

xx(12 4334,1)

CM



CINVESTAV

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N.
Unidad Guadalajara

Desacoplamiento de sistemas lineales: el caso de sistemas decalados y el caso general

Tesis que presenta:
Jorge Luis Orozco Mora

para obtener el grado de:
Doctor en Ciencias

en la especialidad de:
Ingeniería Eléctrica

Directores de Tesis
Dr. José Javier Ruíz León
Dra. Ofelia Begovich Mendoza

CINVESTAV I.P.N.
SECCION DE INFORMACION
Y DOCUMENTACION

CINVESTAV
IPN
ADQUISICION
DE LIBROS

Guadalajara, Jalisco, Septiembre de 2005.

CLASIF.: TK165.58.076 2005
ADQUIS.: SSI-377
FECHA: 27 ABRIL-2006
PROCESO: DON. - 2006
\$ _____

I.D. 124278-2001

Desacoplamiento de sistemas lineales: el caso de sistemas decalados y el caso general

**Tesis de Doctorado en Ciencias
Ingeniería Eléctrica**

Por:

Jorge Luis Orozco Mora
Ingeniero en Electrónica

Instituto Tecnológico de Aguascalientes 1994-1998

Becario de CONACYT, expediente no. 143929

Directores de Tesis

Dr. José Javier Ruíz León
Dra. Ofelia Begovich Mendoza

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Septiembre de 2005.

RECONOCIMIENTO:

- A mis asesores, el Dr. José Javier Ruiz León y a la Dra. Ofelia Begovich Mendoza, por su apoyo y paciencia al dirigir esta investigación y por todo el conocimiento que lograron transmitirme durante este tiempo.

- Al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (CINVESTAV) Unidad Guadalajara, por el apoyo otorgado durante la realización de los estudios del programa de Doctorado

- Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por apoyarme económicamente, ya que sin su ayuda me hubiera sido imposible cumplir con mi sueño de realizar mi Doctorado.

AGRADECIMIENTOS:

- De manera muy especial agradezco a mi esposa Elvia por su apoyo incondicional durante Doctorado, por estar conmigo, por animarme y ser mi fuente de inspiración.
- A mi mamá y a mi papá donde quiera que este, por siempre apoyarme y estar conmigo. Gracias por haberme formado para llegar a ser el hombre que soy hoy. También quiero agradecerles a mis hermanos Marcos, Paty y Toño, Enrique y Lupita, Laura y Paco, y a mis sobrinos Lupita, Toñito, Paty, Ana Sofía, Laurita, Paquito, Germán y Mary Jose, por ser parte de una maravillosa familia.
- A mis mejores amigos de la prepa y a los amigos que tuve la oportunidad de conocer en el CINVESTAV por permitirme ser parte de sus vidas.
- A mis sinodales Dr. Edgar Nelson Sánchez Camperos, Dr. Alexander Georgievich Loukianov, Dr. Antonio Ramírez Treviño, Dr. José Javier Ruiz León, Dra. Ofelia Begovich y Dr. Guillermo Obregón Pulido por brindar parte de su valioso tiempo para la revisión de mi tesis, además de contribuir en mi crecimiento como investigador.

A todos ellos un sincero agradecimiento.

Índice general

Introducción	III
0.1. Planteamiento del problema y resultados previos	III
0.2. Objetivos de la tesis	VI
0.3. Contribuciones	VI
0.4. Organización de la tesis	VII
0.5. Publicaciones obtenidas	VIII
I Preliminares	1
1. Estructura de los sistemas lineales	3
1.1. Notación	3
1.2. Sistema bajo estudio	3
1.3. Ceros al infinito	4
1.3.1. Ceros al infinito por filas	5
1.4. El interactor del sistema	5
1.5. Forma canónica de Morse	6
1.6. Forma semicanónica de Morse	8
1.7. Sistema extendido y el interactor extendido	10
2. Realización estática de precompensadores dinámicos	13
2.1. Planteamiento del problema	13
2.2. Condiciones de realizabilidad	15
II Planteamiento del problema de desacoplamiento y resultados previos	19
3. Planteamiento del problema	21
3.1. Desacoplamiento Regular	23
3.2. Desacoplamiento no regular	25
3.2.1. Desacoplamiento por retroalimentación de estado dinámica	27
III Resultados, trabajo futuro y conclusiones.	29
4. Estructura en lazo cerrado para desacoplamiento regular	31
4.1. Preliminares	31

4.2. Estructura de un sistema desacoplado en lazo cerrado	35
4.2.1. Ejemplo	41
5. Transformación a la forma semicanónica de Morse	45
5.1. Introducción	46
5.2. Planteamiento del método para $I_2 = 0$	46
5.2.1. Ejemplo	57
5.3. Extensión para el caso en que $I_2 \neq 0$	61
5.3.1. Planteamiento del método para $I_2 \neq 0$	63
5.3.2. Ejemplo	73
6. Modificación de la estructura al infinito	85
6.1. Método por inspección	87
6.1.1. Planteamiento del método	87
6.1.2. Ejemplos	92
7. Desacoplamiento no regular de sistemas decalados	103
7.1. Método 1	103
7.1.1. Ejemplo	105
7.2. Método 2	108
7.2.1. Ejemplo	125
Trabajo futuro y conclusiones	133

Introducción

0.1. Planteamiento del problema y resultados previos

El desacoplamiento de sistemas dinámicos, también conocido como control no interactuante, es uno de los tópicos de interés en la teoría de control. Esto es debido a que el desacoplamiento en términos simples consiste en que cada salida del sistema es controlada por una sola entrada, sin afectar a las otras salidas. Esta característica es altamente deseable en aplicaciones reales, ya que un sistema multivariable desacoplado puede ser considerado como un conjunto de sistemas monovariantes, siendo esto una gran ventaja por ejemplo al diseñar leyes de control para sistemas demasiado complejos como un reactor nuclear, un avión, etc.

En este trabajo se consideran los sistemas lineales multivariantes invariantes en el tiempo, descritos en espacio de estado mediante ecuaciones lineales diferenciales con coeficientes constantes de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ y $u(t) \in \mathbb{R}^m$ son respectivamente el vector de estado, de salida y de entrada del sistema, las matrices A , B y C son matrices reales. Por facilidad, a lo largo de este trabajo, al sistema previo lo denotaremos como (A, B, C) .

Haciendo referencia a la historia del control no interactuante, uno de los pioneros fue Vozněsenskiĭ en 1934 (ver la referencia [22]), con una investigación concerniente al control de las turbinas de un generador. Para mediados de la década de 1950, se trató de atacar el problema usando métodos que involucraban la matriz de transferencia del sistema; de ahí surgió la pregunta de las condiciones que se deben de cumplir para obtener un control no interactuante, así como también el problema de estabilidad debido a posibles cancelaciones de polos y ceros. Además en este periodo, también se trató de resolver el problema utilizando métodos de dominio en la frecuencia, pero con muy poco éxito.

Al principio de los años 60, había gran cantidad de artículos sobre el tema pero sólo algunos con resultados significantes. La introducción del enfoque de espacio de estado (o teoría moderna de control) fue de gran ayuda para el análisis y estudio de los sistemas dinámicos, que para ese entonces comenzaba a tener gran popularidad. En 1964, Morgan formula el problema de desacoplamiento utilizando retroalimentación de estado [21]. Esto es, el problema de

desacoplamiento de un sistema lineal multivariable consiste en establecer las condiciones bajo las cuales, dado un sistema lineal (A, B, C) , existe una retroalimentación de estado estática

$$u(t) = Fx(t) + Gv(t)$$

donde F y G son matrices constantes y $v(t) \in \mathbb{R}^p$ es un nuevo vector de entrada, tal que en el sistema retroalimentado $(A + BF, BG, C)$, la entrada $v_i(t)$ afecta solamente a la salida $y_i(t)$ sin afectar las otras salidas. Al problema de desacoplamiento también se le conoce actualmente como problema de Morgan. Si este problema se clasifica por el número de entradas y de salidas que tiene el sistema, se divide en dos: a) el problema de desacoplamiento de sistemas con el mismo número de entradas y de salidas se le conoce como desacoplamiento regular; en éste caso la retroalimentación de estado es cuadrada y de hecho la matriz G debe ser no singular, y b) el problema de desacoplamiento con más entradas que salidas se le conoce como desacoplamiento no regular; en éste caso G es una matriz rectangular con más filas que columnas.

El primer resultado importante concerniente al problema de desacoplamiento regular mediante retroalimentación de estado estática, fue obtenido por Falb y Wolovich [5], quienes expresaron su resultado en términos de la no singularidad de una matriz construida a partir de las matrices del sistema, dando así las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una retroalimentación de estado estática que desacople al sistema. También estos autores caracterizaron la clase de las retroalimentaciones que desacoplan a un sistema y el número de polos en lazo cerrado que pueden ser asignados. El problema es que sus condiciones para caracterizar estos polos son difíciles de aplicar y no existe conexión de esas condiciones con la estructura del sistema. Los autores también muestran como asignar sólo un número de polos igual a la suma de los órdenes de los ceros al infinito, los cuales en general son menores al número real de polos asignables.

Otra contribución importante fue la del trabajo de Morse y Wonham en 1969 [33]. Ellos generalizaron el problema propuesto por Morgan planteándolo en términos geométricos y obteniendo condiciones para la solución de dos casos particulares: $rank C = n$ y $rank B = k$, donde C y B son las matrices de salida y de entrada respectivamente y k es el número de bloques en la función de transferencia en lazo cerrado. Sus soluciones están dadas en términos de las propiedades de R^* , que es el máximo subespacio de controlabilidad contenido en el Kernel de la matriz C .

Posteriormente Descusse y Dion [3] dieron una interpretación del resultado de Falb y Wolovich en términos de la estructura del sistema, mostrando que la condición de desacoplamiento se reduce a una igualdad entre la sumatoria de los ordenes de los ceros al infinito del sistema y la sumatoria de los ordenes de los ceros al infinito por filas.

El problema de desacoplamiento regular como se vio en las referencias anteriores ha sido completamente resuelto, sin embargo no ha sucedido lo mismo en el caso de desacoplamiento no regular. En este caso la retroalimentación no regular implica una reducción de entradas del sistema y desafortunadamente esto causa una modificación de la estructura del sistema. Sin embargo existen algunas contribuciones importantes al problema de desacoplamiento no regular:

Zagalak, Lafay y Herrera en 1993 [35], dieron condiciones necesarias y suficientes implícitas para el problema de desacoplamiento no regular utilizando un enfoque polinomial, se dice que

son condiciones implícitas debido a que esas condiciones no son directamente comprobables y dependen de la existencia de una matriz bipropia que no se dice como encontrarla.

Herrera, Torres y Ruiz en 1993 [12], establecieron las condiciones necesarias y suficientes para el caso de desacoplamiento no regular de sistemas con dos salidas, expresando su resultado en términos de la lista I_2 de Morse, y la información al infinito del sistema.

Descusse, Lafay y Malabre [4] presentaron condiciones necesarias y suficientes para la solución general al problema de desacoplamiento no regular, pero luego Herrera y Lafay demostraron en [11], que las condiciones presentadas no son suficientes. Además mostraron que los ordenes esenciales que son los grados por columnas del interactor, no necesariamente son la mínima estructura que se puede asignar al desacoplar un sistema. También ellos dieron condiciones necesarias y suficientes para desacoplar el sistema sin modificar los ordenes esenciales cuando la estructura al infinito de la parte propia del interactor tiene sólo un elemento.

Para obtener una solución al problema de desacoplamiento no regular en forma general, es necesario considerar otros problemas relacionados, como por ejemplo, el resultado de Loiseau de 1988 sobre la solución general al problema de modificación de la estructura al infinito por retroalimentación no regular [19], con el cual se puede asignar una estructura al infinito en una función de transferencia en lazo cerrado pero se tiene el problema que esta función de transferencia no tiene una forma en particular, lo cual es un problema para considerarse al desacoplar un sistema. Otro problema a considerarse para el problema de desacoplamiento no regular es el resultado de Herrera en 1992 sobre la realización de compensadores por retroalimentación [10], ya que se pretende cambiar el problema de encontrar las condiciones de la existencia de una retroalimentación tal que desacople al sistema, por la realizabilidad de un compensador dinámico que desacople al sistema. Será también importante considerar para el desacoplamiento no regular el resultado de Herrera, Lafay y Zagalak en 1995 sobre la forma semicanónica de Morse [13], ya que de esta forma se puede extraer la información de los ordenes de los ceros al infinito y la información de los índices mínimos por columnas de la matriz del sistema, información que juega un papel clave en el desacoplamiento no regular.

En la tesis se considera el caso particular de los sistemas decalados, los cuales son sistemas que tienen sus ordenes esenciales iguales. Estos sistemas tienen algunas características, las cuales se verán en el desarrollo de la tesis, que facilitan un poco el problema de desacoplamiento no regular. La motivación de estudiar el problema de desacoplamiento no regular es debida principalmente a las implicaciones prácticas; esto es, poder obtener un sistema multivariable que tenga la característica de que una entrada controle solamente una salida sin afectar las otras salidas. Este problema de desacoplamiento no regular también es un problema teórico interesante, debido a la complejidad que existe al hacer modificaciones estructurales. Finalmente muchos de los sistemas reales son multivariables y tienen por lo general más entradas que salidas, por lo tanto, es necesario proponer una solución general a este problema.

Como hay que considerar muchos aspectos para tratar de resolver el problema de desacoplamiento no regular en forma general, se convierte en un problema difícil y por lo mismo el problema de desacoplamiento no regular es aún un problema abierto.

0.2. Objetivos de la tesis

El propósito de esta tesis tiene como objetivos:

1. Caracterizar completamente la estructura en lazo cerrado para sistemas desacoplados en el caso regular.
2. Proponer un procedimiento para obtener un elemento del grupo de transformación, que lleve un sistema (A, B, C) a su forma semicanónica de Morse.
3. Resolver el problema de desacoplamiento no regular para sistemas decalados (sistemas con ordenes esenciales iguales), usando un enfoque polinomial.

0.3. Contribuciones

Las aportaciones principales de esta tesis son las siguientes.

- Se caracteriza completamente la estructura del sistema desacoplado en lazo cerrado; esto es, se caracteriza la familia de todas las matrices de transferencia que se pueden obtener para un sistema cuadrado desacoplado en lazo cerrado y se establecen todas las posibles combinaciones de polos finitos asignables. También se caracteriza el conjunto de ceros invariantes que tienen que ser eliminados forzosamente para alcanzar el desacoplamiento, conocidos como polos fijos de desacoplamiento. Es importante mencionar que el desacoplamiento es alcanzado evitando cancelaciones innecesarias de ceros invariantes.

Debido a la complejidad que existe en los problemas relacionados a la modificación de la estructura de un sistema multivariable cuando se utiliza retroalimentación de estado no regular, consideramos que el sistema se encuentra en la forma semicanónica de Morse. Esto nos llevó a proponer un procedimiento para obtener un elemento del grupo de transformación, que lleva un sistema lineal multivariable en su representación en espacio de estado (A, B, C) a su forma semicanónica de Morse. El grupo de transformación incluye retroalimentación de estado, permutación de salidas y cambio de base en estados y salidas. Este procedimiento para obtener un elemento del grupo de transformación en un principio sólo se consideró el caso regular, pero posteriormente se extendió el método de transformación de un sistema a su forma semicanónica de Morse para el caso no regular.

Considerando que el sistema (A, B, C) se encuentra en la forma semicanónica de Morse, se propuso una metodología para modificar la estructura al infinito a una estructura deseada. Para aplicar esta metodología sólo se necesita la información de las listas de Morse y los ordenes esenciales en un sistema decalado, tal que se obtenga la retroalimentación de estado estática que asigna los ordenes esenciales como la estructura al infinito en lazo cerrado.

- Se presenta una metodología para resolver el problema de desacoplamiento no regular de sistemas decalados, haciendo una composición de las retroalimentaciones de estado que llevan un sistema a la forma semicanónica de Morse, la retroalimentación que hace la modificación de la estructura al infinito y la retroalimentación que desacopla al sistema que ha sido modificado. La composición propuesta permite obtener una retroalimentación de estado no regular que desacople al sistema original.

Se da una condición suficiente al problema de desacoplamiento no regular de sistemas decalados y se da un procedimiento para encontrar una retroalimentación de estado no regular, tal que se obtenga de forma directa una función de transferencia en lazo cerrado desacoplada a sus ordenes esenciales. El resultado presentado se aplica a sistemas decalados con m entradas y p salidas, usando un enfoque polinomial.

0.4. Organización de la tesis

Este trabajo se encuentra organizado en tres partes principales:

La primera parte de este reporte son los preliminares y consta de 2 capítulos. En el capítulo 1 se introducen algunos conceptos sobre la estructura de los sistemas lineales que serán considerados a lo largo del trabajo. Entre estos conceptos se encuentran los ceros al infinito globales y por filas, el interactor del sistema, la forma canónica de Morse, la forma semicanónica de Morse, el sistema extendido y finalmente el interactor extendido. Estos conceptos son muy importantes, debido a la información estructural que es básica para modificar la estructura al infinito por retroalimentación no regular.

El capítulo 2 está dedicado a la realización estática de precompensadores dinámicos, el cual consiste en encontrar una retroalimentación de estado estática (F, G) que sea equivalente a la acción de un precompensador dado. En este capítulo se dan las condiciones necesarias y suficientes para resolver éste problema.

En la segunda parte del trabajo se encuentra el capítulo 3, en el cual se da un planteamiento general del problema de desacoplamiento regular y no regular.

La parte de resultados abarca 4 capítulos. El capítulo 4 presenta algunos resultados nuevos sobre desacoplamiento regular. Básicamente en este capítulo se muestra como se caracteriza completamente la estructura del sistema desacoplado en lazo cerrado y como se caracteriza el conjunto de ceros invariantes que tienen que ser eliminados forzosamente para alcanzar el desacoplamiento, conocidos como polos fijos de desacoplamiento.

En el capítulo 5 se presenta un método para encontrar el grupo de transformación que lleva un sistema lineal multivariable a su forma semicanónica de Morse. Más adelante se supondrá que el sistema a desacoplar se encuentra en la forma semicanónica de Morse, por lo tanto es importante saber como llevar cualquier sistema a esta forma.

El capítulo 6 presenta un procedimiento en el cual con sólo la información de las listas de Morse y los ordenes esenciales en un sistema decalado, se pueda decir que retroalimentación de estado estática asigna los ordenes esenciales como la estructura al infinito en lazo cerrado.

En el capítulo 7 se presentan dos métodos para resolver el problema de desacoplamiento no regular de sistemas decalados. El método 1 propone hacer una composición de tres retroalimentaciones de estado, pasando por la forma semicanónica de Morse, una modificación de la estructura al infinito y finalmente el desacoplamiento del sistema. El método 2 presenta una forma directa de obtener la retroalimentación de estado no regular que desacopla al sistema, sin necesidad de pasar por varios sistemas como en el caso del método 1.

Finalmente se presenta el trabajo futuro y las conclusiones sobre el trabajo realizado.

0.5. Publicaciones obtenidas

Como resultado del trabajo desarrollado en esta tesis, se tienen hasta el momento las siguientes publicaciones:

J. Ruiz-León, J.L. Orozco, and O. Begovich, *On the structure of the closed-loop system in the decoupling of linear multivariable systems*, Latin-American Conference on Automatic Control CLCA 2002, Guadalajara, Mexico, December 2002.

J.L. Orozco M., J. Ruiz-León, O. Begovich M. and J.C. Zuñiga A., *Transformation of a linear multivariable system to its semi-canonical Morse's form*, Latin-American Conference on Automatic Control CLCA04 LaHabana, Cuba, April, 2004.

J. Ruiz-León, J.L. Orozco, and O. Begovich, *Closed-loop structure of decouplable linear multivariable systems*, Kybernetika, Vol. 41 No. 1, pag. 33-45, 2005.

J.L. Orozco M., J. Ruiz-León and O. Begovich, *A method to obtain the semi-canonical Morse's form of a linear multivariable system*, 8th IASTED International Conference on Intelligent Systems and Control ISC 2005, Cambridge, USA, October-November 2005.

Parte I
Preliminares

Capítulo 1

Estructura de los sistemas lineales

En esta parte se introducen algunos conceptos básicos para entender el desarrollo de este reporte, tales como el tipo de sistemas a tratar y algunas propiedades estructurales del sistema que serán útiles posteriormente. Entiéndase por estructura del sistema a ciertas propiedades que permiten caracterizarlo, por ejemplo los ceros y polos finitos, los ceros al infinito, el interactor del sistema, índices de controlabilidad, etc.

En la sección 1.1 se presenta la notación a utilizarse en el desarrollo de la tesis. En la sección 1.2 se presentan los sistemas bajo estudio y se exponen algunos de los conceptos matemáticos que se utilizarán a lo largo del trabajo; luego en la sección 1.3 se describen los ceros al infinito y los ceros al infinito por filas. En la sección 1.4 se define el interactor del sistema. En la sección 1.5 y 1.6 se revisa la forma canónica y semicanónica de Morse y finalmente en la sección 1.7 se estudia el sistema extendido.

Los conceptos en este capítulo, se toman principalmente de [15], [31], [30], [23] y [32].

1.1. Notación

Como notación a utilizar en el trabajo se tiene que al conjunto de los números reales se denota como \mathbb{R} , al conjunto de los polinomios en la variable s con coeficientes reales se denota como $\mathbb{R}[s]$, al conjunto de los racionales $\mathbb{R}(s)$, al conjunto de los racionales propios $\mathbb{R}_p(s)$ y al conjunto de los racionales estrictamente propios $\mathbb{R}_{sp}(s)$.

Se denotará el conjunto de las matrices polinomiales de tamaño $m \times n$ con coeficientes reales como $\mathbb{R}^{m \times n}[s]$, al conjunto de matrices racionales propias de $m \times n$ como $\mathbb{R}_p^{m \times n}(s)$ y al conjunto de matrices racionales estrictamente propias de $m \times n$ como $\mathbb{R}_{sp}^{m \times n}(s)$.

1.2. Sistema bajo estudio

En este trabajo se consideran los sistemas lineales multivariados invariantes en el tiempo, descritos en espacio de estado mediante ecuaciones lineales diferenciales con coeficientes cons-

tantes de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (1.1)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ y $u(t) \in \mathbb{R}^m$ son respectivamente el vector de estado, de salida y de entrada del sistema, las matrices A , B y C son matrices reales. Por facilidad, a lo largo de este trabajo, el sistema (1.1), lo denotaremos como (A, B, C) .

La representación del sistema (A, B, C) desde el punto de vista entrada salida es

$$y(s) = \underbrace{C(sI - A)^{-1}Bu(s)}_{T(s)}$$

donde $T(s)$ es la matriz de transferencia del sistema, y $T(s)$ es una matriz racional propia de dimensión $p \times m$.

De la forma de Smith-McMillan [15] de la función de transferencia $T(s)$ se pueden definir los polos y ceros. Los ceros y los polos son las raíces de los numeradores y de los denominadores respectivamente de los polinomios de la forma de Smith-McMillan de la función de transferencia. A estas raíces se les conoce como ceros finitos de transición y los polos finitos del sistema.

1.3. Ceros al infinito

Los ceros al infinito son información estructural del sistema, que será de gran importancia para definir la forma canónica de Morse (sección 1.5), la semicanónica de Morse (sección 1.6), el interactor del sistema (sección 1.4), y para resolver el problema de desacoplamiento regular (sección 3.1) y no regular (sección 3.2). Los ceros al infinito se definen como se indica en el siguiente lema [30].

Lema 1.1 *Si tenemos que $T(s) \in \mathbb{R}_p^{p \times m}(s)$ es la función de transferencia del sistema (A, B, C) con rango $T(s) = p$, entonces, existen matrices bipropias ¹ $B_1(s) \in \mathbb{R}_p^{p \times p}(s)$ y $B_2(s) \in \mathbb{R}_p^{m \times m}(s)$ tal que*

$$T(s) = B_1(s)M(s)B_2(s),$$

donde

$$M(s) = \left[\text{diag} \left\{ \frac{1}{s^{n'_i}} \right\}_{i=1}^p \quad 0 \right]$$

donde $M(s) \in \mathbb{R}_{sp}^{p \times m}(s)$ y los $n'_i = \{n'_1, \dots, n'_p\}$ son enteros positivos tal que $n'_i \leq n'_{i+1}$ para $i = 1, \dots, p$. La matriz $M(s)$ es la forma de Smith-McMillan al infinito del sistema y a los n'_i se les conoce como los ordenes de los ceros al infinito del sistema.

¹Las matrices bipropias son aquellas matrices racionales propias no singulares cuya inversa es también racional propia. Las matrices bipropias cumplen con

$$\det \left(\lim_{s \rightarrow \infty} A(s) \right) \neq 0.$$

o equivalentemente,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} A(s) = A'$$

donde A' es una matriz constante no singular.

En un sistema escalar con un numerador de grado m y denominador de grado n , para $m < n$, los ordenes de los ceros al infinito equivalen a la diferencia del grado del denominador menos el grado del numerador, donde m polos en lazo cerrado tienden a m ceros finitos y $n - m$ polos tienden a $n - m$ ceros infinitos.

Para sistemas multivariables, los ceros al infinito pueden ser obtenidos mediante un cambio de variable $s \rightarrow \lambda^{-1}$ en la forma de Smith-McMillan [15] de $T(\lambda^{-1})$, entonces cuando $\lambda = 0$ se obtiene la estructura al infinito de $T(s)$.

1.3.1. Ceros al infinito por filas

Los ordenes de los ceros al infinito por filas de un sistema (A, B, C) , denotados como n_i , son los ordenes de los ceros al infinito del subsistema (A, B, C_i) , donde C_i es la i -ésima fila de la matriz C [30]. Esta información es importante para el desacoplamiento fila por fila.

Los ceros al infinito por filas se obtienen de la forma de Smith-McMillan al infinito de $T_i(s) \in \mathbb{R}_p^{1 \times m}(s)$ donde T_i es la i -ésima fila de la función de transferencia. Se puede calcular una matriz bipropia $B(s) \in \mathbb{R}_p(s)$, tal que

$$T_i(s)B(s) = \left[\frac{1}{s^{n_i}} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right]$$

donde, n_i es el orden del cero al infinito de $T_i(s)$.

Los ceros al infinito por fila satisfacen también

$$n_i = \min\{j : C_i A^{j-1} B \neq 0, \text{ para } j = 1, \dots\}$$

ó equivalentemente

$$n_i = \min\{j : \lim_{s \rightarrow \infty} s^j T_i(s) \neq 0, \text{ para } j = 1, \dots\}$$

donde C_i y $T_i(s)$ son las i -ésimas filas de C y $T(s)$.

1.4. El interacto del sistema

Asociado a la función de transferencia $T(s)$ de cualquier sistema lineal (A, B, C) , existe una matriz polinomial $\Phi(s)$ única, llamada el interacto del sistema. Presentada en [32], esta matriz ha probado ser una forma canónica bajo compensación dinámica para sistemas lineales, y juega un papel importante en el estudio de problemas tales como seguimiento de modelo, desacoplamiento regular y no regular.

|| El interacto se obtiene a través de la forma de Hermite por columnas de la función de transferencia del sistema, en el anillo de las funciones racionales propias, como se ve en el siguiente lema [32].

Lema 1.2 Sea $T(s) \in \mathbb{R}_p^{p \times m}(s)$ la función de transferencia del sistema (A, B, C) con rango $T(s) = p$. Entonces, existe una matriz bipropia $B(s) \in \mathbb{R}_p^{m \times m}(s)$, y una única matriz polinomial triangular inferior $\Phi(s) \in \mathbb{R}^{p \times p}[s]$, conocida como interactor del sistema, tal que

$$T(s)B(s) = \begin{bmatrix} \Phi^{-1}(s) & 0 \end{bmatrix},$$

donde $\Phi(s)$ tiene la forma

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} s^{f_1} & (0) \\ \vdots & \\ \phi_{p1}(s) & s^{f_p} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

y, para $i > j$,

$$\phi_{ij}(s)s^{-f_i} \text{ es un polinomio divisible por } s, \text{ o } \phi_{ij}(s) = 0.$$

En el interactor se encuentra completamente contenida la información al infinito del sistema.

Los ordenes esenciales del sistema (A, B, C) , denotados como $\{n_{ie}\}$, son definidos como el grado por columnas de su interactor asociado $\Phi(s)$, esto es

$$n_{ie} = \deg_{ci} \Phi(s), \quad i = 1, \dots, p$$

en donde “ $\deg_{ci} \Phi(s)$ ” son los grados de la i -ésima columna de $\Phi(s)$.

En el caso de desacoplamiento regular, los ordenes esenciales también se les conocen como invariantes de desacoplamiento [1], debido a que corresponden con los ceros al infinito en lazo cerrado del sistema desacoplado.

En el caso de desacoplamiento no regular, los ordenes esenciales son la mínima estructura a la que se puede desacoplar el sistema mediante compensación dinámica; en cambio si se utiliza retroalimentación estática se puede obtener una estructura mayor a los ordenes esenciales.

Otra propiedad muy importante que posee $\Phi(s)$ es que es invariante bajo retroalimentación de estado regular, esto es $\Phi(s)$ representa la parte de $T(s)$ que no puede ser modificada por retroalimentación de estado regular. Esta propiedad es fundamental para el caso de desacoplamiento, como se verá más adelante.

1.5. Forma canónica de Morse

Siguiendo la idea de Kalman de utilizar cambios de base para identificar de manera clara algunas propiedades estructurales de un sistema lineal (A, B, C) basándose en las características de observabilidad y controlabilidad, Morse desarrolla la misma idea utilizando un grupo de transformación \mathbb{H} (conocido como grupo de Morse); cada elemento ha sido definido como $h := (H, T, F, K, G)$ donde (H, T, G) son matrices de cambio de base en la salida, en el estado y la entrada respectivamente, F es retroalimentación de estado y K es inyección de salida [23].

El efecto de este grupo sobre la tripleta (A, B, C) es el siguiente:

$$h(A, B, C) := (T^{-1}(A + BF + KC)T, T^{-1}BG, HCT)$$

Si tenemos una realización (A, B, C) , y se asocian cuatro listas de invariantes ó listas de Morse como también se les conoce, formadas por una lista de polinomios $I_1 = \{\alpha_i(s)\}_1^{l_1}$ y tres listas de enteros $I_2 = \{\sigma_i\}_1^{l_2}$, $I_3 = \{\tau_i\}_1^{l_3}$ e $I_4 = \{n'_i\}_1^{l_4}$, existe un elemento $h := (H, T, F, K, G) \in \mathbb{H}$ y matrices únicas A_M , B_M y C_M llamadas la forma canónica de Morse de (A, B, C) , tal que

$$A_M = T^{-1}(A + BF + KC)T = \begin{bmatrix} A_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_1 \end{bmatrix}$$

$$B_M = T^{-1}BG = \begin{bmatrix} B_4 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & B_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_M = HCT = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde

$$A_4 = \text{block diag} \left\{ \begin{array}{c} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}}_{n'_1 \times n'_1}, \dots, \begin{array}{c} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}}_{n'_{l_4} \times n'_{l_4}} \end{array} \right\}$$

$$A_3 = \text{block diag} \left\{ \begin{array}{c} \boxed{\begin{matrix} 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & & \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{matrix}}_{\tau_1 \times \tau_1}, \dots, \begin{array}{c} \boxed{\begin{matrix} 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & & \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{matrix}}_{\tau_{l_3} \times \tau_{l_3}} \end{array} \right\}$$

$$A_2 = \text{block diag} \left\{ \begin{array}{c} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}}_{\sigma_1 \times \sigma_1}, \dots, \begin{array}{c} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}}_{\sigma_{l_2} \times \sigma_{l_2}} \end{array} \right\}$$

$$A_1 = \text{block diag} \{J_{\alpha_1}, \dots, J_{\alpha_{l_1}}\}$$

siendo J_{α_i} una matriz compañera con polinomio característico $\alpha_i(s)$,

$$B_4 = \text{block diag} \left\{ \begin{array}{c} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{matrix}}_{n'_1 \times 1}, \dots, \begin{array}{c} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{matrix}}_{n'_{l_4} \times 1} \end{array} \right\}$$

$$B_2 = \text{block diag} \left\{ \begin{array}{c} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{matrix}}_{\sigma_1 \times 1}, \dots, \begin{array}{c} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{matrix}}_{\sigma_{l_2} \times 1} \end{array} \right\}$$

$$C_4 = \text{block diag} \left\{ \boxed{1 \ 0 \ \dots \ 0}_{1 \times n'_1}, \dots, \boxed{1 \ 0 \ \dots \ 0}_{1 \times n'_{l_4}} \right\}$$

$$C_3 = \text{blockdiag} \left\{ \boxed{0 \ \dots \ 0 \ 1}_{1 \times \tau_1}, \dots, \boxed{0 \ \dots \ 0 \ 1}_{1 \times \tau_{l_3}} \right\}.$$

Las listas de Morse son un conjunto completo de invariantes del sistema (A, B, C) bajo el grupo de transformación (H, T, F, K, G) .

Utilizando algunos conceptos del enfoque geométrico, tales como R^* que es el máximo subespacio de controlabilidad contenido en el $\text{Ker } C$, V^* es el máximo subespacio (A, B) invariante contenido en el $\text{Ker } C$, X el espacio de estado y S^* es el subespacio (C, A) invariante más pequeño que contiene a la $\text{Im } B$, entonces las listas de Morse se pueden relacionar con los invariantes de Kronecker [6] de la matriz del sistema [26]

$$P(s) = \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

de la manera siguiente :

La lista $I_1 = \{\alpha_i(s)\}$ son los polinomios invariantes de la forma de Smith de $P(s)$. Las raíces de $\alpha_i(s)$, las cuales son los ceros finitos de $P(s)$, son llamados los ceros invariantes del sistema (describe la estructura $\frac{V^*}{R^*}$).

La lista I_2 son los índices mínimos por columnas de $P(s)$. Esos enteros son también los índices de controlabilidad del máximo subespacio de controlabilidad contenido en el $\text{ker } C$ (describe la estructura R^*).

- La lista I_3 son los índices mínimos por filas de $P(s)$ (describe la estructura $\frac{X}{V^*+S^*}$).
- La lista I_4 son los ordenes de los ceros al infinito de $P(s)$, los cuales también corresponden a los ordenes de los ceros al infinito del sistema (A, B, C) (describe la estructura $\frac{V^*+S^*}{V^*}$).

1.6. Forma semicanónica de Morse

La forma de Morse es una forma canónica del sistema (A, B, C) , en la cual se encuentra la información estructural del sistema en sus listas de Morse. Esta información es clave en la solución de muchos problemas, en particular, los que implican la modificación estructural de sistemas lineales multivariados.

Considerando que la inyección de salida K del grupo de transformación de Morse es un concepto teórico pero no es físicamente realizable, por lo tanto, se propone un grupo de transformación que sí sea físicamente realizable, el cual es (T, F, G, Π) , donde (T, G) representan cambio de base en el estado y en la entrada, F es retroalimentación de estado y Π representa permutación de salidas.

El efecto del grupo $h_1 = (T, F, G, \Pi)$ sobre la tripleta (A, B, C) es el siguiente:

$$h_1(A, B, C) := (T^{-1}(A + BF)T, T^{-1}BG, \Pi CT).$$

Con lo anterior y haciendo la consideración de que el sistema (A, B, C) es invertible por la derecha ($I_3 = \emptyset$) y sin ceros finitos ($I_1 = \emptyset$), esto es

$$\begin{aligned} V^* + S^* &= X & (I_3 = \emptyset) \\ V^* &= R^* & (I_1 = \emptyset) \end{aligned}$$

con $I_4 = \{n'_i\}_{i=1}^p$, $I_2 = \{\sigma_i\}_{i=1}^{m-p}$, ordenadas en forma no decreciente ($n'_1 \leq \dots \leq n'_p; \sigma_1 \leq \dots \leq \sigma_{m-p}$), entonces se puede decir que existe un elemento en el grupo (T, F, G, Π) , tal que (A_s, B_s, C_s) es conocido como la forma semicanónica de Morse [13] y es de la siguiente forma:

$$A_s = T^{-1}(A + BF)T = \begin{bmatrix} A_4 & 0 \\ H_2 & A_2 \end{bmatrix}$$

$$B_s = T^{-1}BG = \begin{bmatrix} B_4 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}$$

$$C_s = \Pi CT = [C_4 \quad 0]$$

donde

$$A_4 = \begin{bmatrix} J_{n'_1} & & & (0) \\ L_{21} & J_{n'_2} & & \\ \vdots & \vdots & & \\ L_{p1} & L_{p2} & \dots & J_{n'_p} \end{bmatrix}$$

con

$$J_{n'_i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n'_i \times n'_i}$$

$$L_{ij} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{ij} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n'_i - n'_j - 1}^{ij} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n'_i \times n'_j}$$

donde los valores α_i^{ij} pueden ser diferentes de cero,

$$A_2 = \text{block diag} \{ J_{\sigma_1}, \dots, J_{\sigma_{m-p}} \}$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} H_{11} & \dots & H_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ H_{m-p,1} & \dots & H_{m-p,p} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\sum \sigma_i \times \sum n'_i}$$

entonces

$$H_{ij} = \begin{bmatrix} \beta_1^{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{\sigma_i - n'_j - 1}^{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\sigma_i \times n'_j}$$

donde los valores β_i^{ij} pueden ser diferente de cero,

$$B_4 = \text{block diag} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{n'_1 \times 1}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{n'_p \times 1} \right\}$$

$$B_2 = \text{block diag} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\sigma_1 \times 1}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\sigma_{m-p} \times 1} \right\}$$

$$C_4 = \begin{bmatrix} \boxed{1 \ 0 \ \cdots \ 0}_{1 \times n'_1} & (0) & \cdots & (0) \\ \boxed{* \ 0 \ \cdots \ 0}_{1 \times n'_1} & \boxed{1 \ 0 \ \cdots \ 0}_{1 \times n'_2} & \cdots & (0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boxed{* \ 0 \ \cdots \ 0}_{1 \times n'_1} & \boxed{* \ 0 \ \cdots \ 0}_{1 \times n'_2} & \cdots & \boxed{1 \ 0 \ \cdots \ 0}_{1 \times n'_p} \end{bmatrix}$$

los "*" son elementos posiblemente diferentes de cero.

1.7. Sistema extendido y el interactor extendido

Como en el interactor $\Phi(s)$ definido en la sección 1.4, no está contenida la información de la lista I_2 de Morse (los índices de controlabilidad del máximo subespacio de controlabilidad contenido en el $Ker C$), se propone en [9] un sistema extendido que incluya esta información, debido a que esta información juega un papel muy importante en la modificación de la estructura de (A, B, C) por retroalimentación no regular.

Definiendo un conjunto de $m-p$ salidas ficticias en la forma semicanónica de Morse (A_s, B_s, C_s) [29], se obtendrá un sistema extendido [9], como se muestra a continuación.

Definición 1.1 Sea (A_s, B_s, C_s) la forma semicanónica de Morse de (A, B, C) , y definamos la matriz

$$C_{ext} := \begin{bmatrix} C_s \\ C_1 \end{bmatrix}$$

con

$$C_1 = \left[(0) \text{ block diag} \left\{ \boxed{1 \ 0 \ \dots \ 0}_{1 \times \sigma_i} \right\}_{i=1}^{m-p} \right]$$

donde (0) es una matriz de $m-p$ filas por $\sum_{i=1}^p n'_i$ columnas. Entonces, (A_s, B_s, C_{ext}) es llamado el sistema extendido de (A, B, C) , y su interactor $\Phi_{ext}(s)$ es llamado el interactor extendido de (A, B, C) .

El interactor extendido del sistema (A_s, B_s, C_{ext}) tiene la información de la lista I_2 , y es de la siguiente forma.

Lema 1.3 El interactor $\Phi_{ext}(s)$ del sistema extendido (A_s, B_s, C_{ext}) está dado por

$$\Phi_{ext}(s) = \begin{bmatrix} \Phi_1(s) & 0 \\ \Phi_2(s) & \Phi_3(s) \end{bmatrix}$$

donde $\Phi_1(s)$ es el interactor de (A, B, C) y la matriz $\Phi_3(s)$ tiene la forma

$$\Phi_3(s) = \text{diag}\{s^{\sigma_1}, \dots, s^{\sigma_{m-p}}\}$$

donde $\{\sigma_i\}$ es la lista I_2 de Morse del sistema.

En el caso en que se tenga un sistema (A, B, C) que no se encuentre en la forma semicanónica de Morse, ya no se podrá aplicar la definición 1.1 para obtener su sistema extendido. Pero sí se podrá obtener un sistema extendido que lo podemos denotar como $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$, tal que es del mismo orden que el sistema original y contiene la información de la lista I_2 en su función de transferencia denotada como $T_e(s)$, una forma para obtener este sistema extendido $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$, es a partir de la metodología propuesta por Zagalak en la referencia [35]. La cual se muestra a continuación.

Sea $T(s)$ la función de transferencia del sistema (A, B, C) y $(N_1(s), D(s))$ es una factorización coprima derecha de (A, B, I) dada como

$$T(s) = C(sI - A)^{-1}B = CN_1(s)D^{-1}(s)$$

donde definimos $N(s)$ como $N(s) = CN_1(s)$. Entonces por la invertibilidad derecha de $N(s)$, existe una matriz unimodular $U(s)$ tal que

$$N(s)U(s) = \begin{bmatrix} Q(s) & 0 \end{bmatrix}$$

donde $Q(s)$ es una matriz no singular de $p \times p$. Ahora se define la siguiente matriz

$$K(s) = \begin{bmatrix} Q(s) & 0 \\ 0 & I_{m-p} \end{bmatrix} U^{-1}(s)$$

en donde se debe de cumplir que

$$\deg_{c_i} K(s) < \deg_{c_i} D(s) \quad (1.3)$$

para $i = 1, 2, \dots, m$.

Entonces, de acuerdo con [35] la función de transferencia del sistema extendido esta dada por

$$T_e(s) = K(s)D^{-1}(s).$$

El interactor asociado a $T_e(s)$, contiene la información de las listas I_4 e I_2 , y se le conoce como el interactor extendido $\Phi_{ext}(s)$. A continuación se muestra en el siguiente lema [9], las propiedades de éste interactor extendido.

Capítulo 2

Realización estática de precompensadores dinámicos

En este capítulo se presenta el problema y la solución de la realizabilidad estática de precompensadores, el cual consiste en establecer cuando existe la matriz de retroalimentación de estado estática F y la matriz de cambio de base en la entrada G que sea equivalente a la acción de un precompensador dinámico $C(s)$. La solución a este problema es de nuestro interés, debido a que se pretende posteriormente darle solución al problema de desacoplamiento no regular utilizando la realizabilidad de precompensadores dinámicos. Esto es, mediante el cambio del problema de encontrar F y G que desacoplen el sistema, por las condiciones de realizabilidad estática de un compensador que desacople al sistema.

En la sección 2.1 se presenta el problema de la realizabilidad de precompensadores dinámicos.

En la sección 2.2 se presentan las condiciones de realizabilidad de compensadores dinámicos, en el caso de sistemas que tienen el mismo número de entradas que de salidas y en sistemas con más entradas que salidas.

2.1. Planteamiento del problema

Sea un sistema lineal (A, B) , invariante en el tiempo y controlable descrito como

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.1)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ y $u(t) \in \mathbb{R}^m$.

Se considera una retroalimentación de estado

$$u(t) = Fx(t) + Gv(t) \quad (2.2)$$

donde $v \in \mathbb{R}^r$. Entonces, sustituyendo (2.2) en (2.1) se tiene el sistema en lazo cerrado

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t) + BGv(t).$$

Ahora, la función de transferencia en lazo cerrado es

$$T_{FG}(s) = C (sI - A - BF)^{-1} BG. \quad (2.3)$$

La función de transferencia en lazo cerrado se puede descomponer de la siguiente forma

$$T_{FG}(s) = C(sI - A)^{-1}BC(s) \quad (2.4)$$

en donde $C(s)$ es una matriz bipropia, la cual desde el punto de vista de entrada a salida se puede considerar como un compensador. Para demostrar que la función de transferencia en lazo cerrado se puede descomponer de la forma (2.4), se usa el siguiente lema de inversión [15], el cual se utilizará posteriormente para la demostración.

Lema 2.1 Dadas las matrices $J \in \mathbb{R}^{m \times m}$ y $O \in \mathbb{R}^{n \times n}$ no singulares, y las matrices $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $Z \in \mathbb{R}^{n \times m}$, se cumple

$$(J + LOZ)^{-1} = J^{-1} - J^{-1}L (ZJ^{-1}L + O^{-1})^{-1} ZJ^{-1}$$

y también

$$\left[I + O (sI - J)^{-1} L \right]^{-1} = I - O (sI - J + LO)^{-1} L.$$

Para demostrar la descomposición de (2.3) en (2.4) se aplica el lema 2.1, de la forma que se muestra en el siguiente lema.

Lema 2.2 Dado un sistema en lazo cerrado

$$T_{FG}(s) = C (sI - A - BF)^{-1} BG,$$

se cumple que

$$C (sI - A - BF)^{-1} BG = C(sI - A)^{-1}B \left[I - F (sI - A)^{-1} B \right]^{-1} G$$

Prueba. Aplicando el lema de inversión 2.1 a la función de transferencia en lazo cerrado (2.3), se puede hacer la siguiente descomposición

$$\begin{aligned} T_{FG}(s) &= C (sI - A - BF)^{-1} BG \\ &= C \left[(sI - A)^{-1} + (sI - A)^{-1}B (I - F(sI - A)^{-1}B)^{-1} F(sI - A)^{-1} \right] BG \end{aligned}$$

en donde de acuerdo al lema de inversión $J = (sI - A)$, $L = -B$, $O = I$ e $Z = F$. Luego factorizando de la siguiente forma

$$\begin{aligned} &= C(sI - A)^{-1}BG + C(sI - A)^{-1}B (I - F(sI - A)^{-1}B)^{-1} F(sI - A)^{-1}BG \\ &= C(sI - A)^{-1}B \left[I + (I - F(sI - A)^{-1}B)^{-1} F(sI - A)^{-1}B \right] G \end{aligned}$$

se sustituye $I = (I - F(sI - A)^{-1}B)^{-1} (I - F(sI - A)^{-1}B)$,

$$\begin{aligned} &= C(sI - A)^{-1}B \left[(I - F(sI - A)^{-1}B)^{-1} (I - F(sI - A)^{-1}B) + \right. \\ &\quad \left. (I - F(sI - A)^{-1}B)^{-1} F(sI - A)^{-1}B \right] G \end{aligned}$$

entonces factorizando $(I - F(sI - A)^{-1}B)^{-1}$ se tiene que

$$\begin{aligned} &= C(sI - A)^{-1}B \left[(I - F(sI - A)^{-1}B)^{-1} [I - F(sI - A)^{-1}B + F(sI - A)^{-1}B] \right] G \\ &= C(sI - A)^{-1}B \left[I - F(sI - A)^{-1}B \right]^{-1} G. \end{aligned}$$

■

Del lema 2.2, se puede ver que la función de transferencia en lazo cerrado del sistema, se puede descomponer como

$$\begin{aligned} T_{FG}(s) &= C(sI - A - BF)^{-1}BG = C(sI - A)^{-1}B \left[I - F(sI - A)^{-1}B \right]^{-1}G \\ &= T(s)C(s) \end{aligned}$$

en donde $T(s) = C(sI - A)^{-1}B$ es la función de transferencia en lazo abierto y $C(s) = \left[I - F(sI - A)^{-1}B \right]^{-1}G$ es una matriz bipropia que se puede ver desde el punto de vista de entrada a salida como un compensador. El compensador previo es bipropio debido a que cumple con $\lim_{s \rightarrow \infty} C(s) = G$, donde G es una matriz constante no singular.

Ahora, si se considera el problema inverso, se podría dar la siguiente pregunta: dado un compensador ¿bajo qué condiciones existe una retroalimentación de estado estática que sea equivalente a la acción del compensador?. Entonces, se dice que un compensador dado $C(s)$ es realizable por retroalimentación de estado, si existe $u(t) = Fx(t) + Gv(t)$ tal que $C(s) = \left[I - F(sI - A)^{-1}B \right]^{-1}G$.

2.2. Condiciones de realizabilidad

Las condiciones de realizabilidad estática de precompensadores dinámicos, en el caso de sistemas con el mismo número de entradas que de salidas, están dadas mediante el siguiente lema [8].

Lema 2.3 *Dado un compensador $C(s) \in \mathbb{R}_p^{m \times m}(s)$ y $(N(s), D(s))$ una factorización coprime derecha asociada con (A, B) , con $D(s)$ reducida por columnas, el compensador es realizable estáticamente si y solo si*

$$C(s) \text{ es bipropia y } C(s)^{-1}D(s) \text{ es una matriz polinomial.} \quad (2.5)$$

Prueba. La necesidad es fácil de deducir a partir del siguiente compensador

$$C(s) = [I - FN(s)D^{-1}(s)]^{-1}G$$

el cual es bipropio debido a que $\lim_{s \rightarrow \infty} C(s) = G$, donde G es una matriz constante no singular. A partir de

$$C^{-1}(s) = G^{-1} [I - FN(s)D^{-1}(s)]$$

se puede ver que

$$C^{-1}(s)D(s) = G^{-1}D(s) - G^{-1}FN(s)$$

es polinomial.

La suficiencia es una consecuencia de la existencia de una solución constante (X, Y) , con X no singular, a la ecuación polinomial [17]

$$XD(s) + YN(s) = C(s)^{-1}D(s)$$

en donde la retroalimentación de estado (F, G) que realiza al compensador $C(s)$, está dada por

$$\begin{aligned} F &= -X^{-1}Y \\ G &= X^{-1} \end{aligned}$$

■

La generalización de este resultado para el caso no regular, considerando compensadores no necesariamente cuadrados con rango pleno por columnas, está dada por el siguiente lema [10].

Lema 2.4 *Sea (A, B) un par controlable y $(N(s), D(s))$ es una factorización coprime derecha asociada con (A, B) . Suponga que $D(s)$ es reducida por columnas. Sea $C(s) \in \mathbb{R}^{m \times r}(s)$ un precompensador tal que $\text{rank } C(s) = r$. Entonces existen matrices $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $G \in \mathbb{R}^{m \times r}$ con $\text{rank } G = r$, tal que el precompensador $C(s)$ es realizable si y solo si existe una matriz bipropia $B(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}(s)$ tal que*

$$B(s)C(s) = \begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

y

$$B(s)D(s) = R(s) \quad (2.7)$$

donde $R(s)$ es una matriz polinomial de $m \times m$.

Prueba. La prueba de este teorema se encuentra en [10]. ■

Si $m = r$ entonces (2.6) y (2.7) son equivalentes a (2.5). Para este caso particular, es relativamente fácil probar la realizabilidad estática del compensador. En cambio para el caso $m > r$ la dificultad proviene de la no unicidad de $B(s)$.

Herrera propone en [10], el siguiente lema para solucionar en forma general el problema de la realizabilidad estática de un precompensador dinámico. Sus condiciones son constructivas y no solo se aplican a precompensadores invertibles si no también a los que sólo tienen inversa izquierda.

Lema 2.5 *Sea un par (A, B) y $C(s) \in \mathbb{R}_p^{m \times r}(s)$, donde $C(s)$ se puede escribir como*

$$C(s) = C_0 + \bar{C}(s)$$

siendo

$$C_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} C(s) \text{ con } \text{rank } C_0 = r$$

y $\bar{C}(s)$ es la parte estrictamente propia del compensador $C(s)$. Entonces, existen matrices constantes $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $G \in \mathbb{R}^{m \times r}$ tal que $C(s) = \left[I - F(sI - A)^{-1} B \right]^{-1} G$ si y sólo si los índices de Kronecker izquierdos [15] de

$$H(s) := \begin{bmatrix} (sI - A)^{-1} BC(s) \\ \bar{C}(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{sp}^{(n+m) \times r}(s) \quad (2.8)$$

cumplen con las siguientes dos condiciones.

a) Para algún entero q

$$\mu_1 = \dots = \mu_m = \mu_{m+1} = \dots = \mu_{m+q} = 0 < \mu_{m+q+1} \leq \dots \leq \mu_{n+m-l},$$

donde $l := \text{rank } H(s)$.

b) Entre las filas correspondientes a μ_1, \dots, μ_{m+q} en una base mínima del Kernel izquierdo de $H(s)$, existen m filas las cuales tienen la forma $[X', E_m]$,

$$\begin{bmatrix} X' & E_m \end{bmatrix} H(s) = 0$$

donde E_m es una matriz constante de $m \times m$ no singular.

Prueba. (Si)

Si se considera un compensador que tiene la forma

$$C(s) = \left[I - F(sI - A)^{-1} B \right]^{-1} G \quad (2.9)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \left[I - F(sI - A)^{-1} B \right] C(s) &= G \\ C(s) - F(sI - A)^{-1} BC(s) &= G \end{aligned} \quad (2.10)$$

De la base mínima del kernel izquierdo de $H(s)$, existen m filas las cuales tienen la forma $[X', E_m]$,

$$\begin{bmatrix} X' & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI - A)^{-1} BC(s) \\ \bar{C}(s) \end{bmatrix} = 0$$

donde E_m es una matriz constante de $m \times m$ no singular. Multiplicando estas dos matrices, se obtiene la siguiente ecuación

$$X'(sI - A)^{-1} BC(s) + E_m \bar{C}(s) = 0,$$

en la cual se factoriza E_m y se despeja de la siguiente forma

$$\bar{C}(s) = -E_m^{-1} X'(sI - A)^{-1} BC(s).$$

Luego se sustituye $\bar{C}(s) = C(s) - C_0$ obteniéndose

$$C(s) - C_0 = -E_m^{-1} X'(sI - A)^{-1} BC(s)$$

$$C(s) + E_m^{-1} X'(sI - A)^{-1} BC(s) = C_0. \quad (2.11)$$

Ahora por igualación de la ecuación (2.10) y de (2.11), se obtiene que la retroalimentación de estado (F, G) que realiza al compensador (2.9), está dada por

$$\begin{aligned} F &= -E_m^{-1} X' \\ G &= C_0 \end{aligned}$$

en donde ésta solución es única si $q = 0$.

(solo si)

Dado que existen (F, G) , entonces el rango de $[F \quad -I_m] = m$, por lo tanto $[F \quad -I_m]$ forma parte de cualquier base mínima del kernel izquierdo de $H(s)$ de dimensiones $m + n - l$. Por lo tanto para algún entero q

$$\mu_1 = \dots = \mu_m = \mu_{m+1} = \dots = \mu_{m+q} = 0 < \mu_{m+q+1} \leq \dots \leq \mu_{n+m-l}.$$

■

El lema anterior se usará más adelante, en el capítulo 5, cuando se requiera encontrar las matrices F y G tales que realicen un compensador $C(s)$.

Parte II

Planteamiento del problema de desacoplamiento y resultados previos

Capítulo 3

Planteamiento del problema

En este capítulo se presenta un panorama general del problema de desacoplamiento (o control no interactuante, conocido también como el problema de Morgan) de sistemas lineales multivariados.

En control automático, un objetivo central es el lograr que un sistema dado se comporte “adecuadamente” esto quiere decir que cumpla con requisitos dados por el diseñador; estas especificaciones pueden ser por ejemplo: estabilidad, robustez, seguimiento, etc. Para lograr estas especificaciones es necesario que al aplicar una entrada, los estados y en consecuencia las salidas se comporten como se requiere. Pero en general, si se aplica a una sola entrada de un sistema multivariable una señal, es casi seguro que todas o casi todas las salidas del sistema cambien su comportamiento. Esto no siempre es recomendable ya que se puede complicar el diseño de una acción de control para un sistema multivariable. Por lo tanto un sistema en el cual la i –ésima entrada afecta únicamente a la i –ésima salida permite controlar cada salida como si se tratasen de sistemas independientes. A esta clase de sistemas se le llama desacoplados. En un sistema desacoplado su comportamiento es como el de varios sistemas monovariados separados, a los cuales se les puede aplicar la muy extensa y bien conocida teoría para sistemas monovariados. Poder desacoplar un sistema complicado como un turbo propulsor, un reactor nuclear, un calentador, etc., sería de gran utilidad ya que simplificaría enormemente el poder manipular su comportamiento.

El problema de desacoplamiento puede tener diversas variantes, dependiendo por ejemplo, de la estructura del sistema en lazo cerrado, del tipo de retroalimentación que se utilice, del número de entradas y de salidas, etc. El problema de desacoplamiento de un sistema lineal multivariable de n estados, m entradas y p salidas consiste entonces en establecer las condiciones, bajo las cuales, dado un sistema lineal

$$(A, B, C) \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

existe una retroalimentación de estado estática

$$u(t) = Fx(t) + Gv(t) \quad (3.2)$$

donde F y G son matrices constantes y $v(t) \in \mathbb{R}^p$ es un nuevo vector de entrada, tal que en el sistema retroalimentado $(A + BF, BG, C)$, la entrada $v_i(t)$ afecta solamente a la salida $y_i(t)$ sin afectar las otras salidas.

En términos de función de transferencia, observe que el planteamiento anterior es equivalente a decir que existe una retroalimentación de estado (3.2) tal que la función de transferencia en lazo cerrado $T_{FG}(s)$ es una matriz diagonal, es decir

$$T_{FG}(s) = \begin{bmatrix} t_1(s) & 0 \\ 0 & t_p(s) \end{bmatrix}$$

donde $t_i(s) \neq 0$ son funciones racionales propias. Por facilidad, una consideración común es que las entradas diagonales de la función de transferencia en lazo cerrado sean de la forma $\frac{1}{s^j}$, donde j es un entero positivo; a esta forma de función de transferencia se le llama desacoplamiento en integradores. Por supuesto, con esta forma todos los polos están ubicados en cero, por lo que en este caso no se puede elegir otra ubicación de los polos para obtener una dinámica en el sistema “adecuada”, o tratar el problema causado por una posible cancelación de polos con ceros repercutiendo en la estabilidad interna.

De manera más general se pueden distinguir varios tipos de desacoplamiento, los cuales podemos agrupar en dos categorías:

1. Según la estructura del sistema en lazo cerrado

- Desacoplamiento por bloques: en este tipo de desacoplamiento se tiene una partición de las salidas en k bloques independientes de tamaño p_1, p_2, \dots, p_k . Se desea tener una partición de las entradas en k bloques independientes de tamaño m_1, m_2, \dots, m_k que satisfagan la siguiente propiedad: cada bloque de entradas debe controlar a un sólo bloque de salidas de manera independiente. La función de transferencia, en este tipo de desacoplamiento, tendrá la forma diagonal a bloques.
- El desacoplamiento línea por línea puede considerarse como un caso especial de desacoplamiento por bloques, en donde el tamaño de los bloques es $k = 1$.

Desacoplamiento triangular: en este tipo de desacoplamiento las salidas se controlan en cascada. La función de transferencia, en este tipo de desacoplamiento, tendrá forma triangular.

2. Según el tipo de ley de control

Desacoplamiento Estático: en este tipo de desacoplamiento se utiliza una ley de control de la forma (3.2), donde $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $G \in \mathbb{R}^{m \times p}$ son matrices constantes.

Desacoplamiento Dinámico: en este tipo de desacoplamiento se utiliza una ley de control de la forma

$$u(s) = F(s)x(s) + Gv(s)$$

donde $F(s)$ es una matriz racional propia de $m \times n$ y G es una matriz con elementos reales de $m \times p$.

En cada uno de los casos anteriores podemos considerar los siguientes casos de desacoplamiento:

- Desacoplamiento Regular: cuando $p = m$ es decir, $T(s)$ es cuadrada, podemos hablar de desacoplamiento regular. En el cual se utiliza una ley de control regular, es decir

$$u(t) = Fx(t) + Gv(t)$$

con G no singular.

- Desacoplamiento no Regular: cuando $m > p$, es decir, $T(s)$ tiene más columnas que filas, entonces se hablará de desacoplamiento no regular. En el cual se utiliza una ley de control no regular, con G no cuadrada, pero con rango pleno por columnas.

En esta tesis nos enfocaremos a los casos de desacoplamiento línea por línea con retroalimentación estática en los casos regular y no regular.

3.1. Desacoplamiento Regular

El primer resultado completo que se tiene acerca de la solución del problema de desacoplamiento regular estático, se debe a Falb y Wolovich [5], los cuales presentan en su artículo el siguiente resultado:

Teorema 3.1 *Sea (A, B, C) un sistema con el mismo número de entradas y salidas. Existe una retroalimentación de estado regular (F, G) tal que el sistema en lazo cerrado $(A + BF, BG, C)$ es desacoplado si y sólo si la matriz*

$$B^* = \begin{bmatrix} C_1 A^{d_1} B \\ C_2 A^{d_2} B \\ \vdots \\ C_p A^{d_p} B \end{bmatrix}$$

es no singular, donde los enteros $\{d_i\}_{i=1}^p$, están definidos como sigue

$$d_i = \min\{j \in \mathbb{N} \mid C_j A^{d_j} B \neq 0\},$$

y C_i es la i – ésima fila de la matriz C .

En este mismo artículo se puede encontrar la forma de calcular la retroalimentación (F, G) que desacopla al sistema en función de B^* , ubicando todos los polos en cero, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} F &= (B^*)^{-1} A^* \\ G &= (B^*)^{-1} \end{aligned}$$

donde

$$A^* = \begin{bmatrix} C_1 A^{d_1+1} \\ C_2 A^{d_2+1} \\ \vdots \\ C_p A^{d_p+1} \end{bmatrix}$$

Los enteros d_i vistos anteriormente están relacionados con los ceros al infinito de los sistemas (A, B, C_i) , a los cuales se les conoce como ceros al infinito por líneas y se les denota como n_i , de la siguiente manera:

$$n_i = d_i + 1.$$

También, bajo la suposición de que B^* es invertible, se caracteriza la clase de matrices que desacoplan al sistema, así como el conjunto de polos que pueden ser asignados, aunque este resultado no es general como se mostrará más adelante en el capítulo 4.

En 1971, Morse y Wonham [22] reformularon el problema de desacoplamiento regular en términos geométricos y dan condiciones necesarias y suficientes para encontrar la retroalimentación de estado estática para tres casos particulares, al cual llaman problema de Morgan restringido:

- $\text{rank } C = n$
- $\text{rank } G = m$
- $\text{rank } B = k$

donde k es el número de bloques de la función de transferencia en lazo cerrado.

Estas condiciones están en función de las propiedades de R^* , el máximo subespacio de controlabilidad contenido en $\text{Ker}C$.

En 1982, en un trabajo de Descusse y Dion [3], se da una interpretación del resultado de Falb y Wolovich en términos de la estructura del sistema, mostrando que lo obtenido por ellos es equivalente a la coincidencia entre la estructura al infinito global del sistema y el conjunto de los ceros al infinito por líneas del mismo sistema. Esto es: el sistema (A, B, C) es desacoplable si y sólo si

$$\sum_{i=1}^p n'_i = \sum_{i=1}^p n_i \quad (3.3)$$

donde $\{n'_1, \dots, n'_p\}$ son los ordenes de los ceros al infinito, y $\{n_1, \dots, n_p\}$ son los ordenes de los ceros al infinito por filas del sistema.

Posteriormente los ordenes esenciales fueron definidos en [1]. Los autores demostraron que el conjunto de esos invariantes es igual a los ceros al infinito del sistema desacoplado por retroalimentación regular. También demostraron que los ordenes esenciales son la mínima estructura que es posible alcanzar en retroalimentación de estado dinámica y estática regular.

Con la introducción tanto del interactor del sistema como de los ordenes esenciales, pudo darse una solución al problema de desacoplamiento regular en términos de la estructura del sistema:

Sea el sistema (A, B, C) y $\Phi(s)$ su interactor asociado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. El problema de desacoplamiento regular tiene solución para (A, B, C) .

2. El interactor $\Phi(s)$ es diagonal.
3. $\sum_{i=1}^p n'_i = \sum_{i=1}^p n_{ie}$
4. $\sum_{i=1}^p n'_i = \sum_{i=1}^p n_i$
5. $n_i = n_{ie}, i = 1, \dots, p.$

En donde n'_i son los ordenes de los ceros al infinito del sistema, n_i son los ceros al infinito por filas y n_{ie} son los ordenes esenciales del sistema.

3.2. Desacoplamiento no regular

La retroalimentación de estado estática no regular nos sirve para atacar varios tipos de problemas, como lo es la asignación de una estructura al infinito [19], el problema de desacoplamiento no regular, entre otros.

Sustituyendo (3.2) en (3.1) nos lleva a la representación del sistema en lazo cerrado de la forma

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t) + BGv(t).$$

El efecto de una retroalimentación de estado estática no regular (F, G) sobre el sistema (A, B, C) es equivalente a un precompensador actuando sobre la función de transferencia $T(s)$

$$\begin{aligned} T_{FG}(s) &= C(sI - A - BF)^{-1}BG \\ &= C(sI - A)^{-1}B[I_m - F(sI_n - A)^{-1}B]^{-1}G \\ &= T(s)C(s) \end{aligned}$$

donde I_m e I_n son matrices identidades de $m \times m$ y $n \times n$ respectivamente; $C(s) := [I_m - F(sI_n - A)^{-1}B]^{-1}G \in \mathbb{R}_p^{m \times p}(s)$ y es una matriz bipropia por columnas.

En la ley de control no regular de la ecuación (3.2), G es una matriz rectangular de rango pleno por columnas (rango $G = p$) que es una condición necesaria para que el problema de desacoplamiento tenga solución. Este tipo de ley de control se tiene que utilizar cuando se intenta desacoplar línea por línea un sistema que tiene más entradas que salidas. Cabe mencionar que, la solución general al problema del desacoplamiento estático no regular, continua sin ser resuelto completamente hasta la fecha.

Hay unos pocos trabajos que investigan el efecto de la retroalimentación no regular sobre el sistema (A, B, C) , uno de ellos es Heymann que caracterizó el conjunto de índices de controlabilidad que pueden ser obtenidos por una retroalimentación no regular ([14]).

Otro resultado muy interesante es el de Loiseau [19], el cual resuelve el problema de la modificación de estructura de los ceros al infinito por retroalimentación no regular como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 3.2 *Sea un sistema (A, B, C) con $\{\sigma_i\}_{\alpha_1}$ por lista I_2 y $\{n_i\}_{p_1}$ por lista I_4 , y consideramos las listas definidas a continuación:*

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \text{card}\{j \mid \sigma_j \geq i\} \quad \text{para } i \geq 1, \\ p_i &= \text{card}\{j \mid n_j \geq i\} \quad \text{para } i \geq 1.\end{aligned}$$

Sea $\{n'_i\}_{p'_1}$ un conjunto de enteros positivos no creciente, y $\{p'_i\}_{n'_1}$ la lista

$$p'_i = \text{card}\{j \mid n'_j \geq i\} \quad \text{para } i \geq 1.$$

Consideremos entonces la lista de diferencias $\{p'_i - p_i\}$. Esta lista no está ordenada y en general incluye términos negativos. Sea $\{\Delta_1\}$ la lista obtenida mientras mantenemos las diferencias no negativas y reacomodamos para obtener un conjunto no creciente de elementos.

Entonces existe una retroalimentación de estado estática (F, G) tal que $\{n'_i\}_{p'_1}$ sea la lista I_4 del sistema retroalimentado $(A + BF, BG, C)$ si y solo si las dos condiciones siguientes se cumplen:

$$\begin{aligned}p_1 - p_i &\geq p'_1 - p'_i \quad \text{para } i \geq 1, \\ \sum_{j=1}^i \alpha_j &\geq \sum_{j=1}^i \Delta_1\end{aligned}$$

En el teorema anterior, Loiseau propone las condiciones necesarias y suficientes para modificar la estructura al infinito de un sistema y propone una forma de obtener una retroalimentación de estado (F, G) , la cual modifica la estructura al infinito del sistema. El problema es que la función de transferencia en lazo cerrado utilizando F y G no tiene una forma en particular. Por lo tanto, para resolver el problema de desacoplamiento no regular, no es evidente como poder utilizar los resultados del teorema previo.

A continuación se demuestra que en el caso no regular, la estructura en lazo cerrado a la que puede llevarse el sistema al desacoplarlo con un compensador propio son los ordenes esenciales:

$$T(s)C(s) = \text{diag}\left\{\frac{1}{s^{n_{ie}}}\right\}. \quad (3.4)$$

Para demostrar (3.4), se parte de la definición del interactor

$$T(s)B(s) = \begin{bmatrix} \Phi^{-1}(s) & 0 \end{bmatrix}$$

donde $B(s)$ es una matriz bipropia y $\Phi(s) \in \mathbb{R}^{p \times p}[s]$ es el interactor del sistema.

Se puede factorizar el interactor en términos de ordenes esenciales n_{ie} , como sigue:

$$\Phi(s) = \Gamma(s) \text{diag}\{s^{n_{ie}}\}$$

donde $\Gamma(s)$ es una matriz propia conocida como la parte propia del interactor.

Sea un compensador propio tal como

$$C(s) = B(s) \begin{bmatrix} \Gamma(s) \\ X(s) \end{bmatrix}$$

donde $X(s) \in \mathbb{R}_p^{(m-p) \times p}(s)$ es una matriz propia.

Con lo que se tiene

$$T(s)C(s) = \begin{bmatrix} \Phi^{-1}(s) & 0 \end{bmatrix} B^{-1}(s)B(s) \begin{bmatrix} \Gamma(s) \\ X(s) \end{bmatrix}$$

$$T(s)C(s) = \Phi^{-1}(s)\Gamma(s)$$

$$T(s)C(s) = (\Gamma(s) \text{diag}\{s^{nie}\})^{-1} \Gamma(s)$$

$$T(s)C(s) = \text{diag}\left\{\frac{1}{s^{nie}}\right\} \Gamma(s)^{-1} \Gamma(s)$$

$$T(s)C(s) = \text{diag}\left\{\frac{1}{s^{nie}}\right\} \text{ para } i = 1, \dots, p.$$

Por lo que en el caso de desacoplamiento no regular por medio de compensación, la mínima estructura a la cual se puede desacoplar son los ordenes esenciales.

3.2.1. Desacoplamiento por retroalimentación de estado dinámica

Aunque en esta tesis el tema principal es el desacoplamiento no regular de sistemas lineales por retroalimentación de estado estática, es importante conocer brevemente el resultado para el caso dinámico.

Una solución al problema de desacoplamiento línea por línea por retroalimentación dinámica

$$u(s) = F(s)x(s) + Gv(s) \quad (3.5)$$

donde $F(s) \in \mathbb{R}_p^{m \times n}(s)$ y $G \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $\text{rank } G = p$, es reportada en [2]; este resultado se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 3.3 *Sea $T(s)$ la función de transferencia del sistema (A, B, C) , el cual es invertible por la derecha. Entonces, el sistema es desacoplable por la retroalimentación de estado (3.5), si y sólo si*

$$m \geq 2p - k$$

donde k es el rango del límite del interactor asociado a $T(s)$ para cuando s tiende a infinito.

Prueba. Prueba en [2]. ■

Por lo tanto, el problema tiene solución si el número de entradas m es suficientemente grande para compensar la deficiencia de rango al infinito del interactor del sistema.

Parte III

Resultados, trabajo futuro y conclusiones.

Capítulo 4

Estructura en lazo cerrado para desacoplamiento regular

En este capítulo se muestra como se caracteriza completamente la estructura del sistema desacoplado en lazo cerrado permitiendo ubicar algunos polos de manera arbitraria. También se caracteriza el conjunto de ceros invariantes que tienen que ser eliminados forzosamente para alcanzar el desacoplamiento, conocidos como polos fijos de desacoplamiento. Es importante mencionar que el desacoplamiento es alcanzado evitando cancelaciones innecesarias de ceros invariantes. También en este capítulo se demuestra que dada una estructura en lazo cerrado en particular, la retroalimentación es única si y sólo si el sistema es controlable.

Los sistemas que se consideran en este capítulo son los sistemas lineales multivariables, controlables no necesariamente observables y con el mismo número de entradas que de salidas. También se considera que estos sistemas son desacoplables por retroalimentación de estado estática, también conocido como el caso regular. Los resultados obtenidos sobre este tema se presentan en las publicaciones [28] y [27].

En la sección 4.1 se presentan los preliminares del estudio de la estructura de la función de transferencia en lazo cerrado para el caso de desacoplamiento regular.

En la sección 4.2 se caracteriza completamente la estructura de la función de transferencia desacoplada en lazo cerrado, en función de los ceros invariantes que tienen que ser cancelados para obtener una función de transferencia en lazo cerrado desacoplada.

4.1. Preliminares

Aunque existen muchos resultados acerca de desacoplamiento, estos se enfocan principalmente en establecer condiciones necesarias y suficientes para resolver el problema, pero usualmente no consideran ni el problema de que estructura se puede obtener en el sistema desacoplado en lazo cerrado (sólo se considera la diagonalidad de la matriz de transferencia en lazo cerrado), ni las características de la retroalimentación de estado que desacopla al sistema. Por ejemplo, si se desea desacoplar un sistema y aparte hacer una asignación de polos, esto puede ser un problema ya que si primero se desacopla el sistema a su matriz de transferencia con integradores en

la diagonal y luego se aplica una retroalimentación de estado para hacer la asignación de polos, esta última retroalimentación en general destruye la diagonalidad de la matriz de transferencia del sistema en lazo cerrado. Por lo tanto sería más adecuado cumplir con los dos objetivos de desacoplamiento y asignación de polos con la misma retroalimentación de estado.

De la solución propuesta al problema de desacoplamiento por Descusse y Dion [3], se puede ver que las condiciones necesarias y suficientes para el desacoplamiento regular dependen sólo de la estructura al infinito del sistema (global y por filas). Por otra parte, la estructura finita (polos y ceros finitos), juega un papel importante en la estructura general del sistema desacoplado en lazo cerrado. Los ceros del sistema, los cuales son importantes en este trabajo, son los ceros invariantes del sistema.

Por la naturaleza del problema es necesario tratar con 2 tipos de ceros, los ceros de transmisión y los ceros invariantes. Los ceros de transmisión son los que se obtienen en la matriz de transferencia, y estos ceros son considerados como “ceros de entrada-salida” mientras que los ceros invariantes son obtenidos de la matriz del sistema [26]

$$P(s) = \begin{bmatrix} sI - A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

y son considerados como “ceros internos”, los ceros invariantes contienen a los de transmisión y ambos coinciden si el sistema es controlable y observable.

Cuando se busca desacoplar un sistema lineal, puede ser necesario cancelar algunos ceros invariantes del sistema con los polos en lazo cerrado, pero no implica que se tengan que eliminar todos los ceros invariantes del sistema. Por ejemplo, sea un sistema (A, B, C) controlable dado por

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con función de transferencia

$$T(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s-2)(s+2)} & 0 \\ \frac{s-1}{(s-2)(s+2)^3} & \frac{s+1}{(s+2)^2} \end{bmatrix}$$

en donde los ordenes de los ceros al infinito por filas son

$$n_1 = 2, \quad n_2 = 1.$$

Los ceros invariantes del sistema son $(s + 1)(s - 1)$, los cuales se obtienen de la forma de Smith de la matriz del sistema

$$P(s) = \begin{bmatrix} sI - A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

El interactor del sistema es

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

en donde los ordenes de los ceros al infinito son $n'_1 = 1$ y $n'_2 = 2$. Como el interactor es diagonal el sistema es desacoplable, por lo tanto existe una retroalimentación que elimina todos los ceros y que ubica todos los polos en cero, como se muestra en la siguiente función de transferencia del sistema en lazo cerrado desacoplado

$$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Como el sistema es desacoplable esto quiere decir que existe un compensador de la forma $C(s) = T^{-1}(s)W(s)$, en donde $W(s)$ es la función de transferencia del sistema en lazo cerrado desacoplado. En este caso el compensador es

$$C(s) = \begin{bmatrix} \frac{s^2}{s^2-4} & 0 \\ \frac{-s+s^2}{-16s+4s^3+s^4-16} & \frac{s+s^2}{4s+s^2+4} \end{bmatrix}$$

y la retroalimentación de estado estática (F, G) que es equivalente a la acción del compensador es

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 & 4 & 4 \\ 3 & -3 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

la cual se obtuvo de la base mínima del kernel izquierdo de la siguiente matriz (capítulo 2)

$$H(s) = \begin{bmatrix} (sI - A)^{-1} BC(s) \\ \overline{C}(s) \end{bmatrix}.$$

Como se muestra en la función de transferencia del sistema en lazo cerrado desacoplado (4.1), se eliminaron todos los ceros y todos los polos están ubicados en cero. Ahora, se propone a continuación otra estructura de $W(s)$

$$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} & 0 \\ 0 & \frac{s+1}{s^2} \end{bmatrix}$$

diferente de la anterior, en la cual no se elimine un cero invariante $s = -1$ y que todos los polos esten ubicados en cero. Posteriormente se calcula el compensador para obtener $W(s)$ como la función de transferencia del sistema en lazo cerrado desacoplado. En este caso el compensador es

$$C(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} (s^2 - 4) & 0 \\ \frac{-s+1}{s^2+s^3} & \frac{1}{s^2} (4s + s^2 + 4) \end{bmatrix}$$

en donde, en la función de transferencia del sistema en lazo cerrado se canceló un cero invariante $s = 1$.

Pero, aunque tenemos una función de transferencia desacoplada, al comprobar si el compensador propuesto es realizable por una retroalimentación de estado estática (ver el teorema 2.5 del capítulo 2), se puede comprobar que no es realizable, por lo tanto no existe ninguna retroalimentación (F, G) tal que realice al compensador $C(s)$. Por lo tanto, para alcanzar el desacoplamiento mediante retroalimentación de estado estática es necesario cancelar el cero invariante $s = -1$ con un polo en lazo cerrado, más adelante a estos polos se les llamará polos fijos de desacoplamiento.

Ahora se propone una función de transferencia del sistema en lazo cerrado desacoplado de la siguiente forma

$$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+2)(s+1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

en donde se eliminaron todos los ceros y los polos son estables.

Calculando el compensador para obtener $W(s)$ como la función de transferencia del sistema en lazo cerrado desacoplado se obtiene

$$C(s) = T^{-1}(s)W(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-2}{s+1} & 0 \\ \frac{-s+1}{5s+4s^2+s^3+2} & \frac{s+2}{s+1} \end{bmatrix}$$

con el cual para comprobar si es realizable por retroalimentación de estado estática se puede escribir como su parte constante y su parte estrictamente propia

$$\begin{aligned} C(s) &= C_0 + \bar{C} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{s-2}{s+1} - 1 & 0 \\ \frac{-s+1}{5s+4s^2+s^3+2} & \frac{s+2}{s+1} - 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

en donde

$$G = C_0.$$

Ahora para comprobar si cumple con el teorema 2.5 del capítulo 2, se obtiene de la base mínima del kernel izquierdo de la matriz

$$H(s) = \begin{bmatrix} (sI - A)^{-1} BC(s) \\ \bar{C}(s) \end{bmatrix}$$

la cual es

$$\begin{bmatrix} 1 & -s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -s & 0 & 0 \\ 3 & 6 & -3 & -9 & -6 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & s + 2s^2 + s^3 \\ 0 & (s+1)^2 \\ s^2 - s^3 & s^2 + s^3 \\ s - s^2 & s + s^2 \\ -s + 1 & s + 1 \\ 3s - 6s^2 - 3s^3 + 6 & 0 \\ 2s - s^2 - 1 & -s + 2s^2 + s^3 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$F = -E_m^{-1} X'$$

en donde E_m es la identidad y X' es

$$X' = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 & -9 & -6 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

por lo tanto

$$F = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 3 & 9 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

y esto quiere decir que el compensador es realizable estáticamente.

Con la retroalimentación de estado (F, G) se obtiene la siguiente función de transferencia en lazo cerrado

$$\begin{aligned} W(s) &= C(sI - A - BF)^{-1} BG \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+2)(s+1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De la función de transferencia en lazo cerrado anterior, nos podemos dar cuenta que ningún cero invariante aparece en el sistema desacoplado; esto nos lleva a preguntarnos ¿cómo saber cuál es el mínimo número de ceros invariantes que tienen que ser eliminados para poder desacoplar el sistema por medio de una retroalimentación de estado estática?.

En diseños prácticos, la cancelación de ceros invariantes es usualmente evitada debido a la posible inestabilidad interna causada por cancelaciones con ceros inestables. Así, si el objetivo es desacoplar el sistema, es indispensable conocer el número de polos los cuales pueden ser libremente asignados, y el número de polos los cuales tienen que ser cancelados con ceros invariantes para lograr el desacoplamiento.

Entonces el caracterizar completamente al sistema desacoplado en lazo cerrado, daría un conjunto de todos los polos y ceros finitos que se pueden obtener en lazo cerrado, evitando la cancelación innecesaria de ceros invariantes.

4.2. Estructura de un sistema desacoplado en lazo cerrado

Un primer estudio de la estructura de un sistema desacoplado en lazo cerrado fue presentado por Falb y Wolovich (1967) [5], donde los autores caracterizaron la clase de todas las retroalimentaciones que desacoplan a un sistema, y el número de polos en lazo cerrado que pueden ser asignados. Sus condiciones sin embargo son difíciles de aplicar y no existe conexión de esas condiciones con la estructura del sistema. Además los autores muestran como asignar sólo un número de polos igual a la suma de los ordenes de los ceros al infinito; estos en general son menores al número real de polos asignables. Posteriormente, el problema de desacoplamiento y asignación de polos fue estudiado por Wonham y Morse (1970) [33] usando un enfoque geométrico, y presentando condiciones necesarias y suficientes para resolver este problema basado en el

concepto de subespacios de controlabilidad y sus propiedades. Los polos fijos en desacoplamiento para sistemas mínimos fueron estudiados por Koussiouris (1980) [16] que son iguales a los ceros de interconexión de transmisión, como se define en esta referencia.

Las condiciones para el desacoplamiento de un sistema lineal multivariable (A, B, C) están íntimamente relacionadas con la estructura de la matriz del sistema

$$P(s) = \begin{bmatrix} sI - A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

y la estructura de las matrices

$$P_i := \begin{bmatrix} sI - A & B \\ c_i & 0 \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.3)$$

donde c_i , es la i -ésima fila de C .

En términos de la matriz del sistema tenemos que un sistema (A, B, C) es desacoplable si y solo si la estructura al infinito de $P(s)$ coincide con la estructura de las matrices $P_i(s)$, dicho de otra forma si y solo si

$$\sum_{i=1}^p n'_i = \sum_{i=1}^p n_i$$

donde $\{n'_1, \dots, n'_m\}$ son los órdenes de los ceros al infinito de $P(s)$ (órdenes de los ceros al infinito del sistema), y $\{n_1, \dots, n_m\}$ son los órdenes de los ceros al infinito de $P_i(s)$ (órdenes de los ceros al infinito por filas del sistema).

Los ceros invariantes del sistema son los ceros finitos de la matriz $P(s)$, esto es, las raíces de los polinomios invariantes de $P(s)$ [20], mientras que los ceros invariantes por filas son los ceros finitos de las matrices $P_1(s), \dots, P_m(s)$.

La estructura general del sistema en lazo cerrado desacoplado depende también de la estructura de las matrices (4.2) y (4.3), como se verá más adelante.

Lema 4.1 *Sea (A, B, C) un sistema controlable, y sea c_i la i -ésima fila de la matriz C , $i = 1, \dots, m$. Entonces, la matriz*

$$P_i(s) = \begin{bmatrix} sI - A & B \\ c_i & 0 \end{bmatrix}$$

pueden tener a lo más un polinomio invariante diferente de 1.

Prueba. Los polinomios invariantes de $P_i(s)$ pueden ser obtenidos como

$$\lambda_j(s) = \frac{\Delta_j(s)}{\Delta_{j-1}(s)}, \quad j = 1, \dots, n + 1,$$

donde $\Delta_0(s) := 0$, $\Delta_j(s)$ es el máximo común divisor mónico (gcd) de todos los menores de orden $j \times j$ de $P_i(s)$, $j = 1, \dots, n + 1$, y son los divisores determinantaes de $P_i(s)$ [15]. Dado que el sistema es controlable, al menos los primeros n divisores determinantaes de $P_i(s)$ son todos igual a 1. Esto puede ser visto desde el hecho de que la forma de Smith de $\begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix}$ es

$[I_n \ 0]$. Entonces, el único polinomio invariante de $P_i(s)$ posiblemente diferente de uno es el último el cual es igual a $\Delta_{n+1}(s)$. ■

Si se denota como $z_i(s)$ al último polinomio invariante de $P_i(s)$, $i = 1, \dots, m$, se puede ver que cualquier cero finito de $P_i(s)$ es también un cero de la matriz $P(s)$ dada por (4.2), pero que un cero de $P(s)$ no es necesariamente un cero de $P_i(s)$. Lo anterior se puede ver más claro si se consideran las operaciones elementales que llevan a la matriz $P_i(s)$ a la forma de Smith, esto es si se aplican las mismas operaciones elementales a la matriz del sistema $P(s)$, considerándose solamente como operaciones y no por las matrices unimodulares equivalentes que obviamente son de diferentes dimensiones, entonces se obtendrán todos los polinomios invariantes de $P_i(s)$ en $P(s)$. En el otro sentido no necesariamente se cumple; esto es, si aplicamos las operaciones elementales que llevan a $P(s)$ a la forma de Smith a $P_i(s)$ no necesariamente obtendremos todos los polinomios invariantes de $P(s)$ en $P_i(s)$. Esto es porque al obtener la forma de Smith de $P(s)$, se podrían haber hecho operaciones entre las filas de C de la matriz del sistema. Entonces al aplicarle estas mismas operaciones elementales a $P_i(s)$ es evidente que las operaciones que se hayan hecho entre las filas o columnas de C no podrán realizarse debido a que $P_i(s)$ solo tiene una fila de C . Por lo tanto, no todos los ceros finitos de $P(s)$ pueden obtenerse en $P_i(s)$.

En otras palabras, cualquier cero invariante por filas es un cero invariante del sistema, pero un cero invariante no es necesariamente un cero invariante por filas. Entonces, el producto de polinomios $\prod_{i=1}^m z_i(s)$ divide exactamente a $\prod_{i=1}^{n+m} \epsilon_i(s)$, donde $\epsilon_i(s)$ son los polinomios invariantes de $P(s)$.

Los ceros invariantes del sistema (globales y por filas), se pueden calcular también de una factorización coprima derecha (ó MFD de sus siglas en inglés: Matrix Fraction Description), del sistema como se describe a continuación. Sea $\bar{N}(s)$ y $D(s)$ una MFD coprima derecha de (A, B, I_n) . Entonces, las matrices $N(s) := C\bar{N}(s)$ y $D(s)$ forman una MFD derecha de (A, B, C) . Observe que $N(s)$ y $D(s)$ no son necesariamente coprimos derechos; esto es para un sistema controlable no se está restringiendo a que sea observable. Los ceros invariantes del sistema pueden ser obtenidos de los polinomios invariantes de la matriz numerador $N(s)$. En el caso de ceros invariantes por filas, los polinomios $z_i(s)$ previamente definidos corresponden a los polinomios invariantes de la i -ésima fila de $N(s)$, por ejemplo, $z_i(s)$ es el máximo común divisor mónico de todas las entradas en la i -ésima fila de $N(s)$. Esto será utilizado en la prueba del teorema 4.1.

El siguiente teorema establece la familia de todas las matrices de transferencia posibles para el sistema en lazo cerrado desacoplado.

Teorema 4.1 *Sea un sistema (A, B, C) cuadrado, controlable, y desacoplable. Entonces, existe una retroalimentación de estado estática (F, G) la cual desacopla al sistema, tal que la función de transferencia del sistema en lazo cerrado desacoplado es de la forma*

$$W(s) = C(sI - A - BF)^{-1}BG = \begin{bmatrix} k_1 \frac{z_1(s)}{a_1(s)} & 0 \\ 0 & k_m \frac{z_m(s)}{a_m(s)} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

donde k_1, \dots, k_m son números reales, $z_i(s)$ es el último polinomio invariante de $P_i(s)$, $i = 1, \dots, m$; $a_1(s), \dots, a_m(s)$ son polinomios mónicos con raíces arbitrarias tales que cumplen con

$$\deg a_i(s) - \deg z_i(s) = n_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.5)$$

y n_1, \dots, n_m son los órdenes de los ceros al infinito por filas del sistema.

Prueba.

Se probará este teorema, mostrando que el conjunto de compensadores dados por

$$C(s) := T^{-1}(s)W(s), \quad (4.6)$$

y con (4.4) como función de transferencia, son el conjunto de todos los compensadores realizables por retroalimentación tales que desacoplan el sistema.

La diferencia de grados (4.5) se verifica fácilmente, debido a que la retroalimentación de estado (F, G) desacoplante, no modifica la estructura al infinito del sistema, y en particular no modifica los órdenes de los ceros al infinito por filas.

Dado que el sistema es desacoplable, entonces existe una matriz bipropia $B(s)$, tal que

$$T(s)B(s) = \text{diag} \left\{ \frac{1}{s^{n_1}}, \dots, \frac{1}{s^{n_m}} \right\}$$

Entonces, se tiene de (4.6) que

$$C(s) = B(s) \text{diag} \{s^{n_1}, \dots, s^{n_m}\} W(s).$$

De la última ecuación y de las diferencias de grado en $W(s)$, esto es $\deg a_i(s) - \deg z_i(s) = n_i$, $i = 1, \dots, m$, se puede ver que $\lim_{s \rightarrow \infty} [\text{diag} \{s^{n_1}, \dots, s^{n_m}\} W(s)]$ es una matriz bipropia diagonal constante diferente de cero no singular, por lo tanto el compensador $C(s)$ es una matriz bipropia.

Sea $\bar{N}(s), D(s)$ una factorización coprime derecha de (A, B, I_n) . Entonces, para probar si $C(s)$ es realizable por retroalimentación de estado se utiliza el lema 2.3, en el cual $C(s)$ debe de ser bipropia y que $C^{-1}(s)D(s)$ debe de ser una matriz polinomial. Entonces como se demostró anteriormente que $C(s)$ es bipropia, ahora demostraremos que $C^{-1}(s)D(s)$ es una matriz polinomial. Para hacer esto último se tiene que

$$T(s)C(s) = C\bar{N}(s)D^{-1}(s)C(s) = W(s),$$

entonces

$$C^{-1}(s)D(s) = W^{-1}(s)N(s) = \begin{bmatrix} \frac{a_1(s)}{k_1 z_1(s)} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{a_m(s)}{k_m z_m(s)} \end{bmatrix} N(s)$$

donde $N(s) = C\bar{N}(s)$. Ya que $z_i(s)$ es el máximo común divisor mónico de todas las entradas en la i -ésima fila de $N(s)$, entonces se puede ver que $C^{-1}(s)D(s)$ es una matriz polinomial, y esto implica que el compensador $C(s)$ es realizable por retroalimentación de estado.

Para ver que ninguna otra matriz no contenida en (4.4), puede ser la función de transferencia del sistema desacoplado en lazo cerrado, se cumple que la retroalimentación de estado no puede introducir ceros finitos, y además ningún otro polinomio diferente de $z_i(s)$ (no considerando posibles cancelaciones entre $z_i(s)$ y $a_i(s)$), el cual contiene los ceros invariantes por filas del sistema, puede aparecer como numeradores en (4.4). Alternativamente, el compensador correspondiente para obtener una matriz no contenida en (4.4) no es realizable por retroalimentación de estado. ■

El teorema previo caracteriza completamente el conjunto de todas las matrices que pueden ser obtenidas como función de transferencia para el sistema desacoplado en lazo cerrado. Esta caracterización también da todo el conjunto posible de polos y ceros finitos para un sistema desacoplado en lazo cerrado.

De estos ceros, existen algunos que tienen que eliminarse para poder desacoplar al sistema, ubicando algunos polos en estos ceros para cancelarlos, a estos polos se les conoce como polos fijos de desacoplamiento, en cambio hay otros que no es necesario eliminarlos. Entonces, el conjunto de polos fijos de desacoplamiento del sistema está dado por el siguiente teorema.

Teorema 4.2 *Los polos fijos de desacoplamiento del sistema corresponden a las raíces del polinomio*

$$\delta(s) := \frac{\prod_{i=1}^{n+m} \epsilon_i(s)}{\prod_{i=1}^m z_i(s)} \quad (4.7)$$

donde $\epsilon_1(s), \dots, \epsilon_{n+m}(s)$ son los polinomios invariantes de $P(s)$, y $z_i(s)$ es el último polinomio invariante de $P_i(s)$, $i = 1, \dots, m$.

Prueba. El conjunto de los ceros invariantes de (A, B, C) son las raíces de los polinomios $\epsilon_i(s)$, y es evidente de (4.4) que los únicos valores de frecuencia que pueden ser ceros finitos del sistema desacoplado en lazo cerrado son las raíces de los polinomios $z_i(s)$. Si $\delta(s)$ no es la unidad, entonces algunos de los polos del sistema (los polos fijos de desacoplamiento) deben ser asignados en las posiciones de las raíces de $\delta(s)$ produciendo cancelaciones con ceros invariantes del sistema. Notar que $\delta(s)$ es un polinomio dado que $z_i(s)$ está contenido en $\epsilon_i(s)$. ■

Del resultado previo, se puede ver que los polos fijos de desacoplamiento corresponden a los ceros invariantes los cuales no son ceros invariantes por filas del sistema. Es importante notar también que no hay polos fijos de desacoplamiento (todos los polos del sistema pueden ser asignados) si el sistema no tiene ceros invariantes, ó si todos los ceros invariantes (incluyendo multiplicidades) son también ceros invariantes por filas del sistema.

Corolario 4.1 *A partir del Teorema 4.2, se deduce que el número de polos los cuales pueden ser arbitrariamente asignados al desacoplar al sistema es igual a*

$$n - \deg \delta(s),$$

donde n es el orden del sistema y $\delta(s)$ es dado por (4.7).

Prueba. Es obvia de lo comentado anteriormente. ■

Otro aspecto importante acerca de la retroalimentación de estado que desacopla al sistema es, que al elegir una función de transferencia particular del conjunto (4.4), digamos $W_1(s)$, la retroalimentación de estado correspondiente que produce $W_1(s)$ es única cuando el sistema es controlable. Pero antes se presenta el siguiente resultado.

Lema 4.2 *El sistema (A, B, C) es controlable si y sólo si no existe un vector constante q diferente de cero tal que*

$$q(sI - A)^{-1}B = 0. \quad (4.8)$$

Prueba. Sea la siguiente igualdad

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s} \left[I - \frac{A}{s} \right]^{-1} = \frac{1}{s} \left[I + \frac{A}{s} + \frac{A^2}{s^2} + \dots + \frac{A^{n-1}}{s^{n-1}} + \dots \right]$$

Ahora por contradicción se supone que existe una $q \neq 0$ tal que $q(sI - A)^{-1}B = 0$ para todo valor de s , por lo tanto se tiene

$$q \frac{1}{s} \left[I + \frac{A}{s} + \frac{A^2}{s^2} + \dots + \frac{A^{n-1}}{s^{n-1}} + \dots \right] B = 0$$

de donde

$$q \frac{1}{s} \left[B + \frac{AB}{s} + \frac{A^2B}{s^2} + \dots + \frac{A^{n-1}B}{s^{n-1}} + \dots \right] = 0$$

de lo anterior, tenemos entonces que

$$q \left[B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B \right] = 0$$

en donde $\left[B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B \right]$ es la matriz de controlabilidad del sistema. Entonces como $q \neq 0$ para que se cumpla la anterior igualdad la matriz de controlabilidad no debería ser de rango pleno, pero esto contradice a la condición de que el sistema (A, B, C) es controlable, por lo tanto no existe un vector constante $q \neq 0$ que sea solución a (4.8). ■

Con el lema anterior, ahora se puede proponer el siguiente teorema.

Teorema 4.3 *Sea un sistema (A, B, C) desacoplable, y sea $W_1(s)$ una matriz particular del conjunto (4.4). Entonces, la retroalimentación de estado (F, G) que produce $W_1(s)$ como función de transferencia del sistema desacoplado en lazo cerrado es única, si y sólo si el sistema es controlable.*

Prueba. (Si)

Sea el compensador $C(s) = T^{-1}(s)W_1(s)$, el cual se puede descomponer como

$$C(s) = C_0 + \bar{C}(s) \quad (4.9)$$

donde C_0 es una matriz constante, y $\bar{C}(s)$ es la parte estrictamente propia de $C(s)$.

Entonces, de $C(s) = [I - F(sI - A)^{-1}B]^{-1}G$, y dado que $F(sI - A)^{-1}B$ es estrictamente propia, la matriz G es única y está dada por

$$G = \lim_{s \rightarrow \infty} C(s) = C_0. \quad (4.10)$$

Ya que el sistema es desacoplable para $W_1(s)$, entonces existe una matriz constante F tal que

$$F(sI - A)^{-1}B = I_m - GW_1^{-1}(s)T(s)$$

donde G está dado por (4.10).

Si el sistema es controlable, por el lema 4.2 la matriz $(sI - A)^{-1}B$ no tiene kernel izquierdo constante diferente de cero, por lo que la matriz F es única.

(Solo si)

Ya que se cumple que dada una retroalimentación de estado (F, G) que produce $W_1(s)$ como la función de transferencia del sistema desacoplado en lazo cerrado es única, se tiene que no existe una matriz constante F diferente de cero tal que

$$F(sI - A)^{-1}B = 0, \quad (4.11)$$

por lo tanto por el lema 4.2 se concluye que (A, B) es controlable. ■

La retroalimentación de estado (F, G) que desacopla al sistema (A, B, C) , puede ser obtenida aplicando el lema 2.5 del capítulo 2. Esto es, obteniendo la base mínima del kernel izquierdo de la matriz

$$H(s) = \begin{bmatrix} (sI - A)^{-1}BC(s) \\ \bar{C}(s) \end{bmatrix}$$

4.2.1. Ejemplo

A continuación se presenta un ejemplo, con el cual se pretende ilustrar los resultados de esta sección.

Ejemplo 4.1 Sea un sistema (A, B, C) controlable dado por

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con función de transferencia

$$T(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s-2)(s+2)} & 0 \\ \frac{s-1}{(s-2)(s+2)^3} & \frac{s+1}{(s+2)^2} \end{bmatrix}$$

42CAPÍTULO 4. ESTRUCTURA EN LAZO CERRADO PARA DESACOPLAMIENTO REGULAR

Los ordenes de los ceros al infinito por filas son

$$n_1 = 2, \quad n_2 = 1,$$

los cuales coinciden con los ordenes de los ceros al infinito, entonces por (3.3) el sistema es desacoplable.

Los ceros invariantes globales y por filas se obtienen de la forma de Smith de $P(s)$ y $P_i(s)$ respectivamente, y son igual a los siguientes polinomios:

$$\begin{aligned} z_1(s) &= 1, \quad z_2(s) = s - 1, \\ \epsilon_1(s) &= \dots = \epsilon_6(s) = 1, \quad \epsilon_7(s) = (s + 1)(s - 1), \end{aligned}$$

por lo tanto los polos fijos de desacoplamiento se obtienen de:

$$\delta(s) = \frac{(s + 1)(s - 1)}{s - 1} = s + 1.$$

Entonces, el conjunto de matrices que pueden ser obtenidas como función de transferencia del sistema desacoplado en lazo cerrado está dado por

$$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)} & 0 \\ 0 & \frac{k_2(s - 1)}{(s + \alpha_3)(s + \alpha_4)} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

donde α_i para $i = 1, 2, 3, 4$, son polos que se ubican en cualquier posición. Existe un polo fijo de desacoplamiento en $s = -1$; esto es, el cero invariante del sistema $s = -1$ tiene que ser cancelado para poder desacoplar al sistema, mientras que no es necesario cancelar el cero invariante $s = 1$. Observe que $s = 1$ es un cero invariante global y por fila del sistema, que no se ve en la función de transferencia, dado que el sistema no es observable; por lo tanto, este cero puede aparecer en $W(s)$ usando retroalimentación de estado.

Ahora, si se propone un sistema internamente estable con polos α_i ubicados en $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 2$ y $\alpha_4 = 2$, se obtiene la siguiente función de transferencia desacoplada en lazo cerrado del conjunto (4.12)

$$W_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s + 1)(s + 2)} & 0 \\ 0 & \frac{s - 1}{(s + 2)^2} \end{bmatrix}$$

entonces aplicando el lema 2.5 del capítulo 2, se calcula la retroalimentación de estado que genera a $W_1(s)$ mediante la base mínima del kernel izquierdo de la matriz

$$H(s) = \begin{bmatrix} (sI - A)^{-1} BC(s) \\ \bar{C}(s) \end{bmatrix}$$

en donde el compensador está dado por

$$\begin{aligned} C(s) &= T^{-1}(s)W_1(s) \\ &= \begin{bmatrix} s^2 - 4 & 0 \\ \frac{-s + 1}{s + 1} & \frac{4s + s^2 + 4}{s + 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(s + 1)(s + 2)} & 0 \\ 0 & \frac{s - 1}{(s + 2)^2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s - 2}{s + 1} & 0 \\ \frac{-s + 1}{5s + 4s^2 + s^3 + 2} & \frac{s - 1}{s + 1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y se descompone como

$$C(s) = C_0 + \bar{C}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1}(s-2) - 1 & 0 \\ \frac{-s+1}{5s+4s^2+s^3+2} & \frac{s-1}{s+1} - 1 \end{bmatrix}$$

Entonces G es

$$G = C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora se puede obtener $H(s)$ tal como

$$H(s) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{s}{4s+s^2+4} \\ 0 & \frac{1}{4s+s^2+4} \\ -\frac{s^2}{28s+38s^2+25s^3+8s^4+s^5+8} + \frac{-3s^2-s^3}{20s+18s^2+7s^3+s^4+8} & \frac{s^2}{8s+5s^2+s^3+4} \\ -\frac{s}{28s+38s^2+25s^3+8s^4+s^5+8} + \frac{-3s-s^2}{20s+18s^2+7s^3+s^4+8} & \frac{s}{8s+5s^2+s^3+4} \\ \frac{-s-3}{20s+18s^2+7s^3+s^4+8} - \frac{1}{28s+38s^2+25s^3+8s^4+s^5+8} & \frac{1}{8s+5s^2+s^3+4} \\ \frac{1}{s+1}(s-2) - 1 & 0 \\ \frac{-s+1}{5s+4s^2+s^3+2} & \frac{s-1}{s+1} - 1 \end{bmatrix}$$

en donde su kernel izquierdo es

$$\begin{bmatrix} 1 & -s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -s & 0 & 0 \\ 3 & 6 & -3 & -9 & -6 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} H(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces, la retroalimentación de estado estática es

$$F = -E_m^{-1}X'$$

en donde E_m es la identidad y X' es

$$X' = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 & -9 & -6 \\ 2 & 7 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

por lo tanto en éste caso $F = -X'$

$$F = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 3 & 9 & 6 \\ -2 & -7 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto como el sistema es controlable F y G son únicas, esto es por el teorema 4.3.

44CAPÍTULO 4. ESTRUCTURA EN LAZO CERRADO PARA DESACOPPLAMIENTO REGULAR

Capítulo 5

Transformación a la forma semicanónica de Morse

Uno de los objetivos de esta tesis es el desacoplamiento no regular de los sistemas decalados y el caso general, pero debido a la complejidad que existe en estos problemas cuando se modifica la estructura al infinito del sistema al utilizar una retroalimentación de estado no regular, se propuso por facilidad en el análisis del problema, que el sistema se encuentre en la forma semicanónica de Morse. Por lo tanto, es importante saber como llevar cualquier sistema a esta forma.

En este capítulo se presenta un procedimiento para obtener un elemento del grupo de transformación, que lleva un sistema lineal multivariable en su representación en espacio de estado (A, B, C) a su forma semicanónica de Morse. El grupo de transformación incluye retroalimentación de estado, permutación de salidas, cambio de base en estados y salidas.

El capítulo se encuentra organizado de la siguiente forma:

En la sección 5.1, se explica porque son importantes las formas canónicas y porque el conocimiento del grupo de transformación que lleva un sistema (A, B, C) a una forma canónica, es fundamental en problemas prácticos.

Luego en la sección 5.2, se presenta la metodología para encontrar una retroalimentación de estado (F) , una permutación de salidas (Π) , una matriz de cambio de base en los estados (T) y en las entradas (G) , tal que el sistema en lazo cerrado $(A + BF, BG, \Pi C)$ para un sistema (A, B, C) , esté en su forma semicanónica de Morse. La investigación presentada en esta sección dio origen al artículo [25]. Al final de esta sección se presenta un ejemplo en el cual se muestra como se aplica la metodología propuesta.

En la sección 5.3, se presenta una extensión del resultado presentado en la sección 5.2 para sistemas con mayor número de entradas que de salidas. La investigación presentada en esta sección dio origen al artículo [24]. Finalmente, se presenta un ejemplo en el cual se aplica la metodología propuesta.

5.1. Introducción

Debido a la complejidad que existe en los problemas relacionados a la modificación de la estructura de un sistema multivariable cuando se utiliza retroalimentación de estado no regular, es muy común en el proceso de análisis considerar que el sistema se encuentra en la forma semicanónica de Morse. Aunque la forma semicanónica de Morse y sus propiedades están bien establecidas en la teoría, el problema de calcular un elemento del grupo de transformación que lleva un sistema (A, B, C) a la forma semicanónica de Morse, no ha sido tratado hasta donde sabemos. Herrera en [9], describe como pasar a la forma semicanónica de Morse para un sistema a partir del interactor extendido del sistema. Pero, este procedimiento se vuelve muy complicado para sistemas con más de dos salidas y nunca se obtiene el grupo de transformación.

El conocimiento del grupo de transformación es fundamental en problemas prácticos, por ejemplo cuando se tiene un sistema (A, B, C) y su forma semicanónica de Morse es (A_s, B_s, C_s) , entonces si se aplica un esquema de control que resuelva un problema particular en (A_s, B_s, C_s) , este esquema de control no puede ser aplicado directamente al sistema (A, B, C) , de ahí la importancia de conocer el grupo de transformación que lleva de un sistema a otro.

Las formas canónicas relacionadas con los sistemas lineales multivariables son ampliamente utilizadas, debido a las propiedades estructurales de (A, B, C) que pueden ser desplegadas en ellas. La estructura del sistema, la cual es invariante bajo un grupo de transformación, es fundamental en el análisis de un sistema y para el diseño de una ley de control adecuada, ya que con esta información se resumen las características del sistema, y en función de estas propiedades estructurales se dan las condiciones para la existencia de la solución de un número importante de problemas en control.

En la sección 5.2 se presenta un procedimiento para calcular un grupo de transformación, el cual lleva una representación en espacio de estado de un sistema lineal multivariable a su forma semicanónica de Morse. El grupo de transformación está conformado por una retroalimentación de estado, permutación de salidas, cambio de base en estados y entradas. El sistema se supone que es invertible por la derecha, controlable, no tiene ceros finitos y que la lista I_2 de Morse es igual a cero; esto es, se consideran sistemas con el mismo número de entradas que de salidas.

En la sección 5.3 se presenta una extensión al método presentado en la sección 5.2, solo que ahora se considera que la lista I_2 puede ser diferente de cero.

5.2. Planteamiento del método para $I_2 = 0$

Para un sistema lineal multivariable en su representación en espacio de estado (A, B, C) , invertible por la derecha (esto es $I_3 = \emptyset$) y sin ceros finitos (esto es $I_1 = \emptyset$), se dará una metodología para encontrar un elemento del grupo de transformación (Π, T, F, G) , el cual lleva al sistema (A, B, C) a su forma semicanónica de Morse. El método propuesto es para el caso de sistemas que tienen el mismo número de entradas que de salidas (esto es $I_2 = \emptyset$), también llamados sistemas cuadrados. El caso con más entradas que de salidas será abordado en la sección 5.3.

La idea básica del método, después de definir una permutación adecuada de las salidas Π , es encontrar una retroalimentación de estado (F) y un cambio de base en la entrada (G), tal que el sistema en lazo cerrado ($A + BF, BG, \Pi C$), tenga como función de transferencia la inversa del interactor $\Phi^{-1}(s)$. El cambio de base de estado T está definido en función de la información del sistema en lazo cerrado y los ordenes de los ceros al infinito.

Permutación de salidas Π

Dado un sistema (A, B, C) , invertible por la derecha y sin ceros finitos, la acción Π puede ser considerada como una permutación de las salidas del sistema tal que las filas de la matriz de transferencia resultante, estén acomodadas en orden no decreciente de acuerdo a los ordenes de los ceros al infinito globales del sistema.

El procedimiento para ordenar los ceros al infinito globales del sistema, consta de dos etapas, primero mediante una matriz de permutación de salidas Π_1 se ordenan los ceros al infinito por filas, con esto se asegura que los ceros al infinito globales estén sobre la diagonal del interactor del sistema $(A, B, \Pi_1 C)$, aunque no necesariamente ordenados de forma no decreciente. Después mediante otra matriz de permutación Π_2 se ordenan de forma no decreciente los ceros al infinito globales del interactor del sistema $(A, B, \Pi_2 \Pi_1 C)$.

Así que, para ordenar los ceros al infinito por filas, la matriz Π_1 puede ser obtenida por inspección de tal forma que

$$n_i \leq n_{i+1}, \quad i = 1, \dots, p - 1,$$

donde n_i son los ceros al infinito por filas del sistema $(A, B, \Pi_1 C)$.

Una vez que se ordenaron los ceros al infinito por filas, se obtiene otra matriz de permutación de salidas Π_2 por inspección, tal que en el interactor del sistema $(A, B, \Pi_2 \Pi_1 C)$ los ceros al infinito globales aparezcan ordenados en la diagonal de la siguiente forma

$$n'_i \leq n'_{i+1}, \quad i = 1, \dots, p - 1,$$

donde n'_i son los ceros al infinito globales del sistema $(A, B, \Pi_2 \Pi_1 C)$.

Por lo tanto la matriz de permutación de salidas

$$\Pi = \Pi_2 \Pi_1,$$

ordena los ceros al infinito globales de la matriz de transferencia resultante.

Retroalimentación de estado F y cambio de base en la entrada G

Las matrices de retroalimentación de estado F y cambio de base en la entrada G , se obtienen al considerar el problema de encontrar una retroalimentación de estado estática $u(t) = Fx(t) + Gv(t)$, tal que la función de transferencia del sistema en lazo cerrado $(A + BF, BG, \Pi C)$ es la inversa del interactor $\Phi^{-1}(s)$. Las matrices (F, G) califican como elementos del grupo de transformación que lleva al sistema (A, B, C) a la forma semicanónica de Morse, debido a que la función de transferencia de un sistema en la forma semicanónica de Morse (A_s, B_s, C_s) es la inversa del interactor de (A_s, B_s, C_s) . Por supuesto al contrario no es cierto, esto es, si una

matriz con la propiedad de $\Phi^{-1}(s)$ es la función de transferencia de un sistema, esto no significa que la descripción del sistema (A, B, C) esta en la semicanónica de Morse.

La función de transferencia de un sistema en lazo cerrado $(A + BF, BG, \Pi C)$ está dada por

$$\begin{aligned} T_{FG}(s) &= \Pi C(sI_n - A - BF)^{-1}BG \\ &= \Pi C(sI_n - A)^{-1}B[I_m - F(sI_n - A)^{-1}B]^{-1}G. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Sea $C(s)$ una matriz bipropia tal que

$$T_{FG}(s) = \Pi C(sI_n - A)^{-1}BC(s) = \Phi^{-1}(s) \quad (5.2)$$

donde $\Phi^{-1}(s)$ es la inversa del interacto del sistema $(A, B, \Pi C)$.

Entonces, de (5.1) y (5.2), se puede ver que se tiene que encontrar las matrices (F, G) tales que

$$C(s) = [I_m - F(sI_n - A)^{-1}B]^{-1}G, \quad (5.3)$$

en donde, en [29] se demuestra que siempre existen las matrices F y G tales que el compensador $C(s)$ es realizable estáticamente, debido a que cumple con ser bipropio y que el producto $C^{-1}(s)D(s)$ es polinomial (donde $D(s)$, es una factorización copríma derecha de la función de transferencia $T(s) = N(s)D^{-1}(s)$).

Un método para encontrar (F, G) en el caso regular y no regular, es considerando el problema de la realizabilidad de compensadores dinámicos [10] (ver capítulo 2). Para esto, se tiene que de (5.2), la matriz $C(s)$ puede ser considerada como un compensador bipropio actuando sobre la función de transferencia del sistema $(A, B, \Pi C)$, y si existe (F, G) tal que se cumple (5.3), entonces se puede decir que $C(s)$ es realizable por retroalimentación de estado. Para calcular (F, G) , se puede aplicar el lema 2.5 del capítulo 2, esto es, obteniendo la base mínima del kernel izquierdo, por ejemplo $[X' \ E_m]$, de la matriz

$$H(s) = \begin{bmatrix} (sI - A)^{-1}BC(s) \\ \bar{C}(s) \end{bmatrix}$$

en donde $\bar{C}(s)$ es la parte estrictamente propia del compensador $C(s)$, X' es una matriz constante y E_m es una matriz constante no singular. Por lo tanto de la base mínima del kernel izquierdo de $H(s)$, se obtiene que la retroalimentación de estado (F, G) que realiza al compensador $C(s)$, está dada por

$$\begin{aligned} F &= -E_m^{-1}X' \\ G &= C_0 \end{aligned}$$

en donde ésta solución es única para sistemas con el mismo número de entradas que de salidas.

Matriz de cambio de base de estado T

Con las matrices (Π, F, G) , obtenidas en los pasos anteriores del procedimiento, se definen las siguientes matrices

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= A + BF \\ \tilde{B} &= BG \\ \tilde{C} &= \Pi C.\end{aligned}\tag{5.4}$$

Falta para completar el grupo de transformación la matriz de cambio de base en el estado T , la cual es definida mediante el siguiente teorema.

Teorema 5.1 Sea $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ como (5.4), y se define

$$T = [\tilde{A}^{n'_1-1} \tilde{b}_1 \quad \dots \quad \tilde{b}_1 \quad \dots \quad \tilde{A}^{n'_p-1} \tilde{b}_p \quad \dots \quad \tilde{b}_p]\tag{5.5}$$

donde $\{n'_1, \dots, n'_p\}$ son los ordenes de los ceros al infinito del sistema $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})^1$ dados en orden no decreciente, y \tilde{b}_i , $i = 1, \dots, p$, es la i -ésima columna de \tilde{B} . Entonces el sistema (A_s, B_s, C_s) con

$$\begin{aligned}A_s &= T^{-1} \tilde{A} T = T^{-1} (A + BF) T \\ B_s &= T^{-1} \tilde{B} = T^{-1} B G \\ C_s &= \tilde{C} T = \Pi C T\end{aligned}\tag{5.6}$$

es la forma semicanónica de Morse del sistema (A, B, C) .

Prueba.

La demostración de este resultado se basa en la representación de las columnas de las matrices (A_s, B_s, C_s) , en términos de la base formada por las columnas de la matriz T . Esto es, la i -ésima columna de $T^{-1} \tilde{B}$ es la representación de la i -ésima columna de B_s en la base

$$\{ \tilde{A}^{n'_1-1} \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_1, \dots, \tilde{A}^{n'_p-1} \tilde{b}_p, \dots, \tilde{b}_p \}\tag{5.7}$$

y la i -ésima columna de $T^{-1} \tilde{A} T$ es la representación de la i -ésima columna de A_s en la base (5.7).

Por simplicidad, mostraremos como se ve esto en un ejemplo particular, siendo el caso general una extensión de este procedimiento.

Sea un sistema $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ de orden 9 con tres entradas y tres salidas, en donde no se sabe que forma tienen las matrices $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ después de haber aplicado las matrices (Π, F, G) obtenidas en los pasos anteriores del procedimiento. Pero si se sabe que la forma general de la función de transferencia de $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ es

$$T(s) = \begin{bmatrix} s^{-1} & 0 & 0 \\ t_1 s^{-1} + t_2 s^{-2} & s^{-3} & 0 \\ t_3 s^{-1} + t_4 s^{-2} + t_5 s^{-3} + t_6 s^{-4} & t_7 s^{-3} + t_8 s^{-4} & s^{-5} \end{bmatrix}$$

¹Note que los ordenes de los ceros al infinito del sistema (A, B, C) y $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ son los mismos, debido a que (Π, F, G) no modifican esta información.

en donde los t_i para $i = 1, \dots, 8$ son constantes posiblemente diferentes de cero, además $T(s)$ tiene los siguientes ceros al infinito globales $n'_1 = 1$, $n'_2 = 3$ y $n'_3 = 5$.

Se define la siguiente matriz

$$T = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 & \tilde{A}^2 \tilde{b}_2 & \tilde{A} \tilde{b}_2 & \tilde{b}_2 & \tilde{A}^4 \tilde{b}_3 & \tilde{A}^3 \tilde{b}_3 & \tilde{A}^2 \tilde{b}_3 & \tilde{A} \tilde{b}_3 & \tilde{b}_3 \end{bmatrix}$$

entonces lo que se quiere demostrar es que utilizando el cambio de base T se obtienen las siguientes matrices

$$\begin{aligned} \bar{A} = T^{-1} \tilde{A} T &= \begin{bmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ * & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ * & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \end{bmatrix} \\ \bar{B} = T^{-1} \tilde{B} &= \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix} \\ \bar{C} = \tilde{C} T &= \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde los elementos "*" son posiblemente diferentes de cero.

Como \tilde{B} tiene la forma

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 & \tilde{b}_2 & \tilde{b}_3 \end{bmatrix}$$

se sustituye en

$$\begin{bmatrix} \tilde{b}_1 & \tilde{A}^2 \tilde{b}_2 & \tilde{A} \tilde{b}_2 & \tilde{b}_2 & \tilde{A}^4 \tilde{b}_3 & \tilde{A}^3 \tilde{b}_3 & \tilde{A}^2 \tilde{b}_3 & \tilde{A} \tilde{b}_3 & \tilde{b}_3 \end{bmatrix} \bar{B} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 & \tilde{b}_2 & \tilde{b}_3 \end{bmatrix} \quad T \bar{B} = \tilde{B}$$

entonces \bar{B} es de la forma

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

en donde $\bar{B} = B_s$, y está en la forma semicanónica de Morse.

Para demostrar la forma que tiene $\bar{A} = T^{-1}\tilde{A}T$ se despeja de la siguiente manera $T\bar{A} = \tilde{A}T$, en donde

$$\tilde{A}T = \begin{bmatrix} \tilde{A}b_1 & \tilde{A}^3\tilde{b}_2 & \tilde{A}^2\tilde{b}_2 & \tilde{A}b_2 & \tilde{A}^5\tilde{b}_3 & \tilde{A}^4\tilde{b}_3 & \tilde{A}^3\tilde{b}_3 & \tilde{A}^2\tilde{b}_3 & \tilde{A}b_3 \end{bmatrix}$$

entonces de la forma de $\tilde{A}T$ se puede deducir del producto $T\bar{A}$ que \bar{A} tiene la siguiente forma

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 1 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & * & 0 & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 1 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 1 \\ * & * & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{\tilde{A}b_1 \quad \tilde{A}^3\tilde{b}_2 \quad \tilde{A}^2\tilde{b}_2 \quad \tilde{A}b_2 \quad \tilde{A}^5\tilde{b}_3 \quad \tilde{A}^4\tilde{b}_3 \quad \tilde{A}^3\tilde{b}_3 \quad \tilde{A}^2\tilde{b}_3 \quad \tilde{A}b_3}}$

en donde los "*"son elementos posiblemente diferentes de cero.

Dado que la función de transferencia se puede expandir en sus parámetros de Markov como

$$\begin{aligned} T(s) &= \bar{C} (sI - \bar{A})^{-1} \bar{B} \\ &= \bar{C}\bar{B}s^{-1} + \bar{C}\bar{A}\bar{B}s^{-2} + \bar{C}\bar{A}^2\bar{B}s^{-3} + \bar{C}\bar{A}^3\bar{B}s^{-4} + \bar{C}\bar{A}^4\bar{B}s^{-5}, \end{aligned} \tag{5.8}$$

entonces para las formas anteriores de \bar{A} y \bar{B} , se obtiene por los grados de la función de transferencia que

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_3 & t_7 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En la primer columna se encuentran los coeficientes asiados a s^{-1} , en la segunda columna los coeficientes asiados a s^{-3} y en la quinta columna los coeficientes asiados a s^{-5} Entonces

$\bar{C} = C_s$ y se encuentra en la forma semicanónica de Morse.

Para los elementos restantes de la matriz \bar{A} se parte de (5.8), entonces

$$\bar{c}_3 \bar{A}^5 \bar{b}_3 = 0$$

donde \bar{c}_3 y \bar{b}_3 representan la tercera fila de \bar{C} y la tercera columna de \bar{B} respectivamente. Sustituyendo

$$[t_3 \quad t_7 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 1 & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & e & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & f & 0 & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & g & 0 & 0 & 1 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & h & 0 & 0 & 0 & 1 \\ * & * & 0 & 0 & j & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

en donde

$$[t_3 \quad t_7 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ j \end{bmatrix} = 0$$

por lo tanto $a = 0$, $b = 0$ y $e = 0$. Ahora calculando

$$\bar{c}_3 \bar{A}^6 \bar{b}_3 = 0$$

$$[t_3 \quad t_7 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ d \\ 0 \\ f \\ g \\ h \\ j \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

en donde $c = 0$ y $f = 0$.

Continuando de manera análoga la columna 5 de \bar{A} es igual a cero.

Para la columna 2 de \bar{A}

$$\bar{c}_3 \bar{A}^3 \bar{b}_2 = [t_3 \quad t_7 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} * & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & b_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & c_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & e_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & f_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ * & g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ * & h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ * & i_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

en donde \bar{c}_3 es la fila 3 de \bar{C} . Considerando que en la función de transferencia en el elemento (3,2) está $t_8 s^{-4}$, entonces

$$[t_3 \quad t_7 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ e_1 \\ f_1 \\ g_1 \\ h_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ t_8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

por lo tanto $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ y $e_1 = t_8$.

Dado que

$$\bar{c}_3 \bar{A}^4 \bar{b}_2 = 0$$

$$[t_3 \quad t_7 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 \\ c_1 \\ d_1 \\ 0 \\ f_1 \\ g_1 \\ h_1 \\ i_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

por lo tanto $c_1 = 0$ y $f_1 = 0$. Ahora calculando

$$\begin{matrix} & \bar{c}_3 \bar{A}^5 \bar{b}_2 = 0 \\ & \begin{bmatrix} 0 \\ d_1 \\ 0 \\ 0 \\ g_1 \\ h_1 \\ i_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ [t_3 \ t_7 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] & = & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

por lo tanto $d_1 = 0$ y $g_1 = 0$. Después con $\bar{c}_3 \bar{A}^6 \bar{b}_2 = 0$ y $\bar{c}_3 \bar{A}^7 \bar{b}_2 = 0$ se deduce que la segunda columna de \bar{A} es

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ t_8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente para obtener la columna 1 de \bar{A} , se obtiene de la primer fila de \bar{c}_1

$$\begin{matrix} & \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_2 & t_8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ f_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ g_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ i_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

que $a_2 = 0$. Luego se considera que en la función de transferencia en el elemento (2,1) está $t_2 s^{-2}$, entonces de la segunda fila de \bar{c}_2

$$\begin{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_2 & t_8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ f_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ g_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ i_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [t_1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 0 \\ t_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

se obtiene que $b_2 = t_2$. Ahora de la fila 3 de \bar{C} , se considera que en la función de transferencia en el elemento (3, 1) está t_4s^{-2} , entonces de

$$\bar{c}_3\bar{A}b_1 = [t_3 \ t_7 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_2 & t_8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ f_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ g_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ i_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ t_2 \\ 0 \\ 0 \\ t_4 - t_2t_7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

se obtiene que $e_2 = t_4 - t_2t_7$. Ahora continuando con el elemento de la función de transferencia t_5s^{-3} , se obtiene de

$$\bar{c}_3\bar{A}^2b_1 = [t_3 \ t_7 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_4 - t_2t_7 & t_8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ f_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ g_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ i_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ c_2 \\ d_2 \\ 0 \\ f_2 + t_2t_8 \\ g_2 \\ h_2 \\ i_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que $c_2 = 0$ y $f_2 = t_5 - t_2t_8$. Luego para el elemento de la función de transferencia t_6s^{-4} , se

obtiene de

$$\bar{c}_3 \bar{A}^3 \bar{b}_1 = \begin{bmatrix} t_3 & t_7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_4 - t_2 t_7 & t_8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_5 - t_2 t_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ g_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ i_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \\ 0 \\ 0 \\ g_2 \\ h_2 \\ i_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que $d_2 = 0$ y $g_2 = t_6$. Después con $\bar{c}_3 \bar{A}^4 \bar{b}_1 = 0$ y $\bar{c}_3 \bar{A}^5 \bar{b}_1 = 0$ se deduce que la primer columna de A_s es

$$\begin{bmatrix} 0 \\ t_2 \\ 0 \\ 0 \\ t_4 - t_2 t_7 \\ t_5 - t_2 t_8 \\ t_6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

en donde $h_2 = 0$ e $i_2 = 0$.

Por lo tanto la forma final de $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ es

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_2 & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_4 - t_2 t_7 & t_8 & 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ t_5 - t_2 t_8 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ t_6 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_3 & t_7 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

en donde $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}) = (A_s, B_s, C_s)$ y está en la forma semicanónica de Morse. ■

El siguiente ejemplo ilustra el método para encontrar el grupo de transformación que lleva un sistema lineal multivariable (A, B, C) a su forma semicanónica de Morse (A_s, B_s, C_s) .

5.2.1. Ejemplo

Sea el siguiente sistema:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 15 & 2 & 7 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & 1 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Este sistema no tiene ceros finitos y las listas I_2 e I_4 de Morse son:

$$I_2 = \{\emptyset\} \quad I_4 = \{2, 4\}.$$

La función de transferencia del sistema (A, B, C) es:

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{2s^4 + 2s^3 - 2s^2 - 2s + 6}{s^6 - 2s^5 - s^4 + 5s^3 - 45s^2 - 46s + 4} & \frac{-s^3 - 11s^2 - 16s + 1}{s^6 - 2s^5 - s^4 + 5s^3 - 45s^2 - 46s + 4} \\ \frac{-2s^4 + 2s^3 - 2s^2 + 2s + 10}{s^6 - 2s^5 - s^4 + 5s^3 - 45s^2 - 46s + 4} & \frac{s^3 + 7s^2 + 4s - 1}{s^6 - 2s^5 - s^4 + 5s^3 - 45s^2 - 46s + 4} \end{bmatrix}$$

y su interactor es

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ s^4 - 2s^3 & s^4 \end{bmatrix}$$

Debido a que los ordenes de los ceros al infinito por filas de la función de transferencia $H(s)$ de (A, B, C) son $n_1 = 2$ y $n_2 = 2$, y los ordenes de los ceros al infinito globales están en forma no decreciente entonces de acuerdo al método propuesto la matriz de permutación Π es la identidad.

Ahora se busca una matriz bipropia tal que lleve a la matriz de transferencia a la inversa del interactor

$$H(s)C(s) = \Phi^{-1}(s)$$

Despejando

$$\begin{aligned} C(s) &= H^{-1}(s)\Phi^{-1}(s), \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s^3 - 5s^2 - 16s + 1}{2s^3} & \frac{-s^3 - 11s^2 - 16s + 1}{4s^4} \\ \frac{-2s^3 + s^2 + 5s - 3}{s^3} & \frac{-s^4 - s^3 + s^2 + s - 3}{2s^4} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ahora aplicando el lema 2.5 del capítulo 2, se calcula la retroalimentación de estado que realiza a $C(s)$ mediante la base mínima del kernel izquierdo de la matriz

$$H(s) = \begin{bmatrix} (sI - A)^{-1} BC(s) \\ \bar{C}(s) \end{bmatrix}$$

en donde el compensador se puede escribir como

$$\begin{aligned} C(s) &= C_0 + \bar{C} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{s^3 - 5s^2 - 16s + 1}{2s^3} - \frac{1}{2} & \frac{-s^3 - 11s^2 - 16s + 1}{4s^4} \\ \frac{-2s^3 + s^2 + 5s - 3}{s^3} + 2 & \frac{-s^4 - s^3 + s^2 + s - 3}{2s^4} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Entonces G es

$$G = C_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Ahora se puede obtener $H(s)$ como

$$H(s) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{s^2} & -\frac{1}{2s^3} \\ \frac{-s^2-s+1}{s^3} & \frac{-s^2+1}{2s^4} \\ 0 & -\frac{1}{2s^2} \\ -\frac{2}{s} & \frac{-s-1}{2s^2} \\ \frac{-s+1}{s^3} & \frac{1}{2s^4} \\ \frac{2s^2-s+2}{s^3} & \frac{s^3+s^2+2}{2s^4} \\ \frac{-5s^2-16s+1}{2s^3} & \frac{-s^3-11s^2-16s+1}{4s^4} \\ \frac{s^2+5s-3}{s^3} & \frac{-s^3+s^2+s-3}{2s^4} \end{bmatrix}$$

la base mínima del kernel izquierdo es

$$\begin{bmatrix} -s & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1-s & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1+s & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -s & -1 & -s & 0 & 0 \\ 16 & 3 & 7 & 2 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} H(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De las dos últimas filas se obtienen las siguientes matrices

$$E_m = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$X' = \begin{bmatrix} 16 & 3 & 7 & 2 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la retroalimentación de estado es

$$F = -E_m^{-1}X' = \begin{bmatrix} 8 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ -1 & -3 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Aplicando la retroalimentación de estado (F, G) para obtener el sistema en lazo cerrado $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$, tenemos

$$\tilde{A} = A + BF = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = BG = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C} = C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculando la matriz de controlabilidad de (A_s, B_s, C_s) , se tiene

$$\mathbb{C}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora, la matriz de cambio de base es:

$$T = [\tilde{A}\tilde{b}_1 \ \tilde{b}_1 \ \tilde{A}^3\tilde{b}_2 \ \tilde{A}^2\tilde{b}_2 \ \tilde{A}\tilde{b}_2 \ \tilde{b}_2]$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Aplicando T al sistema $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ se obtiene el nuevo sistema (A_s, B_s, C_s)

$$A_s = T^{-1}\tilde{A}T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_s = T^{-1}\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_s = \tilde{C}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se puede ver que (A_s, B_s, C_s) está en la forma semicanónica de Morse.

5.3. Extensión para el caso en que $I_2 \neq 0$

Esta sección es una extensión a la metodología propuesta en la sección 5.2; esto es, en esta parte se presenta un procedimiento para obtener un elemento del grupo de transformación, que lleva un sistema lineal multivariable no cuadrado en su representación en espacio de estado (A, B, C) a su forma semicanónica de Morse. El grupo de transformación incluye retroalimentación de estado, permutación de salidas, cambio de base en estados y salidas.

Antes de proponer la metodología para llevar un sistema (A, B, C) a su forma semicanónica de Morse, considerando que la lista I_2 de Morse puede ser diferente de cero, es necesario revisar a continuación algunos resultados previos acerca de la solución constante de una ecuación diofantina particular, del sistema extendido y de la realizabilidad estática del compensador para el sistema extendido y el sistema original.

En el siguiente lema se presenta un resultado de Kucera y de Zagalak [17], sobre la solución constante de una ecuación diofantina particular.

Lema 5.1 *Sea (N, D) una factorización coprima derecha asociada a un sistema controlable (A, B) y $M \in \mathbb{R}^{m \times m}(s)$. En donde $D(s)$ es reducida por columnas. Entonces existen matrices constantes $X \in \mathbb{R}^{m \times m}$ y $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$, con X no singular, tal que*

$$XD(s) + YN(s) = M(s) \quad (5.9)$$

si y solo si $M(s)$ es reducida por columnas y $\deg_{ci} M(s) = \deg_{ci} D(s)$. Si la solución existe, entonces X y Y son únicas.

Prueba. La prueba de la existencia de las matrices (X, Y) se encuentra en [17], y la prueba de la unicidad de (X, Y) se encuentra en el siguiente resultado de Herrera [10]. ■

El resultado del lema anterior, será importante para demostrar más adelante que para un sistema (A, B, C) , que no se encuentre en la forma semicanónica de Morse, se podrá encontrar su sistema extendido únicamente agregando $m - p$ salidas ficticias, sin afectar las matrices A y B .

En el planteamiento de la metodología que se presentará en la sección 5.3.1, se utiliza el sistema extendido de manera auxiliar para encontrar un elemento del grupo de transformación tal que lleve un sistema (A, B, C) a su forma semicanónica de Morse. Por lo tanto, es necesario ver algunos resultados importantes sobre el sistema extendido que serán utilizados posteriormente.

El sistema extendido para un sistema que se encuentra en la forma semicanónica de Morse (A_s, B_s, C_s) , se obtiene como se vio en la definición 1.1 de la sección 1.7 del capítulo 1, mediante el uso de un conjunto de $m - p$ salidas ficticias. Es obvio que el resultado de la definición 1.1 no nos sirve tal cual, ya que en este resultado se considera que el sistema ya se encuentra en la forma semicanónica de Morse, y el problema que se persigue en este capítulo es el encontrar un elemento del grupo de transformación, tal que lleve un sistema (A, B, C) a su forma semicanónica de Morse.

Entonces, se pretende encontrar el sistema extendido partiendo de un sistema (A, B, C) , que no esté en la forma semicanónica de Morse. Para esto, se define en el lema 5.2, una matriz C_e con $m - p$ salidas ficticias; esto es, de manera similar a la definición 1.1 del capítulo 1, tal que el sistema extendido de un sistema (A, B, C) , que no este en la forma semicanónica, sea (A, B, C_e) . Obsérvese que las matrices A y B no cambian en el sistema extendido, siendo esta característica, como se verá en la sección 5.3.1, la clave para encontrar la retroalimentación de estado F y la matriz de cambio de base en la entrada G , tal que llevan un sistema (A, B, C) a la forma semicanónica de Morse.

A continuación se presenta en el siguiente lema, como es que se define la matriz C_e , tal que el sistema extendido de (A, B, C) es (A, B, C_e) .

Lema 5.2 *Sea cualquier sistema (A, B, C) invertible por la derecha, que no tenga ceros finitos. Entonces, existe una matriz C_e tal que tiene la siguiente forma*

$$C_e := \begin{bmatrix} C \\ C_1 \end{bmatrix}$$

en donde C_1 son $m - p$ salidas ficticias y el sistema (A, B, C_e) es el sistema extendido de (A, B, C) .

Prueba.

Para demostrar que siempre existe C_e , primeramente recordamos de la sección 1.1 del capítulo 1, que la función de transferencia del sistema extendido esta dada por

$$T_e(s) = K(s)D^{-1}(s).$$

Entonces se quiere demostrar que en la siguiente ecuación siempre existe C_e

$$C_e N_1(s) D^{-1}(s) = T_e(s) = K(s) D^{-1}(s)$$

para esto sumamos y restamos la matriz identidad I en la ecuación anterior, con lo cual se tiene

$$I - I + C_e N_1(s) D^{-1}(s) = K(s) D^{-1}(s)$$

multiplicando $D(s)$ por la derecha tenemos

$$D(s) - D(s) + C_e N_1(s) = K(s)$$

reescribiendo la ecuación previa, se tiene

$$D(s) + C_e N_1(s) = K(s) + D(s). \tag{5.10}$$

Como se debe de cumplir en la ecuación 5.9, que los grados por columnas de $D(s)$ sean iguales a los de $K(s) + D(s)$, nos podemos dar cuenta que por la condición 1.3 del capítulo 1, la cual dice que, $\deg_{ci} K(s) < \deg_{ci} D(s)$, los grados por columnas de $D(s)$ son mayores que los de $K(s)$. Entonces la suma $K(s) + D(s)$ y la matriz $D(s)$ tienen los mismos grados por columnas, ambos son reducidos por columnas y tienen la misma matriz de coeficientes líderes. Por lo tanto como la matriz X en la ecuación 5.9 sirve para reacomodar la matriz de coeficientes líderes de $D(s)$

para que concuerde con la de $M(s)$ y la matriz $YN(s)$ contiene los elementos de menor grado tal que se cumpla la igualdad 5.9. En el caso de la ecuación (5.10), la matriz X es la identidad porque las matrices de coeficientes líderes de $D(s)$ y $D(s) + K(s)$ son las mismas.

Entonces, por el lema 5.1 siempre existe la solución a la ecuación diophantina (5.10), lo que implica que siempre existe $Y = C_e$ y $X = I$, tal que el sistema (A, B, C_e) es el sistema extendido de (A, B, C) . ■

En el lema previo, se demostró que para obtener el sistema extendido de un sistema (A, B, C) , solo es necesario encontrar una nueva matriz C_e , tal que (A, B, C_e) es el sistema extendido de (A, B, C) . El hecho de que A y B no cambien para encontrar el sistema extendido, será la base para encontrar la matriz de retroalimentación F y la matriz de cambio de base en la entrada G , que llevan un sistema (A, B, C) a la forma semicanónica de Morse.

Existe una relación entre un sistema que esté en la forma semicanónica de Morse (A_s, B_s, C_s) y un sistema (A, B, C) que no lo esté. Esta relación está dada mediante un elemento del grupo de transformación (T, F, G, Π) tal lleva un sistema (A, B, C) al sistema (A_s, B_s, C_s) ; esto es

$$\begin{aligned} A &= T^{-1}(A_s + B_s F)T \\ B &= T^{-1}B_s G \\ C &= \Pi C_s T, \end{aligned} \quad (5.11)$$

por lo tanto, también existe una relación entre C_{ext} y C_e de la siguiente forma

$$C_e = \Pi C_{ext} T. \quad (5.12)$$

Entonces como se había dicho anteriormente, para convertir el sistema (A, B, C) a su forma extendido, es necesario solo encontrar cuanto vale C_e , como en (5.12). En donde la función de transferencia del sistema extendido es

$$T_e(s) = C_e(sI - A)^{-1}B. \quad (5.13)$$

Con los resultados vistos en esta sección, se puede hacer en la próxima sección, el planteamiento formal de la metodología para proponer un elemento del grupo de transformación tal que lleve el sistema (A, B, C) a la forma semicanónica de Morse.

5.3.1. Planteamiento del método para $I_2 \neq 0$

El método propuesto es para el caso de sistemas que tienen más entradas que de salidas y propone encontrar un elemento del grupo de transformación para el sistema extendido, el cual es solo un auxiliar para encontrar grupo de transformación, siendo éste grupo aplicado directamente al sistema (A, B, C) .

En grandes rasgos, el método consiste en definir una permutación adecuada de las salidas Π , y después encontrar una retroalimentación de estado (F) y un cambio de base en la entrada (G), tal que el sistema en lazo cerrado $(A + BF, BG, \Pi C_e)$, tenga como función de transferencia la

inversa del interactor extendido $\Phi_e^{-1}(s)$. El cambio de base de estado T está definido en función de la información del sistema en lazo cerrado, los ordenes de los ceros al infinito y la información de la lista I_2 de Morse.

Permutación de salidas Π

La forma de obtener la matriz Π , es igual que en la sección 5.2.

Retroalimentación de estado F y cambio de base en la entrada G

Para encontrar las matrices de retroalimentación de estado F y cambio de base en la entrada G , se tiene que considerar el sistema extendido (A, B, C_e) , el interactor extendido $\Phi_e(s)$ y otra matriz de permutación Π_e definida como

$$\Pi_e = \begin{bmatrix} \Pi & 0 \\ 0 & \bar{\Pi} \end{bmatrix}$$

tal que se obtenga el sistema $(A, B, \Pi_e C_e)$, en donde $\Pi \in \mathbb{R}^{p \times p}$ se obtiene como en la sección 5.2, y la matriz $\bar{\Pi} \in \mathbb{R}^{(m-p) \times (m-p)}$ se obtiene de forma similar a Π como se verá más adelante, tal que los elementos de la lista I_2 estén acomodados en orden no decreciente en la submatriz diagonal $\Phi_3(s)$ del interactor extendido del sistema $(A, B, \Pi_e C_e)$.

El procedimiento para ordenar la lista I_2 de Morse, consta de dos etapas, primero mediante una matriz de permutación de salidas Π_{e1} se ordenan los mínimos grados por filas de las últimas $m-p$ filas de $\Phi_e(s)$; definidos como, $\psi_i = \min\{j : \deg \phi_{ij}, \text{ para } i = m-p, \dots, m \text{ y } j = 1, \dots, m\}$ tal que $\psi_i \leq \psi_{i+1}$. Con este ordenamiento se asegura que los elementos de la lista I_2 estén sobre la diagonal de $\Phi_3(s)$ del interactor extendido del sistema $(A, B, \Pi_{e1} C_e)$, aunque no necesariamente ordenados de forma no decreciente. Después mediante otra matriz de permutación Π_{e2} se ordenan de forma no decreciente los elementos de I_2 ; esto es, los elementos de la diagonal de $\Phi_3(s)$ del interactor del sistema $(A, B, \Pi_{e2} \Pi_{e1} C_e)$.

Así que, para obtener Π_{e1} se puede hacer por inspección de las últimas $m-p$ filas de $T_e(s)$, de tal forma que

$$\psi_i \leq \psi_{i+1}, \quad i = m-p, \dots, m,$$

donde ψ_i son los mínimos grados por filas como se habían definido anteriormente.

Una vez con Π_{e1} , se obtiene otra matriz de permutación de salidas Π_{e2} por inspección, tal que los $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{m-p}\}$ de la lista I_2 de Morse, aparezcan ordenados en la diagonal de $\Phi_3(s)$ del interactor extendido del sistema $(A, B, \Pi_{e2} \Pi_{e1} C_e)$, de la siguiente forma

$$\sigma_i \leq \sigma_{i+1} \quad i = 1, \dots, m-p$$

donde los σ_i son los elementos de la lista I_2 de Morse del sistema $(A, B, \Pi_{e2} \Pi_{e1} C_e)$.

Por lo tanto la matriz de permutación de salidas $\bar{\Pi}$ está dada como

$$\bar{\Pi} = \Pi_{e2} \Pi_{e1},$$

y ordena los elementos de I_2 de la matriz de transferencia resultante.

Entonces, las matrices de retroalimentación de estado F y cambio de base en la entrada G , se obtienen al considerar el problema de encontrar una retroalimentación de estado estática $u(t) = Fx(t) + Gv(t)$, tal que la función de transferencia del sistema en lazo cerrado $(A + BF, BG, \Pi_e C_e)$ es la inversa del interactivo extendido $\Phi_e^{-1}(s)$. Las matrices (F, G) califican como elementos del grupo de transformación que lleva al sistema (A, B, C_e) a la forma semicanónica de Morse, debido a que la función de transferencia de un sistema extendido en la forma semicanónica de Morse (A_s, B_s, C_s) es la inversa del interactivo extendido de (A_s, B_s, C_s) . Por supuesto al contrario no es cierto, esto es, si una matriz con la propiedad de que $\Phi_e^{-1}(s)$ es la función de transferencia de un sistema, esto no significa que la descripción del sistema extendido (A, B, C_e) está en la semicanónica de Morse.

La función de transferencia de un sistema extendido en lazo cerrado $(A + BF, BG, \Pi_e C_e)$ está dada por

$$\begin{aligned} T_{FG}(s) &= \Pi_e C_e (sI_n - A - BF)^{-1} BG \\ &= \Pi_e C_e (sI_n - A)^{-1} B [I_m - F(sI_n - A)^{-1} B]^{-1} G. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Sea $C_{ext}(s)$ una matriz bipropia tal que

$$T_{FG}(s) = \Pi_e C_e (sI_n - A)^{-1} B C_{ext}(s) = \Phi_e^{-1}(s) \quad (5.15)$$

donde $\Phi_e^{-1}(s)$ es la inversa del interactivo extendido del sistema $(A, B, \Pi_e C_e)$.

Entonces, de (5.14) y (5.15), se puede ver que se tiene que encontrar las matrices (F, G) tales que

$$C_{ext}(s) = [I_m - F(sI_n - A)^{-1} B]^{-1} G, \quad (5.16)$$

en donde, se puede verificar que siempre existen las matrices F y G tales que el compensador $C_{ext}(s)$ es realizable estáticamente [10], debido a que cumple con ser bipropio y que el producto $C_{ext}^{-1}(s)D(s)$ es polinomial (donde $D(s)$, es una factorización coprime derecha de la función de transferencia $T_e(s) = N(s)D^{-1}(s)$).

Un método para encontrar (F, G) en el caso regular y no regular, es considerando el problema de la realizabilidad de compensadores dinámicos [10] (ver capítulo 2). Para esto, se tiene que de (5.15), la matriz $C_{ext}(s)$ puede ser considerada como un compensador bipropio actuando sobre la función de transferencia del sistema $(A, B, \Pi_e C_e)$, y si existe (F, G) tal que se cumple (5.16), entonces se puede decir que $C_{ext}(s)$ es realizable por retroalimentación de estado. Para calcular (F, G) , se puede aplicar el lema 2.5 del capítulo 2, esto es, obteniendo la base mínima del kernel izquierdo, por ejemplo $[X' \ E_m]$, de la matriz

$$H(s) = \begin{bmatrix} (sI - A)^{-1} B C_{ext}(s) \\ \bar{C}_{ext}(s) \end{bmatrix}$$

en donde $\bar{C}_{ext}(s)$ es la parte estrictamente propia del compensador $C_{ext}(s)$, X' es una matriz constante y E_m es una matriz constante no singular. Por lo tanto de la base mínima del kernel izquierdo de $H(s)$, se obtiene que la retroalimentación de estado (F, G) que realiza al compensador $C_{ext}(s)$, está dada por

$$\begin{aligned} F &= -E_m^{-1} X' \\ G &= C_0 \end{aligned}$$

en donde ésta solución es única para sistemas con el mismo número de entradas que de salidas.

Matriz de cambio de base de estado T

Con las matrices (Π, F, G) , obtenidas en los pasos anteriores del procedimiento, se definen las siguientes matrices

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= A + BF & (5.17) \\ \tilde{B} &= BG \\ \tilde{C} &= \Pi C. \end{aligned}$$

Falta para completar el grupo de transformación la matriz de cambio de base en el estado T , la cual es definida mediante el siguiente teorema.

Teorema 5.2 *Sea $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ como (5.17), y se define*

$$T = \begin{bmatrix} \tilde{A}^{n'_1-1}\tilde{b}_1 & \dots & \tilde{b}_1 & \dots & \tilde{A}^{n'_p-1}\tilde{b}_p & \dots & \tilde{b}_p & \tilde{A}^{\sigma_1-1}\tilde{b}_{p+1} & \dots \\ & & \tilde{b}_{p+1} & \dots & \tilde{A}^{\sigma_{m-p}-1}\tilde{b}_m & \dots & \tilde{b}_m & & \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

donde $\{n'_1, \dots, n'_p\}$ son los ordenes de los ceros al infinito del sistema $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ ² dados en orden no decreciente, y $\tilde{b}_i, i = 1, \dots, p$, es la i -ésima columna de \tilde{B} . Entonces el sistema (A_s, B_s, C_s) es

$$\begin{aligned} A_s &= T^{-1}\tilde{A}T = T^{-1}(A + BF)T & (5.19) \\ B_s &= T^{-1}\tilde{B} = T^{-1}BG \\ C_s &= \tilde{C}T = \Pi CT \end{aligned}$$

es la forma semicanónica de Morse del sistema del sistema (A, B, C) .

Prueba.

La demostración de este resultado se basa en la representación de las columnas de las matrices (A_s, B_s, C_s) , en términos de la base formada por las columnas de la matriz T . Esto es, la i -ésima columna de $T^{-1}\tilde{B}$ es la representación de la i -ésima columna de B_s en la base

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} \tilde{A}^{n'_1-1}\tilde{b}_1 & \dots & \tilde{b}_1 & \dots & \tilde{A}^{n'_p-1}\tilde{b}_p & \dots & \tilde{b}_p & \tilde{A}^{\sigma_1-1}\tilde{b}_{p+1} & \dots \\ & & \tilde{b}_{p+1} & \dots & \tilde{A}^{\sigma_{m-p}-1}\tilde{b}_m & \dots & \tilde{b}_m & & \end{array} \right\} \quad (5.20)$$

y la i -ésima columna de $T^{-1}\tilde{A}T$ es la representación de la i -ésima columna de A_s en la base (5.20).

Por simplicidad, mostraremos como se ve esto en un ejemplo particular, siendo el caso general una extensión de este procedimiento.

Sea un sistema $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ de orden 8 con cuatro entradas y dos salidas, en donde no se sabe que forma tienen las matrices $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ después de haber aplicado las matrices (Π, F, G) obtenidas

²Note que los ordenes de los ceros al infinito del sistema (A, B, C) y $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ son los mismos, debido a que (Π, F, G) no modifican esta información.

en los pasos anteriores del procedimiento. Pero si se sabe que la forma general de la función de transferencia de $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ es

$$T(s) = \begin{bmatrix} s^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ t_1 s^{-1} + t_2 s^{-2} & s^{-3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

en donde los t_i para $i = 1, 2$ son constantes posiblemente diferentes de cero, además se sabe que la lista $I_2 = \{1, 3\}$ y que $T(s)$ tiene los siguientes ceros al infinito globales $n'_1 = 1$ y $n'_2 = 3$.

Se sabe también que la forma general de la función de transferencia del sistema extendido es

$$T_e(s) = \begin{bmatrix} s^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ t_1 s^{-1} + t_2 s^{-2} & s^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s^{-1} & 0 \\ t_3 s^{-1} + t_4 s^{-2} & 0 & 0 & s^{-3} \end{bmatrix}$$

Se define la siguiente matriz

$$T = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 & \tilde{A}^2 \tilde{b}_2 & \tilde{A} \tilde{b}_2 & \tilde{b}_2 & \tilde{b}_3 & \tilde{A}^2 \tilde{b}_4 & \tilde{A} \tilde{b}_4 & \tilde{b}_4 \end{bmatrix}$$

entonces lo que se quiere demostrar es que utilizando el cambio de base T se obtienen las siguientes matrices

$$\begin{aligned} \bar{A} &= T^{-1} \tilde{A} T = \begin{bmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \end{bmatrix} \\ \bar{B} &= T^{-1} \tilde{B} = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix} \\ \bar{C} &= \tilde{C} T = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde los elementos "*" son posiblemente diferentes de cero.

Como \tilde{B} tiene la forma

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 & \tilde{b}_2 & \tilde{b}_3 & \tilde{b}_4 \end{bmatrix}$$

se sustituye en

$$\begin{bmatrix} \tilde{b}_1 & \tilde{A}^2\tilde{b}_2 & \tilde{A}\tilde{b}_2 & \tilde{b}_2 & \tilde{b}_3 & \tilde{A}^2\tilde{b}_4 & \tilde{A}\tilde{b}_4 & \tilde{b}_4 \end{bmatrix} \overline{B} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 & \tilde{b}_2 & \tilde{b}_3 & \tilde{b}_4 \end{bmatrix}$$

entonces \overline{B} es de la forma

$$\overline{B} = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

en donde $\overline{B} = B_s$, y está en la forma semicanónica de Morse.

Para demostrar la forma que tiene $\overline{A} = T^{-1}\tilde{A}T$ se despeja de la siguiente manera $T\overline{A} = \tilde{A}T$, en donde

$$\tilde{A}T = \begin{bmatrix} \tilde{A}b_1 & \tilde{A}^3\tilde{b}_2 & \tilde{A}^2\tilde{b}_2 & \tilde{A}\tilde{b}_2 & \tilde{A}\tilde{b}_3 & \tilde{A}^3\tilde{b}_4 & \tilde{A}^2\tilde{b}_4 & \tilde{A}\tilde{b}_4 \end{bmatrix}$$

entonces de la forma de $\tilde{A}T$ se puede deducir del producto $T\overline{A}$ que \overline{A} tiene la siguiente forma

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 1 & * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & * & * & 1 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & * & * & 0 & 1 \\ * & * & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{\begin{matrix} \tilde{A}b_1 & \tilde{A}^3\tilde{b}_2 & \tilde{A}^2\tilde{b}_2 & \tilde{A}\tilde{b}_2 & \tilde{A}\tilde{b}_3 & \tilde{A}^3\tilde{b}_4 & \tilde{A}^2\tilde{b}_4 & \tilde{A}\tilde{b}_4 \end{matrix}}$

en donde los "*" son elementos posiblemente diferentes de cero.

Dado que la función de transferencia se puede expandir en sus parámetros de Markov como

$$\begin{aligned} T(s) &= \overline{C} (sI - \overline{A})^{-1} \overline{B} \\ &= \overline{C}\overline{B}s^{-1} + \overline{C}\overline{A}\overline{B}s^{-2} + \overline{C}\overline{A}^2\overline{B}s^{-3}, \end{aligned} \tag{5.21}$$

entonces para las formas anteriores de \bar{A} y \bar{B} , se obtiene por los grados de la función de transferencia que

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ t_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En la primer columna se encuentra el coeficiente asociado a s^{-1} . Entonces $\bar{C} = C_s$ y se encuentra en la forma semicanónica de Morse para el sistema extendido.

Para los elementos restantes de la matriz \bar{A} se parte de (5.21), entonces

$$\bar{c}_4 \bar{A}^3 \bar{b}_4 = 0$$

donde \bar{c}_3 y \bar{b}_3 representan la tercera fila de \bar{C} y la tercera columna de \bar{B} respectivamente. Sustituyendo

$$\begin{bmatrix} t_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 & * & a & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 & * & b & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 1 & * & c & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & * & d & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & * & e & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & * & f & 1 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & * & g & 0 & 1 \\ * & * & 0 & 0 & * & h & 0 & 0 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

en donde

$$\begin{bmatrix} t_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix} = 0$$

por lo tanto $a = 0$ y $f = 0$. Ahora calculando

$$\begin{bmatrix} t_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{c}_3 \bar{A}^6 \bar{b}_3 \\ b \\ c \\ d \\ e \\ 0 \\ g \\ h \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

en donde $b = 0$ y $g = 0$.

Continuando de manera análoga la columna 6 de \bar{A} es igual a cero.

Para la columna 5 se considera que

$$\bar{c}_4 \bar{A} \bar{b}_3 = 0$$

donde \bar{c}_3 y \bar{b}_3 representan la tercera fila de \bar{C} y la tercera columna de \bar{B} respectivamente. Sustituyendo

$$[t_3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 1 & c & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & e & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & f & 0 & 1 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & g & 0 & 0 & 1 \\ * & * & 0 & 0 & h & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

en donde

$$[t_3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix} = 0$$

por lo tanto $a = 0$ y $f = 0$. Ahora calculando

$$\bar{c}_3 \bar{A}^6 \bar{b}_3 = 0$$

$$[t_3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} b \\ c \\ d \\ e \\ 0 \\ g \\ h \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

en donde $b = 0$ y $g = 0$.

Continuando de manera análoga la columna 5 de \bar{A} es igual a cero.

Para la columna 2 de \bar{A}

$$\bar{c}_4 \bar{A}^3 \bar{b}_2 = \begin{bmatrix} t_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & b_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & c_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & f_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ * & g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ * & h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

en donde

$$\begin{bmatrix} t_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ e_1 \\ f_1 \\ g_1 \\ h_1 \end{bmatrix} = 0$$

por lo tanto $a_1 = 0$ y $f_1 = 0$. Ahora calculando

$$\bar{c}_4 \bar{A}^4 \bar{b}_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} t_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ e_1 \\ f_1 \\ g_1 \\ h_1 \end{bmatrix} = 0$$

en donde $b_1 = 0$ y $g_1 = 0$.

Continuando de manera análoga la columna 2 de \bar{A} es igual a cero.

Finalmente para obtener la columna 1 de \bar{A} , se obtiene de la primer fila de \bar{c}_1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ g_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que $a_2 = 0$. Luego se considera que en la función de transferencia en el elemento (2, 1), esta t_2s^{-2} , entonces de la segunda fila de \bar{c}_2

$$[t_1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ g_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

se obtiene que $b_2 = t_2$.

Ahora de la fila 3 de \bar{C} , se considera que en la función de transferencia en el elemento (3, 1) está t_4s^{-2} , entonces de

$$\bar{c}_3 \bar{A} \bar{b}_1 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ g_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

se obtiene que $e_2 = 0$.

Ahora continuando

$$\bar{c}_3 \bar{A}^2 \bar{b}_1 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ g_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que $f_2 = 0$. Continuando de manera análoga se obtiene que la primer columna de la matriz \bar{A} es

$$\begin{bmatrix} 0 \\ t_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la forma final de $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ es

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_2 & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ t_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} \end{bmatrix}$$

en donde $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}) = (A_s, B_s, C_s)$ y está en la forma semicanónica de Morse del sistema extendido ■

El siguiente ejemplo ilustra el método para encontrar el grupo de transformación que lleva un sistema lineal multivariable (A, B, C) a su forma semicanónica de Morse (A_s, B_s, C_s) .

5.3.2. Ejemplo

Se pretende dar un ejemplo el cual muestre la metodología para transformar un sistema (A, B, C) mediante un grupo de transformación (Π, T, F, G) , a la forma semicanónica de Morse.

Para poder comprobar el método propuesto, se parte del siguiente sistema

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con función de transferencia

$$T(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3}(s-1) & \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3}(-s+1) & 0 \\ \frac{1}{s} & 0 & \frac{1}{-s^2+s^4} \end{bmatrix}$$

Ahora para obtener el sistema extendido se parte de una factorización polinomial derecha de la forma

$$T(s) = C(sI - A)^{-1}B = CN_1(s)D_1^{-1}(s)$$

se tiene que

$$D_1(s) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}s^2 & s^3 & \frac{1}{2}s + s^2 & \frac{1}{4}s^2 & \frac{1}{2}s^2 \\ -\frac{1}{4}s^2 & 0 & -\frac{1}{2}s & \frac{1}{4}s^2 & -\frac{1}{2}s \\ s^3 & s-1 & -s^3+1 & 0 & \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2} \\ 0 & s & -s^2 - s^3 + 1 & 0 & -\frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & s^2 - 1 & 0 & \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

y la matriz $N_1(s)$ es:

$$N_1(s) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}s & s^2 & s + \frac{1}{2} & \frac{1}{4}s & \frac{1}{2}s \\ -\frac{1}{4}s & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}s & -\frac{1}{2} \\ 0 & s-1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -s & -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & s & 0 & \frac{1}{2}s \\ \frac{1}{2} & s & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{4}s & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}s & \frac{1}{2}s + 1 \\ s^2 & 0 & -s^2 & 0 & \frac{1}{2}s \\ \frac{1}{2} & -s-1 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -s & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & s+1 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}s - s^2 & -s^2 & 2s^2 - \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}s & -\frac{1}{2}s \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} N &= CN_1(s) \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}s & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}s & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}s & s + s^2 - 1 & s + 1 & \frac{1}{2}s & \frac{1}{2}s \\ -\frac{1}{4}s & s^2 & s + \frac{1}{2} & \frac{1}{4}s & \frac{1}{2}s \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Considerando las matrices $N_1(s)$ y $D_1(s)$, por la invertibilidad por la derecha del sistema existe una matriz unimodular digamos $U(s) \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ tal que

$$N(s)U(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} Q(s) & 0 \end{bmatrix}}_{Q'(s)}$$

para encontrar esta matriz unimodular se trató de obtener con Matlab, pero se obtiene una matriz unimodular que no es numericamente estable; esto quiere decir que los elementos de la matriz generan problemas en los cálculos que se realicen con otras matrices, debido a que los elementos son fraccionales y se tienen errores numéricos.

Por lo tanto, se tienen que hacer las operaciones por columna a $N(s)$ de forma manual. Estas operaciones no se muestran por cuestiones de espacio, por lo tanto solo se muestra la matriz unimodular equivalente la cual es:

$$U_1(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -s-1 & 1 & 0 & 0 \\ 2s & 2s^2 & -2s+2 & -\frac{1}{2}s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2s-2 & -2s^2 & 2s-2 & s & 0 \end{bmatrix}$$

Como el producto de

$$D_1(s)U_1(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & s & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s^2 - s^3 - 2s^4 & -s^4 - 2s^5 + 1 & -s^2 - s^3 + 2s^4 & \frac{1}{2}s^3 + \frac{1}{2}s^4 & s^3 \\ s^2 - s^3 - 2s^4 - 1 & -s - s^4 - 2s^5 & -s^2 - s^3 + 2s^4 + 1 & \frac{1}{2}s^4 & 0 \\ -s - s^2 + s^3 + 1 & -s^2 + s^4 & s + s^2 - s^3 - 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

no es reducido por columnas [35], a las primeras 3 columnas le aplicamos operaciones para hacerlo reducido por columnas. La matriz unimodular equivalente a las operaciones hechas manualmente es la siguiente:

$$U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$D_1 U_1 U_2 = \begin{bmatrix} s & 0 & s & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2s^2 & -s^4 - 2s^5 + 1 & -s^2 - 3s^3 & s^3 + s^4 & s^3 \\ -2s^3 & -s - s^4 - 2s^5 & -s^2 - s^3 + 1 & s^4 & 0 \\ 0 & -s^2 + s^4 & s + s^2 - s^3 - 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

en donde ya es reducida por columnas. Por lo tanto

$$\begin{aligned} U &= U_1 U_2 \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -s - 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2s^2 & 2 & -s & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ -4 & -2s^2 & -2s - 2 & 2s & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Con U se obtiene el siguiente valor de $Q(s)$

$$N(s)U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde

$$Q'(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{Q(s)}$

Definiendo $K(s)$ como

$$K(s) = \begin{bmatrix} Q(s) & 0 \\ 0 & I_{m-p} \end{bmatrix} U^{-1}(s)$$

por lo tanto

$$U^{-1}(s) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}s & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}s & -\frac{1}{2} \\ 0 & s - 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & s^2 & s + 1 & 0 & \frac{1}{2}s + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2s^2 & 2s + 2 & \frac{1}{2} & s + 1 \\ \frac{1}{2}s + 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}s & 1 \end{bmatrix}$$

$$K(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}s & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}s & -\frac{1}{2} \\ 0 & s-1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & s^2 & s+1 & 0 & \frac{1}{2}s + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2s^2 & 2s+2 & \frac{1}{2} & s+1 \\ \frac{1}{2}s+1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}s & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}s & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}s & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}s & s+s^2-1 & s+1 & \frac{1}{2}s & \frac{1}{2}s \\ -\frac{1}{4}s & s^2 & s+\frac{1}{2} & \frac{1}{4}s & \frac{1}{2}s \\ -\frac{1}{2} & 2s^2 & 2s+2 & \frac{1}{2} & s+1 \\ \frac{1}{2}s+1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}s & 1 \end{bmatrix}$$

La función de transferencia del sistema extendido (C_e, A_e, B_e) se define

$$D_1^{-1}(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s^6} & -\frac{2}{s^6} & \frac{1}{s^3} & \frac{1}{s^4}(-s-1) & \frac{1}{-s^5+s^7}(-s-s^3-2s^4-2) \\ \frac{1}{s^3} & -\frac{1}{s^3} & 0 & 0 & -\frac{1}{-s^2+s^3} \\ \frac{1}{s^5} & -\frac{1}{s^5} & 0 & -\frac{1}{s^3} & \frac{s-s^2-1}{-s^4+s^5} \\ 0 & \frac{4}{s^2} & \frac{1}{s^3} & \frac{1}{s^4}(-s+1) & \frac{1}{-s^4+s^6}(s^2+2s^3-1) \\ -\frac{2}{s^5} & \frac{2}{s^5} & 0 & \frac{2}{s^3} & \frac{1}{-s^4+s^6}(2s^3+2s^4+2) \end{bmatrix}$$

$$T'_e(s) : = K(s)D_1^{-1}(s)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{s^3}(s+s^2-1) & \frac{1}{s^3}(-s+s^2+1) & 0 & 0 & \frac{0}{-s^2+s^4} \\ \frac{1}{s^6}(2s^5-1) & \frac{1}{s^6}(2s^4-2s^5+1) & \frac{1}{s^6}(-2s^5-2) & \frac{1}{s^3} & \frac{1}{s^4}(-s-1) & \frac{1}{-s^5+s^7}(s^3+2s^4+1) \\ \frac{2}{s^6} & \frac{2}{s^6} & 0 & \frac{1}{s^4} & \frac{1}{-s^5+s^7}(-s-s^3-2s^4-2) & 0 \end{bmatrix}$$

el interactor es

$$\Phi'_e(s) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 & 0 \\ 4s^2-2s^3+s^4 & -2s^2+s^3-s^4 & s^4 & 0 & 0 \\ -4s^2+2s^3+2s^5 & 2s^2-2s^3-2s^5 & 2s^5 & s^4 & 0 \\ 2s^3 & 0 & 0 & 0 & s^3 \end{bmatrix}$$

Para encontrar la C_e que nos lleva al sistema extendido se resuelve la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} D(s) + C_e N_1(s) &= K(s) + D_1(s) \\ C_e N_1(s) &= K(s) \end{aligned}$$

donde

$$C_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora para encontrar la matriz de permutación Π , se revisan los ceros al infinito por filas de $T(s)$, los cuales son $n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 1$, entonces la matriz de permutación Π_1 es

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

en donde el interactor de $(A, B, \Pi_1 C)$ es

$$\Pi_1 T(s) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{s} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{s^3} (s + s^2 - 1) & \frac{1}{s^3} (-s + s^2 + 1) & 0 & 0 & \frac{1}{-s^2 + s^4} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ -s^2 + s^3 - s^4 & s^2 - s^3 - s^4 & s^4 \end{bmatrix}$$

como la lista I_4 está acomodada de forma no decreciente en $\Phi(s)$, entonces Π_2 es la matriz identidad, por lo tanto se obtiene la siguiente matriz de permutación

$$\Pi = \Pi_2 \Pi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para encontrar las matrices de retroalimentación de estado F y cambio de base en la entrada G , que serán parte del elemento del grupo de transformación que lleva el sistema (A, B, C) a su forma semicanónica de Morse, se tiene que considerar el sistema extendido (A, B, C_e) , el interactor extendido $\Phi_e(s)$ y otra matriz de permutación Π_e definida como

$$\Pi_e = \begin{bmatrix} \Pi & 0 \\ 0 & \bar{\Pi} \end{bmatrix}$$

en donde $\bar{\Pi} = \Pi_{e2} \Pi_{e1}$. Ahora, considerando el sistema extendido, se tiene que los mínimos grados por filas de las últimas $m - p$ de $T'_e(s)$ son $g_1 = 1$ y $g_2 = 1$, entonces la matriz de permutación Π_{e1} es

$$\Pi_{e1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

por lo que se tiene la siguiente función de transferencia

$$\begin{bmatrix} \Pi & 0 \\ 0 & \Pi_{e1} \end{bmatrix} T'_e(s) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{s} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{s^3} (s + s^2 - 1) & \frac{1}{s^3} (-s + s^2 + 1) & 0 & 0 & \frac{1}{-s^2 + s^4} \\ \frac{1}{s^6} (2s^5 - 1) & \frac{1}{s^6} (2s^4 - 2s^5 + 1) & 0 & \frac{1}{s^4} & \frac{1}{-s^5 + s^7} (s^3 + 2s^4 + 1) \\ \frac{2}{s^6} & \frac{1}{s^6} (-2s^5 - 2) & \frac{1}{s^3} & \frac{1}{s^4} (-s - 1) & \frac{1}{-s^5 + s^7} (-s - s^3 - 2s^4 - 2) \end{bmatrix}$$

que tiene como interactor

$$\Phi_e''(s) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 & 0 \\ -s^2 + s^3 - s^4 & s^2 - s^3 - s^4 & s^4 & 0 & 0 \\ 2s^5 & -2s^3 + 2s^5 & -2s^5 & s^4 & 0 \\ 2s^3 & 0 & 0 & 0 & s^3 \end{bmatrix}$$

Ahora, como la lista I_2 no está acomodada de forma no decreciente en $\Phi_e''(s)$, entonces Π_{e2} es

$$\Pi_{e2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

con lo que, la matriz de permutación es

$$\Pi_e = \begin{bmatrix} \Pi & 0 \\ 0 & \Pi_{e2}\Pi_{e1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y la función de transferencia del sistema $(A, B, \Pi_e C_e)$ es

$$T_e(s) = \Pi_e T_e'(s) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{s} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{s^3} (s + s^2 - 1) & \frac{1}{s^3} (-s + s^2 + 1) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{s^6} & \frac{1}{s^6} (-2s^5 - 2) & \frac{1}{s^3} & \frac{1}{s^4} (-s - 1) & \frac{1}{-s^2 + s^4} \\ \frac{1}{s^6} (2s^5 - 1) & \frac{1}{s^6} (2s^4 - 2s^5 + 1) & 0 & \frac{1}{s^4} & \frac{1}{-s^5 + s^7} (-s - s^3 - 2s^4 - 2) \\ & & & & \frac{1}{-s^5 + s^7} (s^3 + 2s^4 + 1) \end{bmatrix}$$

en donde su interactor es el siguiente

$$\Phi_e(s) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 & 0 \\ -s^2 + s^3 - s^4 & s^2 - s^3 - s^4 & s^4 & 0 & 0 \\ 2s^3 & 0 & 0 & s^3 & 0 \\ 2s^5 & -2s^3 + 2s^5 & -2s^5 & 0 & s^4 \end{bmatrix}$$

Ahora se busca una matriz bipropia tal que lleve a la matriz de transferencia a la inversa del interactor

$$T_e(s)C_{ext}(s) = \Phi_e^{-1}(s)$$

despejando

$$C_{ext}(s) = T_e^{-1}(s)\Phi_e^{-1}(s),$$

sustituyendo

$$C_{ext}(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} & \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3} & \frac{1}{s^4} + 1 & 1 & \frac{1}{s} + 1 \\ -\frac{1}{s^2} & \frac{1}{s^2} & -\frac{1}{s^3} - 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{s^2} + 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Una vez con el compensador $C_{ext}(s)$ se puede obtener la retroalimentación de estado equivalente aplicando el lema 2.5 del capítulo 2; esto es, se obtiene la base mínima del kernel izquierdo de la siguiente matriz

$$H(s) = \begin{bmatrix} (sI - A)^{-1}BC_{ext}(s) \\ \bar{C}_{ext}(s) \end{bmatrix}$$

en donde $\bar{C}_{ext}(s)$ es la parte estrictamente propia del compensador $C_{ext}(s)$. Para obtener $\bar{C}_{ext}(s)$ es necesario descomponer el compensador como

$$C_{ext}(s) = C_0 + \bar{C}_{ext}$$

en donde C_0 es la parte constante del compensador y \bar{C}_{ext} es la parte estrictamente propia del compensador.

Obteniendo la parte constante del compensador se tiene que

$$G = \lim_{s \rightarrow \infty} C_{ext}(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto se tiene que $G = C_0$ y \bar{C}_{ext} es

$$\begin{aligned} \bar{C}_{ext} &= C_{ext}(s) - C_0 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} & \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3} & \frac{1}{s^4} & 0 & \frac{1}{s} \\ -\frac{1}{s^2} & \frac{1}{s^2} & -\frac{1}{s^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{s^2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La base mínima del kernel de $H(s)$ la definimos como $[X' \ E_m]$ en donde X' es una matriz constante y E_m es una matriz constante no singular, por lo tanto en este ejemplo la base es

$$\begin{aligned} X' &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ E_m &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Entonces la retroalimentación de estado (F, G) que realiza al compensador $C_{ext}(s)$, está dada

Capítulo 6

Modificación de la estructura al infinito

En este capítulo, partimos de un sistema (A, B, C) invertible por la derecha y sin ceros finitos, tal que se cumplen las condiciones del capítulo anterior, para ser llevado a la forma semicanónica de Morse (A_s, B_s, C_s) , mediante un elemento del grupo de transformación (Π, F, G, T) . El considerar el sistema en la forma semicanónica de Morse, permite identificar muy fácilmente los tamaños de las listas I_2 e I_4 de Morse, las cuales son la clave para la modificación de la estructura al infinito; esto es I_4 es la estructura al infinito que tiene el sistema (A_s, B_s, C_s) y la lista I_2 , de acuerdo al tamaño de sus elementos, nos permitirá hacer la modificación de la estructura o no, como se mostrará en la subsección 6.1.1.

Con la finalidad de buscar las condiciones bajo las cuales se dé una solución al problema de desacoplamiento no regular para sistemas decalados y el caso general, se propuso analizar primeramente los resultados conocidos acerca de la modificación de la estructura al infinito en los sistemas lineales multivariantes. Se puede considerar el problema de desacoplamiento como una forma de buscar la diagonalidad en la función de transferencia en lazo cerrado, pudiéndose necesitar una modificación de la estructura al infinito para alcanzar el desacoplamiento. El resultado más importante sobre modificación de la estructura al infinito es el de Loiseau [19], donde condiciones necesarias y suficientes para este propósito son derivadas mediante un enfoque geométrico. Dicho método, no establece que forma tiene la función de transferencia en lazo cerrado y además es un procedimiento muy complicado debido a que hay que hacer cálculos exhaustivos para encontrar una base para el espacio de estado X , de tal forma que cumpla ciertas características. Para encontrar ésta base se tiene que considerar el máximo subespacio de controlabilidad contenido en el $Ker C$ y el máximo subespacio (A, B) invariante contenido en el $Ker C$. Otro problema con el método de Loiseau es que para encontrar las matrices (F, G) a veces es necesario repetir varias veces el método para encontrar varias matrices $(F_1, \dots, F_i, G_1, \dots, G_i)$, de tal forma que al final se obtenga una matriz de retroalimentación de estado F y una matriz de cambio de base en la entrada G , que son función de todas las matrices previas $(F_1, \dots, F_i, G_1, \dots, G_i)$.

Otro resultado importante acerca de modificación de la estructura al infinito utilizando el enfoque geométrico es el de Godínez [7], en el cual se muestra que la forma semicanónica de Morse, cumple con cierta descomposición del máximo subespacio de controlabilidad contenido en $Ker C$ y del mínimo subespacio (A, C) invariante que contiene la $Im B$. Esta descomposición

es el punto de partida para la modificación de la estructura al infinito, con la ventaja de que se puede identificar de manera más sencilla las descomposiciones que se requieren al aplicar la metodología de Loiseau. Una aportación muy significativa en [7], es que se muestra como hacer la modificación de la estructura al infinito, tal que se tenga como función de transferencia en lazo cerrado la inversa del interactor del sistema. Siendo esto un avance con respecto al resultado de Loiseau, el cual no establece que función de transferencia en lazo cerrado se tendrá. El problema con el resultado de Godínez es que es sólo para sistemas con p salidas y $p + 1$ entradas, además como se utiliza control geométrico sigue siendo un procedimiento complicado la búsqueda de la F y G que modifican la estructura al infinito.

Después de analizar los resultados de Loiseau y Godínez, en este trabajo se propone un método alternativo para la modificación de la estructura al infinito a los ordenes esenciales sin utilizar el enfoque geométrico. El método propuesto sólo necesita la información de las listas de Morse I_2 , I_4 y la estructura al infinito en lazo cerrado que se desea alcanzar, en el caso de los sistemas decalados son los ordenes esenciales. Con esta información, se decide por inspección de las listas de Morse, que elementos de I_2 se utilizarán para modificar I_4 , luego en base a esta inspección se propone de manera muy simple la forma del par (F, G) , tal que la función de transferencia en lazo cerrado tiene la estructura al infinito deseada.

El método por inspección propuesto explota las características estructurales que presenta la forma semicanónica de Morse (A_s, B_s, C_s) descrita en el capítulo anterior, por este motivo, este método no puede ser usado en sistemas que no puedan ser llevados a dicha forma. El primer paso para la aplicación del método es llevar el sistema (A, B, C) a su forma semicanónica de Morse mediante un elemento del grupo de transformación (Π, F_1, G_1, T) . Una vez en esta forma se aplica el método por inspección obteniendo una segunda retroalimentación (F_2, G_2) que hace la modificación de la estructura al infinito a los ordenes esenciales sobre el sistema (A_s, B_s, C_s) . Finalmente para lograr esta asignación en el sistema original (A, B, C) se tiene que hacer una composición de F_1 , G_1 , F_2 y G_2 como se verá más adelante. La matriz de cambio de base en los estados T y la matriz de permutación de salidas Π , no son consideradas para la modificación de la estructura al infinito, debido a que T no tiene ningún efecto sobre forma de la función de transferencia en lazo cerrado y Π solo cambia las filas de esta función de transferencia.

El método por inspección propuesto tiene la ventaja de ser muy simple y sin necesidad de conocer el enfoque geométrico, se puede construir por inspección de las listas de Morse, qué retroalimentación de estado modifica la estructura al infinito del sistema. Se quiere remarcar que al no utilizar el enfoque geométrico, se ahorra una cantidad significativa de cálculos. Es importante considerar que el método propuesto tiene la limitación que sólo se aplica a los sistemas decalados y no se aplica cuando se utilizan dos veces o más un elemento de la lista I_2 . También se trató de establecer la forma de la función de transferencia en lazo cerrado al modificar la estructura al infinito, pero no pudo ser posible, debido a los elementos que pueden ser diferentes de cero en la matriz A_s que se encuentra en la forma semicanónica de Morse. Aunque en la mayoría de los casos, cuando estos elementos son diferentes de cero, se obtiene una matriz triangular inferior pero no se puede asegurar que tenga esta forma, únicamente cuando estos elementos son cero siempre se tendrá que la función de transferencia en lazo cerrado es una matriz triangular inferior.

El capítulo se encuentra organizado de la siguiente forma:

En la sección 6.1, se presenta la metodología para encontrar una retroalimentación de estado F y una matriz de cambio de base en las entradas G , tal que el sistema en lazo cerrado $(A + BF, BG, C)$ para un sistema decalado (A, B, C) , tenga una estructura al infinito igual a los ordenes esenciales. Después, de manera ilustrativa se presentan 2 ejemplos para mostrar como se aplica la metodología propuesta.

6.1. Método por inspección

Lo que se pretende es dar un procedimiento en el cual con sólo la información de las listas de Morse y los ordenes esenciales en un sistema decalado, se pueda decir que retroalimentación de estado estática asigna los ordenes esenciales como la estructura al infinito en lazo cerrado. Esta forma en lazo cerrado, es conveniente para posteriormente como trabajo futuro, tratar de buscar el desacoplamiento.

Para presentar el método propuesto en este capítulo, se considera que el sistema decalado ya se encuentra en su forma semicanónica de Morse (A_s, B_s, C_s) . En esta forma semicanónica se pueden identificar fácilmente las listas $I_2 = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{m-p}\}$ e $I_4 = \{n'_1, n'_2, \dots, n'_p\}$ de forma no decreciente.

Del interactor del sistema (A, B, C) o del interactor extendido del sistema (A_s, B_s, C_s) , se puede verificar que todos los ordenes esenciales son $n_{ie} = \{n_{1e}, n_{2e}, \dots, n_{pe}\}$ y tienen el mismo valor, en donde cada $n'_i \leq n_{ie}$ para $i = 1, \dots, p$. Los ordenes esenciales del sistema serán la nueva lista a la que se desea modificar la estructura al infinito del sistema.

Básicamente la idea general del método es primeramente calcular cuanto hay que modificar cada elemento de la lista I_4 para llevarlo a los ordenes esenciales, después se construye un sistema de ecuaciones en el cual se refleja de qué forma se están asignando los elementos de la lista I_2 para hacer la modificación de la estructura al infinito a los ordenes esenciales. Luego de una forma sencilla se puede construir F , identificando qué elementos son diferentes de cero en las últimas $m - p$ columnas de esta matriz. Finalmente, en base a la forma en que se asignó la lista I_2 de Morse y a la forma de F , es como se puede encontrar la matriz G .

Es importante considerar que el método propuesto no se aplica, si se utiliza un mismo σ_j ($\forall j \mid j = 1, \dots, m - p$) para incrementar dos o más elementos de la lista I_4 . Pero sí se aplicará cuando se utilice uno o más de los elementos de la lista I_2 en forma parcial o completa, para lograr la modificación en I_4 .

6.1.1. Planteamiento del método

1. Se calculan $\delta_i = n_{ie} - n'_i$ para $i = 1, \dots, p$; esto es, se calcula cuanto hay que modificar cada elemento de I_4 para obtener como la nueva estructura al infinito n_{ie} .
2. De la información de los δ_i se puede plantear un sistema de ecuaciones independientes con una o más incógnitas que podrían tener solución única o multiples soluciones. Estas

ecuaciones tienen la siguiente forma

$$\delta_i = \sum_{j=1}^{m-p} \alpha_{ij} \sigma_j \quad i = 1, \dots, p \quad (6.1)$$

donde los α_{ij} son valores reales dentro de los siguientes valores $0 \leq \alpha_{ij} \leq 1$; esto es, cuando se utiliza completamente un σ_j el valor que toma α_{ij} es igual a 1, pero si solamente se requiere utilizar una fracción de σ_j entonces α_{ij} tomará valores menores a la unidad. La forma de asignación de la lista I_2 para hacer la modificación de I_4 es en cualquier orden; esto quiere decir que en la solución de las ecuaciones (6.1) se puede utilizar cualquier σ_j sin ningún orden en particular para resolver el sistema de ecuaciones (6.1), teniéndose en cuenta que no se pueden usar en este método dos veces un mismo elemento σ_j para cada i ; esto es, que para $i+1$ no se utilizan los σ_j utilizados en i . Por ejemplo, para la solución de δ_1 se parte de cualquier elemento de I_2 supóngase $\alpha_{1,m-p} \sigma_{m-p}$ y si con $0 \leq \alpha_{1,m-p} \leq 1$ no se cumple todavía la igualdad, se utiliza cualquier otro elemento de I_2 por ejemplo el elemento σ_{m-p-1} , teniéndose $\delta_1 = \alpha_{1,m-p} \sigma_{m-p} + \alpha_{1,m-p-1} \sigma_{m-p-1}$ y así sucesivamente hasta llegar a la igualdad. Después para δ_2 ya no se pueden utilizar los elementos de I_2 que se hayan utilizado en la ecuación δ_1 , y con los elementos de I_2 restantes, se construye otra ecuación de forma similar que la de δ_1 . Los α_{ij} correspondientes a σ_j no usados en cada ecuación se igualarán a cero. Entonces para cada δ_i se construirá un sistema de ecuaciones el cual se puede representar de manera matricial como

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_{p-1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \dots & \alpha_{1,m-p} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \dots & \alpha_{2,m-p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{p-1,1} & \alpha_{p-1,2} & \dots & \alpha_{p-1,m-p} \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_{m-p} \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

en donde los α_{ij} son elementos constantes de valor $0 \leq \alpha_{ij} \leq 1$. Se debe de cumplir que en cada columna de H sólo se debe de tener un elemento diferente de cero ya que con esto se asegura que no se utilice dos veces o más un mismo elemento de la lista I_2 .

3. Para obtener la matriz F se hace la siguiente partición de F

$$F = \begin{bmatrix} 0_{m \times (n-m-p)} & \Lambda \end{bmatrix}$$

en donde $0_{m \times (n-m-p)}$ es una matriz de ceros de dimensión $m \times (n-m-p)$ y $\Lambda \in \mathbb{R}^{m \times (m-p)}$ es una matriz que tiene la siguiente forma

y siguiendo la metodología la F anterior es la retroalimentación de estado que hace la modificación de la estructura al infinito a n_{ie} . En este ejemplo la posición de los unos en F no se altera porque en H nos indica que se utilizan completamente los elementos de la lista I_2 de Morse.

4. Para calcular G se utiliza el caso cuando se usan todos los elementos de la lista I_2 para hacer la modificación. Se define por facilidad la matriz G como

$$G = \begin{bmatrix} \lambda \\ \beta \end{bmatrix}$$

Como es necesario saber el valor i al cual $\delta_i = 0$ esto es $i = 3$. Esto quiere decir que las primeras $i - 1$ filas de G serán cero, en este ejemplo se tiene que hay $3 - 1 = 2$ filas de ceros. Los ceros al infinito que no se hayan modificado $\{n'_i\}$ tendrán un 1 en el elemento de la diagonal que le corresponde de acuerdo con

$$\lambda = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 1 & \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} i - 1 = 2 \\ p = 3 \end{array}$$

donde todos los elementos fuera de esta diagonal son ceros.

Ahora, como se usan varios elementos para hacer la modificación, se aplica el paso 4 inciso c) del método para encontrar β . En este inciso se considera que la última fila de G siempre es de la forma $[1 \ 0 \ 0]$, y que se agregarán unos en forma de diagonal invertida en β , considerando que en las últimas $m - p \times p$ filas de F que son cero en G se tendrá una fila diferente de cero. Entonces β será de la siguiente forma

$$\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la matriz G es igual a

$$G = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \lambda \\ \beta \end{array}$$

comprobando la modificación de la estructura en lazo cerrado se tiene

$$\begin{aligned} T_{FG} &= C(sI - A + BF)^{-1}BG \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{-9s^2 - 8s^3 + s^7} & 0 & 0 \\ \frac{7s^4 + 9}{-9s^7 - 8s^8 + s^{12}} & \frac{1}{s^7} & 0 \\ \frac{63s + 72s^2 + 81s^3 + 70s^4 + 57s^5 + 65s^6 + 65s^7 + 9s^8 + 81}{-9s^{10} - 8s^{11} + s^{15}} & \frac{7s + 8s^2 + 8s^3 + 9}{s^{10}} & \frac{1}{s^7} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

en donde la estructura al infinito es $\{7, 7, 7\}$, lo cual es igual a n_{ie} .

Ejemplo 2 Sea el sistema (A, B, C) del ejemplo 5.3.2, el cual es

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con función de transferencia

$$T(s) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{s} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3}(s-1) & \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3}(-s+1) & 0 & 0 & \frac{1}{-s^2+s^4} \\ \frac{1}{s} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces, en el capítulo anterior se obtuvo un elemento del grupo de transformación para llevar el sistema (A, B, C) a su forma semicanónica de Morse (A_s, B_s, C_s) . Este grupo es indispensable conocerlo si se quiere modificar la estructura al infinito del sistema (A, B, C) . El grupo obtenido en el ejemplo 5.3.2 es el siguiente.

$$B_s = T^{-1}BG_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_s = \Pi CT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

en donde el sistema (A_s, B_s, C_s) se encuentra en la forma semicanónica de Morse y tiene como listas de Morse $I_2 = \{3, 4\}$ e $I_4 = \{1, 1, 4\}$. Una vez que el sistema (A, B, C) ya se encuentra en la forma semicanónica (A_s, B_s, C_s) , se puede hacer la modificación de la estructura al infinito a los ordenes esenciales $n_{ie} = \{4, 4, 4\}$, aplicando la metodología propuesta en este capítulo.

Aplicando el método.

1. Se calculan

$$\begin{aligned} \delta_i &= n_{ie} - n'_i & \forall i \mid i = 1, \dots, 3 \\ \delta_1 &= 4 - 1 = 3 \\ \delta_2 &= 4 - 1 = 3 \\ \delta_3 &= 4 - 4 = 0 \end{aligned}$$

en donde para $i = 3$ se tiene que $\delta_3 = 0$, lo cual será de utilidad en el paso 4, para encontrar la forma de la matriz G_2 .

2. De acuerdo a los δ_i se construye el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \alpha_{1,1}\sigma_1 + \alpha_{1,2}\sigma_2 \\ \delta_2 &= \alpha_{2,1}\sigma_1 + \alpha_{2,2}\sigma_2 \end{aligned}$$

en donde existen muchas soluciones. Se debe de tomar en cuenta que el método no se aplica si se utiliza dos veces un mismo σ_j para hacer la modificación, por lo tanto se debe de revisar en que forma se puede asignar la lista I_2 . En este ejemplo existen solamente dos soluciones que cumplen con que no se utilice dos veces un solo elementos de I_2 , estas son

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \sigma_1 \\ \delta_2 &= \frac{3}{4}\sigma_2 \end{aligned}$$

en donde $\alpha_{1,1} = 1, \alpha_{1,2} = 0, \alpha_{2,1} = \frac{3}{4}$ y $\alpha_{2,2} = 0$. La segunda solución es

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \frac{3}{4}\sigma_2 \\ \delta_2 &= \sigma_1\end{aligned}$$

donde $\alpha_{1,1} = \frac{3}{4}, \alpha_{1,2} = 0, \alpha_{2,1} = 1$ y $\alpha_{2,2} = 0$. Con cualquiera de las dos soluciones anteriores se puede hacer la modificación de la estructura al infinito siguiendo la metodología propuesta. En el caso de este ejemplo utilizamos la segunda solución que puede representarse de forma matricial como sigue

$$\delta_i = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 3/4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix}$$

Por la forma de H el método claramente se puede aplicar, ya que se utilizan sólo una vez los elementos de la lista I_2 para lograr la modificación en I_4 .

3. Dado que $\delta_1 \neq 0$ y $\delta_2 \neq 0$, las filas 1 y 2 tendrán un elemento diferente de cero en una ubicación $a_{1,2}$ y $a_{2,1}$ de acuerdo con (6.3)

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overbrace{0 & 0 & 0}^{\sigma_1} & \overbrace{1 & 0 & 0 & 0}^{\sigma_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pero como el elemento $a_{1,2}$ nos indica que sólo se utiliza $3/4$ partes de el elemento σ_2 , esto quiere decir que hay que disminuir en uno la posición del elemento en $a_{1,2}$, por lo que se tiene la siguiente F_2

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overbrace{0 & 0 & 0}^{\sigma_1} & \overbrace{0 & 1 & 0 & 0}^{\sigma_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

en donde esta es la retroalimentación de estado F_2 que hace la modificación de la estructura al infinito.

4. Para calcular G_2 se utiliza el caso cuando se usan todos los elementos de la lista I_2 para hacer la modificación. Se define por facilidad la matriz G_2 como

$$G_2 = \begin{bmatrix} \lambda \\ \beta \end{bmatrix}$$

Como es necesario saber el valor i al cual $\delta_i = 0$ esto es $i = 3$. Esto quiere decir que las primeras $i - 1$ filas de G_2 serán cero, en este ejemplo se tiene que hay $3 - 1 = 2$ filas de

ceros. Los ceros al infinito que no se hayan modificado $\{n'_i\}$ tendrán un 1 en el elemento de la diagonal que le corresponde de acuerdo con

$$\lambda = \begin{bmatrix} i-1 = 2 & \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right. \\ p = 3 & \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \end{array} \right. \end{bmatrix}$$

donde todos los elementos fuera de esta diagonal son ceros.

Ahora, para encontrar β utilizando la parte de λ de dimensión $i-1$ y se asigna un uno sobre la diagonal

$$i-1 \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right. \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\theta}$$

después trasponemos θ y definimos a β como

$$\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\theta^T} & \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\Theta} \end{bmatrix}$$

donde todos los elementos fuera de la diagonal son ceros. Θ es matriz de cero.

Entonces la matriz G_2 es igual a

$$G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se ha modificado la estructura al infinito del sistema del ejemplo 5.3.2, esta modificación se hizo a partir de la forma semicanónica de Morse obtenida en el ejemplo 5.3.2. Ahora lo que se quiere mostrar a continuación, es como se puede modificar la estructura al infinito como en el ejemplo anterior 6.1.2, para el sistema (A, B, C) del ejemplo 5.3.2.

La forma semicanónica de Morse se utiliza de forma auxiliar para hacer la modificación de la estructura al infinito; esto es, dado un sistema (A, B, C) que cumpla con las condiciones del capítulo 5, entonces existirá un elemento del grupo de transformación (Π, F_1, G_1, T) , tal que lleve al sistema (A, B, C) a la forma semicanónica de Morse (A_s, B_s, C_s) . Luego, partiendo de (A_s, B_s, C_s) se aplica la metodología propuesta en este capítulo, y se obtiene otra retroalimentación (F_2, G_2) que hace la modificación de la estructura al infinito a los ordenes esenciales. Entonces para modificar la estructura al infinito de (A, B, C) se tiene que hacer una composición de F_1, G_1, F_2 y G_2 de la siguiente forma

$$\begin{aligned} F' &= F_1 + G_1 F_2 \\ G' &= G_1 G_2 \end{aligned}$$

en donde F' y G' es la retroalimentación que aplicada al sistema (A, B, C) hará la modificación de la estructura al infinito a los ordenes esenciales. La matriz de cambio de base en los estados T y la matriz de permutación de salidas Π , no son consideradas para la modificación de la estructura al infinito, debido a que T no tiene ningún efecto sobre forma de la función de transferencia en lazo cerrado y Π solo cambia las filas de esta función de transferencia.

Después de obtener (F', G')

$$F' = F_1 + G_1 F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G' = G_1 G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

se obtiene el siguiente sistema

$$A' = A + BF' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B' = BG' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C' = C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La función de transferencia del sistema retroalimentado (A', B', C') es

$$T_{F'G'}(s) = C(sI - A - BF')^{-1}BG' = \begin{bmatrix} \frac{-s^3-1}{2s^3-2s^5+s^7} & -\frac{1}{2s^2-2s^4+s^6} & \frac{s^2-2}{2s^2-2s^4+s^6} \\ \frac{-5s-3s^2+3s^3+2}{2s^4-2s^6+s^8} & \frac{s+s^2-3}{2s^2-2s^4+s^6} & \frac{-4s+3s^3+2}{2s^3-2s^5+s^7} \\ \frac{-2s+s^2+s^3-1}{2s^3-2s^5+s^7} & \frac{s^2-1}{2s^2-2s^4+s^6} & \frac{1}{-2s^2+s^4+2} \end{bmatrix}$$

en donde se puede verificar que los ordenes de los ceros al infinito de $T_{F'G'}(s)$ son $\{4, 4, 4\}$.

Capítulo 7

Desacoplamiento no regular de sistemas decalados

En este capítulo se presentan dos métodos para resolver el problema de desacoplamiento no regular de sistemas decalados invertibles por la derecha y sin ceros finitos. El método 1 consiste en tres pasos, para encontrar tres retroalimentaciones, las cuales son: la que lleva al sistema (A, B, C) a la forma semicanónica de Morse (A_s, B_s, C_s) , la que hace la modificación de la estructura al infinito del sistema (A_s, B_s, C_s) y finalmente la retroalimentación que desacopla el sistema anterior que fue modificado. Con estas tres retroalimentaciones se tiene la ventaja de que se puede desacoplar el sistema original (A, B, C) mediante una retroalimentación no regular que se obtiene de una composición de las tres retroalimentaciones anteriores. Este método se presenta en la sección 7.1, y está basado en los resultados obtenidos en los capítulos 5 y 6. Se presenta también un ejemplo que ha sido utilizado en los capítulos 5 y 6 para mostrar como se aplica la metodología propuesta.

En el método 2 se presenta una metodología para resolver el problema de desacoplamiento no regular de sistemas decalados bajo las siguientes restricciones: se consideran sistemas invertibles por la derecha, sin ceros finitos y con el i -ésimo elemento de la estructura al infinito de la parte estrictamente propia del interactor $\Gamma(s)$ menor o igual al i -ésimo elemento de la lista I_2 de Morse. Esta última restricción limita el tipo de sistemas que se pueden desacoplar utilizando la metodología propuesta. Aunque se tienen varias restricciones, la metodología propuesta tiene la ventaja de dar un procedimiento para encontrar una retroalimentación de estado tal que se obtenga una función de transferencia en lazo cerrado desacoplada. El resultado del método 2, también tiene la ventaja de que se aplica a sistemas con m entradas y p salidas, siendo este resultado una extensión del procedimiento presentado en [29] para sistemas con m entradas y 2 salidas. Este método se presenta en la sección 7.2, y se puede considerar que es más directo en comparación con el método 1. En esta sección también se presenta un ejemplo el cual muestra como se aplica la metodología propuesta.

7.1. Método 1

En esta sección se presenta una metodología para desacoplar un sistema decalado basado en el resultado de la modificación de la estructura al infinito del capítulo 6. Con este método

se tiene la ventaja de poder encontrar de manera sistemática una retroalimentación de estado no regular tal que desacople al sistema original (A, B, C) . Básicamente el método consiste en modificar la estructura al infinito del sistema (A, B, C) , tal que los ordenes de los ceros al infinito de la función de transferencia en lazo cerrado sean iguales a los ordenes esenciales del sistema. Después, como se obtiene un sistema cuadrado después de hacer la modificación de la estructura al infinito del sistema decaído, se sabe de [1], [3] y [5] que se puede obtener una retroalimentación de estado tal que desacople al sistema. Posteriormente sólo se hace una composición de las retroalimentaciones de estado calculadas anteriormente y se obtiene la retroalimentación de estado no regular que desacopla al sistema original (A, B, C) .

A continuación se presenta el método para el desacoplamiento no regular de sistema decaídos, utilizando de forma auxiliar el resultado de la modificación de la estructura al infinito presentado en el capítulo 6. El planteamiento del método es el siguiente:

1. Se tiene un sistema (A, B, C) , que cumpla con las condiciones para llevarlo a la forma semicanónica de Morse (A_s, B_s, C_s) , obteniéndose la retroalimentación (F_1, G_1) del grupo de transformación.
2. Se aplica la metodología presentada en el capítulo 6, para modificar la estructura al infinito del sistema (A_s, B_s, C_s) mediante una retroalimentación (F_2, G_2) , tal que los ceros al infinito de la función de transferencia cuadrada en lazo cerrado, sean iguales a los ordenes esenciales del sistema. En esta parte se hace una composición de las retroalimentaciones (F_1, G_1) y (F_2, G_2) de la siguiente forma

$$\begin{aligned} F' &= F_1 + G_1 F_2 \\ G' &= G_1 G_2 \end{aligned}$$

obteniéndose el sistema (A', B', C') , y remarcando que con (F', G') se puede modificar la estructura al infinito de (A, B, C) y que después de la modificación de la estructura al infinito se obtiene un sistema cuadrado el cual es desacoplabable.

3. Después de forma auxiliar se obtiene un compensador $C(s)$ de la siguiente forma

$$T_{F'G'}(s)C(s) = \Phi^{-1}(s)$$

en donde $T_{F'G'}(s)$ es la función de transferencia obtenida en el paso 2 y $\Phi^{-1}(s)$ es la inversa del interactor del sistema (A', B', C') . Una vez obtenido el compensador $C(s)$ se puede obtener la retroalimentación de estado regular (F_3, G_3) equivalente al compensador

$$C(s) = \left[I - F_3 (sI - A')^{-1} B' \right]^{-1} G_3$$

el cual se resuelve aplicando el lema 2.5 del capítulo 2. Con la retroalimentación obtenida se puede desacoplar el sistema (A', B', C') .

4. Para obtener la retroalimentación de estado no regular que desacopla el sistema original (A, B, C) , se hace una composición de (F', G') y (F_3, G_3) de la siguiente forma

$$\begin{aligned} F'' &= F' + G' F_3 \\ G'' &= G' G_3 \end{aligned}$$

en donde F'' y G'' es la retroalimentación que desacopla al sistema (A, B, C) .

El siguiente ejemplo ilustra la metodología para encontrar la retroalimentación de estado no regular tal que desacople al sistema (A, B, C) .

7.1.1. Ejemplo

Sea el sistema decalado (A, B, C) del ejemplo 5.3.2:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con función de transferencia

$$T(s) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{s} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3}(s-1) & \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3}(-s+1) & 0 & 0 & \frac{1}{-s^2+s^4} \\ \frac{1}{s} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En el capítulo 5 se obtuvo un elemento del grupo de transformación para llevar el sistema (A, B, C) a su forma semicanónica de Morse (A_s, B_s, C_s) . Para este ejemplo, sólo nos interesa

del grupo de transformación, la retroalimentación de estado F_1 y la matriz de cambio de base en la entrada G_1 obtenidas en el ejemplo 5.3.2, estas matrices son las siguientes

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Una vez que el sistema (A, B, C) ya se encuentra en la forma semicanónica (A_s, B_s, C_s) , se obtuvo en el ejemplo 6.1.2 del capítulo 6, una retroalimentación (F_2, G_2) que modifica la estructura al infinito del sistema (A_s, B_s, C_s) , tal que los ceros al infinito de la función de transferencia en lazo cerrado del nuevo sistema modificado (A', B', C') son los ordenes esenciales $n_{ie} = \{4, 4, 4\}$. La retroalimentación (F_2, G_2) es de la siguiente forma

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Después, en el ejemplo 6.1.2 se hizo la composición de F_1, G_1, F_2 y G_2 de la siguiente forma

$$F' = F_1 + G_1 F_2$$

$$G' = G_1 G_2$$

para modificar la estructura al infinito de (A, B, C) . Obteniéndose la retroalimentación (F', G') siguiente

$$F' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando la retroalimentación (F', G') se obtuvo el sistema (A', B', C') , el cual tiene como función de transferencia

$$T_{F'G'}(s) = C(sI - A - BF')^{-1}BG' = \begin{bmatrix} \frac{-s^3-1}{2s^3-2s^5+s^7} & -\frac{1}{2s^2-2s^4+s^6} & \frac{s^2-2}{2s^2-2s^4+s^6} \\ \frac{-5s-3s^2+3s^3+2}{2s^4-2s^6+s^8} & \frac{s+s^2-3}{2s^2-2s^4+s^6} & \frac{-4s+3s^3+2}{2s^3-2s^5+s^7} \\ \frac{-2s+s^2+s^3-1}{2s^3-2s^5+s^7} & \frac{s^2-1}{2s^2-2s^4+s^6} & \frac{1}{-2s^2+s^4+2} \end{bmatrix}$$

El interactor de $T_{F'G'}(s)$ es

$$\Phi_{F'G'}(s) = \begin{bmatrix} s^4 & 0 & 0 \\ 0 & s^4 & 0 \\ 0 & 0 & s^4 \end{bmatrix}$$

se puede verificar que los ordenes de los ceros al infinito de $T_{F'G'}(s)$ son $\{4, 4, 4\}$.

Ahora se busca una matriz bipropia $C(s)$ tal que lleve a la matriz de transferencia $T_{F'G'}(s)$ a la inversa del interactor

$$T_{F'G'}(s)C(s) = \Phi_{F'G'}^{-1}(s)$$

despejando

$$C(s) = T_{F'G'}^{-1}(s)\Phi_{F'G'}^{-1}(s),$$

sustituyendo

$$C(s) = \begin{bmatrix} \frac{-2s+1}{s} & 1 & \frac{-s-1}{s} \\ \frac{3s^2-1}{s^2} & \frac{-2s-1}{s} & \frac{3s+3s^2-1}{s^2} \\ \frac{s-s^2-1}{s^2} & 1 & \frac{-s-s^2+1}{s^2} \end{bmatrix}$$

Dado el compensador $C(s)$ se obtiene la retroalimentación de estado (F_3, G_3) equivalente aplicando el lema 2.5 del capítulo 2, de donde

$$F_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

esta retroalimentación de estado desacopla la función de transferencia $T_{F'G'}(s)$ en lazo cerrado.

Ahora, para obtener la retroalimentación de estado no regular que desacopla el sistema original (A, B, C) , se obtiene la retroalimentación resultante de la composición de las retro-

alimentaciones obtenidas previamente de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 F'' &= F' + G'F_3 \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\
 G'' &= G'G_3 \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

en donde F_3 y G_3 es la retroalimentación de desacopla el sistema (A', B', C') . Aplicando la retroalimentación (F'', G'') al sistema original (A, B, C) se obtiene la siguiente función de transferencia en lazo cerrado

$$\begin{aligned}
 T_d(s) &= C(sI - A - BF'')^{-1}BG'' \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s^4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s^4} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

la cual se ve que es desacoplada.

7.2. Método 2

La ventaja del método presentado en esta sección con respecto al método de la sección previa, es que el método que se presentará más adelante es más directo; esto es, en el método 1 es necesario encontrar 3 retroalimentaciones y después hacer una composición de ellas para encontrar una retroalimentación que desacople al sistema, en cambio en el método de esta sección se da procedimiento para encontrar directamente la retroalimentación que desacopla al sistema.

Antes de presentar el resultado sobre el desacoplamiento de sistemas decalados, es importante señalar que se seguirá un procedimiento similar al presentado en [35], retomando de este trabajo el teorema 7.1 que será la base para proponer el resultado principal de éste capítulo.

Sea $T(s)$ la función de transferencia del sistema (A, B, C) y $(N_1(s), D(s))$ una factorización coprime derecha de (A, B, I) esto es

$$T(s) = C(sI - A)^{-1}B = CN_1(s)D^{-1}(s)$$

en donde definimos $N(s)$ como $N(s) = CN_1(s)$.

Entonces, el problema de desacoplamiento no regular en el caso decaído consiste en encontrar las condiciones bajo las cuales existe una retroalimentación de estado

$$u(t) = Fx(t) + Gv(t)$$

donde F y G son matrices constantes con $\text{rank } G = p$, tal que la función de transferencia en lazo cerrado del sistema $(A + BF, BG, C)$ es

$$\begin{aligned} T_{FG}(s) &= C(sI - A - BF)^{-1}BG \\ &= N(s)[D(s) - FN_1(s)]^{-1}G \\ &= W(s) \end{aligned} \quad (7.1)$$

donde $W(s) = \text{diag}\{1/s^{n_{ie}}\}$ para $i = 1, \dots, p$. Los n_{ie} son los ordenes esenciales del sistema y en el caso decaído los n_{ie} son todos iguales.

Ahora, dado que se supone que el sistema es invertible por la derecha, o lo que es lo mismo, que la función de transferencia del sistema tiene rango completo por filas, entonces existe una inversa de $T(s)$, digamos $\tilde{T}(s)$, que tiene la siguiente forma

$$\tilde{T}(s) = D(s)\tilde{N}(s)$$

donde $\tilde{N}(s)$ es una inversa derecha de $N(s)$. La matriz $\tilde{N}(s)$ no es única y puede escribirse de forma paramétrica como

$$\tilde{N}(s) = \tilde{N}_I(s) + \tilde{N}_K(s)T_p(s)$$

donde $\tilde{N}_I(s)$ es una inversa derecha de $N(s)$, $\tilde{N}_K(s)$ forma una base del kernel de $N(s)$ y $T_p(s) \in \mathbb{R}^{(m-p) \times p}(s)$ es una matriz paramétrica.

Con esta inversa derecha de $T(s)$, y después de hacer algunas operaciones en (7.1) se obtiene

$$[D(s) - FN_1(s)]\tilde{N}(s)W(s) = G, \quad (7.2)$$

la cual puede representarse como

$$M(s)\tilde{N}(s)W(s) = Z, \quad (7.3)$$

donde

$$M(s) = XD(s) + YN_1(s), \quad (7.4)$$

con matrices constantes X , Y y Z tales que

$$F = -X^{-1}Y. \quad G = X^{-1}Z. \quad (7.5)$$

Por lo tanto, el lema 5.1 del capítulo 5 se puede aplicar a (7.4) y replantear el problema de desacoplamiento como el encontrar una solución constante a F , G y una solución a $M(s)$, tal que $M(s)$ cumpla con las ecuaciones (7.3) y (7.4). La matriz Z es de rango completo por columnas, $M(s)$ una matriz reducida por columnas con el grado de la i -ésima columna de $M(s)$ igual al grado de la i -ésima columna de $D(s)$. Bajo estas consideraciones siempre existe la solución de X y Y en (7.4) con X no singular [18], y la retroalimentación de estado la cual resuelve el problema puede ser calculada de (7.5).

Es muy complicado dar una metodología para encontrar $M(s)$ tal que se satisfaga (7.3) y (7.4). Por lo tanto de forma auxiliar, se utilizará el interactor extendido visto en la sección 1.7 del capítulo 1. A continuación recordaremos la forma de obtener el sistema extendido y su interactor.

Considerando las matrices $N(s)$ y $D(s)$, dado que el sistema tiene inversa derecha, existe una matriz unimodular $U(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}[s]$ tal que

$$N(s)U(s) = \begin{bmatrix} Q(s) & 0 \end{bmatrix}$$

donde $Q(s)$ es una matriz polinomial no singular de dimensión $p \times p$.

Ahora, si definimos

$$K(s) := \begin{bmatrix} Q(s) & 0 \\ 0 & I_{m-p} \end{bmatrix} U^{-1}(s) \quad (7.6)$$

entonces la matriz $\tilde{N}(s)$ puede expresarse como

$$\tilde{N}(s) = K^{-1}(s) \left[\hat{N}_I(s) + \hat{N}_K(s)T_p(s) \right] \quad (7.7)$$

donde $\hat{N}_I(s) = \begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix}$, $\hat{N}_K(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{m-p} \end{bmatrix}$, y $T_p(s)$ es una matriz paramétrica.

La matriz $T_e(s) := K(s)D^{-1}(s)$ es la función de transferencia del sistema extendido (A, B, C_e) y su interactor extendido $\Phi_e(s)$ está dado como

$$T_e(s) = K(s)D^{-1}(s) = \Phi_e^{-1}(s)B(s) \quad (7.8)$$

donde $B(s)$ es una matriz bipropia y $\Phi_e(s)$ tiene la siguiente forma

$$\Phi_e(s) = \begin{bmatrix} \Phi_1(s) & 0 \\ \Phi_2(s) & \Phi_3(s) \end{bmatrix}$$

donde $\Phi_1(s)$ es el interactor de (A, B, C) , $\Phi_2(s)$ es el acoplamiento entre las listas I_2 e I_4 de Morse, y finalmente $\Phi_3(s) = \text{diag}\{s^{\sigma_i}\}$, $i = 1, 2, \dots, m - p$, en donde los $\{\sigma_i\}$ son los elementos de la lista I_2 de Morse.

Con (7.8) y (7.4), en donde (7.4) se puede representar como $M(s) = [X + YN_1(s)D^{-1}(s)]D(s)$, donde $[X + YN_1(s)D^{-1}(s)]$ es claramente bipropia, entonces podemos expresar a $M(s)$ de la siguiente forma

$$M(s) = V(s)\Phi_e(s)K(s) \quad (7.9)$$

donde $V(s)$ es una matriz bipropia tal que $M(s)$ es polinomial.

Sustituyendo (7.9) y (7.7) en (7.3) se obtiene

$$V(s) \begin{bmatrix} \Phi_1(s)W(s) \\ \Phi_2(s)W(s) + \Phi_3(s)T_p(s) \end{bmatrix} = Z. \quad (7.10)$$

Ahora, como Z es una matriz constante de rango pleno por columnas, se puede elegir que $Z = \begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix}$, la cual sigue siendo una matriz constante de rango pleno por columnas.

Una vez obtenido (7.10), se puede plantear el siguiente teorema [35].

Teorema 7.1 *Un sistema (A, B, C) invertible por la derecha es desacoplable por retroalimentación de estado estática no regular si y sólo si existe una matriz bipropia $V(s)$ y una matriz paramétrica $T_p(s)$ tal que*

$$V(s) \begin{bmatrix} \Phi_1(s)W(s) \\ \Phi_2(s)W(s) + \Phi_3(s)T_p(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

con

$$V(s)\Phi_e(s)K(s) \text{ polinomial.}$$

Prueba. Ver [35]. ■

Básicamente, el teorema anterior propone unas condiciones implícitas para resolver el problema de desacoplamiento en forma general, y se dice que son condiciones implícitas debido a que esas condiciones no son directamente comprobables y dependen de la existencia de una matriz bipropia $V(s)$ la cual el teorema no indica como encontrar dicha matriz.

A continuación se dan algunos conceptos, necesarios para establecer el teorema 7.2, el cual propone una forma de obtener la matriz $V(s)$ tal que cumpla con el teorema 7.1.

Ahora, como deseamos que el sistema decalado tenga la siguiente función de transferencia en lazo cerrado

$$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^{n_{1e}}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^{n_{2e}}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{s^{n_{pe}}} \end{bmatrix}$$

donde los ordenes esenciales son $\{n_{ie}\}$, $i = 1, \dots, p$, entonces se puede factorizar el interactor en términos de los ordenes esenciales n_{ie} , como sigue:

$$\Phi_1(s) = \Gamma(s)W(s)$$

donde $\Gamma(s)$ es una matriz propia conocida como la parte propia del interactor y tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} \Gamma(s) &= \Phi_1(s) \text{diag} \left\{ \frac{1}{s^{n_{ie}}} \right\} \\ &= \begin{bmatrix} s^{n'_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \phi_{2,1} & s^{n'_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{p,1} & \phi_{p,2} & \cdots & s^{n'_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s^{n_{1e}}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^{n_{2e}}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{s^{n_{pe}}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s^{-(n_{1e}-n'_1)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\phi_{21}}{s^{n_{1e}}} & s^{-(n_{2e}-n'_2)} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\phi_{31}}{s^{n_{1e}}} & \frac{\phi_{32}}{s^{n_{2e}}} & s^{-(n_{3e}-n'_3)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\phi_{p1}}{s^{n_{1e}}} & \frac{\phi_{p2}}{s^{n_{2e}}} & \frac{\phi_{p3}}{s^{n_{3e}}} & \cdots & s^{-(n_{pe}-n'_p)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para el caso de sistemas decalados se cumple que la estructura al infinito de $\Gamma(s)$, corresponde a los grados de los denominadores de los elementos en la diagonal de $\Gamma(s)$. Lo anterior lo demostramos en el siguiente lema.

Lema 7.1 *La estructura al infinito de $\Gamma(s)$ para el caso de los sistemas decalados es*

$$\begin{aligned}\delta_1 &= n_{1e} - n'_1, \\ \delta_2 &= n_{2e} - n'_2, \\ &\vdots \\ \delta_{p-1} &= n_{pe-1} - n'_{p-1}, \\ \delta_p &= n_{pe} - n'_p = 0\end{aligned}$$

donde $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq 0$, y n'_i son los ordenes de los ceros al infinito del sistema (A, B, C) .

Prueba. Para la demostración, se tiene primero que la forma general de la inversa del interactor es

$$\Phi_1^{-1}(s) = \begin{bmatrix} s^{-n'_1} & 0 & \dots & 0 \\ \phi_{2,1} & s^{-n'_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{p,1} & \phi_{p,2} & \dots & s^{-n'_p} \end{bmatrix}$$

en donde es importante señalar, de la primera columna, que debido a que los ordenes de los ceros al infinito están sobre la diagonal se cumple que los grados de los denominadores de $\phi_{2,1}, \dots, \phi_{p,1}$ son mayores o iguales a n'_1 , y así se cumple que para cada columna los grados de los denominadores de $\phi_{i,j}$ son mayores o iguales que el n'_i correspondiente en la diagonal.

Entonces, existe una matriz bipropia $B(s)$ tal que

$$B(s)\Phi_1^{-1}(s) = \text{diag}\{1/s^{n'_i}\} \text{ para } i = 1, \dots, p. \quad (7.12)$$

Ahora, despejando $\Phi_1(s)$ en la ecuación (7.12), se tiene

$$\Phi_1(s) = \text{diag}\{s^{n'_i}\}B(s). \quad (7.13)$$

Una vez con (7.13), consideramos que para obtener la parte propia del interactor; esto es $\Gamma(s)$, se tiene que multiplicar el interactor por $\text{diag}\left\{\frac{1}{s^{n_{ie}}}\right\}$, en donde n_{ie} son los ordenes esenciales. Por lo tanto, multiplicando $\text{diag}\left\{\frac{1}{s^{n_{ie}}}\right\}$ en (7.13) se obtiene

$$\Gamma(s) = \Phi_1(s)\text{diag}\left\{\frac{1}{s^{n_{ie}}}\right\} = \text{diag}\{s^{n'_i}\}B(s)\text{diag}\left\{\frac{1}{s^{n_{ie}}}\right\} \quad (7.14)$$

como se están considerando los sistemas decalados, entonces todos los ordenes esenciales tienen el mismo valor por lo que se puede considerar que el efecto de la multiplicación de $\text{diag}\left\{\frac{1}{s^{n_{ie}}}\right\}$ es como el multiplicar $\text{diag}\{s^{n'_i}\}B(s)$ por $\frac{1}{s^{n_{ie}}}$. Haciendo esta consideración (7.14) queda como sigue

$$\begin{aligned}\Gamma(s) &= \text{diag}\left\{\frac{1}{s^{n_{ie}-n'_i}}\right\}B(s) \\ &= \text{diag}\left\{\frac{1}{s^{\delta_i}}\right\}B(s)\end{aligned} \quad (7.15)$$

Ahora, de (7.15) es fácil ver que la estructura al infinito de $\Gamma(s)$ es δ_i , ya que la matriz bipropia no modifica la información al infinito de $\Gamma(s)$.

Notar que por la forma del interactor se tiene que $\delta_p = n_{pe} - n'_p = 0$. ■

El Lema 7.1 se cumple sólo para sistemas decalados, ya que para sistemas que no sean decalados no se garantiza que la estructura al infinito de $\Gamma(s)$ es δ_i , como se puede ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.1 Sea un sistema cuyo interactor es

$$\Phi_1(s) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ -s^2 & s^2 & 0 \\ 0 & -s^4 & s^4 \end{bmatrix}$$

en donde los ordenes esenciales son $n_{ie} = \{2, 4, 4\}$ y los ordenes de los ceros al infinito son $n'_i = \{1, 2, 4\}$. Entonces, la parte propia del interactor es

$$\begin{aligned} \Gamma(s) &= \Phi_1(s) \text{diag}\{1/s^{n_{ie}}\} \\ &= \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ -s^2 & s^2 & 0 \\ 0 & -s^4 & s^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & s^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & s^{-4} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{s^2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

de donde, si obtenemos la forma de Smith Mc-Millan al infinito de $\Gamma(s)$ se obtiene

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s^3} \end{bmatrix}$$

lo cual implica que la estructura al infinito de $\Gamma(s)$ es $(0, 0, 3)$. Pero si obtenemos las diferencias propuestas en el lema 7.1, se tiene que

$$\begin{aligned} n_{1e} - n'_1 &= 2 - 1 = 1 \\ n_{2e} - n'_2 &= 4 - 2 = 2 \\ n_{3e} - n'_3 &= 4 - 4 = 0 \end{aligned}$$

de donde se puede ver que estos valores no corresponden a la información al infinito de $\Gamma(s)$. ■

Otro aspecto importante para el problema de desacoplamiento es la información de la lista I_2 de Morse. Esta información se encuentra en el interactor extendido de la función de transferencia

del sistema extendido, el cual en este capítulo lo definimos de la siguiente forma

$$\Phi_e(s) = \begin{bmatrix} s^{n'_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \phi_{2,1} & s^{n'_2} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{p,1} & \phi_{p,2} & \cdots & s^{n'_p} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \Phi_{p+1,1} & \Phi_{p+1,2} & \cdots & \Phi_{p+1,p} & s^{\sigma_{m-p}} & 0 & \cdots & 0 \\ \Phi_{p+2,1} & \Phi_{p+2,2} & \cdots & \Phi_{p+2,p} & 0 & s^{\sigma_{m-p-1}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Phi_{m,1} & \Phi_{m,2} & \cdots & \Phi_{m,p} & 0 & 0 & \cdots & s^{\sigma_1} \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

donde $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots \leq \sigma_{m-p}$ es la lista I_2 de Morse, observese que las últimas $m-p$ filas de $\Phi_e(s)$ se presentan en orden inverso con respecto al presentado en el lema 1.3 del capítulo 1; esto es, aplicando una matriz de permutación de salidas en el sistema extendido, con la finalidad de que el resultado que se presentará en el teorema 7.2 sea menos restrictivo con respecto a el orden de los elementos de la lista I_2 .

A continuación se presenta un lema de [29], el cual será utilizado para la demostración del resultado principal de este capítulo.

Lema 7.2 *Sea $u(s)$ un polinomio y $v(s)$ una función bipropia. Entonces, existe un polinomio $p(s)$ del mismo grado que $u(s)$ y una función racional propia $w(s)$ tal que*

$$u(s) = p(s)v(s) + w(s).$$

Prueba. La función bipropia $v(s)$ se puede escribir como

$$v(s) = v_0 + v_1 s^{-1} + \dots$$

donde $v_i \in \mathbb{R}$. El resultado se obtiene de la división directa de $u(s)$ y $v(s)$, ambos acomodados en orden no creciente con respecto a sus potencias. ■

En el teorema siguiente estableceremos una condición suficiente al problema de desacoplamiento no regular para sistemas decalados en el caso con m entradas y p salidas. La prueba de este teorema nos ofrece una metodología para encontrar las matrices F y G que desacoplan a un sistema con ciertas características particulares.

Teorema 7.2 *Sea un sistema decalado invertible por la derecha (A, B, C) con p salidas y m entradas, que cumple con*

$$\delta_i \leq \sigma_i \text{ para } i = 1, \dots, m-p \quad (7.17)$$

donde σ_i es la lista de Morse I_2 de (A, B, C) ordenados de forma no creciente, y δ_i son los ordenes de los ceros al infinito no nulos de $\Gamma(s)$ ordenados de forma no decreciente. Entonces el sistema es desacoplable con función de transferencia en lazo cerrado $\text{diag} \left\{ \frac{1}{s^{n_{ie}}} \right\}$, donde los n_{ie} son los ordenes esenciales del sistema.

Prueba.

Sea $\delta_i \leq \sigma_i$, entonces a continuación se presenta un procedimiento para encontrar una matriz bipropia $V(s)$ tal que satisfice las condiciones del teorema 7.1.

Definiendo

$$Y_0 := \left[\frac{\Gamma(s)}{X(s)} \right] = \begin{bmatrix} s^{-(n_{1e}-n'_1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\phi_{21}}{s^{n_{1e}}} & s^{-(n_{2e}-n'_2)} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\phi_{31}}{s^{n_{1e}}} & \frac{\phi_{32}}{s^{n_{2e}}} & s^{-(n_{3e}-n'_3)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\phi_{p1}}{s^{n_{1e}}} & \frac{\phi_{p2}}{s^{n_{2e}}} & \frac{\phi_{p3}}{s^{n_{3e}}} & \dots & s^{-(n_{pe}-n'_p)} \\ \hline 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

en donde $X(s) \in \mathbb{R}_p^{(m-p) \times p}(s)$, y puede ser elegida como $X(s) = [I_{m-p} \ 0]$. Definiendo

$$\begin{aligned} \delta_1 &= n_{1e} - n'_1, \\ \delta_2 &= n_{2e} - n'_2, \\ &\vdots \\ \delta_{p-1} &= n_{pe-1} - n'_{p-1}, \\ \delta_p &= n_{pe} - n'_p. \end{aligned}$$

entonces, la matriz bipropia $V_0(s) \in \mathbb{R}_p^{m \times m}(s)$ más simple que cumple con $V_0(s)Y_0(s) = \begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix}$ es

$$V_0(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \hline 1 & -\phi_{p,1}s^{-n_{1e}} & -\phi_{p,2}s^{-n_{2e}} & -\phi_{p,3}s^{-n_{3e}} & \dots & -\phi_{p,p-1}s^{-n_{p-1e}} \\ 0 & -s^{-\delta_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & -\frac{\phi_{21}}{s^{n_{1e}}} & -s^{-\delta_2} & 0 & \dots & 0 \\ I_{p-1} & 0 & -\frac{\phi_{31}}{s^{n_{1e}}} & -\frac{\phi_{32}}{s^{n_{2e}}} & -s^{-\delta_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -\frac{\phi_{p-1,1}}{s^{n_{1e}}} & -\frac{\phi_{p-1,2}}{s^{n_{2e}}} & -\frac{\phi_{p-1,3}}{s^{n_{3e}}} & \dots & -s^{-\delta_{p-1}} \end{bmatrix}$$

en donde I_{p-1} es una matriz identidad de $p-1 \times p-1$. Para construir la matriz $V_0(s)$ se parte primero de la matriz identidad de tamaño $p-1 \times p-1$, que son las primeras $p-1$ filas de $V_0(s)$ y luego se construye lo demás. La razón de esto es únicamente por motivos de ubicación de los elementos diferentes de cero.

Observe que, debido a que el sistema (A, B, C) no tiene ceros finitos, $K(s)$ en (7.6) es unimodular por lo cual la condición de que $V(s)\Phi_e(s)K(s)$ es polinomial, se puede reducir a que sólo $V(s)\Phi_e(s)$ es polinomial.

De la condición previa, se tienen los dos casos que se muestran a continuación.

1. Si los grados mínimos de $\Phi_{i,j} \forall i = p + 1, \dots, m - p, j = 1, \dots, p - 1$, denotados como $\text{mín deg } \Phi_{i,j}$, son tales que $\text{mín deg } \Phi_{i,j} > \delta_j$. Entonces, el producto $V_0(s)\Phi_e(s)$ es polinomial, con lo cual se demuestra que $V_0(s)$ es la matriz bipropia deseada.

Para comprobar que el producto $V_0(s)\Phi_e(s)$ es polinomial y que se debe cumplir la condición $\text{mín deg } \Phi_{i,j} > \delta_j$, se analizará bajo qué condiciones el resultado de la multiplicación $V_0(s)\Phi_e(s)$ es polinomial.

Entonces, primeramente se puede ver fácilmente que el producto de las primeras $p - 1$ filas de $V_0(s)$ por $\Phi_e(s)$, es polinomial. Después el producto de la fila p de $V_0(s)$ por $\Phi_e(s)$ es polinomial, debido a que todos los $-\phi_{p,i}s^{-n_{ie}}$ para $i = 1, \dots, p$ son polinomiales. Esto es, como en cada polinomio $\phi_{p,i}$ el máximo grado es igual su orden esencial n_{ie} asociado, entonces se cancelan $s^{n_{ie}}$ con $s^{-n_{ie}}$, quedando así un polinomio de la forma $\phi_{p,i} - s^{n_{ie}}$.

De la fila $p + 1$ de $V_0(s)$ se deduce que se debe cumplir que

$$\text{mín deg } \Phi_{p+1,j} > \delta_1 \text{ para } j = 1, \dots, p - 1. \quad (7.18)$$

Luego de la fila $p + 2$ de $V_0(s)$, se puede considerar que si se cumple la desigualdad en (7.18), entonces la forma general de $\Phi_{p+1,1}$ es $\Phi_{p+1,1} = k_a s^{\delta_1+1} + \dots + k_w s^{\sigma_{m-p}-1}$. Después, como ϕ_{21} en forma general es $s^{n_{ie}-\delta_1} + \dots + s^{n_{ie}-\delta_2-1}$, se cancelan los elementos $s^{n_{ie}}$ en $\left(-\frac{\phi_{21}}{s^{n_{ie}}}\right)$. El producto $\left(-\frac{\phi_{21}}{s^{n_{ie}}}\right) (k_a s^{\delta_1+1} + \dots + k_w s^{\sigma_{m-p}-1})$ queda como $-(s^{-\delta_1} + \dots + s^{-\delta_2-1}) (k_a s^{\delta_1+1} + \dots + k_w s^{\sigma_{m-p}-1})$, el cual es polinomial.

Del producto $(-s^{-\delta_2}) (\Phi_{p+2,1})$ se tiene que cumplir que

$$\text{mín deg } \Phi_{p+2,1} > \delta_2, \quad (7.19)$$

para que sea polinomial.

Manteniendo la suposición de que se sigue cumpliendo la desigualdad en (7.18), ahora la forma general de $\Phi_{p+1,2} = k_a s^{\delta_1+1} + \dots + k_w s^{\sigma_{m-p}-1}$. Ahora, como ϕ_{21} en forma general es $s^{n_{ie}-\delta_1} + \dots + s^{n_{ie}-\delta_2-1}$, se cancelan los elementos $s^{n_{ie}}$ en $\left(-\frac{\phi_{21}}{s^{n_{ie}}}\right)$. El producto $\left(-\frac{\phi_{21}}{s^{n_{ie}}}\right) (\Phi_{p+1,2})$ es polinomial.

Después del producto $(-s^{-\delta_2}) (\Phi_{p+2,2})$ se tiene que cumplir que

$$\text{mín deg } \Phi_{p+2,2} > \delta_2,$$

para que sea polinomial.

Considerando la fila $p+3$ de $V_0(s)$ y que se cumple la desigualdad en (7.18), se tiene que en el producto $\left(-\frac{\phi_{31}}{s^{n_{1e}}}\right) (\Phi_{p+1,1})$, $\Phi_{p+1,1}$ tiene la siguiente forma $\Phi_{p+1,1} = k_a s^{\delta_1+1} + \dots + k_w s^{\sigma_{m-p}-1}$ y ϕ_{31} en forma general es $s^{n_{1e}-\delta_1} + \dots + s^{n_{1e}-\delta_3-1}$. Notese que con esta forma de ϕ_{31} se cancelan los elementos $s^{n_{1e}}$ en $\left(-\frac{\phi_{31}}{s^{n_{1e}}}\right)$. Por lo tanto, el producto $\left(-\frac{\phi_{31}}{s^{n_{1e}}}\right) (\Phi_{p+1,1})$ es polinomial.

Si se cumple la desigualdad (7.19), se tiene que en el producto $\left(-\frac{\phi_{32}}{s^{n_{2e}}}\right) (\Phi_{p+2,1})$ la matriz $\Phi_{p+2,1}$ tiene la siguiente forma $\Phi_{p+2,1} = k_a s^{\delta_2+1} + \dots + k_w s^{\sigma_{m-p}-1}$. Ahora, como ϕ_{32} en forma general es $s^{n_{2e}-\delta_2} + \dots + s^{n_{2e}-\delta_3-1}$, se cancelan los elementos $s^{n_{2e}}$ en $\left(-\frac{\phi_{32}}{s^{n_{2e}}}\right)$. El producto $\left(-\frac{\phi_{32}}{s^{n_{2e}}}\right) (\Phi_{p+2,1})$ es polinomial.

Del producto $(-s^{-\delta_3}) (\Phi_{p+3,1})$ se tiene cumplir que

$$\text{mín deg } \Phi_{3,1} > \delta_3,$$

para que sea polinomial.

De manera análoga se puede comprobar el producto de $V_0(s)\Phi_e(s)$ es polinomial, siempre y cuando se mantenga que

$$\begin{aligned} \text{mín deg } \Phi_{i,j} &> \delta_j \text{ para } i = p+1, \dots, m, \\ j &= 1, \dots, p. \end{aligned}$$

2. Si el producto $V_0(s)\Phi_e(s)$ no es polinomial implica que hay algún $\text{deg } \Phi_{i,j} < \delta_j$. Entonces se mostrará que existen dos matrices unimodulares de $m \times m$, tal que

$$V(s) := U_L(s)V_0(s)U_R(s)$$

es bipropia, y se cumple que

$$V(s)Y(s) = \begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ con } Y(s) = U_R^{-1}(s)Y_0(s),$$

y $V(s)\Phi_e(s)$ es polinomial.

En general, para $i = p+1, \dots, m$ y $j = 1, \dots, p-1$ se tiene que

$$\begin{aligned} \Phi_{i,j} &= k_0 s^{n'_j+1} + \dots + k_r s^{\delta_{i-p}-1} + k_{r+1} s^{\delta_{i-p}} + \dots + k_w s^{\sigma_{i-p}-1} \\ &= \left(k_0 s + \dots + k_r s^{\delta_{i-p}-n'_j-1}\right) s^{n'_j} + k_{r+1} s^{\delta_{i-p}} + \dots + k_w s^{\sigma_{i-p}-1} \\ &= u_{i,j} s^{n'_j} + \tilde{\Phi}_{i,j} \end{aligned} \tag{7.20}$$

en donde

$$u_{i,j} = k_0 s + \dots + k_r s^{\delta_{i-p}-n'_j-1}$$

$$\tilde{\Phi}_{i,j} = k_{r+1}s^{\delta_{i-p}} + \dots + k_w s^{\sigma_{i-p}-1}$$

Entonces de (7.20), se puede descomponer el interactor extendido como

$$\Phi_e(s) = U_R^{-1}(s)\tilde{\Phi}(s)$$

con

$$U_R^{-1}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ u_{p+1,1} & u_{p+1,2} & \dots & u_{p+1,p-1} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ u_{p+2,1} & u_{p+2,2} & \dots & u_{p+2,p-1} & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m,1} & u_{m,2} & \dots & u_{m,p-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\Phi}(s) = \begin{bmatrix} s^{n'_1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \phi_{2,1} & s^{n'_2} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{p,1} & \phi_{p,2} & \dots & s^{n'_p} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{\Phi}_{p+1,1} & \tilde{\Phi}_{p+1,2} & \dots & \tilde{\Phi}_{p+1,p} & s^{\sigma_{m-p}} & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{\Phi}_{p+2,1} & \tilde{\Phi}_{p+2,2} & \dots & \tilde{\Phi}_{p+2,p} & 0 & s^{\sigma_{m-p-1}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{\Phi}_{m,1} & \tilde{\Phi}_{m,2} & \dots & \tilde{\Phi}_{m,p} & 0 & 0 & \dots & s^{\sigma_1} \end{bmatrix}$$

donde $U_R(s)$ es claramente unimodular.

La matriz $V_1(s)$ satisface que el producto $V_1(s)\Phi_e(s)$ es polinomial, pero no es bipropia. Se mostrará ahora que existe una matriz unimodular $U_L(s)$ tal que $V(s) := U_L(s)V_1(s)$ es bipropia y

$$U_L(s) \begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ahora, en $V_1(s)$ se cumple que las últimas $p - 1$ filas son parte de una matriz bipropia; esto es, si se aplica el límite cuando $s \rightarrow \infty$, algunos elementos se harán cero y otros serán elementos constantes. Para demostrar esto, se observa primeramente los elementos $\frac{u_{p+1,1}}{s^{\delta_1}} + 1, \frac{u_{p+1,2}}{s^{\delta_1}}, \dots, \frac{u_{p+1,p-1}}{s^{\delta_1}}$, los cuales al aplicar el límite cuando $s \rightarrow \infty$, se obtiene $1, 0, \dots, 0$. Después, para los elementos $\frac{u_{p+2,1}}{s^{\delta_2}} + u_{p+1,1} \frac{\phi_{21}}{s^{n_{1e}}}$, se pueden manipular como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{u_{p+2,1}}{s^{\delta_2}} + u_{p+1,1} \frac{\phi_{21}}{s^{n_{1e}}} &= \frac{k_0 s}{s^{\delta_2}} + \dots + \frac{k_r s^{\delta_2 - n'_1 - 1}}{s^{\delta_2}} + \frac{k_0 s^{-n'_2 + n'_1 + 1}}{s^{\delta_2}} + \dots \\ &\quad + \frac{k_r s^{\delta_2 - 1 - n'_2}}{s^{\delta_2}} + \dots + \frac{k_0}{s^{\delta_2}} + \dots + \frac{k_r s^{\delta_2 - n'_1 - 2}}{s^{\delta_2}} \end{aligned}$$

en donde, los elementos

$$\frac{k_0 s}{s^{\delta_2}} + \frac{k_0 s^{-n'_2 + n'_1 + 1}}{s^{\delta_2}}$$

son los que no se ve tan evidente que sean 0 o 1, por lo tanto se manipulan como:

$$\begin{aligned} \frac{k_0 s}{s^{\delta_2}} + \frac{k_0 s^{-n'_2 + n'_1 + 1}}{s^{\delta_2}} &= \frac{1}{s} \frac{k_0 s}{s^{\delta_2}} + \frac{k_0 \frac{s^{n'_1} s}{s^{n'_2}}}{\frac{s^{n_{1e}}}{s^{n'_2}}} \\ &= \frac{k_0}{s^{\delta_2 - 1}} + \frac{\frac{1}{s^{n'_1} s} k_0 s^{n'_1} s}{\frac{1}{s^{n'_1} s} s^{n_{1e}}} \\ &= \frac{k_0}{s^{\delta_2 - 1}} + \frac{k_0}{s^{\delta_1 - 1}} \end{aligned}$$

en donde se debe cumplir que $\delta_1 \geq 1$ y $\delta_2 \geq 1$, y si no se cumple, entonces $k_0 = 0$. Por lo tanto, si se analiza cada elemento de la ecuación $\frac{u_{p+2,1}}{s^{\delta_2}} + u_{p+1,1} \frac{\phi_{21}}{s^{n_{1e}}}$ nos podemos dar cuenta que al aplicar el límite cuando $s \rightarrow \infty$ se harán cero o algún valor constante. Ahora, si seguimos analizando más elementos como por ejemplo $\frac{u_{p+2,2}}{s^{\delta_2}} + u_{p+1,2} \frac{\phi_{21}}{s^{n_{1e}}} + 1$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{u_{p+2,2}}{s^{\delta_2}} + u_{p+1,2} \frac{\phi_{21}}{s^{n_{1e}}} + 1 &= \frac{k_0 s}{s^{\delta_2}} + \dots + \frac{k_r s^{\delta_2 - n'_2 - 1}}{s^{\delta_2}} + \frac{k_0 s^{\delta_2 - n_{1e} + n'_1 + 1}}{s^{\delta_2}} + \dots \\ &\quad + \frac{k_r s^{\delta_2 - 1 - n'_2}}{s^{\delta_2}} + \dots + \frac{k_0}{s^{\delta_2}} + \dots + \frac{k_r s^{\delta_2 - n'_1 - 2}}{s^{\delta_2}} + 1 \end{aligned}$$

y nos podemos dar cuenta que también los elementos al aplicar el límite cuando $s \rightarrow \infty$ se hacen cero u otro número, y se debe cumplir que $\delta_2 \geq 1$, y si no se cumple entonces $k_0 = 0$ para $u_{p+2,2}$.

Ahora para

$$\begin{aligned} \frac{u_{p+2,p-1}}{s^{\delta_2}} + u_{p+1,p-1} \frac{\phi_{21}}{s^{n_{1e}}} &= \frac{k_0 s}{s^{\delta_2}} + \dots + \frac{k_r s^{\delta_2 - n'_{p-1} - 1}}{s^{\delta_2}} + \frac{k_0 s^{n'_1 - n'_2 + 1}}{s^{\delta_2}} + \dots \\ &\quad + \frac{k_r s^{\delta_2 - 1 - n'_{p-1}}}{s^{\delta_2}} + \dots + \frac{k_0}{s^{\delta_2}} + \dots + \frac{k_r s^{\delta_1 - n'_{p-1} - 2}}{s^{\delta_2}} \end{aligned}$$

en donde se puede ver que también sus elementos se harán cero u otro número al aplicar el límite, y se debe cumplir que $\delta_2 \geq 1$, y si no se cumple, entonces $k_0 = 0$ para $u_{p+2,p-1}$.

Finalmente, analizamos la última fila de $V_1(s)$ y se tiene que

$$\begin{aligned} & \frac{u_{m,1}}{s^{\delta_{p-1}}} + u_{p+1,1} \frac{\phi_{p-1,1}}{s^{n_{1e}}} + u_{p+2,1} \frac{\phi_{p-1,2}}{s^{n_{2e}}} + \dots + u_{m-1,1} \frac{\phi_{p-1,p-2}}{s^{n_{p-2e}}} \\ = & \frac{k_0}{s^{\delta_{p-1}-1}} + \dots + \frac{k_r}{s^{\delta_{p-1}+1-\delta_{m-p}+n'_1}} + \dots + \frac{k_0}{s^{\delta_{p-1}-n'_{p-2}-1+n'_{p-1}}} + \dots \\ & + \frac{k_r}{s^{\delta_{p-1}-\delta_{m-p-1}+n'_1+1+n'_{p-1}-n'_{p-2}}} + \frac{k_0}{s^{\delta_{p-1}}} + \dots + \frac{k_r}{s^{\delta_{p-1}-\delta_{m-p-1}+n'_1+2}} \end{aligned}$$

en donde se debe cumplir que $\delta_{p-1} \geq 1$, y si no se cumple, entonces $k_0 = 0$ para $u_{m,1}$. Para los elementos

$$\frac{k_r}{s^{\delta_{p-1}+1+n'_1-\delta_{m-p}}} + \frac{k_r}{s^{\delta_{p-1}-\delta_{m-p-1}+n'_1+1+n'_{p-1}-n'_{p-2}}} + \frac{k_r}{s^{\delta_{p-1}-\delta_{m-p-1}+n'_1+2}}$$

se puede factorizar

$$\frac{1}{s} \left(\frac{k_r}{s^{\delta_{p-1}+n'_1-\delta_{m-p}}} + \frac{k_r}{s^{\delta_{p-1}-\delta_{m-p-1}+n'_1+n'_{p-1}-n'_{p-2}}} + \frac{k_r}{s^{\delta_{p-1}-\delta_{m-p-1}+n'_1+1}} \right)$$

con lo cual se puede ver que estos elementos son cero debido a que al aplicar el límite cuando $s \rightarrow \infty$ se tiene que $\frac{1}{\infty} = 0$.

Entonces los elementos de $\frac{u_{m,1}}{s^{\delta_{p-1}}} + u_{p+1,1} \frac{\phi_{p-1,1}}{s^{n_{1e}}} + u_{p+2,1} \frac{\phi_{p-1,2}}{s^{n_{2e}}} + \dots + u_{m-1,1} \frac{\phi_{p-1,p-2}}{s^{n_{p-2e}}}$ se harán cero u otro número haciendo las consideraciones previas.

Ahora para

$$\begin{aligned} & \frac{u_{m,p-1}}{s^{\delta_{p-1}}} + u_{p+1,p-1} \frac{\phi_{p-1,1}}{s^{n_{1e}}} + u_{p+2,p-1} \frac{\phi_{p-1,2}}{s^{n_{2e}}} + \dots + u_{m-1,p-1} \frac{\phi_{p-1,p-2}}{s^{n_{p-2e}}} + 1 \\ = & \frac{k_0}{s^{\delta_{p-1}-1}} + \dots + \frac{k_r}{s^{\delta_{p-1}+1-\delta_{m-p}+n'_{p-1}}} + \dots + \frac{k_0}{s^{\delta_{p-1}-n'_{p-2}-1+n'_{p-1}}} + \dots \\ & + \frac{k_r}{s^{\delta_{p-1}-\delta_{m-p-1}+1+2n'_{p-1}-n'_{p-2}}} + \frac{k_0}{s^{\delta_{p-1}}} + \dots + \frac{k_r}{s^{\delta_{p-1}-\delta_{m-p-1}+n'_{p-1}+2}} + 1 \end{aligned}$$

en donde se debe cumplir que $\delta_{p-1} \geq 1$, y si no se cumple, entonces $k_0 = 0$ para $u_{m,p-1}$. Para los elementos

$$\frac{k_r}{s^{\delta_{p-1}+1+n'_{p-1}-\delta_{m-p}}} + \frac{k_r}{s^{\delta_{p-1}-\delta_{m-p-1}+1+2n'_{p-1}-n'_{p-2}}} + \frac{k_r}{s^{\delta_{p-1}-\delta_{m-p-1}+n'_{p-1}+2}}$$

se puede factorizar

$$\frac{1}{s} \left(\frac{k_r}{s^{\delta_{p-1}+n'_{p-1}-\delta_{m-p}}} + \frac{k_r}{s^{\delta_{p-1}-\delta_{m-p-1}+2n'_{p-1}-n'_{p-2}}} + \frac{k_r}{s^{\delta_{p-1}-\delta_{m-p-1}+n'_{p-1}+1}} \right)$$

con lo cual se puede ver que estos elementos son ceros debido a que al aplicar el límite cuando $s \rightarrow \infty$ se tiene que $\frac{1}{\infty} = 0$.

Entonces los elementos de $\frac{u_{m,p-1}}{s^{\delta_{p-1}}} + u_{p+1,p-1} \frac{\phi_{p-1,1}}{s^{n_{1e}}} + u_{p+2,p-1} \frac{\phi_{p-1,2}}{s^{n_{2e}}} + \dots + u_{m-1,p-1} \frac{\phi_{p-1,p-2}}{s^{n_{p-2e}}} + 1$ se harán cero u otro número haciendo las consideraciones previas.

Hemos visto que las últimas $p - 1$ filas de $V_1(s)$, esto es,

$$\left[\begin{array}{ccc} \frac{u_{p+1,1}}{s^{\delta_1}} + 1 & \dots & \dots \\ \frac{u_{p+2,1}}{s^{\delta_2}} + u_{p+1,1} \frac{\phi_{21}}{s^{n_{1e}}} & \dots & \dots \\ \vdots & & \\ \frac{u_{m,1}}{s^{\delta_{p-1}}} + u_{p+1,1} \frac{\phi_{p-1,1}}{s^{n_{1e}}} + \dots + u_{m-1,1} \frac{\phi_{p-1,p-2}}{s^{n_{p-2e}}} & \dots & \dots \\ & \frac{u_{p+1,p-1}}{s^{\delta_1}} & 0 \quad -\frac{1}{s^{\delta_1}} \\ & \frac{u_{p+2,p-1}}{s^{\delta_2}} + u_{p+1,p-1} \frac{\phi_{21}}{s^{n_{1e}}} & 0 \quad -\frac{\phi_{21}}{s^{n_{1e}}} \\ & \vdots & \vdots \\ \frac{u_{m,p-1}}{s^{\delta_{p-1}}} + u_{p+1,p-1} \frac{\phi_{p-1,1}}{s^{n_{1e}}} + \dots + u_{m-1,p-1} \frac{\phi_{p-1,p-2}}{s^{n_{p-2e}}} + 1 & 0 & -\frac{\phi_{p-1,1}}{s^{n_{1e}}} \\ 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{s^{\delta_2}} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ -\frac{\phi_{p-1,2}}{s^{n_{2e}}} & \dots & -\frac{1}{s^{\delta_{p-1}}} \end{array} \right]$$

forman parte de una matriz bipropia bajo ciertas consideraciones que se vieron anteriormente. Teniéndose en cuenta que en la matriz previa las últimas $p - 1$ columnas es obvio que también se harán cero u otro número al aplicar el límite cuando s tiende a infinito.

Ahora, considerando las siguientes filas de $V_1(s)$,

$$\left[\begin{array}{ccccccc} -u_{p+1,1} & & -u_{p+1,2} & & \dots & & \\ -u_{p+2,1} & & -u_{p+2,2} & & \dots & & \\ \vdots & & \vdots & & & & \\ -u_{m,1} & & -u_{m,2} & & \dots & & \\ \frac{u_{p+1,1}\phi_{p,1}}{s^{n_{1e}}} + \frac{u_{p+2,1}\phi_{p,2}}{s^{n_{2e}}} + \dots + \frac{u_{m,1}\phi_{p,p}}{s^{n_{pe}}} & \frac{u_{p+1,2}\phi_{p,1}}{s^{n_{1e}}} + \frac{u_{p+2,2}\phi_{p,2}}{s^{n_{2e}}} + \dots + \frac{u_{m,2}\phi_{p,p}}{s^{n_{pe}}} & \dots & & & & \\ -u_{p+1,p-1} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \\ -u_{p+2,p-1} & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ -u_{m,p-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \\ \frac{u_{p+1,p-1}\phi_{p,1}}{s^{n_{1e}}} + \frac{u_{p+2,p-1}\phi_{p,2}}{s^{n_{2e}}} + \dots + \frac{u_{m,p-1}\phi_{p,p}}{s^{n_{pe}}} & 1 & -\frac{\phi_{p,1}}{s^{n_{1e}}} & -\frac{\phi_{p,2}}{s^{n_{2e}}} & \dots & -\frac{\phi_{p,p}}{s^{n_{pe}}} & \end{array} \right]$$

se puede ver que esta matriz no es bipropia, debido a que sus primeras $p - 1$ columnas son polinomiales. Entonces, del lema 7.2 existen polinomios $u'_{p+1}(s)$, $u'_{p+2}(s)$, ..., $u'_m(s)$, $u'_{m+1}(s)$ cuyos grados son iguales a los de su $u_{p+1}(s)$, $u_{p+2}(s)$, ..., $u_m(s)$, $u_{m+1}(s)$ respectivo, tal que $v_1(s) := \frac{u_{p+1,1}}{s^{\delta_1}} + 1$, $v_2(s) := \frac{u_{p+1,2}}{s^{\delta_1}} + 1$, ..., $v_{p-1}(s) := \frac{u_{p+1,p-1}}{s^{\delta_1}} + 1$, son funciones bipropias, y se

tendrá que

$$\begin{aligned} -u_{p+1,1} + u'_{p+1}(s)v_1(s) &= w_{p+1,1}(s) \\ -u_{p+1,2} + u'_{p+1}(s)v_2(s) &= w_{p+1,2}(s) \\ &\vdots \\ -u_{p+1,p-1} + u'_{p+1}(s)v_{p-1}(s) &= w_{p+1,p-1}(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -u_{p+2,1} + u'_{p+2}(s)v_1(s) &= w_{p+2,1}(s) \\ -u_{p+2,2} + u'_{p+2}(s)v_2(s) &= w_{p+2,2}(s) \\ &\vdots \\ -u_{p+2,p-1} + u'_{p+2}(s)v_{p-1}(s) &= w_{p+2,p-1}(s) \end{aligned}$$

\vdots

$$\begin{aligned} -u_{m,1} + u'_m(s)v_1(s) &= w_{m,1}(s) \\ -u_{m,2} + u'_m(s)v_2(s) &= w_{m,2}(s) \\ &\vdots \\ -u_{m,p-1} + u'_m(s)v_{p-1}(s) &= w_{m,p-1}(s) \end{aligned}$$

$$\frac{u_{p+1,1}\phi_{p,1}}{s^{n_{1e}}} + \frac{u_{p+2,1}\phi_{p,2}}{s^{n_{2e}}} + \dots + \frac{u_{m,1}\phi_{p,p}}{s^{n_{pe}}} + u'_{m+1}(s)v_1(s) = w_{m+1,1}(s)$$

$$\frac{u_{p+1,2}\phi_{p,1}}{s^{n_{1e}}} + \frac{u_{p+2,2}\phi_{p,2}}{s^{n_{2e}}} + \dots + \frac{u_{m,2}\phi_{p,p}}{s^{n_{pe}}} + u'_{m+1}(s)v_2(s) = w_{m+1,2}(s)$$

\vdots

$$\frac{u_{p+1,p-1}\phi_{p,1}}{s^{n_{1e}}} + \frac{u_{p+2,p-1}\phi_{p,2}}{s^{n_{2e}}} + \dots + \frac{u_{m,p-1}\phi_{p,p}}{s^{n_{pe}}} + u'_{m+1}(s)v_{p-1}(s) = w_{m+1,p-1}(s)$$

en donde los $w_{i,j}$, para $i = p+1, \dots, m+1$ y $j = 1, \dots, p-1$, son funciones racionales propias. Entonces se puede definir $U_L(s)$ como sigue

$$U_L(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & u'_{p+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & u'_{p+2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & u'_m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & u'_{m+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
 V(s) &= U_L(s)V_1(s) \\
 &= \begin{bmatrix}
 w_{p+1,1} \\
 w_{p+2,1} \\
 \vdots \\
 w_{m,1} \\
 w_{m+1,1} \\
 \frac{u_{p+1,1}}{s^{\delta_1}} + 1 \\
 \frac{u_{p+2,1}}{s^{\delta_2}} + u_{p+1,1} \frac{\phi_{21}}{s^{n_1 e}} \\
 \vdots \\
 \frac{u_{m,1}}{s^{\delta_{p-1}}} + u_{p+1,1} \frac{\phi_{p-1,1}}{s^{n_1 e}} + \dots + u_{m-1,1} \frac{\phi_{p-1,p-2}}{s^{n_{p-2} e}} \\
 \\
 w_{p+1,2} & \dots \\
 w_{p+2,2} & \dots \\
 \vdots & \cdot \\
 w_{m,2} & \dots \\
 w_{m+1,2} & \dots \\
 \frac{u_{p+1,2}}{s^{\delta_1}} & \dots \\
 \frac{u_{p+2,2}}{s^{\delta_2}} + u_{p+1,2} \frac{\phi_{21}}{s^{n_1 e}} + 1 & \dots \\
 \vdots & \\
 \frac{u_{m,2}}{s^{\delta_{p-1}}} + u_{p+1,2} \frac{\phi_{p-1,1}}{s^{n_1 e}} + \dots + u_{m-1,2} \frac{\phi_{p-1,p-2}}{s^{n_{p-2} e}} & \dots \\
 \\
 w_{p+1,p-1} & 0 \\
 w_{p+2,p-1} & 0 \\
 \vdots & \vdots \\
 w_{m,p-1} & 0 \\
 w_{m+1,p-1} & 1 \\
 \frac{u_{p+1,p-1}}{s^{\delta_1}} & 0 \\
 \frac{u_{p+2,p-1}}{s^{\delta_2}} + u_{p+1,p-1} \frac{\phi_{21}}{s^{n_1 e}} & 0 \\
 \vdots & \vdots \\
 \frac{u_{m,p-1}}{s^{\delta_{p-1}}} + u_{p+1,p-1} \frac{\phi_{p-1,1}}{s^{n_1 e}} + \dots + u_{m-1,p-1} \frac{\phi_{p-1,p-2}}{s^{n_{p-2} e}} + 1 & 0 \\
 \\
 1 - \frac{u'_{p+1}}{s^{\delta_1}} & 0 & \dots & 0 \\
 -\frac{u'_{p+2}}{s^{\delta_1}} & 1 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 -\frac{u'_m}{s^{\delta_1}} & 0 & \dots & 1 \\
 -\frac{\phi_{p,1}}{s^{n_1 e}} - \frac{u'_{m+1}}{s^{\delta_1}} & -\frac{\phi_{p,2}}{s^{n_2 e}} & \dots & -\frac{\phi_{p,p}}{s^{n_{pe}}} \\
 -\frac{1}{s^{\delta_1}} & 0 & \dots & 0 \\
 -\frac{\phi_{21}}{s^{n_1 e}} & -\frac{1}{s^{\delta_2}} & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 -\frac{\phi_{p-1,1}}{s^{n_1 e}} & -\frac{\phi_{p-1,2}}{s^{n_2 e}} & \dots & -\frac{1}{s^{\delta_{p-1}}}
 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

es la matriz bipropia deseada.

Una vez con $V(s)$, se puede obtener la retroalimentación de estado (F, G) que desacopla el sistema con una función de transferencia en lazo cerrado con todos los ordenes esenciales con el mismo valor en la diagonal. Esta retroalimentación estará dada como $F = -X^{-1}Y$, $G = X^{-1} \begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix}$, donde (X, Y) es una solución constante a $XD(s) + YN_1(s) = V(s)\Phi_e(s)K(s)$. ■

Con la matriz $V(s)$ se obtiene la forma de calcular la retroalimentación (F, G) , tal que se obtiene como función de transferencia en lazo cerrado un sistema desacoplado con todos sus ordenes esenciales con el mismo valor sobre la diagonal.

A continuación se presenta un ejemplo en el cual se muestra como se aplica la metodología para desacoplar el sistema cuando la lista I_2 está ordenada en forma no decreciente.

7.2.1. Ejemplo

Sea el siguiente sistema decalado

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

en el cual se puede verificar que lista $I_2 = \{4, 3\}$ y que $I_4 = \{1, 1, 4\}$. La función de transferencia es

$$T(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s^4} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y su interactor es

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ -s^4 & -s^4 & s^4 \end{bmatrix}$$

de donde se puede ver que los ceros al infinito son

$$n'_i = \{1, 1, 4\}$$

y los ordenes esenciales son

$$n_{ie} = \{4, 4, 4\}.$$

Obtenemos la estructura al infinito de la parte propia del interactor la cual se demostró en el lema 7.1, que es igual a

$$\begin{aligned}\delta_1 &= n_{ie} - n'_1 = 4 - 1 = 3 \\ \delta_2 &= n_{ie} - n'_2 = 4 - 1 = 3 \\ \delta_3 &= n_{ie} - n'_3 = 4 - 4 = 0.\end{aligned}$$

Entonces comprobamos la condición del teorema 7.2,

$$\begin{aligned}\delta_i &\leq \sigma_i \\ 3 &\leq 4 \quad \checkmark \\ 3 &\leq 3 \quad \checkmark\end{aligned}$$

como sí se cumple la condición $\delta_i \leq \sigma_i$, entonces el sistema es desacoplable con función de transferencia en lazo cerrado con todos los ordenes esenciales con el mismo valor sobre la diagonal.

Ahora, para poder aplicar la metodología propuesta para desacoplar el sistema se tiene que obtener el sistema extendido. Para esto aplicamos la metodología presentada en la sección 1.7 del capítulo 1, y obtenemos la siguiente función de transferencia del sistema extendido

$$\begin{aligned}T_e(s) &= K(s)D_1^{-1}(s) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s^4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s^4} \\ \frac{1}{s^2} & 0 & 0 & \frac{1}{s^3} & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

en donde

$$K(s) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ s & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$D_1^{-1}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} & 0 & 0 & \frac{1}{s^3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s^4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s^4} \end{bmatrix}$$

Su interactor es

$$\Phi_e(s) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 & 0 \\ -s^4 & -s^4 & s^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s^4 & 0 \\ -s^2 & 0 & 0 & 0 & s^3 \end{bmatrix}$$

Ahora aplicando la parte de la suficiencia del teorema 7.2, se tienen que hacer los siguientes cálculos

$$\begin{aligned} Y_0 & : = \begin{bmatrix} \Gamma(s) \\ X(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^{-(4-1)} & 0 & 0 \\ 0 & s^{-(4-1)} & 0 \\ \frac{-s^4}{s^4} & \frac{-s^4}{s^4} & s^{-(4-4)} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^3} & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

en donde $X(s) \in \mathbb{R}_p^{2 \times 3}(s)$.

Después, la matriz bipropia $V_0(s)$ más simple que cumple con $V_0(s)Y_0(s) = \begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix}$ es

$$V_0(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{s^3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{s^3} \end{bmatrix}$$

$$V_0(s)Y_0(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{s^3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{s^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^3} & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observe que, debido a el sistema (A, B, C) no tiene ceros finitos, la condición de que $V(s)\Phi_e(s)K(s)$ es polinomial, es equivalente a

$$V(s)\Phi_e(s) \text{ es polinomial.}$$

De la condición previa, se aplica el caso 2, debido a que el producto

$$\begin{aligned}
 V_0(s)\Phi_e(s) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{s^3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{s^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 & 0 \\ -s^4 & -s^4 & s^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s^4 & 0 \\ -s^2 & 0 & 0 & 0 & s^3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & s^4 & 0 \\ -s^2 & 0 & 0 & 0 & s^3 \\ -s^2 - s^4 & -s^4 & s^4 & s^4 & s^3 \\ s & 0 & 0 & -s & 0 \\ \frac{1}{s} & s & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

no es polinomial; esto es, debido a que el elemento *mín deg* $\Phi_{5,1} < \delta_j$ para $j = 1, 2$. Entonces se mostrará que existen dos matrices unimodulares de $m \times m$, tal que

$$V(s) := U_L(s)V_0(s)U_R(s)$$

es bipropia, y se cumple que

$$V(s)Y(s) = \begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix} \text{ con } Y(s) = U_R^{-1}(s)Y_0(s),$$

y $V(s)\Phi_e(s)$ es polinomial.

En general como se vio en la prueba del teorema 7.2, $\Phi_{5,1}$ para $i = 5$ y $j = 1$ tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 \Phi_{5,1} &= k_0 s^{n'_1+1} + \dots + k_r s^{\delta_{5-3}-1} + k_a s^{\delta_{5-3}} + \dots + k_w s^{\sigma_{5-3}-1} \\
 &= -s^2 \\
 &= \left(k_0 s + \dots + k_r s^{\delta_{5-3}-n'_1-1} \right) s^{n'_1} + k_{r+1} s^{\delta_{5-3}} + \dots + k_w s^{\sigma_{5-3}-1} \\
 &= (-s) s \\
 &= u_{i,j} s^{n'_j} + \tilde{\Phi}_{i,j}
 \end{aligned}$$

en donde

$$\begin{aligned}
 u_{i,j} &= -s \\
 \tilde{\Phi}_{i,j} &= 0.
 \end{aligned}$$

Entonces, se puede descomponer el interactor extendido como

$$\begin{aligned}
 \Phi_e(s) &= \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 & 0 \\ -s^4 & -s^4 & s^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s^4 & 0 \\ -s^2 & 0 & 0 & 0 & s^3 \end{bmatrix} = \\
 &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U_R^{-1}(s)} \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 & 0 \\ -s^4 & -s^4 & s^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s^3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

donde $U_R(s)$ es claramente unimodular.

Definiendo $V_1(s) := V_0(s)U_R(s)$, y $Y(s) := U_R^{-1}(s)Y_0(s)$, se tiene que

$$\begin{aligned} V_1(s) &:= V_0(s)U_R(s) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{s^3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{s^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & 0 & 0 & 1 \\ s & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{s^3} & 0 \\ -\frac{1}{s^2} & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{s^3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(s) &:= U_R^{-1}(s)Y_0(s) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^3} & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^3} & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{s^2} & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La matriz $V_1(s)$ satisface que el producto $V_1(s)\Phi_e(s)$ es polinomial, pero $V_1(s)$ no es bipropia. Se mostrará ahora que existe una matriz unimodular $U_L(s)$ tal que $V(s) := U_L(s)V_1(s)$ es bipropia y

$$U_L(s) \begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ahora, observe que las dos últimas filas son bipropias, por lo tanto

$$\begin{aligned} -u_{p+1,1} + u'_{p+1}v_1(s) &= w_{p+1,1}(s) \\ -u_{5,1} + u'_{5,1} \left(\frac{-s}{s^3} + 1 \right) &= w_{5,1}(s) \\ s + (-s) \left(\frac{-s}{s^3} + 1 \right) &= \frac{1}{s} \end{aligned}$$

con

$$v_1(s) := \frac{u_{5,1}}{s^{\delta_1}} + 1$$

Ahora, se puede ver que u'_{p+1} es de menor grado que δ_1

$$\frac{-s(-s^4)}{s^4} + u'_6 v(s) = s + u'_6 \left(\frac{-s}{s^3} + 1 \right) = s + (-s) \left(\frac{-s}{s^3} + 1 \right) = \frac{1}{s}$$

entonces

$$U_L(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -s & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
 V(s) &= U_L(s)V_1(s) \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -s & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & 0 & 0 & 1 \\ s & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{s^3} & 0 \\ -\frac{1}{s^2} & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{s^3} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s^2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{s^2} + 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{s^3} & 0 \\ -\frac{1}{s^2} & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{s^3} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

es la matriz deseada.

Una vez con $V(s)$, la retroalimentación de estado (F, G) que desacopla el sistema a sus ordenes esenciales, está dada por $F = -X^{-1}Y$. $G = X^{-1} \begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix}$, donde (X, Y) es una solución constante a $XD(s) + YN_1(s) = V(s)\Phi_e(s)K(s)$. Por lo tanto se tiene que

$$X \begin{bmatrix} s^2 & 0 & 0 & -s & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s^4 \end{bmatrix} + Y \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s^3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & s^4 \\ 0 & 0 & 0 & s^2 & s^2 \\ 0 & 0 & s^4 & s^2 & s^2 + s^4 \\ s^2 & 0 & 0 & -s & -s \\ -1 & s & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

en donde

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$F = -X^{-1}Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La función de transferencia en lazo cerrado es

$$T_{FG}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s^4} \end{bmatrix}$$

Como conclusión de este método 2 se puede relacionar este resultado, con una modificación de la estructura al infinito del capítulo 6 y con el resultado de Loiseau [19], asignando todos sus ordenes esenciales con el mismo valor. La ventaja es que además de hacer la modificación de la estructura al infinito se obtiene la retroalimentación de estado que desacopla al sistema. En el caso del resultado de Loiseau se dan las condiciones necesarias y suficientes para la modificación de la estructura al infinito, pero la retroalimentación de estado que él propone, no tiene en consideración que forma va a tener la función de transferencia en lazo cerrado, lo cual es un problema si se quiere desacoplar el sistema. La desventaja que tiene el método 2 es que los resultados son solamente suficientes y además es sólo para un conjunto de sistemas con características muy específicas.

Trabajo futuro y conclusiones

En éste trabajo se estudió el problema de desacoplamiento regular y no regular. El objetivo de caracterizar completamente la estructura en lazo cerrado para sistemas desacoplados en el caso regular fue completado satisfactoriamente así como el objetivo sobre la forma semicanónica de Morse. Sin embargo, para el problema de desacoplamiento no regular de sistemas decalados se obtuvieron dos métodos que aunque no representan la solución en forma general de este problema, sí ofrecen una metodología para obtener la retroalimentación no regular que desacopla al sistema bajo ciertas consideraciones.

Entonces, en este trabajo se caracterizó completamente la estructura del sistema desacoplado en lazo cerrado en el caso regular, caracterizando el conjunto de ceros invariantes que tienen que ser eliminados forzosamente para alcanzar el desacoplamiento. También, se presentó un procedimiento para obtener un elemento del grupo de transformación, que lleve un sistema lineal multivariable en su representación en espacio de estado (A, B, C) a su forma semicanónica de Morse. El grupo de transformación incluye retroalimentación de estado, permutación de salidas y cambio de base en estados y salidas. Otro resultado presentado en la tesis, es en el que se muestra un método por inspección para la construcción de una retroalimentación de estado F y un cambio de base G , tal que se pueda modificar la estructura al infinito de un sistema a una estructura deseada. Finalmente se presentaron dos métodos para resolver el problema de desacoplamiento no regular de sistemas decalados, basando el primer método en las retroalimentaciones de estado, que se pueden obtener al aplicar los resultados de los capítulos 5 y 6; esto es, haciendo una composición de ellas y de la retroalimentación que desacopla al sistema que fue modificado en su estructura al infinito. Encontrando así la retroalimentación no regular que desacopla al sistema original. El otro método que se propuso presenta una forma de obtener directamente la retroalimentación no regular que desacopla al sistema. Este método se aplica a sistemas decalados con m entradas y p salidas, usando un enfoque polinomial.

Queda como trabajo futuro, proponer algún método que resuelva el problema de desacoplamiento no regular de sistemas decalados en forma general y el caso de desacoplamiento no regular en forma general. Un siguiente paso a este trabajo sería tratar de quitar algunas condiciones que restringen la solución del problema como lo es el considerar sistemas decalados, donde no se pueda utilizar dos veces un mismo elemento de la lista I_2 , etc. Posteriormente se podrían desarrollar los programas computacionales para implementar las metodologías propuestas, ya que se tienen que hacer cálculos exhaustivos para poder aplicar estos resultados. Aunque en esta parte se puede mencionar que se ha desarrollado por Zuñiga en el 2003 [36], un programa en MatLab que obtiene la retroalimentación de estado que desacopla al sistema en el caso regular y otro programa que implementa la metodología para encontrar el elemento del grupo de transformación para llevar un sistema a su forma semicanónica de Morse [25]. Otro problema

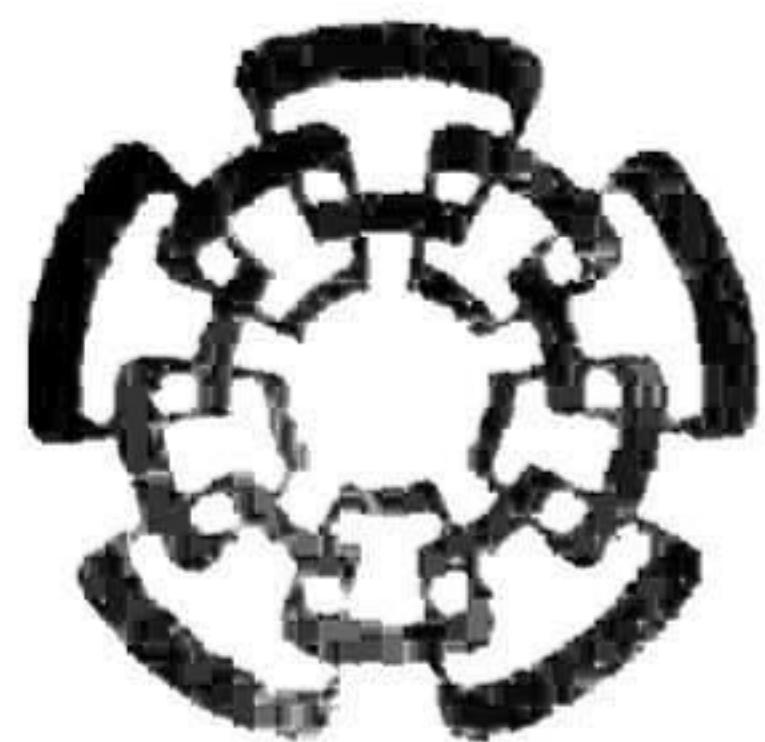
interesante sería el problema de desacoplamiento no regular con estabilidad, en el cual se analiza la estabilidad interna del sistema al desacoplarlo. Finalmente faltaría aplicar los resultados a un sistema real, para comprobar su comportamiento desacoplado.

Bibliografía

- [1] C. Commault, J. Descusse, J.M. Dion, J.F. Lafay and M. Malabre. "New decoupling invariants: the essential orders". *Int. J. Contr.*, vol. 44, no. 3, pp. 689-700, 1986.
- [2] J.M. Dion and C. Commault. "The minimal delay decoupling problem: feedback implementation with stability". *SIAM J. Contr. Optimiz.*, vol. 26, no. 1, pp. 66-82, 1988.
- [3] J. Descusse and J.M. Dion. "On the structure at infinity of linear square decoupled systems" *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-27, pp. 971-974, 1982.
- [4] J. Descusse, J.F. Lafay and M. Malabre. "Solution to Morgan's problem". *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 33, no. 8, pp. 732-739, 1988.
- [5] P.L. Falb and W.A. Wolovich. "Decoupling in the design and synthesis of multivariable control systems". *SIAM Journal Contr. Optimiz.*, vol. AC-12, (no. 6), pp. 651-669, 1967.
- [6] F.R. Gantmacher, *Matrix Theory. Vol. I,II.* Chelsea Publishing Co., New York, 1959.
- [7] S. Godínez V., *Estudio de la Modificación de la Estructura al Infinito de Sistemas Lineales Multivariables por Retroalimentación Estática no Regular.* Tesis de Maestría, CINVESTAV Unidad Guadalajara, México, 2003.
- [8] M. L. J. Hautus and M. Heymann, "Linear feedback - an algebraic approach", *SIAM J. Contr. Optimiz.*, vol. 16, no. 1, Jan. 1978.
- [9] A.N. Herrera, J.F. Lafay and P. Zagalak. "The extended interactor in the study of non regular control problems" *Proc. IEEE Conf. on Decision and Contr.*, pp. 273-278, 1991.
- [10] A.N. Herrera, "Static realization of dynamic precompensators". *IEEE Trans Automat. Contr.*, Vol. 37, No. 9, pp. 1391-1394, 1992.
- [11] A.N. Herrera and J.F. Lafay "New results about the Morgan's problem" *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 38, No. 12, pp. 1834-1838, 1993.
- [12] A. N. Herrera, J. Torres and J. Ruiz. "The nonregular Morgan's problem: a polynomial solution for the case of two outputs" *Proc. 2nd. ECC*, vol. 4, pp. 2275-2278, Groningen, The Netherlands, 1993.
- [13] A.N. Herrera, J.F. Lafay and P. Zagalak "A semi-canonical form for a class of right invertible systems". *Proc. 3rd IFAC Conf. on System Structure and Control*, pp. 590-594, 1995.
- [14] M. Heymann, "Controllability subspaces and feedback simulation" *SIAM J. Contr. Optimiz.*, vol. 14, no.4, pp. 769-789, 1976.

- [15] T. Kailath. *Linear Systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., USA, 1980.
- [16] T. G. Koussiouris, "A frequency domain approach for the block decoupling problem II. Pole assignment while block decoupling a minimal system by state feedback and a constant non-singular input transformation and observability of the block decoupled system" *International Journal of Control*, 32, 443-464, 1980.
- [17] V. Kučera and P. Zagalak, "Fundamental theorem of state feedback for singular systems" *Automatica*, vol. 24, pp. 653-658, 1988.
- [18] V. Kučera and P. Zagalak. "Constant solution of polynomial equations". *Int. J. Contr.*, vol. 53, no. 2, pp. 495-502, 1991.
- [19] J.J. Loiseau, "Sur la modification de la structure à l'infini par un retour d'état statique" *SIAM J. Contr. Optimiz.* vol. 26, no. 2, pp. 251-273, 1988.
- [20] A.G.J. Macfarlane and N. Karkanias, "Poles and zeros of linear multivariable systems: a survey of the algebraic, geometric and complex-variable theory" *Int. J. Contr.*, vol. 24, no. 1, pp. 33-74, 1976.
- [21] B.S. Morgan Jr., "The synthesis of linear multivariable systems by state-variable feedback" *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-9, pp. 405-411, 1964.
- [22] A.S. Morse and W.M. Wonham. "Status of noninteracting control" *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-16, no. 6, pp. 568-581, 1971.
- [23] A. S. Morse, "Structural invariants of linear multivariable systems". *SIAM J. Contr.*, vol. 11, no. 3, pp. 446-465, 1973.
- [24] J.L. Orozco M., J. Ruiz-León and O. Begovich, "A method to obtain the semi-canonical Morse's form of a linear multivariable system". *International Conference on Intelligent systems and control ISC 2005*, Cambridge, USA, October-November 2005.
- [25] J.L. Orozco M., J. Ruiz-León, O. Begovich M. and J.C. Zuñiga A., "Transformation of a linear multivariable system to its semi-canonical Morse's form", *Latin-American Conference on Automatic Control CLCA04*, LaHabana, Cuba, April, 2004.
- [26] H.H. Rosenbrock, *State Space and Multivariable Theory*. Nelson, London, England, 1970.
- [27] J. Ruiz-León, J.L. Orozco, and O. Begovich, "Closed-loop structure of decouplable linear multivariable systems", *Kybernetika*, vol. 41 no. 1, pp. 33-45, 2005.
- [28] J. Ruiz-León, J.L. Orozco, and O. Begovich, "On the structure of the closed-loop system in the decoupling of linear multivariable systems", *Latin-American Conference on Automatic Control CLCA 2002*, Guadalajara, Mexico, December 2002.
- [29] J. Ruiz-León, *Decoupling of Linear Systems*. PhD Thesis, Czech Technical University, Czech Republic, 1996.
- [30] A. I. G. Vardulakis, "On infinite zeros", *Int. J. Contr.*, vol. 32, pp. 849-866, 1980.
- [31] A.I.G. Vardulakis, *Linear Multivariable Control: Algebraic and Synthesis Methods*, John Wiley & Sons, Chichester, England, 1991.

- [32] W.A. Wolovich and P.L. Falb. "Invariants and canonical forms under dynamic compensation". *SIAM J. Contr. Optimiz.*, vol. 14, no. 6, pp. 996-1008, 1976.
- [33] W.M. Wonham, and A.S. Morse, "Decoupling and pole assignment in linear multivariable systems: A geometric approach" *SIAM J. Contr.* 8, 1-18, 1970.
- [34] P. Zagalak and J.F. Lafay, "Decoupling by static state feedback: a polynomial equation approach", *Preprints IFAC Workshop on System Structure and Control*, Prague, pp. 203-208, 1989.
- [35] P. Zagalak, J.F. Lafay and A. Herrera. "The row-by-row Decoupling via State Feedback: A Polynomial Approach" *Automatica*, vol. 29, no. 6, pp. 1491-1499, 1993.
- [36] J.C. Zúñiga, J. Ruiz-León, and D. Henrion, "Algorithm for decoupling and complete pole assignment of linear multivariable systems", *European Control Conference ECC-2003*, Cambridge, September 1-4, 2003.



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL I.P.N.
UNIDAD GUADALAJARA**

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional aprobó la tesis

Desacoplamiento de sistemas lineales: el caso de sistemas
decalados y el caso general

del (la) C.

Jorge Luis OROZCO MORA

el día 30 de Septiembre de 2005.

Dr. Edgar Nelson Sánchez Camperos
Investigador CINESTAV 3C
CINESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Alexander Georgievich Loukianov
Investigador CINESTAV 3C
CINESTAV Unidad Guadalajara

Dra. Ofelia Begovich Mendoza
Investigador CINESTAV 3A
CINESTAV Unidad Guadalajara

Dr. José Javier Ruíz León
Investigador CINESTAV 3A
CINESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Antonio Ramírez Treviño
Investigador CINESTAV 2A
CINESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Guillermo Obregón Pulido
Profesor Docente Titular A
Centro Universitario de Ciencias
Exactas e Ingenierías - Universidad
de Guadalajara



CINVESTAV
BIBLIOTECA CENTRAL



SSIT000008263