



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
UNIDAD ZACATENCO
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
SECCIÓN DE COMUNICACIONES

CARACTERIZACIÓN DEL PROCESO DE ARRIBOS DE TRÁFICO EN
RÁFAGAS MEDIANTE MMPP Y TIEMPOS ENTRE ARRIBOS CON
DISTRIBUCIÓN HIPEREXPONENCIAL

TESIS

Que presenta:

Ing. Miguel Angel Isabel Zarazua

Para obtener el grado de
MAESTRO EN CIENCIAS
EN LA ESPECIALIDAD DE
INGENIERÍA ELÉCTRICA

Directores de Tesis:

Dr. Felipe Alejandro Cruz Pérez

Dra. Sandra Lirio Castellanos López

Ciudad de México

Enero, 2025

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, a mis padres, por su amor incondicional, su apoyo constante y por haberme inculcado la importancia del esfuerzo y la dedicación en todo lo que hago. A mi hermana Alondra, por su paciencia y por siempre estar a mi lado en cada paso de este proceso.

A mis tíos Miguel, Araceli, Elda, Marcos y Elia, por su generosidad, consejos y por ser una fuente constante de motivación.

A mis amigos J. Brandon, Brandon, Erick, Karla y Aura, por su amistad, por los momentos compartidos y por siempre estar dispuestos a brindar su apoyo y comprensión.

A mis asesores, Dr. Felipe Alejandro Cruz Pérez y Dra. Sandra Lirio Castellanos López, por su valioso conocimiento, orientación y por su dedicación a lo largo de esta maestría. Gracias por su confianza y por ayudarme a superar los retos académicos.

A Arturo y Angélica, quienes me brindaron su ayuda en momentos clave durante el proceso de la Maestría, gracias por su apoyo.

Al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (CINVESTAV, por todo el conocimiento compartido y el apoyo brindado a lo largo de la maestría.

Finalmente, al Consejo de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por el apoyo económico que hizo posible este proyecto. Sin su respaldo, este trabajo no habría sido posible.

OBJETIVOS

Analizar, calcular y comparar el Índice de Dispersión de Cuentas (IDC) y del Índice de Variabilidad (IoV) en diferentes procesos de arribos de tráfico en ráfagas, con el fin de contribuir al desarrollo de metodologías y escenarios de análisis y evaluación del desempeño de sistemas de comunicaciones.

Objetivos Particulares:

- Analizar, calcular y comparar el IDC e IoV de procesos de arribos GMPP-2 y MMPP-2 para diferentes combinaciones de distribuciones del tiempo de permanencia de cada estado del proceso de arribos.
- Proponer y evaluar técnicas de aproximación de los tiempos de permanencia en los diferentes estados de arribos de procesos GMPP-2 mediante distribuciones Hiper Exponenciales y determinar la relación de sus parámetros con el IDC e IoV.
- Validar los resultados analíticos del IDC mediante simulaciones por computadora de los procesos caracterizados por la distribución del tiempo entre arribos.

RESUMEN

Esta tesis aborda el modelado y análisis de los procesos de arribos en sistemas de comunicaciones en el contexto de teletráfico, con un enfoque principal en la caracterización del Índice de Dispersión de Cuentas (IDC). El IDC se utiliza como una medida de desempeño para evaluar la variabilidad temporal de los procesos de arribos. En este trabajo, se obtiene la función generadora de momentos (FGM) del número de arribos que ocurren en determinado intervalo de tiempo que permite calcular los primeros cuatro momentos crudos y estandarizados, así como el IDC e Índice de Variabilidad (IoV) del número de arribos para cada uno de los procesos estudiados y propuestos.

Para modelar la variabilidad en tiempo del tráfico en sistemas de comunicaciones, se consideran modelos del proceso de arribos tales como GMPP y MMPP. Adicionalmente, se presentan dos propuestas para modelar el proceso de arribos considerando distribuciones de probabilidad del tiempo entre arribos tales como Log Normal, Hiper Exponencial e Hiper Exponencial condicionada.

Con el propósito de contribuir al desarrollo de metodologías de análisis basadas en la teoría de colas que incluyan características más realistas de la operación de los sistemas de comunicaciones, se ha considerado el modelado de variables temporales tales como el tiempo entre arribos y tiempos de permanencia en los estados del proceso de arribos con distribución de probabilidad diferente a la exponencial negativa, tales como Log Normal y su aproximación mediante distribuciones Hiper

Exponencial de orden arbitrario. Para ello, se utilizan las técnicas de aproximación de Igualación de Momentos (MM), el algoritmo de Maximización de la Esperanza (EM), así como un algoritmo híbrido de ambos métodos. Este análisis incluye una evaluación del comportamiento del IDC ante la variación de sus momentos centrales y estandarizados, lo que permite comprender mejor la relación entre la dispersión de los arribos y las características del tráfico.

Finalmente, se concluye que las técnicas de aproximación MM, EM e híbridas ofrecen resultados precisos en la estimación de los parámetros del tráfico, con aplicaciones significativas en la mejora del rendimiento de redes y sistemas de comunicación. Se proponen líneas de investigación futuras para profundizar en la optimización de estos modelos y su aplicabilidad en escenarios de alta complejidad y variabilidad.

ABSTRACT

This thesis addresses the modeling and analysis of arrival processes in communication systems within the context of teletraffic, with a primary focus on characterizing the Index of Dispersion for Counts (IDC). The IDC is used as a performance measure to evaluate the temporal variability of arrival processes. In this work, the moment generating function (MGF) of the number of arrivals occurring within a given time interval is obtained, enabling the calculation of the first four raw and standardized moments, as well as the IDC and Index of Variability (IoV) of the number of arrivals for each of the studied and proposed processes.

To model the temporal variability of traffic in communication systems, arrival process models such as the GMPP and MMPP are considered. Additionally, two proposals are presented to model the arrival process, considering probability distributions of interarrival times such as Log-Normal, Hyper-Exponential, and Conditional Hyper-Exponential.

With the aim of contributing to the development of analysis methodologies based on queueing theory that incorporate more realistic features of the operation of communication systems, the modeling of temporal variables such as interarrival times and state residence times in arrival processes has been considered, using probability distributions different from the negative exponential, such as Log-Normal and its approximation through Hyper-Exponential distributions of arbitrary order. To achieve this, approximation techniques such as the Method of Moments (MM), the Expectation-Maximization (EM) algorithm, and a hybrid algorithm

combining both methods are utilized. This analysis includes an evaluation of the behavior of the IDC in response to the variation of its central and standardized moments, allowing for a better understanding of the relationship between arrival dispersion and traffic characteristics.

Finally, it is concluded that the MM, EM, and hybrid approximation techniques offer accurate results in estimating traffic parameters, with significant applications in improving the performance of communication networks and systems. Future research directions are proposed to further optimize these models and explore their applicability in scenarios of high complexity and variability.

ACRÓNIMOS

| Acrónimo | Descripción |
|----------|--|
| CCDF | Función de distribución acumulada complementaria |
| CV | Coefficiente de Variación |
| EM | Maximización de la Esperanza |
| FGM | Función Generadora de Momentos |
| GMPP | General Modulated Poisson. Processes |
| HE | Hiper Exponencial |
| IDC | Índice de Dispersión de Cuentas |
| ILT | Transformada de Laplace Inversa |
| IoV | Índice de Variabilidad |

| | |
|------|-------------------------------------|
| Ku | <i>Kurtosis</i> |
| LT | Transformada de Laplace |
| MM | Moment Matching |
| MMPP | Markov Modulated Poisson Processes |
| PDF | Función de densidad de Probabilidad |
| PMPP | Pareto Modulated Poisson. Processes |
| Qi | Quinto Momento |
| Sk | <i>Skewness</i> |
| WM | Wolfram Mathematica |

LISTA DE SÍMBOLOS

| Símbolo | Descripción |
|-----------------------------|---|
| $f_i^*(t)$ | Transformada de Laplace de la función de densidad de probabilidad de la variable i |
| p'_i | Probabilidad de elegir la fase i – <i>ésima</i> de la distribución HE de orden m condicionada al arribo $i - 1$ |
| $\phi_{\hat{N}(t)}^*(s, z)$ | TL de la FGM de $\hat{N}(t)$ |
| $\phi_{N(t)}^*(s, z)$ | TL de la FGM de $N(t)$ |
| $\mathcal{L}^{-1}\{\dots\}$ | Operador Transformada de Laplace Inversa |
| H_v | Parámetro de Hurst |
| $\hat{N}(t)$ | Numero de arribos en el intervalo $[\tau, t]$ |
| $R_x^*(t)$ | Transformada de Laplace de la CCDF de la variable aleatoria X |
| X_a | Tiempo entre arribos |
| X_s | Tiempo de servicio |

| | |
|------------------------|---|
| $f_i(t)$ | Función de densidad de probabilidad de la variable i |
| $f_x(t)$ | PDF de la variable aleatoria X |
| p_i | Probabilidad de elegir la fase $i - \text{ésima}$ de la distribución HE de orden m condicionada al tipo de arribo $i - 1$ |
| λ_{avg} | Tasa de arribos promedio |
| λ_1 | Tasa del primer estado de un proceso |
| λ_2 | Tasa del segundo estado de un proceso |
| $\phi^*(s, z)$ | Transformada de Laplace de la FGM |
| $\mathcal{L}\{\dots\}$ | Operador Transformada de Laplace |
| $CV(t)$ | Coficiente de Variación |
| $E[(X - E[X])^n]$ | n -ésimo momento central de la variable aleatoria X |
| $E[X^n]$ | n -ésimo momento no central de la variable aleatoria X |
| $E[\dots]$ | Operador Valor Esperado |
| $IDC(t)$ | Índice de Dispersión de Cuentas |
| $IoV(t)$ | Índice de Variabilidad |

| | |
|------------------------------|--|
| <i>Ku</i> | <i>Kurtosis</i> |
| <i>Mi</i> | Momento estandarizado donde $i = 1, 2, 3, \dots, n$ |
| <i>N(t)</i> | Numero de arribos en el intervalo $[0, t]$ |
| <i>Qi</i> | Quinto Momento |
| <i>Sk</i> | <i>Skewness</i> |
| <i>T</i> | Tiempo medio de servicio |
| <i>Var[...]</i> | Operador Varianza |
| <i>s</i> | Variable compleja empleada para representar el dominio de la transformada de Laplace |
| <i>t</i> | Tiempo |
| <i>z</i> | Variable empleada para representar el dominio de la transformada Z |
| α | Trafico Ofrecido |
| α_n | Probabilidad de estar en el estado n |
| β | Rafagacidad |
| λ | Tasa de arribos |
| μ | Inverso del tiempo medio de servicio |
| μ_n | Tasa de la probabilidad α_n |

| | |
|--------------|--|
| η_n | Tasa de la probabilidad p_n |
| σ | Desviación Estándar |
| τ | Tiempo transcurrido desde el inicio de la observación del proceso de arribos hasta el primer arribo. |
| $\phi(s, z)$ | Función generadora de momentos en el dominio de s |

Contenido

| | |
|---|-----------|
| AGRADECIMIENTOS..... | 2 |
| OBJETIVOS..... | 3 |
| RESUMEN | 4 |
| ABSTRACT..... | 6 |
| ACRÓNIMOS..... | 8 |
| LISTA DE SÍMBOLOS..... | 10 |
| CONTENIDO..... | 14 |
| ÍNDICE DE FIGURAS..... | 20 |
| ÍNDICE DE TABLAS | 25 |
| CAPÍTULO 1. VARIABLES INVOLUCRADAS EN EL MODELO DE TELETRÁFICO DE PROCESOS DE ARRIBOS..... | 27 |
| 1.1 INTRODUCCIÓN. | 28 |
| 1.2 VARIABLES PARA CARACTERIZAR UN MODELO DE PROBABILIDAD. | 29 |
| 1.2.1 <i>Tiempos involucrados en el proceso.</i> | 29 |
| 1.2.2 <i>Tasas.</i> | 30 |
| 1.2.3 <i>Tráfico Ofrecido (α).</i> | 31 |
| 1.2.4 <i>Rafagacidad (β).</i> | 31 |
| 1.3 PROBABILIDADES EN MODELOS DE TELETRÁFICO..... | 32 |
| 1.4 MOMENTOS CRUDOS. | 33 |
| 1.4.1 <i>Valor Esperado o Media.</i> | 33 |
| 1.5 MOMENTOS CENTRALES. | 33 |
| 1.5.1 <i>Varianza.</i> | 34 |

| | | |
|--|--|-----------|
| 1.5.2 | <i>Desviación Estándar.</i> | 34 |
| 1.5.3 | <i>Coeficiente De Variación.</i> | 35 |
| 1.5.4 | <i>Skewness.</i> | 35 |
| 1.5.5 | <i>Kurtosis.</i> | 35 |
| 1.5.6 | <i>Quinto momento estandarizado.</i> | 36 |
| 1.6 | RELACIÓN FUNCIONAL DE LOS MOMENTOS CRUDOS Y MOMENTOS ESTANDARIZADOS. | 36 |
| 1.7 | FUNCIÓN GENERADORA DE MOMENTOS DEL NÚMERO DE ARRIBOS $N(T)$. | 37 |
| 1.7.1 | <i>Derivada de la FGM.</i> | 39 |
| 1.7.2 | <i>La varianza de un proceso estocástico.</i> | 41 |
| 1.8 | ÍNDICE DE DISPERSIÓN DE CUENTAS | 41 |
| 1.8.1 | <i>Parámetro Hurst como medida de desempeño</i> | 43 |
| 1.9 | ÍNDICE DE VARIABILIDAD DE UN PROCESO. | 45 |
| 1.10 | CONCLUSIONES. | 46 |
| CAPÍTULO 2. PROCESOS DE ARRIBOS PARA MODELAR EL TRÁFICO EN RÁFAGAS. | | 48 |
| 2.1 | PROCESO GMPP-2. | 49 |
| 2.2 | PROCESOS EN LOS QUE LOS TIEMPOS DE PERMANENCIA EN CADA ESTADO DEL PROCESO DE ARRIBOS TIENEN DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DIFERENTES A LA EXPONENCIAL NEGATIVA. | 49 |
| 2.2.1 | <i>Proceso en el que los tiempos de permanencia en cada estado del proceso de arribos tienen distribución de probabilidad Hiper Exponencial.</i> | 49 |

| | | |
|--|--|-----------|
| 2.2.2 | <i>Proceso en el que los tiempos de permanencia en cada estado del proceso de arribos tienen distribución de probabilidad Log Normal.</i> | 50 |
| 2.2.3 | <i>Proceso PMPP-2.</i> | 53 |
| 2.2.4 | <i>Proceso MMPP de dos estados (MMPP-2).</i> | 54 |
| 2.3 | PROCESOS CARACTERIZADOS POR LA DISTRIBUCIÓN DEL TIEMPO ENTRE ARRIBOS. | 57 |
| 2.3.1 | <i>Proceso en que el tiempo entre arribos X_a tiene distribución Hiper Exponencial de segundo orden.</i> | 57 |
| 2.3.2 | <i>Proceso en que el tiempo entre arribos X_a es hiper exponencial de orden 2 condicionado.</i> | 59 |
| 2.3.3 | <i>Proceso en que el tiempo entre arribos X_a tiene distribución Hiper Exponencial de orden n.</i> | 61 |
| 2.4 | CONCLUSIONES | 63 |
| CAPÍTULO 3. FUNCIÓN GENERADORA DE MOMENTOS DEL NÚMERO DE ARRIBOS EN FUNCIÓN DEL TIEMPO. | | 65 |
| 3.1 | IDC E IOV DEL PROCESO GMPP-2. | 66 |
| 3.1.1 | <i>Cálculo del IDC e IOV de un proceso de arribos MMPP-2.</i> | 67 |
| 3.1.2 | <i>Ecuación del IDC a partir de la Función Generadora de Momentos para un proceso MMPP-2.</i> | 68 |
| 3.2 | FUNCIÓN GENERADORA DE MOMENTOS PARA UN PROCESO EN EL QUE EL TIEMPO ENTRE ARRIBOS (X_a) TIENE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD HIPER EXPONENCIAL. | 71 |
| 3.3 | FUNCIÓN GENERADORA DE MOMENTOS PARA UN PROCESO EN EL QUE EL TIEMPO ENTRE ARRIBOS X_a TIENE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD HIPER EXPONENCIAL CONDICIONADO DE ORDEN 2. | 74 |

| | | |
|---|--|------------|
| 3.4 | APROXIMACIÓN DE UNA DISTRIBUCIÓN LOG-NORMAL POR DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD HE DE ORDEN N UTILIZANDO LA TÉCNICA DE IGUALACIÓN DE MOMENTOS (MM). | 76 |
| 3.4.1 | <i>Procedimiento.</i> | 77 |
| 3.5 | APROXIMACIÓN DE UNA DISTRIBUCIÓN LOG-NORMAL POR DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD HE DE ORDEN N UTILIZANDO EL ALGORITMO DE MAXIMIZACIÓN DE ESPERANZA (EM). | 79 |
| 3.5.1 | <i>Etapas del Algoritmo EM.</i> | 80 |
| 3.6 | APROXIMACIÓN DE UNA DISTRIBUCIÓN LOG-NORMAL POR DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD HE DE ORDEN N UTILIZANDO UNA COMBINACIÓN DE MÉTODOS DE APROXIMACIÓN: HÍBRIDO EM Y MM. | 82 |
| 3.7 | RESULTADOS NUMÉRICOS DEL IDC MEDIANTE SIMULACIÓN. | 84 |
| 3.7.1 | <i>Proceso MMPP-2.</i> | 84 |
| 3.7.2 | <i>Proceso de arribos considerando que el tiempo entre arribos X_a es Hiper Exponencial de segundo orden.</i> | 87 |
| 3.7.3 | <i>Proceso de arribos considerando que el tiempo entre arribos X_a tiene distribución de probabilidad Log Normal.</i> | 89 |
| 3.8 | ANÁLISIS COMPARATIVO DE LAS GRÁFICAS DE IDC EN PROCESOS MMPP-2 Y PROCESOS DONDE X_a TIENE UNA DISTRIBUCIÓN HE DE DIFERENTES ÓRDENES. | 91 |
| 3.9 | CONCLUSIONES. | 99 |
| CAPÍTULO 4. CÁLCULO DEL IDC DE GMPP-2 CON TIEMPOS DE PERMANENCIA EN LOS ESTADOS DEL PROCESO DE ARRIBOS CON DISTRIBUCIÓN HIPER EXPONENCIAL. | | 102 |
| 4.1 | ANÁLISIS DEL IDC CUANDO LOS TIEMPOS DE PERMANENCIA EN LOS ESTADOS X_1 Y X_2 DEL PROCESO DE ARRIBOS SON HIPER EXPONENCIAL DE ORDEN N . | 102 |

| | | |
|-------|--|------------|
| 4.1.1 | <i>Definición del sistema de ecuaciones para el cálculo de los parámetros de los tiempos de permanencia en cada estado con distribución HE-2</i> | 102 |
| 4.1.2 | <i>Definición del sistema de ecuaciones para el cálculo de los parámetros de los tiempos de permanencia en cada estado con distribución HE-3.</i> | 104 |
| 4.1.3 | <i>Generalización de la definición del sistema de ecuaciones para Definición del sistema de ecuaciones para el cálculo de los parámetros de los tiempos de permanencia en cada estado con distribución HE-n.....</i> | 105 |
| 4.1.4 | <i>Método para el cálculo del IDC para cuando los tiempos de permanencia en los estados X1 y X2 tienen distribución Hiper Exponencial utilizando Mathematica.</i> | 106 |
| 4.1.5 | <i>Resultados.</i> | 114 |
| 4.2 | COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS NUMÉRICOS DE LA APROXIMACIÓN MM, EM E HÍBRIDA | 146 |
| 4.3 | CONCLUSIONES | 151 |
| | CONCLUSIONES GENERALES Y TRABAJO FUTURO..... | 153 |
| | APÉNDICE A DEMOSTRACIÓN DE EQUIVALENCIAS ENTRE DOS FGM | 156 |
| | APÉNDICE B CONSEJOS Y RECOMENDACIONES PARA EVITAR ERRORES EN WOLFRAM MATHEMATICA..... | 163 |
| B.1 | DECLARACIÓN DE VARIABLES | 163 |
| B.2 | EJECUCIÓN DE INSTRUCCIONES..... | 164 |
| B.3 | USO DE FUNCIONES PARA OTRO PROPÓSITO PESE AL DEFINIDO..... | 166 |
| | APÉNDICE C ALGORITMO PARA LE CALCULO DE LOS PARAMETROS DE UNA HIPER EXPONENCIAL A PARTIR DE LOS MOMENTOS DEFNIDOS POR UNA DISTRIBUCION LOG NORMAL | 168 |
| | APÉNDICE D ALGORITMO PARA EL CALCULO DE LA FUNCIÓN RACIONAL PARA LA TL DE LA SEGUNDA DERIVADA DE LA FGM | 171 |

APÉNDICE E ALGORITMO PARA LA OBTENCIÓN DE LOS PARÁMETROS PARA CUANDO LOS TIEMPOS DE PERMANENCIA EN LOS ESTADOS X_1 Y X_2 SON HIPER EXPONENCIAL 173

E.1 DESCRIPCIÓN TÉCNICA DEL CÓDIGO 173

BIBLIOGRAFÍAS 177

ÍNDICE DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| Figura 1.1 Diagrama de tiempos involucrados en un proceso donde x_s corresponde al tiempo de servicio y $x_a^{(1)}$ corresponde al tiempo de arribos de estado uno y $x_a^{(2)}$ al tiempo de arribos del segundo estado. | 30 |
| Figura 1.2 Grafica del IDC(t) para un proceso MMPP con su respectiva recta de aproximación para el cálculo del parámetro de Hurst mediante la pendiente de la recta..... | 45 |
| Figura 2.1 Diagrama de la evolución en el tiempo de un proceso de arribos MMPP de dos estados. | 48 |
| Figura 2.2 Conmutación entre tasas del proceso de arribos MMPP-2.. | 55 |
| Figura 2.3 Diagrama de transición de fases del tiempo entre arribos X_a con distribución Hiper Exponencial de orden 2 condicionado al estado anterior..... | 60 |
| Figura 3.1 Índice de Dispersión de Cuentas (IDC) para Procesos con Distribución Hiper Exponencial de Diferentes Órdenes. | 79 |
| Figura 3.2 IDC Evolución del IDC para distribuciones HE de diferentes órdenes utilizando el método de aproximación EM..... | 82 |
| Figura 3.3 IDC del proceso de arribos cuando los tiempos de permanencia en cada estado del proceso son HE-n. Los parámetros de las distribuciones HE-n para ($n=2, 3$ y 4) se obtuvieron con el método de aproximación híbrido EM-MM. | 83 |

| | |
|---|-----|
| Figura 3.4 Grafica del IDC para un proceso MMPP-2 y dos procesos donde X_a tiene una distribución HE de orden 2 y 3 usando el método MM. | 92 |
| Figura 3.5 Grafica del IDC para un proceso MMPP-2 y dos procesos donde X_a tiene una distribución HE de orden 2 y 3 usando el método EM. | 93 |
| Figura 3.6 Grafica del IDC para un proceso MMPP-2 y dos procesos donde X_a tiene una distribución HE de orden 2 y 3 usando el método Híbrido EM-MM. | 94 |
| Figura 3.7 Grafica del IDC para un proceso MMPP-2 y dos procesos donde X_a tiene una distribución HE de orden 2 y 3 usando los métodos MM, EM e Híbrido EM-MM. | 95 |
| Figura 3.8 Gráficas de IDC para Procesos donde X_a tiene una distribución HE-n obtenidas para diferentes valores del <i>Skewness</i> | 96 |
| Figura 3.9 Gráficas de IDC para Procesos donde X_a tiene una distribución HE-n obtenidas para diferentes CoV | 97 |
| Figura 3.10 Comparación entre Procesos MMPP-2 y HE-2 Condicionado en Diferentes Casos | 99 |
| Figura 4.1 Comportamiento del Índice de Dispersión (IDC) con Tiempos de Permanencia son Hiper-Exponenciales o Exponenciales Negativos en los estados X_1 y X_2 para diferentes configuraciones de distribuciones de segundo orden. | 121 |

| | |
|---|-----|
| Figura 4.2 Comportamiento del Índice de Variabilidad (IoV) para Diferentes Configuraciones de Distribuciones Hiper Exponenciales y Exponenciales Negativas en los Estados X_1 y X_2 | 123 |
| Figura 4.3 Comportamiento del Índice de Dispersión (IDC) con Tiempos de Permanencia Hiper-Exponenciales en Estados X_1 y X_2 para Diferentes Configuraciones de Distribuciones de orden 3..... | 125 |
| Figura 4.4 Comportamiento del Índice de Variabilidad (IoV) para Diferentes Configuraciones de Distribuciones Hiper Exponenciales y Exponenciales Negativas en los Estados X_1 y X_2 | 126 |
| Figura 4.5 Comportamiento del Índice de Dispersión (IDC) con Tiempos de Permanencia Hiper-Exponenciales en Estados X_1 y X_2 para Diferentes Configuraciones de Distribuciones orden 4. | 129 |
| Figura 4.6 Comportamiento del Índice de Variabilidad (IoV) para Diferentes Configuraciones de Distribuciones Hiper Exponenciales y Exponenciales Negativas en los Estados X_1 y X_2 orden 4. | 130 |
| Figura 4.7 Comportamiento del Índice de Dispersión (IDC) con Tiempos de Permanencia Hiper-Exponenciales en Estados X_1 y X_2 para Diferentes Configuraciones de Distribuciones orden 5. | 133 |
| Figura 4.8 Comportamiento del Índice de Variabilidad (IoV) para Diferentes Configuraciones de Distribuciones Hiper Exponenciales y Exponenciales Negativas en los Estados X_1 y X_2 orden 5. | 134 |
| Figura 4.9 Comportamiento del Índice de Dispersión (IDC) con Tiempos de Permanencia Hiper-Exponenciales en Estados X_1 y X_2 para Diferentes Configuraciones de Distribuciones orden 6. | 137 |

| | |
|---|-----|
| Figura 4.10 Comportamiento del Índice de Variabilidad (IoV) para Diferentes Configuraciones de Distribuciones Hiper Exponenciales y Exponenciales Negativas en los Estados X_1 y X_2 orden 4..... | 138 |
| Figura 4.11 Curvas del IDC para los tiempos de permanencia en los estados del proceso de arribos tienen distribución HE de diferentes órdenes..... | 140 |
| Figura 4.12 Curvas IDC para cuando los tiempos de permanencia en los estados X_1 tiene distribución Exp Neg. y X_2 con Distribución HE de diferentes órdenes. | 141 |
| Figura 4.13 Curvas IDC para cuando los tiempos de permanencia en los estados X_1 tiene una distribución HE y X_2 con distribución Exp Neg. de diferentes órdenes. | 142 |
| Figura 4.14 Curvas del IoV para los tiempos de permanencia en los estados del proceso de arribos tienen distribución HE de diferentes órdenes..... | 142 |
| Figura 4.15 Curvas IoV para cuando los tiempos de permanencia en los estados X_1 tiene distribución Exp Neg. y X_2 con Distribución HE de diferentes órdenes. | 144 |
| Figura 4.16 Curvas IoV para cuando los tiempos de permanencia en los estados X_1 tiene una distribución HE y X_2 con distribución Exp Neg. de diferentes órdenes. | 145 |
| Figura 4.17 Comparación del Índice de Dispersión de Cuentas (IDC) entre Métodos: EM, MM y EM Y MM | 146 |

Figura 4.18 Análisis del Índice de Variabilidad (IoV) para Distintos
Métodos y Órdenes..... 149

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 3.1 Parámetros para la fase correspondiente a X_1 con una media de 100 y un CoV de 2 usando el método de aproximación MM. ¡Error!
Marcador no definido.

Tabla 3.2 Parámetros para la fase correspondiente a X_2 con una media de 100 y un CoV de 2 usando el método de aproximación MM. ¡Error!
Marcador no definido.

Tabla 3.3 Parámetros para la fase correspondiente a X_1 con una media de 100 y un CoV de 2 usando el método de aproximación EM. ¡Error!
Marcador no definido.

Tabla 3.4 Parámetros para la fase correspondiente a X_2 con una media de 100 y un CoV de 2 usando el método de aproximación EM. ¡Error!
Marcador no definido.

3.5 Parámetros de los caso con Procesos MMPP-2 y HE-2 Condicionado.
.....98

Tabla 4.1 Parámetros usados para los tiempos de permanencia en los estados del proceso de arribos tienen distribución HE de orden 2 115

Tabla 4.2 Parámetros para cuando el tiempo de permanencia en X_1 tiene distribución Exponencial Negativa y X_2 HE de Orden 2. 120

| | |
|--|-----|
| Tabla 4.3 Parámetros para cuando el tiempo de permanencia en X_2 tiene distribución Exponencial Negativa y X_1 HE de Orden 2. | 120 |
| Tabla 4.4 Parámetros usados para los tiempos de permanencia en los estados del proceso de arribos tienen distribución HE de orden 3. | 123 |
| Tabla 4.5 Parámetros para cuando el tiempo de permanencia en X_1 tiene distribución Exponencial Negativa y X_2 HE de Orden 3. | 124 |
| Tabla 4.6 Parámetros para cuando el tiempo de permanencia en X_2 tiene distribución Exponencial Negativa y X_1 HE de Orden 3. | 124 |
| Tabla 4.7 Parámetros usados para los tiempos de permanencia en los estados del proceso de arribos tienen distribución HE de orden 4. | 127 |
| Tabla 4.8 Parámetros para cuando el tiempo de permanencia en X_1 tiene distribución Exponencial Negativa y X_2 HE de Orden 4. | 128 |
| Tabla 4.9 Parámetros para cuando el tiempo de permanencia en X_2 tiene distribución Exponencial Negativa y X_1 HE de Orden 4. | 128 |
| Tabla 4.10 Parámetros usados para los tiempos de permanencia en los estados del proceso de arribos tienen distribución HE de orden 5. | 131 |
| Tabla 4.11 Parámetros para cuando el tiempo de permanencia en X_1 tiene distribución Exponencial Negativa y X_2 HE de Orden 5. | 131 |
| Tabla 4.12 Parámetros para cuando el tiempo de permanencia en X_2 tiene distribución Exponencial Negativa y X_1 HE de Orden 5. | 132 |
| Tabla 4.13 Parámetros usados para los tiempos de permanencia en los estados del proceso de arribos tienen distribución HE de orden 6. | 135 |

Tabla 4.14 Parámetros para cuando el tiempo de permanencia en X_1 tiene distribución Exponencial Negativa y X_2 HE de Orden 6. 135

Tabla 4.15 Parámetros para cuando el tiempo de permanencia en X_2 tiene distribución Exponencial Negativa y X_1 HE de Orden 6. 136

Capítulo 1. Variables involucradas en el modelo de Teletráfico de procesos de arribos.

En este capítulo se definen y caracterizan las variables de los modelos de teletráfico analizados en este trabajo. Se presentan conceptos clave como los tiempos entre arribos, la rafagacidad, el tráfico ofrecido y los momentos centrales de una variable aleatoria (valor esperado, varianza, desviación estándar, coeficiente de variación, *Skewness* y *Kurtosis*). Además, se explora con profundidad la Función Generadora de Momentos (FGM) del número de arribos que ocurren en un intervalo de tiempo y sus parámetros derivados, incluido el Índice de Dispersión de Cuentas (IDC) y el Índice de Variabilidad (IoV), siendo estos dos últimos parámetros los que forman el núcleo del marco analítico de este trabajo. Finalmente, se presenta una comparación y contraste detallados de estos, sus relaciones y sus valores obtenidos para los diferentes procesos de arribos estudiados en esta tesis.

1.1 Introducción.

Los fundamentos de la teoría del teletráfico se remontan a principios del siglo XX, con el trabajo pionero de Agner Krarup Erlang, quien desarrolló modelos para estudiar la congestión en los sistemas telefónicos [1]. Los modelos de teletráfico modernos han evolucionado para abordar las complejidades de las redes contemporáneas, abarcando una amplia gama de aplicaciones, desde las redes tradicionales de conmutación de circuitos hasta las modernas redes de conmutación de paquetes, incluidos Internet y los sistemas de comunicación móvil.

En la teoría del teletráfico, los procesos de arribos se modelan típicamente utilizando procesos estocásticos [2]. Los modelos comunes incluyen el proceso de Poisson, que supone que los arribos no tienen memoria y son independientes, y sus extensiones, como el Proceso de Poisson Modulado por Markov (MMPP por las siglas en inglés de *Markov Modulated Poisson Process*) y el Proceso de Poisson Generalizado (GPP por las siglas en inglés de *Generalized Poisson Process*), que capturan patrones de arribos más complejos. Estos modelos describen la variabilidad del tráfico influenciada por el comportamiento del usuario, los protocolos de red y los requisitos del servicio.

Es importante también profundizar en las variables que caracterizan los procesos de arribos del teletráfico, explorando conceptos clave como el tiempo entre arribos, la rafagacidad, el tráfico ofrecido y las probabilidades del proceso. Al examinar estas variables, podemos desarrollar modelos de teletráfico más precisos y robustos, esenciales para el diseño, análisis y optimización de redes de telecomunicaciones. De igual forma, la caracterización de los momentos centrales, los cuales, son fundamentales en el análisis estadístico de variables aleatorias, ya

que proporcionan información esencial sobre sus distribuciones. Estos momentos describen varios aspectos de la forma y dispersión de la distribución, son clave para caracterizar las propiedades estadísticas de los procesos de arribos de teletráfico.

Toda la información obtenida a partir de estos parámetros y métricas contribuye a la planificación de la capacidad, la garantía de la calidad del servicio y la gestión de la congestión, lo que en última instancia conduce a sistemas de comunicación más confiables y eficientes.

1.2 Variables para caracterizar un modelo de probabilidad.

La caracterización precisa de los modelos de teletráfico depende de la comprensión de diferentes variables que describen los procesos de arribos dentro de una red de telecomunicaciones. Estas proporcionan información sobre el comportamiento y el desempeño de la red, lo que ayuda a la planificación, análisis y uso eficiente de los recursos.

1.2.1 Tiempos involucrados en el proceso.

Estos nos permiten identificar los instantes de tiempo específicos en los que las llamadas o los paquetes arriban, así como también su duración en el sistema. En la Figura 1.1 ilustra los principales tiempos involucrados en un proceso. En los siguientes subtemas se definirá con detalle cada uno de ellos. Por ejemplo, X_s representa el tiempo de servicio, que abarca desde el instante cero hasta un instante t . Asimismo, $X_a^{(1)}, X_a^{(2)}$ y corresponden a los tiempos de arribo de dos estados representados en el diagrama, considerar estas v.a. nos permite caracterizar los dos estados que caracterizan el sistema, y en conjunto con sus tasas generar un modelo más complejo del comportamiento de este. Estos diagramas

son fundamentales para caracterizar los tiempos que conforman el proceso y analizar su interacción, con el objetivo de comprender los patrones y predecir los flujos de tráfico.

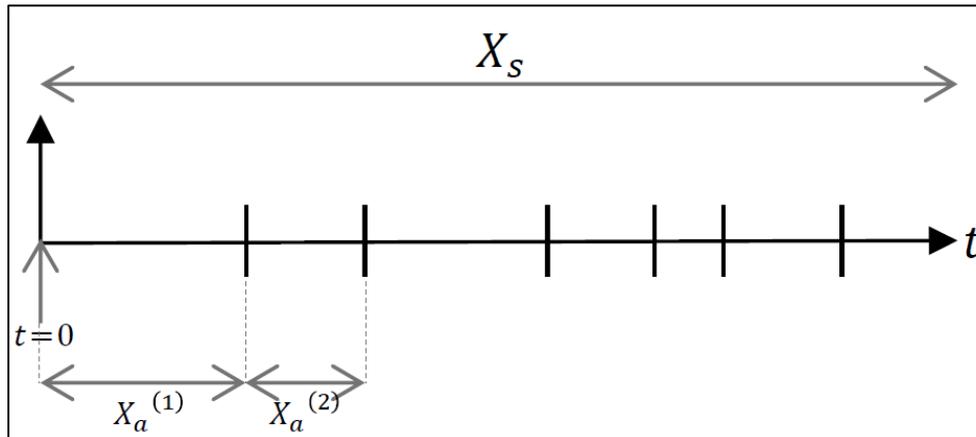


Figura 1.1 Diagrama de tiempos involucrados en un proceso donde x_s corresponde al tiempo de servicio y $x_a^{(1)}$ corresponde al tiempo de arribos de estado uno y $x_a^{(2)}$ al tiempo de arribos del segundo estado.

1.2.1.1 Tiempos entre arribos (X_a).

El tiempo entre arribos se refiere a al tiempo que transcurre entre dos arribos de llamadas o paquetes consecutivos.

En muchos modelos de teletráfico, se asume que los arribos siguen un proceso de Poisson, lo que implica que el tiempo entre arribos sigue una distribución exponencial negativa. Sin embargo, en este trabajo se analizarán procesos de arribos MMPP y cuando el tiempo entre arribos tiene distribución de probabilidad Log Normal e Hiper-Exponencial.

1.2.2 Tasas.

1.2.2.1 Tasa de arribo (λ_i).

La tasa de arribo indica la velocidad promedio a la que ocurren los arribos de llamadas o paquetes al sistema. En un MMPP, esta tasa puede variar en función del estado actual del proceso de Markov que modula el

proceso de Poisson. Por lo tanto, la tasa de arribo puede cambiar con el tiempo según las transiciones de estado del proceso de Markov.

1.2.2.2 Tasa de Muerte (μ).

La tasa de muerte representa la velocidad promedio a la que se completan o se eliminan las llamadas o paquetes del sistema. Esta tasa está relacionada con la duración promedio de las llamadas o la velocidad de procesamiento de los paquetes en el sistema. Al igual que la tasa de arribo, la tasa de muerte también puede variar en un MMPP según el estado actual del proceso de Markov.

1.2.2.3 Tasa promedio (λ_{avg}).

Cuando el proceso de arribos se modela considerando que la tasa de arribos cambia con el tiempo, la tasa de arribos promedio se obtiene multiplicando las tasas de arribo por la proporción del tiempo en el que los arribos ocurren con dicha tasa.

1.2.3 Tráfico Ofrecido (α).

El tráfico ofrecido se define como el producto de la tasa promedio de arribos y el tiempo medio de servicio. La ecuación(1.1) refleja la interacción entre la demanda del sistema y su capacidad para atenderla.

$$\alpha = \lambda_{avg} \cdot \tau \quad (1.1)$$

1.2.4 Rafagacidad (β).

La rafagacidad se refiere al fenómeno en el que los arribos de tráfico se producen en grupos o ráfagas en lugar de estar espaciadas uniformemente en el tiempo. En el contexto de los procesos de MMPP, la ráfaga puede manifestarse como períodos de altas tasas de arribos

seguidos de períodos de baja o nula actividad. La ecuación (1.2) es una forma de calcular la rafagacidad para un proceso MMPP conociendo la tasa más alta (λ_1) de uno de los estados del proceso y la tasa promedio (λ_{avg}).

$$\beta = \frac{\lambda_1}{\lambda_{avg}} \quad (1.2)$$

1.3 Probabilidades en modelos de teletráfico.

Varios modelos de teletráfico incorporan elementos probabilísticos para analizar la característica estocástica de los sistemas de telecomunicaciones y sus patrones de tráfico. Estas son dependientes del tipo de modelo con el que se está trabajando, por ejemplo, en un proceso de Poisson, el número de arribos que ocurren en intervalos de tiempo siguen una distribución de Poisson, con tiempos entre arribos caracterizados por una distribución exponencial.

Los procesos MMPP implican transiciones de estado según una cadena de Markov, con procesos de arribos de Poisson en cada estado. Finalmente, en un proceso GMPP, la distribución del tiempo de permanencia en cada estado del proceso de arribos es general, es decir, el proceso de arribos consiste de transiciones entre procesos de arribos de Poisson con las tasas diferentes, esto para capturar ráfagas en los patrones de tráfico.

Estas probabilidades nos permiten desarrollar modelos precisos, evaluar el rendimiento del proceso y optimizar la gestión de recursos en los sistemas de telecomunicaciones.

1.4 Momentos crudos.

Los momentos crudos son medidas estadísticas que representan los valores esperados de las potencias de una variable aleatoria X , derivadas directamente de su función de densidad de probabilidad. El n -ésimo momento crudo se define con la ecuación (1.3), donde n indica el orden del momento.

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x) dx \quad (1.3)$$

Estos momentos son fundamentales para describir la forma de una distribución, ya que brindan información sobre sus características, como la tendencia central (media), la dispersión (varianza) y las propiedades de orden superior, como el *Skewness* y la *Kurtosis*.

1.4.1 Valor Esperado o Media.

El primer momento estandarizado, que representa el valor esperado o promedio de la variable aleatoria, proporciona una medida de la tendencia central del proceso de arribo. Sea X una v.a. continua, el valor esperado de X o media se calcula como

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \quad 1.4$$

1.5 Momentos centrales.

Los momentos centrales y estandarizados de una variable aleatoria (v.a.) sirven como elementos fundamentales en el análisis estadístico de variables aleatorias, ofreciendo información indispensable sobre sus

distribuciones de probabilidad. Los momentos centrales tiene como base la media y se definen por la siguiente ecuación:

$$E[(X - E[X])^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[x])^n f_x(x) \quad (1.5)$$

Siendo $f_x(x)$ una PDF (por las siglas en inglés de *probability density function*). Estos momentos proporcionan una comprensión de las características de la distribución, incluidas las medidas de tendencia central, variabilidad y forma.

En el ámbito del modelado del teletráfico, estos momentos centrales son útiles para caracterizar con precisión las propiedades estadísticas de los procesos de arribos. Cuantificar parámetros como la media, la varianza, el *Skewness* y la *Kurtosis*, permite el desarrollo de modelos que capturan de manera efectiva el comportamiento complejo de las redes de telecomunicaciones.

1.5.1 Varianza.

La varianza es el segundo momento central e indica la variabilidad o dispersión de la variable aleatoria alrededor de la media. Una mayor varianza del tiempo entre arribos significa una mayor variabilidad en los tiempos de arribo con respecto a su valor promedio.

$$\sigma^2 = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E^2[X] \quad (1.6)$$

1.5.2 Desviación Estándar.

La desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza y proporciona una medida de dispersión en las mismas unidades que la propia variable aleatoria.

$$\sigma = \sqrt{E[X^2] - E[X]^2} \quad (1.7)$$

1.5.3 Coeficiente De Variación.

Es la razón de la desviación estándar y la media como se muestra en la ec. (1.8) y que ofrece una medida adimensional de la variabilidad relativa.

$$CV = \frac{\sqrt{E[X^2] - E[X]^2}}{E[X]} = \frac{\sigma}{E[X]} \quad (1.8)$$

1.5.4 Skewness.

El *Skewness* es el tercer momento estandarizado y refleja la asimetría de la distribución con respecto al valor medio. La *Skewness* positiva indica una cola más larga a la derecha, mientras que la *Skewness* negativa indica una cola más larga a la izquierda.

$$Sk = \frac{E[(X - E[X])^3]}{\sigma^3} = \frac{E[X^3] - 3E[X^2] \cdot E[X] + 2E[X]^3}{\sigma^3} \quad (1.9)$$

1.5.5 Kurtosis.

El cuarto momento estandarizado, que describe la "cola" de la distribución. Una *Kurtosis* alta significa colas pesadas y un pico agudo en la forma de la PDF, mientras que una *Kurtosis* baja indica colas ligeras y un pico más plano en la forma de la PDF.

$$\begin{aligned} Ku &= \frac{E[(X - E[X])^4]}{\sigma^4} \\ &= \frac{E[X^4] - 4E[X^3] \cdot E[X] + 6E[X^2] \cdot E[X]^2 - 3E[X]^4}{\sigma^4} \end{aligned} \quad (1.10)$$

1.5.6 Quinto momento estandarizado.

El quinto momento estandarizado, amplía el análisis de la forma de una distribución de probabilidad y captura aspectos tanto del comportamiento de la cola como de la *Skewness*. La siguiente ecuación nos permite calcular el quinto momento estandarizado.

$$Q_i = \frac{E[(X - E[X])^5]}{\sigma^5} \quad (1.11)$$

El quinto momento, al igual que los momentos de orden superior, ofrece información más profunda sobre los extremos y la forma de los datos, pero se utiliza con menos frecuencia en el análisis estadístico básico, su uso en este trabajo nos permite definir los momentos estandarizados y el cálculo de ellos a partir de este y otros momentos centrales.

1.6 Relación funcional de los momentos crudos y momentos estandarizados.

Los momentos crudos y los momentos estandarizados están estrechamente relacionados, ya que ambos describen propiedades fundamentales de una distribución de probabilidad, pero desde diferentes perspectivas. Los momentos crudos reflejan medidas absolutas basadas en la variable aleatoria, mientras que los momentos estandarizados ajustan estas medidas para considerar la forma relativa de la distribución en términos de dispersión y simetría.

Las ecuaciones (1.12)-(1.15) muestran cómo los momentos crudos pueden expresarse en función de métricas estandarizadas como el coeficiente de variación (CV), la *Skewness* (SK), la *Kurtosis* (KU) y el quinto momento estandarizado (Qi). Estas expresiones permiten vincular

directamente las características fundamentales de una distribución con los momentos crudos, proporcionando una herramienta práctica para analizar su forma, dispersión y otros patrones significativos.

$$M2 = E\{X^2\} = M1^2 (CV^2 + 1) \quad (1.12)$$

$$M3 = E\{X^3\} = M1^3 (SK CV^3 + 3 CV^2 + 1) \quad (1.13)$$

$$M4 = E\{X^4\} = M1^4 (CV^4 KU + 4 CV^3 SK + 6 CV^2 + 1) \quad (1.14)$$

$$M5 = E\{X^5\} = M1^5 (Ki CV^5 + 5 KU CV^4 + 10 SK CV^3 + 10 CV^2 + 1);) \quad (1.15)$$

Para este trabajo en algunas secciones nos referiremos a los momentos crudos conforme a la ecuación.

$$Mn = E\{X^n\} \quad (1.16)$$

Siendo n el momento crudo n -ésimo.

1.7 Función Generadora de Momentos del número de arribos $N(t)$.

La función generadora de momentos (FGM o MGF por sus siglas en inglés *Moment Generating Function*) en el contexto del teletráfico es una herramienta que se utiliza para analizar las propiedades estadísticas de los procesos de arribo en las redes de telecomunicaciones. Esta función proporciona una representación integral de la distribución de probabilidad de los tiempos entre arribos para eventos como llamadas telefónicas o paquetes de datos [3].

La Transformada de Laplace de la FGM del número de arribos que ocurren en un intervalo de tiempo t $N(t)$ para un Proceso de Poisson doblemente estocástico [4] se define mediante la siguiente ecuación:

$$\phi_{N(t)}^*(z, s) = \frac{1}{(\nu_1 + \nu_2)} \cdot \left[\frac{\nu_2}{\sigma_1} + \frac{\nu_1}{\sigma_2} \right] - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{\nu_1 + \nu_2} \cdot \left[\frac{R_1^*[\sigma_1] + R_2^*[\sigma_2]}{1 - (f_2^*[\sigma_1]f_2^*[\sigma_2])} \right] \quad (1.17)$$

donde

$$\sigma_1 = s - (z - 1)\lambda_1$$

$$\sigma_2 = s - (z - 1)\lambda_2$$

$$\nu_1 = \frac{1}{E[X_1]}$$

$$\nu_2 = \frac{1}{E[X_2]}$$

$R_1^*[\sigma_1]$ y $R_2^*[\sigma_2]$ representan las Transformadas de Laplace (TL) de la Función de Distribución de Probabilidad Acumulativa Complementaria (CCDF por las siglas en inglés de *Complementary Cumulative Distribution Function*) de los tiempos de permanencia los estados 1 y 2 del proceso de arribos, respectivamente.

$f_1^*[\sigma_1]$ y $f_2^*[\sigma_2]$ son las TL de las PDF de los tiempos de permanencia los estados 1 y 2 del proceso de arribos, respectivamente.

La FGM permite el cálculo de momentos de la distribución, como la media, la varianza, la *Skewness* y la *Kurtosis*, a través de sus derivadas.

1.7.1 Derivada de la FGM.

La solución a la ecuación de la FGM implica el uso de la transformada z debido a las variables que componen la función, sin embargo, un método más efectivo para su solución es la derivación de esta función respecto a z .

La derivación de la FGM con respecto a z se realiza para obtener una representación matemática conveniente de la distribución de probabilidad la variable aleatoria en cuestión. Al realizar esta operación e igualar la variable $z=1$, se obtiene la TL de la FGM.

Derivar la TL de la FGM permite calcular fácilmente los momentos de la distribución de $N(t)$. Diferenciando parcialmente $\phi_{N(t)}^*(z, s)$ con respecto a z y fijando $z = 1$, se obtiene la transformada de Laplace del número promedio de arribos, esto es:

$$\mathcal{L}\{E[N(t)]\} = \left. \frac{\partial}{\partial z} \phi_{N(t)}^*(z, s) \right|_{z=1} \quad (1.18)$$

De igual forma nos permite calcular los momentos crudos de $N(t)$ a partir de las derivadas de la TL de FGM. La relación entre los momentos de n -ésimo orden y la n -ésima derivada de la función $\phi_{N(t)}^*(z, s)$ se muestra en la ecuación (1.19).

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^n}{\partial z^n} \phi_{N(t)}^*(z, s) \right|_{z=1} &= \mathcal{L}\{E[N(t)(N(t) - 1) \cdots (N(t) - n + 1)]\} \\ &= \mathcal{L}\left\{E\left[\prod_{k=0}^{n-1} (N(t) - k)\right]\right\} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Observe que de la ecuación (1.17) diferenciando parcialmente con respecto a z y fijando $z = 1$, se tiene la transformada de Laplace del número promedio de arribos y aplicando la transformada inversa se obtiene:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \phi_{N(t)}^*(z, s) \Big|_{z=1} \right\} = E[N(t)] = t\lambda_{avg} \quad (1.20)$$

donde

$$\lambda_{avg} = \frac{\nu_2 \lambda_1 + \nu_1 \lambda_2}{\nu_1 + \nu_2}$$

El cálculo del segundo momento de $N(t)$ puede realizarse utilizando la ecuación (1.19) y la función generadora de momentos (FGM). Para obtener el segundo momento crudo de $N(t)$, se deriva dos veces la transformada de Laplace de la FGM con respecto a z y luego se evalúa en $z=1$. Este procedimiento se basa en las propiedades de la FGM y de su transformada de Laplace.

Matemáticamente, esto se expresa como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi_{N(t)}^*(z, s) \Big|_{z=1} &= \mathcal{L}\{E[N(t)(N(t) - 1)]\} \\ &= \mathcal{L}\{E[N^2(t) - N(t)]\} \\ &= \mathcal{L}\{E[N^2(t)] - E[N(t)]\} \\ &= \mathcal{L}\{E[N^2(t)]\} - \mathcal{L}\{E[N(t)]\} \end{aligned} \quad (1.21)$$

Esto es:

$$E[N^2(t)] = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi_{N(t)}^*(z, s) \Big|_{z=1} \right\} + E[N(t)] \quad (1.22)$$

Esto muestra que el segundo momento crudo de $N(t)$ puede calcularse sumando la transformada inversa de Laplace de la derivada segunda evaluada en $z=1$ al valor esperado $E[N(t)]$.

De manera análoga, los momentos crudos de orden n pueden calcularse utilizando este procedimiento generalizado: se deriva n -ésimas veces la FGM con respecto a z , se evalúa en $z=1$ y se realiza la transformada inversa de Laplace, sumando los términos necesarios según la expansión del momento deseado. Esta metodología permite calcular sistemáticamente cualquier momento crudo de $N(t)$.

1.7.2 La varianza de un proceso estocástico.

La varianza de $E[N(t)]$, donde $N(t)$ es un proceso de conteo, permite comprender las fluctuaciones en la ocurrencia de eventos a lo largo del tiempo. En este contexto, la varianza cuantifica la desviación del promedio de arribos que ocurren en el tiempo.

En este trabajo, la media y varianza de $N(t)$ permite calcular el Índice de Dispersión para Conteos (IDC), que mide la variabilidad relativa al conteo esperado. La varianza de $N(t)$ se calcula como:

$$Var(N(t)) = E[N(t)^2] - (E[N(t)])^2 \quad (1.23)$$

1.8 Índice de Dispersión de Cuentas

Una vez calculados los momentos crudos, de acuerdo con la metodología descrita en la sección previa, se puede obtener el IDC (Índice de

Dispersión de Cuentas). El IDC se define como la relación entre la varianza y la media de $N(t)$, esto es:

$$IDC(t) = \frac{Var[N(t)]}{E[N(t)]} \quad (1.24)$$

El IDC (Índice de Dispersión de Cuentas) fue definido con el propósito de comparar los procesos de arribos con el proceso de Poisson, el cual sirve como modelo de referencia en el análisis de teletráfico. En el contexto del proceso de Poisson, el IDC toma un valor constante debido a su naturaleza estacionaria, lo que significa que sus propiedades estadísticas permanecen constantes en el tiempo, es por eso por lo que, para este caso, el IDC es igual a 1, independientemente de la longitud del intervalo de observación. Esto se debe a que el proceso de Poisson exhibe una tasa de arribo constante y se caracteriza por una propiedad sin memoria, donde las ocurrencias de eventos son independientes y se distribuyen uniformemente en el tiempo.

Por el contrario, en procesos de arribo diferentes al de Poisson, como los observados en redes de telecomunicaciones del mundo real, el IDC puede desviarse por encima de 1.

Por ejemplo, cuando se consideran distribuciones de probabilidad Pareto de los tiempos de permanencia en cada estado de un Proceso de arribos de Poisson Doblemente Estocástico [5], el IDC es:

$$IDC(t) = 1 + \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{\lambda_1 + \lambda_2} \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \right) t^{2-\alpha} \quad (1.25)$$

Observe que al evaluar $t=0$ el término $t^{2-\alpha}$ en la ecuación (1.25) el $IDC(t=0)$ toma el valor mínimo.

$$IDC(t = 0) = 1 \quad (1.26)$$

Otro ejemplo que nos permite observar este comportamiento es la siguiente ecuación:

$$IDC(t) = \frac{2[(aw_w + bw_2)^2 - (a^2w_w + b^2w_2)]}{(aw_w + bw_2)^3} \times \left(\frac{1 - e^{-(aw_w + bw_2)t}}{t} \right) + C^2(X) \quad (1.27)$$

Observe que al aplicar el límite cuando t tiende a infinito la expresión se reduce a $IDC(t) = CV^2(X)$ siendo $CV^2(X)$ el coeficiente de variación al cuadrado y si en este caso $[(aw_w + bw_2)^2 - (a^2w_w + b^2w_2)] = 0$ la varianza queda definida de la siguiente forma $Var[N(t)] = \lambda t$, donde por definición λt es la media dando como resultado que el cálculo del IDC se resume a $IDC(t) = 1$ [6].

1.8.1 Parámetro Hurst como medida de desempeño

El parámetro Hurst, denotado por H , recibe el nombre por Harold Edwin Hurst, quien lo introdujo por primera vez en el contexto de la hidrología. Se utiliza para cuantificar la persistencia o la memoria de largo plazo de una serie temporal.

Para su cálculo se siguen los siguientes pasos:

1. Dividir la serie temporal $X(t)$ en ventanas de tamaño N .
2. Calcular para cada ventana la media \bar{X} .
3. Encontrar la desviación acumulativa $Y(t) = \sum_i^t (X(i) - \bar{X})$.
4. Calcular el rango $R(N)$ como la diferencia entre el valor máximo y mínimo de $Y(t)$ en la ventana.

5. Calcular la desviación estándar $S(N)$ de los datos dentro de la ventana.
6. El valor de R/S es $R(N)/S(N)$.
7. Repetir del paso 2 al paso 6 para diferentes tamaños de ventana N y ajuste una regresión log-log para encontrar la pendiente. El valor de la pendiente será el valor del parámetro de Hurst.

En el análisis del teletráfico, el parámetro Hurst se puede aplicar para caracterizar la estructura de autocorrelación de los procesos de arribo, lo que proporciona información sobre su comportamiento temporal y su predictibilidad.

En términos simples el parámetro de Hurst es la pendiente del IDC, en un cierto intervalo de tiempo como se muestra en la Figura 1.2.

1.8.1.1 Valor límite del parámetro Hurst y sus inconvenientes.

Un valor del parámetro Hurst de $H = 0.5$ indica una serie sin dependencia de largo plazo, similar una serie de eventos independientes. Los valores de $H > 0.5$ sugieren una dependencia de largo plazo positiva, donde los valores pasados tienen una influencia más fuerte en los valores futuros, lo que indica una tendencia a un comportamiento persistente.

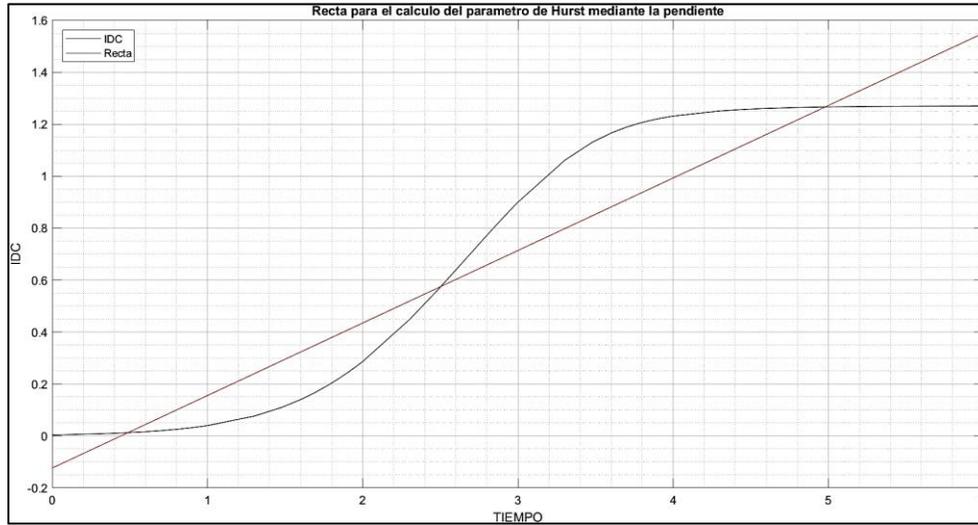


Figura 1.2 Grafica del IDC(t) para un proceso MMPP con su respectiva recta de aproximación para el cálculo del parámetro de Hurst mediante la pendiente de la recta.

Sin embargo, un inconveniente para su uso como métrica de desempeño radica en la definición de los intervalos de tiempo que se toman para su cálculo, haciendo que sea un parámetro escalar que nos proporciona información en un punto específico, es por eso que en su lugar se utiliza el Índice de Variabilidad (IoV).

1.9 Índice de Variabilidad de un proceso.

El índice de variabilidad (IoV) es una medida que se utiliza para cuantificar la variabilidad o dispersión en un proceso estocástico, centrándose particularmente en el grado de irregularidad en los tiempos de arribo de eventos como llamadas telefónicas o paquetes de datos en una red de telecomunicaciones. El IoV proporciona información sobre cuánto se desvía el tráfico de un patrón predecible, relevante para la planificación de la red y la asignación de recursos.

En la literatura encontramos varias definiciones del IoV, sin embargo, para este trabajo se usó la ecuación(1.28) de [6], ya que permite calcular este parámetro de mejor forma el IoV a comparación de otras ecuaciones

dado las características abordadas en el Apéndice B “Consejos y Recomendaciones para Evitar Errores en Wolfram Mathematica”.

$$IoV(t) = \frac{\frac{d(\log (IDC(t)))}{d(\log(t))} + 1}{2} \quad (1.28)$$

Observe que el valor del IoV, al depender de la derivada del IDC(t), es 0.5 en t=0, siendo este el valor mínimo que puede tomar. Un IoV más alto indica una mayor variabilidad en los tiempos en que ocurren los arribos, lo que sugiere patrones de tráfico más impredecibles y con ráfagas. Por el contrario, un IoV más bajo implica un tráfico más regular y predecible, que puede ser más fácil de gestionar y optimizar en una red.

1.10 Conclusiones.

En este capítulo se definen las principales variables y métricas utilizadas para los análisis y caracterización de los procesos de arribos que se detallan en los Capítulos 2, 3 y 4. Siendo el Índice de Dispersión de Cuentas (IDC) e el Índice de Variabilidad (IoV) métricas de relevancia. El IDC permite evaluar la dispersión del número de arribos en un intervalo de tiempo, mientras que el IoV mide la variabilidad relativa de los tiempos en los que ocurren los arribos.

Ambos índices son herramientas fundamentales para caracterizar el comportamiento de procesos estocásticos, ya que proporcionan métricas que capturan tanto la estabilidad como la irregularidad de los modelos. La introducción de momentos crudos, momentos centrales y momentos estandarizados complementa esta caracterización, estableciendo relaciones funcionales que son esenciales para los cálculos posteriores.

En el siguiente capítulo se abordan diversos procesos utilizados para modelar el tráfico en ráfagas, especialmente aquellos relacionados con los tiempos de arribos y las distribuciones de probabilidad asociadas. El Análisis del proceso GMPP-2, que es fundamental para entender los mecanismos de arribos de eventos en sistemas. Así como también, se examinan los procesos en los que los tiempos de permanencia en cada estado presentan distribuciones de probabilidad distintas a la exponencial negativa, tales como las distribuciones Hiper Exponencial y Log Normal. Se profundiza en el estudio de varios procesos, entre ellos el PMPP-2 y el MMPP de dos estados, que ofrecen una representación más realista del comportamiento de sistemas de tráfico con múltiples estados. Finalmente, se exploran los procesos caracterizados por la distribución del tiempo entre arribos, donde se destacan las distribuciones Hiper Exponencial de distintos órdenes, las cuales son esenciales para modelar sistemas con fluctuaciones más complejas en los tiempos de llegada.

Capítulo 2. Procesos de arribos para modelar el tráfico en ráfagas.

En el panorama dinámico del análisis del tráfico de red, capturar y modelar con precisión la naturaleza de los flujos de tráfico es fundamental para diseñar sistemas de comunicación robustos y eficientes. Este capítulo profundiza en las técnicas avanzadas de modelado de tráfico, centrándose en los patrones de tráfico con ráfagas que se observan a menudo en los entornos de red modernos. Como se muestra en la Figura 2.1, se presenta un diagrama de estados de un proceso MMPP de dos estados, en el cual se ilustran los diferentes tiempos involucrados en el proceso, junto con sus tasas de arribos altas y bajas. Dichos patrones, caracterizados por ráfagas irregulares de alta actividad seguidas de períodos de relativa calma, desafían los enfoques de modelado tradicionales y requieren procesos estocásticos sofisticados para describirlos adecuadamente.

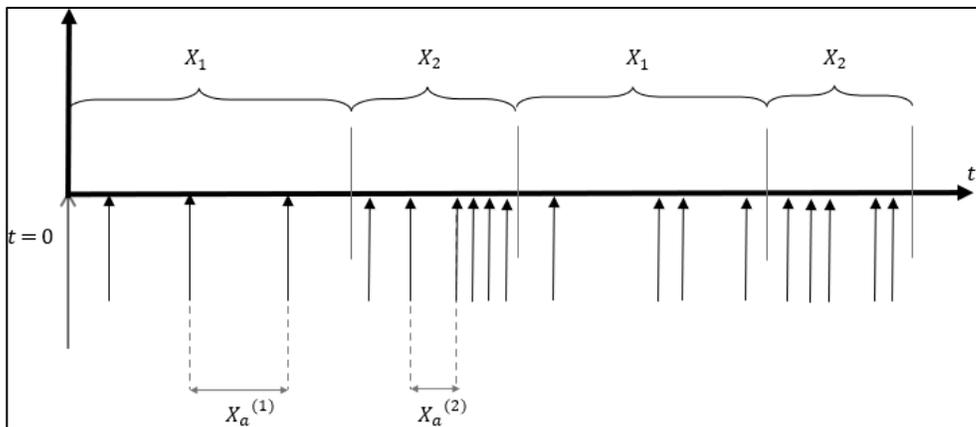


Figura 2.1 Diagrama de la evolución en el tiempo de un proceso de arribos MMPP de dos estados.

2.1 Proceso GMPP-2

Los Procesos de Poisson con Modulación General (G-MPP por las siglas en inglés de *Generalized Modulated Poisson Process*) de dos estados son un modelo versátil que extiende los procesos de Poisson tradicionales al incorporar un comportamiento dependiente del estado, lo que proporciona una representación matizada de las ráfagas de tráfico.

2.2 Procesos en los que los tiempos de permanencia en cada estado del proceso de arribos tienen distribuciones de probabilidad diferentes a la Exponencial Negativa.

2.2.1 Proceso en el que los tiempos de permanencia en cada estado del proceso de arribos tienen distribución de probabilidad Hiper Exponencial.

En el análisis de sistemas estocásticos y procesos de arribos, los tiempos de permanencia en diferentes estados permiten modelar la variabilidad en tiempo del proceso de arribos en sistemas de comunicaciones. En este contexto, una de las herramientas más útiles para modelar sistemas con alta variabilidad y heterogeneidad es la distribución Hiper Exponencial. Esta distribución permite describir tiempos de permanencia como una combinación ponderada de distribuciones de probabilidad exponenciales, capturando dinámicas complejas y fenómenos de tráfico realistas que no pueden ser descritos adecuadamente con distribuciones simples [7].

La naturaleza flexible de esta distribución permite ajustar modelos para representar sistemas con múltiples escalas de tiempo, como aquellos donde algunos eventos son frecuentes (tasa alta) y otros son poco frecuentes (tasa baja).

En este trabajo, se consideran X_1 y X_2 como variables aleatorias que representan los tiempos de permanencia en los estados 1 y 2 del proceso de arribos, respectivamente.

Cada estado representa una fase del sistema, como períodos de alta o baja intensidad de tráfico en una red de telecomunicaciones.

Estos tiempos de permanencia Hiper Exponenciales permiten modelar sistemas donde los patrones de tráfico exhiben variabilidad elevada, como ráfagas de paquetes en redes IP o transacciones financieras con picos de actividad.

2.2.2 Proceso en el que los tiempos de permanencia en cada estado del proceso de arribos tienen distribución de probabilidad Log Normal.

La distribución Log-Normal se destaca como una herramienta en el análisis de tiempos entre arribos en sistemas de telecomunicaciones. Su capacidad para capturar variaciones significativas en los tiempos de arribo y su naturaleza de cola pesada la hacen especialmente adecuada para escenarios complejos.

Por ejemplo, en redes de telecomunicaciones, los sistemas a menudo experimentan "ráfagas de alto tráfico seguidas de períodos de calma". Estas dinámicas son influenciadas por factores como congestión de la red, patrones de uso y otras influencias externas, lo que hace que la tasa de arribo de paquetes fluctúe considerablemente [8]. En este contexto, la distribución Log-Normal permite modelar con precisión estas fluctuaciones y "proporciona predicciones más realistas para el rendimiento del sistema, la gestión de recursos y la previsión del tráfico" [1].

Un estudio realizado por Bhattacharjee y Nandi muestra que, al analizar tiempos entre arribos desde una perspectiva temporal y espacial, la distribución Log-Normal se ajusta mejor a los datos en comparación con la de Pareto. Esto subraya su eficacia en escenarios donde el tráfico no es constante y se encuentra afectado por múltiples factores [9].

De igual forma, Sharma y Bhatt, en su análisis de tráfico de IoT, destacan que "la distribución lognormal proporciona bajos valores estadísticos de KS y altos valores p" al analizar datos provenientes de sensores de clima y otros dispositivos IoT. Este ajuste superior se observó en diversas métricas como temperatura, velocidad del viento y dirección del viento, utilizando datos reales recolectados en Aarhus, Dinamarca [10] [11].

Además, investigaciones como las de Antoniou et al. concluyen que la agregación de mediciones de tráfico de red forma distribuciones que "se aproximan con alta precisión mediante la distribución Log-Normal" [12]. Esta característica hace que la distribución no solo sea relevante en redes tradicionales, sino también en dominios emergentes como IoT y análisis de datos de redes inteligentes [13].

En conclusión, la capacidad de la distribución Log-Normal para modelar tiempos entre arribos la convierte en una herramienta útil en sistemas donde los patrones de tráfico son dinámicos y altamente variables. Su aplicación va desde la predicción de tráfico en redes de telecomunicaciones hasta la optimización de sistemas IoT, proporcionando una base estadística robusta para la gestión y diseño de estas infraestructuras.

2.2.2.1 Caracterización Matemática de la Distribución Log Normal.

Una variable aleatoria T sigue una distribución Log Normal si el logaritmo natural de T , denotado como $\ln(T)$, tiene una distribución Normal [14]. Su función de densidad de probabilidad (PDF) está dada por:

$$f(t) = \frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{(\ln(t)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}, t > 0. \quad (2.1)$$

Donde:

μ y σ son los parámetros de la distribución Normal subyacente.

- μ representa el logaritmo del promedio geométrico de T (ecuación (2.2)).
- σ mide la dispersión logarítmica de T (ecuación (2.3)).

$$\sigma = \sqrt{\text{Log}[CV^2 + 1]} \quad (2.2)$$

$$\mu = \text{Log}[M1] - \frac{\text{Log}[CV^2 + 1]}{2}. \quad (2.3)$$

Esta distribución es asimétrica positiva, lo que permite modelar tiempos de permanencia con valores extremos y una alta variabilidad. Su forma es particularmente útil para describir procesos donde los tiempos de permanencia resultan de la multiplicación de múltiples factores aleatorios.

En procesos estocásticos como el GMPP, los tiempos de permanencia X_1 y X_2 representan las duraciones que el sistema pasa en cada estado

antes de transitar al otro. Modelar estos tiempos como Log Normales tiene las siguientes ventajas:

- La distribución Log Normal captura escenarios donde los tiempos de permanencia varían ampliamente debido a la superposición de múltiples efectos estocásticos [15].
- En sistemas de telecomunicaciones, los tiempos entre arribos y permanencias suelen mostrar comportamientos no lineales, lo cual puede describirse con mayor precisión usando modelos Log Normales [16].
- Esta distribución se ajusta bien a datos empíricos de sistemas complejos donde las distribuciones más simples no son adecuadas.

El modelado de los tiempos de permanencia X_1 y X_2 como distribuciones Log Normales proporciona una herramienta poderosa para analizar sistemas con alta variabilidad y fenómenos no lineales. En particular, este enfoque mejora la caracterización de procesos de arribos en redes de telecomunicaciones, permitiendo una evaluación más precisa de métricas clave como el tiempo medio de espera, la utilización del sistema y la capacidad de servicio.

2.2.3 Proceso PMPP-2.

El proceso de Poisson Modulado de Pareto (PMPP por las siglas en inglés de *Pareto Modulated Poisson Process*) es una técnica de modelado de tráfico diseñada para capturar la naturaleza de cola pesada y ráfagas del tráfico de red, que se observa a menudo en los sistemas de comunicación modernos [5]. Este modelo integra los principios de la distribución de Pareto con un proceso de Poisson Modulado de Pareto,

lo que ofrece un marco para representar patrones de tráfico con una variabilidad significativa y períodos prolongados de alta actividad.

En el PMPP, el proceso de arribos de paquetes o eventos está gobernado por un proceso de Poisson cuyo parámetro de velocidad cambia de acuerdo con un proceso de Markov. Sin embargo, en lugar de utilizar distribuciones exponenciales para los tiempos de permanencia, el Pareto-MPP incorpora la distribución de Pareto para capturar mejor la naturaleza de cola pesada del tráfico en ráfagas.

2.2.4 Proceso MMPP de dos estados (MMPP-2).

Un proceso MMPP-2 (por las siglas en inglés de *Markov Modulated Poisson Process*) es un modelo estocástico utilizado para describir patrones de tráfico en sistemas que experimentan fluctuaciones en las tasas de arribo a lo largo del tiempo. Este modelo consta de dos estados, los cuales representan períodos de baja y alta intensidad de tráfico. En cada uno de estos estados, los arribos de tráfico siguen un proceso de Poisson, pero la tasa de arribo varía: λ_{a_2} corresponde a la tasa de arribo en el estado de baja intensidad, mientras que λ_{a_1} representa la tasa de arribo en el estado de alta intensidad. Los tiempos entre arribos en cada estado del proceso de arribos, X_{a_1} y X_{a_2} , se distribuyen exponencialmente, lo que significa que, en un estado dado, los arribos ocurren de manera aleatoria, pero con una tasa constante específica.

El proceso alterna entre estos dos estados según una cadena de Markov, es decir, el sistema cambia de estado de acuerdo con probabilidades definidas por una matriz de transición de Markov. Las transiciones entre los estados ocurren aleatoriamente, y las probabilidades de cambio de un estado a otro están determinadas por las características del sistema.

Por ejemplo, si el sistema está en el estado de tasa baja (λ_{a_2}), existe una probabilidad de que cambie al estado de tasa alta (λ_{a_1}), y viceversa. Estas transiciones reflejan la dinámica de los sistemas donde la intensidad del tráfico puede aumentar o disminuir a lo largo del tiempo, como en las redes de telecomunicaciones.

Como se muestra en las Figuras 2.1 y Figura 2.2, el diagrama de estados del proceso MMPP-2 representa visualmente las transiciones entre los dos estados y sus respectivas tasas de arribo. Este modelo es especialmente útil para capturar patrones de tráfico que presentan fluctuaciones significativas, como ráfagas de actividad seguidas de períodos de menor tráfico, lo que permite un modelado más realista y preciso de flujos de tráfico complejos en comparación con modelos más simples como el proceso de Poisson. En sistemas de telecomunicaciones, por ejemplo, el tráfico a menudo alterna entre períodos de alta y baja demanda, lo que hace que el modelo MMPP-2 sea adecuado para simular y predecir el comportamiento del tráfico en esas redes [6].

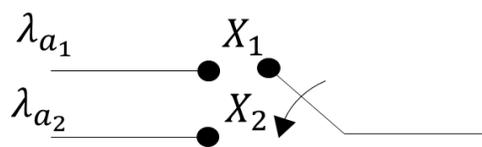


Figura 2.2 Conmutación entre tasas del proceso de arribos MMPP-2.

Tomando esta información en cuenta y considerando que cada estado tiene una probabilidad correspondiente, definimos la tasa promedio como:

$$\lambda_{avg} = \lambda_{a_1} \cdot p_1 + \lambda_{a_2} \cdot p_2 \quad (2.4)$$

Donde λ_{avg} es la tasa promedio de arribos del proceso MMPP-2. λ_{a_1} y λ_{a_2} son las tasas de arribos en los estados 1 y 2 del proceso de arribos, respectivamente. Por otro lado, p_1 y p_2 representan la proporción del tiempo que el proceso permanece en los estados 1 y 2, respectivamente. Sean X_1 y X_2 variables aleatorias exponenciales negativas con parámetros λ_1 y λ_2 que representan los tiempos de permanencia en los estados 1 y 2 del proceso de arribos, respectivamente, los tiempos medios de permanencia en cada estado son:

$$E\{X_1\} = 1/\lambda_1$$

y

$$E\{X_2\} = 1/\lambda_2$$

Por lo tanto, p_1 y p_2 se calculan como:

$$p_1 = \frac{E\{X_1\}}{E\{X_1\} + E\{X_2\}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

y

$$p_2 = \frac{E\{X_2\}}{E\{X_1\} + E\{X_2\}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Bajo la condición en la que $\lambda_1 > \lambda_2$ obtenemos directamente que:

$$E\{X_1\} < E\{X_2\} \tag{2.5}$$

Bajo la condición de que los eventos son paralelos tenemos:

$$p_1 = \frac{E\{X_1\}}{E\{X_1\} + E\{X_2\}} \quad (2.6)$$

$$p_2 = \frac{E\{X_2\}}{E\{X_1\} + E\{X_2\}} \quad (2.7)$$

Donde $E\{X_1\}$ y $E\{X_2\}$ se definen como:

$$E\{X_1\} = \frac{1}{\lambda_{a_1} \cdot p_1} \quad (2.8)$$

$$E\{X_2\} = \frac{1}{\lambda_{a_2} \cdot p_2} \quad (2.9)$$

2.3 Procesos caracterizados por la distribución del tiempo entre arribos.

2.3.1 Proceso en que el tiempo entre arribos X_a tiene distribución Hiper Exponencial de segundo orden.

Los Procesos de Poisson con modulación Hiper Exponencial presentan un análisis del enfoque de modulación Hiper Exponencial, centrándose en su capacidad para modelar el tráfico con varianza significativa y distribuciones de cola larga.

Un proceso Hiper Exponencial con dos estados es un tipo de proceso estocástico utilizado en la teoría de colas y teletráfico para modelar sistemas en los que los tiempos entre arribos tienen una alta variabilidad. La característica principal de una distribución Hiper Exponencial es que puede modelar datos con un coeficiente de variación mayor que uno, lo

que significa que el proceso permite tiempos entre arribos tanto cortos como muy largos, capturando el comportamiento de procesos altamente variables.

En el proceso de arribos que considera tiempos entre arribos con distribución de probabilidad Hiper Exponencial de dos estados, el sistema alterna entre dos distribuciones exponenciales diferentes, cada una con su propio parámetro de velocidad (λ_{a1} y λ_{a2}). El proceso puede interpretarse como una mezcla de dos distribuciones exponenciales, donde el sistema selecciona de manera probabilística qué distribución exponencial seguir en un momento dado. Las probabilidades asociadas con cada estado (a menudo denotadas p_{a1} y p_{a2}) definen la probabilidad de estar en un estado u otro. Esto conduce a una función de densidad de probabilidad (PDF) que es la suma ponderada de dos distribuciones exponenciales.

$$f(t) = p_{a1}\lambda_{a1}e^{-\lambda_{a1}t} + p_{a2}\lambda_{a2}e^{-\lambda_{a2}t}; t \geq 0 \quad (2.10)$$

Donde:

- λ_{a1} y λ_{a2} son los parámetros de velocidad (es decir, la inversa de los tiempos entre arribos promedio para cada estado).
- p_{a1} y p_{a2} son las probabilidades de estar en cada estado, con $p_{a1} + p_{a2} = 1$.

Este proceso es útil en escenarios donde el tráfico o los tiempos entre arribos son muy variables y no pueden ser capturados adecuadamente por una única distribución exponencial. El proceso Hiper Exponencial de dos estados se utiliza a menudo en el modelado de sistemas de

telecomunicaciones, donde algunos paquetes o llamadas experimentan demoras mucho más largas que otros.

2.3.2 Proceso en que el tiempo entre arribos X_a es hiper exponencial de orden 2 condicionado.

Tradicionalmente, los procesos de Poisson han sido la base para modelar estos fenómenos debido a su simplicidad matemática y propiedades analíticas. Sin embargo, en escenarios más complejos, donde los tiempos entre arribos presentan variabilidad elevada surgen nuevas necesidades de modelación. En este contexto, el Dr. Felipe A. Cruz Pérez ha propuesto un modelo innovador basado en un proceso de arribos Hiper Exponencial de orden 2 condicionado al estado anterior del sistema (HE-2 condicionado).

El modelo propuesto amplía el alcance de los procesos Hiper Exponencial tradicionales al incorporar dependencia entre el tiempo entre arribos y el estado previo del sistema. En un proceso Hiper Exponencial de orden 2, los tiempos entre arribos se caracterizan por una distribución que resulta de la mezcla de dos distribuciones exponenciales, permitiendo una mayor flexibilidad en la representación de la dispersión temporal. Este enfoque es especialmente útil en sistemas donde la variabilidad no puede ser adecuadamente representada por una única distribución exponencial.

La novedad del modelo radica en la condición impuesta por el estado anterior, lo que significa que la probabilidad de seleccionar uno u otro componente de la mezcla de Exponenciales no es fija, sino que depende del estado en que se encontraba el sistema antes del arribo. Este condicionamiento agrega una dimensión temporal y contextual que mejora la precisión de la modelación en escenarios dinámicos y

dependientes del historial, en la Figura 2.3 se muestra un diagrama de transiciones de fase del tiempo entre arribos que modela este sistema. De acuerdo con la Figura 2.3, el siguiente tiempo entre arribos puede ser X_{a1} o X_{a2} con probabilidades p o q , respectivamente, cuando el arribo anterior fue de tipo 1 (con la distribución del tiempo entre arribos X_{a1}) Por otro lado, si el arribo previo es de tipo 2 (con la distribución del tiempo entre arribos X_{a2}) el tiempo para que ocurra el siguiente arribo puede ser X_{a1} o X_{a2} con probabilidades p' o q' , respectivamente.

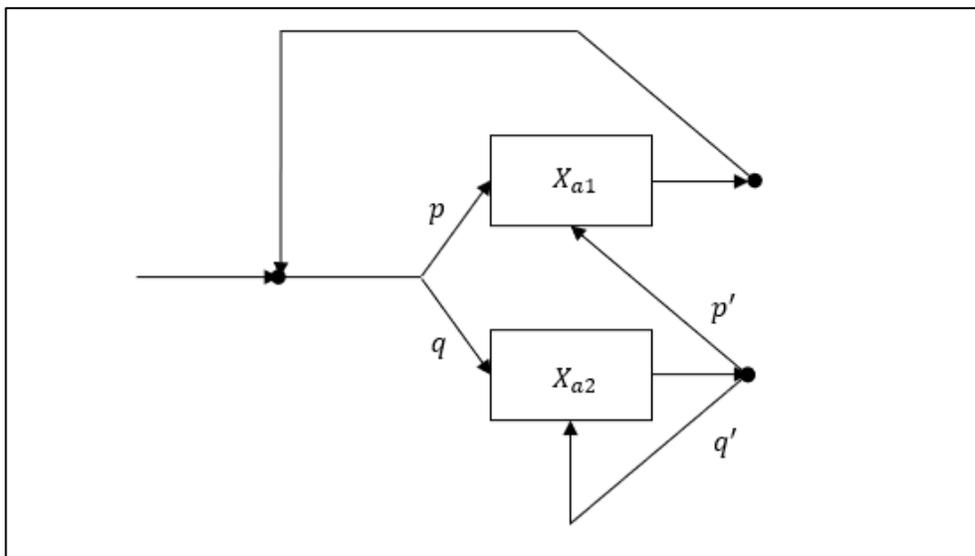


Figura 2.3 Diagrama de transición de fases del tiempo entre arribos X_a con distribución Hiper Exponencial de orden 2 condicionado al estado anterior.

A partir del diagrama de transición de fases del tiempo entre arribos HE-2 condicionado se puede obtener las medias de los tiempos de permanencia en cada estado del proceso de arribos. Sean X_1 y X_2 los tiempos en los que el tiempo entre arribos es X_{a1} y X_{a2} , respectivamente, el valor medio de X_1 y X_2 están dados por:

$$E\{X_1\} = \frac{1}{q\lambda_{a_1}}$$

$$E\{X_2\} = \frac{1}{p' \lambda_{a_1}}$$

2.3.3 Proceso en que el tiempo entre arribos X_a tiene distribución Hiper Exponencial de orden n .

La distribución HE de orden n es un modelo que se utiliza para describir procesos en los que el tiempo entre arribos sigue una mezcla de n variables aleatorias con distribución de probabilidad exponencial negativa, cada una con una tasa diferente como se muestra en el diagrama de fases de la Figura 2.4. Es decir, si X_a es una v.a. con distribución HE- n entonces:

$$X_a = \begin{cases} X_{a1} \text{ con probabilidad } p_{a1} \\ X_{a2} \text{ con probabilidad } p_{a2} \\ \vdots \\ X_{an} \text{ con probabilidad } p_{an} \end{cases} \quad (2.11)$$

y su PDF es:

$$f_{X_a}(t) = \sum_{i=1}^n p_{ai} \lambda_{ai} e^{-\lambda_{ai} t}; \quad t \geq 0 \quad (2.12)$$

donde:

p_{ai} es la probabilidad de elegir la distribución exponencial i -ésima y $\sum_{i=1}^n p_{ai} = 1$,

λ_{ai} es el parámetro de tasa de la distribución exponencial i -ésima.

Note que esta distribución está caracterizada por $2n-1$ parámetros, esto es, n tasas de arribos distintas y $n-1$ probabilidades de elegir cada fase.

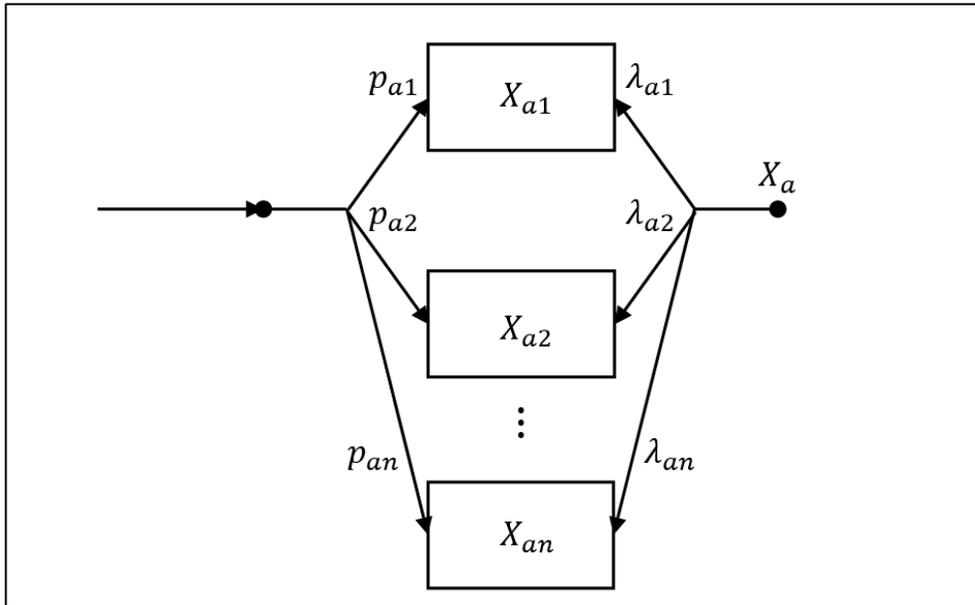


Figura 2.4 Diagrama de transición de fases del tiempo entre arribos X_a con distribución Hiper Exponencial de orden n .

El modelo se construye seleccionando una de las n variables aleatorias con distribución exponencial en función de probabilidades específicas. Cada distribución exponencial está asociada a un parámetro de tasa diferente, lo que refleja una "fase" distinta del sistema [17]. La mezcla resultante puede adaptarse a patrones de tráfico con un comportamiento irregular o en ráfagas, como períodos de alta y baja intensidad. En muchos casos, la distribución HE- n proporciona una representación más precisa de los sistemas del mundo real en comparación con modelos más simples, como la distribución exponencial, que supone una tasa constante de arribos.

Por ejemplo, en las redes de telecomunicaciones, el tráfico de datos a menudo fluctúa entre una actividad alta (por ejemplo, durante las horas pico de uso) y una actividad menor (por ejemplo, durante los períodos de inactividad). La distribución Hiper Exponencial permite modelar estas fluctuaciones con mayor precisión.

El orden n se refiere al número de fases exponenciales que se mezclan en el modelo. Un orden superior permite una mayor complejidad y un control más preciso de la distribución. Sin embargo, también introduce parámetros adicionales que deben estimarse.

2.4 Conclusiones

El modelado del tráfico en ráfagas, especialmente en entornos de redes modernas, requiere técnicas avanzadas que permitan capturar la variabilidad y complejidad de los patrones observados. Este análisis se centra en procesos estocásticos como el GMPP y el MMPP, junto con distribuciones como la Hiper Exponencial y la Log Normal, que ofrecen herramientas matemáticas adaptables para describir sistemas con alta variabilidad.

Los procesos GMPP y MMPP permiten alternar entre estados de alta y baja intensidad de tráfico, capturando las dinámicas de ráfagas mediante cadenas de Markov. La introducción de distribuciones Hiper Exponenciales y Log Normales en los tiempos de permanencia mejora la capacidad de representar fenómenos reales en redes de telecomunicaciones. Como se menciona, la distribución Hiper Exponencial es clave para modelar tiempos de permanencia en sistemas con alta heterogeneidad, gracias a su capacidad para combinar múltiples tasas exponenciales. Su aplicación en sistemas con fluctuaciones extremas, como ráfagas de paquetes en redes IP, demuestra su utilidad en el análisis de tráfico variable. Por otro lado, la distribución Log Normal es adecuada para describir tiempos de permanencia influidos por múltiples factores acumulativos, esta distribución captura alta dispersión temporal. Es particularmente útil en sistemas donde los tiempos no

siguen patrones lineales, como en redes de telecomunicaciones complejas.

El análisis de estos procesos y distribuciones revela que el tráfico en ráfagas no puede ser abordado con modelos simples. En su lugar, se requiere una combinación de herramientas estocásticas avanzadas y distribuciones flexibles que reflejen tanto la variabilidad como las características no lineales de los sistemas. Esto es fundamental para optimizar redes de telecomunicaciones y sistemas de procesamiento de datos en escenarios de tráfico complejo y dinámico.

En el siguiente capítulo se explora la función generadora de momentos del número de arribos en función del tiempo. Se inicia con la introducción al cálculo del IDC y el loV del proceso GMPP-2, así como su aplicación en el proceso de arribos MMPP-2, donde se derivan las ecuaciones correspondientes a partir de la FGM. Luego, se profundiza en la función generadora de momentos para procesos donde el tiempo entre arribos sigue distribuciones de probabilidad Hiper Exponencial (HE), incluyendo casos con diferentes órdenes de esta distribución y su tratamiento condicionado. En las siguientes secciones, se presentan métodos avanzados para aproximar distribuciones Log-Normal utilizando distribuciones HE de orden n , aplicando técnicas como la igualación de momentos (MM) y el algoritmo de maximización de esperanza (EM), así como una combinación híbrida de ambos métodos. Se ilustran resultados obtenidos mediante, comparando procesos MMPP-2 y procesos con tiempos entre arribos Hiper Exponenciales de distintos órdenes. Finalmente, se realiza un análisis comparativo de las gráficas de IDC, lo que permite una mejor comprensión de las características de estos procesos de arribos y su impacto en el modelado de tráfico en ráfagas.

Capítulo 3. Función Generadora de Momentos del número de arribos en función del tiempo.

La función generadora de momentos (FGM) del número de arribos en un proceso de GMPP-2 es una herramienta para analizar la distribución de arribos a lo largo del tiempo. Para un proceso de arribos de Poisson Doblemente Estocástico la FGM está dada por la ecuación (3.1) [3].

$$\begin{aligned} \phi_{N(t)}^*(s, z) = & \frac{1}{(v_1 + v_2)} \cdot \left[\frac{v_2}{s - (z-1)\lambda_1} + \frac{v_1}{s - (z-1)\lambda_2} \right] \\ & - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{v_1 + v_2} \cdot \left[\frac{(1-z)^2}{(s - (z-1)\lambda_1) \cdot (s - (z-1)\lambda_2)} \right] \\ & \cdot \left[\frac{R_1^*(s - (z-1)\lambda_1) R_2^*(s - (z-1)\lambda_2)}{1 - [f_1^*(s - (z-1)\lambda_1) \cdot f_1^*(s - (z-1)\lambda_1)]} \right] \end{aligned} \quad (3.1)$$

Donde:

$$E\{X_1\} = \frac{1}{v_1} \text{ y } E\{X_2\} = \frac{1}{v_2}$$

$f_i^*(s - (z-1)\lambda_i)$ y $R_i^*(s - (z-1)\lambda_i)$, para $i = 1, 2$, son la PDF y es las TL de la PDF y CCDF de los tiempos de permanencia en cada estado del proceso de arribos, respectivamente.

La relación entre $f_i^*(s - (z-1)\lambda_i)$ y $R_i^*(s - (z-1)\lambda_i)$ puede expresarse como:

$$f_i^*(s) = 1 - s R_i^*(s) \quad (3.2)$$

Esta relación permite simplificar cálculos más adelante.

Como se puede observar, la ecuación (3.1) es una función que depende de las variables s y z . Para resolver esta ecuación, generalmente se debe aplicar la transformada inversa z de la función. Sin embargo, una alternativa a este procedimiento es derivar directamente la función, como se explicó en el Capítulo 1. Es importante destacar que el hecho de que la FGM esté definida en términos de la TL de la PDF y la TL de la CCDF de los tiempos de permanencia en cada estado del proceso de arribos permite aplicar esta ecuación a diferentes distribuciones y procesos. Esto se analizará con mayor detalle en las secciones siguientes.

3.1 IDC e loV del Proceso GMPP-2.

Como se mencionó en “Variables involucradas en el modelo de Teletráfico de procesos de arribos.” El IDC se calcula mediante la ecuación (1.24) donde se requiere la media y la varianza de los recuentos de eventos durante un intervalo de tiempo determinado. Específicamente:

$$IDC = \frac{E[N(t)]}{Var(N(t))} \quad (3.3)$$

donde $N(t)$ es el número de eventos en el intervalo de tiempo $E[N(t)]$ es el número esperado de eventos y $Var(N(t))$ es la varianza de los recuentos de eventos.

Para el cálculo de la media usamos la ecuación (3.1) en la definición (1.20). El cálculo de la varianza requiere el cálculo del segundo momento central (ecuación (1.23)), ese momento puede ser calculado a través de la FGM definiendo la siguiente ecuación para el cálculo de este.

$$E[N^2(t)] = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\partial^2 \phi^*(s, z)}{\partial z^2} \Big|_{z=1} \right\} + E[N(t)] \quad (3.4)$$

De esta forma podemos calcular el IDC para un proceso GMPP sin importar el tipo de distribución que se esté empleando.

Es importante recordar que en este tipo de procesos siempre se cumple la siguiente condición.

$$IDC > 1 \quad (3.5)$$

Esta es una característica común de los GMPP, ya que este tipo de procesos presenta una mayor variabilidad excediendo la media en todos los casos.

3.1.1 Cálculo del IDC e loV de un proceso de arribos MMPP-2.

Cuando los tiempos de permanencia en cada estado del proceso de arribos, X_1 y X_2 , tienen distribuciones de probabilidad exponenciales negativas ($X_1 \sim Exp(\lambda_2)$ y $X_2 \sim Exp(\lambda_2)$), la modulación introduce fluctuaciones adicionales en la tasa de arribo, lo que afecta tanto a la varianza como a la media de los conteos durante un intervalo de tiempo determinado.

Como resultado, el proceso de conteo mostrará más variabilidad en comparación con un proceso de Poisson estándar. Estas fluctuaciones conducen a una mayor dispersión de los arribos en el tiempo, lo que significa que el IDC será mayor que 1 debido a la mayor varianza de los recuentos en relación con la media.

Para este tipo de procesos también se utiliza la ecuación (3.6) para obtener la FMG de $N(t)$ cuando el proceso de arribos es MMPP-2, que es un derivado de la ecuación (3.1). En general las ecuaciones que serán presentadas son resultado del uso de la ecuación de la Función Generadora de Momentos para cada tipo de proceso o distribución en específico, en el Apéndice A se presenta una demostración de equivalencias entre estas ecuaciones.

$$\begin{aligned} & \phi_{N(t)}^*(z, s) \\ &= \frac{1}{(\nu_1 + \nu_2)} \cdot \left[\frac{\nu_2[1 - \nu_1 R_1^*(s)]}{\sigma_1} + \frac{\nu_1[1 - \nu_2 R_2^*(s)]}{\sigma_2} \right] + \frac{\nu_1 \nu_2}{\nu_1 + \nu_2} \\ & \cdot \left[\frac{R_1^*(s)[f_2^*(s)R_1^*(s) + R_2^*(s)] + R_2^*(s)[f_1^*(s)R_2^*(s) + R_1^*(s)]}{1 - (f_1^*(s)f_2^*(s))} \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

3.1.2 Ecuación del IDC a partir de la Función Generadora de Momentos para un proceso MMPP-2.

Después de la definición de la FGM se derivaron de ella diferentes FGM para diferentes casos y distribuciones, la ecuación (3.7) es un caso especial de la FGM para un proceso MMPP de dos estados.

$$\begin{aligned} & \phi_{N(t)}^*(z, s) \\ &= \frac{r_2[s + r_2 - \lambda_2(z - 1)] + r_1[s + r_1 - \lambda_1(z - 1)] + 2r_1 r_2}{(r_1 + r_2)[(s + r_2 - \lambda_2(z - 1))(s + r_1 - \lambda_1(z - 1)) - r_1 r_2]} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Donde $E\{X_1\} = \frac{1}{r_1}$ y $E\{X_2\} = \frac{1}{r_2}$ siendo $E\{X_1\}$ y $E\{X_2\}$ la media de los tiempos de permanencia en cada estado del proceso MMPP y, λ_1 y λ_2 las tasas correspondientes a cada uno de ellos.

Una vez definida esta función generadora de momentos para un proceso MMPP-2 podemos obtener sus momentos y en consecuencia su IDC e loV siguiendo el método antes descrito en la sección 3.3 (*IDC e loV del Proceso GMPP-2*).

Para la media de $N(t)$ se obtiene la siguiente ecuación:

$$E[N(t)] = \frac{(r_2\lambda_1 + r_1\lambda_2)}{r_1 + r_2} t \quad (3.8)$$

Observe que $\frac{(r_2\lambda_1 + r_1\lambda_2)}{r_1 + r_2}$ es igual a la tasa promedio de arribos (λ_{avg}) y esta característica se extiende para cualquier caso y cualquier orden, definiendo la media de la siguiente forma:

$$E[N(t)] = \lambda_{avg} \cdot t \quad (3.9)$$

De igual forma se calcula el segundo momento y la varianza, definiendo la ecuación (3.10) para el IDC:

$$\begin{aligned} IDC(t) &= 1 + (r_1 + r_2) \left(\frac{2r_1r_2(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(r_1 + r_2)^3(r_2\lambda_1 + r_1\lambda_2)} \right) \\ &\quad - \left(\frac{2r_1r_2(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(r_1 + r_2)^3(r_2\lambda_1 + r_1\lambda_2)} \right) \left(\frac{1 - e^{-(r_1+r_2)t}}{t} \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

La ecuación (3.11) es una nueva forma de calcular el IDC para un proceso MMPP-2.

$$IDC(t) = CV^2 + \frac{(1 - CV^2)}{(v_1 + v_2)t} (1 - e^{-(v_1+v_2)t}) \quad (3.11)$$

donde $E\{X_1\} = \frac{1}{v_1}$, $E\{X_2\} = \frac{1}{v_2}$ y CV corresponde al Coeficiente de variación de $N(t)$, además permite calcular de forma más sencilla el IDC, así como observar de manera directa la relación entre el CV y el IDC que más adelante se abordará.

Para calcular el CV de $N(t)$ se utiliza la ecuación (3.12).

$$CV^2 = 1 + \frac{2(\lambda_1 - \lambda_2)v_1v_2(v_1 + v_2)}{(v_1 + v_2)^2(v_1\lambda_2 + v_2\lambda_1)(v_1 + v_2)} \quad (3.12)$$

Simplificando se obtiene finalmente la ecuación (3.13).

$$CV^2 = 1 + \frac{2(\lambda_1 - \lambda_2)v_1v_2}{(v_1 + v_2)^3(v_1\lambda_2 + v_2\lambda_1)} \quad (3.13)$$

Aunque la ecuación (3.10) permite obtener el mismo resultado, su forma no facilita la visualización inmediata de la información, lo que hace que la versión simplificada resulte más práctica y comprensible para los fines de este análisis.

En la literatura se encuentran diferentes definiciones para la función generadora de momentos en un proceso MMPP-2, la ecuación (3.14) es una FGM para un proceso MMPP-2 aunque por la forma en la que introduce la TL de la PDF y CCDF a la ecuación nos permite que se use no solo una distribución exponencial negativa, si no cualquier distribución que tenga definición de la TL de su PDF y CCDF.

$$\begin{aligned}
& \phi_{N(t)}^*(z, s) \\
&= \frac{1}{r_1 + r_2} \cdot \left[\frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{r_2}{\sigma_2} \right] \\
& - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{r_1 + r_2} \left(\frac{(1-z)^2}{\sigma_1 \sigma_2} \right) \left(\frac{R_1^*(s) R_2^*(s)}{1 - (f_1^*(s) f_2^*(s))} \right)
\end{aligned} \tag{3.14}$$

donde:

$f_i^*(s)$ y $R_i^*(s)$, para $i=1, 2$, son la transformada de Laplace de las PDF y CCDF, respectivamente, de los tiempos de permanencia en cada estado del proceso de arribos MMPP-2.

Donde σ_1 y σ_2 están definidas por la siguiente ecuación:

$$\sigma_i = s + \lambda_i(1 - z) \text{ donde } i = 1, 2 \tag{3.15}$$

3.2 Función Generadora de Momentos para un proceso en el que el tiempo entre arribos (X_a) tiene distribución de probabilidad Hiper Exponencial.

Usando la FGM que se muestra en la ecuación (3.16) y aprovechando que está definida para cualquier TL de PDF y CCDF podemos usar esta función para un proceso en el que el tiempo entre arribos es Hiper Exponencial de orden 2, 3, y n.

$$\phi_{N(t)}^*(z, s) = \frac{z f_{X_{ar}}^*(s) R_{X_a}^*(s)}{1 - z f_{X_a}^*(s)} + R_{X_{ar}}^*(s) \tag{3.16}$$

Donde $f_{X_a}^*(s)$ esta definido en la ecuación (2.12), $f_{X_{ar}}^*$ esta definido por la definición (3.17) y $R_{X_a}^*(s)$ así como $R_{X_{ar}}^*(s)$ corresponden a la CCDF de $f_{X_a}^*(s)$ y $R_{X_{ar}}^*(s)$ respectivamente.

$$f_{X_{ar}}^*(s) = \sum_{i=1}^n \frac{p'_i \lambda_i}{s + \lambda_i} \quad (3.17)$$

Donde

$$p'_i = \frac{\frac{p_i}{\lambda_i}}{\sum_{j=1}^n \frac{p_j}{\lambda_j}} \quad (3.18)$$

La media y el segundo momento de $N(t)$ están dadas, respectivamente, por [18]:

$$E\{N[t]\} = \lambda_{avg} t \quad (3.19)$$

$$E\{N^2[t]\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\lambda_{avg} [1 + f_{X_a}^*(s)]}{s^2 [1 - f_{X_a}^*(s)]} \right\} \quad (3.20)$$

Obteniendo así la expresión (3.25) del IDC

$$IDC(t) = \frac{E\{N^2(t)\} - \lambda_{avg} t^2}{\lambda_{avg} t} \quad (3.21)$$

3.2.1.1 Método de Análisis mediante momentos para el cálculo del IDC e loV cuando el tiempo entre arribos X_a tiene distribución de probabilidad Hiper Exponencial de segundo orden.

En este caso, se obtuvieron expresiones que permiten calcular directamente los dos primeros momentos centrales, eliminando la necesidad de utilizar la Función Generadora de Momentos (FGM). Esto simplifica y agiliza los cálculos, reduciendo significativamente la complejidad del proceso. Sin embargo, es importante destacar que estas ecuaciones son válidas únicamente cuando los tiempos entre arribos siguen una distribución Hiper Exponencial de segundo orden.

La ecuación (3.22) corresponde a la media de un proceso en el que el tiempo entre arribos X_a tiene distribución de probabilidad Hiper Exponencial de segundo orden.

$$E[N(t)] = \lambda_{avg} \cdot t \quad (3.22)$$

Para el cálculo del segundo momento se utiliza la siguiente ecuación:

$$E^2[N(t)] = \frac{2}{s} \left[\frac{\lambda_{avg}}{s} - F_r \right] \left[\frac{1}{1 - F_s} \right] + \frac{\lambda_{avg}}{s} \quad (3.23)$$

donde:

$$F_r(s) = p' f_{X_{a1}}^*(s) + (1 - p') f_{X_{a2}}^*(s) \quad (3.24)$$

$$F_s(s) = p_1 f_{X_{a1}}^*(s) + p_2 f_{X_{a2}}^*(s) \quad (3.25)$$

Y para definir $f_{X_{a1}}^*(s)$ y $f_{X_{a2}}^*(s)$ usamos la siguiente ecuación:

$$f_{X_{ai}}^*(s) = \frac{\lambda_{a_i}}{s + \lambda_{a_i}}; \text{ para } i = 1, 2 \quad (3.26)$$

De este modo, con los dos momentos centrales definidos, es posible calcular el IDC para un proceso en el que el tiempo entre arribos sigue una distribución Hiper Exponencial de segundo orden, sin recurrir a la Función Generadora de Momentos (FGM) ni a los cálculos complejos que esta implica.

$$ICD(t) = CoV^2\{X_a\} - \frac{[CoV^2\{X_a\} - 1][1 - e^{-\lambda_1\lambda_2 E\{X_a\}t}]}{-\lambda_1\lambda_2 E\{X_a\}t} \quad (3.27)$$

3.3 Función Generadora de Momentos para un proceso en el que el tiempo entre arribos X_a tiene distribución de probabilidad Hiper Exponencial Condicionado de orden 2.

En este subcapítulo, nos centramos en el proceso de cálculo de la transformada de Laplace de $E[N(t)]$ mediante una ecuación diferente a las presentadas. (La siguiente expresión fue obtenida por los directores de la tesis y la demostración no se presenta).

$$\begin{aligned}
\phi_{N(t)}^*(z, s) &= (p_1 R_{x_1}^*(\sigma_1) + p_2 R_{x_2}^*(\sigma_2)) \\
&+ \left[p_1 \left[q \cdot z f_{x_{a_1}}^*(\sigma_1) \cdot \left[1 - q' z f_{x_{a_2}}^*(\sigma_2) \right] \right. \right. \\
&\cdot R_{x_2}^*(\sigma_2) + q p' z^2 f_{x_{a_1}}^*(\sigma_1) \\
&\cdot \left. \left. f_{x_{a_2}}^*(\sigma_2) R_{x_1}^*(\sigma_1) \right] \right] \\
&/ \left[1 - p z f_{x_{a_1}}^*(\sigma_1) - q' z f_{x_{a_2}}^*(\sigma_2) \right. \\
&+ (p - p') z^2 f_{x_{a_1}}^*(\sigma_1) f_{x_{a_2}}^*(\sigma_2) \left. \right] \quad (3.28) \\
&\cdot \left[p_2 \left[p' z f_{x_{a_2}}^*(\sigma_2) \left[1 \right. \right. \right. \\
&- p z f_{x_{a_1}}^*(\sigma_1) \left. \left. \right] R_{x_1}^*(\sigma_1) \right. \\
&+ \left. \left. q p' z^2 f_{x_{a_1}}^*(\sigma_1) f_{x_{a_2}}^*(s) R_{x_2}^*(\sigma_2) \right] \right] \\
&/ \left[1 - p z f_{x_{a_1}}^*(\sigma_1) - q' z f_{x_{a_2}}^*(\sigma_2) + (p \right. \\
&- p') z^2 f_{x_{a_1}}^*(\sigma_1) f_{x_{a_2}}^*(\sigma_2) \left. \right]
\end{aligned}$$

Donde:

$$\sigma_i = s + \lambda_i(1 - z); \text{ para } i = 1, 2$$

El enfoque es particularmente útil cuando el tiempo entre arribos X_a tiene una distribución HE-2 condicionada al tipo de arribo anterior.

Para obtener se realiza el mismo procedimiento descrito en capítulos anteriores para obtener el IDC(41).

La transformada inversa de Laplace se define como:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \quad (3.29)$$

donde:

En este contexto, el segundo momento del conteo de eventos en el tiempo se obtiene como:

$$\mathcal{L}\{E[N^2(t)]\} = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{E[N^2(t)]\}\} \quad (3.30)$$

Finalmente, Para calcular el Índice de Dispersión de Cuentas:

$$IDC(t) = \frac{Var[N(t)]}{E[N(t)]} \quad (3.31)$$

Donde primero debemos calcular la varianza del proceso como se mostró en capítulos pasados usando la forma:

$$Var(N(t)) = E[N(t)^2] - (E[N(t)])^2 \quad (3.32)$$

De esta forma, podemos calcular el IDC sin necesidad de recurrir directamente a la función generadora de momentos ni a los procesos adicionales que su uso implicaría para obtener el IDC a partir de ella. Como consecuencia el cálculo del Índice de Variabilidad se obtiene como se mencionó en el capítulo uno.

3.4 Aproximación de una distribución Log-Normal por distribuciones de probabilidad HE de orden n utilizando la Técnica de Igualación de Momentos (MM).

La técnica de igualación de momentos nos permite calcular los momentos crudos a partir de los momentos estandarizados, con el objetivo de hacer que el sistema analizado coincida en parámetros con otro. De esta manera, podemos verificar si su comportamiento es el

mismo bajo las condiciones impuestas por los momentos compartidos [18].

Por ejemplo, para el caso en el que se usa una distribución de tiempos entre arribos Log Normal se desarrolló un programa en Wolfram Mathematica que realiza cálculos estadísticos para analizar una distribución Log-Normal, enfocándose en el cálculo de sus parámetros y momentos.

3.4.1 Procedimiento.

El programa establece valores iniciales para varios parámetros, incluyendo el coeficiente de variación y el primer momento (media) de la distribución. También inicializa otras variables necesarias para los cálculos posteriores.

Cálculo de los Parámetros de la Distribución Log-Normal: Utilizando el coeficiente de variación y la media, el programa calcula los parámetros fundamentales de la distribución log-normal, que son la media logarítmica (μ) y la desviación estándar (σ). Estos parámetros son esenciales para caracterizar la distribución log-normal.

Esta distribución se usa adelante para el cálculo de parámetros cuando los tiempos entre arribos X_1 y X_2 son HE y mediante la ecuación (3.33) calculamos los momentos necesarios para resolver un sistema de ecuaciones que nos permita calcular los parámetros mencionados mediante un método llamado MM (Moment Matching).

$$Mk = e^{k\mu + \frac{k^2\sigma^2}{2}} \quad (3.33)$$

Donde k es el k -ésimo momento crudo.

A partir de los parámetros calculados, el programa (Apéndice E) calcula los primeros cinco momentos de la distribución (media, varianza, *Skewness*, *Kurtosis*, etc.). Estos momentos son valores que resumen la forma de la distribución, como su tendencia central, dispersión, *Skewness* y "*Kurtosis*".

A partir de los momentos calculados, el programa obtiene otros parámetros estadísticos, como el coeficiente de variación, el sesgo (*Skewness*), la *Kurtosis* y un parámetro adicional relacionado con la forma de la distribución. Estos parámetros proporcionan una visión más detallada sobre cómo se distribuyen los datos y cómo se comportan.

Finalmente, el programa resuelve un sistema de ecuaciones no lineales para ajustar los parámetros de la distribución log-normal. Este paso busca encontrar valores específicos de ciertos parámetros que cumplen con las restricciones impuestas por los momentos calculados previamente.

Una vez calculados los parámetros se utilizan las ecuaciones obtenidas para el IDC e IoV y se obtienen resultados.

Los resultados mostrados en la Figura 3.1 corresponden a dos procesos en el que el tiempo entre arribos tiene distribución Hiper Exponencial, la diferencia entre ellos es el número de orden, ambas graficas fueron obtenidas mediante el método MM, observe que conforme aumenta el orden de la HE las diferencias entre ellas son mínimas, permitiéndonos un ajuste mejor a la curva del IDC mientras más alto sea el orden de la HE.

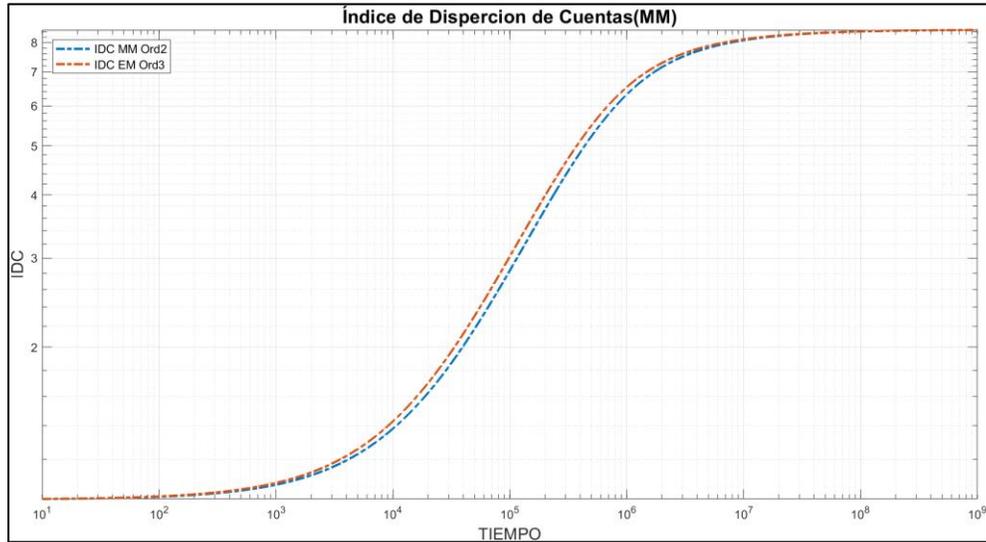


Figura 3.1 Índice de Dispersión de Cuentas (IDC) para Procesos donde el tiempo ente arribos tiene distribución Hiper Exponencial de diferentes Órdenes mediante el metodo MM.

En las subsecciones posteriores se compararán los resultados numéricos del IDC obtenidos utilizando las distribuciones HE- n calculadas mediante el algoritmo de igualación de momentos (MM) y con otros métodos de aproximación. Este análisis permitirá evidenciar que, si bien el método MM facilita la derivación de expresiones para el IDC y la aproximación de procesos, su crecimiento lento y el desfase observado lo convierten en una opción poco eficiente e impráctica para modelar procesos más complejos. En comparación con otros métodos, el MM resulta limitado en escenarios que requieren una mayor adaptabilidad y precisión.

3.5 Aproximación de una distribución Log-Normal por distribuciones de probabilidad HE de orden n utilizando el Algoritmo de Maximización de Esperanza (EM).

El método de Maximización de la Esperanza es una técnica estadística utilizada para estimar parámetros en modelos probabilísticos, buscando obtener el conjunto de parámetros que maximiza la esperanza del

estimador. Este proceso tiene como objetivo ajustar el modelo de manera que los resultados obtenidos sean lo más cercano posible a los datos observados, dentro del marco de las condiciones y supuestos establecidos [19].

El algoritmo de Expectation-Maximization (EM) es un método iterativo ampliamente utilizado en estadística para estimar parámetros en modelos que contienen variables latentes o datos incompletos. Consiste en dos fases principales, la de Expectativa (E-step) y la de Maximización (M-step), que se alternan hasta que los parámetros convergen.

3.5.1 Etapas del Algoritmo EM.

- Fase de Expectativa (E-step)
 - En esta etapa, se calcula la probabilidad esperada de las variables a determinar, asumiendo que los parámetros actuales del modelo son correctos. El objetivo es maximizar la función de verosimilitud esperada basada en los datos observados y las variables a determinar [20].
- Fase de Maximización (M-step)
 - En esta etapa, los parámetros del modelo se actualizan maximizando la función de verosimilitud esperada calculada previamente. Estas actualizaciones garantizan que la verosimilitud aumente o se mantenga constante en cada iteración [21].

El proceso continúa de forma iterativa hasta que se alcanza la convergencia, definida como un cambio insignificante en los parámetros entre iteraciones [22].

Algunas aplicaciones de este método son:

- Identificar distribuciones subyacentes en datos con múltiples componentes [21].
- Permitir inferir valores desconocidos basados en datos observados [22].
- Asignar probabilidades a posteriori para clasificar datos en clústeres [20].

La Figura 3.2 muestra el IDC calculado utilizando el método EM para distribuciones HE de diferentes órdenes (orden 2, 3, 4 y 5). En el eje horizontal se representa el tiempo en una escala logarítmica, mientras que en el eje vertical se observa el valor del IDC.

Se puede notar que, a medida que aumenta el orden de la distribución HE (de orden 2 a 5), las curvas del IDC convergen más rápidamente hacia un valor constante en tiempos mayores, lo que sugiere que distribuciones de mayor orden son más precisas al modelar la dispersión de cuentas en procesos con tiempos de permanencia más largos. Esto es consistente con la idea de que el método EM ajusta los parámetros de la HE para reflejar las características de la distribución Log-Normal, aunque sus momentos no coincidan perfectamente, especialmente conforme aumenta el CoV.

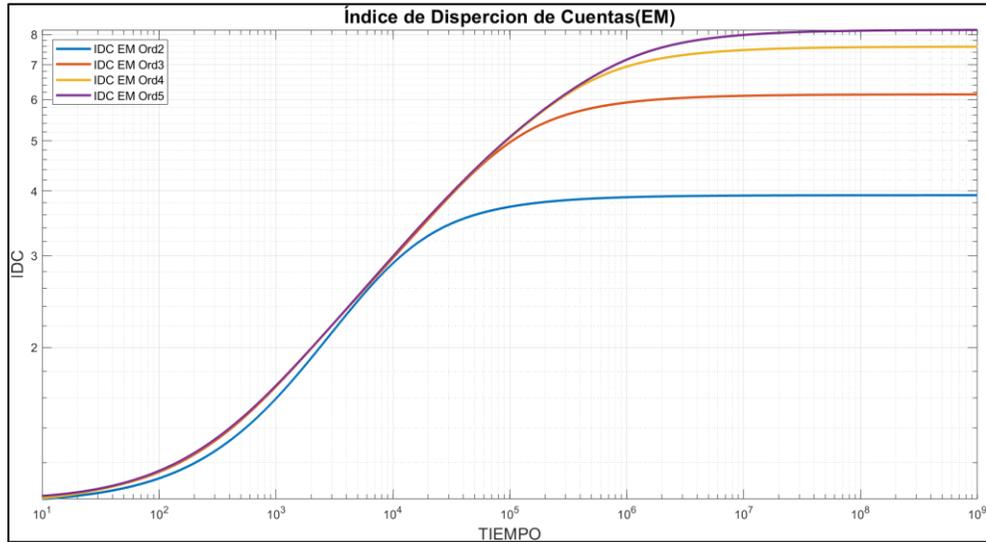


Figura 3.2 Evolución del IDC para cuando el tiempo ente arribos tiene distribución HE de diferentes órdenes utilizando el algoritmo EM.

3.6 Aproximación de una distribución Log-Normal por distribuciones de probabilidad HE de orden n utilizando una combinación de Métodos de aproximación: Híbrido EM y MM.

La aproximación de distribuciones complejas, como los tiempos entre arribos en procesos estocásticos, requiere métodos robustos que combinen precisión y eficiencia computacional. Entre las técnicas existentes, los algoritmos de Maximización de la Esperanza (EM) y de Igualación de Momentos (MM) se destacan por su capacidad de ajuste y modelado. Sin embargo, ambos presentan limitaciones en escenarios específicos: el EM tiende a ser computacionalmente costoso en modelos altamente parametrizados, mientras que el MM es más rápido, pero menos preciso en distribuciones complejas.

El método de aproximación híbrido EM-MM se plantea como una solución eficiente para determinar los parámetros de una distribución de probabilidad HE-n, especialmente en el contexto de los tiempos de permanencia en cada estado de un proceso de arribos. Este método se basa en obtener los parámetros de la distribución HE-n a partir de un conjunto de números con distribución Log-Normal, cuyo CoV inicial es mayor al requerido, para luego ajustar la HE-n de manera que su CoV se incremente y sea más cercano al valor requerido por la Log-Normal. En la Figura 4.3 se ilustra cómo varía el al considerar diferentes órdenes de la distribución HE que modela los tiempos de permanencia en cada estado del proceso de arribos.

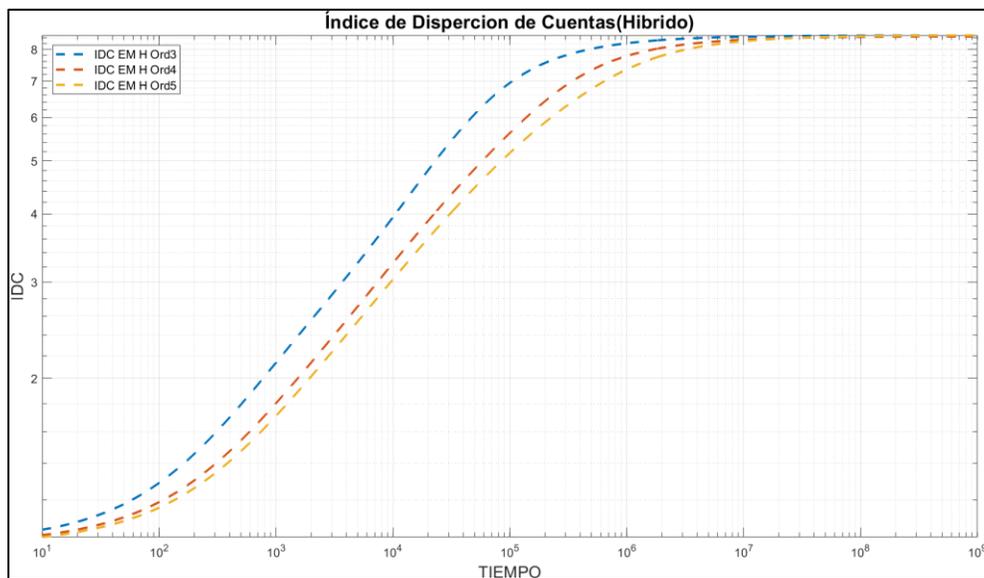


Figura 3.3 IDC del proceso de arribos cuando tiempo ente arribos tiene distribución HE-n. Los parámetros de las distribuciones HE-n para ($n=2, 3$ y 4) se obtuvieron con el método de aproximación híbrido EM-MM.

Los parámetros calculados mediante el método de aproximación EM e Híbrido (MM y EM) presentados en este análisis fueron proporcionados por el Dr. Felipe y su equipo de trabajo. Por lo tanto, esta sección se limita

a mostrar las gráficas de resultados numéricos del IDC obtenidas, sin detallar los procedimientos computacionales específicos.

3.7 Resultados numéricos del IDC mediante Simulación.

En este apartado se presentan tres métodos de simulación utilizados para calcular el Índice de Dispersión de Cuentas (IDC). Primero, se aborda el MMPP de segundo orden, ideal para modelar sistemas con cambios abruptos en las tasas de arribos debido a su capacidad para representar ráfagas de tráfico. Posteriormente, se analiza el modelo en el que el tiempo entre arribos es Hiper Exponencial de Segundo Orden, diseñado para capturar patrones con eventos de duraciones altamente variables. Por último, se estudia el caso en que los tiempos entre arribos siguen una Distribución Log-normal, adecuada para describir sistemas con alta dispersión y valores extremos en los tiempos entre eventos.

3.7.1 Proceso MMPP-2.

La simulación del Índice de Dispersión de Cuentas (IDC) en un proceso MMPP de dos estados es una técnica utilizada para la generación de eventos siguiendo distribuciones exponenciales negativas con cambios de estado gobernados por una cadena de Markov. La simulación permite modelar sistemas reales como redes de telecomunicaciones, donde los arribos pueden agruparse en ráfagas (rafagacidad) o estar sujetas a cambios de estado, capturando así características complejas del tráfico como la autocorrelación y la variabilidad.

3.7.1.1 Descripción del procedimiento para calcular el Índice de Dispersión de Cuentas (IDC) en un proceso MMPP de dos estados.

El cálculo se realiza mediante la simulación de eventos y el análisis de las características temporales entre ellos. El procedimiento es el siguiente:

❖ **Inicialización de parámetros y variables**

- Rafagacidad.
- Tasa promedio de servicio.
- Duraciones promedio de los estados.
- Tráfico ofrecido.

❖ **Variables derivadas:**

- Tasas de arribo para cada estado.
- Probabilidades de estar en cada estado.
- Duración promedio de permanencia en un estado.

La tasa promedio de arribos y las tasas individuales son calculadas según las fórmulas de balance del sistema.

❖ **Configuración de la simulación**

Se establecen las condiciones iniciales:

- El sistema comienza en el estado 1.
- Se generan el primer evento de arribo y el cambio de estado.
- Se inicializan contadores para el tiempo, número total de arribos y los arribos por estado.

❖ **Generación de eventos**

- El proceso simula k eventos en total:

Para cada evento:

- Se genera el tiempo de arribo de acuerdo con una distribución exponencial negativa con la tasa correspondiente al estado actual.
- Se genera el tiempo de cambio de estado de acuerdo con una distribución exponencial negativa usando la duración promedio del estado actual.
- Se determina cuál evento ocurre primero.
- Si ocurre un cambio de estado, el estado se alterna entre 1 y 2, y se actualiza el tiempo total.
- Si ocurre un arribo, se actualizan los contadores de arribos y el tiempo de arribo se almacena.

❖ **Cálculo de métricas.**

Después de generar todos los eventos:

- Se calcula la diferencia entre los tiempos de arribos consecutivos, que representa los tiempos entre arribos.

A partir de estas diferencias se obtienen:

- Media.
- Varianza.
- Coeficiente de variación.
- Momentos superiores: *Kurtosis* y *Skewness*, utilizando fórmulas estándar.

❖ **Cálculo del IDC**

Se utiliza la siguiente fórmula para calcular el IDC:

$$IDC = \frac{\text{Varianza de los arribos en intervalos}}{\text{Media de los arribos en intervalos}} \quad (3.34)$$

Se agrupan los arribos en intervalos de tiempo definidos (*Tama*), calculando la cantidad de eventos por intervalo.

La varianza y la media de estos valores se utilizan para determinar el IDC.

❖ Resultados y visualización

Finalmente, el valor calculado de IDC es mostrado.

Las métricas como media, varianza, *Kurtosis*, y *Skewness* son registradas para evaluar la dispersión de los tiempos entre arribos.

3.7.2 Proceso de arribos considerando que el tiempo entre arribos X_a es Hiper Exponencial de segundo orden.

La simulación del Índice de Dispersión de Cuentas (IDC) para un proceso en el que los tiempos entre arribos siguen una distribución hiper exponencial de segundo orden es una técnica para modelar sistemas con alta variabilidad en los tiempos entre eventos. Este tipo de distribución permite representar sistemas donde los tiempos entre arribos se ajustan a múltiples tasas de ocurrencia, cada una con su propia probabilidad, lo que lo hace especialmente útil en contextos como telecomunicaciones y tráfico de red.

❖ Definición del modelo

Se definen dos tasas de arribos, y sus respectivas probabilidades asociadas. Estos parámetros controlan las características de la distribución Hiper Exponencial.

Los tiempos entre arribos se generan utilizando estas tasas y probabilidades.

❖ **Simulación de eventos**

Se simula un gran número de eventos (k), generando tiempos entre arribos con una distribución exponencial negativa según la tasa del estado actual.

Se decide si un evento es procesado o si ocurre un cambio de estado con base en un número aleatorio y las probabilidades.

❖ **Registro de tiempos de arribos**

Para cada evento, se actualizan los tiempos acumulados y se almacenan los tiempos de arribos. También se contabiliza el número total de arribos y los arribos por estado.

❖ **Cálculo estadístico**

Se calcula la diferencia entre los tiempos de arribos consecutivos para obtener los tiempos entre eventos observados.

Se determinan métricas como la media, varianza, coeficiente de variación, *Kurtosis* y *Skewness* para caracterizar la distribución de los tiempos entre arribos.

❖ **Cálculo del IDC**

Se dividen los arribos en intervalos de tiempo y se calcula la varianza y la media del número de arribos en cada intervalo.

El IDC se define como en la ecuación (3.34)

❖ **Resultados**

Se genera una tabla con las métricas calculadas, y el IDC se grafica.

3.7.3 Proceso de arribos considerando que el tiempo entre arribos X_a tiene distribución de probabilidad Log Normal.

La simulación del Índice de Dispersión de Cuentas (IDC) para un proceso en el que los tiempos entre arribos siguen una distribución log-normal es especialmente útil para modelar sistemas con tiempos entre eventos que son positivamente sesgados y presentan mayor probabilidad de valores grandes, como sucede en redes de telecomunicaciones o tráfico de datos.

❖ **Descripción del Procedimiento**

Se parametriza la distribución log-normal con μ (media del logaritmo de los tiempos entre arribos) y σ (desviación estándar del logaritmo).

Como, por ejemplo

$$\mu = -1.315544579983041$$

$$\sigma = 1.268636241179520$$

La media de los tiempos entre arribos está fijada en 3/5.

❖ **Intervalos de tiempo (Δt)**

El espacio de simulación se divide en intervalos de tamaño variable, desde 0.01 hasta 1000, para evaluar el comportamiento del IDC en diferentes escalas temporales.

❖ **Generación de eventos**

Se simulan tiempos entre arribos con una distribución log-normal.

Los tiempos acumulados se distribuyen en intervalos de tamaño Δt , y se cuenta el número de arribos en cada intervalo.

Para cada intervalo se calculan la media y el segundo momento del número de arribos.

El IDC se define como la relación entre la varianza y la media (ecuación (3.34)).

❖ **Optimización de la simulación**

El tamaño de los datos generados y la cantidad de intervalos simulados se ajustan dinámicamente según el tamaño del intervalo Δt , para mejorar la precisión y reducir el tiempo de cómputo.

❖ **Resultados**

Los valores del IDC se calculan para cada Δt , generando una curva que describe cómo varía la dispersión en función del tamaño del intervalo de observación.

3.8 Análisis Comparativo de las Gráficas de IDC en Procesos MMPP-2 y procesos donde X_a tiene una distribución HE de diferentes órdenes

Para llevar a cabo los análisis presentados, se utilizó un CoV de 2 y una media de $3/5$ como parámetros base para todos los cálculos relacionados con el IDC. Estos cálculos se realizaron específicamente para Procesos MMPP-2, siendo este una métrica de control para observar el comportamiento de los procesos donde X_a tiene una distribución HE de diferentes órdenes. El objetivo fue evaluar el comportamiento del IDC bajo tres métodos distintos de aproximación de parámetros MM, EM y el método híbrido EM-MM.

La gráfica de la Figura 3.4 que compara tres funciones del IDC: el de un proceso MMPP-2, un proceso cuando X_a tiene una distribución HE de orden 2 y 3 mediante el método MM. Las tres curvas muestran un comportamiento similar y se encuentran bastante cercanas entre sí, pero destaca que la curva correspondiente a "MM Ord 2" es la que más se aproxima a la forma de la curva "MMPP-2".

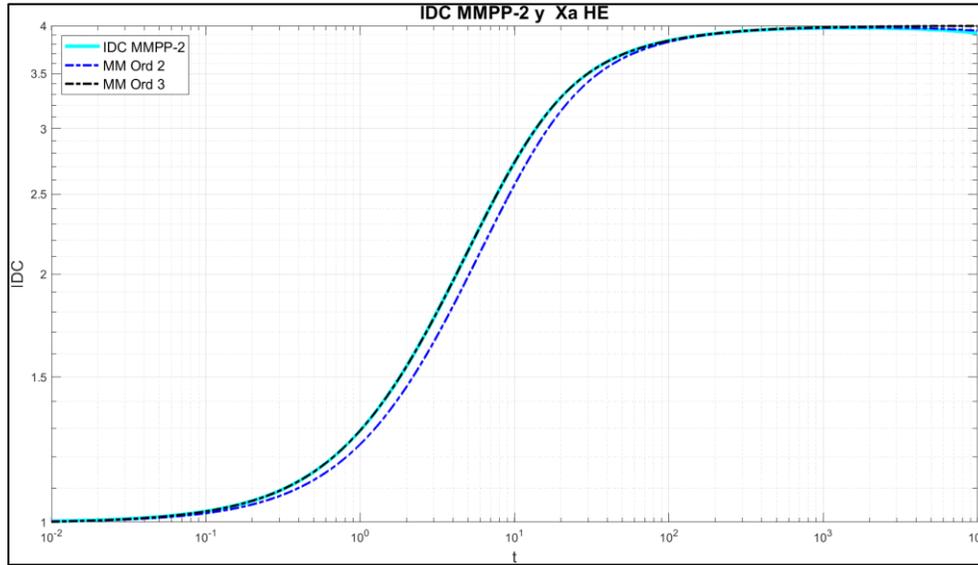


Figura 3.4 Grafica del IDC para un proceso MMPP-2 y dos procesos donde X_a tiene una distribución HE de orden 2 y 3 usando el método MM.

Esto puede explicarse por las características del método MM, el cual ajusta los parámetros de la distribución HE de manera que sus momentos coincidan exactamente con los de la distribución objetivo. En el caso de un proceso cuando X_a tiene una distribución HE, el método MM logra una representación precisa especialmente en contextos donde el CoV y la media del proceso son consistentes con las distribuciones modeladas.

En la Figura 3.5 La curva "EM Ord 3" representa un proceso donde X_a tiene una distribución HE de orden 3, cuyos parámetros fueron calculados mediante el método EM. Esta curva muestra una mayor aproximación a la curva "IDC MMPP-2" en términos de su valor final de estabilización, en comparación con "EM Ord 2"(proceso donde X_a tiene una distribución HE de orden 2 mediante el método EM).

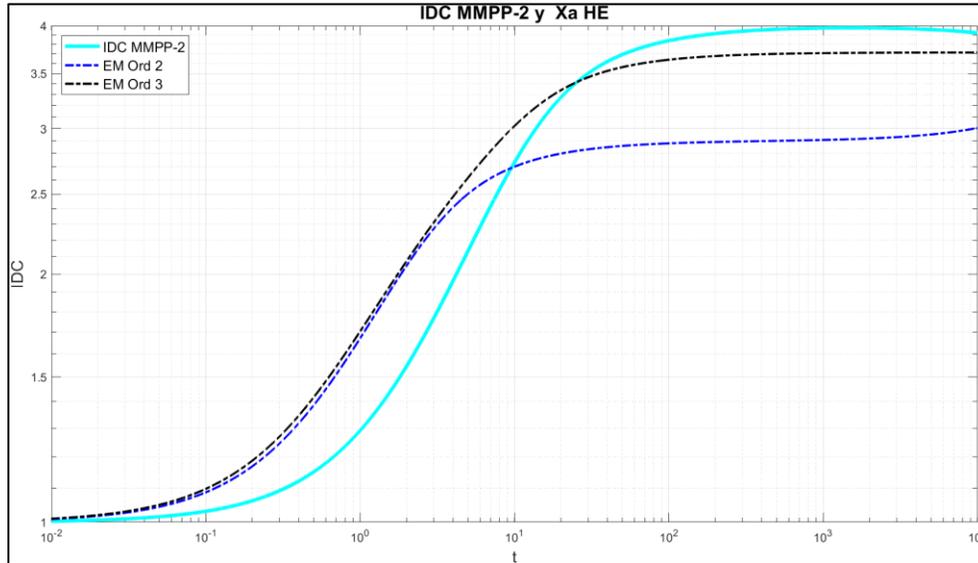


Figura 3.5 Grafica del IDC para un proceso MMPP-2 y dos procesos donde X_a tiene una distribución HE de orden 2 y 3 usando el método EM.

Esto se debe a que el método EM ajusta los parámetros de las distribuciones HE de forma iterativa, maximizando la probabilidad de los datos observados, aunque el método EM mejora con órdenes superiores, sus momentos pueden diferir de los de la distribución del proceso MMPP-2 y aunque el orden más alto es el que se acerca más al proceso MMPP-2 no alcanza el valor máximo del IDC en comparación con el método MM.

Finalmente, la Figura 3.6 La curva que muestra el mejor ajuste en términos de precisión y uniformidad con respecto a "IDC MMPP-2" es la correspondiente al método híbrido MM-EM. Este enfoque combina las fortalezas de los métodos MM y EM, aprovechando la exactitud de MM en la coincidencia de momentos con distribuciones Log-Normal y la capacidad de EM para modelar características más complejas en procesos con mayor variabilidad. Al equilibrar estas ventajas, el método híbrido logra un ajuste más preciso y un comportamiento más estable en

todos los órdenes de la distribución HE, lo que lo convierte en una solución eficiente para aproximar los parámetros del proceso MMPP-2.

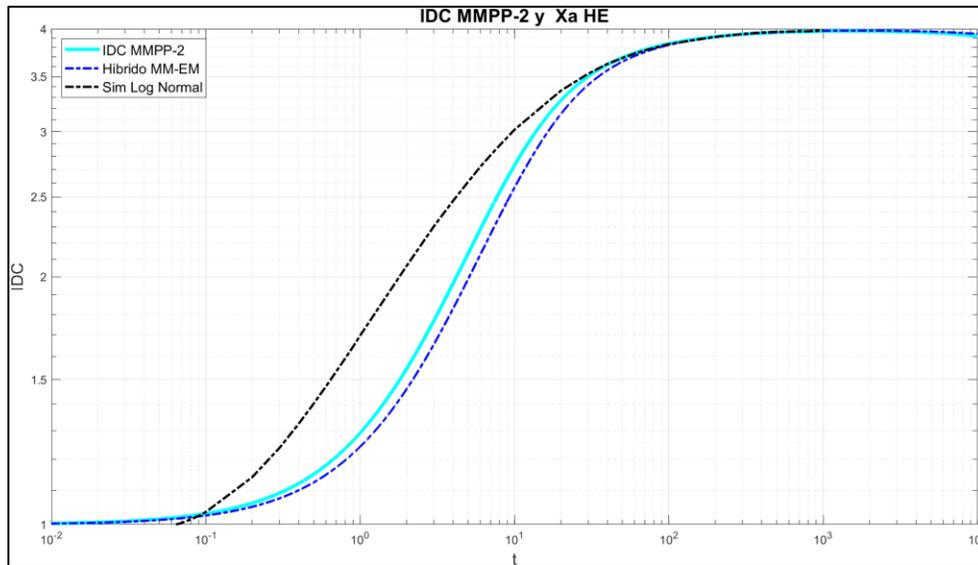


Figura 3.6 Grafica del IDC para un proceso MMPP-2 y dos procesos donde X_a tiene una distribución HE de orden 2 y 3 usando el método Híbrido EM-MM.

Esta grafica(Figura 3.6) también presenta los resultados de una simulación de eventos basada en una distribución Log-Normal, utilizando los parámetros de CoV y media del proceso MMPP-2 para aproximar su comportamiento. Aunque esta curva es menos fluctuante y muestra mayor estabilidad logrando llegar al valor limite del IDC, no logra ajustarse tan de cerca a la forma ni al comportamiento dinámico de "IDC MMPP-2" en comparación con el método Híbrido.

La Figura 3.7 presentada compara las curvas generadas por los tres métodos de aproximación, EM, MM y el Híbrido MM-EM, junto con la curva de referencia del proceso MMPP-2.

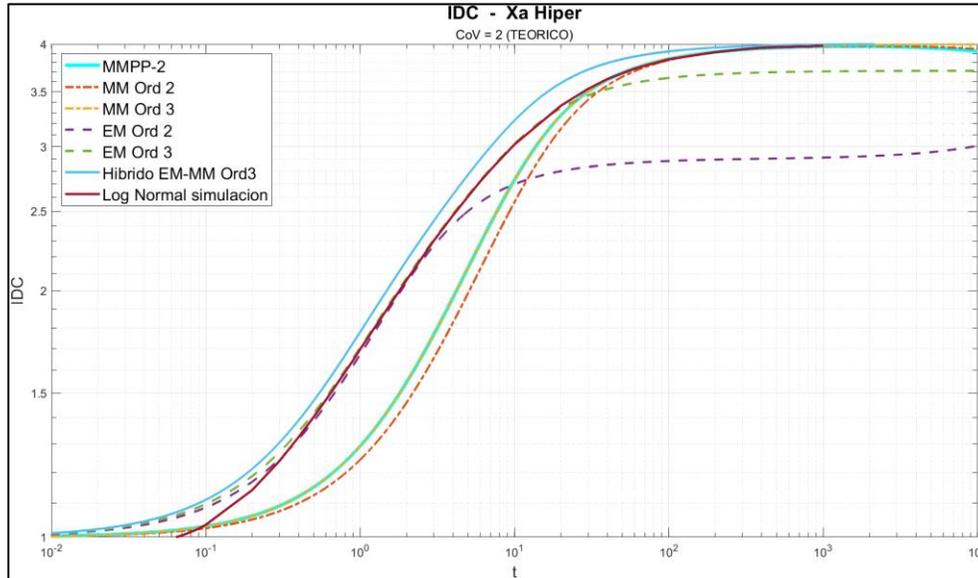


Figura 3.7 Grafica del IDC para un proceso MMPP-2 y dos procesos donde X_a tiene una distribución HE de orden 2 y 3 usando los métodos MM, EM e Híbrido EM-MM.

El método MM destaca por su rápida estabilización debido a su capacidad para igualar los momentos de las distribuciones HE con los de la Log-Normal, siendo particularmente eficaz en órdenes bajos, como el orden 2 pese a su desfase.

Por otro lado, el método EM presenta una menor precisión, especialmente en el segundo orden, y requiere una mejor aproximación de la curva en órdenes muy altos (de orden 6 o más). Además, su complejidad en los cálculos lo convierte en el menos eficaz de los tres métodos.

El método Híbrido MM-EM, al combinar las fortalezas de ambos enfoques, logra un equilibrio ideal entre precisión y uniformidad. Este método sobresale generando una curva que se ajusta de manera más consistente a la forma y comportamiento del MMPP-2 en todos los órdenes. La eficiencia del Híbrido MM-EM lo posiciona como la mejor opción para modelar procesos de arribos con características complejas.

Finalmente, la curva Sim Log-Normal, basada en la simulación de eventos con distribución Log-Normal, nos permite corroborar, el comportamiento de estos modelos. Aunque no logra capturar completamente la estructura del MMPP-2, su forma, después del modelo híbrido, constituye una excelente aproximación, permitiéndonos validar la confiabilidad de estos métodos.

La imagen muestra una gráfica del IDC, donde X_a sigue una distribución HE-n obtenida para diferentes valores del *Skewness* y la MMPP-2 como referencia para el IDC en función. Las curvas representadas corresponden a distintos valores (4,5,6 y 10) de *Skewness*.

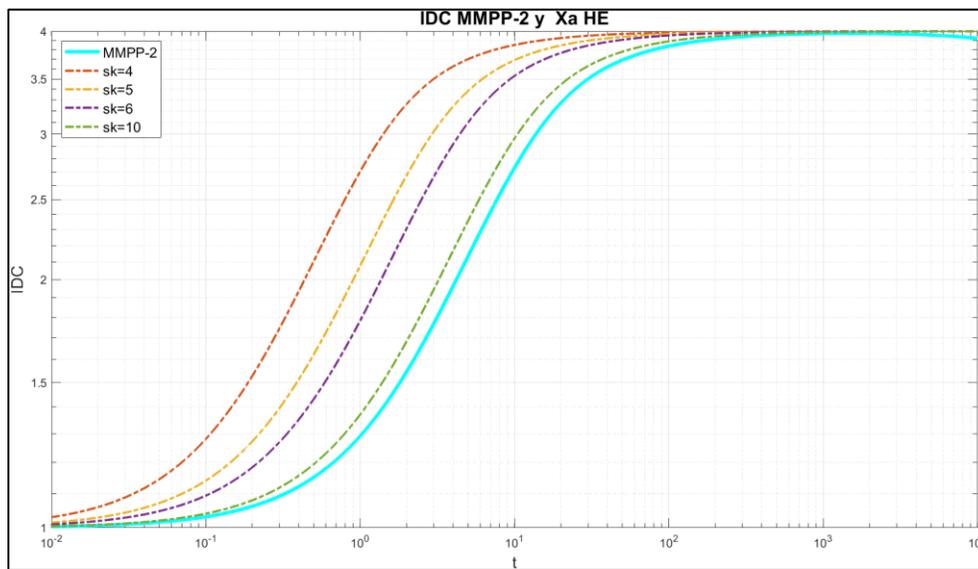


Figura 3.8 Gráficas de IDC para Procesos donde X_a tiene una distribución HE-n obtenidas para diferentes valores del *Skewness*.

Se observa que, a medida que aumenta el valor del *Skewness*, las curvas se desplazan hacia la derecha. Este desplazamiento indica que, con el incremento del *Skewness*, la fase del IDC se alinea más con la curva de referencia MMPP-2, es decir, a medida que el *Skewness* crece, las curvas del método MM se asemejan más a la de la MMPP-2, reflejando

un acercamiento tanto en la forma como en el comportamiento del IDC. Es importante mencionar que si bien se usa el método MM esta característica se extiende a los métodos EH e Híbrido.

La gráfica de la Figura 3.9 presenta cuatro curvas que corresponden a diferentes valores del CoV: CV=2, CV=5, CV=7 y CV=10. Cada curva muestra cómo varía el IDC a lo largo del tiempo para estos distintos valores de CoV, permitiendo observar el impacto de la variabilidad en el comportamiento del IDC.

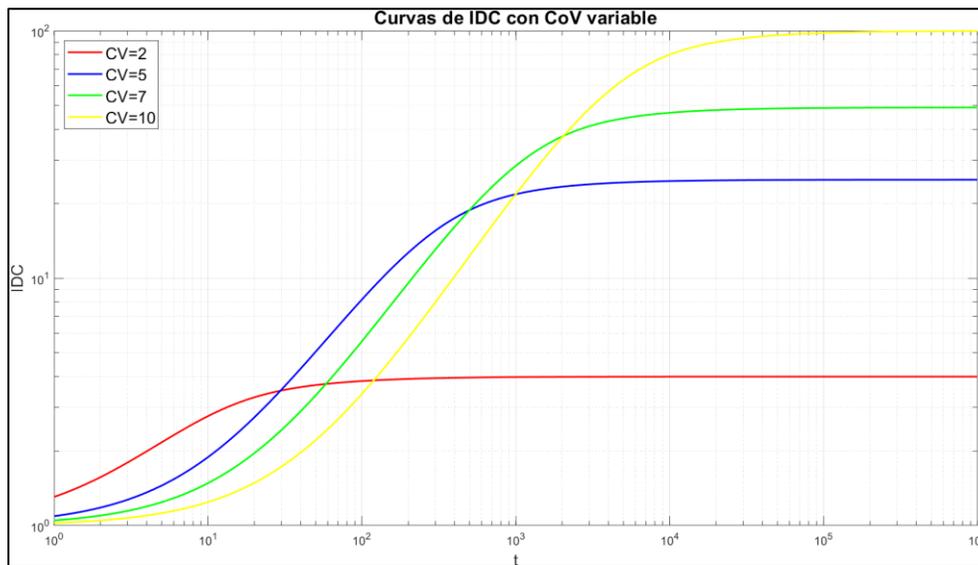


Figura 3.9 Gráficas de IDC para Procesos donde X_a tiene una distribución HE-n obtenidas para diferentes CoV mediante el método MM.

En cuanto a la relación entre CoV e IDC, se observa que, a medida que aumenta el CoV, el valor límite del IDC también incrementa. Esta tendencia demuestra que el CoV de X_a es proporcional al cuadrado del valor límite del IDC. Respecto al desplazamiento y la estabilidad, las curvas con valores de CoV más bajos (CV=2 y CV=5) tienden a estabilizarse en niveles más bajos de IDC. En contraste, cuando el CoV alcanza valores más altos (CV=7 y CV=10), las curvas se desplazan

hacia niveles de IDC más elevados y requieren más tiempo para estabilizarse. Esta grafica nos proporciona una representación clara de cómo el CoV influye en el IDC. Se observa que un CoV mayor resulta en valores límite de IDC más altos, y que existe una relación cuadrática entre ambas variables. Esta visualización es fundamental para entender el comportamiento de procesos con distribuciones HE-n y su sensibilidad a la variabilidad del CoV.

A continuación, se presentan cuatro casos diferentes en la Figura 3.10, en los cuales en cada uno se muestra una curva correspondiente a un proceso MMPP-2 y otra a un proceso donde X_a sigue una distribución HE-2 condicionada.

| Caso | Rafagacidad | Tráfico Ofrecido | Mu | $E\{X_1\}$ | $E\{X_2\}$ |
|--------|-------------|------------------|-------|------------|------------|
| Caso 1 | 2 | 3 | 10/18 | 100 | 1000 |
| Caso 2 | 2 | 3 | 1/180 | 100 | 1000 |
| Caso 3 | 5 | 2 | 1/180 | 100 | 1000 |
| Caso 4 | 2 | 10 | 1/180 | 100 | 1000 |

3.1 Parámetros de los caso con Procesos MMPP-2 y HE-2 Condicionado.

En el primer caso, ambas gráficas coinciden de manera precisa. Sin embargo, en el segundo caso, la curva del HE-2 condicionado presenta un aumento inicial más rápido en comparación con la curva del MMPP-2.

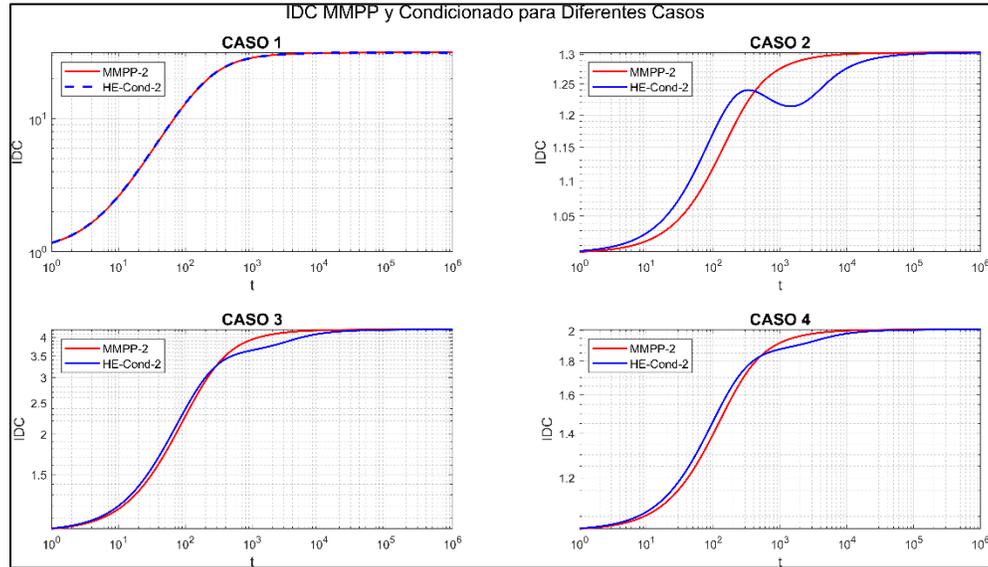


Figura 3.10 Comparación entre Procesos MMPP-2 y HE-2 Condicionado en Diferentes Casos

Posteriormente, muestra una caída antes de retomar lentamente su forma y alcanzar el valor límite del IDC, lo que genera inconsistencias. Un comportamiento similar, aunque menos pronunciado, se observa en los demás casos. Tras analizar las variables, se concluyó que la causa de estas inconsistencias radica en los valores de las tasas (λ_1 y λ_2) del proceso HE-2 condicionado y la relación que debe haber entre ellos dada por las condiciones establecidas en “Proceso MMPP de dos estados (MMPP-2).” Para la ecuación (2.5).

3.9 Conclusiones.

El este capítulo se introdujo el concepto de la Función Generadora de Momentos (FGM) para modelar el número de arribos en función del tiempo. A través de las ecuaciones desarrolladas, se abordaron varios escenarios de distribuciones de tiempo entre arribos, incluyendo la distribución Hiper Exponencial (HE) de diferentes órdenes. Se destacó la capacidad de la FGM para representar de manera precisa la variabilidad de los procesos de arribos, calculando el Índice de Dispersión de Cuentas

(IDC) para diferentes configuraciones, como los procesos MMPP y las distribuciones HE. Los resultados numéricos mostraron que las distribuciones HE de órdenes superiores pueden ofrecer una representación más precisa de los tiempos entre arribos en sistemas con alta dispersión, superando a modelos como el MMPP-2.

La aproximación de una distribución Log-Normal utilizando distribuciones HE de orden N ha sido tratada mediante dos enfoques matemáticos: el método MM y el EM. Ambos métodos permiten modelar la distribución log-normal de manera precisa, y su comparación resalta las fortalezas y debilidades de cada técnica. La combinación híbrida de ambos métodos (EM y MM) ofrece una alternativa robusta para la aproximación de distribuciones complejas.

El análisis comparativo de las gráficas de IDC en procesos con diferentes distribuciones ha permitido identificar patrones y diferencias significativas en el comportamiento temporal de los sistemas. El impacto de las distribuciones HE de diferentes órdenes, así como de los parámetros de CoV y Skewness, la comprensión de estas métricas es esencial para la caracterización de el IDC y su comportamiento.

En el capítulo final se aborda el cálculo del IDC e loV en el contexto del proceso GMPP-2, se comienza con un análisis detallado del IDC para el caso en que los tiempos de permanencia en los estados X_1 y X_2 siguen una distribución HE de orden n , explorando cómo se definen y resuelven los sistemas de ecuaciones para calcular los parámetros correspondientes. Se presentan sistemas específicos para distribuciones HE-2 y HE-3, y se generaliza el proceso para distribuciones HE- n , lo que permite aplicar estos métodos a una amplia gama de configuraciones. Además, se introduce un procedimiento basado en el software

Mathematica para realizar el cálculo del IDC, destacando las ventajas y resultados obtenidos mediante su aplicación. Finalmente, se presentan los resultados y se realiza una comparación entre las aproximaciones obtenidas mediante los métodos de igualación de momentos (MM), maximización de esperanza (EM) y la combinación híbrida de ambos, evaluando su efectividad en la estimación de los parámetros del proceso de arribos.

Capítulo 4. Cálculo del IDC de GMPP-2 con tiempos de permanencia en los estados del proceso de arribos con distribución Hiper Exponencial.

4.1 Análisis del IDC cuando los tiempos de permanencia en los estados X_1 y X_2 del proceso de arribos son Hiper Exponencial de orden n .

En la literatura, el uso de distribuciones Hiper Exponenciales (HE) suele limitarse a órdenes 2 debido a la complejidad matemática inherente a su cálculo y a la dificultad de interpretar sus parámetros en escenarios prácticos [23]. Esta limitación se observa en múltiples áreas, desde el modelado de sistemas estocásticos hasta la teoría de colas, lo que restringe la capacidad de representar procesos altamente variables con mayor precisión.

4.1.1 Definición del sistema de ecuaciones para el cálculo de los parámetros de los tiempos de permanencia en cada estado con distribución HE-2

Para usar la FGM de la ecuación (3.16) en un proceso en el que los tiempos de permanencia en los estados X_1 y X_2 Hiper Exponencial de segundo orden tenemos que definir la PDF de esta distribución.

La TL de la PDF del tiempo de permanencia en el estado uno del proceso de arribos esta dado por:

$$f_1^*(s) = \frac{p_1\eta_1}{s + \eta_1} + \frac{(1 - p_1)\eta_2}{s + \eta_2} \quad (4.1)$$

Y para el segundo estado la ecuación (4.2).

$$f_2^*(s) = \frac{\alpha_1\mu_1}{s + \mu_1} + \frac{(1 - \alpha_1)\mu_2}{s + \mu_2} \quad (4.2)$$

Donde p_1 y α_1 las probabilidades correspondientes a cada una de las dos fases de la HE-2. η_1 y μ_1 son las tasas correspondientes a cada fase del HE-2.

Para la definición de la TL de la CCDF tenemos las ecuaciones (4.3) y (4.4).

$$R_1^*(s) = \frac{p_1}{s + \eta_1} + \frac{1 - p_1}{s + s} \quad (4.3)$$

$$R_2^*(\sigma_2) = \frac{\alpha_1}{s + \mu_1} + \frac{1 - \alpha_1}{s + \mu_2} \quad (4.4)$$

Y para la definición del inverso de la media en cada estado tenemos las ecuaciones (4.5) y (4.6)

$$v_1 = \frac{\eta_1\eta_2}{p_1\eta_2 + (1 - p_1)\eta_1} \quad (4.5)$$

$$v_2 = \frac{\mu_1\mu_2}{\alpha_1\mu_2 + (1 - \alpha_1)\mu_1} \quad (4.6)$$

Para el cálculo de la FGM se sustituyen las ecuaciones (4.1) a (4.6) para obtener una razón de funciones de s . Para el caso en el que los tiempos X_1 y X_2 tienen distribución de probabilidad HE-2 el denominador consiste

de una ecuación de sexto grado sin termino independiente, esto provoca una mayor complejidad al momento de calcular la TL inversa, generando tiempos de cálculo más elevados para WM o en casos en los que el orden de la distribución HE es más alto, WM no puede calcular la TL inversa, más adelante se profundizará en los desafíos que presenta el aumento de orden en este tipo de procesos y la solución a esta problemática.

4.1.2 Definición del sistema de ecuaciones para el cálculo de los parámetros de los tiempos de permanencia en cada estado con distribución HE-3.

Para un proceso en cuando los tiempos de permanencia en los estados X_1 y X_2 son Hiper Exponencial de tercer orden tenemos que realizar los siguientes ajustes a las ecuaciones (4.1) a (4.6). Se modifican para considerar que X_1 y X_2 son v.a. con distribución HE-3 dando como resultado las ecuaciones (4.7) a (4.12).

$$f_1^*(s) = \frac{p_1\eta_1}{s + \eta_1} + \frac{p_2\eta_2}{s + \eta_2} + \frac{(1 - p_1 - p_2)\eta_3}{s + \eta_3} \quad (4.7)$$

$$f_2^*(\sigma_2) = \frac{\alpha_1\mu_1}{s + \mu_1} + \frac{\alpha_2\mu_2}{s + \mu_2} + \frac{(1 - \alpha_1 - \alpha_2)\mu_3}{s + \mu_3} \quad (4.8)$$

Donde p_i y α_i las probabilidades correspondientes a cada una de las dos fases de la HE-2 donde i toma valores desde 1 hasta $n-1$ siendo n el orden del proceso, en este caso 3. η_i y μ_i son las tasas correspondientes a cada fase del HE-3

Para la redefinición de la TL de la CCDF tenemos las ecuaciones (4.9) y (4.10)

$$R_1^*(s) = \frac{p_1}{s + \eta_1} + \frac{p_2}{s + \eta_2} + \frac{(1 - p_1 - p_2)}{s + \eta_3} \quad (4.9)$$

$$R_2^*(s) = \frac{\alpha_1}{s + \mu_1} + \frac{\alpha_2}{s + \mu_2} + \frac{(1 - \alpha_1 - \alpha_2)}{s + \mu_3} \quad (4.10)$$

Y para la nueva definición del inverso de la media en cada estado tenemos las ecuaciones (4.11) y (4.12).

$$v_1 = \frac{\eta_1 \eta_2 \eta_3}{\eta_1 \eta_2 - p_1 \eta_1 \eta_2 - p_2 \eta_1 \eta_2 + p_2 \eta_1 \eta_3 + p_1 \eta_2 \eta_3} \quad (4.11)$$

$$v_2 = \frac{\mu_1 \mu_2 \mu_3}{\mu_1 \mu_2 - \alpha_1 \mu_1 \mu_2 - \alpha_2 \mu_1 \mu_2 + \alpha_2 \mu_1 \mu_3 + \alpha_1 \mu_2 \mu_3} \quad (4.12)$$

4.1.3 Generalización de la definición del sistema de ecuaciones para Definición del sistema de ecuaciones para el cálculo de los parámetros de los tiempos de permanencia en cada estado con distribución HE-n.

Finalmente, y luego de definir las ecuaciones y encontrar un patrón en ellas se definen las siguientes ecuaciones generalizadas para un proceso Hiper Exponencial de orden n .

Para la generalización de la TL de la CCDF tenemos las ecuaciones (4.17) y (4.18).

$$R_1^*(s) = \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{s + \eta_i} \quad (4.13)$$

$$R_2^*(s) = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{s + \mu_i} \quad (4.14)$$

Finalmente, las definiciones del inverso de la media en cada estado tenemos las ecuaciones (4.15) y (4.16).

$$v_1 = \frac{\prod_{i=1}^n \eta_i}{\sum_{i=1}^n p_i \eta_i} \quad (4.15)$$

$$v_2 = \frac{\prod_{i=1}^n \mu_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i} \quad (4.16)$$

Es importante mencionar que para el cálculo de la probabilidad n-ésima se usa las siguientes ecuaciones

$$p_n = 1 - \left(\sum_{i=1}^{n-1} p_i \right) \quad (4.17)$$

$$\alpha_n = 1 - \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \right) \quad (4.18)$$

4.1.4 Método para el cálculo del IDC para cuando los tiempos de permanencia en los estados X1 y X2 tienen distribución Hiper Exponencial utilizando Mathematica.

Para describir el método para el cálculo del IDC para cuando los tiempos de permanencia en los estados $X1$ y $X2$ tienen distribución Hiper Exponencial utilizando Mathematica usaremos la siguiente FGM descrita en [4].

$$\begin{aligned}
\phi_{N(t)}^*(z, s) &= \frac{1}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} \cdot \left(\frac{\frac{1}{v_1}}{s + \lambda_1(1-z)} + \frac{\frac{1}{v_2}}{s + \lambda_2(1-z)} \right) \\
&\quad - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} \\
&\quad \cdot \left(\frac{(1-z)^2}{(s + \lambda_1(1-z))(s + \lambda_2(1-z))} \right) \\
&\quad \cdot \left(\frac{R_1^*(s)R_2^*(s)}{1 - (f_1^*(s)f_2^*(s))} \right)
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Al requerir únicamente una derivada parcial con respecto a z , el cálculo del primer momento no presenta mayores complicaciones. En cambio, el segundo momento implica un mayor grado de complejidad, ya que requiere calcular la segunda derivada parcial con respecto a z y realizar posteriormente la transformada de Laplace inversa. Esta última operación, en particular, resulta compleja debido a la forma en que se construye el último término de la ecuación (4.20).

$$\frac{R_1^*(s)R_2^*(s)}{s^3(-R_2^*(s) + R_1^*(s)(-1 + sR_2^*(s)))} \tag{4.20}$$

La expresión (4.20) es la que contiene más términos en el dominio de s , observemos el siguiente ejemplo para X_1 y X_2 con distribución de probabilidad HE de orden 2.

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\frac{p_1}{s + \eta_1 - (-1 + z)\lambda_1} + \frac{1 - p_1}{s + \eta_2 - (-1 + z)\lambda_1} \right) \right. \\
& \quad \cdot \left. \left(\frac{\alpha_1}{s - (-1 + z)\lambda_2 + \mu_1} + \frac{1 - \alpha_1}{s - (-1 + z)\lambda_2 + \mu_2} \right) \right] \\
& / \left[1 \right. \\
& \quad - \left(\left(\frac{p_1\eta_1}{s + \eta_1 - (-1 + z)\lambda_1} + \frac{(1 - p_1)\eta_2}{s + \eta_2 - (-1 + z)\lambda_1} \right) \right. \\
& \quad \cdot \left. \left. \left(\frac{\alpha_1\mu_1}{s - (-1 + z)\lambda_2 + \mu_1} + \frac{(1 - \alpha_1)\mu_2}{s - (-1 + z)\lambda_2 + \mu_2} \right) \right) \right] \quad (4.21)
\end{aligned}$$

Observe que el grado de los polinomios del numerador y denominador es alto, lo cual eleva la complejidad el cálculo de la TL inversa. Incluso hasta este punto, aún no se ha calculado la primera ni la segunda derivada parcial con respecto a z , lo que conlleva un aumento en la complejidad de la ecuación y, en consecuencia, tiempos de cálculo más prolongados. Por esta razón, tras trabajar con la ecuación correspondiente a la derivada parcial con respecto a z de la TL de la Función Generadora de Momentos, se obtuvo la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \phi_{N(t)}^*(s, z)}{\partial z^2} \Big|_{z=1} \\
& = \frac{2}{s^3} (P_1\lambda_1^2 + P_2\lambda_2^2) + \frac{2(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(E\{x_1\} + E\{x_2\})} \quad (4.22) \\
& \cdot \frac{R_1^*(s)R_2^*(s)}{s^3(-R_2^*(s) + R_1^*(s)(-1 + sR_2^*(s)))}
\end{aligned}$$

Para poder dejar la ecuación en términos de la TL de la CCDF se usó un despeje de la ecuación (3.2) quedando de la siguiente forma

$$R_i^*(s) = \frac{1 - f_i^*(s)}{s} \quad (4.23)$$

Observe que una ventaja adicional es el hecho de que la TL de la CCDF está definida en términos de s eliminando la dependencia de σ_i , para este análisis también se considera toda la ecuación en términos de la TL de la PDF, sin embargo, la reducción y la solución de la ecuación resulta más compleja que usando la TL de la CCDF. Es por eso que se usa ésta para la definición, sin embargo, se puede utilizar la TL de la PDF.

Finalmente, en la ecuación solo quedan por definir con la ecuación las probabilidades P_1 y P_2 .

$$P_1 = \frac{E\{x_1\}}{E\{x_1\} + E\{x_2\}} \quad (4.24)$$

$$P_2 = \frac{E\{x_2\}}{E\{x_1\} + E\{x_2\}} \quad (4.25)$$

Sin embargo, aunque es una forma simplificada presenta el mismo problema en el último término haciendo que cada que se agregue un orden aumente considerablemente la complejidad de los cálculos, es por eso por lo que para ordenes más altos se requiere de un método específico para el cálculo del IDC usando la FGM.

4.1.4.1 Definición de una función racional para optimizar el cálculo de la TL inversa de Laplace.

Para este procedimiento, se definirá la función $g(s)$ como el cociente entre dos funciones, ambas definidas en el dominio de la variable s . En esta definición, $P(s)$ corresponde al numerador y $Q(s)$ al denominador

$$g(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad (4.26)$$

donde:

$$g(s) = \frac{R_1^*(s)R_2^*(s)}{s^3(-R_2^*(s) + R_1^*(s)(-1 + sR_2^*(s)))} \quad (4.27)$$

en consecuencia:

$$P(s) = R_1^*(s)R_2^*(s) \quad (4.28)$$

$$Q(s) = s^3(-R_2^*(s) + R_1^*(s)(-1 + sR_2^*(s))) \quad (4.29)$$

Comenzaremos trabajando con la función $P(s)$. Para continuar con la explicación de este método tomaremos de ejemplo un caso de orden 2, para este caos la función $P(s)$ quedaría definida de la siguiente forma:

$$P(s) = \left(\frac{p_1}{s + \eta_1} + \frac{p_2}{s + \eta_2} \right) \left(\frac{\alpha_1}{s + \mu_1} + \frac{\alpha_2}{s + \mu_2} \right) \quad (4.30)$$

Multiplicamos (4.30) por $(s + \eta_1)(s + \eta_2)(s + \mu_1)(s + \mu_2)$. Para no alterar la ecuación la función $Q(s)$ también será multiplicada por este termino.

$$P(s) = \left(\frac{p_1}{s + \eta_1} + \frac{p_2}{s + \eta_2} \right) \cdot (s + \eta_1) \cdot (s + \eta_2) \cdot \left(\frac{\alpha_1}{s + \mu_1} + \frac{\alpha_2}{s + \mu_2} \right) \cdot (s + \mu_1) \cdot (s + \mu_2) \quad (4.31)$$

Simplificamos la ecuación (4.31) y posteriormente factorizamos respecto a s .

$$P(s) = s^2 + (-\eta_1 + p_1\eta_1 - p_1\eta_2)(-\mu_1 + \alpha_1\mu_1 - \alpha_1\mu_2) - s(-\eta_1 + p_1\eta_1 - p_1\eta_2 - \mu_1 + \alpha_1\mu_1 - \alpha_1\mu_2) \quad (4.32)$$

De esta forma obtenemos una ecuación de segundo grado en función de s .

Por otro lado, la función $Q(s)$ requiere un procedimiento más laborioso.

$$Q(s) = s^3 \left(-\frac{\alpha_1}{s + \mu_1} - \frac{\alpha_2}{s + \mu_2} + \left(\frac{p_1}{s + \eta_1} + \frac{p_2}{s + \eta_2} \right) \left(-1 + s \left(\frac{\alpha_1}{s + \mu_1} + \frac{\alpha_2}{s + \mu_2} \right) \right) \right) \quad (4.33)$$

Separamos la función en tres subfunciones obteniendo la siguiente ecuación:

$$Q(s) = Q_1(s) \cdot (Q_2(s) + Q_3(s) \cdot Q_4(s)) \quad (4.34)$$

donde:

$$Q_1(s) = s^3 \quad (4.35)$$

$$Q_2(s) = -\frac{\alpha_1}{s + \mu_1} - \frac{\alpha_2}{s + \mu_2} \quad (4.36)$$

$$Q_3(s) = \left(\frac{p_1}{s + \eta_1} + \frac{p_2}{s + \eta_2} \right) \quad (4.37)$$

$$Q_4(s) = \left(-1 + s \left(\frac{\alpha_1}{s + \mu_1} + \frac{\alpha_2}{s + \mu_2} \right) \right) \quad (4.38)$$

Para mantener la ecuación original recordemos que también debemos multiplicar la función por $(s + \eta_1)(s + \eta_2)(s + \mu_1)(s + \mu_2)$, solo que estos términos los distribuiremos en las funciones de $Q(s)$ de la siguiente forma

$$Q_2(s) = \left(-\frac{\alpha_1}{s + \mu_1} - \frac{\alpha_2}{s + \mu_2} \right) \cdot (s + \eta_1) \cdot (s + \eta_2) \cdot (s + \mu_1) \cdot (s + \mu_2) \quad (4.39)$$

$$Q_3(s) = \left(\frac{p_1}{s + \eta_1} + \frac{p_2}{s + \eta_2} \right) \cdot (s + \eta_1) \cdot (s + \eta_2) \quad (4.40)$$

$$Q_4(s) = \left(-1 + s \left(\frac{\alpha_1}{s + \mu_1} + \frac{\alpha_2}{s + \mu_2} \right) \right) (s + \mu_1)(s + \mu_2) \quad (4.41)$$

simplificamos

$$Q_2(s) = -((s + \eta_1)(s + \eta_2)(\alpha_2(s + \mu_1) + \alpha_1(s + \mu_2))) \quad (4.42)$$

$$Q_3(s) = p_2(s + \eta_1) + p_1(s + \eta_2) \quad (4.43)$$

$$Q_4(s) = (s + \mu_1)(s(-1 + \alpha_2) - \mu_2) + s\alpha_1(s + \mu_2) \quad (4.44)$$

y volvemos a definir la función $Q(s)$

$$Q(s) = s^3(-((s + \eta_1)(s + \eta_2)(s - (-1 + \alpha_1)\mu_1 + \alpha_1\mu_2)) + (s - (-1 + p_1)\eta_1 + p_1\eta_2)(-(s + \mu_1)\mu_2) + s\alpha_1(-\mu_1 + \mu_2))) \quad (4.45)$$

factorizamos respecto a s

$$\begin{aligned}
Q(s) = & -s^6 - s^5(\eta_1 + \eta_2 + \mu_1 + \mu_2) - s^4(\eta_1\eta_2 + \eta_1\mu_1 \\
& - p_1\alpha_1\eta_1\mu_1 + \eta_2\mu_1 - \alpha_1\eta_2\mu_1 + p_1\alpha_1\eta_2\mu_1 \\
& + \eta_1\mu_2 - p_1\eta_1\mu_2 + p_1\alpha_1\eta_1\mu_2 + p_1\eta_2\mu_2 \\
& + \alpha_1\eta_2\mu_2 - p_1\alpha_1\eta_2\mu_2 + \mu_1\mu_2) \\
& + s^3(-\eta_1\eta_2\mu_1 + \alpha_1\eta_1\eta_2\mu_1 - \alpha_1\eta_1\eta_2\mu_2 \\
& - \eta_1\mu_1\mu_2 + p_1\eta_1\mu_1\mu_2 - p_1\eta_2\mu_1\mu_2) \\
& + s^3(\alpha_2\eta_1\eta_2\mu_1 + \alpha_1\eta_1\eta_2\mu_2 + p_2\eta_1\mu_1\mu_2 \\
& + p_1\eta_2\mu_1\mu_2)
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Una vez definidas las funciones $P(s)$ y $Q(s)$ podemos definir la ecuación (4.26), finalmente, realizamos la división entre las ecuaciones y obtenemos una nueva función racional con las siguientes ecuaciones para $P(s)$ y $Q(s)$.

$$\begin{aligned}
P(s) = & -((s - (-1 + p_1)\eta_1 + p_1\eta_2)(s - (-1 + \alpha_1)\mu_1 \\
& + \alpha_1\mu_2))
\end{aligned} \tag{4.47}$$

$$\begin{aligned}
Q(s) = & (s^3(s(s + \mu_1)(s + \mu_2) + \eta_2(s(s + (1 + (-1 \\
& + p_1)\alpha_1)\mu_1) + (s\alpha_1 + p_1(s - s\alpha_1 + \mu_1))\mu_2) \\
& + \eta_1(s(s + (1 + p_1(-1 + \alpha_1))\mu_2) + \eta_2(s \\
& - (-1 + \alpha_1)\mu_1 + \alpha_1\mu_2) + \mu_1(s + \mu_2 \\
& - p_1(s\alpha_1 + \mu_2))))))
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Obsérvese que, en comparación con la ecuación (4.21), la ecuación (4.26) (4.26) representa una simplificación que permite emplear métodos más directos para calcular su transformada de Laplace inversa, como el uso de fracciones parciales, por ejemplo. Además, este enfoque es aplicable a cualquier orden, lo que posibilita la resolución de la ecuación (4.22) hasta de sexto orden. La principal limitante radica en

la falta de parámetros numéricos necesarios, más allá de que el método tenga un límite en dicho orden, pudiendo extenderse, en teoría, al cálculo de órdenes superiores (n).

Finalmente, y a pesar de que matemáticamente este método no presenta mayor complejidad, al momento de emplearlo en Wolfram Mathematica, se presentan diversas dificultades y pasos extra que son necesarios para llegar al resultado en la ecuación (4.48), en el Apéndice B se explica este desarrollo.

4.1.5 Resultados.

Mediante las técnicas desarrolladas, se logra calcular el Índice de Dispersión de Cuentas (IDC) para distribuciones HE de órdenes superiores, hasta Orden 6, en este trabajo solo se mostrará hasta orden 6 en los apéndices se encuentran las generalizaciones para el cálculo del orden n . Los resultados obtenidos en la Figura 4.1 demuestran que, a pesar del aumento en complejidad computacional, las HE de órdenes altos ofrecen una mejor representación de los procesos subyacentes en comparación con los modelos MMPP-2, especialmente en sistemas con alta dispersión.

4.1.5.1 Cálculo del IDC para cuando los tiempos de permanencia en los estados X_1 y X_2 tienen distribución Hiper Exponencial Orden 2.

Para este orden se usaron los parámetros definidos en la Tabla 4.1 Parámetros usados para los tiempos de permanencia en los estados del proceso de arribos tienen distribución HE de orden 2 para los cálculos del IDC e IOV.

| Parámetro | Valor |
|-------------|----------------|
| α_1 | 0.766979566073 |
| μ_1 | 0.004639179574 |
| μ_2 | 0.000278301773 |
| p_1 | 0.768409771543 |
| η_1 | 0.046168728986 |
| η_2 | 0.002769752573 |
| λ_1 | 1/30 |
| λ_2 | 3/200 |

Tabla 4.1 Parámetros usados para los tiempos de permanencia en los estados del proceso de arribos tienen distribución HE de orden 2

Para analizar el comportamiento en cada una de las fases del sistema, se introdujeron dos escenarios adicionales que permiten evaluar cómo las distribuciones de tiempo afectan las dinámicas del modelo.

En el primer escenario, se considera que el tiempo de permanencia en el estado de arribos X_1 sigue una distribución Exponencial Negativa, lo que implica que los tiempos entre eventos son independientes y tienen una tasa constante de ocurrencia. En la ecuación (4.49) se presenta la forma del polinomio racional en función del tiempo, en esta ecuación aparecen diferentes constantes, estas incluyen valores de probabilidad y tasas, sin embargo, presentarla de esta forma nos permite observar las características de segundo orden que presenta esta ecuación, después de evaluar la función podemos obtener el IDC(t) para analizar este comportamiento y compararlo con los demás casos presentados.

Este enfoque es útil para modelar procesos donde los eventos llegan de forma aleatoria, pero con una frecuencia promedio bien definida, como ocurre en redes de comunicación.

$$\begin{aligned}
g(t) = & \frac{ab^2 + ac + bc}{c^3} \\
& - \frac{1}{2c^3\sqrt{b^2 + 4c}} (-ab^3 e^{(-\frac{b}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{b^2+4c})t} \\
& - 3abce^{(-\frac{b}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{b^2+4c})t} - b^2ce^{(-\frac{b}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{b^2+4c})t} \\
& - 2c^2e^{(-\frac{b}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{b^2+4c})t} \\
& + ab^2\sqrt{b^2 + 4c}e^{(-\frac{b}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{b^2+4c})t} \\
& + ac\sqrt{b^2 + 4c}e^{(-\frac{b}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{b^2+4c})t} \\
& + bc\sqrt{b^2 + 4c}e^{(-\frac{b}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{b^2+4c})t} \quad (4.49) \\
& + ab^3e^{(-\frac{b}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{b^2+4c})t} + 3abce^{(-\frac{b}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{b^2+4c})t} \\
& + b^2ce^{(-\frac{b}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{b^2+4c})t} + 2c^2e^{(-\frac{b}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{b^2+4c})t} \\
& + ab^2\sqrt{b^2 + 4c}e^{(-\frac{b}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{b^2+4c})t} \\
& + ac\sqrt{b^2 + 4c}e^{(-\frac{b}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{b^2+4c})t} \\
& + bc\sqrt{b^2 + 4c}e^{(-\frac{b}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{b^2+4c})t} + \frac{(ab + c)t}{c^2} \\
& + \frac{at^2}{2c}
\end{aligned}$$

Donde los coeficientes de la ecuación (4.49) están definidos por las siguientes ecuaciones:

$$a = \mu_1 - \alpha_1\mu_1 + \alpha_1\mu_2 \quad (4.50)$$

$$b = \eta_1 + \mu_1 + \mu_2 \quad (4.51)$$

$$c = -\eta_1\mu_1 + \alpha_1\eta_1\mu_1 - \alpha_1\eta_1\mu_2 - \mu_1\mu_2 \quad (4.52)$$

4.1.5.1.1 El termino lineal del IDC para cuando los tiempos de permanencia en los estados X1 y X2 tienen distribución Hiper Exponencial.

A pesar de aplicar los métodos y recomendaciones descritos en el Apéndice B para ecuaciones de mayor orden (quinto y sexto), WM enfrentó dificultades al generar las ecuaciones y gráficas del IDC a partir del cálculo del Segundo Momento. Tras analizar las ecuaciones del IDC y las posibles causas de este comportamiento, se concluyó que el problema se debía a la falta de precisión en los cálculos con los valores numéricos. Sin embargo, se identificó un inconveniente aún más significativo: la presencia de un término lineal que impedía obtener la forma característica del IDC.

Usando la ecuación (4.27), (4.22) y la definición del IDC, tenemos la siguiente ecuación:

$$IDC(t) = \frac{t(P_1\lambda_1^2 + P_2\lambda_2^2) + \frac{2(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(E\{x_1\} + E\{x_2\})} \cdot g(s) + \lambda_{avg}t - (\lambda_{avg}t)^2}{\lambda_{avg}t} \quad (4.53)$$

Si de la ecuación (4.53) nos enfocamos solamente en el término independiente (4.60), es decir cuando $t=0$.

$$t \frac{(P_1\lambda_1^2 + P_2\lambda_2^2)}{\lambda_{avg}} + \frac{2(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(E\{x_1\} + E\{x_2\})\lambda_{avg}t} g(0) + 1 - \lambda_{avg}t \quad (4.54)$$

Donde observando la ecuación (4.49) podemos definir $g(0)$ como

$$g(0) = \frac{at^2}{2c} \quad (4.55)$$

Sustituyendo el valor de $g(0)$ en la ecuación (4.54)

$$\begin{aligned} & \text{Lineal}(IDC(t)) \\ &= t \frac{(P_1\lambda_1^2 + P_2\lambda_2^2)}{\lambda_{avg}} \\ &+ t \frac{2(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(E\{x_1\} + E\{x_2\})\lambda_{avg}} \frac{a}{2c} + 1 - \lambda_{avg}t \end{aligned} \quad (4.56)$$

Si factorizamos t y sustituimos variables para que todo quede en términos de los parámetros de probabilidades y tasas tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} & \text{Lineal}(IDC(t)) \\ &= t \left(\frac{\lambda_1^2}{\eta_1 \left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{(1 - \alpha_1)\mu_1 + \alpha_1\mu_2}{\mu_1\mu_2} \right)} \right. \\ &+ \frac{\lambda_2^2((1 - \alpha_1)\mu_1 + \alpha_1\mu_2)}{\mu_1\mu_2 \left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{(1 - \alpha_1)\mu_1 + \alpha_1\mu_2}{\mu_1\mu_2} \right)} \\ &- \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2(-\mu_1 + \alpha_1\mu_1 - \alpha_1\mu_2)}{(-\eta_1\mu_1 + \alpha_1\eta_1\mu_1 - \alpha_1\eta_1\mu_2 - \mu_1\mu_2) \left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{(1 - \alpha_1)\mu_1 + \alpha_1\mu_2}{\mu_1\mu_2} \right)} \\ &- \left(\frac{\lambda_1}{\eta_1 \left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{(1 - \alpha_1)\mu_1 + \alpha_1\mu_2}{\mu_1\mu_2} \right)} \right. \\ &+ \left. \left. \frac{\lambda_2((1 - \alpha_1)\mu_1 + \alpha_1\mu_2)}{\mu_1\mu_2 \left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{(1 - \alpha_1)\mu_1 + \alpha_1\mu_2}{\mu_1\mu_2} \right)} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (4.57)$$

Al simplificar la ecuación (4.57) tendremos:

$$\text{Lineal}(IDC(t)) = 0 \quad (4.58)$$

Posteriormente, se aplicó este procedimiento considerando que el tiempo de permanencia en X_2 sigue una distribución Exponencial Negativa y X_1 corresponde a una HE de Orden 2. Los resultados obtenidos fueron consistentes, demostrando que, para el IDC, el término lineal es igual a cero. Este término, que WM no logra reducir a cero, genera inconsistencias en las ecuaciones y gráficas. Sin embargo, una vez demostrado que el término lineal es nulo, puede eliminarse de las ecuaciones finales del IDC, resolviendo así el problema identificado en WM y permitiendo el cálculo y la representación gráfica sin inconvenientes para cualquier orden y combinación de distribuciones entre X_1 y X_2 .

4.1.5.2 Resultados del IDC e loV cuando los tiempos de permanencia en los estados X_1 y X_2 tienen distribución Hiper Exponencial Orden 2.

En el segundo escenario, la misma distribución Exponencial Negativa se aplica al estado X_2 . Esto permite explorar cómo afecta al sistema el asumir que los tiempos de salida o de procesamiento en esta fase también tienen la misma estructura estadística.

Al considerar estas combinaciones, se logra analizar de manera más detallada las diferencias y similitudes en el comportamiento de cada fase, evaluando cómo la elección de la distribución para los tiempos de permanencia impacta en las métricas generales del sistema, como el tiempo total de procesamiento, la eficiencia, o la probabilidad de saturación en ciertos estados. Esto también permite ajustar el modelo a

escenarios específicos donde las tasas de arribo o salida son conocidas o se desean optimizar. Para este caso se usaron los siguientes parámetros mostrados en la Tabla 4.2 y Tabla 4.3.

| Parámetro | Valor |
|------------------|----------------|
| α_1 | 0.766979566073 |
| μ_1 | 0.004639179574 |
| μ_2 | 0.000278301773 |
| p_1 | 0.768409771543 |
| η_1 | 1/100 |

Tabla 4.2 Parámetros para cuando el tiempo de permanencia en X1 tiene distribución Exponencial Negativa y X2 HE de Orden 2.

| Parámetro | Valor |
|------------------|----------------|
| α_1 | 0.766979566073 |
| μ_1 | 1/1000 |
| p_1 | 0.000303216433 |
| η_1 | 0.046168728986 |
| η_1 | 0.002769752573 |

Tabla 4.3 Parámetros para cuando el tiempo de permanencia en X2 tiene distribución Exponencial Negativa y X1 HE de Orden 2.

Con esos parámetros se obtuvieron las gráficas mostradas en la Figura 4.1 observe que para el primer caso ecuación (4.59) representa el caso en el que los tiempos de permanencia en X_1 y X_2 siguen una distribución HE.

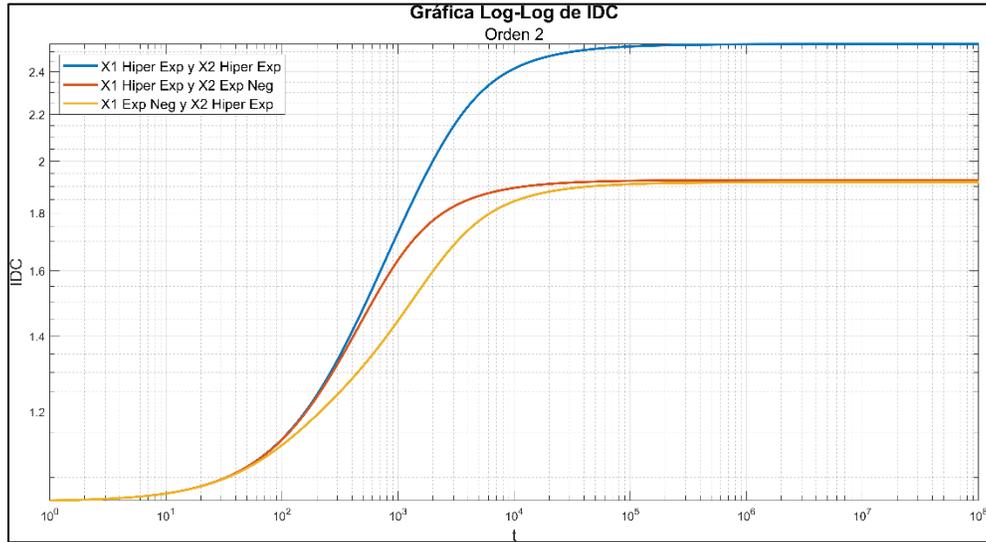


Figura 4.1 Comportamiento del Índice de Dispersión (IDC) con Tiempos de Permanencia con Hiper-Exponenciales o Exponenciales Negativos en los estados X_1 y X_2 para diferentes configuraciones de distribuciones de segundo orden.

En este escenario, el IDC tiene un crecimiento más rápido y alcanza un valor máximo mayor dado que ambos estados son HE-2. La ecuación (4.60) corresponde al caso en el que el tiempo en X_1 sigue una distribución Exponencial Negativa, mientras que X_2 sigue una distribución HE. Aquí, el IDC crece más lentamente que en el caso rojo y alcanza un valor máximo intermedio. La función en verde (ecuación (4.61)) representa el escenario en el que el tiempo X_1 sigue una distribución HE y en X_2 una Exponencial Negativa. En este caso, el IDC tiene un crecimiento más moderado y alcanza un valor máximo menor en comparación con los otros dos escenarios.

$$\begin{aligned}
 IDC(t) = \frac{1}{t} [& 60.0002t + 0.0041072e^{-0.0490608t} \\
 & + 1.92028e^{-0.0038248t} \\
 & + 18.66582e^{-0.00097035t} - 20.59021]
 \end{aligned}
 \tag{4.59}$$

$$IDC(t) = \frac{1}{t} [-726.30815 + 13.35891e^{-0.013892t} + 712.94924e^{-0.0010246t} + (1.916146)t] \quad (4.60)$$

$$IDC(t) = \frac{1}{t} [-304.52942 + 0.27512e^{-0.046941t} + 304.25429e^{-0.0029972t} + 1.924853t] \quad (4.61)$$

El cálculo de los parámetros para las distribuciones Hiper Exponenciales se realizó utilizando el algoritmo del **Apéndice C**, con un coeficiente de variación de 2. Los parámetros de las distribuciones Hiper Exponenciales son $\lambda_1=130$ y $\lambda_2=3200$. Estos valores corresponden a las tasas de cada estado dentro de la distribución Hiper Exponencial, lo que influye en la forma final de las curvas mostradas.

Para el análisis del loV observe que en la Figura 4.2 cuando X_1 sigue una distribución Hiper Exponencial, mientras que X_2 tiene una distribución exponencial negativa. Esto se refleja en la gráfica, donde se observa un cambio en la forma de la curva, que muestra una variabilidad más pronunciada al principio y un descenso más rápido en comparación con el escenario anterior. Por otro lado, cuando X_1 sigue una distribución Exponencial Negativa no alcanza un valor alto a comparación de las otras dos graficas, sin embargo, el ancho que presenta es muy similar al cuando ambas variables son HE.

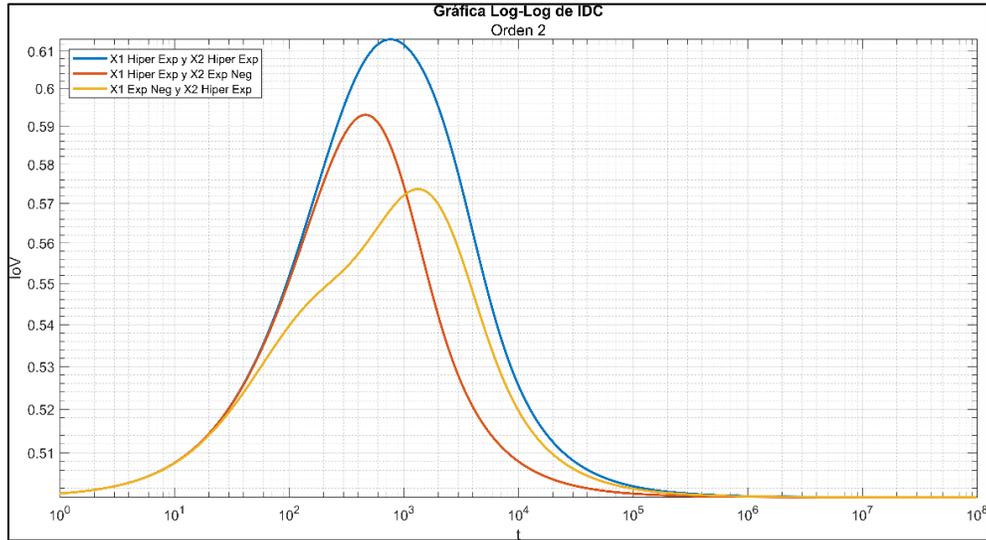


Figura 4.2 Comportamiento del Índice de Variabilidad (IoV) para Diferentes Configuraciones de Distribuciones Hiper Exponenciales y Exponenciales Negativas en los Estados X_1 y X_2 .

4.1.5.3 Resultados del IDC e IoV cuando los tiempos de permanencia en los estados X_1 y X_2 tienen distribución Hiper Exponencial Orden 3.

Para este Orden se usaron los parámetros mostrados en de la Tabla 4.4 a la Tabla 4.6.

| Parámetro | Valor |
|------------|----------------|
| α_1 | 0.063898373905 |
| α_2 | 0.518182895726 |
| μ_1 | 0.000112756335 |
| μ_2 | 0.008771485658 |
| μ_3 | 0.001108977506 |
| p_1 | 0.06404030393 |
| p_2 | 0.516316360095 |
| η_1 | 0.001127144088 |
| η_2 | 0.088039712453 |
| η_3 | 0.011167693334 |

Tabla 4.4 Parámetros usados para los tiempos de permanencia en los estados del proceso de arribos tienen distribución HE de orden 3.

De igual forma se obtuvieron las siguientes tablas para los otros dos casos.

| Parámetro | Valor |
|------------|----------------|
| α_1 | 0.063898373905 |
| α_2 | 0.518182895726 |
| μ_1 | 0.000112756335 |
| μ_2 | 0.008771485658 |
| μ_3 | 0.001108977506 |
| p_1 | 0.06404030393 |
| η_1 | 1/100.0 |

Tabla 4.5 Parámetros para cuando el tiempo de permanencia en X_1 tiene distribución Exponencial Negativa y X_2 HE de Orden 3.

| Parámetro | Valor |
|------------|----------------|
| α_1 | 0.063898373905 |
| μ_1 | 1/1000 |
| p_1 | 0.06404030393 |
| p_2 | 0.516316360095 |
| η_1 | 0.001127144088 |
| η_2 | 0.088039712453 |
| η_3 | 0.011167693334 |

Tabla 4.6 Parámetros para cuando el tiempo de permanencia en X_2 tiene distribución Exponencial Negativa y X_1 HE de Orden 3.

Con los datos calculados se calculó el IDC para cada uno de los diferentes casos, observe en la Figura 4.3 como la primer grafica representa el caso en el que los tiempos de permanencia en los estados X_1 y X_2 siguen una distribución HE de orden 3. En este escenario, el IDC presenta un crecimiento más rápido, consistente con el Orden 2 y alcanza un valor máximo mayor.

La siguiente función corresponde al caso en el que el tiempo de permanencia en X_1 sigue una distribución Exponencial Negativa, mientras que en X_2 sigue una distribución HE-3. En este caso, el IDC

muestra un crecimiento más lento en comparación con el primer escenario y alcanza un valor máximo intermedio.

Finalmente, el caso en el que el tiempo de permanencia en X_1 sigue una distribución HE-3 y en X_2 una Exponencial Negativa. Aquí, el IDC tiene un crecimiento más moderado y su valor máximo es menor en comparación con los otros dos escenarios. Nótese que, aunque ambos valores llegan aproximadamente al mismo tiempo a un valor constante, los casos en los que X_1 y X_2 siguen una distribución diferente no logran llegar al valor máximo del IDC.

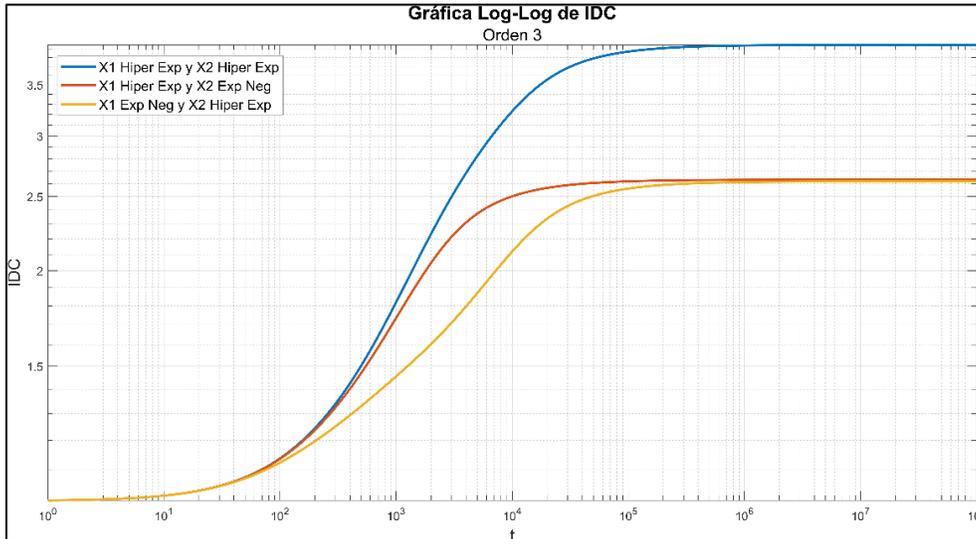


Figura 4.3 Comportamiento del Índice de Dispersión (IDC) con Tiempos de Permanencia Hiper-Exponenciales en Estados X_1 y X_2 para Diferentes Configuraciones de Distribuciones de orden 3.

En la Figura 4.4 se presentan tres funciones del loV, cada una correspondiente a los casos previamente descritos. La curva en la que los tiempos de permanencia en el estado X_1 y X_2 son HE-3 alcanza el pico más alto, lo que indica un crecimiento inicial más pronunciado. Además, esta curva tiene el mayor ancho y punto más alto, debido a que ambos estados siguen distribuciones HE-3.

Por otro lado, la curva correspondiente al caso donde el tiempo de permanencia en el estado X_1 es HE y en el estado X_2 es Exponencial Negativa presenta un pico intermedio y un ancho considerablemente menor en comparación con la primera curva. Finalmente, la curva en la que el tiempo de permanencia en el estado X_1 es Exponencial Negativa y en el estado X_2 es HE alcanza un punto máximo más bajo que las otras dos curvas y su ancho se aproxima más al de la primera curva llegando, incluso a converger con esta después de cierto tiempo.

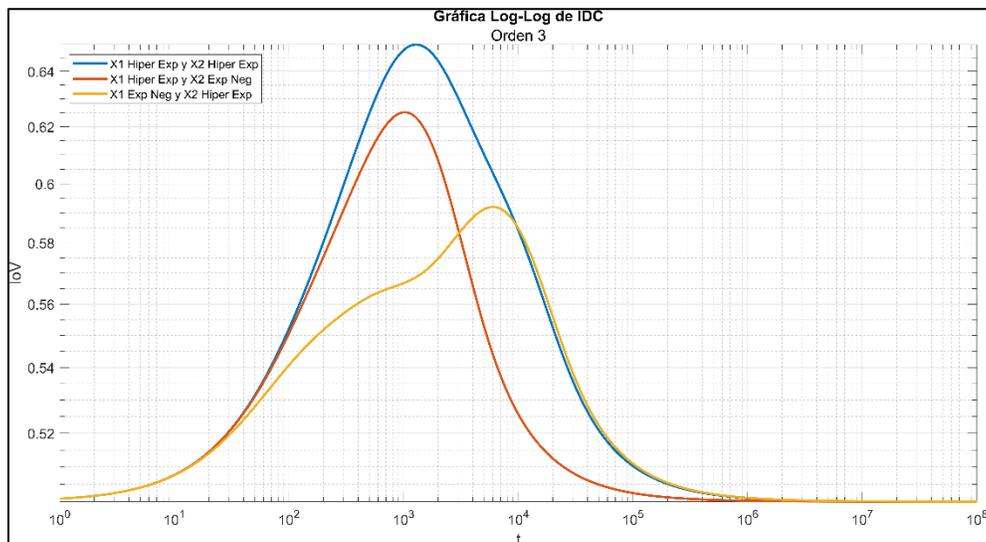


Figura 4.4 Comportamiento del Índice de Variabilidad (IoV) para Diferentes Configuraciones de Distribuciones Hiper Exponenciales y Exponenciales Negativas en los Estados X_1 y X_2 .

Observe que, aunque este orden presenta características similares al orden dos, alcanza valores más altos y se ajusta mejor al ancho de la señal.

4.1.5.4 Resultados del IDC e loV cuando los tiempos de permanencia en los estados X_1 y X_2 tienen distribución Hiper Exponencial Orden 4

Para el Orden 4, los resultados se mantienen de manera similar a la del Orden 3, pero con la diferencia de que este presenta mejoras derivadas de la inclusión de un mayor número de parámetros y un mejor ajuste en los resultados respecto a los órdenes anteriores, para este orden se tienen los siguientes parámetros mostrados en de la Tabla 4.7 a la Tabla 4.9.

| Parámetro | Valor |
|------------|----------------|
| α_1 | 0.4375933078 |
| α_2 | 0.1694732298 |
| α_3 | 0.3754252151 |
| μ_1 | 0.002152726825 |
| μ_2 | 0.000393595656 |
| μ_3 | 0.01209740845 |
| μ_4 | 0.000052475075 |
| p_1 | 0.439467990082 |
| p_2 | 0.169107855063 |
| p_3 | 0.373855272353 |
| η_1 | 0.02157443054 |
| η_2 | 0.003914990226 |
| η_3 | 0.121823453625 |
| η_4 | 0.00052251148 |

Tabla 4.7 Parámetros usados para los tiempos de permanencia en los estados del proceso de arribos tienen distribución HE de orden 4.

| Parámetro | Valor |
|------------|----------------|
| α_1 | 0.4375933078 |
| α_2 | 0.1694732298 |
| α_3 | 0.3754252151 |
| μ_1 | 0.002152726825 |
| μ_2 | 0.000393595656 |
| μ_3 | 0.01209740845 |

| | |
|----------|----------------------|
| μ_4 | 0.000052475075 |
| p_1 | 0.439467990082 |
| η_1 | 1/1001/100 (0.01) |

Tabla 4.8 Parámetros para cuando el tiempo de permanencia en X_1 tiene distribución Exponencial Negativa y X_2 HE de Orden 4.

| Parámetro | Valor |
|------------|----------------|
| α_1 | 0.4375933078 |
| μ_5 | 1/1000.0 |
| p_1 | 0.439467990082 |
| p_2 | 0.169107855063 |
| p_3 | 0.373855272353 |
| η_1 | 0.02157443054 |
| η_2 | 0.003914990226 |
| η_3 | 0.121823453625 |
| η_4 | 0.00052251148 |

Tabla 4.9 Parámetros para cuando el tiempo de permanencia en X_2 tiene distribución Exponencial Negativa y X_1 HE de Orden 4.

Con los parámetros calculados, se determinó el IDC para cada uno de los diferentes casos. En la Figura 4.5, la gráfica inicial muestra el escenario en el que ambos tiempos de permanencia en los estados X_1 y X_2 siguen una distribución HE de orden 4. En este caso, el IDC muestra un crecimiento más acelerado y alcanza un valor máximo más alto en comparación con el Orden 3.

La siguiente función representa el escenario donde el tiempo de permanencia en X_1 sigue una distribución Exponencial Negativa y en X_2 una HE de orden 4. En este caso, el IDC muestra un crecimiento moderado en relación con el primer escenario, y su valor máximo es intermedio entre los dos.

Finalmente, el caso en el que X_1 sigue una distribución HE de orden 4 y X_2 una Exponencial Negativa. Aquí, el IDC muestra un crecimiento más

gradual, alcanzando un valor máximo más bajo en comparación con los otros escenarios, pero similar en tiempo.

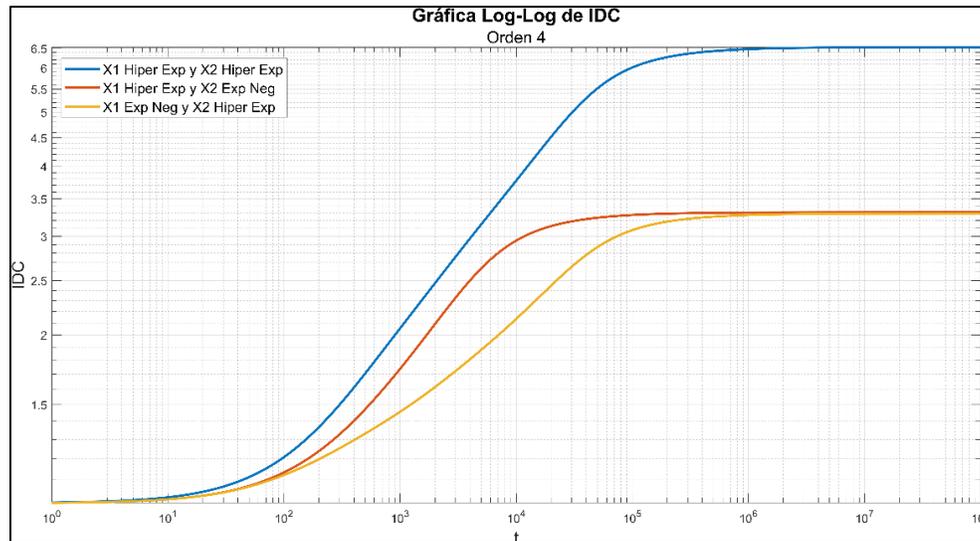


Figura 4.5 Comportamiento del Índice de Dispersión (IDC) con Tiempos de Permanencia Hiper-Exponenciales en Estados X_1 y X_2 para Diferentes Configuraciones de Distribuciones orden 4.

En la Figura 4.6 se presentan tres funciones del loV, correspondientes a los escenarios previamente descritos. La curva donde ambos estados siguen una distribución HE-4 muestra un crecimiento más pronunciado inicialmente, con un pico más alto y un ancho mayor, lo que indica una mayor variabilidad. Por otro lado, la curva en la que X_1 es Exponencial Negativa y X_2 HE-4 presenta un pico más bajo y un ancho más estrecho, mientras que la curva en la que X_1 sigue una distribución HE-4 y X_2 Exponencial Negativa alcanza el pico más bajo, con un comportamiento más moderado.

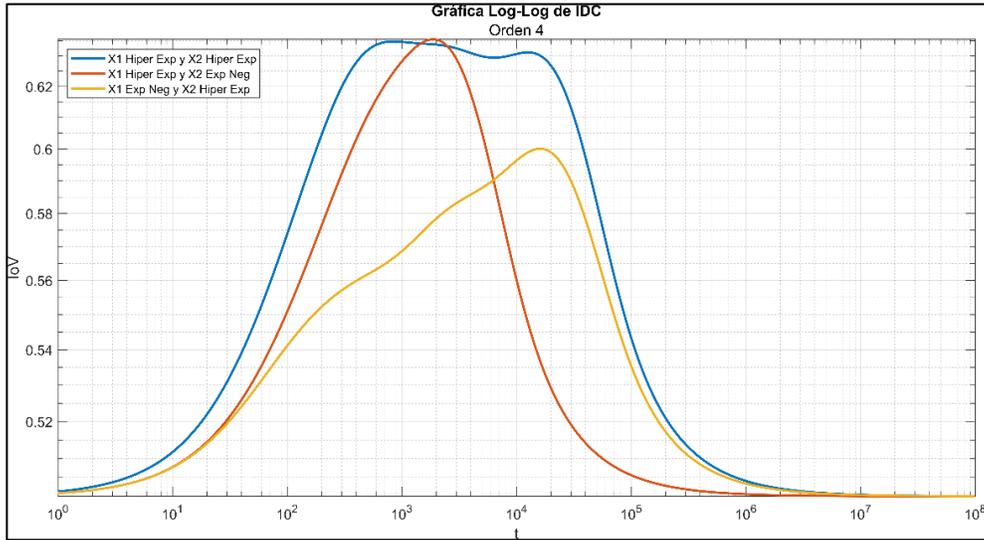


Figura 4.6 Comportamiento del Índice de Variabilidad (IoV) para Diferentes Configuraciones de Distribuciones Hiper Exponenciales y Exponenciales Negativas en los Estados X_1 y X_2 orden 4.

Es importante notar que, aunque los resultados del Orden 4 siguen una tendencia similar a la del Orden 3, se observan valores más altos y una mejor adaptación a la forma de la señal, lo que muestra un ajuste más preciso en los tiempos de permanencia.

4.1.5.5 Resultados del IDC e IoV cuando los tiempos de permanencia en los estados X_1 y X_2 tienen distribución Hiper Exponencial Orden 5.

Para el Orden 5, los resultados presentan una mejora notable respecto al Orden 4, evidenciada por un ajuste aún más preciso en los tiempos de permanencia y una mayor adaptabilidad en las curvas obtenidas. Esto se debe a la inclusión de más parámetros, lo que optimiza la representación de la distribución. A continuación, se muestran los parámetros utilizados en este orden, presentados de la Tabla 4.10 a la Tabla 4.12.

| Parámetro | Valor |
|------------|----------------|
| α_1 | 0.06233377744 |
| α_2 | 0.2359824722 |
| α_3 | 0.004960613413 |
| α_4 | 0.3991299449 |
| μ_1 | 0.000169426002 |
| μ_2 | 0.000769714872 |
| μ_3 | 0.000027056529 |
| μ_4 | 0.003216443865 |
| μ_5 | 0.01438213509 |
| p_1 | 0.061882192734 |
| p_2 | 0.235282310642 |
| p_3 | 0.004696738158 |
| p_4 | 0.401627309053 |
| η_1 | 0.00167196454 |
| η_2 | 0.007677665383 |
| η_3 | 0.000260571401 |
| η_4 | 0.032064748292 |
| η_5 | 0.144598267324 |

Tabla 4.10 Parámetros usados para los tiempos de permanencia en los estados del proceso de arribos tienen distribución HE de orden 5.

| Parámetro | Valor |
|------------|----------------|
| α_1 | 0.06233377744 |
| α_2 | 0.2359824722 |
| α_3 | 0.004960613413 |
| α_4 | 0.3991299449 |
| μ_1 | 0.000169426002 |
| μ_2 | 0.000769714872 |
| μ_3 | 0.000027056529 |
| μ_4 | 0.003216443865 |
| μ_5 | 0.01438213509 |
| p_1 | 0.061882192734 |
| η_1 | 1/100 |

Tabla 4.11 Parámetros para cuando el tiempo de permanencia en X_1 tiene distribución Exponencial Negativa y X_2 HE de Orden 5.

| Parámetro | Valor |
|------------|----------------|
| α_1 | 0.06233377744 |
| μ_1 | 1/1000.0 |
| p_1 | 0.061882192734 |
| p_2 | 0.235282310642 |
| p_3 | 0.004696738158 |
| p_4 | 0.401627309053 |
| η_1 | 0.00167196454 |
| η_2 | 0.007677665383 |
| η_3 | 0.000260571401 |
| η_4 | 0.032064748292 |
| η_5 | 0.144598267324 |

Tabla 4.12 Parámetros para cuando el tiempo de permanencia en X_2 tiene distribución Exponencial Negativa y X_1 HE de Orden 5.

Con los nuevos parámetros, se calculó el IDC para cada uno de los diferentes casos. En la Figura 4.7, la primera gráfica muestra el escenario en el que ambos tiempos de permanencia en los estados X_1 y X_2 siguen una distribución HE de orden 5. En este escenario, el IDC muestra un crecimiento más acelerado, alcanzando un valor máximo más alto que en los órdenes anteriores.

La siguiente función representa el escenario donde el tiempo de permanencia en X_1 sigue una distribución Exponencial Negativa y X_2 una HE de orden 5. En este caso, el IDC experimenta un crecimiento más moderado en comparación con el primer escenario, alcanzando un valor máximo intermedio.

Finalmente, el caso donde X_1 sigue una distribución HE de orden 5 y X_2 una Exponencial Negativa muestra un crecimiento más gradual del IDC, alcanzando un valor máximo más bajo en comparación con los otros dos escenarios, pero manteniendo un tiempo similar de estabilización.

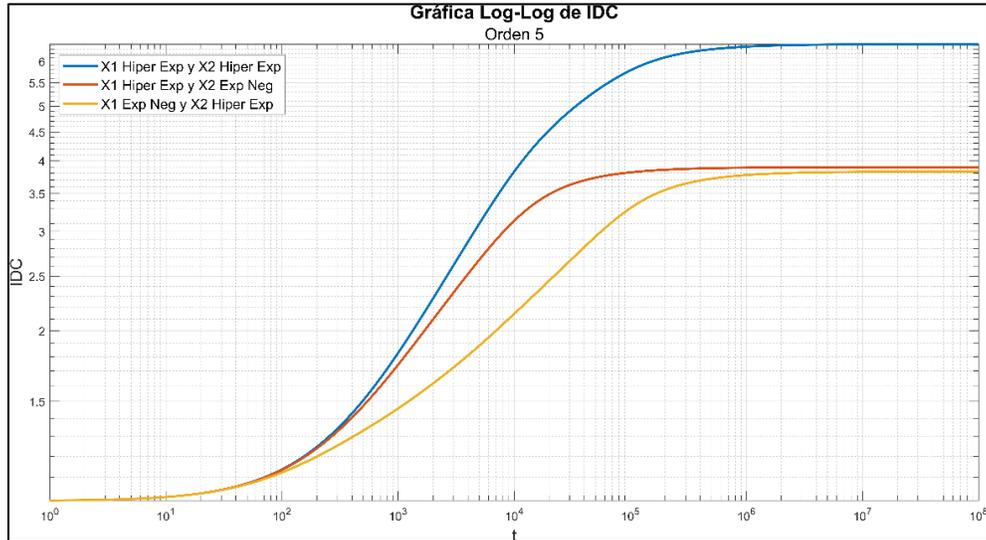


Figura 4.7 Comportamiento del Índice de Dispersión (IDC) con Tiempos de Permanencia Hiper-Exponenciales en Estados X_1 y X_2 para Diferentes Configuraciones de Distribuciones orden 5.

En la Figura 4.8, se muestran tres funciones del loV para los casos previamente descritos. La curva donde ambos estados siguen una distribución HE de orden 5 muestra un pico más alto y un mayor ancho, lo que refleja una mayor variabilidad. En la curva donde X_1 es Exponencial Negativa y X_2 sigue HE-5, se observa un pico más bajo y un ancho más estrecho. Por último, la curva en la que X_1 es HE de orden 5 y X_2 Exponencial Negativa muestra el pico más bajo, con un comportamiento más moderado y un ancho que se aproxima al de las otras curvas, sin embargo observe que es el primer caso en el que esta curva rebasa el ancho del caso en el que ambos estados con tiempos de permanencia HE.

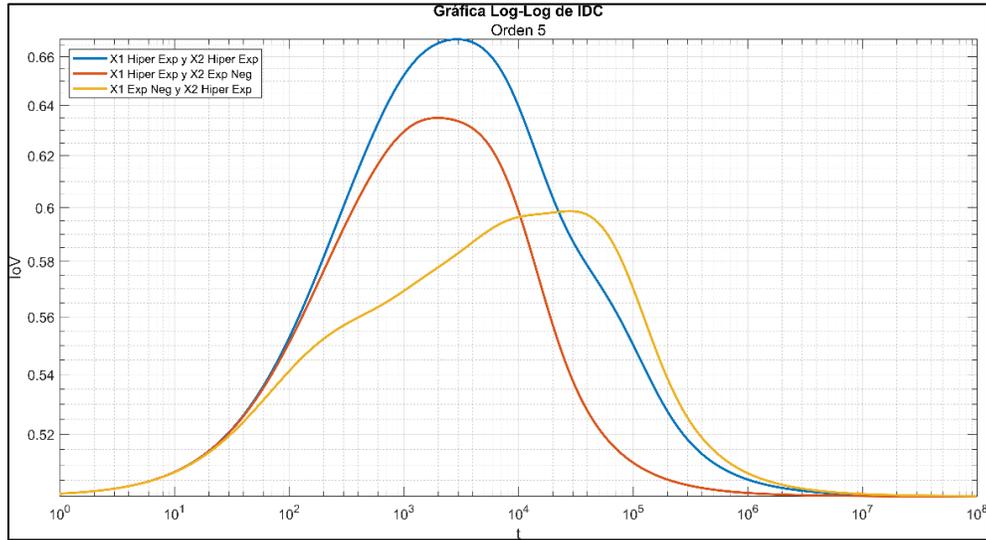


Figura 4.8 Comportamiento del Índice de Variabilidad (IoV) para Diferentes Configuraciones de Distribuciones Hiper Exponenciales y Exponenciales Negativas en los Estados X_1 y X_2 orden 5.

Es importante destacar que los resultados del Orden 5 muestran una mejora significativa en términos de ajuste y precisión en los tiempos de permanencia, con valores más altos y un mejor comportamiento de las curvas, lo que permite una representación más exacta de los procesos de arribos.

4.1.5.6 Resultados del IDC e IoV cuando los tiempos de permanencia en los estados X_1 y X_2 tienen distribución Hiper Exponencial Orden 6.

Finalmente, para el Orden 6, los resultados presentan una mejora sustancial con respecto al Orden 5 y consistente con los órdenes anteriores. A continuación, se presentan los parámetros utilizados para este orden, según se muestra de la Tabla 4.13 a la Tabla 4.15.

| Parámetro | Valor |
|------------|----------------|
| α_1 | 0.2603815362 |
| α_2 | 0.001216956164 |
| α_3 | 0.348272492 |
| α_4 | 0.259511514 |

| | |
|------------|----------------|
| α_5 | 0.02175345802 |
| μ_1 | 0.00120149067 |
| μ_2 | 0.000013681391 |
| μ_3 | 0.004089536132 |
| μ_4 | 0.0155134201 |
| μ_5 | 0.000081437861 |
| μ_6 | 0.000336144504 |
| p_1 | 0.254121613872 |
| p_2 | 0.001163099006 |
| p_3 | 0.364858243742 |
| p_4 | 0.265719295235 |
| p_5 | 0.018882165971 |
| η_1 | 0.010816715542 |
| η_2 | 0.00013305892 |
| η_3 | 0.038704841899 |
| η_4 | 0.154288818749 |
| η_5 | 0.000758850132 |
| η_6 | 0.002977536587 |

Tabla 4.13 Parámetros usados para los tiempos de permanencia en los estados del proceso de arribos tienen distribución HE de orden 6.

| Parámetro | Valor |
|------------|----------------|
| α_1 | 0.2603815362 |
| α_2 | 0.001216956164 |
| α_3 | 0.348272492 |
| α_4 | 0.259511514 |
| α_5 | 0.02175345802 |
| μ_1 | 0.00120149067 |
| μ_2 | 0.000013681391 |
| μ_3 | 0.004089536132 |
| μ_4 | 0.0155134201 |
| μ_5 | 0.000081437861 |
| μ_6 | 0.000336144504 |
| p_1 | 0.254121613872 |
| η_1 | 1/100.0 |

Tabla 4.14 Parámetros para cuando el tiempo de permanencia en X_1 tiene distribución Exponencial Negativa y X_2 HE de Orden 6.

| Parámetro | Valor |
|------------|----------------|
| α_1 | 0.2603815362 |
| μ_1 | 1/1000.0 |
| p_1 | 0.254121613872 |
| p_2 | 0.001163099006 |
| p_3 | 0.364858243742 |
| p_4 | 0.265719295235 |
| p_5 | 0.018882165971 |
| η_1 | 0.010816715542 |
| η_2 | 0.00013305892 |
| η_3 | 0.038704841899 |
| η_4 | 0.154288818749 |
| η_5 | 0.000758850132 |
| η_6 | 0.002977536587 |

Tabla 4.15 Parámetros para cuando el tiempo de permanencia en X_2 tiene distribución Exponencial Negativa y X_1 HE de Orden 6.

Con estos parámetros, se calculó el IDC para los diferentes escenarios. En la Figura 4.9, la primera gráfica muestra el comportamiento del IDC cuando ambos tiempos de permanencia en los estados X_1 y X_2 siguen una distribución HE de orden 6. En este escenario, el IDC muestra un crecimiento más rápido, alcanzando un valor máximo más alto que en los órdenes anteriores.

La siguiente función corresponde al escenario donde el tiempo de permanencia en X_1 sigue una distribución Exponencial Negativa y X_2 una HE de orden 6. En este caso, el IDC muestra un crecimiento moderado, alcanzando un valor máximo intermedio entre los otros dos.

Finalmente, el escenario donde X_1 sigue una distribución HE de orden 6 y X_2 una Exponencial Negativa muestra un crecimiento más gradual del IDC, con un valor máximo más bajo en comparación con los otros dos, pero con un tiempo de estabilización similar.



Figura 4.9 Comportamiento del Índice de Dispersión (IDC) con Tiempos de Permanencia Hiper-Exponenciales en Estados X_1 y X_2 para Diferentes Configuraciones de Distribuciones orden 6.

En la Figura 4.10, se presentan las tres curvas del loV correspondientes a los escenarios previamente descritos. La curva donde ambos estados siguen una distribución HE de orden 6 muestra un pico más alto y un mayor ancho, indicando una mayor variabilidad. La curva donde X_1 es Exponencial Negativa y X_2 sigue HE de orden 6 presenta un pico más bajo y un ancho más estrecho, mientras que la curva en la que X_1 es HE de orden 6 y X_2 Exponencial Negativa muestra el pico más bajo, con un comportamiento más moderado y el ancho de esta grafica rebasa el visto en ecuaciones anteriores y siguiendo el mismo comportamiento del observado para orden 5.

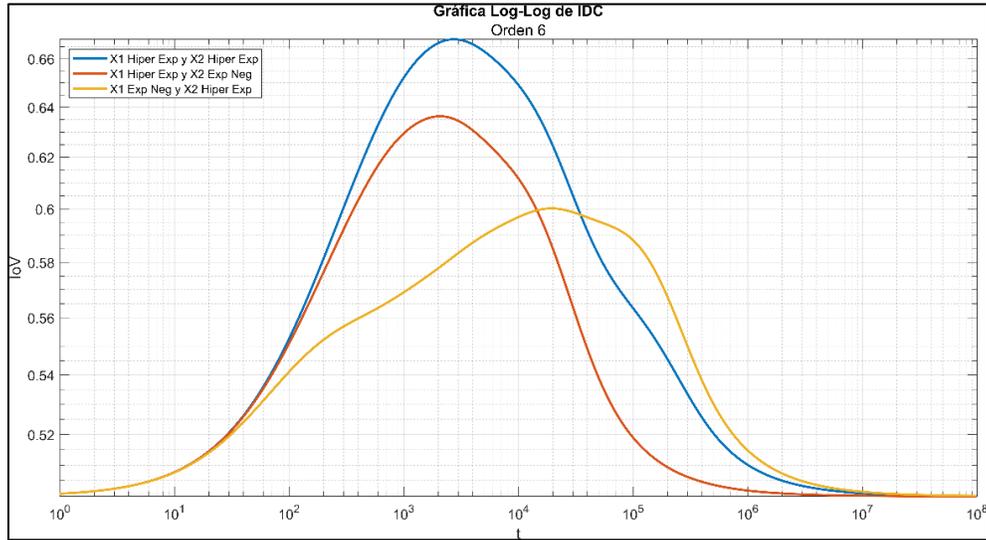


Figura 4.10 Comportamiento del Índice de Variabilidad (IoV) para Diferentes Configuraciones de Distribuciones Hiper Exponenciales y Exponenciales Negativas en los Estados X_1 y X_2 orden 4.

Es importante destacar que, aunque los resultados del Orden 6 muestran mejoras en términos de ajuste y precisión, este es el orden más alto que se obtuvo. No fue debido a una limitación matemática, como se mencionó anteriormente, sino porque los parámetros correspondientes al Orden 7 se redujeron a los del Orden 6, ya que las probabilidades se repetían, resultando en un solapamiento de los parámetros.

4.1.5.7 Comparación del IDC e IoV para las diferentes configuraciones, desde el orden 2 hasta el orden 6.

Los resultados para órdenes mostraron que conforme se incrementa el orden, el IDC converge a un valor límite con menor variabilidad que en órdenes inferiores. Así como también que los valores de IDC calculados reflejan con mayor exactitud la dispersión temporal observada en procesos reales, superando en precisión a los modelos MMPP-2.

Las HE de órdenes altos permiten representar una gama más amplia de comportamientos de tráfico y tiempos entre arribos. En términos de IDC,

las distribuciones HE de órdenes altos presentaron ventajas significativas sobre los procesos MMPP-2 como mejor ajuste a datos reales, las HE capturan con mayor fidelidad las largas colas y la alta variabilidad de tiempos entre arribos, de igual forma, aunque los cálculos son más demandantes, las HE no requieren la definición explícita de matrices de transición, como en los MMPP.

Este análisis amplía los límites del uso tradicional de las distribuciones HE al demostrar que las técnicas desarrolladas en este trabajo permiten calcular con éxito el IDC para órdenes superiores. Las distribuciones Hiper Exponenciales de orden hasta 6 no solo son matemáticamente viables, sino que también ofrecen una representación más precisa y robusta de la dispersión en procesos de arribos.

En la Figura 4.11 La figura muestra un gráfico del IDC para diferentes órdenes para los tiempos de permanencia en los estados del proceso de arribos X_1 y X_2 tienen distribución HE. Los datos reflejan que a medida que aumenta el orden de la distribución (2, 3, 4, 5, 6), el IDC crece de forma más pronunciada y alcanza valores mayores. Las curvas de orden 2 y 3 Tienen un crecimiento más lento del IDC y convergen hacia valores más bajos en tiempos grandes, mientras que las curvas de orden 4, 5, y 6 Muestran un incremento más acelerado del IDC y alcanzan valores máximos más altos en tiempos grandes.

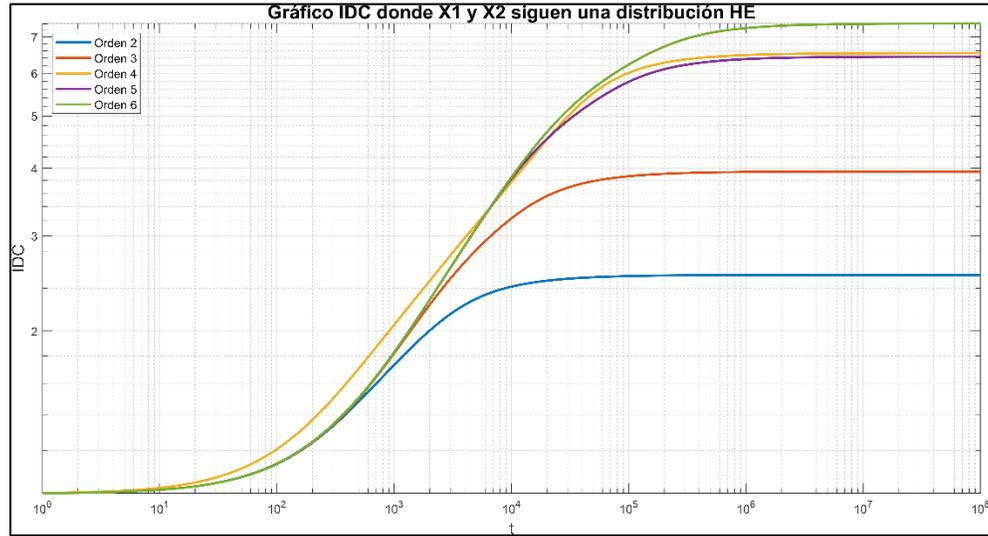


Figura 4.11 Curvas del IDC para los tiempos de permanencia en los estados del proceso de arribos tienen distribución HE de diferentes órdenes.

Por otro lado, en la Figura 4.12 muestra el comportamiento del IDC para órdenes 2 a 6, donde los tiempos de permanencia en los estados X_1 sigue una distribución Exp-Neg y X_2 una HE. A medida que aumenta el orden, las curvas del IDC presentan una separación inicial más marcada en valores bajos de tiempo, pero esta separación disminuye conforme el orden crece, y todas las curvas tienden progresivamente hacia un valor límite de IDC. Para órdenes más bajos, como el 2, la curva tiene un ascenso más gradual y alcanza su valor límite en una escala de t relativamente más baja. Por otro lado, a medida que el orden aumenta (del 3 al 6), el IDC experimenta un crecimiento más pronunciado en los primeros valores de t , pero las diferencias entre las curvas de órdenes consecutivos se vuelven menos notables. En última instancia, se observa que todas las curvas tienden al mismo valor límite conforme se aumenta el orden, indicando que mientras más ordenes sean calculados menor será la separación entre graficas.

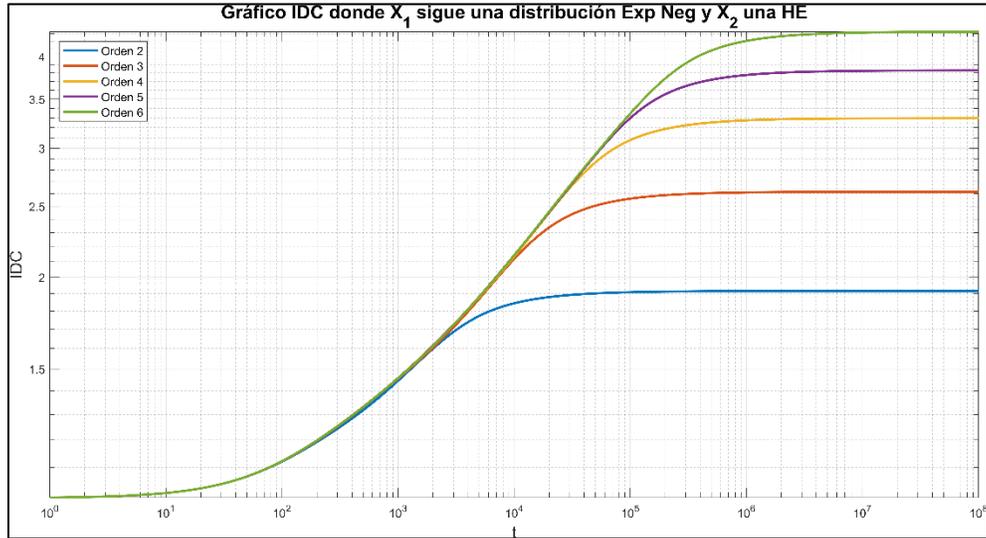


Figura 4.12 Curvas IDC para cuando los tiempos de permanencia en los estados X_1 tiene distribución Exp Neg. y X_2 con Distribución HE de diferentes órdenes.

Finalmente, en la Figura 4.13, los tiempos de permanencia en el estado X_1 siguen una distribución HE, mientras que en el estado X_2 presentan una distribución Exp Negativa de diferentes órdenes. Se observa un comportamiento similar al mostrado en la Figura 4.12; sin embargo, en este caso, la pendiente generada en el IDC es mayor, lo que permite alcanzar el valor límite en menor tiempo para cada orden. Además, se mantiene consistente el patrón de que, al aumentar el orden, disminuye la distancia entre los valores máximos del IDC.

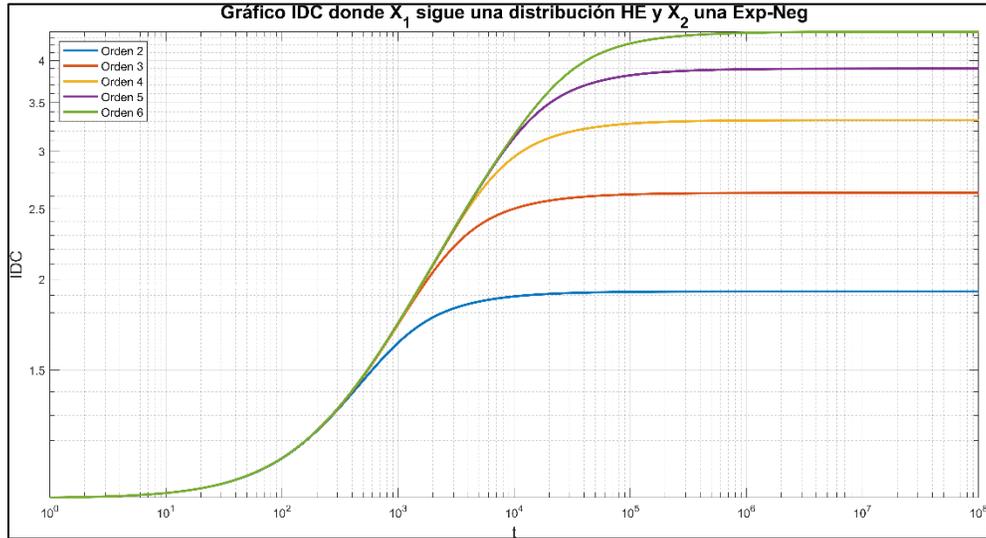


Figura 4.13 Curvas IDC para cuando los tiempos de permanencia en los estados X_1 tiene una distribución HE y X_2 con distribución Exp Neg. de diferentes órdenes.

En la Figura 4.14 se muestran las curvas del loV para los tiempos de permanencia en los estados del proceso de arribos tienen distribución HE de diferentes órdenes.

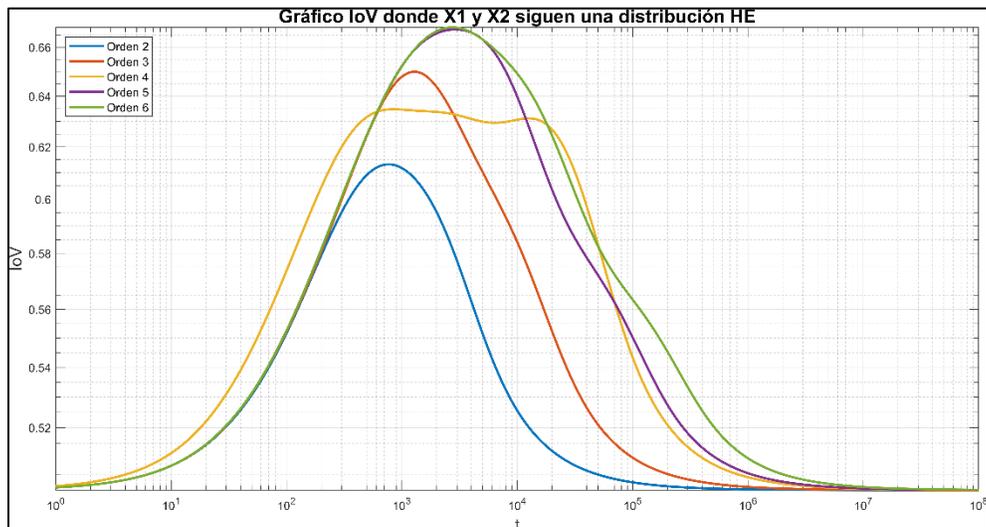


Figura 4.14 Curvas del loV para los tiempos de permanencia en los estados del proceso de arribos tienen distribución HE de diferentes órdenes.

La curva correspondiente al Orden 2 exhibe el pico más bajo y alcanza su valor máximo antes que los demás órdenes. A medida que se

incrementa el orden (del Orden 3 al Orden 6), el pico máximo se desplaza hacia valores más altos de loV y ocurre en tiempos más tardíos. Además, las curvas de los órdenes más bajos, como el Orden 2 y el Orden 3, presentan un decaimiento más rápido después de alcanzar su pico máximo. En contraste, las curvas de los órdenes más altos (Orden 4, Orden 5 y Orden 6) muestran un decaimiento más lento, manteniéndose en valores más altos durante un periodo de tiempo mayor en comparación con los órdenes más bajos.

Las curvas de los órdenes más bajos (Orden 2 y Orden 3) muestran un comportamiento más simple, con picos y decaimientos rápidos, mientras que las curvas de los órdenes más altos (Orden 4, Orden 5 y Orden 6) presentan comportamientos más complejos, con picos más elevados y decaimientos más lentos

En la Figura 4.15 se muestran diferentes curvas del loV para cuando los tiempos de permanencia en los estados $X1$ tiene distribución Exp Neg. y $X2$ con Distribución HE de diferentes órdenes. La curva del Orden 2 muestra el pico más bajo y alcanza su valor máximo antes que las demás curvas. A medida que el orden aumenta, el pico máximo de loV también se incrementa y ocurre en momentos más avanzados de t . Específicamente, el Orden 6 presenta el pico más alto y tardío, destacándose por su resistencia a los cambios rápidos. Además, el comportamiento del decaimiento varía entre las curvas: las de los órdenes más bajos (Orden 2 y Orden 3) presentan un decaimiento más rápido después de alcanzar su pico, mientras que las de los órdenes más altos (Orden 4, Orden 5 y Orden 6) muestran un decaimiento más lento y se mantienen en valores más altos durante un período más largo.

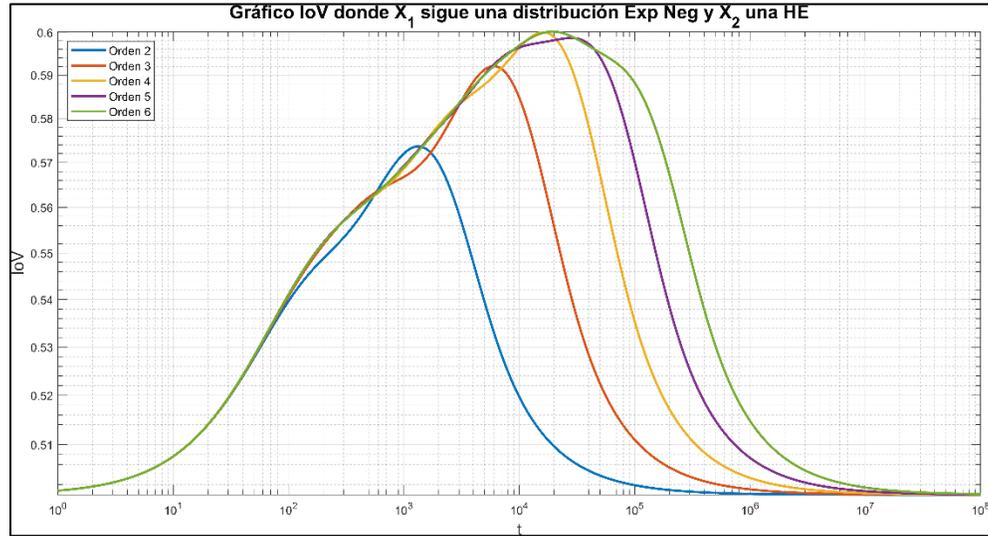


Figura 4.15 Curvas loV para cuando los tiempos de permanencia en los estados X_1 tiene distribución Exp Neg. y X_2 con Distribución HE de diferentes órdenes.

Al realizar una comparación, se observa que la Figura 4.14 las curvas están más estrechamente agrupadas en términos de la altura del pico. En cambio, en la Figura 4.15, los picos y su ubicación varían de manera más pronunciada a medida que aumenta el orden. Además, en esta, el comportamiento de decaimiento es más consistente entre los órdenes, mientras que en la Figura 4.14 el decaimiento es más diverso, especialmente en los órdenes más altos.

La Figura 4.16 representa curvas loV para cuando los tiempos de permanencia en los estados X_1 tiene una distribución HE y X_2 con distribución Exp Neg. de diferentes órdenes. La curva del Orden 2 alcanza el pico más bajo y lo logra antes que las demás. A medida que aumenta el orden, el pico máximo de loV también se eleva y se desplaza hacia momentos más avanzados de t . El Orden 6 presenta el pico más alto y tardío, destacándose por su resistencia a los cambios rápidos. El comportamiento de decaimiento varía entre las curvas: las correspondientes a los órdenes más bajos (Orden 2 y Orden 3) muestran

un decaimiento más rápido después de alcanzar su pico, mientras que las de los órdenes más altos (Orden 4, Orden 5 y Orden 6) exhiben un decaimiento más lento y se mantienen en valores más altos durante un período más prolongado.

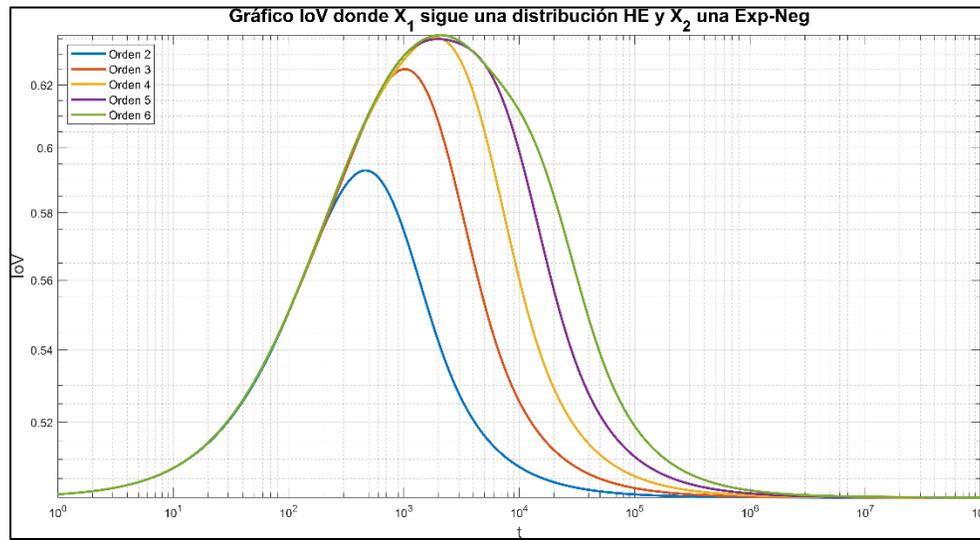


Figura 4.16 Curvas loV para cuando los tiempos de permanencia en los estados X_1 tiene una distribución HE y X_2 con distribución Exp Neg. de diferentes órdenes.

Finalmente, al comparar la Figura 4.16 con la Figura 4.14 (donde X_1 y X_2 siguen una distribución HE), ambos gráficos muestran curvas con comportamientos similares, caracterizados por un pico seguido de un decaimiento. Sin embargo, en la Figura 4.16, las curvas están más estrechamente agrupadas en términos de la altura del pico, mientras que en la Figura 4.14, tanto los picos como su ubicación varían de manera más pronunciada a medida que aumenta el orden. Además, el comportamiento de decaimiento en la Figura 4.14 es más consistente entre los órdenes, a diferencia de la Figura 4.16, donde el decaimiento es más diverso, especialmente en los órdenes más altos.

En la Figura 4.15 (donde X_1 sigue una distribución Exp Neg y X_2 una HE), se observan similitudes en el comportamiento general de las curvas, aunque existen diferencias notables en la ubicación y altura de los picos. En la Figura 4.16, las curvas de los órdenes más altos presentan picos más elevados y un decaimiento más lento, mientras que en la Figura 4.15, los picos y el decaimiento son más variados.

4.2 Comparación de los resultados numéricos de la aproximación MM, EM e Híbrida

La gráfica presentada en la Figura 4.17 muestra el IDC en función del tiempo para diferentes órdenes de distribuciones HE (Orden 2, 3, 4 y 5), considerando tres métodos de estimación de parámetros, EM y el método híbrido HE-H (EM-MM).

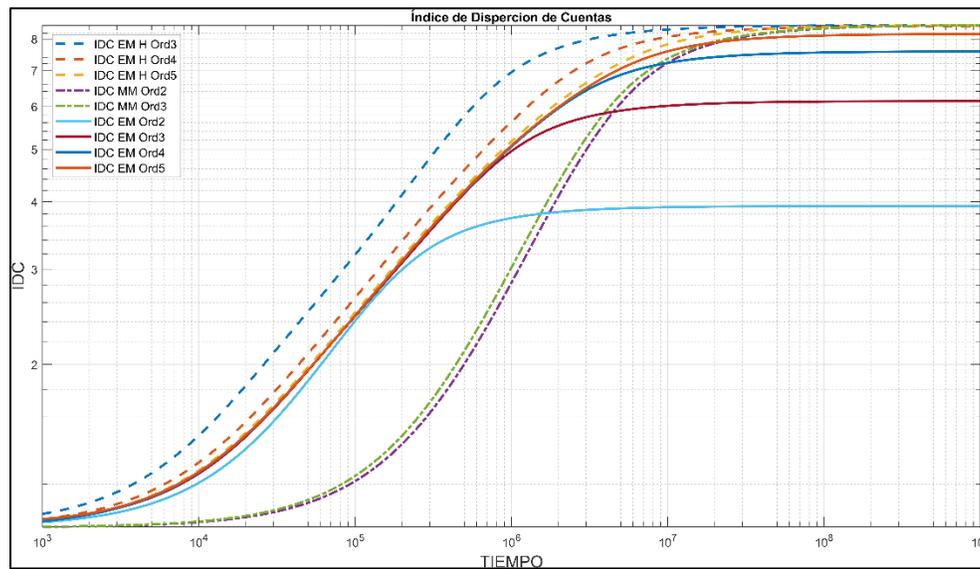


Figura 4.17 Comparación del Índice de Dispersión de Cuentas (IDC) entre Métodos: EM, MM y EM Y MM

El IDC obtenido mediante el método MM muestra un crecimiento más lento en comparación con los demás métodos y se estabiliza rápidamente, es decir, converge a un valor límite característico para cada

orden de la distribución HE. Este comportamiento se debe a que el objetivo principal del método MM es ajustar los parámetros de las distribuciones HE-n para que sus momentos coincidan exactamente con los momentos de la Log-Normal. Por esta razón, las distribuciones HE-2 ajustadas con MM presentan una media y un CoV idénticos a los de las distribuciones Log-Normal correspondientes.

En los órdenes como por ejemplo el Orden 2, el IDC obtenido considerando las distribuciones HE ajustadas mediante el algoritmo EM presenta un crecimiento más rápido en comparación con los demás métodos. Sin embargo, el IDC también tarda más en estabilizarse debido a que el método EM no garantiza que los momentos de las distribuciones HE-n coincidan con los de la Log-Normal, especialmente cuando el CoV de la Log-Normal es elevado. Por ejemplo, para una distribución HE-2 aproximada con EM, se observan desviaciones en los valores de la media y el CoV en comparación con los esperados en la Log-Normal.

El método híbrido HE-H (EM-MM) combina las fortalezas de ambos métodos: el ajuste preciso del CoV característico del método EM y la coincidencia de los momentos lograda por el método MM. Este método presenta un comportamiento más uniforme y consistente en los órdenes superiores, estabilizándose de manera más eficiente a valores límites del IDC. HE-H es particularmente útil para modelar procesos de arribos complejos, logrando un balance adecuado entre precisión y eficiencia.

En órdenes bajos, el IDC obtenido considerando las distribuciones HE ajustadas mediante el algoritmo EM crece más rápidamente que los métodos MM y HE-H. En este rango, las diferencias entre métodos son más notorias, especialmente debido al desfase del método MM y al ajuste más preciso del método híbrido. A medida que aumenta el orden, las

diferencias entre los métodos se reducen, y tanto EM como HE-H logran convergencias más rápidas hacia los valores límites del IDC. El método MM, en contraste, muestra un crecimiento más lento y un desfase hacia la derecha, lo que lo hace menos eficiente en el modelado de procesos con mayor complejidad.

Mientras que el método EM permite un ajuste más rápido, su convergencia puede ser menos uniforme, especialmente en órdenes bajos. Por otro lado, el método MM, aunque más lento y desfazado, ofrece un ajuste directo con los momentos de la Log-Normal. Finalmente, el método híbrido HE-H combina las fortalezas de EM y MM, logrando un ajuste más preciso y eficiente en todos los órdenes, con curvas que convergen de manera más consistente hacia los valores límite del IDC.

En comparación, el método MM tiene un crecimiento más lento y presenta un desfase hacia la derecha, lo que lo hace menos eficiente en el modelado de procesos de alta complejidad. Finalmente, el método híbrido (HE-H) combina las fortalezas de los métodos EM y MM, mostrando un ajuste más preciso y eficiente en todos los órdenes, con curvas que convergen de manera más consistente hacia los valores límite del IDC.

La gráfica de la Figura 4.18 muestra el Índice de Variabilidad (IoV) en función del tiempo para diferentes órdenes de distribuciones HE (Orden 2, 3, 4 y 5), estimadas mediante los métodos MM (Método de Momentos), EM (Maximización de la Esperanza), y el método híbrido HE-H.

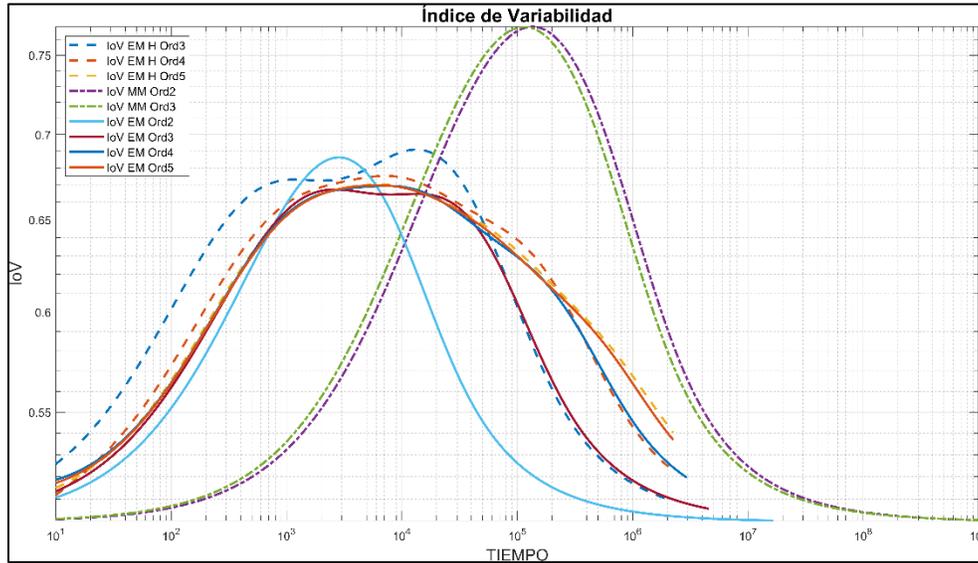


Figura 4.18 Análisis del Índice de Variabilidad (IoV) para Distintos Métodos y Órdenes

En el método MM, el IoV muestra un crecimiento inicial moderado, alcanzando un pico y luego disminuyendo gradualmente hacia un valor cercano a cero conforme transcurre el tiempo. Este comportamiento es consistente para todos los órdenes analizados. La estabilización más temprana en el tiempo ocurre con órdenes bajos, mientras que en órdenes más altos se observa una mayor dispersión temporal antes de que el IoV comience a decrecer. Esto refleja cómo el método MM ajusta los momentos de las distribuciones HE-n para coincidir con los de la Log-Normal, lo que lo hace menos sensible a fluctuaciones rápidas en el tiempo.

En contraste, las distribuciones obtenidas con el método EM presentan un crecimiento más pronunciado del IoV en tiempos intermedios, alcanzando picos más altos en comparación con el MM. Estos picos son más prominentes en órdenes bajos, lo que indica una mayor sensibilidad del IoV al método de ajuste en distribuciones de menor orden. En órdenes altos, las curvas se tornan más uniformes y se alinean progresivamente

con las obtenidas mediante el método MM. Este comportamiento puede atribuirse a las desviaciones en los momentos de las distribuciones HE ajustadas por EM respecto a las de la Log-Normal.

El método híbrido HE-H (EM-MM) combina características de ambos métodos, mostrando curvas que presentan un equilibrio entre el comportamiento uniforme del MM y el ajuste más preciso del EM. En tiempos intermedios, las curvas del loV obtenidas con HE-H son menos pronunciadas que las de EM y más consistentes en su tendencia hacia valores cercanos a cero en tiempos más largos. Este patrón refuerza la eficiencia del método HE-H al modelar procesos de mayor complejidad, al minimizar la sensibilidad a fluctuaciones temporales mientras conserva un ajuste preciso a las características de la Log-Normal.

En los órdenes bajos, las diferencias entre métodos son más notorias. El loV ajustado con EM alcanza valores máximos más altos y muestra una mayor variabilidad antes de estabilizarse. Por otro lado, el método MM presenta un comportamiento más predecible y menos fluctuante, aunque con un desfase en la convergencia hacia valores bajos. El método híbrido HE-H ofrece un balance entre ambos, con picos moderados y una convergencia más rápida y consistente.

A medida que aumenta el orden de las distribuciones HE, las curvas de loV de todos los métodos tienden a converger, reflejando una menor dependencia de las particularidades de cada método. Sin embargo, las curvas del método híbrido HE-H destacan por su estabilidad y eficiencia, consolidándose como una solución robusta para modelar distribuciones en procesos complejos.

En conclusión, mientras que el método EM permite capturar variabilidades más marcadas en órdenes bajos, el método MM prioriza la estabilidad temporal a expensas de un ajuste más lento. El método híbrido HE-H sobresale al combinar las fortalezas de ambos, mostrando un ajuste eficiente y una convergencia consistente en todos los órdenes de las distribuciones HE analizadas.

4.3 Conclusiones

Se presentó un enfoque para calcular el IDC cuando X_1 y X_2 siguen una distribución Hiper Exponencial de orden n , así como aproximar la distribución del tiempo entre arribos cuando X_1 y X_2 siguen una distribución Hiper Exponencial de orden n , destacando las técnicas de igualación de momentos (MM) y maximización de esperanza (EM). A pesar de la alta complejidad computacional asociada con las distribuciones HE de órdenes superiores, se logró una aproximación efectiva del tiempo entre arribos, incluso para órdenes hasta orden 5.

De igual forma se llevó a cabo un análisis comparativo detallado de los métodos de Maximización de la Esperanza (EM), Igualación de Momentos (MM) y el híbrido EM Y MM. Este análisis permitió identificar las fortalezas y debilidades de cada enfoque para el cálculo y modelado del Índice de Dispersión de Cuentas (IDC) y el Índice de Variabilidad (IoV), elementos esenciales para caracterizar procesos estocásticos en sistemas complejos.

Los resultados mostraron que el método EM es eficiente en la obtención de resultados precisos y generalizables, aunque presenta un crecimiento lento del IDC y un desfase hacia la derecha. Por otro lado, el método MM destaca por su capacidad de aproximar procesos de forma más rápida y

directa, aunque a costa de cierta pérdida de precisión en los valores límite. El método híbrido EM Y MM, en cambio, combina las ventajas de ambos enfoques, logrando un equilibrio entre velocidad y precisión, con una forma del IDC más ajustada y valores de loV que permiten una descripción más detallada de la variabilidad en los datos.

Las gráficas correspondientes al IDC y al loV evidenciaron cómo el orden del proceso afecta significativamente la forma y comportamiento de los índices en cada método. Se observa que el método híbrido proporciona una solución intermedia que supera las limitaciones principales de los algoritmos EM y MM de manera individual, particularmente para órdenes superiores.

Finalmente, cabe mencionar que los datos y simulaciones utilizados en el análisis del algoritmo Híbrido fueron proporcionados por la Dra. Sandra Lirio Castellanos López, siendo las gráficas de resultados el principal enfoque en este capítulo. En conjunto, este estudio demuestra que la implementación del enfoque híbrido puede ser una herramienta prometedora para abordar problemas en sistemas complejos donde las limitaciones de los métodos tradicionales son evidentes.

Finalmente, en las Conclusiones generales y trabajo futuro, se sintetizan los principales hallazgos de cada capítulo y se plantean líneas de investigación que abordan mejoras en los métodos utilizados y posibles aplicaciones prácticas en sistemas de comunicación.

CONCLUSIONES GENERALES Y TRABAJO FUTURO

La tesis demuestra que el Índice de Dispersión de Cuentas (IDC) es una herramienta esencial para caracterizar la variabilidad en los procesos de arribos de tráfico, proporcionando una medida precisa de la dispersión temporal en sistemas de teletráfico. Esta caracterización es crucial para evaluar y mejorar el rendimiento de redes y sistemas de comunicación, especialmente en escenarios con alta variabilidad de tráfico.

Los procesos de arribos, como el Proceso MMPP-2 y el Proceso GMPP-2, se destacan como modelos adecuados para representar el tráfico en redes de comunicación, ya que permiten capturar la dinámica de sistemas con fluctuaciones de alta intensidad en el tráfico. Estos modelos han demostrado ser efectivos para la evaluación de la variabilidad del tráfico y su impacto en la capacidad de las redes.

Así mismo, se destaca la importancia de las distribuciones del tiempo entre arribos, como la Hiper Exponencial y la Log Normal, en la modelización precisa del tráfico en sistemas de colas. Estos enfoques permiten modelar fenómenos de tráfico más realistas, donde la distribución del tiempo entre arribos no sigue una simple ley exponencial, y reflejan mejor los comportamientos observados en la práctica.

La utilización de técnicas de aproximación como la igualación de momentos (MM) y el algoritmo de maximización de esperanza (EM) ha demostrado ser efectiva para modelar el tiempo entre arribos en sistemas de tráfico. Estas aproximaciones proporcionan soluciones precisas y prácticas para modelar procesos estocásticos complejos, y la combinación híbrida de ambos métodos ofrece un rendimiento superior en comparación con métodos individuales.

El análisis detallado del comportamiento del IDC e loV permitió observar las diferencias clave entre estos métodos. En particular, el método EM mostró alta precisión, pero crecimiento lento del IDC, mientras que el MM presentó aproximaciones rápidas, pero menos precisas en el límite. El método híbrido EM-H demostró ser un balance óptimo, superando las limitaciones de los enfoques individuales al combinar rapidez y precisión, especialmente en órdenes altos.

Las simulaciones numéricas realizadas han validado los resultados teóricos obtenidos, demostrando que los modelos propuestos y las técnicas de aproximación son capaces de predecir con precisión el comportamiento del tráfico en sistemas reales. Los resultados obtenidos muestran una buena concordancia con las observaciones empíricas, lo que refuerza la fiabilidad de los enfoques utilizados.

El uso de distribuciones Hiper Exponenciales (HE) de órdenes superiores, tradicionalmente limitado a Orden 2, rara vez tercer orden, se ha ampliado en este trabajo mediante los métodos del capítulo 3, logrando calcular el Índice de Dispersión de Cuentas (IDC) para órdenes hasta 5. Aunque la complejidad computacional aumenta, los resultados muestran que las distribuciones HE de órdenes superiores ajustan mejor los modelos de tráfico real y superan a los modelos MMPP-2 en la

representación de la variabilidad. Este avance demuestra que las distribuciones HE de órdenes altos son viables y más precisas para modelar la dispersión en procesos de arribos.

El análisis detallado del IDC en función de los momentos centrales y estandarizados contribuye a la mejora en el diseño y la gestión de redes de comunicación, permitiendo ajustar los parámetros de las redes para optimizar su rendimiento bajo condiciones de tráfico variable y en escenarios de alta complejidad.

Se proponen varias líneas de investigación futura, enfocadas en la optimización de los modelos de procesos de arribos, la mejora de las técnicas de aproximación para tiempos entre arribos, y la aplicación del IDC en redes de comunicación de próxima generación. Se sugiere explorar modelos más complejos que integren diferentes tipos de tráfico y que consideren factores adicionales como la congestión de red y las fluctuaciones en el comportamiento de los usuarios.

APÉNDICE A DEMOSTRACIÓN DE EQUIVALENCIAS ENTRE DOS FGM

Este apéndice tiene como objetivo demostrar la equivalencia entre dos representaciones matemáticas de la Función Generadora de Momentos (FGM) para procesos de arribos estocásticos.

La denominada ϕ_2 dada por [3], está definida de la siguiente forma

$$\phi_2 = \frac{1}{r_1 + r_2} \cdot \left[\frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{r_2}{\sigma_2} \right] - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \left(\frac{(1-z)^2}{\sigma_1 \sigma_2} \right) \left(\frac{R_1^*(s)R_2^*(s)}{1 - (f_1^*(s)f_2^*(s))} \right)}{r_1 + r_2} \quad (\text{A.1})$$

Donde

$$\sigma_i = s + \lambda_i(1 - z) \quad (\text{A.2})$$

Donde $E\{x_1\} = \frac{1}{r_1}$ y $E\{x_2\} = \frac{1}{r_2}$ siendo $E\{x_1\}$ y $E\{x_2\}$ la media de cada estado del proceso MMPP y λ la tasa correspondiente a cada uno de ellos.

Finalmente $R_1^*(s)$ y $R_2^*(s)$ nos representan la TL de la CCDF, de igual forma $f_1^*(s)$ y $f_2^*(s)$ nos representan la TL de la PDF.

Por otro lado, tenemos la ecuación (A.3) dada por

$$\begin{aligned}
& \phi_{N(t)}^*(z, s) \\
&= \frac{1}{(v_1 + v_2)} \cdot \left[\frac{v_2[1 - v_1 R_1^*(s)]}{\sigma_1} + \frac{v_1[1 - v_2 R_2^*(s)]}{\sigma_2} \right] \\
&+ \frac{v_1 v_2}{v_1 + v_2} \left[\frac{R_1^*(s)[f_2^*(s)R_1^*(s) + R_2^*(s)] + R_2^*(s)[f_1^*(s)R_2^*(s) + R_1^*(s)]}{1 - (f_1^*(s)f_2^*(s))} \right]
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Para poder comparar ambas ecuaciones definimos lo siguiente

$$r_i = \frac{1}{v_i} \text{ donde } i = 1, 2 \tag{A.4}$$

Sustituyendo en (A.1) tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\phi_2 &= \frac{1}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} \cdot \left[\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} \right] \\
&- \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} \left(\frac{(1-z)^2}{\sigma_1 \sigma_2} \right) \left(\frac{R_1^*(s)R_2^*(s)}{1 - (f_1^*(s)f_2^*(s))} \right)
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Simplificando

$$\begin{aligned}
& \phi_2 \\
&= \frac{1}{v_1 + v_2} \cdot \left[\frac{v_1}{\sigma_1} + \frac{v_2}{\sigma_2} \right] \\
&- \frac{v_1 + v_2}{v_1 + v_2} \left(\frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 (1-z)^2}{\sigma_1 \sigma_2} \right) \left(\frac{R_1^*(s)R_2^*(s)}{1 - (f_1^*(s)f_2^*(s))} \right)
\end{aligned} \tag{A.6}$$

De la ecuación (A.3) desarrollamos $\frac{v_2[1-v_1R_1^*(s)]}{\sigma_1} + \frac{v_1[1-v_2R_2^*(s)]}{\sigma_2}$ y sustituimos

$$\begin{aligned} & \phi_{N(t)}^*(z, s) \\ &= \frac{1}{(v_1 + v_2)} \cdot \left[\left[\frac{v_1}{\sigma_1} + \frac{v_2}{\sigma_2} \right] - v_1 v_2 \left[\frac{R_1^*(s)}{\sigma_1} + \frac{R_2^*(s)}{\sigma_2} \right] \right] \\ &+ \frac{v_1 v_2}{v_1 + v_2} \left[\frac{R_1^*(s)[f_2^*(s)R_1^*(s) + R_2^*(s)] + R_2^*(s)[f_1^*(s)R_2^*(s) + R_1^*(s)]}{1 - (f_1^*(s)f_2^*(s))} \right] \end{aligned} \quad (A.7)$$

Factorizando $\frac{1}{(v_1+v_2)}$

$$\begin{aligned} & \phi_{N(t)}^*(z, s) \\ &= \frac{1}{(v_1 + v_2)} \\ &\cdot \left\{ \left[\frac{v_1}{\sigma_1} + \frac{v_2}{\sigma_2} \right] - v_1 v_2 \cdot \left[\frac{R_1^*(s)}{\sigma_1} + \frac{R_2^*(s)}{\sigma_2} \right] + v_1 v_2 \right. \\ &\cdot \left. \left[\frac{R_1^*(s)[f_2^*(s)R_1^*(s) + R_2^*(s)] + R_2^*(s)[f_1^*(s)R_2^*(s) + R_1^*(s)]}{1 - (f_1^*(s)f_2^*(s))} \right] \right\} \end{aligned} \quad (A.8)$$

Procedemos a factorizar también $v_1 v_2$

$$\begin{aligned}
\phi_{N(t)}^*(z, s) &= \frac{1}{(v_1 + v_2)} \\
&\cdot \left\{ \left[\frac{v_1}{\sigma_1} + \frac{v_2}{\sigma_2} \right] \right. \\
&- v_1 v_2 \left\{ \left[\frac{R_1^*(s)}{\sigma_1} + \frac{R_2^*(s)}{\sigma_2} \right] \right. \\
&- \left[R_1^*(s)[f_2^*(s)R_1^*(s) + R_2^*(s)] \right. \\
&+ \left. R_2^*(s)[f_1^*(s)R_2^*(s) + R_1^*(s)] \right. \\
&\left. \left. / [1 - (f_1^*(s)f_2^*(s))] \right] \right\} \quad (A.9)
\end{aligned}$$

Hacemos que $1 - (f_1^*(s)f_2^*(s))$ sea el común denominador

$$\begin{aligned}
&\frac{\left[\frac{R_1^*(s)}{\sigma_1} + \frac{R_2^*(s)}{\sigma_2} \right] 1 - (f_1^*(s)f_2^*(s))}{1 - (f_1^*(s)f_2^*(s))} \\
&- \left[R_1^*(s)[f_2^*(s)R_1^*(s) + R_2^*(s)] \right. \\
&+ \left. R_2^*(s)[f_1^*(s)R_2^*(s) + R_1^*(s)] \right. \\
&\left. / [1 - (f_1^*(s)f_2^*(s))] \right] \quad (A.10)
\end{aligned}$$

Si consideramos $f_i^*(\sigma_i) = 1 - \sigma_i R_i^*(s)$ en $1 - (f_1^*(s)f_2^*(s))$, tenemos la siguiente ecuación

$$1 - (f_1^*(s)f_2^*(s)) = 1 - [1 - \sigma_1 R_1^*(s)][1 - \sigma_2 R_2^*(s)] \quad (A.11)$$

Simplificando

$$\begin{aligned}
1 - (f_1^*(s)f_2^*(s)) \\
&= 1 - [1 - \sigma_1 R_1^*(s) - \sigma_2 R_2^*(s) \\
&\quad + \sigma_1 \sigma_2 R_1^*(s) R_2^*(s)] \tag{A.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1 - (f_1^*(s)f_2^*(s)) \\
&= \sigma_1 R_1^*(s) + \sigma_2 R_2^*(s) - \sigma_1 \sigma_2 R_1^*(s) R_2^*(s) \tag{4.13}
\end{aligned}$$

Sustituyendo en (A.10) y trabajando solo con el numerador tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
&\left[\left[\frac{R_1^*(s)}{\sigma_1} + \frac{R_2^*(s)}{\sigma_2} \right] \sigma_1 R_1^*(s) + \sigma_2 R_2^*(s) \right. \\
&\quad \left. - \sigma_1 \sigma_2 R_1^*(s) R_2^*(s) \right] \\
&\quad - [R_1^*(s)[f_2^*(s)R_1^*(s) + R_2^*(s)] \\
&\quad + R_2^*(s)[f_1^*(s)R_2^*(s) + R_1^*(s)]] \tag{A.14}
\end{aligned}$$

Simplificando el numerador

$$\left(-2 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) R_1^*(s) R_2^*(s) \tag{A.15}$$

Remplazando en (A.14)

$$\begin{aligned}
\phi_{N(t)}^*(z, s) &= \frac{1}{(v_1 + v_2)} \\
&\cdot \left\{ \left[\frac{v_1}{\sigma_1} + \frac{v_2}{\sigma_2} \right] \right. \\
&- v_1 v_2 \left[\left(-2 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right. \right. \\
&\left. \left. + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) \right] \left[\frac{R_1^*(s) R_2^*(s)}{1 - (f_1^*(s) f_2^*(s))} \right] \left. \right\}
\end{aligned} \tag{A.16}$$

Desarrollando $\left(-2 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)$

$$\left(-2 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{\sigma_1 \sigma_2} \tag{A.17}$$

Si para $(\sigma_1 - \sigma_2)^2$ consideramos que $\sigma_i = s - (z - 1)\lambda_i$

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 = (z - 1)^2 (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \tag{A.18}$$

Sustituyendo en (A.16)

$$\begin{aligned}
&\phi_{N(t)}^*(z, s) \\
&= \frac{1}{(v_1 + v_2)} \\
&\cdot \left\{ \left[\frac{v_1}{\sigma_1} + \frac{v_2}{\sigma_2} \right] \right. \\
&- v_1 v_2 \left[\frac{(z - 1)^2 (\lambda_1 - \lambda_2)^2}{\sigma_1 \sigma_2} \right] \left[\frac{R_1^*(s) R_2^*(s)}{1 - (f_1^*(s) f_2^*(s))} \right] \left. \right\}
\end{aligned} \tag{A.19}$$

Observe que esta ecuación es idéntica a (A.3) por lo tanto queda demostrada la equivalencia entre la ecuación (A.3) y (A.1).

El análisis detallado presentado en este apéndice complementa los resultados expuestos en el cuerpo principal de esta tesis, reforzando la solidez teórica de las aproximaciones realizadas. Además, se espera que esta demostración contribuya al entendimiento y uso más amplio de la FGM en el modelado de sistemas complejos.

APÉNDICE B Consejos y Recomendaciones para Evitar Errores en Wolfram Mathematica

Este apéndice tiene como propósito identificar algunos inconvenientes comunes al trabajar con Wolfram Mathematica y proporcionar estrategias para evitarlos, asegurando así la obtención de los resultados deseados.

B.1 DECLARACIÓN DE VARIABLES

En la Tabla B.1 se muestra un ejemplo de cómo reiniciar una variable, la razón de tener que realizar esto con cada una de las variables que se utilice se debe a que, si dos *Scripts* tienen las mismas variables, al momento de ejecutar uno después de ejecutar otro, los valores de las variables se empiezan a mezclar, generando cruce de información con programas no relacionados.

| Variable | Operación o función | Interpretación |
|----------|---------------------|--|
| η | .; | Reinicia la variable asignada a un estado no definido. |

Tabla B.1 Instrucción para evitar conflictos con variables anteriores

Wolfram Mathematica nos permite editar nuestras variables y presentarlas con subíndices o caracteres especiales (ejemplo p_1) a comparación de otros lenguajes en los que estos caracteres no son

admitidos, sin embargo, el uso de variables con este formato en algunas ocasiones presenta errores de cálculo.

Por ejemplo, suponga que se tiene una variable p y se le asigna el valor de 5, en algunas ocasiones WM puede llegar a mezclar los datos de forma errónea si se tiene otra variable definida como p_1 haciendo que esa se presente de la siguiente forma 5_1 tomando por lo que valor de la variable p aunque ninguna de estas tenga algo en común, es por eso que este Apéndice remienda el uso de variables sin subíndices o caracteres especiales, para este caso podemos definir la variable p_1 como $p1$.

B.2 EJECUCIÓN DE INSTRUCCIONES

Al igual que otros lenguajes de programación, Wolfram Mathematica permite anidar múltiples funciones en una sola línea de código. Sin embargo, aplicar el método descrito en la sección **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** de esta manera puede resultar en un tiempo de ejecución excesivo y, con alta probabilidad, en errores en los resultados. Durante el desarrollo de este trabajo, se identificó que es más eficiente y confiable dividir las instrucciones en pasos individuales, en lugar de intentar ejecutarlas todas en una sola línea.

En la Tabla B.2 se muestran tres funciones anidadas, primero se realiza la segunda derivada con respecto a z de la función $\phi(z)$ para posteriormente evaluar a z en uno y finalmente se realiza la TL inversa.

Instrucción anidada

```
InverseLaplaceTransform[ $\phi''[z]$ /.z->1, s, t]
```

Tabla B.2 Ejemplo de una línea de código con tres instrucciones anidadas.

Sin embargo, como se mencionaba es preferible trabajar varias funciones por separado para obtener buenos resultados y reducir los tiempos de ejecución como es muestra en la Tabla B.3

```
TLd2 =  $\phi''[z]$ /.z->1
```

```
d2 = InverseLaplaceTransform[TLd2, s, t]
```

Tabla B.23 Ejecución de tres funciones en dos líneas.

Ejecutar instrucciones de esta forma garantiza mejores resultados para ecuaciones más complejas.

En WM también existen funciones que nos permite reducir o simplificar ecuaciones, esto con la finalidad de reducir el tamaño de la ecuación o eliminar términos que se cancelan dentro de la misma ecuación, para esto existen funciones como *Simplify* o *FullSimplify*, sin embargo en muchos casos termina complicando más la ecuación en vez de reducirla, y en orden de poder reducir las ecuaciones de usa una mezcla de dos funciones, primero la instrucción *FullSimplify*, que simplifica de manera completa y total al ecuación y anidada dentro de esta se usa la función *ExpandAll*

Anidación de funciones para la reducción de ecuaciones

```
IDC = FullSimplify[ExpandAll[Var/M1]]
```

Tabla B.24 Anidación de las funciones *FullSimplify* y *ExpandAll* para el cálculo del IDC.

El uso combinado de estas dos instrucciones permite simplificar las ecuaciones de manera más eficiente. Aunque, como se mencionó anteriormente, no es recomendable anidar funciones en general, estas dos trabajan de forma complementaria y no presentan los problemas previamente mencionados.

B.3 USO DE FUNCIONES PARA OTRO PROPÓSITO PESE AL DEFINIDO

Finalmente, WM tiene una gran variedad de funciones para trabajar con ecuaciones, tales como la función *Factor* que nos reduce una expresión algebraica a su forma factorizada [24], es decir, como un producto de factores irreducibles (polinomios de menor grado posibles sobre un campo dado), sin embargo, al momento de utilizarla, por ejemplo, en la función $g(s)$ del Capítulo 3, su desempeño es bajo, incluso llegando a aumentar el número de términos en la ecuación. Por otro lado, la función *Apart* reescribe una expresión racional como una suma de fracciones parciales, separando cada término por sus denominadores, y aunque su función no es factorizar si no usar el método de fracciones parciales, se ha encontrado que esta función es superior al momento de factorizar s . Es por eso que se recomienda usar más la función *Apart*.

En conclusión, este apéndice proporciona una guía para evitar algunos de los problemas comunes al trabajar con *Wolfram Mathematica*, ofreciendo soluciones prácticas para mejorar la precisión y eficiencia en los resultados. La correcta declaración de variables es crucial para evitar

conflictos entre *scripts*, y se recomienda reiniciar las variables antes de cada ejecución para garantizar que no se mezclen datos no relacionados. Además, se sugiere evitar la anidación de funciones en una sola línea de código, ya que esto puede generar tiempos de ejecución prolongados y resultados erróneos; en su lugar, es preferible dividir las funciones en pasos más simples. Para la simplificación de ecuaciones complejas, se recomienda el uso combinado de las funciones *FullSimplify* y *ExpandAll*, ya que su interacción facilita la reducción de términos de manera más eficiente. Finalmente, aunque funciones como *Factor* tienen su utilidad, la función *Apart* se destaca como una opción más efectiva para la factorización de expresiones, especialmente cuando se trabaja con fracciones parciales.

APÉNDICE C ALGORITMO PARA LE CALCULO DE LOS PARAMETROS DE UNA HIPER EXPONENCIAL A PARTIR DE LOS MOMENTOS DEFNIDOS POR UNA DISTRIBUCION LOG NORMAL

Este algoritmo está diseñado para realizar cálculos de parámetros de una HE y análisis matemáticos mediante la resolución de sistemas de ecuaciones y la FGM para la obtención del IDC e loV

El algoritmo comienza con la declaración de una serie de variables, todas inicializadas como se explica en el Apéndice B.

Una vez que las variables están definidas, el algoritmo calcula el valor de μ y σ a partir de las fórmulas logarítmicas vistas en el Capítulo 3. Para ello, se utiliza la constante M1 y se asignan valores para $k = 1$, $k = 2$, y $k = 3$, para obtener los valores correspondientes de M1, M2, y M3, que se usan más adelante en las ecuaciones de la sección de resolución de sistemas.

El sistema de ecuaciones a resolver es el siguiente:

$$\begin{aligned}p_1 m_1 + (1 - p_1) m_2 &= M1 \\2p_1 m_1^2 + 2(1 - p_1) m_2^2 &= M2 \\6p_1 m_1^3 + 6(1 - p_1) m_2^3 &= M3\end{aligned}\tag{C.1}$$

Se usa la función *NSolve* para encontrar las soluciones de p_1 , m_1 y m_2 . Estas soluciones son almacenadas y procesadas, extrayendo los valores de las variables α_1 y α_2 , así como los valores de μ_1 y μ_2 , que se utilizan en la creación de las TL de la PDF y la CCDF.

Cálculo de las TL de la PDF y la CCDF

Después de calcular los valores de μ_1 y μ_2 , el algoritmo crea dos funciones f_1 y f_2 , que representan expresiones algebraicas relacionadas con los parámetros de la HE p_1 , p_2 , η_1 , η_2 , y α_1 , α_2 . Simultáneamente, el algoritmo crea dos funciones adicionales, R_1 y R_2 correspondientes a la TL de la CCDF.

Las funciones f_1 y f_2 , así como R_1 y R_2 , se modifican al sustituir s por $s - \lambda_1(z - 1)$. Esto permite ajustar las funciones para que estén en la forma final que se requiere para calcular la ecuación de la FGM.

Una vez que la FGM ha sido definida, se calculan sus derivadas primera y segunda con respecto a z , evaluando estas en $z=1$. Estas derivadas son fundamentales para obtener el primer y segundo momento de la FGM, que se utilizan para calcular la varianza y el índice de dispersión IDC.

Finalmente, el algoritmo genera dos gráficos log-log para representar el comportamiento del IDC y el IoV.

A lo largo de este proceso, se realizan múltiples sustituciones y simplificaciones de las funciones, utilizando herramientas como *FullSimplify*, *Expand*, y *Simplify*, para garantizar que las expresiones sean lo más simples y eficientes posibles.

Este algoritmo nos permite calcular los parámetros de una distribución Hiper Exponencial a partir de los parámetros calculados a partir de una función Log Normal para posteriormente calcular el IDC usando estos parámetros en las TL de la PDF y CCDF en la FGM.

APÉNDICE D ALGORITMO PARA EL CALCULO DE LA FUNCIÓN RACIONAL PARA LA TL DE LA SEGUNDA DERIVADA DE LA FGM

Este apéndice presenta el código desarrollado para realizar la reducción de una función que da como resultado una función racional en términos de la variable s . Esta simplificación es clave para facilitar el cálculo de la Transformada de Laplace de la segunda derivada de una función generadora de momentos, evaluada en z igual a 1.

El algoritmo implementado no solo está diseñado para este caso específico, sino que también es capaz de calcular funciones Hiper Exponenciales de cualquier orden.

Código

```
(*Print["R's"];*)
R1=P1/(s+[Eta]1)+(1-p1)/(s+[Eta]2);
R2 =Alpha1 /(s+[Mu]1)+(1-Alpha1)/(s+[Mu]2);
Print["Factor para reduccion"]
Factor\[Eta]=(s+[Eta]1)(s+[Eta]2)
Factor\[Mu]=(s+[Mu]1)(s+[Mu]2)
Constante=Factor\[Eta] Factor\[Mu]

Style["Ecuacion phi ",16,Blue]

Print["Nos quedamos con la seccion que conforma la función g(g)"]
(R1 R2)/(s^3 (-R2+R1 (-1+s R2)))
Print["La separamos en numerado y denominador(dejamos el signo en el denominador)"]
Print["Numerador"]
Print["Num=R1 R2"]
Num=R1 R2
Print["Separamos el numerador en dos"]
```

```

NumA=R1
NumB=R2
Print["Multiplicamos por: "]
Constante
NumA=NumA FactorEta
NumB=NumB FactorMu
Print["Simplificamos"]
NumA=FullSimplify[ExpandAll[NumA]]
NumB=FullSimplify[ExpandAll[NumB]]
Print["Juntamos"]
Num=NumA NumB
Print["Factorizamos s"]
Num=Apart[Num,s]
Print["Denominador"]
Print["Den= s^3 (-R2+R1 (-1+s R2))"]

Den=s^3 (-R2+R1 (-1+s R2))
Print["Separamos en dos el denominador"]
DenA=s^3
DenB=-R2
DenCa= R1
DenCb=(-1+s R2)
Print["Multiplicamos el denominador por: "]
Constante
DenA=s^3
DenB=DenB Constante
DenCa=DenCa FactorEta
DenCb=DenCb FactorMu
Print["Simplificamos: "]
DenA=s^3
DenB=FullSimplify[ExpandAll[DenB]]
DenCa=FullSimplify[ExpandAll[DenCa]]
DenCb=FullSimplify[ExpandAll[DenCb]]
Print["Volvemos a agrupar: "]
Denf=DenA(DenB+DenCa DenCb)
Print["Factorizamos s"]
Denf=Apart[Denf,s]
Print["Finalmente nos queda: (R1 R2)/(s^3 (-R2+R1 (-1+s R2))")"]
Rs=Num/Denf

```

APÉNDICE E ALGORITMO PARA LA OBTENCIÓN DE LOS PARÁMETROS PARA CUANDO LOS TIEMPOS DE PERMANENCIA EN LOS ESTADOS X_1 Y X_2 SON HIPER EXPONENCIAL

En este apéndice se describe el proceso para obtener los parámetros necesarios para definir una distribución HE. Los parámetros principales incluyen las probabilidades asociadas a cada fase (p y α) y las tasas correspondientes (η y μ). Este enfoque se basa en la especificación inicial de dos datos fundamentales: el valor de la media (M) en cada fase y el coeficiente de variación (CV).

El procedimiento utiliza un modelo basado en una distribución log-normal para definir los momentos crudos de la distribución. Con estos momentos, se construye un sistema de ecuaciones que relaciona los parámetros del modelo con los valores deseados de MMM y CV. Posteriormente, este sistema se resuelve numéricamente para determinar las probabilidades y tasas que definen completamente la distribución HE.

E.1 DESCRIPCIÓN TÉCNICA DEL CÓDIGO

El código presentado implementa el cálculo de los parámetros de la distribución HE de la siguiente manera:

Definición de Variables Iniciales:
Se inicializan todas las variables necesarias, incluyendo las probabilidades (p , α), tasas (η , μ), y momentos ($M1$, $M2$, $M3$).

Configuración de la Distribución Log-Normal:
A partir de los valores de la media (MMM) y el coeficiente de variación (CV), se calculan los parámetros de la distribución log-normal (μ y σ). Estos parámetros permiten derivar los momentos crudos de la distribución. Se evalúan los tres primeros momentos crudos ($M1$, $M2$ y $M3$) de la distribución log-normal, que serán la base para el sistema de ecuaciones.

Resolución del Sistema de Ecuaciones:
Utilizando los momentos crudos calculados, se formula un sistema de ecuaciones que relaciona los parámetros de la) con los valores deseados de $M1$, $M2$ y $M3$. Este sistema se resuelve numéricamente para obtener los valores de las probabilidades y tasas.

Con los valores de $M1$, $M2$ y $M3$ obtenidos del sistema, se calculan las tasas inversas (η y μ) y las probabilidades complementarias. Finalmente, se imprimen los valores de las probabilidades (p , α) y tasas (η , μ), junto con otros parámetros auxiliares, verificando que cumplen con las condiciones impuestas por el sistema.

Este enfoque permite ajustar los parámetros de la distribución HE a partir de los datos estadísticos iniciales, garantizando que la distribución resultante refleje adecuadamente las características deseadas.

Código

```
p =.;
Mu1 =.;
Mu2 =.;
Mu3 =.;
P1 =.;
P2 =.;

Alpha =.;
Alpha1 =.;
Alpha2 =.;
Lambda1 =.;
Lambda2 =.;

Eta1 =.;
Eta2 =.;
Eta3 =.;
p1 =.;
p2 =.;
m1 =.;
m2 =.;
m3 =.;
M1 =.;
M2 =.;
M3 =.;
NumSol = 0;
ConVal = 0;
DatVal = 0;

Cova = 2.0
CoV1000 = 2.0;
CoV100 = 2.0;

Presicion = 30

CoV = CoV1000;
M1 = 1000;
Sigma = Sqrt[Log[CoV^2 + 1]];
Mu = Log[M1] - Log[CoV^2 + 1]/2.;

k = 1;
M1 = E^(k Mu + (k^2 Sigma^2)/2);

k = 2;
M2 = E^(k Mu + (k^2 Sigma^2)/2);

k = 3;
M3 = E^(k Mu + (k^2 Sigma^2)/2);

S = NSolve[{ p1 m1 + (1 - p1) m2 == M1,
             2 p1 m1^2 + 2 (1 - p1) m2^2 == M2,
             6 p1 m1^3 + 6 (1 - p1) m2^3 == M3}, {p1, m1, m2},
           WorkingPrecision -> 15];
k = 1;
L = Length[S];
```

```

Print["Alpha's"]
Alpha1= p1 /. S[[k]]
Alpha2= 1 - Subscript[Alpha, 1]
Print["\[Mu]'s"]
Mu1 = 1/(m1 /. S[[k]])
Mu2 = 1/(m2 /. S[[k]])

p1 =.;
p2 =.;
m1 =.;
m2 =.;
m3 =.;
NumSol = 0;
ConVal = 0;
DatVal = 0;

CoV = CoV100;
M1 = 100;
Sigma= Sqrt[Log[CoV^2 + 1]];
Mu= Log[M1] - Log[CoV^2 + 1]/2.;

k = 1;
M1 = E^(k Mu+ (k^2 Sigma^2)/2);

k = 2;
M2 = E^(k Mu+ (k^2 Sigma^2)/2);

k = 3;
M3 = E^(k Mu+ (k^2 Sigma^2)/2);

S = NSolve[{ p1 m1 + (1 - p1) m2 == M1,
             2 p1 m1^2 + 2 (1 - p1) m2^2 == M2,
             6 p1 m1^3 + 6 (1 - p1) m2^3 == M3}, {p1, m1, m2},
           WorkingPrecision -> 15];
k = 1
L = Length[S];
Print["p's"]
P1 = p1 /. S[[k]]
P2 = 1 - P1
Print["\[Eta]'s"]
Eta1 = 1/(m1 /. S[[k]])
Eta2 = 1/(m2 /. S[[k]])

Print["Lambdas"]
Lambda1= 1/30.0
Lambda2= 3/200.0

Mu1 = Mu1;
Mu2= Mu2;

```

BIBLIOGRAFÍAS

- [1] I. ANGUS, «An Introduction to Erlang B and Erlang C,» *Telemanagement*, vol. 187, p. 6, 2001.

- [2] M. Zukerman, Introduction to Queueing Theory and Stochastic Teletraffic Models, Hong Kong: EE Department, 2000, pp. 71-72.

- [3] A. J. Lawrance, Stochastic Point Processes, The University of Warwick, 1972.

- [4] A. J. Lawrance, «Some models for stationary series of univariate,» *Wiley-Inter-science, New York*, pp. 199-256, 1972.

- [5] a. S. N. S. T. Le-Ngoc, «A Pareto-modulated Poisson,» *Computer Communications*, vol. 23, nº 2, pp. 23-132, 2000.

- [6] J. B. V. S. F. a. J. B. E. G. Y. Lazarou, «Describing Network Traffic Using the Index of Variability,» *IEEE/ACM*, vol. 17, nº 5, pp. 1672-1683, Oct 2009.

- [7] V. G. Kulkarni, Modeling and Analysis of Stochastic Systems. Springer., Springer., 1995.

- [8] A. & N. S. Bhattacharjee, «Statistical analysis of network traffic inter-arrival.,» *The 12th International Conference on Advanced Communication Technology (ICACT)* , vol. 2, n° IEEE, pp. 1052-1057, 2010.
- [9] I. I. V. V. I. V. V. & Z. P. V. Antoniou, «On the log-normal distribution of network traffic.,» *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Vols. %1 de %2167(1-2), pp. 72-85, 2002.
- [10] R. T. e. al., «Real-time IoT stream processing and large-scale data analytics for smart city applications,» *European Conference on Networks and Communications*, 2014.
- [11] W. A. S. a. M. A. E. Limpert, «Log-normal distributions across the sciences: keys and clues,» *BioScience*, vol. 51, n° 5, pp. 341-352, 2001.
- [12] S. & B. P. D. Sharma, «Analysis of Queues Fed by Lognormal Distributed Arrivals for IoT Network Traffic,» *IEEE Networking Letters*, 2003.
- [13] D. A. M. U. Tadakamalla, «"Characterization of IoT workloads" Edge Computing–EDGE 2019: Third International Conference, Held as Part of the Services Conference Federation, SCF 2019, San Diego, CA, USA, June 25–30, 2019, Proceedings 3,» *Springer International Publishing*, p. 1.15, 2019.

- [14] J. A. B. J. Aitchison, Lognormal Distribution, Cambridge University Press, 1957.
- [15] A. Papoulis, Probability, Random Variables, and Stochastic Processes, McGraw-Hill., 1991.
- [16] T. M. M. & F. M. Karagiannis, Long-range dependence: Ten years of Internet traffic modeling, IEEE Internet Computing., 2004.
- [17] E. A. K. O. Veniamin Tarasov, Properties of Hyperexponential and Hypererlangian Distributions, Samara, Russia: Problems of Infocommunications. Science and Technology, 2019.
- [18] I. Malá, «MOMENT MATCHING METHOD FOR ESTIMATION OF PARAMETERS BASED ON ROBUST MOMENTS,» *The 14 th International Days of Statistics and Economics*, pp. 690-698, 2020.
- [19] C. B. D. & S. Batzoglou, «What is the expectation maximization algorithm?,» *Nature Publishing Group*, vol. 26, n° 8, pp. 897-899, 2008.
- [20] N. M. L. a. D. B. R. A. P. Dempster, «Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm,» *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, vol. 39, n° 1, p. 1–22, 1977.

- [21] G. J. M. a. T. Krishnan, *The EM Algorithm and Extensions*, Hoboken, NJ: Wiley-Interscience, 2008.
- [22] K. P. Murphy, *Machine Learning: A Probabilistic Perspective*, Cambridge: MA: MIT Press, 2012.
- [23] C. H. J. B. H.T. Papadopolous, *Queueing Theory in Manufacturing Systems Analysis and Design*, Chapman & Hall, 1993.
- [24] Wolfram, «Wolfram Language & System,» 2024. [En línea]. Available: <https://reference.wolfram.com/language/>. [Último acceso: 26 11 2024].
- [25] V. G. Kulkarni, *Modeling and Analysis of Stochastic Systems*, Londres: Chapman & Hall, 1995.
- [26] V. I. V. V. I. P. Z. c. Antoniou, «On the Lognormal Distribution in Communication Systems,» *Physica D*, vol. 167, p. 72–85, 2002.

