

XX(125783.1)



CINVESTAV

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N.
Unidad Guadalajara

Control H-Infinito No Lineal por Bloques y Modos Deslizantes

**CINVESTAV
IPN
ADQUISICION
DE LIBROS**

Tesis que presenta:

Edgar Yoshio Morales Teraoka

para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias **CINVESTAV I.P.N.**
**SECCION DE INFORMACION
Y DOCUMENTACION**

en la especialidad de:

Ingeniería Eléctrica

Directores de Tesis

Dr. Alexander Georgievich Loukianov

Dr. Yuri Orlov

Guadalajara, Jalisco, Diciembre de 2005.

CLASIF.: TK165.58 IM67 2005
ADQUIS.: SSI - 385
FECHA: 29-VI-2006
PROCED.: DON-2006
• _____

I.D. 125380 - 2001

Control H-Infinito No Lineal por Bloques y Modos Deslizantes

**Tesis de Maestría en Ciencias
Ingeniería Eléctrica**

Por:

Edgar Yoshio Morales Teraoka
Ingeniero Electromecánico
Universidad Panamericana 1996-2001

Becario de CONACYT, expediente no. 180887

Directores de Tesis

Dr. Alexander Georgievich Loukianov

Dr. Yuri Orlov

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Diciembre de 2005.

Agradecimientos

A mis padres por su infinito apoyo y comprensión

A mis asesores y profesores por ayudarme a construir mi conocimiento

Al CONACYT por el apoyo económico recibido

Control H_∞ no Lineal por Bloques y Modos Deslizantes

Edgar Yoshio Morales Teraoka

CINVESTAV

Unidad Guadalajara

Resumen

Esta tesis presenta un método de control H_∞ no lineal por bloques y modos deslizantes. Se busca combinar las características de robustez del control H_∞ con las del control por modos deslizantes, para así lograr una ley de control robusta a perturbaciones. Además, con el control por bloques se busca simplificar la solución de las ecuaciones del control H_∞ . Los modos deslizantes eliminan las perturbaciones que cumplen con la condición de *matching*; el control H_∞ se utiliza para eliminar aquellas que no cumplen con dicha condición y la técnica de control por bloques divide un problema de alto orden en varios subproblemas de orden menor, simplificando así la solución de la ecuación de Riccati asociada. Se presenta primeramente parte de la teoría en la que se basa el método en su concepción. Luego se explica el método mismo, paso a paso, y se llega a un teorema donde se demuestra la estabilidad de la ley de control obtenida. El método propuesto es empleado a manera de prueba, en el problema de seguimiento de trayectorias caóticas de un actuador electro-hidráulico. Se muestra a detalle la aplicación del método a este problema en particular, desarrollando paso a paso el método. La ley de control obtenida es simulada por computadora, y los resultados son comparados con otras leyes de control obtenidas en trabajos anteriores.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Panorama actual del control robusto	1
1.2. Control por modos deslizantes	1
1.3. El control H_∞	2
1.4. Importancia de los Actuadores Electro-hidráulicos	2
1.4.1. Introducción	2
1.4.2. Los actuadores hidráulicos	2
1.4.3. Aplicaciones de los Actuadores Hidráulicos	4
1.4.4. Seguimiento de Posición en Actuadores Electro-hidráulicos	4
1.5. Descripción de la Tesis	5
1.5.1. Motivación	5
1.5.2. Contenido	6
1.5.3. Organización del Trabajo.	7
2. Fundamentos Teóricos Básicos	9
2.1. Teoría de Modos Deslizantes	9
2.1.1. Introducción	9
2.1.2. Modos deslizantes	10
2.1.3. Método del control equivalente	11
2.2. Teoría de Control por Bloques	12
2.2.1. Control por bloques	12
2.3. Control por Bloques por Modos Deslizantes	13
2.3.1. Introducción	13
2.3.2. Método del control por bloques por modos deslizantes	13
2.4. Sistemas con Perturbación	14
2.4.1. Sistemas con perturbación	14
2.4.2. Transformación recursiva por bloques para sistemas perturbados	15
2.4.3. Robustez a perturbaciones que no cumplen con la condición <i>de matching</i>	17
2.5. Teoría de control óptimo H_∞	19
2.5.1. Introducción	19
2.5.2. Caso lineal	19
2.5.3. Caso no lineal	21
2.6. Teoría de Caos	25
2.6.1. Introducción	25

2.6.2. Caos	25
2.6.3. Ejemplos de sistemas caóticos continuos	26
3. Desarrollo del Método Propuesto	29
3.1. Forma no lineal controlable por bloques con perturbaciones.	29
3.2. Transformación de bloques con integrales y control H_∞	30
3.2.1. Introducción	30
3.2.2. Método de Transformación	30
3.3. Análisis de estabilidad	34
3.3.1. Existencia de Modos Deslizantes	34
3.3.2. Análisis en la superficie deslizante	35
3.3.3. Teorema de estabilidad	39
4. Modelado	41
4.1. Características de la Planta	41
4.2. Obtención del Modelo del Actuador Electro-Hidráulico	42
4.2.1. Subsistema Mecánico	43
4.2.2. Subsistema Hidráulico	44
4.2.3. Subsistema de Servoválvula	45
4.2.4. Obtención de Modelos de Primer Orden	46
4.2.5. Modelo Completo del Actuador Electro-Hidráulico	50
5. Aplicación del Método Propuesto	51
5.1. Diseño del controlador	51
5.2. Análisis de estabilidad en la superficie deslizante	54
5.3. Ley de Control Usando Observador	56
5.4. Modelo utilizado en la simulación	57
5.5. Ley de control para comparación	58
5.5.1. Parámetros y señal de referencia utilizados	59
5.6. Resultados de la simulación	60
6. Conclusiones y trabajo futuro	65
6.1. Conclusiones	65
6.1.1. Logros	65
6.2. Trabajo Futuro	65
A. Diagramas para Simulación en Simulink	67

Capítulo 1

Introducción

1.1. Panorama actual del control robusto

El control robusto de sistemas es de gran interés para los investigadores. Cualquier sistema que se quiera controlar está sujeto a perturbaciones. Además existen problemas prácticos que no han sido abordados con el éxito deseado en su conjunto. En primer lugar, los sistemas tienen dinámicas muy complejas; es decir, no lineales y hasta discontinuas, como cuando se involucra la fricción. Muchas veces las trayectorias a seguir por el sistema se expresan en términos de velocidades y aceleraciones, por lo que la dinámica del error también es no lineal, no suave y variante en el tiempo. En segundo lugar, el sistema se ve afectado por perturbaciones desconocidas, lo que provoca errores en la medición de los estados del sistema [1], [8]. Es por eso que se necesitan controladores robustos que no sean afectados por perturbaciones y que sean aplicables a los sistemas más complejos.

1.2. Control por modos deslizantes

El control por modos deslizantes apareció por primera vez dentro del control de estructura variable [29]. Se hizo muy popular tanto para desarrollos teóricos como para aplicaciones prácticas gracias a su propiedad de reducir el orden del sistema y a su baja sensibilidad a perturbaciones [18]. Estas características lo hace ideal para controlar plantas complejas y de alto orden bajo perturbaciones, cosa muy común en la industria. Estas mismas razones nos llevaron a optar por la utilización del control por modos deslizantes para desarrollar esta tesis.

El control por modos deslizantes elimina perturbaciones que cumplan con la condición de *matching* o acoplamiento [29], como se detalla en la sección 2.4. Entonces la sola utilización de los modos deslizantes da mucha robustez al sistema; sin embargo todavía podemos mejorar el desempeño para rechazar las perturbaciones que no cumplan con la condición de *matching*.

Las técnicas comunes para rechazar este tipo de perturbaciones en el control por modos deslizantes consisten básicamente en utilizar integradores y control con alta ganancia [21]. Al utilizar integradores podemos rechazar las perturbaciones constantes, pero en realidad estas

no son constantes. La opción que queda es el control con alta ganancia, pero este tipo de control también presenta algunas desventajas [29], como la propensión a que se produzcan oscilaciones (*chattering*) o que al ser la ley de control muy grande se saturen los actuadores. Por esta razón es útil la aplicación del control H_∞ para optimizar el movimiento por modos deslizantes en presencia de perturbaciones que no cumplen con la condición de *matching*.

1.3. El control H_∞

La solución que se propone en esta tesis es utilizar la técnica de control robusto H_∞ no lineal. El control H_∞ busca encontrar controladores tales que se minimice un criterio, en este caso será la influencia de las perturbaciones en la salida del sistema.

Las técnicas de control robusto H_∞ se hicieron populares para sistemas lineales en los setentas y ochentas, pues buscaban conjuntar las ideas del control moderno con la practicidad del control clásico [31]. Posteriormente aparecieron las ideas sobre el control óptimo robusto H_∞ para sistemas no lineales. Se buscaba resolver problemas de dinámicas complejas y no lineales, discontinuidades y sistemas variantes en el tiempo. Los controladores como los presentados en [8] utilizan el control H_∞ no lineal combinado con técnicas de linealización por retroalimentación. En [7] se analiza el control H_∞ bajo la perspectiva de la teoría de juegos, y posteriormente en [11] se hace un análisis de la ganancia \mathcal{L}_2 de sistemas no lineales con perturbaciones. Estos trabajos fueron fundamentales para que en [1] se propusiera una solución global al problema de control robusto H_∞ no lineal de sistemas no suaves y variantes en el tiempo. Además se obtiene una solución local utilizando una linealización en un punto de operación.

Sin embargo en un sistema de alto orden, puede resultar muy complicado resolver las ecuaciones de Riccati asociadas. Serían ecuaciones dinámicas matriciales de alto orden. Por esto, se propone descomponer un problema grande, de alto orden, en varios subproblemas de menor orden y más fáciles de resolver. En esta tesis se utilizarán los resultados de control H_∞ no lineal [25] para combinarlos con la técnica de control por bloques con integradores y modos deslizantes [28] y así lograr una ley de control robusta a perturbaciones que además sea fácil de resolver.

1.4. Importancia de los Actuadores Electro-hidráulicos

1.4.1. Introducción

Se eligió como ejemplo de aplicación del método desarrollado un actuador electro-hidráulico. Esto obedeció a la creciente importancia de estos actuadores para la industria moderna y al interés mostrado por la comunidad investigadora por ellos y cómo lograr un mejor control. A continuación se muestran algunas de las ventajas y desventajas de estos actuadores.

1.4.2. Los actuadores hidráulicos

Las principales ventajas de los sistemas hidráulicos son [22]:

(1) La relación existente entre peso y potencia de los sistemas hidráulicos es bastante grande ya que el torque desarrollado por los actuadores hidráulicos es proporcional a la presión diferencial y es solamente limitada por los niveles de tensión de seguridad. Si consideramos que la resistencia de los materiales utilizados en la construcción de actuadores hidráulicos es bastante grande, entonces la cantidad de energía que éstos pueden proporcionar es relativamente grande respecto al tamaño pequeño de los dispositivos.

(2) Los sistemas hidráulicos presentan rápida respuesta para mover grandes cargas; si se analiza una gráfica de carga vs tiempo de respuesta entre los diferentes actuadores, se puede verificar las ventajas de estos sistemas.

(3) Los sistemas hidráulicos pueden desempeñarse de manera continua, intermitente, de reversa o incluso bloquearse y no causar daños al sistema. En cambio los motores eléctricos no pueden ser mantenidos en una posición determinada por periodos prolongados de tiempo porque se presenta sobrecalentamiento y su consecuente daño. Esta ventaja de los actuadores hidráulicos se debe a que el fluido disipa el calor generado en la transformación de energía.

(4) Los actuadores hidráulicos poseen mayor robustez a variaciones de velocidad respecto a los motores eléctricos; esto es, la caída de velocidad es mucho más pequeña al aplicarles carga. Esta característica hace preferibles a los actuadores hidráulicos en aplicaciones donde se requiere alta precisión.

Inevitablemente los actuadores electro-hidráulicos poseen una serie de desventajas que se resumen a continuación:

(1) La potencia hidráulica no está tan cómodamente disponible como lo está la potencia eléctrica. Esto podría no afectar a aplicaciones terrestres, aéreas o marítimas móviles, pero sí afecta a aplicaciones estacionarias.

(2) Es prácticamente imposible mantener al fluido libre de contaminación y el fluido contaminado es la fuente principal de problemas en el control hidráulico.

(3) Existen algunos otros factores que limitan las aplicaciones de los actuadores hidráulicos, entre éstos el uso de fluidos derivados del petróleo limita los niveles de temperatura. El riesgo potencial de explosión al usar estos sistemas cerca de una fuente de ignición. Los sistemas hidráulicos pueden ser contaminantes debido a fugas de fluido, y siempre existe la posibilidad de falla debido a una pérdida total de fluido.

(4) Finalmente encontramos que otro factor que limita la aplicación de los sistemas hidráulicos son los operadores, ya que el entendimiento y conocimiento de estos sistemas por parte de los seres humanos es aún difícil e inmaduro debido a su complejidad de análisis y no linealidades en las dinámicas del sistema. Esto definitivamente es una de las limitantes más grandes para su aplicación.

1.4.3. Aplicaciones de los Actuadores Hidráulicos

Entre las principales ventajas de los sistemas hidráulicos como se mencionó anteriormente, esta la relación fuerza-peso así como su rápida respuesta, lo cual proporciona a los sistemas hidráulicos un papel muy importante en la industria actual y por tanto en la economía global.

Dentro de las aplicaciones primitivas y no por ello de menor importancia de los sistemas hidráulicos, encontramos gatos hidráulicos para levantamiento de cargas, grúas hidráulicas para mover pesos en construcciones de edificios, minas de carbón, estaciones de ferrocarril, elevadores hidráulicos para pasajeros, frenos hidráulicos, etc.

Algunas áreas típicas modernas de aplicación incluyen robots industriales, máquinas para manejo de materiales, suspensiones, simuladores de movimiento, y máquinas de moldeo por inyección. De hecho los actuadores hidráulicos son frecuentemente la única alternativa viable para este tipo de aplicaciones, ya que otros actuadores, como los motores eléctricos, usualmente carecen de la potencia necesaria, tamaño, y velocidad. A pesar de este extenso campo de aplicación, los sistemas hidráulicos controlados no explotan su potencial debido, entre otros factores, a dificultades en el modelado y control de sus características altamente no lineales.

Con el mejoramiento de la tecnología actual y con el surgimiento de nuevas tecnologías, los sistemas hidráulicos encuentran áreas más amplias de aplicación. Los sistemas hidráulicos incluso son usados en la industria aeronáutica y aeroespacial, debido a sus características. Incluso encuentran aplicación en el espacio, como una parte importante de las plataformas espaciales.

1.4.4. Seguimiento de Posición en Actuadores Electro-hidráulicos

La mayor parte de los investigadores han puesto su esfuerzo en solucionar el problema de regulación y de seguimiento de la posición para sistemas hidráulicos. Se han publicado algunos trabajos como [2] o bien [23], [3], [10] ó [24] entre otros, cuyos autores han dedicado esfuerzos en el seguimiento de las variables posición y fuerza en actuadores electro-hidráulicos. En esta tesis se utiliza como caso de estudio el seguimiento de posición en un sistema electro-hidráulico, quedando pendiente el control de fuerza.

Antecedentes

En los inicios del uso de sistemas hidráulicos, éstos fueron usados sin interfaces eléctricas. De hecho, se empezaron a utilizar mucho antes de que la electricidad estuviera comercialmente disponible al público. La unión de dispositivos eléctricos o electrónicos con dispositivos hidráulicos ha proporcionado a estos últimos mayor flexibilidad para su uso en diferentes escenarios. El análisis y control de los sistemas hidráulicos, al igual que en muchos otros casos, empezó con modelos de sistemas lineales y metodologías de control lineales; sin embargo las aproximaciones lineales han sido insuficientes dada la naturaleza no lineal de los dispositivos.

Aparentemente son más los resultados basados en modelos lineales de sistemas hidráulicos que en modelos no lineales; sin embargo en los últimos años se ha venido experimentando con técnicas no lineales de control así como con modelos no lineales de actuadores hidráulicos.

En [23] y [24] se utiliza la versión no lineal de la teoría de retroalimentación cuantitativa (QFT) para diseñar controladores de posición y fuerza robustos invariantes en el tiempo. Debido a las fuertes no linealidades y a que los sistemas hidráulicos son variantes en el tiempo, muchos investigadores aplicaron control adaptable como en [10] y en [31]. Han sido empleados también controladores PID simples, obteniéndose resultados aceptables para seguimiento de posición. Otros investigadores han utilizado ya teoría de modos deslizantes [30] para realizar control de actuadores hidráulicos; en [12] se presenta un diseño de un controlador basado en la teoría de modos deslizantes en presencia de incertidumbres y no linealidades importantes, sin embargo las referencias utilizadas para seguimiento se limitan a funciones escalón. En [16] se presenta un controlador por modos deslizantes para controlar la posición de un actuador con carga mecánica flexible. El modelo de planta empleado es bastante sencillo y los resultados en simulación no son muy similares a los que se muestran en tiempo real, además las referencias empleadas se limitan a funciones escalón y sinusoidales de baja frecuencia.

Muchos investigadores compensando las no linealidades del sistema no incluyen las dinámicas de la válvula, argumentando que éstas son mucho más rápidas que el actuador. Sin embargo en trabajos como en [3] las dinámicas de la servoválvula han sido incluidas en el modelo del sistema como aproximaciones lineales.

Para compensar incertidumbres paramétricas en la ecuación de compresibilidad del fluido Alleyne, A., & Liu, (2000) en [3] han desarrollado un controlador por modos deslizantes basado en técnicas de Lyapunov, con un algoritmo de adaptación de gradiente, para el control de un actuador hidráulico. Este controlador además incluye un esquema de compensación para la fricción. En [29] se utilizaron redes neuronales recurrentes para hacer identificación y control de un sistema electro-hidráulico. En [6] se hizo el seguimiento de posición y fuerza con una señal de referencia caótica, tomando en cuenta un modelo de tercer orden para la electroválvula y utilizando la técnica de control por bloques con modos deslizantes. Se comprobó en este trabajo el buen funcionamiento del controlador en presencia de perturbaciones constantes. Este será el trabajo contra el cual se comparará el desempeño del controlador obtenido en esta tesis, pero en presencia de perturbaciones variantes en el tiempo. A la fecha éstas son algunas de las técnicas de control que se han utilizado para controlar mecanismos electro-hidráulicos.

1.5. Descripción de la Tesis

1.5.1. Motivación

El control robusto de sistemas no lineales con perturbaciones ha atraído a los investigadores por décadas. Si separamos las perturbaciones en las que cumplen con la condición de acoplamiento y las que no la cumplen, es bien sabido que aquellas que cumplen con dicha

condición son rechazadas por los controladores de modos deslizantes [30]. Aquellas que no cumplen pueden ser atenuadas por controladores jerárquicos de alta ganancia [21].

Los controladores jerárquicos de alta ganancia generalmente arrojan resultados conservadores, por lo que para mejorar el desempeño del sistema se propone utilizar un controlador H_∞ . Sin embargo, este controlador tampoco está libre de problemas. La implantación real de tal controlador es difícilmente posible para un sistema dinámico de alto orden, debido a la complejidad numérica de las ecuaciones de Riccati que deberán resolverse.

Para reducir esta complejidad se propone la utilización de la técnica de control por bloques integral con modos deslizantes [28], con el fin de descomponer el sistema original en varios subsistemas de orden menor, y así la técnica de control H_∞ no lineal se usa en cada uno de los subsistemas de orden bajo.

Desde el punto de vista de los modos deslizantes, la combinación con el control robusto H_∞ es muy atractiva, pues permite lidiar con las perturbaciones que no cumplen con la condición de acoplamiento. Desde el punto de vista del control H_∞ , la descomposición del sistema en varios subsistemas de menor tamaño significa una reducción en el nivel de complejidad numérica de las ecuaciones a resolver, lo que se traduce en una solución más fácil y rápida.

Resumiendo, la motivación de esta tesis es lograr una ley de control robusta que combine los beneficios del control discontinuo por modos deslizantes para rechazo de perturbaciones que cumplan con la condición de acoplamiento y el control robusto H_∞ para las perturbaciones que no cumplan con dicho criterio, y que además se ayude de los beneficios del control por bloques para partir la solución de una ecuación de Riccati de alto orden en varios bloques de orden menor, facilitando grandemente la solución del problema.

Se busca demostrar la efectividad del algoritmo usando como caso de estudio el control de un actuador electro-hidráulico. Se utilizó este ejemplo dada la naturaleza no lineal y discontinua del sistema, así como su importancia para la industria moderna, que cada vez es mayor debido a sus grandes ventajas. Se propone resolver el problema de seguimiento de trayectorias caóticas de un actuador electro-hidráulico sujeto a perturbaciones externas.

1.5.2. Contenido

En esta tesis se presenta el desarrollo de un método de control robusto que combina las técnicas de control por bloques [21], modos deslizantes [30] y control óptimo H_∞ . Tratamos de abordar el problema de control robusto de sistemas perturbados con la técnica de modos deslizantes para eliminar las perturbaciones que cumplan la condición de acoplamiento o *matching condition* [30], para las perturbaciones que no cumplan se usa el control H_∞ , y el control por bloques se emplea para simplificar la solución de las ecuaciones asociadas al control H_∞ .

A su vez se muestra como ejemplo la aplicación de esta técnica al problema de seguimiento de trayectoria de un actuador electro-hidráulico. El controlador obtenido es capaz de hacer

que la posición del actuador siga una señal de referencia caótica, generada por el atractor de Chen [9]. El diseño del controlador se basa en un modelo de cuarto orden, mientras que las simulaciones se hacen con modelos más completos que consideran dinámicas más exactas, para verificar la robustez ante dinámicas no modeladas.

Los resultados obtenidos se comparan con la ley de control obtenida en [6]. Se muestran las gráficas de la posición del actuador con ambas leyes de control para mostrar la mejoría que se obtiene con el método propuesto.

1.5.3. Organización del Trabajo.

La presente tesis consta de 7 capítulos incluyendo la presente introducción, y se organiza como sigue. En el capítulo 2 se presentan los fundamentos teóricos básicos que deben tenerse en cuenta para la comprensión de la tesis y que sustentan el método desarrollado. Se habla de modos deslizantes, control por bloques y control óptimo H_∞ . En el capítulo 3 se sintetiza el método de control por bloques integral con control óptimo H_∞ , se analiza la estabilidad del controlador obtenido y se derivan las condiciones para dicha estabilidad. En el capítulo 4, se presentan aspectos referentes a la planta utilizada como caso práctico y su modelado, así como aspectos referentes a las electroválvulas utilizadas. El capítulo 5 habla de la aplicación del método a la planta descrita; el desarrollo del controlador y su análisis de estabilidad. Además se presentan los resultados de la simulación de seguimiento de trayectorias caóticas utilizando la ley de control obtenida por el método propuesto, comparándola con la ley de control obtenida en [6]. Finalmente en el capítulo 6, se presentan algunas conclusiones y se expone el posible trabajo futuro a realizar.

Capítulo 2

Fundamentos Teóricos Básicos

En este capítulo se presentan los fundamentos teóricos sobre los cuales se basa el método de control óptimo robusto por bloques con modos deslizantes. Se presentan diferentes técnicas de control, como la técnica de modos deslizantes [29], la técnica de control por bloques en [20] y una técnica combinada como la propuesta en [18]; así mismo se presenta una breve introducción a la teoría de control óptimo H_∞ que es ampliamente utilizada en la sintetización del controlador. Sobre estas técnicas y otros tópicos más de control automático relacionados con el tema desarrollado en esta tesis, se hablará en este capítulo.

El capítulo está organizado como sigue: en la sección 2.1, se discute la teoría de modos deslizantes. En la sección 2.2, se introduce la teoría de control por bloques. En la sección 2.3, se comenta sobre la técnica de control por bloques con modos deslizantes. La sección 2.4 habla sobre los sistemas con perturbaciones, parte esencial en esta tesis. En la sección 2.5 se presenta brevemente la teoría de control robusto H_∞ lineal y no lineal. Finalmente en la sección 2.6 se exponen conceptos sobre Caos, debido a que la trayectoria a seguir esta generada por este tipo de sistemas.

2.1. Teoría de Modos Deslizantes

La teoría de modos deslizantes es esencial para el desarrollo de esta tesis, pues el método propuesto se basa principalmente en ella. Aquí se presentan los fundamentos, que servirán para comprender mejor los conceptos utilizados en la obtención del método propuesto.

2.1.1. Introducción

Las estructuras variables de control han sido mejoradas ampliamente en los últimos años debido a que existe un interés constante, sobre todo en áreas de aplicación a procesos físicos.

Un sistema de estructura variable consiste en un conjunto de subsistemas continuos con una lógica adecuada de conmutación. El resultado de la acción de control es una función discontinua de los estados del sistema, de los disturbios y las entradas de referencia [29].

2.1.2. Modos deslizantes

Consideremos un sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (2.1)$$

donde $x \in R^n$, $u \in R^m$, y f es una función continua en el tiempo y localmente Lipshitz en x y en u .

Entonces consideramos el diseño del control por modos deslizantes que consiste de los pasos siguientes:

(1) Se determina una superficie deslizante

$$\sigma(x) = 0, \quad \sigma^T = (\sigma_1(x), \dots, \sigma_m(x)) \quad (2.2)$$

tal que el movimiento de los modos deslizantes sobre esta superficie tenga propiedades deseadas (por ejemplo estabilidad del movimiento).

(2) Se diseña la ley de control

$$u_i(x, t) = \begin{cases} u_i^+(x, t) & \text{para } \sigma_i(x) > 0 \\ u_i^-(x, t) & \text{para } \sigma_i(x) < 0 \end{cases}, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.3)$$

para proporcionar la estabilidad del sistema en lazo cerrado (2.1) y (2.3), sobre los subespacios $\sigma_1, \dots, \sigma_m$.

Los sistemas dinámicos discontinuos son conocidos como generadores de movimientos, con trayectorias en las superficies discontinuas, también llamados modos deslizantes. Debido a las discontinuidades, la velocidad del vector de estado puede estar directamente relacionado con la superficie.

En modos deslizantes, el elemento de implementación genera una función discontinua, por ejemplo un relevador, un conmutador de alta frecuencia, etc., con sus entradas de energía tendiendo a cero mientras la salida (más precisamente el valor promedio u_{av}) toma valores finitos. Por lo tanto, los elementos de implementación tienen una alta ganancia (teóricamente infinita); esto significa que se suprime totalmente la influencia de disturbios e incertidumbres en el comportamiento del sistema.

A diferencia de los sistemas continuos, el concepto de invariabilidad en los sistemas discontinuos es alcanzado usando una ley de control finita. En segundo lugar, las trayectorias de los modos deslizantes evolucionan en una variedad de dimensión más baja que la del sistema; el orden de la ecuación de movimiento se reduce también. Esto permite la simplificación, la descomposición del procedimiento y el diseño del control.

Existen varios métodos para obtener las ecuaciones de modos deslizantes, empezando con un método heurístico, más fácil de comprender, que se llama método del control equivalente [29].

2.1.3. Método del control equivalente

Un procedimiento formal sugerido, antes de obtener la ecuación de modos deslizantes a lo largo de la intersección de un conjunto de superficies discontinuas para el sistema (2.1), es encontrar el control equivalente.

Suponiendo que existen modos deslizantes sobre la variedad

$$\sigma(x) = (0), \sigma^T = [\sigma_1(x), \dots, \sigma_m(x)] \quad (2.4)$$

y un control continuo tal que para cualquier condición inicial del vector de estado sobre la variedad, la velocidad del vector $\sigma(x)$ siempre es cero a lo largo de la trayectoria del sistema (2.1), i.e.:

$$\dot{\sigma} = \mu(x)f(x, u, t) = 0, \quad (2.5)$$

donde las columnas de la matriz $\mu(x) = \{\partial\sigma/\partial x\}$ de dimensión $(m \times n)$ son los gradientes de las funciones $\sigma_i(x)$ con respecto a x .

Condición 1 si

$$\det \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \neq 0, \quad \bar{f} = \mu(x)f(x, u, t)$$

entonces por el teorema de la función implícita, existe una solución $u = u_{eq}(x, t)$ de (2.5), el cual es llamado *Control Equivalente*.

Sustituyendo esta solución $u_{eq}(x, t)$, en lugar de u en el sistema (2.1), se obtiene

$$\dot{x} = f[x, u_{eq}(x, t), t] \quad (2.6)$$

Esto es obvio, a consecuencia de la condición 1; es decir un movimiento inicial en $\sigma[x(t_0)] = 0$ procede a lo largo de su trayectoria sobre la variedad $\sigma(x) = 0$.

Este procedimiento es llamado *método del control equivalente* y la ecuación (2.6) se obtiene como resultado de la aplicación de este método, en donde los modos deslizantes garantizan el movimiento sobre las intersecciones de las superficies discontinuas $\sigma_i(x) = 0$, $i = 1, \dots, m$.

Considerese ahora el procedimiento del control equivalente para un caso particular importante de un sistema no lineal discontinuo como

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t)u \quad (2.7)$$

donde $f(x, t)$ y $g(x, t)$ son los argumentos del vector y matriz de dimensiones $(n \times 1)$ y $(n \times m)$, respectivamente, y el cambio del control discontinuo u conforme a (2.3). El control equivalente para la ecuación (2.7) se puede encontrar de

$$\dot{\sigma} = \mu(x)f(x, t) + \mu(x)g(x, t)u \quad (2.8)$$

Suponiendo que la matriz μg es no singular para toda x y t , como:

$$u_{eq}(x, t) = -[\mu(x)g(x, t)]^{-1} \mu(x)f(x, t) \quad (2.9)$$

Sustituyendo este control en (2.7) se obtiene la ecuación

$$\dot{x} = f - g(\mu g)^{-1} \mu f, \quad (2.10)$$

que describe el movimiento de los modos deslizantes sobre la variedad $\sigma = 0$. Nótese que la ecuación (2.10) tiene la dimensión reducida a $n - m$; esto es porque de la ecuación $\sigma = 0$ es posible encontrar m coordenadas en función de las $n - m$ coordenadas restantes.

2.2. Teoría de Control por Bloques

En [18] se propuso la teoría de control por bloques por proveer de una manera sencilla una variedad no lineal cuya dinámica de modos deslizantes sea la requerida. Esta teoría es aplicable a una amplia gama de sistemas y es fácil su aplicación por lo que se decidió su uso para la presente tesis.

2.2.1. Control por bloques

La técnica se enfoca a la construcción de una variedad no lineal en el espacio de estado del sistema, de tal forma que la dinámica de los modos deslizantes en esta variedad tenga las propiedades deseadas para hacer estable al sistema.

Consideremos el caso de un sistema no lineal de la forma

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t)u \quad (2.11)$$

donde $x \in X \subset R^n$ es el vector del estado del sistema, $u \in U \subset R^m$ es el vector de control que está acotado por

$$\|u\| \leq u_0, \quad u_0 > 0. \quad (2.12)$$

El campo vector $f(x, t)$ y las columnas de la matriz $g(x, t) = [g_1(x, t) \ g_2(x, t) \ \dots \ g_m(x, t)]^T$ son funciones suficientemente suaves. Supongamos que $f(0, t) = 0$.

Definición 2 Sea el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, t) + g_1(x_1, t)x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, t) + g_2(x_1, x_2, t)x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_i, t) + g_i(x_1, \dots, x_i, t)x_{i+1} & i = 3, \dots, r-1 \\ \vdots \\ \dot{x}_r = f_r(x_1, \dots, x_{r+1}, t) + g_r(x_1, \dots, x_{r+1}, t)u \\ \dot{x}_{r+1} = f_{r+1}(x_1, \dots, x_{r+1}, t) + g_{r+1}(x_1, \dots, x_{r+1}, t)u \end{cases} \quad (2.13)$$

con la salida

$$y = h(x) = x_1$$

Se dice que (2.13) está en la Forma No Lineal Controlable por Bloques con Dinámica Cero, para el sistema (2.11) si la matriz g_i es de rango pleno; esto es

Condición 3

$$\text{rango}[g_i] = n_i \quad \forall x \in X \subset R^n \text{ y } t \in [0, \infty), \quad i = 1, \dots, r \quad (2.14)$$

donde $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_{r+1})$. Los índices (n_1, n_2, \dots, n_r) definen la estructura del sistema y satisfacen la siguiente condición.

$$n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_r \leq m \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{r+1} n_i = n. \quad (2.15)$$

Un sistema en la forma No Lineal Controlable por Bloques, puede ser llevado a una forma deseada en nuevas variables mediante una transformación recursiva por bloques por medio del uso de cuasiconroles, como se verá más adelante.

2.3. Control por Bloques por Modos Deslizantes

2.3.1. Introducción

En esta sección se integra la teoría de control por bloques con la teoría de modos deslizantes. Este enfoque es utilizado en el desarrollo de la tesis por su sencillez y porque las leyes de control derivadas por este enfoque son robustas a perturbaciones internas y externas.

El problema de descomposición y diseño de una ley de control robusta para sistemas dinámicos es uno de los problemas más interesantes en la teoría de control. Una aproximación de solución muy útil y relativamente simple a este problema, especialmente cuando se trata de incertidumbres multivariadas no lineales, se basa en el uso del control de estructura variable con modos deslizantes [29].

2.3.2. Método del control por bloques por modos deslizantes

El propósito es encontrar una ley de control por modos deslizantes para el sistema (2.7) desarrollado en la forma (2.13), que asegure estabilidad en el punto de equilibrio $x = 0$ del sistema de lazo cerrado, y lo podemos definir en la siguiente proposición.

Proposición 4 *Suponga que en el sistema (2.13)*

1. $f_i(x_1, \dots, x_i, t)$ y $g_i(x_1, \dots, x_i, t)$ son funciones continuamente diferenciables de orden $(i - 1)$, $i = 1, \dots, r$, con respecto a todos los argumentos sobre el intervalo $t \in [0, \infty)$, y todas las derivadas son acotadas;

2. La condición (3) se cumple, y
3. Se tiene la estructura $n_1 = n_2 = \dots = n_r = m$,

entonces existe una transformación difeomórfica

$$z = \phi(x, t), \phi = (\phi_1, \dots, \phi_r)^T \quad (2.16)$$

una superficie

$$s(x, t) = 0, s \in R^{n_r} \quad (2.17)$$

y una ley de control discontinua

$$u = -u_o \text{sign}[M(x, t)s] \quad (2.18)$$

que garantiza modos deslizantes sobre la superficie (2.17) en tiempo finito, tal que el movimiento de modos deslizantes con respecto a la nueva variable z esta descrito por una ecuación de orden $(n - n_r)$:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= K_1 z_1 + B_1 z_2 \\ \dot{z}_i &= K_i z_i + B_i z_i \\ \dot{z}_{r-1} &= K_{r-1} z_{r-1} \\ \dot{x}_{r+1} &= \tilde{f}_{r+1}(z_1, \dots, z_{r+1}, x_{r+1}, t) + B_{r+1}(x, t)u_{eq} \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde $z = (z_1, \dots, z_r)^T$ $z_i \in R^{n_i}, i = 2, \dots, r - 2$ con $s = z_r$ y todas las K_i son matrices Hurwitz, $M(x, t)$ es una matriz no singular tal que $\text{rango}[MB_r] \neq 0$, y u_{eq} es el control equivalente calculado como solución de

$$\dot{s} = f() + B()U_{eq} = 0.$$

Prueba. (Ver [20]) ■

2.4. Sistemas con Perturbación

Uno de los principales objetivos de esta tesis es obtener una ley de control robusta, por lo que es necesario hablar de sistemas perturbados. En modos deslizantes es muy importante la condición de acoplamiento (*matching condition*) que se explicará en detalle a continuación. Así mismo se muestra la transformación de control por bloques con modos deslizantes para sistemas perturbados y su robustez a perturbaciones que no cumplen con la condición de acoplamiento.

2.4.1. Sistemas con perturbación

Definimos el sistema con la forma

$$\dot{x} = f(x, t) + B(x, t)u + g(x, t) \quad (2.20)$$

donde $g(x, t)$ representa una perturbación externa y/o variación en los parámetros. Esta perturbación puede o no satisfacer la condición de acoplamiento esto es,

Condición 5 $g(x, t) \in \text{span } B(x, t)$, p.e. existe un vector $\mu(x, t)$ tal que
 $g(x, t) = B(x, t)\mu(x, t) \quad \forall x \in X \text{ y } t \geq 0.$

El sistema (2.20) puede ser llevado también a una representación por bloques es decir a la forma no-lineal controlable por bloques, consistente de r bloques:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, t) + B_1(x_1, t)x_2 + g_1(x_1, t) \quad (2.21)$$

\vdots

$$\dot{x}_i = f_i(\bar{x}_i, t) + B_i(\bar{x}_i, t)x_{i+1} + g_i(\bar{x}_i, t), \quad i = 2, \dots, r-1 \quad (2.22)$$

\vdots

$$\dot{x}_r = f_r(\bar{x}_r, t) + B_r(\bar{x}_r, t)u + g_r(\bar{x}_r, t) \quad (2.23)$$

donde el vector X se descompone como $X = (x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1})^T$, $\bar{x}_i = (x_1, \dots, x_i)^T$, $i = 2, \dots, r$, x_i es un vector de $n_i \times 1$, y los índices (n_1, n_2, \dots, n_r) definen la estructura del sistema y satisfacen la relación (2.15); además la matriz B_i , coeficiente del control ficticio x_{i+1} en cada i -ésimo bloque de (2.21) a (2.23), cumple con (2.14).

El procedimiento para llevar el sistema (2.20) a la forma controlable por bloques (2.21)-(2.23) basado en el método de transformación integral, así como las condiciones de existencia de la forma controlable por bloques, se explica en [17] y [21] respectivamente.

La relación (2.15) significa

$$n_i = n_{i+1} \quad (2.24)$$

ó

$$n_i < n_{i+1}. \quad (2.25)$$

2.4.2. Transformación recursiva por bloques para sistemas perturbados

Las siguientes suposiciones sobre las cotas para los términos de perturbaciones desconocidas en (2.21)-(2.23) se enuncian como sigue:

(H1) existen constantes positivas \bar{q}_{ij} y \bar{d}_i tal que:

$$\|g_1(x_1, t)\| \leq \bar{q}_{11}\|x_1\| + \bar{d}_1,$$

$$\|g_2(\bar{x}_2, t)\| \leq \bar{q}_{21}\|x_1\| + \bar{q}_{22}\|x_2\| + \bar{d}_2,$$

$$\|g_i(\bar{x}_i, t)\| \leq \sum_{j=1}^i \bar{q}_{ij}\|x_j\| + \bar{d}_i, \quad i = 3, \dots, r-1.$$

Tomando en cuenta la estructura (2.24), se define la siguiente transformación recursiva:

$$z_1 = x_1 := \phi_1(x_1, t) \quad (2.26)$$

$$z_2 = \bar{B}_2(\bar{x}_1, t)x_2 + f_1(x_1, t) + k_1\phi_1(x_1, t) := \phi_2(\bar{x}_2, t) \quad (2.27)$$

$$\vdots$$

$$z_{i+1} = \bar{B}_{i+1}(\bar{x}_i, t)x_{i+1} + \bar{f}_i(\bar{x}_i, t) + k_i\phi_i(\bar{x}_i, t) := \phi_{i+1}(\bar{x}_{i+1}, t), \quad i = 2, \dots, r-1 \quad (2.28)$$

donde z_i representa las nuevas variables, $k_i > 0$.

Proposición 6 *La transformación (2.26)-(2.28) reduce el sistema (2.21)-(2.23) a la forma deseada siguiente:*

$$\dot{z}_1 = -k_1z_1 + z_2 + \bar{g}_1(z_1, t) \quad (2.29)$$

$$\vdots$$

$$\dot{z}_i = -k_iz_i + z_{i+1} + \bar{g}_i(\bar{z}_i, t), \quad i = 2, \dots, r-1 \quad (2.30)$$

$$\vdots$$

$$\dot{z}_r = \bar{f}_r(z, t) + \bar{B}_r(z, t)u + \bar{g}_r(z, t) \quad (2.31)$$

donde $z = (z_1, \dots, z_r)^T$ y $\bar{f}_r(z, x_{r+1}, t)$ es una función acotada, además rango $\bar{B}_r = n_1$, $\bar{B}_r = \bar{B}_{r-1}B_r$.

La prueba se muestra a continuación.

Prueba. Con el fin de probar la proposición, se usará el método de inducción, considerando $x_{i+1}, i = 1, \dots, r-1$, como un vector de control ficticio en cada i -ésimo bloque de (2.21)-(2.23).

Paso 1. Sea x_2 el control ficticio para el primer bloque (2.21) reescrito como:

$$\dot{z}_1 = f_1(x_1, t) + B_1(x_1, t)x_2 + g_1(x_1, t) \quad (2.32)$$

que se seleccionará de la forma:

$$x_2 = -B^{-1}(x_1, t)f_1(x_1, t) + B^{-1}(x_1, t)[-k_1z_1] + z_2 \quad (2.33)$$

donde $z_1 = x_1$, z_2 es un vector de nuevas variables de dimensión n_2 , con $k_1 > 0$; el primer bloque transformado (2.32) en las nuevas variables z_1 y z_2 , con entrada (2.33) tiene la forma deseada (2.29), p.e.

$$\dot{z}_1 = -k_1z_1 + z_2 + \bar{g}_1(z_1, t).$$

Ahora la transformación (2.33) es usada para obtener la variable z_2 de la forma (2.27) que es:

$$z_2 = \bar{B}_2(\bar{x}_1, t)x_2 + f_1(x_1, t) + k_1\Phi_1(x_1, t) \equiv \Phi_2(\bar{x}_2, t).$$

Paso i . En este paso es posible demostrar que si tenemos, después de $(i-1)$ pasos, los bloques transformados del sistema (2.21)-(2.23) con las nuevas variables z_1, z_2, \dots, z_{i-1} , para

la estructura $\bar{n}_{i-1} = \bar{n}_i$, de la forma:

$$\dot{z}_1 = -k_1 z_1 + z_2 + \bar{g}_1(z_1, t) \quad (2.34)$$

$$\dot{z}_{i-1} = -k_{i-1} z_{i-1} + z_i + \bar{g}_{i-1}(\bar{z}_{i-1}, t)$$

con

$$z_i = \Phi_i(\bar{x}_i, t). \quad (2.35)$$

Entonces en el i -ésimo paso del procedimiento de transformación, tendremos el i -ésimo bloque transformado con un nuevo vector de estado z_i de forma similar a (2.34). Para llevar acabo esto, tomamos la derivada de (2.35) a lo largo de las trayectorias de (2.21)-(2.23), resultando en

$$\dot{z}_i = \bar{f}_i(\bar{x}_i, t) + \bar{B}_i(\bar{x}_i, t)x_{i+1} + g_2(\bar{x}_i, t) \quad (2.36)$$

donde $\bar{f}_i = \sum_{j=1}^{i-1} [(\partial\Phi_i/\partial x_j)f_j + B_j x_{j+1}] + (\partial\Phi_i/\partial x_i)f_i + (\partial\Phi_i/\partial t)$, y $\bar{B}_i = \bar{B}_{i-1}B_i$, $\text{rank } \bar{B}_i = \text{rank } B_i = n_i$. Para el caso $\bar{n}_i = \bar{n}_{i+1}$, el vector de control ficticio, x_{i+1} en (2.36) puede ser seleccionado de forma similar a (2.33) de la forma

$$x_{i+1} = -\bar{B}_i^{-1}(\bar{x}_i, t)\bar{f}_i(\bar{x}_i, t) + \bar{B}_i^{-1}(\bar{x}_i, t)[-k_i z_i] \quad (2.37)$$

así la ecuación (2.36) con (2.37) toma la misma forma que la ecuación (2.34)

$$\dot{z}_i = -k_i z_i + z_{i+1} + \bar{g}_i(\bar{z}_i, t). \quad (2.38)$$

Para obtener la transformación recursiva como en (2.28), se define

$$z_{i+1} = \bar{B}_{i+1}(\bar{x}_i, t)x_{i+1} + \bar{f}_i(\bar{x}_i, t) + k_i \Phi_i(\bar{x}_i, t) := \Phi_{i+1}(x_{i+1}, t).$$

Paso r . En el último paso, calculando la derivada con respecto al tiempo de $z_r = \Phi_r(\bar{x}_r, t)$, da el último bloque

$$\dot{z}_r = \bar{f}_r(z, t) + \bar{B}_r(z, t)u + \bar{g}_r(z, t) \quad (2.39)$$

donde $\bar{f}_r = \sum_{j=1}^{r-1} [(\partial\Phi_r/\partial x_j)f_j + B_j x_{j+1}] + (\partial\Phi_r/\partial x_r)f_r + (\partial\Phi_r/\partial t)$, y $\bar{B}_r = B_r B_r$, $\text{rank } \bar{B}_r = \text{rank } B_r = n_r$.

De esta forma la transformación (2.26)-(2.28) reduce el sistema (2.21)-(2.23) a la forma (2.29)-(2.31). ■

2.4.3. Robustez a perturbaciones que no cumplen con la condición de *matching*.

Mediante el uso de la ley de control

$$u = -u_0 \text{sign}(M(x, t)z_r)$$

donde $u_0 > \left| \bar{B}_r^{-1} \right| > 0$, en la superficie deslizante $z_r = 0$, el sistema (2.29)-(2.31) se reduce a

$$\dot{z}_1 = -k_1 z_1 + z_2 + \bar{g}_1(z_1, t) \quad (2.40)$$

$$\dot{z}_i = -k_i z_i + z_{i+1} + \bar{g}_i(\bar{z}_i, t), \quad i = 2, \dots, r-1 \quad (2.41)$$

$$\dot{z}_{r-1} = -k_{r-1} z_{r-1} + \bar{g}_r(z_{r-1}, t). \quad (2.42)$$

De esta forma ahora, el problema original de análisis de estabilidad se reduce al análisis de la propiedad de robustez de las dinámicas de modos deslizantes de orden reducido (2.40)-(2.42), el cual puede ser considerado como un sistema lineal con una perturbación no lineal. Observe que esta perturbación no cumple con la condición de acoplamiento con respecto al control u en (2.21)-(2.23). A continuación se demostrará, que la tasa de convergencia de la parte lineal de (2.40)-(2.42) está definida por los valores de los coeficientes k_1, \dots, k_{r-1} .

Las cotas de las restricciones físicas del sistema original (2.21)-(2.23) (ver suposiciones H1) podrían ser reescritas usando el cambio de variables (2.26)-(2.28), dando origen a la siguiente suposición.

(H2) Existen constantes positivas q_{ij} y d_i , tales que

$$\|\bar{g}_1(z_1, t)\| \leq q_{11}\|z_1\| + d_1, \quad (2.43)$$

$$\|\bar{g}_2(\bar{z}_2, t)\| \leq q_{22}\|z_2\| + k_1 q_{21}\|z_1\| + d_2, \quad (2.44)$$

$$\|\bar{g}_3(\bar{z}_3, t)\| \leq q_{33}\|z_3\| + k_2 q_{32}\|z_2\| + k_1^2 q_{31}\|z_1\| + d_3, \quad (2.45)$$

$$\|\bar{g}_i(\bar{z}_i, t)\| \leq q_{ij}\|z_i\| + \sum_{j=1}^{i-1} k_j^{(i-j)} q_{ij}\|z_j\| + d_i, \quad (2.46)$$

$$i = 4, \dots, r-1.$$

Para asegurar la propiedad de robustez con respecto a incertidumbres desconocidas pero acotadas, las ganancias del controlador k_1, \dots, k_{r-1} deben ser elegidas jerárquicamente, de menor a mayor. De esta forma, ya que g_1 no depende de k_1 , el valor de este coeficiente puede ser elegido tan alto que el término $k_1 z_1$ en (2.19) será dominante. Por el procedimiento de linealización por bloques, el término g_2 depende de k_1 pero no de k_2, \dots, k_{r-1} con respecto a los límites dados en los términos desconocidos de (2.40)-(2.42), se propone:

$$k_1 > q_{11} \quad (2.47)$$

$$k_2 > q_{22} + k_1 q_{21} \alpha_{12}, \quad \alpha_{12} = (k_1 - q_{11})^{-1} \quad (2.48)$$

$$k_3 > q_{33} + k_2 q_{32} \alpha_{23} + k_1^2 q_{31} \alpha_{13},$$

$$\alpha_{23} = (k_2 - q_{22} - k_1 q_{21} \alpha_{12})^{-1}, \alpha_{13} = \alpha_{12} \alpha_{23} \quad (2.49)$$

$$k_i > q_{ij} + \sum_{j=1}^{i-1} k_j^{(i-j)} q_{ij} \alpha_{j,i} \quad \alpha_{i-1,i} = (k_{i-1} - q_{i-1,i-1} - \sum_{j=1}^{i-2} k_j^{(i-j)} q_{i-1,j} \alpha_{j,i-1})^{-1} \quad (2.50)$$

$$\alpha_{j,i} = \alpha_{j,i-1} \alpha_{i-1,i} \quad i = 4, \dots, r-1. \quad (2.51)$$

Proposición 7 Considerando la suposición (H2), y que los valores de los escalares positivos k_1, \dots, k_{r-1} satisfacen las desigualdades (2.47)-(2.51), existen escalares positivos γ_{ij} y h_i , $i = 1, \dots, r-1$ $j = i, \dots, r-1$ tales que las soluciones del sistema (2.40)-(2.42) cumplen con

$$\begin{aligned} \|z_{r-1}(t)\| &\leq \gamma_{r-1,r-1} \exp\left[\frac{1}{2}\alpha_{r-1}(t-t_0)\right] + h_{r-1} \\ \|z_{r-2}(t)\| &\leq \gamma_{r-2,r-2} \exp\left[-\frac{1}{2}\alpha_{r-2}(t-t_0)\right] + \gamma_{r-2,r-1} \exp\left[-\frac{1}{2}\alpha_{r-1}(t-t_0)\right] + h_{r-2} \\ \|z_i(t)\| &\leq \sum_{j=1}^{r-1} \gamma_{ij} \exp\left[-\frac{1}{2}\alpha_j(t-t_0)\right] + h_i, \quad i = 1, \dots, r-3. \end{aligned}$$

y estas soluciones son ultimadamente uniformemente acotadas, p.e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \|z_i(t)\| \leq h_i, \quad i = 1, \dots, r-1.$$

La prueba detallada, la cual es constructiva ya que establece la propiedad del movimiento de modos deslizantes sobre una superficie $z_r = 0$, y provee de los valores requeridos para las ganancias del controlador k_1, \dots, k_{r-1} , se encuentra en el apéndice D de [21]. Es interesante notar que incrementando los valores de k_1, \dots, k_{r-1} los valores de los límites h_i llegan a ser arbitrariamente pequeños. Pero en este caso el dominio de la estabilidad de modos deslizantes puede ser decrementada, ya que la función \bar{f}_r depende también de las ganancias k_1, \dots, k_{r-1} .

2.5. Teoría de control óptimo H_∞

2.5.1. Introducción

Se utiliza el control óptimo H_∞ en esta tesis buscando robustez adicional en la superficie deslizante contra perturbaciones que no cumplen con la condición de acoplamiento. Son conocidas las propiedades de robustez del control óptimo H_∞ , por lo que se decidió su uso.

El control óptimo H_∞ ha tomado recientemente gran importancia, pues trata de incorporar lo mejor de los métodos clásicos de control con la teoría de control moderna. Presentamos algunos fundamentos de esta teoría de control. Esta teoría se presenta con más detalle en [31] y en [1]. Primero, se presenta un acercamiento clásico al caso lineal, que es la teoría más desarrollada hasta ahora. Posteriormente se presenta el caso no lineal, que es una teoría más reciente, presentada más ampliamente en [1].

2.5.2. Caso lineal

Consideremos el sistema descrito por el diagrama de bloques en la figura 2.1, donde la planta G y el controlador K se suponen reales, racionales y propios, y sus realizaciones en espacio de estados son estabilizables y detectables. El problema H_∞ consiste en encontrar todos los controladores admisibles $K(s)$, es decir aquellos que estabilizan internamente al sistema, tales que $\|T_{zw}\|_\infty$ sea mínima. Sin embargo, este proceso resulta ser numérica y teóricamente muy complicado, y es mucho más fácil obtener un controlador subóptimo. El problema del controlador subóptimo H_∞ se define de la siguiente manera.

Dado $\gamma > 0$, encuentre todos los controladores admisibles $K(s)$, si es que existen, tales que $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$.

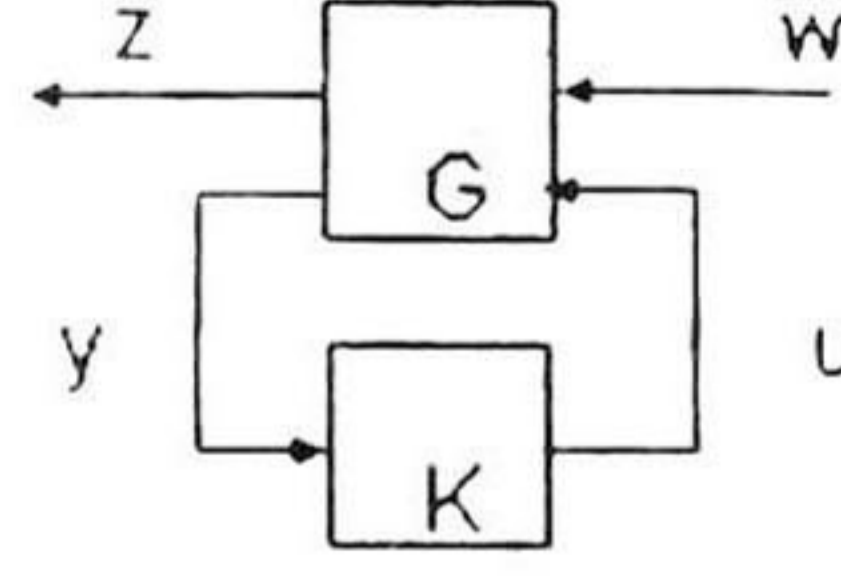


Figura 2.1: Diagrama de un sistema genérico

Para establecer la solución del problema, primero definiremos lo siguiente. Sea la matriz de transferencia $G(s)$ del sistema de la figura 2.1, descrita de la siguiente forma:

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right]$$

Bajo las siguientes suposiciones:

- i) (A, B_1) es estabilizable y (C_1, A) es detectable.
- ii) (A, B_2) es estabilizable y (C_2, A) es detectable.
- iii) $D_{12}^* \begin{bmatrix} C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$
- iv) $\begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} D_{21}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$

Suponiendo que se cumplen i-iv, entonces podemos establecer el siguiente teorema.

Teorema 8 [31] Existe un controlador admisible tal que $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ si y solo si existen X_∞ y Y_∞ tales que se mantengan las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} 0 &= A'X_\infty + X_\infty A + C_1' C_1 + \gamma^{-2} X_\infty B_1 B_1' X_\infty - X_\infty B_2 B_2' X_\infty \\ 0 &= AY_\infty + Y_\infty A' + B_1 B_1' + \gamma^{-2} Y_\infty C_1' C_1 Y_\infty - Y_\infty C_2' C_2 Y_\infty. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Además, tal controlador es:

$$K_{sub}(s) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_\infty & (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1} Y_\infty C_2' \\ \hline -B_2' X_\infty & 0 \end{array} \right] \quad (2.53)$$

donde $\hat{A}_\infty = A + \gamma^{-2} B_1 B_1' X_\infty - B_2 B_2' X_\infty + (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1} Y_\infty C_2' C_2$.

El controlador (2.53) puede escribirse como un compensador con observador, como sigue.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + B_1 \omega + B_2 u - (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1} Y_\infty C_2' (C_2 \hat{x} - y) \\ u &= -B_2' X_\infty \hat{x}. \end{aligned}$$

La prueba se encuentra en [31].

2.5.3. Caso no lineal

Se presenta una breve introducción al control óptimo robusto H_∞ no lineal [31], [26], [25]. Consideremos el sistema no lineal no autónomo de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_1(x, t) + g_1(x, t)w + g_2(x, t)u \\ y &= h_1(x, t) + k_{12}(x, t)u\end{aligned}\quad (2.54)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de espacio de estados, $t \in \mathbb{R}$ es la variable temporal, $u \in \mathbb{R}^m$ es la entrada de control, $w \in \mathbb{R}^r$ es la perturbación desconocida y $y \in \mathbb{R}^l$ es la salida a ser controlada.

Solución global en espacio de estados

Se hacen las siguientes suposiciones:

(A1) Las funciones $f_1(x, t)$, $g_1(x, t)$, $g_2(x, t)$, $h_1(x, t)$, $h_2(x, t)$, $k_{12}(x, t)$, $k_{21}(x, t)$ son continuas a tramos en t para todo x y localmente Lipschitz en x para casi todo t .

(A2) $f_1(0, t) = 0$, $h_1(0, t) = 0$, $h_2(0, t) = 0$ para casi todo t .

(A3) $h_1^T(x, t)k_{12}(x, t) = 0$, $k_{12}^T(x, t)k_{12}(x, t) = I$.

El término "para casi todo t " indica que debe cumplirse la condición salvo en un número finito de instantes en t y de potencia cero. Posteriormente, nombramos la hipótesis bajo la cual es posible obtener una solución global al problema de control H_∞ .

(H3) Existe una función definida positiva $F(x)$ y una función definida positiva, acotada en t , y suave $V(x, t)$, tal que la desigualdad de Hamilton-Jacobi-Isaacs

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f_1(x, t) + \gamma^2 \alpha_1^T(x, t) \alpha_1(x, t) \\ - \alpha_2^T(x, t) \alpha_2(x, t) + h_1^T(x, t) h_1(x, t) + F(x) \leq 0\end{aligned}\quad (2.55)$$

se cumple para casi todo $t \in \mathbb{R}$ con

$$\begin{aligned}\alpha_1(x, t) &= \frac{1}{2\gamma^2} g_1^T(x, t) \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \\ \alpha_2(x, t) &= -\frac{1}{2} g_2^T(x, t) \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T\end{aligned}\quad (2.56)$$

Teorema 9 *Si satisface la hipótesis (H3) entonces la ley de control!*

$$u = \alpha_2(x, t)\quad (2.57)$$

estabiliza globalmente asintóticamente el sistema no perturbado (2.54) y garantiza que la ganancia \mathcal{L}_2 del sistema en lazo cerrado menor que γ .

Prueba. Dado un número real $\gamma \geq 0$, se dice que el sistema (2.54) tiene ganancia \mathcal{L}_2 menor que γ si la respuesta y resultante a la perturbación $w(t)$ de un estado inicial $x(t_0) = 0$ satisface

$$\int_{t_0}^{t_1} \|y(t)\|^2 dt < \gamma^2 \int_{t_0}^{t_1} \|w(t)\|^2 dt \quad (2.58)$$

para todo $t_1 > t_0$ y todas las funciones continuas $w(t)$.

Primero, definimos la función:

$$H(x, w, u, t) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} [f(x, t) + g_1(x, t)w + g_2(x, t)u] + h_1^T(x, t)h_1(x, t) + u^T u - \gamma^2 w^T w \quad (2.59)$$

que es cuadrática en (w, u) . Usando (2.56) en (2.59) podemos observar que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial H}{\partial w} \right)_{(w,u)=(\alpha_1,\alpha_2)} &= \frac{\partial V}{\partial x} g_1(x, t) - 2\gamma^2 \alpha_1^T = 0 \\ \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)_{(w,u)=(\alpha_1,\alpha_2)} &= \frac{\partial V}{\partial x} g_2(x, t) + 2\alpha_2^T = 0. \end{aligned}$$

Expandiendo (2.59) en series de Taylor, obtenemos

$$H(x, w, u, t) = H(x, \alpha_1(x, t), \alpha_2(x, t), t) - \gamma^2 \|w - \alpha_1(x, t)\|^2 + \|u - \alpha_2(x, t)\|^2 \quad (2.60)$$

Como $H(x, \alpha_1(x, t), \alpha_2(x, t), t) < -F(x)$, dado que se cumple la hipótesis H3 y $F(x)$ es siempre positivo, sustituimos $F(x)$ en (2.60) para obtener

$$H(x, w, u, t) \leq -\gamma^2 \|w - \alpha_1(x, t)\|^2 + \|u - \alpha_2(x, t)\|^2 - F(x) \quad (2.61)$$

Usamos (2.59) en (2.61), lo que resulta en

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} [f(x, t) + g_1(x, t)w + g_2(x, t)u] + h_1^T(x, t)h_1(x, t) + u^T u - \gamma^2 w^T w \\ \leq -\gamma^2 \|w - \alpha_1(x, t)\|^2 + \|u - \alpha_2(x, t)\|^2 - F(x) \end{aligned} \quad (2.62)$$

Reacomodando (2.62),

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} [f(x, t) + g_1(x, t)w + g_2(x, t)u] \\ \leq \|u - \alpha_2(x, t)\|^2 - \gamma^2 \|\alpha_1(x, t)\|^2 - \|h_1(x, t)\|^2 - \|u\|^2 + \gamma^2 \|w\|^2 - F(x) \end{aligned} \quad (2.63)$$

Para probar que la ley de control (2.57) estabiliza el sistema no perturbado, hacemos $w = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} [f(x, t) + g_1(x, t)w + g_2(x, t)u] \\ \leq \|u - \alpha_2(x, t)\|^2 - \gamma^2 \|\alpha_1(x, t)\|^2 - \|h_1(x, t)\|^2 - \|u\|^2 - F(x) \end{aligned}$$

Al sustituir la ley de control (2.57), podemos ver claramente que el sistema (2.54) es globalmente asintóticamente estable.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} [f(x, t) + g_1(x, t)w + g_2(x, t)u] \\ & \leq -\gamma^2 \|\alpha_1(x, t)\|^2 - \|h_1(x, t)\|^2 - \|\alpha_2(x, t)\|^2 - F(x) < 0 \end{aligned}$$

Para establecer (2.58), diferenciamos V a lo largo de las trayectorias de (2.54), con $w \neq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} [f(x, t) + g_1(x, t)w] \\ \frac{dV}{dt} &\leq \|u - \alpha_2(x, t)\|^2 - \gamma^2 \|w - \alpha_1(x, t)\|^2 - \|h_1(x, t)\|^2 - \|u\|^2 + \gamma^2 \|w\|^2 - F(x) \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que $\|y\|^2 = \|h_1(x, t)\|^2 + \|u\|^2$ y usando la ley de control (2.57), tenemos

$$\frac{dV}{dt} \leq -\gamma^2 \|w - \alpha_1(x, t)\|^2 - \|y(t)\|^2 + \gamma^2 \|w\|^2 - F(x)$$

Lo cual nos asegura que:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\gamma^2 \|w\|^2 - \|y\|^2) dt \geq \int_{t_0}^{t_1} F(x(t)) dt + V(x(t_1), t_1) - V(x(t_0), t_0) + \gamma^2 \int_{t_0}^{t_1} \|w - \alpha_1(x, t)\|^2 dt > 0$$

para cualquier trayectoria de (2.54) que comience en $x(t_0) = 0$. Entonces el teorema queda demostrado.

Solución Local

Para el análisis local, adicionalmente hacemos la siguiente suposición.

(A4) Para casi todo $t \in \mathbb{R}$ las funciones $f_1(x, t)$, $g_1(x, t)$, $g_2(x, t)$, $h_1(x, t)$, $h_2(x, t)$ son dos veces continuamente diferenciables en x localmente alrededor del origen $x = 0$, mientras que sus primera y segunda derivadas de estado son continuas a tramos y uniformemente acotadas en t para todo x en una vecindad del origen.

Para el análisis local, nos interesa el problema de control lineal H_∞ para el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_1(t)x + B_1(t)w + B_2(t)u \\ z &= C_1(t)x + D_{12}(t)u \end{aligned} \tag{2.64}$$

donde:

$$\begin{aligned} A_1(t) &= \frac{\partial f_1}{\partial x}(0, t), \quad B_1(t) = g_1(0, t), \\ B_2(t) &= g_2(0, t), \\ C_1(t) &= \frac{\partial h_1}{\partial x}(0, t), \\ D_{12}(t) &= k_{12}(0, t). \end{aligned}$$

Suponemos el sistema estabilizable y detectable desde u e y , respectivamente. Entonces la siguiente condición es necesaria y suficiente para que exista una solución al citado problema [20]:

(C1) Existe una solución acotada, semidefinida positiva y simétrica de la ecuación de Riccati:

$$-\dot{P} = P(t) A_1(t) + A_1^T(t) P(t) + C_1^T(t) C_1(t) \\ + P(t) \left[\frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \right] (t) P(t)$$

tal que el sistema:

$$\dot{x} = [A_1 - (B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T) P] (t) x(t)$$

sea exponencialmente estable.

Con esta condición, podemos establecer el siguiente lema:

Lema 10 *Si se satisface la condición (C1), entonces existe un $\varepsilon_0 > 0$ tal que el sistema*

$$-\dot{P}_\varepsilon = P_\varepsilon(t) A_1(t) + A_1^T(t) P_\varepsilon(t) + C_1^T(t) C_1(t) \quad (2.65) \\ + P_\varepsilon(t) \left[\frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \right] (t) P_\varepsilon(t) + \varepsilon I$$

tiene una solución $P_\varepsilon(t)$ única, acotada, definida positiva y simétrica para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Ahora, usamos la ecuación (2.65) para establecer una solución local al problema de control H_∞ para (2.54).

Teorema 11 *Si se satisface la condición (C1) y si $P_\varepsilon(t)$ en (2.65) es acotada y definida positiva de para cierta $\varepsilon > 0$, entonces la hipótesis (H3) se cumple localmente alrededor del punto de equilibrio $x = 0$ con*

$$V(x, t) = x^T P_\varepsilon x, \\ F(x) = \frac{\varepsilon}{2} \|x\|^2$$

y la ley de control

$$u = -g_2^T(x, t) P_\varepsilon(t) x$$

es una solución local del problema de control H_∞ .

Se demostrará que en una vecindad del origen $x = 0$ la función $V(x, t) = x^T P_\varepsilon x$, suave, acotada y definida positiva por construcción, satisface la desigualdad de Hamilton-Jacobi-Isaacs (2.55), sujeta a $F(x) = \frac{\varepsilon}{2} \|x\|^2$. Tenemos que

$$\frac{\partial V}{\partial t} = x^T \dot{P}_\varepsilon x,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x, t) = x^T [P_\epsilon A + A^T P_\epsilon] (t) x + o_t (\|x\|^2),$$

$$\gamma^2 \alpha_1^T(x, t) \alpha_1(x, t) = \frac{1}{\gamma^2} x^T P_\epsilon B_1(t) B_1^T(t) P_\epsilon x + o_t (\|x\|^2)$$

$$-\alpha_2^T(x, t) \alpha_2(x, t) = -x^T P_\epsilon B_2(t) B_2^T(t) P_\epsilon x + o_t (\|x\|^2)$$

$$h_1^T(x, t) h_1(x, t) = x^T C_1^T(t) C_1(t) x + o_t (\|x\|^2).$$

donde por las restricciones de suavidad, $\frac{o_t (\|x\|^2)}{\|x\|^2} \rightarrow 0$ uniformemente en t cuando $\|x\|^2 \rightarrow 0$.

Usando (2.65) tenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f_1(x, t) + \gamma^2 \alpha_1^T(x, t) \alpha_1(x, t) - \alpha_2^T(x, t) \alpha_2(x, t) + h_1^T(x, t) h_1(x, t) \\ &= x^T \left[\dot{P}_\epsilon + P_\epsilon A_1 + A_1^T P_\epsilon + C_1^T(t) C_1(t) + P_\epsilon \left[\frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \right] (t) P_\epsilon \right] x + o_t (\|x\|^2) \\ &= -\epsilon \|x\|^2 + o_t (\|x\|^2) \leq -\frac{\epsilon}{2} \|x\|^2 \end{aligned}$$

para todo t y $\|x\|$ suficientemente pequeño. Así podemos ver que la hipótesis H3 se cumple con $V(x, t)$ y $F(x)$ como los indica el teorema 11. El resto de la demostración es análoga a la demostración del teorema 9.

Todas las pruebas de los lemas y teoremas presentados en esta sección pueden encontrarse en [31], [1], [26], [25].

2.6. Teoría de Caos

2.6.1. Introducción

Se explica brevemente la teoría de Caos porque se utilizará un atractor caótico para generar las señales de seguimiento, en la aplicación del método a un sistema específico. En particular, se usará el atractor caótico de Chen, porque es particularmente difícil de controlar y será un buen reto para el método desarrollado.

2.6.2. Caos

Se puede definir como un comportamiento en estado estable acotado; pero que no es un punto de equilibrio, ni es periódico y tampoco es cuasiperiódico. Enseguida se definen las características que denotan un comportamiento caótico.

Consideremos la figura 2.2, donde se muestran algunas trayectorias caóticas; a partir de éstas, se puede ver que las trayectorias están acotadas y que no son ni periódicas ni cuasiperiódicas.

Características Generales del Caos

Dinámica no lineal. El caos es un fenómeno exclusivo de los sistemas no lineales.

Sensibilidad a condiciones iniciales (SCI). Las órbitas que parten de los valores iniciales muy cercanos se comportan de forma independiente, acercándose y alejándose de forma impredecible.

Compacidad. La SCI no es suficiente para generar un comportamiento caótico (considere un sistema no lineal inestable). Para que el caos pueda darse se requiere que las trayectorias evolucionen en un conjunto de volumen finito.

Existencia de órbitas periódicas de distintos períodos. El caos se presenta en sistemas cuyo modelo matemático posee un parámetro, tal que al cambiar su valor, el sistema presentará cambios en su dinámica (bifurcaciones), dependiendo del valor de dicha constante.

Propiedad de mezcla. La órbita de cualquier punto recorrerá casi todos los puntos de una zona del espacio de fase sin llenar dicha zona.

Presencia de atractores extraños. En su diagrama de fases los sistemas caóticos presentan estructuras geométricas de forma poco usual y sin ningún parecido a los objetos geométricos clásicos; estos diagramas de fase son llamados atractores extraños.

Por su definición, los sistemas caóticos tienen dos características importantes: un sistema caótico generará trayectorias que evolucionan en un volumen finito del espacio de fase y presenta zonas de gran densidad. Por lo tanto, si la trayectoria caótica está acotada, entonces se deberá contraer en algunas direcciones y expandirse en otras, con la contracción superando a la expansión.

2.6.3. Ejemplos de sistemas caóticos continuos

En esta sección se presenta el atractor caótico de Chen, su descripción matemática y el espacio de fase del atractor.

Atractor caótico de Chen

El atractor caótico de Chen es un sistema caótico descubierto recientemente, el cual ha demostrado ser particularmente difícil de controlar comparándolo con otros atractores, por ejemplo, el atractor de Lorenz y el de Roessler. El espacio de fase del sistema de Chen es mostrado en la figura 2.2.

El atractor de Chen está descrito por las siguientes ecuaciones,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(y - x) \\ \dot{y} &= (c - a)x - xz + cy \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}\tag{2.66}$$

con $a = 35, b = 3, c = 28$

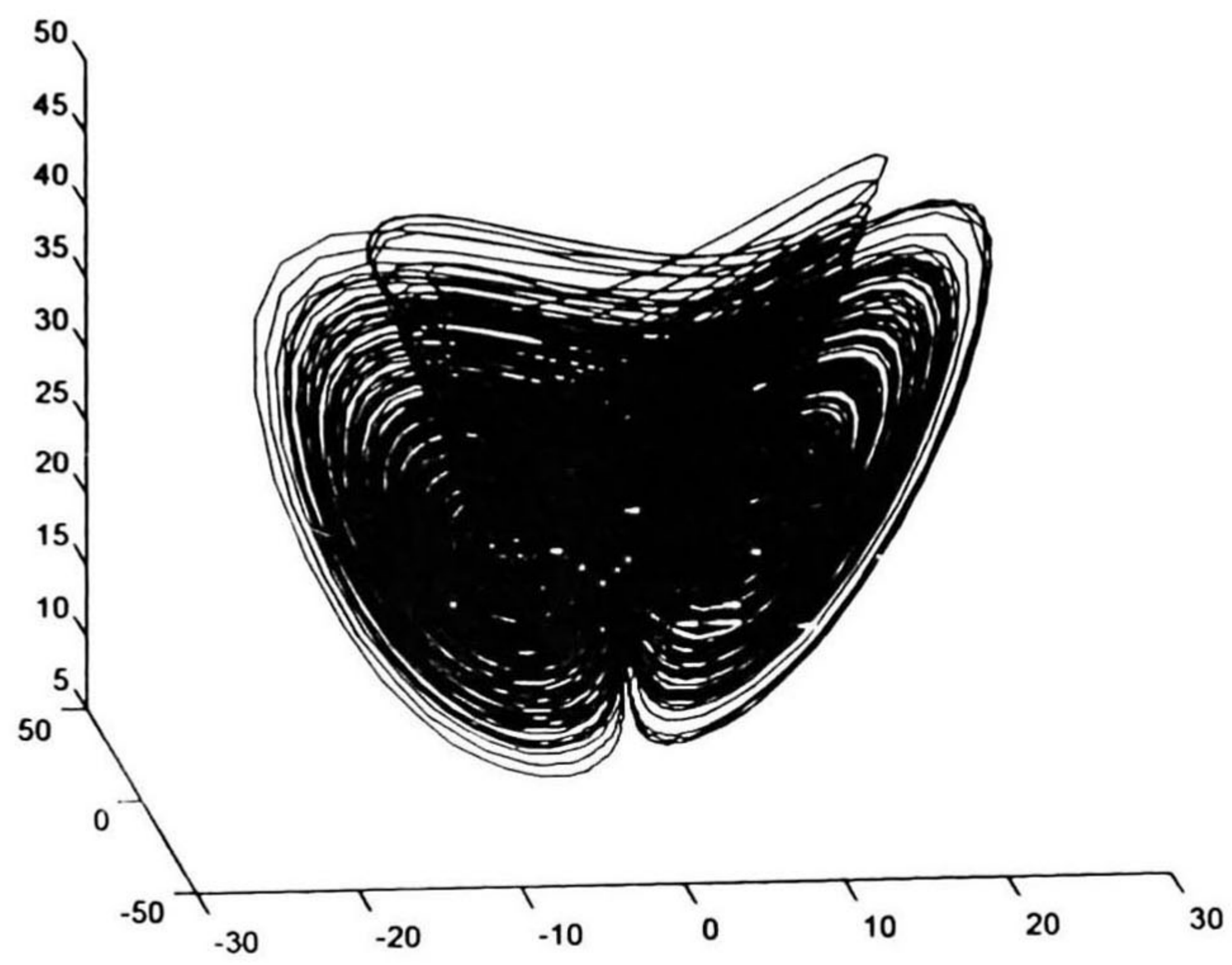


Figura 2.2: Atractor Caótico de Chen

Capítulo 3

Desarrollo del Método Propuesto

En este capítulo se presenta un método basado en control por bloques integral y control óptimo H_∞ el cual es la contribución principal de esta tesis. Se utiliza el control por bloques integral para eliminar las perturbaciones que cumplen la condición de acoplamiento, aprovechando la robustez inherente a los modos deslizantes. Así mismo el integrador del control por bloques integral elimina las perturbaciones constantes que puedan existir. El control óptimo H_∞ se utiliza para atenuar las perturbaciones que no cumplen con la condición de acoplamiento. La combinación de estas dos técnicas da una ley de control que es robusta a perturbaciones acotadas que pertenecen al espacio \mathcal{L}_2 .

El capítulo se organiza como sigue. En la sección 3.1 se presenta la forma no lineal controlable por bloques con perturbaciones. La sección 3.2 presenta el método que debemos aplicar para obtener la ley de control del control por bloques integral con control óptimo H_∞ . Finalmente en la sección 3.3 se muestra el análisis de estabilidad de modos deslizantes, demostrando que efectivamente ocurren, así como el análisis de estabilidad en la superficie deslizante que muestra que el sistema con la ley de control obtenida es ultimadamente acotado.

3.1. Forma no lineal controlable por bloques con perturbaciones.

Consideremos el siguiente sistema no lineal, sujeto a perturbaciones externas descrito por la siguiente ecuación de estado:

$$\dot{x} = f(x, t) + g_1(x, t)w(t) + g_2(x, t)u(t) \quad (3.1)$$

donde $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$, $w \in W \subset \mathbb{R}^{s_i}$. El campo vectorial f , y las columnas de g_1 , y g_2 son mapeos suaves y w representa las perturbaciones externas.

La forma Nolineal Controlable por Bloques (NCB) para el sistema (3.1) consiste de r

bloques de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= f_1(x_1, t) + g_{21}(x_1, t)x_2 + g_{11}(x_1, t)w(t) \\
 \dot{x}_i &= f_i(x_1, \dots, x_i, t) + g_{2i}(x_1, \dots, x_i, t)x_{i+1} + g_{1i}(x_1, \dots, x_i, t)w(t), \quad i = 2, \dots, r-1 \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_r &= f_r(x_1, x_2, \dots, x_r, t) + g_{2r}(x_1, x_2, \dots, x_r, t)u \\
 &\quad + g_{1r}(x_1, x_2, \dots, x_r, t)w(t)
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde x_i es un vector de $n_i \times 1$. En cada bloque los vectores x_{i-1} son referidos como vectores de control ficticios, con:

$$\text{rank}(g_{2i}) = n_i, \forall x \in X$$

en donde los enteros (n_1, n_2, \dots, n_r) definen la estructura del sistema (3.1) con $\sum_{i=1}^r n_i = n$.

En esta tesis consideraremos la estructura:

$$n_1 = n_2 = \dots = n_r = m.$$

Cabe señalar que el esquema de control propuesto puede fácilmente generalizarse para el caso $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_r \leq m$.

Ahora, siguiendo la técnica de control por bloques [19], se obtendrá una transformación no lineal de variables de estado que linealiza la parte no perturbada de la dinámica (3.2) y da una superficie de deslizamiento no lineal con movimientos invariantes con respecto a las perturbaciones. Considerando el estado x_{i+1} , $i = 1, \dots, r-1$ como un vector de control ficticio para el i -ésimo bloque de (3.2), el procedimiento de transformación por bloques se presenta en la siguiente sección.

3.2. Transformación de bloques con integrales y control H_∞

3.2.1. Introducción

Presentamos un procedimiento similar al obtenido en [28], el cual se demostró eficiente para el rechazo de perturbaciones constantes. Ahora se añade el control óptimo H_∞ para rechazar las perturbaciones no necesariamente constantes y que no cumplen con la condición de acoplamiento.

3.2.2. Método de Transformación

Paso 1. Como primer paso, definimos el error de seguimiento como:

$$z_1 = x_1 - r(t) := \phi_1(x_1, t) \tag{3.3}$$

en donde $r(t)$ es una señal de referencia. Derivado (3.3) obtenemos:

$$\dot{z}_1 = \bar{f}_1(z_1, t) + \bar{g}_{21}(z_1, t)x_2 + \bar{g}_{11}(z_1, t)w(t) \tag{3.4}$$

donde $\bar{f}_1(z_1, t) = f_1((x_1 - r(t)), t)$, $\bar{g}_{21}(z_1, t) = g_{21}((x_1 - r(t)), t)$, $\bar{g}_{11}(z_1, t) = g_{11}((x_1 - r(t)), t)$

Ahora introducimos un bloque integral:

$$z_{01} = \int_{-\infty}^t z_1 dt. \quad (3.5)$$

Se selecciona el vector de control ficticio x_2 en la ecuación (3.4) tal que satisfaga la siguiente relación:

$$\bar{g}_{21}(z_1, t)x_2 = -\bar{f}_1(z_1, t) + v_1 + M_{01}z_{01} + M_1z_1 \quad (3.6)$$

en donde $v_1 \in \mathbb{R}^{n_2}$ es un vector de nuevas variables de $n_2 \times 1$, y M_{01} y M_1 son matrices constantes.

Sustituyendo (3.5)-(3.6) en (3.4) obtenemos el siguiente subsistema aumentado:

$$\dot{z}_{01} = z_1 \quad (3.7)$$

$$\dot{z}_1 = M_{01}z_{01} + M_1z_1 + v_1 + \bar{g}_{11}(z_1, t)w(t) \quad (3.8)$$

Las matrices constantes M_{01} y M_1 son elegidas tales que la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & I_{n_1} \\ M_{01} & M_1 \end{bmatrix}$$

sea Hurwitz.

Para hacer robusto en el subsistema (3.7), (3.8) con respecto a las perturbaciones $w(t)$ usamos la ecuación de Riccati

$$\begin{aligned} -\dot{P}_\varepsilon &= P_\varepsilon(t)A_1(t) + A_1^T(t)P_\varepsilon(t) + C_1^T(t)C_1(t) \\ &+ P_\varepsilon(t) \left[\frac{1}{\gamma^2}B_1B_1^T - B_2B_2^T \right] (t) P_\varepsilon(t) + \varepsilon I \end{aligned} \quad (3.9)$$

y la teoría de control óptimo H_∞ no lineal descrita en el capítulo 1. Tomamos el valor cuando $z_1 = 0$. Entonces los parámetros para la ecuación de Riccati (3.9) son:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & I_{n_1} \\ M_{01} & M_1 \end{bmatrix}; \quad B_{11}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{g}_{11}(0, t) \end{bmatrix}; \quad B_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_1} \end{bmatrix}; \\ C_1 &= \begin{bmatrix} I_{n_1} & I_{n_1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.10)$$

La matriz C_1 se elige de manera tal que las condiciones del teorema 9 y el Lema 10 sobre el control óptimo H_∞ de sistemas no lineales se cumplan.

La solución $P_{\varepsilon,1}(t)$ de la ecuación de Riccati (3.9) con parámetros (3.10) nos da el valor deseado v_{1d} del cuasicontrol v_1 :

$$v_{1d} = -B_{21}^T P_{\epsilon,1}(t) \xi_1 = K_{01}(t)z_{01} + K_1(t)z_1 \quad (3.11)$$

donde $\xi_1 = (z_{01}, z_1)^T$, y $K_{01}(t), K_1(t)$ son matrices variantes en el tiempo cuyo valor está determinado por la solución de la ecuación de Riccati (3.9) con parámetros (3.10).

Paso 2. Ahora definimos la nueva variable z_2 como:

$$z_2 = v_1 - v_{1d}. \quad (3.12)$$

De (3.6) y (3.11) en (3.12), la nueva variable z_2 puede expresarse como:

$$\begin{aligned} z_2 = & \bar{g}_{21}(z_1, t)x_2 + \bar{f}_1(z_1, t) - (K_{01}(t) + M_{01})z_{01} \\ & - (K_1(t) + M_1)z_1 := \phi_2(z_{01}, z_1, x_2, t). \end{aligned} \quad (3.13)$$

En seguida, tomamos la derivada de (3.13) a lo largo de las trayectorias del segundo bloque de (3.2) y usando (3.7), (3.8), obtenemos:

$$\dot{z}_2 = \bar{f}_2(z_{01}, z_1, z_2, t) + \bar{g}_{22}(z_{01}, z_1, z_2, t)x_3 + \bar{g}_{12}(z_{01}, z_1, z_2, t)w(t) \quad (3.14)$$

donde $\bar{f}_2(\cdot) = \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_1} [A_1 \xi_1 + B_{21} v_1] + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} f_2(\cdot)$, $\bar{g}_{22}(\cdot) = \bar{g}_{21}(\cdot) g_{22}(\cdot)$, $\bar{g}_{12}(\cdot) = \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_1} \bar{g}_{11}(\cdot) + g_{12}(\cdot)$. Notemos que rango $\bar{g}_{22} = n_2$.

Como en el primer paso, primero introducimos la integral:

$$z_{02} = \int_{-\infty}^t z_2 dt \quad (3.15)$$

y luego elegimos el vector ficticio de entrada x_3 en (3.14) similar a (3.6), de tal manera que cumpla con la relación:

$$\bar{g}_{22}(z_{01}, z_1, z_2, t)x_3 = -\bar{f}_2(z_{01}, z_1, z_2, t) + v_2 + M_{02}z_{02} + M_2z_2 \quad (3.16)$$

donde v_2 es un vector de variables de $n_3 \times 1$, y M_{02} y M_2 son matrices constantes elegidas de tal manera que la matriz de sistema del subsistema es Hurwitz.

Luego de linealizar $\bar{g}_{12}(z_{01}, z_1, z_2, t)$ alrededor del punto de equilibrio, los parámetros de la ecuación de Riccati (3.9) son:

$$\begin{aligned} A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & I_{n_2} \\ M_{02} & M_2 \end{bmatrix}; B_{12}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{g}_{12}(0, 0, 0, t) \end{bmatrix}; B_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_2} \end{bmatrix}; \\ C_2 &= \begin{bmatrix} I_{n_2} & I_{n_2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde elegimos C_2 tal que las condiciones del Teorema 9 y el Lema 10 sobre el control óptimo H_∞ de sistemas no lineales se satisfagan. La solución $P_{\epsilon,2}$ de la ecuación de Riccati (3.9) con parámetros (3.17) nos da el valor deseado v_{2d} del cuasicontrol v_2 :

$$v_{2d} = -B_{22}^T P_{\epsilon,2}(t) \xi_2 = K_{02}(t) z_{02} + K_2(t) z_2 \quad (3.18)$$

donde $\xi_2 = (z_{02}, z_2)^T$, y $K_{02}(t)$, $K_2(t)$ son matrices dependientes del tiempo determinadas por la solución de la ecuación de Riccati (3.9) con parámetros (3.17).

Paso 3. Definimos la nueva variable z_3 como

$$z_3 = v_2 - v_{2d}. \quad (3.19)$$

Como en el primer paso, la variable z_3 puede ser obtenida usando (3.16), (3.18) y (3.19), entonces:

$$\begin{aligned} z_3 &= \bar{g}_{22}(z_{01}, z_1, z_2, t)x_3 + \bar{f}_2(z_{01}, z_1, z_2, t) - (K_{02}(t) + M_{02})z_{02} - (K_2(t) + M_2)z_2 \\ &: = \phi_3(z_{01}, z_1, z_{02}, z_2, x_3, t). \end{aligned}$$

Paso i. Este procedimiento se deberá repetir iterativamente, obteniendo en el i -ésimo paso, con $i = 3, \dots, r-1$; los siguientes valores. Eligiendo el control ficticio x_{i+1} como:

$$x_{i+1} = g_{2i}^{-1}(z_{1,\dots,z_i}, z_{01}, \dots, z_{0,i-1}, t) \left(-\bar{f}_i(z_{1,\dots,z_i}, z_{01}, \dots, z_{0,i-1}, t) + v_i + M_{0,i}z_{0,i} + M_i z_i \right) \quad (3.20)$$

donde v_i es un vector de variables de $n_{i+1} \times 1$; y $z_{0i} = \int_{-\infty}^t z_i dt$ y z_i son vectores de variables de $n_i \times 1$.

Así, obtenemos la dinámica aumentada:

$$\begin{aligned} \dot{z}_{0i} &= z_i \\ \dot{z}_i &= M_{0,i}z_{0,i} + M_i z_i + v_i + \bar{g}_{1,i}(z_1, \dots, z_i, z_{01}, \dots, z_{0,i-1}, t) w \end{aligned}$$

Entonces, los parámetros de la ecuación de Riccati para el i -ésimo bloque son:

$$\begin{aligned} A_i &= \begin{bmatrix} 0 & I_{n_i} \\ M_{0,i} & M_i \end{bmatrix}; B_{1,i}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{g}_{1,i}(0, t) \end{bmatrix}; B_{2,i} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_i} \end{bmatrix}; \\ C_i &= \begin{bmatrix} I_{n_i} & I_{n_i} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde elegimos C_i tal que cumpla con las condiciones del Teorema 9 y Lema 10. La solución $P_{\epsilon,i}(t)$ de la ecuación de Riccati (3.9) con parámetros (3.21) nos da el valor deseado $v_{i,d}$ del cuasicontrol v_i :

$$v_{i,d} = -B_{2,i}^T P_{\epsilon,i}(t) \xi_i = K_{0,i}(t) z_{0,i} + K_i(t) z_i \quad (3.22)$$

donde $\xi_i = (z_{0,i}, z_i)^T$; y $K_{0,i}(t)$, $K_i(t)$ son matrices variantes en el tiempo. Definimos el vector de variables z_{i+1} de $n_{i+1} \times 1$ como $z_{i+1} = v_i - v_{i,d}$. Usando (3.20) y (3.22) podremos obtener:

$$z_{i+1} = g_{2,i}(z_1, \dots, z_i, z_{01}, \dots, z_{0,i-1}, t) x_{i+1} + \bar{f}_i(z_1, \dots, z_i, z_{01}, \dots, z_{0,i-1}, t) \\ - (K_{0,i}(t) + M_{0,i}) z_{0,i} - (K_i + M_i)(t) z_i := \phi_{i+1}(z_1, \dots, z_i, z_{01}, \dots, z_{0,i}, x_{i+1}, t).$$

Las nuevas variables obtenidas con este procedimiento forman una transformación no lineal de los estados originales, la cual está dada por:

$$\begin{aligned} z_{01} &= \int_{-\infty}^t z_1 dt \\ z_1 &= x_1 - r(t) = \phi_1(x_1, t) \\ &\vdots \\ z_{0,i} &= \int_{-\infty}^t z_i dt \\ z_i &= g_{2,i-1}(z_1, \dots, z_{i-1}, z_{01}, \dots, z_{0,i-2}, t) x_i + f(z_1, \dots, z_{i-1}, z_{01}, \dots, z_{0,i-2}, t) \\ &\quad - (K_{0,i-1}(t) + M_{0,i-1}) z_{0,i-1} - (K_{i-1} + M_{i-1})(t) z_{i-1} \\ &\quad : = \phi_i(z_1, \dots, z_{i-1}, z_{01}, \dots, z_{0,i-1}, x_i, t) \\ z_{i+1} &= g_{2,i}(z_1, \dots, z_i, z_{01}, \dots, z_{0,i-1}, t) x_{i+1} + \bar{f}_i(z_1, \dots, z_i, z_{01}, \dots, z_{0,i-1}, t) \\ &\quad - (K_{0,i}(t) + M_{0,i}) z_{0,i} - (K_i + M_i)(t) z_i \\ &\quad : = \phi_{i+1}(z_1, \dots, z_i, z_{01}, \dots, z_{0,i}, x_{i+1}, t). \end{aligned}$$

Finalmente, la dinámica del sistema en las nuevas variables está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{z}_{01} &= z_1 \\ \dot{z}_1 &= (K_{01}(t) + M_{01}) z_{01} + (K_1(t) + M_1) z_1 + z_2 + \bar{g}_{11}(z_1, t) w(t) \\ &\vdots \\ \dot{z}_{0,i} &= z_i \\ \dot{z}_i &= (K_{0,i} + M_{0,i})(t) z_{0,i} + (K_i(t) + M_i) z_i + z_{i+1} + \bar{g}_{1,i}(z_{01}, \dots, z_{0,i-1}, z_1, \dots, z_i, t) w(t) \\ \dot{z}_r &= \bar{f}_r(x_1, \dots, x_r, z_{01}, \dots, z_{0,r-1}, t) + g_{2,r}(x_1, \dots, x_r) u \\ &\quad + \bar{g}_{1r}(z_{01}, \dots, z_{0,r-1}, z_1, \dots, z_r, t) w(t) \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\text{donde } \bar{f}_r = \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_1} [A_1 \xi_1 + B_{21} v_1] + \dots + \frac{\partial \phi_r}{\partial \xi_{r-1}} [A_{r-1} \xi_{r-1} + B_{2,r-1} v_{r-1}] + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} f_2(\cdot) + \dots + \frac{\partial \phi_r}{\partial x_r} f_r(\cdot)$$

3.3. Análisis de estabilidad

3.3.1. Existencia de Modos Deslizantes

Elegimos la superficie de deslizamiento como $s = z_r = 0$ e investigamos la estabilidad usando una función candidata de Lyapunov [14]:

$$V_s = \frac{1}{2} z_r^T z_r. \quad (3.24)$$

Derivando (3.24) obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{V}_s = & z_r^T (\bar{f}_r(x_1, \dots, x_r, z_{01}, \dots, z_{0,r-1}, t) + \bar{g}_{1,r}(z_{01}, \dots, z_{0,r-1}, z_1, \dots, z_r, t) w(t)) \\ & + z_r^T g_{2,r}(x_1, \dots, x_r, t) u \end{aligned} \quad (3.25)$$

y la ley de control discontinua está dada por

$$u = -k_r \text{sign}(\bar{z}_r), \text{ with } k_r > 0 \quad (3.26)$$

donde:

$$\bar{z}_r = g_{2,r}^T z_r, z_r^T = \bar{z}_r^T g_{2,r}^{-1} \quad (3.27)$$

La ecuación (3.25) tiene la forma:

$$\dot{V}_s = \bar{z}_r^T g_{2,r}^{-1} (\bar{f}_r(x_1, \dots, x_r, z_{01}, \dots, z_{0,r-1}, t) + \bar{g}_{1,r}(z_{01}, \dots, z_{0,r-1}, z_1, \dots, z_r, t) w(t)) - k_r \|\bar{z}_r\|_1$$

donde $\|\bar{z}_r\|_1 = \bar{z}_r^T \text{sign}(\bar{z}_r)$. Como $\|\bar{z}_r\|_1 \geq \|\bar{z}_r\|_2$, la derivada es:

$$\dot{V}_s \leq - \left(k_r - \|g_{2,r}^{-1} (\bar{f}_r(x_1, \dots, x_r, z_{01}, \dots, z_{0,r-1}, t) + \bar{g}_{1,r}(z_{01}, \dots, z_{0,r-1}, z_1, \dots, z_r, t) w(t))\|_2 \right) \|\bar{z}_r\|_2$$

Entonces, para alcanzar la superficie de modos deslizantes se debe cumplir que:

$$k_r > \|g_{2,r}^{-1} (\bar{f}_r + \bar{g}_{1,r} w(t))\|_2 \quad (3.28)$$

lo que garantiza la existencia de los modos deslizantes en la superficie $z_r = 0$ en un tiempo finito y además estos modos son estables.

3.3.2. Análisis en la superficie deslizante

Ahora, una vez que el sistema está confinado a la superficie deslizante $z_r = 0$, la dinámica del sistema (3.23) se reduce a:

$$\begin{aligned} \dot{z}_{01} &= z_1 \\ \dot{z}_1 &= (K_{01}(t) + M_{01}) z_{01} + (K_1(t) + M_1) z_1 + z_2 + \bar{g}_{11}(z_1, t) w(t) \\ &\vdots \\ \dot{z}_{0,i} &= z_i \\ \dot{z}_i &= (K_{0,i}(t) + M_{0,i}) z_{0,i} + (K_i(t) + M_i) z_i + \bar{g}_{1,i}(z_{01}, \dots, z_{0,i-1}, z_1, \dots, z_i, t) w(t); \\ &\text{para } i = 2, \dots, r-1. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Podemos ver que la estructura del sistema (3.29) se asemeja a un sistema lineal, variante en el tiempo con perturbación no desvaneciente; en efecto tenemos:

$$\dot{\xi} = A(t) \xi + g_1(\xi, t) w \quad (3.30)$$

donde $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{r-1})^T$ y $\xi_{(i)} = (z_{0(i)}, z_{(i)})^T$ para $i = 1, \dots, r-1$. Además

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & I_m & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ K_{01}(t) + M_{01} & K_1(t) + M_1 & 0 & I_m & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & K_{0,r-1}(t) + M_{0,r-1} & K_{r-1}(t) + M_{r-1} \end{bmatrix}$$

$$, g_1(\xi, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{g}_{11}(\xi_1, t) \\ 0 \\ \bar{g}_{1,r-1}(\xi_1, \dots, \xi_{r-1}, t) \end{bmatrix}.$$

Los subsistemas usados para calcular el cuasicontrol con control optimo H_∞ son:

$$\dot{\xi}_i = A_i(t) \xi_i + B_{2,i} v_i + g_{1,i}(\xi_1, \dots, \xi_i, t) w, \quad i = 1, \dots, r-1$$

con $A_i = \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ M_{0,i}(t) & M_i(t) \end{bmatrix}$, $B_{2,i} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_i} \end{bmatrix}$ $B_{1,i}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{g}_{1i}(0, t) \end{bmatrix}$

A cada uno de estos subsistemas se le asocia una ecuación de Riccati y su respectiva matriz P_ϵ , definidos como:

$$-\dot{P}_{\epsilon,i} = P_{\epsilon,i}(t) A_i(t) + A_i^T(t) P_{\epsilon,i}(t) + C_i^T(t) C_i(t) \quad (3.31)$$

$$+ P_{\epsilon,i}(t) \left[\frac{1}{\gamma_i^2} B_{1,i} B_{1,i}^T - B_{2,i} B_{2,i}^T \right] (t) P_{\epsilon,i}(t) + \epsilon_i I$$

Sea P una matriz diagonal a bloques donde cada elemento de la diagonal es una matriz $P_{\epsilon,i}$, es decir tiene la forma:

$$P_\epsilon = \begin{bmatrix} P_{\epsilon,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_{\epsilon,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P_{\epsilon,r-1} \end{bmatrix}$$

Se propone la función $V = \xi^T P_\epsilon \xi$ como una función de Lyapunov para el sistema (3.30). Desarrollando obtenemos:

$$V = \xi_1^T P_{\epsilon,1} \xi_1 + \xi_2^T P_{\epsilon,2} \xi_2 + \dots + \xi_{r-1}^T P_{\epsilon,r-1} \xi_{r-1}. \quad (3.32)$$

Tomando la derivada de (3.32) tenemos:

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^{r-1} \left[(\xi_i^T A_i^T(t) + w^T g_{1,i}^T(\xi_1, \dots, \xi_i, t) + v_i^T B_{2,i}^T(t)) P_{\epsilon,i} \xi_i \right. \quad (3.33)$$

$$\left. + \xi_i^T P_{\epsilon,i} (A_i(t) \xi_i + B_{2,i} v_i + g_{1i}(\xi_1, \dots, \xi_i, t) w) + \xi_i^T P_{\epsilon,i} \xi_i \right]$$

Ahora tomamos el valor de las variables de cuasicontrol v_i . De (3.22) sabemos que

$$v_i = \xi_{i+1} - \frac{1}{2} B_{2,i}^T P_{\epsilon,i}(t) \xi_i \quad (3.34)$$

Substituimos esta relación en (3.33) para obtener

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \sum_{i=1}^{r-1} [\xi_i^T (A_i^T P_{\epsilon,i} + P_{\epsilon,i} A_i - P_{\epsilon,i} B_{2,i} B_{2,i}^T P_{\epsilon,i}) (t) \xi_i \\ & + \xi_i^T P_{\epsilon,i}(t) \xi_i + w^T g_{1,i}^T(\xi_1, \dots, \xi_i, t) P_{\epsilon,i} \xi_i \\ & + \xi_i^T P_{\epsilon,i} g_{1,i}(\xi_1, \dots, \xi_i, t) w + \xi_{i+1}^T B_{2,i}^T P_{\epsilon,i}(t) \xi_i + \xi_i^T P_{\epsilon,i}(t) B_{2,i} \xi_{i+1}] \end{aligned} \quad (3.35)$$

tomando en cuenta que $\xi_r = 0$ en la superficie deslizante.

Usamos (3.31) para simplificar y lo sustituimos en (3.35).

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \sum_{i=1}^{r-1} [\xi_i^T (A_i^T P_{\epsilon,i} + P_{\epsilon,i} A_i - P_{\epsilon,i} B_{2,i} B_{2,i}^T P_{\epsilon,i}) (t) \xi_i \\ & - \xi_i^T (P_{\epsilon,i} A_i + A_i^T P_{\epsilon,i} + C_i^T C_i \\ & + P_{\epsilon,i} \left[\frac{1}{\gamma_i^2} B_{1,i} B_{1,i}^T - B_{2,i} B_{2,i}^T \right] P_{\epsilon,i} + \epsilon_i I) \xi_i \\ & + w^T g_{1,i}^T(\xi_1, \dots, \xi_i, t) P_{\epsilon,i} \xi_i + \xi_i^T P_{\epsilon,i} g_{1,i}(\xi_1, \dots, \xi_i, t) w \\ & + \xi_i^T B_{2,i}^T P_{\epsilon,i}(t) \xi_i + \xi_i^T P_{\epsilon,i}(t) B_{2,i} \xi_{i+1}] \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \sum_{i=1}^{r-1} \left[-\xi_i^T \left(C_i^T C_i + \frac{1}{\gamma_i^2} P_{\epsilon,i}(t) B_{Ri1}(t) B_{Ri1}^T(t) P_{\epsilon,i}(t) + \epsilon_i I \right) \xi_i \right. \\ & + w^T g_{1,i}^T(\xi_1, \dots, \xi_i, t) P_{\epsilon,i}(t) \xi_i + \xi_i^T P_{\epsilon,i}(t) g_{1,i}(\xi_1, \dots, \xi_i, t) w \\ & \left. + \xi_{i+1}^T B_{2,i}^T P_{\epsilon,i}(t) \xi_i + \xi_i^T P_{\epsilon,i}(t) B_{2,i} \xi_{i+1} \right] \end{aligned} \quad (3.37)$$

En este punto usamos la siguiente relación para simplificar los términos cruzados en (3.37).

$$X^T Y + Y^T X \leq X^T R X + Y^T R^{-1} Y, \quad R > 0. \quad (3.38)$$

Haciendo

$$\begin{aligned} R &= I_{n_i} \\ X_i &= B_{2,i}(t) \xi_{i+1} \\ Y_i &= P_{\epsilon,i} \xi_i \end{aligned}$$

podemos simplificar (3.37) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \sum_{i=1}^{r-1} \left[-\xi_i^T \left(C_i^T C_i + \frac{1}{\gamma_i^2} P_{\epsilon,i}(t) B_{1,i}(t) B_{1,i}^T(t) P_{\epsilon,i}(t) + \epsilon_i I \right) \xi_i \right. \\ & + w^T g_{1,i}^T(\xi_1, \dots, \xi_i, t) P_{\epsilon,i}(t) \xi_i + \xi_i^T P_{\epsilon,i}(t) g_{1,i}(\xi_1, \dots, \xi_i, t) w \\ & \left. + \xi_{i+1}^T B_{2,i}^T B_{2,i} \xi_{i+1} + \xi_i^T P_{\epsilon,i}(t) P_{\epsilon,i}(t) \xi_i \right] \end{aligned} \quad (3.39)$$

En este punto usamos la suposición estandar del control H_∞ de la peor perturbación considerada. Definimos $w_{worst,i}$ como

$$w_{worst,i} = \frac{1}{2\gamma_i^2} g_{1,i}^T(\xi_1, \dots, \xi_i, t) P_{\epsilon,i}(t) \xi_i$$

Sustituimos este valor en (3.39).

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \sum_{i=1}^{r-1} \left[-\xi_i^T \left(C_i^T C_i + \frac{1}{\gamma_i^2} P_{\epsilon,i}(t) B_{1,i}(t) B_{1,i}^T(t) P_{\epsilon,i}(t) + \epsilon_i I \right) \xi_i \right. \\ & + \frac{1}{\gamma_i^2} \xi_i^T P_{\epsilon,i}(t) g_{1,i}(\xi_1, \dots, \xi_i, t) g_{1,i}^T(\xi_1, \dots, \xi_i, t) P_{\epsilon,i}(t) \xi_i \\ & \left. + \xi_{i+1}^T B_{2,i}^T B_{2,i} \xi_{i+1} + \xi_i^T P_{\epsilon,i}(t) P_{\epsilon,i}(t) \xi_i \right]. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Dado que el término $g_{1,i}(\cdot)$ es acotado, podemos escribir

$$\frac{1}{\gamma_i^2} \xi_i^T P_{\epsilon,i}(t) g_{1,i}(\cdot) g_{1,i}^T(\cdot) P_{\epsilon,i}(t) \xi_i = \frac{1}{\gamma_i^2} \xi_i^T P_{\epsilon,i}(t) B_{1,i}(t) B_{1,i}^T(t) P_{\epsilon,i}(t) \xi_i + o_{t,i}(\|\xi\|).$$

Ahora, definimos $Q_i = C_i^T C_i$ y $R_i = B_{2,i} B_{2,i}^T$ para poder expresar (3.40) como

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \sum_{i=1}^{r-1} \left[-\xi_i^T \left(Q_i + \frac{1}{\gamma_i^2} P_{\epsilon,i}(t) B_{1,i}(t) B_{1,i}^T(t) P_{\epsilon,i}(t) + \epsilon_i I \right) \xi_i \right. \\ & + \frac{1}{\gamma_i^2} \xi_i^T P_{\epsilon,i}(t) B_{1,i}(t) B_{1,i}^T(t) P_{\epsilon,i}(t) \xi_i + o_{t,i}(\|\xi\|) \\ & \left. + \xi_{i+1}^T R_i \xi_{i+1} + \xi_i^T P_{\epsilon,i}(t) P_{\epsilon,i}(t) \xi_i \right] \end{aligned}$$

Entonces

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^{r-1} -\xi_i^T (Q_i + \epsilon_i I) \xi_i + o_{t,i}(\|\xi\|) + \xi_{i+1}^T R_i \xi_{i+1} + \xi_i^T P_{\epsilon,i}(t) P_{\epsilon,i}(t) \xi_i$$

Aplicamos normas a (3.40) para obtener

$$\dot{V} \leq \sum_{i=1}^{r-1} \left[-\|\xi_i\|_2^2 (\|Q_i\|_2 + \epsilon_i) + \|P_{\epsilon,i}(t)\|_2^2 \|\xi_i\|_2^2 + o_{t,i}(\|\xi\|) + \|R_i(t)\|_2 \|\xi_{i+1}\|_2^2 \right]$$

Ahora agrupamos los términos comunes

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\|\xi_1\|_2^2 (\|Q_1\|_2 + \varepsilon_1 - \|P_{\varepsilon,1}(t)\|_2^2) + o_{t,1}(\|\xi_1\|) \\ & + \sum_{i=2}^{r-1} [-\|\xi_i\|_2^2 (\|Q_i\|_2 + \varepsilon_i - \|R_{i-1}(t)\|_2 - \|P_{\varepsilon,i}(t)\|_2^2) + o_{t,i}(\|\xi_i\|)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\|\xi_1\|_2^2 (\lambda_{\max}(Q_1) + \varepsilon_1 - \lambda_{\max}^2(P_{\varepsilon,1}(t))) + o_{t,1}(\|\xi_1\|) \\ & + \sum_{i=2}^{r-1} [-\|\xi_i\|_2^2 (\lambda_{\max}(Q_i) + \varepsilon_i - \lambda_{\max}(R_{i-1}(t)) - \lambda_{\max}^2(P_{\varepsilon,i}(t))) + o_{t,i}(\|\xi_i\|)] \end{aligned}$$

Basándonos en esto, las condiciones para la estabilidad local serán

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}(Q_1) + \frac{\varepsilon_1}{2} - \lambda_{\max}^2(P_{\varepsilon,1}(t)) &> 0 \\ &\vdots \\ \lambda_{\max}(Q_i) + \frac{\varepsilon_i}{2} - \lambda_{\max}(R_{i-1}) - \lambda_{\max}^2(P_{\varepsilon,i}(t)) &> 0 \\ &\vdots \\ \lambda_{\max}(Q_{r-1}) + \frac{\varepsilon_{r-1}}{2} - \lambda_{\max}(R_{r-2}) - \lambda_{\max}^2(P_{\varepsilon,r-1}(t)) &> 0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

Podemos concluir que la respuesta del sistema (3.30) es localmente exponencialmente estable.

3.3.3. Teorema de estabilidad

(C2) Existe una solución $P_i(t)$ acotada, semidefinida positiva y simétrica de la ecuación de Riccati:

$$\begin{aligned} -\dot{P}_i(t) = & P_i(t) A_i(t) + A_i^T(t) P_i(t) + C_i^T(t) C_i(t) \\ & + P_i(t) \left[\frac{1}{\gamma_i^2} B_{1,i} B_{1,i}^T - B_{2,i} B_{2,i}^T \right] (t) P_i(t) \end{aligned}$$

tal que el sistema:

$$\dot{\xi}_i = [A_i - (B_{2,i} B_{2,i}^T - \gamma_i^{-2} B_{1,i}(t) B_{1,i}^T(t)) P_i(t)] \xi_i$$

sea exponencialmente estable.

Ahora establecemos en el siguiente teorema nuestro resultado mas importante.

Teorema 12 Si se satisface la condición (C2), y si existe una solución $P_{\varepsilon,i}(t)$ definida positiva, simétrica y acotada de (3.31) para cada $\varepsilon_i \in (0, \varepsilon_{0,i})$, $i = 1, \dots, r-1$, y si satisfacen las condiciones (3.28) y (3.41), entonces la ley de control discontinua definida por (3.26), (3.27) estabiliza localmente asintóticamente el sistema (3.2) y hace que la ganancia \mathcal{L}_2 del error de seguimiento z_1 del sistema en lazo cerrado sea menor a γ_1 ,

Prueba. La estabilidad local asintótica está ya demostrada en el análisis de estabilidad hecho en la sección 3.3.2. Ahora demostraremos la parte de la ganancia \mathcal{L}_2 . Por el teorema 9 sabemos que para cada bloque se cumple:

$$\int_{t_0}^{t_1} \|y_i(t)\|^2 dt < \gamma_i^2 \int_{t_0}^{t_1} \|w(t)\|^2 dt$$

donde $y_i = C_i \xi_i$. Para el primer bloque tenemos:

$$\int_{t_0}^{t_1} \|y_1(t)\|^2 dt < \gamma_1^2 \int_{t_0}^{t_1} \|w(t)\|^2 dt$$

Tomando al error de seguimiento, como $z_1(t)$, podemos asegurar que

$$\|z_1(t)\|^2 \leq \|y_1(t)\|^2$$

dado que las matrices C_i son matrices de diseño. Entonces concluimos

$$\int_{t_0}^{t_1} \|z_1(t)\|^2 dt < \gamma_1^2 \int_{t_0}^{t_1} \|w(t)\|^2 dt$$

con lo que se demuestra la parte restante del teorema. ■

Corolario I. *Si las condiciones del teorema 12 se satisfacen y el sistema (3.2) es autónomo, y la señal de referencia $r(t) = r = \text{constante}$, la perturbación $w(t) = w = \text{constante}$ y $g_{1,i} = B_{1,i} = \text{constante}$, entonces el error de control z_1 tiende a cero asintóticamente y la solución será semiglobal; es decir, la superficie deslizante será infinita y la estabilidad dependerá de que se garantice la convergencia a dicha superficie.*

Prueba. Las condiciones de este corolario reducen el sistema al caso presentado en [28].

Capítulo 4

Modelado

El sistema hidráulico se utiliza como caso de estudio para verificar la eficacia del controlador propuesto. En este capítulo se presenta la obtención del modelo del actuador y la electroválvula (Actuador Electro-Hidráulico) a partir de las ecuaciones físicas que describen el sistema. Además se presentan algunos modelos de Electroválvulas de Segundo y Tercer orden y su reducción a modelos de primer orden para ser utilizadas posteriormente en el diseño del controlador.

El capítulo está organizado de la siguiente forma: En la sección 4.1, se presentan algunas características de la planta. En la sección 4.2, se discute la obtención del modelo a partir de las ecuaciones físicas, incluyendo algunos modelos de servoválvulas que pueden ser incorporadas a nuestro modelo, por medio de aproximaciones de primer orden.

4.1. Características de la Planta

La planta utilizada en este trabajo de tesis está conformada por un actuador hidráulico de doble acción, manejado por una electroválvula representada por una función de transferencia de primer orden. Se considera en nuestro caso que el émbolo del actuador está sujeto en uno de sus extremos a dos cargas mecánicas en paralelo: un resorte y un amortiguador. Estas cargas representan fuerzas de oposición a la fuerza motriz impuesta por el actuador, como se muestra en la figura 4.1.

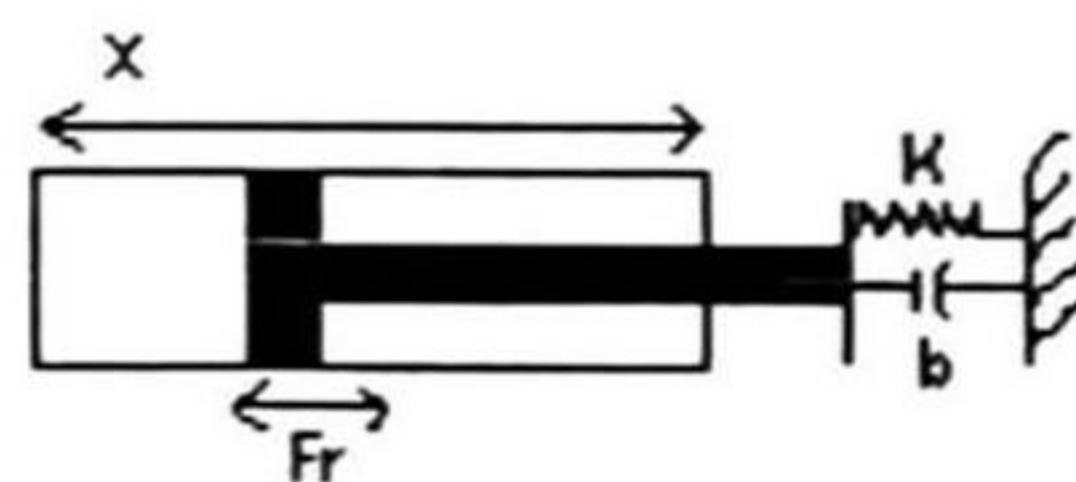


Figura 4.1: Pistón con cargas

donde x , es el desplazamiento, Fr , la fricción interna y k , b son constantes características de las cargas (resorte y amortiguador respectivamente) a las cuales nos referiremos con mayor

detalle más adelante. A manera de tener un mayor conocimiento de la planta en cuestión y de la manera en que esta opere en un ambiente real automatizado, enseguida se presenta un diagrama esquemático (figura 4.2), el cual incluye los diversos sensores de posición, fuerza y presión así como una bomba hidráulica, deposito de líquidos y circuitería electrónica para operar la electroválvula.

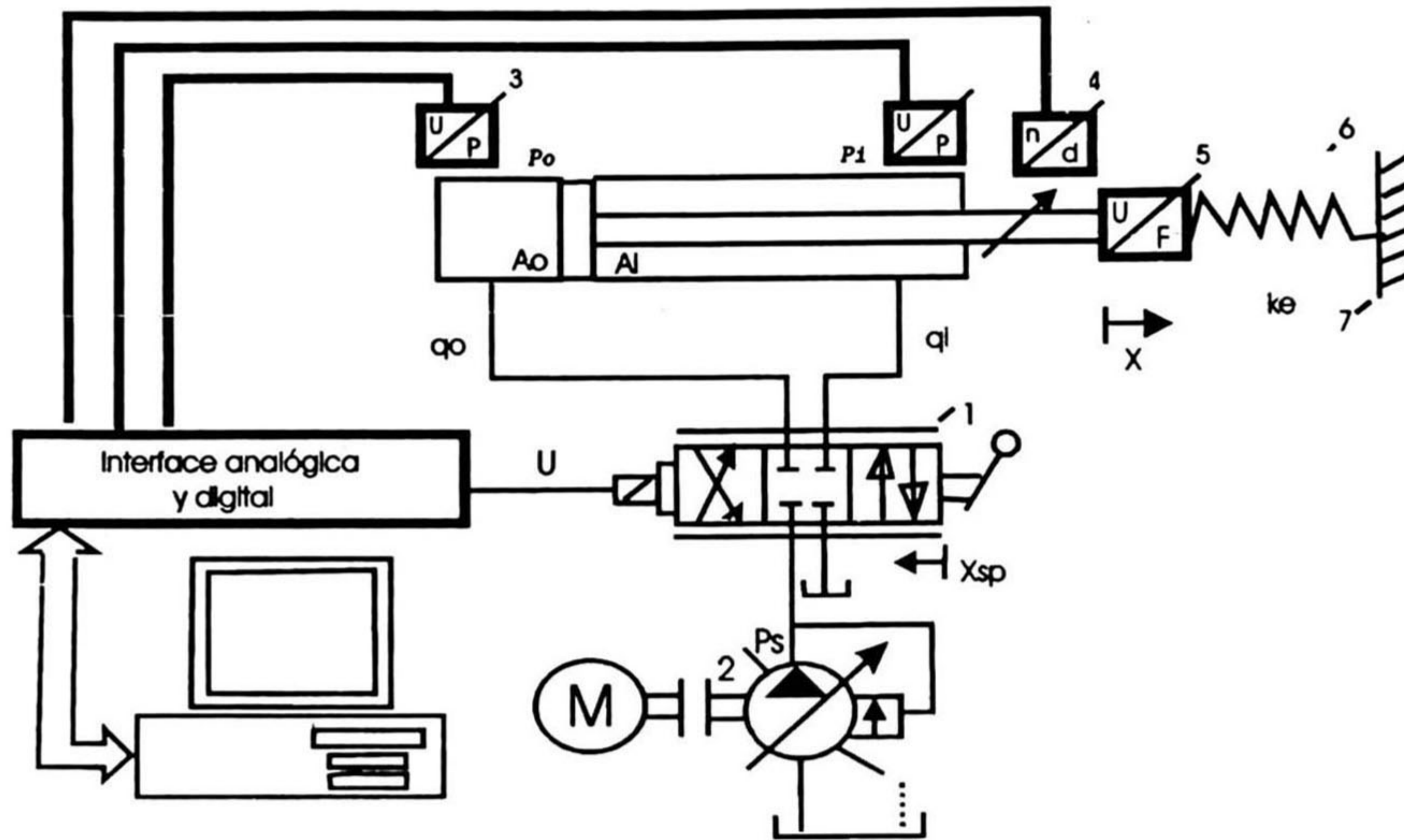


Figura 4.2: Diagrama del sistema que ejemplifica la posible implementación

donde,

- | | |
|--------------------------------|----------------------|
| 1.-Válvula Proporcional | 5.-Sensor de Fuerza |
| 2.-Bomba con Presión Constante | 6.-Ambiente o Cargas |
| 3.-Transductor de Presión | 7.-Soporte Rígido |
| 4.-Encoder Incremental | |

La señal de control u es convertida a una señal analógica en la tarjeta o interfase analógica-digital (A/D) y posteriormente transmitida al amplificador de la servoválvula hidráulica; así mismo las señales analógicas provenientes de los diferentes sensores son convertidas a señales digitales en la interfase digital-analógica (D/A) para ser enviadas a la computadora personal y ser procesadas de acuerdo a algún algoritmo preprogramado, el cual produce la señal de control antes mencionada [3].

4.2. Obtención del Modelo del Actuador Electro-Hidráulico

Para obtener el sistema en ecuaciones de estado, con base a las ecuaciones físicas del sistema, primero analizamos el subsistema mecánico formado por el equilibrio de fuerzas actuantes en el émbolo; de estas obtendremos las primeras dos ecuaciones de estado, y después

de la ecuación que describe la dinámica de un cilindro hidráulico, es obtenida una tercer ecuación que conforma el subsistema hidráulico. Finalmente se realiza una aproximación de la Electro-Válvula con una función de primer orden para completar así nuestro sistema de cuatro ecuaciones de estado, que será utilizado posteriormente para el diseño de los algoritmos de control ??.

4.2.1. Subsistema Mecánico

Las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento de la dinámica del pistón con carga pueden ser obtenidas del esquema de fuerzas (figura 4.3) actuantes en el émbolo.



Figura 4.3: Fuerzas actuantes en el émbolo

Usando la segunda ley de Newton, tenemos que la sumatoria de fuerzas actuantes en el émbolo producen en éste una aceleración proporcional en dirección y magnitud a la fuerza resultante, y expresamos esto con la siguiente ecuación

$$ma = \sum f_i = -k_s x_p - b_d v_p + \Lambda_a P_L - F_r \quad (4.1)$$

donde x_p es la posición del pistón, $v_p = \frac{dx}{dt}$ es la velocidad del pistón, a es la aceleración del pistón $a = \frac{dv_p}{dt}$, $\sum f_i$ representa a las fuerzas que actúan en el sistema, P_L es la presión de carga, F_r es la fricción interna en el émbolo o pistón, m es la masa del actuador, k_s es la carga por rigidez del resorte, b_d es la carga por amortiguamiento viscoso y Λ_a es el área del pistón. Definiendo como variables de estado $x_1 = x_p$, $x_2 = v_p$, y $x_3 = P_L$, y además agregando una fuerza externa constante a manera de perturbación representada por M , obtenemos el modelo en espacio de estados para el subsistema mecánico como sigue:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4.2)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m} (-k_s x_1 - b_d x_2 + \Lambda_a x_3 - F_r - M). \quad (4.3)$$

Modelo de Fricción

Los modelos de fricción utilizados en la literatura para representar las fuerzas de resistencia o roce de este tipo de mecanismos hidráulicos son muy variados; el utilizado aquí se obtuvo de [3] y es un modelo de fricción que incorpora fricción estática, fricción de Coulomb y efecto Stribeck, lo cual lo hace un modelo muy completo. Una gráfica fricción-velocidad

típica de este modelo de fricción se muestra en la figura 4.4. En el modelo de fricción de Karnopp, existen dos puntos clave:

(1) La fase de *stick* o fase pegajosa que ocurre cuando la velocidad está dentro de un pequeño rango de velocidad crítica en lugar de solamente cuando la velocidad es exactamente cero.

(2) Existe un valor máximo para la fricción cuando la masa bajo consideración se pega. Este valor máximo lo denotaremos como $F_{fstatic}$; esto es lo que comúnmente conocemos como fricción de Coulomb. Sin embargo, dentro de la región de *stick* o pegajosa, la amplitud de la fricción no es solamente un valor constante multiplicado por el signo de la velocidad como es el caso del modelo común de fricción de Coulomb.

Una vez que la amplitud de la suma de las otras fuerzas exceda $F_{fstatic}$ la fase pegajosa no puede ser mantenida y la masa bajo consideración se deslizará (*slip*). El efecto Stribeck es también considerado en el modelo que se utilizó. Si el rango del efecto Stribeck es pequeño, la relación fricción-velocidad podría ser aproximada como lineal, con pendiente negativa.

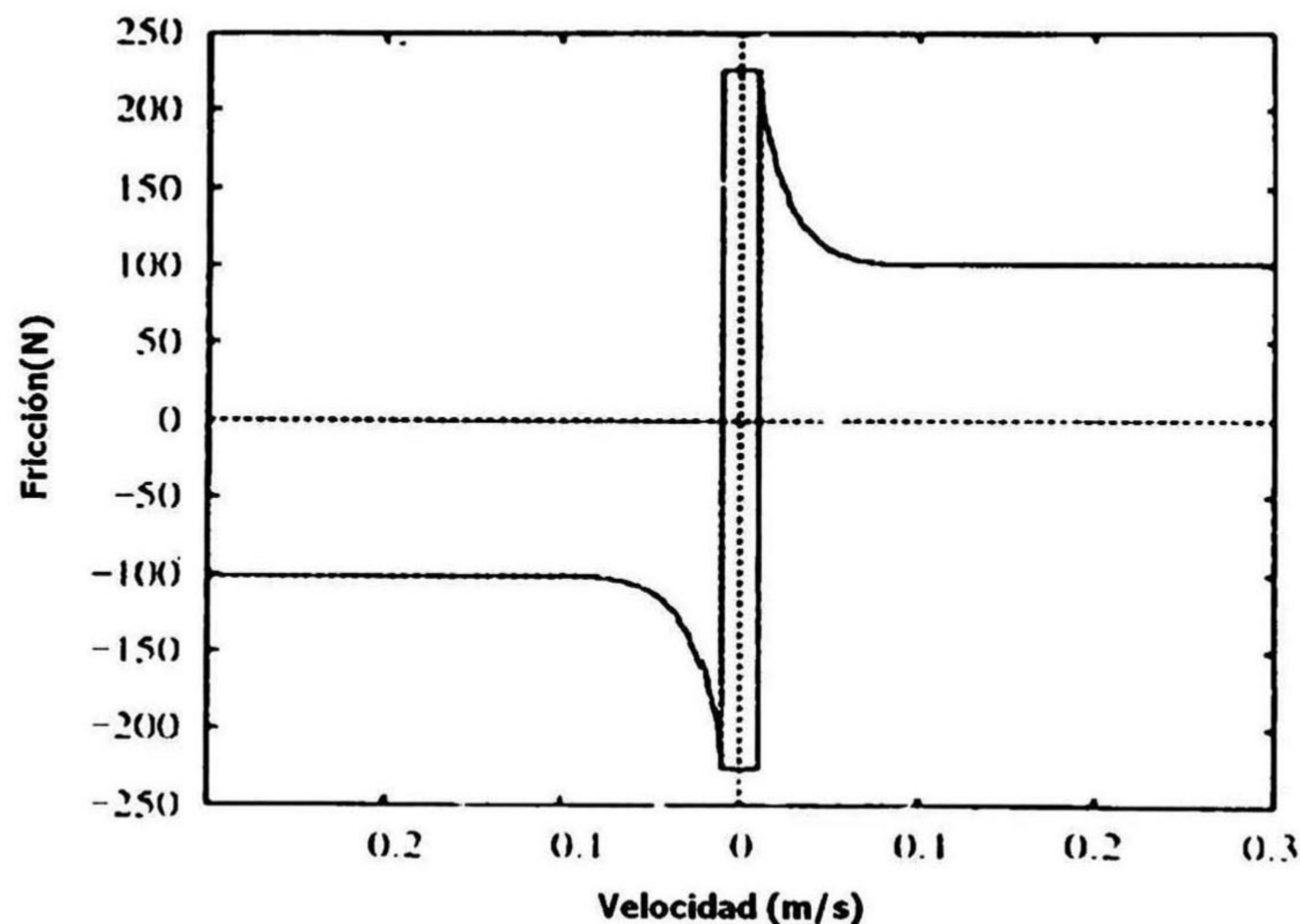


Figura 4.4: Modelo de Fricción

Este modelo de fricción fue programado en una tabla de simulink de Matlab, para ser incluido en el modelo del sistema usado para simulaciones.

4.2.2. Subsistema Hidráulico

Las dinámicas del cilindro son derivadas en [22] para un actuador hidráulico simétrico. Definiendo la presión de carga como la presión a lo largo del pistón, su derivada está dada

por el flujo de carga total a través del actuador dividida por la capacitancia del fluido.

$$\frac{V_t}{4\beta_e} \dot{P}_L = -\Lambda_a \dot{x}_p - C_{tm} P_L + Q_L \quad (4.4)$$

donde V_t es el volumen total del actuador, β_e es el modulo bulk efectivo, x_p es la posición del pistón, C_{tm} es el coeficiente total de fuga debido a la presión y Q_L es el flujo turbulento de un fluido hidráulico a través de un orificio. La relación entre el desplazamiento de la válvula de carrete x_v , y el flujo de carga Q_L , está dado como

$$Q_L = C_d w x_v \sqrt{\frac{P_s - \text{sgn}(x_v) P_L}{\rho}} \quad (4.5)$$

donde C_d es el coeficiente de descarga, w es el gradiente de área de la válvula de carrete, y ρ es la densidad del fluido hidráulico. El gradiente de área del carrete para un carrete cilíndrico puede ser aproximado simplemente como la circunferencia de la válvula en cada puerto. De esta forma combinando (4.4) y (4.5), obtenemos la ecuación de estado de la presión de carga

$$\dot{P}_L = \frac{4\beta_e}{V_t} \left(-\Lambda_a v_p - C_{tm} P_L + C_d w x_v \sqrt{\frac{P_s - \text{sgn}(x_v) P_L}{\rho}} \right). \quad (4.6)$$

o bien en términos de nuestras variables de estado tomando $x_v = x_4$ tenemos

$$\dot{x}_3 = -\alpha x_2 - \beta x_3 + \gamma x_4 \sqrt{P_s - \text{sgn}(x_v) x_3} \quad (4.7)$$

donde los parámetros constantes usados son equivalentes a lo siguiente:

$$\begin{aligned} \alpha &= (4\Lambda_a \beta_e / V_t) \\ \beta &= (4C_{tm} \beta_e / V_t) \\ \gamma &= (4C_d w \beta_e / V_t) \sqrt{1/\rho}. \end{aligned}$$

4.2.3. Subsistema de Servoválvula

La cuarta y última ecuación de estado, propuesta en el modelo de nuestra planta, corresponde a la representación de la dinámica de la electroválvula, aproximada mediante una función de transferencia de primer orden de la siguiente forma

$$\frac{x_v(s)}{u(s)} = K_a \frac{1/\tau}{s + (1/\tau)} \quad (4.8)$$

Tomando la antitransformada de Laplace de (4.8) y con x_v como la variable de estado x_4 , obtenemos la cuarta ecuación de estado como

$$\dot{x}_4 = -\frac{1}{\tau} x_4 + \frac{K_a}{\tau} u. \quad (4.9)$$

K_a es una constante de proporcionalidad o ganancia de conversión que convierte la señal de salida de la función transferencia en un valor de desplazamiento efectivo en metros por parte del carrete de la válvula, τ es la constante de tiempo de la válvula y de ésta depende la velocidad de respuesta de la electroválvula usada. Las formas de llegar a esta representación de primer orden se discuten a continuación.

Los modelos matemáticos para componentes de sistemas hidráulicos han sido desarrollados con anterioridad por otros investigadores y están disponibles en varios libros de normas y manuales de componentes. Entre estos componentes, las válvulas de control de flujo son las más importantes porque éstas afectan de manera más directa las propiedades dinámicas del sistema. Entre las válvulas típicas de control de flujo encontramos las servo válvulas o válvulas proporcionales.

Varios modelos de electroválvulas han sido usados para el control y automatización de sistemas hidráulicos. En la literatura podemos encontrar modelos aproximados de primer orden como el propuesto aquí en (4.9), o bien de segundo o tercer orden. Estas electroválvulas hacen uso de diferentes tecnologías para convertir la entrada eléctrica en desplazamiento o apertura proporcional de la válvula. Entre las más usuales tenemos las que usan electro mecanismos comunes como solenoides o bien motores lineales que mejoran el desempeño de las electroválvulas.

Las válvulas proporcionales y servoválvulas son usadas para regular las tasas de flujo del aceite, y por tanto el movimiento del actuador. Debido a la naturaleza del flujo en el orificio dentro del cuerpo de la válvula, estas válvulas son la mayor fuente de no linealidades en sistemas hidráulicos. La propiedad de flujo no lineal se presenta sin importar el grado de precisión con que sea construido el cuerpo de la válvula o la parte interna del carrete. Además la mayor parte de las válvulas exhiben otro tipo de no linealidades tales como zonas muertas debido a traslapes del carrete de la válvula, histéresis debida a las propiedades magnéticas de la bobina solenoide, fricción y fuerzas no lineales de flujo.

Es por esto que sin un análisis apropiado y herramientas de diseño adecuadas, los beneficios de los servo sistemas hidráulicos podrían ser atenuados por tener que lidiar con los problemas propios de las no linealidades de estos sistemas.

4.2.4. Obtención de Modelos de Primer Orden

Como se ha mencionado anteriormente, en el modelo propuesto para nuestra planta (4.9), la electroválvula está representada por una función de transferencia de primer orden (4.8). En la literatura podemos encontrar diversos modelos de electroválvulas, sin embargo muchos de ellos son modelos de orden mayor a uno. Es necesario aproximar estos modelos con funciones de transferencia de primer orden para poder ser incorporados al modelo de la planta y posteriormente realizar el diseño de algoritmos de control y simulaciones considerando estas aproximaciones.

A continuación se muestran algunos de los modelos encontrados y su respectiva representación aproximada con funciones de primer orden ya sea por medio de análisis de respuesta

a entrada escalón, análisis de respuesta en frecuencia o mediante la técnica de perturbación singular que se explica con detalle en el capítulo 3.

Aproximación por Análisis de Respuesta en Frecuencia

En [15] encontramos el resultado del análisis de respuesta en la frecuencia de la dinámica de una electroválvula direccional de 4 vías. Se trata de una electroválvula de alto desempeño Moog DDV-633, (DDV, *Direct Drive Valve*) que usa un motor lineal de magneto permanente con retroalimentación análoga para posicionar el carrete de la válvula. Las respuestas en la frecuencia fueron tomadas con un analizador de frecuencias digital. Se encontró que un modelo lineal de segundo orden puede reproducir la respuesta en frecuencia medida. El modelo encontrado fue el siguiente:

$$\frac{2,4315 \times 10^5}{s^2 + 6,2529 \times 10^2 s + 2,5676 \times 10^5} \quad (4.10)$$

Este modelo puede ser aproximado por un modelo de primer orden como el siguiente,

$$\frac{k_a}{\tau s + 1} \quad (4.11)$$

donde $\tau = 1/573 \text{ s}^{-1}$ es la constante de tiempo de la función de transferencia y $k_a = 0,947$ es la ganancia de conversión.

En la figura 4.5 se muestra un comparativo entre la respuesta a la frecuencia medida y la respuesta de las funciones aproximadas de primer y segundo orden. Arriba de 5 hz la diferencia de magnitud entre la respuesta del modelo de primer orden y la respuesta medida es de apenas 2%, mientras que la diferencia de fase es de cerca de 3%.

Otro modelado para servo válvula encontrado en la literatura, el cual es una representación más completa de un modelo de servo válvula de solenoide, es presentado en [2] y consta de tres ecuaciones de estado como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 &= x_5 \\ \dot{x}_5 &= x_6 \\ \dot{x}_6 &= \frac{-k_h k_w \omega_n^2}{k_f A_v} x_4 - \omega_n^2 x_5 - 2\zeta \omega_n x_6 + \frac{k_h k_t \omega_n^2}{k_f A_v} u \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde k_w es la retroalimentación de rigidez del alambre, k_h es la ganancia de amplificación hidráulica, k_f rigidez neta de armadura, A_v área de fin de carrete, ω_n es la frecuencia natural de la primera etapa, ζ es el radio de amortiguamiento de la primera etapa, k_t es la ganancia de torque de motor.

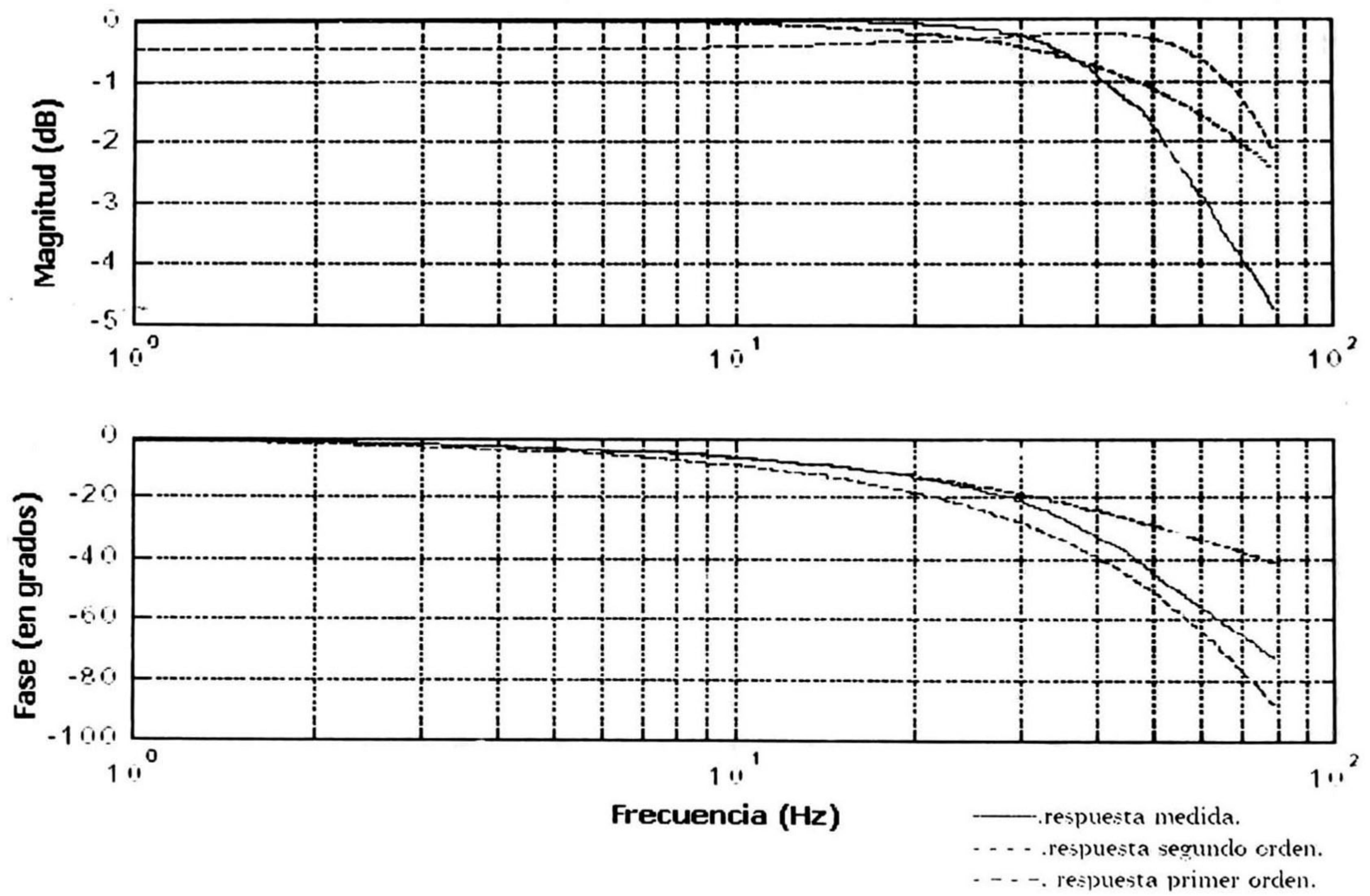


Figura 4.5: Diagrama comparativo de la respuesta en frecuencia de la aproximación 4.10 y 4.11

Aproximación Usando La Respuesta a Entrada Escalón

La ecuación de estados (4.12) se puede representar con una función de primer orden obtenida a partir de ajustar los parámetros de una función de la forma de (4.8) mediante la comparación de las salidas de ambos sistemas a una entrada escalón como lo muestra el diagrama de la figura 4.6.

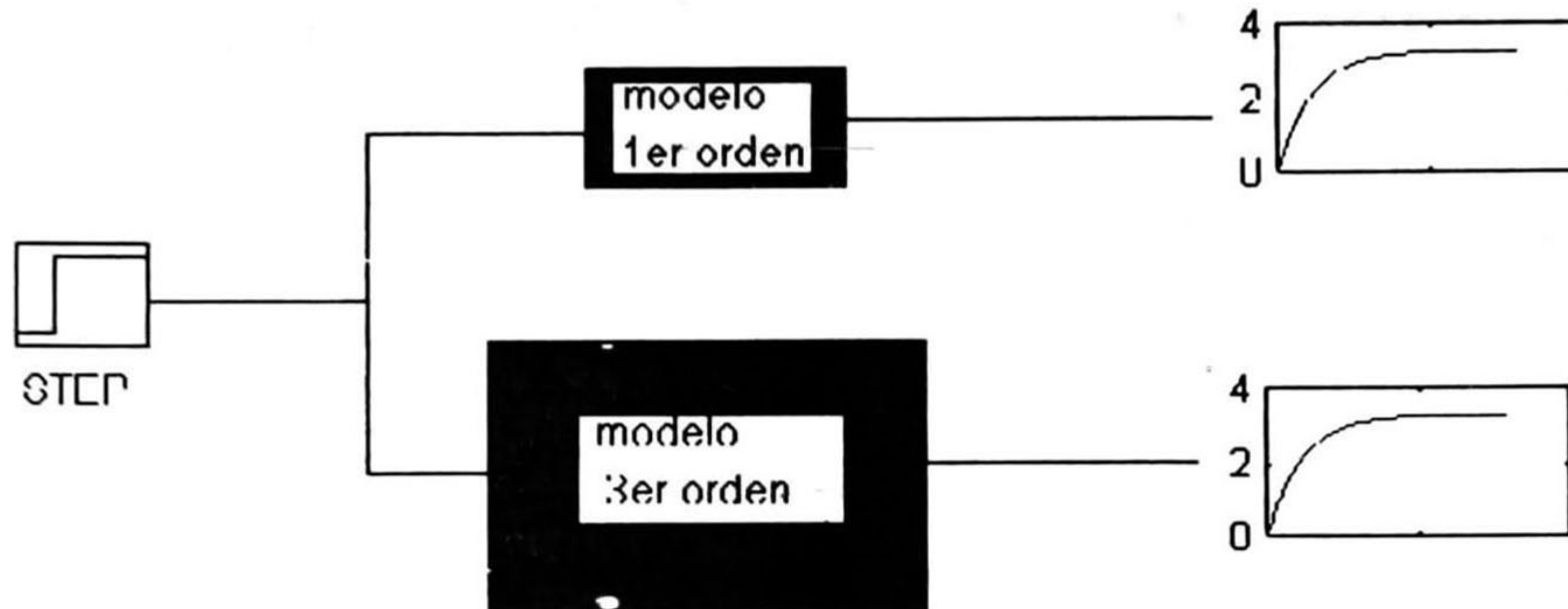


Figura 4.6: Diagrama de bloques del esquema de pruebas.

Los parámetros encontrados aquí para aproximar la función de tercer orden fueron, $\tau = 1.1 \text{ s}$ y $k_a = 0,0000324$. que nos da una función de primer orden como

$$\frac{x_4(s)}{u(s)} = \frac{0,0000324}{1,1s + 1} \quad (4.13)$$

El modelo (4.13) también puede ser aproximado con una función de transferencia de primer orden obtenida mediante la técnica de perturbación singular.

La estabilidad de las dinámicas no consideradas por la aproximación de primer orden para este modelo de electroválvula, también se puede probar mediante el teorema de Tikhonov [14] mencionado anteriormente.

Dependiendo de la simulación en cuestión, las aproximaciones de primer orden (4.11) y (4.13) serán usadas en el capítulo 5 para establecer el valor de los parámetros τ y k_a para el controlador. Mientras que los modelos completos de las electroválvulas (4.10) y (4.12) serán usados en los dos tipos distintos de plantas que serán probadas en simulación en este trabajo.

4.2.5. Modelo Completo del Actuador Electro-Hidráulico

De (4.2),(4.3),(4.7) y (4.9), obtenemos el modelo completo del actuador electro-hidráulico como

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= \frac{1}{m} (-k_s x_1 - b_d x_2 + \Lambda_a x_3 - F_r - M) \\
 \dot{x}_3 &= -\alpha x_2 - \beta x_3 + (\gamma \sqrt{Ps - \text{sgn}(x_4)x_3})x_4 \\
 \dot{x}_4 &= -\frac{1}{\tau} x_4 + \frac{K_a}{\tau} u.
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Este modelo será utilizado para el diseño de los algoritmos de control propuestos en el capítulo 3.

Capítulo 5

Aplicación del Método Propuesto

En este capítulo se muestra la aplicación del esquema propuesto al modelo del actuador electro-hidráulico explicado anteriormente. Se pretende lograr que la posición del actuador (x_1) siga una señal de referencia $r(t)$. Se eligió esta planta como caso de estudio por la reciente importancia de los actuadores hidráulicos en la industria y su dificultad para ser controlados, por lo que se busca aportar una ley de control útil y robusta para que pueda ser aprovechada incluso en campo. Además se presentan los resultados de las simulaciones hechas en SimulinkTM de MatlabTM del sistema hidráulico presentado. Se simuló la ley de control obtenida con el método propuesto y se compara con la ley de control obtenida en [6] para verificar la mejoría.

La organización del capítulo es como sigue. En la sección 5.1 se presenta el diseño del controlador mediante el método propuesto y se obtiene la ley de control. La sección 5.2 nos presenta el análisis de estabilidad del sistema controlado. En la sección 5.3 se presenta la ley de control utilizando el observador para disminuir el cascabeleo. En la sección 5.4 se presenta el modelo utilizado en la simulación, que tiene una pequeña modificación con respecto al utilizado para sintetizar el controlador. La sección 5.5 presenta la ley de control contra la que se va a comparar el resultado y finalmente en la sección 5.6 se presentan los resultados de la simulación.

5.1. Diseño del controlador

De acuerdo a la técnica, primero definimos el error de seguimiento como una nueva variable z_1

$$z_1 = x_1 - r(t) \quad (5.1)$$

en donde $r(t)$ es la señal de referencia. Después introducimos la nueva variable z_2 como

$$z_2 = x_2 - \dot{r} \quad (5.2)$$

Con las derivadas de las ecuaciones (5.1) y (5.2) podemos escribir los primeros 2 bloques de (3.23) en términos de las nuevas variables z_1 y z_2 , como:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -a_{21}z_1 - a_{22}z_2 + \bar{b}_2x_3 + \bar{d}_2(t) + w \end{aligned} \quad (5.3)$$

donde $a_{21} = \frac{k_d}{m}$, $a_{22} = \frac{b_d}{m}$, $\bar{b}_2 = \frac{\Lambda_a}{m}$, $\bar{d}_2(t) = -\frac{k_d}{m}r(t) - \frac{b_d}{m}\dot{r}(t) - \ddot{r}(t)$, $w = \frac{M}{m} + F_r$.

En este punto introducimos el primer bloque integral:

$$\dot{z}_{01} = z_1$$

en donde $z_{01} = \int_{-\infty}^t z_1 dt$. Cabe señalar que como z_1 es la integral de z_2 , solamente necesitamos una sola variable integral más. Ahora elegimos el cuasicontrol x_3 para (5.3) como:

$$x_3 = \bar{b}_2^{-1} (v_1 - \bar{d}_2(t) - m_{01}z_{01}) \quad (5.4)$$

en donde v_1 es una nueva variable y m_{01} es una constante. Finalmente:

$$\begin{aligned} \dot{z}_{01} &= z_1 \\ \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -m_{01}z_{01} - a_{21}z_1 - a_{22}z_2 + v_1 + w. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Así, los parámetros de la ecuación de Riccati (3.9) son

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -m_{01} & -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix}, B_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ B_{21} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_1 = [q_{11} \quad q_{12} \quad q_{13}]. \end{aligned} \quad (5.6)$$

donde q_{11} , q_{12} , q_{13} son parámetros de diseño. La solución $P_{\epsilon 1}$ de esta ecuación nos determina el valor deseado v_{1d} , del cuasicontrol v_1 , como:

$$v_{1d} = -B_{21}^T P_{\epsilon 1} Z_1 = -k_{01}z_{01} - k_1z_1 - k_2z_2 \quad (5.7)$$

donde $Z_1 = (z_{01}, z_1, z_2)^T$ y k_{01} , k_1 , k_2 son parámetros determinados por la solución $P_{\epsilon 1}$ de la ecuación de Riccati (3.9) con parámetros (5.6).

En seguida, definimos una nueva variable z_3 como:

$$z_3 = v_1 - v_{1d}. \quad (5.8)$$

Substituyendo (5.7) y (5.8) en (5.5) obtenemos el siguiente subsistema:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}_{01} &= \hat{z}_1 \\ \dot{\hat{z}}_1 &= \hat{z}_2 \\ \dot{\hat{z}}_2 &= -(k_{01} + m_{01})z_{01} - (a_{21} + k_1)z_1 - (a_{22} + k_2)z_2 + z_3 + w. \end{aligned}$$

Ahora sustituimos (5.4) y (5.7) en (5.8) para obtener z_3 como:

$$z_3 = \bar{b}_2 x_3 + \bar{d}_2(t) + (k_{01} + m_{01}) z_{01} + k_1 z_1 + k_2 z_2. \quad (5.9)$$

Derivamos la expresión (5.9) para obtener:

$$\dot{z}_3 = \bar{f}_3(z) + \bar{b}_3(x)x_4 + \bar{d}_3(t) + k_2 w \quad (5.10)$$

donde $z = (z_{01}, \dots, z_{03}, z_1, \dots, z_4)^T$, y

$$\begin{aligned} \bar{f}_3(z) &= -z_{01}((k_2 - \beta)(k_{01} + m_{01})) - z_1(-\beta k_1 - k_{01} - m_{01} + k_2(a_{s21} + k_1)) \\ &\quad - z_2(a_{23}\alpha - \beta k_2 - k_1 + k_2(a_{22} + k_2)) - z_3(\beta - k_2) \\ \bar{b}_3(x) &= \bar{b}_2 b_3(x) = \bar{b}_2 \gamma \sqrt{Ps - \text{sign}(x_4)x_3}, \\ \bar{d}_3(t) &= -a_{21}\beta r - (\bar{b}_2\alpha + a_{22}\beta + a_{21})\dot{r} - (\beta + a_{22})\ddot{r} - \ddot{r} \end{aligned}$$

Continuando con el procedimiento, introducimos el bloque integral $\dot{z}_{03} = z_3$, con $z_{03} = \int_{-\infty}^t z_3 dt$ y elegimos el cuasicontrol x_4 como:

$$x_4 = -\bar{b}_3^{-1}(x)[\bar{f}_3(z) + \bar{d}_3(t)] + \bar{b}_3^{-1}(x)(v_3 - m_{03}z_{03} - m_3z_3) \quad (5.11)$$

en donde v_3 es una nueva variable y m_{03}, m_3 son constantes positivas tales que la matriz de sistema sea Hurwitz.

Luego, sustituimos (5.11) en (5.10), para obtener el siguiente subsistema:

$$\begin{aligned} \dot{z}_{03} &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= -m_{03}z_{03} - m_3z_3 + v_3 + k_2 w. \end{aligned} \quad (5.12)$$

De (5.12) podemos definir los parámetros para la ecuación de Riccati (3.9):

$$\begin{aligned} A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -m_{03} & -m_3 \end{bmatrix}, B_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ k_2 \end{bmatrix}, B_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C_2 &= \begin{bmatrix} q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

La solución P_{e2} de esta ecuación nos da el valor deseado v_{3d} del cuasicontrol v_3

$$v_{3d} = -B_{22}^T P_{e2} Z_3 = -k_{03}z_{03} - k_3z_3 \quad (5.14)$$

en donde $Z_3 = (z_{03}, z_3)^T$ y k_{03}, k_3 son parámetros determinados por la solución P_{e2} de la ecuación de Riccati (3.9) con parámetros (5.13).

Ahora introducimos la nueva variable z_4 como

$$z_4 = v_3 - v_{3d}. \quad (5.15)$$

Substituyendo las expresiones (5.11) y (5.14) en la definición (5.15), obtenemos:

$$z_4 = \bar{b}_3 x_4 + \bar{f}_3(z) + \bar{d}_3(t) + (k_{03} + m_{03}) z_{03} + (k_3 + m_3) z_3$$

Con esta expresión, podemos elegir la variable deslizante s como $s = z_4$, en donde z_4 toma los valores z_4^+ ó z_4^- dependiendo de si $x_4 > 0$ ó $x_4 < 0$, respectivamente. Esto es:

$$s = \begin{cases} z_4^+ & \text{para } x_4 > 0 \\ z_4^- & \text{para } x_4 < 0 \end{cases} \quad (5.16)$$

en donde:

$$\begin{aligned} z_4^+ &= \bar{f}_3(z) + (k_{03} + m_{03}) z_{03} + (k_3 + m_3) z_3 + \bar{d}_3(t) + \bar{b}_3^+(x) x_4 \\ \text{para } x_4 > 0, \bar{b}_3^+(z) &= \bar{b}_2 \gamma \sqrt{Ps - x_3(z)} \\ z_4^- &= \bar{f}_3(z) + (k_{03} + m_{03}) z_{03} + (k_3 + m_3) z_3 + \bar{d}_3(t) + \bar{b}_3^-(x) x_4 \\ \text{para } x_4 < 0, \bar{b}_3^-(z) &= \bar{b}_2 \gamma \sqrt{Ps + x_3(z)} \end{aligned}$$

$$\text{y } x_3(z) = -\bar{b}_2^{-1} (k_{01} z_{01} + k_1 z_1 + k_2 z_2 - z_3) - \bar{b}_2^{-1} \bar{d}_2(t).$$

La derivada de la variable de deslizamiento s (5.16) resulta:

$$\dot{s} = \begin{cases} \bar{f}_4(z) + \bar{b}_4^+(z) u + \bar{d}_4(t) & \text{para } x_4 > 0, \\ \text{con } \bar{b}_4^+(z) = \frac{\gamma \bar{b}_2 K a}{\tau} \sqrt{Ps - x_3(z)} & \\ \bar{f}_4(z) + \bar{b}_4^-(z) u + \bar{d}_4(t) & \text{para } x_4 < 0, \\ \text{con } \bar{b}_4^-(z) = \frac{\gamma \bar{b}_2 K a}{\tau} \sqrt{Ps + x_3(z)} & \end{cases} \quad (5.17)$$

en donde $\bar{f}_4(z)$ y $\bar{d}_4(t) = \frac{d(\bar{d}_3(t))}{dt}$ son funciones acotadas.

Finalmente, la ley de control discontinua se define como:

$$u = \begin{cases} -k_4 (\bar{b}_4^+(z))^{-1} \text{sign}(z_4^+) & \text{para } x_4 > 0 \\ -k_4 (\bar{b}_4^-(z))^{-1} \text{sign}(z_4^-) & \text{para } x_4 < 0 \end{cases} \quad (5.18)$$

5.2. Análisis de estabilidad en la superficie deslizante

Para analizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado (5.17) y (5.18), consideramos 2 casos, cuando $x_4 > 0$ y cuando $x_4 < 0$. Para el primer caso, $x_4 > 0$, proponemos una función de Lyapunov [14] de la siguiente forma:

$$V^+ = \frac{1}{2} (z_4^+)^2.$$

Derivando obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{V}^+ &= z_4^+ \{ \bar{f}_4(z) - k_4 \text{sign}(z_4^+) + \bar{d}_4(t) \} \\ &\leq -|z_4^+| (k_4 - |\bar{f}_4(z) + \bar{d}_4(t)|) \end{aligned}$$

Para $x_4 < 0$ proponemos:

$$V^- = \frac{1}{2}(z_4^-)^2$$

y derivando:

$$\begin{aligned} \dot{V}^- &= z_4^- [\bar{f}_4(z) - k_4 \text{sign}(z_4^-) + \bar{d}_4(t)] \\ &\leq -|z_4^-| (k_4 - |\bar{f}_4(z) + \bar{d}_4(t)|). \end{aligned}$$

Por lo tanto, bajo la siguiente condición para la constante k_4 :

$$k_4 > |\bar{f}_4(z) + \bar{d}_4(t)|.$$

el vector de estado del sistema en lazo cerrado alcanza la superficie deslizante $s = 0$ en un tiempo finito.

Entonces, la dinámica del sistema en modos deslizantes está gobernada por el siguiente sistema lineal:

$$\begin{aligned} \dot{z}_{01} &= z_1 \\ \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -(k_{01} + m_{01}) z_{01} - (a_{21} + k_1) z_1 - (a_{22} + k_2) z_2 + z_3 + w \\ \dot{z}_{03} &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= -(k_{03} + m_{03}) z_{03} - (k_3 + m_3) z_3 + k_2 w. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Cuya matriz de sistema es:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(k_{01} + m_{01}) & -(a_{21} + k_1) & -(a_{22} + k_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -(k_{03} + m_{03}) & -(k_3 + m_3) \end{bmatrix}$$

y es Hurwitz. Por lo tanto, existe una matriz P simétrica y definida positiva que satisface la ecuación de Lyapunov:

$$PA + A^T P = -Q$$

con Q definida positiva. Entonces la función de Lyapunov:

$$V_{sl} = \frac{1}{2} Z^T P(t) Z \tag{5.20}$$

es una función de Lyapunov válida para el sistema (5.19)

La ecuación (5.20) satisface:

$$\begin{aligned} c_1 \|Z\|_2^2 &\leq Z^T P Z \leq c_2 \|Z\|_2^2 \\ -Z^T Q Z &\leq -c_3 \|Z\|_2^2. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Ahora, derivando la ecuación (5.20) tenemos:

$$\dot{V}_{sl} = -Z^T Q Z + 2Z^T P B_1 w \quad (5.22)$$

con

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

Suponiendo que la matriz de perturbaciones es acotada por

$$\|B_1 w\|_2 \leq g \|Z\|_2 + h, \text{ para } g > 0 \text{ y } h > 0 \quad (5.23)$$

sustituimos las cotas (5.21) y (5.23) en la ecuación (5.22):

$$\begin{aligned} \dot{V}_{sl} &\leq -c_3 \|Z\|_2^2 + 2c_2 \|Z\|_2 (g \|Z\|_2 + h) \\ &= -(c_3 - 2gc_2) \|Z\|_2^2 + 2hc_2 \|Z\|_2 \end{aligned} \quad (5.24)$$

Ahora sumamos y restamos el término $\theta\beta \|\xi\|_2^2$ con $\beta = c_3 - 2gc_2$, en la ecuación (5.24) para obtener:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{sl} &\leq -\beta \|Z\|_2^2 + 2hc_2 \|Z\|_2 - \theta\beta \|Z\|_2^2 + \theta\beta \|Z\|_2^2 \\ &= -\beta(1 - \theta) \|Z\|_2^2 - (\theta\beta \|Z\|_2 - 2hc_2) \|Z\|_2 \end{aligned}$$

así, para asegurar que la derivada de la ecuación (5.20) es definida negativa debe cumplirse la siguiente condición:

$$\|Z\|_2 \geq \frac{2c_2 h}{\theta\beta} = \mu, \text{ para } \theta > 0 \text{ y } \beta > 0$$

Por lo tanto, la respuesta del sistema (5.19) es últimamente acotada.

5.3. Ley de Control Usando Observador

Para eliminar las posibles oscilaciones o *chattering* se propone un observador para la variable x_4 , la salida de la electroválvula. Como se menciona en [29] el uso de un observador auxiliar en el lazo principal de control resulta útil para eliminar oscilaciones. La ley de control original propuesta en (5.16), aplicada en simulación a un modelo de actuador electro-hidráulico que incluya un modelo más completo de la servoválvula como (4.12), tiene el inconveniente de incluir un estado x_4 que considere las dinámicas rápidas del modelo completo de la válvula.

Es por eso que el uso de un observador para x_4 , el cual incluya solamente las dinámicas de la electroválvula aproximada con un modelo de primer orden adecuado, ayuda a realizar un mejor seguimiento y el controlador presenta un mejor desempeño, ya que la nueva señal de control incluye un estado estimado \hat{x}_4 que será más apegado a la planta.

La nueva ley de control está dada como sigue,

1.- Se define un observador para x_4

$$\dot{\hat{x}}_4(t) = -\frac{1}{\tau}x_4 + \frac{K_a}{\tau}u + L_1\bar{x}_4$$

donde \hat{x}_4 es la estimación de x_4 , L_1 es la ganancia de retroalimentación para el error de observación \bar{x}_4 que está dado por

$$\bar{x}_4 = x_4 - \hat{x}_4$$

y debe ser tal que la dinámica sea estable

$$\dot{\bar{x}}_4 = -L_1\bar{x}_4$$

entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}_4(t) \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$.

De esta forma la nueva ley de control con el estado estimado \hat{x}_4 se expresa como una nueva u de la forma

$$u = \begin{cases} -k_4 (\bar{b}_4^+(z))^{-1} \text{sign}(\hat{z}_4^+) & \text{para } \hat{x}_4 > 0 \\ -k_4 (\bar{b}_4^-(z))^{-1} \text{sign}(\hat{z}_4^-) & \text{para } \hat{x}_4 < 0 \end{cases} \quad (5.25)$$

donde tanto \hat{z}_4^+ como \hat{z}_4^- son funciones de la nueva variable \hat{x}_4 ; esto es $\hat{z}_4^+ = f(x_1, x_2, x_3, \hat{x}_4)$ y $\hat{z}_4^- = f(x_1, x_2, x_3, \hat{x}_4)$, ver (5.16).

5.4. Modelo utilizado en la simulación

Verificamos el correcto seguimiento de la señal de referencia por parte del actuador hidráulico, mediante la simulación de la ley de control obtenida. Se utilizará el modelo de tercer orden de la servo válvula, descrito en (4.12), en lugar del modelo reducido de primer orden. El modelo dinámico completo está descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m}(-k_s x_1 - b_d x_2 + \Lambda_a x_3 - w) \\ \dot{x}_3 &= -\alpha x_2 - \beta x_3 + (\gamma \sqrt{Ps} - \text{sgn}(x_4) x_3) x_4 \\ \dot{x}_4 &= x_5 \\ \dot{x}_5 &= x_6 \\ \dot{x}_6 &= -\frac{k_h k_w w_n^2}{k_f A_v} x_4 - w_n^2 x_5 - 2\zeta w_n x_6 + \frac{k_h k_t w_n^2}{k_f A_v} u \end{aligned} \quad (5.26)$$

en donde k_h , k_w , k_f , A_v , ζ y w_n son parámetros positivos constantes. Elegimos la perturbación w como:

$$w = 1500 + 240 \sin(12t) + Fr.$$

Esta elección es arbitraria, pero se buscó que fuera una perturbación considerablemente grande para los valores manejados.

Los parámetros de la planta toman los siguientes valores:

m	24 kg	k_h	173
k_s	16010 N/m	k_w	7.83
b_d	310 N/(m/s)	w_n	7.83
P_s	1.03e7 Pa	k_f	115
Λ_a	3.26e-4 m ²	A_v	0.765 in ²
α	1.51e10 N/m ³	ζ	0.36
β	1 (1/s)	k_t	0.010
γ	7.28e8 kg ^{0.5} /m ^{1.5} s ²		

5.5. Ley de control para comparación

La ley de control obtenida en esta tesis es comparada con la propuesta en [6]. Dicho controlador fue diseñado para forzar al actuador hidráulico a seguir una señal de referencia $r(t)$ en presencia de una perturbación constante M . La ley de control es:

$$u = \begin{cases} -k'_r (\bar{b}_4^+(z'))^{-1} \text{sign}(\hat{z}_4'^+) & \text{si } \hat{x}_4 > 0 \\ -k'_r (\bar{b}_4^-(z'))^{-1} \text{sign}(\hat{z}_4'^-) & \text{si } \hat{x}_4 < 0 \end{cases} \quad (5.27)$$

donde tanto $\hat{z}_4'^+$ como $\hat{z}_4'^-$ son funciones de la variable estimada \hat{x}_4 ; esto es $\hat{z}_4'^+ = f(x_1, x_2, x_3, \hat{x}_4)$ y $\hat{z}_4'^- = f(x_1, x_2, x_3, \hat{x}_4)$,

$$\dot{\hat{x}}_4(t) = -\frac{1}{\tau}x_4 + \frac{K_a}{\tau}u + L_1\bar{x}_4. \quad (5.28)$$

Además $z_4'^+$ y $z_4'^-$ se definen como:

$$\begin{aligned} z_4'^+ &= f_4^+(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{f}_3(z') + k_3 z_3' + \bar{d}_3(t) + \bar{b}_3^+(x)x_4 \\ \text{si } x_4 > 0, \bar{b}_3^+(z') &= \bar{b}_2 \gamma \sqrt{P_s - x_3(z')} \\ z_4'^- &= f_4^-(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{f}_3(z') + k_3 z_3' + \bar{d}_3(t) + \bar{b}_3^-(x)x_4 \\ \text{si } x_4 < 0, \bar{b}_3^-(z') &= \bar{b}_2 \gamma \sqrt{P_s + x_3(z')} \end{aligned}$$

con $x_3(z') = \bar{b}_2^{-1}(k_0 z_0' + k_1 z_1' + k_2 z_2' - z_3') - \bar{b}_2^{-1} \bar{d}_2(t)$ y

$$\begin{aligned} \bar{f}_3(z') &= -z_0'(-\beta k_0) - z_1'(-\beta k_1 - k_0 + k_2(\frac{k_s}{m} + k_1)) \\ &\quad - z_2'(\frac{\Lambda_a}{m}\alpha - \beta k_2 - k_1 + k_2(\frac{b_d}{m} + k_2)) - z_3'(\beta - k_2). \\ \bar{b}_3(x) &= \bar{b}_2 b_3(x) = \frac{\Lambda_a}{m} \gamma \sqrt{P_s - \text{sgn}(x_4)x_3}. \\ \bar{d}_3(t) &= -\frac{k_s}{m}\beta r - \frac{\Lambda_a}{m}\alpha \dot{r} - \frac{b_d}{m}\beta \dot{r} - \frac{k_s}{m}\dot{r} - \beta \ddot{r} - \frac{b_d}{m}\ddot{r} - \ddot{r} \end{aligned}$$

Así mismo las variables z'_0, z'_1, z'_2, z'_3 se definen como:

$$z'_0 = \int_{-\infty}^t z'_1 dt$$

$$z'_1 = x_1 - r(t)$$

$$z'_2 = x_2 - \dot{r}(t)$$

$$z'_3 = \frac{\Lambda_a}{m} x_3 + k'_0 z'_0 + k'_1 z'_1 + k'_2 z'_2 + \bar{d}_2(t).$$

donde $\bar{d}_2(t) = -\frac{k_s}{m} r(t) - \frac{b_d}{m} \dot{r}(t) - \ddot{r}(t)$; y k'_0, k'_1, k'_2 y k'_3 son constantes positivas del controlador.

5.5.1. Parámetros y señal de referencia utilizados

Los parámetros para los controladores anterior (5.28) y nuevo (5.25) son:

Anterior (5.28)		Nuevo (5.25)	
k'_0	837	m_{01}	150
k'_1	1.76e3	m_1	1
k'_2	72.0833	m_{03}	10
k'_3	100	k_{01}	133.33
k'_r	-3.0e7	k_1	490.83
		k_2	38
		k_{03}	0.423
		k_3	420.91
		k_r	-6.5e7

El atractor caótico de Chen [9] es usado para generar la trayectoria de referencia $r(t)$. Usamos el atractor caótico de Chen debido a su naturaleza tan compleja: es de suponer que si el controlador trabaja bien con una señal tan compleja como esta, también lo hará con señales más sencillas. El atractor caótico de Chen está definido por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x) \\ \dot{y} &= (c - a)x - xz + cy \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned} \tag{5.29}$$

con parámetros $a = 35, b = 3, c = 28$.

Los estados x, y, z de (5.29) son multiplicados por una constante adecuada (0,002) para cumplir con las limitaciones de amplitud del actuador.

5.6. Resultados de la simulación

Alternamos los tres estados del atractor caótico de Chen para tomarlos como la señal de referencia $r(t)$. Los resultados de las simulaciones son presentados en las siguientes figuras.

En las figuras 5.1 y 5.2 se presenta la trayectoria del actuador hidráulico usando el estado x del atractor caótico de Chen (5.29) como la señal de referencia $r(t)$. La figura 5.1 es la respuesta usando la ley de control (5.27), y la figura 5.2 es la respuesta con la ley de control (5.25) obtenida por el método de esta tesis. La línea punteada corresponde a la trayectoria a seguir y la línea sólida es la trayectoria real del actuador.

En las figuras 5.3 y 5.4 se muestra la respuesta del sistema usando el estado y del atractor caótico de Chen (5.29) como señal de referencia $r(t)$, y las figuras 5.5 y 5.6 con el estado z del mismo, siendo las figuras 5.3 y 5.5 las correspondientes a la ley de control (5.27) y las figuras 5.4 y 5.6 a la ley de control obtenida en este trabajo (5.25).

En todos los casos puede apreciarse una visible mejoría con la ley de control obtenida en por el método propuesto en esta tesis.

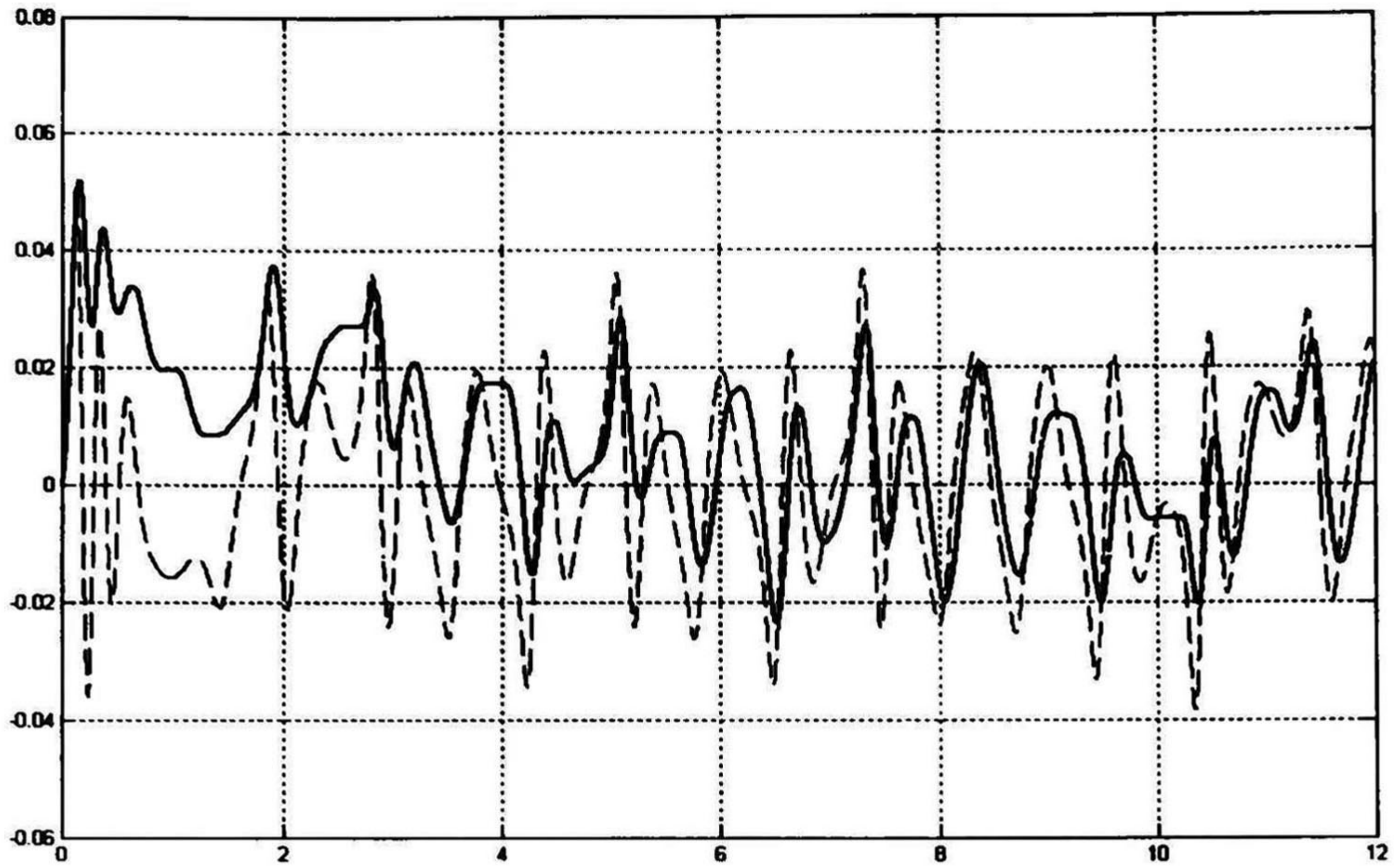


Figura 5.1: Ley de control anterior (5.28), seguimiento x

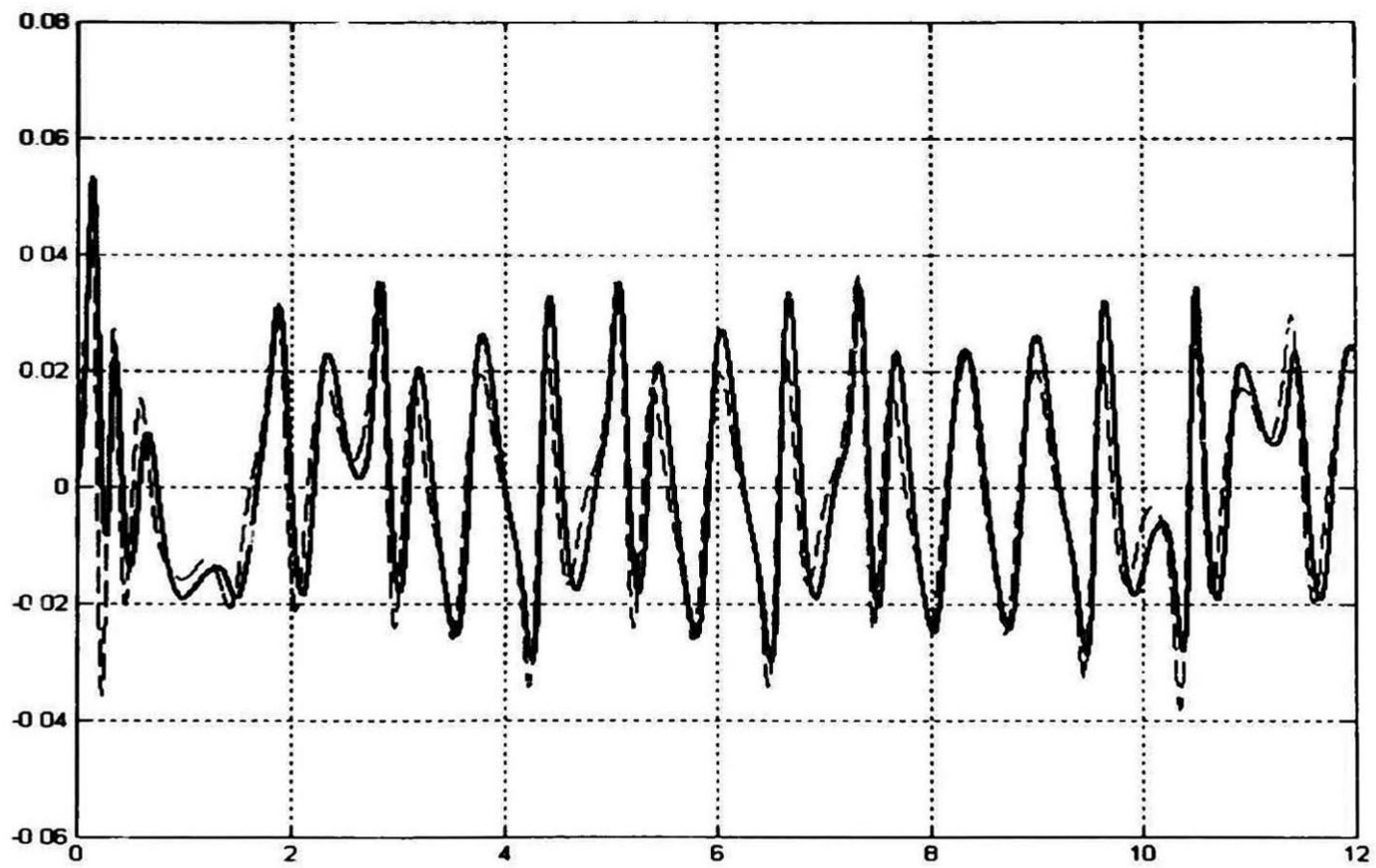


Figura 5.2: Ley de control nueva (5.25), seguimiento x

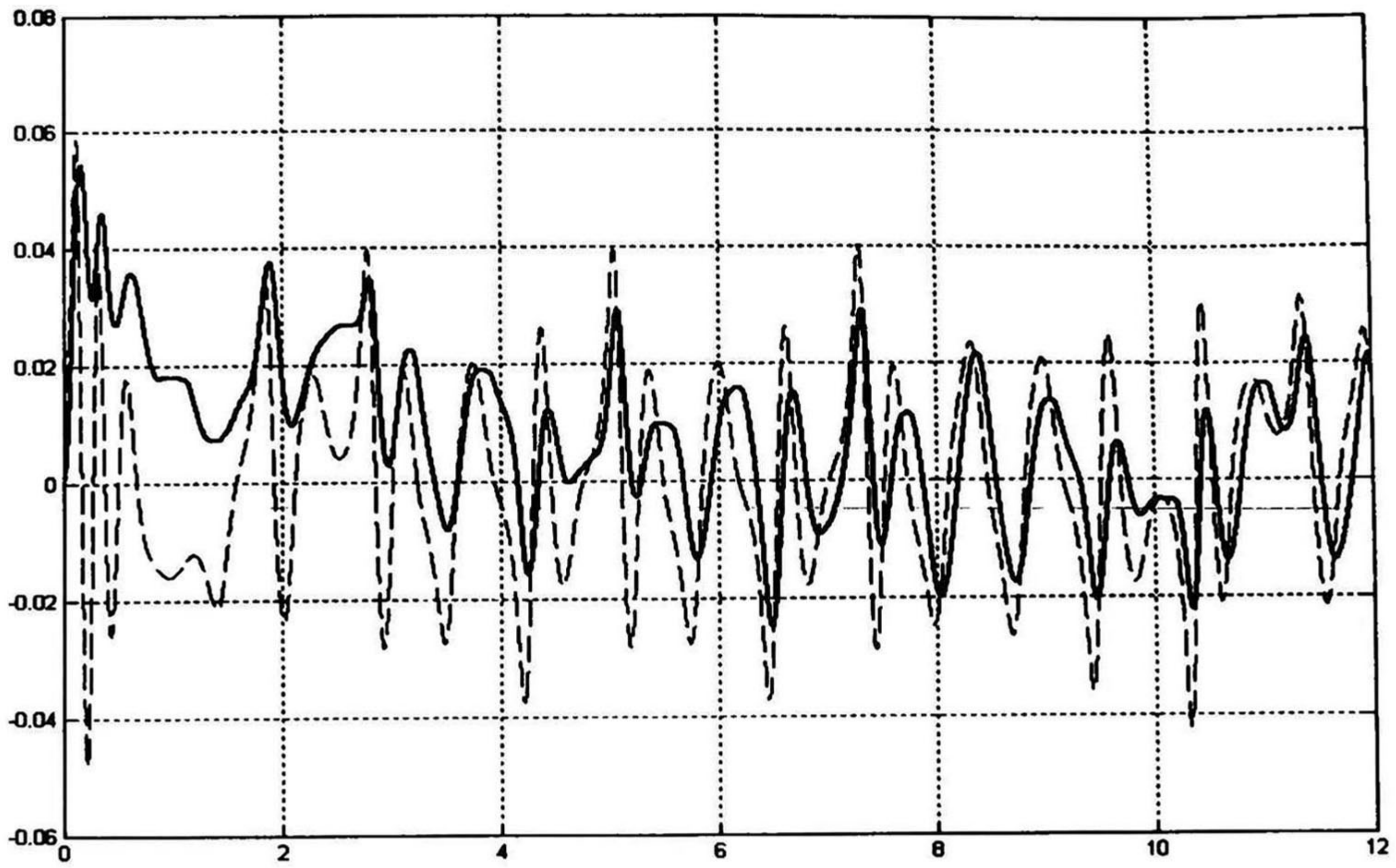


Figura 5.3: Ley de control anterior (5.28), seguimiento y

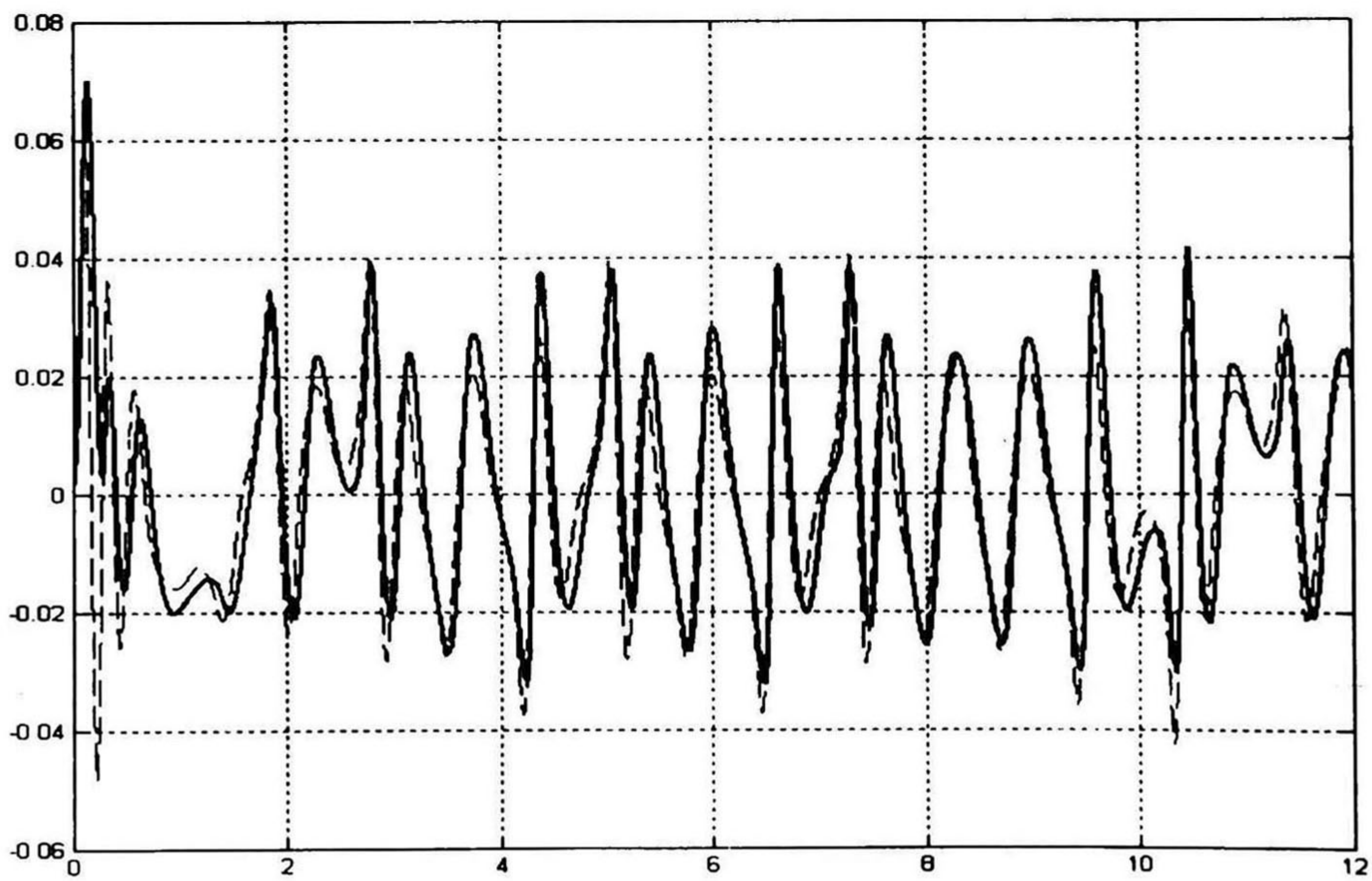


Figura 5.4: Ley de control nueva (5.25), seguimiento y

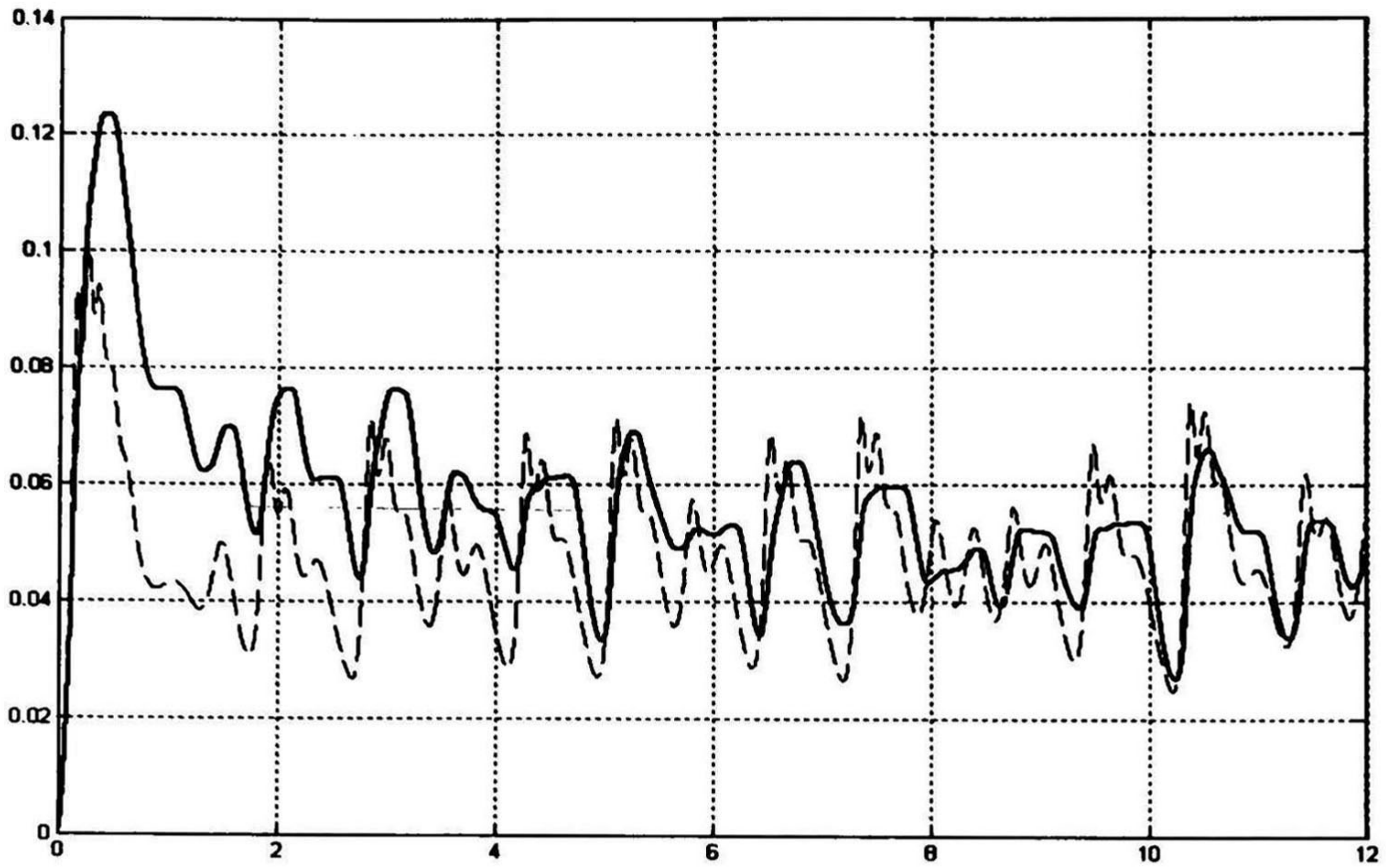


Figura 5.5: Ley de control anterior (5.28), seguimiento z

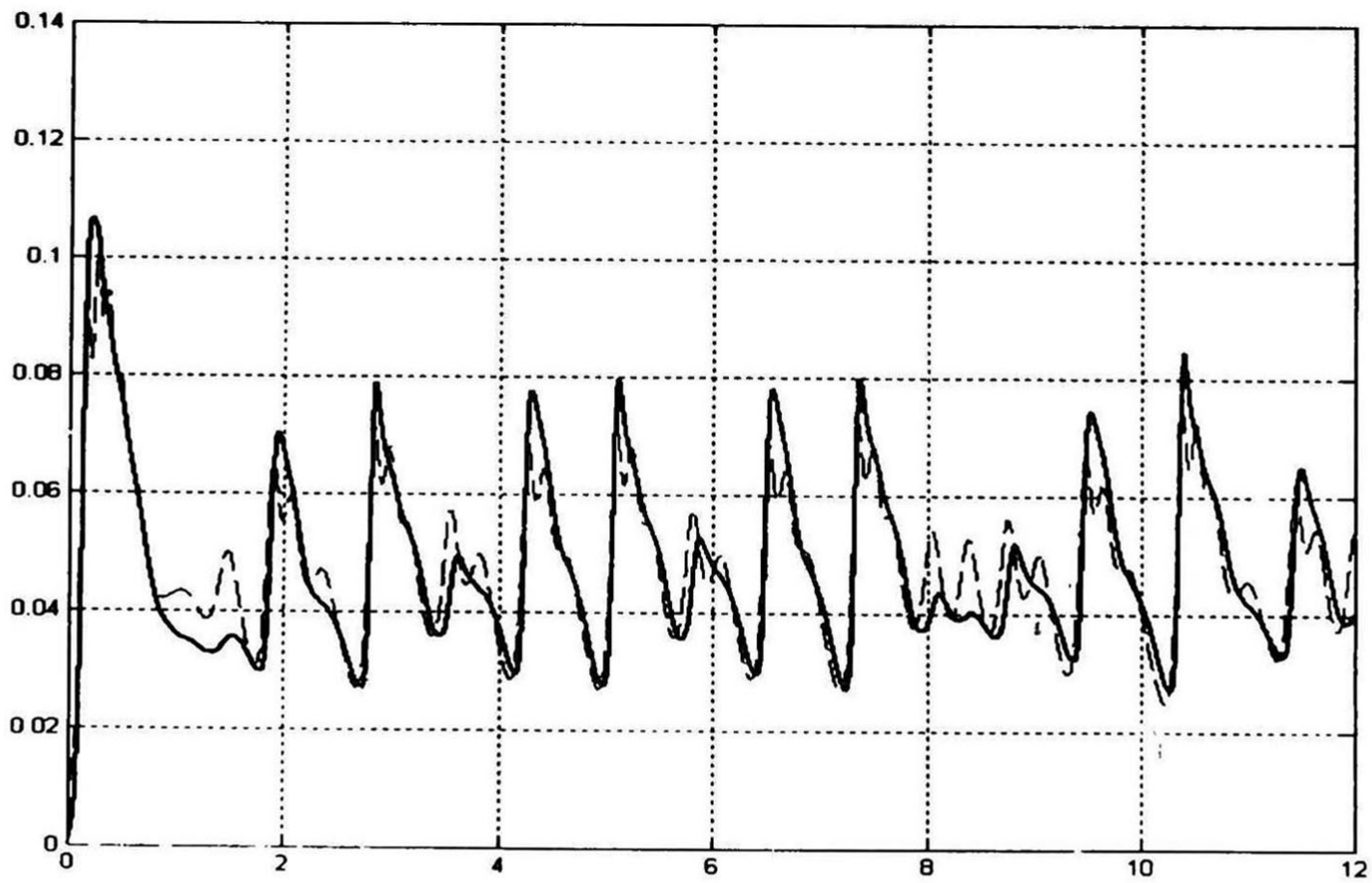


Figura 5.6: Ley de control nueva (5.25), seguimiento z

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo futuro

6.1. Conclusiones

6.1.1. Logros

- ▶ Se desarrolló un método de control robusto que combina satisfactoriamente el control por bloques, control por modos deslizantes y control óptimo H_∞ .
- ▶ Se demostró la estabilidad del sistema en lazo cerrado.
- ▶ Se derivaron las condiciones para resolver el problema de control H_∞ no lineal por bloques y modos deslizantes, tanto local como semiglobal.
- ▶ El método propuesto permite descomponer la solución del problema de control H_∞ , es decir, se replantea un problema de orden completo como la solución de varios problemas de orden reducido, facilitándose así la solución del problema de control H_∞ .
- ▶ Por otro lado, el método propuesto permite rechazar las perturbaciones que cumplen con la condición de acoplamiento y además robustecer de manera óptima el movimiento en modos deslizantes con respecto a las perturbaciones que no cumplen con esta condición.
- ▶ Se aplicó el método a un sistema electro-hidráulico, para solucionar el problema de seguimiento de trayectorias caóticas del sistema. Los resultados de la simulación mostraron robustez a perturbaciones externas.
- ▶ Además se compararon estos resultados con los arrojados por el controlador obtenido en [6] y se vió mejoría en el seguimiento de trayectorias.

6.2. Trabajo Futuro

- Extender los resultados para controladores por retroalimentación del error.

- Obtener el controlador para seguimiento de fuerza del sistema electro-hidráulico y comparar los resultados con los controladores obtenidos en [6] y en [29].
- Aplicar el método de control H_∞ por bloques y modos deslizantes a otro tipo de plantas de control, por ejemplo motores eléctricos.
- Implementar en un prototipo real los controladores aquí obtenidos para realizar comparaciones de desempeño entre simulación y tiempo real.

Apéndice A

Diagramas para Simulación en Simulink

Presentaremos primero el diagrama base usado para representar la planta (5.26) en lazo cerrado con el controlador (5.18). Este esquema se compone de planta, variedades deslizantes z_4^+ y z_4^- , y la ley de control (la cual usa como entradas las variedades deslizantes)

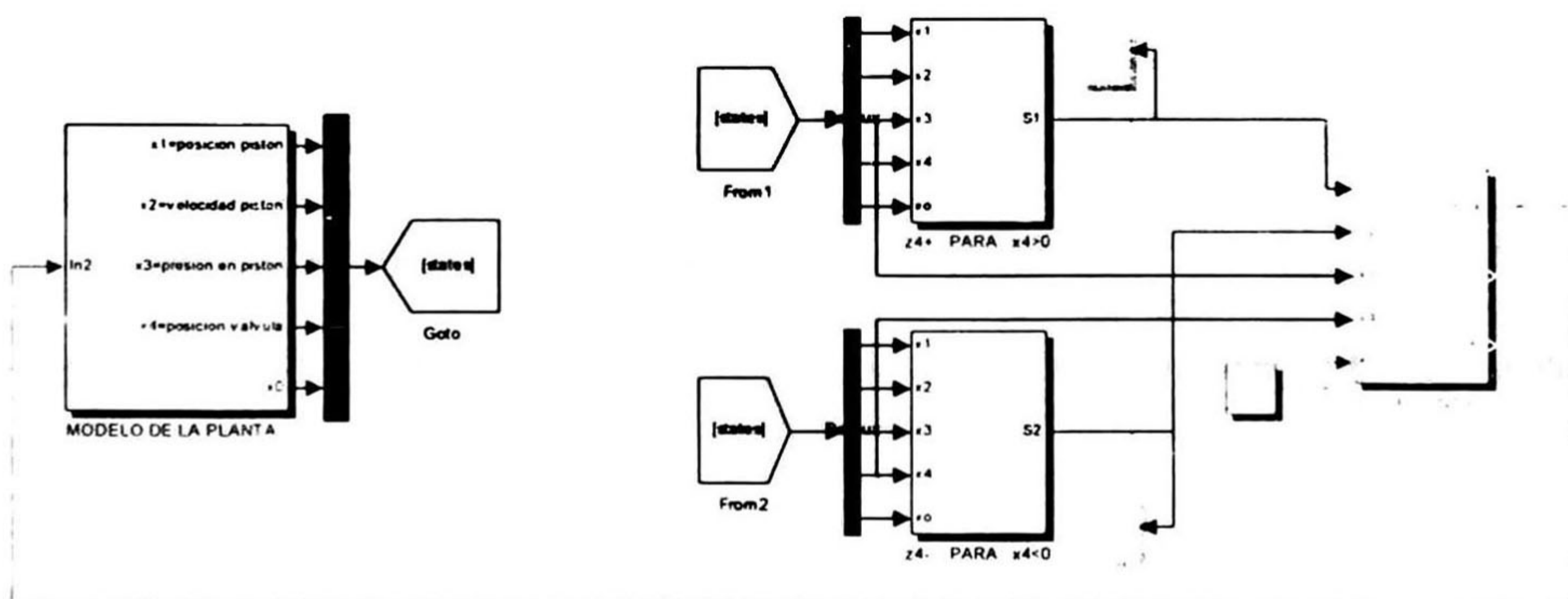


Figura A.1: Diagrama de lazo cerrado

Diagrama del modelo de la planta está dado por el siguiente esquema

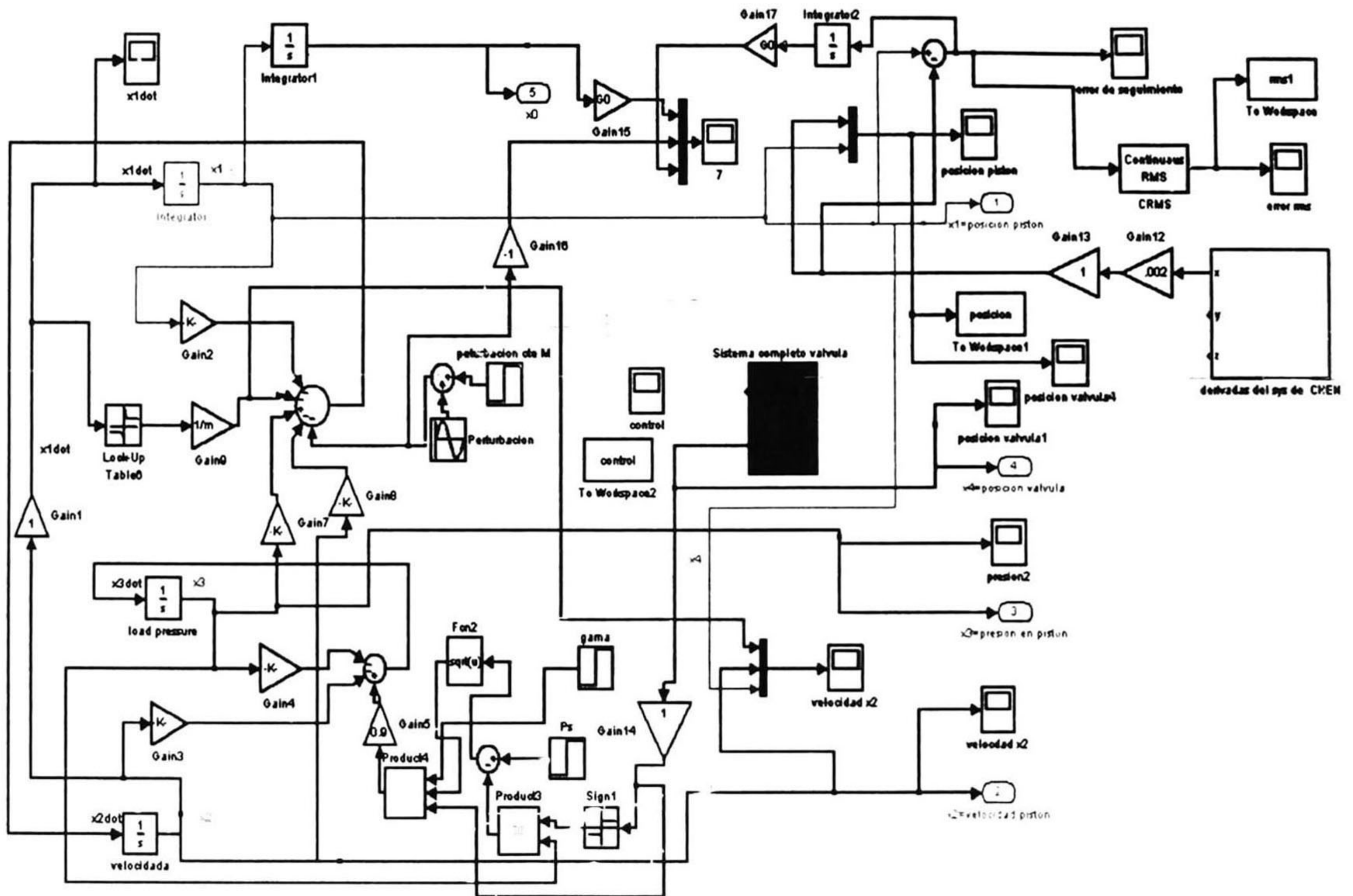


Figura A.2: Esquema en Simulink del modelo de la planta

Bibliografía

- [1] L. T. Aguilar, Y. Orlov, L. Acho (2003), *Nonlinear H-infinite control of nonsmooth time-varying systems with application to friction mechanical manipulators*, Automatica, 39; pp. 1531-1542.
- [2] A. Alleyne and R. Liu (1999), *On the limitations of force tracking control for hydraulic active suspensions*, ASME Journal of Dynamic Systems Measurements and Control, 121-2; pp.184-190.
- [3] A. Alleyne and R. Liu (2000),. *A simplified approach to force control for electro-hydraulic systems*, Control Engineering Practice, 8-12; pp.1347-1356.
- [4] A. Alleyne and R. Liu (2000),. *Systematic Control of a Class of Nonlinear Systems With Application to Electrohydraulic Cylinder Pressure Control*, IEEE Transactions On Control Systems Technology, 8-4; pp. 623-634.
- [5] Armstrong-B. Helouvry, P. Dupont and C. Canudas de Wit (1994), *A Survey of Analysis Tools and Compensation Methods for the Control of Machines with Friction*, Automatica, 30; pp. 1083-1138.
- [6] M. A. Avila, A. G. Loukianov, E. N. Sanchez (2004), *Electro-Hydraulic actuator Trajectory Tracking*, Proceedings of the American Control Conference, ACC 2004, Boston, USA, June 30-July 2; pp. 2603-2608.
- [7] Basar, T. & Bernhard, P., (1990). *H_∞ optimal control and related minimax design problems: A dynamic game approach*, Birkhauser, Boston, USA.
- [8] Chen, B., Chang, Y., & Feng, J. (1994). *A nonlinear H_∞ control design in robotic systems under parameter perturbations and external disturbances*. International Journal of Control, 59; pp. 439-461.
- [9] G. Chen and T. Ueta (1999), *Yet Another Chaotic Attractor*, International Journal of Bifurcation and Chaos, 9, pp. 1465-1466.
- [10] B. Daachi, A. Benallegue and N.K.M' Sirdi (2001), *Adaptive Neural Force Controller For a Hydraulic Actuator*, Proceedings of the 2001 IEEE Conference on Robotics and Automation; Seoul, Korea; pp. 3465-3470.

- [11] Isidori, A. & Astolfi, A. (1992). *Disturbance attenuation and H_∞ control via measurement feedback in nonlinear systems*. IEEE Transactions in Automatic Control, 37; pp. 1283-1293.
- [12] M. Jerouane and F. Lamnabhi (2001), *A new Robust Sliding Mode Controller for Hydraulic Actuator*, proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, Orlando, Florida, USA; pp. 908-913.
- [13] D. Karnopp (1985), *Computer Simulation of Stick-Slip Friction in Mechanical Dynamic Systems*, ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 107-1; pp. 100-103.
- [14] H.K. Khalil (1996), *Nonlinear Systems*, (2nd ed.) Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.
- [15] Liu Rui (1994), *Nonlinear Control of Electro-Hydraulic Servosystems Theory and Experiment*, B. Engr., Tsinghua University.
- [16] Y. Liu and H. Handroos (1998), *Application of Sliding Mode Control to an Electrohydraulic Servosystem with Flexible Mechanical Load*, Proceedings of the Fourth International Conference on Motion and Vibration Control, MOVIC, ETH Zürich, Switzerland; pp. 249-253.
- [17] A. G. Loukianov and V. Utkin (1981), *Methods of reducing equations for dynamic systems to a regular form*, Automation and Remote Control, 42-4 (P.I.); pp. 413-420.
- [18] A. G. Loukianov (1998), *Nonlinear Block Control with Sliding Mode*, Automation and Remote Control, 59-7; pp. 916-933.
- [19] A. G. Loukianov (1998), *Nonlinear Block Control with Sliding Mode*, Avtomatika i Telemachanika, 5; pp. 12-23 (in Russian).
- [20] A. G. Loukianov, J. M. Cañedo, O. Serrano, V. I. Utkin and S. Celikovsky (2001), *Adaptive Sliding Mode Block Control of Induction Motors*. Proceedings of the American Control Conference, ACC 2001, Washington, USA; pp. 149-154.
- [21] A. Loukianov (2002), *Robust Block Decomposition Sliding Mode Control Design*, Mathematical Problems in engineering, 8(4-5); pp. 349-365.
- [22] H.E. Merritt (1967), *Hydraulic Control Systems*, Wiley, New York.
- [23] N. Niksefat and N. Sepehri (1999), *Robust Force Controller Design for a Hydraulic Actuator based on Experimental input-output Data*, Proceedings of the American Control Conference, San Diego, USA; pp. 3718-3722.
- [24] N. Niksefat and N. Sepehri (2000), *Design and Experimental Evaluation of a Robust Force Controller for an Electro-Hydraulic Actuator via Quantitative Feedback Theory*, Control Engineering Practice, 8-12, pp. 1335-1345.

- [25] Orlov, Y., Aho, L., & Solis, V. (1999). *Nonlinear H_∞ -control of time varying systems*. Proceedings of the 38th Conference on Decision and Control, AZ. Phoenix; pp. 3764-3769.
- [26] Ravi, R., Nagpal, K., & Khargonekar, P. (1991) *H_∞ control of linear time varying systems: A state space approach*, SIAM Journal Control and Optimization, 29, pp. 1394-1413.
- [27] L. Ricalde Castellanos (2001), *Control Neuronal Adaptable para Seguimiento de Trayectorias*, Tesis de Maestría, CINVESTAV U. GDL.
- [28] O. G. Rios, B. Castillo-Toledo, A. G. Loukianov (2003), *Nonlinear Block Integral Sliding Mode Control: Application to Induction Motor Control*. Proceedings of the Conference on Decision and Control, CDC 2003, Maui, Hawaii, December 9-12; pp. 3124-3129.
- [29] Edgar N. Sanchez, Alexander G. Loukianov, y Carlos A. Lizalde (2004), *Identificación de un Sistema Electro-Hidráulico Vía Redes Neuronales Recurrentes*, Memorias del XI Congreso Latinoamericano de Control Automático, Ciudad de La Habana, Cuba, Mayo 10-15.
- [30] Vadim Utkin, Jurgen Guldner and Jingxin Shi (1999), *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*, Taylor & Francis Inc., Philadelphia, PA 19106.
- [31] B. Yao, F. Bu, J. Reedy, and G.T.C. Chiu (1999), *Adaptive Robust Motion Control of Single-Rod Hydraulic Actuators*, proceedings of the American Control Conference, San Diego, Ca, June; pp. 759-763.
- [32] K. Zhou, J. C. Doyle and K. Glover (1996), *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA.



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL I.P.N.
UNIDAD GUADALAJARA**

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional aprobó la tesis

Control H-Infinito No Lineal por Bloques y Modos Deslizantes

del (la) C.

Edgar Yoshio MORALES TERAOKA

el día 05 de Diciembre de 2005.

Dr. Edgar Nelson Sánchez Camperos
Investigador CINVESTAV 3C
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Alexander Georgievich Loukianov
Investigador CINVESTAV 3C
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dra. Ofelia Begovich Mendoza
Investigador CINVESTAV 3A
CINVESTAV Unidad Guadalajara



CINVESTAV
BIBLIOTECA CENTRAL



SSIT000008397