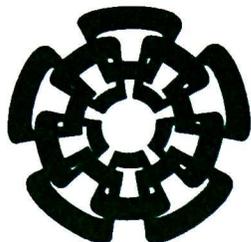




QT-694-SS1

Don- 2012

xx(199698.1)



Centro de Investigación y de Estudios Avanzados  
del Instituto Politécnico Nacional  
Unidad Guadalajara

# **Identificación de Modelos de Bajo Orden de Sistemas de Potencia Mediante Algoritmos Generalizados de Prony**

Tesis que presenta:  
**José Armando Jiménez Zavala**

para obtener el grado de:  
**Maestro en Ciencias**

en la especialidad de:  
**Ingeniería Eléctrica**

Director de Tesis  
**Dr. Arturo Román Messina**



CLAS. CT-00598  
ADRES. CT-694-SS1  
FECHA: 28-08-2012  
PROCES: Don-2012

ID: 199556

# **Identificación de Modelos de Bajo Orden de Sistemas de Potencia Mediante Algoritmos Generalizados de Prony**

**Tesis de Maestría en Ciencias  
Ingeniería Eléctrica**

Por:

**José Armando Jiménez Zavala**  
Ingeniero Eléctrico

Instituto Tecnológico de Morelia 2003-2007

Becario de CONACYT, expediente no. 234455

Director de Tesis  
**Dr. Arturo Román Messina**

# Agradecimientos

A mi familia por todo el apoyo que me han brindado a lo largo de mi carrera.

A mi asesor de tesis, Dr. Arturo Román Messina por todo el conocimiento, apoyo y consejos que me otorgó para lograr la culminación de este documento.

A mis amigos y compañeros del CINVESTAV por sus consejos y amistad que hicieron de ésta una magnífica etapa de mi vida.

A los profesores del área de potencia por todos los conocimientos otorgados.

Al CONACYT por el apoyo económico brindado durante los estudios de maestría.

# Resumen

La estabilidad de pequeña señal de los sistemas eléctricos de potencia se estudia convencionalmente a partir de modelos matemáticos linealizados, que pretenden recoger todos los factores que pueden influir sobre su comportamiento. La creciente complejidad y sofisticación de los sistemas actuales, la mayor dimensión de las redes eléctricas y el desarrollo de sistemas de medición de sincrofasores han propiciado la aparición y desarrollo de técnicas de identificación de modelos basadas en el análisis de la respuesta del sistema a una perturbación o señal de prueba.

En esta tesis se investiga la aplicación de técnicas de identificación de modelos basadas en el análisis de Prony para identificar modelos lineales dinámicos de bajo orden del sistema. El problema de análisis de estabilidad se aborda al tratar al sistema de potencia como un sistema lineal desconocido el cual se desea identificar mediante un modelo lineal de orden óptimo.

Se proponen e implementan técnicas de extracción modal, identificación de orden e identificación de funciones de transferencia basadas en modelos de espacios de estados.

El desempeño de los métodos estudiados se verifica mediante estudios de simulación en modelos de prueba y modelos obtenidos de estudios de estabilidad transitoria.

# Abstract

Small-signal stability analysis of power systems is conventionally carried out by using linearized mathematical models which aims to capture all factors that may influence the system behavior. The increasing complexity and sophistication of actual systems, the greater dimension of electric networks and development of synchrophasor measurement systems have generated the appearance and improvement of model identification techniques based on system response analysis to a disturbance or probing signal.

The application of model identification techniques based on Prony analysis to identify low-order dynamic linear models of the system is investigated in this thesis. The issue of stability analysis is addressed by modeling the power system as an unknown linear system which wants to identify through a linear model of optimal order.

Modal extraction techniques, order identification and transfer function identification based on state space models are proposed and implemented.

Simulation studies in both test models and models obtained from transient stability studies are used to verify the performance of studied methods.

# Índice General

## Capítulo 1

Introducción.....	1
1.1 Antecedentes.....	1
1.2 Revisión de trabajos previos.....	5
1.3 Objetivos de la tesis.....	7
1.4 Aportaciones de la tesis.....	8
1.5 Estructura de la tesis.....	9
1.6 Referencias .....	10

## Capítulo 2

Métodos de Identificación de Modelos de Orden Reducido.....	12
2.1 Introducción al problema de identificación .....	13
2.2 El Método de Prony .....	17
2.3 Algoritmo para Realización de Eigensistemas .....	22
2.4 Método Matrix Pencil .....	25
2.5 Referencias .....	31

## Capítulo 3

Identificación de Funciones de Transferencia .....	34
3.1 Modelos de funciones de transferencia .....	35
3.2 Identificación de funciones de transferencia.....	36
3.2.1 Identificación aplicando impulsos a la entrada.....	37
3.2.2 Modelos de identificación para el caso de entradas simples.....	41
3.2.3 Identificación basada en secuencias de pulsos .....	45

3.2.4 Identificación basada en la aplicación de un escalón.....	50
3.3 Representación en el espacio de estados .....	53
3.4 Implementación del algoritmo propuesto.....	56
3.5 Referencias .....	60

## Capítulo 4

Estimación del Error de Aproximación en Modelos Lineales.....	62
4.1 Antecedentes.....	63
4.2 Métodos para la reducción de orden.....	64
4.2.1 Método de Realización Balanceada .....	65
4.2.2 Algoritmo de Realización de Eigensistemas .....	65
4.2.3 Criterio de Información de Akaike.....	66
4.3 Algoritmo para la reducción de orden.....	66
4.3.1 Metodología .....	67
4.3.2 Descripción del método .....	68
4.3.3 Observaciones.....	70
4.4 Estimación del error de aproximación .....	71
4.5 Procedimiento para la obtención de la función de transferencia.....	72
4.6 Referencias .....	75

## Capítulo 5

Aplicación a la Identificación de Modelos de Funciones de Transferencia .....	77
5.1 Construcción y análisis de los escenarios de prueba .....	78
5.1.1 Escenarios de prueba basados en señales sintéticas .....	78
5.1.2 Escenario de prueba 3: Ejemplo de identificación basado en mediciones .....	79

5.2 Evaluación de la exactitud de la aproximación .....	81
5.3 Análisis del escenario de prueba 1 .....	81
5.3.1 Respuesta a un pulso .....	82
5.3.2 Respuesta a una secuencia de pulsos .....	86
5.4 Pruebas realizadas al sistema 2 .....	88
5.4.1 Respuesta a un pulso .....	88
5.4.2 Respuesta a una secuencia de pulsos .....	90
5.4.3 Respuesta a una entrada escalón .....	92
5.5 Prueba realizada al sistema 3 .....	93
5.6 Resumen de los resultados .....	95
5.7 Referencias .....	96

## Capítulo 6

Resultados con modelos reducidos .....	97
6.1 Pruebas a realizar .....	98
6.2 Reducción de orden para el Sistema 1 .....	98
6.2.1 Reducción aplicada a la Prueba 1.1 .....	98
6.2.2 Construcción de la función de transferencia.....	99
6.3 Reducción de orden para el Sistema 2 .....	102
6.3.1 Reducción aplicada a la prueba 2.3 .....	102
6.3.2 Construcción de la función de transferencia.....	103
6.4 Reducción de orden para el Sistema 3 .....	107
6.4.1 Primera reducción.....	107
6.4.2 Construcción de la función de transferencia.....	107
6.5 Conclusiones de los resultados obtenidos.....	111

6.6 Referencias .....	111
Capítulo 7	
Conclusiones y Líneas Futuras de Trabajo.....	112
7.1 Conclusiones generales .....	112
7.2 Trabajos futuros.....	113

# Índice de Figuras

<b>Figura 2.1</b> Representación del sistema lineal discreto .....	14
<b>Figura 3.1</b> Sistema utilizado. Modelo genérico de entorno acústico ruidoso .	36
<b>Figura 3.2</b> Entrada aplicada .....	42
<b>Figura 3.3</b> Función de transferencia del sistema incluyendo condiciones iniciales .....	45
<b>Figura 3.4</b> Entrada aplicada .....	45
<b>Figura 3.5</b> Diagrama de bloques del algoritmo para la identificación de funciones de transferencia.....	59
<b>Figura 4.1</b> Proceso para la reducción de orden.....	73
<b>Figura 5.1</b> Función de transferencia del primer sistema de prueba.....	78
<b>Figura 5.2</b> Función de transferencia del primer sistema de prueba.....	79
<b>Figura 5.3</b> Función de transferencia del segundo sistema de prueba .....	79
<b>Figura 5.4</b> Ilustración del escenario de prueba 3.....	80
<b>Figura 5.5</b> Función de transferencia del tercer sistema de prueba .....	80
<b>Figura 5.6</b> Entrada aplicada al sistema 1, prueba 1. ....	82
<b>Figura 5.7</b> Comparación de la respuesta en el tiempo para el sistema 1, prueba 1. ....	85
<b>Figura 5.8</b> Entrada aplicada al sistema 1, prueba 2. ....	86

<b>Figura 5.9</b> Comparación de la respuesta en el tiempo para el sistema 1, prueba 2.....	88
<b>Figura 5.10</b> Entrada aplicada al sistema 2, prueba 1.....	89
<b>Figura 5.11</b> Comparación de la respuesta en el tiempo para el sistema 2, prueba 1.....	90
<b>Figura 5.12</b> Entrada aplicada al sistema 2, prueba 2.....	91
<b>Figura 5.13</b> Comparación de la respuesta en el tiempo para el sistema 2, prueba 2.....	92
<b>Figura 5.14</b> Comparación de la respuesta en el tiempo para el sistema 2, prueba 3.....	93
<b>Figura 5.15</b> Entrada aplicada al sistema 3.....	94
<b>Figura 5.16</b> Comparación de la respuesta en el tiempo para el sistema 3.....	94
<b>Figura 6.1</b> Función de transferencia real del sistema 1 en forma ZPK.....	100
<b>Figura 6.2</b> Función de transferencia identificada para el sistema 1.....	100
<b>Figura 6.3</b> Respuesta en el tiempo del sistema real y el identificado reducido.....	101
<b>Figura 6.4</b> Comparación para el sistema 1, empleando 4 y 10 modos.....	101
<b>Figura 6.5</b> Función de transferencia real del sistema 2 en forma ZPK.....	103
<b>Figura 6.6</b> Función de transferencia real del sistema 2 en forma ZPK.....	103
<b>Figura 6.7</b> Respuesta en el tiempo del sistema real y el identificado reducido.....	104
<b>Figura 6.8</b> Comparación para el sistema 2, empleando 10 modos en el modelo reducido.....	105
<b>Figura 6.9</b> Comparación de magnitud y fase de la función de transferencia para el sistema 2, empleando 10 modos en el modelo reducido.....	106
<b>Figura 6.10</b> Función de transferencia real del sistema 3 en forma ZPK.....	108

**Figura 6.11** Función de transferencia identificada del sistema 3. .... 108

**Figura 6.12** Comparación para el sistema 3, empleando 4 modos en el modelo reducido. .... 109

**Figura 6.13** Comparación de magnitud y fase de la función de transferencia para el sistema 3, empleando 4 modos en el modelo reducido. .... 109

**Figura 6.14** Comparación de magnitud y fase de la función de transferencia para el sistema 3, empleando un modelo reducido de 6° y 12° orden. .... 110

# Índice de Tablas

<b>Tabla 3.1</b> Obtención de residuos a partir de diversos tipos de entrada.....	52
<b>Tabla 5.1</b> Resultados para el sistema 1, prueba 1 .....	84
<b>Tabla 5.2</b> Valores seleccionados de la tabla 5.1.....	85
<b>Tabla 5.3</b> Resultados obtenidos para la prueba 2 en el sistema 1.....	87
<b>Tabla 5.4</b> Resultados obtenidos para la prueba 1 en el sistema 2.....	89
<b>Tabla 5.5</b> Resultados obtenidos para la prueba 2 en el sistema 2.....	91
<b>Tabla 5.6</b> Resultados obtenidos para la prueba 3 en el sistema 2.....	92
<b>Tabla 5.7</b> Resultados obtenidos para la prueba en el sistema 3.....	94
<b>Tabla 5.8</b> Pruebas realizadas a los diferentes sistemas. ....	96
<b>Tabla 6.1</b> Primera reducción para el sistema 1. ....	99
<b>Tabla 6.2</b> Primera reducción para el sistema 2. ....	102
<b>Tabla 6.3</b> Primera reducción para el sistema 3 .....	107

# Capítulo 1

## Introducción

*En el capítulo uno se hace un resumen de los resultados existentes en la literatura sobre el proceso de identificación del contenido modal y modelos dinámicos de bajo orden a partir de la respuesta medida del sistema.*

*Se identifican las principales motivaciones para el estudio de técnicas de identificación y se identifican las principales limitaciones de los métodos de análisis existentes. A continuación se resume el proceso de identificación y se describen los objetivos y aportaciones de la tesis.*

*Se concluye el capítulo con la descripción de la estructura de la memoria.*

### **1.1 Antecedentes**

En los últimos años se ha producido un importante avance con la aplicación de técnicas de identificación modal a los sistemas de potencia. En este sentido, la identificación de sistemas se define como el proceso para obtener una representación matemática de un sistema físico a través de datos experimentales [1], [2].

Convencionalmente, el análisis de la respuesta del sistema ante perturbaciones pequeñas se ha realizado mediante técnicas de análisis de valores propios de modelos analíticos del sistema, linealizados alrededor de una condición de operación.

Esto presenta fundamentalmente tres tipos de inconvenientes [3]-[5]:

1. El orden del sistema requerido para modelar sistemas de gran escala puede ser excesivo y es sólo válido para una condición específica de operación
2. Es difícil extraer de un modelo de alto orden aquellos modos de interés (el comportamiento oscilatorio) para el estudio de fenómenos localizados o el diseño de controles
3. No es posible analizar en forma sistemática el efecto de perturbaciones o pruebas en el sistema sobre el comportamiento de modos de interés

La inclusión de nuevos sistemas de control, el efecto de la dinámica inmodelada del sistema e incertidumbre, así como la variación de la carga hace que el modelado del sistema sea un problema muy difícil de abordar mediante métodos analíticos. A ello debe agregarse la creciente complejidad y sofisticación de los sistemas actuales de potencia que resulta en modelos dinámicos con varias decenas de miles de estados.

La extracción de modelos paramétricos de bajo orden del sistema a partir de mediciones o pruebas del sistema constituye un problema de interés en el estudio y control de los sistemas eléctricos de potencia. Una vez que se ha identificado un modelo matemático que describe al sistema, es posible identificar el efecto de perturbaciones específicas sobre las componentes modales de interés, así como analizar su sensibilidad ante cambios reales en la operación del sistema [6]-[8].

Un ejemplo típico en el que puede ser deseable estimar un número reducido de modos del sistema, es el de diseño de los parámetros de control de un dispositivo FACTS o estabilizador de potencia (PSS). En este caso, los modos de interés corresponden a aquellos en los que el controlador tiene una influencia significativa a nivel global o que describen aspectos de interacción entre el dispositivo y el sistema.

Los métodos de identificación basados en la excitación sistemática de un sistema constituyen una extensión natural al desarrollo de programas de gran escala de cálculo de valores propios en sistemas de potencia. Así, por ejemplo, el uso de técnicas de identificación es una alternativa rápida y barata a la experimentación en campo y pueden utilizarse para estimar modelos del sistema a partir de mediciones resultantes de fallas en la red.

Estos métodos se clasifican en función del método de identificación empleado, el tipo de relación entrada salida y el modelo de identificación utilizado. Dentro de estas técnicas tienen especial importancia aquellas orientadas a la extracción selectiva de modos de oscilación. Destacan entre estos, los modelos de Prony y sus variantes y los métodos de identificación basados en modelos de estado [7]-[10].

La precisión del modelo obtenido dependerá, entre otros factores, de la apropiada selección de las señales de entrada/salida del sistema por lo que un determinado sistema identificado mostrará ciertas características dominantes dependiendo de la selección de dichos datos.

En la actualidad las aplicaciones más frecuentes de las técnicas de identificación son la monitorización del comportamiento de modos electromecánicos, la identificación de funciones de transferencia de elementos de control y el estudio y caracterización de procesos oscilatorios a nivel global [7],[9].

Algunas de las aplicaciones para la identificación de funciones de transferencia son, de acuerdo a [5]:

- El diseño, prueba y ajuste de sistemas de control
- El análisis de señales de control
- La validación de software
- La verificación de modelos del sistema
- El análisis de robustez e incertidumbre

En la literatura se pueden encontrar varias aproximaciones utilizando métodos de Prony y sus variantes. Entre los trabajos que estudian diferentes aspectos de este método se encuentran el de Hauer *et al.* [4],[6],[9], Sanchez-Gasca *et al.* [3],[10] y Hasami y Feliachi [8], entre otros investigadores.

Los sistemas de potencia experimentan frecuentemente oscilaciones de baja frecuencia de origen electromecánico con un amortiguamiento ligero. Estas oscilaciones son provocadas, entre otros factores, por perturbaciones estructurales como pueden ser eventos de conmutación en líneas, salidas de generadores y fallas en las redes de transmisión y distribución [8].

Debido a la complejidad y tamaño de muchos sistemas, realizar un modelo preciso con dimensiones lo suficientemente pequeñas para fácil manejo tomando como base las leyes de la física resulta en ocasiones en modelos que por sus características son inabordables mediante técnicas convencionales de análisis. Alternativamente, a través de técnicas de identificación modal es posible obtener un modelo del sistema a partir de datos de entrada/salida en forma computacionalmente económica [9].

El orden de una función de transferencia en un sistema, sin embargo, es tan grande como el número de estados que se requieren para modelar el sistema [5] lo que, en sistemas de potencia significa un modelo muy grande que requiere de una capacidad computacional considerable. Es por ello, que las técnicas de reducción de orden son tan importantes en esta área de estudio. En consecuencia, es de crucial importancia el desarrollo de herramientas de identificación de modelos de bajo orden. Este es el problema que se aborda en este trabajo de tesis.

El análisis se centra en la extracción de modelos lineales paramétricos de bajo orden basados en perturbaciones planeadas a la red de transmisión y/o generación. Otros aspectos de interés son la determinación del tipo de perturbación o excitación deseada para excitar un conjunto de modos de interés, su magnitud y la selección de la señales de salida para el estudio.

Se presenta a continuación una breve revisión de estos trabajos, con objeto de situar el presente trabajo, destacando los aspectos más relevantes y característicos en el contexto de esta investigación.

## **1.2 Revisión de trabajos previos**

En los últimos años, se han desarrollado diversas técnicas de identificación de sistemas. En muchos casos, esto se hace con el fin de obtener información de interés específico para una cierta área del conocimiento, por lo que una determinada técnica de identificación empleada, por ejemplo, para la ingeniería aeroespacial estará enfocada en obtener parámetros diferentes a los deseados en los sistemas eléctricos de potencia [2].

Existe una gran bibliografía sobre algoritmos de identificación convencionales, entre los que destacan los basados en el método de Prony y sus variantes que se dirigen hacia la extracción de componentes modales y funciones de transferencia [4]-[6]. Entre las alternativas disponibles destacan los algoritmos basados en modelos de espacio de estados [7], aproximaciones de Padé [1] y métodos de Fourier [9].

La mayoría de los métodos de identificación se han desarrollado para analizar sistemas de una sola entrada y una sola salida. La presencia creciente de mediciones fasoriales sincronizadas sin embargo, permite mejorar la información sobre el sistema conduciendo a modelos de entrada-múltiple y salida múltiple (MIMO).

En la literatura se pueden encontrar aproximaciones utilizando técnicas multivariadas [7], pero el caso de mayor interés práctico corresponde al de una sola entrada (por ejemplo, una falla) y múltiples salidas. En este sentido, la identificación de funciones de transferencia requiere del conocimiento de la señal de entrada aplicada al sistema, para calcular los parámetros del numerador en las funciones de transferencia [5].

En el caso específico de los sistemas eléctricos de potencia, se han desarrollado varias técnicas de identificación basadas en métodos de análisis lineal. Entre otros métodos se pueden citar el método de Prony [5],[6], el Algoritmo para la Realización de Eigensistemas (ERA) [2], [10], el método ARMA (Auto-Regresive Moving Average) [5], y el método Matrix Pencil [11], [12], por mencionar algunos. Cada uno de ellos comparte en gran medida los mismos objetivos de estudio, y puede exhibir ventajas específicas para cierto tipo de aplicaciones.

El análisis de Prony es una metodología que extiende el análisis de Fourier al estimar directamente la frecuencia, amortiguamiento, magnitud y fase de las componentes modales de una señal medida [6]. Con respecto al análisis e identificación de oscilaciones electromecánicas, hay que destacar los trabajos de Hasanovic y Feliachi [8] sobre la identificación de funciones de transferencia de bajo orden y el diseño de controles y de Hauer *et al.* [13] y más recientemente de Koessler *et al.* [14] sobre la identificación de funciones de transferencia a partir de señales de prueba. En este sentido se han hecho importantes avances en esta metodología para el estudio de oscilaciones electromecánicas y el diseño de controladores.

Las aplicaciones de estos métodos en sistemas de potencia son numerosas. Ejemplos destacados de métodos de identificación basados en esta idea son los programas comerciales desarrollados por la compañía eléctrica BPA [6], [9] y más recientemente métodos híbridos para sistemas MIMO [7].

El interés por la estimación de estas funciones viene justificado por su utilidad en predicción y el diseño de controles. Por un lado es importante notar que para la estimación de los parámetros del modelo, así como de funciones de transferencia, basta con disponer de señales de excitación con características deseables para la aplicación de métodos lineales.

Por otro, un aspecto fundamental que no ha sido suficientemente explorado hasta ahora es el relacionado al orden mínimo del modelo

identificado. Otros problemas incluyen la incorporación del efecto de condiciones iniciales y el tratamiento de sistemas con polos múltiples.

El problema que se plantea al utilizar técnicas de identificación para obtener funciones de transferencia, y en particular modelos de bajo orden, es la complejidad propia del fenómeno implicando quien genera la necesidad de la especificación detallada de múltiples factores que no siempre son conocidos o cuantificables. Así, por ejemplo, se pueden mencionar la dinámica inmodelada, la incertidumbre y el ruido en la medición y procesamiento de las señales medidas.

### **1.3 Objetivos de la tesis**

El principal objetivo de esta tesis se orienta al desarrollo de nuevas técnicas de análisis y detección de componentes modales y modelos lineales de bajo orden, así como de herramientas de monitorización de modos de oscilación.

Otros métodos identificados son:

1. Desarrollo de métodos automáticos de identificación de componentes modales y funciones de transferencia de orden reducido a partir de mediciones o pruebas en el sistema. Métodos automáticos para la extracción de funciones de transferencia
2. Disponer de métodos automáticos de detección de modos oscilatorios dominantes. Dichos métodos pueden usarse posteriormente para el diseño de sistemas de control
3. Integrar los métodos de identificación a herramientas de análisis y caracterización de procesos oscilatorios

Por último, se considera deseable desarrollar herramientas computacionales de uso práctico para el estudio dinámico de sistemas de gran dimensión.

El problema se aborda desde dos perspectivas distintas: la aplicación del análisis de Prony extendido para la identificación de sistemas y la utilización de técnicas de reducción de orden basadas en el Criterio de Información de Akaike.

La utilización conjunta de estas técnicas permite identificar funciones de transferencia de bajo orden que representan las dinámicas del sistema original con un nivel de error muy bajo.

Se busca también, la identificación de un modelo lineal de espacios de estados del sistema identificado para su uso posterior en el diseño de sistemas de control. El trabajo de investigación asociado a esta tesis se integra a otras herramientas de análisis, caracterización y control de procesos oscilatorios.

#### **1.4 Aportaciones de la tesis**

Los principales aspectos de esta tesis que constituyen aportaciones originales son las siguientes:

1. El desarrollo de un método híbrido para la identificación de componentes modales y modelos de bajo orden del sistema basado en la aplicación de análisis de Prony y modelos de espacios de estado
2. El desarrollo e implementación de métodos iterativos para el cálculo de modelos óptimos de bajo orden derivados del criterio de información de Akaike
3. La generalización de métodos existentes para el cálculo de funciones de transferencia al caso de señales arbitrarias de entradas basadas en funciones pulso y el tratamiento de polos repetidos en funciones de transferencia obtenidas a través de la excitación del sistema con señales de prueba
4. La evaluación de criterios para evaluar el error de aproximación de modelos lineales de orden reducido y el desarrollo de algoritmos

eficientes para el cálculo de modelos lineales de la respuesta del sistema a señales de prueba

## **1.5 Estructura de la tesis**

El presente trabajo de investigación se divide en siete capítulos.

En el capítulo dos se hace un resumen de los resultados existentes en la literatura sobre el proceso de identificación del contenido modal y modelos dinámicos de bajo orden a partir de la respuesta medida del sistema y se presenta una introducción a las principales técnicas de análisis de señales comúnmente empleadas en el estudio de sistemas eléctricos de potencia.

En el capítulo tres se aborda el problema de identificación de sistemas lineales empleando el método de Prony. Se extienden los resultados existentes sobre métodos de identificación para el caso de excitación del sistema con señales de prueba. En cada caso, se analizan y se obtienen modelos lineales basados en la respuesta medida del sistema y se dan expresiones recursivas para los estimadores de componentes modales. Asimismo, se propone un modelo híbrido para la derivación de modelos de estado asociados a la dinámica identificada. Se concluye el capítulo con la descripción del procedimiento de identificación propuesto.

El capítulo cuatro se desarrolla e implementa un método para la reducción de orden de modelos generados a partir del método de identificación de Prony y el Criterio de Información de Akaike. Además se presenta una breve descripción de algunos métodos para reducción de orden. Este es el caso de mediciones obtenidas a partir de simulaciones en el dominio del tiempo de la respuesta del sistema a perturbaciones o pruebas planeadas en el sistema.

En el capítulo cinco se describe la aplicación de los métodos de análisis desarrollado al problema de la determinación de modos de oscilación y modelos asociados de bajo orden del sistema. Se analizan ejemplos sintéticos y obtenidos

de la simulación en el dominio del tiempo de la respuesta del sistema a señales de prueba.

En el capítulo seis se aborda el problema de la determinación de modelos de orden reducido basados en los modelos de alto orden identificados en el capítulo tres. Como resultado de las aproximaciones utilizadas, se identifica el número óptimo de modos del sistema que permiten caracterizar un proceso medido en forma eficiente y se identifican los modos con un fuerte significado físico.

Finalmente, en el capítulo siete se presentan las conclusiones del trabajo realizado así como se habla de las posibilidades que hay para ampliar el presente trabajo de tesis.

## 1.6 Referencias

- [1]. Tøffner-Claussen, Steen 1964- *System Identification and Robust Control: a Case Study Approach*. Springer, 1996.
- [2]. J.-N. Juang, *Applied System Identification*, Prentice Hall, 1994.
- [3]. J. J. Sanchez-Gasca, "Identification of Power System Low Order Linear Models Using the ERA/OBS Method", Power Systems Conference and Exposition, 2004. IEEE PES
- [4]. D. J. Trudnowski, J. M. Johnson, J. F. Hauer. "SIMO System Identification from Measured Ringdowns" Proceedings of the American Control Conference. Philadelphia, Pennsylvania, June 1988.
- [5]. J. R. Smith, F. Fatehi, C. S. Woods, J. F. Hauer and D. J. Trudnowski, "Transfer Function Identification in Power System Applications". Paper No. 92SM537-1PWRS, IEEE/PES Summer Power Meeting Seattle, Washington, 1992.
- [6]. J. F. Hauer, "Application of Prony Analysis to the Determination of Modal Content and Equivalent Models for Measured Power System

- Response*". Transactions on Power Systems Vol. 6, No. 3, August 1991.
- [7]. I. Kamwa, Luc Gérin-Lajoie, "*State-Space System Identification—Toward MIMO Models for Modal Analysis and Optimization of Bulk Power Systems*". IEEE Transactions on Power Systems, February, 2000.
- [8]. A. Hasanovic, A. Feliachi, "*Low Order Transfer Function Identification and Robust PSS Control Design*", in Proc. IEEE Power Engineering Society General Meeting, 2003.
- [9]. D. A. Pierre, D. J. Trudnowski and J. F. Hauer, "*Identifying Linear Reduced-Order Models for Systems with Arbitrary Initial Conditions Using Prony Signal Analysis*" IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 37, pp. 831-835, June 1992.
- [10]. J.J. Sanchez-Gasca, "*Computation of Turbine-Generator Subsynchronous Torsional Modes from Measured Data Using the Eigensystem Realization Algorithm*" Proc. IEEE Power Eng. Soc. Winter Meet., vol 3, pp. 1272-1276, 2001.
- [11]. Hua, Y., Sarkar T. K., "*Matrix Pencil Method for Estimating Parameters of exponentially damped/undamped sinusoids in noise*", IEEE Trans. on Acoustics, Speech, & Signal Processing, Vol. 38, No. 5, May 1990, pp. 814-824.
- [12]. Sarkar T. K., Pereira o., "*Using the Matrix Pencil Method to Estimate the Parameters of a Sum of a Complex Exponentials*". IEEE Trans. on Antennas Propagation Magazine, Vol 37, pp. 48-55, Feb. 1995.
- [13]. J. F. Hauer, C. J. Demeure and L. L. Scharf, "*Initial Results in Prony Analysis of Power System Response Signals*", IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 5, pp. 80-90, Feb. 1990.
- [14]. R. J. Koessler, F. S. Prabhakara, A. H. Al-Mubarak, "*Analysis of Oscillations with Eigenanalysis and Prony Techniques*" Power Engineering Society, General Meeting, 2007.

## Capítulo 2

# Métodos de Identificación de Modelos de Orden Reducido

*Los métodos de identificación de sistemas lineales han experimentado un considerable avance en los últimos años. Este avance ha resultado, por una parte, en el desarrollo de técnicas de identificación de funciones de transferencia. Pero, además, determinados procedimientos han dado lugar a la creación de técnicas numéricas eficientes aplicables a datos obtenidos de pruebas en el sistema.*

*En este capítulo se introduce el concepto de estimación modal, explicando brevemente sus aspectos principales y aplicaciones más importantes. Se presenta el fundamento teórico de los métodos de Prony utilizables en señales de medición o prueba. Estos métodos deben ser capaces de procesar en forma automática, mediciones con alto contenido de ruido y otros artefactos.*

*Frente a estimadores de otra clase, su principal ventaja desde el punto de vista práctico es que los modelos obtenidos tienen una interpretación física directa. Desde el punto de vista teórico no imponen condiciones a la señal deseada además de exhibir ventajas numéricas respecto a métodos alternos.*

*Finalmente, se exponen las limitaciones que tiene el análisis convencional de Prony y se sugieren áreas posibles de desarrollo.*

## 2.1 Introducción al problema de identificación

Los métodos de identificación de sistemas lineales en sistemas de potencia comienzan a desarrollarse a principios de los 80 en Norteamérica y Europa.

En esta sección se explican brevemente algunos de los fundamentos de las técnicas de identificación de modelos de orden reducido para sistemas no lineales que operan alrededor de una condición de equilibrio usadas y estudiadas en esta tesis y se introduce la notación utilizada.

Considere un sistema lineal descrito por el modelo de espacios de estados

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.1)$$

$$y = Cx + Du \quad (2.2)$$

donde  $\dot{x}$  denota la diferenciación de  $x$  con respecto al tiempo,  $u$  es el vector de entradas,  $y$  es el vector de salidas, y  $x$  es el vector de estados.

De la teoría de sistemas lineales, la evolución en el tiempo del  $i$ ésimo estado,  $x_i$ , puede expresarse en la forma

$$x_i(t) = \sum_{i=1}^n r_i x_{i0} e^{\lambda_i t} = \sum_{i=1}^n a_i e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \theta_i) \quad (2.3)$$

donde el parámetro  $r_i$  es el residuo del modo  $i$ ,  $x_{i0} = x_i(t_0)$  representa la condición inicial y  $\lambda_i$  es el  $i$ ésimo valor propio de la matriz  $A$ .

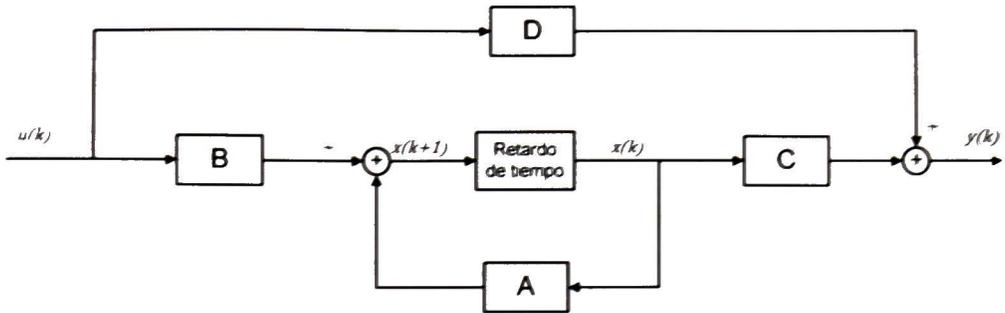
La representación en tiempo discreto del sistema lineal (2.1), viene dada por

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (2.4)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad (2.5)$$

donde  $k$  es el tiempo de muestreo.

En la figura 2.1 se muestra la representación en diagramas de bloques del modelo descrito anteriormente.



**Figura 2.1** Representación del sistema lineal discreto

Existen varios métodos de identificación de modelos de orden reducido basados en métodos de error de mínimos cuadrados [15]. Dado un conjunto de mediciones, estos métodos estiman una representación de la forma (2.1). Una vez determinada la representación de estado, es posible utilizar técnicas de reducción de modelos para determinar un modelo de orden reducido [16].

Una alternativa al problema de identificación de modelos de la forma (2.3) consiste en la utilización de datos de entrada/salida. Este tipo de métodos permiten considerar explícitamente las condiciones iniciales del sistema y pueden considerar salidas múltiples.

Los métodos actuales de identificación basados en este concepto pueden dividirse en clásicos (paramétricos) y no paramétricos. Atendiendo a la estrategia de medición, los métodos de identificación de sistemas utilizados en sistemas de potencia pueden clasificarse en dos grandes grupos [17] :

1. Métodos de identificación de modelos de bajo orden de la forma (2.3).
2. Métodos de identificación de funciones de transferencia basados en mediciones de la entrada y salida

En la primera categoría se incluyen técnicas tales como los métodos de Prony y Matrix Pencil, el método de Eigen Realizations (ERA) y técnicas basadas en el análisis de Fourier. En el segundo grupo destacan algoritmos basados en métodos autoregresivos de promedio variable (ARMA), variantes del método de Prony y técnicas basadas en descomposición en valores singulares.

Existen otras formulaciones de identificación basadas en métodos de error de mínimos cuadrados. Su utilización en sistemas de potencia, sin embargo, no se ha generalizado debido a que requieren excitación persistente y a su elevado costo computacional para sistemas de orden elevado [18].

Considere con el objeto de introducir estas ideas, que el sistema de potencia puede representarse mediante un modelo lineal y sean  $u(t)$  y  $y(t)$  la entrada y salida del sistema en un tiempo  $t$ .

Sea  $G(s)$  la estimación lineal en el dominio de Laplace de la función de transferencia del sistema de potencia definida por la función racional del tipo

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} & (2.6) \\
 &= \frac{G(s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \dots + a_1s + a_0)}{s^n + b_{m-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0} \\
 &= \frac{G(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}
 \end{aligned}$$

donde  $N(s)$  y  $D(s)$  son polinomios y el grado de  $N$  es mayor que el grado de  $D$ . Los parámetros  $a$  y  $b$  son constantes.

A partir de la definición anterior se puede deducir que, la función de transferencia  $G(s)$  admite una descomposición en fracciones parciales de la forma

$$G(s) = \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s - p_i} \quad (2.7)$$

para el caso de raíces complejas conjugadas simples, donde cada polo  $p_i$  corresponde a un valor propio  $\lambda_i$  de la matriz  $A$  y  $K_i$  es el residuo de la función de transferencia asociado al polo  $p_i$ .

Cualquier función variante en el tiempo puede ser aproximada mediante series de funciones exponenciales complejas en un intervalo de tiempo definido. Sin embargo, en la mayoría de los casos no es posible obtener un ajuste perfecto debido a diversos factores tales como:

- La respuesta del sistema no es completamente lineal
- La señal de entrada no excita la totalidad de los modos del sistema

El problema que se plantea en esta memoria consiste en minimizar el error entre la señal variante en el tiempo y la respuesta de la función propuesta. Los parámetros a considerar para diseñar una función que reproduzca las dinámicas del sistema original son la magnitud, fase y amortiguamiento de la señal. Métodos representativos de estas técnicas para la identificación de funciones de transferencia y análisis modal se describen en [2], [3].

De entre ellos, es notable el avance que se ha hecho a lo largo de los años en tres métodos:

- El método de Prony
- El Algoritmo para Realización de Eigensistemas
- El método Matrix Pencil

En los siguientes apartados se introducen brevemente algunas técnicas de identificación modal en el contexto de este trabajo. La discusión del problema de identificación de funciones de transferencia se difiere al capítulo 3.

## 2.2 El Método de Prony

Uno de los modelos más sencillos que se pueden proponer para describir un proceso oscilatorio es el formado por una serie de funciones senoidales. El ejemplo más relevante de estas técnicas es el método de Prony.

El análisis de Prony es una herramienta para estudio de señales fuera de línea con la cual es posible determinar las componentes modales de las muestras obtenidas de una determinada señal [4], [5]. Es una extensión del análisis de Fourier con la que es posible obtener tanto el amortiguamiento como la frecuencia de la señal.

Sea  $y(t)$  una señal consistente de  $N$  muestras igualmente espaciadas. El análisis de Prony aproxima dicha señal mediante una función de la forma:

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^p A_i e^{\sigma_i t} \cos(2\pi f_i t + \Phi_i) \quad (2.8)$$

En la ecuación anterior  $p$  representa el orden de la aproximación y  $A, \sigma, f$  representan respectivamente, la amplitud, amortiguamiento, frecuencia y fase de cada componente modal.

Mediante el uso de la fórmula de Euler, la ecuación anterior puede expresarse en la forma alterna

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^p A_i e^{\sigma_i t} \left[ \frac{e^{j(2\pi f_i t + \Phi_i)} + e^{-j(2\pi f_i t + \Phi_i)}}{2} \right] \quad (2.9)$$

Si se define ahora  $\omega_i = 2\pi f_i$ , es posible reescribir (2.9) como

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^p \frac{1}{2} A_i \left[ e^{j\Phi_i} e^{(\sigma_i + j\omega_i)t} + e^{-j\Phi_i} e^{(\sigma_i - j\omega_i)t} \right]$$

o bien:

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^p \frac{1}{2} A_i e^{\pm j\Phi_i} e^{\lambda_i t} \quad (2.10)$$

siendo  $\lambda_i = \sigma_i \pm j\omega_i$  los valores propios del sistema

El análisis sugiere que es posible aproximar una señal medida mediante una función de señales senoidales amortiguadas. Formalmente se escribe,

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^p B_i e^{\lambda_i t} \quad (2.11)$$

donde  $B_i$  es el peso o residuo de la señal para la  $i$ ésima componente. Los  $B_i$  y  $\lambda_i$  pueden ser reales o complejos. En el caso de  $\lambda_i$  complejos, éstos representan los modos oscilantes y se presentan en pares conjugados, por otro lado para el caso de los  $\lambda_i$  reales corresponden a los modos críticamente amortiguados.

La ecuación (2.11) es la aproximación de una señal con características determinadas como la ausencia de ruido, tendencia, desplazamientos y efectos extraños en la señal.

Como se ha mencionado, la señal muestreada  $y(t)$  consiste de  $N$  muestras de la forma  $y(t_k) = y(k)$ , para  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ , con espaciado uniforme  $\Delta t$ .

A partir de esta relación, se puede obtener una representación en tiempo discreto para la ecuación (2.10) donde cada valor obtenido deba corresponder a cada valor de las muestras obtenidas de la señal original. Como resultado, el modelo discreto adopta la forma

$$\hat{y}(k) = \sum_{i=1}^p B_i z_i^k \quad (2.12)$$

$$z_i = e^{\lambda_i \Delta t}$$

Donde:

$\hat{y}(t), \hat{y}(k)$  es la aproximación de Prony para  $y(t)$

$B_i$  es el residuo de la señal

$\lambda_i$  modo de la señal en el dominio  $s$

$z_i$  modo de la señal en el plano  $z$

$p$  es el orden de la aproximación

La aplicabilidad de este enfoque reside, por consiguiente, en la habilidad para extraer las componentes modales de interés.

El procedimiento básico para calcular los modos y residuos de la señal consta de los siguientes pasos [7],[8]:

**1. Construir un modelo discreto de predicción lineal que ajuste las mediciones.**

En la ecuación (2.12) se asume que la señal muestreada es función lineal de los valores pasados, es decir, satisface su propia ecuación característica [6],[9]:

$$y(k) = a_1y(k-1) + a_2y(k-2) + \dots + a_ny(k-n) \quad (2.13)$$

de donde se puede inferir que la muestra  $y(k+1)$  dependerá de los valores pasados, esto es,  $y(k+1) = a_1y(k) + a_2y(k-1) + \dots + a_ny(k-n+1)$ .

Por consiguiente, si se dispone de un número  $N$  de muestras de la señal, es posible aplicar de manera recursiva la ecuación anterior  $N-n$  veces para construir un modelo lineal de la forma

$$\begin{bmatrix} y(n-1) & y(n-2) & \dots & y(0) \\ y(n) & y(n-1) & \dots & y(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(N-2) & y(N-3) & \dots & y(N-n-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(n) \\ y(n+1) \\ \vdots \\ y(N-1) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

lo que se puede representar como

$$Y_{-1} * \mathbf{a} = Y_{+1} \quad (2.15)$$

donde  $Y_{-1} \in \mathbb{R}^{(N-n) \times n}$  es una matriz que contiene las muestras pasadas, mediante las cuales, asociándolas con los coeficientes del vector  $a \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  se obtiene el vector de soluciones  $Y_{+1} \in \mathbb{R}^{(N-n) \times 1}$

Del conjunto anterior de ecuaciones se conoce la matriz de muestras y el vector de soluciones por lo que fácilmente se pueden obtener los coeficientes  $a$ . Claramente, para el caso en el que  $n \neq N/2$  se tiene un sistema sobre determinado por lo que la solución se obtiene por mínimos cuadrados.

## ***2. Determinar las raíces del polinomio característico asociado con el modelo de predicción lineal del paso anterior***

Se construye el siguiente polinomio:

$$z^n - a_1 z^{n-1} - a_2 z^{n-2} - \dots - a_n = 0 \quad (2.16)$$

Dado que de la solución de (2.15) se obtienen los coeficientes  $a$ , las raíces  $z_i$  del polinomio anterior pueden ser calculadas.

Las raíces obtenidas de (2.16) son en su gran mayoría pares de números complejos conjugados. Se obtienen tanto raíces estables como inestables por lo que se eliminan todos los pares de raíces inestables [3]. Los valores descartados son aquéllos cuya magnitud sea mayor a 1.

De la ecuación (2.16) como ya se mencionó, se obtienen los modos de la señal en el plano  $z$  que corresponde al tiempo discreto, por lo que para obtener los modos en el plano  $s$  correspondientes al tiempo continuo se realiza la siguiente operación:

$$\lambda_i = \frac{\ln(z_i)}{\Delta t} \quad (2.17)$$

donde  $\Delta t$  es el incremento de tiempo entre muestras

**3. Haciendo uso de las raíces del polinomio característico se resuelve el sistema original para determinar la amplitud y fase asociada a cada modo**

Los residuos  $B_i$  de la señal pueden ser calculados, haciendo uso de la ecuación (2.12). Al evaluar para cada una de las muestras se forma el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} z_1^0 & z_2^0 & \cdots & z_n^0 \\ z_1^1 & z_2^1 & \cdots & z_n^1 \\ \vdots & \vdots & \cdot & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \cdots & z_n^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(N-1) \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Al igual que en (2.14) para la ecuación anterior se obtienen los residuos mediante solución por mínimos cuadrados cuando el número de muestras supera la relación 2:1 con respecto al orden de la aproximación.

Con los  $\lambda_i$  calculados con (2.17) y los  $B_i$  obtenidos de (2.18) se forma la expresión

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^n B_i e^{\lambda_i t}$$

El problema se complica al considerar que el número de mediciones es diferente al número de ecuaciones. En este punto se tiene ya identificados los residuos y modos del sistema de tal forma que es posible reproducir la respuesta original. Ahora bien con los datos que ya se tienen, mediante un par de pasos extra se puede descomponer esta información en forma tal que nos da una visión más clara y sencilla del comportamiento de la señal al descomponer los residuos en magnitud y fase y los modos en amortiguamiento y frecuencia de la forma siguiente:

$$B_i = A_i \angle \phi_i \quad (2.19)$$

$$\lambda_i = \alpha_i + j2\pi f_i \quad (2.20)$$

El método original de Prony presenta las siguientes limitaciones:

- Se requiere una señal con bajo nivel de ruido [3]. Un área importante de desarrollo se encuentra en el mejoramiento de las técnicas para identificar funciones de transferencia de sistemas que contienen un elevado nivel de ruido en las salidas [19].
- El método asume que el sistema es estacionario. Con la finalidad de obtener una acertada estimación de los parámetros de la señal, es necesario que el sistema no presente cambios significativos durante el tiempo de estudio [20].
- El esfuerzo de cálculo requerido para identificar funciones de transferencia de bajo orden puede resultar excesiva

Se revisan continuación brevemente algunos modelos comunes empleados en la descripción de procesos oscilatorios.

### 2.3 Algoritmo para Realización de Eigensistemas

El Algoritmo para la Realización de Eigensistemas (ERA, por sus siglas en inglés) [10] es un método de identificación alternativo para el estudio de sistemas ligeramente amortiguados. Este método se desarrolló para identificar parámetros modales a partir de mediciones con ruido [2], y originalmente enfocado al estudio de sistemas en ingeniería aeroespacial [11].

El algoritmo ERA parte de la formación de la matriz Hankel  $H_0$  a partir de la respuesta al impulso del sistema [2], [12] <sup>1</sup>

Las submatrices Hankel se definen como

---

<sup>1</sup> Una matriz Hankel es una matriz cuadrada donde los valores de las diagonales invertidas son constantes, se construyen empleando en su totalidad los datos muestreados comenzando por la muestra 1 en la matriz  $H_0(1,1)$  y finalizando con la muestra  $N$  en  $H_1(r + 1, r + 1)$ .

$$H_0 = \begin{bmatrix} y_0 & y_1 & \dots & y_r \\ y_1 & y_2 & \dots & y_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_r & y_{r+1} & \dots & y_{N-1} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_{r+1} \\ y_2 & y_3 & \dots & y_{r+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{r+1} & y_{r+2} & \dots & y_N \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Una vez que se han construido las matrices  $H_0$  y  $H_1$  la aplicación de técnicas de descomposición en valores singulares (SVD) permite representar  $H_0$  en la forma

$$H_0 = U \Sigma V^T \quad (2.23)$$

En la ecuación anterior las columnas de las matrices  $U$  y  $V$  son ortonormales y  $\Sigma$  es una matriz diagonal que contiene los valores singulares de  $H_0$  ordenados de manera descendente.

Utilizando algebra matricial es posible reescribir estas ecuaciones en la forma alterna de bloques

$$H_0 = [U_n \ U_o] \begin{bmatrix} \Sigma_n & 0 \\ 0 & \Sigma_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_n^T \\ V_o^T \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Las matrices  $U_n$  y  $V_n$  están formadas por las primeras  $n$  columnas de  $U$  y  $V$  respectivamente, mientras que  $\Sigma_n$  y  $\Sigma_o$  son matrices diagonales cuyos elementos están ordenados por magnitud:

$$\Sigma_n = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \quad (2.25)$$

$$\Sigma_o = \text{diag}(\sigma_{n+1}, \sigma_{n+2}, \dots, \sigma_N) \quad (2.26)$$

Los valores singulares  $\sigma_i$  son monótonamente decrecientes, es decir,

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_n > \sigma_{n+1} > \sigma_{n+2} > \dots > \sigma_N$$

La matriz (2.25) contiene idealmente los elementos significativos de la matriz Hankel, mientras en (2.26) es una matriz diagonal con ceros. En la

práctica, debido a ruido en las muestras o errores en las mediciones los valores de (2.26) son relativamente más pequeños que los contenidos en la matriz (2.25) que son considerados los valores singulares significativos para la solución del problema [12].

Una forma alternativa para determinar el rango de valores que serán incluidos dentro de  $\Sigma_n$  es calculando la razón que existe entre cada valor singular  $\sigma_i$  respecto al valor singular mayor  $\sigma_1$  y entonces se toman en consideración los valores cuya relación sea mayor a un determinado orden de magnitud [3]. En (2.27)  $p$  es número de dígitos decimales significativos, por lo que cualquier valor singular con una razón menor a  $10^{-p}$  se considera irrelevante para el análisis y se incluye dentro de  $\Sigma_0$ .

$$\frac{\sigma_i}{\sigma_1} \geq 10^{-p} \quad (2.27)$$

Considerando que la descomposición en valores singulares proporciona los resultados ordenados en forma descendente, basta con hacer la prueba de manera recursiva a partir de  $\sigma_2$  hasta que la restricción (2.27) deja de cumplirse para considerar todos los valores restantes como parte de la matriz  $\Sigma_0$ .

Es posible mostrar que para un sistema lineal de orden  $n$ , los elementos en la diagonal de  $\Sigma_0$  son cero, asumiendo que la respuesta al impulso por parte del sistema se obtiene libre de ruido y que el número de muestras es tal que  $r > n$ . El significado práctico de este resultado es que el tamaño relativo de los valores singulares proporciona un indicativo del orden del sistema identificado. Si los valores singulares exhiben un agrupamiento notable tal que  $\sigma_n \gg \sigma_{n+1}$  se tiene que  $H_0$  puede simplificarse a partir de (2.24) de la forma [12]:

$$H_0 \approx U_n \Sigma_n V_n^T \quad (2.28)$$

Empleando (2.21) y (2.28) se obtiene la realización de orden mínimo en tiempo discreto con las siguientes ecuaciones:

$$\hat{A} = \Sigma_n^{-\frac{1}{2}} U_n^T H_1 V_n \Sigma_n^{-\frac{1}{2}} \quad (2.29)$$

$$\hat{B} = \Sigma_n^{\frac{1}{2}} V_n^T E_r \quad (2.30)$$

$$\hat{C} = E_m^T U_n \Sigma_n^{\frac{1}{2}} \quad (2.31)$$

$$\hat{D} = y_0 \quad (2.32)$$

Para las expresiones (2.30) y (2.31) es necesario construir vectores auxiliares  $E_r^T = E_r^T = [1, 0 \dots 0]$  con dimensiones  $1 \times r$  para el caso de sistemas una entrada y una salida. El orden de la matriz  $\hat{A}$  es  $n$  siendo este el orden del sistema cuando se parte de datos con bajo nivel de ruido [12]. El modelo discreto representado por las matrices (2.29)-(2.32) puede transformarse a un modelo en tiempo continuo aplicando las ecuaciones (2.33) para obtener  $\hat{A}_c$  y (2.34) para  $\hat{B}_c$ , las matrices  $C$  y  $D$  para el sistema en tiempo continuo son las mismas que para el tiempo discreto.

$$\hat{A}_c = \ln \left( \frac{\hat{A}}{\Delta t} \right) \quad (2.33)$$

$$\hat{B}_c = \left[ \int_0^{\Delta t} e^{\hat{A}_c t} d\tau \right]^{-1} \hat{B} \quad (2.34)$$

Finalmente se obtienen las frecuencias y amortiguamientos del sistema a partir de los valores propios de la matriz de estados en tiempo continuo. Los vectores propios correspondientes pueden emplearse para transformar la realización obtenida al espacio modal, transformando la matriz  $A$  a una forma diagonal cuyos valores son los modos del sistema.

## 2.4 Método Matrix Pencil

El método Matrix Pencil, fue introducido inicialmente por Hua y Sarkar [13] para la estimación de polos y utilizado en el estudio de transitorios electromagnéticos en antenas [3]. Este método presenta ventajas respecto a los métodos polinomiales como el caso del método de Prony al obtener los polos del

sistema en un solo paso a partir de la solución generalizada de valores propios [14].

En forma análoga al método de Prony, el método Matrix Pencil obtiene los parámetros para ajustar un modelo lineal de la forma

$$y(t) = x(t) + n(t) \approx \sum_{i=1}^M R_i e^{(s_i t)} + n(t); 0 \leq t \leq T$$

donde

$y(t)$  = muestras tomadas en el tiempo

$n(t)$  = ruido en el sistema

$x(t)$  = respuesta del sistema

$R_i$  = amplitudes complejas o residuos

$s_i = -\alpha_i + j\omega_i$

$\alpha_i$  = factores de amortiguamiento

$\omega_i = 2\pi f_i$ , frecuencias angulares

$M$  = número de modos de la señal

Una vez realizado el muestreo, la variable de tiempo  $t$  se reemplaza por  $kT_s$  donde  $T_s$  es el período de muestreo. Con esto se obtiene la representación de la señal en tiempo discreto de la forma:

$$y(kT_s) = x(kT_s) + n(kT_s) \approx \sum_{i=1}^M R_i z_i^k + n(kT_s); \text{ para } k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.35)$$

$$z_i = e^{s_i T_s} = e^{(-\alpha_i + j\omega_i) T_s} \text{ para } i = 1, 2, \dots, M$$

Para el caso en que las muestras se obtienen en ausencia de ruido, se construyen dos matrices  $Y_2, Y_1$  definidas por

$$Y_2 = \begin{bmatrix} x(1) & x(2) & \cdots & x(L) \\ x(2) & x(3) & \cdots & x(L+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(N-L) & x(N-L+1) & \cdots & x(N-1) \end{bmatrix}_{(N-L) \times L} \quad (2.36)$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} x(0) & x(1) & \cdots & x(L-1) \\ x(1) & x(2) & \cdots & x(L) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(N-L-1) & x(N-L) & \cdots & x(N-2) \end{bmatrix}_{(N-L) \times L} \quad (2.37)$$

donde L se le conoce como el parámetro "pencil" [14].

Es posible factorizar las ecuaciones anteriores considerando

$$x(k) = \sum_{i=1}^M R_i z_i^k \quad (2.38)$$

por lo que (2.36) se puede reescribir como

$$Y_2 = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 & \cdots & R_M \\ R_1 z_1 & R_2 z_2 & \cdots & R_M z_M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1 z_1^{N-L-1} & R_2 z_2^{N-L-1} & \cdots & R_M z_M^{N-L-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 & z_1^2 & \cdots & z_1^L \\ z_2 & z_2^2 & \cdots & z_2^L \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_M & z_M^2 & \cdots & z_M^L \end{bmatrix} = [P][H]$$

Se deduce entonces que cada una de estas matrices se puede factorizar en la forma

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{N-L-1} & z_2^{N-L-1} & \cdots & z_M^{N-L-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 & & & \\ & R_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_M \end{bmatrix} = Z_1 \mathcal{R} \quad (2.39)$$

$$H = \begin{bmatrix} z_1 & & & \\ & z_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & z_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{L-1} \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{L-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_M & \cdots & z_M^{L-1} \end{bmatrix} = Z_0 Z_2 \quad (2.40)$$

Mediante un procedimiento similar es posible factorizar  $Y_1$ . Entonces considerando las matrices  $Z_0$ ,  $Z_1$ ,  $Z_2$ , y  $\mathcal{R}$  de las ecuaciones (2.39) y (2.40) se tiene que [21]:

$$Y_2 = Z_1 \mathcal{R} Z_0 Z_2 \quad (2.41)$$

$$Y_1 = Z_1 \mathcal{R} Z_2 \quad (2.42)$$

La matriz pencil se define entonces como [14]:

$$Y_2 - \lambda Y_1 = Z_1 \mathcal{R} (Z_0 - \lambda I) Z_2$$

donde  $I$  es la matriz identidad de dimensiones  $M \times M$ .

Si el valor del parámetro  $L$  se encuentra dentro del intervalo  $M \leq L \leq N$ , el rango de  $\{Y_2 - \lambda Y_1\}$  es  $M$  [14]. Cuando se cumple que  $\lambda = z_i, i = 1, 2, \dots, M$ , la  $i$ -ésima fila de  $\{Y_2 - \lambda Y_1\}$  es cero y el rango de la matriz obtenida de esta operación es  $M - 1$ . Bajo esta suposición es posible obtener los parámetros  $z_i$  como los valores propios generalizados del par de matrices  $\{Y_2, Y_1\}$  obteniéndolos a partir de la formulación siguiente:

$$\{[Y_1]^+ [Y_2] - \lambda [I]\} \quad (2.43)$$

donde  $[Y_1]^+$  es la pseudoinversa de  $Y_1$  bajo el criterio de Moore-Penrose, definida como

$$[Y_1]^+ = \{[Y_1]^* [Y_1]\}^{-1} [Y_1]^* \quad (2.44)$$

donde  $(*)$  denota la transpuesta conjugada de la matriz.

Después de obtener los polos  $z_i$ , los residuos  $B_i$  de la señal se obtienen a partir de (2.35). En el caso de ausencia de ruido, los residuos de la señal se obtienen al resolver un sistema de ecuaciones indicado en (2.45).

$$\begin{bmatrix} z_1^0 & z_2^0 & \cdots & z_M^0 \\ z_1^1 & z_2^1 & \cdots & z_M^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \cdots & z_M^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(N-1) \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Es posible considerar señales con ruido al sustituir los datos empleados  $x(t)$  por  $y(t)$ . Como primer paso se construye una matriz  $Y$  de la forma

$$Y = \begin{bmatrix} y(0) & y(1) & \cdots & y(L) \\ y(1) & y(2) & \cdots & x(L+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(N-L-1) & y(N-L) & \cdots & y(N-1) \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Tomando ahora la información contenida en (2.46) como base para construir  $Y_1$  y  $Y_2$ , se obtiene  $Y_1$  eliminando la última columna y  $Y_2$  al eliminar la primera columna. El procedimiento es similar al mostrado en las ecuaciones (2.36)-(2.45) con la diferencia que en (2.36) y (2.37)  $x(t)$  se sustituye por  $y(t)$ . En este caso, el parámetro  $L$  se selecciona entre  $N/3$  a  $N/2$  con lo que se realiza un filtrado adecuado del ruido y se obtiene una baja varianza en los parámetros  $z_i$  a causa del ruido [14].

Es posible emplear (2.46) como base para un procesamiento previo a la solución del problema si se aplica descomposición en valores singulares a esta matriz y posteriormente se determina el orden más adecuado para el modelo final aplicando (2.27) para determinar el orden del sistema.

Aplicando la descomposición en valores singulares a (2.46) se obtiene

$$Y = U\Sigma V^T$$

y asumiendo que

$$\frac{\sigma_i}{\sigma_1} \geq 10^{-p}$$

es posible separar estas matrices en bloques para formar

$$Y = [U_M \ U_o] \begin{bmatrix} \Sigma_M & \\ & \Sigma_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_M^T \\ V_o^T \end{bmatrix}$$

donde el parámetro  $M$  excluye todos los valores singulares en los que se cumple que la proporción entre  $\sigma_i$  contra el  $\sigma_{max}$  se encuentren por debajo de  $10^{-p}$  para así realizar un filtrado del ruido en las muestras.

A partir de  $U$ ,  $\Sigma_M$  y  $V_M^T$  se tiene que

$$Y_1 = U\Sigma_M V_{1M}^T \quad (2.47)$$

$$Y_2 = U\Sigma_M V_{2M}^T \quad (2.48)$$

donde  $V_{1M}$  y  $V_{2M}$  se construyen con las primeras y últimas  $M$  columnas de  $V_M$  respectivamente.

Haciendo uso de (2.47) y (2.48) se buscan los valores propios para la siguiente ecuación:

$$\{[Y_1]^+ [Y_2] - \lambda[I]\}$$

o bien a partir de

$$\{[V_{1M}^T]^+ [V_{2M}^T]^+ - \lambda[I]\} \quad (2.49)$$

Una vez que se tiene determinado el parámetro  $M$  y obteniendo los  $z_i$  se calculan los residuos de la señal a partir de (2.45).

De esta forma concluye el procedimiento Matrix Pencil para la identificación de señales.

Una ventaja importante de éste método respecto a los métodos polinomiales, como es el caso del método de Prony, es que presenta una varianza más baja en la estimación de los parámetros [14].

Recientemente, se ha introducido una nueva categoría de estimadores lineales con la capacidad de analizar mediciones continuas basados en el análisis de bloques de datos [17] que prometen mejorar la exactitud de las estimaciones modales.

En [22] se presenta un método de identificación modal recursivo basado en el método de Prony para detección de modos oscilatorios con aplicación en tiempo real.

## 2.5 Referencias

- [1]. R. J. Koessler, F. S. Prabhakara, A. H. Al-Mubarak, "*Analysis of Oscillations with Eigenanalysis and Prony Techniques*" Power Engineering Society, General Meeting, 2007.
- [2]. J. J. Sanchez-Gasca, "*Identification of Power System Low Order Linear Models Using the ERA/OBS Method*" Power Systems Conference and Exposition, 2004. IEEE PES
- [3]. Lisa L. Grant, Mariesa L. Crow, "*Comparison of Matrix Pencil and Prony Methods for Power System Modal Analysis of Noisy Signals*". North American Power Symposium (NAPS), 2011.
- [4]. D. J. Trudnowski, J. R. Smith, T. A. Short, and D. A. Pierre, "*An Application of Prony Methods in PSS Design for Multimachine Systems*". IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 6, pp. 118-126, Feb. 1991.
- [5]. Prince Alfred Emmanuel, "*Damping of Low Frequency Oscillations in ac/dc Power Systems Using HVDC Converter Control*". Ph. D. Thesis, Electrical Engineering Department, Montana State University, Bozeman, Montana, October, 1991.
- [6]. H. Okamoto, A. Kurita, J. J. Sanchez-Gasca, K. Clark, N. W. Miller, J. H. Chow, "*Identification of Equivalent Linear Power System Models From Electromagnetic Transient Time Domain Simulations Using Prony's Method*", Proceedings of the 35<sup>th</sup> Conference on Decision and Control, December, 1996.
- [7]. D. J. Trudnowski, J. M. Johnson, J. F. Hauer. "*SIMO System Identification from Measured Ringdowns*" Proceedings of the American Control Conference. Philadelphia, Pennsylvania, June 1988.
- [8]. D. J. Trudnowski, M. K. Donnelly, J. F. Hauer, "*Advances in the Identification of Transfer Function Models Using Prony Analysis*" American Control Conference, 1993.
- [9]. D. A. Pierre, J. R. Smith, D. J. Trudnowski, J. W. Pierre, "*Prony Based Methods for Simultaneous Identification of Transfer Functions and Initial*

- Conditions*", Computer & Electrical Engineering, Volume 21, Issue 2, March 1995.
- [10]. J.-N. Juang, R. S. Pappa, "An Eigensystem Realization Algorithm for Modal Parameter Identification and Model Reduction", Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 8, No. 5, September-October 1985, pp. 620-627.
- [11]. J. J. Sanchez-Gasca, "Computation of Turbine-Generator Subsynchronous Torsional Modes from Measured Data Using the Eigensystem Realization Algorithm". Proc. IEEE Power Eng. Soc. Winter Meet., vol 3, pp. 1272-1276, 2001.
- [12]. J.-N. Juang, *Applied System Identification*, Prentice Hall, 1994.
- [13]. Hua, Y., Sarkar T. K., "Matrix Pencil Method for Estimating Parameters of exponentially damped/undamped sinusoids in noise" IEEE Trans. on Acoustics, Speech, & Signal Processing, Vol. 38, No. 5, May 1990, pp. 814-824.
- [14]. Sarkar T. K., Pereira o., "Using the Matrix Pencil Method to Estimate the Parameters of a Sum of a Complex Exponentials". IEEE Trans. on Antennas Propagation Magazine, Vol 37, pp. 48-55, Feb. 1995.
- [15]. J. R. Smith, F. Fatehi, C. S. Woods, J. F. Hauer and D. J. Trudnowski, "Transfer Function Identification in Power System Applications". Paper No. 92SM537-1PWRS, IEEE/PES Summer Power Meeting Seattle, Washington, 1992.
- [16]. M. M. Mansour, A. Mehrotra, "Model-Order Reduction Based on Prony's Method", Design, Automation and Test in Europe Conference and Exhibition, pp. 530-535, 2003.
- [17]. N. Zhou, Z. Hunag, F. Tuffner, J. Pierre, S. Jin, "Final Project Report Oscillation Detection and Analysis" Prepared for CIEE by Pacific Northwest National Laboratory, 2010.
- [18]. D. A. Pierre, D. J. Trudnowski and J. F. Hauer, "Identifying Linear Reduced-Order Models for Systems with Arbitrary Initial Conditions Using Prony Signal Analysis", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 37, pp. 831-835, June 1992.

- [19]. D. A. Pierre, J. R. Smith, D. J. Trudnowski, L. W. Pierre, "General Formulation of a Prony Based Method for Simultaneous Identification of Transfer Functions and Initial Conditions". Proceedings of the 31<sup>st</sup> IEEE Conference on Decision and Control, 1992.
- [20]. T. J. Browne, V. Vittal, G. T. Heydt, A. R. Messina, "A Comparative Assessment of Two Techniques for Modal Identification from Power System Measurements". IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 23, No. 3, pp. 1408-1415, Aug. 2008.
- [21]. G. Liu, J. Quintero, V. Venkatasubramanian, "Oscillation Monitoring System Based on Wide Area Synchrophasors in Power Systems" iREP Symposium – Bulk Power System Dynamics and Control –VII. Revitalizing Operational Reliability, 2007.
- [22]. N. Zhou, Z. Hunag, F. Tuffner, J. Pierre, S. Jin, "Automatic Implementation of Prony Analysis for Electromechanical Model Identification from Phasor Measurements". IEEE Power and energy Society General Meeting 2010.

# Capítulo 3

## Identificación de Funciones de Transferencia

*La identificación de modelos de funciones de transferencia a partir de mediciones o pruebas al sistema tiene un gran interés para el análisis y control del sistema eléctrico de potencia. En este sentido se han desarrollado diversas técnicas para la obtención de modelos considerando una amplia gama de escenarios bajo los cuales puede estar operando el sistema a modelar.*

*Una de las aplicaciones de este tipo de modelos es la de ajustar los sistemas de control de sistemas de excitación en generadores y dispositivos FACTS. Este concepto puede también utilizarse para monitorear el comportamiento de polos y ceros críticos del sistema ante cambios en su topología y operación.*

*Este capítulo aborda el problema de identificación de funciones de transferencia en modelos lineales de sistemas de potencia. Se desarrolla e implementa un algoritmo de identificación de funciones de transferencia basado en los algoritmos de identificación y teoría de valores singulares.*

*Se examinan las limitaciones de estos enfoques y se identifican líneas futuras de investigación.*

### 3.1 Modelos de funciones de transferencia

El desarrollo de métodos de identificación de funciones de transferencia es un aspecto de particular interés en el estudio del comportamiento dinámico del sistema y el diseño de sistemas de control.

Así, por ejemplo, estas técnicas pueden utilizarse para estimar los parámetros de entrada-salida en sistemas de control o evaluar el efecto de variaciones en la operación del sistema o planeadas en los parámetros de diseño de un sistema de control. Debido a que estos métodos de estimación identifican también residuos y polos es posible utilizarlas para ajustar los parámetros de la función de transferencia.

Como se ha mencionado anteriormente el método de Prony permite ajustar una señal por funciones senoidales amortiguadas. En la formulación original de Prony, sin embargo, no es posible incorporar el efecto de las entradas en el proceso de estimación limitando con ello su aplicación al problema de identificación de modelos de funciones de transferencia [1].

Se puede mostrar que, bajo determinadas condiciones, es posible identificar un modelo paramétrico de función de transferencia cuando la entrada del sistema es una combinación de funciones escalón y se tiene acceso a mediciones de la salida. La ventaja principal de esta formulación reside en que no se impone restricciones al número o a los parámetros de las funciones escalón.

Existe gran variedad de métodos que se pueden utilizar para identificar modelos de funciones de transferencia [1]-[3]. Entre estos, destacan por su mayor importancia los basados en los métodos de Prony y Fourier. Otras alternativas son las basadas en aproximaciones de Padé [13]. Su aplicación al problema de identificación de modelos de funciones de transferencia sin embargo ha sido limitada debido a problemas de inestabilidad numérica.

### 3.2 Identificación de funciones de transferencia

Sea un sistema cuya función de transferencia es  $G(s)$  y sean  $u(t)$  y  $y(t)$  la entrada y salida en el tiempo  $t$  (figura 3.1).

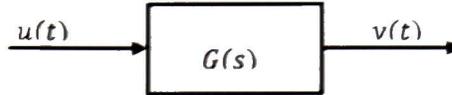


Figura 3.1 Sistema utilizado. Modelo genérico de entorno acústico ruidoso

En este modelo se identifican tres elementos básicos:

- Una señal de entrada  $u(t)$
- Un conjunto de señales de salida  $y(t)$
- La función de transferencia del sistema que se desea identificar  $G(s)$

El modelo lineal también incluye un sesgo o desviación y puede incluir condiciones iniciales como se discute en secciones posteriores del documento.

Según el modelo de identificación de la figura, la señal de salida,  $y(t)$  puede expresarse en función de la entrada  $u(t)$ , en tres formas básicas [4]:

1. Una relación de ceros sobre polos
2. Una relación de polinomios
3. Una sumatoria de residuos sobre polos de primer orden (llamada forma paralela).

En particular, la representación en forma paralela tiene ciertas ventajas numéricas al representar sistemas de alto orden por lo que se adopta en esta investigación.

La aplicación del método de identificación de Prony requiere que el sistema  $G(s)$  sea lineal y que en el caso ideal, el ruido en la medición sea bajo. Se asume, además, que el sistema está en reposo (con condiciones iniciales cero) antes de la aplicación de la señal de entrada.

Los métodos de análisis basados en análisis de Prony utilizados en sistemas de potencia asumen que la entrada puede representarse mediante un tren de pulsos. Este enfoque permite identificar funciones de transferencia a partir de pruebas planeadas tales como cambios escalón en la entrada. La extensión al caso de salidas múltiples se discute en secciones posteriores de este documento. Experiencias prácticas muestran que este tipo de enfoques conduce a resultados suficientemente seguros [7]-[9].

En los siguientes apartados se examinan las características de los métodos actualmente utilizados por la industria y se proponen extensiones y generalizaciones.

### 3.2.1 Identificación aplicando impulsos a la entrada

En una primera aproximación, asuma que la entrada  $u$  es una secuencia de  $k + 1$  funciones impulso,  $\delta(t)$ , aplicados cada  $h$  segundos ( $t=t_0+kt$ ,  $k=0,1,\dots,N$ ). Entonces se puede escribir

$$u(t) = \alpha_0\delta(t) + \alpha_1\delta(t - h) + \alpha_2\delta(t - 2h) + \dots + \alpha_k\delta(t - kh) \quad (3.1)$$

donde  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  son coeficientes de amplitud asociados a cada impulso.

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación anterior se tiene:

$$U(s) = \alpha_0 + \alpha_1e^{-hs} + \alpha_2e^{-2hs} + \dots + \alpha_ke^{-khs} \quad (3.2)$$

Si se supone ahora que la función  $G(s)$  no tiene polos repetidos ésta puede escribirse utilizando la notación original de Trudnowski et al. [3], como

$$G(s) = \sum_{i=1}^p \frac{\hat{R}_i}{s - \lambda_i} \quad (3.3)$$

donde  $\hat{R}_i$  es el residuo de la función de transferencia y  $p$  es el número de modos retenidos en la aproximación de Prony.

Dado un modelo para  $G(s)$ , la transformada de Laplace de la salida,  $Y(s)$  estará dada por

$$Y(s) = U(s)G(s) = \alpha_0 \sum_{i=1}^p \frac{\hat{R}_i}{s - \lambda_i} + \alpha_1 \sum_{i=1}^p \frac{\hat{R}_i e^{-hs}}{s - \lambda_i} + \dots + \alpha_k \sum_{i=1}^p \frac{\hat{R}_i e^{-khs}}{s - \lambda_i} \quad (3.4)$$

Partiendo de esta representación, y tomando la transformada inversa de Laplace, se obtiene la siguiente expresión para  $y(t)$ :

$$y(t) = \alpha_0 \sum_{i=1}^p \hat{R}_i e^{\lambda_i t} + \alpha_1 \sum_{i=1}^p \hat{R}_i e^{\lambda_i(t-h)} \mu(t-h) + \dots \\ + \alpha_k \sum_{i=1}^p \hat{R}_i e^{\lambda_i(t-kh)} \mu(t-kh) \quad (3.5)$$

donde  $\mu(t-h)$  denota la función escalón unitario desplazado  $h$  segundos.

Desarrollando esta ecuación para  $t \geq kh$  se obtiene la ecuación

$$y(t) = \alpha_0 \sum_{i=1}^p \hat{R}_i e^{\lambda_i t} + \alpha_1 \sum_{i=1}^p \hat{R}_i e^{\lambda_i(t-h)} + \dots + \alpha_k \sum_{i=1}^p \hat{R}_i e^{\lambda_i(t-kh)} \quad (3.6)$$

la cual puede escribirse como

$$y(t) = \sum_{j=0}^k \alpha_j \sum_{i=1}^p \hat{R}_i e^{\lambda_i t} e^{-jh\lambda_i} = \sum_{i=1}^p \hat{R}_i e^{\lambda_i t} \sum_{j=0}^k \alpha_j e^{-jh\lambda_i}$$

o bien

$$y(t) = \sum_{i=1}^p \gamma_i e^{\lambda_i t} \quad (3.7)$$

donde se define

$$y_i = \hat{R}_i \sum_{j=0}^k \alpha_j e^{-jh\lambda_i} \quad (3.8)$$

En (3.7) se obtuvieron los residuos de una señal que es la respuesta a una serie de impulsos. Es fácil mostrar que esta ecuación tiene la forma descrita anteriormente para la representación de una señal mediante el análisis de Prony:

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^p B_i e^{\lambda_i t} \quad (3.9)$$

donde los  $B_i$  son los residuos de la señal. Esta idea ha sido utilizada por diversos investigadores [1], constituyendo la base de varios programas de uso comercial.

Considerando que la expresión indicada en (3.7) se desarrolló para  $t \geq kh$ , es posible hacer un ajuste en la variable de tiempo en (3.9) para tomar en cuenta este desplazamiento de tiempo y posteriormente obtener los residuos  $\hat{R}_i$  de la función de transferencia [1], [3].

La discusión de los resultados se simplifica si se considera que el tiempo de análisis comienza a partir de que el último impulso ha sido aplicado. Entonces, desplazando  $t$  mediante el factor  $kh$  y asignando una nueva variable de tiempo

$$\tau = t - kh \quad (3.10)$$

Denotando  $w(\tau) = y(t - kh)$  se deduce de (3.7) que

$$w(\tau) = \sum_{i=1}^p B_i e^{\lambda_i \tau}$$

Así:

$$w(\tau) = y(t - kh) = \sum_{i=1}^p \gamma_i e^{\lambda_i(t-kh)}$$

con los residuos de la señal  $\gamma_i$ , definidos por (3.8) puesto que no se ven afectados por la variable de tiempo.

Substituyendo ahora la ecuación (3.8) en la expresión anterior, se obtiene:

$$\begin{aligned} y(t - kh) &= \sum_{i=1}^p \hat{R}_i \sum_{j=0}^k \alpha_j e^{-jh\lambda_i} e^{\lambda_i t} e^{-\lambda_i kh} \\ y(t - kh) &= \sum_{i=1}^p e^{\lambda_i t} \hat{R}_i \sum_{j=0}^k \alpha_j e^{-h\lambda_i(j+k)} \end{aligned} \quad (3.11)$$

por lo que

$$w(\tau) = \sum_{i=1}^p B_i e^{\lambda_i \tau} \quad (3.12)$$

y con ello

$$B_i = \hat{R}_i \sum_{j=0}^k \alpha_j e^{-h\lambda_i(j+k)} \quad (3.13)$$

La ecuación (3.13) proporciona una relación más directa entre los residuos de la señal  $B_i$  y los residuos de la función de transferencia  $\hat{R}_i$ . Nótese que (3.12) es muy similar a (3.9). Por tanto, para calcular  $G(s)$  la aproximación mediante el método de Prony se efectúa a partir de la señal desplazada  $w$  para calcular  $B_i$  y  $\lambda_i$ .

Por lo tanto, conociendo los parámetros  $B_i$ , los residuos de la función de transferencia  $\hat{R}_i$  pueden ser calculados a partir de la ecuación (3.13) como se explica a continuación.

A partir de las expresiones anteriores, se puede plantear un algoritmo de identificación totalmente automático. La principal ventaja de esta formulación es su sencillez con respecto a otras formulaciones

A continuación se definen las señales de entrada consideradas en el análisis en el contexto de su utilización como medio de prueba o excitación al sistema.

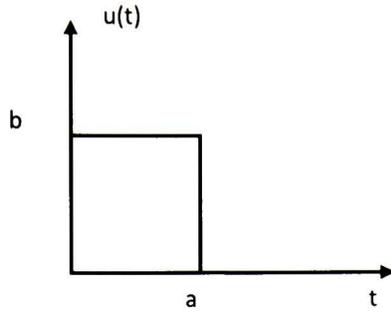
### ***3.2.2 Modelos de identificación para el caso de entradas simples***

En la bibliografía relacionada con el análisis de Prony se emplean pulsos de excitación de naturaleza física. Esto permite aproximar el efecto de acciones físicas como cambios en las señales de referencia en sistemas de control, cambios en la carga o perturbaciones asociadas con la conexión y desconexión de elementos del sistema. El caso más simple es el modelo de una función de transferencia con una sola entrada.

En la sección anterior se abordó el problema de identificación mediante la aplicación de una serie de impulsos. En la práctica, un impulso puede ser aproximado mediante la aplicación de un pulso [5], [10]. Además, en aplicaciones prácticas es deseable reducir el número de pulsos.

Como se ha comentado anteriormente, la aplicación de un pulso como señal de entrada, por otro lado, también requiere de una adecuada selección en los parámetros que lo definen para lograr la excitación de los diferentes modos que componen el sistema de estudio. La duración o ancho del pulso es un factor que está íntimamente relacionado con su contenido espectral [5].

En la figura 3.2 se muestran las características de la función pulso considerada en el análisis.



**Figura 3.2** Entrada aplicada

La aplicación de la transformada de Laplace a la entrada  $u(t)$ , conduce a la siguiente ecuación

$$U(s) = \frac{b(1 - e^{-as})}{s} \quad (3.14)$$

Siguiendo un procedimiento análogo al caso anterior, la salida  $Y(s)$  de la función de transferencia será:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \left[ \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{s - \lambda_i} \right] \left[ \frac{b(1 - e^{-as})}{s} \right]$$

en donde se ha asumido que la función de transferencia puede expresarse en la forma general:

$$G(s) = \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{s - \lambda_i} \quad (3.15)$$

Haciendo uso ahora de la expansión en fracciones parciales, se puede reescribir lo anterior como:

$$Y(s) = \left( - \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{s - \lambda_i} \right) (1 - e^{-as})b \quad (3.16)$$

donde

$$Q_i = \frac{R_i}{\lambda_i} \quad (3.17)$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace, en el dominio del tiempo se obtiene la siguiente expresión:

$$y(t) = -b \sum_{i=1}^n Q_i \mu(t) + b \sum_{i=1}^n Q_i e^{\lambda_i t} \mu(t) + b \sum_{i=1}^n Q_i \mu(t-a) - b \sum_{i=1}^n Q_i e^{\lambda_i(t-a)} \mu(t-a)$$

que también puede escribirse como:

$$y(t) = b \sum_{i=1}^n Q_i (e^{\lambda_i t} - 1) \mu(t) + b \sum_{i=1}^n Q_i (1 - e^{\lambda_i(t-a)}) \mu(t-a)$$

donde  $\mu(t)$  corresponde a la función escalón unitario.

Nótese que, el primer término en esta expresión es diferente de cero para  $t > 0$ , mientras que el segundo término es diferente de cero cuando  $t \geq a$ .

Con frecuencia, el tiempo de aplicación de la señal de excitación es mucho menor respecto al tiempo total de muestreo de la respuesta para este tipo de entrada [5], por lo que se puede restringir el análisis al segmento de mayor duración que es cuando  $t \geq a$ .

De acuerdo con estas simplificaciones es posible expresar la salida  $y(t)$  en la forma:

$$y(t) = b \sum_{i=1}^n Q_i (e^{\lambda_i t} - 1 + 1 - e^{\lambda_i(t-a)})$$

$$y(t) = b \sum_{i=1}^n Q_i (e^{\lambda_i t} - e^{\lambda_i t} e^{-a\lambda_i}) = b \sum_{i=1}^n Q_i (1 - e^{-a\lambda_i}) e^{\lambda_i t} \quad (3.18)$$

que se puede transformar en

$$y(t) = \sum_{i=1}^n B_i e^{\lambda_i t} \quad (3.19)$$

con

$$B_i = b(1 - e^{-a\lambda_i})Q_i \quad (3.20)$$

A partir de la expresión anterior puede observarse que si se conoce el residuo de la señal es posible deducir una expresión para el residuo de la función de transferencia del sistema. Entonces, de (3.20) se tiene que

$$Q_i = \frac{B_i}{(1 - e^{-a\lambda_i})b}$$

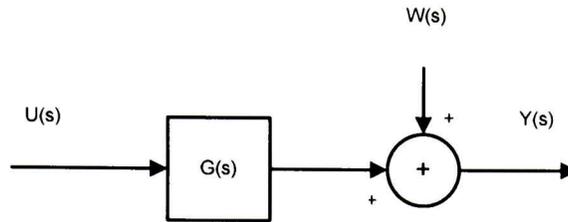
Haciendo uso de (3.17) se concluye de lo anterior que los residuos de la función de transferencia están dado por

$$R_i = \frac{\lambda_i B_i}{(1 - e^{-a\lambda_i})b} \quad (3.21)$$

El razonamiento puede generalizarse fácilmente al caso de entradas de naturaleza más general como se discute a continuación.

En el análisis considerado anteriormente se ha asumido que el sistema se encuentra en reposo en el momento de aplicar la señal de prueba. Como se discute en [5], sin embargo, esta suposición es muy restrictiva ya que con frecuencia es deseable aplicar una señal de prueba cuando el sistema ha sido perturbado por una falla y se encuentra oscilando.

El análisis de este tipo de escenarios necesita considerar condiciones iniciales distintas de cero como se sugiere en la figura 3.3.



**Figura 3.3** Función de transferencia del sistema incluyendo condiciones iniciales

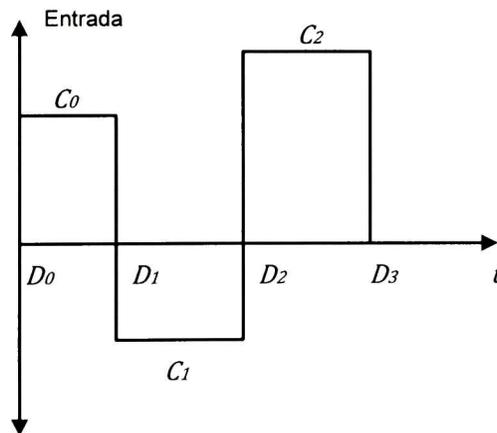
### 3.2.3 Identificación basada en secuencias de pulsos

Con objeto de incorporar las condiciones anteriores, asuma que la función de transferencia del sistema se expresa en la forma paralela:

$$G(s) = K_0 + \sum_{i=1}^m \left( \frac{R_i}{s - \lambda_i} + \frac{R_i^*}{s - \lambda_i^*} \right) \quad (3.22)$$

donde  $\lambda_i^*$  denota el  $i$ ésimo modo complejo conjugado y  $K_0$  es la constante de retroalimentación ya que multiplica directamente la señal de entrada. Se asume que los modos del sistema son distintos.

Asuma ahora que la entrada consiste de una forma de onda cuadrada de amplitud y ancho de pulso diferentes como se muestra en la figura 3.4.



**Figura 3.4** Entrada aplicada

Utilizando las propiedades de linealidad de la transformada de Laplace se muestra fácilmente que:

$$U(s) = \sum_{j=0}^L C_j \frac{e^{-sD_j} - e^{-sD_{j+1}}}{s} \quad (3.23)$$

De la ecuación anterior se puede observar que  $L + 1$  representa el número de pulsos que componen a la señal de entrada. Los términos  $D_j$  determinan los tiempos en los que la señal cambia el valor de su amplitud mientras que los términos  $C_j$  determinan la amplitud de cada pulso.

El problema que se plantea es el de determinar los parámetros de la ecuación (3.22) dada una función de excitación conocida  $u(t)$  y una medición de la salida  $y(t)$ . La calidad de la estimación puede evaluarse utilizando varios criterios.

En la práctica, la señal de entrada requiere tener una energía significativa en el rango de frecuencia de los parámetros a ser identificados. Por lo que, la aplicación de una señal de entrada del tipo mostrado en esta sección proporciona un medio idóneo para lograr excitar los diferentes modos del sistema a identificar.

Con estas consideraciones, la salida del sistema estará dada por la siguiente expresión:

$$\hat{Y}(s) = G(s)U(s) = \left( K_0 + \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{s - \lambda_i} \right) \left( \sum_{j=0}^L C_j \frac{e^{-sD_j} - e^{-sD_{j+1}}}{s} \right)$$

Nótese que la entrada aplicada no se restringe en el número de pulsos que la componen. La función de transferencia del sistema a identificar contiene un término de retroalimentación  $K_0$ .

Esta ecuación se puede reescribir de una forma más útil desde el punto de vista de análisis como

$$\hat{Y}(s) = K_0 U(s) + \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{R_i}{\lambda_i(s - \lambda_i)} - \frac{R_i}{\lambda_i s} \right) \sum_{j=0}^L C_j (e^{-sD_j} - e^{-sD_{j+1}}) \right]$$

Definiendo

$$Q_i = \frac{R_i}{\lambda_i}$$

reagrupando términos en la expresión anterior se obtiene:

$$\hat{Y}(s) = \left( K_0 - \sum_{i=1}^n Q_i \right) U(s) + \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{s - \lambda_i} \sum_{j=0}^L C_j (e^{-sD_j} - e^{-sD_{j+1}}) \quad (3.24)$$

y en el dominio del tiempo

$$\begin{aligned} \hat{y}(t) &= \left( K_0 - \sum_{i=1}^n Q_i \right) \sum_{j=0}^L C_j [\mu_0(t - D_j) - \mu_0(t - D_{j+1})] \\ &+ \sum_{i=1}^n Q_i \left[ C_j \left( e^{-\lambda_i D_j} \mu_0(t - D_j) - e^{-\lambda_i D_{j+1}} \mu_0(t - D_{j+1}) \right) \right] e^{\lambda_i t} \quad (3.25) \end{aligned}$$

donde  $\mu_0(\cdot)$  representa la función escalón unitario.

La constante  $K_0$  se puede determinar a partir de la ecuación anterior. Utilizando la expresión (3.25) y despejando para  $K_0$  se tiene que:

$$K_0 = \frac{\hat{y}(t) - \sum_{i=1}^n Q_i \left[ C_j \left( e^{-\lambda_i D_j} \mu_0(t - D_j) - e^{-\lambda_i D_{j+1}} \mu_0(t - D_{j+1}) \right) \right] e^{\lambda_i t}}{\sum_{j=0}^L C_j [\mu_0(t - D_j) - \mu_0(t - D_{j+1})]} + \sum_{i=1}^n Q_i$$

Nótese que  $\hat{y}(t)$  sigue siendo una incógnita hasta este punto. Si se asume ahora que esta aproximación carece de error, es decir,  $\hat{y}(t) = y(t)$  se obtiene la siguiente expresión para  $K_0$ :

$$K_0 = \frac{y(t) - \sum_{i=1}^n Q_i \left[ C_j \left( e^{-\lambda_i D_j} \mu_0(t - D_j) - e^{-\lambda_i D_{j+1}} \mu_0(t - D_{j+1}) \right) \right] e^{\lambda_i t}}{\sum_{j=0}^L C_j [\mu_0(t - D_j) - \mu_0(t - D_{j+1})]} + \sum_{i=1}^n Q_i \quad (3.26)$$

Esta expresión supone que  $K_0$  permanecerá invariante para cualquier tiempo pero, desde que se ha requerido emplear un cambio en las variables, es posible que  $K_0$  no permanezca constante.

En tiempo discreto, esta ecuación puede reescribirse en la forma siguiente

$$K_0 = \frac{y(kT) - \sum_{i=1}^n Q_i \left[ C_j \left( e^{-\lambda_i D_j} \mu_0(kT - D_j) - e^{-\lambda_i D_{j+1}} \mu_0(kT - D_{j+1}) \right) \right] e^{\lambda_i kT}}{\sum_{j=0}^L C_j [\mu_0(kT - D_j) - \mu_0(kT - D_{j+1})]} + \sum_{i=1}^n Q_i \quad (3.27)$$

donde  $T$  es el periodo de muestreo, y consecuentemente,  $t = kT$ ;  $k = 0, 1, \dots, N - 1$  siendo  $N$  el número de muestras.

Ahora se valúa la expresión anterior en el intervalo de tiempo comprendido por  $0 \leq t \leq D_{L+1}$ , esto con la finalidad de evitar la división por cero y se calcula el valor promedio de  $K_0$  de la siguiente forma

$$K_0 = \left\{ \sum_{k=0}^{M_{L+1}} \frac{y(kT) - \sum_{i=1}^n Q_i \left[ C_j \left( e^{-\lambda_i D_j} \mu_0(kT - D_j) - e^{-\lambda_i D_{j+1}} \mu_0(kT - D_{j+1}) \right) \right] e^{\lambda_i kT}}{\sum_{j=0}^L C_j [\mu_0(kT - D_j) - \mu_0(kT - D_{j+1})]} + \sum_{i=1}^n Q_i \right\} \frac{1}{M_{L+1} + 1} \quad (3.28)$$

donde el parámetro  $M$  viene dado por la siguiente expresión:

$$M_{L+1} = \frac{D_{L+1}}{T} \quad (3.29)$$

Esta expresión contempla el tiempo de aplicación de la señal de entrada únicamente, además se espera que en ningún caso las amplitudes  $C_j$  sean cero, en caso contrario se requiere hacer un promedio por intervalos de forma tal que se eviten las divisiones por cero. La ecuación (3.28) puede ajustarse fácilmente para no incluir dichos intervalos.

Analizando (3.25) a partir del último pulso, es decir  $t \geq D_{L+1}$  es posible reducir la expresión a la forma deseada:

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^n Q_i \sum_{j=0}^L C_j (e^{-\lambda_i D_j} - e^{-\lambda_i D_{j+1}}) e^{\lambda_i t} \quad (3.30)$$

La ecuación anterior también se puede expresar como:

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^n B_i e^{\lambda_i t}$$

A partir de este resultado se puede obtener directamente el amortiguamiento y frecuencia de los diferentes modos que componen a la señal. Si en el análisis se centra la atención en la respuesta del sistema para cuando  $t \geq D_{L+1}$ , es decir, se emplea únicamente la aproximación de la ecuación (3.30) es posible obtener muy buenos resultados y el proceso se simplifica bastante, el error generado al omitir  $K_0$  en los cálculos puede no representar mayores problemas desde que el mismo cálculo de este parámetro es una aproximación.

El siguiente paso es, teniendo los residuos  $B_i$  de la señal, se procede a determinar los residuos de la función de transferencia, es decir, los correspondientes a la ecuación (3.23) de la siguiente manera, dado que

$$B_i = \frac{R_i}{\lambda_i} \sum_{j=0}^L C_j (e^{-\lambda_i D_j} - e^{-\lambda_i D_{j+1}})$$

obteniendo finalmente:

$$R_i = \frac{\lambda_i B_i}{\sum_{j=0}^L C_j (e^{-\lambda_i D_j} - e^{-\lambda_i D_{j+1}})} \quad (3.31)$$

En los siguientes apartados se analizan casos particulares de este modelo y se propone un algoritmo de identificación.

### 3.2.4 Identificación basada en la aplicación de un escalón

En este caso se estudia la respuesta de un sistema a una entrada escalón de amplitud  $h$ .

El análisis parte de la representación de la función de transferencia del sistema mediante el modelo general

$$G(s) = \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{s - \lambda_i} \quad (3.32)$$

donde los parámetros  $R_i$  son los residuos del sistemas que deben determinarse.

Observando que la transformada de Laplace correspondiente a un escalón de amplitud  $h$  es:

$$U(s) = \frac{h}{s} \quad (3.33)$$

se tiene

$$Y(s) = G(s)U(s) = \left( \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{s - \lambda_i} \right) \left( \frac{h}{s} \right)$$

y con ello

$$Y(s) = h \frac{Q_0}{s} + h \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{s - \lambda_i} \quad (3.34)$$

donde

$$Q_i = \frac{R_i}{\lambda_i} \quad (3.35)$$

y

$$Q_0 = - \sum_{i=1}^n Q_i \quad (3.36)$$

En el dominio del tiempo, la salida  $y(t)$  estará dada por

$$y(t) = hQ_0\mu(t) + \sum_{i=1}^n B_i e^{\lambda_i t} \quad (3.37)$$

donde  $\mu(t)$  representa al escalón unitario.

El primer término del lado derecho de la ecuación representa el estado estable de la señal. El segundo término representa la respuesta transitoria a la excitación aplicada.

Dado que esta ecuación debe ser válida para  $t \geq 0$  y, despejando para el valor de los residuos de la sumatoria se puede mostrar que

$$R_i = \frac{\lambda_i B_i}{h} \quad (3.38)$$

Los modelos de Prony descritos anteriormente, pueden introducirse en una estructura reticular de manera que es posible resumir los resultados obtenidos en los diferentes apartados de este capítulo.

La tabla 3.1 muestra el esquema de cálculo utilizado para estimar los residuos de la función de transferencia propuesta para cada uno de los tipos de entrada analizados.

Este procedimiento extiende el considerado por otros autores, los cuales parten de simplificaciones similares.

**Tabla 3.1** Obtención de residuos a partir de diversos tipos de entrada

Tipo de entrada	$U(s)$	$G(s)$	Expresión para obtener $R_i$
<b>Impulsos</b>	$\alpha_0 + \alpha_1 e^{-hs} + \alpha_2 e^{-2hs} + \dots + \alpha_k e^{-khs}$	$\sum_{i=1}^p \frac{\hat{R}_i}{s - \lambda_i}$	$\frac{B_i}{\sum_{j=0}^k \alpha_j e^{-h\lambda_i(j+k)}}$
<b>Escalón</b>	$\frac{h}{s}$	$\sum_{i=1}^n \frac{R_i}{s - \lambda_i}$	$\frac{\lambda_i B_i}{h}$
<b>Pulso</b>	$\frac{b(1 - e^{-as})}{s}$	$\sum_{i=1}^n \frac{R_i}{s - \lambda_i}$	$\frac{\lambda_i B_i}{(1 - e^{-a\lambda_i})b}$
<b>Secuencias de pulsos</b>	$\sum_{j=0}^L C_j \frac{e^{-sD_j} - e^{-sD_{j+1}}}{s}$	$K_0 + \sum_{i=1}^m \left( \frac{R_i}{s - \lambda_i} \right)$	$\frac{\lambda_i B_i}{\sum_{j=0}^L C_j (e^{-\lambda_i D_j} - e^{-\lambda_i D_{j+1}})}$

A lo largo de las secciones anteriores se ha desarrollado una metodología para la identificación de sistemas basada una representación mediante funciones de transferencia. Un sistema físico se puede representar con un modelo matemático que describe al sistema mediante un conjunto de entradas, salidas y variables de estado relacionadas por ecuaciones diferenciales de primer orden, esta representación es llamada representación en el espacio de estados. Resulta conveniente este enfoque cuando se analizan sistemas con múltiples entradas y salidas [11].

En el siguiente apartado se describe e implementa un procedimiento para obtener una representación en el espacio de estados del sistema identificado a partir de la información contenida en la función de transferencia.

### 3.3 Representación en el espacio de estados

En la representación en el espacio de estados, la relación existente entre la entrada, el ruido y las señales de salida de un sistema se representa mediante un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden [6] haciendo uso de un vector auxiliar de estados  $x(t)$ .

En este caso, y sin pérdida de la generalidad, se considera un sistema simple de una entrada y una salida. Se asume  $D = 0$  y que el sistema tiene condiciones iniciales nulas.

Teniendo en cuenta las simplificaciones anteriores, el comportamiento del sistema se aproxima por el modelo de espacios de estado

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.39A)$$

$$y = Cx + Du \quad (3.39B)$$

donde:

*A es una matriz de  $n \times n$*

*B es un vector  $n \times 1$*

*C es un vector de  $1 \times n$*

*D = 0*

*u es la entrada aplicada*

Las ecuaciones que conforman esta representación pueden ser reacomodadas o representadas de diferente forma de acuerdo a necesidades específicas en cada caso [11].

Las matrices  $A, B, C, D$  están construidas bajo condiciones tales que, el sistema es lineal e invariante en el tiempo (LTI por sus siglas en inglés). Los sistemas también pueden ser clasificados de acuerdo al número de entradas y salidas. De este modo, si tanto la entrada como la salida contienen sólo un elemento, el sistema es considerado una entrada-una salida (SISO por sus siglas en inglés). Si la entrada y/o la salida contienen múltiples elementos entonces el sistema puede ser MIMO, MISO o SIMO.

En las ecuaciones (3.40A) a (3.40D)  $G(s)$  es la función de transferencia en el dominio  $s$  mostrando la relación entre la respuesta de una salida  $Y(s)$  a una entrada  $U(s)$ .

$$g(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (3.40A)$$

$$= \frac{G(s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \dots + a_1s + a_0)}{(s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0)} \quad (3.40B)$$

$$= \frac{G(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad (3.40C)$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{K_j}{s - p_j} \quad (3.40D)$$

Los parámetros  $p_i$  y los  $z_i$  en (3.40C) corresponden, respectivamente, a los polos y ceros de sus polinomios asociados en (3.40C). En (3.40D) cada  $K_j$  es un residuo en la función de transferencia asociado al polo  $p_j$ .

En el caso en que la función de transferencia que representa al sistema es exacta entonces cada polo es un valor propio de la matriz de sistema  $A$ . Es conveniente mencionar que en la literatura existente, la terminología usada no siempre es homogénea; algunos autores asocian un modo con cada  $p_j$  para un total de  $n$  modos. En el caso de polos complejos, estos ocurren en pares conjugados, por lo que muchos autores asocian cada par con un único modo. Siendo esta última terminología la más común en Sistemas de Potencia [2].

En el contexto de identificación modal se puede decir que el objetivo inicial es el determinar los polos del sistema o bien, equivalentemente, los eigenvalores de  $A$ . Al realizar la identificación de funciones de transferencia además de los polos se requiere de la determinación de los ceros y de las ganancias. Este proceso involucra a todas las matrices indicadas en (3.39).

Haciendo uso de las matrices involucradas en la representación en el espacio de estados,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u$$

La función de transferencia de un sistema puede expresarse en el dominio de Laplace como

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \quad (3.41)$$

Si se usa una matriz de transformación  $\mathbf{T}$  para diagonalizar la matriz  $\mathbf{A}$  de la ecuación anterior

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1} - \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1})^{-1}\mathbf{B}$$

donde  $\mathbf{A}$  es una matriz diagonal que contiene los eigenvalores de  $\mathbf{A}$

$$G(s) = \mathbf{C}(\mathbf{T}(s - \mathbf{T}\mathbf{A})\mathbf{T}^{-1})^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{C}\mathbf{T}(s - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}$$

Si ahora se define  $\mathbf{C}\mathbf{m} = \mathbf{C}\mathbf{T}$  y  $\mathbf{B}\mathbf{m} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}$  se obtiene la siguiente expresión:

$$G(s) = \begin{bmatrix} C_{m1} & C_{m2} & \dots & C_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s - \lambda_1} & & & \\ & \frac{1}{s - \lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{s - \lambda_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{m1} \\ B_{m2} \\ \vdots \\ B_{mn} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

En donde los subíndices en los términos  $C_{m1}, C_{m2}, B_{m1}, B_{m2}$  indican que son los elementos 1 y 2 de los vectores  $\mathbf{C}\mathbf{m}$  y  $\mathbf{B}\mathbf{m}$  respectivamente.

Al evaluar las operaciones matriciales de la ecuación anterior es posible representar (3.42) de la forma:

$$G(s) = \sum_{i=1}^n \frac{C_{mi}B_{mi}}{s - \lambda_i} \quad (3.43)$$

Mediante este análisis podemos observar que es posible construir la realización en el espacio de estados del sistema identificado usando los resultados obtenidos del análisis de Prony, tomando los modos directamente de ese procedimiento y los residuos de la función de transferencia calculados a partir de los diferentes procedimientos descritos anteriormente, de acuerdo al tipo de señal de entrada aplicada. Entonces, usando esta información y de acuerdo a la ecuación anterior hay varias opciones para construir una realización en el espacio de estados [1].

Las matrices se pueden formar de la manera siguiente:

$$\mathbf{A} = \text{diag}(\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_n) \quad (3.44A)$$

$$\mathbf{B} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T \quad (3.44B)$$

$$\mathbf{C} = [R_1 \ R_2 \ \dots \ R_n] \quad (3.44C)$$

$$D = 0 \quad (3.44D)$$

La realización elegida en este caso corresponde a la forma canónica diagonal.

Una vez que se han determinado los coeficientes  $B_i$  y los residuos del modelo, es posible determinar un modelo de espacios de estado de la forma (3.39A) y (3.39B).

### 3.4 Implementación del algoritmo propuesto

La implementación del algoritmo propuesto ha sido desarrollada utilizando como estructura básica el algoritmo que se muestran en la figura 3.5. A continuación se explica en detalle cada una de las etapas que conforman este proceso.

El método parte de la representación del sistema a identificar. Como puede verse en esta figura y se ha enfatizado anteriormente, se asume que el

sistema se encuentra en una región de operación donde se puede considerar como un sistema lineal.

Los gráficos superiores muestran, por un lado, una posible señal de entrada, mientras la gráfica de lado derecho muestra una respuesta típica de un sistema de potencia ligeramente amortiguado.

A la salida del sistema se realiza el muestreo de la señal de respuesta, en los bloques intermedios ubicados en la rama derecha se llevan a cabo las tres etapas del análisis de Prony descrito en la sección 2.2: se construye un modelo discreto de predicción lineal de acuerdo a la ecuación (2.13) y se resuelve para el vector de coeficientes  $a$  del conjunto de ecuaciones descrito en (2.14).

Posteriormente, se emplean los coeficientes calculados en el paso anterior en un polinomio característico de la forma (2.16) y se obtienen las raíces  $z_i$ , adicionalmente en este paso se calculan también los modos del sistema mediante la ecuación (2.17); haciendo uso de las raíces calculadas en el paso anterior se construye un sistema de ecuaciones en la forma indicada en (2.18) y se resuelve para el vector de residuos de la señal ( $B_i$ 's).

Estos pasos indicados en el párrafo anterior corresponden al enfoque original del análisis de Prony [12] donde sólo se obtiene un modelo de la señal muestreada. Este proceso permite obtener el estimado de los modos involucrados en el comportamiento dinámico del sistema.

El procedimiento general consiste de tres pasos secuenciales. En el primer paso, la señal aplicada se transforma al dominio de Laplace. En el segundo, obtiene una expresión para la respuesta del sistema considerando una función de transferencia que, de manera general, se puede representar por la ecuación (2.7).

Finalmente, se aplica la transformada inversa de Laplace a la expresión obtenida previamente y, mediante las ecuaciones descritas en los apartados 3.2.1 a 3.2.4, se obtiene una expresión para calcular los residuos  $R_i$  de la función de

transferencia a partir de la información obtenida por el análisis convencional de Prony, es decir, a partir de los residuos  $B_i$  y modos  $\lambda_i$  de la señal.

A partir de este análisis se genera la función de transferencia estimada para el sistema de prueba a partir de los residuos calculados en la etapa anterior y los modos de la señal calculados con anterioridad.

Adicionalmente se puede descomponer a los residuos en amplitud y fase y a los modos en amortiguamiento y frecuencia de la forma:

$$R_i = |R_i| \angle \phi_i \quad (3.45)$$

$$\lambda_i = \alpha_i + j2\pi f_i \quad (3.46)$$

Otra posibilidad de representación es el espacio de estados, siguiendo la pauta establecida en la sección anterior de este capítulo es posible obtener una representación en el espacio de estados en la forma canónica diagonal.

En este paso se comprueba también si el modelo obtenido es óptimo.

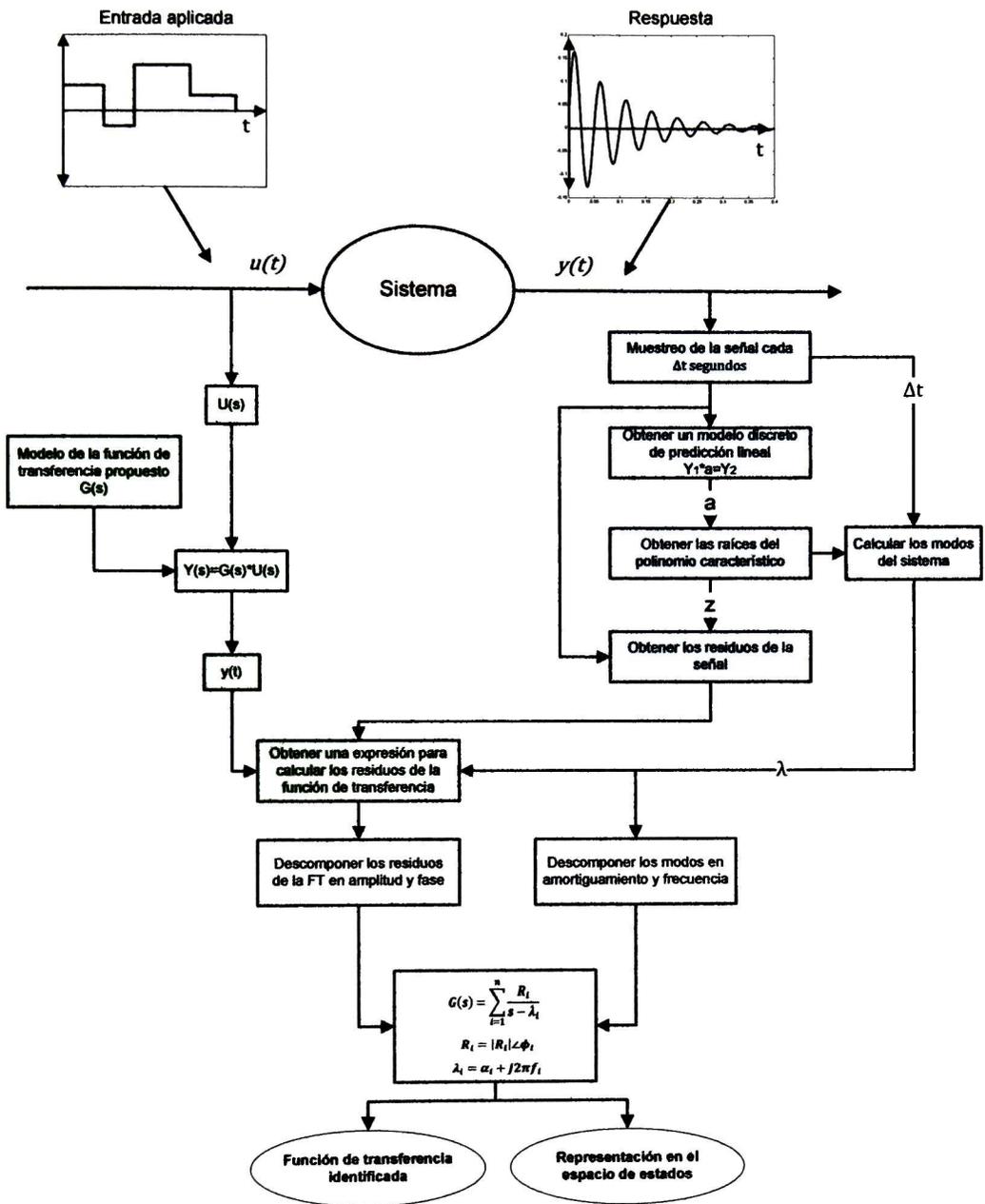


Figura 3.5 Diagrama de bloques del algoritmo para la identificación de funciones de transferencia.

### 3.5 Referencias

- [1]. H. Okamoto, A. Kurita, J. J. Sanchez-Gasca, K. Clark, N. W. Miller, J. H. Chow, "*Identification of Equivalent Linear Power System Models From Electromagnetic Transient Time Domain Simulations Using Prony's Method*". Proceedings of the 35<sup>th</sup> Conference on Decision and Control, December, 1996.
- [2]. Prince Alfred Emmanuel, "*Damping of Low Frequency Oscillations in ac/dc Power Systems Using HVDC Converter Control*". Ph. D. Thesis, Electrical Engineering Department, Montana State University, Bozeman, Montana, October, 1991.
- [3]. D. J. Trudnowski, J. R. Smith, T. A. Short, and D. A. Pierre, "*An Application of Prony Methods in PSS Design for Multimachine Systems*". IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 6, pp. 118-126, Feb. 1991.
- [4]. J. R. Smith, F. Fatehi, C. S. Woods, J. F. Hauer and D. J. Trudnowski, "*Transfer Function Identification in Power System Applications*". Paper No. 92SM537-1PWRS, IEEE/PES Summer Power Meeting Seattle, Washington, 1992.
- [5]. I. Kamwa, L. Gérin-Lajoie, "*State-Sapace System Identification Toward MIMO Models for Modal Analysis and Optimization of Bulk Power Systems*". IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 13, No. 1, February 2000.
- [6]. Lennart Ljung, *System Identification: Theory for the User*, Prentice Hall, 1987.
- [7]. D. A. Pierre, D. J. Trudnowski and J. F. Hauer, "*Identifying Linear Reduced-Order Models for Systems with Arbitrary Initial Conditions Using Prony Signal Analysis*". IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 37, pp. 831-835, June 1992.

- [8]. D. J. Trudnowski, M. K. Donnelly, J. F. Hauer, "*Advances in the Identification of Transfer Function Models Using Prony Analysis*" American Control Conference, 1993.
- [9]. D. A. Pierre, J. R. Smith, D. J. Trudnowski, L. W. Pierre, "*General Formulation of a Prony Based Method for Simultaneous Identification of Transfer Functions and Initial Conditions*", Proceedings of the 31<sup>st</sup> IEEE Conference on Decision and Control, 1992.
- [10]. J. J. Sanchez-Gasca, "*Identification of Power System Low Order Linear Models Using the ERA/OBS Method*" Power Systems Conference and Exposition, 2004. IEEE PES.
- [11]. K. Ogata, *Ingeniería de Control Moderna*, 3<sup>a</sup> Ed., Prentice Hall, 1998.
- [12]. D. J. Trudnowski, J. M. Johnson, J. F. Hauer. "*SIMO System Identification from Measured Ringdowns*", Proceedings of the American Control Conference. Philadelphia, Pennsylvania, June 1988.
- [13]. M. M. Mansour, A. Mehrotra, "*Model-Order Reduction Based on Prony's Method*". Design, Automation and Test in Europe Conference and Exhibition, pp. 530-535, 2003.

## Capítulo 4

# Estimación del Error de Aproximación en Modelos Lineales

*Las técnicas de análisis de señales identificación descritas en los capítulos anteriores derivadas de dinámicas oscilatorias de sistemas de potencia resultan, comúnmente, en modelos lineales de alto orden.*

*En este capítulo se describen técnicas de reducción de modelos basadas en el criterio de Akaike. Los métodos desarrollados se orientan a la determinación de un subconjunto de términos modos/residuos que representan la dinámica de interés del sistema en contraste a aquellas asociados a ruido introducido en la medición o términos espurios.*

*Se presenta el fundamento teórico de un nuevo estimador de orden reducido y se describe la experiencia en la identificación de modelos de orden reducido para señales medidas. Se propone, además, una función de medida para evaluar la estimación del error de aproximación en modelos.*

## 4.1 Antecedentes

Existe en la literatura un amplio número de investigaciones orientadas al uso de técnicas de análisis de valores propios y de análisis de series de tiempo para analizar y caracterizar procesos oscilatorios. Estas técnicas han sido desarrolladas separadamente durante varios años resultando en varios programas de uso comercial, a menudo sin criterios definidos que permitan evaluar su exactitud o robustez frente a dinámicas inmodeladas o incertidumbre. Por otro lado, los sistemas eléctricos de potencia actuales son de dimensión muy grande por lo que los modelos obtenidos mediante técnicas convencionales son de muy alto orden, que van desde cientos hasta miles de estados [1].

La experiencia muestra que al excitar a un sistema mediante señales apropiadas de prueba es posible identificar el comportamiento oscilatorio de interés. Al centrar la atención en los modos dominantes de un sistema es posible obtener un modelo reducido que reproduzca la respuesta de forma muy aproximada al modelo original de alto orden.

De acuerdo al principio de parsimonia, en [2], si se tienen dos o más modelos como candidatos los cuales describen en buena manera un sistema, el modelo a emplear es aquél que representa las características del sistema original empleando el menor número de parámetros.

En el caso de los sistemas de potencia, es importante que ciertas características sean preservadas en un modelo de orden reducido como son: la posición de los polos dominantes y la fase de los modos.

Con la finalidad de superar las dificultades asociadas a la solución de simulaciones empleando modelos de gran escala se han propuesto a lo largo del tiempo una variedad de métodos para obtener modelos de orden reducido que puedan ser incorporados en herramientas de simulación y obtener resultados equiparables a los generados por los modelos de alto orden [7], [8].

En el ámbito de los sistemas eléctricos de potencia, los modelos representativos de un sistema típico pueden llegar a tener miles de estados por lo que se requiere de programas de eigenanálisis especializados en sistemas de alto orden [9].

Debido al gran tamaño de algunos sistemas, en ocasiones los programas empleados se ven imposibilitados de realizar las simulaciones para el modelo completo [10]. Estas situaciones, entre otras, motivan la necesidad de modelar los sistemas de estudio mediante representaciones de bajo orden que mantengan presentes las características dominantes del sistema original de alto orden.

## **4.2 Métodos para la reducción de orden**

Se han implementado diferentes criterios de reducción de orden para obtener modelos de orden reducido a partir de sus contrapartes de alto orden. El objetivo es obtener un modelo que aproxime la respuesta del modelo de alto orden mediante un reducido número de parámetros.

En [7] se explica una clasificación de métodos para la obtención de modelos, indica que se puede clasificar en categorías los métodos de reducción de orden en función de la finalidad del estudio, es decir, si se busca precisión global, eficiencia o la fiabilidad del método:

- Métodos min-max basados en optimización no lineal.
- Métodos de expansión en series.
- Métodos de interpolación.
- Métodos basados en mínimos cuadrados.
- Métodos basados en el análisis de Fourier

Los métodos basados en solución por mínimos cuadrados presentan una ventaja sustancial al combinar características de los otros métodos. Dentro de esta categoría se han desarrollado varios esquemas de identificación de sistemas que generan modelos de orden reducido. El método de Prony es el más

representativo dentro de los estudios de oscilaciones electromecánicas en sistemas de potencia [5].

En la literatura existente es posible encontrar una gran variedad de métodos que abordan el problema de la reducción de modelos de alto orden orientados a retener información de importancia de acuerdo a la finalidad de los estudios.

En este sentido destacan los siguientes:

- El Método de Realización Balanceada (BRM por sus siglas en inglés) [3].
- Algoritmo para Realización de Eigensistemas (ERA) [4].
- Un método basado en el Criterio de Información de Akaike [1].

En las siguientes líneas se presenta una breve descripción de cada uno de estos métodos.

#### ***4.2.1 Método de Realización Balanceada***

El BRM posee la característica de preservar la controlabilidad y la observabilidad de los estados. Para lograr esto, sin embargo, el método mueve la posición de los polos por lo que éste método no es muy adecuado en sistemas de potencia.

#### ***4.2.2 Algoritmo de Realización de Eigensistemas***

Es un método basado en matrices Hankel, presenta una alternativa al método de identificación de sistemas basado en el análisis de Prony, requiriendo un menor esfuerzo computacional [9].

El método es particularmente eficiente para el estudio de sistemas ligeramente amortiguados. En la referencia [5] se describe un enfoque de aplicación de este método al estudio de oscilaciones electromecánicas en sistemas de potencia.

El algoritmo ERA construye una representación en el espacio de estados de un sistema lineal. La idea básica consiste en extraer una parte de la matriz Hankel generalizada y obtener la descomposición en valores singulares de esta nueva matriz, con lo cual es posible obtener un modelo reducido empleando algún criterio para determinar la cantidad de valores singulares a eliminar.

Una descripción más detallada de este algoritmo, así como varias mejoras al método, pueden obtenerse en el libro indicado en [6].

### ***4.2.3 Criterio de Información de Akaike***

Otro método de particular interés es el basado en el Criterio de Información de Akaike (AIC) el cual preserva las características originales del sistema de alto orden [1]. Puede ser aplicado a los modelos basados en eigenanálisis así como en análisis de Prony para obtener modelos de orden reducido óptimos [8].

La idea básica de este método consiste en determinar el subconjunto de parámetros que ajustan de manera óptima la respuesta original de forma tal que se tiene la certeza de que el modelo de orden reducido mantiene las características que presenta el sistema de alto orden en cuanto a respuesta al impulso en el dominio del tiempo y frecuencia.

## **4.3 Algoritmo para la reducción de orden**

Después de analizar las características de varios métodos para la reducción de orden, se puede decir que no hay un método que pueda considerarse como el óptimo puesto que todos poseen fortalezas y debilidades que se presentan en mayor o menor medida dependiendo del área de aplicación. Es por esto que no es posible asegurar que un determinado algoritmo sea capaz de obtener los mejores resultados en todos los estudios.

En el presente trabajo se optó por emplear el método de reducción de orden basado en el criterio de Akaike debido a que preserva las características originales de los modos dominantes presentes en el modelo de alto orden.

Empleando este criterio se obtiene una certeza de que el orden del modelo obtenido representa adecuadamente los datos entrada-salida tomados del sistema original [11]

En las páginas siguientes se muestra el método para la reducción de orden que fue presentado en el artículo [1].

### 4.3.1 Metodología

El problema de reducción de orden surge al intentar reproducir el comportamiento del sistema mediante un modelo de orden menor. Utilizando la nomenclatura original de Trudnowski *et al.* [12], el modelo de alto orden obtenido del proceso de identificación se puede escribir como:

$$G(s) = \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{s - \lambda_i} = \frac{\text{Residuo}_i}{s - \text{polo}_i} \quad (4.1)$$

El problema de reducción de orden puede plantearse como la determinación de una función de transferencia aproximada de la forma  $\check{G}(s)$ , cuya respuesta se aproxima en forma precisa a la respuesta del sistema original  $G(s)$ .

Partiendo de los datos de la ecuación anterior, que son los  $n$  conjuntos de residuos-modos diferentes, se tienen dos pasos a seguir para efectuar la reducción de orden. El algoritmo utilizado comprende los siguientes pasos:

1. Se calcula la respuesta en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia del sistema indicado en (4.1)
2. Se busca el subconjunto más pequeño de residuos-modos que mejor aproximen la respuesta en el dominio del tiempo y frecuencia del sistema de alto orden que se calculó en el paso 1.

A continuación se resume el proceso de estimación de los parámetros del modelo (4.1).

### 4.3.2 Descripción del método

Para el análisis numérico de modelos óptimos de orden reducido se emplea un método iterativo. En el primer paso, la respuesta al impulso del sistema de alto orden se calcula de la siguiente manera:

$$g(t_k) = \sum_{i=1}^n R_i e^{t_k \lambda_i}; \quad k = 0, 1, \dots, N_T - 1 \quad (4.2)$$

$$G(j\omega_k) = \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{j\omega_k - \lambda_i}; \quad k = 1, 2, \dots, N_\infty \quad (4.3)$$

donde  $t_k = kT$  y  $\omega_k = (2\pi k)/(N_\infty \Delta\omega)$ .

En las ecuaciones anteriores, los parámetros  $T$ ,  $N_T$ ,  $\Delta\omega$  y  $N_\infty$  corresponden, respectivamente, al periodo de tiempo de muestreo, número de muestras para la respuesta en el dominio del tiempo, incremento en el dominio de la frecuencia y número de muestras a considerar en el dominio de la frecuencia se seleccionan de tal manera que se vean reflejadas las características del sistema en todo el ancho de banda.

Una vez que se han calculado las respuestas en tiempo y frecuencia para el sistema de alto orden, el paso número dos involucra un proceso iterativo donde para la primera iteración se calcula la respuesta individual de cada par de residuo-modo de la forma siguiente:

$$g_i(t_k) = R_i e^{t_k \lambda_i}; \quad k = 0, 1, \dots, N_T - 1 \quad (4.4)$$

$$G_i(j\omega_k) = \frac{R_i}{j\omega_k - \lambda_i}; \quad k = 1, 2, \dots, N_\infty \quad (4.5)$$

para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Ahora se aplica la fórmula del Criterio de Información de Akaike para cada uno de los términos calculados en las dos ecuaciones anteriores, mediante:

$$\Gamma = \sigma \left[ N \log \left( \frac{\|g_i - g\|^2}{N \|G\|^2} \right) + 4n_i \right] + \beta \left[ N \log \left( \frac{\|G_i - G\|^2}{N \|G\|^2} \right) + 4n_i \right] \quad (4.6)$$

En la ecuación anterior, los términos  $(\sigma, \beta)$  representan constantes reales positivas, de las cuales  $\sigma$  enfatiza los datos para el dominio del tiempo mientras  $\beta$  lo hace para el dominio de la frecuencia y  $n_i$  es el orden de  $G_i$ .

De lo anterior se desprende claramente que el par de datos  $(R_i, \lambda_i)$  que minimiza la ecuación (4.6) es seleccionado entonces como el par de mayor contribución y se le asigna un nuevo subíndice de manera que el subíndice  $i$  pasa a ser un elemento del vector  $m$  en la posición uno, en este caso, para formar  $(R_{m(1)}, \lambda_{m(1)})$  y el correspondiente valor de AIC es entonces llamado  $\Gamma_1$ .

Como segundo paso dentro del proceso ahora se buscan nuevamente las  $n - 1$  respuestas al impulso de los términos restantes, mediante las siguientes ecuaciones:

$$g_i(t_k) = R_{m(1)} e^{t_k \lambda_{m(1)}} + R_i e^{t_k \lambda_i}; \quad k = 0, 1, \dots, N_T - 1 \quad (4.7)$$

$$G_i(j\omega_k) = \frac{R_{m(1)}}{j\omega_k - \lambda_{m(1)}} + \frac{R_i}{j\omega_k - \lambda_i}; \quad k = 1, 2, \dots, N_\infty \quad (4.8)$$

donde  $i = 1, 2, \dots, n, i \neq m(1)$ .

De los valores estimados en (4.7) y (4.8) se busca nuevamente el par  $(R_i, \lambda_i)$  que minimice el valor en (4.6) y es entonces nombrado como  $(R_{m(2)}, \lambda_{m(2)})$  y el correspondiente AIC es  $\Gamma_2$ .

A partir de estas expresiones es posible intuir el proceso iterativo que se está llevando a cabo para reordenar todos los pares modo-residuo. Para dejar más claro este proceso, se muestra a continuación la forma en que se obtienen las siguientes  $n - 2$  respuestas al impulso de los modos-residuos restantes:

$$g_i(t_k) = R_{m(1)} e^{t_k \lambda_{m(1)}} + R_{m(2)} e^{t_k \lambda_{m(2)}} + R_i e^{t_k \lambda_i}; \quad k = 0, 1, \dots, N_T - 1 \quad (4.9)$$

$$G_i(j\omega_k) = \frac{R_{m(1)}}{j\omega_k - \lambda_{m(1)}} + \frac{R_{m(2)}}{j\omega_k - \lambda_{m(2)}} + \frac{R_i}{j\omega_k - \lambda_i}; \quad k = 1, 2, \dots, N_\infty \quad (4.10)$$

para  $i = 1, 2, \dots, n, i \neq m(1), i \neq m(2)$ .

Nuevamente, estos resultados se prueban mediante la ecuación (4.6) para determinar el par  $(R_i, \lambda_i)$  que produce el mínimo. Este par es nombrado  $(R_{m(3)}, \lambda_{m(3)})$  y el correspondiente AIC es  $\Gamma_3$ .

Este proceso se continúa para obtener todos los  $\Gamma_i$ , pudiendo aplicar un criterio para preestablecer una primera reducción, es decir, se busca:

$$\Gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, n - r \quad (4.11)$$

Donde  $r$  es un entero menor que  $n$  de tal forma que este valor impone un límite al valor máximo del orden del modelo reducido. Si se dice que  $\Gamma_v$  es el mínimo de todos los  $\Gamma$  entonces el modelo de orden reducido es:

$$G(s) = \sum_{i=1}^v \frac{R_{m(i)}}{s - \lambda_{m(i)}} \quad (4.12)$$

### 4.3.3 Observaciones

Debido a que, en cierta manera, este procedimiento en cada nueva iteración va acumulando la contribución de los pares  $(R_i, \lambda_i)$  anteriores al calcular la respuesta al impulso de los pares restantes, llega un momento en el cual el valor obtenido en (4.6) prácticamente deja de disminuir lo cual es un indicio de que los nuevos pares de datos seleccionados tienen una contribución mínima al resultado.

Por lo que el orden del modelo reducido puede elegirse tomando en cuenta este dato, es decir, considerando todos los pares  $(R_i, \lambda_i)$  hasta el punto en el que el AIC deja de disminuir.

En cuanto al límite máximo del orden del modelo final, este paso bien puede omitirse en una primera corrida del algoritmo para obtener una lista de modos-residuos ordenados de mayor a menor contribución. Es en este punto donde se requiere el criterio de ingeniería, es decir la intervención del usuario,

así como la evaluación de la información disponible acerca del sistema de estudio para decidir el valor de  $r$  que sea más conveniente a emplear.

#### 4.4 Estimación del error de aproximación

En el análisis de modelos de gran dimensión es importante tener una idea de la exactitud de los resultados obtenidos por lo cual se requiere medir el error entre el modelo real y el modelo identificado. Para ello se hace uso del error medio cuadrático normalizado (NMSE por sus siglas en inglés) como se indica en la ecuación 4.13.

Una ventaja de esta herramienta es que el resultado es un valor único, lo que permite valorar rápidamente la precisión de los resultados obtenidos.

El valor cuadrático medio se calcula de la siguiente manera:

$$NMSE = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^N y_i^2} \quad (4.13)$$

donde

$y_i$  son las muestras obtenidas del modelo real

$\hat{y}_i$  son las muestras obtenidas del modelo identificado

$e_i$  es el error cuadrático

$N$  es el número de muestras de la señal

Una vez generada la función de transferencia de orden reducido se realiza la simulación aplicando la misma entrada que al sistema original y se comparan los resultados obtenidos con el modelo reducido.

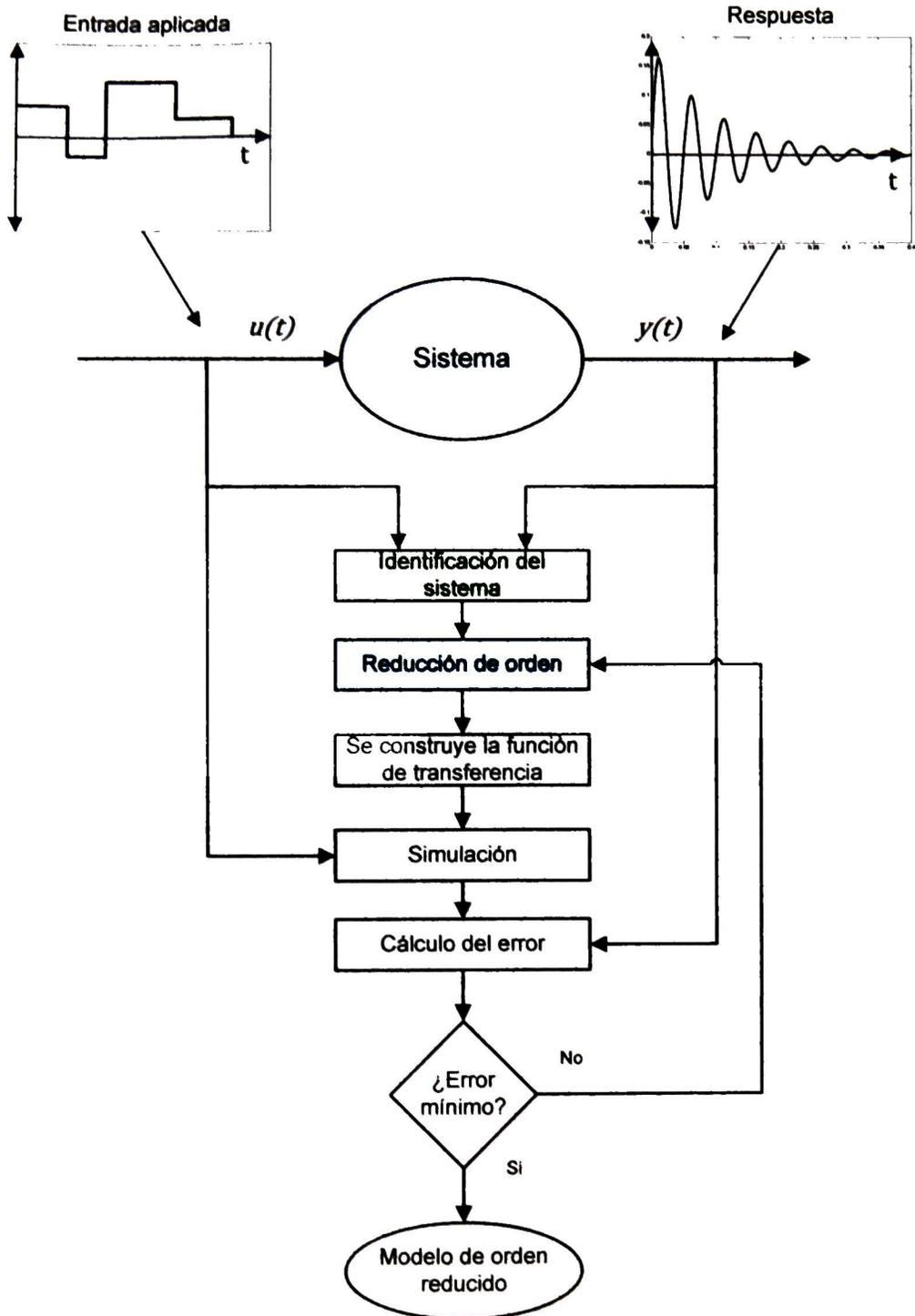


Figura 4.1 Proceso para la reducción de orden

## 4.5 Procedimiento para la obtención de la función de transferencia

Al aplicar el procedimiento indicado en la sección 4.3 es posible sintetizar una función de transferencia a partir de los modos/residuos que se han seleccionado como los de mayor contribución a la respuesta del sistema.

El proceso comienza por aplicar el método de Prony para identificación de sistemas a un conjunto de muestras. Una vez que se obtienen los resultados correspondientes a un sistema de alto orden se aplica la metodología descrita en la sección 4.3 para el conjunto de modos/residuos obtenido, el resultado será una lista con los pares modos/residuos ordenados de manera descendente, indicando con esto la magnitud de la contribución que realizan a la respuesta del sistema.

Teniendo el conjunto de datos del modelo de orden reducido, se procede a obtener los complejos conjugados correspondientes para el caso de modos/residuos complejos. Con esta información entonces se construye la función de transferencia del sistema al realizar la sumatoria de fracciones como se indica en (4.12) incluyendo el complejo conjugado cuando corresponde.

La figura 4.1 muestra el procedimiento de obtención de funciones de transferencia de orden reducido.

En la figura anterior, el bloque concerniente a la identificación del sistema se refiere al análisis de Prony de la respuesta del sistema y la posterior obtención de los residuos de la función de transferencia mediante los procedimientos descritos en el capítulo 3.

La información requerida para realizar la reducción de orden es la lista de modos y residuos que conforman la función de transferencia del modelo identificado. En el capítulo 3 se mostró que es posible obtener modelos en el espacio de estados a partir de esta información, por lo que de igual manera es posible obtener dicha representación a partir del resultado final del procedimiento mostrado en la figura anterior.

En el bloque titulado *Reducción de orden*, el modelo de alto orden es analizado empleando la metodología presentada en este capítulo con lo que se obtiene un modelo de orden reducido. Se realiza una simulación del modelo reducido aplicando una la misma entrada de prueba que fue utilizada para obtener el modelo original, con esto es posible evaluar la exactitud del modelo reducido al realizar un cálculo del error existente entre la respuesta del modelo reducido y la del modelo identificado originalmente.

Debido a la flexibilidad del algoritmo descrito para la reducción de orden es posible realizar el procedimiento de manera recursiva, cambiando en cada ocasión el número máximo permisible de modos retenidos en el modelo final. Con lo que es posible obtener un modelo óptimo que genere un error mínimo en la respuesta del modelo de orden reducido.

## 4.6 Referencias

- [1]. D. J. Trudnowski, "Order Reduction of Large-Scale Linear Oscillatory System Models". Pacific Northwest Lab., Richland WA., IEEE Transactions on Power Systems, Feb. 1994.
- [2]. T. Soderstrom and P. Stoica, *System Identification*, New York: Prentice Hall, 1989.
- [3]. G. Balas, J. C. Doyle, K. Glover, A. Packard and R. Smith, " $\mu$ -Analysis and Synthesis Toolbox: Users Guide" Natick, Massachusetts: The Math Works Inc, 1991.
- [4]. J.-N. Juang, R. S. Pappa, "An Eigensystem Realization Algorithm for modal Parameter Identification an Model Reduction". J. of Guidance and Control, Vol. 8, No 5, Sept.-Oct. 1985, pp-620-627.
- [5]. J. J. Sanchez-Gasca, "Identification of Power System Low Order Linear Models Using the ERA/OBS Method". Power Systems Conference and Exposition, 2004. IEEE PES.
- [6]. J.-N. Juang, *Applied System Identification*, Prentice Hall, 1994.
- [7]. M. M. Mansour, A. Mehrotra, "Model-Order Reduction Based on Prony's Method", Design, Automation and Test in Europe Conference and Exhibition, pp. 530-535, 2003.
- [8]. N. Garcia, E. Acha, "Transmission Line Model with Frequency Dependency and Propagation Effects: A Model Order Reduction and State-Space Approach", Power and Energy Society General Meeting Conversion and Delivery of Electrical Energy in the 21st Century, 2008 IEEE, On page(s): 1 - 7, Volume: Issue: , 20-24 July 2008.
- [9]. J. J. Sanchez-Gasca, J. H. Chow, "Computation of Power System Low-Order Models from Time Domain Simulations using a Hankel Matrix", IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 12, No. 4, Nov. 1997.
- [10]. A. Hasanovic, A. Feliachi, "Low Order Transfer Function Identification and Robust PSS Control Design". in Proc. IEEE Power Engineering Society General Meeting, 2003.

- [11]. H. Akaike, "A New Look at the Statistical Model Identification", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-19, no. 6, December 1974, pp. 716-723.
- [12]. D. J. Trudnowski, J. R. Smith, T. A. Short, and D. A. Pierre, "An Application of Prony Methods in PSS Design for Multimachine Systems", *IEEE Trans. on Power Systems*, Vol. 6, pp. 118-126, Feb. 1991.

## Capítulo 5

# Aplicación a la Identificación de Modelos de Funciones de Transferencia

*En este capítulo se presentan los resultados de la aplicación de la metodología desarrollada en sistemas sintéticos y señales obtenidas de la simulación de estabilidad transitoria de sistemas de potencia.*

*El objetivo es estudiar la validez de las identificaciones de funciones de transferencia proporcionadas por el método de Prony para la determinación de los modos electromecánicos de interés en el sistema. También se busca arrojar luz sobre el problema de la determinación del número adecuado de modos y el rango de validez de los métodos propuestos.*

*Se estudian los resultados correspondientes a señales sintéticas y señales obtenidas de la simulación en el dominio del tiempo de la respuesta del sistema a señales de prueba.*

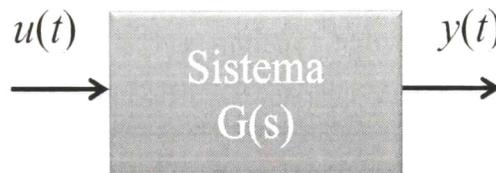
## 5.1 Construcción y análisis de los escenarios de prueba

### 5.1.1 Escenarios de prueba basados en señales sintéticas

Con objeto de validar la herramienta desarrollada, la exactitud del método propuesto se validó con sistemas lineales descritos por funciones de transferencia conocidas.

Para llevar a cabo la verificación y validación de los modelos, se estudian tres casos de prueba. Los dos primeros corresponden a funciones de transferencia con parámetros conocidos y cuyo estudio ha sido discutido en la literatura [1],[2]; el tercer caso de estudio corresponde a datos de prueba obtenidos de simulaciones de estabilidad transitoria.

En la figura 5.1 se muestra la estructura del modelo considerado, en la cual se desea identificar la función de transferencia  $G(s)$  a partir del conocimiento de la señal de entrada  $u(t)$  y la señal de salida  $y(t)$  [1].



**Figura 5.1** Función de transferencia del primer sistema de prueba

A partir de esta configuración, se seleccionan dos escenarios de prueba descritos en la literatura:

**Escenario de prueba 1.** En este caso de estudio, la función de transferencia exhibe polos complejos en 1 Hz, 0.80 Hz, 0.45 Hz, 0.35 Hz y un polo real en

La función de transferencia que se desea identificar puede escribirse como

$$G(s) = \frac{3.4248\angle \pm 143.0956}{s + 0.05 \pm j2\pi(1)} + \frac{3.00\angle \pm 109.5527}{s + 0.10 \pm j2\pi(0.80)} + \frac{25.0687\angle \pm 137.8678}{s + 0.25 \pm j2\pi(0.45)} + \frac{57.4634\angle \pm 74.4732}{s + 0.50 \pm j2\pi(0.35)} + \frac{44.0618}{s + 3.2\pi}$$

**Figura 5.2** Función de transferencia del primer sistema de prueba

En la representación anterior, el símbolo  $\pm$  denota la presencia de polos (ceros) complejos conjugados. Los residuos se muestran en forma polar, donde la fase se expresa en grados; los modos se escriben en forma rectangular con la finalidad de apreciar fácilmente el amortiguamiento y la frecuencia la cual, en el caso de modos complejos, se muestra encerrada en paréntesis.

**Escenario de prueba 2.** Este caso de estudio, tomado de la referencia [2], tiene una función de transferencia de la forma

$$G(s) = \left[ \frac{2(5 + 0.5 \pm j0.9\pi)}{(s + 2)(s + 0.2 \pm j2\pi(0.5))} \right] \left[ \frac{s + 0.505 \pm j0.909\pi}{s + 0.25 \pm j2\pi(0.375)} \right]$$

**Figura 5.3** Función de transferencia del segundo sistema de prueba

La función de transferencia es de quinto orden y contiene dos polos complejos conjugados y uno real. Las frecuencias de oscilación no superan a 0.5Hz

### 5.1.2 Escenario de prueba 3: Ejemplo de identificación basado en mediciones

En este escenario de prueba, la función de transferencia a identificar corresponde a un circuito de control de amortiguamiento de oscilaciones (PSS) en un compensador estático de VARs.

El objetivo de este caso de estudio es el de identificar la función de transferencia del PSS cuando se aplica una entrada conocida al sistema. Se busca también evaluar la capacidad del método para estimar polos repetidos.

La señal de entrada es una función escalón de amplitud 0.05 p.u aplicada al voltaje de referencia del compensador de potencia reactiva en  $t=0$  s.

En la figura 5.4, se presenta esquemáticamente el modelo considerado.

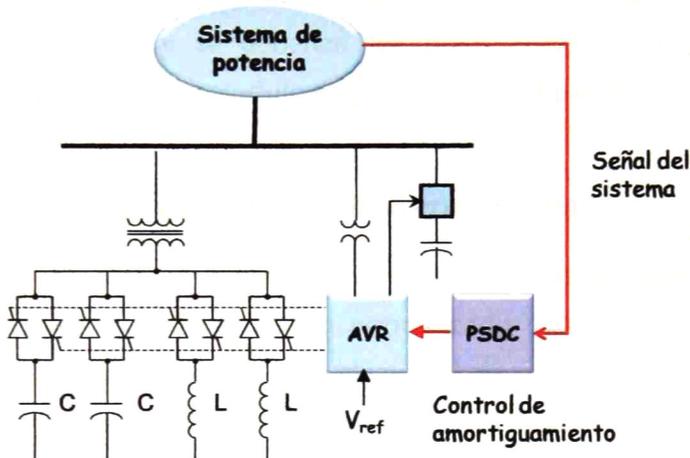


Figura 5.4 Ilustración del escenario de prueba 3.

La función de transferencia correspondiente a este escenario se muestra en la figura 5.5.

$$G(s) = \frac{(10s)(1 + 0.1211s)(1 + 0.1211s)(0.05)}{(1 + 10s)(1 + 0.8s)(1 + 0.8s)(1 + 0.05s)}$$

Figura 5.5 Función de transferencia del tercer sistema de prueba

Nótese que la función de transferencia contiene polos repetidos en  $s = -1.25$  correspondientes a los bloques de atraso-adelanto en el sistema.

Para propósitos del estudio, la señal de prueba aplicable a la entrada del PSS debe contener dos características principales:

1. La señal de prueba se selecciona para satisfacer que el sistema opera en la región lineal, y
2. La duración y amplitud de cada pulso debe de excitar los modos de interés en el estudio.

En ambos casos, la respuesta observada a la señal de excitación se obtiene de la simulación del modelo dinámico del sistema mediante un programa de estabilidad transitoria y se obtienen los polos y ceros de la función de transferencia aplicando la metodología propuesta en el capítulo 3.

## 5.2 Evaluación de la exactitud de la aproximación

En los estudios presentados, la calidad de aproximación se evaluó mediante el error medio cuadrático normalizado (NMSE por sus siglas en inglés). El método de cálculo de error elegido es el mismo que se describe en el capítulo 4, y que se reescribe a continuación por claridad:

$$NMSE = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^N y_i^2}$$

donde

$y_i$  son las muestras obtenidas del modelo real

$\hat{y}_i$  son las muestras obtenidas del modelo identificado

$e_i$  es el error cuadrático

$N$  es el número de muestras de la señal

## 5.3 Análisis del escenario de prueba 1

En esta sección se incluyen los resultados obtenidos de las diferentes pruebas realizadas a la función de transferencia indicada en la figura 5.2. Las

pruebas consisten en la aplicación de diferentes trenes de pulsos; la salida corresponde a la respuesta del modelo  $G(s)$  considerado.

En las pruebas realizadas a este sistema, se toman muestras durante 15 segundos con un periodo de muestreo de 0.05 segundos en todos los casos.

### 5.3.1 Respuesta a un pulso

Los algoritmos descritos en los capítulos 3 y 4 se han usado para identificar funciones de transferencia a partir de la respuesta obtenida a una señal de prueba o excitación.

En este primer caso, la entrada  $u(t)$  consiste en un pulso con duración de 0.4 segundos y amplitud unitaria como se muestra en la en la figura 5.6. La duración del pulso se selecciona para excitar los modos de interés.

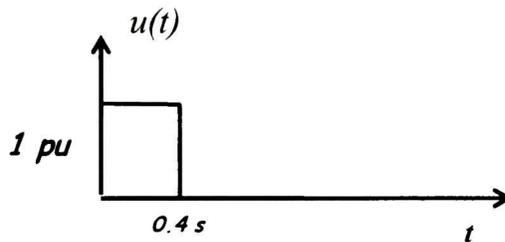


Figura 5.6 Entrada aplicada al sistema 1, prueba 1.

El análisis de Prony del modelo resulta en 135 modos diferentes (incluyendo los complejos conjugados).

En la tabla 5.1 se muestran los modos y residuos estimados de la señal, incluyendo su amortiguamiento ( $\alpha$ ), frecuencia, magnitud ( $|R_i|$ ) y fase ( $\angle R_i$ ). Por practicidad se excluyen los complejos conjugados.

La ventaja de este análisis es que resulta sencillo ubicar los parámetros de mayor contribución. Esta característica se presenta debido a la ausencia de ruido en las mediciones y a que la entrada aplicada excita adecuadamente todos

los modos del sistema, por lo que el método aplicado asigna un peso muy bajo a todos los modos adicionales generados en el proceso de identificación.

En la práctica, una manera sencilla de ubicar los términos que pueden conformar un modelo reducido, en este caso, es guiándose por la magnitud de los residuos. No obstante, para propósitos de una identificación automática de los modos dominantes este criterio no tiene validez, especialmente en el análisis y procesamiento de señales con ruido.

Si bien esta característica no debe esperarse que se presente en todos los casos, es una forma rápida de ubicar los modos con mayor peso.

En la tabla 5.2 se sintetizan los modos físicos de interés obtenidos utilizando este criterio.

Se puede observar, comparando estos resultados con el modelo asumido del sistema, que los modos con mayor residuo corresponden a los modos que se desea identificar.

En la figura 5.7 se comparan las respuestas del modelo original y el sistema identificado. En este gráfico, la línea continua representa la respuesta del sistema original mientras la línea punteada presenta la respuesta del sistema identificado de orden 135.

Como se puede observar, el modelo identificado reproduce en forma prácticamente exacta la respuesta real del sistema. El error NMSE calculado entre la respuesta del modelo original y el modelo identificado es  $1.9214 \times 10^{-9}$

**Tabla 5.1** Resultados para el sistema 1, prueba 1

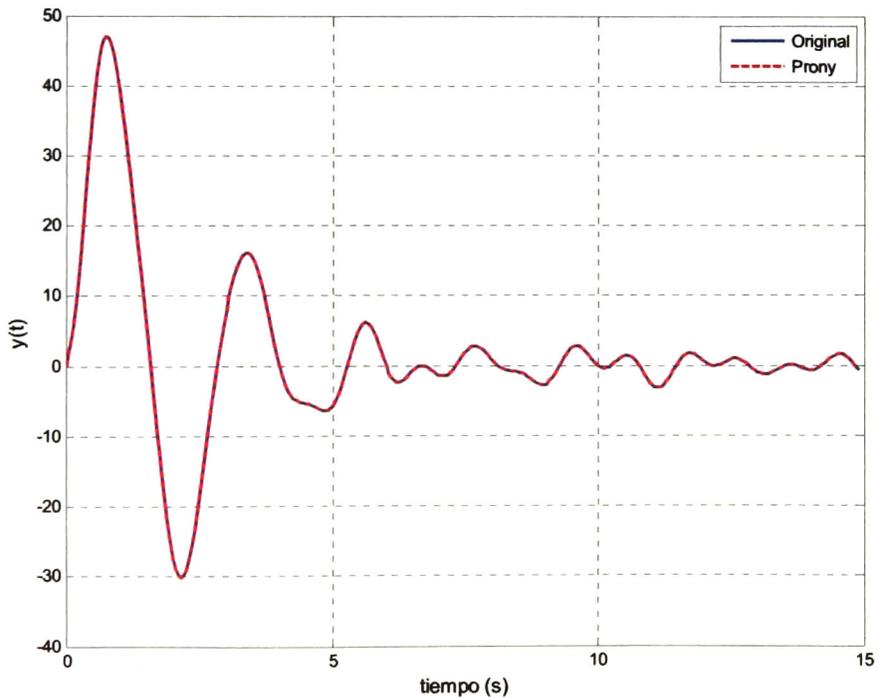
Numero	$\alpha_i$	Frecuencia	$ R_i $	$4R_i$
1.0000	0.1782	0.1596	0.0000	105.2086
2.0000	0.4116	0	0.0000	-86.0814
3.0000	0.5000	0.3500	57.4634	-74.4732
4.0000	0.2500	0.4500	25.0687	-137.8678
5.0000	0.2089	0.6463	0.0000	23.9364
6.0000	0.1000	0.8000	3.0000	-109.5527
7.0000	0.0500	1.0000	3.4248	-143.0956
8.0000	0.1568	1.1585	0.0000	-109.4803
9.0000	0.0297	1.3476	0.0000	-15.7256
10.0000	0.3951	1.5479	0.0000	-37.5441
11.0000	0.1757	1.9478	0.0000	70.0498
12.0000	0.3724	2.1245	0.0000	-47.4024
13.0000	0.2038	2.2739	0.0000	81.8440
14.0000	0.3555	2.4511	0.0000	76.0086
15.0000	0.1499	2.5833	0.0000	-51.0964
16.0000	0.0707	2.7857	0.0000	-31.5743
17.0000	0.1856	2.9472	0.0000	1.3152
18.0000	0.0530	3.1272	0.0000	-37.6728
19.0000	0.2745	3.3254	0.0000	-51.1702
20.0000	0.0903	3.7338	0.0000	142.4808
21.0000	0.4977	1.6682	0.0000	6.3116
22.0000	0.1019	4.0762	0.0000	-114.2015
23.0000	0.2531	3.9256	0.0000	-77.6128
24.0000	0.1505	4.2811	0.0000	82.5481
25.0000	0.2649	4.4183	0.0000	-41.9931
26.0000	0.1647	4.5989	0.0000	47.7858
27.0000	0.2097	4.7492	0.0000	28.0740
28.0000	0.0562	4.9315	0.0000	24.8016
29.0000	0.1974	5.1152	0.0000	-170.7190
30.0000	0.1397	5.2728	0.0000	-94.9393
31.0000	0.1188	5.4953	0.0000	129.2836
32.0000	0.2694	5.7110	0.0000	92.1666
33.0000	0.1410	5.8654	0.0000	-68.3770
34.0000	0.1047	6.0691	0.0000	173.3011
35.0000	0.2110	6.2219	0.0000	106.5535
36.0000	0.1310	6.4139	0.0000	-119.9744
37.0000	0.4334	6.5479	0.0000	-177.5985
38.0000	0.1144	6.7177	0.0000	-35.8737
39.0000	0.3231	6.8944	0.0000	-117.2326
40.0000	0.1699	7.0498	0.0000	40.5145
41.0000	0.1038	7.6592	0.0000	156.8967
42.0000	0.0535	7.8622	0.0000	178.4490
43.0000	0.1546	8.0240	0.0000	-170.7759
44.0000	0.0133	8.2043	0.0000	-150.3534
45.0000	0.2128	8.3950	0.0000	-156.2423
46.0000	0.3584	7.4973	0.0000	53.6713
47.0000	0.1941	8.5373	0.0000	166.9386
48.0000	0.3548	8.7197	0.0000	-161.9768
49.0000	0.1990	8.8496	0.0000	-97.1242
50.0000	0.0439	10.0000	0.0000	35.6737
51.0000	0.2697	9.0596	0.0000	121.7293
52.0000	0.3866	7.2720	0.0000	157.0050
53.0000	0.3505	9.1830	0.0000	-130.9023
54.0000	0.1700	9.8158	0.0000	7.4680
55.0000	0.1450	9.6542	0.0000	58.0057
56.0000	0.6694	1.7623	0.0000	121.5921
57.0000	0.3754	3.4854	0.0000	-55.2325
58.0000	0.6468	7.3227	0.0000	-77.3495
59.0000	0.2331	9.4207	0.0000	45.8906
60.0000	0.8725	3.5413	0.0000	66.6541

**Tabla 5.1. (Continuación)**  
**Resultados para el sistema 1, prueba 1**

61.0000	0.7917	9.4137	0.0000	-135.1371
62.0000	1.2630	5.5257	0.0000	-38.7809
63.0000	10.0843	8.0016	0.0001	-20.7934
64.0000	10.0653	4.0026	0.0000	174.5039
65.0000	10.0531	0	44.0618	0.0000
66.0000	64.6783	10.0000	0.6807	-44.1705
67.0000	64.6866	7.4965	0.6198	-77.2936
68.0000	64.7088	4.9946	0.5948	-110.3242
69.0000	64.7343	2.4959	0.5916	-144.5186
70.0000	64.7460	0	0.5935	179.9999

**Tabla 5.2** Valores seleccionados de la tabla 5.1

Numero	$\alpha_i$	Frecuencia	$ R_i $	$\angle R_i$
3	0.50	0.35	57.4634	-74.4732
4	0.25	0.45	25.0687	-137.8678
6	0.10	0.80	3.0000	-109.5527
7	0.05	1.00	3.4248	-143.0956
65	10.05	0.00	44.0618	0.0000



**Figura 5.7** Comparación de la respuesta en el tiempo para el sistema 1, prueba 1.

### 5.3.2 Respuesta a una secuencia de pulsos

En este análisis, la señal de entrada se representa como una secuencia de pulsos de magnitud y ancho ajustables.

La señal de entrada contiene 5 pulsos con duración de 1 segundo cada uno y una amplitud de  $\pm 0.2$  p.u. En la figura 5.8 se muestra la señal utilizada en el estudio.

La tabla 5.3 muestra los resultados obtenidos de la aplicación del método de identificación. En la presentación de los resultados, sólo se incluyen aquellos en que el amortiguamiento es muy pequeño o el residuo es grande.

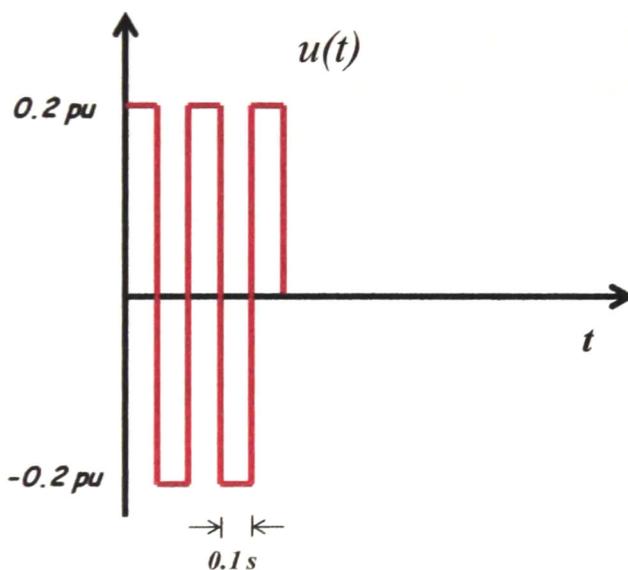


Figura 5.8 Entrada aplicada al sistema 1, prueba 2.

**Tabla 5.3** Resultados obtenidos para la prueba 2 en el sistema 1

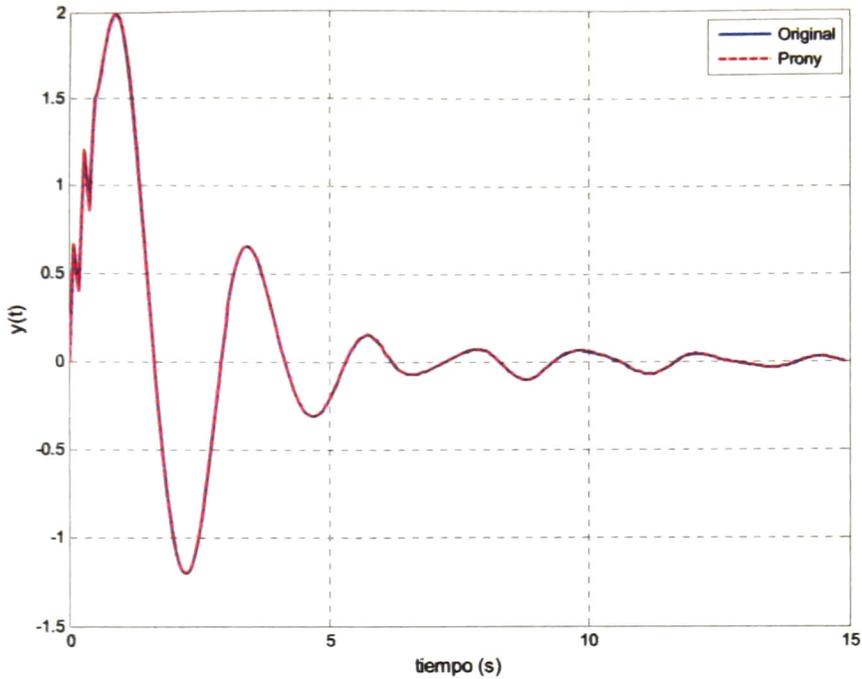
Numero	$\alpha_i$	Frecuencia	$ R_i $	$\angle R_i$
3	0.2500	0.4500	25.0687	-137.8678
4	0.5000	0.3500	57.4634	-74.4732
6	0.1000	0.8000	3.0000	-109.5521
7	0.0500	1.0000	3.4245	-143.0959
17	0.3836	2.9902	0.0002	-49.1200
25	0.4620	7.0867	0.0004	-96.1413
38	0.3695	8.5490	0.0002	-112.3747
40	0.1263	8.9214	0.0005	-89.4992
42	0.1559	9.0885	0.0008	62.9878
48	0.4469	9.4684	0.0011	-176.7264
50	0.2719	9.5796	0.0004	-128.1093
52	0.4327	9.7568	0.0014	-26.5524
56	0.3023	9.9142	0.0012	-90.9742
60	0.9543	8.2715	0.0003	81.9166
62	10.0531	10.0000	0.0021	53.1657
63	10.0519	5.0000	0.0005	-21.2760
64	10.0531	0	44.0618	-0.0009

Como se puede apreciar en esta Tabla, los modos identificados son bastante aproximados al modelo original enfatizando la aplicabilidad de la técnica propuesta. La utilización de excitación persistente mediante trenes de pulsos permite mejorar y generalizar el modelo.

En la figura 5.9 se muestra la comparación de la respuesta en el tiempo al aplicar la secuencia de pulsos a la función de transferencia original y la función de transferencia de orden 135 identificada.

Se observa que la respuesta del sistema identificado permite reproducir en forma precisa la respuesta medida. En este caso, el error NMSE obtenido para esta prueba es  $7.1534 \times 10^{-6}$

Cabe señalar que en estos casos no se ha requerido hacer mayores ajustes a los tiempos y amplitudes a las señales de entrada que, como ya se había comentado, son un factor importante en la identificación exitosa en algunos casos.



**Figura 5.9** Comparación de la respuesta en el tiempo para el sistema 1, prueba 2.

## 5.4 Pruebas realizadas al sistema 2

En esta sección se aplicarán pruebas similares a las descritas en la sección anterior, empleando para ello el sistema de 5° orden de la figura 5.2. Además de realizar las pruebas con uno y varios pulsos a la entrada, también se realiza una prueba aplicando una entrada escalón.

### 5.4.1 Respuesta a un pulso

En esta primera prueba se aplicó un pulso de amplitud unitaria con duración de 0.3 segundos (refiérase a la figura 5.9). El tiempo de simulación considerado en el análisis es de 15 segundos con un periodo de muestreo de 0.05 segundos.

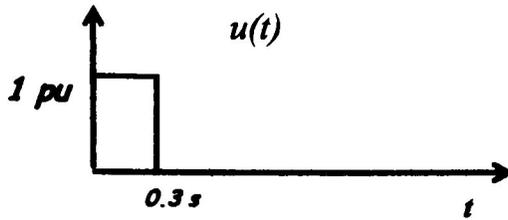


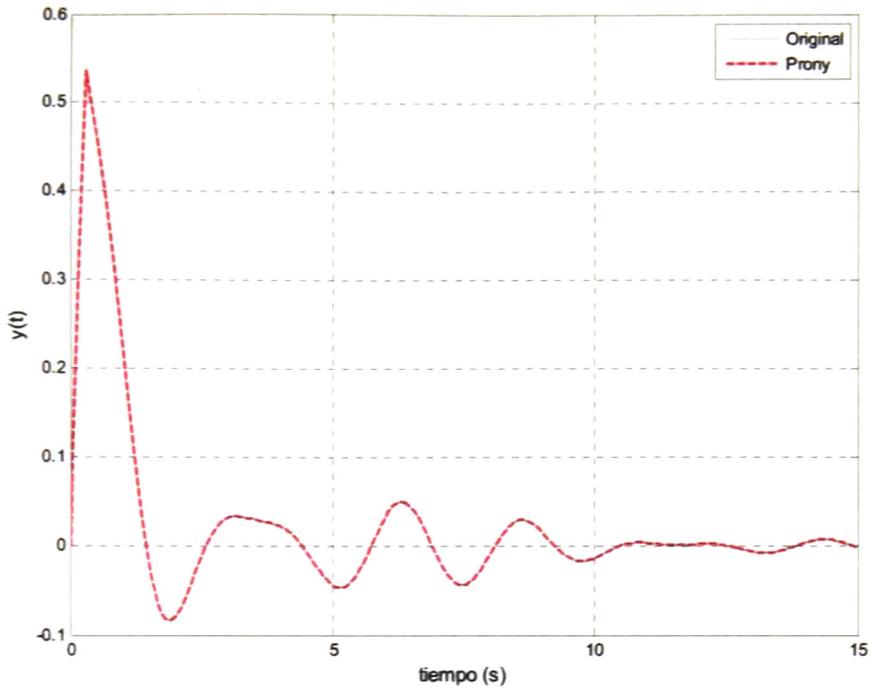
Figura 5.10 Entrada aplicada al sistema 2, prueba 1.

En la tabla 5.4 se muestran los resultados obtenidos para este caso. Se identificaron 68 modos diferentes de los cuales en la tabla se muestran únicamente 4 que son los que, debido a la magnitud del residuo, pueden ser los de mayor contribución a la respuesta. Todos los demás términos identificados contienen residuos de magnitud considerablemente menor y/o son términos con un amortiguamiento muy grande.

En la figura 5.11 se comparan las respuestas del modelo y del sistema original. El NMSE para esta prueba es  $2.5485 \times 10^{-8}$

Tabla 5.4 Resultados obtenidos para la prueba 1 en el sistema 2

Numero	$\alpha_i$	Frecuencia	$ R_i $	$\angle R_i$
1.0000	0.2000	0.5000	0.1324	-62.3459
2.0000	0.2500	0.3750	0.2708	-90.8473
15.0000	2.0000	0	1.8851	0.0001
63.0000	1.4496	7.8545	0.0001	64.7422



**Figura 5.11** Comparación de la respuesta en el tiempo para el sistema 2, prueba 1.

### ***5.4.2 Respuesta a una secuencia de pulsos***

En esta prueba se aplicó una entrada consistente en dos funciones escalón de amplitud  $+0.05$  y  $-0.05$  con duración de  $0.4$  segundos cada uno, como se muestra en la figura 5.12.

Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 5.5. Como se puede observar, los resultados obtenidos son bastante precisos y permiten identificar las principales características de interés en el análisis.

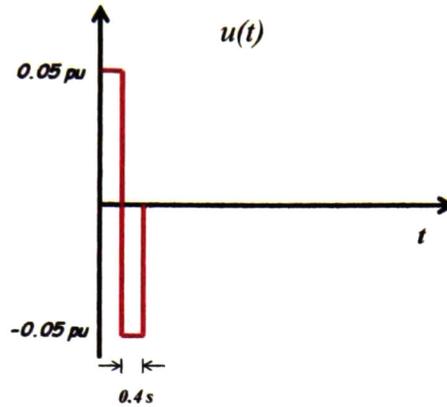


Figura 5.12 Entrada aplicada al sistema 2, prueba 2.

Tabla 5.5 Resultados obtenidos para la prueba 2 en el sistema 2

Numero	$\alpha_i$	Frecuencia	$ R_i $	$4R_i$
1.0000	0.2500	0.3750	0.2708	-90.8484
2.0000	0.2000	0.5000	0.1324	-62.3468
4.0000	2.0000	0	1.8848	0.0003
14.0000	0.3458	4.9426	0.0008	-12.5589
27.0000	0.1922	7.4214	0.0004	83.9333
28.0000	0.8451	7.3347	0.0012	46.4584
29.0000	1.7418	1.7777	0.0003	10.9121
30.0000	1.8682	3.6705	0.0003	50.1126
31.0000	1.5208	7.2367	0.0014	-57.9181
32.0000	1.9869	5.4424	0.0007	67.6748
33.0000	1.9453	9.1148	0.0003	33.1782
34.0000	11.7498	0.7149	0.1528	-178.3921
35.0000	11.7424	2.1437	0.1992	-159.5855
36.0000	11.7509	6.4284	0.1119	-39.4463
37.0000	11.7450	4.9990	0.2013	-83.2402
38.0000	11.7390	3.5712	0.2196	-123.7803
39.0000	11.7477	7.8580	0.0133	-149.3994
40.0000	11.7402	9.2863	0.1384	-118.9055

En la figura 5.13 se muestra la comparación en el dominio del tiempo de la respuesta a la entrada descrita. El error NMSE de esta comparación es  $4.0785 \times 10^{-6}$ .

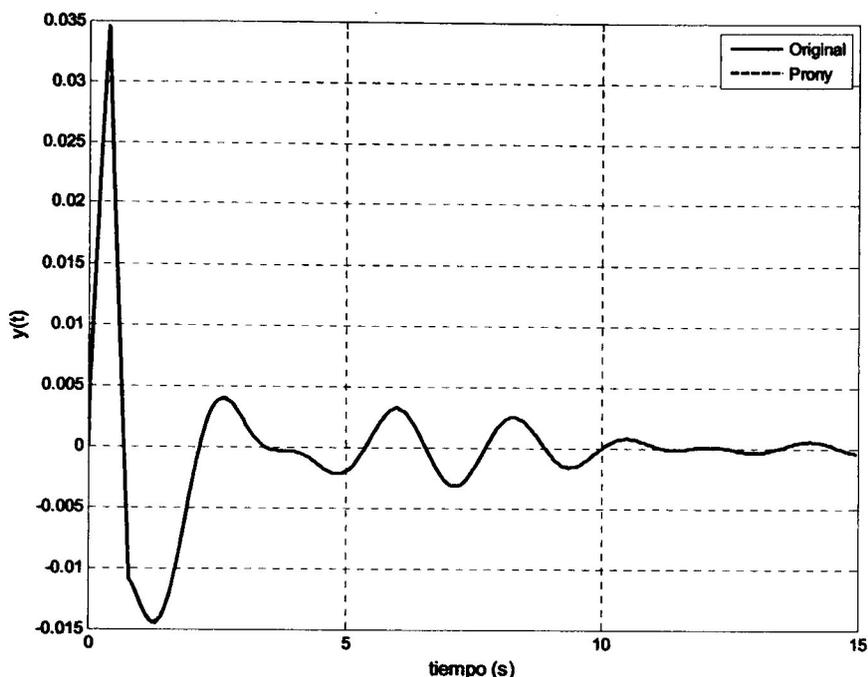


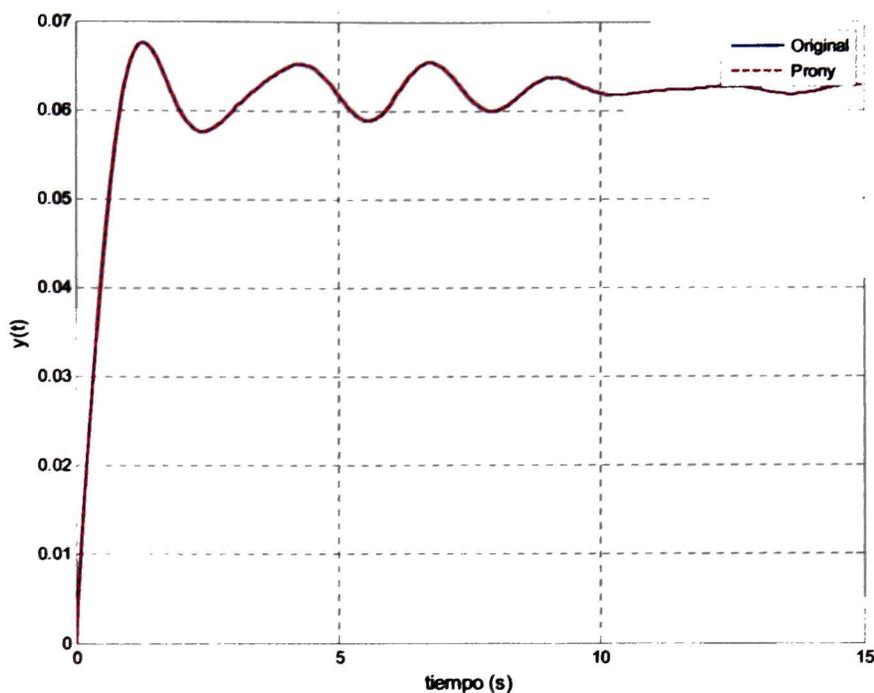
Figura 5.13 Comparación de la respuesta en el tiempo para el sistema 2, prueba 2.

### 5.4.3 Respuesta a una entrada escalón

A continuación se muestran los resultados obtenidos al aplicar una entrada escalón de amplitud 0.05 a partir de  $t = 0$  segundos. En este caso solo tres residuos mostraron magnitudes mayores a  $1 \times 10^{-4}$  y son, precisamente, los parámetros que describen la función de transferencia original. La figura 5.14 muestra gráficamente estos resultados. El error NMSE obtenido en este caso es  $2.3029 \times 10^{-22}$  mostrando la calidad del modelo identificado.

Tabla 5.6 Resultados obtenidos para la prueba 3 en el sistema 2.

Numero	$\alpha_i$	Frecuencia	$ R_i $	$\angle R_i$
3.0000	0.2500	0.3750	0.2708	-90.8476
4.0000	0.2000	0.5000	0.1324	-62.3461
14.0000	2.0000	0	1.8851	0.0000



**Figura 5.14** Comparación de la respuesta en el tiempo para el sistema 2, prueba 3.

### 5.5 Prueba realizada al sistema 3

En la figura 5.15 se muestra la entrada aplicada al estabilizador mostrado en la figura 5.4. Físicamente, la entrada aplicada consiste en un cambio de 0.05 p.u. en el voltaje de referencia del compensador estático de VARs.

La tabla 5.7 muestra los parámetros identificados para esta prueba. Se puede observar que, en este caso, no resulta sencillo reducir el número de parámetros guiándose únicamente por la magnitud de los residuos.

En la figura 5.16 se muestra la respuesta en el tiempo para el sistema original y la respuesta del sistema identificado.

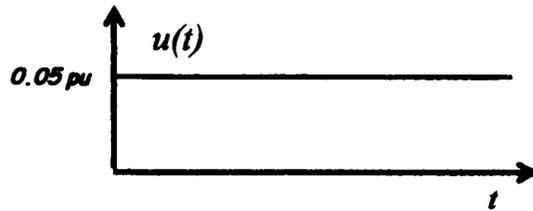


Figura 5.15 Entrada aplicada al sistema 3.

Tabla 5.7 Resultados obtenidos para la prueba en el sistema 3.

Numero	$\alpha_i$	Frecuencia	$ R_i $	$\angle R_i$
123.0000	0.1000	0	0.0058	-180.0000
125.0000	0.3704	0.3155	0.0001	-8.3726
126.0000	0.3721	0.2212	0.0001	21.2058
128.0000	0.3799	0.1283	0.0002	61.5174
130.0000	1.2315	0	2.7093	-0.0000
131.0000	1.2556	0	2.6901	180.0000
136.0000	20.1359	0	0.0091	-0.0000
137.0000	24.3841	4.0009	0.0001	79.6461

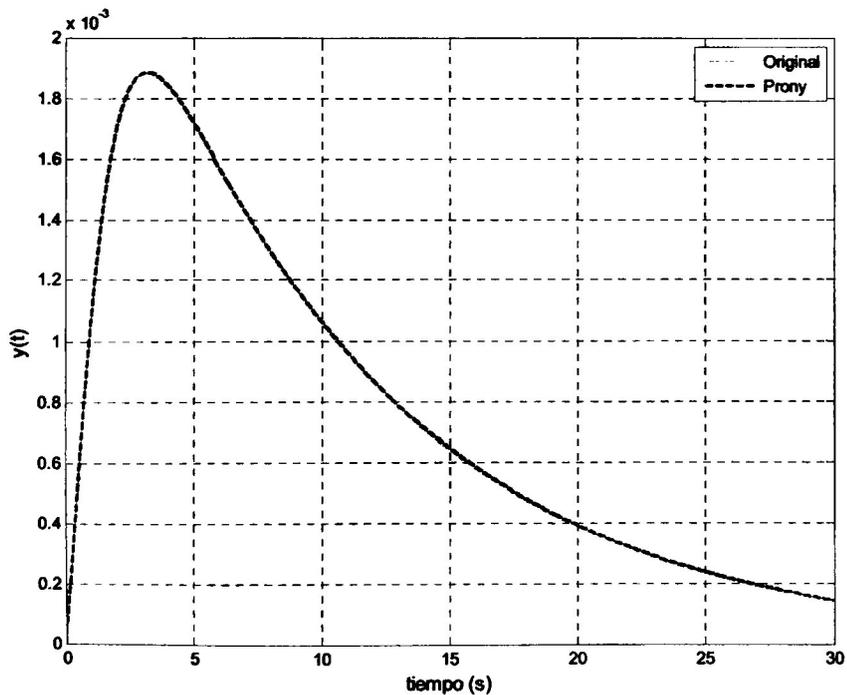


Figura 5.16 Comparación de la respuesta en el tiempo para el sistema 3.

De la tabla 5.7 se puede inferir que hay cuatro modos que presentan la mayor contribución al sistema; los modos restantes presentan residuos de menor amplitud. Se observa, además, que hay dos polos muy cercanos ubicados en  $s = -1.2315$  y  $s = -1.2556$  que corresponden a los polos repetidos del sistema real ubicados en  $s = -1.25$ .

Como se describió en el capítulo anterior el método de Prony asume que los polos del sistema son distintos generando un error en los modos identificados. Este problema puede aliviarse utilizando la metodología propuesta.

Como puede apreciarse, se obtienen resultados bastante precisos; el NMSE que es  $2.2431 \times 10^{-14}$  con este sistema identificado.

## 5.6 Resumen de los resultados

En el presente capítulo se realizaron distintas pruebas a tres sistemas diferentes, obteniendo en todas ellas aproximaciones bastante buenas del sistema original. Debido a la metodología empleada, el orden del sistema identificado siempre será alto debido al número de muestras tomadas para el análisis.

La tabla 5.8 resume las pruebas realizadas a los tres sistemas descritos en este capítulo. Para facilitar su interpretación, el número de prueba correspondiente a cada caso se muestra explícitamente.

De las diferentes pruebas realizadas, la entrada escalón y el caso de un solo pulso parecen obtener las mejores aproximaciones. La señal de entrada requiere tener suficiente energía en el rango de frecuencia de los parámetros que se desean identificar, por lo que la aplicación de una entrada compuesta de varios pulsos requiere de una cuidadosa selección de los tiempos de cambio de cada pulso. Mejores resultados con este último tipo de entradas se pueden

obtener al realizar un estudio previo del sistema de forma que la señal de entrada aplicada realice una adecuada excitación del sistema.

Tabla 5.8 Pruebas realizadas a los diferentes sistemas.

	Escalón	1 Pulso	Mult. Pulsos
<b>Sistema 1</b>	--	Prueba 1.1	Prueba 1.2
NMSE		$1.9214 \times 10^{-9}$	$7.1534 \times 10^{-6}$
<b>Sistema 2</b>	Prueba 2.3	Prueba 2.1	Prueba 2.2
NMSE	$2.3029 \times 10^{-22}$	$2.5485 \times 10^{-8}$	$4.0785 \times 10^{-6}$
<b>Sistema 3</b>	Prueba 3.1	--	--
NMSE	$2.2431 \times 10^{-14}$		

## 5.7 Referencias

- [1]. D. J. Trudnowski, "Order Reduction of Large-Scale Linear Oscillatory System Models", Pacific Northwest Lab., Richland WA., IEEE Transaction on Power Systems, Feb. 1994.
- [2]. D. J. Trudnowski, M. K. Donnelly, J. F. Hauer, "Advances in the Identification of Transfer Function Models Using Prony Analysis", American Control Conference, 1993.

# Capítulo 6

## Resultados con modelos reducidos

*En el presente capítulo se muestran los resultados obtenidos de aplicar el método para reducción de orden descrito en el capítulo 4. Se emplean los modelos identificados de alto orden obtenidos en el capítulo 5 para cumplir este objetivo. El objetivo final es el de automatizar los procesos de identificación para propósitos de aplicación a señales de distinta naturaleza sin intervención del usuario.*

*Posteriormente se realizan pruebas en el dominio del tiempo y de la frecuencia de los modelos reducidos y se comparan los resultados obtenidos con los que se obtienen a partir del sistema original para corroborar el método.*

*Adicionalmente se presentan las funciones de transferencia identificadas empleando técnicas de reducción de orden.*

## 6.1 Pruebas a realizar

A continuación se presentan los resultados obtenidos de aplicar el método para la reducción de orden a partir de los sistemas identificados en el capítulo 5.

La información proporcionada por el programa de simulación desarrollado está ordenada de la siguiente forma: La primeras cuatro columnas contienen respectivamente, al igual que las tablas mostradas en el capítulo 5, los parámetros de la señal separando la información en amortiguamiento y frecuencia de los modos y en magnitud y fase de los residuos; la siguiente columna indica la posición original donde se encuentra ubicado el modo/residuo en la tabla original correspondiente al sistema de alto orden.

La última columna presenta información relativa al valor mínimo obtenido del criterio de Akaike. Para facilitar la visualización e interpretación de los resultados, se calcula la variación que se ha tenido respecto del valor anterior en por ciento. Con esta métrica es posible aplicar el criterio recomendado en la sección 4.3.3 para una selección final del modelo de orden reducido.

## 6.2 Reducción de orden para el Sistema 1

### 6.2.1 Reducción aplicada a la Prueba 1.1

La tabla 6.1 resume la información proporcionada por el programa para reducción de orden. Los resultados mostrados se obtuvieron empleando una combinación de igual peso para el dominio del tiempo y para el dominio de la frecuencia, es decir,  $\sigma = \beta = 0.5$ .

El sistema de alto orden, formado por los parámetros descritos en la tabla 5.1 contiene 70 modos, por lo que se seleccionó  $r$  en la ecuación 4.11 tal que se obtiene una primera reducción a 20 modos.

**Tabla 6.1** Primera reducción para el sistema 1.

Número	$\alpha_i$	Frecuencia	$ R_i $	$4R_i$	Pos Orig	(%) Var
1	0.5000	0.3500	57.4634	-74.4732	3	0
2	0.2500	0.4500	25.0687	-137.8678	4	-47.8127
3	10.0531	0	44.0618	0.0000	65	-22.8115
4	0.0500	1.0000	3.4248	-143.0956	7	-13.5653
5	0.1000	0.8000	3.0000	-109.5527	6	-131.0694
6	0.0439	10.0000	0.0000	35.6737	50	-0.2979
7	64.7460	0	0.5935	179.9999	70	-0.1966
8	64.7343	2.4959	0.5916	-144.5186	69	-0.5101
9	64.7088	4.9946	0.5948	-110.3242	68	-1.0000
10	64.6866	7.4965	0.6198	-77.2936	67	-2.1685
11	64.6783	10.0000	0.6807	-44.1705	66	-27.0116
12	0.3584	7.4973	0.0000	53.6713	46	-0.2099
13	10.0653	4.0026	0.0000	174.5039	64	-0.0948
14	10.0843	8.0016	0.0001	-20.7934	63	-0.0846
15	0.1499	2.5833	0.0000	-51.0964	15	0.0497
16	0.0562	4.9315	0.0000	24.8016	28	0.1233
17	0.1700	9.8158	0.0000	7.4680	54	0.1445
18	0.1974	5.1152	0.0000	-170.7190	29	0.2151
19	0.3866	7.2720	0.0000	157.0050	52	0.2091
20	1.2630	5.5257	0.0000	-38.7809	62	0.2404

### 6.2.2 Construcción de la función de transferencia.

De la última columna en tabla 6.1 puede verse que el valor del AIC mantiene una importante disminución respecto al valor anterior para los primeros cinco modos/residuos y posteriormente, para el sexto, este valor sólo disminuye un 0.29% por lo que puede inferirse que la contribución a la respuesta proporcionada por estos parámetros es muy baja. De este modo, se hace una comparación tomando los cinco primeros valores, que corresponden a los modos ubicados en las posiciones 3, 4, 65, 7 y 6 de la tabla 5.1.

Con los datos seleccionados se construye la función de transferencia correspondiente y se realiza la simulación para obtener la respuesta, en este caso, a una entrada tipo pulso de amplitud 1 y duración 0.4 segundos.

Se realiza una comparación de la función de transferencia identificada con la función de transferencia real, pero mostrada en el formato de relación ceros-polos-ganancia (ZPK).

La figura 6.1 muestra la función de transferencia real correspondiente al sistema 1 mostrada en formato ZPK, mientras que la figura 6.2 muestra la correspondiente función de transferencia del sistema identificado usando 5 modos. Puede observarse que la función de transferencia es exactamente igual al comparar hasta 4 decimales en los coeficientes. Análisis más detallados de los resultados muestran que la función de transferencia identificada presenta diferencias en los coeficientes a partir del sexto decimal.

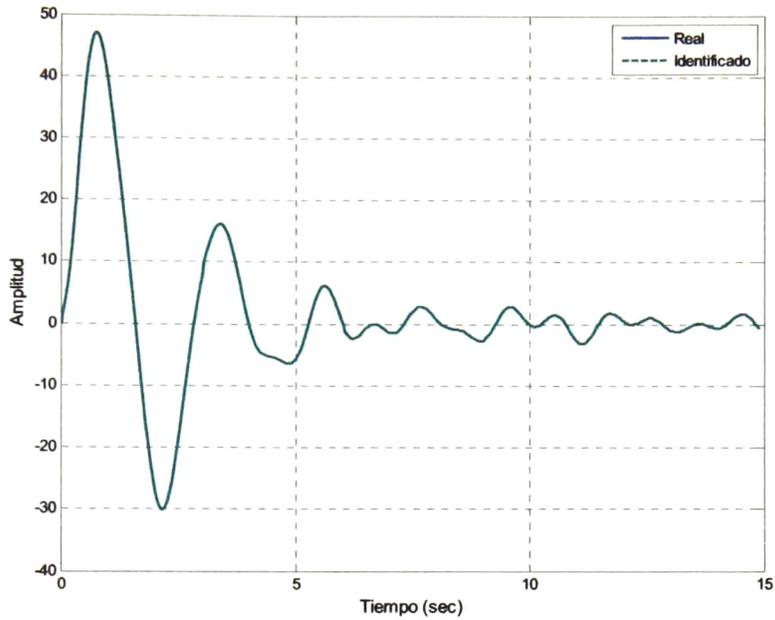
La figura 6.3 muestra la comparación de la respuesta en el tiempo para estas dos funciones de transferencia obteniéndose un error NMSE de  $6.1058 \times 10^{-17}$  lo que indica que al eliminar todos los demás términos identificados se incrementa la precisión. En la figura 6.4 se muestra una comparación empleando un sistema formado por los primeros 4 modos de la tabla 6.1 que genera un sistema de séptimo orden y un sistema usando los primeros 10 modos, que genera un sistema de 18° orden.

$$G_{Real}(s) = \left[ \frac{30.1594 (s^2 + 1.011s + 7.655)(s^2 + 0.4041s + 23.29)}{(s + 10.05)(s^2 + s + 5.086)(s^2 + 0.5s + 8.057)} \right] \cdot \left[ \frac{(s^2 + 0.6073s + 36.47)(s^2 + 7.984s + 141.9)}{(s^2 + 0.2s + 25.28)(s^2 + 0.1s + 39.48)} \right]$$

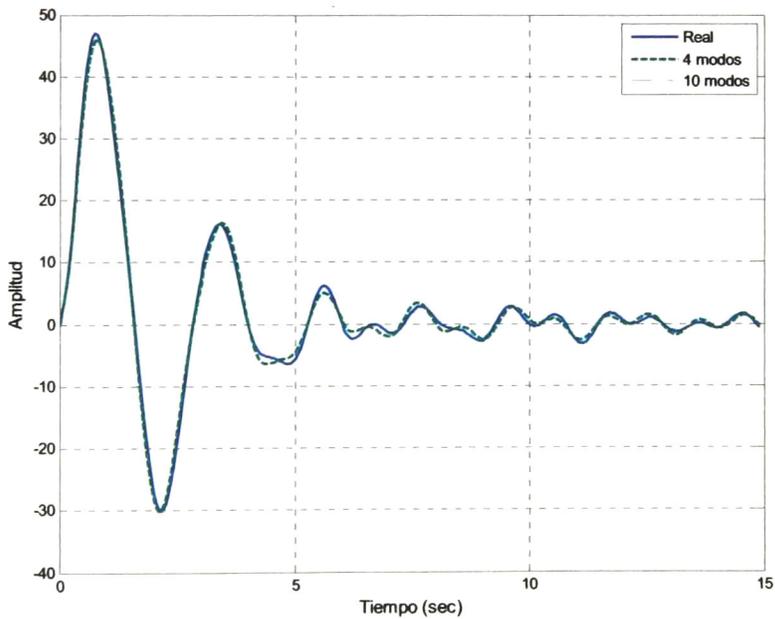
**Figura 6.1** Función de transferencia real del sistema 1 en forma ZPK

$$G_{Prony}(s) = \left[ \frac{30.1594 (s^2 + 1.011s + 7.655)(s^2 + 0.4041s + 23.29)}{(s + 10.05)(s^2 + s + 5.086)(s^2 + 0.5s + 8.057)} \right] \cdot \left[ \frac{(s^2 + 0.6073s + 36.47)(s^2 + 7.984s + 141.9)}{(s^2 + 0.2s + 25.28)(s^2 + 0.1s + 39.48)} \right]$$

**Figura 6.2** Función de transferencia identificada para el sistema 1



**Figura 6.3** Respuesta en el tiempo del sistema real y el identificado reducido



**Figura 6.4** Comparación para el sistema 1, empleando 4 y 10 modos.

En el caso del sistema de 9° orden correspondiente a la figura 6.3 se observa un ajuste prácticamente perfecto, de igual manera lo hace el sistema de 18° orden mostrado en la figura 6.4 aunque el error entre el sistema original y esta nueva aproximación se incrementa un poco:  $1.0521 \times 10^{-8}$ . En la misma figura se grafica la respuesta en el tiempo para un sistema de noveno orden generado a partir de los primeros 4 modos/residuos (mostrada con línea punteada) que sin embargo produce una buena aproximación obteniendo un error de 0.0043.

## 6.3 Reducción de orden para el Sistema 2

### 6.3.1 Reducción aplicada a la prueba 2.2

En esta sección se presentan los resultados obtenidos de aplicar reducción de orden al sistema 2 para el caso en el que se aplica una entrada formada por un pulso de amplitud 0.05 seguido de uno de  $-0.05$  ambos con un ancho de 0.4 segundos, tal como se describe en la sección 5.4.2.

En este caso, se ajustó el algoritmo para que ajustara el modelo considerando 15 modos. Los modos seleccionados y ordenados en base a su contribución se muestran en la tabla 6.2.

Tabla 6.2 Primera reducción para el sistema 2.

Número	$\alpha_i$	Frecuencia	$ R_i $	$4R_i$	Pos Orig	(%) Var
1	2.0000	0	1.8848	0.0003	4	0
2	0.2500	0.3750	0.2708	-90.8484	1	-27.3710
3	0.2000	0.5000	0.1324	-62.3468	2	-60.6811
4	0.1922	7.4214	0.0004	83.9333	27	-2.0871
5	0.3458	4.9426	0.0008	-12.5589	14	-3.5955
6	0.0405	5.1060	0.0000	-158.0435	15	-1.8056
7	0.2180	2.6568	0.0001	17.5300	7	-1.2138
8	11.7498	0.7149	0.1528	-178.3921	34	-0.8855
9	11.7424	2.1437	0.1992	-159.5855	35	-1.8378
10	11.7390	3.5712	0.2196	-123.7803	38	-2.6343
11	11.7450	4.9990	0.2013	-83.2402	37	-3.5911
12	11.7509	6.4284	0.1119	-39.4463	36	-2.6160
13	11.7402	9.2863	0.1384	-118.9055	40	-6.0502
14	0.0660	9.7615	0.0000	-155.4379	21	-0.4052
15	0.8451	7.3347	0.0012	46.4584	28	-0.3088

### 6.3.2 Construcción de la función de transferencia

De los resultados mostrados en la tabla 6.2, guiándose por la información contenida en la última columna y por la magnitud de los residuos se puede hacer una reducción de orden mayor al considerar sólo los tres primeros modos de la tabla, puesto que el valor de los residuos es mayor así como la contribución a la respuesta. Con base a lo anterior se hace la realización de la función de transferencia que para este caso será de 5° orden.

La figura 6.5 muestra la función de transferencia del sistema original 2 presentada en el formato de relación ceros-polos. La figura 6.6 presenta la función de transferencia que se obtiene de la reducción de orden a 3 modos. Una vez más, se presentan pequeñas diferencias entre ambas funciones de transferencia del orden de  $1 \times 10^{-6}$  en los coeficientes.

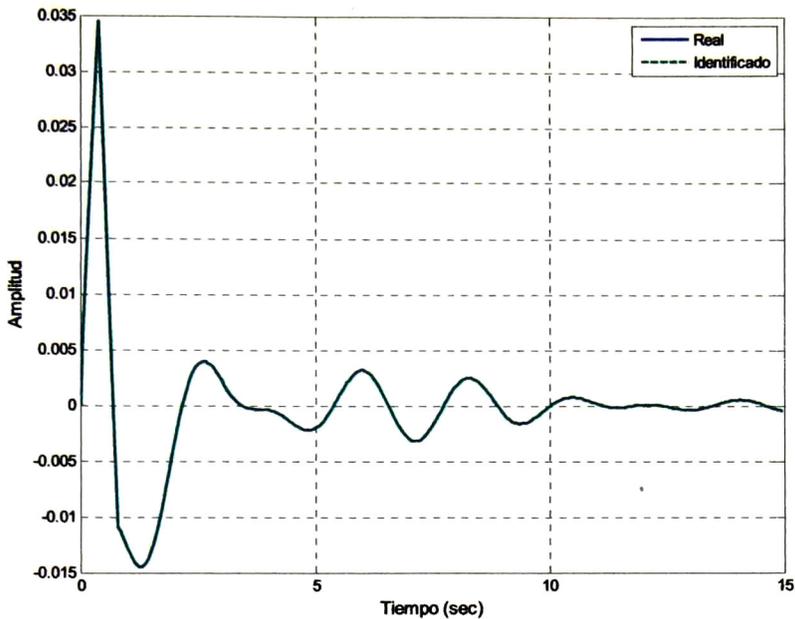
$$G_{Real}(s) = \frac{2 (s^2 + s + 8.244) (s^2 + 1.01s + 8.41)}{(s + 2) (s^2 + 0.5s + 5.614) (s^2 + 0.4s + 9.91)}$$

**Figura 6.5** Función de transferencia real del sistema 2 en forma ZPK

$$G_{Prony}(s) = \frac{2 (s^2 + s + 8.244) (s^2 + 1.01s + 8.41)}{(s + 2) (s^2 + 0.5s + 5.614) (s^2 + 0.4s + 9.91)}$$

**Figura 6.6** Función de transferencia real del sistema 2 en forma ZPK

La figura 6.7 mostrada en la siguiente página presenta la comparación de la respuesta para ambos sistemas, aplicando la misma entrada que en la prueba 2.3 obteniendo una mejor aproximación en este caso, con un NMSE de  $9.1698 \times 10^{-9}$

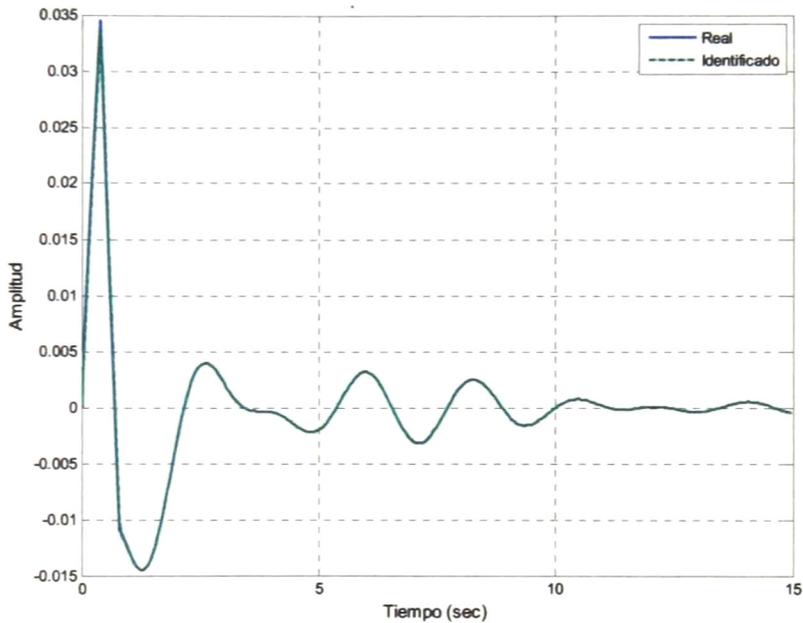


**Figura 6.7** Respuesta en el tiempo del sistema real y el identificado reducido

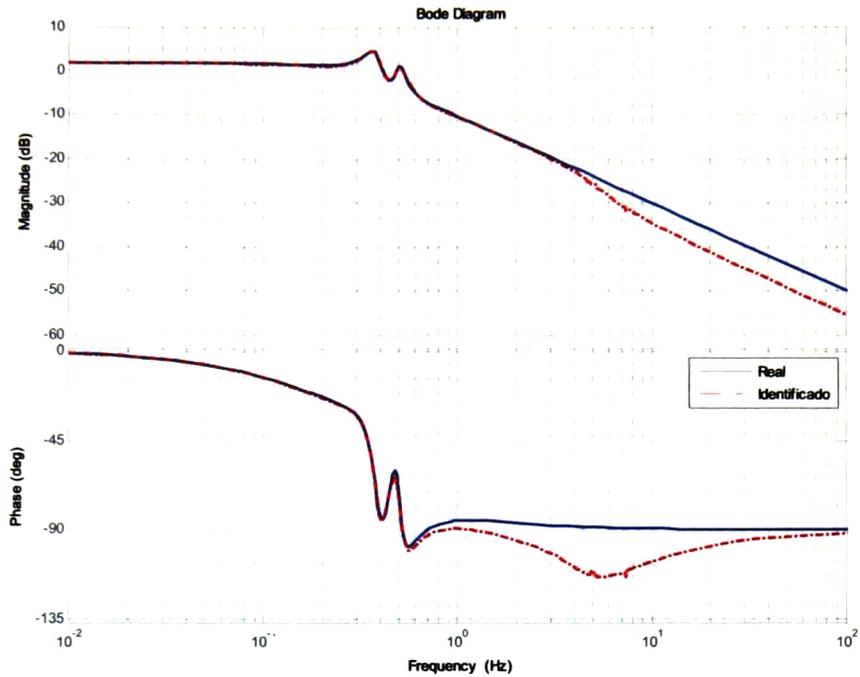
Es posible realizar comparaciones adicionales eligiendo cualquier otro orden para el sistema reducido, con el fin de corroborar si se ha elegido el mejor modelo. La rutina programada es de manejo sencillo ya que para llevar a cabo estas últimas comparaciones sólo es necesario indicar el número de modos a emplear para construir la función de transferencia. Esta parte del programa se ha diseñado así con el fin de ser flexible en el aspecto de que la elección final del modelo reducido está basada en varios criterios que incluyen el error de la respuesta, los grados de libertad que se deseen para considerar otras dinámicas y el caso en estudios más avanzados en los que se realicen estudios de señales que incluyen ruido en la medición.

En la siguiente página, la figura 6.8 muestra la comparación del sistema real contra un modelo de 19° orden, eligiendo los primeros 10 modos. En el cual se observan ligeras diferencias durante los primeros 3 segundos, lo que se ve

reflejado en un aumento considerable del NMSE que ahora es de 0.0022. Resulta impráctico mostrar la función de transferencia de 19° orden con motivos de comparación, una comparación adicional de este modelo reducido con el sistema original es mediante una gráfica de Bode en la que se puede comparar la respuesta en el dominio de la frecuencia para estos dos sistemas. La figura 6.9 muestra esta comparación.



**Figura 6.8** Comparación para el sistema 2, empleando 10 modos en el modelo reducido.



**Figura 6.9** Comparación de magnitud y fase de la función de transferencia para el sistema 2, empleando 10 modos en el modelo reducido.

La figura anterior muestra que aun cuando este sistema no es tan preciso, presenta características muy similares en la vecindad de los modos oscilatorios, es decir, entre 0.01 Hz y 0.6 Hz. El efecto de incluir modos de mayor frecuencia de oscilación se ve claramente reflejado a partir de 3 Hz tanto en magnitud como en la fase.

Estas diferencias no se presentan al emplear el modelo de 5° orden seleccionado en primera instancia, las desviaciones provocadas por la pequeña diferencia en las funciones de transferencia son casi imperceptibles.

## 6.4 Reducción de orden para el Sistema 3

### 6.4.1 Primera reducción

Al aplicar la reducción de orden al modelo identificado en la sección 5.5 de la presente tesis, se hace una primera selección de los criterios para incluir únicamente los primeros 20 modos. La tabla 6.3 muestra el resultado de este proceso, donde puede observarse que los primeros 3 modos tienen la mayor contribución.

Al considerar también la magnitud de los residuos se puede tomar en cuenta los modos 4 y 5 para ser incluidos en el modelo de orden reducido.

Tabla 6.3 Primera reducción para el sistema 3

Número	$\alpha_i$	Frecuencia	$ R_i $	$\Delta R_i$	Pos Orig	(%) Var
1	0.1000	0	0.0058	-180.0000	123	0
2	1.2315	0	2.7093	-0.0000	130	-23.4807
3	1.2556	0	2.6901	180.0000	131	-224.4956
4	20.1359	0	0.0091	-0.0000	136	-3.9956
5	0.3799	0.1283	0.0002	61.5174	128	-5.8323
6	0.3721	0.2212	0.0001	21.2058	126	-1.9458
7	0.2182	0.0924	0.0000	-23.5534	124	-3.1536
8	0.3704	0.3155	0.0001	-8.3726	125	-4.9583
9	0.1873	0.3524	0.0000	-135.6813	122	-4.5275
10	0.3868	0.4120	0.0000	64.8629	121	-4.7565
11	0.1268	0.4830	0.0000	-92.0273	120	-1.9833
12	24.3841	4.0009	0.0001	79.6461	137	-2.6283
13	0.3811	0.6862	0.0000	99.1983	119	-1.2387
14	0.2377	0.6304	0.0000	-14.8655	118	-1.7011
15	0.0820	0.6387	0.0000	-39.5293	117	-1.9013
16	5.2320	2.6697	0.0000	0.5763	135	-0.9889
17	3.3251	2.3382	0.0000	-172.1241	133	-1.7537
18	4.3620	4.1055	0.0000	-43.5169	134	-0.5569
19	0.2257	0.7717	0.0000	166.1028	115	-0.4698
20	0.2173	0.8951	0.0000	-24.3553	113	-0.0893

### 6.4.2 Construcción de la función de transferencia

En este caso, las muestras originales fueron obtenidas mediante un paquete externo por lo que las comparaciones realizadas aquí sólo pueden hacerse con respecto a dichas muestras.

Para hacer una comparación de funciones de transferencia se tiene como referencia la que se ilustró en la figura 5.5 que se tomará como base para una comparación de magnitud y fase de las funciones identificadas. Esta misma función se presenta nuevamente en la figura 6.10.

Tomando los primeros 4 modos de la tabla obtenemos un sistema de 4° orden para el cual la función de transferencia correspondiente se muestra en la figura 6.11. En esta ocasión se observan cambios más significativos tanto para el caso de los ceros como en los polos. Únicamente el polo ubicado en  $s=-0.1$  se identificó de forma correcta, para el caso de los tres restantes existe una ligera variación.

En la figura 6.12 se muestra la comparación de la respuesta en el dominio del tiempo para el sistema modelo reducido comparado con las muestras originales. Se puede apreciar una ligera separación a partir de  $t = 3$  segundos entre ambas respuestas. El error NMSE para esta comparación es  $6.9986 \times 10^{-5}$

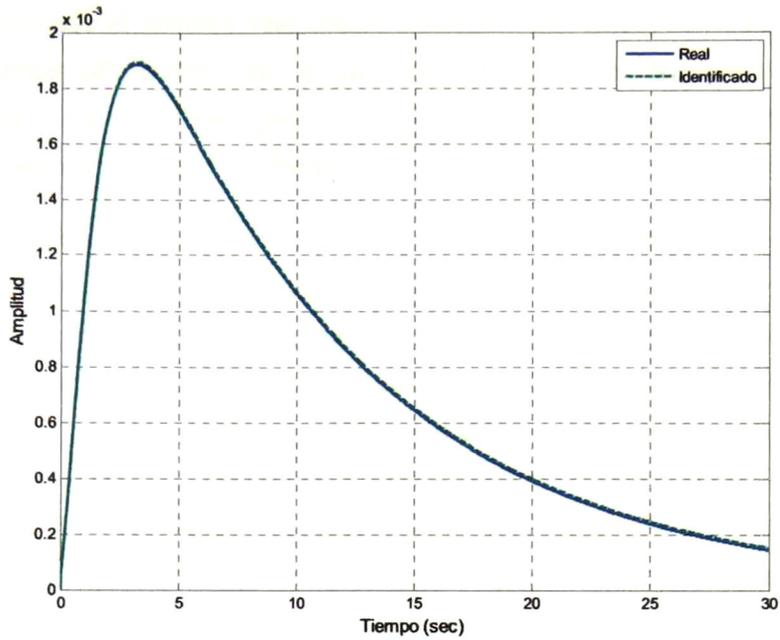
La figura 6.13 muestra una comparación de magnitud y fase entre las funciones de transferencia mostradas en esta página. El sistema identificado aproxima bastante bien al original para frecuencias mayores a 0.002 Hz.

$$G_{Real}(s) = \frac{0.022914 s (s + 8.258)^2}{(s + 20)(s + 1.25)^2(s + 0.1)}$$

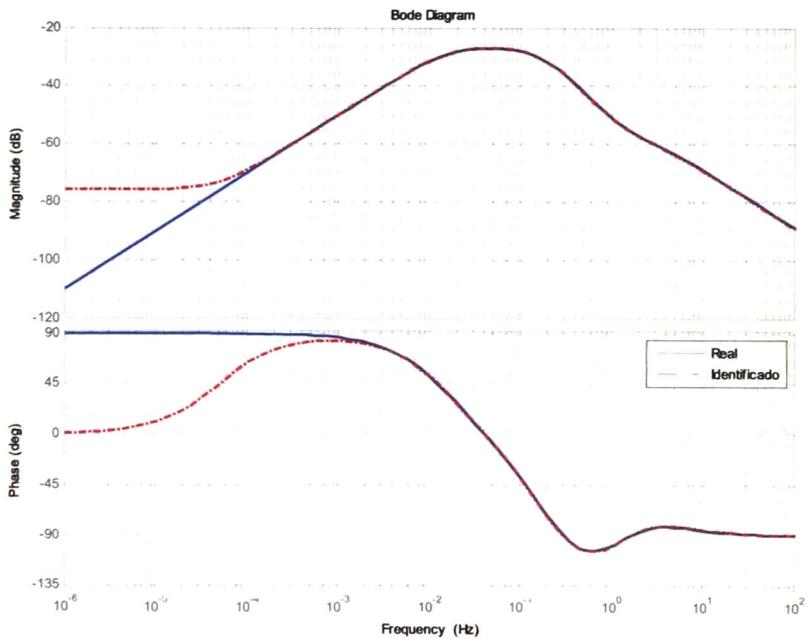
**Figura 6.10** Función de transferencia real del sistema 3 en forma ZPK.

$$G_{Prony}(s) = \frac{0.022533 (s + 0.00032) (s + 8.2113 \pm j1.2204)^2}{(s + 20.14) (s + 1.256) (s + 1.232) (s + 0.1)}$$

**Figura 6.11** Función de transferencia identificada del sistema 3.



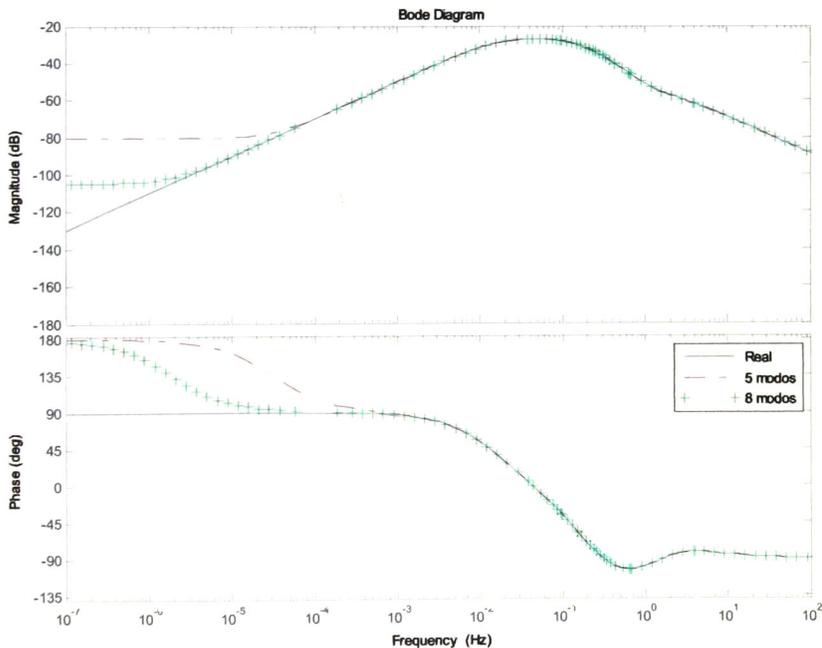
**Figura 6.12** Comparación para el sistema 3, empleando 4 modos en el modelo reducido.



**Figura 6.13** Comparación de magnitud y fase de la función de transferencia para el sistema 3, empleando 4 modos en el modelo reducido.

Al comparar el sistema real contra modelos reducidos de mayor orden que el anterior (4° orden) en el dominio del tiempo, la diferencia es prácticamente imperceptible por lo que se presenta únicamente una comparación en el dominio de la frecuencia.

Se consideró un modelo realizado a partir de los primeros 5 modos de la tabla 6.3 así como también un modelo realizado a partir de los primeros 8 modos. La figura 6.14 muestra esta comparación. La línea punteada representa al modelo de 6° orden y la línea representada por cruces (+) muestra la respuesta del modelo de 12° orden. Se observa que se mantiene un corrimiento de fase de 90° cuando la frecuencia es casi cero sin embargo, el desfase de estos dos modelos reducidos con respecto al modelo de 4° es de 180°. En esta grafica se puede ver además que al agregar más modos a modelo reducido, se obtiene una mejor aproximación en cada caso, mas sin embargo la mejora que se hace es pequeña por lo que el modelo de 4° orden sigue siendo una muy buena opción.



**Figura 6.14** Comparación de magnitud y fase de la función de transferencia para el sistema 3, empleando un modelo reducido de 6° y 12° orden.

## 6.5 Conclusiones de los resultados obtenidos

En todos los casos estudiados en este capítulo se obtuvieron buenos resultados al observar que el error producido por eliminar los parámetros restantes se mantiene aceptable. Para obtener estos modelos en cada caso fue necesario el uso de un poco de ayuda para la selección del mejor modelo reducido.

El criterio del usuario es siempre requerido para la elección del modelo final [1] ya que en ocasiones se desea incluir determinadas características del sistema por lo que se requiere hacer una elección que no es necesariamente de todos los modos de la lista obtenida ni de tomarlos en orden.

Los resultados obtenidos de aplicar el algoritmo para reducción de orden en los sistemas 1 y 2 fueron fácilmente tratables desde que el modelo identificado de alto orden mostraba ya claramente los modos que debían ser seleccionados. Para el tercer sistema, el modelo de orden reducido en este caso deja abierta la posibilidad de emplear más modos de los que contiene el sistema original. Esto de igual forma incrementa la precisión y permite la inclusión de otras dinámicas que pudieron intervenir en la respuesta original.

## 6.6 Referencias

- [1]. D. J. Trudnowski, "Order Reduction of Large-Scale Linear Oscillatory System Models", Pacific Northwest Lab., Richland WA., IEEE Transactions on Power Systems, Feb. 1994.

# Capítulo 7

## Conclusiones y Líneas Futuras de Trabajo

### 7.1 Conclusiones generales

El trabajo desarrollado en esta tesis se ha centrado en la aplicación de técnicas de identificación basadas en el método de Prony al problema de la extracción de modelos de bajo orden del sistema de potencia a partir del análisis de la respuesta del sistema a perturbaciones planeadas.

La utilización de métodos de identificación basados en el análisis de Prony presenta notables ventajas respecto al proceso de identificación convencional. Un aspecto importante es el de la elección de umbrales para la selección de modos dominantes a partir del criterio de estimación de Akaike. Otros aspectos que no han sido estudiados apropiadamente en la literatura incluyen el tratamiento de polos repetidos, o el efecto incertidumbres y robustez, así como su extensión al caso no lineal.

Entre las posibles aplicaciones de esta técnica figura su uso para sintetizar y diseñar funciones de transferencia de sistemas de control, el análisis de sensibilidad ante variaciones en la dinámica del sistema, la monitorización de modos electromecánicos de bajo amortiguamiento, y la validación de modelos.

La experiencia en el estudio de señales sintéticas y simuladas muestra que la calidad de la estimación depende de una correcta elección de la señal de excitación, el intervalo de estudio, y el uso de un criterio apropiado de reducción de orden.

El estudio de estos aspectos constituye la principal aportación de este trabajo.

## **7.2 Trabajos futuros**

Entre las áreas futuras de investigación identificadas en este trabajo se pueden mencionar las siguientes:

1. La extensión de los algoritmos propuestos para el diseño de controles y el análisis de sensibilidad a cambios en la operación del sistema
2. La incorporación de criterios analíticos para seleccionar en forma automática las señales de excitación o prueba
3. El tratamiento exacto de polos múltiples, condiciones iniciales diferentes de cero y el análisis de robustez frente a dinámicas inmodeladas y ruido
4. La extensión de los métodos desarrollados al caso de sistemas MIMO
5. Su uso como herramienta de validación sistemática de modelos del sistema y herramientas de simulación



# CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL I.P.N. UNIDAD GUADALAJARA

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional aprobó la tesis

Identificación de Modelos de Bajo Orden de Sistemas de Potencia  
Mediante Algoritmos Generalizados de Prony

del (la) C.

José Armando JIMÉNEZ ZAVALA

el día 25 de Enero de 2012.

Dr. Arturo Román Messina  
Investigador CINVESTAV 3C  
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. José Javier Ruíz León  
Investigador CINVESTAV 3B  
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Antonio Ramírez Treviño  
Investigador CINVESTAV 3A  
CINVESTAV Unidad Guadalajara



CINVESTAV - IPN  
Biblioteca Central



SSIT0010839