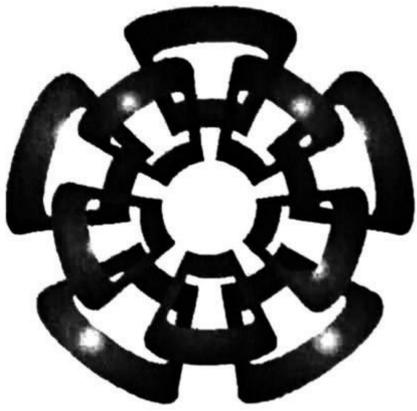




xx (97965.1)



# CINVESTAV - IPN

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN  
Unidad Guadalajara

---

## **SISTEMAS HÍBRIDOS: APLICACIÓN AL PENDUBOT**

TESIS QUE PRESENTA  
**EFRAÍN HERNÁNDEZ SÁNCHEZ**  
PARA OBTENER EL GRADO DE  
**MAESTRO EN CIENCIAS**

EN LA ESPECIALIDAD DE  
**INGENIERÍA ELÉCTRICA**



**CINVESTAV I.P.N.**  
**SECCION DE INFORMACION  
Y DOCUMENTACION**

Guadalajara, Jal., Junio de 2001

CLASIF.	Tesis 2002
ADQUIS.:	
FECHA:	19/04/02
PROCED.	Serv. Bibliograficos
	\$

# ***SISTEMAS HÍBRIDOS: APLICACIÓN AL PENDUBOT***

**Tesis de Maestría en Ciencias  
Ingeniería Eléctrica**

por:

**EFRAÍN HERNÁNDEZ SÁNCHEZ**  
Ingeniero en Comunicaciones y Electrónica  
Universidad de Colima, 1985-1990

Becario de CONACYT, expediente No. 121159

Directores de Tesis:

**Dr. José Javier Ruíz León**  
**Dr. Antonio Ramírez Treviño**

**CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Junio de 2001**

# **Agradecimientos**

A mi esposa **Marbella**, a mis hijos Efraín Esau y Luis Benjamín, por el apoyo incondicional, la paciencia, el estímulo...

A mis padres Maria Guadalupe Sánchez y Benjamín Hernández por sus palabras de aliento y por su motivación para continuar estudiando.

A mis hermanos.

A la Universidad de Colima por el apoyo para continuar con mis estudios.

Al CINVESTAV por la oportunidad que me brindo.

Al CONACYT por la beca otorgada.

A mis asesores Dr. Antonio Ramírez Treviño y José Javier Ruíz León por sus comentarios y el tiempo que me dedicaron.

A mis compañeros de generación gracias por compartir conmigo momentos de tristeza y alegría.

A los Doctores que me dieron clases por los conocimientos que me otorgaron.

Y a todos y cada una de las personas que de alguna manera estuvieron conmigo en el desarrollo del presente trabajo y que ahora escapan de mi memoria.

**Gracias.**

# Índice General

<b>1</b>	<b>Generalidades</b>	<b>3</b>
1.1	Introducción	3
1.2	Definiciones	3
1.3	Arquitectura general de un sistema híbrido	5
1.4	Revisión bibliográfica	6
1.5	Objetivos de la tesis	8
1.6	Estructura de la tesis	8
1.7	Conclusiones	8
<b>2</b>	<b>Herramientas de modelado</b>	<b>9</b>
2.1	Introducción	9
2.2	Máquinas de estado extendido y lógica temporal	9
2.2.1	Semántica de las MEE	12
2.3	Las redes de Petri ordinarias	13
2.4	Redes de Petri Temporizadas Programables	15
2.5	Ejemplo de modelado con MEE y redes de Petri	17
2.6	Ejemplo con redes de Petri	20
2.7	Conclusiones	20
<b>3</b>	<b>Estabilidad de sistemas híbridos</b>	<b>23</b>
3.1	Introducción	23
3.2	Estabilidad en sistemas conmutados	23
3.2.1	Función única para toda la trayectoria (vía múltiples funciones)	26
3.2.2	Función de Lyapunov analizando los ciclos fundamentales	28
3.2.3	Función común de Lyapunov para una clase de sistemas conmutados .	31
3.3	Conclusiones	32
<b>4</b>	<b>Controlabilidad</b>	<b>33</b>
4.1	Introducción	33
4.1.1	Planta híbrida	34

4.2	Control de sistemas híbridos	35
4.2.1	Supervisor por Wonham	36
4.2.2	Supervisor por Giua	36
4.2.3	Supervisor en un sistema híbrido	37
4.2.4	Control supervisorio de una red de Petri basada sobre los P-semiflujos.	37
4.2.5	Ejemplo: Sistema híbrido	39
4.3	Control continuo	40
4.3.1	Ejemplo: Sistema de control de temperatura	42
<b>5</b>	<b>Aplicación al pendubot</b>	<b>45</b>
5.1	Ejemplo	45
5.2	Conclusiones	49
5.2.1	Trabajo futuro	55
<b>A</b>	<b>Estabilidad</b>	<b>57</b>
A.1	Estabilidad de Lyapunov	57
A.1.1	Método directo de Lyapunov	57
A.1.2	Estabilidad en el sentido de Lyapunov.	59
A.1.3	Estabilidad asintótica.	59
A.1.4	Estabilidad asintótica global.	59
A.1.5	Representación gráfica de estabilidad, estabilidad asintótica e inestabilidad	60
A.1.6	Análisis de estabilidad de los sistemas lineales invariantes en el tiempo.	60
A.1.7	Análisis de estabilidad de Lyapunov de sistemas lineales en tiempo continuo e invariantes en el tiempo.	61
A.2	Estabilidad de Lyapunov en sistemas discretos	61
A.3	Controlabilidad	65
A.3.1	Gramiano de controlabilidad	67
A.4	Bibliografía	69

# Capítulo 1

## Generalidades

### 1.1 Introducción

Los sistemas que actualmente diseña el hombre para su bienestar, como son las plantas generadoras de energía eléctrica, los procesos de manufactura, los procesos petroquímicos, etcétera, resultan cada vez más complejos. Debido a esta complejidad es común ver que los controladores de estas plantas están diseñados para trabajar en puntos de operación preestablecidos; mientras que el cambio de un punto de operación a otro es realizado por un controlador especial llamado secuenciador. En otros tiempos, el análisis del controlador en los puntos de operación y del secuenciador se hacía de forma independiente. Sin embargo recientemente la comunidad científica de control ha encaminado sus esfuerzos a analizar a estos sistemas como un todo, con la parte discreta y la parte continua a la vez con el fin de mejorar la eficiencia de todo el sistema. Aunque si se ha logrado un incremento en la eficiencia de los sistemas, también es cierto que se ha dado un incremento en la complejidad de análisis del sistema.

Esta nueva tendencia de abordar el estudio de los sistemas ha provocado el que surja el área denominada sistemas híbridos. El estado de estos nuevos sistemas está compuesto por una parte del estado que evoluciona de forma continua y otra parte que evoluciona de forma discreta. Debido a las diferentes áreas del conocimiento en control, existen diversas formas de estudiar los sistemas híbridos: a) por un lado están los investigadores que estudian sistemas discretos y extienden sus resultados a esta nueva clase de sistemas, entre estas aproximaciones están la lógica temporal con máquinas de estado extendidas [1] y la lógica temporal con redes de Petri [2]; b) y por otra parte la constituyen los investigadores que estudian control continuo y extienden sus ideas a sistemas conmutados [4 y 5] usando lógica difusa [3], redes neuronales o funciones de Lyapunov para el estudio de la estabilidad[4].

### 1.2 Definiciones

En términos muy generales se puede decir que la teoría de control estudia cómo lograr que un sistema se comporte como uno desea. En ingeniería de control, el sistema a controlar es una planta o proceso, éste podría ser una planta de generación de energía eléctrica, una sistema de manufactura, un proceso económico, etc. La mayoría de estos sistemas involucran señales en tiempo continuo, señales muestreadas y señales discretas. A continuación se clasifican los

sistemas a controlar de acuerdo al tipo de señales que lo describen.

**Definición 1** *Un sistema continuo es aquel en el que la descripción de su estado se hace por medio de funciones continuas. Las representaciones con ecuaciones diferenciales, ecuaciones en diferencias o respuestas frecuenciales resultan adecuadas para su análisis.*

**Definición 2** *Un sistema de eventos discretos es aquel en el que la descripción de su estado se hace por medio de funciones discretas. El número de estados puede ser infinito, pero siempre será numerable. Las representaciones con máquinas de estado finito, redes de Petri, álgebras de proceso, lógica temporal, resultan las adecuadas para su análisis.*

**Definición 3** *Un sistema híbrido es aquel en el que la descripción de su estado se hace por medio de funciones continuas y de funciones discretas. Las representaciones con ecuaciones diferenciales y con máquinas de estado finito, redes de Petri, álgebras de proceso, lógica temporal, etc. han resultadas adecuadas para su análisis.*

El siguiente modelo es un prototipo de un sistema conmutado

$$\dot{x}(t) = f_i(x(t)), \quad i \in \{1, \dots, N\}$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  y además

- Cada  $f_i$  es globalmente Lipschitz continua.
- Las  $i$ 's son tomadas de tal manera que estas son conmutaciones finitas en tiempo finito.

La  $i$  tomada en cualquier tiempo en particular puede ser elegida por algún procesador tal como un controlador, una computadora, o un operador humano, en tales casos se dice que el sistema es controlado. Por otro lado puede ser también elegida por una función de tiempo, el estado o ambos, en tales casos se dice que el sistema es autónomo.

El estudio de los sistemas híbridos es muy importante, ya que en la actualidad los sistemas productivos siempre son combinación de sistemas continuos y discretos. Por ejemplo, las plantas generadoras de energía eléctrica tienen secuenciadores que trabajan en conjunto con los controladores del tipo PID para lograr su control y estabilización. Podemos decir que prácticamente no hay proceso productivo en el que no intervengan ambos tipos de señales.

Desafortunadamente las técnicas de análisis de este tipo de sistemas es muy limitado, todavía se tienen serias interrogantes acerca de cuál es la mejor herramienta de representación. De la literatura existente sobre el tema podemos extraer tres grandes herramientas de modelado que han dado buenos resultados en la descripción y análisis de estos sistemas. La primera es las máquinas de estado extendido como herramienta de descripción junto con la lógica temporal como herramienta de análisis; la segunda son las redes de Petri programables que incluyen redes de Petri temporizadas en conjunto con ecuaciones diferenciales y en diferencias y la tercera la lógica difusa. Las dos primeras serán tratadas en esta tesis y la tercera se puede consultar en [3].

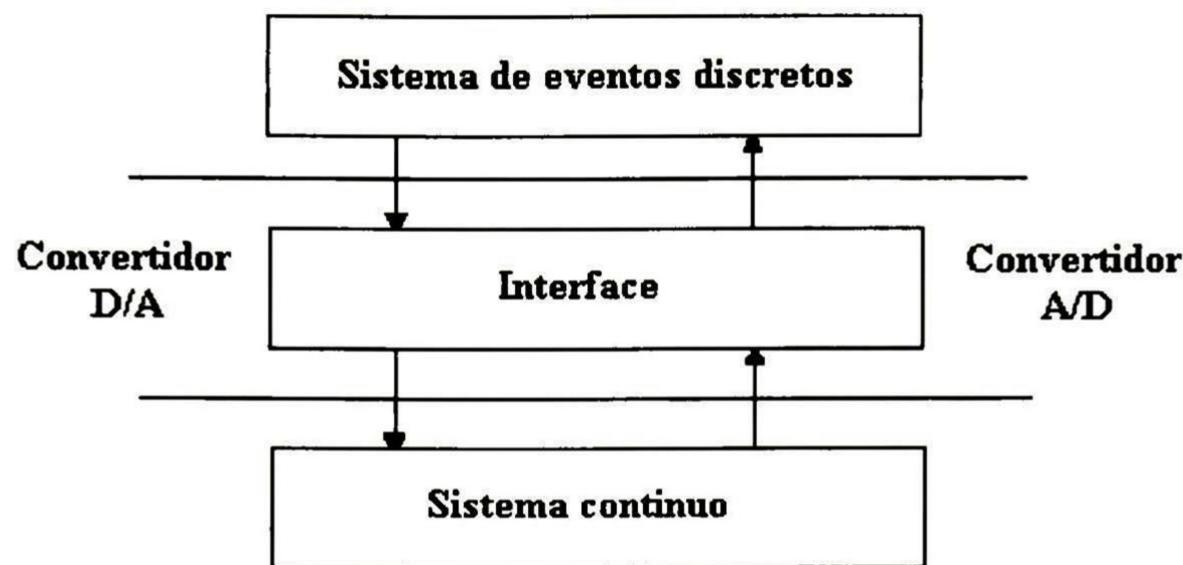


Figura 1.1: Representación gráfica de un sistema híbrido

### 1.3 Arquitectura general de un sistema híbrido

Un sistema híbrido puede ser visto como un sistema continuo conmutado, cuyas conmutaciones son generadas cuando los estados del sistema cruzan ciertas regiones específicas del espacio de estado, provocando que el sistema continuo varíe en su estructura.

Todos los sistemas híbridos incluyen dos importantes componentes: un componente continuo y un componente discreto. Los componentes continuos incluyen a todas las partes que emiten u operan con señales continuas. Por ejemplo dispositivos análogos y las variables por ellos medidos ( un tacómetro para medir velocidad, un barómetro para medir presión, un termómetro etc.).

Los componentes discretos incluyen a todos los componentes que emiten o funcionan con señales discretas o umbrales de señales continuas. Por ejemplo estructuras de datos en las ciencias de la computación tales como tablas y arreglos de enteros, así como conmutaciones de encendido o apagado.

Algunos de los elementos típicos de los sistemas híbridos que se ven en el mundo real incluyen sensores para medir variables continuas, actuadores para cambiar el modo de operación de los sistemas, canales para comunicación entre las partes del sistema, y un control supervisor para controlar al sistema en diferentes puntos de operación.

El término de sistema híbrido es usado para describir una gran variedad de clases de sistemas. Sin embargo toda esa variedad de sistemas híbridos pueden ser descritos por la arquitectura mostrada en la figura 1.1

Como podemos observar los sistemas híbridos pueden ser arreglados en dos o más capas (niveles). La capa inferior del modelo de la planta es descrito usualmente por medio de ecuaciones diferenciales y/o por ecuaciones de diferencias. Este nivel contiene la planta y controladores continuos trabajando en el mismo nivel de abstracción. En la capa superior la descripción de la planta es más abstracta, el lenguaje de descripción de esta capa son por lo general máquinas de estado finito, lógica difusa, redes de Petri, etc. El controlador diseñado a este nivel es un control supervisorio de eventos discretos. Los dos niveles anteriores están comunicados por medio de una interfaz que juega un papel de traductor entre señales de la planta y símbolos del sistema

de eventos discretos.

## 1.4 Revisión bibliográfica

Se inició el trabajo de la revisión bibliográfica y se pudo identificar y clasificar esta en tres grandes grupos que a continuación describiremos:

*Por un lado identificamos aquellos autores quienes realizan los modelos lógicos mediante secuencias de estados e introducen el tiempo en forma independiente, tales modelos no capturan la parte continua y por tanto el control es más difícil de lograr, entre estos autores encontramos a **Arjun Kapur** [1] quien presenta una metodología deductiva y diagramática para proveer y verificar propiedades de punto-base e intervalos-base de los sistemas híbridos, donde el sistema híbrido es modelado con una semántica de muestreo o una semántica continua. Bajo una semántica de muestreo el comportamiento del sistema consiste de un número discreto de sistemas instantáneos, donde cualquier instante almacena el estado del sistema en un momento particular en el tiempo. Bajo una semántica continua, el comportamiento del sistema está dado por una función mapeando cualquier punto en el tiempo a un estado del sistema. Dos semánticas continuas son estudiadas: una semántica de intervalos continuos, donde dado cualquier punto en el tiempo, el sistema está en un único estado, y una semántica súper-densa donde tal requerimiento no es necesario.*

Arjun Kapur utiliza lógica temporal de tiempo lineal para expresar propiedades entre una semántica de muestreo o una semántica súper densa, y al mismo tiempo introduce la lógica temporal híbrida para expresar propiedades de la semántica de intervalos continuos. La lógica temporal en tiempo lineal es útil para expresar propiedades de punto-base cuya validez es dependiente de los estados individuales, mientras que la lógica temporal híbrida es útil para expresar ambas propiedades de intervalo-base cuya validez es dependiente sobre intervalos de tiempo y propiedades de punto-base.

Finalmente, presenta dos metodologías de verificación: una aproximación diagramática para verificar propiedades especificadas con lógica temporal lineal, y una aproximación deductiva para verificar propiedades especificadas en lógica temporal híbrida.

Por otro lado **Jonathan S. Ostrof** [2] presenta otra herramienta utilizada para representar sistemas híbridos, que es la lógica temporal en tiempo real junto con las máquinas de estado extendidas. El presenta un marco de trabajo para modelar, especificar y verificar sistemas en tiempo real. En este trabajo se emplean máquinas de estado extendido (MEE) para modelar los procesos y dispositivos de la planta. Mientras que la lógica temporal en tiempo real (LTTR) es usada para especificar requerimientos en el comportamiento lógico y causal (qué evento ocurre primero y cuál después, cuáles eventos ocurren en paralelo o no tienen dependencia alguna) de la planta, y verificar que el controlador permita realizar la especificación.

La conexión entre las MEE y las LTTR es hecha vía una extensión del trabajo de Manna y Pnueli para un sistema de transición justo. Un sistema de transición justo consiste de un espacio de estado (posiblemente infinito), un conjunto de transiciones que definen el cambio de estado, un conjunto de estados iniciales, y una familia de justicia y equidad que dice en qué proporción se deben ejecutar las transiciones o reglas de cambio de estado.

Las dos metodologías anteriores modelan las relaciones causales, las sincronizaciones y el paralelismo de un sistema. Por tanto pueden analizar si algún estado es alcanzado. Desafortunadamente

la parte continua no es fielmente analizada, ya que no modela esta parte y no se puede analizar la estabilidad en continuo.

*Por otro lado encontramos autores los cuales realizan el modelo lógico y además capturan la parte continua mediante ecuaciones diferenciales*, entre ellos encontramos a **Michael S. Branicky** [5] quien presenta preliminares sobre el análisis de estabilidad de sistemas híbridos conmutados. Los sistemas híbridos que se consideran son aquellos que combinan dinámicas continuas, representadas por ecuaciones diferenciales o en diferencias, con dinámicas finitas. La atención se centra sobre las dinámicas continuas y se modelan las dinámicas finitas como conmutaciones finitas entre muchos sistemas continuos. Introduce múltiples funciones de Lyapunov como herramientas para analizar estabilidad de tales sistemas conmutados. Además considera dos tipos de sistemas conmutados los sistemas conmutados autónomos y los sistemas conmutados controlados.

Dentro de la misma clasificación **Kevin X. He** y **Michael D. Lemmon** [4] presentan resultados recientes de una clase de redes de Petri temporizadas llamadas Redes de Petri Temporizadas Programables (RPTP). Este tipo de redes captura, por la parte discreta las relaciones causales, las sincronizaciones, la exclusión mutua y el paralelismo de un sistema, y por la parte continua captura el comportamiento del sistema alrededor de los puntos de operación. Una vez establecida esta representación el trabajo analiza una clase de sistemas híbridos: aquellos cuya parte discreta es estable y controlable. A la parte continua no le introduce restricciones, pero los ejemplos utilizados sólo provienen de sistemas lineales.

Utilizando esta nueva herramienta es capaz de analizar los ciclos fundamentales propuestos en [4] y analizar de forma eficiente la estabilidad del sistema. Para analizar los ciclos fundamentales utiliza el algoritmo de “despliegue” presentado en [6]. La principal característica de estos resultados es que muestran que cuando las leyes de transición pueden ser caracterizadas por una RPTP entonces es suficiente con examinar algunos de los ciclos fundamentales en el grafo de alcanzabilidad para asegurar estabilidad.

Recordando que un ciclo fundamental es cualquier ruta aceptada por el autómata, la cual inicia y termina en el mismo vértice (en el cual si el ciclo no se cruza con el mismo, entonces es un ciclo fundamental), entonces presenta un teorema que requiere que exista una función de Lyapunov para toda posible secuencia de conmutación para que el sistema sea estable.

*Por ultimo encontramos aquellos autores quienes no toman en cuenta las conmutaciones y centran su atención sobre el análisis de la estabilidad*, entre ellos encontramos a **Robert N. Shorten** y **Kumpati S. Narendra** [7] quien considera el problema de la estabilidad exponencial de una clase de sistemas conmutados. Esta clase sólo es una secuencia de sistemas lineales invariantes en el tiempo. El momento de la conmutación no es tomado en cuenta y sólo derivan condiciones suficientes para que el sistema conmutado sea estable. El resultado que presentan es el siguiente. Dado un conjunto finito de matrices estables  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$  se discuten las condiciones bajo las cuales el sistema lineal variante en el tiempo  $\dot{x} = A(t)x$  es exponencialmente estable, cuando  $A(t)$  es alguna matriz constante continua a trozos, y que toma valores dentro del conjunto  $\mathcal{A}$ . Esta aproximación involucra la construcción de una función común de Lyapunov para todos los subsistemas. ntes para la existencia de una función común de Lyapunov para dos sistemas de segundo orden estables.

## 1.5 Objetivos de la tesis

Los objetivos del presente trabajo son los siguientes:

1. Análisis de los sistemas híbridos, definiciones e importancia.
2. Presentación de dos herramientas de modelado de los sistemas híbridos.
3. Análisis de los principales resultados de estabilidad en sistemas híbridos.
4. Análisis de los principales resultados de controlabilidad en sistemas híbridos.
5. Aplicación al sistema del pendubot.

## 1.6 Estructura de la tesis

La tesis está organizada como sigue. En el capítulo (2) se presentan dos de las herramientas de modelado de sistemas híbridos: la lógica temporal con máquinas de estado extendidas y las redes de Petri programables. Se hace una comparación de estas herramientas y se presentan ejemplos de modelado. En el capítulo (3) se presentan los resultados de estabilidad conocidos cuando se unen ambos sistemas. El capítulo (4) presenta los resultados conocidos de controlabilidad híbridos. El último capítulo presenta la aplicación de tales herramientas a un sistema en particular. Se presenta además un anexo de resultados conocidos de estabilidad y controlabilidad.

## 1.7 Conclusiones

Se presentarán definiciones importantes de los sistemas híbridos los cuales clasificamos de la siguiente manera aquellos en los cuales el modelo lógico es modelado por secuencias de estado y el tiempo es separado del modelo, aquellos en los cuales se obtiene el modelo lógico de la parte discreta y la parte continua es modelada por ecuaciones diferenciales, y aquellos en los cuales las conmutaciones no son tomadas en cuenta y centran su atención en el análisis de estabilidad.

# Capítulo 2

## Herramientas de modelado

### 2.1 Introducción

En este capítulo se presentan dos de las herramientas de modelado de los sistemas híbridos para contrastar las ventajas de una con respecto a la otra, una de ellas la lógica temporal en conjunto con las máquinas de estado extendido y la otra las redes de Petri programables. Presentamos un ejemplo que se analiza con ambas herramientas.

En el capítulo anterior presentamos el esquema general de un sistema híbrido, el cual consiste de varias capas ó niveles. Dos capas muy importantes son, la del sistema continuo y la del sistema discreto. En [1] se introduce este esquema, y aunque hay una separación entre la parte continua y la parte discreta, en realidad no ocurre así, sólo es una forma de abstracción que se hace del sistema. Sin embargo, esta visión da lugar a que existan diferentes herramientas de modelado, unas de ellas dedicadas sólo a la parte continua, otras sólo a la parte discreta y algunas de ellas realmente híbridas.

Algunas de las herramientas más comúnmente, utilizadas en el modelado de un SED son las máquinas de estado finito y las máquinas de estado extendido. Estas herramientas representan a los sistemas en forma de grafos, donde cada nodo es un estado del sistema y los arcos están etiquetados con los eventos que provocan un cambio de un estado a otro. El análisis[12] de sus propiedades se realiza estudiando los lenguajes generados por el autómata o máquina de estados finitos. En el caso de las máquinas de estado extendido, se introduce una variable que representa el tiempo (llamada generalmente *tick*). Utilizando estas máquinas para describir el sistema y ayudándose de la lógica temporal en tiempo real (LTTR) para analizarlo, es posible estudiar el comportamiento del sistema.

### 2.2 Máquinas de estado extendido y lógica temporal

Como mencionamos en el capítulo anterior, las máquinas de estado extendido (MEE) son utilizadas para representar procesos de eventos discretos en tiempo real y la LTTR como lenguaje de análisis para la especificación y verificación. Sin embargo, está última puede ser aplicada a cualquier otro modelo de computación representado con sistemas de transición justo incluyendo variables compartidas, comunicaciones asíncronas, y modelos de redes de Petri.

El formalismo de las máquinas de estado extendido es uno de los más viejos modelos de la computación digital. Éste ha sido extensivamente utilizado en los requerimientos de especificaciones para cálculos en tiempo real, porque es un medio visual natural para describir la conducta dinámica de un sistema discreto. Tal vez esta herencia es una de las razones para elegir máquinas de estado extendido para representar plantas y controladores. Las MEE son máquinas de estado mejoradas con las nociones estándar de programación de variables de datos, guardas de eventos, concurrencia y comunicación. Por tanto permiten describir una clase mayor de sistemas de los que se pueden hacer con sólo máquinas de estado. Además, la inclusión de la variable tiempo permite agregar una dimensión más de información, que será muy útil en el estudio de propiedades del sistema.

La lógica temporal, por otro lado, tiene su origen en la filosofía, donde es usada para analizar la estructura o topología del tiempo. En años recientes ha encontrado aplicación en las ciencias de la computación, especialmente en las áreas de verificación de programas y en sistemas de base de conocimientos. Los filósofos encuentran útil introducir operadores temporales, tales como  $\square$  (de ahora en adelante) y  $\diamond$  (eventualmente) para el análisis de conectivos temporales dentro del lenguaje. Los nuevos formalismos serán vistos en breve como una herramienta potencialmente valiosa para analizar la topología del tiempo. Por ejemplo, varios tipos de semánticas pueden ser dadas sobre los operadores temporales dependiendo de si el tiempo es lineal, paralelo o ramificado. Otra pregunta que se puede realizar es si el tiempo es discreto o continuo.

Los operadores temporales tienen gran utilidad en la especificación de conducta de programas. Una estructura de estados es la clave que hace a la lógica temporal adecuada para tal tarea. Una fórmula, conteniendo operadores lógicos temporales, es interpretada sobre una estructura de estados. En lenguajes de programación, las estructuras representan los cómputos ejecutados por el programa, de tal manera que un cómputo puede ser utilizado para interpretar una fórmula temporal. De esta manera, un lenguaje de programación se dice que está dotado con una semántica temporal.

Alguna de las diferentes semánticas temporales incluye:

La propiedad más importante de las MEE no es solo su habilidad para modelar procesos en plantas de lazo abierto, si no también los procesos del controlador (implementados en hardware o como tareas de software), así como también las conductas del sistema de lazo cerrado consistente del esfuerzo cooperativo de la planta y el controlador.

Cada descripción de un proceso en MEE puede tener una variable llamada *variable actividad* la cual tiene rango sobre el conjunto actividades. En adición, una MEE puede tener un conjunto de *variables datos* que almacena información numérica o cualitativa del proceso que modela tal como niveles, temperaturas, presiones o el valor de un dato en un proceso de software. Las actividades de una MEE son usualmente llamados estados en la teoría de autómatas. Por lo tanto en lo que resta de este trabajo, “estado” se refiere a los valores de todas las actividades y variables de datos.

La ocurrencia de un evento en MEE causa un cambio instantáneo en la actividad actual en alguna nueva actividad (como un diagrama de estados), también causa un cambio en los valores de las variables datos. Las variables datos pueden ser utilizadas como un mecanismo estructurado para

la prevención de una multitud innecesaria de cotas que ocurren en un diagrama de estados (por ejemplo cuando la misma transición debe ser hecha para un gran número de actividades). Por otro lado, una MEE debe de ser capaz de modelar ambos procesos tanto hardware como software. Las variables datos pueden ser usadas para representar variables del programa, y consecuentemente pueden también representar estructuras de datos tales como arreglos y almacenamientos. Asimismo la comunicación y las acciones compartidas en MEE, están también dotadas con una acción de asignamiento, la cual puede cambiar los datos del modelo sobre la ocurrencia de un evento.

**Definición 4** Una MEE básica es la 5-tupla  $(X, Y, C, L, A)$  donde

- $X$  es un simple conjunto  $\{x\}$  donde  $x$  es una *variable actividad* con rango asociado tipo  $(x)$ . (los elementos de tipo  $(x)$  son llamados actividades)
- $Y$  es un conjunto de *variable datos* donde cada variable  $y \in Y$  tiene rango asociado tipo  $(y)$ .
- $C$  es un conjunto de *canales de comunicación*.
- $L$  es un conjunto de *etiquetas de eventos*.
- $A$  es un conjunto de *acciones básicas*

**Acciones básicas:** Cada acción básica en  $A$  está dada por  $\{(x, E)\}$ .  $E$  es un evento dado por la 4-tupla  $(a_s, guarda, operación, a_d)$  donde  $a_s$  es una actividad fuente del tipo  $(x)$ ,  $a_d$  es una actividad destino del tipo  $(x)$  y la guarda es una expresión valuada-booleana en la variable dato. Las operaciones se describen a continuación.

**Operaciones:** estos son tres géneros de operaciones:

- 1.- Una operación de asignación está dada por  $\alpha[y : a]$  (i.e.  $[y : a]$  es leída  $a$  es asignada a  $y$ ) donde  $\alpha$  es una etiqueta de un evento,  $y$  es una variable dato, y  $a$  es una expresión. La expresión  $a$  puede ser del mismo tipo  $(y)$  que la variable dato.
- 2.- Una operación de envío está dada por  $c!m$ , donde  $c$  es un canal en  $C$  y  $m$  es un mensaje. Un mensaje es un término cualquiera (una expresión) en la variable actividad o dato, o una etiqueta de evento.
- 3.- Una operación de recepción está dada por  $c?r$ , donde  $c$  es un canal de comunicación, y  $r$  es cualquier variable dato o una etiqueta de evento.

Una interpretación informal de la figura 2.1 sería: si la MEE está actualmente en la actividad  $a_s$  y si la guarda evalúa un evento verdadero, entonces la cota es movida mientras dura la operación, después de la cual la MEE estará en la actividad  $a_d$ .

**Definición 5 Acciones :** una acción puede ser cualquiera de las dos, una acción básica ó una interacción. Una interacción es la que se da entre una acción compartida ó una acción de comunicación definida como sigue:

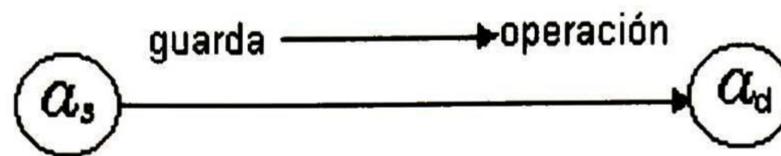


Figura 2.1: Representación pictórica de un evento

- *Acciones compartidas* estas son definidas inductivamente como sigue. Caso base: sea  $A_i$  y  $A_j$  acciones de asignación (i.e acciones básicas con una operación de asignación) para diferentes MEE teniendo el mismo evento etiquetado  $\alpha$ . Entonces  $A_iUA_j$  es una acción compartida con etiqueta de evento compartida  $\alpha$

Caso inductivo: sea  $A_i$  y  $A_j$  una acción de asignación o una acción compartida teniendo etiqueta de evento compartida  $\alpha$ . Entonces  $A_iUA_j$  es también una acción compartida con etiqueta de evento  $\alpha$ .

- sea  $A_s$  y  $A_r$  un envío y recepción coincidentes respectivamente. Entonces  $A_sUA_r$  es una *acción de comunicación*.

si  $A_iUA_j$  es una interacción, entonces  $A_i$  y  $A_j$  son llamadas *acciones igualadas*.

En el ejemplo de la figura 2.2 tenemos en la ecuación 2.2 el evento etiquetado como  $\delta$  que es una acción compartida entre el tren y la compuerta y puede ser utilizada para representar la cooperación del tren y la compuerta en el cual el tren sale de la zona (del cruce) mientras simultáneamente la compuerta es levantada.

### 2.2.1 Semántica de las MEE

Dada cualquier MEE  $M$  con un espacio de estado,  $S$ , una trayectoria es cualquier ruta en el espacio de estado consistente de una secuencia infinita de estados y transiciones. El conjunto de todas las trayectorias de  $M$  es denotado como  $S^w$ . No todas las trayectorias representan posibles comportamientos de  $M$ , debido a que las guardas, la sincronización de eventos y las cotas del tiempo de  $M$  pueden necesariamente prevenir ciertas trayectorias que jamás deben ocurrir. El conjunto de trayectorias legales de  $M$  (denotadas como  $\Sigma$ ) contiene solo aquellas trayectorias que son posibles en el comportamiento del sistema.

Las trayectorias legales son importantes por dos razones:

- Primero, el conjunto de trayectorias legales es una descripción precisa del comportamiento de la dinámica de  $M$ , entonces  $\Sigma$  provee una semántica operacional abstracta de  $M$ .
- Segundo, la lógica temporal en tiempo real (*LTTR*) es interpretada sobre trayectorias, entonces el conjunto de todas las trayectorias legales es la liga crucial entre *MEE* como un lenguaje de representación, y la *LTTR* como un lenguaje de verificación.

La definición formal de trayectorias legales está basada en información perteneciente a una MEE tales como un espacio de estado, conjunto de variables y una familia de justicia. Toda la información necesaria es recolectada en un generador de trayectorias.

El conjunto de trayectorias legales  $\Sigma$  de una MEE es una semántica operacional abstracta para la MEE, así como también un conjunto de interpretaciones de las fórmulas de la lógica temporal. Mientras las fórmulas del cálculo de predicados son interpretadas en un simple estado, las fórmulas de Manna-Pnueli de lógica temporal son interpretadas sobre una secuencia de estados (una trayectoria), permitiendo así para la expresión propiedades de seguridad (i.e. nada malo puede pasar en algún estado de la trayectoria) y propiedades de vivacidad (eventualmente este puede ser algún estado de la trayectoria donde en algún momento algo bueno pasará). La lógica temporal de tiempo real (*LTTR*) está basada sobre la lógica temporal de tiempo lineal de Manna-Pnueli, ver ref [2].

A continuación veremos otra herramienta de modelado, de la cual mencionaremos algunas de sus propiedades mas importantes.

## 2.3 Las redes de Petri ordinarias

**Definición 6** *Redes de Petri ordinarias*[8] Una red de Petri ordinaria (*RP*) es

- Un grafo  $G = \langle L, T, E, S \rangle$  . donde:
  - $L = \{l_1, l_2, \dots, l_n\}$  es un conjunto finito de elementos llamados lugares, los cuales se representan gráficamente mediante círculos,
  - $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$  es el conjunto finito de elementos llamados transiciones, las cuales se representan mediante barras o segmentos de línea,
  - $E : L \times T \rightarrow \{0, 1\}$  es la función de entrada que representa los arcos que van de los lugares hacia las transiciones, la cual se define de la siguiente forma:

$$E(l_i, t_j) = \begin{cases} 1 & \text{si el arco de } l_i \text{ a } t_j \text{ existe} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- $S : L \times T \rightarrow \{0, 1\}$  la función de salida que representa los arcos que van de las transiciones hacia los lugares, definida como sigue:

$$S(l_i, t_j) = \begin{cases} 1 & \text{si el arco de } t_j \text{ a } l_i \text{ existe} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- una función de marcado,  $M : L \rightarrow [N \cup \{0\}]^n$ , la cual asigna a cada lugar de  $G$  un número dado de elementos llamados marcas. Por notación,  $M = M(L)$  y  $M$  será llamado simplemente el *marcado*.
- Un marcado inicial  $M_o$ , el cual es una asignación arbitraria de marcas en el momento inicial.
- Las siguientes reglas de evolución :
  - a) **Regla de habilitación.** una transición  $t_k \in T$  de  $G$  está habilitada si  $\forall l_i \in L$  de  $G$ ,  $M(l_i) \geq E(l_i, t_k)$ . Si una transición  $t_k$  está habilitada, entonces se puede disparar.
  - b) **Regla de disparo.** Si una transición habilitada  $t_j$  es disparada en un marcado  $M_k$  entonces se alcanza el nuevo marcado  $M_{k+1}$ , eliminando  $E(l_i, t_j)$  marcas de sus lugares de entrada  $l_i$  y añadiendo  $S(l_i, t_j)$  marcas a sus lugares de salida  $l_i$ .

**Definición 7 Marcados consecutivos.** Sean  $M_i$  y  $M_j$  dos marcados de una RP. Se dice que  $M_i$  y  $M_j$  son marcados consecutivos,  $M_i \xrightarrow{t_k} M_j$ , si  $M_j$  se alcanza disparando una transición  $t_k$  en  $M_i$ .

**Definición 8 Secuencia de disparos, marcados alcanzables.** Sea  $M_i$  un marcado de una RP. Si  $M_i \xrightarrow{t_i} M_{i+1} \xrightarrow{t_j} \dots \xrightarrow{t_k} M_k$  entonces  $\sigma = t_i t_j \dots t_k$  es una secuencia de disparos que lleva del marcado  $M_i$  al marcado  $M_k$  y se escribe  $M_i \xrightarrow{\sigma} M_k$  y se dice que  $M_k$  es un marcado alcanzable a partir de  $M_i$ .

**Definición 9 Conjunto de alcanzabilidad de una red de Petri.** Sea  $R$  una RP. El conjunto de alcanzabilidad de  $R$ , denotado como  $R(R, M_o)$ , es el conjunto de todos los marcados alcanzables en  $R$  a partir su marcado inicial  $M_o$ .

**Definición 10 Representación matricial de una red de Petri** Sean  $n = |L|$  el número de lugares en la red y  $m = |T|$  el número de transiciones de una RP. La estructura del grafo  $G$  de la RP se puede representar por medio de dos matrices:

- Se denomina matriz de entrada o incidencia previa a la matriz  $C^- = [c_{i,j}^-]_{n \times m}$  donde  $c_{i,j}^- = E(l_i, t_j)$ .
- Se denomina matriz de salida o incidencia posterior a la matriz  $C^+ = [c_{i,j}^+]_{n \times m}$  donde cada elemento de la matriz  $c_{i,j}^+ = S(l_i, t_j)$ .
- Se denomina matriz de incidencia a la matriz  $C = C^+ - C^-$

**Ecuación de estados de una red de Petri.** Sean  $R$  una RP y  $M_k \in R(R, M_o)$ . Entonces al disparar una transición  $t_j$  habilitada en  $M_k$  se alcanza un nuevo marcado  $M_{k+1}$  el cual puede ser calculado mediante la siguiente ecuación:

$$M_{k+1} = M_k + C\vec{v}$$

donde  $\vec{v}$  es el vector de disparo que posee un 1 en la  $j$ -ésima posición, si la transición  $t_j$  se dispara y un 0 en caso contrario.

## 2.4 Redes de Petri Temporizadas Programables

Una Red de Petri Temporizada Programable (RPTP) es una red de Petri temporizada ordinaria cuyos lugares, transiciones y arcos están etiquetados con fórmulas representando restricciones y condiciones de regreso a condiciones iniciales en la velocidad y tiempos generados por un conjunto de elementos en tiempo continuo llamados reloj.

En una red de Petri ordinaria, los lugares y transiciones representan abstracciones de los “estados” y “acciones” del sistema. En muchas aplicaciones las acciones usan una cantidad finita de tiempo (intervalo de disparo) para completar el disparo. Es entonces necesario trabajar con redes de Petri temporizadas. En una red de Petri temporizada [4] al vector de disparo y al vector de marcado se le asignan funciones de un tiempo global  $\tau$ . Se denota el vector de disparo como  $q_\tau$  el cual indica qué transiciones se están disparando al tiempo  $\tau$ . El vector de marcado temporizado es denotado como  $\mu_t$ . Al igual que en una red de Petri ordinaria, podemos decir que una transición  $t$  esta habilitada al tiempo  $\tau$  si  $\mu_\tau(p) > 0$  para toda  $p \in \bullet t$ . Una transición habilitada es libre de dispararse. Para la red de Petri temporizada el disparo de una transición ocurre en un intervalo de tiempo  $[\tau_0, \tau_f]$  donde  $\tau_0$  es el tiempo de inicio del disparo y  $\tau_f$  el tiempo al finalizar el disparo. La duración de este intervalo es llamado tiempo de retención de la transición. Una transición  $t$  que inicia el disparo al tiempo  $\tau_0$  se dice que está *comisionada* y su función de disparo  $q_{\tau_0}(t)$  es la unidad. Durante el tiempo que la transición es comisionada al disparo, el vector de marcado de la red no cambia. Sólo cuando el disparo es finalizado completamente al tiempo  $\tau_f$  el vector de marcado cambia de acuerdo a la ecuación de evolución de marcado. Cuando el tiempo de la transición ha terminado el disparo, la función de disparo  $q_{\tau_f}(t)$  es puesta a cero.

La duración del intervalo de disparo también llamado tiempo de retención puede ser caracterizada por una gran variedad de maneras. Una aproximación común asume que el tiempo de retención es una constante fija o una variable aleatoria. En algunas aplicaciones, los tiempos de retención pueden ser tratados como variables de control. Estos tiempos pueden ser controlados introduciendo temporizadores locales, los cuales causan el disparo de las transiciones cuando las condiciones especificadas programadas por el sistema diseñado son satisfechas. Esencialmente esta aproximación caracteriza los tiempos de retención por lógica proposicional definida sobre los tiempos generados por el conjunto de relojes locales. Las redes de Petri cuyos tiempos de retención son definidos de esta manera es llamada como una Red de Petri Temporizada Programable (RPTP).

Sea  $G = \langle L, T, E, S \rangle$  una red de Petri ordinaria. Se introduce un conjunto  $X$  de  $N$  relojes locales donde el  $i$ -ésimo reloj  $X_i$  es denotado por la tripleta  $(\dot{x}_i, x_{i0}, \tau_{i0})$ , donde  $x_{i0} \in \mathfrak{R}^n$  representa la condición inicial de los relojes.  $\tau_{i0}$  es el tiempo inicial (medido con respecto al reloj global) indicando cuando el reloj local fue iniciado.  $\dot{x}_i: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$  es un automorfismo lipschitz continuo sobre  $\mathfrak{R}^n$  caracterizado por la velocidad del reloj local. Suponiendo que la velocidad del reloj  $\dot{x}_i$  es denotado por el automorfismo  $f$ . El tiempo local generado por el  $i$ -ésimo reloj puede ser denotado como  $x_i$  la cual es una función continua diferenciable sobre  $\mathfrak{R}^n$  que es la solución al problema

$$\frac{dx_i}{d\tau} = f(x_i) \quad (2.1)$$

$$x_i(\tau_{i0}) = x_{i0}$$

para  $\tau > \tau_{i0}$ . Se puede apreciar que los temporizadores locales son vectores de ecuaciones dinámicas. El tiempo local del  $i$ -ésimo temporizador al tiempo global  $\tau$  es denotado como  $x_i(\tau)$  y la velocidad del temporizador como  $\dot{x}_i(\tau)$ . Se dice que el estado del  $i$ -ésimo temporizador es el par ordenado  $z_i(\tau) = (x_i(\tau), \dot{x}_i(\tau))$ . El grupo de todos los estados de los relojes locales es simplemente denotado como  $z(\tau)$ .

El intervalo  $[\tau_o, \tau_f]$  sobre el cual una transición  $t$  que puede ser disparada viene a ser caracterizada por fórmulas en una lógica proposicional cuyas fórmulas atómicas son ecuaciones sobre los tiempos locales o velocidades de los relojes de  $X$ .

**Definición 11** Una fórmula atómica,  $p$ , toma una de las siguientes formas;

- 1.-  $p$  puede ser una restricción de tiempo de la forma  $h(x_i) = 0$  ó  $h(x_i) < 0$  donde  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función real valuada. Esta fórmula evalúa como *verdad* cuando el tiempo del reloj  $x_i$  satisface la ecuación.
- 2.- La fórmula atómica  $p$  pueden ser restricciones de velocidad de la forma  $\dot{x}_i = f$  la cual significa que la  $i$ -ésima velocidad del reloj  $\dot{x}_i$  es igual al vector de campo  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
- 3.- Finalmente,  $p$  puede ser una ecuación de reinicio de la forma  $x_i(\tau) = \bar{x}_0$  la cual dice que el  $i$ -ésimo reloj local al tiempo global  $\tau$  es un conjunto del vector  $\bar{x}_0$ .

**Definición 12** Se define una fórmula bien formada (*wff*) como una expresión generada por un número finito de aplicaciones de las siguientes reglas;

- 1.- Una fórmula atómica es una *wff*,
- 2.- Si  $p$  y  $q$  son *wff*s, entonces  $p \wedge q$  es una *wff*.
- 3.- Si  $p$  es una *wff*, entonces  $\tilde{p}$  es una *wff*.

El conjunto de todas las *wff*s en esta manera se denotan como  $\mathcal{P}$

La sintaxis para las fórmulas bien formadas están definidas con respecto a una estructura de la red de Petri de la forma  $G = \langle L, T, E, S \rangle$  y un conjunto de relojes locales  $X$ . El estado del reloj local  $z$  al tiempo  $\tau$  se dice que satisface una fórmula  $p \in \mathcal{P}$  si  $p$  es verdad para un reloj de estado dado,  $z(\tau)$ . La satisfacción de  $p$  por  $z(\tau)$  es denotado como  $G \models p[z(\tau)]$ . La verdad de la fórmula atómica es entendida en el sentido usual. Se dice que una fórmula atómica,  $p \in \mathcal{P}$  es satisfecha por  $z(\tau)$  si y solo si la evaluación de la fórmula es verdad.  $G \models \tilde{p}[z(\tau)]$  si y solo si  $z(\tau)$  no satisface  $p$ . también  $G \models p \wedge q[z(\tau)]$  si y solo si  $G \models p[z(\tau)]$  y  $G \models q[z(\tau)]$ .

**Definición 13** Considere una red de Petri ordinaria  $G = \langle L, T, E, S \rangle$  y un conjunto de temporizadores lógicos  $X$ . Una red de Petri temporizada programable (RPTP) es denotada como la tupla ordenada,  $(G, X, \ell_L, \ell_T, \ell_E, \ell_S)$  donde las funciones  $\ell_L : L \rightarrow \mathcal{P}$ ,  $\ell_T : T \rightarrow \mathcal{P}$ ,  $\ell_E : E \rightarrow \mathcal{P}$ ,  $\ell_S : S \rightarrow \mathcal{P}$ , etiquetan los lugares, transiciones, arcos de entrada y arcos de salida (respectivamente) de la red de Petri  $G$  con fórmulas bien formadas en  $\mathcal{P}$ .

## 2.5 Ejemplo de modelado con MEE y redes de Petri

Sea el sistema presentado en la figura 2.2. Este sistema está compuesto por un tren, llamado  $T1$ ; una barrera llamada  $B1$  y una vía que forma un ciclo y que pasa por tres lugares que distinguimos el pueblo  $A$ , el pueblo  $B$  y el cruce con la barrera  $B1$ .

El tren  $T1$  tiene tres estados:

- aproximándose ( $a$ ); que es cuando el tren está a cierta distancia de la barrera  $B1$ .
- en cruce ( $ec$ ); que es cuando el tren está pasando por la barrera  $B1$ .
- alejándose ( $al$ ); que es cuando el tren a superado la barrera y está separado una cierta distancia de ella.

La barrera  $B1$  sólo tiene dos posibles estados:

- Arriba ( $Ba$ ); que indica que la barrera está arriba, permitiendo el cruce de carros y peatones por la vía
- abajo ( $Bd$ ); que indica que la barrera está abajo, no permitiendo el cruce de carros por la vía.

En la representación gráfica se utilizan las siguientes etiquetas  $\beta$  (la compuerta es bajada),  $\alpha_2$  (el tren entra en la zona de aproximación),  $\delta$  es una etiqueta compartida por el tren y la compuerta (representa que el tren sale del cruce y que la compuerta es levantada ) y  $ec$  (el tren está cruzando).  $x_1$  es la variable actividad del tren y  $x_2$  es la variable actividad de la compuerta

El modelo cuenta con canales de comunicación  $m$  los cuales informan en todo momento del estado de la planta al controlador el cual a su vez cuenta con un canal  $c$  con el cual manda los comandos de control a la planta.  $m!x_1$  significa que manda información de la planta tren al controlador por el canal  $m$  y  $m?x_1$  significa que recibe información de la planta tren por el mismo canal , para el canal  $c$  el formato es el mismo ver figura 2.2.

La MEE básica de la compuerta es la 5-tupla

$$(\{x_2\}, \emptyset, \{c\}, \{\beta, \delta\}, A)$$

donde el  $tipo(x_2) = \{Ba, Bd\}$  y

$$A = \{ \{ (x_2, (Ba, verdad, c?\beta, Bd)) \}, \{ (x_2, (Bd, verdad, c?\beta, Ba)) \} \}$$

Sea  $x_1$  la variable actividad del tren y  $x_2$  la variable actividad compuerta entonces  $\delta$

$$\{ (x_1, (ec, verdad, \delta, al)), (x_2, (Bd, verdad, \delta, Ba)) \} \quad (2.2)$$

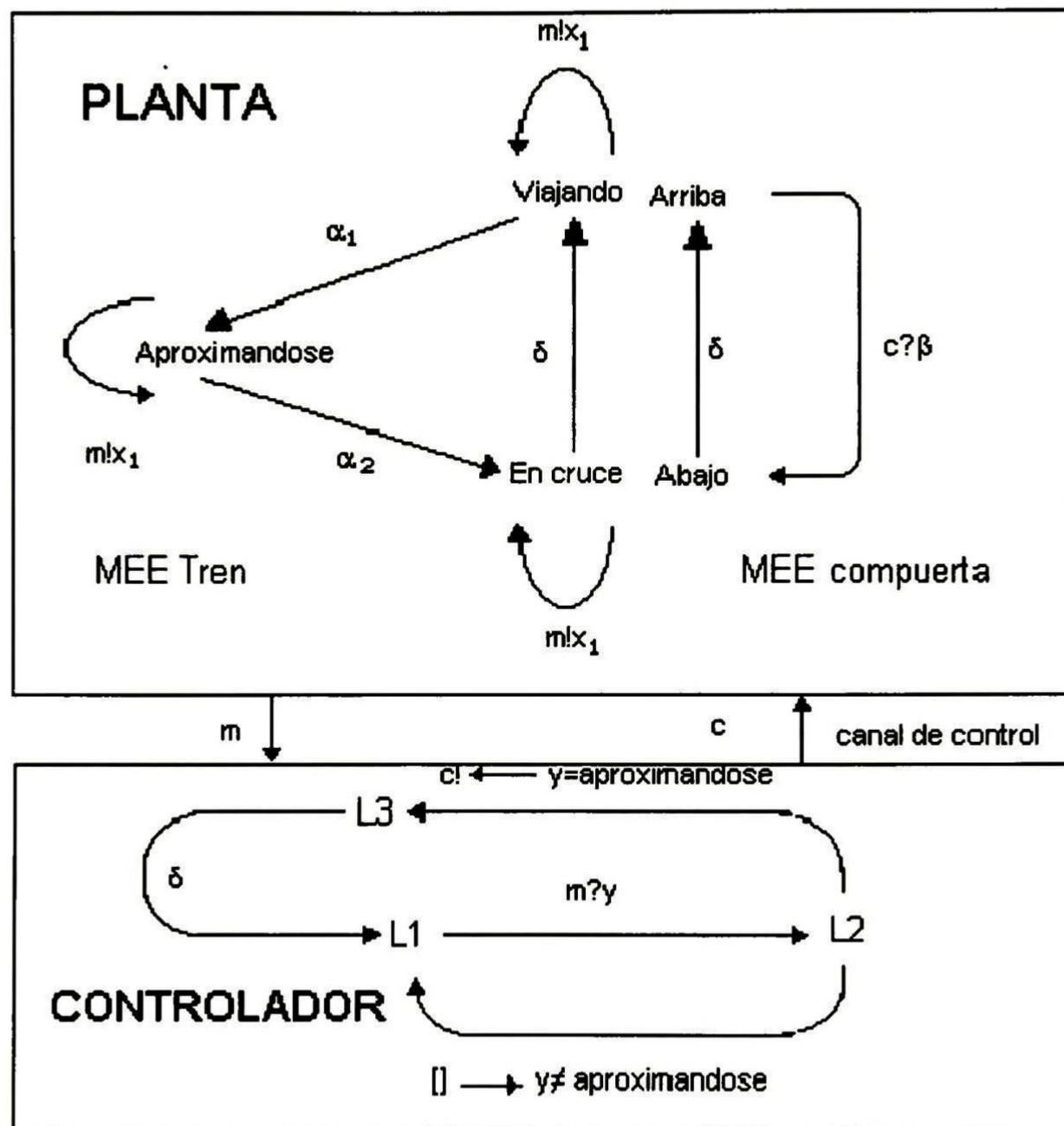


Figura 2.2: Representación en MEE del sistema tren compuerta

es una acción compartida y puede ser utilizada para representar la cooperación del tren y la compuerta en el cual el tren sale de la zona (del cruce) mientras simultáneamente la compuerta es levantada.

Similarmente la MEE controlador tiene una acción de asignación

$$A = (x_3, (L3, verdad, \delta, L1))$$

el cual junto con la ecuación 2.2 produce una nueva acción compartida dada por

$$\{(x_1, (ec, verdad, \delta, al)), (x_2, (Bd, verdad, \delta, Ba))\}, (x_3, (L3, verdad, \delta, L1))$$

La MEE que describe a la compuerta tiene una acción forzada  $\beta$ . La acción  $\beta$  es una acción de comunicación construida de los componentes de las operaciones igualadas  $c!\beta$  (el comando de control sobre el canal  $c$  que la compuerta sea bajada) y  $c?\beta$  ( la MEE compuerta recibe el comando de bajar la compuerta). La acción  $\beta$  tiene una cota alta calculada tomando en cuenta el tiempo para evaluar la guarda ( $Y = aproximándose$ ), y el tiempo que toma sobre el canal de control.

La acción espontánea  $\delta$  corresponde a la interacción interpretada como “cuando el tren deja el cruce de la vía la compuerta es levantada simultáneamente y el controlador es regresado a la actividad inicial  $L1$ ” Entonces  $\delta$  involucra sincronización entre el tren, la compuerta y el controlador. Esto es espontáneo porque el tren es libre de decidir quedarse en la actividad  $ec$ .

La acción  $ec$  tiene una cota baja  $l$  determinada por el tiempo mínimo que toma el tren en conseguir el nivel de en cruce desde que el tiempo de aproximación es primeramente censado. La cota baja para  $ec$  representa una restricción física determinada por la inercia del tren. Acciones tales como  $ec$  pueden ser referidas como acciones locales porque es local a la MEE tren, y esta puede estar ocurriendo independientemente (y asíncronamente) de otros eventos en otras MEE.

La operación de recepción  $m?y$  en la MEE controlador tiene una operación de envío igualada  $m!x_1$  para alguna actividad de la MEE tren, correspondiente a la interacción “envío un mensaje (la actual actividad del tren) sobre el canal  $m$  del controlador, y pone el mensaje en la variable dato  $y$ ”

Por último se proveen algunas especificaciones de requerimiento de la conducta de la planta por una descripción informal de la especificación.

**(S1)- Seguridad**  $\square \neg(x_1 = ec \wedge x_2 = Ba)$

De ahora en adelante, la compuerta no tiene que ser levantada mientras el tren simultáneamente se encuentre en el interior del cruce de la vía.

**(S2) -Precedencia**  $(n = \beta) \longrightarrow \bigcirc(n = a \text{ p } n = \beta)$

Allí es necesario que no sea una solicitud de no bajar la compuerta, i.e. una vez que la compuerta tiene que ser bajada, el tren tiene que aproximarse otra vez de nuevo al cruce de la vía antes de que la siguiente vez la compuerta sea bajada

**(S3)- Respuesta en tiempo real** La compuerta tiene que ser bajada dentro de 10 unidades de tiempo desde que el tren se aproxima al cruce de la vía.

$(n = a \wedge t = T) \longrightarrow \diamond(n = \beta \wedge t \leq T + 10)$

## 2.6 Ejemplo con redes de Petri

Presentamos en la figura 2.3 el mismo ejemplo pero modelado con redes de Petri del cual obtenemos la matriz de incidencia 2.3 de la cual podemos obtener información y comprobar algunas propiedades como son vivacidad y controlabilidad entre otras, asimismo con esta herramienta de modelado existen algoritmos específicos para el cálculo del supervisor mientras que con las MEE el encontrar el supervisor (controlador) es un arte (no existe algoritmo específico).

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

## 2.7 Conclusiones

En este capítulo presentamos dos herramientas de modelado, las MEE y las redes de Petri, por un lado al utilizar MEE como herramienta de modelado nos encontramos con los siguientes problemas, el software para la verificación demasiado complejo y difícil de probar, algoritmos no muy confiables para generar el controlador, y el problema de la explosión de estados en donde tenemos espacio de estados muy grandes. Sin embargo el utilizar redes de Petri podemos capturar las mismas propiedades como concurrencia y sincronización sin el problema de la explosión de estados, además que el análisis de sus propiedades disminuye considerablemente, aparentemente en la figura 2.3 se observa que el modelo en redes de Petri es mucho más complejo que el MEE pero presenta grandes ventajas como veremos mas adelante al utilizar las redes de Petri temporizadas programables como herramienta de modelado de los sistemas híbridos.

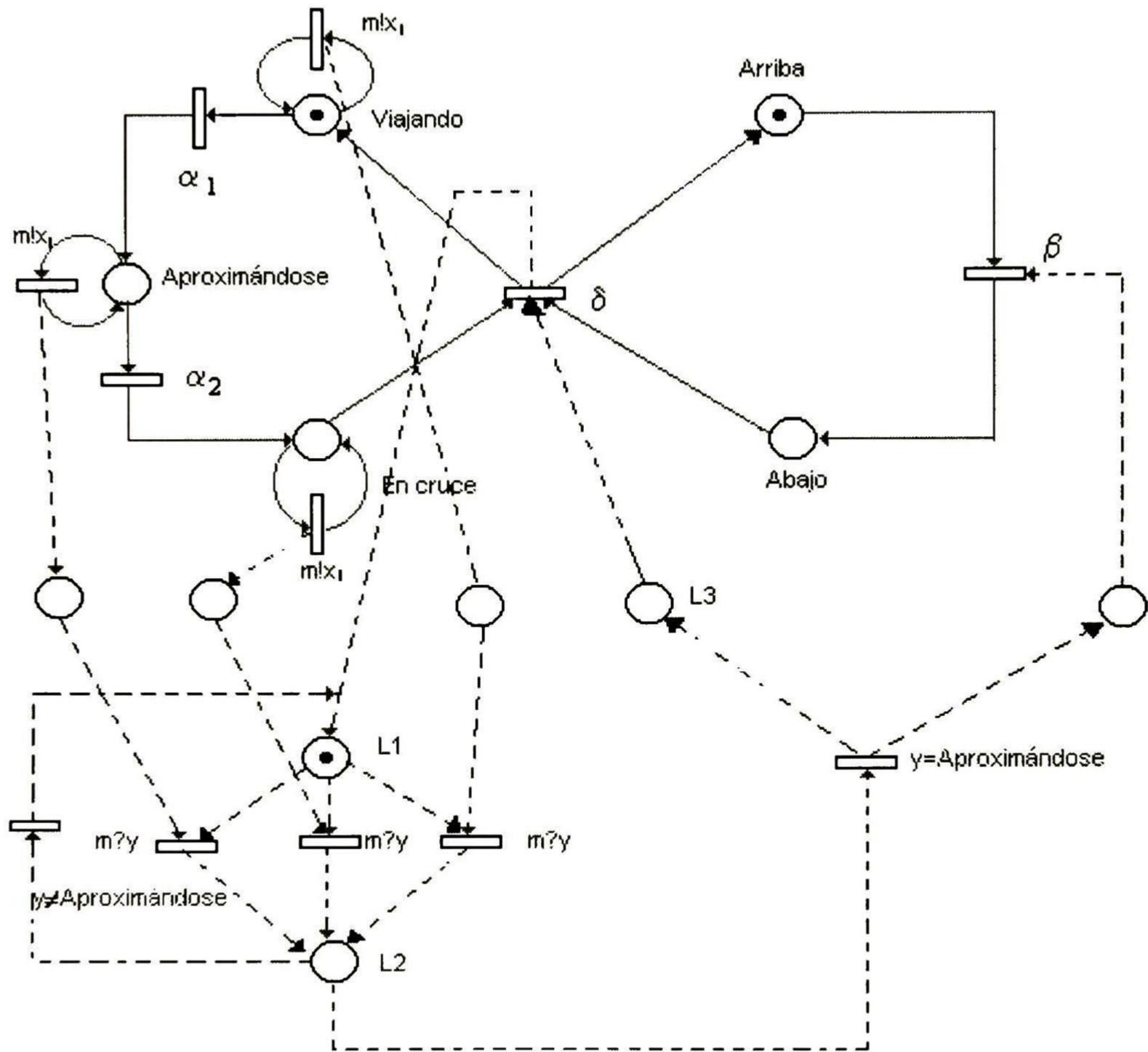


Figura 2.3: Red de Petri del sistema tren compuerta (la línea punteada representa al controlador)



# Capítulo 3

## Estabilidad de sistemas híbridos

### 3.1 Introducción

En este capítulo abordaremos el problema de la estabilidad en los sistemas híbridos.

En la clasificación que realizamos en el primer capítulo agrupamos a aquellos autores que analizan estabilidad tomando en cuenta las conmutaciones y aquellos quienes no toman en cuenta tales conmutaciones para el análisis de la estabilidad, en este capítulo se presentan los principales resultados sobre la estabilidad en ese orden.

Como los trabajos en [5] usan funciones de Lyapunov para el análisis de estabilidad en dichos sistemas, se presenta un anexo sobre la estabilidad utilizando las funciones de Lyapunov. Por otro lado, también se encuentran trabajos sobre estabilidad en sistemas de eventos discretos de los cuales se incluyen los principales resultados en un apartado del anexo. El libro de Passino [9] es un excelente trabajo, y en la sección que corresponde a redes de Petri muestra condiciones sobre la estabilidad que es en esencia pedir que en la red de Petri las trampas no estén ganando marcas.

Desafortunadamente no hay trabajos que involucren la estabilidad de los dos sistemas, ya que se pide por hipótesis que la parte discreta sea estable.

### 3.2 Estabilidad en sistemas conmutados

En esta sección se analiza la estabilidad de Lyapunov de los sistemas conmutados vía múltiples funciones de Lyapunov.

La idea es que si tenemos funciones de Lyapunov individualmente para cualquier sistema  $f_i$ , es necesario imponer restricciones sobre las conmutaciones para garantizar estabilidad.

Para ilustrar la complejidad del análisis de estabilidad en sistemas conmutados, primero mostramos un ejemplo donde tenemos dos sistemas globalmente y exponencialmente estables, desafortunadamente sin una política adecuada de conmutación el sistema resultante puede ser inestable.

**EJEMPLO** sea  $f_1(x) = Ax$  y  $f_2(x) = Bx$  donde

$$A = \begin{bmatrix} -0.1 & 1 \\ -10 & -0.1 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} -0.1 & 10 \\ -1 & -0.1 \end{bmatrix}$$

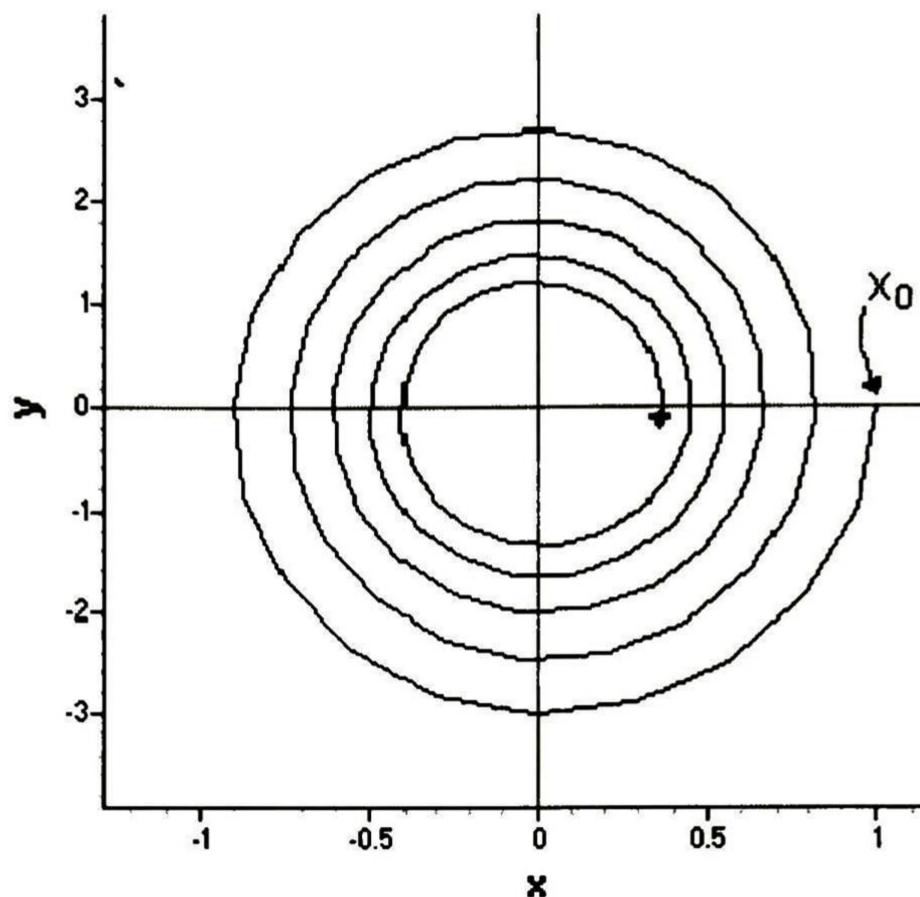


Figura 3.1: Trayectoria del primer sistema

cuyos valores propios son:

$$\begin{bmatrix} -0.1 + 3.1623i & -0.1 - 3.1623i \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} -0.1 + 3.1623i & -0.1 - 3.1623i \end{bmatrix}$$

respectivamente.

La función de Lyapunov

$$L_1 = \begin{bmatrix} 2.7522 & -0.2248 \\ -0.2248 & 27.4775 \end{bmatrix} \text{ y } L_2 = \begin{bmatrix} 27.4775 & 0.2248 \\ 0.2248 & 2.7522 \end{bmatrix}$$

para el primer sistema y segundo sistema tal que  $F = x^* L_i x \geq 0$  y  $\dot{f} < 0 \quad i \in [1, 2]$

Los dos sistemas  $f_1$  y  $f_2$  por si solos son globalmente exponencialmente estables. Al realizar la conmutación si conmutamos el sistema  $f_1$  en el segundo y cuarto cuadrante y  $f_2$  en el primer y tercer cuadrante, el sistema conmutado en estos se vuelve inestable. Es entonces conveniente resaltar que sin una política adecuada de conmutación el sistema resultante puede resultar inestable aunque los sistemas por si solos sean estables.

En la figura 3.1 observamos la trayectoria de  $x$  en el plano de fase para el sistema  $f_1$  iniciando en  $(1,0)$ , mostrando diez segundos de trayectoria y se puede apreciar que converge hacia el origen, en la figura 3.2 se observa la trayectoria de  $x$  en el plano de fase para el sistema  $f_2$  el cual inicia en  $(0,1)$  y converge también hacia el origen sin embargo, en el plano de fase mostrado en la figura 3.3 se aprecia que la trayectoria de  $x$  del sistema conmutado que inicia en  $(10^{-6}, 10^{-6})$  explota exponencialmente y se pierde la estabilidad.

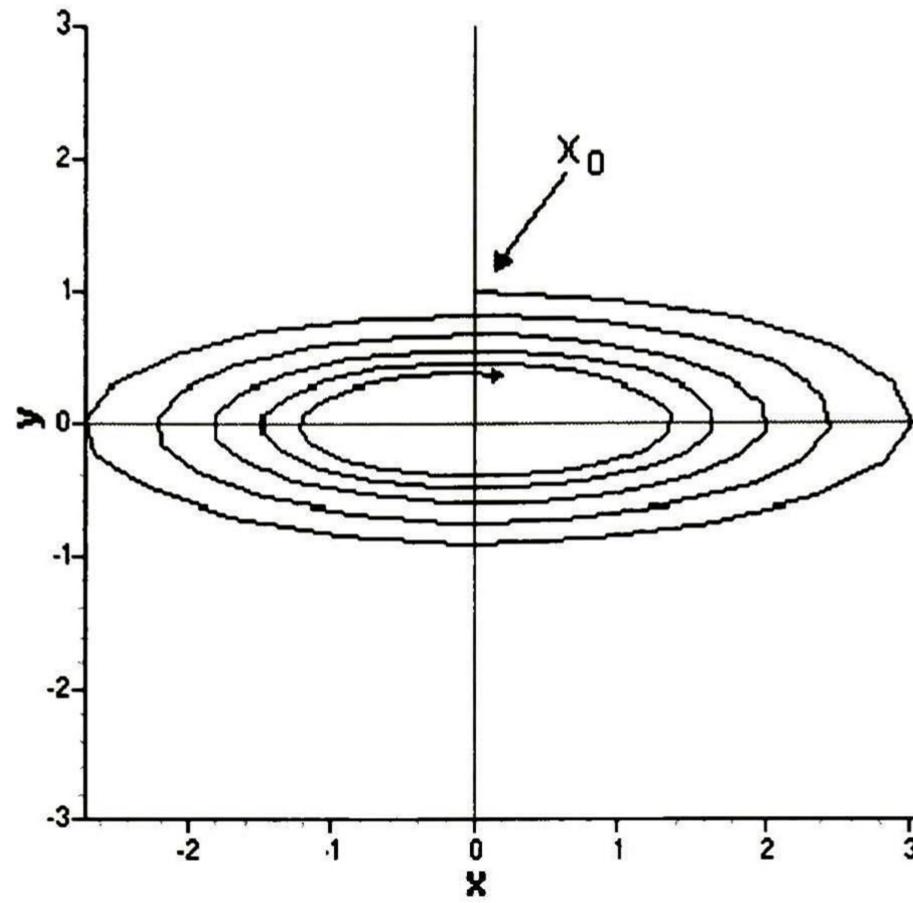


Figura 3.2: Trayectoria del segundo sistema

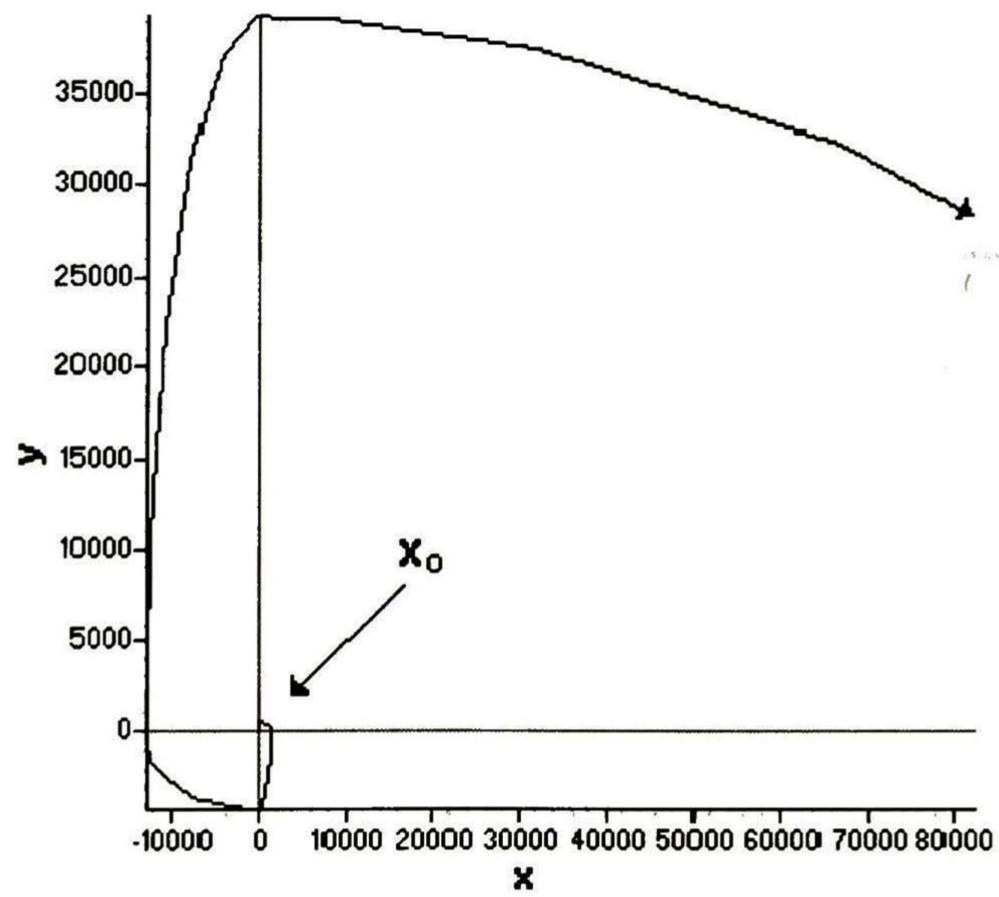


Figura 3.3: Trayectoria del sistema conmutado

### 3.2.1 Función única para toda la trayectoria (vía múltiples funciones)

De acuerdo a la clasificación dada anteriormente presentamos los resultados mas importantes de la siguiente manera; primeramente el trabajo en el cual se pide que exista una función de Lyapunov para toda la secuencia de conmutación para que el sistema sea estable.

Teniendo en mente el siguiente modelo como prototipo de un ejemplo en un sistema conmutado

$$\dot{x} = f_i(x(t)), \quad i \in \{1, \dots, N\} \quad (3.1)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , y suponiendo que:

- cualquier  $f_i$  es globalmente continua Lipschitz.
- Las  $i$ 's son tomadas en una manera tal que son conmutaciones finitas en tiempo finito.

Tales sistemas son de estructura variable o multimodal; y son un simple modelo (la porción continua) de un sistema híbrido, como veremos más adelante nos enfrentamos con sistemas que conmutan alrededor de campos vectoriales, sobre tiempo o regiones de espacio de estado. Podemos asociar con tales sistemas la siguiente secuencia de conmutación, indexada por un estado inicial,  $x_0$  :

$$S = x_0; (i_0, t_0), (i_1, t_1), \dots, (i_N, t_N), \dots \quad (3.2)$$

La secuencia puede ser o no puede ser infinita En el caso finito, podemos tomar  $t_{N+1} = \infty$ . Se presenta a continuación solo el caso infinito para facilitar la notación. La secuencia de conmutación, a lo largo de la ecuación 3.1, describe completamente la trayectoria del sistema de acuerdo a la siguiente regla:  $(i_k, t_k)$  significa que el sistema evoluciona según  $\dot{x} = f_i(x(t), t)$  para  $t_k \leq t < t_{k+1}$ . Se denota esta trayectoria por  $x_s(\bullet)$ . Suponiendo que la secuencia de conmutación es mínima en el sentido que  $i_j \neq i_{j+1}, j \in \mathbb{Z}^+$

Tomamos proyecciones de esta secuencia sobre la primera y segunda coordenada, produciendo la siguiente secuencia de índices,

$$\pi_1(S) = x_0; i_0, i_1, \dots, i_N, \dots,$$

y la secuencia de tiempos de conmutación

$$\pi_2(S) = x_0; t_0, t_1, \dots, t_N, \dots,$$

respectivamente. Suponga que  $S$  es una secuencia de conmutación como en la ecuación 3.2. denotamos con  $S | i$  la secuencia de tiempos de conmutación cuyo correspondiente índice es  $i$

El intervalo de completitud  $\mathcal{I}(T)$  de una secuencia estrictamente incrementable de tiempos  $T = t_0, t_1, \dots, t_N, \dots$ , es el conjunto

$$\bigcup_{j \in \mathbb{Z}^+} (t_{2j}, t_{2j+1})$$

finalmente, sea  $\varepsilon(T)$  denotando la secuencia de eventos en  $T$  :

$$t_0, t_2, t_4, \dots$$

$V$  es una candidata a función de Lyapunov si  $V$  es continua, definida positiva (alrededor del origen 0) con derivadas parciales continuas asumiendo que  $V(0) = 0$

**Definición 14** (función deseada de Lyapunov) *dada una secuencia de tiempos  $T$  estrictamente incrementable en  $\mathbb{R}$ , se dice que  $V$  es una función deseada de Lyapunov para la función  $f$  y trayectoria  $x(\cdot)$  sobre  $t$  si*

- $\dot{V}(x(t)) \leq 0$  para toda  $t \in \mathcal{I}(t)$ .
- $V$  es monótonicamente no creciente sobre  $\varepsilon(t)$ .

**Teorema 15** *Suponga que tenemos candidatas a funciones de Lyapunov  $V_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , y vectores de campo  $\dot{x}_i = f_i(x)$  con  $f_i(0) = 0$ , para toda  $i$ . Sea  $S$  el conjunto de todas las secuencias de conmutación asociadas con el sistema. Si para cualquier  $s \in S$  tenemos que para toda  $i$ ,  $V_i$  es una función deseada de Lyapunov para toda  $f_i$  y  $x_s(\cdot)$  sobre  $S|_i$ , entonces el sistema es estable en el sentido de Lyapunov.*

*Prueba* En cualquier caso, se realiza la prueba solo para  $N=2$ .

- Sea  $R > 0$  arbitraria. Sea  $m_i(\alpha)$  denotando el mínimo valor de  $V_i$  sobre  $S(\alpha)$ . Tomando  $r_i < R$  tal que en  $B(r_i)$  tenemos  $V_i < m_i(R)$ . Esta elección es posible por la continuidad de  $V_i$ . sea  $r = \min(r_i)$ . Con esta elección, si nosotros iniciamos en  $B(r)$ , cualquier vector de campo permanece dentro de  $B(R)$ .
- Ahora, tomando  $\rho_i < r$  tal que en  $B(\rho_i)$  tenemos  $V_i < m_i(r)$ . tal que  $\rho = \min(\rho_i)$ . entonces si nosotros iniciamos en  $B(\rho)$ , cualquier vector de campo solo puede permanecer en  $B(r)$ . Por lo tanto, cuando es primero conmutado el otro tenemos que  $V_i(x(t_1)) < m_i(R)$ , a tal grado que podemos permanecer dentro de  $B(R)$ .

Las pruebas para el caso general requiere de  $N$  conjuntos de círculos concéntricos construidos como los dos dados anteriormente.

- El caso  $N=1$  es el teorema usual de estabilidad de Lyapunov.
- El teorema también es válido si  $f_i$  es variante en el tiempo.
- Es fácil ver que el teorema no es válido si  $N=\infty$

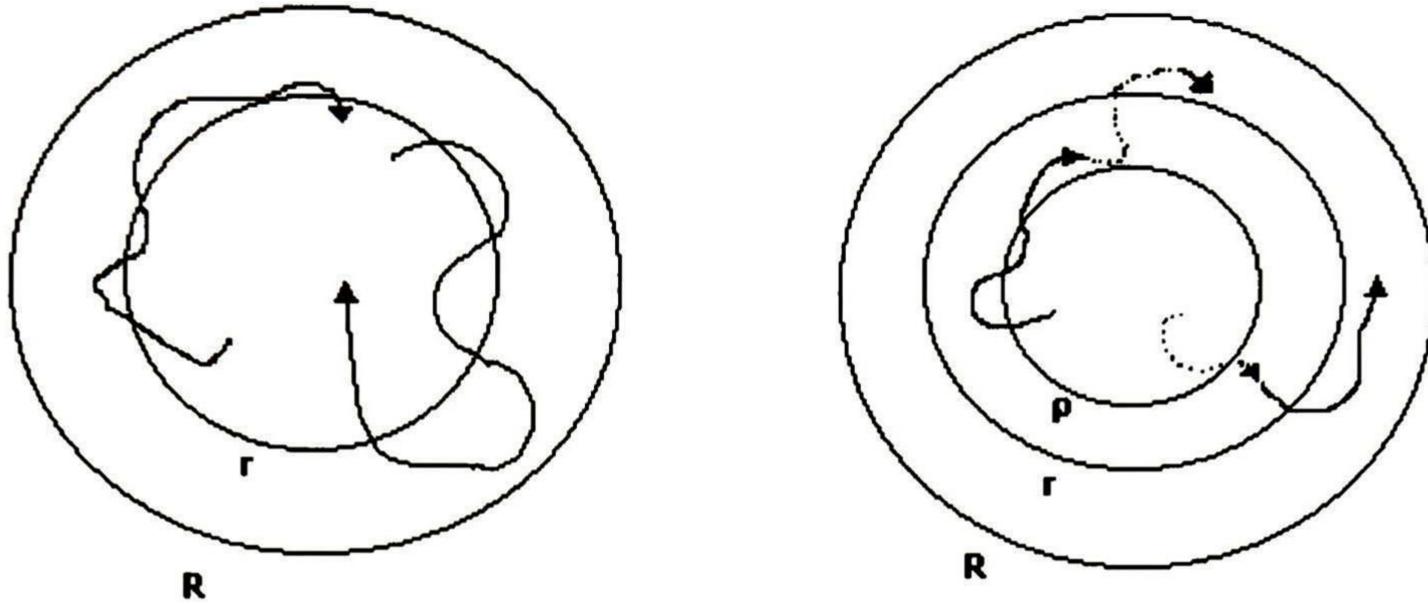


Figura 3.4: Representación gráfica de estabilidad y estabilidad múltiple de Lyapunov (N=2)

### 3.2.2 Función de Lyapunov analizando los ciclos fundamentales

Para encontrar la función de Lyapunov para todas las posibles secuencias de conmutación, es suficiente con considerar los ciclos fundamentales del autómata [4]. Recordando que un ciclo fundamental es cualquier ruta aceptada por el autómata la cual inicia y termina en el mismo vértice. Y que si el ciclo no se cruza el mismo, entonces el ciclo es fundamental.

Estos ciclos fundamentales pueden ser encontrados por la construcción del grafo de alcanzabilidad, que es un método poco recomendable e ineficiente, o pueden ser sistemáticamente construidos con el despliegado de la red de trabajo. Antes de presentar el teorema de [4] introduciremos algunas definiciones preliminares.

Sea la subsecuencia de tiempos cuando el sistema es encendido o apagado denotado como

$$\lambda_j = t_{n_1}, t_{n_1+1}, \dots, t_{n_k}, t_{n_k+1}, \dots$$

El cual define el intervalo completo  $\mathcal{I}(\lambda_j)$  como el conjunto obtenido tomando la unión de todos los intervalos abiertos cuando el sistema  $j$  esta activo. Denotando  $E(\lambda_j)$  como la subsecuencia de tiempos cuando el sistema  $j$  es encendido. Podemos decir que una función continuamente diferenciable  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  es una función deseada de Lyapunov sobre el conjunto de los tiempos de conmutación  $\lambda$ , si y solo si  $\dot{V}(x(t)) \leq 0$  para toda  $t \in I(\lambda)$  y  $V$  es monótonicamente no incrementable en  $E(\lambda)$ .

Sea  $(x, i)$  la trayectoria generada por la dinámica de conmutación del sistema, el conjunto de eventos conmutados,  $\mathcal{E}$ , de la trayectoria  $(x, i)$  es denotada como

$$\mathcal{E} = \left\{ (i, t) \in I \times \mathbb{R} : t \in I(\lambda), i = \lim_{\tau \rightarrow t^+} i(\tau) \right\}$$

se define además la **proyección temporizada**  $P_t : \mathcal{E} \rightarrow R$  por la ecuación  $P_t[(i, \tau)] = \tau$  y la **proyección del evento** como  $P_e[(j, \tau)] = j$ .

La secuencia de conmutación, es un mapeo  $\lambda : Z \rightarrow \mathcal{E}$  tal que

$$P_t[\lambda(n)] < P_t[\lambda(n+1)]$$

para toda  $n \in Z$ .

La trayectoria se dice **libre de bloqueos** si la proyección del evento de la secuencia de conmutación  $P_e[\lambda]$  no es infinita. La trayectoria es **viva** si la proyección del evento de la secuencia de conmutación  $P_e[\lambda]$  contiene un número infinito de los índices,  $i \in I$ . en otras palabras cualquier subsistema puede ser conmutado un número infinito de veces en una secuencia de conmutación. Una trayectoria es **nonZeno** si la proyección temporizada de la secuencia de conmutación  $P_t[\lambda]$  satisface

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_t[\lambda(n)] > \infty$$

A continuación mencionaremos el siguiente teorema presentado en el trabajo de [4].

**Teorema 16** *Suponga que tenemos candidatas a funciones de Lyapunov  $V_j(j \in I)$  y considere un sistema conmutado vivo y nonZeno donde  $f_j(0) = 0$  para toda  $j \in I$ . Sea  $\lambda$  una secuencia de conmutación generada por el sistema. Sea  $\mu$  denotando una subsecuencia de conmutaciones contiguas en  $\lambda$  tal que la secuencia de eventos es un ciclo fundamental del sistema automático. Sea  $\bar{\mu}$  denotando la secuencia infinita formada por la concatenación de  $\mu$  con el mismo. Si entonces existe un conjunto de funciones continuamente diferenciables  $V_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  las cuales son funciones deseadas de Lyapunov sobre la secuencia  $\bar{\mu}_j$  para toda  $j \in I$ , entonces el sistema es estable en el sentido de Lyapunov.*

Mencionaremos algunos resultados básicos relativos al desplegado [Esp96]. Sea  $N = (L, T, E, S)$  una red de Petri. sea  $\mu$  y  $\mu'$  dos marcados de  $N$ . se denota  $\mu \xrightarrow{t} \mu'$  si  $\mu$  y  $\mu'$  representan el marcado antes y después del disparo de la transición habilitada  $t \in T$ . Una secuencia de transiciones  $\sigma = t_1 t_2 \cdots t_n$  es una secuencia ocurrente existen marcados  $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$  tal que

$$\mu_0 \xrightarrow{t_1} \mu_1 \xrightarrow{t_2} \cdots \mu_{n-1} \xrightarrow{t_n} \mu_n$$

$\mu_n$  es el marcado alcanzado por la ocurrencia de  $\sigma$ , también denotada por  $\mu_0 \xrightarrow{\sigma} \mu_n$ . El grafo de alcanzabilidad de la red de trabajo  $N$  es un grafo etiquetado que tiene el conjunto de marcados alcanzables de  $N$  como nodos y las relaciones  $\xrightarrow{\sigma}$  como cotas.

Un nodo es un elemento de  $P \cup T$ . Un nodo  $x_1$  precede al nodo  $x_2$  si existe una secuencia ocurrente tal que  $x_2$  es alcanzado desde  $x_1$ . Dada una red de Petri  $N = (L, T, E, S)$ , se dice que dos nodos  $x_1, x_2 \in P \cup T$  están en conflicto, denotado por  $x_1 \# x_2$ , si existen distintas transiciones  $t_1, t_2 \in T$  tal que  $\bullet t_1 \cap \bullet t_2 \neq 0$  y  $t_i$  precede  $x_i$  para  $i = 1, 2$ . se dice que un nodo  $x$  esta en autoconflicto si  $x \# x$ . esto significa que es un nodo  $y$  precediendo a  $x$  tal que  $x$  puede ser alcanzado por más de una distinta secuencia ocurrente desde  $y$ .

Se denota por  $Min(N)$  el conjunto  $\{p \in P \mid \bullet p = 0\}$ . una red ocurrente es una red aciclica finitaria (el número de lugares precediendo cualquier  $t \in T$  es finita)  $N = (L, T, E, S)$  con el

marcado inicial  $\mu_0$  tal que

- para cualquier  $p \in P$ ,  $|\bullet p| \leq 1$ ,
- la transición  $t \in T$  no está en autoconflicto, y
- $\mu_0 = \text{Min}(N)$

Sea  $N_1 = (L_1, T_1, E_1, S_1)$  y  $N_2 = (L_2, T_2, E_2, S_2)$  dos redes con marcados iniciales  $\mu_{01}$  y  $\mu_{02}$ . Un homomorfismo de  $N_1$  a  $N_2$  es un mapeo  $h : L_1 \cup T_1 \rightarrow L_2 \cup T_2$  tal que :

- $h(L_1) \subseteq L_2$  y  $h(T_1) \subseteq T_2$  y
- para cualquier  $t \in T_1$ , la restricción de  $h$  a  $\bullet t$  es una biyección entre  $\bullet t$  (en  $N_1$ ) y  $\bullet h(t)$  (en  $N_2$ ), y similarmente para  $t\bullet$  y  $h(t)\bullet$
- la restricción de  $h$  hacia  $\mu_{01}$  es una biyección entre  $\mu_{01}$  y  $\mu_{02}$ .

En otras palabras, un homomorfismo es un mapeo que preserva los arcos entre nodos y los preconjuntos y postconjuntos de transiciones.

Un proceso de ramificación de una red de trabajo  $N$  con el marcado inicial  $\mu_0$  es un par  $(N', h)$  tal que  $N' = (L', T', E', S')$  es una red ocurrente y  $h$  es homomorfismo mapeando de la red  $N'$  a la red  $N$  tal que para cualquier  $t_1, t_2 \in T'$ , si  $\bullet t_1 = \bullet t_2$  y  $h(t_1) = h(t_2)$  entonces  $t_1 = t_2$ . Dos procesos de ramificación  $\beta_1 = (N_1, h_1)$  y  $\beta_2 = (N_2, h_2)$  de una red de trabajo es isomorfica si esta es un homomorfismo biyectivo  $h$  de  $N_1$  a  $N_2$  tal que  $h_2 \circ h = h_1$ . intuitivamente, dos procesos de ramificación isomorficos difieren solo en los nombres de los lugares y transiciones. Además ,se dice que  $(N_1, h_1)$  contiene a  $(N_2, h_2)$  si  $N_2 \subseteq N_1$  y la restricción de  $h_1$  hacia los nodos en  $N_2$  es idéntica a  $h_2$ . Se dice que un proceso de  $N$  es máximo si este contiene todos los otros procesos de ramificación de  $N$ .

Un desplegado es el máximo proceso de ramificación encima del isomorfismo asociado con la red de Petri  $N$ . En general, el despliegue de la red de trabajo  $N$  es infinita en tamaño. Es posible por lo tanto construir prefijos finitos de un máximo proceso de ramificación con el cual se enumeran los marcados alcanzables de  $N$  en una manera computacionalmente eficiente.

Considere la red ocurrente de un despliegue de una red de Petri. Una configuración  $C$  de esta red es un conjunto de transiciones que satisfacen las siguientes condiciones.

- $t \in C$  implica que si  $t'$  precede  $t$  entonces  $t' \in C$ , y
- todas las transiciones en  $C$  están libres de conflictos.

Una red ocurrente puede tener una infinidad de configuraciones. Dos configuraciones las cuales pueden ser marcadas al mismo tiempo se dice que son "concurrentes" Concurrency puede ser vista como una relación de equivalencia sobre el conjunto de todas las configuraciones de una red ocurrente. En particular esto significa que el conjunto de todas las configuraciones puede ser particionado dentro de clases de equivalencia.

Las configuraciones, para algunos casos, representan corridas fundamentales de un proceso. La actual secuencia ocurrente generada por una red de trabajo es obtenida por las corridas entrelazadas de estas configuraciones Algunas configuraciones proveen una muy conveniente manera de descomponer la conducta de una red de Petri dentro de simples estructuras en las cuales se puede emplear el análisis de las redes de Petri computacionalmente sin perdida de complejidad.

En la siguiente sección veremos las condiciones para encontrar la función de Lyapunov para una clase de sistema conmutado en el cual no se toman en cuenta las conmutaciones.

### 3.2.3 Función común de Lyapunov para una clase de sistemas conmutados

Sea el sistema lineal variante en el tiempo bajo consideración descrito por la ecuación

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad x(t) \in \mathbb{R}^n \quad (3.3)$$

donde  $A(t) \in \mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$  y  $A_i, i \in \{1, 2, \dots, m\}$  son matrices Hurwitz. Una condición suficiente para que el sistema 3.3 sea asintóticamente estable es que la función cuadrática  $v(x) = x^T P x$ , exista, donde  $P$  es una matriz simétrica definida positiva tal que

$$A_i^T P + P A_i = -Q_i \quad Q_i = Q_i^T > 0 \quad (3.4)$$

para toda  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Nos referimos a tal función cuadrática,  $v(x) = x^T P x$  como una función común de Lyapunov (FCL). [7] La existencia de una FCL implica también la existencia de una transformación  $x = H z$  donde  $H$  es una matriz no singular tal que los sistemas lineales invariantes en el tiempo son transformados a  $\dot{z} = H^{-1} A_i H z$  y  $V(z) = z^T z$  es una FCL, a saber la norma euclidiana cuadrada es la FCL para el sistema transformado. El problema de la existencia de una FCL ha sido objeto de atención en la literatura de control. Sin embargo, los más recientes resultados han sido derivados para clases de sistemas conmutados cuyas propiedades de estabilidad son relativamente simples de deducir. Estas clases pueden ser agrupadas de acuerdo a las siguientes categorías:

- (i) sistemas para los cuales la  $E(x) = x^T x$  es una FCL. Ejemplos de tales sistemas incluye aquellos para los cuales las matrices  $A_i$  son diagonales, simétricas, o todas tienen la forma  $A_i = -\alpha M + \beta N$ ,  $\alpha > 0$  donde  $M = M^T > 0$  y  $N$  es antisimétrica.
- (ii) sistemas en los cuales  $A_i$  son simultáneamente matrices triangulares superiores(inferiores).

Presentaremos algunos resultados referentes a las funciones de Lyapunov para sistemas triangulares

**Teorema 17** Una condición suficiente para que el sistema 3.3 con  $A(t) \in \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$  tenga una FCL es de que exista una matriz no singular  $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$  tal que  $T A T^{-1}$  sea triangular para toda  $i$ .

La existencia de una FCL para los sistemas triangulares está basado sobre el siguiente teorema.

**Teorema 18** Sea  $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$  un conjunto de matrices reales estables. Sea  $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$  una matriz no singular tal que  $T A T^{-1} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  es triangular superior. Entonces existe una matriz real no singular  $G$  tal que  $G^{-1} A_i G$  es de la forma

$$G^{-1} A_i G = \begin{bmatrix} A_{1i} & & * & \\ 0 & A_{2i} & * & \\ 0 & & & \\ 0 & \dots & 0 & A_{ki} \end{bmatrix}$$

donde  $k \leq n$  y donde  $A_{ji}$  es cualquier bloque de  $2 \times 2$  o  $1 \times 1$ . Si  $A_{ji}$  es un bloque de  $2 \times 2$  este puede ser escrito como

$$A_{ji} = \begin{bmatrix} -\mu_j & \omega_j \\ -\omega_j & \mu_j \end{bmatrix}$$

donde  $\mu_j > 0, \omega_j \in \mathbb{R}$ , y donde el tamaño del  $j$ 'th block,  $A_{ji}$  es del mismo para toda  $i \in \{1, \dots, m\}$

La búsqueda de la función común de Lyapunov para todos los subsistemas o trayectorias de conmutación se simplifica de una manera considerable si los sistemas caen dentro de este tipo categorías.

### 3.3 Conclusiones

Uno de los principales problemas que se tiene es la búsqueda de la función común de Lyapunov para las posibles trayectorias de conmutación, aunque ya se ha incursionado en la búsqueda de tal función, y actualmente existen algoritmos eficientes para encontrarla. La estabilidad exponencial para los sistemas conmutados lineales e invariantes en el tiempo  $\Sigma_{A_i}$  que tienen estructura triangular, puede ser demostradas sin el uso de las funciones comunes de Lyapunov. Ahora, si existe una matriz constante  $T$  en el caso general (cuando las  $A_i$  son no triangulares), tal que  $TAT^{-1}$  puedan ser simultáneamente triangularizables, el sistema conmutado es entonces de nuevo exponencialmente estable. Nuestra aportación al trabajo la realizamos buscando condiciones de estabilidad entre modelos, esto es que para garantizar estabilidad existiera una función de Lyapunov entre modelos y no en toda la secuencia de conmutación, al continuar con el análisis de la literatura nos encontramos que una conmutación entre modelos es un ciclo fundamental y queda por tanto demostrada la estabilidad. En el siguiente capítulo veremos un análisis de la controlabilidad en los sistemas híbridos.

# Capítulo 4

## Controlabilidad

### 4.1 Introducción

Dado un modelo de planta en lazo abierto y una especificación para la conducta deseada en lazo cerrado, el objetivo es obtener un controlador que garantice satisfacción para las especificaciones impuestas. Estas especificaciones típicamente introducen restricciones sobre la dinámica de la planta. Así pues, el propósito del controlador es el de restringir la conducta de la planta controlada acordada previamente.

Este capítulo concierne a un análisis conceptual de controlabilidad para los sistemas híbridos. Intuitivamente, un sistema híbrido puede ser llamado controlable si este puede ser controlado para transferirse entre un número dado de regiones marcadas.

En la parte continua, las especificaciones se introducen como modos de restricciones de estado y en la parte discreta, la conducta está restringida por un conjunto de modos de transiciones prohibidos, así como un conjunto de regiones llamadas regiones marcadas  $Rm = \{V_{m1}, \dots, V_{mk}\}$ . Una región marcada  $V_m = (x_m, \rho)$  con  $x_m \in i$  y  $\rho \in x$  definiendo una región o un punto singular en el espacio de estado híbrido. esta región marcada contiene los estados controlables del sistema. Se requiere que la planta permanezca dentro de una región marcada temporalmente no restringida, esto es, que exista una ley de control para cualquier región marcada, de tal manera que cualquier trayectoria de estado que inicia dentro de esta región pueda permanecer dentro de la región bajo esta ley de control específica.

En nuestro modelo, las plantas híbridas son controladas por entradas discretas que hacen los cambios en sus modos de control. Donde se da por hecho que todas las variables de control discreto son controlables, la planta puede entonces ser controlada corriendo alguna secuencia posible de los modos de control. Los cambios en los modos físicos son, sin embargo incontrolables, indirectamente influenciados por la elección de control.

Definiciones clásicas de controlabilidad para sistemas dinámicos discretos o continuos tienen que ser modificadas en algo a fin de ser aplicables a los sistemas híbridos.

A continuación presentamos los conceptos de controlabilidad así como el control supervisorio. La meta es determinar la política de conmutación de un sistema híbrido que conduce a los estados continuos del sistema, a una región prescrita del espacio de estado. Restricciones lógicas sobre la política de conmutación (restricciones de exclusión mutua) son expresadas como especificaciones sobre los estados discretos del sistema híbrido. Un método de control de eventos discretos, llamado control supervisorio de redes de Petri basado sobre los p-semiflujos es aplicado para

satisfacer estas especificaciones discretas. Enseguida las dinámicas continuas son consideradas y un algoritmo basado sobre la noción de una región común de flujo es usada para determinar el modo exacto de conmutación entre todos los subsistemas y la duración de tiempo en que cualquier subsistema puede estar activo.

### 4.1.1 Planta híbrida

En esta sección, nosotros consideramos que la planta es un sistema dinámico híbrido modelado por la RPTP( $G, X, \ell_L, \ell_T, \ell_E, \ell_S$ ).  $X$  es un conjunto de vectores de ecuaciones dinámicas continuas en tiempo de la forma  $\dot{x} = f_{i(\tau)}(x(\tau), w(\tau))$  haciendo la perturbación  $w(\tau)$  igual a cero, tenemos

$$\dot{x}(\tau) = f_i(x(\tau)), \quad i \in \{1, \dots, N\} \quad (4.1)$$

La ecuación 4.1 describe la dinámica continua del sistema híbrido. La red de trabajo  $N$  es usada para representar la dependencia lógica entre los modos de conmutación en la función sucesora descrita por la ecuación  $i(\tau) = q(x(\tau), i(\tau^-))$ . Las dinámicas continuas son controladas usando una colección finita de  $N$  modos o subsistemas

$$D = \{f_1, f_2, \dots, f_N\}$$

que satisface la suposición de que cualquier  $f_i$  corresponde a la política de control.

Para representar la dependencia lógica entre las políticas de control, asociamos con cada transición de la red una ecuación diferencial de la forma 4.1. Esta asignación está definida por la función de etiquetado  $\ell_T(t) : T \rightarrow P$  La cual será elegida como una formula atómica de velocidad de la forma  $\dot{x}(\tau) = f_i(x)$ . Note que es posible que para diferentes transiciones tengamos las mismas etiquetas.

El grafo de la red de Petri  $N$  describe todos los posibles modos de conmutación que pueden ocurrir en la planta híbrida. Esto es posible por la definición de  $\ell_L(L)$  como una tautología para todos los lugares  $l \in L$  Las ecuaciones de guarda de entrada y salida  $\ell_I(p, t)$  y  $\ell_S(t, p)$  tienen la misma forma de la ecuación

$$\ell_I(p, t) = \bigwedge_{i \in j(p, t)} (h_i(x(\tau)) < 0)$$

El conjunto de hipersuperficies  $\{h_i\}$  puede ser determinado por el algoritmo de control que asegure la conducta deseable del sistema híbrido.

Se introduce ahora una notación adicional que puede ser usada en la formulación de los algoritmos de control. Los tiempos de disparo de la transición  $t$  son descritos por  $\sigma^t(n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$ , donde  $\sigma^t(k) \in \mathfrak{R}$  representa la duración del  $k^{th}$  disparo de la transición  $t$ . Durante el intervalo de tiempo  $\sigma^t(k)$  las marcas de los lugares de entrada de la transición  $t$  no cambian. estas marcas son colocadas en los lugares de salida de  $t$  al ser terminado el disparo de la transición, de acuerdo a la condición de habilitación de la red de Petri no temporizada. Se supone que en un instante de tiempo exactamente una de las transiciones es disparada. Además, se supone que  $0 < \Delta \leq \sigma^t(n) < \infty$ , para algún  $\Delta \in \mathfrak{R}$ , para todos los disparos  $n$  y transiciones  $t$ . Podemos fácilmente incorporar en nuestro modelo transiciones instantáneas, pero estas corresponden a los saltos en los estados continuos y podemos omitirlos aquí. La suposición de  $0 < \Delta \leq \sigma^t(n)$  elimina la posibilidad de conmutaciones infinitas en intervalos de tiempo finito.

El algoritmo de control para el problema del modo de selección puede estar basado sobre información estructural asociada con los lugares de la red de Petri. Se define el mapeo  $v^p(n) : Z^+ \rightarrow T$  para cualquier lugar  $l \in L$ , donde  $v^p(k)$  identifica a la transición particular  $t \in l \bullet$  de la cual la  $k^{\text{th}}$  marca que entra a  $l$  es enviada. Note que mas de una transición esta habilitada pero solo una es permitida actualmente a ser disparada. Si la  $k^{\text{th}}$  marca es enviada de  $t \in l \bullet$ , entonces la transición  $t$  gana la marca, la cual después de un tiempo de disparo de  $\sigma^t(k)$  es enviada a  $t \bullet$ , los lugares de salida de la transición.

Un disparo de un evento es definido como el par  $(t, \tau)$  el cual indica que la transición  $t$  inicia el disparo al tiempo  $\tau$ . Considere la secuencia de disparo de eventos

$$s = (t_{i_0}, \tau_0), (t_{i_1}, \tau_1), \dots, i_j \in \{1, \dots, N\}, \text{ para } j = 0, 1, 2, \dots$$

donde  $j$  indica el orden de las transiciones que se disparan. Por ejemplo  $s = (t_1, \tau_0), (t_3, \tau_1)$ , indica que  $t_1$  se dispara al tiempo  $\tau_0$ , enseguida  $t_3$  dispara al  $\tau_1$  y así sucesivamente. Los intervalos del tiempo de disparo son definidos por la ecuación

$$\sigma^{t_i}(k) = \tau_{k+1} - \tau_k$$

Al  $k^{\text{th}}$  disparo de la red de trabajo, la transición  $t_i$  inicia el disparo (al tiempo  $\tau_k$ ) para  $\sigma^{t_i}(k)$  unidades de tiempo (mientras  $\tau_{k+1}$ ). Los estados continuos del sistema durante este intervalo evoluciona de acuerdo a

$$\dot{x}(\tau) = f_i(x(\tau)), \text{ para } \tau_k \leq \tau < \tau_{k+1}$$

La proyección de los eventos y la proyección de los temporizadores de la secuencia  $s$  son definidos como

$$\pi_1(s) = i_0, i_1, i_2, \dots$$

$$\pi_2(s) = \sigma^{t_0}(k_0), \sigma^{t_1}(k_1), \dots$$

estas serán utilizadas mas adelante.

## 4.2 Control de sistemas híbridos

Como se ha dicho, un sistema híbrido es un sistema dinámico que incluye sistemas continuos y sistemas de eventos discretos. Ambos tipos de sistemas están fuertemente acoplados y las redes de petri temporizadas programables han resultado adecuadas para modelarlos. En capítulos anteriores ya se trataron los problemas de modelado y estabilidad, ahora abordaremos el problema de control.

El problema de control de un sistema híbrido se divide en dos partes, la primera la parte de control de la parte discreta y la segunda el control de la parte continua.

Una vez que ha sido estudiada la estabilidad entonces, en la parte discreta se deben eliminar todas las trayectorias que cumplan con:

a) llevan aun estado indeseable (inseguro de la planta).

b) se ejecuta una secuencia que inestabiliza el sistema híbrido.

Para lograr estos objetivos se disponen de dos tipos de controladores; los supervisores (Wonham, Giua) y los basados en las partes conservativas del sistema (Moody). Los primeros restringen el comportamiento del sistema de eventos discretos a trayectorias deseadas y los segundos son capaces de evitar que se alcancen estados indeseables.

Ramadge y Whoman [12] han desarrollado en el área de control de SED una extensa teoría de control, en cual se diseñan agentes que permiten restringir el comportamiento de un SED a un lenguaje especificado previamente, asimismo establecen las condiciones de existencia de dichos agentes llamados supervisores y prueban además que dicho supervisor puede ser modelado como una máquina de estados finitos.

### 4.2.1 Supervisor por Wonham

Para controlar un sistema de eventos discretos debemos:

1. Modelar en lazo abierto la planta, se requiere construir una máquina de estados finitos que genere el lenguaje de la planta.
2. Generar el lenguaje de la especificación como una máquina de estados finitos..
3. Intersectar estos dos lenguajes para formar un candidato a supervisor.
4. Verificar que el candidato a supervisor sea controlable, si el lenguaje que genera es controlable entonces este candidato es el supervisor; si no, se elimina la palabra que lo hace incontrolable y se continua probando y eliminando palabras hasta que sea controlable.

En procesos altamente concurrentes el modelado de los sistemas se vuelve demasiado complejo, puesto que el numero de estados crece exponencialmente con el número de componentes paralelas. tal explosión exponencial en el número de estados hace difícil de realizar el controlador, por tanto esta herramienta es poco recomendable para la realización del supervisor. A continuación veremos el trabajo de Giua al respecto.

### 4.2.2 Supervisor por Giua

En el trabajo realizado por Giua en RdP se obtienen las condiciones para la existencia de un supervisor en RdP, El supervisor en RdP se realiza en forma monolítica como lo formula Wonham y se realiza en los pasos siguientes:

1. Una estructura burda para un supervisor es sintetizada por medio de la composición concurrente de sus diferentes módulos.
2. Se refina la estructura para evitar marcados indeseables.
3. Utilizaremos una variante de esta herramienta para encontrar el supervisor debido a las ventajas que presenta con respecto a las máquinas de estado finito. Entre las más relevantes podemos mencionar que las redes de Petri tienen una complejidad en el lenguaje más alta que las máquinas de estado, tienen por lo tanto la posibilidad de describir una mayor clase de sistemas

### 4.2.3 Supervisor en un sistema híbrido

El supervisor tiene dos tareas principales. La primera tarea es la de permitir sólo secuencias de eventos que satisfagan especificaciones impuestas sobre la parte del evento discreto de la planta híbrida (restringe el comportamiento). En particular considera la red  $G$  del sistema híbrido. El objetivo aquí es restringir los posibles modos de conmutación de los sistemas para satisfacer restricciones lógicas adicionales (por ejemplo restricciones de exclusión mutua) que pueden no ser tomadas en consideración en la fase de modelado de la planta híbrida. Esto puede ser llevado a cabo sin ninguna información acerca de las dinámicas continuas. Las ecuaciones diferenciales de los subsistemas continuos asociados con las transiciones son utilizados como etiquetas de estas transiciones. La segunda tarea del supervisor es la de forzar los tiempos de disparo que satisfagan las especificaciones sobre los estados continuos de la planta. En una red de Petri no temporizada se pueden prohibir el disparo de transiciones, pero no se puede forzar el disparo de una transición a un instante particular. En una red de Petri temporizada las transiciones controladas son forzadas al disparo, esto puede ser logrado por considerar el vector de disparo como una función de un tiempo global  $\tau$ . Para una clase especial de problemas se puede determinar primero la política de enrutamiento y entonces los tiempos de disparo que no pueden violar ciertas condiciones impuestas sobre la dinámica continua. estas condiciones pueden ser expresadas como fórmulas bien formadas etiquetando los arcos de entrada y salida de la red de Petri.

### 4.2.4 Control supervisorio de una red de Petri basada sobre los P-semiflujos.

El primer paso es satisfacer las especificaciones discretas de la planta híbrida aplicando métodos de control de eventos discretos. Se supone que las especificaciones discretas son descritas por una desigualdad lineal sobre el vector de marcado de la red de Petri. Un controlador por retroalimentación basado sobre los p-semiflujos es implementado por la adición de lugares y arcos de control a las transiciones existentes en la estructura de la red de Petri. Aunque los métodos fueron desarrollados para las redes de Petri ordinarias, la introducción de los retardos de tiempo de cada transición puede no afectar la conducta de la red de Petri con respecto a las especificaciones discretas. El supervisor es utilizado para forzar el conjunto de restricciones lineales sobre los estados discretos de la planta híbrida. estas restricciones pueden describir una amplia variedad de problemas incluyendo problemas de estados prohibidos, exclusión mutua, así como una clase de lógica de predicados sobre la conducta de la planta, condiciones involucrando los eventos concurrentes y el modelado de recursos compartidos

El sistema a ser controlado es una red de Petri no temporizada  $G = (L, T, E, S)$ , la cual es llamada la red de la planta. Se supone que la red de la planta tiene  $n$  lugares y  $m$  transiciones y su matriz de incidencia es  $D_p$ . El controlador de la red es una red de Petri con matriz de incidencia  $D_c$  construida de las transiciones de la red de la planta y un conjunto separado de lugares. El controlador de la red es la red de Petri con matriz de incidencia  $D$  construida de ambas la planta y el controlador de la red. El objetivo del control es el de forzar los estados discretos para satisfacer restricciones de la forma

$$L\mu_p \leq b \quad (4.2)$$

donde  $\mu_p$  es el vector de marcado de la red de la planta,  $L$  es una matriz entera de  $n_c \times n$ ,  $b$  es un vector entero  $n_c \times 1$ , y  $n_c$  es el numero de restricciones 1-dimensional del tipo  $\sum_{i=1}^{n_p} l_i \mu_i \leq \beta$ . Esta desigualdad de restricciones puede ser transformada en la siguiente igualdad introduciendo variables no negativas lentas,

$$L\mu_p + \mu_c = b \quad (4.3)$$

donde  $\mu_c$  es un vector entero el cual representa el marcado de los lugares de un controlador externo de la red de Petri. La estructura del controlador de la red puede ser calculada al observar que por la introducción de las variables lentas se fuerza el conjunto de p-semiflujos sobre el sistema controlado. Un p-semiflujo es definido por un vector entero  $x$  que satisface

$$x^T \mu = x^T \mu_0 \quad (4.4)$$

donde  $\mu_0$  es el marcado inicial. Los p-semiflujos de una red son elementos del kernel de la matriz de incidencia de la red, y pueden ser calculados encontrando la solución entera de

$$x^T D = 0 \quad (4.5)$$

donde  $D$  es una matriz de incidencia de  $n \times m$ . La matriz  $D_c$  contiene los arcos que conectan los lugares del controlador a las transiciones de la red de la planta. La matriz  $D$  de incidencia del sistema de lazo cerrado esta dado por

$$D = \begin{bmatrix} D_p \\ D_c \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

y el vector de marcado  $\mu$  y el marcado inicial  $\mu_0$  están dados por

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_p \\ \mu_c \end{bmatrix} \quad \mu_0 = \begin{bmatrix} \mu_{p0} \\ \mu_{c0} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Note que la ecuación 4.3 esta en la forma de 4.4, así los semiflujos definidos por la ecuación 4.3 sobre el sistema 4.6,4.7 debe satisfacer la ecuación 4.5, esto es

$$X^T D = [ L \quad I ] \begin{bmatrix} D_p \\ D_c \end{bmatrix} = 0 \quad (4.8)$$

$$LD_p + D_c = 0 \quad (4.9)$$

Si  $D_c$  es elegida como la solución de la ecuación 4.9, entonces los renglones de  $[ L \quad I ]$  son elementos del kernel de la matriz de incidencia de la red. por lo tanto ellos representan los p-semiflujos del sistema de lazo cerrado y la ecuación 4.3 es satisfecha. El análisis anterior conduce a la siguiente proposición presentada en [Moody97].

**Proposición 19** *El controlador de la red de Petri con matriz de incidencia  $D_c$  y marcado inicial  $\mu_{c_p}$ , las cuales fuerzan las restricciones  $L\mu_p \leq b$  cuando son incluidas en el sistema de lazo cerrado 4.6 con marcado 4.7 es definida por*

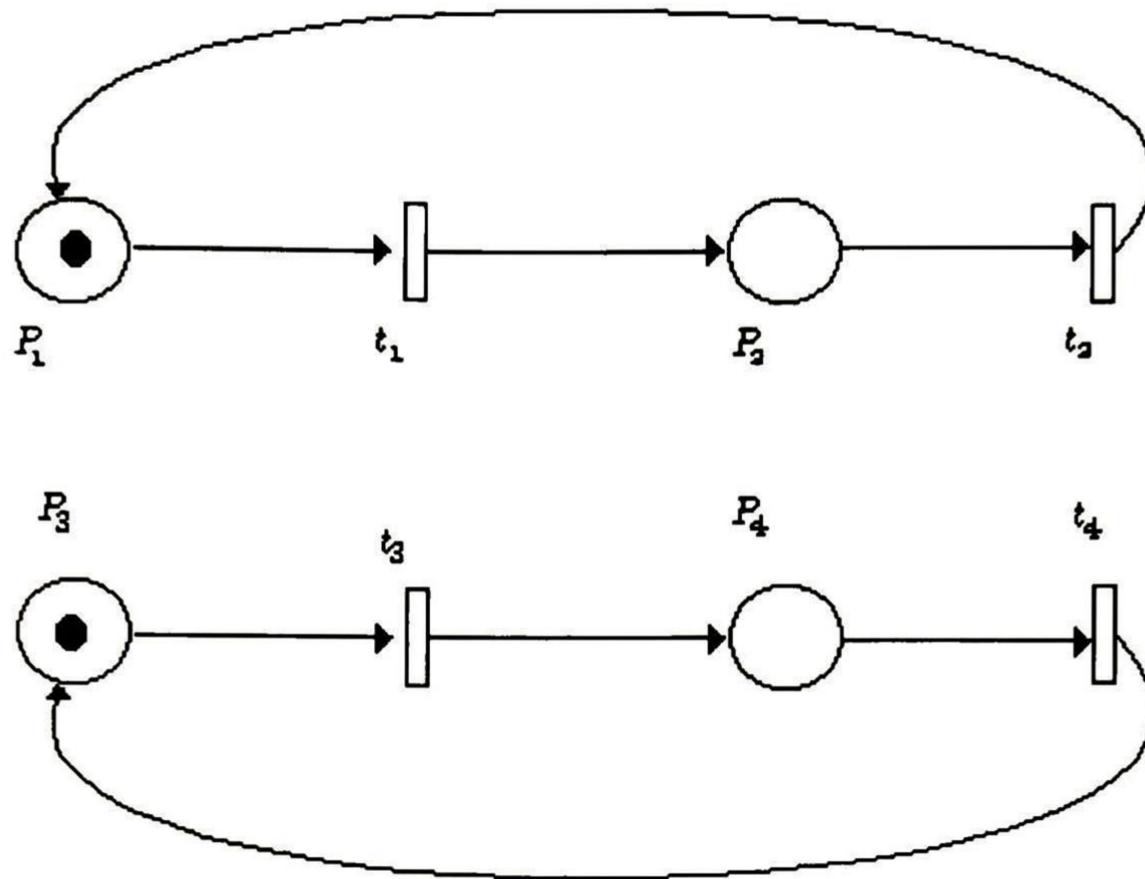


Figura 4.1: Modelo del sistema del recurso compartido

$$D_c = -LD_p$$

con marcado inicial

$$\mu_{c_0} = b - L\mu_{p_0}$$

suponiendo que las transiciones con arcos desde  $D_c$  son controlables, observables, y que  $\mu_{c_0} \geq 0$

Esta proposición conduce a un controlador que fuerza las restricciones lineales  $L\mu \leq b$  bajo la suposición que el controlador puede habilitar o deshabilitar transiciones controlables y observables. En el caso de los sistemas híbridos, se tienen asociadas transiciones con subsistemas continuos descritos con ecuaciones diferenciales. Se supone que el supervisor puede forzar y observar el disparo de las transiciones. Esto es logrado por las condiciones impuestas descritas por formulas bien formadas sobre los arcos de entrada y salida de las transiciones.

#### 4.2.5 Ejemplo: Sistema híbrido

Considere el caso de dos diferentes procesos que utilizan el mismo recurso para realizar sus operaciones. Esto presenta una situación de conflicto la cual requiere de un administrador de recursos. Más específicamente, supongamos que el proceso consiste de dos operaciones diferentes las cuales están descritas por ecuaciones diferenciales ordinarias y la política de control esta representada por la red de Petri de la figura 4.2

Cuya matriz de incidencia es  $D_p = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

y marcado inicial  $\mu_{p0} = [1 \ 0 \ 1 \ 0]^T$ . Si consideramos las restricciones de exclusión mutua (o sea que solo uno de los procesos puede estar utilizando el recurso) tenemos  $L\mu_p \leq b$ , donde  $L = [0 \ 1 \ 0 \ 1]$  y  $b = 1$ . usando la proposición anterior el sistema de lazo cerrado tiene la siguiente matriz de incidencia

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

por 4.6  $D_c = [-1 \ 1 \ -1 \ 1]$  que es el ultimo renglón de la matriz de incidencia y el marcado inicial de la red con el supervisor es

$$\mu_0 = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]^T$$

del cual también el ultimo renglón representa el marcado inicial del supervisor.

La red de Petri controlada se muestra en la siguiente figura donde el supervisor está implementado a través del lugar  $P_c$  conectado a las transiciones existentes.

### 4.3 Control continuo

En un sistema híbrido, cada estado del sistema discreta provoca que se seleccione un modelo lineal de la planta alrededor de un punto de operación, por lo tanto, en cada estado del sistema de eventos discretos se debe mandar a la planta la referencia adecuada para hacer que la planta trabaje en el punto de operación.

El control de cada sistema lineal se hace por medio de retro local, en la cual un sistema es linealizado alrededor de un punto de operación.

Ejemplo: en el caso del pendubot tenemos una ecuación completamente no lineal en la cual mediante series de Taylor se determinan los modelos lineales para diferentes puntos de operación [13] esta linealización nos genera un conjunto de modelos lineales para los puntos de operación  $q_1 = 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, \dots, 90^\circ$ , aprovechando la simetría con respecto al eje vertical obtenemos los modelos para  $q_1 = 100^\circ, 110^\circ, \dots, 160^\circ$  donde  $q_1$  es el ángulo del primer eslabón de los que consta el pendubot y  $q_2$  es el ángulo del segundo eslabón de tal manera que  $q_1 + q_2 = 90^\circ$ , el conjunto de modelos lineales esta dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) &= C x(t) \end{aligned}$$

donde  $x = [q_1 \ q_2 \ \dot{q}_1 \ \dot{q}_2]^T$  y  $C = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$ ,  $i = 20^\circ, 30^\circ, \dots, 160^\circ$  lo cual significa que  $(A_i, B_i, C)$  representan el modelo lineal en el  $i$ -esimo punto de operación. Los valores de las matrices  $A_i, B_i$  dependen del punto de operación.

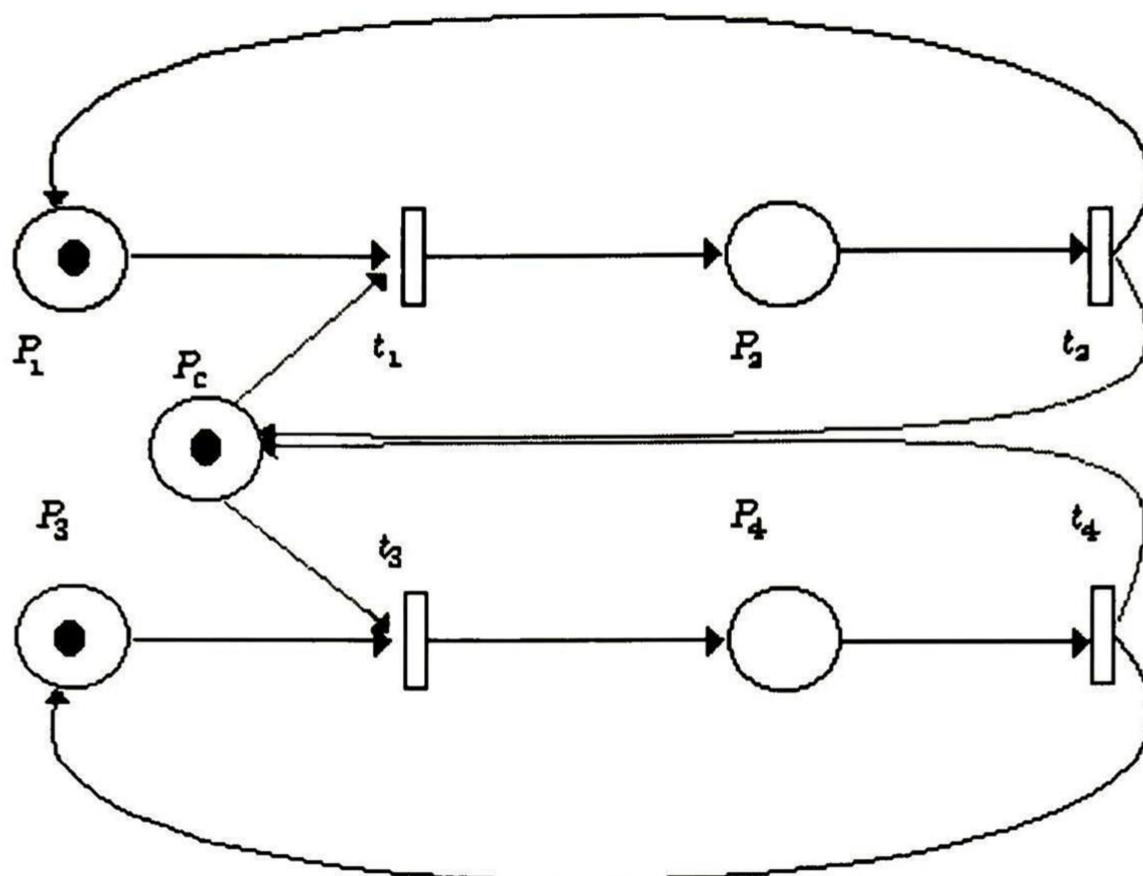


Figura 4.2: Red de Petri con supervisor

Estos modelos lineales no son estables en el sentido de Lyapunov por lo cual es necesario realizar una reubicación de polos mediante la formula de Akcerman(herramienta de matlab), y se calcula el conjunto de ganancias  $K_i$  las cuales permitirán mantener el sistema en el punto de operación deseado.

Por ejemplo veamos el modelo lineal para  $90^\circ$  el cual esta representado por las siguiente matrices

$$A_{90^\circ} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 48.6530 & -15.1360 & -0.1792 & -0.0285 \\ -48.9696 & 68.6277 & 0.3304 & -0.0876 \end{bmatrix} \quad B_{90^\circ} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 32.8816 \\ -60.6185 \end{bmatrix}$$

$$C = [ 0 \ 1 \ 0 \ 0 ]$$

los valores propios de la matriz A son  $\begin{bmatrix} -9.4765 \\ 9.2486 \\ -5.4637 \\ 5.4248 \end{bmatrix}$  y por lo tanto el sistema no es estable en el

sentido de Lyapunov. Utilizando retro de estado obtenemos la matriz A con la correspondiente ganancia K

$$A_{K_{90^\circ}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2371.7 & 1819.2 & 466.2 & 280 \\ -4331.6 & -3313.1 & -859 & 516.2 \end{bmatrix}$$

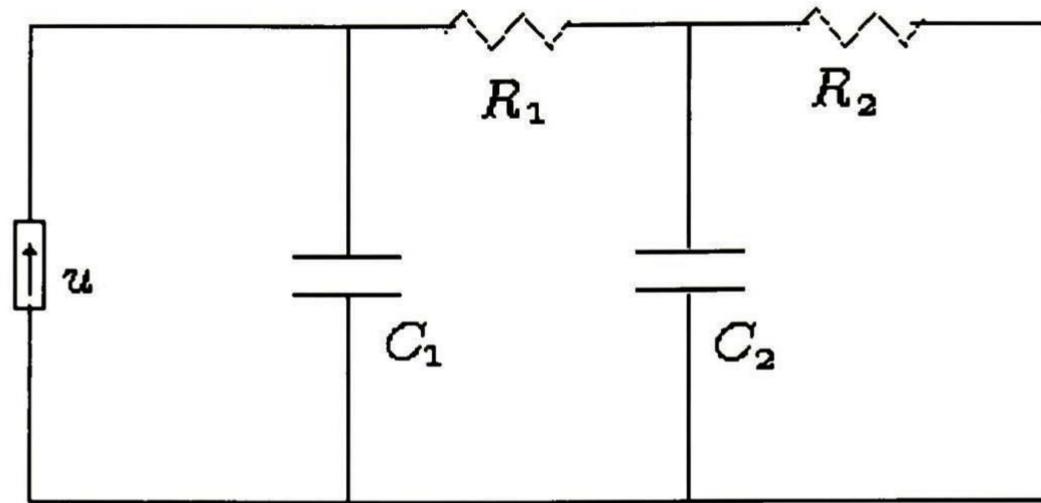


Figura 4.3: Sistema de control de temperatura

cuyos valores propios del nuevo sistema son  $\begin{bmatrix} -17 + 0.0001i \\ -17 - 0.0001i \\ -15 + 0.0001i \\ -15 - 0.0001i \end{bmatrix}$  y la ganancia

$K_{90^\circ} = [-162.6371 \ -116.0172 \ -29.2562 \ -16.9210]$  donde  $u = -Kx$  el sistema es ahora global y asintóticamente estable.

### 4.3.1 Ejemplo: Sistema de control de temperatura

Tomemos ahora el ejemplo de un sistema de control de temperatura, descrito por el circuito eléctrico mostrado en la figura 4.3, en donde se hace una analogía de un circuito eléctrico con el sistema de control de temperatura, considerando que la temperatura es análoga al voltaje eléctrico, calor a cantidad de corriente, calor a potencia en la capacitancia y resistencia térmica a resistencia eléctrica. El objetivo de control es controlar la temperatura a un punto del sistema por la aplicación de calor a diferentes puntos.

Sea  $x_1$  y  $x_2$  los voltajes en los capacitores  $C_1$  y  $C_2$  respectivamente. Suponga que las (voltajes) temperaturas  $x_1$  y  $x_2$  son controladas cambiando el calor (corriente) de la entrada  $u$ , a la cual se le permite tomar una cantidad finita de valores discretos.

Considerando que los valores numéricos de los elementos eléctricos son

$$\begin{aligned} R_1 &= R_2 = 1 \\ C_1 &= C_2 = 1 \end{aligned}$$

Entonces utilizando las leyes de Kirchhoff's el sistema es descrito por la siguiente ecuación de espacio de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

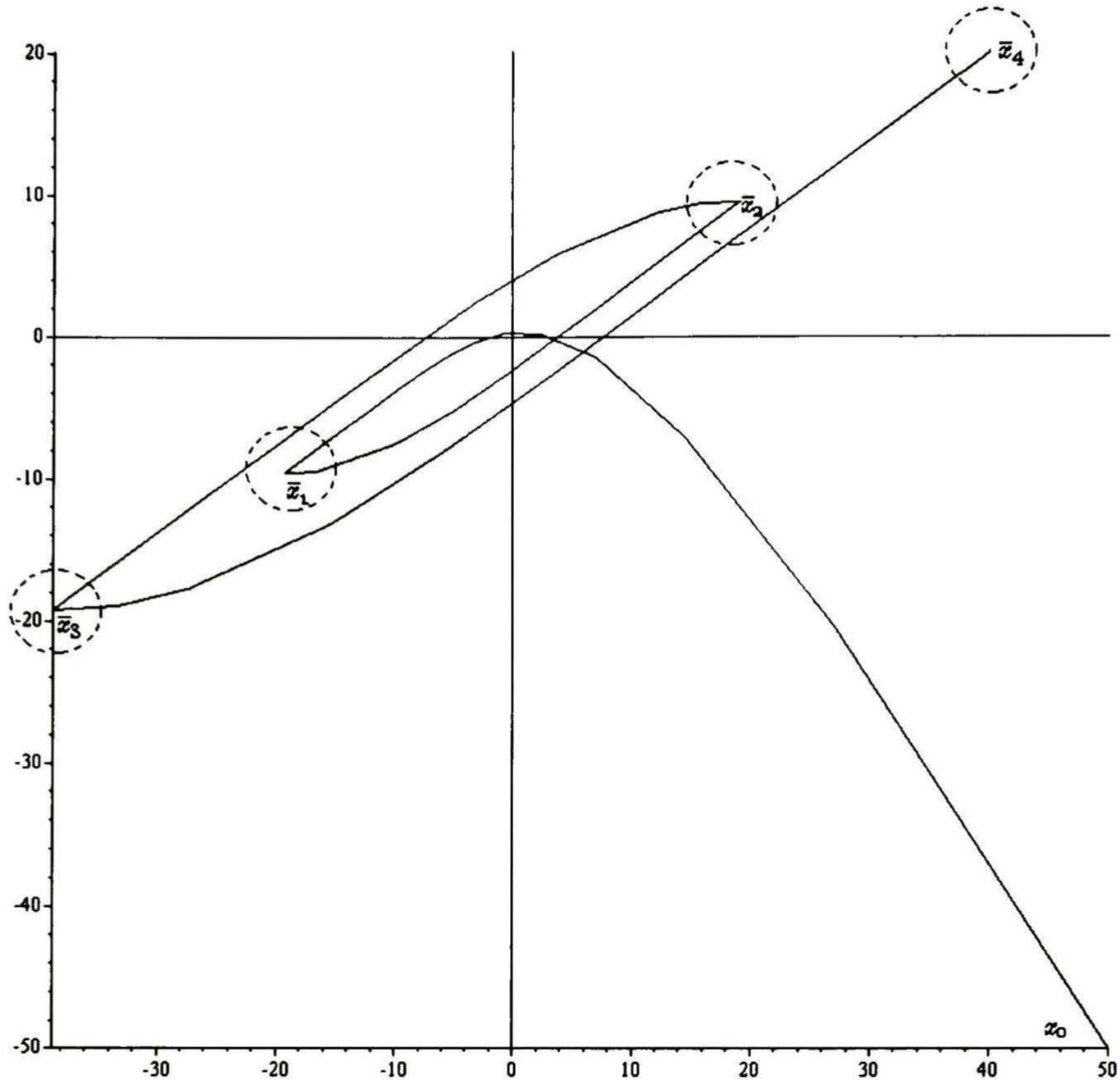


Figura 4.4: Conducta periódica del sistema híbrido

suponiendo que  $q_i, i = 1, \dots, N$  son los niveles discretos disponibles para la entrada que corresponde a la política de control correspondiente. La matriz  $A$  es Hurwitz y por lo tanto  $\bar{x}_i = -A^{-1}c_i$ , donde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad c_i = \begin{bmatrix} q_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

es un punto de equilibrio globalmente y asintóticamente estable para el sistema  $\dot{x} = Ax + c_i$ . Se supone que los niveles discretos de la entrada de calor son  $q_1 = -10, q_2 = 10, q_3 = -20$  y  $q_4 = 20$  y que la política de conmutación es descrita por la red de Petri de la figura 4.2 representando administración de recursos, donde la transición  $t_i$  corresponde a la entrada de control  $c_i$ , en este caso el algoritmo del control supervisor puede determinar el modo de conmutación y los tiempos de disparo tal que los estados continuos del sistema híbrido visite periódicamente vecindades del punto de equilibrio ver fig 4.4. Se considera una bola  $B(\bar{x}_i, r)$  de radio  $r$  centrada en  $\bar{x}_i, i=1, 2, 3, 4$  y se etiqueta los arcos de las transiciones de entrada y salida con wff's  $lo(t_i, p) = li(p, t_{i+1}) = x \in B(\bar{x}_i, r)$ . entonces el supervisor permite conmutaciones que ocurren sólo cuando las proposiciones lógicas anteriores son verdad.

En el capítulo siguiente abordaremos el caso del pendubot así como un ejemplo de un sistema de potencia. así como también daremos las conclusiones de este trabajo así como el trabajo futuro.



# Capítulo 5

## Aplicación al pendubot

### 5.1 Ejemplo

En este capítulo presentamos el pendubot como un conjunto de modelos linealizados en diferentes puntos de operación. La condición de equilibrio es que la suma de los ángulos de los dos eslabones ( $q_1, q_2$ ) con que cuenta el pendubot sea  $90^\circ$ , para el modelo obtenido en cualquier punto de operación seleccionado es encontrada una ganancia específica por medio de retro-local [13] que nos sirve para estabilizar el sistema, en este sistema el punto de equilibrio tiene una simetría con respecto al eje vertical, de tal manera que el modelo linealizado (A,B,C) para  $80^\circ$  es exactamente igual al modelo para  $100^\circ$ , el de  $70^\circ$  igual al de  $110^\circ$ ,  $60^\circ$  igual al modelo de  $120^\circ$  y así sucesivamente. Por simplicidad mostraremos solo los modelos para  $90^\circ$ ,  $80^\circ$  y  $70^\circ$  con la idea que se puede extender a  $60^\circ, 50^\circ, 40^\circ, 30^\circ$  y  $20^\circ$  ( $100^\circ, 110^\circ, \dots, 160^\circ$  respectivamente).

Los modelos linealizados son los siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} & 90^\circ & 80^\circ & 70^\circ \\ a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{13} & 1 & 1 & 1 \\ a_{14} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{24} & 1 & 1 & 1 \\ a_{31} & 48.6530 & 47.4651 & 44.1014 \\ a_{32} & -15.1360 & -14.7665 & -13.7200 \\ a_{33} & -0.1792 & -0.1775 & -0.1729 \\ a_{34} & -0.0285 & 0.0280 & 0.0267 \\ a_{41} & -48.9696 & -46.1715 & -38.3352 \\ a_{42} & 68.6277 & 67.7572 & 65.3193 \\ a_{43} & 0.3304 & 0.3250 & 0.3099 \\ a_{44} & -0.0876 & -0.0864 & -0.0830 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} & 90^\circ & 80^\circ & 70^\circ \\ b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & 32.8816 & 32.5737 & 31.7184 \\ b_{41} & -60.6185 & -59.6334 & -56.8604 \end{bmatrix}$$

$$C_{90^\circ} = C_{80^\circ} = C_{70^\circ} = [ 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 ]$$

Los valores propios de estos sistemas son

$$V = \begin{bmatrix} & 90^\circ & 80^\circ & 70^\circ \\ v_{11} & -9.4765 & -9.3663 & -9.0507 \\ v_{21} & 9.2486 & 9.1421 & 5.4047 \\ v_{31} & -5.4637 & -5.4602 & 8.8373 \\ v_{41} & 5.4248 & 5.4205 & -5.4471 \end{bmatrix}$$

Como podemos observar estos sistemas no son estables en el sentido de Lyapunov es por tanto necesario utilizar reasignación de polos para ubicarlos en el semiplano izquierdo para lograr la tan mencionada estabilidad. Los sistemas resultantes son

$$A_k = \begin{bmatrix} & 90^\circ & 80^\circ & 70^\circ \\ a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{13} & 1 & 1 & 1 \\ a_{14} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{24} & 1 & 1 & 1 \\ a_{31} & 5396.4 & 5455.4 & 5642 \\ a_{32} & 3799.7 & 3858.7 & 4045 \\ a_{33} & 961.8 & 970.5 & 998 \\ a_{34} & 556.4 & 565.1 & 592 \\ a_{41} & -9907.8 & -9946.6 & -10073 \\ a_{42} & -6964.2 & -7023.5 & -7211 \\ a_{43} & -1773.1 & -1776.7 & -1789 \\ a_{44} & -1025.8 & -1034.5 & -1062 \end{bmatrix}$$

Cuyos valores propios se encuentran el semiplano izquierdo y son los siguientes

$$V_k = \begin{bmatrix} & 90^\circ & 80^\circ & 70^\circ \\ b_{11} & -15 & -22.7861 + 11.9065i & -52.8734 \\ b_{21} & -15 & -22.7861 - 11.9065i & -2.0534 + 12.6354i \\ b_{31} & -17 & -9.2139 + 3.6550i & -2.0534 - 12.6354i \\ b_{41} & -17 & -9.2139 - 3.6550i & -7.0199 \end{bmatrix}$$

La red de Petri para el pendubot se muestra en la siguiente figura 5.1 a cada transición se le asignan restricciones de tiempo y a los lugares  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ ,  $L'_2$  y  $L'_3$  se les asigna los modelos linealizados de  $90^\circ$ ,  $80^\circ$ ,  $70^\circ$ ,  $100^\circ$  y  $110^\circ$  respectivamente las restricciones de tiempo son del tipo  $t < 10 \text{ seg.}$  o  $t > 10 \text{ seg.}$  el cual permite visitar después de un determinado tiempo (iniciando del punto de equilibrio o condiciones iniciales  $q_1=90^\circ$  y  $q_2=0^\circ$ ) cada uno de los modelos linealizados del sistema. Podemos también generar una perturbación de tipo senoidal y poner restricciones sobre las transiciones del tipo  $x_1 < 1.5706 \text{ rad}$  o  $x_1 > 1.5706 \text{ rad}$  o una combinación de ambas (tiempo y condición de ángulo).

La matriz de incidencia del sistema considerando al supervisor y solo el primer cuadrante del sistema ( $90^\circ, 80^\circ$  y  $70^\circ$ ) es la siguiente:

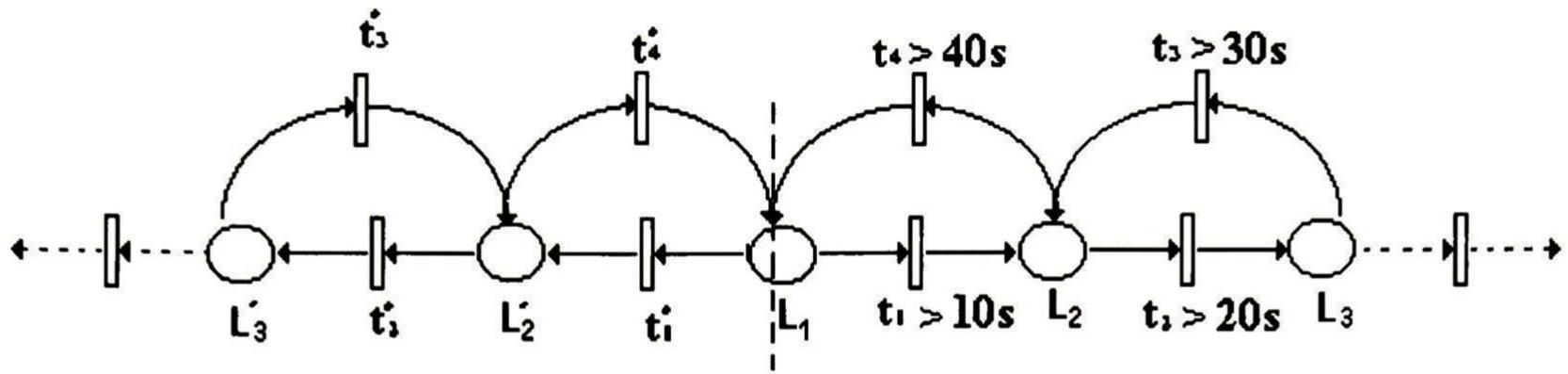


Figura 5.1: Red de Petri del pendubot (incluye el supervisor)

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

aquí cabe mencionar que el supervisor evita que se alcancen estados indeseables, tales estados indeseables son en este caso el que pase de 70° directamente a 90° sin pasar por 80° y de 90° a 70° sin pasar por 80°

El red de Petri controlada tiene dos ciclos fundamentales que son  $t_1, t_2$  y  $t_3, t_4$  y como mencionamos en el capítulo tres tenemos que encontrar una función de Lyapunov para los ciclos fundamentales [He98], encontramos para la primera trayectoria la siguiente función de Lyapunov.

Utilizando la formula  $Q = -(AP + PA^T)$  puesto que utilizamos la utilería de matlab y proponiendo la siguiente función definida positiva

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0.0020 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0020 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0020 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0020 \end{bmatrix}$$

obtenemos la función de lyapunov para el primer sistema

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.0060 & -0.0081 & -0.0010 & -0.0030 \\ -0.0081 & 0.0113 & 0.0030 & -0.0010 \\ -0.0010 & 0.0030 & 0.8222 & -1.4321 \\ -0.0030 & -0.0010 & -1.4321 & 2.5111 \end{bmatrix} \text{ cuyos valores propios son } \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0036 \\ 0.0178 \\ 3.3291 \end{bmatrix}$$

proponiendo  $P_1$  como función definida positiva para el siguiente sistema obtenemos

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0.0006 & -0.0008 & -0.0030 & 0.0047 \\ -0.0008 & 0.0011 & 0.0034 & -0.0056 \\ -0.0030 & 0.0034 & 0.0644 & -0.1051 \\ 0.0047 & -0.0056 & -0.1051 & 0.1745 \end{bmatrix} \text{ cuyos valores propios son } \begin{bmatrix} 0.0014 \\ 0.0008 \\ 0.0000 \\ 0.2384 \end{bmatrix}$$

donde como podemos observar cumple con las condiciones para ser función de Lyapunov al ser definida positiva. Para comprobar tal afirmación es necesario comprobar si tal función cumple para los dos modelos del ciclo fundamental 90° y 80° y obtenemos lo siguiente:

$$Q_2 = -(A_{k_{90^\circ}} * P_2 + P_2 * A_{k_{90^\circ}}^T)$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0.0060 & -0.0081 & 0.0022 & -0.0092 \\ -0.0081 & 0.0113 & 0.0031 & -0.0005 \\ 0.0022 & 0.0031 & 0.1533 & -0.2805 \\ -0.0092 & -0.0005 & -0.2805 & 0.5323 \end{bmatrix} \text{ cuyos valores propios son } \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0035 \\ 0.0180 \\ 0.6814 \end{bmatrix}$$

y

$$Q_3 = -(A_{k_{80^\circ}} * P_2 + P_2 * A_{k_{80^\circ}}^T)$$

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 0.0060 & -0.0081 & -0.0010 & -0.0030 \\ -0.0081 & 0.0113 & 0.0030 & -0.0010 \\ -0.0010 & 0.0030 & 0.8222 & -1.4321 \\ -0.0030 & -0.0010 & -1.4321 & 2.5111 \end{bmatrix} \text{ cuyos valores propios son } \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0036 \\ 0.0178 \\ 3.3291 \end{bmatrix}$$

de tal manera que como podemos observar que la función cumple para los dos sistemas al ser una función definida positiva como se requiere.

Veamos la función de Lyapunov para el segundo ciclo fundamental para el primer sistema proponemos

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0.0001 & -0.0001 & -0.0003 & 0.0006 \\ -0.0001 & 0.0002 & 0.0002 & -0.0005 \\ -0.0003 & 0.0002 & 0.0116 & -0.0181 \\ 0.0006 & -0.0005 & -0.0181 & 0.0285 \end{bmatrix} \text{ cuyos valores propios son } \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0003 \\ 0.0400 \end{bmatrix}$$

y obtenemos la función de Lyapunov que cumple con los dos sistemas

$$P_4 = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0001 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0001 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0008 & -0.0014 \\ 0.0001 & -0.0001 & -0.0014 & 0.0023 \end{bmatrix} \text{ sus valores propios son } \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0001 \\ 0.0001 \\ 0.0031 \end{bmatrix}$$

para comprobarlo tenemos

$$Q_4 = -(A_{k_{80^\circ}} * P_2 + P_2 * A_{k_{80^\circ}}^T)$$

y obtenemos

$$Q_4 = \begin{bmatrix} 0.0001 & -0.0001 & -0.0003 & 0.0006 \\ -0.0001 & 0.0002 & 0.0002 & -0.0005 \\ -0.0003 & 0.0002 & 0.0116 & -0.0181 \\ 0.0006 & -0.0005 & -0.0181 & 0.0285 \end{bmatrix} \text{ y sus valores propios } \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0003 \\ 0.0400 \end{bmatrix}$$

y

$$Q_5 = -(A_{k_{70^\circ}} * P_2 + P_2 * A_{k_{70^\circ}}^T)$$

$$Q_5 = \begin{bmatrix} 0.0001 & -0.0001 & -0.0003 & 0.0008 \\ -0.0001 & 0.0002 & -0.0001 & -0.0001 \\ -0.0003 & -0.0001 & 0.0387 & -0.0643 \\ 0.0008 & -0.0001 & -0.0643 & 0.1070 \end{bmatrix} \text{ y sus valores propios } \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0003 \\ 0.1456 \end{bmatrix}$$

como podemos comprobar son funciones definidas positivas por tanto  $P_3$  es la función deseada de Lyapunov para este ciclo fundamental.

Presentamos a continuación los resultados de simulación para los tres puntos de operación deseados ( $90^\circ, 80^\circ$  y  $70^\circ$ ) poniendo restricciones sobre el tiempo.

Presentamos además la simulación para los diferentes modelos linealizados en  $90^\circ, 80^\circ, 70^\circ, 60^\circ, 50^\circ, 40^\circ$  y  $30^\circ$  ( $100^\circ, 110^\circ, 120^\circ, 130^\circ, 140^\circ$  y  $150^\circ$  respectivamente) como podemos observar nos mantenemos 5 segundos en cada punto de operación con la finalidad de estabilizar el sistema.

Si generamos una perturbación del tipo impulso unitario con una duración de .05seg sobre el estado  $q_1$  en el modelo de  $90^\circ$  observamos que la ley de control no puede mantenerlo en el punto de operación. El resultado en simulación se observa en la siguiente figura

como podemos observar en la figura 5.4 el sistema se mantiene en el punto de operación hasta antes de aplicarle la perturbación una vez que se aplica esta se observa como el estado  $q_1$  empieza a caer del punto de operación en forma muy rápida. El modelo para  $80^\circ$  con su respectiva ley de control se comporta de la siguiente manera como podemos observar en la figura 5.5 el sistema se mantiene en el punto de operación deseado con la ley de control que se calculo para tal punto. Ahora si realizamos la conmutación podemos observar como el sistema conmutado se vuelve completamente estable puesto que sobre una de las transiciones se impusieron restricciones del tipo  $x_2 > 0.1490$ , esto es que cuando el sistema cruza cierta región del espacio de estado debido a la perturbación el sistema conmutará al siguiente modelo (esto es de  $90^\circ$  a  $80^\circ$ ), al realizarse la conmutación al modelo de  $80^\circ$  tal modelo lo captura y al mismo tiempo hace que el sistema lo regrese al modelo de  $90^\circ$  de tal manera que obtenemos un sistema completamente estable. Veamos el resultado de simulación del sistema conmutado vemos en la figura 5.6 como el sistema es sacado de su punto de operación por la perturbación a los diez segundos y al llegar a cierto punto en el espacio de estado es conmutado al modelo siguiente y tal modelo lo regresa al punto de operación deseado.

## 5.2 Conclusiones

En algunos sistemas podemos lograr *capturar* el sistema al generarse alguna perturbación y sacarlo de su punto de operación, tal que al cruzar cierta región (al satisfacer condiciones impuestas sobre las transiciones) el modelo actual es conmutado al modelo correspondiente y este nuevo modelo mantiene al sistema en este punto hasta que se satisface la condición (o condiciones) impuestas sobre la transición siguiente. Sin embargo existen algunos sistemas en los cuales por su naturaleza no es posible realizar esto. Es importante resaltar la importancia de detectar los ciclos fundamentales puesto que estos ahorran una gran cantidad de trabajo en la búsqueda de una función común de Lyapunov para la colección de modelos del sistema, puesto que se limita a encontrar una función común solo para tal ciclo fundamental.

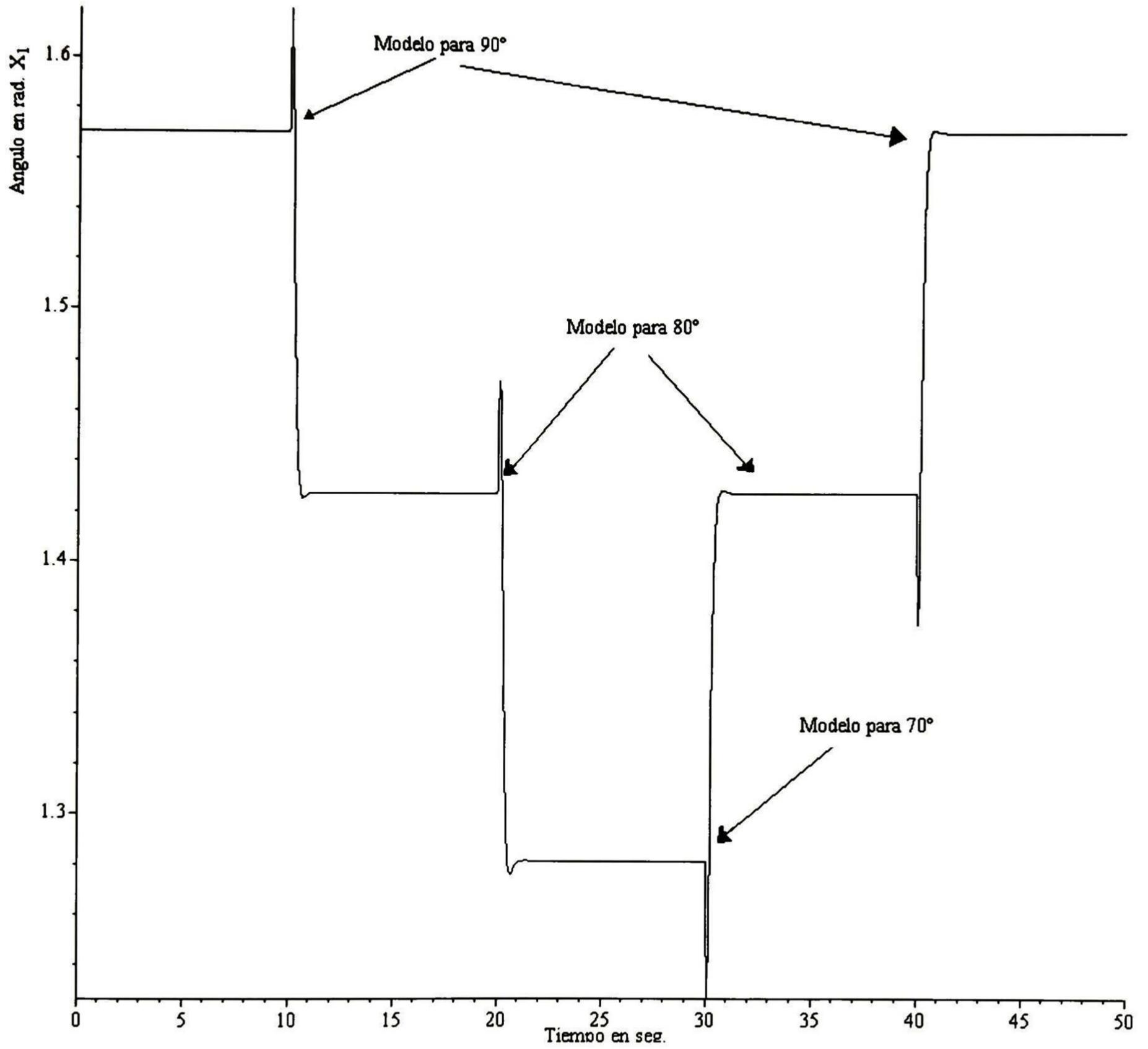
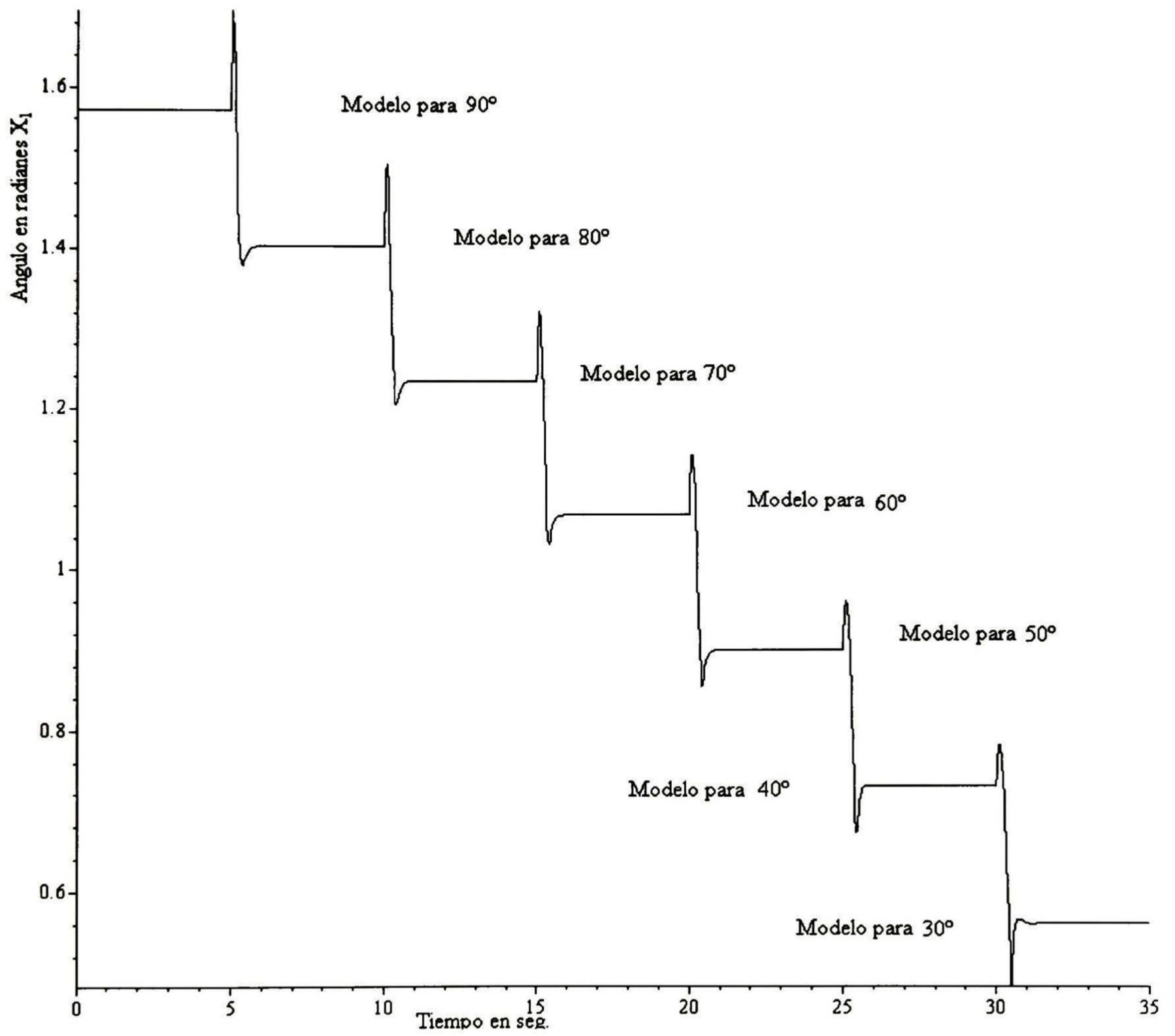
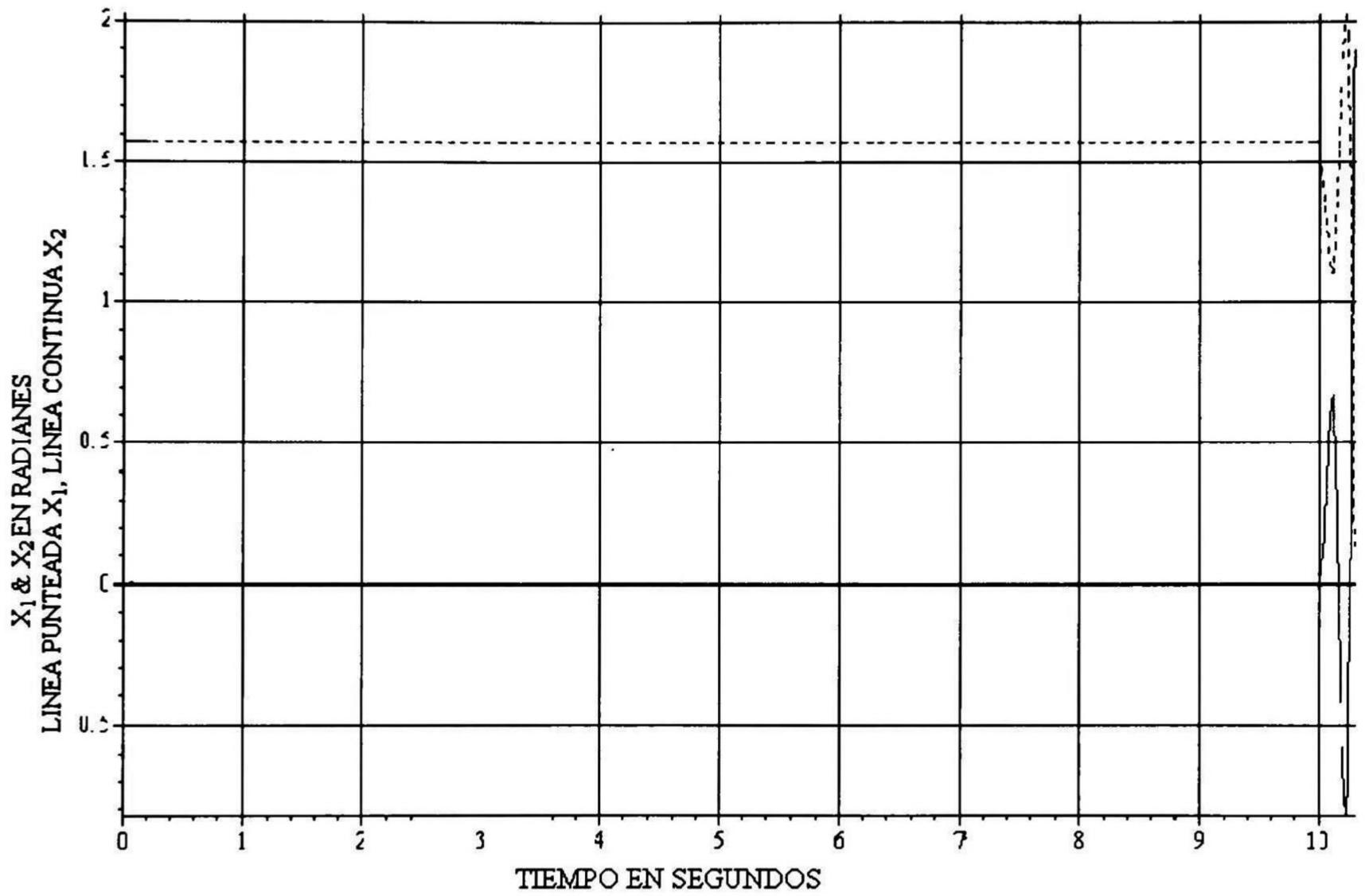
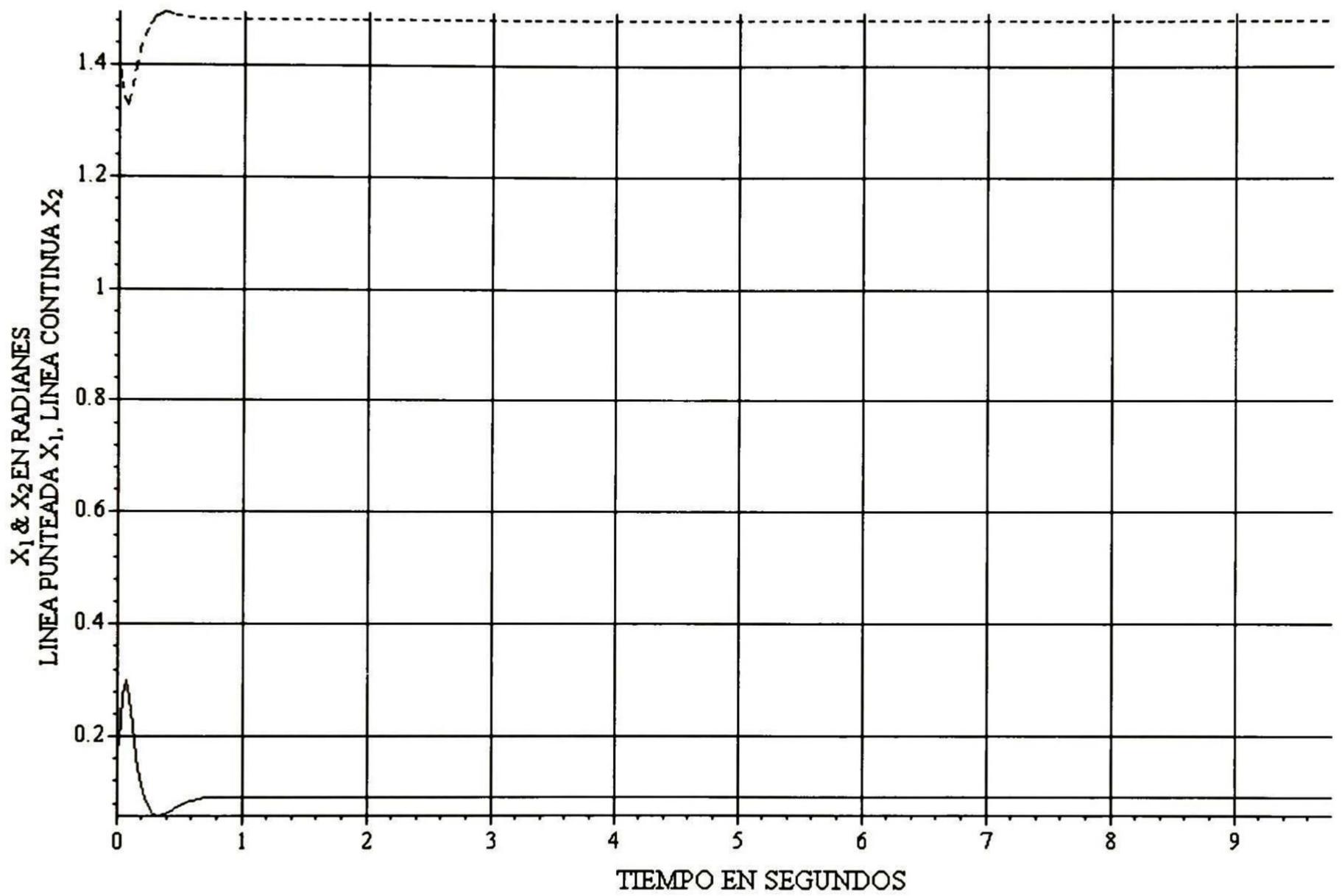


Figura 5.2: Representación del sistema visitando los tres puntos de operación elegidos

Figura 5.3: Modelo pendubot conmutado de  $90^\circ$  hasta  $30^\circ$

Figura 5.4: Modelo para  $90^\circ$  con perturbación

Figura 5.5: Modelo para  $80^\circ$

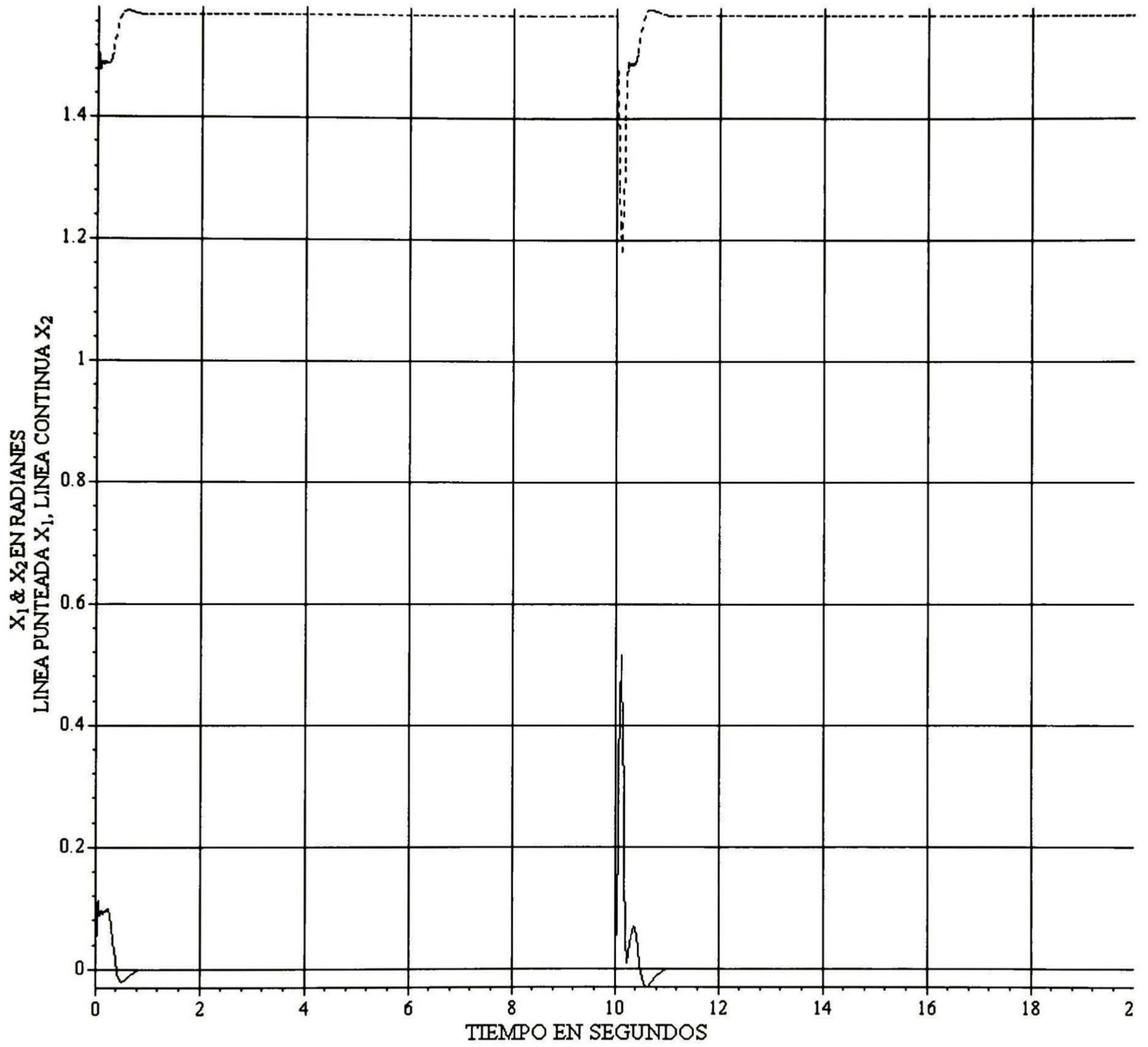


Figura 5.6: Sistema conmutado con restricciones de estado

### **5.2.1 Trabajo futuro**

En este renglón podemos decir que el trabajo futuro esta en la búsqueda de condiciones de controlabilidad para el sistema híbrido.



# Apéndice A

## Estabilidad

### A.1 Estabilidad de Lyapunov

El análisis de estabilidad de Lyapunov juega un papel importante en el análisis de la estabilidad de los sistemas de control descritos por ecuaciones en el espacio de estado. Existen dos métodos de análisis de estabilidad de Lyapunov, ambos se aplican para determinar la estabilidad de los sistemas dinámicos descritos por ecuaciones diferenciales o en diferencias ordinarias. Centraremos nuestra atención en el método que no requiere de la solución de las ecuaciones diferenciales o en diferencias.

Aunque existen muchos criterios de estabilidad para los sistemas continuos, como el criterio de estabilidad de Routh-hurwitz, éstos están restringidos a sistemas lineales invariantes en el tiempo. Por otro lado el método de Lyapunov, es aplicable tanto a sistemas lineales como no lineales, variantes e invariantes en el tiempo. En particular este método es indispensable para el análisis de estabilidad de sistemas no lineales en los que las soluciones exactas no son posibles. Es importante señalar, sin embargo, que a pesar de que este método es aplicable a cualquier sistema no lineal los resultados no son una tarea fácil. Se necesita experiencia e imaginación para llevar a cabo el análisis de estabilidad en la mayoría de los sistemas no lineales.

#### A.1.1 Método directo de Lyapunov

De la teoría de la mecánica clásica, se sabe que un sistema vibratorio es estable si su energía total se reduce continuamente, hasta alcanzar un estado de equilibrio.

**Estado de equilibrio.** En el sistema de la ecuación  $\dot{x} = f(x, t)$ , un estado  $x_e$ , donde  $f(x_e, t) = 0$  para toda  $t$  se llama estado de equilibrio para el sistema. Si el sistema es lineal e invariante en el tiempo, esto es, si  $f(x, t) = Ax$ , entonces sólo existirá un estado de equilibrio si  $A$  es no singular, y un número infinito de estados de equilibrio si  $A$  es singular. En el caso de los sistemas no lineales, pueden existir uno o más estados de equilibrio. Estos casos corresponden a las soluciones constantes del sistema ( $x = x_e$  para toda  $t$ ). La determinación de los estados de equilibrio no involucra la solución de la ecuación diferencial del sistema  $\dot{x} = f(x, t)$  sino sólo la solución de la ecuación  $f(x_e, t) = 0$ . La solución de la ecuación diferencial  $\dot{x} = f(x, t)$  tiene una solución única que se da como  $\phi(t; x_0, t_0) = x$ , donde  $x = x_0$  en  $t = t_0$  y  $t$  es el tiempo observado. El método de Lyapunov se basa en una generalización de lo anterior: si el sistema tiene un estado de equilibrio asintóticamente estable, entonces la energía almacenada en él desplazada dentro de

un dominio de atracción se decrementa al aumentar el tiempo, hasta que por último adopta su valor mínimo en el estado de equilibrio. Sin embargo, para sistemas descritos matemáticamente, no existe una forma simple de definir una *función de energía*. Para vencer esta dificultad, Lyapunov introdujo la función de Lyapunov, una función ficticia de energía. Esta idea es más general y más utilizada que la de la energía. De hecho, cualquier función escalar que satisfaga las hipótesis de los teoremas de estabilidad de Lyapunov puede servir como función de Lyapunov. Antes de que se analice más profundamente la función de Lyapunov, es necesario introducir los conceptos de funciones escalares definidas positivas y negativas [10].

**Definición 20 *Función definida positiva.*** Se dice que una función escalar  $V(x)$  es definida positiva en una región  $\Omega$  (que incluye el origen del espacio de estado) si  $V(x) > 0$  para todos los estados  $x$  no cero de la región  $\Omega$  y si  $V(0)=0$ .

Se dice que una función variante en el tiempo  $V(x, t)$  es definida positiva en una región  $\Omega$  (que incluye el origen del espacio de estado) si está limitada por debajo por una función definida positiva invariante en el tiempo, es decir, si existe una función definida positiva  $V(x)$  tal que

$$V(x, t) > V(x), \quad \text{para toda } t \geq t_0$$

$$V(0, t) > 0, \quad \text{para toda } t \geq t_0$$

**Definición 21 *Función definida negativa.*** Una función escalar  $V(x)$  es definida negativa si  $-V(x)$  es definida positiva.

**Definición 22 *Función semidefinida positiva.*** Una función escalar  $V(x)$  es semidefinida positiva si es positiva en todos los estados en la región  $\Omega$  excepto en el origen y en determinados estados donde es cero.

**Definición 23 *Función semidefinida negativa.*** Una función escalar  $V(x)$  es semidefinida negativa si  $-V(x)$  es semidefinida positiva

**Definición 24 *Función indefinida*** Una función escalar  $V(x)$  es indefinida si en la región  $\Omega$  adopta tanto valores positivos como negativos, independientemente de lo pequeña que sea la región  $\Omega$ .

**Definición 25 *funciones de Lyapunov.*** La función de Lyapunov, que es una función escalar, es una función definida positiva y es continua junto con sus primeras derivadas parciales (en relación con sus argumentos) en la región  $\Omega$  alrededor del origen y tiene una derivada con respecto al tiempo que, cuando se toma a lo largo de la trayectoria es definida negativa (o semidefinida negativa). Observe que  $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$  es la derivada de  $V(\mathbf{x}, t)$  con respecto a  $t$  a lo largo de una solución del sistema. Por tanto,  $\dot{V}(\mathbf{x}, t) < 0$  implica que  $V(\mathbf{x}, t)$  se va decrementando en función de  $t$ . Una función de Lyapunov no es única para un sistema dado. (Por esta razón este método es una herramienta más poderosa que las consideraciones de energía).

### A.1.2 Estabilidad en el sentido de Lyapunov.

Una región esférica de radio  $r$ , alrededor de un estado de equilibrio  $x_e$  se denotará como

$$\|x - x_e\| \leq r$$

donde  $\|x - x_e\|$  se llama norma euclidiana y se define como sigue:

$$\|x - x_e\| = [(x_1 - x_{1e})^2 + (x_2 - x_{2e})^2 + \dots + (x_n - x_{ne})^2]^{1/2}$$

Sea  $S(\delta)$  el conjunto formado por todos los puntos tales que

$$\|x_0 - x_e\| \leq \delta$$

y hagamos que  $S(\epsilon)$  donde  $\delta$  es un número real, sean todos los puntos tales que

$$\|\phi(t; x_0, t_0) - x_e\| \leq \delta, \quad \text{para todo } t \geq t_0.$$

Donde  $\phi(t; x_0, t_0) = x_0$  es la solución única de la ecuación diferencial  $\dot{x} = f(x, t)$ , donde  $x = x_0$  en  $t = t_0$  y  $t$  es el tiempo observado.

Se dice que un estado de equilibrio  $x_e$  del sistema de la ecuación  $\dot{x} = f(x, t)$  es estable en el sentido de Lyapunov si, para cada  $S(\epsilon)$  existe un  $S(\delta)$  tal que las trayectorias que se inicien en  $S(\delta)$  no salgan de  $S(\epsilon)$  al aumentar  $t$  en forma indefinida. El número real  $\delta$  depende de  $\epsilon$  y en general, también depende de  $t_0$ . Si  $\delta$  no depende de  $t_0$ , se dice que el estado de equilibrio es *uniformemente estable*.

Lo que se ha enunciado aquí es que primero se escoge la región  $S(\epsilon)$  y, para cada  $S(\epsilon)$ , deberá existir una región  $S(\delta)$  tal que las trayectorias que inicien dentro de  $S(\delta)$  no salgan de  $S(\epsilon)$  conforme  $t$  se incrementa en forma indefinida.

### A.1.3 Estabilidad asintótica.

Se dice que un estado de equilibrio  $x_e$  del sistema de la ecuación  $\dot{x} = f(x, t)$  es asintóticamente estable si es estable en el sentido de Lyapunov y si cada solución que se inicie desde el interior de  $S(\delta)$  converge, sin salir de  $S(\epsilon)$  hacia  $x_e$  conforme  $t$  se incrementa en forma indefinida.

En la práctica, la estabilidad asintótica es más importante que la simple estabilidad. Sin embargo, dado que la estabilidad asintótica es un concepto local, el hecho de establecer la estabilidad asintótica no necesariamente significa que el sistema operará de forma correcta. Por lo general, es necesario algún conocimiento del tamaño de la región más grande de la estabilidad asintótica. Esta región se conoce como dominio de atracción. Es esa parte del espacio de estado en el cual se originan las trayectorias asintóticamente estables. En otras palabras, cualquier trayectoria que se origine en el dominio de atracción es asintóticamente estable.

### A.1.4 Estabilidad asintótica global.

Si la estabilidad asintótica es válida para todos los estados (para todos los puntos en el espacio de estado) a partir de donde se originan todas las trayectorias, se dice que el estado de equilibrio

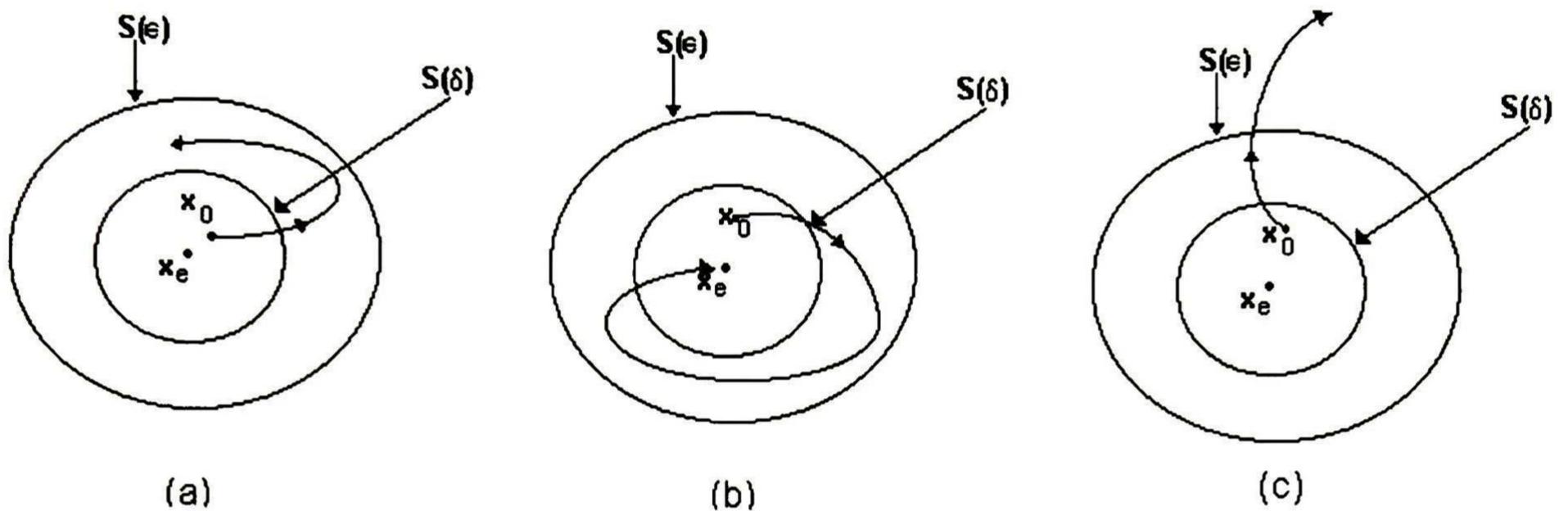


Figura A.1: a) Estado de equilibrio estable b) estado de equilibrio estable asintóticamente c) estado de equilibrio inestable

es *estable asintóticamente global*. Esto es, el estado de equilibrio  $x_e$  del sistema dado por la ecuación  $\dot{x} = f(x, t)$  se dice estable asintóticamente global si es estable y cada solución converge a  $x_e$  conforme  $t$  se incrementa en forma indefinida. Es claro que una condición necesaria para la estabilidad asintótica global es que exista sólo un estado de equilibrio en la totalidad del espacio de estado.

### A.1.5 Representación gráfica de estabilidad, estabilidad asintótica e inestabilidad

### A.1.6 Análisis de estabilidad de los sistemas lineales invariantes en el tiempo.

Existen muchos métodos para la investigación de la estabilidad asintótica de sistemas lineales invariantes en el tiempo. Por ejemplo, para un sistema de tiempo continuo descrito por la ecuación

$$\dot{x} = \mathbf{A}x$$

se puede decir que una condición necesaria y suficiente para la estabilidad asintótica del origen del sistema es que todos los valores propios de  $\mathbf{A}$  tengan partes reales negativas, o que los ceros del polinomio característico

$$\det | s\mathbf{I} - \mathbf{A} | = s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n$$

tengan partes reales negativas.

### A.1.7 Análisis de estabilidad de Lyapunov de sistemas lineales en tiempo continuo e invariantes en el tiempo.

Considere el siguiente sistema lineal invariante en el tiempo

$$\dot{x} = \mathbf{A}x \quad (\text{A.1})$$

donde  $x$  es el vector de estado (un vector- $n$ ) y  $\mathbf{A}$  es una matriz constante de  $n \times n$ . Se supone que  $\mathbf{A}$  es no singular. Entonces el único estado de equilibrio es el origen,  $x = 0$ . La estabilidad del estado de equilibrio del sistema lineal invariante en el tiempo se puede investigar fácilmente con este método de Lyapunov.

Para el sistema definido por la ecuación A.1, se escoge como función de Lyapunov.

$$V(x) = x^*Px$$

donde  $\mathbf{P}$  es una matriz hermitica definida positiva. (Si  $x$  es un vector real, entonces  $\mathbf{P}$  se puede seleccionar como una matriz simétrica real definida positiva). La derivada en el tiempo de  $V(x)$  a lo largo de cualquier trayectoria es

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^*Px + x^*P\dot{x} \\ &= (\mathbf{A}x)^*Px + x^*P\mathbf{A}x \\ &= \mathbf{A}^*x^*Px + x^*P\mathbf{A}x \\ &= x^*(\mathbf{A}^*P + P\mathbf{A})x \end{aligned}$$

Dado que  $V(x)$  se escogió para ser definida positiva, se requiere, para la estabilidad asintótica, que  $\dot{V}(x)$  sea definida negativa. por lo tanto, se requiere que

$$\dot{V}(x) = -x^*Qx$$

donde  $\mathbf{Q} = -(\mathbf{A}^*P + P\mathbf{A})$  es definida positiva por lo tanto para la estabilidad asintótica del sistema de la ecuación A.1, es suficiente que  $\mathbf{Q}$  sea definida positiva.

Para probar que una matriz de  $n \times n$  es definida positiva, se aplica el criterio de Sylvester, que dice que una condición necesaria y suficiente para que una matriz sea definida positiva es que todos los valores propios de la matriz sean positivos.

## A.2 Estabilidad de Lyapunov en sistemas discretos

Podemos considerar propiedades de estabilidad en sistemas de eventos discretos que pueden ser modelados con

$$G = (\mathcal{X}', \mathcal{E}, f_e, g, E_v) \quad (\text{A.2})$$

donde  $\mathcal{X}$  es el conjunto de estados y  $\mathcal{E}$  el conjunto de eventos,

$$f_e : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \quad (\text{A.3})$$

un operador para  $e \in \mathcal{E}$  además

$$g : \mathcal{X} \rightarrow (\mathcal{E})^n - \{\emptyset\} \quad (\text{A.4})$$

es la función de habilitación, y  $E_v \subset \mathcal{E}^\Delta$  es el conjunto de trayectorias de eventos válidas,  $(\mathcal{E})^n$  significa el conjunto potencia de  $\mathcal{E}$ , se requiere que  $f_e(x)$  sea definida cuando  $e \in g(x)$ . La inclusión de  $\times (\mathcal{E}) - \{\emptyset\}$  en el codominio de  $g$  asegura que allí puede existir algún evento que puede ocurrir

Los índices de tiempo se asocian con los estados tal que  $x_k \in \mathcal{X}$  representa el estado al tiempo  $k \in \Delta$  y  $e_k \in \mathcal{E}$  representa un evento habilitado al tiempo  $k \in \Delta$  si  $e_k \in g(x_k)$ . Si tal estado  $x_k \in \mathcal{X}$  y evento  $e_k \in \mathcal{E}$  ocurren al tiempo  $k \in \Delta$  (aleatoriamente no necesariamente de acuerdo a una estadística particular) el siguiente estado  $x_{k+1}$  está dado por la aplicación de  $f_{e_k}$ , ( $x_{k+1} = f_{e_k}(x_k)$ ). Note que puesto que  $E_v \subset \mathcal{E}^\Delta$ , si el sistema está en el estado  $x \in \mathcal{X}$  y los eventos  $g(x)$  están habilitados, entonces eventualmente uno de los eventos puede ocurrir. Los eventos solo pueden ocurrir si ellos se encuentran sobre trayectorias de eventos válidas.

Una trayectoria de estado es una secuencia  $\{x_k\} \in \mathcal{X}^\Delta$  tal que para toda  $k$ ,  $x_{k+1} = f_{e_k}(x_k)$  donde  $e_k \in g(x_k)$ . El conjunto de todas las trayectorias de eventos es denotada con  $E$  ( $E \subset \mathcal{E}^\Delta$ ) y esta compuesta por aquellas secuencias  $\{e_k\} \in \mathcal{E}^\Delta$  tal que allí existe una trayectoria de estado donde para toda  $k$ ,  $e_k \in g(x_k)$ .  $E_v$  define la trayectoria de eventos válidos, tal que  $E_v \subset \mathcal{E}^\Delta$ , y representan las trayectorias de  $G$  que son físicamente posibles. La utilización de  $E_v$  puede facilitar el modelado de muchos SED y provee flexibilidad en el estudio de propiedades de estabilidad así como también hace el modelo de  $G$  mucho más flexible que una máquina de estados estándar en el sentido que efectivamente combina los llamados "modelos basados en estados" con los "modelos ruta" de los SED.

Sea  $E_v(x_0) \in E_v$  denotando el conjunto de todas las posibles trayectorias de eventos válidas que inician desde el estado  $x_0 \in \mathcal{X}$ . Se utiliza además un conjunto de trayectorias de eventos autorizados denotada por  $E_a$ , donde  $E_a \subset E_v$ , y autorizan trayectorias de eventos que inician en el estado  $x_0 \in \mathcal{X}$  denotado por  $E_a(x_0)$ .

Sea  $E_k$ ,  $k \in \Delta$  denotando una secuencia de eventos de  $k$  que pueden ocurrir. Si  $E_k = e_0, e_1, \dots, e_{k-1}$  y  $E = e_k, e_{k+1}, \dots$ , entonces  $E_k E \in E_v(x_0)$  denota la concatenación de  $E_k$  y la secuencia infinita  $E$  o sea  $E_k E = e_0, e_1, \dots, e_{k-1}, e_k, e_{k+1}, \dots$ . El valor de la función  $X(x_0, E_k, k)$  se usa para denotar el estado alcanzado al tiempo  $k$  desde el estado  $x_0 \in \mathcal{X}$  por la aplicación la secuencia de eventos  $E_k$  tal que  $E_k E \in E_v(x_0)$ . (Por definición  $X(x_0, \emptyset, k) = x_0$  para toda  $x_0 \in \mathcal{X}$ .)

Si  $E_k E \in E_v(x_0)$  y  $E_{k'} E' \in E_v(X(x_0, E_k, k))$  entonces  $E_k E_k' E' \in E_v(x_0)$ ; consecuentemente, para toda  $x_0 \in \mathcal{X}$ ,

$$X(X(x_0, E_k, k), E_{k'}, k') = X(x_0, E_k E_{k'}, k + k') \quad (\text{A.5})$$

para toda  $k, k' \in \Delta$ .

A continuación se dan las condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad del conjunto invariante de un DES en un espacio métrico.

**Definición 26** Sea  $\rho : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow R^+$ ;  $\{\mathcal{X}, \rho\}$  es un espacio métrico si

$$\rho(x, y) = \rho(y, x)$$

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

Sea  $\mathcal{X}_z \subset \mathcal{X}$  y  $\rho(x, \mathcal{X}_z) = \inf \{\rho(x, x') : x' \in \mathcal{X}_z\}$  el cual denota la distancia de  $x$  al conjunto  $x' \in \mathcal{X}_z$ .

**Definición 27** Se define la  $r$ -vecindad de un conjunto  $\mathcal{X}_z \subset \mathcal{X}$  denotado por el conjunto  $S(\mathcal{X}_z; r) = \{x \in \mathcal{X} : 0 < \rho(x, \mathcal{X}_z) < r\}$  donde  $r > 0$ .

**Definición 28** El conjunto  $\mathcal{X}_m \subset \mathcal{X}$  se dice invariante con respecto a (c.r.a)  $G$  si de  $x_0 \in \mathcal{X}_m$  se sigue que  $X(x_0, E_k, k) \in \mathcal{X}_m$  para toda  $E_k$  tal que  $E_k E \in E_v(x_0)$  y  $k \in \Delta$  donde  $E$  es una secuencia infinita de eventos.

**Definición 29** Un conjunto cerrado invariante  $\mathcal{X}_m \subset \mathcal{X}$  de  $G$  es llamado estable en el sentido de Lyapunov c.r.a  $E_a$  si para cualquier  $\varepsilon > 0$  es posible encontrar una cantidad  $\delta > 0$  tal que cuando  $\rho(x_0, \mathcal{X}_m) < \delta$  se tiene que  $\rho(X(x_0, E_k, k), \mathcal{X}_m) < \varepsilon$  para toda  $E_k$  tal que  $E_k E \in E_a(x_0)$  y  $k \in \Delta$  donde  $E$  es una secuencia de eventos infinita. Si además  $\rho(X(x_0, E_k, k), \mathcal{X}_m) \rightarrow 0$  para todo  $E_k$  tal que  $E_k E \in E_a(x_0)$  cuando  $k \rightarrow \infty$ , entonces el conjunto cerrado invariante  $\mathcal{X}_m$  de  $G$  es llamado asintóticamente estable c.r.a  $E_a$ , y el conjunto  $\mathcal{X}_a$  de todos los estados  $x_0 \in \mathcal{X}$  es llamada la región de estabilidad asintótica de  $\mathcal{X}_m$  c.r.a  $E_a$ .

Los siguientes teoremas proveen las condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad asintótica de Lyapunov del DES definido en A.2.

**Teorema 30 (passino) (Estabilidad en el sentido de Lyapunov):** Para que el conjunto invariante  $\mathcal{X}_m$  sea estable en el sentido de Lyapunov c.r.a  $E_a$  es suficiente que en una vecindad  $S(\mathcal{X}_m; r)$  exista una funcional  $V$  y  $\psi_1, \psi_2 \in K$  tal que:

(i)  $\psi_1(\rho(x, \mathcal{X}_m)) \leq V(x) \leq \psi_2(\rho(x, \mathcal{X}_m))$  y (ii)  $V(X(x_0, E_k, k))$  es una función no creciente para  $x_0 \in S(\mathcal{X}_m; r)$ , para toda  $E_k$ , tal que  $E_k E \in E_a(x_0)$  y  $k \geq 0$  (o sea,  $V$  es no creciente a lo largo de todas las posibles rutas del sistema).

**Prueba:** si fijamos  $\varepsilon > 0$ , tal que  $\varepsilon < r$ . tomamos  $\delta > 0$  tan pequeño que  $\psi_2(\delta) < \psi_1(\varepsilon)$ . si  $\rho(x_0, \mathcal{X}_m) \leq \delta$  entonces  $\psi_2(\rho(x_0, \mathcal{X}_m)) \leq \psi_2(\delta)$  así

$$V(x_0) \leq \psi_2(\delta) < \psi_1(\varepsilon).$$

Puesto que  $V(X(x_0, E_k, k))$  es una función no creciente  $V(X(x_0, E_k, k)) < \psi_1(\varepsilon)$  para toda  $E_k$ , tal que  $E_k E \in E_a(x_0)$  y  $k \geq 0$  Entonces, puesto que

$$\psi_1(\rho(X(x_0, E_k, k), \mathcal{X}_m)) \leq V(X(x_0, E_k, k))$$

nosotros conocemos que  $\psi_1(\rho(X(x_0, E_k, k), \mathcal{X}_m)) < \psi_1(\varepsilon)$  para toda  $E_k$  tal que  $E_k E \in E_a(x_0)$  y  $k \geq 0$  puesto que  $\psi_1 \in K$  es monótonamente creciente entonces es invertible y se sigue que  $\rho(X(x_0, E_k, k), \mathcal{X}_m) < \varepsilon$  para toda  $E_k$ , tal que  $E_k E \in E_a(x_0)$  y  $k \geq 0$ .

**Teorema 31 (Estabilidad) [9]** Para que un conjunto cerrado invariante  $\mathcal{X}_m \subset \mathcal{X}$  de  $G$  sea asintóticamente estable en el sentido de Lyapunov c.r.a  $E_a$ , es necesario y suficiente que en una vecindad suficientemente pequeña  $S(\mathcal{X}_m; r)$  del conjunto  $\mathcal{X}_m$  exista una funcional  $V$  con las siguientes propiedades.

- – 1) Para toda suficientemente pequeña  $c_1 > 0$ , es posible encontrar una  $c_2 > 0$  tal que  $V(x) > c_2$  para  $x \in S(\mathcal{X}_m; r)$  y  $\rho(x, \mathcal{X}_m) > c_1$ .
- 2) Para cualesquier  $c_4 > 0$  tan pequeña como se desee, es posible encontrar una  $c_3 > 0$  tan pequeña que cuando  $\rho(x, \mathcal{X}_m) < c_3$  para  $x \in S(\mathcal{X}_m; r)$  se tiene que  $V(x) \leq c_4$ .
- 3)  $V(X(x_0, E_k, k))$  es una función no creciente para  $k \in \Delta$ ,  $x_0 \in S(\mathcal{X}_m; r)$ , para toda  $k \in \Delta$ , tan larga como  $X(x_0, E_k, k) \in S(\mathcal{X}_m; r)$  para toda  $E_k$  tal que  $E_k E \in E_a(x_0)$ .

**Prueba (necesidad)** para que el conjunto cerrado invariante  $\mathcal{X}_m \subset \mathcal{X}$  sea estable en el sentido de Lyapunov c.r.a  $E_a$  para alguna  $r$ -vecindad de  $\mathcal{X}_m$ . se muestran las condiciones que satisfacen el teorema.

Se elige un  $\varepsilon > 0$  al cual le corresponde un  $\delta > 0$  tal que cuando  $\rho(x_0, \mathcal{X}_m) < \delta$  se tiene que  $\rho(X(x_0, E_k, k), \mathcal{X}_m) < \varepsilon$  para toda  $E_k$  tal que  $E_k E \in E_a(x_0)$  y  $k \in \Delta$ . sea

$$V(x_0) = \sup \{ \rho(X(x_0, E_k, k), \mathcal{X}_m) : \forall E_k, E_k E \in E_a(x_0) \text{ y } k \in \Delta \} \quad (\text{A.6})$$

Esta define la funcional  $V(x_0)$  para  $x_0 \in S(\mathcal{X}_m; \delta)$ .

a) La funcional  $V(x_0)$  satisface 1) puesto que  $V(x_0) \geq \rho(x_0, \mathcal{X}_m)$ , se sigue que cuando  $\rho(x_0, \mathcal{X}_m) > c_1$ ,  $\rho(x_0, \mathcal{X}_m) < \delta$ , y  $c_1 = c_2$ , se obtiene que  $V(x_0) > c_2$ .

b) Para  $c_4 > 0$  podemos encontrar  $c_3 > 0$  tal que para  $\rho(x_0, \mathcal{X}_m) < c_3$  tenemos

$\rho(X(x_0, E_k, k), \mathcal{X}_m) < c_4$  para toda  $E_k$  tal que  $E_k E \in E_a(x_0)$  y  $k \in \Delta$ . de aquí que ,  
 $\sup \{ \rho(X(x_0, E_k, k), \mathcal{X}_m) : \forall E_k, E_k E \in E_a(x_0) \text{ y } k \in \Delta \} \leq c_4$  así  $V(x_0) \leq c_4$  para  $\rho(x_0, \mathcal{X}_m) < c_3$ ; así la condición 2) es satisfecha.

Para prueba de suficiencia y más detalles de la demostración ver [9]

**Teorema 32** Para que un conjunto cerrado invariante  $\mathcal{X}_m \subset \mathcal{X}$  de  $G$  sea asintóticamente estable en el sentido de Lyapunov c.r.a  $E_a$ , es necesario y suficiente que en una vecindad suficientemente pequeña  $S(\mathcal{X}_m; r)$  del conjunto  $\mathcal{X}_m$  exista una funcional  $V$  que tenga las propiedades 1), 2), 3) del teorema anterior y, además,  $V(X(x_0, E_k, k)) \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$  para toda  $E_k$  tal que  $E_k E \in E_a(x_0)$  y para toda  $k \in \Delta$  tan larga como  $X(x_0, E_k, k) \in S(\mathcal{X}_m; r)$ .

**Prueba (necesidad)** sea  $\mathcal{X}_m \subset \mathcal{X}$  asintóticamente estable c.r.a  $E_a$ . entonces  $\mathcal{X}_m$  es estable en el sentido de Lyapunov c.r.a  $E_a$  y, consecuentemente en una pequeña vecindad  $S(\mathcal{X}_m; r)$ , es posible construir una funcional  $V(x_0)$  (como en el teorema 1) la cual satisface 1), 2), 3) del teorema anterior. Por virtud de la estabilidad asintótica de  $\mathcal{X}_m$  c.r.a  $E_a$ , todos los movimientos  $X(x_0, E_k, k)$  con  $E_k$  tal que  $E_k E \in E_a(x_0)$  y  $x_0 \in S(\mathcal{X}_m; \delta)$ , permanecen en  $S(\mathcal{X}_m; \delta)$  para toda  $k \in \Delta$  para alguna  $\delta > 0$ . Sea  $X(x_0, E_k, k)$  uno de estos movimientos. Mostramos ahora que  $V(X(x_0, E_k, k)) \rightarrow 0$  para toda  $E_k$  tal que  $E_k E \in E_a(x_0)$  donde  $k \rightarrow \infty$ . para  $\varepsilon' > 0$  podemos

encontrar  $T > 0$  tal que  $\rho(X(x_0, E_k, k), \mathcal{X}_m) < \varepsilon'$  y para toda  $E_k$  tal que  $E_k E \in E_a(x_0)$  para  $k \geq T$ . La existencia de tal  $T$  se sigue de la estabilidad asintótica. De ahí es claro que

$$V(X(x_0, E_k, k)) = \sup \left\{ \begin{array}{l} \rho(X(x_0, E_k E_{k'}, k + k'), \mathcal{X}_m) : \\ \forall E_{k'}, E_{k'} E \in E_a(X(x_0, E_k, k)) \forall E_{k'} \in \Delta \end{array} \right\}.$$

y se sigue de  $\rho(X(x_0, E_{k+T}, k+T), \mathcal{X}_m) < \varepsilon'$  para  $k \in \Delta$  tal que  $V(X(x_0, E_k, k)) \leq \varepsilon'$  para  $k \geq T$ ; consecuentemente  $V(X(x_0, E_k, k)) \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow +\infty$ .

Para la prueba de suficiencia y más detalles ver [9].

## A.3 Controlabilidad

Controlabilidad es una propiedad importante de un sistema que va a ser controlado. Un sistema lineal controlable puede ser definido como un sistema el cual puede ser puesto en cualquier estado de un estado inicial cero. Por ejemplo, si el sistema lineal es un circuito consistente de capacitores, inductores y resistencias controladas por un voltaje externo, entonces la controlabilidad significa que por la variación en tiempo del voltaje externo, nosotros podemos alcanzar en algún punto en el tiempo cualquier combinación de voltajes sobre los capacitores y corrientes en los inductores. La propiedad de controlabilidad juega un papel muy importante en la mayoría de los problemas de control, tales como estabilización de un sistema inestable por retroalimentación o por control óptimo.

Sistemas en tiempo continuo

Considere el sistema lineal invariante en tiempo. Entonces sí

$$x(0) = 0$$

tenemos que

$$x(t) = \int_0^t e^{a(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \quad (\text{A.7})$$

Controlabilidad significa que cualquier vector en  $\mathbb{R}^n$  es alcanzable desde cero utilizando la ley de control  $u$ , i.e., para cualquier vector de estado  $x(t)$ ,  $u(t)$  es una ley de control, tal que A.7 se cumple.

**Definición 33** *Un sistema lineal invariante en tiempo*

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (\text{A.8})$$

es controlable en  $[0, T]$  si, dado cualquier vector  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ , existe una ley de control  $u(\cdot)$ , definida e integrable en  $[0, T]$  tal que

$$\bar{x} = \int_0^T e^{A(T-\tau)} B u(\tau) d\tau.$$

**Nota:** Originalmente la controlabilidad fue definida como una propiedad requiriendo que para cualquier estado inicial  $x_0$ , exista una ley de control  $u(\cdot)$ , definida e integrable en  $[0, T]$  tal que

$$x(T) = e^{AT} \bar{x}_0 + \int_0^T e^{A(T-\tau)} b u(\tau) d\tau = 0$$

Las definiciones de arriba son equivalentes porque por definición  $\bar{x} = -e^{AT} x_0$  por tanto tenemos

$$\int_0^T e^{A(T-\tau)} b u(\tau) d\tau = \bar{x} \quad (\text{A.9})$$

La matriz  $e^{AT}$  es invertible para cualquier  $A$  y cualquier  $T$ . De donde, dada cualquier  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  hay una  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\bar{x} = -e^{AT} x_0$  (y viceversa). esto muestra la equivalencia de las dos definiciones.

El lado izquierdo de la ecuación A.9 puede ser interpretada como un operador lineal del espacio de las funciones de control del espacio de estado  $\mathbb{R}^n$ . Es conveniente tomar el espacio de las funciones de control como  $U$ , donde

$$U = L^2(0, T, \mathbb{R}^m)$$

que es, el espacio del vector de funciones integrable cuadrático  $u$ , con valores en  $\mathbb{R}^m$  i.e., para cualquier  $t$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ). sea

$$A(u) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T e^{A(T-\tau)} B u(\tau) d\tau.$$

$A$  es un operador lineal del espacio de estado  $U$  dentro del espacio de estado  $\mathbb{R}^n$ . Matemáticamente, la pregunta de controlabilidad es si el rango  $R(A)$  cubre todo  $\mathbb{R}^n$ , i.e.,

$$R(A) \stackrel{?}{=} \mathbb{R}^n$$

Físicamente, controlabilidad significa que dado cualquier estado deseado del sistema, existe un control el cual puede conducir el sistema del equilibrio  $x = 0$  al estado deseado. Por ejemplo, en un simple sistema consistente de una masa y una fuerza como control, controlabilidad significa que cualquier combinación de posición y velocidad de la masa es alcanzable desde la posición cero del estado velocidad.

**Teorema 34 (11)** Una condición necesaria y suficiente para la controlabilidad del sistema A.8 sobre el intervalo  $[0, T]$ , para cualquier  $T > 0$ , es

$$\text{rank} [B \ AB \ \dots \ A^{n-1} B] = n.$$

*Prueba:* Controlabilidad es caracterizada por la siguiente condición, para  $\eta \in \mathbb{R}^n$

$$\eta^T \int_0^T e^{A(T-\tau)} B u(\tau) d\tau = 0 \quad \forall u(\cdot) \in L^1(0, T) \quad (\text{A.10})$$

el cual implica que  $\eta = 0$ . Esto es porque controlabilidad significa que el conjunto de todos los vectores alcanzables  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  correspondiente a todas las posibles elecciones de control  $u$  es el espacio completo  $\mathbb{R}^n$ . El único vector ortogonal al espacio completo es el vector cero.

Ahora A.10 es equivalente a

$$\eta^T e^{A(T-\tau)} B = 0 \quad \forall \tau \in [0, T] \quad (\text{A.11a})$$

por otro lado, eligiendo  $u(\tau) = B^T e^{A^T(T-\tau)} \eta \neq 0$ , nosotros podemos obtener

$$\begin{aligned} \int_0^T \eta e^{A(T-\tau)} B u(\tau) d\tau &= \int_0^T u^T(\tau) u(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^T \|u(\tau)\|^2 d\tau > 0 \end{aligned}$$

diferenciando A.11a con respecto a  $\tau$  en  $\tau = T$ , tenemos

$$(-1)^j \eta^T A^j B = 0 \quad j=0,1,2,\dots$$

por tanto

$$\eta^T [B \ AB \ \dots \ A^{n-1} B] = 0 \quad (\text{A.12})$$

y viceversa, de A.12 y el teorema de Caley-Hamilton

$$\eta^T A^j B = 0 \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.13})$$

Esta es obvia para  $j \leq n - 1$ . para  $j > n - 1$ , por recursividad usando el resultado de identidad del teorema de Caley-Hamilton

$$A^n = -a_1 I + A^{n-1} - \dots - a_n I$$

tenemos

$$A^{n+\ell} B = -c_{1,\ell} A^{n-1} B - \dots - c_{n,\ell} B \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

donde  $c_{i,j}$  son algunos coeficientes los cuales dependen de  $a_1, \dots, a_n$ . esto prueba A.13. Ahora

$$\eta^T e^{At} b = \eta^T \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} B = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^T A^k B \frac{t^k}{k!} = 0 \quad (\text{A.14})$$

por lo tanto A.11a y A.13 se cumplen. porque A.10 y A.12 son equivalentes, la declaración A.10  $\Rightarrow \eta = 0$ . Esto concluye con la prueba.

### A.3.1 Gramiano de controlabilidad

**Definición 35** La siguiente matriz

$$Q = \int_0^T e^{A(T-\tau)} B B^T e^{A^T(T-\tau)} d\tau$$

puede ser llamada el Gramiano de controlabilidad para el sistema.

**Proposición 36** *El sistema A.8 es controlable sobre  $[0, T]$  si y solo si  $\text{rank}Q = n$ .*

**Prueba:**  $Q$  es una matriz de  $n \times n$  real simétrica. Considere la forma cuadrática

$$\begin{aligned}\eta^T Q \eta &= \int_0^T \eta^T e^{A(T-\tau)} B B^T e^{A^T(T-\tau)} \eta d\tau \\ &= \int_0^T \|u(\tau)\|^2 d\tau \geq 0\end{aligned}$$

donde

$$u(\tau) = B^T e^{A^T(T-\tau)} \eta.$$

Tenemos

$$\eta^T Q \eta = 0 \Leftrightarrow u(\tau) = 0 \text{ para } \tau \in [0, T].$$

La función  $u$  es la misma que aparece en la prueba del teorema anterior. De aquí que, por la ecuación A.11a de la prueba de arriba, la declaración

$$\eta^T Q \eta = 0 \Rightarrow \eta = 0$$

se cumple si y solo si el sistema es controlable. Tenemos por lo tanto que, siempre que se cumpla controlabilidad entonces

$$\eta^T A \eta \geq 0 \quad \forall \eta$$

y

$$\eta^T Q \eta = 0 \Leftrightarrow \eta = 0$$

Tal que  $Q$  es una matriz simétrica definida positiva. Entonces todos los valores propios son reales positivos, mientras que  $Q$  es invertible y su rango es  $n$ . Reemplazando  $T$  por la variable  $t$ , y considerando

$$Q(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B B^T e^{A^T(t-\tau)} d\tau$$

El lado derecho es diferenciable con respecto a  $t$ , produciendo, por la formula de Leibniz

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} Q(t) &= B B^T + \int_0^t \left[ \frac{d}{dt} e^{A(t-\tau)} \right] B B^T e^{A^T(t-\tau)} d\tau + \\ &\quad \int_0^t e^{A(t-\tau)} B B^T \left[ \frac{d}{dt} e^{A^T(t-\tau)} \right] d\tau\end{aligned}$$

ó

$$\begin{aligned}\dot{Q}(t) &= B B^T + A Q(t) + Q(t) A^T \\ Q(0) &= 0\end{aligned} \tag{A.15}$$

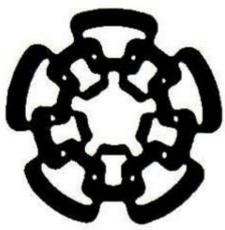
La ecuación diferencial matricial de anterior puede ser utilizada para calcular  $Q(t)$  por uno de los métodos numéricos para ecuaciones diferenciales. En algunos casos simples  $Q(t)$  puede ser calculada numéricamente.

## A.4 Bibliografía

- [1] Arjun Kapur, *Interval and point-based approaches to hybrid system verification*. PhD Thesis, Escuela, Dirección, August, 1997.
- [2] Jonathan S. Ostrof, *Temporal Logic for Real-Time System* Research Studies Press LTD. Taunton, Somerset, England, Año
- [3] Kazuo Tanaka and Michio Sugeno, *Stability Analysis and Design of Fuzzy Control Systems*, Elsevier  
Science Publishers B. Volumen, Mes, 1992
- [4] Kevin X. He, Michael D. Lemmon, *Timed Petri Nets in Hybrid Systems: Stability and Supervisory Control*, Discrete Event Dynamic System: Theory and Applications, 8, 137-173, 1998.
- [5] Michael S. Branicky, *Stability of Switched and Hybrid System*, Nombre de la revista (o congreso) November 1993, país.
- [6] Joost Engelfriet, *Branching processes of Petri nets*, Acta informatica 28, 575-591, 1991.
- [7] Robert N. Shorten and Kumpati S. Narendra, *On the Existence of a common Lyapunov Function for Linear Stable Switching Systems*, Proceedings of the Tenth Yale workshop on Adaptive and Learning Systems, 130-139, 1998.
- [8] Manuel Silva, *Las redes de Petri*, Editorial AC Madrid España, 1985.
- [9] Passino K. M and Kevin L. B. *Stability Analysis of Discrete Event Systems*, Wiley-Interscience Ed., USA, 1998
- [10] Katsuhiko Ogata, *Sistemas de Control en Tiempo Discreto*, Editorial Prentice Hall, 1996, México.
- [11] Hongxing Xia, lecture note on TOPICO, Volumen, 1995, país.
- [12] W.M. Wonham, *Notes on Control of Discrete-Event Systems*, Universidad, departamento, 1996
- [13] Haro, M., Bernardo, *TITULO DE LA TESIS*, Tesis de maestría, CINVESTAV, Gdl, Dirección, mes año.

# 1 Bibliografía

- [1] Arjun Kapur, *Interval and point-based approaches to hybrid system verification*. PhD Thesis, Department of Computer Science, Stanford University. August 1997.
- [2] Jonathan S. Ostrof, *Temporal Logic for Real-Time System*, Research Studies Press LTD. Tauton, Somerset, England, 1996
- [3] Kazuo Tanaka and Michio Sugeno, *Stability Analysis and Design of Fuzzy Control Systems*, Fuzzy sets and systems, Vol 45, No. 2, pp 135-156, 1992
- [4] Kevin X. He, Michael D. Lemmon, *Timed Petri Nets in Hybrid Systems: Stability and Supervisory Control*, Discrete Event Dynamic System: Theory and Applications, Vol 8, pp. 137-173, 1998.
- [5] Michael S. Branicky, *Stability of Switched and Hybrid System*, Proc. 33rd IEEE Conf. on Decision and Control, pp. 14-16, 1994. Lake Buena Vista FL.
- [6] Joost Engelfriet, *Branching processes of Petri nets*, Acta informatica Vol. 28, pp. 575-591, 1991.
- [7] Robert N. Shorten and Kumpati S. Narendra, *On the Existence of a common Lyapunov Function for Linear Stable Switching Systems*, Proceedings of the Tenth Yale workshop on Adaptive and Learning Systems, pp. 130-139, 1998.
- [8] Manuel Silva, *Las redes de Petri*, Editorial AC Madrid España, 1985.
- [9] Passino K. M and Kevin L. B. *Stability Analysis of Discrete Event Systems*, Wiley-Interscience Ed., USA, 1998
- [10] Katsuhiko Ogata, *Sistemas de Control en Tiempo Discreto 2a edición*, Editorial Prentice Hall, México, 1996.
- [11] Hongxing Xia, Lecture note on Controllability of Time-Dependent Systems, University of Leeds, UK, 1995.
- [12] W.M. Wonham, *Notes on Control of Discrete-Event Systems*, Dept. of Electrical and Computer Engineering, University of Toronto, Junio 1996, Canada.
- [13] Haro, B. y Begovich, O. *A set of controllers: A real time application for the pendubot*. Proceedings of International Symposium on Robotics and Automation, pp. 145-148, 1998, México.



**CENTRO DE INVESTIGACION Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL IPN  
UNIDAD GUADALAJARA**

El Jurado designado por el Departamento de Ingeniería Eléctrica del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, aprobó la tesis: “**Sistemas Híbridos: Aplicación al Pendubot**” del sr. **Efraín Hernández Sánchez**, el día **18 de Junio de 2001**.

**EL JURADO**

---

Dr. Arturo Román Messina  
Investigador Cinvestav 3 A  
CINVESTAV DEL IPN  
Guadalajara

---

Dr. Alexander Loukianov  
Investigador Cinvestav 3A  
CINVESTAV DEL IPN  
Guadalajara

---

Dr. José Javier Ruíz León  
Investigador Cinvestav 2 A  
CINVESTAV DEL IPN  
Guadalajara



CINVESTAV  
BIBLIOTECA CENTRAL



SSIT000003906