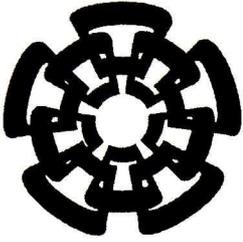


CT-710-SSI
Don. - 2013

xx(202792.1)



Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional
Unidad Guadalajara

Análisis de Técnicas para el Cálculo de Frecuencia Máxima en Modelos de Redes Eléctricas no Lineales

**CINVESTAV
IPN
ADQUISICION
LIBROS**

Tesis que presenta:

Darío Ávila Téllez Girón

para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias

en la especialidad de:

Ingeniería Eléctrica

Director de Tesis

Dr. Amner Israel Ramírez Vázquez

CT00614
CT-710-SS1
A: 14-03-2013
Date: 2013

ID: 202559-1001

Análisis de Técnicas para el Cálculo de Frecuencia Máxima en Modelos de Redes Eléctricas no Lineales

**Tesis de Maestría en Ciencias
Ingeniería Eléctrica**

Por:

Darío Ávila Téllez Girón
Ingeniero Eléctrico

Instituto Tecnológico de Pachuca 2003-2008

Becario de CONACyT, expediente no. 243160

Director de Tesis

Dr. Amner Israel Ramírez Vázquez

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Junio de 2012.

A mis padres.

**“Cuando pones la proa visionaria hacia una estrella,
afanoso de perfección y rebelde a la mediocridad,
llevas en tí el resorte misterioso de un ideal.”**

José Ingenieros

AGRADECIMIENTOS

A *Dios*, por el don maravilloso de la vida, que con su poder y grandeza hace de mí la persona que soy, permitiéndome así, alcanzar mis metas y sueños.

Agradezco a *mi Familia*, en especial a *mis padres*, que han sido un pilar fundamental a lo largo de mi vida, por todo el amor, apoyo y orientación durante todos estos años.

A mi asesor, el *Dr. Abner Israel Ramírez Vázquez*, por sus valiosos conocimientos brindados y paciencia durante la maestría.

A los miembros del jurado, *Dr. Juan Manuel Ramírez Arredondo* y al *Dr. Jesús Rico Melgoza* por el tiempo dedicado y sus contribuciones al trabajo final.

Al *Dr. Norberto Hernández Romero*, por el valioso consejo de estudiar un posgrado y al *Ing. Francisco Herrera Vázquez* de HEBI Enterprise, por su apoyo para que pudiera comenzar este proyecto.

A las personas que me han apoyado y alentado desde hace tiempo para poder realizar esta meta: *Rubén, Raúl, Pepe, Évelin, Alfredo, tía Maru, Arturo, Gil, Juan Carlos, Emilio, Arely, Erick, Ithzel, Edwin, Jonathan, Ing. Alejandro, Patty* y todas las personas que me han brindado su amistad y cariño.

A todas las nuevas personas que conocí durante este tiempo: *Diana, Diego, Carolina, Xiomara, Fredy, Humberto, Nayeli, Nestor, Guillermo, Juan, Javier, Ivonne, Julio, Jason, Adrian, Gaby Munguía, Oralia, Edgardo, Miguel Arturo, Pablo, Lety Garin* y a las personas que me brindaron su colaboración, conocimientos, opiniones y ayuda durante mi maestría.

Agradezco al *CINVESTAV*, por brindarme la oportunidad de realizar mis estudios de posgrado, a todos mis profesores y compañeros del laboratorio de potencia, por todos los momentos vividos.

Agradezco al *CONACYT* por el apoyo económico brindado durante la realización de esta investigación.

RESUMEN

Esta tesis presenta dos técnicas para el análisis de una red eléctrica, la cual puede incluir elementos no lineales y/o dispositivos electrónicos, con el objetivo de definir un número suficiente de frecuencias (considerando armónicas y/o interarmónicas) a incluir para la simulación de la misma. Dicho número de frecuencias permite reproducir en forma precisa la dinámica de la red original, pero con un número de ecuaciones menor al del sistema original.

La primera técnica, de tipo heurística, se basa en el razonamiento de que los elementos no lineales son los principales contribuyentes a la conversión y propagación de frecuencias en una red eléctrica. Esta técnica comienza por la partición de la red original completa en su parte lineal y no lineal (que puede incluir elementos no lineales y/o dispositivos electrónicos). Después, se caracteriza a los elementos no lineales mediante un barrido en la frecuencia tomando como entrada voltajes unitarios a diferentes frecuencias y como salida las corrientes a través de dichos elementos. Posteriormente, las corrientes resultantes se inyectan al equivalente de Thévenin de la parte lineal de la red. Esta interacción de la parte no lineal con la red lineal permite obtener un indicador para seleccionar la frecuencia máxima. Finalmente, ésta frecuencia se toma como base para modelar la red y simularla.

La segunda técnica está basada en la transformación de un sistema no lineal a uno bilineal mediante la linealización propuesta por Carleman. Una vez que se obtiene el sistema bilineal, éste es transformado al dominio armónico dinámico modificado resultando en un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias que incluyen coeficientes armónicos/interarmónicos. Después, para el sistema bilineal en el dominio armónico dinámico modificado se calcula su función de transferencia en el dominio de Laplace. Finalmente, se evalúa el sistema entrada-salida obtenido mediante operaciones algebraicas, resultando en la visualización de las frecuencias de mayor contribución a la salida del sistema. Esto permite seleccionar la frecuencia máxima buscada.

Para validar las técnicas propuestas se presentan simulaciones de redes eléctricas modeladas en el dominio armónico modificado, el cual permite la representación de frecuencias armónicas e interarmónicas en forma simultánea. Las redes utilizadas como ejemplos contienen cargas no lineales y dispositivos electrónicos.

ABSTRACT

This thesis presents two techniques for analyzing an electrical network that includes nonlinear elements and/or electronic devices, aimed to define the maximum frequency (including harmonics and/or interharmonics) necessary for its simulation. The resultant number of accounted frequencies allows to reproducing accurately the dynamics of the original network, though with fewer equations.

The first technique, of a heuristic type, is based on the reasoning that the nonlinear elements are the main contributors to the conversion and propagation of frequencies within an electrical network. In this technique, initially, the total original network is partitioned into its linear and nonlinear parts; the latter may include nonlinear elements and/or electronic devices. Subsequently, the nonlinear elements are characterized via a frequency scan by considering a unitary voltage of different frequencies as input and the current across the elements as output. Then, the resulting currents are injected to the Thévenin impedance of the linear part of the network. This interaction of the nonlinear part with the linear network allows obtaining an indicator of the more important frequencies. Finally, the obtained maximum frequency is taken as basis to model and to simulate the network.

The second technique is based on the transformation of a nonlinear system into a bilinear one, via Carleman's embedding technique. Once the bilinear system is obtained, it is transformed to the modified dynamic harmonic domain, resulting in a set of ordinary differential equations that include harmonic/interharmonic coefficients. Then, for the transformed bilinear system, the transfer function in the Laplace domain is calculated. Finally, the input-output relation is evaluated through algebraic operations, yielding a visualization of the most contributing frequencies to the system's output. This allows selecting the maximum frequency.

To validate the proposed techniques, simulations of some electrical networks, which contain nonlinear loads and electronic devices, are presented.

ÍNDICE

Página

Resumen	iii
Abstract	iv
Índice.....	v
Índice de Figuras.....	vii
Índice de Tablas	viii
Capítulo I: Introducción	1
Capítulo II: Definición del Problema	3
Capítulo III: Objetivo.....	4
Capítulo IV: Dominio Armónico Modificado (MHD).....	5
4.1 Dominio Armónico Modificado	5
4.2 Expresiones Matriz-Vector en el MHD	6
4.3 Elección de N , T y $\Delta\omega$	7
4.4 Dominio Armónico Dinámico Modificado	7
4.5 Elementos de la Red en el MHD	8
4.5.1 Elementos lineales.	8
4.5.2 Cargas no lineales.	8
4.5.3 Dispositivos electrónicos.....	9
Capítulo V: Método I: Barrido en Frecuencia	10
5.1 Método de Barrido en la Frecuencia	10
5.2 Ejemplo 1. Red con Cargas no Lineales.....	12
5.3 Ejemplo 2. Red con Cargas no Lineales y SVC	15
5.3.1 Configuración de la red.....	15
5.3.2 Resultados numéricos	15
5.4 Esquema de Solución de Estado Estable.....	17
5.5 Impacto de Parámetros (α , β , p)	18

Capítulo VI: Linealización de Carleman	20
6.1 Enfoque de la Linealización de Carleman.....	20
6.2 Ejemplo numérico	22
6.3 Solución en el Tiempo	24
6.4 Transformación del Dominio del Tiempo al MDHD del Sistema Bilineal.....	26
Capítulo VII: Método II: Análisis a través de la Función de Transferencia en el MDHD	29
7.1 Sistema Bilineal en el Dominio de la Frecuencia	29
Capítulo VIII: Conclusiones	33
Capítulo IX: Contribuciones de esta Tesis	34
Capítulo X: Trabajos Futuros.....	35
Bibliografía.....	36
Publicaciones	38

ÍNDICE DE FIGURAS

Página

Figura 1. Implementación de dispositivos electrónicos en el MHD.....	9
Figura 2. Representación de la red total.	11
Figura 3. Barrido de frecuencia de la carga no lineal.....	11
Figura 4. Configuración de la red.....	12
Figura 5. Representación del producto $ Z_{ThI_{NL}} $	13
Figura 6. Voltaje en el nodo 4.....	14
Figura 7. Error absoluto en señales de Fig. 6.....	14
Figura 8. Configuración de la red.....	15
Figura 9. Respuesta de la red al producto $ Z_{ThI_{NL}} $	16
Figura 10. Voltaje en el nodo 4.....	16
Figura 11. Error absoluto en señales de Fig. 10.	17
Figura 12. Corriente armónica β y p fijo, α variable.	18
Figura 13. Corriente armónica α y p fija, β variable.	18
Figura 14. Corriente armónica α y β fijo, p variable.	19
Figura 15. Circuito con carga no lineal.....	22
Figura 16. Comparación ecuación diferencial y sistema bilineal.....	25
Figura 17. Error absoluto.....	25
Figura 18. Tercera variable de estado, $x^{(1)}$	26
Figura 19. Quinta variable de estado, $x^{(5)}$	26
Figura 20. Primera variable de estado, $x^{(1)}$	27
Figura 21. Error absoluto primera ecuación.....	27
Figura 22. Tercera variable de estado, $x^{(3)}$	28
Figura 23. Error absoluto tercera ecuación.....	28
Figura 24. Quinta variable de estado, $x^{(5)}$	28
Figura 25. Error absoluto quinta ecuación.....	28
Figura 26. Visualización de resultados obtenidos.....	30
Figura 27. Selección de armónicos mayores a 10^{-1}	30
Figura 28. Elección de armónicos mayores a 10^{-2}	31

ÍNDICE DE TABLAS

	<i>Página</i>
Tabla 1. Magnitud en el nodo 2 de f_{Nr}	13
Tabla 2. Error RMS variando el número de muestras.	14
Tabla 3. Tiempo de simulación (en segundos) con distinto número de muestras.	15
Tabla 4. Magnitud en el nodo 4 de f_{Nr}	16
Tabla 5. Error RMS variando el número de muestras.	17
Tabla 6. Tiempo de simulación (en segundos) variando número de muestras.	17
Tabla 7. Armónicos mayores a diferentes criterios.	31
Tabla 8. Resultados variando N_r	32
Tabla 9. Tiempo de simulación (en segundos) variando N_r	32

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

La distorsión armónica en las formas de onda de voltaje y de corriente es uno de los principales problemas que la industria eléctrica enfrenta actualmente. Lo anterior, se debe al gran número de cargas electrónicas y cargas no lineales que se utilizan en múltiples aplicaciones [1].

Para el análisis de la distorsión en una señal eléctrica, tradicionalmente el ingeniero de potencia recurre al dominio de la frecuencia [2]. En este dominio, los armónicos se han definido como las componentes espectrales de frecuencias que son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental del sistema de corriente alterna (AC) [3]. Los sistemas de potencia también pueden contener interarmónicos, los cuales se han definido como las componentes espectrales de frecuencia que no son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental del sistema [3].

El origen y/o conversión de distintas frecuencias en una forma de onda se debe a la presencia de diversos dispositivos eléctricos/electrónicos y cargas no lineales. Algunos ejemplos son: los cambios de estado en válvulas electrónicas involucran un amplio rango de frecuencias; asimismo, la forma de onda de corriente en los hornos de arco; los reactores no lineales y las máquinas eléctricas se comportan como convertidores de frecuencias; los ciclo-convertidores y los variadores de velocidad generan también distorsión en las formas de onda inyectando inter-armónicos a la red [1].

Dentro del contexto matemático, en 1822 J.B.J. Fourier postuló que cualquier función continua y periódica se puede representar por la sumatoria de una componente de corriente directa (DC), una componente senoidal de frecuencia fundamental, y una serie (infinita) de componentes senoidales de frecuencias múltiples de la fundamental [2]. Cabe mencionar que, para la representación exacta de la función original es necesario un número infinito de términos en la serie de Fourier.

El modelado de redes de potencia que considera frecuencias diferentes a la fundamental no es nuevo, existen una gran cantidad de trabajos en el área de modelado, algunos ejemplos relevantes son, [1], [2], [4]. Los elementos de la red, generalmente modelados por ecuaciones integro-diferenciales y/o algebraicas, se representan en el dominio de la frecuencia a través de un conjunto de coeficientes armónicos. Esto resulta en un incremento del número de ecuaciones de red. Hasta el día de hoy, todavía es un tópico abierto a la investigación el definir de antemano el número de armónicos necesarios para una representación precisa de la red. Lo anterior, con la finalidad de evitar un número excesivo de ecuaciones, y, por consecuencia, un tiempo de cómputo muy grande.

Para resolver el problema de dimensiones se han propuesto una gran cantidad de técnicas de reducción de orden de modelos lineales invariantes en el tiempo [16]-[21]. Dichas técnicas se enfocan principalmente en el análisis de valores singulares [19], en transformaciones lineales con objeto de balancear los gramianos de controlabilidad y observabilidad del sistema [20], o basadas en mecanismos genéticos y evolutivos [21]. Sin embargo, los sistemas de potencia reales son no lineales y variantes en el tiempo.

Con respecto a la reducción de orden en sistemas no lineales, existen técnicas de linealización y de balanceo de estados [16]-[18]. Sin embargo, estas técnicas tienen los siguientes problemas: a) el proceso de

reducción es matemáticamente complicado, b) se necesitan puntos precisos para la linealización, los cuales irónicamente pudieran obtenerse a través de la simulación del sistema completo, y c) no se ha demostrado su aplicabilidad a grandes redes.

En [17] se aplica la teoría propuesta en [20] para sistemas periódicos. Es decir, se balancean los gramianos de controlabilidad y observabilidad y se desprecian los estados no observables del modelo balanceado, lo que permite así el truncamiento para obtener un modelo de orden reducido.

En [22] se analizan tres técnicas para el cálculo del estado estable en forma piezo-lineal, donde el objetivo es extraer dinámicas de bajo orden en modelos magnéticos no lineales.

En [23] se presenta un algoritmo donde se utilizan aproximaciones polinomiales por tramos para aproximar sistemas no lineales; cada polinomio se reduce a uno de menor grado y se usa para reemplazar grandes subsistemas, acelerando el tiempo computacional en las simulaciones.

En [16] se propone un procedimiento de balanceo de gramianos y reducción de orden. En este procedimiento primeramente se requieren los valores de las variables de estado, sus derivadas, y las salidas del sistema ante entradas típicas. Después, con la información anterior se construye un sistema equivalente linealizado. Este último sirve para encontrar los sub-espacios dominantes y, utilizando un proceso de optimización, se encuentra el sistema de orden reducido.

En [18] se propone el balanceo de sistemas no lineales como una extensión de la teoría del balanceo para sistemas lineales. Para lo anterior, se utilizan las funciones de observabilidad y controlabilidad para encontrar los valores singulares del sistema y algunas transformaciones lineales para representar el sistema balanceado.

Respecto a técnicas numéricas, en [14] se propone una técnica adaptiva donde, en cada iteración, se reduce el tamaño del sistema retirando del modelo de red los armónicos (o interarmónicos) que son menores a un valor predeterminado. La solución se inicia utilizando el resultado de análisis de flujos de carga previo del sistema y definiendo un número de frecuencias en forma arbitraria. Durante el proceso iterativo, las contribuciones de los armónicos debidas a las cargas no lineales son aceptadas o descartadas, de acuerdo con un nivel de tolerancia predefinido. Este discernimiento de frecuencias sirve para actualizar sólo los armónicos de mayor contribución en la solución del sistema.

Capítulo 11

DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

Actualmente, los sistemas eléctricos de potencia poseen componentes que por su naturaleza son no lineales y/o variantes en el tiempo, debido a que su forma de corriente no corresponde a la forma de onda de voltaje aplicada. Por lo tanto, dichos componentes no pueden ser descritos por la Ley de Ohm, la cual describe una relación lineal entre voltaje y corriente [1].

Debido a sus características, los elementos no lineales o variantes en el tiempo se comportan como convertidores de frecuencias. Si se utilizan representaciones en el dominio de la frecuencia de dichos elementos, resultan sistemas de ecuaciones de gran tamaño, que computacionalmente requieren el manejo de mucha memoria, un tiempo de procesamiento excesivo, e incluso de cálculos innecesarios.

En esta tesis se analizan dos técnicas numéricas para establecer el número de frecuencias necesario para el modelado de una red eléctrica no lineal. Esto permitirá manejar un número reducido de ecuaciones de red, conservando en forma precisa la dinámica del sistema no lineal original.

Capítulo 111

OBJETIVO

El objetivo principal de esta tesis es la propuesta de una metodología de análisis para definir el número de armónicos e interarmónicos suficientes para la simulación de una red eléctrica no lineal, de manera que las características del sistema reducido sean semejantes a las características del sistema no lineal original. Se presentan dos métodos para lograr dicho objetivo. El primero consiste en realizar un barrido en frecuencia de las cargas no lineales, las cuales se consideran aquí como principales generadores de distorsión frecuencial. El segundo consiste en los siguientes pasos: inicialmente se representa el sistema no lineal de ecuaciones de la red a través de un sistema bilineal; enseguida, el sistema bilineal es transformado al dominio de la frecuencia; posteriormente, se calcula la función de transferencia del sistema bilineal; finalmente, a través de operaciones algebraicas se define el número de frecuencias con mayor contribución a la salida del sistema.

CAPÍTULO IV

DOMINIO ARMÓNICO MODIFICADO (MHD)

Las técnicas del dominio armónico modificado (MHD, por sus siglas en Inglés) y dominio armónico dinámico modificado (MDHD, por sus siglas en Inglés) se usan en esta tesis para calcular los estados estable y dinámico, respectivamente, de una red eléctrica. Estas metodologías se basan en la transformada discreta de Fourier (DFT) y su transformada inversa (IDFT).

La IDFT permite muestrear una señal en el dominio de la frecuencia con un espaciamiento en frecuencia arbitrario, lo que permite la representación de armónicos e interarmónicos en forma simultánea.

4.1 Dominio Armónico Modificado

Considere una señal X en dominio de la frecuencia y su contraparte x en el dominio del tiempo (asumiendo que es causal). Las transformadas de Fourier de las señales (X, x) son [6]:

$$x(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (4.1)$$

$$X(\omega) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (4.2)$$

donde ω y t representan la frecuencia angular (en radianes por segundo) y el tiempo (en segundos), respectivamente. Asumiendo una frecuencia finita y tiempo limitado, la discretización de (4.1) y (4.2) resulta en [6]:

$$\underline{x_n = \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \sigma_k e^{jk\Delta\omega n\Delta t} \right]},$$
$$n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4.3)$$

$$\underline{X_k = \Delta t \left[\sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-jk\Delta\omega n\Delta t} \right]},$$
$$k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4.4)$$

donde:

$$\underline{\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}}, \quad (4.5)$$

$$\underline{\omega = k\Delta\omega, \quad t = n\Delta t.} \quad (4.6)$$

En (4.3)-(4.5), T corresponde al periodo de observación, N es el número de muestras, σ es la ventana de datos para disminuir el fenómeno de Gibbs debido al truncamiento, y la discretización del par (X, x) está dada por las relaciones en (4.6).

Los elementos dentro de los paréntesis en (4.3) y (4.4) se puede evaluar eficientemente con los algoritmos de la transformada rápida de Fourier inversa (IFFT) y de la transformada rápida de Fourier (FFT), respectivamente. Adicionalmente, la IDFT y la DFT en (4.3) y (4.4) se pueden representar por sus transformaciones lineales:

$$x = \frac{1}{\Delta t} UX, \quad (4.7)$$

$$X = (\Delta t) Wx, \quad (4.8)$$

donde $U=IFFT(I_d)$, siendo I_d la matriz identidad de dimensiones $N \times N$. El operador lineal W puede calcularse por $W=FFT(I_d)$.

Adicionalmente, (quitando temporalmente el término de la ventana de datos), la derivada de (4.3) con respecto a $n\Delta t$ resulta en

$$\dot{x}_n = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{k=0}^{N-1} jk\Delta\omega X_k e^{jk\Delta\omega n\Delta t}. \quad (4.9)$$

De las transformadas de Fourier discretas expresadas en (4.3) y (4.4) se puede notar que $\Delta\omega$ se toma como una fracción de frecuencia, lo que permite así la representación de los interarmónicos. En esta tesis se considera a $\Delta\omega$ como constante, permitiendo la inclusión de interarmónicos relacionados a ella. En el caso que existan interarmónicos distintos a $\Delta\omega$, se podría utilizar un algoritmo de interpolación para tomarlos en cuenta y eliminar los errores causados por el efecto de malla (picket-fence effect) y errores de fuga (aliasing), auxiliándose de ventanas de datos [9].

4.2 Expresiones Matriz-Vector en el MHD

Considere la ecuación diferencial ordinaria (ODE) dada por:

$$\dot{x} = ax + bu, \quad (4.10)$$

donde a y b se consideran constantes. Si se sustituyen (4.3) y (4.9) en (4.10), y se descartan los términos exponenciales, resulta en:

$$DX = aX + bV, \quad (4.11)$$

donde:

$$X = [X_0 \quad X_1 \quad \dots \quad X_{N-1}]^T \quad (4.12)$$

$$D = \text{diag}[0 \quad j\Delta\omega \quad j2\Delta\omega \quad \dots \quad j(N-1)\Delta\omega]. \quad (4.13)$$

En (4.12), Tr indica la transpuesta.

De esta forma, la ODE escalar (4.10) se transforma en la ecuación algebraica (4.11) en el MHD con X y V que tiene sus componentes en frecuencia como elementos, no necesariamente armónicos [3]. La matriz D se refiere en lo sucesivo como la matriz operacional diferencial modificada. El orden de los coeficientes en el MHD se basa en la fórmula de la IDFT; por lo tanto, el subíndice 0 corresponde a la componente de frecuencia cero, el subíndice 1 corresponde a la componente $\Delta\omega$ y así sucesivamente, hasta que se alcanza la N -ésima muestra.

En el caso de que los elementos a y b sean elementos periódicos en el tiempo, (4.11) se modifica como sigue:

$$DX = AX + BV. \quad (4.14)$$

donde A y B son matrices de tipo Toeplitz con sus coeficientes armónicos/interarmónicos dados por la DFT y V es el vector de entrada.

4.3 Elección de N , T y $\Delta\omega$

La principal ventaja de la DFT/IDFT, expresada en (4.3) y (4.4), es que los armónicos e interarmónicos se pueden incluir simultáneamente cuando se obtiene una señal en el tiempo dada por (4.3) [6]. Con el objeto de incluir los interarmónicos en la formulación del MHD y del MDHD se sugiere usar (4.3) y (4.4), la frecuencia fundamental f , el periodo T y el incremento de frecuencia $\Delta\omega$ como sigue:

$$\left. \begin{aligned} f = \frac{\omega_0}{2\pi r}, \quad T = \frac{1}{f}, \quad \Delta\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\omega_0}{r}, \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

donde r es el recíproco de la fracción que involucra la más pequeña frecuencia interarmónica. Definiendo el número de muestras N , resulta por consecuencia la máxima frecuencia Ω como:

$$\left. \begin{aligned} \Omega = \frac{2\pi N}{T} = N\Delta\omega. \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

4.4 Dominio Armónico Dinámico Modificado

En esta tesis se considera también que los coeficientes de Fourier puedan variar lentamente con respecto al tiempo, donde el intervalo bajo consideración se desliza como una función del tiempo [15]. Lo anterior permite calcular la evolución en el tiempo de los coeficientes de la serie de Fourier y/o de la DFT como una ventana sobre la forma de onda, donde los coeficientes son las variables de estado [15]. Entonces se obtiene la siguiente versión discreta de (4.1), donde el coeficiente X_k ahora es función de $n\Delta t$

$$\left. \begin{aligned} x_n = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{k=0}^{N-1} X_k(n\Delta t) e^{jk\Delta\omega n\Delta t} \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

y su correspondiente derivada resulta en:

$$\dot{x}_n = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{k=0}^{N-1} \left[jk\Delta\omega X_k(n\Delta t) e^{jk\Delta\omega n\Delta t} + \dot{X}_k(n\Delta t) e^{jk\Delta\omega n\Delta t} \right]. \quad (4.18)$$

Considerando de nuevo la ODE descrita por (4.10), se sustituyen (4.17) y (4.18) en (4.10), y se descartan los términos exponenciales, resultando en:

$$DX + \dot{X} = aX + bV. \quad (4.19)$$

donde los elementos de X , similares a (4.12), son ahora cantidades complejas dependientes del tiempo. El resto de las variables en (4.19) han sido definidas con anterioridad. La solución del estado estacionario se puede obtener considerando el término de la derivada igual a cero en (4.19), lo que conlleva de regreso a (4.11).

4.5 Elementos de la Red en el MHD

A continuación se describen los modelos de los dispositivos eléctricos/electrónicos, que se utilizan en esta tesis para el cálculo del estado estable una vez que el número de frecuencias N se ha reducido a N_r .

4.5.1 Elementos lineales.

Se tienen los siguientes modelos en el MHD:

a) Impedancia RL (Z) y admitancia GC (Y), con sus respectivos elementos dados por:

$$Z_k = R + jk\Delta\omega L, \quad k = 0, 1, \dots, N_r - 1, \quad (4.20)$$

$$Y_k = G + jk\Delta\omega C, \quad k = 0, 1, \dots, N_r - 1, \quad (4.21)$$

b) Líneas de transmisión. Se utiliza el modelo de línea monofásica con parámetros distribuidos, representada como una red de dos puertos:

$$\begin{bmatrix} I_s \\ I_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_2 & Y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s \\ V_r \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

donde:

$$Y_1 = Y_c \coth(\gamma l), \quad Y_2 = -Y_c \operatorname{csch}(\gamma l), \quad (4.23)$$

En (4.22), los subíndices s y r se refieren a los extremos de envío y recepción, respectivamente. En (4.23), Y_c y γ representan las funciones de admitancia característica y propagación, respectivamente. Estas se calculan usando el concepto de profundidad compleja [10] al reemplazar la frecuencia angular continua ω por su forma discreta $k\Delta\omega$.

4.5.2 Cargas no lineales.

Un reactor no lineal puede ser modelado en el dominio del tiempo por medio de una relación polinomial, donde la relación flujo-corriente se expresa por:

$$i(t) = \alpha\varphi + \beta\varphi^p. \quad (4.24)$$

En (4.24), α y β son constantes y p representa el orden del polinomio. La ecuación auxiliar de (4.24) es la relación voltaje-flujo:

$$v = \frac{d\phi}{dt}. \quad (4.25)$$

En la solución de estado estable la carga no lineal se analiza en el dominio del tiempo con (4.24), que necesita solamente la contraparte en el MHD de (4.25) cuyos elementos están definidos por:

$$\Phi_k = \frac{V_k}{jk\Delta\omega}, \quad k = 0, 1, \dots, N_r - 1. \quad (4.26)$$

4.5.3 Dispositivos electrónicos.

El proceso de conmutación dentro de un dispositivo electrónico involucra altas frecuencias. Sin embargo, es común que estos dispositivos estén conectados a filtros que a su vez están alimentados de la red con voltaje de AC cercano al senoidal. Con el propósito de incluir estos dispositivos en el cálculo de estado estable, se sugiere la siguiente metodología:

- Ya que el resto de la red se modela con N_r frecuencias, el voltaje en las terminales del dispositivo se convierte al dominio del tiempo, que resulta así, una forma de onda con N_r puntos, similar a la primera mostrada en la Fig. 1. Note la pobre resolución de la forma de onda.
- Se aplica interpolación al voltaje de entrada (por ejemplo usando $2N_r$ o $4N_r$ muestras), para obtener una mejor resolución en el tiempo, como se representa en el segundo gráfico de la Fig. 1.
- La corriente del dispositivo se calcula entonces en el dominio del tiempo, se convierte al dominio de la frecuencia, y se trunca a N_r muestras.
- La corriente que se obtiene en el dominio de la frecuencia es finalmente usada para cálculos con el resto de la red.

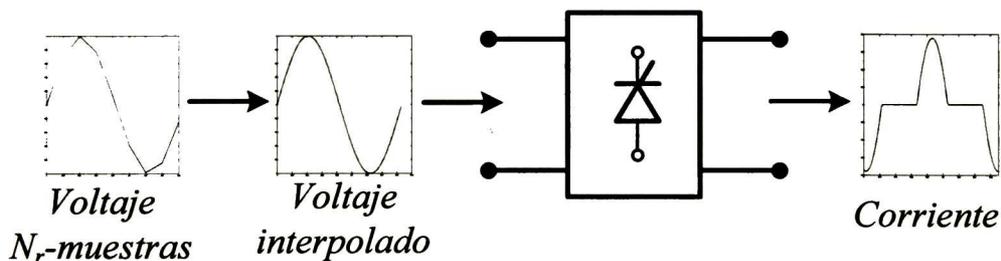


Figura 1. Implementación de dispositivos electrónicos en el MHD.

CAPÍTULO V

MÉTODO I: BARRIDO EN FRECUENCIA

En base a la teoría que se presenta en el capítulo IV, se ha demostrado que en el dominio de la frecuencia un sistema de ecuaciones en cantidades instantáneas aumenta de tamaño conforme el número de frecuencias involucradas es mayor. De hecho, la representación exacta del sistema no lineal original requiere de un número infinito de ecuaciones en el MHD o en el MDHD. Una posible solución a este problema es predefinir una frecuencia máxima, necesaria para la representación precisa del fenómeno dinámico del sistema.

Una relación analítica entre la frecuencia máxima y un error predefinido para la solución de la red es aún un tema abierto a la investigación, careciendo de un criterio. En este capítulo se presenta una técnica heurística de análisis para predefinir el número de frecuencias necesario para calcular el estado estable (o dinámico) de una red eléctrica que contiene cargas no lineales y dispositivos electrónicos de potencia. Esta se basa en el hecho de que los elementos no lineales son los principales contribuyentes a la propagación y a la conversión de frecuencias en una red eléctrica.

Inicialmente, un voltaje unitario de diferentes frecuencias se aplica en las terminales de las cargas no lineales, calculando su corriente. Después, la corriente obtenida se inyecta al equivalente de Thévenin de la parte lineal de la red. Finalmente, el voltaje resultante en la interfaz se usa para determinar las frecuencias de mayor contribución. Este proceso de barrido es directo, no requiere iteraciones y/o procesos adaptivos.

Una vez que se define la frecuencia máxima a través del procedimiento antes mencionado, se procede a calcular el estado estable de la red. Existen varias técnicas en la literatura especializada; en esta tesis se utilizaron las técnicas propuestas en [7], [8]. El cálculo del estado estable de la red se basa en los modelos tradicionales para líneas de transmisión y cargas lineales expresadas en el MHD [9], como se describe en el capítulo IV. Las cargas no lineales y dispositivos electrónicos de potencia son analizados eficientemente en el dominio del tiempo utilizando operaciones de la DFT/IDFT. Se utiliza la interpolación en los dispositivos electrónicos, ver sección 4.5.3, para calcular el cruce por cero de manera precisa, ya que el efecto de analizar el voltaje con pocas muestras para dispositivos electrónicos, impacta ligeramente la precisión total.

5.1 Método de Barrido en la Frecuencia

5.1.1 Equivalente de Thévenin de la Red Lineal

Se asume que la red ha sido particionada en dos sub-redes: la lineal, que se representa como un equivalente de Thévenin, y la no lineal, representada en forma aislada, como se muestra en la Fig. 2. Del circuito de la Fig. 2 se tiene la relación:

$$\underline{V} = \underline{V}_{Th} - \underline{Z}_{Th} \underline{I}_{NL} \quad (5.1)$$

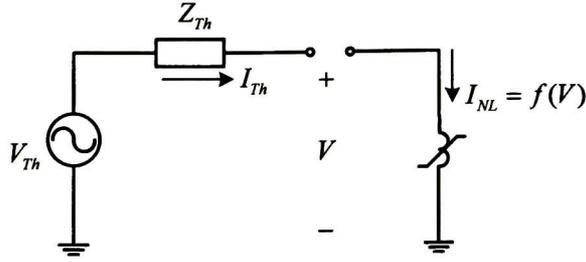


Figura 2. Representación de la red total.

De la representación de la red total, Fig. 2, se tiene una fuente de voltaje constante, V_{Th} , la carga no lineal, y la red lineal representada por Z_{Th} . Esta última reaccionará al espectro de frecuencias que la carga no lineal genere y devuelva a la red lineal. Por lo tanto, el análisis siguiente se enfocará al producto $Z_{Th}I_{NL}$.

Todos los parámetros en (5.1) corresponden a vectores y matrices en el MHD con dimensiones correspondientes a N frecuencias. En lo subsecuente, un orden reducido N_r es seleccionado para descartar las frecuencias de menor contribución a la dinámica de la red. Este nuevo orden representa la mayor parte de la interacción de la corriente no lineal y la impedancia Thévenin, y está dado por el producto $|Z_{Th}I_{NL}|$.

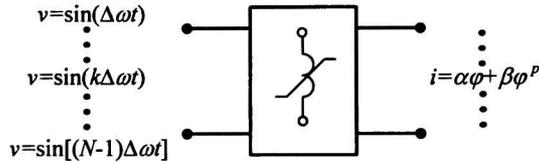


Figura 3. Barrido de frecuencia de la carga no lineal

5.1.2 Barrido en Frecuencia.

Para caracterizar la carga no lineal se calcula su respuesta en frecuencia, donde el voltaje en terminales se considera como entrada y la corriente a través de la carga como salida, ver Fig. 3. En este trabajo se aplica el siguiente procedimiento:

- a) Voltajes senoidales de la forma:

$$\underline{v = \text{sen}(k\Delta\omega t), \quad k = 0, 1, \dots, N-1,} \quad (5.2)$$

se expresan en el MHD, de donde se obtiene V , el cual es inyectado a la carga no lineal.

- b) Para cada voltaje inyectado, el flujo se calcula con (4.26) y se transforma en el dominio del tiempo para obtener φ .
- c) La corriente de salida i_{NL} se calcula con (4.24) y se transforma al MHD para obtener I_{NL} .
- d) Finalmente, de acuerdo a (5.1), el vector en dominio de la frecuencia que representa el producto $|Z_{Th}I_{NL}|$ se normaliza a 1 p.u. El comportamiento esperado es que al incrementar la frecuencia, el producto $|Z_{Th}I_{NL}|$ se vaya atenuando significativamente.

Un análisis numérico de la carga no lineal se presenta en la sección 5.5 para ilustrar el efecto de los parámetros α , β y p sin la conexión de la parte lineal de la red.

El proceso antes mencionado, se aplica a una carga no lineal, da como resultado un vector $|Z_{Th}I_{NL}|$ con varias frecuencias como respuesta a voltajes que contienen una frecuencia específica. Basados en la magnitud de dichos productos, se puede elegir el orden reducido de frecuencia N_r .

El siguiente paso consiste en calcular el estado estable de la red usando algún esquema existente de solución iterativa como métodos basados en Newton o Gauss Seidel, entre otros. El esquema de solución que se utiliza aquí se muestra en la sección 5.4. El tiempo de cálculo se puede reducir considerablemente con el nuevo número de muestras N_r . Se sugiere, sin embargo, que las cargas no lineales y dispositivos electrónicos sean analizados en el dominio del tiempo, basándose en las consideraciones mencionadas en las secciones 4.5.2 y 4.5.3.

5.2 Ejemplo 1. Red con Cargas no Lineales

5.2.1 Configuración de la red

Considere la red mostrada en la Fig. 4, que incluye líneas de transmisión monofásicas aéreas dependientes de la frecuencia y de longitud $l=10$ km cada una. La altura del conductor, el radio y la resistencia de DC son iguales a 15 m, 2.54 cm, y 2.862×10^{-8} ohm/m, respectivamente. La resistividad del suelo es tomada igual a 100 ohm-m. Los datos para la fuente son: $R_o=0.001$ ohm, y $L_o=0.001$ H. En los nodos 2 y 3 existe una carga no lineal ($\alpha=1$ y $\beta=10^6$) en paralelo con una carga RL con $R=90$ ohm y $L=0.0045$ H. Para las dos cargas no lineales, la potencia del polinomio, p , se ha fijado igual a 3. En el nodo 4 se conecta una carga resistiva con $R=100$ ohm.

Para este ejemplo, el voltaje de la fuente ha sido tomado como (donde, siendo una señal periódica, se han incluido armónicos e interarmónicos):

$$u(t) = \text{sen}(\omega_0 t) + 0.3 \text{sen}(2.5\omega_0 t) + 0.01 \text{sen}(3.75\omega_0 t) + 0.001 \text{sen}(4\omega_0 t) \quad (5.3)$$

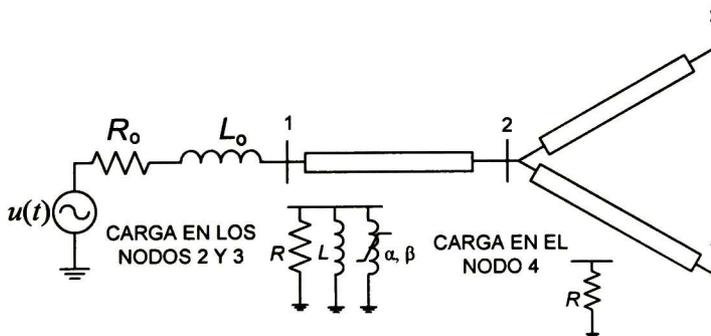


Figura 4. Configuración de la red.

5.2.2 Resultados numéricos

Debido a que las dos cargas no lineales tienen los mismos parámetros, el procedimiento de barrido en frecuencia antes mencionado se aplica a una de ellas con $N=256$ muestras y $\Delta\omega=0.25$ rad/s. Cabe señalar que sólo las frecuencias positivas se utilizan en el procedimiento descrito en la sección 5.1.2 de éste capítulo, ya que para las frecuencias negativas resulta en el conjugado correspondiente. Los resultados obtenidos se muestran en la Fig. 5, donde el eje x representa el número de frecuencias positivas usadas para el voltaje

(para una mejor visualización, sólo se muestran las primeras 64 frecuencias positivas), el eje y tiene el contenido de las frecuencias del producto $Z_{Th}I_{NL}$ para los nodos (2, 3 y 4), y el eje z muestra la magnitud del producto $Z_{Th}I_{NL}$ normalizado a 1 p.u.

Con base en los resultados de la Fig. 5, se puede truncar el valor del producto $|Z_{Th}I_{NL}|$, definido en lo subsecuente como f_{Nr} , basado en su propia magnitud con respecto a la fundamental (o, alternativamente, con respecto a la mayor frecuencia). Como ilustración de los resultados obtenidos, la Tabla 1 presenta f_{Nr} para las posiciones 16, 32, 64 y 128. Estos valores se usan después para el cálculo del estado estable de la red de la Fig. 4. De la Tabla I se puede observar que, considerando las primeras 32 muestras, se esperaría la reproducción de la dinámica del sistema original con un error similar al valor de f_{Nr} , es decir, del orden de 10^{-3} .

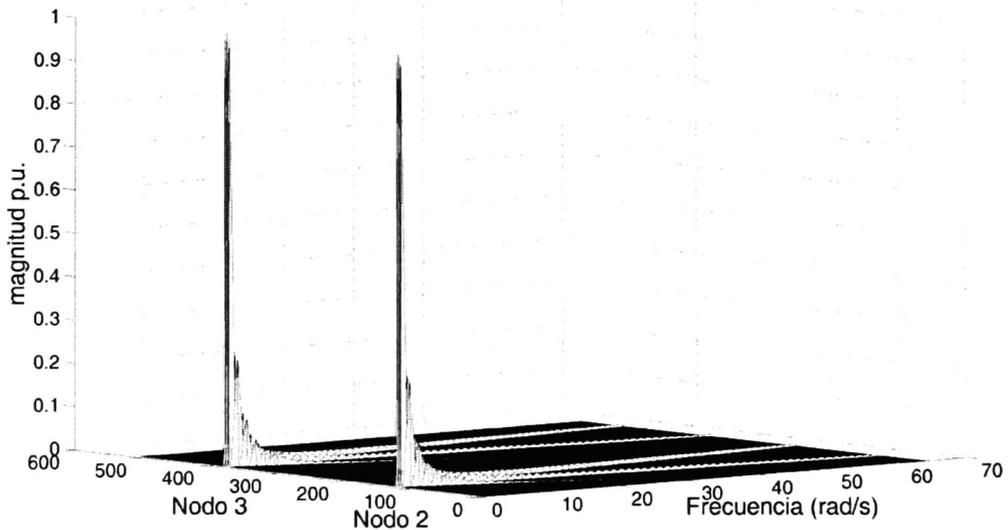


Figura 5. Representación del producto $|Z_{Th}I_{NL}|$

Tabla 1. Magnitud en el nodo 2 de f_{Nr}

muestras	16	32	64	128
f_{Nr}	0.014300	0.0098	0.0045	5.97×10^{-7}

El estado estable de la red de la Fig. 4 se ha calculado usando un método basado en Newton y otro basado en equivalentes de Thévenin, obteniendo los mismos resultados. Como ilustración, el voltaje en el nodo 2 se presenta en la Fig. 6, obtenido con $N=256$ (etiquetado con f) y comparado con $N_r=32$ (etiquetado con f_{Nr}). La Fig. 7 muestra el error absoluto dado por las formas de onda de la Fig. 6 y calculado con:

$$\varepsilon_{abs} = |f - f_{Nr}|, \quad (5.4)$$

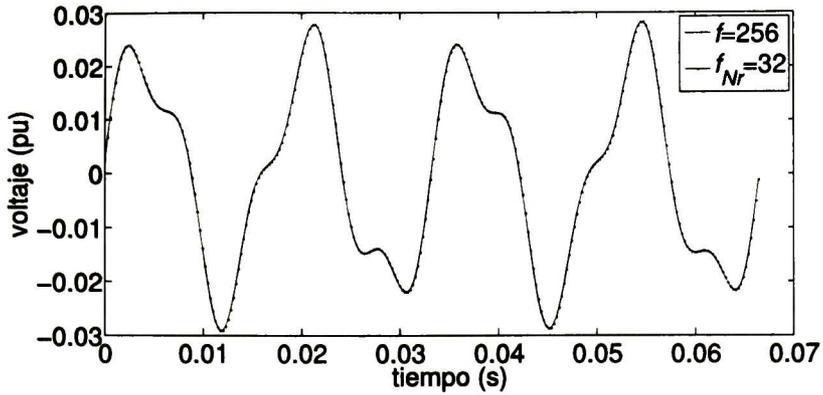


Figura 6. Voltaje en el nodo 4.

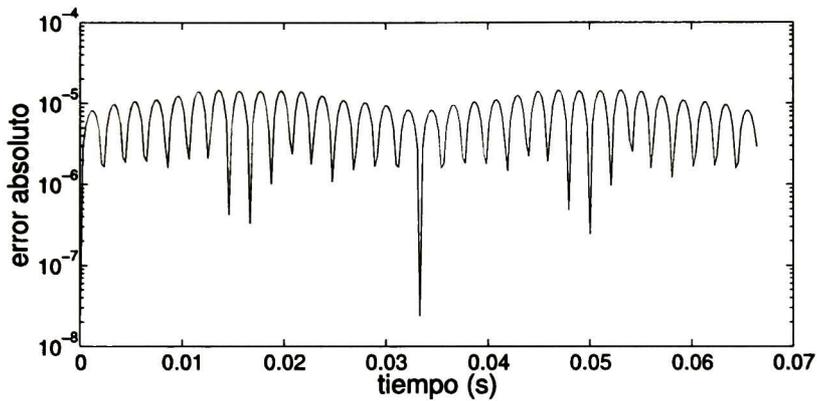


Figura 7. Error absoluto en señales de Fig. 6.

Cabe mencionar que, de acuerdo a los resultados presentados en la Fig. 7, el error incurrido al utilizar 32 muestras se mantiene por debajo de 10^{-4} . Este resultado satisface los valores de la Tabla 1.

Para una mayor ilustración, la tabla 2 muestra el error *rms* obtenido en la señal de voltaje para los nodos 2 y 3 en estado estable cuando N_r varía de 16 a 128 (se considera como base $N=256$). El error *rms* se calcula usando el mismo número de muestras en el dominio del tiempo para ambas representaciones, y está dado por:

$$\varepsilon_{rms} = \sqrt{\frac{\sum (f - f_{Nr})^2}{\sum f^2}}. \quad (5.5)$$

Tabla 2. Error RMS variando el número de muestras.

N_r	16	32	64	128
Nodo 2	0.2922	4.9126×10^{-4}	1.1474×10^{-7}	8.9669×10^{-8}
Nodo 3	0.3028	5.1942×10^{-4}	1.0668×10^{-6}	$9.03e \times 10^{-7}$

Adicionalmente, la tabla 3 contiene el tiempo computacional (CPU time) para el cálculo de la red mencionada cuando se varía el número de muestras.

Tabla 3. Tiempo de simulación (en segundos) con distinto número de muestras.

N_r	16	32	64	128	256
CPU	0.032947	0.039536	0.079941	0.368993	3.383468

De la Tablas 2 y 3 se confirma que el sistema de la Fig. 4 puede simularse con 32 muestras, obteniendo un error alrededor de 10^{-4} y con un CPU alrededor de cien veces menor al sistema completo con 512 muestras. De esto se concluye que, para dicho sistema, el orden suficiente es $N_r = 32$ debido a la precisión obtenida con respecto al sistema original y el menor tiempo de cómputo.

5.3 Ejemplo 2. Red con Cargas no Lineales y SVC

5.3.1 Configuración de la red

Considere nuevamente la red mostrada en la Fig. 4, donde ahora el nodo 4 tiene conectado un compensador estático de VARs (SVC), con una inductancia de 0.25 H y un ángulo de disparo igual a 140° . El capacitor del SVC, de 4.5×10^{-6} F, se ha incluido en la red lineal para este ejemplo, resultando la parte no lineal en un reactor controlado por tiristores (TCR). La fuente se toma igual a la expresada en (5.3).

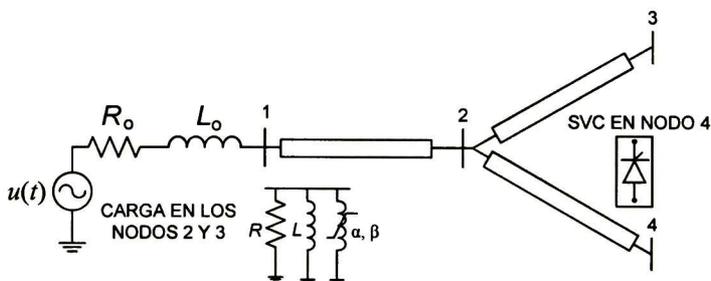


Figura 8. Configuración de la red.

5.3.2 Resultados numéricos

En forma similar a la descrita en la sección 5.2.2, se aplicó un barrido en frecuencia a una de las cargas no lineales de la red mostrada en la Fig. 8. Por otro lado, la corriente del TCR se mantiene constante y se calcula considerando un voltaje de entrada igual a $\cos(377t)$. Los resultados obtenidos se muestran en la Fig. 9, donde nuevamente el eje x representa el número de frecuencias positivas usadas para el voltaje (para una mejor visualización, sólo se muestran las primeras 64 frecuencias positivas), el eje y tiene el contenido de las frecuencias del producto $Z_{Th}I_{NL}$ que consiste de tres nodos (2, 3 y 4), y el eje z muestra la magnitud del producto $Z_{Th}I_{NL}$ normalizado a 1 p.u.

De acuerdo a los resultados obtenidos, la Tabla 4 presenta f_{N_r} para las posiciones 16, 32, 64 y 128. Estos valores se utilizan después para el cálculo del estado estable.

En la Fig. 9, a diferencia de los resultados presentados en la Fig. 5, se observa que aparecen frecuencias importantes alrededor de la muestra 32, más notables para el nodo 4. Este efecto se debe a la presencia del TCR en la red, el cual por ser un dispositivo electrónico involucra frecuencias mayores. De la Tabla 4 se puede observar que, considerando las primeras 64 muestras, se esperaría una precisión con respecto al sistema original del orden de 10^{-3}

Tabla 4. Magnitud en el nodo 4 de f_{Nr}

muestras	16	32	64	128
f_{Nr}	0.0183	0.0893	0.0022	2.58×10^{-6}

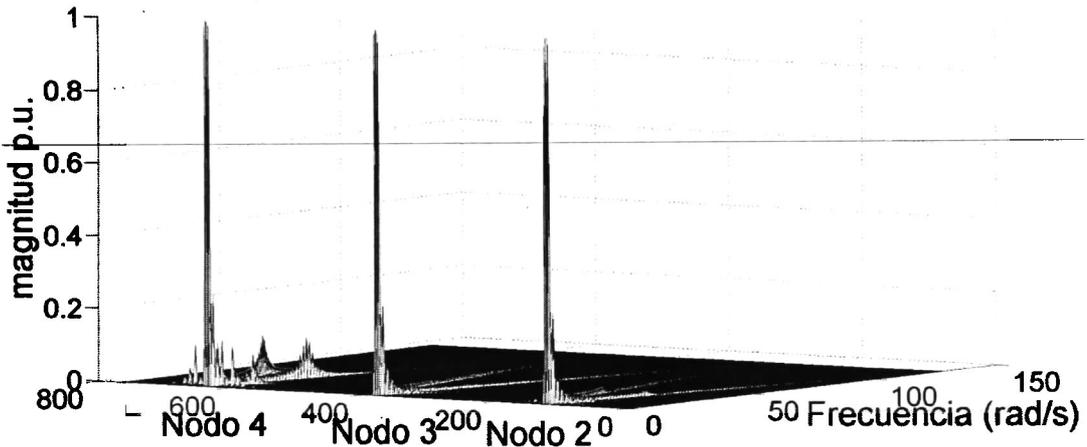


Figura 9. Respuesta de la red al producto $|Z_{Th} I_{NL}|$.

El estado estable de la red de la Fig. 8 se ha calculado nuevamente usando un método basado en Newton y otro basado en equivalentes de Thévenin, se obtienen los mismos resultados. El voltaje en el nodo 4 se presenta en la Fig. 10, obtenido con $N=256$ y comparado con $N_r=64$. La Fig. 11 muestra el error absoluto de las formas de onda de la Fig. 10.

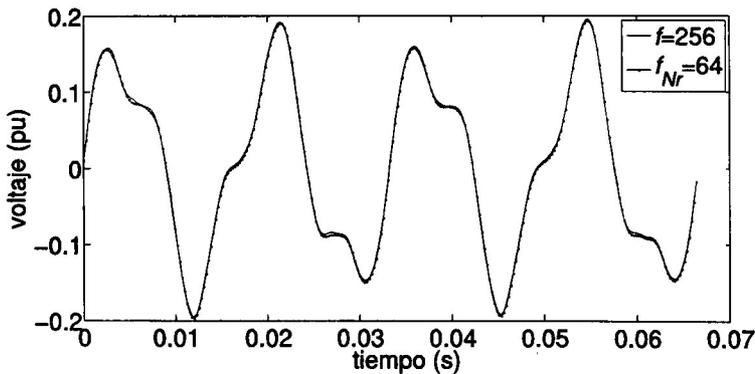


Figura 10. Voltaje en el nodo 4.

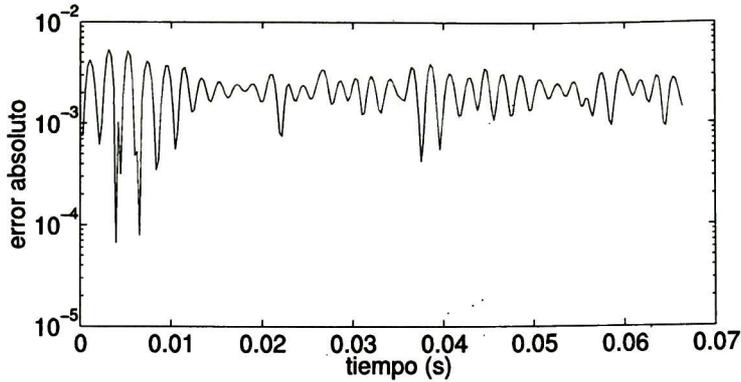


Figura 11. Error absoluto en señales de Fig. 10.

En la Tabla 5 se muestra el error *rms* obtenido en la señal de voltaje del nodo 4 en estado estable cuando N_r varía de 16 a 128 (considerando como base $N=256$).

Tabla 5. Error RMS variando el número de muestras.

N_r	16	32	64	128
Nodo 2	0.2962	0.0028	0.0017	7.0211×10^{-4}
Nodo 3	0.3069	0.0028	0.0016	6.646×10^{-4}
Nodo 4	0.3181	0.0337	0.0215	0.0043

Adicionalmente, la tabla 6 contiene el tiempo computacional (CPU time) para el cálculo de la red mencionada cuando se varía el número de muestras.

Tabla 6. Tiempo de simulación (en segundos) variando número de muestras.

N_r	16	32	64	128	256
CPU	0.191982	0.392457	0.448025	1.886685	9.252508

De acuerdo a los resultados presentados en las Tablas 5 y 6, se confirma que cuando se incluye el SVC se necesita un número mayor de muestras que en el caso de considerar solamente cargas no lineales. Para la red de la Fig. 8, y en base a dichas Tablas, aquí se propone utilizar $N_r = 64$ muestras, obteniendo un CPU 20.65 veces menor a cuando se utilizan 256 muestras.

5.4 Esquema de Solución de Estado Estable

Inicialmente, se asume un voltaje $V_{anterior}$ como el voltaje en el nodo que une la red lineal y la no lineal (tomando como base la Fig. 2). Después, se calculan las corrientes inyectadas en ambas redes. En teoría, se espera que I_{NL} sea igual a $-I_{Th}$. Sin embargo, $\Delta I = I_{NL} + I_{Th}$ no coincidirá en las primeras iteraciones. Uniendo las dos sub-redes en su forma linealizada se obtiene:

$$\Delta I = (J_{Th} + J_{NL}) \Delta V, \quad (5.6)$$

donde J_{Th} y J_{NL} corresponden a los Jacobianos de las partes lineales y no lineales, respectivamente. Este último se puede obtener por medio de convolución en dominio de la frecuencia, como se describe en [4], o numéricamente por medio del método de perturbación.

A partir de (5.6), el esquema iterativo tipo-Newton para calcular un nuevo voltaje es dado por la relación recursiva (considerando los signos apropiados de las corrientes):

$$V_{nuevo} = (J_{Th} + J_{NL})^{-1} (-\Delta I) + V_{anterior} \quad (5.7)$$

5.5 Impacto de Parámetros (α , β , p)

En esta sección se presenta un ejemplo numérico de la caracterización de una carga no lineal a través del barrido en frecuencia. El voltaje en terminales se considera como entrada y la corriente a través de la carga no lineal, I_{NL} , como salida. Tomando como base (4.24), cada uno de los tres parámetros (α , β , p) son variados para calcular I_{NL} , dejando los demás constantes. Los resultados correspondientes son presentados en las Figs. 12-14, donde la magnitud de I_{NL} se ha normalizada en base a la frecuencia fundamental. La numeración en el eje-y corresponde a los valores tomados para (α , β , p). Cabe mencionar que, para una mejor visualización, sólo se muestra las primera 32 frecuencias positivas en el eje-x de las Figs. 12-14.

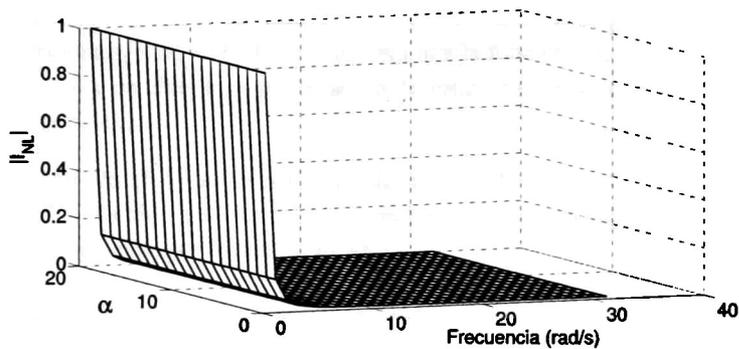


Figura 12. Corriente armónica β y p fijo, α variable.

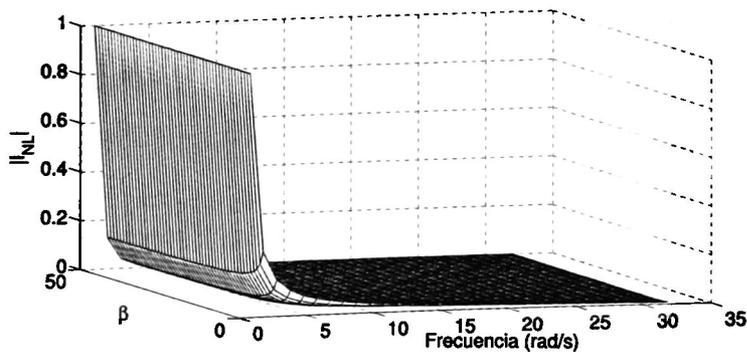


Figura 13. Corriente armónica α y p fija, β variable.

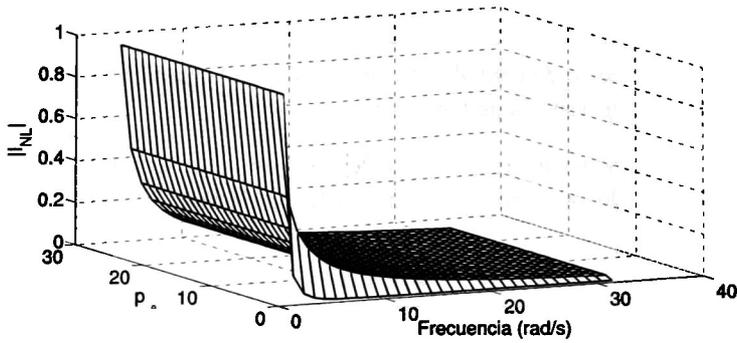


Figura 14. Corriente armónica α y β fijo, p variable.

Para el primer caso [β y p fijos, α variable (de 0.1 a 10 con incrementos de 0.5)], se puede observar que no existe una influencia pronunciada en la variación de este parámetro. Es decir, que se pueden tomar el mismo número de frecuencias independientemente del valor de α . En el segundo caso [α y p fijos, β variable (10^3 a 10^6 con incrementos de 2×10^4)], se observa que las componentes de frecuencia decrece rápidamente conforme β se incrementa. Lo anterior, debido a la influencia de β en la curvatura de la no linealidad. Finalmente, cuando β y α con constantes, y p es variable (de 3 a 25 con incrementos de 2), las componentes de frecuencia decrecen rápidamente cuando $p=3$, y no tienen mucha influencia para valores de p mayores a 3.

CAPÍTULO VI

LINEALIZACIÓN DE CARLEMAN

En 1932, Carleman, con base en la idea de Poincaré, mostró que un sistema dimensional finito de ecuaciones diferenciales no lineales $du/dt = V(u)$, donde V son polinomios en u , puede ser convertido en un sistema infinito lineal de ecuaciones lineales [12]. Esta idea es la base para la transformación de un sistema no lineal a uno bilineal: $\dot{x} = Ax + Bxu + Cu$, como se explica enseguida. La teoría de sistemas lineales puede entonces aplicarse al sistema bilineal.

6.1 Enfoque de la Linealización de Carleman

Se considera la representación en ecuaciones de estado de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= a(x(t), t) + b(x(t), t)u(t), \quad t \geq 0 \\ y(t) &= c(x(t), t), \quad x(0) = x_0,\end{aligned}\tag{6.1}$$

Las funciones $a(x, t)$, $b(x, t)$ y $c(x, t)$ son analíticas en x y continuas en t , por lo que (6.1) es llamada ecuación lineal-analítica. Adicionalmente, en (6.1) se considera que la función $c(x, t)$ es lineal en x . Múltiples aplicaciones de la ingeniería, una de ellas la representación de redes eléctricas con elementos no lineales, pueden tomar la forma dada por (6.1).

Para la transformación de (6.1) a un sistema bilineal existen distintas realizaciones para los coeficientes $a(x, t)$ y $b(x, t)$ [12]. Debido a su sencillez matemática y buena precisión, en esta tesis se utiliza la representación en series de potencias, por lo que se obtiene:

$$\begin{aligned}a(x, t) &= A_1(t) + A_2(t)x^{(2)} + \dots + A_N(t)x^{(M)} + \dots, \\ b(x, t) &= B_0(t) + B_1(t)x^{(2)} + \dots + B_{N-1}(t)x^{(M-1)} + \dots.\end{aligned}\tag{6.2}$$

Por lo tanto, (6.1) se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{k=1}^M A_k(t)x^{(k)}(t) + \sum_{k=0}^{M-1} B_k(t)x^{(k)}(t)u(t) + \dots, \\ y(t) &= c(t)x(t) + y_0(t), \quad x(0) = 0, \quad t \geq 0.\end{aligned}\tag{6.3}$$

Enseguida, se ilustra el cálculo de los primeros M núcleos correspondientes a (6.3). Primeramente, se desarrolla una ecuación diferencial para $x^{(2)}(t)$, eliminando los términos mayores a M :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} [x^{(2)}(t)] &= \frac{d}{dt} [x^{(1)}(t) \otimes x^{(1)}(t)] = \dot{x}^{(1)}(t) \otimes x^{(1)}(t) + x^{(1)}(t) \otimes \dot{x}^{(1)}(t) \\
&= \left[\sum_{k=1}^M A_k(t) x^{(k)}(t) + \sum_{k=0}^{M-1} B_k(t) x^{(k)}(t) u(t) \right] \otimes x^{(1)}(t) \\
&\quad + x^{(1)}(t) \otimes \left[\sum_{k=1}^M A_k(t) x^{(k)}(t) + \sum_{k=0}^{M-1} B_k(t) x^{(k)}(t) u(t) \right] + \dots \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} [A_k(t) \otimes I_n + I_n \otimes A_k(t)] x^{(k+1)}(t) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{N-2} [B_k(t) \otimes I_n + I_n \otimes B_k(t)] x^{(k+1)}(t) u(t) + \dots, x^{(2)}(0) = 0,
\end{aligned} \tag{6.4}$$

donde \otimes representa el producto Kronecker. Continuando con el mismo procedimiento, resulta una ecuación diferencial general para $x^{(j)}(t)$ de grado M de la forma:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} [x^{(j)}(t)] &= \sum_{k=1}^{M-j+1} A_{j,k}(t) x^{(k+j-1)}(t) + \sum_{k=0}^{M-j} B_{j,k}(t) x^{(k+j-1)}(t) u(t) + \dots, \\
x^{(j)}(0) &= 0, j = 1, \dots, M.
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Un paso subsecuente consiste en el cálculo de los coeficientes en (6.5). Para esto, se toma la notación definida por $A_{1,k} = A_k$, y para $j > 1$

$$\begin{aligned}
A_{j,k}(t) &= A_k(t) \otimes I_n \otimes \dots \otimes I_n + I_n \otimes A_k(t) \otimes I_n \otimes \dots \otimes I_n \\
&\quad + \dots + I_n \otimes \dots \otimes I_n \otimes A_k(t),
\end{aligned}$$

por lo que existen $j-1$ productos Kronecker en cada término y j términos. Una notación similar es usada para $B_{j,k}(t)$. De esta forma, el nuevo vector de estados se puede expresar como:

$$x^{\otimes}(t) = \begin{bmatrix} x^{(1)}(t) \\ x^{(2)}(t) \\ \vdots \\ x^{(M)}(t) \end{bmatrix},$$

Por lo tanto, una vez que se calculan los coeficientes, el conjunto de ecuaciones diferenciales en (6.5) se transforma en la ecuación bilineal:

$$\frac{d}{dt} x^{\otimes} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1M} \\ 0 & A_{21} & \dots & A_{2,M-1} \\ 0 & 0 & \dots & A_{3,M-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{11} \end{bmatrix} x^{\otimes} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1,M-1} & 0 \\ B_{20} & B_{21} & \dots & B_{2,M-1} & 0 \\ 0 & B_{11} & \dots & B_{3,M-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_{M0} & 0 \end{bmatrix} x^{\otimes} u + \begin{bmatrix} B_{10} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u, \tag{6.6}$$

A (6.6) se le conoce como *linealización de Carleman* de la ecuación de estado lineal-analítica (6.1) [12]. Cabe mencionar que, en forma similar a las series de Fourier, dicha transformación es exacta cuando el número de ecuaciones en (6.6) es infinito. En forma compacta se tiene:

$$\dot{x} = Ax + Bxu + Cu. \quad (6.7)$$

La representación bilineal de un sistema no lineal es utilizada aquí para calcular el número de frecuencias N , en base a su representación como función de entrada-salida en el dominio de la frecuencia.

6.2 Ejemplo numérico

Considere el circuito no lineal mostrado en la Fig. 15, con los valores: $R=20$, $i = \phi + \phi^3$ y $\phi(0) = 0.6$.

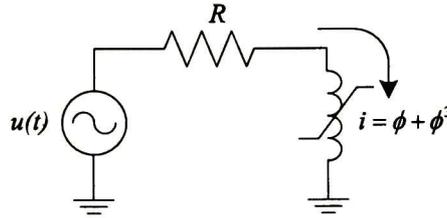


Figura 15. Circuito con carga no lineal

Para la solución en el tiempo, se tiene la ecuación que gobierna la dinámica del circuito:

$$\frac{d\phi}{dt} = 20u(t) - 20\phi - 20\phi^3. \quad (6.8)$$

Con base en (6.5), se ilustrará el cálculo de las matrices de coeficientes A y B de (6.7) para el caso de $M=5$, obteniendo primeramente las ecuaciones diferenciales:

$$j = 1$$

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} = A_{11}x^{(1)} + A_{12}x^{(2)} + A_{13}x^{(3)} + A_{14}x^{(4)} + A_{15}x^{(5)} + [B_{10} + B_{11}x^{(1)} + B_{12}x^{(2)} + B_{13}x^{(3)} + B_{14}x^{(4)}]u(t),$$

$$j = 2$$

$$\frac{dx^{(2)}}{dt} = A_{21}x^{(2)} + A_{22}x^{(3)} + A_{23}x^{(4)} + A_{24}x^{(5)} + [B_{20}x^{(1)} + B_{21}x^{(2)} + B_{22}x^{(3)} + B_{23}x^{(4)}]u(t),$$

$$j = 3$$

$$\frac{dx^{(3)}}{dt} = A_{31}x^{(3)} + A_{32}x^{(4)} + A_{33}x^{(5)} + [B_{30}x^{(2)} + B_{31}x^{(3)} + B_{32}x^{(4)}]u(t),$$

$$j = 4$$

$$\frac{dx^{(4)}}{dt} = A_{41}x^{(4)} + A_{42}x^{(5)} + [B_{40}x^{(3)} + B_{41}x^{(4)}]u(t),$$

$$j = 5$$

$$\frac{dx^{(5)}}{dt} = A_{51}x^{(5)} + [B_{50}x^{(4)}]u(t),$$

Enseguida, se compara (6.8) con la ecuación diferencial cuando $j=1$ se tienen:

$$A_{11} = -20, \quad A_{12} = 0, \quad A_{13} = -20, \quad A_{14} = 0, \quad A_{15} = 0, \quad (6.9)$$

Para el caso $j=2$, se tiene que los coeficientes se conforman por 1 producto Kronecker y 2 términos. Entonces, se sustituyen los valores obtenidos previamente cuando $j=1$, se tiene:

$$\begin{aligned} A_{21} &= A_{11} \otimes I_n + I_n \otimes A_{11} = -40 \\ A_{22} &= A_{12} \otimes I_n + I_n \otimes A_{12} = 0 \\ A_{23} &= A_{13} \otimes I_n + I_n \otimes A_{13} = -40 \\ A_{24} &= A_{14} \otimes I_n + I_n \otimes A_{14} = 0 \end{aligned} \quad (6.10)$$

En el caso cuando $j=3$, los coeficientes se conforman por 2 productos Kronecker y 3 términos. Entonces, se obtiene:

$$\begin{aligned} A_{31} &= A_{11} \otimes I_n \otimes I_n + I_n \otimes A_{11} \otimes I_n + I_n \otimes I_n \otimes A_{11} = -60 \\ A_{32} &= A_{12} \otimes I_n \otimes I_n + I_n \otimes A_{12} \otimes I_n + I_n \otimes I_n \otimes A_{12} = 0 \\ A_{33} &= A_{13} \otimes I_n \otimes I_n + I_n \otimes A_{13} \otimes I_n + I_n \otimes I_n \otimes A_{13} = -60 \end{aligned} \quad (6.11)$$

Similarmente, cuando $j=4$, los coeficientes se conforman por 3 productos Kronecker y 4 términos, entonces:

$$\begin{aligned} A_{41} &= A_{11} \otimes I_n \otimes I_n \otimes I_n + I_n \otimes A_{11} \otimes I_n \otimes I_n + I_n \otimes I_n \otimes A_{11} \otimes I_n + I_n \otimes I_n \otimes I_n \otimes A_{11} = -80 \\ A_{42} &= A_{12} \otimes I_n \otimes I_n \otimes I_n + I_n \otimes A_{12} \otimes I_n \otimes I_n + I_n \otimes I_n \otimes A_{12} \otimes I_n + I_n \otimes I_n \otimes I_n \otimes A_{12} = 0 \end{aligned} \quad (6.12)$$

Para el caso $j=5$, los coeficientes se conforman por 4 productos Kronecker y 5 términos, entonces:

$$\begin{aligned} A_{51} &= A_{11} \otimes I_n \otimes I_n \otimes I_n \otimes I_n + I_n \otimes A_{11} \otimes I_n \otimes I_n \otimes I_n + I_n \otimes I_n \otimes A_{11} \otimes I_n \otimes I_n \\ &\quad + I_n \otimes I_n \otimes I_n \otimes A_{11} \otimes I_n + I_n \otimes I_n \otimes I_n \otimes I_n \otimes A_{11} = -100 \end{aligned} \quad (6.13)$$

Similarmente, se compara (6.8) con la ecuación diferencial cuando $j=1$, se tiene que:

$$B_{10} = 20, \quad B_{11} = 0, \quad B_{12} = 0, \quad B_{13} = 0, \quad B_{14} = 0 \quad (6.14)$$

En este caso, los resultados de los coeficientes son los siguientes:

Caso $j=2$:

$$\begin{aligned}
 B_{20} &= B_{10} \otimes I_n + I_n \otimes B_{10} = 40 \\
 B_{21} &= B_{11} \otimes I_n + I_n \otimes B_{11} = 0 \\
 B_{22} &= B_{12} \otimes I_n + I_n \otimes B_{12} = 0 \\
 B_{23} &= B_{13} \otimes I_n + I_n \otimes B_{13} = 0
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

Caso $j=3$:

$$\begin{aligned}
 B_{30} &= B_{10} \otimes I_n \otimes I_n + I_n \otimes B_{10} \otimes I_n + I_n \otimes I_n \otimes B_{10} = 60 \\
 B_{31} &= B_{11} \otimes I_n \otimes I_n + I_n \otimes B_{11} \otimes I_n + I_n \otimes I_n \otimes B_{11} = 0 \\
 B_{32} &= B_{12} \otimes I_n \otimes I_n + I_n \otimes B_{12} \otimes I_n + I_n \otimes I_n \otimes B_{12} = 0
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

Caso $j=4$:

$$\begin{aligned}
 B_{40} &= B_{10} \otimes I_n \otimes I_n \otimes I_n + I_n \otimes B_{10} \otimes I_n \otimes I_n + I_n \otimes I_n \otimes B_{10} \otimes I_n + I_n \otimes I_n \otimes I_n \otimes B_{10} = 80 \\
 B_{41} &= B_{11} \otimes I_n \otimes I_n \otimes I_n + I_n \otimes B_{11} \otimes I_n \otimes I_n + I_n \otimes I_n \otimes B_{11} \otimes I_n + I_n \otimes I_n \otimes I_n \otimes B_{11} = 0
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

Caso $j=5$:

$$\begin{aligned}
 B_{50} &= B_{10} \otimes I_n \otimes I_n \otimes I_n \otimes I_n + I_n \otimes B_{10} \otimes I_n \otimes I_n \otimes I_n + I_n \otimes I_n \otimes B_{10} \otimes I_n \otimes I_n \\
 &\quad + I_n \otimes I_n \otimes I_n \otimes B_{10} \otimes I_n + I_n \otimes I_n \otimes I_n \otimes I_n \otimes B_{10} = 100
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

Por lo tanto, el sistema bilineal, equivalente a (6.6), queda de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ x^{(3)} \\ x^{(4)} \\ x^{(5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 0 & -20 & 0 & 0 \\ 0 & -40 & 0 & -40 & 0 \\ 0 & 0 & -60 & 0 & -60 \\ 0 & 0 & 0 & -80 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ x^{(3)} \\ x^{(4)} \\ x^{(5)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 40 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ x^{(3)} \\ x^{(4)} \\ x^{(5)} \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \tag{6.19}$$

Aplicando el esquema propuesto por Carleman a (6.8), se definen:

$$y^{(1)} := u \quad y^{(2)} := u^2 \quad \dots \quad y^{(M)} := u^M \tag{6.20}$$

Por lo que las condiciones iniciales resultan en:

$$y_1(0) = u(0) = C, \quad y_M(0) = C^M \tag{6.21}$$

En el ejemplo que se presenta aquí, se tienen $\phi(0) = 0.6$ y $M=5$ entonces:

$$x^{(1)}(0) = 0.6, \quad x^{(2)} = (0.6)^2, \quad x^{(3)} = (0.6)^3, \quad x^{(4)} = (0.6)^4, \quad x^{(5)} = (0.6)^5. \tag{6.22}$$

6.3 Solución en el Tiempo

Para los resultados numéricos que se mostrarán en esta sección, se toma $M = 14$ en lugar de $M = 5$, el cual se utilizó con objetivos meramente ilustrativos en la sección anterior. Se resuelve el sistema (6.19) con las condiciones iniciales dadas por (6.22) (considerando hasta $x^{(14)}$) utilizando el método de Runge-Kutta (RK45), y se considera como entrada una señal periódica de la forma:

$$u(t) = \cos(\omega_0 t) + 0.3 \cos(3\omega_0 t) + 0.05 \cos(5\omega_0 t), \quad (6.23)$$

Como primer validación, también se resolvió la ecuación diferencial del sistema no lineal (6.8) y se comparó con la variable $x^{(1)}$ del sistema bilineal (6.19). Esto se muestra en la Fig. 16, donde se ha utilizado un paso de integración de 0.0039s para ambos sistemas. En la Fig. 17 se muestra el error absoluto de ambas señales.

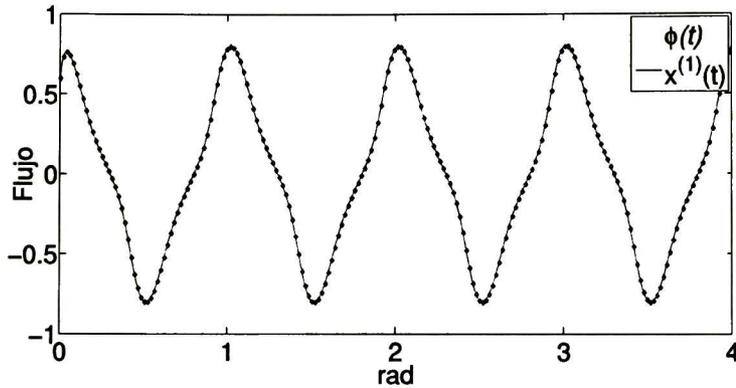


Figura 16. Comparación ecuación diferencial y sistema bilineal

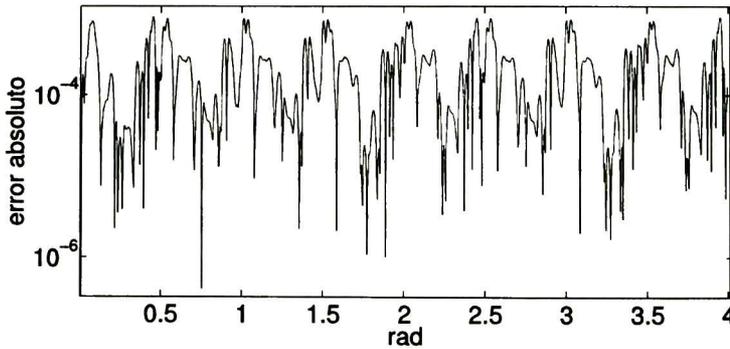


Figura 17. Error absoluto

Adicionalmente, en las Figs. 18-19 se muestran las soluciones para la tercera y la quinta variables de estado del sistema (6.19).

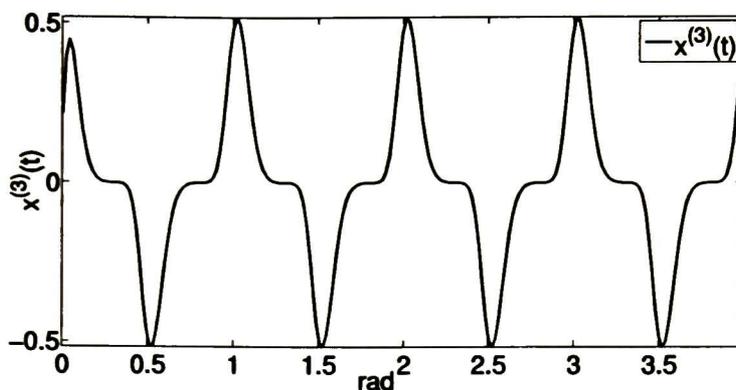


Figura 18. Tercera variable de estado, $x^{(3)}$.

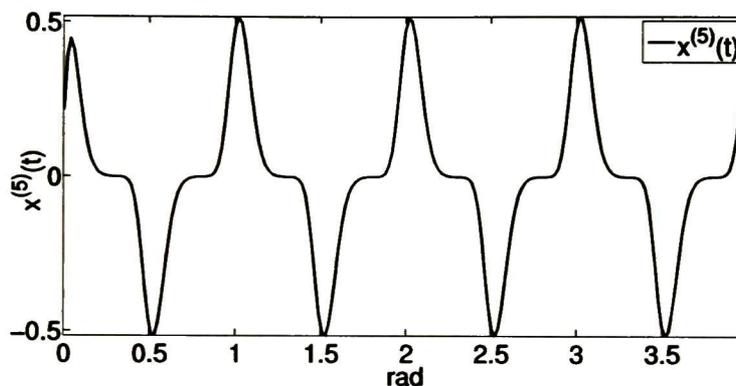


Figura 19. Quinta variable de estado, $x^{(5)}$.

6.4 Transformación del Dominio del Tiempo al MDHD del Sistema Bilineal

Con referencia a la teoría presentada en el capítulo IV, el sistema bilineal (6.19), expresado en el dominio del tiempo, se transforma al MDHD, por lo que resulta en:

$$\begin{aligned} \dot{X} + DX &= AX + B_T X + CU, \\ Y &= X, \end{aligned} \tag{6.24}$$

donde la matriz D es de la forma (4.13), B_T representa el producto de B por U a través de una matriz con estructura Toeplitz con el contenido frecuencial del producto $Bu(t)$. En forma compacta, (6.24) puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \hat{A}X + CU, \\ Y &= X, \end{aligned} \tag{6.25}$$

donde:

$$\hat{A} = A + B_T - D$$

Cabe mencionar que la asociación de $(A+BU)$, indicada en (6.25), es válida debido a que la entrada U se ha considerado como periódica. Enseguida se muestra la comparación del sistema (6.25) en el MHD con su contraparte (6.19). El análisis se realizó con $N=64$ muestras por lo que el vector de estados X en (6.25) resulta de dimensiones 896×1 . Lo anterior, debido a que se tienen $M = 14$ variables de estado en (6.25) con 64 frecuencias (incluyendo positivas y negativas) cada una de ellas.

Cada variable de estado $X^{(M)}$ de (6.25) es evaluada con la transformación (4.7), obteniendo su respuesta en el dominio del tiempo. Así entonces, en las Figs. 20, 22 y 24 se muestran la primera, la tercera y la quinta variable de estados, respectivamente; en las Figs. 21, 23 y 25 se muestran el error absoluto correspondiente. Cabe mencionar que la simulación de (6.25) en el MDHD permitió la validación de la transformación de un sistema no lineal a uno bilineal.

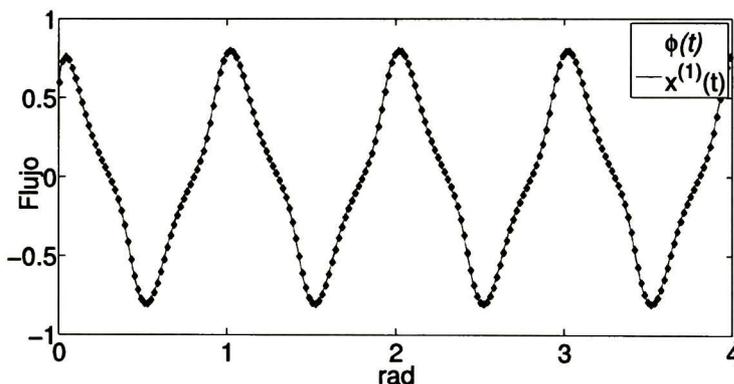


Figura 20. Primera variable de estado, $x^{(1)}$.

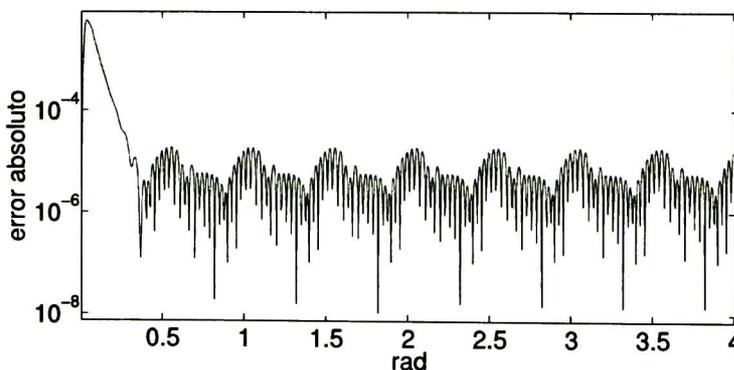


Figura 21. Error absoluto primera ecuación

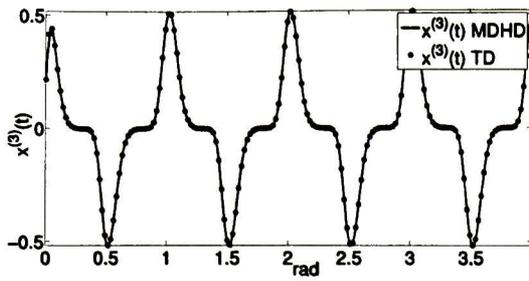


Figura 22. Tercera variable de estado, $x^{(3)}$.

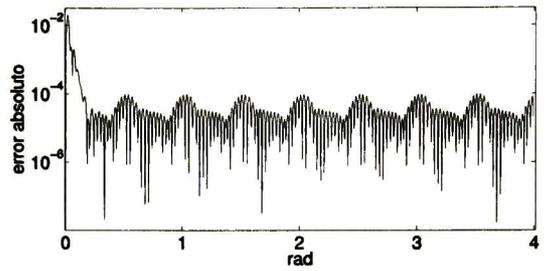


Figura 23. Error absoluto tercera ecuación

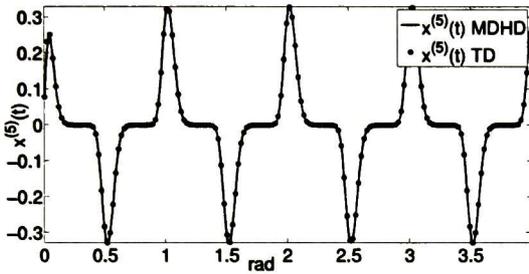


Figura 24. Quinta variable de estado, $x^{(5)}$.

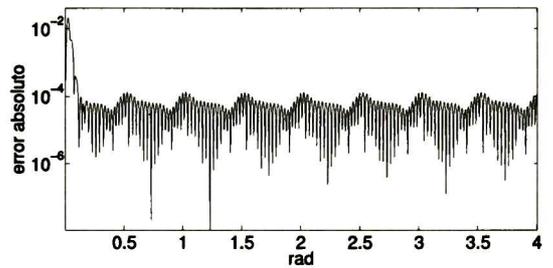


Figura 25. Error absoluto quinta ecuación

El objetivo de transformar un sistema no lineal en uno bilineal es que, para éste último, se puede calcular su función de transferencia en el dominio de la frecuencia. Dicha función se utiliza para definir el número de frecuencias necesario N_r , que es menor al número de frecuencias original.

Es importante mencionar que, en general, el sistema no lineal original (6.8) se expande en dimensiones para transformarse en un sistema bilineal (6.19). Adicionalmente, éste último vuelve a aumentar en dimensiones para obtener su representación en el MDHD (6.25). Sin embargo N_r se puede calcular a través de operaciones algebraicas sin necesidad de recurrir a matemáticas complejas, como se muestra en el capítulo siguiente.

CAPÍTULO VII

MÉTODO II: ANÁLISIS A TRAVÉS DE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA EN EL MDHD

7.1 Sistema Bilineal en el Dominio de la Frecuencia.

En este capítulo se propone el análisis de la función de transferencia dinámica en el dominio armónico (HDDTF, por sus siglas en inglés) [13] de la red eléctrica para definir el número máximo de frecuencias. Para obtener la HDDTF, el sistema bilineal (6.25) se convierte al dominio de la frecuencia, resultando en:

$$sX = \hat{A}X + CU, \quad (7.1)$$

$$Y = X, \quad (7.2)$$

donde $s=j\omega$. Sustituyendo (7.1) en (7.2) se obtiene:

$$Y = (sI - \hat{A})^{-1}CU, \quad (7.3)$$

de donde se define la HDDTF del sistema bilineal como:

$$H(s) = (sI - \hat{A})^{-1}C, \quad (7.4)$$

Por lo tanto, (7.3) resulta en:

$$Y = H(s)U. \quad (7.5)$$

Con propósitos ilustrativos, en esta sección se utiliza el circuito de la Fig. 15 del capítulo VI y los coeficientes obtenidos en la sección 6.2, para calcular la HDDTF y obtener el número de frecuencias N_r . Se utilizan las frecuencias dadas por la DFT: $\omega=0, \Delta\omega, 2\Delta\omega, \dots, \omega_{\max}$, donde $\Delta\omega=1$ pu y $\omega_{\max}=32$ pu. Con esta variación de la frecuencia se evalúa (7.5) para encontrar los armónicos/interarmónicos que más influyen en la respuesta del circuito. Nótese que dicha evaluación consiste en los primeros $N/2+1$ productos de los $N/2+1$ renglones superiores de H por el vector de entrada U . Lo anterior, debido a que la parte inferior de Y corresponde al conjugado de la parte superior, tal como lo dicta la DFT.

La Fig. 26 muestra en el eje x las frecuencias mencionadas anteriormente; el eje y presenta el contenido armónico/interarmónico (denominado alternativamente como contenido frecuencial) de las 14 variables de estados, donde solamente se utilizaron las primeras 33 frecuencias positivas; y el eje z muestra la magnitud de la salida Y para una entrada U dada en el dominio del tiempo por (6.23).

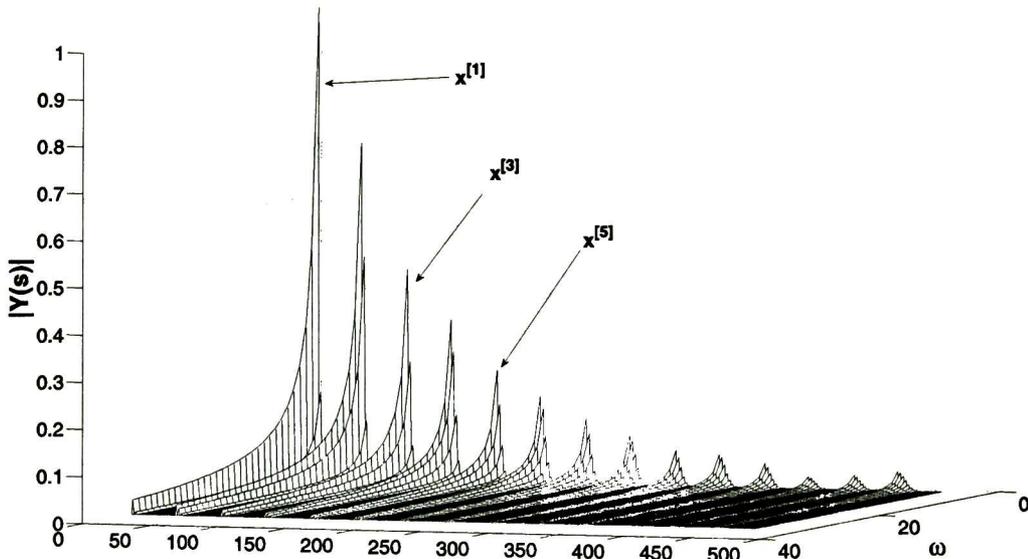


Figura 26. Visualización de resultados obtenidos

El siguiente paso consiste en utilizar como base los resultados de la Fig. 26 para definir un límite en la magnitud de la salida Y , lo cual indicará el número máximo de frecuencias N_r . Dicho límite corresponde a un plano, como se ilustra en las Figs. 27 y 28 con valores de 10^{-1} y 10^{-2} , respectivamente. De las Figs. 27 y 28, se puede observar que, conforme el límite disminuye, el número de frecuencias a considerar se incrementa.

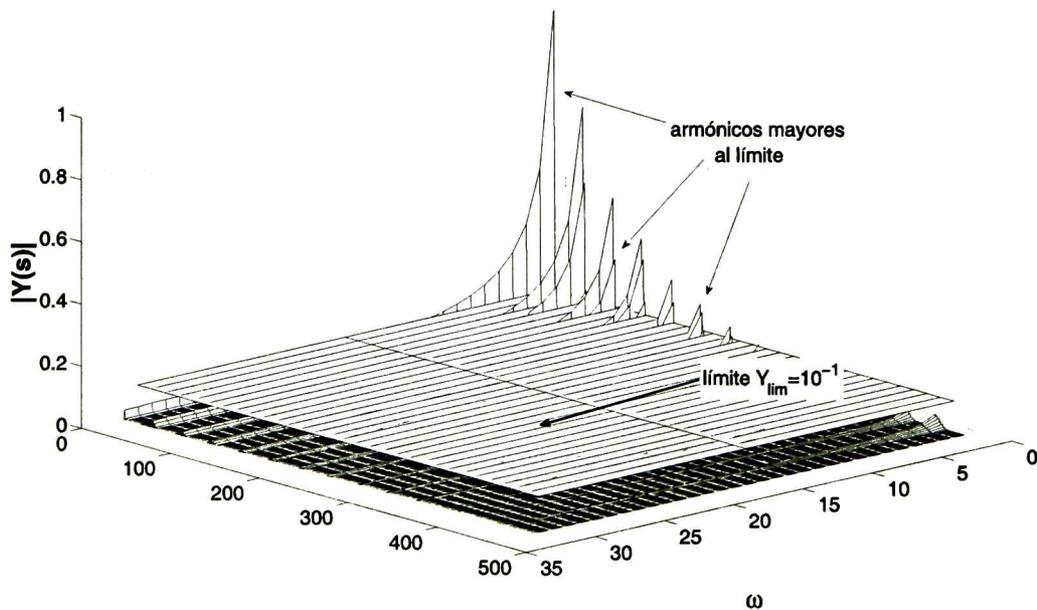


Figura 27. Selección de armónicos mayores a 10^{-1}

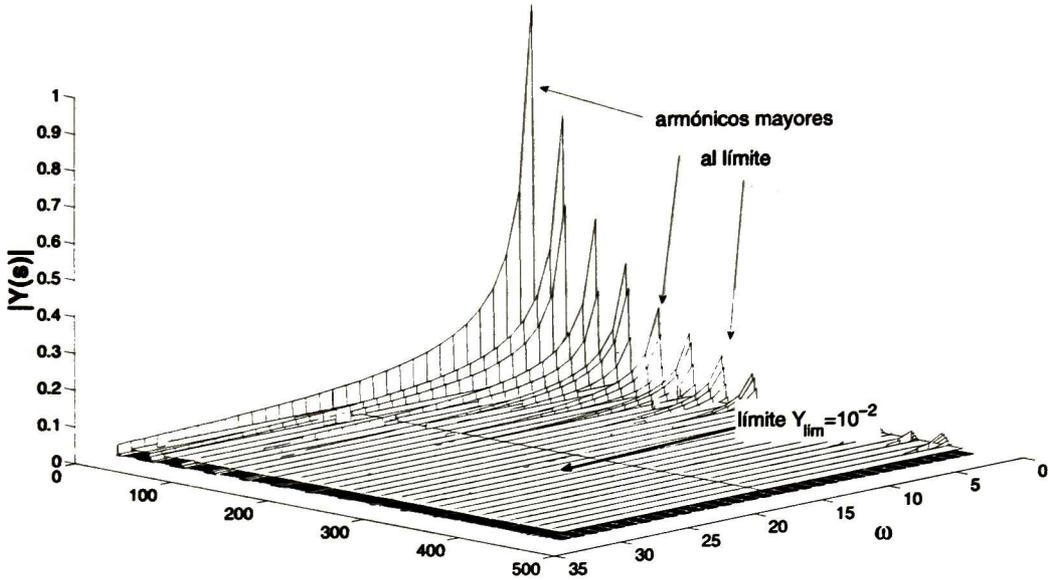


Figura 28. Elección de armónicos mayores a 10^{-2}

La Tabla 4 presenta cuatro casos donde la magnitud máxima de Y , plano- Y_{lim} , se ha definido desde 10^{-1} hasta 10^{-4} . Los números dentro de la tabla indican la armónica/interarmónica máxima sobre el plano. Por ejemplo, si se establece $Y_{lim} = 10^{-3}$, los primeros estados necesitan entre 8 y 9 frecuencias y los últimos de 13 a 14. Por lo tanto, se elige como $N_r = 14 \times 2 = 28$ (considerando frecuencias positivas y negativas). Se denota al número máximo en cada columna de la Tabla 4 como h_{max} (indicada con letra tipo negrilla).

Tabla 7. Armónicos mayores a diferentes criterios.

Y_{lim}	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
$ Y^{(1)} $	3	3	9	11
$ Y^{(2)} $	4	4	8	12
$ Y^{(3)} $	3	5	9	13
$ Y^{(4)} $	4	6	8	12
$ Y^{(5)} $	3	7	9	13
$ Y^{(6)} $	4	8	10	14
$ Y^{(7)} $	3	7	11	13
$ Y^{(8)} $	0	8	12	14
$ Y^{(9)} $	0	7	11	13
$ Y^{(10)} $	0	8	12	14
$ Y^{(11)} $	0	7	13	15
$ Y^{(12)} $	0	6	12	14
$ Y^{(13)} $	0	7	13	15
$ Y^{(14)} $	0	8	14	18

Con base a los resultados obtenidos en la tabla 7, se simula el sistema (6.25), con $N = 256$ muestras para cada variable de estado, definido como el sistema completo, y $N_r = 8, 16, 32,$ y 64 muestras para cada variable de estado, definido como el sistema reducido. En la Tabla 8 se muestra el error rms obtenido con

dicha variación de N_r . Adicionalmente, la tabla 9 presenta el tiempo de computo (CPU time) que se emplea al variar N_r .

Tabla 8. Resultados variando N_r ,

Plano- Y_{lim}	h_{max}	N_r	ϵ_{rms}
10^{-1}	4	8	0.0380
10^{-2}	8	16	0.00240
10^{-3}	14	32	0.000127
10^{-4}	16	64	10^{-16}

Tabla 9. Tiempo de simulación (en segundos) variando N_r ,

N_r	8	16	32	64	256
CPU	1.306508	2.7772	18.176987	74.439246	319.44

De la Tabla 8 se observa que el error obtenido siempre es menor al límite Y_{lim} predefinido. Por ejemplo, utilizando $Y_{lim} = 10^{-2}$, y tomando 8 muestras, el error resultó alrededor de 2×10^{-3} . Además, de la Tabla 9 se nota un factor de 17.54 al utilizar 32 muestras en lugar de 256.

De esta forma, el análisis numérico de la HDDTF arroja el número de frecuencias N_r , a través de operaciones algebraicas solamente.

CAPÍTULO VIII

CONCLUSIONES

En esta tesis se propone el análisis de redes eléctricas no lineales en el dominio de la frecuencia para definir la frecuencia máxima necesaria en el modelo de la red, sin afectar sustancialmente la dinámica del sistema original. Este análisis se efectúa modelando la red en el dominio armónico modificado, el cual permite la inclusión simultánea de armónicas e interarmónicas.

Primeramente, se propuso un método heurístico basado en un barrido en frecuencia de cargas no lineales, las cuales se consideran como principales convertidores de frecuencias. Dicho barrido arroja una visualización del número de frecuencias con mayor contribución, utilizando operaciones algebraicas sencillas.

Como segundo método, se propuso la transformación del modelo de red no lineal a uno bilineal utilizando la técnica propuesta por Carleman. El sistema bilineal se transforma al dominio armónico dinámico modificado y posteriormente al dominio de la frecuencia. Lo anterior permite obtener la función de transferencia dinámica en el dominio armónico dinámico (HDDTF). Finalmente, la HDDTF permite, mediante operaciones algebraicas simples, definir las armónicas/interarmónicas con mayor contribución en la salida del sistema.

Las dos técnicas propuestas arrojan la frecuencia máxima, a través de operaciones sencillas, antes de simular la red. Dicha frecuencia define un tamaño reducido de la red útil para el cálculo de estado estable o de estado dinámico. Se demostró que, reduciendo el espectro en frecuencia del modelo de red, se disminuye el número de ecuaciones, el tiempo de cómputo, y el espacio en la memoria. A través de simulaciones, se verificó que el modelo reducido conserva las propiedades del modelo original.

CAPÍTULO IX

CONTRIBUCIONES DE ESTA TESIS

- La propuesta de dos técnicas, una de tipo heurística, para el cálculo de la frecuencia máxima, necesaria para el modelado de redes no lineales en el MDHD. La aplicación de dichas técnicas al dominio armónico tradicional es directa, considerándose ésta como un caso específico.
- En la técnica basada en bilinealización, se demostró que el análisis de la función de transferencia del sistema bilineal arroja un criterio para el error obtenido en la simulación, estando siempre dentro del límite dado por dicho análisis.

CAPÍTULO X

TRABAJOS FUTUROS

En base a los resultados de la presente investigación, se proponen como trabajos futuros:

- Aplicación del análisis a través de la función de transferencia en el MDHD a redes monofásicas y trifásicas de mayor tamaño, mediante el uso de equivalentes.

El cálculo de frecuencias necesarias en redes eléctricas que involucren fuentes distribuidas de generación, tales como generadores eólicos y celdas fotovoltaicas. Lo anterior, debido a que dichos dispositivos generan una importante cantidad de armónicas ya que funcionan en base a dispositivos electrónicos

BIBLIOGRAFIA

- [1] Francisco De la Rosa, *Harmonics and Power Systems*. Taylor & Francis Group, 2006.
- [2] J. Arrillaga, and N. R. Watson, *Power System Harmonics*, 2nd Edition, Chichester, West Sussex, England; Hoboken, NJ: J. Wiley & Sons, 2003.
- [3] A. Ramirez, "The modified harmonic domain: Interharmonics," *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 26, no. 1, pp. 235-241, January 2011.
- [4] E. Acha and M Madrigal, *Power System Harmonics: Computer Modelling and Analysis*. Hoboken, NJ: Wiley, 2001.
- [5] J. Jesus Rico, M. Madrigal, and E. Acha, "Dynamic harmonic evolution using the extended harmonic domain", *IEEE Trans. Power Delivery*, vol. 18, no. 2, pp. 587-594, Apr. 2003.
- [6] J. G. Proakis and D. G. Manolakis, *Digital signal processing, principles, algorithms and applications*, Prentice-Hall, 3rd Edition, 1996.
- [7] A. Ramirez, "Frequency-domain computation of steady and dynamic states including nonlinear elements", *IEEE Transactions Power Delivery*, vol. 24, no. 3, pp. 1609-1615, July 2009.
- [8] A. Semlyen and A. Medina, "Computation of the periodic steady state in systems with nonlinear components using a hybrid time and frequency domain methodology", *IEEE Trans. on Power Systems*, vol. 10, no. 3, pp. 1498-1504, Aug. 1995.
- [9] F. Zhang, Z. Gend, W. Yuan, "The Algorithm of Interpolating Windowed FFT for Harmonic Analysis of Electric Power System", *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 16 no. 2, pp. 160-164, April 2001.
- [10] A. Deri, G. Tevan, A. Semlyen, and A. Castanheira, "The complex ground return plane: A simplified model for homogeneous and multi-layer earth return", *IEEE Trans. Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-100, no. 8, pp. 3686-3693, August 1981.
- [11] Kowalski, Krzysztof, and W.-H Steeb. *Nonlinear Dynamical Systems and Carleman Linearization*. Singapore: World Scientific, 1991.
- [12] W. Rugh, *Nonlinear System Theory: The Volterra/Wiener Approach*. Baltimore, MD: The Johns Hopkins University Press, 1981.
- [13] A. Semlyen, T. Noda, R. Iravani, "Harmonic domain dynamic transfer function of a nonlinear time-periodic network". *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol.18, no.4, pp.1433-1441, 2003.
- [14] G.N. Bathurst, N.R. Watson, and J. Arrillaga, "Adaptive frequency-selection method for a Newton solution of harmonics and interharmonics", *IEE Proc. Gener. Transm. and Distrib.*, no. 147, vol. 2, pp. 126-130, 2000.
- [15] S.R. Sanders, J.M. Noworolski, X.Z. Liu, and G.C. Verghese, "Generalized averaging method for power conversion circuits", *IEEE Trans. on Power Electronics*, vol. 6, no. 2, pp. 251-259, April 1991.
- [16] A. Yousefi, B. Lohmann, "Balancing & Optimization for Order Reduction of Nonlinear Systems". *Proc. of the 2004 American Control Conference*. Boston, Massachusetts June 30 - July 2, 2004.
- [17] A. Varga, "Balanced truncation model reduction of periodic systems", *39th IEEE Conference on Decision and Control*, Sydney, Australia, pp. 288, 2000.
- [18] Scherpen, J. M. A. "Balancing for nonlinear systems", *Systems & Control Letters*, 21, pp. 143-153, 1993.

- [19] Virginia C. Klema et al., "The Singular Value Decomposition: Its Computation and Some Applications", vol. AC-25, no. 2, *IEEE Transactions Automatic Control*, p. 164-176, 1980.
- [20] Moore, Bruce C. "Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability, and model reduction". *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-26, pp. 17-32, Feb. 1981.
- [21] Abo-Hammour, Zaer S. Alsmadi, Othman MK. Al-Smadi, Adnan M. "Frequency-Based Model Order Reduction Via Genetic Algorithm Approach", *7th International Workshop on Systems, Signal Processing and their Applications*, Tipaza, Algeria, pp. 91-94, 2011.
- [22] Liyan Qu, Chapman, P.L. Extraction of Dynamic Low-Order Nonlinear Inductor Models Based on Steady State Solutions, *37th IEEE Power electronics Specialists Conference PESC' 06*, pp. 1-9, 2006.
- [23] D. Ning and J. Roychowdhury. "General-Purpose Nonlinear Model-Order Reduction Using Piecewise-Polynomial Representations", *IEEE Transactions on computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, vol. 27, no. 2, pp. 249-264, Feb. 2008.

PUBLICACIONES

D. Avila and A. Ramirez, "Computation of Periodic Steady State with Reduced Frequency Order", *Proc. PES General Meeting*, USA, 2012.



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL I.P.N.
UNIDAD GUADALAJARA**

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional aprobó la tesis

Análisis de Técnicas para el Cálculo de Frecuencia Máxima en
Modelos de Redes Eléctricas no Lineales

del (la) C.

Darío ÁVILA TÉLLEZ GIRÓN

el día 30 de Julio de 2012.



Dr. Juan Manuel Ramírez Arredondo
Investigador CINVESTAV 3C
CINVESTAV Unidad Guadalajara



Dr. Amner Israel Ramírez Vázquez
Investigador CINVESTAV 3C
CINVESTAV Unidad Guadalajara



Dr. J. Jesús Rico Melgoza
Profesor Investigador Titular C
Universidad Michoacana de San
Nicolás de Hidalgo, División de
Estudios de Posgrado, Departamento
de Ingeniería Eléctrica



CINVESTAV - IPN
Biblioteca Central



SSIT0011148