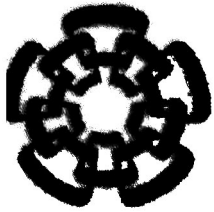




xx (110524.1)





**Centro de Investigación y de Estudios Avanzados  
del Instituto Politécnico Nacional**

---

**U n i d a d      G u a d a l a j a r a**

**“Control no lineal con modos deslizantes  
para el motor de inducción con  
saturación magnética”**

Tesis que presenta  
**Alberto Coronado Mendoza**

Para obtener el grado de  
**Maestro en Ciencias**

En la especialidad de  
**Ingeniería Eléctrica**

**CINVESTAV  
IPN  
ADQUISICION  
DE LIBROS**

**CINVESTAV I. P. N.  
SECCION DE INFORMACION  
Y DOCUMENTACION**

Guadalajara, Jalisco. Mayo del 2003

CLASIF.: TK16568 CG7 2003  
ADQUIS.: SSI-265  
FECHA: 20-X-2003  
PROCED.: Don. - 2003  
\$ \_\_\_\_\_

# **Control no lineal con modos deslizantes para el motor de inducción con saturación magnética**

## **Tesis de Maestría en Ciencias Ingeniería Eléctrica**

Por:

**Alberto Coronado Mendoza**

Ingeniero Eléctrico  
Instituto Tecnológico de Tepic  
1995-2000

Becario del CONACyT, expediente no. 158018

Director de Tesis  
*Aleksandr Georgievich Loukianov*  
**Dr. Alexander Georgievich Loukianov** ✓  
**Dr. José Manuel Cañedo Castañeda** ✓

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Mayo del 2003



# Resumen

En esta tesis se desarrolla un modelo matemático del motor de inducción con saturación magnética, que describe de manera más exacta la dinámica real del motor, comparado con los modelos que no toman en cuenta el efecto de saturación. Con base en las técnicas de control por bloques y modos deslizantes, se diseña un algoritmo de control compuesto que tiene dos objetivos: 1) regular el seguimiento de las señales de referencia, como son la velocidad y el módulo del flujo del rotor, y 2) limitar las corrientes de arranque del motor.

Adicionalmente se diseñan dos observadores no lineales que estiman variables reales de la máquina, lo que permite reducir costos al disminuir el número de sensores requeridos. El primero de éstos, es un observador por modos deslizantes que estima los flujos del rotor y de magnetización. El segundo es un observador de segundo orden que calcula el par de carga. Asimismo, se establece bajo qué condiciones los sistemas son estables.

Finalmente, se proponen dos algoritmos que aumentan la eficiencia del motor por reducción de pérdidas eléctricas. En el primer caso, se encuentra una expresión para el flujo de referencia dependiente de la carga y del módulo de corriente, que vectoriza a  $90^\circ$  los módulos del flujo del rotor y de corrientes del estator, optimizando el par electromecánico. En el segundo se hacen simulaciones en las cuales se varían las señales de referencia y la carga, obteniendo los valores mínimos de corrientes del estator. A partir de estos valores, se aproxima una función para la señal de referencia del módulo del flujo del rotor, que disminuye las pérdidas eléctricas del motor.

Los resultados en simulaciones muestran la efectividad del algoritmo de control y del observador al tener buen seguimiento de trayectorias, limitar las corrientes de arranque del motor, ser robusto ante perturbaciones y variaciones paramétricas, además de reducir pérdidas eléctricas del motor.

# Agradecimientos

a Dios por acompañarme siempre en mi camino ...

a mi esposa Adela por su amor y su apoyo invaluable ...

a mi futura hija que ha sabido y me ha enseñado esperar ...

a mis padres y hermanos por desear siempre lo mejor para mi ...

a mis asesores, Dr. Alexander Loukianov y Dr. José Manuel Cañedo, por compartir sus conocimientos y dirigir esta tesis ...

a mis sinodales por evaluar mi trabajo y hacer críticas constructivas que forman ...

a mis amigos por compartir este tiempo y enseñarme a disfrutar de los estudios ...

a Gauss y Chiquis por tenerme paciencia en mis ausencias ...

al CINVESTAV, docentes y administrativos por recibirme ...

al CONACYT por su apoyo económico que hizo posible mi estancia de maestría ...

a ti que lees esta tesis ...

# Índice General

<b>Resumen</b>	<b>i</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>ii</b>
<b>Lista de figuras</b>	<b>v</b>
<b>Lista de tablas</b>	<b>vii</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Justificación del proyecto .....	1
1.2 Antecedentes .....	1
1.3 Organización del trabajo .....	2
<b>2 Modelado del motor de inducción con saturación magnética</b>	<b>3</b>
2.1 Introducción .....	3
2.2 Sistema magnético no lineal .....	3
2.3 Obtención del modelo del motor con saturación magnética .....	4
<b>3 Control por bloques y observador con modos deslizantes</b>	<b>9</b>
3.1 Introducción .....	9
3.2 Control por bloques para sistemas con dinámica cero .....	9
3.3 Control por bloques para sistemas con incertidumbre .....	19
3.4 Observadores para una clase de sistemas no lineales .....	26
3.4.1 Observadores con modos deslizantes .....	26
<b>4 Diseño de control para el motor de inducción</b>	<b>31</b>
4.1 Introducción .....	31
4.2 Control de la velocidad .....	31
4.2.1 Análisis de estabilidad de modos deslizantes .....	35
4.2.2 Limitador de corrientes de arranque del motor .....	36
4.3 Diseño del observador .....	36
4.3.1 Observador de flujos con modos deslizantes .....	37
4.3.2 Observador del par de carga $T_L$ .....	38



4.4	Algoritmos de cuasi optimización del desempeño del controlador .....	39
4.4.1	Algoritmo de control para el ángulo $\alpha$ .....	39
4.4.2	Un algoritmo heurístico para disminuir la magnitud de la corriente del estator ....	40
<b>5</b>	<b>Resultados del sistema de control</b> .....	<b>41</b>
5.1	Introducción .....	41
5.1.1	Parámetros de la máquina.....	41
5.2	Dinámica del motor.....	41
5.2.1	Dinámica del motor sin saturación .....	41
5.2.2	Dinámica del motor con saturación .....	43
5.3	Respuesta en lazo cerrado .....	44
5.3.1	Limitador de corrientes .....	46
5.3.2	Control para el ángulo $\alpha$ .....	47
5.3.3	Algoritmo para disminuir $I_s$ .....	49
5.4	Observador de estados y del par de carga .....	53
5.5	Respuesta en lazo cerrado con estados estimados .....	55
5.5.1	Robustez del controlador .....	58
<b>6</b>	<b>Conclusiones y trabajos futuros</b> .....	<b>61</b>
	<b>Bibliografía</b> .....	<b>63</b>
	<b>Apéndice</b> .....	<b>65</b>

# Lista de figuras

<i>Sistema magnético no lineal</i>	
2.1 Curva de magnetización. ....	4
<i>Dinámica del motor sin saturación</i>	
5.1 Módulos de flujo y de corriente sin saturación. ....	42
5.2 Dinámica de flujos y corrientes sin saturación. ....	42
5.3 Curva de magnetización sin saturación. ....	43
<i>Dinámica del motor con saturación</i>	
5.4 Módulos de flujo y de corriente con saturación. ....	43
5.5 Dinámica de flujos y corrientes con saturación. ....	44
5.6 Curva de magnetización con saturación. ....	44
<i>Respuesta en lazo cerrado</i>	
5.7 Seguimiento de señales de referencia. ....	45
5.8 Dinámica de flujos y corrientes. ....	45
5.9 Entradas de control. ....	46
<i>Limitador de corrientes</i>	
5.10 Corrientes del estator sin limitar. ....	47
5.11 Corrientes del estator limitadas. ....	47
<i>Control para el ángulo <math>\alpha</math></i>	
5.12 Flujo de referencia para el control del ángulo $\alpha$ ....	58
5.13 Dinámica del ángulo $\alpha$ . ....	59
5.14 Entradas de control. ....	59
<i>Algoritmo para disminuir <math>I_s</math></i>	
5.15 Señales de referencia variable 1. ....	50
5.16 Señales de referencia variable 2. ....	51
5.17 Obtención de la corriente mínima. ....	51
5.18 Seguimiento de las señales de referencia. ....	52
5.19 Dinámica de flujos y corrientes. ....	52
5.20 Entradas de control. ....	53
5.21 Comparación de flujos de referencia. ....	53

*Observador de estados y del par de carga*

5.22 Estimación de la velocidad del rotor y de la carga. ....	54
5.23 Estimación de flujos. ....	54
5.24 Entradas del observador. ....	55
5.25 Errores de estimación. ....	55

*Respuesta en lazo cerrado con estados estimados*

5.26 Seguimiento de señales de referencia. ....	56
5.27 Dinámica de flujos y corrientes. ....	56
5.28 Entradas del observador. ....	57
5.29 Entradas de control. ....	57
5.30 Errores de estimación. ....	58

*Robustez del controlador*

5.31 Variación de la resistencia del rotor. ....	58
5.32 Control robusto. ....	59
5.33 Dinámica de flujos y corrientes. ....	59
5.34 Entradas de control. ....	60



# Lista de tablas

<i>Algoritmo para disminuir <math>I_s</math></i>	
4.1	Señales de referencia variable ..... 40
4.2	Obtención del módulo de corriente mínimo ..... 40

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Justificación del proyecto

Los motores de inducción han ganado mucha aceptación en la industria debido a sus características de robustez, poco mantenimiento, amplia gama de potencias y de condiciones de operación. Además de tener un costo relativamente bajo y ser de menor dimensión para la misma potencia en comparación a los motores de corriente directa. Estas características han impulsado el interés en desarrollar mejores técnicas de control que permitan operar de una manera confiable y eficiente a esta herramienta, así como su implementación y aplicaciones de mayor precisión.

Hasta hace pocos años, los motores de inducción eran tradicionalmente modelados bajo la suposición de circuitos magnéticos lineales. Sin embargo, dada la construcción del motor, éste presenta saturación magnética, por lo que se hace necesario tomar en cuenta la saturación para lograr un controlador con un mejor desempeño de este dispositivo.

En muchas aplicaciones de par variable y de magnitudes grandes de par, es deseable operar con una trayectoria de flujo en saturación magnética, permitiendo a la máquina de inducción producir mayor par. Por ejemplo, en aplicaciones vehiculares, la máquina de inducción puede ser operada en condiciones normales del camino o puede ser necesario producir mayor par instantáneo para soportar pendientes extremas o permitir un rango mayor de aceleración o desaceleración.

Además es útil encontrar un modelo que describa de una manera más real el comportamiento del motor de inducción, por lo que se hace necesario incluir la saturación magnética en el modelo del motor.

Por lo anterior, los objetivos de este trabajo son:

- Desarrollar un modelo del motor de inducción que incluya saturación magnética.
- Proponer una estrategia de control por modos deslizantes, que garantice el seguimiento de trayectorias para sistemas con perturbaciones y variación de parámetros.
- Limitar las corrientes de arranque del estator.
- Desarrollar un observador que estime variables que, por razones técnicas o económicas, son difíciles de medir.
- Proponer algoritmos de optimización del desempeño del motor.

### 1.2 Antecedentes

Debido a la creciente demanda del motor de inducción en la industria, han sido diversas las estrategias de control empleadas para este dispositivo. En [1] se mencionan los diferentes tipos de control no lineal que han sido desarrollados en los últimos 27 años, entre los cuales están las técnicas geométricas diferenciales, métodos algebraicos diferenciales, control de estructura variable, “back-stepping” etc. En [2] se considera la técnica “back-stepping” que combina la transformación de campo orientado para alcanzar los objetivos de seguimiento, como son la velocidad del rotor y la amplitud del flujo del rotor. En [3] se diseña un control global

por retroalimentación de la salida, el cual es adaptable con respecto a la carga del motor y a la resistencia del rotor.

En estos trabajos no ha sido considerado el efecto de saturación magnética. Por ejemplo, en [4] se menciona que el esquema de control del par por flujo orientado del estator no depende de los parámetros magnéticos de la máquina, requiriendo sólo el conocimiento de los voltajes, corrientes y resistencia del estator.

No es sino hasta en los últimos 15 años, que se ha incluido el efecto de la saturación magnética en el modelo del motor, para estudiar cómo afecta dicha saturación en la dinámica de las variables del motor y proponer así, estrategias que optimicen su funcionamiento.

En [5], por ejemplo, se encuentran los parámetros eléctricos que pueden ser medidos experimentalmente desde el estator a diferentes niveles de saturación, cuyo objetivo es encontrar un modelo saturado de dos fases que use estos parámetros eléctricos evitando el cálculo por elementos finitos. En [6], se muestra cómo la selección del nivel del flujo magnético del rotor es alterado cuando se incluye saturación magnética con el fin de optimizar el valor pico del par/A en el control de campo orientado; mientras que en [7] la referencia para el módulo del flujo magnético del rotor es seleccionado para minimizar las pérdidas en el cobre de la máquina, o en [8] esta selección es para maximizar el par a una velocidad constante tomando en cuenta los límites de voltaje y de corriente.

Sin embargo, estas propuestas de modelado del motor que incluyen saturación magnética, así como de control, presentan algunas desventajas. Por ejemplo, en el caso de los modelos del motor, es necesario conocer la posición del rotor, además de que no son sencillos de descomponer, lo que origina mayor complejidad en el diseño del controlador. Mientras que los controladores carecen de seguimiento de trayectorias de referencias, robustez o algoritmos de optimización.

### 1.3 Organización del trabajo

En el primer capítulo se presenta la motivación para realizar esta tesis, los objetivos que persigue, así como algunos trabajos que han sido desarrollados en relación al motor de inducción.

En el capítulo 2, se describe el procedimiento para obtener un modelo que incluye saturación magnética, a partir de las ecuaciones básicas del motor en el marco de referencia estacionario. Este modelo será utilizado para desarrollar una estrategia de control que se describe en el capítulo 4.

En el capítulo 3, se presentan las bases teóricas para la técnica de control por bloques para sistemas con dinámica cero y perturbaciones, así como para la construcción de observadores con modos deslizantes. Con base en este capítulo, se diseña el controlador y el observador aplicado al motor de inducción.

En el capítulo 4, se desarrolla una estrategia de control para el seguimiento de trayectorias por modos deslizantes, la cual es aplicada al modelo del motor de inducción que incluye saturación magnética, obtenido en el capítulo 2. Además se desarrolla un limitador de corrientes de arranque del motor. Asimismo, se diseña un observador con entradas discontinuas que estima los flujos magnéticos del motor y otro que calcula el par de carga. Finalmente, se proponen dos algoritmos de optimización para disminuir pérdidas eléctricas del motor.

En el capítulo 5, se presentan los resultados de simulaciones, que muestran la dinámica del motor saturado, así como el desempeño del controlador y del observador.

En el capítulo 6, se presentan las conclusiones de esta tesis, así como los trabajos futuros.

Finalmente, en el apéndice se presenta el artículo "Sliding Mode Observer-Based Control of Induction Motor with Magnetizing Saturation Effect" presentado en el séptimo congreso internacional de Sistemas de Estructura Variable, realizado en Sarajevo, Bosnia-Herzegovina en Julio del 2002.



## Capítulo 2

# Modelado del motor de inducción con saturación magnética

### 2.1 Introducción

En este capítulo se obtendrá un modelo para el motor de inducción, en donde el flujo magnético entre rotor y estator es no lineal, fenómeno que se conoce como saturación magnética. Éste será descrito más adelante. Primero nos basaremos en los acoplamientos magnéticos de un transformador para después aplicar la misma metodología al motor de inducción [9].

La obtención del modelo se hará en el marco de referencia estacionario, es decir,  $\omega = 0$ , lo cual se conoce como el modelo  $\alpha - \beta$ . Esto facilita el análisis y desarrollo, así como la implementación del controlador, ya que el cambio de variables, nos permite eliminar la dependencia de las inductancias respecto a la posición del rotor. Además, estas nuevas variables son usadas en las matrices de transformación, que son empleadas para llevar las ecuaciones de la máquina de inducción de su representación trifásica  $abc$  a un marco de referencia arbitrario  $dq0$ .

En esta tesis nos enfocaremos a obtener el modelo  $\alpha - \beta$  que describa el comportamiento dinámico del motor de inducción a partir de las ecuaciones en el marco de referencia estacionario  $dq0$  ( $\omega = 0$ ), tomando en cuenta la saturación magnética. Esto es una aportación importante del trabajo desarrollado en esta tesis.

Empezamos con una revisión de los sistemas magnéticos.

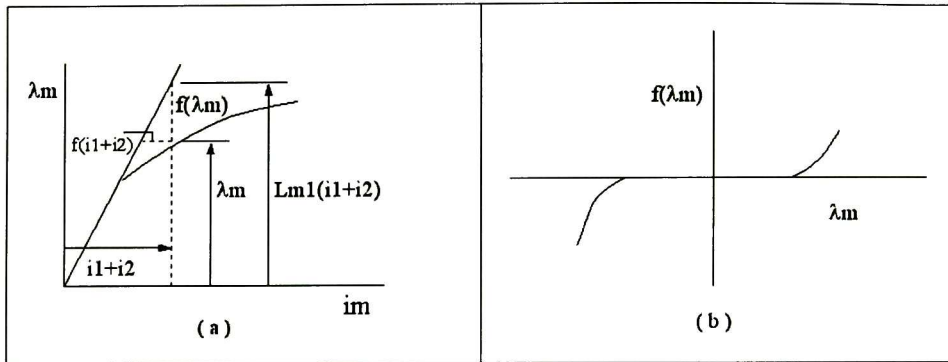
### 2.2 Sistema magnético no lineal

Aunque el análisis de transformadores y de máquinas eléctricas es generalmente desarrollado suponiendo un sistema magnético lineal, los aspectos económicos traen consigo que en el diseño real de estos dispositivos se presente saturación magnética y que el calentamiento de los materiales magnéticos existe debido a las pérdidas por histéresis.

Como en cualquier sistema magnético, la saturación producirá un modelo altamente no lineal. En los diseños reales de las máquinas de inducción los efectos de saturación magnética causarán una desviación notoria entre los modelos saturado y no saturado. Esta desviación será mayor en la región donde la operación óptima con respecto a valores de carga o par es más probable que ocurra. Así, para predecir apropiadamente las condiciones de operación, la saturación debe ser incluida en el modelo matemático.

Las características de magnetización de materiales de transformadores o máquinas son dadas en la forma de magnitud de la densidad del flujo contra la magnitud de la intensidad del campo (curva  $B - H$ ) como se muestra en la Figura 2.1. Si se supone que el flujo magnético es uniforme a través de la mayoría del núcleo, entonces  $B$  es proporcional a  $\Phi$  y  $H$  es proporcional a la fuerza magnetomotriz ( $fmm$ ). Por lo tanto una gráfica de flujo contra corriente es de la misma forma que la curva  $B - H$ . Un transformador es generalmente diseñado para que ocurra saturación magnética durante su operación normal. Las máquinas eléctricas son

diseñadas de manera similar y operan suavemente en la región de saturación durante condiciones normales de operación.



$$\lambda_m = L_{m1} (i_1 + i_2) - f(\lambda_m)$$

Figura 2.1: Curva de magnetización

En la Figura 2.1a se muestra la curva de magnetización, donde las variables  $i_m$  y  $\lambda_m$  son la corriente y el flujo de magnetización respectivamente. En la Figura 2.1b se muestra que el efecto de saturación puede ser incluido utilizando una función  $f(\lambda_m)$ , que se le resta a la componente lineal de la relación flujo-corriente. En nuestro caso, utilizaremos una función cúbica para aproximar la curva de saturación, como se verá más adelante.

Si las características de magnetización (curva de magnetización) de los devanados acoplados son conocidas, el efecto de saturación de la trayectoria del flujo mutuo puede ser fácilmente incorporada a una simulación por computadora. En el caso del transformador, la curva de magnetización puede ser determinada por una prueba, en donde uno de los devanados se pone en circuito abierto (devanado 2, por ejemplo) y la impedancia de entrada del otro devanado (devanado 1) es determinado de las mediciones cuando la magnitud del voltaje aplicado es incrementada de cero al 150% del valor nominal. Con la información obtenida de este tipo de prueba podemos graficar  $\lambda_m$  contra  $(i_1 + i_2)$  como se muestra en la Figura 2.1a, donde la pendiente de la parte lineal de la curva es  $L_{m1}$ , que es la inductancia de magnetización no saturada del devanado primario,  $\lambda_m$  es el flujo de magnetización, e  $i_1$  junto con  $i_2'$  son las corrientes de los circuitos primario y secundario respectivamente.

En esta Figura es claro que en la región de saturación  $\lambda_m = L_{m1}(i_1 + i_2') - f(\lambda_m)$ ,  $f(\lambda_m)$  puede ser determinada de la curva de magnetización para cada valor de  $\lambda_m$ . En particular  $f(\lambda_m)$  es una función de  $\lambda_m$  como se muestra en la Figura 2.1b.

Por lo que, los efectos de saturación de la trayectoria del flujo mutuo pueden ser tomados en cuenta introduciendo la relación de la nueva función  $f(\lambda_m)$ , que para efectos de incluir saturación magnética será no lineal. En caso de que la función  $f(\lambda_m) = 0$ , se obtiene el modelo ya conocido [9], con el flujo de magnetización lineal.

### 2.3 Obtención del modelo del motor con saturación magnética.

A continuación se desarrollan las ecuaciones de la máquina de inducción con saturación magnética a partir de las expresiones de voltaje en el marco de referencia arbitrario  $dq0$ .<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Para ver la descripción y desarrollo completo a fin de obtener las ecuaciones de voltaje de la máquina en el marco de referencia arbitrario  $dq0$  ver [9].

Las ecuaciones de voltaje de la máquina de inducción en el marco de referencia arbitrario son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 V_{qs} &= R_s i_{qs} + \omega \lambda_{ds} + \frac{d\lambda_{qs}}{dt} \\
 V_{ds} &= R_s i_{ds} - \omega \lambda_{qs} + \frac{d\lambda_{ds}}{dt} \\
 V_{0s} &= R_s i_{0s} + \frac{d\lambda_{0s}}{dt} \\
 V'_{qr} &= R'_r i'_{qr} + (\omega - \omega_r) \lambda'_{dr} + \frac{d\lambda'_{qr}}{dt} \\
 V'_{dr} &= R'_r i'_{dr} - (\omega - \omega_r) \lambda'_{qr} + \frac{d\lambda'_{dr}}{dt} \\
 V'_{0r} &= R'_r i'_{0r} + \frac{d\lambda'_{0r}}{dt},
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde  $V_{is}$  y  $V_{ir}$  son los voltajes del estator y del rotor respectivamente, para  $i = q, d, 0$ ;  $R_s$  y  $R'_r$  son la resistencia del devanado del estator y del rotor;  $i_{is}$  e  $i'_{ir}$  son las corrientes del estator y del rotor;  $\omega$  y  $\omega_r$  son la velocidad del marco de referencia y la velocidad eléctrica del rotor;  $\lambda_{is}$  y  $\lambda'_{ir}$  son los flujos magnéticos del estator y del rotor. Las cantidades del rotor son referidas al estator.

Las expresiones para los enlaces de flujo están dadas por

$$\begin{aligned}
 \lambda_{qs} &= L_{ls} i_{qs} + M(i_{qs} + i'_{qr}) \\
 \lambda_{ds} &= L_{ls} i_{ds} + M(i_{ds} + i'_{dr}) \\
 \lambda_{0s} &= L_{ls} i_{0s} \\
 \lambda'_{qr} &= L'_{lr} i'_{qr} + M(i_{qs} + i'_{qr}) \\
 \lambda'_{dr} &= L'_{lr} i'_{dr} + M(i_{ds} + i'_{dr}) \\
 \lambda'_{0r} &= L'_{lr} i'_{0r}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

donde  $L_{ls}$ ,  $L'_{lr}$  y  $M$  son la inductancia de dispersión del estator, del rotor y la inductancia de magnetización entre rotor y estator respectivamente.

En el transformador, el flujo de magnetización lineal está dado por  $\lambda_m = L_{m1}(i_1 + i_2)$ , con  $L_{m1}$  constante; mientras que en el motor de inducción esta expresión es equivalente a  $\lambda_{mi} = M(i_{is} + i'_{ir})$ , con  $i = d, q$  según sea el eje de referencia <sup>2</sup> De acuerdo a la Figura 2.1, para incluir la saturación tenemos que  $\lambda_m = L_{m1}(i_1 + i_2) - f(\lambda_m)$ , que en el motor de inducción es  $\lambda_{mi} = M(i_{is} + i'_{ir}) - f(\lambda_{mi})$ , donde la función  $f(\lambda_{mi})$  que utilizaremos para incluir saturación magnética será  $f(\lambda_{mi}) = c\lambda_{mi}^3$ . Esta función nos permitirá hacer un análisis de la dinámica del motor incluyendo saturación magnética, donde  $c$  es una constante que nos ayuda a aproximar la curva de saturación del motor. En caso de que  $c = 0$ , se tiene la curva de magnetización lineal.

Para obtener el modelo  $\alpha - \beta$ , hacemos  $\omega = 0$  que es el marco de referencia estacionario, sustituimos  $d$  por  $\alpha$  y  $q$  por  $\beta$ . Entonces las ecuaciones básicas para obtener nuestro modelo son

$$V_{\alpha s} = R_s i_{\alpha s} + \frac{d\lambda_{\alpha s}}{dt} \tag{2.3}$$

$$V_{\beta s} = R_s i_{\beta s} + \frac{d\lambda_{\beta s}}{dt} \tag{2.4}$$

$$V_{\alpha r} = R_r i_{\alpha r} + \omega_r \lambda_{\beta r} + \frac{d\lambda_{\alpha r}}{dt} \tag{2.5}$$

<sup>2</sup>La acción en el eje 0 puede despreciarse ya que es perpendicular a  $d$  y  $q$ .



$$V_{\beta r} = R_r i_{\beta r} - \omega_r \lambda_{\alpha r} + \frac{d\lambda_{\beta r}}{dt} \quad (2.6)$$

y

$$\lambda_{\alpha s} = L_{ls} i_{\alpha s} + \lambda_{m\alpha} \quad (2.7)$$

$$\lambda_{\beta s} = L_{ls} i_{\beta s} + \lambda_{m\beta} \quad (2.8)$$

$$\lambda_{\alpha r} = L_{lr} i_{\alpha r} + \lambda_{m\alpha} \quad (2.9)$$

$$\lambda_{\beta r} = L_{lr} i_{\beta r} + \lambda_{m\beta}. \quad (2.10)$$

Las variables de estado son  $\omega_r, \lambda_{\alpha r}, \lambda_{\beta r}, i_{\alpha s}, i_{\beta s}, \lambda_{m\alpha}, \lambda_{m\beta}$  donde estas dos últimas  $\lambda_{m\alpha}$  y  $\lambda_{m\beta}$  son dos nuevas variables que nos permiten incluir la saturación magnética. Primero desarrollaremos el procedimiento para encontrar  $\frac{d\lambda_{\alpha r}}{dt}$  y  $\frac{di_{\alpha s}}{dt}$ ; de manera similar se encuentra  $\frac{d\lambda_{\beta r}}{dt}$  y  $\frac{di_{\beta s}}{dt}$ .

De (2.5) despejamos  $\frac{d\lambda_{\alpha r}}{dt}$  para obtener <sup>3</sup>

$$\frac{d\lambda_{\alpha r}}{dt} = -\omega_r \lambda_{\beta r} - R_r i_{\alpha r}. \quad (2.11)$$

Ahora hay que encontrar una expresión para  $i_{\alpha r}$  en términos de las variables de estado. Esto lo hacemos despejando  $i_{\alpha r}$  de (2.9):

$$i_{\alpha r} = \frac{\lambda_{\alpha r} - \lambda_{m\alpha}}{L_{lr}}. \quad (2.12)$$

Sustituyendo (2.12) en (2.11) llegamos a la ecuación que describe la dinámica de  $\lambda_{\alpha r}$

$$\frac{d\lambda_{\alpha r}}{dt} = -\omega_r \lambda_{\beta r} - \frac{R_r}{L_{lr}} (\lambda_{\alpha r} - \lambda_{m\alpha}). \quad (2.13)$$

Siguiendo el mismo procedimiento encontramos la dinámica de  $\lambda_{\beta r}$  que está descrita por

$$\frac{d\lambda_{\beta r}}{dt} = \omega_r \lambda_{\alpha r} - \frac{R_r}{L_{lr}} (\lambda_{\beta r} - \lambda_{m\beta}). \quad (2.14)$$

Ahora obtendremos las dinámicas para  $i_{\alpha s}$  e  $i_{\beta s}$ . Derivando la ecuación (2.7) tenemos

$$\frac{d\lambda_{\alpha s}}{dt} = L_{ls} \frac{di_{\alpha s}}{dt} + \frac{d\lambda_{m\alpha}}{dt}. \quad (2.15)$$

Sustituimos (2.15) en (2.3) obteniendo

$$V_{\alpha s} = R_s i_{\alpha s} + L_{ls} \frac{di_{\alpha s}}{dt} + \frac{d\lambda_{m\alpha}}{dt}. \quad (2.16)$$

Despejamos  $\frac{di_{\alpha s}}{dt}$ :

$$\frac{di_{\alpha s}}{dt} = \frac{1}{L_{ls}} \left( V_{\alpha s} - R_s i_{\alpha s} - \frac{d\lambda_{m\alpha}}{dt} \right) \quad (2.17)$$

y de manera similar:

$$\frac{di_{\beta s}}{dt} = \frac{1}{L_{ls}} \left( V_{\beta s} - R_s i_{\beta s} - \frac{d\lambda_{m\beta}}{dt} \right) \quad (2.18)$$

---

<sup>3</sup>  $V_{\alpha r} = 0$  ya que el rotor está en corto circuito.

Ahora procedemos a encontrar las dinámicas para las nuevas variables  $\lambda_{m\alpha}$  y  $\lambda_{m\beta}$ . Como se vio anteriormente,  $\lambda_{m\alpha}$  está definida por

$$\lambda_{m\alpha} = M(i_{\alpha s} + i_{\alpha r}) - f(\lambda_{m\alpha}) \quad (2.19)$$

y  $f(\lambda_{m\alpha})$  por

$$f(\lambda_{m\alpha}) = c\lambda_{m\alpha}^3. \quad (2.20)$$

de tal forma que obtengamos una curva de saturación completa.<sup>4</sup>

Ahora derivamos la ecuación (2.19) para obtener

$$\frac{d\lambda_{m\alpha}}{dt} = M\left(\frac{di_{\alpha s}}{dt} + \frac{di_{\alpha r}}{dt}\right) - 3c\lambda_{m\alpha}^2 \frac{d\lambda_{m\alpha}}{dt}. \quad (2.21)$$

Factorizando  $\frac{d\lambda_{m\alpha}}{dt}$ , resulta

$$\frac{d\lambda_{m\alpha}}{dt} = \frac{M\left(\frac{di_{\alpha s}}{dt} + \frac{di_{\alpha r}}{dt}\right)}{1 + 3c\lambda_{m\alpha}^2}. \quad (2.22)$$

Derivamos (2.12) para obtener

$$\frac{di_{\alpha r}}{dt} = \frac{1}{L_{lr}} \left( \frac{d\lambda_{\alpha r}}{dt} - \frac{d\lambda_{m\alpha}}{dt} \right). \quad (2.23)$$

Sustituimos (2.17) y (2.23) en (2.22) y tenemos

$$\frac{d\lambda_{m\alpha}}{dt} = \frac{M\left(\frac{1}{L_{ls}}(V_{\alpha s} - R_s i_{\alpha s} - \frac{d\lambda_{m\alpha}}{dt}) + \frac{1}{L_{lr}}\left(\frac{d\lambda_{\alpha r}}{dt} - \frac{d\lambda_{m\alpha}}{dt}\right)\right)}{1 + 3c\lambda_{m\alpha}^2}. \quad (2.24)$$

Sustituimos (2.13) en (2.24)

$$\frac{d\lambda_{m\alpha}}{dt} = \frac{M\left(\frac{1}{L_{ls}}(V_{\alpha s} - R_s i_{\alpha s} - \frac{d\lambda_{m\alpha}}{dt}) + \frac{1}{L_{lr}}\left(-\omega_r \lambda_{\beta r} - \frac{R_r}{L_{lr}}(\lambda_{\alpha r} - \lambda_{m\alpha}) - \frac{d\lambda_{m\alpha}}{dt}\right)\right)}{1 + 3c\lambda_{m\alpha}^2} \quad (2.25)$$

y factorizamos  $\frac{d\lambda_{m\alpha}}{dt}$  para tener

$$\frac{d\lambda_{m\alpha}}{dt} = \frac{M\left(\frac{1}{L_{ls}}(V_{\alpha s} - R_s i_{\alpha s}) + \frac{1}{L_{lr}}\left(-\omega_r \lambda_{\beta r} - \frac{R_r}{L_{lr}}(\lambda_{\alpha r} - \lambda_{m\alpha})\right)\right)}{1 + \frac{M}{L_{ls}} + \frac{M}{L_{lr}} + 3c\lambda_{m\alpha}^2}. \quad (2.26)$$

Definamos  $d_1$  como

$$d_1 = 1 + \frac{M}{L_{ls}} + \frac{M}{L_{lr}} + 3c\lambda_{m\alpha}^2 \quad (2.27)$$

y reacomodando términos, llegamos a la dinámica de  $\lambda_{m\alpha}$

$$\frac{d\lambda_{m\alpha}}{dt} = \frac{M}{d_1 L_{ls}} V_{\alpha s} - \frac{M}{d_1 L_{lr}} \omega_r \lambda_{\beta r} - \frac{M R_r}{d_1 L_{lr}^2} \lambda_{\alpha r} + \frac{M R_r}{d_1 L_{lr}^2} \lambda_{m\alpha} - \frac{M R_s}{d_1 L_{ls}} i_{\alpha s}. \quad (2.28)$$

<sup>4</sup>Esta función cúbica nos ayuda en forma práctica a incluir saturación magnética.

Si quisiéramos obtener el modelo que contemplara parte lineal y de saturación, nos veríamos obligados a introducir más funciones, lo que originaría mayor complejidad en nuestro modelo y en las simulaciones.

De manera similar obtenemos la ecuación correspondiente a  $\lambda_{m\beta}$

$$\frac{d\lambda_{m\beta}}{dt} = \frac{M}{d_2 L_{ls}} V_{\beta s} + \frac{M}{d_2 L_{lr}} \omega_r \lambda_{\alpha r} - \frac{MRr}{d_2 L_{lr}^2} \lambda_{\beta r} + \frac{MRr}{d_2 L_{lr}^2} \lambda_{m\beta} - \frac{MR_s}{d_2 L_{ls}} i_{\beta s} \quad (2.29)$$

con  $d_2$  definida como

$$d_2 = 1 + \frac{M}{L_{ls}} + \frac{M}{L_{lr}} + 3c\lambda_{m\beta}^2. \quad (2.30)$$

Definimos finalmente el modelo del motor de inducción que incluye saturación magnética como sigue:

$$\frac{d\omega_r}{dt} = \frac{P}{2J} \left( \frac{3PM}{4L_r} (\lambda_{\alpha r} i_{\beta s} - \lambda_{\beta r} i_{\alpha s}) - T_L \right) \quad (2.31)$$

$$\frac{d\lambda_{\alpha r}}{dt} = -\omega_r \lambda_{\beta r} - \frac{R_r}{L_{lr}} (\lambda_{\alpha r} - \lambda_{m\alpha}) \quad (2.32)$$

$$\frac{d\lambda_{\beta r}}{dt} = \omega_r \lambda_{\alpha r} - \frac{R_r}{L_{lr}} (\lambda_{\beta r} - \lambda_{m\beta}) \quad (2.33)$$

$$\frac{di_{\alpha s}}{dt} = \frac{1}{L_{ls}} \left( V_{\alpha s} - R_s i_{\alpha s} - \frac{M}{d_1 L_{ls}} V_{\alpha s} + \frac{M}{d_1 L_{lr}} \omega_r \lambda_{\beta r} + \frac{MRr}{d_1 L_{lr}^2} \lambda_{\alpha r} - \frac{MRr}{d_1 L_{lr}^2} \lambda_{m\alpha} + \frac{MR_s}{d_1 L_{ls}} i_{\alpha s} \right) \quad (2.34)$$

$$\frac{di_{\beta s}}{dt} = \frac{1}{L_{ls}} \left( V_{\beta s} - R_s i_{\beta s} - \frac{M}{d_2 L_{ls}} V_{\beta s} - \frac{M}{d_2 L_{lr}} \omega_r \lambda_{\alpha r} + \frac{MRr}{d_2 L_{lr}^2} \lambda_{\beta r} - \frac{MRr}{d_2 L_{lr}^2} \lambda_{m\beta} + \frac{MR_s}{d_2 L_{ls}} i_{\beta s} \right) \quad (2.35)$$

$$\frac{d\lambda_{m\alpha}}{dt} = \frac{M}{d_1 L_{ls}} V_{\alpha s} - \frac{M}{d_1 L_{lr}} \omega_r \lambda_{\beta r} - \frac{MRr}{d_1 L_{lr}^2} \lambda_{\alpha r} + \frac{MRr}{d_1 L_{lr}^2} \lambda_{m\alpha} - \frac{MR_s}{d_1 L_{ls}} i_{\alpha s} \quad (2.36)$$

$$\frac{d\lambda_{m\beta}}{dt} = \frac{M}{d_2 L_{ls}} V_{\beta s} + \frac{M}{d_2 L_{lr}} \omega_r \lambda_{\alpha r} - \frac{MRr}{d_2 L_{lr}^2} \lambda_{\beta r} + \frac{MRr}{d_2 L_{lr}^2} \lambda_{m\beta} - \frac{MR_s}{d_2 L_{ls}} i_{\beta s} \quad (2.37)$$

donde

$V_{\alpha s}, V_{\beta s}$  = voltajes de estator en coordenadas  $(\alpha - \beta)$ .

$i_{\alpha s}, i_{\beta s}$  = corrientes de estator en coordenadas  $(\alpha - \beta)$ .

$\lambda_{\alpha r}, \lambda_{\beta r}$  = componentes de los flujos magnéticos del rotor en coordenadas  $(\alpha - \beta)$ .

$\lambda_{m\alpha}, \lambda_{m\beta}$  = componentes de los flujos de magnetización en coordenadas  $(\alpha - \beta)$ .

$L_{lr}, L_{ls}, M$  = inductancias de dispersión de rotor y estator e inductancia de magnetización.

$L_r$  = inductancia propia del rotor.

$R_r, R_s$  = resistencia de rotor y estator.

$P$  = número de polos.

$\omega_r$  = velocidad del rotor (eléctrica).

$J$  = constante de inercia del rotor.

$T_L$  = par de carga.

En el capítulo 5 se analizará la dinámica del motor de inducción con saturación magnética, mostrando las diferencias con el modelo que contempla un campo magnético lineal.



# Capítulo 3

## Control por bloques y observador con modos deslizantes

### 3.1 Introducción

En este capítulo se establecen las bases de la técnica de control por bloques [10] con modos deslizantes [11], [12] y [13]. En primera instancia se plantea la técnica para resolver el problema de control de sistemas no lineales con dinámica interna, y posteriormente la técnica para resolver el problema de seguimiento de la trayectoria de referencia para los sistemas no lineales con perturbaciones.

El problema se enfocará en la construcción de una variedad no lineal en el espacio de estado del sistema, tal que la dinámica de la ecuación de modos deslizantes en esta variedad tiene las propiedades deseadas. Se encuentran las condiciones bajo las cuales la solución del sistema en lazo cerrado asintóticamente tiende a cero (en primer caso) o es acotado (en segundo caso), y además el error de control asintóticamente tiende a cero.

En la segunda parte de este capítulo se considera el problema de diseño de observadores por modos deslizantes, para estimar los estados no medibles, y de observadores adaptables para estimar tanto variables no medibles del sistema, como parámetros que pueden cambiar su valor, tal es el caso del par de carga  $T_L$ .

### 3.2 Control por bloques para sistemas con dinámica cero

Consideremos el caso de un sistema no lineal de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \mathbf{u} \quad (3.1)$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbf{X} \subset \mathbf{R}^n$  es un vector del estado del sistema,  $\mathbf{u} \in \mathbf{U} \subset \mathbf{R}^m$  es un vector del control que está acotado por

$$|u_i| \leq u_0, \text{ con } u_0 > 0. \quad (3.2)$$

El campo vector  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  y las columnas de la matriz  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = [ \mathbf{b}_1(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{b}_2(\mathbf{x}, t) \quad \cdots \quad \mathbf{b}_m(\mathbf{x}, t) ]$  son funciones suficientemente suaves. Supongamos que  $\mathbf{f}(\mathbf{0}, t) = 0$ .

**Definición 3.1.** Sea el sistema

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, t) + \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_1, t) \mathbf{x}_2 \\
\dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) + \mathbf{B}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) \mathbf{x}_3 \\
&\vdots \\
\dot{\mathbf{x}}_i &= \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, t) + \mathbf{B}_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, t) \mathbf{x}_{i+1}, \quad i = 3, \dots, r-1 \\
&\vdots \\
\dot{\mathbf{x}}_r &= \mathbf{f}_r(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{r+1}, t) + \mathbf{B}_r(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{r+1}, t) \mathbf{u} \\
\dot{\mathbf{x}}_{r+1} &= \mathbf{f}_{r+1}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{r+1}, t) + \mathbf{B}_{r+1}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{r+1}, t) \mathbf{u}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

con la salida

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_1 \tag{3.4}$$

donde  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y} \subset \mathbf{R}^{n_1}$  es una función suave. Se dice que el sistema (3.3) está en la Forma No Lineal Controlable por Bloques con Dinámica Cero (FNCBDC)<sup>1</sup>, para el sistema (3.1) si la matriz  $\mathbf{B}_i$  que aparece antes del vector  $\mathbf{x}_{i+1}$ , el cual es un control ficticio, es de rango pleno; esto es

$$\text{rango}[\mathbf{B}_i] = n_i \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X} \subset \mathbf{R}^n \text{ y } t \in [0, \infty), \quad i = 1, \dots, r, \tag{3.5}$$

donde  $\mathbf{x}^T = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{r+1})$  y los índices  $(n_1, n_2, \dots, n_r)$  definen la estructura del sistema y satisfacen la siguiente condición

$$n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_r \leq m$$

con  $\sum_{i=1}^{r+1} n_i = n$ .

Aplicando el cambio de variables, podemos encontrar la ley de control por modos deslizantes para el sistema (3.1) presentado en la forma (3.3), que asegura estabilidad en el punto de equilibrio  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  del sistema en lazo cerrado, y lo podemos definir con la siguiente proposición [10].

**Proposición 3.1.** *Suponga que en el sistema (3.3)*

(1)  $f_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, t)$  y  $B_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, t)$  son funciones continuamente diferenciables de orden  $(i-1)$ , con  $i = 1, \dots, r$ , con respecto a todos sus argumentos sobre el intervalo  $t \in [0, \infty)$ , y todas las derivadas son acotadas;

(2) La condición (3.5) se cumple, y

(3) Se tiene la estructura

$$n_1 = n_2 = \dots = n_r = m.$$

Entonces existe una transformación difeomórfica

$$\mathbf{z} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, t), \quad \boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_r)^T \tag{3.6}$$

una superficie

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{s} \in \mathbf{R}^{n_r} \tag{3.7}$$

y una ley de control discontinua

$$\mathbf{u} = -\mathbf{u}_0 \text{sign}[\mathbf{M}(\mathbf{z}, t) \mathbf{s}] \tag{3.8}$$

<sup>1</sup>Notemos que el modelo del motor de inducción obtenido en el capítulo 2, se puede presentar en la forma controlable por bloques (3.3) después de un cambio de variables, como se verá en el capítulo 4.

que garantiza modos deslizantes sobre la superficie (3.7) en tiempo finito, tal que el movimiento de modos deslizantes con respecto a la nueva variable  $z$  está descrito por una ecuación de orden  $(n - n_r)$ :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}}_1 &= \mathbf{K}_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{B}_1 \mathbf{z}_2 \\ \dot{\mathbf{z}}_i &= \mathbf{K}_i \mathbf{z}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{z}_{i+1} \\ \dot{\mathbf{z}}_{r-1} &= \mathbf{K}_{r-1} \mathbf{z}_{r-1} \\ \dot{\mathbf{z}}_{r+1} &= \bar{\mathbf{f}}_{r+1}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{r-1}, \mathbf{z}_{r+1}, t) + \mathbf{B}_{r+1}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{r-1}, \mathbf{z}_{r+1}, t) \mathbf{u}_{eq}\end{aligned}\quad (3.9)$$

donde  $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_r, \mathbf{z}_{r+1})^T$ ,  $\mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $i = 1, \dots, r+1$  con  $\mathbf{s} = \mathbf{z}_r$  y todas las  $\mathbf{K}_i$  son matrices Hurwitz,  $\mathbf{M}(\mathbf{z}, t)$  es una matriz no singular tal que el rango  $[\mathbf{M}\mathbf{B}_r] \neq 0$ , y  $\mathbf{u}_{eq}$  es el control equivalente calculado como una solución de la ecuación  $\dot{\mathbf{z}}_r = 0$ .

**Prueba.** Con el propósito de demostrar esta proposición, debemos desarrollar un procedimiento iterativo para hacer el cambio de variables, con el cual obtendremos la superficie requerida y la ecuación de modos deslizantes deseada.

Suponga que las condiciones (1)–(3) se satisfacen. Bajo estas condiciones la transformación (3.6) y la superficie (3.7) pueden ser encontradas paso a paso considerando al estado  $\mathbf{x}_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, r-1$  como un control ficticio en cada *iésimo* bloque del sistema (3.3) bajo el siguiente procedimiento.

Definimos

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{x}_1 := \phi_1(\mathbf{x}_1, t)$$

y al calcular su derivada tenemos

$$\dot{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, t) + \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_1, t) \mathbf{x}_2 \quad (3.10)$$

Entonces se elige  $\mathbf{x}_2$  como el control ficticio del primer bloque del sistema (3.3) de la siguiente forma:

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{B}_1^{-1}(\mathbf{x}_1, t) [-\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, t) + \mathbf{K}_1 \mathbf{z}_1] + \mathbf{z}_2 \quad (3.11)$$

donde  $\mathbf{K}_1$  es una matriz Hurwitz,  $\mathbf{B}_1^{-1}(\mathbf{x}_1, t)$  es la matriz inversa de  $\mathbf{B}_1(\mathbf{x}_1, t)$  y existe bajo la condición (3). Con el control ficticio  $\mathbf{x}_2$  (3.11) podemos obtener la nueva dinámica deseada para el primer bloque del sistema (3.10) eligiendo los valores propios de la matriz  $\mathbf{K}_1$ .

Con la transformación de variables (3.11), el primer bloque queda descrito en las nuevas variables  $\mathbf{z}_1$  y  $\mathbf{z}_2$  como

$$\dot{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{K}_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{B}_1(\mathbf{z}_1) \mathbf{z}_2.$$

La variable  $\mathbf{z}_2$  se obtiene a partir de la ecuación (3.11) como

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_1^{-1}(\mathbf{x}_1, t) [\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, t) - \mathbf{K}_1 \mathbf{x}_1] := \phi_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t).$$

Ahora, derivando  $\mathbf{z}_2$  sobre las trayectorias del sistema (3.3) resulta

$$\dot{\mathbf{z}}_2 = \bar{\mathbf{f}}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) + \mathbf{B}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) \mathbf{x}_3, \quad (3.12)$$

donde

$$\bar{\mathbf{f}}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) = \frac{\partial \phi_2}{\partial \mathbf{x}_1} [\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, t) + \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_1, t) \mathbf{x}_2] + \frac{\partial \phi_2}{\partial \mathbf{x}_2} \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) + \frac{\partial \phi_2}{\partial t}$$

y  $\mathbf{x}_3$  actúa como el control ficticio en (3.12). Ahora  $\mathbf{x}_3$  se elige de la misma manera como en (3.11)

$$\mathbf{x}_3 = \mathbf{B}_2^{-1}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) [-\bar{\mathbf{f}}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) + \mathbf{K}_2 \mathbf{z}_2] + \mathbf{z}_3 \quad (3.13)$$

de tal forma que la nueva dinámica para  $\mathbf{z}_2$  queda

$$\dot{\mathbf{z}}_2 = \mathbf{K}_2 \mathbf{z}_2 + \mathbf{B}_2(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, t) \mathbf{z}_3$$

con  $\mathbf{K}_2$  como una matriz Hurwitz.

Despejando para  $\mathbf{z}_3$  de la ecuación (3.13) obtenemos

$$\mathbf{z}_3 = \mathbf{x}_3 + \mathbf{B}_2^{-1}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) [\bar{\mathbf{f}}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) - \mathbf{K}_2 \phi_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t)] := \phi_3(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, t). \quad (3.14)$$

Luego derivando la ecuación (3.14) resulta

$$\dot{\mathbf{z}}_3 = \bar{\mathbf{f}}_3(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, t) + \mathbf{B}_3(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, t) \mathbf{x}_4 \quad (3.15)$$

donde ahora  $\mathbf{x}_4$  es el control ficticio en (3.15) y podemos utilizar el mismo procedimiento que en (3.11) o (3.13).

Entonces continuamos el procedimiento hasta obtener

$$\dot{\mathbf{z}}_i = \bar{\mathbf{f}}_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, t) + \mathbf{B}_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, t) \mathbf{x}_{i+1}, \quad i = 4, \dots, r-1 \quad (3.16)$$

donde  $\mathbf{x}_{i+1}$  es el control ficticio para la ecuación (3.16) quedando de la forma

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{B}_i^{-1}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, t) [-\bar{\mathbf{f}}_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, t) + \mathbf{K}_i \mathbf{z}_i] + \mathbf{z}_{i+1}$$

donde  $\mathbf{B}_i^{-1}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, t)$  es la inversa de la matriz  $\mathbf{B}_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, t)$ , y  $\mathbf{K}_i$  es una matriz Hurwitz.

Entonces la ecuación (3.16) queda con la nueva dinámica como

$$\dot{\mathbf{z}}_i = \mathbf{K}_i \mathbf{z}_i + \mathbf{B}_i(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_i, t) \mathbf{z}_{i+1}.$$

Con este procedimiento, obtenemos la transformación no lineal de las variables de estado  $\phi^T = (\phi_1, \dots, \phi_r)$

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1 &= \mathbf{x}_1 = \phi_1(\mathbf{x}_1, t) \\ \mathbf{z}_2 &= \mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_1^{-1}(\mathbf{x}_1, t) [\bar{\mathbf{f}}_1(\mathbf{x}_1, t) - \mathbf{K}_1 \mathbf{x}_1] := \phi_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) \\ \mathbf{z}_3 &= \mathbf{x}_3 + \mathbf{B}_2^{-1}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) [\bar{\mathbf{f}}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) - \mathbf{K}_2 \phi_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t)] := \phi_3(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, t) \\ &\vdots \\ \mathbf{z}_{i+1} &= \mathbf{x}_{i+1} + \mathbf{B}_i^{-1}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, t) [\bar{\mathbf{f}}_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, t) - \mathbf{K}_i \phi_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, t)] := \phi_{i+1}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i+1}, t) \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde  $i = 3, \dots, r-1$ .

A partir de la transformación (3.17) se puede obtener la superficie de modos deslizantes (3.7) como

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}, t) := \mathbf{z}_r = \phi_r(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r, t). \quad (3.18)$$

Entonces la dinámica del sistema (3.3) en las nuevas coordenadas queda de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_1 &= \mathbf{K}_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{B}_1 \mathbf{z}_2 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 &= \mathbf{K}_2 \mathbf{z}_2 + \mathbf{B}_2 \mathbf{z}_3 \\ \dot{\mathbf{z}}_3 &= \mathbf{K}_3 \mathbf{z}_3 + \mathbf{B}_3 \mathbf{z}_4 \end{aligned} \quad (3.19)$$

$\vdots$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_{r-1} &= \mathbf{K}_{r-1} \mathbf{z}_{r-1} + \mathbf{B}_{r-1} \mathbf{s} \\ \dot{\mathbf{s}} &= \bar{\mathbf{f}}_r(\mathbf{z}, t) + \mathbf{B}_r(\mathbf{z}, t) \mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\dot{\mathbf{z}}_{r+1} = \bar{\mathbf{f}}_{r+1}(\mathbf{z}, t) + \mathbf{B}_{r+1}(\mathbf{z}, t) \mathbf{u} \quad (3.21)$$

donde  $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_r, \mathbf{z}_{r+1})^T$ ,  $\mathbf{z}_{r+1} = \mathbf{x}_{r+1}$ ,  $\bar{\mathbf{f}}_r(\mathbf{z}, t)$  de la condición (1) es una función continuamente diferenciable y todas sus derivadas son acotadas, y  $\bar{\mathbf{f}}_{r+1}(\mathbf{z}, t) = [\bar{\mathbf{f}}_{r+1}(\mathbf{x}, t)]_{\mathbf{x}=\phi^{-1}(\mathbf{z}, t)}$ .



Enseguida se elegirá el control como en (3.8) y se probará la estabilidad del movimiento del sistema en lazo cerrado sobre la superficie  $s(\mathbf{x}, t) = 0$  definido por (3.18). Entonces, elegimos una función definida positiva como

$$v_0 = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{s} \quad (3.22)$$

que será la función de Lyapunov candidata. Derivando esta función sobre las trayectorias del subsistema (3.20), resulta

$$\dot{v} = \mathbf{s}^T \bar{\mathbf{f}}_r(\mathbf{z}, t) + \mathbf{s}^T \mathbf{B}_r(\mathbf{z}, t) \mathbf{u}. \quad (3.23)$$

Recordando que  $\mathbf{B}_r(\mathbf{z}, t)$  es una matriz no singular y tomando en cuenta el acotamiento (3.2), se define  $\mathbf{M}(\mathbf{z}, t) = \mathbf{B}_r^T(\mathbf{z}, t)$  en (3.8) y se selecciona el control como una función discontinua de la forma (3.8) [11]:

$$\mathbf{u} = -u_0 \text{sign}(\bar{\mathbf{s}}), \quad u_0 > 0 \quad (3.24)$$

con

$$\bar{\mathbf{s}} = \mathbf{B}_r^T(\mathbf{z}, t) \mathbf{s} \quad \text{y} \quad \mathbf{s}^T = \bar{\mathbf{s}}^T \mathbf{B}_r^{-1}(\mathbf{z}, t) \quad (3.25)$$

donde  $\mathbf{M} = \mathbf{B}_r^T$ . Tomando en cuenta que

$$\bar{\mathbf{s}}^T \text{sign}(\bar{\mathbf{s}}) = |\bar{\mathbf{s}}|$$

y

$$\|\bar{\mathbf{s}}\|_1 \geq \|\bar{\mathbf{s}}\|_2$$

La ecuación (3.23) con (3.24) y (3.25) queda de la forma

$$\begin{aligned} \dot{v}_0 &= \bar{\mathbf{s}}^T \mathbf{B}_r^{-1} \bar{\mathbf{f}}_r - u_0 \bar{\mathbf{s}}^T \text{sign}(\bar{\mathbf{s}}) \\ &\leq \|\bar{\mathbf{s}}\|_2 \|\mathbf{B}_r^{-1} \bar{\mathbf{f}}_r\|_2 - u_0 \|\bar{\mathbf{s}}\|_1 \end{aligned}$$

De (3.25) tenemos que  $\|\bar{\mathbf{s}}\|_2 = \|\mathbf{B}_r^T \mathbf{s}\|_2$  y  $\|\mathbf{B}_r^T \mathbf{s}\|_2 \leq \|\mathbf{B}_r^T\|_2 \|\mathbf{s}\|_2$ , por lo tanto

$$\begin{aligned} \dot{v}_0 &\leq - (u_0 - \|\mathbf{B}_r^{-1} \bar{\mathbf{f}}_r\|_2) \|\bar{\mathbf{s}}\|_2 \\ &\leq - (u_0 - \|\mathbf{B}_r^{-1} \bar{\mathbf{f}}_r\|_2) \|\mathbf{B}_r^T\|_2 \|\mathbf{s}\|_2. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Bajo la condición (3.2) existe una constante positiva  $q_0$  tal que

$$\|\mathbf{B}_r^{-1}(\mathbf{z}, t) \bar{\mathbf{f}}_r(\mathbf{z}, t)\|_2 \leq q_0.$$

Entonces la derivada de la función de Lyapunov será definida negativa si

$$u_0 > q_0 \quad (3.27)$$

y el movimiento del sistema en lazo cerrado es estable sobre la variedad  $\bar{\mathbf{s}}=0$  y también sobre  $\mathbf{s} = 0$  debido a que la matriz  $\mathbf{B}_r$  es no singular. Entonces los modos deslizantes son forzados sobre el sistema.

Ahora probaremos que en un intervalo de tiempo finito  $t_s$  se obtiene el modo deslizante para las trayectorias del sistema. De la ecuación (3.22) tenemos que

$$\|\mathbf{s}\|_2 = \sqrt{2v_0}.$$

Sustituyendo el valor anterior en la ecuación (3.26) resulta

$$\dot{v}_0 \leq -\beta \sqrt{2v_0}, \quad \beta = (u_0 - q_0) l_0 \quad (3.28)$$

donde la constante positiva  $l_0$  es la cota de la norma de la matriz  $\mathbf{B}_r$ ,  $\|\mathbf{B}_r^T\|_2 \leq l_0$ . Esta constante existe bajo la condición (3.2). Ahora empleando el Principio de Comparación [14] para la desigualdad diferencial (3.28) existe una ecuación

$$\dot{\zeta} = -\beta\sqrt{2\zeta} \quad (3.29)$$

con

$$\mathbf{v}_0(t_0) \leq \zeta(t_0)$$

tal que

$$\mathbf{v}_0(t) \leq \zeta(t).$$

Entonces la solución  $\zeta(t)$  de (3.29) es

$$\zeta(t) = \left[ -\frac{\beta}{\sqrt{2}}(t - t_0) + \sqrt{\zeta(t_0)} \right] \quad (3.30)$$

De la ecuación (3.30) podemos encontrar el tiempo  $t_s$ :

$$t_s \leq t_0 + \frac{\sqrt{2}}{\beta} \sqrt{\mathbf{v}_0(t_0)} \quad (3.31)$$

que es el tiempo en que se alcanzan modos deslizantes. Para todo  $t > t_s$ ,  $\zeta(t)$  será igual a cero, por lo tanto  $\mathbf{v}_0(t)$  se desvanecerá en un tiempo finito, cuando  $\mathbf{s}$  sea igual a cero. Así se garantiza los modos deslizantes sobre la superficie  $\mathbf{s} = 0$ .

Después que se ha garantizado los modos deslizantes sobre el sistema transformado (3.19), quedan  $n - n_r$  ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_1 &= \mathbf{K}_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{B}_1 \mathbf{z}_2 \\ \dot{\mathbf{z}}_i &= \mathbf{K}_i \mathbf{z}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{z}_{i+1} \quad i = 2, \dots, r-2 \\ \dot{\mathbf{z}}_{r-1} &= \mathbf{K}_{r-1} \mathbf{z}_{r-1} \\ \dot{\mathbf{z}}_{r+1} &= \tilde{\mathbf{f}}_{r+1}(\mathbf{z}, t) + \mathbf{B}_{r+1}(\mathbf{z}, t) \mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.32)$$

las cuales representan la dinámica de modos deslizantes.

Mientras el movimiento del sistema sobre la superficie  $\mathbf{s} = 0$  sucede, el control  $\mathbf{u}$  es igual al control equivalente  $\mathbf{u}_{eq}$  [11] obtenido bajo la ecuación  $\dot{\mathbf{s}} = 0$  de la forma

$$\mathbf{u}_{eq}(\mathbf{z}, t) = -\mathbf{B}_r^{-1}(\mathbf{z}, t) \tilde{\mathbf{f}}_r(\mathbf{z}, t). \quad (3.33)$$

Sustituyendo (3.33) en el sistema (3.32), la dinámica de modos deslizantes sobre la variedad  $\mathbf{s} = 0$  será

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_1 &= \mathbf{K}_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{B}_1(\mathbf{z}_1, t) \mathbf{z}_2 \\ \dot{\mathbf{z}}_i &= \mathbf{K}_i \mathbf{z}_i + \mathbf{B}_i(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_i, t) \mathbf{z}_{i+1}, \quad i = 2, \dots, r-2 \\ \dot{\mathbf{z}}_{r-1} &= \mathbf{K}_{r-1} \mathbf{z}_{r-1} \\ \dot{\mathbf{z}}_{r+1} &= \tilde{\mathbf{f}}_{r+1}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{r-1}, 0, \mathbf{z}_{r+1}, t) \end{aligned} \quad (3.34)$$

donde

$$\tilde{\mathbf{f}}_{r+1}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{r-1}, 0, \mathbf{z}_{r+1}, t) = [\tilde{\mathbf{f}}_{r+1}(\mathbf{z}, t) - \mathbf{B}_{r+1}(\mathbf{z}, t) \mathbf{B}_r^{-1}(\mathbf{z}, t) \tilde{\mathbf{f}}_r(\mathbf{z}, t)]_{\mathbf{s}=\mathbf{z}_r=0}$$

que coincide con (3.9). Esto concluye la prueba. ■



Ahora vamos a investigar las condiciones bajo las cuales el punto de equilibrio del sistema (3.3) con el control (3.24) es asintóticamente estable.

Redefiniendo el estado como  $\xi^T = (\xi_1, \dots, \xi_{r-1})^T := (z_1, \dots, z_{r-1})$  y  $\eta = z_{r+1}$ , el sistema (3.34) se puede reformular como

$$\dot{\xi} = \mathbf{A}_1 \xi + \mathbf{g}(\xi, t) \quad (3.35)$$

$$\dot{\eta} = \mathbf{q}(\xi, \eta, t) \quad (3.36)$$

donde  $\mathbf{q}(\xi, \eta, t) = \bar{\mathbf{f}}_{r+1}(z_1, \dots, z_{r-1}, 0, z_{r+1}, t)$  y

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{K}_{r-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{K}_{r-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}(\xi, t) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1(\xi_1) \xi_2 \\ \mathbf{B}_2(\xi_1, \xi_2) \xi_3 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{r-2}(\xi_1, \dots, \xi_{r-2}) \xi_{r-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ahora definimos

$$D_1 = \{\xi \in \mathbf{R}^{n-n_r-n_{r+1}} \mid \|\xi\|_2 \leq r_1\} \quad y \quad D_2 = \{\eta \in \mathbf{R}^{n_{r+1}} \mid \|\eta\|_2 \leq r_2\}$$

para todo  $[0, \infty) \times D_1 \times D_2$ , con constantes positivas  $r_1$  y  $r_2$ .

El sistema (3.35) es autónomo en el sentido de que no depende de la variable  $\eta$ . Podemos considerar a este sistema como un sistema lineal con una perturbación no lineal que se desvanece en  $\mathbf{g}(0, t) = 0$ .

Ahora suponemos que la perturbación  $\mathbf{g}(\xi, t)$  satisface la siguiente hipótesis:

**H0.** Existe una constante positiva  $\gamma$  tal que

$$\|\mathbf{g}(\xi, t)\|_2 \leq \gamma \|\xi\|_2 \quad (3.37)$$

para todo  $t \geq 0$  y toda  $\xi \in \mathbf{R}^{n-n_r-n_{r+1}}$

Sabemos que  $\mathbf{A}_1$  es Hurwitz, entonces existe una solución única  $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_1^T > 0$  de la ecuación de Lyapunov

$$\mathbf{P}_1 \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 = -\mathbf{Q}_1$$

para  $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_1^T > 0$ . En este caso la forma cuadrática  $v_1 = \xi^T \mathbf{P}_1 \xi$  es la función de Lyapunov, con las siguientes propiedades

$$\alpha_{\min}(\mathbf{P}_1) \|\xi\|_2^2 \leq \xi^T \mathbf{P}_1 \xi \leq \alpha_{\max}(\mathbf{P}_1) \|\xi\|_2^2 \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial v_1(\xi, t)}{\partial \xi} \mathbf{A}_1 \xi = -\xi^T \mathbf{Q}_1 \xi \leq -\alpha_{\min}(\mathbf{Q}_1) \|\xi\|_2^2 \quad (3.39)$$

$$\left\| \frac{\partial v_1(\xi, t)}{\partial \xi} \right\|_2 = 2 \left\| \xi^T \mathbf{P}_1 \right\|_2 \leq 2\alpha_{\max}(\mathbf{P}_1) \|\xi\|_2. \quad (3.40)$$

Tomando la derivada de  $v_1$  sobre las trayectorias de (3.35) resulta

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &\leq -\alpha_{\min}(\mathbf{Q}_1) \|\xi\|_2^2 + 2\alpha_{\max}(\mathbf{P}_1) \gamma \|\xi\|_2^2 \\ &\leq -(\alpha_{\min}(\mathbf{Q}_1) - 2\alpha_{\max}(\mathbf{P}_1) \gamma) \|\xi\|_2^2 \leq -\delta \|\xi\|_2^2. \end{aligned} \quad (3.41)$$

De la desigualdad (3.41), tenemos

$$\alpha_{\min}(\mathbf{Q}_1) - 2\alpha_{\max}(\mathbf{P}_1)\gamma \geq \delta.$$

Por lo tanto resulta

$$\gamma \leq \frac{\alpha_{\min}(\mathbf{Q}_1) - \delta}{2\alpha_{\max}(\mathbf{P}_1)}$$

donde  $\delta > 0$ .

Ahora tenemos que

$$\dot{v}_1 \leq -\delta \|\xi\|_2^2. \quad (3.42)$$

De (3.38) podemos decir

$$\frac{v_1}{\alpha_{\max}(\mathbf{P}_1)} \leq \|\xi\|_2^2.$$

Sustituyendo la desigualdad anterior en (3.42) tenemos

$$\dot{v}_1 \leq -\frac{\delta}{\alpha_{\max}(\mathbf{P}_1)} v_1. \quad (3.43)$$

Resolviendo (3.43) resulta

$$v_1(t) \leq v_1(t_s) e^{-\frac{\delta}{\alpha_{\max}(\mathbf{P}_1)}(t-t_s)}$$

donde  $t_s$  es el tiempo inicial del movimiento de modos deslizantes.

Ahora utilizando de nuevo (3.38), tenemos que la solución del sistema (3.35) es

$$\begin{aligned} \|\xi(t)\|_2^2 &\leq \frac{1}{\alpha_{\min}(\mathbf{P}_1)} v_1(t) \\ &\leq \frac{1}{\alpha_{\min}(\mathbf{P}_1)} v_1(t_s) e^{-\frac{\delta}{\alpha_{\max}(\mathbf{P}_1)}(t-t_s)} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Sabemos que

$$v_1(t_s) \leq \alpha_{\max}(\mathbf{P}_1) \|\xi(t_s)\|_2^2$$

entonces, sustituyendo en (3.44) resulta

$$\|\xi(t)\|_2 \leq h_1 \|\xi(t_s)\|_2 e^{-h_2(t-t_s)} \quad (3.45)$$

donde  $h_1 = \sqrt{\frac{\alpha_{\max}(\mathbf{P}_1)}{\alpha_{\min}(\mathbf{P}_1)}}$  y  $h_2 = \frac{\delta}{2\alpha_{\max}(\mathbf{P}_1)}$ ;  $t_s$  es el tiempo de inicio de modos deslizantes.

Entonces tenemos

$$\|\xi(t)\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad t \rightarrow \infty$$

y la dinámica del sistema (3.35) y (3.36) dentro del subespacio invariante  $\{\xi = 0, \eta \in D_2 \in \mathbf{R}^{n_r+1}\}$  se representa por la ecuación:

$$\dot{\eta} = \mathbf{q}(0, \eta, t) \quad (3.46)$$

que está definida como la *dinámica cero*.

Ahora podemos establecer las siguientes hipótesis:

**H1.** La dinámica de (3.46) converge exponencialmente al punto de equilibrio  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$ .

**H2.** El mapeo  $\mathbf{q} : D_2 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}^{n_r+1}$  es continuo en tiempo  $t$  y localmente *Lipschitz* en  $\boldsymbol{\xi}$  y  $\boldsymbol{\eta}$  tal que

$$\|\mathbf{q}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, t) - \mathbf{q}(0, \boldsymbol{\eta}, t)\|_2 \leq L \|\boldsymbol{\xi}\|_2 \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in D_1, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in D_2, \quad \forall t \geq t_0$$

donde  $L$  es una constante de *Lipschitz*.

Entonces bajo la hipótesis **H1** y por el teorema inverso [14], existe una función de Lyapunov  $v_2(\boldsymbol{\eta}, t)$  que satisface

$$c_1 \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2 \leq v_2(\boldsymbol{\eta}, t) \leq c_2 \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2 \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial v_2(\boldsymbol{\eta}, t)}{\partial t} + \frac{\partial v_2(\boldsymbol{\eta}, t)}{\partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{q}(0, \boldsymbol{\eta}, t) \leq -c_3 \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2 \quad (3.48)$$

$$\left\| \frac{\partial v_2(\boldsymbol{\eta}, t)}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right\|_2 \leq c_4 \|\boldsymbol{\eta}\|_2 \quad (3.49)$$

en  $[0, \infty) \times D_1 \times D_2$ , con las constantes positivas  $c_1, c_2, c_3$  y  $c_4$ .

La proposición que a continuación mencionamos [14] establece la estabilidad de la dinámica de modos deslizantes descrita por el sistema (3.35) y (3.36).

**Proposición 3.2.** *Supóngase que se cumplen las hipótesis H1 y H2, y*

$$\|\boldsymbol{\xi}(t_s)\|_2 < \frac{r_2}{h_1} \sqrt{\frac{c_1}{c_2} \frac{c_3 \theta}{c_4 L}}, \quad 0 < \theta < 1 \quad (3.50)$$

$$\|\boldsymbol{\eta}(t_s)\|_2 < r_2 \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \quad (3.51)$$

entonces la solución  $(\|\boldsymbol{\xi}(t)\|, \|\boldsymbol{\eta}(t)\|)^T$  del sistema (3.35) y (3.36) converge exponencialmente a cero.

**Prueba.** La convergencia exponencial de  $\boldsymbol{\xi}(t)$  del subsistema autónomo (3.35) se estableció anteriormente por (3.45). Para mostrar la convergencia de la solución  $\boldsymbol{\eta}(t)$  del sistema (3.35)-(3.36), considerando  $\|\boldsymbol{\xi}(t)\|$  como entrada en (3.36), usamos la función de Lyapunov  $v_2(\boldsymbol{\eta}, t)$  con las propiedades (3.47)-(3.49). La derivada de  $v_2$  a lo largo de las trayectorias de (3.36) es:

$$\begin{aligned} \dot{v}_2 &= \frac{\partial v_2(\boldsymbol{\eta}, t)}{\partial t} + \frac{\partial v_2(\boldsymbol{\eta}, t)}{\partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{q}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, t) \\ &= \frac{\partial v_2(\boldsymbol{\eta}, t)}{\partial t} + \frac{\partial v_2(\boldsymbol{\eta}, t)}{\partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{q}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, t) + \frac{\partial v_2(\boldsymbol{\eta}, t)}{\partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{q}(0, \boldsymbol{\eta}, t) - \frac{\partial v_2(\boldsymbol{\eta}, t)}{\partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{q}(0, \boldsymbol{\eta}, t). \end{aligned}$$

Usando la condición (3.48) tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{v}_2 &\leq -c_3 \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2 + \frac{\partial v_2(\boldsymbol{\eta}, t)}{\partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{q}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, t) - \frac{\partial v_2(\boldsymbol{\eta}, t)}{\partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{q}(0, \boldsymbol{\eta}, t) \\ &\leq -c_3 \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2 + \left\| \frac{\partial v_2(\boldsymbol{\eta}, t)}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right\|_2 \|\mathbf{q}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, t) - \mathbf{q}(0, \boldsymbol{\eta}, t)\|_2. \end{aligned}$$

Bajo la hipótesis **H2** (condición de Lipschitz), entonces la derivada de la función de Lyapunov queda

$$\begin{aligned} \dot{v}_2 &\leq -c_3 \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2 + c_4 L \|\boldsymbol{\eta}\|_2 \|\boldsymbol{\xi}\|_2 - \theta c_3 \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2 + \theta c_3 \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2 \\ &= -(1 - \theta) c_3 \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2 - \|\boldsymbol{\eta}\|_2 (\theta c_3 \|\boldsymbol{\eta}\|_2 - c_4 L \|\boldsymbol{\xi}\|_2) \end{aligned}$$

es negativa

$$\dot{v}_2 \leq -(1 - \theta) c_3 \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2, \quad 0 < \theta < 1$$

en el dominio

$$\|\boldsymbol{\eta}\|_2 > \frac{c_4 L}{\theta c_3} \|\boldsymbol{\xi}\|_2 := \mu(t) \quad (3.52)$$

De (3.47) tenemos

$$\dot{v}_2 \leq -\frac{(1-\theta)c_3}{c_2} v_2.$$

Usando el Lema de Comparación [14] obtenemos la solución estimada de la desigualdad de la ecuación diferencial anterior

$$v_2(t) \leq v_2(t_s) e^{-\frac{(1-\theta)c_3}{c_2}(t-t_s)}$$

donde  $v_2(t_s)$  es la condición inicial de la dinámica de modos deslizantes, entonces esa es la condición inicial para este estudio. Eligiendo de (3.47)

$$\|\boldsymbol{\eta}(t)\|_2^2 \leq \frac{1}{c_1} v_2(t)$$

resulta

$$\|\boldsymbol{\eta}(t)\|_2^2 \leq \frac{1}{c_1} v_2(t_s) e^{-\frac{(1-\theta)c_3}{c_2}(t-t_s)} \quad (3.53)$$

Sustituyendo

$$v_2(t_s) \leq c_2 \|\boldsymbol{\eta}(t_s)\|_2^2$$

en (3.53) resulta

$$\|\boldsymbol{\eta}(t)\|_2 \leq \gamma_1 \|\boldsymbol{\eta}(t_s)\|_2 e^{-\gamma_2(t-t_s)}. \quad \forall t_s \leq t < t_1 \quad (3.54)$$

donde  $\gamma_1 = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}$  y  $\gamma_2 = \frac{(1-\theta)c_3}{2c_2}$ .

Si la condición (3.51)

$$\|\boldsymbol{\eta}(t_s)\|_2 < r_2 \sqrt{\frac{c_1}{c_2}}$$

se cumple, entonces la solución (3.54) pertenece al dominio

$$D_2 = \{\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{R}^{n_r+1} \mid \|\boldsymbol{\eta}\|_2 \leq r_2\}$$

para todo  $t_s \leq t < t_1$ .

Ahora usando (3.45), el dominio (3.52) se presenta como

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \frac{c_4 L}{\theta c_3} \|\boldsymbol{\xi}\|_2 \\ &\leq \frac{c_4 L}{\theta c_3} h_1 \|\boldsymbol{\xi}(t_s)\|_2 e^{-h_2(t-t_s)}. \end{aligned}$$

y si la condición (3.50)

$$\|\boldsymbol{\xi}(t_s)\|_2 < \frac{r_2}{h_1} \sqrt{\frac{c_1}{c_2} \frac{c_3 \theta}{c_4 L}}$$

se cumple, entonces tenemos

$$\mu(t) < r_2 \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} e^{-h_2(t-t_s)}. \quad (3.55)$$

Por lo tanto

$$\mu(t) < r_2 \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \quad \forall t \geq t_s$$

y por el corolario 5.3 [14] tenemos que

$$\|\boldsymbol{\eta}(t)\|_2 \leq \mu(t) \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}, \quad \forall t \geq t_1 \geq t_s. \quad (3.56)$$

Sustituyendo (3.55) en (3.56) resulta

$$\|\boldsymbol{\eta}(t)\|_2 \leq r_2 e^{-h_2(t-t_s)} \quad \forall t \geq t_1. \quad (3.57)$$

Las ecuaciones (3.54) y (3.57) en conjunto dan la solución estimada para  $\|\boldsymbol{\eta}(t)\|_2$  completamente para todo tiempo  $t \geq t_s$ ,

$$\|\boldsymbol{\eta}(t)\|_2 \leq \gamma_1 \|\boldsymbol{\eta}(t_s)\|_2 e^{-\gamma_2(t-t_s)} + r_2 e^{-h_2(t-t_s)} \quad \forall t \geq t_s. \quad (3.58)$$

Las ecuaciones (3.45) y (3.57) presentan la solución estimada del sistema (3.35) y (3.36), concluyendo así que la solución  $(\boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\eta}(t))$  converge exponencialmente a cero. ■

Tomando las proposiciones 1 y 2 tenemos el siguiente resultado

**Corolario 3.1.** *Supongamos que se cumplen*

A) *Las condiciones de las Proposiciones 1 y 2;*

B) *Las hipótesis H0, H1 y H2.*

Entonces la ley de control (3.24) con  $\mathbf{M}(\mathbf{z}, t) = \mathbf{B}_r^T(\mathbf{z}, t)$  y la función de conmutación (3.18) bajo la condición (3.27) estabiliza al sistema (3.3).

### 3.3 Control por bloques para sistemas con incertidumbre

En la práctica las plantas son afectadas por perturbaciones. Estas perturbaciones se pueden originar por las señales de referencia y/o por los disturbios. Por lo tanto es importante resolver el problema de diseño del control el cual debe asegurar:

A) El seguimiento de la salida a un valor de referencia o señal deseada y

B) El rechazo de señales de disturbio no deseadas.

Para resolver este problema, en esta sección se plantea aplicar la técnica de control por bloques con modos deslizantes.

Considere el siguiente sistema no lineal sujeto a perturbaciones

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \mathbf{u} + \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) \mathbf{w}(t) \quad (3.59)$$

con una salida

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbf{X} \subset \mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y} \subset \mathbf{R}^p$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbf{U} \subset \mathbf{R}^m$ ,  $\mathbf{w} \in \mathbf{W} \subset \mathbf{R}^p$ ,  $\mathbf{w}$  es un disturbio originado por un sistema externo

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{s}(\mathbf{w}). \quad (3.60)$$



Los campos vectores  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{s}$  y las columnas de  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{D}$  son mapeos suaves de clase  $\mathbf{C}^\infty$ , con  $\mathbf{f}(0, t) = 0$ ,  $\mathbf{h}(0) = 0$  y  $\mathbf{s}(0) = 0$ .

**Definición 3.2.** Considere el sistema de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, t) + \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_1, t) \mathbf{x}_2 + \mathbf{D}_1(\mathbf{x}_1, t) \mathbf{w}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_i &= \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, t) + \mathbf{B}_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, t) \mathbf{x}_{i+1} + \mathbf{D}_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, t) \mathbf{w}(t), \quad i = 2, \dots, r-1 \\ \dot{\mathbf{x}}_r &= \mathbf{f}_r(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r, \mathbf{x}_{r+1}, t) + \mathbf{B}_r(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r, \mathbf{x}_{r+1}, t) \mathbf{u} + \mathbf{D}_r(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r, \mathbf{x}_{r+1}, t) \mathbf{w}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_{r+1} &= \mathbf{f}_{r+1}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r, \mathbf{x}_{r+1}, t) + \mathbf{B}_{r+1}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r, \mathbf{x}_{r+1}, t) \mathbf{u} + \mathbf{D}_{r+1}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r, \mathbf{x}_{r+1}, t) \mathbf{w}(t)\end{aligned}\quad (3.61)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_1$$

se dice que el sistema (3.61) está en la forma No Lineal Controlable por Bloques (NCB) con Perturbación y con Dinámica Cero si

$$\text{rango}[\mathbf{B}_i] = n_i \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, t \in [0, \infty) \quad \text{y} \quad i = 1, \dots, r \quad (3.62)$$

donde  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r, \mathbf{x}_{r+1})^T$ ,  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{X}_i \subset \mathbf{R}^{n_i}$ , y los números  $(n_1, n_2, \dots, n_r)$  definen la estructura del sistema (3.61) como

$$n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_r \leq m$$

con  $\sum_{i=1}^r n_i = n$ .

Las condiciones de existencia para la forma NCB con perturbación (3.61) y el procedimiento para llevar el sistema (3.59) a la forma (3.61) se presentan en [10]. Notamos que la dinámica del motor se puede presentar en la forma (3.61) donde el disturbio se presenta por el par de carga y la salida es la velocidad del rotor.

Supongamos que la salida  $\mathbf{y}(t)$  debe seguir a una señal de referencia  $\mathbf{r}(t)$  originada por un exosistema

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{g}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{g}(0) = 0. \quad (3.63)$$

Entonces podemos diseñar una superficie deslizante y una ley de control discontinua por retroalimentación para el sistema (3.61) como en el caso anterior, considerando el estado  $\mathbf{x}_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, r-1$  como un vector de control ficticio (quasi control) en el  $i$ ésimo bloque del sistema. Contrario a la subsección 3.2, vamos a considerar el caso cuando la estructura del sistema (3.59), transformado a la forma (3.61), se presenta por

$$n_1 = n_2 < \dots < n_r = m. \quad (3.64)$$

Este diseño se lleva a cabo de la siguiente forma. Primero, por (3.64) tenemos que  $n_1 = n_2$ ; es decir  $\mathbf{B}_1(\mathbf{x}_1, t)$  es cuadrada, entonces  $\mathbf{B}_1^{-1}(\mathbf{x}_1, t)$  existe debido a (3.62). Definimos el error del control como

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{r}. \quad (3.65)$$

Derivando (3.65) tenemos

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}}_1 &= \dot{\mathbf{x}}_1 - \dot{\mathbf{r}} \\ &= \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, t) + \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_1, t) \mathbf{x}_2 + \mathbf{d}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t)\end{aligned}\quad (3.66)$$

donde  $\mathbf{d}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t) = \mathbf{D}_1(\mathbf{x}_1, t) \mathbf{w} - \mathbf{g}(\mathbf{r})$ .

Elegiendo  $\mathbf{x}_2$  como el control ficticio en (3.66) resulta

$$\mathbf{x}_2 = -\mathbf{B}_1^{-1}(\mathbf{x}_1, t) [\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, t) + \mathbf{d}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t)] + \mathbf{B}_1^{-1}(\mathbf{x}_1, t) [-k_1 \mathbf{z}_1 + \dot{\mathbf{z}}_1] \quad (3.67)$$

donde  $\mathbf{z}_2$  es un vector de variables nuevas de  $n_2 \times 1$  y  $k_1$  es una constante positiva.



Ahora el primer bloque transformado con las nuevas coordenadas  $\mathbf{z}_1$ ,  $\mathbf{z}_2$  y con la entrada (3.67) tiene la forma

$$\dot{\mathbf{z}}_1 = -k_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 \quad (3.68)$$

A partir de (3.67) se puede obtener la variable  $\mathbf{z}_2$  como sigue

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, t) + \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_1, t) \mathbf{x}_2 + \mathbf{d}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t) + k_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{r}) := \phi_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t). \quad (3.69)$$

Ahora derivando (3.69) alrededor de las trayectorias de (3.60), (3.61) y (3.63) resulta

$$\dot{\mathbf{z}}_2 = \bar{\mathbf{f}}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) + \bar{\mathbf{B}}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) \mathbf{x}_3 + \mathbf{d}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t) \quad (3.70)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{f}}_2 &= \frac{\partial \phi_2}{\partial \mathbf{x}_1} \mathbf{f}_1 + \frac{\partial \phi_2}{\partial \mathbf{x}_2} \mathbf{f}_2 + \frac{\partial \phi_2}{\partial t}, \quad \bar{\mathbf{B}}_2 = \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{d}_2 &= \frac{\partial \phi_2}{\partial \mathbf{x}_1} \mathbf{D}_1 \mathbf{w} + \frac{\partial \phi_2}{\partial \mathbf{x}_2} \mathbf{D}_2 \mathbf{w} + \frac{\partial \phi_2}{\partial \mathbf{w}} \mathbf{s} + \frac{\partial \phi_2}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{g}. \end{aligned}$$

Se puede observar que el  $\text{rango} \bar{\mathbf{B}}_2 = \text{rango} \mathbf{B}_2 = n_2$ . Suponemos ahora que  $n_2 < n_3$ , entonces la matriz  $\bar{\mathbf{B}}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t)$  no es cuadrada, y el control ficticio es  $\mathbf{x}_3$  en (3.70) y se selecciona de manera similar a (3.67)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_3 &= -\bar{\mathbf{B}}_2^+(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) [\bar{\mathbf{f}}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) + \mathbf{d}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t)] \\ &\quad + \bar{\mathbf{B}}_2^+(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) [-k_2 \mathbf{z}_2 + \mathbf{E}_{2,1} \mathbf{z}_3] \end{aligned} \quad (3.71)$$

donde  $\mathbf{z}_3$  es el vector de variables nuevas de dimensión  $n_3 \times 1$ ,  $k_2$  es un valor escalar positivo,  $\bar{\mathbf{B}}_2^+(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t)$  denota la pseudo inversa derecha de  $\bar{\mathbf{B}}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t)$ ,  $\mathbf{E}_{2,1} = [\mathbf{I}_{n_2} \ 0]$ , y  $\mathbf{E}_{2,1} \in \mathbf{R}^{n_2 \times n_3}$ ,  $\mathbf{I}_{n_2}$  es una matriz identidad.

De esta forma, la ecuacion (3.70) con (3.71) queda de la forma

$$\dot{\mathbf{z}}_2 = -k_2 \mathbf{z}_2 + \mathbf{E}_{2,1} \mathbf{z}_3.$$

Ahora suponemos lo siguiente

**H1.** Los elementos de la matriz  $\bar{\mathbf{B}}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t)$  se pueden ordenar de tal forma que la matriz cuadrada

$$\bar{\mathbf{B}}_3(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) := \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) \\ \mathbf{E}_{2,2} \end{bmatrix}$$

donde la matriz  $\mathbf{E}_{2,2} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_{n_3-n_2} \end{bmatrix}$  tiene rango  $n_3$ ,  $\mathbf{E}_{2,2} \in \mathbf{R}^{(n_3-n_2) \times n_3}$ ,  $\mathbf{I}_{n_3-n_2}$  es una matriz identidad. Entonces la variable  $\mathbf{z}_3$  se obtiene a partir de (3.71) como

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_3 &= \bar{\mathbf{B}}_3(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) \mathbf{x}_3 + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) + \mathbf{d}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t) + k_2 \phi_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &:= \phi_3(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (3.72)$$

Para el próximo paso se toma la derivada de  $\mathbf{z}_3$  y se plantea de la misma forma que en los pasos anteriores.

Entonces siguiendo el procedimiento iterativamente llegamos hasta el  $i_{mo}$  paso,  $i = 3, \dots, r-1$ . Para el caso  $n_i < n_{i+1}$  y bajo el supuesto **H1** para las matrices  $\bar{\mathbf{B}}_i$ , tenemos que el control ficticio es de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{i+1} &= -\bar{\mathbf{B}}_i^+(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, t) [\bar{\mathbf{f}}_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, t) + \mathbf{d}_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t)] \\ &\quad + \bar{\mathbf{B}}_i^+(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, t) [-k_i \mathbf{z}_i + \mathbf{E}_{i,1} \mathbf{z}_{i+1}] \end{aligned}$$

donde la matriz  $\bar{\mathbf{B}}_i^+$  denota la pseudo inversa derecha de  $\bar{\mathbf{B}}_i = \bar{\mathbf{B}}_{i-1}\mathbf{B}_i$ , y  $\mathbf{E}_{i,1} = [\mathbf{I}_{n_i} \ 0]$ ,  $\mathbf{E}_{i,1} \in \mathbf{R}^{n_i \times n_{i+1}}$ .  $\mathbf{I}_{n_i}$  es una matriz identidad. Las nuevas variables  $\mathbf{z}_i$  obtenidas por el procedimiento anterior forman una transformación no lineal de las variables de estado dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1 &= \mathbf{x}_1 - \mathbf{r} := \phi_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{r}) \\ \mathbf{z}_2 &= \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, t) + \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_1, t)\mathbf{x}_2 + \mathbf{d}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t) + k_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{r}) := \phi_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t) \\ \mathbf{z}_3 &= \bar{\mathbf{B}}_3(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t)\mathbf{x}_3 + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) + \mathbf{d}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t) + k_2\phi_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &:= \phi_3(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t) \\ \mathbf{z}_{i+1} &= \bar{\mathbf{B}}_{i+1}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, t)\mathbf{x}_{i+1} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, t) + \mathbf{d}_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t) + k_i\phi_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &:= \phi_{i+1}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (3.73)$$

donde  $i = 3, \dots, r-1$ ,  $\mathbf{z}_i$  es un vector de variables nuevas de dimensión  $n_i \times 1$ ,  $k_i$  es un valor escalar positivo,  $\bar{\mathbf{B}}_{i+1} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_i \\ \mathbf{E}_{i,2} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{E}_{i,2} = [0 \ \mathbf{I}_{n_{i+1}-n_i}]$ ,  $\mathbf{E}_{i,2} \in \mathbf{R}^{(n_{i+1}-n_i) \times n_{i+1}}$ . Entonces, el sistema en las nuevas coordenadas se presenta de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_1 &= -k_1\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 \\ \dot{\mathbf{z}}_i &= -k_i\mathbf{z}_i + \mathbf{E}_{i,1}\mathbf{z}_{i+1} & i = 2, \dots, r-1 \\ \dot{\mathbf{z}}_r &= \bar{\mathbf{f}}_r(\mathbf{z}, \mathbf{x}_{r+1}, t) + \bar{\mathbf{B}}_r(\mathbf{z}, \mathbf{x}_{r+1}, t)\mathbf{u} + \mathbf{d}_r(\mathbf{z}, \mathbf{x}_{r+1}, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t) \\ \dot{\mathbf{x}}_{r+1} &= \bar{\mathbf{f}}_{r+1}(\mathbf{z}, \mathbf{x}_{r+1}, t) + \bar{\mathbf{B}}_{r+1}(\mathbf{z}, \mathbf{x}_{r+1}, t)\mathbf{u} + \bar{\mathbf{D}}_{r+1}(\mathbf{z}, \mathbf{x}_{r+1}, t)\mathbf{w} \end{aligned} \quad (3.74)$$

donde  $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_r)^T$   $\bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{B}}_{r-1}\mathbf{B}_r$ .

Ahora se elige la ley de control discontinua como

$$\mathbf{u} = -k_r\bar{\mathbf{B}}_r^{-1}\text{sign}(\mathbf{z}_r). \quad (3.75)$$

Usando (3.22) como la función de Lyapunov candidata de la misma manera que en la Proposición 1, podemos concluir que el control (3.75) asegura estabilidad de modos deslizantes si

$$k_r \geq \|\bar{\mathbf{B}}_r^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{x}_{r+1}, t)\mathbf{u}_{eq}\|_2 \quad (3.76)$$

donde  $\mathbf{u}_{eq}$  es el control equivalente [11] calculado cuando  $\dot{\mathbf{z}}_r = 0$  de la siguiente forma:

$$\mathbf{u}_{eq} = -\bar{\mathbf{B}}_r^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{x}_{r+1}, t) [\bar{\mathbf{f}}_r(\mathbf{z}, \mathbf{x}_{r+1}, t) + \mathbf{d}_r(\mathbf{z}, \mathbf{x}_{r+1}, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t)]. \quad (3.77)$$

Sustituyendo (3.77) en (3.74), la dinámica de modos deslizantes sobre la variedad  $\mathbf{z}_r = 0$ , está gobernada por el sistema de orden reducido

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_1 &= -k_1\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 \\ \dot{\mathbf{z}}_i &= -k_i\mathbf{z}_i + \mathbf{E}_{i,1}\mathbf{z}_{i+1} & i = 2, \dots, r-2 \\ \dot{\mathbf{z}}_{r-1} &= -k_{r-1}\mathbf{z}_{r-1} \\ \dot{\mathbf{z}}_{r+1} &= \bar{\mathbf{f}}_{r+1}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{r-1}, 0, \mathbf{z}_{r+1}, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (3.78)$$

donde  $\mathbf{z}_{r+1} = \mathbf{x}_{r+1}$ ,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{f}}_{r+1} &= \bar{\mathbf{f}}_{r+1}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{r-1}, 0, \mathbf{z}_{r+1}, t) + \bar{\mathbf{D}}_{r+1}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{r-1}, 0, \mathbf{z}_{r+1}, t)\mathbf{w} \\ &+ \bar{\mathbf{B}}_{r+1}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{r-1}, 0, \mathbf{z}_{r+1}, t)\bar{\mathbf{B}}_r^{-1}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{r-1}, 0, \mathbf{z}_{r+1}, t) \\ &[\bar{\mathbf{f}}_r(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{r-1}, 0, \mathbf{z}_{r+1}, t) + \mathbf{d}_r(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{r-1}, 0, \mathbf{z}_{r+1}, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t)]. \end{aligned}$$

Ahora haciendo un cambio de variables como  $\xi^T = (z_1, \dots, z_{r-1})$  y  $\eta = z_{r+1}$ , el sistema queda de la siguiente forma

$$\dot{\xi} = \mathbf{A}_1 \xi \quad (3.79)$$

$$\dot{\eta} = \mathbf{q}(\xi, \eta, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t) \quad (3.80)$$

donde  $\mathbf{q} = \bar{\mathbf{f}}_{r+1}(z_1, \dots, z_{r-1}, 0, z_{r+1}, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t)$  y

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -k_1 \mathbf{I}_{n_1} & \mathbf{I}_{n_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 \mathbf{I}_{n_2} & \mathbf{E}_{2,1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_{r-2} \mathbf{I}_{n_{r-2}} & \mathbf{E}_{r-2,1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -k_{r-1} \mathbf{I}_{n_{r-1}} \end{bmatrix}$$

Se denotan los siguientes dominios como

$$D_1 = \{\xi \in \mathbf{R}^{n-n_r-n_{r+1}} \mid \|\xi\|_2 \leq r_1\} \quad y \quad D_2 = \{\eta \in \mathbf{R}^{n_{r+1}} \mid \|\eta\|_2 \leq r_2\}.$$

Entonces, como en la sección anterior, el sistema (3.79) es autónomo, y la matriz  $\mathbf{A}_1$  es Hurwitz, por lo que la solución de este sistema está definida como

$$\|\xi(t)\|_2 \leq h_1 \|\xi(t_s)\|_2 e^{-h_2(t-t_s)} \quad (3.81)$$

donde

$$h_1 = \sqrt{\frac{\alpha_{\max}(\mathbf{P}_1)}{\alpha_{\min}(\mathbf{P}_1)}} \quad y \quad h_2 = \frac{1}{2\alpha_{\max}(\mathbf{P}_1)}$$

y  $\mathbf{P}_1$  es una solución definida positiva de la ecuación de Lyapunov

$$\mathbf{P}_1 \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 = -\mathbf{Q}_1$$

para  $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_1^T > 0$ , y  $t_s$  es el tiempo de inicio de modos deslizantes.

La dinámica cero del sistema (3.79) y (3.80) se define como la dinámica sobre el subespacio  $\{\xi = 0, \eta \in D_2 \subset \mathbf{R}^{n_{r+1}}\}$  como

$$\dot{\eta} = \mathbf{q}(0, \eta, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t). \quad (3.82)$$

Ahora podemos pronunciar las siguientes hipótesis:

**A1.** La dinámica de (3.82) converge exponencialmente a un conjunto compacto

$$\|\eta\|_2 \leq b_1.$$

**A2.** El mapeo  $\mathbf{q} : D_2 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}^{n_{r+1}}$  es continuo en tiempo  $t$  y localmente Lipschitz en  $\xi$  y  $\eta$  tal que

$$\|\mathbf{q}(\xi, \eta, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t) - \mathbf{q}(0, \eta, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t)\|_2 \leq L \|\xi\|_2 \quad \forall \xi \in D_1, \quad \forall \eta \in D_2, \quad \forall t \geq t_0. \quad (3.83)$$

donde  $b_1 > 0$  y  $L$  es una constante de Lipschitz.

Entonces bajo la hipótesis **A1** y por el teorema inverso [14], existe una función de Lyapunov  $V(\eta, t)$  que satisfice

$$c_1 \|\eta\|_2^2 \leq V(\eta, t) \leq c_2 \|\eta\|_2^2 \quad (3.84)$$

$$\frac{\partial V(\eta, t)}{\partial t} + \frac{\partial V(\eta, t)}{\partial \eta} \mathbf{q}(0, \eta, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t) \leq -c_3 \|\eta\|_2^2 \quad (3.85)$$

$$\left\| \frac{\partial V(\eta, t)}{\partial \eta} \right\|_2 \leq c_4 \|\eta\|_2 \quad (3.86)$$

para todo

$$\|\boldsymbol{\eta}\|_2 > \mu_1$$

en  $[0, \infty) \times D_1 \times D_2$ , con las constantes positivas  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  y  $c_4$ , donde  $\mu_1$  está definido por el corolario 5.3 [14] como

$$\mu_1 = b_1 \sqrt{\frac{c_1}{c_2}}.$$

La siguiente proposición [14], establece la estabilidad de la dinámica de modos deslizantes del sistema (3.79) y (3.80).

**Proposición 3.3.** *Supóngase que se cumplen las hipótesis A1 y A2, y*

$$\|\boldsymbol{\xi}(t_s)\|_2 < \frac{r_2}{h_1} \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \frac{c_3 \theta}{c_4 L} \quad (3.87)$$

$$\|\boldsymbol{\eta}(t_s)\|_2 < r_2 \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \quad (3.88)$$

entonces la solución  $(\|\boldsymbol{\xi}(t)\|, \|\boldsymbol{\eta}(t)\|)^T$  del sistema (3.79) y (3.80) es uniformemente acotada, y además  $\boldsymbol{\xi}(t)$  converge rápidamente exponencialmente a cero.

**Prueba.** Entonces, al igual que en la sección anterior, procederemos a demostrar que la dinámica cero del sistema converge a un conjunto compacto y la solución de  $\boldsymbol{\xi}(t)$  converge exponencialmente a cero. La convergencia exponencial de  $\boldsymbol{\xi}(t)$  del subsistema autónomo (3.79) se estableció anteriormente por (3.81). Para mostrar la convergencia de  $\boldsymbol{\eta}(t)$  del sistema (3.80), considerando  $\boldsymbol{\xi}(t)$  como entrada, usamos la función de Lyapunov  $V(\boldsymbol{\eta}, t)$  con las propiedades (3.84)-(3.86). La derivada de  $V(\boldsymbol{\eta}, t)$  a lo largo de las trayectorias de (3.80) es:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{q}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t) \\ &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{q}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t) + \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{q}(0, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t) - \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{q}(0, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t). \end{aligned}$$

De las propiedades anteriores tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -c_3 \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2 + \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{q}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t) - \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{q}(0, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t) \\ &\leq -c_3 \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2 + \left\| \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right\|_2 \|\mathbf{q}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t) - \mathbf{q}(0, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t)\|_2. \end{aligned}$$

Entonces la derivada de la función de Lyapunov queda

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -c_3 \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2 + c_4 L \|\boldsymbol{\eta}\|_2 \|\boldsymbol{\xi}\|_2 - \theta c_3 \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2 + \theta c_3 \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2 \\ &= -(1 - \theta) c_3 \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2 - \|\boldsymbol{\eta}\|_2 (\theta c_3 \|\boldsymbol{\eta}\|_2 - c_4 L \|\boldsymbol{\xi}\|_2) \\ \dot{V} &\leq -(1 - \theta) c_3 \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2 \quad 0 < \theta < 1 \end{aligned}$$

y es negativa en el dominio

$$\|\boldsymbol{\eta}\|_2 > \frac{c_4 L}{\theta c_3} \|\boldsymbol{\xi}\|_2 := \mu_2(t). \quad (3.89)$$

En el dominio (3.89) tenemos

$$\dot{V} \leq \frac{-(1 - \theta) c_3}{c_2} V$$

y

$$V \leq V(t_s) e^{-\frac{(1-\theta)c_3}{c_2}(t-t_s)}$$

donde  $V(t_s)$  es el tiempo inicial donde comienza la dinámica de modos deslizantes.

Por lo tanto

$$\|\boldsymbol{\eta}(t)\|_2^2 \leq \frac{1}{c_1} V(t) \leq \frac{1}{c_1} V(t_s) e^{-\frac{(1-\theta)c_3}{c_2}(t-t_s)} \quad (3.90)$$

y usando

$$V(t_s) \leq c_2 \|\boldsymbol{\eta}(t_s)\|_2^2$$

resulta

$$\|\boldsymbol{\eta}(t)\|_2 \leq \gamma_1 \|\boldsymbol{\eta}(t_s)\|_2 e^{-\gamma_2(t-t_s)}, \quad \forall t_s \leq t < t_1 \quad (3.91)$$

donde  $\gamma_1 = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}$  y  $\gamma_2 = \frac{(1-\theta)c_3}{2c_2}$ .

Ahora supongamos que la condición (3.87) de la proposición se cumple. En este caso tenemos

$$\mu_2(t) < r_2 \sqrt{\frac{c_1}{c_2}}$$

y si además se cumple la condición (3.88), entonces por el corolario 5.3 [14] la solución  $\boldsymbol{\eta}(t)$  del sistema (3.79) y (3.80) converge exponencialmente al dominio

$$\|\boldsymbol{\eta}\|_2 \leq b_2(t) \quad \forall t \geq t_1 \quad (3.92)$$

con  $b_2(t)$  definido como

$$b_2(t) = \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \mu_2(t).$$

Notemos que la convergencia (3.92) tiene lugar cuando

$$b_2(t) = b_1.$$

Usando (3.89) y (3.81) tenemos

$$b_2(t) = \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \mu_2(t) = \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \frac{c_4 L}{\theta c_3} \|\boldsymbol{\xi}(t)\|_2 = \bar{h}_1 \|\boldsymbol{\xi}(t_s)\|_2 e^{-h_2(t-t_s)}$$

donde  $\bar{h}_1 = \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \frac{c_4 L}{\theta c_3} h_1$ . Por lo tanto

$$b_2(t) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad t \rightarrow \infty.$$

Definimos el momento del tiempo  $t_2$  como

$$b_2(t) < b_1.$$

Entonces

$$\|\boldsymbol{\eta}(t)\|_2 \leq \gamma_1 \|\boldsymbol{\eta}(t_s)\|_2 e^{-\gamma_2(t-t_s)}, \quad \forall t_s \leq t < t_2 < t_1$$



y

$$\|\boldsymbol{\eta}(t)\|_2 \leq b_1, \quad t \geq t_2,$$

que significa que la solución  $\|\boldsymbol{\eta}(t)\|_2$  (3.79) y (3.80) es uniformemente acotada. Esto concluye la prueba.

Los resultados obtenidos los podemos presentar en la siguiente proposición.

**Corolario 3.2.** *Supongamos que se cumplen*

A. *La condición (3.76)*

B. *Las hipótesis A1 y A2;*

C. *Las condiciones de la Proposición 3.3.*

*Entonces la solución del sistema en lazo cerrado (3.61) y (3.75) es uniformemente acotada, y además el error de control  $z_1(t)$  converge exponencialmente a cero.*

### 3.4 Observadores para una clase de sistemas no lineales

En las secciones anteriores se establecen las bases para el diseño de controladores de sistemas, suponiendo que todas las variables de estado de la planta son conocidas. Pero como ya se mencionó, en la práctica sólo se puede medir directamente una parte de los estados de un sistema. Esto aumenta el problema de determinación y observación del vector de estado a través de la información de las variables medidas. En otras palabras, es necesario construir un observador que nos estime la información desconocida del sistema no lineal.

En este trabajo de tesis se utiliza un observador por modos deslizantes de orden completo para estimar estados del sistema.

#### 3.4.1 Observadores con modos deslizantes

A continuación se van a establecer las bases para el diseño de un observador de estados con entradas discontinuas. Estas entradas son funciones de los errores de estimación, donde los modos deslizantes son forzados [11].

Consideremos un sistema no lineal de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (3.93)$$

con la salida

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (3.94)$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$   $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m$  y  $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^p$ .

Suponemos que

**S1.** rango  $\mathbf{C} = p$

Basado de esta hipótesis, se puede representar el vector de salida (3.94) como

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{C}_2\mathbf{x}_2 \quad (3.95)$$

y separar el sistema (3.93) como

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{pmatrix}$$

donde  $\mathbf{x}_1 \in \mathfrak{R}^{n-p}$ ,  $\mathbf{x}_2 \in \mathfrak{R}^p$ . y rango  $\mathbf{C}_2 = p$ .

Entonces el sistema (3.93-3.94) se presenta por las variables  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{y}$  de la forma

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \bar{\mathbf{f}}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + \mathbf{B}_1\mathbf{u} \quad (3.96)$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{f}}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + \bar{\mathbf{B}}_2\mathbf{u} \quad (3.97)$$

donde  $\bar{\mathbf{f}}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)_{\mathbf{x}_2 = \mathbf{y} - \mathbf{h}_1(\mathbf{x}_1)}$ ,  $\bar{\mathbf{f}}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) = [\mathbf{C}_1 \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{C}_2 \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)]_{\mathbf{x}_2 = \mathbf{C}_2^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{C}_1 \mathbf{x}_1)}$ , y la matriz  $\bar{\mathbf{B}}_2 = \mathbf{C}_1 \mathbf{B}_1 + \mathbf{C}_2 \mathbf{B}_2$ .

El observador es descrito por las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_1 = \bar{\mathbf{f}}_1(\hat{\mathbf{x}}_1, \mathbf{y}) + \mathbf{B}_1 \mathbf{u} + \mathbf{L}_1(\mathbf{y}) \mathbf{v} \quad (3.98)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{y}}}_1 = \bar{\mathbf{f}}_2(\hat{\mathbf{x}}_1, \mathbf{y}) + \bar{\mathbf{B}}_2 \mathbf{u} - \mathbf{v} \quad (3.99)$$

donde  $\mathbf{L}_1(\mathbf{y})$  es una matriz, y el vector  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^p$  es elegido tal que el error entre el vector de salida  $\mathbf{y}$  y su estimación  $\hat{\mathbf{y}}$  sea llevado a cero forzando modos deslizantes sobre la variedad  $\varepsilon_2 = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$ :

$$\mathbf{v} = -l_0 \text{sign}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \quad l_0 > 0, \quad l_0 = \text{constante}. \quad (3.100)$$

Usando (3.96)-(3.99) y (3.100), la dinámica de los errores de estimación  $\varepsilon_1 = \mathbf{x}_1 - \hat{\mathbf{x}}_1$  y  $\varepsilon_2 = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$  se pueden despejar de la forma

$$\dot{\varepsilon}_1 = \bar{\mathbf{f}}_1(\varepsilon_1, \mathbf{y}) - \mathbf{L}_1(\mathbf{y}) \mathbf{v} \quad (3.101)$$

$$\dot{\varepsilon}_2 = \bar{\mathbf{f}}_2(\varepsilon_1, \mathbf{y}) - l_0 \text{sign}(\varepsilon_2).$$

Bajo la siguiente condición:

$$l_0 > \|\bar{\mathbf{f}}_2(\varepsilon_1, \mathbf{y})\|$$

el error  $\varepsilon_2$  converge a cero en un tiempo finito  $t_0$ . Después de este tiempo, se alcanza el movimiento en modos deslizantes sobre la variedad  $\varepsilon_2 = 0$ , y tenemos

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_{eq} = (l_0 \text{sign}(\varepsilon_2))_{eq} = \bar{\mathbf{f}}_2(\varepsilon_1, \mathbf{y}) \quad \text{para } t \geq t_0. \quad (3.102)$$

Sustituyendo (3.102) en (3.101) obtenemos la ecuación de modos deslizantes de orden reducido

$$\dot{\varepsilon}_1 = \mathbf{f}_1(\varepsilon_1, \mathbf{y}) - \mathbf{L}_1(\mathbf{y}) \bar{\mathbf{f}}_2(\varepsilon_1, \mathbf{y}). \quad (3.103)$$

La matriz  $\mathbf{L}_1(\mathbf{y})$  debe ser encontrada para estabilizar el sistema (3.103).

Una clase de sistemas dinámicos donde es posible aplicar este procedimiento de diseño para un observador con modos deslizantes, es la de los sistemas lineales [11]

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.104)$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  y  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ . Suponiendo que la hipótesis **S1** se satisface, y usando (3.95), el sistema (3.104) se representa en las variables  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{y}$  como:

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_{11} \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12} \mathbf{y} + \mathbf{B}_1 \mathbf{u} \quad (3.105)$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}_{21} \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22} \mathbf{y} + \mathbf{B}_2 \mathbf{u} \quad (3.106)$$

donde

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n-p} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \quad \mathbf{T} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{pmatrix}$$

La transformación de coordenadas es no singular porque  $\det \mathbf{C}_2 \neq 0$ .

Probemos el siguiente lema auxiliar:

**Lema 3.1.** Si el par  $\{\mathbf{C}, \mathbf{A}\}$  es observable, el sistema

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1$$

con el vector de salida

$$\mathbf{z} = \mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1$$

o el par  $\{\mathbf{A}_{21}, \mathbf{A}_{11}\}$  es observable también.

**Prueba.** Supongamos que esta condición no se cumple. En este caso, la ecuación (3.105), donde  $\mathbf{y}$  y  $\mathbf{u}$  son considerados como entradas, se puede representar junto con  $\mathbf{z}$  en la forma canónica de observabilidad:

$$\dot{\mathbf{x}}'_1 = \mathbf{A}'_{11}\mathbf{x}'_1 + \mathbf{A}'_{12}\mathbf{y} + \mathbf{B}'_1\mathbf{u} \quad (3.107)$$

$$\dot{\mathbf{x}}''_1 = \mathbf{A}''_1\mathbf{x}'_1 + \mathbf{A}''_2\mathbf{x}''_1 + \mathbf{A}''_{22}\mathbf{y} + \mathbf{B}''_1\mathbf{u} \quad (3.108)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{A}'_{21}\mathbf{x}'_1,$$

donde  $\mathbf{x}_1^T = (\mathbf{x}'_1{}^T, \mathbf{x}''_1{}^T)$ . El par  $\{\mathbf{A}'_{21}, \mathbf{A}'_{11}\}$  es observable, y  $\mathbf{x}''_1$  es el subespacio de los estados no observables. De acuerdo a la transformación, (3.106) se tiene

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}'_{21}\mathbf{x}'_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{y} + \mathbf{B}_2\mathbf{u}. \quad (3.109)$$

El subespacio  $\mathbf{x}''_1$  puede ser no observable, obviamente, no solamente con respecto a  $\mathbf{z}$  sino también a  $\mathbf{y}$  que es la salida del sistema original (3.104) o es equivalente a (3.107)-(3.109). Esta condición contradice la hipótesis del par de observabilidad  $\{\mathbf{C}, \mathbf{A}\}$ , por lo tanto, el par  $\{\mathbf{A}_{21}, \mathbf{A}_{11}\}$  es observable. Entonces el lema es probado.

Ahora procedemos a diseñar el observador con modos deslizantes. Este observador está descrito por la siguiente ecuación diferencial (similar a (3.99)):

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_1 = \mathbf{A}_{11}\hat{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{A}_{12}\hat{\mathbf{y}} + \mathbf{B}_1\mathbf{u} - \mathbf{L}_1\mathbf{v} \quad (3.110)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{y}}} = \mathbf{A}_{21}\hat{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{A}_{22}\hat{\mathbf{y}} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} + \mathbf{v} \quad (3.111)$$

con el vector discontinuo  $\mathbf{v}$  elegido como

$$\mathbf{v} = l_0 \mathbf{sign}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}), \quad l_0 > 0 \quad (3.112)$$

donde  $\hat{\mathbf{x}}_1$  y  $\hat{\mathbf{y}}$  son los estimados de los estados del sistema,  $\mathbf{sign}(\mathbf{e}) = (\mathbf{sign}(e_1), \dots, \mathbf{sign}(e_p))^T$

Ahora, la matriz  $\mathbf{L}_1$  se puede encontrar tal que la estabilidad del movimiento y la localización de los valores propios en la ecuación con respecto a la diferencia

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{x}_1 - \hat{\mathbf{x}}_1, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}},$$

sean los deseados. Las ecuaciones para  $\mathbf{e}_1$  y  $\mathbf{e}_2$  puede obtenerse de (3.105), (3.106) y (3.110)-(3.112) como

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{A}_{11}\mathbf{e}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{e}_2 + \mathbf{L}_1\mathbf{v} \quad (3.113)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{A}_{21}\mathbf{e}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{e}_2 - l_0\mathbf{sign}(\mathbf{e}_2). \quad (3.114)$$

Y si asumimos una condición inicial con dominio en el espacio  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  para un valor dado de  $l_0$  definido como

$$l_0 \geq \|\mathbf{A}_{21}\mathbf{e}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{e}_2\|$$

entonces los modos deslizantes siempre ocurrirán en (3.114) sobre la variedad

$$\mathbf{e}_2 = 0. \quad (3.115)$$

Usando el método del control equivalente es necesario resolver

$$\dot{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{A}_{21}\mathbf{e}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{e}_2 - \mathbf{v}_{eq} = 0, \quad \mathbf{e}_2 = 0$$

con respecto a  $\mathbf{v}$ ,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{eq} = \mathbf{A}_{21}\mathbf{e}_1.$$

Sustituyendo esta solución dentro de la ecuación (3.113) y tomando en cuenta (3.115), obtenemos la ecuación de modos deslizantes

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = (\mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}_1\mathbf{A}_{21})\mathbf{e}_1. \quad (3.116)$$

Entonces el par  $\{\mathbf{A}_{21}, \mathbf{A}_{11}\}$  es observable, esto es posible eligiendo la matriz  $\mathbf{L}_1$  tal que los valores propios de la matriz  $(\mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}_1\mathbf{A}_{21})$  estén ubicados en el semiplano complejo izquierdo abierto, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}_1 = 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Como resultado, el observador (3.110)-(3.111) y (3.112) determina el vector  $\mathbf{x}_1$  con exactitud. La estimación  $\hat{\mathbf{x}}_2$  del subvector  $\mathbf{x}_2$  queda incluida dentro de  $\mathbf{x}$  y se puede obtener como

$$\hat{\mathbf{x}}_2 = -\mathbf{C}_2^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{C}_1\hat{\mathbf{x}}_1). \quad (3.117)$$

Notar que este método determina  $\mathbf{x}$  básicamente de una realización con modos deslizantes de orden  $(n-p)$ .





## Capítulo 4

# Diseño de control para el motor de inducción

### 4.1 Introducción

En este capítulo aplicaremos la técnica de control por bloques con modos deslizantes establecida en el capítulo 3, para controlar dos variables del motor de inducción, cuyo modelo fue obtenido en el capítulo 2 el cual incluye saturación magnética. La principal variable que nos interesa controlar es la velocidad del rotor  $\omega_r$ . Dado que tenemos dos variables de control independientes  $u_\alpha$  y  $u_\beta$ , esto nos permite un grado de libertad extra para seleccionar una segunda salida a controlar. En nuestro caso será el módulo del flujo del rotor  $\rho_1$ , por razones que expondremos más adelante.

Como no todos los estados del motor son medibles, por razones económicas o técnicas, se hace necesario diseñar un observador por modos deslizantes que estime los flujos magnéticos del rotor y de magnetización  $\lambda_{\alpha r}$ ,  $\lambda_{\beta r}$  y  $\lambda_{m\alpha}$ ,  $\lambda_{m\beta}$ . Además se implementa un observador para el par de carga  $T_L$ .

Para aprovechar el grado de libertad extra que se tiene en el control, en este trabajo se calculan dos referencias  $\rho_{ref}$  para el módulo del flujo del rotor  $\rho_1$ . Esto, de acuerdo a una estrategia de optimización que reduce pérdidas eléctricas en el motor, mejorando así el desempeño de este dispositivo. También se analiza la estabilidad en cada caso.

### 4.2 Control de la velocidad

Primero presentamos el modelo de la planta en espacio de estados donde las variables son  $\omega_r$ ,  $\lambda_{\alpha r}$ ,  $\lambda_{\beta r}$ ,  $i_{\alpha s}$ ,  $i_{\beta s}$ ,  $\lambda_{m\alpha}$  y  $\lambda_{m\beta}$ . Dado que la velocidad del rotor que va a controlarse está en grados mecánicos, necesitamos acondicionar nuestro modelo obtenido en el capítulo 2, y esto lo logramos haciendo uso de la siguiente relación:

$$\omega_r \text{ eléctrica} = n_p \omega_r \text{ mecánica}.$$

Entonces redefinimos el modelo del motor de inducción (2.31)-(2.37) como:

$$\frac{d\omega_r}{dt} = c_1 (T_e - T_L), \quad T_e = c_2 (\lambda_{\alpha r} i_{\beta s} - \lambda_{\beta r} i_{\alpha s}) \quad (4.1)$$

$$\frac{d\lambda_{\alpha r}}{dt} = -n_p \omega_r \lambda_{\beta r} - c_3 (\lambda_{\alpha r} - \lambda_{m\alpha}) \quad (4.2)$$

$$\frac{d\lambda_{\beta r}}{dt} = n_p \omega_r \lambda_{\alpha r} - c_3 (\lambda_{\beta r} - \lambda_{m\beta}) \quad (4.3)$$

$$\frac{di_{\alpha s}}{dt} = c_{71}n_p\omega_r\lambda_{\beta r} + c_{81}\lambda_{\alpha r} - c_{81}\lambda_{m\alpha} + (c_{91} - c_5)i_{\alpha s} + (c_4 - c_{61})u_{\alpha} \quad (4.4)$$

$$\frac{di_{\beta s}}{dt} = -c_{72}n_p\omega_r\lambda_{\alpha r} + c_{82}\lambda_{\beta r} - c_{82}\lambda_{m\beta} + (c_{92} - c_5)i_{\beta s} + (c_4 - c_{62})u_{\beta} \quad (4.5)$$

$$\frac{d\lambda_{m\alpha}}{dt} = L_{ls}(-c_{71}n_p\omega_r\lambda_{\beta r} - c_{81}\lambda_{\alpha r} + c_{81}\lambda_{m\alpha} - c_{91}i_{\alpha s} + c_{61}u_{\alpha}) \quad (4.6)$$

$$\frac{d\lambda_{m\beta}}{dt} = L_{ls}(c_{72}n_p\omega_r\lambda_{\alpha r} - c_{82}\lambda_{\beta r} + c_{82}\lambda_{m\beta} - c_{92}i_{\beta s} + c_{62}u_{\beta}) \quad (4.7)$$

con los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{J_r}, \quad c_2 = \frac{3M}{2L_r}n_p, \quad c_3 = \frac{R_r}{L_{lr}}, \quad c_4 = \frac{1}{L_{ls}}, \quad c_5 = \frac{R_s}{L_{ls}}, \\ c_{61}(\lambda_{m\alpha}) &= \frac{M}{d_1L_{ls}^2}, \quad c_{71}(\lambda_{m\alpha}) = \frac{M}{d_1L_{lr}L_{ls}}, \quad c_{81}(\lambda_{m\alpha}) = \frac{MR_r}{d_1L_{lr}^2L_{ls}}, \quad c_{91}(\lambda_{m\alpha}) = \frac{MR_s}{d_1L_{ls}^2}, \\ c_{62}(\lambda_{m\beta}) &= \frac{M}{d_2L_{ls}^2}, \quad c_{72}(\lambda_{m\beta}) = \frac{M}{d_2L_{lr}L_{ls}}, \quad c_{82}(\lambda_{m\beta}) = \frac{MR_r}{d_2L_{lr}^2L_{ls}}, \quad c_{92}(\lambda_{m\beta}) = \frac{MR_s}{d_2L_{ls}^2} \end{aligned}$$

con  $d_1$  y  $d_2$  definidos como:

$$d_1(\lambda_{m\alpha}) = 1 + \frac{M}{L_{ls}} + \frac{M}{L_{lr}} + 3c\lambda_{m\alpha}^2 \quad \text{y} \quad d_2(\lambda_{m\beta}) = 1 + \frac{M}{L_{ls}} + \frac{M}{L_{lr}} + 3c\lambda_{m\beta}^2,$$

donde

- $u_{\alpha} = V_{\alpha s}$  y  $u_{\beta} = V_{\beta s}$  son los voltajes de estator en coordenadas  $(\alpha - \beta)$ ,
- $i_{\alpha s}$  y  $i_{\beta s}$  son las corrientes de estator en coordenadas  $(\alpha - \beta)$ ,
- $\lambda_{\alpha r}$  y  $\lambda_{\beta r}$  son las componentes de los flujos magnéticos del rotor en coordenadas  $(\alpha - \beta)$ ,
- $\lambda_{m\alpha}$  y  $\lambda_{m\beta}$  son las componentes de los flujos de magnetización en coordenadas  $(\alpha - \beta)$ ,
- $L_{lr}$ ,  $L_{ls}$  y  $M$  son las inductancias de dispersión de rotor y estator e inductancia de magnetización,
- $L_r$  es la inductancia propia del rotor,
- $R_r$  y  $R_s$  son las resistencias de rotor y estator,
- $n_p$  es el número de pares de polos,
- $\omega_r$  es la velocidad del rotor,
- $J_r$  es la constante de inercia del rotor,
- $T_e$  es el par electromagnético del motor,
- $T_L$  es el par mecánico de carga.

En base al capítulo 3, el diseño del controlador por modos deslizantes se divide en dos pasos. El primero consiste en formar una variedad deslizante usando la técnica de control por bloques. El segundo en proponer una ley de control discontinua diseñada para hacer esta variedad atractiva.

Suponemos que todos los parámetros, variables de estado y perturbación son conocidos. Más adelante se diseñarán observadores para estimar los flujos variables y el par de carga.

Definamos los errores de control como

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_r - \omega_{ref} \\ \varphi_1 - \varphi_{ref} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

y además las variables

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{\alpha s} \\ i_{\beta s} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{m\alpha} \\ \lambda_{m\beta} \end{bmatrix}$$

donde  $\varphi_1$  es el cuadrado de la magnitud del flujo magnético del rotor y está definido por:

$$\varphi_1 = |\psi|^2 = \lambda_{\alpha r}^2 + \lambda_{\beta r}^2,$$

y  $\omega_{ref}$  y  $\varphi_{ref}$  son señales de referencia.

Suponga que

$$\dot{T}_L = 0. \quad (4.9)$$

Entonces el sistema (4.1)-(4.7) puede ser representado en la cuasi Forma Controlable por Bloques (FCB) con perturbación y dinámica interna (ver capítulo 3):

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) + \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_1) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} + \mathbf{d}_1 T_L - \mathbf{w}_1 \quad (4.10)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) \\ \mathbf{f}_3(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2(\mathbf{x}_3) \\ \mathbf{B}_3(\mathbf{x}_3) \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (4.11)$$

donde  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)^T$ ,  $\mathbf{w}_1 = (\dot{\omega}_{ref}, \dot{\varphi}_{ref})^T$ ,  $\mathbf{u} = (u_\alpha, u_\beta)^T$ ,  $\text{rango}[\mathbf{B}_1(\mathbf{x}_1)] = 2$ ,  $\text{rango}[\mathbf{B}_2(\mathbf{x}_3)] = 2$  y  $\text{rango}[\mathbf{B}_3(\mathbf{x}_3)] = 2$  con los siguientes vectores y matrices:

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2c_3\varphi_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} -c_1c_2\lambda_{\beta r} & c_1c_2\lambda_{\alpha r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2c_3\lambda_{\alpha r} & 2c_3\lambda_{\beta r} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{71}n_p\omega_r\lambda_{\beta r} + c_{81}\lambda_{\alpha r} - c_{81}\lambda_{m\alpha} + (c_{91} - c_5)i_{\alpha s} \\ -c_{72}n_p\omega_r\lambda_{\alpha r} + c_{82}\lambda_{\beta r} - c_{82}\lambda_{m\beta} + (c_{92} - c_5)i_{\beta s} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ls}(-c_{71}n_p\omega_r\lambda_{\beta r} - c_{81}\lambda_{\alpha r} + c_{81}\lambda_{m\alpha} - c_{91}i_{\alpha s}) \\ L_{ls}(c_{72}n_p\omega_r\lambda_{\alpha r} - c_{82}\lambda_{\beta r} + c_{82}\lambda_{m\beta} - c_{92}i_{\beta s}) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} (c_4 - c_{61}) & 0 \\ 0 & (c_4 - c_{62}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} L_{ls}c_{61} & 0 \\ 0 & L_{ls}c_{62} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{J_r} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Utilizando la técnica de control por bloques para sistemas con perturbación, se define  $\mathbf{z}_1 = \mathbf{x}_1$ , con el vector  $\mathbf{z}_1 = (z_1, z_2)^T$ , introducimos la dinámica deseada  $-k_1\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2$  para el bloque (4.10) obteniendo

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) + \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_1) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} + \mathbf{d}_1 T_L - \mathbf{w}_1 = -k_1\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 \quad (4.12)$$

donde  $\mathbf{z}_2 = (z_3, z_4)^T$  es un vector de nuevas variables, y  $k_1 > 0$ . Entonces de (4.12) podemos proponer el siguiente cambio de variable

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{B}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} + \mathbf{f}_1 + \mathbf{d}_1 T_L - \mathbf{w}_1 + k_1\mathbf{x}_1.$$

Se requiere que la transformación que estamos utilizando sea no singular, por lo que definimos las siguientes variables:

$$\eta_1 = i_{\alpha s}, \quad \eta_2 = i_{\beta s} \quad \text{y} \quad \eta_3 = \lambda_{\alpha r} - \lambda_{m\alpha}.$$

Entonces vamos a representar las ecuaciones (4.10)-(4.11) en las nuevas variables  $\mathbf{z}$  y  $\boldsymbol{\eta}$  definidas como  $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)^T$   $\mathbf{z}_1 = (z_1, z_2)^T$   $\mathbf{z}_2 = (z_3, z_4)^T$  y  $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)^T$ . Estas nuevas variables representan el medio para obtener una transformación difeomórfica del sistema original al sistema en las nuevas coordenadas de la forma siguiente

$$\begin{bmatrix} \omega_r \\ \lambda_{\alpha r} \\ \lambda_{\beta r} \\ i_{\alpha s} \\ i_{\beta s} \\ \lambda_{m\alpha} \\ \lambda_{m\beta} \end{bmatrix} \xrightarrow{\phi} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix}$$

Entonces el sistema original lo expresamos en la forma no lineal controlable por bloques NCB con perturbación y dinámica cero como sigue:

$$\dot{\mathbf{z}}_1 = -k_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 \quad (4.13)$$

$$\dot{\mathbf{z}}_2 = \bar{\mathbf{f}}_2(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \boldsymbol{\eta}) + \bar{\mathbf{B}}_2(\mathbf{z}_1) \mathbf{u} + \mathbf{d}_2 T_L - k_1 \mathbf{w}_1 - \dot{\mathbf{w}}_1 \quad (4.14)$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{A}_\eta \boldsymbol{\eta} + \mathbf{B}_\eta(\mathbf{z}_1) \mathbf{u} + \mathbf{g}_\eta(\mathbf{z}, \boldsymbol{\eta}) \quad (4.15)$$

con

$$\bar{\mathbf{f}}_2 = \begin{bmatrix} \bar{f}_3 \\ \bar{f}_4 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}}_2 = \mathbf{B}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 c_2 (c_4 - c_{61}) \lambda_{\beta r} & c_1 c_2 (c_4 - c_{62}) \lambda_{\alpha r} \\ 2L_{ls} c_3 c_{61} \lambda_{\alpha r} & 2L_{ls} c_3 c_{62} \lambda_{\beta r} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{k_1}{J_r} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{f}_3 = c_1 c_2 (\lambda_{\alpha r} f_{31} + i_{\beta s} f_{32} - \lambda_{\beta r} f_{33} - i_{\alpha s} f_{34}) + k_1 f_{35},$$

$$f_{31} = -c_{72} n_p \omega_r \lambda_{\alpha r} + c_{82} \lambda_{\beta r} - c_{82} \lambda_{m\beta} + (c_{92} - c_5) i_{\beta s}, \quad f_{32} = -n_p \omega_r \lambda_{\beta r} - c_3 (\lambda_{\alpha r} - \lambda_{m\alpha}),$$

$$f_{33} = c_{71} n_p \omega_r \lambda_{\beta r} + c_{81} \lambda_{\alpha r} - c_{81} \lambda_{m\alpha} + (c_{91} - c_5) i_{\alpha s}, \quad f_{34} = n_p \omega_r \lambda_{\alpha r} - c_3 (\lambda_{\beta r} - \lambda_{m\beta}),$$

$$f_{35} = c_1 c_2 (\lambda_{\alpha r} i_{\beta s} - \lambda_{\beta r} i_{\alpha s}), \quad \bar{f}_4 = (k_1 - 2c_3) \varphi_2 + 2c_3 (\lambda_{\alpha r} f_{41} + \lambda_{m\alpha} f_{32} + \lambda_{\beta r} f_{42} + \lambda_{m\beta} f_{34}),$$

$$\varphi_2 = -2c_3 \varphi_1 + 2c_3 (\lambda_{\alpha r} \lambda_{m\alpha} + \lambda_{\beta r} \lambda_{m\beta}),$$

$$f_{41} = L_{ls} (-c_{71} n_p \omega_r \lambda_{\beta r} - c_{81} \lambda_{\alpha r} + c_{81} \lambda_{m\alpha} - c_{91} i_{\alpha s}),$$

$$f_{42} = L_{ls} (c_{72} n_p \omega_r \lambda_{\alpha r} - c_{82} \lambda_{\beta r} + c_{82} \lambda_{m\beta} - c_{92} i_{\beta s}),$$

$$\mathbf{A}_\eta = \text{diag}(-c_5, -c_5, -c_3),$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} c_{71} n_p \omega_r \lambda_{\beta r} + c_{81} \lambda_{\alpha r} - c_{81} \lambda_{m\alpha} + c_{91} i_{\alpha s} \\ -c_{72} n_p \omega_r \lambda_{\alpha r} + c_{82} \lambda_{\beta r} - c_{82} \lambda_{m\beta} + c_{92} i_{\beta s} \\ -n_p \omega_r \lambda_{\beta r} - L_{ls} (-c_{71} n_p \omega_r \lambda_{\beta r} - c_{81} \lambda_{\alpha r} + c_{81} \lambda_{m\alpha} - c_{91} i_{\alpha s}) \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{B}_\eta(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} c_4 - c_{61} & 0 \\ 0 & c_4 - c_{62} \\ -L_{ls} c_{61} & 0 \end{bmatrix}$$

La segunda parte del diseño es la selección de un control discontinuo, el cual force modos deslizantes sobre la variedad  $\mathbf{z}_2 = 0$ . La condición para que existan modos deslizantes es equivalente a la condición de estabilidad de la proyección del movimiento sobre el subespacio  $\mathbf{z}_2$ , descrito por (4.14), y será analizada a continuación.



### 4.2.1 Análisis de estabilidad de modos deslizantes

Sea

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{z}_2^T \mathbf{z}_2 \quad (4.16)$$

una función de Lyapunov candidata para el análisis de estabilidad del control por modos deslizantes. Derivando (4.16) sobre las trayectorias del sistema (4.13)-(4.14), obtenemos

$$\dot{V} = \mathbf{z}_2^T (\bar{\mathbf{f}}_2 + \mathbf{d}_2 T_L - k_1 \mathbf{w}_1 - \dot{\mathbf{w}}_1) + \mathbf{z}_2^T \bar{\mathbf{B}}_2 \mathbf{u}. \quad (4.17)$$

Podemos seleccionar el control  $\mathbf{u}$  como

$$\mathbf{u} = -U_0 \text{sign}(\bar{\mathbf{z}}_2), \quad U_0 > 0 \quad (4.18)$$

con

$$\bar{\mathbf{z}}_2 = \bar{\mathbf{B}}_2^T \mathbf{z}_2 \quad \text{y} \quad \mathbf{z}_2^T = \bar{\mathbf{z}}_2^T \bar{\mathbf{B}}_2^{-1} \quad (4.19)$$

Ahora, sustituyendo (4.18) y (4.19) en la ecuación (4.17), obtenemos

$$\dot{V} = \bar{\mathbf{z}}_2^T \bar{\mathbf{B}}_2^{-1} (\bar{\mathbf{f}}_2 + \mathbf{d}_2 T_L - k_1 \mathbf{w}_1 - \dot{\mathbf{w}}_1) - U_0 \|\bar{\mathbf{z}}_2\|_1$$

donde  $\|\bar{\mathbf{z}}_2\|_1 = \bar{\mathbf{z}}_2^T \text{sign}(\bar{\mathbf{z}}_2)$ .

Dado que  $\|\bar{\mathbf{z}}_2\|_1 \geq \|\bar{\mathbf{z}}_2\|_2$ , la derivada

$$\dot{V} \leq -\|\bar{\mathbf{z}}_2\|_2 (U_0 - \|\bar{\mathbf{B}}_2^{-1} (\bar{\mathbf{f}}_2 + \mathbf{d}_2 T_L - k_1 \mathbf{w}_1 - \dot{\mathbf{w}}_1)\|_2)$$

es definida negativa para

$$U_0 > \|\bar{\mathbf{B}}_2^{-1} (\bar{\mathbf{f}}_2 + \mathbf{d}_2 T_L - k_1 \mathbf{w}_1 - \dot{\mathbf{w}}_1)\|_2. \quad (4.20)$$

Obviamente la condición (4.20) se mantiene para todo  $T_L$  y  $\omega_{ref}$ . Por lo tanto, los modos deslizantes son forzados en el sistema en lazo cerrado (4.13-4.15) y (4.18) sobre la variedad  $\bar{\mathbf{z}}_2 = 0$  en un tiempo finito (ver el capítulo 3). y sobre  $\mathbf{z}_2 = 0$  ya que la transformación (4.19) es no singular. Una vez que existen los modos deslizantes, el movimiento sobre la variedad deslizante  $\mathbf{z}_2 = 0$  está gobernada por el sistema cuasi-lineal de quinto orden

$$\dot{\mathbf{z}}_1 = -k_1 \mathbf{z}_1 \quad (4.21)$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{A}_\eta \boldsymbol{\eta} + \mathbf{g}(\mathbf{z}_1, \boldsymbol{\eta}, T_L, \mathbf{w}_1, \dot{\mathbf{w}}_1) \quad (4.22)$$

donde  $\mathbf{g} = \mathbf{B}_\eta(\mathbf{z}) \mathbf{u}_{eq}(\mathbf{z}_1, \boldsymbol{\eta}, T_L) + \mathbf{g}_\eta(\mathbf{z}_1, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{w}_1, \dot{\mathbf{w}}_1)$ , con el control equivalente calculando de  $\dot{\mathbf{z}}_2 = 0$  como  $\mathbf{u}_{eq} = -\bar{\mathbf{B}}_2^{-1} (\bar{\mathbf{f}}_2 + \mathbf{d}_2 T_L - k_1 \mathbf{w}_1 - \dot{\mathbf{w}}_1)$ .

El sistema (4.21) corresponde a la dinámica mecánica linealizada y del flujo del rotor, y ésta es asintóticamente estable para  $k_1 > 0$ . Así, el control por modos deslizantes (4.18) se mantiene invariante en el subespacio  $\{\mathbf{z} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^3\}$ , en el espacio de estados del sistema en lazo cerrado. La dinámica de  $\boldsymbol{\eta}$  sobre este subespacio es una dinámica cero y está gobernada por

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{A}_\eta \boldsymbol{\eta} + \mathbf{g}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\eta}, T_L, \mathbf{w}_1, \dot{\mathbf{w}}_1). \quad (4.23)$$

Debido a que la matriz  $\mathbf{A}_\eta$  es Hurwitz y a que  $\mathbf{g}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\eta}, T_L, \mathbf{w}_1, \dot{\mathbf{w}}_1)$  es acotada, la solución de (4.23) converge exponencialmente al conjunto compacto definido por  $T_L, \mathbf{w}_1$  y  $\dot{\mathbf{w}}_1$  y como se mencionó en el corolario 3.2 (ver capítulo 3) la solución para el sistema (4.10)-(4.11) en lazo cerrado (4.18) es últimamente uniformemente acotado, y el error de control  $\mathbf{z}_1$  converge exponencialmente a cero.



### 4.2.2 Limitador de corrientes de arranque del motor

Como es sabido, la corriente de arranque de un motor no debe exceder un valor máximo  $I_{\max}$  de 3 a 5 veces su valor nominal, ya que de sobrepasar este valor el aislante de los devanados pueden sufrir daño, disminuyendo la eficiencia y la vida útil del motor. Por esta razón se implementa un limitador de corriente por modos deslizantes de la siguiente forma:

$$\mathbf{u}_2 = -U_0 \text{sign}[\mathbf{B}_2^T(\mathbf{x}_3)\mathbf{x}_2], \quad U_0 > 0 \quad (4.24)$$

cuando  $|I_s| > I_{\max}$ ,  $I_s = (i_{\alpha s}, i_{\beta s})^T$ . donde  $I_{\max}$  es el valor máximo del modulo de la corriente. En este caso la derivada de  $V = \frac{1}{2}\mathbf{x}_2^T\mathbf{x}_2$  sobre las trayectorias del sistema (4.11) con el control (4.24)

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{x}_2^T \mathbf{B}_2(\mathbf{x}_3) \mathbf{B}_2^{-1}(\mathbf{x}_3) \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) - U_0 \mathbf{x}_2^T \mathbf{B}_2(\mathbf{x}_3) \text{sign}[\mathbf{B}_2^T(\mathbf{x}_3)\mathbf{x}_2] \\ &\leq \|\mathbf{B}_2^T(\mathbf{x}_3)\mathbf{x}_2\|_2 \|\mathbf{B}_2^{-1}(\mathbf{x}_3)\mathbf{f}_2(\mathbf{x})\|_2 - U_0 \|\mathbf{B}_2^T(\mathbf{x}_3)\mathbf{x}_2\|_1 \\ &\leq -\|\mathbf{B}_2^T(\mathbf{x}_3)\mathbf{x}_2\|_2 (U_0 - \|\mathbf{B}_2^{-1}(\mathbf{x}_3)\mathbf{f}_2(\mathbf{x})\|_2) \end{aligned}$$

es negativa si

$$U_0 > \|\mathbf{B}_2^{-1}(\mathbf{x}_3)\mathbf{f}_2(\mathbf{x})\|_2. \quad (4.25)$$

Por lo tanto, la norma del vector  $[\mathbf{B}_2^T(\mathbf{x}_3(t))\mathbf{x}_2(t)]$  disminuye. Debido a que la matriz  $\mathbf{B}_2(\mathbf{x}_3)$  es no singular, la norma del vector  $\mathbf{x}_2(t)$  disminuye también.

Quedando entonces la siguiente ley de control compuesta expresada en (4.18) y (4.24):

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \mathbf{u}_1 & \text{si } |\mathbf{x}_2| \leq I_{\max} \\ \mathbf{u}_2 & \text{si } |\mathbf{x}_2| > I_{\max} \end{cases} \quad (4.26)$$

donde

$$\mathbf{u}_1 = -U_0 \text{sign}(\bar{\mathbf{B}}_2^T \mathbf{z}_2). \quad (4.27)$$

Cuando ocurre un proceso transitorio, ya sea por perturbaciones o al arranque del motor, el módulo de corriente puede exceder el valor máximo  $I_{\max}$ , en este caso aplicamos el control (4.24) con lo cual bajo la condición (4.25) aparecen modos deslizantes sobre la variedad

$$|\mathbf{x}_2| - I_{\max} = 0,$$

donde el par eléctrico será máximo, con lo que las corrientes del estator no sobrepasarán el valor límite  $I_{\max}$ . Una vez pasado el transitorio el módulo de la corriente disminuye su valor tal que  $|\mathbf{x}_2| < I_{\max}$ , en este caso aplicamos el control  $\mathbf{u}_1$  (4.27), y bajo la condición (4.20) hay modos deslizantes sobre la variedad

$$\mathbf{z}_2 = 0.$$

El movimiento en modos deslizantes sobre esta variedad es asintóticamente estable como se demostró anteriormente. Como resultado, tenemos  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z}_1(t) = 0$ . Entonces el error de control (4.8) tiende exponencialmente a cero.

## 4.3 Diseño del observador

Suponemos que las corrientes del estator  $i_{\alpha s}$  e  $i_{\beta s}$  y la velocidad  $\omega_r$  son medibles. El problema ahora es la estimación de los flujos del rotor  $\lambda_{\alpha r}$  y  $\lambda_{\beta r}$ , los flujos de magnetización  $\lambda_{m\alpha}$  y  $\lambda_{m\beta}$  y el par de carga  $T_L$ .

### 4.3.1 Observador de flujos con modos deslizantes

Para la estimación de los flujos usamos la técnica de diseño de observadores con entradas discontinuas que se propone en el capítulo 3. El modelo del motor de inducción (4.2)-(4.7) puede ser reescrito en la forma (3.96) y (3.97) como

$$\frac{d\lambda_{\alpha r}}{dt} = -n_p \omega_r \lambda_{\beta r} - c_3 (\lambda_{\alpha r} - \lambda_{m\alpha}) \quad (4.28)$$

$$\frac{d\lambda_{\beta r}}{dt} = n_p \omega_r \lambda_{\alpha r} - c_3 (\lambda_{\beta r} - \lambda_{m\beta}) \quad (4.29)$$

$$\frac{d\lambda_{m\alpha}}{dt} = F_1 \quad (4.30)$$

$$\frac{d\lambda_{m\beta}}{dt} = F_2 \quad (4.31)$$

$$\frac{di_{\alpha s}}{dt} = c_4 V_{\alpha s} - c_5 i_{\alpha s} - c_4 F_1 \quad (4.32)$$

$$\frac{di_{\beta s}}{dt} = c_4 V_{\beta s} - c_5 i_{\beta s} - c_4 F_2, \quad (4.33)$$

donde

$$F_1 = L_{ls} (-c_{71} n_p \omega_r \lambda_{\beta r} - c_{81} \lambda_{\alpha r} + c_{81} \lambda_{m\alpha} - c_{91} i_{\alpha s} + c_{61} V_{\alpha s})$$

y

$$F_2 = L_{ls} (c_{72} n_p \omega_r \lambda_{\alpha r} - c_{82} \lambda_{\beta r} + c_{82} \lambda_{m\beta} - c_{92} i_{\beta s} + c_{62} V_{\beta s}).$$

Entonces en este caso el vector de la salida es  $\mathbf{y} = (i_{\alpha s}, i_{\beta s})^T$  y el vector que es necesario estimar es

$\mathbf{x}_1 = (\lambda_{\alpha r}, \lambda_{\beta r}, \lambda_{m\alpha}, \lambda_{m\beta})^T$ . El observador propuesto para estimar los flujos tiene la siguiente forma:

$$\frac{d\hat{\lambda}_{\alpha r}}{dt} = -n_p \omega_r \hat{\lambda}_{\beta r} - c_3 (\hat{\lambda}_{\alpha r} - \hat{\lambda}_{m\alpha}) \quad (4.34)$$

$$\frac{d\hat{\lambda}_{\beta r}}{dt} = n_p \omega_r \hat{\lambda}_{\alpha r} - c_3 (\hat{\lambda}_{\beta r} - \hat{\lambda}_{m\beta}) \quad (4.35)$$

$$\frac{d\hat{\lambda}_{m\alpha}}{dt} = l_0 v_1 \quad (4.36)$$

$$\frac{d\hat{\lambda}_{m\beta}}{dt} = l_0 v_2 \quad (4.37)$$

$$\frac{d\hat{i}_{\alpha s}}{dt} = c_4 V_{\alpha s} - c_5 \hat{i}_{\alpha s} - v_1 \quad (4.38)$$

$$\frac{d\hat{i}_{\beta s}}{dt} = c_4 V_{\beta s} - c_5 i_{\beta s} - v_2 \quad (4.39)$$

donde  $\hat{\lambda}_{\alpha r}$ ,  $\hat{\lambda}_{\beta r}$ ,  $\hat{\lambda}_{m\alpha}$ ,  $\hat{\lambda}_{m\beta}$ ,  $\hat{i}_{\alpha s}$  e  $\hat{i}_{\beta s}$  son las estimaciones de flujos y de corrientes y  $l_0$  es un parámetro que definiremos más adelante. Elegimos las entradas del observador  $v_1$  y  $v_2$  usando el control unitario [11], como

$$v_1 = -l_1 \frac{\varepsilon_{\alpha s}}{|\varepsilon_{\alpha s}| + \delta} \text{ y } v_2 = -l_2 \frac{\varepsilon_{\beta s}}{|\varepsilon_{\beta s}| + \delta} \quad (4.40)$$

con  $l_1$  y  $l_2 > 0$  y  $\delta$  es una pequeña constante. La estabilidad del observador (4.34)-(4.39) con las entradas (4.40) puede ser analizada examinando las dinámicas de los errores de estimación de flujos  $\varepsilon_{\alpha r} = \lambda_{\alpha r} - \hat{\lambda}_{\alpha r}$ ,  $\varepsilon_{\beta r} = \lambda_{\beta r} - \hat{\lambda}_{\beta r}$ ,  $\varepsilon_{m\alpha} = \lambda_{m\alpha} - \hat{\lambda}_{m\alpha}$ ,  $\varepsilon_{m\beta} = \lambda_{m\beta} - \hat{\lambda}_{m\beta}$ , y de corrientes  $\varepsilon_{\alpha s} = i_{\alpha s} - \hat{i}_{\alpha s}$  y  $\varepsilon_{\beta s} = i_{\beta s} - \hat{i}_{\beta s}$ . Entonces de (4.28)-(4.40) tenemos que

$$\dot{\varepsilon}_{\alpha r} = -n_p \omega_r \varepsilon_{\beta r} - c_3 (\varepsilon_{\alpha r} - \varepsilon_{m\alpha}) \quad (4.41)$$

$$\dot{\varepsilon}_{\beta r} = n_p \omega_r \varepsilon_{\alpha r} - c_3 (\varepsilon_{\beta r} - \varepsilon_{m\beta}) \quad (4.42)$$

$$\dot{\varepsilon}_{m\alpha} = F_1 - l_0 v_1 \quad (4.43)$$

$$\dot{\varepsilon}_{m\beta} = F_2 - l_0 v_2 \quad (4.44)$$

$$\dot{\varepsilon}_{\alpha s} = -c_4 F_1 + v_1, \quad v_1 = -l_1 \frac{\varepsilon_{\alpha s}}{|\varepsilon_{\alpha s}| + \delta} \quad (4.45)$$

$$\dot{\varepsilon}_{\beta s} = -c_4 F_2 + v_2, \quad v_2 = -l_2 \frac{\varepsilon_{\beta s}}{|\varepsilon_{\beta s}| + \delta}. \quad (4.46)$$

Si  $l_1 > |c_4 F_1|$ , y  $l_2 > |c_4 F_2|$ , entonces ocurrirán modos deslizantes en (4.45) y (4.46) sobre

$$\varepsilon_{\alpha s} = 0 \quad \text{y} \quad \varepsilon_{\beta s} = 0$$

después de un tiempo finito. Por lo tanto, después de este tiempo, tenemos

$$\dot{\varepsilon}_{\alpha s} = -c_4 F_1 + v_1 = 0$$

$$\dot{\varepsilon}_{\beta s} = -c_4 F_2 + v_2 = 0.$$

Resolviendo estas ecuaciones sobre  $v_1$  y  $v_2$ , obtenemos

$$v_1 = v_{1eq} = c_4 F_1 \quad (4.47)$$

$$v_2 = v_{2eq} = c_4 F_2 \quad (4.48)$$

Sustituimos (4.47) y (4.48) en (4.43)-(4.44), y definimos el parámetro  $l_0 = \frac{1}{c_4}$ . Entonces las dinámicas de los errores de estimación de flujos (4.41)-(4.44) están gobernadas por

$$\dot{\varepsilon}_{\alpha r} = -n_p \omega_r \varepsilon_{\beta r} - c_3 (\varepsilon_{\alpha r} - \varepsilon_{m\alpha}),$$

$$\dot{\varepsilon}_{\beta r} = n_p \omega_r \varepsilon_{\alpha r} - c_3 (\varepsilon_{\beta r} - \varepsilon_{m\beta}),$$

$$\dot{\varepsilon}_{m\alpha} = 0$$

$$\dot{\varepsilon}_{m\beta} = 0.$$

Es evidente que este sistema es estable. Los valores estimados obtenidos en (4.34)-(4.39) son utilizados en la ley de control (4.26), (4.24) y (4.27) reemplazando a las variables reales.

### 4.3.2 Observador del par de carga $T_L$

Suponiendo que tenemos información sobre los flujos  $\lambda_{\alpha r}$  y  $\lambda_{\beta r}$  a partir de (4.34)-(4.39), el observador de la carga puede ser diseñado como sigue

$$\frac{d\hat{\omega}_r}{dt} = c_1 \left( c_2 (\lambda_{\alpha r} i_{\beta s} - \lambda_{\beta r} i_{\alpha s}) - \hat{T}_L \right) + l_3 (\omega_r - \hat{\omega}_r) \quad (4.49)$$

$$\frac{d\hat{T}_L}{dt} = l_4(\omega_r - \hat{\omega}_r) \quad (4.50)$$

donde  $\hat{\omega}_r$  y  $\hat{T}_L$  son los valores estimados. El sistema de errores de estimación  $\varepsilon_{\omega_r} = \omega_r - \hat{\omega}_r$  y  $\varepsilon_{T_L} = T_L - \hat{T}_L$  se puede obtener de (4.1), (4.9), (4.49) y (4.50), como

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{\omega_r} &= -l_3\varepsilon_{\omega_r} - c_1\varepsilon_{T_L} \\ \dot{\varepsilon}_{T_L} &= -l_4\varepsilon_{\omega_r}. \end{aligned}$$

Las ganancias del observador  $l_3$  y  $l_4$  son elegidas tal que el sistema lineal de errores de estimación sea asintóticamente estable.

## 4.4 Algoritmos de cuasi optimización del desempeño del controlador

En esta sección proponemos dos algoritmos para optimizar el funcionamiento del sistema de control, reduciendo pérdidas eléctricas en el motor. Para esto, definiremos dos señales de referencia  $\psi_{ref}$  para el módulo del flujo del rotor  $\rho_1$ , que realicen un mejor desempeño que cuando  $\psi_{ref}$  se elige arbitrariamente como un valor constante.

### 4.4.1 Algoritmo de control para el ángulo $\alpha$ .

Conocemos que la eficiencia de un motor determinado es fuertemente influenciada por el par electromecánico que produce, el cual puede expresarse como

$$T_e = c_2(\lambda_{\alpha r}i_{\beta s} - \lambda_{\beta r}i_{\alpha s}),$$

o también en estado estable como

$$T_e = I_s\psi_r \text{sen}(\alpha) \quad (4.51)$$

donde  $\alpha$  es el ángulo entre el módulo de corriente del estator  $I_s$  y el módulo del flujo del rotor  $\psi_r$ , los cuales están definidos como sigue:

$$\begin{aligned} I_s &= \sqrt{i_{\alpha s}^2 + i_{\beta s}^2} \\ \psi_r &= \sqrt{\lambda_{\alpha r}^2 + \lambda_{\beta r}^2}. \end{aligned}$$

A continuación se propone un valor de referencia para la magnitud del flujo del rotor  $\psi_r$

$$\psi_{ref} = \frac{T_L}{I_s} \quad (4.52)$$

cuyo objetivo es mantener el ángulo  $\alpha$  en (4.51) a  $90^\circ$ . Esta señal de referencia trae como beneficio obtener en estado estable el máximo valor de par electromagnético para un módulo de corriente del estator  $I_s$  y un módulo del flujo del rotor  $\psi_r$  dados, lo que significa un mejor desempeño en el motor. Para suavizar la señal de referencia (4.52), elegimos la referencia  $\varphi_{ref}$  en (4.8) como la salida de un filtro de primer orden

$$\tau\dot{\varphi}_{ref} + \varphi_{ref} = \psi_{ref}^2, \quad \psi_{ref} = \frac{T_L}{I}$$

con una pequeña constante de tiempo  $\tau$ .

A continuación proponemos otro valor de referencia para el módulo del flujo del rotor que disminuye las corrientes del estator para una carga dada.



#### 4.4.2 Un algoritmo heurístico para disminuir la magnitud de la corriente del estator.

Para obtener un flujo de referencia que disminuya las corrientes demandadas por el motor, se hacen simulaciones para diferentes valores del motor como son, las referencias de la velocidad y del flujo del rotor, además de la carga del motor. Entonces, para cada una de estas combinaciones, se obtiene la demanda de corriente mínima. Estos resultados se muestran en la tabla 4.1

Tabla 4.1 Señales de referencia variable.

$\omega_{ref}$	$T_L$	$I_s$	$\psi_{ref}$
150	2	2.9	0.3
150	4	5	0.4
150	6	7	0.5
100	2	2.7	0.3
100	4	5	0.4
100	6	6.7	0.42
50	2	2.6	0.3
50	4	4.6	0.4
50	6	6.8	0.49

En la tabla 4.1 observamos que los valores para el flujo de referencia  $\psi_{ref}$  con los que se obtiene una demanda de corriente mínima dada una carga, aproximadamente coinciden para las diferentes velocidades de referencia, por lo que se consideró una velocidad constante de 100 rad/seg, variando la carga  $T_L$  de 1 a 6 Nm obteniendo los valores mostrados en la tabla 4.2.

Tabla 4.2 Obtención del módulo de corriente mínimo.

$\omega_{ref}$	$T_L$	$I$	$\psi_{ref}$
100	1	1.7	0.2
100	2	2.8	0.3
100	3	3.8	0.3
100	4	4.9	0.4
100	5	5.8	0.41
100	6	6.6	0.42

Finalmente calculamos una función que se aproxime a estos valores, dando como resultado la siguiente expresión, la cual depende de la carga aplicada al motor:

$$\psi_{ref} = aT_L^b \quad (4.53)$$

donde

$$\begin{aligned} a &= 0.20988 \\ b &= 0.41069 \\ corr &= 0.96349 \\ n &= 2.03 \end{aligned}$$

En el capítulo siguiente comparamos las respuestas obtenidas con una señal de referencia arbitraria para  $\rho_1$  y con las propuestas en esta tesis.



# Capítulo 5

## Resultados del sistema de control

### 5.1 Introducción

En este capítulo se presentan los resultados de las simulaciones de la dinámica del motor de inducción, así como de la respuesta en lazo cerrado utilizando el controlador por modos deslizantes desarrollado en el capítulo 4. Los resultados nos demuestran la efectividad del algoritmo de control propuesto. Se mostrará la dinámica de la máquina con y sin saturación, y sus efectos.

Las simulaciones fueron hechas en simulink de matlab, con un paso de integración de  $1 \times 10^{-4}$  segundos con la técnica de integración de Dormand-Prince.

#### 5.1.1 Parámetros de la máquina

La potencia del motor es de 0.25 C.P., con una frecuencia de alimentación de 60 Hz y un voltaje rms de 220/440 V.

Los valores de los parámetros eléctricos y mecánicos del motor son los siguientes:  $R_s = 14\Omega$ ,  $R_r = 10.1\Omega$ ,  $L_s = 0.4H$ ,  $L_r = 0.4128H$ ,  $M = 0.377H$ ,  $J = 0.01Kgm^2$ ,  $n_p = 2$ . Donde  $L_s$  y  $L_r$  son las inductancias propias de estator y de rotor respectivamente, y están definidas como  $L_s = L_{ls} + M$ ,  $L_r = L_{lr} + M$ . El valor de  $c = 15$  nos sirve para aproximar la curva de saturación del motor.

### 5.2 Dinámica del motor

#### 5.2.1 Dinámica del motor sin saturación

En las Figuras 5.1-5.3 se muestra la dinámica de las variables del motor sin tomar en cuenta la saturación magnética.

En la Figura 5.1 observamos que la velocidad del motor  $w_r$  alcanza su valor nominal de  $188.5 \text{ rad/seg}$  en un tiempo de  $1.2 \text{ seg}$  con una carga inicial de  $T_L = 0 \text{ Nm}$ , que al ser incrementada a  $1 \text{ Nm}$  en  $1.5 \text{ seg}$ , origina una disminución en la velocidad del motor. El módulo del flujo del rotor  $f_{mod1}$  y de la corriente del estator  $i_{mod}$  también se ven afectados por la carga  $T_L$  y alcanzan un valor constante después de que el motor alcanza el estado estacionario.

Los flujos magnéticos del rotor  $f_{ar}$  y  $f_{br}$  y los de magnetización  $f_{ma}$  y  $f_{mb}$  se muestran en la Figura 5.2. Además, observamos que las corrientes del estator y del rotor  $i_{as}$ ,  $i_{bs}$  e  $i_{ar}$ ,  $i_{br}$  aumentan al aplicar la carga; mientras que las corrientes de magnetización  $i_{ma}$  e  $i_{mb}$  disminuyen como se muestra en la Figura 5.3, donde podemos observar la curva de magnetización, la cual es lineal, es decir que no existe saturación magnética. En esta Figura se presentan los voltajes aplicados a las terminales del estator  $V1$  y  $V2$  los cuales son señales senoidales con una amplitud de  $180 \text{ V}$  y una frecuencia de  $60 \text{ Hz}$ .

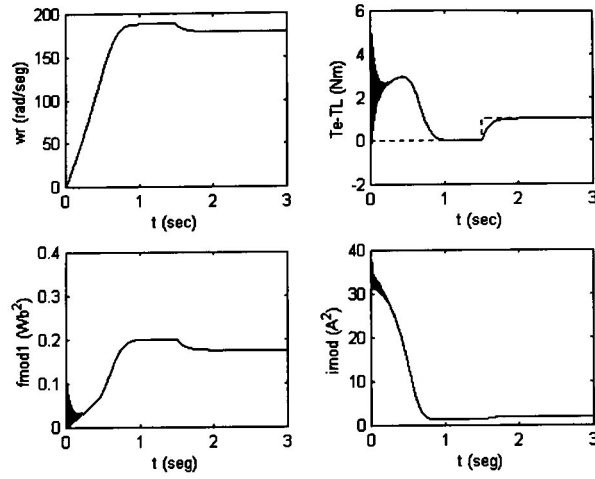


Figura 5.1: Módulos de flujo y corriente sin saturación.

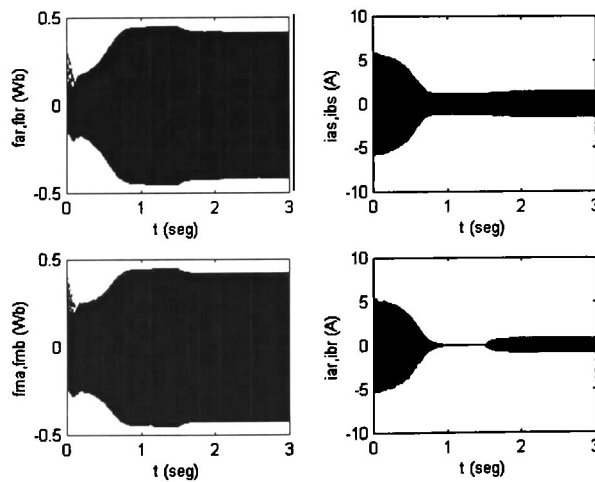


Figura 5.2: Dinámica de flujos y corrientes sin saturación.

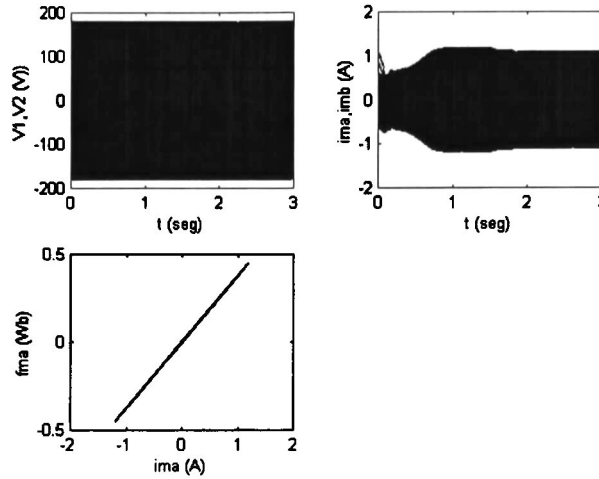


Figura 5.3: Curva de magnetización sin saturación.

### 5.2.2 Dinámica del motor con saturación

Cuando incluimos la saturación magnética en el modelo, se observan cambios en el comportamiento del motor; por ejemplo en la Figura 5.4 el módulo del flujo del rotor  $f_{mod1}$  disminuye al incluir saturación, mientras que el módulo de la corriente aumenta. La velocidad del rotor permanece prácticamente sin cambios al igual que el par electromecánico del motor  $T_e$ <sup>1</sup>. En comparación con el caso lineal, en la Figura 5.5 observamos una disminución en la amplitud de los flujos magnéticos y un incremento en las corrientes, lo cual indica que el efecto de saturación magnética disminuye los campos magnéticos. En la Figura 5.6 se tiene el mismo voltaje de alimentación; las corrientes de magnetización son mayores que cuando no se tiene saturación magnética y la curva de magnetización es no lineal.

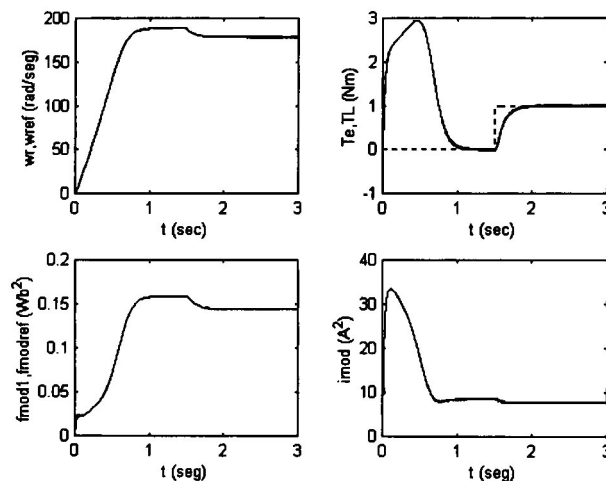


Figura 5.4: Módulos de flujo y corriente con saturación.

<sup>1</sup>Se observa ruido debido a las altas no linealidades que son incluidas en la simulación y al paso de integración el cual debería ser lo suficientemente pequeño para quitar este ruido.

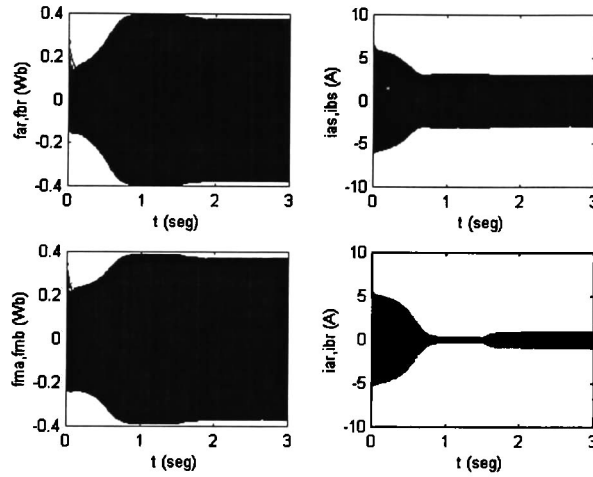


Figura 5.5: Dinámica de flujos y corrientes con saturación.

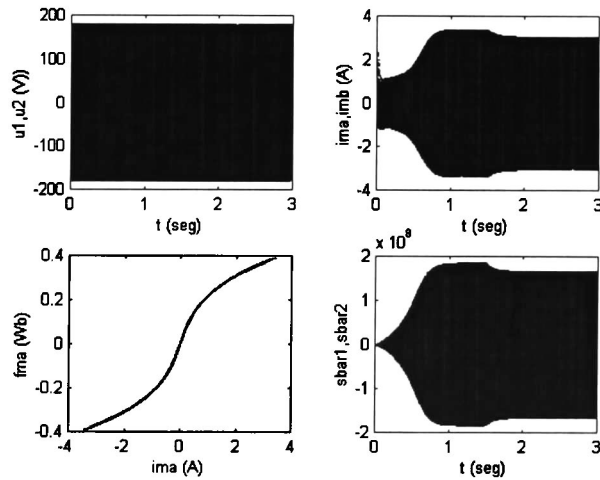


Figura 5.6: Curva de magnetización con saturación.

### 5.3 Respuesta en lazo cerrado

A continuación se presenta la respuesta en lazo cerrado, teniendo todos los estados disponibles.

En las Figuras 5.7-5.9 se muestra la efectividad de nuestro algoritmo de control con sus ganancias ajustadas de la manera siguiente:  $k_1 = 10000$  y  $U_0 = 220$  V.

En la Figura 5.7 se observa que la velocidad de referencia  $wref$  es alcanzada en un tiempo aproximado de 0.11 segundos, teniendo una carga constante  $T_L$  de  $1$  Nm. La referencia del módulo del flujo del rotor  $fmodref$ , tiene un valor arbitrario fijo de  $0.15$   $Wb^2$ , que es alcanzado satisfactoriamente. También podemos observar el módulo de la corriente del motor  $imod$ , que se mantiene prácticamente constante cuando el motor está en estado estacionario.

En la Figura 5.8 vemos los flujos de rotor  $far$ ,  $fbr$  y de magnetización  $fma$ ,  $fmb$  al igual que las corrientes del estator  $ias$ ,  $ibs$  y del rotor  $iar$ ,  $ibr$ . En todos estos casos vemos que las componentes del eje  $\beta$  están desfasadas  $90^\circ$  de las componentes del eje  $\alpha$ .

En la Figura 5.9 tenemos las variables de control discontinuo  $u_1$  y  $u_2$ , las corrientes de magnetización y la curva de saturación así como la variedad de deslizamiento  $\bar{z}_2$ .

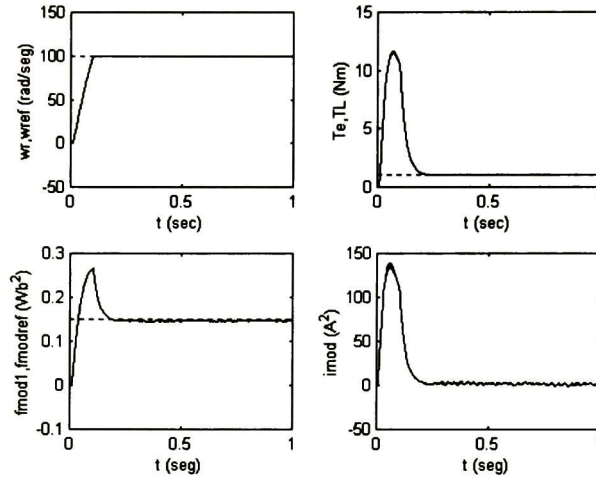


Figura 5.7: Seguimiento de señales de referencia.

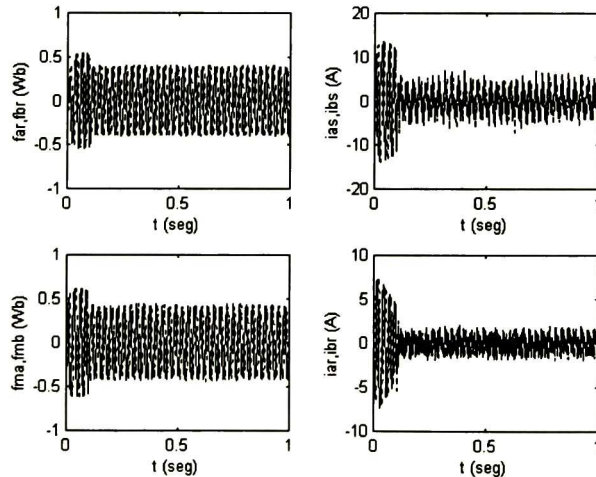


Figura 5.8: Dinámica de flujos y corrientes.



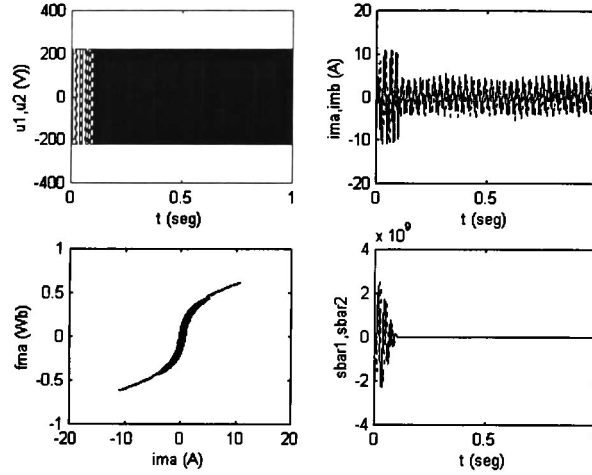


Figura 5.9: Entradas de control.

### 5.3.1 Limitador de corrientes

En las Figuras 5.10-5.11 se muestra la efectividad al usar el limitador de corriente desarrollado en el capítulo 4.

En la Figura 5.10 podemos ver cómo la corriente de arranque sobrepasa el valor máximo permitido que es de 16 ampers, que representa 5 veces su corriente nominal, alcanzando un valor pico de 28 ampers, lo que podría ocasionar un daño en el aislamiento del motor. La velocidad de referencia es seguida satisfactoriamente y en un tiempo relativamente rápido de 0.06 segundos. El par eléctrico tiene un valor pico de 27.8 Nm y se estabiliza en el valor de la carga  $T_L$  que es de 10 Nm. Se muestran también las entradas de control  $u_1$  y  $u_2$  que conmutan entre  $\pm 440$  volts.

Al aplicar en el control el limitador de corrientes mencionado en (4.24), obtenemos buen resultado en el seguimiento de la velocidad de referencia  $w_{ref}$  como se muestra en la Figura 5.11, aunque ésta es alcanzada en 0.14 segundos, 0.08 segundos más tarde que en el primer caso. Las corrientes de arranque son mantenidas por debajo del límite  $I_{max}$ , lo cual representa una protección para el motor. El valor pico del par eléctrico se reduce a 19.5 Nm con la misma carga aplicada; los controles  $u_1$  y  $u_2$  conservan la magnitud de sus valores pero aumentan su frecuencia de conmutación para poder controlar las variables  $w_r$  y  $f_{mod1}$ .

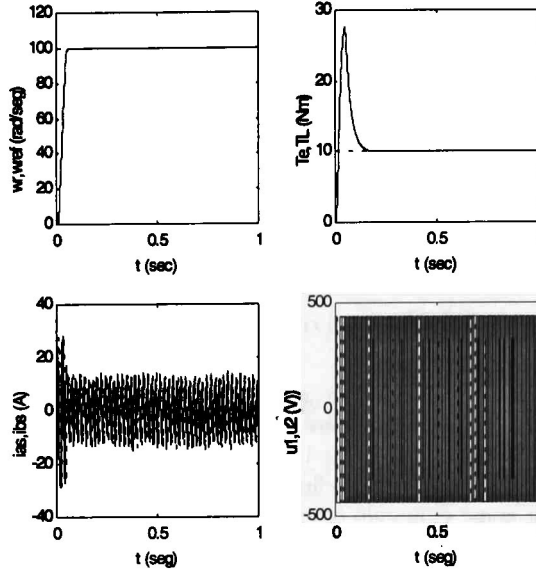


Figura 5.10: Corrientes del estator sin limitar.

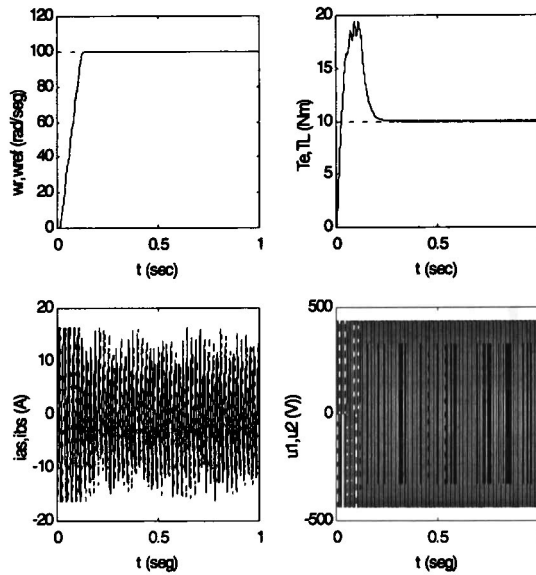


Figura 5.11: Corrientes del estator limitadas.

### 5.3.2 Control para el ángulo $\alpha$

Con base en los conceptos descritos en el capítulo 4, en la parte de optimización del desempeño del controlador, primero presentamos los resultados del control para mantener el ángulo  $\alpha$  a  $90^\circ$  y posteriormente el control que reduce el módulo de la corriente  $I_s$ .

Recordamos que los módulos de flujo y corriente están dados de la siguiente forma:

$$I_s = \sqrt{i_{\alpha s}^2 + i_{\beta s}^2}, \quad \psi_r = \sqrt{\lambda_{\alpha r}^2 + \lambda_{\beta r}^2}$$

Los parámetros del motor y las ganancias del controlador mantienen los mismos valores.

En la Figura 5.12 vemos que la velocidad de referencia es seguida por la velocidad del rotor cuando se aumenta la carga de 1 a 2 Nm. También podemos observar que el módulo del flujo de referencia  $f_{modref}$  es seguido por  $f_{mod1}$ , el cual varía dependiendo de la carga aplicada a la flecha del motor y del módulo de la corriente  $i_{mod}$ . En la Figura 5.13 se muestran los flujos del rotor y de magnetización junto con las corrientes del estator. También podemos ver como el ángulo  $\alpha$  se mantiene cerca de los  $90^\circ = \frac{\pi}{2} = 1.5708 \text{ rad}$ . Finalmente en la Figura 5.14 vemos los controles  $u_1$  y  $u_2$ , las corrientes de magnetización junto con su curva y la variedad deslizante.

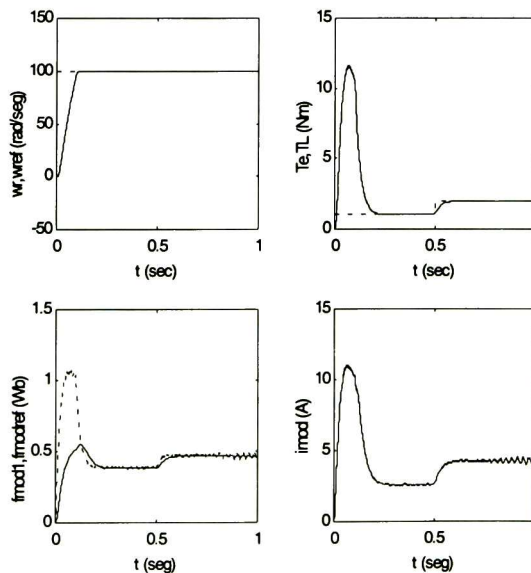


Figura 5.12: Flujo de referencia para el control del ángulo  $\alpha$ .

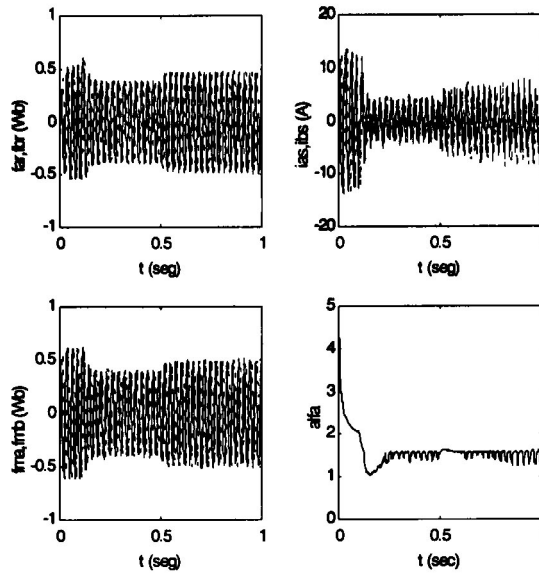


Figura 5.13: Dinámica del ángulo  $\alpha$ .

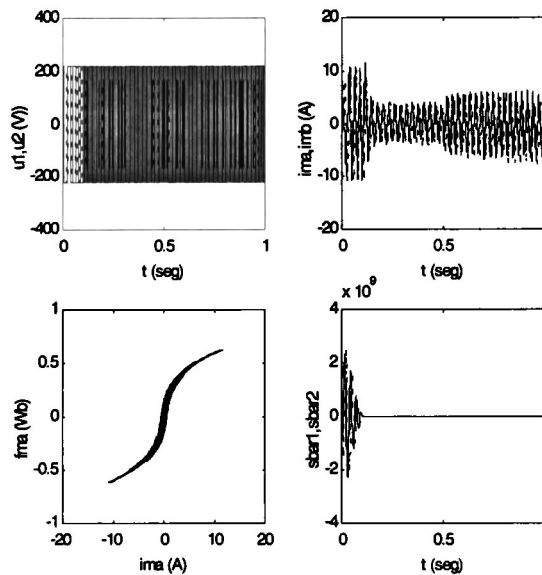


Figura 5.14: Entradas de control.

### 5.3.3 Algoritmo para disminuir $I_s$ .

Como se describe en el capítulo 4, buscamos un  $\varphi_{ref}$  que disminuya la corriente demandada por el motor a la fuente de alimentación. Con este propósito, se realizaron simulaciones bajo diferentes condiciones de carga y valores de referencia para la velocidad del rotor y para el módulo del flujo del rotor. De esta manera,

se determinaron los valores del  $\varphi_{ref}$  que ofrecen valores mínimos de la corriente del estator  $I_s$ , dadas las condiciones descritas.

Los resultados se muestran en las Figuras 5.15-5.16, en donde puede observarse que no hay gran diferencia respecto a la selección de la velocidad de referencia; por lo que ésta se elige a 100 rad/seg. Entonces variamos la carga  $T_L$  de 1 a 6 Nm y el flujo de referencia en escalones como se muestra en la Figura 5.17.

Del análisis de los resultados se determinó una expresión para  $\varphi_{ref}$ , ecuación (4.53), en términos de la carga  $T_L$ . Las gráficas donde se muestra la efectividad de este algoritmo se presentan en las Figuras (5.18-5.21) donde tenemos que en la Figura 5.18  $\omega_r$  sigue a  $\omega_{ref}$  para diferentes valores de la carga  $T_L$ . Los cambios de carga modifican  $\varphi_{ref}$  (fmodref) el cual es seguido por  $\varphi_1$  (fmod1), manteniendo un valor bajo para  $I_s$  ( $i_{mod}$ ). En las Figuras 5.19-5.20 se muestran la dinámica de las corrientes y flujos, así como las entradas de control y la variedad de deslizamiento. En la Figura 5.21 se compara la magnitud de la corriente  $I$ , utilizando el flujo de referencia en escalones y el flujo de referencia propuesto.

El desempeño de los dos algoritmos de optimización para una  $\omega_{ref} = 100$  rad/seg y una carga  $T_L = 2$  Nm, se observa en la Figura 5.12, donde el módulo de la corriente es de 4.25 amperios aproximadamente, con un flujo de referencia de 0.48 Wb; mientras que en la Figura 5.18 estos valores son de 2.8 amperios y 0.28 Wb respectivamente, lo que demuestra la efectividad del control para reducir el módulo de la corriente del estator.

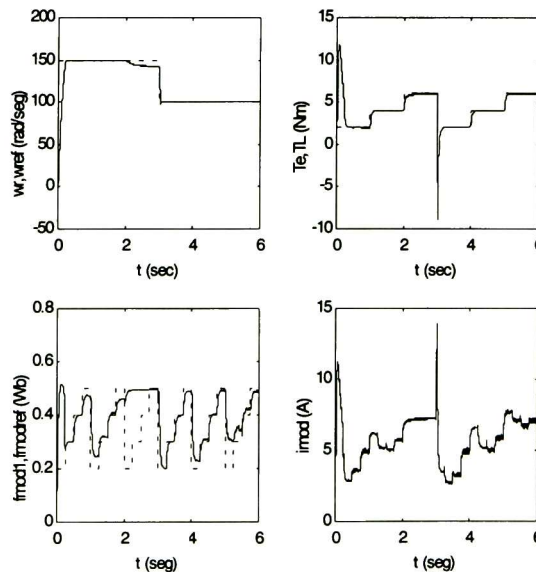


Figura 5.15: Señales de referencia variable 1.



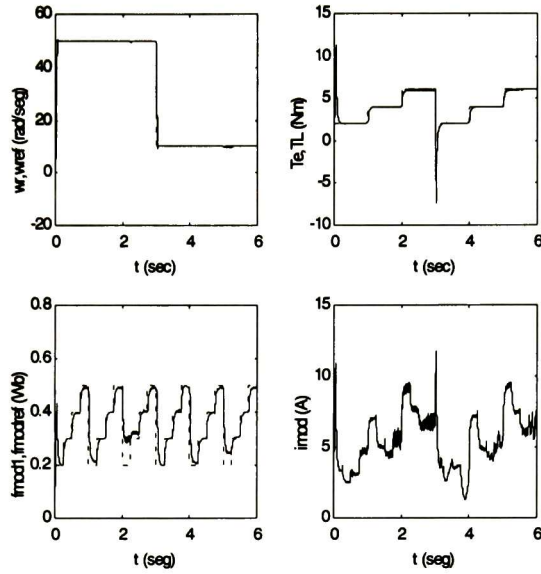


Figura 5.16: Señales de referencia variable 2.

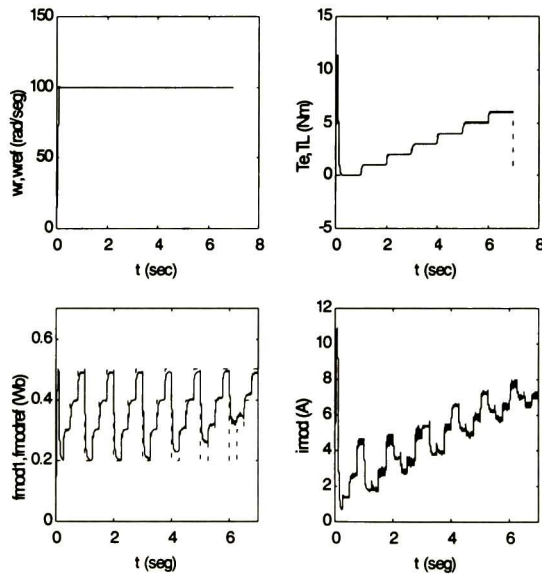


Figura 5.17: Obtención de la corriente mínima.

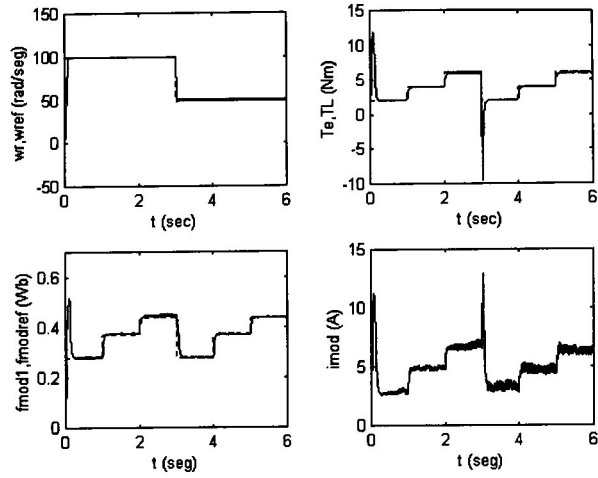


Figura 5.18: Seguimiento de las señales de referencia.

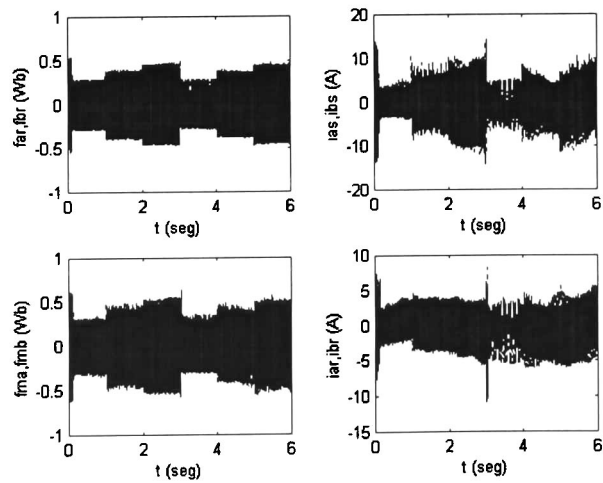


Figura 5.19: Dinámica de flujos y corrientes.

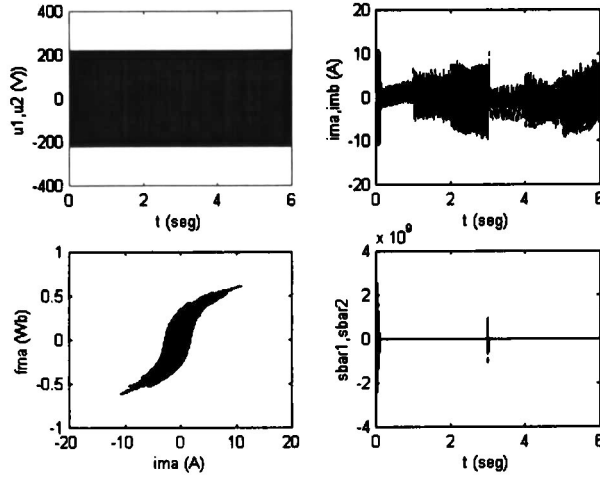


Figura 5.20: Entradas de control.

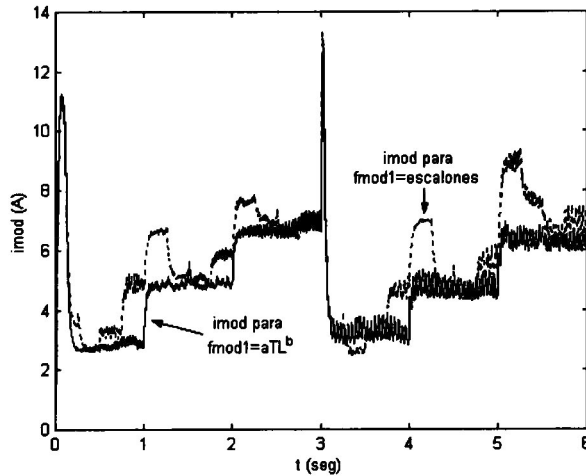


Figura 5.21: Comparación de flujos de referencia.

## 5.4 Observador de estados y del par de carga

Las ganancias del observador las ajustamos a  $l_1 = l_2 = 8000$ ,  $l_3 = 500$  y  $l_4 = -500$ , el valor de delta es  $\delta = 0.00001$ . Todas las condiciones iniciales del motor y del observador son cero.

En la Figura 5.22 vemos que  $\omega_r$  es seguido por su estimado con un error de seguimiento muy pequeño al igual que la carga  $T_L$  y su estimado  $T_{Lo}$ . En la Figura 5.23 se muestran los flujos magnéticos y sus estimados. Las entradas del observador se muestran en la Figura 5.24 donde se puede ver que son discontinuas. Finalmente en la Figura 5.25, vemos los errores de seguimiento de los flujos magnéticos.<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Los errores de observación de corrientes de estator deben ser cero, ya que éstas se pueden medir. Sin embargo es difícil llevarlos a cero debido a las entradas discontinuas  $v_{v1}$  y  $v_{v2}$  y a las dinámicas no lineales del sistema. El observador por modos deslizantes nos permite tener muy buenas aproximaciones de los valores reales.

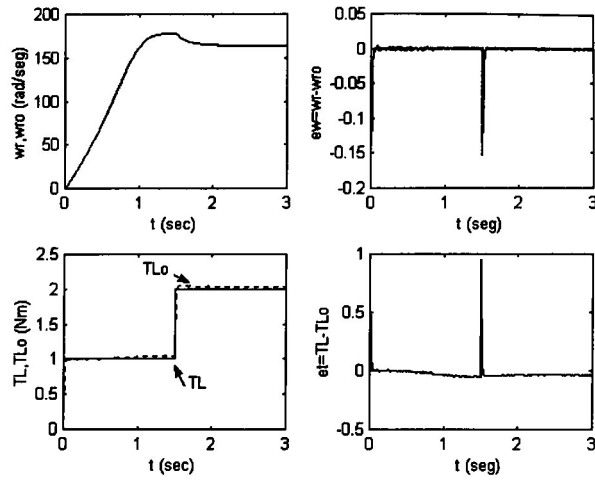


Figura 5.22: Estimación de la velocidad del rotor y de la carga.

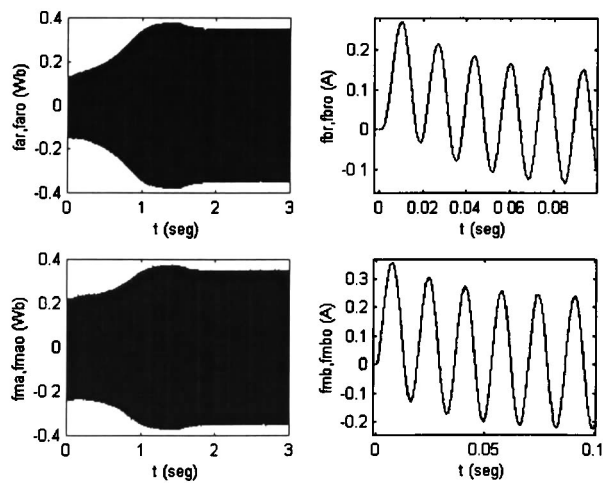


Figura 5.23: Estimación de flujos.

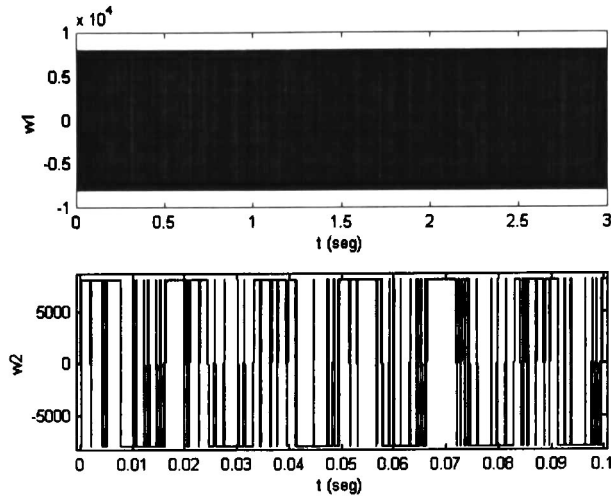


Figura 5.24: Entradas del observador.

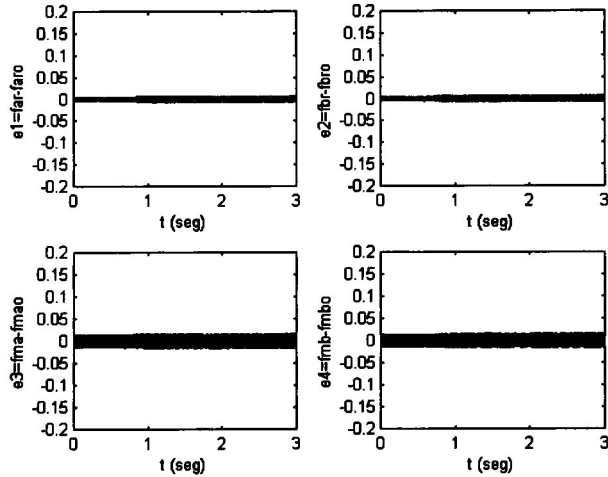


Figura 5.25: Errores de estimación.

## 5.5 Respuesta en lazo cerrado con los estados estimados

A continuación se presenta la respuesta en lazo cerrado introduciendo al controlador los estados estimados por el observador.

En la Figura 5.26 la velocidad de referencia  $\omega_{ref}$  es seguida por la velocidad del rotor  $\omega_r$  y su estimado  $\omega_{ro}$ . De igual manera, el flujo de referencia del rotor  $\varphi_{ref}$  es seguido por  $f_{mod1}$ , que está calculado utilizando los flujos del rotor estimados. Se observa un transitorio en el módulo del flujo y en el par, debido al cambio de referencia en la velocidad.

En la Figura 5.27 tenemos los flujos de rotor y sus estimados, además de las corrientes del estator, que son mantenidas por debajo del valor máximo; se puede observar una reducción en la frecuencia de los flujos y de las corrientes al disminuir la velocidad del rotor.

En la Figura 5.28 se muestran los flujos de magnetización en los ejes  $\alpha$  y  $\beta$  y sus estimados, así como las entradas discontinuas del observador. Las entradas de control, las corrientes y la curva de magnetización,



junto con la variedad deslizante son mostradas en la Figura 5.29, donde se observa un transitorio debido al cambio de velocidad. En la Figura 5.30 se muestran los errores de estimación de los flujos magnéticos.

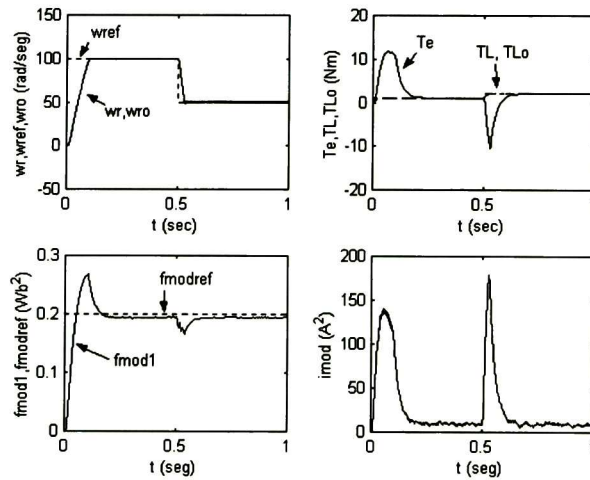


Figura 5.26: Seguimiento de las señales de referencia.

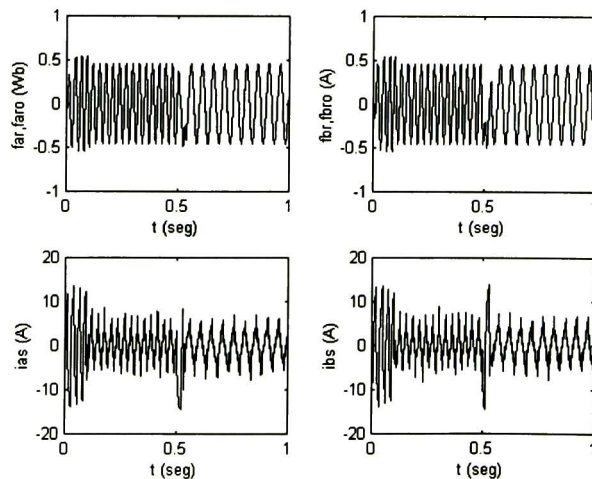


Figura 5.27: Dinámica de flujos y corrientes.

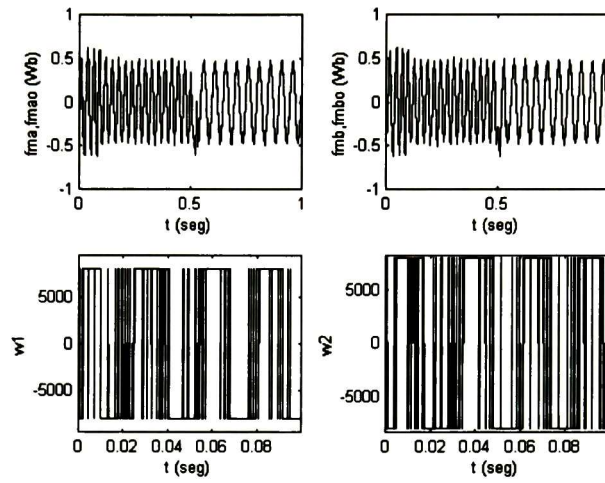


Figura 5.28: Entradas del observador.

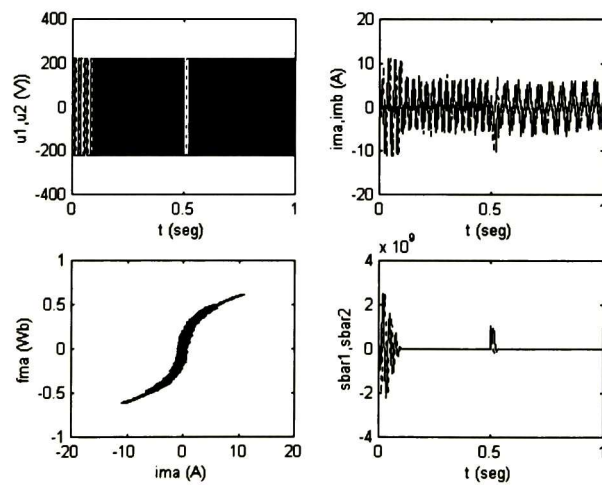


Figura 5.29: Entradas de control.

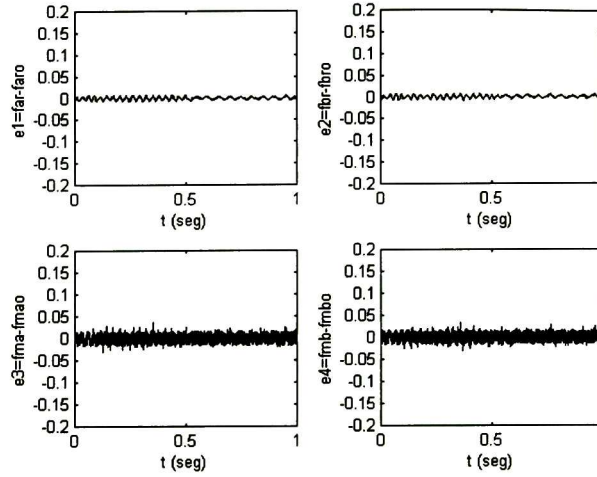


Figura 5.30: Errores de estimación.

### 5.5.1 Robustez del controlador

En la Figura 5.31 se muestra un aumento en la resistencia del rotor  $R_r$  del 80% aproximadamente, que puede ser provocado por el calentamiento del motor. En la Figura 5.32 observamos como el controlador es robusto ante esta variación paramétrica y ante variaciones de carga. En las Figuras 5.33-5.34 se muestran los flujos del rotor y las corrientes del estator así como las entradas de control y la variedad deslizante.

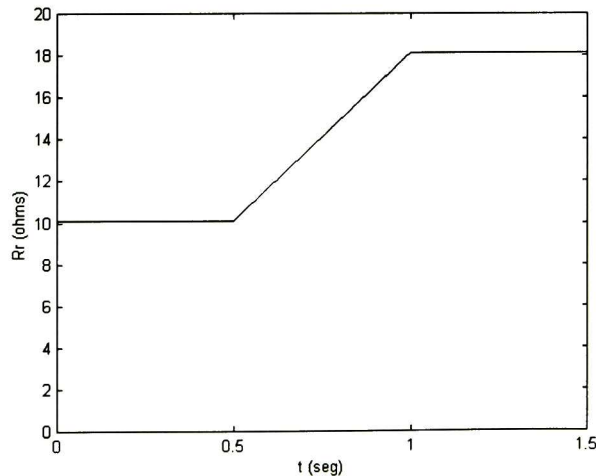


Figura 5.31: Variación de la resistencia del rotor.

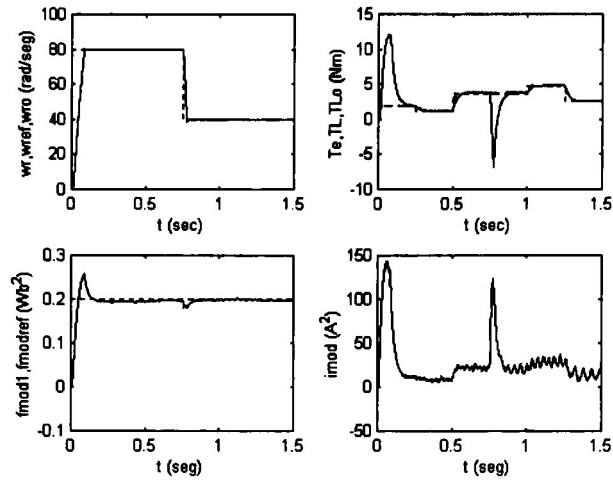


Figura 5.32: Control robusto.

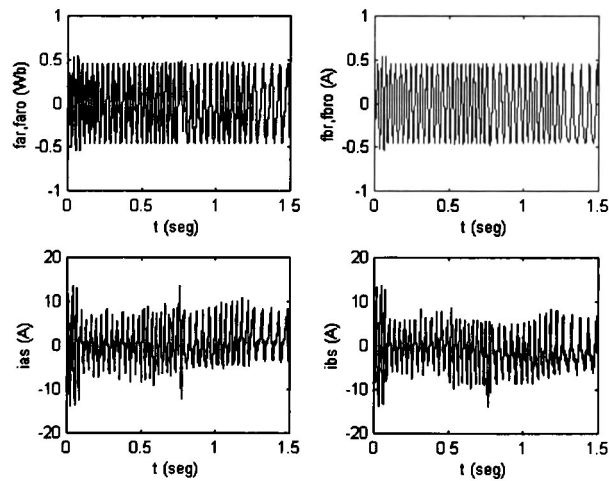


Figura 5.33: Dinámica de flujos y corrientes.

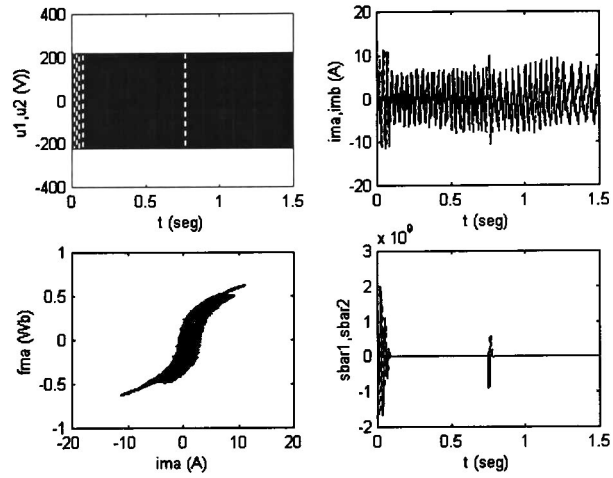


Figura 5.34: Entradas de control.



## Capítulo 6

# Conclusiones y trabajos futuros

Se desarrolló un modelo para el motor de inducción, donde se incluye el efecto de saturación magnética.

Se analizó y resolvió el problema de seguimiento de trayectoria para sistemas con perturbaciones y control discontinuo.

Basado en el método propuesto, se desarrolló una estrategia de control discontinuo con modos deslizantes para el motor de inducción con saturación magnética, que considera los límites de corriente y de voltaje del estator.

Se desarrolló un estimador de estados con entradas discontinuas usando la técnica de modos deslizantes para estimar los flujos del rotor, de magnetización y el par de carga

Se proponen dos algoritmos que aumentan la eficiencia del motor por reducción de pérdidas eléctricas. Un algoritmo vectoriza los flujos y corrientes optimizando el par electromecánico; mientras que el otro disminuye las corrientes del estator en dependencia del par de carga.

Los resultados obtenidos en las simulaciones nos muestran buen desempeño y robustez del sistema en lazo cerrado con respecto a perturbaciones externas y paramétricas.

Como trabajos futuros se proponen la implementación en tiempo real del controlador, la consideración del ciclo de histéresis magnética, la influencia de los armónicos y el efecto de barra profunda.



# Bibliografía

- [1] J. Chiasson, "Nonlinear Controllers for An Induction Motor", *Control Eng. Practice*, vol. 4, no. 7, pp. 977-990, 1996.
- [2] H. Tan and J. Chang, "Adaptive Backstepping Control of Induction Motor with Uncertainties", *Proceedings of the American Control Conference*, San Diego, California, June 1999.
- [3] R. Marino, S. Peresada, and P. Tomei, "Global Adaptive Output Feedback Control of Induction Motors with Uncertain Rotor Resistance" *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, no. 5, May 1999.
- [4] H. Hofmann, S. R. Sanders, and C. R. Sullivan, "Stator-Flux-Based Vector Control of Induction Machines in Magnetic Saturation", *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 33, no. 4, pp. 935-941, 1997.
- [5] T. Kasmieh, Y. Lefevre, and J. C. Hapiot, "Modeling and experimental characterization of saturation effect of an induction machine", *Eur. Phys. J. AP* 10, 123-130, 2000.
- [6] F. M. H. Khater, R. D. Lorenz, D. W. Novotny and K. Tang, "Selection of Flux Level in Field-Oriented Induction Machine Controllers with Consideration of Magnetic Saturation Effects", *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. IA-23, no. 2, March/April 1987.
- [7] P. Vedagarbha, D. M. Dawson and T. Burg, "Rotor Velocity/Flux Control of Induction Motors with Improved Efficiency" *Mechatronics*, vol. 7, no. 2, pp. 105-127, 1997.
- [8] M. Bodson, J. N. Chiasson, and R. T. Novotnak, "A Systematic Approach to Selecting Flux References for Torque Maximization in Induction Motors", *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 3, no. 4, December 1995.
- [9] P.C. Krause, O. Wasynczuk and S.D.Sudhoff, *Analysis of Electrical Machinery*, IEEE PRESS, New York, (1995).
- [10] A.G. Loukianov, "Nonlinear Block Control with Sliding Mode", *Automation and Remote Control*, vol.59, no.7, pp. 916-933, 1998.
- [11] V.I. Utkin, J. Guldner and J. Shi, *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*, Taylor&Frances, London, (1999).
- [12] V. A. Utkin, "The problems of induction motor control". *Automation and Remote Control*, no.12, pp. 53-65, 1994.
- [13] S. J. Dodds, J. Vittek, V. Utkin, "Sensorless Induction Motor Drive with Independent Speed and Rotor Magnetic Flux Control" *Part I Theoretical Background, Journal of Electrical Engineering*, vol. 49, no.7-8, pp.186-193, 1998 .
- [14] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, second edition, Prentice Hall, New Jersey, 1996.

# Apéndice

## Artículo presentado

En este apéndice se incluye el artículo “Sliding Mode Observer-Based Control of Induction Motor with Magnetizing Saturation Effect”, presentado en el congreso: Variable Structure Systems 2002, VSS'02. Realizado en Sarajevo, Bosnia-Herzegovina en Julio del 2002. El artículo está fundamentado en esta tesis.

Proceedings of the 7<sup>th</sup> International Workshop on  
Variable Structure Systems

# **ADVANCES IN VARIABLE STRUCTURE SYSTEMS**

*Theory and Applications*

Sarajevo, Bosnia and Herzegovina

17-19 July 2002

*Editor*  
*Asif Šabanović*

UNIVERSITY OF SARAJEVO  
FACULTY OF ELECTRICAL  
ENGINEERING SARAJEVO



## SLIDING MODE OBSERVER-BASED CONTROL OF INDUCTION MOTOR WITH MAGNETING SATURATION EFFECT

A. G. LOUKIANOV, JOSÉ M. CAÑEDO, A. CORONADO MENDOZA  
 CINVESTAV del IPN, Apdo. Postal 31-438, C.P. 44550,  
 Guadalajara, Jalisco, México,  
 E-mail: [louk][canedo][acoronad]@gdl.cinvestav.mx

This paper applies the block control technique to design a sliding mode controller for the full order model of the induction motor that includes a second order dynamics of the magnetic saturation effect. The simulation results demonstrate the effectiveness of the designed controller.

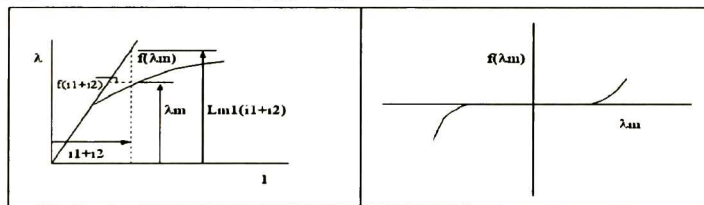
### 1 Introduction

It is known that the magnetic saturation effect, allowing an induction motor to produce higher torque, can cause a bad performance of the dynamic response of the motor, if it is not taken into account in controller design. Most of studies concerning the saturation effect tried to find special models with varying parameters (see for example [1-4])

In this paper we present an extended order model of the motor with constant parameters. Based on this model, and applying the sliding mode [5-7] and block control [8] techniques, a discontinuous observed based control law is derived.

### 2 Mathematical Model of Induction Motor with Saturation

To include the saturation effect in the motor model, it is necessary to know the magnetization curve of the motor. We approximate this curve with a function  $f(\lambda_m)$  [9], namely we use  $f(\lambda_m) = \lambda_m^3$ , (see Figure 1).



$$\lambda_m = Lm1 ( i1+i2 ) - f( \lambda_m )$$

Figure 1. Magnetization curve

The established saturated model can be described by the mechanical equation

$$\frac{dw_r}{dt} = \frac{1}{J_r} (T_e - T_L) \quad (1)$$

with

$$T_e = c_2 (\lambda_{\alpha r} i_{\beta s} - \lambda_{\beta r} i_{\alpha s})$$

and the electromagnetic basic equations

$$V_{\alpha s} = R_s i_{\alpha s} + \frac{d\lambda_{\alpha s}}{dt}$$

$$V_{\beta s} = R_s i_{\beta s} + \frac{d\lambda_{\beta s}}{dt}$$

$$0 = R_r i_{\alpha r} + n_p w_r \lambda_{\beta r} + \frac{d\lambda_{\alpha r}}{dt}$$

$$0 = R_r i_{\beta r} - n_p w_r \lambda_{\alpha r} + \frac{d\lambda_{\beta r}}{dt}$$

with

$$\lambda_{\alpha s} = L_{ls} i_{\alpha s} + \lambda_{m\alpha}$$

$$\lambda_{\beta s} = L_{ls} i_{\beta s} + \lambda_{m\beta}$$

$$\lambda_{\alpha r} = L_{lr} i_{\alpha r} + \lambda_{m\alpha}$$

$$\lambda_{\beta r} = L_{lr} i_{\beta r} + \lambda_{m\beta}$$

$$\lambda_{m\alpha} = M (i_{\alpha s} + i_{\alpha r}) - cf(\lambda_{m\alpha})$$

$$\lambda_{m\beta} = M (i_{\beta s} + i_{\beta r}) - cf(\lambda_{m\beta})$$

where  $f(\lambda_{mi}) = \lambda_{mi}^3$ ,  $i = \alpha, \beta$ ;

$\lambda_{\alpha r}$  and  $\lambda_{\beta r}$  are the rotor magnetic fluxes;

$\lambda_{m\alpha}$  and  $\lambda_{m\beta}$  are the magnetizing fluxes;

$i_{\alpha s}$  and  $i_{\beta s}$  are the stator currents;

$V_{\alpha s}$  and  $V_{\beta s}$  are the stator voltages;

$\omega_r$  is the rotor velocity;  $J_r$  is the rotor moment of inertia,

$L_{ls}$ ,  $L_{lr}$  and  $M$  are, respectively, the stator and rotor link inductances and the mutual inductance between the rotor and stator;

$R_s$  and  $R_r$  are, respectively, the stator and rotor resistances;

$n_p$  is number of pair of poles, and  $c$  is a constant which introduces in order to approximate the saturation curve of the motor.

Using (1) and (2), after some routine calculations the we obtain the following model of the motor:

$$\begin{aligned}
\frac{dw_r}{dt} &= c_1 (c_2 (\lambda_{\alpha r} i_{\beta s} - \lambda_{\beta r} i_{\alpha s}) - T_L) \\
\frac{d\lambda_{\alpha r}}{dt} &= -n_p w_r \lambda_{\beta r} - c_3 (\lambda_{\alpha r} - \lambda_{m\alpha}) \\
\frac{d\lambda_{\beta r}}{dt} &= n_p w_r \lambda_{\alpha r} - c_3 (\lambda_{\beta r} - \lambda_{m\beta}) \\
\frac{di_{\alpha s}}{dt} &= c_{71} w_r \lambda_{\beta r} + c_{81} \lambda_{\alpha r} - c_{81} \lambda_{m\alpha} + (c_{91} - c_5) i_{\alpha s} + (c_4 - c_{61}) V_{\alpha s} \\
\frac{di_{\beta s}}{dt} &= -c_{72} w_r \lambda_{\alpha r} + c_{82} \lambda_{\beta r} - c_{82} \lambda_{m\beta} + (c_{92} - c_5) i_{\beta s} + (c_4 - c_{62}) V_{\beta s} \\
\frac{d\lambda_{m\alpha}}{dt} &= L_s (-c_{71} w_r \lambda_{\beta r} - c_{81} \lambda_{\alpha r} + c_{81} \lambda_{m\alpha} - c_{91} i_{\alpha s} + c_{61} V_{\alpha s}) \\
\frac{d\lambda_{m\beta}}{dt} &= L_s (c_{72} w_r \lambda_{\alpha r} - c_{82} \lambda_{\beta r} + c_{82} \lambda_{m\beta} - c_{92} i_{\beta s} + c_{62} V_{\beta s})
\end{aligned} \tag{3}$$

where  $c_1 = \frac{1}{J_r}$ ,  $c_2 = \frac{3n_p M}{2L_r}$ ,  $c_3 = \frac{R_r}{L_{lr}}$ ,  $c_4 = \frac{1}{L_{ls}}$ ,  $c_5 = \frac{R_s}{L_{ls}}$ ,  $c_{61} = \frac{M}{d_1 L_{ls}^2}$ .

$c_{71} = \frac{n_p M}{d_1 L_{lr} L_{ls}}$ ,  $c_{81} = \frac{MR_r}{d_1 L_{lr}^2 L_{ls}}$ ,  $c_{91} = \frac{MR_s}{d_1 L_{ls}^2}$ ,  $c_{62} = \frac{M}{d_2 L_{ls}^2}$ ,  $c_{72} = \frac{n_p M}{d_2 L_{lr} L_{ls}}$ .

$c_{82} = \frac{MR_r}{d_2 L_{lr}^2 L_{ls}}$ ,  $c_{92} = \frac{MR_s}{d_2 L_{ls}^2}$ ,  $d_1 = 1 + \frac{M}{L_{ls}} + \frac{M}{L_{lr}} + 3c\lambda_{m\alpha}^2$ , and

$d_2 = 1 + \frac{M}{L_{ls}} + \frac{M}{L_{lr}} + 3c\lambda_{m\beta}^2$ .

### 3 Control Law Design

The sliding mode controller design will be divided in two steps. First, exploring the block control technique [8], a sliding manifold will be formed. Then, a discontinuous control law will be designed to make this manifold attractive.

Let us define the control errors as

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_r - \omega_{ref} \\ \varphi - \varphi_{ref} \end{bmatrix} \tag{4}$$

and

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{\alpha s} \\ i_{\beta s} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{m\alpha} \\ \lambda_{m\beta} \end{bmatrix}$$

where  $\varphi = \psi^T \psi$ ,  $\psi = (\lambda_{\alpha r}, \lambda_{\beta r})^T$ ,  $\omega_{ref}$  and  $\varphi_{ref}$  are reference signals. Also, assume that  $\dot{T}_L = 0$ . Then the system (3) can be represented in quasi Block Controllable form (or BC-form) with perturbation [8]:

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) + \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_1) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} + \mathbf{d}_1 T_L - \mathbf{w}_1 \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) \\ \mathbf{f}_3(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (6)$$

where  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)^T$ ,  $\mathbf{w}_1 = (\dot{\omega}_{ref}, \dot{\varphi}_{ref})^T$ ,  $\mathbf{u} = (u_\alpha, u_\beta)^T$

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2c_3\varphi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} -c_1c_2\lambda_{\beta r} & c_1c_2\lambda_{\alpha r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2c_3\lambda_{\alpha r} & 2c_3\lambda_{\beta r} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{71}w_r\lambda_{\beta r} + c_{81}\lambda_{\alpha r} - c_{81}\lambda_{m\alpha} + (c_{91} - c_5)i_{\alpha s} \\ -c_{72}w_r\lambda_{\alpha r} + c_{82}\lambda_{\beta r} - c_{82}\lambda_{m\beta} + (c_{92} - c_5)i_{\beta s} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ls}(-c_{71}w_r\lambda_{\beta r} - c_{81}\lambda_{\alpha r} + c_{81}\lambda_{m\alpha} - c_{91}i_{\alpha s}) \\ L_{ls}(c_{72}w_r\lambda_{\alpha r} - c_{82}\lambda_{\beta r} + c_{82}\lambda_{m\beta} - c_{92}i_{\beta s}) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} (c_4 - c_{61}) & 0 \\ 0 & (c_4 - c_{62}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} L_{ls}c_{61} & 0 \\ 0 & L_{ls}c_{62} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{J_r} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Defining  $\mathbf{z}_1 = \mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{z}_1 = (z_1, z_2)^T$ , we introduce the desired dynamics  $-k_1\mathbf{z}_1$  for the block (5) setting

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{x}_1) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} + \mathbf{d}_1 T_L + \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) - \mathbf{w}_1 = -k_1\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 \quad (7)$$

where  $\mathbf{z}_2 = (z_3, z_4)^T$  is a new variables vector, and  $k_1 > 0$ . Then using (7) the following nonsingular change of variables can be proposed:

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{B}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} + \mathbf{f}_1 + \mathbf{d}_1 T_L - \mathbf{w}_1 + k_1\mathbf{z}_1$$

and  $\eta_1 = i_{\alpha s}$ ,  $\eta_2 = i_{\beta s}$ ,  $\eta_3 = \lambda_{\alpha r} - \lambda_{m\alpha}$ . Then the equations (5) and (6) is represented in the new variables  $\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)^T$  and  $\eta$ ,  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)^T$  of the form

$$\dot{\mathbf{z}}_1 = -k_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 \quad (8a)$$

$$\dot{\mathbf{z}}_2 = \bar{\mathbf{f}}_2(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \boldsymbol{\eta}) + \bar{\mathbf{B}}_2(\mathbf{z}_1) \mathbf{u} + \mathbf{d}_2 T_L - k_1 \mathbf{w}_1 - \dot{\mathbf{w}}_1 \quad (8b)$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{A}_\eta \boldsymbol{\eta} + \mathbf{B}_\eta(\mathbf{z}_1) \mathbf{u} + \mathbf{g}_\eta(\mathbf{z}, \boldsymbol{\eta}) \quad (8c)$$

with

$$\bar{\mathbf{f}}_2 = \begin{bmatrix} \bar{f}_3 \\ \bar{f}_4 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}}_2 = \mathbf{B}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 c_2 (c_4 - c_{61}) \lambda_{\beta r} & c_1 c_2 (c_4 - c_{62}) \lambda_{\alpha r} \\ 2L_{ls} c_3 c_{61} \lambda_{\alpha r} & 2L_{ls} c_3 c_{62} \lambda_{\beta r} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} -(k_1/J_r) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_3 = c_1 c_2 (\lambda_{\alpha r} f_{31} + i_{\beta s} f_{32} - \lambda_{\beta r} f_{33} - i_{\alpha s} f_{34}) + k_1 f_{35},$$

$$f_{31} = -c_{72} w_r \lambda_{\alpha r} + c_{82} \lambda_{\beta r} - c_{82} \lambda_{m\beta} + (c_{92} - c_5) i_{\beta s},$$

$$f_{32} = -n_p w_r \lambda_{\beta r} - c_3 (\lambda_{\alpha r} - \lambda_{m\alpha}), \quad f_{33} = c_{71} w_r \lambda_{\beta r} + c_{81} \lambda_{\alpha r} - c_{81} \lambda_{m\alpha} + (c_{91} - c_5) i_{\alpha s}$$

$$f_{34} = n_p w_r \lambda_{\alpha r} - c_3 (\lambda_{\beta r} - \lambda_{m\beta}), \quad f_{35} = c_1 c_2 (\lambda_{\alpha r} i_{\beta s} - \lambda_{\beta r} i_{\alpha s}),$$

$$\bar{f}_4 = (k_1 - 2c_3) \varphi_2 + 2c_3 (\lambda_{\alpha r} f_{41} + \lambda_{m\alpha} f_{42} + \lambda_{\beta r} f_{43} + \lambda_{m\beta} f_{44}),$$

$$\varphi_2 = -2c_3 \varphi_1 + 2c_3 (\lambda_{\alpha r} \lambda_{m\alpha} + \lambda_{\beta r} \lambda_{m\beta}),$$

$$f_{41} = L_{ls} (-c_{71} w_r \lambda_{\beta r} - c_{81} \lambda_{\alpha r} + c_{81} \lambda_{m\alpha} - c_{91} i_{\alpha s}), \quad f_{42} = -n_p w_r \lambda_{\beta r} - c_3 (\lambda_{\alpha r} - \lambda_{m\alpha}),$$

$$f_{43} = L_{ls} (c_{72} w_r \lambda_{\alpha r} - c_{82} \lambda_{\beta r} + c_{82} \lambda_{m\beta} - c_{92} i_{\beta s}), \quad f_{44} = n_p w_r \lambda_{\alpha r} - c_3 (\lambda_{\beta r} - \lambda_{m\beta}).$$

$$\mathbf{A}_\eta = \text{diag}(-c_5, -c_5, -c_3), \quad \text{and}$$

$$\mathbf{g}_\eta(\mathbf{z}, \boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} c_{71} w_r \lambda_{\beta r} + c_{81} \lambda_{\alpha r} - c_{81} \lambda_{m\alpha} + c_{91} i_{\alpha s} + (c_4 - c_{61}) V_{\alpha s} \\ -c_{72} w_r \lambda_{\alpha r} + c_{82} \lambda_{\beta r} - c_{82} \lambda_{m\beta} + c_{92} i_{\beta s} + (c_4 - c_{62}) V_{\beta s} \\ -n_p w_r \lambda_{\beta r} - L_{ls} (-c_{71} w_r \lambda_{\beta r} - c_{81} \lambda_{\alpha r} + c_{81} \lambda_{m\alpha} - c_{91} i_{\alpha s} + c_{61} V_{\alpha s}) \end{bmatrix}$$

The second stage of the design procedure is selection of discontinuous control, which enforce sliding mode on the manifold  $\mathbf{z}_2 = 0$ . The condition for sliding mode to exist, is equivalent to stability condition of the motion projection on subspace  $\mathbf{z}_2$ , described by (8b). Let  $V = \frac{1}{2} \mathbf{z}_2^T \mathbf{z}_2$  be a Lyapunov function candidate.

Then

$$\dot{V} = \mathbf{z}_2^T (\bar{\mathbf{f}}_2 + \mathbf{d}_2 T_L - k_1 \mathbf{w}_1 - \dot{\mathbf{w}}_1) + \mathbf{z}_2^T \bar{\mathbf{B}}_2 \mathbf{u} \quad (9)$$

The control  $\mathbf{u}$  is selected as

$$\mathbf{u} = -U_0 \text{sign}(\bar{\mathbf{z}}_2), \quad U_0 > 0 \quad (10)$$

with

$$\bar{\mathbf{z}}_2 = \bar{\mathbf{B}}_2^T \mathbf{z}_2 \quad \text{and} \quad \mathbf{z}_2^T = \bar{\mathbf{z}}_2^T \bar{\mathbf{B}}_2^{-1} \quad (11)$$

Then (9) is of the form

$$\dot{V} = \bar{\mathbf{z}}_2^T \bar{\mathbf{B}}_2^{-1} (\bar{\mathbf{f}}_2 + \mathbf{d}_2 T_L - k_1 \mathbf{w}_1 - \dot{\mathbf{w}}_1) - U_0 \|\bar{\mathbf{z}}_2\|_1$$



where  $\|\bar{\mathbf{z}}_2\|_1 = \bar{\mathbf{z}}_2^T \text{sign}(\bar{\mathbf{z}}_2)$ . Since  $\|\bar{\mathbf{z}}_2\|_1 \geq \|\bar{\mathbf{z}}_2\|_2$ , the derivative

$$\dot{V} \leq -\|\bar{\mathbf{z}}_2\|_2 \left( U_0 - \|\bar{\mathbf{B}}_2^{-1}(\bar{\mathbf{f}}_2 + \mathbf{d}_2 T_L - k_1 \mathbf{w}_1 - \dot{\mathbf{w}}_1)\|_2 \right)$$

is negative definite for

$$\|\bar{\mathbf{B}}_2^{-1}(\bar{\mathbf{f}}_2 + \mathbf{d}_2 T_L - k_1 \mathbf{w}_1 - \dot{\mathbf{w}}_1)\|_2 < U_0 \quad (12)$$

Obviously the condition (12) holds for all possible  $T_L$  and  $\omega_{ref}$ . Hence, the sliding mode is enforced in the closed-loop system (8) and (10) on the manifold  $\bar{\mathbf{z}}_2 = 0$  in a finite time [5]. The transformation (11) is non-singular; therefore sliding mode takes place on the manifold  $\mathbf{z}_2 = 0$  too. Once this is achieved, the sliding motion on  $\mathbf{z}_2 = 0$  is governed by the fifth order quasi linear system

$$\dot{\mathbf{z}}_1 = -k_1 \mathbf{z}_1 \quad (13a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{A}_\eta \boldsymbol{\eta} + \mathbf{g}(\mathbf{z}_1, \boldsymbol{\eta}, T_L, \mathbf{w}_1, \dot{\mathbf{w}}_1) \quad (13b)$$

where

$$\mathbf{g} = \mathbf{B}_\eta(\mathbf{z}_1) \mathbf{u}_{eq}(\mathbf{z}_1, \boldsymbol{\eta}, T_L) + \mathbf{g}_\eta(\mathbf{z}_1, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{w}_1, \dot{\mathbf{w}}_1), \quad \mathbf{u}_{eq} = -\bar{\mathbf{B}}_2^{-1}[\bar{\mathbf{f}}_2 + \mathbf{d}_2 T_L - k_1 \mathbf{w}_1 - \dot{\mathbf{w}}_1].$$

The system (13a) corresponds to the linearized mechanical and rotor flux dynamics, and it is asymptotically stable for  $k_1 > 0$ . So, the sliding mode control (9) yields invariant subspace  $\{\mathbf{z} = 0, \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{R}^3\}$ , in the state space of closed-loop system. The dynamic of  $\boldsymbol{\eta}$  on this subspace is a zero dynamics and it is governed by

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{A}_\eta \boldsymbol{\eta} + \mathbf{g}(0, \boldsymbol{\eta}, T_L, \mathbf{w}_1, \dot{\mathbf{w}}_1) \quad (14)$$

Because of the matrix  $\mathbf{A}_\eta$  is Hurwitz and  $\mathbf{g}(0, \boldsymbol{\eta}, T_L, \mathbf{w}_1, \dot{\mathbf{w}}_1)$  is bounded, a solution of (14) converges exponentially to a compact set defined by  $T_L$ ,  $\mathbf{w}_1$  and  $\dot{\mathbf{w}}_1$ . Therefore, a solution of the closed-loop system is ultimately uniformly bounded, and the control error  $\mathbf{z}_1$  converges exponentially to zero.

## 5 Flux Observer with Sliding Mode

Assuming that the speed  $\omega_r$  and stator currents  $i_{\alpha s}$  and  $i_{\beta s}$  are measured, the motor model (3) can be rewritten as

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_{\alpha r}}{dt} &= -n_p \omega_r \lambda_{\beta r} - c_3 (\lambda_{\alpha r} - \lambda_{m\alpha}), & \frac{d\lambda_{\beta r}}{dt} &= n_p \omega_r \lambda_{\alpha r} - c_3 (\lambda_{\beta r} - \lambda_{m\beta}) \\ \frac{di_{\alpha s}}{dt} &= c_4 V_{\alpha s} - c_5 i_{\alpha s} - c_4 F_1, & \frac{di_{\beta s}}{dt} &= c_4 V_{\beta s} - c_5 i_{\beta s} - c_4 F_2 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\frac{d\lambda_{m\alpha}}{dt} = F_1, \quad \frac{d\lambda_{m\beta}}{dt} = F_2$$

where  $F_1 = L_{ls}(-c_{71}w_r\lambda_{\beta r} - c_{81}\lambda_{\alpha r} + c_{81}\lambda_{m\alpha} - c_{91}i_{\alpha s} + c_{61}V_{\alpha s})$

$$F_2 = L_{ls}(c_{72}w_r\lambda_{\alpha r} - c_{82}\lambda_{\beta r} + c_{82}\lambda_{m\beta} - c_{92}i_{\beta s} + c_{62}V_{\beta s})$$

The proposed fluxes observer has the following form:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\lambda}_{\alpha r}}{dt} &= -n_p w_r \hat{\lambda}_{\beta r} - c_3(\hat{\lambda}_{\alpha r} - \hat{\lambda}_{m\alpha}), \\ \frac{d\hat{\lambda}_{\beta r}}{dt} &= n_p w_r \hat{\lambda}_{\alpha r} - c_3(\hat{\lambda}_{\beta r} - \hat{\lambda}_{m\beta}) \\ \frac{d\hat{i}_{\alpha s}}{dt} &= c_4 V_{\alpha s} - c_5 i_{\alpha s} - v_1, \quad \frac{d\hat{i}_{\beta s}}{dt} = c_4 V_{\beta s} - c_5 i_{\beta s} - v_2 \\ \frac{d\hat{\lambda}_{m\alpha}}{dt} &= \frac{1}{c_4} v_1, \quad \frac{d\hat{\lambda}_{m\beta}}{dt} = \frac{1}{c_4} v_2 \end{aligned} \quad (16)$$

where  $\hat{\lambda}_{\alpha r}$ ,  $\hat{\lambda}_{\beta r}$ ,  $\hat{\lambda}_{m\alpha}$ ,  $\hat{\lambda}_{m\beta}$ ,  $\hat{i}_{\alpha s}$  and  $\hat{i}_{\beta s}$  are the fluxes and currents estimates.

The observer inputs  $v_1$  and  $v_2$  are chosen as [5]

$$v_1 = l_1 \frac{\varepsilon_{\alpha}}{|\varepsilon_{\alpha}| + \delta} \quad \text{and} \quad v_2 = l_2 \frac{\varepsilon_{\beta}}{|\varepsilon_{\beta}| + \delta}. \quad (17)$$

with  $l_1 > 0$ ,  $l_2 > 0$  and  $\delta > 0$ . Denote the currents estimation errors as  $\varepsilon_{\alpha s} = i_{\alpha s} - \hat{i}_{\alpha s}$  and  $\varepsilon_{\beta s} = i_{\beta s} - \hat{i}_{\beta s}$ . Then the stability of (16)-(17) can be analyzed by examining of the derived from (15)-(17) current estimation error dynamics

$$\dot{\varepsilon}_{\alpha s} = -c_4 F_1 + v_1, v_1 = -l_1 \frac{\varepsilon_{\alpha s}}{|\varepsilon_{\alpha s}| + \delta} \quad \text{and} \quad \dot{\varepsilon}_{\beta s} = -c_4 F_2 + v_2, v_2 = -l_2 \frac{\varepsilon_{\beta s}}{|\varepsilon_{\beta s}| + \delta} \quad (18)$$

If  $l_1 > |c_4 F_1|$  and  $l_2 > |c_4 F_2|$ , then a sliding mode occurs in (18) on  $\varepsilon_{\alpha s} = 0$  and  $\varepsilon_{\beta s} = 0$  after a finite time. Hence, after this time,  $\dot{\varepsilon}_{\alpha s} = 0$  and  $\dot{\varepsilon}_{\beta s} = 0$ , and

$$v_1 = v_{1eq} = c_4 F_1 \quad \text{and} \quad v_2 = v_{2eq} = c_4 F_2 \quad (19)$$

Then, the dynamics of the fluxes estimation errors are governed by

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{\alpha r} &= -n_p w_r \varepsilon_{\beta r} - c_3(\varepsilon_{\alpha r} - \varepsilon_{m\alpha}), \\ \dot{\varepsilon}_{\beta r} &= n_p w_r \varepsilon_{\alpha r} - c_3(\varepsilon_{\beta r} - \varepsilon_{m\beta}) \\ \dot{\varepsilon}_{m\alpha} &= 0 \\ \dot{\varepsilon}_{m\beta} &= 0 \end{aligned}$$

where  $\varepsilon_{\alpha r} = \lambda_{\alpha r} - \hat{\lambda}_{\alpha r}$ ,  $\varepsilon_{\beta r} = \lambda_{\beta r} - \hat{\lambda}_{\beta r}$ ,  $\varepsilon_{m\alpha} = \lambda_{m\alpha} - \hat{\lambda}_{m\alpha}$ ,  $\varepsilon_{m\beta} = \lambda_{m\beta} - \hat{\lambda}_{m\beta}$ . It is evidently that this system is stable. The obtained from (16) the estimations  $\hat{\lambda}_{\alpha r}$ ,  $\hat{\lambda}_{\beta r}$ ,  $\hat{\lambda}_{m\alpha}$  and  $\hat{\lambda}_{m\beta}$ , are used then in control law (10), replacing the real variables.

Then the load torque observer can be designed as follows

$$\dot{\hat{\omega}}_r = c_1(c_2(\lambda_{\alpha r}i_{\beta s} - \lambda_{\beta r}i_{\alpha s}) - \hat{T}_L) + l_3(\omega_r - \hat{\omega}_r)$$

$$\dot{\hat{T}}_L = l_4(\omega_r - \hat{\omega}_r)$$

where  $\hat{\omega}_r$  and  $\hat{T}_L$  are the estimated variables. The observer gains  $l_3$  and  $l_4$  are selected such that the estimation error system

$$\dot{\varepsilon}_w = -l_3\varepsilon_w - c_1\varepsilon_T \text{ and } \dot{\varepsilon}_T = -l_4\varepsilon_w$$

where  $\varepsilon_w = \omega_r - \hat{\omega}_r$  and  $\varepsilon_T = T_L - \hat{T}_L$ , is stable.

## 6 Simulations Results

Simulations are carried out to demonstrate the effectiveness of the proposed control algorithm. The key parameter values of the motor are:  $R_s = 14\Omega$ ,  $R_r = 10.1\Omega$ ,  $L_s = 0.4H$ ,  $L_r = 0.4128H$ .  $M = 0.377H$   $J = 0.01Kg\cdot m^2$ .  $n_p = 2$ , with  $L_r = L_{lr} + M$  and  $L_s = L_{ls} + M$ .  $c = 15$ . The controller gains were adjusted to  $k_1 = k_2 = 100$ ,  $U_o = 500$ , and the observer gains  $l_1 = l_2 = 10000$ ,  $l_3 = 500, l_4 = -500, \delta = .00001$ . All initial conditions of the motor and of the observer are set to zero.

We show different graphics to observe the performance of our control and observer. Figure 2 illustrates the response of the motor without saturation and without control. In  $t = 1.5s$ , a load torque  $T_L = 2.5Nm$  is applied. Figure 3 shows the saturation curve that is lineal when we don't consider the magnetic saturation.

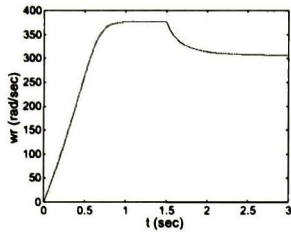


Fig. 2. Rotor velocity

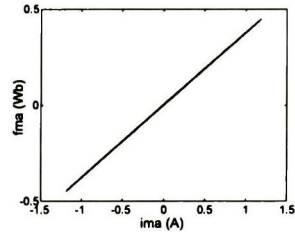


Fig. 3. Saturation curve

Figures 4 and 5 depict the same simulations, considering the saturation effect. The saturation curve presented in Figure 5 now is non linear.

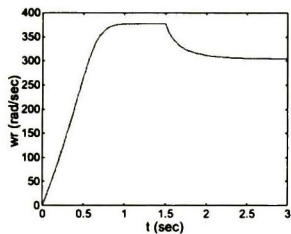


Fig. 4. Rotor velocity

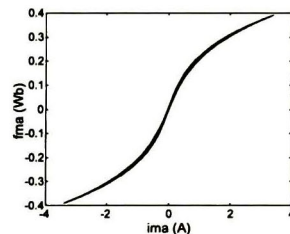


Fig. 5. Saturation curve

Figure 6 presents the response of closed loop system with the designed state feedback. In  $t = 0.5s$ , a load torque  $T_L = 10.0 Nm$  is applied. Figure 7 depicts the same simulations with the proposed observer-based controller.

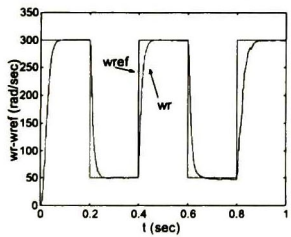


Fig. 6. Rotor velocity and its reference.

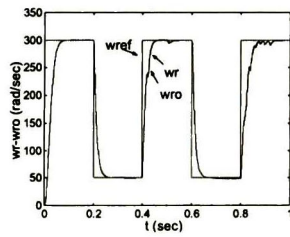


Fig. 7. Rotor velocity, its estimate and reference.

In Figures 8 and 9, the responses of the designed observer, are presented.

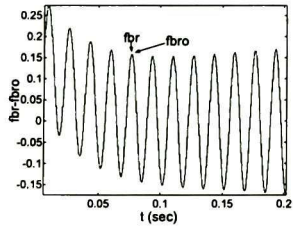


Fig.8. Beta-rotor magnetic flux and its estimation

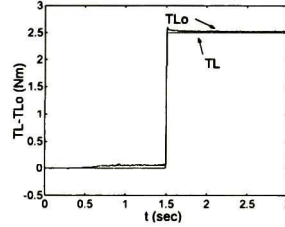


Fig. 9. Load torque and its estimation

**Acknowledgments** - The authors thank the support of CONACYT, Mexico, project 36960A.

## 7 Conclusions

A full 7<sup>th</sup> order model with constant parameters for an induction motor with magnetic saturation, is derived. A discontinuous control strategy with sliding mode observer, is presented. The simulations results indicate the validity of the proposed saturation model and the feasibility of the proposed control scheme.

## References

- [1] A. Behal, M. Feemster, D.M. Dawson and A. Magnal, Partial State Feedback Control of Induction Motors with Magnetic Saturation: Elimination of Flux Measurements, *Automatica*, Vol. 38, pp. 191-203, 2002.
- [2] T. Kasmieh, Y. Lefevre, and J. C. Hapiot, Modeling and experimental characterization of saturation effect of an induction machine, *Eur. Phys. J. AP* 10, 123-130, 2000.
- [3] Décio Bispo, Luciano Martins Neto, José Tarcísio de Resende, and Darizon Alves de Andrade, A New Strategy for Induction Machine Modeling Taking Into Account the Magnetic Saturation, *IEEE Transactions on Industry Applications*, Vol. 37, No. 6, pp. 1710-1719, 2001.
- [4] Heath Hofmann, Seth R. Sanders, and Charles R. Sullivan, Stator-Flux-Based Vector Control of Induction Machines in Magnetic Saturation, *IEEE Transactions on Industry Applications*, Vol. 33, No. 4, pp. 935-941, 1997.
- [5] V.I. Utkin, J. Guldner and J. Shi, Sliding Mode Control in Electromechanical Systems, *Taylor&Frances*, London, (1999).
- [6] V. A. Utkin The problems of induction motor control.- *Automation and Remote Control*, No.12, pp. 53-65, 1994.



**Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN**

**Unidad Guadalajara**

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, aprobó la tesis: CONTROL NO LINEAL CON MODOS DESLIZANTES PARA EL MOTOR DE INDUCCIÓN CON SATURACIÓN MAGNÉTICA del(a) C. Alberto CORONADO MENDOZA el día 9 de Mayo de 2003 .

DR. EDGAR NELSON SANCHEZ  
CAMPEROS  
INVESTIGADOR CINVESTAV 3B  
CINVESTAV GDL  
GUADALAJARA

DR. ALEXANDER  
GEORGIEVICH LOUKIANOV  
INVESTIGADOR CINVESTAV  
3B  
CINVESTAV GDL  
GUADALAJARA

DR. JUAN MANUEL RAMÍREZ  
ARREDONDO  
INVESTIGADOR CINVESTAV 3A  
CINVESTAV GDL  
GUADALAJARA

DR. JOSÉ JAVIER RUIZ LEÓN  
INVESTIGADOR CINVESTAV  
2C  
CINVESTAV GDL  
GUADALAJARA

DR. JOSÉ MANUEL CAÑEDO  
CASTAÑEDA  
INVESTIGADOR CINVESTAV 2C  
CINVESTAV GDL  
GUADALAJARA





CINVESTAV  
BIBLIOTECA CENTRAL



SSIT000004471