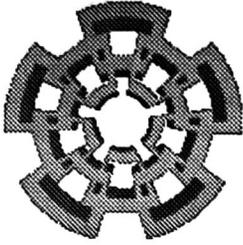




xx (81 751.1)



# **CINVESTAV**

**Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN  
Unidad Guadalajara**

---

## **Control Robusto de Sistemas No Lineales por Modos Deslizantes: Aplicación al Control de un Generador Síncrono**

**Tesis que presenta  
Adolfo Soto Cota**



**Para obtener el grado de  
Maestro en Ciencias**

**En la especialidad de  
Ingeniería Eléctrica**

**CINVESTAV I.P.N.  
SECCION DE INFORMACION  
Y DOCUMENTACION**

**Guadalajara, Jal., Junio del 2000**

CLASIF.:	
ADQUIS.:	TESIS 00'
FECHA:	25-12-00
PROCED.:	Deph Sev.
	8

Bibliografico

75

# **Control Robusto de Sistemas No Lineales por Modos Deslizantes: Aplicación al Control de un Generador Síncrono**

**Tesis de Maestría en Ciencias  
Ingeniería Eléctrica**

Por:

**Adolfo Soto Cota**

Ingeniero Electricista  
Instituto Tecnológico de Sonora 1990-1994

Becario del CONACYT, expediente no. **121138**

Directores de Tesis  
**Dr. Alexander Loukianov **  
**Dr. José Manuel Cañedo Castañeda**

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Junio. del 2000

# INDICE GENERAL

<b>I</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>II</b>	<b>Control por modos deslizantes y sistemas de alta ganancia</b>	
2.1	Introducción	4
2.2	Método del control equivalente	6
2.2.1	Procedimiento formal	6
2.2.2	Control equivalente para sistemas no lineales con función de control lineal	7
2.2.3	Control equivalente para sistemas lineales	8
2.2.4	Forma regular de sistemas lineales	8
2.3	Estabilidad	11
2.3.1	Estabilidad de modos deslizantes	11
2.3.2	Estabilidad ante perturbaciones	11
2.4	Sistemas con control de alta ganancia	18
<b>III</b>	<b>Control por bloques para sistemas no lineales con perturbaciones en modos deslizantes</b>	
3.1	Control por bloques de sistemas nominales en modos deslizantes	20
3.1.1	Forma no lineal controlable por bloques	20
3.1.2	Diseño del observador no lineal	24
3.2	Control del sistema con dinámica cero	27
3.2.1	Forma controlable por bloques con dinámica cero	27
3.2.2	Diseño del control	27
3.2.3	Observador para sistema dinámica cero	31
3.3	Control por bloques de sistemas con perturbaciones	32
3.3.1	Forma controlable por bloques con perturbaciones	32
3.3.2	Diseño de la superficie no lineal	32
3.3.3	Diseño de retroalimentación discontinua	34
3.3.4	Análisis de robustez	35
<b>IV</b>	<b>Control del generador síncrono</b>	
4.1	Introducción	42
4.2	Modelado de la máquina síncrona	43
4.2.1	Ecuaciones de equilibrio	43
4.2.2	Representación por medio del espacio de estado	47
4.3	Cálculo de las condiciones en estado estable del generador síncrono	52
4.4	Desarrollo de los algoritmos de control del generador síncrono	54

4.4.1	Modelo del generador síncrono en espacio de estados	54
4.4.2	Control de velocidad	55
4.4.3	Control del ángulo	57
4.4.4	Diseño del observador de estados	58
<b>V Simulación</b>		
5.1	Características de la planta	60
5.2	Condiciones iniciales de operación	61
5.3	Resultados gráficos	62
5.3.1	Resultados con control constante	63
5.3.2	Resultados con control de velocidad	66
5.3.3	Resultados con control del ángulo de carga	69
5.3.4	Resultados aplicando observadores de estados	71
<b>VI Conclusiones y trabajo futuro</b>		75
<b>Bibliografía</b>		76

## **RESUMEN**

En este trabajo se presentan nuevos resultados para la solución del problema de control de sistemas no lineales con perturbaciones utilizando las técnicas de modos deslizantes, control por bloques y sistemas con alta ganancia. Basado en estas técnicas, se ha propuesto un esquema de control, que garantiza robustez de movimiento del sistema perturbado, con respecto a las incertidumbres, que satisfacen y no satisfacen las condiciones de “matching condition” Estos resultados se han extendido para controlar sistemas no lineales con dinámica cero y para el diseño de observadores no lineales con alta ganancia. Al final de trabajo se presenta la aplicación de los métodos propuestos para controlar un generador síncrono. Los resultados de las simulaciones demuestran la robustez del sistema de lazo cerrado diseñado, con respecto a dos importantes perturbaciones en sistemas eléctricos de potencia: variaciones del par mecánico y corto circuito.

# CAPITULO I

## Introducción

Este trabajo consiste de dos partes: Una parte teórica y otra de aplicaciones. La primera trata sobre el desarrollo de la teoría de separación de movimientos, mientras que la segunda parte trata sobre aplicación de los resultados obtenidos en la parte teórica al diseño de un control no lineal para una máquina síncrona.

La considerable complicación en el modelado de los procesos tecnológicos modernos inducen al empleo y a la búsqueda de nuevos métodos analíticos y de cálculos numérico con ayuda de las computadoras. Esto ha motivado un gran interés en el uso de técnicas de desacoplamiento del problema original en subproblemas independientes de dimensión reducida. La descomposición de los movimientos de los problemas físicos, en componentes parciales e independientes se logra vía de la elección de un control especial y de la construcción del movimiento de sistemas en lazo cerrados sobre variedades de dimensión menor en el espacio de estados del sistema dinámico. En este trabajo se consideran dos técnicas de descomposición. La primera es el control de estructura variable con modos deslizantes [1-6]. En esta técnica se supone la separación de movimientos en dos intervalos de tiempo finitos: El de tiempo de movimiento hasta alcanzar la superficie de deslizamiento, y el tiempo de movimiento sobre la superficie hasta el origen vía control. La segunda técnica es control por retroalimentación con alta ganancia [7-10], y supone la descomposición de movimientos por razón de crecimiento: rápido y lento.

Las técnicas señaladas anteriormente permiten simplificar la solución del problema de control de sistemas complejos con dimensión grande. Además, su principal ventaja es la baja sensibilidad ante cambios en los parámetros de la planta y ante perturbaciones. Sin embargo se sabe, que el controlador con modos deslizantes asegura trayectorias de movimiento invariante solo ante perturbaciones, que pertenecen al subespacio del control (“matching condition”) [1,2]. Sin embargo es conocido que existen plantas físicas que contienen incertidumbres que satisfacen las condiciones señaladas pero también contienen incertidumbres que no satisfacen las condiciones de “matching” Primero este problema se ha considerado para casos de sistemas lineales con perturbaciones no lineales en [11-16], y después para sistemas no lineales en [17-19] usando la técnica de Lyapunov [20] y retroalimentación continua. Usando control de estructura variable, un control discontinuo que garantiza movimiento acotado sobre la dinámica de modos deslizantes nominales, ha sido propuesto en [21-25]. En [25], una clase de sistemas no lineales considerando la presentación en la forma regular (para detalles sobre la forma regular ver [26,27]), se ha supuesto que existe una función de Lyapunov para dinámica de modos deslizantes. Sin embargo, el problema consiste en la posibilidad de diseñar superficies deslizantes para sistemas no lineales,

tal que el movimiento sobre estas superficies posean robustez con respecto a las incertidumbres que no satisfacen las condiciones anteriores.

En este trabajo el problema anterior se resuelve usando la técnica de control por bloques combinada con la técnica de sistemas de alta ganancia. Primero este método ha sido aplicado en descomposición, control y optimización de sistemas lineales [28-31] después para sistemas no lineales [32-35]. La parte principal de este método es la representación del sistema original en la forma controlable por bloques, que consiste de un grupo de bloques de orden reducido. La forma no lineal controlable por bloques es una característica común en muchos sistemas físicos entre estos los electromecánicos, mientras que otros sistemas que no presentan esta forma pueden ser llevados a ella mediante una transformación integral [26,35]. Entonces, la forma no lineal controlable por bloques es un caso especial de la forma regular. La representación de un sistema no lineal en la forma regular permite la descomposición del problema y linealizar paso por paso las ecuaciones de modos deslizantes, para después usar retroalimentación discontinua para cancelar las perturbaciones que pertenecen al subespacio del control. Para compensar las perturbaciones, que no pertenecen al subespacio del control, se usa la técnica de separación de movimientos. Se observa que la técnica de control por bloques esta relacionada con la técnica de linealización por retroalimentación [36,37].

La segunda parte del trabajo trata sobre la aplicación de las técnicas de control no lineal en una máquina síncrona. Un generador síncrono utiliza sistemas convencionales de control basados en técnicas lineales. Trabajan de la siguiente forma, sobre un punto de operación específico linealizan el conjunto de ecuaciones y se aplica un control lineal. Lo anterior es satisfactoriamente efectivo pero tiene las siguientes limitantes, en primer lugar los controladores lineales solo se pueden aplicar sobre un punto de operación; si cambian las condiciones del sistema o del punto de operación, es necesario modificar el control. Otro punto en contra es que al linealizar un modelo se dejan de tomar en cuenta características eminentemente no lineales por lo que el sistema no es totalmente representado por un modelo lineal.

En la ultima década, los controladores basados en la técnica de linealización por retroalimentación [36,37] ha sido propuesto en [38-42] pero para modelos de orden reducido. Sin embargo, en [43] ha sido demostrado que el efecto de la dinámica eléctrica del estator no se puede despreciar ya que esta dinámica afecta a la dinámica mecánica.

Por esta razón, en este trabajo se ha considerando el modelo del un generador síncrono de orden completo. Basado en la técnica de control por bloques y control de modos deslizantes, se ha propuesto una nueva estrategia de control para una máquina síncrona. Este control ha probado tener robustez con respecto a perturbaciones causadas por cambios en la demanda y ante corto circuito.

La organización de la tesis es la siguiente: En el capítulo 2 se presentan los resultados de la técnica de modos deslizantes y de sistemas con alta ganancia, incluyendo la descripción del método de regularización llamado método del control equivalente. Este método permite obtener la ecuación de movimiento sobre la superficie en sistemas con control discontinuos y control con alta ganancia. Posteriormente se describe la forma regular para sistemas lineales y no lineales, la principal ventaja de trabajar sobre la forma regular es que el sistema se descompone y permite obtener la ecuación de modos deslizantes en la forma implícita. Por último se hace un análisis de

estabilidad y se demuestra la invarianza de los modos deslizantes ante perturbaciones, que pertenecen a la imagen del control (matching condition).

En el capítulo 3 se presenta la forma no lineal controlable por bloques para sistemas sin perturbaciones. Para esta forma de control se encuentra una transformación no lineal y una superficie deslizamientos; el movimiento es descrito en término de nuevas variables por un sistema lineal con valores propios deseados. Para el sistema transformado se diseñó un observador no lineal usando la técnica de separación de movimientos. La misma técnica se usa en el caso de sistemas con dinámica cero. Por último se hace un análisis de estabilidad y se demuestra la robustez de los modos deslizantes ante perturbaciones, que no pertenecen a la imagen del control (matching condition).

El capítulo 4 se refiere a la aplicación de los conceptos teóricos sobre el generador síncrono. Principia con la obtención del modelo en espacio de estados, a partir de las ecuaciones de equilibrio eléctrico y mecánico; después se obtienen los estados estable y parámetros para ciertas condiciones de operación seleccionadas. Para el modelo obtenido se diseñaron dos versiones de controladores con modos deslizantes. Primero se propone un control para regular la velocidad de la máquina, mientras la segunda versión se propone la regulación del ángulo de carga cuando se conoce la información sobre la referencia del ángulo. La forma en que se emplean los modos deslizantes en el control de un generador síncrono, así como sus ventajas y desventajas principales, son descritas y analizadas a lo largo de este trabajo. Por último se desarrolló un observador no lineal para obtener la estimación de la función del control diseñado.

En el capítulo 5 se presentan los resultados de las simulaciones. Se aplican las pruebas típicas de incremento de par mecánico, variación en la demanda y prueba de corto circuito. Se obtienen resultados numéricos y gráficos, los cuales son analizados.

En el capítulo 6 se presentan las conclusiones del trabajo, así como las perspectivas de investigación sobre el tema.

# CAPITULO II

## Sistemas de control con Modos Deslizantes y Sistemas de Alta Ganancia

En este capítulo se describen conceptos básicos de la teoría de control por modos deslizantes.

### 2.1 Introducción

El control de modos deslizantes es el principal modo de operación del control de estructura variable (VSC). Estos algoritmos de control son de gran interés debido a su fácil implementación y efectiva aplicación en problemas de automatización y control.

Existen dos características básicas al aplicar modos deslizantes: La primera es la posibilidad de separar el sistema en componentes independientes de menor dimensión que el sistema total, la segunda es la baja sensibilidad ante cambios en los parámetros de la planta y ante perturbaciones. Estas características hacen a los modos deslizantes una herramienta muy poderosa para controlar sistemas de alto orden, aún bajo condiciones inciertas. Todo lo anterior justifica el gran interés que despierta esta clase de control no lineal.

Un *control de estructura variable* se define como un conjunto de subsistemas interrelacionados entre sí por una apropiada función lógica de conmutación. Como resultado de la acción de control sobre el sistema se tiene una función discontinua de los estados, parámetros y perturbaciones. Un ejemplo sencillo de un control de estructura variable puede ser el primitivo control vibratorio de un generador D.C. (Fig. 2.1).

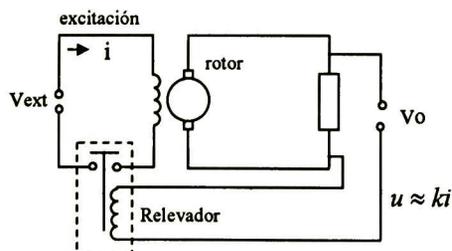


Fig.2.1: Control de un generador D.C.

El efecto de la excitación sobre el generador de la fig. 2.1, depende de la función de conmutación, por lo que a este sistema de control se le puede interpretar compuesto por dos subsistemas, uno con excitación de campo (contacto del relevador cerrado) y otro sin excitación. Dependiendo de las necesidades de carga y voltaje, la función lógica de conmutación permitirá o no el paso de la corriente de campo sobre el devanado de excitación.

En forma general podemos definir la clase de controles discontinuos en la forma siguiente:  
Sea el sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (2.1)$$

con el control discontinuo

$$u_i(x, t) = \begin{cases} u_i^+(x, t) & \text{si } s_i(x) > 0 \\ u_i^-(x, t) & \text{si } s_i(x) < 0 \end{cases}, i = 1, \dots, m \quad (2.2)$$

y la superficie de discontinuidad

$$s(x) = 0 \quad (2.3)$$

donde  $x^T = (x_1, \dots, x_n)$ , es el vector de estados,  $u^T = (u_1, \dots, u_m)$ , es el vector de control,  $s^T = (s_1, \dots, s_m)$ ; es la superficie de deslizamiento,  $s_i(x)$ ,  $u_i^+(x, t)$  y  $u_i^-(x, t)$ , son funciones suaves seleccionadas.

El efecto de este control discontinuo obliga a que la trayectoria de movimiento del sistema ocurra sobre de la superficie de discontinuidad  $s=0$ , a lo que se le llama *modos deslizantes*, es en esta condición donde el control actúa con la conmutación de alta frecuencia impidiendo que el sistema salga de la superficie de deslizamiento  $s=0$ . Es importante notar que los modos deslizantes ocurren sobre la superficie de discontinuidad, siempre que la distancia a esta superficie  $s_i$  y la velocidad de cambio  $\dot{s}_i$  sean de signo contrario  $s_i \dot{s}_i < 0$ , o lo que es lo mismo

$$\lim_{s \rightarrow -0} \dot{s} > 0 \quad \text{y} \quad \lim_{s \rightarrow +0} \dot{s} < 0 \quad (2.4)$$

La descripción matemática de los modos deslizantes es todo un reto; se requiere del diseño de técnicas especiales, algunas de ellas serán expuestas en este trabajo. Por lo pronto sabemos que la solución para el sistema (2.1) existe y es única, si es posible encontrar una constante de Lipshitz  $L$ , para cualquier par de vectores  $x_1$  y  $x_2$  tal que:

$$\|f(x_1, u(x_1, t)) - f(x_2, u(x_1, t))\| \leq L \|x_1 - x_2\| \quad (2.5)$$

donde  $u = [u_1(x, t), \dots, u_m(x, t)]^T$ . Es fácil observar que en los sistemas con control discontinuo (2.2), la condición (2.5) es violada en la vecindad de la superficie de discontinuidad; es decir si los puntos  $x_1$  y  $x_2$  se encuentran localizados en diferentes regiones de la superficie de discontinuidad, muy cerca uno del otro tal que  $\|x_1 - x_2\| \rightarrow 0$ , la desigualdad (2.5) no es cierta para ningún valor de  $L$ . Es necesario un análisis adicional para encontrar una solución formal para la presencia de modos deslizantes.

## 2.2 Método del Control Equivalente

El comportamiento de los sistemas dinámicos sobre superficies de discontinuidad, no puede ser descrito adecuadamente en términos de la teoría clásica de las ecuaciones diferenciales. Para resolver este problema, se han propuestos muchas alternativas con el fin de reducir el problema original en una forma que para su solución requiera el uso de técnicas de análisis clásicas. Esta transformación del problema es llamada *regularización*. El método de regularización más usado con las técnicas de modos deslizantes, es el método del control equivalente [4].

A continuación se describe el procedimiento de regularización para obtener la ecuación de modos deslizantes para los sistemas del tipo (2.1), (2.2), (2.3). Supóngase que ocurre un deslizamiento sobre la intersección de las superficies de discontinuidad

$$s(x) = 0, \quad s(x)^T = [s_1(x), \dots, s_m(x)] \quad (2.6)$$

Sustituyendo la representación del sistema discontinuo (2.1), (2.2), (2.3) por la expresión

$$\dot{x} = f(x, \tilde{u}, t) \quad (2.7)$$

la cual toma en consideración todas las posibles imperfecciones del nuevo control  $\tilde{u}$ , como retardos, histéresis, inercialidad de los dispositivos de conmutación, no correspondencia entre el modelo y las condiciones del control de la planta, imprecisión e inercia de los instrumentos de medición, etc. Como resultado de la suma de tales imperfecciones, la solución de la ecuación (2.7) existe en el sentido usual, es decir los puntos de discontinuidad de la parte derecha de la ecuación se comprueban que son aislados, o una constante de Lipshitz existe para la función (2.7). Los beneficios reales y analíticos de esta regularización tienen como consecuencia que la trayectoria del desplazamiento no ocurra estrictamente sobre la variedad  $s(x) = 0$ , sino en una vecindad de esta variedad

$$\|s(x)\| \leq \Delta, \quad \|s(x)\| = (s^T s)^{1/2} \quad (2.8)$$

donde  $\Delta$  es un valor pequeño introducido por las imperfecciones del control. Este tipo de desplazamiento sobre la vecindad de la variedad  $s=0$ , será referido como *modos deslizantes real*, a diferencia del anterior llamado *modos deslizantes ideal*. Cabe mencionar que no se especifica el tipo de imperfecciones del control; en éste se consideran todos los tipos posibles de imperfecciones que provocan que el movimiento de modos deslizantes no sea estrictamente sobre la variedad. Si el valor de  $\Delta$  tiende a cero, el desplazamiento real de modos deslizantes tenderá al ideal, por lo que la solución de la ecuación de modos deslizantes real tenderá a la solución de la ecuación de modos deslizantes ideal usando el siguiente procedimiento formal.

### 2.2.1 Procedimiento Formal

El procedimiento formal para obtener la ecuación de modos deslizantes sobre las superficies de discontinuidad del sistema (2.1), (2.2), (2.3) es el siguiente. Supóngase que ocurre un deslizamiento de modos deslizantes sobre la variedad (2.6), entonces se busca un control continuo bajo el cual un estado inicial localizado en la variedad  $s=0$ , no salga de esta variedad; es decir la derivada del vector  $s(x)$ , sobre la trayectoria del sistema (2.1), es igual a cero

$$\dot{s} = Gf(x, u, t) = 0 \quad (2.9)$$

donde  $G = \frac{\partial s}{\partial x}$ , es una matriz de dimensión  $(m \times n)$  y sus renglones son los gradientes de las funciones  $s_i(x)$ . Supóngase que la solución o, un número de ellas para el sistema de ecuaciones algebraicas (2.9) existe con respecto al control  $m$ -dimensional. Esta solución será referida como *el control equivalente*,  $u_{eq}(x, t)$ . Se usará este control en el sistema (2.1) en lugar de  $u$ :

$$\dot{x} = f(x, u_{eq}(x, t), t) \quad (2.10)$$

Es obvio que en virtud de la condición (2.9), un desplazamiento que se inicia en  $s(x(t_0)) = 0$  permanecerá sobre esta variedad para todo tiempo futuro.

El procedimiento anteriormente descrito es llamado *método del control equivalente*, y la ecuación (2.10) asociada a este método es llamada la *ecuación de modos deslizantes*, la cual describe el comportamiento del deslizamiento sobre la superficie de discontinuidad  $s_i(x) = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Desde el punto de vista geométrico, el método del control equivalente implica un reemplazo del control discontinuo indefinido sobre la superficie de  $s=0$ , por un control continuo el cual direcciona el vector de estado que está sobre la superficie de discontinuidad  $s=0$ , y lo obliga a permanecer sobre esta variedad. Es importante aclarar que el método del control equivalente no es un control atrayente hacia la superficie de discontinuidad, es decir los estados bajo la acción del control equivalente que pertenezcan a  $s(x(t)) \neq 0$ , no serán llevados a  $s=0$ , sino que permanecerán con un valor  $s$  constante debido a la condición  $\dot{s} = 0$  de (2.9).

### 2.2.2 Control Equivalente para Sistemas no Lineales afines en el control

Se implementará el método del control equivalente aplicado a sistemas no lineales de la forma

$$\dot{x} = f(x, t) + B(x, t)u \quad (2.11)$$

donde el vector  $f(x, t)$  y la matriz  $B(x, t)$  contienen argumentos continuos de dimensión  $n$  y  $(n \times m)$  respectivamente, y el control discontinuo cambia con relación a (2.2). La derivada del vector  $s(x)$  ec.(2.9) del sistema (2.11) para este caso es

$$\dot{s} = G(x)f(x, t) + G(x)B(x, t)u \quad (2.12)$$

donde la matriz  $(G(x)B(x, t))$  debe ser no singular para toda  $x$  y  $t$ . De (2.12) obtenemos el control equivalente igualando  $s$  a cero y despejando  $u$

$$u_{eq}(x, t) = -(G(x)B(x, t))^{-1} G(x)f(x, t) \quad (2.13)$$

sustituyendo este control en (2.11) se obtiene

$$\dot{x} = f(x, t) - B(x, t)(G(x)B(x, t))^{-1} G(x)f(x, t) \quad (2.14)$$

La ecuación anterior describe el comportamiento del deslizamiento sobre la superficie de discontinuidad. El método del control equivalente describe el comportamiento del sistema sobre la superficie de discontinuidad  $s=0$ . Más adelante se discutirá su aplicación general sobre el control por modos deslizantes, y cómo en conjunto con otras técnicas es posible garantizar la estabilidad de sistemas discontinuos actuando en modos deslizantes.

### 2.2.3 Control Equivalente para Sistemas Lineales

En esta sección se contemplará el control de modos deslizantes aplicados a sistemas lineales multidimensionales de la forma

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in R^n \quad u \in R^m \quad (2.15)$$

donde  $\text{rango } B=m$ . Las componentes del vector de control tienen discontinuidades sobre algunos planos de  $s_i(x)=0$ ,  $i=1,\dots,m$ , y deberán ser elegidos tal que el desplazamiento sobre la superficie de discontinuidad

$$s = Cx = 0, \quad s^T = (s_1, \dots, s_m)$$

sea descrito por ecuaciones diferenciales con las raíces deseadas de su ecuación característica. La derivada de  $s(x)$  para el caso lineal es

$$\dot{s} = CAx + CBu \quad (2.16)$$

donde la matriz  $CB$  debe ser no singular. Para encontrar el control equivalente se iguala a cero la ecuación anterior y se despeja  $u$

$$u_{eq} = -(CB)^{-1} CAx \quad (2.17)$$

sustituyendo (2.17) en (2.15) tenemos

$$\dot{x} = \left[ I_n - B(CB)^{-1}C \right] Ax \quad (2.18)$$

La expresión anterior es la ecuación de modos deslizantes para sistemas lineales multidimensionales; esta ecuación describe el comportamiento del sistema sobre la superficie de deslizamiento.

### 2.2.4 Forma Regular de Sistemas Lineales

La ecuación (2.18) es de orden  $(n-m)$ , ya que  $m$  componentes del vector del estado  $x$  son función dependiente de las restantes  $(n-m)$  componentes en modos deslizantes. Para mostrar este hecho y obtener la ecuación de modos deslizantes en la forma explícita, el sistema (2.15) será transformado en *la forma regular* [3,26].

La solución de (2.15), se obtendrá en el espacio de nuevas variables, referidas a las originales por la siguiente transformación lineal no singular

$$\bar{x} = Mx, \quad \bar{x} \in R^n \quad (2.19)$$

tal que

$$MB = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

donde  $B_2$  es una matriz de dimensión  $(m \times m)$  Con el fin de satisfacer la condición (2.20), los primeros  $(n-m)$  renglones de  $M$  forman (generan) una base del subespacio  $(n-m)$  ortogonal al subespacio de control. Los restantes  $m$  renglones son elegidos de tal forma que el rango de  $M$  sea igual a  $n$ , y  $B_2$  sea no singular. El comportamiento de (2.15) en el nuevo espacio transformado es descrito por la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{\bar{x}} = M^{-1}AMx + MBu \quad (2.21)$$

o

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \quad (2.22)$$

$$\dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u \quad (2.23)$$

donde  $x_1$  y  $x_2$  son vectores consistentes en  $(n-m)$  y  $m$  componentes de  $\bar{x}$  respectivamente, y

$$M^{-1}AM = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

El sistema (2.22) y (2.23) es denominado *forma regular*. La superficie de deslizamiento sobre el nuevo espacio transformado es:

$$s = C_1x_1 + C_2x_2 \quad (2.25)$$

donde  $CM^{-1} = (C_1, C_2)$ ,  $C_1$  y  $C_2$  son matrices de dimensión  $(m \times (n-m))$  y  $(m \times m)$  respectivamente. Es importante aclarar que las consideración del teorema 2.1 y del lema 2.1, se cumplirán solo para superficies donde  $\det CB \neq 0$ , esto se cumple sin ambigüedad para el nuevo espacio ya que  $CB = C_2B_2$ . Por lo que se tiene que garantizar que  $\det C_2 \neq 0$ . Además debido a la propiedad de invarianza de las transformaciones lineales podemos considerar los casos donde  $C_2 = I_m$ .

Con el propósito de obtener la ecuación de modos deslizante se debe resolver la ecuación

$$s = 0 \quad (2.26)$$

con respecto a  $x_2$ , sustituir el resultado en el sistema (2.22) y (2.23) eliminando las  $m$  ecuaciones finales. Como resultado obtenemos lo siguiente

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \quad (2.27)$$

$$x_2 = -C_1x_1 \quad (2.28)$$

El sistema (2.27) puede ser visto como un sistema a lazo abierto con un vector de estado  $x_1$  de dimensión  $(n-m)$  y un control  $x_2$  de dimensión  $m$ . Sustituyendo (2.28) en (2.27) obtenemos

$$\dot{x}_1 = (A_{11} - A_{12}C_1)x_1 \quad (2.29)$$

por lo que el problema se reduce al problema clásico de diseñar un control lineal con retroalimentación de estado cuya dimensión se reduce en  $m$  con respecto al sistema original. Esta es la característica principal al diseñar un control en un sistema de forma regular. La ecuación (2.29) se le conoce como la ecuación de modos deslizantes para sistemas lineales invariantes en el tiempo. El problema de asignar valores propios a la ecuación característica que define el deslizamiento sobre la superficie  $s=0$ , es resuelto con la ayuda del siguiente lema.

**Lema 2.1** *Si el par  $\{A, B\}$  en (2.15) es controlable, entonces el par  $\{A_{11}, A_{12}\}$  en (2.27) es también controlable.*

**Prueba.** Supóngase que el par es no controlable, entonces por medio de una transformación no singular

$$x_1 = Ty_1, \quad y_1 \in R^{n-m}$$

obtenemos la forma canónica controlable

$$\begin{aligned} \dot{y}'_1 &= A'_{11}y'_1 + A'_{12}y'_2 + B'x_2 \\ \dot{y}'_2 &= A'_{22}y'_2 \end{aligned} \quad (2.30)$$

donde  $y_1^T = (y_1'^T, y_2'^T)$ , el par  $\{A'_{11}, B'\}$  es controlable. El sistema (2.22) y (2.23), puede ser referido con relación a la transformación anterior, donde obtendremos que el sistema no es totalmente controlable. Pero por otro lado (2.22) y (2.23) se obtienen de la transformación no singular (2.19), la cual no viola la controlabilidad de un sistema, por lo tanto el sistema original debe ser no controlable también, lo cual contradice la condición del lema, entonces queda demostrado. De este lema surge el siguiente teorema [4]

**Teorema 2.1** *Si el par  $\{A, B\}$  es controlable, entonces con una apropiada selección de la matriz  $C_1$ , los valores propios de la ecuación de modos deslizantes*

$$\dot{x}_1 = (A_{11} - A_{12}C_1)x_1$$

*pueden ser ubicados arbitrariamente.*

La prueba de este teorema es evidente ya que el par  $\{A_{11}, A_{12}\}$  es controlable. De todo lo anterior se concluye que siempre es posible diseñar un control lineal para asignación de valores propios en los sistemas controlables. El teorema también nos permite diseñar un control sobre superficies de discontinuidad para sistemas lineales controlables, de la siguiente forma:

- (1) Determinar la matriz de transformación  $M$  en (2.19).
- (2) Encontrar la matriz  $C_1$  tal que los valores propios  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-m}$  de la matriz  $(A_{11} - A_{12}C_1)$  den a la ecuación de modos deslizantes el espectro deseado.
- (3) Elegir la ecuación de discontinuidad como  $s = (C_1, I_m)Mx = 0$ .

## 2.3 Estabilidad

En forma general para aplicar el control por modos deslizantes en un sistema dinámico, se procede como se indica a continuación:

- 1) Se elige una superficie de deslizamiento tal que la ecuación de modos deslizantes sea estable.
- 2) Se encuentra un control tal que garantice estabilidad en el subespacio  $s$ .

Anteriormente, solo consideramos la solución de la primera parte del problema. A continuación abordaremos el problema del diseño del algoritmo de control que asegure la estabilidad de los modos deslizantes.

### 2.3.1 Estabilidad de Modos Deslizantes

Para resolver el problema de la estabilidad de los modos deslizantes, es necesario considerar la siguiente ecuación

$$\dot{s} = G(x)f(x,t) + G(x)B(x,t)u \quad (2.31)$$

que es la proyección de movimiento del sistema (2.11) en el subespacio  $(s_1, \dots, s_m)$ . Suponiendo que  $\text{rango}(G(x)B(x,t)) = m$  para todo  $x$  y  $t$ . Entonces, aplicando el método de diagonalización [4] se elige la ley de control de la siguiente forma:

$$u = u_{eq} - k(G(x)B(x,t))^{-1} \text{sign}(s), \quad u_{eq} = -(G(x)B(x,t))^{-1} G(x)f(x,t) \quad (2.32)$$

donde  $k$  es un parámetro de control. Para verificar la estabilidad del subsistema (2.31) y (2.32), se utilizarán técnicas de estabilidad de Lyapunov. Eligiendo

$$V = \frac{1}{2} s^T s \quad (2.33)$$

como función candidata de Lyapunov, se busca que su derivada sea definida negativa

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s^T \dot{s} = s^T (-k \cdot \text{sign}(s)) \\ &= -k(s_1, \dots, s_m) \begin{bmatrix} \text{sign}(s_1) \\ \vdots \\ \text{sign}(s_m) \end{bmatrix} = -k \|s\|_1 \end{aligned}$$

donde  $\|s\|_1 = |s_1| + \dots + |s_m|$ . La derivada en el tiempo de  $V$  es definida negativa para cualquier  $k > 0$ , este resultado no depende de las condiciones iniciales del sistema y el sistema es globalmente asintóticamente estable.

Cuando no es posible o no se desea utilizar el control equivalente  $u_{eq}$ , podemos aún garantizar estabilidad pero solo localmente y bajo ciertas restricciones. Siguiendo el procedimiento anterior, aplicando control discontinuo (2.32), sin control equivalente sobre (2.31) obtenemos

$$\dot{s} = G(x)f(x,t) - k \cdot \text{sign}(s) \quad (2.36)$$

Supongamos que exista una constante  $\gamma_0$  tal que

$$\|G(x)f(x,t)\|_2 \leq \gamma_0 \|x\|_2 \quad (2.37)$$

Eligiendo la misma función candidata de Lyapunov (2.33), tenemos

$$\dot{V} = s^T G(x)f(x,t) - k\|s\|_1$$

Haciendo uso de la desigualdad  $\|s\|_2 \leq \|s\|_1 \leq \sqrt{n}\|s\|_2$  y (2.37), obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -k\|s\|_2 + \|s\|_2 \|G(x)f(x,t)\|_2 \\ &\leq -\|s\|_2 (k - \gamma_0 \|x\|_2) \end{aligned} \quad (2.38)$$

por lo tanto la derivada es definida negativa solo en la región

$$\|x\|_2 < \frac{k}{\gamma_0}$$

y se garantiza estabilidad asintótica local.

### 2.3.2 Estabilidad ante Perturbaciones

Cuando un sistema es afectado por perturbaciones, tiene que ser analizado de manera diferente ya que existe incertidumbre sobre las consideraciones hechas en el modelo. El control por modos deslizantes muestra una gran robustez ante perturbaciones principalmente porque utiliza un control de alta ganancia, que elimina las condiciones de incertidumbre y garantiza para las perturbaciones acotadas que el sistema sea estable. En esta sección se describe que el control por modos deslizantes es deducido usando la técnica de rediseño de Lyapunov.

Considere el sistema perturbado

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u + h(x) \quad (2.40)$$

donde  $x \in D_x \subset R^n$ ,  $u \in D_u \subset R^m$ . Los campos  $f$  y  $h$  y las columnas de las matrices  $B$  son mapeos suficientemente suaves, siendo  $D_0$  un dominio que contiene al origen. Los términos  $f$  y  $B$  son funciones conocidas, y  $h$  es un término desconocido, que representa perturbaciones y/o variaciones de los parámetros de la planta. Se investigará las condiciones de invariancia de modos deslizantes sobre la superficie

$$s(x) = 0$$

con respecto a la incertidumbre  $h(x,t)$ . Supóngase que el vector  $h(x,t)$  pertenece a la imagen del control, (matching condition) [1]. Esto último significa que existe un vector  $\lambda(x,t)$  de dimensión  $m$  tal que

$$h(x) = B(x)\lambda(x) \quad (2.41)$$

Suponiendo que  $\text{rango}(G(x)B(x,t)) = m$  para todo  $x, t$ . Entonces, aplicando el método del control equivalente, se obtiene

$$u_{eq} = -(G(x)B(x))^{-1}G(x)f(x)$$

y

$$\dot{x} = [I_n - B(x)(G(x)B(x))^{-1}G(x)]f(x) + [I_n - B(x)(G(x)B(x))^{-1}G(x)]h(x) \quad (2.42)$$

Sustituyendo (2.41) en la ecuación (2.42), resulta

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [I_n - B(x)(G(x)B(x))^{-1}G(x)]f(x) + [I_n - B(x)(G(x)B(x))^{-1}G(x)]B(x)\lambda(x) \\ &= [I_n - B(x)(G(x)B(x))^{-1}G(x)]f(x) \end{aligned}$$

que demuestra que el movimiento en modos deslizantes es invariante con respecto a incertidumbres satisfaciendo las condiciones (2.41). Este resultado se puede obtener usando la representación del sistema (2.40) en la forma regular [26]. Considere un mapeo  $\varphi(x)$  tal que  $\varphi: D_0 \rightarrow R^n$  sea un difeomorfismo que permita

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} B(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \begin{bmatrix} B_1(x) \\ B_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2(x) \end{bmatrix}$$

donde  $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$  y  $B_2$  es una matriz  $(m \times m)$  es no singular para todo  $x \in D_0$ . Sobre la condición (2.41) tenemos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} h(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} B(x)\lambda(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \begin{bmatrix} B_1(x) \\ B_2(x) \end{bmatrix} \lambda(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2(x)\lambda(x) \end{bmatrix}$$

El cambio de variables

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \varphi(x), \quad x_1 \in R^{n-m} \quad x_2 \in R^m$$

transforman el sistema en la forma regular

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \quad (2.43)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + \hat{B}_2(x_1, x_2)[u + \lambda(x_1, x_2)] \quad (2.44)$$

donde  $\hat{B}_2(x_1, x_2) = B_2 \left( \varphi^{-1} \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) \right)$  es no singular para toda  $(x_1, x_2) \in D = \varphi(D_0)$ . La forma

(2.43), (2.44) es llamada *la forma regular*, la cual permitirá observar mejor el funcionamiento de los modos deslizantes, como en el caso lineal ec. (2.22) y (2.23).

Primero con el sistema (2.43)

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$$

donde consideramos a  $x_2$  como el control de entrada. Supóngase que podemos encontrar una función estabilizante continuamente diferenciable  $x_2 = s_0(x_1)$ ,  $s_0(0) = 0$  con lo que el origen de

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, s_0(x_1)) \quad (2.45)$$

es asintóticamente estable e invariante ante perturbaciones. Continuando con el diseño del control por modos deslizantes, definimos la función de deslizamiento como

$$s = x_2 - s_0(x_1) \quad (2.46)$$

cuando  $s=0$ , la función anterior define la superficie de deslizamiento y tenemos que  $x_2 = s_0(x_1)$ , por lo que la variable  $s$  llega a cero asintóticamente. El control por modos deslizantes tiene una doble función, lleva a  $s$  a un valor cero en un tiempo finito y mantiene esta condición para todo tiempo. Para este propósito es necesario conseguir que

$$\dot{s} = f_2(x_1, x_2) + \hat{B}_2(x_1, x_2)[u - \lambda(x_1, x_2)] - \frac{\partial s_0}{\partial x_1}[f_1(x_1, x_2)] \quad (2.47)$$

sea igual a cero. Para tal propósito definiremos el control  $u$  como

$$u = u_{eq} + \hat{B}_2^{-1}(x_1, x_2)v \quad (2.48)$$

donde  $v$  será definido después y  $u_{eq}$  es el control equivalente que cancela los términos conocidos de (2.47)

$$u_{eq} = -\hat{B}_2^{-1}(x_1, x_2)[f_2(x_1, x_2) - \frac{\partial s_0}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2)] \quad (2.49)$$

y en ausencia de perturbaciones garantiza  $\dot{s} = 0$ ; entonces si  $s = 0$ , se mantendrá así para todo tiempo futuro. Hay que hacer notar que si  $s \neq 0$ , el control equivalente no proporciona mecanismos para llevar  $s$  a cero, para esto entra en acción la parte  $v$  del control. Sustituyendo (2.48) en (2.47) tenemos

$$\dot{s} = v + f_s(x_1, x_2) \quad (2.50)$$

donde

$$f_s(x_1, x_2) = \hat{B}_2(x_1, x_2)\lambda(x_1, x_2)$$

Supóngase que  $f_s$  satisface la desigualdad

$$\|f_s(x_1, x_2)\|_\infty \leq \rho(x_1, x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in D \quad (2.52)$$

donde  $\rho(x_1, x_2)$  es una función continua. Usando esta estimación se diseñará  $v$  tal que lleve (force) a la función de deslizamiento  $s$  hacia la variedad

$$s = 0$$

Al mismo tiempo que se diseña  $v$ , se comprobará que el resultado es asintóticamente estable usando una función candidata de Lyapunov. Ahora escribiendo (2.50) como  $m$  funciones escalares

$$\dot{s}_i = v_i + f_i(x_1, x_2), \quad i = 1, \dots, m$$

Usando  $V_i = \frac{1}{2} s_i^2$  como función candidata de Lyapunov para (2.53), tenemos

$$\dot{V}_i = s_i \dot{s}_i = s_i v_i + s_i f_i(x_1, x_2) \leq s_i v_i + |s_i| \cdot \rho(x_1, x_2)$$

eligiendo

$$v_i = -\gamma(x_1, x_2) \text{sign}(s_i), \quad i = 1, \dots, m$$

donde

$$\gamma(x_1, x_2) \geq \gamma(x_1, x_2) + b, \quad \forall (x_1, x_2) \in D$$

para algún  $b > 0$ . Entonces

$$\dot{V}_i \leq -\gamma(x_1, x_2)|s_i| + \rho(x_1, x_2)|s_i| \leq -b|s_i|$$

La desigualdad  $\dot{V}_i \leq -b|s_i|$  asegura que si la trayectoria del sistema se encuentra sobre la variedad  $s=0$ , permanecerá en ella para todo tiempo futuro ya que la derivada es definida negativa. La dinámica del sistema bajo la acción de los modos deslizantes queda representada por el sistema (2.45) el cual es reducido e invariante bajo perturbaciones.

Con el siguiente ejemplo se ilustrarán los conceptos descritos anteriormente.

**Ejemplo.** Sea la siguiente planta de segundo orden

$$\dot{x}_1 = x_2 + bu$$

$$\dot{x}_2 = u$$

Se desean obtener la solución de la ecuación de modos deslizantes por los dos métodos descritos.

a) *Solución usando directamente el método del control equivalente*

La superficie de deslizamiento se define como

$$s_1 = c_1 x_1 + x_2 = 0$$

Se busca que  $s_1 = 0$ ,  $\dot{s}_1 = 0$ , con la primera condición tenemos que

$$x_2 = -c_1 x_1$$

mientras que con la segunda condición

$$\dot{s}_1 = c_1 x_2 + (c_1 b + 1)u_{eq} = 0$$

obtenemos el control equivalente

$$u_{eq} = -\frac{c_1}{c_1 b + 1} x_2 = \frac{c_1^2}{c_1 b + 1} x_1$$

Sustituyendo los dos resultados anteriores en el sistema, obtenemos la ecuación de modos deslizantes

$$\dot{x}_1 = -\lambda x_1, \quad \lambda = \left(1 + \frac{b}{c_1 b + 1}\right) c_1^2 x_1$$

con valores propios  $-\lambda$ . Esta ecuación anterior describe el comportamiento del sistema sobre la superficie de discontinuidad, para todos los valores de  $c_1$  tal que

$$c_1 > -\frac{1+b}{b}$$

es asintóticamente estable. Finalmente, para lograr la atracción hacia la variedad  $s_1 = 0$ , elegimos la ley el control como

$$u = -M \text{sign}(s_1), \quad \text{sign}(s_1) = \begin{cases} +1 & \text{si } s_1 > 0 \\ -1 & \text{si } s_1 < 0 \end{cases}$$

con  $M > 0$ . El diagrama a bloques del sistema en lazo cerrado es:

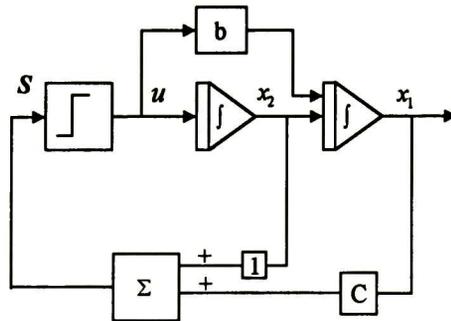


Fig. 2. Diagrama a bloques

Aplicando este control sobre el sistema resulta

$$\dot{s}_1 = c_1 x_2 - M(c_1 b + 1) \text{sign}(s_2)$$

y el sistema es localmente estable para todo

$$|x_2| < \frac{M(c_1 b + 1)}{c_1}$$

Agregamos ahora al control el término  $u_{eq}$ :

$$u = u_{eq} - M \text{sign}(s_1)$$

resulta

$$\dot{s}_1 = -M(c_1 b + 1) \text{sign}(s_1)$$

y el sistema es globalmente estable para todo  $M(c_1 b + 1) > 0$ .

b) *Solución usando la forma regular*

La transformación no singular

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= x_1 - b x_2 \\ \bar{x}_2 &= x_2 \end{aligned}$$

hace que el sistema tenga la forma regular

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_1 &= \bar{x}_2 \\ \dot{\bar{x}}_2 &= u\end{aligned}$$

Con la superficie

$$s_2 = c_2 \bar{x}_1 + \bar{x}_2 = 0$$

tenemos

$$\bar{x}_2 = -c_2 \bar{x}_1$$

Sustituyendo lo anterior en la primera ecuación del sistema en forma regular se logra

$$\dot{\bar{x}}_1 = -c_2 \bar{x}_1$$

y el sistema es estable para cualquier  $c_2 > 0$

Se observa que para obtener la ecuación de modos deslizantes, no es necesario obtener el control equivalente, este es el resultado al usar sistemas en la forma regular.

Para garantizar que  $s_2$  tienda a cero elegimos

$$u = -M \text{sign}(s_2)$$

y el sistema

$$\dot{s}_2 = c_2 \bar{x}_2 - M \text{sign}(s_2)$$

entonces  $s$  es localmente estable con

$$|\bar{x}_2| < \frac{M}{c_2}$$

En el plano de fase podemos ver gráficamente como el sistema se acerca a la variedad  $s=0$ , y visualizar el comportamiento del sistema:

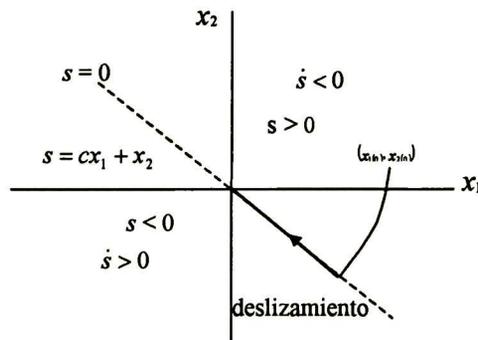


Fig.3 Plano de fase.

Si el sistema se encuentra sobre de la superficie de deslizamiento  $s=0$  es decir  $s>0$  . se aplica un control  $-u_i$  con lo que se obtiene que la derivada de  $s$  sea negativa y  $s$  disminuye hasta  $s=0$ , algo similar pasa cuando el sistema esta en  $s<0$ . Por lo anterior se asegura que el sistema llegue a la superficie de deslizamiento garantizando estabilidad.

## 2.3 Sistemas con Control de Alta Ganancia

En los sistemas con control discontinuo y modos deslizantes, la trayectoria del movimiento se separa en dos intervalos de tiempo: el tiempo finito de movimiento hasta alcanzar la superficie de deslizamiento, y el tiempo de movimiento sobre la superficie hasta el origen. En sistemas con alta ganancia, se tiene también descomposición de movimientos por razón de crecimiento: rápido y lento.

Consideramos el sistema no lineal (2.11) con control como una función continua no lineal de estado:

$$u = kM(x, t)s(x) \quad (2.53)$$

donde  $s(x)$  es una función de control,  $s^T = (s_1, \dots, s_m)$  y  $M(x, t)$  es una matriz no singular.

La proyección de movimiento del sistema en el subespacio  $s$ , se escribe como

$$\frac{ds}{d\tau} = \mu Gf + GBMs \quad (2.54)$$

donde  $\mu = 1/k$  y  $\tau = t/\mu$ . Esta ecuación describe el movimiento rápido. Para obtener la ecuación del movimiento lento, se puede aplicar el método de control equivalente. La condición para que las trayectorias de movimiento rápido, converjan hacia la superficie  $s = 0$ , y que el control  $u$  converja al control equivalente  $u_{eq}$ , está dada por el siguiente teorema [10].

**Teorema 2.2.** Si

- Las funciones  $f(x, t)$  y  $B(x, t)$  del sistema (2.11) son continuas en  $t$  y localmente Lipshitz para todo  $x \in D_x \subset R^n$  uniformemente en  $t$ .

*Las derivadas de  $u_{eq}(x, t)$  sobre todos los argumentos existe y son acotados.*

- El sistema

$$\frac{ds}{d\tau} = G(x)B(x, t)M(x, t)s$$

*es exponencialmente estable para todo  $x \in D_x$  en otras palabras, existen las constantes positivas  $a$  y  $b$  tal que*

$$\|s(t)\| \leq b\|s(0)\|e^{-at}$$

*Entonces, para cualquier número positivo  $\Delta$ ,  $\Delta t_1$  y  $T$  ( $\Delta t_1 < T$ ) se puede encontrar  $\mu_0 > 0$  tal que para el sistema (2.11) con control (2.53)*

$$\|s(t)\| < \Delta$$

$$\|u - u_{eq}\| < \Delta \text{ para } 0 < \mu < \mu_0 \text{ y } \Delta t_1 \leq t \leq T$$

Entonces, sobre la trayectorias de movimiento perteneciente a la superficie  $s=0$ , el control  $u$  es igual al control equivalente

$$u_{eq}(x, t) = -(G(x)B(x, t))^{-1} G(x)f(x, t)$$

y este movimiento se describe por la siguiente ecuación de orden reducido ( $n-m$ ):

$$\dot{x} = f(x, t) - B(x, t)(G(x)B(x))^{-1}G(x)f(x, t)$$

que es la ecuación de modos deslizantes, al igual que (2.14).

Notar que eligiendo la matriz  $M(x, t)$ , por ejemplo, como

$$M(x, t) = (G(x)f(x, t))^{-1}$$

asegura la estabilidad de movimiento rápido (2.54).

# CAPITULO III

## Control por Bloques para Sistemas No Lineales con Perturbaciones utilizando Modos Deslizantes

En este capítulo se presenta el diseño de superficies de discontinuidad usando la técnica de control a bloques, primero para sistemas no lineales sin perturbaciones. Para estos sistemas se propone un observador no lineales con alta ganancia. Después se investiga el problema de diseño del control de sistemas con dinámica cero. Finalmente se consideran sistemas con perturbación.

### 3.1 Control por Bloques de Sistemas Nominales en Modos Deslizantes

Considere el caso de estabilización de sistemas no lineales que pueden ser representados por la siguiente ecuación

$$\dot{x} = f(x, t) + B(x, t)u(t) \quad (3.1)$$

donde  $x \in D_x \subset R^n$   $u \in R^m$   $B(x, t) = \{b_1(x, t), \dots, b_m(x, t)\}$ . El campo vector  $f : D_x \times R \rightarrow R^n$  y la columna  $b_i : D_x \times R \rightarrow R^n$  son mapeos suficientemente suaves.

#### 3.1.1 Forma No lineal Controlable por Bloques

**Definición 3.1** El sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, t) + B_1(x_1, t)x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, t) + B_2(x_1, x_2, t)x_3 \\ \dot{x}_i &= f_i(x_1, x_2, \dots, x_i, t) + B_i(x_1, x_2, \dots, x_i, t)x_{i+1}, \quad i = 3, \dots, r-1 \\ \dot{x}_r &= f_r(x_1, x_2, \dots, x_r, t) + B_r(x_1, x_2, \dots, x_r, t)u \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde  $x_i \in D_{x_i} \subset R^{n_i}$   $u \in R^m$   $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_r)$ , se dice que está en la *Forma No lineal Controlable por Bloques* (FNCB), si

$$\text{rango } B_i = n_i, \quad \forall x \in D_x \text{ y } t \in [0, \infty), \quad i = 1, \dots, r \quad \sum_{i=1}^r n_i = n \quad (3.3)$$

Las condiciones para la existencia de la forma (3.2) así como el procedimiento para obtenerla a partir de (3.1), es expuesto en [26]. Cabe mencionar que muchos sistemas físicos, en especial los electromecánicos poseen esta forma particular. En lo sucesivo consideraremos sistemas definidos por (3.1) presentados en la forma (3.2), con la estructura dada por  $n_i = m$ ,  $i = 1, \dots, r$  o  $n = r \times m$ . Esta estructura es típica en las plantas electromecánicas.

La ley de control que asegura trayectorias de movimiento por modos deslizantes estable para el sistema (3.2) se define por el siguiente teorema.

**Teorema 3.1.** *Suponga que*

(1) *La condición (3.3) se satisface;*

(2)  *$f_i(x_1, \dots, x_i, t)$  y  $B_i(x_1, \dots, x_i, t)$  son funciones continuas y diferenciables de orden  $(i-1)$ ,  $i=1, \dots, r$  con respecto a todos argumentos sobre el intervalo del tiempo  $t \in [0, \infty)$ , y todas las derivadas son acotadas.*

*Entonces existe una transformación difeomórfica  $\phi : D_x \times R \rightarrow R^n$  tal que  $D_z = \phi(D_x)$  y*

$$z = \phi(x, t) \quad (3.4)$$

*y una ley de control discontinua*

$$u = -k_r M(x, t) \text{sign}(s) \quad (3.5)$$

*con una superficie*

$$s(x, t) = 0, \quad s \in R^{nr} \quad (3.6)$$

*que garantiza modos deslizantes sobre la superficie (3.6) en un tiempo finito, y una dinámica de modos deslizantes descrita por un sistema reducido de orden  $n - nr$ , con el espectro deseado*

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -k_1 z_1 + z_2 \\ \dot{z}_i &= -k_i z_i + z_{i+1}, \quad i = 2, \dots, r-2 \\ \dot{z}_{r-1} &= -k_{r-1} z_{r-1} \end{aligned} \quad (3.7)$$

*donde  $z^T = (z_1, \dots, z_r)$ ,  $z_i \in D_{z_i} \subset R^{n_i}$ ,  $i = 1, \dots, r$ ,  $s = z_r$ , y todas las  $k_i$  son constantes positivas.*

**Prueba:** La prueba es constructiva y consiste de dos partes. En la primera parte, bajo las condiciones (1) y (2) se obtiene el cambio de variables (3.4) y sobre la superficie (3.6), se desarrolla la dinámica de modos deslizantes descrita por el sistema (3.7). En la segunda parte se encuentra una matriz  $M(x, t)$  y un parámetro  $k_r$  tal que la ley de control (3.5) garantice modos deslizantes sobre la superficie (3.6) en un tiempo finito. El procedimiento para diseñar esta estrategia de control es el siguiente:

**Parte I.** Suponga que los condiciones (1) y (2) se satisfacen. Bajo estas condiciones la transformación (3.4) puede ser encontrada paso a paso considerando el estado  $x_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, r-1$  como un vector de control ficticio en el  $i^{\text{ésimo}}$  bloque de la ec. (3.2). Bajo el siguiente procedimiento.

**Paso I.** Se define  $z_1 = x_1$  y se elige  $x_2$  como el control ficticio del primer bloque de la ec. (3.2)

$$x_2 = -B_1^{-1}(x_1, t)f_1(x_1, t) + B_1^{-1}(x_1, t)(-k_1 z_1 + z_2) \quad (3.8)$$

donde  $B_1^{-1}$  es la matriz inversa de  $B_1$ .

El control ficticio  $x_2$  en (3.8) consiste de dos partes, la primera de ellas esta diseñada para contrarrestar la dinámica propia del sistema y obtener  $\dot{z}_1 = 0$  sobre la trayectoria del primer bloque de (3.2). La segunda parte tiene como objetivo obtener la nueva dinámica deseada. Con esta transformación el primer bloque descrito en las nuevas coordenadas  $z_1$  y  $z_2$ , queda

$$\dot{z}_1 = -k_1 z_1 + z_2$$

Ahora la variable  $z_2$  se obtiene a partir de (3.8)

$$z_2 = f_1(x_1, t) + k_1 x_1 + B_1(x_1, t)x_2 := \phi_2(x_1, x_2, t)$$

Paso 2. Derivando  $z_2$  sobre la trayectoria del sistema (3.2), resulta

$$\dot{z}_2 = \bar{f}_2(x_1, x_2, t) + \bar{B}_2(x_1, x_2, t)x_3 \quad (3.9)$$

donde  $\bar{f}_2 = \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1}[-k_1 x_1 + \phi_2(x_1, x_2, t)] + B_1 f_2$  y  $\bar{B}_2 = B_1 B_2$ . Ahora se elige el control ficticio  $x_3$  en (3.9) en forma similar a (3.8)

$$x_3 = -\bar{B}_2^{-1}(x_1, x_2, t)\bar{f}_2(x_1, x_2, t) + \bar{B}_2^{-1}(-k_2 z_2 + z_3) \quad (3.10)$$

Con esto la ecuación (3.9) queda

$$\dot{z}_2 = -k_2 z_2 + z_3$$

que es la dinámica deseada. Con la transformación inversa de (3.10), obtenemos  $z_3$

$$z_3 = \bar{f}_2(x_1, x_2, t) + k_2 \phi_2(x_1, x_2, t) + \bar{B}_2(x_1, x_2, t)x_3 := \phi_3(x_1, x_2, x_3, t)$$

en el tercer paso se toma la derivada de  $z_3$  y así sucesivamente.

Entonces, para las siguientes variables  $z_i$  se desarrollan los pasos descritos anteriormente hasta  $z_{r-1}$

$$x_{i+1} = -\bar{B}_i^{-1}(x_1, \dots, x_i, t)\bar{f}_i(x_1, \dots, x_i, t) + \bar{B}_i^{-1}(x_1, \dots, x_i, t)(-k_i z_i + z_{i+1}), \quad i = 3, \dots, r-1$$

donde  $\bar{B}_i = \bar{B}_{i-1} B_i = B_1 B_2 \dots B_i$ . Con este procedimiento se logra la transformación no lineal de las variables de estado  $\phi$ ,  $\phi^T = (\phi_1, \dots, \phi_r)$  (3.4) quedando como se indica

$$z_1 = x_1 := \phi_1(x_1)$$

$$z_2 = f_1(x_1, t) + k_1 x_1 + B_1(x_1, t)x_2 := \phi_2(x_1, x_2, t)$$

$$z_3 = \bar{f}_2(x_1, x_2, t) + k_2 \phi_2(x_1, x_2, t) + \bar{B}_2(x_1, x_2, t)x_3 := \phi_3(x_1, x_2, x_3, t) \quad (3.11)$$

$$z_{i+1} = \bar{f}_i(x_1, x_2, \dots, x_i, t) + k_i \phi_i(x_1, x_2, \dots, x_i, t) z_i + \bar{B}_i(x_1, x_2, \dots, x_i, t)x_{i+1} := \phi_{i+1}(x_1, x_2, \dots, x_i, t)$$

$$i = 3, \dots, r-1$$

Con la transformación (3.11), obtenemos la función de deslizamiento (3.6) como:

$$z_r = \bar{f}_{r-1}(x_1, \dots, x_{r-1}, t) + k_{r-1} \phi_{r-1}(x_1, \dots, x_{r-1}, t) + \bar{B}_{r-1}(x_1, \dots, x_{r-1}, t) x_r := s(x, t)$$

Entonces el sistema (3.2) con las nuevas coordenadas  $z$  tiene la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -k_1 z_1 + z_2 \\ \dot{z}_i &= -k_i z_i + z_{i+1} \quad i = 2, \dots, r-2 \\ \dot{z}_{r-1} &= -k_{r-1} z_{r-1} + s \\ \dot{s} &= \bar{f}_r(x, t) + \bar{B}_r(x, t) u \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde  $\bar{B}_r = B_1 B_2 \dots B_r$ , y  $\bar{f}_r$  es una función continua y acotada.

*Parte 2.* Bajo la condición (2) existe una constante positiva  $\gamma_0$  tal que

$$\|\bar{f}_r(x, t)\|_2 \leq \gamma_0 \quad (3.13)$$

Elegimos la estrategia de control como en (3.5) con  $M(x, t) = \bar{B}_r^{-1}(x, t)$

$$u = -k_r \bar{B}_r^{-1} \text{sign}(s) \quad (3.14)$$

Entonces la proyección de la trayectoria de movimiento del sistema cerrado (3.12) y (3.14) en el subespacio  $s$  se describe como

$$\dot{s} = \bar{f}_r(x, t) - k_r \text{sign}(s) \quad (3.15)$$

Para obtener las condiciones de la estabilidad de (3.15) sobre  $s=0$ , se escoge la función candidata de Lyapunov

$$V_r = \frac{1}{2} s^T s \quad (3.16)$$

la derivada sobre la trayectoria de la ec. (3.15), es:

$$\dot{V}_r = s^T \bar{f}_r - k_r s^T \text{sign}(s)$$

Utilizando el acotamiento indicado en (3.13) y  $\|s\|_1 \geq \|s\|_2$  se obtiene

$$\dot{V}_r \leq -k_r \|s\|_2 + \|s\|_2 \|\bar{f}_r\|_2 \leq -(k_r - \gamma_0) \|s\|_2 \quad (3.17)$$

Por lo tanto,  $\dot{V}_r$  es definida negativa si

$$k_r > \gamma_0 \quad (3.18)$$

A continuación se mostrará que en estos casos la función de Lyapunov es finita, es decir se desvanece en un tiempo finito, y por consiguiente se alcanza a la variedad de modos deslizantes en tiempo finito. De (3.16), tenemos

$$\|s\|_2 = \sqrt{2V_r}$$

sustituyendo esto en la ec. (3.17) resulta

$$\dot{V}_r \leq -a\sqrt{2}\sqrt{V_r} \quad (3.19)$$

donde  $a = k_r - \gamma_0$ . Usando el principio de comparación [24] podemos encontrar la cota superior para cualquier solución de la desigualdad diferencial (3.19), como la solución de la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{\rho} = -a\sqrt{2}\sqrt{\rho} \quad (3.20)$$

con

$$\rho(t) \geq V_r(t), \text{ para toda } t \geq t_0 \quad (3.21)$$

La solución en el tiempo de la ecuación (3.20) es

$$\rho(t) = \left[ -\frac{a}{\sqrt{2}}(t - t_0) + \sqrt{V(t_0)} \right]^2 \quad (3.22)$$

La función  $\rho(t)$  es un estimado superior de la función  $V_r(t)$  (3.21), por lo que solo se tiene que buscar el tiempo en el cual se cumple que  $\rho(t)$  es definida positiva

$$t_s \leq t_0 + \frac{2}{a}\sqrt{V(t_0)} \quad (3.23)$$

cuando  $t \geq t_s$ , la función  $\rho(t)$  es cero por lo que  $V_r(t)$  también es cero, por consiguiente la superficie de deslizamiento  $s = 0$  es alcanzable en un tiempo finito  $t_s$ .

Ahora cuando el movimiento de modos deslizantes ocurre, de acuerdo al método de control equivalente, tenemos  $\dot{s} = 0$  y  $s = 0$ , y su trayectoria es descrita por el sistema de orden reducido  $(n - n_r)$  (3.7), con los valores propios,  $-k_1, \dots, -k_{r-1}$ , deseados.

### 3.1.2 Diseño del Observador No Lineal

Cuando no todas las variables de estado son medibles, es necesario el uso de observadores de estado para determinar y observar las variables no medibles a través de la información obtenida de las variables medibles. Por ejemplo, en el caso del generador síncrono tenemos una transformación no lineal en la cual están vinculadas variables no medibles. Por lo anterior se buscará el diseño de observadores sobre el sistema transformado. Gracias a la estructura de este sistema es posible proponer un observador no lineal con altas ganancias.. Se diseñará un sistema de observadores operando en modos deslizantes y se comprobará que es posible garantizar estabilidad asintótica usando una adecuada selección de las señales de compensación.

De la ecuación (3.12) obtenemos el sistema transformado

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -k_1 z_1 + z_2 \\ \dot{z}_i &= -k_i z_i + z_{i+1} \quad i = 2, \dots, r-1 \\ \dot{z}_r &= \hat{f}_r(z, t) + \hat{B}_r(z, t)u \end{aligned} \quad (3.24)$$

donde  $\hat{f}_r(z, t) = \bar{f}_r(x, t)_{x=\phi^{-1}(z, t)}$  y  $\hat{B}_r(z, t) = \bar{B}_r(x, t)_{x=\phi^{-1}(z, t)}$ .

Considerando en este caso que la salida es  $y = x_1 = z_1$ , es decir es una combinación lineal de las variables del primer bloque de (3.24), podemos diseñar un observador lineal con vector de entrada  $z_1$  el cual acercará asintóticamente las variables del observador al valor real de las variables no medibles. El observador es el siguiente

$$\begin{aligned}\dot{\hat{z}}_1 &= -k_1 \hat{z}_1 + \hat{z}_2 + v_1 \\ \dot{\hat{z}}_i &= -k_i \hat{z}_i + \hat{z}_{i+1} + v_i, \quad i = 2, \dots, r-1 \\ \dot{\hat{z}}_r &= \hat{f}_r(\hat{z}, t) + \hat{B}_r(\hat{z}, t)u + v_r\end{aligned}\quad (3.25)$$

donde el vector de estado  $\hat{z}$ ,  $\hat{z}^T = (\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_r)$  es la estimación del vector  $z$ . Esto se logra con una selección adecuada de los vectores de entrada  $v_i$  para garantizar que  $\hat{z}_i \rightarrow z_i$ .

El control  $u$  elegido de forma indicada en (3.14), en función de la variable estimada  $\hat{z}$  es:

$$u = -k_r \hat{B}_r^{-1}(\hat{z}, t) \text{sign}(\hat{z}_r)$$

por el Teorema 3.1 se garantizan modos deslizantes sobre la superficie  $\hat{z}_r = 0$  en un tiempo finito  $t_s$ . Entonces el control  $u$  es igual al control equivalente

$$u(\hat{z}, t) = u_{eq}(\hat{z}, t) = -\hat{B}_r^{-1}(\hat{z}, t) \hat{f}_r(\hat{z}, t) \quad (3.26)$$

para todos  $t \geq t_s$ . Definiendo los errores de observación como,  $e_i = z_i - \hat{z}_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ , tenemos la dinámica siguiente

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= -k_1 e_1 + e_2 - v_1 \\ \dot{e}_i &= -k_i e_i + e_{i+1} - v_i, \quad i = 2, \dots, r-1 \\ \dot{e}_r &= \hat{f}_r(z, t) - \hat{f}_r(\hat{z}, t) + [\hat{B}_r(z, t) - \hat{B}_r(\hat{z}, t)]u - v_r\end{aligned}\quad (3.27)$$

A continuación se comprobará la estabilidad asintótica para el sistema descrito por (3.26).

### Teorema 3.2 *Suponga que*

La funciones  $\hat{f}_r$  y  $\hat{B}_r$  del sistema (3.24) es continua en  $t$  y localmente Lipshitz para todo  $z \in D_z \subset R^n$  uniformemente en  $t$ .

Las derivadas de  $u_{eq}(\hat{z}, t)$  (3.26) sobre todos los argumentos existen y son acotadas.

*Sea*

$$\begin{aligned}v_1 &= l_1 e_1 \\ v_i &= l_i v_{i-1}, \quad i = 2, \dots, r\end{aligned}\quad (3.28)$$

Entonces, para cualquier  $t > t_0$ , tenemos

$$\lim_{l_1, \dots, l_r \rightarrow \infty} e_i(t) = 0 \quad \forall t > t_0, \quad i = 2, \dots, r \quad \text{y} \quad \lim_{l_1, \dots, l_r \rightarrow \infty} e_r(t) = 0 \quad \forall t > t_s \quad (3.29)$$

**Prueba:** Tomando el primer bloque de (3.26)

$$\dot{e}_1 = -k_1 e_1 + e_2 - v_1$$

y usando el Teorema 2.2, tenemos que para cualquier  $t > t_0$  :

$$\lim_{l_1 \rightarrow \infty} e_1(t) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{l_1 \rightarrow \infty} v_1 = v_{1eq} \quad (3.30)$$

Lo anterior viene de  $\dot{e}_1 = 0$  y  $e_1 = 0$ , es decir

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= k_1 e_1 + e_2 + v_{1eq} = 0 \\ v_{1eq} &= (l_1 e_1)_{eq} = e_2 \end{aligned} \quad (3.31)$$

De forma similar, tomando el siguiente bloque de la ecuación (3.26) y con (3.31), es decir

$$\dot{e}_2 = -k_2 e_2 + e_3 - v_2$$

con  $v_2 = l_2 v_1 = l_2 v_{1eq} = l_2 e_2$  para cualquier  $t > t_0$ , tenemos

$$\lim_{l_2 \rightarrow \infty} e_2(t) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{l_2 \rightarrow \infty} v_2 = v_{2eq} = e_3 \quad (3.32)$$

o lo que es lo mismo

$$\lim_{l_1, l_2 \rightarrow \infty} v_2 = \lim_{l_2 \rightarrow \infty} \left( l_2 \left( \lim_{l_1 \rightarrow \infty} l_1 e_1 \right) \right) = e_3 \quad (3.33)$$

Este límite doble significa que para cada valor de alta ganancia  $l_1$ , dado  $\varepsilon_2 > 0$ , existe un valor  $l_2^*$  tal que

$$\|l_2 l_1 e_1 - e_3\| \leq \varepsilon_2 \quad \text{que es igual a} \quad \|v_2 - e_3\| \leq \varepsilon_2 \quad \text{para todo } l_2 > l_2^*$$

La información obtenida de  $e_3$  se aplica en el siguiente bloque y así sucesivamente hasta  $r-1$ , donde la estructura de los siguientes bloques es

$$\dot{e}_i = -k_i e_i + e_{i+1} - v_i, \quad v_i = l_i (v_{i-1})_{eq} = l_i e_i$$

Entonces se producen expresiones similares a (3.30) y (3.33), operando de la misma forma en cada paso, entonces para cualquier  $t > t_0$ ,

$$\lim_{l_i \rightarrow \infty} e_i(t) = 0 \quad \lim_{l_i \rightarrow \infty} v_i = e_{i+1} \quad i = 3, \dots, r-1$$

$$\lim_{l_1, \dots, l_i \rightarrow \infty} v_i = \lim_{l_i \rightarrow \infty} \left[ l_i \left[ \lim_{l_{i-1} \rightarrow \infty} \left[ \dots \lim_{l_2 \rightarrow \infty} \left[ l_2 \left[ \lim_{l_1 \rightarrow \infty} l_1 e_1 \right] \right] \right] \right] \right] = e_{i+1} \quad i = 3, \dots, r-1$$

Para el último bloque del sistema (3.26) tenemos que  $v_r = l_r(v_{r-1})_{eq} = l_r e_r$  para cualquier  $t > t_0$ , y para  $t > t_s$ ,

$$e_r = \hat{f}_r(z, t) - \hat{f}_r(z, t) + [\hat{B}_r(z, t) - \hat{B}_r(z, t)]u_{eq}(z, t) - l_r e_r$$

Usando Teorema 2.2, para cualquier  $t > t_s$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_r(t) = 0$$

significa que el punto de equilibrio  $e = 0$  del error ec. (3.27) es asintóticamente estable, y como todos los valores de las variables estimadas tienden a los valores de sus respectivas variables reales.

## 3.2 Control del Sistema con Dinámica Cero

### 3.2.1 Forma Controlable por Bloques con Dinámica Cero

Considérese el caso cuando el sistema (3.1) tiene una salida  $y = h(x)$ ,  $h: D_x \rightarrow R^{n_1}$ . puede ser llevado a la forma dada en la definición 3.2.

**Definición 3.2** El sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, t) + B_1(x_1, t)x_2 \\ \dot{x}_i &= f_i(x_1, x_2, \dots, x_i, t) + B_i(x_1, x_2, \dots, x_i, t)x_{i+1}, \quad i = 2, \dots, r-1 \\ \dot{x}_r &= f_r(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, t) + B_r(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, t)u \\ \dot{x}_{r+1} &= f_{r+1}(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, t) + B_{r+1}(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, t)u \\ y &= h(x) = x_1 \end{aligned} \quad (3.34)$$

se dice que está en la *Forma No lineal Controlable por Bloques con Dinámica Cero (FNCBDC)*, si

$$\text{rango } B_i = n_i \quad \forall x \in D_x \in R^n \text{ y } t \in [0, \infty), \quad i = 1, \dots, r \quad (3.35)$$

donde  $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1})$ ,  $x_i \in D_{xi} \subset R^{n_i}$  y  $\sum_{i=1}^{r+1} n_i = n$ .

Se define la forma anterior como No Lineal Controlable por Bloques con Dinámica Cero: Es fácil observar que el grado relativo del sistema (3.34) con respecto la salida  $y$  es  $r$ . Por ejemplo la dinámica del generador síncrono se presenta en esta forma.

### 3.2.2 Diseño del Control

Es posible diseñar una ley de control para el sistema (3.34) siguiendo el mismo procedimiento de la prueba del Teorema 3.1. Considerando al vector del estado,  $x_{i+1}$ , como un control ficticio en el  $i^{er}$  bloque de la ecuación (3.34), se obtiene como resultado:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= -k_1 z_1 + z_2 \\
\dot{z}_i &= -k_i z_i + z_{i+1} \quad i = 2, \dots, r-1 \\
\dot{z}_r &= \bar{f}_r(z, x_{r+1}, t) + \bar{B}_r(z, x_{r+1}, t)u \\
\dot{x}_{r+1} &= \bar{f}_{r+1}(z, x_{r+1}, t) + \bar{B}_{r+1}(z, x_{r+1}, t)u
\end{aligned} \tag{3.36}$$

donde  $z^T = (z_1, \dots, z_r)$ ,  $\bar{B}_r = B_1 B_2 \dots B_r$ . El sistema se compone de una dinámica controlable y otra dinámica interna. La estrategia de control se elige como en (3.14):

$$u = -k_r \bar{B}_r^{-1} \text{sign}(z_r), \quad k_r > 0$$

con la condición

$$k_r > \|\bar{f}_r(z, x_{r+1}, t)\|_2$$

garantiza modos deslizantes sobre la superficie  $z_r = 0$ . Para encontrar la ecuación de modos deslizantes, se necesita calcular el control equivalente  $u_{eq}$  sobre condición  $\dot{z}_r = 0$

$$u_{eq} = -\bar{B}_r^{-1}(z, x_{r+1}, t) \bar{f}_r(z, x_{r+1}, t)$$

sustituyendo esta en (3.34) y tomando en cuenta, que  $z_r = 0$ , resulta

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= -k_1 z_1 + z_2 \\
\dot{z}_i &= -k_i z_i + z_{i+1} \quad i = 2, \dots, r-2 : \\
\dot{z}_{r-1} &= -k_{r-1} z_{r-1} \\
\dot{x}_{r+1} &= q(z_1, \dots, z_{r-1}, x_{r+1}, t)
\end{aligned} \tag{3.37}$$

donde

$$q = \bar{f}_{r+1}(z_1, \dots, z_{r-1}, 0, x_{r+1}, t) - \bar{B}_{r+1}(z_1, \dots, z_{r-1}, x_{r+1}, 0, t) \bar{B}_r^{-1}(z_1, \dots, z_{r-1}, x_{r+1}, 0, t) \bar{f}_r(z_1, \dots, z_{r-1}, x_{r+1}, 0, t)$$

Se efectúa la siguiente redefinición:  $\xi^T = (z_1, \dots, z_{r-1})$  y  $\eta = x_{r+1}$ . Por lo que la dinámica de modos deslizantes (3.37) se representa como

$$\dot{\xi} = A_1 \xi \tag{3.38}$$

$$\dot{\eta} = q(\xi, \eta, t) \tag{3.39}$$

donde

$$A_1 = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -k_{r-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -k_{r-1} \end{bmatrix}$$

La dinámica cero es:

$$\dot{\eta} = q(0, \eta, t) \quad (3.40)$$

Sea

$$D_1 = \{\xi \in R^{n-n_r-n_{r+1}} \mid \|\xi\|_2 \leq p_1\} \quad \text{y} \quad D_2 = \{\eta \in R^{n_r+1} \mid \|\eta\|_2 \leq p_2\}$$

Debido a que el subsistema (3.38) es autónomo, además la matriz  $A_1$  es Hurwitz, por lo que:

$$\|\xi(t)\|_2 \leq \beta_1 \|\xi(t_s)\|_2 e^{-\gamma_1(t-t_s)} \quad (3.41)$$

donde 
$$\beta_1 = \sqrt{\frac{\alpha_{\max}(P_1)}{\alpha_{\min}(P_1)}} \quad \text{y} \quad \gamma_1 = \frac{1}{2\alpha_{\max}(P_1)};$$

$P_1$  es una solución positiva definida de la ecuación de Lyapunov

$$P_1 A_1 + A_1^T P_1 = -I_{n-n_r-n_{r+1}}$$

y  $t_s$  es el tiempo donde se inicia modos deslizantes.

A continuación se enuncian las siguientes hipótesis:

**A1.** El sistema no lineal (3.38) y (3.39) es exponencialmente de fase mínima tal que  $\eta = 0$  es un punto de equilibrio localmente exponencialmente estable de dinámica cero (3.40).

**A2.** El mapeo  $q : D_2 \times [0, \infty) \rightarrow R^{n_r+1}$  es continuo en tiempo  $t$  y localmente Lipshitz en  $\xi$  y  $\eta$ :

$$\|q(\xi, \eta, t) - q(0, \eta, t)\|_2 \leq L \|\xi\|_2 \quad \forall \xi \in D_1, \quad \forall \eta \in D_2, \quad \forall t \geq t_0 \quad (3.42)$$

donde  $L$  es una constante de Lipshitz.

Si la hipótesis A.1 se satisface, entonces para el sistema (3.40) por el teorema inverso de Lyapunov, existe una función de Lyapunov,  $V(\eta, t)$  tal que satisface las siguientes propiedades

$$\alpha_1 \|\eta\|_2^2 \leq V(\eta, t) \leq \alpha_2 \|\eta\|_2^2 \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial V(\eta, t)}{\partial t} + \frac{\partial V(\eta, t)}{\partial \eta} q(0, \eta, t) \leq \alpha_3 \|\eta\|_2^2 \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial V(\eta, t)}{\partial \eta} \leq \alpha_4 \|\eta\|_2^2 \quad (3.45)$$

en  $[0, \infty) \times D_1 \times D_2$ , con constantes positivas  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  y  $\alpha_4$ .

La siguiente proposición establece la propiedad de estabilidad de la solución de la ecuación de modos deslizantes (3.38) y (3.39).

**Proposición 3.1** *Supóngase que se satisfacen las hipótesis A.1 y A.2 y*

$$\|\xi(t_s)\|_2 < p_2 \sqrt{\frac{\alpha_1 \alpha_{\min}(P_1)}{\alpha_2 \alpha_{\max}(P_1)} \frac{\alpha_3 \theta}{\alpha_4 L}} \quad (3.46)$$

$$\|\eta(t_s)\|_2 < p_2 \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \quad (3.47)$$

Entonces, la solución  $(\|\xi(t)\|, \|\eta(t)\|)^T$  del sistema (3.38) y (3.39) converge a cero exponencialmente.

**Prueba.** La convergencia exponencial para solución  $\xi(t)$  del subsistema autónomo (3.38) fue establecida anteriormente en (3.41). Se necesita ahora establecer la convergencia de la solución  $\eta(t)$  del subsistema (3.39) donde el vector  $\xi(t)$  se considera como la entrada. Para esto podemos usar la función  $V(\eta, t)$  con las propiedades (3.43)-(3.45). La derivada de  $V(\eta, t)$  con respecto al tiempo sobre las trayectorias del subsistema (3.39), es:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\eta, t) &= \frac{\partial V(\eta, t)}{\partial t} + \frac{\partial V(\eta, t)}{\partial \eta} q(\xi, \eta, t) \\ &= \frac{\partial V(\eta, t)}{\partial t} + \frac{\partial V(\eta, t)}{\partial \eta} q(0, \eta, t) + \frac{\partial V(\eta, t)}{\partial \eta} q(\xi, \eta, t) - \frac{\partial V(\eta, t)}{\partial \eta} q(0, \eta, t) \end{aligned}$$

Tomando en cuenta (3.42), (3.44) y (3.45), por lo que la derivada es:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\eta, t) &= -\alpha_3 \|\eta\|_2^2 + \alpha_4 L \|\eta\|_2 \|\xi(t)\|_2 \\ &= -\alpha_3 \|\eta\|_2^2 + \theta \alpha_3 \|\eta\|_2^2 - \theta \alpha_3 \|\eta\|_2^2 + \alpha_4 L \|\eta\|_2 \|\xi(t)\|_2 \\ &\leq -(1 - \theta) \alpha_3 \|\eta\|_2^2 - \|\eta\|_2 (\theta \alpha_3 \|\eta\|_2 - \alpha_4 L \|\xi(t)\|_2) \\ &\leq -(1 - \theta \alpha) \alpha_3 \|\eta\|_2^2 \end{aligned} \quad (3.48)$$

que es negativa en el dominio

$$\|\eta(t)\|_2 > \frac{\alpha_4 L}{\alpha_3 \theta} \|\xi(t)\|_2 := \mu(t) \quad (3.49)$$

donde  $0 < \theta < 1$ . Ahora, de las condiciones (3.46) y (3.47) podemos usar el Corolario 5.3 [44], se tiene que

$$\|\eta(t)\|_2 \leq \beta_2 \|\eta(t_s)\|_2 e^{-\gamma_2(t-t_s)} \quad \forall t_s \leq t < t_1$$

y

$$\|\eta(t)\|_2 \leq \beta_2 \mu(t) \quad \forall t \geq t_1$$

donde

$$\beta_2 = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \quad \text{y} \quad \gamma_2 = \frac{(1-\theta)\alpha_3}{2\alpha_2}$$

Tomando en cuenta (3.41) se tiene que

$$\|\eta(t)\|_2 \leq \beta_2 \left( \|\eta(t_s)\|_2 e^{-\gamma_2(t-t_s)} + \beta_3 \|\xi(t_s)\|_2 e^{-\gamma_1(t-t_s)} \right) \quad (3.50)$$

Las ecuaciones anteriores (3.41) y (3.50) representan la solución del sistema de ecuaciones de modos deslizantes, (3.38) y (3.39) y se demostró que el punto de equilibrio  $\xi = 0$ ,  $\eta = 0$  es exponencialmente estable

### 3.2.3 Observador para Sistemas con Dinámica Cero

El diseño de observadores para sistemas de la Forma No lineal Controlable por Bloques con Dinámica Cero, está restringido por la condición de estabilidad de la dinámica cero, la cual debe ser estable, totalmente observable y medible directamente. Con la salida  $y = x_1 = z_1$  teniendo acceso a los valores del vector  $x_{r+1}$ , tomando en cuenta la restricción anterior y la ecuación (3.36), se diseña el sistema observador

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}_1 &= -k_1 \hat{z}_1 + \hat{z}_2 + v_1 \\ \dot{\hat{z}}_i &= -k_i \hat{z}_i + \hat{z}_{i+1} + v_i \quad i = 2, \dots, r-1 \\ \dot{\hat{z}}_r &= \bar{f}_r(\hat{z}, x_{r+1}, t) + \bar{B}_r(\hat{z}, x_{r+1}, t)u + v_r \end{aligned} \quad (3.51)$$

donde  $\hat{z}^T = (\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_r)$ . Con la misma selección de los vectores de entrada  $v_i$  como (3.28):

$$\begin{aligned} v_1 &= l_1(z_1 - \hat{z}_1) \\ v_i &= l_i \dots l_1(z_1 - \hat{z}_1), \quad i = 2, \dots, r-1 \end{aligned}$$

la dinámica sobre los errores de observación  $e_i = z_i - \hat{z}_i$ ,  $i = 2, \dots, r$  es:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= -k_1 e_1 + e_2 - l_1 e_1 \\ \dot{e}_i &= -k_i e_i + e_{i+1} - l_i \dots l_1 e_1 \\ \dot{e}_r &= \bar{f}_r(z, x_{r+1}) - \bar{f}_r(\hat{z}, x_{r+1}) + [\bar{B}_r(z, x_{r+1}) - \bar{B}_r(\hat{z}, x_{r+1})]u - l_r \dots l_1 e_1 \end{aligned} \quad (3.52)$$

Suponga, que se satisfacen las condiciones del Teorema 3.2 sobre el sistema (3.36) con control

$$u = -k_r \bar{B}_r^{-1}(\hat{z}_r, x_{r+1}) \text{sign}(\hat{z}_r), \quad k_r > 0$$

Entonces, tenemos  $e_i \rightarrow 0$  si  $l_i \rightarrow \infty$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Esto significa, que el vector de estimación  $\hat{z}$  tiende asintóticamente al vector real  $z$ .

### 3.3 Control a Bloques de Sistemas con Perturbaciones por Modos Deslizantes

En secciones anteriores el controlador fue diseñado para casos cuando consideramos que los términos del lado derecho del sistema son funciones conocidas. Realmente, todos los modelos matemáticos, obtenidos usando leyes físicas o técnicas de identificación, contienen incertidumbres por errores de modelado y/o de perturbaciones externas desconocidas. Se sabe, que el controlador con modos deslizantes asegura trayectorias de movimiento invariante solo ante perturbaciones, que pertenecen al subespacio del control (“matching condition”). Es importante resolver el problema de diseño de superficies deslizantes para sistemas no lineales que consideren las incertidumbres que no se satisfacen de las condiciones anteriores.

Se considera el caso de sistemas no lineales sujetos a perturbaciones de la forma

$$\dot{x} = f(x, t) + B(x, t)u(t) + \Delta f(x, t) + D(x, t)w(t) \quad (3.53)$$

donde  $x \in D_x \subset R^n$   $u \in D_u \subset R^m$   $w \in D_w \subset R^s$ . El campo vector  $f$  y las columnas de la matriz  $B$  son mapeos suficientemente suaves. Los mapeos  $\Delta f$  y  $D$  representan las incertidumbres del modelo y  $w(t)$  representa el vector de perturbaciones externas.

Nótese que en [44] se ha diseñado una retroalimentación continua para el sistema (3.53), en caso de perturbaciones desvaneciente, usando una transformación a la forma de Brunovski. En el presente trabajo se propone un controlador discontinuo para sistema (3.53), en caso de perturbaciones no desvaneciente, usando la técnica de control por bloques.

#### 3.3.1 Forma Controlable por Bloques con Perturbaciones

El sistema (3.53) puede ser llevado mediante una transformación a la forma no lineal controlable a bloques:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, t) + B_1(x_1, t)x_2 + \Delta f_1(x_1, t) + D_1(x_1, t)w(t) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, t) + B_1(x_1, x_2, t)x_3 + \Delta f_2(x_1, x_2, t) + D_2(x_1, x_2, t)w(t) \\ \dot{x}_i &= f_i(x_1, x_2, \dots, x_i, t) + B_i(x_1, x_2, \dots, x_i, t)x_{i+1} + \Delta f_i(x_1, x_2, \dots, x_i, t) \\ &\quad + D_i(x_1, x_2, \dots, x_i, t)w(t), \quad i = 3, \dots, r-1 \\ \dot{x}_r &= f_r(x, t) + B_r(x, t)u + \Delta f_r(x, t) + D_r(x, t)w(t) \end{aligned} \quad (3.54)$$

donde  $x^T = (x_1, \dots, x_r)$ ,  $x_i \in D_{x_i} \subset R^{n_i}$ .  $rank B_i = n_i \quad \forall x \in D_x, t \in [0, \infty), i = 1, \dots, r$   $\sum_{i=1}^r n_i = n$ .

Consideramos el caso general, cuando el sistema tiene la siguiente estructura

$$n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_r \leq m$$

#### 3.3.2 Diseño de la Superficie No lineal

Para diseñar la superficie de discontinuidad y el control por retroalimentación, se utiliza el mismo procedimiento de la sección 3.1. Primero se elige a  $x_2$  como el control ficticio del primer bloque de (3.53)

$$x_2 = -B_1^+(z_1, t)f_1(z_1, t) + B_1^+(z_1, t)(-k_1 z_1 + E_{1,1}z_2) \quad (3.55)$$

donde  $z_1 = x_1$ ,  $z_2$  es una nueva variable de la misma dimensión de  $x_2$ ,  $k_1$  es un escalar positivo,  $B_1^+$  es la pseudo inversa de  $B_1$ , y  $E_{1,1} = [I_{n_1}, 0]$ ,  $E_{1,1} \in R^{n_1 \times n_2}$  El primer término de (3.55) se

calcula de ec.  $\dot{z}_1 = 0$  sobre las trayectorias del primer bloque de (3.54) sin perturbaciones, mientras que el otro término es la dinámica deseada en el primer bloque. Sustituyendo (3.55) en el primer bloque de (3.54) se tiene

$$\dot{z}_1 = -k_1 z_1 + E_{1,1} z_2 + \Delta f_1(z_1, t) + D_1(z_1, t)w(t) \quad (3.56)$$

Ahora se obtiene  $z_2$ , para esto los elementos de la matriz  $B_1(z_1, t)$  se ordenan tal que la matriz cuadrada

$$\tilde{B}_2(z_1, t) := \begin{bmatrix} B_1(z_1, t) \\ E_{1,2} \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

con  $E_{1,2} = [0 \quad I_{n_2-n_1}]$ , tiene rango  $n_2$ . De la ecuación (3.57) se obtiene  $z_2$

$$z_2 = \alpha_1(z_1, x_2, t) := \tilde{B}_2(z_1, t)x_2 + \begin{bmatrix} f_1(z_1, t) + k_1 z_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

Derivando la ecuación (3.58) sobre la trayectoria del sistema (3.54) se tiene

$$\dot{z}_2 = \bar{f}_2(z_1, z_2, t) + \bar{B}_2(z_1, z_2, t)x_3 + \bar{\Delta}f_2(z_1, z_2, t) + \bar{D}_2(z_1, z_2, t)w(t) \quad (3.59)$$

donde  $\bar{f}_2(z_1, z_2, t) = \frac{\partial \alpha_1}{\partial z_1}(-k_1 z_1 + E_{1,1} z_2) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial t}$ ,  $\bar{B}_2 = \tilde{B}_2 B_2$ ,  $\text{rank } \bar{B}_2 = n_2$ ,

$$\bar{\Delta}f_2 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial z_1} \Delta f_1 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} \Delta f_2, \quad \bar{D}_2 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial z_1} D_1 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} D_2.$$

Al igual que en el primer paso, se busca un control ficticio  $x_3$  para obtener la dinámica deseada en la ecuación (3.59)

$$x_3 = -\bar{B}_2^+(z_1, z_2, t)\bar{f}_2(z_1, z_2, t) + \bar{B}_2^+(z_1, z_2, t)(-k_2 z_2 + E_{2,1} z_3) \quad (3.60)$$

donde  $z_3$  es un vector de dimensión  $n_3 \times 1$ ,  $k_2$  es un escalar positivo,  $E_{2,1} = [I_{n_2} \quad 0]$ ,

$E_{1,2} \in R^{(n_2-n_1) \times n_2}$ . De forma similar a (3.55), la primera parte de (3.60) se obtiene de  $\dot{z}_2 = 0$  sin perturbaciones, y tiene como fin eliminar la dinámica no deseada, mientras que la otra agrega la dinámica deseada en  $z_3$ . Así, la ecuación (3.59) toma la forma

$$\dot{z}_2 = -k_2 z_2 + E_{2,1} z_3 + \bar{\Delta}f_2(z_1, z_2, t) + \bar{D}_2(z_1, z_2, t)w(t) \quad (3.61)$$

Posteriormente se obtiene  $z_3$  de la ecuación (3.60)

$$z_3 = \alpha_2(z_1, z_2, x_3, t) := \tilde{B}_3(z_1, z_2, t)x_3 + \begin{bmatrix} \bar{f}_2(z_1, z_2, t) + k_2 z_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde

$$\tilde{B}_3(z_1, z_2, t)x_3 = \begin{bmatrix} \bar{B}_2(z_1, z_2, t)x_3 \\ E_{2,2} \end{bmatrix}, \quad E_{2,2} = [0 \quad I_{n_3-n_2}] \quad \text{rango } \tilde{B}_3 = n_3$$

Siguiendo el mismo procedimiento para los restantes  $i$  bloques,  $i=3,\dots,r-1$

$$x_{i+1} = -\bar{B}_i^+(z_1, z_2, \dots, z_i, t)\bar{f}_i(z_1, z_2, \dots, z_i, t) + \bar{B}_i^+(z_1, z_2, \dots, z_i, t)(-k_i z_i + E_{i,1} z_{i+1})$$

donde  $\bar{B}_i^+$  es la pseudo inversa por la derecha de  $\bar{B}_i = \tilde{B}_i B_i$ ,  $E_{i,1} = \begin{bmatrix} I_{n_i} & 0 \end{bmatrix}$ ,  $E_{i,1} \in R^{n_i \times n_{i+1}}$ . Las variables  $z_{i+1}$  obtenidas forman una transformación no lineal de los estado de la forma

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 \\ z_2 &= \tilde{B}_2(z_1, t)x_2 + \begin{bmatrix} f_1(z_1, t) + k_1 z_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ z_3 &= \tilde{B}_3(z_1, z_2, t)x_3 + \begin{bmatrix} \bar{f}_2(z_1, z_2, t) + k_2 z_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ z_{i+1} &= \tilde{B}_{i+1}(z_1, z_2, \dots, z_i, t)x_{i+1} + \begin{bmatrix} \bar{f}_i(z_1, z_2, \dots, z_i, t) + k_i z_i \\ 0 \end{bmatrix} \\ i &= 3, \dots, r-1 \end{aligned}$$

donde  $z_{i+1}$  es un vector de dimensión  $n_{i+1} \times 1$ ,  $k_i$  un escalar positivo,  $\tilde{B}_{i+1} = \begin{bmatrix} \bar{B}_i \\ E_{i,2} \end{bmatrix}$ ,

$$E_{i,2} = [0 \ I_{n_{i+1}-n_i}] \quad E_{i,2} \in R^{(n_{i+1}-n_i) \times n_{i+1}}$$

Aplicando la transformación anterior sobre el sistema (3.53) resulta

$$\dot{z}_1 = -k_1 z_1 + E_{1,1} z_2 + \Delta f_1(z_1, t) + D_1(z_1, t)w(t) \quad (3.62)$$

$$\dot{z}_i = -k_i z_i + E_{i,1} z_{i+1} + \Delta \bar{f}_i(z_1, z_2, \dots, z_i, t) + \bar{D}_1(z_1, z_2, \dots, z_i, t)w(t), \quad i = 2, \dots, r-1 \quad (3.63)$$

$$\dot{z}_r = \bar{f}_r(z, t) + \bar{B}_r(z, t)u + \Delta \bar{f}_r(z, t) + \bar{D}_r(z, t)w(t) \quad (3.64)$$

donde  $z = (z_1, z_2, \dots, z_r)^T$  y  $\text{rank} \bar{B}_r = n_r$ .

### 3.3.3 Diseño de Retroalimentación Discontinua

El sistema (3.62), (3.63), (3.64), se divide en una dinámica sin acción directa de control (3.62) y (3.63), y otra dinámica con acción directa de control (3.64). Si se desea que el sistema efectúe algún comportamiento deseado, es necesario primero trabajar sobre el subsistema controlable eq. (3.64), el cual se toma sobre la superficie de deslizamiento. Para obtener modos deslizantes sobre la ecuación (3.64) se supone que  $\bar{f}_r(z, t)$  en (3.63) es conocida y la matriz  $\bar{B}_r(z, t)$  es de rango pleno, entonces se elige como control a

$$u = -\bar{B}_r^+(z, t)\bar{f}_r(z, t) - k_r(z, t)\bar{B}_r^+(z, t)\text{sign}(z_r) \quad (3.65)$$

donde  $k_r(z, t)$  es una función positiva. La primera parte de (3.65) coincide con el control equivalente calculado con  $z_r = 0$  en ausencia de perturbaciones (3.64). Sustituyendo (3.65) en (3.64) se tiene

$$\dot{z}_r = -k_r(z, t)\text{sign}(z_r) + \Delta\bar{f}_r(z, t) + \bar{D}_r(z, t)w(t) \quad (3.66)$$

Ahora es necesario acotar los términos desconocidos de (3.66)

$$\|\Delta\bar{f}_r(z, t) + \bar{D}_r(z, t)w(t)\|_2 \leq q_0(z, t) \quad (3.67)$$

donde  $q_0(z, t)$  es una función positiva conocida. Entonces se elige el  $k_r(z, t)$  como

$$k_r(z, t) \geq q_0(z, t) + d_0, \quad d_0 > 0 \quad (3.68)$$

con lo cual se garantiza deslizamiento sobre la superficie  $z_r = 0$ . Tomando la función candidata de Lyapunov  $V_r = \frac{1}{2}z_r^T z_r$  sobre la trayectoria de (3.66)

$$\dot{V}_r = -k_r(z, t)\|z_r\|_1 + z_r^T [\Delta\bar{f}_r(z, t) + \bar{D}_r(z, t)w(t)] \quad (3.69)$$

o

$$\dot{V}_r \leq -[k_r(z, t) - q_0(z, t)]\|z_r\|_1 \leq -d_0\|z_r\|_2 \leq -\sqrt{2} d_0\sqrt{V_r} \quad (3.70)$$

La función de Lyapunov se desvanece en un tiempo finito; esto implica que el deslizamiento sobre la superficie  $z_r = 0$  ocurrirá también en un tiempo finito, y además es globalmente estable.

### 3.3.4 Análisis de Robustez

El sistema (3.62), (3.63), (3.64) sobre la superficie  $z_r = 0$ , se reduce a

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -k_1 z_1 + E_{1,1} z_2 + \Delta f_1(z_1, t) + D_1(z_1, t)w(t) \\ \dot{z}_i &= -k_i z_i + E_{i,1} z_{i+1} + \Delta\bar{f}_i(z_1, z_2, \dots, z_i, t) + D_1(z_1, z_2, \dots, z_i, t)w(t), \quad i = 2, \dots, r-1 \\ \dot{z}_{r-1} &= -k_{r-1} z_{r-1} + \Delta\bar{f}_{r-1}(z_1, \dots, z_{r-1}, t) + D_{r-1}(z_1, \dots, z_{r-1}, t)w(t) \end{aligned} \quad (3.71)$$

En estas condiciones el problema original se reduce a investigar la robustez de un sistema lineal de orden reducido con perturbación no lineal. Este análisis se realizará utilizando técnicas de función de Lyapunov.

En primer lugar cuando existen términos no conocidos es necesario utilizar acotamientos, para lo cual se supone la siguiente hipótesis

**H.1** Existen funciones escalares no negativas  $q_{i,j}(t)$  y  $d_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, r-1$ ,  $j = 1, \dots, i$ , continuas con respecto al tiempo, que satisfacen

$$\sup_{t \geq 0} q_{i,j}(t) = \bar{q}_{i,j} \quad y \quad \sup_{t \geq 0} \bar{d}_i(t) = \bar{d}_i$$

con  $\bar{q}_{i,j}$  y  $\bar{d}_i$  constantes positivas tal que

$$\|\Delta\bar{f}_i(z_1, \dots, z_{i-1}, z_i, t) + \bar{D}_i(z_1, \dots, z_{i-1}, z_i, t)w(t)\| \leq \sum_{j=1}^i k_j^{(i-j)} q_{i,j}(t) \|z_j\| + d_i(t)$$

El deslizamiento de modos deslizantes sobre la superficie  $z_r = 0$  en el sistema perturbado, es expresado en términos del siguiente resultado.

**Teorema 3.3.** Si la proposición H.1 es cierta en el sistema (3.62), (3.63), (3.64), entonces existen valores positivos  $k_1, \dots, k_{r-1}$  y  $h_1, \dots, h_{r-1}$  tal que los estados del sistema (3.71) sean uniformemente acotados, es decir

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|z_i(t)\| \leq h_i, \quad i = 1, \dots, r-1$$

**Prueba.** Se elige como función candidata de Lyapunov para cada bloque del sistema (3.91) a

$$V_i = \frac{1}{2} z_i^T z_i \quad i = 1, \dots, r-1 \quad (3.72)$$

Se calcula la derivada de  $V_i$ ,  $i = 1, \dots, r-1$  desde el primer bloque hasta el bloque  $r-1$  de (3.71).

Para el primer bloque se tiene la función candidata  $V_1 = \frac{1}{2} z_1^T z_1$ , derivando sobre la trayectoria del sistema (3.71), tomando en cuenta también la proposición H.1, se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -k_1 z_1^T z_1 + z_1^T [E_{1,1} z_2 + \Delta\bar{f}_1(z_1, t) + \bar{D}_1(z_1, t)w(t)] \\ \dot{V}_1 &\leq -k_1 \|z_1\|^2 + \|z_1\| [\|z_2\| + q_{1,1}(t) \|z_1\| + d_1(t)] \\ \dot{V}_1 &\leq -\|z_1\| [(k_1 - \bar{q}_{1,1}) \|z_1\| - \|z_2\| - d_1] \end{aligned}$$

la cual es definida negativa si

$$(k_1 - \bar{q}_{1,1}) \|z_1\| - \|z_2\| - \bar{d}_1 > 0$$

Con esto los estados entran en la región del subespacio  $(z_1, z_2)$  definido por

$$\|z_1\| \leq \alpha_{1,2} \|z_2\| + \beta_{1,2} \quad (3.73)$$

donde

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{k_1 - \bar{q}_{1,1}}, \beta_{1,2} = \alpha_{1,2} \bar{d}_1 \quad (3.74)$$

es positivo si

$$k_i > \bar{q}_{1,1} \quad (3.75)$$

Realizando el mismo procedimiento sobre el bloque 2, se tiene

$$\dot{V}_2 = -k_2 z_2^T z_2 + z_2^T [E_{2,1} z_3 + \Delta f_2(z_1, z_2, t) + \bar{D}_2(z_1, z_2, t)w(t)]$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &\leq -k_2 \|z_2\|^2 + \|z_2\| \left[ \|z_3\| + k_1 q_{2,1}(t) \|z_1\| + q_{2,2}(t) \|z_2\| + d_2(t) \right] \\ \dot{V}_2 &\leq -\|z_2\| \left[ (k_2 - \bar{q}_{2,2} - k_1 \bar{q}_{2,1} \alpha_{1,2}) \|z_2\| - \|z_3\| - k_1 \bar{q}_{2,1} \beta_{1,2} - \bar{d}_2 \right]\end{aligned}$$

la función es negativa si

$$(k_2 - \bar{q}_{2,2} - k_1 \bar{q}_{2,1} \alpha_{1,2}) \|z_2\| - \|z_3\| - k_1 \bar{q}_{2,1} \beta_{1,2} - \bar{d}_2 > 0$$

Así los estados entran en la región del subespacio  $(z_1, z_2, z_3)$  definido por

$$\|z_2\| \leq \alpha_{2,3} \|z_3\| + \beta_{2,3}$$

y consecuentemente

$$\|z_1\| \leq \alpha_{1,3} \|z_3\| + \beta_{1,3}$$

donde

$$\begin{aligned}\alpha_{2,3} &= \frac{1}{k_2 - \bar{q}_{2,2} - k_1 \bar{q}_{2,1} \alpha_{1,2}}, & \beta_{2,3} &= \alpha_{2,3} (k_1 \bar{q}_{2,1} \beta_{1,2} + \bar{d}_2), \\ \alpha_{1,3} &= \alpha_{1,2} \alpha_{2,3}, & \beta_{1,3} &= \alpha_{1,2} \beta_{2,3} + \beta_{1,2}\end{aligned}\tag{3.76}$$

es positivo si satisface la desigualdad

$$k_2 > \bar{q}_{2,2} + k_1 \bar{q}_{2,1} \alpha_{1,2}\tag{3.77}$$

Siguiendo de la misma forma para los  $i$  restantes bloques se obtiene la región de convergencia en el subespacio  $(z_1, z_2, \dots, z_{i-1}, z_i)$

$$\begin{aligned}\|z_{i-1}\| &\leq \alpha_{i-1,i} \|z_i\| + \beta_{i-1,i} \\ \|z_{i-2}\| &\leq \alpha_{i-2,i} \|z_i\| + \beta_{i-2,i} \\ &\dots \\ \|z_2\| &\leq \alpha_{2,i} \|z_i\| + \beta_{2,i} \\ \|z_1\| &\leq \alpha_{1,i} \|z_i\| + \beta_{1,i}\end{aligned}\tag{3.78}$$

Mientras que las derivadas de las funciones candidatas de Lyapunov  $V_i = \frac{1}{2} z_i^T z_i$  sobre las trayectorias del sistema bajo la proposición H.1, toman la siguiente forma

$$\begin{aligned}\dot{V}_i &= -k_i z_i^T z_i + z_i^T \left[ E_{i,1} z_{i+1} + \Delta \bar{f}_i(z_1, z_2, \dots, z_i, t) + \bar{D}_i(z_1, z_2, \dots, z_i, t) w(t) \right] \\ \dot{V}_i &\leq -k_i \|z_i\|^2 + \|z_i\| \left[ \|z_{i+1}\| + \sum_{j=1}^i k_j^{(i-j)} q_{i,j}(t) \|z_j\| + d_i(t) \right] \\ \dot{V}_i &\leq -\|z_i\| \left[ \left( k_i - \sum_{j=1}^i k_j^{(i-j)} \bar{q}_{i,j} \alpha_{j,i} \right) \|z_i\| - \|z_{i+1}\| - \sum_{j=1}^i k_j^{(i-j)} \bar{q}_{i,j} \beta_{j,i} - \bar{d}_i \right]\end{aligned}\tag{3.79}$$

de la última ecuación se sigue que

$$\|z_i\| \leq \alpha_{i,i+1} \|z_{i+1}\| + \beta_{i,i+1}\tag{3.80}$$

donde los parámetros

$$\alpha_{i,i+1} = \frac{1}{k_i - \sum_{j=1}^i k_j^{(i-j)} \bar{q}_{i,j} \alpha_{j,i}} \quad y \quad \beta_{i,i+1} = \alpha_{i,i+1} \left[ \sum_{j=1}^i k_j^{(i-j)} \bar{q}_{i,j} \beta_{j,i} - \bar{d}_i \right] \quad (3.81)$$

son positivos si

$$k_i > \sum_{j=i}^r k_j^{(i-j)} \bar{q}_{i,j} \alpha_{j,i} \quad (3.82)$$

Sustituyendo (36) y (34) se obtiene el conjunto de desigualdades

$$\|z_j\| \leq \alpha_{j,i+1} \|z_{i+1}\| + \beta_{j,i+1}, \quad j = 1, 2, \dots, i-1, i$$

para el subespacio  $(z_1, z_2, \dots, z_{i-1}, z_i, z_{i+1})$  donde

$$\alpha_{j,i+1} = \alpha_{j,i} \alpha_{i,i+1} \quad y \quad \beta_{j,i+1} = \alpha_{j,i} \beta_{i,i+1} + \beta_{j,i} \quad (3.83)$$

La última región de convergencia en el subespacio  $(z_1, z_2, \dots, z_{r-2}, z_{r-1})$  es definida por la siguiente desigualdad

$$\|z_i\| \leq \alpha_{i,r-1} \|z_{r-1}\| + \beta_{i,r-1}, \quad i = 1, \dots, r-2 \quad (3.84)$$

Estas expresiones son usadas para evaluar la derivada en el tiempo de la función candidata de Lyapunov  $V_{r-1} = \frac{1}{2} z_{r-1}^T z_{r-1}$  sobre la trayectoria del bloque  $r-1$  de (3.71)

$$\begin{aligned} \dot{V}_{r-1} &= -k_{r-1} z_{r-1}^T z_{r-1} + z_{r-1}^T \left[ \Delta \bar{f}_{r-1}(z_1, \dots, z_{r-1}, t) + \bar{D}_{r-1}(z_1, \dots, z_{r-1}, t) w(t) \right] \\ \dot{V}_{r-1} &\leq -k_{r-1} \|z_{r-1}\|^2 + \|z_{r-1}\| \left[ \sum_{j=1}^{r-1} k_j^{(r-1-j)} \bar{q}_{r-1,j}(t) \|z_j\| + \bar{d}_{r-1}(t) \right] \\ \dot{V}_{r-1} &\leq - \left( k_{r-1} - \sum_{j=1}^{r-1} k_j^{(r-1-j)} \bar{q}_{r-1,j} \alpha_{j,r-1} \right) \|z_{r-1}\|^2 + \left( \sum_{j=1}^{r-1} k_j^{(r-1-j)} \bar{q}_{r-1,j} \beta_{j,r-1} + \bar{d}_{r-1} \right) \|z_{r-1}\| \end{aligned}$$

si  $k_{r-1}$  es elegido tal que

$$k_{r-1} > \sum_{j=1}^{r-1} k_j^{(r-1-j)} \bar{q}_{r-1,j} \alpha_{j,r-1}$$

entonces se obtiene

$$\dot{V}_{r-1} \leq -2\alpha_{r-1} V_{r-1} + \beta_{r-1} \sqrt{2V_{r-1}}$$

con

$$\alpha_{r-1} = k_{r-1} - \sum_{j=1}^{r-1} k_j^{(r-1-j)} \bar{q}_{r-1,j} \alpha_{j,r-1} \quad y \quad \beta_{r-1} = \sum_{j=1}^{r-1} k_j^{(r-1-j)} \bar{q}_{r-1,j} \beta_{j,r-1} + \bar{d}_{r-1}$$

positivos. Usando el método de comparación [24], y realizando el cambio de variable  $W_{r-1} = \sqrt{2V_{r-1}}$  tal que

$$\dot{W}_{r-1} = \frac{1}{2\sqrt{2V_{r-1}}} \dot{V}_{r-1} \leq -\frac{\alpha_{r-1}}{\sqrt{2V_{r-1}}} V_{r-1} + \beta_{r-1} \sqrt{2V_{r-1}}$$

o

$$\dot{W}_{r-1} \leq -\frac{\alpha_{r-1}}{2} W_{r-1} + \frac{\beta_{r-1}}{2}$$

De esta ecuación diferencial se sigue

$$W_{r-1}(t) \leq \left( W_{r-1}(t_0) + \frac{\beta_{r-1}}{\alpha_{r-1}} \right) e^{-\frac{\alpha_{r-1}}{2}(t-t_0)} + \frac{\beta_{r-1}}{\alpha_{r-1}}$$

como  $\|z_{r-1}\| = W_{r-1}$  se tiene que

$$\|z_{r-1}(t)\| \leq \left[ \|z_{r-1}(t_0)\| + \frac{\beta_{r-1}}{\alpha_{r-1}} \right] e^{-\frac{\alpha_{r-1}}{2}(t-t_0)} + \frac{\beta_{r-1}}{\alpha_{r-1}} \quad (3.85)$$

y finalmente

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|z_{r-1}(t)\| \leq h_{r-1} \quad (3.86)$$

donde  $h_{r-1} = \frac{\beta_{r-1}}{\alpha_{r-1}}$ . Así el análisis de las funciones candidatas de Lyapunov  $V_i$ ,  $i = 1, \dots, r-1$  desde el primero hasta el bloque  $r-1$ , dió como resultado el límite superior (3.85) y el acotamiento (3.86) en la solución de  $\|z_{r-1}(t)\|$ . Usando estas expresiones, la desigualdad (35) y regresándose desde el bloque  $r-1$  hasta el primero de (3.71), es posible obtener paso a paso acotamientos en las soluciones  $\|z_{r-2}(t)\|, \|z_{r-3}(t)\|, \dots, \|z_1(t)\|$ . Para  $r-2$  se tiene de la desigualdad (3.79) y de la ec. (3.81).

$$\begin{aligned} \dot{V}_{r-2} &\leq -\alpha_{r-2} \|z_{r-2}\|^2 + (\|z_{r-1}\| + \beta_{r-2}) \|z_{r-2}\| \\ \dot{V}_{r-2} &\leq -2\alpha_{r-2} V_{r-2} + (\|z_{r-1}\| + \beta_{r-2}) \sqrt{2V_{r-2}} \end{aligned} \quad (3.87)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_{r-2} &= \frac{1}{\alpha_{r-2,r-1}} = k_{r-2} - \sum_{j=1}^{r-2} k_j^{(r-2-j)} \bar{q}_{r-2,j} \alpha_{j,r-2} \\ \beta_{r-2} &= \frac{\beta_{r-2,r-1}}{\alpha_{r-2,r-1}} = \sum_{j=1}^{r-2} k_j^{(r-2-j)} \bar{q}_{r-2,j} \beta_{j,r-2} + \bar{d}_{r-2} \end{aligned}$$

sustituyendo (3.85) en (3.87) y aplicando otra vez el método de comparación

$$\|z_{r-2}(t)\| \leq \left[ \|z_{r-2}(t_0)\| - \frac{\beta_{r-2} + h_{r-1}}{\alpha_{r-2}} - \frac{\|z_{r-1}(t_0)\| - h_{r-1}}{\alpha_{r-1} - \alpha_{r-2}} \right] e^{-\frac{\alpha_{r-2}}{2}(t-t_0)}$$

$$+ \left[ \frac{\|z_{r-1}(t_0)\| - h_{r-1}}{\alpha_{r-1} - \alpha_{r-2}} \right] e^{-\frac{\alpha_{r-2}}{2}(t-t_0)} + \frac{\beta_{r-2} + h_{r-1}}{\alpha_{r-2}} \quad (3.88)$$

y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \|z_{r-2}(t)\| \leq h_{r-2} \quad (3.89)$$

donde

$$h_{r-2} = \frac{\beta_{r-2} + h_{r-1}}{\alpha_{r-2}} = \alpha_{r-2,r-1} h_{r-1} + \beta_{r-2,r-1}$$

Los resultados (3.88) y (3.89) y la desigualdad (3.79) son usados en  $\dot{V}_{r-3}$  para obtener los acotamientos sobre la solución de  $\|z_{r-3}(t)\|$ , y así sucesivamente hasta el primer bloque.

Por otro lado el acotamiento (3.89) puede ser calculado por sustitución de (3.86) en la desigualdad (3.84) para  $\|z_{r-2}(t)\|$ , esto es  $\|z_{r-2}\| \leq \alpha_{r-2,r-1} \|z_{r-1}\| + \beta_{r-2,r-1}$ . Así usando las desigualdades (3.84) y (3.86) y el hecho que la suma  $\sum_{i=2}^r \dot{V}_i$  es negativa fuera de la región (3.84), resulta

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \|z_i\| \leq h_i$$

donde  $h_i = \alpha_{i,r-1} h_{r-1} + \beta_{i,r-1}$ ,  $i = 3, \dots, r-1$ , entonces si  $k_1, \dots, k_{r-1}$  son elegidas tal que la recurrente desigualdad

$$k_i > \sum_{j=1}^{i-1} k_j^{(i-j)} \bar{q}_{i,j} \alpha_{j,i}, \quad i = 2, \dots, r$$

es satisfecha, entonces queda comprobado el teorema.

**Nota 1.** De los resultados obtenidos se observa que en el caso de perturbaciones desvanecientes, es decir  $d_i(t) \equiv 0$ , el sistema (3.71) llega a ser exponencialmente estable.

**Nota 2.** Es de interés notar que

$$h_{r-1} = \frac{\sum_{j=1}^{r-1} k_j^{(r-1-j)} \bar{q}_{r-1,j} \beta_{j,r-1} + \bar{d}_{r-1}}{k_{r-1} - \sum_{j=1}^{r-1} k_j^{(r-1-j)} \bar{q}_{r-1,j} \alpha_{j,r-1}},$$

con valores  $k_i$ ,  $i = 1, \dots, r-2$  seleccionados e incrementando el valor de  $k_{r-1}$ . El acotamiento  $h_{r-1}$  llega a ser arbitrariamente pequeño. Igualmente para la expresión

$$h_{r-2} = \frac{1}{k_{r-2} - \sum_{j=1}^{r-1} k_j^{(r-1-j)} \bar{q}_{r-2,j} \alpha_{j,r-2}} \left[ \frac{\sum_{j=1}^{r-1} k_j^{(r-1-j)} \bar{q}_{r-1,j} \beta_{j,r-1} + \bar{d}_{r-1}}{k_{r-1} - \sum_{j=1}^{r-1} k_j^{(r-1-j)} \bar{q}_{r-1,j} \alpha_{j,r-1}} \right]$$

$$+ \frac{\sum_{j=1}^{r-1} k_j^{(r-1-j)} \bar{q}_{r-2,j} \beta_{j,r-2} + \bar{d}_{r-2}}{k_{r-2} - \sum_{j=1}^{r-1} k_j^{(r-1-j)} \bar{q}_{r-2,j} \alpha_{j,r-2}}$$

con valores  $k_i$ ,  $i=1, \dots, r-3$  seleccionados, y  $k_{r-2} \rightarrow \infty$  y  $\frac{k_{r-1}}{k_{r-2}} \rightarrow \infty$  se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_{r-2} = 0$$

Consecuentemente es posible verificar paso a paso que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_i = 0 \text{ con } k_1 \rightarrow \infty \text{ y } \frac{k_i}{k_{i+1}} \rightarrow \infty, \quad i = 2, \dots, r-1$$

con lo cual garantizamos que el sistema (3.71) en este caso es exponencialmente estable.

# CAPITULO IV

## Control del Generador Síncrono

En este capítulo se describe el modelado de la máquina síncrona, así como la aplicación de los algoritmos de control previamente descritos, en los capítulos anteriores.

### 4.1 Introducción

Los sistemas eléctricos de potencia pueden ser de diferente tamaño y estructura, pero básicamente presentan características comunes. Están compuestos esencialmente de sistemas de operación trifásica, que operan a valores rms de voltaje constante. En la generación y transmisión de energía se usa equipo trifásico; en la industria se usa trifásico casi totalmente, mientras que en los sistemas comerciales y domésticos pueden ser sistemas trifásicos y/o monofásicos. La demanda de energía se distribuye de tal manera que la carga total es trifásica balanceada.

Se usan máquinas síncronas para la generación de electricidad. Primero se convierte la energía primaria en energía mecánica por medio del primomotor, después se convierte en energía eléctrica a través de los generadores síncronos. La potencia eléctrica es transmitida a usuarios dispersos en áreas muy grandes, por lo cual se usa un sistema de distribución de varios niveles de voltaje; es común clasificarlos en: sistemas de transmisión, sistemas de subtransmisión y sistemas de distribución.

La función principal de un sistema eléctrico de potencia es convertir energía de una fuente primaria en energía eléctrica y transportarla a los puntos de consumo. La ventaja principal de la energía eléctrica es que puede ser transportada y controlada con relativa facilidad y con un alto grado de eficiencia y confiabilidad. Todos los sistemas eléctricos de potencia deben cumplir con los siguientes requerimientos fundamentales:

- 1) El sistema debe de ser capaz de soportar los continuos cambios en la demanda de potencia activa y reactiva, ya que la energía eléctrica no puede ser almacenada en grandes cantidades.
- 2) El sistema deberá abastecer energía a un mínimo costo y con el mínimo impacto ecológico.

- 3) La calidad del suministro de energía eléctrica debe cumplir con las normas de calidad, de voltaje constante, frecuencia constante y un cierto nivel de confiabilidad.

Los sistemas de control comprenden un complejo arreglo de instrumentos que son usados para cumplir con los requerimientos arriba descritos. En el caso de las unidades de generación los controles principales son el control del primomotor y el control de excitación; el primero se encarga de la regulación de la velocidad síncrona mientras que el segundo se encarga de la regulación de voltaje. La potencia de salida de un generador es determinada por su sistema de control. En este trabajo se aplican técnicas no lineales de control exclusivamente sobre el control de excitación; los controles del primomotor se consideran bajo una acción constante. Básicamente se desea analizar hasta qué punto las técnicas de control aplicadas al excitador, son suficientemente robustas ante perturbaciones y cambios en las demandas de energía. En este trabajo no se incluye la acción del control del gobernador. Las pruebas que se aplican al algoritmo de control son de tres tipos: perturbaciones en el par mecánico, cambios en la demanda, y pruebas de corto circuito trifásico.

## 4.2 Modelado de la Máquina Síncrona

El generador síncrono es un dispositivo electromecánico rotativo, que se modelará a partir de la máquina ideal. El generador síncrono trifásico tiene tres devanados en el estator, separados  $120^\circ$  eléctricos; estos son excitados con corriente alterna trifásica con una frecuencia depende de la velocidad del rotor y el número de polos. Tiene un devanado en el rotor excitado con corriente continua. En los rotores de polos salientes existen barras de amortiguamiento (en corto circuito) en donde se inducen corrientes por efecto de variación en el tiempo del flujo del estator o del rotor o por cambios en la velocidad del rotor. En los rotores sólidos aparecen las corrientes inducidas por efecto de Faraday que tiene el mismo efecto que las barras amortiguadoras.

El efecto de barra amortiguadora o su equivalente se representa por tres devanados en corto circuito uno alineado con el campo principal (eje directo) y otros dos alineados  $90^\circ$  con respecto al campo principal (eje cuadratura), figura 4.1.

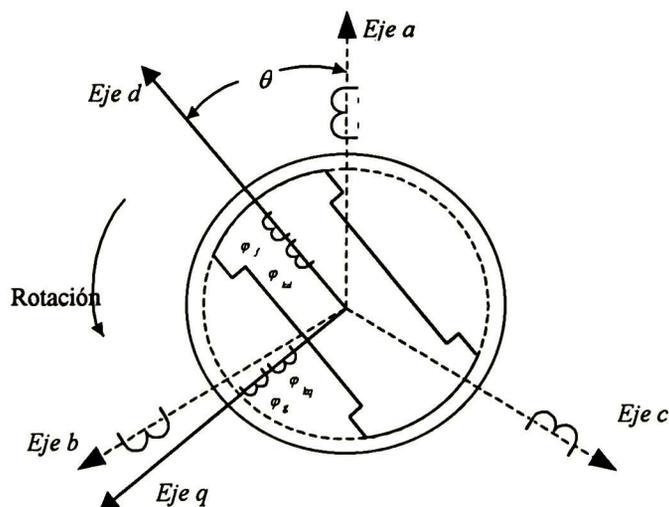


Figura 4.1: Representación fasorial de un generador síncrono

## 4.2.1 Ecuaciones de Equilibrio

### *Ecuaciones del transitorio eléctrico*

Las ecuaciones de equilibrio eléctrico para las máquinas eléctricas se expresan en términos de la segunda ley de Kirchoff para cada devanado. Por lo que tendremos

Para el estator

$$\begin{aligned} V_a &= -r_a i_a + \rho \varphi_a \\ V_b &= -r_b i_b + \rho \varphi_b \\ V_c &= -r_c i_c + \rho \varphi_c \end{aligned} \quad (4.1)$$

o en forma compacta:

$$V_{abc} = r_{abc} i_{abc} + \rho \varphi_{abc} \quad (4.2)$$

donde  $V_{abc}, i_{abc}, r_{abc}, \varphi_{abc}$ , son el voltaje, corriente, resistencia y enlaces de flujo para las fases  $abc$ ,  $\rho = \frac{d}{dt}$  es el operador diferencial.

Para el rotor

$$V_f = r_f i_f + \rho \varphi_f \quad (4.3)$$

$$V_g = r_g i_g + \rho \varphi_g \quad (4.4)$$

$$V_{kd} = r_{kd} i_{kd} + \rho \varphi_{kd} \quad (4.5)$$

$$V_{kq} = r_{kq} i_{kq} + \rho \varphi_{kq} \quad (4.6)$$

además

$$V_g = V_{kd} = V_{kq} = 0.$$

El subíndice “ $f$ ” denota devanado de campo, y los subíndices  $g, kd, kq$ , pertenecen a los devanados de amortiguamiento.

La forma compacta de las ecuaciones de equilibrio es:

$$V = ri + \rho[\varphi] \quad (4.7)$$

donde:

$$V = \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \\ V_f \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_f \\ i_g \\ i_{kd} \\ i_{kq} \end{bmatrix}, \quad \varphi = \begin{bmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \\ \varphi_c \\ \varphi_f \\ \varphi_g \\ \varphi_{kd} \\ \varphi_{kq} \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} -r_a & & & & & & \\ & -r_b & & & & & 0 \\ & & -r_c & & & & \\ & & & r_f & & & \\ & & & & r_g & & \\ & 0 & & & & r_{kd} & \\ & & & & & & r_{kq} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Los enlaces de flujo son expresados en términos de las inductancias propias y mutuas:

$$\begin{bmatrix} \varphi_a \\ \varphi_{ba} \\ \varphi_c \\ \varphi_f \\ \varphi_g \\ \varphi_{kd} \\ \varphi_{kq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} & L_{ac} & L_{af} & L_{ag} & L_{akd} & L_{akq} \\ L_{ab} & L_{bb} & L_{bc} & L_{bf} & L_{bg} & L_{bkd} & L_{bkq} \\ L_{ac} & L_{bc} & L_{cc} & L_{cf} & L_{cg} & L_{ckd} & L_{ckq} \\ L_{af} & L_{bf} & L_{cf} & L_{ff} & 0 & L_{fkd} & 0 \\ L_{ag} & L_{bg} & L_{cg} & 0 & L_{gg} & 0 & L_{gkq} \\ L_{akd} & L_{bkd} & L_{ckd} & L_{fkd} & 0 & L_{kdkd} & 0 \\ L_{akq} & L_{bkq} & L_{ckq} & 0 & L_{gkq} & 0 & L_{kqkq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_f \\ i_g \\ i_{kd} \\ i_{kq} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

que se puede escribir en bloques en términos del estator y rotor.

$$\begin{bmatrix} \varphi_s \\ \varphi_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ss} & L_{sr} \\ L_{rs} & L_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

o en forma compacta:

$$\varphi = Li \quad (4.11)$$

Derivando esta expresión tenemos:

$$\rho[\varphi] = \rho[L]i + L\rho[i] \quad (4.12)$$

Como las inductancias dependen de la posición del rotor, nos conviene hacer un cambio de variables en el primer término de la expresión de derivadas de los enlaces de flujo, multiplicando y dividiendo por  $d\theta$

$$\rho[L] = \frac{d\theta}{d\theta} \frac{d}{dt} [L] = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} [L] = \omega_r \frac{d}{d\theta} [L] \quad (4.13)$$

donde  $\omega_r$  es la velocidad del rotor. Con lo anterior (4.12) queda como

$$\rho[\varphi] = \omega_r \frac{d}{d\theta} [L]i + L\rho[i] \quad (4.14)$$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación de voltaje (4.7) en forma compacta resulta

$$V = ri + \omega_r \frac{d}{d\theta} [L]i + L\rho[i] \quad (4.15)$$

El problema principal al resolver esta ecuación radica en los cambios en la matriz de inductancia, los cuales dependen de la posición del rotor; la complejidad de estos cálculos es palpable en el proceso de integración numérica, donde la matriz de inductancia y su inversa tienen que ser calculadas en cada instante de muestreo, lo cual es muy ineficiente. Es común y recomendable transformar la ecuación (4.15), por un equivalente en donde la matriz de inductancia no este afectada por los cambios en la posición del rotor; es decir el sistema original

$$\varphi = L(\theta)i \quad (4.16)$$

se transforma en otro

$$\varphi' = L'i' \quad (4.17)$$

de tal forma que la nueva matriz de inductancia  $L'$  no es función de la posición del rotor. Con esto el sistema de ecuaciones de (4.17) es transformado en uno nuevo

$$V' = r'i' + \omega_r Gi + L'\rho[i] \quad (4.18)$$

donde  $V' = TV$ ,  $i' = Ti$ ,  $\varphi' = T\varphi$ ,  $G$  y  $L'$  son matrices constantes. La matriz de transformación que hace constante la matriz de inductancia se le conoce como matriz de transformación de Park

$$T = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta - 120) & \cos(\theta + 120) \\ -\text{sen}\theta & -\text{sen}(\theta - 120) & -\text{sen}(\theta + 120) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Los nuevos vectores son

$$V' = \begin{bmatrix} V_d \\ V_q \\ V_0 \\ V_f \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i = \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \\ i_f \\ i_g \\ i_{kd} \\ i_{kq} \end{bmatrix}, \quad \varphi = \begin{bmatrix} \varphi_d \\ \varphi_q \\ \varphi_0 \\ \varphi_f \\ \varphi_g \\ \varphi_{kd} \\ \varphi_{kq} \end{bmatrix}, \quad r' = r \quad (4.20)$$

donde las matrices (expresadas en p.u.)

$$L' = T^{-1}LT = \begin{bmatrix} -L_d & 0 & 0 & L_{md} & 0 & L_{md} & 0 \\ 0 & -L_q & 0 & 0 & L_{mq} & 0 & L_{mq} \\ 0 & 0 & L_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -L_{md} & 0 & 0 & L_f & 0 & L_{md} & 0 \\ 0 & -L_{mq} & 0 & 0 & L_g & 0 & L_{mq} \\ -L_{md} & 0 & 0 & L_{md} & 0 & L_{kd} & 0 \\ 0 & -L_{mq} & 0 & 0 & L_{mq} & 0 & L_{kq} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

y

$$G' = \begin{bmatrix} 0 & L_q & 0 & 0 & -L_{mq} & 0 & -L_{mq} \\ -L_d & 0 & 0 & L_{md} & 0 & L_{md} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

son matrices constantes.

### Ecuaciones de equilibrio mecánico

La ecuación de equilibrio mecánico se expresa como la suma de los pares igualada a cero.

$$T_m - T_e - T_i - T_k - T_D = 0 \quad (4.23)$$

donde  $T_m$  es el par de entrada al primomotor.  $T_e$  es el par electromecánico.  $T_i$  es el par inercial.  $T_k$  es el par elástico, y  $T_D$  es el par de amortiguamiento viscoso.

En este trabajo se supone que el par mecánico permanece constante. El par electromecánico depende de las variables eléctricas. Para su cálculo es necesario obtener el transitorio eléctrico del generador. Una expresión matemática común para el cálculo del par electromecánico es:

$$T_e = \varphi_d i_q - \varphi_q i_d \quad (4.24)$$

El par inercial es:

$$T_i = T_j \frac{d\omega_r}{dt} \quad (4.25)$$

El par elástico es proporcional al coeficiente de deformación por el desplazamiento angular torcional de la flecha del generador

$$T_k = K(\theta_1 - \theta_2) \quad (4.26)$$

El par de amortiguamiento mecánico es proporcional a la velocidad del rotor

$$T_D = D \omega_r \quad (4.27)$$

En los estudios de máquinas síncronas en sistemas de potencia es común despreciar el par elástico y de amortiguamiento viscoso. Considerando lo anterior la ecuación de equilibrio mecánico queda

$$T_j \frac{d\omega_r}{dt} = T_m - T_e \quad (4.28)$$

Por último se busca una ecuación que relacione el desplazamiento angular con lo anterior

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_r \quad (4.29)$$

las ecuaciones (4.28) y (4.29) representan las ecuaciones de equilibrio mecánico del generador.

#### 4.2.2 Representación por Medio del Espacio de Estado

Pueden existir varias representaciones en variables de estado para un sistema. En forma general un sistema en el espacio de estado tiene la siguiente forma

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u \quad (4.30)$$

donde  $x \in D_x \in R^n$   $u \in R^m$ ,  $f$  y  $B(x)$  son mapeos suaves. El vector  $x$  representa las variables de estado y  $u$  representa el control. Para realizar la representación en el espacio de estado se necesita manipular las ecuaciones físicas de un sistema de tal forma que se pueda obtener la razón de cambio respecto al tiempo de cada variable de estado seleccionada.

Para un generador síncrono en general existen tres representaciones en la forma normal. La primera de ellas selecciona como variables de estado a todas las corrientes del estator y del rotor. En la segunda representación las variables de estado son los enlaces de flujos, esta representación es más sencilla que la primera y requiere menos cálculos aritméticos, sin embargo en la práctica es más conveniente trabajar en términos de corrientes y voltajes, de aquí resulta la tercera representación la cual es mixta. En la representación mixta la dinámica del estator se describe en términos de voltajes y corrientes; esto es muy útil ya que la red donde está conectado el generador también se formula bajo estas variables. Esta representación es la que se describirá a continuación. Para obtener el espacio de estado mixto del generador síncrono se empieza con las ecuaciones (4.18), (4.20), (4.21) y (4.22), donde obtenemos las fórmulas base de voltajes y enlaces de flujo:

$$V_d = -r i_d + \dot{\varphi}_d - \omega \varphi_q \quad (4.31)$$

$$V_q = -r i_q + \dot{\varphi}_q + \omega \varphi_d \quad (4.32)$$

$$V_f = r i_f + \dot{\varphi}_f \quad (4.33)$$

$$0 = r_g i_g + \dot{\varphi}_g \quad (4.34)$$

$$0 = r_{kd} i_{kd} + \dot{\varphi}_{kd} \quad (4.35)$$

$$0 = r_{kq} i_{kq} + \dot{\varphi}_{kq} \quad (4.36)$$

$$\varphi_d = -L_d i_d + L_{md} i_f + L_{md} i_{kd} \quad (4.37)$$

$$\varphi_f = -L_{md} i_d + L_f i_f + L_{md} i_{kd} \quad (4.38)$$

$$\varphi_{kd} = -L_{md} i_d + L_{md} i_f + L_{kd} i_{kd} \quad (4.39)$$

$$\varphi_q = -L_q i_q + L_{mq} i_g + L_{mq} i_{kq} \quad (4.40)$$

$$\varphi_g = -L_{mq} i_q + L_g i_g + L_{mq} i_{kq} \quad (4.41)$$

$$\varphi_{kq} = -L_{mq} i_q + L_{mq} i_g + L_{kq} i_{kq} \quad (4.42)$$

#### Procedimiento para encontrar la dinámica del rotor.

El procedimiento consiste en eliminar las corrientes del rotor y los enlaces de flujo del estator de las ecuaciones (4.37-4.42) y expresarlas en término de las corrientes del estator y enlaces de flujo del rotor resultando:

Eje directo:

$$\varphi_d = -L_d'' i_d + [L_d'' - l_a] \left[ \frac{\varphi_f}{l_f} + \frac{\varphi_{kd}}{l_{kd}} \right] \quad (4.43)$$

$$\frac{d\varphi_f}{dt} = V_f + \left[ -\frac{L_d'' - l_a}{L_d' - l_a} \frac{L_{md}}{T_{do}'} \right] i_d + \left[ \frac{L_d'' - l_a}{L_d' - l_a} \frac{L_{md}}{T_{do}'' l_{kd}} \right] \varphi_{kd} + \left[ -\frac{1}{T_{do}'} \left[ 1 + \frac{L_d'' - l_a}{l_{kd} l_f} L_{md} \right] \right] \varphi_f \quad (4.44)$$

$$\frac{d\varphi_{kd}}{dt} = \left[ -\frac{L_d' - l_a}{T_{do}''} \right] i_d + \left[ \frac{L_d'' - l_a}{T_{do}'' l_f} \right] \varphi_f + \left[ -\frac{1}{T_{do}''} \right] \varphi_{kd} \quad (4.45)$$

donde  $T_{do}' = \frac{L_f}{r_f}$  [seg] y  $T_{do}'' = \frac{L_{kd}'}{r_{kd}}$  [seg].

Para el eje en cuadratura se tiene

$$\varphi_q = -L_q'' i_q + [L_q'' - l_a] \left[ \frac{\varphi_g}{l_g} + \frac{\varphi_{kq}}{l_{qd}} \right] \quad (4.46)$$

$$\frac{d\varphi_g}{dt} = \left[ -\frac{L_q'' - l_a}{L_q' - l_a} \frac{L_{mq}}{T_{qo}'} \right] i_q + \left[ \frac{L_q'' - l_a}{L_q' - l_a} \frac{L_{mq}}{T_{qo}'' l_{kq}} \right] \varphi_{kq} + \left[ -\frac{1}{T_{qo}'} \left[ 1 + \frac{L_q'' - l_a}{l_{kq} l_q} L_{mq} \right] \right] \varphi_q \quad (4.47)$$

$$\frac{d\varphi_{kq}}{dt} = \left[ -\frac{L_q' - l_a}{T_{qo}''} \right] i_q + \left[ \frac{L_q' - l_a}{T_{qo}'' l_g} \right] \varphi_g + \left[ -\frac{1}{T_{qo}''} \right] \varphi_{kq} \quad (4.48)$$

donde

$$T_{qo}' = \frac{L_g}{r_g} \text{ [seg]} \text{ y } T_{qo}'' = \frac{L_{kq}}{r_{kq}} \text{ [seg]}.$$

Procedimiento para obtener la dinámica del estator. De las ecuaciones (4.31) y (4.32) se sustituyen las expresiones de los enlaces flujos y derivadas del flujo del estator y después de algunos desarrollos algebraicos se obtiene.

Derivando (4.43) y (4.46):

$$\frac{d\varphi_d}{dt} = L_d'' i_d + \left[ \frac{L_d'' - l_a}{l_f} \right] \frac{d\varphi_f}{dt} + \left[ \frac{L_d'' - l_a}{l_{kd}} \right] \frac{d\varphi_{kd}}{dt} \quad (4.49)$$

$$\varphi_q = -L_q'' i_q + [L_q'' - l_a] \left[ \frac{\varphi_g}{l_g} + \frac{\varphi_{kq}}{l_{kq}} \right] \quad (4.50)$$

Sustituyendo en (4.49) y (4.46) en (4.31) se obtiene  $V_d$

$$V_d = r_d i_d - L_d'' \frac{di_d}{dt} + \left[ \frac{L_d'' - l_a}{l_f} \right] \frac{d\varphi_f}{dt} \varphi_f + \left[ \frac{L_d'' - l_a}{l_{kd}} \right] \frac{d\varphi_{kd}}{dt} \varphi_{kd} - \omega \varphi_q \quad (4.51)$$

Sustituyendo las derivadas de los enlaces de flujo  $\dot{\varphi}_f$  (4.44) y  $\dot{\varphi}_{kd}$  (4.45) se obtiene la derivada de la corriente del estator de eje directo

$$\begin{aligned} \frac{di_d}{dt} = & \left[ -\frac{1}{L_d''} \right] V_d + \left[ \frac{L_d'' - l_a}{L_d'' l_f} \right] V_f + \left[ -\frac{r_d}{L_d''} - \frac{L_d'' - l_a}{L_d'' l_f} \frac{L_d'' - l_a}{L_d' - l_a} \frac{L_{md}}{T_{do}'} - \frac{L_d'' - l_a}{L_d'' l_{kd}} \frac{L_d' - l_a}{T_{do}''} \right] i_d \\ & + \left[ \frac{L_d'' - l_a}{L_d'' l_{kd}} \frac{L_d' - l_a}{T_{do}'' l_f} - \frac{L_d' - l_a}{T_{do}'' l_f T_{do}'} \left[ 1 + \frac{L_d' - l_a}{l_{kd} l_f} L_{md} \right] \right] \varphi_f + \left[ \frac{L_d'' - l_a}{L_d'' l_f} \frac{L_d'' - l_a}{L_d' - l_a} \frac{L_{md}}{T_{do}'' l_{kd}} - \frac{L_d'' - l_a}{L_d'' l_{kd} T_{do}''} \right] \varphi_{kd} \\ & + \left[ -\frac{L_q' - l_a}{L_d' l_g} \right] \omega \varphi_g + \left[ -\frac{L_q' - l_a}{L_d' l_{kq}} \right] \omega \varphi_{kq} + \left[ \frac{L_q'}{L_d'} \right] \omega i_q \end{aligned} \quad (4.52)$$

La corriente de eje en cuadratura se obtiene siguiendo el mismo procedimiento que para la corriente de eje directo resultando

$$\begin{aligned}
\frac{di_q}{dt} = & \left[ -\frac{1}{L_q''} \right] V_q + \left[ -\frac{r_q}{L_q''} - \frac{L_q'' - l_a}{L_q'' l_g} \frac{L_q'' - l_a}{L_q'' - l_a} \frac{L_{mq}}{T_{qo}'} - \frac{L_q'' - l_a}{L_q'' l_{kq}} \frac{L_q' - l_a}{T_{qo}''} \right] i_q \\
& + \left[ \frac{\dot{L}_q - l_a}{L_q \ell_{kq}} \frac{\dot{L}_q - l_a}{T_{qo} \ell_g} - \frac{\dot{L}_q - l_a}{L_q \ell_g T_{qo}'} \left[ 1 + \frac{\dot{L}_q - l_a}{\ell_{kq} \ell_g} L_{mq} \right] \right] \varphi_g + \left[ \frac{\dot{L}_q - l_a}{L_q \ell_g} \frac{\dot{L}_q - l_a}{L_q - l_a} \frac{L_{mq}}{T_{qo} \ell_{kq}} - \frac{\dot{L}_q - l_a}{L_q \ell_{kq} T_{qo}'} \right] \varphi_{kq} \\
& + \left[ \frac{\dot{L}_d - l_a}{L_q \ell_f} \right] \omega \varphi_f + \left[ \frac{\dot{L}_d - l_a}{L_q \ell_{kd}} \right] \omega \varphi_{kd} + \left[ -\frac{\dot{L}_d}{L_q} \right] \omega i_d
\end{aligned} \tag{4.53}$$

### Transitorio electromecánico

$$T_i \frac{d^2 \delta}{dt^2} = T_m - T_e \tag{4.54}$$

La ecuación (4.54) se puede descomponer en dos ecuaciones de primer orden:

$$\frac{d\delta}{dt} = \omega - \omega_0 \tag{4.55}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{T_j} [T_m - T_e] \tag{4.56}$$

donde  $\omega$  es la velocidad del rotor, y el par electromecánico esta dado por la expresión:

$$T_e = \varphi_d i_q - \varphi_q i_d \tag{4.57}$$

Sustituyendo (4.43) y (4.46) en (4.57) resulta:

$$T_e = -\dot{L}_d i_d i_q + [\dot{L}_d - l_a] \left[ \frac{\varphi_f}{\ell_f} + \frac{\varphi_{kd}}{\ell_{kd}} \right] i_q + \dot{L}_q i_d i_q - [\dot{L}_q - l_a] \left[ \frac{\varphi_g}{\ell_g} + \frac{\varphi_{kq}}{\ell_{kq}} \right] i_d \tag{4.58}$$

Para representar las ecuaciones de equilibrio mecánico en el sistema por unidad es común expresar la constante de inercia del rotor ( $H$ ) en segundos.

$$H = \frac{\frac{1}{2} T_j \omega_B^2}{T_B \omega_B} = \frac{\frac{1}{2} T_j \omega_B}{T_B} \tag{4.59}$$

donde  $\omega_B$  es la velocidad base que es igual a la velocidad síncrona  $2\pi f$ . El término  $T_B \omega_B$  representa la potencia base. De la ecuación anterior obtenemos

$$T_j = \frac{2H T_B}{\omega_B} \tag{4.60}$$

Sustituyendo lo anterior en (4.56)

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega_B}{2H} \left( \frac{T_m}{T_B} - \frac{T_e}{T_B} \right) \tag{4.61}$$

de donde  $\frac{T_m}{T_B} = T_m \text{ p.u.}$  y  $\frac{T_e}{T_B} = T_e \text{ p.u.}$ , por lo que finalmente

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega_B}{2H} (T_m - T_e) \quad (4.62)$$

donde la velocidad del rotor esta en radianes por segundo, el tiempo en segundos,  $H$  en segundos y el par mecánico y electromecánico en p.u. Con todas las consideraciones hechas finalmente obtenemos el modelo en espacio de estado.

**Modelo del generador síncrono en espacio de estado:**

$$\frac{d\delta}{dt} = \omega - \omega_0$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega_B}{2H} \left[ T_m - a_1 \varphi_f i_q + a_2 \varphi_{kd} i_q + a_3 \varphi_g i_d + a_4 \varphi_{kq} i_d + a_5 i_d i_q \right]$$

$$\frac{d\varphi_f}{dt} = b_1 i_d + b_2 \varphi_{kd} + b_3 \varphi_f + V_f$$

$$\frac{d\varphi_g}{dt} = c_1 i_q + c_2 \varphi_{kq} + c_3 \varphi_g \quad (4.63)$$

$$\frac{d\varphi_{kd}}{dt} = d_1 i_d + d_2 \varphi_f + d_3 \varphi_{kd}$$

$$\frac{d\varphi_{kq}}{dt} = e_1 i_q + e_2 \varphi_g + e_3 \varphi_{kq}$$

$$\frac{di_d}{dt} = h_1 V_d + h_2 V_f + h_3 i_d + h_4 \varphi_f + h_5 \varphi_{kd} + h_6 \omega \varphi_g + h_7 \omega \varphi_{kq} + h_8 \omega i_q$$

$$\frac{di_q}{dt} = k_1 V_q + k_2 i_q + k_3 \varphi_g + k_4 \varphi_{kq} + k_5 \omega i_d + k_6 \omega \varphi_f + k_7 \omega \varphi_{kd}$$

donde

$$a_1 = \left[ \frac{\bar{L}_d - \ell_a}{\ell_f} \right], \quad a_2 = \left[ \frac{\bar{L}_d - \ell_a}{\ell_{kd}} \right], \quad a_3 = \left[ -\frac{\bar{L}_q - \ell_a}{\ell_g} \right], \quad a_4 = \left[ -\frac{\bar{L}_q - \ell_a}{\ell_{kq}} \right], \quad a_5 = [\bar{L}_q - \bar{L}_d];$$

$$b_1 = \left[ -\frac{1}{T'_{do}} \cdot \frac{\bar{L}_d - \ell_a}{\bar{L}_a - \ell_a} \cdot L_{md} \right], \quad b_2 = \left[ \frac{1}{T'_{do}} \cdot \frac{\bar{L}_a - \ell_a}{\bar{L}_a - \ell_a} \cdot \frac{L_{wd}}{\ell_{kd}} \right], \quad b_3 = \left[ -\frac{1}{T'_{do}} \left[ 1 + \frac{\bar{L}_d - \ell_a}{\ell_{kd} \ell_f} \cdot L_{md} \right] \right];$$

$$c_1 = \left[ -\frac{1}{T'_{do}} \cdot \frac{\bar{L}_q - \ell_a}{\bar{L}_a - \ell_a} \cdot L_{mq} \right], \quad c_2 = \left[ \frac{1}{T'_{do}} \cdot \frac{\bar{L}_q - \ell_a}{\bar{L}_a - \ell_a} \cdot \frac{L_{mq}}{\ell_{kq}} \right], \quad c_3 = \left[ -\frac{1}{T'_{do}} \left[ 1 + \frac{\bar{L}_q - \ell_a}{\ell_{kq} \ell_g} \cdot L_{mq} \right] \right];$$

$$\begin{aligned}
d_1 &= \left[ -\frac{L_d - l_a}{T_{do}'} \right], d_2 = \left[ \frac{L_d' - l_a}{T_{do}' l_f} \right], d_3 = \left[ -\frac{1}{T_{do}'} \right]; & e_1 &= \left[ -\frac{L_q' - l_a}{T_{qo}'} \right], e_2 = \left[ \frac{L_q' - l_a}{T_{qo}' l_g} \right], \\
e_3 &= \left[ -\frac{1}{T_{qo}'} \right]; \\
h_1 &= \left[ -\frac{w_B}{L_d'} \right], h_2 = \left[ \frac{w_B [L_d' - l_a]}{L_d' l_f} \right], h_3 = \left[ -\frac{r w_B}{L_d'} - \frac{L_d' - l_a}{L_d' l_f} \cdot \frac{L_d' - l_a}{L_d' - l_a} \cdot \frac{L_{md}}{T_{do}'} - \frac{L_d' - l_a}{L_d' l_{kd}} \cdot \frac{L_d' - l_a}{T_{do}'} \right], \\
h_4 &= \left[ \frac{L_d' - l_a}{l_{kd} T_{do}'} \cdot \frac{L_d - l_a}{L_d' l_f} - \frac{L_d' - l_a}{L_d' l_f T_{do}'} \left[ 1 + \frac{L_d' - l_a}{l_{kd} l_f} \cdot L_{md} \right] \right], \\
h_5 &= \left[ \frac{L_d' - l_a}{L_d' l_f T_{do}'} \cdot \frac{L_d' - l_a}{L_d' - l_a} \cdot \frac{L_{md}}{l_{kd}} - \frac{L_d' - l_a}{L_d' l_{kd} T_{do}'} \right], \\
h_6 &= \left[ -\frac{L_q' - l_a}{L_d' l_g} \right], h_7 = \left[ -\frac{L_q' - l_a}{L_d' l_{kq}} \right], h_8 = \left[ \frac{L_q'}{L_d'} \right]; \\
k_1 &= \left[ -\frac{w_B}{L_q'} \right], k_2 = \left[ -\frac{r w_B}{L_q'} - \frac{L_q' - l_a}{L_q' l_g} \cdot \frac{L_q' - l_a}{L_q' - l_a} \cdot \frac{L_{mq}}{T_{qo}'} - \frac{L_q' - l_a}{L_q' l_{kq}} \cdot \frac{L_q' - l_a}{T_{qo}'} \right], \\
k_3 &= \left[ \frac{L_q' - l_a}{l_{kq} T_{qo}'} \cdot \frac{L_q - l_a}{L_q' l_g} - \frac{L_q' - l_a}{L_q' l_g T_{qo}'} \left[ 1 + \frac{L_d' - l_a}{l_{kq} l_g} L_{mq} \right] \right], & k_4 &= \left[ \frac{L_q' - l_a}{L_q' l_g T_{qo}'} \cdot \frac{L_q' - l_a}{L_q' - l_a} \cdot \frac{L_{mq}}{l_{kq}} - \frac{L_q' - l_a}{L_q' l_{kq} T_{qo}'} \right], \\
k_5 &= \left[ \frac{L_d' - l_a}{L_q' l_f} \right], k_6 = \left[ \frac{L_d - l_a}{L_q' l_{kd}} \right], k_7 = \left[ -\frac{L_d}{L_q'} \right].
\end{aligned}$$

### 4.3 Cálculo de las Condiciones en Estado Estable del Generador Síncrono

El estado estable de la máquina síncrona se describe a continuación. La principal característica de operación es la frecuencia constante lo que se logra manteniendo constante la velocidad síncrona que es igual a  $2\pi f$  en (*rad./seg.*), donde  $f$  es la frecuencia de operación. Las otras variables dependen de la potencia de suministro del generador. A continuación se describe el procedimiento para obtener las condiciones iniciales para un punto de operación dado.

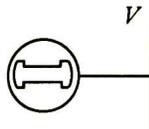


Figura 4.2: Representación de un generador síncrono.

Se suponen conocidos los parámetros eléctricos, la potencia suministrada y el voltaje de operación en sus terminales (generalmente expresados en el sistema por unidad), donde los valores base corresponden a los nominales.

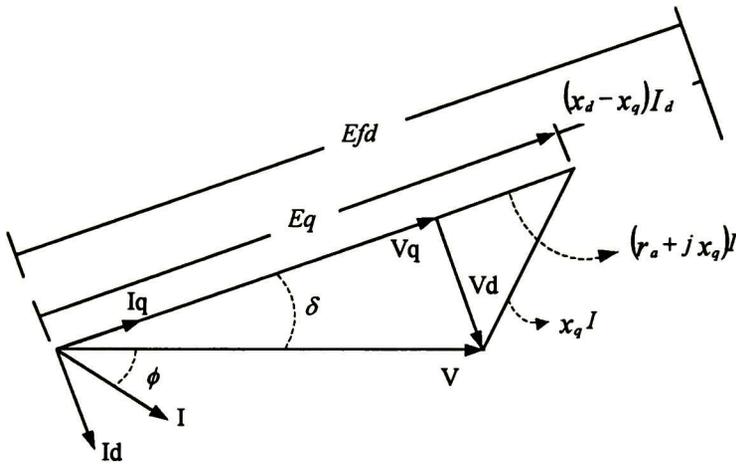
$S_B = S_{nominal}$ ,  $V_B = V_{nominal}$  (en el estator)

$$S = P + jQ$$

$$V = |V| \angle \theta$$

generalmente se supone  $\theta = 0$

$$I = \left[ \frac{S}{V} \right]^* = \frac{P - jQ}{V \angle -\theta}$$



Gráfica 4.3: Representación fasorial de un generador síncrono.

#### Cálculo del ángulo de carga

$$E_q = V + [R_a + j X_q]I, \quad \delta = \tan^{-1} \frac{\text{Im}\{E_q\}}{\text{Re}\{E_q\}}$$

$$I_d = -\text{Im}\{I e^{-j\delta}\}, \quad I_q = \text{Re}\{I e^{-j\delta}\}$$

$$V_d = V \text{ sen } \delta, \quad V_q = V \text{ cos } \delta$$

#### Cálculo del voltaje de campo $V_f$

$$E_{fd} = |E_q| + [X_d - X_q]I_d$$

$$E_{fd} = X_{md} I_{fd} = X_{md} \frac{V_f}{r_f} \quad r_f = \frac{L_f}{T'_{do}} \quad \text{en p.u.}$$

$$V_f = \frac{E_{fd} r_f}{X_{md}}$$

Enlaces de flujo y corrientes en el rotor:

$$i_{kd} = i_{kq} = i_g = 0$$

$$\varphi_d = -L_d i_d + L_{md} i_f,$$

$$\varphi_f = -L_{md} i_d + L_f i_f,$$

$$\varphi_{kd} = L_{md} [-i_d + i_f]$$

$$\varphi_q = -L_q i_q,$$

$$\varphi_g = -L_{mq} i_q,$$

$$\varphi_{kq} = -L_{mq} i_q$$

$$\omega = \omega_o = 2\pi f_o = 2\pi(60) = 120\pi$$

$$T_m = T_e + r_a |I|^2$$

$$T_e = V_d I_d + V_q I_q$$

## 4.4 Desarrollo de los Algoritmos de Control del Generador Síncrono

### 4.4.1 Modelo del Generador Síncrono en Espacio de Estado

El diseño del algoritmo de control está basando en el modelo del generador síncrono (4.63) presentado de la forma siguiente

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - \omega_0 \\ \dot{x}_2 &= \frac{\omega_B}{2H} [T_m - a_1 x_3 x_8 - a_2 x_5 x_8 - a_3 x_4 x_7 - a_4 x_6 x_7 - a_5 x_7 x_8] \\ \dot{x}_3 &= b_1 x_7 + b_2 x_5 + b_3 x_3 + V_f \\ \dot{x}_4 &= c_1 x_8 + c_2 x_6 + c_3 x_4 \\ \dot{x}_5 &= d_1 x_7 + d_2 x_3 + d_3 x_5 \\ \dot{x}_6 &= e_1 x_8 + e_2 x_4 + e_3 x_6 \\ \dot{x}_7 &= h_1 V_d + h_3 x_7 + h_4 x_3 + h_5 x_5 + h_6 x_2 x_4 + h_7 x_2 x_6 + h_8 x_2 x_8 + h_2 V_f \\ \dot{x}_8 &= k_1 V_q + k_2 x_8 + k_3 x_4 + k_4 x_6 + k_5 x_2 x_3 + k_6 x_2 x_5 + k_7 x_2 x_7 \end{aligned} \quad (4.64)$$

donde:  $x_1 = \delta$ ,  $x_2 = \omega$ ,  $x_3 = \varphi_f$ ,  $x_4 = \varphi_g$ ,  $x_5 = \varphi_{kd}$ ,  $x_6 = \varphi_{kq}$ ,  $x_7 = i_d$ ,  $x_8 = i_q$   
 $V_d = V \sin x_1$ ,  $V_q = V \cos x_1$

#### 4.4.2 Control de Velocidad

El objetivo del control es estabilizar la dinámica mecánica sobre la velocidad síncrona. Se considera el uso de la técnica de control a bloques descrito en Capítulo 3, para diseñar una superficie no lineal tal que la dinámica de modos deslizantes sobre esta superficie sea descrita por un sistema lineal.

Haciendo  $y_1 = x_1$  y definiendo

$$y_2 = x_2 - \omega_0 \quad (4.65)$$

se busca que esta variable tienda a ser estable, modificando su dinámica:

$$\dot{y}_2 = f_2(x) + b_2(x)x_3 \quad (4.66)$$

donde

$$x = (x_1, \dots, x_8)^T \quad f_2(x) = \frac{\omega_B}{2H} [T_m - a_2 x_5 x_8 - a_3 x_4 x_7 - a_4 x_6 x_7 - a_5 x_7 x_8] \text{ y } b_2(x) = -a_1 \frac{\omega_B}{2H} x_8.$$

Para lograr que  $y_2$  sea estable es necesario eliminar su antigua dinámica (4.66) utilizando al estado  $x_3$  como un compensador, y además de contener la nueva dinámica,  $-k_2 y_2$ ,  $k_2 > 0$ , estable contendrá elementos que contrarresten la antigua dinámica. Entonces

$$x_3 = b_2^{-1}(x)[-f_2(x) - k_2 y_2 + s_1] \quad (4.67)$$

y se obtiene la dinámica deseada:

$$\dot{y}_2 = -k_2 y_2 + s_1 \quad (4.68)$$

Después se define la función de deslizamiento  $s_1$  de (4.67) como:

$$s_1 = b_2 x_3 + \alpha_1(x) \quad (4.69)$$

donde

$$\alpha_1(x) = f_2(x) + k_2(x_2 - \omega_0).$$

Tomando la derivada de  $s_1$  de (4.69) sobre la trayectoria del sistema (4.64), obtenemos

$$\dot{s}_1 = f_3(x) + b_3(x)V_f \quad (4.70)$$

donde

$$f_3(x) = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} \dot{x}, \quad b_3(x) = -\frac{\omega_B}{2H} [a_1 x_8 + h_2(a_3 x_4 + a_4 x_6 + a_5 x_8)], \text{ y la función } b_3(t),$$

$$b_3(t) = -\frac{\omega_B}{2H} [a_1 x_8(t) + h_2(a_3 x_4(t) + a_4 x_6(t) + a_5 x_8(t))], \text{ es positiva para todos } t \geq 0.$$

Usando el método del control equivalente, de la ec. (4.70), para  $\dot{s} = 0$  encontramos:

$$V_{f,eq}(x) = -b_3^{-1}(x)f_3(x)$$

Tomando en cuenta, que la magnitud del voltaje de excitador es acotado, elegimos la ley del control como

$$V_f = -V_{f0} \text{sign}(s_1) \quad (4.71)$$

donde  $V_{f0}$  es valor máximo del voltaje del excitador. La proyección del movimiento del sistema cerrado (4.64) y (4.71) en el subespacio  $s$  es

$$\dot{s}_1 = f_3(x) - b_3(x)V_{f0} \text{sign}(s_1)$$

Usando los resultados del capítulo 3, podemos concluir que si

$$|V_{f,eq}(x)| < V_{f0}$$

entonces el vector del estado,  $x$ , encontrará la superficie  $s_1 = 0$  en un tiempo finito, y el movimiento en modos deslizantes sobre la superficie  $s_1 = 0$  es descrito por el sistema de segundo orden

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -k_2 y_2 \end{aligned} \quad (4.72)$$

con valor propio  $-k_2$ . Es importante, que este movimiento sea invariante con respecto de variaciones de los parámetros del sistema (4.64) y del par mecánico.

El sistema (4.72) representa la dinámica mecánica linealizada por modos deslizantes. La dinámica eléctrica sobre los flujos del rotor y la corriente del estator se representa por la dinámica cero:

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 &= c_1 x_8 + c_2 x_6 + c_3 x_4 \\ \dot{x}_5 &= d_1 x_7 + d_2 x_3 + d_3 x_5 \\ \dot{x}_6 &= e_1 x_8 + e_2 x_4 + e_3 x_6 \\ \dot{x}_7 &= h_1 \sin(x_{1ss}) + h_3 x_7 - h_4 \alpha_{1s} + h_5 x_5 + h_6 \omega_0 x_4 + h_7 \omega_0 x_6 + h_8 \omega_0 x_8 + h_2 V_{f,eq} \\ \dot{x}_8 &= k_1 \cos(x_{1ss}) + k_2 x_8 + k_3 x_4 + k_4 x_6 - k_5 \omega_0 \alpha_{1s} + k_6 \omega_0 x_5 + k_7 \omega_0 x_7 \end{aligned} \quad (4.73)$$

donde

$$\alpha_{1s} = \frac{1}{a_1 x_8} [T_m - a_2 x_5 x_8 - a_3 x_4 x_7 - a_4 x_6 x_7 - a_5 x_7 x_8].$$

Este sistema se encuentra a partir de (4.64) haciendo  $y_2 = 0$  en (4.65) y  $s_1 = 0$  en (4.67), entonces

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{1ss} \\ x_2 &= \omega_0 \\ x_3 &= b_2^{-1}(x) f_2(x) := \alpha_{1s} \end{aligned}$$

Entonces un punto de equilibrio del sistema descrito por (4.73), es asintóticamente estable. Esto se puede observar en el capítulo 5 (ver simulaciones).

Podemos ver, que el sistema (4.72) tiene el valor propio deseado,  $-k_1$ , y el otro valor propio es cero. En el caso de una perturbación grande, el ángulo  $x_1$  puede ser mayor que el valor máximo. En tal caso será necesario controlar el ángulo utilizando información sobre el ángulo referencia.

### 4.4.3 Control del Angulo.

Definiendo el error del control como

$$z_1 = x_1 - \delta_{ref} \quad (4.74)$$

tenemos

$$\dot{z}_1 = x_2 - \omega_0 \quad (4.75)$$

donde  $\delta_{ref}$  es la señal de referencia y  $\dot{\delta}_{ref} = 0$ . Considerando el estado  $x_2$  como el control ficticio en la ecuación (4.74), se elige a

$$x_2 = \omega_0 - k_1 z_1 + z_2 \quad (4.76)$$

para obtener la dinámica deseada en (4.75)

$$\dot{z}_1 = -k_1 z_1 + z_2 \quad (4.77)$$

Ahora la variable nueva  $z_2$  se obtiene a partir de la transformación (4.76)

$$z_2 = x_2 + k_1 z_1 - \omega_0 \quad (4.78)$$

Derivando  $z_2$  sobre las trayectorias del sistema (4.64), resulta

$$\dot{z}_2 = f_2(x) + b_2(x)x_3 \quad (4.79)$$

donde

$$x = [x_1, \dots, x_8]^T \quad f_2(x) = \frac{\omega_B}{2H} [T_m - a_2 x_5 x_8 - a_3 x_4 x_7 - a_4 x_6 x_7 - a_5 x_7 x_8] + k_1 (x_2 - \omega_0) \quad y$$

$$b_2(x) = -a_1 \frac{\omega_B}{2H} x_8.$$

Ahora usando a  $x_3$  como el control ficticio en la ecuación (4.79), elegimos

$$x_3 = b_2^{-1}(x)[-f_2(x) - k_2 z_2 + s_2]$$

y obtenemos la forma deseada

$$\dot{z}_2 = -k_2 z_2 + s_2 \quad (4.80)$$

La función de deslizamiento en este caso, es

$$s_2 = b_2 x_3 + \alpha_2(x) \quad (4.81)$$

donde

$$\alpha_2(x) = f_2(x) + k_2 [x_2 + k_1 (x_1 - \delta_{ref}) - \omega_0].$$

Tomando la derivada de  $s_2$  (4.81) sobre las trayectorias de sistema (4.64), obtenemos

$$\dot{s}_2 = f_3(x) + b_3(x)V_f \quad (4.82)$$

donde

$f_3(x) = \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} \dot{x}$ ,  $b_3(x) = -\frac{\omega_B}{2H}[a_1x_8 + h_2(a_3x_4 + a_4x_6 + a_5x_8)]$ , y la función  $b_3(t)$ ,

$b_3(t) = -\frac{\omega_B}{2H}[a_1x_8(t) + h_2(a_3x_4(t) + a_4x_6(t) + a_5x_8(t))]$  es positiva para todos  $t \geq 0$ .

El control

$$V_f = -V_{f0} \text{sign}(s_2) \quad (4.83)$$

sobre la condición

$$|V_{f,eq}(x)| < V_{f0}, \quad V_{f,eq}(x) = -b_3^{-1}(x)f_3(x)$$

garantiza el movimiento en modos deslizantes sobre la superficie  $s_2 = 0$  descrito por el sistema

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -k_1 z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= -k_2 z_2 \end{aligned} \quad (4.84)$$

con valores propios  $-k_1$  y  $-k_2$ .

Un punto de equilibrio de la dinámica cero se obtiene haciendo  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 0$  y  $s_2 = 0$  en (4.74) y (4.76) y (4.81) respectivamente, resultando:

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 &= c_1 x_8 + c_2 x_6 + c_3 x_4 \\ \dot{x}_5 &= d_1 x_7 + d_2 x_3 + d_3 x_5 \\ \dot{x}_6 &= e_1 x_8 + e_2 x_4 + e_3 x_6 \\ \dot{x}_7 &= h_1 \sin(\delta_{ref}) + h_3 x_7 - h_4 \alpha_s + h_5 x_5 + h_6 \omega_0 x_4 + h_7 \omega_0 x_6 + h_8 \omega_0 x_8 + h_2 u_{eq} \\ \dot{x}_8 &= k_1 \cos(\delta_{ref}) + k_2 x_8 + k_3 x_4 + k_4 x_6 - k_5 \omega_0 \alpha_s + k_6 \omega_0 x_5 + k_7 \omega_0 x_7 \end{aligned}$$

donde

$\alpha_s = \frac{1}{a_1 x_8} [T_m - a_2 x_5 x_8 - a_3 x_4 x_7 - a_4 x_6 x_7 - a_5 x_7 x_8]$ , es asintóticamente estable (ver simulaciones en cap. 5).

#### 4.4.4 Diseño del Observador de Estados

Se supone que el ángulo  $x_1$ , la velocidad  $x_2$  y las componentes del vector  $x' = (x_4, \dots, x_8)^T$  son medibles. Para obtener la estimación de las funciones del control  $s_1$ , es necesario diseñar un observador no lineal. Este observador se puede construir con ganancia alta usando los resultados del Capítulo 3.

Las primeras tres ecuaciones del sistema (4.64) se presentan en las coordenadas transformadas  $y_1$ ,  $y_2$  por (4.65) y  $s_1$  por (4.67):

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -k_2 y_2 + s_1 \\ \dot{s}_2 &= f'_3(y_1, y_2, s_2, x') + b_3(x') V_f \end{aligned}$$

donde

$$f'_3(y_1, y_2, s_1, x') = f'_3(x) \Big|_{x_1=y_1, x_2=y_2+w_0, x_3=b_2^{-1}(x')(s_1-\alpha_1(x'))}$$

Se diseña el observador en la forma (3.51) como se indica

$$\begin{aligned}\dot{\hat{y}}_1 &= \hat{y}_2 + l_1(y_1 - \hat{y}_1) \\ \dot{\hat{y}}_2 &= -k_2\hat{y}_2 + \hat{s}_1 + l_2(y_2 - \hat{y}_2) \\ \dot{\hat{s}}_1 &= f'_3(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{s}_1, x') + b_3(x')V_f + l_3l_2(y_2 - \hat{y}_2)\end{aligned}$$

La función  $f'_3(y_1, y_2, s_1, x')$  es localmente Lipshitz. Entonces, por el Teorema 3.2 existen parámetros,  $l_1$ ,  $l_2$ , y  $l_3$ , tal que el punto equilibrio  $e_1 = 0$ ,  $e_1 = y_1 - \hat{y}_1$ ,  $e_2 = 0$ ,  $e_2 = y_2 - \hat{y}_2$  y  $e_s = 0$ ,  $e_s = s_1 - \hat{s}_1$ , del sistema de errores de observación

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2 + l_1e_1 \\ \dot{e}_2 &= -k_2e_2 + e_s + l_2e_2 \\ \dot{e}_s &= f'_3(y_1, y_2, s_1, x') - f'_3(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{s}_1, x') + l_3l_2e_2\end{aligned}$$

es asintóticamente estable. La estimación  $\hat{s}_1$  obtenida se usa en la ley de control (4.71) en lugar de  $s_1$ .

# CAPITULO V

## Evaluación experimental

A continuación se presentan los resultados obtenidos de la simulación numérica de los algoritmos de control descritos en los capítulos anteriores. Básicamente se trabajó sobre dos situaciones de la planta: generador conectado a un bus infinito, y generador conectado a un bus de generación y línea externa y bus infinito. En el primer caso el voltaje del generador se considera constante ante cualquier cambio de operación o falla, mientras que en el segundo el voltaje del generador puede cambiar ante cambios de operación. Se aplicaron tres pruebas básicas de estabilidad a cada uno de los algoritmos de control: cambio en el par mecánico, cambios repentinos en la demanda y de cortocircuito.

Primeramente se muestran las características nominales de la planta y sus parámetros en su forma normalizada, seguido por los cálculos de las condiciones iniciales para los dos casos de estudio; después se muestran los resultados del algoritmo de control de velocidad, enseguida se presentan los resultados del control del ángulo de carga y por último los resultados obtenidos aplicando observadores de estados con el control del ángulo de carga.

### 5.1 Características de la planta

Generador síncrono trifásico

Potencia nominal: 555 Mva.

Voltaje nominal: 24 Kv.

Frecuencia de operación: 60 Hertz.

Número de polos: dos.

Parámetros estándar en p.u. y constantes de tiempo en segundos.

$$\begin{array}{lll} L_d = 1.81 & L_d' = 0.3 & L_d'' = 0.23 \\ L_q = 1.76 & L_q' = 0.65 & L_q'' = 0.25 \\ \ell_a = 0.15 & r_a = 0.003 & \\ T_{do}' = 8.0 \text{ seg} & T_{qo}' = 1.0 \text{ seg} & T_{do}'' = 0.03 \text{ seg} \quad T_{qo}'' = 0.07 \text{ seg} \end{array}$$

## 5.2 Condiciones de operación estable

El generador se simula bajo dos condiciones de operación: 1) Generador conectado a un bus infinito y 2) Generador conectado a un bus de generación y línea externa. En la mayoría de las pruebas se considera la condición número dos, por ser esta una condición más real, la primera condición se utiliza para fines de análisis. Para los cálculos de las condiciones iniciales se desarrolló un programa en C, el cual obtiene los valores iniciales a partir de los valores de potencia de demanda y de los parámetros estándar. Mientras que para la simulación numérica se utilizó el paquete de simulación no lineal (simnon).

### 1) Caso 1. Generador conectado a un bus infinito

Al conectar un generador a un bus infinito, el voltaje en terminales queda restringido a un valor constante, independientemente de las condiciones de operación o fallas en la máquina.

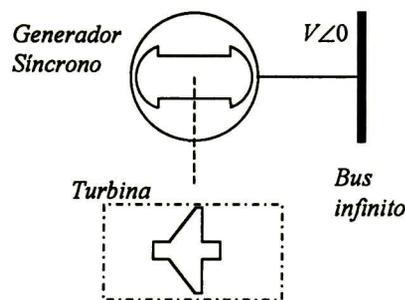


Figura 5.1: Generador conectado a bus infinito.

Datos de operación:

Potencia suministrada: 555 Mva.  
Potencia activa: 499.5 Mwatts.  
Potencia reactiva: 241.91889 Mvar.

Valores obtenidos de los estados iniciales en condición estable

$x_1 = 0.72962590 \ 1683 \ rad.$   
 $x_2 = 376.991118 \ 430775 \ rad./seg.$   
 $x_3 = 1.12574507 \ 6479 \ p.u.$   
 $x_4 = -0.6123171 \ 97138 \ p.u.$   
 $x_5 = 0.88529295 \ 6255 \ p.u.$   
 $x_6 = -0.6123171 \ 97138 \ p.u.$   
 $x_7 = 0.92485445 \ 0201 \ p.u.$   
 $\hat{x}_8 = 0.38032124 \ 0459 \ p.u.$   
 $V_f = 0.00088231 \ 6364271612 \ 83 \ p.u.$   
 $V_d = 0.6665908198 \ 57 \ p.u.$   
 $V_q = 0.7454238250 \ 04 \ p.u.$   
 $T_m = 0.903 \ p.u.$

## 2) Caso 2. Generador conectado a un bus de generación y línea externa

En este caso el voltaje en las terminales no es constante; su valor depende de las condiciones de operación de la máquina, de los efectos de la línea donde está conectado, de la demanda de energía y/o de fallas externas.

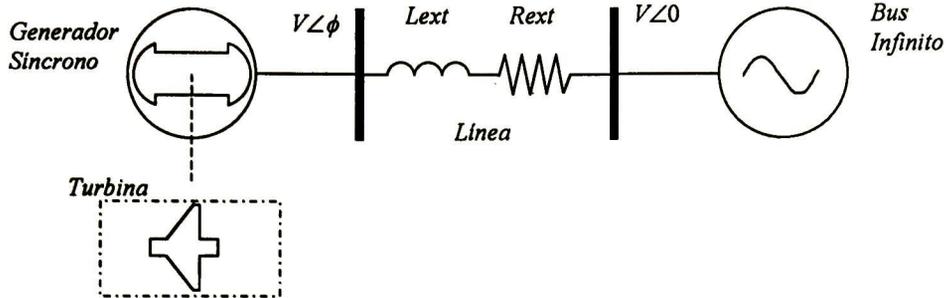


Figura 5.2: Generador conectado a una línea externa.

### Datos de operación:

Potencia suministrada al bus infinito: 530 Mva.

Potencia activa: 477 Mwatts.

Potencia reactiva: 231.021644 Mvar.

Valores obtenidos de los estados iniciales en condición estable. Los valores de la línea son  $R_{ext} = 0.001 p.u.$ ,  $L_{ext} = 0.1 p.u.$

$$x_1 = 0.6500288003 \text{ 34 rad.}$$

$$x_2 = 376.9911184307 \text{ 75 rad./seg.}$$

$$x_3 = 1.2081320098 \text{ 66 p.u.}$$

$$x_4 = -0.5815151309 \text{ 49 p.u.}$$

$$x_5 = 0.9663613256 \text{ 78 p.u.}$$

$$x_6 = -0.5815151309 \text{ 49 p.u.}$$

$$x_7 = 0.8840141938 \text{ 64 p.u.}$$

$$x_8 = 0.3611895223 \text{ 28 p.u.}$$

$$V_f = 0.0008871547 \text{ 10 p.u.}$$

$$V_d = 0.6682764547 \text{ 55 p.u.}$$

$$V_q = 0.7439130191 \text{ 22 p.u.}$$

$$T_m = 0.8631072153 \text{ 23 p.u.}$$

## 5.3 Resultados

Los resultados de las simulaciones se muestran en el siguiente orden, primero las simulaciones con voltaje de excitación constante, después las simulaciones aplicando el control de velocidad, luego aplicando el control angular y por último se muestran las simulaciones gráficas aplicando observadores de estados. Antes de esto se dará una breve descripción de las pruebas realizadas.

**Escalón de par mecánico.** En esta prueba se aumenta repentinamente el par mecánico, provocando un aumento del par de aceleración y por consiguiente una aceleración de la máquina que debe ser atenuada por efecto del par eléctrico bajo la acción del excitador. En estado estable el par de aceleración es cero. El escalón de par mecánico tiene un valor del 9.6 % arriba del valor en estado estable y tiene una duración de 0.5 segundos.

**Variación de demanda.** Se da una variación en la demanda de energía, provocando un cambio en el par de aceleración. La variación de la demanda es de la siguiente forma:

$$demanda = \begin{cases} 0.76 + (t-1) * 0.143 \text{ p.u.} & \text{si } 1 < t < 2 \\ 0.903 \text{ p.u.} & \text{si } t \leq 1 \text{ o } t \geq 2 \end{cases}$$

**Corto circuito.** Se provoca un corto circuito en las terminales del transformador, el par eléctrico se hace cero, por consiguiente el par de aceleración aumenta. Al liberar el corto se observa como el par eléctrico contrarresta el excesivo par de aceleración existente. El corto circuito tiene una duración de 0.27 segundos y se libera permitiendo que el generador trabaje con toda su dinámica.

### 5.3.1 Resultados con voltaje de excitación constante

La excitación de voltaje se mantiene constante. Se anexo esta parte con el fin de tener una referencia con la cual comparar los algoritmos de control propuestos.

#### a) Escalón de par mecánico

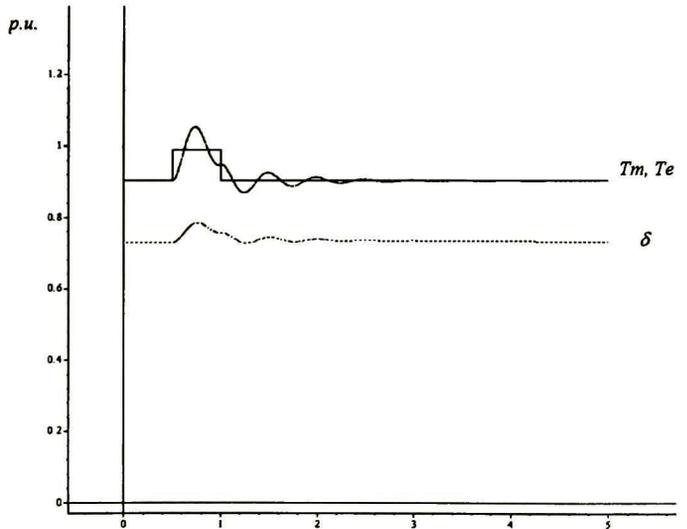


Figura 5.3: Escalón de par mecánico sin control.

En el instante en que aumenta el par mecánico, ocurre el par de aceleración máximo, el cual se atenúa gradualmente a medida que el par electromecánico lo compensa. La dinámica del par electromecánico es muy lenta; tarda aproximadamente tres segundos en lograr la estabilidad e igualar al par mecánico. El efecto sobre la velocidad síncrona, la cual tiene que mantenerse constante, se observa en la figura 5.4.

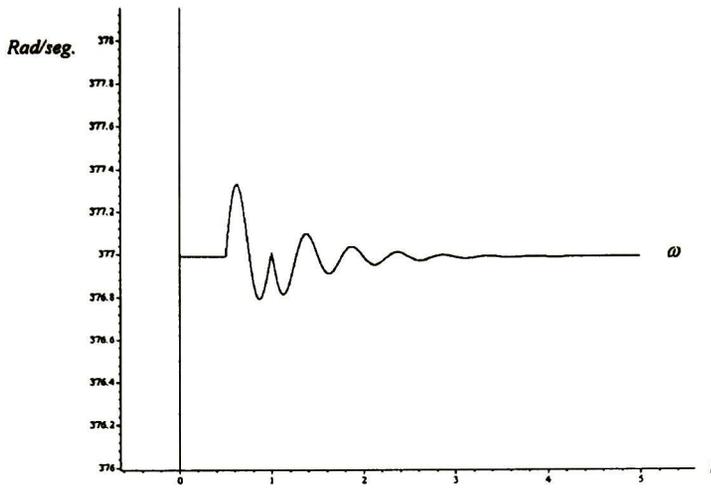


Figura 5.4: Velocidad ante un escalón de par mecánico.

a) Variación de la demanda

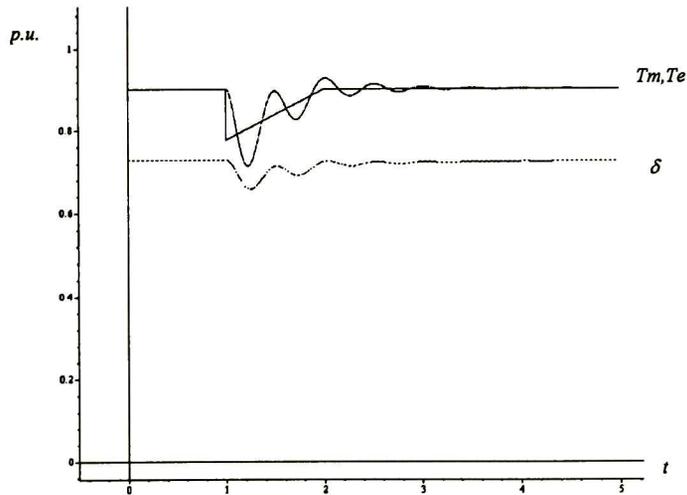


Figura 5.4: Variación de demanda sin control.

Se simula un descenso drástico en la demanda seguido por un aumento gradual; estos cambios afectan a la dinámica del par de aceleración y como se consideran constantes las acciones del control del primotor, el par electromecánico tiene que efectuar solo las compensaciones. Otra vez se observa lo lento de la dinámica. En la figura 5.6 se muestra como afecta el cambio de demanda en la velocidad de la máquina.

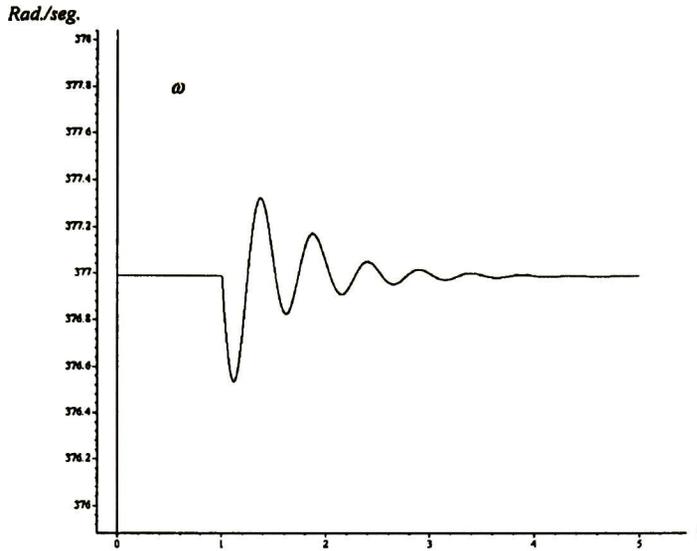


Figura 5.6: Velocidad ante cambio de demanda.

**c) Corto circuito**

Cuando se presenta un corto circuito trifásico, el par electromecánico es cero mientras que el par mecánico permanece con el mismo valor; por consiguiente el par de aceleración de la máquina aumenta considerablemente. Naturalmente bajo estas condiciones varias protecciones entran en función, impidiendo que el generador trabaje. Para efectos de simulación, se permitirá el corto circuito sin la acción de ninguna protección con el objeto de observar la forma en que se compensa el desequilibrio existente. Las Figuras 5.7 y 5.8 muestran los resultados.

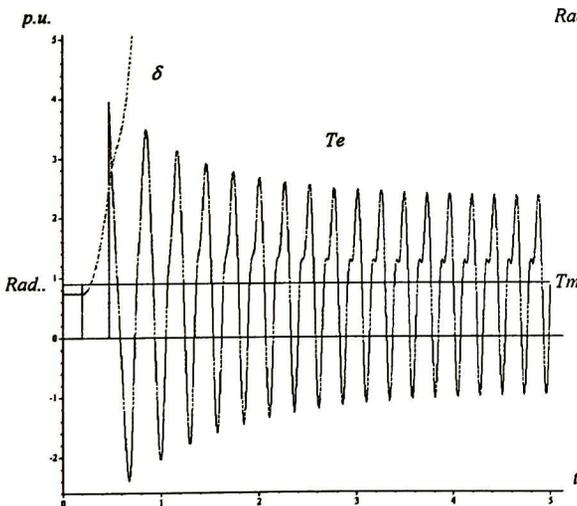


Figura 5.7: Corto circuito sin control.

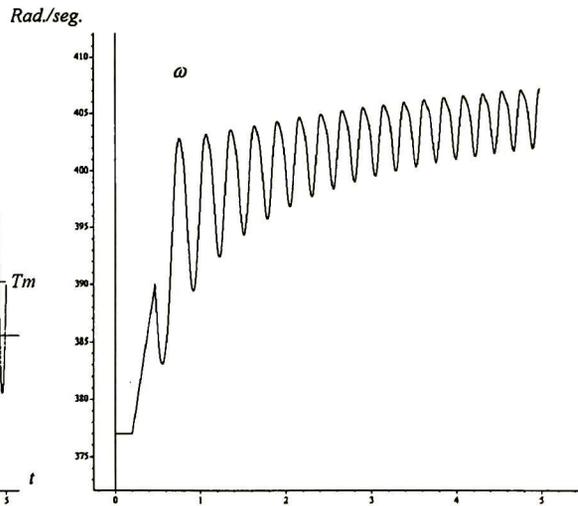


Figura 5.8: Velocidad ante corto circuito sin control.

La máquina al liberar el corto circuito, pierde la sincronía, la condición de corto circuito es muy severa y no se permite en condiciones reales.

### 5.3.2 Control de velocidad (Control omega)

Se aplica el control de velocidad descrito en el capítulo anterior. A este algoritmo de control se le aplicaron las mismas pruebas anteriores con los siguientes resultados.

#### a) Escalón de par mecánico

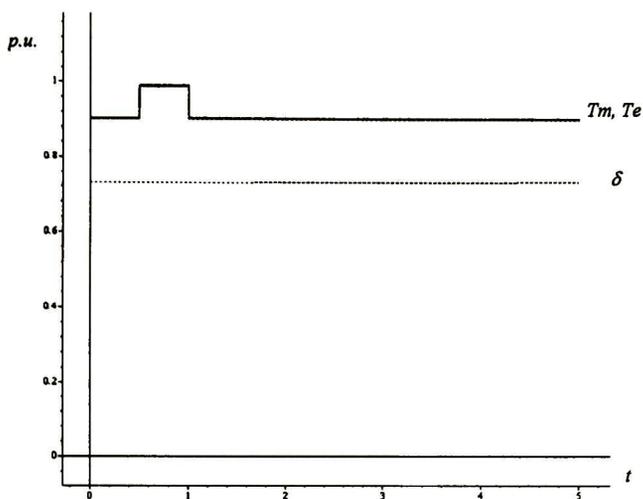


Figura 5.9: Escalón de par mecánico con control de velocidad.

Aplicando el control se observa que el par electromecánico sigue de manera satisfactoria al par mecánico, por lo que la velocidad de la máquina se mantiene constante.

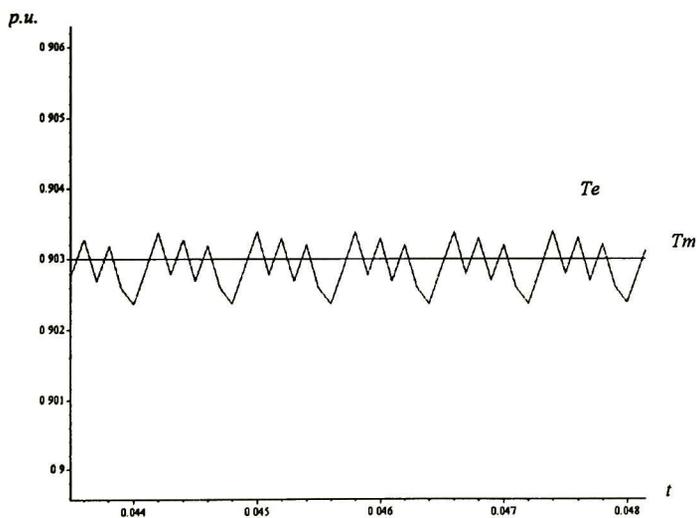


Figura 5.10: Efecto discontinuo del par electromecánico.

En la figura 5.12 se observa que la velocidad síncrona no es afectada.

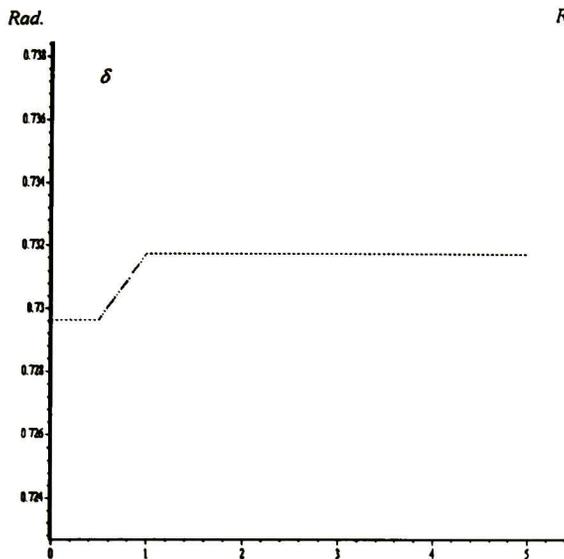


Figura 5.11: Movimiento de delta.

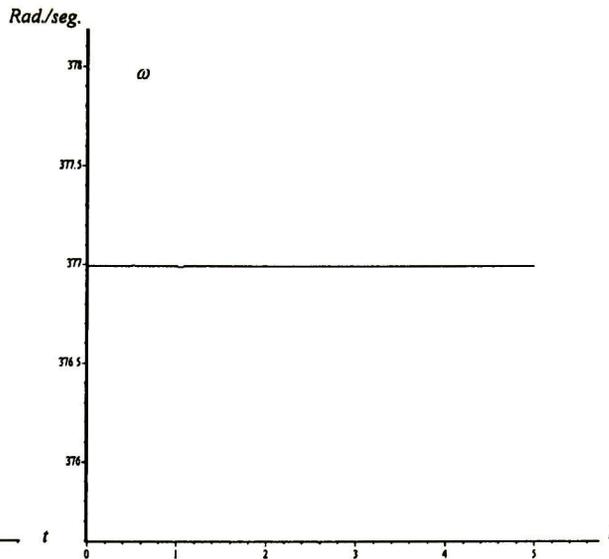


Figura 5.12: Velocidad ante escalón de par mecánico

**b) Variación de demanda**

Se utiliza la misma variación de demanda que para el caso sin control (control constante).

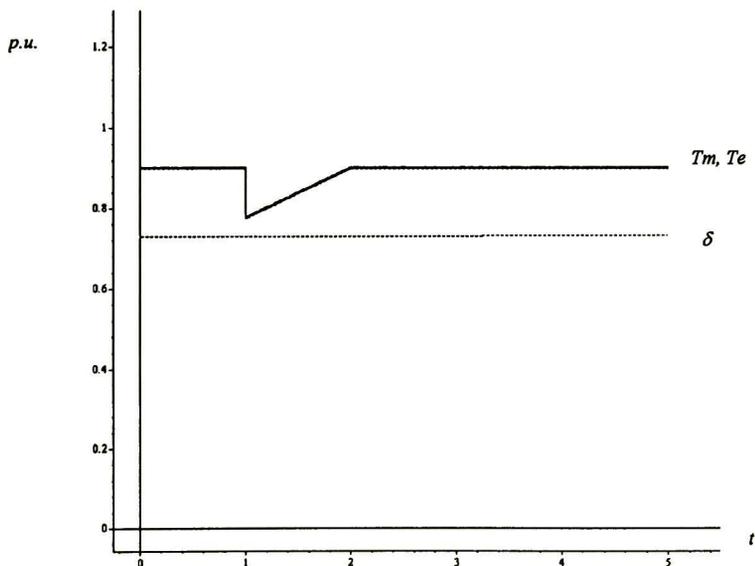


Figura 5.13: Variación de demanda con control de velocidad.

De nuevo se observa que el control de velocidad muestra resultados satisfactorios, la diferencia entre el par mecánico y electromecánico es muy pequeña y en promedio es cero. Esto quiere decir que el valor promedio de la señal del par electromecánico es igual al valor del par mecánico. Las discontinuidades observadas del par electromecánico son las mismas que las de la figura 5.10. En la figura 5.14 se muestra la variación del ángulo de carga provocada por las discontinuidades del

par electromecánico ante cambios en la demanda, mientras que en la figura 5.15 se observa que se asegura la velocidad síncrona.

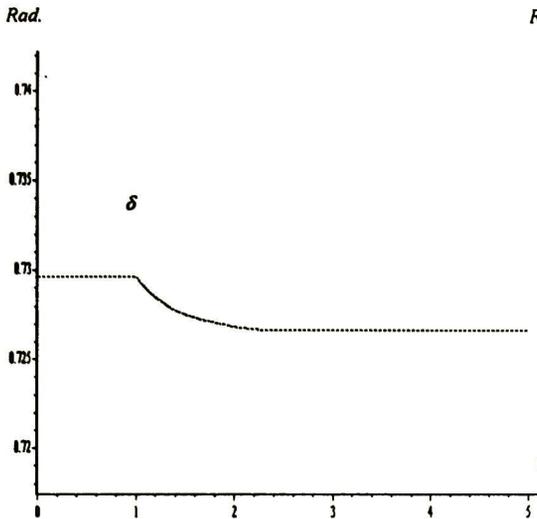


Figura 5.14: Variación de delta.

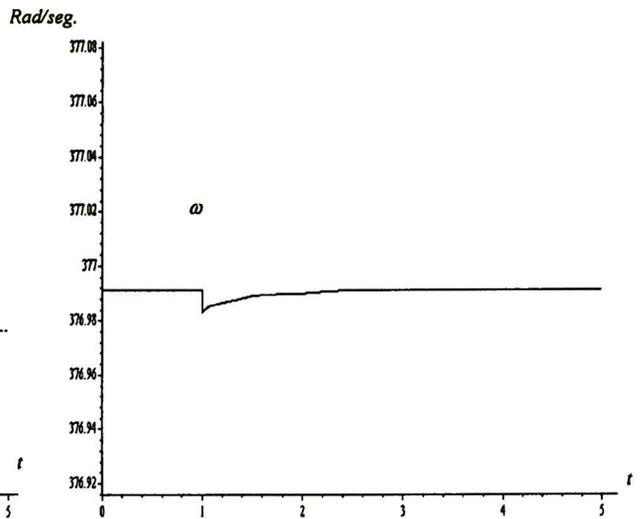


Figura 5.15: Velocidad ante cambio de demanda.

**c) Corto circuito**

Se aplica el mismo corto circuito que en la prueba con voltaje de excitación constante.

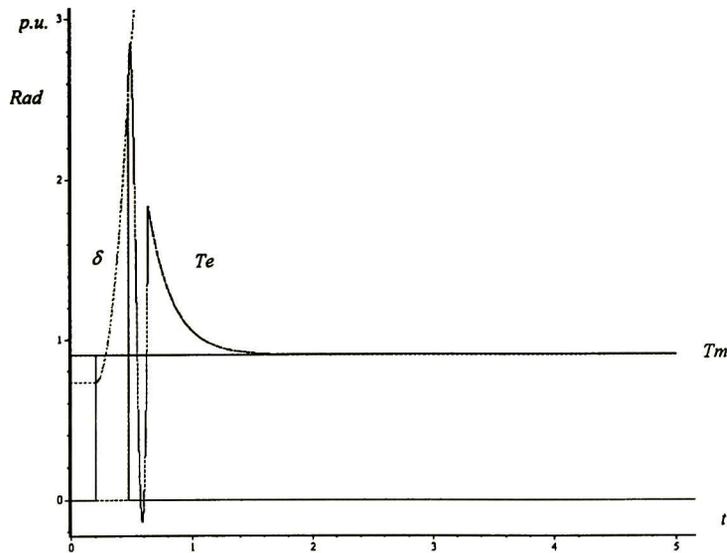


Figura 5.16: Corto circuito bajo control de velocidad.

Al liberar el corto circuito, el par electromecánico tiene que compensar la aceleración de la máquina, razón por la cual aumenta hasta casi tres veces su valor de operación, todo esto crea un

régimen transitorio, el control poco a poco hace que la diferencia entre el par mecánico y el par eléctrico tienda a cero. Sin embargo el valor del ángulo de carga sobrepasa su límite de estabilidad por lo que la máquina no puede alcanzar su estado estable.

### 5.3.3 Control del ángulo de carga (Control delta)

A este algoritmo de control se le aplicarán las mismas pruebas bajo las mismas condiciones de tiempo y demanda.

#### a) Escalón de par mecánico

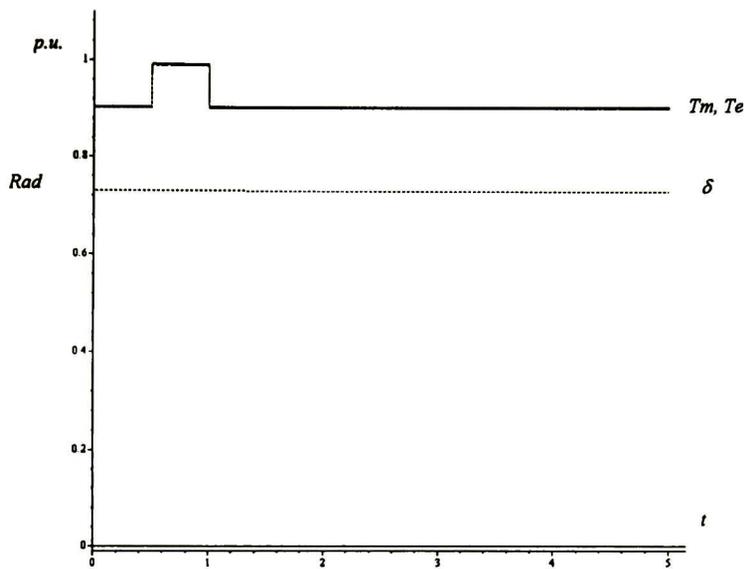


Figura 5.17: Escalón de par mecánico con control delta.

La figura 5.17 muestra que el control angular se comporta satisfactoriamente ante el escalón de par mecánico. Además el seguimiento que realiza el par eléctrico es muy preciso. En la figura 5.18 se muestra como alcanza al par mecánico de manera discontinua. En lo referente al ángulo de carga este control muestra una ventaja significativa ya que el ángulo de carga regresa a su posición inicial, ver figura 5.19.

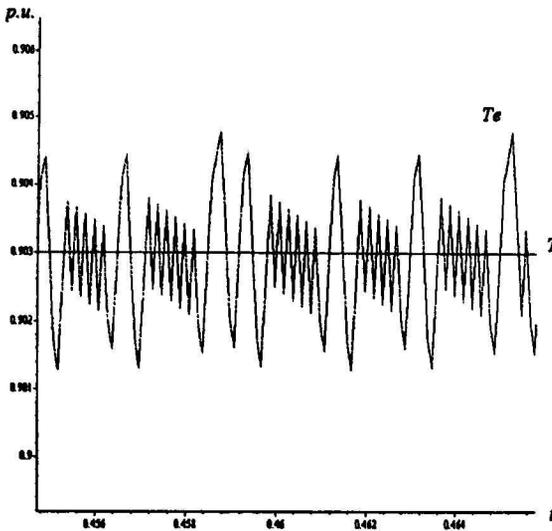


Figura 5.18: Movimiento del par electromecánico.

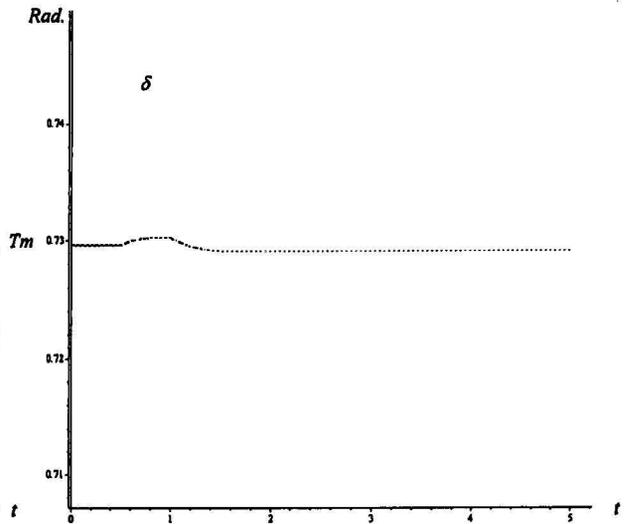


Figura 5.19: Delta con control delta.

**b) Variación de la demanda**

Los resultados de esta prueba son muy satisfactorios; el control del ángulo se comporta mejor que el control de velocidad, se observa que el control delta permite la restauración del ángulo a su valor inicial. Los efectos del escalón mecánico y la variación de la demanda sobre la velocidad síncrona bajo la acción de este control son prácticamente despreciables; las figuras 5.20, 5.21 y 5.22 muestran los resultados anteriores.

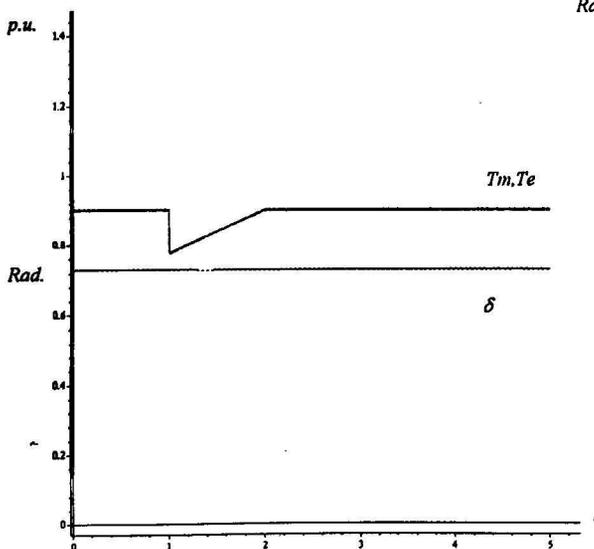


Figura 5.20: variación de demanda.

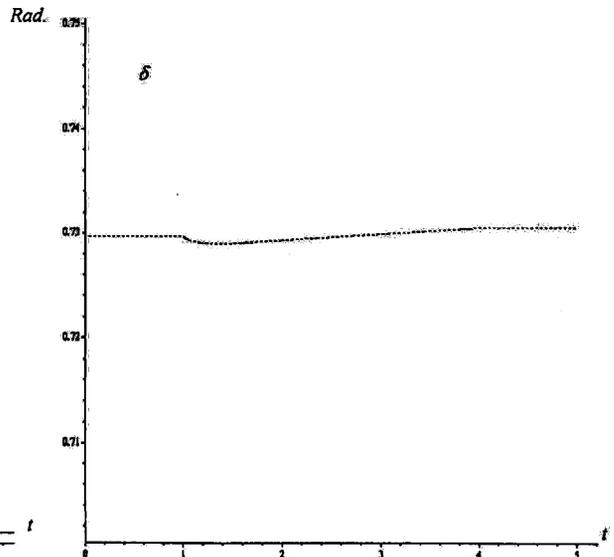


Figura 5.21: Delta ante variación de demanda.

### c) Corto circuito

Se aplica el mismo tiempo de corto circuito

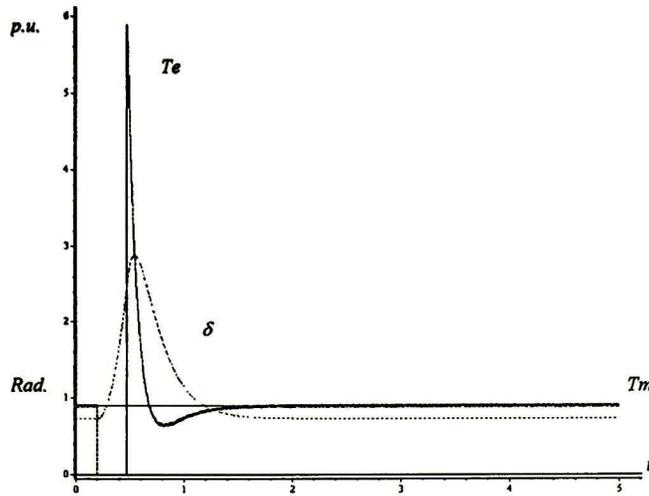


Figura 5.22: Corto circuito con control delta.

Después de liberar el corto circuito el par electromecánico tiende a estabilizarse y a igualar al par mecánico, por lo que la velocidad del rotor tiende a la síncrona. A diferencia del control de velocidad, el control delta logra estabilizar de manera satisfactoria el ángulo de carga.

### 5.3.4 Control a bloques con observador de estado

El último algoritmo que se analiza es el control con observador de estado descrito en el capítulo anterior. Se le aplican las mismas pruebas bajo las mismas condiciones de tiempo y demanda.

#### a) Escalón de par mecánico

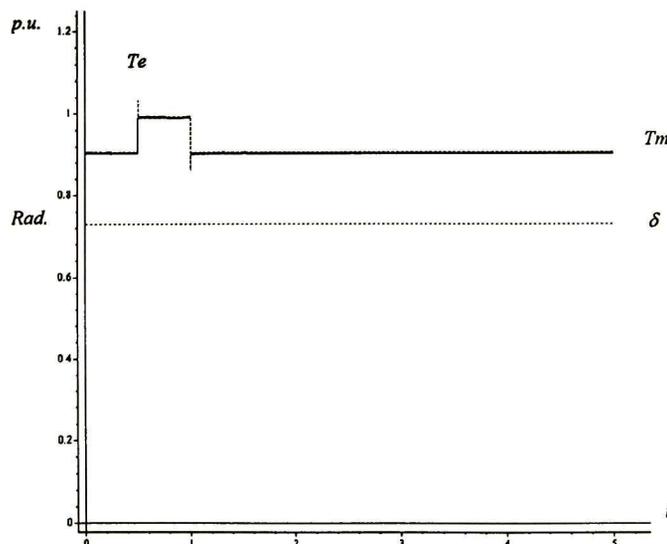


Figura 5.23: Escalón de par mecánico con observadores.

Ante el escalón de par mecánico, este algoritmo se comporta de manera satisfactoria, se observa un seguimiento discontinuo del par eléctrico muy similar al comportamiento aplicando los dos algoritmos de control anteriores, solo que en los puntos donde el par mecánico cambia abruptamente el par eléctrico no logra dar un seguimiento exacto observándose un sobre impulso. En la figura 5.24 se observa mejor lo anteriormente dicho:

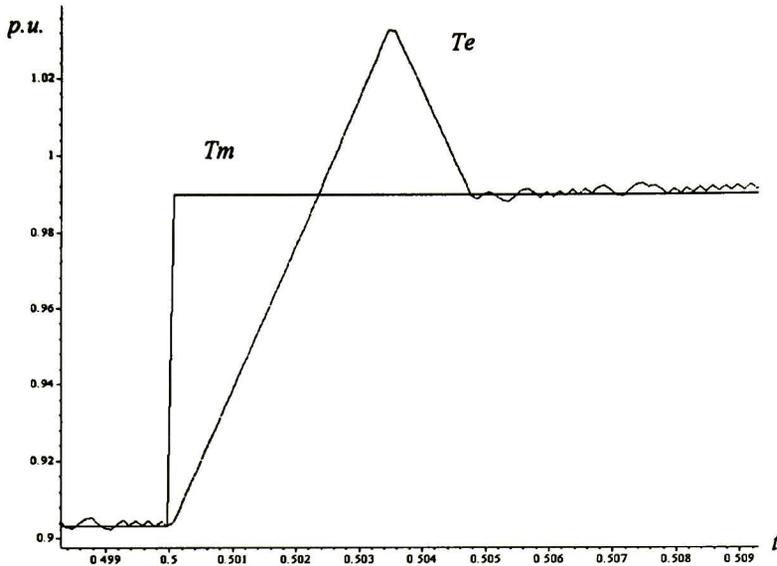


Figura 5.24: Sobre impulso del par eléctrico.

**b) Variación de demanda**

A continuación se muestra la gráfica de variación de demanda utilizando un control con observadores de estados

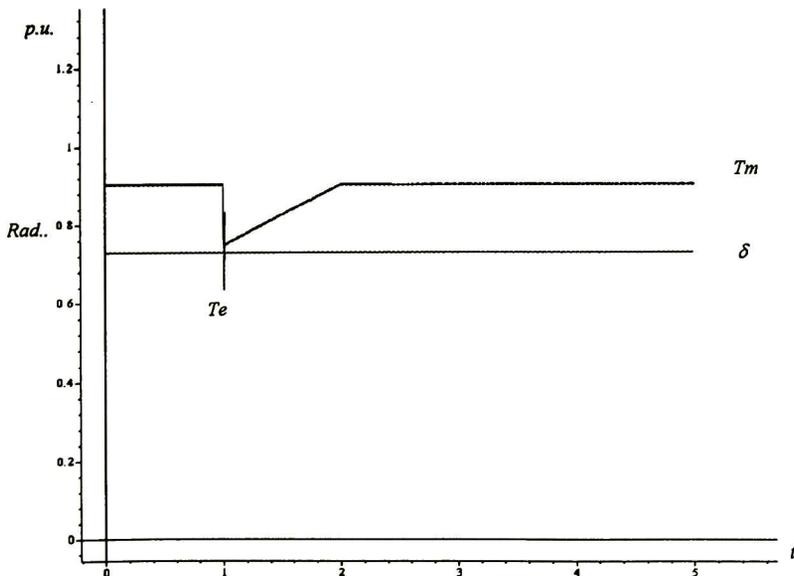


Figura 5.25: Variación de demanda con observadores.

El control se comporta de manera satisfactoria logrando un buen seguimiento de la dinámica eléctrica con respecto a la mecánica; se observa el pequeño sobre impulso en el momento del cambio brusco en la demanda, aun así el control se comporta de manera aceptable, lo cual se observa en la siguiente gráfica donde se muestra la dinámica de la velocidad del rotor. La figura 5.27 muestra dinámica del ángulo de carga la cual también es estable.

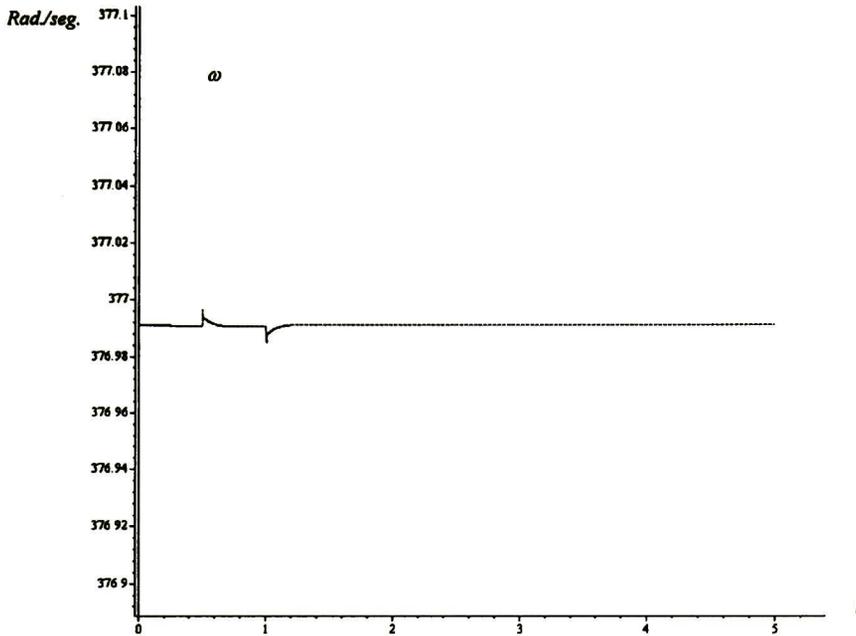


Figura 5.26: Velocidad del rotor ante variación de demanda.

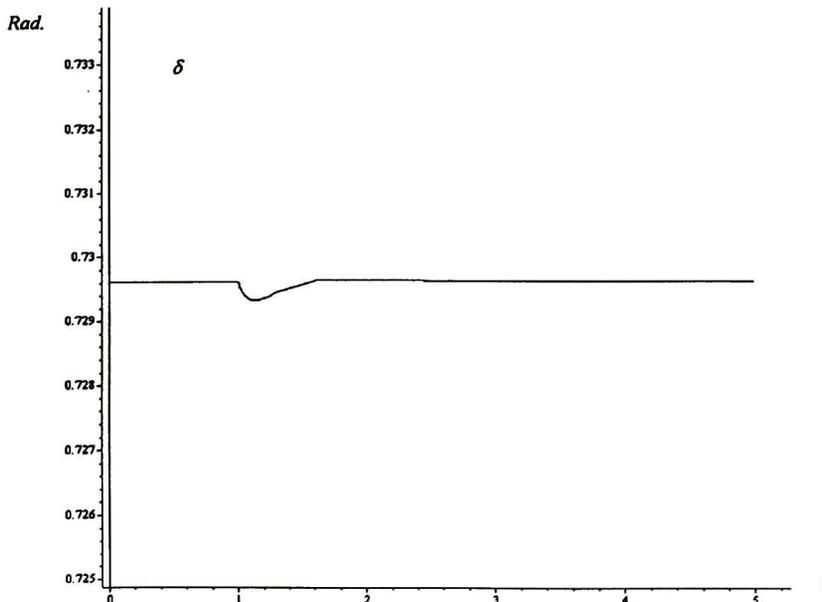


Figura 5.27: Delta ante variación de demanda.

Como se observa en las figuras el control con observadores de estados muestra resultados satisfactorios ante cualquier variación de carga que demande el sistema.

*c) Corto circuito*

Finalmente se realiza la prueba de corto circuito bajo las mismas condiciones.

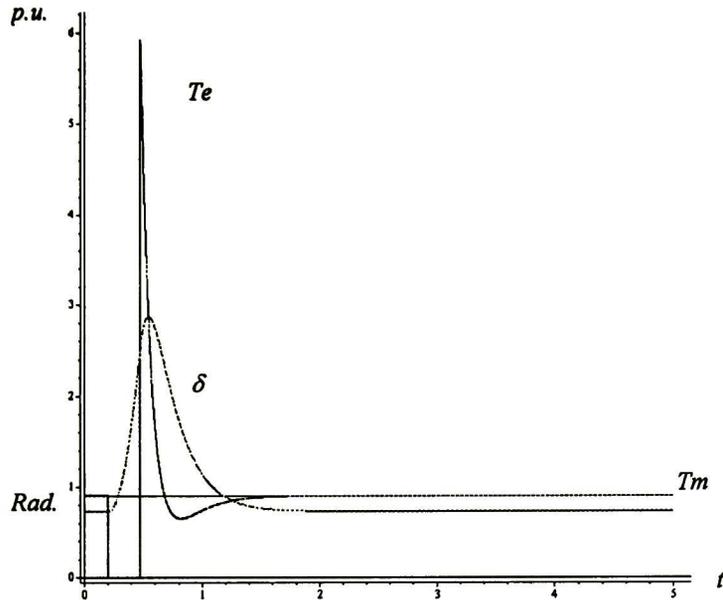


Figura 5.28: Corto circuito con observadores.

Los resultados son satisfactorios pues aunque el sobre impulso de estabilización de la dinámica eléctrica es muy grande, este tiende rápidamente a su condición de equilibrio. El control con observadores de estados es un algoritmo de control muy satisfactorio.

# CAPITULO VI

## Conclusiones y Trabajo Futuro

El problema de robustez de movimientos sobre la superficie de deslizamientos en sistemas dinámicos con perturbaciones, se ha analizado en este trabajo. Se demostró que el movimiento sobre la superficie es invariante solo ante perturbaciones, que pertenecen al subespacio del control (“matching condition”).

Para el caso no lineal se ha propuesto una forma no lineal estructurada controlable por bloques con perturbaciones. Para una clase de sistemas no lineales, representados en esta forma, basado en las técnicas de control por bloques y de separación de movimientos, se ha diseñado una superficie deslizante y una retroalimentación discontinua; tal que el movimiento del sistema nominal sobre esta superficie sea descrito por un sistema lineal con valores propios deseados. El esquema de control, garantiza robustez de movimiento del sistema perturbado, con respecto a las incertidumbres, que satisfacen y no satisfacen las condiciones de “matching condition”

Utilizando paso por paso la técnica de Lyapunov, se obtuvieron las estimaciones de los valores de las ganancias del control para perturbaciones acotadas. Se ha propuesto una forma no lineal controlable por bloques para sistemas no lineales con dinámica cero. Se diseñó una estrategia de control que garantiza la estabilidad asintótica de movimientos en modos deslizantes. Basado en el método de separación de movimientos, se ha diseñado un observador no lineal.

El modelo completo de 8 orden del generador síncrono fue utilizado y representado en el espacio de estados en la forma no lineal controlable con dinámica cero sobre los flujos del rotor y las corrientes del estator. Basado en este modelo se propusieron dos algoritmos de control en modos deslizantes, y se diseñó un observador no lineal para obtener la estimación de la función del control diseñado. Los resultados de las simulaciones demuestran la robustez de sistema de lazo cerrado diseñado, con respecto a dos importantes perturbaciones en sistemas eléctricos de potencia: variaciones del par mecánico y corto circuito.

Como trabajo a futuro se propone el diseño de un observador no lineal para una clase de sistemas no lineales, representados en una forma no lineal controlable por bloques con perturbaciones. En la parte de aplicación, es necesario diseñar una estrategia de control, que garantice estabilidad de la dinámica mecánica y de la regulación del voltaje del generador síncrono conjuntamente. Otro tema de interés es el diseño de un observador no lineal para el caso de flujos del rotor no medibles.

## BIBLIOGRAFIA

1. B. Drazenovitch, The Invariance Conditions in Variable Structure Control Systems, *Automatica*, Vol.5, No.3, pp. 287-295, 1969.
2. V.I. Utkin, Variable Structure Systems with Sliding Mode, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-22, pp. 212-222, 1977.
3. V.I. Utkin, and K.D. Yang, Methods for Constructing Discontinuity Planes in Multi-dimensional Variable Structure Systems, *Automation and Remote Control*, No.39, pp. 1466-1470, 1978.
4. V.I. Utkin, *Sliding Modes in Control and Optimisation*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
5. Alan S. Zinober, Variable Structure and Lyapunov Control, Springer-Verlag, London, 1994.
6. Franco Garofalo and Luigi Gliermo, *Robust Control via Variable Structure and Lyapunov Techniques*, Springer-Verlag, London, 1996.
7. B. Kouvaritakis and A.G.J. McFarlane, Geometric Approach to Analysis and Synthesis of Systems Zeros, *Inter. Journal of Control*, Vol. 23, No.2, pp. 149-166, 1976.
8. V. Shaked, Design Technique for High Feedback Gain Stability, *Inter. Journal of Control*, Vol. 24, No.1, pp. 137-144, 1976.
9. K.D. Yang, P.V. Kokotovich and V.I. Utkin, A Singular Perturbations Analysis of High-Gain Feedback Systems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-22, pp.931-939, 1977.
10. V.I. Utkin, Application of Equivalent Control Method to the Systems with Large Feedback Gain, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-23, pp.484-496, 1978.
11. E.J. Devison, The Robust Decentralized Control of a General Servomechanism Problem, *IEEE Trans. On Automatic Control*, AC-21, pp. 14-24, 1976.
12. G. Leitman, Guaranteed asymptotic stability for some linear systems with bounded uncertainties, *ASME Journal of Dynamic System, Measurements and Control*, 101, pp.212-216, 1979.
13. S. Gutman, Uncertain Dynamical Systems a Lyapunov Min-Max Approach, *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-24, pp.437-443, 1979.
14. M. Corless and G. Leitman, Continuous State Feedback Guaranteeing Uniform Ultimate Boundness for Uncertain Dynamic Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-26, pp.1139-1144, 1981.
15. B.R. Barmish B.R., M. Corless and G. Leitman, A New Class of Stabilizing Controllers for Uncertain Dynamical Systems, *SIAM Journal on Control and Optimization* 21, pp. 246-255, 1983.
16. D.P. Goodall and E.P. Ryan, Feedback Controlled Differential Inclusions and Stabilization of Uncertain Dynamical Systems, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 26, pp.1431-1441, 1988.
17. A.S.I. Zinober, *Deterministic Control of Uncertain Systems*, Peter Peregrinus, London, 1990.
18. H. Elmali and N. Olgas N. Robust Output Tracking Control of Nonlinear MIMO Systems via Sliding Mode Technique, *Automatica*, 28, pp.1139-1144, 1992.
19. Z. Qu and J. Kaloust, Design of Smoother Robust Controller for Nonlinear Uncertain Systems. *Proceedings of the 33rd Conference on Design and Control*, v. 4, pp. 3452-3456, 1994.
20. A.M. Lyapunov, *The General Problem of Motion Stability*, in Russian, 1892. Translated in French, *Ann.Fac. Toulouse* 9, pp. 203-474, 1907. Reprinted in *Ann. Math. Study*, No.17, Princeton Univ. Press, 1949.

21. E.P. Ryan and M. Corless, Ultimate Boundedness and Asymptotic Stability of a Class of Uncertain Dynamic Systems via Continuous and Discontinuous Feedback Control, *IMA Journal of Mathematics and Control Information*, 1, pp. 232-242, 1984.
22. R.A. DeCarlo, S.N. Zak., and G.P. Matthews, Variable Structure Control of Nonlinear Multi-variable Systems: a Tutorial, *Proceedings IEEE* 26, pp.1139-1144, 1988.
23. S.K. Spurgeon and R. Davies, A Nonlinear Control Strategy for Robust Sliding Mode Performance in the Presence of Unmatched Uncertainty, *International Journal of Control*, Vol. 57, pp. 1107-1123, 1993.
24. Hassan K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, Inc., 1996.
25. D.P. Goodall, Lyapunov Stabilization of a Class of Uncertain Affine Control Systems, *Lecture notes in Control and Information Sciences 193. Variable Structure and Lyapunov Control*, A. Zinober, Ed., Springer Verlag, New York, 1994.
26. A.G. Luk'yanov and V.I. Utkin, Methods for Reducing Dynamic Systems to Regular Form. *Automation and Remote Control*, v.42, No.4, (P.1), pp.413-420, 1981.
27. L.R. Hunt, R. Su and G.Meyer, Global Transformation of Nonlinear Systems, *IEEE Trans. On Automatic Control*, AC-28, pp.24-30, 1983.
28. A.G. Luk'yanov and V.I. Utkin, Optimal linear systems with degenerate criteria. *Automation and Remote Control*, Vol.43, No.7, (P.1), pp.872-879, 1982.
29. C.V. Drakunov, D. B. Izosimov, A.G. Loukianov, V. I.Utkin and V.A.Utkin, A Hierarchic Principle of Control System Decomposition Based on Motion, *Proceedings of the 9-th IFAC Congress*, Budapest, Hungary, pp.134-139,1984.
30. C.V. Drakunov, D. B. Izosimov, A.G. Loukianov, V. I.Utkin and V.A.Utkin, Block Control Principle, I and II, *Automation and Remote Control*, v. 51, No. 5 (P.1), pp.601-609; No. 6, (P.1), pp. 737-746, 1990.
31. S.J Dodds and A.G. Luk'yanov, Synthesis of Linear Multidimensional Time-Varying Systems with Discontinuous Controls, *Automation and Remote Control*, Vol.58, No.5, pp. 735-748, 1997.
32. A.G. Luk'yanov, Optimal Nonlinear Block-Control Method. *Proc. of the 2rd European Control Conference, Groningen*, pp.1853-1855, 1993.
33. A.G. Luk'yanov and S. Spurgeon, Design of Generalised Observer-Based Stabilising Controller for Non-linear System, *Proceedings of IFAC-Symposium on Non-linear Control Systems Design, "NOLCOS'95"*, pp.702-706, Tahoe, California, USA, June, 1995.
34. A.G. Luk'yanov, S.J Dodds and J. Wang, Non-linear State Observer Design for Block Control with Sliding Mode Control of Manipulator, *Proceedings of the IFAC Workshop Motion Control*, pp.632-639, Munich, Germany, October, 1995.
35. A.G.Loukianov, Nonlinear Block Control with Sliding Mode, *Automation and Remote Control*, Vol.59, No.7, pp. 916-933, 1998.
36. M. Krstic, I. Kanellakopoulos I. and P. Kokotovic, *Nonlinear and Adaptive Control Design*. Wiley-Interscience, New York, 1995.
37. A. Isidori, *Nonlinear Control System*, Springer Verlag, London, 1995.
38. R. Marino, An Example of a Nonlinear Regulator, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-29, No.3, 1984.
39. J.W. Chapman, M. D. Ilic, C. A. King, and H. Kaufman, Stabilizing a Multimachine Power System via Decentralized Feedback Linearizing Excitation Control, *IEEE Trans. on Power System*, Vol.8, No.3, 1993.
40. W. Mielczarski and A. M. Zajaczowski, Multivariable Nonlinear Controller for Synchronous Generator, *Optimal Control Applications and Methods*, Vol.15, pp. 49-65, 1994.

41. T. Landhiri and A.T. Alouani Design of a Nonlinear Excitation Controller for Synchronous Generator Using the Concept of Feedback Linearization, *1997 American Control Conference*, New Mexico, USA, 1997.
42. Y. Wang, D. J. Hill, R. H. Middleton and L. Gao, Transient Stability, Enhancement and Voltage Regulation of Power Systems, *IEEE Trans. on Power System*, Vol.8, No.2, pp.620-627, 1993.
43. P. M. Anderson and A. Fouad, *Power System Control and Stability*, IEEE Press New York, 1994.
44. R. Marino and P. Tomei, *Nonlinear Control Design: Geometric, Adaptive and Robust*, Prentice Hall, London, 1995.



**IEEE**

SECCION MEXICO  
Networking  
the World™

México, D. F. a 9 de Junio del 2000.

Sr. M.C. **Javier Cabrera Vázquez, Ing. Adolfo Soto Cota, Dr. Alexander G. Loukianov, Dr. José Manuel Cañedo Castañeda**  
**CINVESTAV - UNIDAD GUADALAJARA**  
Tel.: (01-3) 684-1580; Fax: (01-3) 684-1708

**Estimado M.C. Cabrera:**

Nos es grato informar a usted que su ponencia ha sido aceptada para ser presentada en la **DECIMOTERCERA REUNION DE VERANO DE POTENCIA, APLICACIONES INDUSTRIALES Y EXPOSICION INDUSTRIAL RVP-AI/2000**, a celebrarse del 9 al 14 de Julio del 2000 en el **Centro de Convenciones de Acapulco, Gro., México**, para lo cual agradeceremos se sirva enviar por fax y/o correo el siguiente documento debidamente firmado.

**Ing. Gilberto Enriquez Harper**  
Presidente del Capitulo de Potencia  
IEEE Sección México  
Presente.

**CARTA COMPROMISO**

Mediante este documento y de acuerdo con los estatutos del IEEE, me comprometo a presentar personalmente el trabajo cuyo título es, "**174.- CONTROL NO LINEAL PARA EL GENERADOR SINCRONO**" o bien, enviar a un representante con conocimientos suficientes del tema, notificando de este cambio por lo menos 8 días antes del evento.

Estoy consciente de los problemas que provocaría mi ausencia durante el evento, por lo que estoy de acuerdo en que, de no cumplir con el compromiso contraído, no se aceptará ninguna **PONENCIA** mía dentro de los eventos del **IEEE**, durante **dos años**, contados a partir de este evento.

*[Handwritten signature]*  
**Atentamente,**  
*[Handwritten signature]*  
**M.C. Javier Cabrera, Adolfo Soto,**  
**Dr. Alexander G. Loukianov, Dr. José Manuel Cañedo**

**IMPORTANTES:**

Para realizar los **TRAMITES DE INSCRIPCION AL EVENTO Y AL HOTEL**, anexamos la información correspondiente y nos ponemos a sus apreciables órdenes en las oficinas del **IEEE Sección México**, abajo indicadas.

*Sin otro particular de momento, aprovechamos la ocasión para enviarle un cordial saludo y expresarle nuestro reconocimiento y gratitud por participar en la RVP-AI/2000, hoy por hoy la reunión de ingenieros más importante del Sector Eléctrico en la Latinoamérica.*

**Atentamente,**

**Ing. Darío Fernández Lizardi**  
Presidente  
IEEE Sección México

**Ing. Gilberto Enriquez Harper**  
Presidente del Capitulo de Potencia  
IEEE Sección México

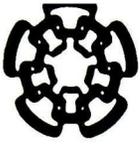
ccp: **Ing. Vicente Núñez González** Gerente del **IEEE Sección México**

**IEEE SECCION MEXICO**

E-mail: [vnunez@ieeee.org.mx](mailto:vnunez@ieeee.org.mx)

Sur 75-A No. 4344, Col. Viaducto Piedad, 08200 México, D. F.  
Tels. y Fax: 5440-1152, 5440-1156, 5440-1159, 5440-1160

Home Page: [www.ieeee.org.mx](http://www.ieeee.org.mx)



**CENTRO DE INVESTIGACION Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL IPN  
UNIDAD GUADALAJARA**

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, aprobó la tesis: **Control robusto de sistemas no lineales por modos deslizantes: aplicación al control de un generador síncrono** del Sr. Adolfo Soto Cota, el día 30 de Junio de 2000.

**EL JURADO**

Dr. Edgar Nelson Sánchez Camperos  
Investigador Cinvestav 3B  
CINVESTAV DEL IPN  
Guadalajara

Dr. Ofelia Begovich Mendoza  
Investigador Cinvestav 3A  
CINVESTAV DEL IPN  
Guadalajara

Dr. Alexander Loukianov  
Investigador Cinvestav 3A  
CINVESTAV DEL IPN  
Guadalajara

Dr. Celikovsky Sergei  
Investigador Cinvestav 3A  
CINVESTAV DEL IPN  
Guadalajara

Dr. Juan Manuel Ramírez Arredondo  
Investigador Cinvestav 2B  
CINVESTAV DEL IPN  
Guadalajara



CINVESTAV  
BIBLIOTECA CENTRAL



SSIT000003871