocida equivalencia de homotopía  $\text{Conf}(S^1, 2) \simeq S^1$ .

### 3.1.2 Acilicidad

**Lema 3.1.2.** *Supongamos que  $\alpha^{(p)} \nearrow \beta = \alpha +_i v$  pertenece a  $W$  y tomemos  $\gamma = \beta -_j w$ . Si  $i < j$  o, de lo contrario, si  $i = j$  con  $v < w$ , entonces  $\gamma$  es redundante con  $\gamma \nearrow \delta = \gamma +_k u$ , donde ya sea  $j < k$  o, de lo contrario,  $j = k$  y  $w < u$ .*

*Demostración.* En el algoritmo, la instrucción  $\mathcal{P}(p, j, w, \gamma)$ , que evalúa la disponibilidad del par  $(\gamma, \beta)$ , se ejecuta antes que  $\mathcal{P}(p, i, v, \alpha)$ , que es responsable de la construcción del supuesto  $\alpha \nearrow \beta$ . Esto significa que, aunque  $\beta$  está disponible en el momento de ejecutar  $\mathcal{P}(p, j, w, \gamma)$ ,  $\gamma$  no lo está. Así que  $\gamma$  debe haber sido identificada como redundante a través de la instrucción  $\mathcal{P}(p, k, u, \gamma)$  antes de  $\mathcal{P}(p, j, w, \gamma)$ . Esto demuestra el resultado.  $\square$

La clave en la prueba anterior es la observación de que, en la construcción algorítmica de  $W$ , el apareamiento  $\gamma \nearrow \delta$  debe haberse construido antes del momento de la construcción de  $\alpha \nearrow \beta$ . Este asunto de "temporización" será crucial para los argumentos posteriores en este trabajo.

**Proposición 3.1.3.** *El campo  $W$  es gradiente.*

*Demostración.* Supongamos, para llegar a una contradicción, un ciclo gradiente en  $H_W$

$$\alpha_0 \nearrow \beta_0 \searrow \alpha_1 \nearrow \beta_1 \searrow \cdots \searrow \alpha_n \nearrow \beta_n \searrow \alpha_0,$$

con  $|\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}| = n + 1$  (así que  $n \geq 1$ ), y pongamos

$$\alpha_{n+1} := \alpha_0 \quad \text{y} \quad \beta_{n+1} := \beta_0.$$

Podemos organizar el inicio del ciclo para suponer que  $\alpha_0 \nearrow \beta_0$  se construye antes que cualquier otro  $\alpha_r \nearrow \beta_r$ ,  $1 \leq r \leq n$ . Digamos que  $\alpha_r \nearrow \beta_r = \alpha_r +_{i_r} v_r$ , para  $0 \leq r \leq n$ , de modo que

$$(i) \ i_r \leq i_0,$$

$$(ii) \ i_r = i_0 \Rightarrow v_r \leq v_0,$$

para  $1 \leq r \leq n$ . Sea  $t$  el primer número en  $\{1, 2, \dots, n+1\}$  tal que  $v_0 \notin V(\alpha_t)$  (esto usa  $\alpha_0 = \alpha_{n+1}$  y  $v_0 \notin V(\alpha_0)$ ). Notemos que  $t \geq 2$ , ya que  $\alpha_0 \neq \alpha_1$ . Así que  $v_0$  se mantiene como un vértice en la  $i_0$ -ésima entrada de cada  $\alpha_\ell$  con  $1 \leq \ell \leq t-1$ , mientras que

$$(iii) \ \alpha_{t-1} \nearrow \beta_{t-1} = \alpha_{t-1} +_{i_{t-1}} v_{t-1}, \text{ con } v_{t-1} \neq v_0,$$

$$(iv) \ \alpha_t = \beta_{t-1} -_{i_0} v_0 \text{ (en particular } t \leq n).$$

Sin embargo, en vista de las condiciones (i) y (ii) para  $r = t-1$  y  $r = t$ , la conclusión del Lema 3.1.2 aplicado a la situación en las condiciones (iii) y (iv) da como resultado  $v_{t-1} = v_0$ , lo cual contradice (iii).  $\square$

**Teorema 3.1.4.** *El campo de gradiente  $W(X, n)$  es maximal en el sentido de que ninguna cara de dimensión  $(p-1)$  ni ninguna co-cara de dimensión  $(p+1)$  de una cara crítica de dimensión  $p$  es crítica.*

## 3.2 Clasificación de celdas

En el resto de este capítulo nos enfocaremos en el caso de  $\text{DConf}(\Delta^{m,d}, 2)$ , asumiendo  $1 \leq d \leq m-2$  para evitar los dos casos excepcionales pero bien conocidos  $\text{Conf}(\Delta^m, 2) \simeq S^{m-1} \simeq \text{Conf}(S^{m-1}, 2)$ . Para propósitos de exposición, es conveniente hacer los siguientes ajustes de notación, que estarán en vigor a partir de ahora. En primer lugar, el simplejo en consideración se denotará como  $\Delta^{\mu-1}$ , con conjunto de vértices  $\{1, 2, \dots, \mu\}$ , y el esqueleto en consideración será  $\Delta^{\mu-1, \mu-\kappa-1}$ . Así

$$2 \leq \kappa \leq \mu - 2 \quad (\text{por lo que } 4 \leq \mu). \quad (3.7)$$

En segundo lugar, siguiendo la notación de (3.1), las celdas de  $X_{\mu, \kappa} := \text{DConf}(\Delta^{\mu-1, \mu-\kappa-1}, 2)$  se escribirán en la forma  $(A, B) := (a_1 a_2 \cdots a_r, b_1 b_2 \cdots b_s)$ , con

$$\begin{aligned} 1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_r \leq \mu, \quad 1 \leq r \leq \mu - \kappa, \\ 1 \leq b_1 < b_2 < \cdots < b_s \leq \mu, \quad 1 \leq s \leq \mu - \kappa, \\ \{a_1, a_2, \dots, a_r\} \cap \{b_1, b_2, \dots, b_s\} = \emptyset. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Si necesitamos referirnos a los conjuntos  $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$  o  $\{b_1, b_2, \dots, b_s\}$  (como en la tercera condición anterior), escribimos  $\{A\}$  o  $\{B\}$ . Además, al tratar con múltiples celdas de  $X_{\mu, \kappa}$  a la vez, utilizamos una notación con una (multi-)prima, p.ej.,  $(A', B')$  con componentes  $a'_i, b'_i, r'$  y  $s'$ . Finalmente, recordemos que  $\langle p, q \rangle$  representa el conjunto de enteros  $\{p, p+1, \dots, q-1, q\}$ .

Nótese que  $\dim(A, B) = r + s - 2 \leq \min\{\mu - 2, 2(\mu - \kappa - 1)\}$ . De hecho:

**Proposición 3.2.1.** *Todas las celdas máximas de  $X_{\mu, \kappa}$  tienen dimensión  $\min\{\mu - 2, 2(\mu - \kappa - 1)\}$ , es decir,  $X_{\mu, \kappa}$  es puro de grado  $\min\{\mu - 2, 2(\mu - \kappa - 1)\}$ .*

*Demostración.* Damos el argumento directo por completitud. La situación para  $\mu \leq 2\kappa$ , es decir, cuando  $\min\{\mu - 2, 2(\mu - \kappa - 1)\} = 2(\mu - \kappa - 1)$  es más sencilla, ya que cualquier celda  $(A, B)$  puede realizarse como una cara de una celda  $(A', B')$  con  $r' = s' = \mu - \kappa$ . Así que, supongamos  $2\kappa \leq \mu$ , es decir,  $\min\{\mu - 2, 2(\mu - \kappa - 1)\} = \mu - 2$ .

**Caso**  $\kappa \leq r$ . Podemos agregar los  $\mu - r - s$  vértices en  $\langle 1, \mu \rangle - V(A, B)$  en la entrada  $B$ , para realizar  $(A, B)$  como una cara de una celda  $(A, B')$ , donde  $|B'| = s + \mu - r - s \leq \mu - \kappa$ .

**Caso**  $\kappa \leq s$ . Podemos agregar los  $\mu - r - s$  vértices en  $\langle 1, \mu \rangle - V(A, B)$  en la entrada  $A$ , para realizar  $(A, B)$  como una cara de una celda  $(A', B)$ , donde  $|A'| = r + \mu - r - s \leq \mu - \kappa$ .

**Caso**  $r < \kappa < s$ . Entonces hay  $(\kappa - r) + (\kappa - s)$  vértices en  $\langle 1, \mu \rangle - V(A, B)$ , y agregamos  $\kappa - r$  (respectivamente,  $\kappa - s$ ) de ellos en la entrada  $A$  (respectivamente, entrada  $B$ ), para realizar  $(A, B)$  como una cara de una celda  $(A', B')$ , con  $r' \geq \kappa \leq s$ . Con esto hemos terminado en vista de cualquiera de los dos casos anteriores.  $\square$

Sea  $W_{\mu, \kappa} := W(\Delta^{\mu-1, \mu-\kappa-1}, 2)$ . Describimos en el Teorema 3.2.2 a continuación todos los apareamientos en  $W_{\mu, \kappa}$  de la forma  $(A, B) \nearrow (A, B) +_2 u$ . La descripción correspondiente para la totalidad de apareamientos en  $W_{\mu, \kappa}$  de la forma  $(A, B) \nearrow (A, B) +_1 u$  se da en el Teorema 3.2.3.

**Teorema 3.2.2.** *Las celdas  $(A, B)$  de  $X_{\mu, k}$  con  $s > 1$  y*

$$\langle b_s + 1, \mu \rangle \subseteq \{A\}$$

(3.9)

son colapsables. De hecho,

$$(A, B) -_2 b_s \nearrow (A, B)$$

(3.10)

es un apareamiento en  $W_{\mu, \kappa}$ . Además, los apareamientos en (3.2.2) son todos los apareamientos en  $W_{\mu, \kappa}$  que surgen mediante la inserción de un vértice en la segunda coordenada de una celda en  $X_{\mu, \kappa}$ .

Por supuesto, la condición (3.2.2) puede cumplirse solo porque  $\langle b_s + 1, \mu \rangle = \emptyset$ , es decir,  $b_s = \mu$ .

*Demostración.* Recordemos que  $\dim(A, B) = r + s - 2$ . Mostramos a continuación que  $(A, B)$  no es redundante, por lo que está disponible al inicio del proceso  $\mathcal{P}(r + s - 3)$ . Luego,  $\mathcal{P}(r + s - 3, 2, b_s)$  es el primer subproceso que podría hacer que  $(A, B)$  pierda la condición de disponibilidad, es decir, con  $\mathcal{P}(r + s - 3, 2, b_s, (A, B) -_2 b_s)$  evaluando (como en (3.6)) el par

$$\left( (A, B) -_2 b_s, (A, B) \right).$$

En (3.2.2),  $(A, B) -_2 b_s$  está disponible en el momento de ejecutar  $\mathcal{P}(r + s - 3, 2, b_s, (A, B) -_2 b_s)$ , por lo que la última instrucción efectivamente construye (3.2.2).

Para completar la prueba de la primera parte del teorema, queda por demostrar que  $(A, B)$  no es redundante. Supongamos, para una contradicción, que existe un apareamiento

$$(A, B) \nearrow (A, B) +_j u \tag{3.11}$$

en  $W_{\mu, \kappa}$  para  $j \in \{1, 2\}$ . Notemos que la condición (3.2.2) obliga a  $u < b_s$ . Por lo tanto, antes de que (3.11) sea construido por  $\mathcal{P}(r + s - 2, j, u, (A, B))$ , la instrucción anterior  $\mathcal{P}(r + s - 2, 2, b_s, (A, B) +_j u -_2 b_s)$  debe encargarse de evaluar el par

$$\left( (A, B) +_j u -_2 b_s, (A, B) +_j u \right).$$

En dicha evaluación, ambas entradas están disponibles: la segunda porque se supone que permanece disponible hasta  $\mathcal{P}(r + s - 2, j, u, (A, B))$ , y la primera en vista de (3.2.2). Así que  $\mathcal{P}(r + s - 2, 2, b_s, (A, B) +_j u -_2 b_s)$  construye  $(A, B) +_j u -_2 b_s \nearrow (A, B) +_j u$ , lo cual contradice (3.11).

Para completar la prueba, supongamos —de nuevo para una contradicción— que hay un apareamiento

$$(A', B') -_2 b'_i \nearrow (A', B') \quad (3.12)$$

en  $W_{\mu-\kappa}$  con  $i < s$  o de modo que la correspondiente condición (primada) (3.2.2) no se cumpla. En este último caso, establecemos  $u_0 := \max\{u: b'_{s'} < u \leq \mu \text{ y } u \notin A'\}$  para que  $(A', B') -_2 b'_i \nearrow (A', B') -_2 b'_i +_2 u_0$  ya haya sido demostrado como perteneciente a  $W_{\mu,\kappa}$ , lo que impide (3.12). Por lo tanto, podemos asumir  $i < s$  con  $\{u: b'_{s'} < u \leq \mu \text{ y } u \notin A'\} = \emptyset$ . Pero entonces  $(A', B') -_2 b'_s \nearrow (A', B')$  ya se demostró que pertenece a  $W_{\mu,\kappa}$ , lo que nuevamente impide (3.12).  $\square$

**Teorema 3.2.3.** *Sea  $(A, B)$  una celda de  $X_{\mu,\kappa}$  con  $r > 1$ .*

- (1) *Supongamos que (3.2.2) se cumple y  $s = 1$ . Si  $b_1 - 1 \in \{A\}$ , entonces  $(A, B) -_1 (b_1 - 1) \nearrow (A, B)$  es un apareamiento en  $W_{\mu,\kappa}$ .*
- (2) *Supongamos que (3.2.2) falla (en particular  $b_s < \mu$ ) y  $s = \mu - \kappa$ .*

(a) *Si  $a_r = \mu$ , entonces  $(A, B) -_1 \mu \nearrow (A, B)$  es un apareamiento en  $W_{\mu,\kappa}$ .*

(b) *Si  $a_r < \mu$  y*

$$(b.1) \quad \langle b_s + 1, \mu - 1 \rangle \subseteq \{A\};$$

$$(b.2) \quad \langle 1, b_s - 1 \rangle \not\subseteq \{B\};$$

$$(b.3) \quad \bar{a} := \max(\langle 1, b_s - 1 \rangle - \{B\}) \in \{A\},$$

*entonces  $(A, B) -_1 \bar{a} \nearrow (A, B)$  es un apareamiento en  $W_{\mu,\kappa}$ .*

*Además, los tres tipos de apareamientos descritos anteriormente son todos los apareamientos en  $W_{\mu,\kappa}$  que surgen mediante la inserción de un vértice en la primera coordenada de una celda en  $X_{\mu,\kappa}$ .*

Notemos que, si  $b_s < \mu - 1$  en (b), entonces (b.1) obliga a  $a_r = \mu - 1$ . Sin embargo, podría darse el caso de que  $b_s = \mu - 1$  en el inciso (b), en cuyo caso (b.1) es trivialmente cierto.

*Demostración.* Sea  $(A, B)$  una celda en  $X_{\mu,\kappa}$  que cumple con  $r > 1$  junto con las condiciones del inciso (1) del teorema. En particular,  $B = b$  con  $b = b_1$ . Primero, afirmamos que  $(A, b)$  no es redundante. De hecho, ningún apareamiento  $(A, b) \nearrow (A, b) +_2 u$  puede estar en  $W_{\mu,\kappa}$ , en vista del Teorema 3.2.2 (ya que se fuerza  $u < b - 1$ ). Por otro lado, antes de que algún apareamiento

$$(A, b) \nearrow (A, b) +_1 u \quad (3.13)$$

pueda construirse, necesariamente por  $\mathcal{P}(r - 1, 1, u, (A, b))$  y con  $u < b - 1$  (la última condición en vista de las hipótesis en (1)), la instrucción anterior  $\mathcal{P}(r - 1, 1, b - 1, (A, b) +_1 u -_1 (b - 1))$  tendría que evaluar el par

$$\left( (A, b) +_1 u -_1 (b - 1), (A, b) +_1 u \right),$$

donde ambas entradas están disponibles en ese momento: la segunda porque se supone que permanece disponible hasta  $\mathcal{P}(r - 1, 1, u, (A, b))$ , y la primera en vista del Teorema 3.2.2, que descarta una posible inserción de un vértice en la segunda coordenada, y debido a las hipótesis en (1), que descartan una

posible inserción anterior de un vértice en la primera coordenada. Esto impide (3.13) y completa el argumento para la no redundancia de  $(A, b)$ . Luego, para probar que el apareamiento  $(A, b) -_1 (b - 1) \nearrow (A, b)$  se encuentra en  $W_{\mu, \kappa}$ , queda por demostrar que  $(A, b) -_1 (b - 1)$  y  $(A, b)$  permanecen disponibles, el primero como no redundante y el segundo como no colapsable, hasta el momento de ejecutar  $\mathcal{P}(r - 2, 1, b - 1, (A, b) -_1 (b - 1))$ . Teniendo en cuenta las hipótesis actuales, la tarea consiste en descartar los siguientes dos tipo de apareamientos que se encuentren en  $W_{\mu, \kappa}$ :

- $(A, b) -_1 w \nearrow (A, b)$ , con  $b < w$ ;
- $(A, b) -_1 (b - 1) \nearrow (A, b) -_1 (b - 1) +_2 w$ , con  $w < b$ .

El Teorema 3.2.2 explica la última opción. Por otro lado, la primera opción no puede ocurrir porque, para  $b < w \in \{A\}$ , el apareamiento  $(A, b) -_1 w \nearrow (A, b) -_1 w +_2 w$  pertenece a  $W_{\mu, \kappa}$ , en vista del Teorema 3.2.2. Esto completa la prueba del inciso (1) del teorema.

Para el resto de la prueba, sea  $(A, B)$  con  $r > 1$  y  $s = \mu - \kappa$ , pero de modo que (3.2.2) falle (en particular  $b_s < \mu$ ).

**Caso  $a_r = \mu$ .** Mostramos a continuación que  $(A, B)$  no es redundante. Además, el Teorema 3.2.2 descarta que un apareamiento de la forma  $(A, B) -_2 b_i \nearrow (A, B)$  pertenezca a  $W_{\mu, \kappa}$ . Por lo tanto, la primera instrucción que podría hacer que  $(A, B)$  pierda su condición de disponibilidad es  $\mathcal{P}(r + s - 3, 1, \mu, (A, B) -_1 \mu)$ , que evalúa el par  $((A, B) -_1 \mu, (A, B))$  y construye el apareamiento afirmado  $(A, B) -_1 \mu \nearrow (A, B)$ . De hecho, al igual que  $(A, B)$ ,  $(A, B) -_1 \mu$  está disponible en el momento de ejecutar  $\mathcal{P}(r + s - 3, 1, \mu, (A, B) -_1 \mu)$ , debido a la hipótesis  $s = \mu - \kappa$ . Por lo tanto, queda por demostrar que  $(A, B)$  no es redundante. Supongamos, para una contradicción, que un apareamiento

$$(A, B) \nearrow (A, B) +_j u \tag{3.14}$$

se encuentra en  $W_{\mu, \kappa}$ . Las hipótesis  $s = \mu - \kappa$  y  $a_r = \mu$  fuerzan  $j = 1$  y  $u < \mu$ , respectivamente. Como en argumentos similares anteriores, la contradicción surge al observar que, antes de que (3.14) sea construido por  $\mathcal{P}(r + s - 2, 1, u, (A, B))$ , la instrucción anterior  $\mathcal{P}(r + s - 2, 1, \mu, (A, B) +_1 u -_1 \mu)$ , que evalúa el par

$$\left( (A, B) +_1 u -_1 \mu, (A, B) +_1 u \right), \tag{3.15}$$

construye el apareamiento  $(A, B) +_1 u -_1 \mu \nearrow (A, B) +_1 u$ . De hecho, en el momento de ejecutar  $\mathcal{P}(r + s - 2, 1, \mu, (A, B) +_1 u -_1 \mu)$ , la segunda entrada en (3.15) está disponible, ya que se supone que permanece disponible hasta  $\mathcal{P}(r + s - 2, 1, u, (A, B))$ , mientras que la hipótesis  $s = \mu - \kappa$  da la correspondiente disponibilidad de la primera entrada en (3.15). Esto completa la prueba del inciso (a) del teorema.

**Caso  $a_r < \mu$  con (b.1)–(b.3) que se cumplen.** Comencemos notando que, bajo las hipótesis actuales, el Teorema 3.2.2 implica que

$$\text{el apareamiento } (A, B) +_1 \mu -_2 b_s \nearrow (A, B) +_1 \mu \text{ pertenece a } W_{\mu, \kappa}. \tag{3.16}$$

(Nótese que  $s = \mu - \kappa > 1$ , en vista de (3.7)). Luego, probamos que  $(A, B)$  no es redundante. Supongamos, para una contradicción, que un apareamiento

$$(A, B) \nearrow ((A, B) +_j u) \tag{3.17}$$

se encuentra en  $W_{\mu,\kappa}$ . La hipótesis  $s = \mu - \kappa$  fuerza  $j = 1$ , mientras que (b.1)–(b.3) fuerzan  $u = \mu$  o  $u < \bar{a}$ . La contradicción entonces surge al observar que la opción  $u = \mu$  es imposible en vista de (3.16), mientras que la opción  $u < \bar{a}$  es imposible porque, en tal caso, antes de que  $\mathcal{P}(r + s - 2, 1, u, (A, B))$  pueda construir (3.2), la instrucción anterior  $\mathcal{P}(r + s - 2, 1, \bar{a}, (A, B) +_1 u -_1 \bar{a})$ , que evalúa el par

$$\left( (A, B) +_1 u -_1 \bar{a}, (A, B) +_1 u \right), \quad (3.18)$$

construye el apareamiento  $(A, B) +_1 u -_1 \bar{a} \nearrow (A, B) +_1 u$ . De hecho, en el momento de ejecutar  $\mathcal{P}(r + s - 2, 1, \bar{a}, (A, B) +_1 u -_1 \bar{a})$ , la segunda entrada en (3.18) está disponible, ya que se supone que permanece disponible hasta  $\mathcal{P}(r + s - 2, 1, u, (A, B))$ . Del mismo modo, en vista de la hipótesis  $s = \mu - \kappa$ , la única forma en que podría fallar la disponibilidad correspondiente de la primera entrada en (3.18) es con el apareamiento  $(A, B) +_1 u -_1 \bar{a} \nearrow (A, B) +_1 u -_1 \bar{a} +_1 \mu$  que pertenece a  $W_{\mu,\kappa}$ . Pero tal posibilidad es descartada por el Teorema 3.2.2, que muestra que, al igual que (3.16), el apareamiento

$$(A, B) +_1 u -_1 \bar{a} +_1 \mu -_2 b_2 \nearrow (A, B) +_1 u -_1 \bar{a} +_1 \mu$$

pertenece a  $W_{\mu,\kappa}$ . Esto completa el argumento para la no redundancia de  $(A, B)$ . Luego, la prueba del inciso (b) del teorema se completará tan pronto como argumentemos que  $(A, B) -_1 \bar{a}$  y  $(A, B)$  están disponibles, el primero como no redundante y el segundo como no colapsable, en el momento de ejecutar la instrucción  $\mathcal{P}(r + s - 3, 1, \bar{a}, (A, B) -_1 \bar{a})$ . Teniendo en cuenta el Teorema 3.2.2 y las hipótesis actuales, la tarea consiste en descartar que los siguientes dos tipos de apareamientos se encuentran en  $W_{\mu,\kappa}$ :

- $(A, B) -_1 w \nearrow (A, B)$ , con  $b_s < w \in \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$  (en particular  $w < \mu$ );
- $(A, B) -_1 \bar{a} \nearrow (A, B) -_1 \bar{a} +_1 \mu$ .

El primero es descartado por el inciso (a) del teorema en discusión, que ya ha sido demostrado para dar  $(A, B) -_1 w \nearrow (A, B) -_1 w +_1 \mu$  como un apareamiento que se encuentra en  $W_{\mu,\kappa}$ . El segundo es descartado por el Teorema 3.2.2, que muestra que el apareamiento  $(A, B) -_1 \bar{a} +_1 \mu -_2 b_s \nearrow (A, B) -_1 \bar{a} +_1 \mu$  se encuentra en  $W_{\mu,\kappa}$ . Esto completa la prueba del inciso (b) del teorema.

La afirmación final en este teorema es equivalente a lo afirmado por la Proposición 3.2.6 a continuación, y se demostrará después de registrar dos consecuencias directas de la descripción explícita de los apareamientos en los Teoremas 3.2.2 y 3.2.3.  $\square$

**Corolario 3.2.4.** *Las celdas redundantes  $(A, B)$  asociadas a los apareamientos en los Teoremas 3.2.2 y 3.2.3 caen en uno de los siguientes casos (con etiquetas de acuerdo a los incisos relevantes en esos dos teoremas):*

**(3.2.2)** *Si  $s < \mu - \kappa$  y (3.2.2) falla, entonces  $(A, B) \nearrow (A, B) +_2 \max(\langle b_s + 1, \mu \rangle - \{A\})$  es un apareamiento en  $W_{\mu,\kappa}$ .*

**(3.2.3.1)** *Si  $r < \mu - \kappa$ ,  $s = 1$ ,  $1 \leq b_1 - 1 \notin \{A\}$  y (3.2.2) se cumple, entonces  $(A, B) \nearrow (A, B) +_1 (b_1 - 1)$  es un apareamiento en  $W_{\mu,\kappa}$ .*

**(3.2.3.2.a)** *Si  $r < \mu - \kappa = s$ ,  $a_r < \mu$  y  $\langle b_s + 1, \mu - 1 \rangle \not\subseteq \{A\}$ , entonces  $(A, B) \nearrow (A, B) +_1 \mu$  es un apareamiento en  $W_{\mu,\kappa}$ . (Nótese que en este caso (3.2.2) falla.)*

**(3.2.3.2.b)** *Si  $r < \mu - \kappa = s$ ,  $\max\{a_r, b_s\} < \mu$  y*

$$(c.1) \quad \langle b_s + 1, \mu - 1 \rangle \subseteq \{A\};$$

$$(c.2) \quad \langle 1, b_s - 1 \rangle \not\subseteq \{B\};$$

$$(c.3) \quad \bar{a} := \max(\langle 1, b_s - 1 \rangle - \{B\}) \notin \{A\},$$

entonces  $(A, B) \nearrow (A, B) +_1 \bar{a}$  es un apareamiento en  $W_{\mu, \kappa}$ . (Nótese que en este caso (3.2.2) falla.)

**Corolario 3.2.5.** *Las celdas  $(A, B)$  que no están involucradas en ninguno de los apareamientos descritos en los Teoremas 3.2.2 y 3.2.3 se enumeran a continuación.*

1. Todos los casos en los que (3.2.2) se cumple tienen  $s = 1$  y uno de:

$$(i) \quad 1 = b_1.$$

$$(ii) \quad 1 \leq b_1 - 1 \in \{A\} \text{ y } r = 1.$$

$$(iii) \quad 1 \leq b_1 - 1 \notin \{A\} \text{ y } r = \mu - \kappa.$$

2. Todos los casos en los que (3.2.2) falla (así que  $b_s < \mu$ ), tienen  $s = \mu - \kappa$  y uno de:

$$(iv) \quad a_r = \mu \text{ y } r = 1.$$

$$(v) \quad a_r < \mu, \langle b_s + 1, \mu - 1 \rangle \not\subseteq \{A\} \text{ y } r = \mu - \kappa.$$

$$(vi) \quad a_r < \mu, \langle b_s + 1, \mu - 1 \rangle \subseteq \{A\} \text{ y } \langle 1, b_s - 1 \rangle \subseteq \{B\}.$$

$$(vii) \quad a_r < \mu, \langle b_s + 1, \mu - 1 \rangle \subseteq \{A\}, \langle 1, b_s - 1 \rangle \not\subseteq \{B\} \text{ con } \bar{a} := \max(\langle 1, b_s - 1 \rangle - \{B\}) \in \{A\}, \text{ y } r = 1.$$

$$(viii) \quad a_r < \mu, \langle b_s + 1, \mu - 1 \rangle \subseteq \{A\}, \langle 1, b_s - 1 \rangle \not\subseteq \{B\} \text{ con } \bar{a} := \max(\langle 1, b_s - 1 \rangle - \{B\}) \notin \{A\}, \text{ y } r = \mu - \kappa.$$

**Proposición 3.2.6.** *Todas las celdas enumeradas en el Corolario 3.2.5 son críticas, es decir, los Teoremas 3.2.2 y 3.2.3 describen completamente el campo gradiente  $W_{\mu, \kappa}$ .*

*Demostración.* Cualquier apareamiento en  $W_{\mu, \kappa}$  que pueda estar ausente en las descripciones de los Teoremas 3.2.2 y 3.2.3 tendría que involucrar dos de las celdas descritas en el Corolario 3.2.5. Por lo tanto, basta con mostrar que cualquier cara  $(p - 1)$ -dimensional de una celda  $p$ -dimensional en el Corolario 3.2.5 está involucrada en un apareamiento de los Teoremas 3.2.2 y 3.2.3. La situación para las celdas en (i) y (ii) es elemental. De hecho, la única celda posible en (i) es  $(23 \dots \mu, 1)$ , que no es una celda de  $X_{\mu, \kappa}$  en vista de (3.7) y (3.8). Por otro lado, la única celda en (ii) es  $(\mu - 1, \mu)$ , que no tiene caras propias. Todas las demás instancias se analizan a continuación caso por caso.

- La situación para una celda  $(A, b)$  en (iii) se resuelve al observar que

$$\begin{aligned} (A, b) -_1 u \nearrow (A, b) -_1 u +_2 u, & \quad \text{para } b < u, \text{ en vista del Teorema 3.2.2;} \\ (A, b) -_1 u \nearrow (A, b) -_1 u +_1 (b - 1), & \quad \text{para } u < b - 1, \text{ en vista del Teorema 3.2.3(1).} \end{aligned}$$

- Una celda  $(\mu, B)$  en (iv) tiene  $b_s < \mu - 1$ , ya que (3.2.2) falla, así que la propiedad deseada se obtiene al observar que  $(\mu, B) -_2 u \nearrow (\mu, B) -_2 u +_2 (\mu - 1)$ , en vista del Teorema 3.2.2.

- La situación para una celda  $(A, B)$  en (v) se resuelve al observar que

$$\begin{aligned} (A, B) -_2 u \nearrow (A, B) -_2 u +_2 \mu, & \quad \text{en vista del Teorema 3.2.2;} \\ (A, B) -_1 u \nearrow (A, B) -_1 u +_1 \mu, & \quad \text{en vista del Teorema 3.2.3(2.a).} \end{aligned}$$

- La única celda posible en (vi) es  $(A, B) = ((\mu - \kappa + 1) \cdots (\mu - 1), 12 \cdots (\mu - \kappa))$ , que se encuentra en  $X_{\mu, \kappa}$  solo cuando  $2\kappa \leq \mu + 1$ . En tal caso, la propiedad deseada se resuelve al observar que

$$\begin{aligned} (A, B)_{-2} u \nearrow (A, B)_{-2} u + 2 \mu, & \text{ en vista del Teorema 3.2.2;} \\ (A, B)_{-1} u \nearrow (A, B)_{-1} u + 1 \mu, & \text{ en vista del Teorema 3.2.3(2.a).} \end{aligned}$$

- La situación para una celda  $(a, B)$  en (vii) se resuelve al observar que  $(a, B)_{-2} u \nearrow (a, B)_{-2} u + 2 \mu$ , en vista del Teorema 3.2.2.
- La situación para una celda  $(A, B)$  en (viii) se resuelve al observar que

$$\begin{aligned} (A, B)_{-2} u \nearrow (A, B)_{-2} u + 2 \mu, & \text{ en vista del Teorema 3.2.2;} \\ (A, B)_{-1} u \nearrow (A, B)_{-1} u + 1 \mu, & \text{ si } b_s < u, \text{ en vista del Teorema 3.2.3(2.a);} \\ (A, B)_{-1} u \nearrow (A, B)_{-1} u + 1 \bar{a}, & \text{ si } u < \bar{a}, \text{ en vista del Teorema 3.2.3(2.b).} \quad \square \end{aligned}$$

### 3.2.1 Conteo de celdas críticas

A continuación, examinamos más de cerca las celdas críticas enumeradas en el Corolario 3.2.5. Hemos observado que (debido a nuestras suposiciones preparatorias (3.7) y (3.8)) no hay celdas críticas que encajen en el inciso (i), y que la única celda crítica de tipo (ii) es  $(\mu - 1, \mu)$ , que es la única celda crítica 0-dimensional. Una situación similar se aplica a las celdas de tipo (vi). A saber, como se observó en la prueba anterior, la única celda posible de este tipo es

$$((\mu - \kappa + 1)(\mu - \kappa + 2) \cdots (\mu - 1), 12 \cdots (\mu - \kappa)), \quad (3.19)$$

que se encuentra en dimensión  $\mu - 3$ , y que es una celda de  $X_{\mu, \kappa}$  si y solo si  $2\kappa - 1 \leq \mu$ .

**Proposición 3.2.7.** *Hay un total de  $2^{\binom{\mu-1}{\mu-\kappa}}$  celdas críticas de tipos (iii), (iv) o (vii), todas las cuales tienen dimensión  $\mu - \kappa - 1$ . Además, las celdas críticas de tipo (v) o (viii) tienen dimensión  $2(\mu - \kappa - 1)$  y aparecen solo cuando  $\mu < 2\kappa - 1$ .*

*Demostración.* Un conteo elemental indica que hay:

- $\binom{\mu-1}{\mu-\kappa}$  celdas críticas de tipo (iii);
- $\binom{\mu-2}{\mu-\kappa}$  celdas críticas de tipo (iv);
- $\binom{\mu-2}{\mu-\kappa-1}$  celdas críticas de tipo (vii).

Esto hace un total de  $\binom{\mu-1}{\mu-\kappa} + \binom{\mu-2}{\mu-\kappa} + \binom{\mu-2}{\mu-\kappa-1} = \binom{\mu-1}{\mu-\kappa} + \binom{\mu-1}{\mu-\kappa}$  celdas críticas, todas las cuales claramente tienen dimensión  $\mu - \kappa - 1$ . Para la segunda afirmación de la proposición, obsérvese que una celda crítica  $(A, B)$  de tipo (v) o (viii) satisface una inclusión estricta

$$\{A\} \cup \{B\} \subset \langle 1, \mu - 1 \rangle, \quad (3.20)$$

lo cual se deduce de la condición  $\langle b_s + 1, \mu - 1 \rangle \not\subseteq \{A\}$ , en el caso de (v), y de la condición  $\max(\langle 1, b_s - 1 \rangle - \{B\}) \not\subseteq \{A\}$ , en el caso de (viii). El resultado se sigue ya que (3.20) se cumple solo cuando  $2(\mu - \kappa) < \mu - 1$ .  $\square$

tipo	existencia	dimensión
(i)	nunca	
(ii)	siempre	0
(iii)	siempre	$\mu - \kappa - 1$
(iv)	siempre	$\mu - \kappa - 1$
(vii)	siempre	$\mu - \kappa - 1$
(v)	$\mu < 2\kappa - 1$	$2(\mu - \kappa - 1)$
(viii)	$\mu < 2\kappa - 1$	$2(\mu - \kappa - 1)$
(vi)	$\mu \geq 2\kappa - 1$	$\mu - 3$

Figura 3.1: Celdas críticas por tipo, dimensión y condición que garantiza su existencia

**Teorema 3.2.8.** Para  $1 \leq d \leq m \geq 2$ ,  $\text{DConf}(\Delta^{m,d}, 2)$  es

- un espacio conexo por trayectorias con homología libre de torsión, el cual es
- homotópicamente equivalente a un complejo celular que tiene tantas celdas en una dimensión dada  $i$  como el  $i$ -ésimo número de Betti  $\beta_i(m, d)$  de  $\text{DConf}(\Delta^{m,d}, 2)$ .

Específicamente, poniendo  $s_{m,d} := \min\{d, m-1\}$  y  $\beta_{m,d} := \beta_{s_{m,d}}(m, d)$ , tenemos:

(I)  $\text{DConf}(\Delta^{m,d}, 2)$  es  $(s_{m,d} - 1)$ -conexo.

(II) Para  $d \in \{m-1, m\}$ ,

$$\text{DConf}(\Delta^{m,d}, 2) \simeq S^{m-1}.$$

(III) Para  $d = m-2$ ,

$$\text{DConf}(\Delta^{m,m-2}, 2) \simeq \bigvee_{\beta_{m,m-2}} S^{m-2}, \quad (3.21)$$

donde  $\beta_{m,m-2} = 2m + 1$ .

(IV) Para  $\frac{m-2}{2} \leq d \leq m-3$  (de modo que  $m \geq 4$ ),

$$\text{DConf}(\Delta^{m,d}, 2) \simeq \left( \bigvee_{\beta_{m,d}} S^d \right) \cup_{\alpha_{m,d}} e^{m-2}, \quad (3.22)$$

donde  $\beta_{m,d} = 2\binom{m}{d+1}$ . Además, el mapeo de adjunción  $\alpha_{m,d}: S^{m-3} \rightarrow \bigvee_{\beta_{m,d}} S^d$  es nulo-homotópico siempre que  $1 < d = m-3$ , de modo que

$$\text{DConf}(\Delta^{m,m-3}, 2) \simeq \left( \bigvee_{m(m-1)} S^{m-3} \right) \vee S^{m-2} \quad (3.23)$$

para  $m \geq 5$ .

(V) Para  $d < \frac{m-2}{2}$ ,

$$\text{DConf}(\Delta^{m,d}, 2) \simeq \left( \bigvee_{\beta_{m,d}} S^d \right) \cup \left( \bigcup_{\beta_{2d}(m,d)} e^{2d} \right), \quad (3.24)$$

donde  $\beta(m, d) = 2 \binom{m}{d+1}$  y

$$\beta_{2d}(m, d) = \binom{m}{d+1} \binom{m-d-1}{d+1} - \sum_{b=m-d}^m \sum_{a=b-d-1}^{b-1} \binom{a-1}{b+d-m} \binom{a-b+m-d-1}{d+1-b+a}.$$

*Prueba del Teorema 3.2.8.* Recordemos que hemos dejado de lado los dos casos elementales en el inciso (II), por lo que, en términos de los ajustes de notación en la Sección 3.2, (3.7) se cumple. El inciso (I) se sigue del Teorema 1.3.5 y del resumen en la Figura 3.1. Para el inciso (III), donde  $\kappa = 2$ , úsese además la Proposición 3.2.7. Del mismo modo, la hipótesis numérica en el inciso (IV), que se convierte en  $\kappa \geq 3$  y  $2\kappa - 1 \leq \mu$ , lleva a (3.22), mientras que la hipótesis numérica en el inciso (V) es  $\mu < 2\kappa - 1$  y lleva a (3.24) una vez que contamos el número de celdas críticas en dimensión  $2(\mu - \kappa - 1)$ . Los detalles de conteo se proporcionan en la Proposición 3.2.9 a continuación.

Aparte de la segunda afirmación en el inciso (IV), cuya prueba se da en la siguiente sección, el único argumento faltante es el de la minimalidad de las estructuras celulares en (3.22) y (3.24), es decir, los valores precisos de los números de Betti relevantes. En ambos casos, basta con mostrar la anulación de los correspondientes diferenciales de Morse (1.7). Tal condición se sigue de la dispersión en el complejo de cadenas relevante, siempre que  $d < m - 3$  en el caso de (3.22), y siempre que  $d > 1$  en el caso de (3.24). Las situaciones no dispersas se tratan a continuación.

El caso  $1 < d = m - 3$  en (3.22) se resolverá una vez que demostremos la segunda afirmación en el inciso (IV) —en la siguiente sección. Por otro lado, el caso  $1 = d = m - 3$  en (3.22) corresponde a  $\text{DConf}(\Delta^{4,1}, 2)$ , en cuyo caso la trivialidad del diferencial de Morse se sigue del homeomorfismo de Abrams mencionado al final del Ejemplo 2.2.15, así como en las conclusiones de esta tesis. Por último, el caso  $d = 1$  en (3.24) se sigue de la Proposición 3.2.10 a continuación.  $\square$

**Proposición 3.2.9.** Para  $\mu < 2\kappa - 1$ , el número de celdas críticas en dimensión  $2(\mu - \kappa - 1)$  es

$$\binom{\mu-1}{\mu-\kappa} \binom{\kappa-1}{\mu-\kappa} - \sum_{b=\kappa}^{\mu-1} \sum_{a=b-(\mu-\kappa)}^{b-1} \binom{a-1}{b-\kappa} \binom{a-b+\kappa-1}{\mu-\kappa-b+a}. \quad (3.25)$$

*Demostración.* Las celdas en consideración son aquellas de los tipos (v) y (viii) en el Corolario 3.2.5. Nótese que  $\binom{\mu-1}{\mu-\kappa} \binom{\kappa-1}{\mu-\kappa}$  cuenta el número de celdas  $(A, B)$  que satisfacen las condiciones

$$a_r < \mu > b_s \quad \text{y} \quad r = \mu - \kappa = s, \quad (3.26)$$

que son comunes a (v) y (viii). El resultado se seguirá una vez que expliquemos cómo la doble suma en (3.25) cuenta la cardinalidad del conjunto  $\mathcal{C}$  de celdas que satisfacen (3.26) sin ser de tipo (v) o (viii).

Nótese que las celdas de  $\mathcal{C}$  están descritas por las condiciones

$$a_r < \mu > b_s, \quad r = \mu - \kappa = s, \quad \langle b_s + 1, \mu - 1 \rangle \subseteq A \quad (3.27)$$

y ya sea  $\langle 1, b_s \rangle = B$  o, en su defecto,  $\max(\langle 1, b_s \rangle - B) \in A$ . Sin embargo, la hipótesis  $\mu < 2\kappa - 1$  implica que la condición  $\langle 1, b_s \rangle = B$  es incompatible con las de (3.27). Por lo tanto, las celdas de  $\mathcal{C}$  están realmente descritas por

$$a_r < \mu > b_s, \quad r = \mu - \kappa = s, \quad \langle b_s + 1, \mu - 1 \rangle \subseteq A, \quad \langle 1, b_s \rangle \not\subseteq B, \quad \bar{a} := \max(\langle 1, b_s \rangle - B) \in A.$$

Estas condiciones se esquematizan como

$$1 \cdots (\bar{a} - 1) \underbrace{\bar{a}}_{\text{en } A} \underbrace{(\bar{a} + 1) \cdots (b_s - 1) b_s}_{b_s - \bar{a} \text{ elementos en } B} \underbrace{(b_s + 1) \cdots (\mu - 1)}_{\mu - 1 - b_s \text{ elementos en } A}$$

lo cual hace claro que la doble suma en (3.25) cuenta las celdas en  $\mathcal{C}$  (el índice  $b$  en la suma externa representa  $b_s$ , y el índice  $a$  en la suma interna representa  $\bar{a}$ ).  $\square$

**Proposición 3.2.10.** *Supongamos que  $\mu < 2\kappa - 1$  y  $\mu - \kappa - 1 = 1$ . Entonces  $2^{\binom{\mu-1}{\mu-\kappa}}$  y (3.25) dan, respectivamente, el primer y segundo número de Betti del espacio conexo 2-dimensional  $X_{\mu,\kappa}$ .*

*Demostración.* Bajo la hipótesis actual,  $X_{\mu,\kappa}$  es el espacio de configuraciones discretas de dos puntos ordenados en el grafo completo  $K_\mu$  sobre  $\mu$  vértices, con  $\mu \geq 5$ . El resultado se sigue, después de un cálculo directo, de la Proposición 21 y de las ecuaciones (1) y (2) en [13].  $\square$

### 3.3 Flujo gradiente

En esta sección probamos la segunda afirmación en el inciso (IV) del Teorema 3.2.8, por lo que, a lo largo de esta sección, asumimos  $1 < d = m - 3$ , es decir,  $\kappa = 3$  y  $\mu \geq 6$ . También utilizamos la notación más legible  $a_1, \dots, a_r \mid b_1, \dots, b_s$  como una alternativa para la celda  $(a_1 \cdots a_r, b_1 \cdots b_s)$  en (3.8). Así, la celda crítica de dimensión superior  $(\mu - 3)$  en  $X_{\mu,\kappa}$  es

$$\mu - 2, \mu - 1 \mid 1, \dots, \mu - 3, \tag{3.28}$$

mientras que una verificación fácil (usando las descripciones en Corollario 3.2.5) nos da que las celdas críticas de dimensión  $(\mu - 4)$  son

$$(iii) \ 1, \dots, \hat{i}, \dots, \widehat{b-1}, \hat{b}, \dots, \mu \mid b, \text{ para } 1 \leq i \leq b - 2 \text{ y } b \leq \mu,$$

$$(iv) \ \mu \mid 1, \dots, \hat{i}, \dots, \mu - 2, \text{ para } 1 \leq i \leq \mu - 2,$$

$$(vii) \ a \mid 1, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{a}, \dots, \mu - 1, \text{ para } 1 \leq i < a \leq \mu - 2,$$

donde un sombrero se utiliza para indicar la eliminación de la correspondiente coordenada, y la enumeración de los incisos sigue la utilizada en el Corollario 3.2.5.

La trivialidad homotópica del mapeo de adjunción relevante  $S^{\mu-4} \rightarrow \vee S^{\mu-4}$  puede verificarse homológicamente (ya que  $\mu \geq 6$ ). Por (1.7), habremos terminado una vez que se pruebe el siguiente hecho:

**Proposición 3.3.1.** *Fijemos una celda crítica  $\alpha$  de dimensión  $(\mu - 4)$ . Teniendo en cuenta la multiplicidad y los números de incidencia como en (1.9), el número total de caminos gradientes desde las caras de (3.28) a  $\alpha$  es cero.*

Para la prueba, consideramos los caminos gradientes en la Proposición 3.3.1 como *caminos gradientes inferiores* desde (3.28) hacia 1-cocaras  $\beta$  de  $\alpha$ , es decir, con  $\beta \searrow \alpha$ , y hacemos una descripción *en reversa* de estos caminos. Para empezar, ninguna de estas  $\beta$  es crítica, en vista del Teorema 3.1.4. Además, los caminos inferiores que nos interesan involucran una  $\beta$  colapsable, digamos con  $\alpha_1 \nearrow \beta$ . Así que repetimos la estrategia de descripción ahora para cualquier posible 1-cocara no redundante  $\beta_1$  de  $\alpha_1$ ,

$$\beta_1 \searrow \alpha_1 \nearrow \beta \searrow \alpha.$$

Esto crea un árbol  $T_\alpha$  que describe todos los posibles caminos en la Proposición 3.3.1, con cada rama deteniéndose tan pronto como obtenemos una  $\beta_k \searrow \alpha_k$  con  $\beta_k$  siendo la cara crítica (3.28). Gran parte del trabajo duro en el análisis de  $T_\alpha$  se simplifica considerablemente con los dos resultados auxiliares siguientes.

**Lema 3.3.2.** *No hay caminos gradientes inferiores*

$$\alpha_0 \searrow \beta_1 \nearrow \alpha_1 \searrow \cdots \searrow \beta_k \nearrow \alpha_k \quad (3.29)$$

que comiencen en la celda crítica  $\alpha_0 = \mu - 2, \mu - 1 \mid 1, \dots, \mu - 3$  y terminen en

- (a)  $\alpha_k = \mu - j + 1, \mu - j + 2, \dots, \mu \mid 1, \dots, \hat{i}, \dots, \mu - j$ , si  $3 \leq j \leq \mu - 3$  y  $1 \leq i \leq \mu - j$ .
- (b)  $\alpha_k = \ell, \mu - j + 1, \mu - j + 2, \dots, \mu \mid 1, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{\ell}, \dots, \mu - j$ , si  $2 \leq j \leq \mu - 4$  y  $1 \leq i < \ell \leq \mu - j$ .
- (c)  $\alpha_k = i, \mu - j + 1, \mu - j + 2, \dots, \mu \mid 1, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{\ell}, \dots, \mu - j$ , si  $2 \leq j \leq \mu - 4$  y  $1 \leq i < \ell \leq \mu - j$ .

*Demostración.* (a) Procedemos por inducción sobre la diferencia  $\mu - 3 - j \geq 0$ , notando que siempre podemos asumir  $i < \mu - j$ , pues de lo contrario  $\alpha_k$  es redundante en vista de Corollario 3.2.4(3.2.2). La inducción comienza con el caso  $j = \mu - 3$ , para el cual se descarta un camino potencial (3.29) ya que se vería obligado a terminar en la forma

$$4, \dots, \mu \mid 1, 2 \searrow 4, \dots, \mu \mid 1, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{3} \nearrow 4, \dots, \mu \mid 1, \dots, \hat{i}, \dots, 3 = \alpha_k, \quad (3.30)$$

con  $4, \dots, \mu \mid 1, 2$  redundante en vista del Corollario 3.2.4(3.2.2). Aquí y más adelante, el número encima de una arista dirigida ascendente es la etiqueta del hecho que justifica la arista. Además, el lector debe tener en cuenta que, como se explicó en la construcción del árbol  $T_\alpha$ , este tipo de caminos gradientes *deben* verificarse mediante una lectura de derecha a izquierda, ya que estamos restringiendo la atención a caminos que terminan en  $\alpha_k$ . Nótese que la arista descendente en (3.30) está forzada porque  $\{4, \dots, \mu\}$  tiene la cardinalidad máxima permitida; tal situación se repetirá varias veces en las consideraciones a continuación. Ahora, habiendo aclarado los puntos anteriores, nótese que, para  $j < \mu - 3$ , un camino potencial (3.29) se vería obligado a terminar en cualquiera de las tres formas

$$\left. \begin{array}{l} \beta_1 := \mu - j + 1, \dots, \mu \mid 1, \dots, \mu - j - 1 \\ \beta_2 := \mu - j, \dots, \mu \mid 1, \dots, \hat{i}, \dots, \mu - j - 1 \\ \beta_3 := i, \mu - j + 1, \dots, \mu \mid 1, \dots, \hat{i}, \dots, \mu - j - 1 \end{array} \right\} \searrow \mu - j + 1, \dots, \mu \mid 1, \dots, \hat{i}, \dots, \mu - j - 1$$

$$\nearrow \mu - j + 1, \dots, \mu \mid 1, \dots, \hat{i}, \dots, \mu - j = \alpha_k.$$

Pero la primera y la tercera opciones se descartan porque  $\beta_1$  y  $\beta_3$  son redundantes en vista del Corollario 3.2.4(3.2.2), mientras que la segunda opción se descarta por inducción.

Los argumentos para (b) y (c) tienen solo variantes menores. Damos detalles completos para mayor claridad.

(b) Procedemos por inducción sobre la diferencia  $\mu - 4 - j \geq 0$ , notando que siempre podemos asumir  $\ell < \mu - j$ , pues de lo contrario el resultado se reduce al caso (a). La inducción comienza con el caso  $j = \mu - 4$ , para el cual se descarta un camino potencial (3.29) ya que se vería obligado a terminar en la forma

$$\ell, 5, \dots, \mu \mid 1, \dots, \hat{\ell}, \dots, 3 \searrow \ell, 5, \dots, \mu \mid 1, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{\ell}, \dots, 3 \nearrow \ell, 5, \dots, \mu \mid 1, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{\ell}, \dots, 4 = \alpha_k,$$

con  $\ell, 5, \dots, \mu | 1, \dots, \hat{\ell}, \dots, 3$  redundante en vista de Corollario 3.2.4(3.2.2). Luego, asumiendo  $j < \mu - 4$ , un camino potencial (3.29) se vería obligado a terminar en cualquiera de las tres formas

$$\left. \begin{array}{l} \beta_1 := i, \ell, \mu - j + 1, \dots, \mu | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{\ell}, \dots, \mu - j - 1 \\ \beta_2 := \ell, \mu - j, \dots, \mu | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{\ell}, \dots, \mu - j - 1 \\ \beta_3 := \ell, \mu - j + 1, \dots, \mu | 1, \dots, \hat{\ell}, \dots, \mu - j - 1 \end{array} \right\} \searrow$$

$$\searrow \ell, \mu - j + 1, \dots, \mu | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{\ell}, \dots, \mu - j - 1$$

$$\xrightarrow{3.2.2} \ell, \mu - j + 1, \dots, \mu | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{\ell}, \dots, \mu - j = \alpha_k.$$

Pero la primera y la tercera opciones se descartan porque  $\beta_1$  y  $\beta_3$  son redundantes en vista del Corollario 3.2.4(3.2.2), mientras que la segunda opción se descarta por inducción.

(c) Procedemos por inducción sobre la diferencia  $\mu - 4 - j \geq 0$ , notando que siempre podemos asumir  $\ell < \mu - j$ , pues de lo contrario  $\alpha_k$  es redundante en vista de Corollario 3.2.4(3.2.2). La inducción comienza con el caso  $j = \mu - 4$ , para el cual se descarta un camino potencial (3.29) ya que se vería obligado a terminar en la forma

$$i, 5, \dots, \mu | 1, \dots, \hat{i}, \dots, 3 \searrow i, 5, \dots, \mu | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{\ell}, \dots, 3 \xrightarrow{3.2.2} i, 5, \dots, \mu | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{\ell}, \dots, 4 = \alpha_k,$$

con  $i, 5, \dots, \mu | 1, \dots, \hat{i}, \dots, 3$  redundante en vista de Corollario 3.2.4(3.2.2). Luego, asumiendo  $j < \mu - 4$ , un camino potencial (3.29) se vería obligado a terminar en cualquiera de las tres formas

$$\left. \begin{array}{l} \beta_1 := i, \ell, \mu - j + 1, \dots, \mu | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{\ell}, \dots, \mu - j - 1 \\ \beta_2 := i, \mu - j, \dots, \mu | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{\ell}, \dots, \mu - j - 1 \\ \beta_3 := i, \mu - j + 1, \dots, \mu | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \mu - j - 1 \end{array} \right\} \searrow$$

$$\searrow i, \mu - j + 1, \dots, \mu | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{\ell}, \dots, \mu - j - 1$$

$$\xrightarrow{3.2.2} i, \mu - j + 1, \dots, \mu | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{\ell}, \dots, \mu - j = \alpha_k.$$

Pero la primera y la tercera opciones se descartan porque  $\beta_1$  y  $\beta_3$  son redundantes en vista del Corollario 3.2.4(3.2.2), mientras que la segunda opción se descarta por inducción.  $\square$

El caso  $j = 2$  en el inciso (a) del Lema 3.3.2 es especial:

**Lema 3.3.3.** *Para  $1 \leq \ell \leq \mu - 2$ , existe un único camino gradiente inferior (3.29) que comienza en la cara crítica  $\alpha_0 = \mu - 2, \mu - 1 | 1, \dots, \mu - 3$  y termina en  $\alpha_k = \mu - 1, \mu | 1, \dots, \hat{\ell}, \dots, \mu - 2$ .*

*Demostración.* El resultado es fácil para  $\ell = \mu - 2$ , ya que el único camino de este tipo (3.29) es

$$\mu - 2, \mu - 1 | 1, \dots, \mu - 3 \searrow \mu - 1 | 1, \dots, \mu - 3 \xrightarrow{3.2.3(2.a)} \mu - 1, \mu | 1, \dots, \mu - 3 = \alpha_k. \quad (3.31)$$

Para  $\ell \leq \mu - 3$ , un camino potencial (3.29) se vería obligado a terminar en la forma

$$\left. \begin{array}{l} \beta_1 := \ell, \mu - 1, \mu | 1, \dots, \hat{\ell}, \dots, \mu - 3 \\ \beta_2 := \mu - 2, \mu - 1, \mu | 1, \dots, \hat{\ell}, \dots, \mu - 3 \\ \beta_3 := \mu - 1, \mu | 1, \dots, \mu - 3 \end{array} \right\} \searrow \mu - 1, \mu | 1, \dots, \hat{\ell}, \dots, \mu - 3$$

$$\xrightarrow{3.2.2} \mu - 1, \mu | 1, \dots, \hat{\ell}, \dots, \mu - 2 = \alpha_k. \quad (3.32)$$

Pero la primera opción se descarta porque  $\beta_1$  es redundante en vista de Corollario 3.2.4(3.2.2), mientras que la segunda opción se descarta en vista del inciso (a) en el Lema 3.3.2. El resultado se sigue de notar que la tercera opción se ve obligada a terminar como en (3.31).  $\square$

*Prueba de la Proposición 3.3.1.* Comencemos considerando el caso de una celda crítica de dimensión  $(\mu - 4)$  de tipo (iii)  $\alpha = 1, \dots, \hat{i}, \dots, \widehat{b-1}, \hat{b}, \dots, \mu | b$ , con  $1 \leq i \leq b - 2$  y  $b \leq \mu$ . Notemos que  $\alpha$  es la cara de solo dos caras de dimensión  $\mu - 3$ , a saber,  $1, \dots, \hat{i}, \dots, \widehat{b-1}, \hat{b}, \dots, \mu | b - 1, b$  y  $1, \dots, \hat{i}, \dots, \widehat{b-1}, \hat{b}, \dots, \mu | i, b$ . Por lo tanto, el análisis del árbol  $T_\alpha$  comienza con lo que son las únicas dos ramas potenciales

$$\begin{array}{l} 1, \dots, \hat{i}, \dots, \widehat{b-1}, \hat{b}, \dots, \mu | i, b - 1 \searrow 1, \dots, \hat{i}, \dots, \widehat{b-1}, \hat{b}, \dots, \mu | b - 1 \\ \nearrow^{3.2.2} 1, \dots, \hat{i}, \dots, \widehat{b-1}, \hat{b}, \dots, \mu | b - 1, b \\ \searrow 1, \dots, \hat{i}, \dots, \widehat{b-1}, \hat{b}, \dots, \mu | b = \alpha \end{array}$$

y

$$\begin{array}{l} 1, \dots, \hat{i}, \dots, \widehat{b-1}, \hat{b}, \dots, \mu | i, b - 1 \searrow 1, \dots, \hat{i}, \dots, \widehat{b-1}, \hat{b}, \dots, \mu | i \\ \nearrow^{3.2.2} 1, \dots, \hat{i}, \dots, \widehat{b-1}, \hat{b}, \dots, \mu | i, b \\ \searrow 1, \dots, \hat{i}, \dots, \widehat{b-1}, \hat{b}, \dots, \mu | b = \alpha. \end{array}$$

Pero  $1, \dots, \hat{i}, \dots, \widehat{b-1}, \hat{b}, \dots, \mu | i, b - 1$  es redundante por el Corollario 3.2.4(3.2.2), por lo que  $T_\alpha$  está, de hecho, vacío.

Consideremos ahora el caso de una celda crítica de dimensión  $(\mu - 4)$  de tipo (iv)

$$\alpha = \mu | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \mu - 2,$$

con  $1 \leq i \leq \mu - 2$ . Como se mencionó antes, el análisis del árbol  $T_\alpha$  comienza con exactamente dos ramas potenciales. Para  $i = \mu - 2$ , cada una de esas dos ramas es lineal y lleva a un camino en  $T_\alpha$ . De hecho,  $T_\alpha$  se reduce a las dos ramas

$$\mu - 2, \mu - 1 | 1, \dots, \mu - 3 \searrow \mu - 2 | 1, \dots, \mu - 3 \nearrow^{3.2.3(2.a)} \mu - 2, \mu | 1, \dots, \mu - 3 \searrow \mu | 1, \dots, \mu - 3 = \alpha$$

y

$$\mu - 2, \mu - 1 | 1, \dots, \mu - 3 \searrow \mu - 1 | 1, \dots, \mu - 3 \nearrow^{3.2.3(2.a)} \mu - 1, \mu | 1, \dots, \mu - 3 \searrow \mu | 1, \dots, \mu - 3 = \alpha,$$

cada una comenzando en el requerido (3.28). El resultado se sigue de (1.3.3) y de un análisis directo de los números de incidencia en las dos ramas anteriores: la primera rama cuenta en (1.9) con un signo negativo, mientras que la segunda rama lo hace con un signo positivo. Por otro lado, para  $1 \leq i \leq \mu - 3$ , el análisis del árbol  $T_\alpha$  comienza con sus dos únicas ramas potenciales

$$\left. \begin{array}{l} \beta_1 := \mu - 1, \mu | 1, \dots, \mu - 3 \\ \beta_2 := \mu - 2, \mu - 1, \mu | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \mu - 3 \\ \beta_3 := i, \mu - 1, \mu | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \mu - 3 \end{array} \right\} \searrow \mu - 1, \mu | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \mu - 3$$

$$\begin{array}{l} \nearrow^{3.2.2} \mu - 1, \mu | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \mu - 2 \\ \searrow \mu | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \mu - 2 = \alpha \end{array}$$

y

$$\left. \begin{array}{l} \beta_1 = \mu - 1, \mu | 1, \dots, \mu - 3 \\ \beta_2 = \mu - 2, \mu - 1, \mu | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \mu - 3 \\ \beta_3 = i, \mu - 1, \mu | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \mu - 3 \end{array} \right\} \searrow \mu - 1, \mu | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \mu - 3$$

$$\begin{array}{l} \nearrow^{3.2.2} \mu - 1, \mu | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \mu - 2 \\ \searrow \mu - 1 | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \mu - 2 \\ \nearrow^{3.2.3(2.b)} i, \mu - 1 | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \mu - 2 \\ \searrow i | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \mu - 2 \\ \nearrow^{3.2.3(2.a)} i, \mu | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \mu - 2 \\ \searrow \mu | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \mu - 2 = \alpha. \end{array}$$

Pero ninguna de las dos opciones que involucran a  $\beta_2$  lleva a un camino real en  $T_\alpha$ , en vista del inciso (a) en el Lema 3.3.2. Del mismo modo, ninguna de las dos opciones que involucran a  $\beta_3$  lleva a un camino real en  $T_\alpha$ , pues  $\beta_3$  es redundante según el Corollario 3.2.4(3.2.2). Como antes, el resultado se sigue de un análisis directo de los números de incidencia: las dos opciones que involucran a  $\beta_1$  nos permiten emparejar los caminos reales en  $T_\alpha$  de tal manera que los dos elementos de cada par cuenten en (1.9) con diferentes signos. (Es fácil ver que solo hay un par, pero tal hecho es irrelevante para nuestro argumento.)

Para completar la prueba, abordamos el caso ligeramente más complicado de una cara crítica de tipo (vii) de dimensión  $(\mu - 4)$   $\alpha = a | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{a}, \dots, \mu - 1$ , con  $1 \leq i < a \leq \mu - 2$ . Como antes, el análisis del árbol  $T_\alpha$  comienza con sus únicas dos ramas potenciales

$$\left. \begin{array}{l} \beta_1 := i, a, \mu | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{a}, \dots, \mu - 2 \\ \beta_2 := a, \mu - 1, \mu | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{a}, \dots, \mu - 2 \\ \beta_3 := a, \mu | 1, \dots, \hat{a}, \dots, \mu - 2 \end{array} \right\} \searrow a, \mu | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{a}, \dots, \mu - 2$$

$$\begin{array}{l} \nearrow^{3.2.2} a, \mu | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{a}, \dots, \mu - 1 \searrow a | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{a}, \dots, \mu - 1 = \alpha \end{array}$$

y

$$\left. \begin{array}{l} \beta_1 = i, a, \mu | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{a}, \dots, \mu - 2 \\ \beta'_2 := i, \mu - 1, \mu | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{a}, \dots, \mu - 2 \\ \beta'_3 := i, \mu | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \mu - 2 \end{array} \right\} \searrow i, \mu | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{a}, \dots, \mu - 2$$

$$\begin{array}{l} \nearrow^{3.2.2} i, \mu | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{a}, \dots, \mu - 1 \searrow i | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{a}, \dots, \mu - 1 \\ \nearrow^{3.2.3(2.b)} i, a | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{a}, \dots, \mu - 1 \searrow a | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{a}, \dots, \mu - 1 = \alpha. \end{array}$$

Pero ninguna de las dos opciones que involucran a  $\beta_1$  lleva a un camino real en  $T_\alpha$ , pues  $\beta_1$  es redundante según el Corollario 3.2.4(3.2.2). Del mismo modo, ninguna de las dos opciones que involucran a  $\beta_2$  o  $\beta'_2$  lleva a un camino real en  $T_\alpha$ , en vista de los incisos (b) y (c) en el Lema 3.3.2. Sin embargo, esta vez no podemos usar el truco de emparejamiento del caso anterior, ya que  $\beta_3 \neq \beta'_3$ . En su lugar, continuamos "un paso más" el análisis de  $T_\alpha$ , que, en total, comienza de hecho con sus

únicas dos ramas potenciales (pero ahora lineales)

$$\begin{aligned}
& \mu - 1, \mu | 1, \dots, \hat{a}, \dots, \mu - 2 \searrow \mu - 1 | 1, \dots, \hat{a}, \dots, \mu - 2 \\
& \begin{array}{ccc}
& \nearrow^{3.2.3(2.b)} & \\
& a, \mu - 1 | 1, \dots, \hat{a}, \dots, \mu - 2 \searrow a | 1, \dots, \hat{a}, \dots, \mu - 2 & \nearrow^{3.2.3(2.a)} \\
& & a, \mu | 1, \dots, \hat{a}, \dots, \mu - 2
\end{array} \\
& \searrow a, \mu | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{a}, \dots, \mu - 2 \xrightarrow{3.2.2} a, \mu | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{a}, \dots, \mu - 1 \searrow a | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{a}, \dots, \mu - 1 = \alpha
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
& \mu - 1, \mu | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \mu - 2 \searrow \mu - 1 | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \mu - 2 \xrightarrow{3.2.3(2.b)} i, \mu - 1 | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \mu - 2 \\
& \searrow i | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \mu - 2 \xrightarrow{3.2.3(2.a)} i, \mu | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \mu - 2 \searrow i, \mu | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{a}, \dots, \mu - 2 \\
& \begin{array}{ccc}
& \nearrow^{3.2.2} & \\
& i, \mu | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{a}, \dots, \mu - 1 \searrow i | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{a}, \dots, \mu - 1 & \nearrow^{3.2.3(2.b)} \\
& & i, a | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{a}, \dots, \mu - 1
\end{array} \\
& \searrow a | 1, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{a}, \dots, \mu - 1 = \alpha.
\end{aligned}$$

Pero el Lema 3.3.3 implica que cada una de las dos ramas anteriores se ve obligada a codificar un solo camino completo y explícito en  $T_\alpha$ . La conclusión se sigue de un análisis directo de los números de incidencia resultantes. De hecho, como se puede observar rápidamente, la primera rama codifica un camino que cuenta en (1.9) con un signo  $(-1)^{i+a}$ , mientras que la segunda rama lo hace con un signo  $(-1)^{i+a+1}$ .  $\square$



# Conclusiones

Nuestros cálculos sugieren que una descomposición homotópica de  $\text{DConf}(\Delta^{m,d}, 2)$  como un wedge de esferas se mantiene siempre que

$$d > \max \left\{ 1, \frac{m-2}{2} \right\}. \quad (3.33)$$

Aunque no probamos tal afirmación, a continuación proporcionamos evidencia indirecta.

Para empezar, notemos que una descomposición homotópica de  $\text{DConf}(\Delta^{m,d}, 2)$  como un wedge de esferas no se mantiene fuera del rango en (3.33). Por ejemplo, como se demostró en el Capítulo 2, existen productos copa no triviales en el anillo de cohomología de los espacios de configuraciones de 2 puntos en grafos completos (es decir, el caso  $d = 1$  anteriormente mencionado). Asimismo, existen productos copa no triviales en  $\text{DConf}(\Delta^{m,d}, 2)$  para  $d = \frac{m-2}{2}$ , aunque tal situación es mucho más sutil. De hecho, para  $d \geq 1$ ,

$$\text{DConf}(\Delta^{2d+2,d}, 2) \quad (3.34)$$

resulta ser homeomorfo a una variedad cerrada orientable, por lo que los productos copa no triviales están forzados a darse como parte de los correspondientes fenómenos de dualidad de Poincaré. De hecho, las propiedades de variedad de (3.34) constituyen uno de los resultados centrales en el trabajo [24] en preparación. Aquí solo hemos mencionado que el homeomorfismo de Abrams  $\text{DConf}(K_5, 2) \cong S_6$  ([1, Example 2.4]) es simplemente la primera instancia en la familia de variedades (3.34). Aquí  $K_5 = \Delta^{4,1}$ , el grafo completo en cinco vértices, y  $S_6$  representa una superficie cerrada orientable de género seis.

Como consecuencia del párrafo anterior, el mapeo de adjunción  $\alpha_{m,d}$  en el inciso (IV) del Teorema 3.2.8 es esencial (y bastante interesante) para  $d = \frac{m-2}{2}$ , si bien es nulo-homotópico para  $1 < d = m - 3$ . Adicionalmente, en el rango

$$\frac{m-2}{2} < d < m - 3, \quad (3.35)$$

$\alpha_{m,d}$  es un mapeo estable, por lo que se ve forzado a ser nulo-homotópico siempre que  $m - d - 3 \in \{4, 5, 12, 61\}$ , es decir, cuando el grupo de homotopía donde vive se sabe que se anula ([46, 47]). Sería interesante saber si existen más valores de  $d$  en el rango (3.35) para los cuales  $\alpha_{m,d}$  es nulo-homotópico, de modo que (3.22) se convierta en una suma de wedges de esferas. Por otro lado, creemos que los productos copa no triviales siempre existirán en el caso de (3.24) —verificar tal situación está al alcance con las herramientas de este trabajo—, de modo que algún componente del mapeo de adjunción en (3.24) no sería nulo-homotópico.

El resultado principal en [2], a saber, el hecho de que  $\text{DConf}(\Delta^m, n)$  es homotópicamente equivalente a un wedge de esferas de dimensión  $m - n + 1$ , sugiere que algunas partes del Teorema 3.2.8 podrían admitir extensiones adecuadas para  $\text{DConf}(\Delta^{m,d}, n)$  cuando  $n \geq 2$ .



# Bibliografía

- [1] Aaron David Abrams. *Configuration spaces and braid groups of graphs*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2000. Thesis (Ph.D.)—University of California, Berkeley.
- [2] Aaron Abrams, David Gay, and Valerie Hower. Discretized configurations and partial partitions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 141(3):1093–1104, 2013.
- [3] Jorge Aguilar-Guzmán, Jesús González, and Teresa Hoekstra-Mendoza. Farley-Sabalka’s Morse-theory model and the higher topological complexity of ordered configuration spaces on trees. *Discrete Comput. Geom.*, 67(1):258–286, 2022.
- [4] Byung Hee An, Gabriel C. Drummond-Cole, and Ben Knudsen. Edge stabilization in the homology of graph braid groups. *Geom. Topol.*, 24(1):421–469, 2020.
- [5] Paul Prue and Travis Scrimshaw. Abrams’s stable equivalence for graph braid groups. *Topology and its Applications*, 178:136–145, 2014. Elsevier.
- [6] Kathryn Barnett and Michael Farber. Topology of configuration space of two particles on a graph. I. *Algebr. Geom. Topol.*, 9(1):593–624, 2009.
- [7] Ibai Basabe, Jesús González, Yuli B. Rudyak, y Dai Tamaki. Higher topological complexity and its symmetrization. *Algebr. Geom. Topol.*, 14(4):2103–2124, 2014.
- [8] Ulrich Bauer, Carsten Lange, and Max Wardetzky. Optimal topological simplification of discrete functions on surfaces. *Discrete Comput. Geom.*, 47(2):347–377, 2012.
- [9] Safia Chettih and Daniel Lütgehetmann. The homology of configuration spaces of trees with loops. *Algebr. Geom. Topol.*, 18(4):2443–2469, 2018.
- [10] Sze-tsen Hu. Isotopy invariants of topological spaces. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 255(1282):331–366, 1960. The Royal Society London.
- [11] Arnold Shapiro. Obstructions to the imbedding of a complex in a Euclidean space: I. The first obstruction. *Annals of Mathematics*, 66(2):256–269, 1957. JSTOR.
- [12] Michael Farber. Collision free motion planning on graphs. In *Algorithmic Foundations of Robotics VI*, volume 17 of *Springer Tracts in Advanced Robotics*, pages 123–138. Springer, Berlin, Heidelberg., 2005.
- [13] Michael Farber and Elizabeth Hanbury. Topology of configuration space of two particles on a graph, II. *Algebr. Geom. Topol.*, 10(4):2203–2227, 2010.

- 
- [14] Daniel Farley. Homology of tree braid groups. In *Topological and asymptotic aspects of group theory*, volume 394 of *Contemp. Math.*, pages 101–112. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [15] Daniel Farley. Presentations for the cohomology rings of tree braid groups. In *Topology and robotics*, volume 438 of *Contemp. Math.*, pages 145–172. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [16] Daniel Farley and Lucas Sabalka. Discrete Morse theory and graph braid groups. *Algebr. Geom. Topol.*, 5:1075–1109, 2005.
- [17] Daniel Farley and Lucas Sabalka. On the cohomology rings of tree braid groups. *J. Pure Appl. Algebra*, 212(1):53–71, 2008.
- [18] Daniel Farley and Lucas Sabalka. Presentations of graph braid groups. *Forum Math.*, 24(4):827–859, 2012.
- [19] Robin Forman. A discrete Morse theory for cell complexes. In *Geometry, topology, & physics*, Conf. Proc. Lecture Notes Geom. Topology, IV, pages 112–125. Int. Press, Cambridge, MA, 1995.
- [20] Robin Forman. Discrete Morse theory and the cohomology ring. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 354(12):5063–5085, 2002.
- [21] Robert Ghrist. Configuration spaces and braid groups on graphs in robotics. In *Knots, braids, and mapping class groups—papers dedicated to Joan S. Birman (New York, 1998)*, volume 24 of *AMS/IP Stud. Adv. Math.*, pages 29–40. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [22] Robert Ghrist. Configuration spaces, braids, and robotics. In *Braids*, volume 19 of *Lect. Notes Ser. Inst. Math. Sci. Natl. Univ. Singap.*, pages 263–304. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2010.
- [23] Robert W. Ghrist and Daniel E. Koditschek. Safe cooperative robot dynamics on graphs. *SIAM J. Control Optim.*, 40(5):1556–1575, 2002.
- [24] Emilio J. González and Jesús González. The topology of ordered pairs of points on skeleta of simplexes. In preparation.
- [25] Jesús González y Teresa Hoekstra-Mendoza. Cohomology ring of tree braid groups and exterior face rings. *Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B*, 9:1065–1101, 2022.
- [26] Emilio J. González and Jesús González. An algorithmic discrete gradient field and the cohomology algebra of configuration spaces of two points on complete graphs. To appear in *Algebraic and Geometric Topology*.
- [27] Emilio J. Gonzalez and Jesús Gonzalez. An algorithmic discrete gradient field for non-colliding cell-like objects and the topology of pairs of points on skeleta of simplexes. *arXiv preprint arXiv:2307.14454*, 2023.
- [28] Jee Hyoun Kim, Ki Hyounng Ko, and Hyo Won Park. Graph braid groups and right-angled Artin groups. *Transactions of the American Mathematical Society*, 364(1):309–360, 2012.
- [29] Ki Hyounng Ko, Joon Hyun La, and Hyo Won Park. Graph 4-braid groups and Massey products. *Topology and its Applications*, 197:133–153, 2016. Elsevier.

- 
- [30] Shaun Harker, Konstantin Mischaikow, Marian Mrozek, y Vidit Nanda. Discrete Morse theoretic algorithms for computing homology of complexes and maps. *Found. Comput. Math.*, 14(1):151–184, 2014.
- [31] Ben Knudsen. The topological complexity of pure graph braid groups is stably maximal. Disponible en <https://arxiv.org/abs/2206.06268>.
- [32] Ki Hyoung Ko and Hyo Won Park. Characteristics of graph braid groups. *Discrete Comput. Geom.*, 48(4):915–963, 2012.
- [33] Leon Lampret. Chain complex reduction via fast digraph traversal. arXiv:1903.00783v2.
- [34] Thomas Lewiner, Helio Lopes, and Geovan Tavares. Applications of forman’s discrete morse theory to topology visualization and mesh compression. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 10(5):499–508, 2004.
- [35] Tomasz Maciażek y Adam Sawicki. Homology groups for particles on one-connected graphs. *J. Math. Phys.*, 58(6):062103, 24, 2017.
- [36] Francesca Mori y Mario Salvetti. (Discrete) Morse theory on configuration spaces. *Math. Res. Lett.*, 18(1):39–57, 2011.
- [37] Marian Mrozek and Bogdan Batko. Coreduction homology algorithm. *Discrete Comput. Geom.*, 41(1):96–118, 2009.
- [38] James R. Munkres. *Elements of algebraic topology*. Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 1984.
- [39] Eric Ramos. An application of the theory of FI-algebras to graph configuration spaces. *Math. Z.*, 294(1-2):1–15, 2020.
- [40] Mario Salvetti and Simona Settepanella. Combinatorial Morse theory and minimality of hyperplane arrangements. *Geom. Topol.*, 11:1733–1766, 2007.
- [41] Christopher Severs and Jacob A. White. On the homology of the real complement of the  $k$ -parabolic subspace arrangement. *J. Combin. Theory Ser. A*, 119(6):1336–1350, 2012.
- [42] John Shareshian. Discrete Morse theory for complexes of 2-connected graphs. *Topology*, 40(4):681–701, 2001.
- [43] V. A. Vassiliev. Cohomology of knot spaces. In *Theory of singularities and its applications*, volume 1 of *Adv. Soviet Math.*, pages 23–69. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990.
- [44] V. A. Vassiliev. Complexes of connected graphs. In *The Gel’fand Mathematical Seminars, 1990–1992*, pages 223–235. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1993.
- [45] Victor A. Vassiliev. Topology of two-connected graphs and homology of spaces of knots. In *Differential and symplectic topology of knots and curves*, volume 190 of *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, pages 253–286. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [46] Hiroshi Toda. *Composition methods in homotopy groups of spheres*. Number 49. Princeton University Press, 1962.

---

[47] Guozhen Wang and Zhouli Xu. The triviality of the 61-stem in the stable homotopy groups of spheres. *Annals of Mathematics (2)*, 186(2):501–580, 2017.

[48] <https://mathoverflow.net/questions/425679/>.