



xx(116560.1)



# CINVESTAV

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del  
I.P.N.  
Unidad Guadalajara

---

## **Investigación y simulación de algoritmos de alta resolución para la estimación reconstruida de señales correlacionadas degradadas con ruido**

Tesis que presenta:  
**Ivonne del Carmen Colorado Chairez**

para obtener el grado de:  
**Maestro en Ciencias**

en la especialidad de:  
**Ingeniería Eléctrica**

Director de Tesis  
**Dr. Yuriy Shkvarko**

**CINVESTAV**  
IPN  
ADQUISICION  
DE LIBROS

**CINVESTAV I.P.N.**  
SECCION DE INFORMACION

Guadalajara, Jalisco, Febrero del 2004.

CLASIF.: TK165.68 (165 2004)

ADQUIS.: SSI-334

FECHA: 27-I-2005

PROCED.: Don. - 2005

\$ \_\_\_\_\_

ID: 116031-2001

**Investigación y simulación de algoritmos  
de alta resolución para la estimación  
reconstruida de señales correlacionadas  
degradadas con ruido**

**Tesis de Maestría en Ciencias  
Ingeniería Eléctrica**

Por:

**Ivonne del Carmen Colorado Chairez**

Ingeniero en Electrónica

Instituto Tecnológico de Minatitlán 1996-2000

Becario del CONACyT, expediente no. **165143**

Director de Tesis  
**Dr. Yuriy Shkvarko**

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Febrero del 2004.

# **AGRADECIMIENTOS**

**A mis padres**, por su apoyo incondicional, por su comprensión, por su confianza y por la oportunidad que me dieron para llegar alcanzar este grado de estudios.

**A mis hermanos y familiares**, por estar conmigo siempre.

**A mi asesor**, Dr. Yuriy Shkvarko por el tiempo que me dedicó, por sus enseñanzas, por su interés y por su colaboración permitiendo el desarrollo y culminación de este trabajo de tesis.

**A mis sinodales y a todas las personas**, por sus comentarios y por el tiempo que invirtieron en analizar mi tesis.

**A todos los doctores del CINVESTAV**, que me compartieron sus conocimientos, su tiempo, su amistad o que alguna vez me dieron consejos que me ayudaron en este espacio de mi vida como estudiante del CINVESTAV.

**Al CINVESTAV y las personas**, que me dieron la oportunidad de estudiar el grado de maestría.

**Al CONACYT**, por el apoyo económico que me brindó durante mis estudios.

**A mis amigos y a todas las personas que conocí en el CINVESTAV**, que estuvieron conmigo en las buenas y en las malas, que me escucharon cuando lo necesite, que me dieron consejos, que me brindaron su ayuda, que me dieron la oportunidad de conocerlos o que compartieron al menos un momento de su vida conmigo.

**GRACIAS, NO LOS OLVIDARE.**

# ÍNDICE

<b>ÍNDICE</b>	<b>i</b>
<b>ÍNDICE DE TABLAS Y FIGURAS</b>	<b>iii</b>
<b>GLOSARIO DE TÉRMINOS</b>	<b>v</b>
<b>CAPÍTULO I INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
1.1 Antecedentes.	2
1.2 Justificación.	4
1.3 Objetivo.	7
1.4 Contenido general.	8
<b>CAPÍTULO II CONCEPTOS PRELIMINARES</b>	<b>9</b>
2.1 Planteamiento del problema.	10
2.1.1 Declaración de la señal original a reconstruir.	10
2.1.2 El ruido.	11
2.1.3 Proprocesamiento de la señal original.	12
2.2 Espacio de una señal.	13
2.2.1 Vector de un espacio de señal.	13
2.2.1.1 Bases.	14
2.2.1.2 Descomposición de un vector.	14
2.2.2 Función de un espacio de señal.	15
2.2.2.1 Bases.	16
2.2.2.2 Descomposición de una función de señal.	16
2.3 Operadores lineales en sistemas de procesamiento de señales.	17
2.4 Descomposición de una transformación lineal de señales especiales.	21
2.4.1 Descomposición de una transformación integral.	22
2.4.2 Eigenbases de un operador normal.	22
2.5 Modelos de incertidumbres.	23
2.6 Sistema de identificación.	25
2.7 Sumario.	30
<b>CAPÍTULO III MÉTODOS DE ESTIMACIÓN DE SEÑALES</b>	<b>31</b>
3.1 Método de Mínimos Cuadrados Limitado.	32
3.1.1 Información <i>a priori</i> .	32
3.1.2 Desarrollo del método CLS.	33
3.2 Método de Mínimos Cuadrados Limitado Ponderado.	35
3.2.1 Declaración de los grados de libertad.	36

3.2.2 Desarrollo del método WCLS.	37
3.3 Método de Mínimo Riesgo de Bayes.	39
3.3.1 Información <i>a priori</i> .	40
3.3.2 Desarrollo del método BMR.	40
3.3.3 Descomposición de la función de Riesgo de Bayes.	42
3.3.4 Estimación de la señal original $v$ .	44
3.4 Método de Mínimo Riesgo de Bayes Robusto.	46
3.5 Método Propuesto: “Método de Regularización Robusta Fusionado con Retroalimentación de Información”	48
3.5.1 Planteamiento del problema.	48
3.5.2 Declaración de la información <i>a priori</i> .	49
3.5.3 Desarrollo del método propuesto RRFRI.	49
3.6 Sumario.	54
<b>CAPÍTULO IV RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN DEL MÉTODO RRFRI</b>	<b>55</b>
4.1 Referencias para interpretación de las tablas de resultados.	56
4.2 Resultados.	61
4.2.1 Resultados para la señal $v_4$ .	62
4.2.2 Resultados para la señal $v_1$ .	97
4.2.3 Comparación de resultados cuantitativos notables.	109
4.3 Sumario.	111
<b>CONCLUSIONES</b>	<b>113</b>
<b>RECOMENDACIONES PARA UN TRABAJO FUTURO: PARA UN POSIBLE MEJORAMIENTO DEL MÉTODO RRFRI</b>	<b>117</b>
<b>APÉNDICE A</b>	<b>119</b>
<b>APÉNDICE B</b>	<b>121</b>
<b>APÉNDICE C</b>	<b>129</b>
<b>REFERENCIAS</b>	<b>133</b>



# ÍNDICE DE FIGURAS Y TABLAS

<b>Figura 1.1</b>	Estructura de un sistema multisensor de procesamiento de señales digital de una señal de información sensada remotamente.	2
<b>Figura 1.2</b>	Estructura de un sistema de $m$ entradas y $n$ salidas.	5
<b>Figura 1.3</b>	Tipos de problemas de procesamiento de señal.	6
<b>Figura 1.4</b>	Diagrama relacional del problema directo e inverso.	7
<b>Figura 2.1</b>	Representación gráfica de la función $s(v)$ .	26
<b>Figura 3.1</b>	Método de Mínimos Cuadrados Limitado (CLS).	50
<b>Figura 3.2</b>	Método de Mínimos Cuadrados Limitado Ponderado (WCLS).	51
<b>Figura 3.3</b>	Diagrama a bloques del método propuesto RRFRI utilizando como método de estimación inicial el método CLS.	53
<b>Figura 3.4</b>	Diagrama a bloques del método propuesto RRFRI utilizando como método de estimación inicial el método WCLS.	53
<b>Figura 4.1</b>	Señal deseada $v_1$ .	57
<b>Figura 4.2</b>	Señal deseada $v_2$ .	57
<b>Figura 4.3</b>	Señal deseada $v_3$ .	57
<b>Figura 4.4</b>	Señal deseada $v_4$ .	58
<b>Figura 4.5</b>	$SSF_1$ .	59
<b>Figura 4.6</b>	$SSF_2$ .	59
<b>Figura 4.7</b>	$SSF_3$ .	59
<b>Figura 4.8</b>	Significado de los incisos de las gráficas.	61
<b>Tabla 4.1</b>	Respuestas con SNR = 3 dB, K = 5 y $SSF_1$ .	62
<b>Tabla 4.2</b>	Respuestas con SNR = 3 dB, K = 10 y $SSF_1$ .	63
<b>Tabla 4.3</b>	Respuestas con SNR = 3 dB, K = 15 y $SSF_1$ .	64
<b>Tabla 4.4</b>	Respuestas con SNR = 6 dB, K = 5 y $SSF_1$ .	65
<b>Tabla 4.5</b>	Respuestas con SNR = 6 dB, K = 10 y $SSF_1$ .	66
<b>Tabla 4.6</b>	Respuestas con SNR = 6 dB, K = 15 y $SSF_1$ .	67
<b>Tabla 4.7</b>	Respuestas con SNR = 10 dB, K = 5 y $SSF_1$ .	68
<b>Tabla 4.8</b>	Respuestas con SNR = 10 dB, K = 10 y $SSF_1$ .	69
<b>Tabla 4.9</b>	Respuestas con SNR = 10 dB, K = 15 y $SSF_1$ .	70
<b>Tabla 4.10</b>	Respuestas con SNR = 20 dB, K = 5 y $SSF_1$ .	71
<b>Tabla 4.11</b>	Respuestas con SNR = 20 dB, K = 10 y $SSF_1$ .	72
<b>Tabla 4.12</b>	Respuestas con SNR = 20 dB, K = 15 y $SSF_1$ .	73
<b>Tabla 4.13</b>	Respuestas con SNR = 3 dB, K = 5 y $SSF_2$ .	74
<b>Tabla 4.14</b>	Respuestas con SNR = 3 dB, K = 10 y $SSF_2$ .	75
<b>Tabla 4.15</b>	Respuestas con SNR = 3 dB, K = 15 y $SSF_2$ .	76
<b>Tabla 4.16</b>	Respuestas con SNR = 6 dB, K = 5 y $SSF_2$ .	77
<b>Tabla 4.17</b>	Respuestas con SNR = 6 dB, K = 10 y $SSF_2$ .	78
<b>Tabla 4.18</b>	Respuestas con SNR = 6 dB, K = 15 y $SSF_2$ .	79
<b>Tabla 4.19</b>	Respuestas con SNR = 10 dB, K = 5 y $SSF_2$ .	80
<b>Tabla 4.20</b>	Respuestas con SNR = 10 dB, K = 10 y $SSF_2$ .	81
<b>Tabla 4.21</b>	Respuestas con SNR = 10 dB, K = 15 y $SSF_2$ .	82
<b>Tabla 4.22</b>	Respuestas con SNR = 20 dB, K = 5 y $SSF_2$ .	83

<b>Tabla 4.23</b>	Respuestas con SNR = 20 dB, K = 10 y SSF <sub>2</sub> .	84
<b>Tabla 4.24</b>	Respuestas con SNR = 20 dB, K = 15 y SSF <sub>2</sub> .	85
<b>Tabla 4.25</b>	Respuestas con SNR = 3 dB, K = 5 y SSF <sub>3</sub> .	86
<b>Tabla 4.26</b>	Respuestas con SNR = 3 dB, K = 10 y SSF <sub>3</sub> .	87
<b>Tabla 4.27</b>	Respuestas con SNR = 3 dB, K = 15 y SSF <sub>3</sub> .	88
<b>Tabla 4.28</b>	Respuestas con SNR = 6 dB, K = 5 y SSF <sub>3</sub> .	89
<b>Tabla 4.29</b>	Respuestas con SNR = 6 dB, K = 10 y SSF <sub>3</sub> .	90
<b>Tabla 4.30</b>	Respuestas con SNR = 6 dB, K = 15 y SSF <sub>3</sub> .	91
<b>Tabla 4.31</b>	Respuestas con SNR = 10 dB, K = 5 y SSF <sub>3</sub> .	92
<b>Tabla 4.32</b>	Respuestas con SNR = 10 dB, K = 10 y SSF <sub>3</sub> .	93
<b>Tabla 4.33</b>	Respuestas con SNR = 10 dB, K = 15 y SSF <sub>3</sub> .	94
<b>Tabla 4.34</b>	Respuestas con SNR = 20 dB, K = 5 y SSF <sub>3</sub> .	95
<b>Tabla 4.35</b>	Respuestas con SNR = 20 dB, K = 10 y SSF <sub>3</sub> .	96
<b>Tabla 4.36</b>	Respuestas con SNR = 20 dB, K = 15 y SSF <sub>3</sub> .	97
<b>Tabla 4.37</b>	Respuestas con SNR = 6 dB, K = 5 y SSF <sub>1</sub> .	98
<b>Tabla 4.38</b>	Respuestas con SNR = 20 dB, K = 5 y SSF <sub>1</sub> .	99
<b>Tabla 4.39</b>	Respuestas con SNR = 6 dB, K = 5 y SSF <sub>2</sub> .	100
<b>Tabla 4.40</b>	Respuestas con SNR = 20 dB, K = 5 y SSF <sub>2</sub> .	101
<b>Tabla 4.41</b>	Respuestas con SNR = 6 dB, K = 5 y SSF <sub>3</sub> .	102
<b>Tabla 4.42</b>	Respuestas con SNR = 20 dB, K = 5 y SSF <sub>3</sub> .	103
<b>Tabla 4.43</b>	Respuestas con SNR = 6 dB, K = 15 y SSF <sub>1</sub> .	104
<b>Tabla 4.44</b>	Respuestas con SNR = 20 dB, K = 15 y SSF <sub>1</sub> .	105
<b>Tabla 4.45</b>	Respuestas con SNR = 6 dB, K = 15 y SSF <sub>2</sub> .	106
<b>Tabla 4.46</b>	Respuestas con SNR = 20 dB, K = 15 y SSF <sub>2</sub> .	107
<b>Tabla 4.47</b>	Respuestas con SNR = 6 dB, K = 15 y SSF <sub>3</sub> .	108
<b>Tabla 4.48</b>	IOSNR en dB obtenido utilizando los datos de modelación: K = 15, K = 5, snr = 5dB y snr = 15 dB. Para un objeto v <sub>1</sub> .	109
<b>Tabla 4.49</b>	IOSNR en dB obtenido utilizando los datos de modelación: K = 15, K = 5, snr = 5dB y snr = 15 dB. Para un objeto v <sub>2</sub> .	110
<b>Tabla 4.50</b>	IOSNR en dB obtenido utilizando los datos de modelación: K = 5, snr = 6dB. Para un objeto v <sub>3</sub> .	110
<b>Tabla 4.51</b>	IOSNR en dB obtenido utilizando los datos de modelación: K = 5, snr = 3dB. Para un objeto v <sub>4</sub> .	111
<b>Tabla A.1</b>	Manipulación de matrices.	119
<b>Tabla A.2</b>	Fórmulas con vectores reales y complejos.	119

## GLOSARIO DE TÉRMINOS

- A priori.* Información que se posee con anterioridad.
- BMR. *Bayes Minimum Risk*, siglas para nombrar al método de mínimo riesgo de Bayes.
- CLS. *Constrained Least Squares*, siglas para nombrar al método de mínimos cuadrados limitado (restringido).
- Clutter.* Término inglés utilizado para nombrar a las señales de perturbación.
- EO. *Equation Observation*, siglas que significan ecuación de observación.
- Ill-posed.* Algo mal condicionado o establecido.
- IR. *Imaging Radar*, siglas que significan radar de formación de imagen.
- IRF. *Instrumental Response Function*.
- LS. *Least Squared*, siglas utilizadas para nombrar al método de mínimos cuadrados.
- Pixeles. Elementos puntuales de la distribución digital de una imagen.
- PSF. *Point Spread Function*.
- RBMR. *Robust Bayes Minimum Risk*, siglas que se utilizan para nombrar al método de mínimo riesgo robusto de Bayes.
- RRFRI. Siglas para representar al método de Regularización Robusta Fusionado con Retroalimentación de Información.
- RSI. *Remote Sensing/Imaging*, siglas que significan sensado (formación) de imagen remoto.
- Scattering.* Término para nombrar a los efectos de dispersión.
- SFO. *Signal Formation Operator*, siglas que se utilizan para nombrar al operador de formación de señal.
- SI. Siglas empleadas para representar al Sistema de Identificación.
- SSF. *System Spread Function*, siglas que representan al modelo del sistema de

captura de una señal.

WCLS. *Weighted Constrained Least Squares*, siglas que se utilizan para nombrar al método de mínimos cuadrados limitado ponderado.

# CAPÍTULO

# I

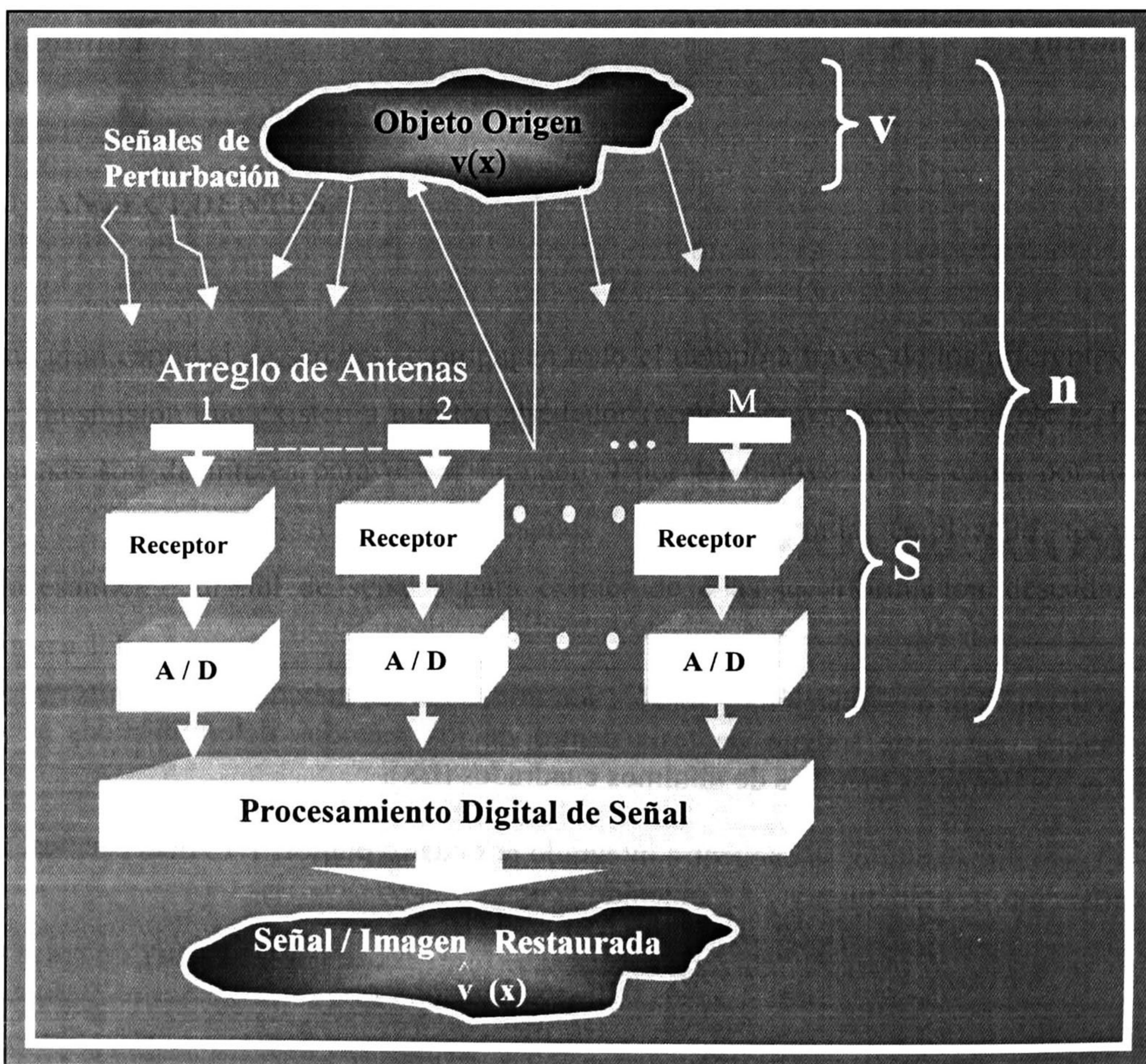
## INTRODUCCIÓN

En la reconstrucción o estimación de señales son utilizados los métodos determinísticos y estadísticos, para este trabajo de tesis dentro de los métodos determinísticos se consideran los llamados métodos de mínimos cuadrados (LS).

El presente capítulo, se encuentra integrado por cuatro puntos: 1.1 Antecedentes, 1.2 Justificación, 1.3 Objetivo y 1.4 Contenido general.

1.1 ANTECEDENTES

Una gran cantidad de señales se propagan todo el tiempo a través de los diferentes canales de transmisión que existen a nuestro alrededor (atmósfera, espacio, agua, etc.). De ellas, algunas son de interés para el ser humano y por tal motivo se les capta por medio de sensores (señales observadas) y después se les manipula empleando técnicas de procesamiento digital de señales para extraer de ellas la información deseada. Ver la **Figura 1.1.**



**Figura 1.1.** Estructura de un sistema multisensor de procesamiento de señales digital de una señal de información sensada remotamente.

En la práctica, la información contenida en las señales observadas generalmente difiere de la información que se transportaba originalmente. Esta diferencia en la mayoría de los casos se debe a que las señales sufren los efectos del medio o de otras señales, como los efectos de dispersión o *scattering*, (debidos al ruido multiplicativo [1] causado por irregularidades del medio) y los efectos de las señales de perturbación o *clutter*, es decir, aquellas señales que de la misma manera se encuentran viajando en el medio pero no son de interés y producen una componente de ruido aleatorio a la señal original.

Para disminuir la diferencia entre la señal observada y la señal original se utilizan métodos de filtrado para reconstruir dicha información. De esta manera se obtiene a partir de la señal observada (señal afectada por el ruido y perturbaciones del medio) una señal de mejor calidad (idealmente igual a la señal original).

En la **Figura 1.1** se muestra un ejemplo de procesamiento de señal y se emplea el sensado remoto o formación de imagen (RSI). Para la reconstrucción de la señal original es necesario aplicar métodos o técnicas matemáticas, por ejemplo: de regularización Bayesiana, máxima entropía, redes neuronales, etc., [1, 2, 6-30], en ocasiones estos métodos resultan ser de implementación computacional compleja.

En este trabajo de tesis se utilizarán los llamados métodos tradicionales de estimación de señal, los cuales son: los métodos de mínimos cuadrados, debido a que su implementación computacional resulta menos compleja. Los métodos tradicionales se dividen en dos grupos: los métodos clásicos paramétricos (determinísticos) y los métodos no paramétricos (estadísticos). Los métodos de estimación determinística [2-5, 31] utilizados son: LS, CLS, y WCLS. Los métodos no paramétricos (estadísticos) [2-5] utilizados son: BMR y RBMR.

El método de mínimos cuadrados (LS) es el método de estimación de implementación computacional sencilla, sólo que presenta un problema cuando es

necesaria la inversión de matrices de un modelo del sistema de perturbación. El método CLS soluciona el problema que se presenta en el método LS al utilizar la regularización descriptiva determinística de la teoría de regularización de Tikhonov [27]. El método WCLS tiene ventaja sobre el método CLS debido a que el método WCLS hace el uso de matrices de peso que dan grados de libertad, de esta manera se podrán manipular dichas matrices de modo que se obtenga una estimación mejor de la señal deseada. Los métodos estadísticos, a diferencia de los métodos determinísticos, tienen la ventaja de emplear características aleatorias haciendo que estos métodos sean mejores al no limitarse a características determinísticas, es decir, toman en consideración las propiedades estadísticas de la señal deseada (la media de la señal deseada  $\mathbf{v}$  y la del ruido  $\mathbf{n}$  ( $\mathbf{m}_v$  y  $\mathbf{m}_n$ , respectivamente), la matriz de covarianza de la señal deseada  $\mathbf{R}_v$  y las matrices del ruido  $\mathbf{n}$  y la señal observada  $\mathbf{u}$  ( $\mathbf{R}_n$  y  $\mathbf{R}_u$ , respectivamente)). La diferencia entre el método BMR y RBMR es que en este último método se toma en consideración las perturbaciones aleatorias del medio en que se propaga la señal deseada, dicho ruido es el que afectan al operador SFO.

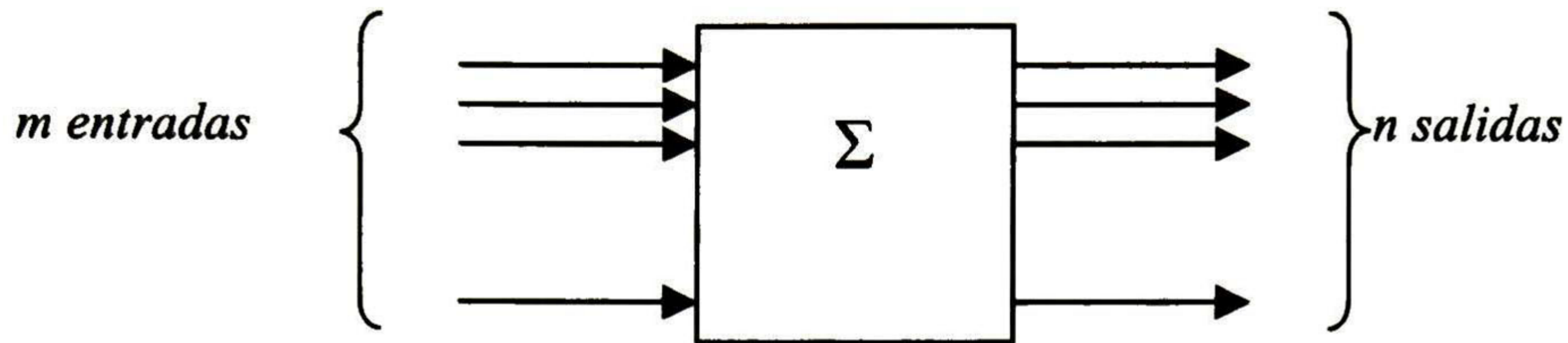
## 1.2 JUSTIFICACIÓN

---

Un problema típico del procesamiento de señales es la reconstrucción de una señal observada alterada por factores del medio en el que se propaga y por señales de perturbación. La señal que se desea obtener como producto de este procesamiento de señal debe ser lo más cercana (posible) a la señal original.

Sea un sistema  $\Sigma$  con  $m$  entradas y  $n$  salidas, al conjunto de  $m$  entradas se le llama sistema de entradas, mientras que al conjunto de  $n$  salidas se le llama sistema de salidas. Ver la **Figura 1.2**.





**Figura 1.2.** Estructura de un sistema de  $m$  entradas y  $n$  salidas.

En un sistema, como el de la **Figura 1.2**, los problemas a resolver con el procesamiento de señales se pueden dividir en dos grupos:

1. Problemas directos.
2. Problemas inversos.

Los problemas directos [34] son aquellos problemas que surgen cuando se desea encontrar el sistema de salidas de un sistema  $\Sigma$  a partir de su sistema de entradas.

A diferencia de los problemas directos, los problemas inversos [34] son aquellos en donde el procesador de señales manipula el sistema de salidas de un sistema  $\Sigma$ . Aquí se presentan dos casos: el primero es cuando se requiere obtener la reconstrucción del sistema de entradas de un sistema  $\Sigma$  y el segundo es cuando se requiere determinar el modelo del sistema  $\Sigma$  (para lo cual se debe también contar con el sistema de entradas).

Lo anterior se resume de manera gráfica en la **Figura 1.3**. En los problemas directos se manipula el sistema de entradas y en los problemas inversos se manipula el sistema de salidas.

El problema de la reconstrucción de una señal observada es un caso de problema inverso de procesamiento de señales. Para que el procesador de señales reconstruya una señal observada es necesario que además de manipular el sistema de salidas, cuente con

un conocimiento *a priori* [30, 32] ya sea del ruido y/o de la señal que se desea reconstruir. Para el caso en que se desea determinar el modelo del sistema, es necesario que el procesador de señales manipule el sistema de entradas y salidas.

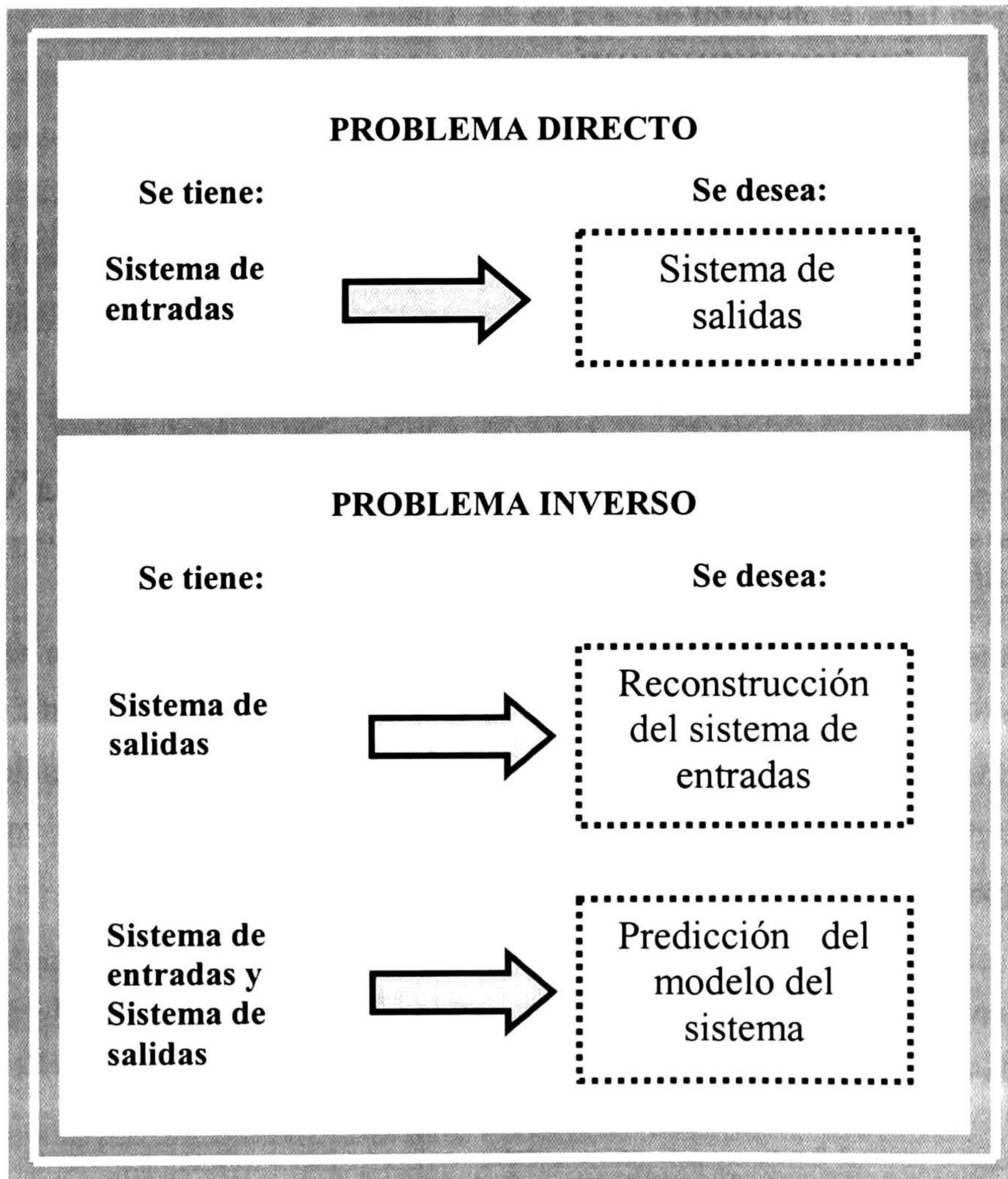


Figura 1.3. Tipos de problemas de procesamiento de señal.

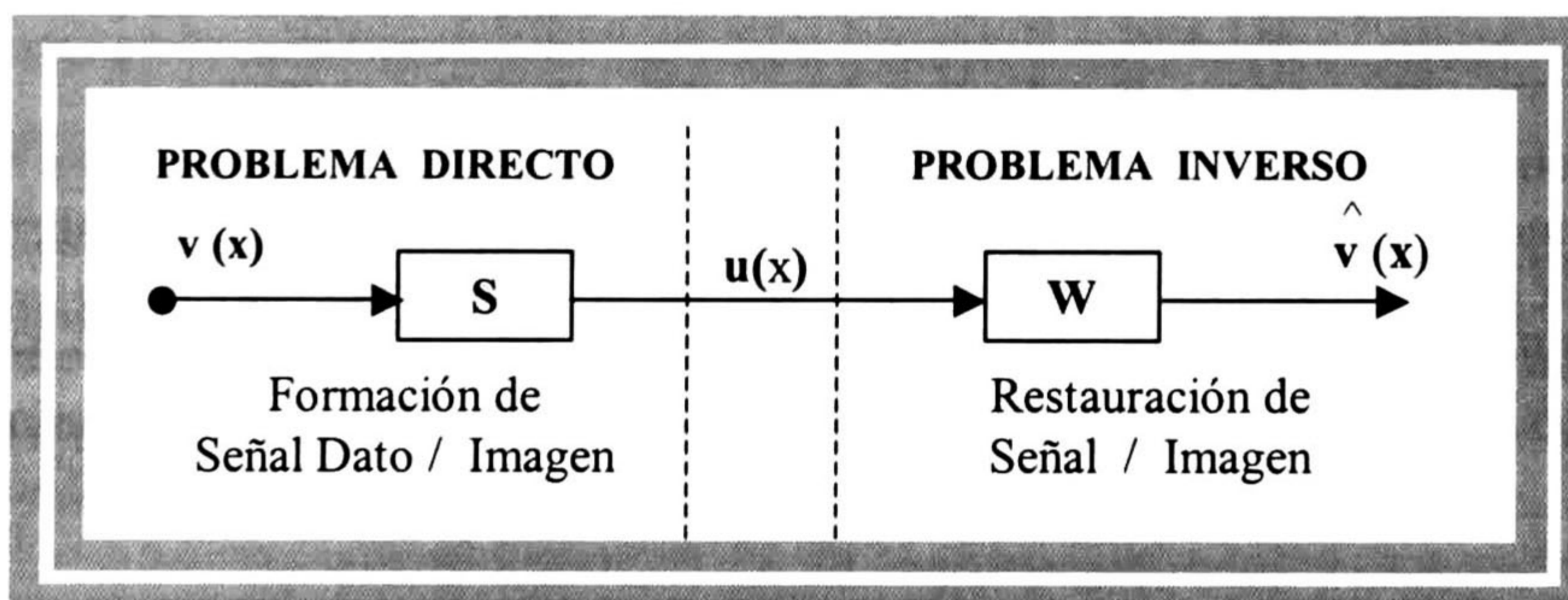
### 1.3 OBJETIVO

---

Tomando en cuenta los métodos tradicionales determinísticos y estadísticos para resolver los problemas inversos, el objetivo principal de esta tesis es analizar el comportamiento de dichos métodos tradicionales considerando diferentes modelos para el sistema de perturbación (SSF).

De este modo se propondrá un esquema que haciendo uso de los métodos tradicionales se logre encontrar una mejor reconstrucción de la señal deseada. Este nuevo esquema da mejores resultados a los obtenidos por el empleo aislado de los métodos tradicionales.

Considerando el problema inverso a resolver se debe encontrar un operador solución (representado por la matriz  $W$ ), el cual actúa sobre el sistema de salidas (vector de datos  $u$ ), para determinar una estimación mejorada del sistema de entradas (vector de señal deseada  $v$ ). En la **Figura 1.4** se puede apreciar el diagrama a bloques de problema a resolver.



**Figura 1.4.** Diagrama relacional del problema directo e inverso.

## **1.4 CONTENIDO GENERAL**

---

Esta tesis se encuentra dividida en cuatro capítulos. En el presente capítulo se hizo una introducción al trabajo efectuado en esta tesis.

En el capítulo II se presenta el marco teórico sobre el cual se sustenta la investigación llevada a cabo durante el desarrollo de esta tesis, así como un análisis del método básico LS, el cual es la base de los métodos determinísticos aquí desarrollados.

En el capítulo III se presenta el desarrollo de los de los esquemas propuestos para la reconstrucción de señales.

En el capítulo IV se presentan los correspondientes resultados obtenidos de las simulaciones llevadas a cabo durante la investigación y desarrollo del método RRFRI (Regularización Robusta Fusionado con Retroalimentación de Información).

# CAPÍTULO

## II

### CONCEPTOS PRELIMINARES

Para llevar a cabo el desarrollo de los métodos de estimación reconstruida de señales correlacionadas degradadas con ruido es necesario establecer parámetros y condiciones, por ejemplo: el planteamiento de la señal que se desea reconstruir, el tipo de ruido que afectará a dicha señal, el modelo del sistema de formación de imagen que afectará a nuestro análisis (tipo de SSF). Así como un breve recordatorio de algunos conceptos matemáticos de los cuales se hará uso.

## 2.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

---

### 2.1.1 Declaración de la señal original a reconstruir

Las diferentes señales (eléctricas, ópticas, electromagnéticas, infrarrojas, acústicas) que se transportan a través de un medio contienen información y pueden ser llamadas señales de información. Estas señales están en función del tiempo  $t$  y del espacio  $\mathbf{r}$ , en los dominios del tiempo  $T$  y del espacio  $P$ , es decir,  $t \in T$  y  $\mathbf{r} \in P$ , representándoseles con el vector  $\mathbf{x} = (t, \mathbf{r}^T)^T$  de puntos espacio-temporales [1] en el dominio de la imagen del objeto  $X = T \times P$ . En el área de procesamiento de imágenes digitales, el dominio espacial [31] se refiere a los píxeles que forman la imagen de un objeto, en otras palabras, el dominio espacial se refiere al plano de la imagen y los métodos o técnicas espaciales [31] son los que manipulan a los píxeles.

En el procesamiento de las señales e imágenes de objetos se asocia la imagen deseada  $v(\mathbf{x})$  con las propiedades de radiación o dispersión del objeto. Estas propiedades pueden ser formalizadas al introducir la función de dispersión  $v(\mathbf{x})$  que define la distribución de las características de dispersión sobre el dominio  $X$  de la imagen del objeto. Generalmente esta función está modelada como una función aleatoria independiente del tiempo,  $v(\mathbf{x}) = v(\mathbf{r})$ . Permitiendo que  $s(\mathbf{y})$  defina la señal esperada (inducida por radiación o dispersión) del objeto en el punto espacio-temporal  $\mathbf{y} = (t, \mathbf{p}^T)^T$  en el dominio espacio-temporal  $Y = T \times P_r$  (se entiende por  $Y$  como el dominio de observación de la señal) donde el arreglo de sensores y receptores está desplazado.

Se considera un modelo de una fuente de un objeto de tipo puntual localizado en el punto  $\mathbf{x}_0$  con características de dispersión unitaria, es decir,  $v(\mathbf{x}) = 1 \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ . Se define la señal  $s(\mathbf{y})$  inducida por la fuente en el punto “ $\mathbf{y}$ ” localizada en el punto “ $\mathbf{x}$ ” con una amplitud de dispersión arbitraria  $v(\mathbf{x})$  como  $S(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ :

$$s(\mathbf{y}) = S(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \nu(\mathbf{x}) = S(\mathbf{y}, \mathbf{x}_0). \quad (2.1.1)$$

Para el caso de un objeto distribuido espacialmente y especificado por su función de dispersión  $\nu(\mathbf{x})$ ;  $\mathbf{x} \in X$ , la señal  $s(\mathbf{y})$  es formada por los registros de todas las fuentes de tipo puntual distribuidas sobre el dominio de la imagen del objeto  $X$ . Como resultado, se tiene una superposición de las señales distribuidas espacialmente de (2.1.1) que puede ser expresada en la siguiente integral:

$$s(\mathbf{y}) = \int_X S(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \nu(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (2.1.2)$$

donde  $S(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  es llamada función de modulación de señal, esta señal es la que define al operador de formación de señal  $S$  dado por la integral (2.1.2):

$$s(\mathbf{y}) = (S \nu(\mathbf{x}))(\mathbf{y}), \quad (2.1.3)$$

a este operador se le conoce en sistemas opto-electrónicos como función de dispersión de punto, representada por las siglas PSF; en sistemas infrarrojos como función de respuesta instrumental, representada por la siglas IRF y en sistemas de monitoreo (radar y satélite) como función de dispersión del sistema, representada por la siglas SSF.

### 2.1.2 El ruido

El ruido Gaussiano aditivo  $n(\mathbf{y})$  [41], [43], es utilizado para representar al ruido de los sensores, de los canales receptores y de las señales perturbadoras (provenientes de fuentes de interferencia o señales dispersadas de ningún interés). Sabiendo que el ruido contamina a la señal se producirá la señal conocida como señal dato observada:

$$u(\mathbf{y}) = s(\mathbf{y}) + n(\mathbf{y}). \quad (2.1.4)$$

### 2.1.3 Preprocesamiento de la señal original

Es necesario utilizar la teoría de descomposición de señal simplemente como una introducción al entendimiento del término de descomposición de señal al digitalizar el dato de observación continuo  $u(\mathbf{y})$  en un vector de dato  $\mathbf{u}$  de dimensión finita con la introducción del operador de descomposición (discretización)  $P$ :

$$\mathbf{u} = P u(\mathbf{y}) = P ((S v(\mathbf{x}))(\mathbf{y}) + n(\mathbf{y})). \quad (2.1.5)$$

En el sistema de procesamiento de señal que se trata, se localizan un número de sensores independientes posicionados en diferentes puntos del espacio para responder a la señal recibida. Los sensores proporcionan un método de muestreo de la señal recibida  $u(\mathbf{y})$  del espacio. Las salidas registradas del conjunto de sensores en un instante de tiempo  $t_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, I$ , constituyen una instantánea del vector de dato  $\mathbf{u}$ . Por lo tanto la forma discreta de la ecuación de observación es:

$$\mathbf{u} = \mathbf{s}(v(\mathbf{x})) + \mathbf{n} = \int_X \mathbf{S}(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \mathbf{n}, \quad (2.1.6)$$

donde  $v(\mathbf{x})$  es la señal deseada y desconocida,  $\mathbf{S}(\mathbf{x})$  es el vector de kernels de  $S_k(\mathbf{x})$  y  $\mathbf{u}$  es el vector compuesto con los datos de instantáneas con:

$$u_k = s_k + n_k = \int_X S_k(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + n_k; \quad k = 1, \dots, K, \quad (2.1.7)$$

donde cada instantánea  $u_k$  mide un aspecto de  $v(\mathbf{x})$  por medio de su propio kernel  $S_k$  y su propio error  $n_k$ . Aunque no es necesario conocer todos los puntos  $\mathbf{x}$  de  $v(\mathbf{x})$  si es necesario conocer  $l$  puntos discretos donde  $l = 1, \dots, L$ .

El problema principal es encontrar una solución para el problema inverso, es decir, encontrar el operador solución  $W$  que al aplicarlo sobre el vector  $\mathbf{u}$  resulte el estimado de la señal de interés  $v(\mathbf{x})$ :



$$\hat{v}(\mathbf{x}) = (W \mathbf{u})(\mathbf{x}). \quad (2.1.8)$$

Considerando la expresión (2.1.7) como el vector:

$$\mathbf{u} = \mathbf{S} \mathbf{v} + \mathbf{n}, \quad (2.1.9)$$

donde  $\mathbf{v}$  es el vector formado por  $L$  puntos discretos,  $v_l = v(\mathbf{x}_l)$  y  $\mathbf{S}$  es una matriz de  $K \times L$  que define la aproximación de dimensión finita del operador integral en (2.1.6). Si se considera hacer con los estimadores lineales, que el operador solución  $W$  es una matriz  $\mathbf{W}$ , la solución a (2.1.9) es:

$$\hat{v} = \mathbf{W} \mathbf{u} = \mathbf{W} (\mathbf{S} \mathbf{v} + \mathbf{n}). \quad (2.1.10)$$

Por lo tanto se debe de encontrar un operador solución  $W$  y la matriz  $\mathbf{W}$  para que la reconstrucción el vector  $\mathbf{v}$  sea una estimación del vector deseado  $\mathbf{v}$ .

## 2.2 ESPACIO DE UNA SEÑAL

### 2.2.1 Vector de un espacio de señal

Sea el vector señal  $\mathbf{v}$ , de dimensión  $N$ , un elemento de algún espacio de vector  $V = V_{(N)}$  de dimensión finita  $N$  cuyas propiedades métricas son:

1. La norma de un elemento: 
$$\|\mathbf{v}\| = \left( \sum_{n=1}^N v_n^2 \right)^{1/2}. \quad (2.2.1)$$

2. La distancia entre dos elementos: 
$$d(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|. \quad (2.2.2)$$

$$3. \text{ El producto interno de dos elementos: } [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2^+ \mathbf{v}_1. \quad (2.2.3)$$

donde el símbolo  $*$  representa el conjugado del vector y el símbolo  $^+$  es la Hermitiana [41], [46] que es igual al transpuesto conjugado ( $^T*$ ).

Un espacio de señal [5], es un espacio Euclidiano  $l_2$  con las propiedades métricas (2.2.1), (2.2.2) y (2.2.3). Estas propiedades métricas están inducidas por el producto interno  $[ \cdot ]$  como se aprecia en las siguientes expresiones:

$$\left. \begin{array}{l} \text{La norma,} \quad \|\mathbf{v}\|^2 = [\mathbf{v}, \mathbf{v}] \\ \text{La distancia cuadrada} \quad d^2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = [(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2), (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)]. \end{array} \right\} \quad (2.2.4)$$

### 2.2.1.1 Bases

El conjunto  $\{\boldsymbol{\varphi}_n ; n = 1, \dots, N\}$  de vectores linealmente independientes [5] en  $V$  especifican la base para el espacio  $V$  y una base  $\{\boldsymbol{\theta}_n\}$  en  $V$  cuyos vectores son ortonormales con respecto a  $\{\boldsymbol{\varphi}_n\}$  y las dos bases  $\{\boldsymbol{\varphi}_n\}$  y  $\{\boldsymbol{\theta}_n\}$  deben cumplir la siguiente expresión:

$$[\boldsymbol{\varphi}_n, \boldsymbol{\theta}_j] = \delta_{nj}. \quad (2.2.5)$$

donde  $\delta_{nj}$  es el símbolo Krönecker ( $\delta_{nj} = 1$ , si  $n = j$  de lo contrario  $\delta_{nj} = 0$ ).

### 2.2.1.2 Descomposición de un vector

La composición lineal [5] de  $\{\boldsymbol{\varphi}_n\}$  considerando un vector de valor complejo  $\mathbf{x}$  en  $V$  con elementos  $\{x_k = x(k); k = 1, \dots, N\}$  puede ser representado como:

$$\mathbf{x} = \sum_{n=1}^N X_n \boldsymbol{\varphi}_n, \quad (2.2.6)$$

donde los coeficientes  $X_n$  (descomposición de  $\mathbf{x}$ ) son:

$$X_n = [\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_n]; \quad n = 1, \dots, N, \quad (2.2.7)$$

donde  $\boldsymbol{\theta}_n$  son los vectores de la base definida por (2.2.5).

### 2.2.2 Función de un espacio de señal

Generalizando la definición de un vector de un espacio de señal considerando señales continuas como elementos de un espacio. Se dice que las señales  $v(x)$  y  $u(y)$  pertenecen a las funciones del espacio de señales  $V(X)$  y  $U(Y)$ , respectivamente. Considerando que  $v(x)$  y  $u(y)$  son señales escalares (de valores complejos o reales) y que  $x, y$  son variables reales en los dominios  $X$  y  $Y$ , respectivamente.

$$v(x) \in V(X), \quad u(y) \in U(Y) \quad \text{o} \quad v \in V, \quad u \in U. \quad (2.2.8)$$

Como consiguiente, un mapeo de  $V$  sobre  $U$  está especificado con el operador  $S$  que opera desde  $V$  dentro de  $U$ , es decir:

$$u = S v, \quad S: V \rightarrow U. \quad (2.2.9)$$

El espacio de vector  $l_2$  mantiene una fuerte analogía con su generalización funcional (referida como el espacio de Hilbert  $L_2$ ), por consiguiente, los dos modelos (vectores  $\mathbf{v}$  y funciones  $v(x)$ ) deben estar en el mismo marco de trabajo. La generalización funcional consiste de todas las funciones  $v(x) \in V(X) = L_2(X)$ , donde la norma  $\|v\|$  es la métrica más importante de un espacio de Hilbert. Al igual que en el espacio de vectores las

características métricas de un espacio de funciones  $L_2$  son inducidas por el producto interno de sus elementos :

$$[v_1, v_2] = \int_x v_1(x) v_2^*(x) dx. \quad (2.2.10)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{La norma cuadrada} \quad \|v\|^2 = [v, v] \\ \text{La distancia cuadrada} \quad d^2(v_1, v_2) = [(v_1 - v_2), (v_1 - v_2)]. \end{array} \right\} \quad (2.2.11)$$

### 2.2.2.1 Bases

Un conjunto de señales linealmente independientes  $\{\varphi_n(x); n = 1, \dots, N\}$  representa la base en el espacio de función  $V = L_2$  y el conjunto mutuamente ortogonal  $\{\theta_n(x); n = 1, \dots, N\}$  representa la base recíproca en  $V$ . Donde las dos bases ( $\{\varphi_n(x)\}$  y  $\{\theta_n(x)\}$ ) cumplen con la siguiente expresión:

$$[\varphi_n, \theta_j] = \int_x \varphi_n(x) \theta_j^*(x) dx = \delta_{nj}. \quad n, j = 1, 2, \dots, N. \quad (2.2.12)$$

### 2.2.2.2 Descomposición de una función de señal

Cualquier señal  $v(x) \in V = L_2$  puede ser expandida, un ejemplo de esto se aprecia en series de Fourier usando las funciones base  $\{\varphi_n(x); n = 1, \dots, N\}$ , es decir:

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \varphi_n(x); \quad (2.2.13)$$

donde los coeficientes de expansión son:

$$v_n = [v, \theta_n] = \int_x v(x) \theta_n(x) dx, \quad (2.2.14)$$

donde los primeros  $N$  coeficientes  $v_n$  en (2.2.14) son utilizados para formar el vector  $\mathbf{v}$ , dicho vector es el vector de óptima aproximación a la señal continua  $v(x)$  utilizando  $N$  funciones base  $\{\phi_n(x); n = 1, \dots, N\}$ . Dicho vector  $\mathbf{v}$  define los coeficientes de una proyección ortogonal de la señal  $v(x)$  sobre la aproximación del subespacio  $V_N$  que está formado por  $N$  funciones base  $\{\phi_n(x); n = 1, \dots, N\}$  para definir el operador de proyección  $P$ . Una proyección ortogonal para la óptima discretización de una señal puede representarse como sigue:

$$\mathbf{v} = P v(x), \quad P: V \rightarrow V_N. \quad (2.2.15)$$

### 2.3 OPERADORES LINEALES EN SISTEMAS DE PROCESAMIENTO DE SEÑALES

La ecuación lineal de observación [33] (EO) queda de la siguiente forma:

$$u = S v + n, \quad v \in V, \quad u \in U \quad S: V \rightarrow U, \quad (2.3.1)$$

donde  $u = u(y)$  es la señal dato,  $v = v(x)$  es la señal inicial de interés y  $n = n(y)$  es el ruido observado. Por generalidad se consideran que tanto la señal  $v(x)$  y  $u(y)$  pertenecen a diferentes funciones de señal  $V(X)$  y  $U(Y)$  y que  $S$  define el mapeo de  $V(X)$  sobre  $U(Y)$ . Reescribiendo (2.3.1):

$$u(y) = \int_x S(y, x) v(x) dx + n(y); \quad x \in X, \quad y \in Y \quad (2.3.2)$$

El operador solución  $W$  de la expresión (2.1.8) puede ser referido como el inverso

de un operador del sistema  $S$ . Para poder manipular los operadores necesarios en el desarrollo de la resolución del problema es necesario repasar las siguientes definiciones para algunos operadores:

*Operador Lineal.* Se dice que el mapeo  $S: V \rightarrow U$  define un operador lineal  $S$  si se satisface la siguiente condición de linealidad:

$$(a S_1 + b S_2) v = a S_1 v + b S_2 v. \quad (2.3.3)$$

*Operador Filtro.* Si dentro de un espacio de señal actúa un operador  $S$  este será llamado filtro, esto quiere decir que las señales  $v(x)$  y  $u(y)$  pertenecen al mismo espacio de función  $V(X) = U(Y); X = Y; x, y \in X$ . Lo que el filtro  $S$  define el mapeo del espacio de señal  $V(X)$  sobre sí mismo:  $S: V \rightarrow V$ .

*Operador Inverso.* Este operador se representa con la expresión  $S^{-1}$  definido como:

$$S^{-1}S = I; \quad S^{-1}: U(Y) \rightarrow V(X), \quad (2.3.4)$$

donde  $I$  es el operador identidad y presenta la forma:  $I(y, x) = \delta(y - x)$ .

*Operador Adjunto.* Sea  $S^+$  el operador adjunto del operador  $S$ , es decir:

$$[u, S v] = [S^+ u, v]; \quad S^+: U(Y) \rightarrow V(X), \quad (2.3.5)$$

considerando la forma integral del operador dado por la expresión (2.1.2),  $S^+$  será:

$$q(x) = (S^+ u(y))(x) = \int_Y S^*(x, y) u(y) dy, \quad q(x) \in V(X), \quad (2.3.6)$$

donde el kernel  $S^*(x, y)$  es el conjugado complejo inverso del kernel original  $S(y, x)$ .

*Operador Normal.* Es el mismo operador adjunto ya que el operador lineal integral normalmente especifica el Kernel simétrico de valores reales, es decir,  $S(y, x) = S^*(x, y) = S(y - x)$ . Donde  $S^+S$  es el operador normal donde:

$$S^+S = (S^+S)^+ \quad (2.3.7)$$

*Operador Unitario.* Es el operador que su adjunto es igual a su inverso,  $S^+ = S^{-1}$ . Un ejemplo ocurre en la transformada de Fourier de una función sobre el dominio del espacio y de la frecuencia,  $X = (-\infty, \infty)$ ,  $Y = (-\infty, \infty)$ :

$$u(y) = (S v) = \int_X S(y, x) v(x) dx, \quad \text{con Kernel } S(y, x) = \exp(-i2\pi yx), \quad (2.3.8)$$

y la transformada inversa de Fourier es:

$$v(x) = (S^{-1} u) = (S^* u) = \int_Y S^*(x, y) u(y) dy, \quad (2.3.9)$$

con Kernel  $S^*(x, y) = \exp(i2\pi yx)$ .

Subrayando que  $v(x)$  y su transformada de Fourier  $u(y)$  no pertenecen al mismo espacio de función.

*Eigenfunciones y eigenvalores.*

$$S \varphi_n(x) = e_n \varphi_n(x); \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (2.3.10)$$

donde  $S$  es un operador filtro lineal (que opera dentro de la misma señal,  $V(X) = U(Y)$ ,  $X = Y$ ;  $S: V \rightarrow V$ ) que tiene un número infinito de eigenfunciones  $\varphi_n(x)$  relacionado con sus eigenvalores  $e_n$   $n = 1, 2, \dots, N$ , el operador adjunto  $S^+$  tiene un conjunto mutuamente ortonormal de funciones  $\theta_n(x)$  como sus eigenfunciones y un conjunto de complejos conjugados de  $e_n$  como los eigenvalores asociados:

$$[S \varphi_n, \theta_n] = e_n [\varphi_n, \theta_n] = [\varphi_n, e_n^* \theta_n],$$

de igual forma:

$$[S \varphi_n, \theta_n] = [\varphi_n, S^+ \theta_n],$$

esto genera:

$$S^+ \theta_n(x) = e_n^* \theta_n(x), \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (2.3.11)$$

*Teorema de Parseval.* Dicho teorema dice que la norma cuadrada de la función  $v(x)$  calculada en el dominio especial (o del tiempo)  $X = (-\infty, \infty)$  es igual a la norma cuadrada de su transformada de Fourier  $u(y) = (S v)(y)$  calculada en el dominio de la frecuencia  $Y = (-\infty, \infty)$ . Considerando que el operador de la transformada de Fourier  $S$  es un operador unitario:

$$\|u\|^2 = [u, u] = [S v, S v] = [v, S^+ S v] = [v, S^{-1} S v] = [v, v] = \|v\|^2 \quad (2.3.12)$$



## 2.4 DESCOMPOSICIÓN DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL DE SEÑALES ESPECIALES

Considerando la expresión (2.2.13) y acotando la continuidad de la señal  $v$  al igual que la señal  $u$ , resultan las siguientes expresiones:

$$v(x) = \sum_{n=1}^N v_n \varphi_n(x); \quad u(y) = \sum_{l=1}^L u_l \theta_l(y), \quad (2.4.1)$$

con sus respectivos coeficientes de expansión:

$$v_n = [v, \varphi_n] = \int_X v(x) \varphi_n^*(x) dx,$$

$$u_l = [u, \theta_l] = \int_Y u(y) \theta_l^*(y) dy. \quad (2.4.2)$$

Considerando que  $S$  representa la relación entre los valores numéricos (vectores  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{u}$ ) de las señales  $v(x)$  y  $u(y)$ , respectivamente, para el problema de aproximación de discretización de la forma de la expresión (2.1.9).

Utilizando la aproximación dada para  $v$  por la expresión (2.4.2) y reemplazando  $u$  en la expresión (2.4.2) por el modelo de la expresión (2.3.1):

$$\begin{aligned} u_l &= [u, \theta_l] = [(Sv + n), \theta_l] = [(S(\sum v_n \varphi_n) + n), \theta_l] = \\ &= \sum v_n [S\varphi_n, \theta_l] + [n, \theta_l] = S_{ln} v_n + n_l, \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

donde  $S_{ln} = [S\varphi_n, \theta_l]$  son los elementos de la matriz  $S$ ,  $n_l = [n, \theta_l]$ ,  $l = 1, 2, \dots, L$  y  $n = 1, 2, \dots, N$ .

### 2.4.1 Descomposición de una transformación integral

Reescribiendo la expresión (2.3.2) considerando que  $S$  es un operador integral lineal:

$$u(y) = \int_X S(y, x) v(x) dx + n(y), \quad (2.4.4)$$

donde  $S(y, x)$  es la función Kernel y los elementos de la matriz  $S$  serán:

$$S_{ln} = [S \varphi_n, \theta_l] = \iint_{XY} S(y, x) \varphi_n(x) \theta_l^*(y) dx dy \quad (2.4.5)$$

### 2.4.2 Eigenbases de un operador normal

Considerando al operador normal ( $S = S^*$ ) y deduciendo que en (2.3.8) y (2.3.9) el conjunto de eigenfunciones  $\{\varphi_n(x)\}$  del operador  $S$  compone una base ortonormal en el espacio de señal  $V$  (es decir,  $\varphi_n(x) = \theta_n(x)$ ) con sus eigenvalores  $e_n = e_n^*$  donde  $n = 1, 2, \dots, N$  y si las  $N$  primeras funciones  $\{\varphi_n(x)\}$  son seleccionadas para aproximar al operador, entonces:

$$S_{ln} = [S \varphi_n, \varphi_l] = e_n [\varphi_n, \varphi_l] = e_n \delta_{nl}; \quad n, l = 1, 2, \dots, N \quad (2.4.6)$$

El uso de esta base para la aproximación de la ecuación de observación con un operador lineal normal resulta la expresión (2.1.9) donde  $S = \text{diag}\{e_n\}$ , donde  $\text{diag}$  es la abreviatura de la palabra diagonal y  $n = 1, 2, \dots, N$ . La matriz  $Y$  de  $N \times N$  está formada por los primeros  $N$  eigenvalores  $\{e_n; n = 1, 2, \dots, N\}$  del operador  $S$ .

## 2.5 MODELOS DE INCERTIDUMBRES

---

En el modelado de nuestro problema a resolver de la expresión (2.1.9) se consideran dos tipos de modelos de incertidumbres.

El primer modelo de incertidumbres se presenta con el vector ruido  $\mathbf{n}$  y el vector dato  $\mathbf{u}$ . El ruido recibido en los sensores es modelado como ruido blanco Gaussiano con media cero, para las señales distorsionadoras en radares y las señales por reverberación en sonares son modeladas como ruido Gaussiano coloreado, este ruido representa el modelo de incertidumbres del modelo del ruido aditivo en el caso en que las características estadísticas del ruido coloreado sean desconocidas.

El segundo modelo de incertidumbres se debe a las propiedades no homogéneas del medio de propagación. Debido a los efectos de propagación sobre las señales físicas causados por el medio en que se propagan que pueden ser: efectos de dispersión por las irregularidades del medio, distorsión y reverberación.

Es decir estos efectos causan distorsiones estocásticas en la señal de interés, produciendo una modulación no deseada de la señal, esta modulación no deseada se manifiesta como perturbaciones en la función de modulación de la señal  $S(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ . La generalización de la función de modulación de la señal  $S_{\sim}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  es expresada por:

$$S_{\sim}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = S(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + S_{\Delta}(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \quad (2.5.1)$$

donde  $S(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \langle S_{\sim}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \rangle$  denota la componente media de la función referida como la función de modulación de la señal nominal (o regular) convencional.  $S_{\Delta}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ , representa las variaciones de  $S_{\sim}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  al rededor de la media que está referida como ruido multiplicativo en un canal de propagación.

Para el caso en que las estadísticas de las perturbaciones  $S_{\Delta}(y, x)$  son desconocidas se dice: el modelo de incertidumbres acerca del modelo de operador de formación de señal (SFO).

Reescribiendo el modelo del vector de la expresión (2.1.9) para una versión perturbada:

$$\mathbf{u} = \mathbf{S}\mathbf{v} + \mathbf{n} = (\mathbf{S} + \mathbf{S}_{\Delta})\mathbf{v} + \mathbf{n}. \quad (2.5.2)$$

Para soluciones del problema inverso, la expresión (2.1.10) será reescrita como sigue:

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{W} \mathbf{u} = \mathbf{W} (\mathbf{S}\mathbf{v} + \mathbf{n}) = \mathbf{W} ((\mathbf{S} + \mathbf{S}_{\Delta}) \mathbf{v} + \mathbf{n}). \quad (2.5.3)$$

Recordando que es necesario conocer alguna información acerca de la función de modulación de la señal, especificado por la matriz  $\mathbf{S}$  y que se necesita alguna información estadística de las componentes aleatorias de la ecuación de observación, resultan los siguientes tres modelos:

- 1.- El modelo estadístico del vector de la señal  $\mathbf{v}$ .
- 2.- El modelo estadístico del ruido aditivo  $\mathbf{n}$ .
- 3.- El modelo estadístico del operador de perturbaciones  
(ruido multiplicativo)  $\mathbf{S}_{\Delta}$ .

## 2.6 SISTEMA DE IDENTIFICACIÓN

Siendo necesario el modelado matemático para resolver el problema inverso, se analiza un sistema de identificación que es un campo del modelado matemático de sistemas de información experimental para la identificación del modelo de una transformada desconocida de una señal, el sistema de identificación es introducido con la parametrización del problema como un método de resolución de la naturaleza mal condicionada (*ill-posed* [48]) del problema inverso y es descrito por las consideraciones básicas para la identificación de sistemas. Envolviendo la parametrización como una regularización descriptiva del problema inverso al diseñar la solución para el problema del sistema de identificación se empleará la técnica optimización de mínimos cuadrados debido al análisis de sus características deseables.

Considerando una transformada desconocida de un vector de una señal  $\mathbf{v}$  [44]:

$$\mathbf{u} = \mathbf{s}(\mathbf{v}) + \mathbf{n}, \quad (2.7.1)$$

donde el vector  $\mathbf{v}$  está integrado por los valores  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_k$ , de una variable independiente  $v$ ,  $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{v})$  es el vector de los valores  $s_1, s_2, s_3, \dots$  y  $s_k$  de la correspondiente variable independiente  $s$ , el vector  $\mathbf{n}$  es el ruido aleatorio en las observaciones  $\mathbf{u}$ . La función  $\mathbf{s}(\mathbf{v})$  es la transformada desconocida de una excitación del sistema, es decir, cada  $k$ -ésimo valor de  $u_k$  sólo dependerá del valor  $k$ -ésimo de la entrada  $v_k$ :  $u_k = s v_k + n_k$  donde  $k = 1, 2, 3, \dots, K$ . Los valores de las señales  $v_k, s_k$  y  $u_k$  son valores reales. Ver **Figura 2.1**.

El problema a resolver es identificar el modelo de una función  $s(v)$  de una transformada desconocida  $s$  de una señal, dado el dato de entrada y salida  $K$ -dimensional del sistema  $s$  bajo investigación  $\{u_k, v_k; k = 1, 2, 3, \dots, K\}$ . Al dar valores a la función de transferencia  $u = s(v)$  se obtiene una serie de valores  $\{u_k, v_k; k = 1, 2, \dots, K\}$ . Algunos valores de  $u_k$  tienen cantidades aleatorias llamadas errores ( $n_k$ ) que son

descritos estadísticamente. Por lo tanto el problema es encontrar una función  $s(v)$  que sea la mejor aproximación (estadísticamente) a la curva  $u = s(v)$ .

Una forma muy simple de la regularización es la parametrización del problema. Esta forma parametrizada del problema puede ser referida como sigue: considerando  $M$  hipótesis modelos para la función de aproximación :

$$s(v) = \{s_m(v, \lambda_m); m = 1, \dots, M\}, \tag{2.7.2}$$

donde se considera a cada función  $s_m(v, \lambda_m)$  como una función conocida de la variable  $v$  dependiente del vector de parámetros desconocidos  $\lambda_m; m = 1, \dots, M$ . Considerando que se tienen parámetros modelos,  $\lambda = (a, b)^T$ , para todos los modelos  $\{s_m(v, \lambda); m = 1, \dots, M\}$ . La solución al problema de parametrización se realiza al seleccionar un modelo particular del sistema  $s_m(v, \hat{\lambda}_m)$  al tomar una decisión en favor de la  $m$ -ésima hipótesis y estimar el parámetro vector correspondiente  $\lambda$ :

$$\hat{s}(v) = s_m(v, \hat{\lambda}_m); m = 1, \dots, M \tag{2.7.3}$$

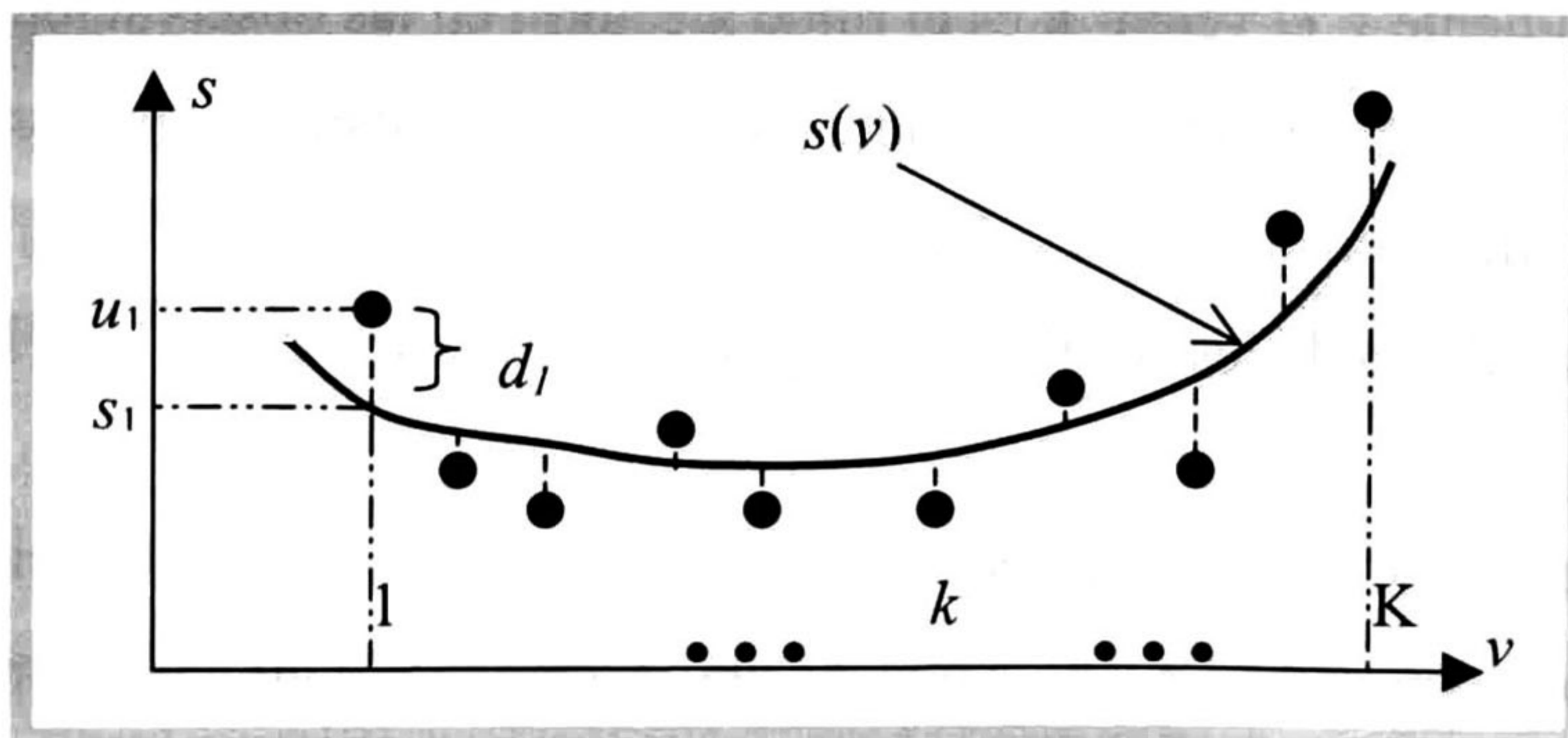


Figura 2.1. Representación gráfica de la función  $s(v)$ .

Al utilizar la parametrización se convierte nuestro planteamiento del problema de identificación de la función  $s(v)$ , de un conjunto finito de datos de entrada-salida, mal planteado a un problema mejor condicionado de comprobación de un número finito de  $M$  hipótesis y estimación del número finito de parámetros  $\lambda_m$  del modelo de un sistema en particular  $s(v) = s_m(v, \lambda_m)$  asociado con la selección de la  $m$ -ésima hipótesis  $m = 1, \dots, M$ .

Para seleccionar un modelo del sistema  $s_m(v, \lambda_m)$  en la parametrización del problema SI se deben comparar las posibles soluciones considerando todas las  $M$  hipótesis y entonces se pueda seleccionar la  $m$ -ésima hipótesis que disminuya el error de aproximación de la función  $s(v)$  para el modelo identificado  $s_m(v, \lambda_m)$  con respecto a los datos actuales  $u_k$ , para esto se debe seleccionar la mejor función de error para disminuir la desviaciones hacia el dato  $u_k$  resultando ser:

$$\min_{\lambda} \sum d_k^2 = \min_{\lambda} \sum (u_k - s(v_k, \lambda))^2 \quad (2.7.4)$$

donde la minimización de la suma de los cuadrados de las desviaciones brinda en esta función de error las siguiente ventajas: elimina la cancelación de errores con signos opuestos, da importancia a valores de errores pequeños y en el caso en que las desviaciones  $d_k$  tengan una distribución normal o gaussiana, la función  $s(v)$  puede ser la más probable, de igual forma, para el caso en que  $d_k$  siga alguna distribución estadística con una varianza constante. Para este trabajo se considera la siguiente hipótesis para la función de aproximación:

$$s_l(v, \lambda) = a v + b, \quad \text{donde } \lambda = (a, b)^T \quad (2.7.5)$$

La suma de los cuadrados de las desviaciones conduce al criterio de mínimos cuadrados [45], [46] :

$$J = \sum_{k=1}^K [u_k - s_m(v_k; a, b)]^2 \rightarrow \min_{m, \lambda} \quad (2.7.6)$$

donde el mínimo de la función  $J$  (2.7.6) es igualando a cero la derivada parcial de la función  $J$  con respecto a los parámetros  $a$  y  $b$ . Es decir:

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda_i} = (-2) \sum_{k=1}^K [u_k - s_m(v_k; a, b)] \frac{\partial s_m(v_k; \lambda)}{\partial \lambda_i} = 0, \quad (2.7.7)$$

donde  $i = 1, 2$ ;  $\lambda_1 = a$ ,  $\lambda_2 = b$ ;  $m = 1, \dots, M$ .

Para determinar la función  $J$  es necesario conocer el vector  $\lambda = (a, b)^T$  que se obtienen aplicando la ecuación (2.7.7). En caso de que la función de aproximación sea no lineal y se pueda aplicar una transformación matemática de funciones no lineales a funciones lineales (a lo que se le llama regresión lineal para la estimación de  $A$  y  $B$ ), se reemplazará el modelo (2.7.5) por el siguiente modelo lineal general llamado ecuación de regresión lineal:

$$U = S(V) = A V + B, \quad (2.7.8)$$

donde se reemplazó  $u$  por  $U$ ,  $v$  por  $V$ ,  $a$  por  $A$  y  $b$  por  $B$ . Los parámetros  $A$  y  $B$  serán obtenidos de las estimaciones ( $\hat{A}$  y  $\hat{B}$ ) de (2.7.7) y se obtendrán (de estas estimaciones) los valores de  $\hat{a}$  y  $\hat{b}$ . Por lo tanto resolviendo (2.7.7) se tendrá:

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial J}{\partial A} = \frac{\partial}{\partial A} \sum_{k=1}^K [U_k - (AV_k + B)]^2 = 2 \sum_{k=1}^K [U_k - (AV_k + B)] \left[ \frac{\partial}{\partial A} [U_k - (AV_k + B)] \right] = 0,$$

$$2 \sum_{k=1}^K [U_k - (AV_k + B)](-1)(V_k) = -2 \sum_{k=1}^K [U_k - (AV_k + B)]V_k = 0, \quad (2.7.9)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda_2} = \frac{\partial J}{\partial B} = \frac{\partial}{\partial B} \sum_{k=1}^K [U_k - (AV_k + B)]^2 = 2 \sum_{k=1}^K [U_k - (AV_k + B)] \left[ \frac{\partial}{\partial B} [U_k - (AV_k + B)] \right] = 0,$$



$$2 \sum_{k=1}^K [U_k - (AV_k + B)](-1) = -2 \sum_{k=1}^K [U_k - (AV_k + B)] = 0, \quad (2.7.10)$$

tanto en (2.7.9) como en (2.7.10) se despeja  $U_K$  y se obtiene la siguiente expresión:

$$\sum_{k=1}^K U_k V_k = A \sum_{k=1}^K V_k^2 + B \sum_{k=1}^K V_k, \quad (2.7.11.A)$$

$$\sum_{k=1}^K U_k = A \sum_{k=1}^K V_k + KB, \quad (2.7.11.B)$$

si  $\Lambda = [A \ B]^T$   $\mathbf{q} = [\sum U_k V_k \ \sum U_k]^T$  y  $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sum V_k^2 & \sum V_k \\ \sum V_k & K \end{bmatrix}$ , entonces  $\mathbf{q} = \mathbf{S} \Lambda$

y si se despeja  $\Lambda$  resultará la siguiente expresión:

$$\hat{\Lambda} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{q} \quad (2.7.12)$$

de este vector se obtiene los parámetros  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$  también llamados Coeficientes de Regresión:

$$\left. \begin{aligned} \hat{A} &= \frac{K \sum V_k U_k - \sum V_k \sum U_k}{K \sum V_k^2 - (\sum V_k)^2} \\ \hat{B} &= \frac{1}{K} (\sum U_k - \hat{A} \sum V_k). \end{aligned} \right\} \quad (2.7.13)$$

Al obtener los coeficientes de regresión se pueden calcular los estimados  $\hat{a}$  y  $\hat{b}$  de (2.7.5) con la sustitución inversa de variables dadas en el reemplazo de (2.7.8).

## **2.7 SUMARIO**

En el presente capítulo se llevo acabo el entendimiento de los parámetros que se utilizarán en este trabajo de tesis.

Para llevar acabo el procesamiento de una señal es necesario valernos de diferentes herramientas matemáticas, siendo tratadas en este capítulo las principales herramientas necesarias para poder llegar al análisis de la estimación de una señal por medio del método básico determinístico LS permitiendo avanzar al análisis del desarrollo de otros métodos (CLS, WCLS) que serán tratados en el capítulo III.

# CAPÍTULO

## III

### MÉTODOS DE ESTIMACIÓN DE SEÑALES

En el campo de procesamiento digital de señales existen innumerables métodos para la estimación o reconstrucción de señales. Este trabajo centra la investigación en los métodos tradicionales para la estimación de señales, dividiéndolos en dos grupos, los métodos determinísticos y los métodos estadísticos. Se sabe que los casos predominantes en la vida real son las señales aleatorias, por lo tanto se considera hacer el análisis para los métodos que se encargan de considerar las aleatoriedades de las señales, es decir, estos métodos toman en consideración las características estadísticas de las señales analizar, a estos métodos se les llama métodos estadísticos, un ejemplo claro es el método BMR el cual se caracteriza por minimizar el error medio total, es decir, asocia la probabilidad más baja de cometer errores. Similar a este método se encuentra el método RBMR que a diferencia del método de BMR, es que el método que toma en cuenta las irregularidades del medio en que viaja la señal original  $v$ . El análisis de estos métodos tradicionales permitirá entender y comparar el método RRFRI que se propone en este trabajo de tesis.

### 3.1 MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS LIMITADO

El método mínimos cuadrados limitado (CLS) es un método determinístico derivado del método LS que analiza el problema inverso, para encontrar un operador solución  $W$  de tal manera que aplicado al vector de señal dato  $u$  se encuentre una estimación de la señal original  $v$ . Este método emplea la regularización descriptiva determinística de la teoría de regularización de Tikhonov. Dicho método es modelado con la conocida ecuación de observación EO (2.3.1). Considerando la forma discreta para la expresión (2.3.1) se tiene la expresión (2.1.9).

#### 3.1.1 Información *a priori*

Como se mencionó anteriormente, para resolver el problema inverso es necesario tener un conocimiento acerca de la señal de entrada original  $v$  y del ruido  $n$  que afectada las salidas del sistema, es decir, es necesario hacer un análisis *a priori* [30], [32] del problema. El valor esperado de la señal es la media [41], [42] de la señal  $v$ :

$$\mathbf{m}_v = \langle v \rangle . \quad (3.1.1)$$

donde  $\langle \cdot \rangle$  es el operador que representa el valor esperado de una señal. Considerando el caso en que no exista información o conocimiento *a priori* sobre el vector  $\mathbf{m}_v$ , este se iguala a cero.

Considerando un ruido blanco con media cero, el conocimiento *a priori* del vector ruido  $n$  es:

$$\mathbf{m}_n = \langle n \rangle = \mathbf{0}, \quad (3.1.2)$$

y su matriz de correlación [41], [42], [47] es:

$$\mathbf{R}_n = \langle \mathbf{n} \mathbf{n}^+ \rangle. \quad (3.1.3)$$

### 3.1.2 Desarrollo del método CLS

Sabiendo que la distancia mínima (error) entre la aproximación  $Sv_k$  y  $u_k$  se encuentra minimizando la suma de los cuadrados de dichos parámetros:

$$\min \sum_{k=1}^K d_k^2 = \min \sum_{k=1}^K (u_k - Sv_k)^2, \quad (3.1.4)$$

de esta manera los errores de signos opuestos no se cancelan y los errores mayores tienen mayor importancia. En caso que las desviaciones de  $d_k$  sigan alguna distribución estadística (normal o gaussiana) entonces en la minimización (3.1.4) se puede encontrar la mejor aproximación para  $Sv$ .

En el método CLS la regularización de Tikhonov (regularización determinística) [27], tiene como idea reemplazar la función de costo  $J$  del método LS por una función de costo aumentada:

$$J(\mathbf{v}) = J_1(\mathbf{v}) + \alpha J_2(\mathbf{v}), \quad (3.1.6)$$

donde:

$$J_1(\mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{Sv}\|^2 = (\mathbf{u} - \mathbf{Sv})^+ (\mathbf{u} - \mathbf{Sv}), \quad (3.1.7)$$

$$J_2(\mathbf{v}) = \|\mathbf{v} - \mathbf{m}_v\|^2 = (\mathbf{v} - \mathbf{m}_v)^+ (\mathbf{v} - \mathbf{m}_v), \quad (3.1.8)$$

en la expresión (3.1.7)  $J_1(\mathbf{v})$  representa el error entre el vector  $\mathbf{u}$  y su componente del modelo de la señal  $\mathbf{Sv}$  y en la expresión (3.1.8)  $J_2(\mathbf{v})$  es el costo del criterio de la norma mínima que estabiliza la estimada de  $\mathbf{v}$  minimizando la diferencia entre la señal estimada y

$\mathbf{m}_v$ . El parámetro de regularización  $\alpha$  en la expresión (3.1.6) permite el intercambio entre fidelidad a las mediciones (criterio  $J_1$ ) y la sensibilidad al ruido (criterio  $J_2$ ). La solución con el método CLS [52] es:

$$\mathbf{v} = \arg \min_{\mathbf{v} \in V} J = \arg \min_{\mathbf{v} \in V} \left\{ \|\mathbf{u} - \mathbf{S}\mathbf{v}\|^2 + \alpha \|\mathbf{v} - \mathbf{m}_v\|^2 \right\}, \quad (3.1.9)$$

en el caso en que  $\alpha$  llegara a ser cero la expresión (3.1.9) sería reducida al método LS, es decir, la solución a  $\mathbf{v}$  sería determinada por  $\mathbf{u}$ , sin un conocimiento *a priori* de la solución deseada. En el caso en que  $\alpha$  tendiera a infinito el conocimiento *a priori* de  $\mathbf{m}_v$  es por si mismo suficiente para encontrar la solución  $\mathbf{v}$ . En la práctica el parámetro  $\alpha$  es considerado entre ambos limites.

Derivando parcialmente la expresión (3.1.6) con respecto a  $\mathbf{v}$  se obtiene el argumento mínimo de  $J$ :

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial \left( \mathbf{u}^T \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{S} \mathbf{v} - \mathbf{v}^T \mathbf{S}^T \mathbf{u} + \mathbf{v}^T \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{v} + \alpha \mathbf{v}^T \mathbf{v} - \alpha \mathbf{v}^T \mathbf{m}_v - \alpha \mathbf{m}_v^T \mathbf{v} + \alpha \mathbf{m}_v^T \mathbf{m}_v \right)}{\partial \mathbf{v}} \quad (3.1.10)$$

se obtiene : 
$$(\mathbf{S}^T \mathbf{S} + \alpha \mathbf{I}) \mathbf{v} = \alpha \mathbf{m}_v + \mathbf{S}^T \mathbf{u}. \quad (3.1.11)$$

Sumando y restando el término  $\mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{m}_v$  al lado izquierdo de la expresión (3.1.11) se obtiene:

$$\begin{aligned} (\mathbf{S}^T \mathbf{S} + \alpha \mathbf{I}) \mathbf{v} &= \alpha \mathbf{m}_v + \mathbf{S}^T \mathbf{u} + \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{m}_v - \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{m}_v \\ &= (\mathbf{S}^T \mathbf{S} + \alpha \mathbf{I}) \mathbf{m}_v + \mathbf{S}^T (\mathbf{u} - \mathbf{S} \mathbf{m}_v). \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Manipulando matemáticamente la expresión (3.1.12) se puede obtener la expresión

para el vector de la señal estimada:

$$\mathbf{v} = \mathbf{m}_v + (\mathbf{S}^+ \mathbf{S} + \alpha \mathbf{I})^{-1} \mathbf{S}^+ (\mathbf{u} - \mathbf{S} \mathbf{m}_v) = \mathbf{m}_v + \mathbf{W}_{\text{CLS}} (\mathbf{u} - \mathbf{S} \mathbf{m}_v) \quad (3.1.16)$$

donde:

$$\mathbf{W}_{\text{CLS}} = (\mathbf{S}^+ \mathbf{S} + \alpha \mathbf{I})^{-1} \mathbf{S}^+ \quad (3.1.17)$$

La matriz  $\mathbf{W}_{\text{CLS}}$  es el operador solución para encontrar un estimado de  $\mathbf{v}$  ( $\hat{\mathbf{v}}$ ).

### 3.2 MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS LIMITADO PONDERADO

El objetivo de este método de mínimos cuadrados limitado ponderado (WCLS), es encontrar el operador solución  $\mathbf{W}_{\text{WCLS}}$  [52] para encontrar una estimación de la señal original desconocida  $\mathbf{v}$ . Este método a diferencia del método CLS, tiene integrados grados de libertad representados con las matrices  $\mathbf{M}_v$  y  $\mathbf{M}_u$ , a estas matrices también se les llama matrices de peso que pertenecen al espacio de  $V$  y al espacio de  $U$ , respectivamente. Siguiendo con el deseo de dar asunciones del modelo del problema empleando la aproximación basada en la regularización se emplea la siguiente modificación a la característica métrica del espacio de  $N$ -dimensión del vector de señal  $V_N$ :

$$d^2_v (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = [(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2), (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)]_v = (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^+ \mathbf{M}_v (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2). \quad (3.2.1)$$

El conocimiento *a priori* de la solución está integrado en la matriz  $\mathbf{M}_v$ , esta matriz es conocida como “estabilizador” debido a que disminuye los cambios en la señal asignándoles pesos y por lo tanto suavizando (disminuyendo) dichos cambios.

### 3.2.1 Declaración de los grados de libertad

Dependiendo de cómo sea definida la matriz  $\mathbf{M}_v$ , se pueden identificar tres casos para la representación de la norma de peso de  $\mathbf{v}$  definida como:

$$\|\mathbf{v}\|_v^2 = \mathbf{v}^+ \mathbf{M}_v \mathbf{v}, \quad (3.2.2)$$

donde  $\|\cdot\|^2$  representa la norma cuadrada Euclidiana [46].

Para el primer caso, la matriz  $\mathbf{M}_v = \mathbf{I}$ , es decir, será una matriz identidad:

$$\|\mathbf{v}\|_v^2 = \|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v}^T \mathbf{v}. \quad (3.2.3)$$

Para el segundo caso, la matriz  $\mathbf{M}_v = \mathbf{D}_{ij}$ , es decir, una matriz diagonal en la que los elementos de su diagonal principal sean un valor determinado (peso específico):

$$\mathbf{D}_{ij} = \begin{cases} d_{ij} = 0 & i \neq j \\ d_{ij} \neq 0 & i = j \end{cases}$$

$$\|\mathbf{v}\|_v^2 = \sum_{n=1}^N \mathbf{M}_{v_n} v_n^2. \quad (3.2.4)$$

Para el tercer y último caso, la matriz  $\mathbf{M}_v$  será una matriz no-diagonal. Como un caso general se consideró la siguiente expresión:

$$\mathbf{M}_v = \mathbf{I} + m_1 \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_1^T \quad (3.2.5)$$



donde  $\mathbf{I}$  es una matriz identidad,  $\mathbf{D}_1$  es una matriz (operador) de los cálculos de diferencias de primer orden y  $m_1$  es un número no negativo real que indica la importancia relativa del segundo término en (3.2.5) que es relacionado a las propiedades de control de suavidad alojadas en  $\mathbf{M}_v$ , resultando ser una matriz de tipo Toeplitz [46], [49]. Ver apéndice A para la expresión (3.2.5).

En la generalización de la estructura de la métrica para un espacio de dato de señal  $U$  se define la distancia cuadrada entre los elementos inducidos por el producto interno de peso como sigue:

$$\mathbf{d}^2_U(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = [(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2), (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)]_U = (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)^+ \mathbf{M}_U (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2), \quad (3.2.6)$$

donde  $\mathbf{M}_U$  es una matriz simétrica positiva de peso. Observe que si las dos matrices de peso ( $\mathbf{M}_U$  y  $\mathbf{M}_v$ ) son matrices identidad, el método WCLS se transformará en el método CLS.

### 3.2.2 Desarrollo del método WCLS

Al igual que en el método CLS, la idea descriptiva de la regularización sería semejante. La expresión (3.1.6) sería la misma y sólo cambiarían las expresiones (3.1.7) y (3.1.8) a la siguiente forma [52]:

$$J_1(\mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{Sv}\|_U^2 = (\mathbf{u} - \mathbf{Sv})^+ \mathbf{M}_U (\mathbf{u} - \mathbf{Sv}), \quad (3.2.7)$$

$$J_2(\mathbf{v}) = \|\mathbf{v} - \mathbf{m}_v\|_v^2 = (\mathbf{v} - \mathbf{m}_v)^+ \mathbf{M}_v (\mathbf{v} - \mathbf{m}_v), \quad (3.2.8)$$

y la solución del problema de estimación de  $\mathbf{v}$  será la expresión conocida como la estimada WCLS y es:

$$\mathbf{v} = \arg \min_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}} J = \arg \min_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}} \left\{ (\mathbf{u} - \mathbf{S}\mathbf{v})^+ \mathbf{M}_U (\mathbf{u} - \mathbf{S}\mathbf{v}) + \alpha (\mathbf{v} - \mathbf{m}_v)^+ \mathbf{M}_V (\mathbf{v} - \mathbf{m}_v) \right\}, \quad (3.2.9)$$

Al determinar la expresión (3.2.6) se podrá obtener la derivada parcial de la función de costo (3.2.5) con respecto al vector deseado  $\mathbf{v}$  y se igualará el resultado a cero:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial \left( (\mathbf{u} - \mathbf{S}\mathbf{v})^+ \mathbf{M}_U (\mathbf{u} - \mathbf{S}\mathbf{v}) + \alpha (\mathbf{v} - \mathbf{m}_v)^+ \mathbf{M}_V (\mathbf{v} - \mathbf{m}_v) \right)}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{0}, \quad (3.2.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial \left( \mathbf{u}^+ \mathbf{M}_U \mathbf{u} - \mathbf{u}^+ \mathbf{M}_U \mathbf{S} \mathbf{v} - \mathbf{v}^+ \mathbf{S}^+ \mathbf{M}_U \mathbf{u} + \mathbf{v}^+ \mathbf{S}^+ \mathbf{M}_U \mathbf{S} \mathbf{v} + \alpha \mathbf{v}^+ \mathbf{M}_V \mathbf{v} + \right.}{\partial \mathbf{v}} \\ \left. - \alpha \mathbf{v}^+ \mathbf{M}_V \mathbf{m}_v - \alpha \mathbf{m}_v^+ \mathbf{M}_V \mathbf{v} + \alpha \mathbf{m}_v^+ \mathbf{M}_V \mathbf{m}_v \right)}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{v}} = -2\mathbf{S}^+ \mathbf{M}_U \mathbf{u} + 2\mathbf{S}^+ \mathbf{M}_U \mathbf{S} \mathbf{v} + 2\alpha \mathbf{M}_V \mathbf{v} - 2\alpha \mathbf{M}_V \mathbf{m}_v = \mathbf{0}, \quad (3.2.12)$$

sumando y restando el término  $\mathbf{S}^+ \mathbf{M}_U \mathbf{S} \mathbf{m}_v$  a la expresión (3.2.12) y posteriormente factorizando los términos  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{m}_v$  y  $\mathbf{S}^+ \mathbf{M}_U$ , se obtiene la siguiente expresión:

$$\left( \mathbf{S}^+ \mathbf{M}_U \mathbf{S} + \alpha \mathbf{M}_V \right) \mathbf{v} = \left( \mathbf{S}^+ \mathbf{M}_U \mathbf{S} + \alpha \mathbf{M}_V \right) \mathbf{m}_v + \mathbf{S}^+ \mathbf{M}_U (\mathbf{u} - \mathbf{S} \mathbf{m}_v). \quad (3.2.13)$$

Finalmente resultara la siguiente expresión al multiplicar ambos lados de la expresión (3.2.13) por  $(\mathbf{S}^+ \mathbf{M}_U \mathbf{S} + \alpha \mathbf{M}_V)^{-1}$ :

$$\mathbf{v} = \mathbf{m}_v + \left( \mathbf{S}^+ \mathbf{M}_U \mathbf{S} + \alpha \mathbf{M}_V \right)^{-1} \mathbf{S}^+ \mathbf{M}_U (\mathbf{u} - \mathbf{S} \mathbf{m}_v) = \mathbf{m}_v + \mathbf{W}_{\text{WCLS}} (\mathbf{u} - \mathbf{S} \mathbf{m}_v), \quad (3.2.14)$$

$$\mathbf{W}_{\text{WCLS}} \left( \mathbf{S}^+ \mathbf{M}_U \mathbf{S} + \alpha \mathbf{M}_V \right)^{-1} \mathbf{S}^+ \mathbf{M}_U, \quad (3.2.15)$$

donde la matriz  $\mathbf{W}_{\text{WCLS}}$  es el operador solución para el método WCLS. Se puede apreciar

en la expresión (3.2.14) que en caso de que las matrices de peso fueran matrices identidades, el operador solución  $W_{WCLS}$  se convertirá en el operador solución  $W_{CLS}$ .

### 3.3 MÉTODO DE MÍNIMO RIESGO DE BAYES

La principal diferencia entre los métodos de regularización descriptiva y la estrategia Bayesiana es el uso de modelos probabilísticos que cuantifican la incertidumbre de los datos desconocidos, es decir, la fuente de información (señal original o deseada) y las observaciones son procesos intrínsecamente aleatorios que pueden ser caracterizados por sus distribuciones de probabilidad que usualmente son desconocidas.

La regularización descriptiva requiere la inferencia de la información de interés confiando en el uso de métodos no probabilísticos (CLS y WCLS). En la regularización estadística se confía en resolver el problema inverso con el uso de modelos probabilísticos para la señal desconocida  $\mathbf{v}$  y el dato observado  $\mathbf{u}$ . Una regla es utilizar el método de mínimo riesgo de Bayes (BMR) [41], [45], [52]. La inferencia es hecha en términos de la probabilidad. La estructura del método Bayesiano tiene una gran ventaja práctica incluyendo una flexibilidad sustancial y una generalidad que permite imitar a otros métodos complejos.

El modelo del problema inverso es dado por la ecuación de observación de la expresión (2.3.1) y su forma discreta por la expresión (2.1.9). Como en los problemas anteriores, la función de este método es encontrar un operador solución  $\mathbf{W}$  que opere sobre la señal dato  $\mathbf{u}$  y produzca una estimada de la señal deseada  $\mathbf{v}$ , es decir:

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{W} \mathbf{u} \quad W: U \rightarrow V \quad (3.3.1)$$

### 3.3.1 Información *a priori*

La fuente aleatoria de información de origen (objeto origen) genera el vector de información  $\mathbf{v}$  con una distribución de probabilidad fija desconocida,  $P(\mathbf{v})$ , en donde se asume que sólo se conocen dos momentos [52] de la probabilidad  $P(\mathbf{v})$ :

$$1.- \text{ Media } a \text{ priori: } \mathbf{m}_v = \langle \mathbf{v} \rangle. \quad (3.3.2)$$

$$2.- \text{ Matriz de covarianza } a \text{ priori: } \mathbf{R}_v = \langle (\mathbf{v} - \mathbf{m}_v)(\mathbf{v} - \mathbf{m}_v)^+ \rangle. \quad (3.3.3)$$

El ambiente aleatorio que produce un ruido contaminante para los datos de observación es conocido como un vector aleatorio independiente  $\mathbf{n}$  sobre  $\mathbf{v}$ . Con una distribución de probabilidad fija desconocida,  $P(\mathbf{n})$ , dada por sus dos momentos:

$$1.- \text{ Media cero: } \mathbf{m}_n = \langle \mathbf{n} \rangle = \mathbf{0}. \quad (3.3.4)$$

$$2.- \text{ Matriz de covarianza: } \mathbf{R}_n = \langle \mathbf{nn}^+ \rangle. \quad (3.3.5)$$

### 3.3.2 Desarrollo del método BMR

Determinando el operador solución  $\mathbf{W}$  para resolver el problema de estimación de la señal se producirá la reconstrucción óptima (en el sentido BMR) de la señal deseada  $\mathbf{v}$ . Si se considera  $\mathbf{m}_v = \mathbf{0}$ , se tendrá la expresión (3.3.1). En caso de que  $\mathbf{m}_v \neq \mathbf{0}$ , primero se sustrae la media conocida  $\mathbf{Sm}_v$  del vector de dato  $\mathbf{u}$  (el dato innovado). Segundo se deriva (3.3.1) y como último, se considera la suposición  $\mathbf{m}_v \neq \mathbf{0}$  para la expresión (3.3.1), y se obtiene la siguiente expresión [52]:

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{m}_v + \mathbf{W}(\mathbf{u} - \mathbf{Sm}_v). \quad (3.3.6)$$

Ahora se declara el método BMR en términos del problema de optimización estadístico, al realizar esto se introduce la función de costo:

$$L\left(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{v}}\right) = L(\mathbf{v}, \mathbf{W}\mathbf{u}), \quad (3.3.7)$$

donde esta función es la cantidad de discrepancia entre la señal estimada  $\hat{\mathbf{v}}$  y la señal original deseada  $\mathbf{v}$ . La función de reducción o pérdida cuadrática define la función de reducción definida como la distancia cuadrada Euclidiana de la discrepancia:

$$L(\mathbf{v}, \mathbf{W}\mathbf{u}) = \|\mathbf{W}\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2. \quad (3.3.8)$$

El valor esperado de la función de reducción está definida por el riesgo Bayes:

$$r(\mathbf{W}) = \int L(\mathbf{v}, \mathbf{W}\mathbf{u}) dP(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \left\langle \|\mathbf{W}\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 \right\rangle, \quad (3.3.9)$$

donde  $P(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  es la distribución de la probabilidad conjunta del vector de datos  $\mathbf{u}$  y el vector de información  $\mathbf{v}$ . La expresión (3.3.9) es difícil calcular, debido a que el término  $P(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  es desconocido y la única información *a priori* que se tiene está contenida en  $\mathbf{m}_v = \mathbf{0}$  y los modelos de covarianza  $\mathbf{R}_n$  y  $\mathbf{R}_v$ .

La estrategia del mínimo riesgo de Bayes es determinar el mínimo riesgo para encontrar el operador solución  $\mathbf{W}_{\text{BMR}}$  y se pueda estimar la señal deseada y desconocida  $\mathbf{v}$ , es decir:

$$\mathbf{W}_{\text{BMR}} = \underset{\mathbf{W} \in \mathcal{W}_{\text{lineal}}}{\text{argmin}} r(\mathbf{W}) = \underset{\mathbf{W} \in \mathcal{W}_{\text{lineal}}}{\text{argmin}} \left\langle \|\mathbf{W}\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 \right\rangle, \quad (3.3.10)$$

es decir, al minimizar con respecto a  $\mathbf{W}$  en la clase de operadores lineales solución

$\mathbf{W} \in \mathbf{W}_{\text{lineal}}$  al imponer tal restricción de linealidad de operador solución matriz  $\mathbf{W}$  se resuelve la dificultad matemática debida a la falta de conocimiento exacto sobre distribución de probabilidad  $P(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  y la estimada de la señal deseada  $\mathbf{v}$  será:

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{W}_{\text{BMR}} \mathbf{u}. \quad (3.3.11)$$

### 3.3.3 Descomposición de la función de Riesgo de Bayes

Comenzando con un conocimiento *a priori* suponiendo que como primer valor que se asigna (al conocimiento *a priori*) es igual a cero, es decir,  $\mathbf{m}_v = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{m}_n = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{m}_u = \mathbf{0}$ , dentro del operador de la distancia cuadrada de la expresión (3.3.10) se obtiene que [52]:

$$\begin{aligned} r(\mathbf{W}) &= \langle \|\mathbf{W}\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 \rangle = \langle \|\mathbf{W}(\mathbf{S}\mathbf{v} + \mathbf{n}) - \mathbf{v}\|^2 \rangle \\ &= \langle [(\mathbf{W}(\mathbf{S}\mathbf{v} + \mathbf{n}) - \mathbf{v}), (\mathbf{W}(\mathbf{S}\mathbf{v} + \mathbf{n}) - \mathbf{v})] \rangle \\ &= \langle [(\mathbf{W}(\mathbf{S}\mathbf{v} + \mathbf{n}) - \mathbf{v})^+ (\mathbf{W}(\mathbf{S}\mathbf{v} + \mathbf{n}) - \mathbf{v})] \rangle \\ &= \langle [(\mathbf{W}\mathbf{S}\mathbf{v} + \mathbf{W}\mathbf{n} - \mathbf{v})^+ (\mathbf{W}(\mathbf{S}\mathbf{v} + \mathbf{n}) - \mathbf{v})] \rangle \\ &= \langle [((\mathbf{W}\mathbf{S} - \mathbf{I})\mathbf{v} + \mathbf{W}\mathbf{n})^+ ((\mathbf{W}\mathbf{S} - \mathbf{I})\mathbf{v} + \mathbf{W}\mathbf{n})] \rangle \\ &= \langle [(\mathbf{v}^+ (\mathbf{W}\mathbf{S} - \mathbf{I})^+ + \mathbf{n}^+ \mathbf{W}^+) ((\mathbf{W}\mathbf{S} - \mathbf{I})\mathbf{v} + \mathbf{W}\mathbf{n})] \rangle \\ &= \langle \mathbf{v}^+ (\mathbf{W}\mathbf{S} - \mathbf{I})^+ (\mathbf{W}\mathbf{S} - \mathbf{I})\mathbf{v} + \mathbf{v}^+ (\mathbf{W}\mathbf{S} - \mathbf{I})^+ \mathbf{W}\mathbf{n} + \mathbf{n}^+ \mathbf{W}^+ (\mathbf{W}\mathbf{S} - \mathbf{I})\mathbf{v} + \mathbf{n}^+ \mathbf{W}^+ \mathbf{W}\mathbf{n} \rangle, \end{aligned}$$

los términos medios de la ecuación anterior son eliminados por que no contiene matrices correlacionadas, es decir, las matrices que implican los términos medios son independientes por lo tanto los productos entre las matrices dará cero. Por consiguiente resulta lo siguiente:

$$r(\mathbf{W}) = \langle \mathbf{v}^+ (\mathbf{WS} - \mathbf{I})^+ (\mathbf{WS} - \mathbf{I}) \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{n}^+ \mathbf{W}^+ \mathbf{W} \mathbf{n} \rangle, \quad (3.3.12)$$

considerando que es necesario conocer la suma de los eigenvalores de la función de riesgo (3.3.12) se hace una manipulación de las matrices y se calcula la traza de dicha función de riesgo, considerando la **Tabla A.1.** del apéndice A, se reescribe la admitida expresión del riesgo (3.3.12) [50]:

$$\begin{aligned} r(\mathbf{W}) &= \text{tr} \left\{ (\mathbf{WS} - \mathbf{I})^+ (\mathbf{WS} - \mathbf{I}) \langle \mathbf{v} \mathbf{v}^+ \rangle \right\} + \text{tr} \left\{ \mathbf{W}^+ \mathbf{W} \langle \mathbf{n} \mathbf{n}^+ \rangle \right\} \\ &= \text{tr} \left\{ (\mathbf{WS} - \mathbf{I}) \mathbf{R}_v (\mathbf{WS} - \mathbf{I})^+ \right\} + \text{tr} \left\{ \mathbf{W} \mathbf{R}_n \mathbf{W}^+ \right\}, \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

se aprecia en la expresión (3.3.13) que los dos términos representa dos tipos de errores [51]:

1.- Error sistemático [4], que considera la discrepancia entre la composición  $\mathbf{WS}$  y la matriz identidad.

$$r_s(\mathbf{W}) = \text{tr} \left\{ (\mathbf{WS} - \mathbf{I}) \mathbf{R}_v (\mathbf{WS} - \mathbf{I})^+ \right\} \quad (3.3.14)$$

esta expresión es mínima si :  $\mathbf{W} = \mathbf{S}^\# = (\mathbf{S}^+ \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^+$  haciendo que (3.3.14) se convierta a cero, es decir,  $\mathbf{W}$  es un pseudoinverso (en el sentido Moore-Penrose [48]) de  $\mathbf{S}$ .

2.- Fluctuación o Error del ruido [4], es la componente de ruido del riesgo y es una norma cuadrada del ruido en la señal estimada (energía del ruido de la solución).

$$r_n(\mathbf{W}) = \text{tr} \left\{ \mathbf{W} \mathbf{R}_n \mathbf{W}^+ \right\}, \quad (3.3.15)$$

la cantidad de energía del ruido en la solución resultante es:

$$\mathbf{v} = \mathbf{W}\mathbf{u} = \mathbf{W}\mathbf{S}\mathbf{v} + \mathbf{W}\mathbf{n}, \quad (3.3.16)$$

donde la componente de ruido es:  $\mathbf{W}\mathbf{n}$  y su energía es:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_n &= \langle \|\mathbf{W}\mathbf{n}\|^2 \rangle = \langle \mathbf{n}^+ \mathbf{W}^+ \mathbf{W} \mathbf{n} \rangle = \text{tr} \left\{ \mathbf{W}^+ \mathbf{W} \langle \mathbf{n} \mathbf{n}^+ \rangle \right\} \\ &= \text{tr} \left\{ \mathbf{W}^+ \mathbf{W} \mathbf{R}_n \right\} = \text{tr} \left\{ \mathbf{W} \mathbf{R}_n \mathbf{W}^+ \right\} = r_n(\mathbf{W}), \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

donde el mínimo valor del riesgo (3.3.13) se obtiene cuando se aplica la solución óptima  $\mathbf{W}$  al dato  $\mathbf{u}$ . Para enfatizar el peso entre la cantidad  $r_n(\mathbf{W})$  y  $r_s(\mathbf{W})$ , o viceversa, puede ser modificada al introducir un parámetro denominado  $\alpha$  dentro de la expresión (3.3.13) es decir:

$$r_\alpha(\mathbf{W}) = r_s(\mathbf{W}) + \alpha r_n(\mathbf{W}). \quad (3.3.18)$$

### 3.3.4 Estimación de la señal original $\mathbf{v}$

Después de haber obtenido la expresión de riesgo (3.3.13) ahora se determinará la solución al problema de estimación de la señal deseada. Primero se debe derivar parcialmente el riesgo con respecto a  $\mathbf{W}$  e igualar a cero la expresión resultante, considerando que la derivada de una traza es:

$$\frac{\partial \text{tr} \left\{ \mathbf{W} \mathbf{C} \mathbf{W}^+ \right\}}{\partial \mathbf{W}} = 2 \mathbf{W} \mathbf{C}, \quad (3.3.19)$$

por lo tanto:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{W}} r(\mathbf{W}) = 2(\mathbf{W}\mathbf{S} - \mathbf{I})\mathbf{R}_v\mathbf{S}^+ + 2\mathbf{W}\mathbf{R}_n = \mathbf{0}, \quad (3.3.20)$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{S}\mathbf{R}_v\mathbf{S}^+ + \mathbf{R}_n) = \mathbf{R}_v\mathbf{S}^+. \quad (3.3.21)$$



Con el objetivo de despejar el parámetro solución  $\mathbf{W}$  es necesario multiplicar ambos lados de la expresión (3.3.21) con el término  $(\mathbf{S} \mathbf{R}_v \mathbf{S}^+ + \mathbf{R}_n)^{-1}$ , y resulta la siguiente expresión:

$$\mathbf{W}_{\text{BMR}} = \mathbf{R}_v \mathbf{S}^+ (\mathbf{S} \mathbf{R}_v \mathbf{S}^+ + \mathbf{R}_n)^{-1} = \mathbf{R}_v \mathbf{S}^+ \mathbf{R}_u^{-1} \quad (3.3.22)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_u &= \langle \mathbf{u} \mathbf{u}^+ \rangle = \langle (\mathbf{S} \mathbf{v} + \mathbf{n})(\mathbf{S} \mathbf{v} + \mathbf{n})^+ \rangle = \langle (\mathbf{S} \mathbf{v} + \mathbf{n})(\mathbf{v}^+ \mathbf{S}^+ + \mathbf{n}^+) \rangle = \\ &= \langle (\mathbf{S} \mathbf{v} + \mathbf{n})(\mathbf{v}^+ \mathbf{S}^+ + \mathbf{n}^+) \rangle = \langle \mathbf{S} \mathbf{v} \mathbf{v}^+ \mathbf{S}^+ + \mathbf{S} \mathbf{v} \mathbf{n}^+ + \mathbf{n} \mathbf{v}^+ \mathbf{S}^+ + \mathbf{n} \mathbf{n}^+ \rangle \\ &= \langle \mathbf{S} \mathbf{v} \mathbf{v}^+ \mathbf{S}^+ + \mathbf{n} \mathbf{n}^+ \rangle = \langle \mathbf{S} \mathbf{R}_v \mathbf{S}^+ + \mathbf{R}_n \rangle. \end{aligned} \quad (3.3.23)$$

Al obtener  $\mathbf{W}_{\text{BMR}}$  se resuelve el problema inicial de estimación de la señal deseada  $\mathbf{v}$  y ahora tenemos que la estimada de la señal original es [52]:

$$\mathbf{v} = \mathbf{W}_{\text{BMR}} \mathbf{u} = (\mathbf{R}_v \mathbf{S}^+ \mathbf{R}_u^{-1}) \mathbf{u} = \mathbf{R}_v \mathbf{S}^+ (\mathbf{S} \mathbf{R}_v \mathbf{S}^+ + \mathbf{R}_n)^{-1} \mathbf{u}. \quad (3.3.24)$$

Si se aplica la fórmula de Frobenius sobre el valor de  $\mathbf{W}_{\text{BMR}}$  se obtendrá otra expresión [52] para el operador solución  $\mathbf{W}_{\text{BMR}}$ , es decir:

$$\Psi = \mathbf{S}^+ \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{S}, \quad (3.3.25)$$

$$\mathbf{K} = (\mathbf{R}_v^{-1} + \Psi)^{-1} \quad (3.3.26)$$

$$\mathbf{R}_u^{-1} = (\mathbf{S} \mathbf{R}_v \mathbf{S}^+ + \mathbf{R}_n)^{-1} = \mathbf{R}_n^{-1} - \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{S} \mathbf{K} \mathbf{S}^+ \mathbf{R}_n^{-1} \quad (3.3.27)$$

$$\mathbf{W}_2 = \mathbf{K} \mathbf{S}^+ \mathbf{R}_n^{-1} = (\mathbf{S}^+ \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{S} + \mathbf{R}_v^{-1})^{-1} \mathbf{S}^+ \mathbf{R}_n^{-1} \quad (3.3.28)$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{W}_2 \mathbf{u} = (\mathbf{S}^+ \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{S} + \mathbf{R}_v^{-1})^{-1} \mathbf{S}^+ \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{u}, \quad (3.3.29)$$

si  $\mathbf{m}_v \neq \mathbf{0}$  la señal estimada de  $\mathbf{v}$  será:

$$\mathbf{v} = \mathbf{m}_v + \left( \mathbf{S}^+ \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{S} + \mathbf{R}_v^{-1} \right)^{-1} \mathbf{S}^+ \mathbf{R}_n^{-1} (\mathbf{u} - \mathbf{S} \mathbf{m}_v) = \mathbf{m}_v + \mathbf{W}_{\text{BMR}} (\mathbf{u} - \mathbf{S} \mathbf{m}_v), \quad (3.3.30)$$

donde:

$$\mathbf{W}_{\text{BMR}} = \left( \mathbf{S}^+ \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{S} + \mathbf{R}_v^{-1} \right)^{-1} \mathbf{S}^+ \mathbf{R}_n^{-1}. \quad (3.3.31)$$

### 3.4 MÉTODO DE MÍNIMO RIESGO DE BAYES ROBUSTO

En el método de mínimo riesgo robusto de Bayes (RBMR) [52], se toma en cuenta que la señal a estimar  $\mathbf{v}$  se propaga a través de un medio con propiedades no homogéneas, donde la señal sufre de atenuaciones, distorsiones y reverberaciones, causando perturbaciones aleatorias sobre el operador de formación de señal SFO y la matriz del sistema  $\mathbf{S}$ . El operador SFO y la matriz  $\mathbf{S}$  son referidos como el modelo del sistema de incertidumbres. La generalización aleatoria de la SFO se puede expresar en la forma siguiente:

$$\mathbf{S}_\sim = \mathbf{S} + \mathbf{S}_\Delta, \quad (3.4.1)$$

donde  $\mathbf{S} = \langle \mathbf{S}_\sim \rangle$ ,  $\mathbf{S}_\Delta$  denota las variaciones aleatorias de  $\mathbf{S}_\sim$  sobre la media de  $\mathbf{S}$ , referidas como perturbaciones del SFO y además denota la incertidumbre del modelo del sistema. Su forma discreta será:

$$\mathbf{S}_\sim = \mathbf{S} + \mathbf{S}_\Delta, \quad (3.4.2)$$

donde  $\mathbf{S} = \langle \mathbf{S}_\sim \rangle$  es la matriz del sistema determinístico nominal de la representación discreta del SFO  $\mathbf{S}$ .  $\mathbf{S}_\Delta = \mathbf{S}_\sim - \mathbf{S}$  representa la desviación aleatoria de la matriz del sistema

$S_{\sim}$  de la media de  $S$ . En los métodos anteriores no se tomaron en cuenta las perturbaciones aleatorias, es decir, se supuso que:

$$S_{\Delta} = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad S_{\sim} = S, \quad (3.4.3)$$

y ahora al tomarse en cuenta las perturbaciones se reescribe la EO:

$$\mathbf{u} = S_{\sim} \mathbf{v} + \mathbf{n} = (S + S_{\Delta}) \mathbf{v} + \mathbf{n}, \quad (3.4.4)$$

$$\mathbf{u} = S\mathbf{v} + (S_{\Delta} \mathbf{v} + \mathbf{n}) = S\mathbf{v} + \mathbf{n}_{\Sigma}, \quad (3.4.5)$$

donde:

$$\mathbf{n}_{\Sigma} = S_{\Delta} \mathbf{v} + \mathbf{n}, \quad (3.4.6)$$

al término  $\mathbf{n}_{\Sigma}$  se le conoce como ruido compuesto, que como se puede observar, contiene el ruido aditivo inicial  $\mathbf{n}$  y el efecto del modelo del sistema con incertidumbre  $S_{\Delta}$  sobre el dato que puede ser modelado como la componente adicional ruidosa  $S_{\Delta} \mathbf{v}$ .

Ahora el conocimiento *a priori* que se necesita es:

$$\mathbf{m}_{\mathbf{v}} = \langle \mathbf{v} \rangle, \quad (3.4.7)$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{v}} = \langle (\mathbf{v} - \mathbf{m}_{\mathbf{v}})(\mathbf{v} - \mathbf{m}_{\mathbf{v}})^{\dagger} \rangle, \quad (3.4.8)$$

$$\mathbf{m}_{\mathbf{n}} = \langle \mathbf{n} \rangle = \mathbf{0}, \quad (3.4.9)$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{n}} = \langle \mathbf{n} \mathbf{n}^{\dagger} \rangle, \quad (3.4.10)$$

$$\mathbf{m}_{\Sigma} = \langle \mathbf{n}_{\Sigma} \rangle = \mathbf{0}, \quad (3.4.11)$$

$$\mathbf{R}_\Sigma = \langle \mathbf{n}_\Sigma \mathbf{n}_\Sigma^+ \rangle = \mathbf{R}_n + \langle \mathbf{S}_\Delta \mathbf{R}_v \mathbf{S}_\Delta^+ \rangle. \quad (3.4.12)$$

En la expresión (3.4.12) el ruido compuesto  $\mathbf{n}_\Sigma$  sustituye al ruido aditivo  $\mathbf{n}$  que se utilizaba originalmente en EO (2.1.9). Retomando la expresión (3.3.7) del método BMR para poder estimar la señal deseada  $\mathbf{v}$  y tomando en cuenta las desviaciones aleatorias, se tiene que:

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{m}_v + \mathbf{W}_\Sigma (\mathbf{u} - \mathbf{S} \mathbf{m}_v), \quad (3.4.13)$$

donde:

$$\mathbf{W}_\Sigma = \left( \mathbf{S} \mathbf{R}_\Sigma^{-1} \mathbf{S}^+ + \mathbf{R}_v^{-1} \right)^{-1} \mathbf{S}^+ \mathbf{R}_\Sigma^{-1} \quad (3.4.14)$$

$$r(\mathbf{W}_\Sigma) = r_s(\mathbf{W}_\Sigma) + r_n(\mathbf{W}_\Sigma) = \text{tr} \left\{ \left( \mathbf{S} \mathbf{R}_\Sigma^{-1} \mathbf{S}^+ + \mathbf{R}_v^{-1} \right)^{-1} \right\}. \quad (3.4.15)$$

### 3.5 MÉTODO PROPUESTO: “MÉTODO DE REGULARIZACIÓN ROBUSTA FUSIONADO CON RETROALIMENTACIÓN DE INFORMACIÓN”

El método que se desarrolló se le dio el nombre de método de Regularización Robusta Fusionado con Retroalimentación de Información (RRFRI). Considerando los métodos antes planteados se utilizaron las características de métodos determinísticos (CLS o WCLS) y estadísticos (BMR y RBMR) de la forma que se explica a continuación.

#### 3.5.1 Planteamiento del problema

El problema a resolver es modelado con la ecuación de observación (2.3.1) y para el desarrollo de este método se utiliza la forma discreta de la expresión (2.1.9), donde el

vector  $\mathbf{v}$  está compuesto por los valores  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_k$  y la matriz  $\mathbf{S}$  formada por los valores  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_k$ . Donde cada  $k$ -ésimo valor de  $u_k$  sólo dependerá de la entrada  $v_k$ , es decir,  $u_k = s v_k + n_k$  donde  $k = 1, 2, 3, \dots, K$ .

### 3.5.2 Declaración de la información *a priori*

El conocimiento *a priori* de la señal de interés  $\mathbf{v}$  son los dos momentos de su distribución de probabilidad fija y desconocida  $P(\mathbf{v})$ :

$$1.- \text{Media } a \text{ priori:} \quad \mathbf{m}_v = \langle \mathbf{v} \rangle. \quad (3.5.1)$$

$$2.- \text{Matriz de covarianza } a \text{ priori:} \quad \mathbf{R}_v = \langle (\mathbf{v} - \mathbf{m}_v)(\mathbf{v} - \mathbf{m}_v)^+ \rangle. \quad (3.5.2)$$

El ambiente aleatorio que produce un ruido contaminante para el dato de observación, es referido como un vector aleatorio independiente  $\mathbf{n}$  sobre  $\mathbf{v}$ . Con una distribución de probabilidad fija desconocida  $P(\mathbf{n})$  dada por las expresiones (3.1.2) y (3.1.3).

### 3.5.3 Desarrollo del método propuesto RRFRI

Determinando el operador  $\mathbf{W}$  para resolver el problema de estimación de la señal se producirá la reconstrucción óptima (en el sentido BMR) de la señal deseada  $\mathbf{v}$ . Si se considera  $\mathbf{m}_v = \mathbf{0}$  se tendrá que la estimación será la expresión (3.3.1) y para el caso en que  $\mathbf{m}_v \neq \mathbf{0}$  se tendrá la expresión (3.3.6). El primer paso será utilizar la estimación determinística, para esto se obtendrán dos valores para la primera estimación. El primer valor será obtenido con el método más sencillo, el método CLS. Ver **Figura 3.1**. El segundo valor será obtenido empleando el método WCLS. Para obtener el primer valor para la primera estimación de la señal original  $\mathbf{v}$ , se sabe que la estimación es representada

con la expresión (3.1.12) que es igual a:

$$\mathbf{v}_{CLS} = \mathbf{m}_v + \mathbf{W}_{CLS}(\mathbf{u} - \mathbf{S}\mathbf{m}_v). \quad (3.5.3)$$

Para el segundo valor la estimación de la señal original con el método WCLS, ver Figura 3.2, está dada por la expresión (3.2.14), es decir:

$$\mathbf{v}_{WCLS} = \mathbf{m}_v + \mathbf{W}_{WCLS}(\mathbf{u} - \mathbf{S}\mathbf{m}_v). \quad (3.5.4)$$

Al determinar una primera estimación con un método determinístico es hora de utilizar el método estadístico BMR para determinar una segunda estimación de la señal, debido a que tiene una gran ventaja práctica que incluye flexibilidad y generalidad que permite asemejar a otros métodos complejos. Debido a que tenemos un conocimiento previo de la señal deseada (los valores de la primera estimación) al haber utilizado los métodos determinísticos, esta información se utilizará como conocimiento *a priori*, es decir:

$$\mathbf{m}_v = \hat{\mathbf{v}}_{CLS} \quad \text{o} \quad \mathbf{m}_v = \hat{\mathbf{v}}_{WCLS}. \quad (3.5.5)$$

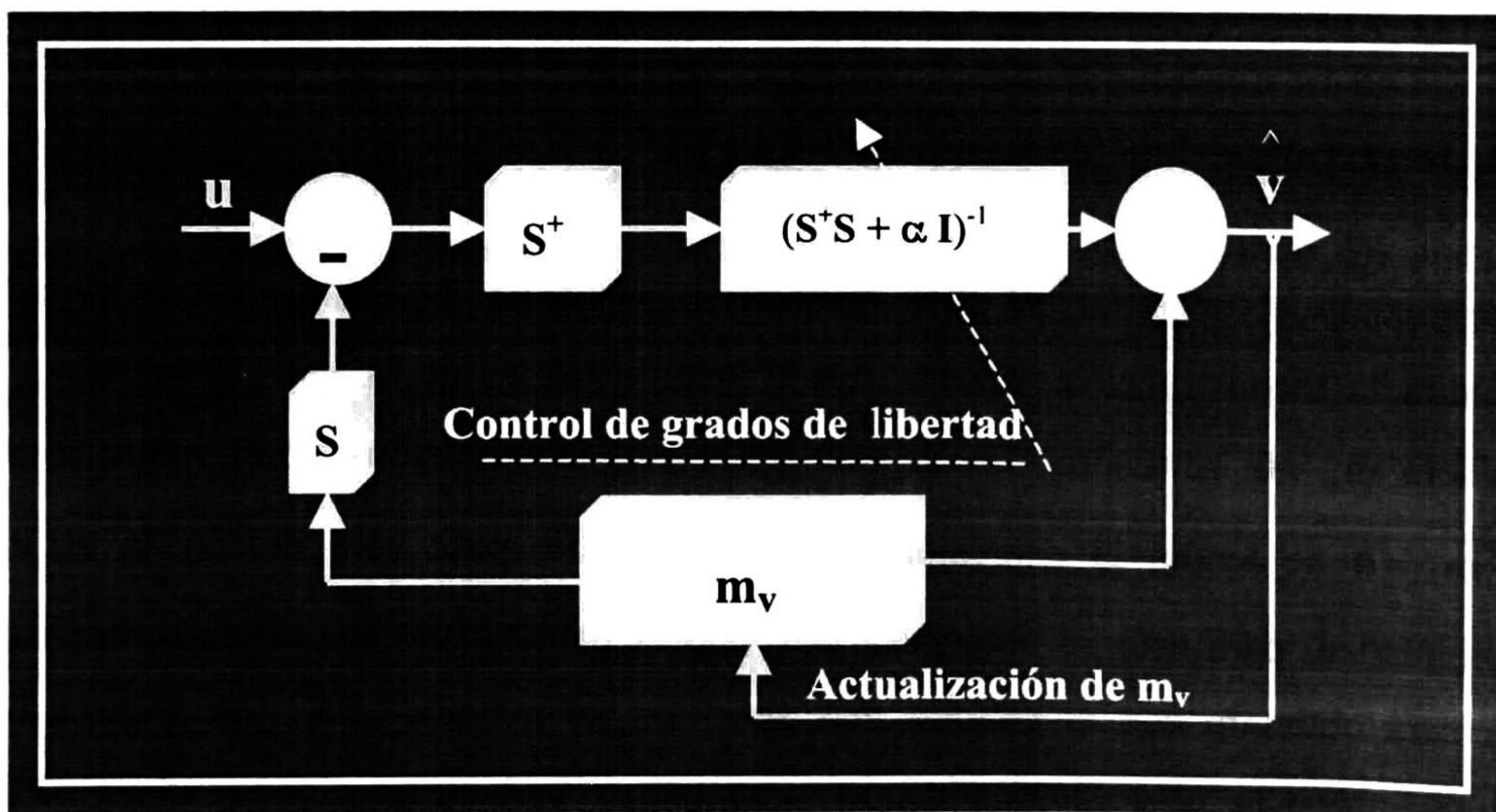


Figura 3.1. Método de Mínimos Cuadrados Limitado (CLS).

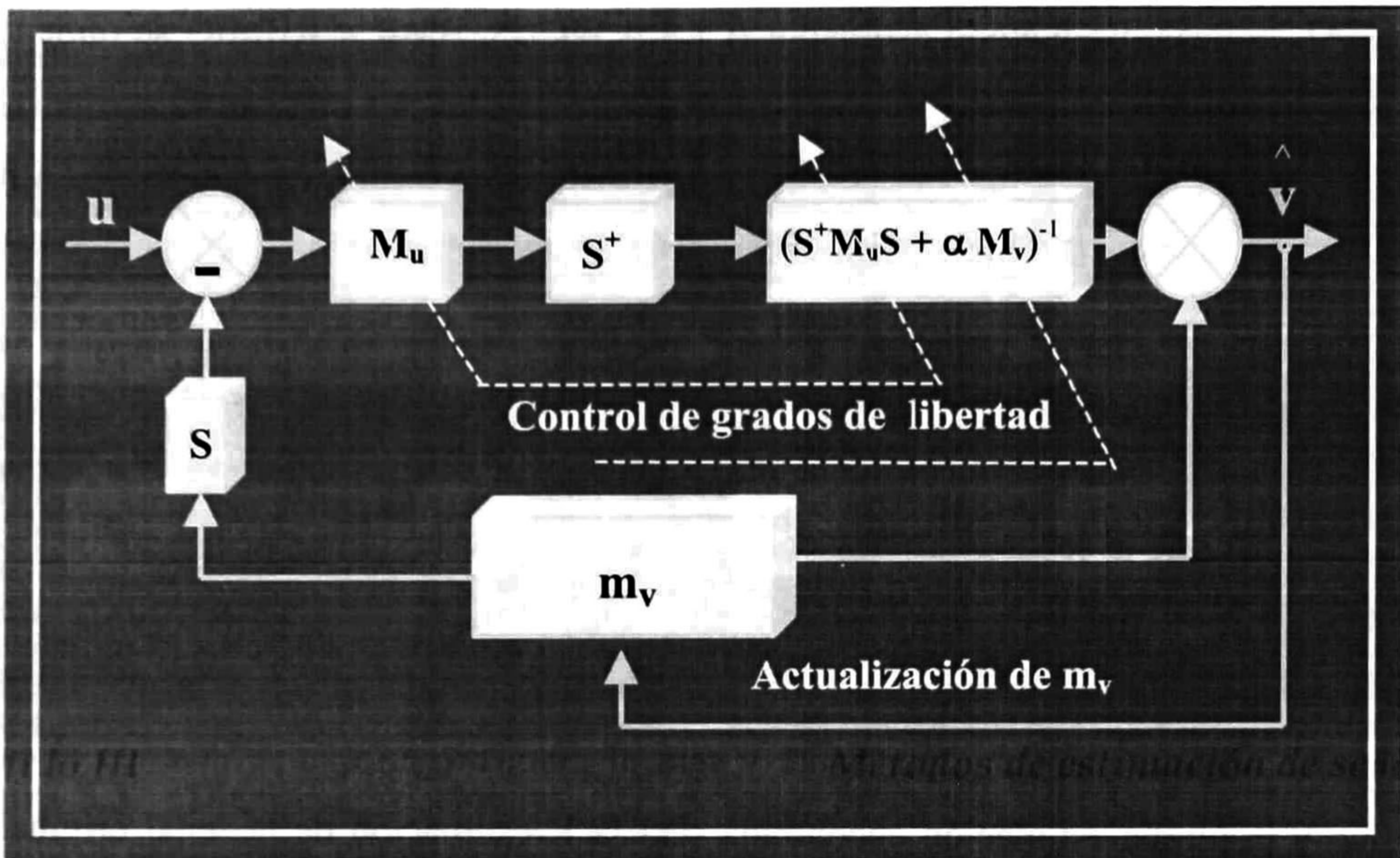


Figura 3.2. Método de Mínimos Cuadrados Limitado Ponderado (WCLS).

Encontrar el estimado de la señal original  $\mathbf{v}$  ( $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{W} \mathbf{u}$ ) con el mínimo riesgo es la estrategia del método de BMR. La solución al problema de encontrar la estimación es dada por la expresión (3.3.24), es decir:

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{m}_v + \mathbf{W}_{\text{BMR}} (\mathbf{u} - \mathbf{S} \mathbf{m}_v). \tag{3.5.6}$$

Ahora se considerará que por el medio en que se propaga la señal  $\mathbf{v}$  es no homogéneo y produce perturbaciones aleatorias sobre el operador de formación de la señal (SFO) y la matriz del sistema  $\mathbf{S}$  que son referidos como el modelo del sistema de incertidumbres de la expresión (3.4.1) que representa la desviación aleatoria de la matriz del sistema  $\mathbf{S}$  de  $\mathbf{S}$  debido a las perturbaciones aleatorias provocadas por el medio no homogéneo. Tomando como conocimiento *a priori* la información que se tiene de la señal original, es decir, la estimación obtenida del método BMR la nueva estimación de la señal deseada es la expresión (3.4.13).

Al aplicar un método estimador (CLS o WCLS, BMR y RBMR) se obtiene una estimación aproximada de la señal original  $\mathbf{v}$ , a la que se le llamará estimación  $k$ , si se repite la operación de estimación con el mismo método estimador se obtendrá una nueva estimación, a la que le llamará estimación  $k+1$  si se comparan ambas estimaciones se observará que sus valores son diferentes y se involucrará la  $(k-1)$ -ésima estimación de la señal original como conocimiento *a priori* de la  $k$ -ésima estimación de la señal original  $\mathbf{v}$ . De esta manera cada vez que se haga una estimación se involucrará un valor *a priori* más cercano al valor de la señal original y conforme se repita esta operación se ira acercando el valor de la estimación al valor de la señal original. Este cálculo de estimaciones de la señal original se hará iterativamente hasta encontrar que la diferencia entre los valores de las estimaciones se mantenga constante y será el momento en que se detenga el cálculo iterativo y la última estimación encontrada será la  $K$ -estimación de la señal original. Por que el conocimiento *a priori* de la señal original  $\mathbf{v}$  para cada iteración será:

$$\mathbf{m}_v(k+1) = \langle \mathbf{v}(k+1) \rangle = \hat{\mathbf{v}}(k), \quad (3.5.7)$$

donde  $k = 1, \dots, K$  y significa que el conocimiento *a priori* de la señal deseada es igual a la  $k$ -ésima estimación de la señal original  $\mathbf{v}$  de tal modo que el valor de  $k$  variará en forma ascendente hasta encontrar un valor  $K$  para el cual el valor de la  $K$ -ésima estimación de la señal original se estabilice, es decir, que adquiera la menor variación con respecto a al valor de la  $(K-1)$ -ésima estimación. Este  $K$ -ésimo valor estabilizado será la mejor aproximación al vector  $\mathbf{v}$  de la señal original. El algoritmo que representa estas estimaciones es el siguiente:

$$\mathbf{v}(k+1) = \mathbf{m}_v(k+1) + \mathbf{W}_\Sigma [\mathbf{u} - \mathbf{S}\mathbf{m}_v(k+1)], \quad (3.5.8)$$

$$\mathbf{W}_\Sigma = \left( \mathbf{S}\mathbf{R}_\Sigma^{-1}\mathbf{S}^+ + \mathbf{R}_v^{-1} \right)^{-1} \mathbf{S}^+ \mathbf{R}_\Sigma^{-1} \quad (3.5.9)$$



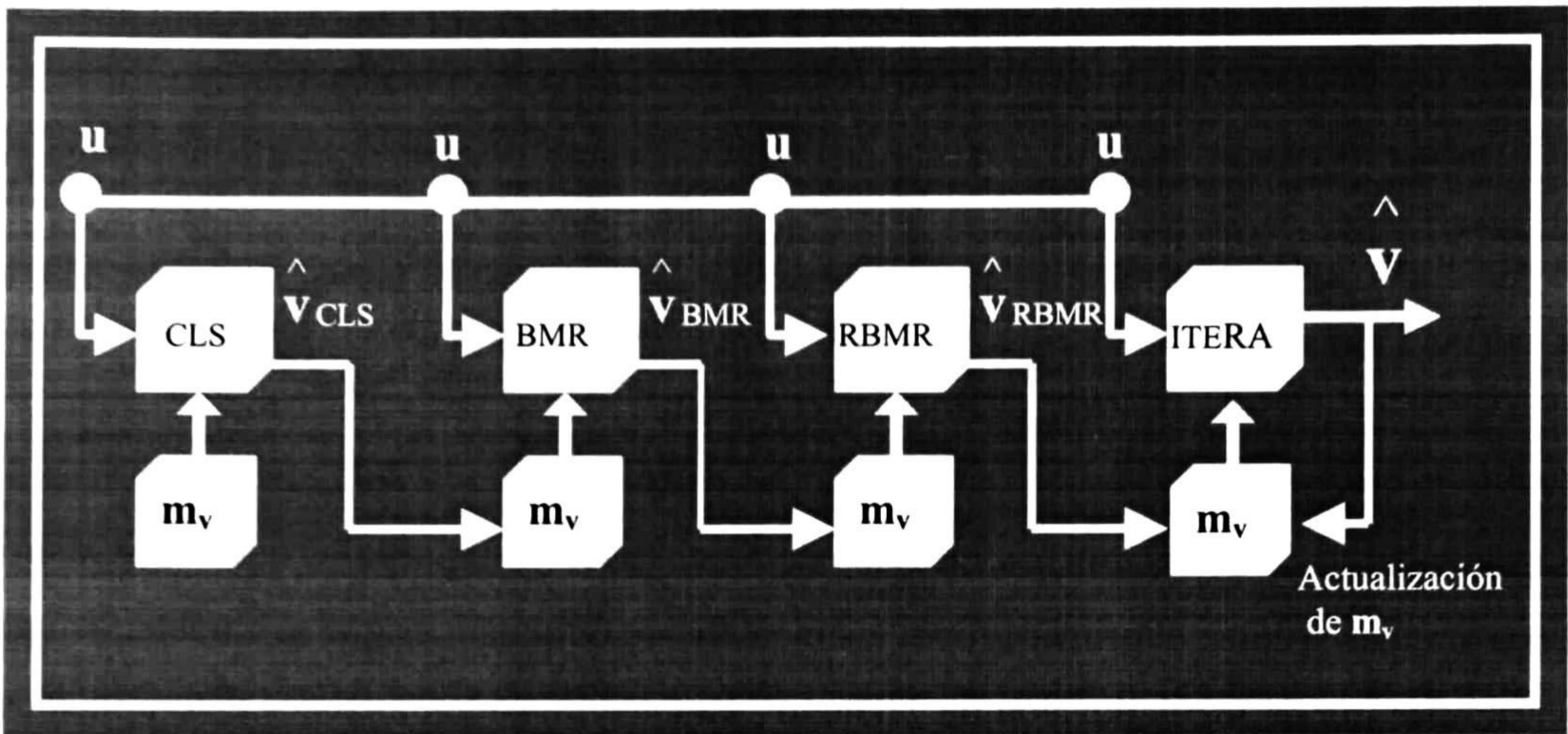


Figura 3.3. Diagrama a bloques del método propuesto RRFRI utilizando como método de estimación inicial el método CLS.

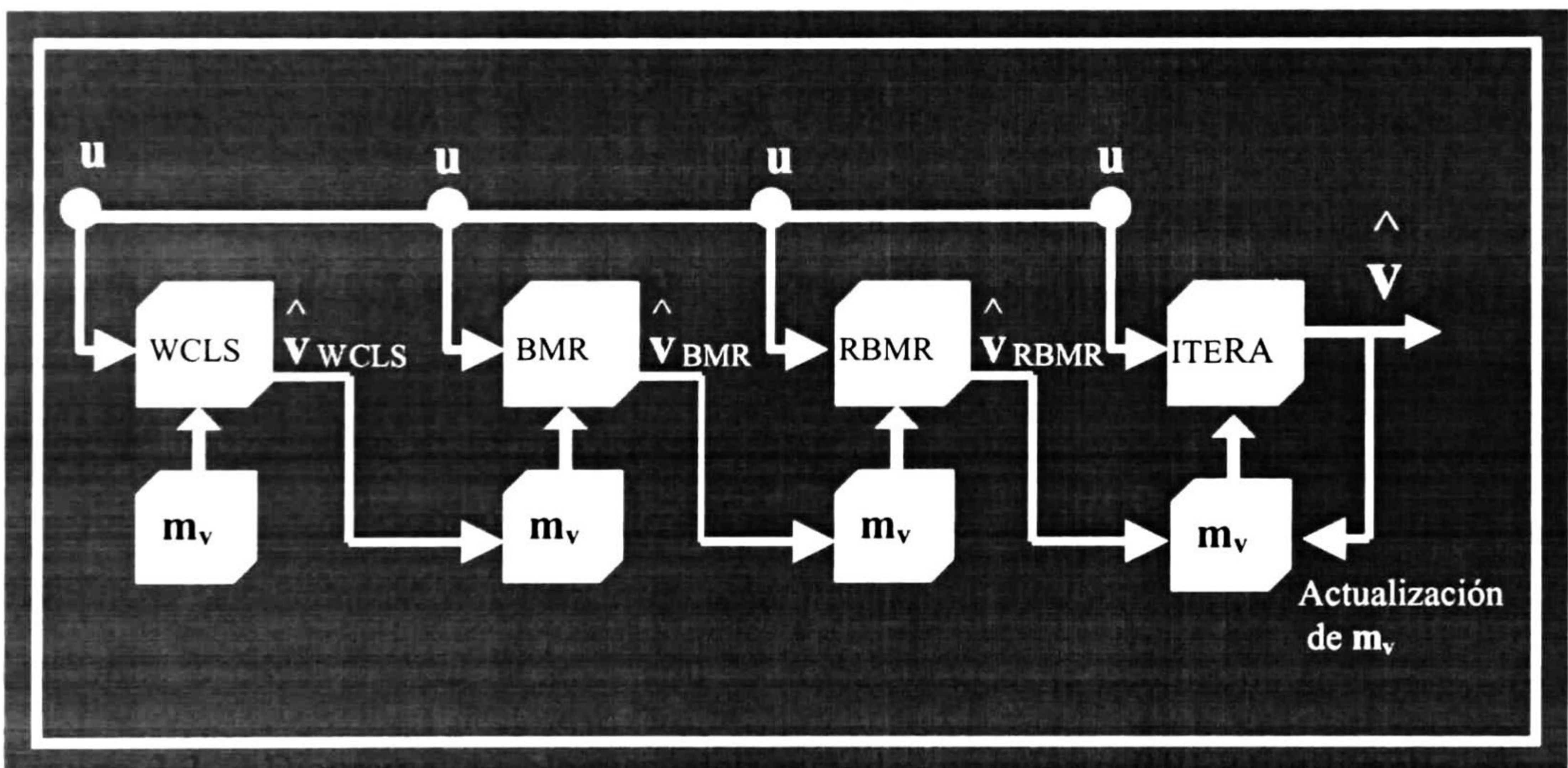


Figura 3.4. Diagrama a bloques del método propuesto RRFRI utilizando como método de estimación inicial el método WCLS.

En las figuras Figura 3.3 y de la Figura 3.4 se puede apreciar mejor el entendimiento del método desarrollado RRFRI (con los diagramas que ofrecen una

perspectiva visual), utilizando como conocimiento *a priori* inicial la estimación obtenida de alguno de los métodos determinísticos (CLS y WCLS, respectivamente).

### 3.6 SUMARIO

En este capítulo se analizaron los métodos de reconstrucción de señales que se dividieron en dos grandes grupos: el primer grupo, los métodos determinísticos que se caracterizan por utilizar la teoría de regularización de Tikhonov también llamados métodos determinísticos y el segundo grupo, conocido como métodos estadísticos.

Se realizaron análisis del desarrollo de los métodos de reconstrucción de señales, es decir para los métodos CLS y WCLS de los métodos determinísticos y los métodos BMR y RBMR de los métodos estadísticos.

Al terminar de analizar los métodos tradicionales para la reconstrucción de señales, se planteó el desarrollo de un método (RRFRI), proponiendo una fusión (en el sentido de utilizar alguna(s) característica(s) o propiedades o resultados de los métodos implicados en la fusión) de los métodos ya analizados de tal manera que fuera posible reconstruir una señal con una mejor calidad en relación con las reconstrucciones que se obtendrían al utilizar los métodos tradicionales individualmente. Para poder comprobar que el método RRFRI aumenta en calidad la reconstrucción de una señal se llevó a cabo la simulación de los métodos a comparar. Los resultados obtenidos se presentan en el siguiente capítulo IV.

# CAPÍTULO

## IV

### RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN DEL MÉTODO RRFRI

---

En este capítulo se exponen las condiciones utilizadas para llevar a cabo la simulación de los métodos de estimación tradicionales y del método RRFRI que se desarrolló. Entre las principales condiciones se pueden mencionar: el tipo de ruido que afectará a dicha señal, el modelo del sistema de formación de imagen que afectará a nuestro análisis (tipo de SSF) y la señal original que se desea reconstruir.

Se presentan las gráficas resultantes de las simulaciones de una señal reconstruida en particular y las tablas de propósito comparativo para diferentes señales originales reconstruidas.

---

## 4.1 REFERENCIAS PARA INTERPRETACIÓN DE LAS TABLAS DE RESULTADOS

---

Al considerar que el deseo es obtener la señal (llamada señal original representada por el vector  $\mathbf{v}$ ) que viajaba a través de un espacio ya sea homogéneo o no homogéneo, la cual fue captada por sensores (por ejemplo: antenas) y capturada por un sistema (el cual es modelado con la matriz  $\mathbf{S}$ ).

La señal captada (señal representada por el vector  $\mathbf{u}$ ), llamada señal observada o señal dato o señal de información, será adaptada de tal manera que pueda ser manipulada por medio de un procesamiento digital de señales y de este modo obtener una señal  $\hat{\mathbf{v}}$ , llamada estimación de la señal original y que idealmente es igual a la señal original  $\mathbf{v}$ .

Una vez asimilado lo anterior se establecerá lo siguiente:

Los valores de las variables y constantes empleadas en el programa que se utilizaron para llevar a cabo las simulaciones fueron las siguientes:

*Señal original,  $\mathbf{v}$ .* Esta señal es desconocida debido a que dicha señal se degradó o corrompió por causa de otras señales o por el ruido circundante del medio en que se propagó. Esta señal está representada por el vector  $\mathbf{v}$ . En las simulaciones se presentaron las siguientes señales originales para analizar las reconstrucciones de dichas señales con el método RRFRI:

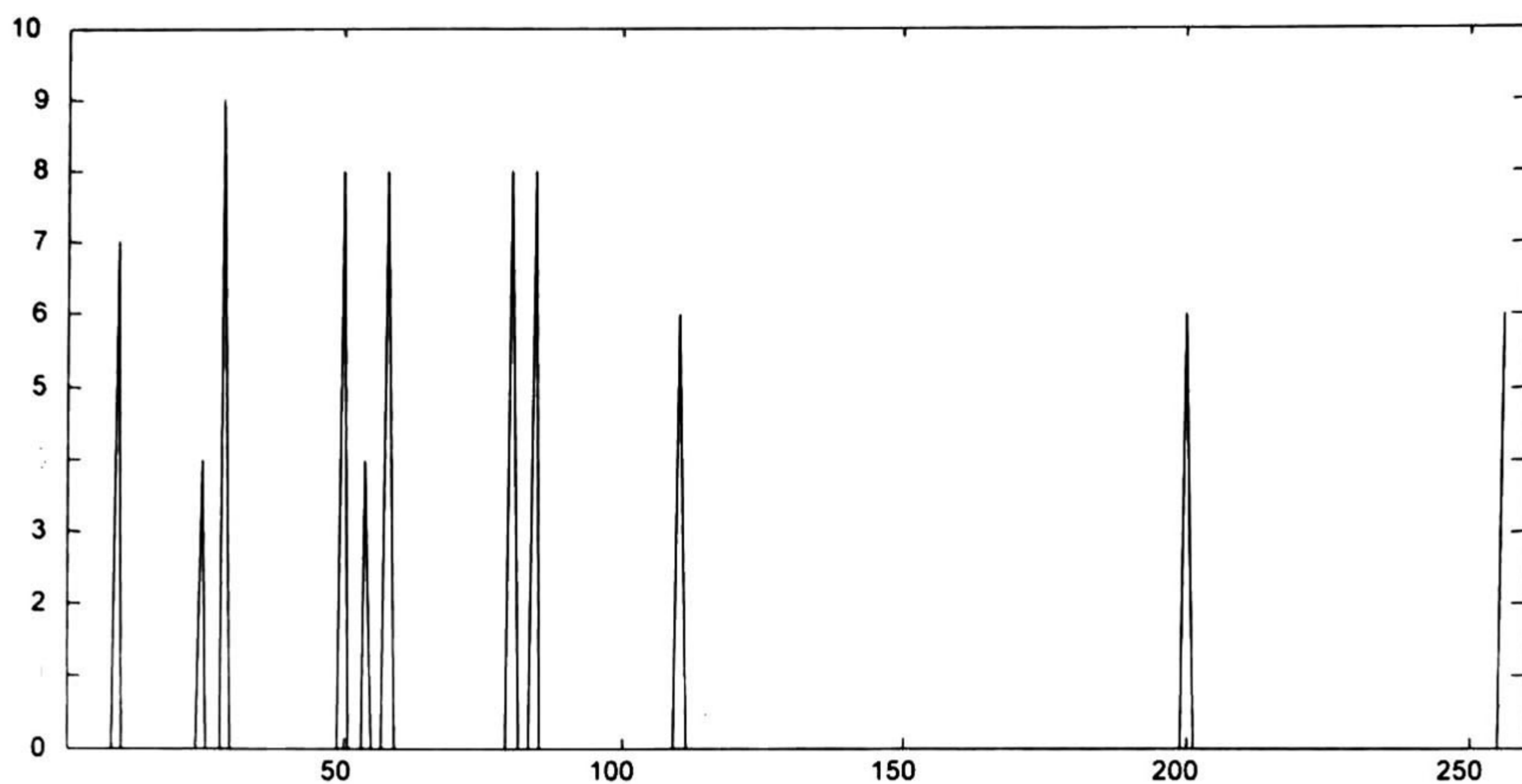


Figura 4.1. Señal deseada  $v_1$ .

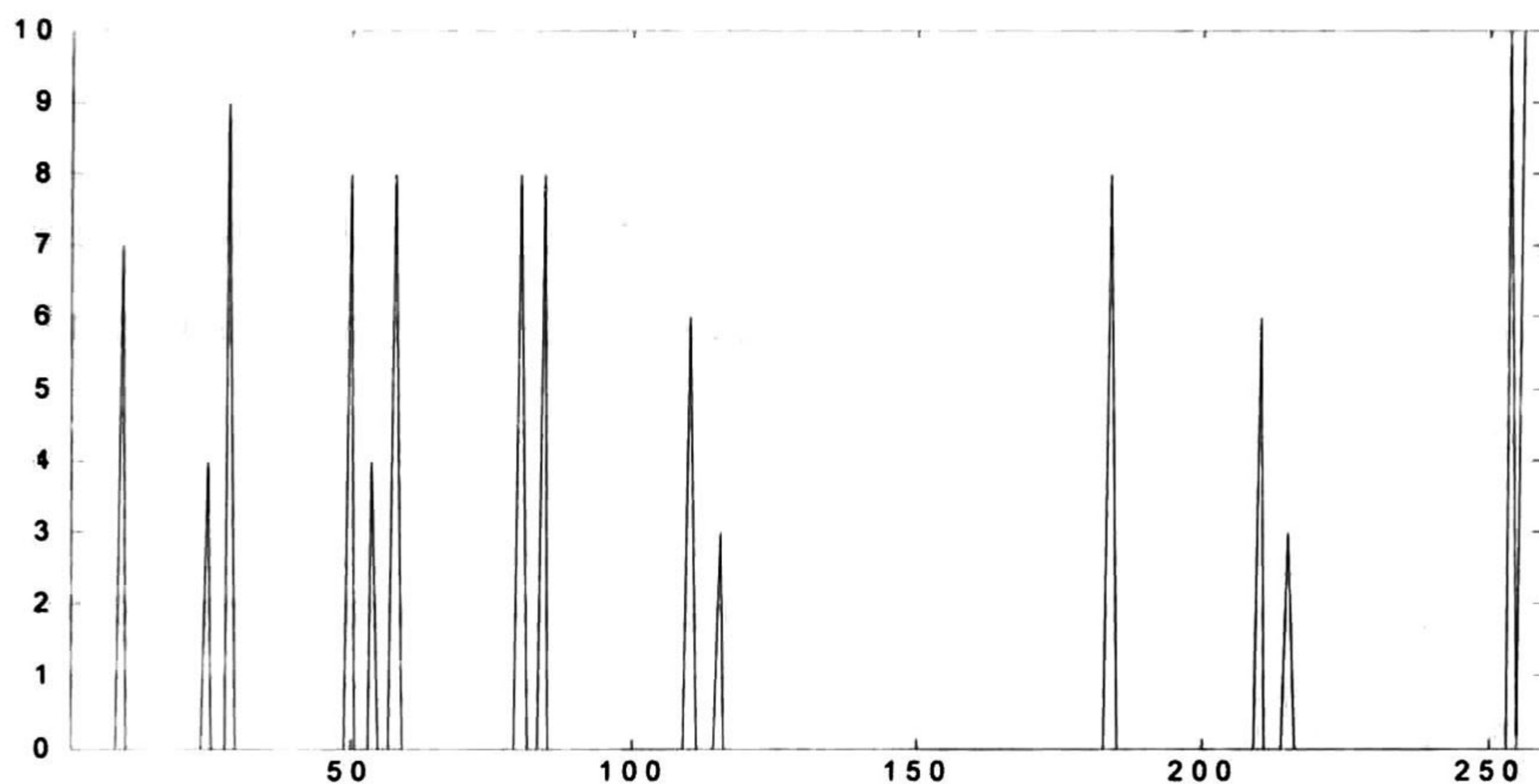


Figura 4.2. Señal deseada  $v_2$ .

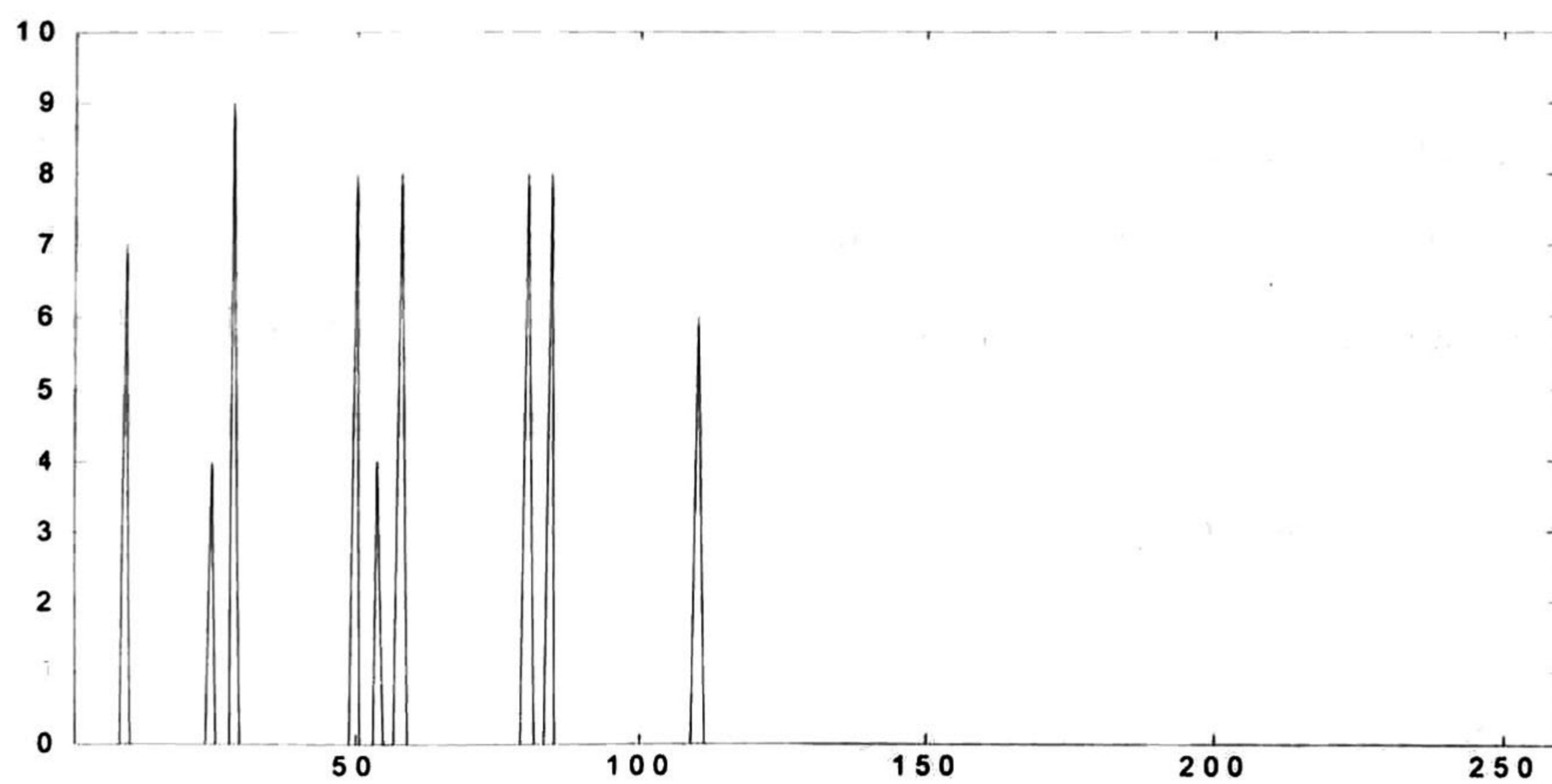
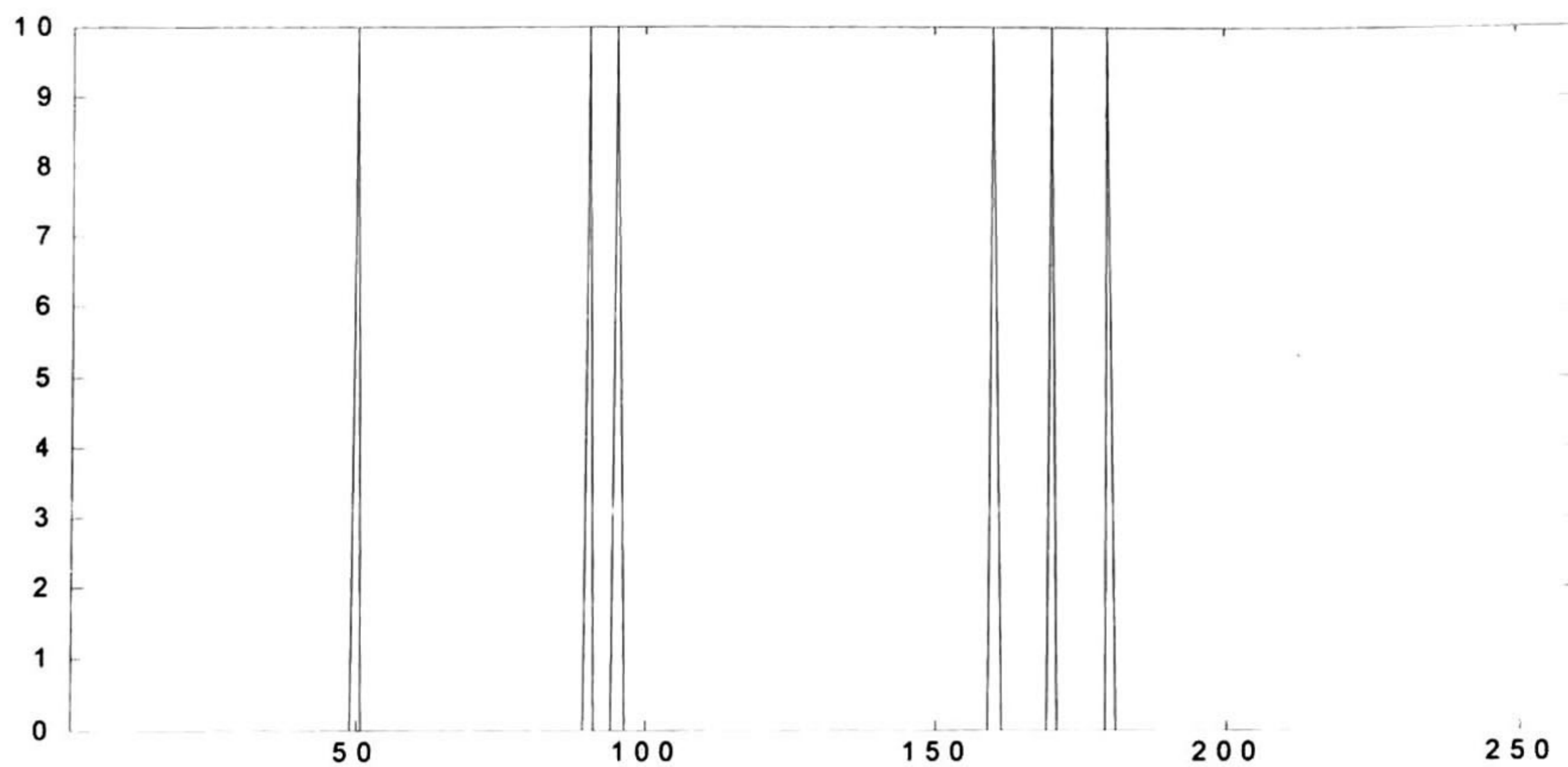


Figura 4.3. Señal deseada  $v_3$ .



**Figura 4.4.** Señal deseada  $v_4$ .

**Ruido,  $n$ .** Como se mencionó anteriormente, el ruido es modelado con el ruido aditivo Gaussiano con media cero y está representado con el vector  $n$ . Para el cual se empleó una densidad de ruido de 5.0112, 2.5119, 1.0 y 0.1.

**Dato,  $u$ .** El dato llamado también señal de observación está representado por el vector  $u$ .

**SNR.** La razón de señal a ruido es la forma que da la idea de la cantidad de ruido con respecto a la señal original, para tal caso, se supuso una SNR de 3, 6, 10 y 20 dB.

**SSF,  $S$ .** Función que modela al sistema de captura de la señal y es representada por la matriz  $S$ . Se utilizan tres tipos de SSF: la primera es nombrada  $SSF_1$  y representa una SSF de tipo exponencial gaussiana, la segunda  $SSF_2$  y representa una SSF de tipo  $|(\text{sinc}(ax)/ax)|$  y la tercera es nombrada  $SSF_3$  y representa una SSF de tipo triangular. Dichas funciones se pueden apreciar en las siguientes figuras:

Figura 4.5.  $SSF_1$ .

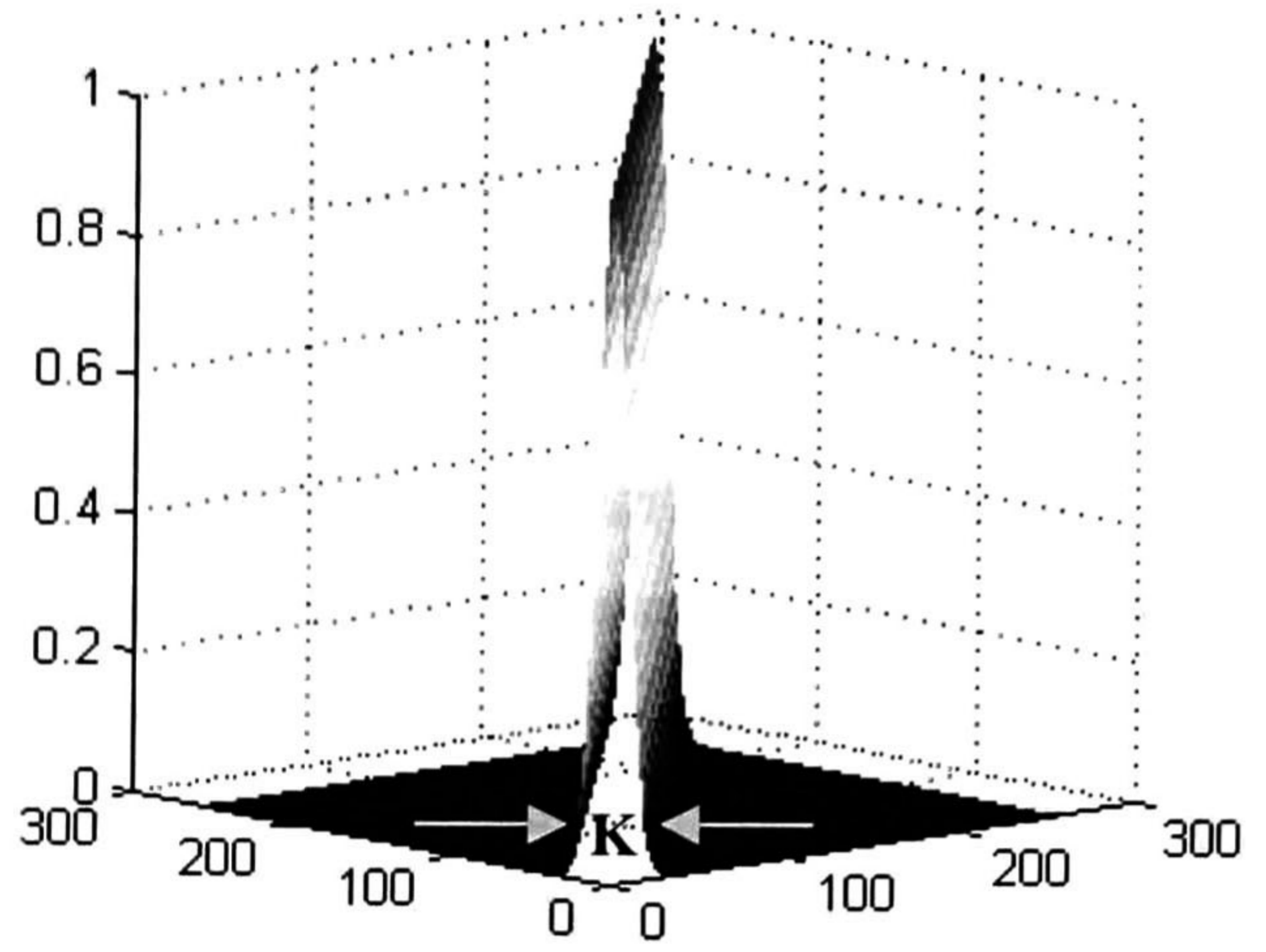


Figura 4.6.  $SSF_2$ .

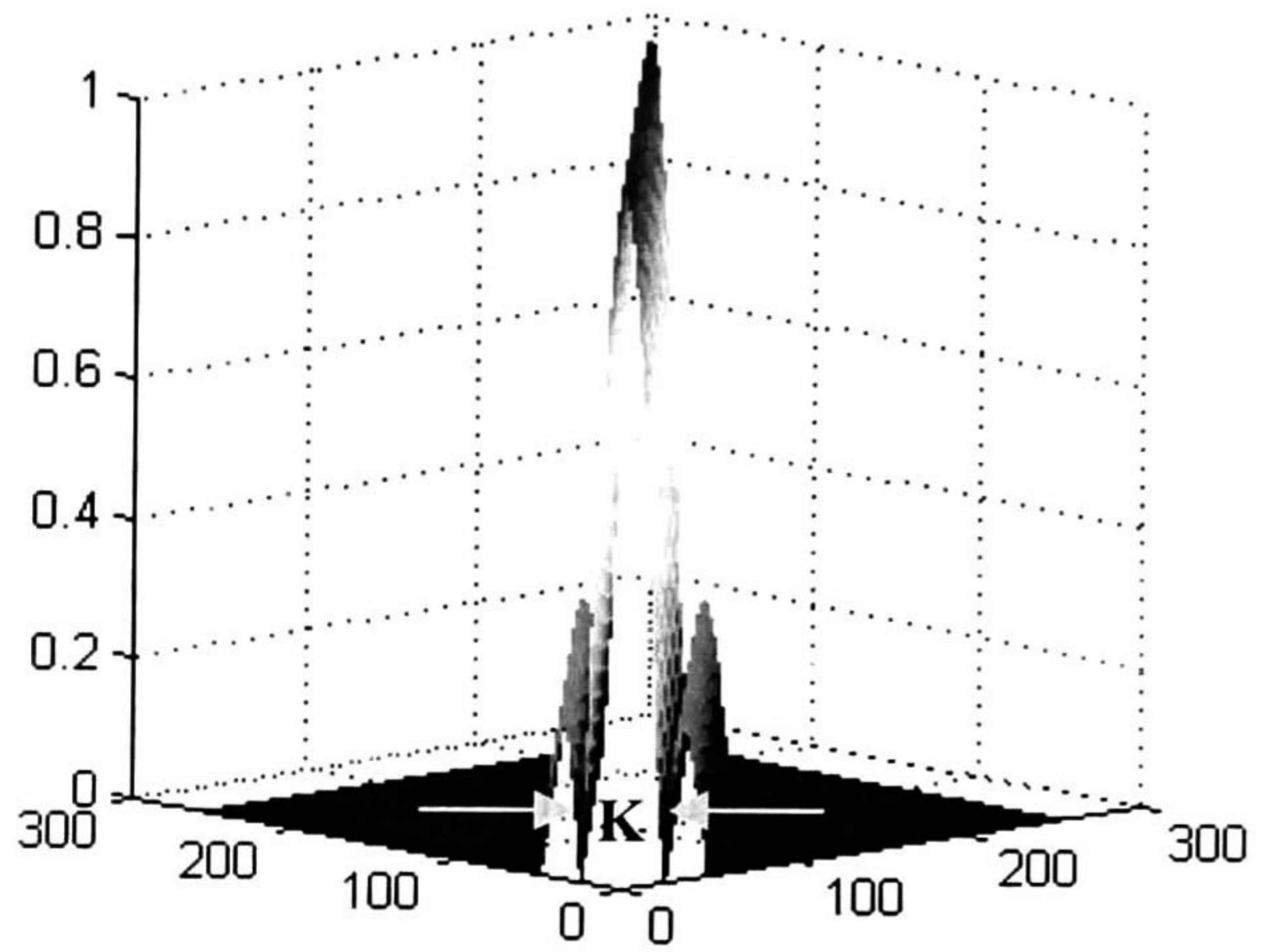
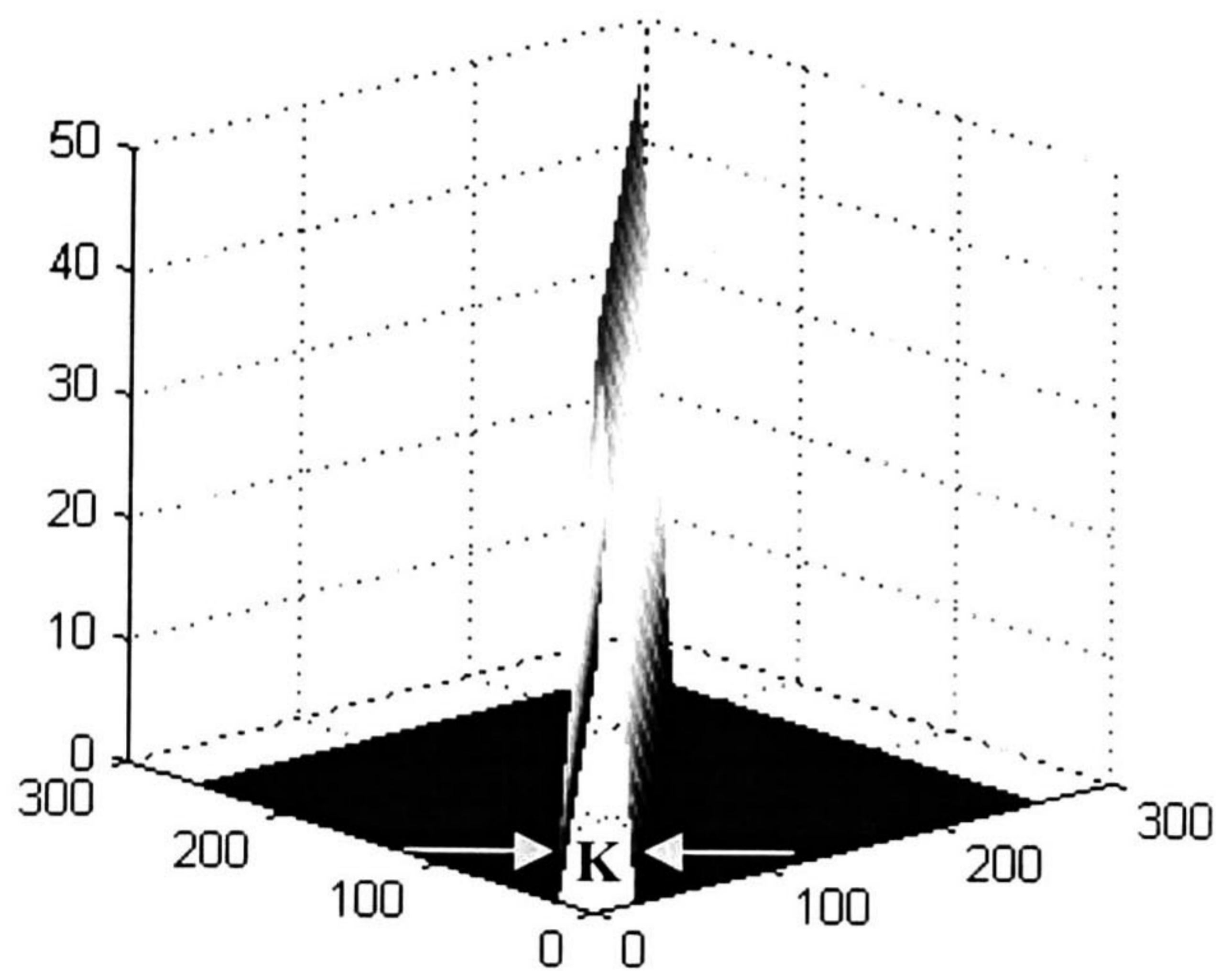


Figura 4.7.  $SSF_3$ .



Una vez establecido lo anterior se elaboró un programa computacional para poder simular los métodos de estimación mencionados en el capítulo 3, dicho programa fue escrito en el lenguaje del software MATLAB versión 5.3.

Al tener el programa en el lenguaje de MATLAB se simularon los métodos de estimación para poder analizar los resultados que se obtuvieran de estas simulaciones, al final se encontraron una serie de resultados los cuales se podrán observar cualitativamente por medio de gráficas y cuantitativamente por medio de la definición del IOSNR. Para observar los resultados se debe tomar en cuenta las siguientes observaciones:

Ob.1. Para todas las gráficas que se presentarán a continuación el eje vertical representa la amplitud o magnitud de la señal (que en el caso de imágenes de una dimensión sería el valor de brillo en escala de grises) y el eje horizontal representa las muestras que se consideraron para las señales analizadas (corresponde al número de píxel de la imagen en una dimensión, es decir, 1-D).

Ob.2. Los incisos (c), (d), (e) y (f) muestran los resultados obtenidos cualitativamente (gráficas) y cuantitativamente (valores de IOSNR) del mejoramiento a la salida de la señal (objeto,  $\mathbf{v}$ ) con respecto al ruido (señal observada,  $\mathbf{u}$ ), es decir, la relación existente en la salida del mejoramiento de la estimación con la relación señal observada/objeto y la relación señal estimada/objeto. Para calcular cuantitativamente dicha razón en unidades de dB se ocupó la siguiente definición del IOSNR [13], [21]:

$$\mathbf{IOSNR}_{dB} = 10 \left[ \log_{10} \left( \frac{\sum (\mathbf{u} - \mathbf{v})^2}{\sum (\hat{\mathbf{v}} - \mathbf{v})^2} \right) \right]. \quad (4.1.1)$$



Ob.3. En cada página se presentan 6 gráficas etiquetadas con los incisos (a), (b), (c), (d), (e) y (f), los cuales contienen la gráfica de:

Inciso	Representa la gráfica de...
(a)	El objeto origen $v$ .
(b)	La señal dato $u$ .
(c)	La señal estimada de $v$ utilizando el método CLS.
(d)	La señal estimada de $v$ utilizando el método WCLS
(e)	La señal estimada de $v$ utilizando el método RRFRI tomando como información <i>a priori</i> inicial la estimación del método CLS.
(f)	La señal estimada de $v$ utilizando el método RRFRI tomando como información <i>a priori</i> inicial la estimación del método WCLS.

**Figura 4.8.** Significado de los incisos de las gráficas.

## 4.2 RESULTADOS

A continuación se muestran los resultados obtenidos al simular los métodos de reconstrucción de señales (CLS, WCLS y RRFRI) para la señal  $v_4$  seleccionada y por último una selección de los resultados relevantes para la reconstrucción de la señal  $v_1$ , en forma comparativa.

4.2.1 Para la señal  $v_4$

Tabla 4.1. Respuestas con SNR = 3 dB, K = 5 y  $SSF_1$ .

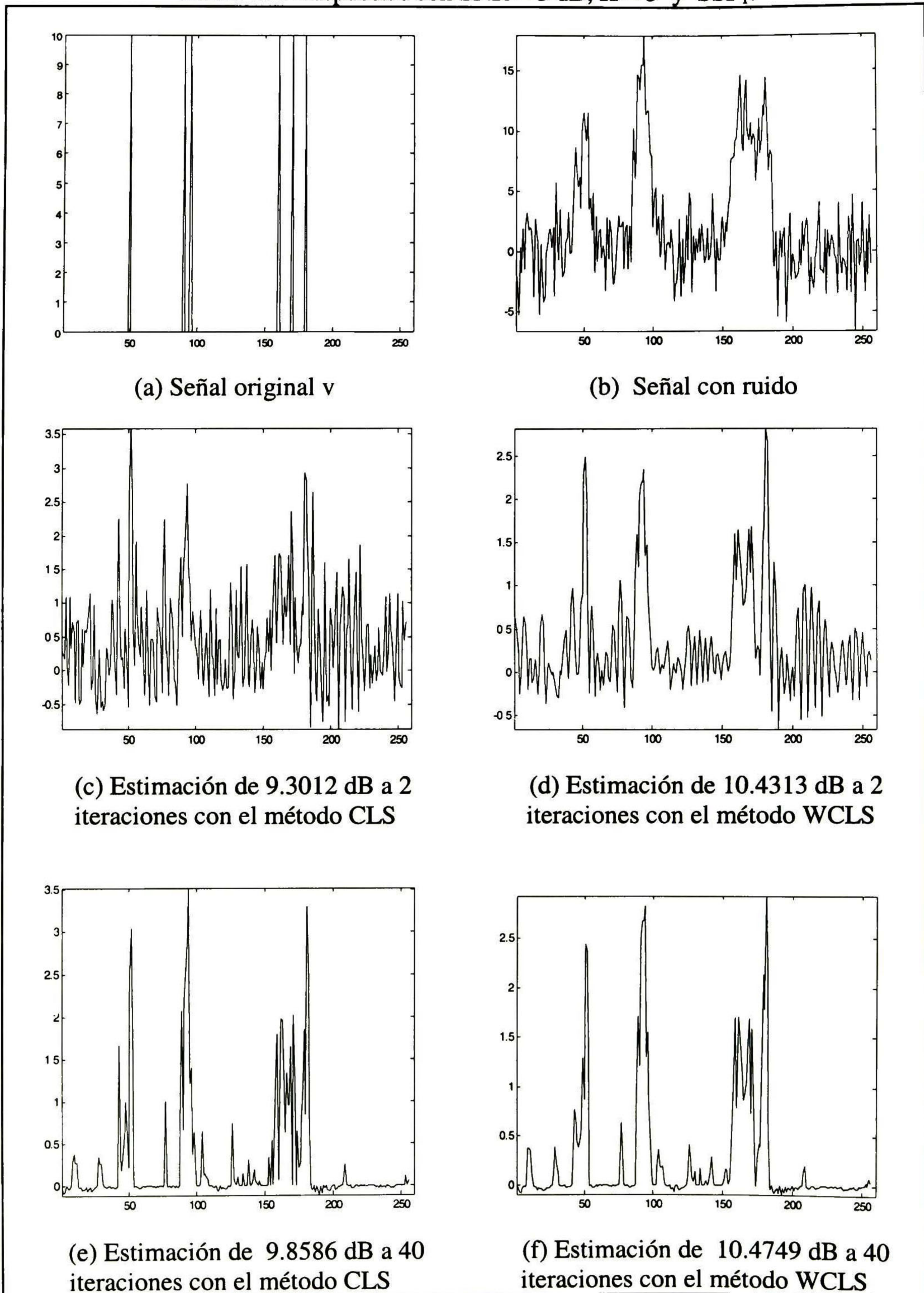
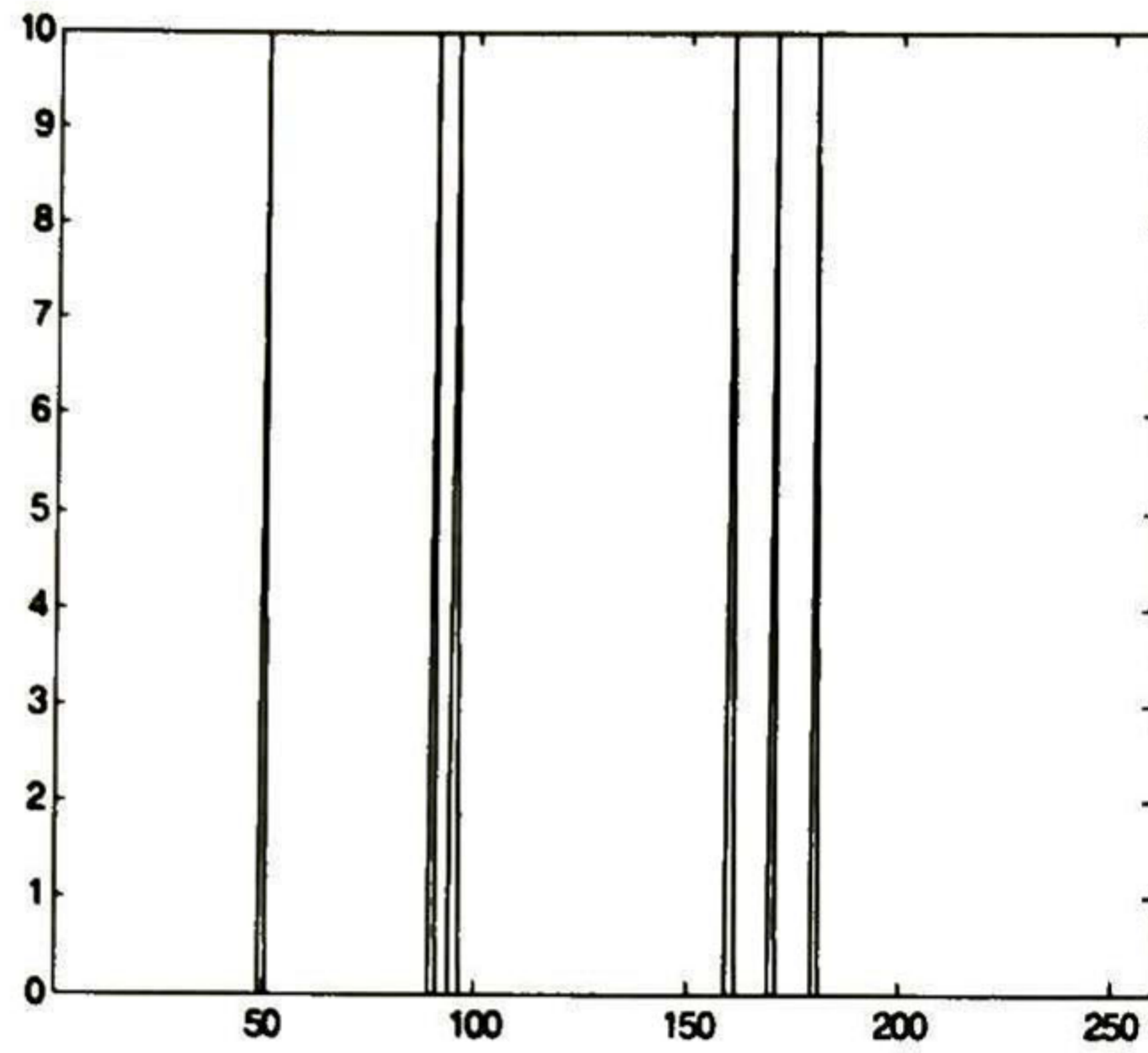
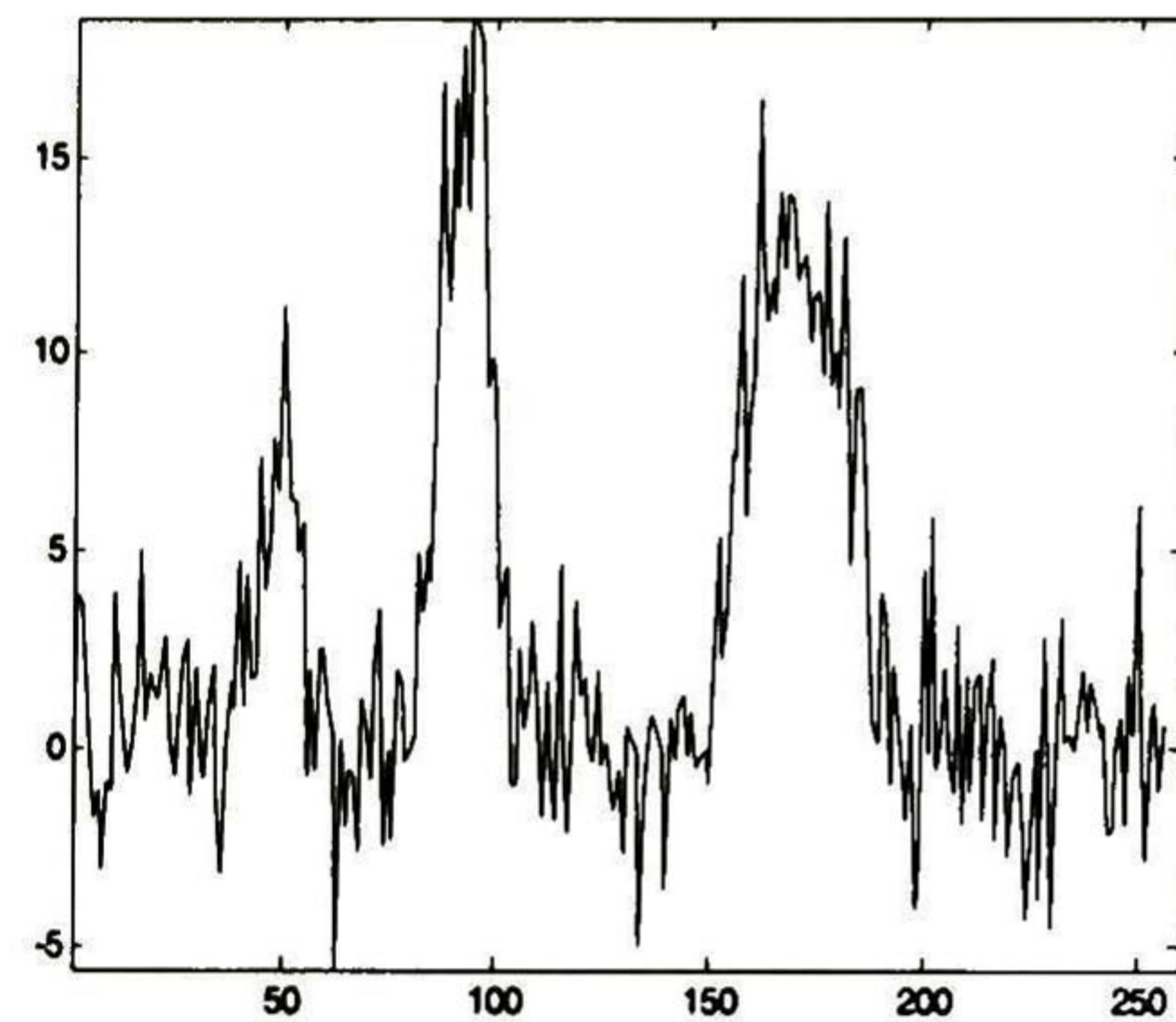


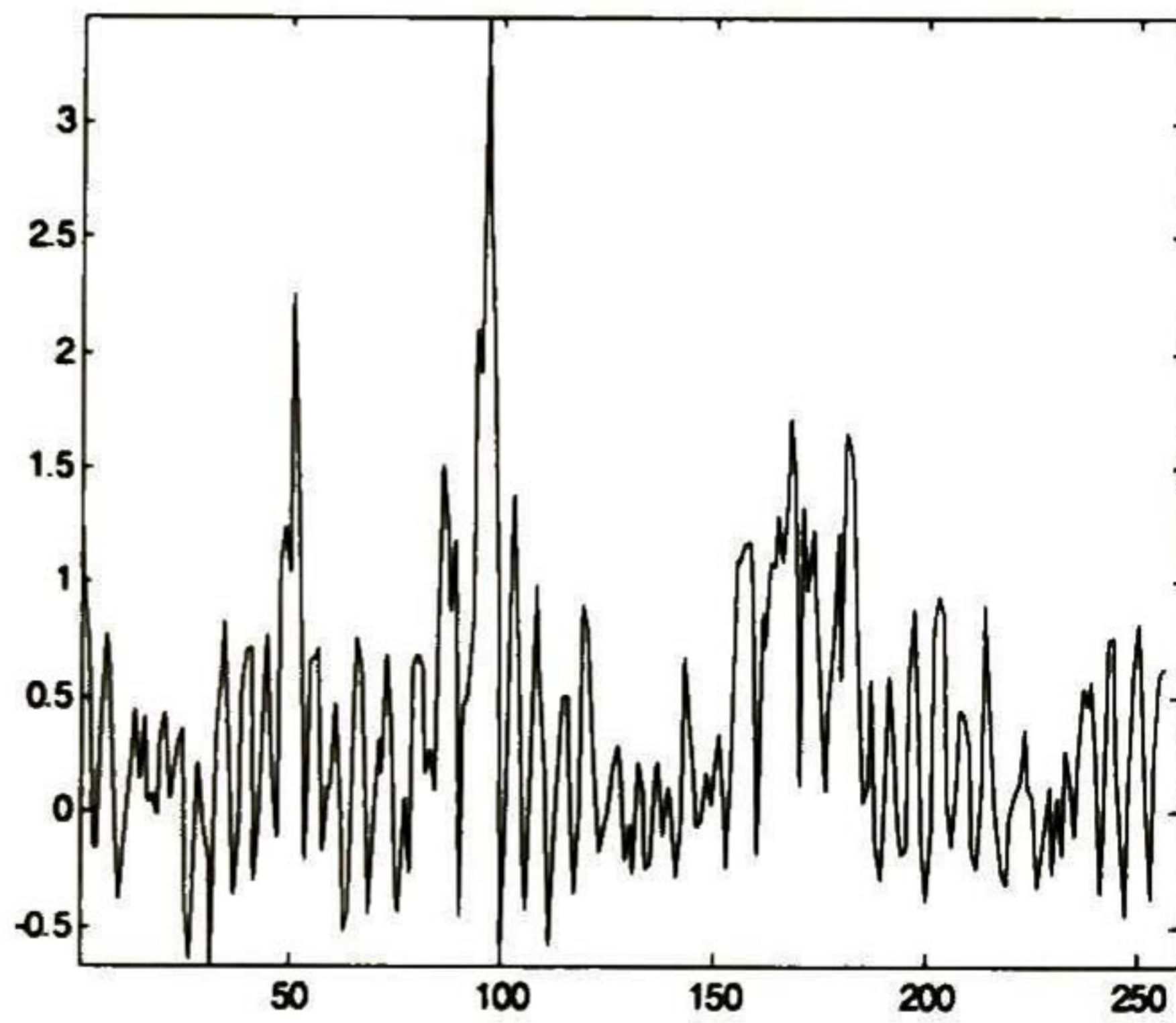
Tabla 4.2. Respuestas con SNR = 3 dB, K = 10 y  $SSF_1$ .



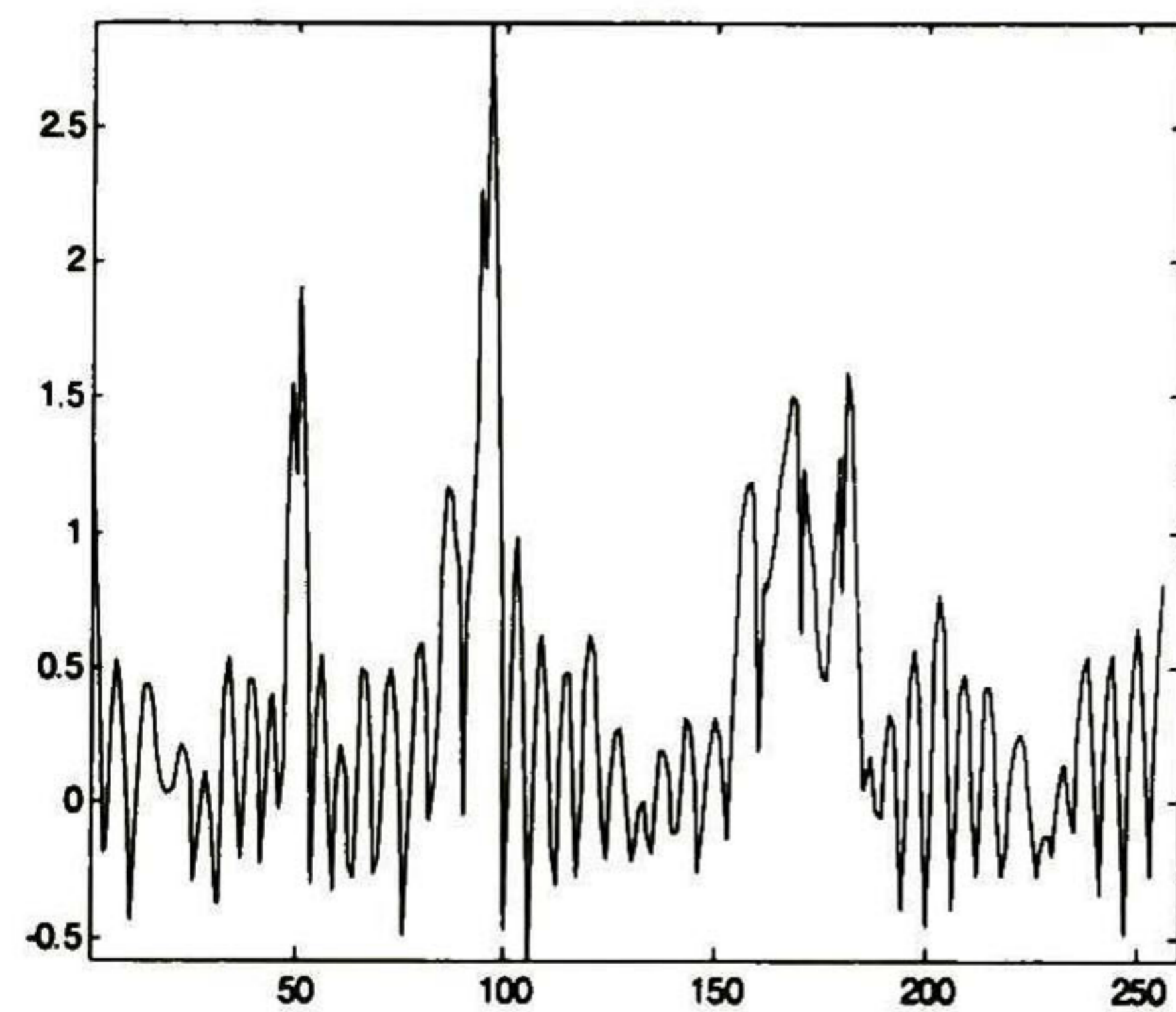
(a) Señal original  $v$



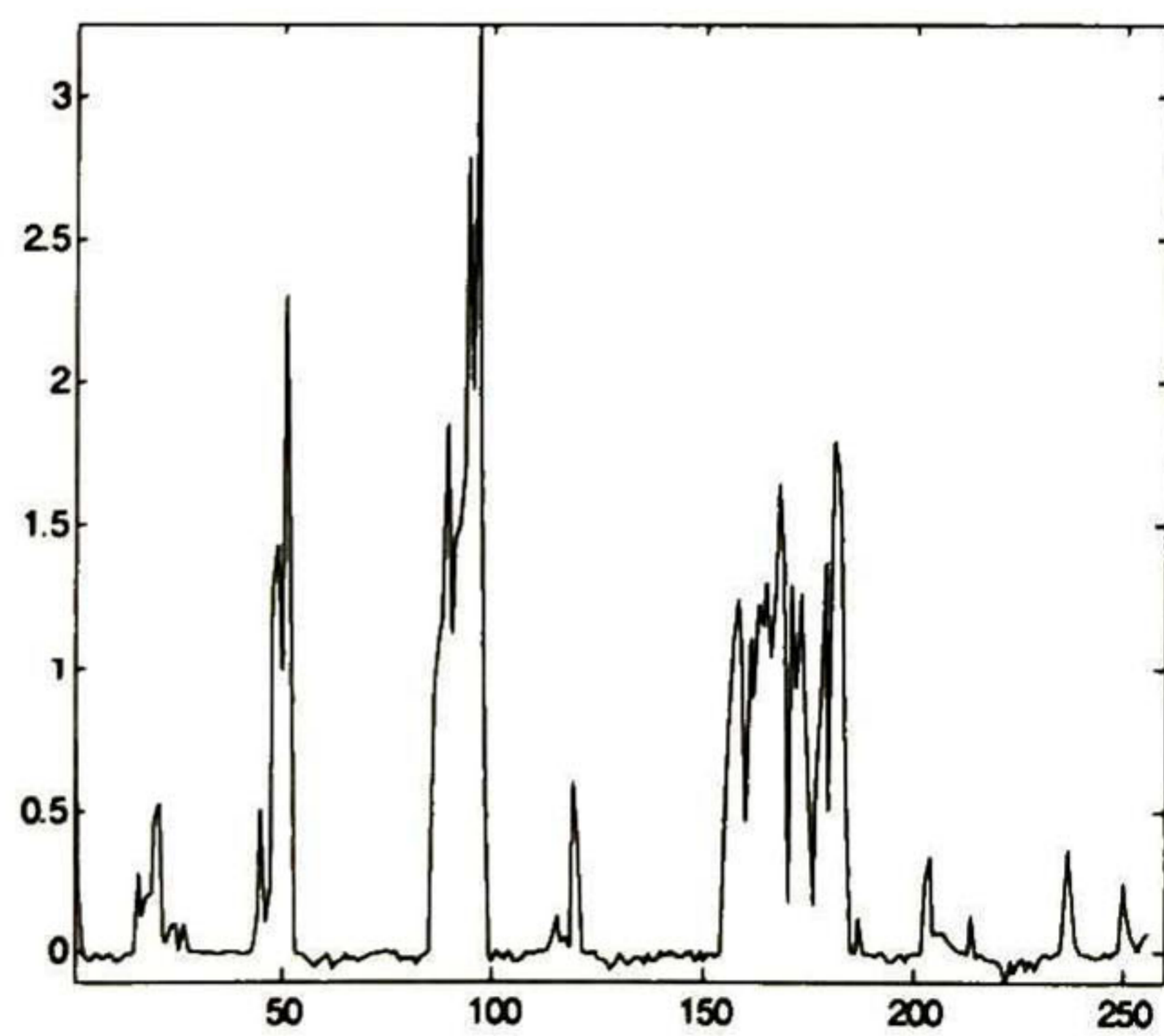
(b) Señal con ruido



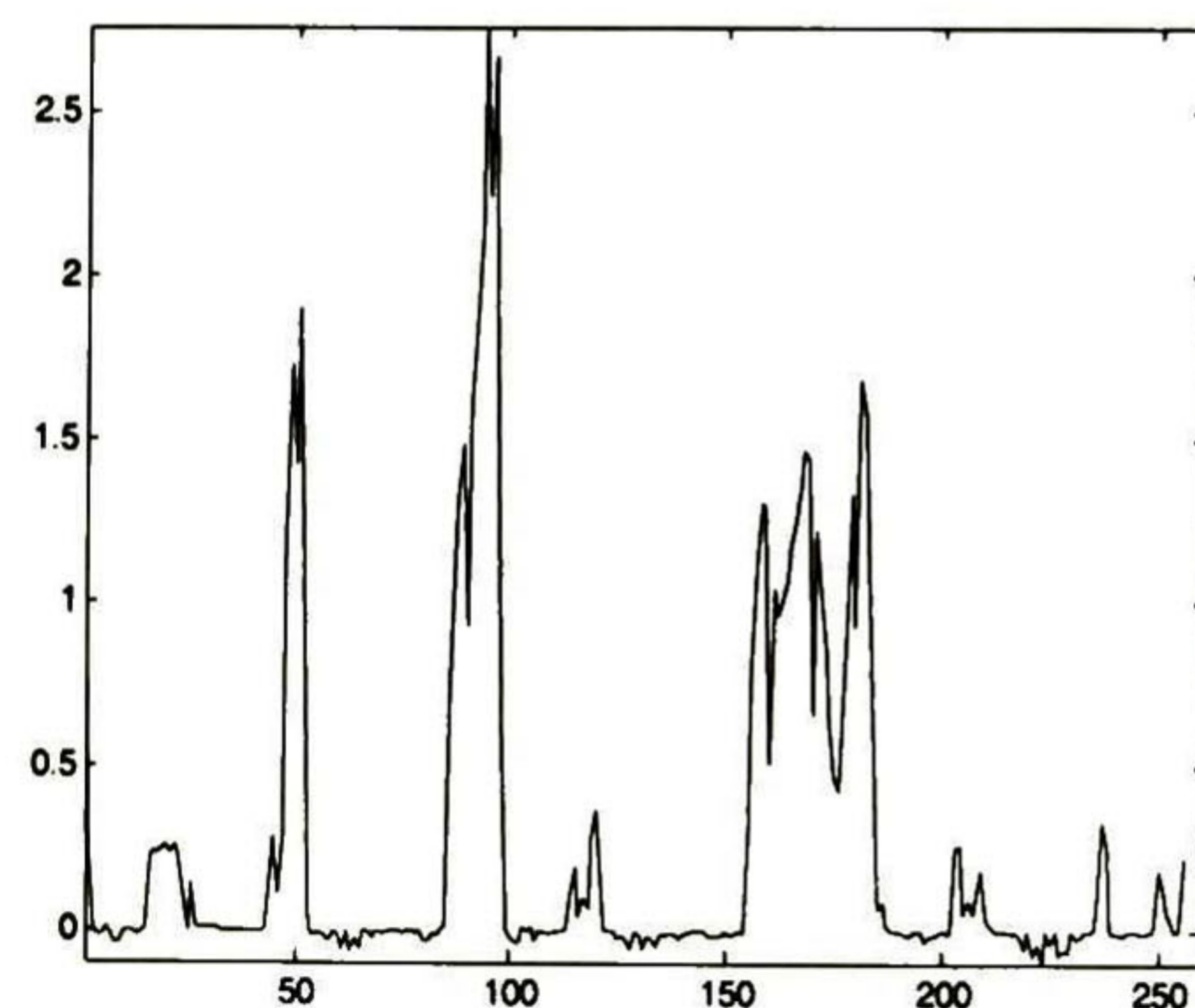
(c) Estimación de 10.5623 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 10.9553 dB a 2 iteraciones con el método WCLS

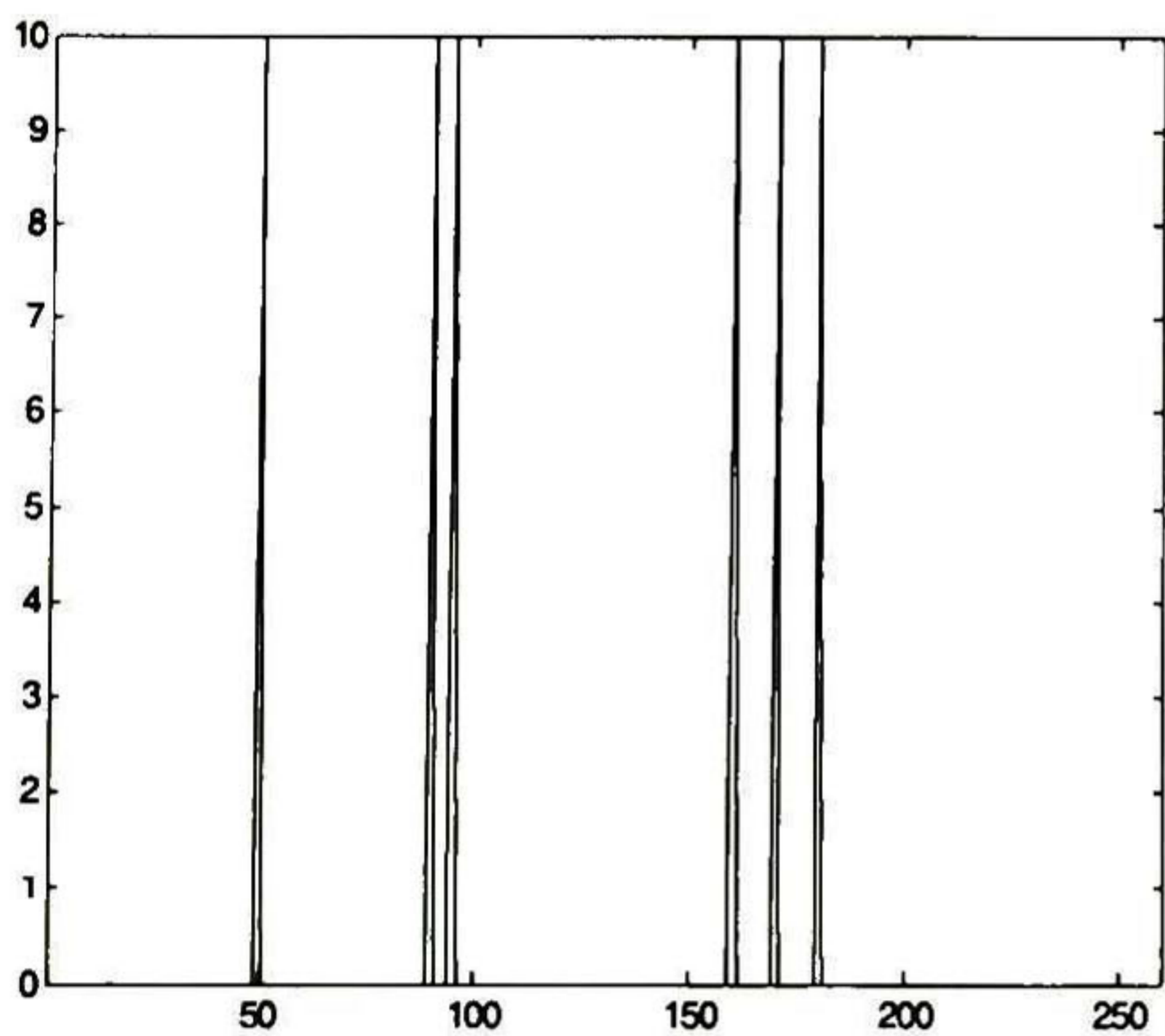


(e) Estimación de 11.0974 dB a 40 iteraciones con el método CLS

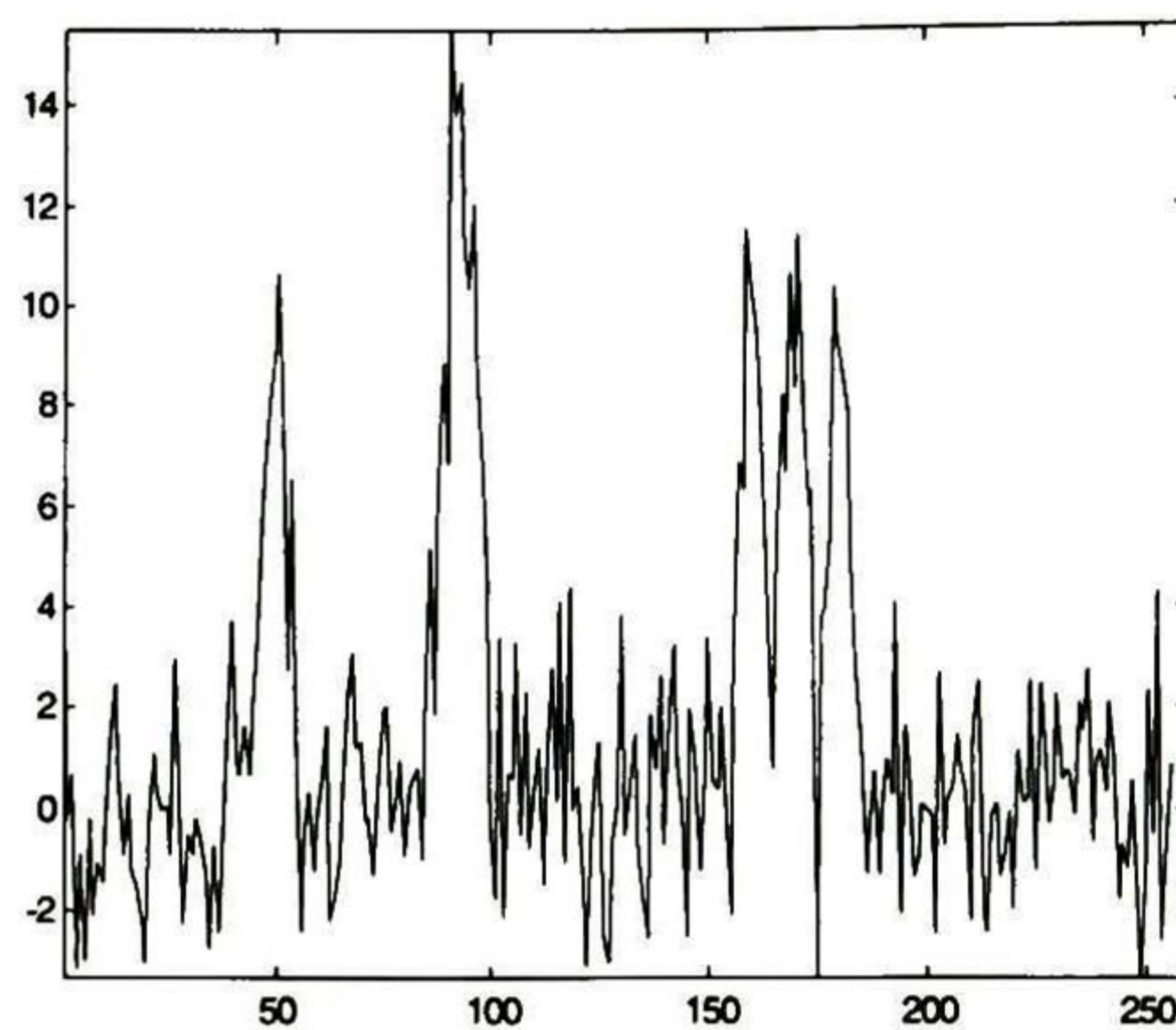


(f) Estimación de 11.3675 dB a 40 iteraciones con el método WCLS

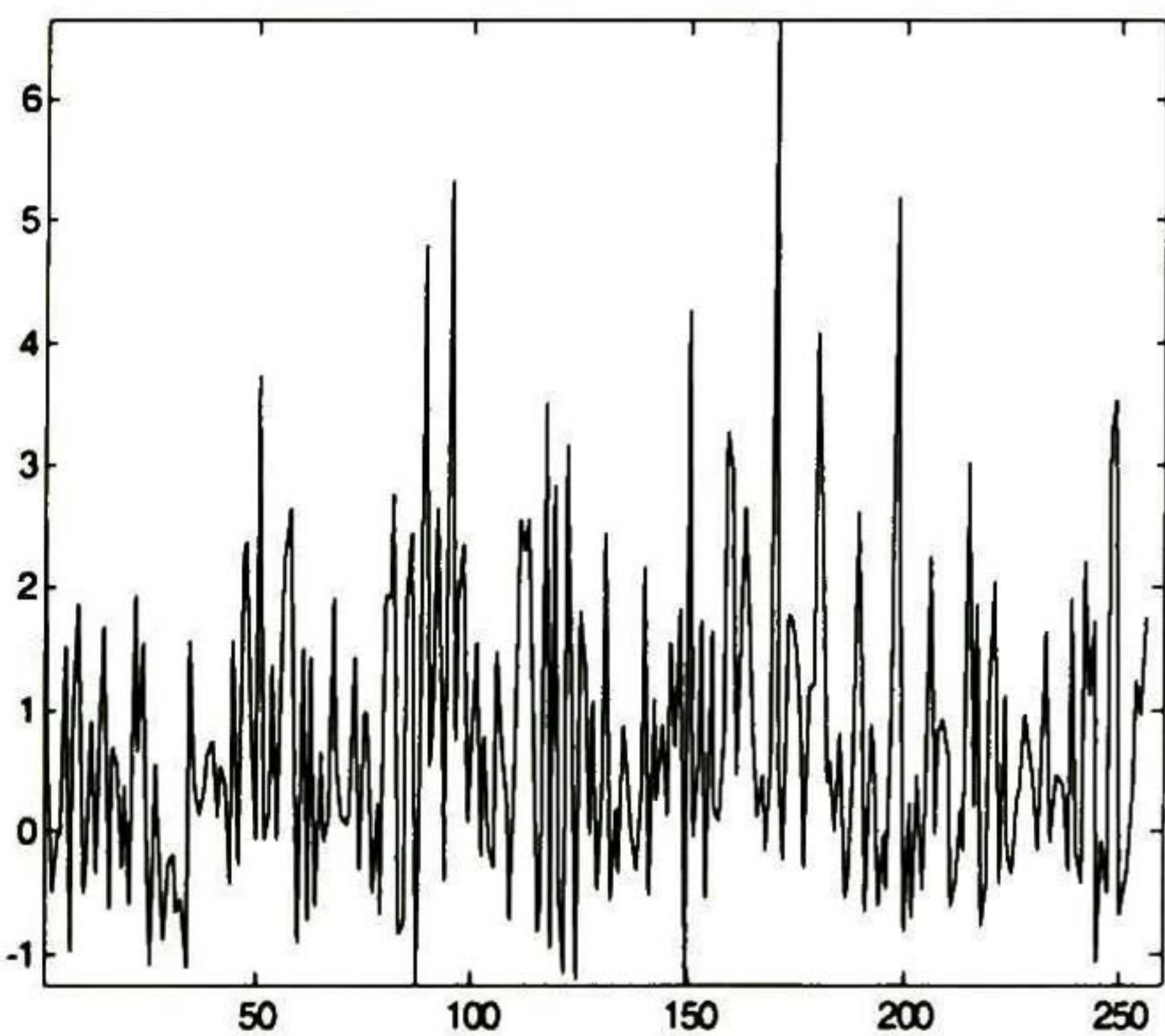
Tabla 4.3. Respuestas con SNR = 3 dB, K = 15 y  $SSF_1$ .



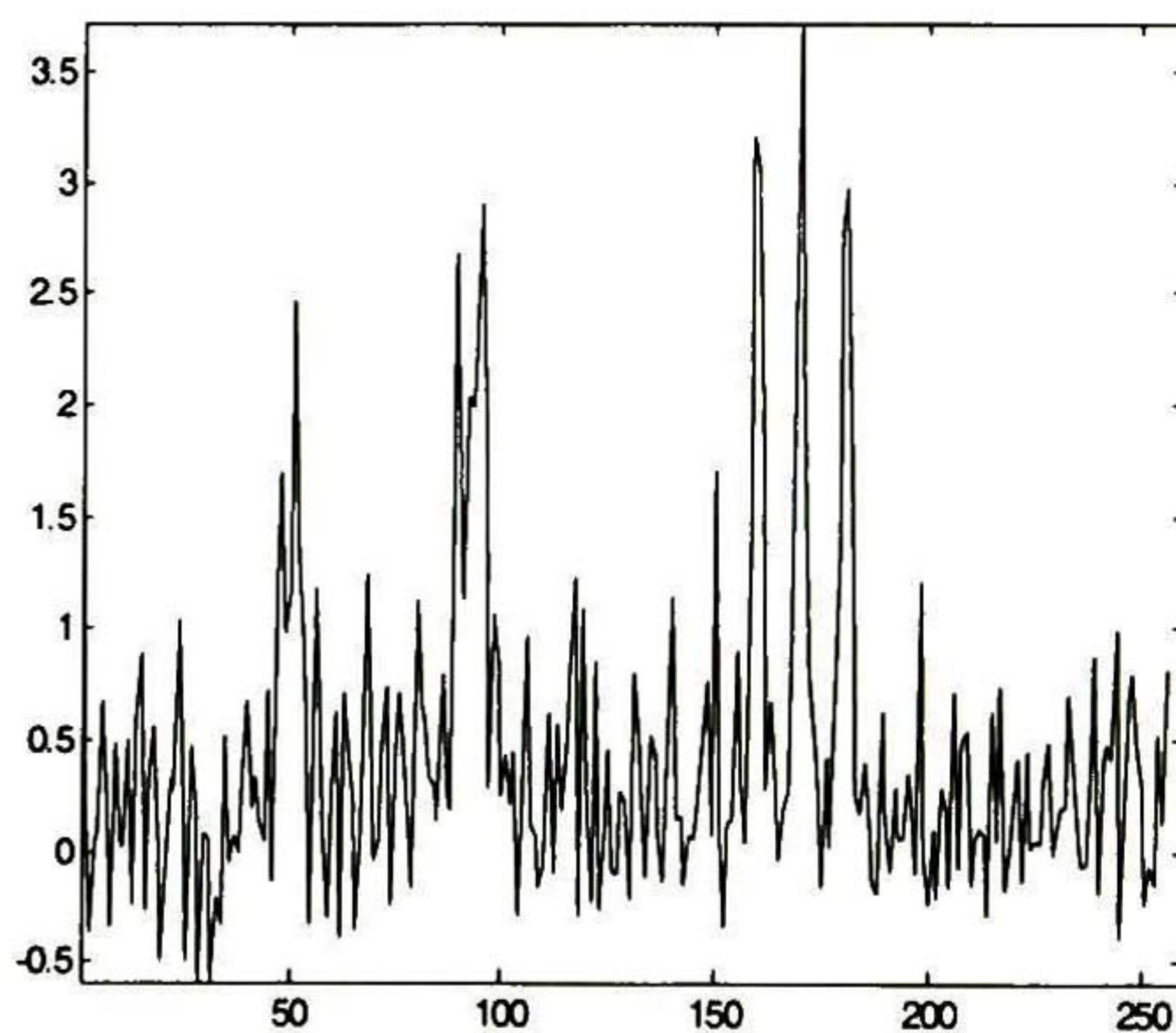
(a) Señal original  $v$



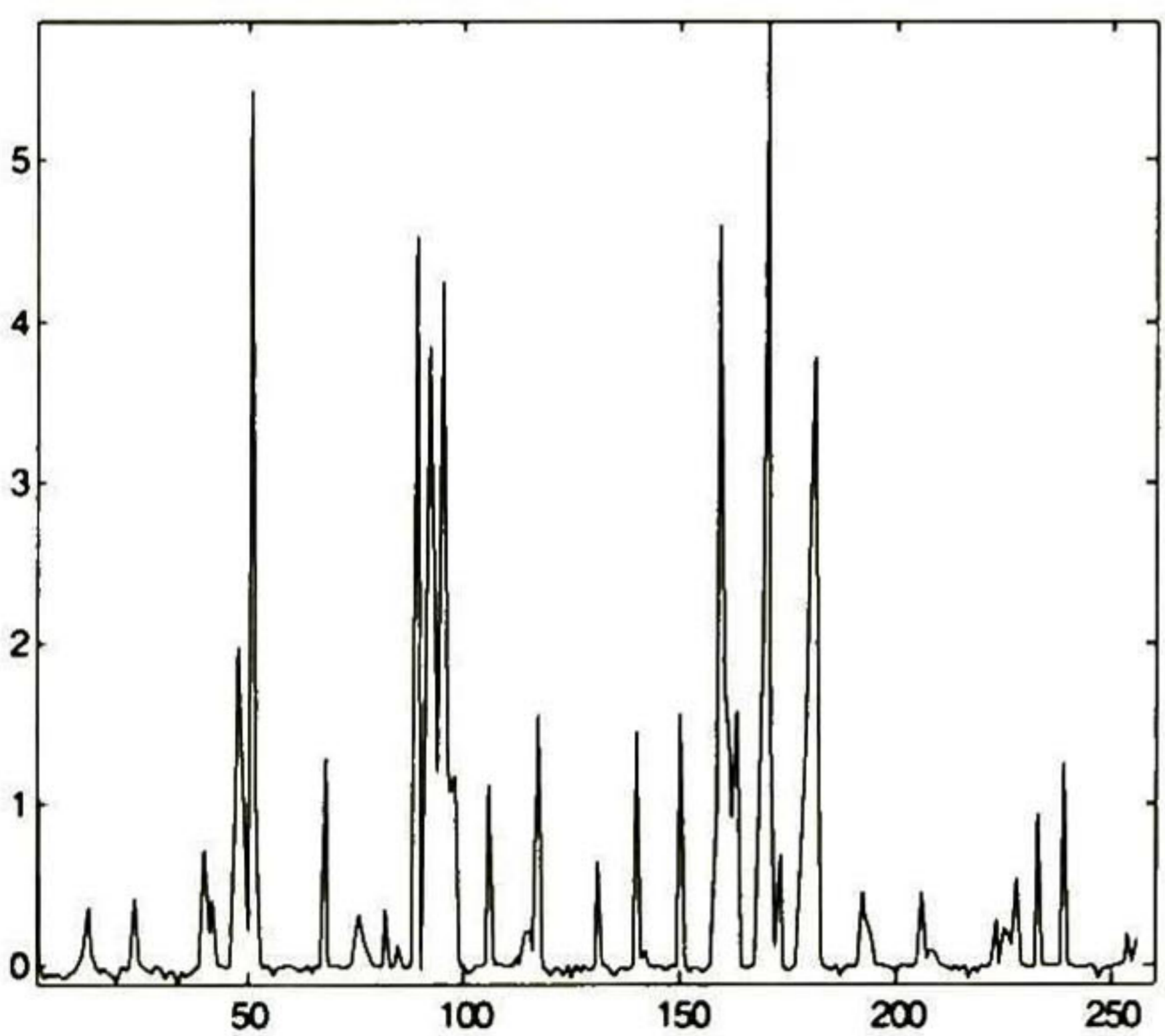
(b) Señal con ruido



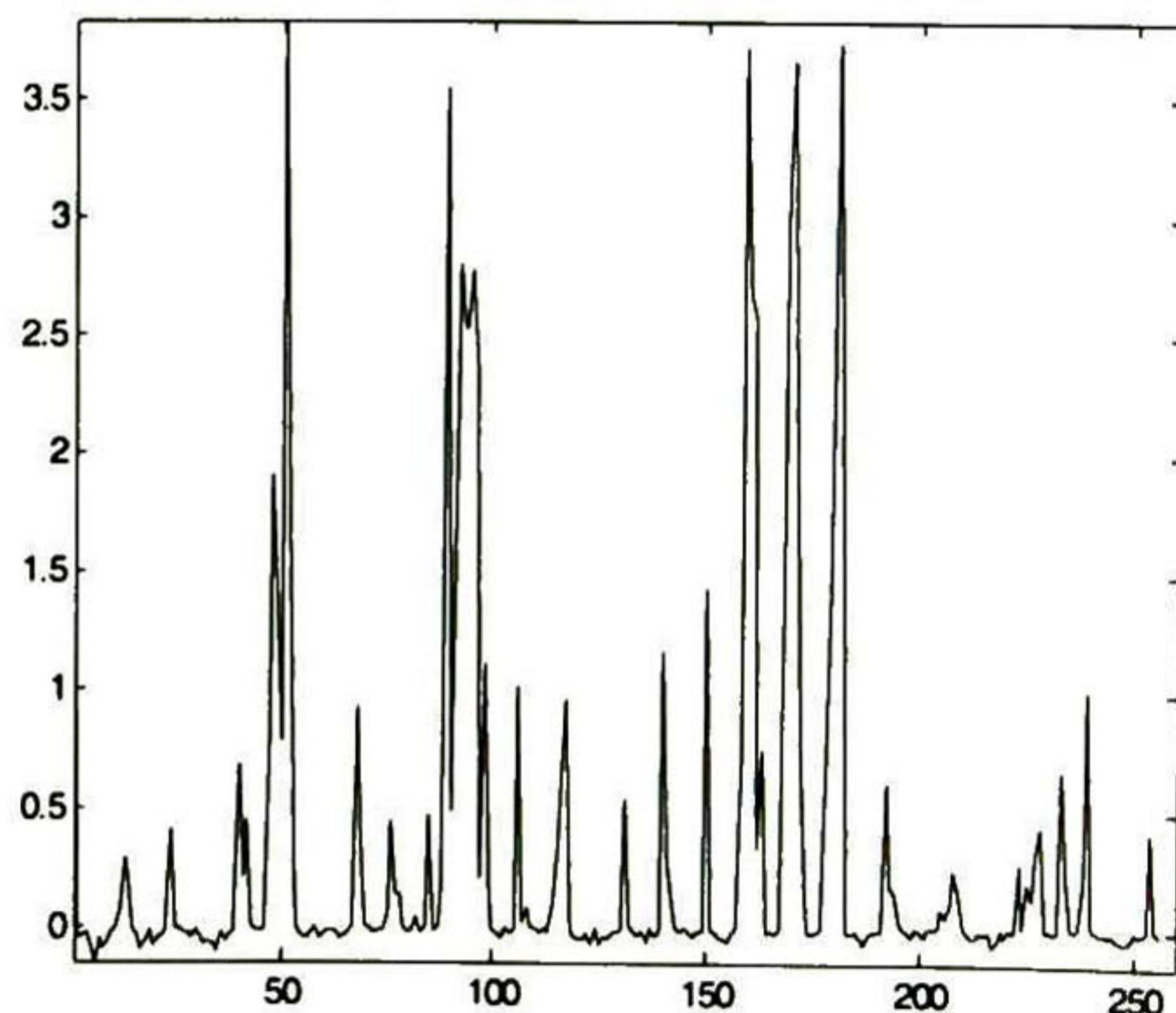
(c) Estimación de 6.5781 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 7.6857 dB a 2 iteraciones con el método WCLS

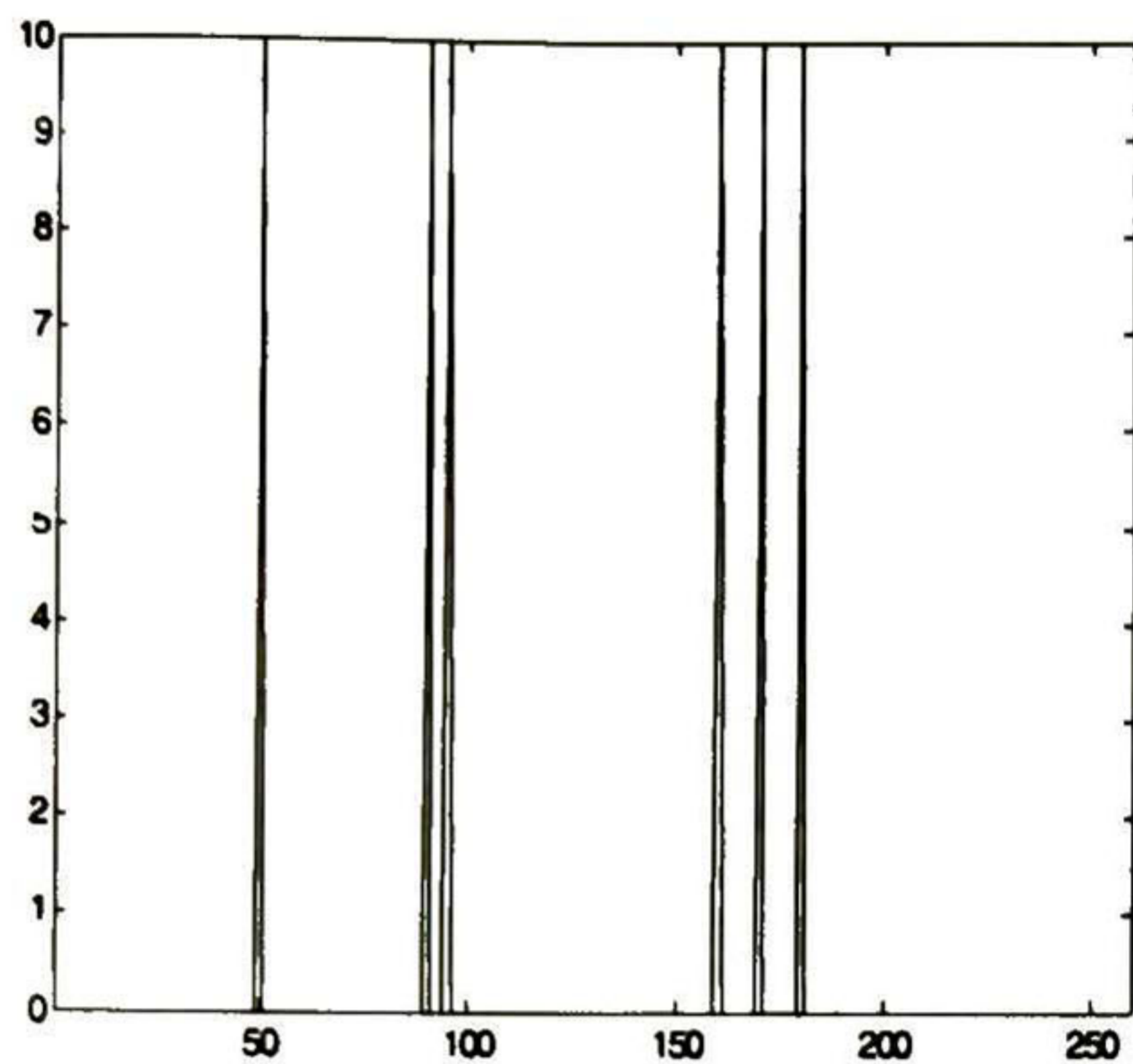


(e) Estimación de 8.2476 dB a 40 iteraciones con el método CLS

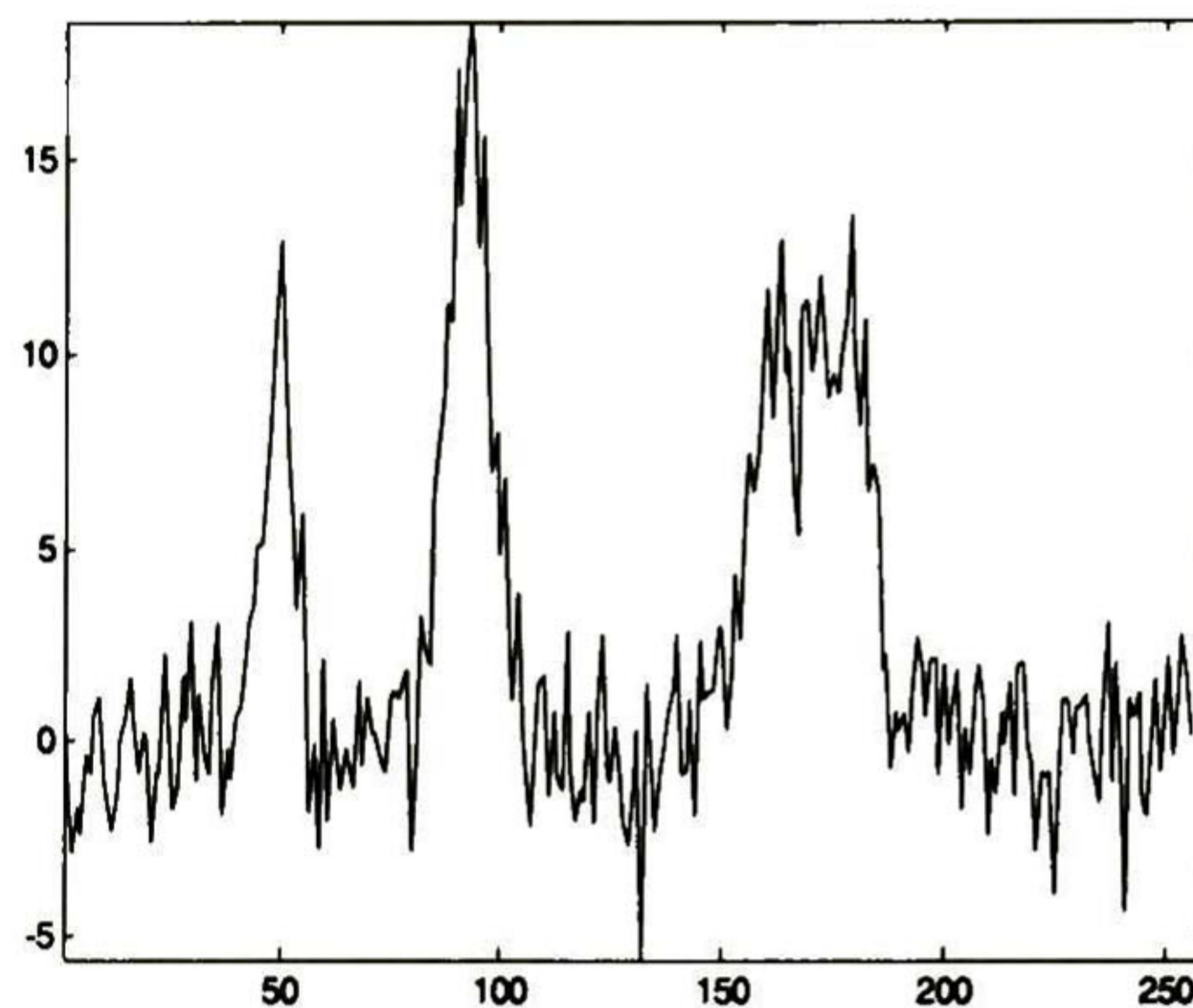


(f) Estimación de 8.2994 dB a 40 iteraciones con el método WCLS

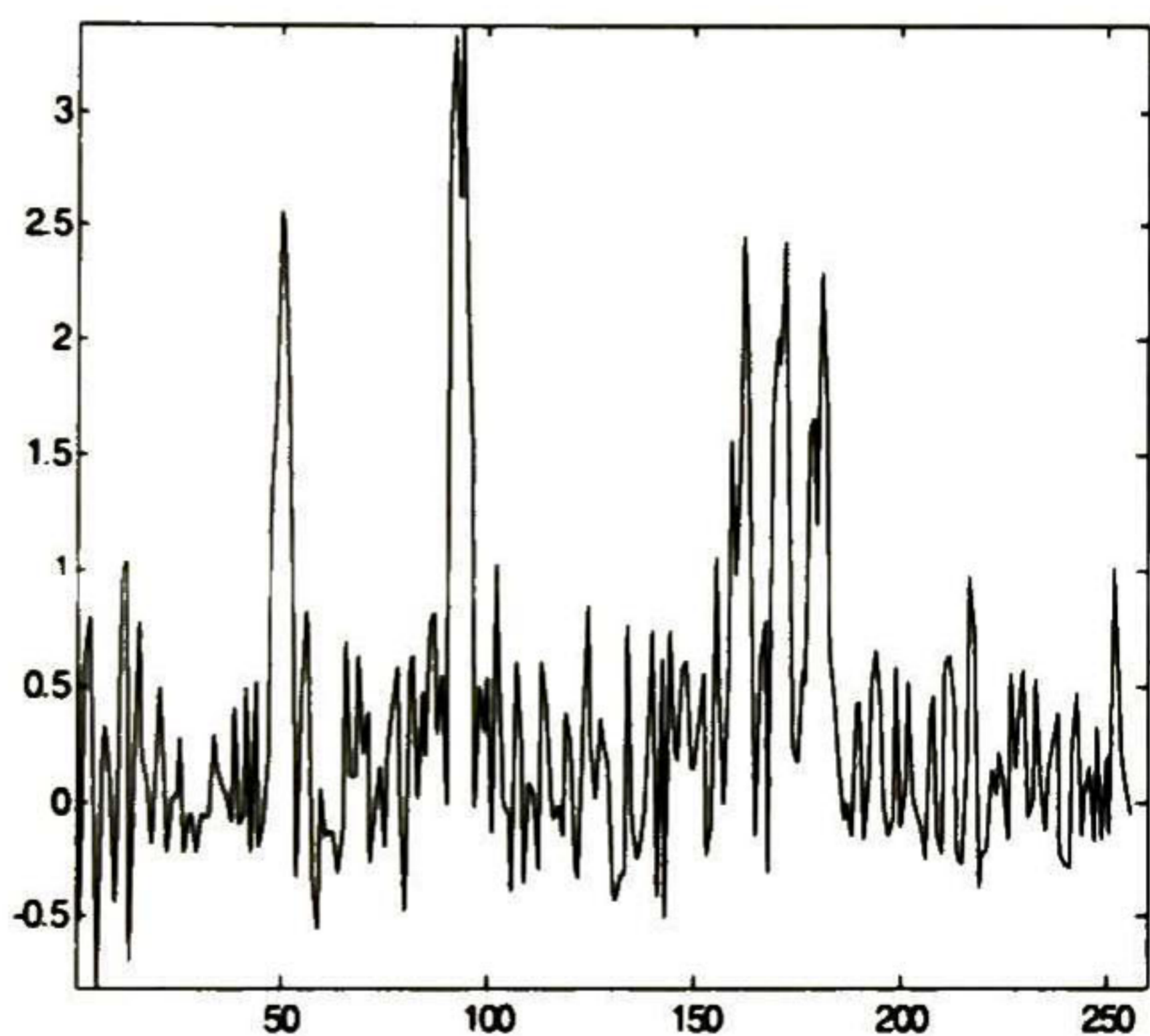
Tabla 4.4. Respuestas con SNR = 6 dB, K = 5 y SSF<sub>1</sub>.



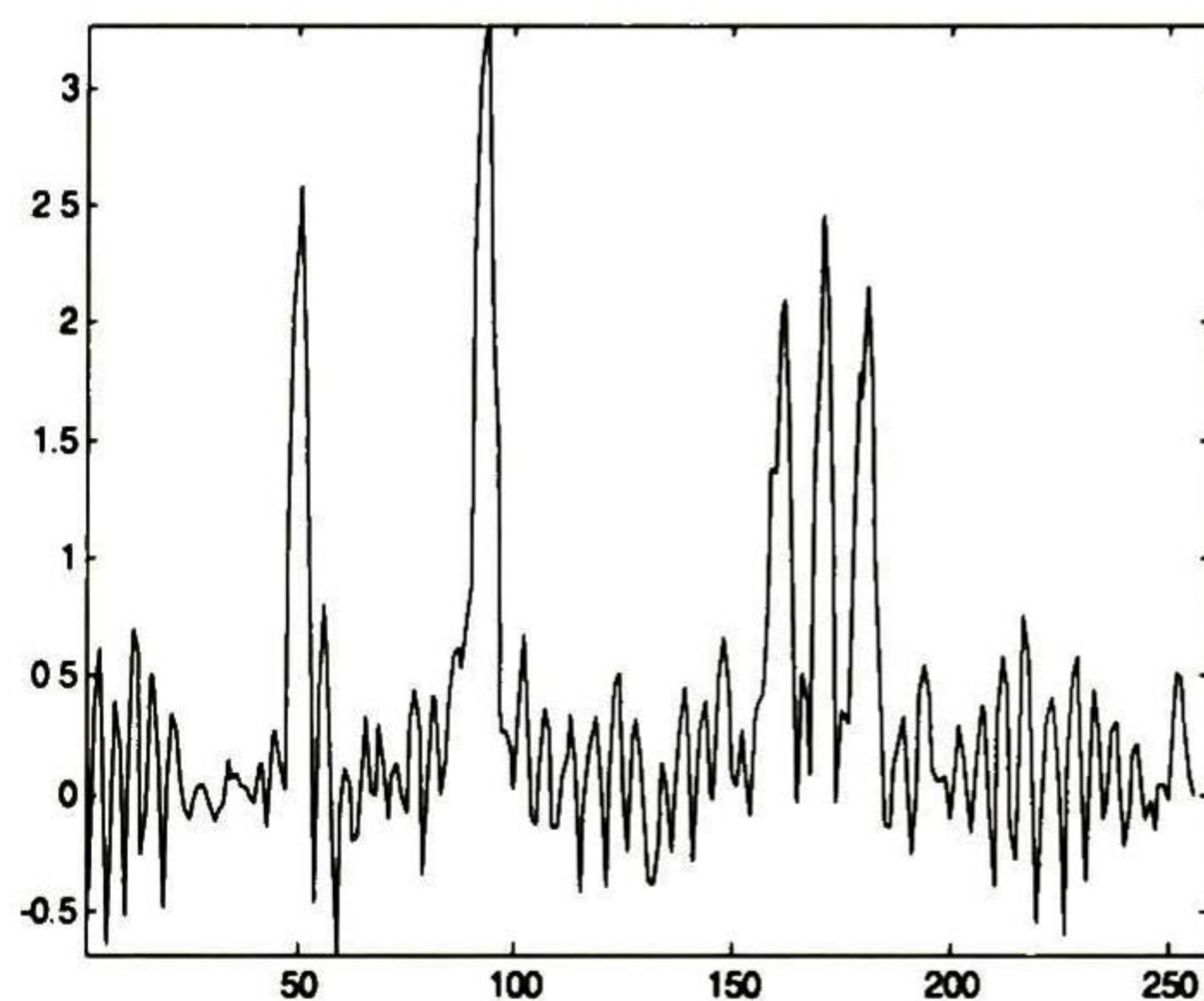
(a) Señal original v



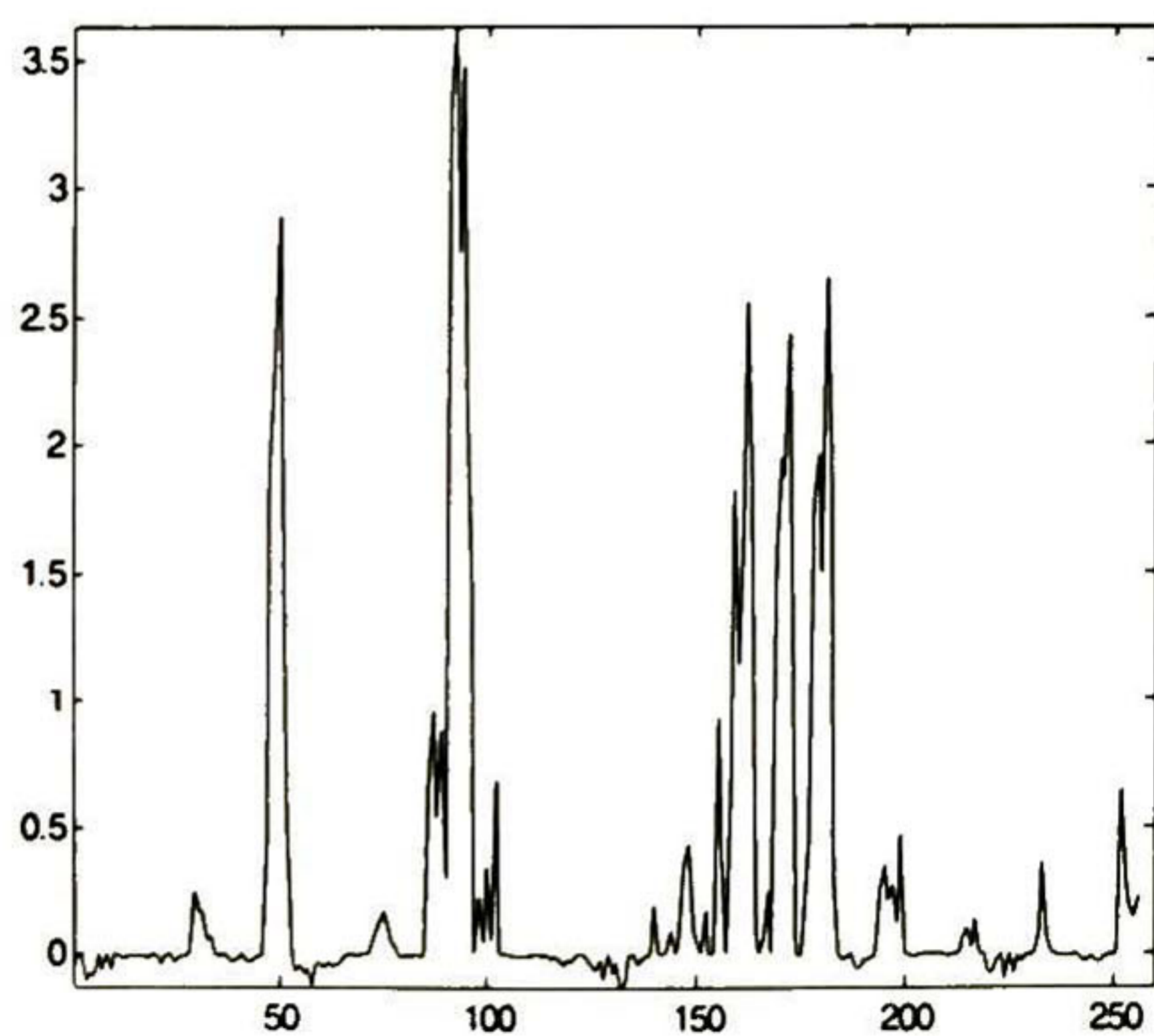
(b) Señal con ruido



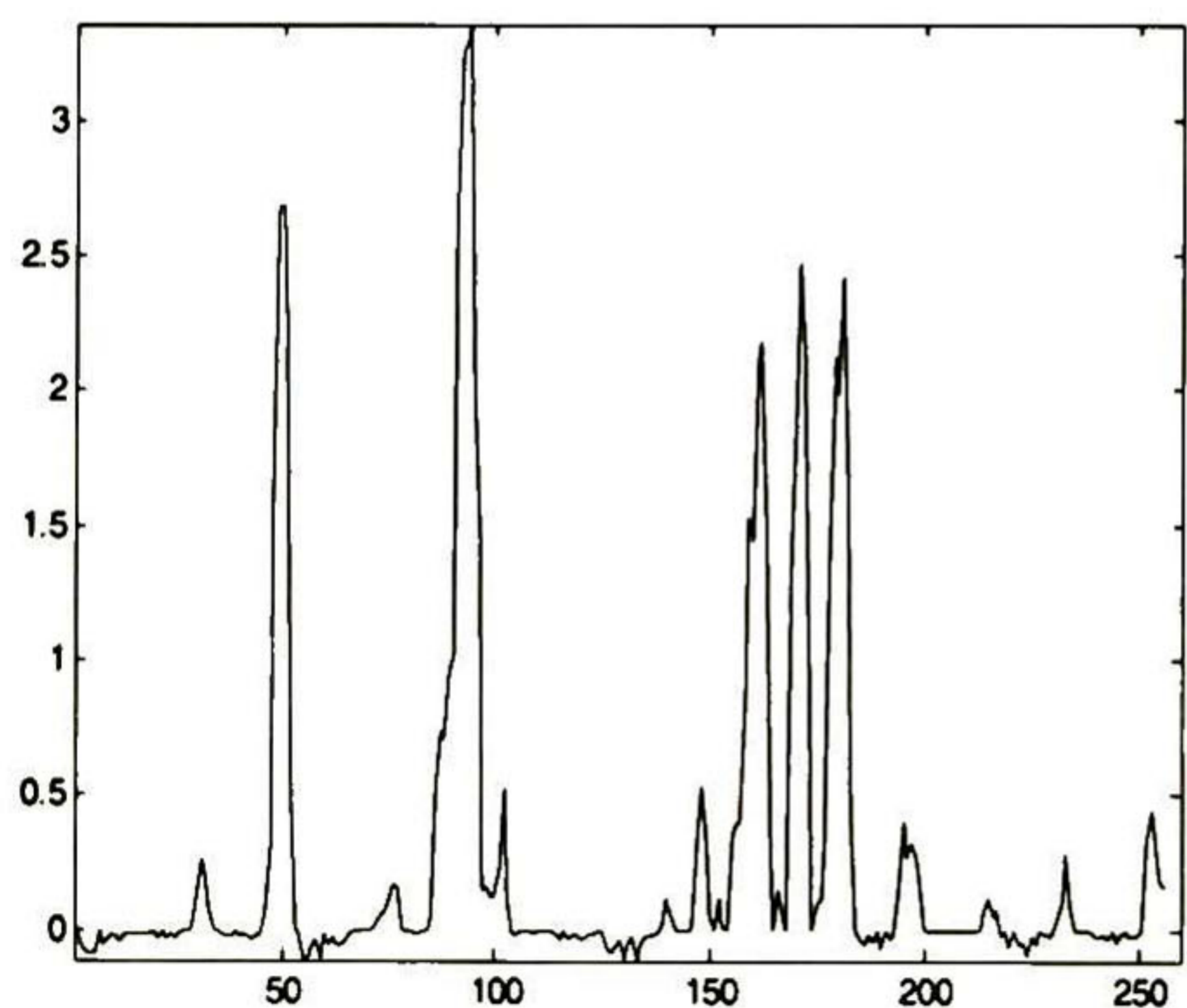
(c) Estimación de 9.9944 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 10.3266 dB a 2 iteraciones con el método WCLS

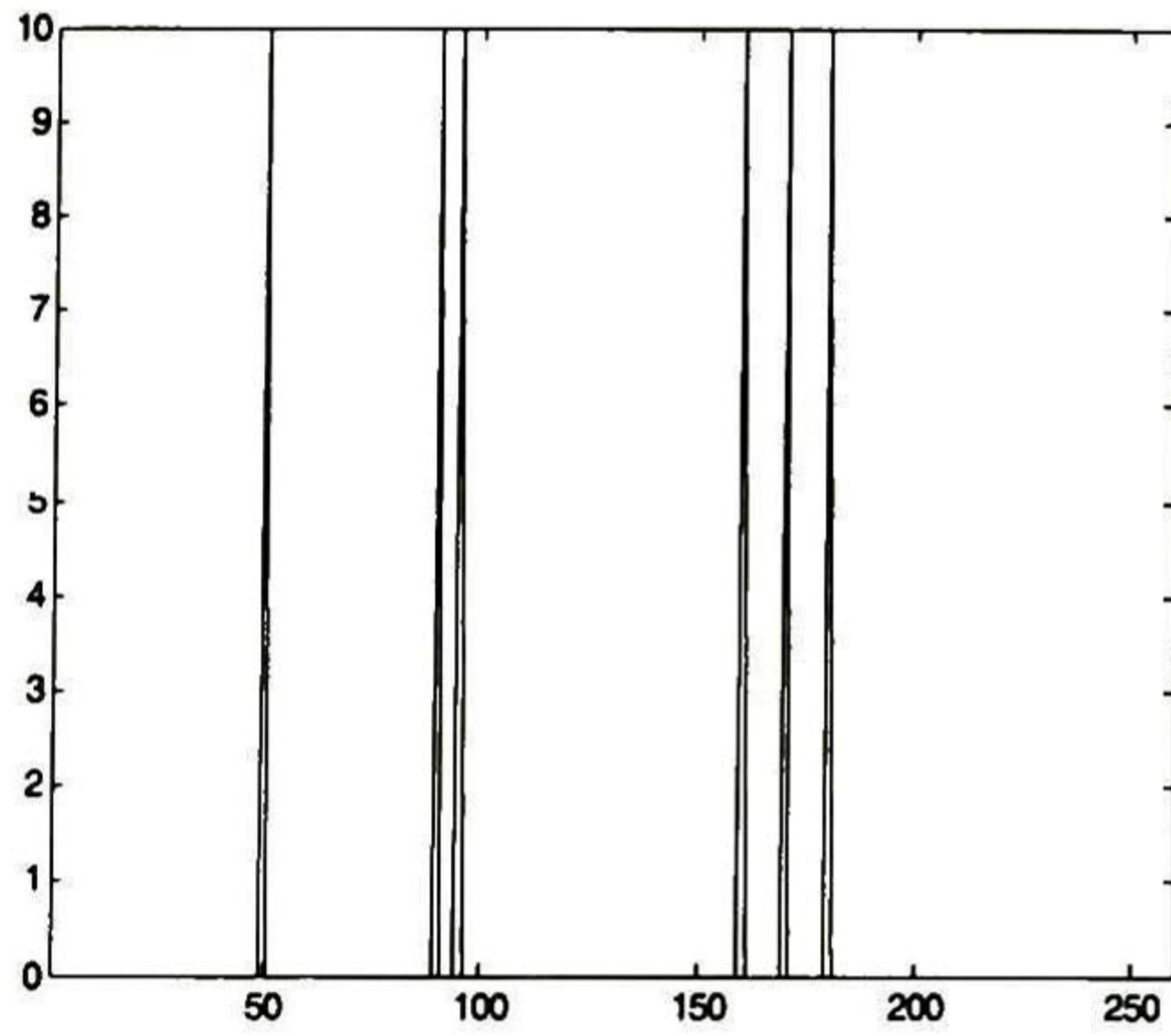


(e) Estimación de 10.2897 dB a 40 iteraciones con el método CLS

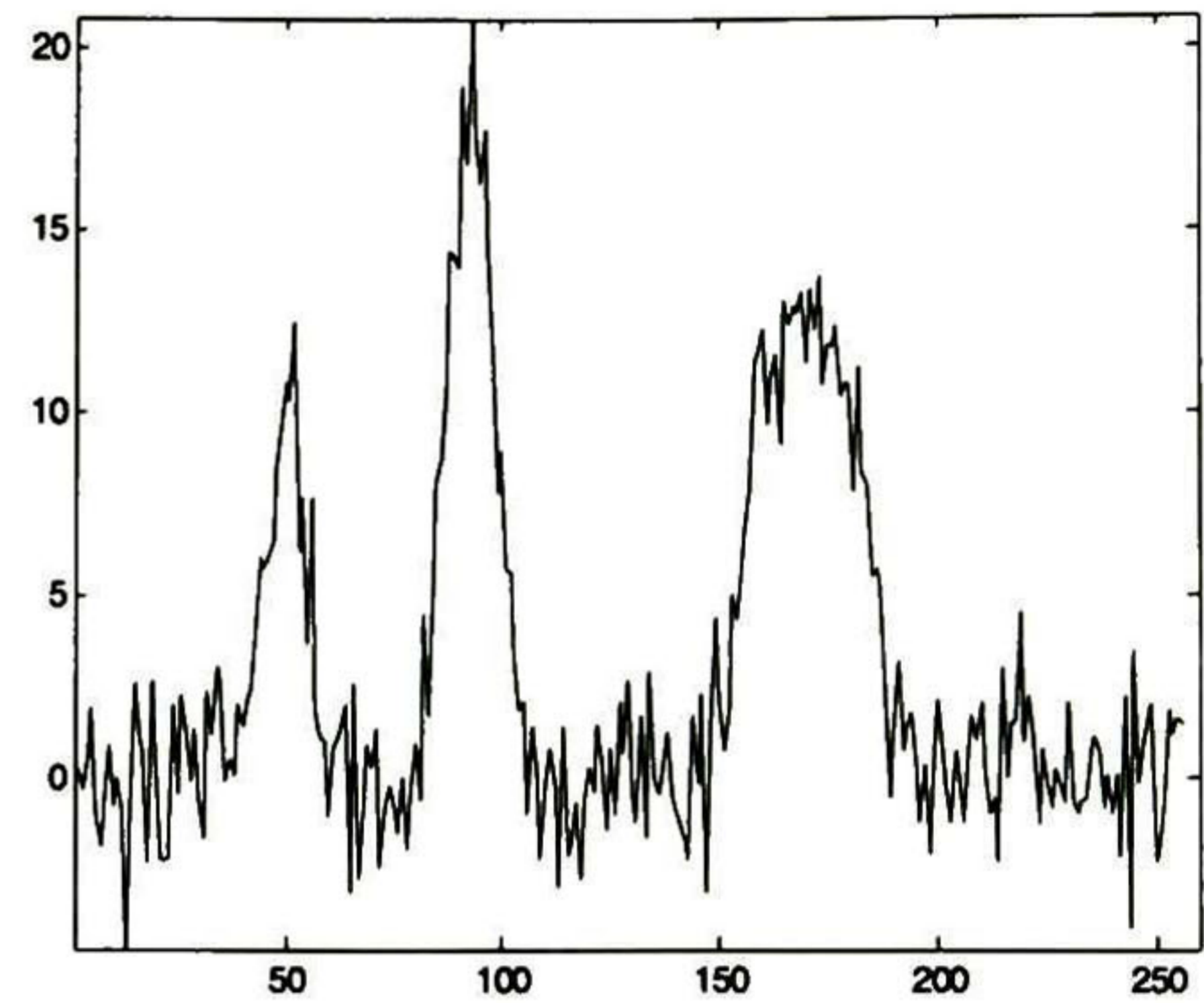


(f) Estimación de 10.5300 dB a 40 iteraciones con el método WCLS

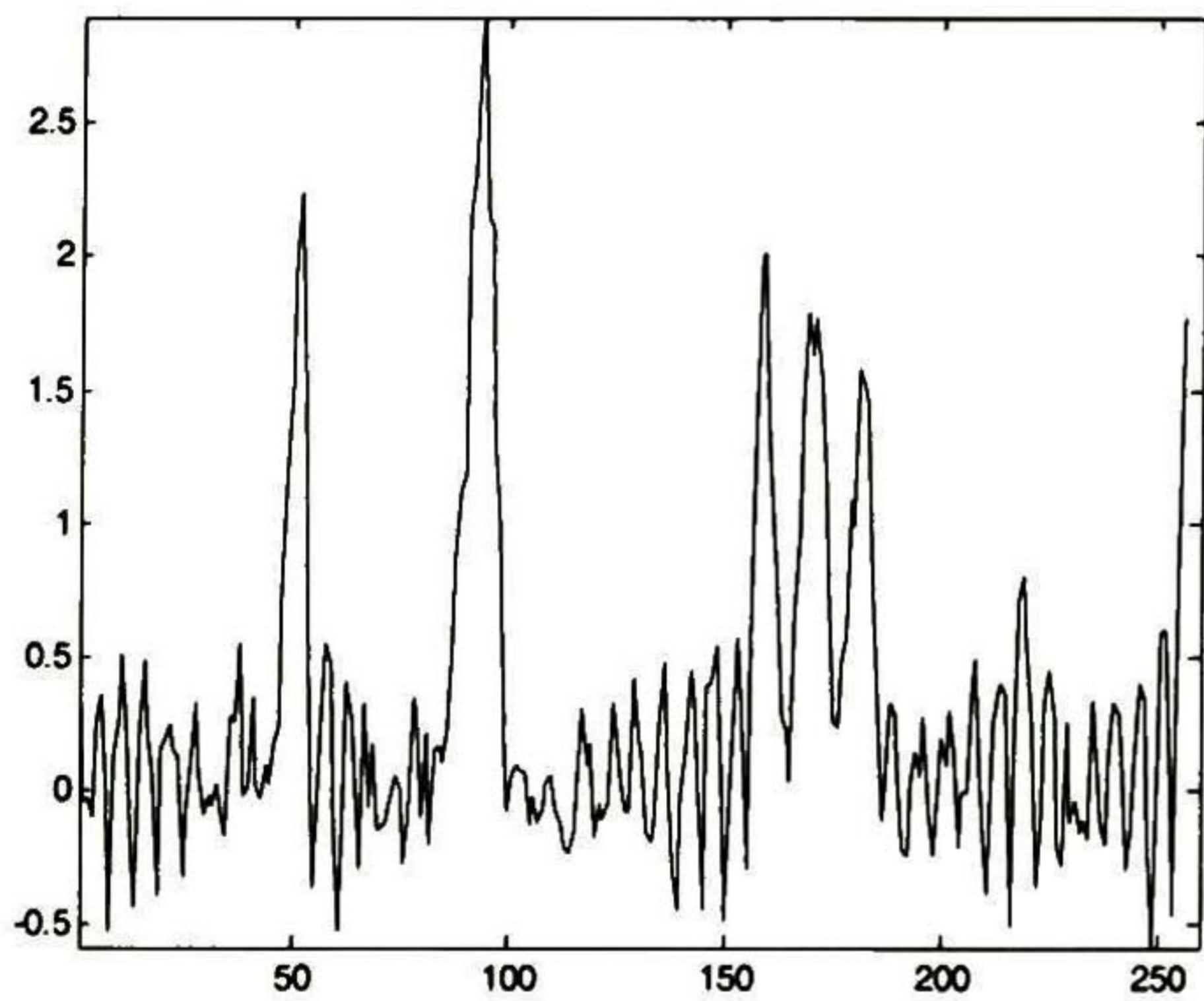
Tabla 4.5. Respuestas con SNR = 6 dB, K = 10 y SSF<sub>1</sub>.



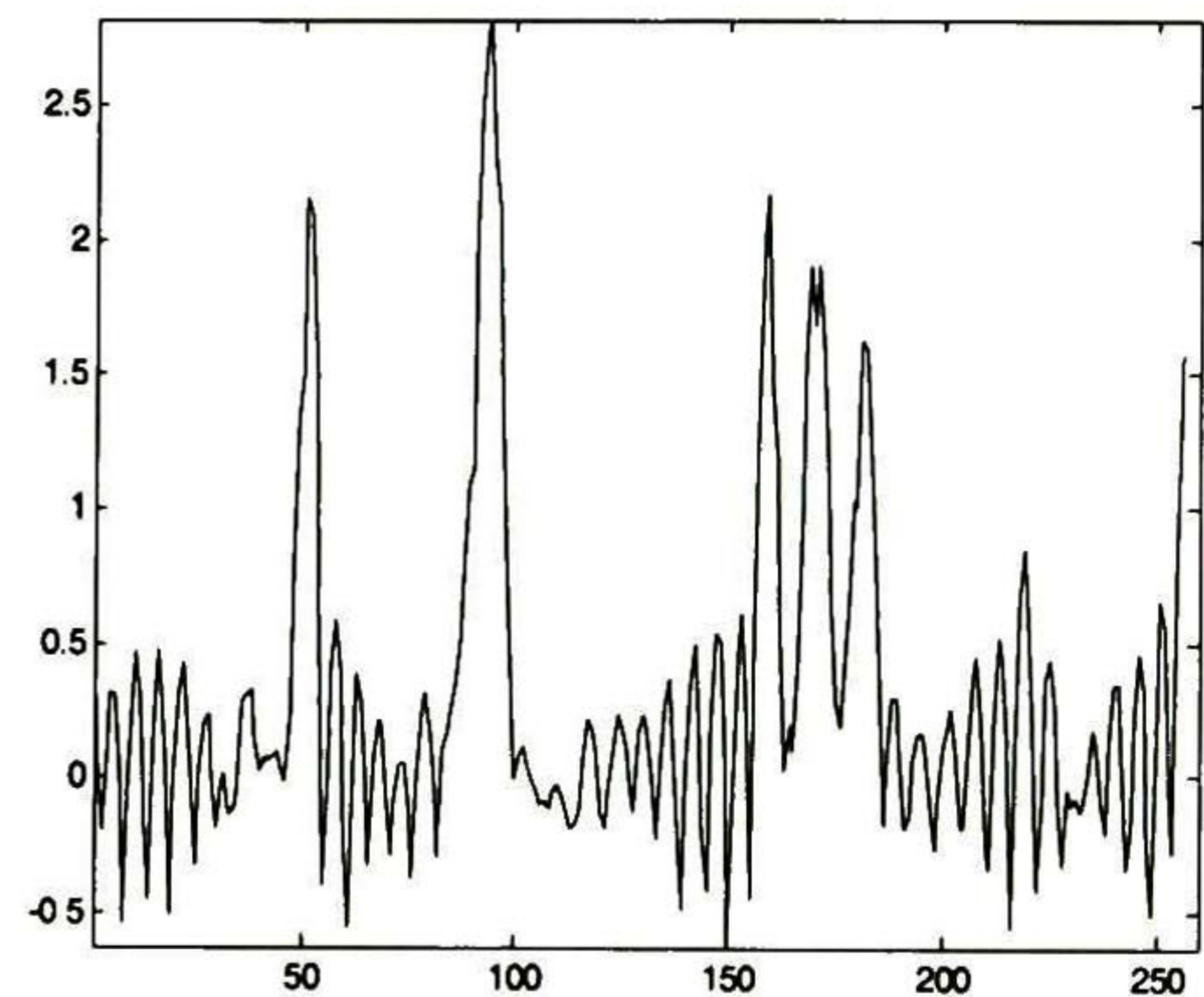
(a) Señal original  $v$



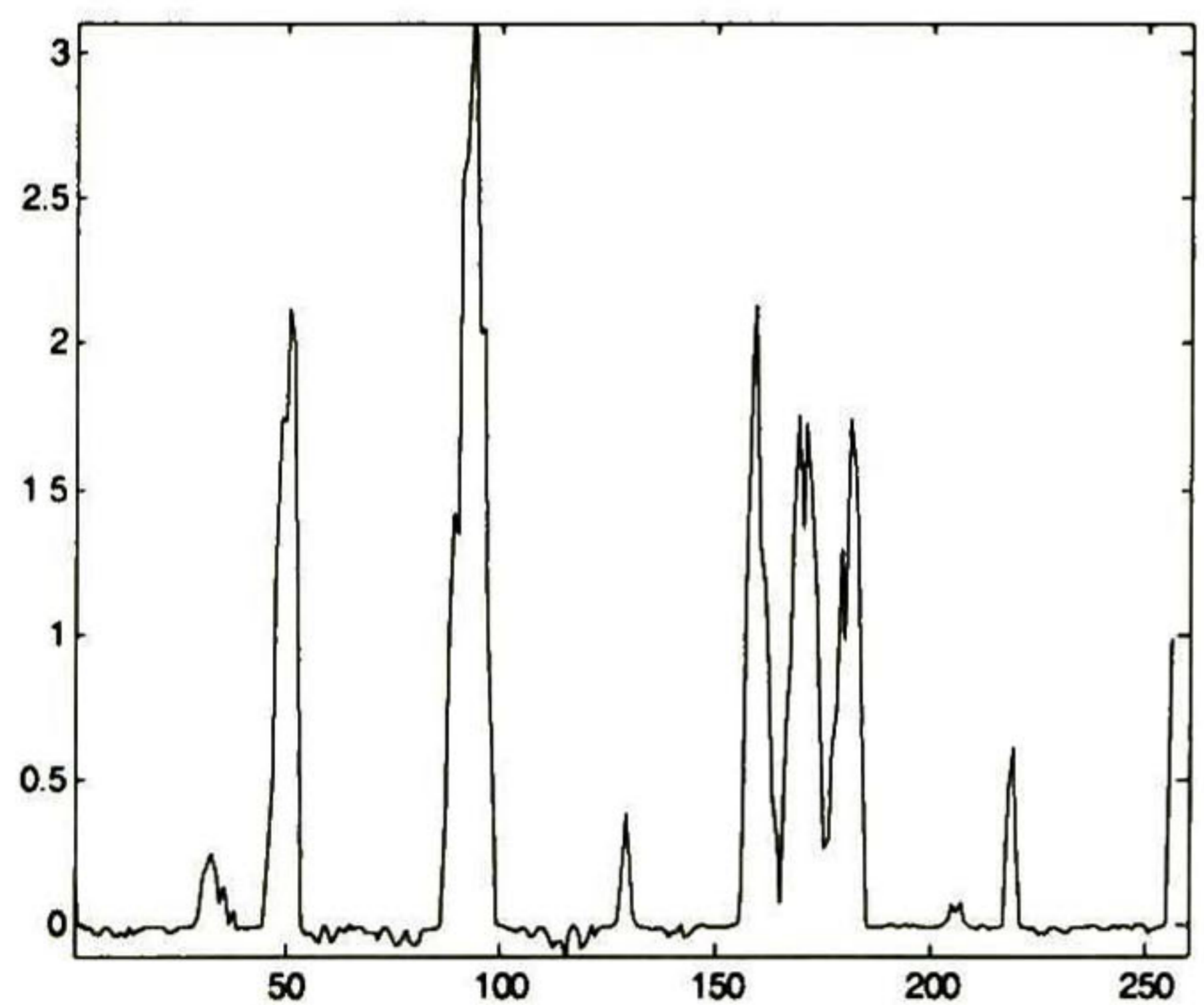
(b) Señal con ruido



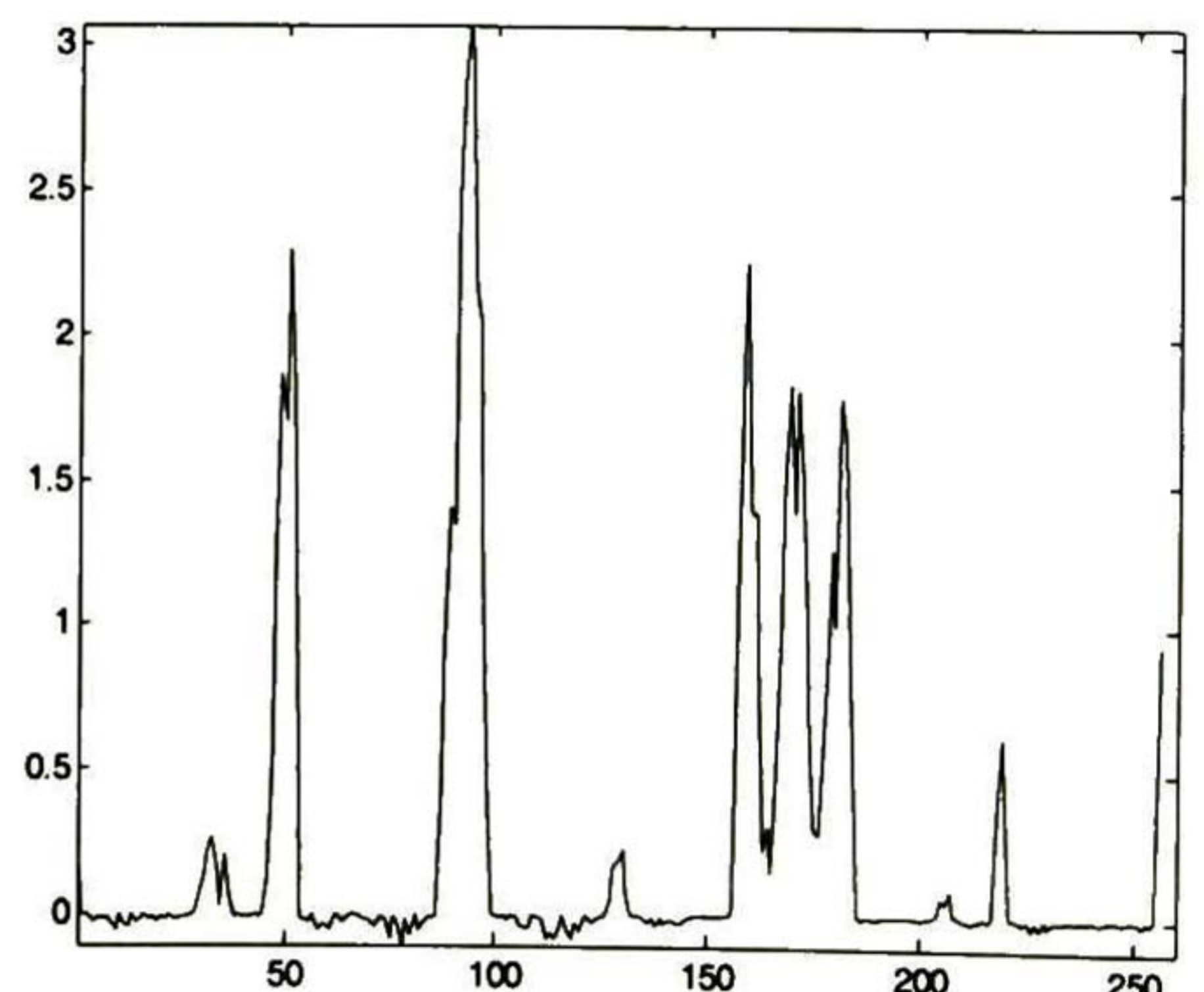
(c) Estimación de 11.5197 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 11.5517 dB a 2 iteraciones con el método WCLS

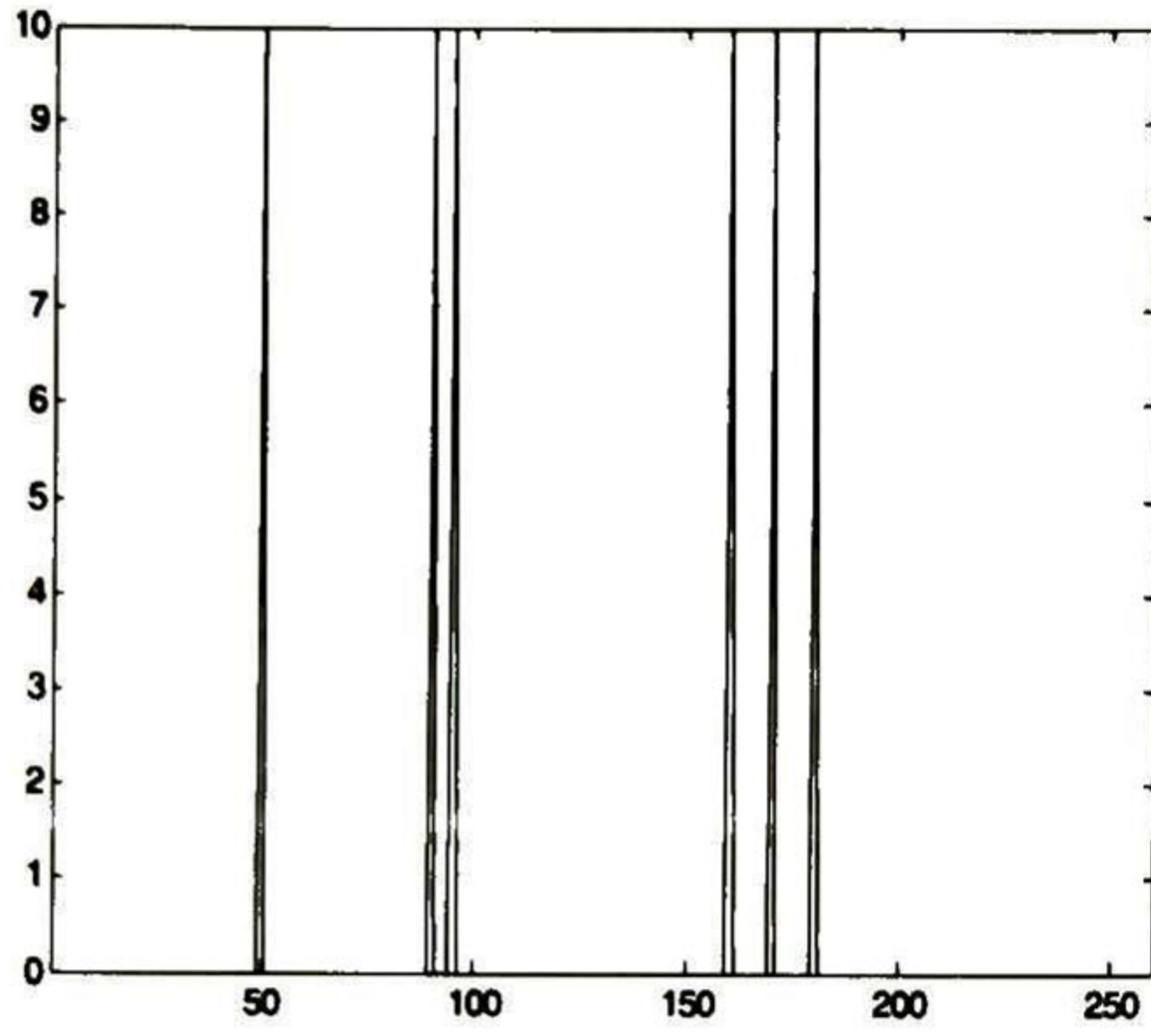


(e) Estimación de 11.5901 dB a 40 iteraciones con el método CLS

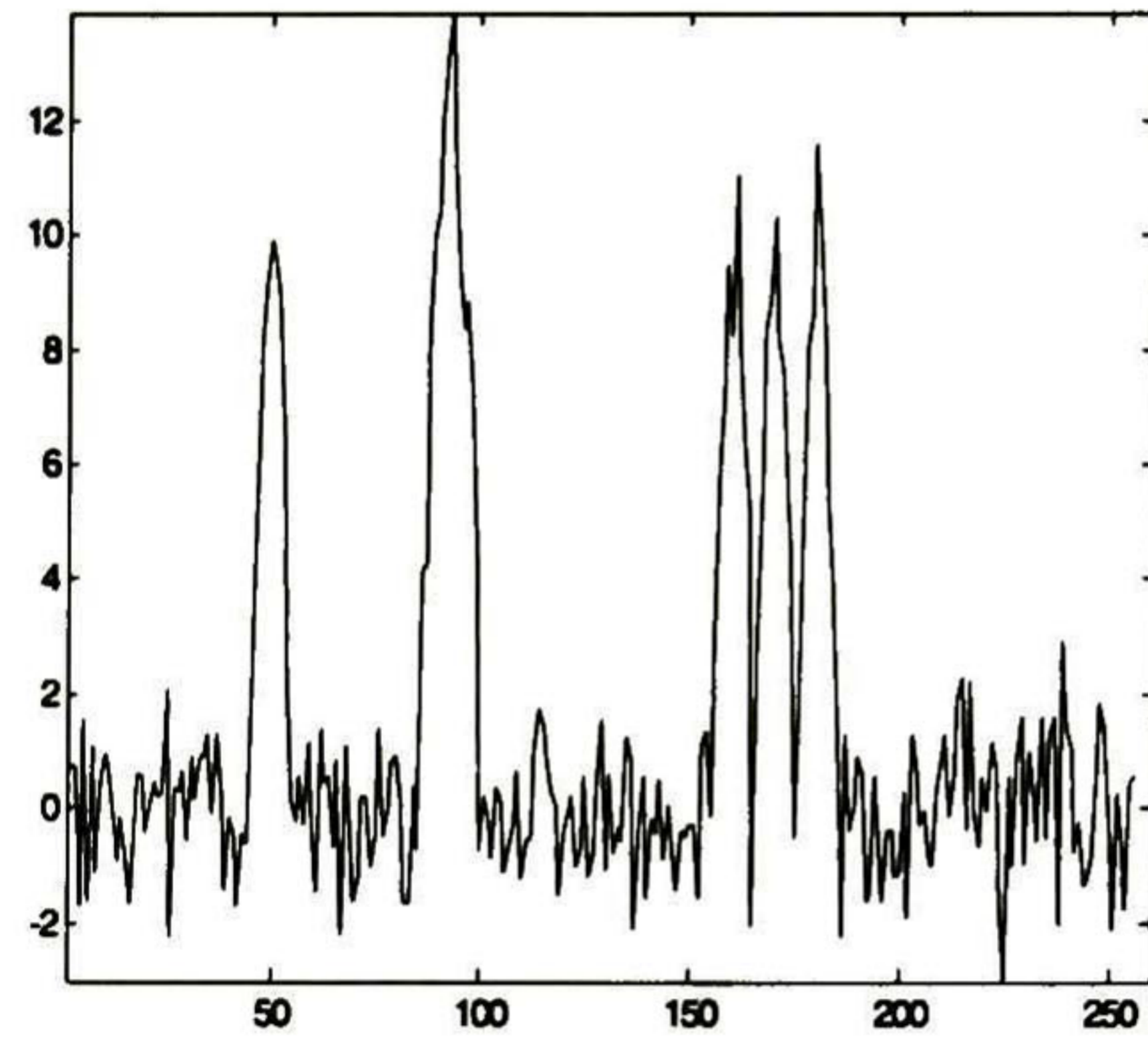


(f) Estimación de 11.6251 dB a 40 iteraciones con el método WCLS

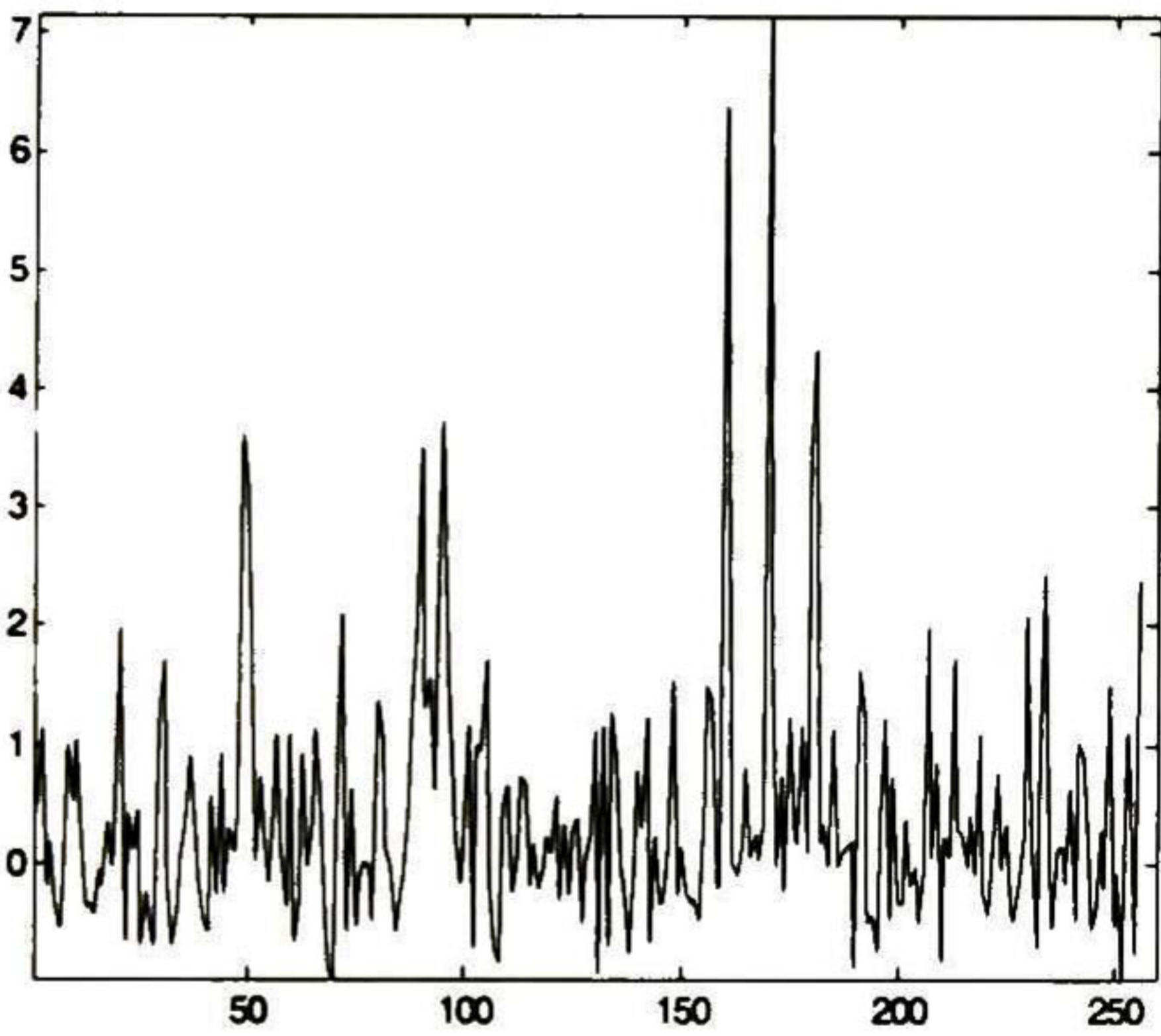
Tabla 4.6. Respuestas con SNR = 6 dB, K = 15 y  $SSF_1$ .



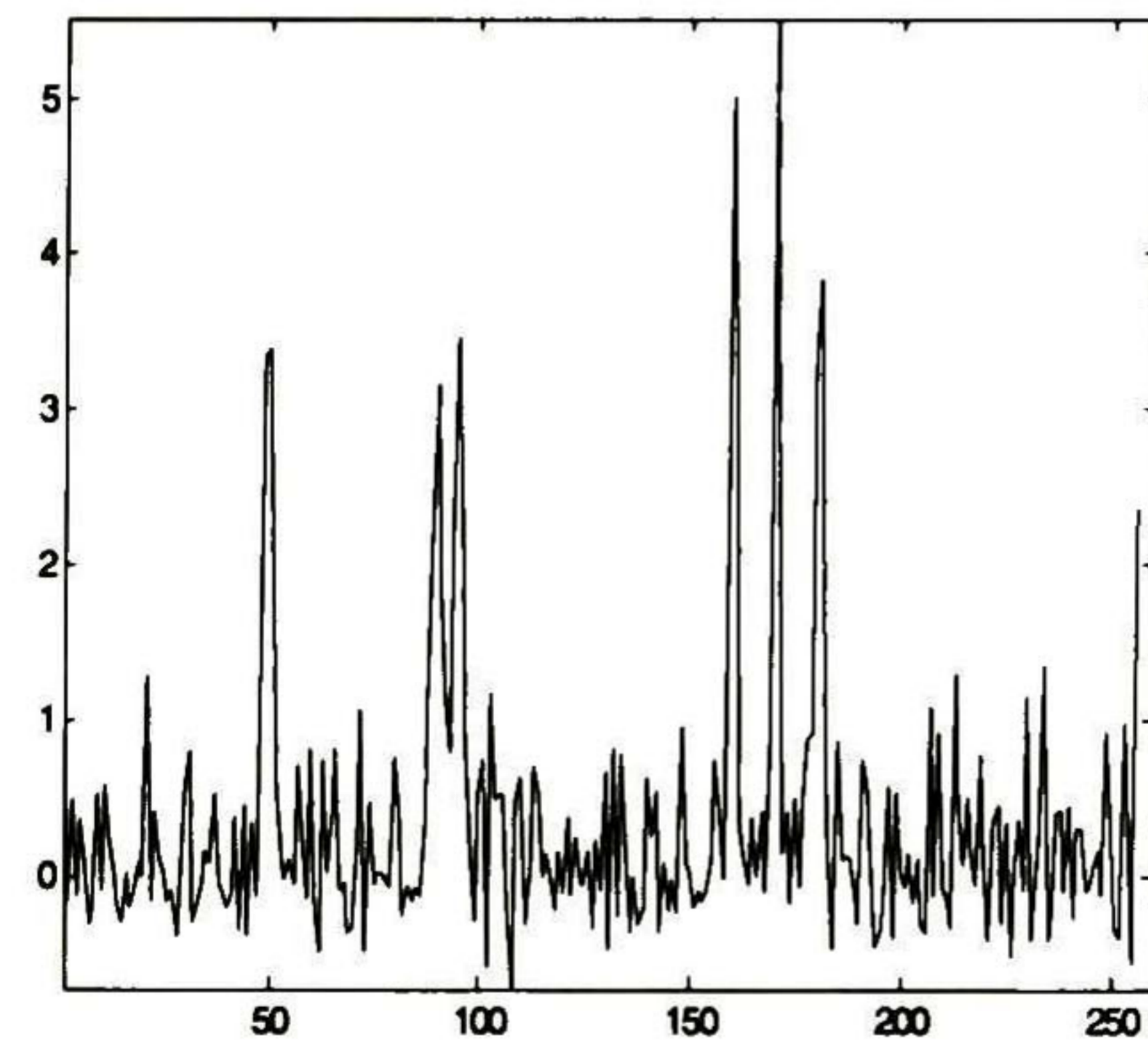
(a) Señal original v



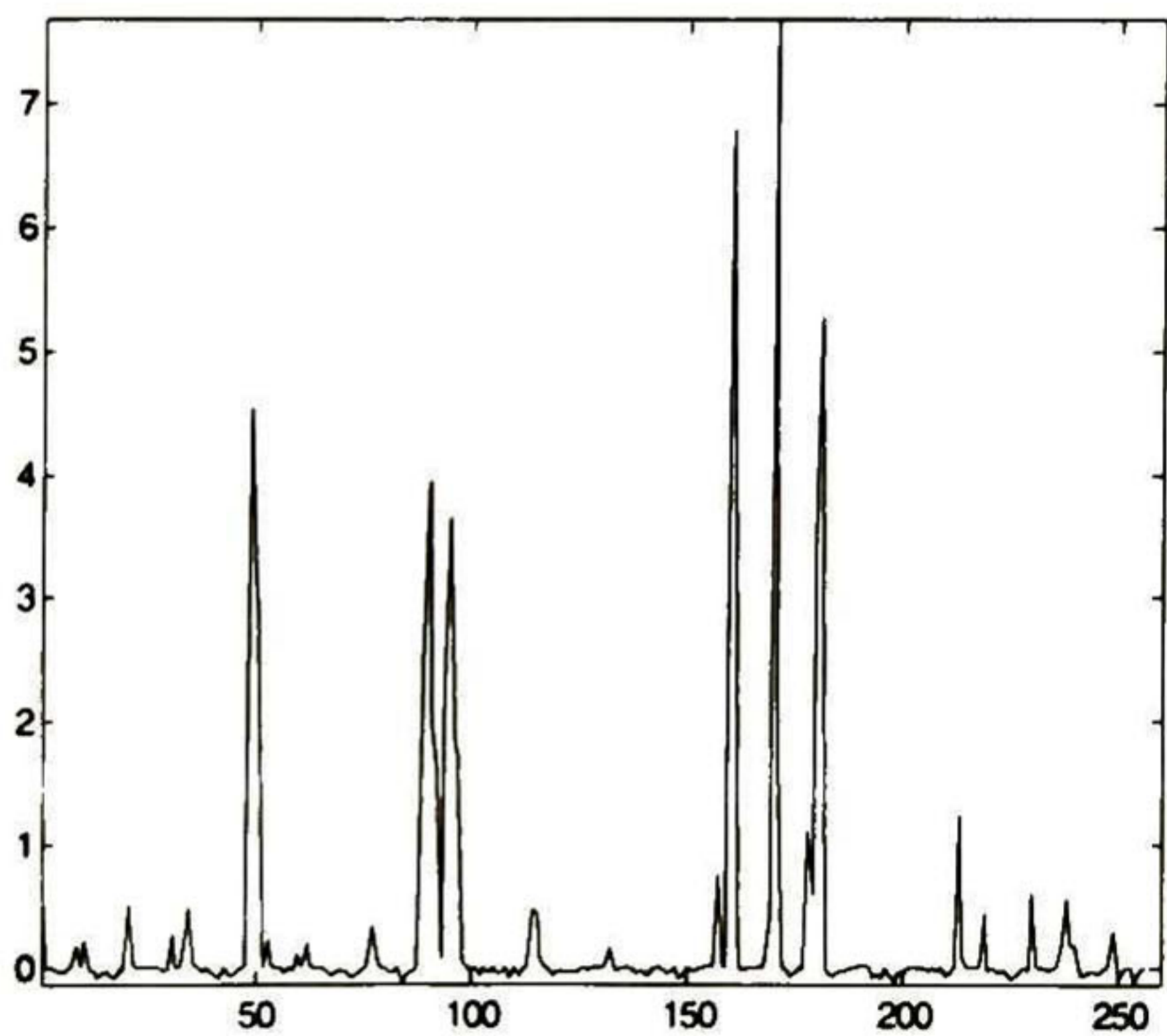
(b) Señal con ruido



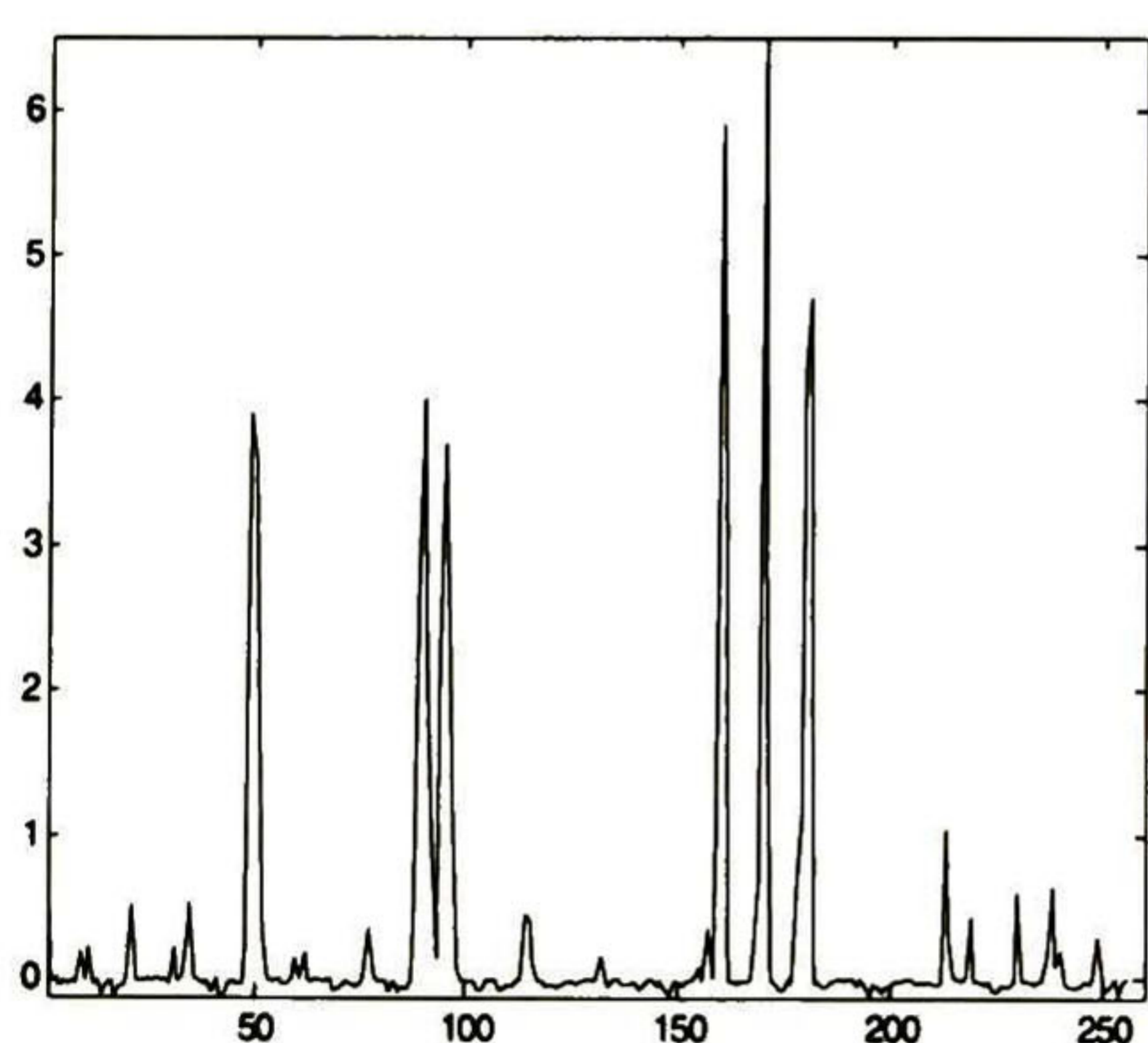
(c) Estimación de 8.8924 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 9.2207 dB a 2 iteraciones con el método WCLS

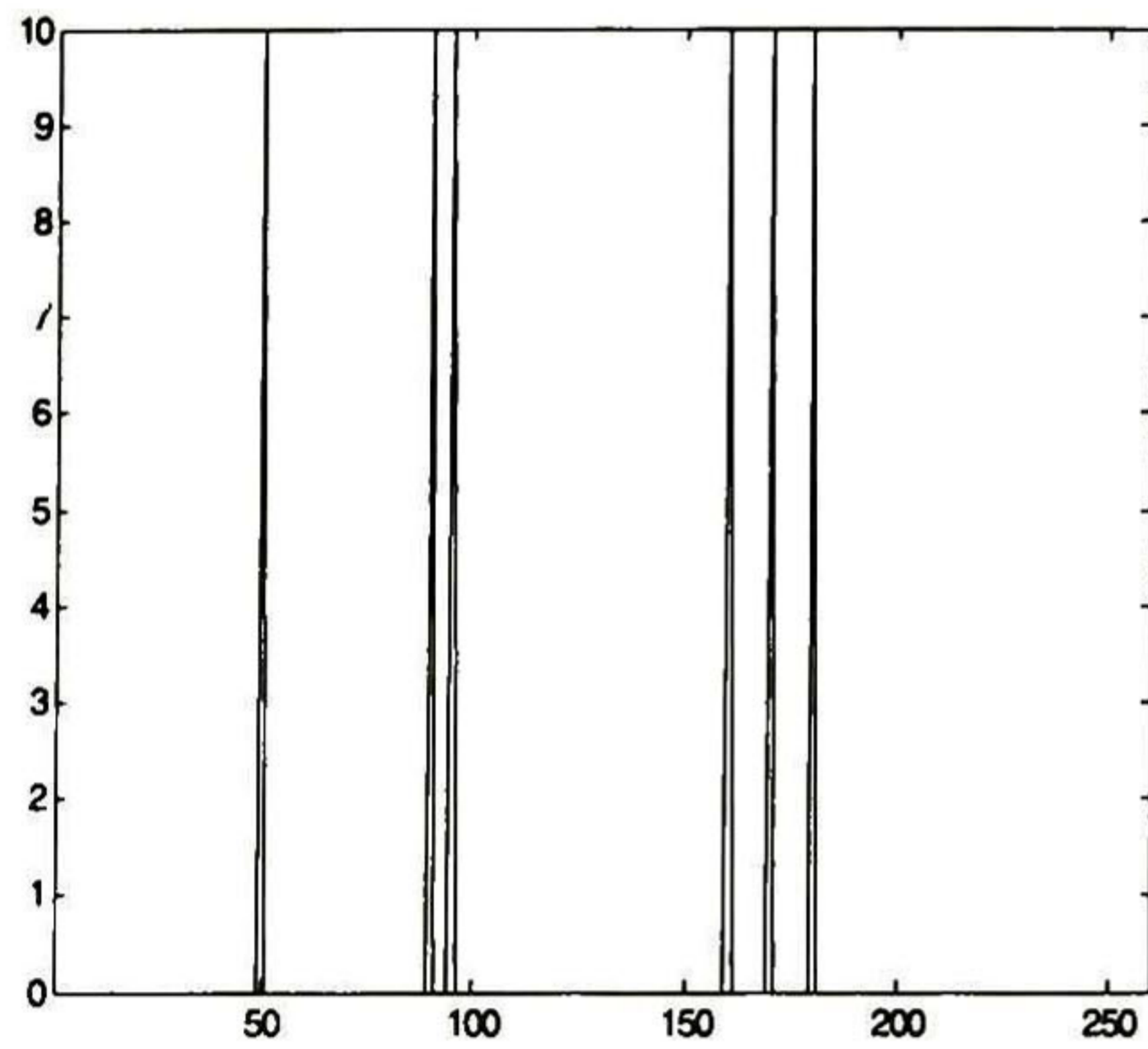


(e) Estimación de 10.1998 dB a 40 iteraciones con el método CLS

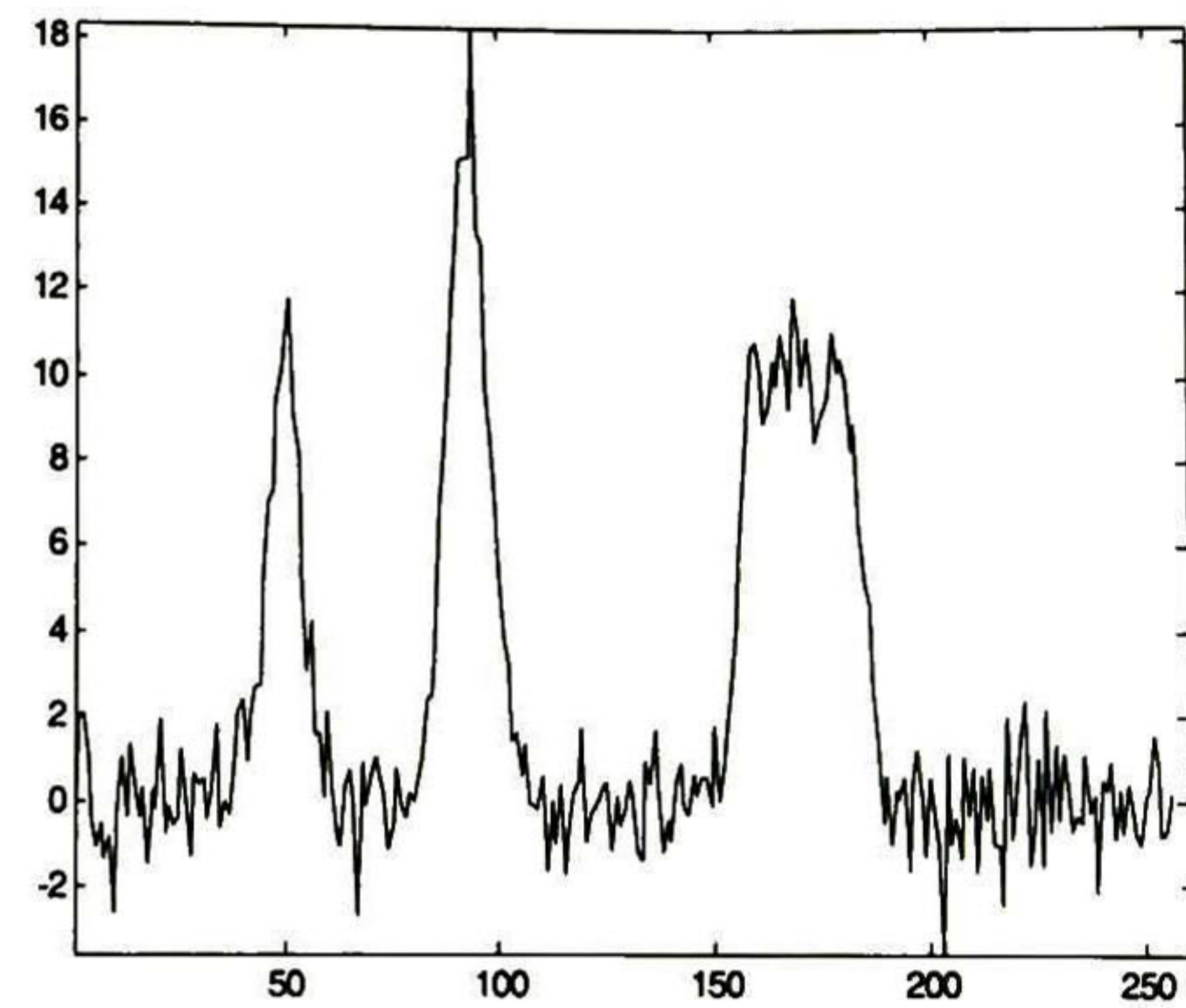


(f) Estimación de 10.2611 dB a 40 iteraciones con el método WCLS

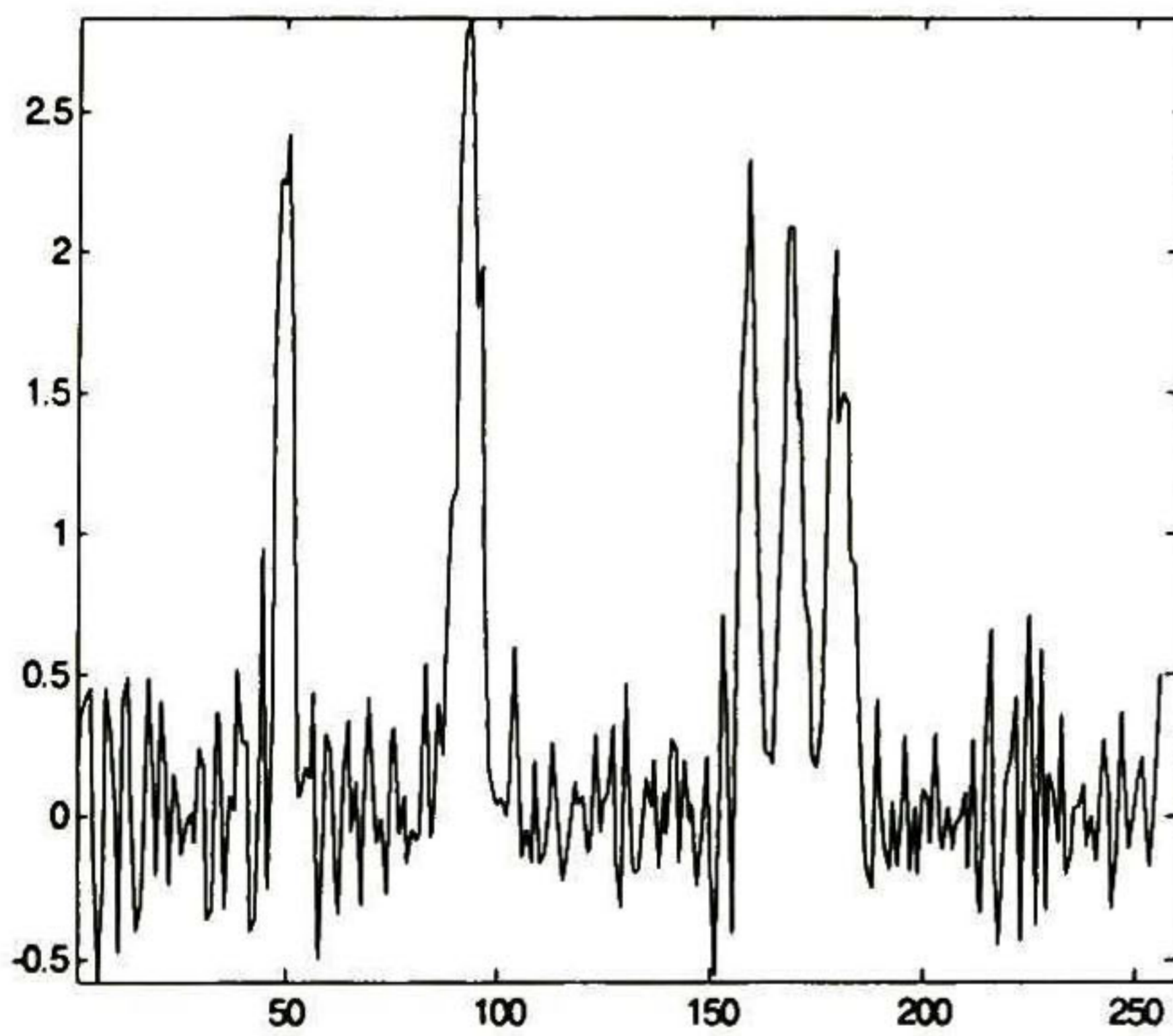
Tabla 4.7. Respuestas con SNR = 10 dB, K = 5 y SSF<sub>1</sub>.



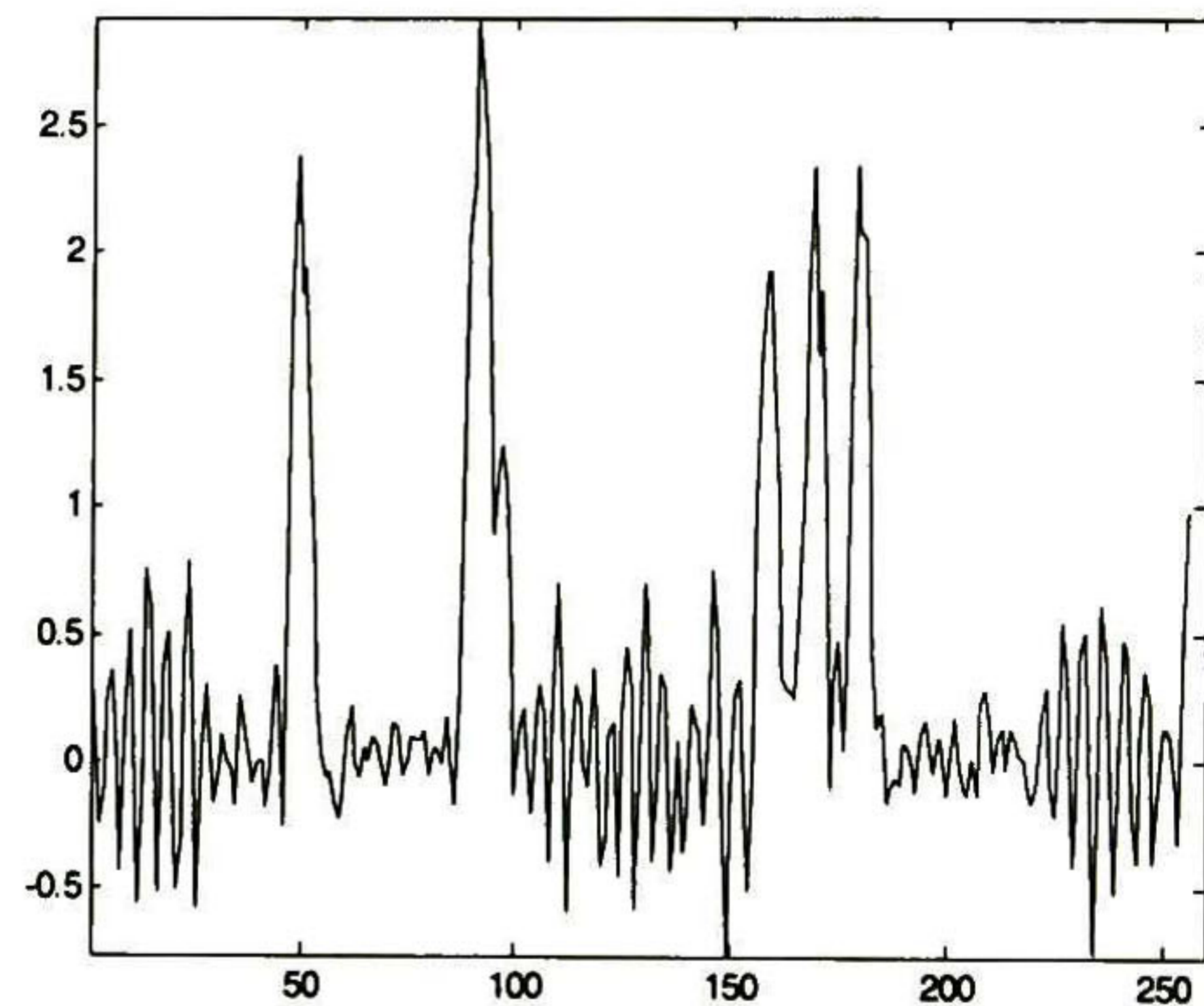
(a) Señal original v



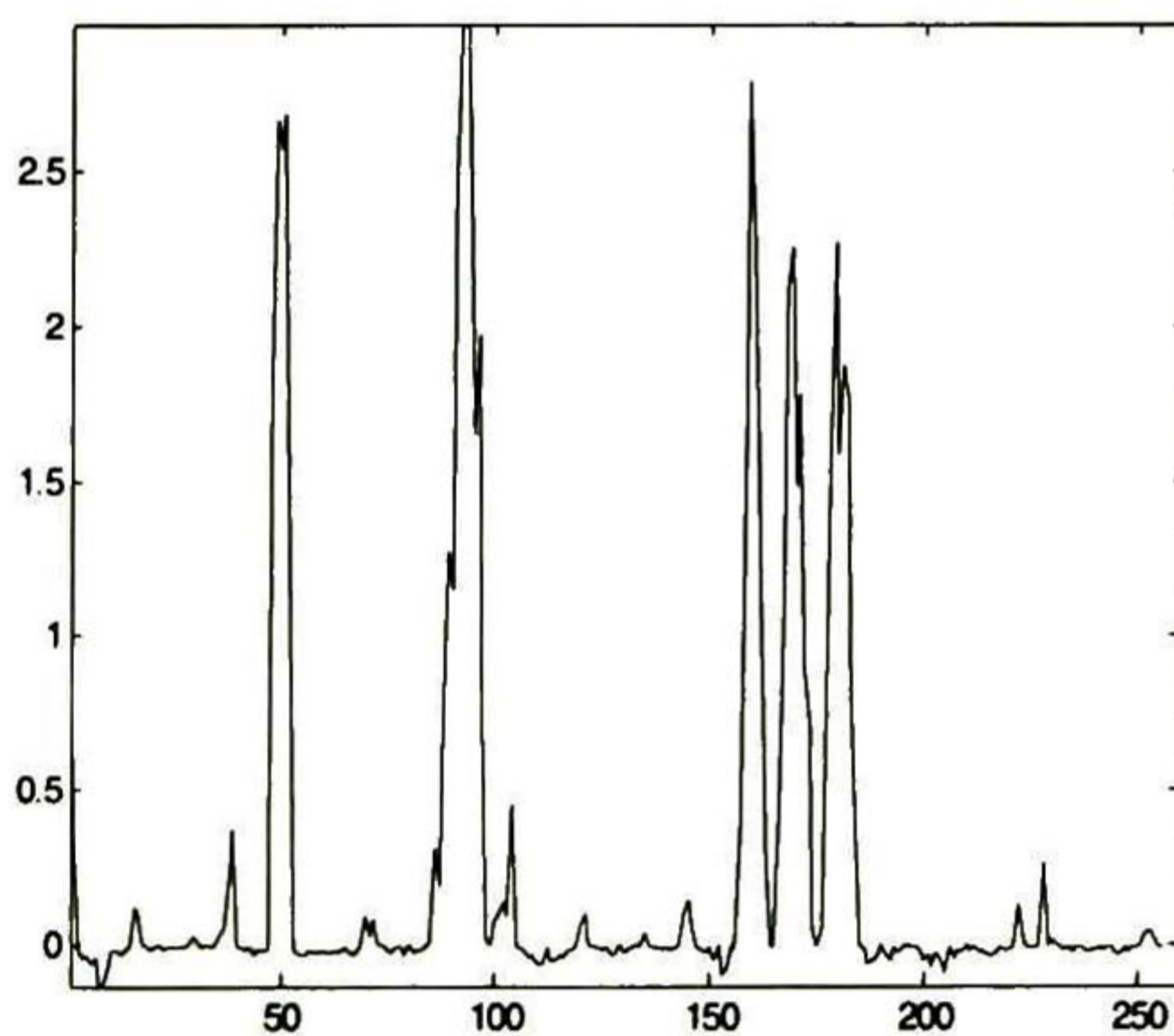
(b) Señal con ruido



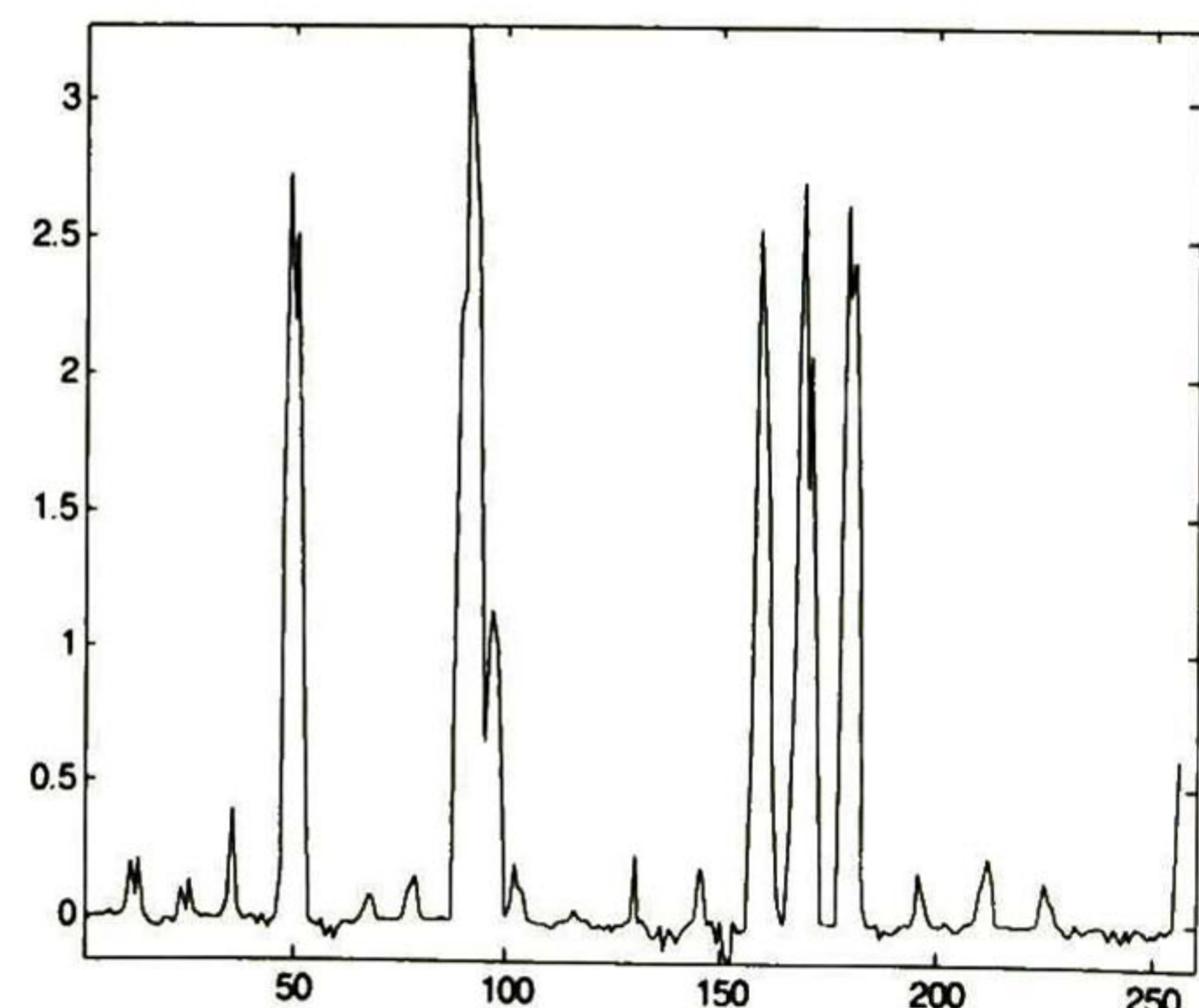
(c) Estimación de 9.8821 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 9.7324 dB a 2 iteraciones con el método WCLS



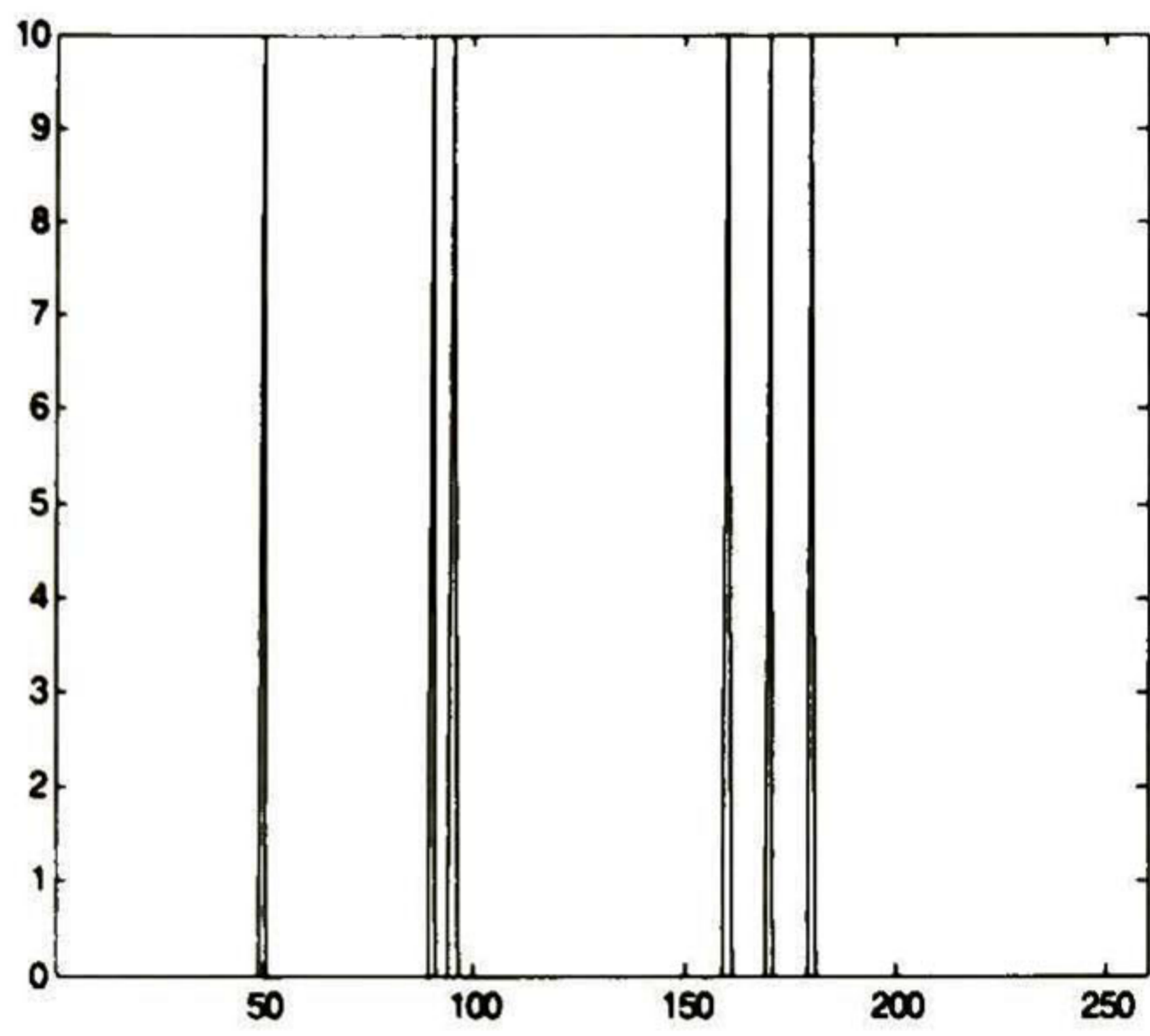
(e) Estimación de 10.0998 dB a 40 iteraciones con el método CLS



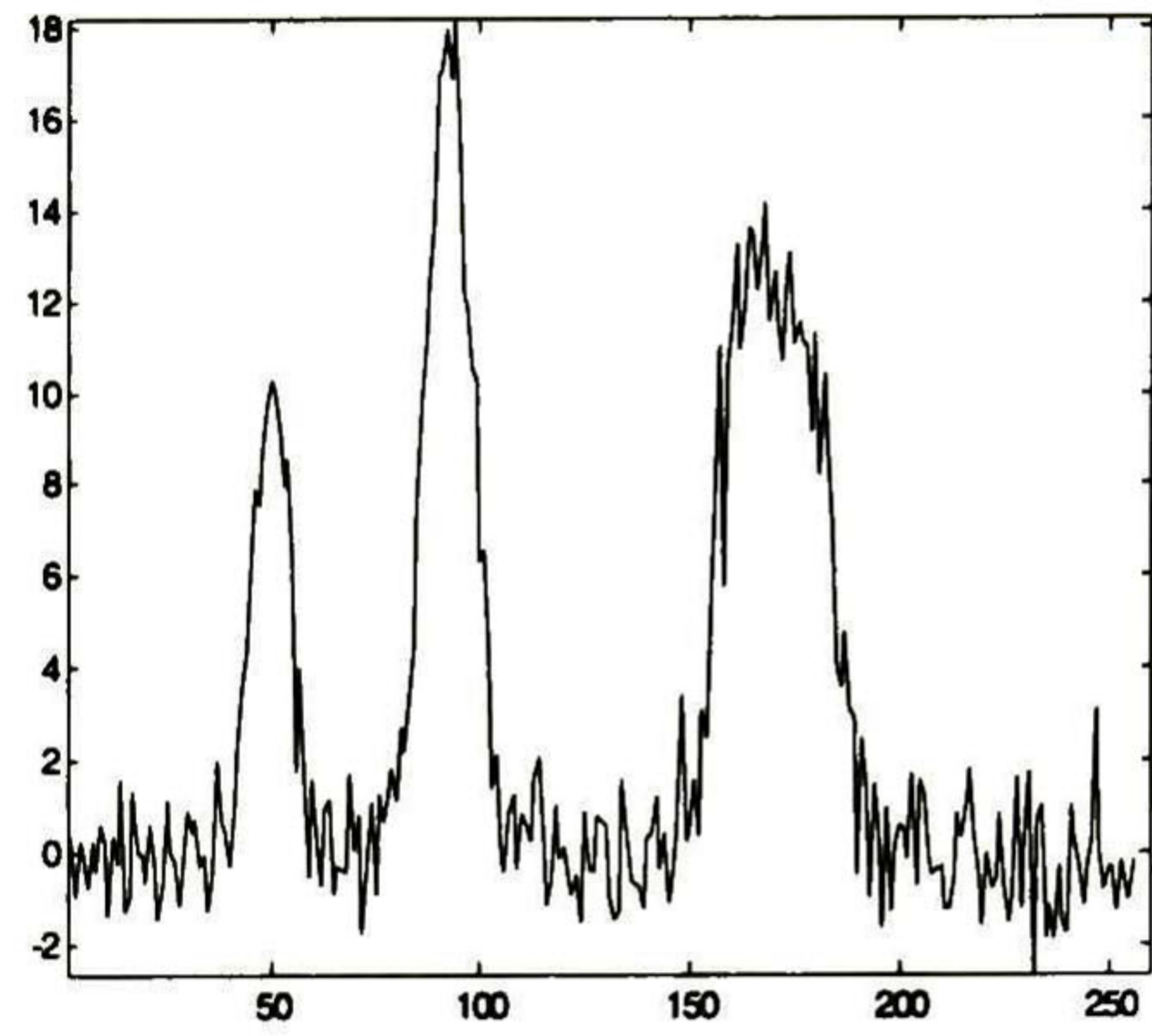
(f) Estimación de 9.9821 dB a 40 iteraciones con el método WCLS



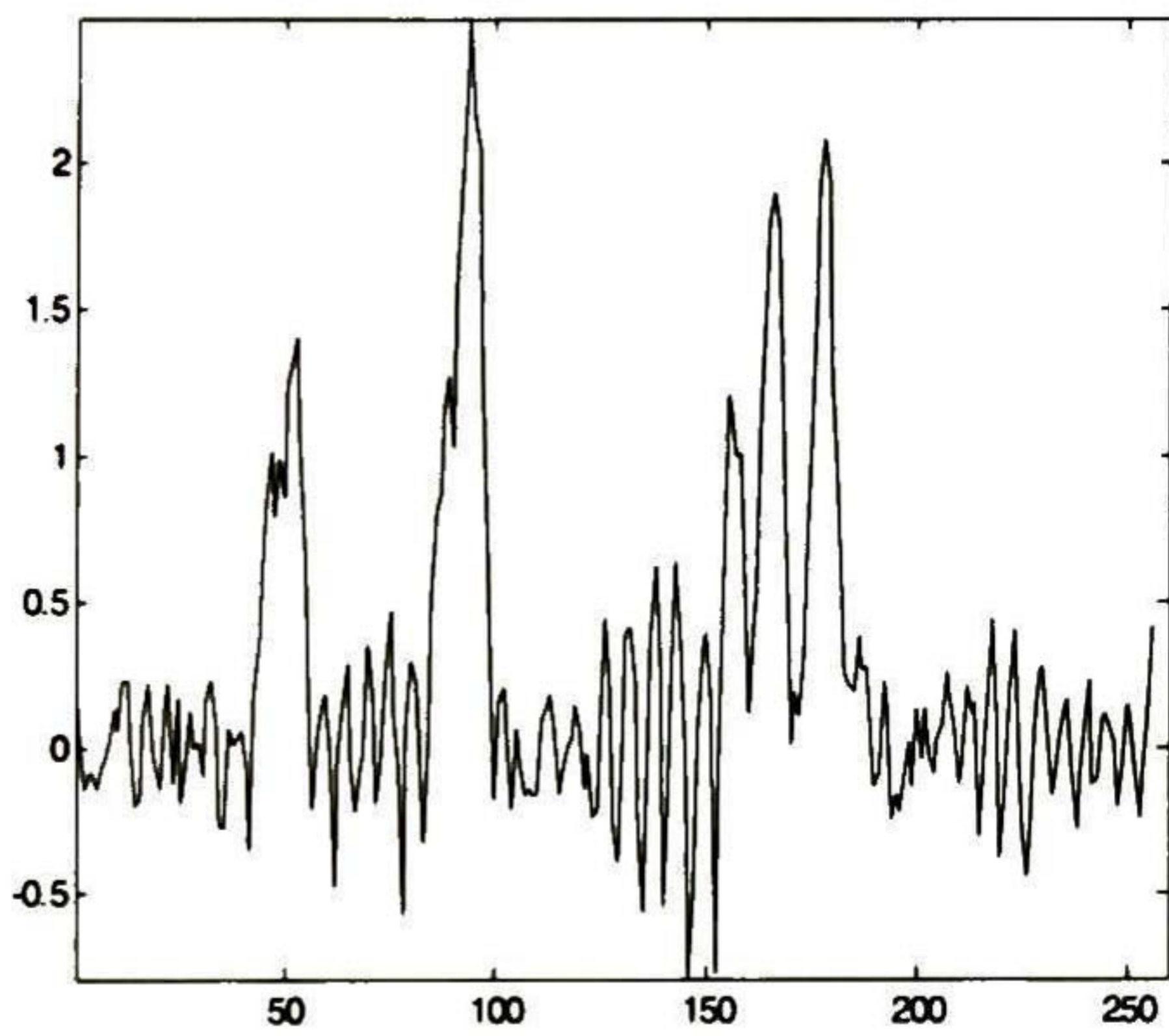
Tabla 4.8. Respuestas con SNR = 10 dB, K = 10 y SSF<sub>1</sub>.



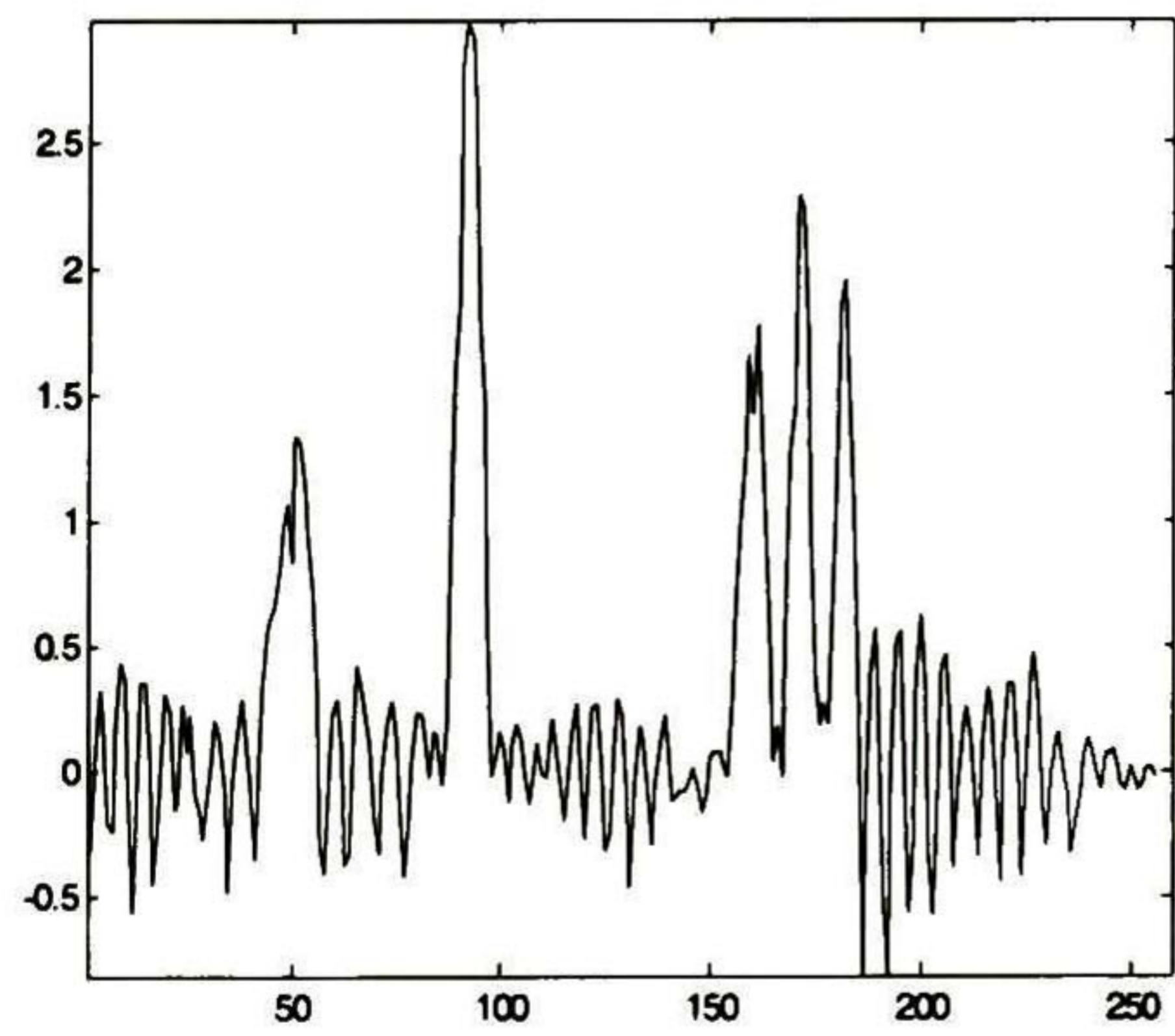
(a) Señal original v



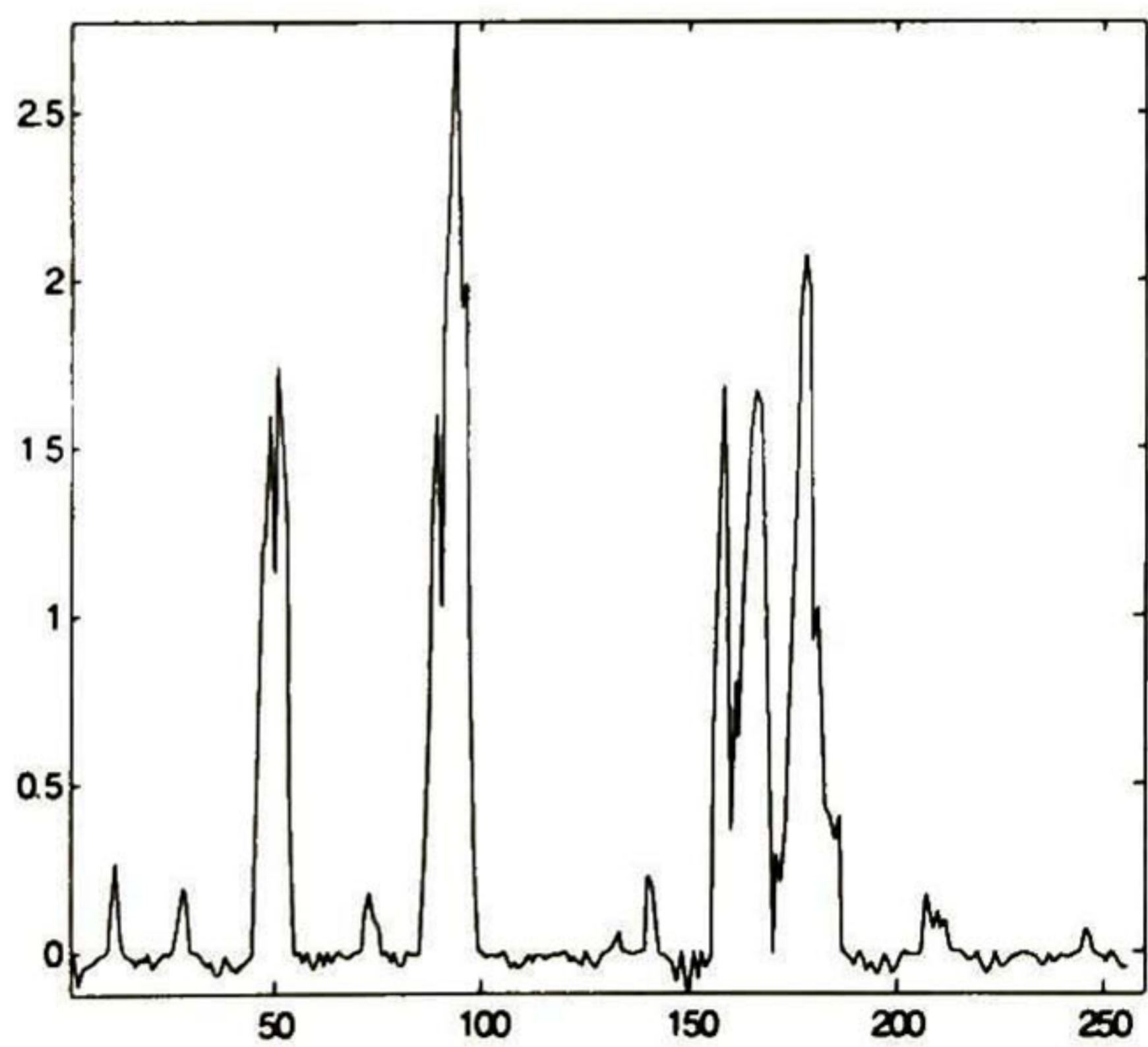
(b) Señal con ruido



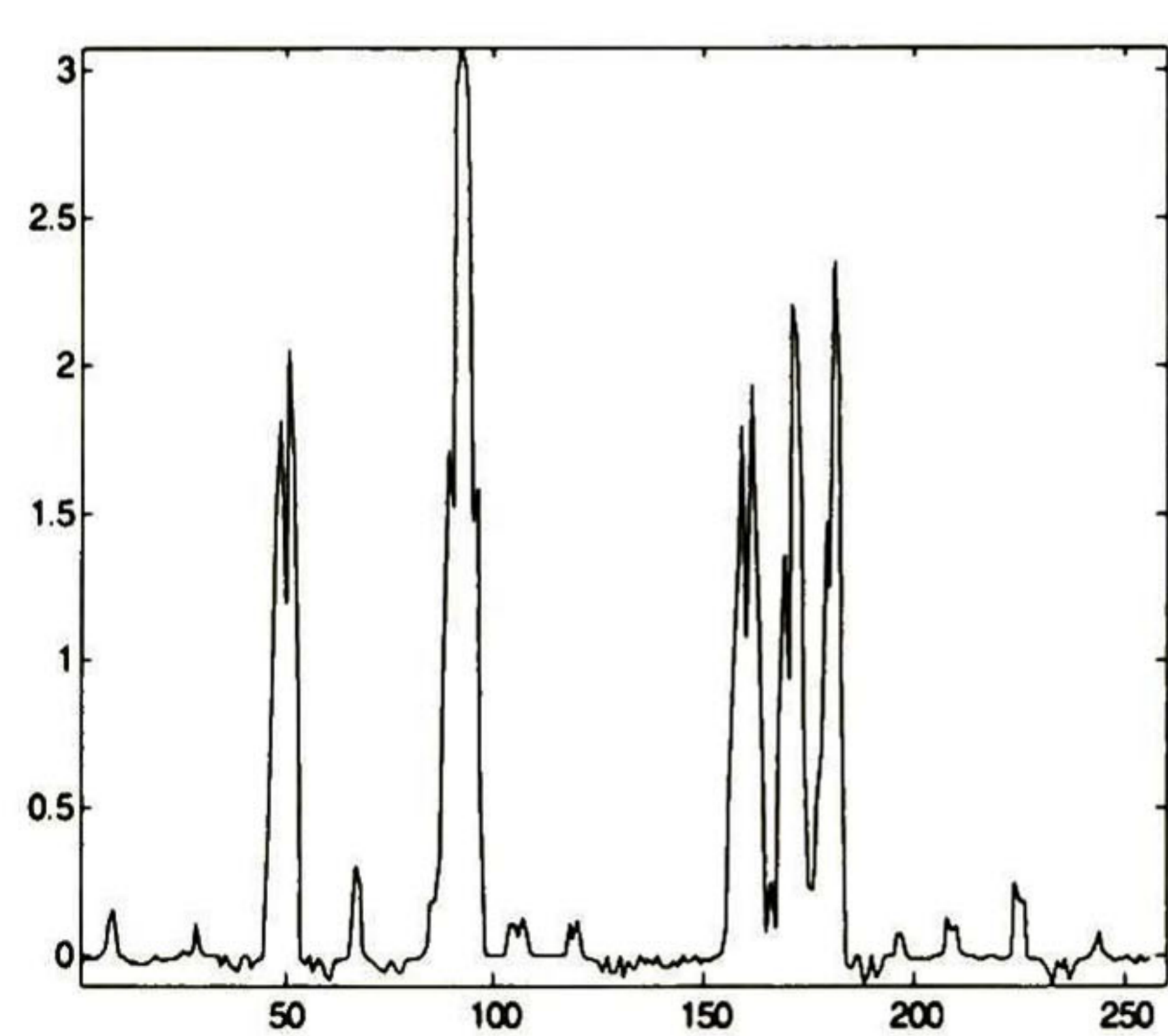
(c) Estimación de 10.6719 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 11.1609 dB a 2 iteraciones con el método WCLS

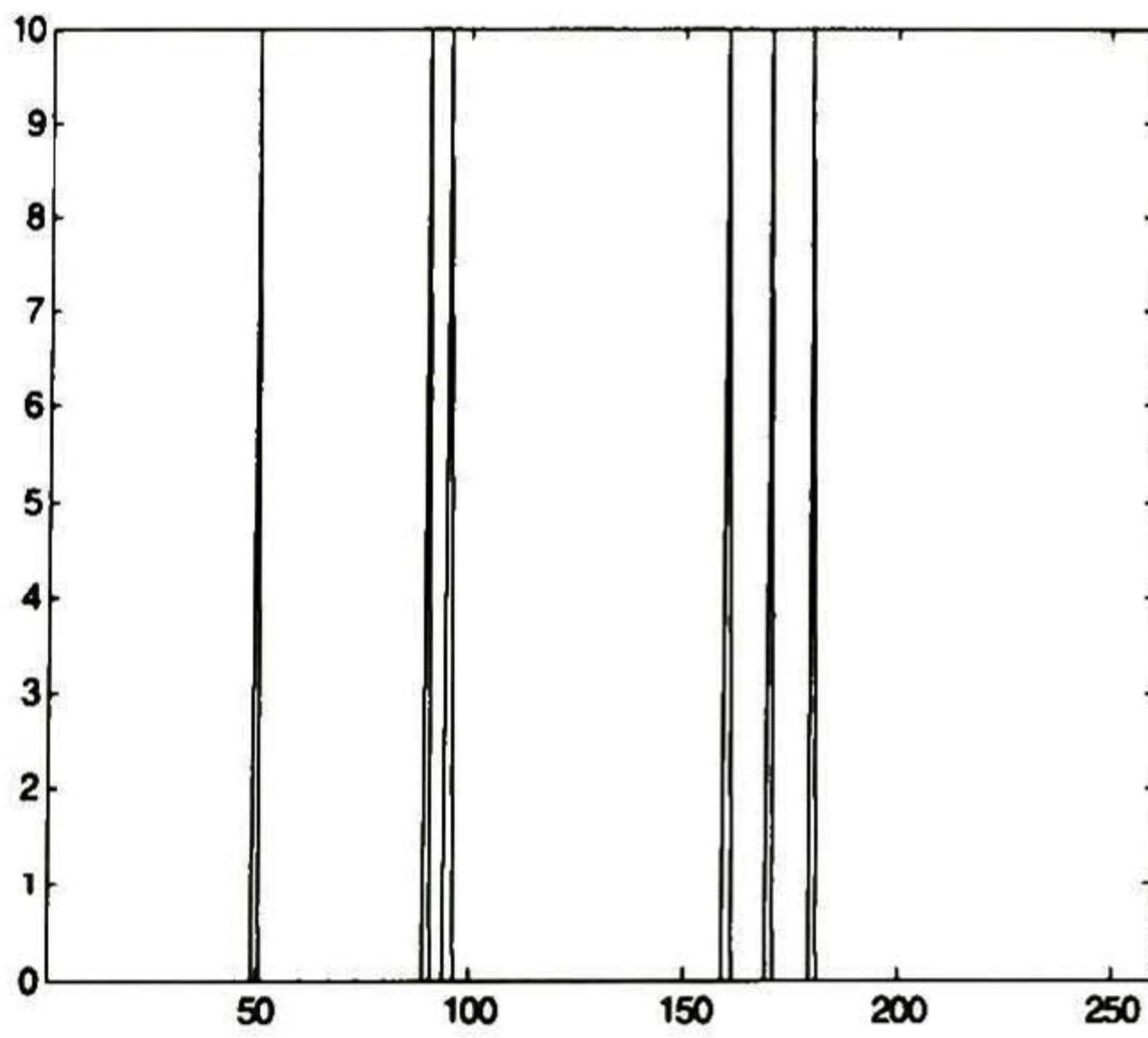


(e) Estimación de 10.6857 dB a 40 iteraciones con el método CLS

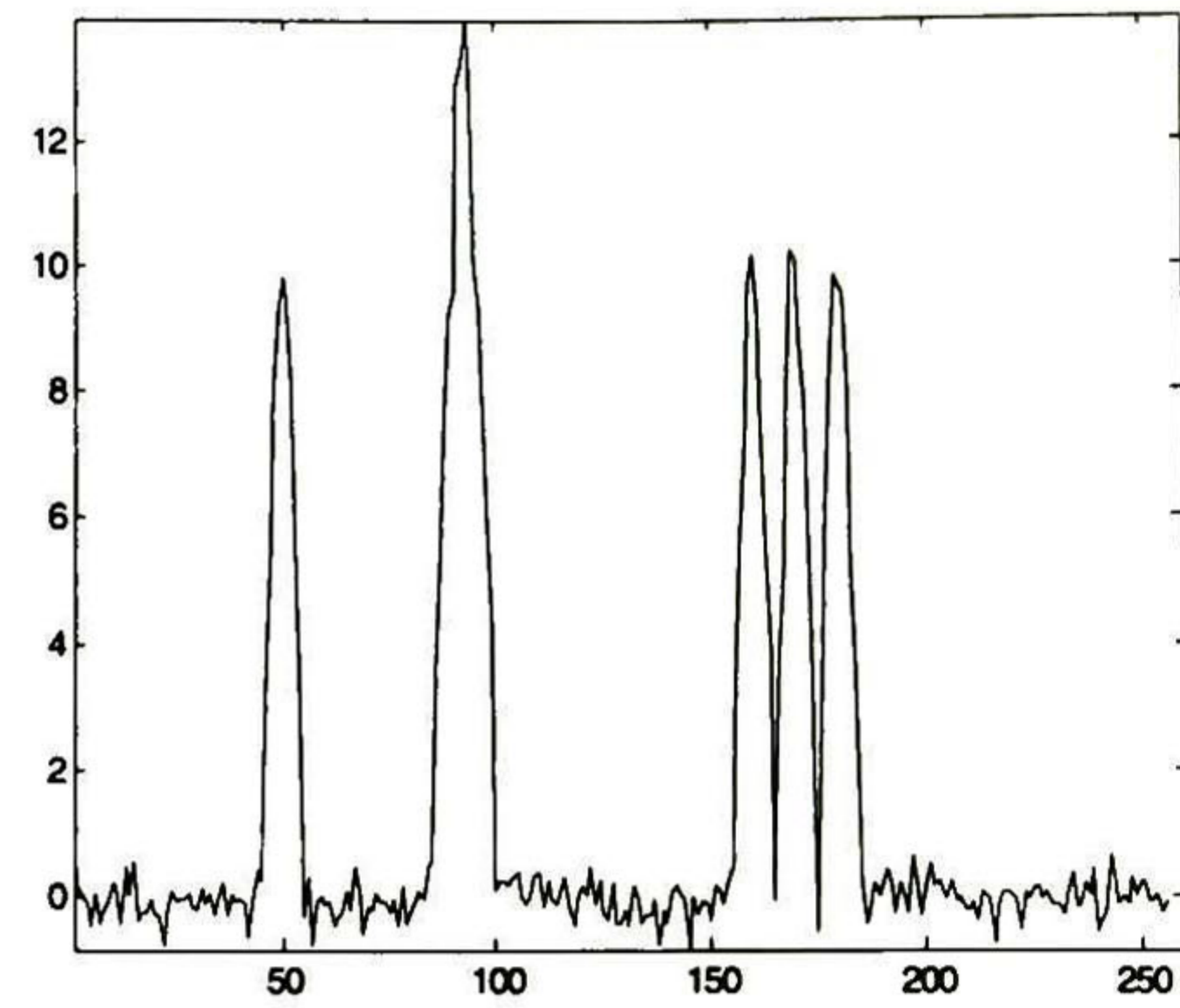


(f) Estimación de 11.0556 dB a 40 iteraciones con el método WCLS

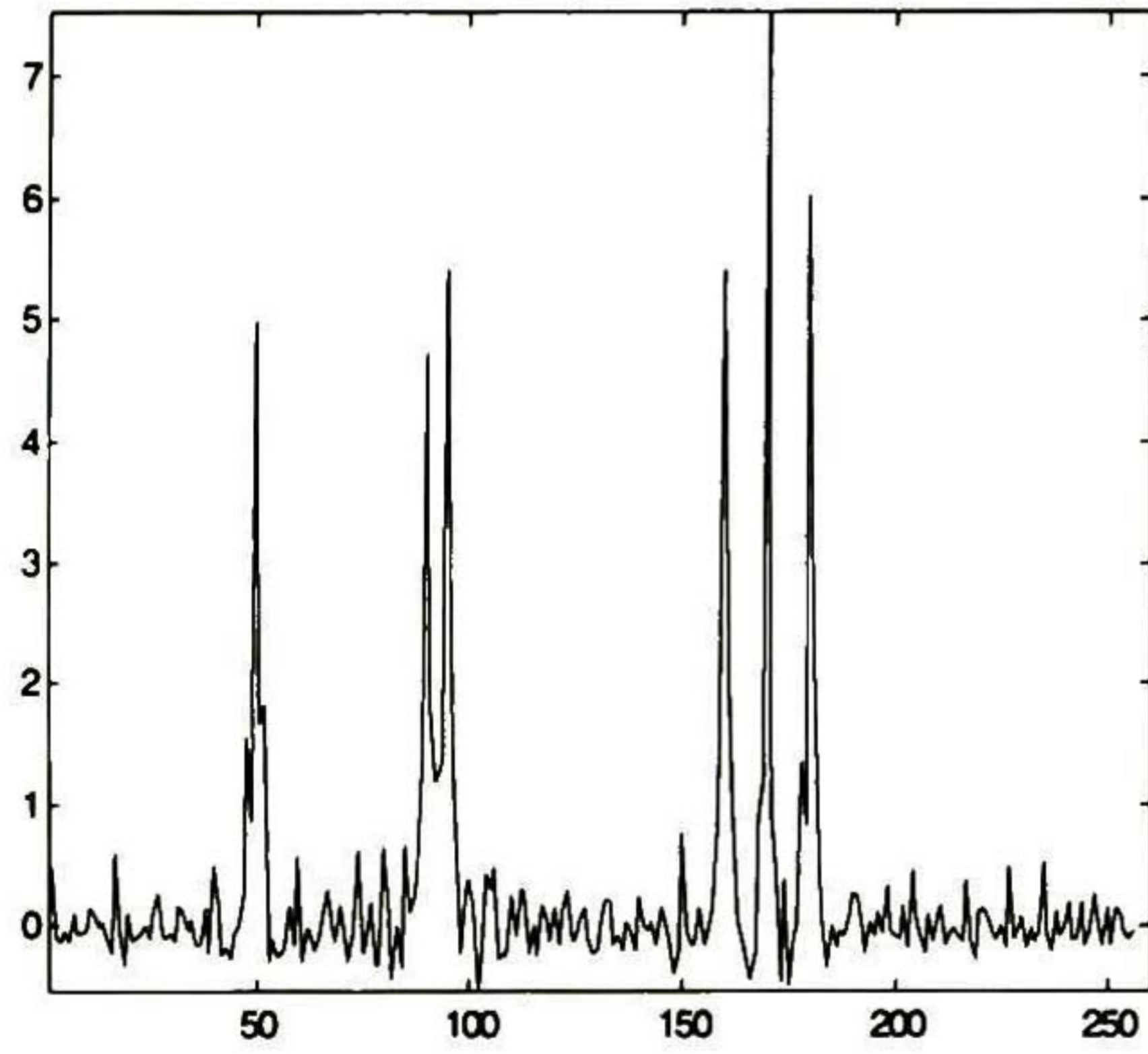
Tabla 4.9. Respuestas con SNR = 10 dB, K = 15 y SSF<sub>1</sub>.



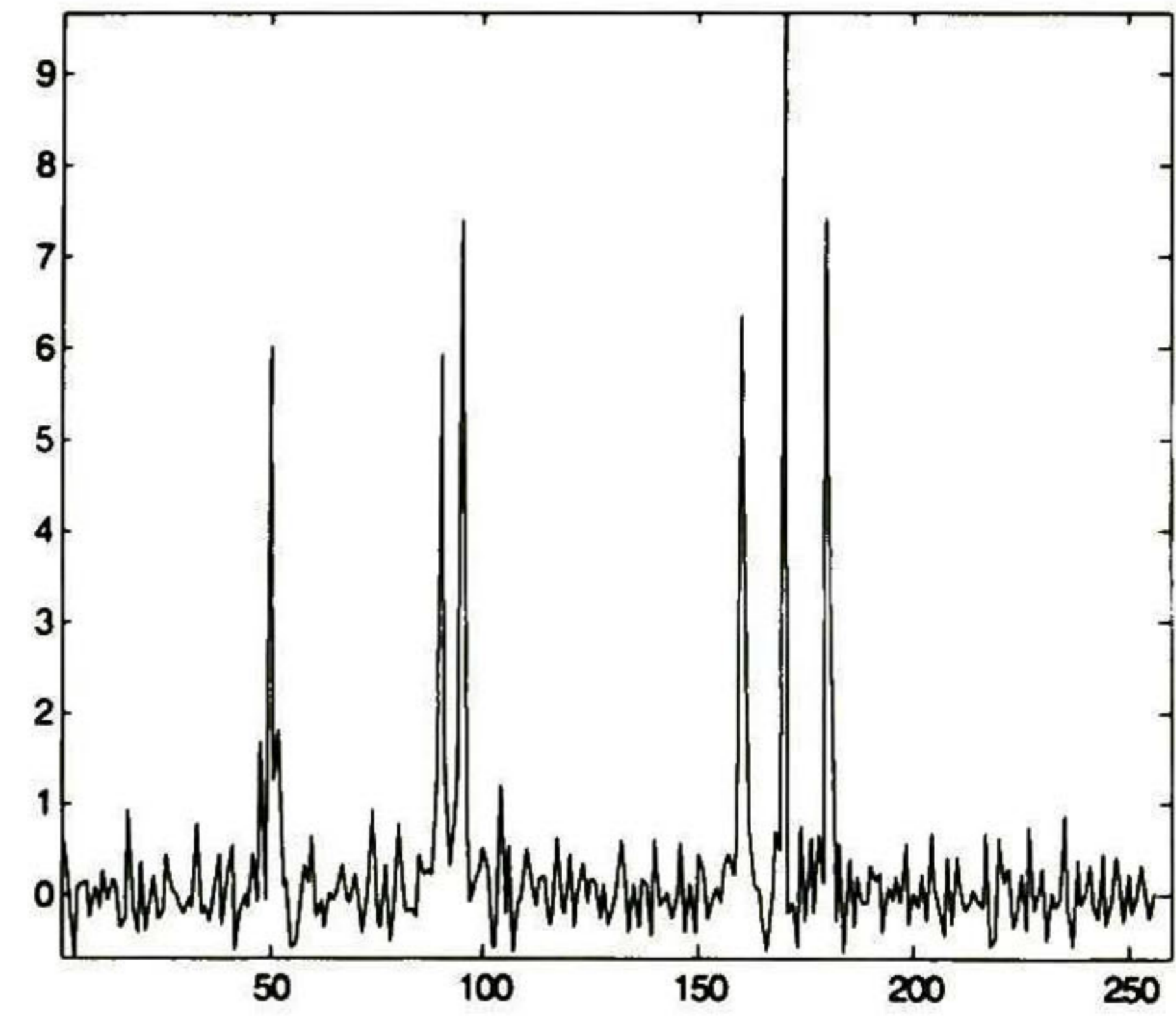
(a) Señal original v



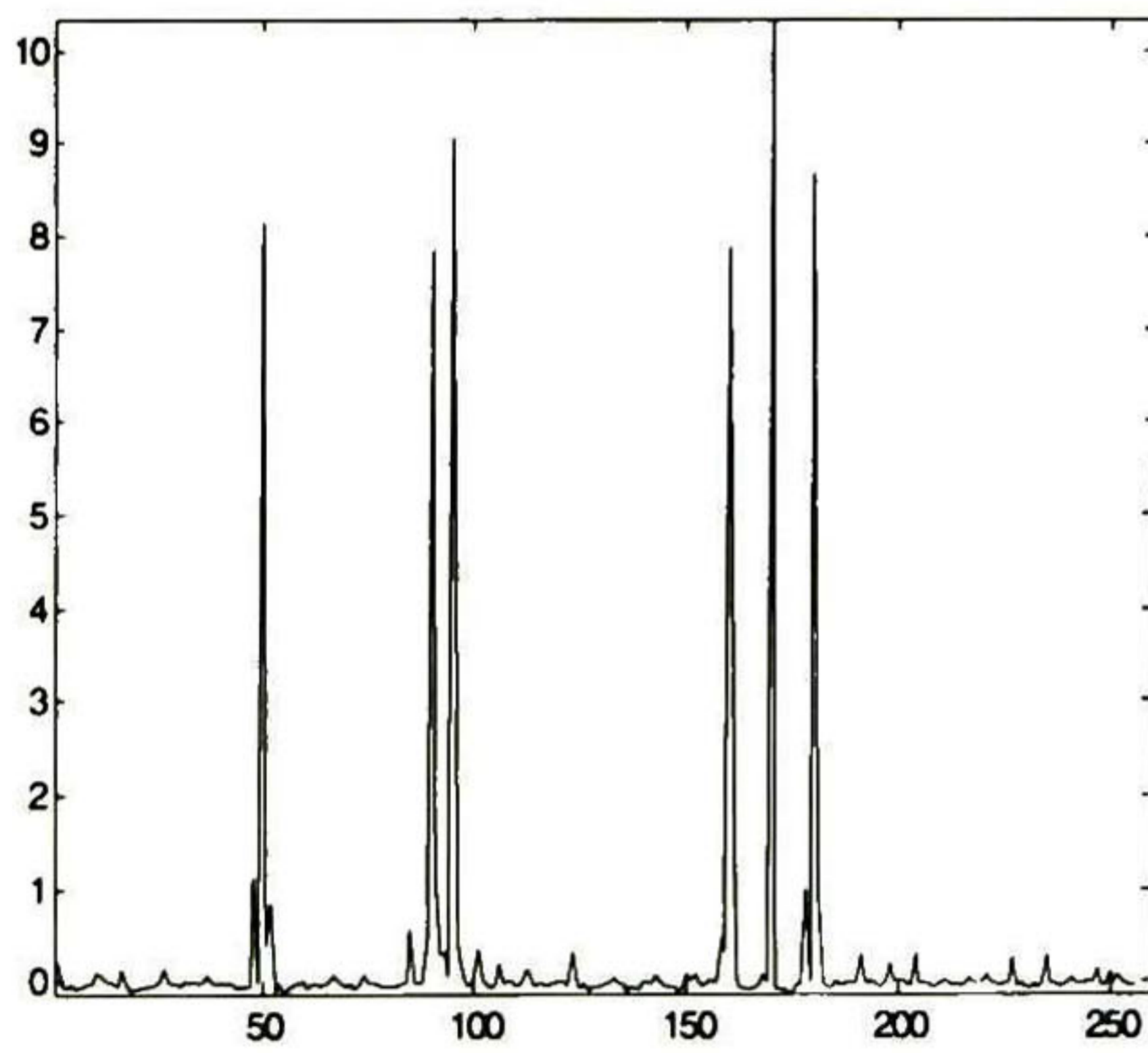
(b) Señal con ruido



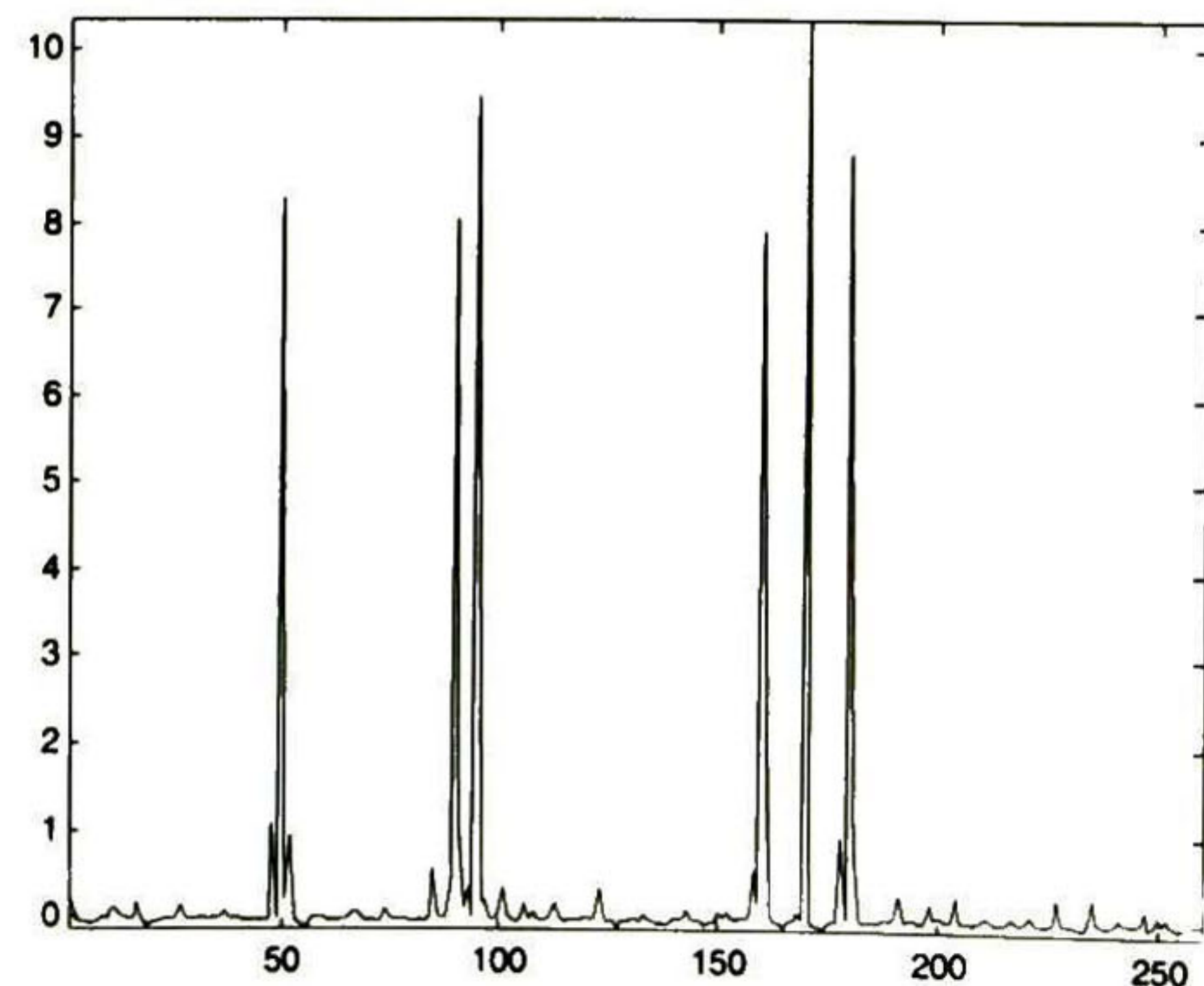
(c) Estimación de 11.9924 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 13.7169 dB a 2 iteraciones con el método WCLS

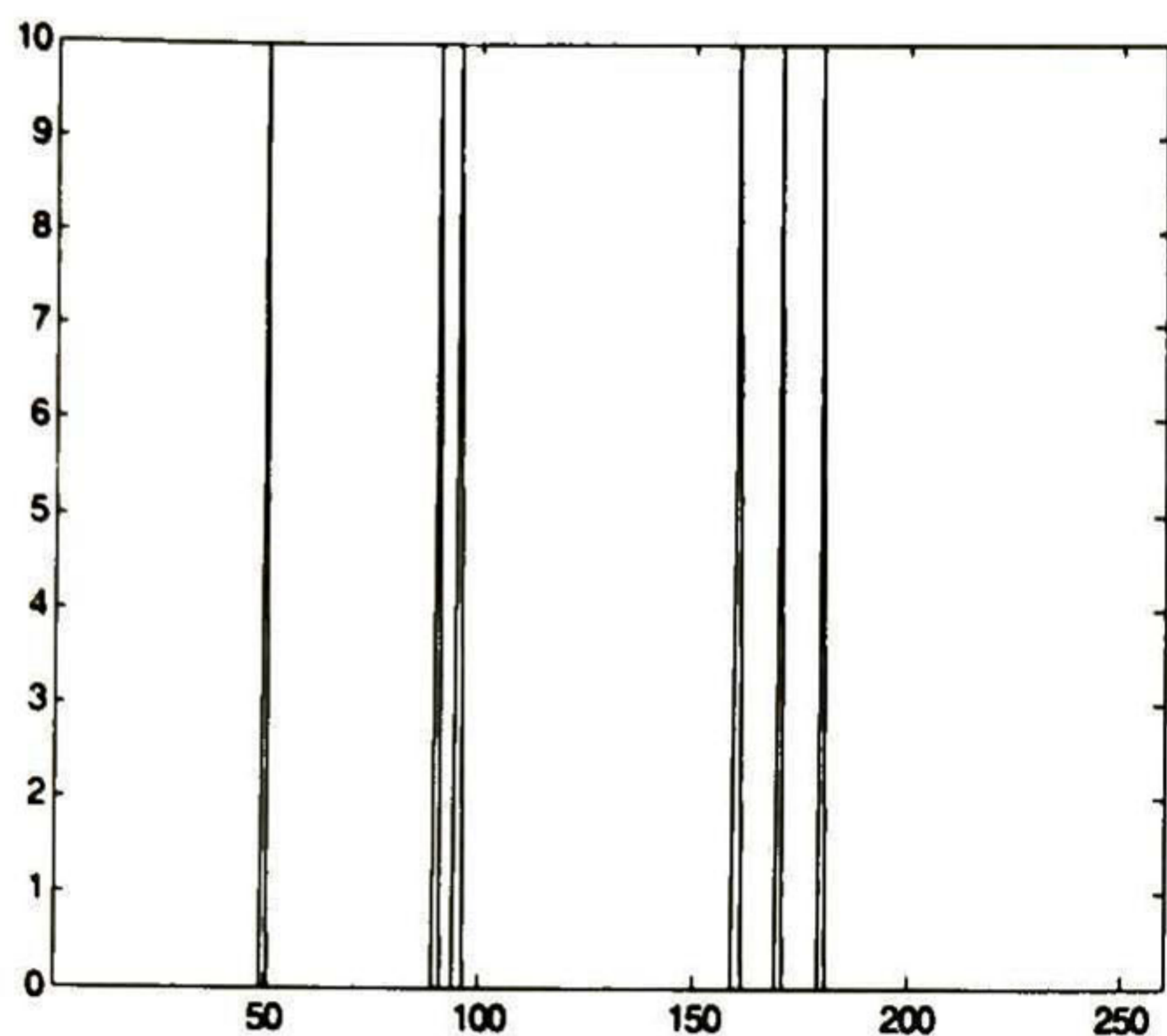


(e) Estimación de 20.1948 dB a 40 iteraciones con el método CLS

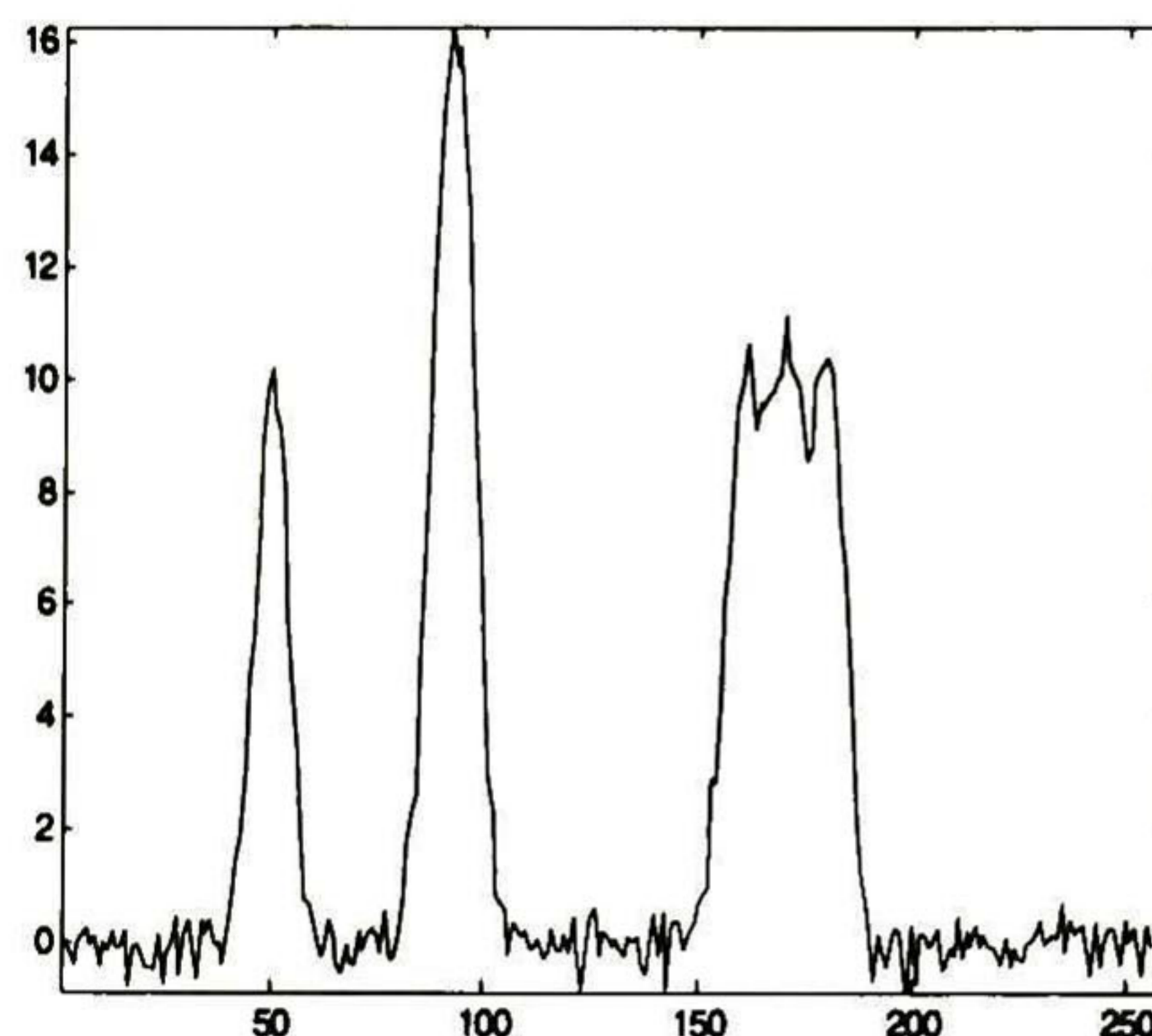


(f) Estimación de 20.7565 dB a 40 iteraciones con el método WCLS

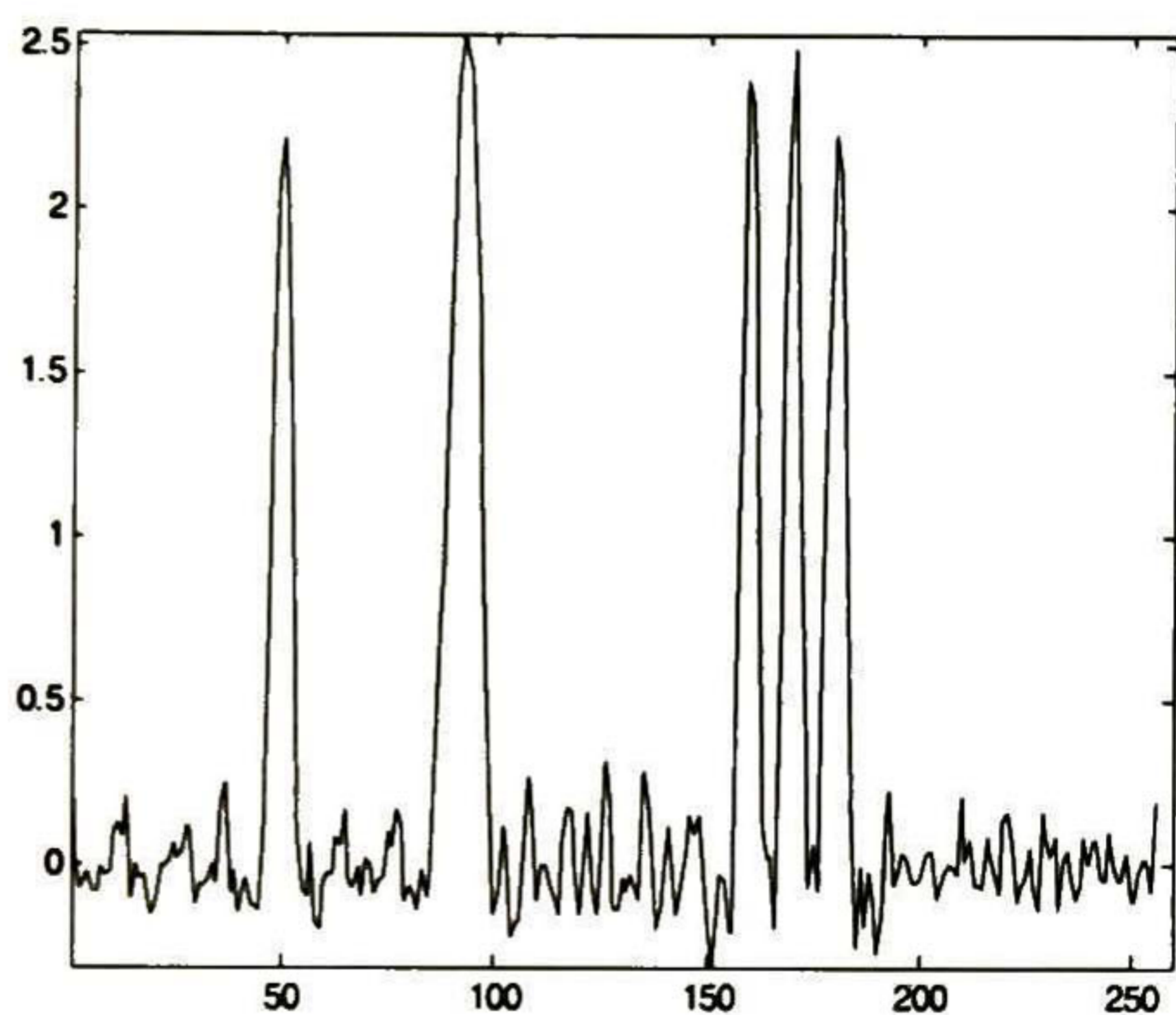
Tabla 4.10. Respuestas con SNR = 20 dB, K = 5 y  $SSF_1$ .



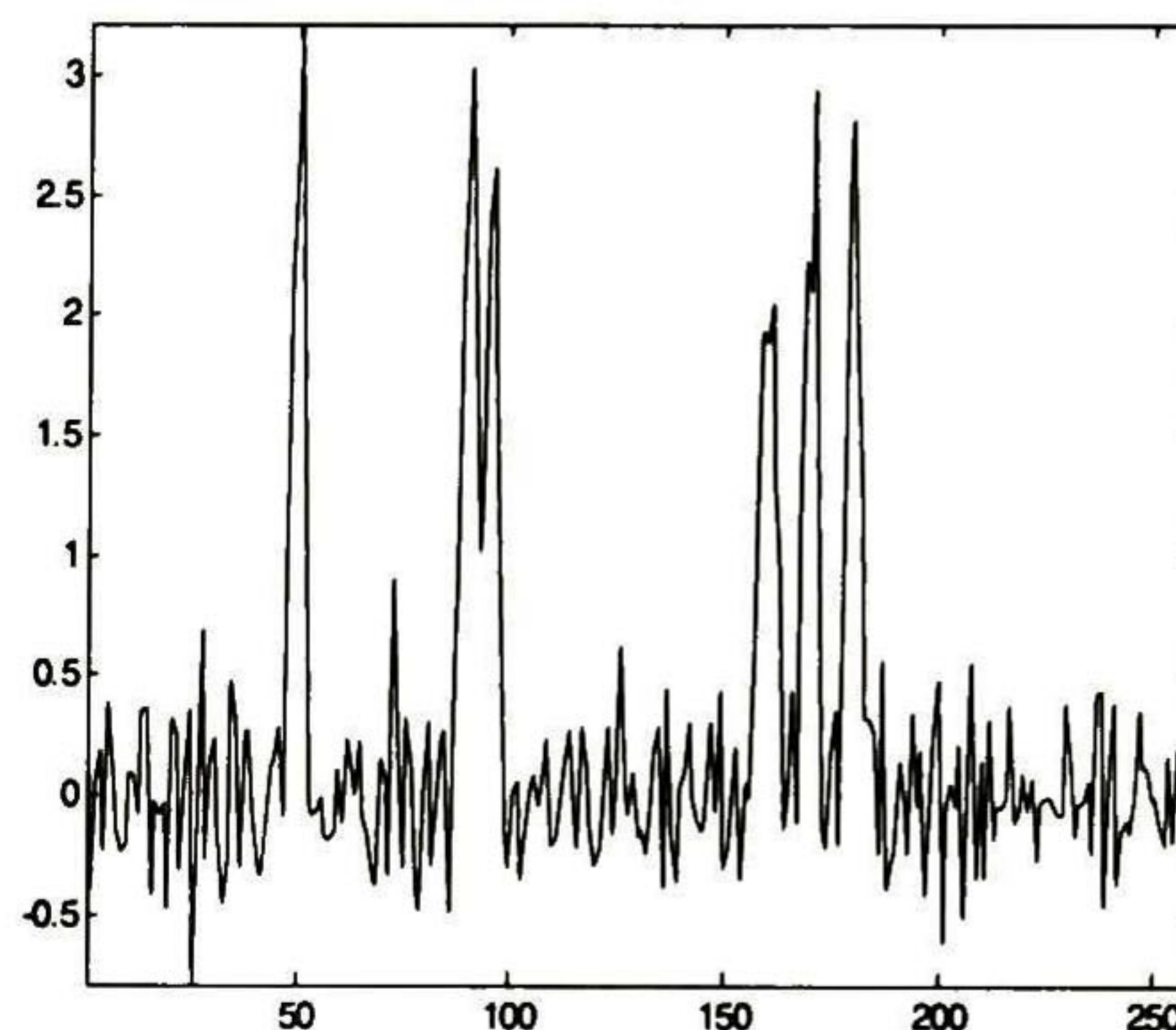
(a) Señal original  $v$



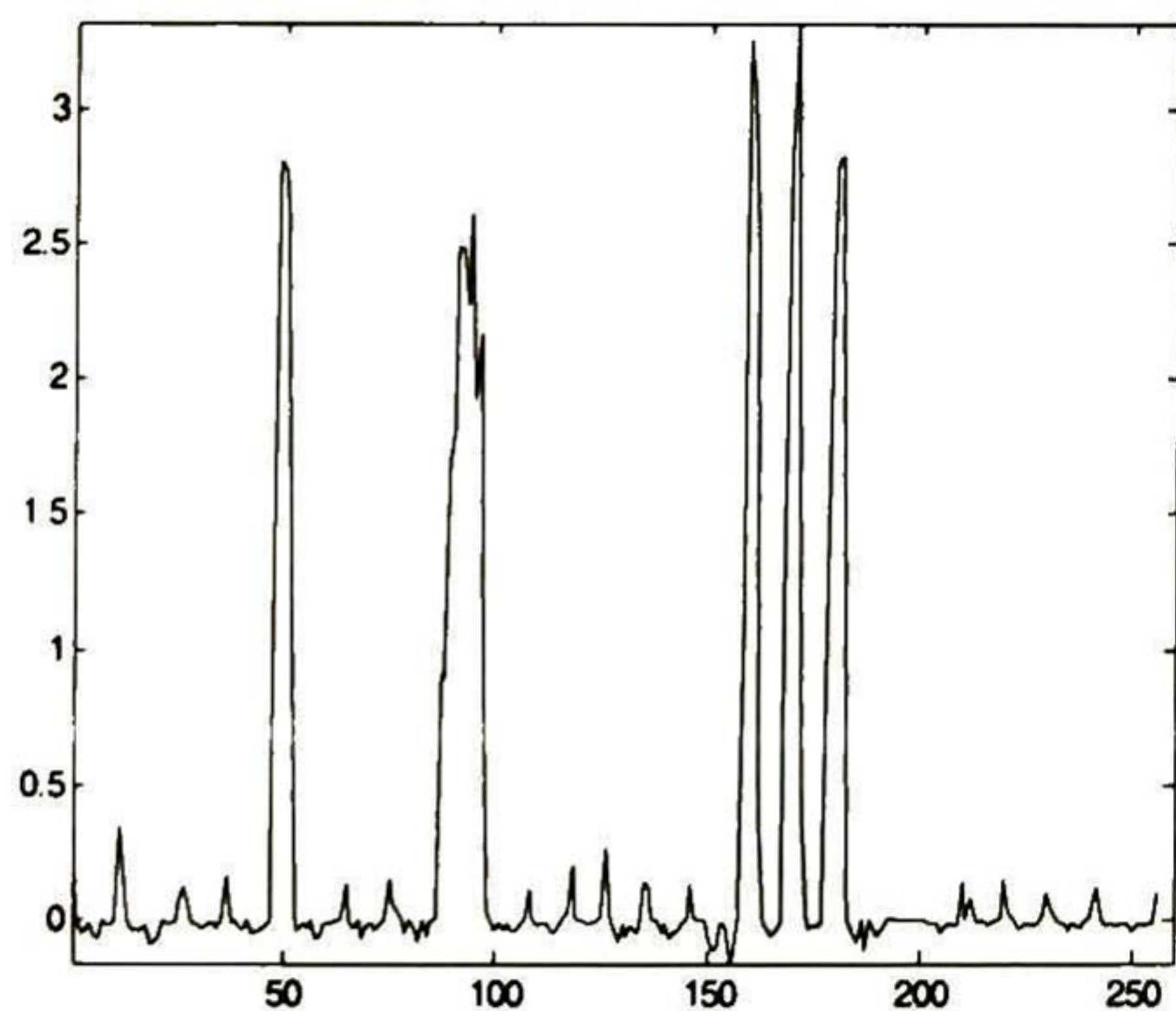
(b) Señal con ruido



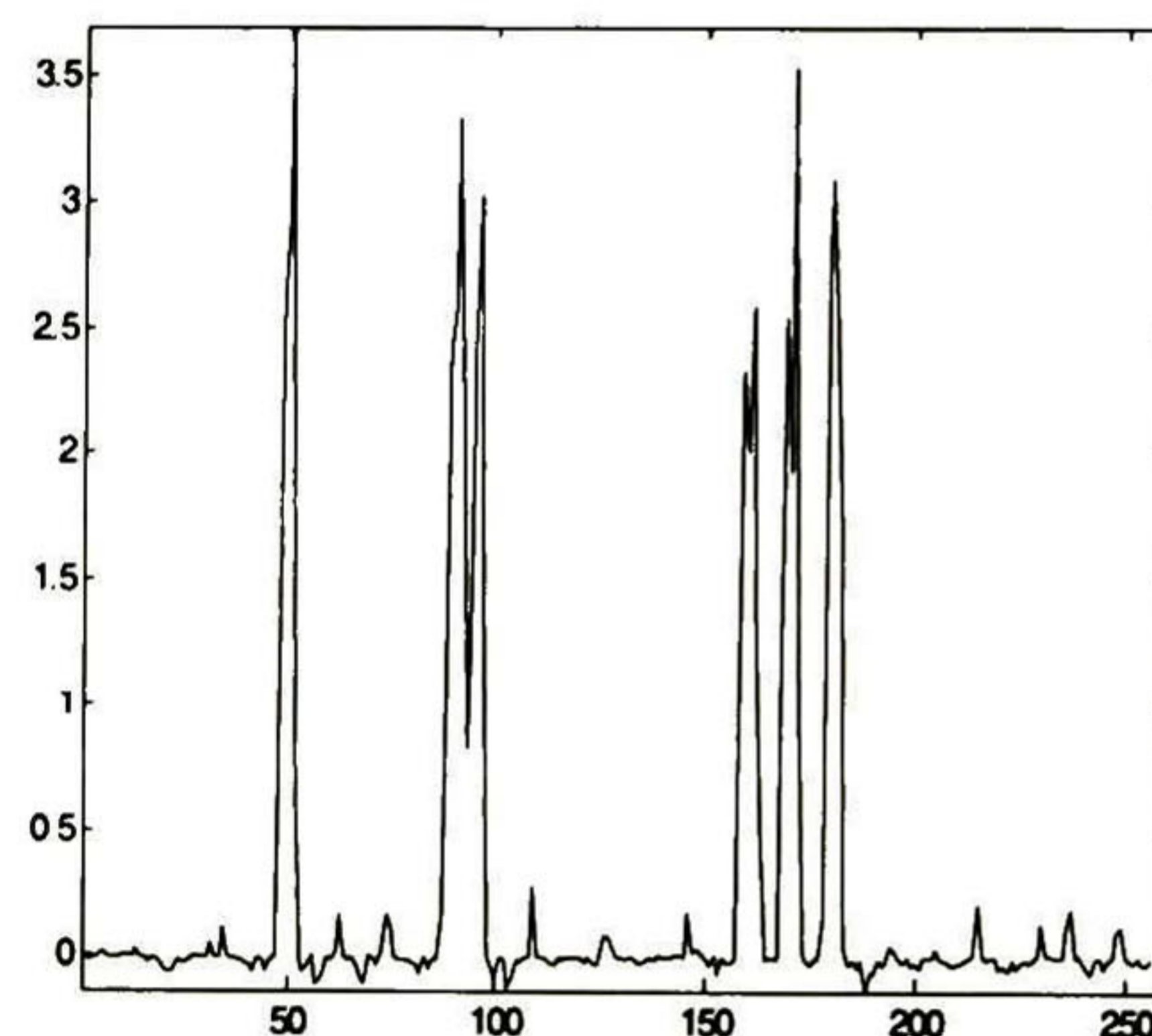
(c) Estimación de 10.3610 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 10.3617 dB a 2 iteraciones con el método WCLS

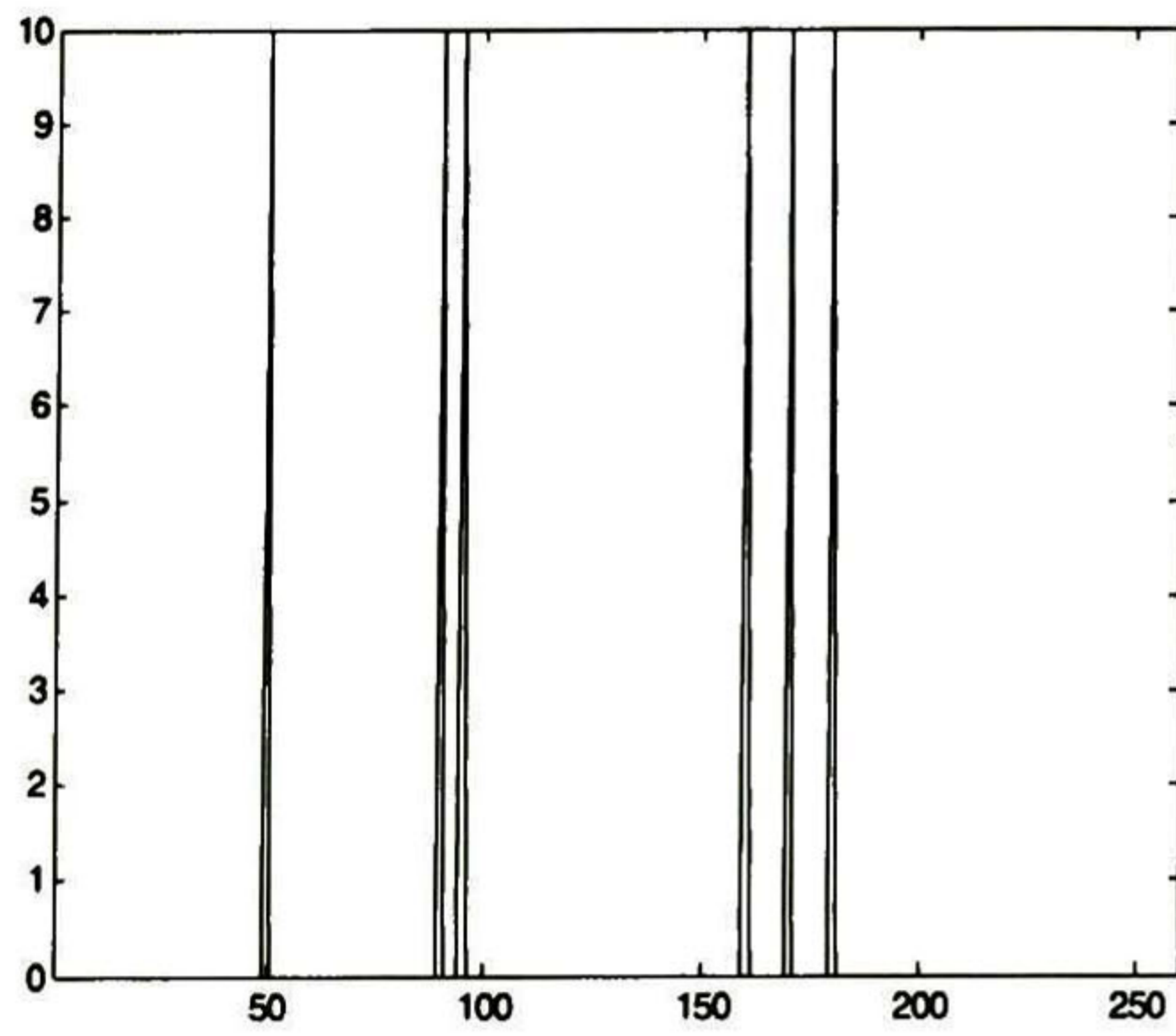


(e) Estimación de 10.4619 dB a 40 iteraciones con el método CLS

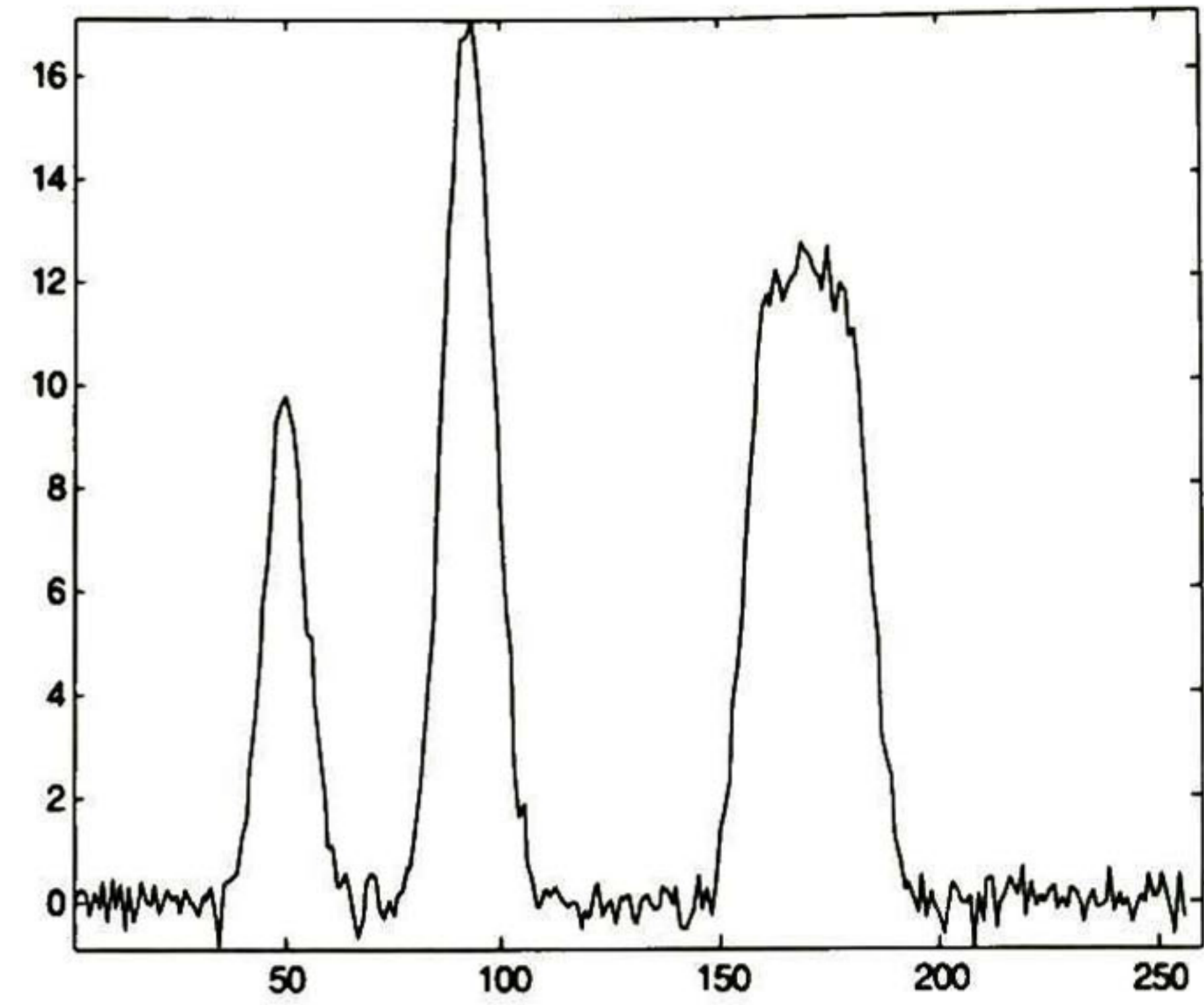


(f) Estimación de 10.4734 dB a 40 iteraciones con el método WCLS

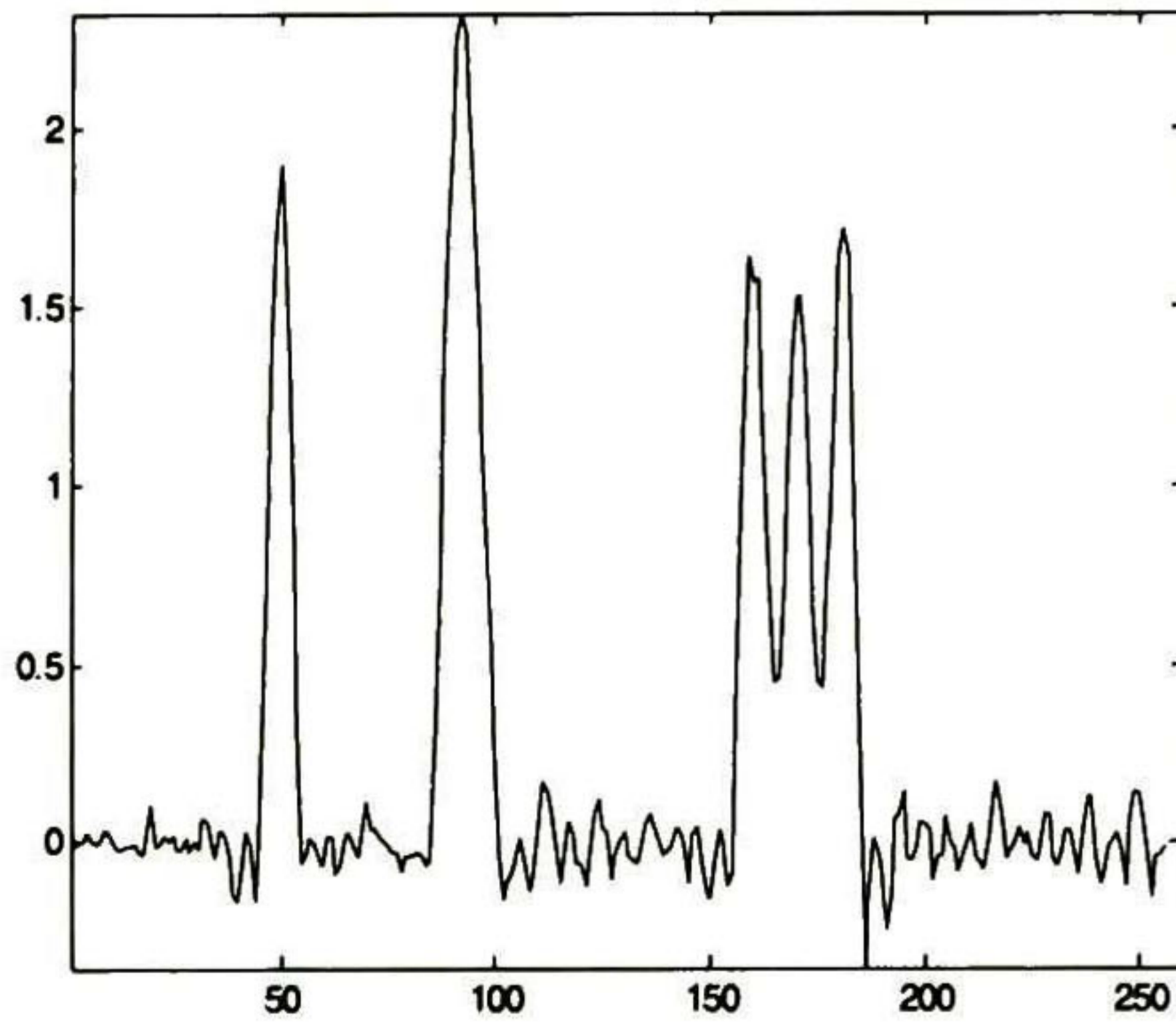
Tabla 4.11. Respuestas con SNR = 20 dB, K = 10 y  $SSF_1$ .



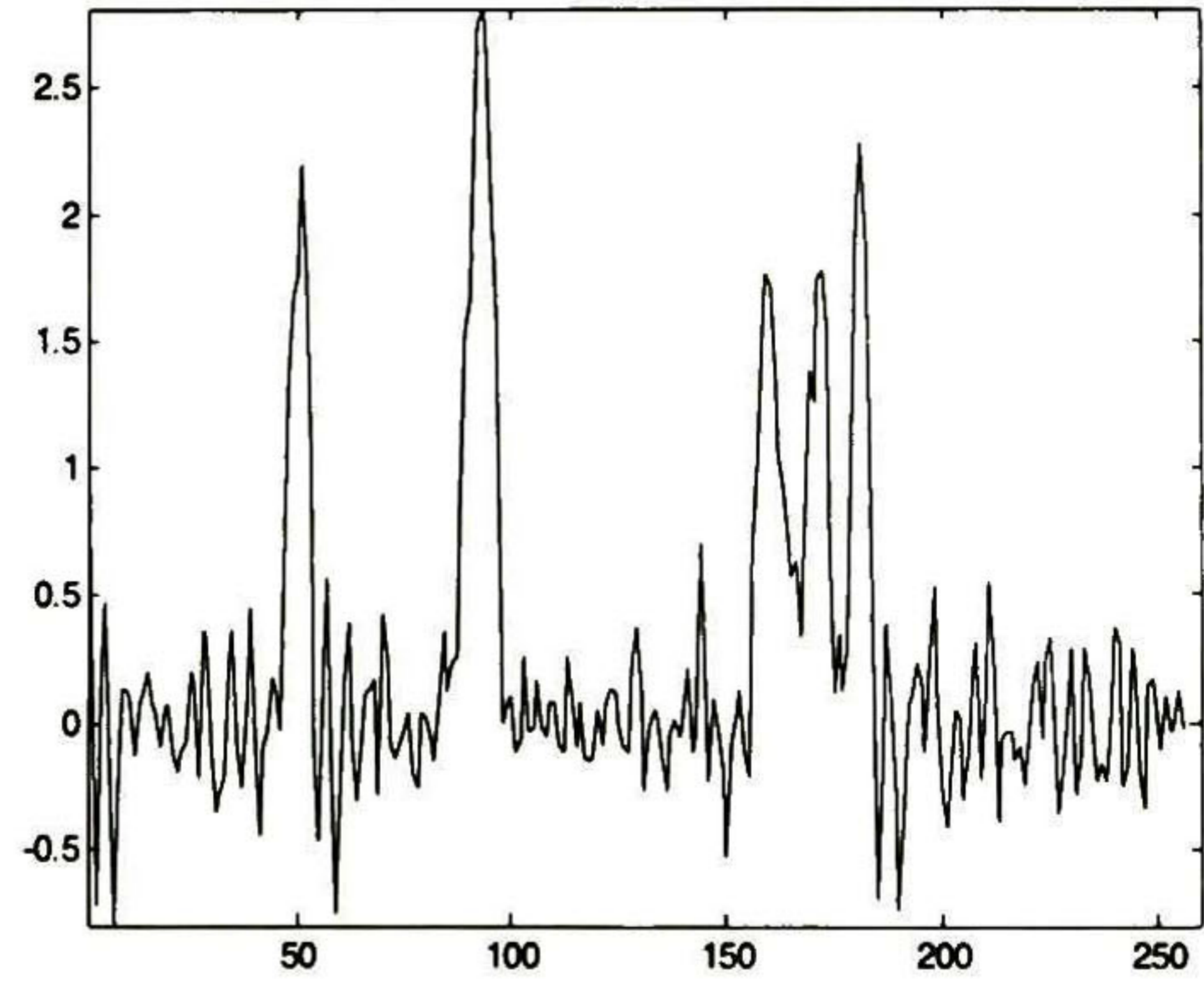
(a) Señal original v



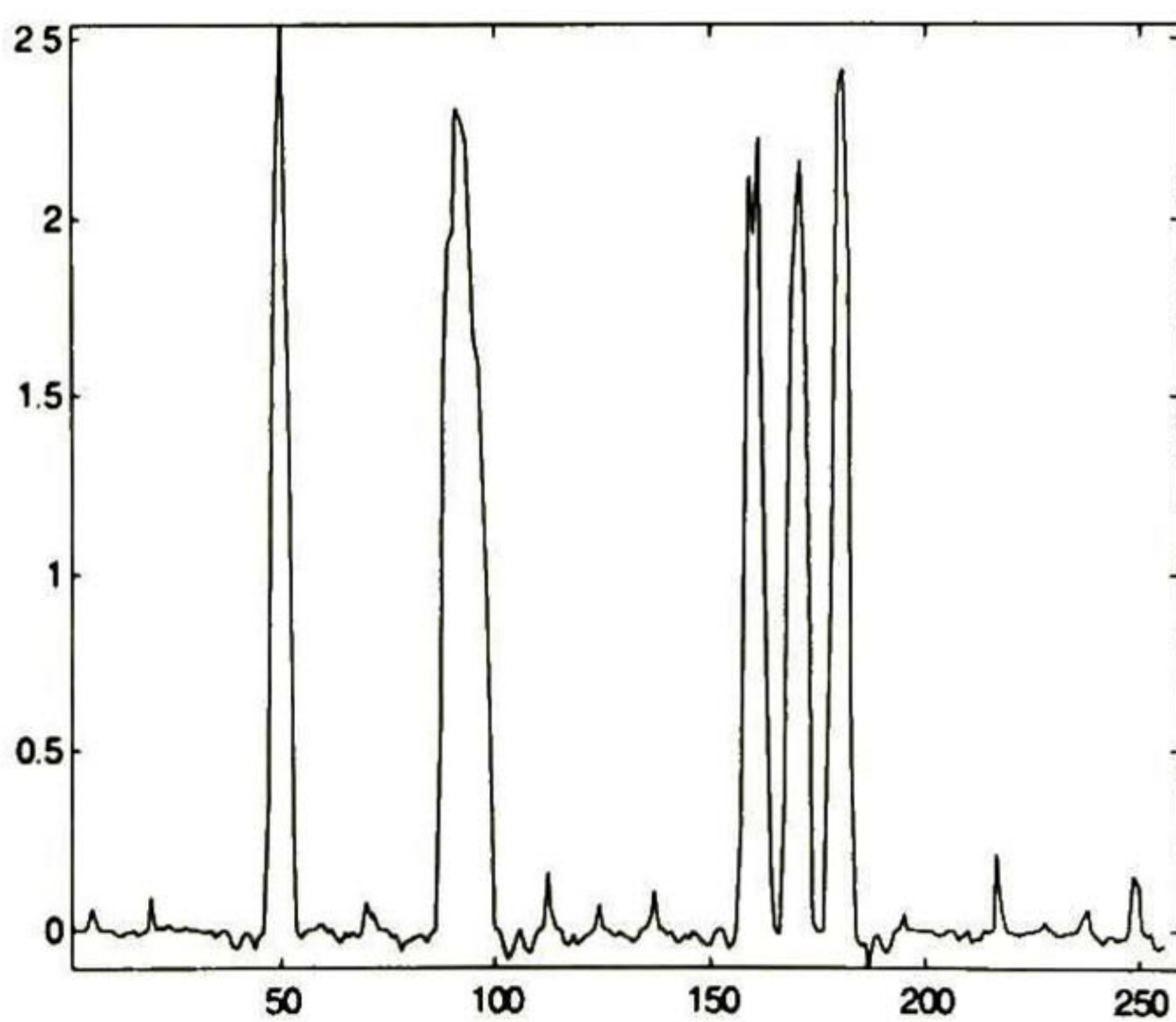
(b) Señal con ruido



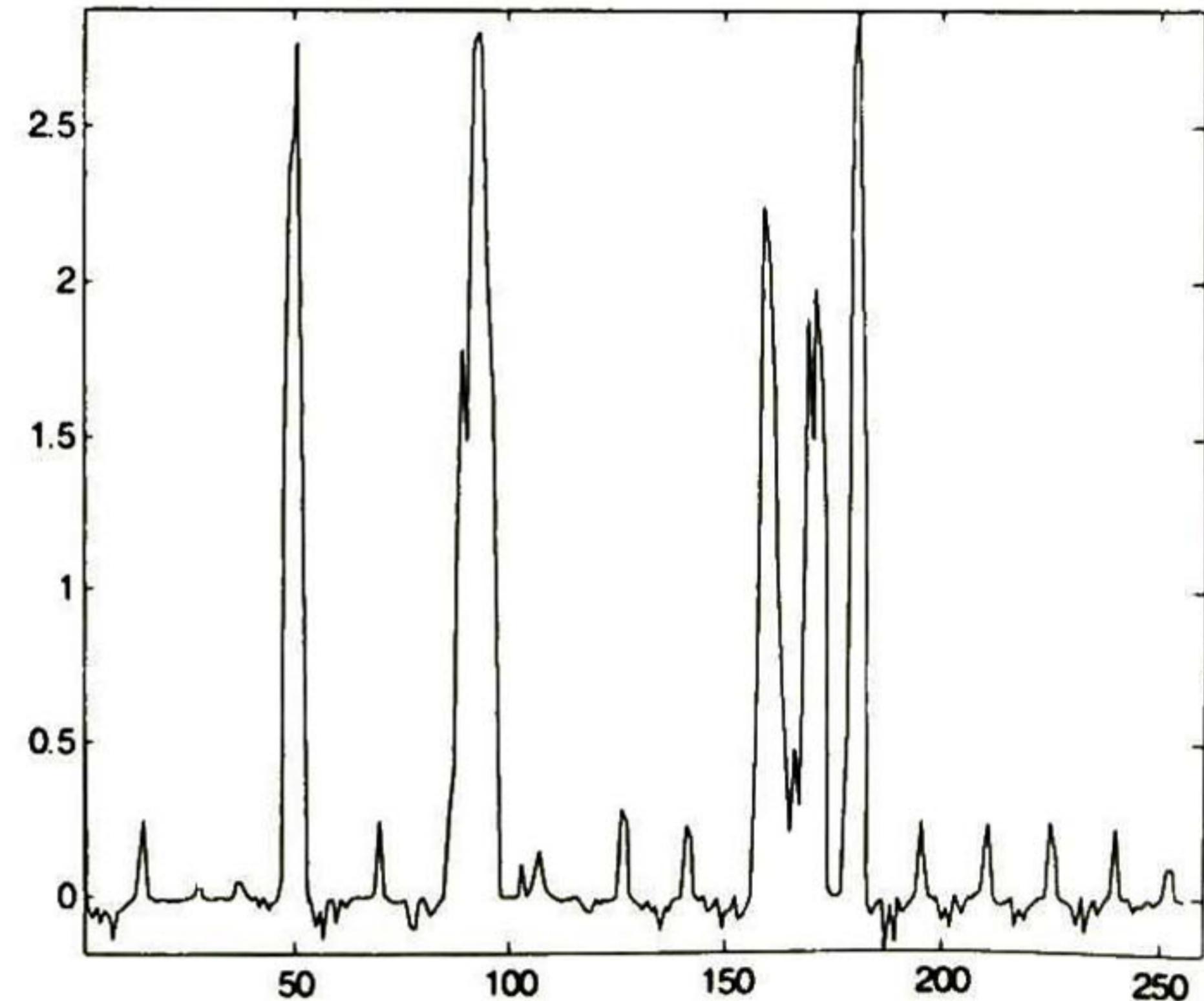
(c) Estimación de 11.4445 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 11.2069 dB a 2 iteraciones con el método WCLS

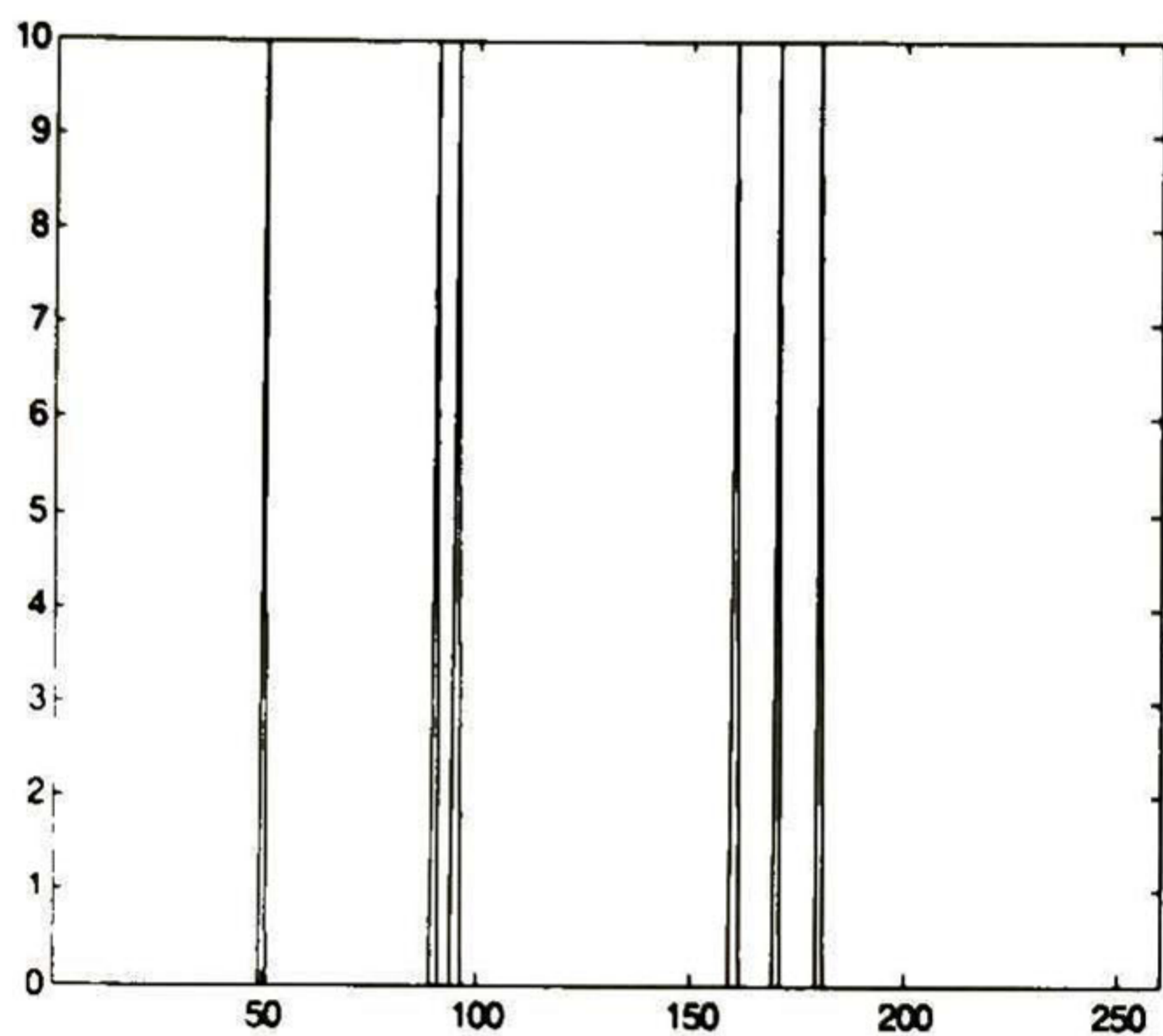


(e) Estimación de 11.8686 dB a 40 iteraciones con el método CLS

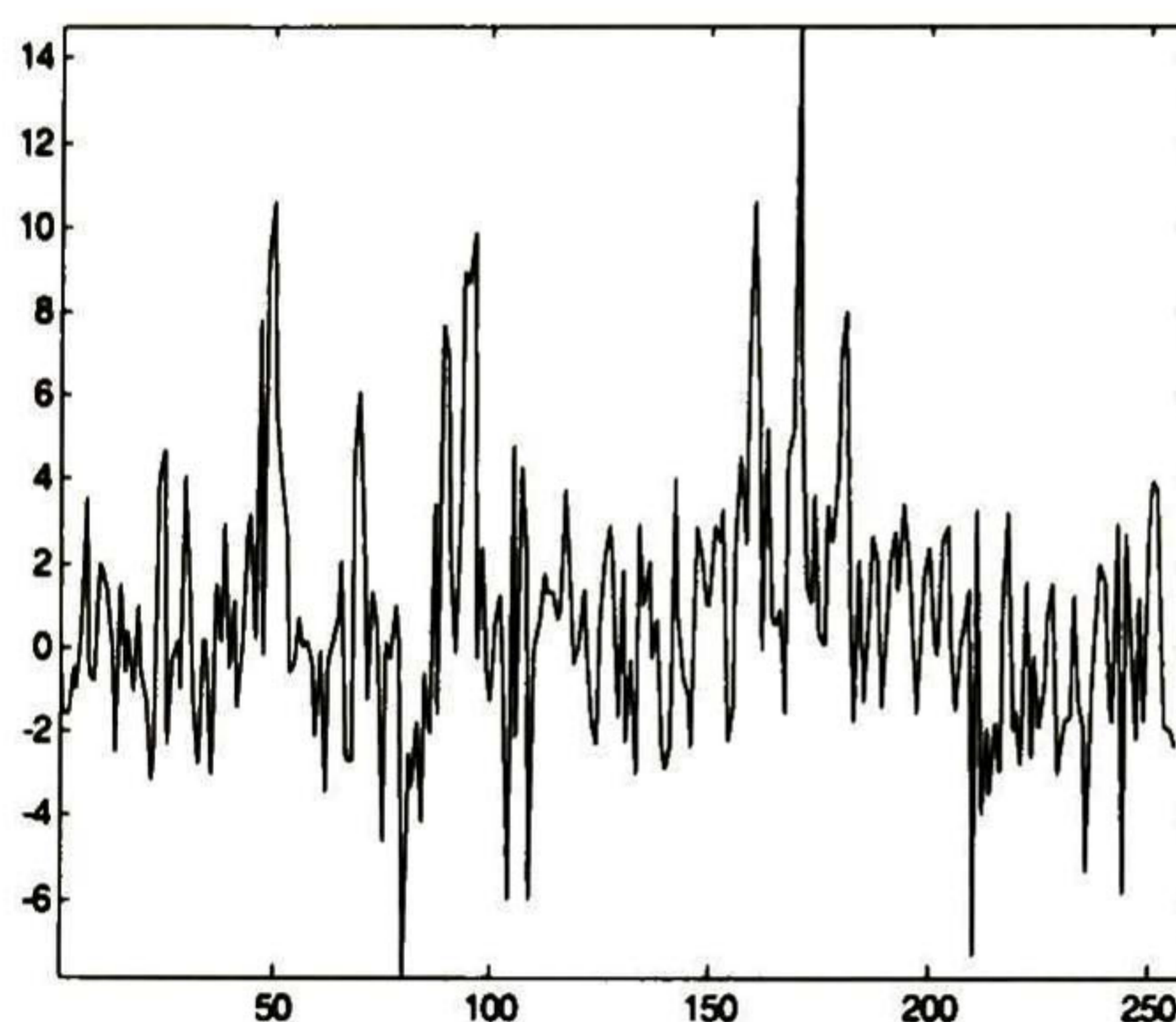


(f) Estimación de 11.4979 dB a 40 iteraciones con el método WCLS

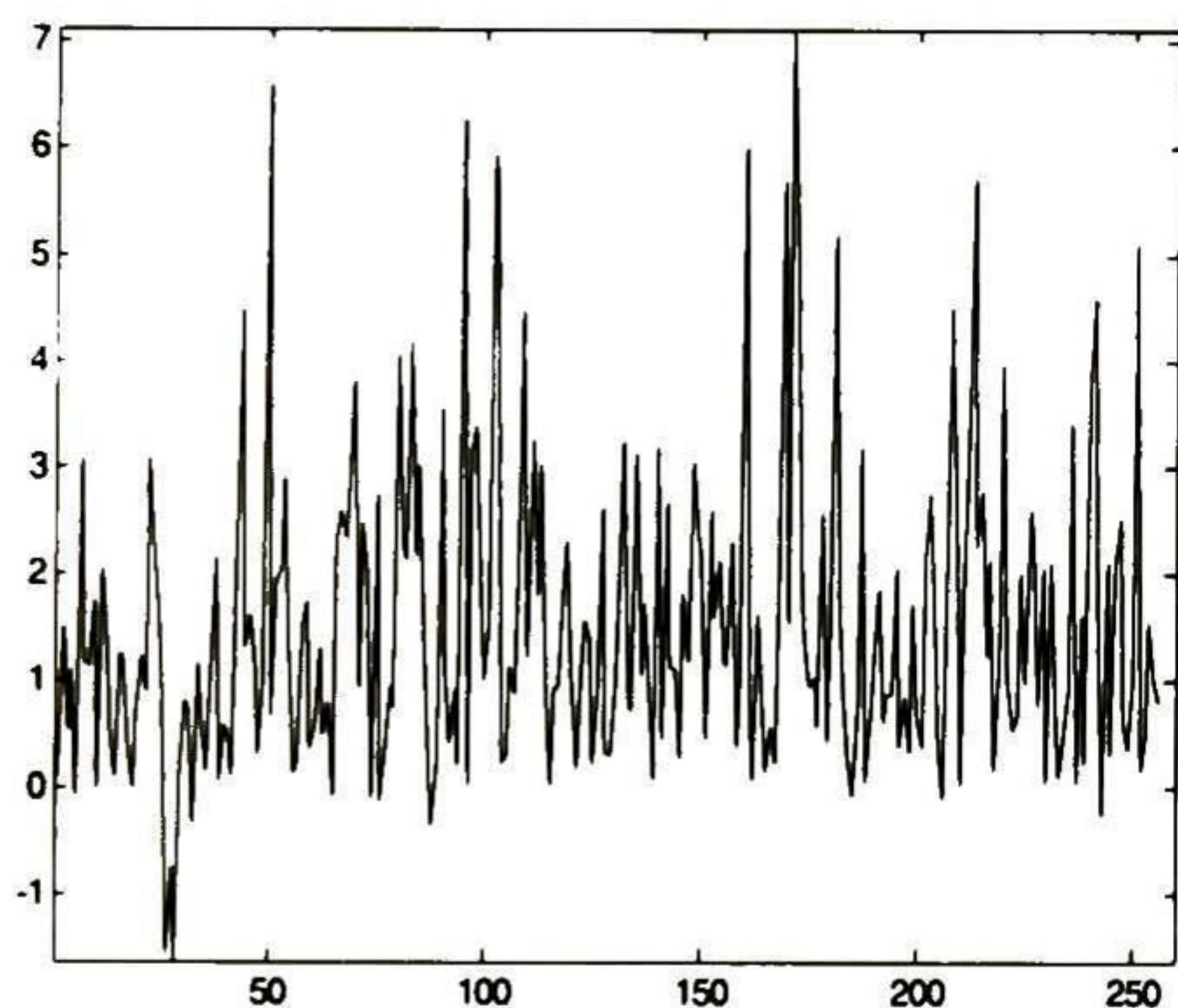
Tabla 4.12. Respuestas con SNR = 20 dB, K = 15 y  $SSF_1$ .



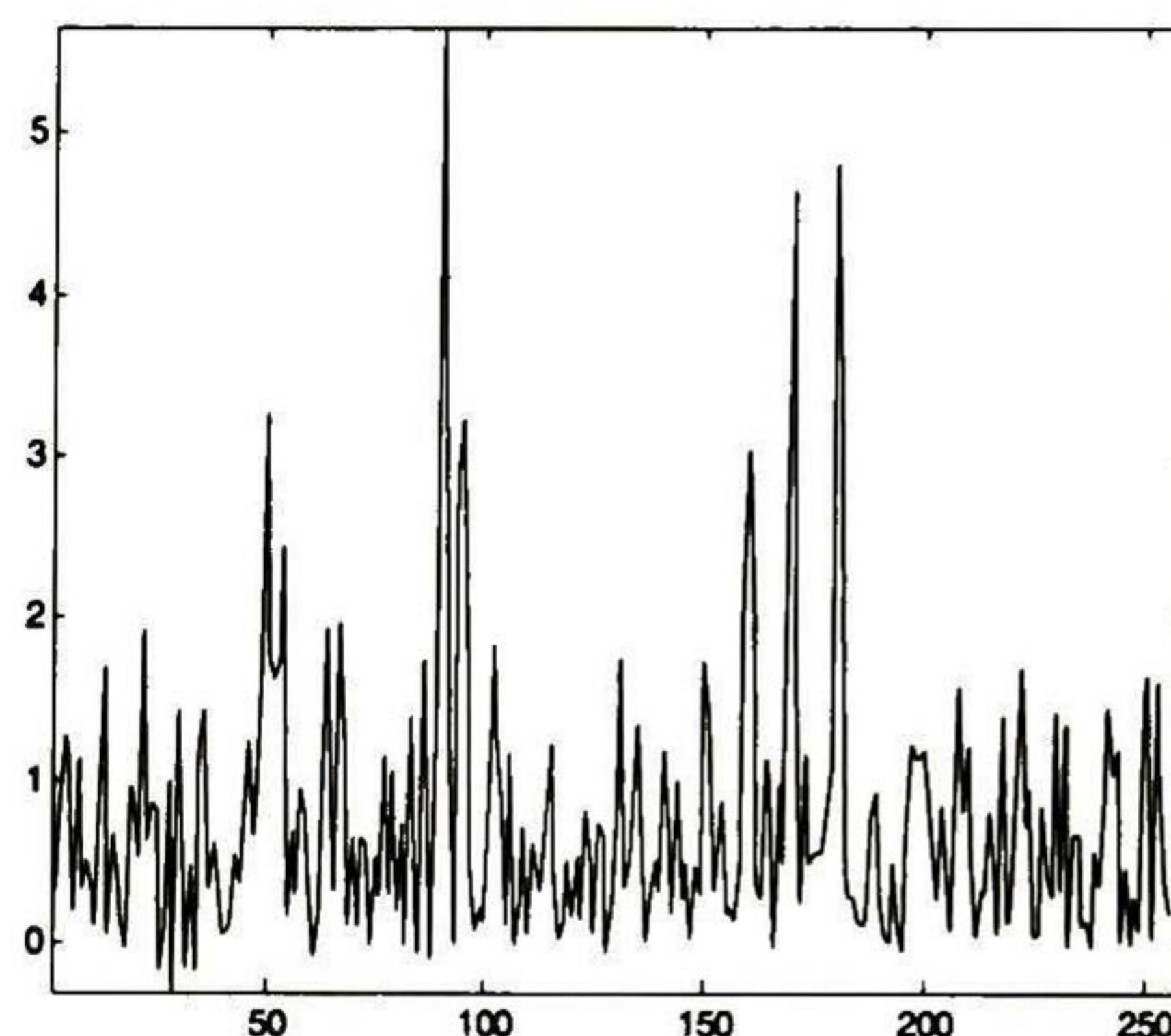
(a) Señal original  $v$



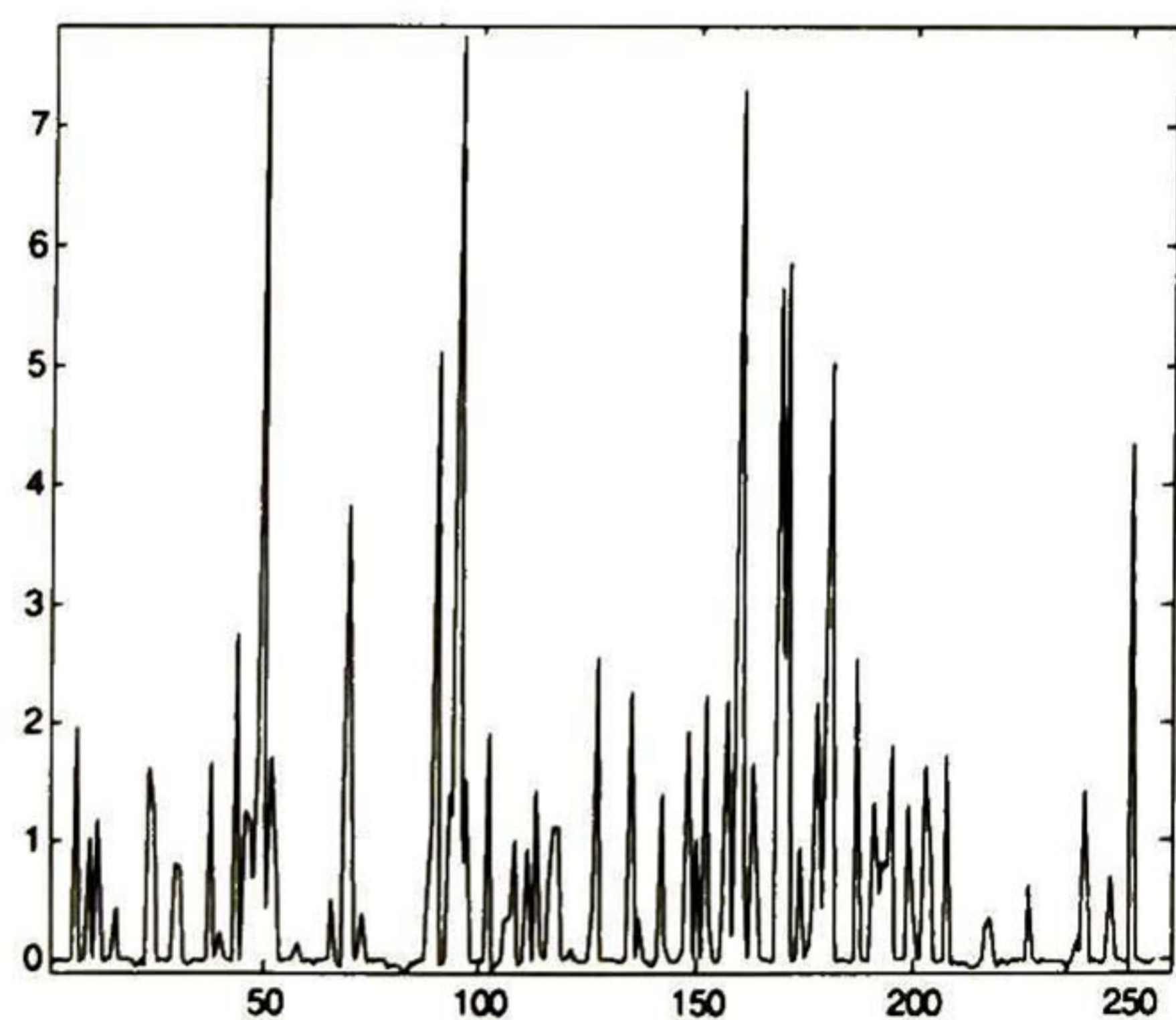
(b) Señal con ruido



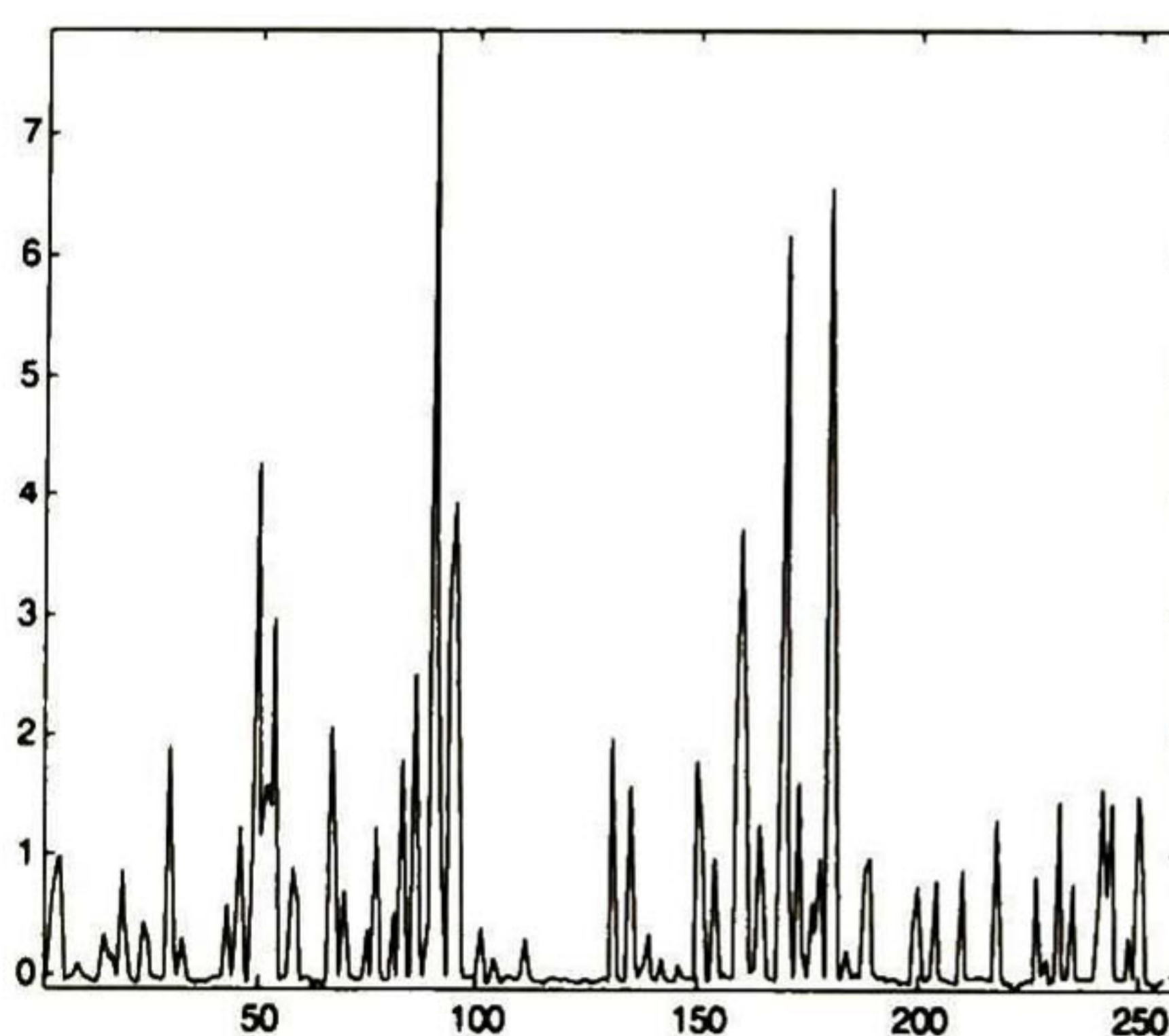
(c) Estimación de 2.2273 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 5.8172 dB a 2 iteraciones con el método WCLS

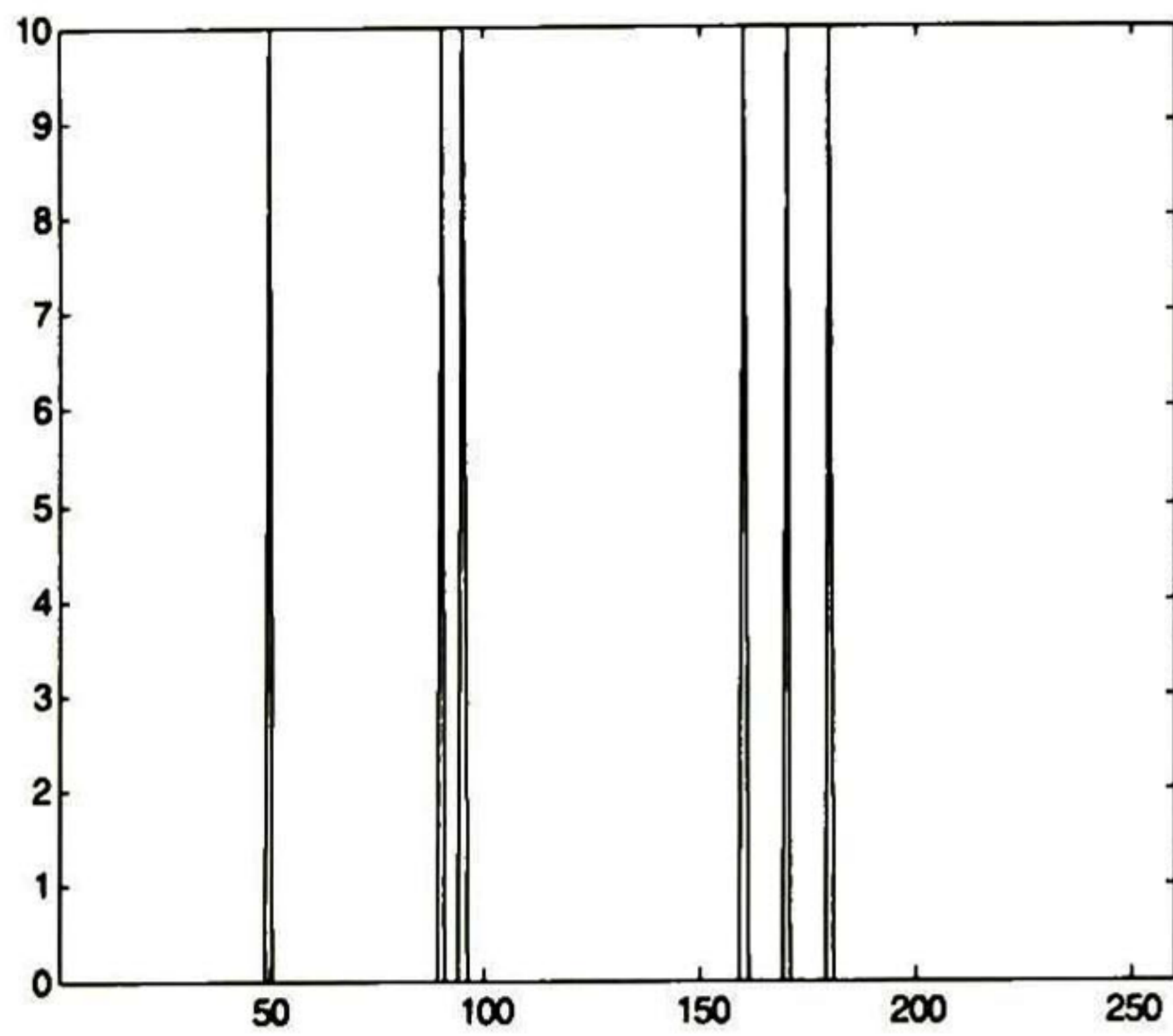


(e) Estimación de 7.0155 dB a 40 iteraciones con el método CLS

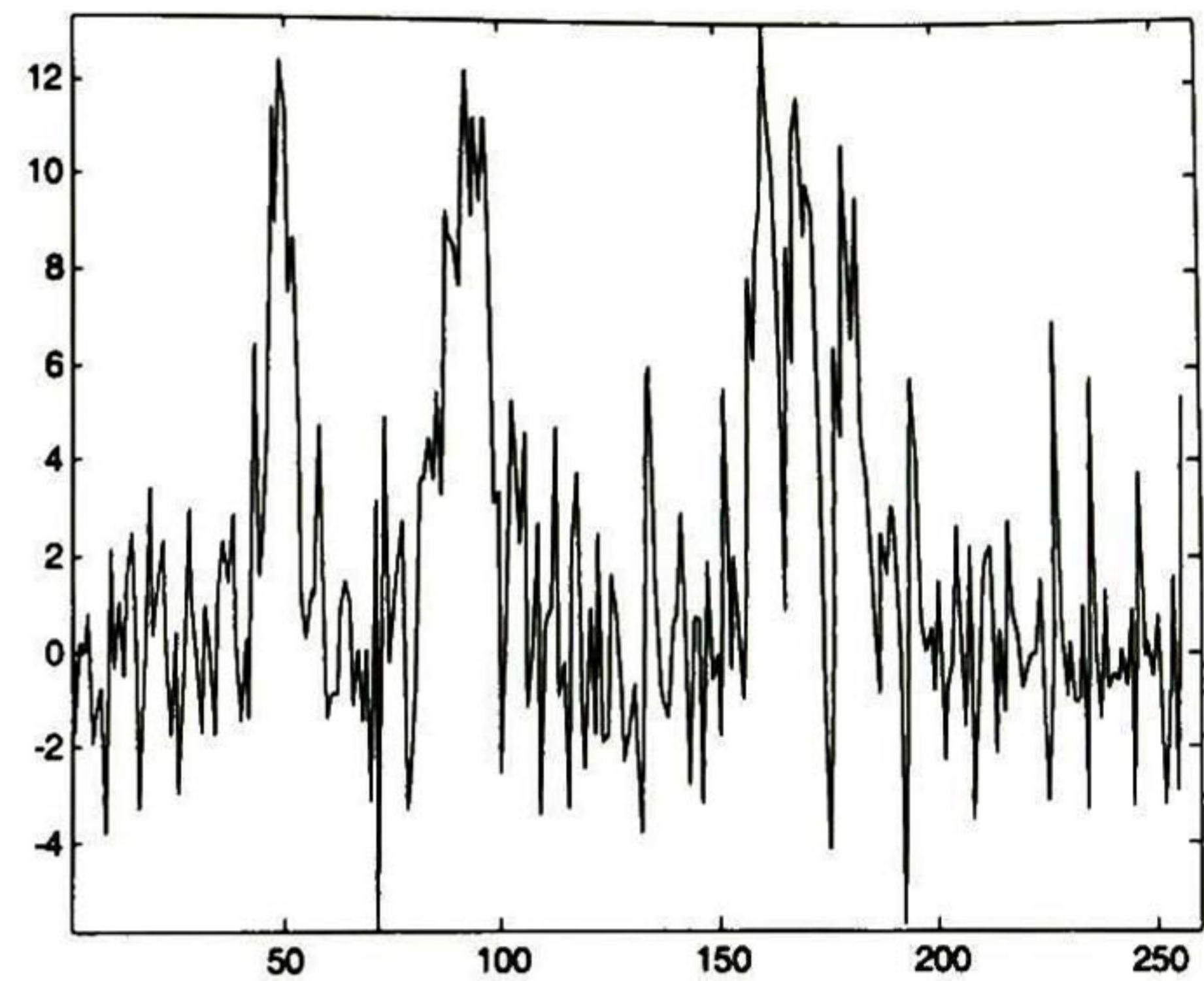


(f) Estimación de 7.7289 dB a 40 iteraciones con el método WCLS

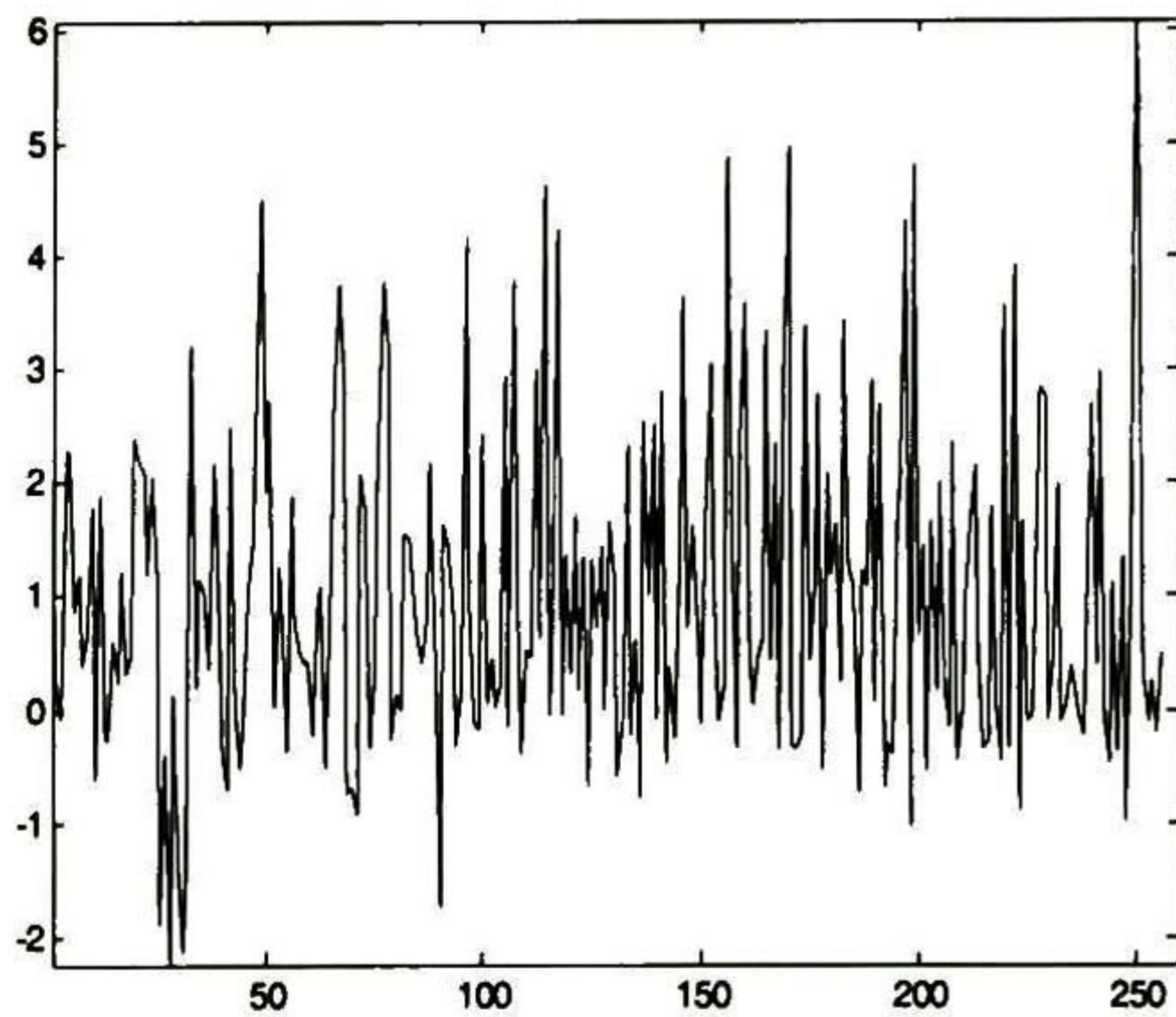
Tabla 4.13. Respuestas con SNR = 3 dB, K = 5 y  $SSF_2$ .



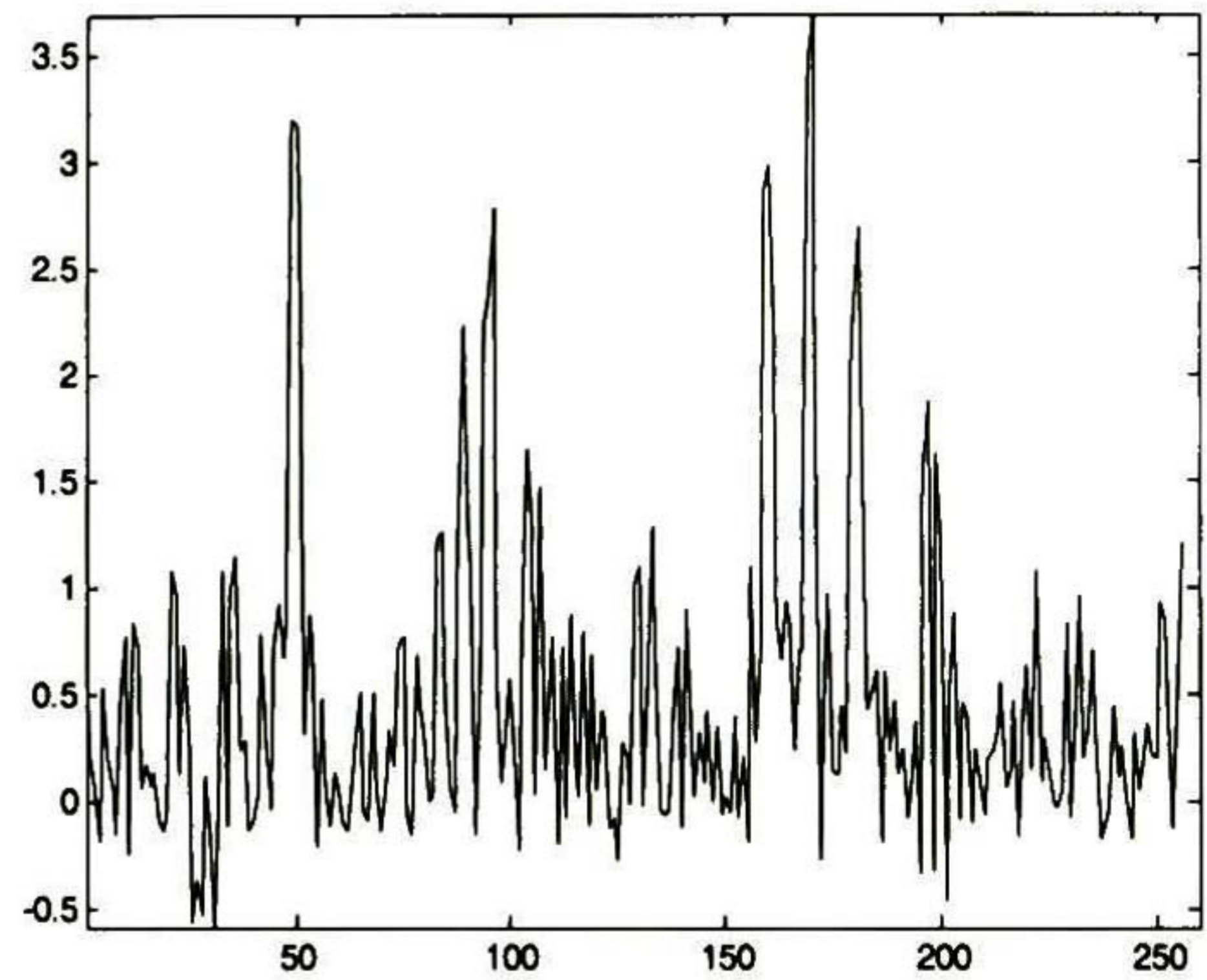
(a) Señal original  $v$



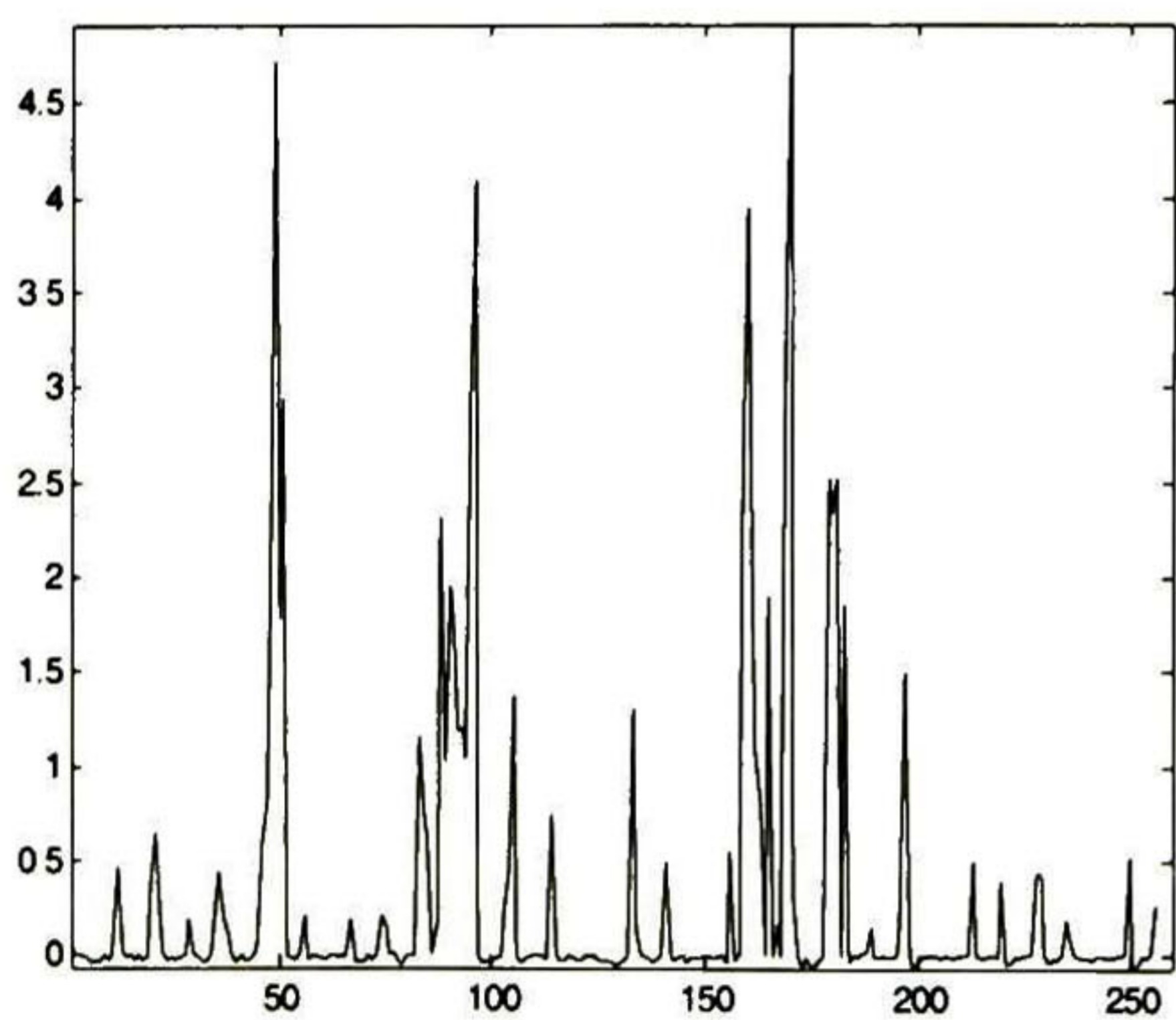
(b) Señal con ruido



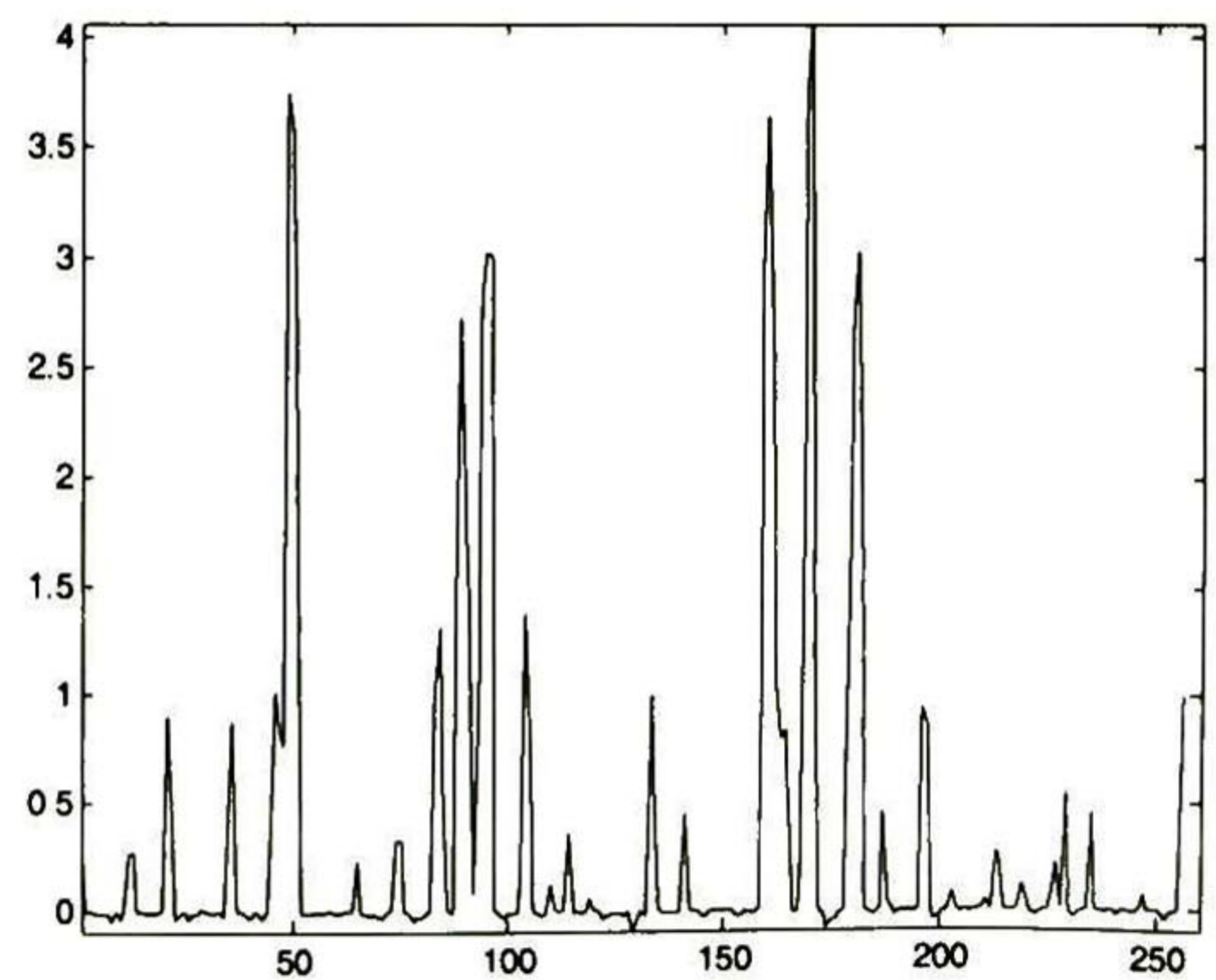
(c) Estimación de 5.4735 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 9.3922 dB a 2 iteraciones con el método WCLS

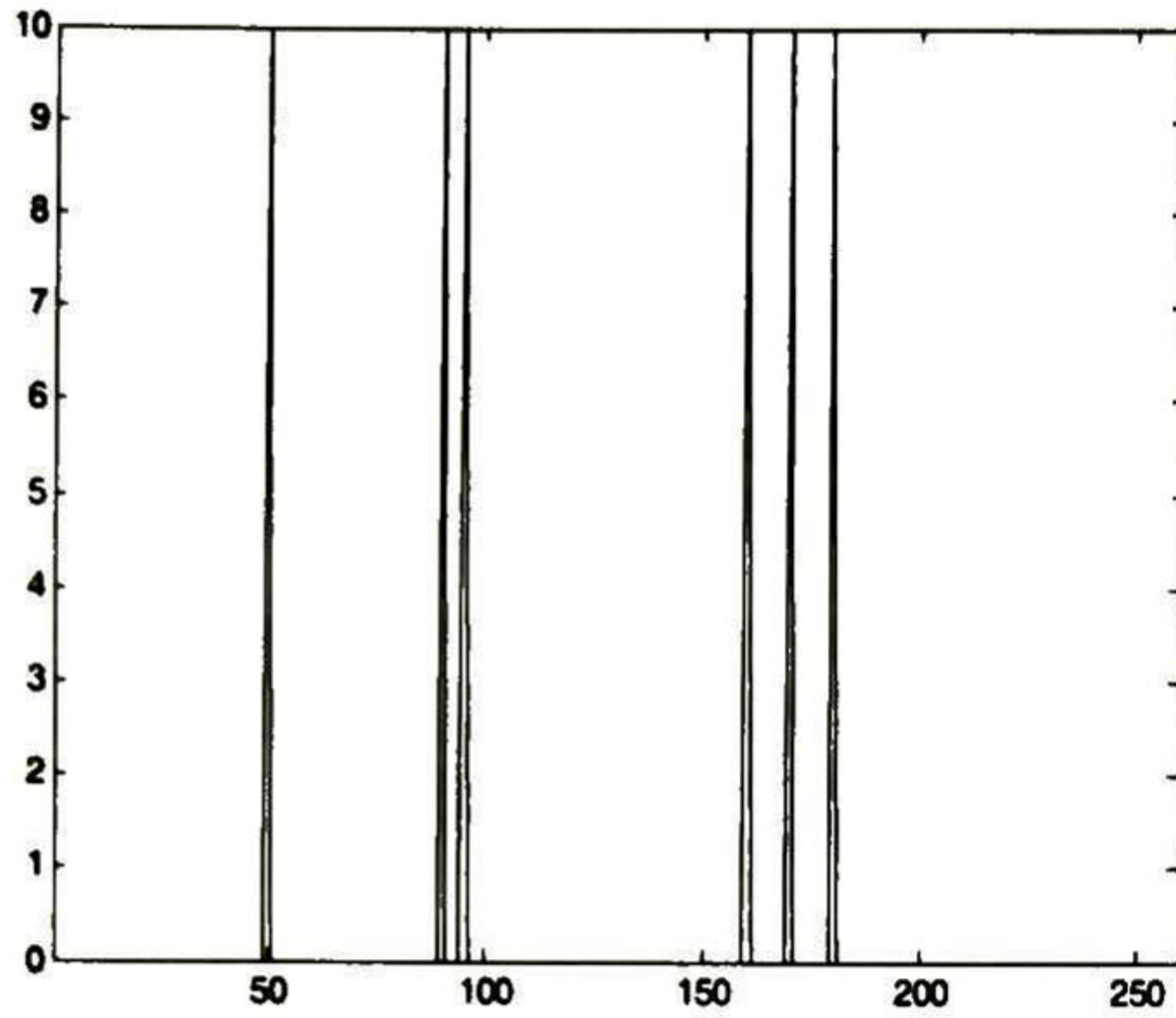


(e) Estimación de 9.9441 dB a 40 iteraciones con el método CLS

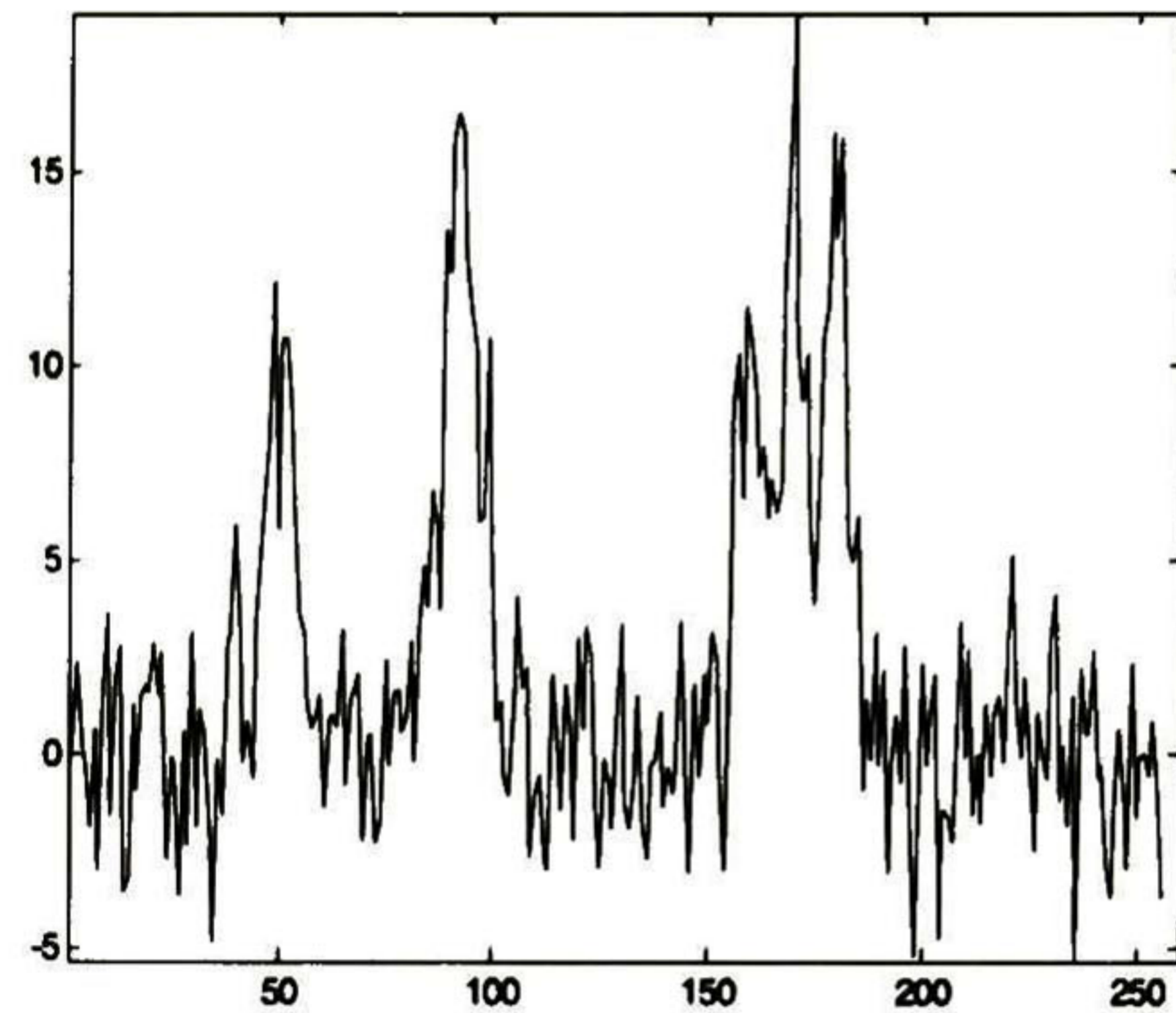


(f) Estimación de 10.2040 dB a 40 iteraciones con el método WCLS

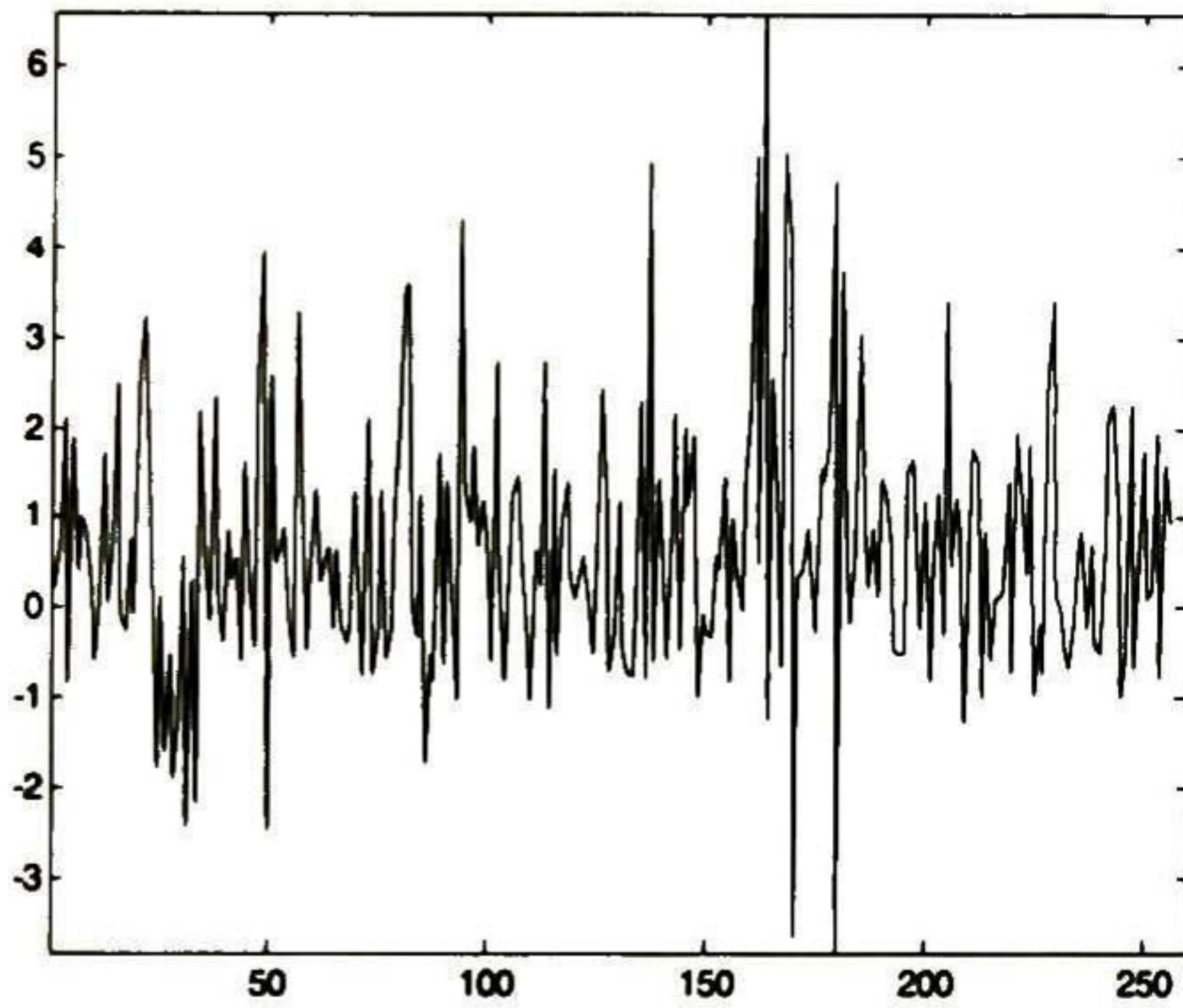
Tabla 4.14. Respuestas con SNR = 3 dB, K = 10 y SSF<sub>2</sub>.



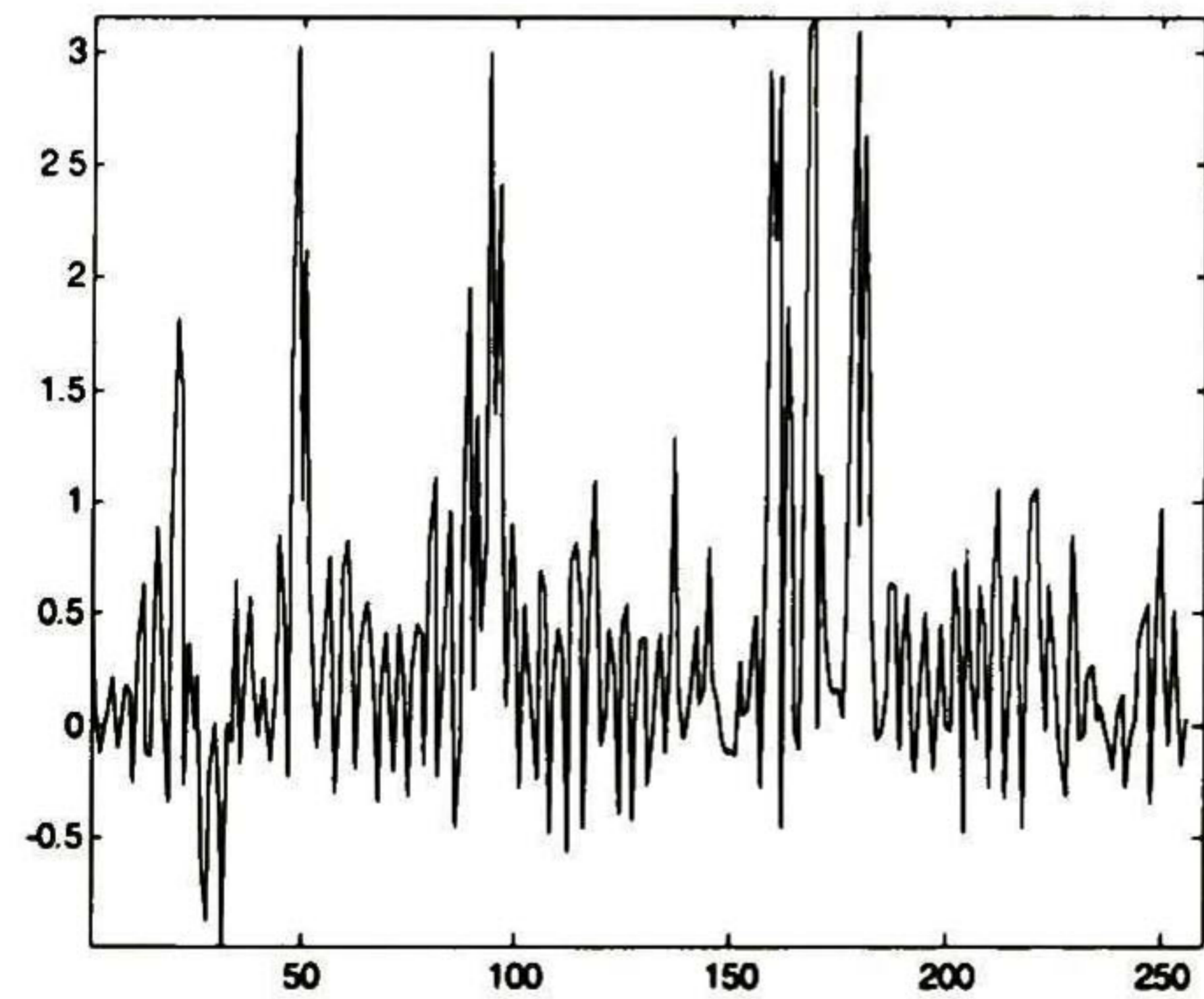
(a) Señal original v



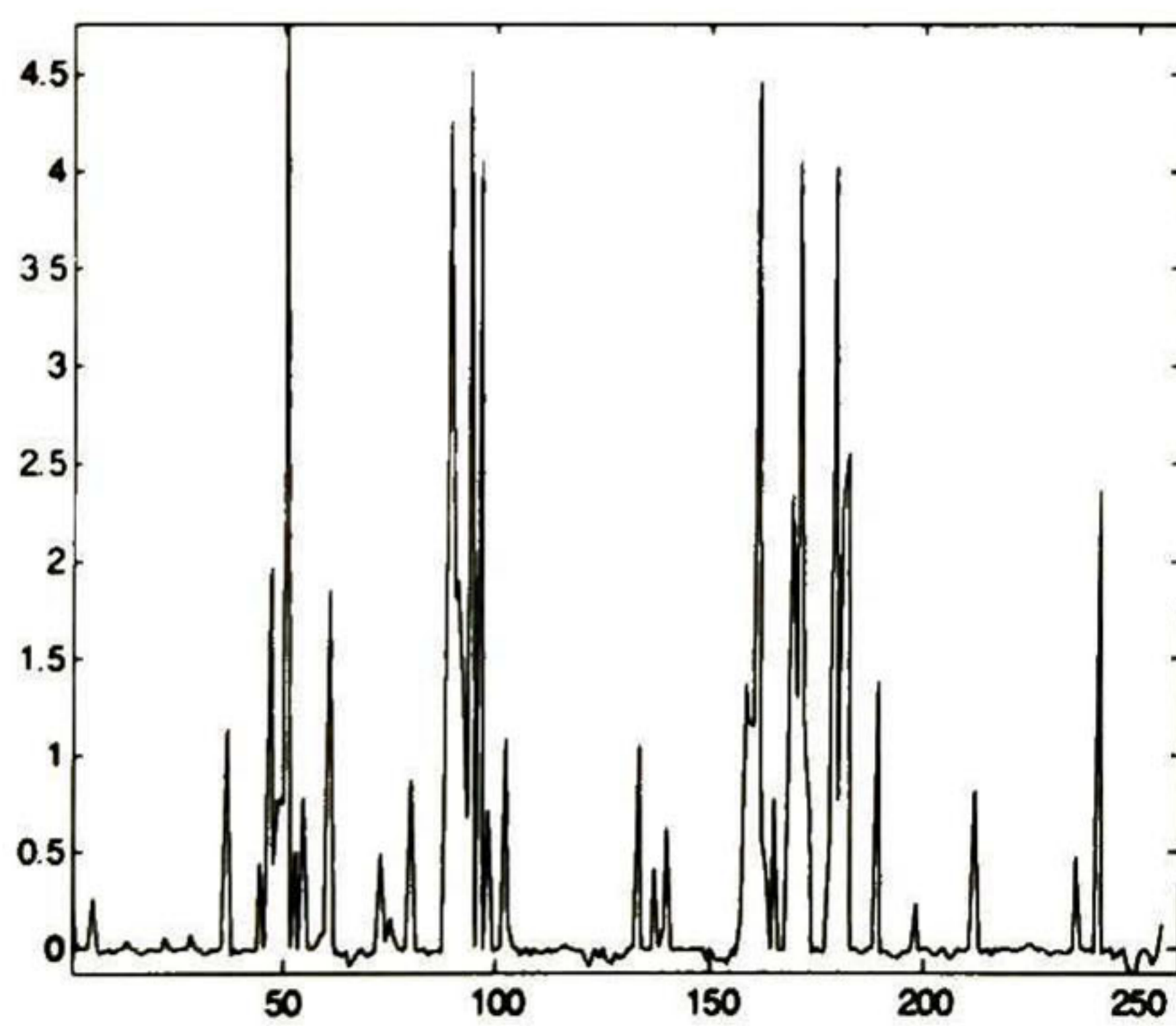
(b) Señal con ruido



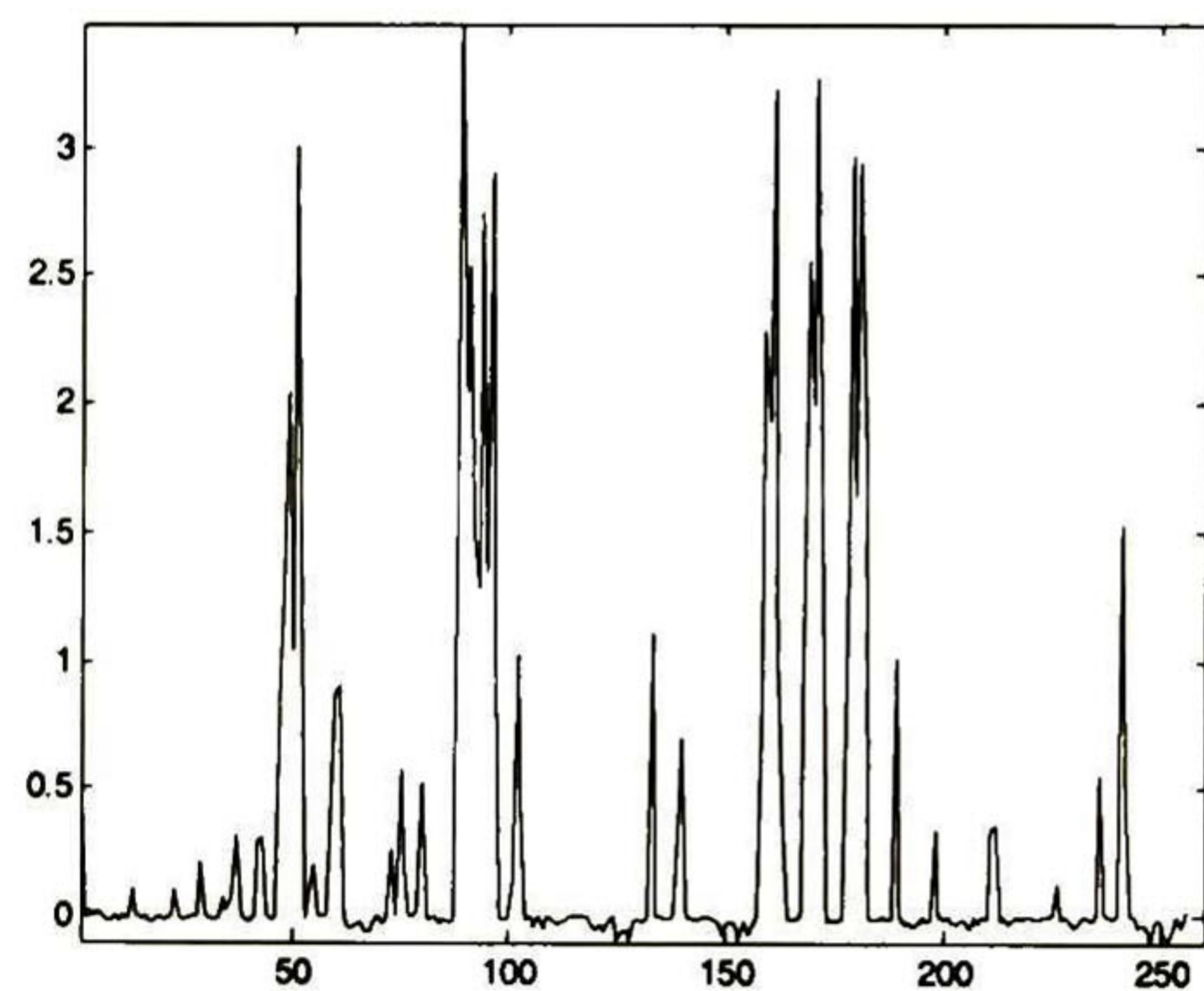
(c) Estimación de 6.1908 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 10.1865 dB a 2 iteraciones con el método WCLS

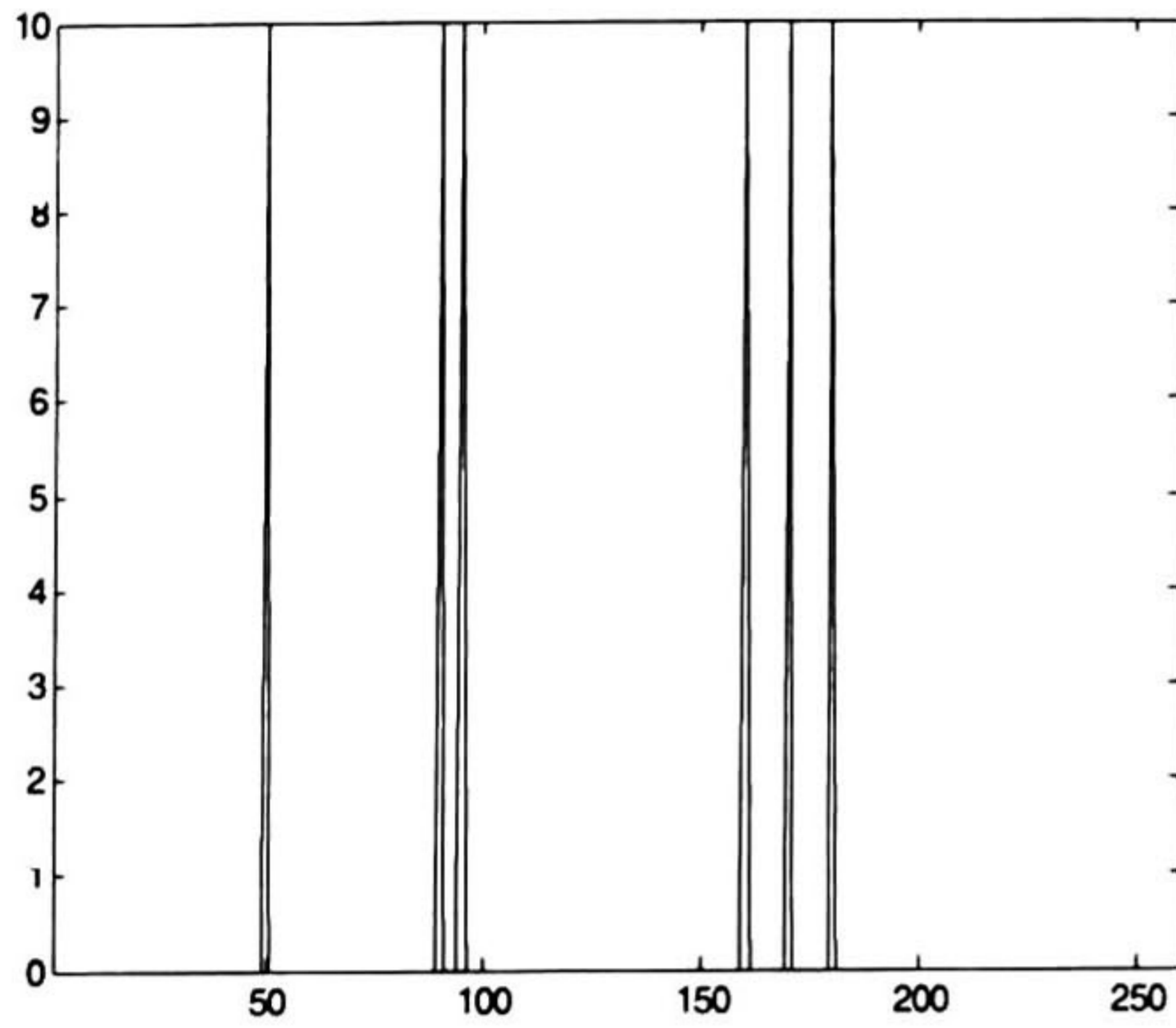


(e) Estimación de 9.6761 dB a 40 iteraciones con el método CLS

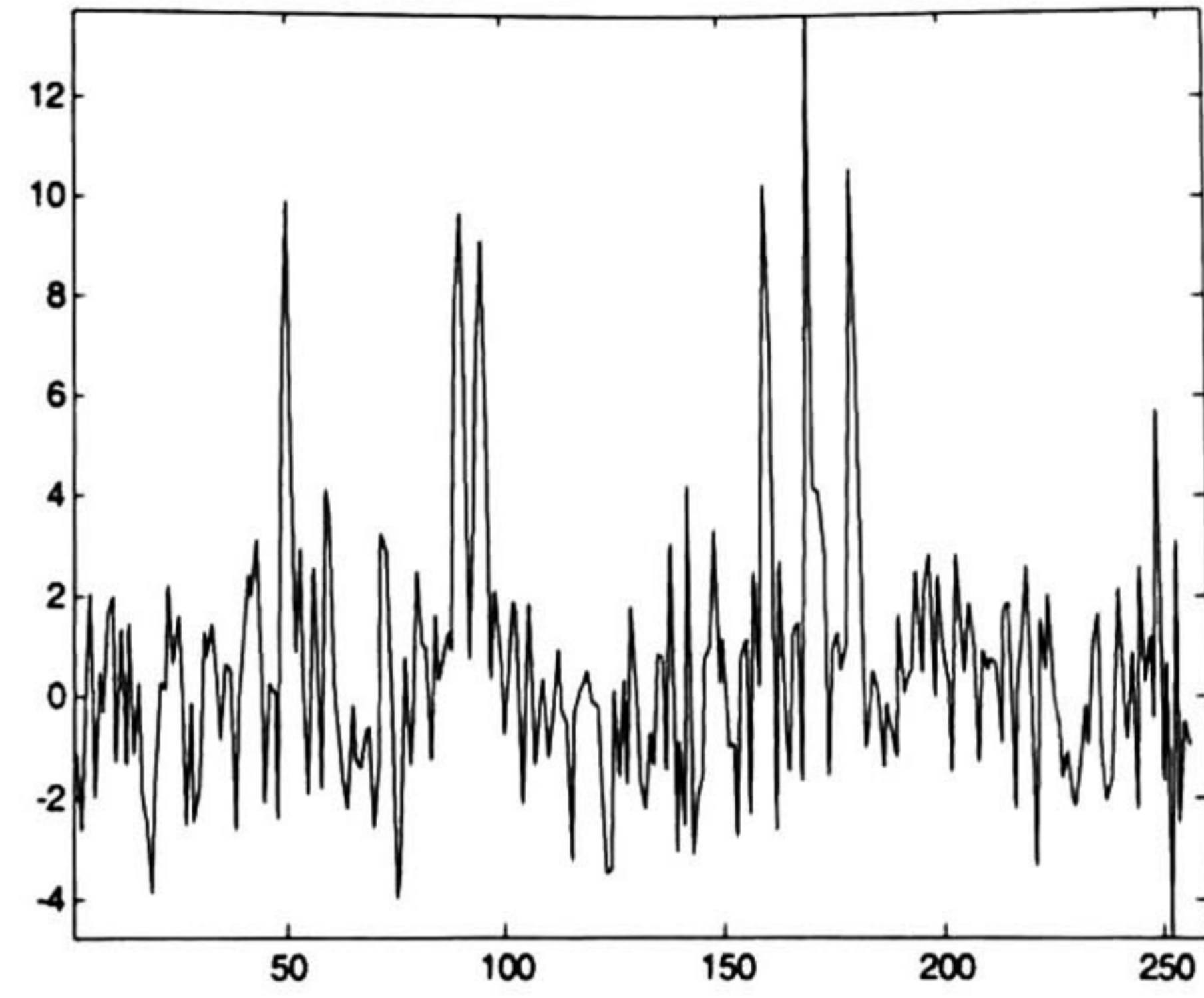


(f) Estimación de 10.6056 dB a 40 iteraciones con el método WCLS

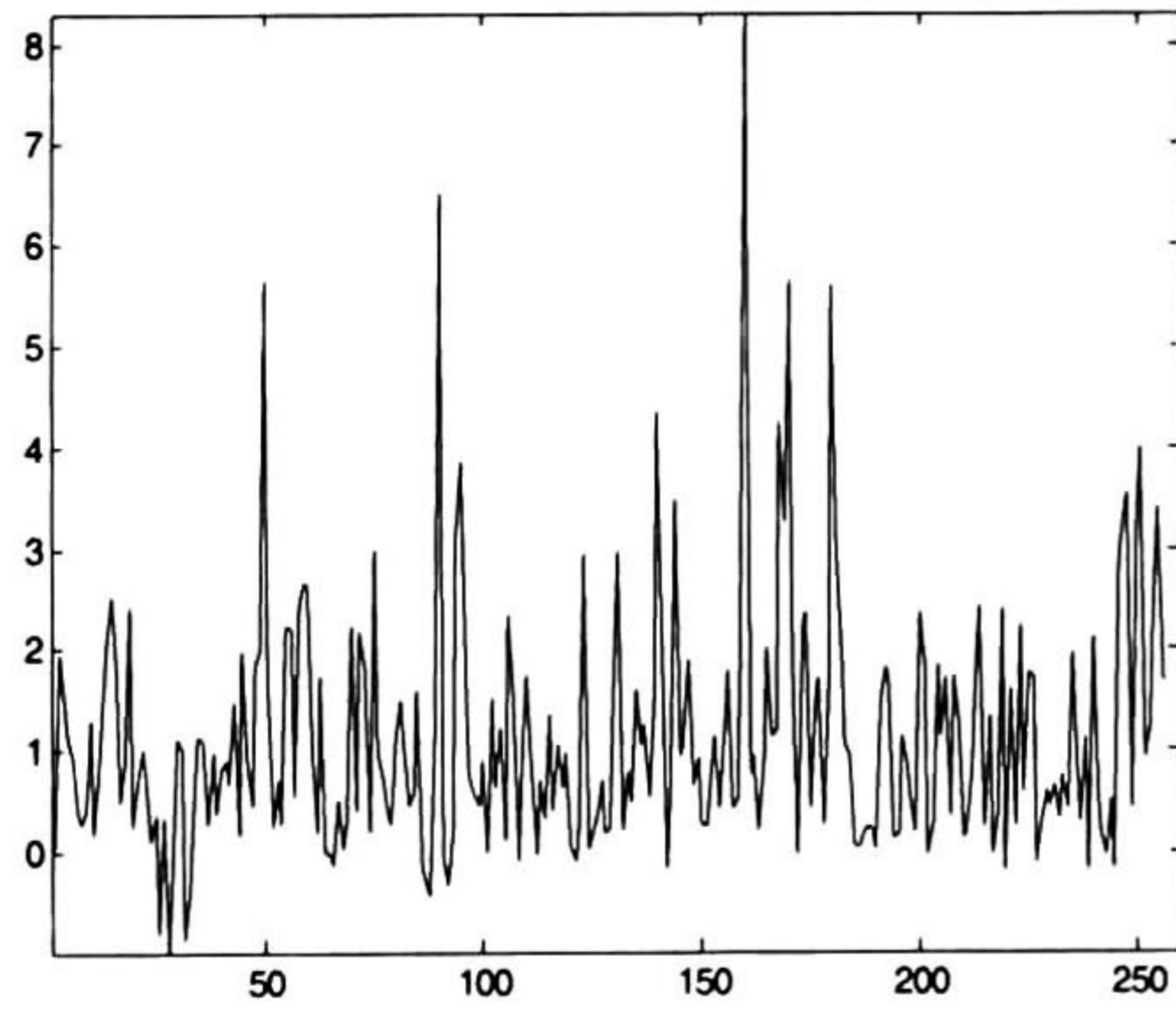
Tabla 4.15. Respuestas con SNR = 3 dB, K = 15 y SSF<sub>2</sub>.



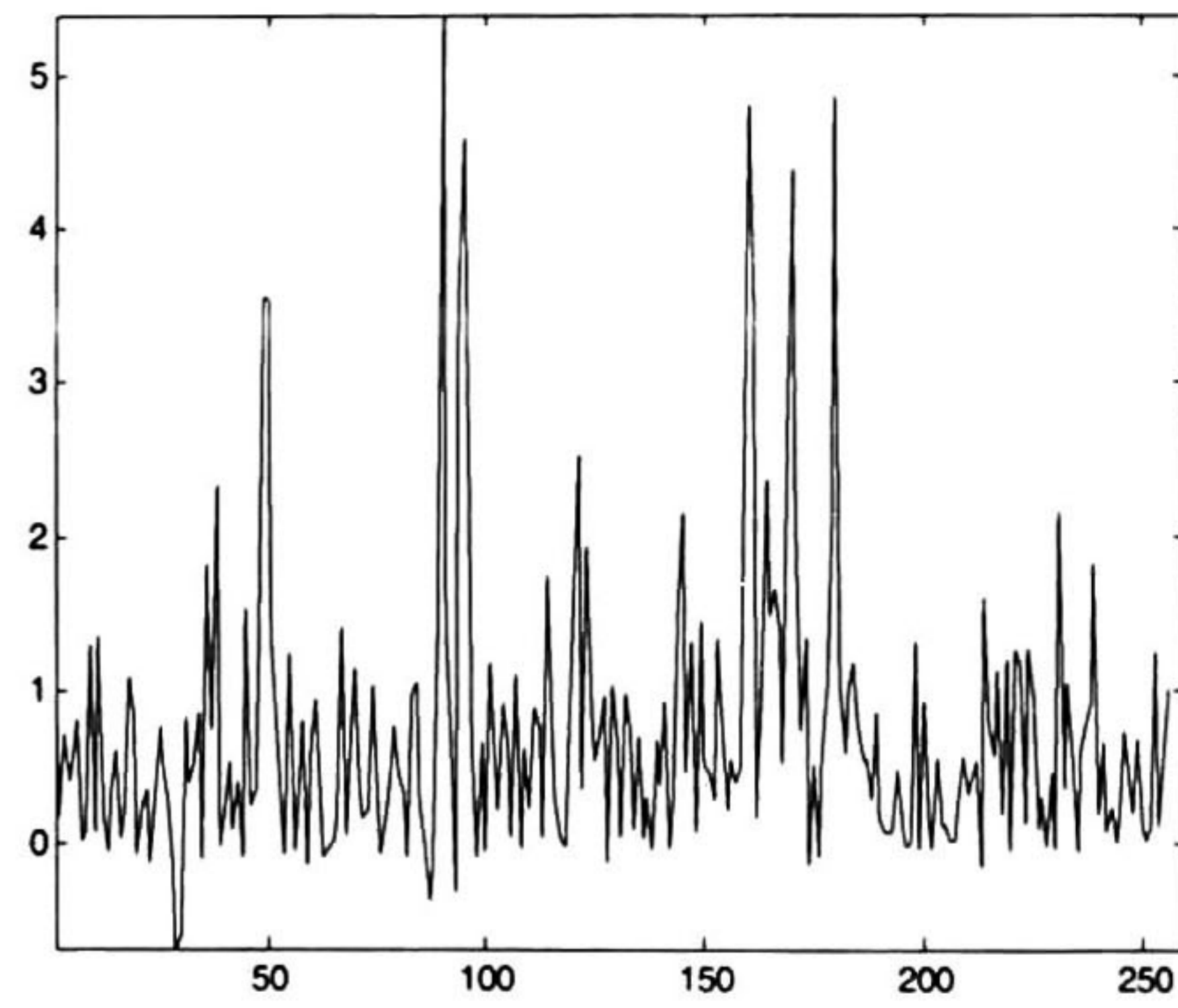
(a) Señal original v



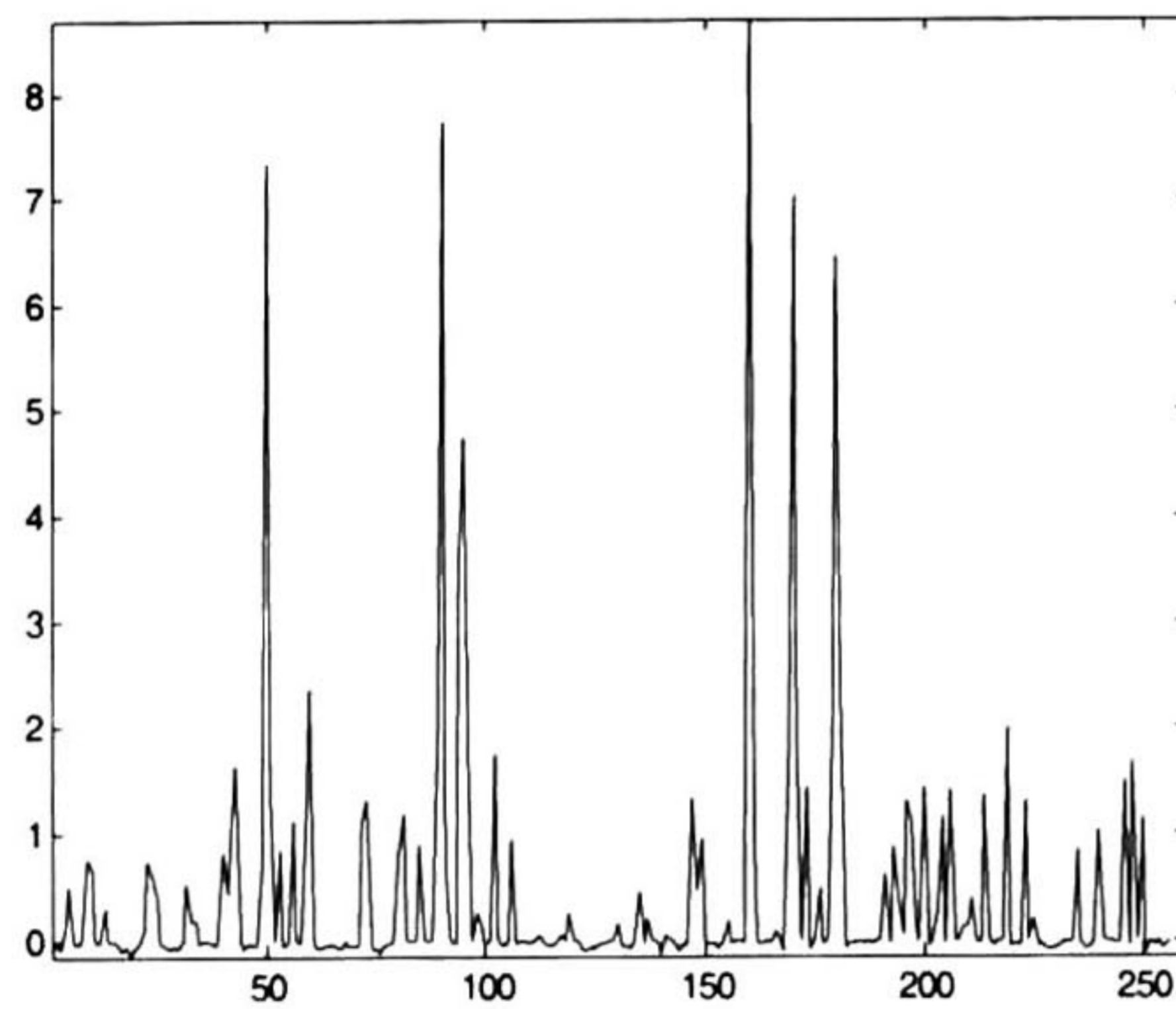
(b) Señal con ruido



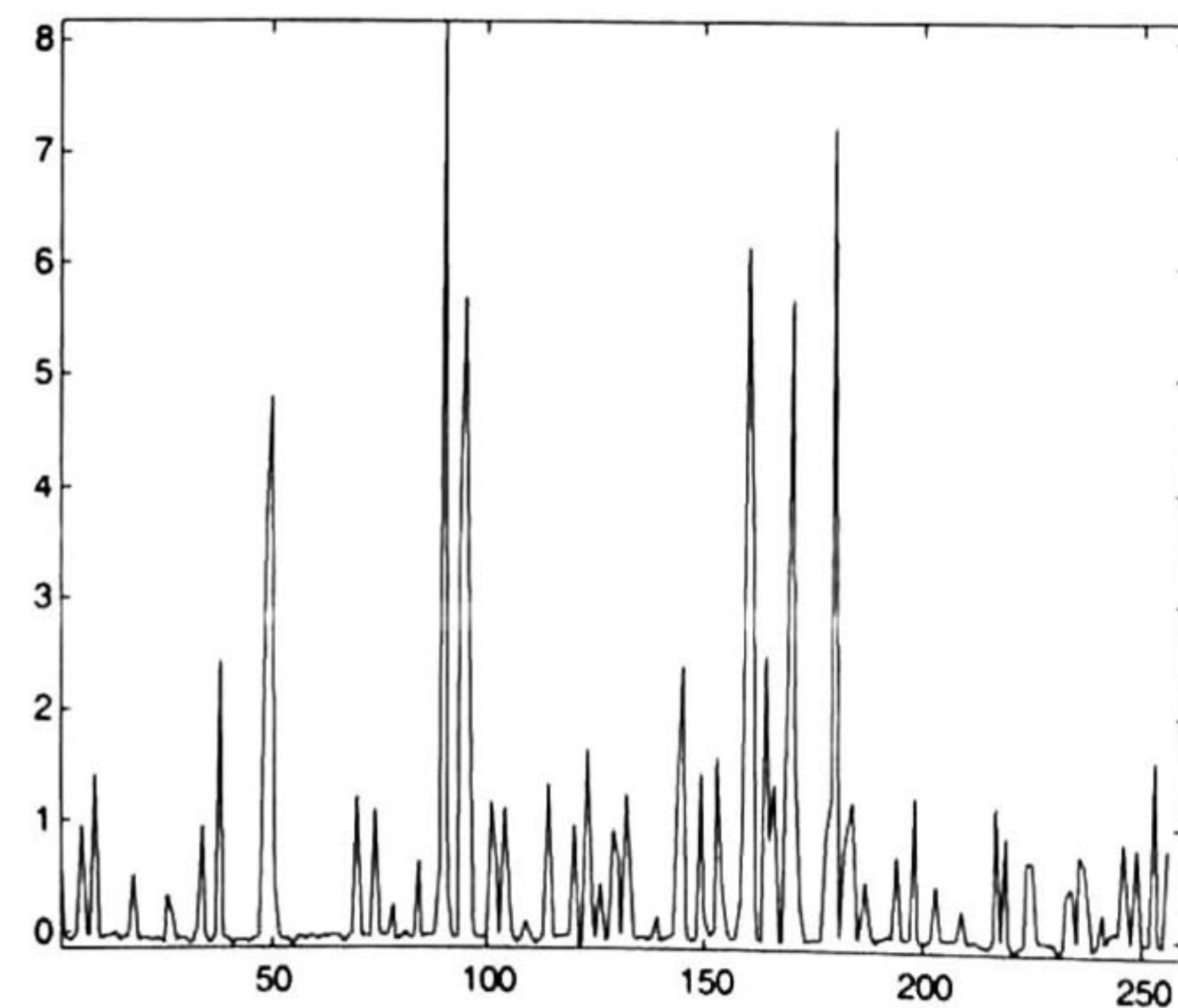
(c) Estimación de 3.0703 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 5.2088 dB a 2 iteraciones con el método WCLS



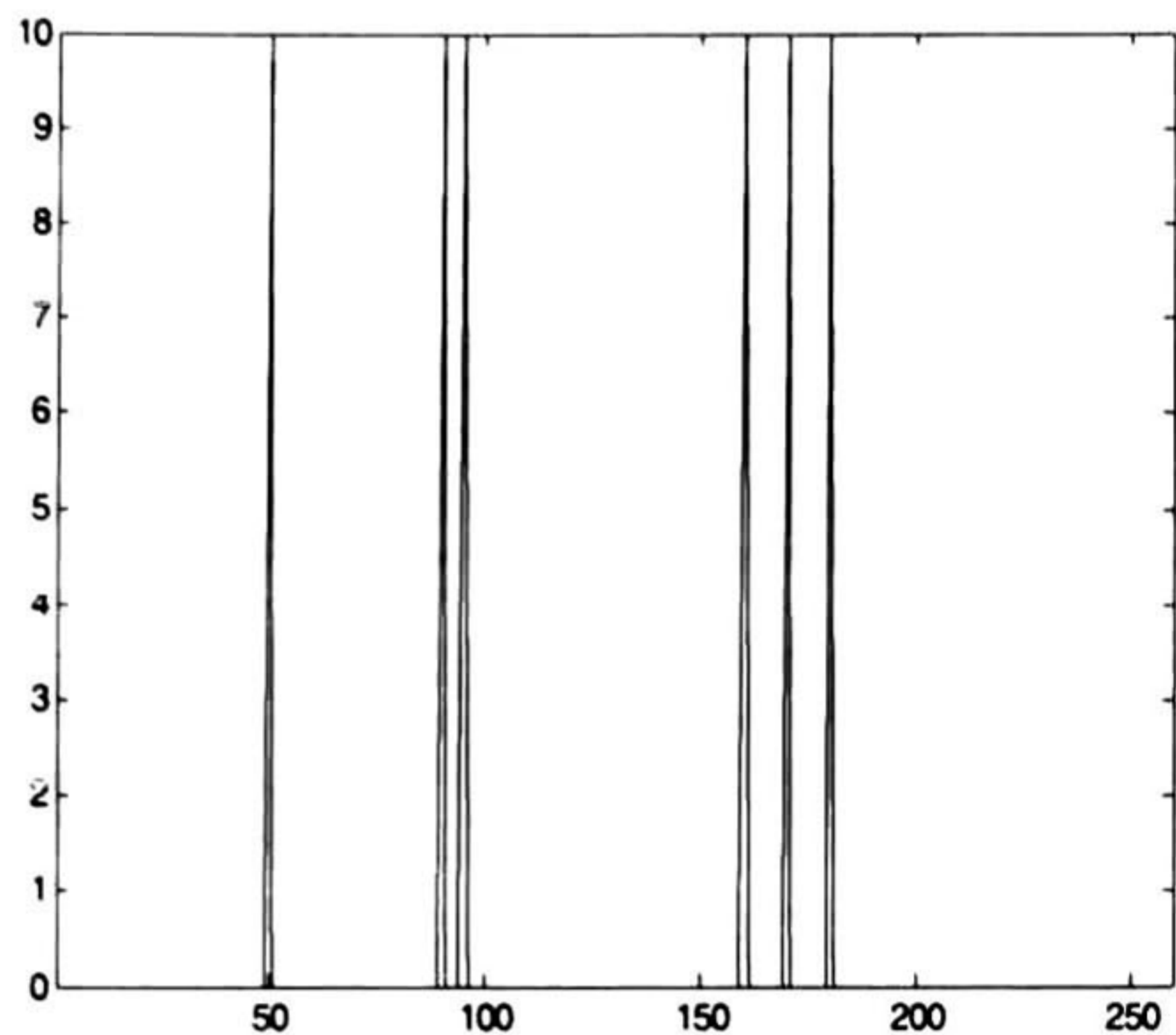
(e) Estimación de 8.8557 dB a 40 iteraciones con el método CLS



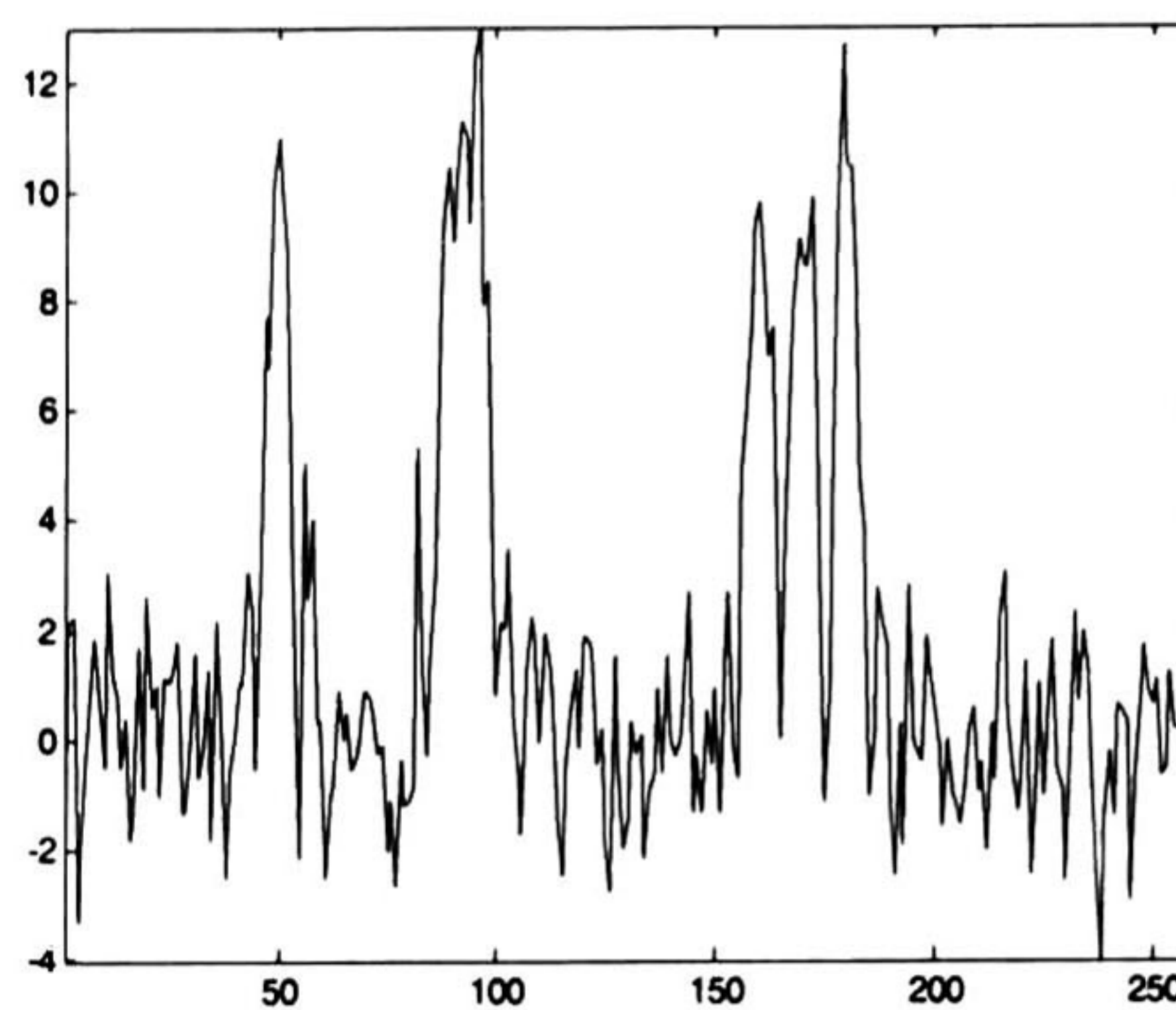
(f) Estimación de 7.8953 dB a 40 iteraciones con el método WCLS



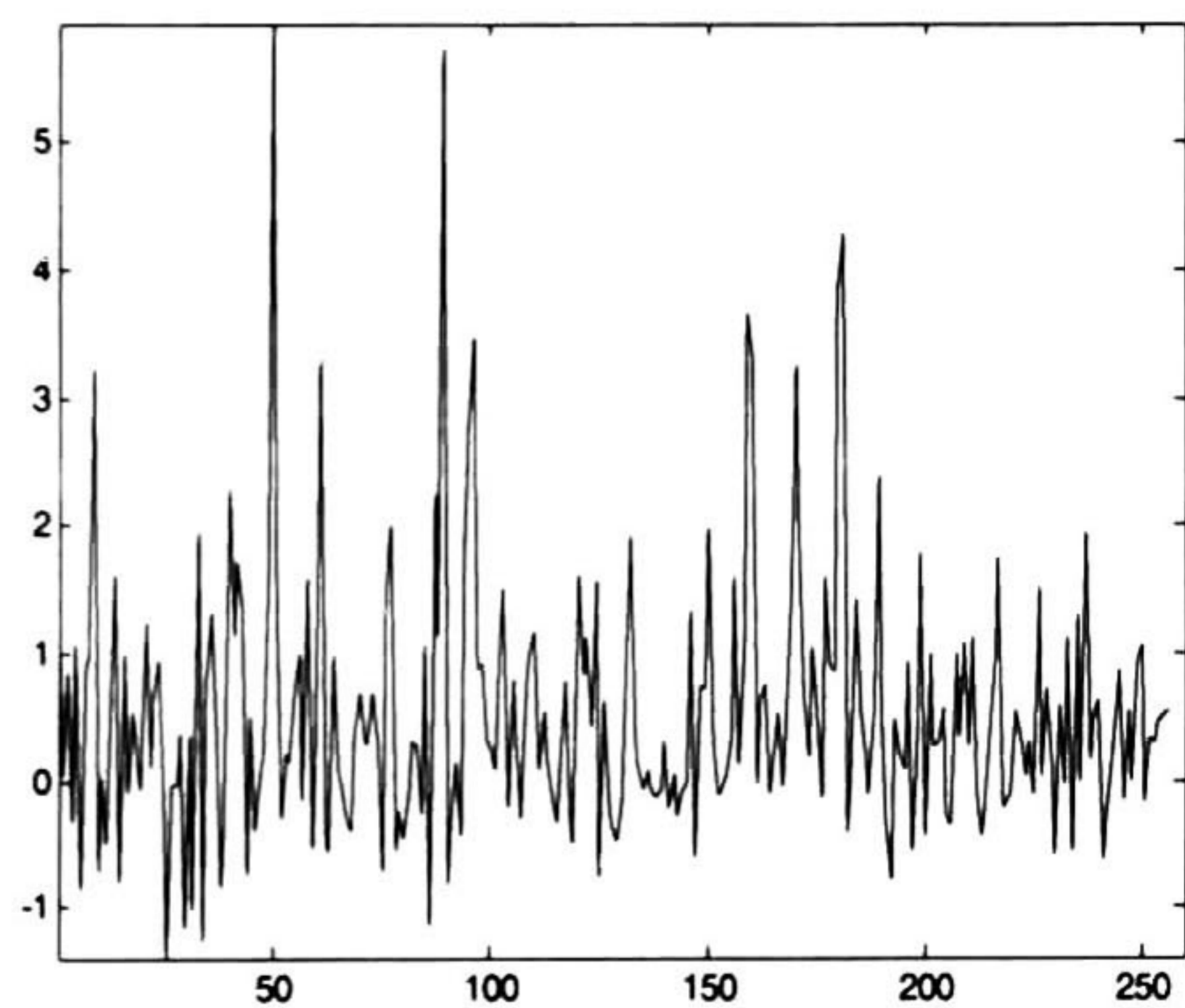
Tabla 4.16. Respuestas con SNR = 6 dB, K = 5 y SSF<sub>2</sub>.



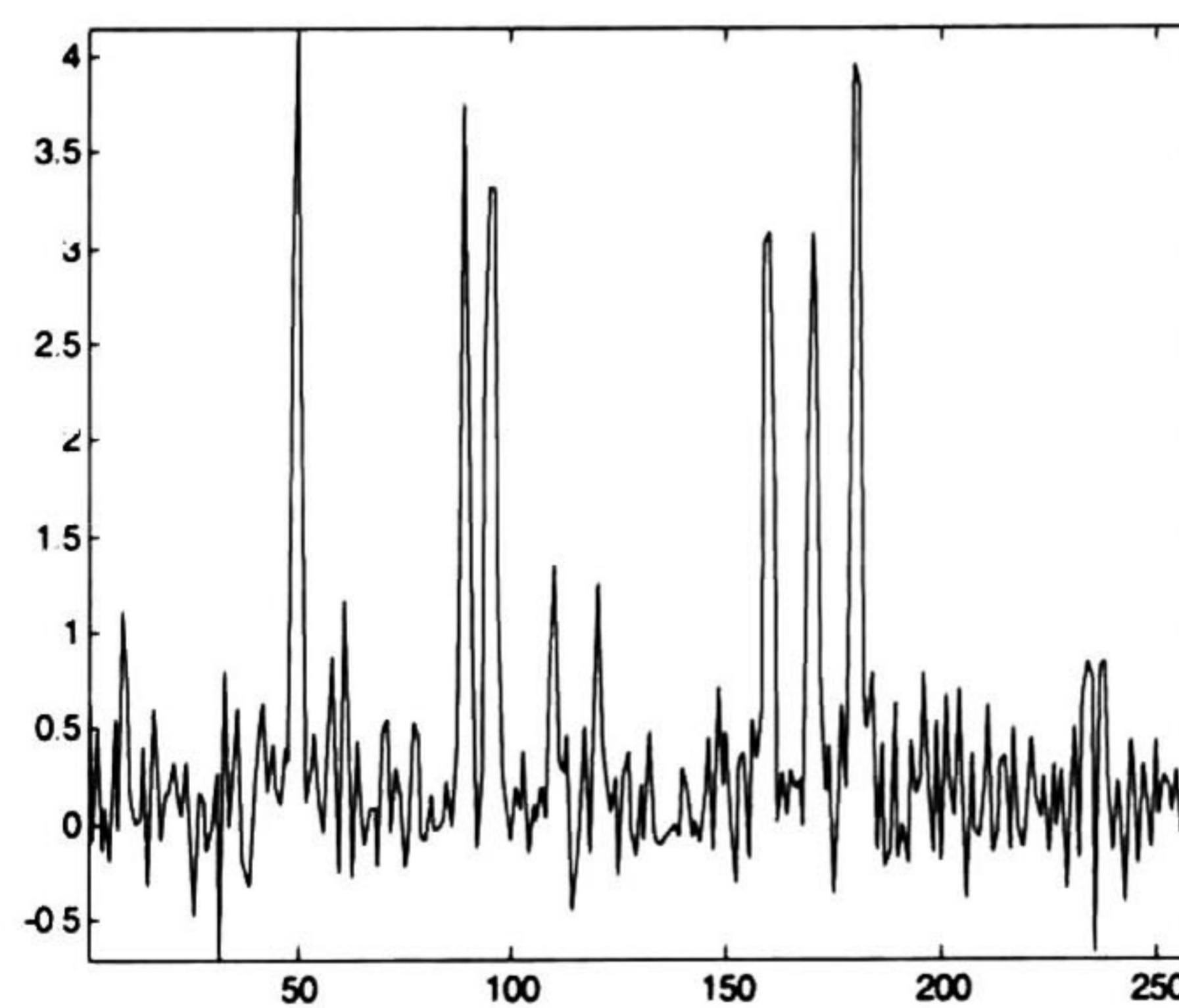
(a) Señal original v



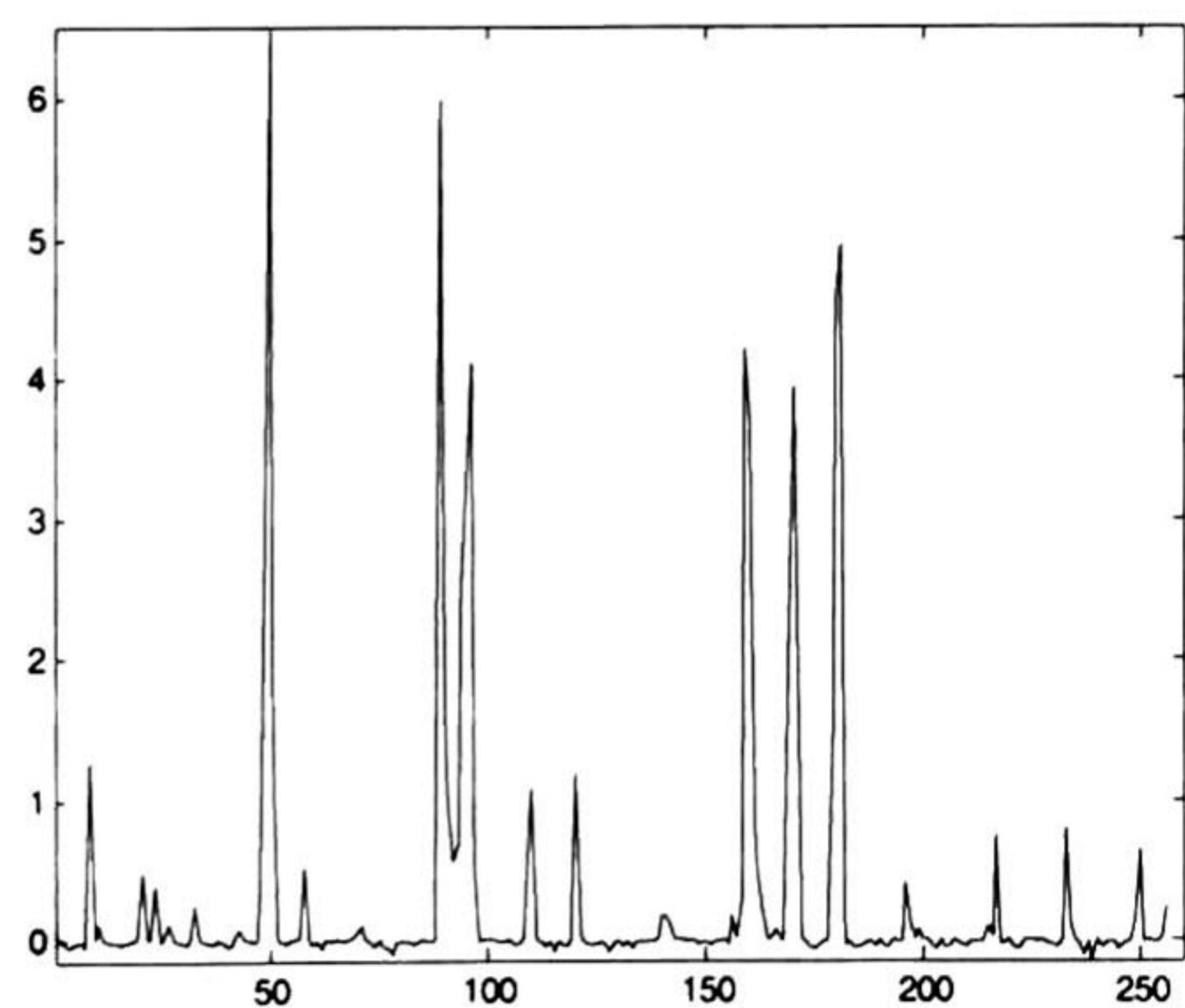
(b) Señal con ruido



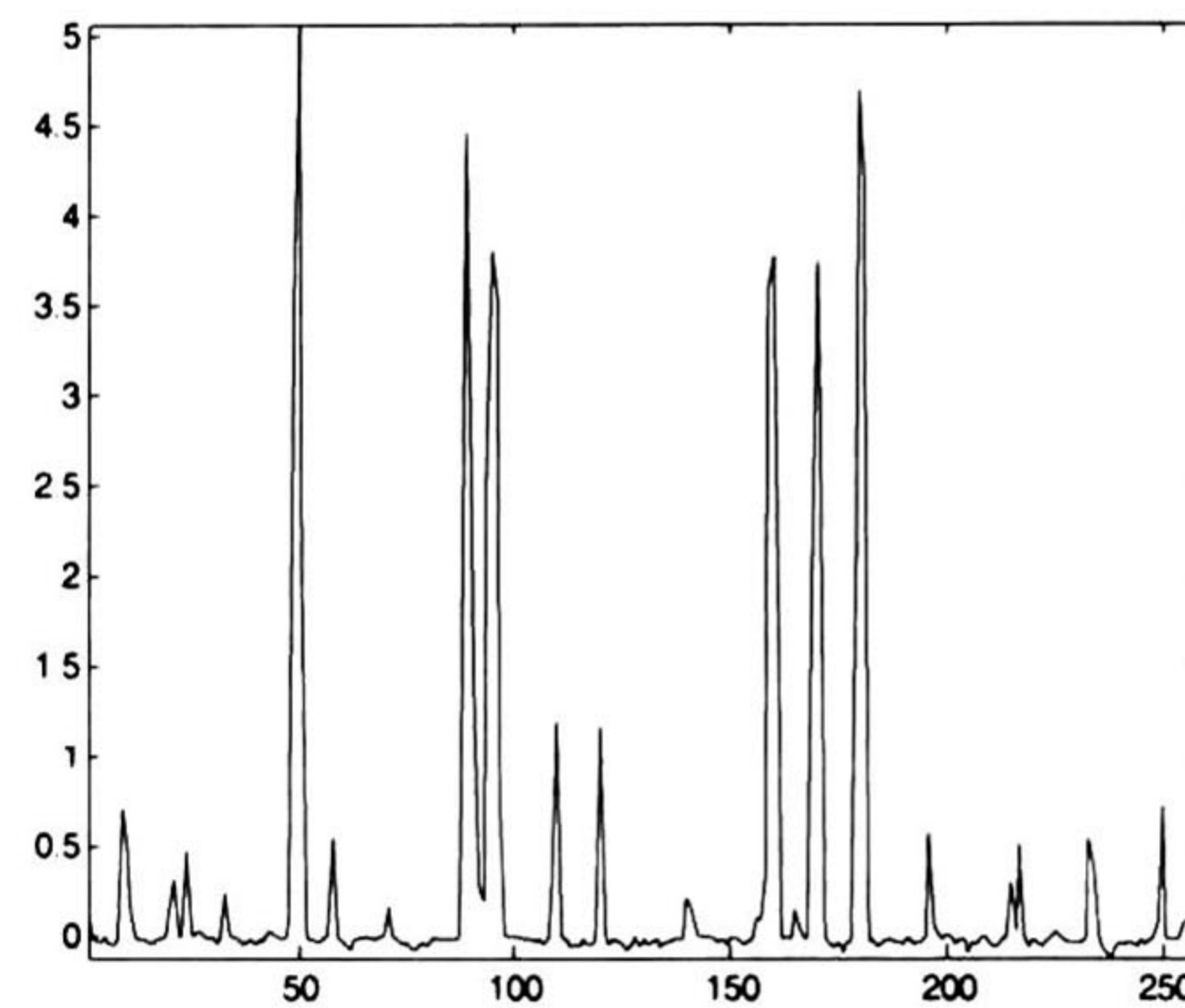
(c) Estimación de 7.5350 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 9.0352 dB a 2 iteraciones con el método WCLS

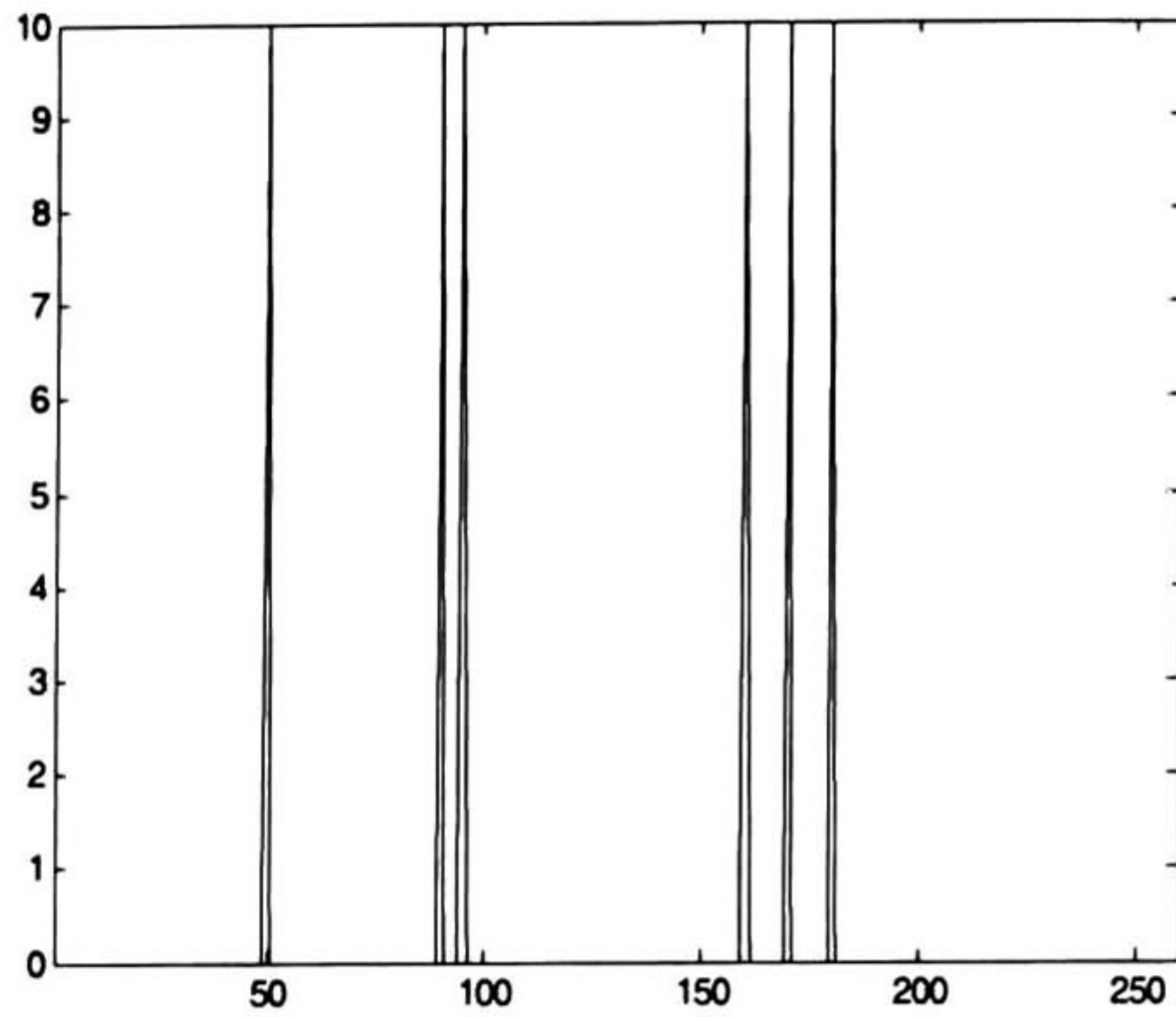


(e) Estimación de 9.3824 dB a 40 iteraciones con el método CLS

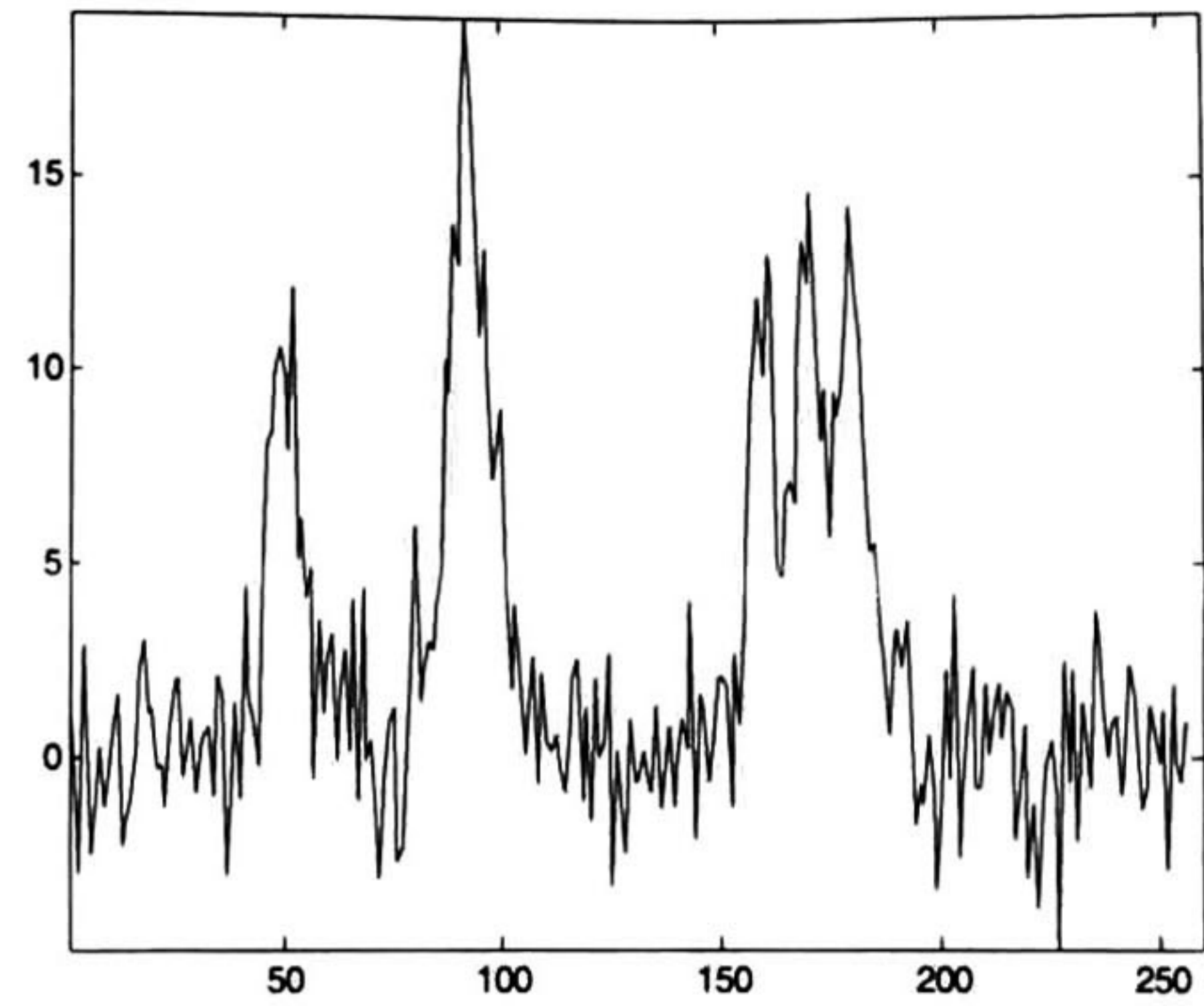


(f) Estimación de 9.7265 dB a 40 iteraciones con el método WCLS

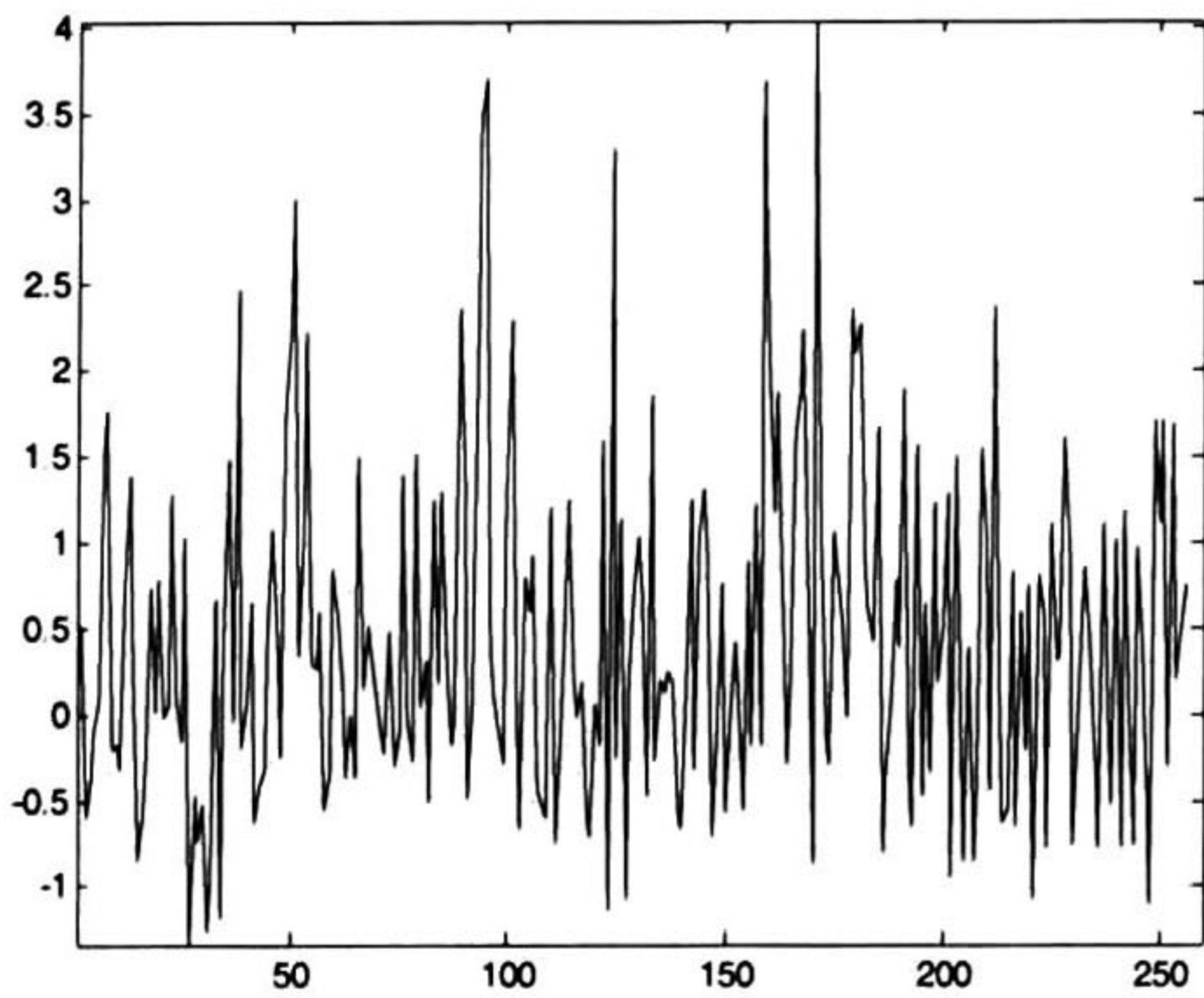
Tabla 4.17. Respuestas con SNR = 6 dB, K = 10 y SSF<sub>2</sub>.



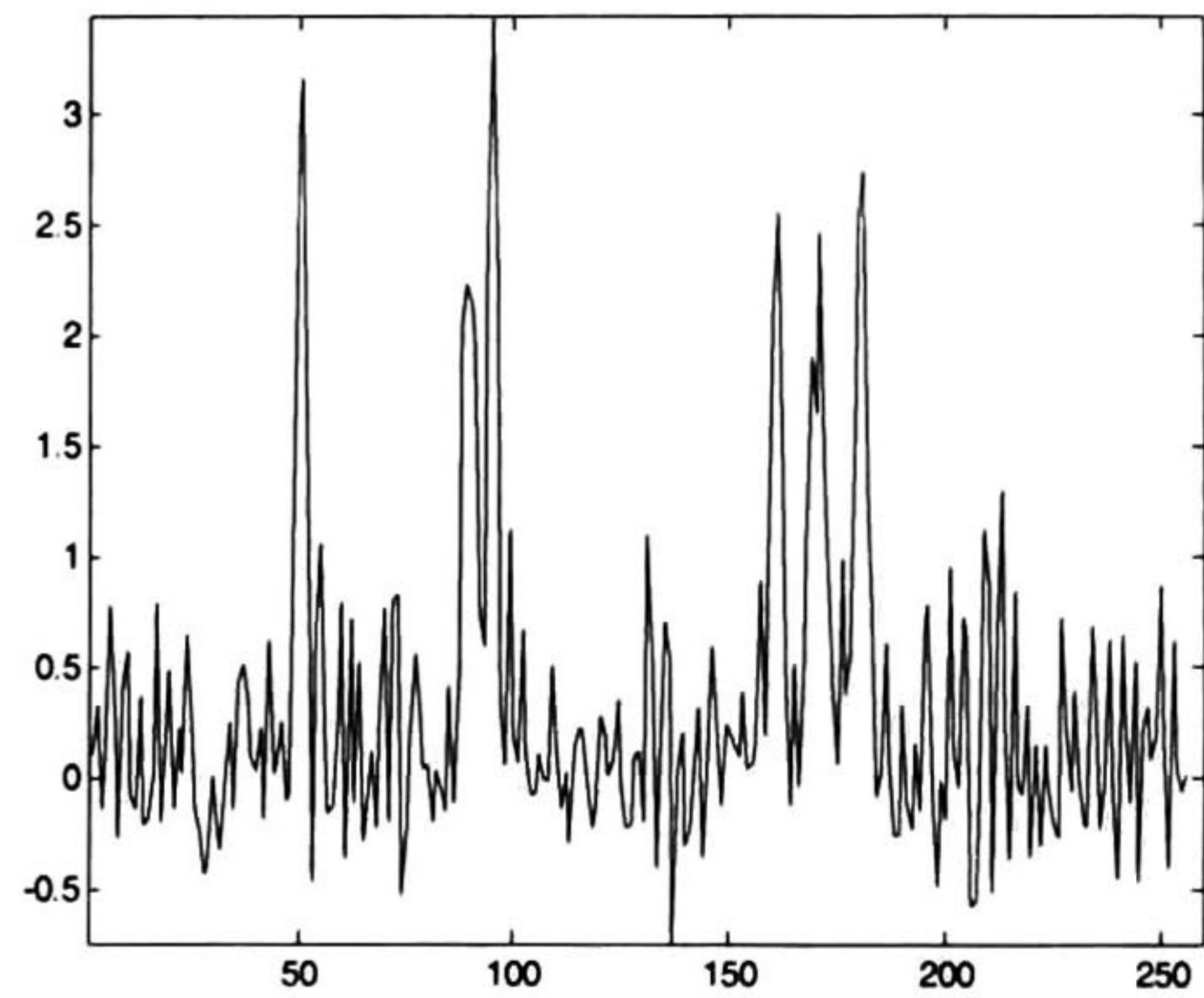
(a) Señal original v



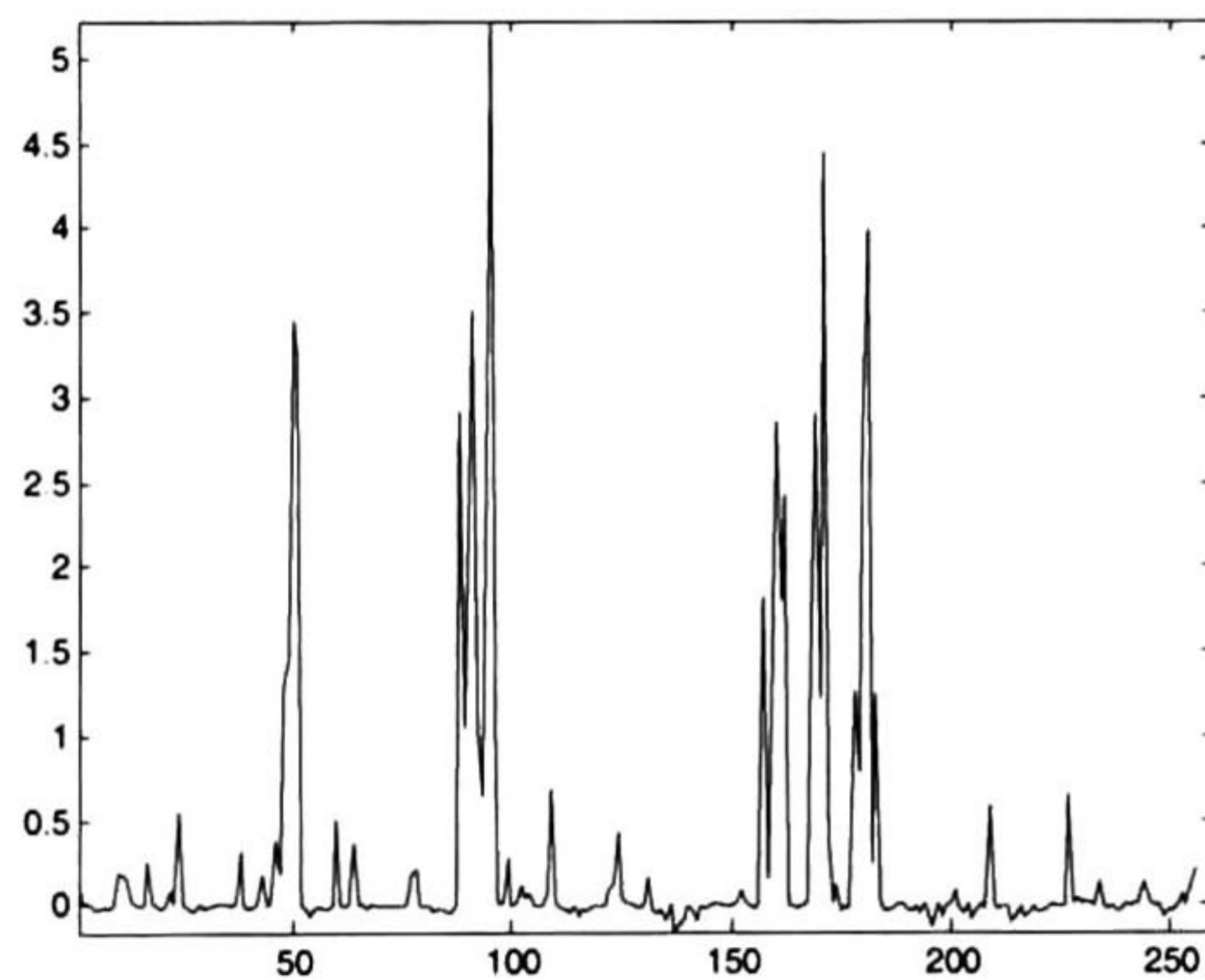
(b) Señal con ruido



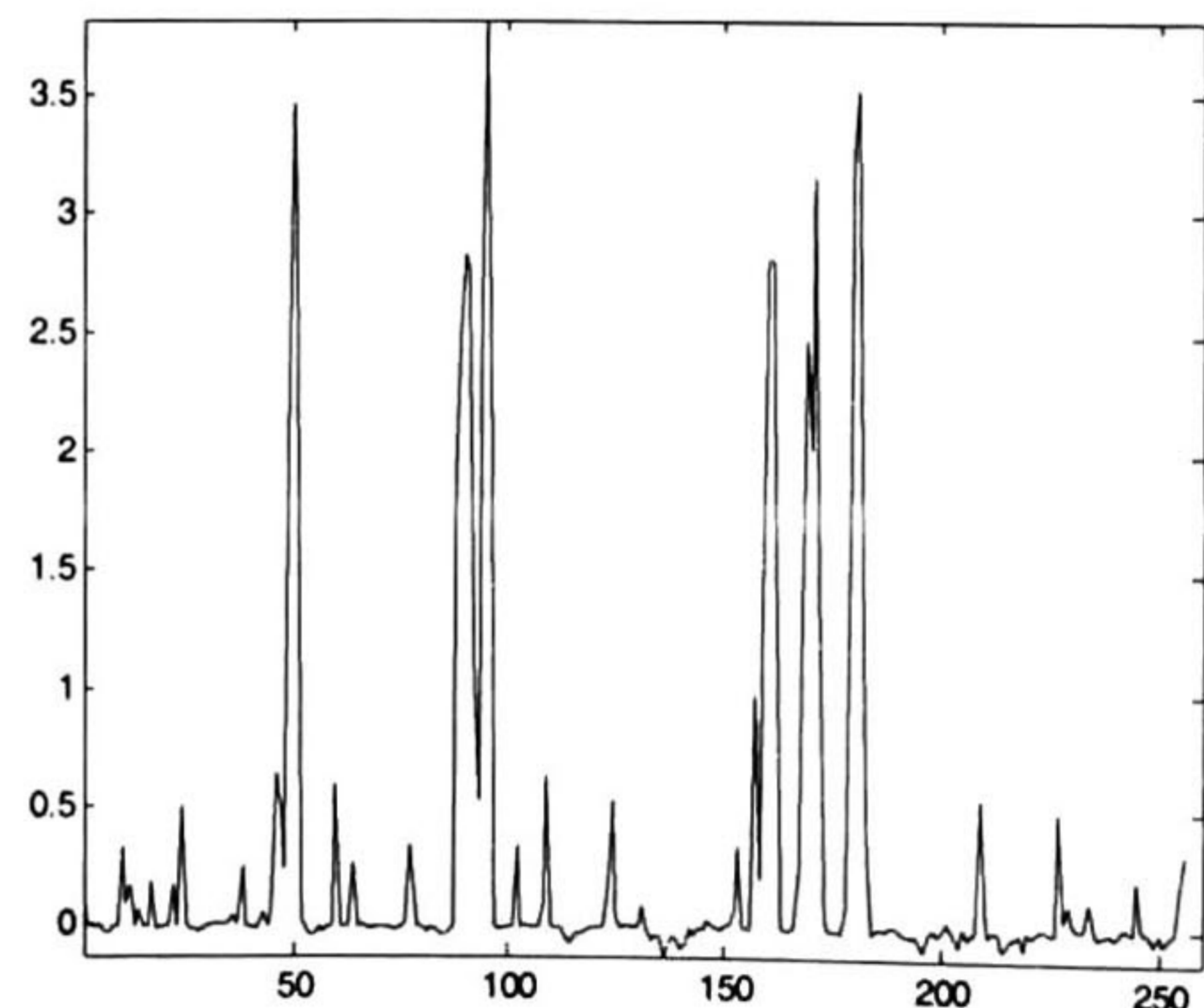
(c) Estimación de 9.5088 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 10.6431 dB a 2 iteraciones con el método WCLS

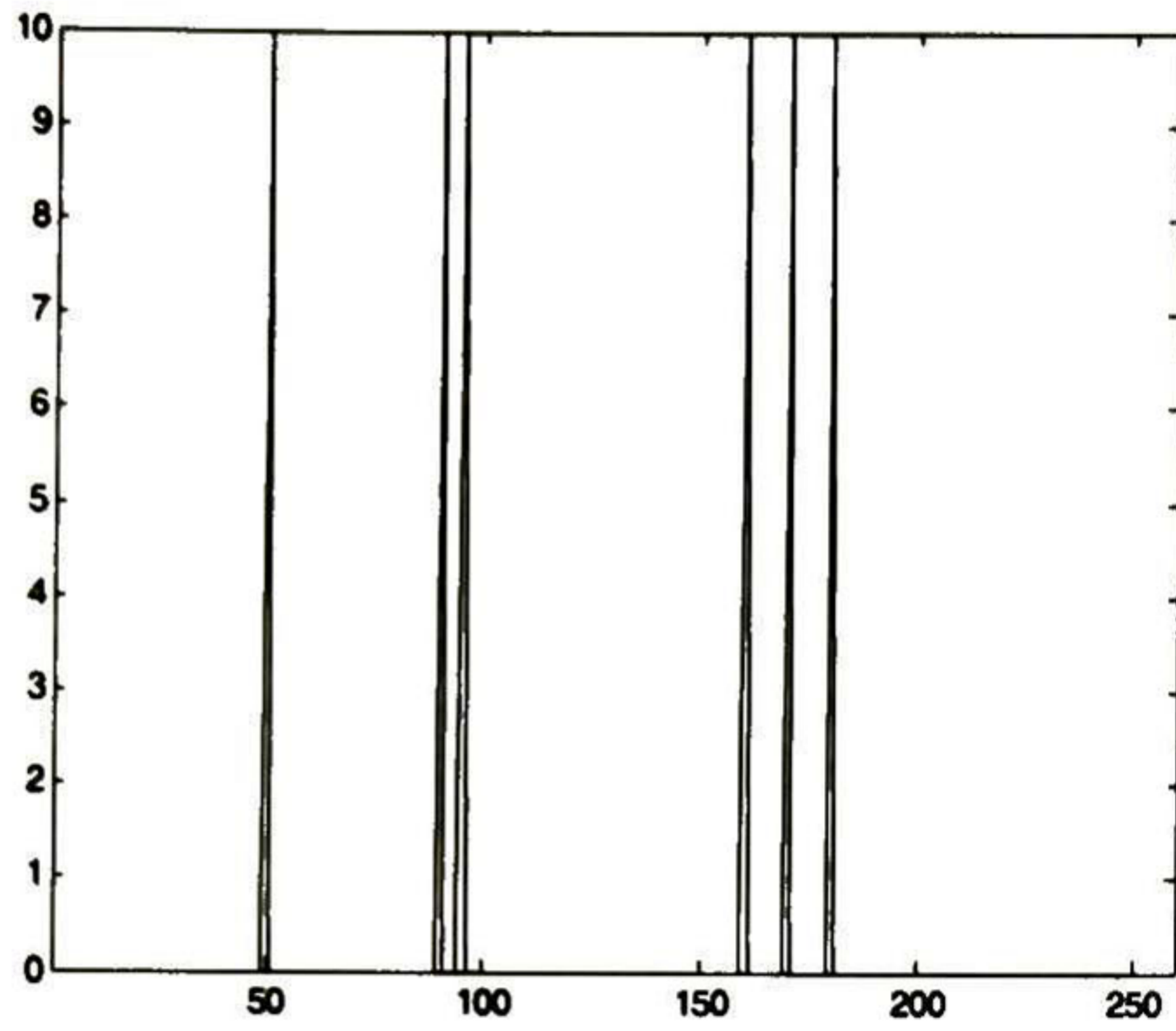


(e) Estimación de 11.1137 dB a 40 iteraciones con el método CLS

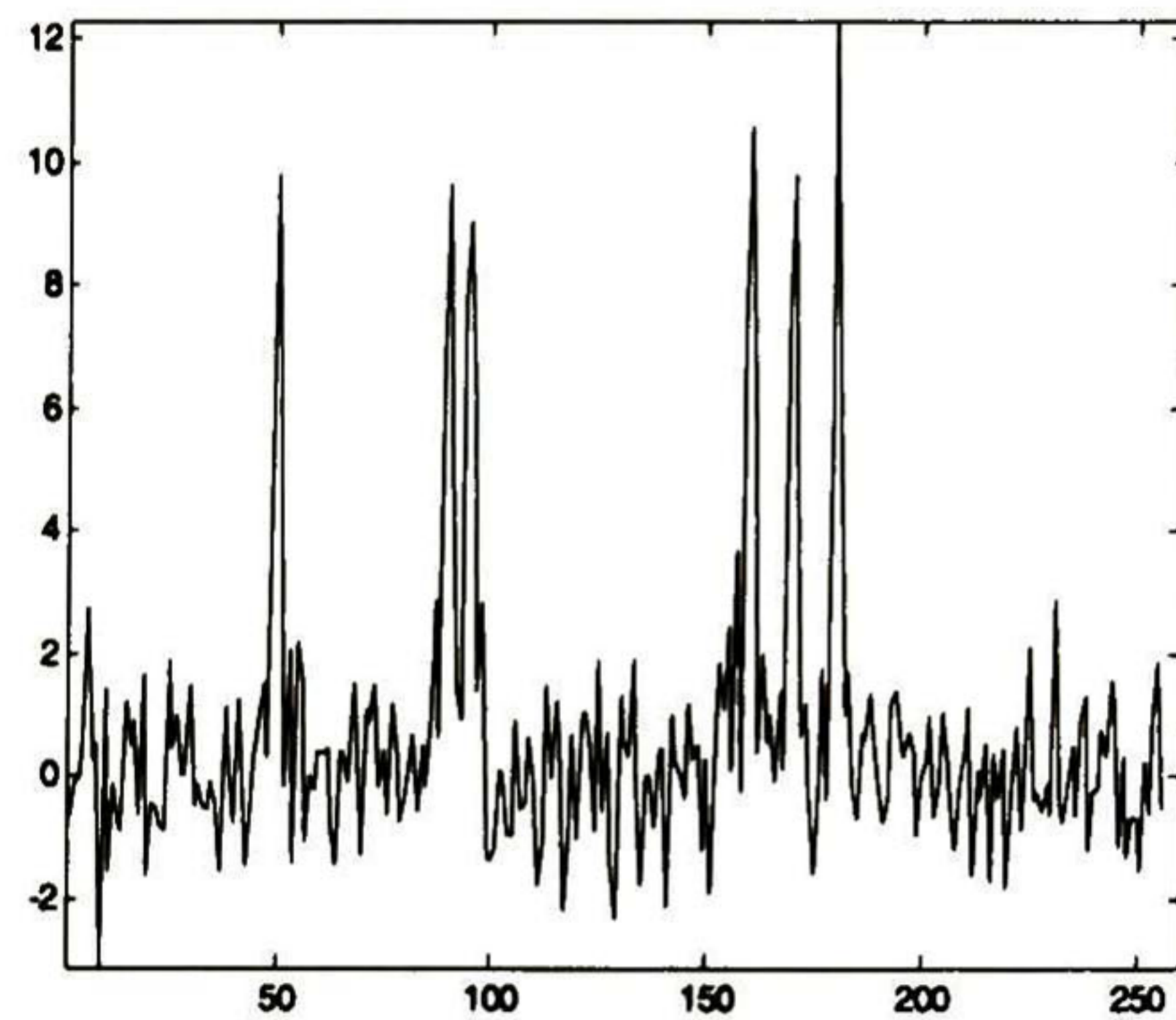


(f) Estimación de 11.3108 dB a 40 iteraciones con el método WCLS

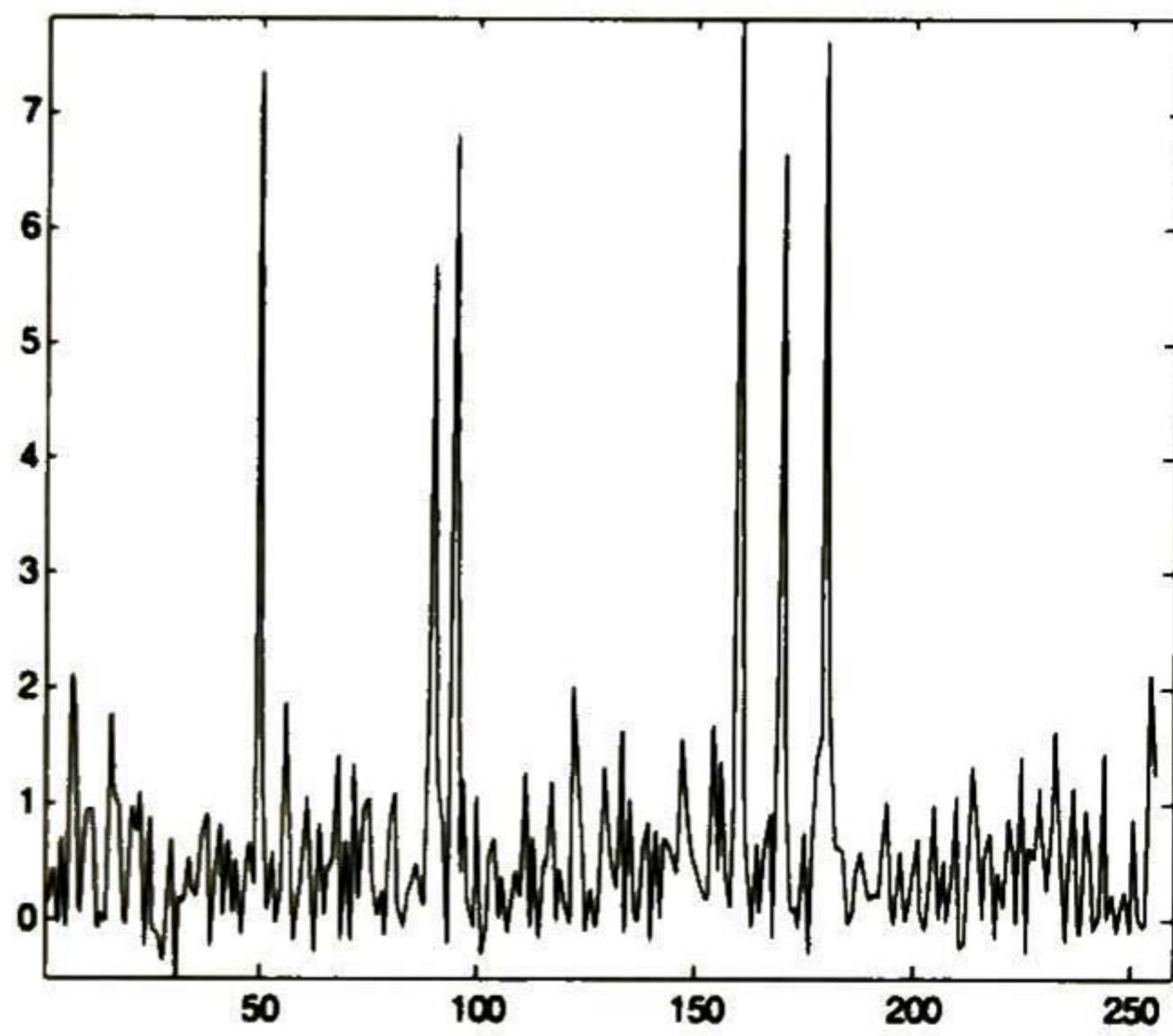
Tabla 4.18. Respuestas con SNR = 6 dB, K = 15 y  $SSF_2$ .



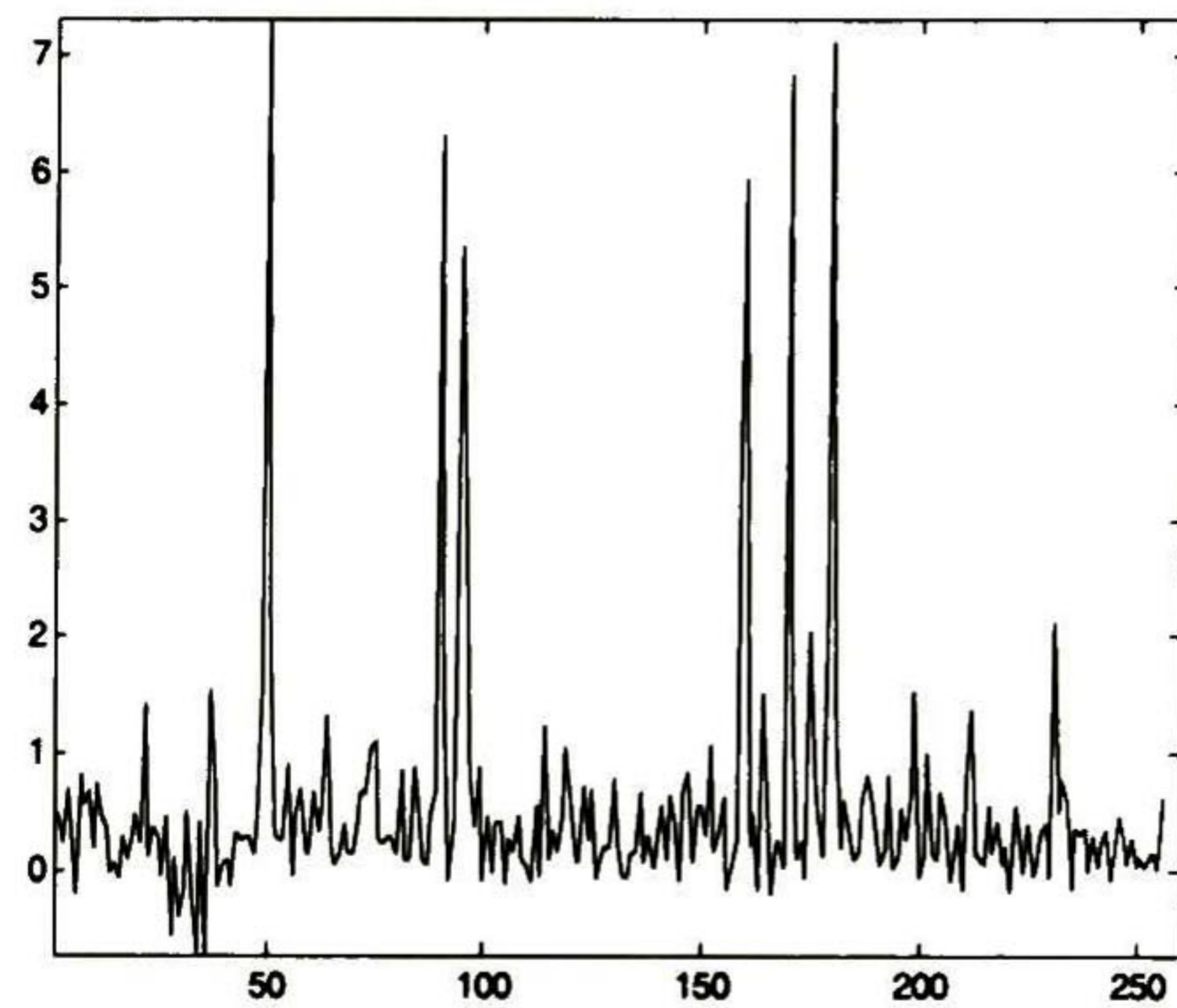
(a) Señal original  $v$



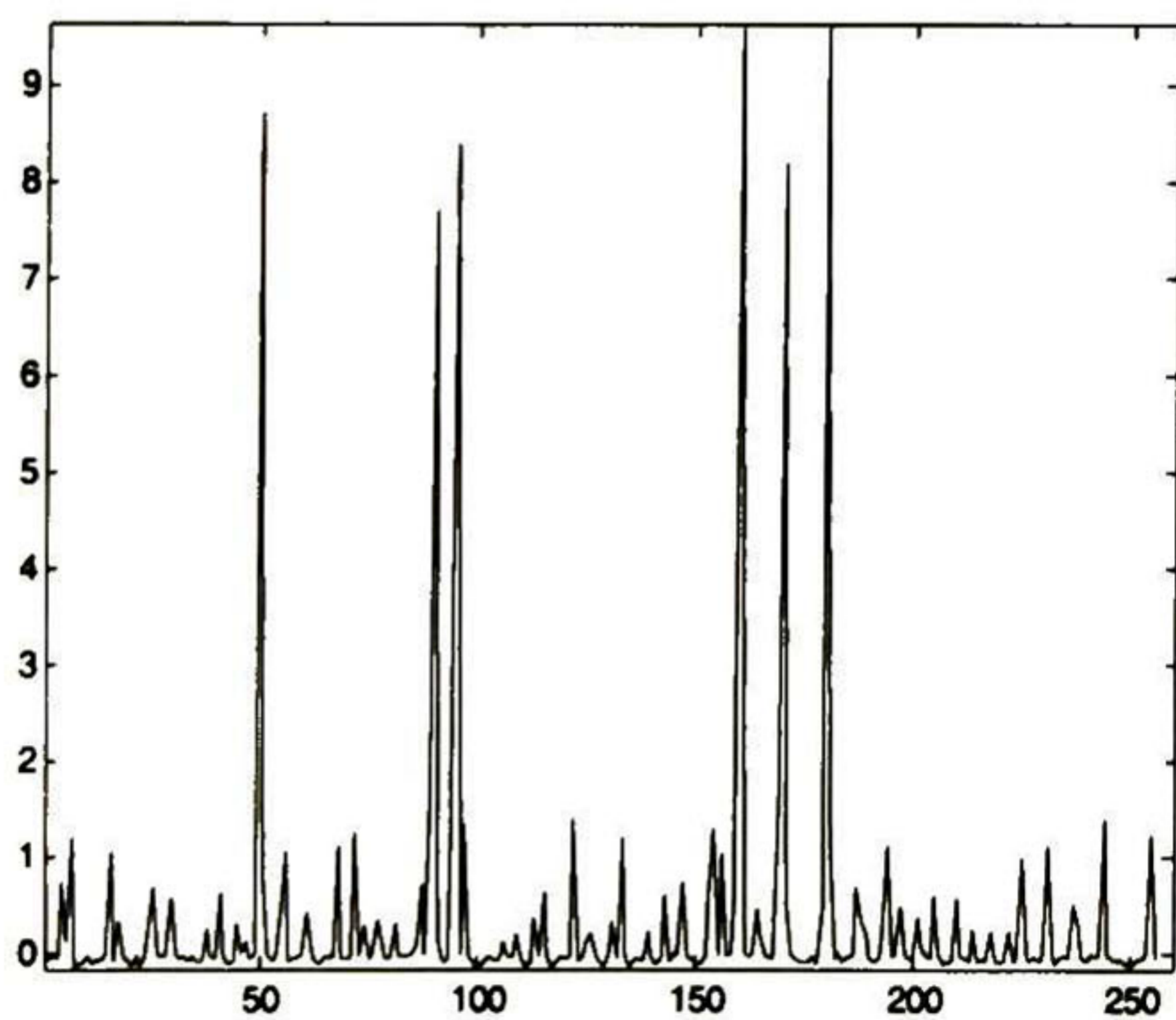
(b) Señal con ruido



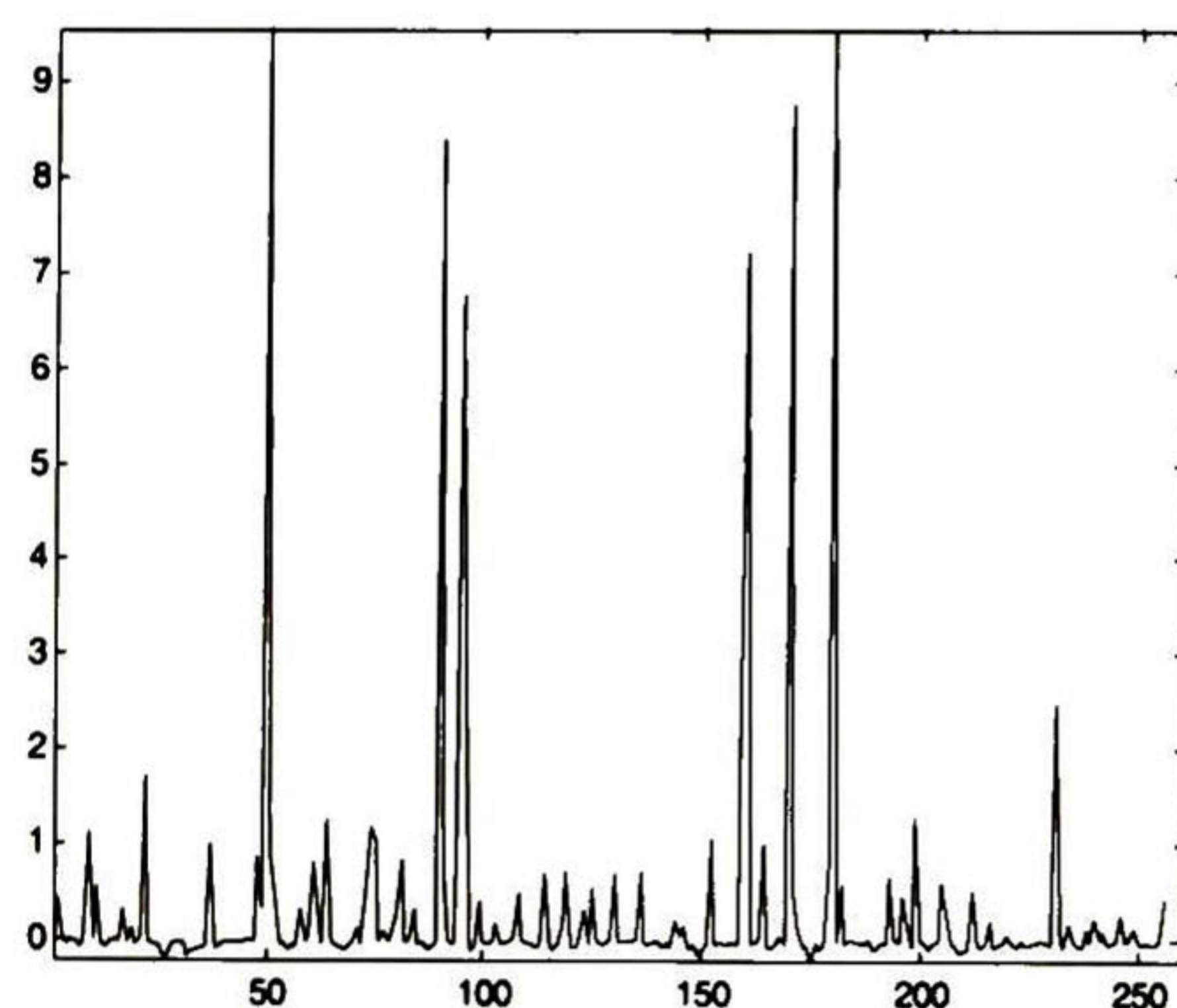
(c) Estimación de 5.9228 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 6.7950 dB a 2 iteraciones con el método WCLS

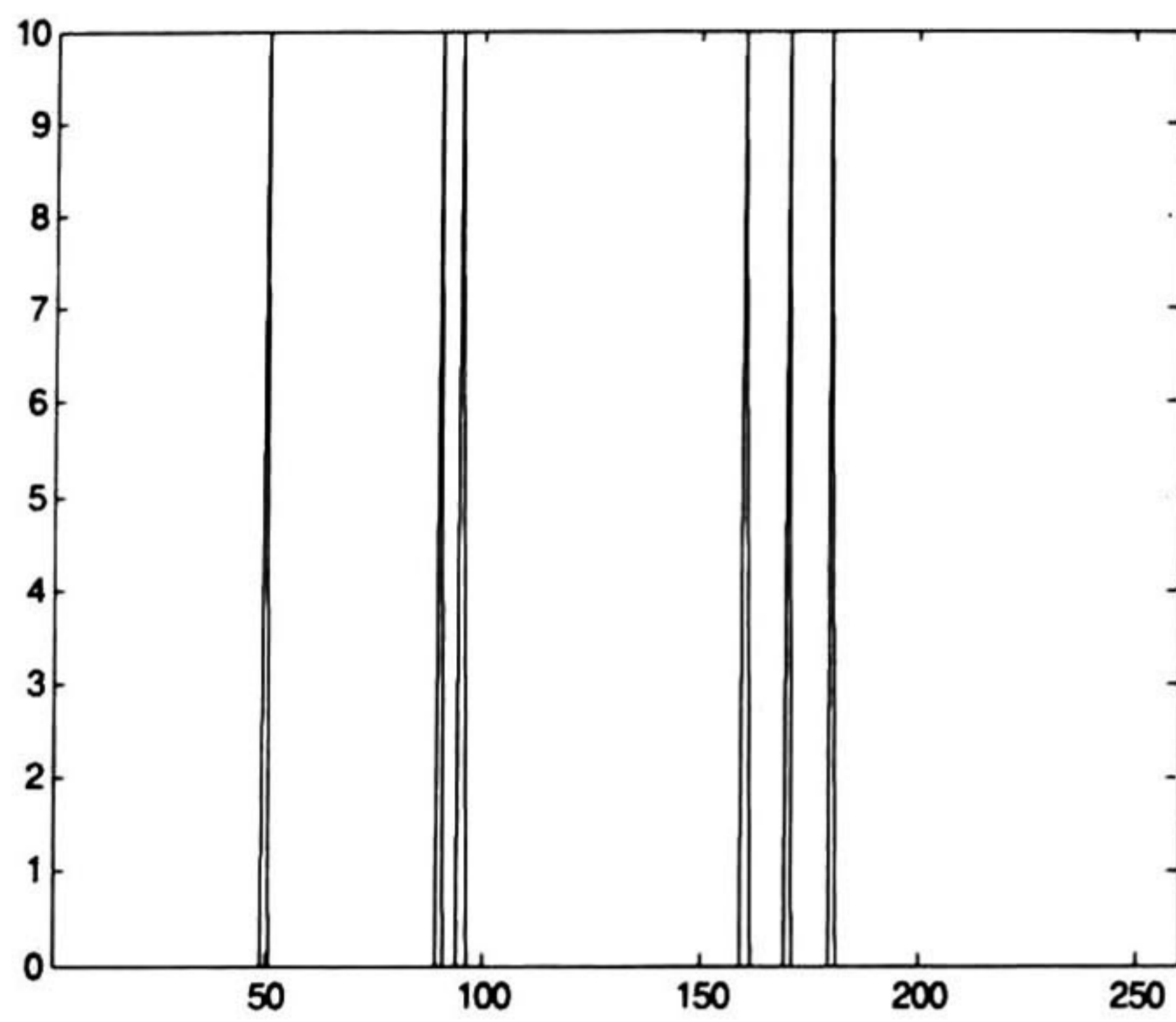


(e) Estimación de 11.3987 dB a 40 iteraciones con el método CLS

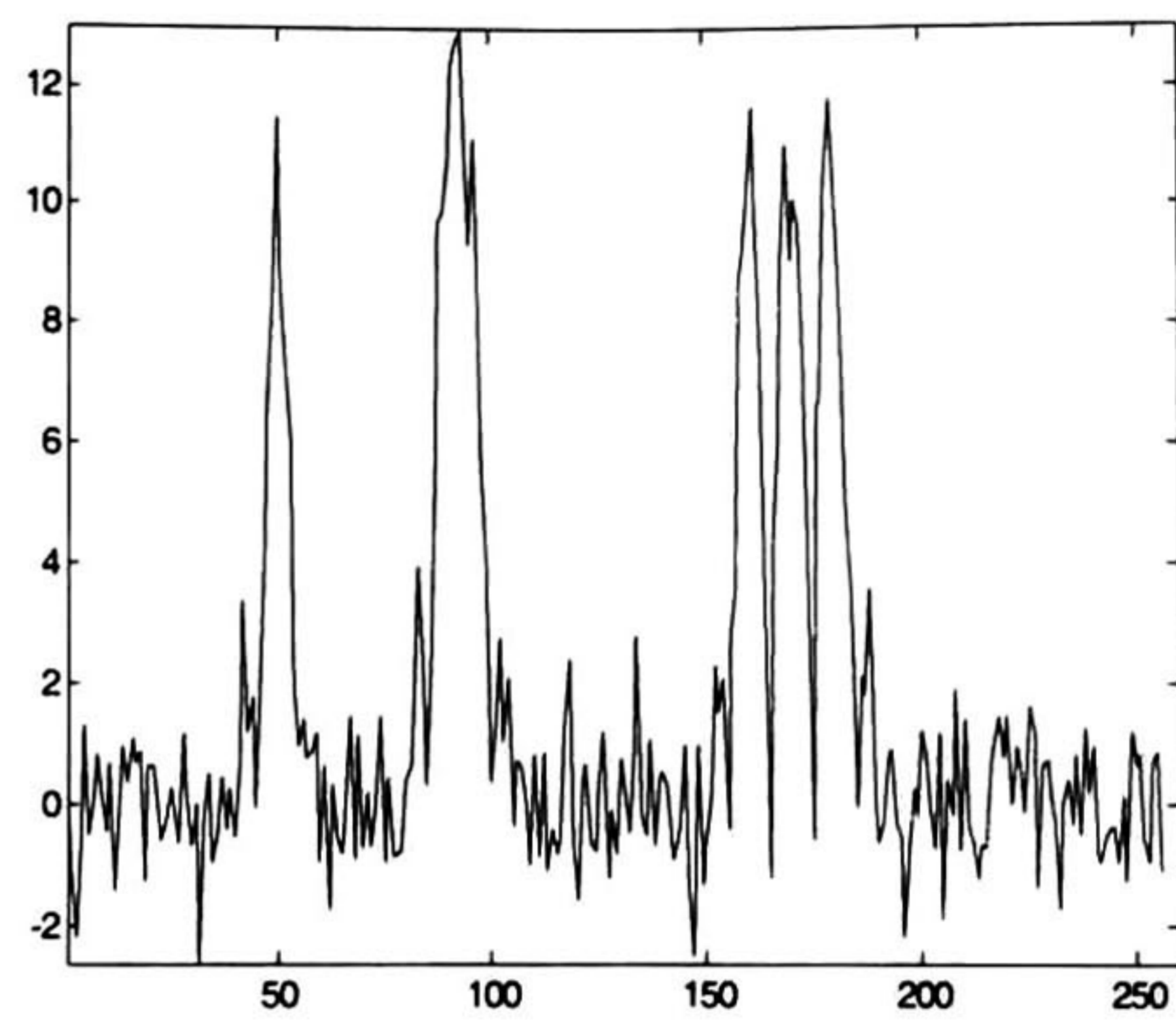


(f) Estimación de 11.4015 dB a 40 iteraciones con el método WCLS

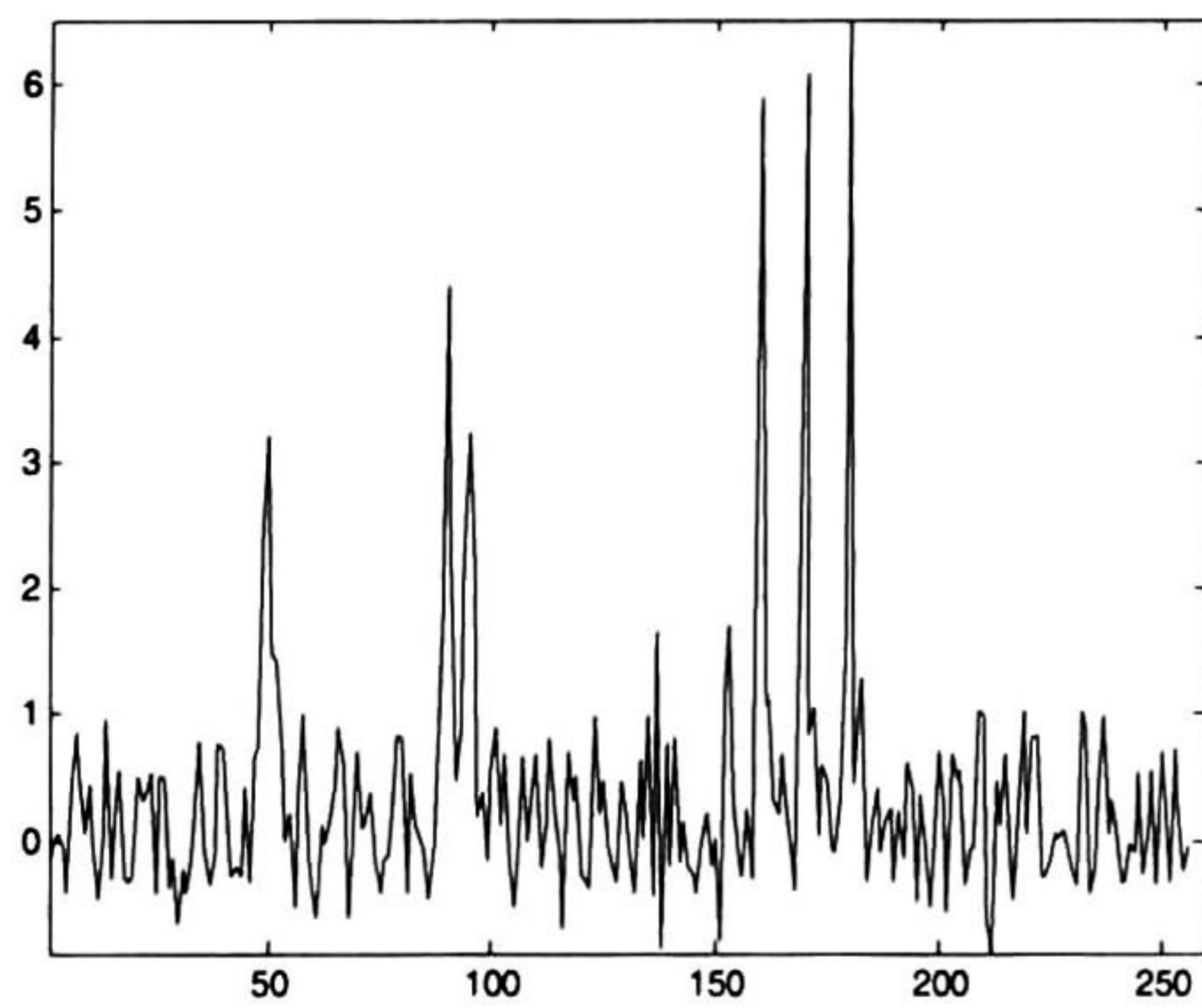
Tabla 4.19. Respuestas con SNR = 10 dB, K = 5 y SSF<sub>2</sub>.



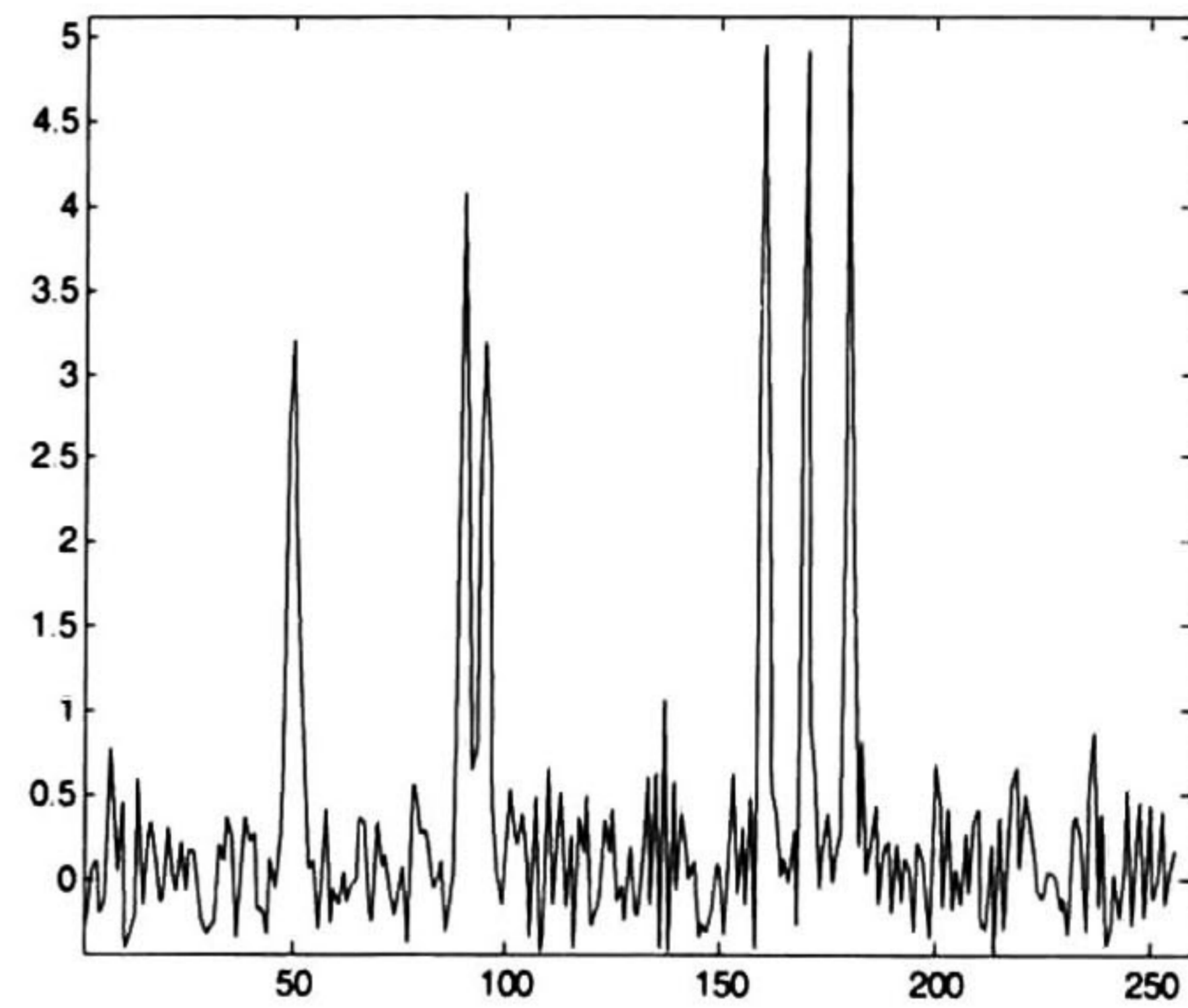
(a) Señal original v



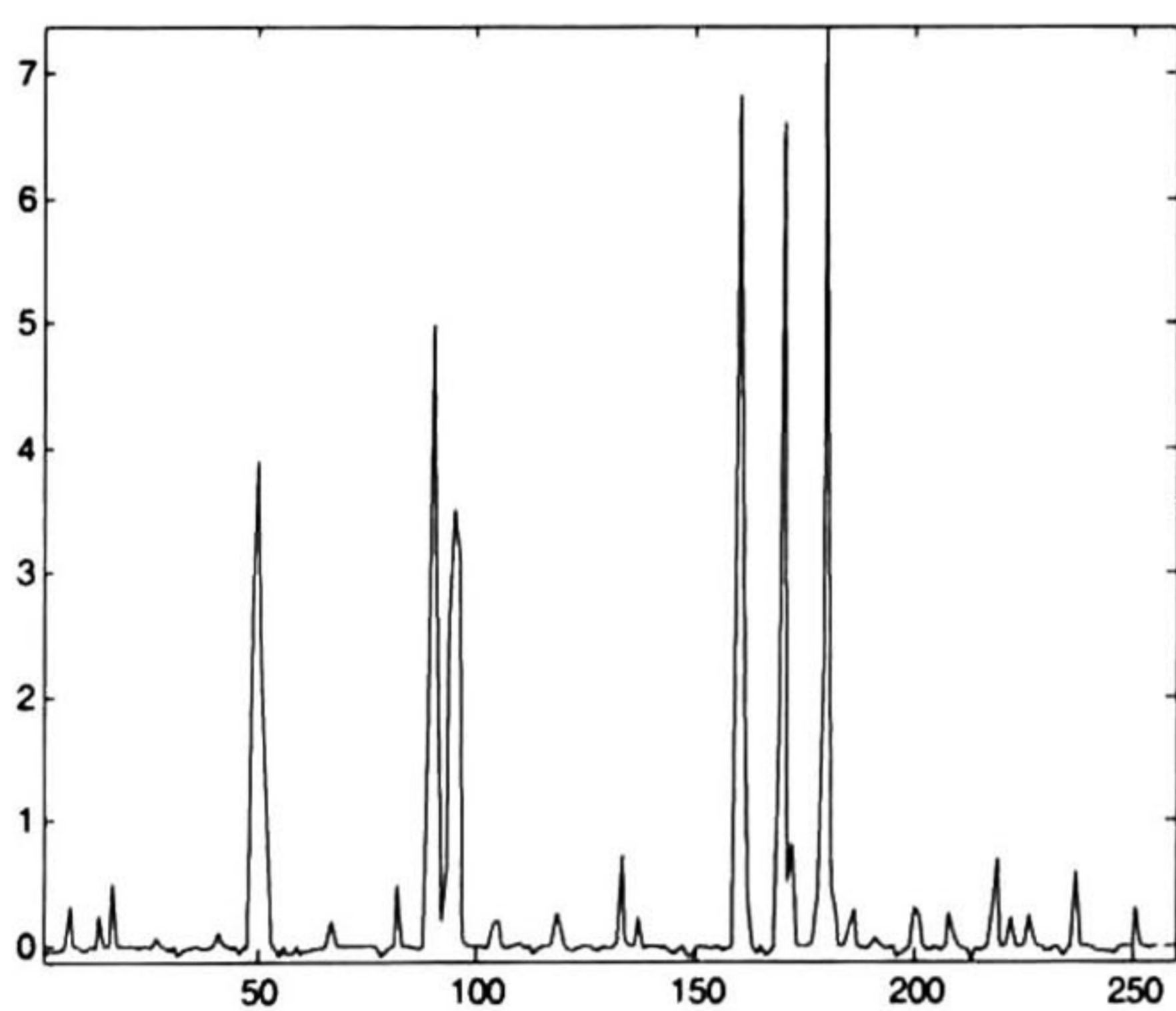
(b) Señal con ruido



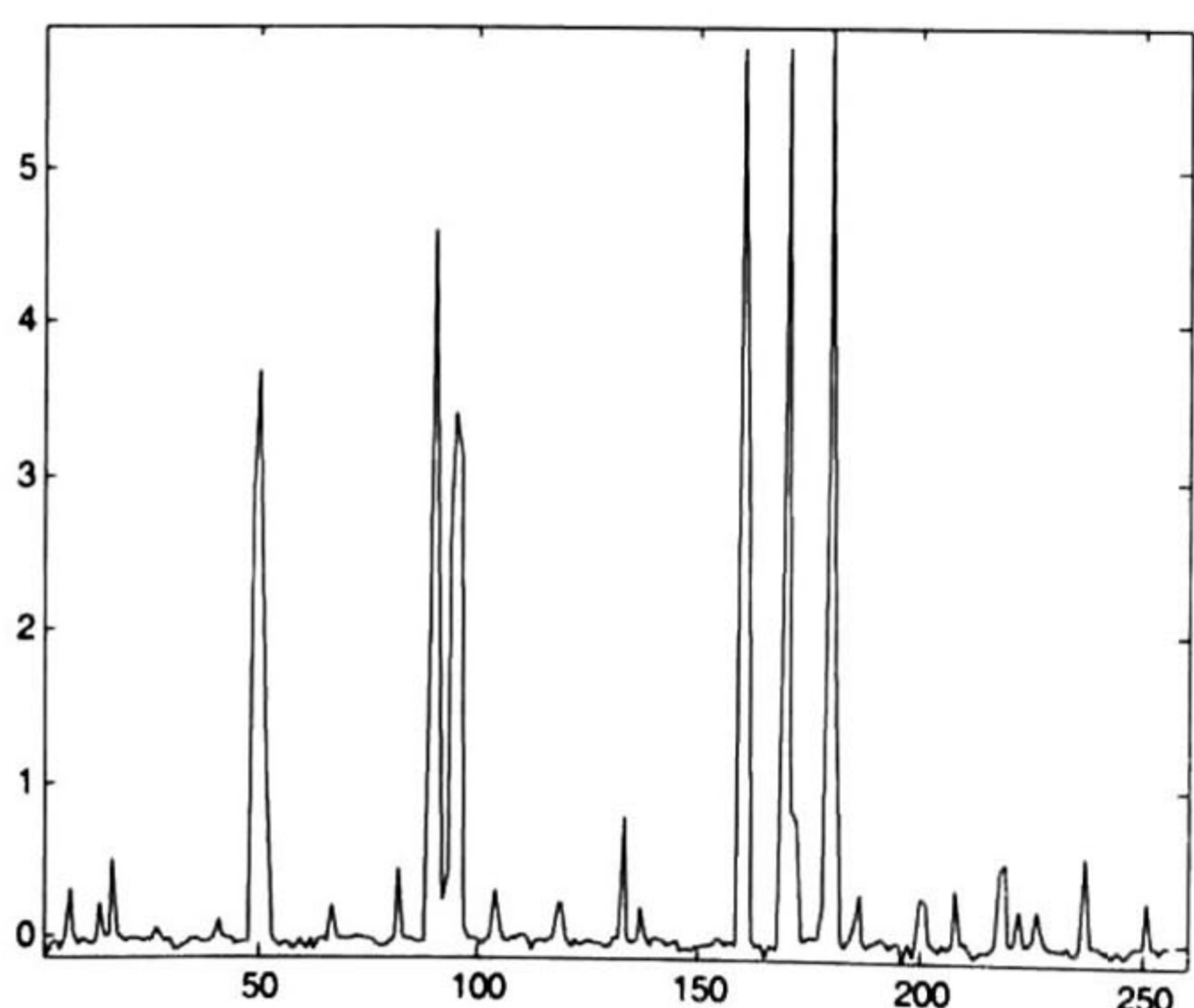
(c) Estimación de 9.7328 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 9.8940 dB a 2 iteraciones con el método WCLS

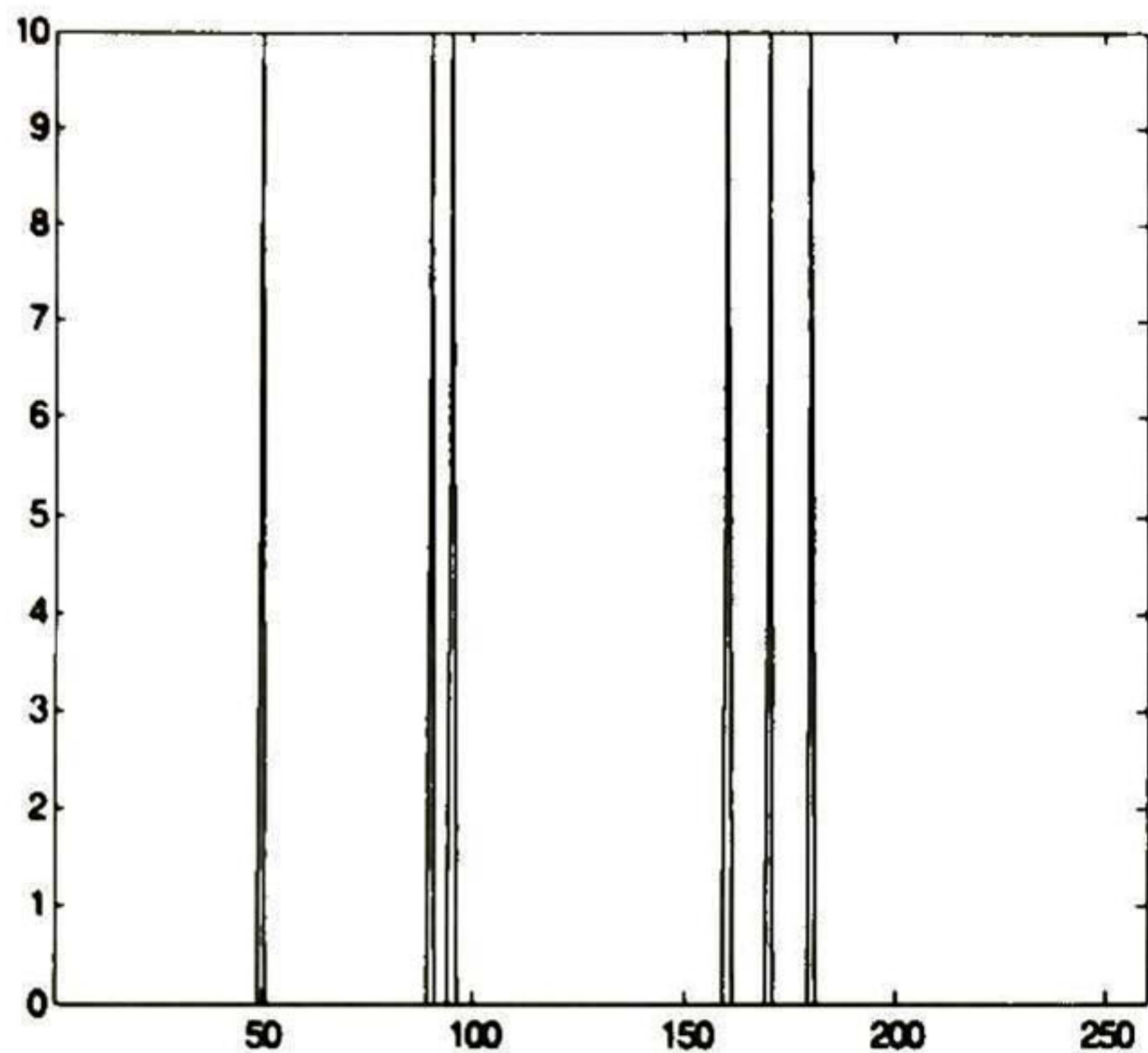


(e) Estimación de 12.1175 dB a 40 iteraciones con el método CLS

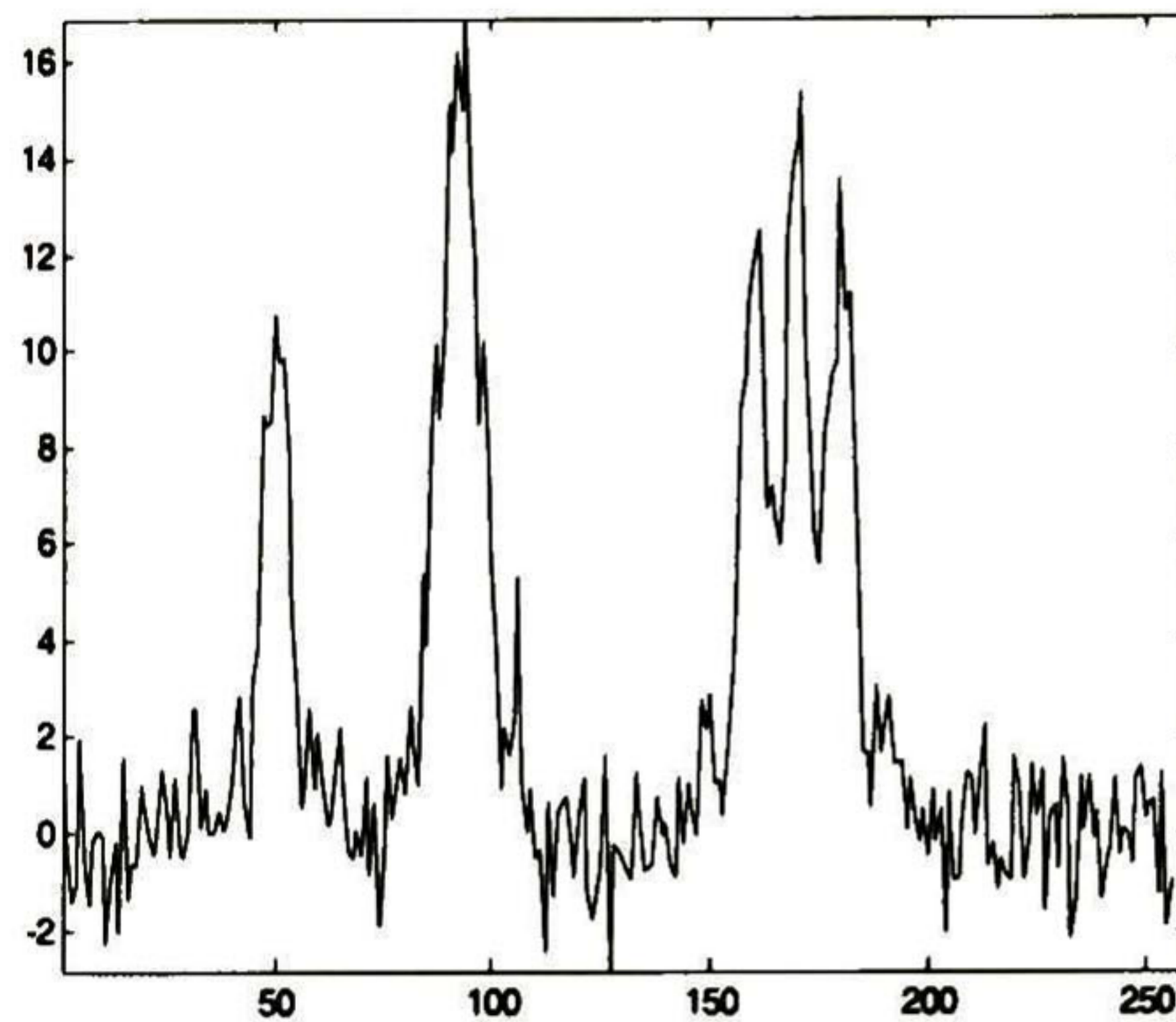


(f) Estimación de 12.1028 dB a 40 iteraciones con el método WCLS

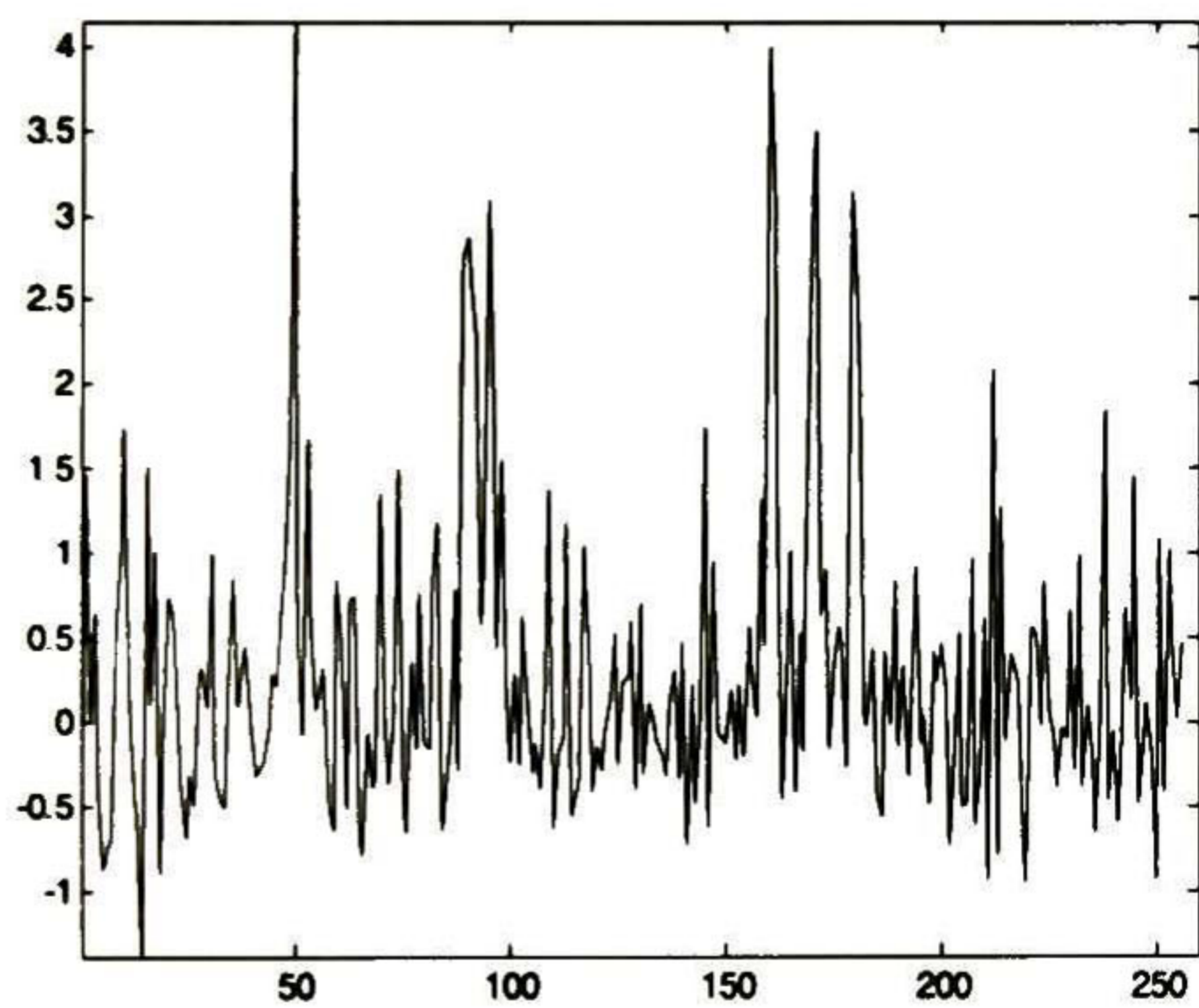
Tabla 4.20. Respuestas con SNR = 10 dB, K = 10 y  $SSF_2$ .



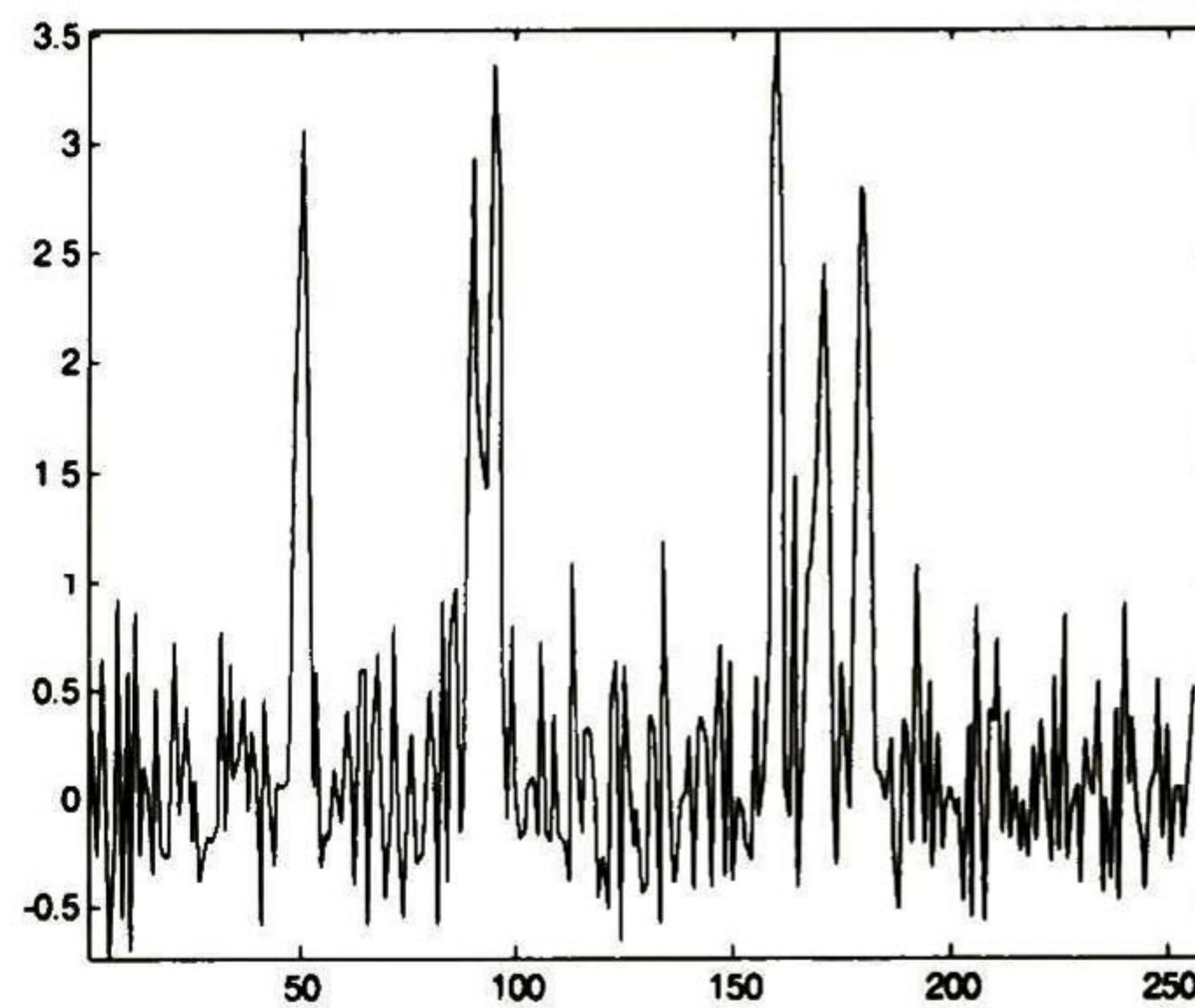
(a) Señal original v



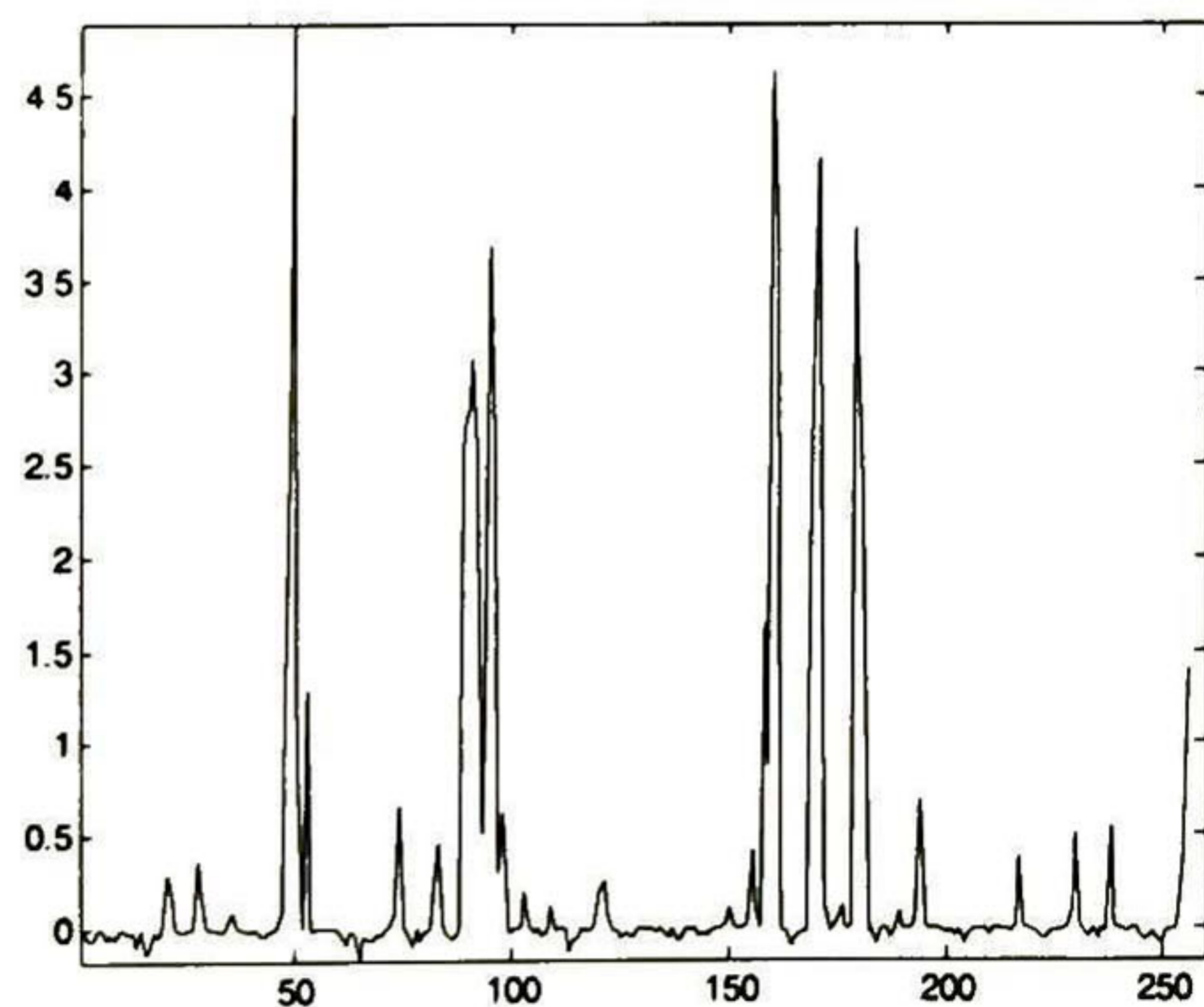
(b) Señal con ruido



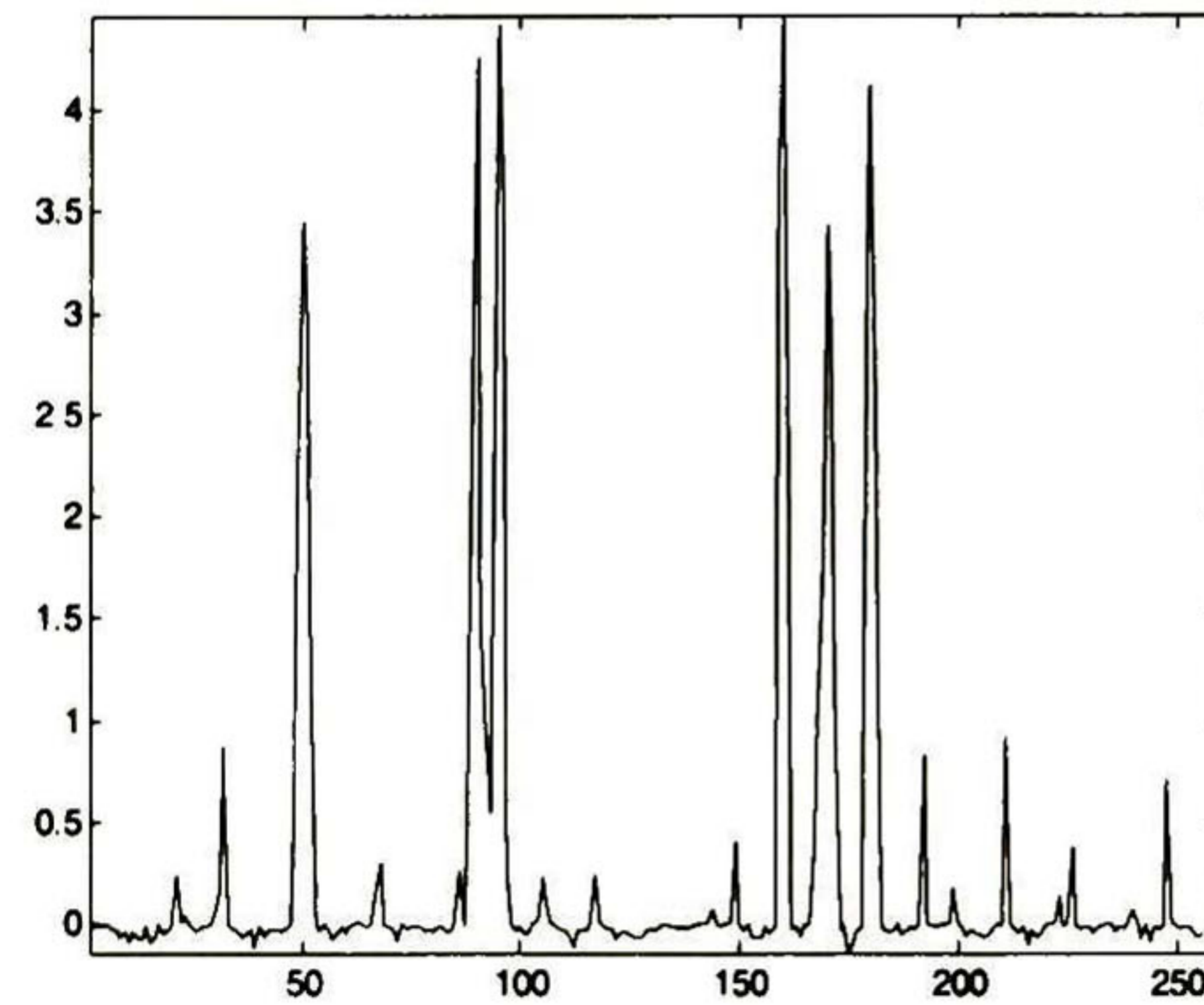
(c) Estimación de 10.7360 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 10.7291 dB a 2 iteraciones con el método WCLS

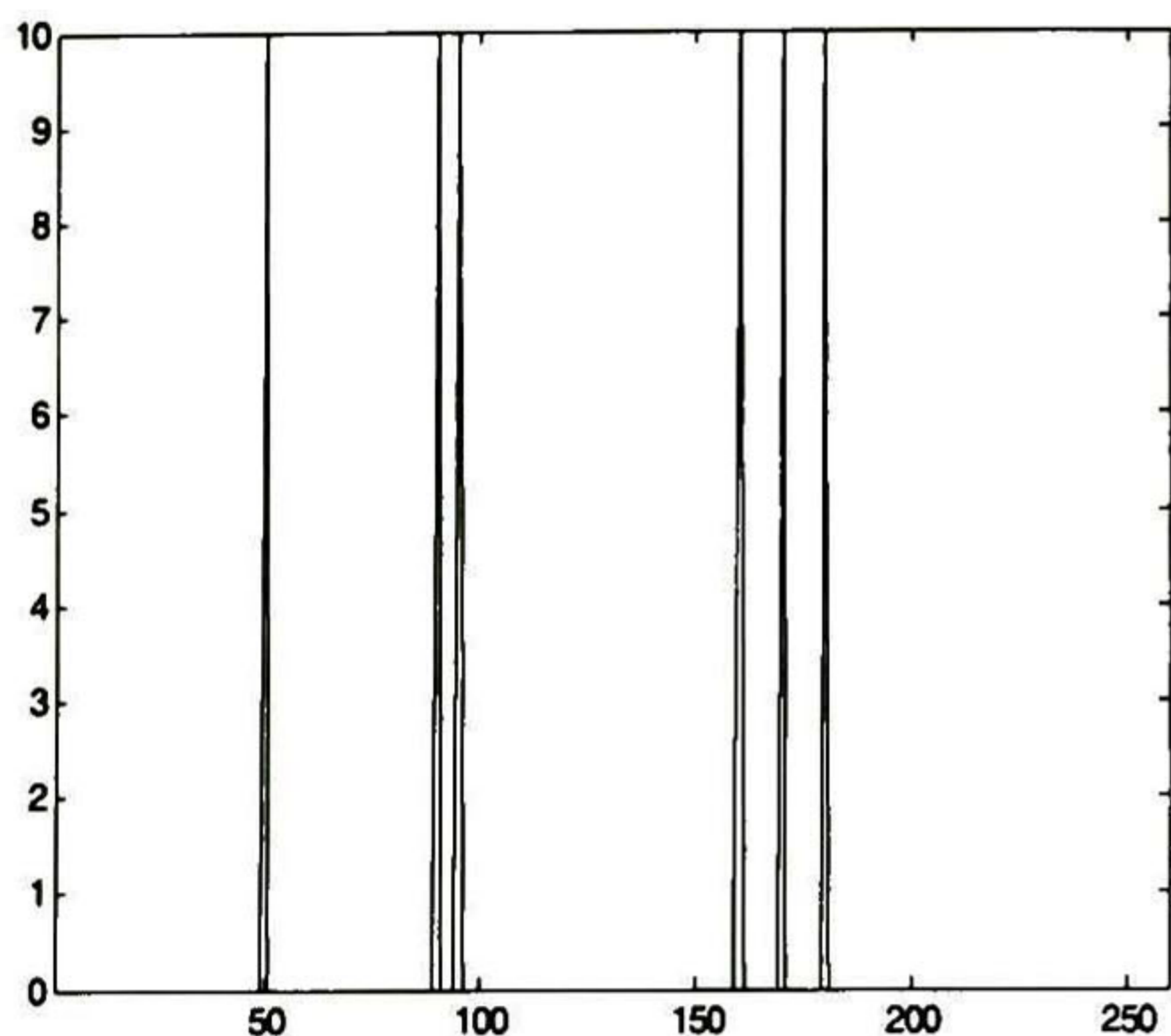


(e) Estimación de 11.6892 dB a 40 iteraciones con el método CLS

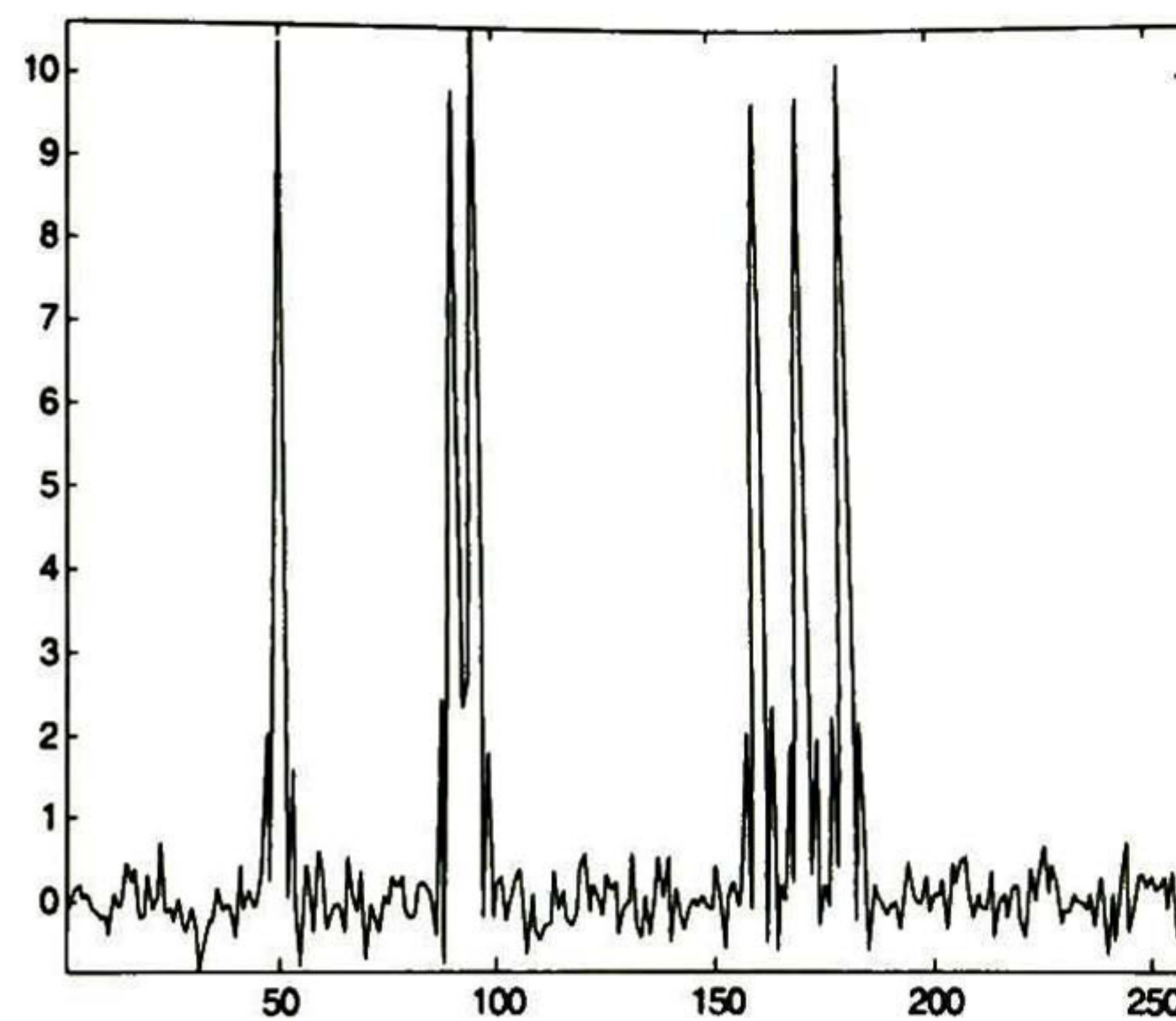


(f) Estimación de 12.0951 dB a 40 iteraciones con el método WCLS

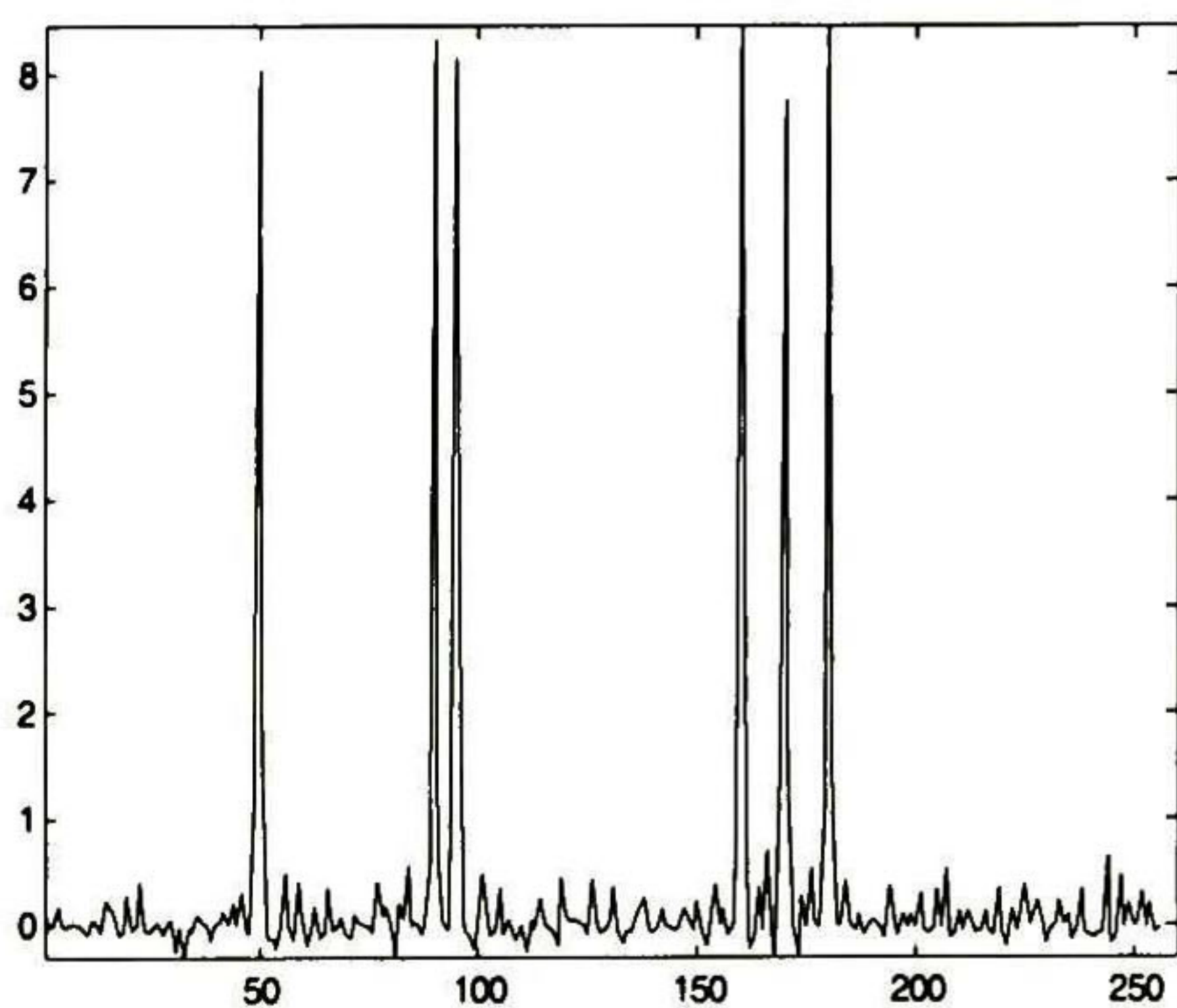
Tabla 4.21. Respuestas con SNR = 10 dB, K = 15 y SSF<sub>2</sub>.



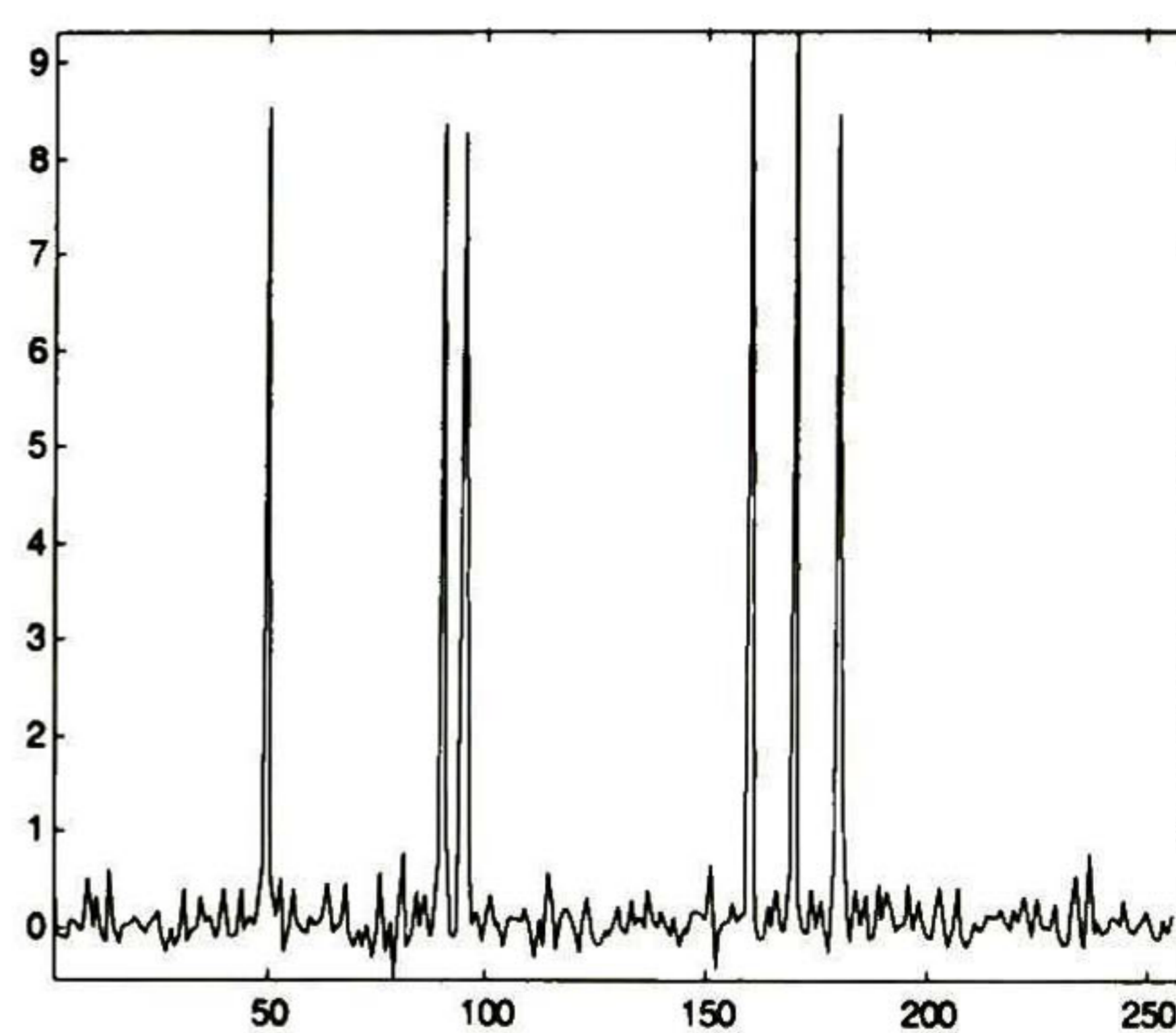
(a) Señal original v



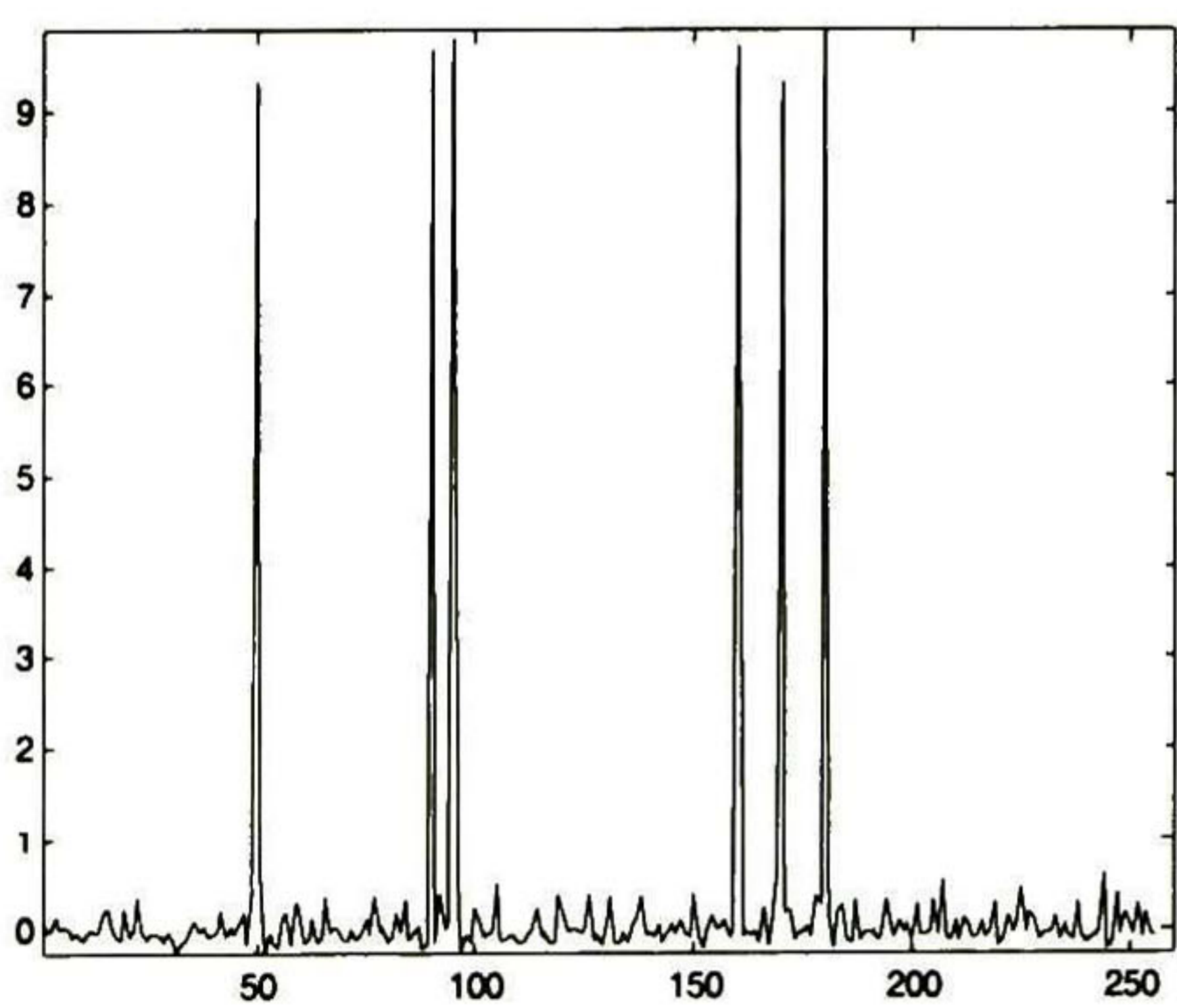
(b) Señal con ruido



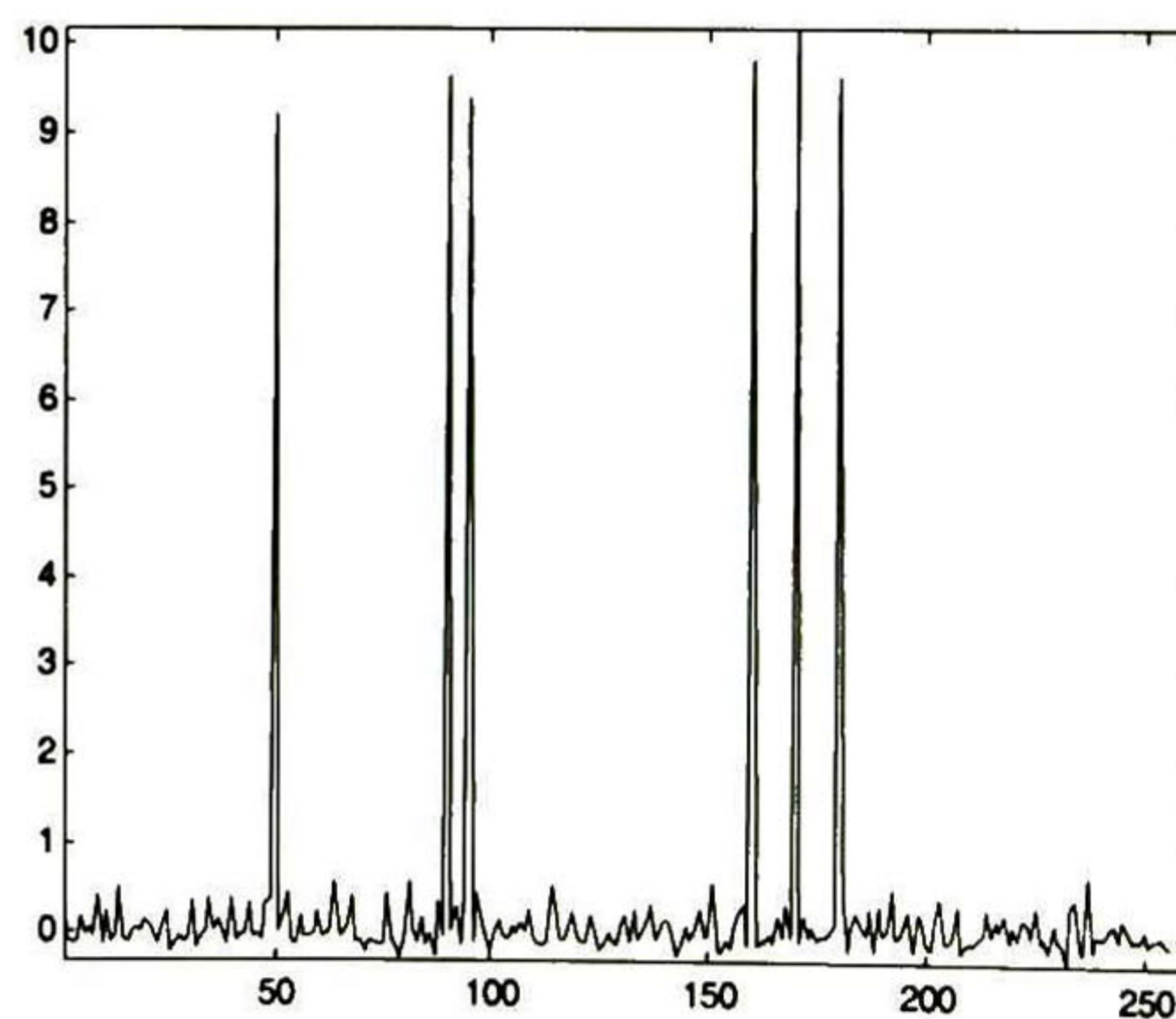
(c) Estimación de 10.9331 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 12.6166 dB a 2 iteraciones con el método WCLS

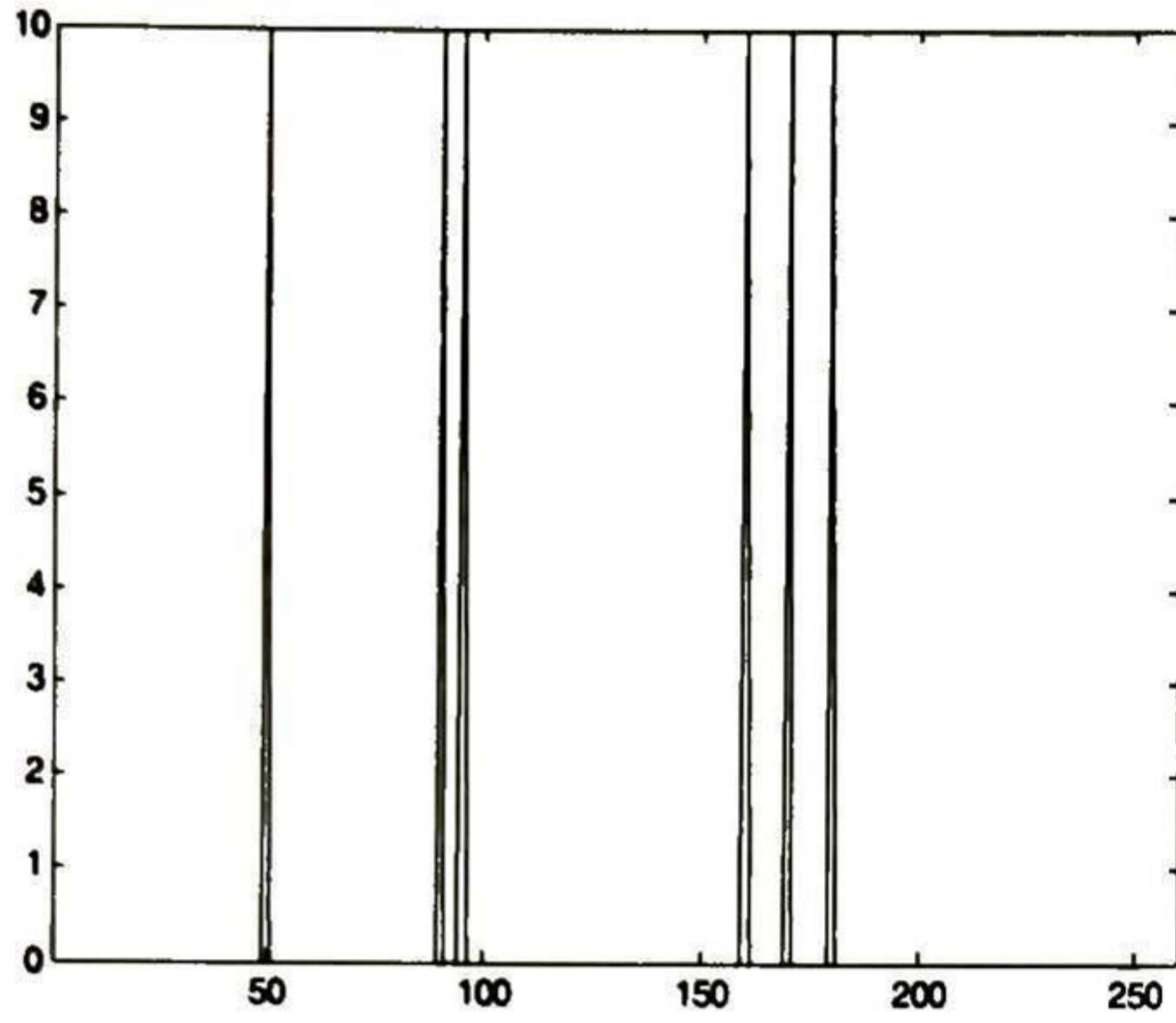


(e) Estimación de 18.6656 dB a 40 iteraciones con el método CLS

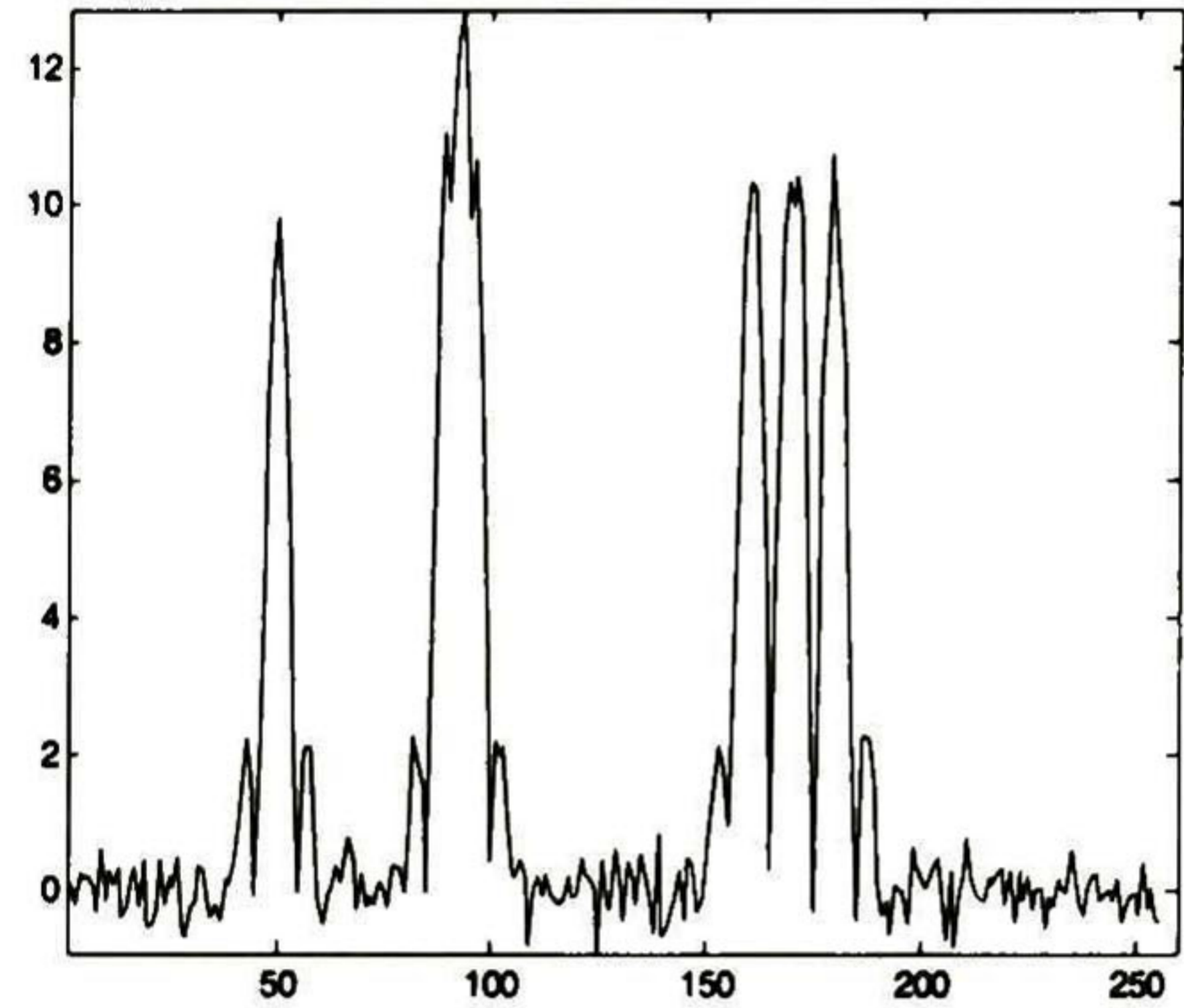


(f) Estimación de 18.6881 dB a 40 iteraciones con el método WCLS

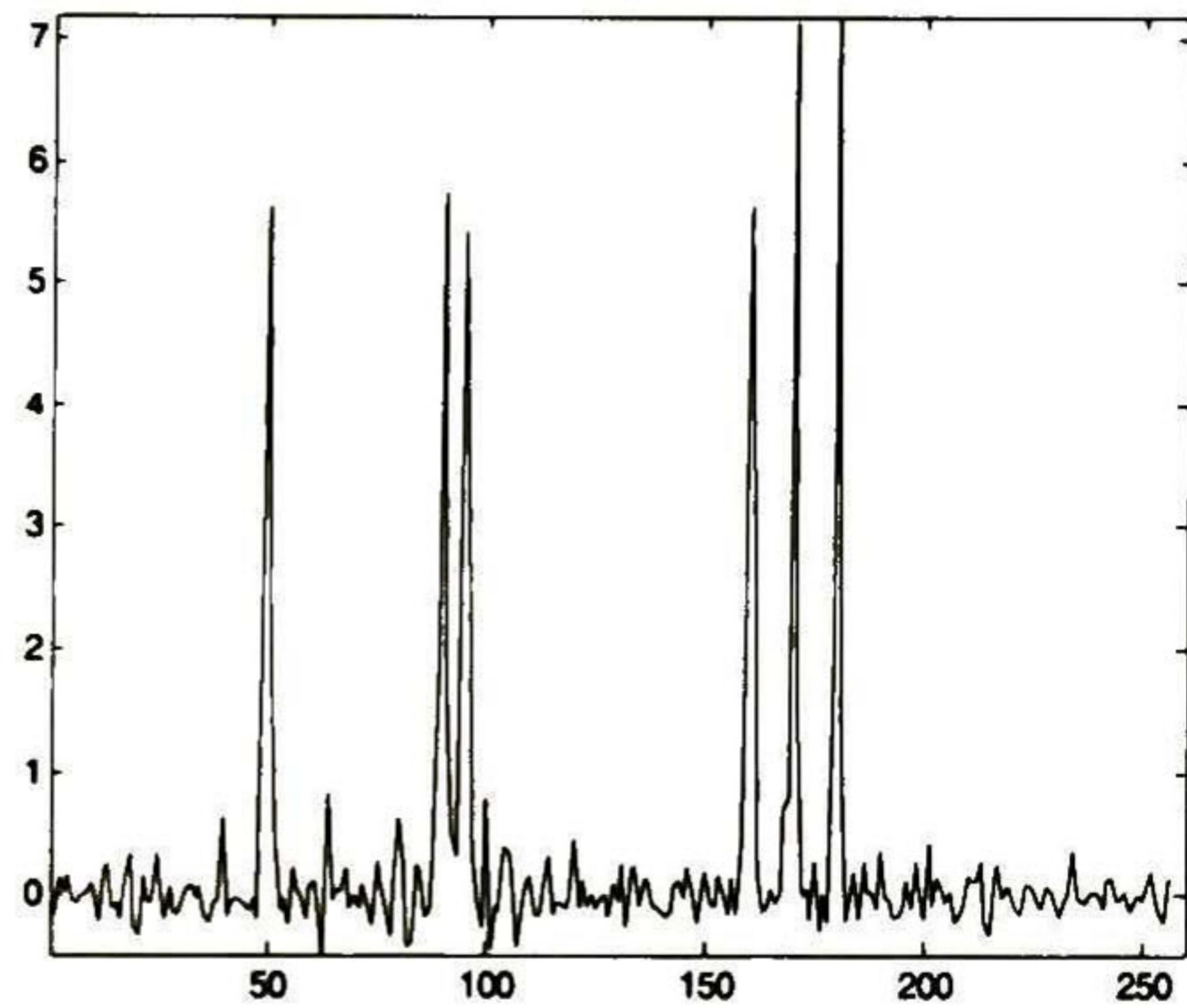
Tabla 4.22. Respuestas con SNR = 20 dB, K = 5 y SSF<sub>2</sub>.



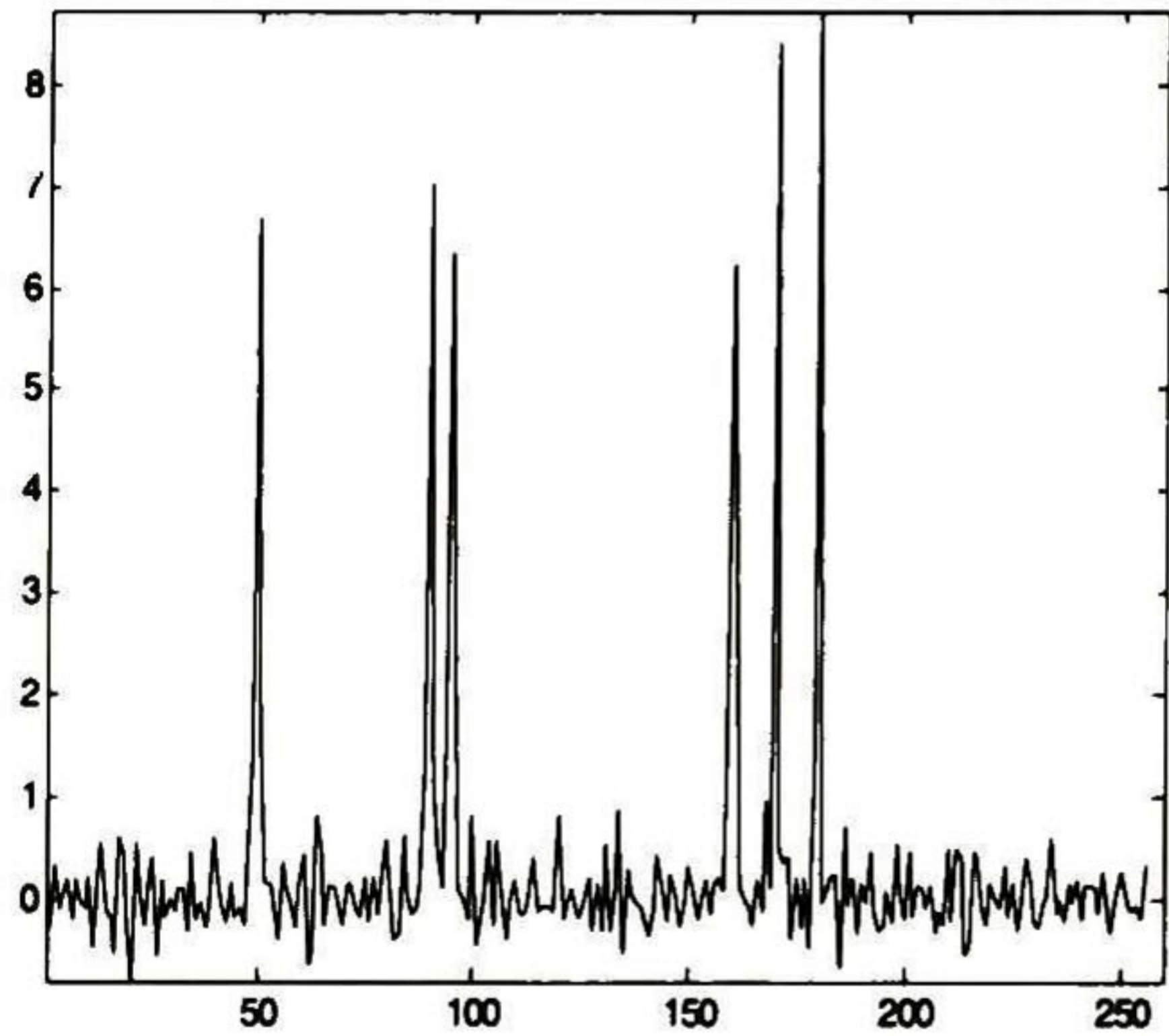
(a) Señal original v



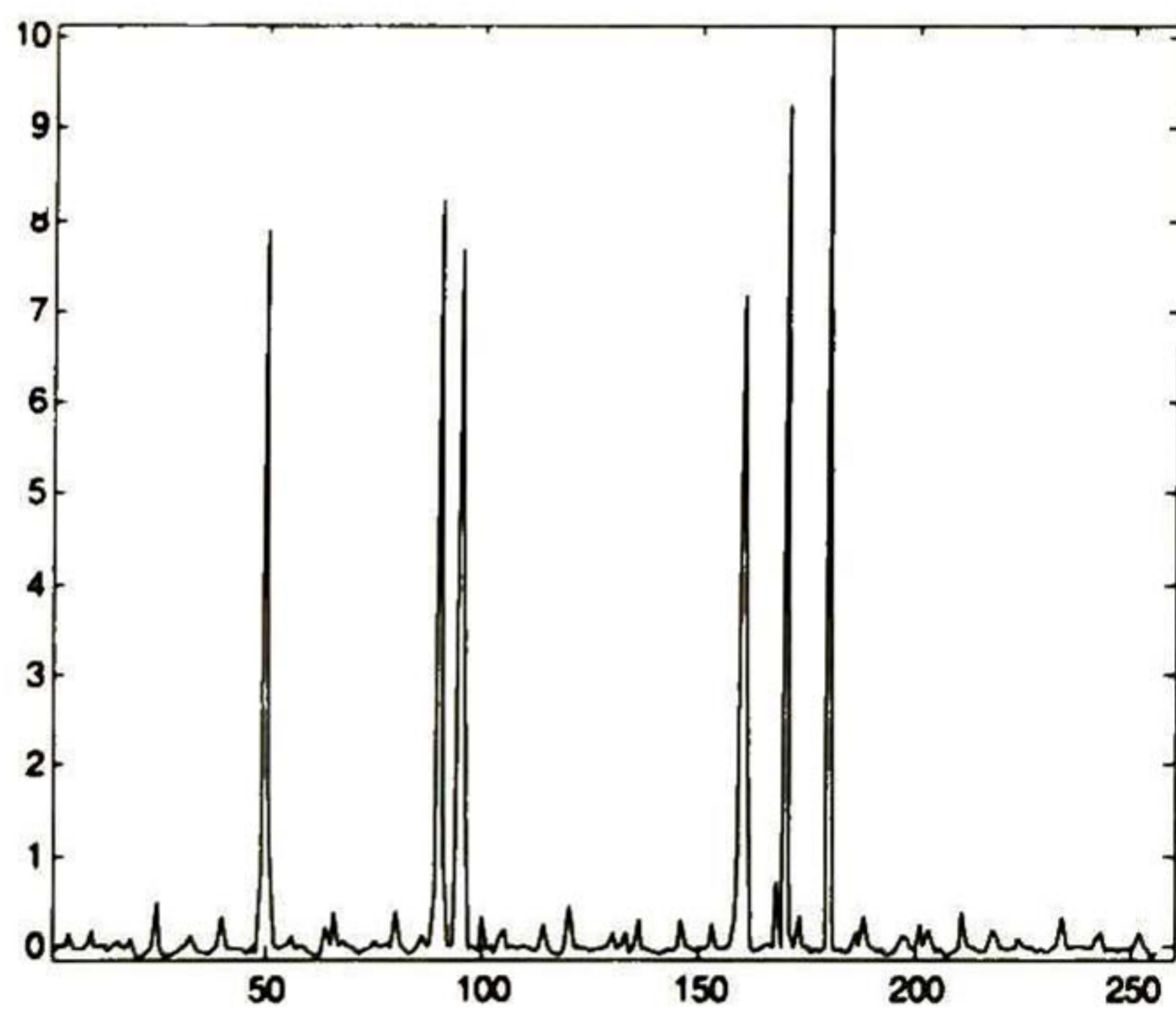
(b) Señal con ruido



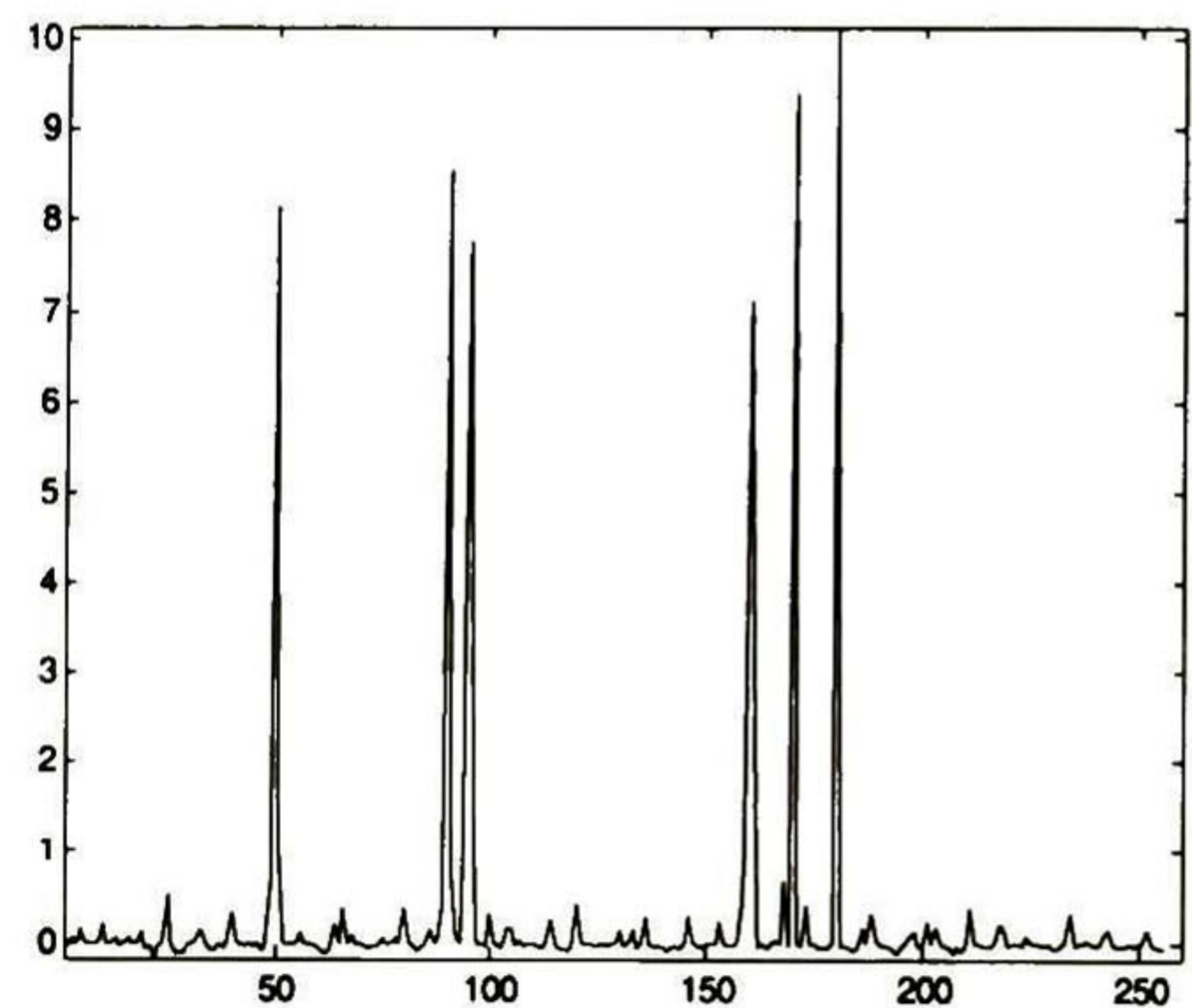
(c) Estimación de 13.1285 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 14.9140 dB a 2 iteraciones con el método WCLS

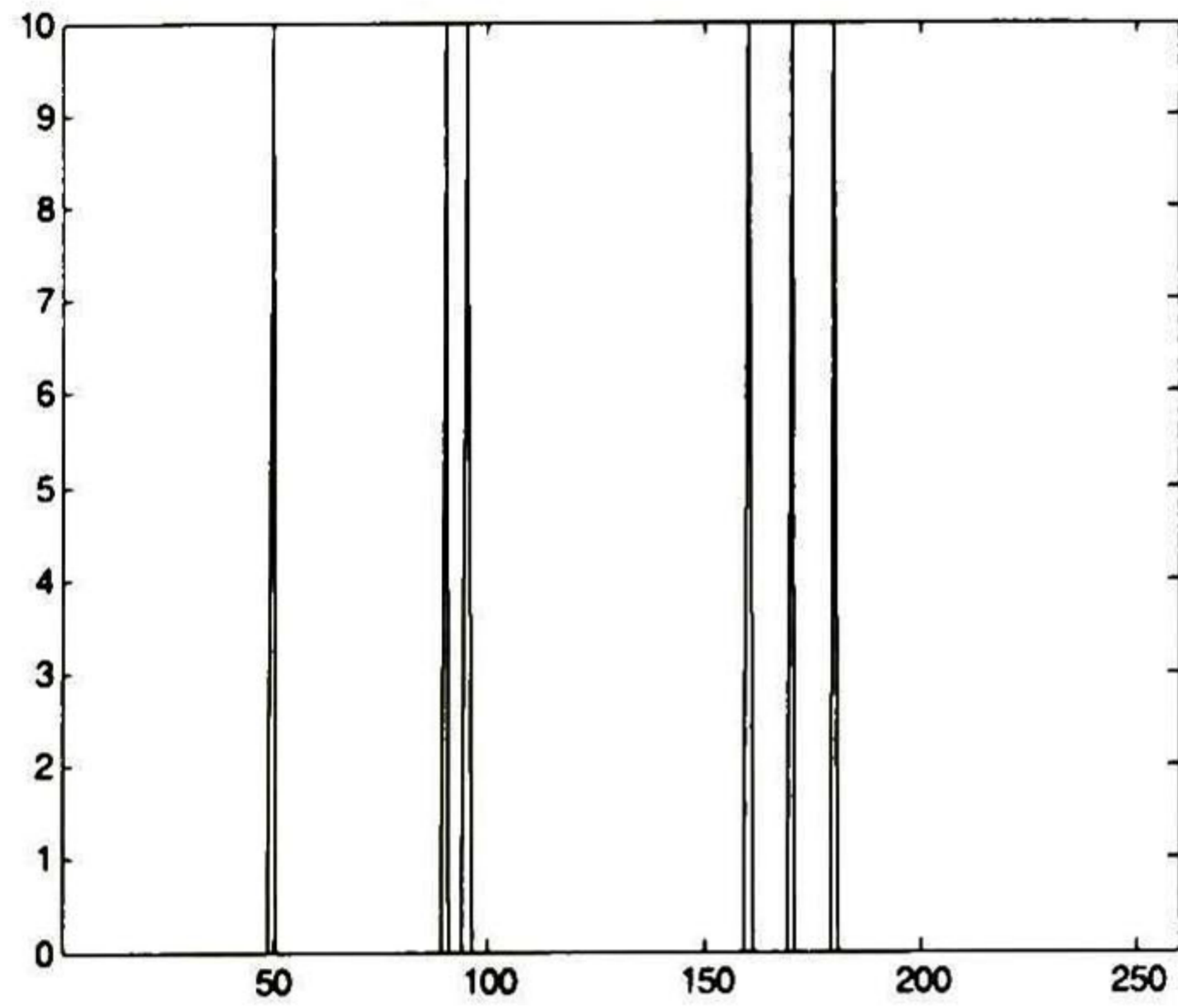


(e) Estimación de 19.3140 dB a 40 iteraciones con el método CLS

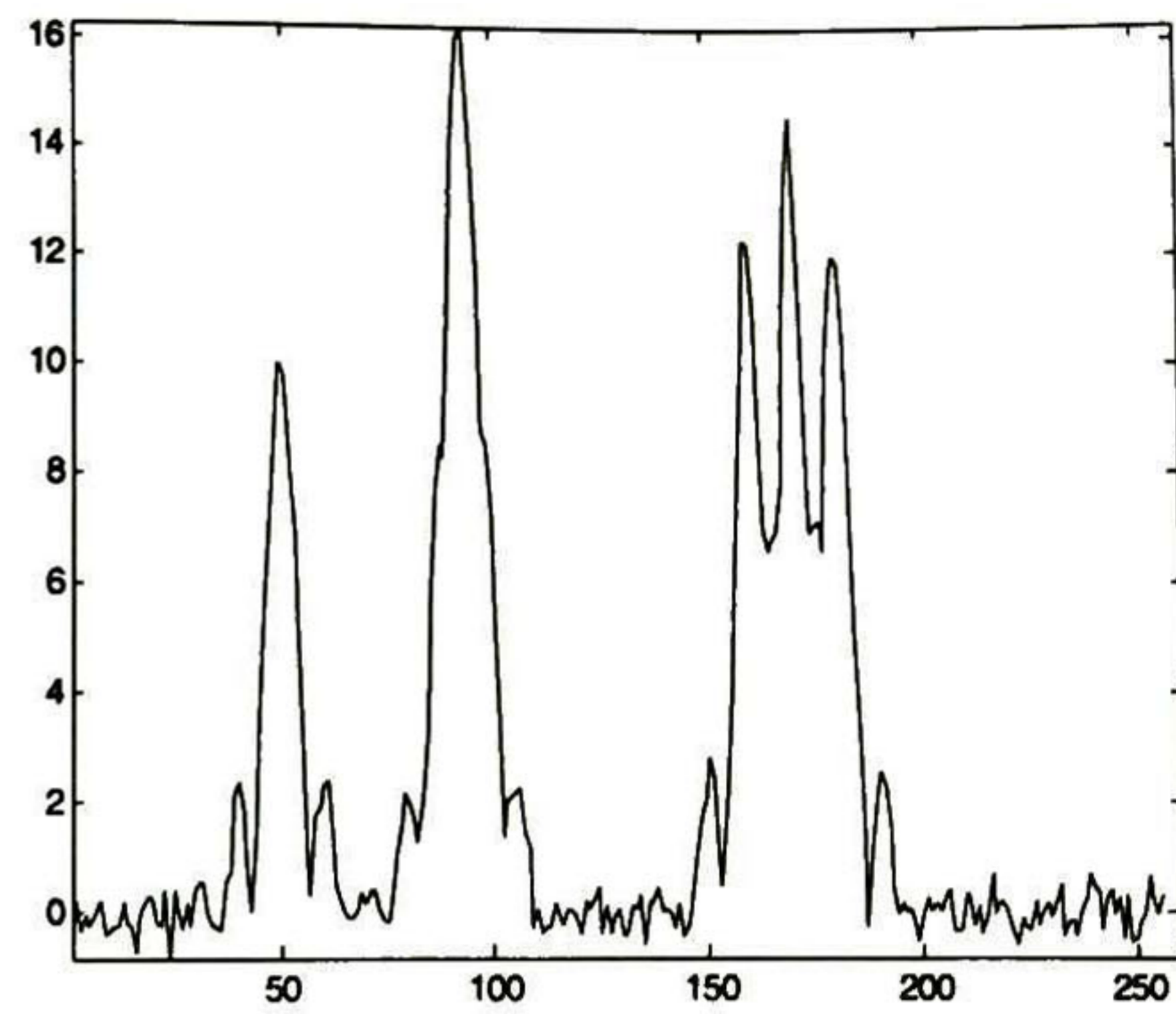


(f) Estimación de 19.7707 dB a 40 iteraciones con el método WCLS

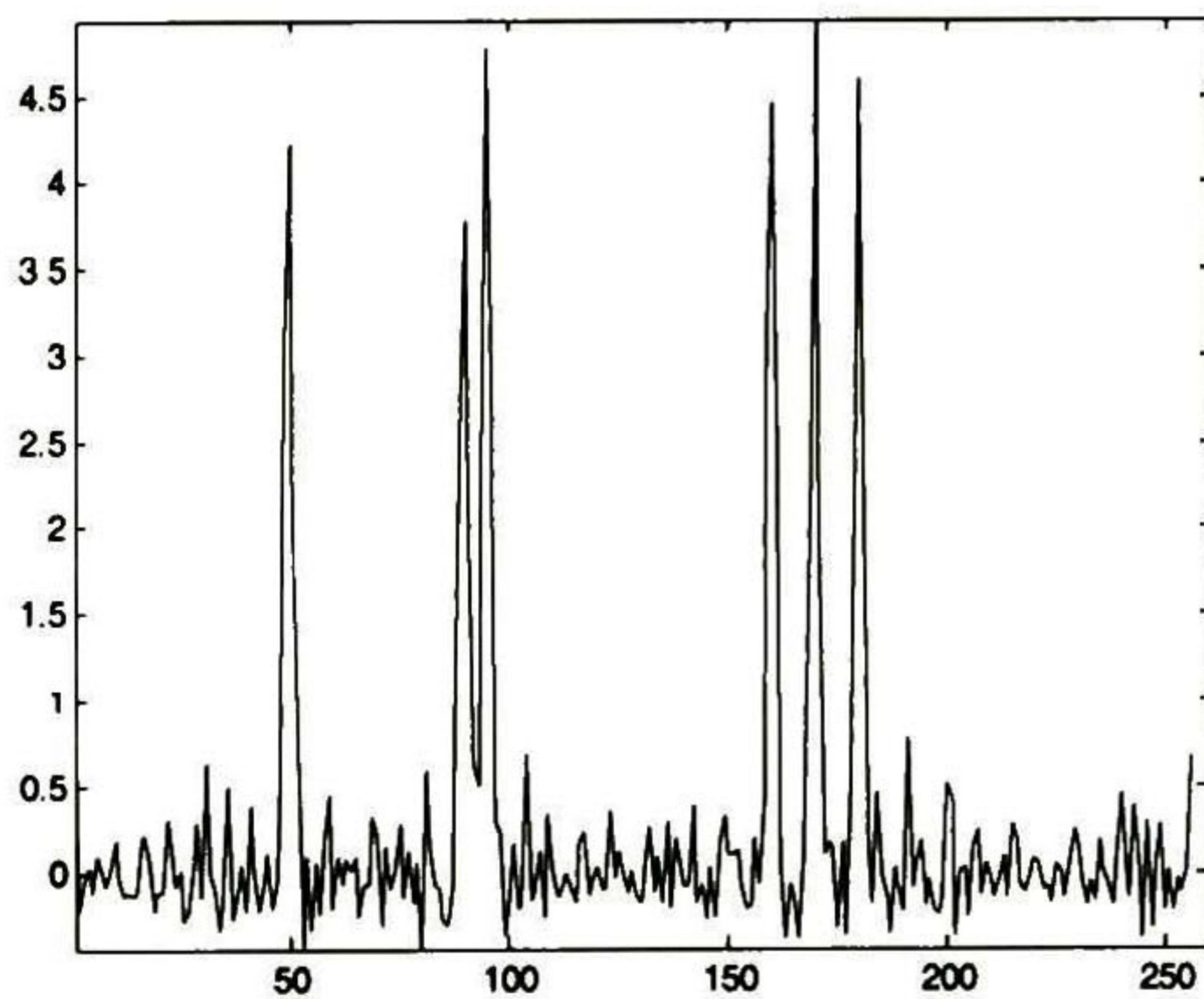
Tabla 4.23. Respuestas con SNR = 20 dB, K = 10 y SSF<sub>2</sub>.



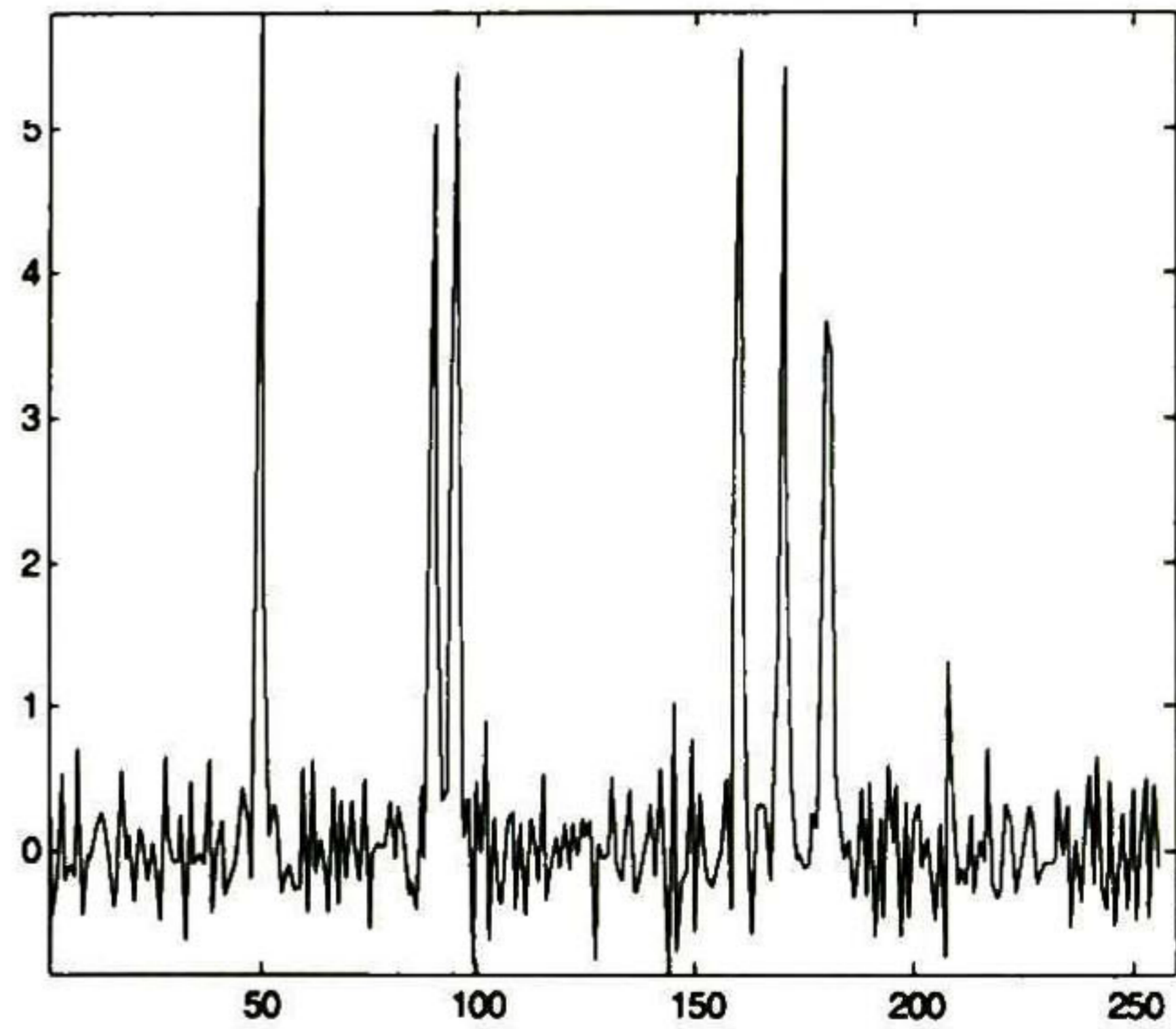
(a) Señal original v



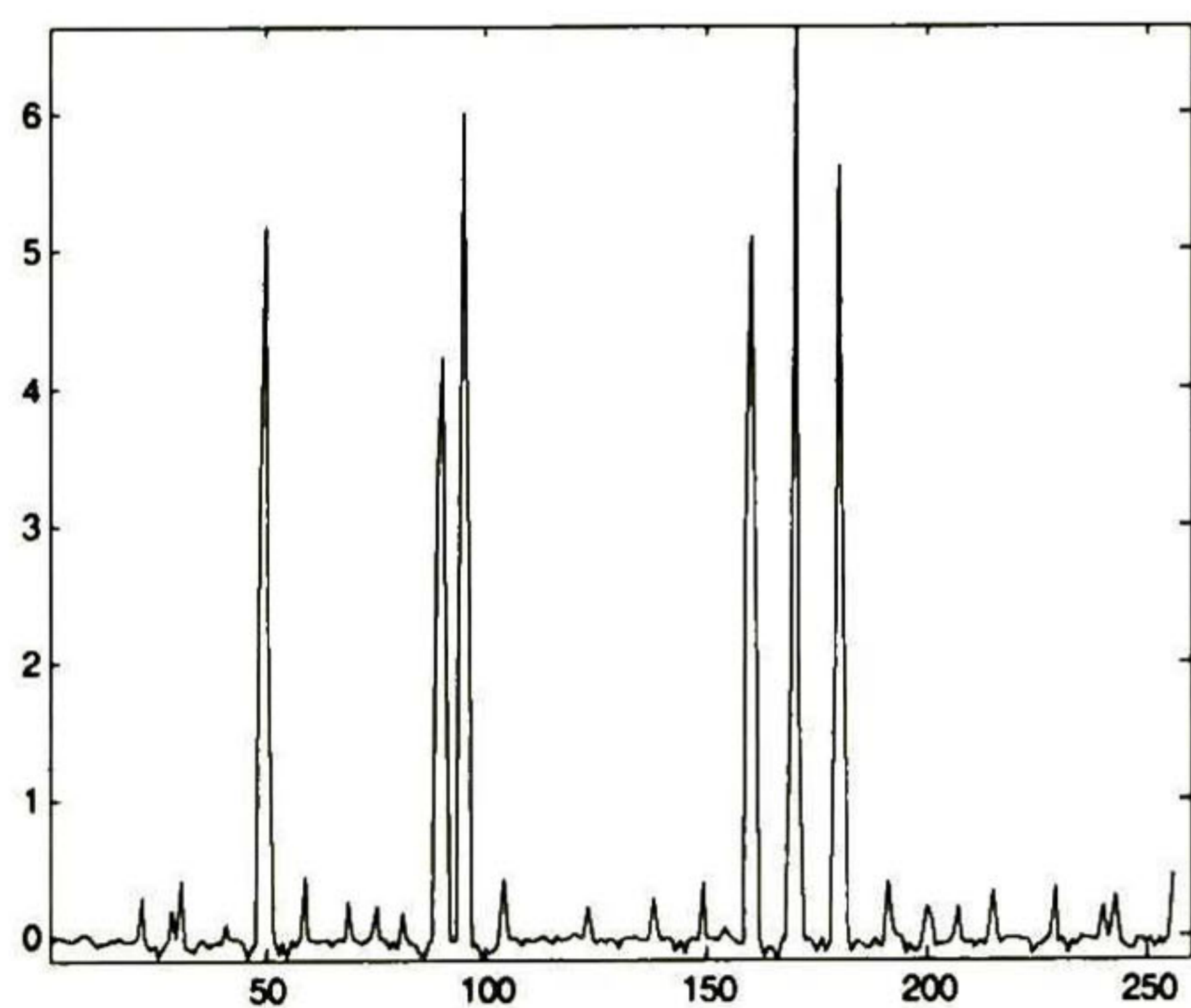
(b) Señal con ruido



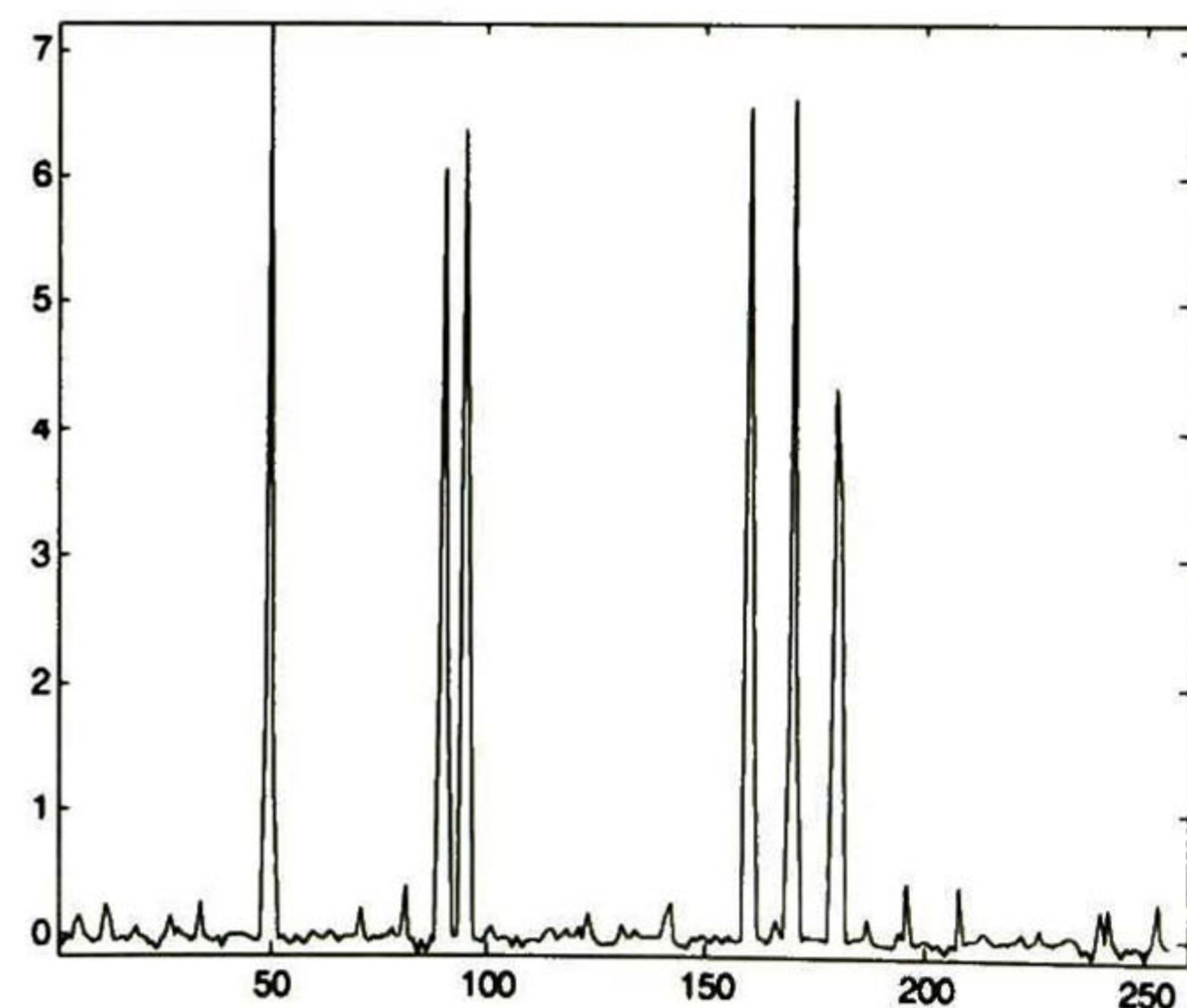
(c) Estimación de 12.2935 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 12.9810 dB a 2 iteraciones con el método WCLS



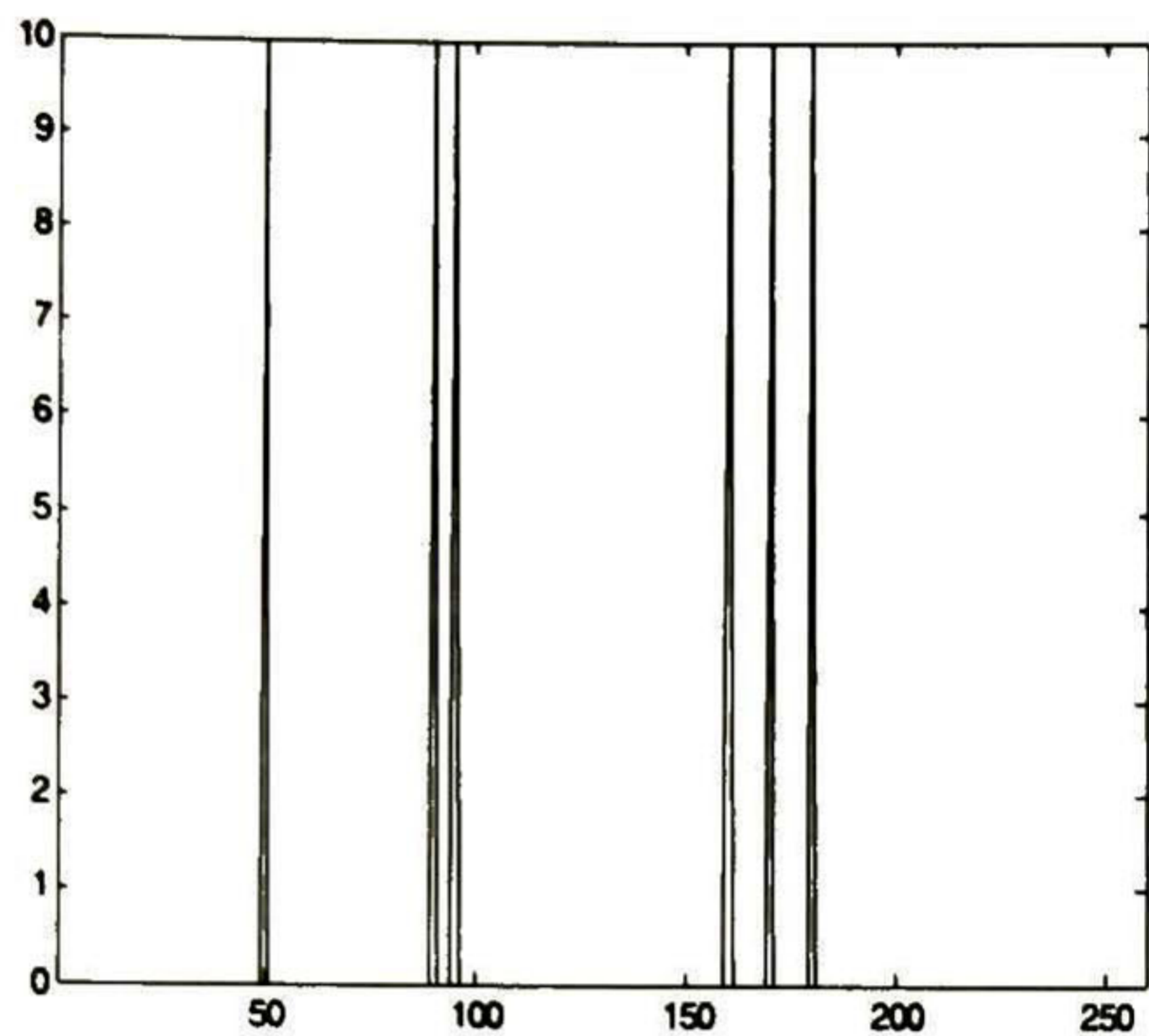
(e) Estimación de 13.5879 dB a 40 iteraciones con el método CLS



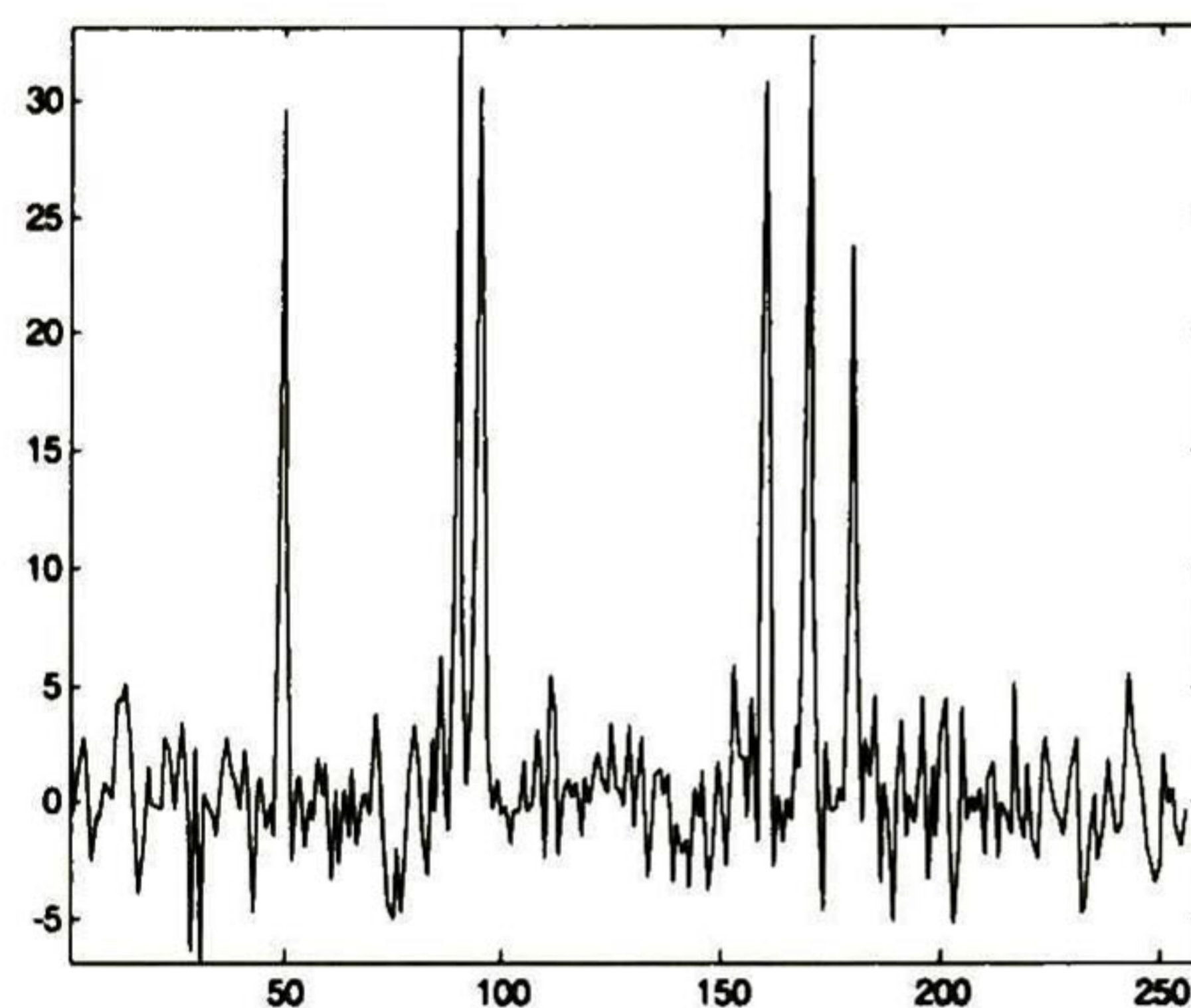
(f) Estimación de 15.1201 dB a 40 iteraciones con el método WCLS



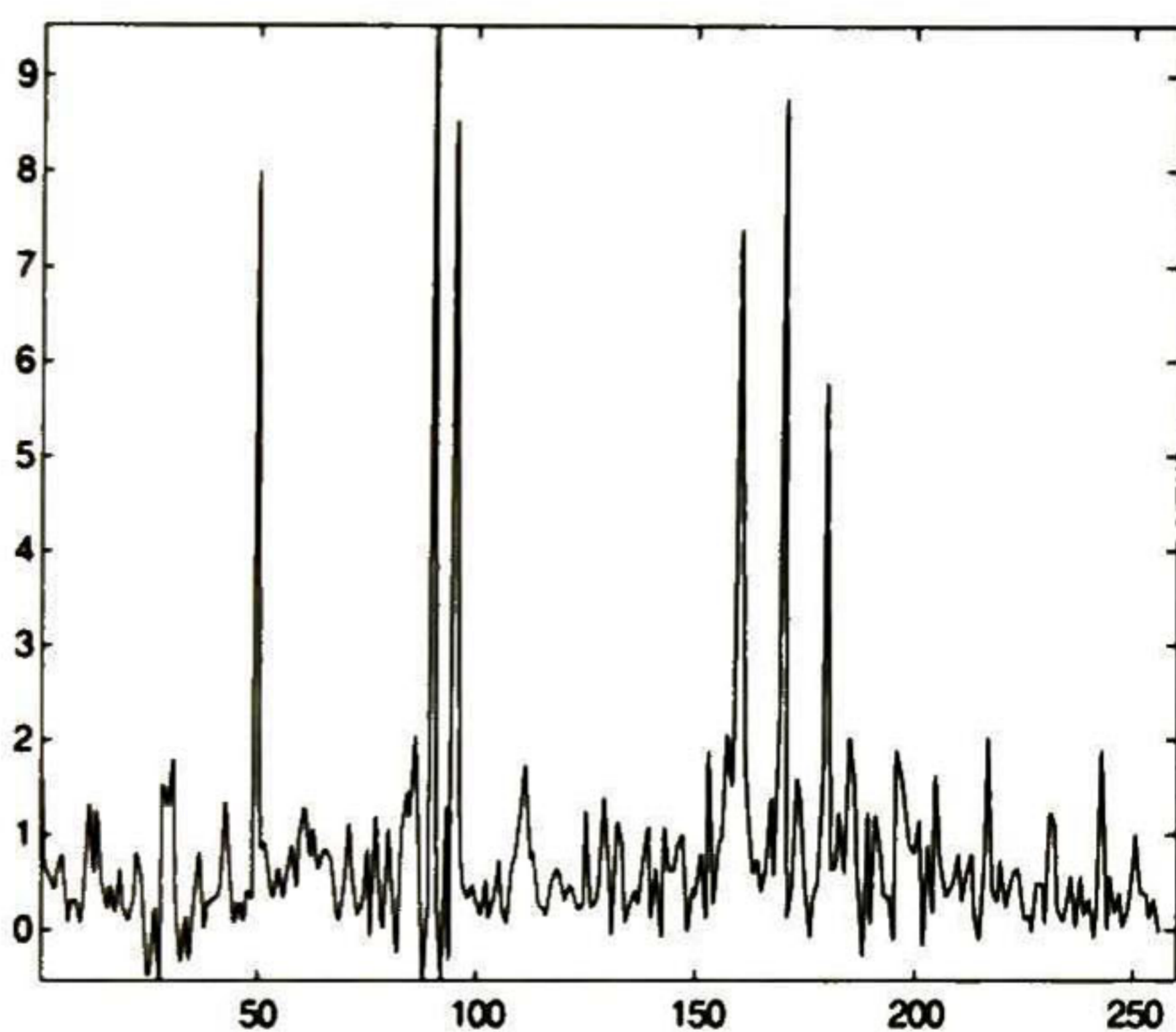
Tabla 4.24. Respuestas con SNR = 20 dB, K = 15 y SSF<sub>2</sub>.



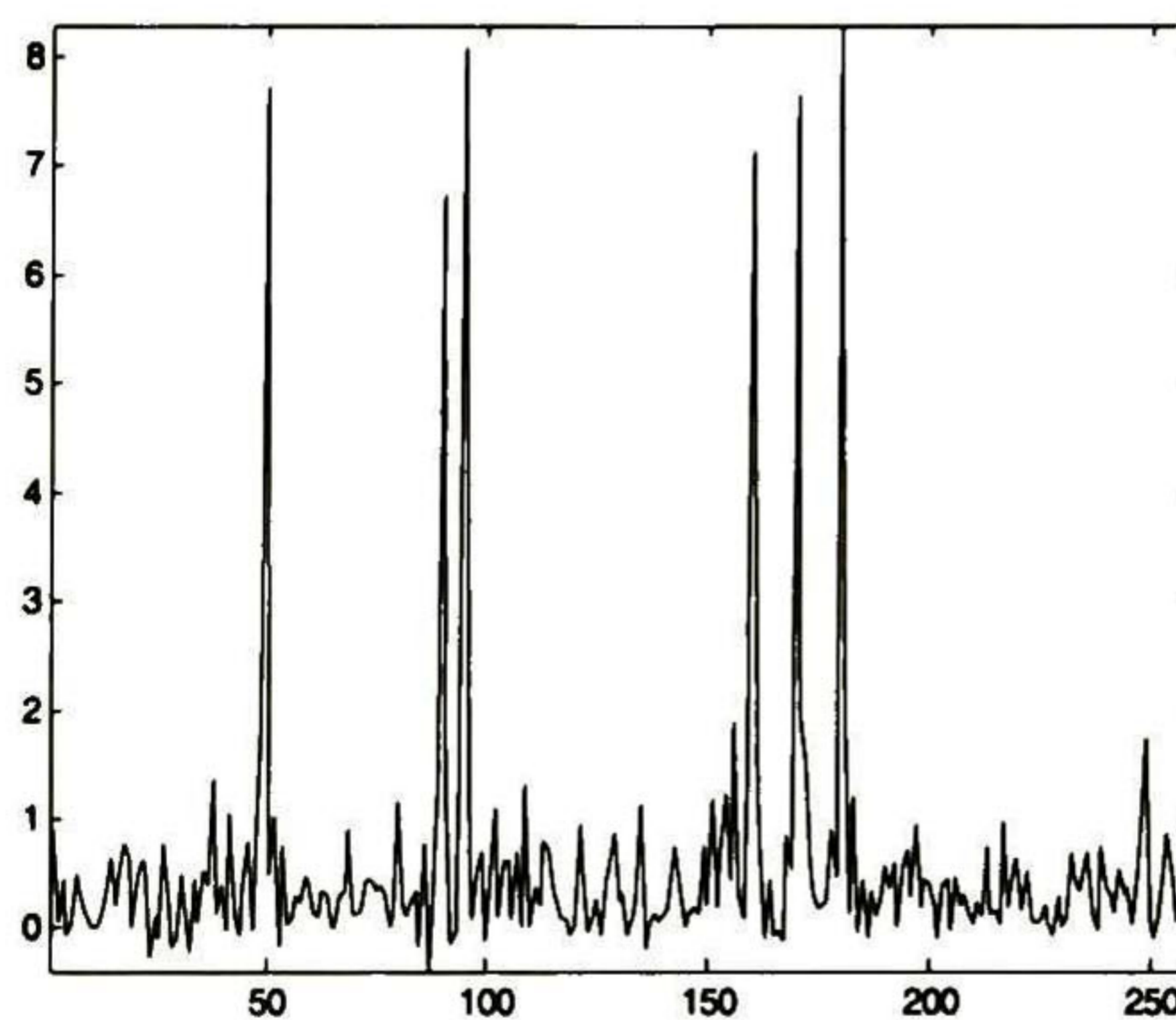
(a) Señal original  $v$



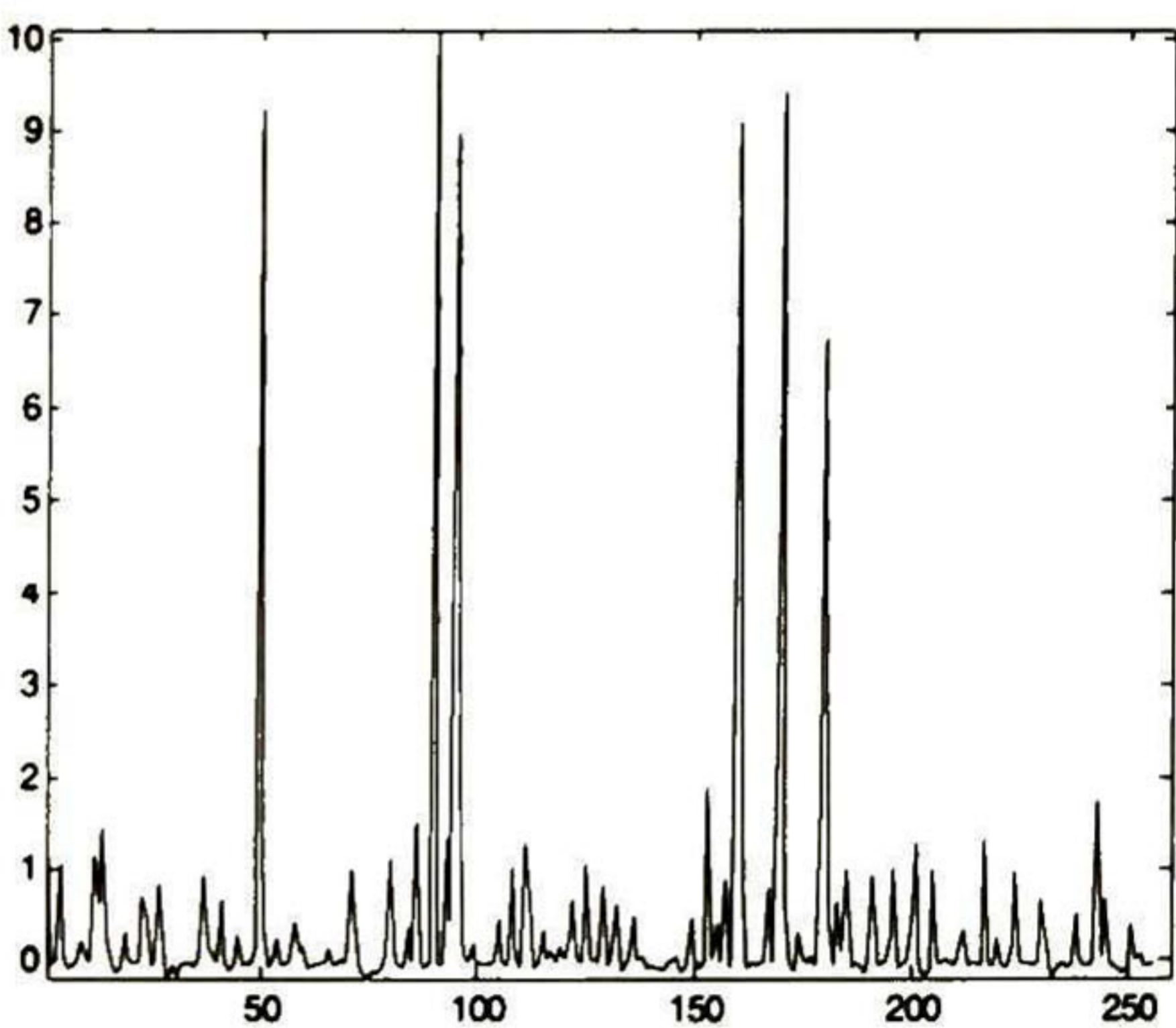
(b) Señal con ruido



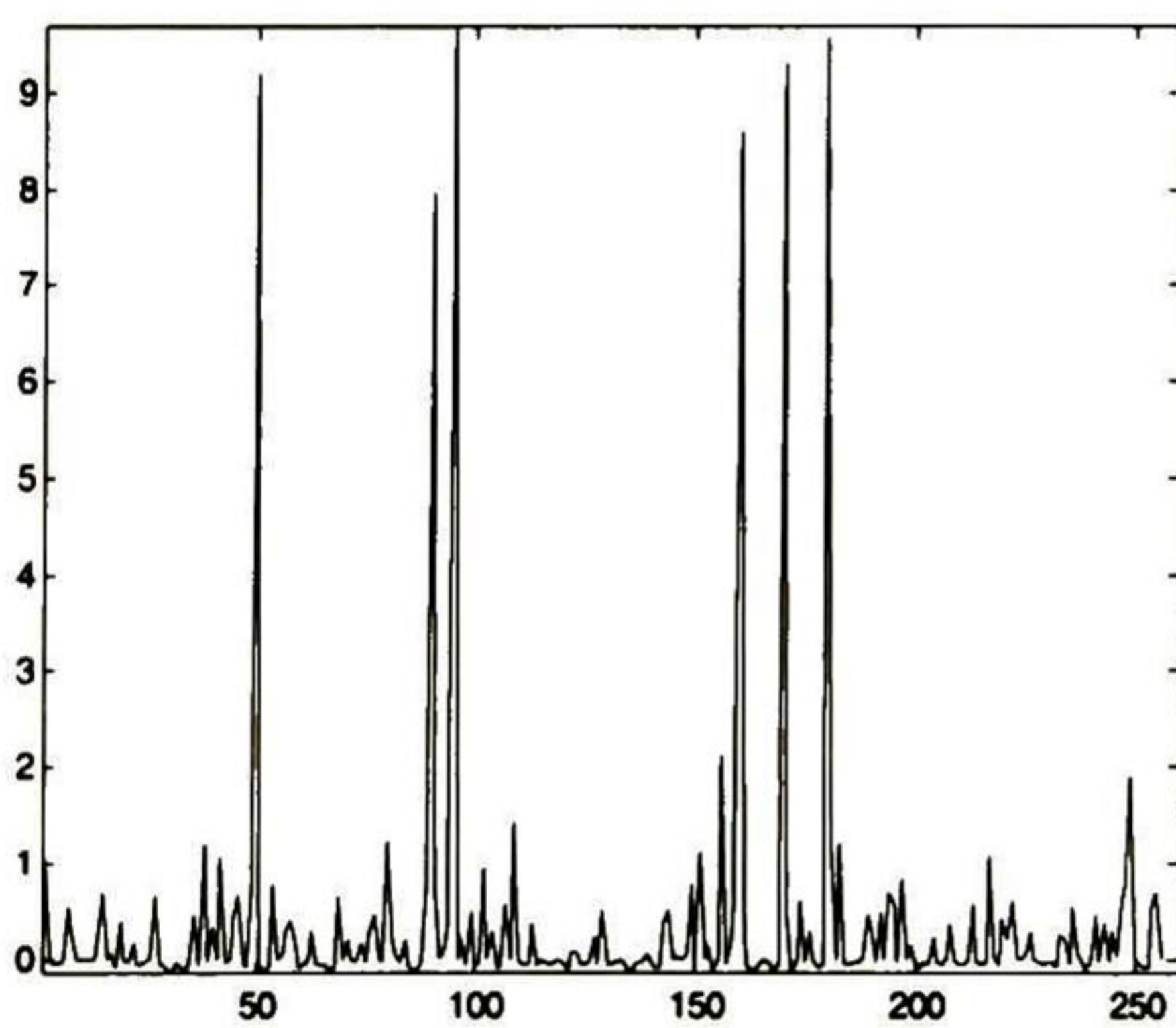
(c) Estimación de 14.6529 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 15.5064 dB a 2 iteraciones con el método WCLS

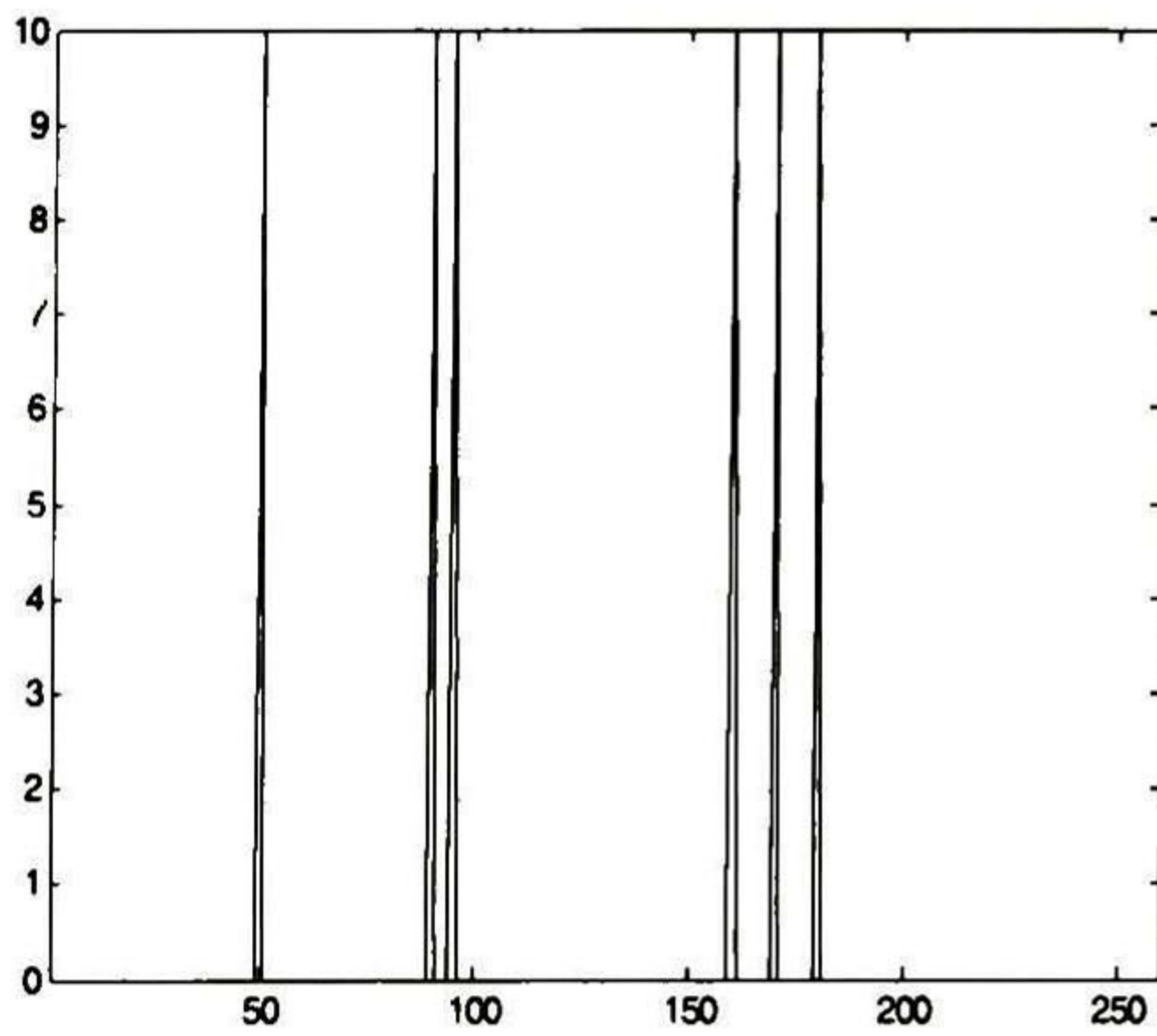


(e) Estimación de 18.8605 dB a 40 iteraciones con el método CLS

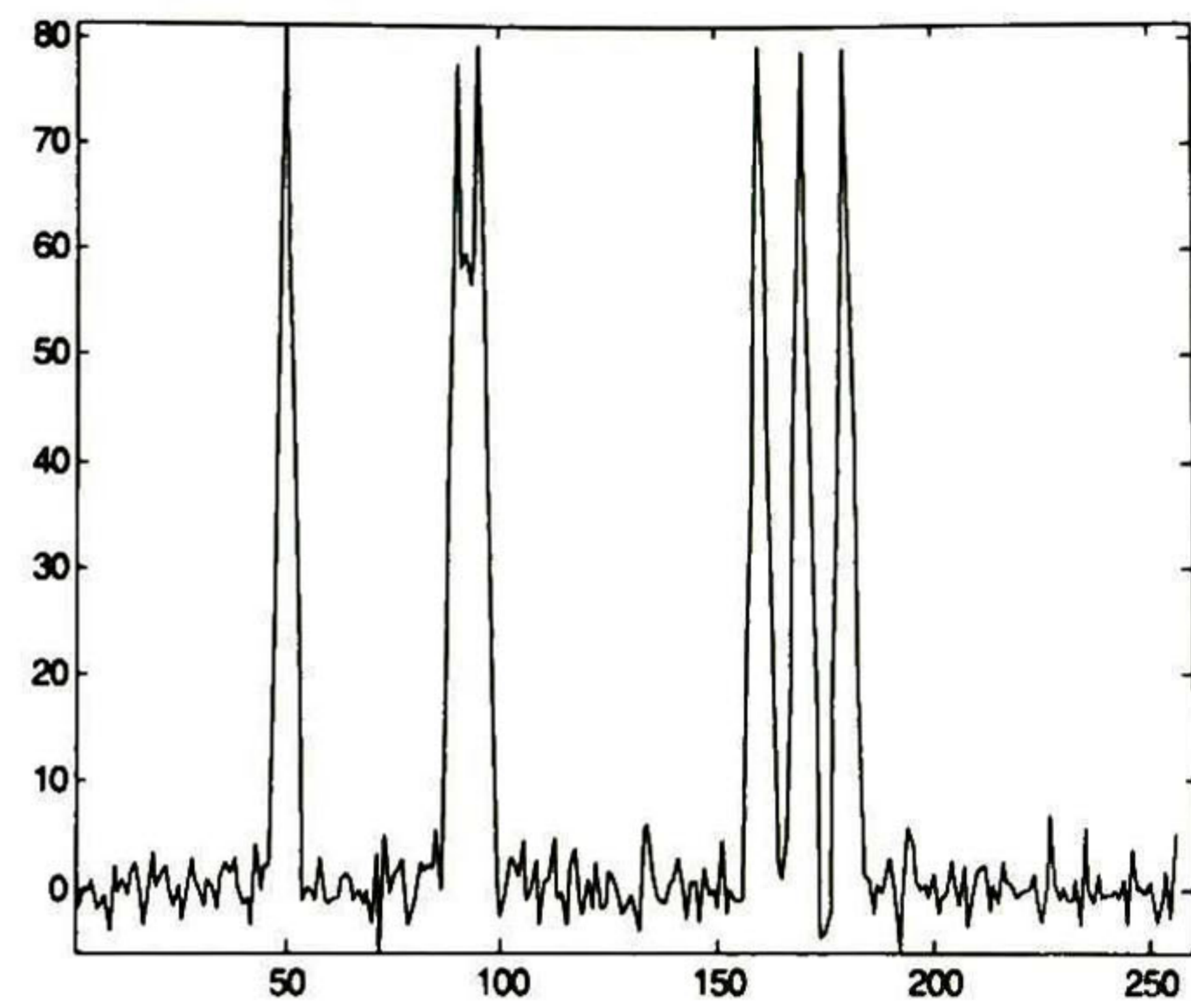


(f) Estimación de 19.2029 dB a 40 iteraciones con el método WCLS

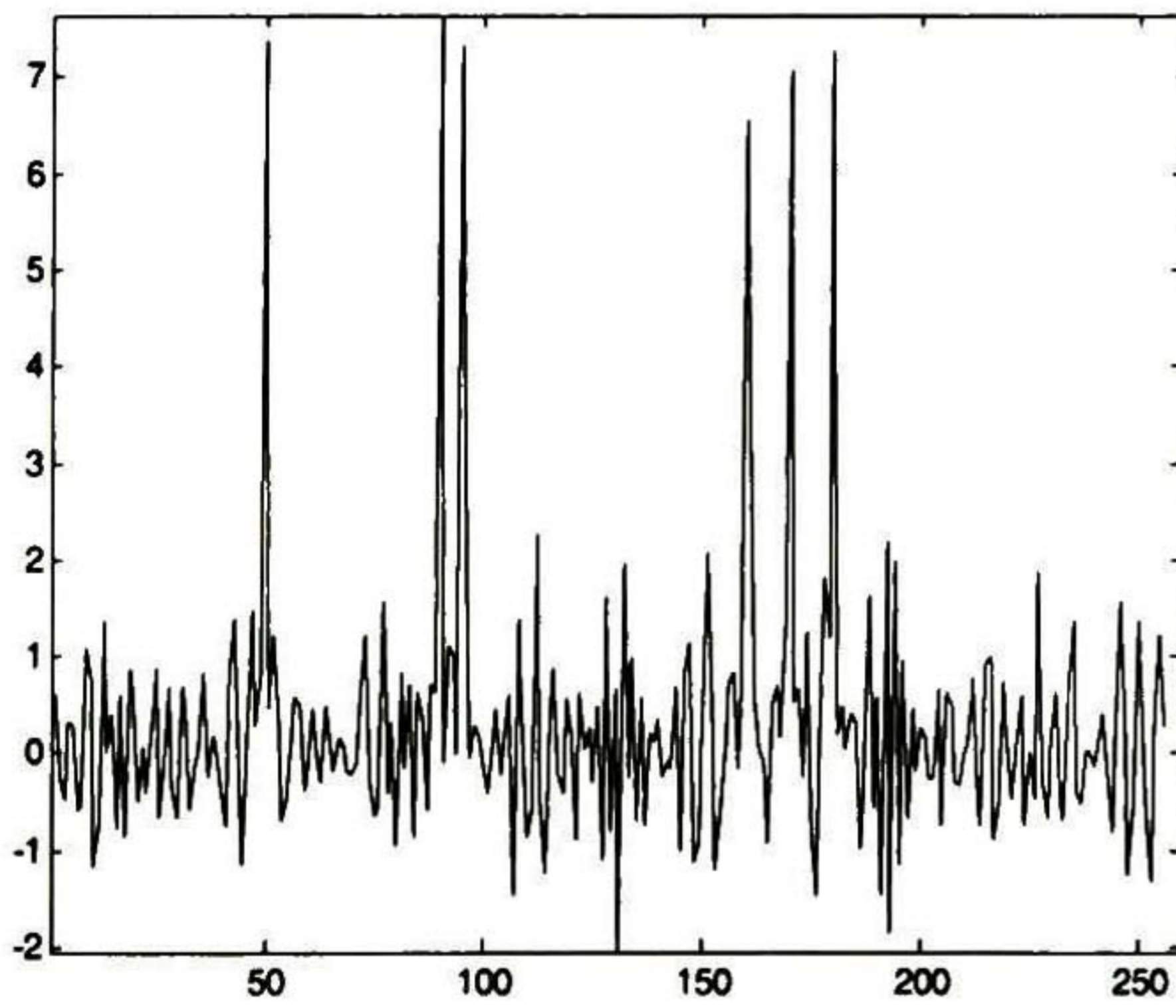
Tabla 4.25. Respuestas con SNR = 3 dB, K = 5 y SSF<sub>3</sub>.



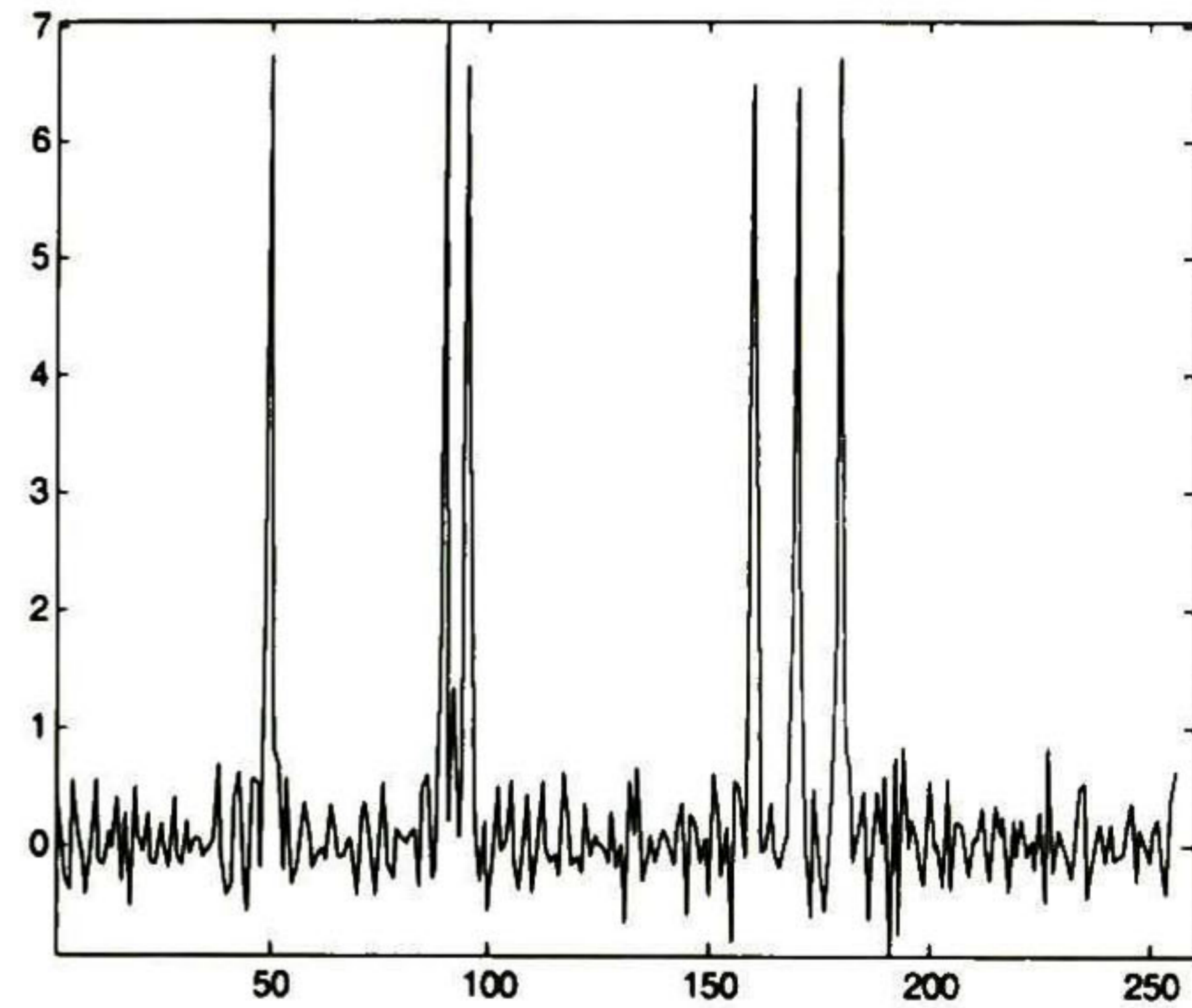
(a) Señal original v



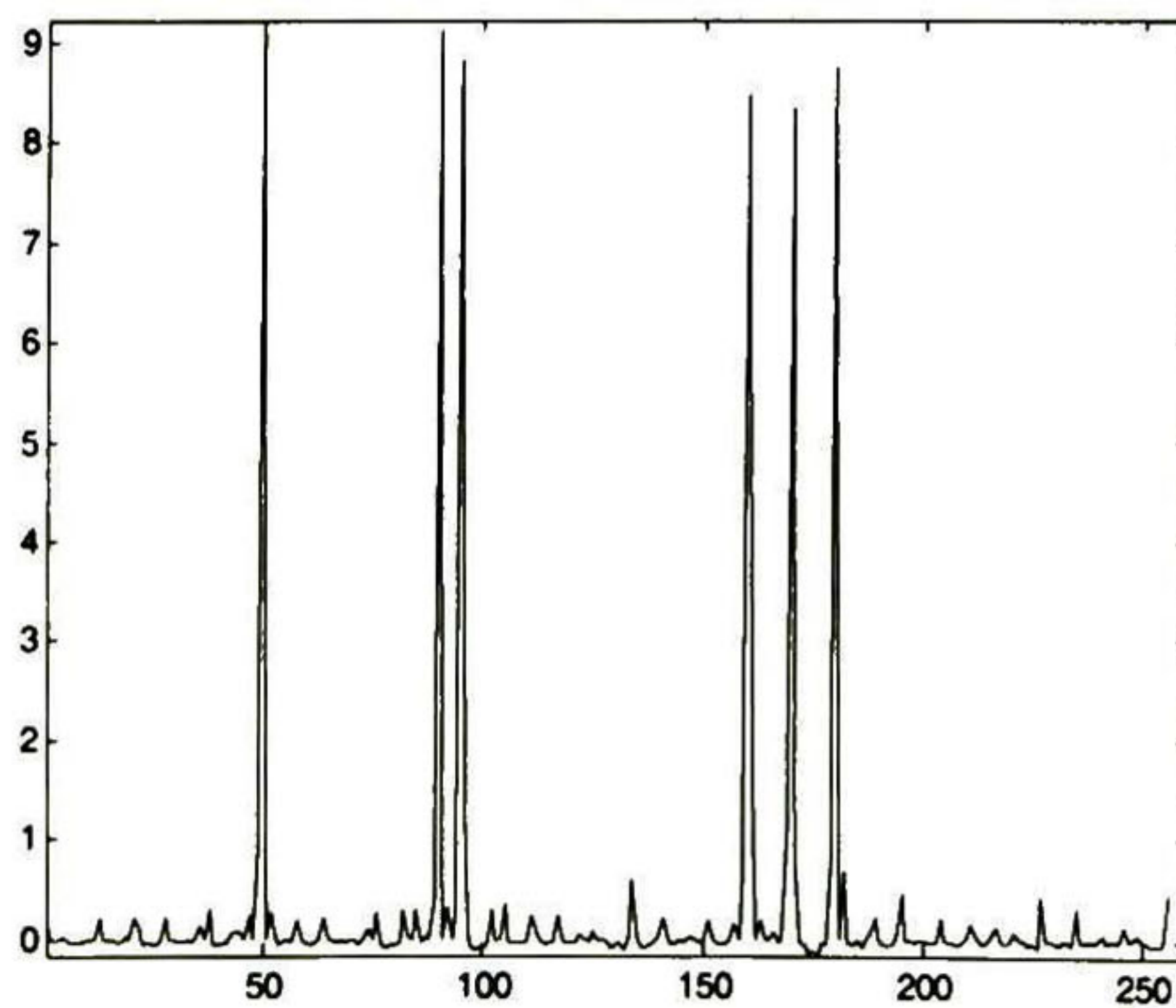
(b) Señal con ruido



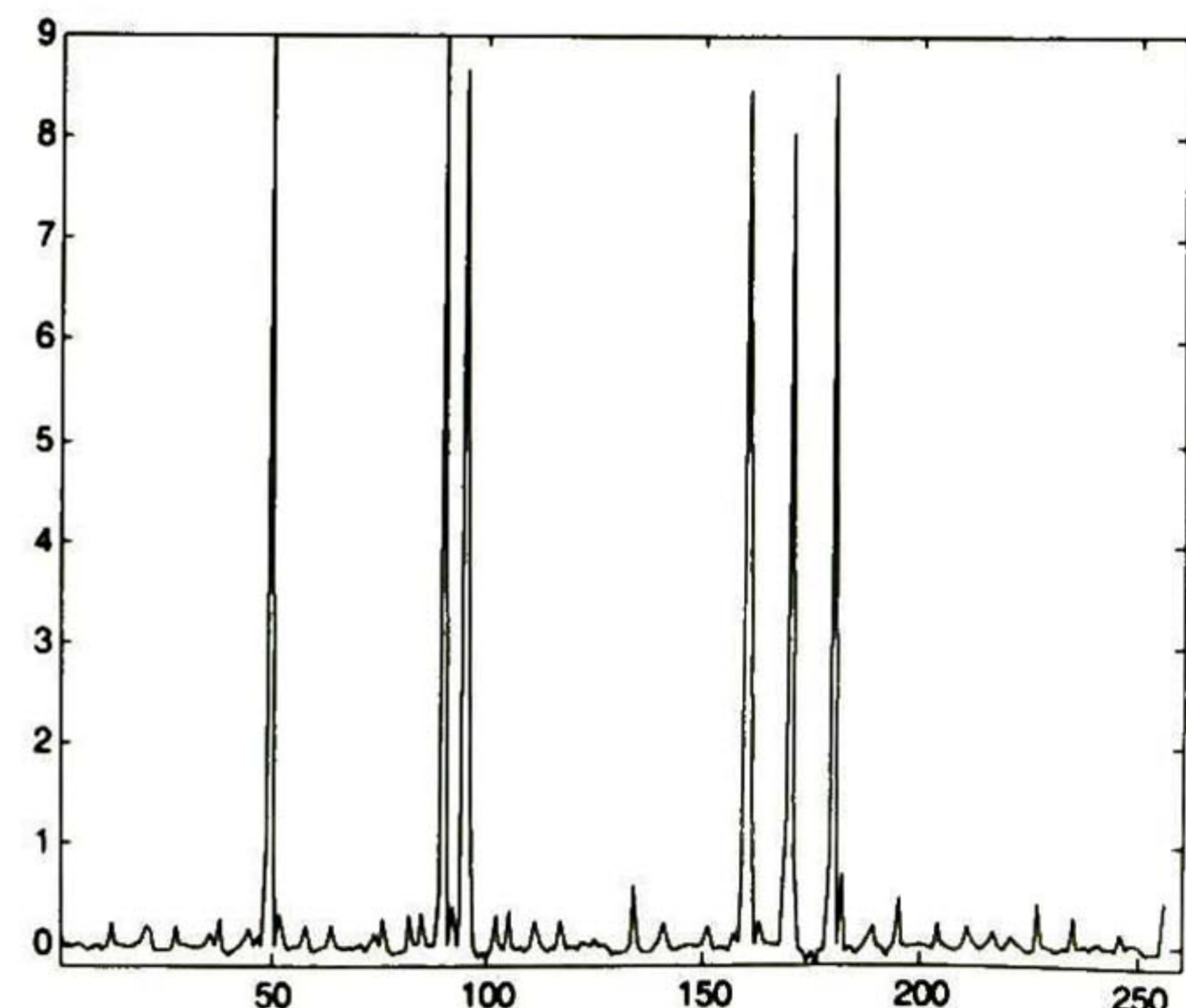
(c) Estimación de 26.9305 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 28.9637 dB a 2 iteraciones con el método WCLS

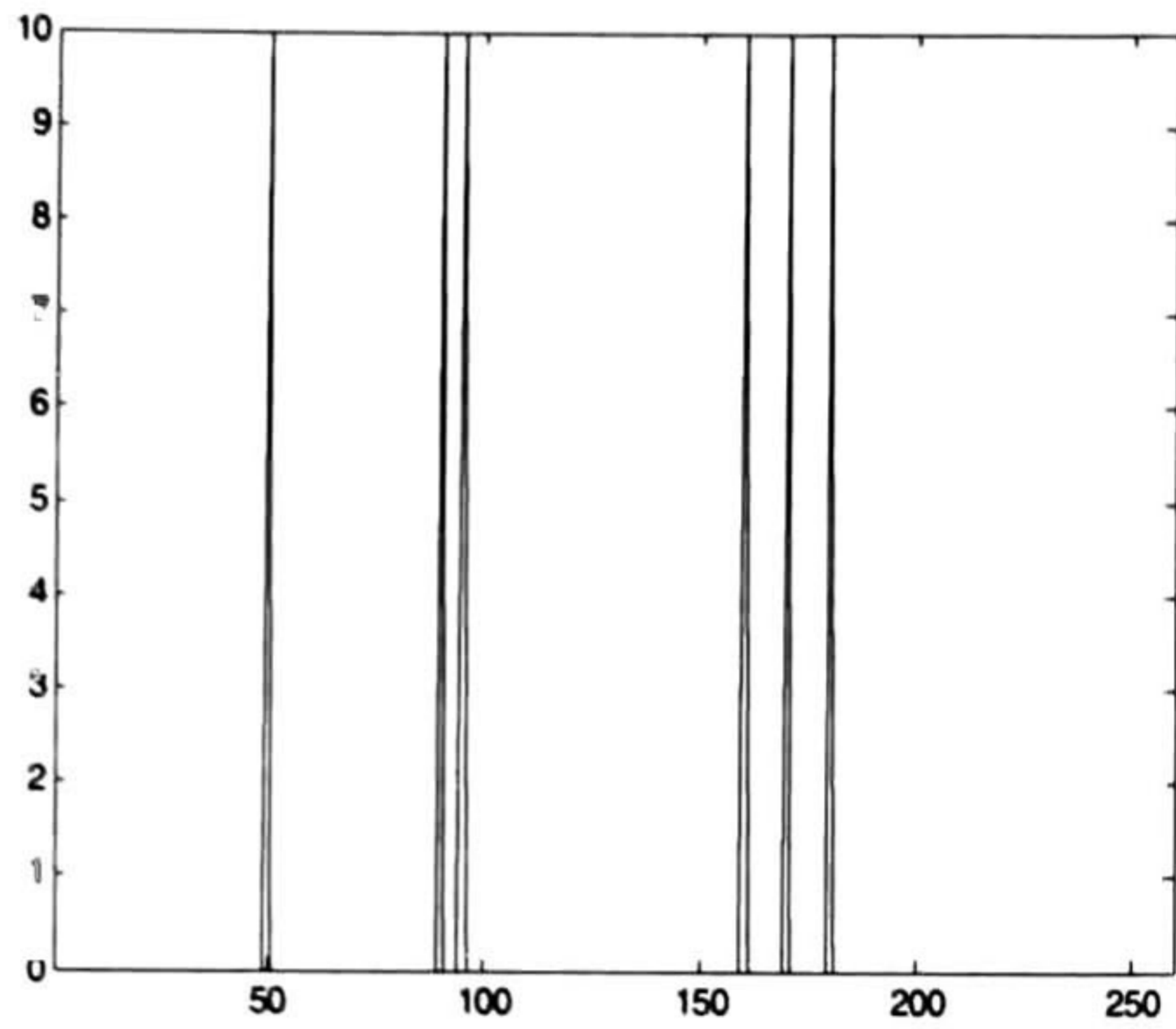


(e) Estimación de 36.3757 dB a 40 iteraciones con el método CLS

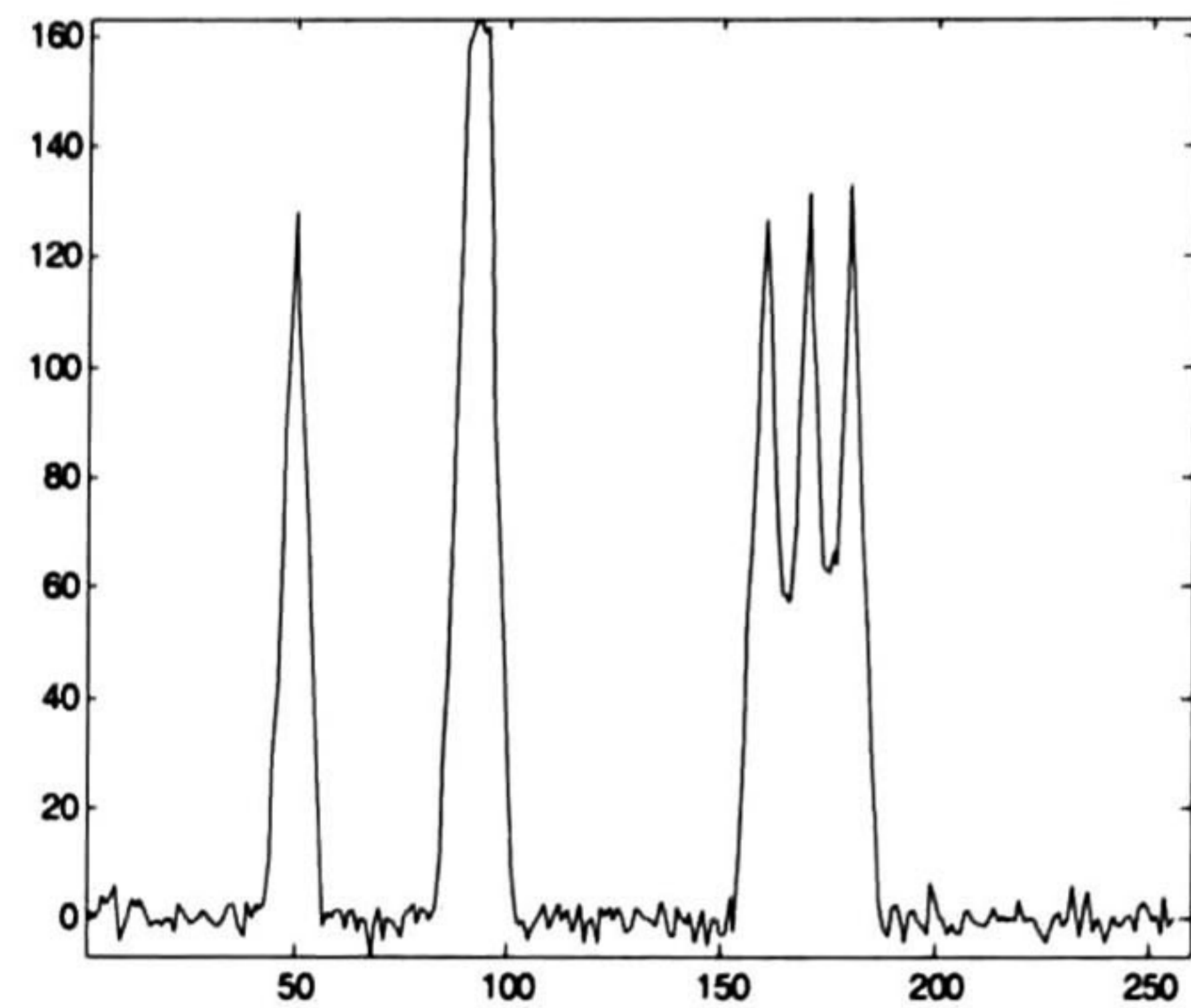


(f) Estimación de 36.5022 dB a 40 iteraciones con el método WCLS

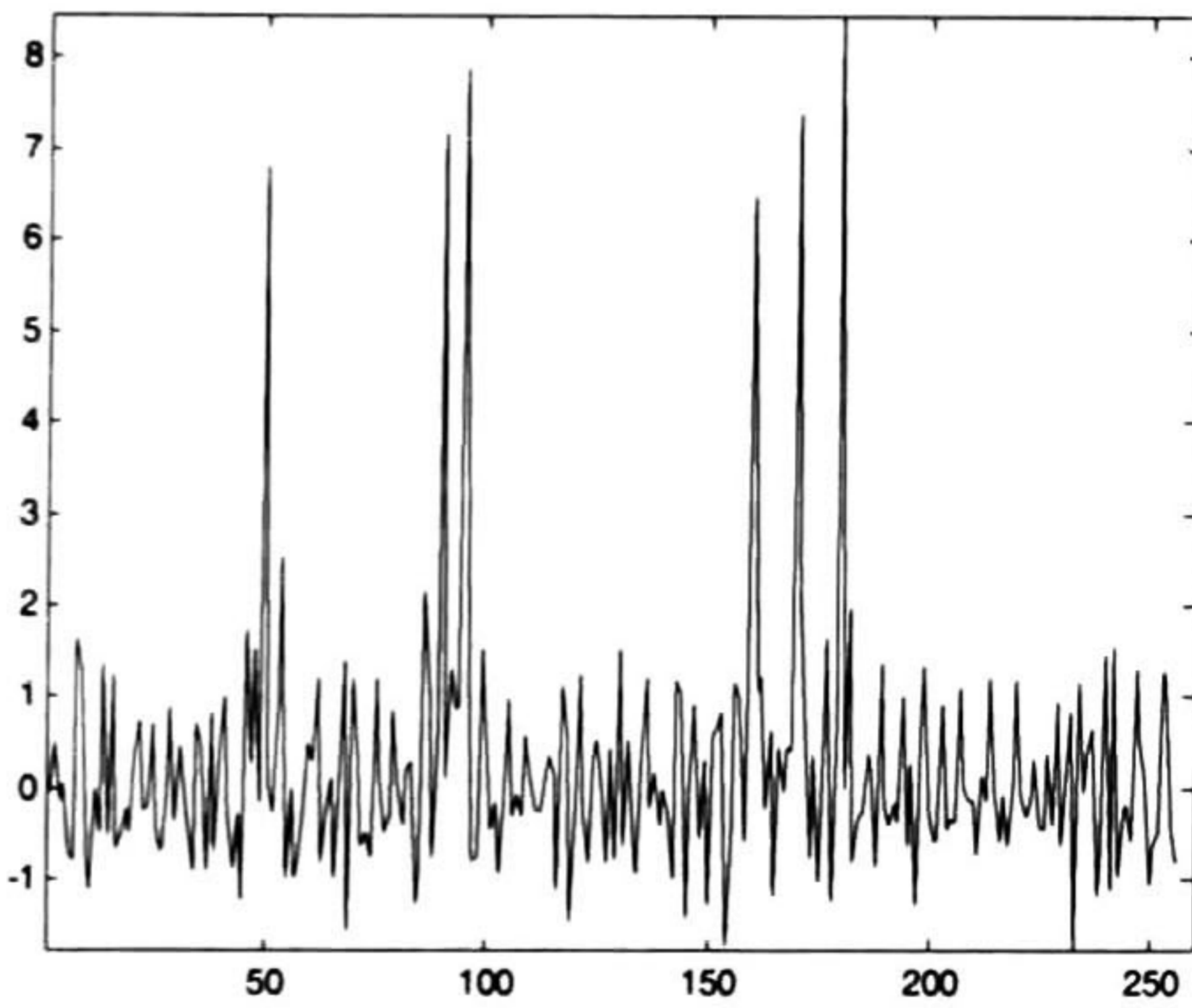
Tabla 4.26. Respuestas con SNR = 3 dB, K = 10 y SSF<sub>3</sub>.



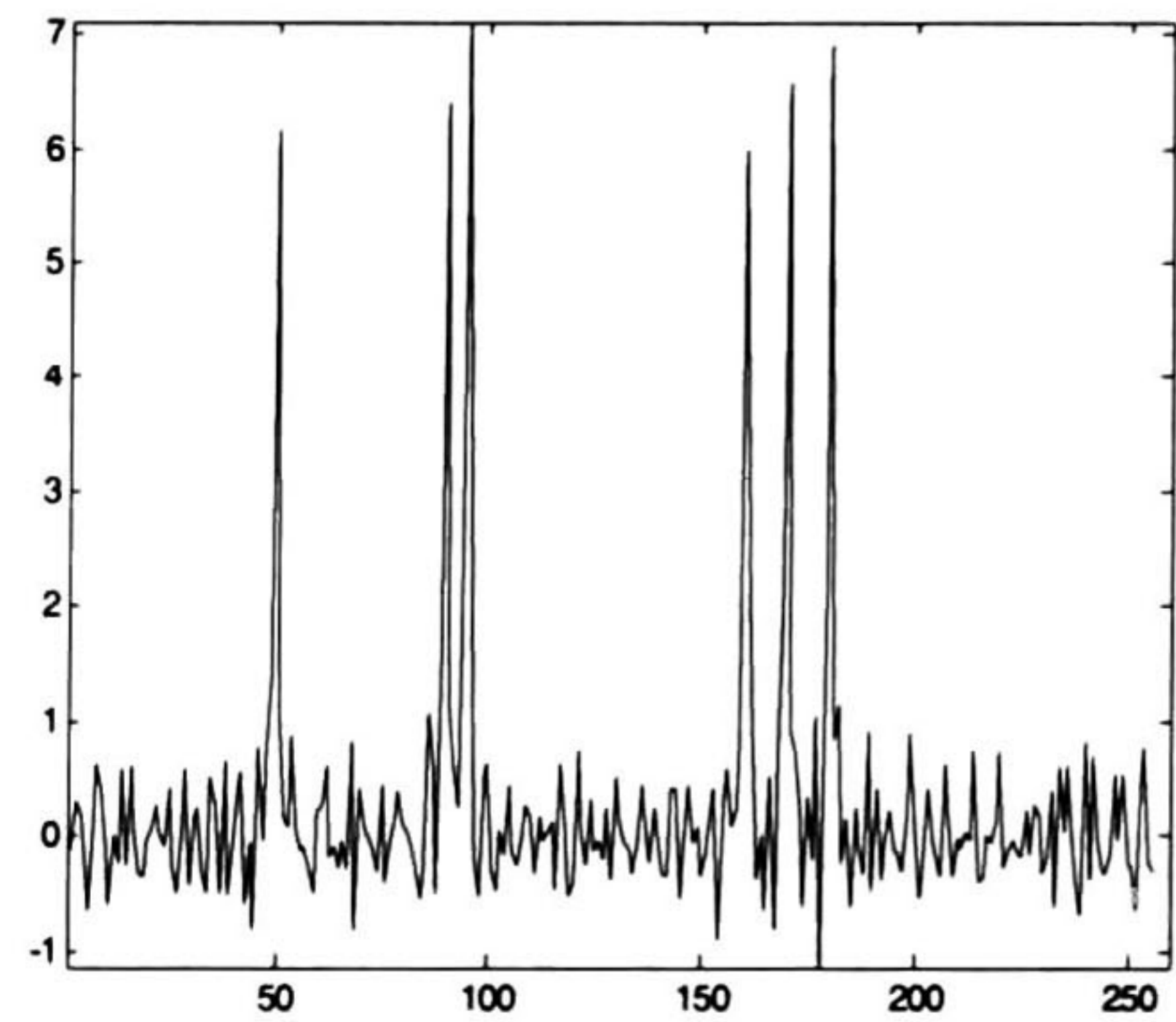
(a) Señal original v



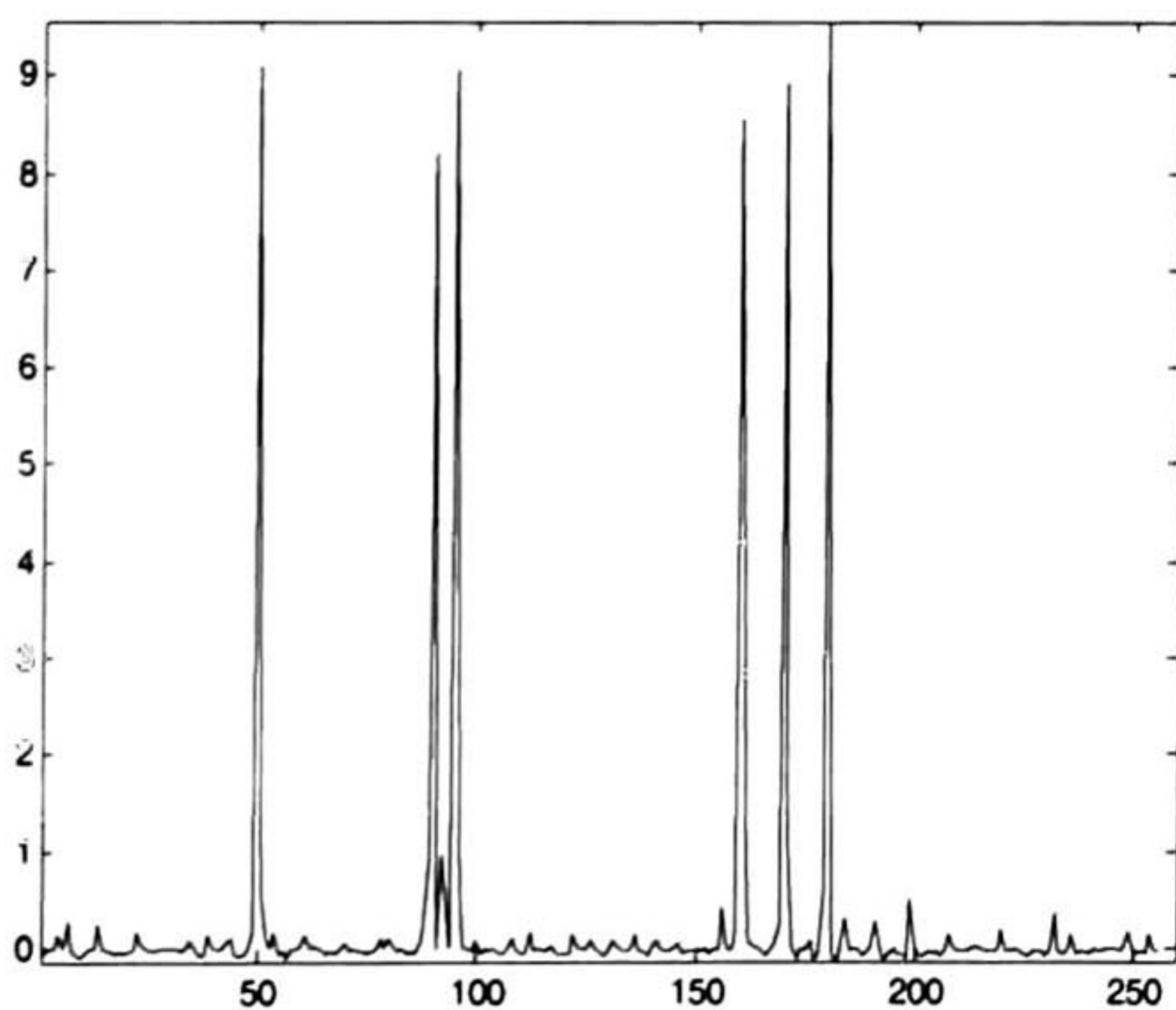
(b) Señal con ruido



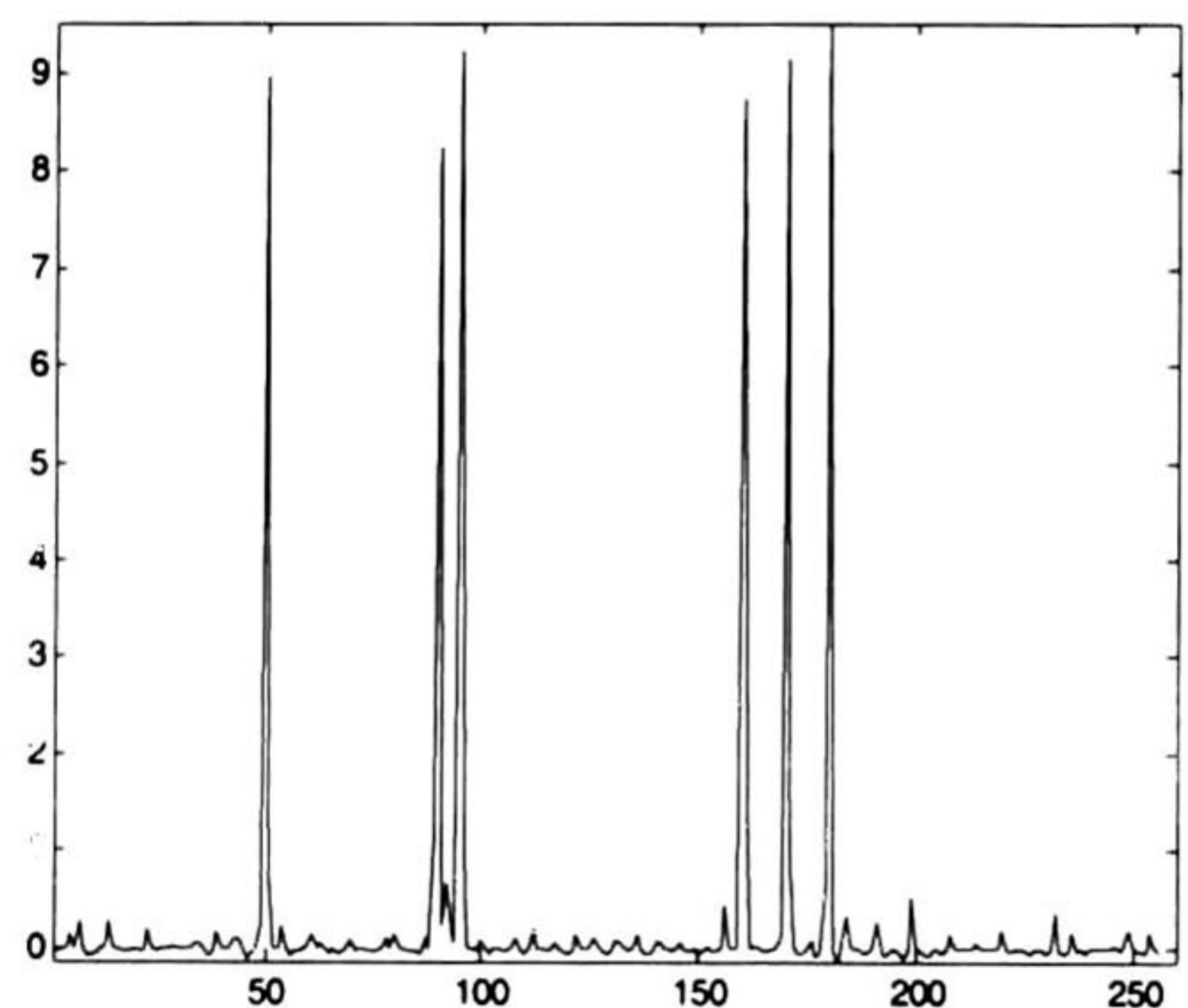
(c) Estimación de 33.8244 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 35.4940 dB a 2 iteraciones con el método WCLS

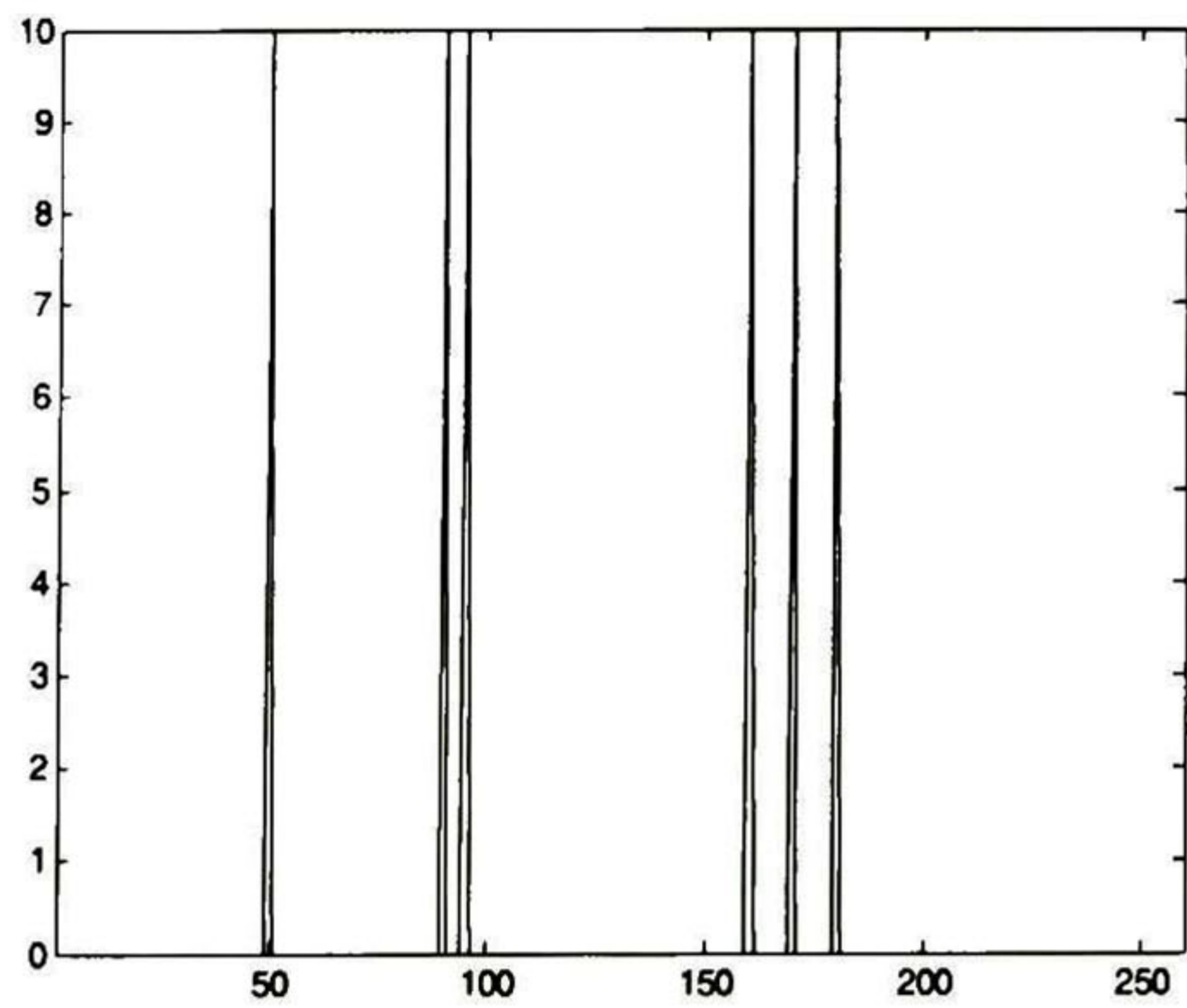


(e) Estimación de 45.1831 dB a 40 iteraciones con el método CLS

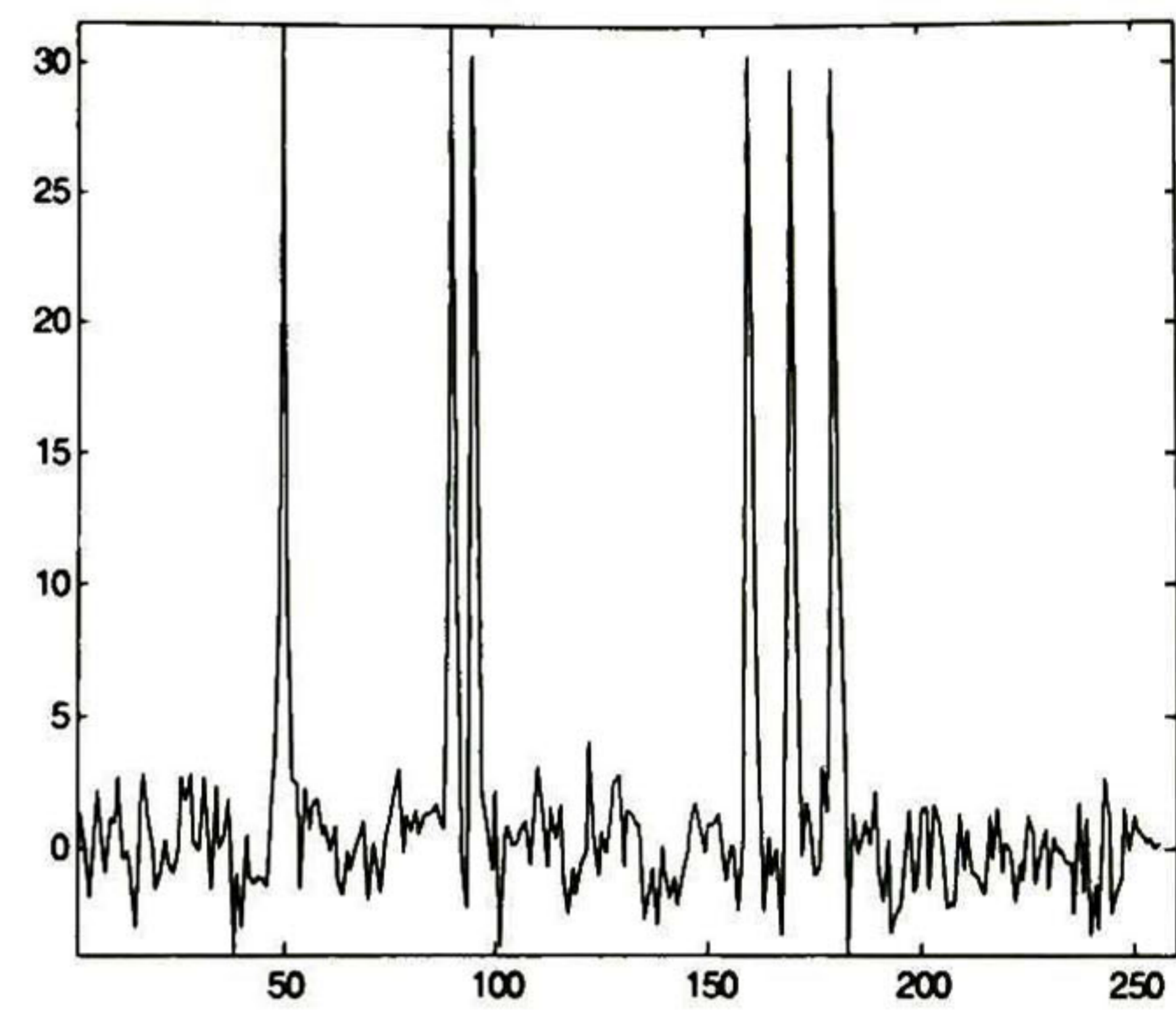


(f) Estimación de 45.5776 dB a 40 iteraciones con el método WCLS

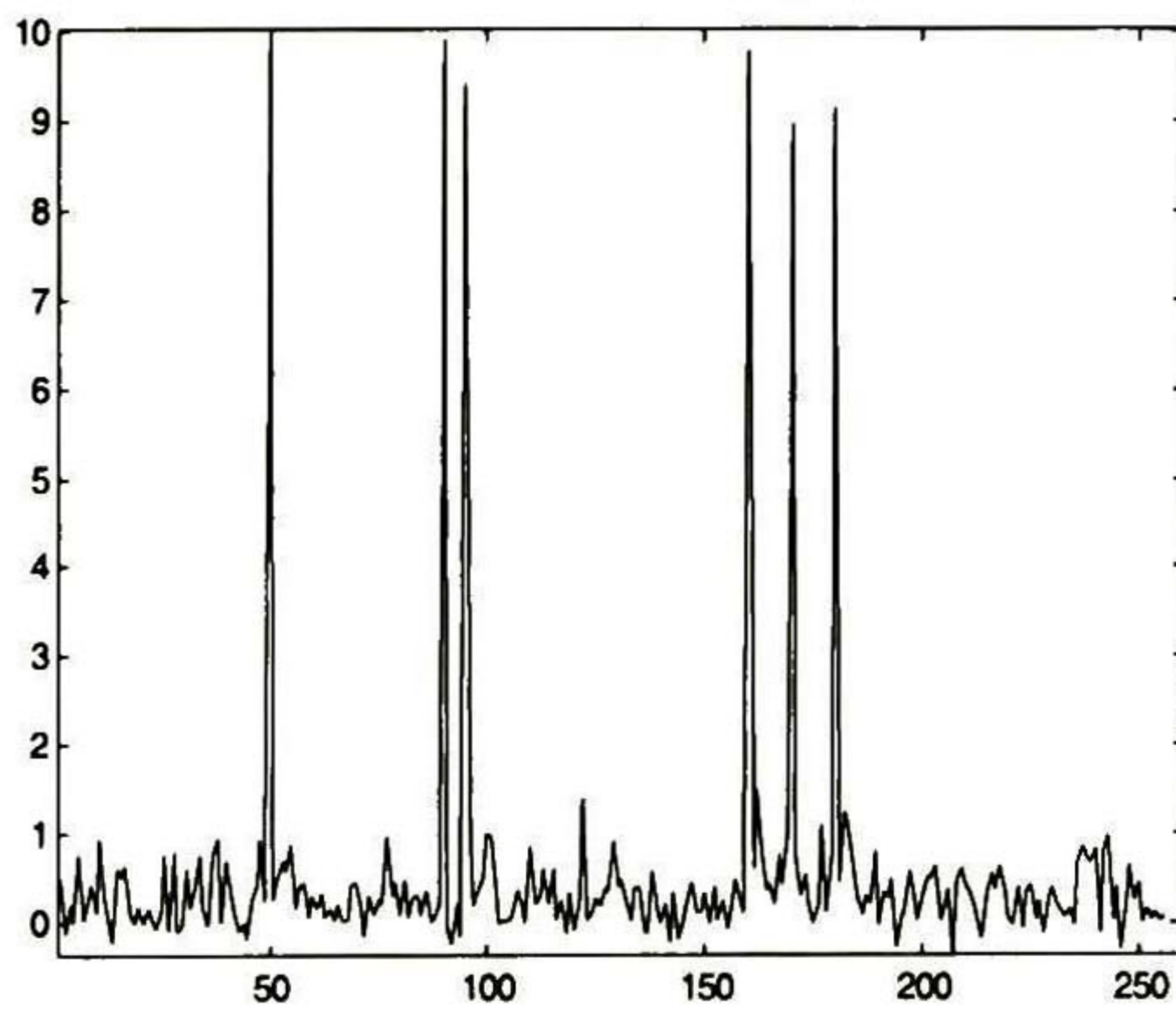
Tabla 4.27. Respuestas con SNR = 3 dB, K = 15 y SSF<sub>3</sub>.



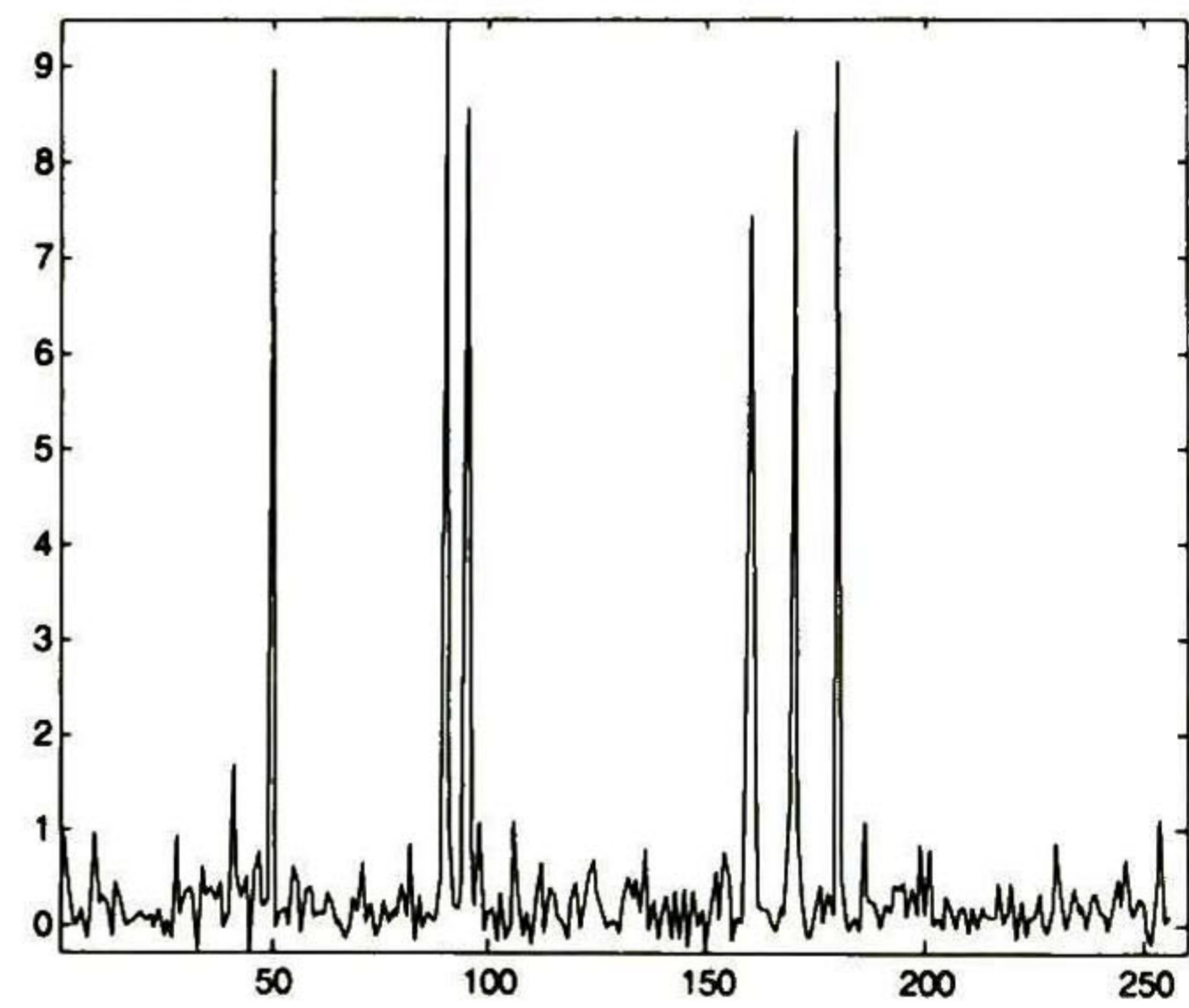
(a) Señal original v



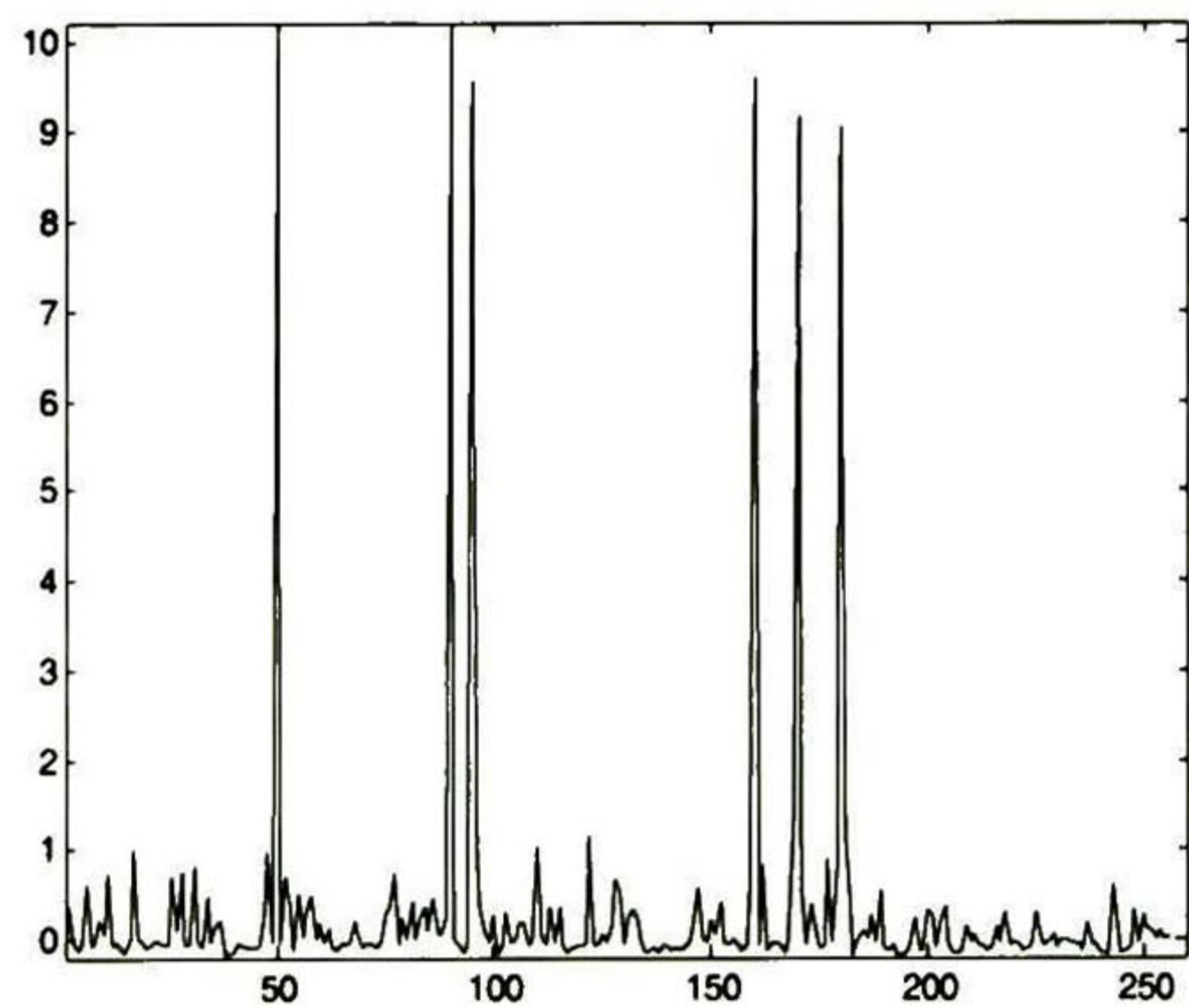
(b) Señal con ruido



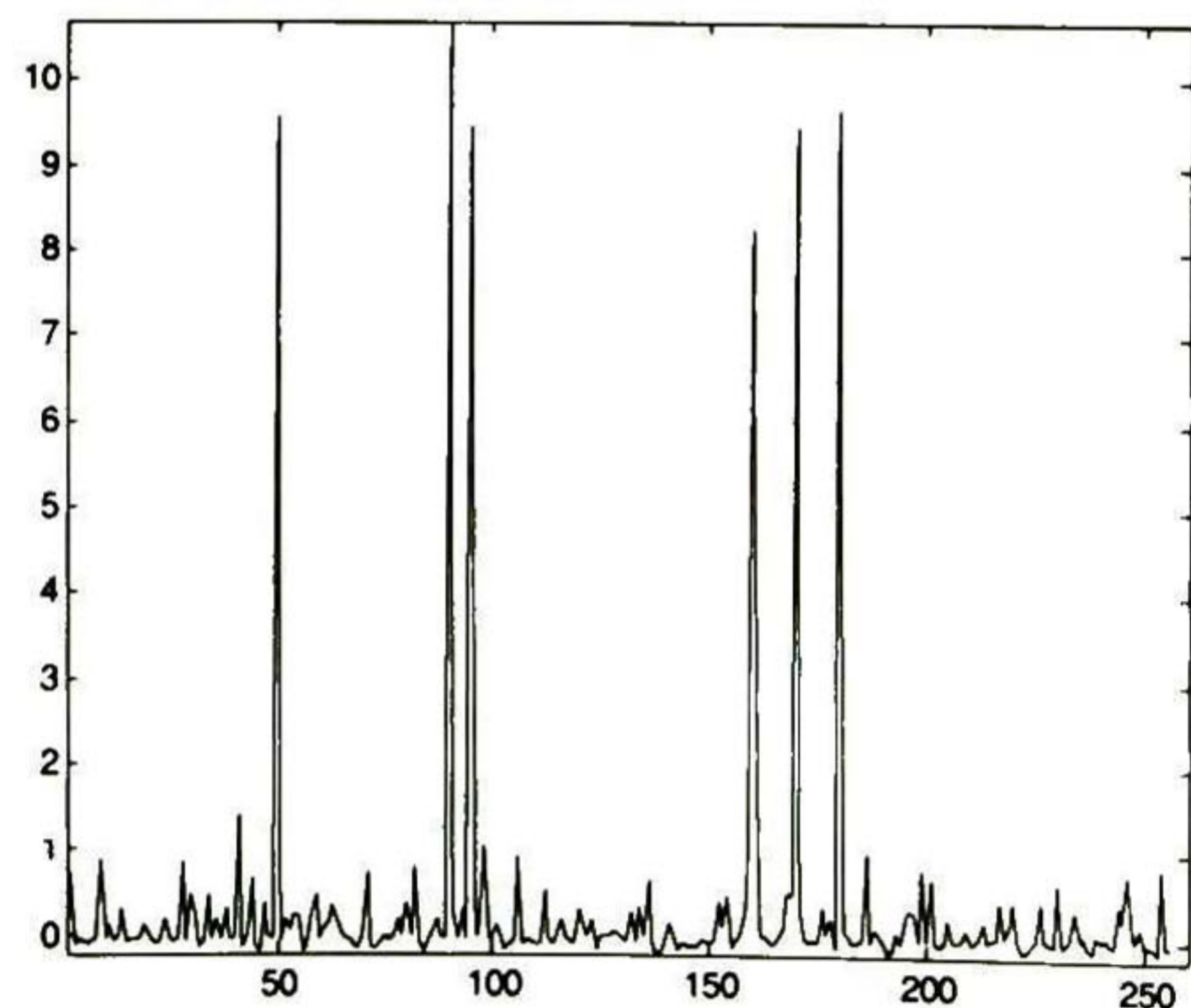
(c) Estimación de 18.7901 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 18.8946 dB a 2 iteraciones con el método WCLS

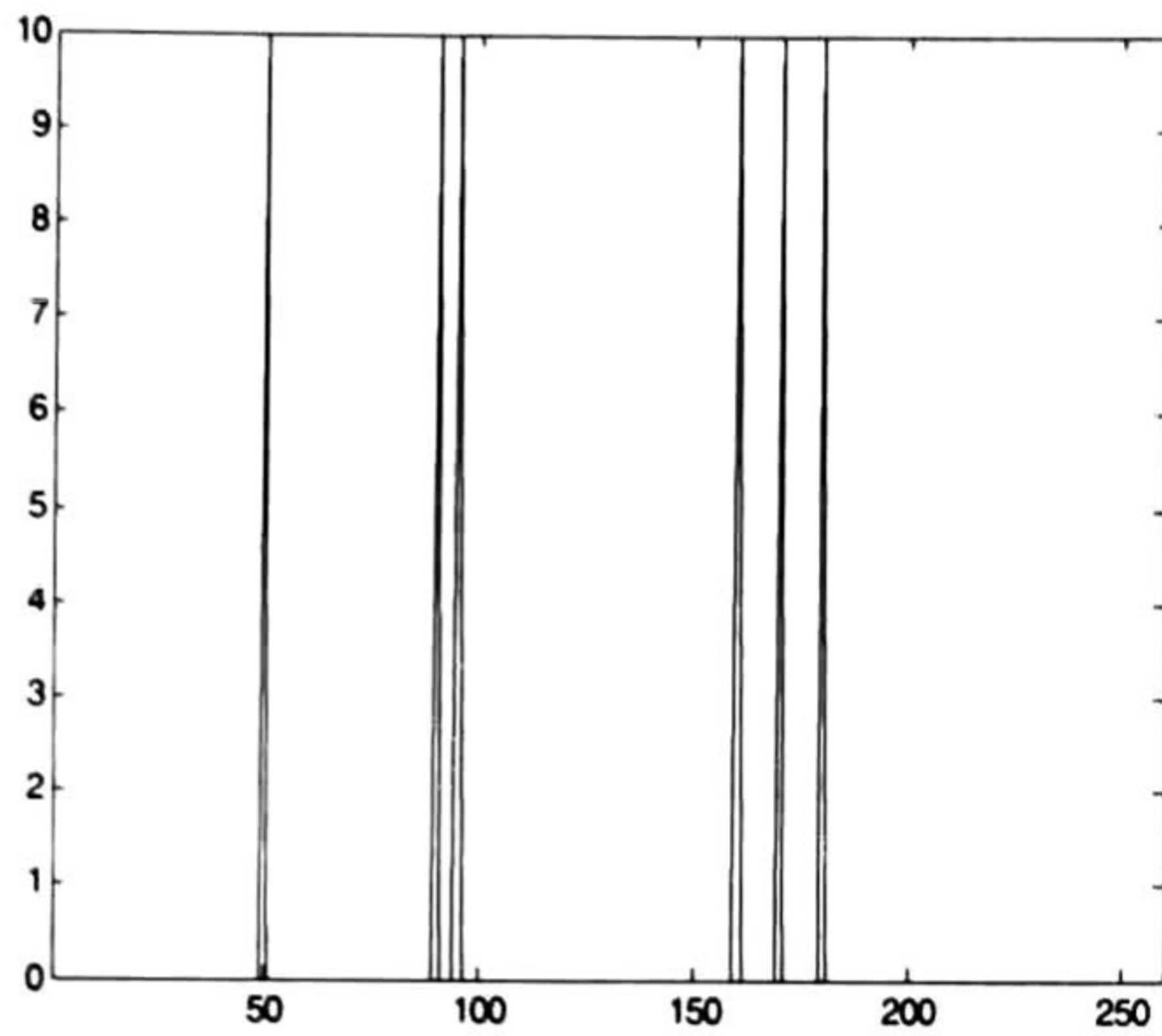


(e) Estimación de 22.2197 dB a 40 iteraciones con el método CLS

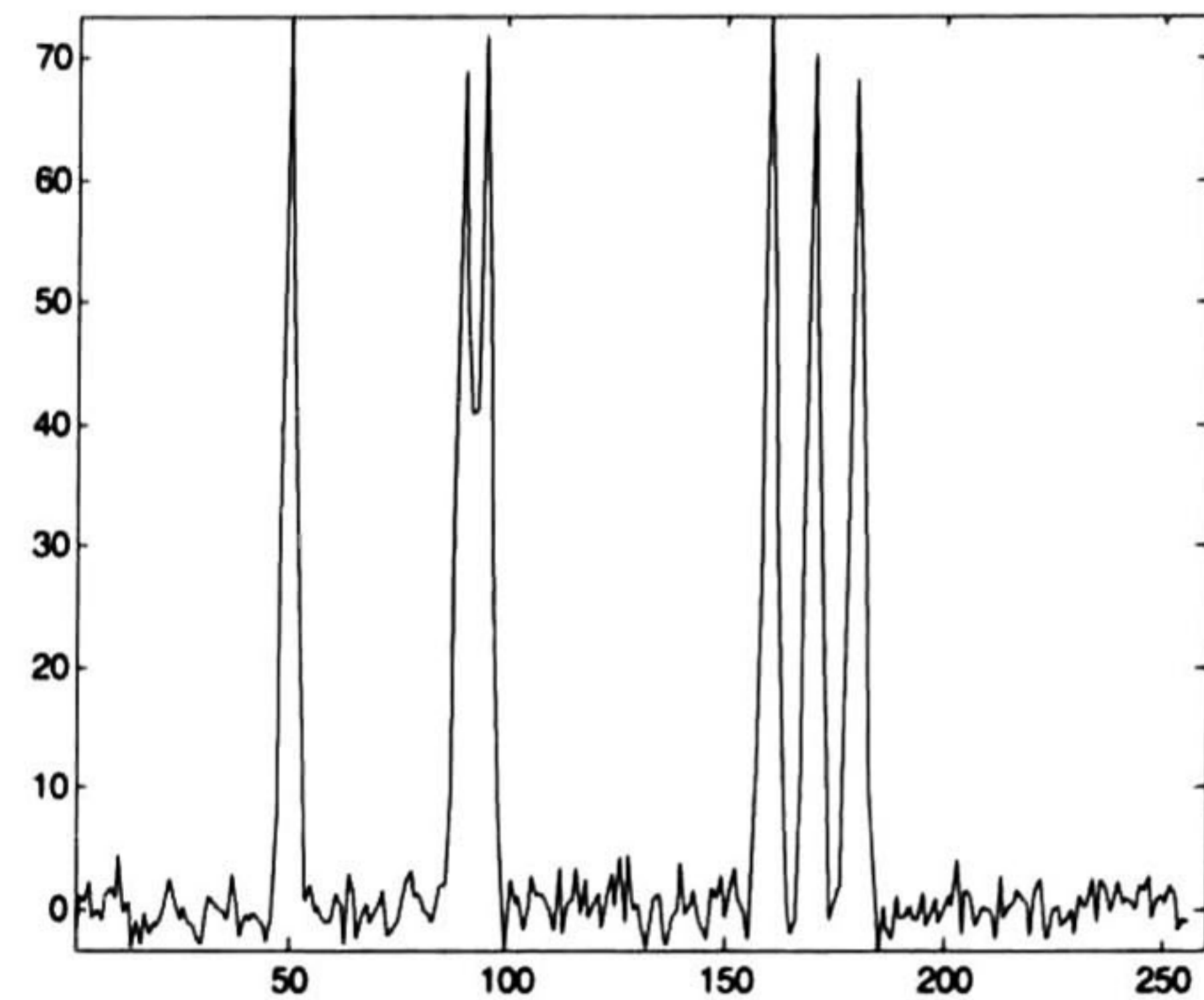


(f) Estimación de 22.2366 dB a 40 iteraciones con el método WCLS

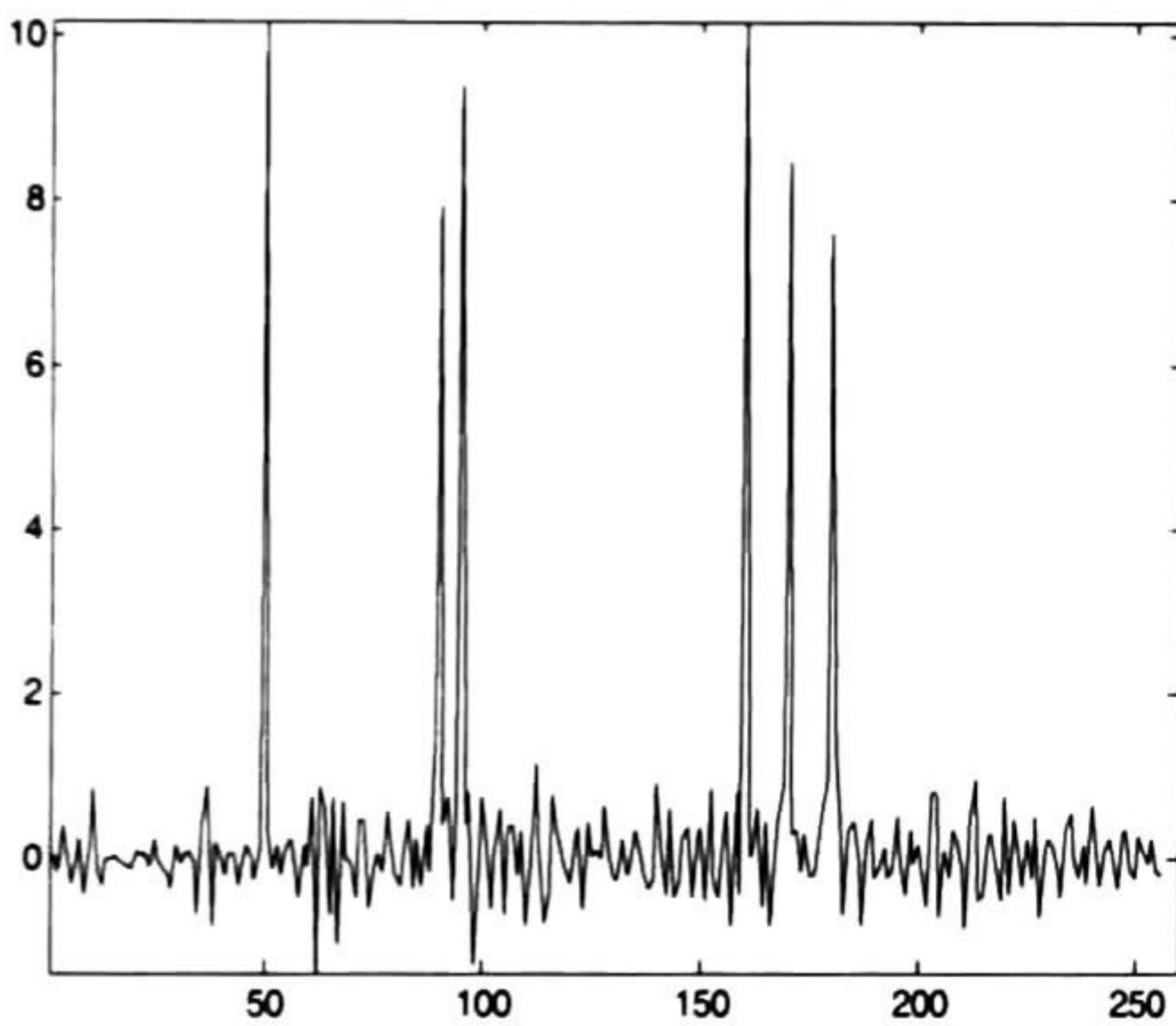
**Tabla 4.28.** Respuestas con SNR = 6 dB, K = 5 y SSF<sub>3</sub>.



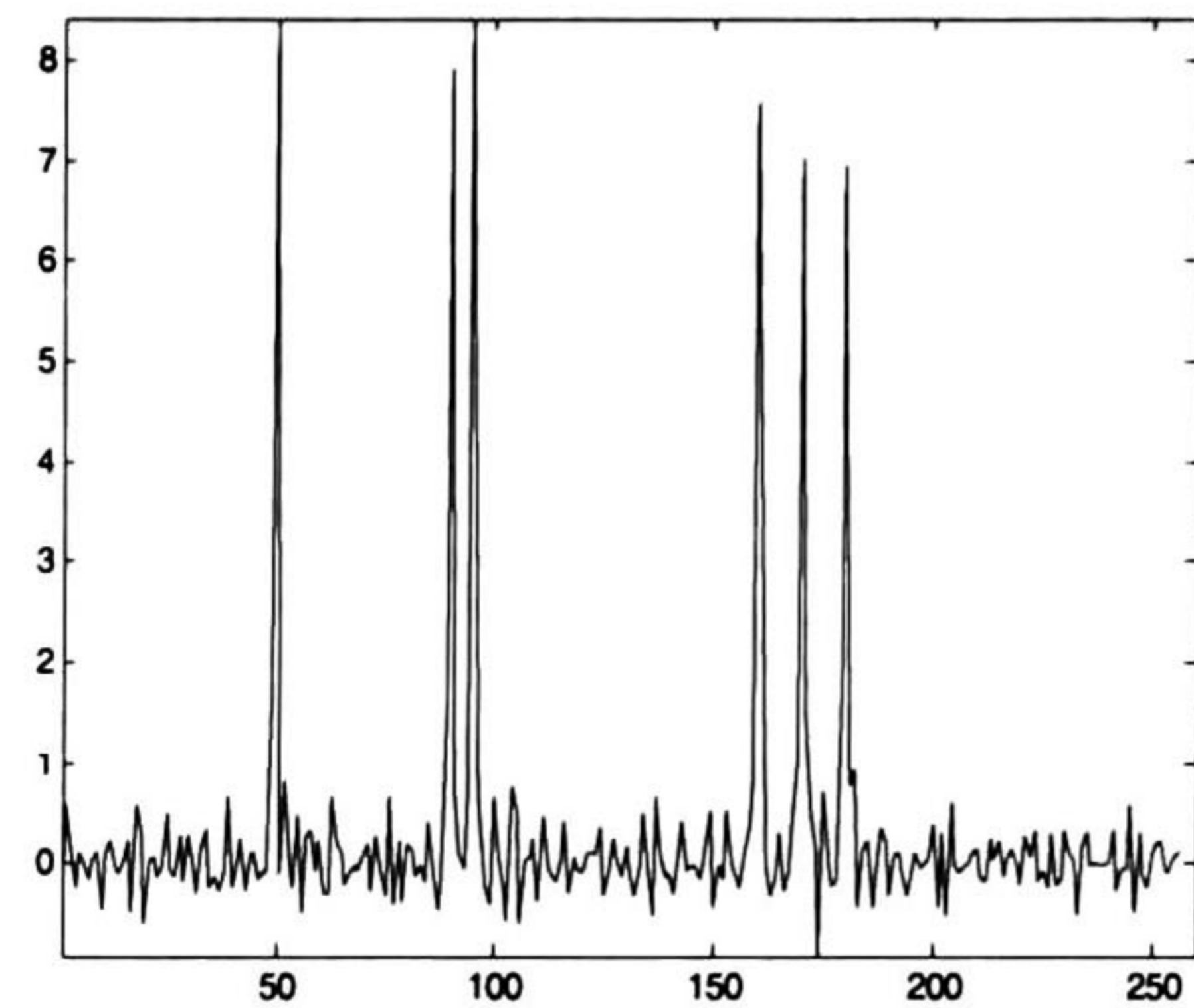
(a) Señal original v



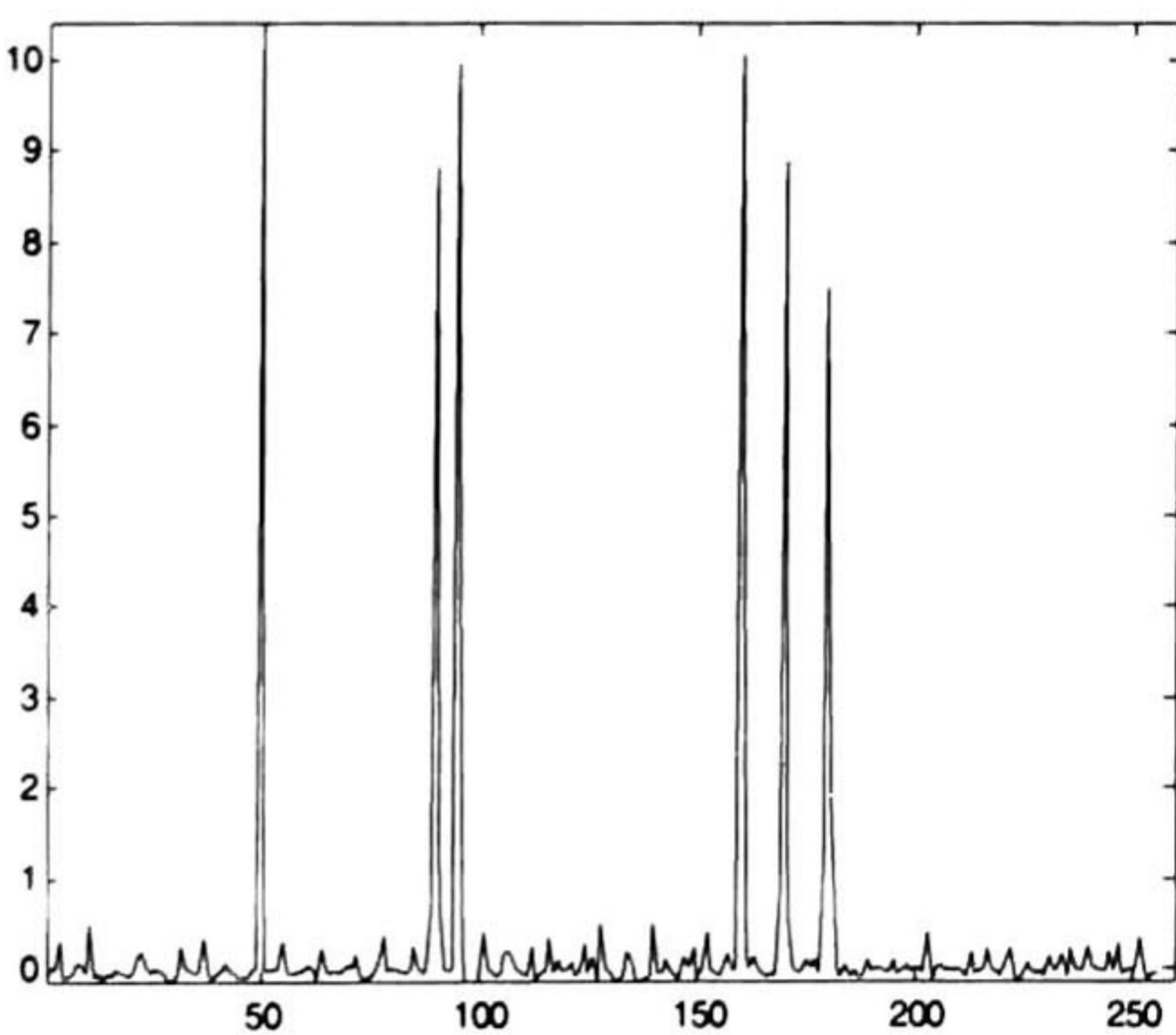
(b) Señal con ruido



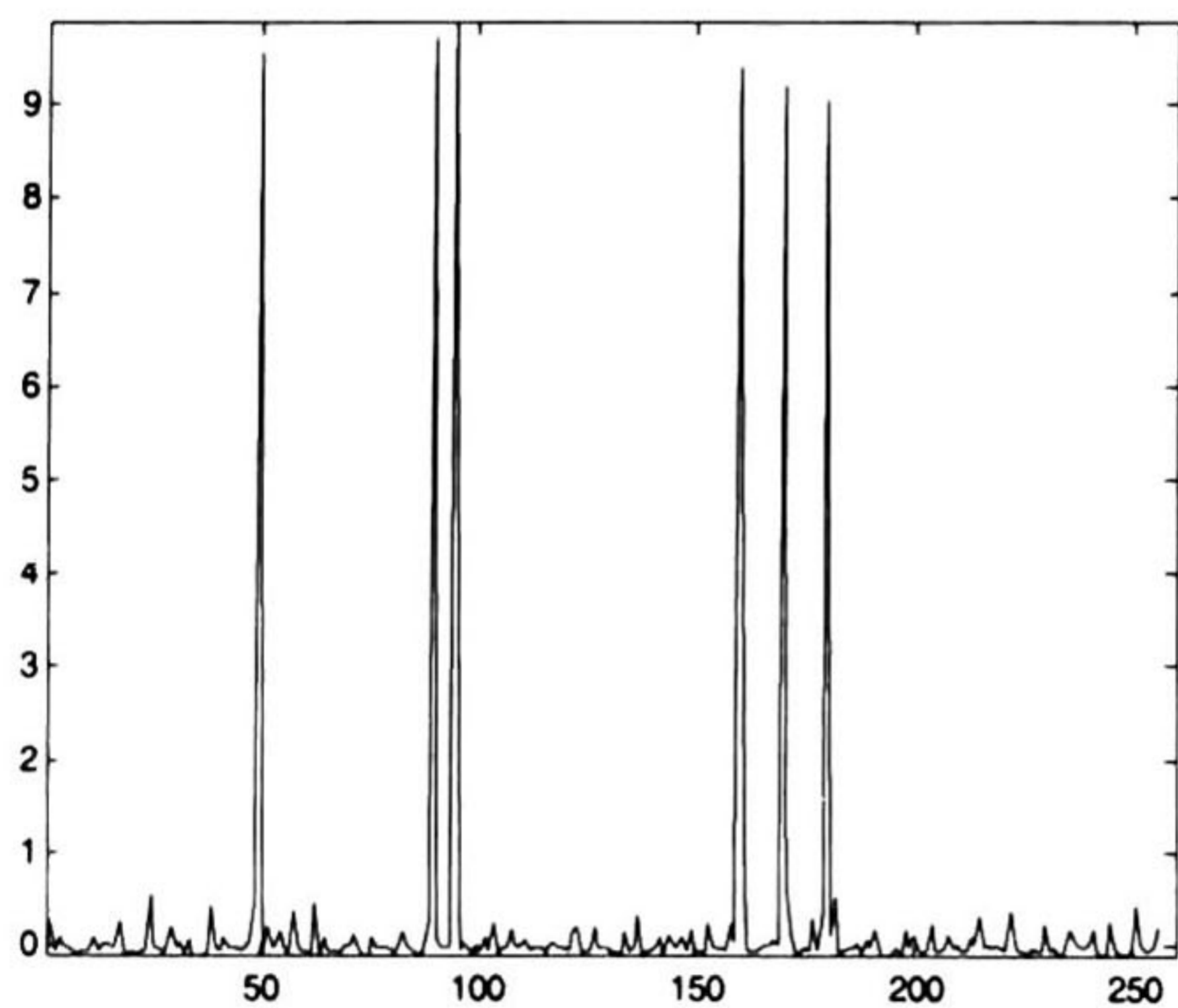
(c) Estimación de 28.7466 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 30.5120 dB a 2 iteraciones con el método WCLS

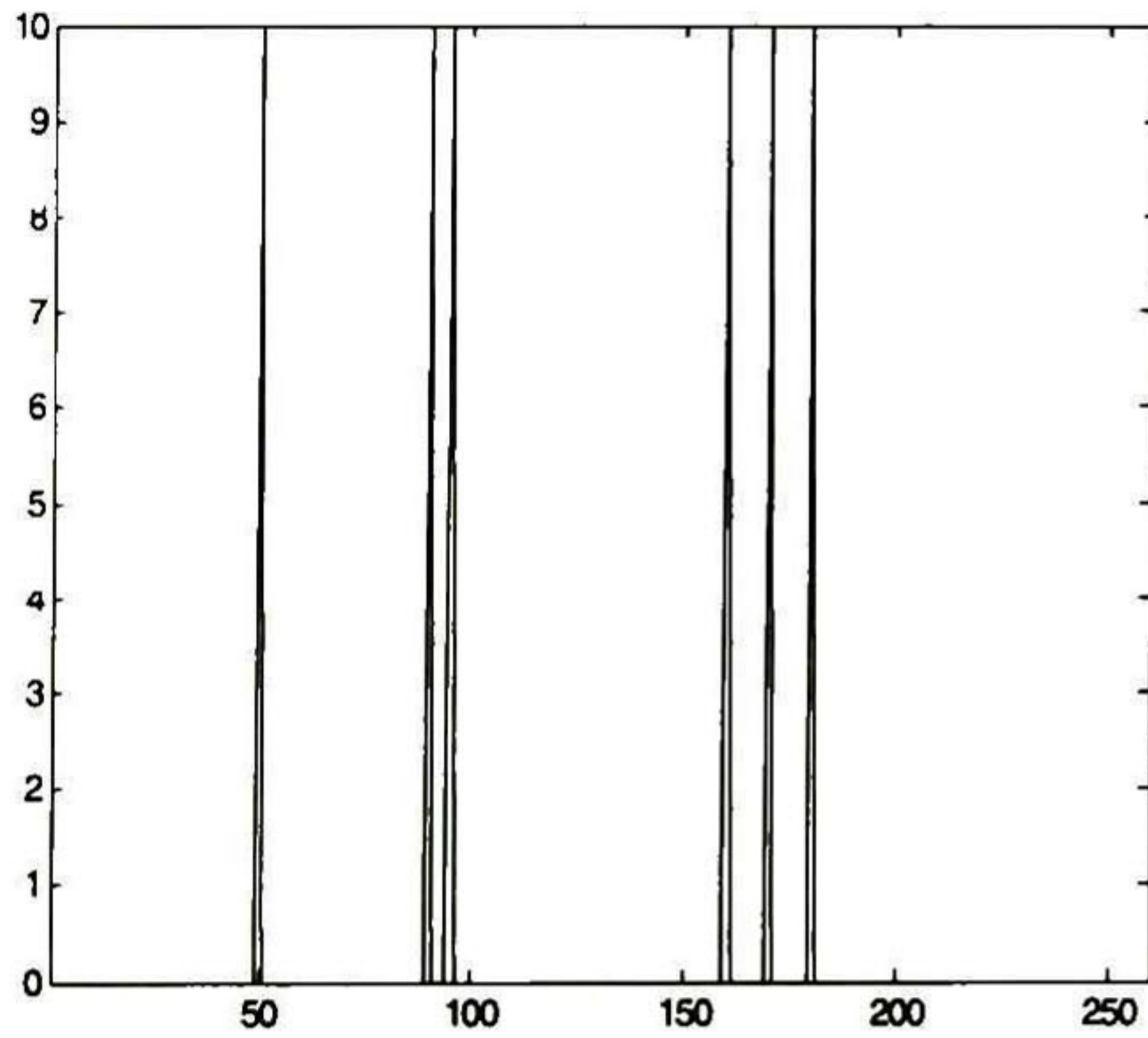


(e) Estimación de 37.9211 dB a 40 iteraciones con el método CLS

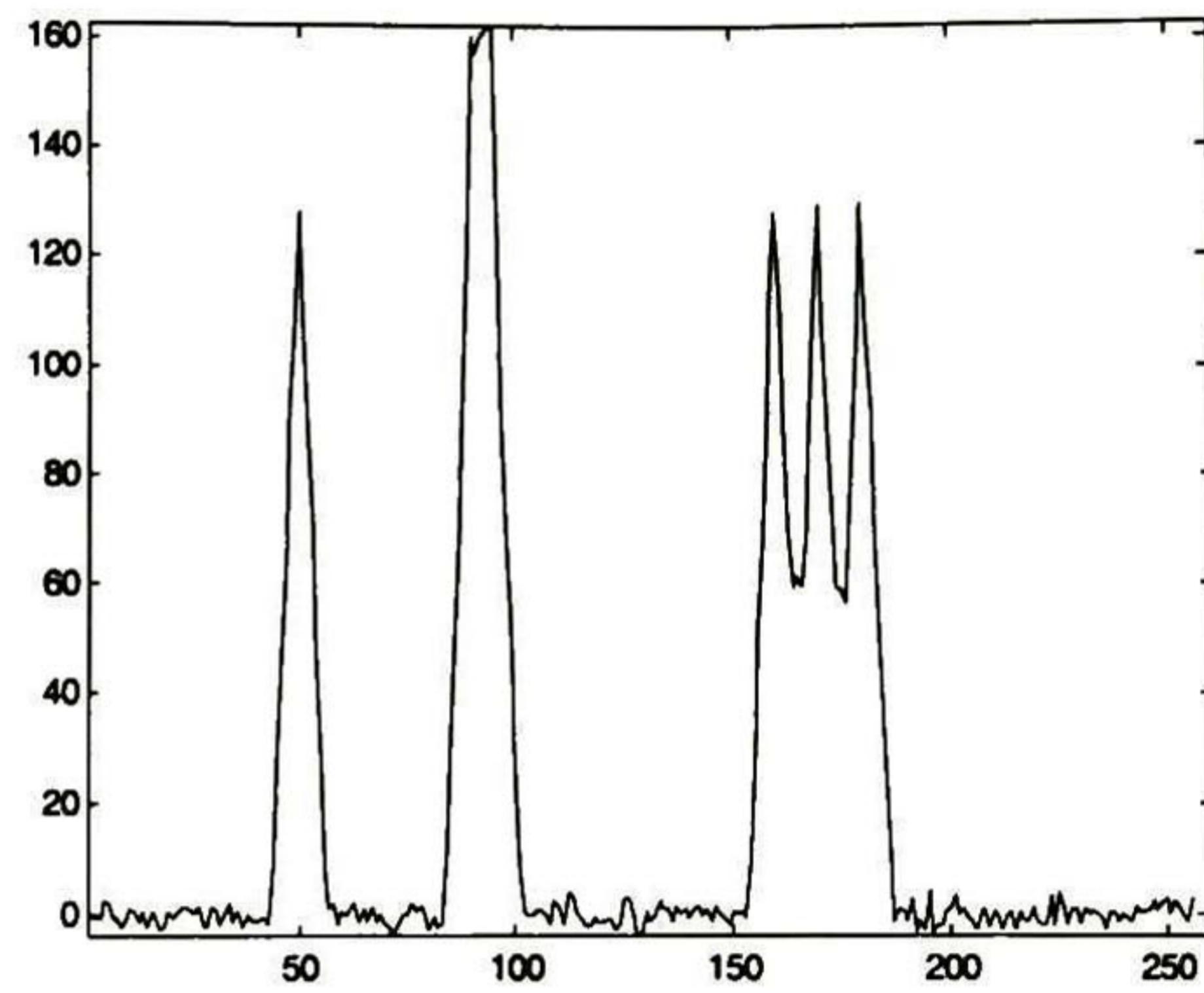


(f) Estimación de 38.7672 dB a 40 iteraciones con el método WCLS

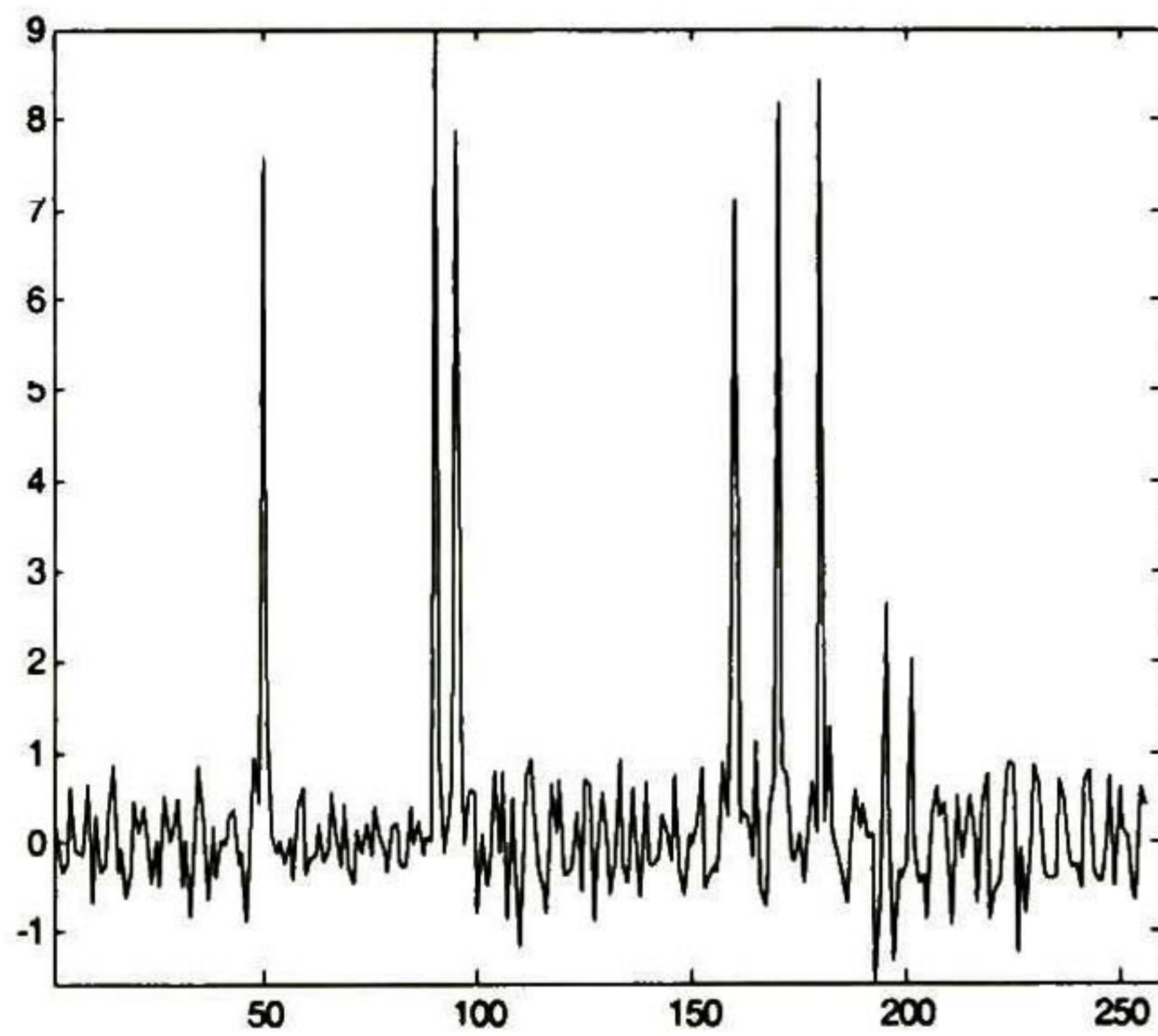
Tabla 4.29. Respuestas con SNR = 6 dB, K = 10 y SSF<sub>3</sub>.



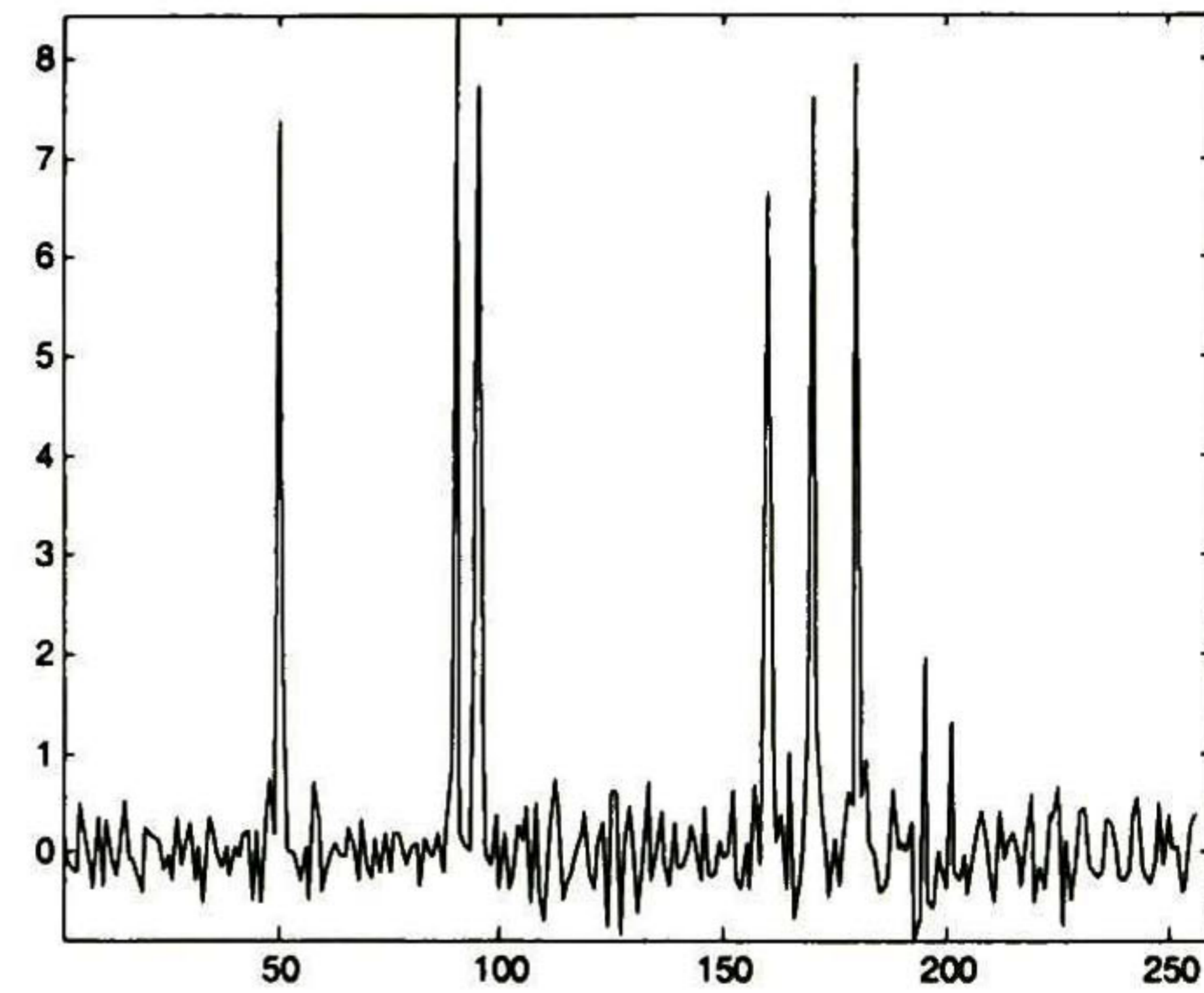
(a) Señal original v



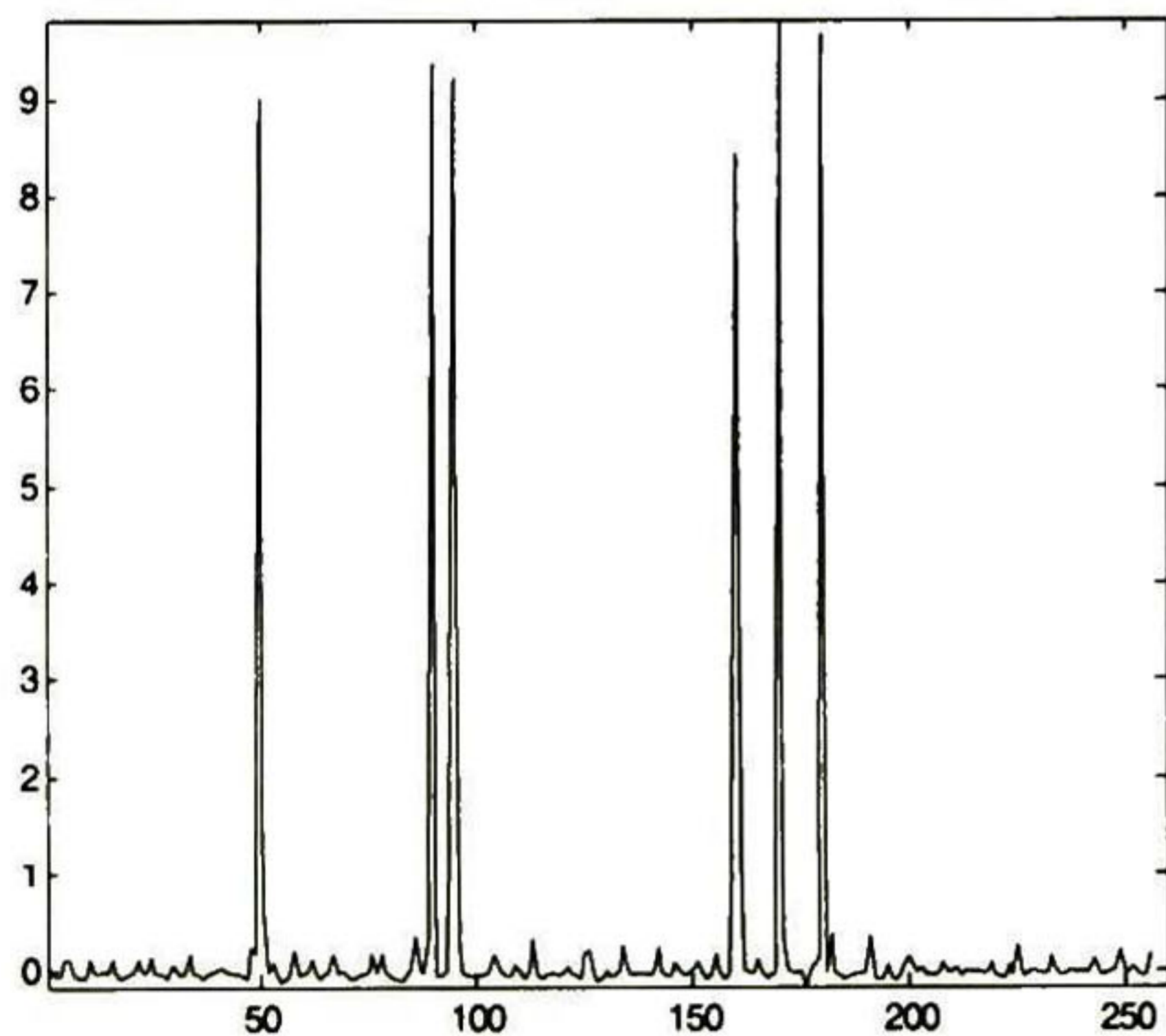
(b) Señal con ruido



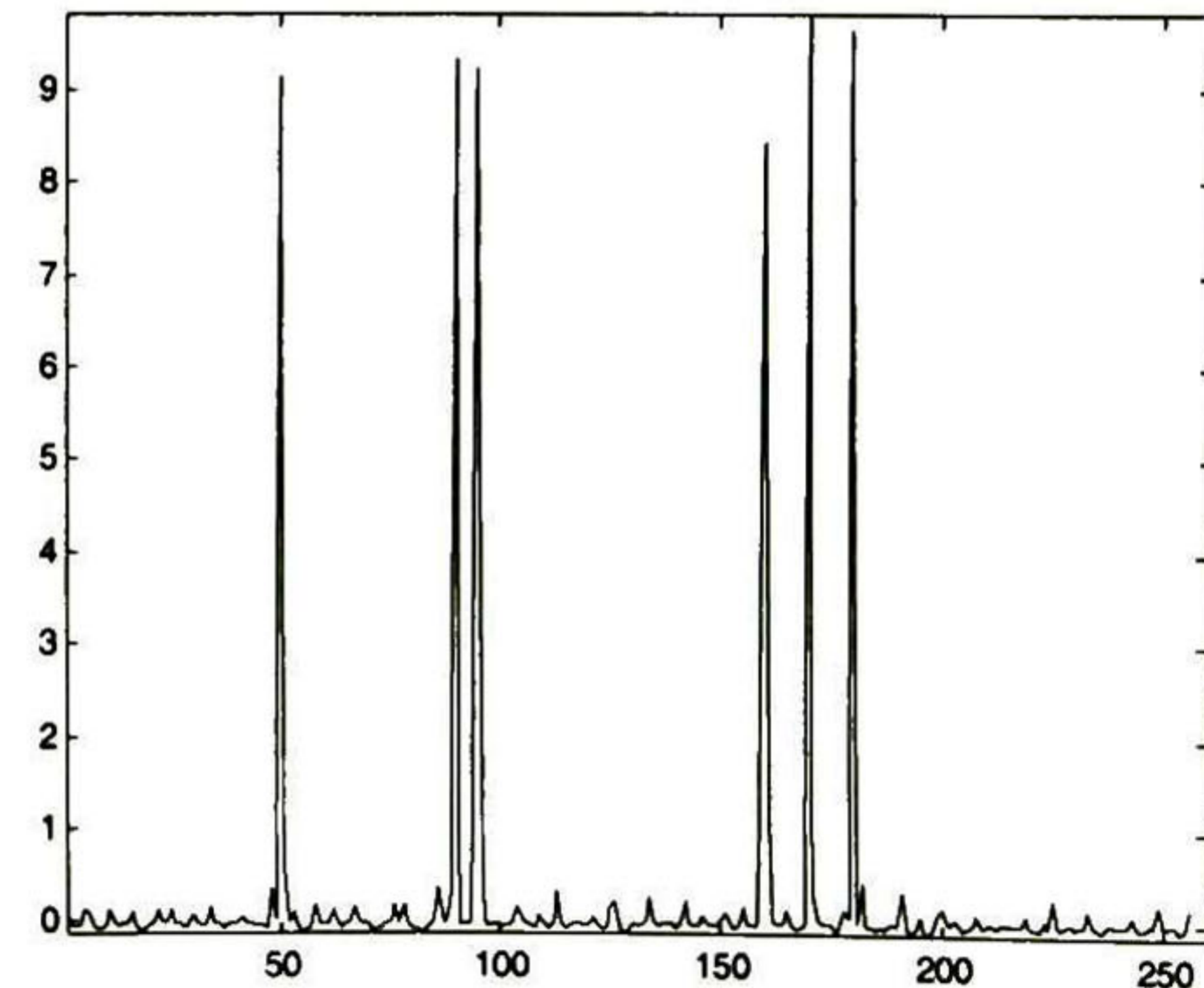
(c) Estimación de 36.8544 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 37.6346 dB a 2 iteraciones con el método WCLS

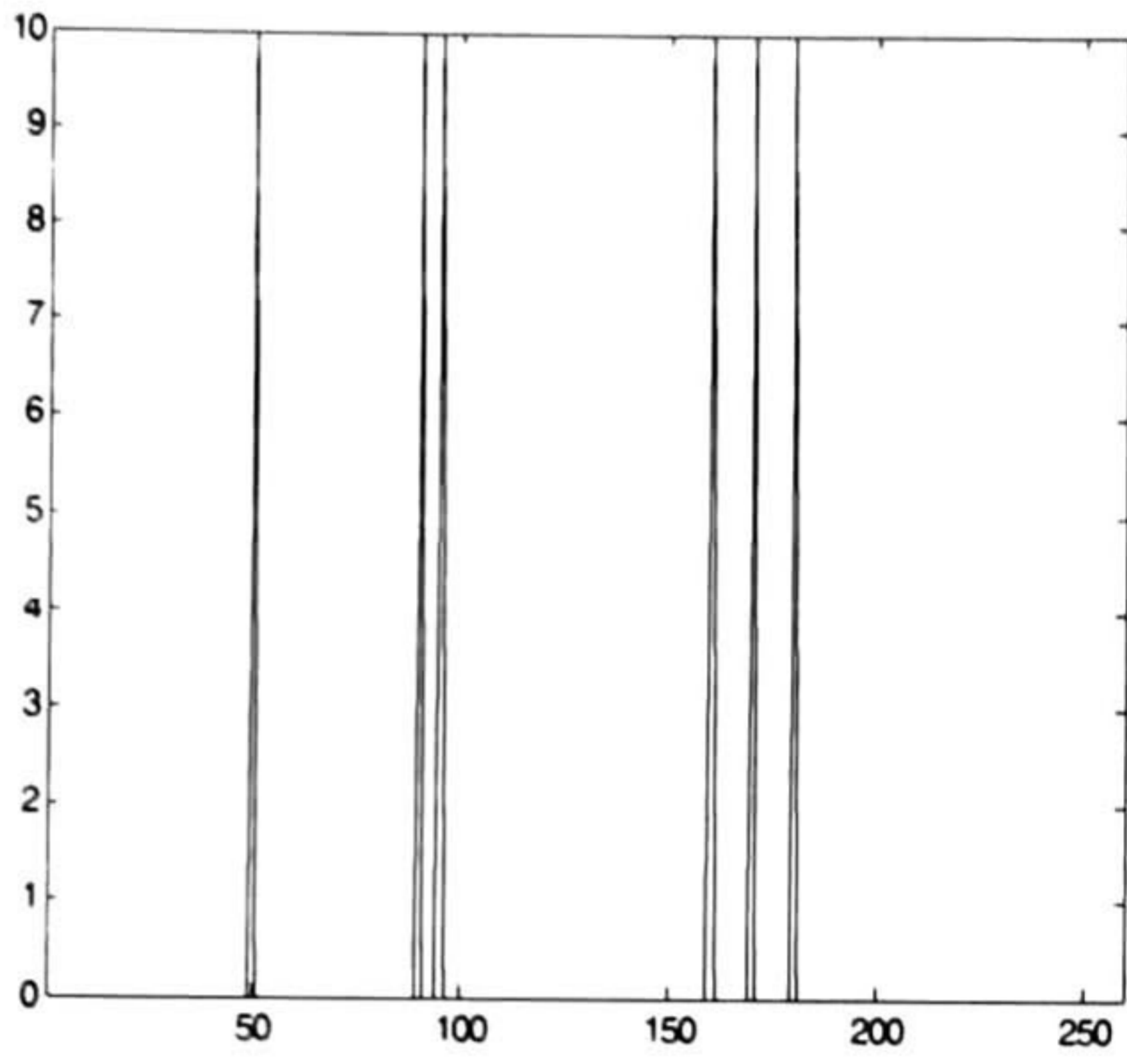


(e) Estimación de 47.2184 dB a 40 iteraciones con el método CLS

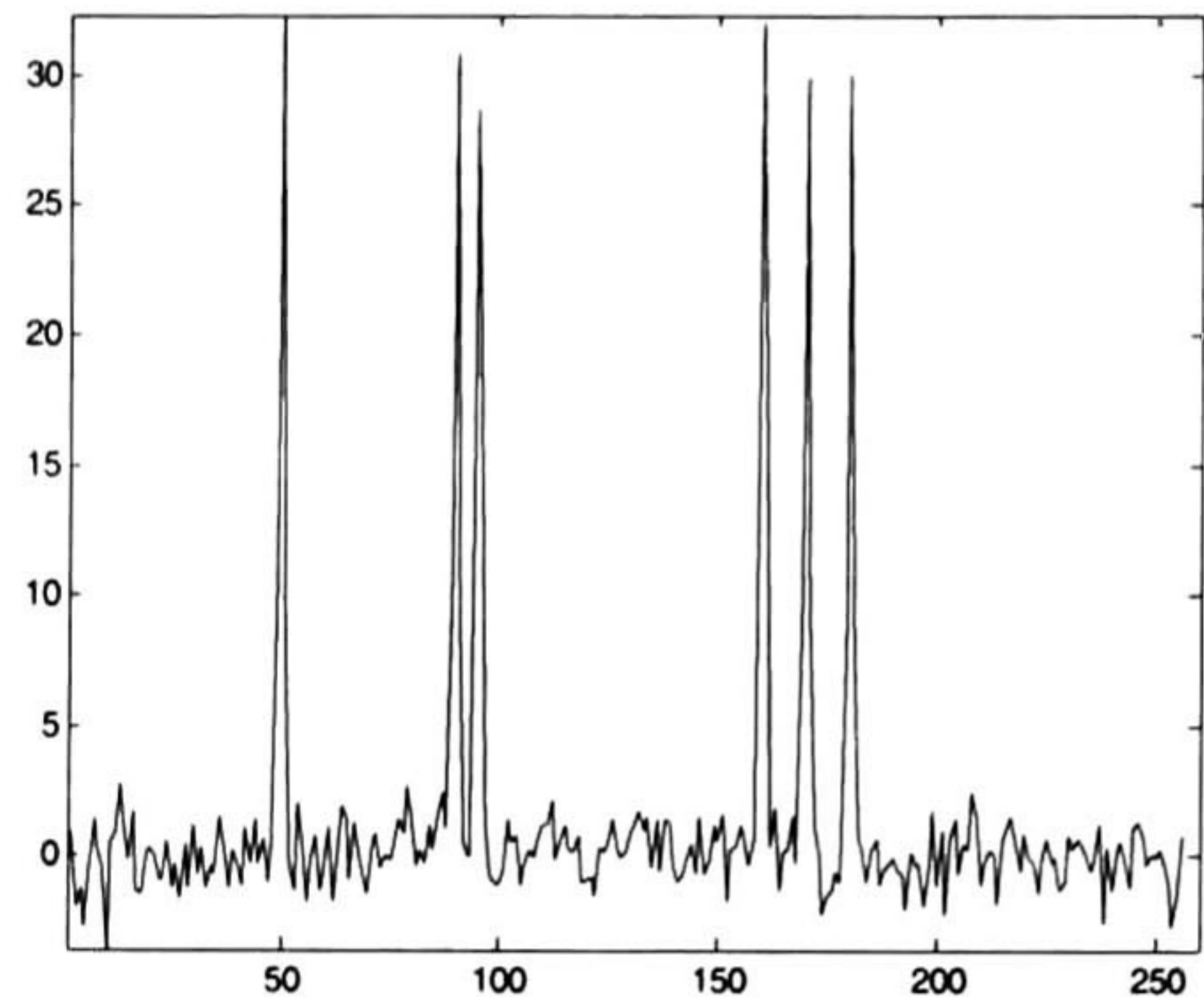


(f) Estimación de 47.2747 dB a 40 iteraciones con el método WCLS

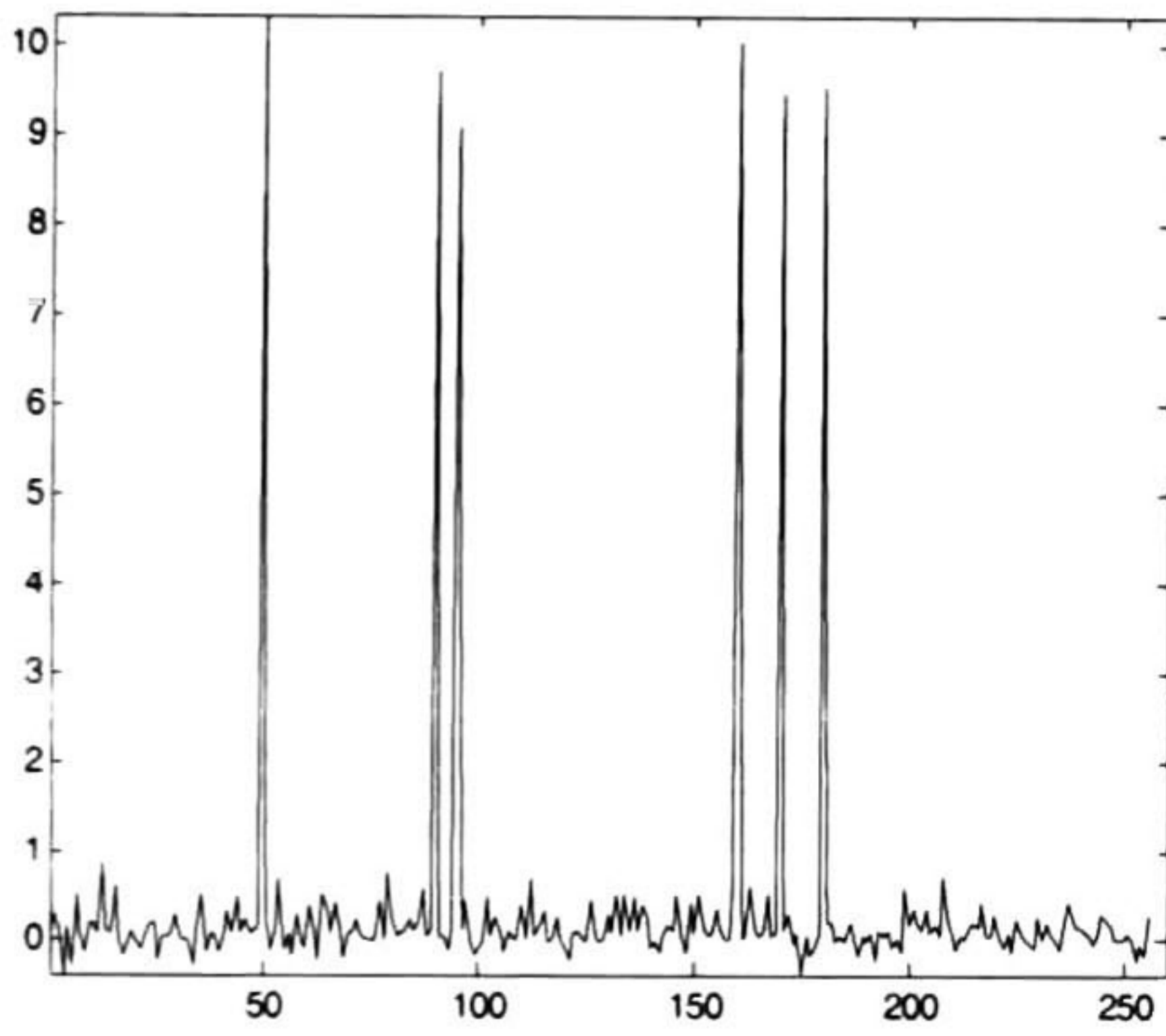
Tabla 4.30. Respuestas con SNR = 6 dB, K = 15 y SSF<sub>3</sub>.



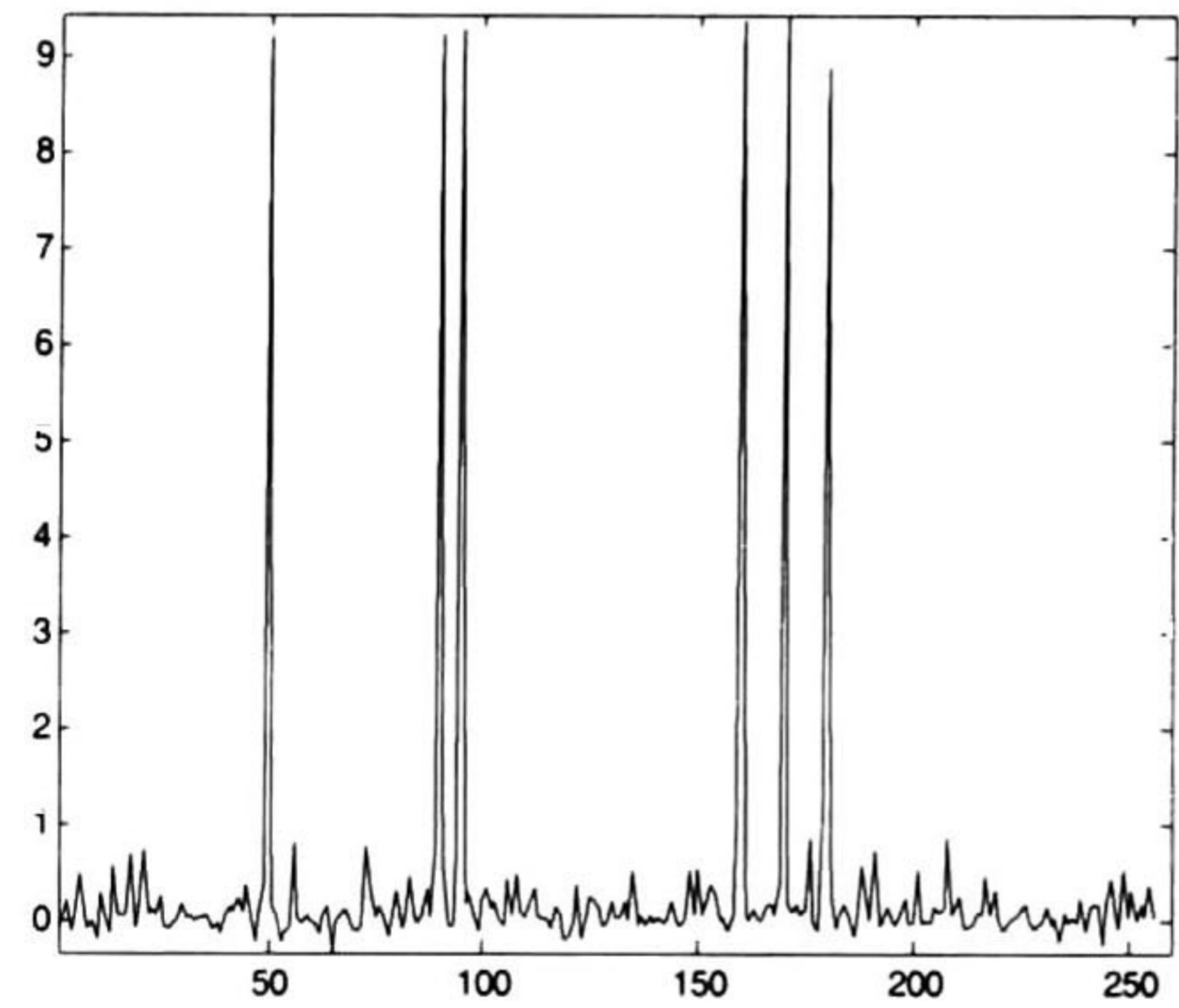
(a) Señal original v



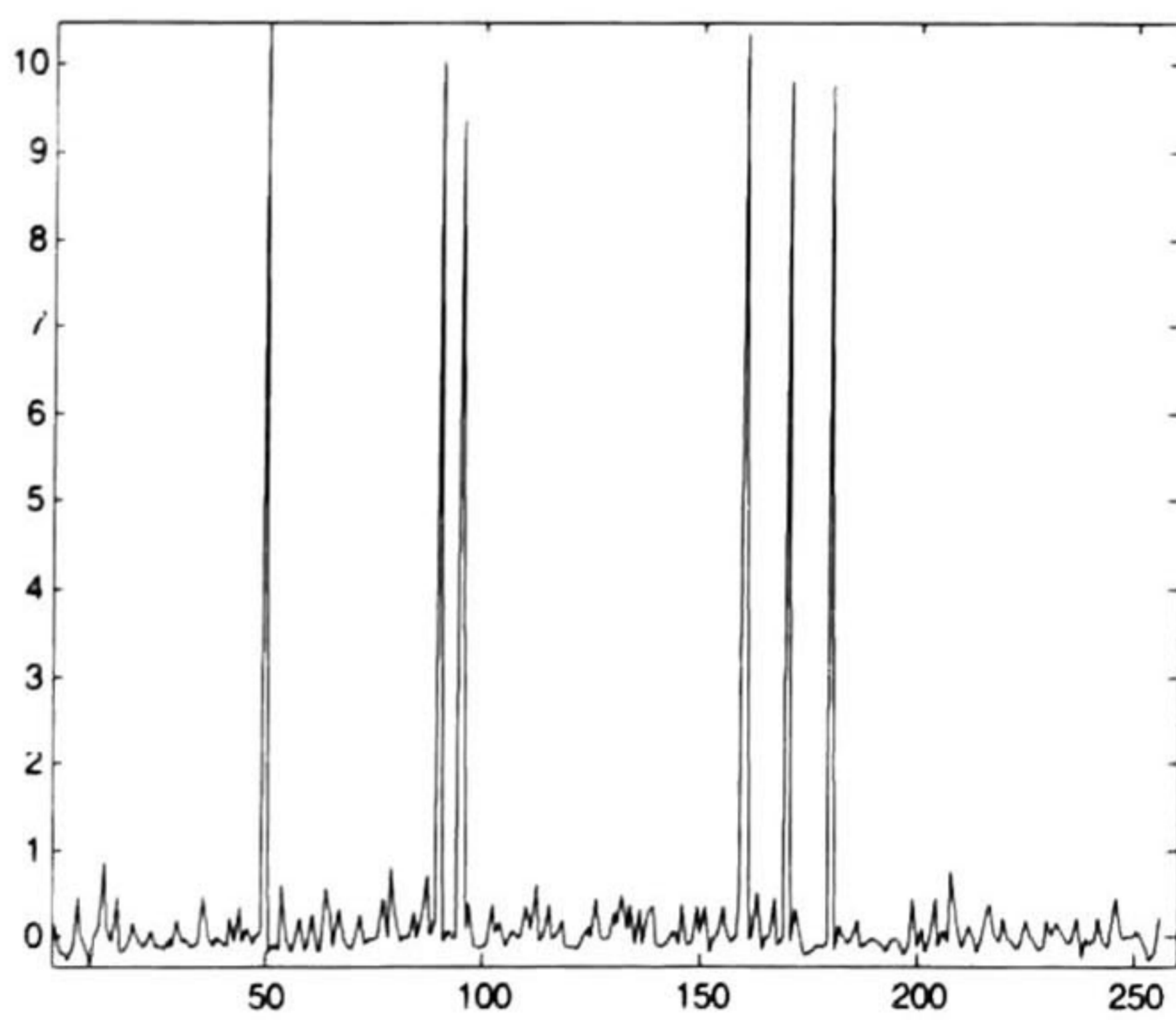
(b) Señal con ruido



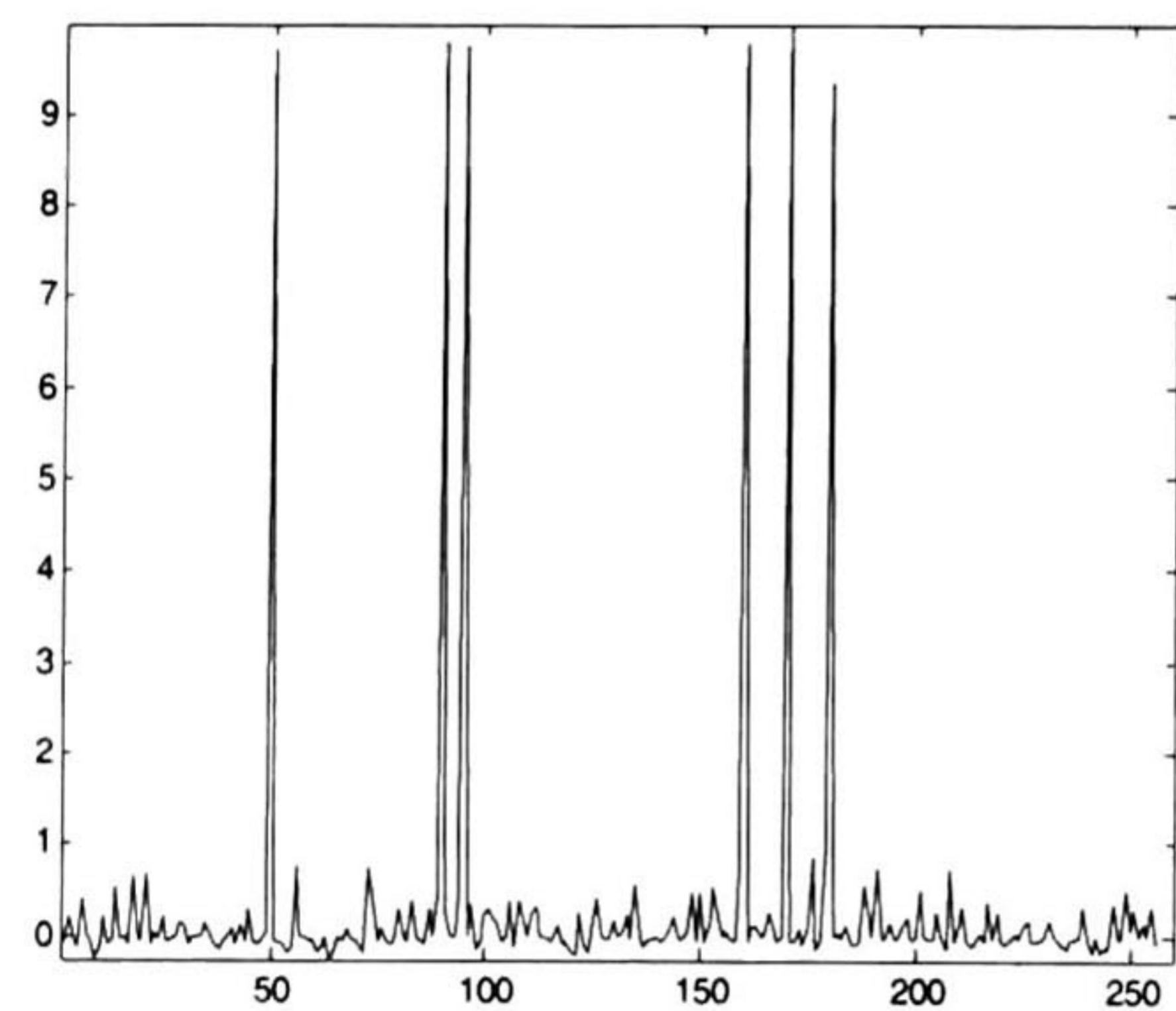
(c) Estimación de 24.0993 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 22.9232 dB a 2 iteraciones con el método WCLS

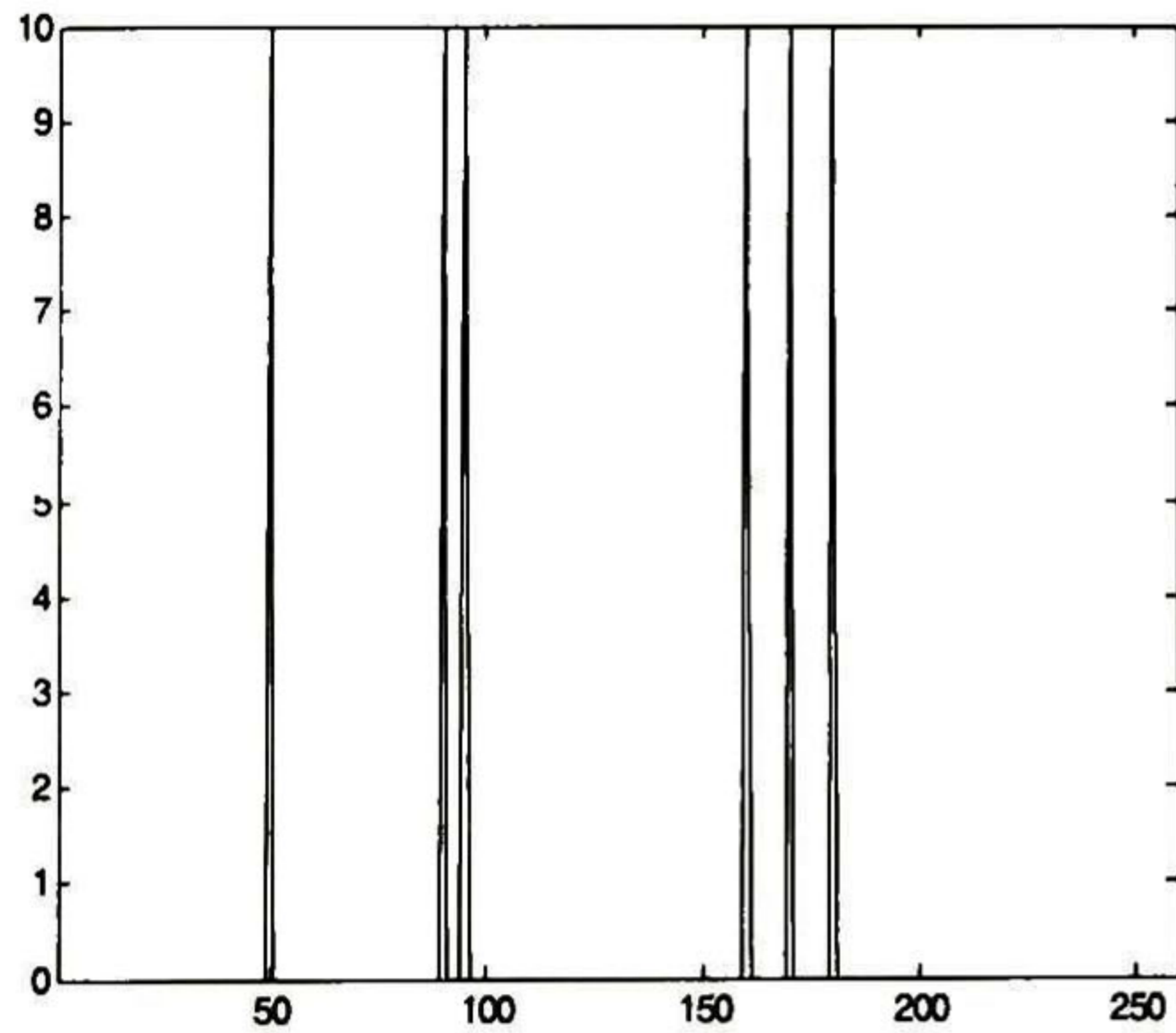


(e) Estimación de 25.0965 dB a 40 iteraciones con el método CLS

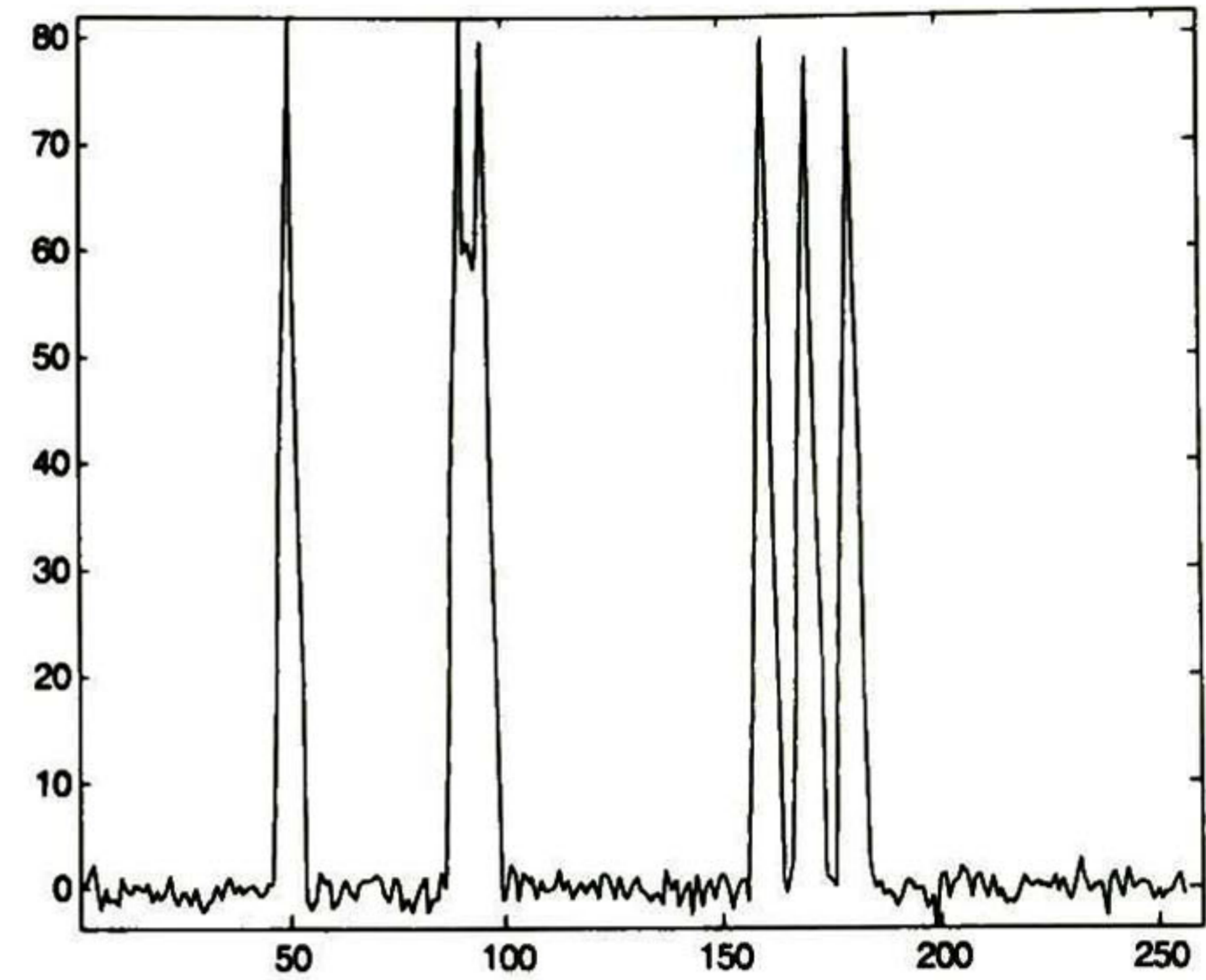


(f) Estimación de 24.8432 dB a 40 iteraciones con el método WCLS

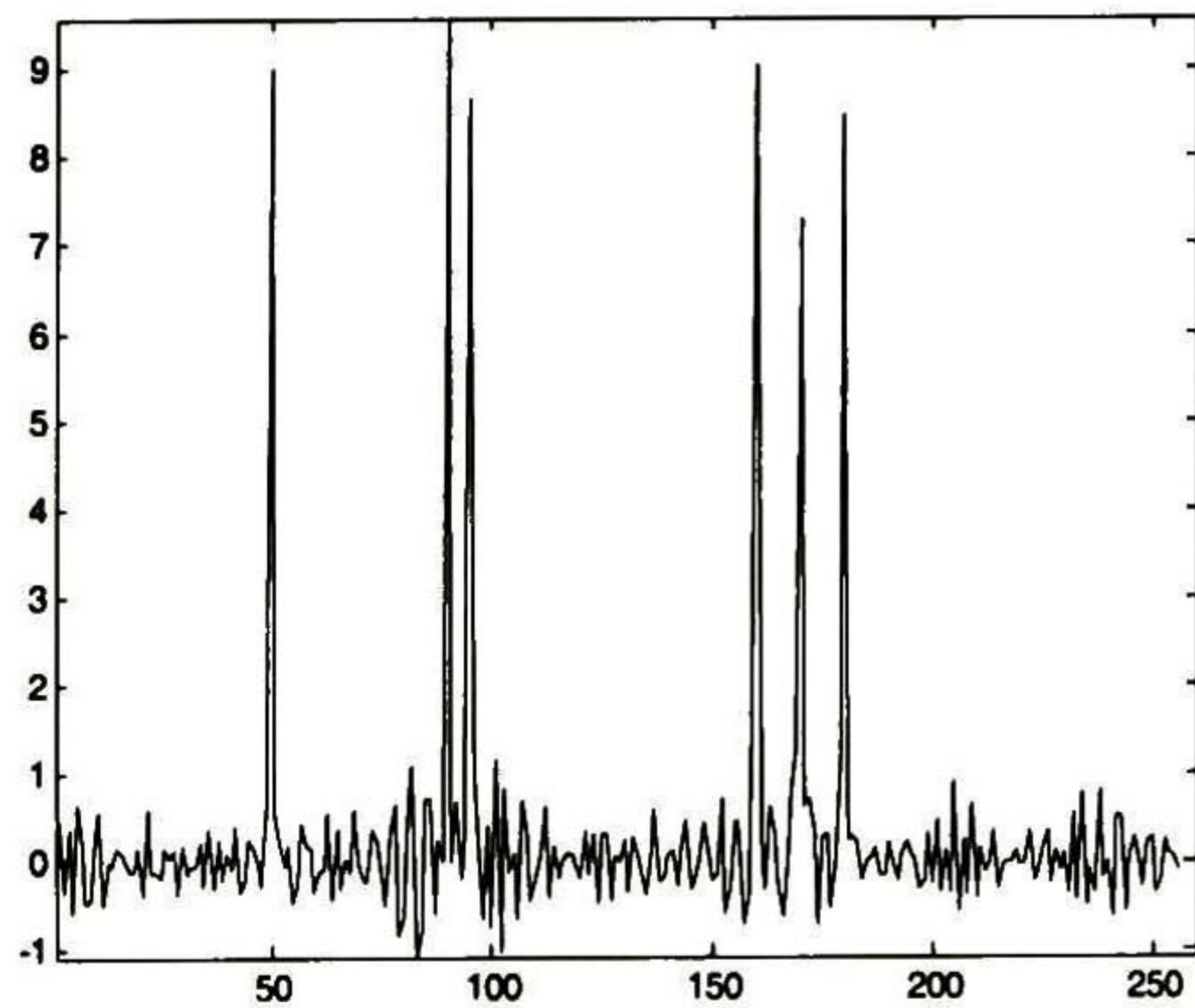
Tabla 4.31. Respuestas con SNR = 10 dB, K = 5 y SSF<sub>3</sub>.



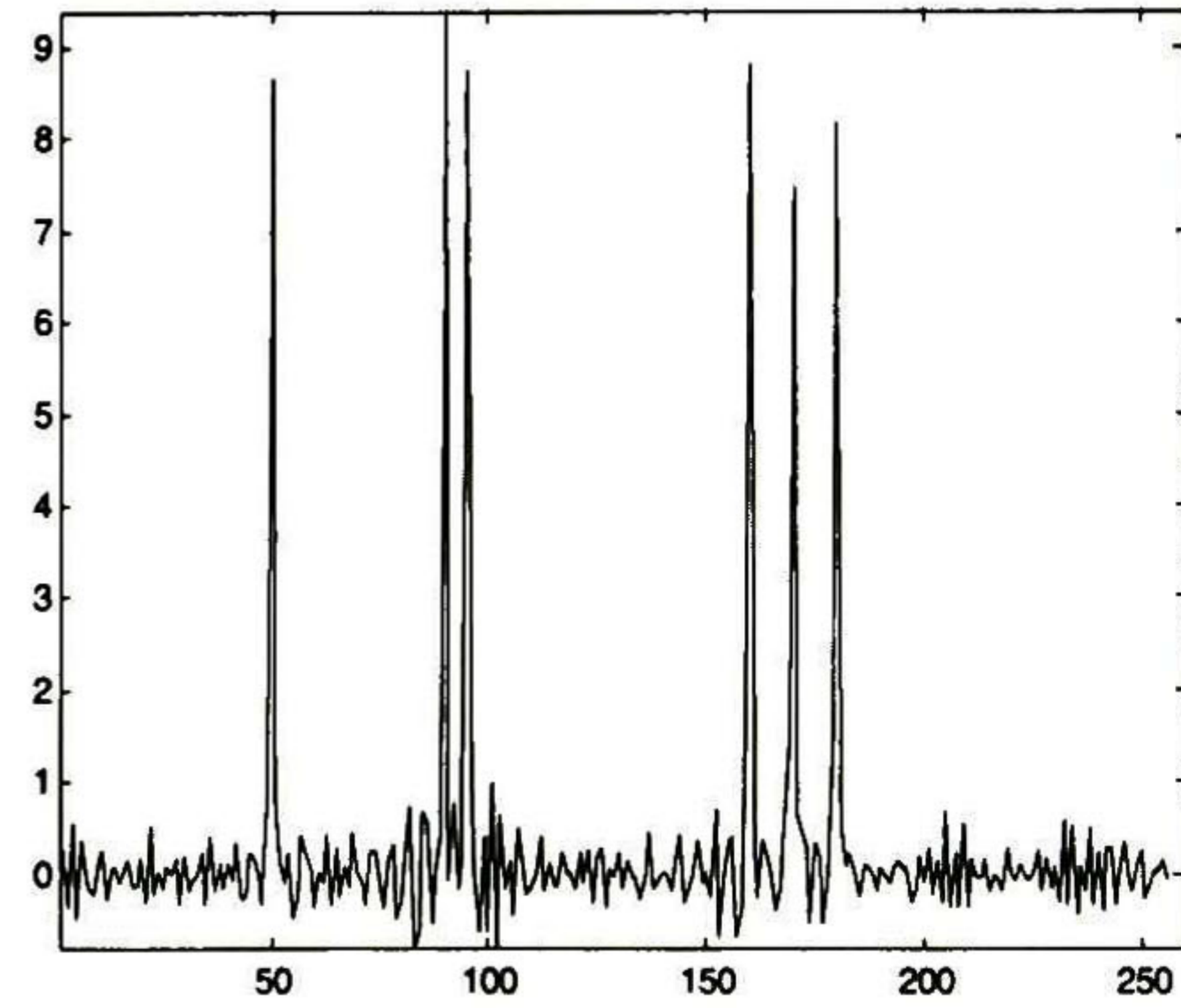
(a) Señal original v



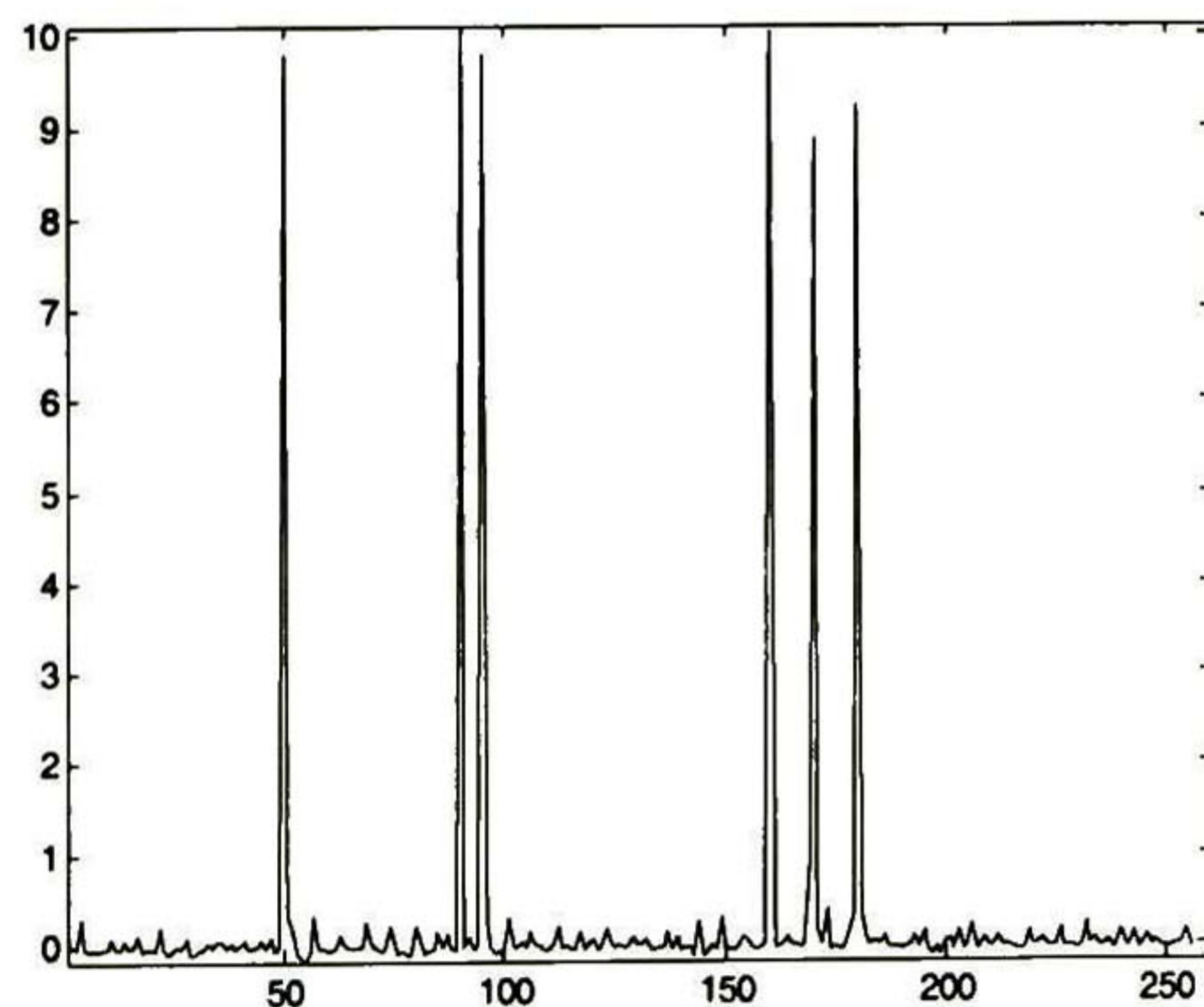
(b) Señal con ruido



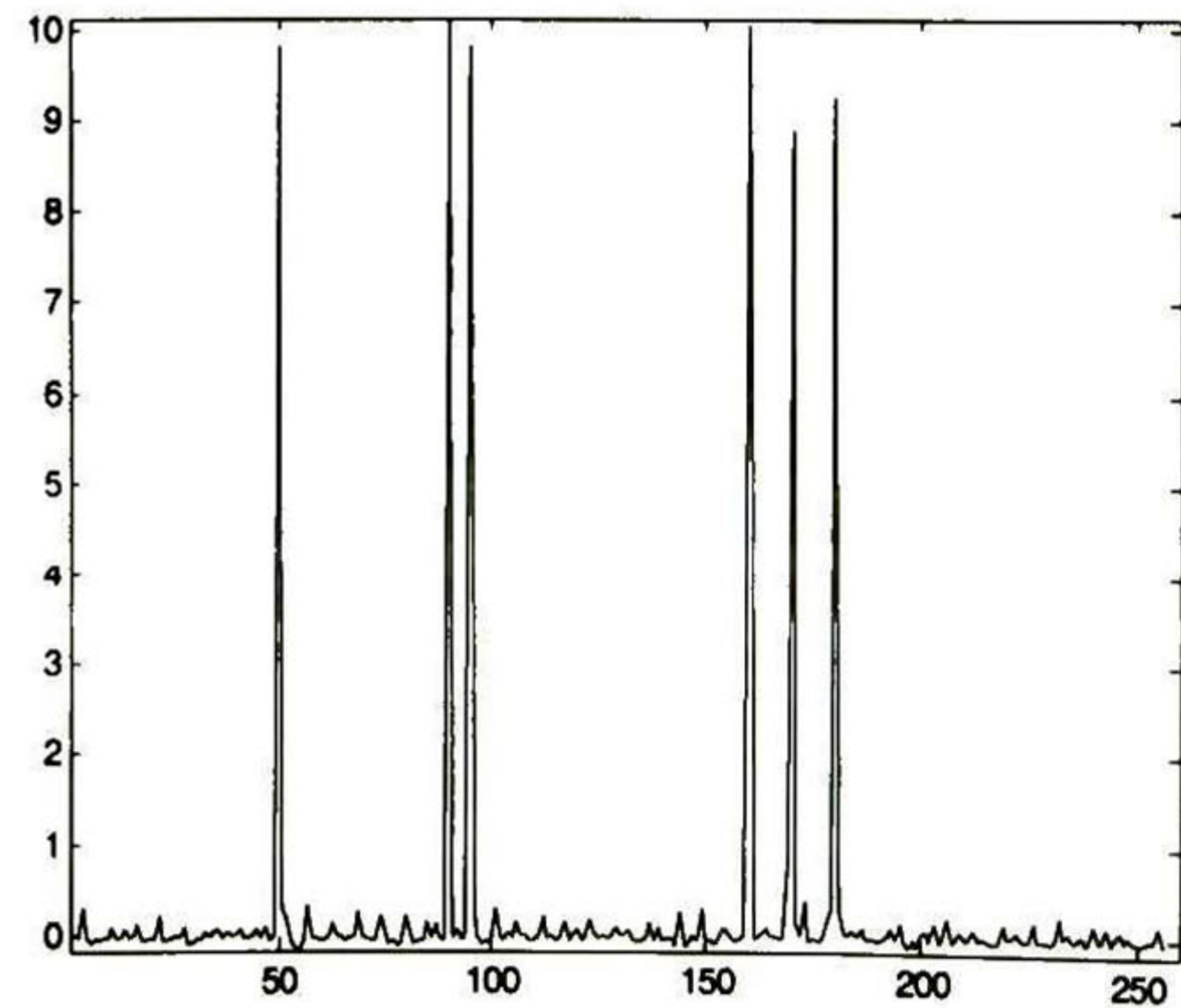
(c) Estimación de 32.4625 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 33.2742 dB a 2 iteraciones con el método WCLS



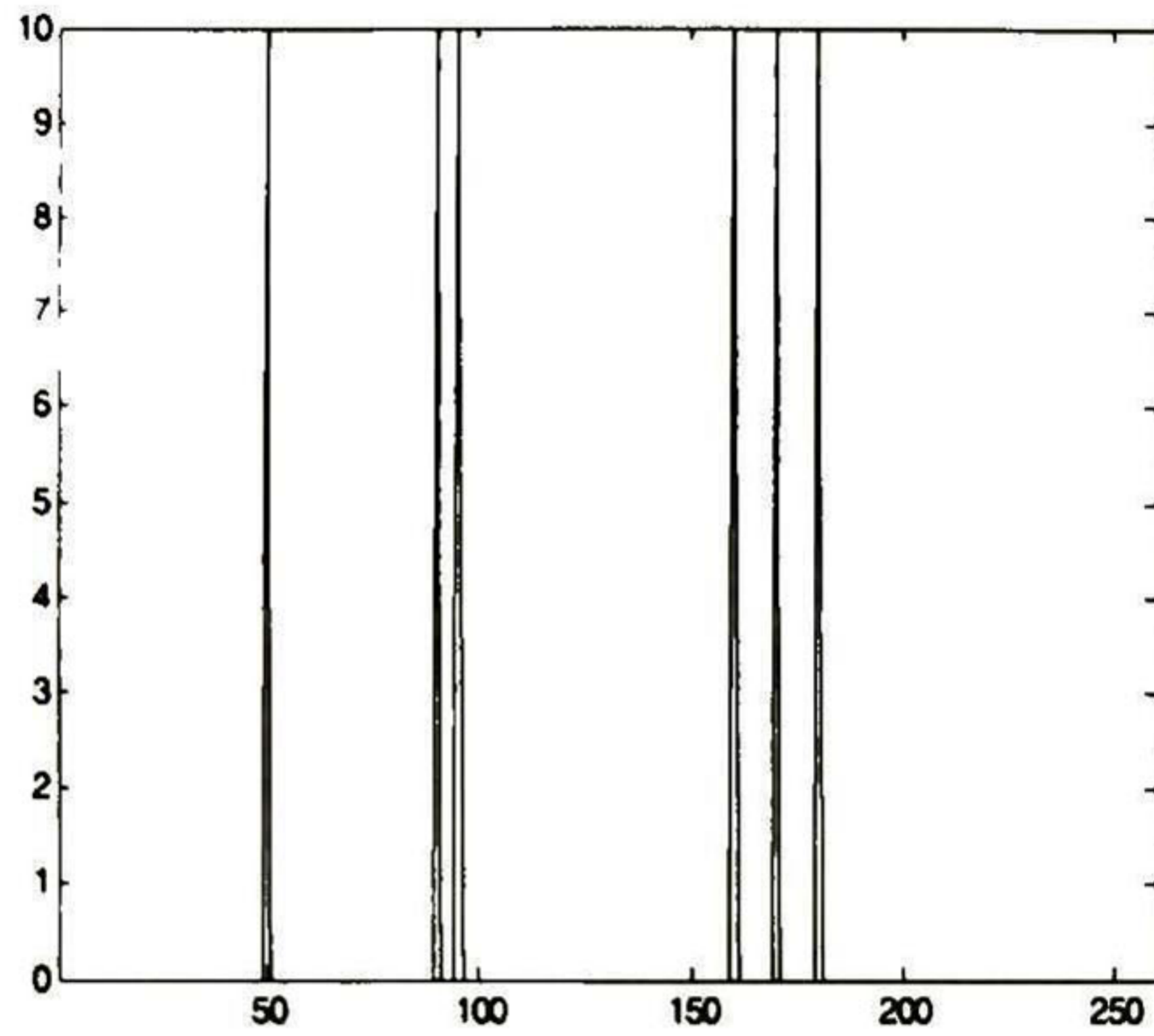
(e) Estimación de 42.9554 dB a 40 iteraciones con el método CLS



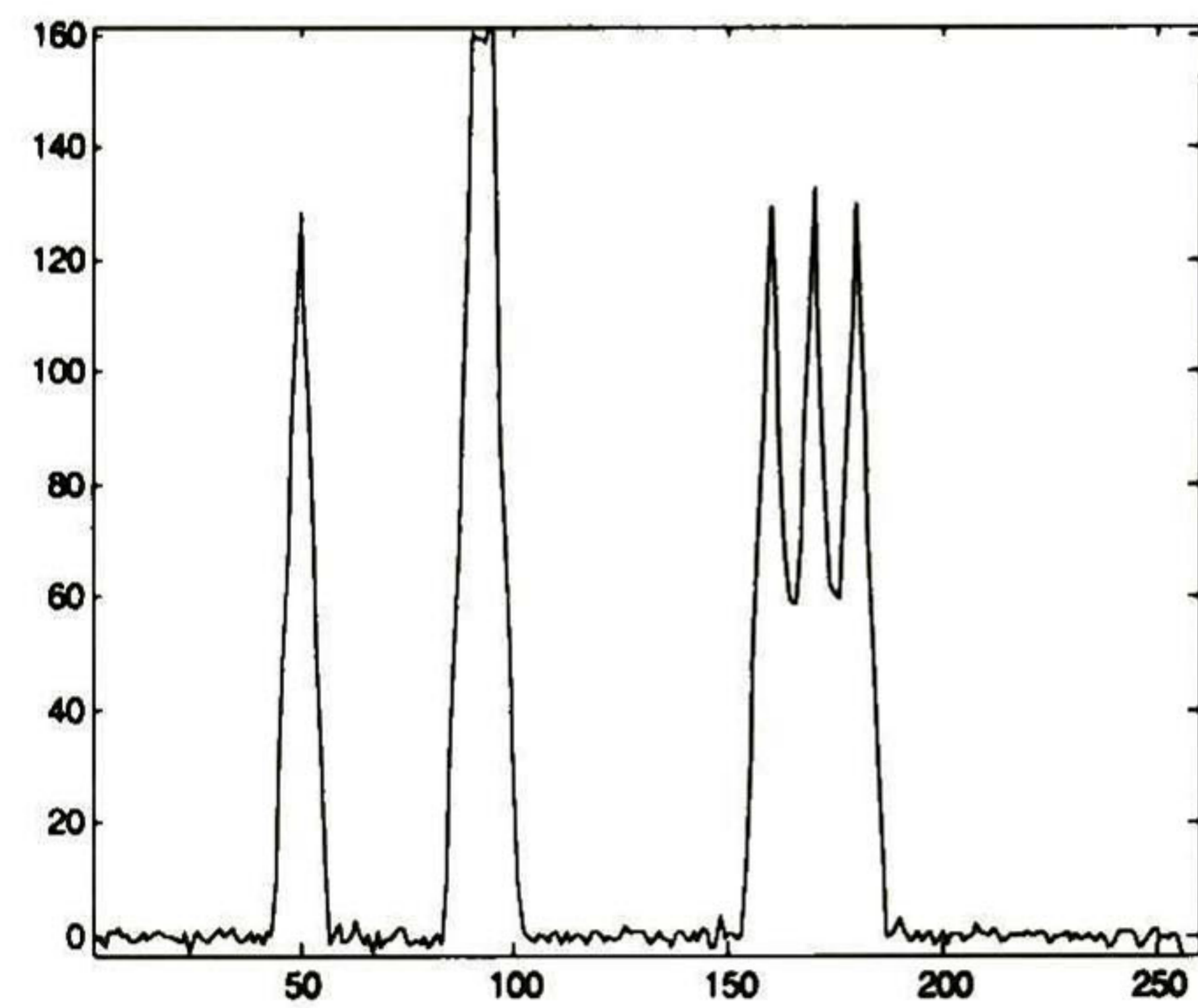
(f) Estimación de 43.1929 dB a 40 iteraciones con el método WCLS



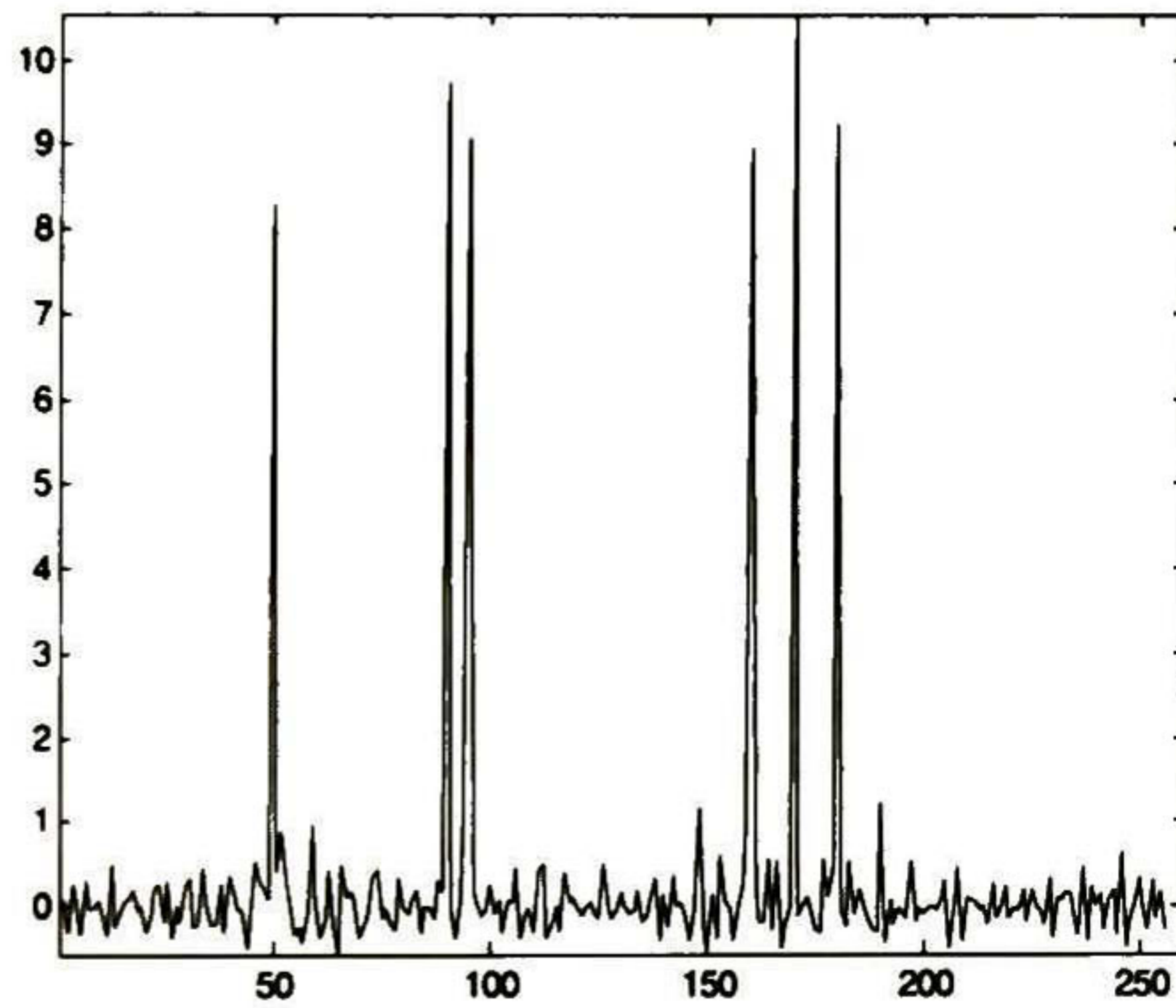
Tabla 4.32. Respuestas con SNR = 10 dB, K = 10 y SSF<sub>3</sub>.



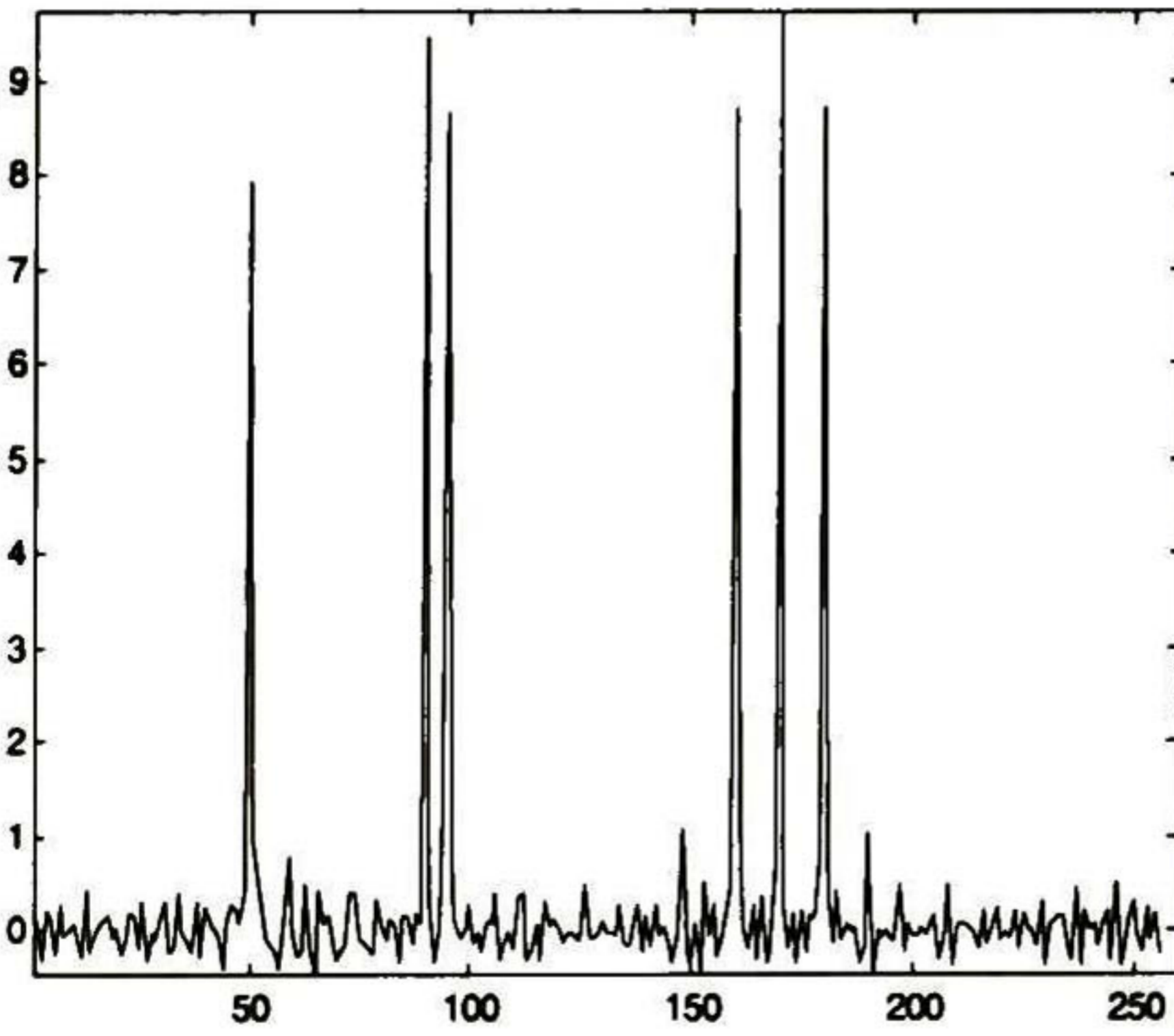
(a) Señal original v



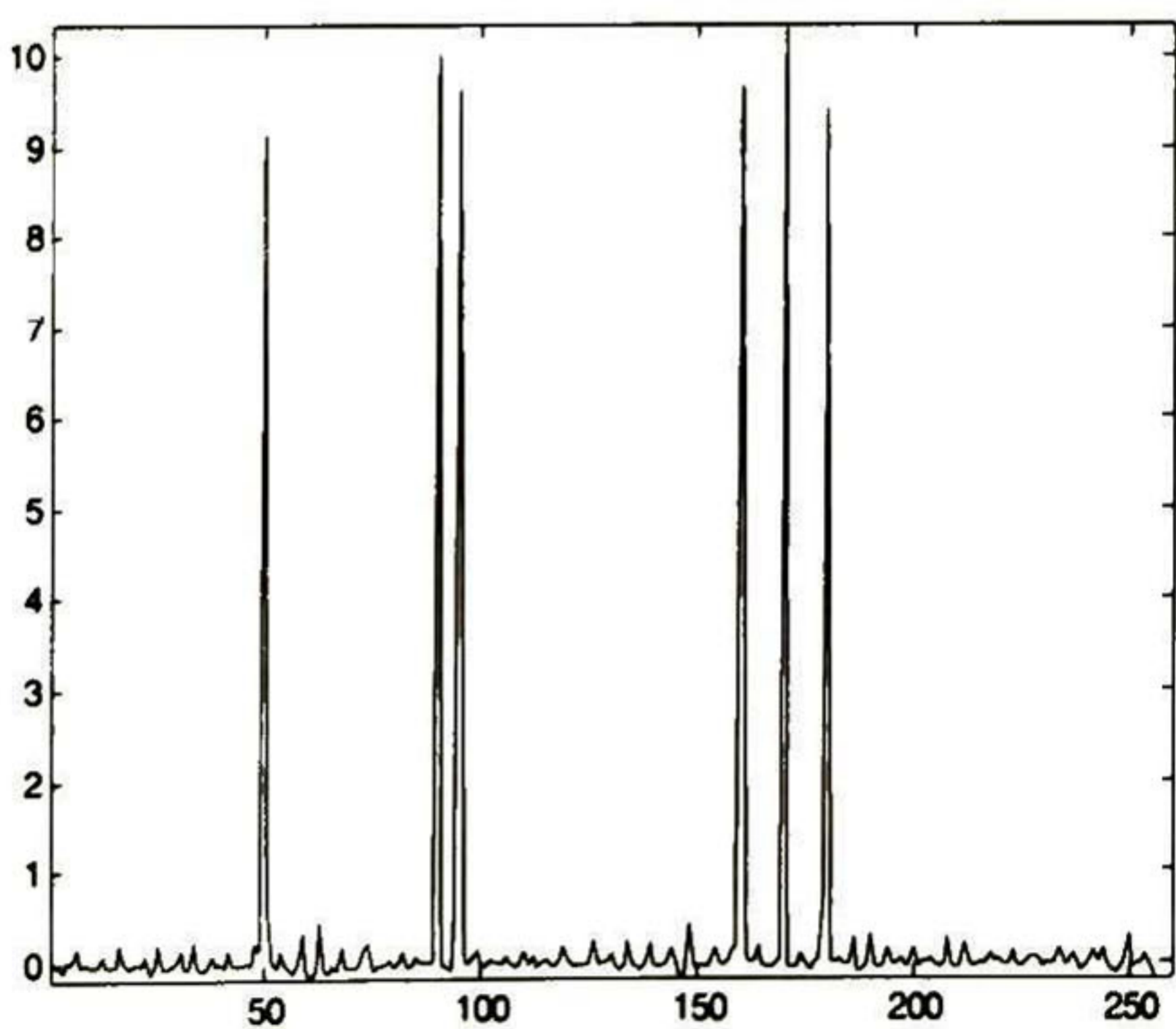
(b) Señal con ruido



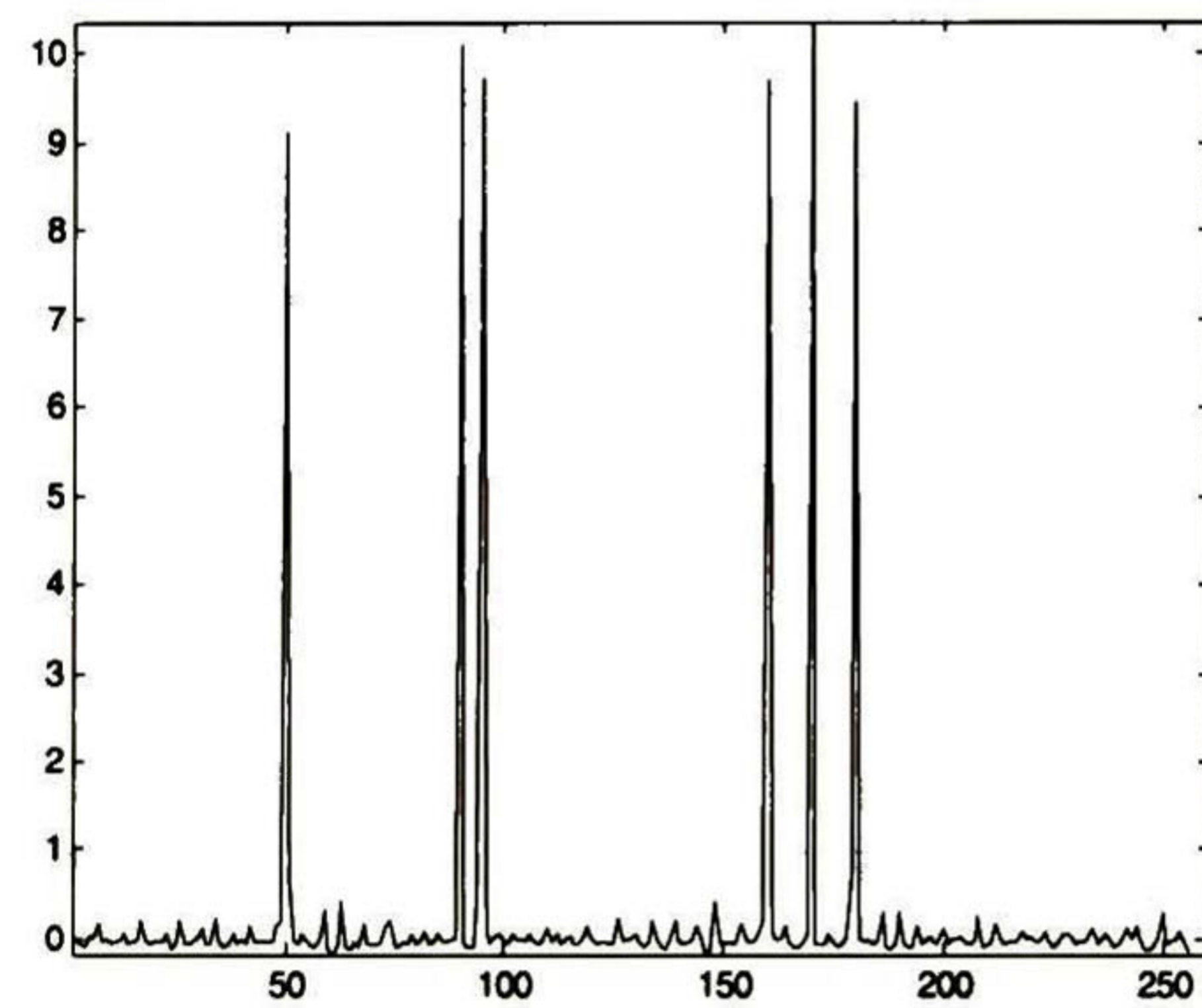
(c) Estimación de 42.3554 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 42.3763 dB a 2 iteraciones con el método WCLS

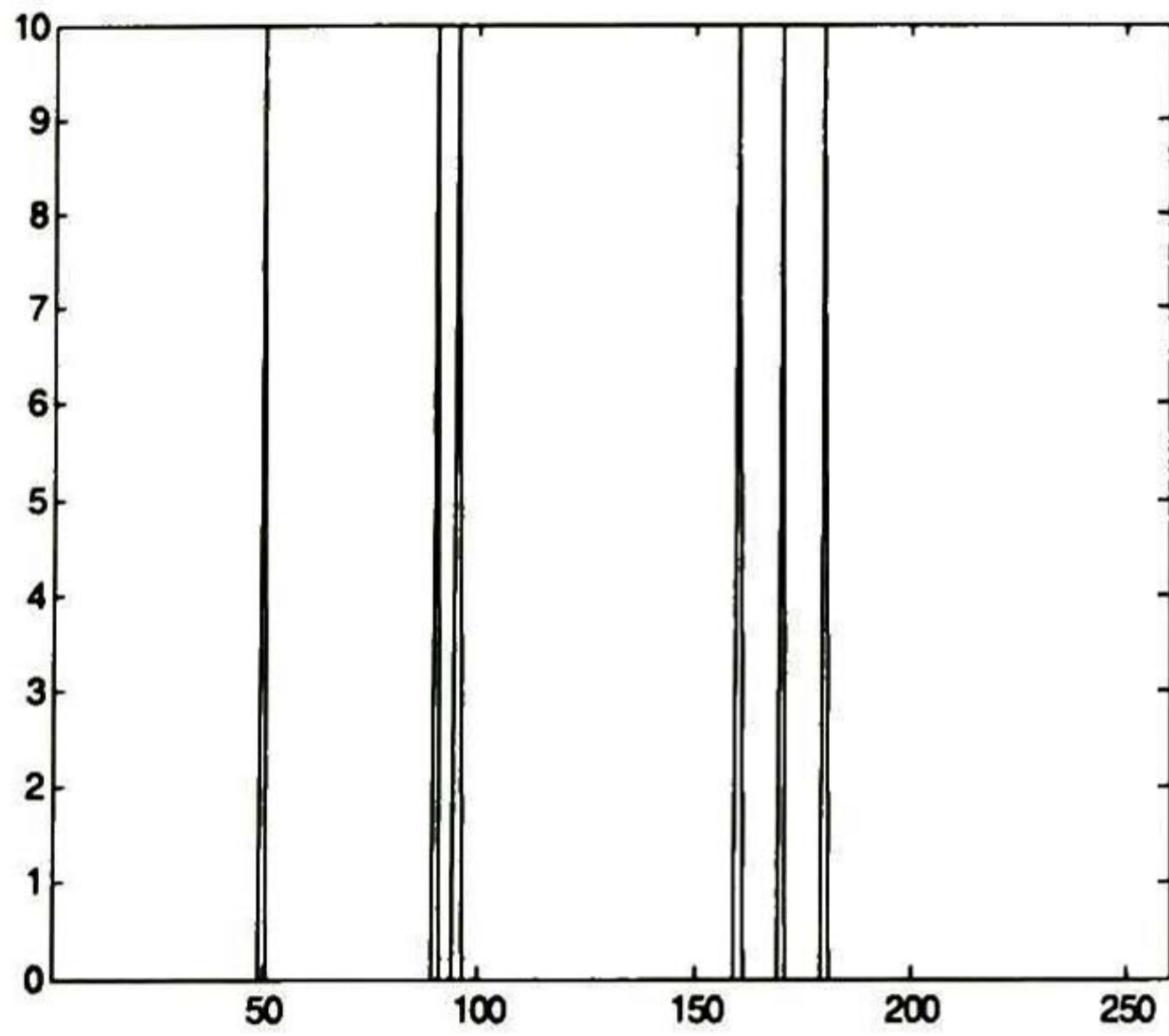


(e) Estimación de 49.3154 dB a 40 iteraciones con el método CLS

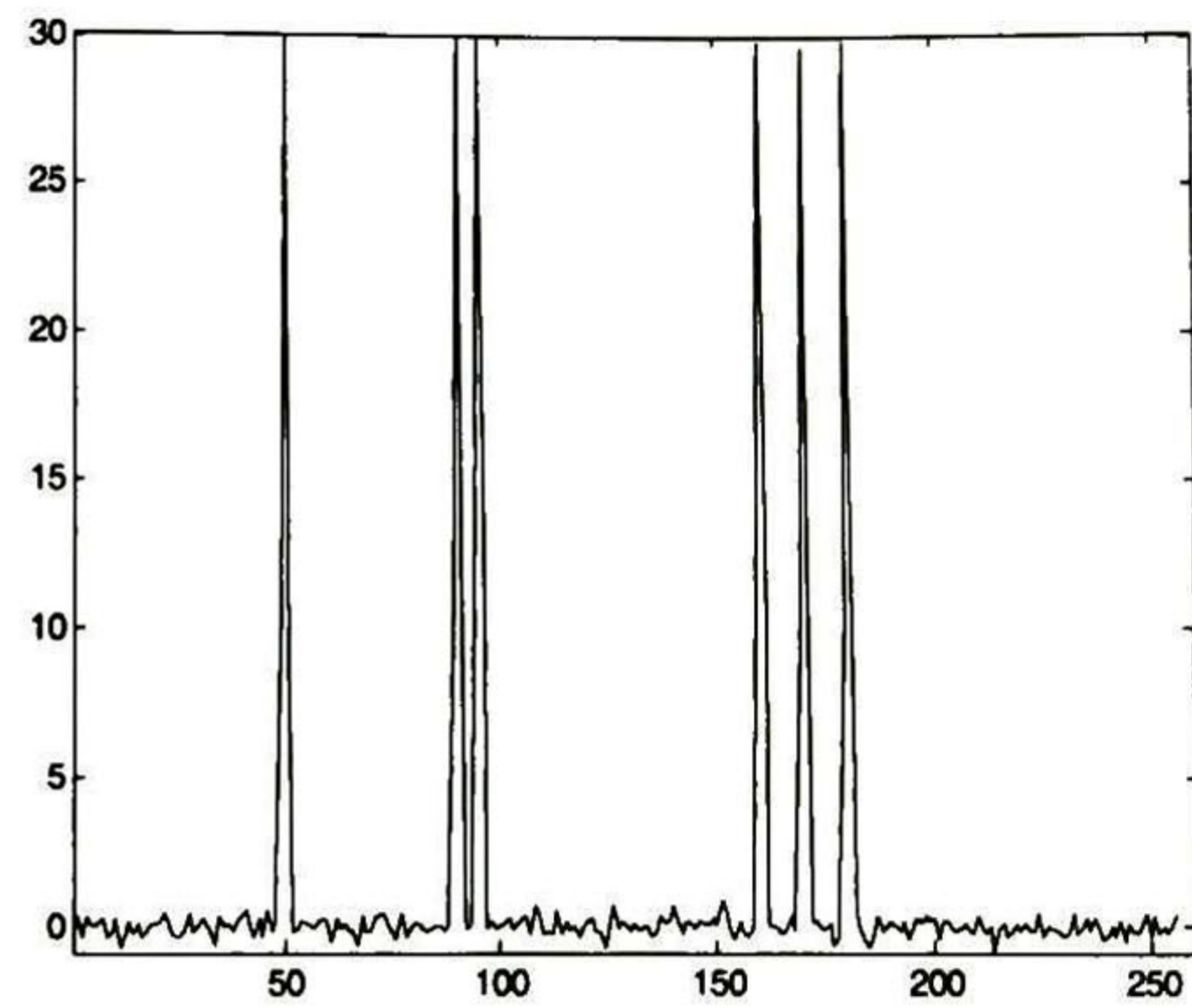


(f) Estimación de 50.1044 dB a 40 iteraciones con el método WCLS

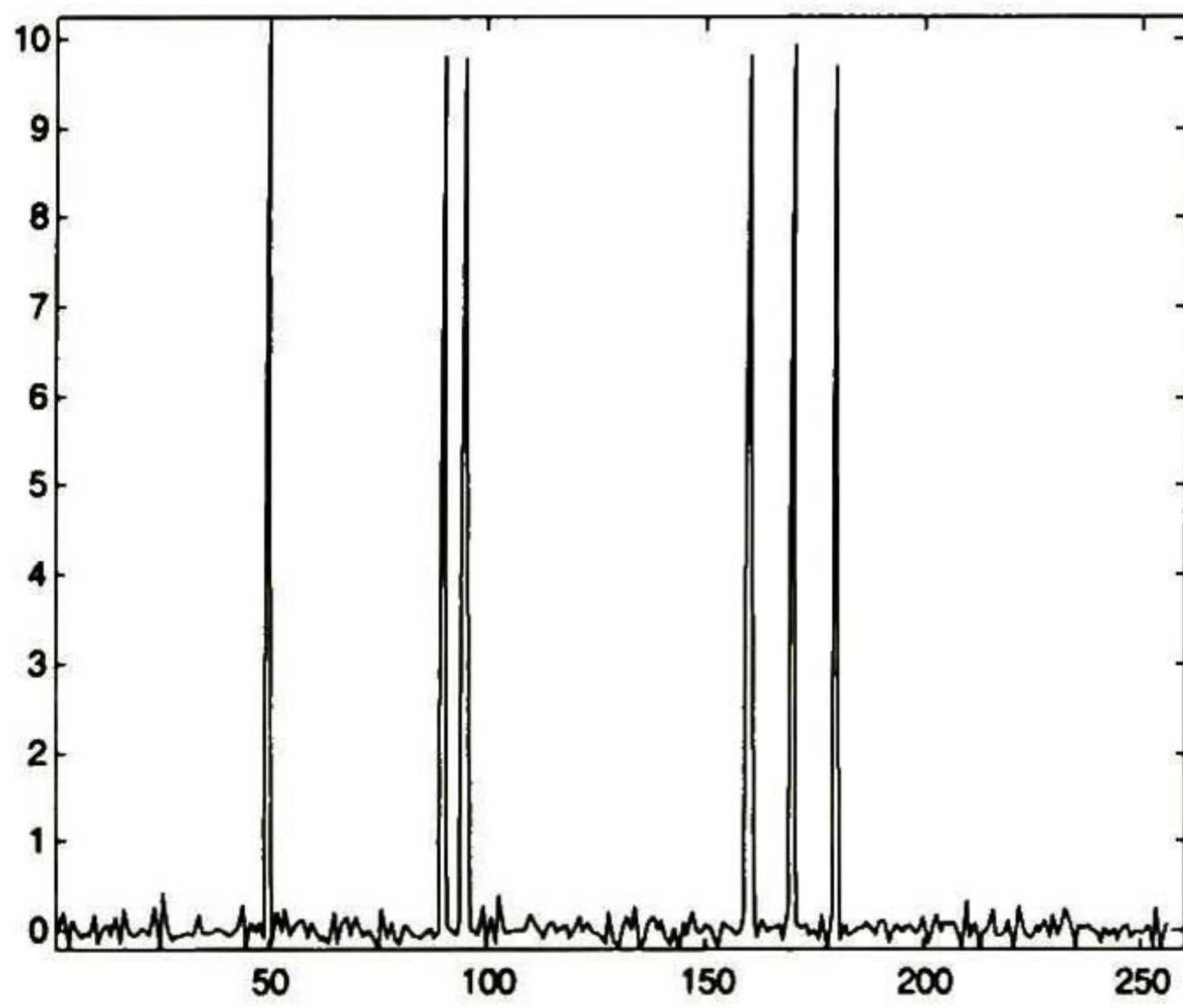
Tabla 4.33. Respuestas con SNR = 10 dB, K = 15 y SSF<sub>3</sub>.



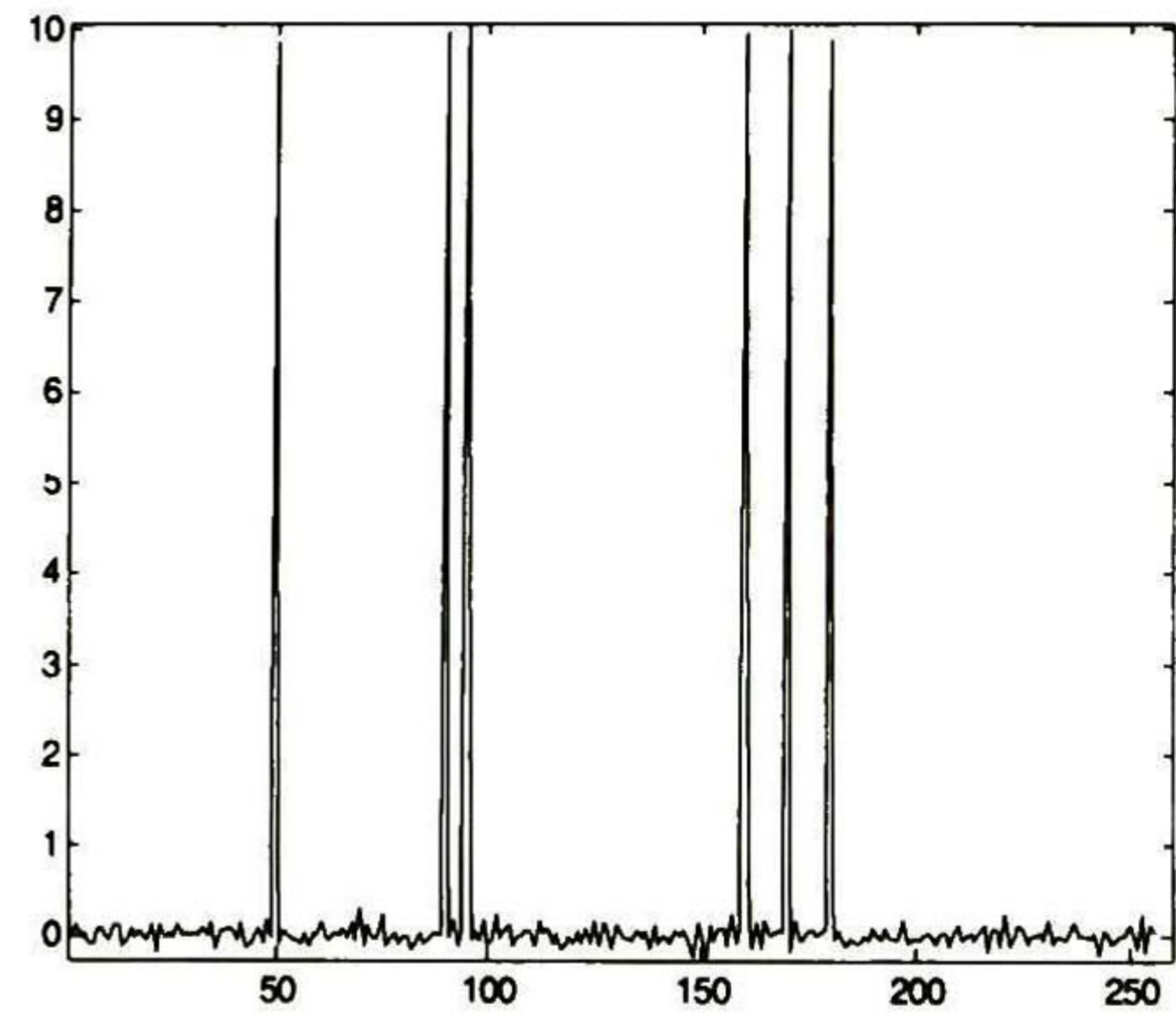
(a) Señal original v



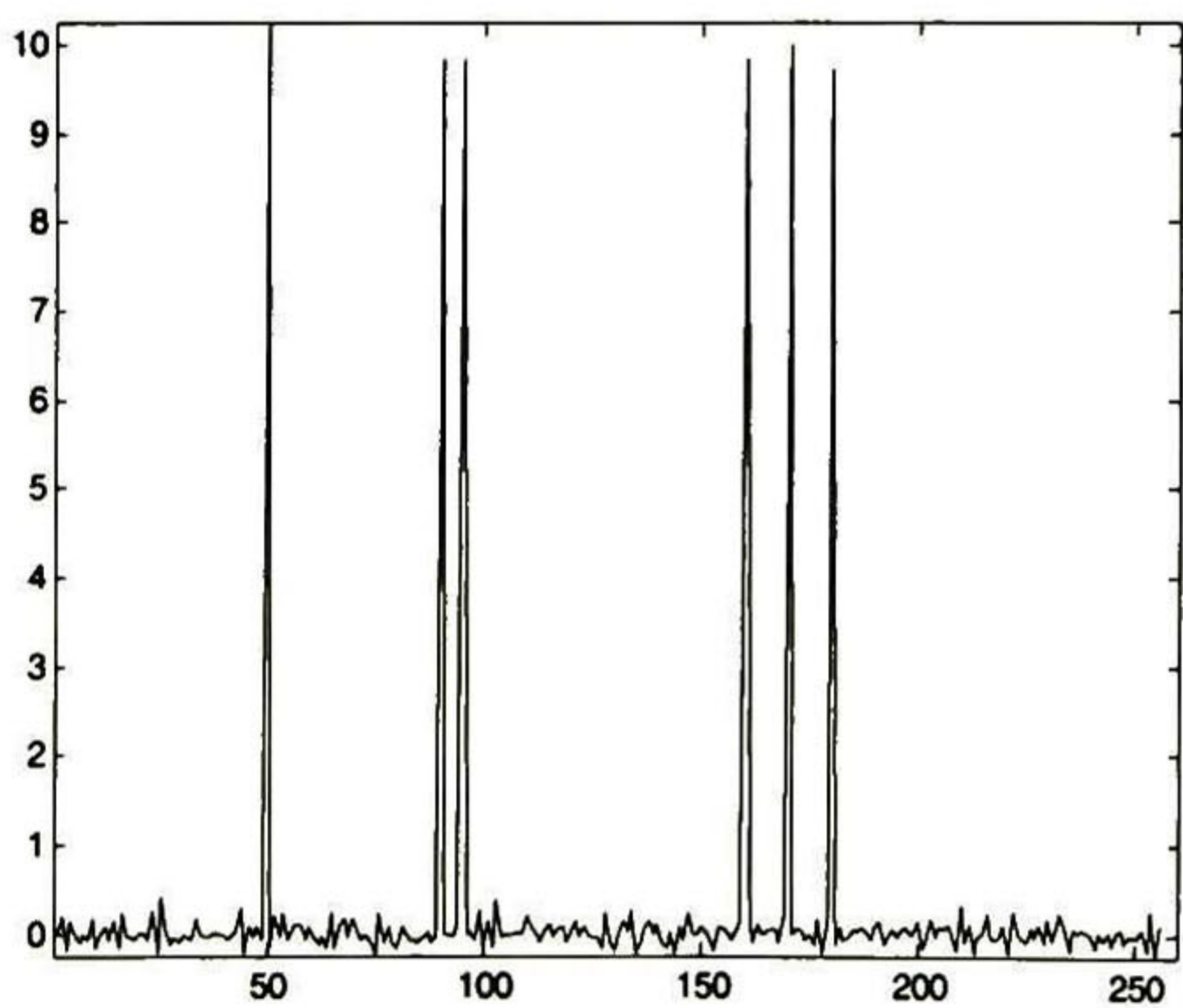
(b) Señal con ruido



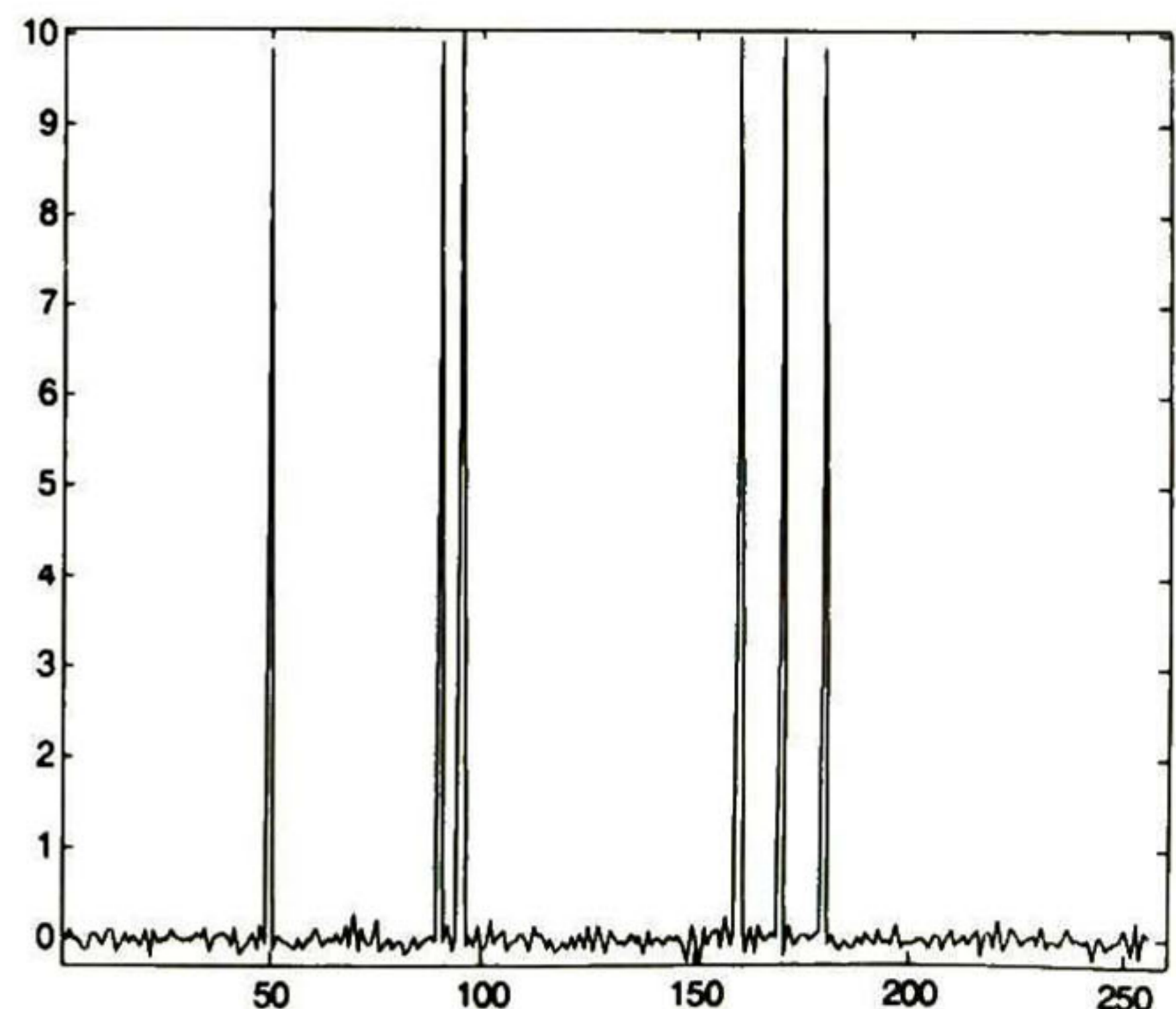
(c) Estimación de 29.6399 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 31.6671dB a 2 iteraciones con el método WCLS

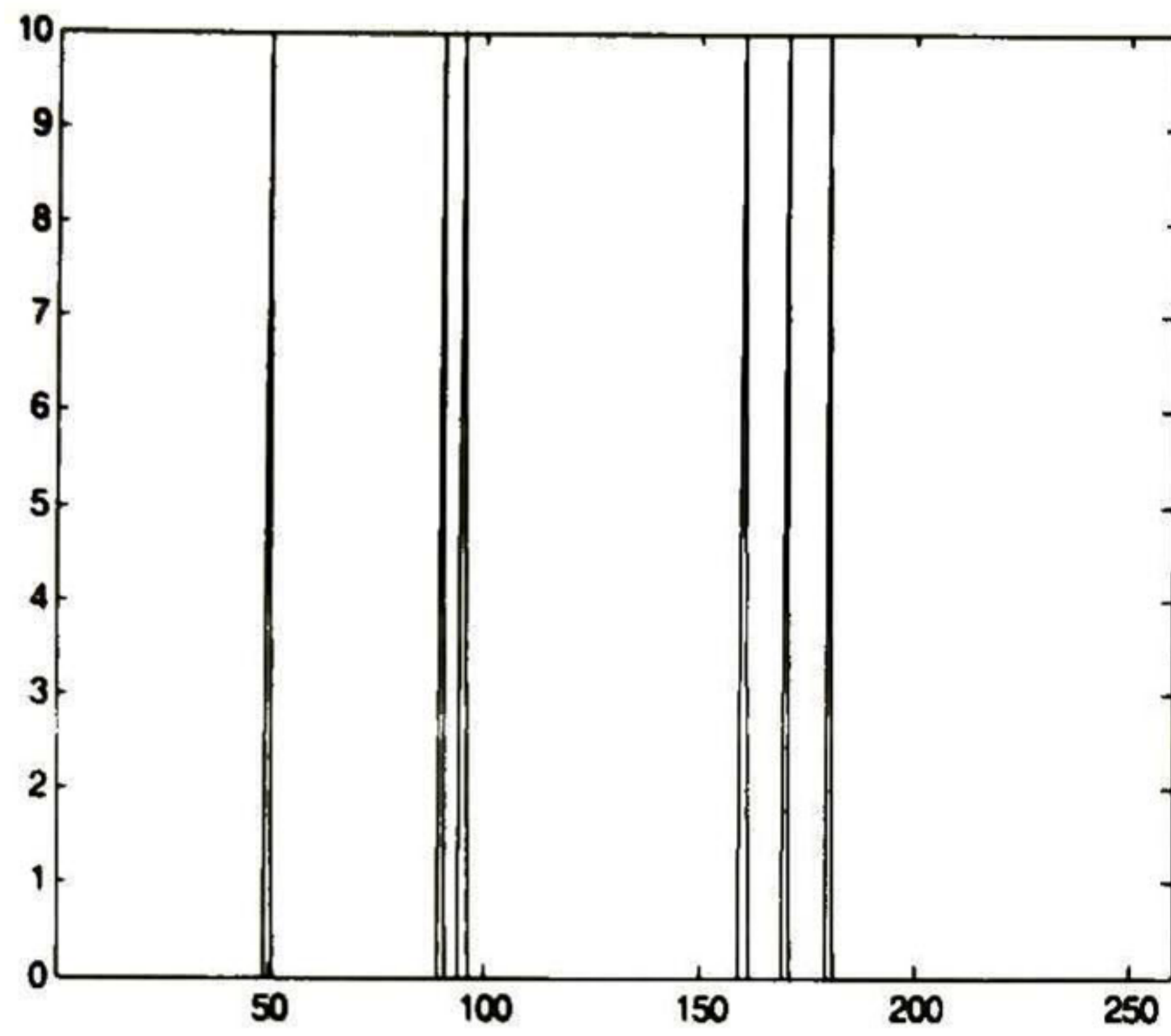


(e) Estimación de 29.7087 dB a 40 iteraciones con el método CLS

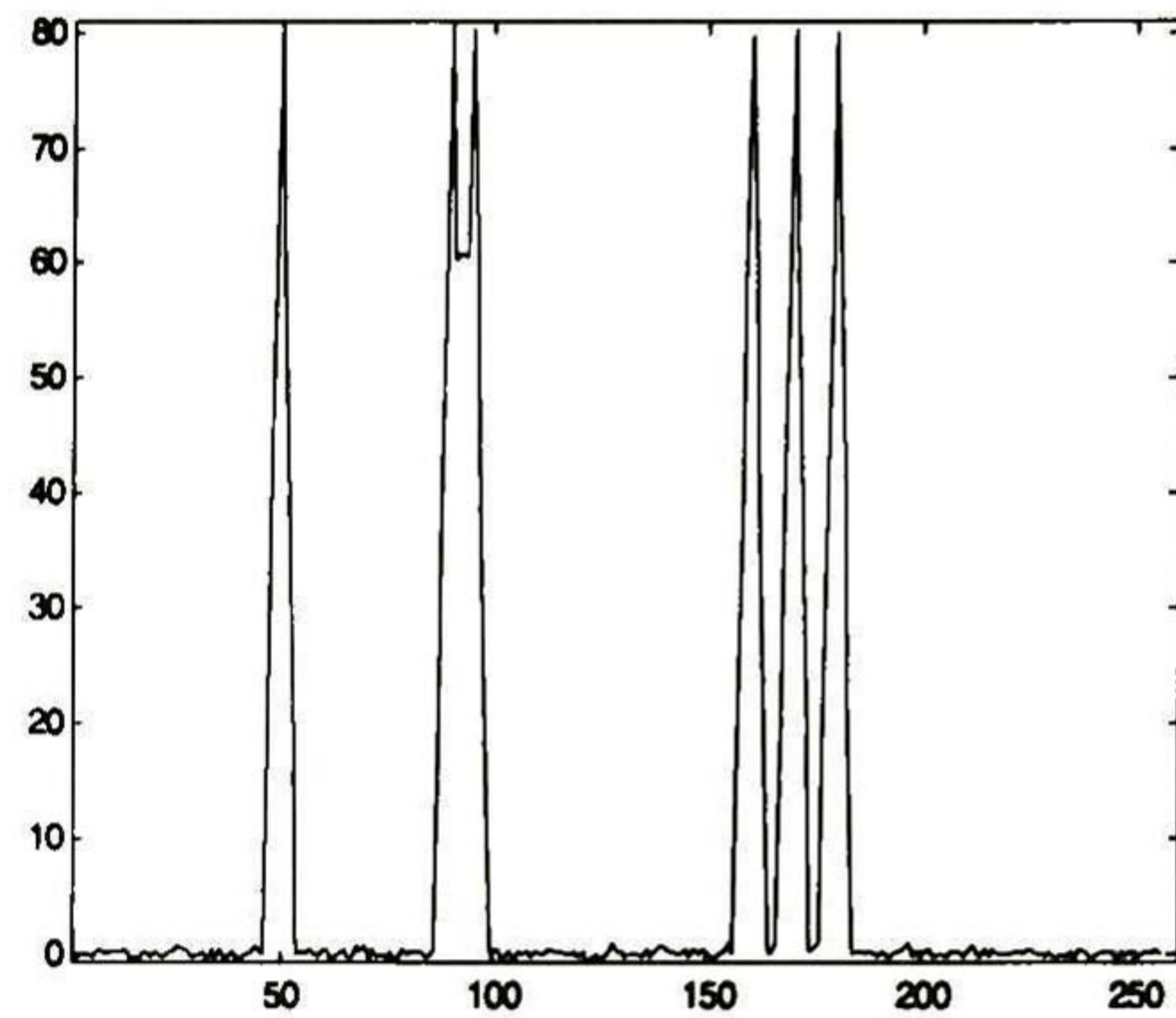


(f) Estimación de 31.6679 dB a 40 iteraciones con el método WCLS

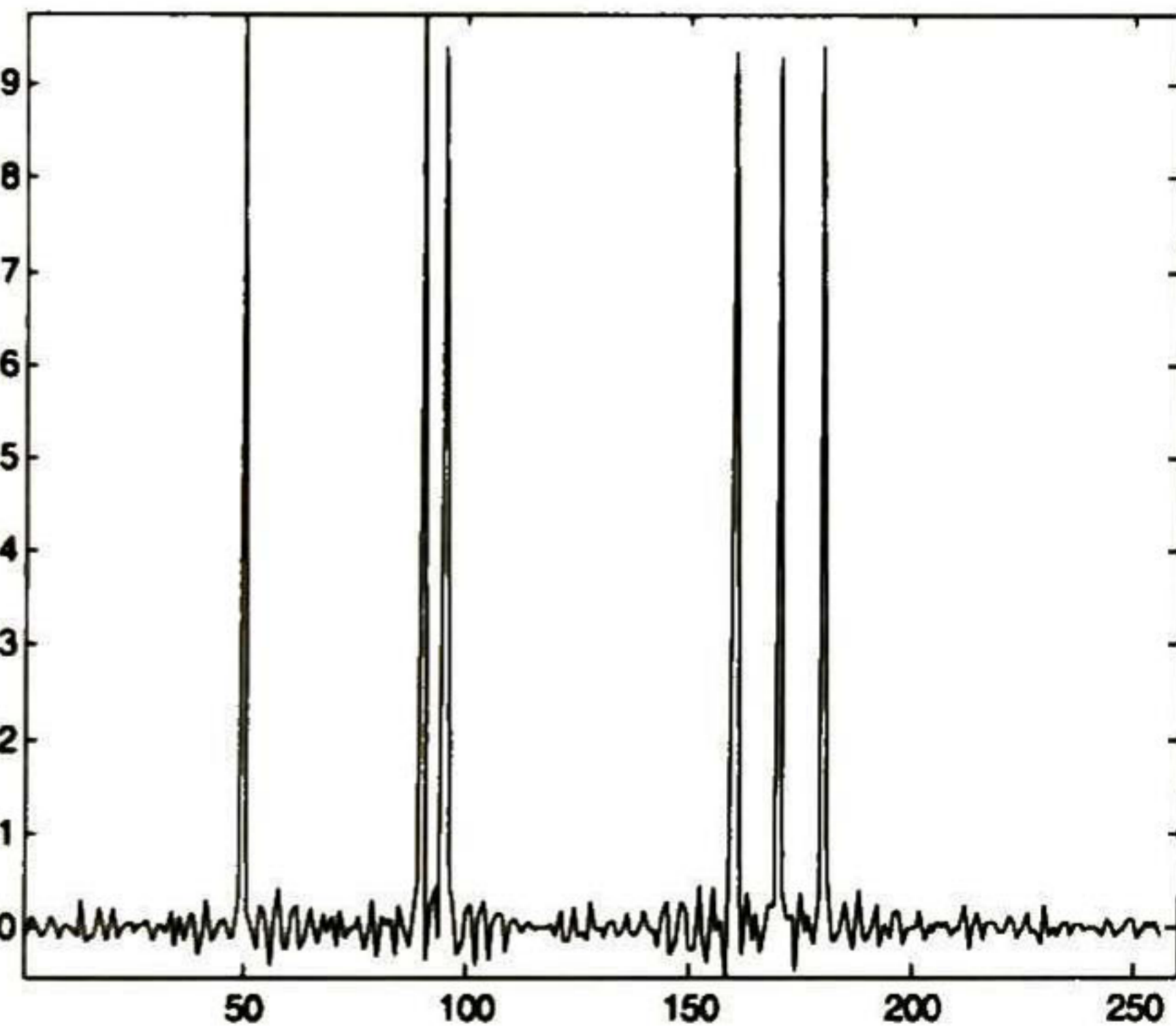
Tabla 4.34. Respuestas con SNR = 20 dB, K = 5 y SSF<sub>3</sub>.



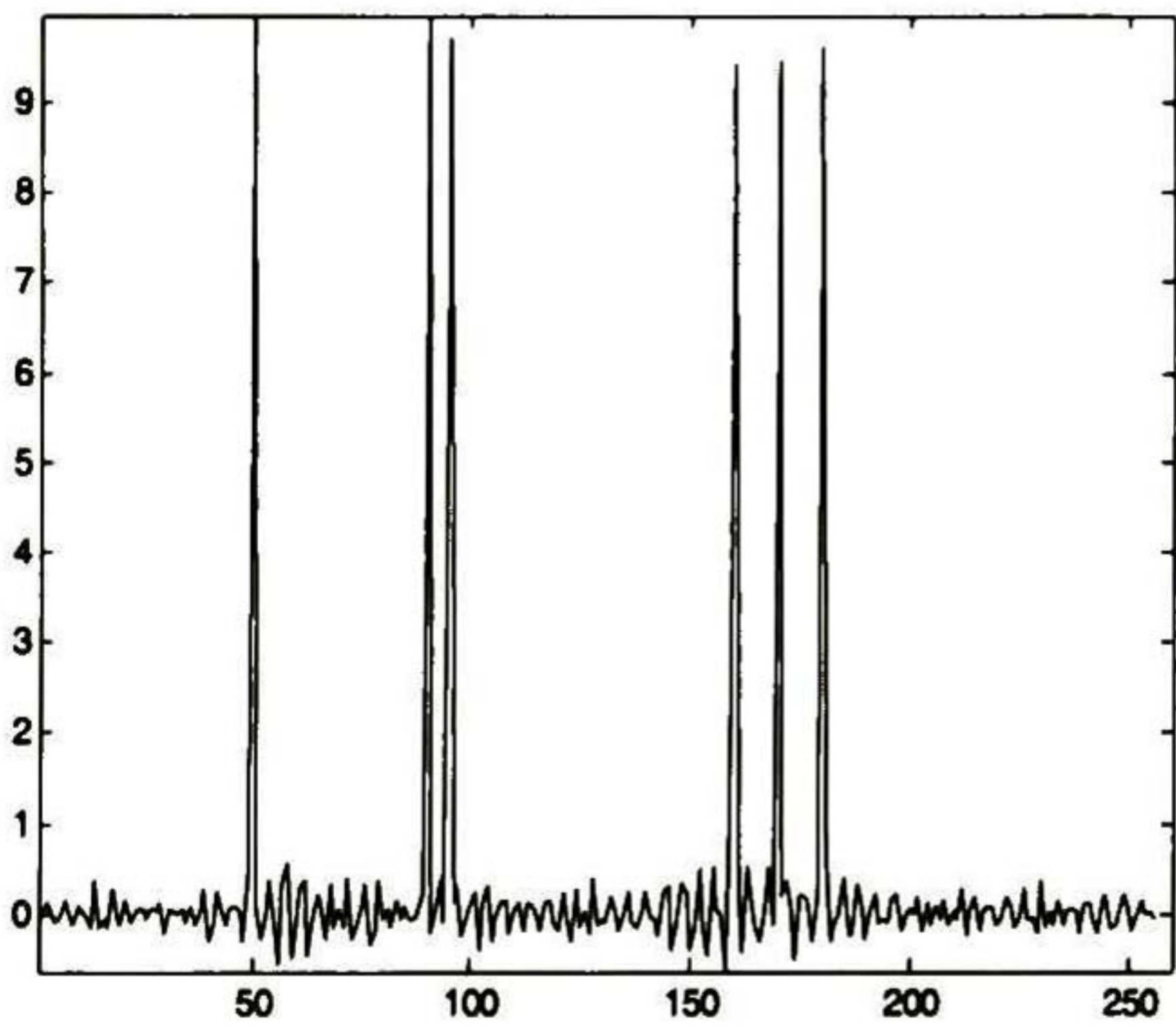
(a) Señal original v



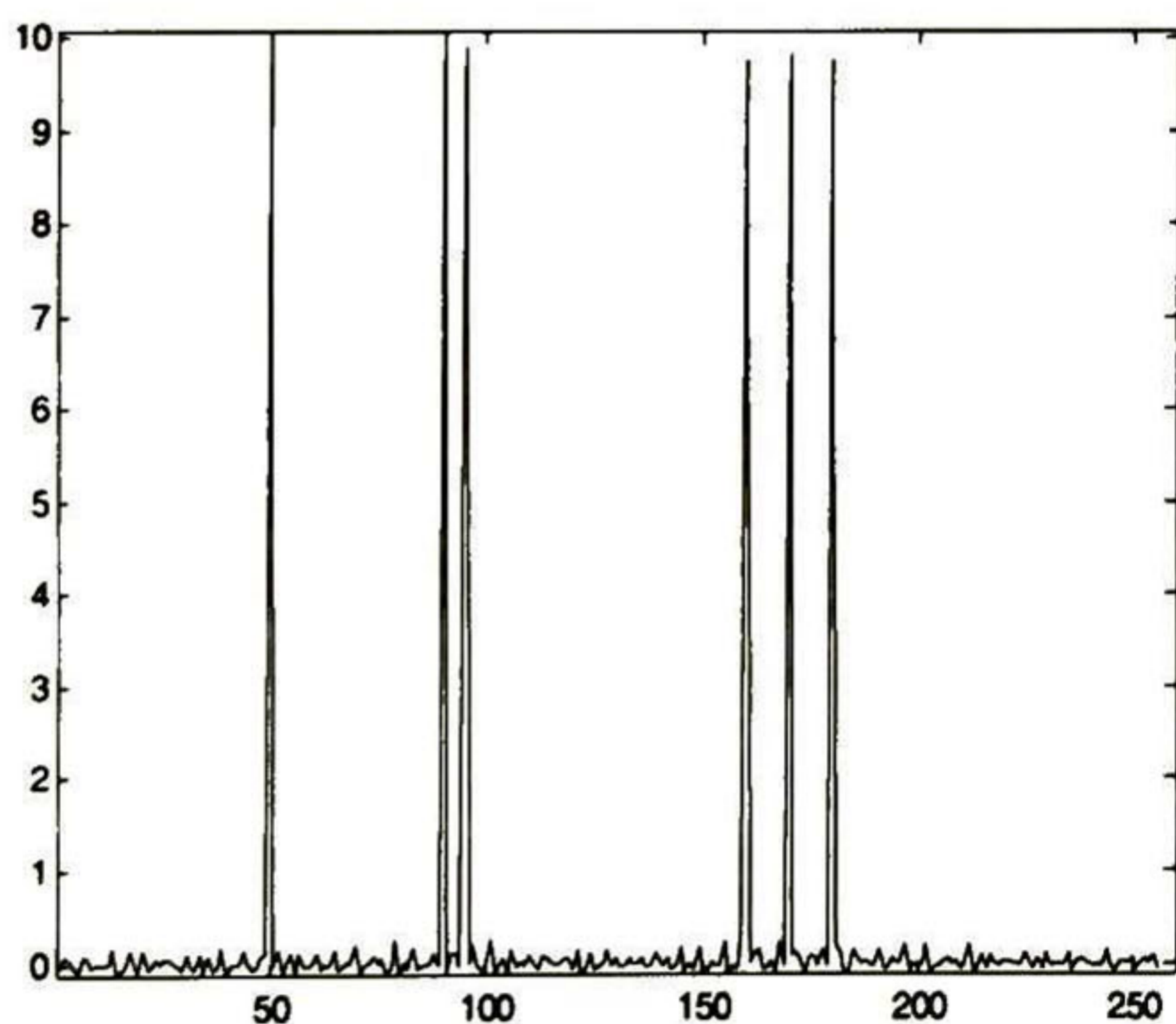
(b) Señal con ruido



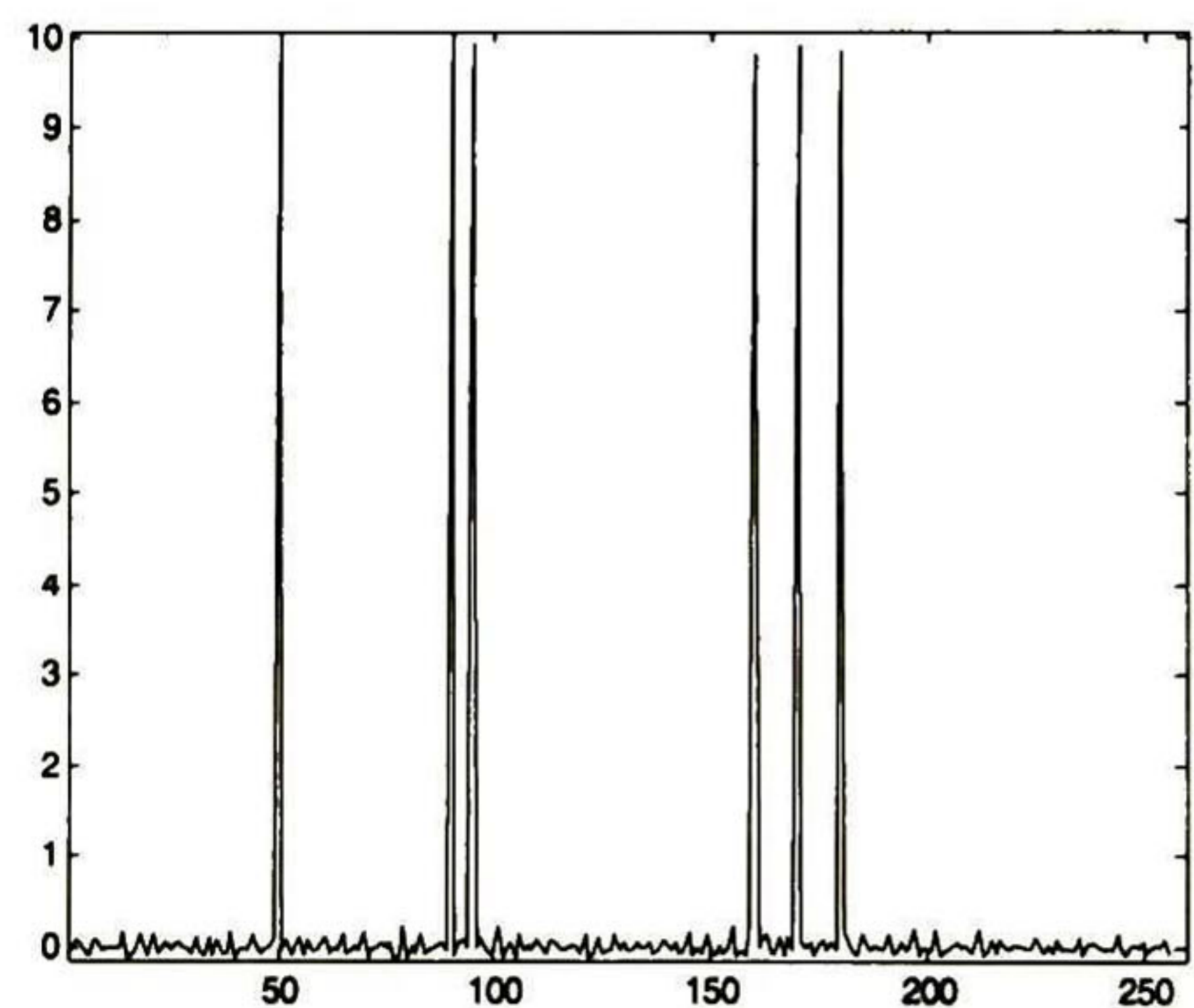
(c) Estimación de 38.8163 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 38.8101 dB a 2 iteraciones con el método WCLS

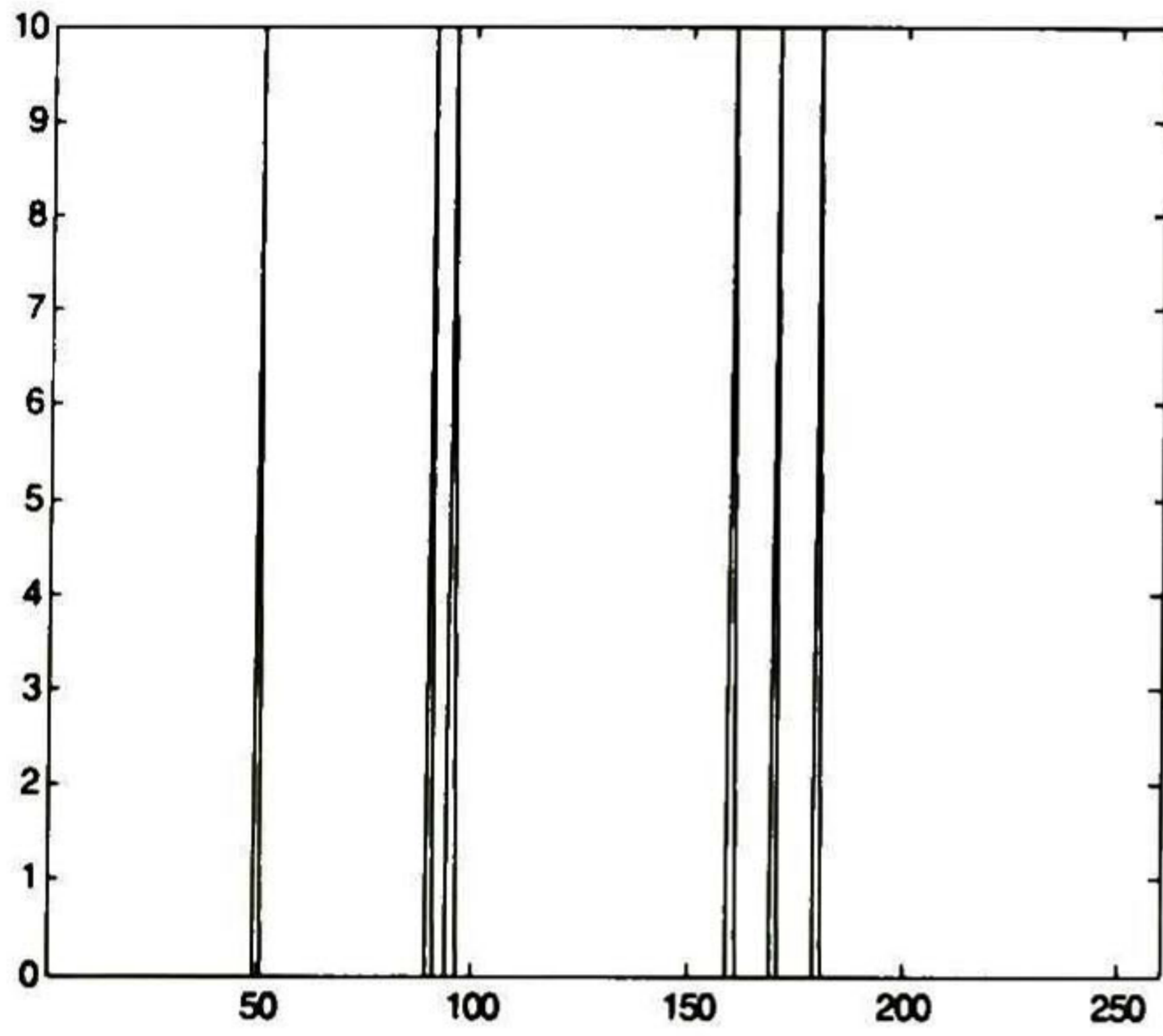


(e) Estimación de 47.1615 dB a 40 iteraciones con el método CLS

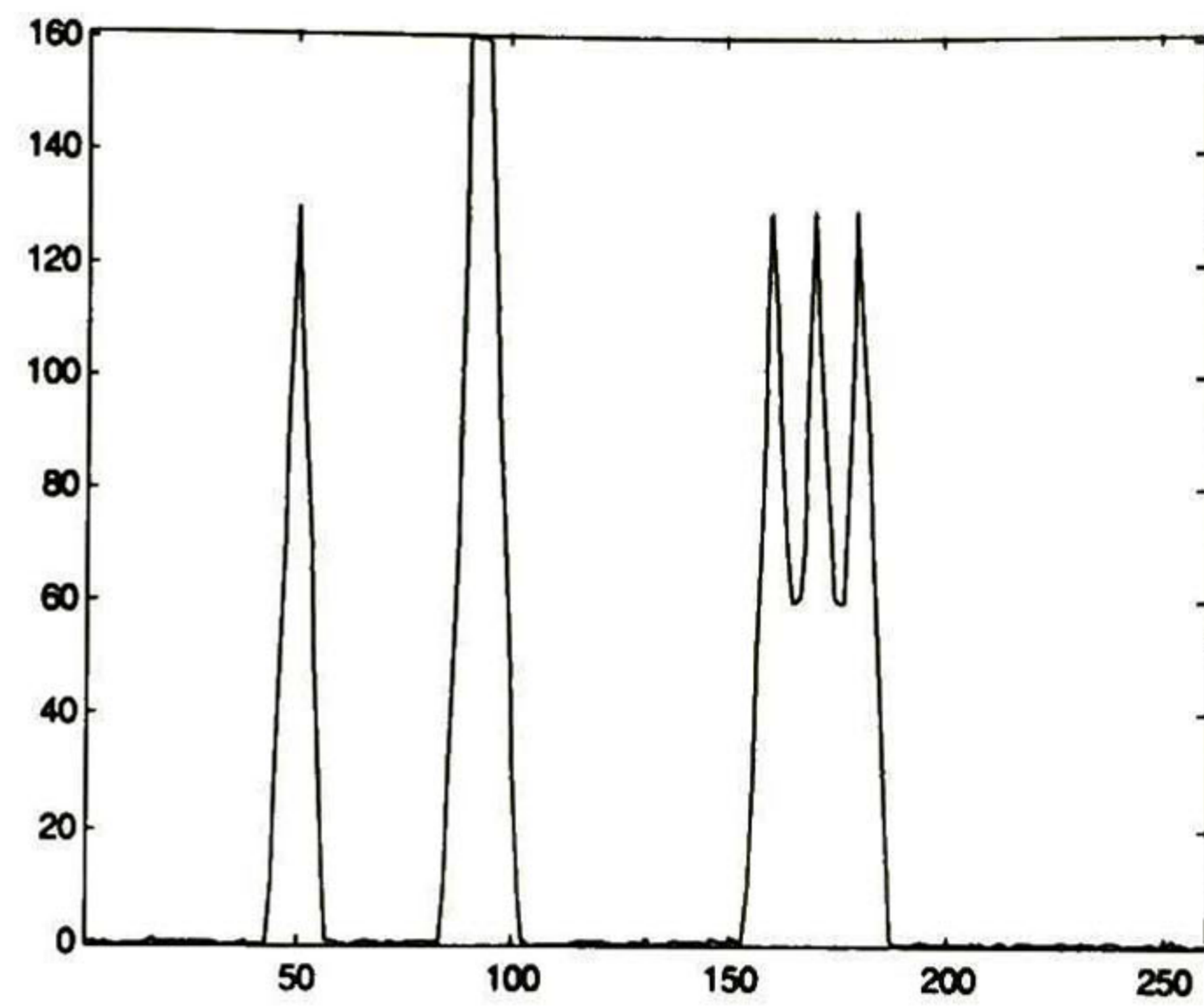


(f) Estimación de 47.8643 dB a 40 iteraciones con el método WCLS

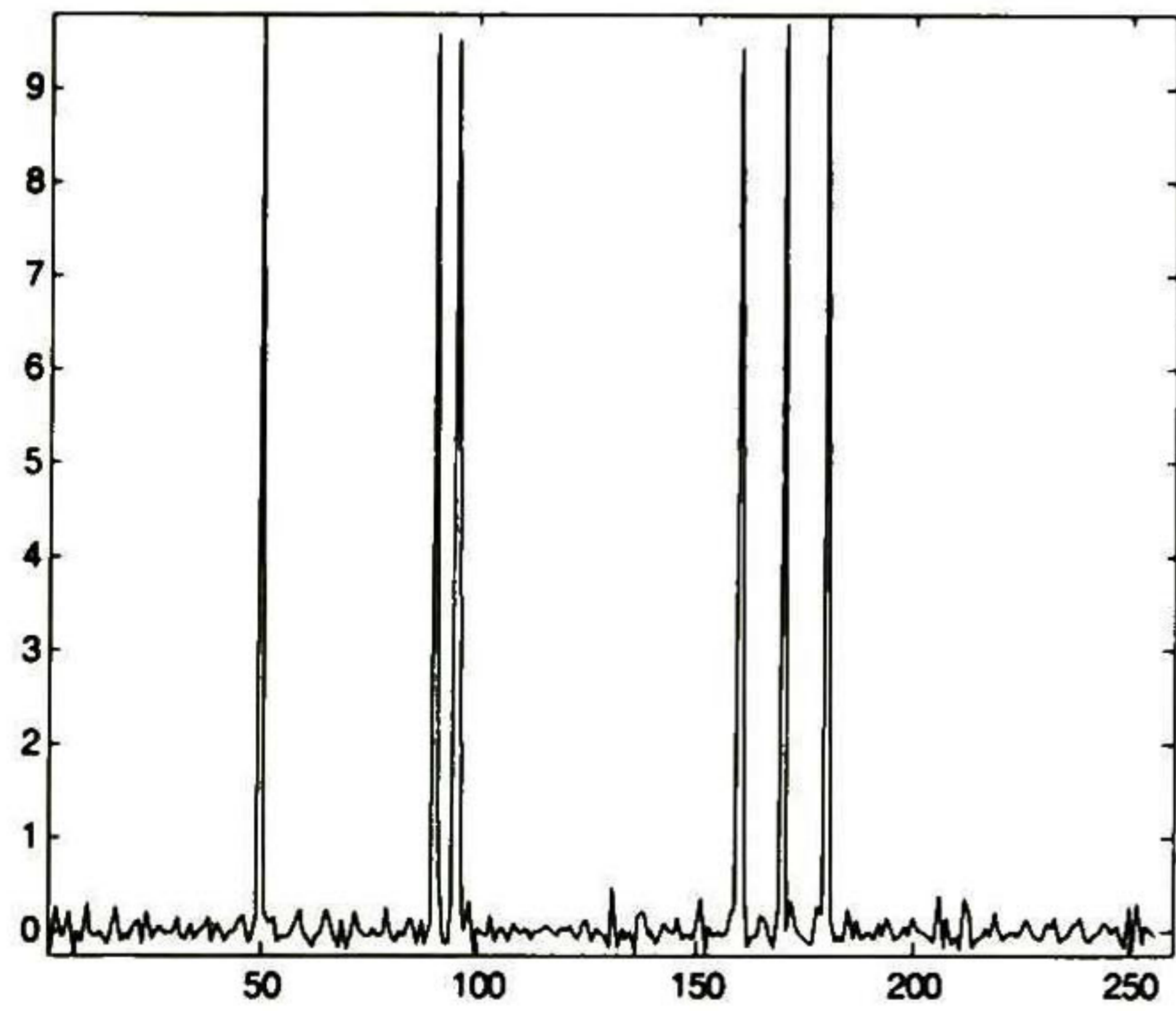
Tabla 4.35. Respuestas con SNR = 20 dB, K = 10 y SSF<sub>3</sub>.



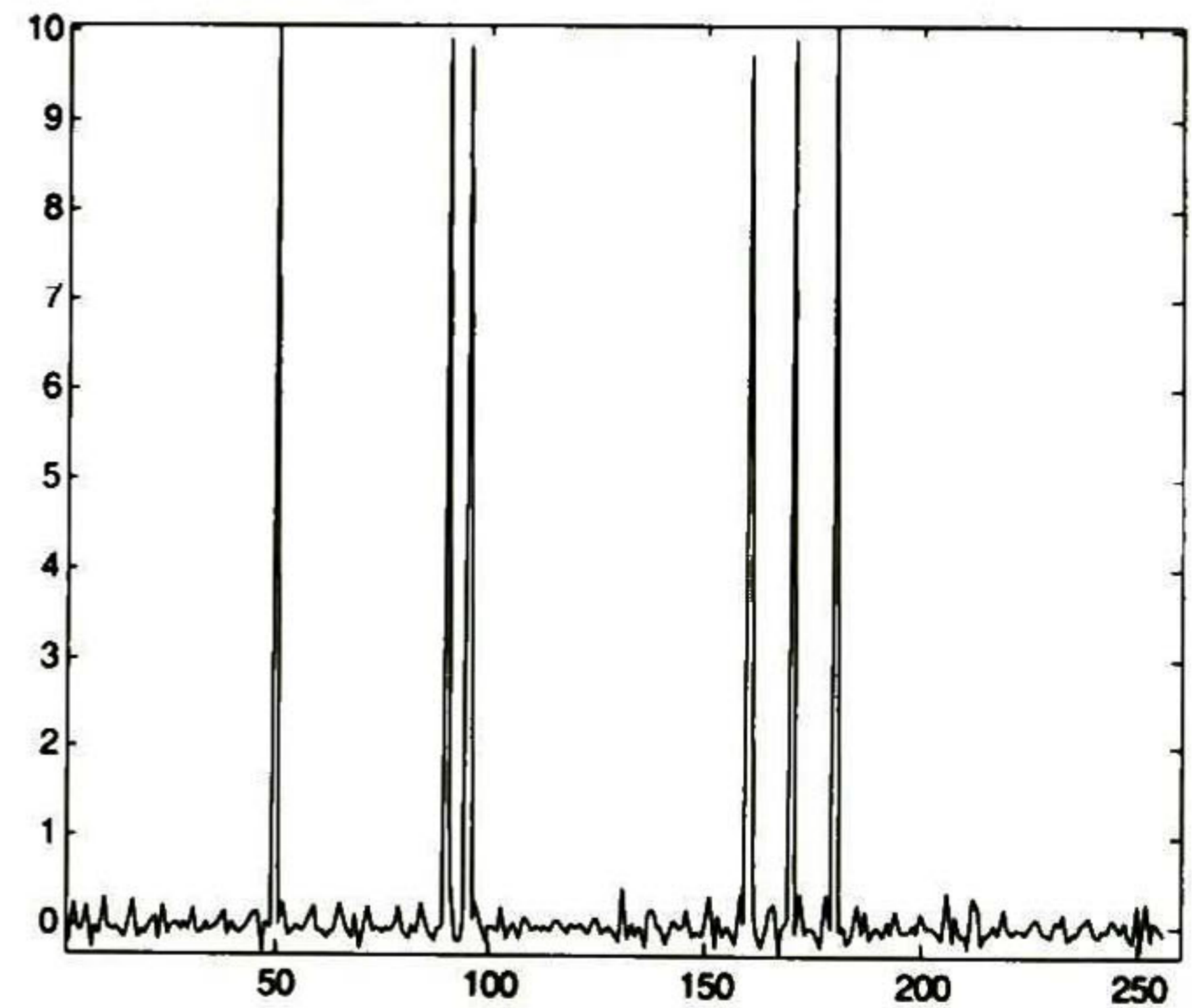
(a) Señal original v



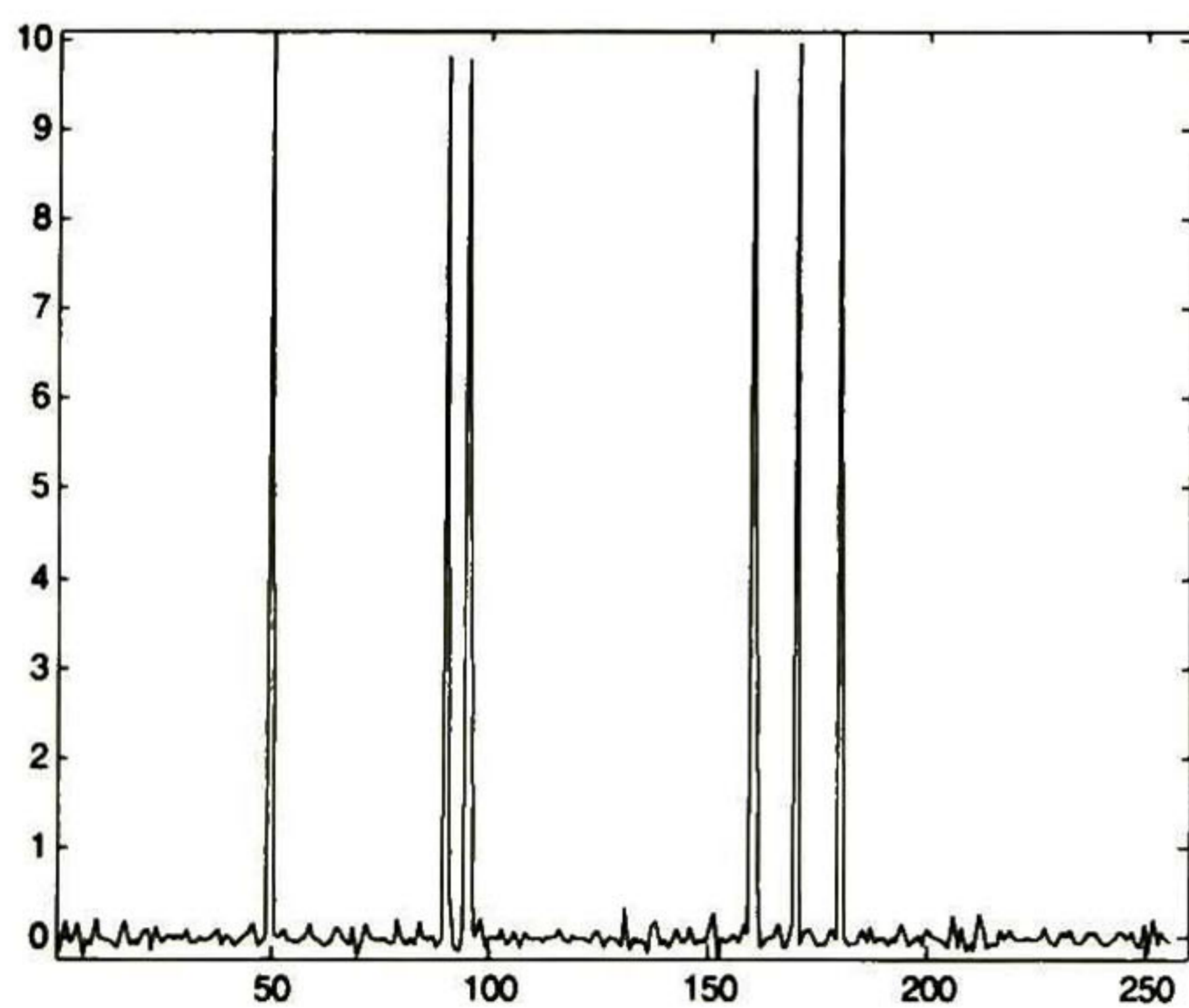
(b) Señal con ruido



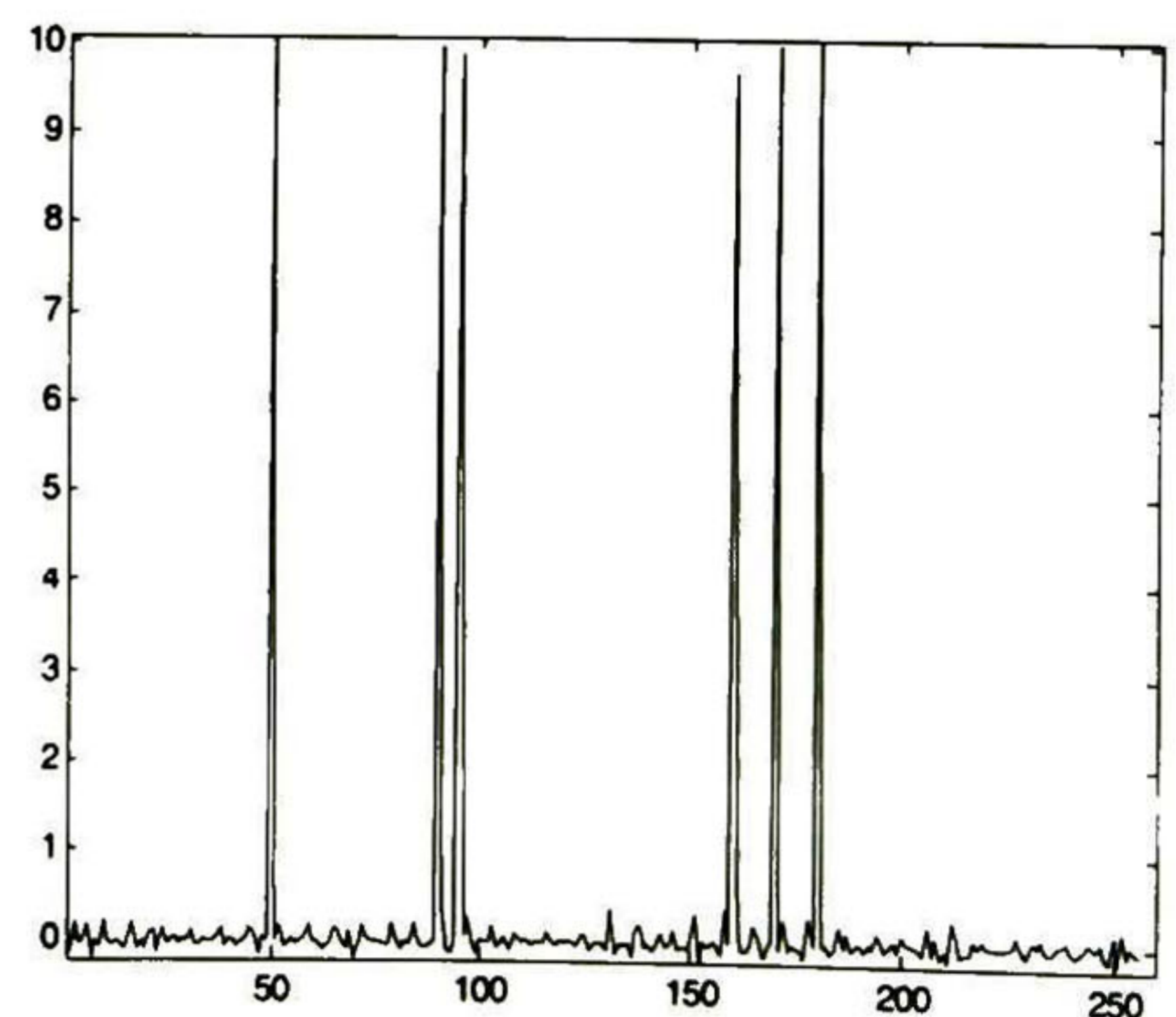
(c) Estimación de 49.9675 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 50.3460 dB a 2 iteraciones con el método WCLS



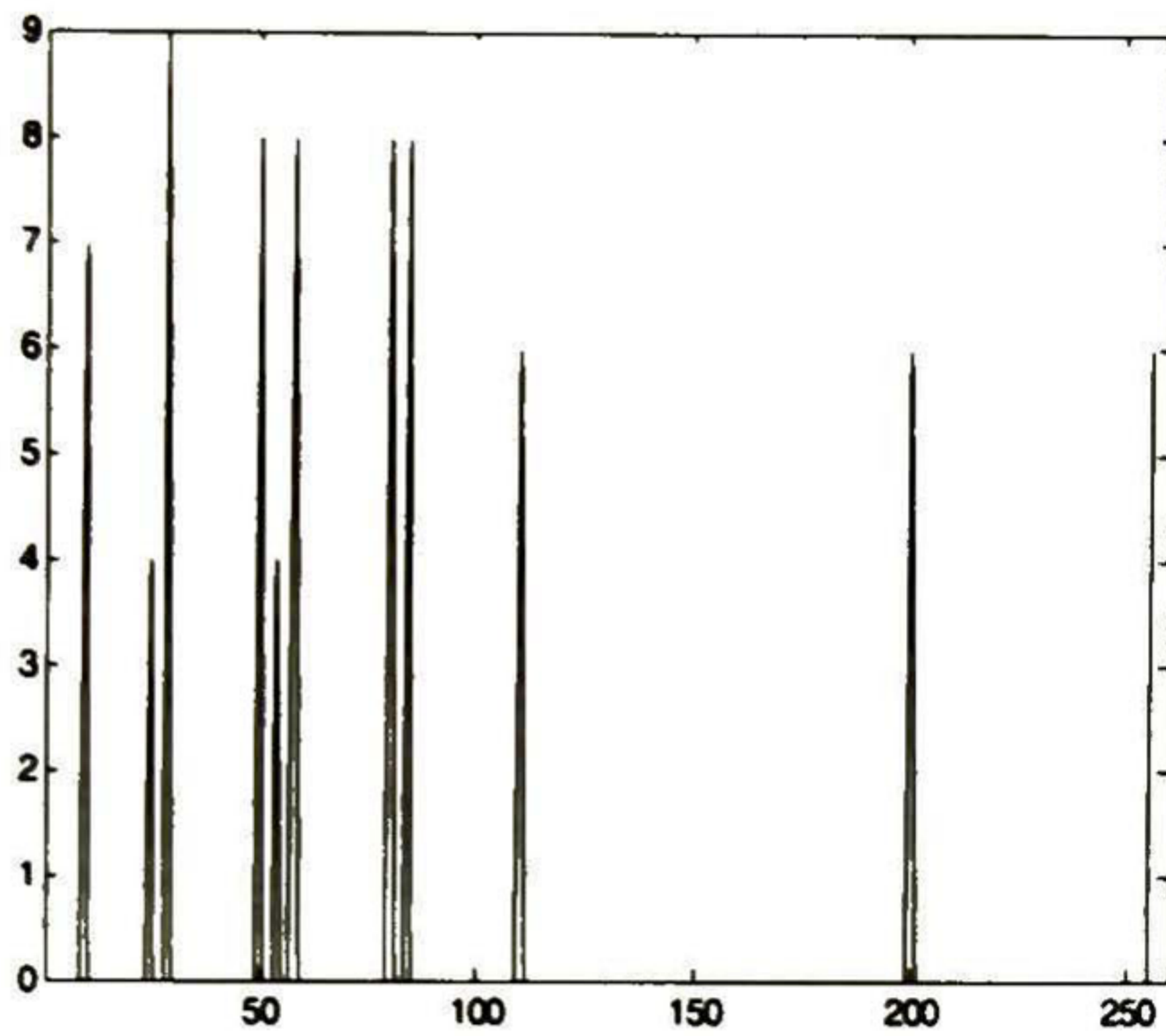
(e) Estimación de 52.9223 dB a 40 iteraciones con el método CLS



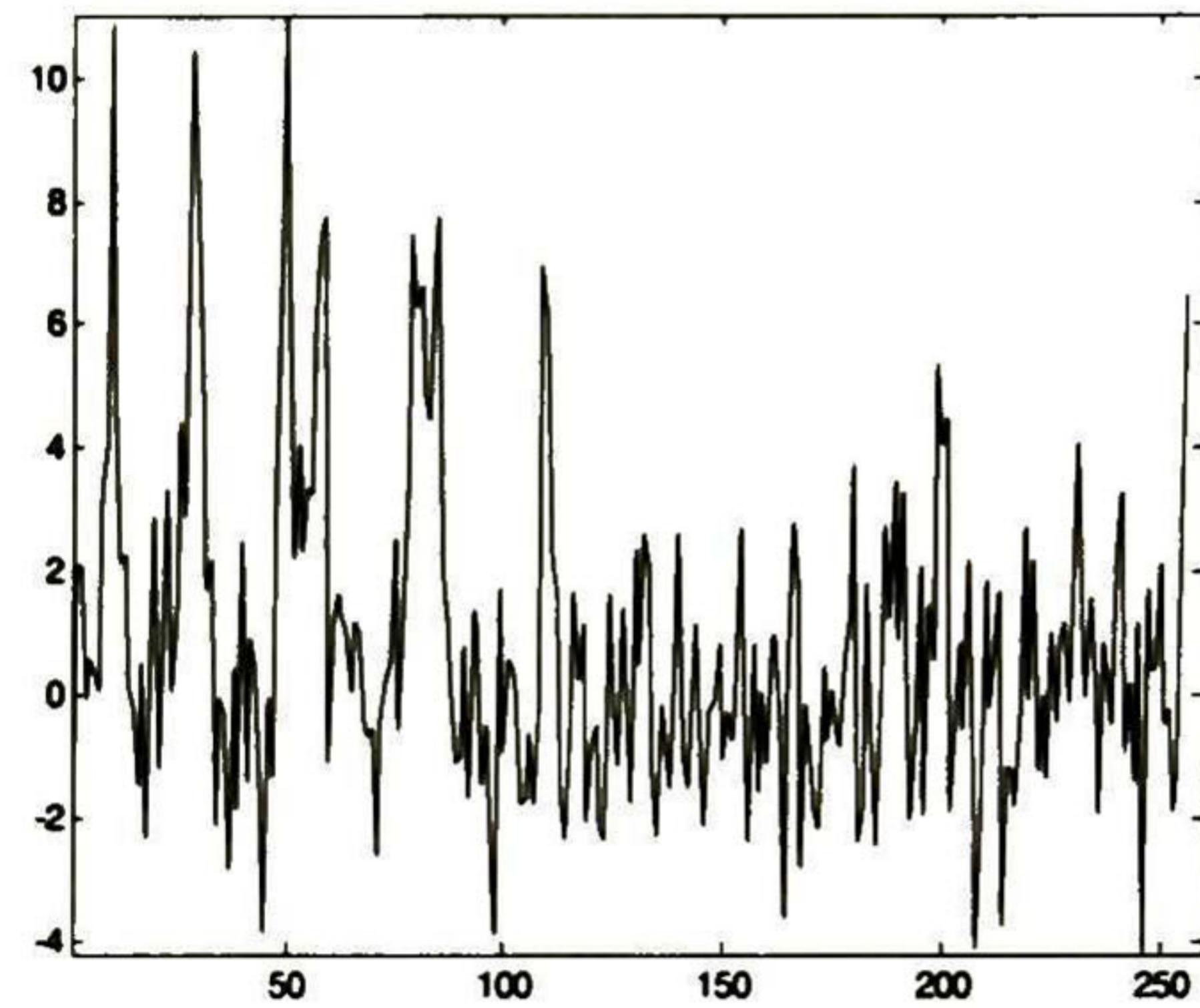
(f) Estimación de 53.1729 dB a 40 iteraciones con el método WCLS

4.2.2 Para la señal  $v_1$

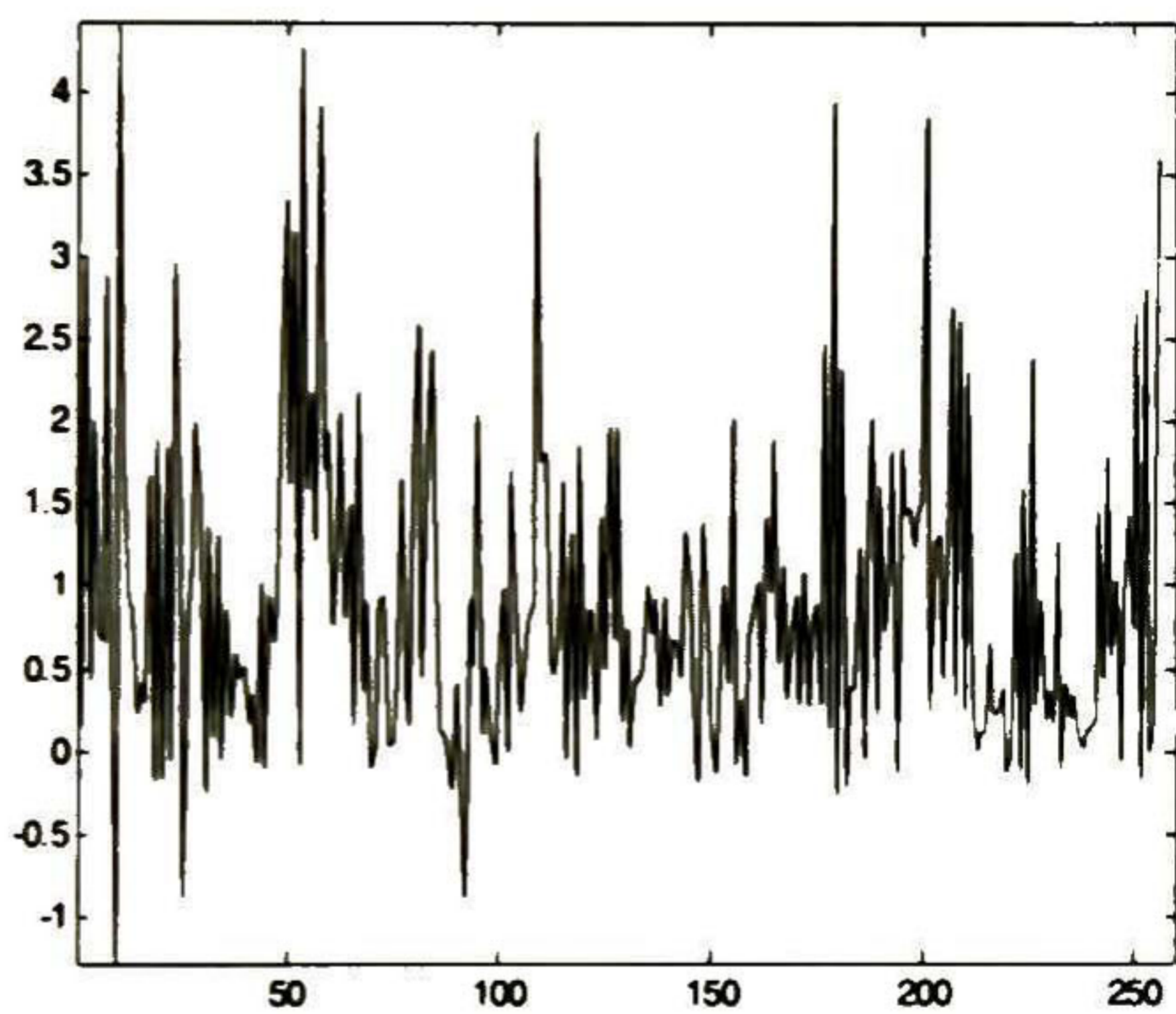
Tabla 4.36. Respuestas con SNR = 20 dB, K = 15 y  $SSF_3$ .



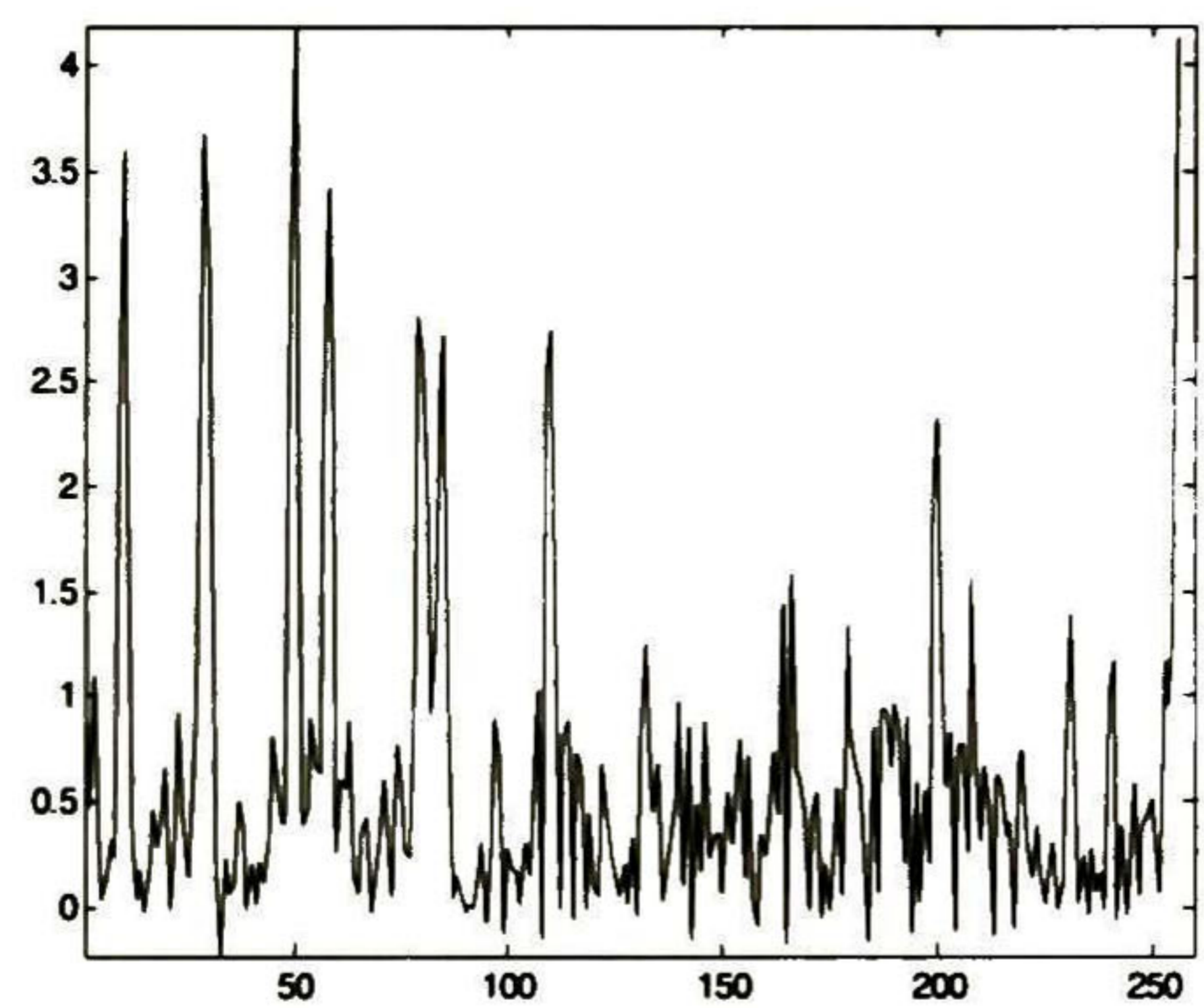
(a) Señal original  $v$



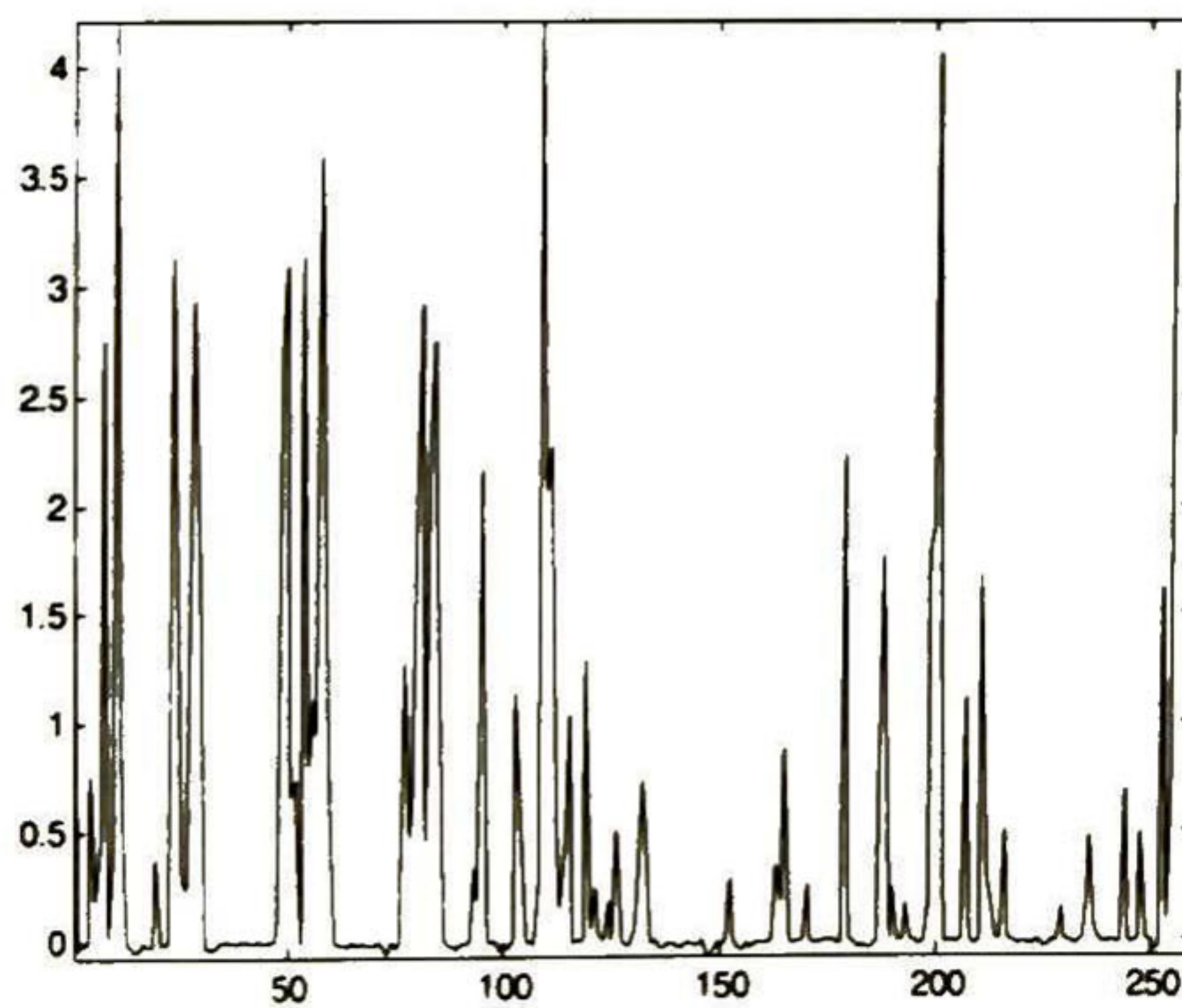
(b) Señal con ruido



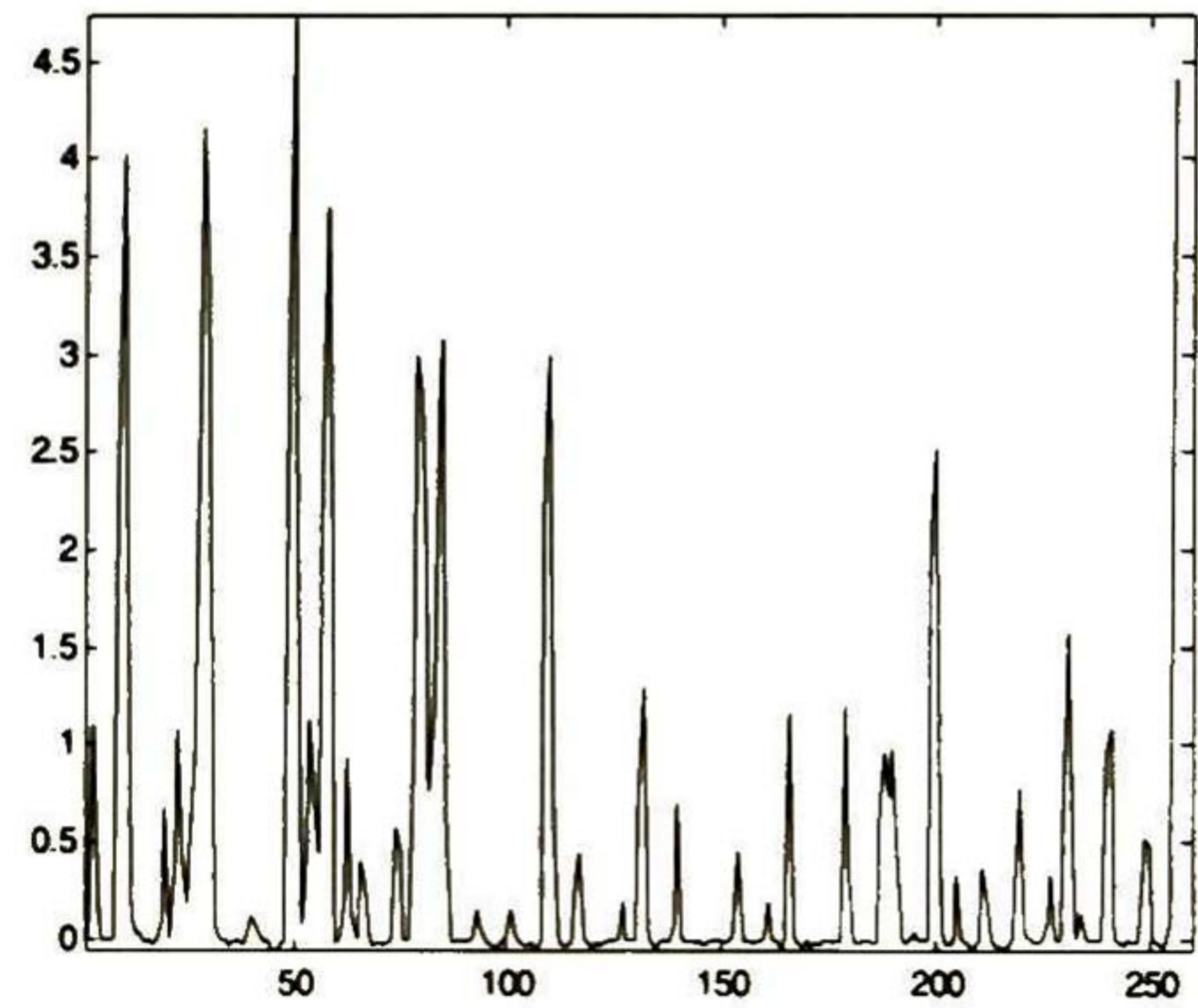
(c) Estimación de 3.5176 dB a 2 iteraciones con el método WCLS



(d) Estimación de 5.5763 dB a 2 iteraciones con el método WCLS

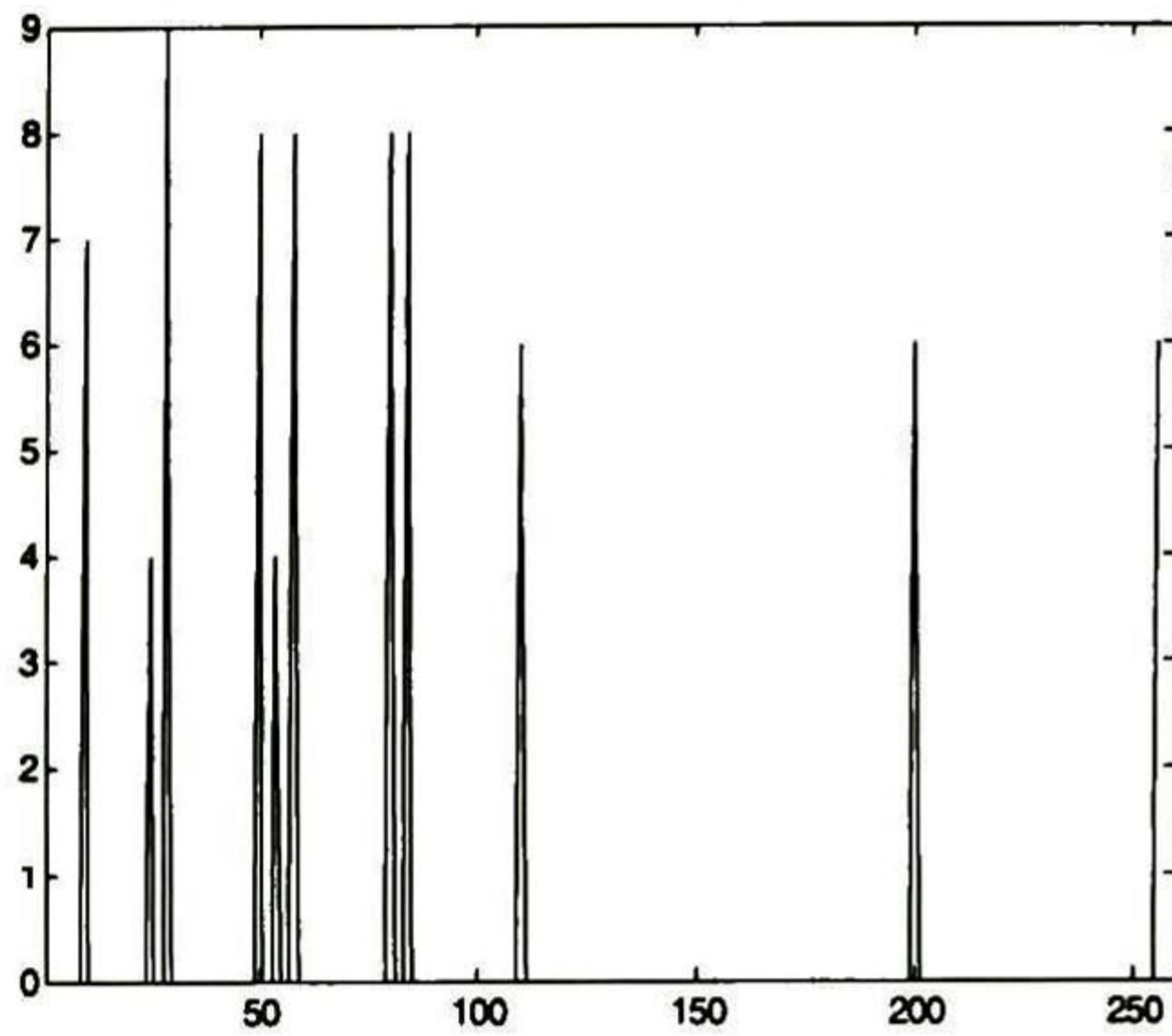


(e) Estimación de 5.6367 dB a 40 iteraciones con el método WCLS

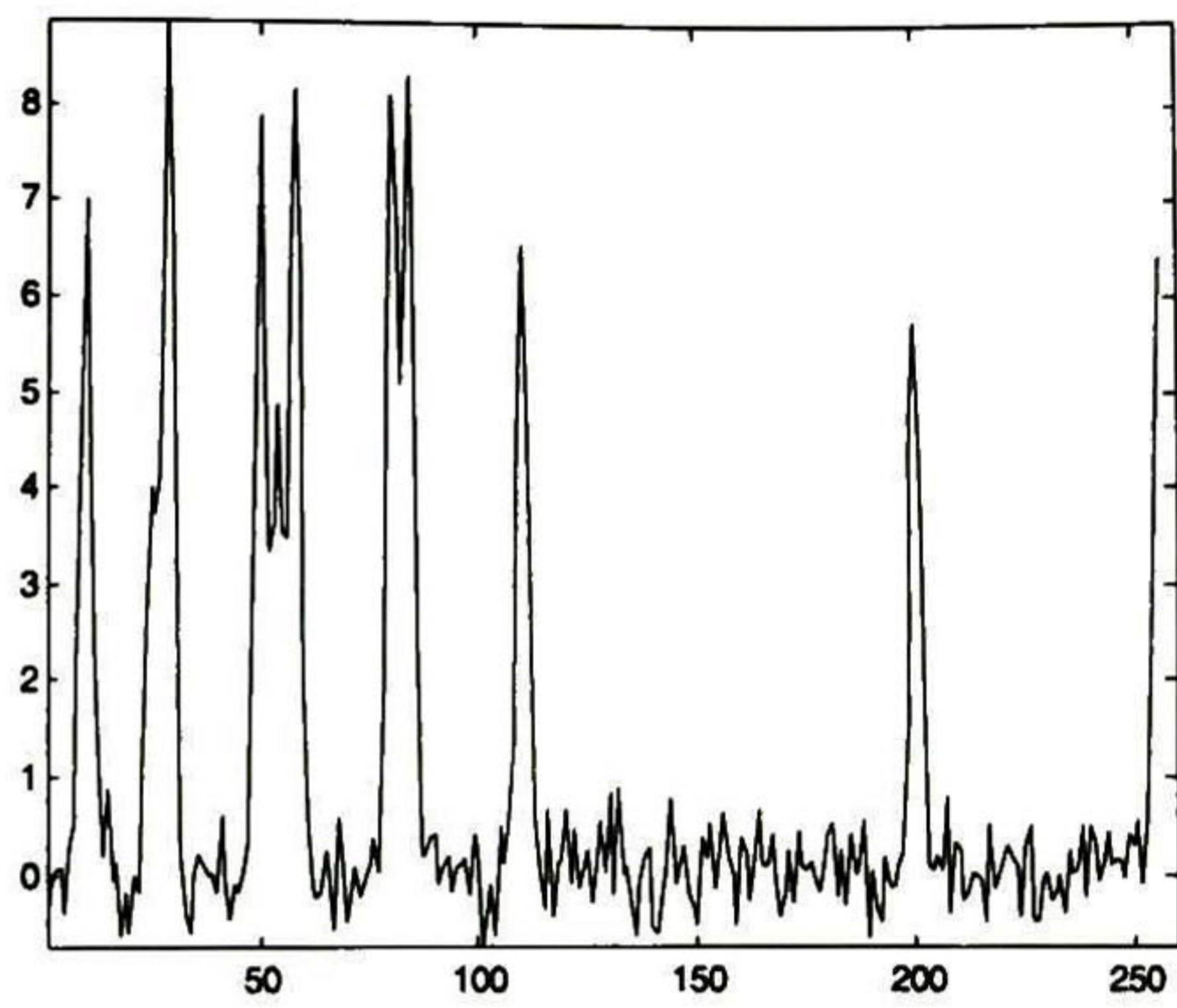


(f) Estimación de 6.2115 dB a 40 iteraciones con el método WCLS

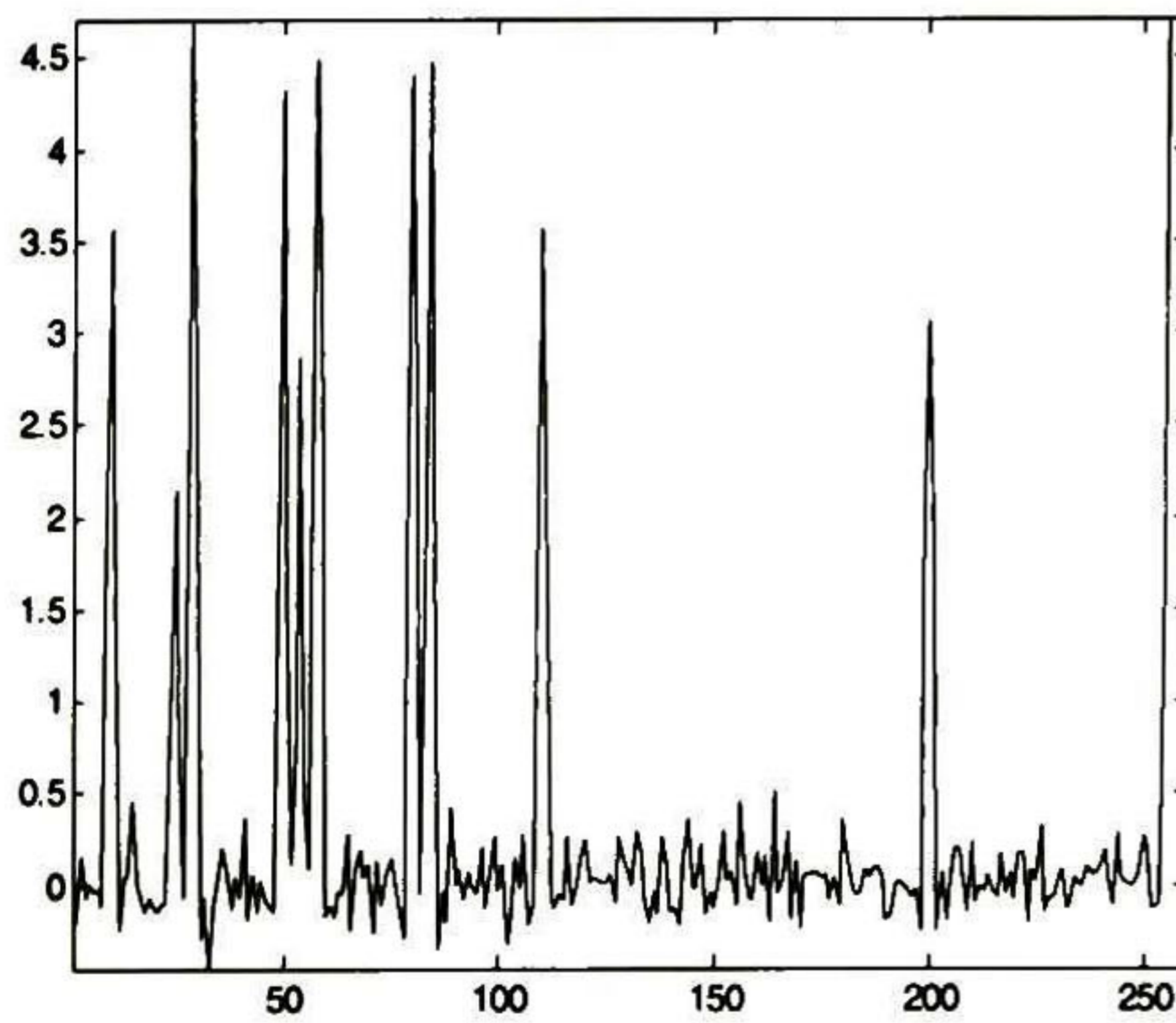
Tabla 4.37. Respuestas con SNR = 6 dB, K = 5 y  $SSF_1$ .



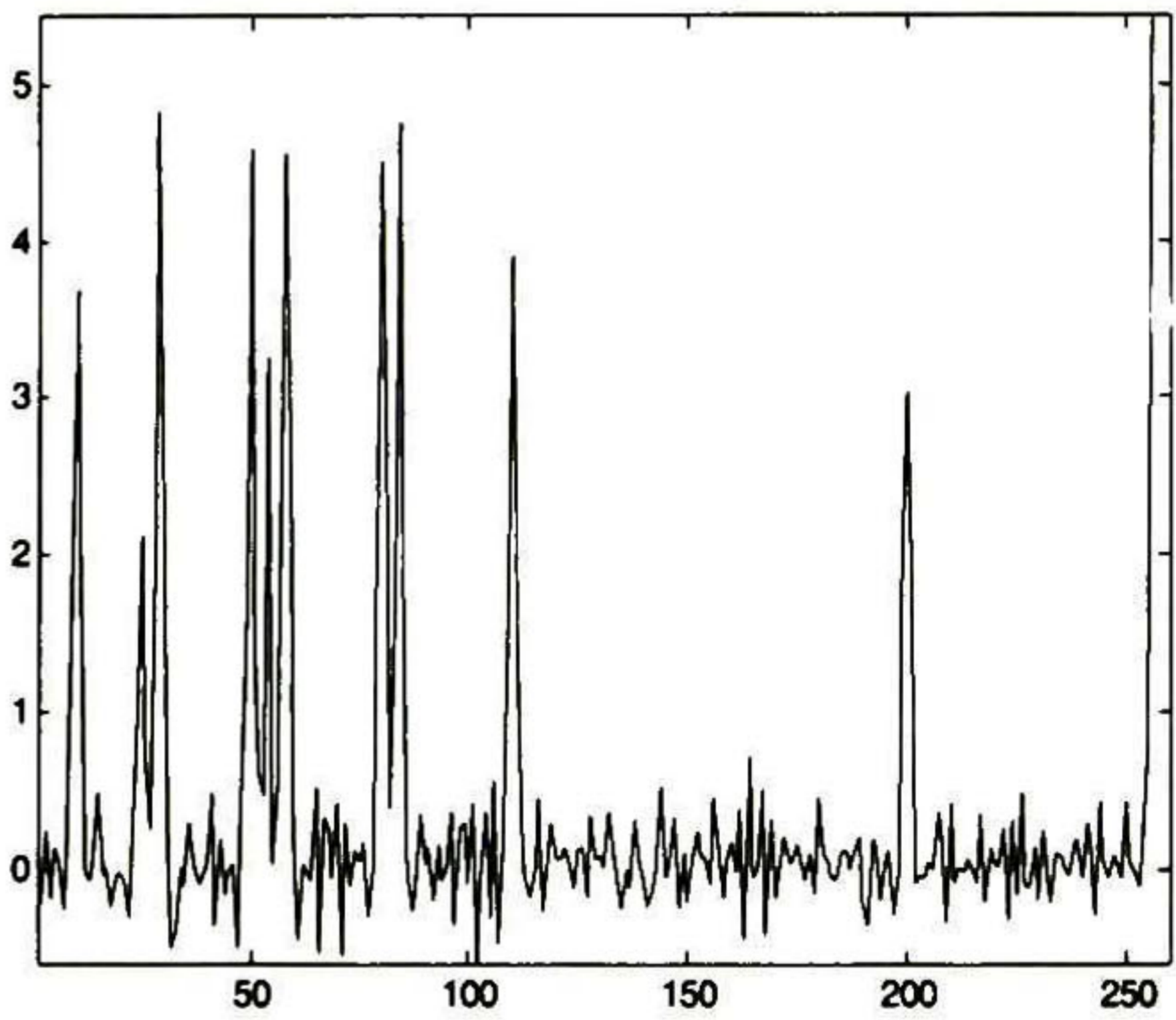
(a) Señal original v



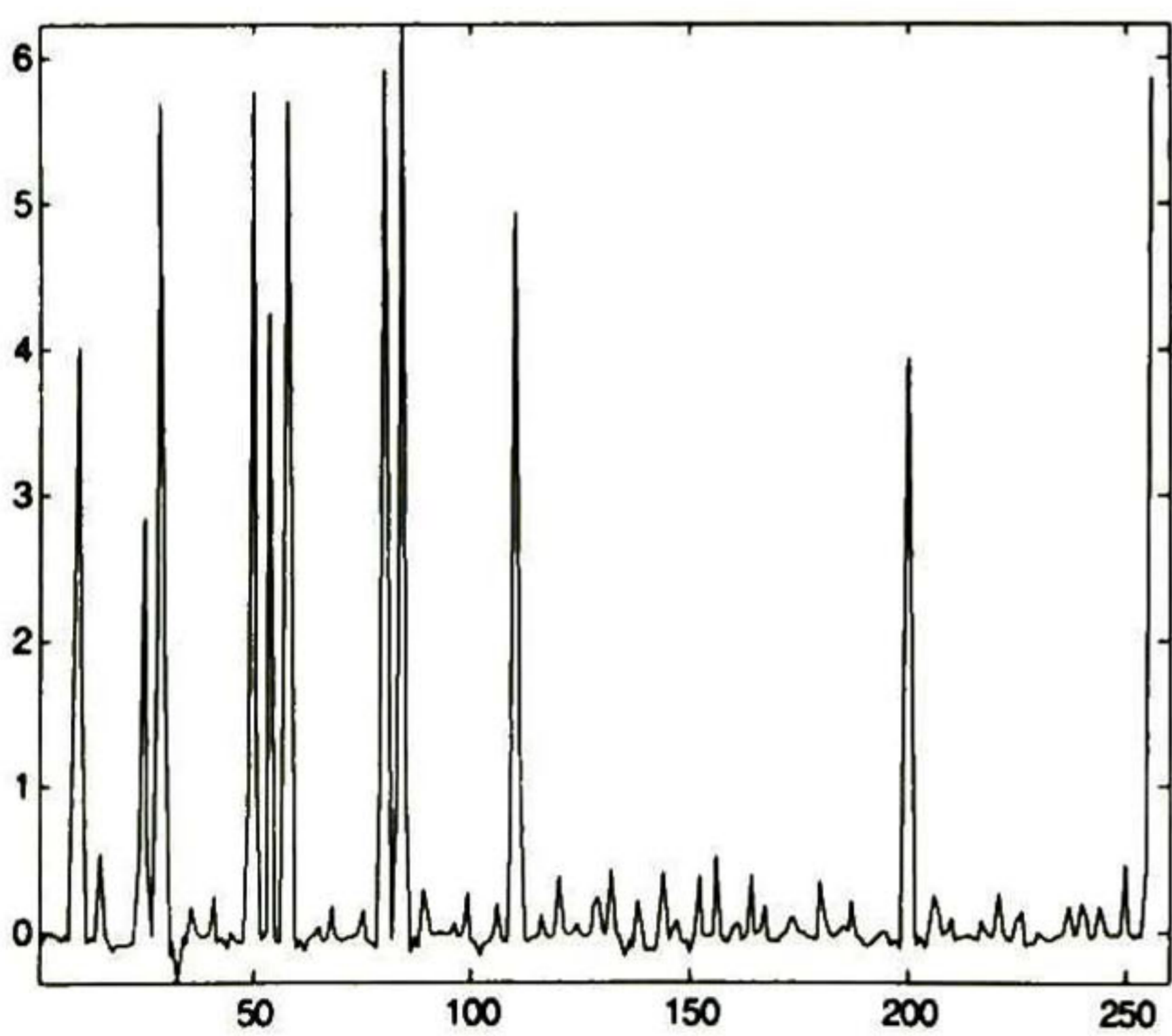
(b) Señal con ruido



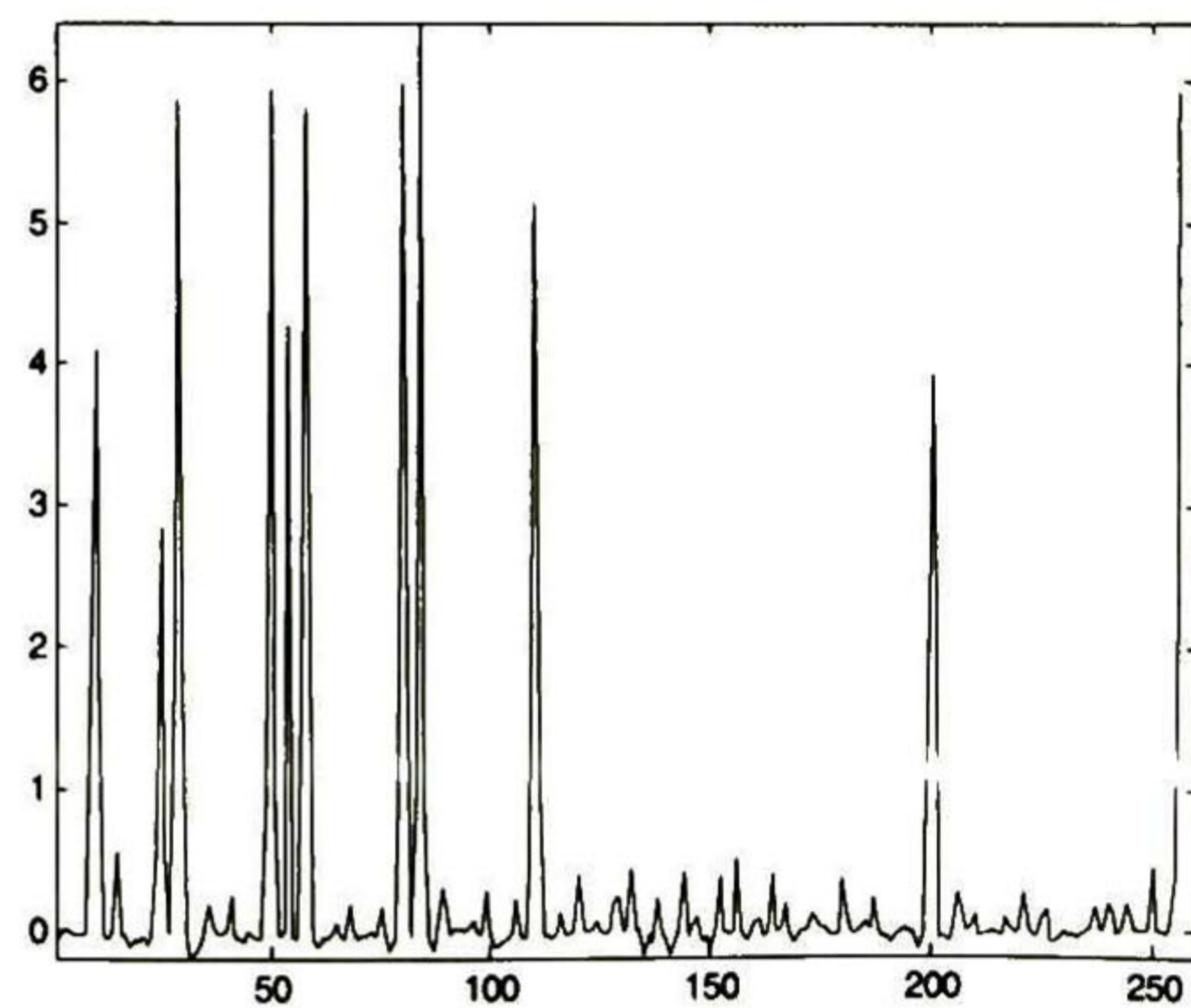
(c) Estimación de 5.9704 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 6.4639 dB a 2 iteraciones con el método WCLS

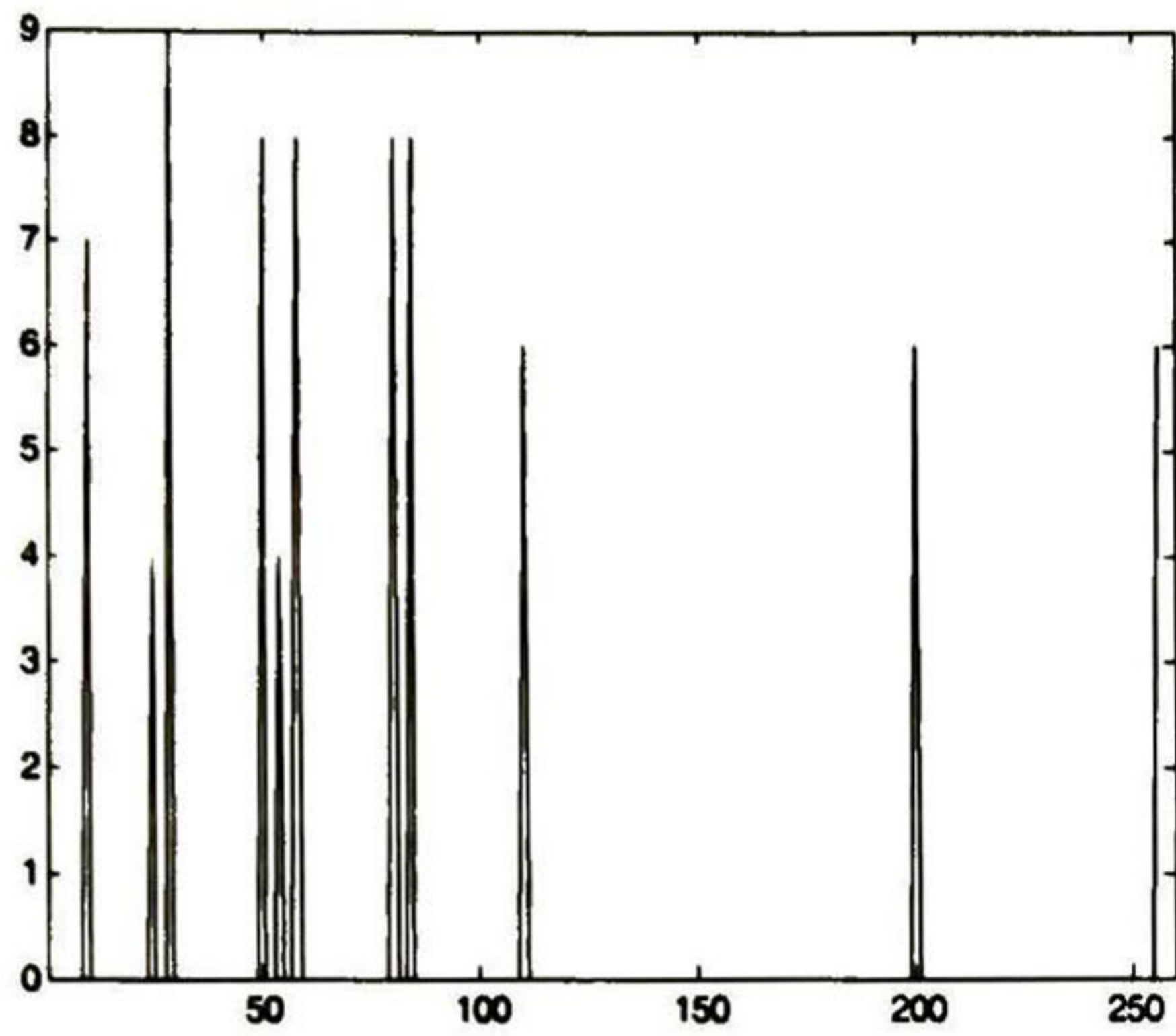


(e) Estimación de 9.5935 dB a 40 iteraciones con el método CLS

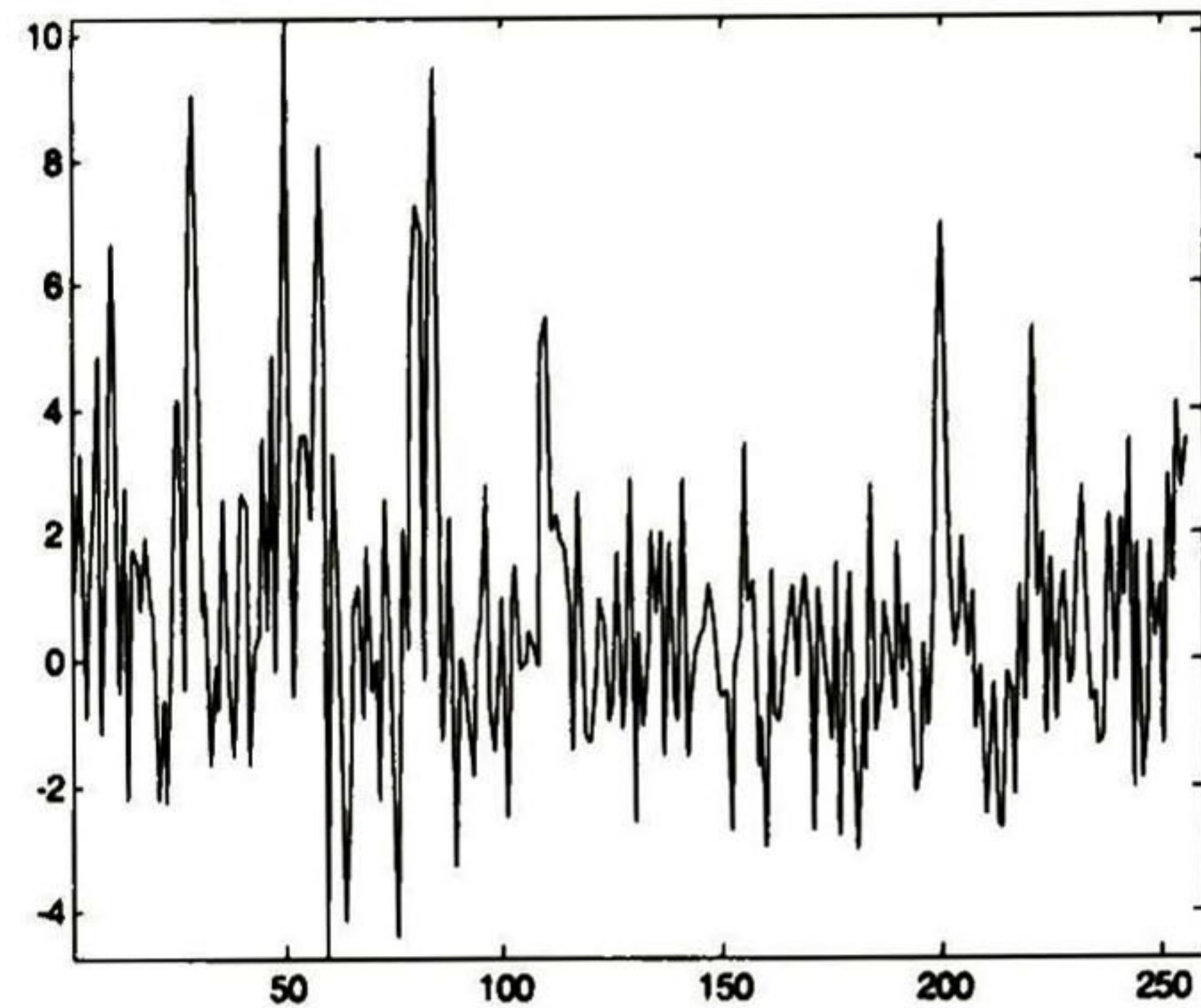


(f) Estimación de 9.9705 dB a 40 iteraciones con el método WCLS

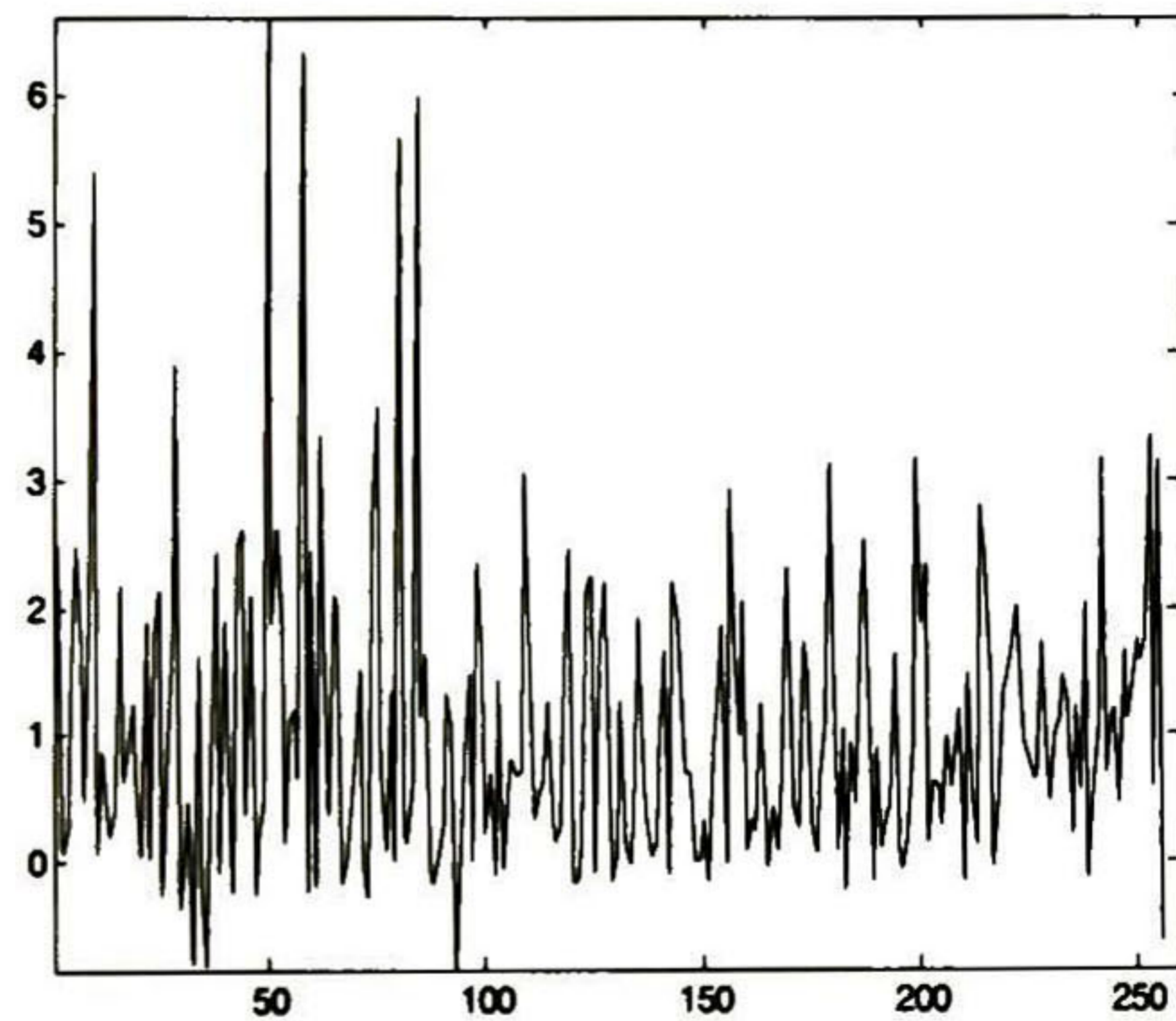
Tabla 4.38. Respuestas con SNR = 20 dB, K = 5 y  $SSF_1$ .



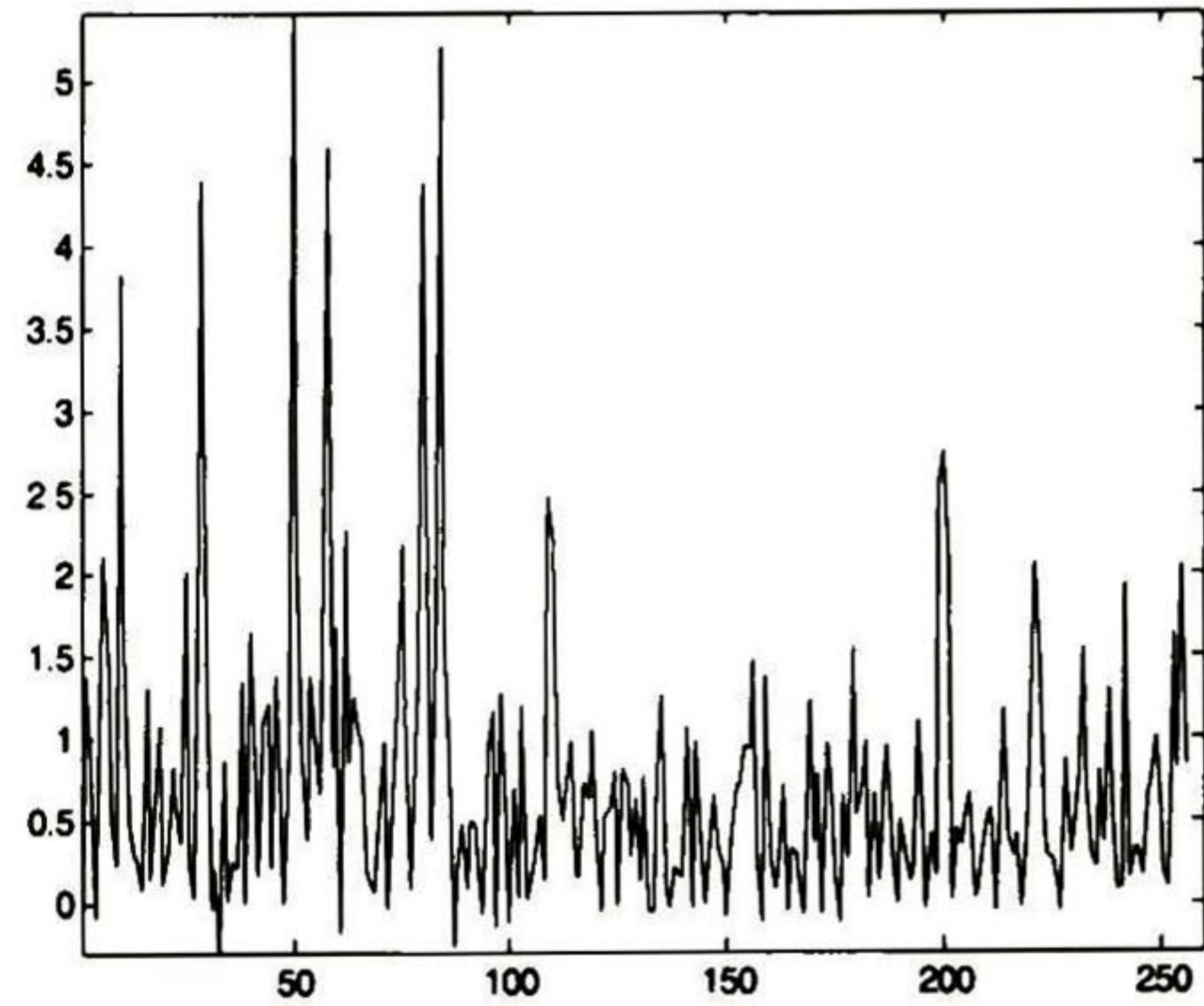
(a) Señal original  $v$



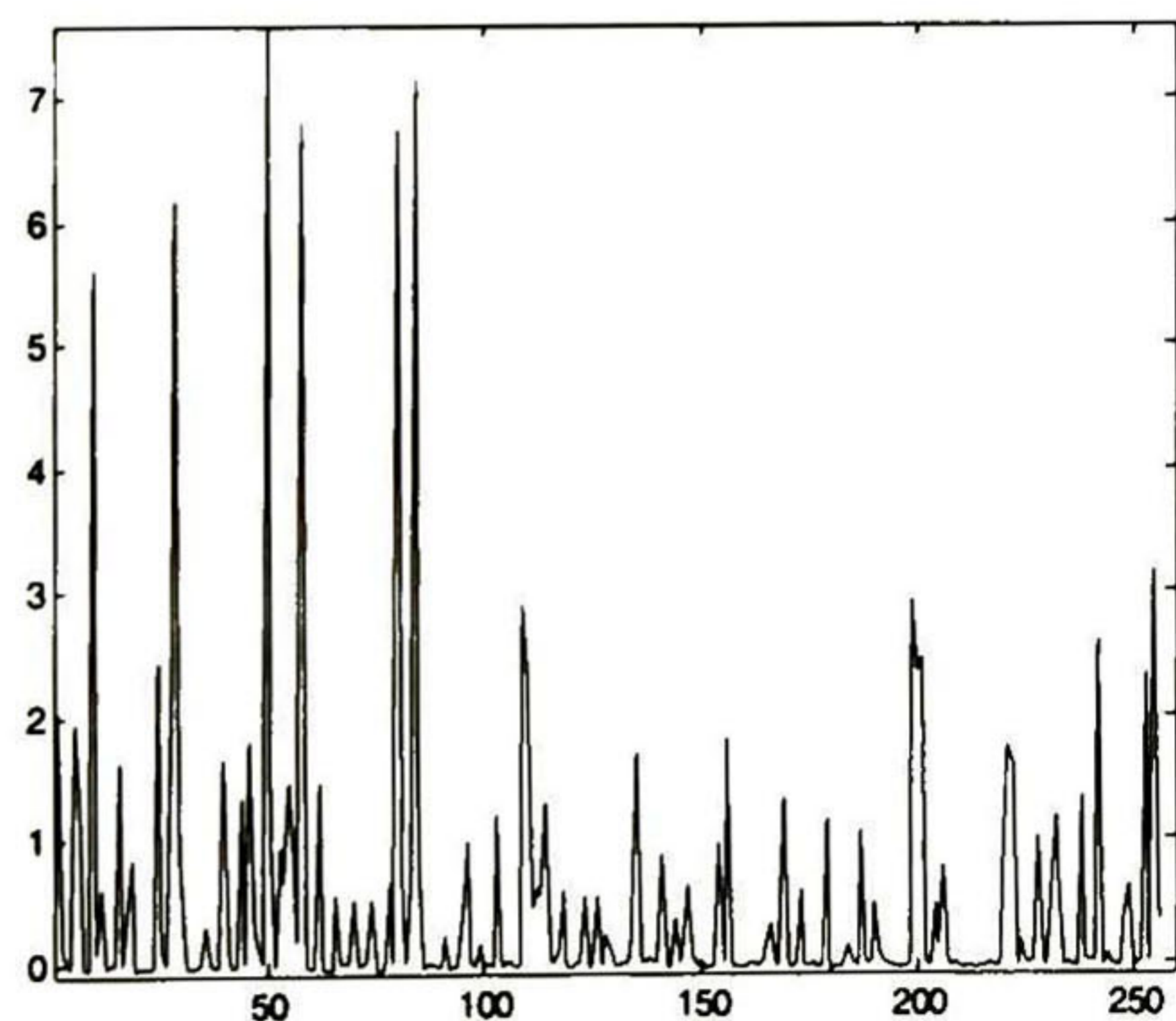
(b) Señal con ruido



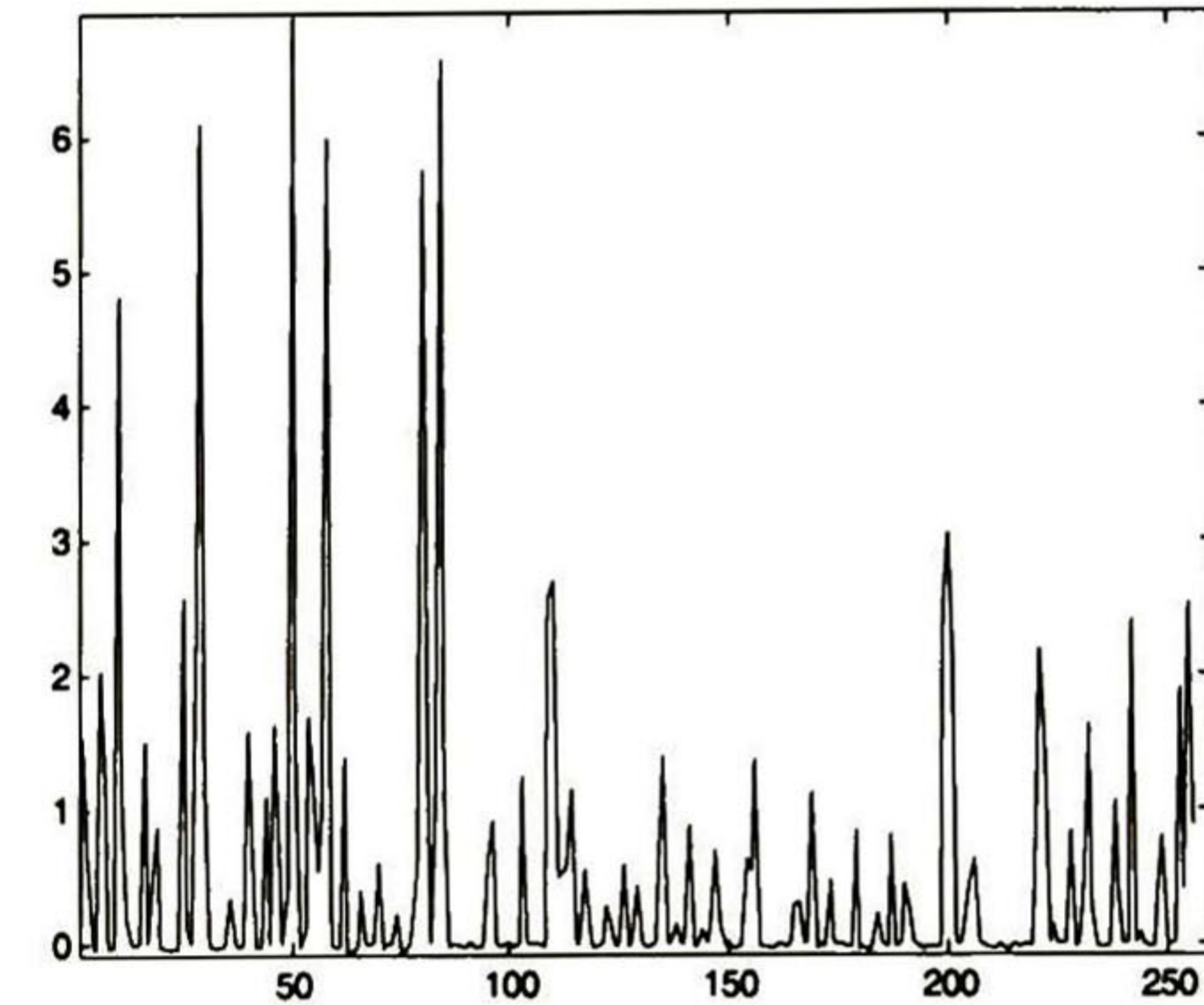
(c) Estimación de 3.1561 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 5.8329 dB a 2 iteraciones con el método WCLS

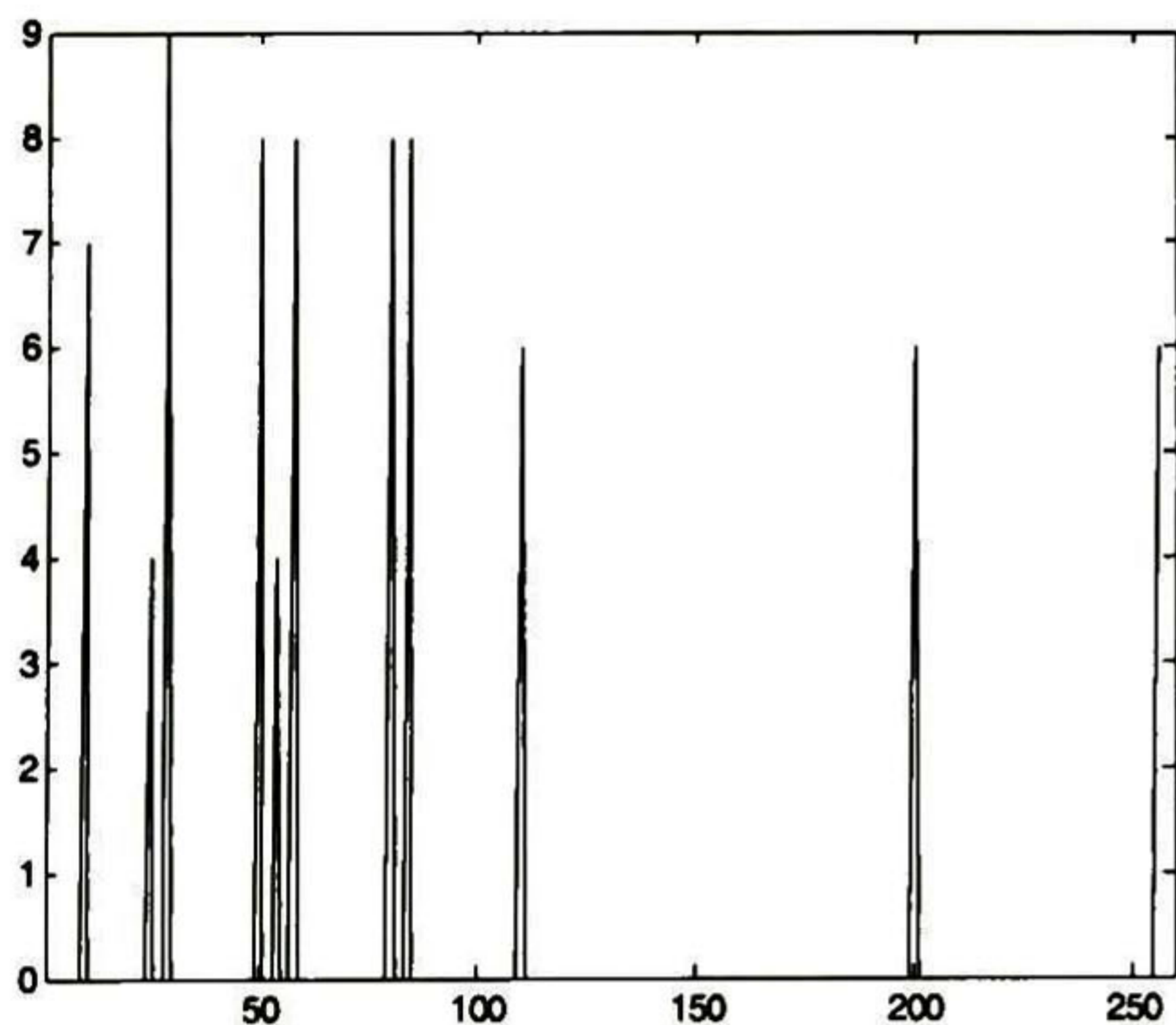


(e) Estimación de 7.6463 dB a 40 iteraciones con el método CLS

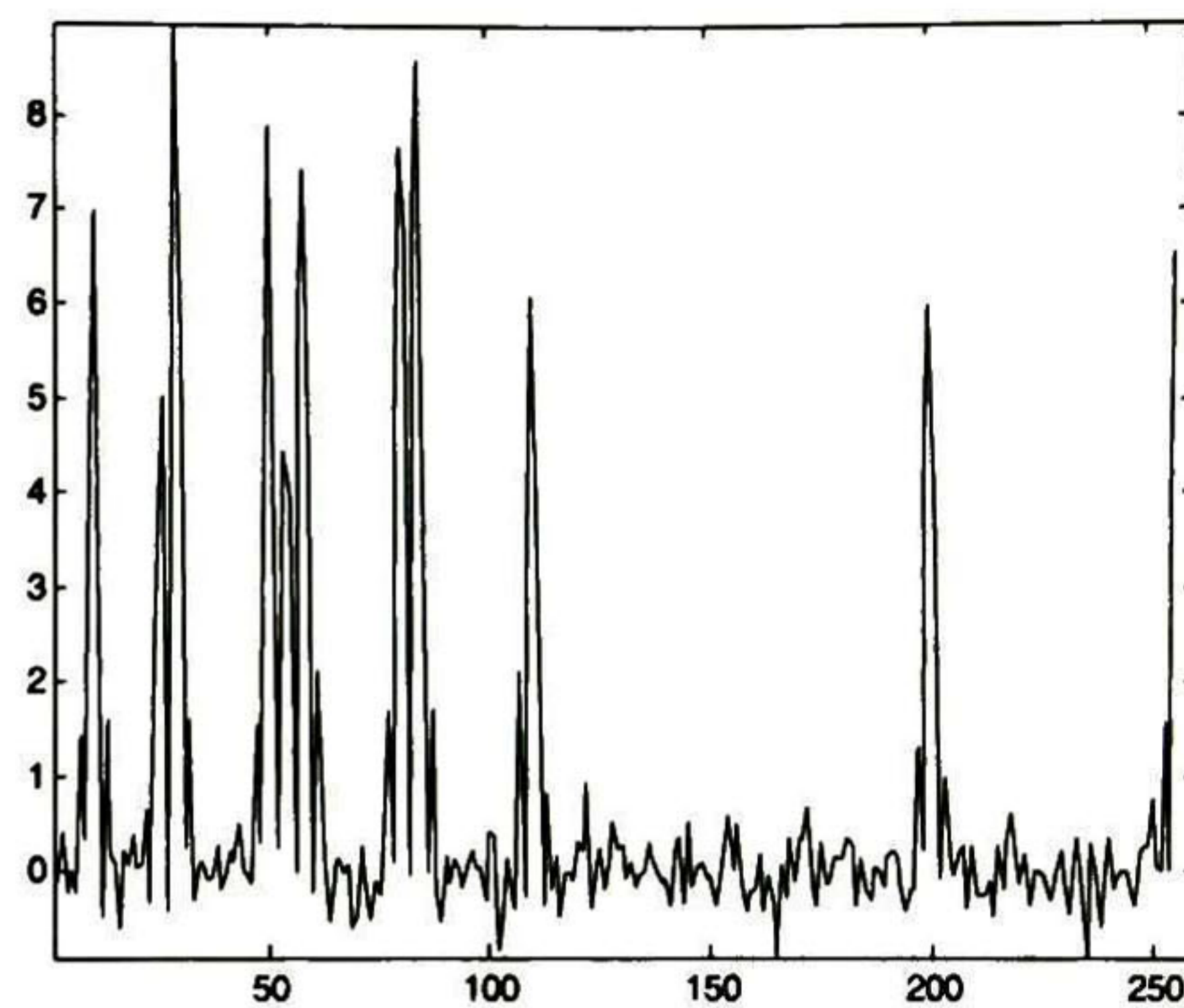


(f) Estimación de 8.1458 dB a 40 iteraciones con el método CLS

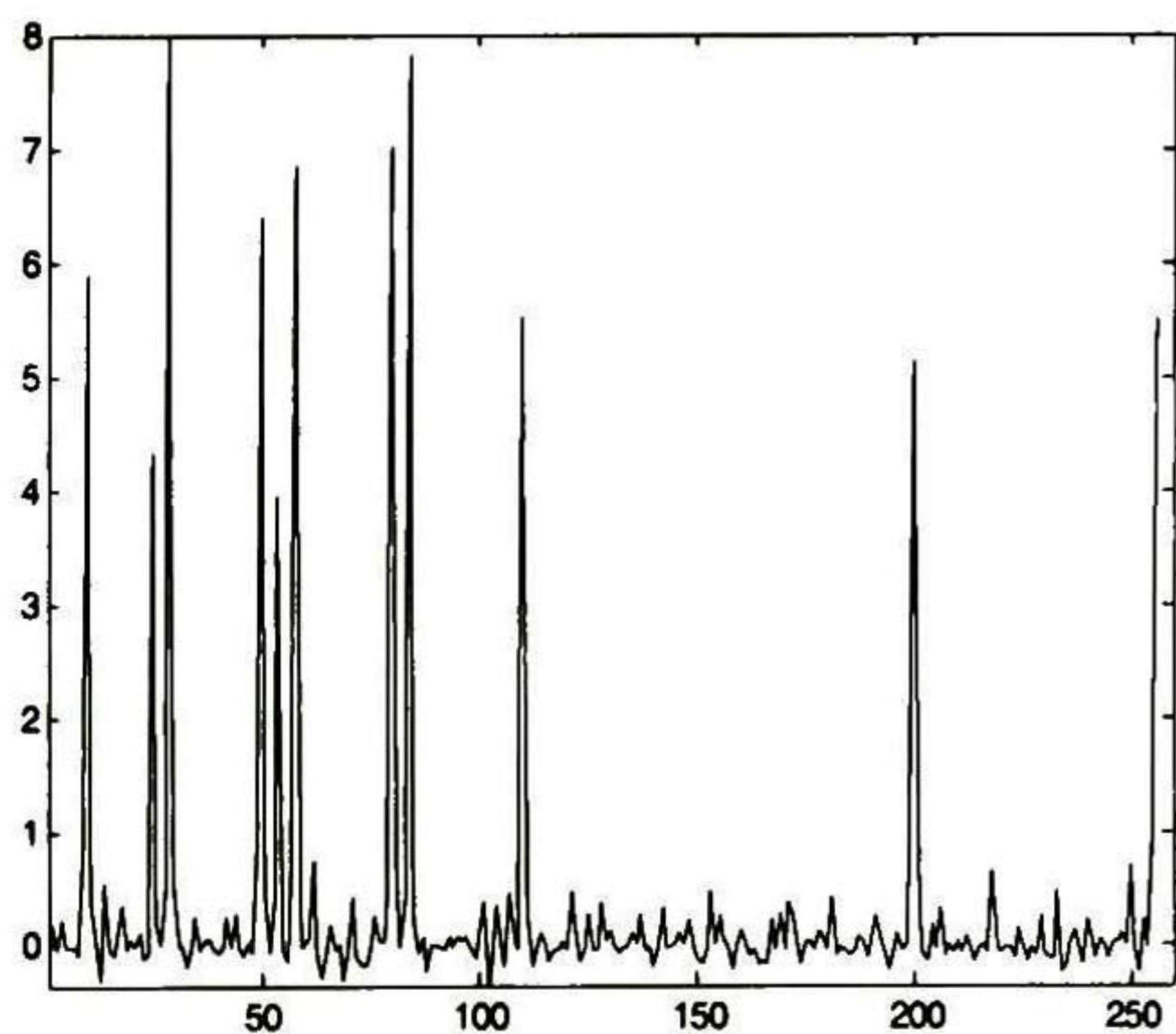
Tabla 4.39. Respuestas con SNR = 6 dB, K = 5 y SSF<sub>2</sub>.



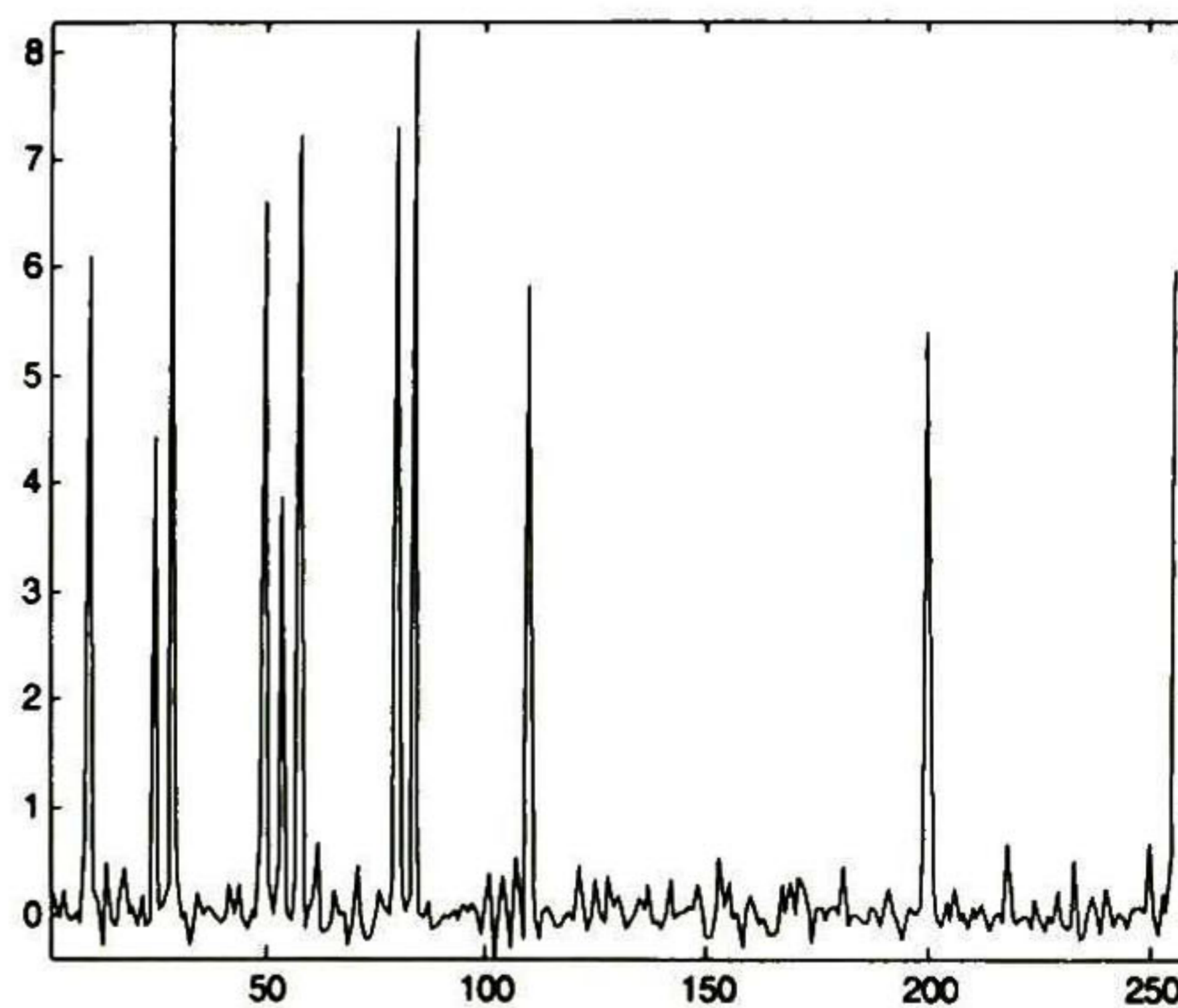
(a) Señal original v



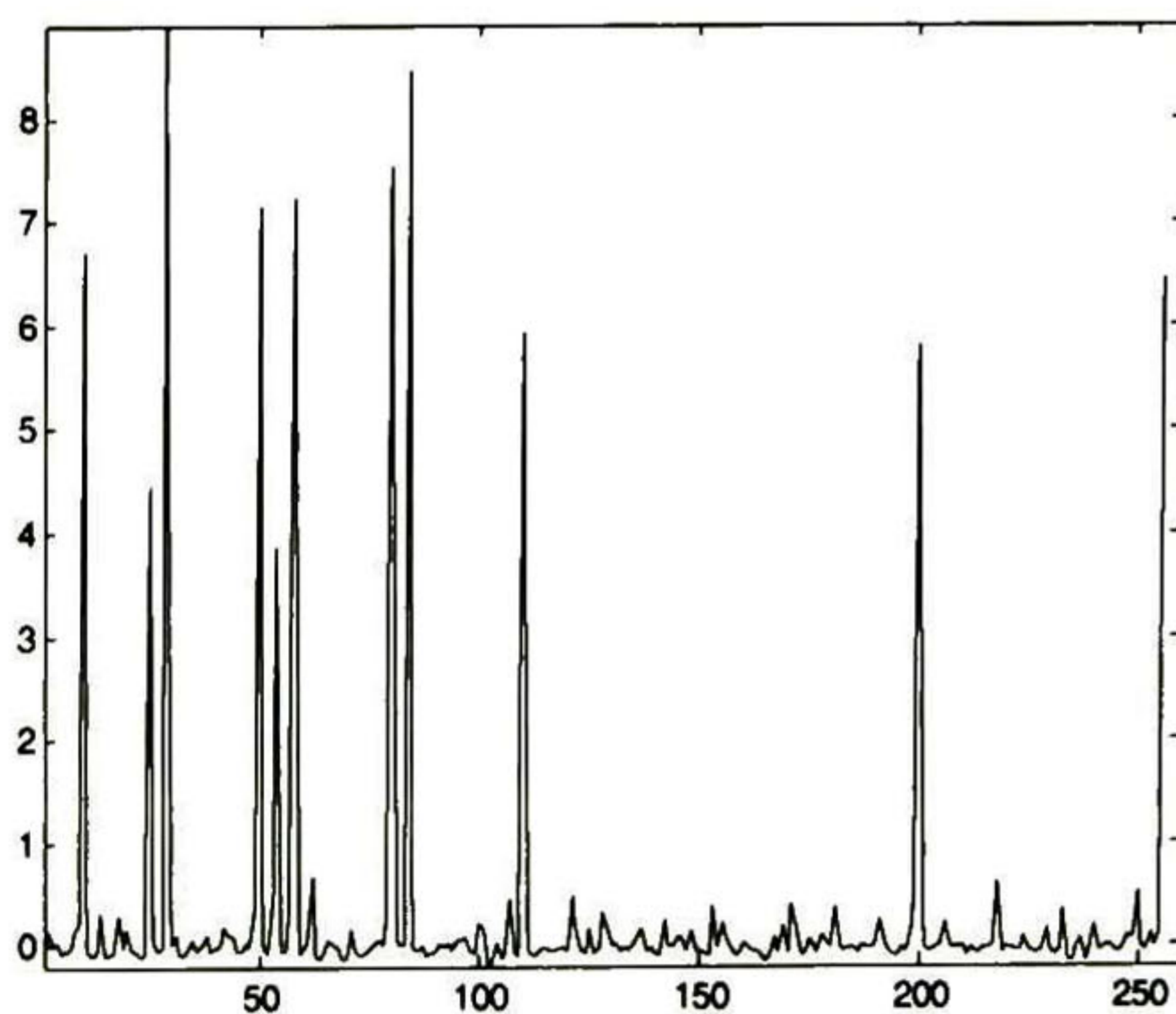
(b) Señal con ruido



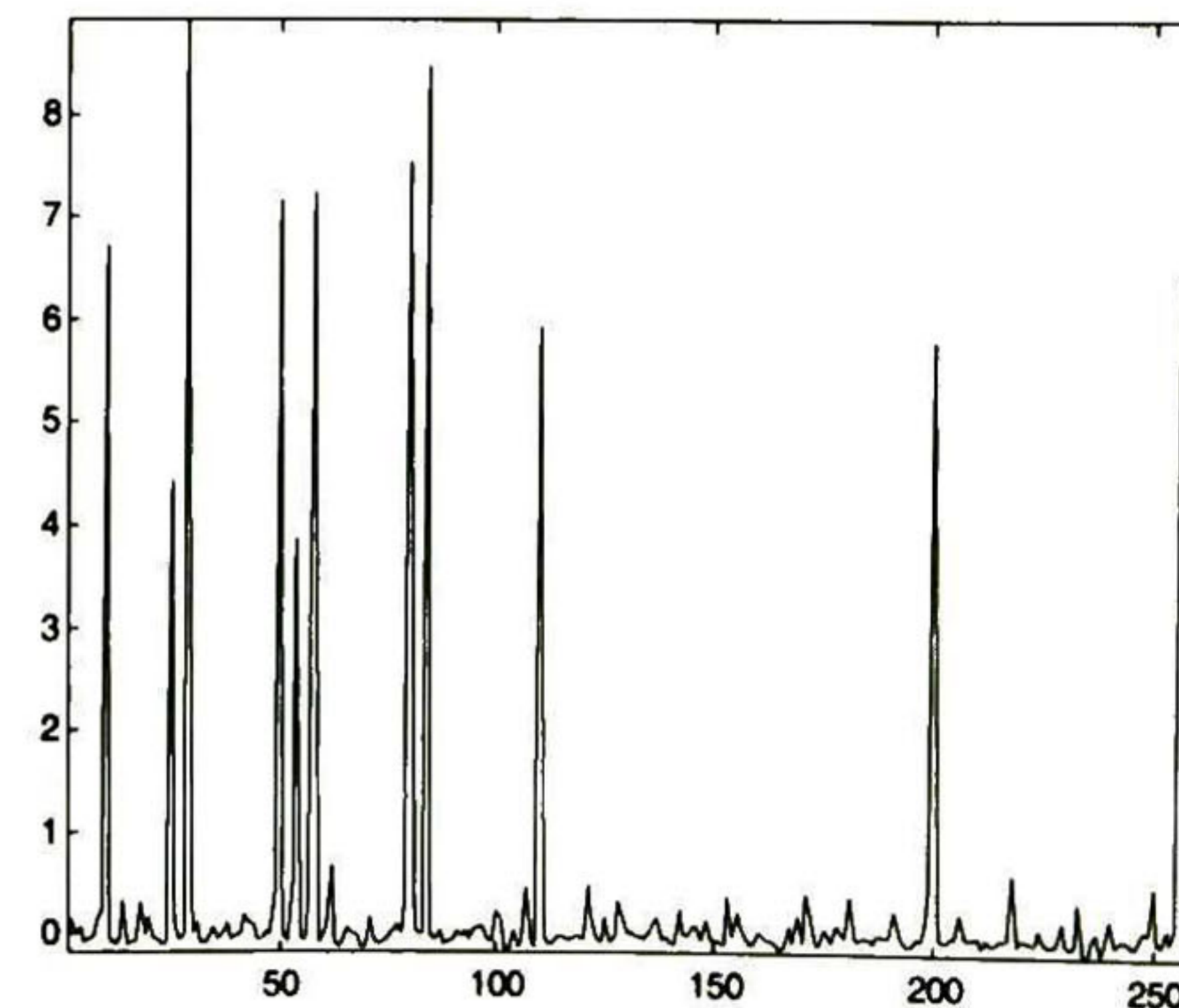
(c) Estimación de 14.3726 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 15.7200 dB a 2 iteraciones con el método CLS



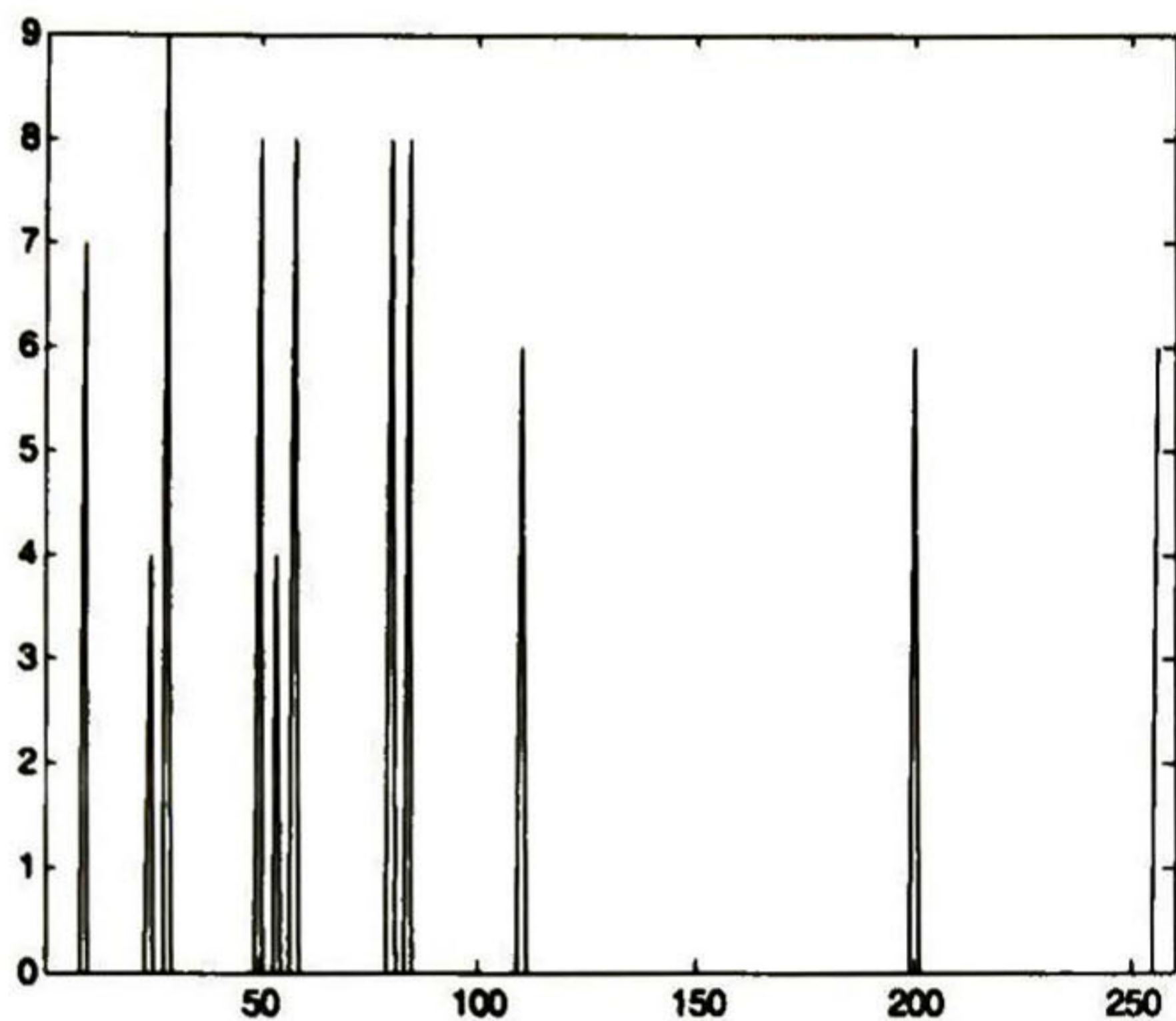
(e) Estimación de 18.9675 dB a 40 iteraciones con el método CLS



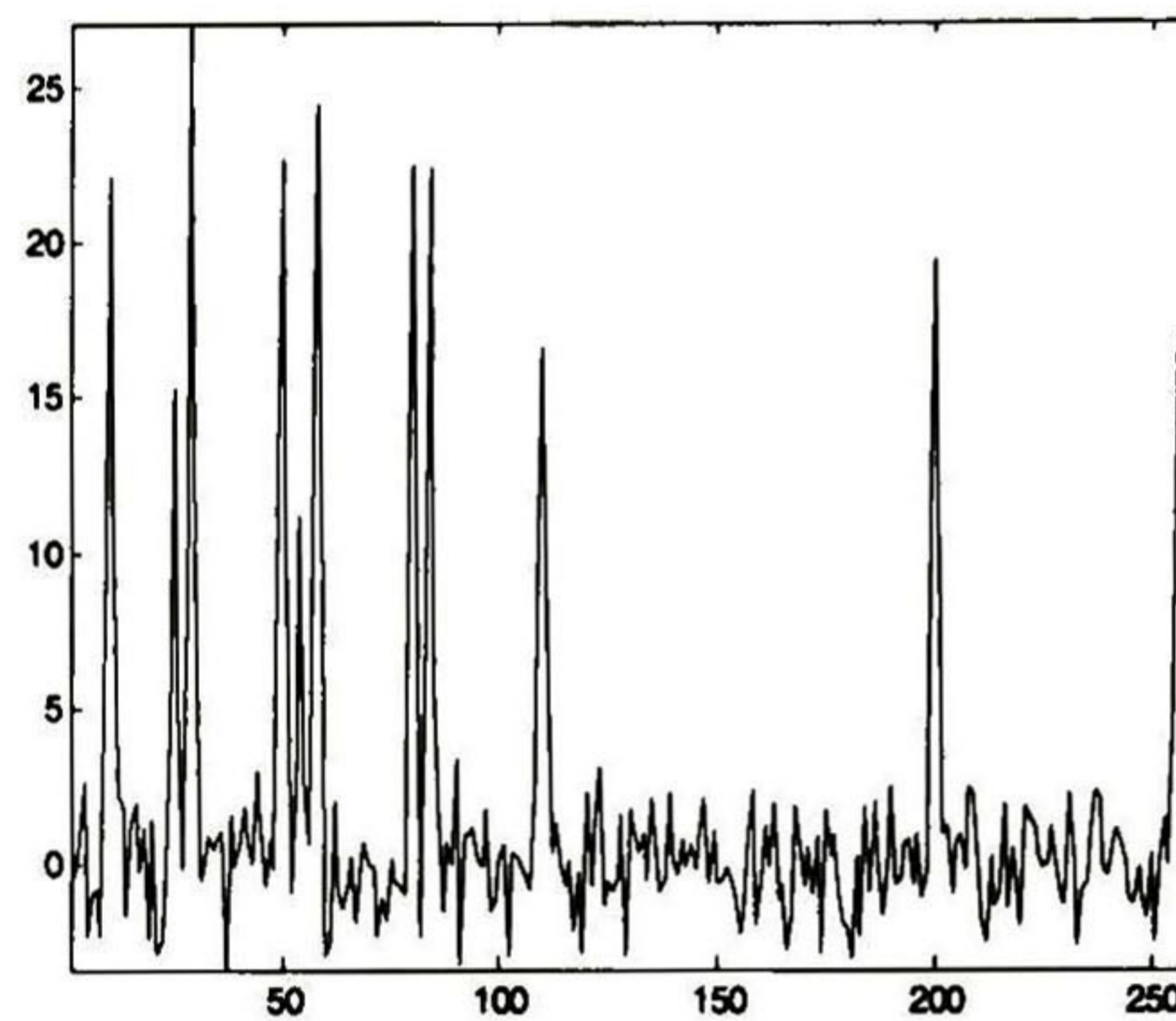
(f) Estimación de 18.9772 dB a 40 iteraciones con el método CLS



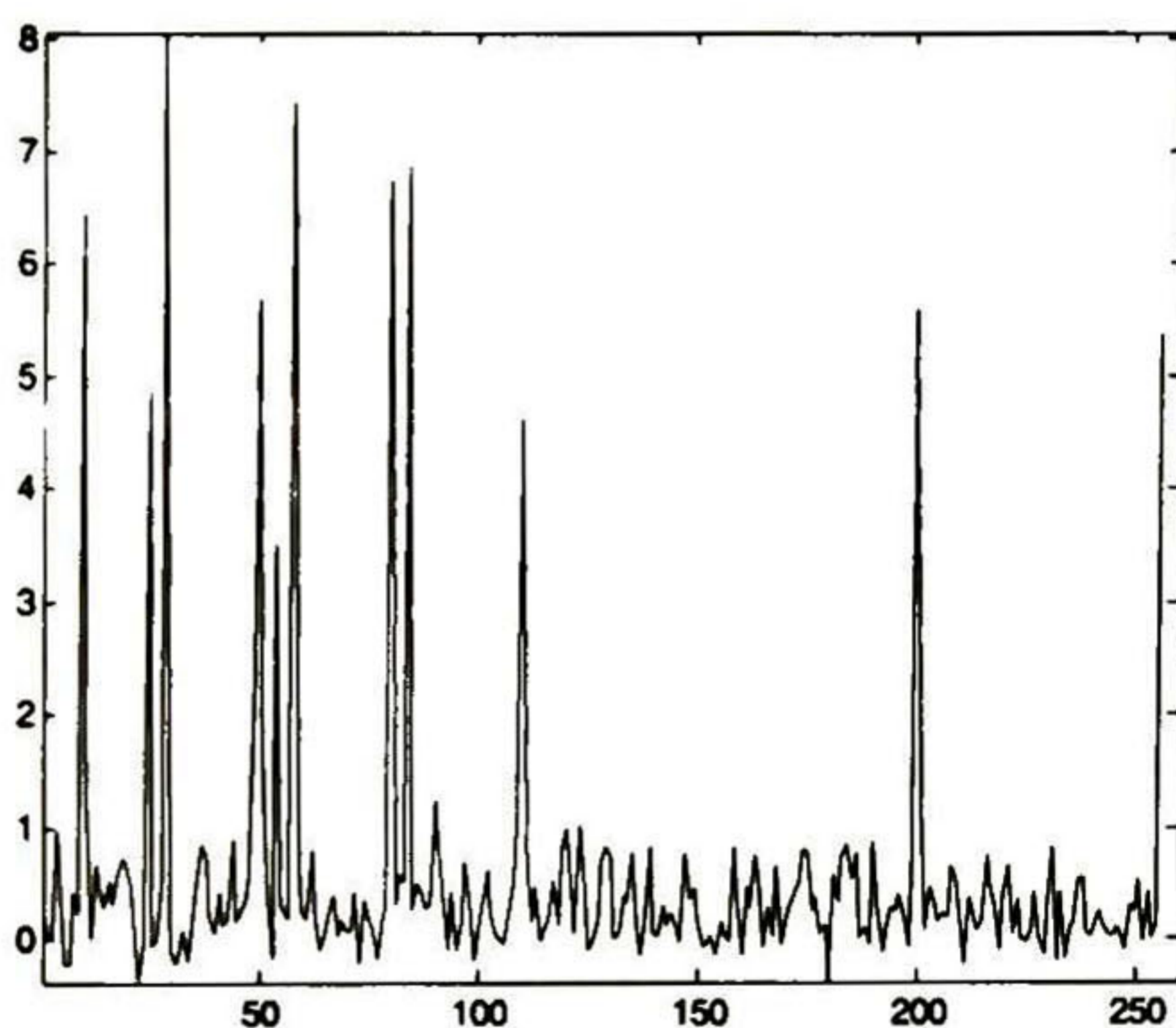
Tabla 4.40. Respuestas con SNR = 20 dB, K = 5 y  $SSF_2$ .



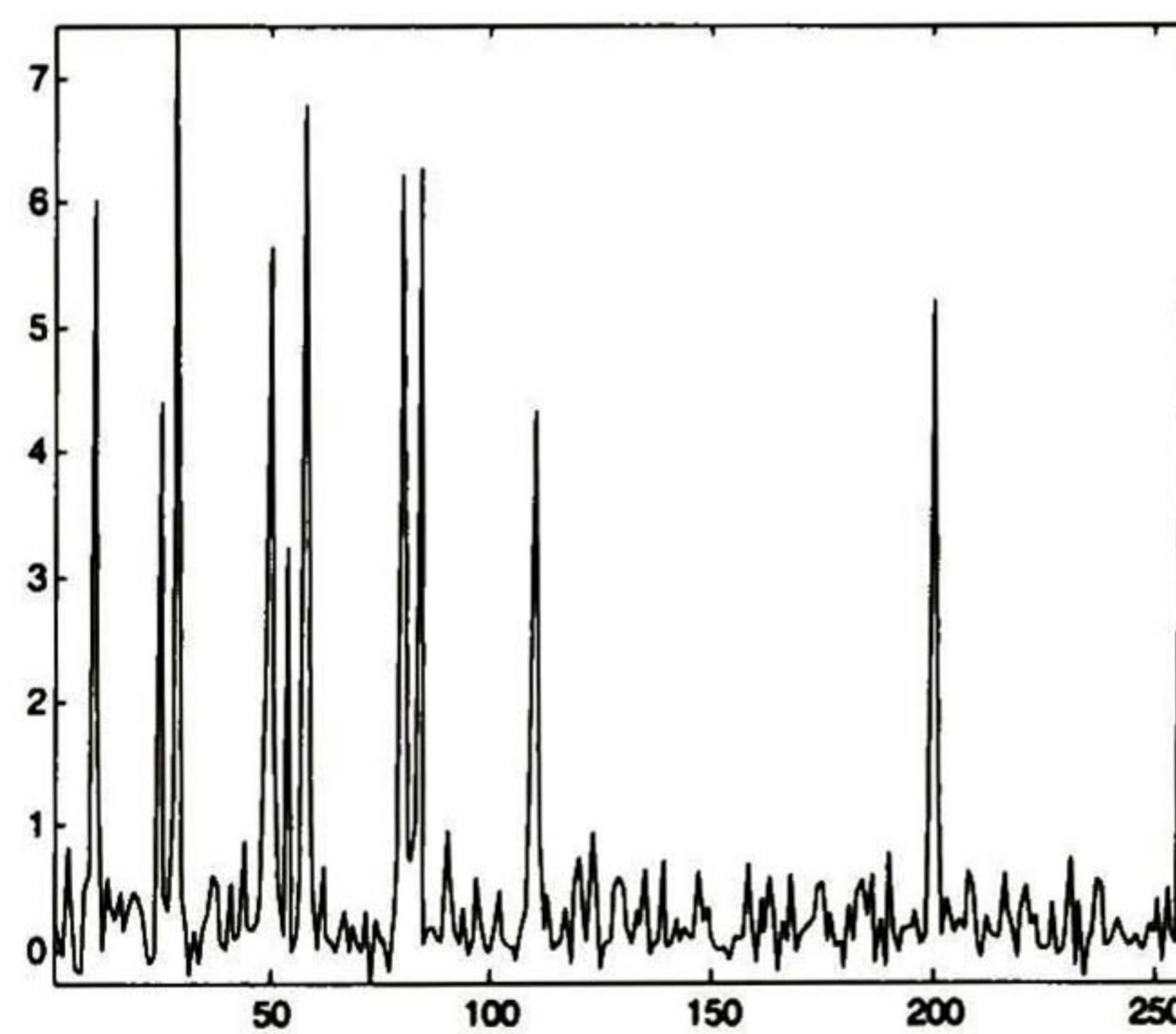
(a) Señal original  $v$



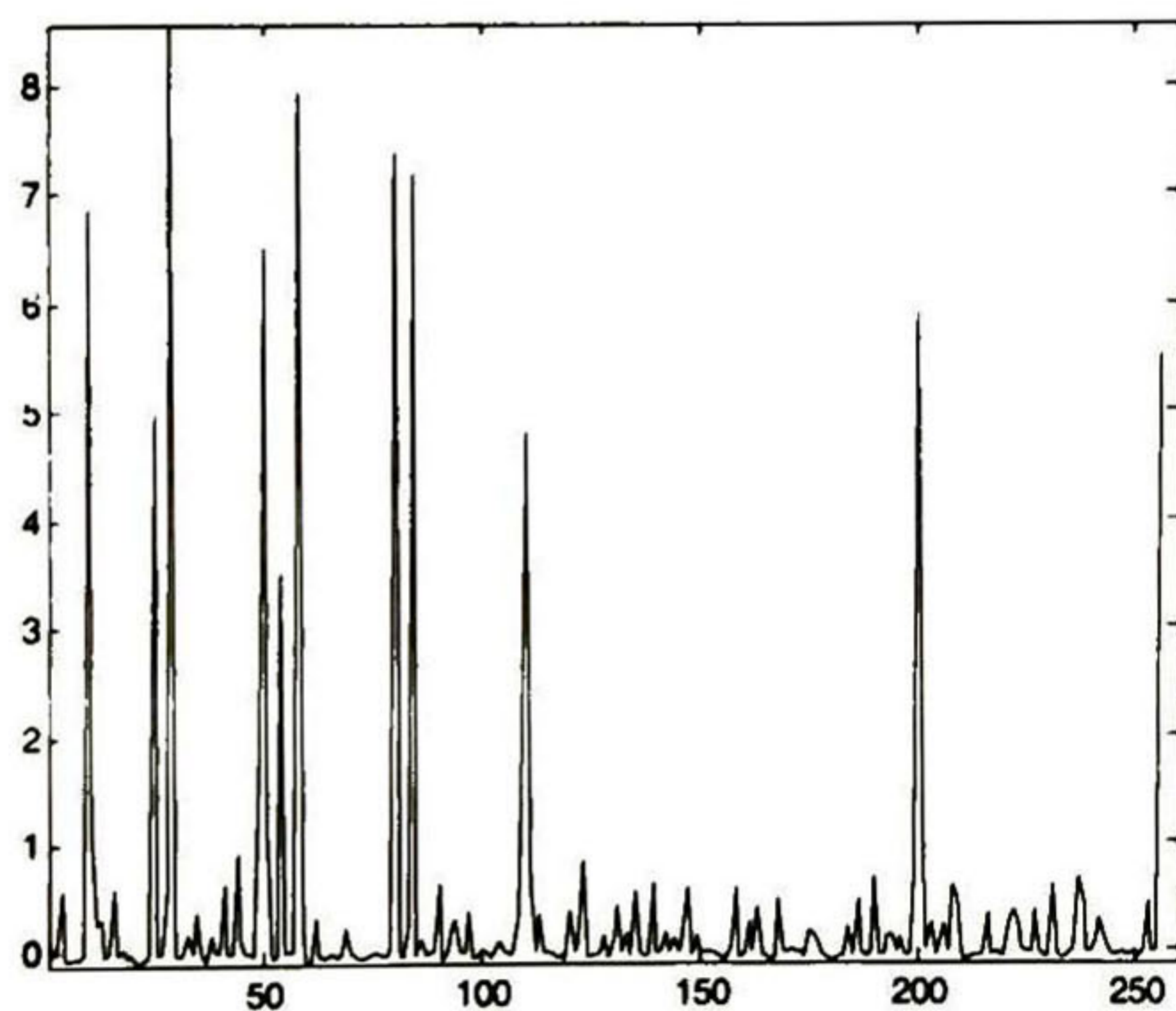
(b) Señal con ruido



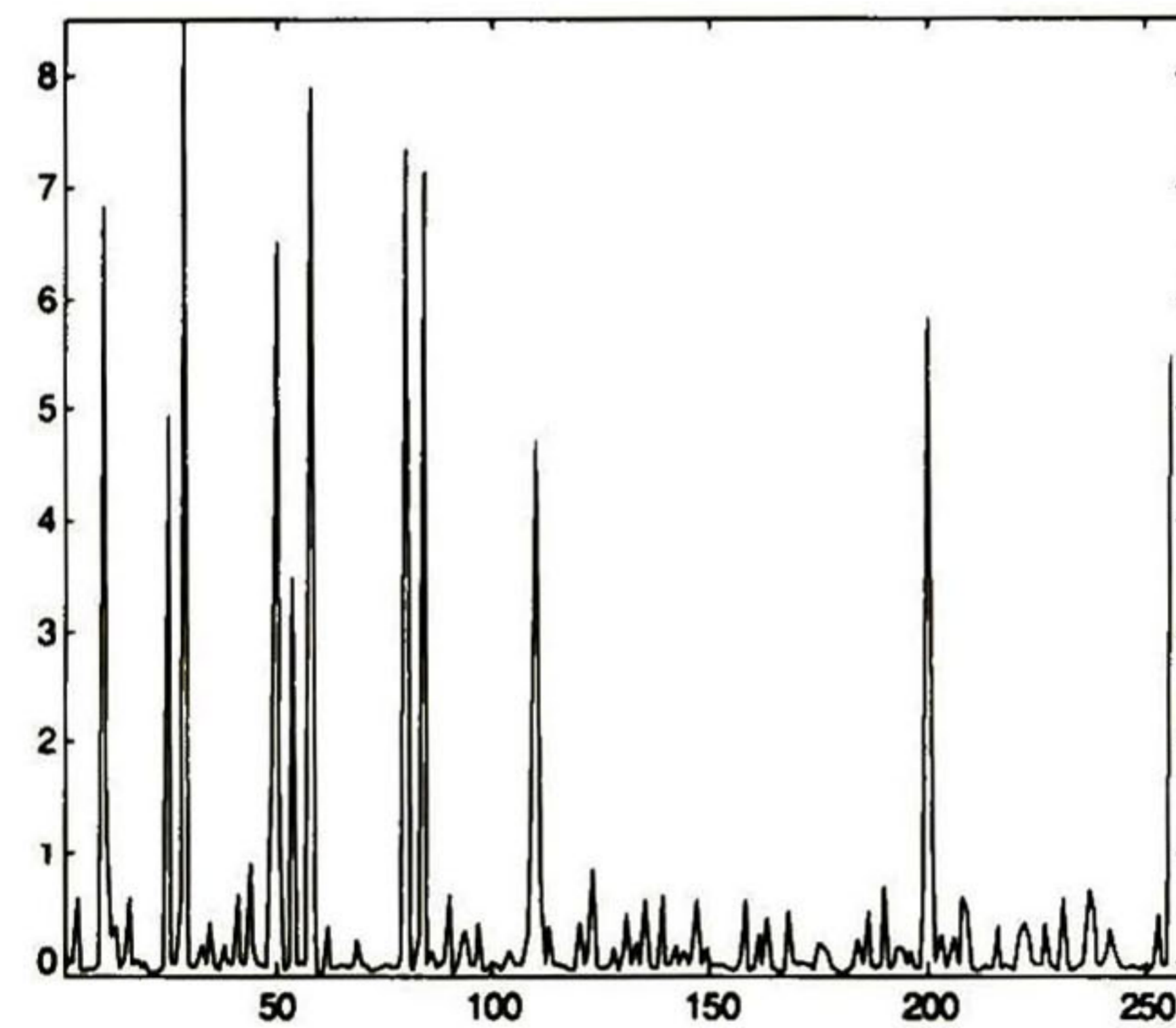
(c) Estimación de 17.7445 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 17.6852 dB a 2 iteraciones con el método WCLS

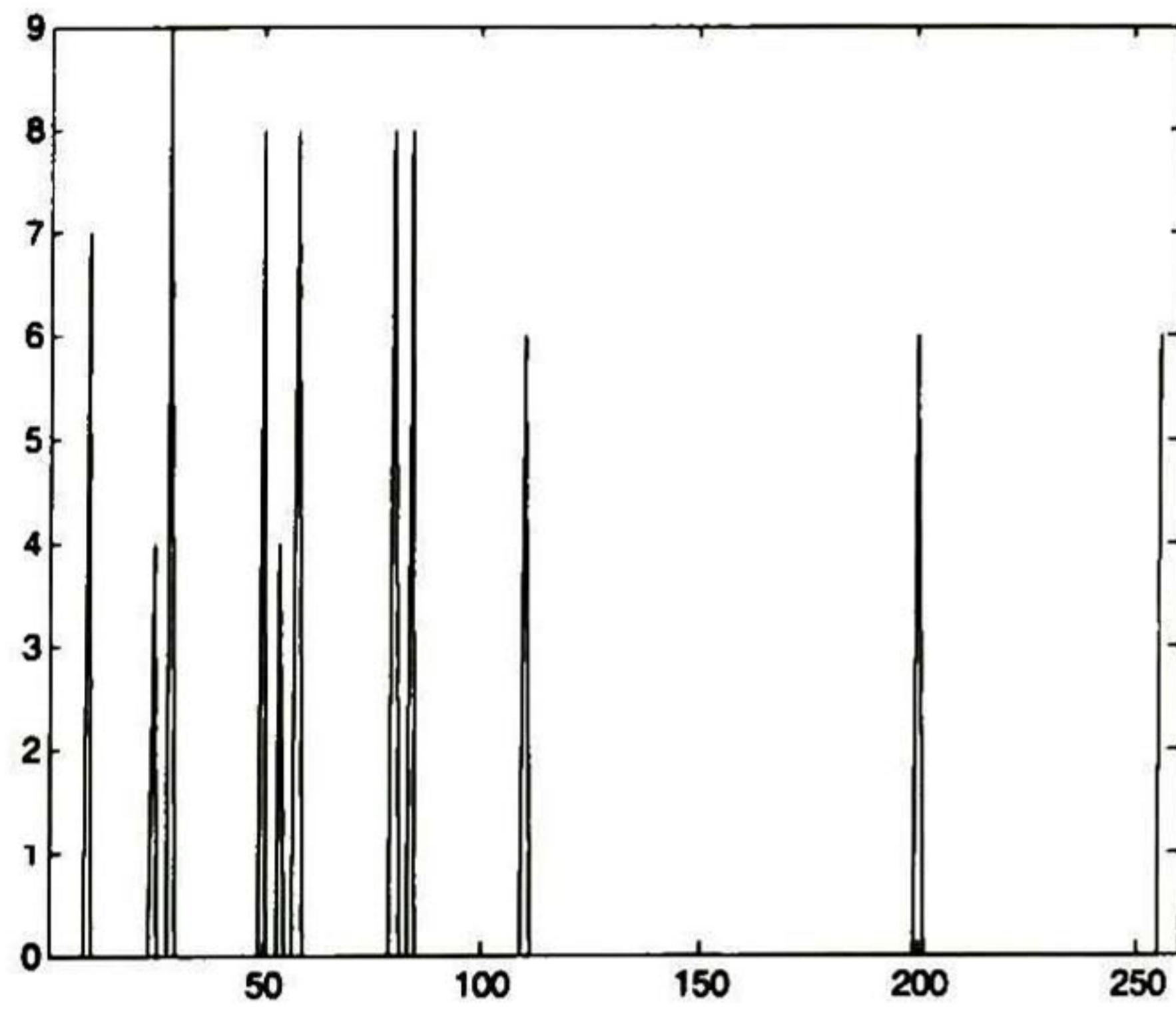


(e) Estimación de 21.7290 dB a 40 iteraciones con el método CLS

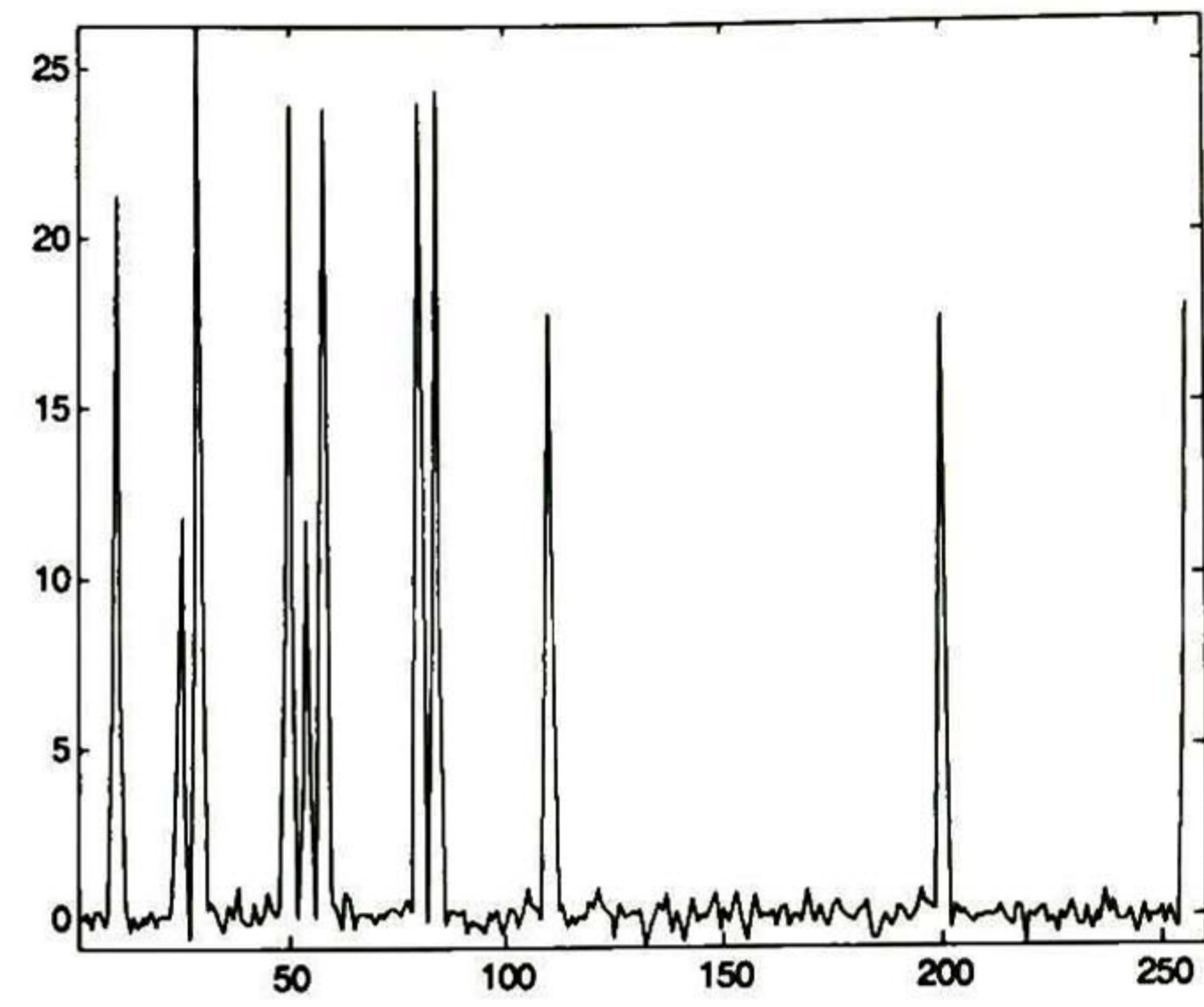


(f) Estimación de 21.7458 dB a 40 iteraciones con el método WCLS

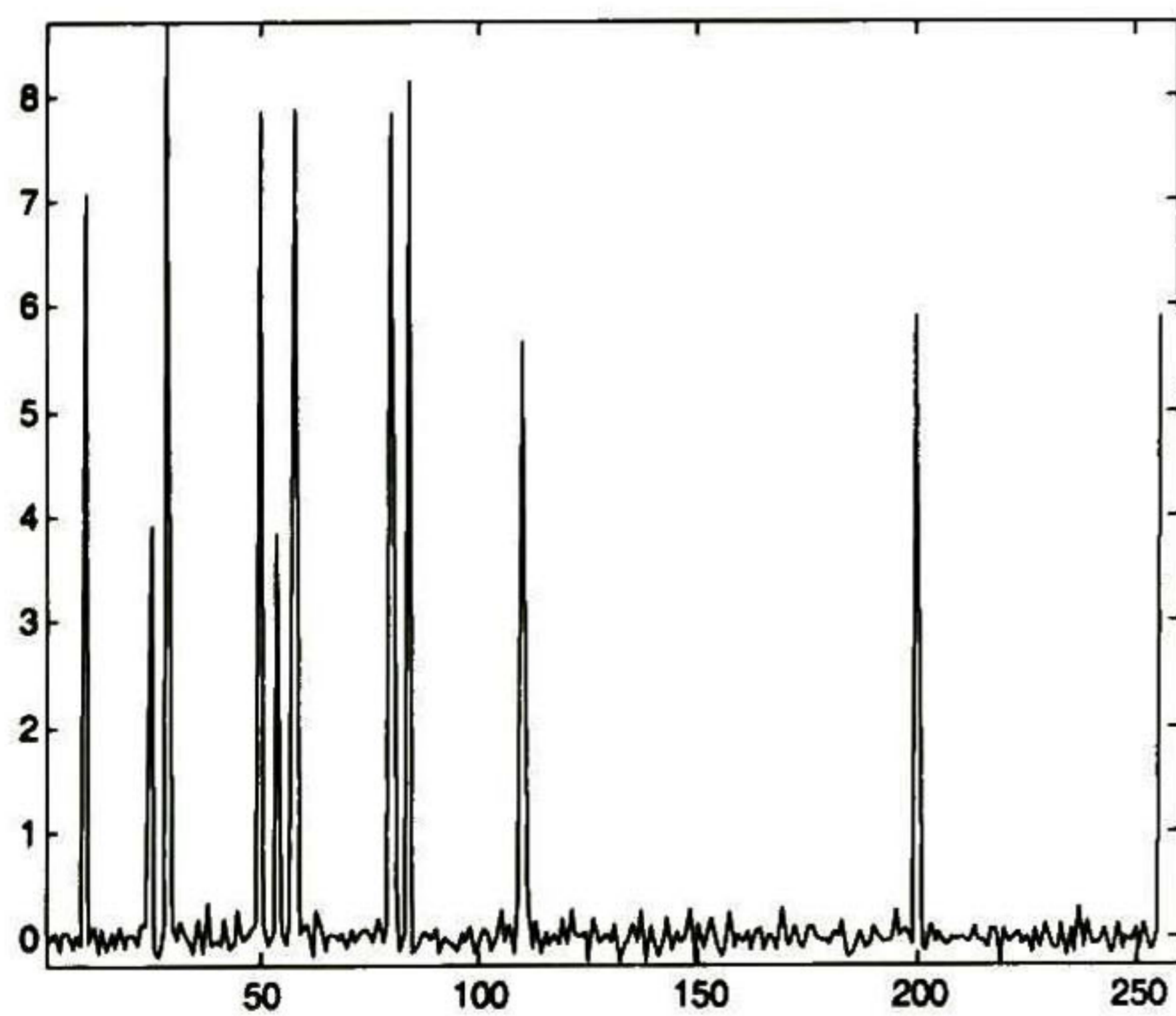
Tabla 4.41. Respuestas con SNR = 6 dB, K = 5 y  $SSF_3$ .



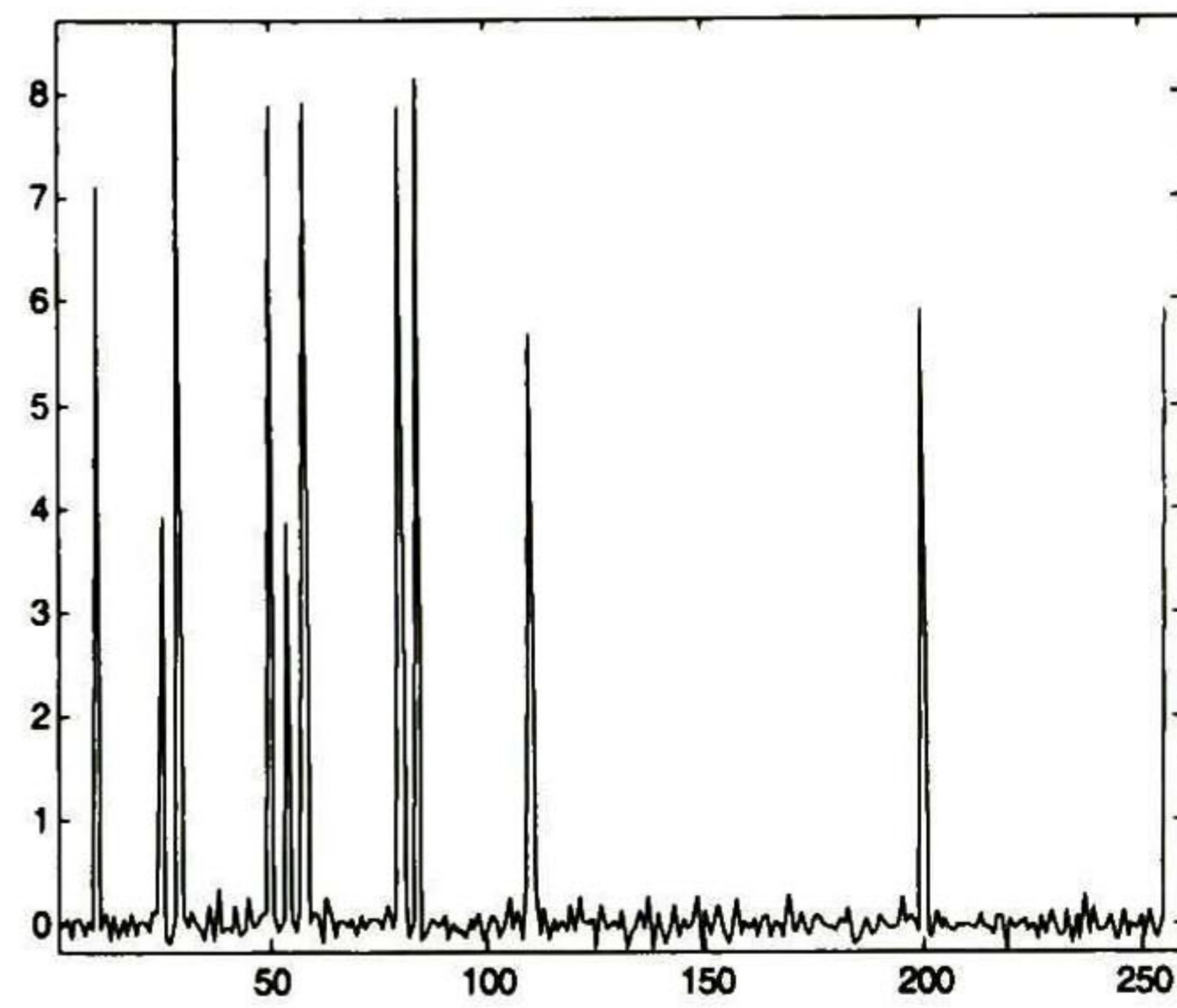
(a) Señal original  $v$



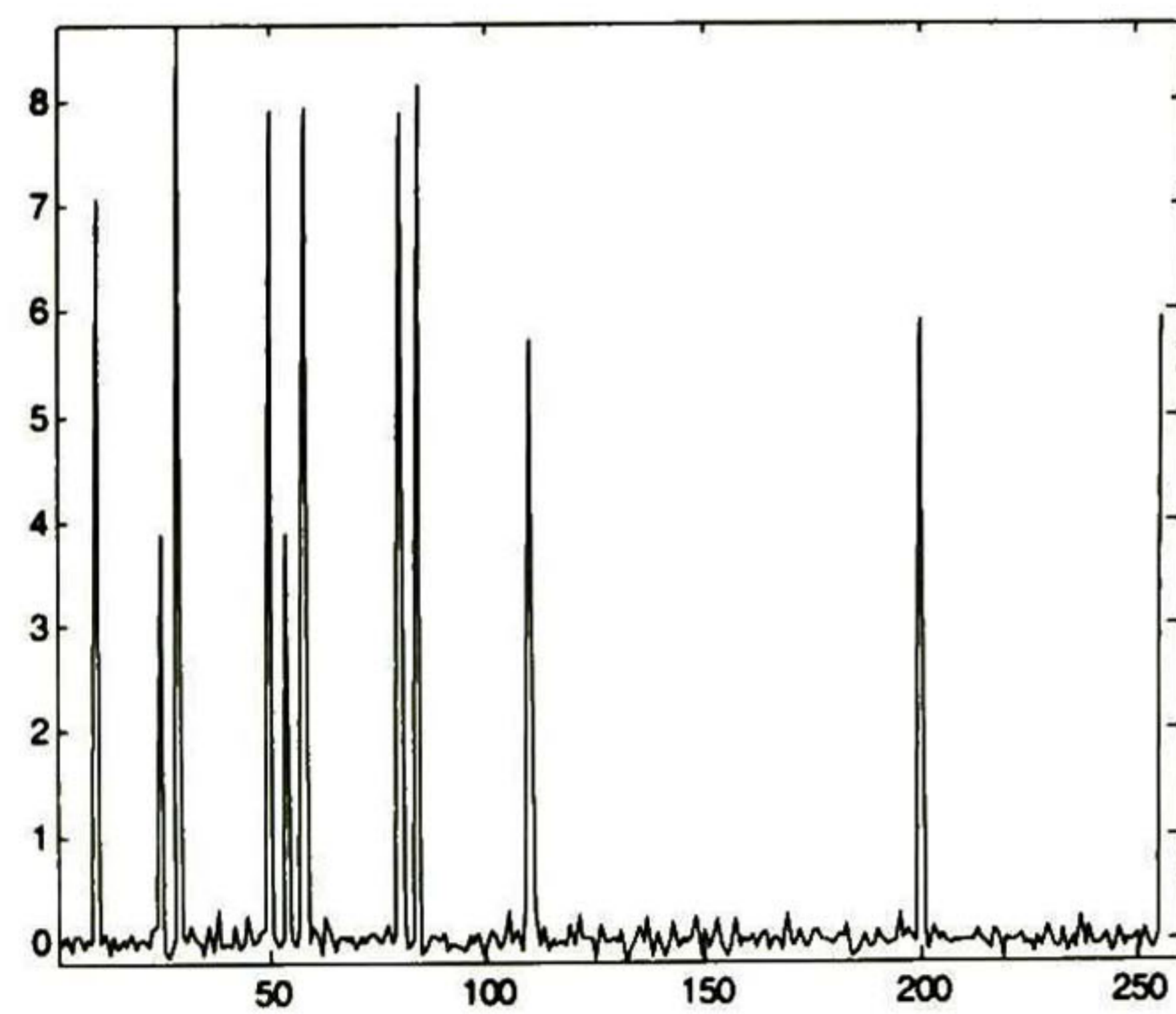
(b) Señal con ruido



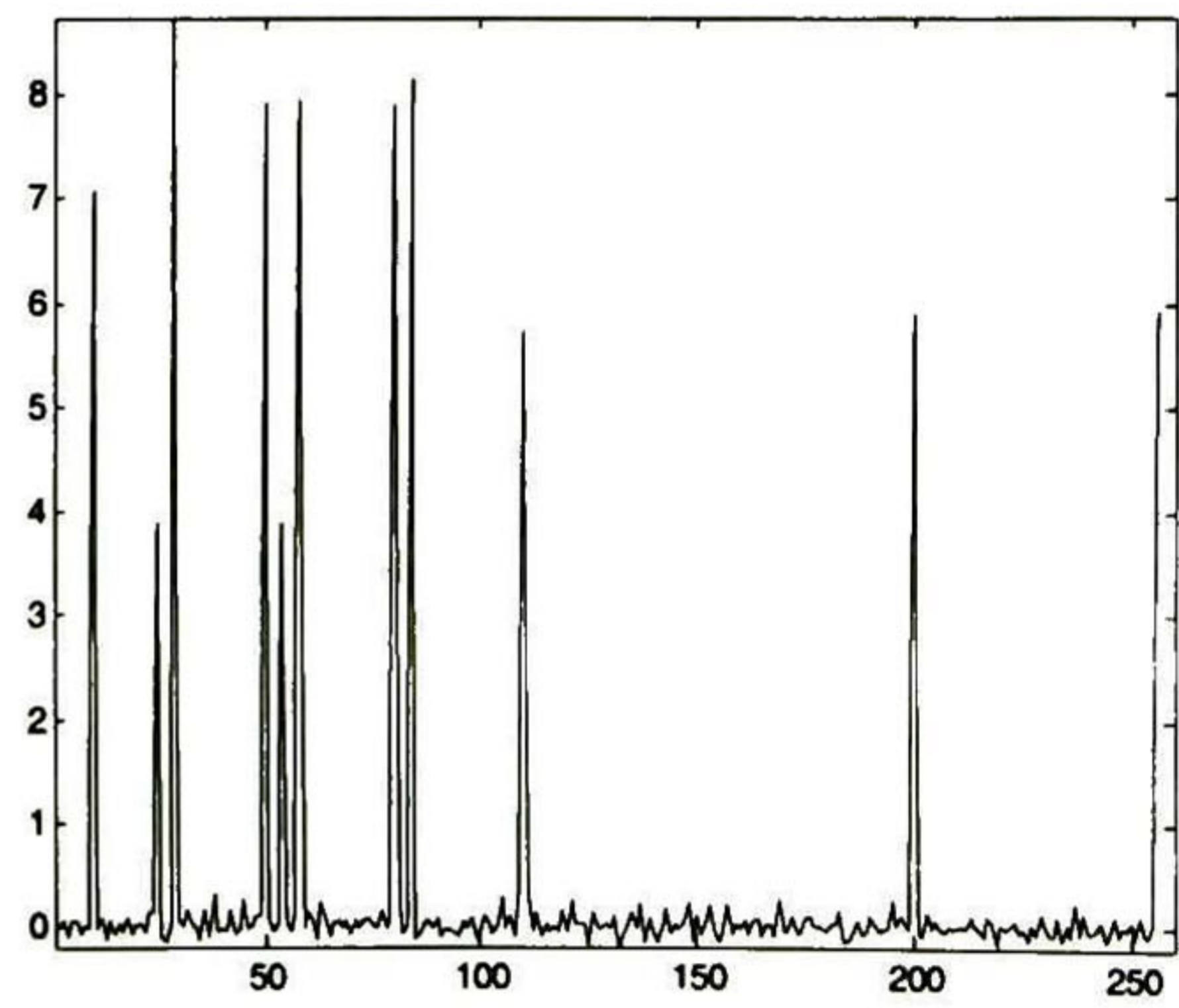
(c) Estimación de 29.1756 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 29.3467 dB a 2 iteraciones con el método WCLS

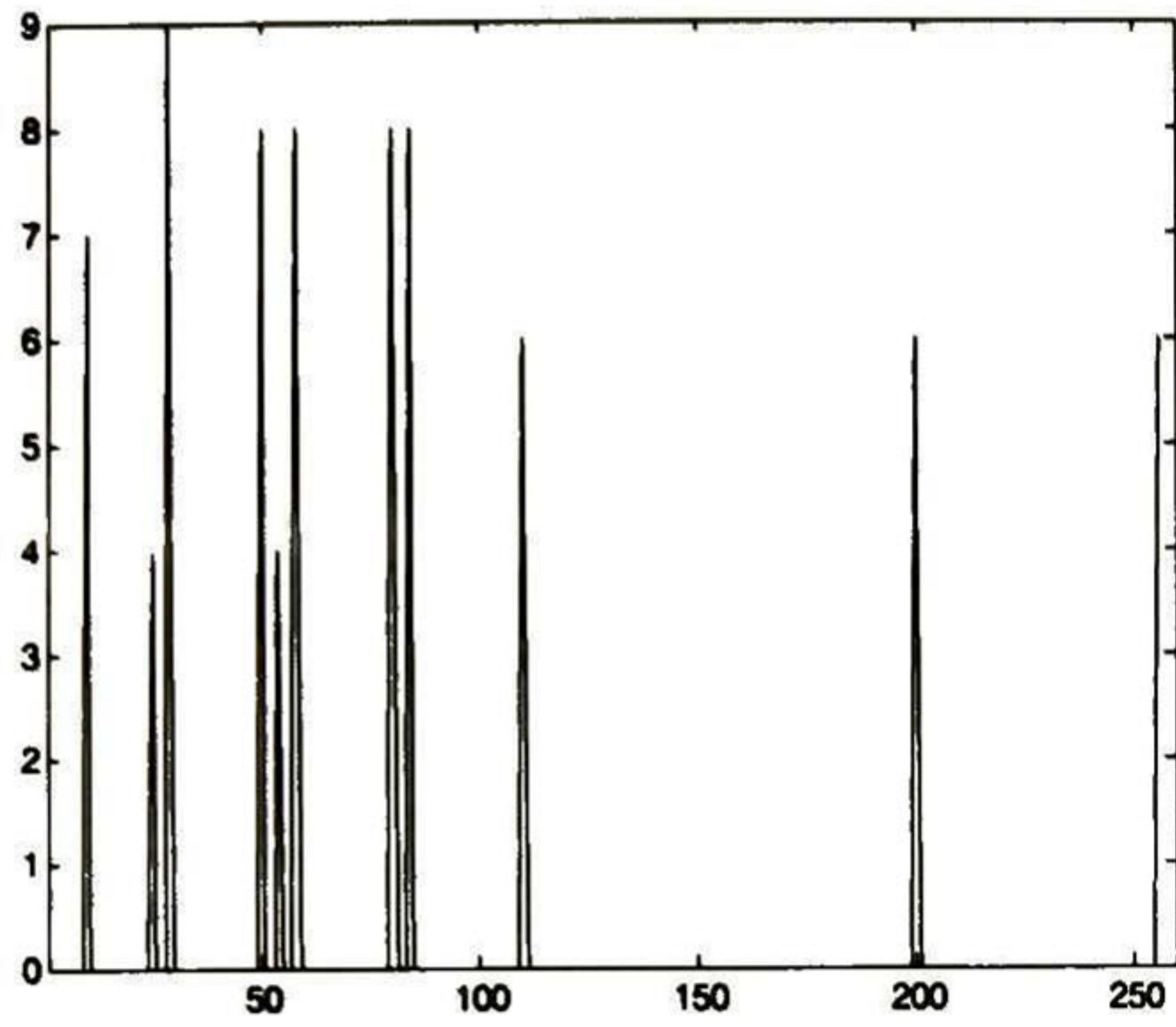


(e) Estimación de 30.6408 dB a 40 iteraciones con el método CLS

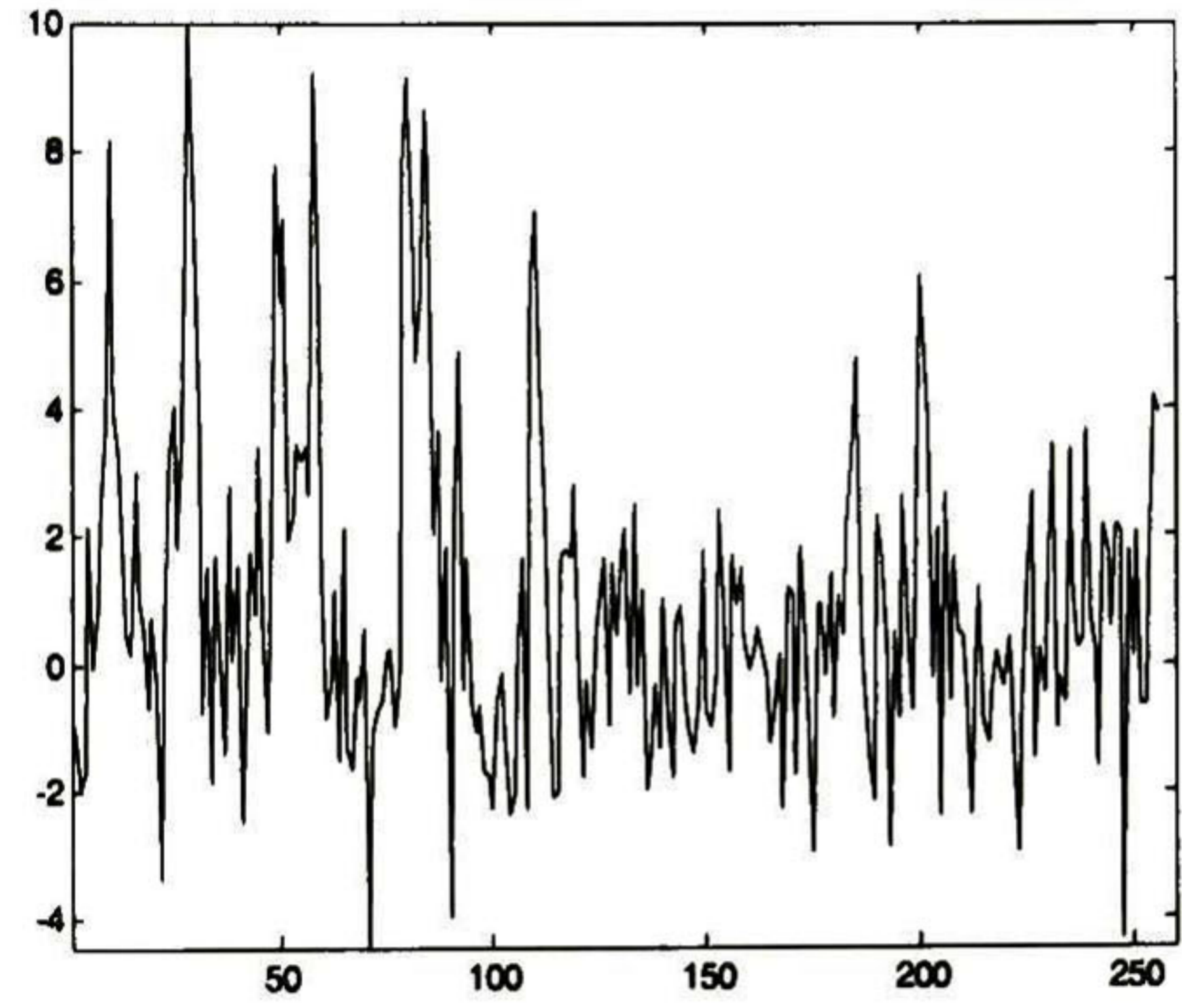


(f) Estimación de 30.6808 dB a 40 iteraciones con el método WCLS

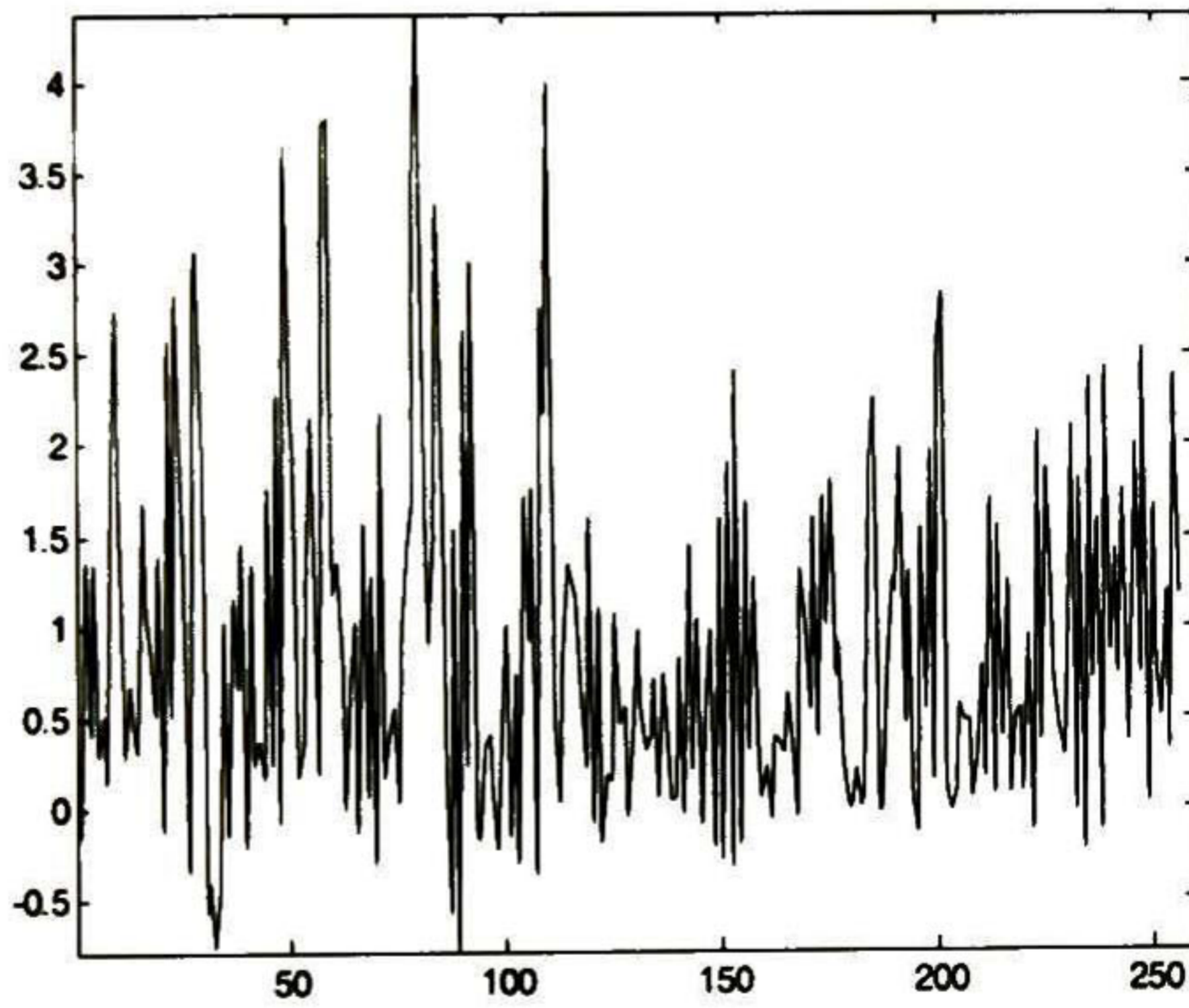
Tabla 4.42. Respuestas con SNR =20 dB, K = 5 y SSF<sub>3</sub>.



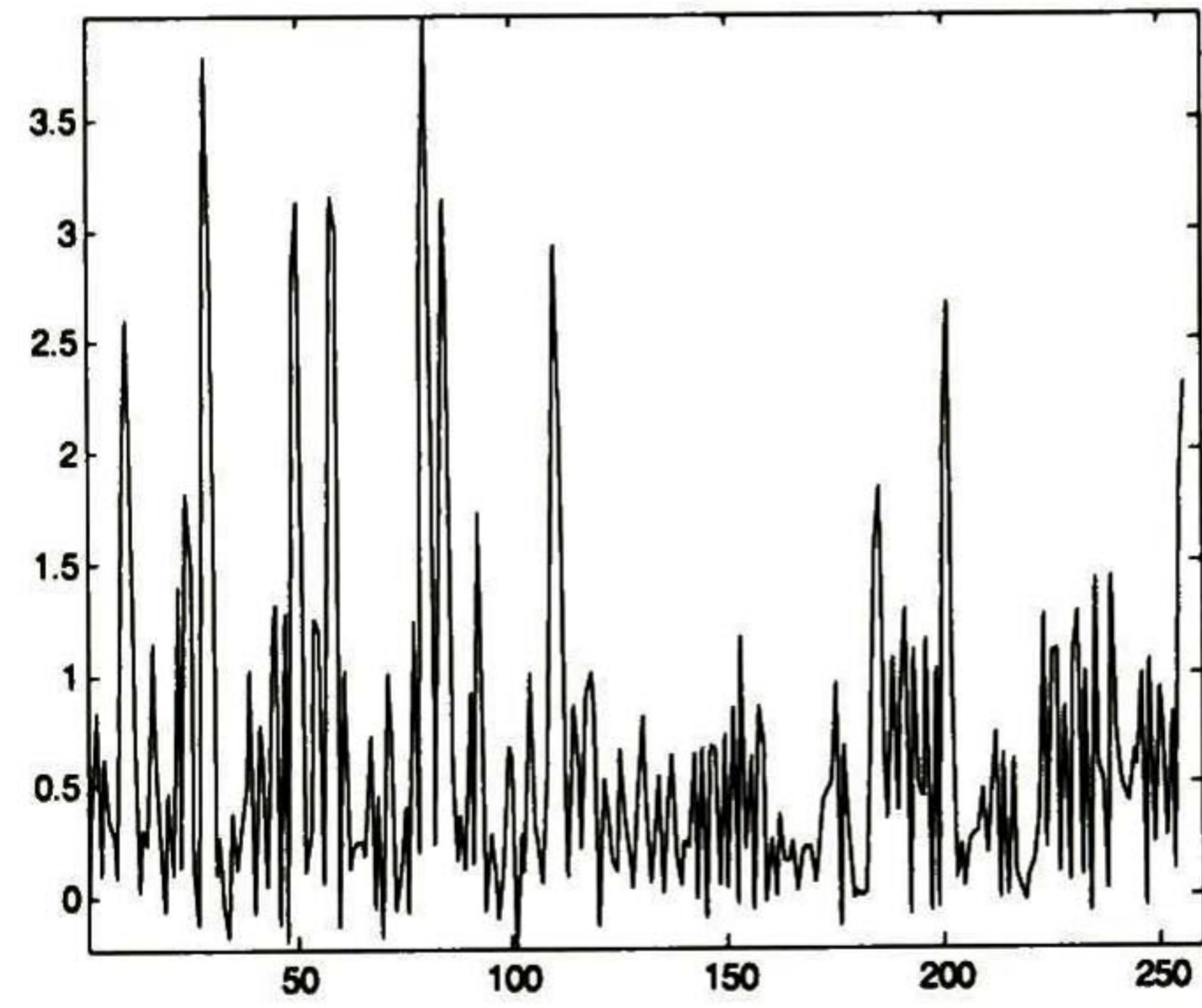
(a) Señal original v



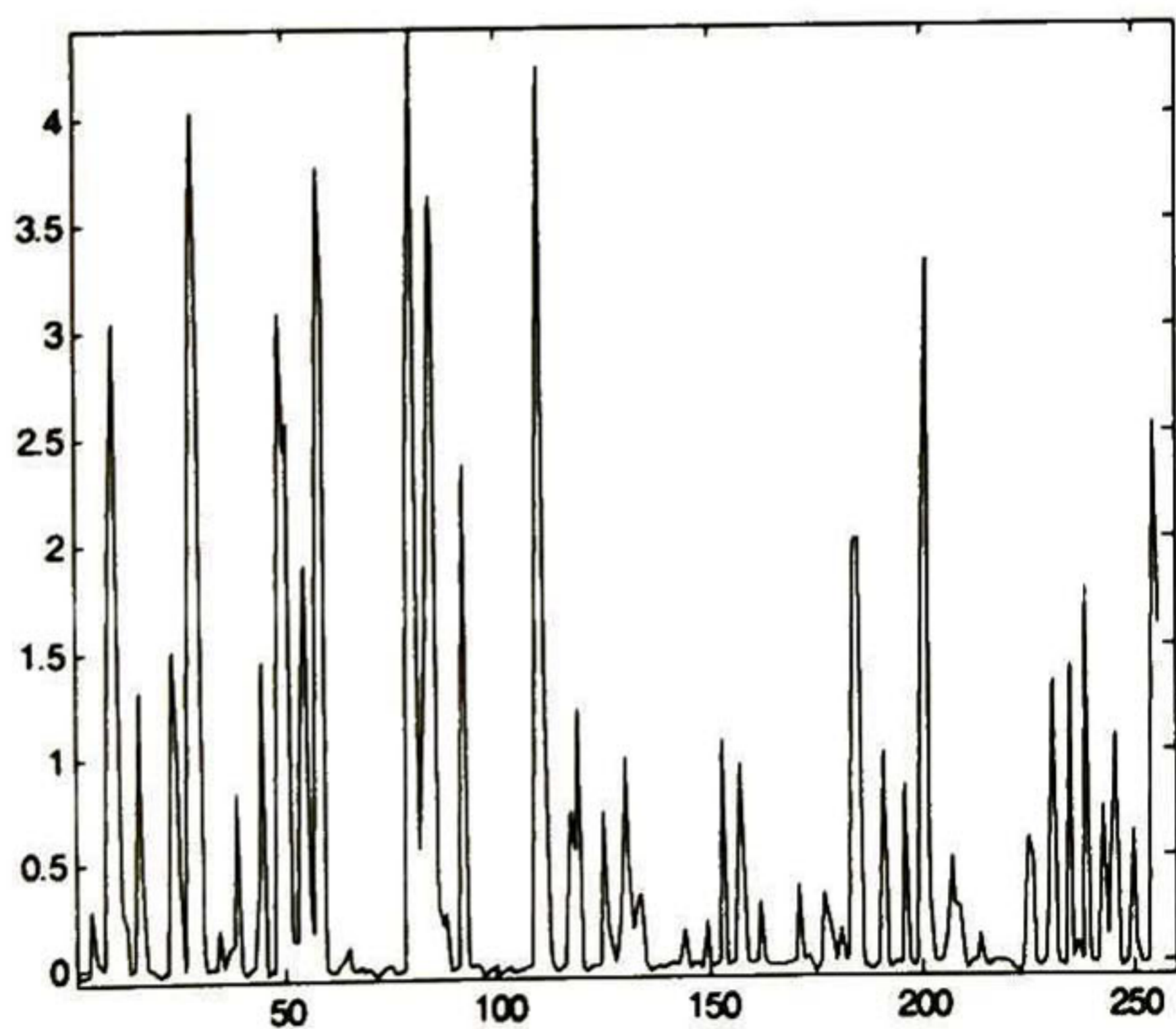
(b) Señal con ruido



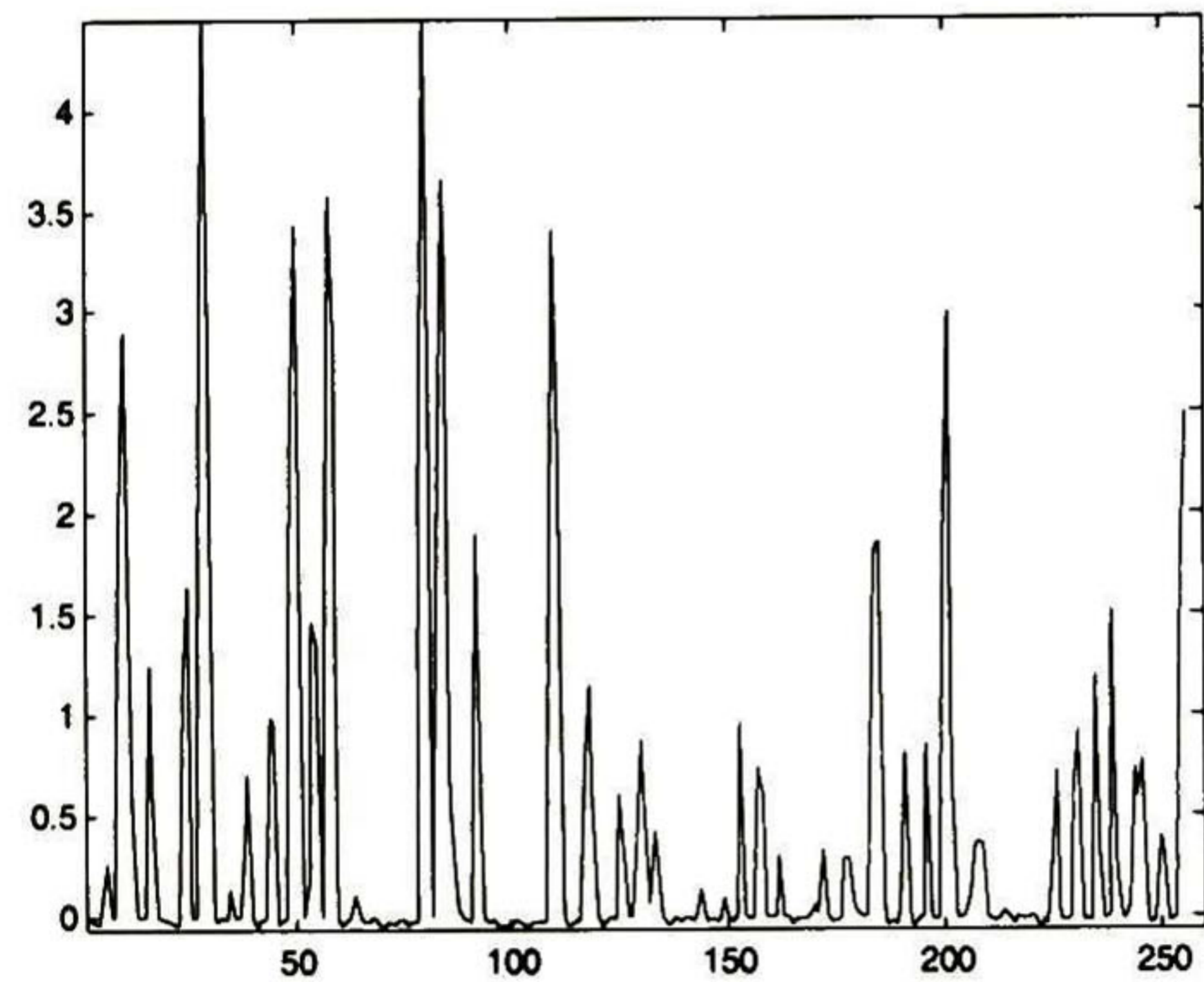
(c) Estimación de 3.8095 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 4.2095 dB a 2 iteraciones con el método WCLS

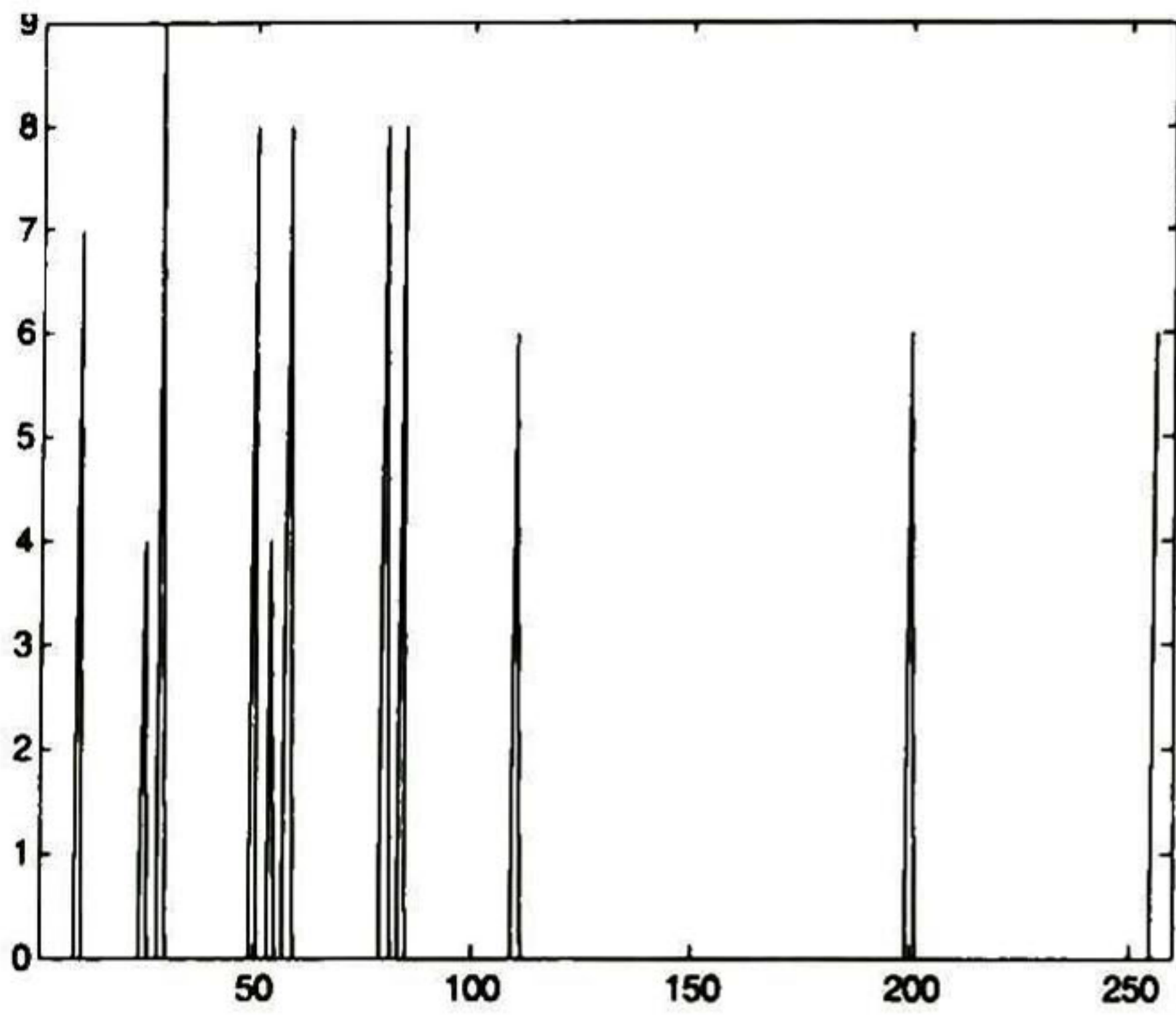


(e) Estimación de 6.0453 dB a 40 iteraciones con el método CLS

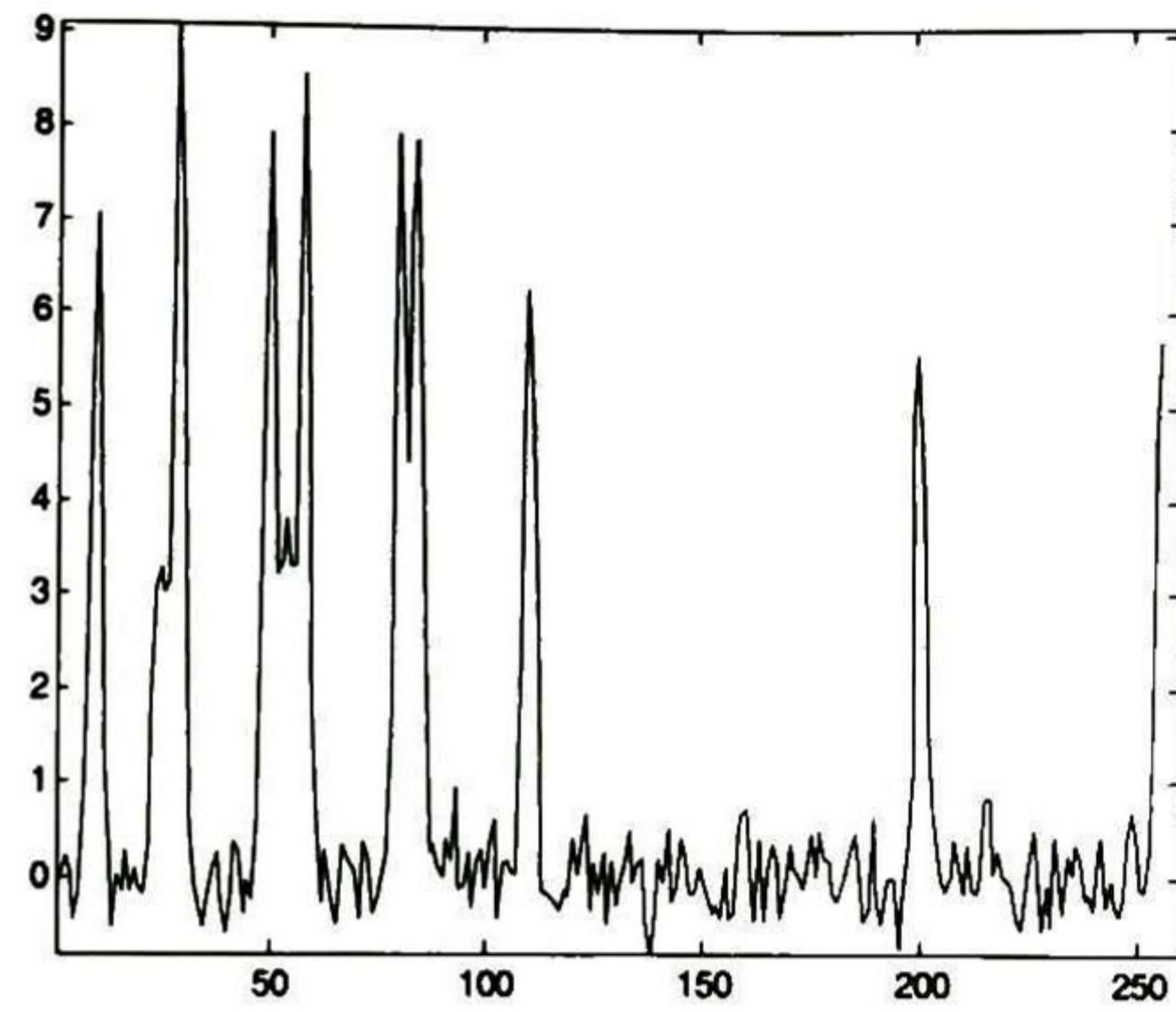


(f) Estimación de 6.3053 dB a 40 iteraciones con el método WCLS

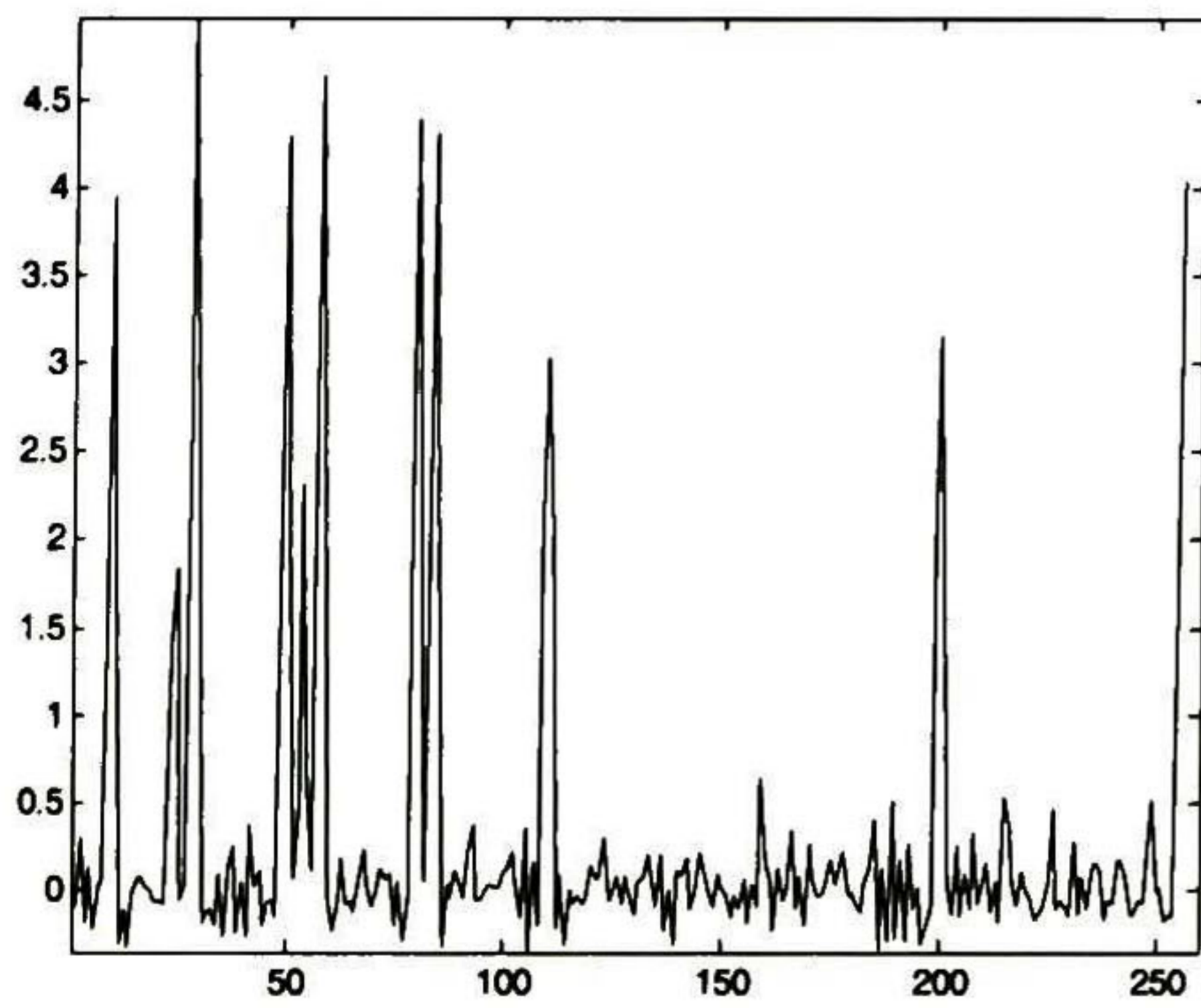
Tabla 4.43. Respuestas con SNR = 6 dB, K = 15 y  $SSF_1$ .



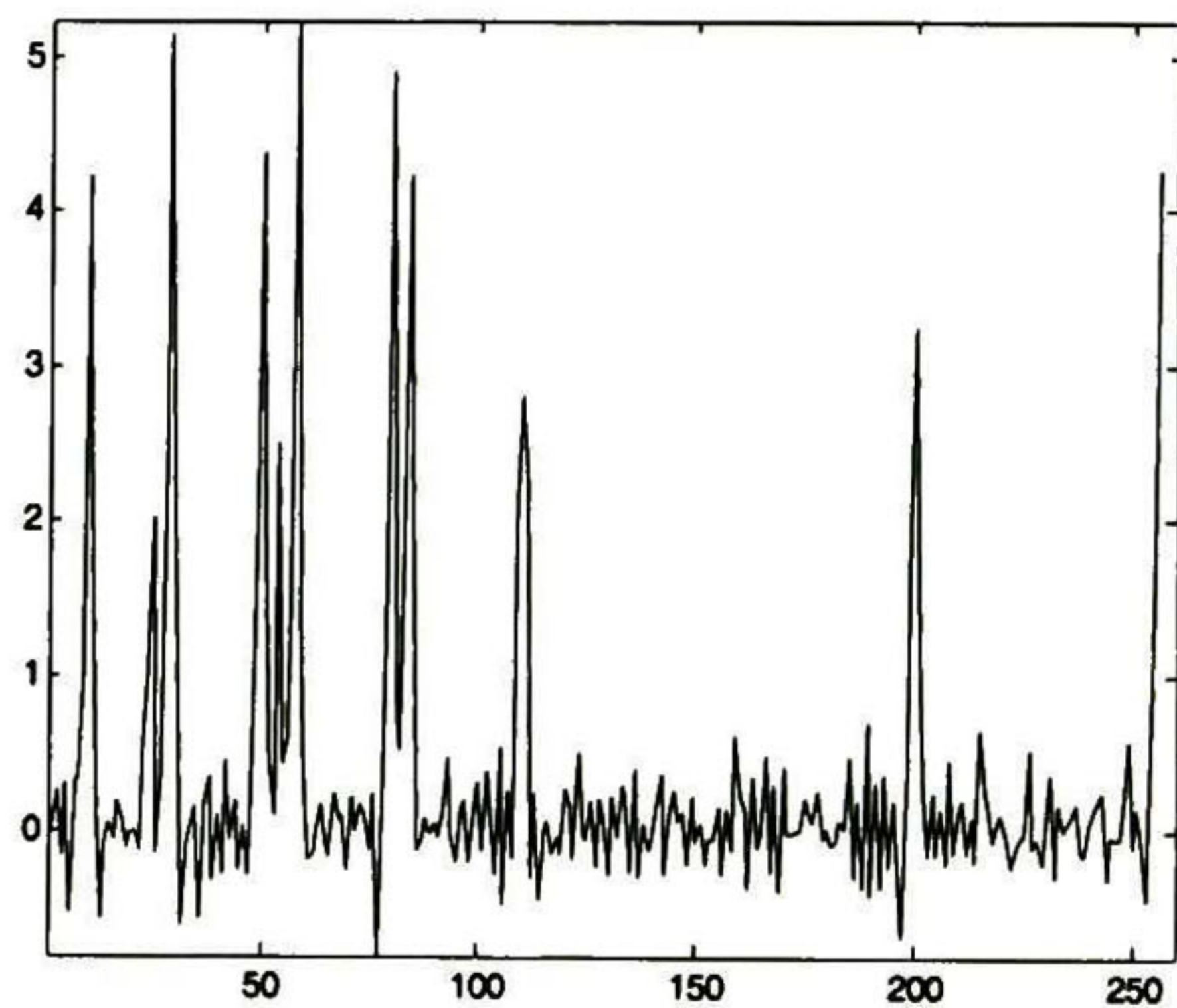
(a) Señal original v



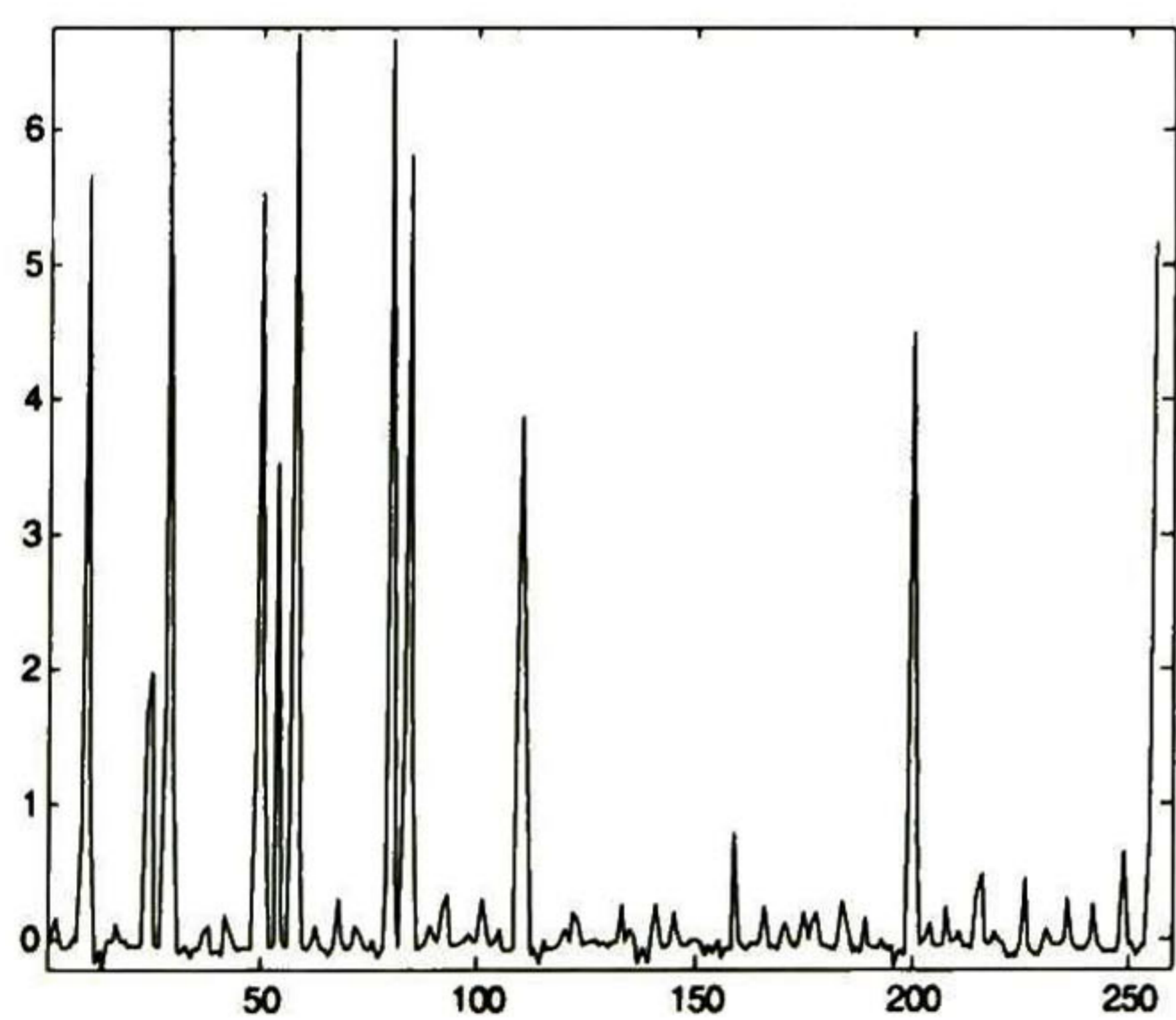
(b) Señal con ruido



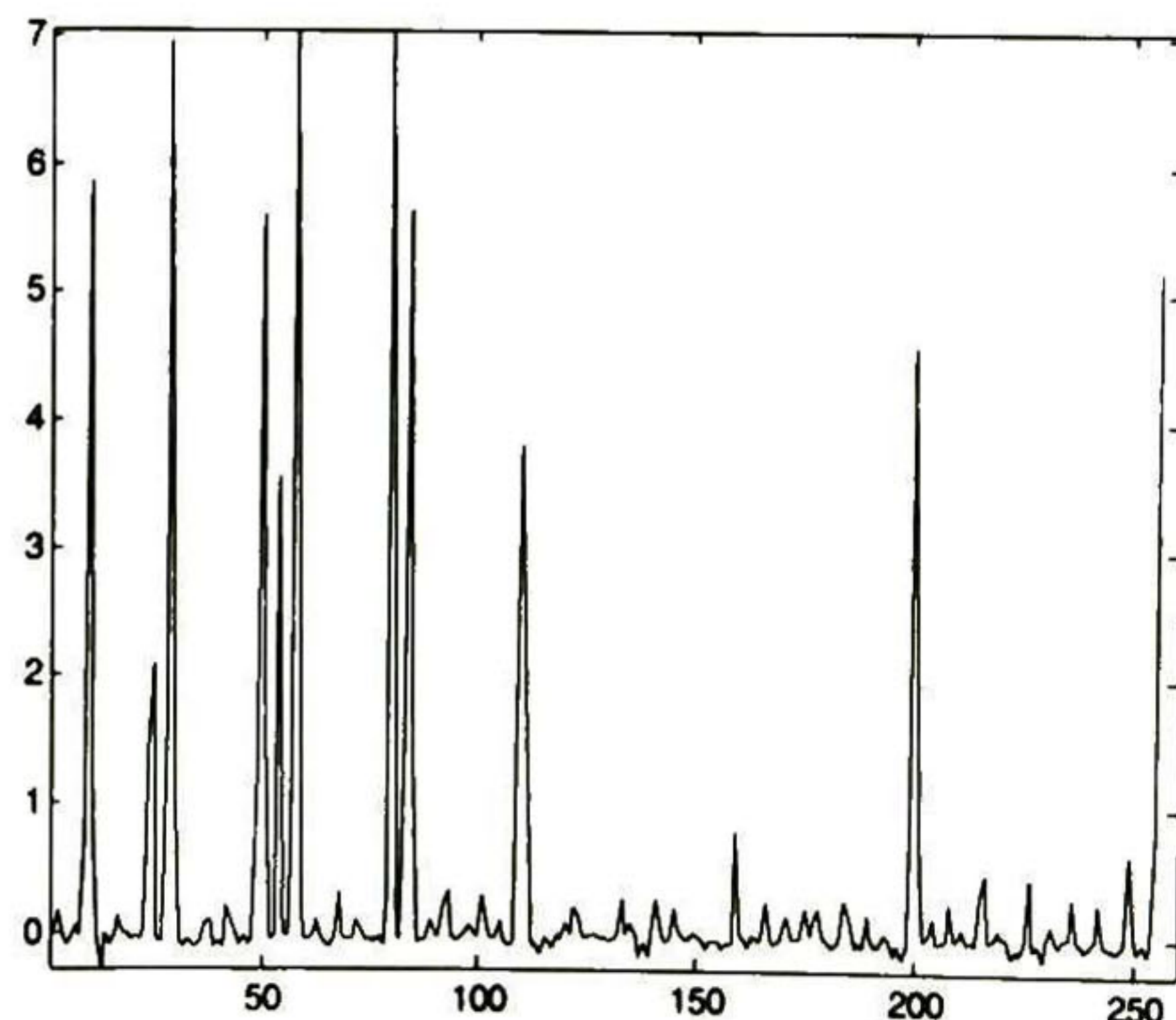
(c) Estimación de 5.7961 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 6.2291 dB a 2 iteraciones con el método WCLS

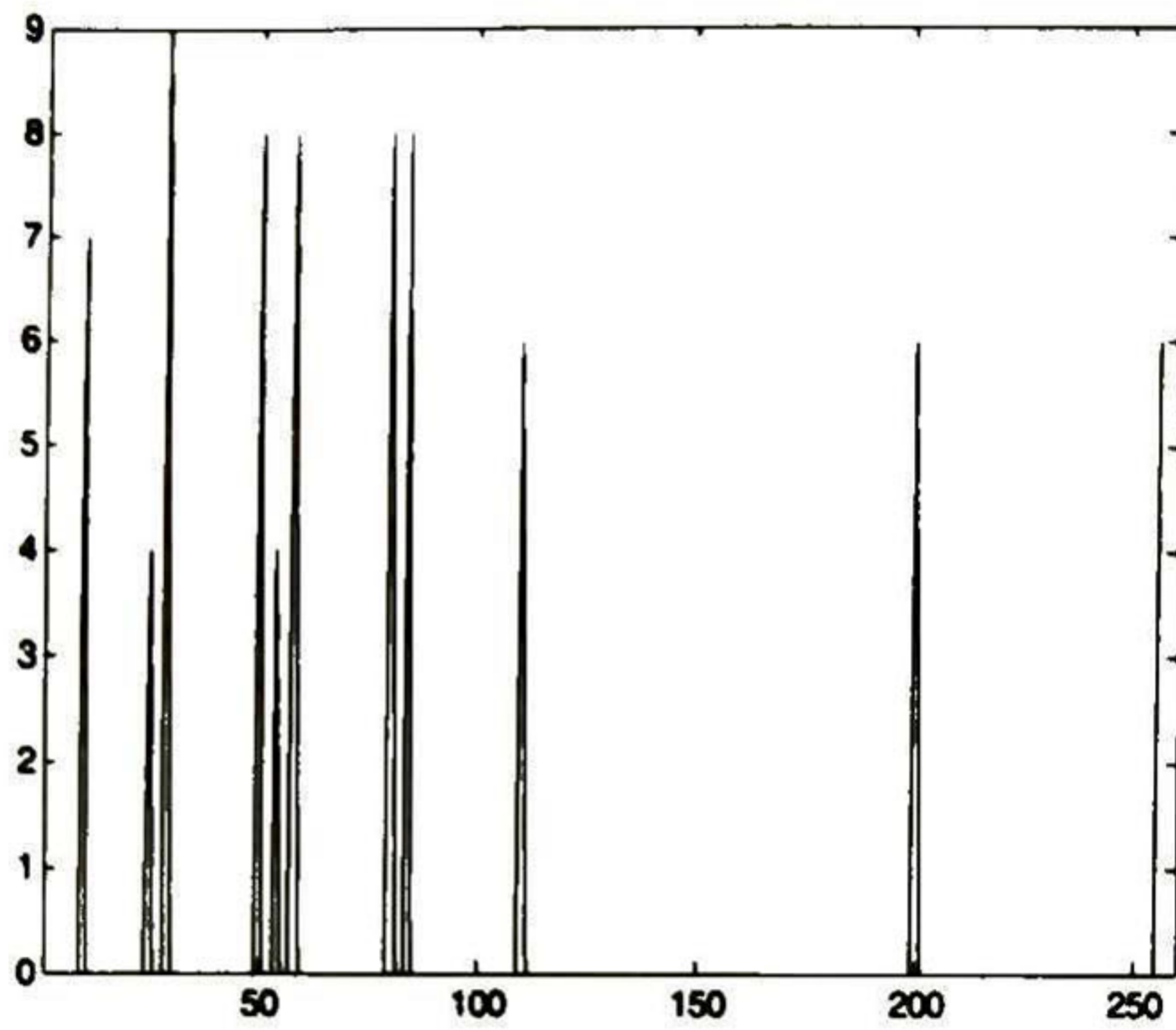


(e) Estimación de 10.5196 dB a 40 iteraciones con el método CLS

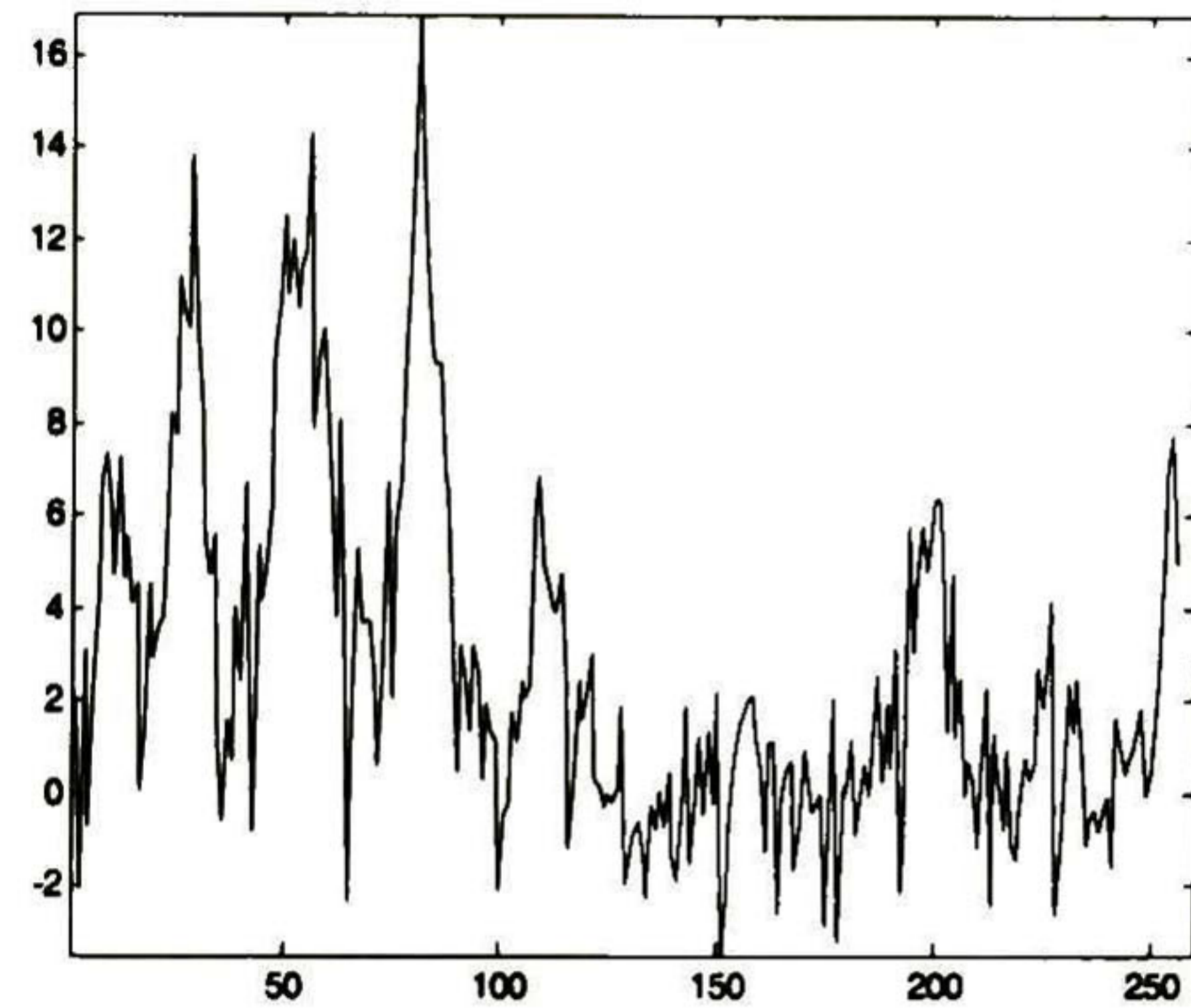


(f) Estimación de 10.8700 dB a 40 iteraciones con el método WCLS

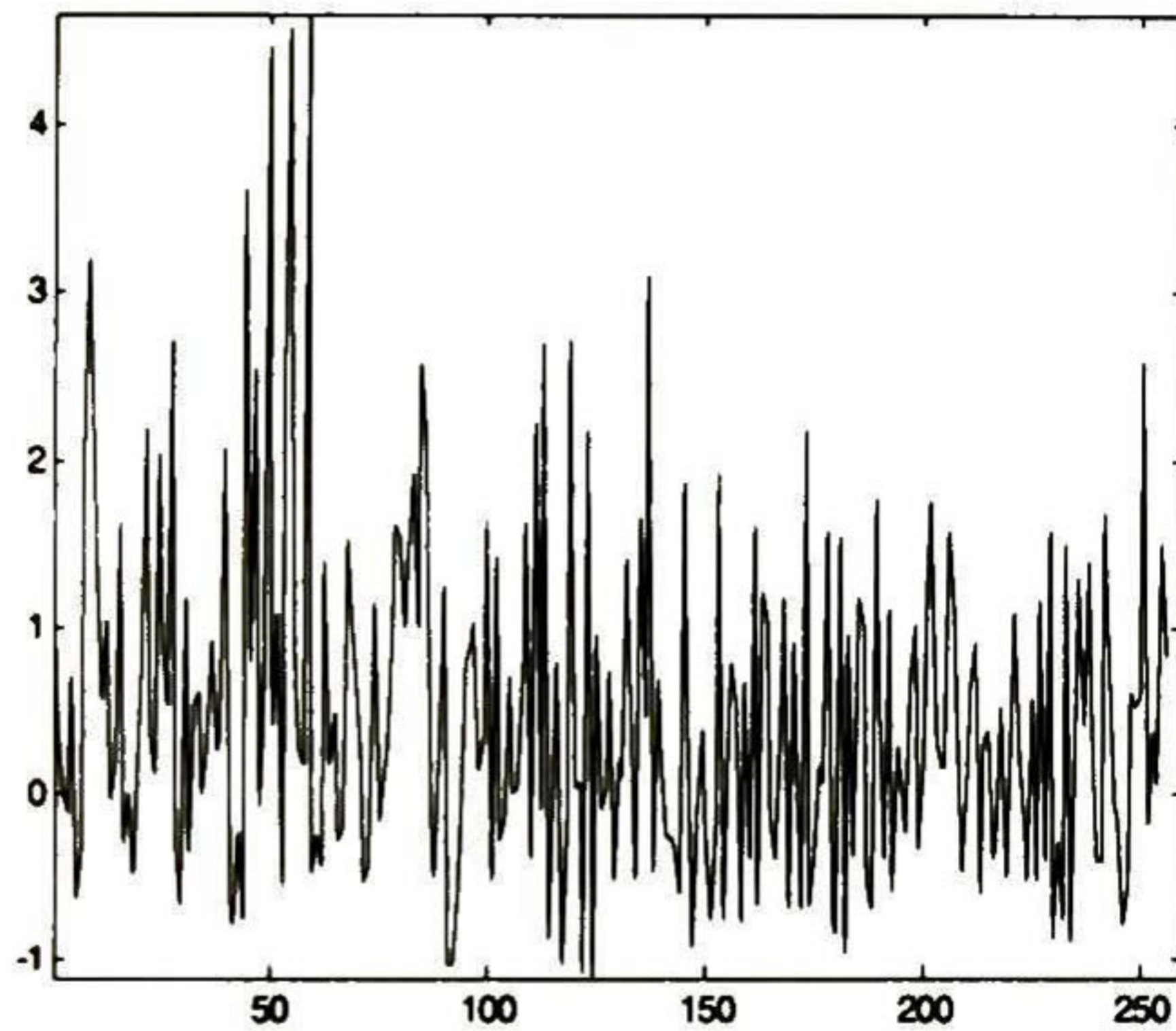
Tabla 4.44. Respuestas con SNR = 20 dB, K = 15 y SSF<sub>1</sub>.



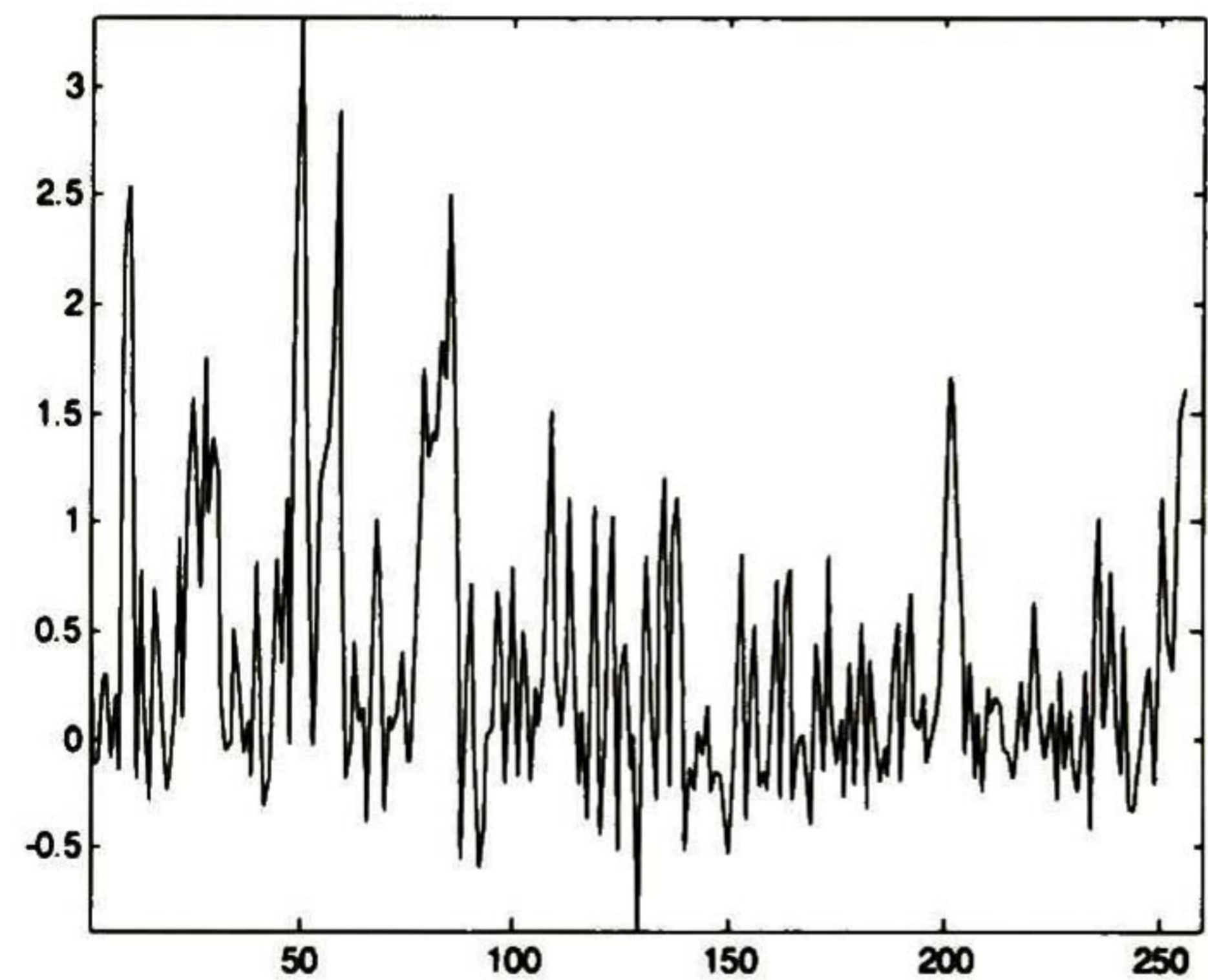
(a) Señal original  $v$



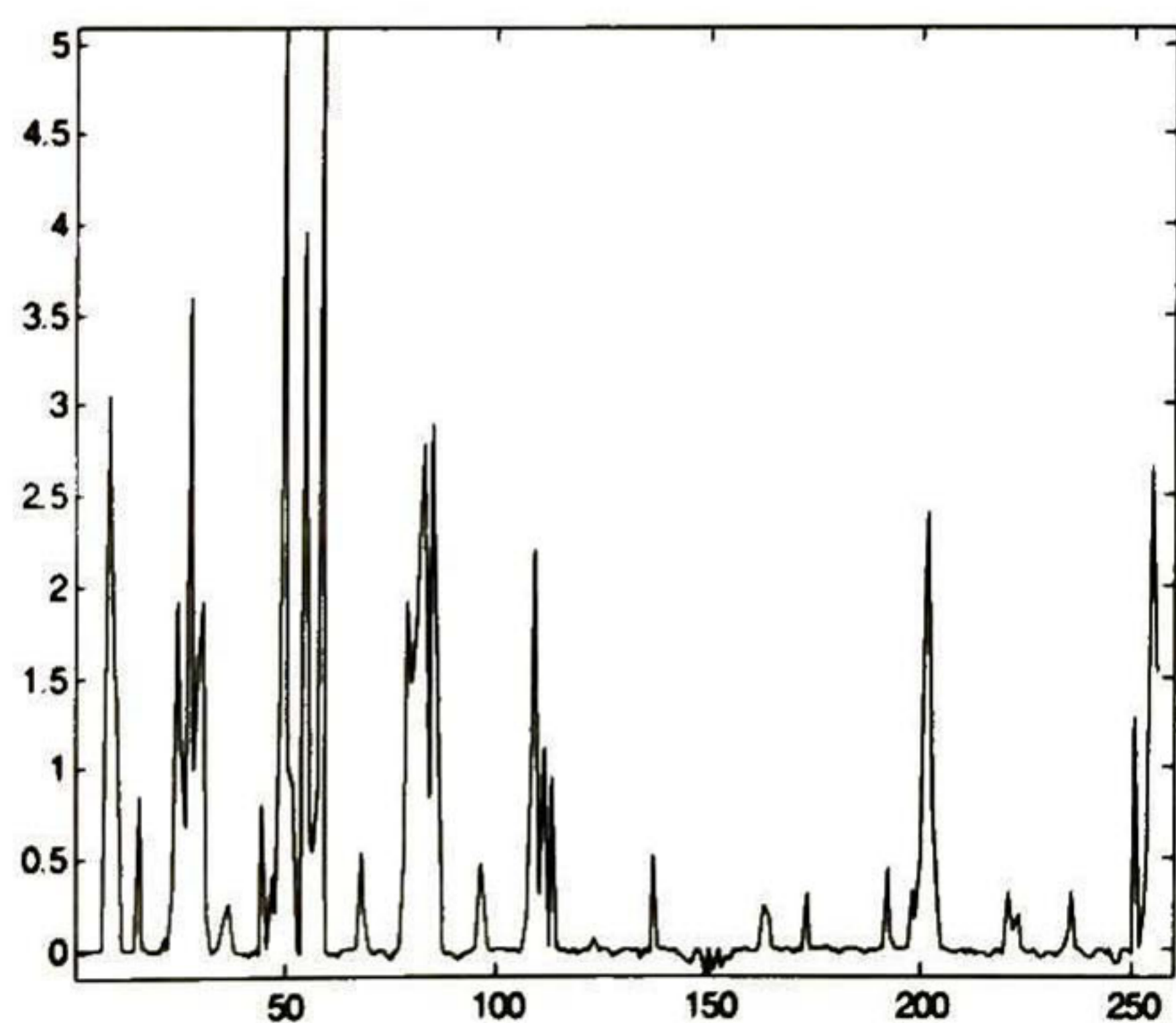
(b) Señal con ruido



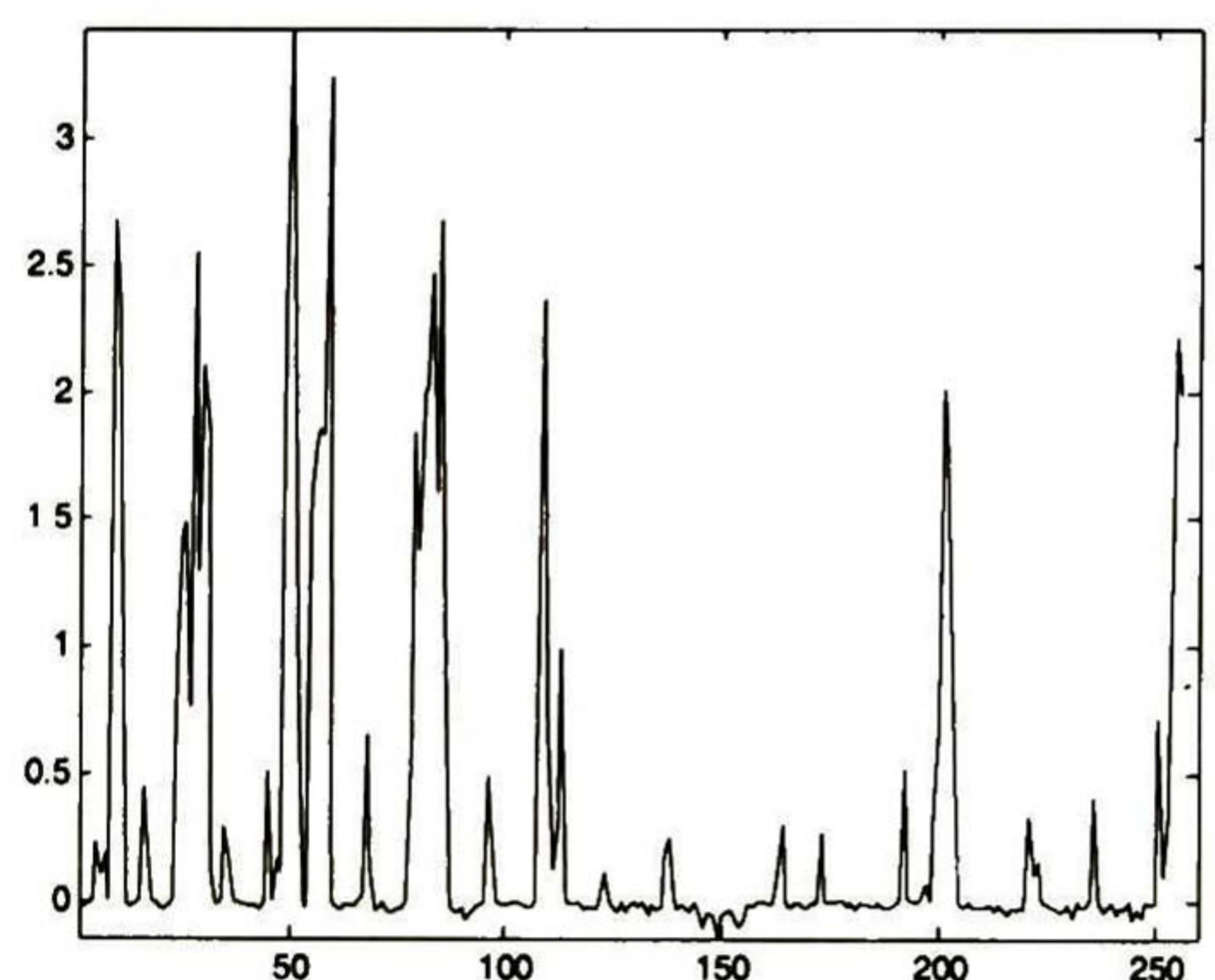
(c) Estimación de 8.6536 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 10.4450 dB a 2 iteraciones con el método WCLS

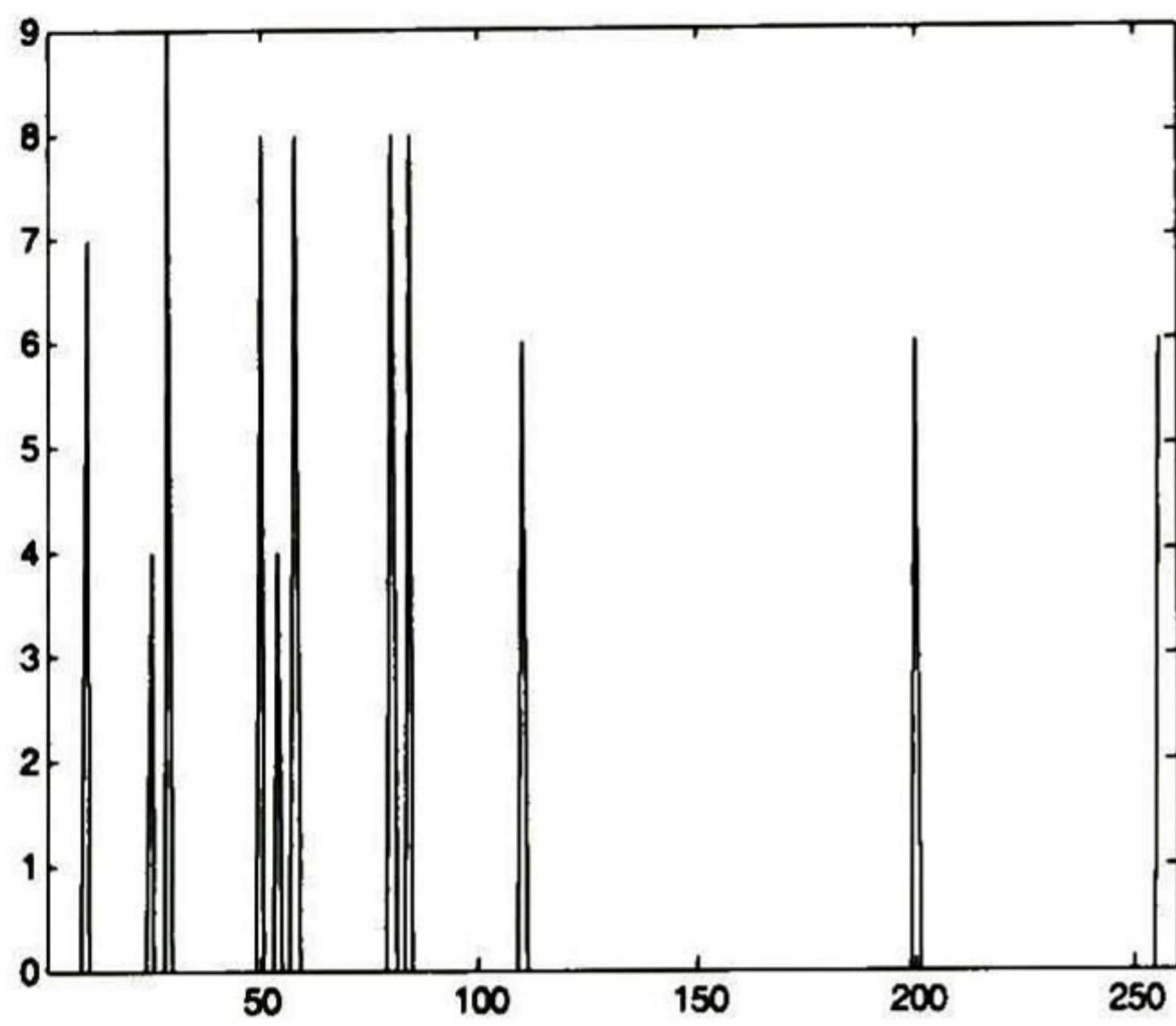


(e) Estimación de 10.0375 dB a 40 iteraciones con el método CLS

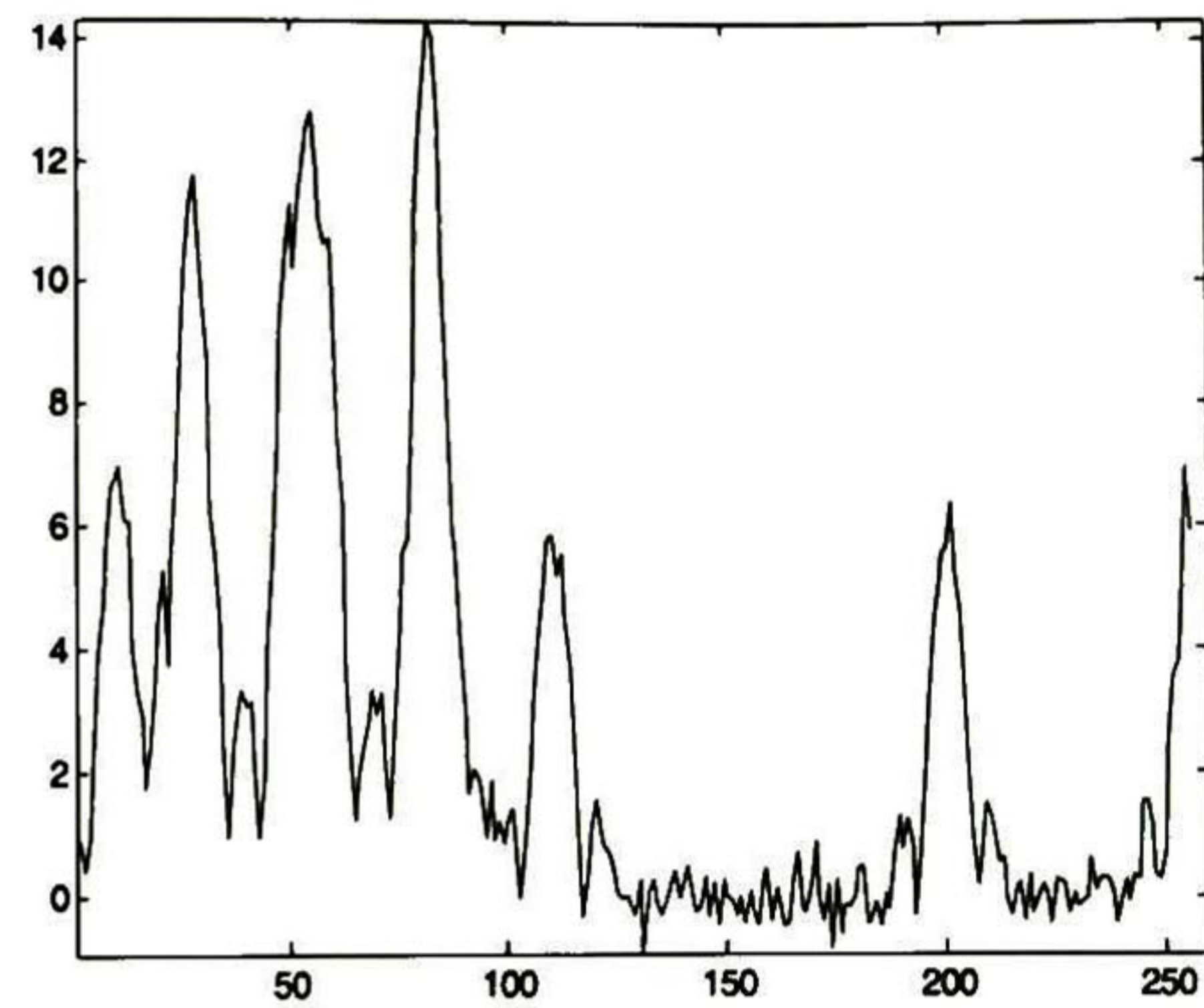


(f) Estimación de 10.5814 dB a 40 iteraciones con el método WCLS

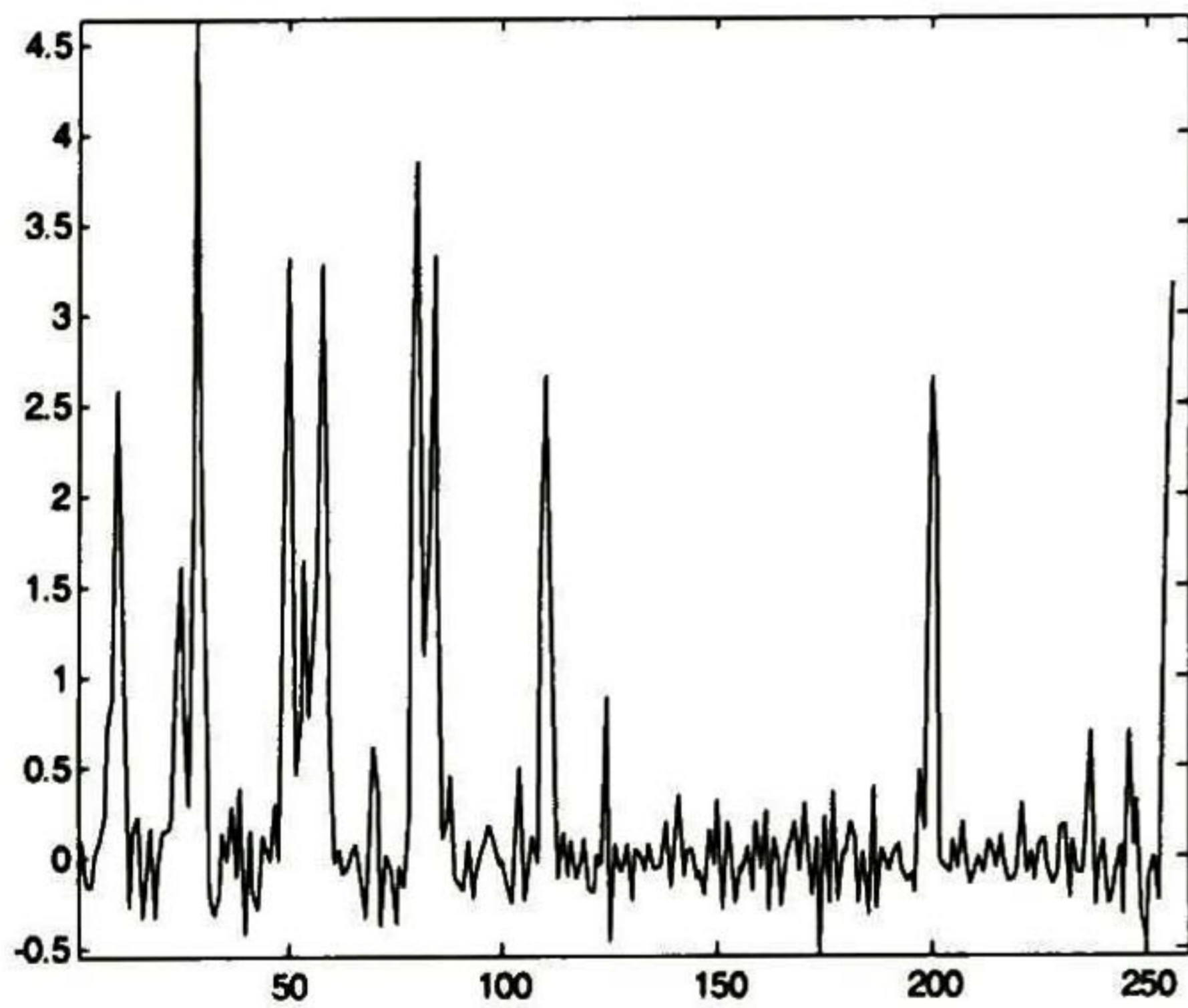
Tabla 4.45. Respuestas con SNR = 6 dB, K = 15 y  $SSF_2$ .



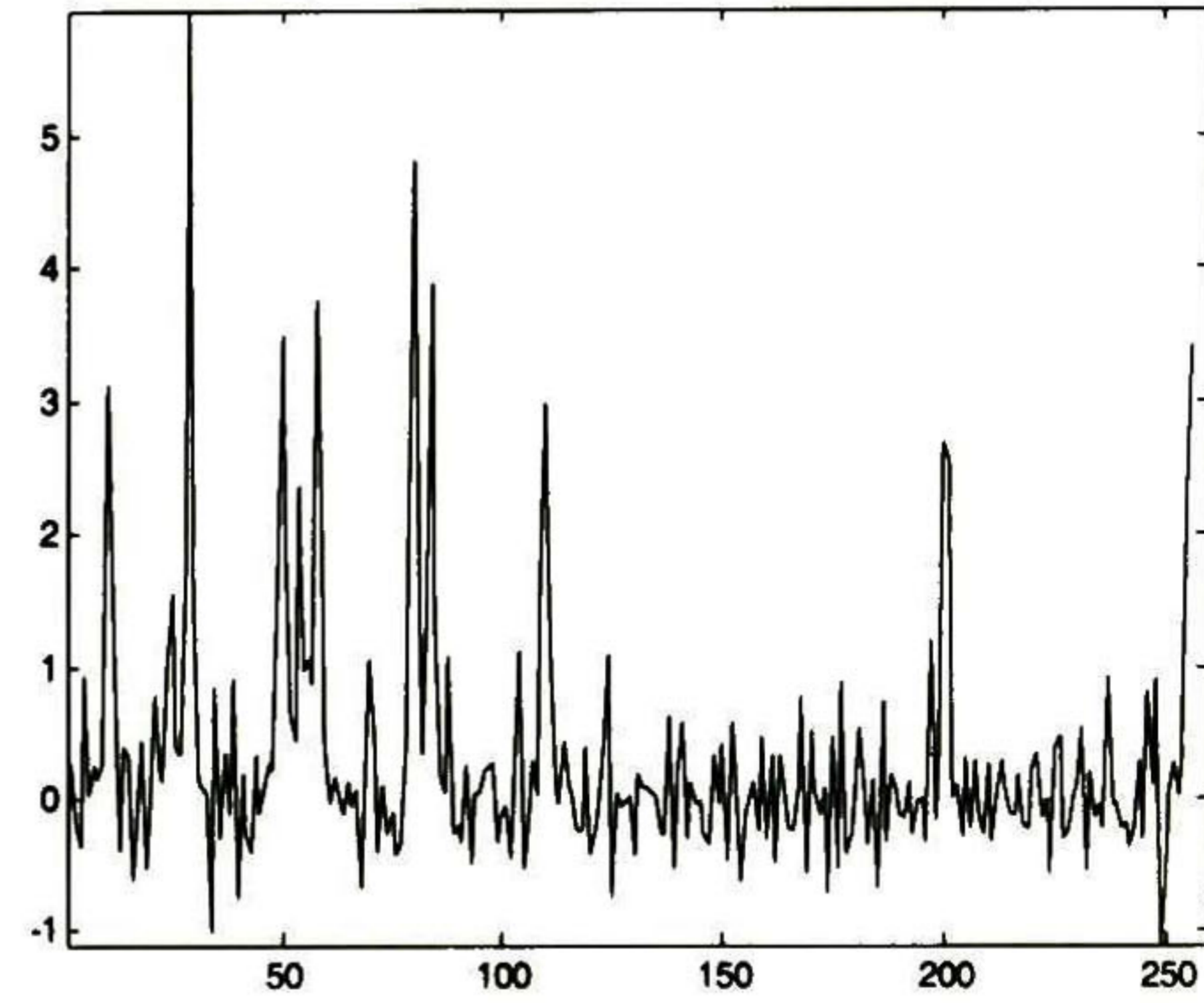
(a) Señal original v



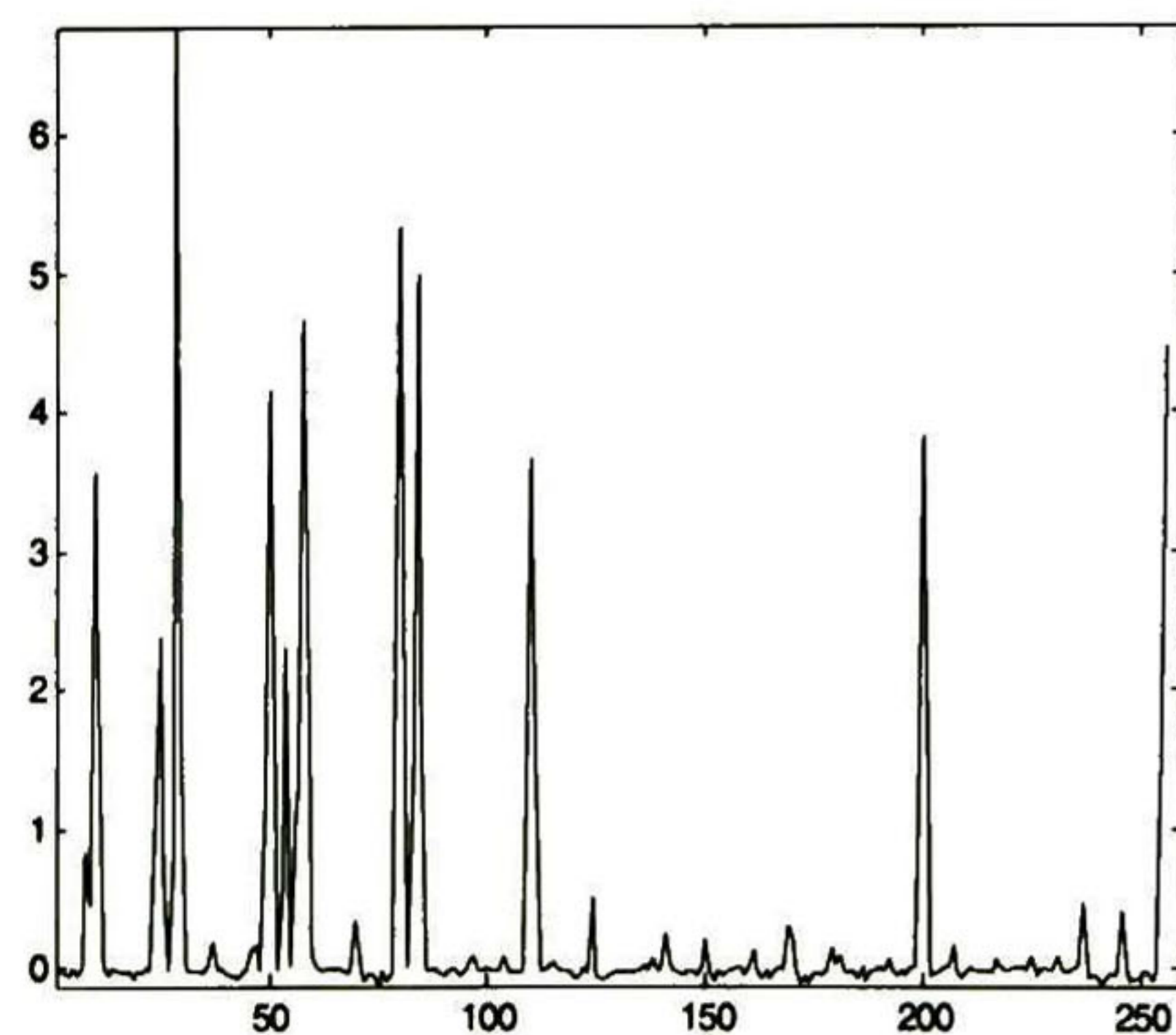
(b) Señal con ruido



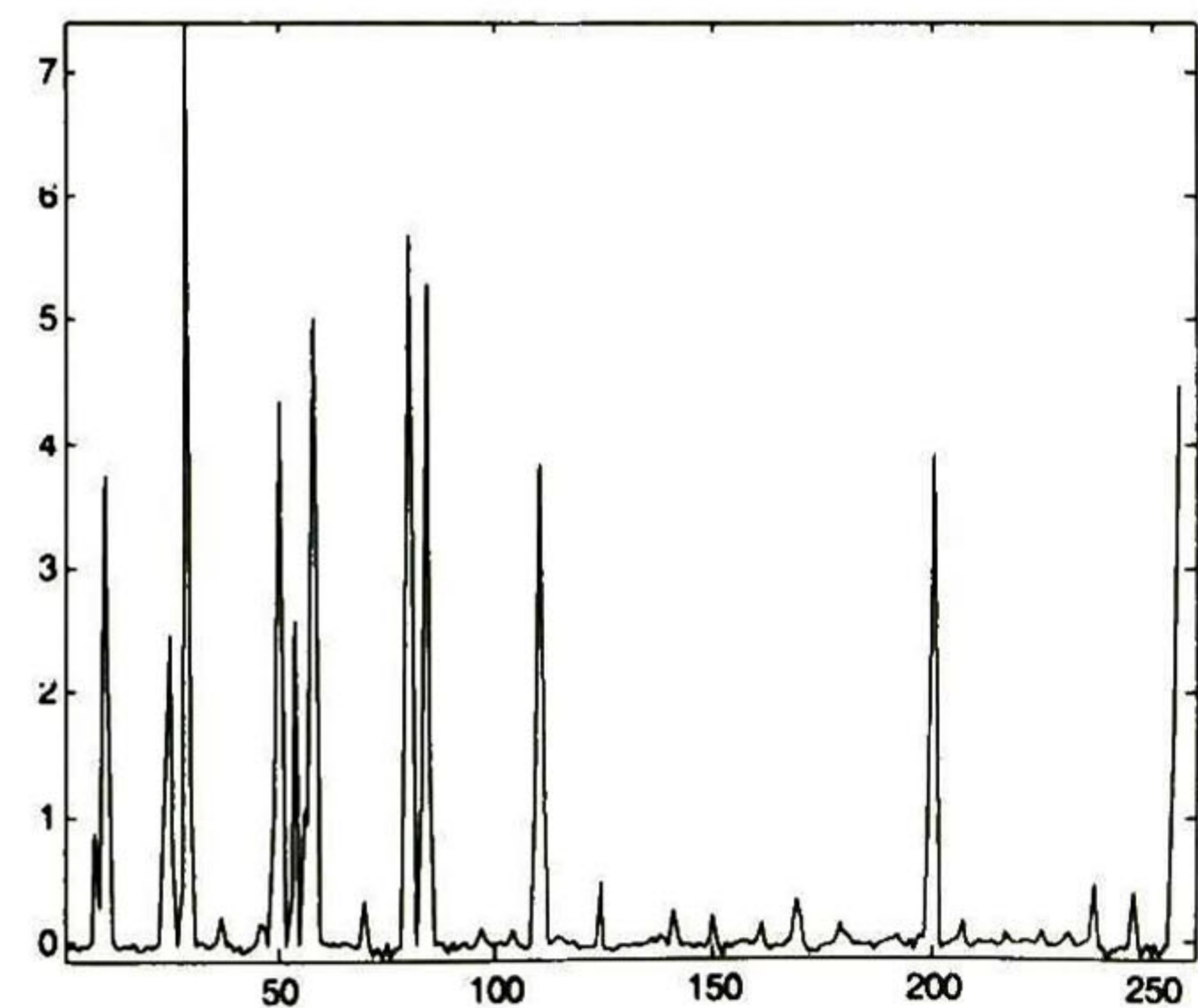
(c) Estimación de 12.6878 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 13.1904 dB a 2 iteraciones con el método WCLS

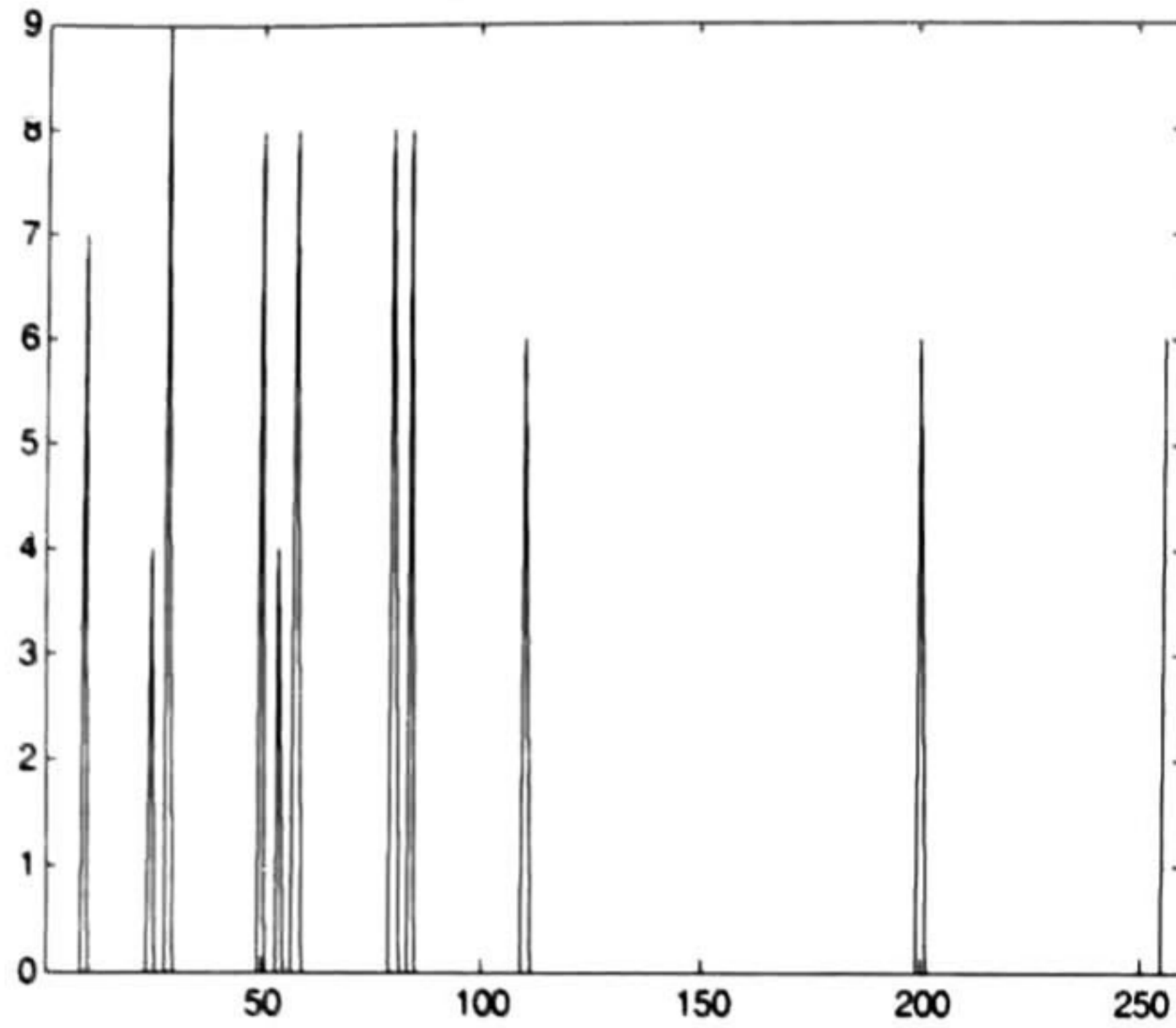


(e) Estimación de 15.5545 dB a 40 iteraciones con el método CLS

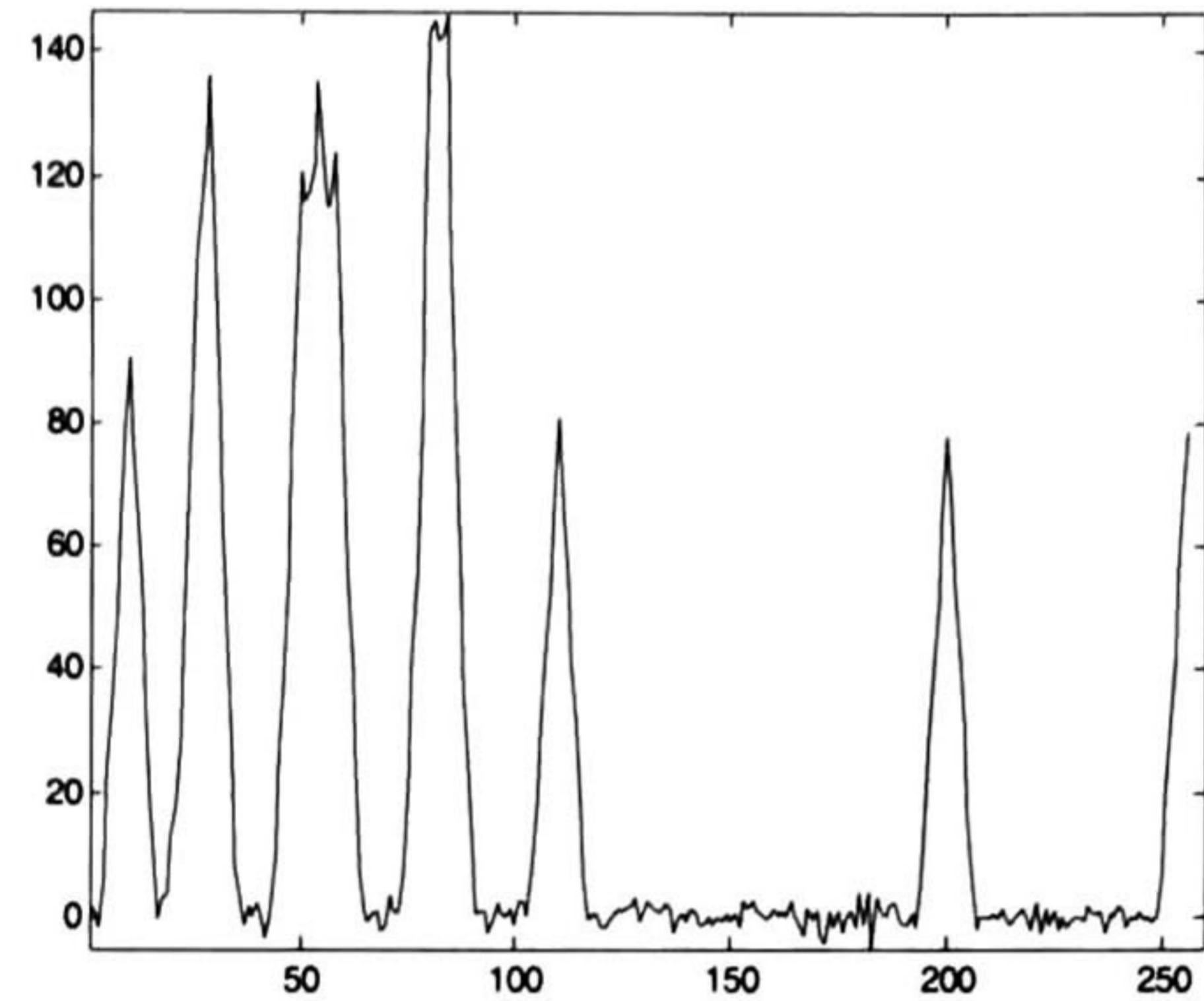


(f) Estimación de 16.3184 dB a 40 iteraciones con el método WCLS

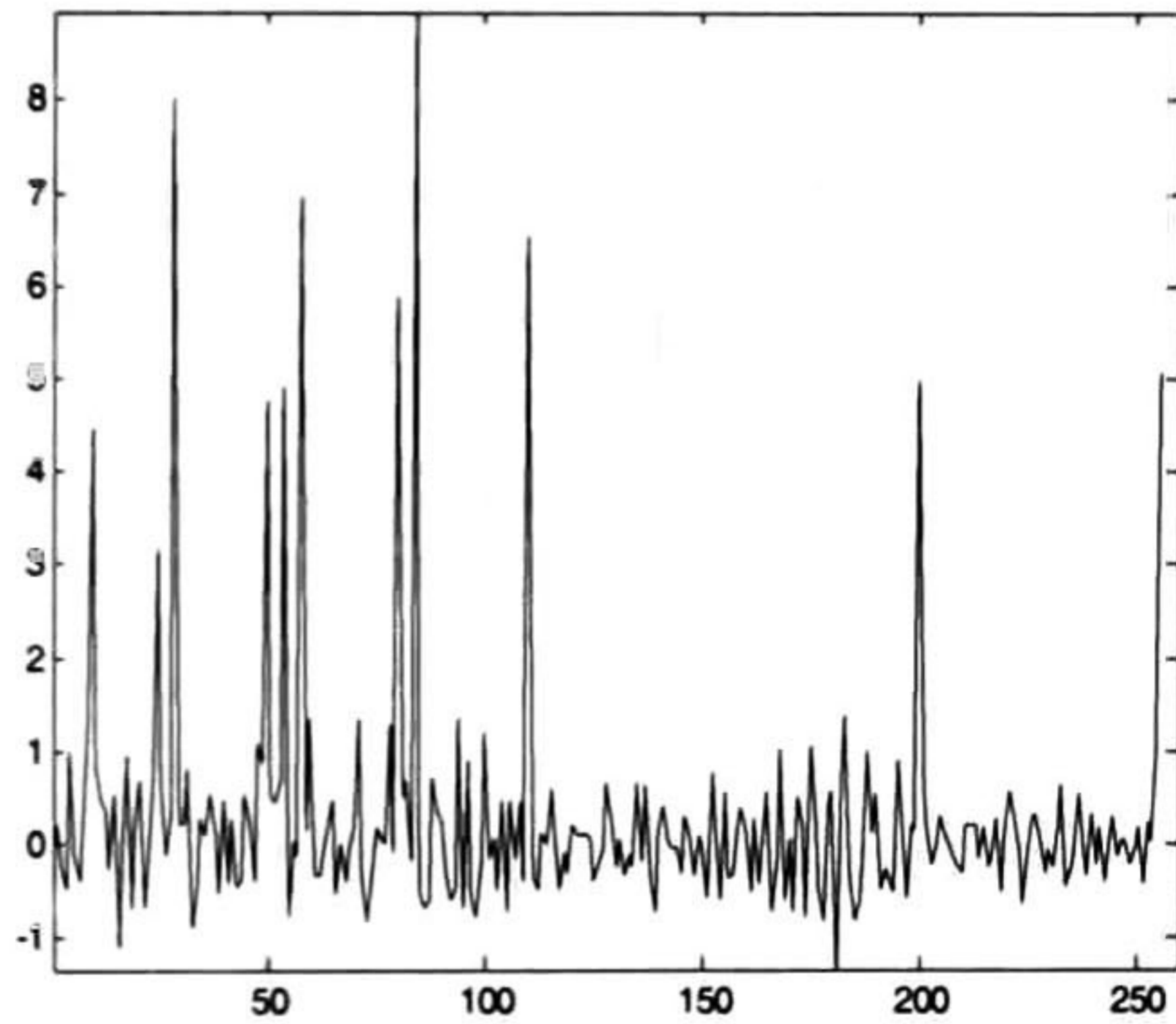
Tabla 4.46. Respuestas con SNR = 20 dB, K = 15 y SSF<sub>2</sub>.



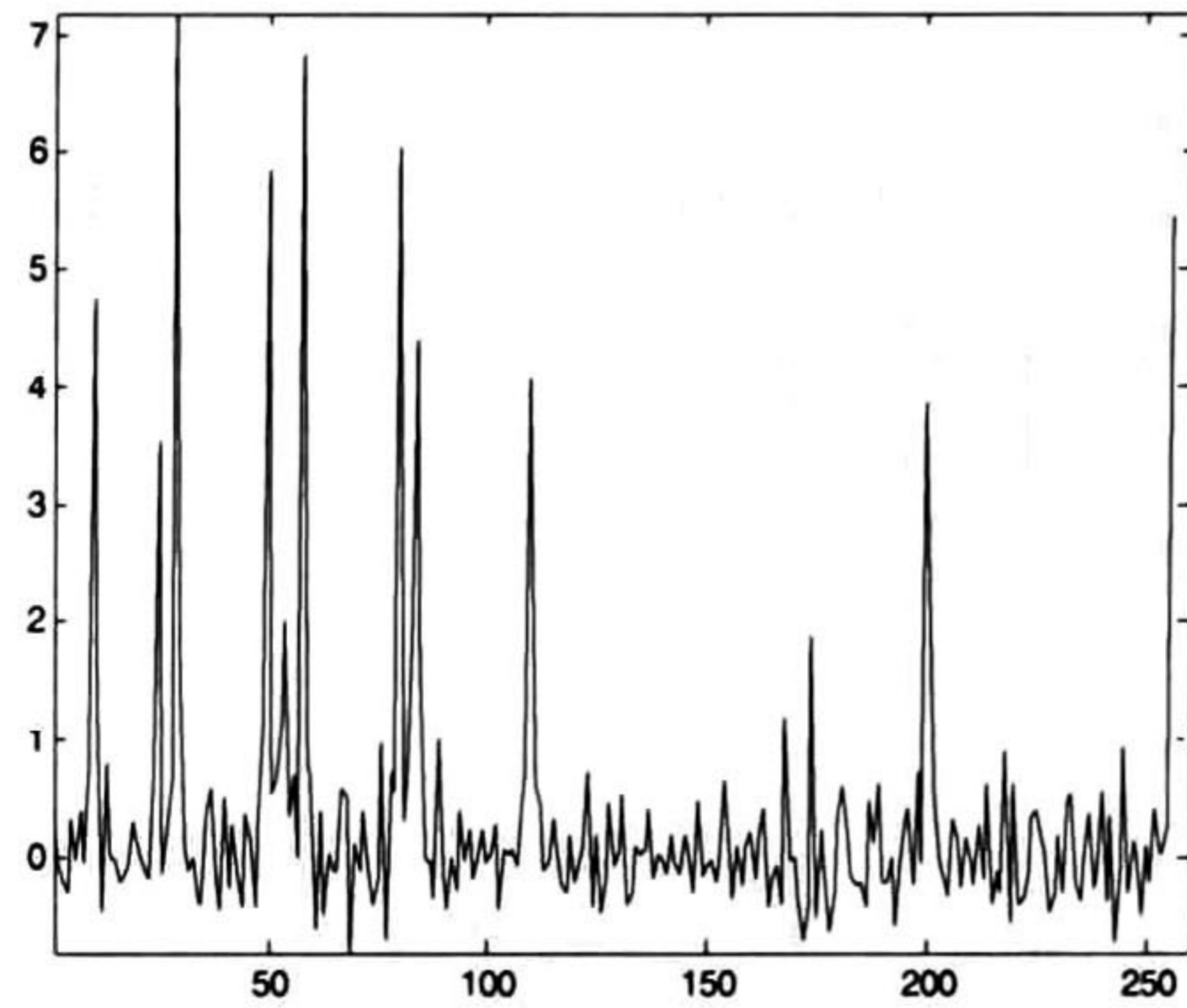
(a) Señal original v



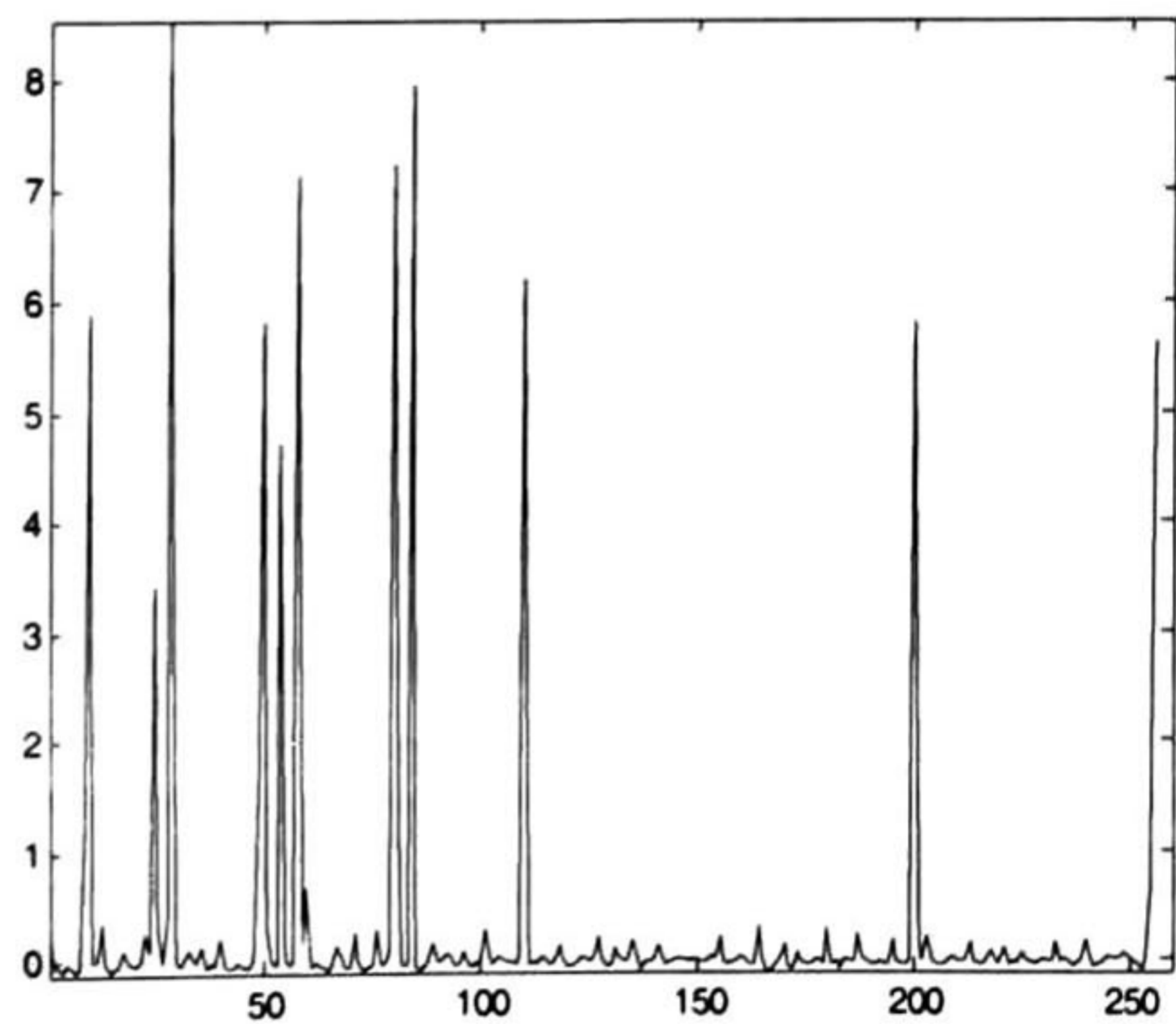
(b) Señal con ruido



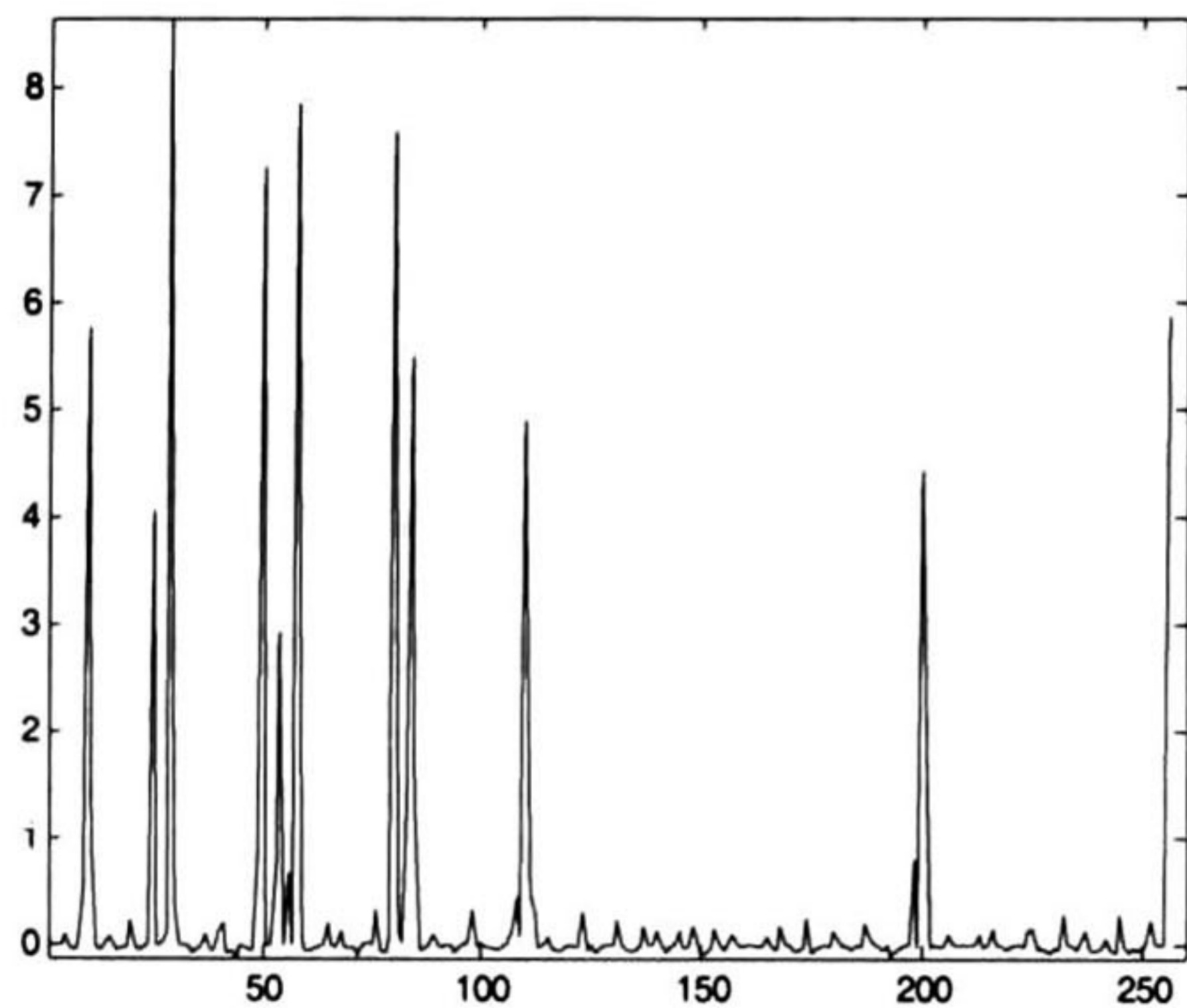
(c) Estimación de 36.1958 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 37.3285 dB a 2 iteraciones con el método WCLS

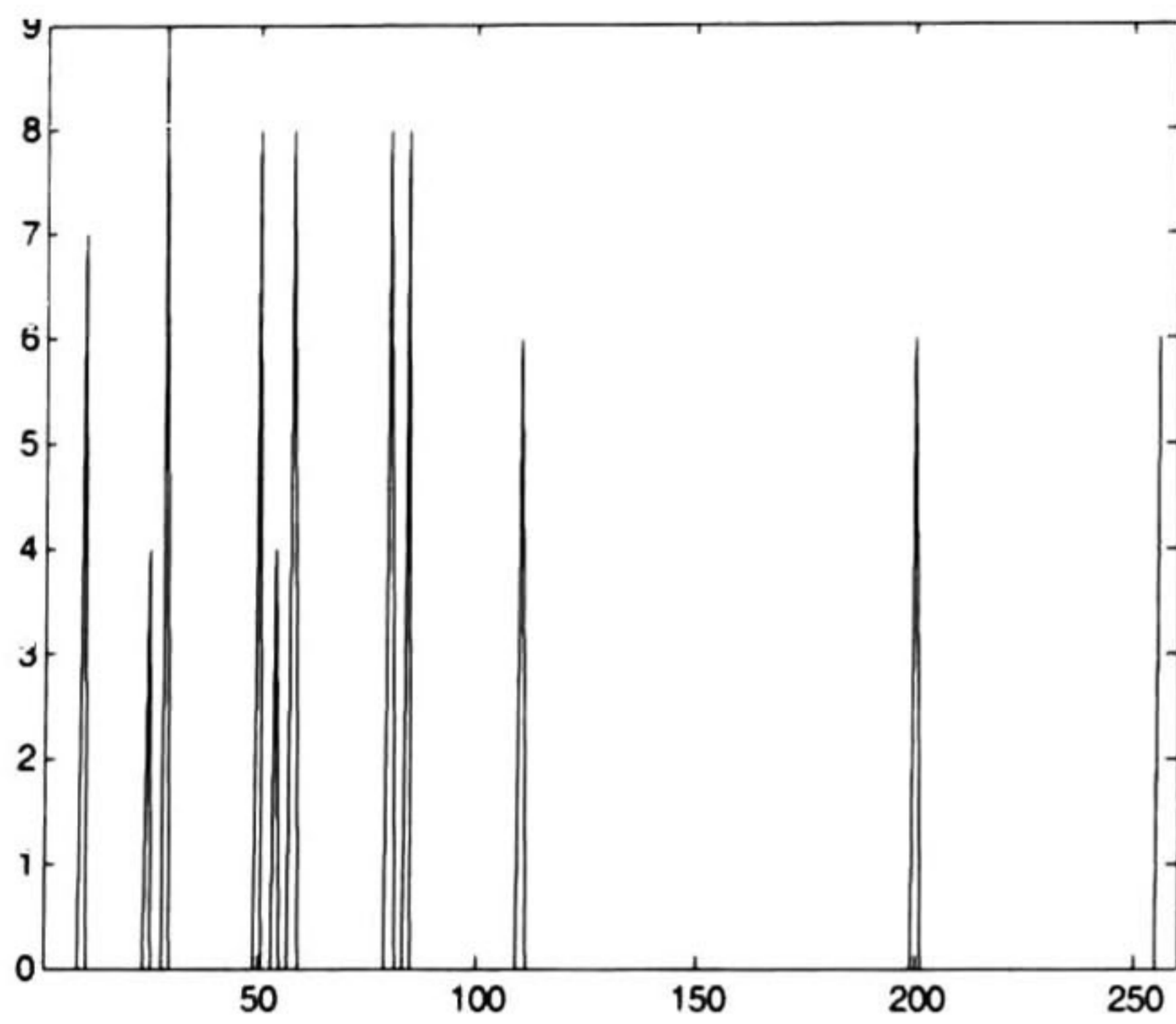


(e) Estimación de 43.0064 dB a 40 iteraciones con el método CLS

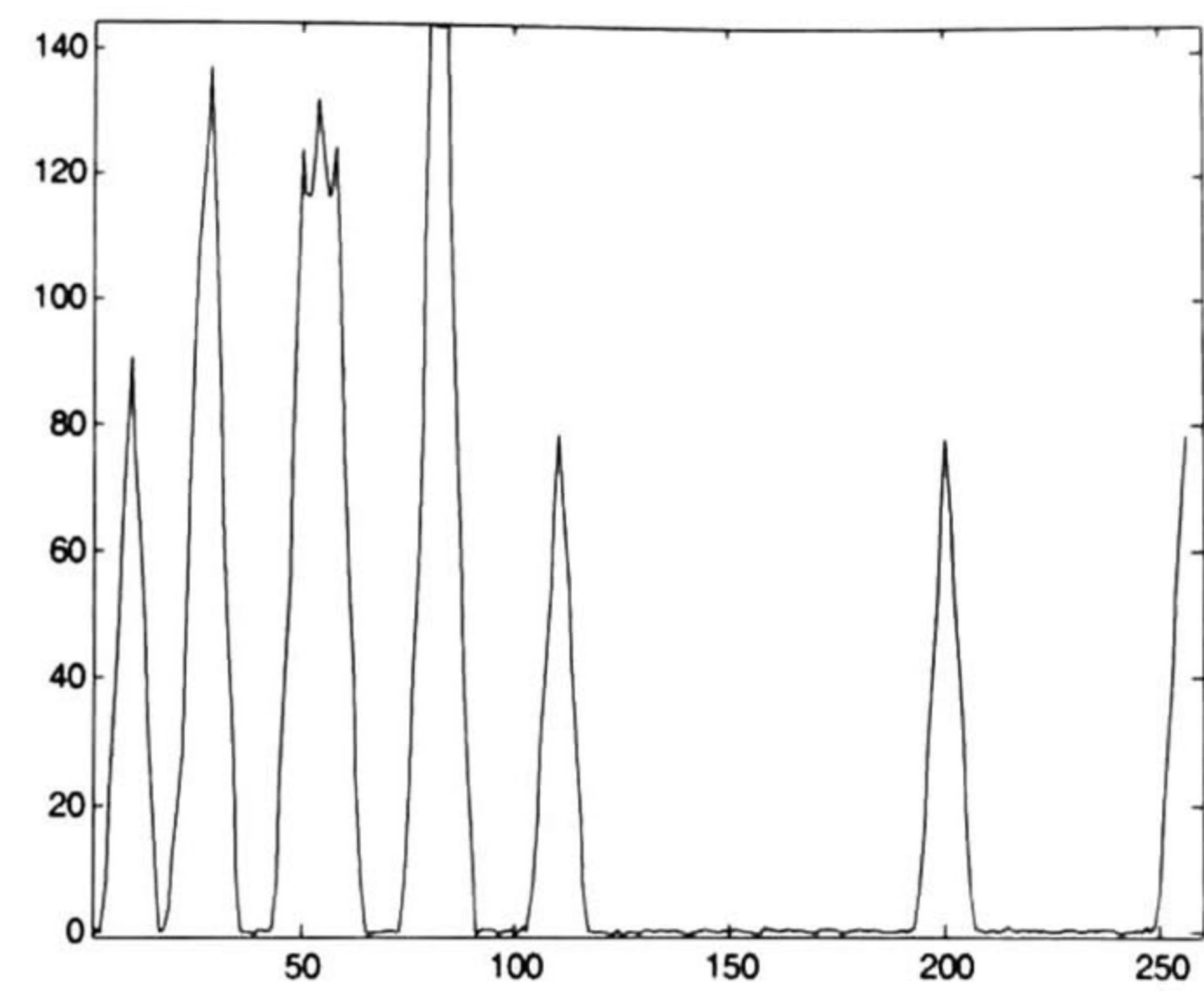


(f) Estimación de 43.3313 dB a 40 iteraciones con el método WCLS

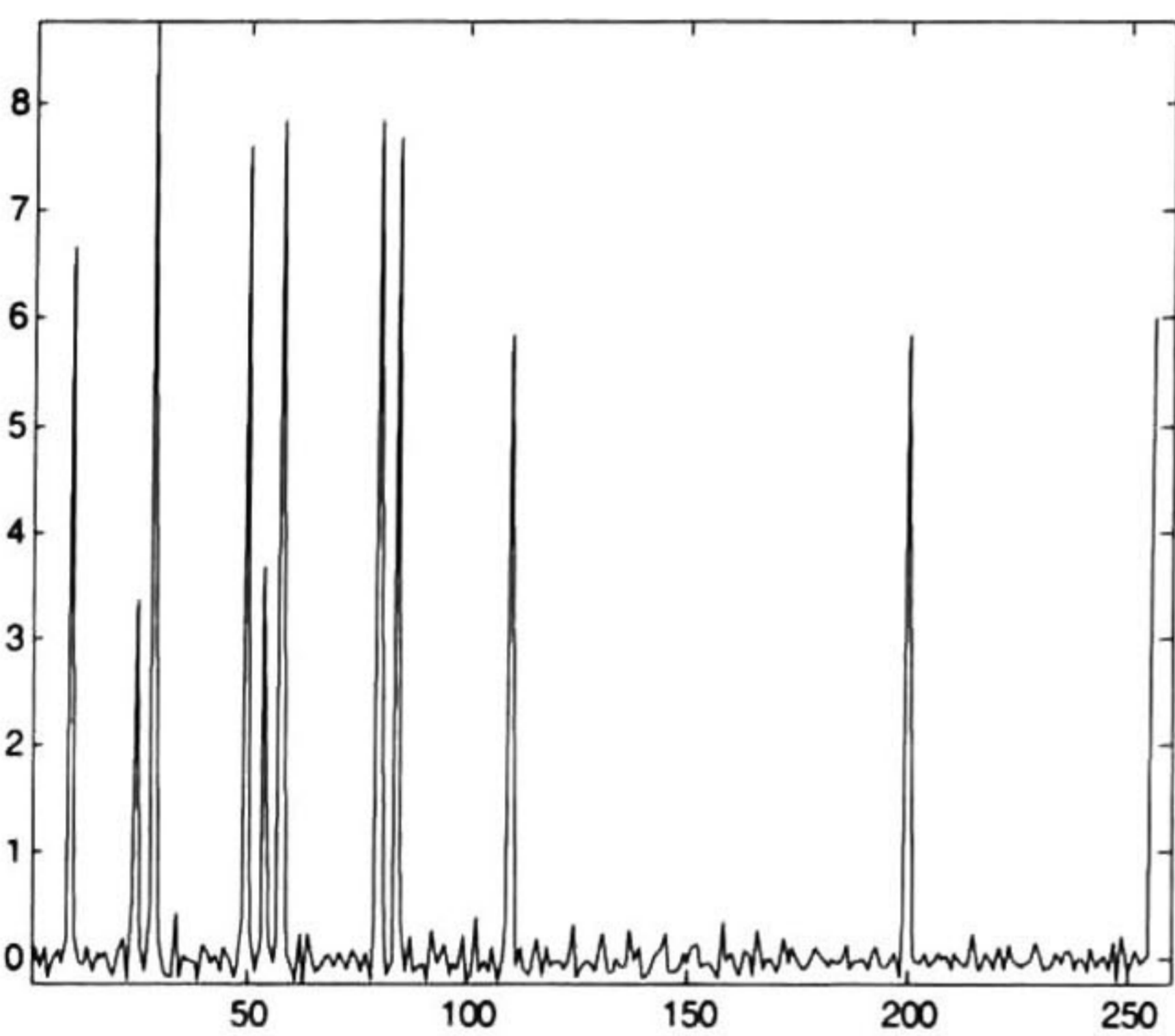
**Tabla 4.47.** Respuestas con SNR = 6 dB, K = 15 y SSF<sub>3</sub>.



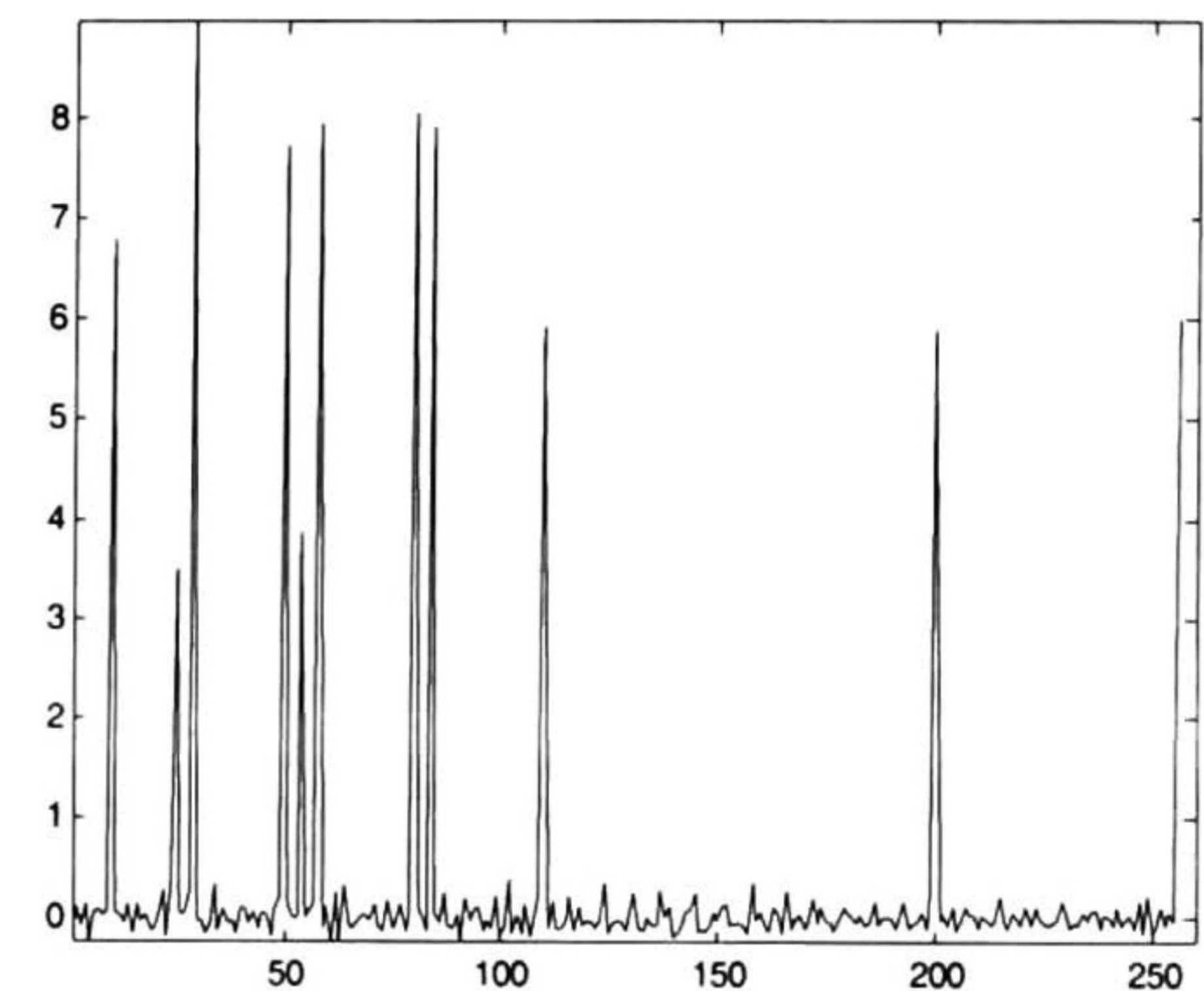
(a) Señal original v



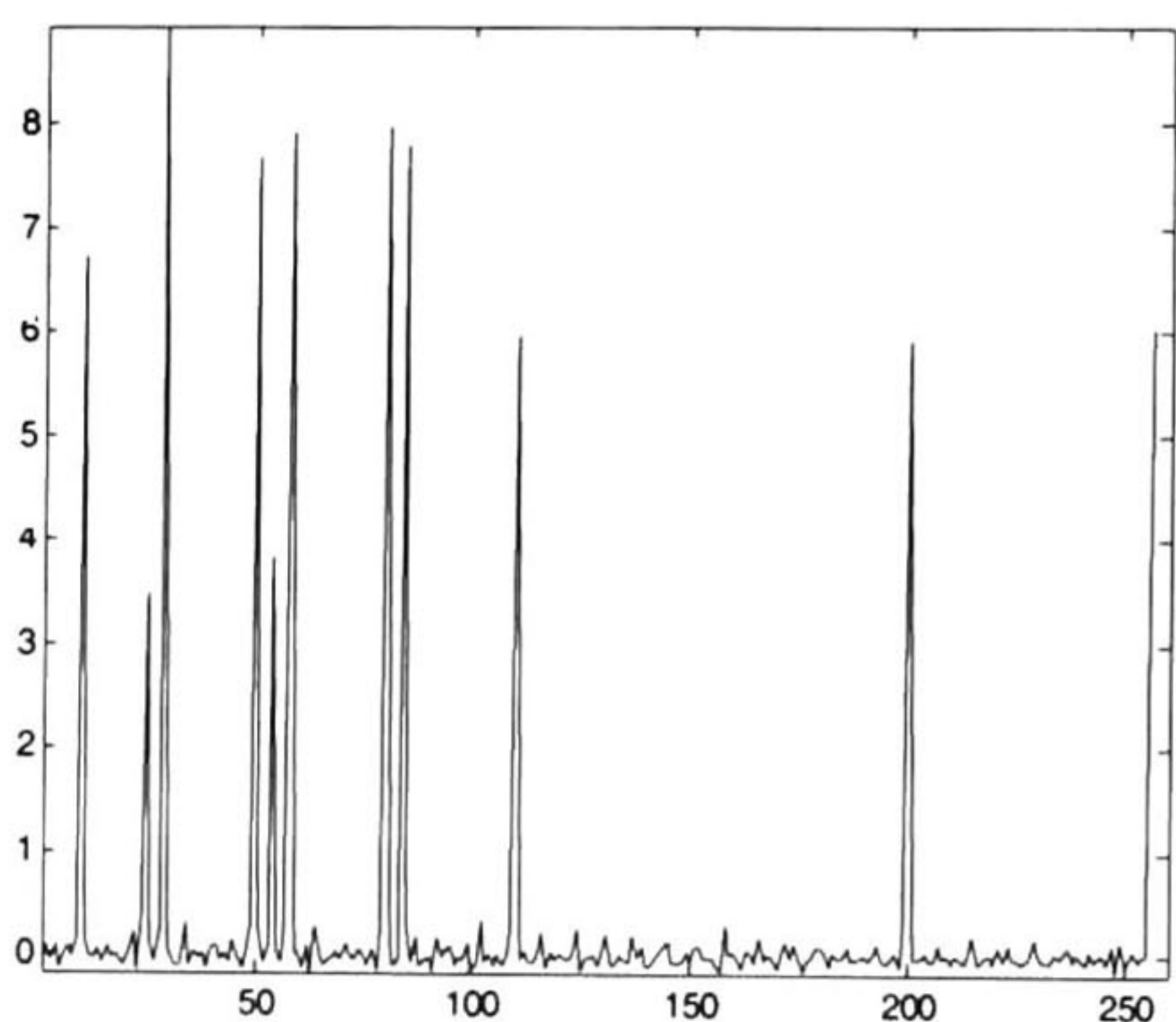
(b) Señal con ruido



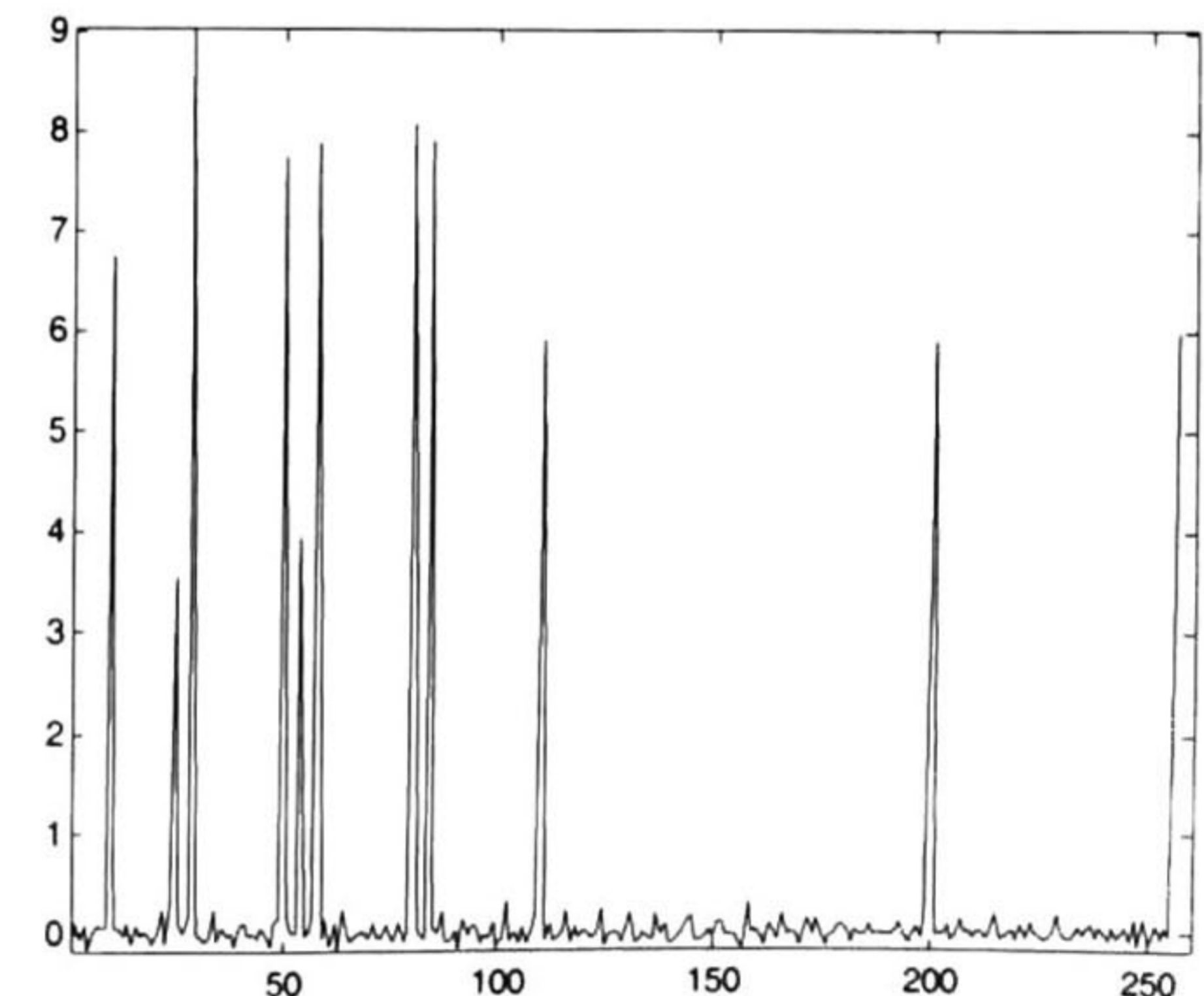
(c) Estimación de 49.6128 dB a 2 iteraciones con el método CLS



(d) Estimación de 51.0079 dB a 2 iteraciones con el método WCLS



(e) Estimación de 52.2956 dB a 40 iteraciones con el método CLS



(f) Estimación de 53.2744 dB a 40 iteraciones con el método WCLS



### 4.2.3 Comparación de resultados cuantitativos notables

Los resultados cuantitativos se obtuvieron al utilizar la definición del IOSNR. Si el valor de IOSNR es mayor entonces se obtiene un mejoramiento de la razón de señal a ruido (SNR) en la reconstrucción de la señal original. Los valores de IOSNR mayores se obtuvieron utilizando como conocimiento a priori la estimación obtenida del método WCLS.

A continuación se presentan tablas de resumen de resultados obtenidos para diferentes objetivos (señal original o señal deseada).

Se puede observar que existe una mejora en la reconstrucción de la señal deseada aplicando el método RRFRI en comparación con los métodos tradicionales de reconstrucción de señales.

K	snr	SSF	IOSNR (WCLS)	IOSNR (RRFRI)
15	15	SSF <sub>3</sub>	39.27	49.26
15	5	SSF <sub>3</sub>	38.70	49.26
5	5	SSF <sub>3</sub>	20.64	26.85

**Tabla 4.48.** IOSNR en dB obtenido utilizando los datos de modelación: K = 15, K = 5, snr = 5dB y snr = 15 dB. Para un objeto  $v_1$ .

K	snr	SSF	IOSNR (WCLS)	IOSNR (RRFRI)
15	15	SSF <sub>3</sub>	39.17	49.28
15	5	SSF <sub>3</sub>	38.70	49.26
5	5	SSF <sub>3</sub>	19.15	26.85

**Tabla 4.49.** IOSNR en dB obtenido utilizando los datos de modelación: K = 15, K = 5, snr = 5dB y snr = 15 dB. Para un objeto v<sub>2</sub>.

SSF	IOSNR		IOSNR	
	(CLS)	(RRFRI)	(WCLS)	(RRFRI)
SSF <sub>3</sub>	19.77	22.98	19.74	23.01
SSF <sub>2</sub>	4.54	9.11	5.92	9.09
SSF <sub>1</sub>	4.09	5.40	5.10	5.60

**Tabla 4.50.** IOSNR en dB obtenido utilizando los datos de modelación: K = 5, snr = 6dB. Para un objeto v<sub>3</sub>.

SSF	IOSNR		IOSNR	
	(CLS)	(RRFRI)	(WCLS)	(RRFRI)
SSF <sub>3</sub>	26.93	37.37	28.93	36.50
SSF <sub>2</sub>	5.47	9.94	9.39	19.20
SSF <sub>1</sub>	9.30	9.88	10.43	10.47

**Tabla 4.51.** IOSNR en dB obtenido utilizando los datos de modelación:  $K = 5$ ,  $\text{snr} = 3\text{dB}$ . Para un objeto  $v_4$ .

### 4.3 SUMARIO

Analizando los métodos tradicionales para el procesamiento de las señales se desarrolló el método RRFRI, por medio del cual se obtiene una reconstrucción mejor de la señal de información original (con respecto a los resultados que ofrecen los métodos tradicionales).

Aplicando las diferentes funciones para el modelado del sistema (SSF) hay un claro mejoramiento en la reconstrucción de la señal original al aplicar la SSF<sub>3</sub>.

Al simular el método RRFRI se puede apreciar cualitativamente, al comparar las gráficas obtenidas y mostradas en las tablas del capítulo IV (tablas 4.1 al 4.47), que para la reconstrucción de la señal original son mejores las reconstrucciones del método WCLS (incisos (d) para todas las tablas 4.1 al 4.47) que las reconstrucciones del método CLS (incisos (c) para todas las tablas 4.1 al 4.47), apreciando la semejanza de las

reconstrucciones con la señal original, esto se debe a que el método WCLS posee grados de libertad, es decir, los parámetros que permiten ser ajustados para obtener una mejor reconstrucción.

Al utilizar el método RRFRI se aprecia claramente en los incisos (e) y (f) de las gráficas de las **tablas 4.1 al 4.47** que las reconstrucciones son mejores que en las reconstrucciones de la señal original donde no se utilizó dicho método RRFRI. Este mejoramiento se preserva aun cuando se realizó la simulación para las reconstrucciones de señales originales diferentes, esto se realizó para analizar el comportamiento del método RRFRI para diferentes posiciones y amplitudes de las muestras tomadas de las señales. Así se observa que en el método RRFRI tiene ventaja sobre los métodos tradicionales ya que puede diferenciar una muestra de la otra y puede reconstruirla, aun variando los valores del ruido.

Observando los resultados, tanto cuantitativamente como cualitativamente, al incrementar el ancho ( $K$ ) de las funciones SSF, para las reconstrucciones de los métodos CLS y WCLS, sin utilizar el método RRFRI, la resolución se pierde o es muy pobre al compararla con la que se obtiene al aplicar el método RRFRI.

## CONCLUSIONES

---

En el método determinístico CLS se resuelve el problema inverso, pero su desventaja se presenta en la regularización (Tikhonov) ya que al determinar las características métricas tanto del espacio de la señal  $V$  como del espacio del dato  $U$  ( $d^2_V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$  y  $d^2_U(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ , respectivamente) no se pueden hacer ajustes en los términos  $J_1$  y  $J_2$  de la función de costo  $J = J_1 + \alpha J_2$  que optimicen la obtención de dicha función de costo para tener una mejor estimación de la señal deseada.

El método determinístico WCLS tiene la ventaja que hace la consideración para posibles ajustes de la función de costo de manera que dicha función sea la óptima y resulte una mejor estimación de la señal deseada, este ajuste se hace por medio de las matrices de peso  $\mathbf{M}_V$  y  $\mathbf{M}_U$ , de tal manera que se pueden asignar los valores necesarios a ambas matrices para realizar los ajustes necesarios. Este método a igual que el CLS necesitan un conocimiento *a priori* de la señal deseada, siendo este  $\mathbf{m}_v$ , pero en los casos en que se cuente con las características estadísticas (su matriz de covarianza  $\mathbf{R}_v$ ) de dicha señal deseada  $\mathbf{v}$  (datos que incrementarían la mejora de la estimación deseada) los métodos CLS y WCLS no tienen la capacidad de manipularlas.

Para el caso en que se cuente con alguna de las características estadísticas de la señal deseada, por ejemplo  $\mathbf{R}_v$ , se podrá hacer uso de los métodos estadísticos BMR y RBMR, la diferencia entre el método BMR y el RBMR es que este último se utiliza cuando la señal deseada se transporta a través de un medio no homogéneo.

Por consiguiente se desarrolló un método que aprovechara las características tanto de los métodos determinísticos como de los métodos estadísticos. A dicho método se le

---

nombró método de Regularización Robusta Fusionado con Retroalimentación de Información (RRFRI).

Este método RRFRI trabaja con señales correlacionadas que se transportan en medios no homogéneos, es decir, se hace la consideración del ruido multiplicativo debido al medio y se considera que se cuenta con las dos características estadísticas de la señal a reconstruir.

El método RRFRI es un método que da la ventaja de poder seleccionar una información *a priori* inicial de la señal deseada ( $\mathbf{m}_v$ ) proveniente de un método determinístico, ya sea CLS o WCLS, para que de esta manera se manipule la información *a priori* para tener una mayor aproximación a la realidad.

Una vez obtenido el valor esperado ( $\mathbf{m}_v$ ) de la señal deseada  $\mathbf{v}$  se procede a la utilización de los métodos estadísticos. Debido a que se posee la matriz de covarianza (es decir, la segunda característica estadística  $\mathbf{R}_v$ ) de la señal deseada ( $\mathbf{v}$ ) se podrá obtener una mejor reconstrucción de dicha señal deseada aplicando el método RRFRI al compararla con la reconstrucción que se hubiere obtenido al utilizar solamente el método CLS o WCLS.

La reconstrucción obtenida de los métodos estadísticos (BMR y RBMR) se utiliza como una nueva información *a priori* de la señal deseada para el método estadístico, y se continúa en forma iterativa obteniendo nuevas estimaciones y nuevas informaciones *a priori* hasta lograr obtener una mejor reconstrucción de la señal original.

La mejoría en la reconstrucción de la señal deseada es apreciada en los resultados cuantitativos de las reconstrucciones obtenidas en las simulaciones realizadas en el capítulo IV, donde es apreciable que dichos valores cuantificados en decibeles (obtenidos con el método RRFRI) fueron más altos que los valores obtenidos con los métodos tradicionales utilizados individualmente.

---

La mejor reconstrucción de la señal deseada se debe a la alta resolución que se obtiene en la reconstrucción de la señal deseada utilizando del método RRFRI y puede ser apreciada en los resultados cualitativos del capítulo VI. Con los métodos tradicionales (CLS o WCLS), utilizados individualmente, se logra reconstruir la señal deseada a partir de una señal observada  $u$ , pero la reconstrucción sufre de pérdidas en los valores de amplitud que contenían algún (algunos) píxel (es) que forman (formaban) a la señal original. Con la utilización del método RRFRI se aprecia en las tablas de resultados del capítulo IV que esas pérdidas son considerablemente disminuidas o en el mejor de los casos son eliminadas.

[Esta página dejada en blanco intencionalmente]



---

## OBSERVACIONES PARA UN TRABAJO FUTURO: PARA UN POSIBLE MEJORAMIENTO DEL MÉTODO RRFRI

---

- Hacer el análisis comparativo de las estimaciones resultantes utilizando diferentes valores para el parámetro de regularización y para diferentes matrices de los grados de libertad, así como también hacer un análisis para comparar resultados utilizando diferentes valores de SNR debido a las perturbaciones del SFO.
- Utilizar otros métodos de estimación de la señal (como el método de la mínima varianza, representado con las siglas MV provenientes del idioma inglés: *Minimum Variance*) para que al utilizar su característica no lineal se logre mejorar las señales estimadas o reconstruidas (distribuciones espectrales de potencia PSD estimadas, *Power Spectrum Distribution*) y de este modo se restaure la señal original con una resolución mejorada.
- Considerar la implementación del método RRFRI con otras técnicas computacionales de procesamiento mejoradas, por ejemplo, utilizando Redes Neuronales.
- Aplicar el método RRFRI para investigar los resultados con la aplicación del procesamiento de imágenes y señales en dos dimensiones.

[Esta página dejada en blanco intencionalmente]

## APÉNDICE A

En este apéndice se hace referencia a consideraciones utilizadas en el desarrollo de algunas expresiones matemáticas de esta tesis.

Operaciones válidas para la traza de una matriz:

$\text{tr}\{\mathbf{ABC}\} = \text{tr}\{\mathbf{BCA}\} = \text{tr}\{\mathbf{CAB}\}$
$\mathbf{x}^+ \mathbf{A} \mathbf{x} = \text{tr}\{\mathbf{A} \mathbf{x} \mathbf{x}^+\}$
<p>Donde : <math>\mathbf{x}</math> es un vector;</p> <p><math>\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}</math> son matrices cuadradas;</p> <p><math>\text{tr}\{\mathbf{A}\}</math> es la traza de una matriz <math>\mathbf{A}</math>.</p>

**Tabla A.1.** Manipulación de matrices.

Tabla para obtener la derivada de una función con respecto a un vector real (columna izquierda) y a un vector de valor complejo (columna derecha):

Vector $\mathbf{x}$ de valor real	Vector $\mathbf{x}$ de valor complejo
$J(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$	$J(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^+ \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$
$J(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$	$J(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^+ \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 2\mathbf{a}$
$J(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 2\mathbf{A} \mathbf{x}$	$J(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^+ \mathbf{A} \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 2\mathbf{A} \mathbf{x}$

**Tabla A.2.** Fórmulas con vectores reales y complejos.

Derivando parcialmente la función  $J$  (capítulo 3) con respecto a  $\mathbf{v}$ , usando la columna derecha de la Tabla A.2, calculamos el gradiente  $\mathbf{g}(\mathbf{v})$ :

$$\mathbf{g}(\mathbf{v}) = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial (\mathbf{u}^T \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{S} \mathbf{v} - \mathbf{v}^T \mathbf{S}^T \mathbf{u} + \mathbf{v}^T \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{v} + \alpha \mathbf{v}^T \mathbf{v} - \alpha \mathbf{v}^T \mathbf{m}_v \mathbf{v} - \alpha \mathbf{m}_v^T \mathbf{v} + \alpha \mathbf{m}_v^T \mathbf{m}_v)}{\partial \mathbf{v}}$$

Para la expresión (2.2.5) tenemos que las matrices que la forman son:

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & -1 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_1^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

por lo tanto  $\mathbf{M}_v$  será:

$$\mathbf{M}_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \dots & & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} + \mathbf{m}_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

## APÉNDICE B

---

### PROGRAMA DEL MÉTODO RRFRI

---



---

#### MetodoPropuesto.m

---

```

clc;
clear;

D = 256;
    %Dimensión del dato
Ampl = 10;
    %Máxima amplitud del vector señal v
Ndelta=5e-6;
    %Densidad del ruido debido a las perturbaciones
    %del SFO(signal formation operator)
Alpha =0.1;
    %Parametro de regularización
K = 5;
    %Ancho del System Spread Funtion(SPF)
cls = 2;
    %selección del método CLS o si cls=2 del método WCLS
snr = 3;
    %snr en dB
newSNR=0;
    %newSNR=1 Nuevo valor de SNR por lo tanto de N y
    %de Rn y Rv de lo contrario newSNR=0
contador=1;
    %nuevo valor S y Sdelta
N=Ampl/(10.^(snr/10));
    %N es la densidad espectral del ruido
N=Ampl/(10.^(snr/10))

v=FormaDv(4,D,Ampl);
    %selección de vector (v) para la simulación
R=zeros(D);

L=zeros(D,1);

Vestimada1=zeros(D,1);

```

```

Vestimada2=zeros(D,1);
%:: Inicio de programa::
if contador==1

S=ssf(1,K,Ndelta,D);
    %Selección de la forma que se desea que tome
    %la matriz So
Sdelta=ssfdelta(1,K,Ndelta,D);
    %Selección de la forma que se desea que tome
    %la matriz Sdelta
end
if newSNR==1
    %Vector de ruido (n)
    Noise=zeros(D,1);
    Noise=randn(D,1)*sqrt(N);
end
%Matriz del sistema perturbado Sp
Sp=S+Sdelta;

%Vector de la señal afectado por Sp y el ruido (u)
u= Sp*v + Noise;

%Numerador del IOSNR
numerador=sum((u-v).^2);

%valores medio de la señal y el ruido, respectivamente:
mv=zeros(D,1); mn=zeros(D,1);
%Tomando como hipótesis que mv y mn son valores desconocidos

if newSNR==1
%Matrices de covarianza del ruido (Rn) y la señal (Rv)
%Rn
    Rn=N*eye(D);
%Rv
    for i=1:50,
        L1=randn(3,1)*2;
        L(floor(30+L1(1)))=6;
        L(floor(45+L1(2)))=1;
        L(floor(90+L1(3)))=4;
        R=(v+L)*(v+L)';
    end;
    Rv=R/50+0.1*eye(D);
end;
%Primera iteración CLS o WCLS

```

```

if cls==1    %CLS

    Wcls=inv(S'*S+Alpha*eye(D))*S';

    Vestimada1= Wcls*u;
end

if cls==2;    % WCLS

    Mu=(1/N)*eye(D);
    d=zeros(D,1);

    d(1)=2; d(2)=-1;
    Mv=toeplitz(d);
    Mv(1,1)=1; Mv(D,D)=1;

    W=inv(Sp'*Mu*Sp+Alpha*Mv)*Sp'*Mu;
    Vestimada1= mv+W*(u-Sp*mv);
end

% Segunda iteración
%BMR
Mu=inv(Rn); Mv=inv(Rv);
% Utilizando la hipótesis de que el valor medio de la señal
% es el estimado con el método CLS
mv=abs(Vestimada1);
Wbmr=inv(S'*Mu*S+Mv)*S'*Mu;
Vestimada2=mv + Wbmr*(u-S*mv);
denominador2=sum((Vestimada2-v).^2);
disp('IOSNR de la iteracion 2')
iosnr=10*log10(numerador/denominador2)

%Tercera iteration
%RBMR
% Matriz de correlación de las perturbaciones (Rdelta)
NSteps=50;
R=zeros(D);

for i=1:NSteps,

    R=R+Sdelta*Rv*Sdelta';
    %En la lectura es Rs=<nsns'>=Rn+<SdeltaRvSdelta'>
end

Resperada=R/NSteps;
Rdelta= Rn+Resperada;

```

---

```

Vestimada3=zeros(D,1);
mv3=abs(Vestimada2);
Mu= inv(Rn+Rdelta);
Mv= inv(Rv);
Wrbmr=inv(S'*Mu*S + Mv)*S'*Mu;
Vestimada3 = mv3+Wrbmr*(u-S*mv3);

%k-ésima iteración
Vestimadak=Vestimada3;
mvk=0; nnn

for i= 4:40

    mvk =abs(Vestimadak);
    Vestimadak =zeros(D,1);
    Vestimadak =mvk+Wrbmr*(u-S*mvk);
    snum=int2str(i);
    denominador=sum((Vestimadak-v).^2);

    if i==40

        t2=['IOSNR para RBMR para la iteración ',snum];
        disp(t2);
        iosnr=10*log10(numerador/denominador)
    end
end
figure(1)
plot(u,'k');
axis([1 D+4 min(u) max(u)]);
figure(2)
plot(Vestimada2,'k');
axis([1 D+4 min(Vestimada2) max(Vestimada2)]);
figure(3)
plot(Vestimadak,'k');
axis([1 D+4 min(Vestimadak) max(Vestimadak)]);

```



---



---

**FormaDv.m**


---



---

```
function v = FormaDv(x,D,Ampl)
```

```
v=zeros(D,1);
```

```
if x==1
```

```
    v(10,1)=0.7*Ampl;   v(25,1)=0.4*Ampl;   v(29,1)=0.9*Ampl;
    v(50,1)=0.8*Ampl;   v(54,1)=0.4*Ampl;   v(58,1)=0.8*Ampl;
    v(80,1)=0.8*Ampl;   v(84,1)=0.8*Ampl;   v(110,1)=0.6*Ampl;
    v(200,1)=0.6*Ampl;  v(256,1)=0.6*Ampl;
```

```
end;
```

```
if x==2
```

```
    v(10,1)=0.7*Ampl;   v(25,1)=0.4*Ampl;   v(29,1)=0.9*Ampl;
    v(50,1)=0.8*Ampl;   v(54,1)=0.4*Ampl;   v(58,1)=0.8*Ampl;
    v(80,1)=0.8*Ampl;   v(84,1)=0.8*Ampl;   v(110,1)=0.6*Ampl;
    v(115,1)=0.3*Ampl;  v(184,1)=0.8*Ampl;  v(210,1)=0.6*Ampl;
    v(215,1)=0.3*Ampl;  v(254,1)=Ampl;      v(256,1)=Ampl;
```

```
end;
```

```
if x==3
```

```
    v(10,1)=0.7*Ampl;   v(25,1)=0.4*Ampl;   v(29,1)=0.9*Ampl;
    v(50,1)=0.8*Ampl;   v(54,1)=0.4*Ampl;   v(58,1)=0.8*Ampl;
    v(80,1)=0.8*Ampl;   v(84,1)=0.8*Ampl;   v(110,1)=0.6*Ampl;
```

```
end;
```

```
if x==4
```

```
    v(50,1)=Ampl;       v(90,1)=Ampl;       v(95,1)=Ampl;
    v(160,1)=Ampl;     v(170,1)=Ampl;     v(180,1)=Ampl;
```

```
end;
```

---

**ssf.m**

---

```
function S=ssf(SSFo,K,Ndelta,D)
a=zeros(D,1);
S=zeros;
i=0;

% Para el SSF tipo Exponencial
if SSFo==1
    for i=1:2*floor(K/2),
        a(i+1)=exp(-i*i/(K*pi));
    end
    a(1)=1;
end

% Para el SSF tipo Sinc
if SSFo==2
    for i=1:2*floor(K/2),
        a(i+1)=abs(sin(pi*i/floor(K/2))/(pi*i/floor(K/2)));
    end
    a(1)=1;
end

% Para el SSF tipo Triangular
if SSFo==3
    for i=1:floor(K/2),
        a(i)=(-2*i)+K ;
    end
end

S=toeplitz(a);
%Matriz S
```

---

---

**ssfdelta.m**

---

---

```
function Sdelta=ssfdelta(SSFdelta,K,Ndelta,D)
b=zeros(D,1);

% Para la SSF tipo Exponencial
if SSFdelta==1
    for i=1:2*floor(K/2),
        b(i+1)=exp(-i*i/(K*pi))*randn(1,1)*sqrt(Ndelta);
    end
    %b(1)=1;
end

% Para la SSF tipo Sinc
if SSFdelta==2
    for i=1:2*floor(K/2),
        b(i+1)=abs(sin(pi*i/floor(K/2))/(pi*i/floor(K/2)))*randn(1,1)*sqrt(Ndelta);
    end
    %b(1)=1;
end

% Para la SSF tipo Triangular
if SSFdelta==3
    for i=1:floor(K/2),
        b(i)=((-2*i)+K)*randn(1,1)*sqrt(Ndelta);
    end
end

%Matriz Sdelta
Sdelta=toeplitz(b);
```



## **APÉNDICE C**

---

En las siguientes tres páginas (130, 131 y 132) se presenta el documento como se presentó originalmente en el segundo Workshop internacional de la IEEE sección Guanajuato, México del año 2002. Dicho documento fue elaborado durante los estudios de maestría en el CINVESTAV, unidad Guadalajara.

Proceedings of the IEEE Guanajuato Mexico Section 2nd International Workshop  
RANDOM FIELDS MODELING AND PROCESSES IN INHOMOGENEOUS MEDIA  
November 27-29 2002, Guanajuato, Mexico

## MATLAB SIMULATION EXPERIMENT ON RECONSTRUCTION OF SPATIAL SPECTRUM PATTERNS OF MULTIPLE WAVEFIELD SOURCES FROM THE REMOTELY SENSED DATA

Yuriy Shkvarko, Ivonne Colorado Chairez, and Joaquín Acosta Salas

CINVESTAV del IPN, Unidad Guadalajara, C.P. 45090, MEXICO  
shkvarko@cts-design.com

**ABSTRACT:** The results of the simulations of the regularization theory-based algorithms for estimation/ reconstruction of the spatial spectrum patterns (SSP) of the point-type and spatially distributed wavefield sources are presented in the context of the radar image formation experiment. The simulations were performed in the MATLAB computational environment for the family of the radar imaging algorithms that employed different modifications of the descriptive experiment design-regularization (EDR) method for SSP estimation.

*Index Terms* –Spatial spectrum pattern, radar, remote sensing, regularization, simulations.

### 1. INTRODUCTION

This paper presents the results of extended simulation study of the family of the radar image (RI) formation algorithms that employ the experiment design-regularization (EDR) method for estimation the spatial spectrum pattern (SSP) of the wavefield sources distributed in the remotely sensed environment. The EDR method is based on the use of the descriptive weighted constrained least squares optimization technique. In applications related to passive and active radar remote sensing, this method was developed in our previous studies [1]–[4]. In this paper, we are going to present the results of simulations of the family of EDR-based SSP estimation algorithms in the experiment of RI formation assuming the use of the narrowband coherent radar as an active remote sensing system. The use of MATLAB as simulation tools provided the computational efficiency and flexibility in performing the simulation experiment.

### 2. SUMMARY OF THE EDR METHODS FOR SSP ESTIMATION AND RI FORMATION

The family of the SSP estimation (reconstruction) algorithms that employ the fused EDR technique derived in [1], [4] comprises the following basic estimators.

1. The general *EDR estimator* of the SSP (in the discretized vector form) is defined as follows,

$$\hat{\mathbf{B}}_{EDR} = \{\mathbf{F}\mathbf{Y}\mathbf{F}^+\}_{diag} = \{\mathbf{K}_{A,\alpha}\mathbf{S}^+\mathbf{R}_N^{-1}\mathbf{Y}\mathbf{R}_N^{-1}\mathbf{S}\mathbf{K}_{A,\alpha}\}_{diag} = \{\mathbf{K}_{A,\alpha}\text{aver}_{j \in J} \{\mathbf{Q}_{(j)}\mathbf{Q}_{(j)}^+\}\mathbf{K}_{A,\alpha}\}_{diag}, \quad (1)$$

where  $\mathbf{F} = \mathbf{K}_{A,\alpha}\mathbf{S}^+\mathbf{R}_N^{-1}$  is the image formation operator (IFO),  $\mathbf{K}_{A,\alpha} = (\mathbf{S}^+\mathbf{R}_N^{-1}\mathbf{S} + \alpha\mathbf{A}^{-1})^{-1}$  is the so-called reconstructive operator,  $\alpha$  is the regularization parameter and  $\mathbf{A}$  is the weight matrix. Parameter  $\alpha$  and matrix  $\mathbf{A}$  comprise the EDR degrees of freedom of the estimator (1). In (1),  $\hat{\mathbf{B}} = \{\hat{\mathbf{D}}^{-1}\}_{diag}$  defines the estimate of the  $K$ -D SSP vector  $\mathbf{B} = \{\langle\mathbf{E}\mathbf{E}^+\rangle\}_{diag}$ ;  $\mathbf{Y} = \text{aver}\{\mathbf{U}_{(j)}\mathbf{U}_{(j)}^+\} = \hat{\mathbf{R}}_U$  is the estimate of the  $M$ -by- $M$  data correlation matrix;  $\mathbf{U}_{(j)}$  is the  $j$ th realization of the  $M$ -D complex measurement data vector  $\mathbf{U} = \mathbf{S}\mathbf{E} + \mathbf{N}$ , where  $\mathbf{E}$  is the original  $K$ -D vector of the discrete-form approximation of the random complex object scattering function (SF).  $K$ -by- $M$  matrix  $\mathbf{S}$  is referred to as the linear signal formation operator (SFO) and  $\mathbf{N}$  is the observation noise. Also, in (1),  $\mathbf{Q}_{(j)} = \{\mathbf{S}^+\mathbf{R}_N^{-1}\mathbf{U}_{(j)}\}$  is an output of the matched spatial processing algorithm with noise whitening that assumes the given noise correlation matrix  $\mathbf{R}_N$ , (in this study we accept the robust white noise model, i.e.  $\mathbf{R}_N^{-1} = (1/N_0)\mathbf{I}$  with the noise intensity  $N_0$  pre-estimated by some means [2]).

2. The *robust spatial filtering (RSF) algorithm* is constructed as modification of (1) for the adjustments  $\mathbf{A} = \mathbf{I}$  and  $\alpha = N_0/B_0$ , i.e. the inverse of the signal-to-noise ratio (SNR), where  $B_0$  is the prior average gray level of the SSP. In that case, the IFO  $\mathbf{F}$  is recognized to be the Tikhonov's robust spatial filter

$$\mathbf{F}_{RSF} = (\mathbf{S}^+\mathbf{S} + (N_0/B_0)\mathbf{I})^{-1}\mathbf{S}^+. \quad (2)$$

3. The simplest *matched spatial filtering (MSF) SSP estimation algorithm* is given by the simplified version of (2) for an assumption,  $\alpha \gg \|\mathbf{S}^+\mathbf{S}\|$ , which yields

$$\mathbf{F}_{MSF} \approx \text{const} \cdot \mathbf{S}^+, \quad (3)$$

hence, the rough image is formed applying the adjoint SFO  $\mathbf{S}^+$

4. The *adaptive spatial filtering (ASF) algorithm* is constructed as modification of (1) for the case of an arbitrary zero-mean noise with the correlation matrix  $\mathbf{R}_N$ , the equal importance of the systematic and noise error measures [1], i.e.  $\alpha = 1$ , and the solution dependent weight matrix  $\mathbf{A} = \mathbf{D} = \text{diag}(\hat{\mathbf{B}})$ . In this case, the IFO is recognized to be the adaptive spatial filter

$$\mathbf{F}_{ASF} = (\mathbf{S}^+\mathbf{R}_N^{-1}\mathbf{S} + \mathbf{D}^{-1})^{-1}\mathbf{S}^+\mathbf{R}_N^{-1} \quad (4)$$

As it was shown in [1] the ASF estimator,  $\hat{\mathbf{B}}_{ASF} = \{\mathbf{F}_{ASF}\mathbf{Y}\mathbf{F}_{ASF}^+\}_{\text{diag}}$ , coincides with the celebrated *minimum variance distortionless response (MVDR) estimator* [4],  $\hat{\mathbf{B}}_{MVDR} = \{(\mathbf{S}^+\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{S})^{-1}\}_{\text{diag}}$ , for the white observation noise model, in which case  $\hat{\mathbf{B}}_{MVDR}$  can be expressed as  $\hat{\mathbf{B}}_{MVDR} = \{\mathbf{F}_{MVDR}\mathbf{Y}\mathbf{F}_{MVDR}^+\}_{\text{diag}}$  with the IFO

$$\mathbf{F}_{MVDR} = (\mathbf{S}^+\mathbf{S} + N_0\mathbf{D}^{-1})^{-1}\mathbf{S}^+ \quad (5)$$

Such  $\mathbf{F}_{MVDR}$  is recognized to be the IFO that minimizes the Bayesian risk of the estimates  $\hat{\mathbf{B}}$ , thus the SSP estimator (1) with the IFO (5) can be addressed also as the *robust Bayesian minimum risk (RBMR) estimator*. It is obvious now that the MVDR and BMR estimators may be considered as particular cases of the uniform EDR image formation algorithm (1) under the model assumptions similar to that for the adaptive spatial filter i.e.  $\mathbf{A} = \text{diag}(\hat{\mathbf{B}})$ ,  $\alpha = 1$ . Hence, by controlling these EDR degrees of freedom,  $\mathbf{A}$ ,  $\alpha$ , one can proceed from the general EDR estimator (1) to the variety of different image formation algorithms, from the simplest matched spatial filtering to the adaptive beamforming techniques.

### 3. SIMULATION EXPERIMENT

The aim of the simulation experiment was to investigate the performances of three EDR-based SSP estimators that employed IFOs (2), (3) and (5). We simulated a conventional side-looking imaging radar (i.e. the radar array was constructed by the moving antenna) with the SFO factored along two axes in the image plane: the azimuth and the range. The simulations were performed over the azimuth direction for a particular (arbitrary) range gate. Thus, the 1-D simulated images in the azimuth direction (in a particular range gate) are presented below. Also, we examined the behavior and performance indices of these estimators for different simulated scenes of the SSPs. In the paper text we present only some simulation results related to one of the scenes depicted in Figure 1.a. Figure 1.b presents the image of this scene formed using the MSF method, i.e.  $\hat{\mathbf{B}}_{MSF}$ , contaminated with 8% additive white noise. Figure 1.c displays the images  $\hat{\mathbf{B}}_{RSF}$  formed applying IFO (2). That is reported as the constrained least squares (CLS) estimate of the SSP. Figure 1.d presents the descriptively modified RSF algorithm with the weight matrix  $\mathbf{A}$  of a three diagonal Toeplitz form [2]. This result is reported as the weighted CLS (WCLS) estimate of the SSP. Figure 1.e displays the image formed applying the robustified version of the optimal IFO (5) where the estimate  $\hat{\mathbf{D}}^{-1}$  was computed iteratively using the image of Figure 1.c as the initial guess for the iterative procedure. Finally, Figure 1.f displays the image formed applying the same robustified version of the optimal IFO (5) where the estimate  $\hat{\mathbf{D}}^{-1}$  was computed iteratively using the image of Figure 1.d as the

initial guess for the iterative procedure. Four iterations were performed in both cases. These images are reported as the robustified *WCLS* (*RWCLS*) estimates of the SSP. The advantages of the well designed imaging experiments (cases *WCLS*, *RWCLS* and iterative *RWCLS*) over the cases of poorer designed experiment (cases *MSF* and *CLS*,) are evident. Due to the performed regularized inversion the resolution was improved in the cases of applying the *WCLS*, and *RWCLS* estimators. These results qualitatively demonstrate that with some proper adjustment of the degrees of freedom in the general EDR estimator (1), one could approach the quality of the optimal *MVDR* image formation method avoiding the cumbersome adaptive computations. The optimization of such adjustments is a matter of the further studies.

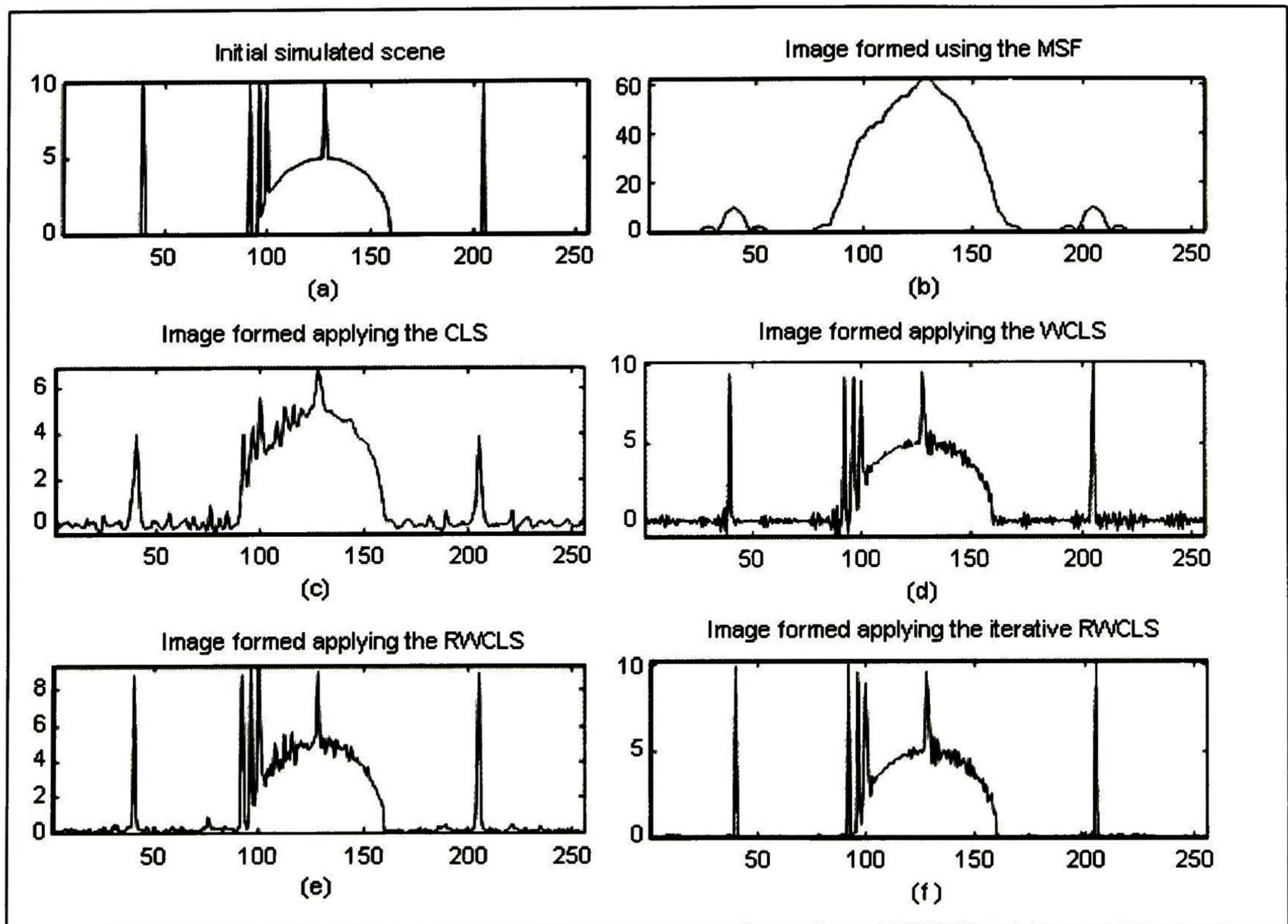


Fig. 1. Simulation results.

[1] Y.V. Shkvarko, and J.L. Leyva-Montiel, "Theoretical Aspects of Array Radar Imaging via Fusing the Experiment design and Regularization Techniques", in *Proc. SAM2002 Second IEEE Sensor Array Multichannel Signal Processing Intern. Workshop*, Washington, USA, 2002.

[2] Y. V. Shkvarko, Y.S. Shmaliy, R. Jaime-Rivas, and M. Torres-Cisneros, "System fusion in passive sensing using a modified Hopfield network", *Journal of the Franklin Institute*, vol. 338, June 2001, pp. 405-427.

[3] V.F. Kravchenko, V.I. Ponomaryov, R. Jaime-Rivas, and Y.V. Shkvarko, "On the theory of Bayes maximum entropy methods of radio image formation", *Radiotekhnika i Elektronika*, (English Edition: *Journal of Communications Technology and Electronics*), Russian Academy of Sciences, vol. 45, no. 8, pp. 872-875, 2000.

[4]. S.E. Falkovich, S.E. Ponomaryov, and Yu. V. Shkvarko, *Optimal Reception of the Spase-Timr Signals in Ch annels With Scattering*, (In Russian), Radio and Communication Press, Moscow, 1989.



---

## REFERENCIAS

---

- [1] D. E. Dudgeon and R. M. Merserau, *Multidimensional Digital Signal Processing*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, New Jersey, 1984.
- [2] S. L. Marple Jr., *Digital Spectral Analysis with Applications*, Prentice-Hall, 1987.
- [3] S. M. Kay, *Modern spectral estimation*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1988.
- [4] R. C. González, R. E. Woods, *Tratamiento digital de imágenes*, Addison-Wesley / Diaz de Santos, 1996.
- [5] L. E. Franks, *Teoría de la señal*, Editorial Reverté, S. A., 1975.
- [6] E. L. Waltz and J. Llinas, *Multisensor Data Fusion*, Artech House, Boston, 1990.
- [7] D. R. Wehner, *High-Resolution Radar*, Boston, Artech House, 2d ed., 1994.
- [8] J. B. Abbis, B. J. Brames and M. A. Fiddy, "Superresolution Algorithms for a Modified Neural Network", *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. 39, pp. 1516-1523, 1991.
- [9] D. L. Hall, *Mathematical Techniques in Multisensor Data Fusion*, Artech House, Boston-London, 1992.
- [10] D. Ingman and Y. Merlis, "Maximum entropy signal reconstruction with neural networks", *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 3, pp. 195-201, Feb. 1992.
- [11] B. Kosko, *Neural network for signal processing*, Prentice Hall, New York, 1992.
- [12] A. Cichocki and R. Unbehauen, "Neural networks for solving systems of linear equations and related problems" *IEEE Trans. Circuits and System*, vol. 39, pp. 123-138, 1992.
- [13] H. D. Li, M. Kallergi, W. Qian, V. K. Jain and L. P. Clarke, "Neural network with maximum entropy constraint for nuclear medicine image restoration", *Optical Engineering*, vol. 34(5), pp. 1431-1440, 1995.

- 
- [14] L. Rebollo-Neira and J. Fernandez-Rubio, "The continuous wavelet transform as a maximum entropy solution of the corresponding inverse problem," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 47, pp. 2046–2050, July 1999.
- [15] Yu. V. Shkvarko, S. Medvedev, R. Jaime and J. Ruiz, "Sensor and method fusion in remote sensing imagery with neural networks", *IEEE APS Int. Symp.*, Salt Lake City, UTA, USA, July 2000, IEEE Catalog Number 00CH37118, vol. 4, pp. 1960-1963, 2000.
- [16] Yu. V. Shkvarko, Y. S. Shmaliy, R. Jaime-Rivas and M. Torres-Cisneros, "System fusion in passive sensing using a modified Hopfield network", *J. Franklin Inst.*, vol. 338, pp. 405–427, June 2001.
- [17] Y. T. Zhou, R. Chellappa, A. Vaid and B. K. Jenkins, "Image restoration using a neural network", *IEEE Trans. Acoust. Speech Sign. Process*, vol. 36, pp. 38-54, 1988.
- [18] J. Capon, "High-Resolution Frequency-Wavenumber Spectrum Analysis", *Proc. IEEE*, vol. 57, pp. 1408-1410, 1969.
- [19] R. N. McDonough, "Application of the maximum-likelihood method and maximum entropy method for array processing", of *Nonlinear Methods of Spectral Analysis*, S. Haykin (editors), New York: Wiley, pp. 181–244, 1984.
- [20] J. Munier and G. L. Delisle, "Spatial Analysis in Passive Listening Using Adaptive Techniques", *Proc. IEEE*, vol. 75, No. 11, pp. 21-37, 1987.
- [21] J. K. Paik and A. K. Katsaggelos, "Image Restoration Using a Modified Hopfield Network", *IEEE Trans. Image Proc.*, vol. 1, pp. 49-63, 1992.
- [22] Yu. V. Shkvarko and Yu. T. Kostenko, "Combined Statistical Regularization and Experiment Design Theory-Based Nonlinear Techniques for Extended Object Imaging from Remotely Sensed Data", *SPIE Int. Symp. on Aerospace Sensing*, Orlando, FL, April 1994, vol. SPIE 2232, pp. 309-317, 1994.
- [23] Yu. V. Shkvarko, R. Jaime-Rivas, S. Avila-Garcia and S. Medvedev, "Neural Network with Data-Based Control of Parameters for Environmental Imagery", *IASTED Int. Symp. on Control and Applications*, Cancun, MX, March 2000, vol. CA2000, pp. 61-67, 2000.

- 
- [24] Yu. V. Shkvarko, "Estimation of Wavefield Power Distribution in the Remotely Sensed Environment: Bayesian Maximum Entropy Approach", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 50, No. 9, pp. 2333-2346, 2002.
- [25] N. P. Galatsanos, A. K. Katsaggelos, B. T. Chin and A. D. Hillery, "Least Squares Restoration of Multichannel Images", *IEEE Trans. Acoust. Speech Sign. Proc.*, vol. 39, pp. 2222-2236, 1991.
- [26] A. Farina, *Antenna-Based Signal Processing Techniques for Radar Systems*, Artech House, Boston, 1992.
- [27] S. Haykin, *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*, Macmillan, New York, 1994.
- [28] A. Zaknich, "Introduction to the Modified Probabilistic Neural Network for General Signal Processing Applications", *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. 46 (7), pp. 1980-1990, 1998.
- [29] L. G. Cutrona, "Synthetic Aperture Radar", in *Radar Handbook*, M. I. Skolnic (Ed.), 2d ed., McGraw-Hill, Boston, 1990.
- [30] F. M. Henderson and A. V. Lewis, *Principles and Applications of Imaging Radar, Manual of Remote Sensing*, 3rd ed., vol. 3, John Wiley & Sons Inc., New York, 1998.
- [31] R. J. Schalkoff, *Digital Image Processing and Computer Vision*, John Wiley & Sons, Inc., 1989.
- [32] G. Franceschetti, Riccardo Lanari and Richard Lanari, *Synthetic Aperture Radar Processing*, Boca Raton, FL, CRC Press, 1999.
- [33] S. Haykin and A. Steinhardt, *Adaptive Radar Detection and Estimation*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1992.
- [34] K. Venkatesh Prasad, "Inverse Problems, Statical Mechanics and Simulated Annealing" of *The digital signal processing handbook*, Vijay Madisetti and Douglas Bennett Williams (editors), CRC Handbook Published in cooperation with IEEE Press, vol. 28, USA, 1998.
- [35] R. Molina and A. Katsaggelos, "Restoration of severely blurred images using stochastic and deterministic relaxation algorithms in compounded Gauss-Markov

- random fields”, *The Journal of the Pattern Recognition Society*, vol. 33, pp. 555-571, 2000.
- [36] M. R. Banham and A. K. Katsaggelos, “Digital image restoration”, *IEEE Signal Processing Magazine*, pp. 24-41, March 1997.
- [37] M. Skolnik, *Radar Handbook*, 2d ed., McGraw-Hill, 1990.
- [38] B. Edde, *Radar: Principles, Technology, Applications*, Prentice Hall PTR, 1992.
- [39] T. K. Moon, W. C. Stirling, *Mathematical Methods and Algorithms for Signal Processing*, Prentice Hall, 1999.
- [40] V. K. Ingle and J. G. Proakis, *Digital Signal Processing using Matlab*, PWS Publishing Company a division of International Thomson Publishing Inc., 1997.
- [41] S. M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Detection Theory*, Prentice Hall PTR, 1993.
- [42] A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, McGraw-Hill, Inc., 1991.
- [43] A. Hero, “Signal Detection and Classification”, of *The digital signal processing handbook*, Vijay Madisetti and Douglas Bennett Williams (editors), CRC Handbook Published in cooperation with IEEE Press, vol. 13, U. S. A., 1998.
- [44] A. Mesarovic, N. P. Galatsanos and A. K. Katsaggelos, “Regularized Constrained Total Least Squares Image Restoration”. *IEEE Trans. Image Proc.*, vol. 4, pp. 1096-1108, February 1995.
- [45] J. M. Mendel, “Estimation Theory and Algorithms: From Gauss to Wiener to Kalman”, of *The digital signal processing handbook*, Vijay Madisetti and Douglas Bennett Williams (editors), CRC Handbook Published in cooperation with IEEE Press, vol. 15, U. S. A., 1998.
- [46] Stephen Barnett, *Matrices: methods and applications*, Oxford University Press Inc., New York, 1990.
- [47] P. Stoica and R. Moses, *Introduction to Spectral Analysis*, Upper Sanddle River, Prentice-Hall, 1997.
- [48] A. N. Tikhonov and V. Y. Arsenin, *Solution of Ill-Posed Problems*. Washington, DC: W. H. Winston, 1977.

- 
- [49] Yu. V. Shkvarko, I. Colorado-Chairez, J. Acosta-Salas, "Matlab Simulation Experiment on Reconstruction of Spatial Spectrum Patterns of Multiple Wavefield Sources from the Remotely Sensed Data", *RFMPIM 2002 Guanajuato México*, November 2002.
- [50] Yu. V. Shkvarko, "Theoretical Aspects of Unifying Regularization and Bayesian Estimation Methods for Enhanced Imaging with Remotely Sensed Data", *IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing* (to be published), 2003.
- [51] Yu. V. Shkvarko and J. L. Leyva-Montiel, "Theoretical Aspects of Array Radar Imaging Via Fusing the Experiment Design and Regularization Techniques", in proc. *SAM 2002 IEEE Workshop*, Washington, USA, pp. 361-366, 2002.
- [52] Yu. V. Shkvarko, "Lecturas del curso de procesamiento digital de señales, DSP", Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, unidad Guadalajara, México, Enero 2002.



**Centro de Investigación y de Estudios Avanzados  
del IPN  
Unidad Guadalajara**

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, aprobó la tesis:

**INVESTIGACION Y SIMULACION DE ALGORITMOS DE ALTA RESOLUCION PARA  
LA ESTIMACION RECONSTRUIDA DE SEÑALES CORRELACIONADAS DEGRADADAS  
CON RUIDO**

del (la) C.

**Ivonne Del Carmen COLORADO CHAIREZ**

el día 27 de Febrero de 2004.

**Dr. Yuriy SHKVARKO**  
Investigador 3C  
CINVESTAV GDL  
Jalisco

**Dr. Jose Luis LEYVA MONTIEL**  
Investigador Cinvestav 3B  
CINVESTAV GDL  
Jalisco

**Dr. Deni Librado TORRES ROMÁN**  
Profesor Investigador 3A  
CINVESTAV GDL  
Jalisco



*CINVESTAV*  
*BIBLIOTECA CENTRAL*



SS1T000007365