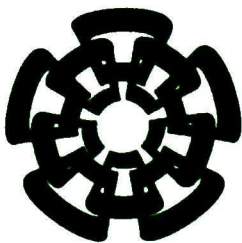


CT-802-551

DeN : 7014



Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional
Unidad Guadalajara

Control robusto por modos deslizantes de segundo orden para el motor jaula de ardilla monofásico

Tesis que presenta:

Guillermo Javier Rubio Astorga

para obtener el grado de:

Doctor en Ciencias

en la especialidad de:

Ingeniería Eléctrica

Directores de Tesis

**CINVESTAV
IPN
ADQUISICION
LIBROS**

Dr. José Manuel Cañedo Castañeda
Dr. Alexander Georgievich Loukianov

CLASIF..	0100706
ADQUIS..	CT-807-SS1
FECHA:	28-10-2014
PROCED..	PCN. 2014
\$	

Control robusto por modos deslizantes de segundo orden para el motor jaula de ardilla monofásico

**Tesis de Doctorado en Ciencias
Ingeniería Eléctrica**

Por:

Guillermo Javier Rubio Astorga
Maestro en Ciencias en Ingeniería Eléctrica
CINVESTAV 1999-2001

Becario de Conacyt, expediente no. 34459

Directores de Tesis
Dr. José Manuel Cañedo Castañeda
Dr. Alexander Georgievich Loukianov

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Diciembre de 2013.

Agradecimientos

A Dios, por todo lo que me ha dado. A mis padres Guillermo Rubio Osuna y María de la Luz Astorga Mora por su apoyo, preocupación y cariño. A mi esposa Brenda Berenice Pereda Gastelum e hijos Axel y Polet, haber emprendido este gran proyecto en nuestras vidas que hoy se plasma en este documento, por su amor y comprensión en todo este tiempo. A toda la familia que siempre estuvo pendiente en todos los aspectos. Al CINVESTAV unidad Guadalajara y CONACYT por todo el apoyo recibido durante mi estancia doctoral. Ala Dirección General de Educación Superior Tecnológica y al Instituto Tecnológico de Culiacán por el permiso y apoyo otorgado para la realización de este postgrado. A mis asesores de tesis, al Dr. José Manuel Cañedo Castañeda y Dr. Alexander G. Loukianov por su guía y apoyo brindado durante todo el proceso de preparación doctoral, pero sobre todo por su amistad GRACIAS. A los sinodales: Dr. Juan Manuel Ramírez Arredondo, Dr. Jorge Rivera Domínguez, Dra. Susana Ortega Cisneros, Dr. José Javier Ruiz León y Dr. Federico Sandoval Ibarra por sus valiosas observaciones e indicaciones que contribuyeron de manera importante al contenido de esta Tesis. A mis amigos colombianos, Juan Diego por su apoyo y trabajo en equipo, Diana Paola que me adopto como su hermano, Xiomara y Fredy por su apoyo, amistad y compañía. A mis amigos Nestor Daniel Galan y David Castro que juntos aprendimos a convivir como familia. A mis compañeros de generación, Evaristo, Enrique, Roberto Rosas, Blanca, Erik etc. por si olvido mencionar algunos o muchos, disculpas. También aquellos que no fueron de mi generación pero estuvieron en algún momento apoyando Victor, Checo, Rodo, Ivan, Pedro, Fredy, Rigo, Trinidad, sonoita etc. A mis amigos en Sinaloa que me estuvieron apoyando de diferentes formas: Modesto Medina M., Leobardo Cortez Benitez y Norberto Hernandez Beltran. Al personal académico y de servicios del CINVESTAV Guadalajara. A todos GRACIAS.

Dedicado:
A mi esposa e hijos.

Resumen

En esta tesis se desarrolla el modelado del motor jaula de ardilla monofásico en el marco de referencia estacionario $\alpha\beta$. Se propone un diseño de controladores no lineales por modos deslizantes de segundo orden para resolver el problema de control de velocidad (lazo principal) y un control discontinuo por modos deslizantes para controlar el módulo de flujo (lazo auxiliar), para el mejor desempeño del motor. El controlador rechaza las perturbaciones por variaciones de parámetros y de carga del motor. Para la realización del control auxiliar, se propone un interruptor en paralelo con el capacitor con una lógica de interrupción. Se proponen diversos diseños de observadores para estimar los flujos de rotor y par de carga. En este trabajo se demuestra la estabilidad de los controladores y observadores propuestos. Los resultados de simulación verifican la robustez de los controladores y observadores propuestos.

Abstract

This thesis develops the modeling of single-phase squirrel cage motor in the stationary reference frame *alpha beta*. We propose a nonlinear controller design for second order sliding mode to solve the problem of speed control (main loop) and a discontinuous control sliding mode to control the flux module (auxiliary loop), for the best motor performance. The controller rejects disturbances and parameter variations of engine load. For carrying out the auxiliary control circuit is proposed in parallel with the capacitor with interrupt logic. Various designs are proposed for estimating observer fluxes rotor and load torque. In this paper we demonstrate the stability of the proposed controllers and observers. The simulation results verify the robustness of the proposed controllers and observers.

Contenido

Lista de figuras	xiii
Lista de Tablas	xvii
1 Introducción	1
1.1 El motor jaula de ardilla monofásico	1
1.1.1 Motor jaula de ardilla monofásico	2
1.2 Control no lineal por modos deslizantes	3
1.3 Trabajos previos	4
1.4 Objetivos del trabajo	7
1.5 Estructura del trabajo	7
2 Modelo del motor jaula de ardilla monofásico	9
2.1 Introducción	9
2.2 Motor bifásico	14
2.3 Modelo del motor jaula de ardilla monofásico	18
2.3.1 Dinámica eléctrica	18
2.3.2 Dinámica mecánica	27
2.3.3 Modelo en estado estable	31
2.3.4 Componentes simétricas	34
2.3.5 Par Electromagnético	39
2.3.6 Modelo del MJAM con incertidumbre	43

2.4	Resumen del capítulo de modelado del MJAM	44
3	Teoría de control y observador no lineal	45
3.1	Introducción	45
3.2	Diseño de variedades deslizantes	48
3.2.1	Método del control equivalente	48
3.2.2	Control a bloques para sistemas con perturbaciones	49
3.2.3	Modo deslizante integral (control discontinuo) [67]	58
3.2.4	Algoritmo de control super-twisting	60
3.2.5	Algoritmos cuasi-continuos [40]	61
3.2.6	Variedades deslizantes que incluyen algoritmos cuasi-continuos [21]	65
3.3	Diseño de observadores para una clase de sistemas no lineales [58]	70
3.3.1	Introducción	70
3.3.2	Representación de la planta y observador de orden reducido	70
3.4	Resumen del capítulo de teoría de control y observadores	75
4	Sistema nominal sin incertidumbre	77
4.1	Introducción	77
4.2	Diseño del control basado en el observador por MD	78
4.2.1	Diseño de las superficies de velocidad y flujo (Lazo Maestro)	78
4.2.2	Diseño del control de corrientes del estator (Lazo esclavo)	80
4.3	Observador de orden reducido No-Lineal	83
4.4	Resultados	86
4.5	Conclusiones	89
5	Sistema con incertidumbre en resistencia de rotor	91
5.1	Introducción	91
5.2	Observador por MD ST invariante a cambios paramétricos	92
5.2.1	Observador por MD para flujos de rotor	92

CONTENIDO

xi

5.2.2	Observador MD para el par de carga	96
5.3	Diseño del control basado en el observador	97
5.3.1	Superficies de control de velocidad y flujo (Lazo Principal)	97
5.3.2	Control de corrientes del estator (Lazo esclavo)	99
5.4	Resultados de simulación	102
5.5	Conclusiones .	107
6	Sistema con incertidumbre en resistencia de rotor sin estimación del par	109
6.1	Introducción	109
6.2	Modelo Matemático del <i>MJAM</i>	110
6.3	Observador de MD de segundo orden ST para flujos de rotor	110
6.4	Diseño del controlador por modos deslizantes	111
6.4.1	Diseño de la superficie de deslizamiento	111
6.4.2	Control de modos deslizantes	113
6.5	Análisis de estabilidad del controlador basado en el observador	114
6.5.1	Estabilidad de fase a alcanzar en tiempo finito	115
6.5.2	Estabilidad de la ecuación de Modos Deslizantes	117
6.6	Resultados de Simulación	118
6.7	Conclusiones .	121
7	Sistema con incertidumbre en resistencia de rotor e inductancia y sin estimación del par	123
7.1	Introducción	123
7.2	Modelo Matemático del <i>MJAM</i>	124
7.3	Observador de modos deslizantes de segundo orden para flujos de rotor	124
7.4	Diseño del controlador por modos deslizantes	125
7.4.1	Diseño de la superficie de deslizamiento	126
7.4.2	Inducción de modos deslizantes	128
7.5	Análisis de estabilidad del controlador basado en el observador	128

7.6	Resultados de Simulación	130
7.7	Conclusiones .	134
8	Conclusiones y trabajos futuros	135
8.1	Conclusiones	135
8.2	Trabajos futuros	136
	Bibliografía	139
A		145
A.1	Artículos publicados	145
B		147
B.1	Derivadas parciales para par electromagnético promedio y pulsante.	147
C		153
C.1	Prueba de proposición 4	153
D		155
D.1	Prueba de proposición 5	155

Lista de figuras

2.1	Rotor jaula de ardilla.	9
2.2	Motor Inducción Monofásico.	9
2.3	Campo del motor trifásico	10
2.4	Representación del campo pulsante del MJAM.	10
2.5	Característica par-velocidad del motor jaula de ardilla monofásico.	11
2.6	Motor monofásico tipo fase partida.	12
2.7	Curva de par-velocidad	12
2.8	Motor con capacitor de arranque.	13
2.9	Curva de par-velocidad	13
2.10	Motor con capacitor permanente.	13
2.11	Curva de par-velocidad	13
2.12	Motor con doble capacitor.	14
2.13	Curva de par-velocidad	14
2.14	Diagrama conceptual del motor bifásico de dos polos.	15
2.15	Representación esquemática del motor de inducción.	18
2.16	Transformación de variables.	23
2.17	Equivalente del MJAM con capacitor en el devanado auxiliar.	26
2.18	Motor jaula de ardilla monofásico.	31
2.19	Circuito equivalente en estado estable.	38
2.20	Característica par promedio-velocidad-Xc.	42
2.21	Característica par pulsante-velocidad-Xc.	43

4.1	Velocidad del rotor $\omega_r(wr)$ y referencia $\omega_{ref}(wref)$.	87
4.2	Módulo de flujo del rotor ϕ .	87
4.3	Par de carga T_L y par de carga estimado \hat{T}_L .	88
4.4	Par electromagnético T_e .	88
4.5	Corrientes de estator en el marco de referencia $\alpha \beta$.	88
4.6	Flujos del rotor y estimaciones en el marco de referencia $\alpha \beta$.	88
4.7	Voltajes de estator en el marco de referencia $\alpha \beta$.	89
5.1	Esquema del observador.	92
5.2	Velocidad del rotor $\omega_r(wr)$ y referencia $\omega_{ref}(wref)$.	102
5.3	Módulo de flujo del rotor ϕ .	102
5.4	Par de carga T_L y par de carga estimado \hat{T}_L .	103
5.5	Par electromagnético T_e .	103
5.6	Corrientes de estator en el marco de referencia $\alpha \beta$.	103
5.7	Flujos del rotor y estimaciones en el marco de referencia $\alpha \beta$.	103
5.8	Voltajes de estator en el marco de referencia $\alpha \beta$.	104
5.9	Velocidad del rotor $\omega_r(wr)$ y referencia $\omega_{ref}(wref)$.	104
5.10	Módulo de flujo del rotor ϕ .	104
5.11	Par de carga T_L y par de carga estimado \hat{T}_L .	105
5.12	Par electromagnético T_e .	105
5.13	Corrientes de estator en el marco de referencia $\alpha \beta$.	105
5.14	Flujos del rotor y estimaciones en el marco de referencia $\alpha \beta$.	105
5.15	Voltajes de estator en el marco de referencia $\alpha \beta$.	106
6.1	Velocidad del rotor ω_r y módulo de flujo ϕ .	119
6.2	Error de flujos de rotor en el marco de referencia $\alpha \beta$.	119
6.3	Par Electromagnético T_e .	120
6.4	Corrientes de estator en el marco de referencia $\alpha \beta$.	120
6.5	Voltajes de control de estator en el marco de referencia $\alpha \beta$.	121

7.1	Velocidad del rotor ω_r y cuadrado del módulo del flujo del rotor ϕ .	132
7.2	Error de flujos de rotor en el marco de referencia $\alpha \beta$.	132
7.3	Par electromagnético T_e .	133
7.4	Corrientes de estator en el marco de referencia $\alpha \beta$.	133
7.5	Voltajes de estator en el marco de referencia $\alpha \beta$.	134

Lista de Tablas

2.1	Resultados de los MJAM.	30
6.1	Parámetros del MJAM	118
7.1	Parámetros del MJAM	131

Terminología / Notación

Acrónimos / Abreviaturas

- **DSP** Procesador Digital de Señales
- **HOSM** Modos Deslizantes de Orden Superior
- **MD** Modos Deslizantes
- **MIM** Motor de Inducción Monofásico
- **MJAM** Motor Jaula de Ardilla Monofásico
- **NBC-form** Forma No Lineal Controlable a Bloques
- **PWM** Modulador de Ancho de Pulso
- **QC** Cuasi-Continuo
- **ST** Super-Twisting
- **VSS** Sistemas de Estructura Variable

Simbología

Símbolos

a y b	Devanados a y b del estator
f_{mm}	Fuerza magneto motriz
ω	Velocidad
N_s	Número efectivo de vueltas
ϕ_s	Ángulo de desplazamiento
ω_e	Velocidad asociada a la frecuencia de la fuente eléctrica
f_{mmt}	Fuerza magnetomotriz resultante
f_{mma} y f_{mmb}	Fuerzas magneto motrices de las fases ab
ω_s	Velocidad estado estable
I_a e I_b	Corrientes de las fases ab
I	Valor RMS de la corriente
V	Voltaje de la fuente
V_a y V_b	Voltajes en los devanado ab
ϕ_r	Posición angular del rotor
R_m	Reluctancia de magnetización
N_A y N_B	Número de vueltas de los devanados principal y auxiliar
N_r	Número de vueltas en el devanado del rotor.
v_A, v_{as} y v_B, v_{bs}	Voltajes de los devanados ab del estator
v_a, v_{ar} y v_b, v_{br}	Voltajes de los devanados ab del rotor
i_A y i_B	Corrientes de los devanados ab del estator
i_a y i_b	Corrientes de los devanados ab del rotor
r_A, r_{as} y r_B, r_{bs}	Resistencias de los devanados de estator ab
r_a, r_{ar} y r_b, r_{br}	Resistencias de los devanados de rotor ab
λ_A y λ_B	Enlaces de flujo de los devanados de estator ab
λ_a y λ_b	Enlaces de flujo de los devanados de rotor ab
L_A , y L_B	Inductancias de los devanados de estator ab
L_a y L_b	Inductancias de los devanados de rotor ab
L_{lA} , $L_{l\alpha s}$ y L_{lB} , $L_{l\beta s}$	Inductancias de dispersión de los devanados de estator ab

L_{mA} y L_{mB}	Inductancias de magnetización de los devanados de estator ab
L_{lr} , L_{lrr}	Inductancia de dispersión de los devanados del rotor.
L_{mr} , L_m	Inductancia de magnetización de los devanados del rotor.
M_{srA} y M_{srB}	Inductancia mutua entre los devanados ab de estator y rotor.
$M_{Aa} = M_{aA}$	Inductancias mutuas entre estator y rotor del devanado a
$M_{Bb} = M_{bB}$	Inductancias mutuas entre estator y rotor del devanado b
$M_{Ab} = M_{bA}$ y $M_{Ba} = M_{aB}$	Inductancias mutuas entre estator y rotor de los devanados ab
v_{AB} , v_{abs}	Vector de voltajes de estator ab
v_{ab} , v_{abr}	Vector de voltajes de rotor ab
i_{AB} , i_{abs}	Vector de corrientes de estator
i_{ab} i_{abr}	Vector de corrientes de rotor
L_s	Matriz de inductancias de estator
L_r	Matriz de inductancias de rotor
M_{sr}	Matriz de inductancias mutuas
L_{ss}	Matriz de inductancias referida al estator
M_{srS}	Matriz de inductancias mutuas referidas al estator
Λ_{abs}	Vector de flujos de estator
Λ_{abr}	Vector de flujos de rotor
R_{ss}	Matriz de resistencia de estator
R_{rr}	Matriz de resistencia de rotor
$\alpha\beta$	Marco de referencia estacionario
K_{2s}	Transformación al marco de referencia estacionario
$v_{\alpha s}$ y $v_{\beta s}$	Voltajes de estator en el marco de referencia estacionario
$v_{\alpha r}$ y $v_{\beta r}$	Voltajes de rotor en el marco de referencia estacionario
$r_{\alpha s}$ y $r_{\beta s}$	Resistencias de estator en el marco de referencia estacionario
r_r	Resistencia de rotor
$\lambda_{\alpha s}$ y $\lambda_{\beta s}$	Flujo de rotor en el marco de referencia estacionario
$\lambda_{\alpha r}$ y $\lambda_{\beta r}$	Flujos de rotor en el marco de referencia estacionario
ω_r	Velocidad del rotor
η	Relación de vueltas entre el devanado principal y auxiliar
$V_{\alpha\beta s}$ y $V_{\alpha\beta r}$	Vectores de voltajes de estator y rotor en el marco $\alpha\beta$
$I_{\alpha\beta s}$ y $I_{\alpha\beta r}$	Vectores de corrientes de estator y rotor en el marco $\alpha\beta$
$\Lambda_{\alpha\beta s}$ y $\Lambda_{\alpha\beta r}$	Vector de flujos de estator y rotor en el marco $\alpha\beta$
R_s	Matriz de resistencia de estator en el sistema estacionario
R_r	Matriz de resistencia de rotor en el sistema estacionario
L_{ssn}	Matriz de inductancias propias en el sistema estacionario
M_{sr}	Matriz de inductancias mutuas en el sistema estacionario
v_c	Voltaje del capacitor
X_c	Reactancia del capacitor
T_e	Par electromagnético

P, P_n	Número de pares de polos
W_c	Energía cinética
W_m	Energía mecánica
T_L	Par de carga
J	Momento de inercia
D	Fricción viscosa
T_{nom}	Par de carga nominal
THD_v	Distorsión armónica total de voltaje
THD_i	Distorsión armónica total de corriente
t_{ss}	Tiempo de estabilización

Capítulo 1

Introducción

1.1 El motor jaula de ardilla monofásico

El motor de inducción se inventó en 1882 por Nikola Tesla. Inicialmente este motor se utilizó únicamente en aplicaciones donde la exactitud de velocidad no era el interés principal, por ejemplo, en abanicos y bombas por mencionar algunos.

El control de velocidad se dio a mediados de los 70's y durante estos últimos años, la mayoría de las investigaciones fueron en motores de inducción trifásicos de alta potencia, centrando la atención en el alto desempeño del motor. El MJAM no fue de interés. Una de las razones fue el costo adicional del sistema de control comparado con el costo total del motor.

En algunas de las aplicaciones del motor jaula de ardilla monofásico usualmente operaba a velocidad fija, con dos o tres velocidades y, estas se proporcionaban por medio de un cambiador de devanados por intervención manual. En estos casos, la eficiencia y el factor de potencia del motor son bajos. Una de las ventajas es la construcción del motor, que es simple y económica, es también confiable y robusto en la operación.

Hoy en día los grandes avances en las aplicaciones domésticas y comerciales proyectan la necesidad del uso del motor jaula de ardilla monofásico. Donde el MJAM es uno de los motores de corriente alterna de baja potencia más ampliamente utilizados en compresores herméticos, lavavajillas, lavadoras, secadoras de ropa, ventiladores, bombas, aire acondicionado y otros equipos, que arrancan con carga, y en aplicaciones comerciales donde una fuente de alimentación trifásica no está disponible [7].

Tomando en cuenta los recientes avances de la microelectrónica y la electrónica de potencia, aunado a la reducción de costos de estas tecnologías, se presentan grandes oportunidades para la utilización del motor jaula de ardilla monofásico. Estas oportunidades se derivan de la investigación de controladores de velocidad en estos motores, así como la

optimización del desempeño del mismo.

Es significativo el hecho de que los motores eléctricos suministran, en su mayor parte, la energía que involucra los procesos industriales, por lo que la conservación y adecuada operación de los motores en la industria representa uno de los campos más fértiles de oportunidades en el ahorro de energía que se traduce en una reducción en los costos de producción y en una mayor competitividad.

El aumento del costo de la energía eléctrica ha traído a discusión el compromiso entre el costo inicial y los costos de operación del motor. Esto hace que la eficiencia y la densidad de energía sean de nuevo objetivos de diseño. Sin embargo, si se considera el ahorro potencial de energía y la amplia aplicación de los controladores en los motores jaula de ardilla monofásicos, el control de velocidad variable es un tema de interés tanto económico como ambiental.

La operación del motor jaula de ardilla monofásico de velocidad variable con diferentes cargas contribuye a que los diseñadores de aplicaciones incorporen características nuevas en sus productos, también abre oportunidades para la penetración de los motores en aplicaciones industriales en las que se oferta una sola fase y a un menor costo con respecto a motores trifásicos.

1.1.1 Motor jaula de ardilla monofásico

Los motores jaula de ardilla monofásicos sufren de una severa limitación. Como únicamente tienen una fase en el devanado del estator, el campo magnético no gira con respecto del rotor y no se produce un par de arranque. Al no existir velocidad relativa entre los devanados del rotor y estator, no hay inducción de voltaje de tipo rotacional y el par es cero para velocidad de rotor cero.

Para proporcionar un impulso inicial a los motores jaula de ardilla monofásicos es común utilizar un devanado auxiliar en el estator para arrancar el dispositivo, lo que se conoce como "fase partida", que consiste de un devanado auxiliar de menor número de vueltas en el estator. La corriente que circula por este devanado está desfasada y se puede lograr un campo rotatorio. Sin embargo, el devanado asimétrico causa operación desbalanceada en la máquina.

Como el motor se alimenta con una fuente monofásica, es común también que el desfasamiento se logre al añadir al devanado auxiliar un capacitor y así producir el par de arranque del MJAM.

1.2 Control no lineal por modos deslizantes

El control robusto de sistemas es de gran interés para los investigadores. Cualquier sistema que se desee controlar tendrá perturbaciones. Sin embargo existen problemas prácticos que no han sido abordados con el éxito deseado en su conjunto. En primer lugar, los sistemas tienen dinámicas muy complejas, es decir, no lineales y discontinuas, como cuando se involucra la fricción, y muchas veces las trayectorias a seguir por el sistema se expresan en términos de velocidades y aceleraciones, por lo que la dinámica del error es no lineal, no suave y variante en el tiempo. En segundo lugar, el sistema se ve afectado por perturbaciones desconocidas, lo que provoca errores en la medición de los estados del sistema. Es por eso que se necesita de controles robustos que sean insensibles ante las perturbaciones y sean aplicables a los sistemas más complejos.

Una técnica relativamente simple, especialmente tratando con plantas no lineales, es el uso de control con modos deslizantes [65], [67]. Los modos deslizantes aparecieron por primera vez dentro del control de estructura variable. Se hicieron muy populares en desarrollos teóricos y en la práctica gracias a su propiedad de reducción del orden del sistema y a su baja sensibilidad a perturbaciones. Estas características los hacen ideales para controlar plantas complejas y de alto orden bajo perturbaciones, algo muy común en la industria.

Estas razones conducen a utilizar modos deslizantes para el desarrollo de este trabajo. Las ventajas de esta técnica son bien conocidas. Primero, este método permite la descomposición del problema de diseño en dos etapas independientes: Selección de la variedad de modos deslizantes con el movimiento deseado, y el diseño del control discontinuo que fuerce los modos deslizantes a lo largo de esta variedad. Segundo, con un diseño adecuado del controlador discontinuo, el efecto de las no linealidades, incertidumbres en los parámetros y las perturbaciones en el subespacio de control pueden ser suprimidas, e invariancia total puede obtenerse cuando el movimiento del sistema se encuentre sobre la variedad de modos deslizantes. Muchos sistemas físicos contienen incertidumbres dentro y fuera del subespacio de control (matched y unmatched). En ausencia de las condiciones matching, leyes de control discontinuas garantizan movimiento acotado alrededor de la dinámica nominal de modos deslizantes, y cuando el sistema alcanza la variedad de modos deslizantes las perturbaciones que no se encuentran en el subespacio de control pueden ser rechazadas al utilizar altas ganancias.

Recientes avances de la teoría de control por modos deslizantes ha dado origen a un nuevo tipo de controladores por modos deslizantes de alto orden [26], entre ellos el Super-Twisting. Este controlador fue diseñado para sistemas no lineales con grado relativo uno con respecto a la variable deslizante. Mediante esta ley de control se mejora la robustez del controlador, atenuando el efecto chattering y provee una señal de control continua adecuada para su implementación con un sistema PWM convencional.

Por otro lado la técnica de control a bloques [47] se ha utilizado para el control de sistemas lineales y para una clase de sistemas no-lineales que poseen la forma controlable a bloques, la cual consiste en una serie de bloques interconectados, de manera que la estructura del sistema permite diseñar paso a paso un control, tal que el sistema en lazo cerrado tenga las propiedades deseadas. Muchos de los modelos matemáticos de sistemas físicos tienen la forma controlable a bloques; este es el caso del modelo del motor jaula de ardilla monofásico.

1.3 Trabajos previos

Se han realizado trabajos importantes para mejorar el desempeño del motor jaula de ardilla monofásico. Aquí se presentan algunos de los trabajos que utilizan el control del capacitor como son:

- Law J. D. [35], propone un controlador de voltaje y una estrategia de control para mejorar la eficiencia en los motores jaula de ardilla monofásicos. En particular, muestra una configuración de tiristores controlados por voltaje para una conmutación dinámica en la configuración de los devanados del motor. Ya que dentro del arreglo de tiristores, propone el poder conectar los devanados en serie o paralelo según sea la carga aplicada al motor. Esto resulta en una mejora sustancial en la forma de onda de corriente. El documento compara el rendimiento del controlador propuesto con un control de factor de potencia convencional y con operación del motor a plena tensión sin un controlador.
- Lettenmaier T. A. [36], propone un capacitor con conmutación electrónica para un motor jaula de ardilla monofásico. Este muestra un arreglo en puente H de transistores para alimentar el capacitor. Mediante un control adecuado de la conmutación de los transistores, resulta una capacitancia variable en serie con el devanado auxiliar. El sistema se utiliza para reemplazar la configuración de condensador motor monofásico estándar para proporcionar un mejor rendimiento del MJAM.
- Muljadi E. [55], propone un capacitor de marcha de CA con un interruptor electrónico en paralelo que provee un equivalente a un capacitor de arranque para resolver la problemática de dos capacitores diferentes y mejorar el desempeño del motor. La operación del interruptor de estado sólido durante cada ciclo se realiza regulando el ángulo de disparo para proporcionar la capacitancia equivalente.
- Liu T. H. [42, 44], propone un método para mejorar las características de eficiencia y el par de un MJAM. Mediante la tecnología de electrónica de potencia se elimina el capacitor de arranque y el interruptor centrífugo, y sólo se utiliza un capacitor de marcha. Utilizando un DSP, ajusta la conmutación del capacitor de CA y mejorar la eficiencia y el par del MJAM.

- Liu T. H. [43], propone un condensador regulable de corriente alterna utilizando un conmutador electrónico en paralelo con un condensador mediante un sistema basado en DSP. El condensador está en cortocircuito por un conmutador electrónico ajustando adecuadamente el ciclo de trabajo del interruptor de estado sólido para variar el valor efectivo del condensador de corriente alterna. Esto con la finalidad de obtener un par máximo de partida mediante el ajuste del condensador.

Básicamente, estos controladores se diseñan con una técnica de control lineal que garantiza la estabilidad local en una vecindad del punto de operación. Se han propuesto controles de desacoplamiento vectorial y mediante la transformación del modelo al marco de referencia estacionario se propone eliminar las asimetrías. Además, otros ofrecen control por orientación de flujos para el motor jaula de ardilla monofásico. En estos trabajos se resalta la importancia de eliminar el par pulsante y el control de par, como se presenta en:

- Maurício B. [53], propone un control vectorial del MJAM. Se implementa un convertidor estático de potencia mediante un rectificador monofásico en cascada con un inversor de cuatro interruptores. El control vectorial se basa en el concepto de orientación del campo que ha sido adaptado para este tipo de máquina. El uso de la orientación del campo para controlar una máquina de una sola fase desbalanceada requiere una atención especial debido a que el modelo matemático para este tipo de máquina es similar a la de una máquina de dos fases asimétrica. Sin embargo, el énfasis se da para el caso en el que los devanados principal y auxiliar tienen diferentes impedancias. La configuración propuesta proporciona un flujo de potencia bidireccional y el control del factor de potencia. Muestra resultados donde es necesario suministrar a los devanados principal y auxiliar de la máquina corrientes desbalanceadas para eliminar la componente de alterna del par electromagnético. Por otra parte, este control desbalanceado es necesario para realizar un modelo del rotor con flujo desbalanceado que permite el control vectorial en el MJAM.
- Reicy, S. [57, 70], propone un modelo simétrico de MJAM sin acoplamiento adicional y términos variantes en el tiempo. Diseña un sistema de control de vectorial indirecto basado en el par máximo por amper para el MJAM. Los devanados asimétricos en un MJAM causan funcionamiento desequilibrado. El problema se puede resolver haciendo referencia sólo a los términos simétricos a un marco de referencia giratorio. La influencia de los términos asimétricos se considera en el marco de referencia estacionario.

Esta transformación, así como el control de la orientación del flujo depende de los parámetros de la planta que, en la práctica, están sometidos a variaciones como resultado de un cambio en la carga del sistema y/o de la configuración del sistema.

Se han propuesto muchos otros controladores para el motor jaula de ardilla monofásico, aquí se mencionan algunos de los trabajos donde se presentan controles de velocidad, como

son:

- Collins E.R. [13], propone un control de velocidad ajustable que actúa sobre el devanado auxiliar del MJAM. El control se obtiene por el ajuste del par electromagnético mediante el control de magnitud de la tensión del bobinado auxiliar y ángulo de fase, mientras que el devanado principal del motor está directamente conectado a la fuente. Se propone una metodología de control para la magnitud de tensión y ángulo de fase del devanado auxiliar para el control de par del motor. El acoplamiento de la variable de control del ángulo de fase con la magnitud de tensión auxiliar ajustable proporciona un medio de reducir el par pulsante.
- Rocha R. [60], propone una estrategia del control de velocidad ajustable para motores asíncronos monofásicos. Donde garantiza el nivel de magnetización, que mejora el desempeño de la máquina. El par motor se controla mediante el ajuste de las corrientes de ambos devanados del estator, con el objetivo de mejorar la eficiencia de la máquina mediante controladores PI.
- Caruso M. [10], propone un control sensorless para la velocidad del MJAM en base a la técnica de orientación del flujo directo de rotor. Además diseña un observador que se basa en dos sistemas de control de lazo cerrado lineales independientes que estiman el flujo del rotor y la velocidad, mediante las mediciones de corrientes y voltajes del estator. Estas estimaciones se utilizan en los sistemas en lazo cerrado de control de velocidad y la regulación de flujo con el fin de determinar los voltajes que se deben aplicar en los devanados principal y auxiliar.

En estas propuestas no se considera el desarrollo de análisis de estabilidad.

En general estas propuestas muestran trabajos importantes sobre el interés del control en el motor monofásico, sin embargo, falta trabajo por realizar para esta máquina. Por ejemplo, el desarrollo de controladores no lineales y observadores. Un trabajo previo que trata el control de velocidad mediante técnicas de control no lineal y observadores es:

- Reyes J. M. [58] propone dos controladores, utilizando la técnica de modos deslizantes, para controlar la velocidad de motores eléctricos jaula de ardilla monofásicos. Los controladores proporcionan un par de arranque apropiado y también minimizan el par pulsante. Se desarrolla el estimador de estados para las variables no medibles, enlaces de flujo del rotor y par de carga. Demuestra la estabilidad de los controladores propuestos.

Este trabajo no considera el modelo del MJAM con incertidumbres internas y externas.

Este último trabajo se considera de importancia, porque sienta la base del desarrollo de esta tesis. La propuesta de este trabajo es el diseño de controladores no lineales robustos por modos deslizantes de alto orden, el desarrollo de observadores no lineales para el modelo del motor jaula de ardilla monofásico con incertidumbre paramétrica y perturbaciones externas.

1.4 Objetivos del trabajo

- El Modelo del motor jaula de ardilla monofásico en el marco de referencia estacionario $\alpha\beta$.
- Diseño de algoritmos de control no lineal de alto orden por MD, para controlar la velocidad de los motores jaula de ardilla monofásicos. Se utiliza la técnica de control a bloques y el control equivalente. El diseño un algoritmo de control para la lógica de interrupción del capacitor para regular el modulo del flujo de rotor.
- Diseño de observadores no lineales para proveer la estimación de las variables no medibles.

En el diseño de los controladores en un primer desarrollo se asume que no hay variación paramétrica y posteriormente se incluye incertidumbre paramétrica.

Al cumplir con los objetivos que se señalan, se espera un buen funcionamiento de los algoritmos de control al tener un buen seguimiento de trayectorias y un desempeño adecuado del MJAM.

1.5 Estructura del trabajo

En el capítulo 2 se describe y desarrolla, el modelo MJAM en el dominio de espacio de estados. En este desarrollo se plantean los conceptos básicos utilizados, las hipótesis consideradas, las suposiciones introducidas, etc., con el fin de mostrar el modelo del motor jaula de ardilla monofásico, como la planta del proceso de control.

En el capítulo 3 se explica la teoría sobre los conceptos fundamentales del control por modos deslizantes. La teoría de diseño de superficies deslizantes mediante el control equivalente y la técnica de control a bloques, la teoría del diseño del control no lineal de alto orden por modos deslizantes y se presenta el diseño del observador de orden reducido.

En el capítulo 4 se presentan la aplicación de las técnicas que se describen en el capítulo 3 al motor jaula de ardilla monofásico, descrito en el capítulo 2. Se aplica un esquema de control no lineal robusto por modos deslizantes al modelo del motor, el diseño del observador no lineal de orden reducido para estimar las variables no medibles: los enlaces de flujo del rotor y el par de carga. Se presenta un análisis de estabilidad del sistema.

En el capítulo 5 se considera la incertidumbre en resistencia del rotor en el MJAM, y se propone un controlador no lineal robusto por modos deslizantes para el control de velocidad, el diseño de un observador de orden reducido MD ST para las variables no medibles como el

par de carga y los flujos del rotor. Se presenta un análisis de estabilidad del sistema completo en lazo cerrado.

En el capítulo 6 se introduce un control ST con QC para el rechazo de la perturbación del par de carga e incertidumbre de la resistencia del rotor y un observador para flujos de rotor.

En el capítulo 7 se propone un control integral de alto orden con cuasi-continuo para el rechazo de la perturbación del par de carga e incertidumbre en la resistencia de rotor e inductancias y se diseña un observador robusto para flujos de rotor.

Finalmente en el capítulo 8 se presentan las conclusiones y los trabajos futuros.

Capítulo 2

Modelo del motor jaula de ardilla monofásico

2.1 Introducción

Un motor de inducción, como todos los motores, consiste de un rotor y un estator separados por un entrehierro. El rotor puede ser devanado o formado por un anillo de barras cortocircuitadas en un arreglo específico denominado jaula de ardilla, este se muestra en la Fig. 2.1.

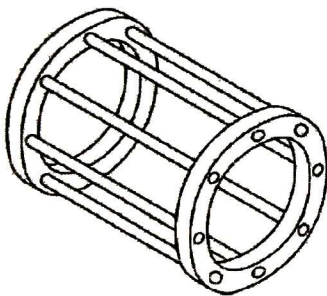


Figura 2.1: Rotor jaula de ardilla.

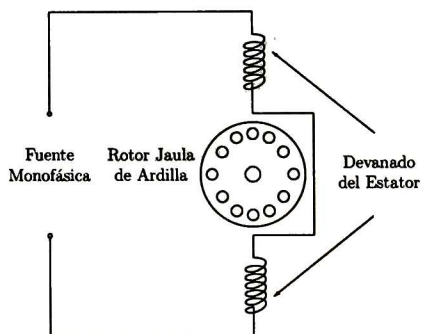


Figura 2.2: Motor Inducción Monofásico.

El devanado de estator está distribuido uniformemente en las ranuras del estator laminado para producir un flujo sinusoidal, el devanado está constituido por un conjunto de bobinas conectadas en serie con dos terminales conectadas a la fuente de alimentación, como se muestra en la 2.2.

Principio de operación

Los motores polifásicos balanceados generan un flujo resultante en el estator que es equivalente a un campo giratorio de magnitud constante. Este campo giratorio hace que el motor inicie su giro hasta conseguir el estado estable. Así, en el motor trifásico se produce un campo magnético rotatorio y el motor arranca por si solo como se muestra en la 2.3.

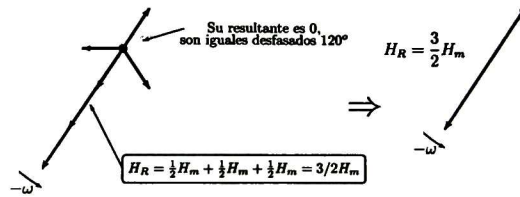


Figura 2.3: Campo del motor trifásico

En el motor monofásico se aplica una fuente monofásica al devanado de estator, la corriente que fluye en este devanado produce una f_{mm} estacionaria en el eje del devanado y que cambia su magnitud con el tiempo, que se denomina pulsante. Las corrientes en el rotor son inducidas de acuerdo a la ley de inducción de Faraday y la dirección de las corrientes es tal que la f_{mm} del rotor se opone a la f_{mm} del estator. Cuando el motor está en reposo, $\omega = 0$, la f_{mm} inducida en el rotor tiene la misma dirección que la del estator y el par electromagnético es cero y como resultado el rotor permanece estacionario.

El campo pulsante del estator se puede descomponer en dos ondas de magnitud constante que giran con direcciones opuestas como se muestra en la Fig. 2.4. Cada componente tiene una amplitud igual a la mitad del valor de la amplitud del campo pulsante original.

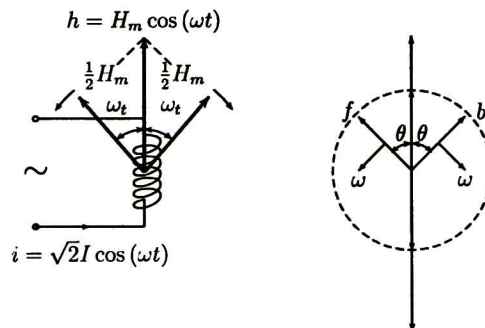


Figura 2.4: Representación del campo pulsante del MJAM.

El campo (con velocidad del rotor cero) en adelante y atraso produce pares de igual magnitud pero en direcciones opuestas y el par neto es cero y el motor permanece estacionario. Si al rotor se le hace girar (velocidad diferente de cero), la suma de las dos componentes de par es diferente de cero y el motor podrá alcanzar la velocidad en estado estable. La relación par-velocidad resultante, que es la suma de las dos componentes, se muestra en la Fig. 2.5.

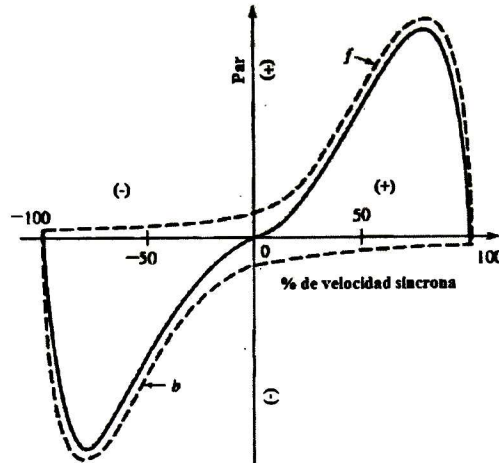


Figura 2.5: Característica par-velocidad del motor jaula de ardilla monofásico.

El campo rotatorio en atraso tendrá una velocidad relativa respecto del rotor aproximadamente igual al doble, induciendo corrientes en el rotor de una frecuencia casi el doble de la síncrona. Esta corriente produce una componente de par electromagnético pulsatoria con valor promedio cero. Esta componente de par no contribuye al giro del motor y como resultado, provoca que el motor vibre y sea ruidoso.

Se han utilizado diferentes configuraciones para el arranque y operación de los motores jaula de ardilla monofásicos en aplicaciones industriales y comerciales y son los siguientes:

1. Motor de fase partida
2. Motor con capacitor de arranque
3. Motor de fase partida con capacitor permanente
4. Motor con doble capacitor (arranque y marcha)

Los diferentes tipos de motores monofásicos presentan características específicas para satisfacer necesidades distintas. Como son par de arranque, factor de potencia, eficiencia. Todos funcionan bajo los mismos principios y leyes.

Motor de fase partida:

El motor de fase partida tiene dos bobinas en el estator, un devanado principal (devanado de marcha) y un devanado auxiliar (devanado de arranque). Los ejes de estas bobinas se encuentran desplazadas 90 grados eléctricos. En la Fig.2.6 se muestra un diagrama esquemático del motor de fase partida.

La corriente de los devanados son desbalanceadas y el efecto es un campo rotativo de estator. El devanado auxiliar se desconecta, generalmente por medio de un interruptor centrífugo que opera en alrededor del 75% de la velocidad síncrona. Una curva característica par-velocidad de este motor se muestra en la Fig.2.7.

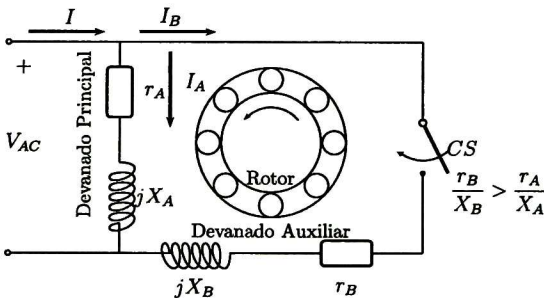


Figura 2.6: Motor monofásico tipo fase partida.

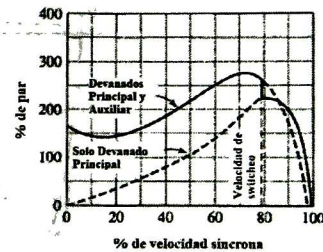


Figura 2.7: Curva de par-velocidad

El motor de fase partida tiene par de arranque moderado, bajo factor de potencia alrededor del 60% y una eficiencia del 70%. Las aplicaciones típicas incluyen ventiladores, sopladores, bombas centrífugas y equipo de oficina. La potencia típica es de entre 50 y 500 watts (1/16-1/4 HP), y son los motores de menor costo.

Motor con capacitor de arranque:

Un motor jaula de ardilla monofásico con capacitor de arranque, es un motor con un devanado principal que se conecta directamente con la fuente de alimentación y un devanado auxiliar en serie con un capacitor. Este cuenta con un interruptor para desconectar el devanado auxiliar de la fuente de energía después de su arranque cuando el motor alcanza el 70% de la velocidad nominal. Un diagrama esquemático del motor con capacitor de arranque se muestra en la Fig. 2.8.

Una curva característica par-velocidad se muestra en la Fig. 2.9. Es importante determinar apropiadamente las características del capacitor de arranque a fin de asegurar la operación deseada.

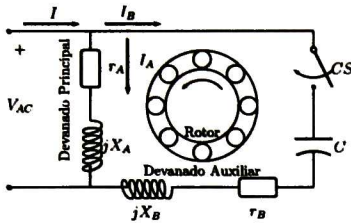


Figura 2.8: Motor con capacitor de arranque.

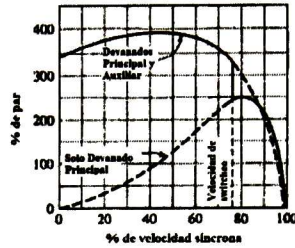


Figura 2.9: Curva de par-velocidad

Estos motores se utilizan para compresores, bombas, sistemas de refrigeración y aire acondicionado, y otros con cargas de arranque grande, este motor cuenta con una eficiencia aproximada del 70% y un F.P. del 60%.

Motor con capacitor permanente:

El Motor Jaula de Ardilla Monofásico (MJAM) de capacitor permanente, es un motor con devanado auxiliar y capacitor de valor constante. La aplicación de este tipo de motores es en abanicos, sopladores, bombas que no requieren gran par de arranque. Estos motores no son apropiados para su aplicación en bandas transportadoras y son generalmente limitados en rangos de potencias bajas.

El diagrama esquemático del motor con capacitor permanente se muestra en la Fig. 2.10. Hay que notar la ausencia del interruptor. El capacitor de marcha (de valor relativamente bajo) esta en serie con el devanado auxiliar. El par de arranque de esta configuración es pequeño (20-30% del par nominal) con respecto del motor con capacitor de arranque. El desempeño en estado estable, eficiencia (75%) y factor de potencia (98%) es superior al de los motores de fase partida y de capacitor de arranque. Una curva característica par-velocidad para este motor se muestra en la Fig. 2.11.

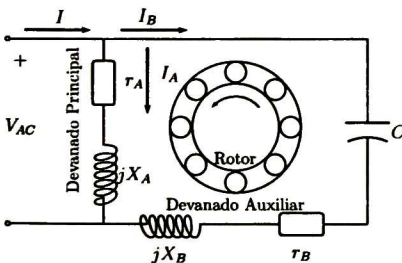


Figura 2.10: Motor con capacitor permanente.

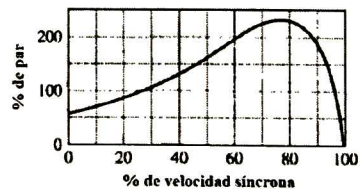


Figura 2.11: Curva de par-velocidad

Una versión especial del motor con capacitor permanente es utilizada en abanicos de velocidades múltiples.

Motor con doble capacitor:

El MJAM con doble capacitor, tiene dos valores de capacitancia, uno para el arranque y otro para el estado estable. El cambio del valor de capacitancia (de un valor grande a uno pequeño) de la condición de arranque a estado estable, se hace mediante la desconexión del capacitor de arranque por el interruptor centrífugo.

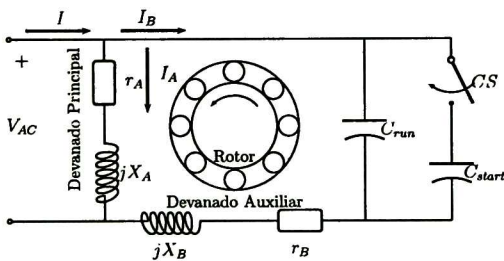


Figura 2.12: Motor con doble capacitor.

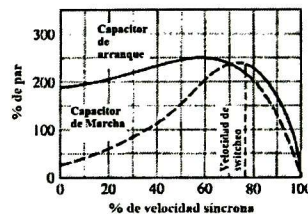


Figura 2.13: Curva de par-velocidad

El capacitor de marcha mejora el desempeño del motor en estado estable. El diagrama esquemático para el motor con doble capacitor se muestra en la Fig. 2.12.

Las ventajas del capacitor de marcha en el circuito del devanado auxiliar son: El incremento del par de arranque del 50 %, mejora en la eficiencia a plena carga al rededor del 5 %, aumento en el factor de potencia a plena carga entre el 15-35 %, reducción en la corriente de marcha a plena carga y disminución en el ruido en estado estable.

Una curva característica par-velocidad para este motor se muestra en la Fig. 2.13.

En una sección adelante se muestran los resultados dinámicos y de operación de lazo abierto de los diferentes motores monofásicos.

2.2 Motor bifásico

El modelo de la máquina monofásica puede ser considerado como una máquina bifásica desbalanceada. A continuación se describe el modelado de una máquina bifásica, primeramente balanceada y posteriormente desbalanceada.

Un motor bifásico balanceado tiene una distribución senoidal de los devanados a y b desplazados 90 grados eléctricos, alojados en las ranuras del estator. Los ejes magnéticos de

los devanados a y b coinciden con los ejes horizontal y vertical respectivamente, Fig. 2.14.

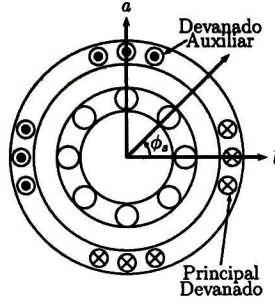


Figura 2.14: Diagrama conceptual del motor bifásico de dos polos.

Se genera un flujo resultante (a consecuencia de las fmm de las bobinas a y b), de magnitud constante que gira a velocidad igual a la alternancia de la fuente de alimentación.

Cada devanado tiene un número efectivo de vueltas N_s , distribuidos senoidalmente. La f_{mm} debida a la corriente que circula por las bobinas a , en un punto en el entrehierro desplazado un ángulo ϕ_s respecto al eje de la bobina a es:

$$f_{mma} = \frac{N_s}{2} I_a \cos \phi_s \quad (2.2.1)$$

$$f_{mmb} = \frac{N_s}{2} I_b \text{sen} \phi_s = \frac{N_s}{2} I_b \cos \left(\frac{\pi}{2} - \phi_s \right) \quad (2.2.2)$$

donde I_a e I_b son las corrientes de alimentación de una fuente bifásica, si estas son balanceadas son expresadas como:

$$I_a = \sqrt{2} I \cos(\omega_e t + \alpha) \quad (2.2.3)$$

$$I_b = \sqrt{2} I \text{sen}(\omega_e t + \alpha) \quad (2.2.4)$$

donde I es el valor RMS de las corrientes y $\omega_e = 2\pi f_e$ es la frecuencia que se asocia con la fuente de voltaje.

La componente de la f_{mm} de la fase a se puede descomponer:

$$f_{mma} = \frac{N_s}{2} \sqrt{2} I \left[\frac{1}{2} \cos(\omega_e t + \phi_s) + \frac{1}{2} \cos(\omega_e t - \phi_s) \right] \quad \text{para } \alpha = 0. \quad (2.2.5)$$

para el devanado b se tiene

$$f_{mmb} = \frac{N_s}{2} \sqrt{2} I \left[\frac{1}{2} \cos(\omega_e t - \phi_s) - \frac{1}{2} \cos(\omega_e t + \phi_s) \right] \quad (2.2.6)$$

La f_{mm} total en el entrehierro es la suma de las dos f_{mm} 's giratorias (2.2.5) y (2.2.6)

$$f_{mmt} = f_{mma} + f_{mmb} = \frac{N_s}{2} \sqrt{2} I [\cos(\omega_e t - \phi_s)]. \quad (2.2.7)$$

La f_{mmt} resultante es equivalente a una f_{mm} de magnitud constante $\frac{N_s}{2} \sqrt{2} I$ que gira a una velocidad $\omega_e = \omega_s$ en sentido contrario de las manecillas del reloj (ccw). Si la corriente en la fase b es de signo contrario

$$i_b = -\sqrt{2} I \text{sen} \omega_e t. \quad (2.2.8)$$

La f_{mmt} resultante

$$f_{mmt} = \frac{N_s}{2} \sqrt{2} I [\cos(\omega_e t + \phi_s)]. \quad (2.2.9)$$

Que indica una f_{mm} resultante de magnitud constante que gira en dirección de las manecillas del reloj (cw).

Devanados simétricos excitados con una fuente de alimentación monofásica

En este caso $V = V_a = V_b$ y las corrientes que circulan por las fases a y b son

$$I_a = I_b = \sqrt{2} I \cos \omega_e t. \quad (2.2.10)$$

Entonces las f_{mma} y f_{mmb}

$$\begin{aligned} f_{mma} &= \frac{N_s}{2} I_a \cos \phi_s = \frac{N_s}{2} \sqrt{2} I \cos \omega_e t \cos \phi_s \\ f_{mmb} &= \frac{N_s}{2} I_a \text{sen} \phi_s = \frac{N_s}{2} \sqrt{2} I \cos \omega_e t \text{sen} \phi_s \end{aligned}$$

se puede descomponer

$$f_{mma} = \frac{N_s}{2} \sqrt{2} I \left[\frac{1}{2} \cos(\omega_e t + \phi_s) + \frac{1}{2} \cos(\omega_e t - \phi_s) \right] \quad (2.2.11)$$

$$f_{mmb} = \frac{N_s}{2} \sqrt{2} I \left[\frac{1}{2} \text{sen}(\omega_e t + \phi_s) - \frac{1}{2} \text{sen}(\omega_e t - \phi_s) \right] \quad (2.2.12)$$

la f_{mm} resultante es equivalente a una f_{mm} pulsante localizada a 45 grados entre las bobinas a y b .

Esta f_{mm} se puede descomponer como:

$$\begin{aligned} f_{mmt} &= f_{mma} + f_{mmb} = \\ &= \frac{N_a}{2} \sqrt{2} I \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\omega_e t + \phi_s - 45^\circ) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\omega_e t - \phi_s + 45^\circ) \right] \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

La f_{mmt} es igual a dos f_{mm} de magnitud igual que giran en direcciones opuestas. El primer término de la f_{mm} gira en dirección ccw y el segundo en la dirección cw. Para velocidad del rotor cero, la velocidad relativa entre la fmm resultante y el rotor es cero y no existe par impulsor en el rotor.

Devanados asimétricos excitados con la misma fuente de alimentación

Si el número de vueltas de la bobina a (N_a), es diferente de la bobina b (N_b) y si $V = V_a = V_b$ se tiene que $I_a \neq I_b$ y se expresan como:

$$I_a = \sqrt{2} I_a \cos(\omega_e t + \varphi_s), \quad I_b = \sqrt{2} I_b \cos(\omega_e t + \varphi_s). \quad (2.2.14)$$

La f_{mm} resultante es:

$$\begin{aligned} f_{mmt} &= f_{mma} + f_{mmb} \\ &= \frac{N_a}{2} \sqrt{2} \left\{ \frac{I_a}{2} [\cos(\omega_e t + \varphi_s) + \cos(\omega_e t - \varphi_s)] \right\} + \dots \\ &\frac{N_b}{2} \sqrt{2} \left\{ \frac{I_b}{2} [\cos(\omega_e t - \varphi_s) - \cos(\omega_e t + \varphi_s)] \right\}. \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

Si se simplifica se obtiene

$$f_{mmt} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\frac{N_a I_a - N_b I_b}{2} \cos(\omega_e t + \varphi_s) + \frac{N_a I_a + N_b I_b}{2} \cos(\omega_e t - \varphi_s) \right] \quad (2.2.16)$$

La f_{mmt} resultante (2.2.16) indica que se tienen dos componentes, la primera es de magnitud igual a la mitad de la diferencia entre los ampere-vuelta de los devanados a y b , y gira en dirección cw. La segunda de magnitud igual a la mitad de la suma de los ampere-vuelta de los dos devanados y gira en dirección ccw a la velocidad ω_e . Por consiguiente, la f_{mm} total es diferente de cero. Se tiene un par impulsor al rotor aun para velocidad del rotor cero (par de arranque diferente de cero). Este es el concepto básico de arranque de un motor monofásico.

2.3 Modelo del motor jaula de ardilla monofásico

La máquina es un transductor electromecánico que incluye una dinámica eléctrica, una dinámica mecánica y una interacción entre las dinámicas eléctrica y mecánica.

2.3.1 Dinámica eléctrica

El diagrama esquemático de un motor de inducción con dos devanados ortogonales en el estator que se muestra en la Fig. 2.15. Los devanados tienen diferente número de vueltas y se encuentran distribuidos senoidalmente desplazados 90° eléctricos. Los dos devanados equivalentes del rotor son simétricos.

Para el desarrollo del modelo se denotan a las variables y parámetros asociados a los devanados del estator con los subíndices en mayúsculas A para el devanado principal y B para el devanado auxiliar, y para las variables y parámetros asociados con los devanados del rotor con los subíndices en minúsculas a y b .

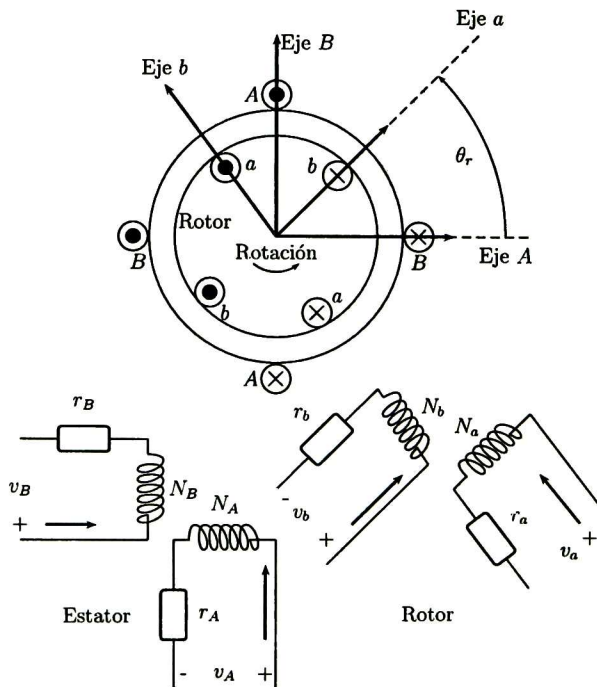


Figura 2.15: Representación esquemática del motor de inducción.

De las leyes de Kirchhoff y la ley de Faraday, se obtienen las ecuaciones de equilibrio eléctrico para el motor jaula de ardilla monofásico. Para el estator

$$v_A = r_A i_A + \frac{d\lambda_A}{dt} \quad (2.3.1)$$

$$v_B = r_B i_B + \frac{d\lambda_B}{dt} \quad (2.3.2)$$

para el rotor

$$v_a = r_a i_a + \frac{d\lambda_a}{dt} \quad (2.3.3)$$

$$v_b = r_b i_b + \frac{d\lambda_b}{dt} \quad (2.3.4)$$

donde $r_a = r_b$, $N_a = N_b$ y λ son los enlaces de flujo en cada devanado del estator o del rotor, el rotor es tipo jaula de ardilla, con entrehierro uniforme. Se asume que el circuito magnético del motor es lineal. Los enlaces de flujo son:

$$\lambda_A = L_A i_A + M_{AB} i_B + M_{Aa} i_a + M_{Ab} i_b \quad (2.3.5)$$

$$\lambda_B = M_{BA} i_A + L_B i_B + M_{Ba} i_a + M_{Bb} i_b \quad (2.3.6)$$

$$\lambda_a = M_{aA} i_A + M_{aB} i_B + L_a i_a + M_{ab} i_b \quad (2.3.7)$$

$$\lambda_b = M_{bA} i_A + M_{bB} i_B + M_{ba} i_a + L_b i_b. \quad (2.3.8)$$

Donde L es inductancia propia y M es inductancia mutua entre los dos devanados. En forma matricial

$$\begin{bmatrix} \lambda_A \\ \lambda_B \\ \lambda_a \\ \lambda_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_A & 0 & M_{Aa} & M_{Ab} \\ 0 & L_B & M_{Ba} & M_{Bb} \\ M_{aA} & M_{aB} & L_a & 0 \\ M_{bA} & M_{bB} & 0 & L_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_a \\ i_b \end{bmatrix} \quad (2.3.9)$$

Las inductancias mutuas M entre los devanados de estator y del rotor son funciones de la posición angular del rotor ϕ_r

$$\begin{aligned} M_{Aa} &= M_{aA} = \frac{N_A N_r}{R_m} \cos \theta_r = M_{srA} \cos \theta_r \\ M_{Ab} &= M_{bA} = \frac{N_A N_r}{R_m} \operatorname{sen} \theta_r = -M_{srA} \operatorname{sen} \theta_r \\ M_{Ba} &= M_{aB} = \frac{N_B N_r}{R_m} \operatorname{sen} \theta_r = M_{srB} \operatorname{sen} \theta_r \\ M_{Bb} &= M_{bB} = \frac{N_B N_r}{R_m} \cos \theta_r = M_{srB} \cos \theta_r \end{aligned}$$

R_m = reluctancia de magnetización, N_A y N_B son el número de vueltas de los devanados del estator y N_r número de vueltas en el devanado del rotor. Las inductancias de

magnetización:

$$L_{mA} = \frac{N_A^2}{R_m}, \quad L_{mB} = \frac{N_B^2}{R_m}, \quad L_{mr} = \frac{N_r^2}{R_m}$$

Las inductancias de dispersión:

$$L_{lA} = \frac{N_A^2}{R_{lA}}, \quad L_{lB} = \frac{N_B^2}{R_{lB}}, \quad L_{lr} = \frac{N_r^2}{R_{lr}}$$

donde

L_{lA} es la inductancia de dispersión de la bobina principal (A) del estator.

L_{lB} es la inductancia de dispersión de la bobina auxiliar (B) del estator.

L_{lr} es la inductancia de dispersión de las bobinas equivalentes del rotor.

L_{mA} es la inductancia de magnetización de la bobina principal (A) del estator.

L_{mB} es la inductancia de magnetización de la bobina principal (B) del estator.

L_{mr} es la inductancia de magnetización de las bobinas equivalentes del rotor.

M_{srA} es el valor máximo de la inductancia mutua entre la bobina A del estator y las bobinas equivalentes del rotor.

M_{srB} es el valor máximo de la inductancia mutua entre la bobina B del estator y las bobinas equivalentes del rotor.

Las inductancias propias:

$$L_A = L_{lA} + L_{mA} \quad (2.3.10)$$

$$L_B = L_{lB} + L_{mB} \quad (2.3.11)$$

$$L_r = L_{lr} + L_{mr}. \quad (2.3.12)$$

Las ecuaciones de voltaje se representan en términos de las inductancias y estas son función de la posición del rotor. La representación matricial de las ecuaciones de voltaje se expresa como

$$V_{AB} = R_s I_{AB} + \frac{d\Lambda_{AB}}{dt} \quad (2.3.13)$$

$$V_{ab} = R_r I_{ab} + \frac{d\Lambda_{ab}}{dt} \quad (2.3.14)$$

donde

$$R_s = \begin{bmatrix} r_A & 0 \\ 0 & r_B \end{bmatrix}, R_r = \begin{bmatrix} r_a & 0 \\ 0 & r_b \end{bmatrix}, I_{AB} = \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \end{bmatrix}, I_{ab} = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix}, V_{AB} = \begin{bmatrix} v_A \\ v_B \end{bmatrix}, V_{ab} = \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \end{bmatrix}$$

y los enlaces de flujo son:

$$\Lambda_{AB} = L_s I_{AB} + M_{sr} I_{ab} \quad (2.3.15)$$

$$\Lambda_{ab} = M_{sr}^T I_{AB} + L_r I_{ab}. \quad (2.3.16)$$

Las matrices de inductancias son:

$$L_s = \begin{bmatrix} L_{lA} + L_{mA} & 0 \\ 0 & L_{lB} + L_{mB} \end{bmatrix}$$

$$L_r = \begin{bmatrix} L_{lr} + L_{mr} & 0 \\ 0 & L_{lr} + L_{mr} \end{bmatrix}$$

$$M_{sr} = \begin{bmatrix} M_{srA} \cos \theta_r & -M_{srA} \sin \theta_r \\ M_{srB} \sin \theta_r & M_{srB} \cos \theta_r \end{bmatrix}$$

Un modelo más apropiado se obtiene en términos de las inductancias de dispersión y de magnetización. Para esto, los parámetros de cada uno de los devanados del motor son referidos con respecto del devanado principal del estator A.

$$I_{abr} = \frac{N_r}{N_A} I_{ab}, V_{abr} = \frac{N_A}{N_r} V_{ab} \text{ y } \Lambda_{abr} = \frac{N_A}{N_r} \Lambda_{ab}$$

además

$$i_{bs} = \frac{N_B}{N_A} i_B, v_{bs} = \frac{N_A}{N_B} v_B, \lambda_{bs} = \frac{N_A}{N_B} \lambda_B.$$

De la relación de la inductancia de magnetización y mutua:

$$L_{mA} = \frac{N_A}{R_m} M_{srA} \text{ y } L_{mB} = \frac{N_B}{R_m} M_{srB}.$$

Y también L_{mB} puede ser expresada como:

$$L_{mB} = \frac{N_B^2}{N_A^2} L_{mA}$$

donde $L_{mr} = \frac{N_r^2}{N_A^2} L_{mA}$.

Las matrices de inductancias referidas al estator son:

$$L_{ss} = \begin{bmatrix} L_{lA} + L_{mA} & 0 \\ 0 & L_{lbs} + L_{mA} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad L_{rr} = \begin{bmatrix} L_{lrr} + L_{mr} & 0 \\ 0 & L_{lrr} + L_{mr} \end{bmatrix}$$

donde

$$L_{lbs} = \frac{N_A^2}{N_B^2} L_{lB} \quad \text{y} \quad L_{lrr} = \frac{N_A^2}{N_r^2} L_{lr}.$$

Y la matriz de inductancias mutuas referidas se expresa como:

$$M_{srs} = L_{mA} \begin{bmatrix} \cos \theta_r & -\text{sen} \theta_r \\ \text{sen} \theta_r & \cos \theta_r \end{bmatrix} \quad (2.3.17)$$

Los enlaces de flujo pueden ser ahora expresados como:

$$\Lambda_{abs} = L_{ss} I_{abs} + M_{srs} I_{abr} \quad (2.3.18)$$

$$\Lambda_{abr} = M_{srs}^T I_{abs} + L_{rr} I_{abr} \quad (2.3.19)$$

donde

$$\Lambda_{abs} = \begin{bmatrix} \lambda_{as} \\ \lambda_{bs} \end{bmatrix}, \Lambda_{abr} = \begin{bmatrix} \lambda_{ar} \\ \lambda_{br} \end{bmatrix}, I_{abs} = \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \end{bmatrix}, I_{abr} = \begin{bmatrix} i_{ar} \\ i_{br} \end{bmatrix}$$

Los sub-índices s y r indican referencias para el devanado de estator y rotor al A del estator respectivamente.

Las ecuaciones de voltaje

$$V_{abs} = R_{ss} I_{abs} + \frac{d\Lambda_{abs}}{dt} \quad (2.3.20)$$

$$V_{abr} = R_{rr} I_{abr} + \frac{d\Lambda_{abr}}{dt} \quad (2.3.21)$$

donde

$$V_{abs} = \begin{bmatrix} v_{as} \\ v_{bs} \end{bmatrix}, \quad V_{abr} = \begin{bmatrix} v_{ar} \\ v_{br} \end{bmatrix}, \quad I_{abs} = \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \end{bmatrix}, \quad I_{abr} = \begin{bmatrix} i_{ar} \\ i_{br} \end{bmatrix}$$

$$R_{ss} = \begin{bmatrix} r_{as} & 0 \\ 0 & r_{bs} \end{bmatrix} \quad R_{rr} = \begin{bmatrix} r_{ar} & 0 \\ 0 & r_{br} \end{bmatrix} \quad \frac{d\Lambda_{abs}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{d\lambda_{aa}}{dt} \\ \frac{d\lambda_{ba}}{dt} \end{bmatrix} \quad \frac{d\Lambda_{abr}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{d\lambda_{ar}}{dt} \\ \frac{d\lambda_{br}}{dt} \end{bmatrix}$$

Los enlaces de flujo son

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{abs} \\ \Lambda_{abr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ss} & M_{srs} \\ M_{srs}^T & L_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{abs} \\ I_{abr} \end{bmatrix} \quad (2.3.22)$$

de donde

$$\begin{bmatrix} I_{abs} \\ I_{abr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ss} & M_{srs} \\ M_{srs}^T & L_{rr} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Lambda_{abs} \\ \Lambda_{abr} \end{bmatrix} \quad (2.3.23)$$

Sustituyendo se tiene

$$\begin{bmatrix} \frac{d\Lambda_{abs}}{dt} \\ \frac{d\Lambda_{abr}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{abs} \\ V_{abr} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_{ss} & 0 \\ 0 & R_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{ss} & M_{srs} \\ M_{srs}^T & L_{rr} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Lambda_{abs} \\ \Lambda_{abr} \end{bmatrix} \quad (2.3.24)$$

Modelo en términos del sistema de referencia estacionario

La matriz de inductancia (2.3.17) depende de la posición angular del rotor. Para eliminar la dependencia se utiliza una transformación de variables, conocida como transformación de Park. Esta transformación consiste de un sistema de coordenadas ortogonales que giran a una velocidad arbitraria ω , Fig. 2.16. Las variables del sistema original a, b se remplazan por sus proyecciones sobre el sistema ortogonal α, β .

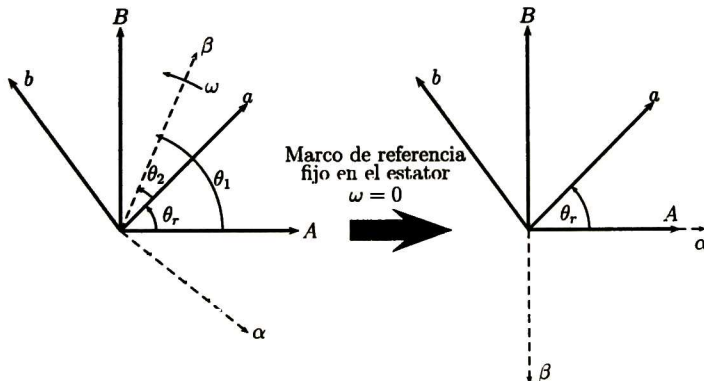


Figura 2.16: Transformación de variables.

La transformación de las variables asociadas a los circuitos del estator al marco $\alpha\beta$ se expresa por

$$f_{\alpha\beta s} = K_{2s} f_{abs} \quad (2.3.25)$$

donde

$$f_{\alpha\beta s} = [f_{\alpha s} \quad f_{\beta s}]^T, f_{abs} = [f_{as} \quad f_{bs}]^T$$

$$K_{2s} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen} \theta \\ \text{sen} \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}, \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

f puede representar voltaje, corriente o enlaces de flujo. La transformación de las variables que se asocian a los circuitos del rotor al marco $\alpha\beta$ puede ser expresada por

$$f_{\alpha\beta r} = K_{2s} f_{abr} \quad (2.3.26)$$

donde

$$f_{\alpha\beta r} = [f_{\alpha r} \quad f_{\beta r}]^T, f_{abr} = [f_{ar} \quad f_{br}]^T$$

$$K_{2s} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \text{sen} \theta_2 \\ \text{sen} \theta_2 & -\cos \theta_2 \end{bmatrix}, \theta_2 = \theta - \theta_r \text{ y } \omega_r = \frac{d\theta_r}{dt}$$

θ_r es el desplazamiento angular del rotor.

La velocidad y desplazamiento angular del marco de referencia arbitrario, se relacionan por:

$$\theta = \int_{t_0}^t \omega(\tau) d\tau + \theta_0$$

Las ecuaciones de los voltajes del devanado de estator, rotor y enlaces de flujo después de aplicar la transformación resultan:

$$v_{\alpha s} = r_{\alpha s} i_{\alpha s} + \frac{d\lambda_{\alpha s}}{dt} \quad (2.3.27)$$

$$v_{\beta s} = r_{\beta s} i_{\beta s} + \frac{d\lambda_{\beta s}}{dt} \quad (2.3.28)$$

$$v_{\alpha r} = r_r i_{\alpha r} - \eta \omega_r \lambda_{\beta r} + \frac{d\lambda_{\alpha r}}{dt} \quad (2.3.29)$$

$$v_{\beta r} = r_r i_{\beta r} - \eta^{-1} \omega_r \lambda_{\alpha r} + \frac{d\lambda_{\beta r}}{dt} \quad (2.3.30)$$

$$\lambda_{\alpha s} = L_{l\alpha s} i_{\alpha s} + L_m (i_{\alpha s} + i_{\alpha r}) \quad (2.3.31)$$

$$\lambda_{\beta s} = L_{l\beta s} i_{\beta s} + L_m (i_{\beta s} + i_{\beta r}) \quad (2.3.32)$$

$$\lambda_{\alpha r} = L_{lrr} i_{\alpha r} + L_m (i_{\alpha s} + i_{\alpha r}) \quad (2.3.33)$$

$$\lambda_{\beta r} = L_{lrr} i_{\beta r} + L_m (i_{\beta s} + i_{\beta r}) \quad (2.3.34)$$

En forma matricial se tiene que las ecuaciones de voltaje se expresan como

$$V_{\alpha\beta s} = R_s I_{\alpha\beta s} + \frac{d\Lambda_{\alpha\beta s}}{dt} \quad (2.3.35)$$

$$V_{\alpha\beta r} = R_r I_{\alpha\beta r} - M_\omega \Lambda_{\alpha\beta r} + \frac{d\Lambda_{\alpha\beta r}}{dt} \quad (2.3.36)$$

donde

$$V_{\alpha\beta s} = \begin{bmatrix} v_{\alpha s} \\ v_{\beta s} \end{bmatrix}, V_{\alpha\beta r} = \begin{bmatrix} v_{\alpha r} \\ v_{\beta r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, I_{\alpha\beta s} = \begin{bmatrix} i_{\alpha s} \\ i_{\beta s} \end{bmatrix}, I_{\alpha\beta r} = \begin{bmatrix} i_{\alpha r} \\ i_{\beta r} \end{bmatrix}$$

$$R_s = \begin{bmatrix} r_{\alpha s} & 0 \\ 0 & r_{\beta s} \end{bmatrix}, R_r = \begin{bmatrix} r_r & 0 \\ 0 & r_r \end{bmatrix}, M_\omega = \begin{bmatrix} 0 & -\eta \omega_r \\ -\eta^{-1} \omega_r & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\Lambda_{\alpha\beta s}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{d\lambda_{\alpha s}}{dt} \\ \frac{d\lambda_{\beta s}}{dt} \end{bmatrix}, \frac{d\Lambda_{\alpha\beta r}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{d\lambda_{\alpha r}}{dt} \\ \frac{d\lambda_{\beta r}}{dt} \end{bmatrix}$$

Los enlaces de flujo son

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{\alpha\beta s} \\ \Lambda_{\alpha\beta r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ssn} & M_{sr} \\ M_{sr}^T & L_{rrn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\alpha\beta s} \\ I_{\alpha\beta r} \end{bmatrix} \quad (2.3.37)$$

donde

$$L_{ssn} = \begin{bmatrix} L_{l\alpha s} + L_m & 0 \\ 0 & L_{l\beta s} + L_m \end{bmatrix}, L_{rrn} = \begin{bmatrix} L_{lrr} + L_m & 0 \\ 0 & L_{lrr} + L_m \end{bmatrix}, M_{sr} = \begin{bmatrix} 0 & L_m \\ L_m & 0 \end{bmatrix}$$

Los circuitos equivalentes de eje α y β del motor monofásico se muestran en la Fig.2.17.

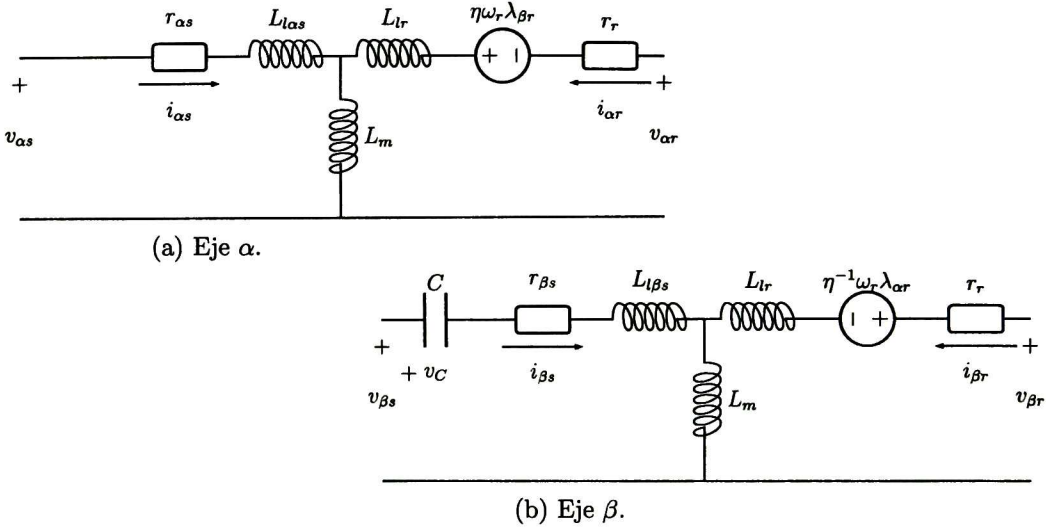


Figura 2.17: Equivalente del MJAM con capacitor en el devanado auxiliar.

La dinámica eléctrica del motor monofásico se obtiene de las ecuaciones (2.3.27)-(2.3.34) en donde se eligen como variables de estado las corrientes del estator y los enlaces de flujo del rotor. Las corrientes en el rotor se obtienen de las ecuaciones de enlaces de flujo del rotor (2.3.33)y(2.3.34) como

$$i_{\alpha r} = \frac{1}{L_r} (\lambda_{\alpha r} - L_m i_{\alpha s}) \quad (2.3.38)$$

$$i_{\beta r} = \frac{1}{L_r} (\lambda_{\beta r} - L_m i_{\beta s}) \quad (2.3.39)$$

donde las inductancias propias son $L_r = L_{lrr} + L_m$, $L_{\alpha s} = L_{l\alpha s} + L_m$ y $L_{\beta s} = L_{l\beta s} + L_m$.

Se sustituyen las corrientes del rotor (2.3.38)y(2.3.39) en las ecuaciones de voltaje del rotor (2.3.29)y(2.3.30) y despejando los enlaces de flujo del rotor

$$\frac{d\lambda_{\alpha r}}{dt} = -\frac{r_r}{L_r} \lambda_{\alpha r} + \eta \omega_r \lambda_{\beta r} + \frac{r_r}{L_r} L_m i_{\alpha s} \quad (2.3.40)$$

$$\frac{d\lambda_{\beta r}}{dt} = -\frac{r_r}{L_r} \lambda_{\beta r} - \eta^{-1} \omega_r \lambda_{\alpha r} + \frac{r_r}{L_r} L_m i_{\beta s}. \quad (2.3.41)$$

Así mismo se sustituyen las corrientes del rotor en los enlaces del estator (2.3.31)y(2.3.32) y se derivan, tal que se tienen

$$\frac{d\lambda_{\alpha s}}{dt} = \left(\frac{L_{\alpha s} L_r - L_m^2}{L_r} \right) \frac{di_{\alpha s}}{dt} + \frac{L_m}{L_r} \frac{d\lambda_{\alpha r}}{dt} \quad (2.3.42)$$

$$\frac{d\lambda_{\beta s}}{dt} = \left(\frac{L_{\beta s} L_r - L_m^2}{L_r} \right) \frac{di_{\beta s}}{dt} + \frac{L_m}{L_r} \frac{d\lambda_{\beta r}}{dt}. \quad (2.3.43)$$

Finalmente se incluye la dinámica de los flujos de rotor (2.3.40)y(2.3.41) en las ecuaciones de voltaje de estator (2.3.27)y(2.3.28) y se despejan las dinámicas de corriente de estator y se tiene como resultado

$$\frac{di_{\alpha s}}{dt} = \left(\frac{L_r}{L_{\alpha s} L_r - L_m^2} \right) \left[v_{\alpha s} - \left(r_{\alpha s} + \frac{L_m^2 r_r}{L_r^2} \right) i_{\alpha s} - \frac{L_m}{L_r} \eta \omega_r \lambda_{\beta r} + \frac{L_m r_r}{L_r^2} \lambda_{\alpha r} \right] \quad (2.3.44)$$

$$\frac{di_{\beta s}}{dt} = \left(\frac{L_r}{L_{\beta s} L_r - L_m^2} \right) \left[v_{\beta s} - \left(r_{\beta s} - \frac{L_m^2 r_r}{L_r^2} L_m \right) i_{\beta s} + \frac{L_m}{L_r} \eta^{-1} \omega_r \lambda_{\alpha r} + \frac{L_m r_r}{L_r^2} \lambda_{\beta r} \right]. \quad (2.3.45)$$

Las entradas del control, son las componentes de voltaje del estator en los ejes α y β y son:

$$\begin{aligned} v_{\alpha s} &= v_s \\ v_{\beta s} &= \eta^{-1} v_s - v_c \end{aligned} \quad (2.3.46)$$

donde el voltaje del capacitor es de la forma

$$\frac{dv_c}{dt} = \omega_c X_c i_{\beta s} \quad (2.3.47)$$

y $\eta = N_A/N_B$, N_A es el número de vueltas del devanado principal y N_B es el número de vueltas en el devanado auxiliar.

2.3.2 Dinámica mecánica

El par se produce por interacción de los flujos del rotor y el estator, y es igual al cambio de la energía almacenada respecto de la posición angular θ_r

$$T_e(i_j, \theta_r) = \frac{P}{2} \frac{\partial W_c(i_j, \theta_r)}{\partial \theta_r} \quad (2.3.48)$$

de donde

$$W_m = \frac{1}{2} (I_{abs})^T (L_{ss} - L_{las}) I_2 I_{abr} + (I_{abs}) M_{srs} I_{abr} + \frac{1}{2} (I_{abr})^T (L_{rr} - L_{lr}) I_2 I_{abr}. \quad (2.3.49)$$

Como L_{ss} y L_{rr} no son función de θ_r , resulta el par electromagnético en Newton-metros ($Nw - m$).

$$T_e = \frac{P}{2} (I_{abs})^T \frac{\partial M_{srs}}{\partial \theta_r} I_{abr}. \quad (2.3.50)$$

La ecuación de par en términos de las componentes $\alpha\beta$ tiene la forma

$$T_e = \frac{P}{2} ((K_{2s})^{-1} I_{\alpha\beta s})^T \frac{\partial}{\partial \theta_r} [M_{srs}] (K_{2r})^{-1} I_{\alpha\beta r}. \quad (2.3.51)$$

Ahora se expande la ecuación (2.3.51) y se obtiene la expresión para el par electromagnético

$$T_e = \eta \frac{P}{2} L_m (i_{\alpha s} i_{\beta r} - i_{\beta s} i_{\alpha r}). \quad (2.3.52)$$

La dinámica mecánica del motor se obtiene del principio de D'Alembert

$$T_e = T_L + J \frac{d\omega_m}{dt} + D\omega_m + \frac{1}{K} \int_{-\infty}^t \omega_m dt. \quad (2.3.53)$$

Para los propósitos de este trabajo se desprecia el par por fricción y el par elástico. La dinámica mecánica tiene la expresión

$$\frac{d\omega_m}{dt} = \eta \frac{P}{2J} \frac{L_m}{L_r} (\lambda_{\beta r} i_{\alpha s} - \lambda_{\alpha r} i_{\beta s}) - \frac{1}{J} T_L \quad (2.3.54)$$

donde T_L es el par de carga.

Resumen del Modelo del MJAM en $\alpha\beta$

El modelo dinámico del MJAM en el marco de referencia estacionario $\alpha\beta$, se obtiene de las ecuaciones (2.3.42)-(2.3.45) y (2.3.54) y haciendo $\omega = 0$, el modelo es como sigue:

$$d\omega_r/dt = d_1 d_2 (\lambda_{\beta r} i_{\alpha s} - \lambda_{\alpha r} i_{\beta s}) - d_2 T_L \quad (2.3.55)$$

$$d\lambda_{\alpha r}/dt = -a_3 \lambda_{\alpha r} + n_p \omega_r \lambda_{\beta r} + a_4 i_{\alpha s} \quad (2.3.56)$$

$$d\lambda_{\beta r}/dt = -n_p \omega_r \lambda_{\alpha r} - a_3 \lambda_{\beta r} + a_4 i_{\beta s} \quad (2.3.57)$$

$$di_{\alpha s}/dt = -c_1 a_1 i_{\alpha s} + c_1 c_4 \lambda_{\alpha r} - c_1 c_3 n_p \omega_r \lambda_{\beta r} + c_1 v_{\alpha s} \quad (2.3.58)$$

$$di_{\beta s}/dt = -c_2 a_2 i_{\beta s} + c_2 c_4 \lambda_{\beta r} + c_2 c_3 n_p \omega_r \lambda_{\alpha r} + c_2 v_{\beta s} \quad (2.3.59)$$

donde $\lambda_{\alpha r}$ y $\lambda_{\beta r}$ son las componentes de enlace de flujo magnético, $i_{\alpha s}$ e $i_{\beta s}$ son las componentes de corriente de estator, $v_{\alpha s}$ y $v_{\beta s}$ son los voltajes de los devanados principal y auxiliar del estator, respectivamente. Las constantes a_i y c_i , ($i = 1, \dots, 4$) dependen de los parámetros del motor y están dadas por

$$\begin{aligned} a_1 &= r_{\alpha s} + \frac{r_r L_m^2}{L_r^2}, a_2 = r_{\beta s} + \frac{r_r L_m^2}{L_r^2}, a_3 = \frac{r_r}{L_r}, a_4 = \frac{r_r L_m}{L_r}. \\ c_1 &= \frac{L_r}{L_{\alpha s} L_r - L_m^2}, c_2 = \frac{L_r}{L_{\beta s} L_r - L_m^2}, c_3 = \frac{L_m}{L_r}, c_4 = \frac{r_r L_m}{L_r^2}, \\ d_1 &= n_p \frac{L_m}{L_r}, d_2 = \frac{n_p}{J} \end{aligned}$$

donde $r_{\alpha s}$ y $r_{\beta s}$ son resistencias de estator, $L_{\alpha s}$ y $L_{\beta s}$ son las inductancias propias del estator, r_r y L_r son las resistencia y la inductancia del rotor, respectivamente, J es el momento de inercia, L_m es la inductancia de magnetización.

Resultados de operación de los diferentes tipos de MJAM

A continuación se presentan los resultados de simulación de los diferentes tipos de motores monofásicos en operación en estado estable y en lazo abierto. El programa se desarrolló en código de MATLAB. Las condiciones de operación son las nominales.

Los valores nominales son [34]:

La potencia del motor es de 0.25 h.p., par nominal de $1N - m$ ($T_{nom} = 1.0N - m$), Voltaje nominal de 110V RMS ($V_s = \sqrt{2} \times 110 \times \cos(2\pi ft)$), Frecuencia de 60Hz ($f=60\text{Hz}$).

Los parámetros eléctricos y mecánicos del motor son:

$r_{\alpha s} = 2.02\Omega$, $r_{\beta s} = 5.13\Omega$, $r_r = 4.12\Omega$, $L_{\alpha s} = 0.1846H$, $L_{\beta s} = 0.1833H$, $L_m = 0.1772H$, $L_r = 0.182H$, $J = 0.0146kgM^2$, $n = 1.18$, $n_p = 2$. Los parámetros son referidos al devanado principal del estator.

	i_{as} (Amp) max	$i_{\beta s}$ (Amp) max	P_{mec} (W) $\omega_r \cdot T$	F.P.	Efic	T_e (start) Nw-m	T_e (ss) Nw-m	λ_{ar} (ss) max (wb)	λ_{gr} (ss) max (wb)	t_u (seg.)	THD_v	THD_i
MIM de fase partida	4.999	0	179	0.61	0.75	6	1.634	0.3563	0.3988	2	0.26	0.55
MIM con capacitor de arranque	4.994	0	179	0.61	0.75	9.55	1.636	0.3564	0.3989	1	0.28	0.59
MIM con capacitor permanente	1.413	3.366	182	0.98	0.76	5.75	1.06	0.4042	0.4912	1.4	0.22	0.24
MIM con doble capacitor	1.731	3.039	182	0.98	0.76	9.55	0.7824	0.3992	0.4833	0.8	0.29	0.25

Tabla 2.1: Resultados de los MJAM.

El motor de fase partida (Split) tiene: un par de arranque de $6 N - m$, par pulsante de amplitud de $1.634 N - m$, tiempo de estabilización de $t_{ss} = 2 \text{seg.}$, eficiencia 75% y un factor de potencia de 61%. El voltaje tiene una distorsión armónica total (THD_v) del 0.26%.

El motor con capacitor de arranque tiene: un par de arranque de $9.55 N - m$, par pulsante de amplitud de $1.636 N - m$, tiempo de estabilización de $t_{ss} = 1 \text{seg.}$, eficiencia 75% y un factor de potencia de 61%. El voltaje tiene una distorsión armónica total (THD_v) del 0.28%.

El motor con capacitor permanente tiene: un par de arranque de $5.75 N - m$, par pulsante de amplitud de $1.06 N - m$, tiempo de estabilización de $t_{ss} = 1.4 \text{seg.}$, eficiencia 76% y un factor de potencia de 98%. El voltaje tiene una distorsión armónica total (THD_v) del 0.22%.

El motor con capacitor de arranque y de marcha tiene: un par de arranque de $9.55 N - m$, par pulsante de amplitud de $0.7824 N - m$, tiempo de estabilización de $t_{ss} = 0.8 \text{seg.}$, eficiencia 76% y un factor de potencia de 98%. El voltaje tiene una distorsión armónica total (THD_v) del 0.29%.

Los resultados muestran que el motor con capacitor de arranque y de marcha tiene un mejor desempeño que los otros tipos de motores.

En este trabajo se propone un esquema de control que es una modificación del motor con capacitor de arranque y de marcha. Se elimina el interruptor centrífugo y se utiliza un solo capacitor en serie con el devanado auxiliar. En paralelo al capacitor único se usa un interruptor. Este interruptor desconecta y conecta al capacitor operado con una lógica de control automático. La lógica de control puede conseguir la minimización de la amplitud del par pulsante, corrección del factor de potencia, maximización de la eficiencia, etc. Esto para

diversas condiciones de operación y diferentes valores de regulación de velocidad.

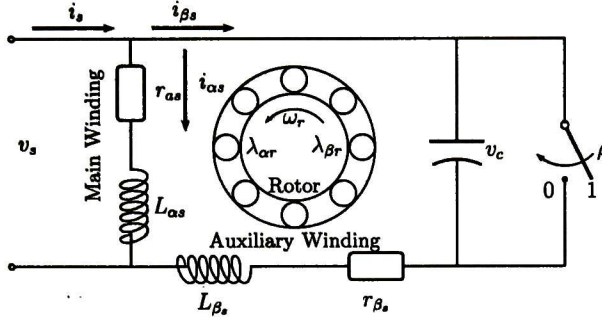


Figura 2.18: Motor jaula de ardilla monofásico.

El voltaje de alimentación $v_{\alpha s}$ y $v_{\beta s}$ de las ecuaciones (2.3.58) y (2.3.59) es

$$v_{\alpha s} = v_s \quad (2.3.60)$$

$$v_{\beta s} = n^{-1}v_s - v_c\rho \quad (2.3.61)$$

el parámetro ρ del interruptor es cero cuando el interruptor esta cerrado y 1 cuando el interruptor esta abierto, lo que representa la lógica para el voltaje del devanado auxiliar $v_{\beta s}$:

$$\rho = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{\beta s} = n^{-1}v_s - v_c \\ v_{\beta s} = n^{-1}v_s \end{cases}$$

$n = N_A/N_B$, N_A es el número de vueltas en el devanado principal y N_B es el número de vueltas en el devanado auxiliar. La dinámica del capacitor es gobernada por

$$dv_c/dt = \omega X_c i_{\beta s} \quad (2.3.62)$$

donde $X_c = \frac{1}{\omega_c C}$ es la reactancia del capacitor.

2.3.3 Modelo en estado estable

El modelo en estado estable del MJAM se obtiene de las ecuaciones dinámicas del motor (2.3.40), (2.3.41), (2.3.44), (2.3.45) y (2.3.54). Las ecuaciones en estado estable se pueden expresar por los valores fasoriales de los voltajes y de las corrientes.

$$v_{\alpha s} = \left(r_{\alpha s} + j \frac{\omega_e}{\omega_b} L_{\alpha s} \right) \tilde{i}_{\alpha s} + j \frac{\omega_e}{\omega_b} L_m \tilde{i}_{\alpha r} \quad (2.3.63)$$

$$v_{\beta s} = \left(r_{\beta s} + j \frac{\omega_e}{\omega_b} L_{\beta s} - j X_c \right) \tilde{i}_{\beta s} + j \frac{\omega_e}{\omega_b} L_m \tilde{i}_{\beta r} \quad (2.3.64)$$

$$v_{\alpha r} = j \frac{\omega_e}{\omega_b} L_m \tilde{i}_{\alpha s} - \frac{\omega_r}{\omega_b} L_m \tilde{i}_{\beta s} + \left(r_r + j \frac{\omega_e}{\omega_b} L_r \right) \tilde{i}_{\alpha r} - \omega_r L_r \tilde{i}_{\beta r} \quad (2.3.65)$$

$$v_{\alpha r} = \frac{\omega_r}{\omega_b} L_m \tilde{i}_{\alpha s} + j \frac{\omega_e}{\omega_b} L_m \tilde{i}_{\beta s} + \frac{\omega_r}{\omega_b} L_r \tilde{i}_{\alpha r} + \left(r_r + j \frac{\omega_e}{\omega_b} L_r \right) \tilde{i}_{\beta r}. \quad (2.3.66)$$

Se renombran las siguientes variables

$$\begin{aligned} Z_{\alpha s} &= r_{\alpha s} + j \frac{\omega_e}{\omega_b} L_{\alpha s}, \quad Z_r = r_r + j \frac{\omega_e}{\omega_b} L_r, \quad Z_c = -j X_c, \\ Z_{\beta s} &= r_{\beta s} + j \frac{\omega_e}{\omega_b} L_{\beta s}, \quad X_{md} = \eta^2 X_m, \quad f_e = \frac{\omega_e}{\omega_b}, \quad f_r = \frac{\omega_r}{\omega_b}, \quad \omega_e = \frac{P}{2(1-s)} \omega_m \end{aligned}$$

con los devanados del rotor cortocircuitados ($V_{\alpha r} = V_{\beta r} = 0$) las ecuaciones (2.3.63)-(2.3.66) se presentan de la siguiente forma

$$v_{\alpha s} = Z_{\alpha s} \tilde{i}_{\alpha s} + j f_e L_m \tilde{i}_{\alpha r} \quad (2.3.67)$$

$$v_{\beta s} = (Z_{\beta s} - Z_c) \tilde{i}_{\beta s} + j f_e L_m \tilde{i}_{\beta r} \quad (2.3.68)$$

$$0 = j f_e L_m \tilde{i}_{\alpha s} - f_r L_m \tilde{i}_{\beta s} + Z_r \tilde{i}_{\alpha r} - f_r L_r \tilde{i}_{\beta r} \quad (2.3.69)$$

$$0 = f_r L_m \tilde{i}_{\alpha s} + j f_e L_m \tilde{i}_{\beta s} + f_r L_r \tilde{i}_{\alpha r} + Z_r \tilde{i}_{\beta r}. \quad (2.3.70)$$

En forma matricial

$$\begin{bmatrix} v_{\alpha s} \\ v_{\beta s} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{\alpha s} & 0 & j f_e L_m & 0 \\ 0 & Z_{\beta s} - Z_c & 0 & j n^2 f_e L_m \\ j f_e L_m & -n f_r L_m & Z_r & -n f_r L_r \\ n f_r L_m & j n^2 f_e L_m & n f_r L_r & n^2 Z_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{i}_{\alpha s} \\ \tilde{i}_{\beta s} \\ \tilde{i}_{\alpha r} \\ \tilde{i}_{\beta r} \end{bmatrix} \quad (2.3.71)$$

La ecuación (2.3.71) se particiona como se indica

$$\begin{bmatrix} V_{\alpha\beta s} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_{\alpha\beta s} \\ \tilde{I}_{\alpha\beta r} \end{bmatrix} \quad (2.3.72)$$

donde las matrices A_{11} y A_{12} son constantes y las matrices $A_{21}(\omega_r)$ y $A_{22}(\omega_r)$ son función de la velocidad del motor.

Las corrientes del estator y rotor se obtienen

$$\bar{I}_{\alpha\beta s} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} V_{\alpha\beta s} \quad (2.3.73)$$

$$\bar{I}_{\alpha\beta r} = - (A_{22}^{-1}A_{21}) \bar{I}_{\alpha\beta s} \quad (2.3.74)$$

las corrientes de rotor en forma compacta se expresan por

$$\bar{i}_{\alpha r} = -Z_a \bar{i}_{\alpha s} + Z_b \bar{i}_{\beta s} \quad (2.3.75)$$

$$\bar{i}_{\beta r} = -Z_b \bar{i}_{\alpha s} - Z_a \bar{i}_{\beta s} \quad (2.3.76)$$

donde Z_a y Z_b son

$$Z_a = L_m / Z_{\alpha r}^2 + f_r^2 L_r^2 [(f_r^2 - f_e^2) L_r + j f_e r_r] \triangleq Z_{a1} + j Z_{a2}$$

$$Z_b = L_m f_r r_r / Z_{\beta r}^2 + f_r^2 L_r^2 \triangleq Z_{b1} + j Z_{b2} n$$

las corrientes de rotor en forma matricial

$$\begin{bmatrix} \bar{i}_{\alpha s} \\ \bar{i}_{\beta s} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} Z_{\beta s} + Z_c - j f_e L_m Z_a & -j f_e L_m Z_b \\ j f_e L_m Z_b & Z_{\beta s} - j f_e L_m Z_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{\alpha s} \\ v_{\beta s} \end{bmatrix} \quad (2.3.77)$$

donde

$$\Delta = \det(Z) = (Z_{\alpha s} - j f_e L_m Z_a)(Z_{\beta s} + Z_c - n^2 j f_e L_m Z_a) - (n j f_e L_m Z_b)^2$$

$$\Delta \triangleq (\delta_{11} + \delta_{21} X_c) + j(\delta_{12} - \delta_{22} X_c)$$

con

$$\delta_{21} = f_e L_{\alpha s} - f_e L_m Z_{a1}$$

$$\delta_{22} = r_{\alpha s} + f_e L_m Z_{a2}$$

$$\delta_{11} = (r_{\beta s} + f_e L_m Z_{a2}) \delta_{22} - (f_e L_{\beta s} - f_e L_m Z_{a1}) \delta_{21} - f_e L_m^2 (Z_{b1}^2 - Z_{b2}^2)$$

$$\delta_{12} = (f_e L_{\beta s} - f_e L_m Z_{a1}) \delta_{22} + (r_{\beta s} + f_e L_m Z_{a2}) \delta_{21} - 2 f_e^2 L_m^2 Z_{b1} Z_{b2} n$$

las componentes de corrientes en el estator

$$\bar{i}_{\alpha s} = \frac{v_{\alpha s}}{\Delta} [\alpha_1 + j(\alpha_2 - X_c)] \quad (2.3.78)$$

$$\bar{i}_{\beta s} = \frac{v_{\beta s}}{\Delta} [\beta_1 + j\beta_2] \quad (2.3.79)$$

de donde

$$\alpha_1 + j\alpha_2 = (r_{\beta s} + f_e L_m Z_{a2} + \eta^{-1} f_e L_m Z_{b2}) + j(f_e L_{\beta s} - f_e L_m Z_{a1} - \eta^{-1} f_e L_m Z_{b1})$$

$$\beta_1 + j\beta_2 = (\eta^{-1} r_{\alpha s} + \eta^{-1} f_e L_m Z_{a2} - f_e L_m Z_{b2}) + j(\eta^{-1} f_e L_{\alpha s} + f_e L_m Z_{b1} - \eta^{-1} f_e L_m Z_{a1})$$

$v_{\alpha s} = v_{\beta s}$ es el voltaje de alimentación y $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ y Δ son función de la velocidad del motor.

2.3.4 Componentes simétricas

El método de componentes simétricas permite representar un sistema bifásico desbalanceado en dos sistemas bifásicos balanceados. Los sistemas balanceados son denominados como componentes de secuencia positiva y negativa. En general, las variables de un sistema bifásico desbalanceado puede ser expresado de la forma:

$$F_{\alpha s}^s = \sqrt{2}F_{\alpha} \cos [\omega_e t + \theta_{\alpha s} (0)] \quad (2.3.80)$$

$$F_{\beta s}^s = \sqrt{2}F_{\beta} \sin [\omega_e t + \theta_{\beta s} (0)] \quad (2.3.81)$$

Donde $F_{\alpha} \neq F_{\beta}$ y $\theta_{\alpha s} (0) \neq \theta_{\beta s} (0)$. Cada fase del sistema bifásico desbalanceado se puede representar como la suma de las componentes de secuencia positiva y negativa como se indica

$$F_{\alpha s}^s = F_{\alpha s}^+ + F_{\alpha s}^- \quad (2.3.82)$$

$$F_{\beta s}^s = F_{\beta s}^+ + F_{\beta s}^- \quad (2.3.83)$$

$F_{\alpha s}^+$ y $F_{\beta s}^+$ forman el sistema de secuencia positiva, donde

$$F_{\beta s}^+ = j F_{\alpha s}^+ \quad (2.3.84)$$

El sistema de secuencia negativa es $F_{\alpha s}^-$ y $F_{\beta s}^-$ donde

$$F_{\beta s}^- = j F_{\alpha s}^- \quad (2.3.85)$$

Para operación desbalanceada en estado estable donde la velocidad del rotor es constante, las corrientes de secuencia positiva que circulan en los devanados del estator producen una f_{mm} que gira en sentido de las agujas del reloj [12, 23]. Las ecuaciones en estado estable (2.3.82) - (2.3.85) pueden ser expresadas en la forma:

$$\begin{bmatrix} F_{\alpha s}^+ \\ F_{\alpha s}^- \end{bmatrix} = S_2 \begin{bmatrix} F_{\alpha s}^s \\ F_{\beta s}^s \end{bmatrix} \quad (2.3.86)$$

donde la matriz de transformación es $S_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix}$ y $(S_2)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix}$.

Si $F_{\alpha r}$ y $F_{\beta r}$ son las componentes fasoriales del rotor, estas se pueden representar por sus componentes de secuencia positiva y negativa de la misma manera que para $F_{\alpha s}$ y $F_{\beta s}$. En particular se tiene

$$F_{\alpha r} = F_{\alpha r}^+ + F_{\alpha r}^- \quad (2.3.87)$$

$$F_{\beta r} = F_{\beta r}^+ + F_{\beta r}^- \quad (2.3.88)$$

Es común que los modelos matemáticos, sobre todo en estado estable, se utilicen los parámetros de reactancias $X = f_e L$ en lugar de las inductancias. Las expresiones de los enlaces de flujo son reemplazadas por un término de voltaje de la forma $\psi = \omega_e \lambda$. Las ecuaciones de los enlaces de flujo (2.3.31) (2.3.34) del estator se transforman en las ecuaciones

$$\begin{bmatrix} \psi_{\alpha s} \\ \psi_{\beta s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{\alpha s} + X_m & 0 \\ 0 & X_{\beta s} + X_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\alpha s} \\ I_{\beta s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_m & 0 \\ 0 & X_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\alpha r} \\ I_{\beta r} \end{bmatrix}$$

Escritas en forma compacta

$$\psi_{\alpha\beta s} = X_{SS} I_{\alpha\beta s} + X_M I_{\alpha\beta r}$$

La representación en componentes simétricas es

$$\psi_{\alpha s}^+ = S_2 X_{SS} S_2^{-1} I_{\alpha s}^{+-} + S_2 X_M S_2^{-1} I_{\alpha r}^{+-}$$

donde

$$S_2 X_{SS} S_2^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} X_{\alpha s} + X_{\beta s} + 2X_m & X_{\alpha s} - X_{\beta s} \\ X_{\alpha s} - X_{\beta s} & X_{\alpha s} + X_{\beta s} + 2X_m \end{bmatrix}$$

y

$$S_2 X_M S_2^{-1} = \begin{bmatrix} X_m & 0 \\ 0 & X_m \end{bmatrix}$$

por consiguiente

$$\begin{bmatrix} \psi_{\alpha s}^+ \\ \psi_{\beta s}^- \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} X_{\alpha s} + X_{\beta s} + 2X_m & X_{\alpha s} - X_{\beta s} \\ X_{\alpha s} - X_{\beta s} & X_{\alpha s} + X_{\beta s} + 2X_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\alpha s}^+ \\ I_{\beta s}^- \end{bmatrix} + X_m \begin{bmatrix} I_{\alpha s}^+ + I_{\alpha r}^+ \\ I_{\alpha s}^- + I_{\beta r}^- \end{bmatrix} \quad (2.3.89)$$

Procediendo de manera similar para los enlaces de flujo del rotor (2.3.33) y (2.3.34)

$$\begin{bmatrix} \psi_{\alpha r} \\ \psi_{\beta r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_r + X_m & 0 \\ 0 & X_r + X_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\alpha r} \\ I_{\beta r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_m & 0 \\ 0 & X_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\alpha s} \\ I_{\beta s} \end{bmatrix}$$

$$\psi_{\alpha\beta r} = X_{RR} I_{\alpha\beta r} + X_M I_{\alpha\beta s}$$

$$\psi_{\alpha r}^+ = S_2 X_{RR} S_2^{-1} I_{\alpha r}^{+-} + S_2 X_M S_2^{-1} I_{\alpha s}^{+-}$$

de donde

$$S_2 X_{RR} S_2^{-1} = \begin{bmatrix} X_r + X_m & 0 \\ 0 & X_r + X_m \end{bmatrix}$$

tal que

$$\begin{bmatrix} \psi_{\alpha r}^+ \\ \psi_{\alpha r}^- \end{bmatrix} = X_r \begin{bmatrix} I_{\alpha r}^+ \\ I_{\alpha r}^- \end{bmatrix} + X_m \begin{bmatrix} I_{\alpha s}^+ + I_{\alpha r}^+ \\ I_{\alpha s}^- + I_{\alpha r}^- \end{bmatrix} \quad (2.3.90)$$

Los voltajes de estator (2.3.27) y (2.3.28) incluyendo la reactancia del capacitor son de la forma

$$\begin{bmatrix} V_s \\ V_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{\alpha s} & 0 \\ 0 & r_{\beta s} - jX_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\alpha s} \\ I_{\beta s} \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} \psi_{\alpha s} \\ \psi_{\beta s} \end{bmatrix}$$

Escritas en forma compacta

$$V_s = R_{ss} I_{\alpha s} + j\psi_{\alpha s}^+$$

en donde

$$S_2 R_{SS} S_2^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} r_{\alpha s} + r_{\beta s} - jX_c & r_{\alpha s} - r_{\beta s} + jX_c \\ r_{\alpha s} - r_{\beta s} + jX_c & r_{\alpha s} + r_{\beta s} - jX_c \end{bmatrix}$$

por tanto

$$\begin{bmatrix} V_{\alpha s}^+ \\ V_{\alpha s}^- \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} r_{\alpha s} + r_{\beta s} - jX_c & r_{\alpha s} - r_{\beta s} + jX_c \\ r_{\alpha s} - r_{\beta s} + jX_c & r_{\alpha s} + r_{\beta s} - jX_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\alpha s}^+ \\ I_{\alpha s}^- \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} \psi_{\alpha s}^+ \\ \psi_{\alpha s}^- \end{bmatrix} \quad (2.3.91)$$

Los voltajes del rotor (2.3.29) y (2.3.30) son de la forma

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_r & 0 \\ 0 & r_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\alpha r} \\ I_{\beta r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_r/\omega_e \\ \omega_r/\omega_e & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{\alpha r} \\ \psi_{\beta r} \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} \psi_{\alpha r} \\ \psi_{\beta r} \end{bmatrix}$$

Escrito en forma compacta

$$0 = R_r I_{\alpha r} + \Omega \psi_{\alpha r} + j\psi_{\alpha r}.$$

La representación en componentes simétricas es

$$0 = S_2 R_r S_2^{-1} I_{\alpha r}^{+-} + S_2 \Omega S_2^{-1} \psi_{\alpha r}^{+-} + j\psi_{\alpha r}^{+-}$$

donde

$$S_2 R_r S_2^{-1} = \begin{bmatrix} r_r & 0 \\ 0 & r_r \end{bmatrix}, \quad S_2 \Omega S_2^{-1} = \begin{bmatrix} -j\omega_r/\omega_e & 0 \\ 0 & j\omega_r/\omega_e \end{bmatrix}$$

por tanto

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_r/s & 0 \\ 0 & r_r/(2-s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\alpha r}^+ \\ I_{\alpha r}^- \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} \psi_{\alpha r}^+ \\ \psi_{\alpha r}^- \end{bmatrix} \quad (2.3.92)$$

El modelo en estado estable en términos de las componentes simétricas (2.3.89)-(2.3.92) es

$$\begin{bmatrix} V_{\alpha s}^+ \\ V_{\alpha s}^- \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} r_{\alpha s} + r_{\beta s} - jX_c & r_{\alpha s} - r_{\beta s} + jX_c \\ r_{\alpha s} - r_{\beta s} + jX_c & r_{\alpha s} + r_{\beta s} - jX_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\alpha s}^+ \\ I_{\alpha s}^- \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} \psi_{\alpha s}^+ \\ \psi_{\alpha s}^- \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_r/s & 0 \\ 0 & r_r/(2-s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\alpha r}^+ \\ I_{\alpha r}^- \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} \psi_{\alpha r}^+ \\ \psi_{\alpha r}^- \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \psi_{\alpha s}^+ \\ \psi_{\beta s}^- \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} X_{\alpha s} + X_{\beta s} + 2X_m & X_{\alpha s} - X_{\beta s} \\ X_{\alpha s} - X_{\beta s} & X_{\alpha s} + X_{\beta s} + 2X_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\alpha s}^+ \\ I_{\alpha s}^- \end{bmatrix} + X_m \begin{bmatrix} I_{\alpha s}^+ + I_{\alpha r}^+ \\ I_{\alpha s}^- + I_{\beta r}^- \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \psi_{\alpha r}^+ \\ \psi_{\alpha r}^- \end{bmatrix} = X_r \begin{bmatrix} I_{\alpha r}^+ \\ I_{\alpha r}^- \end{bmatrix} + X_m \begin{bmatrix} I_{\alpha s}^+ + I_{\alpha r}^+ \\ I_{\alpha s}^- + I_{\alpha r}^- \end{bmatrix}$$

Suprimiendo los términos ψ de los voltajes de estator y simplificando las expresiones algebraicas se tiene:

$$\begin{bmatrix} V_{\alpha s}^+ \\ V_{\alpha s}^- \end{bmatrix} = (r_{\alpha s} + jX_s) \begin{bmatrix} I_{\alpha s}^+ \\ I_{\alpha s}^- \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \{ (r_{\beta s} - r_{\alpha s}) + j(X_{\beta s} - X_{\alpha s} - X_c) \} \begin{bmatrix} I_{\alpha s}^+ - I_{\alpha s}^- \\ I_{\alpha s}^- - I_{\alpha s}^+ \end{bmatrix} \dots \\ + jX_m \begin{bmatrix} I_{\alpha s}^+ + I_{\alpha r}^+ \\ I_{\alpha s}^- + I_{\alpha r}^- \end{bmatrix} \quad (2.3.93)$$

De la ecuación de voltajes del rotor se obtiene:

$$I_{\alpha r}^+ = \frac{-jX_m}{r_r/s + j(X_r + X_m)} I_{\alpha s}^+, \quad I_{\alpha r}^- = \frac{-jX_m}{r_r/(2-s) + j(X_r + X_m)} I_{\alpha s}^-.$$

Se sustituye $I_{\alpha r}^+$ y $I_{\alpha r}^-$ en el último término de la derecha de (2.3.93) se tiene la siguiente relación

$$jX_m \begin{bmatrix} I_{\alpha s}^+ + I_{\alpha r}^+ \\ I_{\alpha s}^- + I_{\alpha r}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_f I_{\alpha s}^+ \\ Z_b I_{\alpha s}^- \end{bmatrix}$$

donde

$$Z_f = \frac{-jX_m(r_r/s + jX_r)}{r_r/s + j(X_r + X_m)}, \quad Z_b = \frac{-jX_m(r_r/(2-s) + jX_r)}{r_r/(2-s) + j(X_r + X_m)}.$$

Sustituyendo y cambiando en forma de impedancias

$$\begin{bmatrix} V_{\alpha s}^+ \\ V_{\alpha s}^- \end{bmatrix} = Z_{lqs} \begin{bmatrix} I_{\alpha s}^+ \\ I_{\alpha s}^- \end{bmatrix} + \frac{1}{2} (Z_{\beta s} - Z_{\alpha s} + Z_c) \begin{bmatrix} I_{\alpha s}^+ - I_{\alpha s}^- \\ I_{\alpha s}^- - I_{\alpha s}^+ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_f I_{\alpha s}^+ \\ Z_b I_{\alpha s}^- \end{bmatrix} \quad (2.3.94)$$

donde

$$Z_{\alpha s} = (r_{\alpha s} + jX_s), \quad Z_{\beta s} = r_{\beta s} + jX_{\beta s}, \quad Z_c = -jX_c.$$

Manipulando (2.3.94) las componentes de secuencia positiva y negativa son:

$$\begin{aligned} V_{\alpha s}^+ &= (0.5 (Z_{\beta s} + Z_{\alpha s} + Z_c) + Z_f) I_{\alpha s}^+ - 0.5 (Z_{\beta s} - Z_{\alpha s} + Z_c) I_{\alpha s}^- \\ V_{\alpha s}^- &= (0.5 (Z_{\beta s} + Z_{\alpha s} + Z_c) + Z_b) I_{\alpha s}^- - 0.5 (Z_{\beta s} - Z_{\alpha s} + Z_c) I_{\alpha s}^+ \end{aligned}$$

de la transformación (2.3.86) se tiene

$$V_{\alpha s}^+ = \frac{1}{2} (V_s - jV_s/n) = \frac{V_s}{2} (1 - j/n), \quad V_{\alpha s}^- = \frac{1}{2} (V_s + jV_s/n) = \frac{V_s}{2} (1 + j/n)$$

con

$$Z_1 = \frac{1}{2} (Z_{\beta s} + Z_{\alpha s} + Z_c), \quad Z_2 = \frac{1}{2} (Z_{\beta s} - Z_{\alpha s} + Z_c), \quad Z_{\alpha s} = Z_1 - Z_2.$$

De tal manera que (2.3.94) se puede expresar en forma matricial

$$\begin{bmatrix} V_{\alpha s}^+ \\ V_{\alpha s}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Z_1 + Z_f) & -Z_2 \\ -Z_2 & (Z_1 + Z_b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\alpha s}^+ \\ I_{\alpha s}^- \end{bmatrix} \quad (2.3.95)$$

Las componentes de secuencia positiva y negativa de las corrientes del estator se pueden obtener de (2.3.95). Finalmente el circuito equivalente en estado estable se muestra en la siguiente Fig. 2.19. La combinación en paralelo de jX_m y $r_r'/s + jX_r'$ es comúnmente referida como la impedancia de secuencia positiva y la combinación en paralelo de jX_m y $r_r'/(2-s) + jX_r'$ es la impedancia de secuencia negativa.

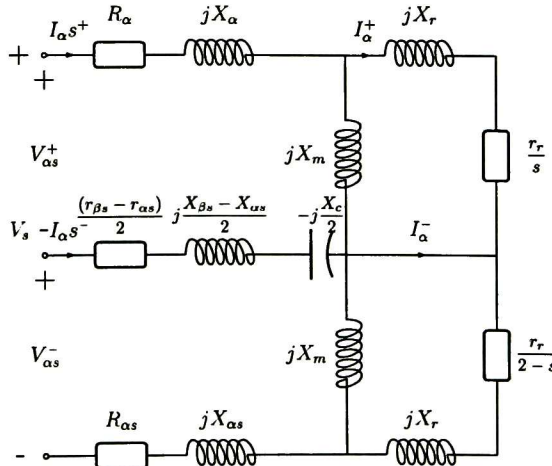


Figura 2.19: Circuito equivalente en estado estable.

2.3.5 Par Electromagnético

El par electromagnético se expresa de la forma

$$T_e = \frac{P}{2} \eta L_m (i_{\alpha s}^s i_{\beta r}^s - i_{\beta s}^s i_{\alpha r}^s) \quad (2.3.96)$$

En estado estable las corrientes se representan en términos de sus fasores como:

$$\begin{aligned} i_{\alpha s}^s &= \text{Re} \left[\sqrt{2} i_{\alpha s}^s e^{j\varphi_{\alpha s}} e^{j\omega_e t} \right] = \text{Re} \left[\sqrt{2} \tilde{i}_{\alpha s}^s e^{j\omega_e t} \right] \\ i_{\beta s}^s &= \text{Re} \left[\sqrt{2} i_{\beta s}^s e^{j\varphi_{\beta s}} e^{j\omega_e t} \right] = \text{Re} \left[\sqrt{2} \tilde{i}_{\beta s}^s e^{j\omega_e t} \right] \\ i_{\alpha r}^s &= \text{Re} \left[\sqrt{2} i_{\alpha r}^s e^{j\varphi_{\alpha r}} e^{j\omega_e t} \right] = \text{Re} \left[\sqrt{2} \tilde{i}_{\alpha r}^s e^{j\omega_e t} \right] \\ i_{\beta r}^s &= \text{Re} \left[\sqrt{2} i_{\beta r}^s e^{j\varphi_{\beta r}} e^{j\omega_e t} \right] = \text{Re} \left[\sqrt{2} \tilde{i}_{\beta r}^s e^{j\omega_e t} \right] \end{aligned} \quad (2.3.97)$$

Los productos de las corrientes se expresan en las siguientes operaciones parciales

$$i_{\alpha s}^s i_{\beta r}^s = \text{Re} \left[\tilde{i}_{\alpha s}^s \tilde{i}_{\beta r}^s e^{j2\omega_e t} + \tilde{i}_{\alpha s}^s \tilde{i}_{\beta r}^{s*} \right]$$

$$i_{\beta s}^s i_{\alpha r}^s = \text{Re} \left[\tilde{i}_{\beta s}^s \tilde{i}_{\alpha r}^s e^{j2\omega_e t} + \tilde{i}_{\beta s}^s \tilde{i}_{\alpha r}^{s*} \right]$$

El par electromagnético en estado estable consta de dos términos, uno constante (par promedio) y otro que varía con el tiempo (par pulsante). El par promedio es

$$T_{e(avg)} = \frac{P}{2} \eta L_m \text{Re} \left[\tilde{i}_{\alpha s}^s \tilde{i}_{\beta r}^{s*} - \tilde{i}_{\beta s}^s \tilde{i}_{\alpha r}^{s*} \right] \quad (2.3.98)$$

El par pulsante oscila con una frecuencia dos veces la frecuencia de suministro

$$T_{e(pul)} = \frac{P}{2} \eta L_m \text{Re} \left[\tilde{i}_{\alpha s}^s \tilde{i}_{\alpha r}^s - \tilde{i}_{\beta s}^s \tilde{i}_{\beta r}^s \right] e^{j2\omega_e t}. \quad (2.3.99)$$

Se desarrolla la parte real de la ecuación del par promedio (2.3.98), se sustituyen las corrientes del motor para expresar el par promedio en función del voltaje de alimentación, la reactancia del capacitor y los parámetros del motor.

$$\text{Re} \left\{ \tilde{i}_{\alpha s}^s \tilde{i}_{\beta r}^{s*} - \tilde{i}_{\beta s}^s \tilde{i}_{\alpha r}^{s*} \right\} = \text{Re} \left\{ Z_b^* \left(-n \tilde{i}_{\beta s}^s \tilde{i}_{\beta s}^{s*} - \frac{1}{n} \tilde{i}_{\alpha s}^s \tilde{i}_{\alpha s}^{s*} \right) + Z_a^* \left(\tilde{i}_{\beta s}^s \tilde{i}_{\alpha s}^{s*} - \tilde{i}_{\alpha s}^s \tilde{i}_{\beta s}^{s*} \right) \right\} \quad (2.3.100)$$

se considera por separado cada término

$$-n \tilde{i}_{\beta s}^s \tilde{i}_{\beta s}^{s*} - \frac{1}{n} \tilde{i}_{\alpha s}^s \tilde{i}_{\alpha s}^{s*} = \frac{|v_s|^2}{|\Delta|^2} \left[-n (\beta_1^2 + \beta_2^2) - \frac{1}{n} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) - \frac{1}{n} (X_c^2 - 2\alpha_2 X_c) \right]$$

definiendo la constante α

$$\alpha = -n (\beta_1^2 + \beta_2^2) - \frac{1}{n} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)$$

se tiene

$$-n \tilde{i}_{\beta s}^s \tilde{i}_{\beta s}^{s*} - \frac{1}{n} \tilde{i}_{\alpha s}^s \tilde{i}_{\alpha s}^{s*} = \frac{|v_s|^2}{|\Delta|^2} \left[\alpha - \frac{1}{n} (X_c^2 - 2\alpha_2 X_c) \right]$$

y el segundo término,

$$\tilde{i}_{\beta s}^s \tilde{i}_{\alpha s}^{s*} - \tilde{i}_{\alpha s}^s \tilde{i}_{\beta s}^{s*} = j2 \frac{|v_s|^2}{|\Delta|^2} [\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 (\alpha_2 - X_c)]$$

incorporando los términos a la ecuación original (2.3.100),

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ \tilde{i}_{\alpha s}^s \tilde{i}_{\beta r}^{s*} - \tilde{i}_{\beta s}^s \tilde{i}_{\alpha r}^{s*} \right\} &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{|v_s|^2}{\Delta} \left[\frac{Z_b^*}{\Delta^*} \left(\alpha - \frac{1}{n} (X_c^2 - 2\alpha_2 X_c) \right) \right] \right\} + \dots \\ \operatorname{Re} \left\{ \frac{|v_s|^2}{\Delta} \left[j \frac{2Z_a^*}{\Delta^*} (\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 (\alpha_2 - X_c)) \right] \right\} & \end{aligned} \quad (2.3.101)$$

con $\Delta \triangleq (\delta_{11} + \delta_{21} X_c) + j (\delta_{12} + \delta_{22} X_c)$, se tiene que

$$\frac{1}{\Delta^*} = \frac{\Delta}{MX_c^2 + NX_c + Q} = \frac{\Delta}{Y}$$

donde

$$\begin{aligned} M &= \delta_{21}^2 + \delta_{22}^2 \\ N &= 2 (\delta_{11} \delta_{21} - \delta_{12} \delta_{22}) \\ Q &= \delta_{11}^2 + \delta_{12}^2. \end{aligned}$$

Se sustituye la expresión (2.3.101):

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ \tilde{I}_{\alpha s}^s \tilde{i}_{\beta r}^{s*} - \tilde{i}_{\beta s}^s \tilde{i}_{\alpha r}^{s*} \right\} &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{|v_s|^2}{\Delta} \left\{ \frac{\Delta Z_b^*}{Y} \left(\alpha - \frac{1}{n} (X_c^2 - 2\alpha_2 X_c) \right) \right\} \right\} + \dots \\ \operatorname{Re} \left\{ \frac{|v_s|^2}{\Delta} \left\{ j \frac{2\Delta Z_a^*}{Y} (\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 (\alpha_2 - X_c)) \right\} \right\} & \end{aligned}$$

y al reducir se tiene

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ \tilde{i}_{\alpha s}^s \tilde{i}_{\beta r}^{s*} - \tilde{i}_{\beta s}^s \tilde{i}_{\alpha r}^{s*} \right\} &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{|v_s|^2}{Y} \left\{ Z_b^* \left(\alpha - \frac{1}{n} (X_c^2 - 2\alpha_2 X_c) \right) \right\} \right\} + \dots \\ \operatorname{Re} \left\{ \frac{|v_s|^2}{Y} \left\{ j2Z_a^* (\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 (\alpha_2 - X_c)) \right\} \right\}. & \end{aligned} \quad (2.3.102)$$

En la expresión (2.3.102) se sustituye el conjugado de las impedancias Z_a y Z_b se tiene:

$$\operatorname{Re} \left\{ \tilde{i}_{\alpha s}^s \tilde{i}_{\beta r}^{s*} - \tilde{i}_{\beta s}^s \tilde{i}_{\alpha r}^{s*} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{|v_s|^2}{T} \left\{ (Z_{b1} (\alpha + \frac{2}{n} \alpha_2 X_c - \frac{1}{n} X_c^2) + 2Z_{a2} (\beta_2 \alpha_1 - \beta_1 \alpha_2 + \beta_1 X_c)) - \dots \right. \right. \\ \left. \left. j (Z_{b2} (\alpha + \frac{2}{n} \alpha_2 X_c - \frac{1}{n} X_c^2) - 2Z_{a1} (\beta_2 \alpha_1 - \beta_1 \alpha_2 + \beta_1 X_c)) \right\} \right\}. \quad (2.3.103)$$

Se toma solo la primer parte de la expresión (2.3.103) tal que,

$$\operatorname{Re} \left\{ \tilde{I}_{\alpha s}^s \tilde{I}_{\beta r}^{s*} - \tilde{I}_{\beta s}^s \tilde{I}_{\alpha r}^{s*} \right\} = \frac{|\tilde{V}_s|^2}{T} \left\{ -\frac{Z_{b1}}{n} X_c^2 + \left(2\beta_1 Z_{a2} + \frac{2\alpha_2}{n} Z_{b1} \right) X_c + 2Z_{a2} (\beta_2 \alpha_1 - \beta_1 \alpha_2) + \alpha Z_{b1} \right\} \quad (2.3.104)$$

Se presenta la expresión (2.3.104) de la siguiente forma

$$\operatorname{Re} \left\{ \tilde{I}_{\alpha s}^s \tilde{I}_{\beta r}^{s*} - \tilde{I}_{\beta s}^s \tilde{I}_{\alpha r}^{s*} \right\} = \frac{|\tilde{V}_s|^2}{T} \left\{ AX_c^2 + BX_c + D \right\} = |\tilde{V}_s|^2 \left\{ \frac{AX_c^2 + BX_c + D}{MX_c^2 + NX_c + Q} \right\}$$

donde

$$\begin{aligned} A &= -\frac{Z_{b1}}{n} \\ B &= 2\beta_1 Z_{a2} + \frac{2\alpha_2}{n} Z_{b1} \\ D &= 2Z_{a2} (\beta_2 \alpha_1 - \beta_1 \alpha_2) + \alpha Z_{b1}. \end{aligned}$$

Finalmente el par electromagnético promedio del motor es:

$$T_{e(avg)} = \frac{P}{2} \eta L_m |v_s|^2 \left\{ \frac{AX_c^2 + BX_c + D}{MX_c^2 + NX_c + Q} \right\}. \quad (2.3.105)$$

El valor extremo del par promedio se obtiene haciendo cero la derivada del par respecto de la capacitancia. El máximo será aquel valor de la capacitancia donde la segunda derivada del par respecto de la capacitancia sea positiva:

$$\frac{\partial T_{e(avg)}}{\partial X_c} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 T_{e(avg)}}{\partial X_c^2} > 0. \quad (2.3.106)$$

Realizando un procedimiento similar con la ecuación (2.3.99) se obtiene el par pulsante como una función explícita de la reactancia del capacitor de la forma

$$T_{e(pul)} = \frac{P}{2} \eta L_m |v_s|^2 \left\{ \frac{|Z_b| \sqrt{\frac{1}{n^2} X_c^4 - \frac{4}{n^2} \alpha_2 X_c^3 + \zeta_1 X_c^2 + \zeta_2 X_c + \zeta_3}}{MX_c^2 + NX_c + Q} \right\}. \quad (2.3.107)$$

Una expresión matemática que nos permite obtener un valor de capacitancia para el motor, donde el par pulsante en estado estable sea mínimo es la siguiente:

$$\frac{\partial T_{e(pul)}}{\partial X_c} = 0. \quad (2.3.108)$$

El valor extremo de la magnitud del par pulsante se obtiene de igualar a cero la derivada de la magnitud del par pulsante respecto de la capacitancia. El valor mínimo será aquel donde la segunda derivada sea negativa

$$\frac{\partial^2 T_{e(pul)}}{\partial^2 X_c} < 0.$$

El calculo de las derivadas parciales para el capacitor promedio así como el desarrollo y las derivadas parciales para el par pulsante se encuentran en el Apéndice B.1.

La dependencia del par pulsante respecto de la reactancia y velocidad se presenta en las siguiente gráficas:

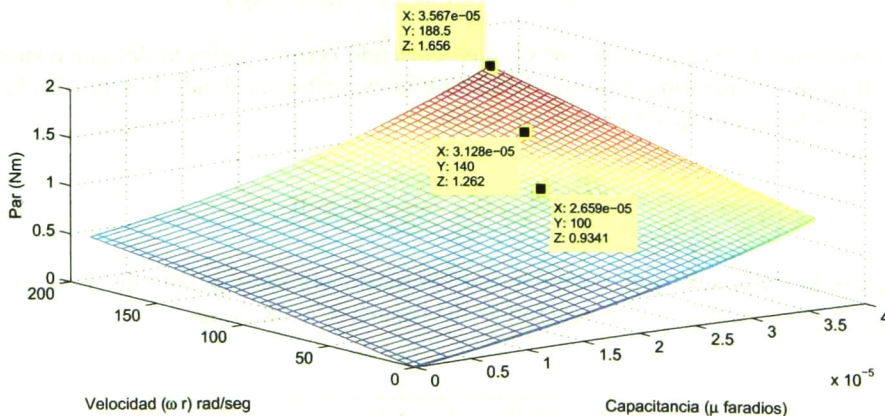


Figura 2.20: Característica par promedio-velocidad-Xc.

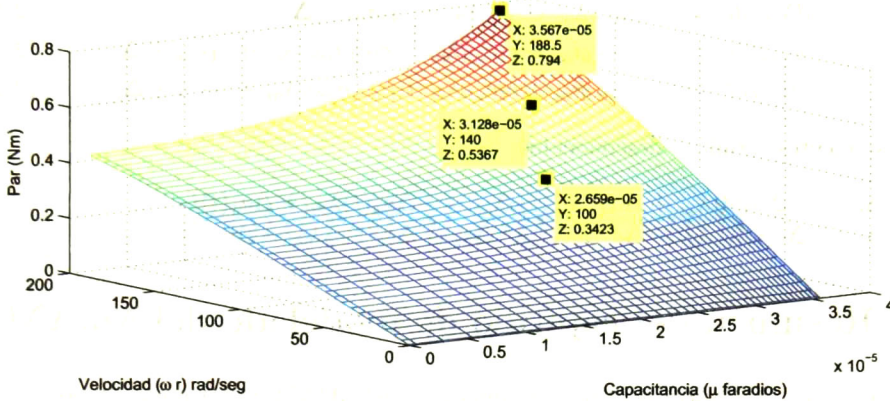


Figura 2.21 Característica par pulsante-velocidad-Xc.

En las figuras 2.20 y 2.21 se muestran las gráficas de dependencia del par promedio con respecto a la reactancia del capacitor para diferentes velocidades.

2.3.6 Modelo del MJAM con incertidumbre

Durante la operación del MJAM la resistencia del rotor cambia (la principal razón son los cambios de temperatura) con respecto al valor nominal $R_{r,0}$. La resistencia del rotor se puede expresar como la suma de su valor nominal mas una función que depende del tiempo $R_r(t) = R_{r,0} + \Delta R_r(t)$, con $\Delta R_r(t)$ como una función desconocida en el tiempo [11]. Los coeficientes a_i del modelo dinámico del motor (2.3.56)-(2.3.59) se representan como

$$a_1(t) = a_{1,0} + \Delta a_1(t), a_2(t) = a_{2,0} + \Delta a_2(t), a_3(t) = a_{3,0} + \Delta a_3(t),$$

$$a_4(t) = a_{4,0} + \Delta a_4(t), c_4(t) = c_{4,0} + \Delta c_4(t)$$

donde los valores nominales de los coeficientes $a_{i,0}$ son

$$a_{1,0} = \left(R_{\alpha s} + R_{r,0} \frac{L_m^2}{L_r^2} \right), a_{2,0} = \left(R_{\beta s} + R_{r,0} \frac{L_m^2}{L_r^2} \right), a_{3,0} = \frac{R_{r,0}}{L_r}, a_{4,0} = \frac{R_{r,0}}{L_r} L_m, c_{4,0} = \frac{R_{r,0}}{L_r^2} L_m$$

con $\Delta a_1(t) = \Delta a_2(t) = \frac{L_m^2}{L_r^2} \Delta R_r(t)$, $\Delta a_3(t) = \frac{1}{L_r} \Delta R_r(t)$, $\Delta a_4(t) = \frac{L_m}{L_r} \Delta R_r(t)$,
 $\Delta c_4(t) = \frac{L_m}{L_r^2} \Delta R_r(t)$.

las dinámicas de flujo y de corriente del modelo del MJAM con incertidumbre puede formularse como sigue

$$d\lambda_{\alpha r}/dt = -a_{3,0}\lambda_{\alpha r} + n_p\omega_r\lambda_{\beta r} + a_{4,0}i_{\alpha s} + \Delta_{\alpha r} \quad (2.3.109)$$

$$d\lambda_{\beta r}/dt = -n_p\omega_r\lambda_{\alpha r} - a_{3,0}\lambda_{\beta r} + a_{4,0}i_{\beta s} + \Delta_{\beta r} \quad (2.3.110)$$

$$di_{\alpha s}/dt = -c_1a_{1,0}i_{\alpha s} + c_1c_{4,0}\lambda_{\alpha r} - c_1c_3n_p\omega_r\lambda_{\beta r} + c_1v_{\alpha s} + \Delta_{\alpha s} \quad (2.3.111)$$

$$di_{\beta s}/dt = -c_2a_{2,0}i_{\beta s} + c_2c_{4,0}\lambda_{\beta r} + c_2c_3n_p\omega_r\lambda_{\alpha r} + c_2v_{\beta s} + \Delta_{\beta s} \quad (2.3.112)$$

con los siguientes términos desconocidos

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha r} &= -\Delta a_3(t)\lambda_{\alpha r} + \Delta a_4(t)i_{\alpha s}, & \Delta_{\beta r} &= -\Delta a_3(t)\lambda_{\beta r} + \Delta a_4(t)i_{\beta s}, \\ \Delta_{\alpha s} &= \Delta c_4(t)c_1\lambda_{\alpha r} - \Delta a_1(t)c_1i_{\alpha s}, & \Delta_{\beta s} &= \Delta c_4(t)c_2\lambda_{\beta r} - \Delta a_2(t)c_2i_{\beta s}. \end{aligned} \quad (2.3.113)$$

2.4 Resumen del capítulo de modelado del MJAM

En este capítulo se desarrolla el modelo dinámico del MJAM en términos de las corrientes de estator y flujos del rotor en el marco de referencia estacionario $\alpha\beta$. Se describe un control automático propuesto para la conmutación del interruptor del capacitor. Esto es semejante a un capacitor promedio equivalente que se puede utilizar para múltiples propósitos. Se desarrolla el modelo del motor en términos de las componentes simétricas para operación desbalanceada en estado estable. Se desarrolla la dependencia de las dos componentes del par electromagnético (promedio y pulsante) del motor en función de la reactancia conmutada y de la velocidad del motor. Se propone un modelo del MJAM con incertidumbre en la resistencia del rotor.

Capítulo 3

Teoría de control y observador no lineal

3.1 Introducción

En este capítulo se describe la teoría de modos deslizantes [65,67], para el diseño de superficies de control y sus algoritmos. Esta se aplica a una clase de sistemas lineales y no lineales que están en la forma controlable a bloques; este es el caso del modelo del motor jaula de ardilla monofásico que se presentó en el capítulo 2.

Para mejorar el desempeño de MJAM, se diseña un esquema de control con retroalimentación para el rechazo de perturbaciones. El problema de diseño se divide en tres sub-problemas: a) el diseño del controlador con retroalimentación para dar seguimiento al perfil velocidad y la regulación magnitud del módulo de flujo (Se eligen las superficies deslizantes tal que el controlador de MD rechaza las perturbaciones y reduce el chattering), b) el diseño de observador para estimar los flujos del rotor y el par de carga, y c) el análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado para el diseño de retroalimentación basado en el observador.

Cabe señalar que el MJAM tiene una sola entrada básica de control, que se aplica al devanado principal, y el auxiliar se ve afectado por el condensador conmutado, esto asemeja un sistema "sub-actuado" Para ejemplificar esta situación, se utiliza; la estrategia de control vectorial del MJAM [60], y una transformación de variables de estado [8] que elimina las asimetrías y deriva el modelo simétrico. Esta transformación, así como el control de orientación de campo dependen de los parámetros de la planta. En general las plantas en la práctica, están sometidas a variaciones como resultado de un cambio en la carga del sistema y/o en la configuración del sistema. Por otra parte, este esquema de control no tiene en cuenta la restricción de la entrada de control auxiliar, que depende de los parámetros y la conmutación del interruptor que puede tomar sólo dos valores "0" o "1"

El segundo sub-problema, específicamente, la estimación de flujo del rotor y par de carga, este se obtiene normalmente; del modelo de la máquina, la medición de la velocidad, el voltaje de entrada y la corriente de estator [65, 69]. Varios observadores de flujo se han propuesto siguiendo diferentes enfoques como el adaptable [48, 52], redes neuronales [1, 2] y modos deslizantes (MD) [4, 6, 24, 66, 72], incluyendo los casos de esquemas de detección de fallas [56] y tolerancia de falla [17]. Los observadores propuestos garantizan robustez en presencia de incertidumbre en el modelo de la planta. Sin embargo, sólo proporcionan una convergencia asintótica del error de observación flujo. Un observador robusto de segundo orden de modos deslizantes (MD) de tiempo finito para un motor jaula de ardilla monofásico se propone en [24]. Este observador proporciona una alta eficiencia, sin embargo, el procedimiento de diseño propuesto requiere el conocimiento de la derivada de la función de deslizamiento, que es desconocida. Por otra parte, la función de deslizamiento propuesta depende de los parámetros del motor que pueden variar. Se puede ver que, para el MJAM, un observador de flujo que utiliza un compensador lineal en la forma de diferenciador real, ha sido diseñado en [10] para la planta nominal, sin ningún análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado que incluya el observador.

En el análisis de la estabilidad del sistema completo de controlador/observador, se puede aplicar el principio de separación propuesto en [3]. Sin embargo, este principio fue desarrollado para una cierta clase de sistemas no lineales de fase mínima que se puede presentar en forma de observador canónico, y luego puede ser diseñado un observador de alta ganancia. El caso del motor jaula de ardilla abarca un escenario controlador/observador diferente, y la aplicación del esquema controlador/observador descrito en [3] es cuestionable, y por el momento no trivial. Es necesario, una precisa verificación de la conjunción del MJAM y el controlador/observador.

Para el análisis del problema que se menciona con anterioridad se considera un sistema no lineal sin perturbaciones (3.1.1), que presenta una forma controlable a bloques que consiste r bloques del sistema

$$\dot{x} = f(x, t) + B(x, t)u. \quad (3.1.1)$$

donde $x \in X \subset R^n$ es el vector de estados, $u \in U \subset R^m$ es el vector de control acotado por,

$$|u_i| \leq u_0 \text{ con } u_0 > 0, \quad u = (u_1, \dots, u_m)^T, \quad (3.1.2)$$

El vector, $f(x, t)$ y las columnas de $B(x, t)$ son campos vectoriales acotados y suficientemente suaves de clase $C_{[0, \infty)}^\infty$. $f(0, t) = 0$, y rango $B(x, t) = m$ para todo $x \in X$ y $t \geq 0$.

El problema del diseño de control por modos deslizantes consiste en dos pasos:

1. Elección de una superficie deslizante en espacio de estados

$$\sigma(x) = 0, \quad \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)^T \quad (3.1.3)$$

de manera que el movimiento del sistema, sobre la superficie exhiba las propiedades deseadas como: estabilización, seguimiento de trayectorias, invarianza ante perturbaciones, etc.

2. Diseño de la dinámica de control discontinua

$$u_i(x, t) = \begin{cases} u_i^+(x, t) & \text{si } \sigma_i(x) > 0 \\ u_i^-(x, t) & \text{si } \sigma_i(x) < 0 \end{cases}, i = 1, \dots, m \quad (3.1.4)$$

que garantice que el estado del sistema alcance la superficie y permanezca en ella.

El efecto de este control discontinuo de modos deslizantes, conduce al estado del sistema hacia una superficie de conmutación (o deslizante) y lo restringe a permanecer ahí. El movimiento del sistema en la superficie, llamado modo deslizante, es robusto respecto a incertidumbres y a perturbaciones afines al espacio de control.

Los modos deslizantes son una propuesta excepcional en la investigación reciente del control discontinuo. En modos deslizantes una función discontinua $u(x)$, puede ser, un relevador, un conmutador de alta frecuencia, etc., donde sus entradas $\sigma(x)$ tienden a cero durante los modos deslizantes mientras la salida toma valores finitos (mas preciso el valor medio de la salida, ya que contiene algunos componentes de alta frecuencia). Lo que significa que dichas funciones discontinuas tienen una alta ganancia (teóricamente infinita), lo que limita las perturbaciones e incertidumbre en el sistema. Difiere de los sistemas continuos de control de alta ganancia, el efecto de invariabilidad se alcanza al valerse de acciones de control finita. En segundo lugar, las trayectorias de los modos deslizantes están en alguna variedad de dimensión menor a la del sistema. Es decir se reduce el orden de la ecuación de movimiento. Esto permite la simplificación, la descomposición del procedimiento y el diseño del control [67].

Una parte crucial de la naturaleza de los esquemas de control de modo deslizante es el control discontinuo. En lazo cerrado, la "conmutación" en la acción de control, frecuentemente resulta en oscilaciones de alta frecuencia en implementaciones prácticas.

Las dinámicas rápidas en los actuadores y sensores, son controladas por el control de modos deslizantes, que trabaja con frecuencias altas, de valor finito. Este fenómeno, común en los sistemas de control de alta ganancia, es conocida como castañeteo (chattering).

Existen varios métodos para la obtención de las ecuaciones de modos deslizantes, empezando con un método heurístico más fácil de comprender que se llama método del control equivalente.

3.2 Diseño de variedades deslizantes

3.2.1 Método del control equivalente

El control por modos deslizantes es de frecuencia muy alta, teóricamente infinita. Esto dificulta la concepción sobre el comportamiento de las ecuaciones dinámicas en lazo cerrado. Para obtener la ecuación de modos deslizantes a lo largo de la intersección de un conjunto de superficies discontinuas, para el sistema (3.1.1), se utiliza el método de control equivalente.

Se supone que existen modos deslizantes sobre la variedad (3.1.3) y un control continuo que para cualquier condición inicial del vector de estados sobre la variedad, la derivada respecto al tiempo del vector de superficie $\sigma(x)$ sea igual a cero a lo largo de la trayectoria del sistema (3.1.1),

$$\dot{\sigma} = Gf + GBu + Gg = 0 \quad (3.2.1)$$

donde los renglones de la matriz $G = \partial\sigma/\partial x \in R^{m \times n}$ son los gradientes de las funciones $\sigma_i(x)$ y si se supone que la matriz GB es de rango pleno $\forall x \in X$ y $t \geq 0$ entonces existe una solución para el sistema de ecuaciones algebraicas (3.2.1) con respecto al control $u = u_{eq}(x, t)$, el cual se puede llamar control equivalente. La función continua $u_{eq}(x, t) = -(GB)^{-1}(Gf + Gg)$, se sustituye por el control discontinuo u en el sistema original (3.1.1):

$$\dot{x} = f_s(x, t) + g_s(x, t), \sigma(x) = 0 \quad (3.2.2)$$

donde

$$f_s = (I_n - B(GB)^{-1}G)f \text{ y } g_s = (I_n - B(GB)^{-1}G)g.$$

Se tiene que para condiciones iniciales $\sigma(x(t_0)) = 0$, conforme a (3.2.1), los movimientos adicionales determinados por (3.2.2) llevará las trayectorias de los estados sobre la variedad $\sigma(x)$. Este procedimiento es llamado método del control equivalente y la ecuación (3.2.2) se conoce como la ecuación del modo deslizante, que garantiza el movimiento sobre las intersecciones de las superficies discontinuas $\sigma_i(x) = 0$, $i = 1, \dots, m$.

Desde el punto de vista geométrico, el método del control equivalente implica una sustitución del control discontinuo no definido sobre el límite de la discontinuidad, por un control continuo, que dirige al vector velocidad de espacio de estado del sistema, a lo largo de las intersecciones de las superficies discontinuas. Para encontrar este vector en un sistema con una superficie discontinua simple $\sigma(x) = 0$ en algún punto (x, t) , se varia la amplitud del control escalar desde $u_i^-(x, t)$ hasta $u_i^+(x, t)$, se gráfica el lugar geométrico de (3.2.2) y se encuentra el punto de intersección al plano tangencial. El punto de intersección, define el control equivalente $u_{eq}(x, t)$ y el lado derecho de $f(x, u_{eq})$ de la ecuación de modos deslizantes.

Si $g(x, t)$ de la ecuación (3.1.1) satisface la condición de acoplamiento (“matching condition”), $g(x, t) \in span B(x, t)$, existe un vector $\mu(x, t)$ tal que

$$g(x, t) = B(x, t)\mu(x, t) \quad \forall x \in X \text{ y } t \geq 0 \quad (3.2.3)$$

entonces $g_s = (I_n - B(GB)^{-1}G)B\mu = 0$, esto significa que el movimiento del modo deslizante es invariante respecto a estas perturbaciones. En este caso (3.2.2) se reduce a:

$$\dot{x} = f_s(x, t), \quad \sigma(x) = 0 \quad (3.2.4)$$

Se hace notar que la ecuación (3.2.4) tiene orden reducido ($n - m$), que simplifica la solución del primer paso en el problema del diseño del control por modos deslizantes, con respecto a la solución del problema original, sin embargo, el sistema es todavía no lineal y no autónomo. Para asegurar la estabilidad del sistema (3.2.4), se pueden usar técnicas de la teoría de linealización por retroalimentación. Existen entre otras técnicas las siguientes:

- Control por bloques o linealización paso a paso que se basa en la forma controlable por bloques [47];
- Linealización que se basa en la transformación del sistema original a la forma canónica [29];

3.2.2 Control a bloques para sistemas con perturbaciones

Realmente, todos los modelos matemáticos, se obtienen al utilizar leyes físicas o técnicas de identificación, y estos modelos contienen incertidumbres por errores de modelado y/o de perturbaciones externas desconocidas. Se sabe, que el controlador por modos deslizantes asegura trayectorias de movimiento invariante solo ante perturbaciones, que pertenecen al subespacio del control ("matching condition"). Es importante resolver el problema de diseño de superficies deslizantes para sistemas no lineales que consideren las incertidumbres.

El caso de sistemas no lineales sujetos a perturbaciones de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, t) + B(x, t)u + D(x, t)w(t) \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

donde $x \in X \subset R^n$ es el vector de estados, $u \in U \subset R$ es el vector de control, $y \in Y \subset R^p$ es la salida regulada, w es un disturbio que se origina por un sistema externo

$$\dot{w} = s(w). \quad (3.2.6)$$

Los campos vectores f y las columnas de B y D son campos vectoriales acotados y suficientemente suaves de clase $C_{[0, \infty)}^\infty$, con $f(0, t) = 0$, $h(0) = 0$, $s(0) = 0$. La salida y debe seguir a una señal de referencia $r(t)$ generada por un exosistema descrito por

$$\dot{r} = g(r), \quad g(0) = 0 \quad (3.2.7)$$

se supone que el sistema (3.2.5) se presenta (posiblemente después de una transformación no lineal) en la llamada forma no lineal controlable a bloques (FNCB) sujeto a perturbaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, t) + B_1(x_1, t)x_2 + D_1(x_1, t)w(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_i &= f_i(x_1, \dots, x_i, t) + B_i(x_1, \dots, x_i, t)x_{i+1} + D_i(x_1, \dots, x_i, t)w(t), \quad i = 2, \dots, r-1 \\ &\vdots \\ \dot{x}_r &= f_r(x_1, \dots, x_{r+1}, t) + B_r(x_1, \dots, x_{r+1}, t)u + D_r(x_1, \dots, x_{r+1}, t)w(t) \\ \dot{x}_{r+1} &= f_{r+1}(x_1, \dots, x_{r+1}, t) + B_{r+1}(x_1, \dots, x_{r+1}, t)u + D_{r+1}(x_1, \dots, x_{r+1}, t)w(t) \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

con la salida

$$y = h(x) \quad (3.2.9)$$

donde $x = (x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1})^T$, $x_i \in X_i \subset R^{n_i}$, y los índices (n_1, n_2, \dots, n_r) definen la estructura del sistema. El vector x_{i+1} se considera en cada i -ésimo bloque de (3.2.8) como control ficticio, y la matriz B_i que aparece antes de este vector tiene rango pleno.

Variedades deslizantes que incluyen términos lineales

Cuando la estructura del sistema (3.2.5), transformado a la forma (3.2.8), se presenta por

$$n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_r \leq m. \quad (3.2.10)$$

En síntesis, el problema consiste en el diseño de la estrategia de control para un sistema no lineal (3.2.8), de manera que la salida y siga a la referencia $r(t)$, que sea invariante a las perturbaciones w , que se producen por el sistema externo (3.2.7).

Ahora se toma en cuenta la estructura (3.2.10) se tiene que $n_1 = n_2$, por consiguiente $B_1(x_1, t)$ es cuadrada y existe su inversa. Se define el error de control como

$$z_1 = x_1 - r = \Phi_1(x_1, r) \quad (3.2.11)$$

y al calcular su derivada se tiene,

$$\dot{z}_1 = f_1(x_1, t) + B_1(x_1, t)x_2 + d_1(x_1, w, r, t) \quad (3.2.12)$$

donde $d_1(x_1, w, r, t) = D_1(x_1, t)w - g(r)$.

Entonces se elige x_2 como el control ficticio del sistema (3.2.12) de la siguiente forma:

$$x_2 = -B_1^{-1}(x_1, t)[f_1(x_1, t) + d_1(x_1, w, r, t)] + B_1^{-1}(x_1, t)[-k_1 z_1 + \dot{z}_1] \quad (3.2.13)$$

donde z_2 es un vector de variables nuevas de $n_2 \times 1$ y k_1 es una constante positiva.

Con la transformación de variables (3.2.13), el primer bloque queda descrito en las nuevas variables z_1 y z_2 como

$$\dot{z}_1 = -k_1 z_1 + z_2.$$

La variable z_2 se obtiene a partir de (3.2.13) como

$$z_2 = f_1(x_1, t) + B_1(x_1, t)x_2 + d_1(x_1, w, r, t) + k_1(x_1 - r) \equiv \Phi_2(x_1, x_2, w, r, t) \quad (3.2.14)$$

ahora se deriva (3.2.14) a lo largo de las trayectorias (3.2.6), (3.2.7) y (3.2.8) resulta

$$\dot{z}_2 = \bar{f}_2(x_1, x_2, t) + \bar{B}_2(x_1, x_2, t)x_3 + d_2(x_1, x_2, w, r, t) \quad (3.2.15)$$

donde $\bar{f}_2 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial t}$, $d_2 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} D_1 w + \frac{\partial \Phi_2}{\partial w} s + \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} g$, $\bar{B}_2 = B_1 B_2$.

Se observa que el rango $\bar{B}_2 = \text{rango } B_2 = n_2$. Se supone ahora que $n_2 < n_3$, entonces la matriz $\bar{B}_2(x_1, x_2, t)$ no es cuadrada, y el control ficticio x_3 en (3.2.15) se selecciona de manera similar a (3.2.13)

$$x_3 = -\bar{B}_2^+(x_1, x_2, t) [\bar{f}_2(x_1, x_2, t) + d_2(x_1, x_2, w, r, t)] + \bar{B}_2^+(x_1, x_2, t) [-k_2 z_2 + E_{2,1} z_3] \quad (3.2.16)$$

donde z_3 es un vector de variables nuevas de $n_3 \times 1$, $k_1 > 0$, \bar{B}_2^+ denota la pseudo-inversa derecha de \bar{B}_2 y $E_{2,1} = \begin{bmatrix} I_{n_2} & 0 \end{bmatrix}$, $E_{2,1} \in R^{n_2 \times n_3}$, I_{n_2} es la matriz identidad. De esta forma, la ecuación (3.2.15) con (3.2.16) resulta en la forma

$$\dot{z}_2 = -k_2 z_2 + E_{2,1} z_3$$

Se toma la siguiente suposición:

H1. Los elementos de la matriz \bar{B}_2 se pueden ordenar de tal forma que la matriz cuadrada,

$$\tilde{B}_3(x_1, x_2, t) \equiv \begin{bmatrix} \bar{B}_2(x_1, x_2, t) \\ E_{2,2} \end{bmatrix}$$

con matriz $E_{2,2} = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_3-n_2} \end{bmatrix}$ tenga rango n_3 , $E_{2,2} \in R^{(n_3-n_2) \times n_3}$, $I_{n_3-n_2}$ es una matriz identidad. Al utilizar (3.2.15) la variable z_3 resulta como:

$$\begin{aligned} z_3 &= \tilde{B}_3(x_1, x_2, t)x_3 + \begin{bmatrix} \bar{f}_2(x_1, x_2, t) + d_2(x_1, x_2, w, r, t) + k_2 \Phi_2(x_1, x_2, w, r, t) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\equiv \Phi_3(x_1, x_2, w, r, t). \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

Para el próximo paso se toma la derivada de z_3 y se realiza el mismo planteamiento anterior, siguiendo el mismo procedimiento para los restantes i bloques, $i = 3, \dots, r-1$, para el caso

$n_i < n_{i+1}$ y bajo el supuesto H1 para las matrices \bar{B}_i , se tiene que el control ficticio es de la forma

$$x_{i+1} = -\bar{B}_i^+ (x_1, \dots, x_i, t) [\bar{f}_i (x_1, \dots, x_i, t) + d_i (x_1, \dots, x_i, t)] + \bar{B}_i^+ (x_1, \dots, x_i, t) [-k_i z_i + E_{i,1} z_{i+1}]$$

donde \bar{B}_i^+ es la pseudo-inversa por la derecha de $\bar{B}_i = \tilde{B}_{i-1} B_i$ y $E_{i,1} = [I_{n_i} \ 0]$, $E_{i,1} \in R^{n_i \times n_{i+1}}$, I_{n_i} es una matriz identidad. Las variables en z_{i+1} que se obtienen, forman una transformación no lineal de las variables de estado como

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 - r = \Phi_1 (x_1, r) \\ z_2 &= f_1 (x_1, t) + B_1 (x_1, t) x_2 + d_1 (x_1, w, r, t) + k_1 (x_1 - r) \equiv \Phi_2 (x_1, x_2, w, r, t) \\ z_3 &= \tilde{B}_3 (x_1, x_2, t) x_3 + \begin{bmatrix} \bar{f}_2 (x_1, x_2, t) + d_2 (x_1, x_2, w, r, t) + k_2 \Phi_2 (x_1, x_2, w, r, t) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\equiv \Phi_3 (x_1, x_2, w, r, t) \\ z_{i+1} &= \tilde{B}_{i+1} (x_1, \dots, x_{i+1}, t) x_{i+1} + \dots \\ &\quad \begin{bmatrix} \bar{f}_i (x_1, \dots, x_{i+1}, t) + d_i (x_1, \dots, x_{i+1}, w, r, t) + k_i \Phi_i (x_1, \dots, x_{i+1}, w, r, t) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\equiv \Phi_i (x_1, \dots, x_{i+1}, w, r, t) \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

donde $i = 3, \dots, r-1$, z_i es un vector de variables nuevas de $n_i \times 1$, es una constante positiva, $\tilde{B}_{i+1} \equiv \begin{bmatrix} \bar{B}_i \\ E_{i,2} \end{bmatrix}$, $E_{i,2} = [0 \ I_{n_{i+1}-n_i}]$, $E_{i,2} \in R^{(n_{i+1}-n_i) \times n_{i+1}}$ Entonces, el sistema en las nuevas coordenadas se presenta de la forma

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -k_1 z_1 + z_2 \\ \dot{z}_i &= -k_i z_i + E_{i,1} z_{i+1}, \quad i = 2, \dots, r-1 \\ \dot{z}_r &= \bar{f}_r (z, x_{r+1}, t) + \bar{B}_r (z, x_{r+1}, t) u + d_r (z, x_{r+1}, w, r, t) \\ \dot{x}_{r+1} &= \bar{f}_{r+1} (z, x_{r+1}, t) + \bar{B}_{r+1} (z, x_{r+1}, t) u + \bar{D}_{r+1} (z, x_{r+1}, t) w (t) \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

donde $z = (z_1, \dots, z_r)^T$ $\bar{B}_r = \tilde{B}_{r-1} B_r$, $\text{rango} \bar{B}_r = \text{rango} B_r = n_r$.

Control integral para la forma a bloques

Para generar modos deslizantes en el sistema (3.2.19), una selección natural de la variedad deslizante, al utilizar la transformación (3.2.18), es $\sigma (x, t) = 0$ que se puede definir por:

$$\sigma (x, t) \equiv z_r = \Phi_r (x_1, \dots, x_r, t). \quad (3.2.20)$$

Ahora se toma en cuenta una acotación tal que se propone la siguiente estrategia de control:

$$u = -k_r \text{sign} (\bar{B}_r^T \sigma) \quad (3.2.21)$$

Proposición 1: La ley de control (3.2.21) garantiza convergencia del movimiento del sistema en lazo cerrado sobre la variedad $z_r = 0$ o $\sigma = 0$ en un tiempo finito que se define como

$$t_s < t_0 + \frac{1}{\eta} \|\sigma(t_0)\|_2, \quad \eta > 0. \quad (3.2.22)$$

Prueba: Para probar la proposición (3.1.2) se elige una función definida positiva,

$$V = \frac{1}{2} \sigma^T \sigma \quad (3.2.23)$$

como la función candidata de Lyapunov. La derivada de (3.2.23) a lo largo de la forma a bloques transformada es

$$\dot{V} = \sigma^T [\bar{f}_r + d_r] - \sigma^T \bar{B}_r k_r \text{sign}(\bar{B}_r^T \sigma).$$

Se aplica la relación $\sigma^T \text{sign}(\sigma) = \|\sigma\|_1$ y $\|\sigma\|_1 \leq \|\sigma\|_2$ así se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sigma^T \bar{B}_r \bar{B}_r^{-1} (\bar{f}_r + d_r) - k_r \|\sigma^T \bar{B}_r\|_2 \\ &\leq -\|\sigma^T \bar{B}_r\|_2 [k_r - \|\bar{B}_r^{-1} (\bar{f}_r + d_r)\|_2] \end{aligned}$$

En el siguiente dominio:

$$\|\bar{B}_r^{-1} (\bar{f}_r + d_r)\|_2 \leq r_0, \quad r_0 < k_r \quad (3.2.24)$$

la derivada,

$$\dot{V} \leq -q_0 \|\sigma^T \bar{B}_r\|_2, \quad q_0 = k_r - r_0$$

es negativa y asegura la convergencia del vector de estado a la variedad $\sigma = 0$. \diamond

Para demostrar que la convergencia es finita, primero se asume que $\|\bar{B}_r^{-1}\|_2 \leq b_0$, y se utiliza la relación:

$$\|\sigma^T\|_2 = \|\sigma^T \bar{B}_r \bar{B}_r^{-1}\|_2 \leq \|\sigma^T \bar{B}_r\|_2 \|\bar{B}_r^{-1}\|_2 \leq b_0 \|\sigma^T \bar{B}_r\|_2$$

entonces $\|\sigma^T \bar{B}_r\|_2 \geq \frac{1}{b_0} \|\sigma^T\|_2$. Por lo tanto,

$$\dot{V} \leq -\beta \|\sigma\|_2, \quad \beta = \frac{q_0}{b_0}$$

o de $V = \frac{1}{2} \|\sigma\|_2^2$ (3.2.23) se despeja $\|\sigma\|_2 = \sqrt{2V}$ y se tiene

$$\dot{V} = -\beta \sqrt{2V} \quad (3.2.25)$$

Al aplicar el lema de comparación [30] podemos estimar la cota superior para cualquier solución de la desigualdad diferencial (3.2.25) como:

$$V(t) < \frac{1}{2} \left(\sqrt{2V(t_0)} - \beta(t - t_0) \right)^2$$

esto se debe a que,

$$\|\sigma(t)\|_2 < \|\sigma(t_0)\|_2 - \beta(t - t_0).$$

Con $\|\sigma(t)\|_2$ se desvanece en un tiempo finito,

$$t_s < t_0 + \frac{1}{\beta} \|\sigma(t_0)\|_2$$

y después de este tiempo existen modos deslizantes sobre la variedad $\sigma = 0$.

Ahora al utilizar el control discontinuo (3.2.21) y la función candidata de Lyapunov (3.2.23) se puede decir que el control asegura estabilidad de modos deslizantes si

$$k_r \geq \|\bar{B}_r^{-1}(z, x_{r+1}, t) u_{eq}\|_2 \quad (3.2.26)$$

donde u_{eq} es el control equivalente [67] calculado cuando $\ddot{\sigma} = 0$ ($\dot{z}_r = 0$) de la siguiente forma:

$$u_{eq} = -\bar{B}_r^{-1}(z, x_{r+1}, t) [\bar{f}_r(z, x_{r+1}, t) + d_r(z, x_{r+1}, w, r, t)] \quad (3.2.27)$$

Dinámica de modos deslizantes

Ahora si se sustituye (3.2.27) en (3.2.19), resulta la dinámica de modos deslizantes sobre la variedad $z_r = 0$, que se gobierna por el sistema de orden reducido

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -k_1 z_1 + z_2 \\ \dot{z}_i &= -k_i z_i + E_{i,1} z_{i+1}, \quad i = 2, \dots, r-2 \\ \dot{z}_{r-1} &= -k_r z_{r-1} \\ \dot{z}_{r+1} &= \hat{f}_{r+1}(z_1, \dots, z_{r-1}, 0, z_{r-1}, t) \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

donde $z_{r+1} = x_{r+1}$,

$$\begin{aligned} \hat{f}_{r+1} &= \bar{f}_{r+1}(z_1, \dots, z_{r-1}, 0, z_{r-1}, t) + \bar{D}_{r+1}(z_1, \dots, z_{r-1}, 0, z_{r-1}, t) w(t) \\ &\quad - \bar{B}_{r+1}(z_1, \dots, z_{r-1}, 0, z_{r-1}, t) \bar{B}_r^{-1}(z_1, \dots, z_{r-1}, 0, z_{r-1}, t) \\ &\quad [\bar{f}_r(z_1, \dots, z_{r-1}, 0, z_{r-1}, t) + d_r(z_1, \dots, z_{r-1}, 0, z_{r-1}, w, r, t)] \end{aligned}$$

Se define: $\xi^T = (z_1, \dots, z_{r-1})$ y $\eta = z_{r+1}$; el sistema (3.2.28) se representa como

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A_1 \xi \\ \dot{\eta} &= q(\xi, \eta, w, r, t) \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

$$\text{donde } q = \hat{f}_{r+1} \text{ y } A_1 = \begin{bmatrix} -k_1 I_{n_1} & I_{n_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 I_{n_2} & E_{2,1} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{r-2} I_{n_{r-2}} & E_{r-2,1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{r-1} I_{n_{r-1}} \end{bmatrix}$$

Se definen los dominios

$$D_1 = \{ \xi \in R^{n-n_r-n_{r+1}} \mid \|\xi\|_2 \leq r_1 \} \quad \text{y} \quad D_2 = \{ \eta \in R^{n_{r+1}} \mid \|\eta\| \leq r_2 \}$$

Entonces, como en la sección anterior, el sistema (3.2.29) es autónomo con respecto a la variable η , y la matriz A_1 es Hurwitz, por lo que la solución de este sistema se define como

$$\|\xi(t)\|_2 \leq h_1 \|\xi(t_s)\|_2 e^{-h_2(t-t_s)} \quad (3.2.30)$$

donde $h_1 = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P_1)}{\lambda_{\min}(P_1)}}$ y $h_2 = \frac{1}{2\lambda_{\max}(P_1)}$, y existe una solución única $P_1 = P_1^T > 0$ de la ecuación de Lyapunov

$$P_1 A_1 + A_1^T P_1 = -Q_1$$

para $Q_1 = Q_1^T > 0$, y t_s es el tiempo de inicio de los modos deslizantes.

La dinámica del sistema (3.2.29) dentro del subespacio $\{\xi = 0, \eta \in D_2 \in R^{n+r+1}\}$ se representa por la ecuación:

$$\dot{\eta} = q(0, \eta, w, r, t) \quad (3.2.31)$$

que está definida como la dinámica cero.

Se establecen las siguientes hipótesis:

A.1 La dinámica de (3.2.31) converge exponencialmente a un conjunto compacto

$$\|\eta\|_2 \leq b_1.$$

A.2 El mapeo $q : D_2 \times [0, \infty) \rightarrow R^{n+r+1}$ es continuo en el tiempo t y localmente Lipschitz en ξ y η tal que

$$\|q(\xi, \eta, w, r, t) - q(0, \eta, w, r, t)\|_2 \leq L \|\xi\|_2 \quad \forall \xi \in D_1, \quad \forall \eta \in D_2, \quad \forall t \geq t_0$$

donde $b_1 > 0$ y L es una constante de Lipschitz.

Si la hipótesis A.1 se satisface, entonces para el sistema (3.2.31) por el teorema converso de Lyapunov [30], existe una función de Lyapunov, $V(\eta, t)$ tal que satisface las siguientes propiedades

$$c_1 \|\eta\|_2^2 \leq V(\eta, t) \leq c_2 \|\eta\|_2^2 \quad (3.2.32)$$

$$\frac{\partial V(\eta, t)}{\partial t} + \frac{\partial V(\eta, t)}{\partial t} q(0, \eta, w, r, t) \leq -c_3 \|\eta\|_2^2 \quad (3.2.33)$$

$$\left\| \frac{\partial V(\eta, t)}{\eta} \right\|_2 \leq c_4 \|\eta\|_2 \quad (3.2.34)$$

para todo

$$\|\eta\|_2 > \mu_1$$

en $[0, \infty) \times D_1 \times D_2$, con constantes positivas c_1, c_2, c_3 y c_4 , donde μ_1 se define por el corolario 5.3 de [49] como

$$\mu_1 = b_1 \sqrt{\frac{c_1}{c_2}}$$

La siguiente proposición de [30] establece la propiedad de estabilidad de la dinámica de modos deslizantes (3.2.29).

Proposición 2: *Si se satisfacen las hipótesis A.1 y A.2, y*

$$\|\xi(t_s)\|_2 < \frac{r_2}{h_1} \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \frac{c_3 \theta}{c_4 L} \quad (3.2.35)$$

$$\|\eta(t_s)\|_2 < r_2 \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \quad (3.2.36)$$

entonces, la solución $(\|\xi(t)\|, \|\eta(t)\|)^T$ del sistema (3.2.29) es uniformemente acotada, y además $\xi(t)$ converge rápidamente a cero de forma exponencial.

Prueba. Se procede a demostrar que la dinámica cero del sistema converge a un conjunto compacto y la solución de $\xi(t)$ converge a cero exponencialmente. La convergencia exponencial $\xi(t)$ de la primera parte del sistema, que es autónomo (3.2.29) se estableció anteriormente en (3.2.30). Se necesita ahora establecer la convergencia de la solución $\eta(t)$ de la segunda parte del sistema (3.2.29) donde el vector se considera como la entrada. Para esto se utiliza la función $V(\eta, t)$ con las propiedades (3.2.32)-(3.2.34). La derivada con respecto al tiempo sobre las trayectorias de la segunda parte del sistema (3.2.29), es:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \eta} q(\xi, \eta, w, r, t) \\ &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \eta} q(0, \eta, w, r, t) + \frac{\partial V}{\partial \eta} q(\xi, \eta, w, r, t) - \frac{\partial V}{\partial \eta} q(0, \eta, w, r, t). \end{aligned}$$

Si se aplica la condición (3.2.33) se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -c_3 \|\eta\|_2^2 + \frac{\partial V}{\partial \eta} q(\xi, \eta, w, r, t) - \frac{\partial V}{\partial \eta} q(0, \eta, w, r, t) \\ &\leq -c_3 \|\eta\|_2^2 + \left\| \frac{\partial V}{\partial \eta} \right\|_2 \|q(\xi, \eta, w, r, t) - q(0, \eta, w, r, t)\|_2. \end{aligned}$$

Bajo la hipótesis A.2 la derivada,

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq -c_3 \|\eta\|_2^2 + c_4 L \|\eta\|_2 \|\xi\|_2 \\ &\leq -c_3 \|\eta\|_2^2 + \theta c_3 \|\eta\|_2^2 - \theta c_3 \|\eta\|_2^2 + c_4 L \|\eta\|_2 \|\xi\|_2 \\ &\leq -(1-\theta) c_3 \|\eta\|_2^2 - \|\eta\|_2 (\theta c_3 \|\eta\|_2 - c_4 L \|\xi\|_2) \\ &\leq -(1-\theta) c_3 \|\eta\|_2^2, \quad 0 < \theta < 1 \end{aligned} \quad (3.2.37)$$

es negativa en el dominio

$$\|\eta\|_2 > \frac{c_4 L}{\theta c_3} \|\xi\|_2 := \mu_2(t). \quad (3.2.38)$$

De la condición (3.2.32) se puede decir

$$\frac{V}{c_2} \leq \|\eta\|_2^2.$$

Ahora se sustituye la desigualdad anterior en (3.2.37) y resulta

$$\dot{V} \leq -\frac{(1-\theta)c_3}{c_2}V. \quad (3.2.39)$$

Al emplear el lema de comparación de [22], se obtiene la solución en el tiempo de (3.2.39)

$$V(t) \leq V(t_s) e^{\frac{(1-\theta)c_3}{c_2}(t-t_s)}$$

donde $V(t_s)$ es la condición inicial de los modos deslizantes, entonces esa es la condición inicial para este estudio. Se elije de (3.2.32)

$$\|\eta(t)\|_2^2 \leq \frac{1}{c_1}V(t)$$

y resulta

$$\|\eta(t)\|_2^2 \leq \frac{1}{c_1}V(t_s) e^{\frac{(1-\theta)c_3}{c_2}(t-t_s)} \quad (3.2.40)$$

Ahora se sustituye $V(t_s) \leq c_2 \|\eta(t_s)\|_2^2$ en (3.2.40) se tiene

$$\|\eta(t)\|_2 \leq \gamma_1 \|\eta(t_s)\|_2 e^{-\gamma_2(t-t_s)}, \forall t_s \leq t < t_1 \quad (3.2.41)$$

donde $\gamma_1 = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}$ y $\gamma_2 = \frac{(1-\theta)c_3}{2c_2}$. Si (3.2.35) se cumple, se logra que

$$\mu_2(t) < r_2 \sqrt{\frac{c_1}{c_2}}$$

y si además, se cumple la condición (3.2.36), entonces por el corolario 5.3 de [30], la solución $\eta(t)$ del sistema (3.2.29) converge exponencialmente al dominio

$$\|\eta(t)\|_2 \leq b_2(t), \forall t \geq t_1 \quad (3.2.42)$$

con $b_2(t)$ definido como

$$b_2(t) = \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \mu_2(t).$$

Cabe notar que la convergencia (3.2.42) tiene lugar cuando

$$b_2(t) = b_1$$

al utilizar (3.2.41) y (3.2.30) se tiene

$$\begin{aligned} b_2(t) &= \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \mu_2(t) \\ &= \sqrt{\frac{c_1}{c_2} \frac{c_4 L}{\theta c_3}} \|\xi(t)\|_2 \\ &= h_1 \|\xi(t_s)\|_2 e^{-h_2(t-t_s)} \end{aligned}$$

donde $\bar{h}_1 = \sqrt{\frac{c_1}{c_2} \frac{c_4 L}{\theta c_3}} h_1$ y se tiene que

$$b_2(t) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty$$

por lo tanto

$$\|\eta(t)\|_2 \leq \gamma_1 \|\eta(t_s)\|_2 e^{-\gamma_2(t-t_s)}. \quad \forall t_s \leq t < t_2 < t_1$$

y

$$\|\eta(t)\|_2 \leq b_1, \quad \forall t \geq t_2$$

lo que significa que la solución $\|\eta\|_2$ en el sistema (3.2.29) es uniformemente acotada. \diamond

Corolario 1 Por lo que se cumplen

A La condición (3.2.26)

B Las hipótesis A.1 y A.2

C Las condiciones de la proposición 2

Entonces la solución del sistema (3.2.8) con la ley de control (3.2.21) es uniformemente acotada, y además el error de control $z_1(t)$ converge exponencialmente a cero.

3.2.3 Modo deslizante integral (control discontinuo) [67]

Para el sistema (3.1.1), se elige primero una superficie s_0 como se presenta en (3.2.28), y luego se diseña la ley de control u_0 , pero este opera bajo condiciones de incertidumbre, dinámicas no modeladas y perturbaciones externas, tal que tomando estas consideraciones este sistema se presenta como

$$\dot{x} = f(x, t) + B(x)u + g(x, t). \quad (3.2.43)$$

en donde el vector $g(x, t)$ contiene las perturbaciones, incertidumbres, dinámicas no modeladas y perturbaciones externas, que satisfacen la condición matching

$$g(x, t) = B(x)u \quad (3.2.44)$$

con $u \in R^n$ y se asume que dicha perturbación es acotada. Ahora para el sistema (3.2.43) se propone el siguiente control

$$u = u_0 + u_1. \quad (3.2.45)$$

Donde $u_0 \in R^n$ es el control ideal en (3.1.1) y $u_1 \in R^m$ se diseña para rechazar el término de perturbación $g(x, t)$. Al sustituir la ley de control (3.2.45) en (3.2.43) resulta

$$\dot{x} = f(x, t) + B(x)u_0 + B(x)u_1 + g(x, t). \quad (3.2.46)$$

Se define la superficie deslizando como

$$s = s_0(x) + z \quad (3.2.47)$$

con $s, s_0(x), z \in R^m$ que consiste de dos partes: la primera parte $s_0(x)$ se puede diseñar como una combinación lineal de los estados del sistema similar al diseño convencional de modo deslizando; la segunda parte introduce el término integral y se determina a continuación.

La filosofía del modo deslizando integral es: Con el fin de lograr $x(t) = x_o(t)$ para todo $t > 0$, el control equivalente de u_1 , denotado por u_{1eq} , deberá cumplir

$$B(x)u_{1eq} = -g(x, t) \quad (3.2.48)$$

o en términos de (3.2.44)

$$u_{1eq} = -u. \quad (3.2.49)$$

El control equivalente u_{1eq} describe exactamente las trayectorias del sistema cuando se desliza a lo largo de la variable $s(x) = 0$ en (3.2.47). Ver sección (3.2.1) o [65] para detalles de la derivación matemática del control equivalente. Con el fin de definir adecuadamente la variable auxiliar $z(x, t)$ en (3.2.47) para lograr (3.2.49) es necesario que la derivada de s con respecto al tiempo sea igual a cero,

$$\dot{s} = \dot{s}_0 + \dot{z} = \frac{\partial s_0}{\partial x} \{f(x) + B(x)u_0(x) + B(x)u_{1eq} + B(x)u\} + \dot{z} = 0. \quad (3.2.50)$$

Para asegurar el requerimiento (3.2.48), se define

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -\frac{\partial s_0}{\partial x} \{f(x) + B(x)u_0(x)\} \\ z(0) &= -s_0(x(0)) \end{aligned} \quad (3.2.51)$$

donde la condición inicial $z(0)$ se determina en base a la condición $s(0) = 0$. En otras palabras, el modo deslizando ocurre desde el instante inicial de tiempo. Puesto que la ecuación (3.2.48) se satisface, la ecuación de movimiento del sistema en modo deslizando es:

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u_0(x). \quad (3.2.52)$$

Modo deslizante integral.

Un modo deslizante se dice modo deslizante integral si su ecuación de movimiento es del mismo orden que el sistema original, (p. ej. el orden del movimiento deslizante es igual a n). El control u_1 en (3.2.45) se define para forzar el modo deslizante a lo largo de la superficie (3.2.47) con la función discontinua

$$u_1 = -M(x) \operatorname{sign}(s) \quad (3.2.53)$$

donde $M(x)$ es una función escalar positiva y es la ganancia de control. Se sustituye (3.2.53) y (3.2.51) en (3.2.50) tal que

$$\dot{s} = \frac{\partial s_0}{\partial x} B(x)u - \frac{\partial s_0}{\partial x} B(x)M(x) \operatorname{sign}(s). \quad (3.2.54)$$

En la ecuación (3.2.54) s_0 se debe seleccionar tal que la matriz $(\partial s_0 / \partial x) B(x)$ es no singular durante la respuesta del sistema $t > 0$. Entonces la función escalar $M(x)$ puede seleccionarse dependiendo de la propiedad de $(\partial s_0 / \partial x) B(x)$ tal que el modo deslizante es forzado sobre la superficie $s = 0$.

3.2.4 Algoritmo de control super-twisting

El algoritmo super-twisting (ST) es esencialmente un algoritmo de control de segundo orden, el controlador asegura que el sistema tiene movimiento deslizante sobre la superficie de deslizamiento y su derivada, al utilizar únicamente la medición de la variable deslizante y no su derivada. Con una elección correcta de los parámetros, este algoritmo converge en tiempo finito y describe trayectorias equivalentes a las del controlador twisting. La ventaja principal de este algoritmo respecto del controlador twisting, radica en el hecho de que no necesita la derivada de la variable deslizante para determinar la acción de control.

La ley de control se realiza con dos términos, el primero es una función continua de la superficie deslizante para mitigar el efecto chattering, mientras que el segundo se define por la integral de una función discontinua de la variable deslizante. Este algoritmo se diseña específicamente para sistemas con grado relativo uno con respecto a la variable deslizante. La dinámica del sistema no-lineal se presenta como

$$\dot{x} = f(x, t) + b(x, t)u$$

con $x \in R$ y $u \in R$. Donde $f(x, t)$ es un término de perturbación desconocido y globalmente acotado por $f(x, t) \leq \lambda|x|^{\frac{1}{2}}$ para alguna $\lambda > 0$. Además se tiene que $s \in R$ tal que la superficie $s(x) = 0$ y su derivada se presenta como

$$\dot{s} = f_s(x, t) + b_s(x, t)u$$

y las constantes positivas, C, K_M, K_m, u_M, q .

Las condiciones suficientes para la convergencia en tiempo finito son:

$$\left| \dot{f}_s(x, t) \right| + u_0 \left| \dot{b}_s(x, t) \right| \leq C, \quad 0 \leq K_m \leq b_s(x, t) \leq K_M,$$

$$\left| \frac{f_s}{b_s} \right| < qu_0, \quad 0 < q < 1$$

donde K_m y K_M son los límites inferior y superior de la función $b_s(t, x)$. Las variables u_M , λ son parámetros del controlador. El controlador ST lo gobierna la ley de control [26], [37].

$$u = -\lambda|x|^{\frac{1}{2}}\text{sign}x + u_1, \quad \dot{u}_1 = \begin{cases} -u & |u| > u_0 \\ -\alpha\text{sign}x & |u| \leq u_0 \end{cases} \quad (3.2.55)$$

donde x , es la superficie deslizando y cumpliendo la condición para u_0 según ecuación (3.1.2); tal como se describe en [26], [37]:

Lema 2. *Con $K_m\alpha > C$ y λ suficientemente grande, el modo deslizando de segundo orden $x = \dot{x} = 0$ atrae las trayectorias. El control u entra en tiempo finito al segmento $[-u_0, u_0]$ y permanece allí. No abandonará el segmento si el valor inicial se encuentra en su interior.*

3.2.5 Algoritmos cuasi-continuos [40]

Se tiene una función de retroalimentación como $\sigma, \dot{\sigma}, \ddot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}$, es continua, excepto en la superficie definida por la ecuación

$$\sigma = \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0 \quad (3.2.56)$$

del modo r -deslizando. El modo $\sigma \equiv 0$ se establece después del transitorio en tiempo finito. En presencia del error en la evaluación de la salida σ y sus derivadas, da lugar a un movimiento en alguna vecindad de (3.2.56). Por consiguiente el control es prácticamente una función continua en el tiempo, la trayectoria nunca llega a la superficie (3.2.56) con $r > 14$.

Planteamiento del problema

Considere la posibilidad de un sistema dinámico suave con una función de salida suave σ , y permita que el sistema se cierre por alguna posible dinámica de retroalimentación discontinua, en el sentido de Filippov [22]. Entonces, siempre que el total de las derivadas sucesivas en el tiempo $\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}$ sean funciones continuas del sistema cerrado en variables de espacio de estado, y el conjunto (3.2.56) sea un conjunto integral no vacío, el movimiento (3.2.56) se denomina modo r -deslizamiento (r^{mo} - orden deslizando) [6,37]. El modo deslizando estándar

que se utiliza en la mayoría de los sistemas de estructura variable son del primer orden (σ es continua y $\dot{\sigma}$ es discontinua). Considere la posibilidad de un sistema dinámico de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(t, x) + b(t, x)u \\ \sigma &= \sigma(t, x).\end{aligned}\quad (3.2.57)$$

Donde, $x \in R^n$, a, b y $\sigma : R^{n+1} \rightarrow R$ son funciones desconocidas suaves, $u \in R$, es también incierto. La tarea es proveer en un tiempo finito el mantenimiento exacto de $\sigma \equiv 0$.

El grado relativo r de un sistema se asume contante y conocido. En otras palabras [29], el control explícito aparece primeramente en $r^m a$ derivada en el tiempo de σ y

$$\sigma^{(r)} = h(t, x) + g(t, x)u \quad (3.2.58)$$

donde $h(t, x) = \sigma^{(r)}|_{u=0}$, $g(t, x) = (\partial/\partial u)\sigma^{(r)} \neq 0$. Esto se supone para algunas $K_m, K_M, C > 0$

$$\begin{aligned}0 < K_m \leq \frac{\partial}{\partial u}\sigma^{(r)} \leq K_M \\ |\sigma^{(r)}|_{u=0} \leq C\end{aligned}\quad (3.2.59)$$

esto es siempre cierto, al menos a nivel local. Las trayectorias de (3.2.57) se asumen infinitamente extendibles en el tiempo para cualquier control limitado Lebesgue-medible $u(t, x)$.

Diseño retroalimentado

Como se desprende de (3.2.58) y (3.2.59)

$$\sigma^{(r)} \in [-C, C] + [K_m, K_M]u \quad (3.2.60)$$

La inclusión de la diferencial cerrada se debe entender en el sentido de Filippov [22], lo que significa que el conjunto vector mano-derecha se amplía en una manera especial [41], con el fin de satisfacer cierta convexidad y condiciones de semi-continuidad. Esta inclusión no considera nada en el sistema (3.2.57), excepto las constantes r, C, K_m, K_M . Por lo tanto, la estabilización de tiempo finito de (3.2.60) en el origen resuelve el problema planteado de forma simultánea para todos los sistemas (3.2.57) y satisface (3.2.59). Con $i = 0, \dots, r - 1$. Se denota

$$\begin{aligned}\varphi_{0,r} &= \sigma \quad N_{0,r} = |\sigma| \quad \Psi_{0,r} = \varphi_{0,r}/N_{0,r} = \text{sign}\sigma \\ \varphi_{i,r} &= \sigma^{(i)} + \beta_i N_{i-1,r}^{(r-i)/(r-i+1)} \Psi_{i-1,r} \\ N_{i,r} &= |\sigma^{(i)}| + \beta_i N_{i-1,r}^{(r-i)/(r-i+1)} \quad \Psi_{i,r} = \varphi_{i,r}/N_{i,r}\end{aligned}$$

donde $\beta_1, \dots, \beta_{r-1}$ son números positivos, obviamente $\varphi_{i,r} = \sigma^{(i)} + \beta_i N_{i-1,r}^{(r-i)/(r-i+1)} \varphi_{i-1,r}$. Hay que recordar que de acuerdo con los valores de definición de Filippov el control en

cualquier conjunto de la medida de Lebesgue cero no influyen en las soluciones. La siguiente proposición se demuestra fácilmente por inducción.

Proposición 3: Sea $i = 0, \dots, r-1$. $N_{i,r}$ definida positiva. $N_{i,r} = 0$ si $\sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(i)} = 0$. La desigualdad $|\Psi_{i,r}| \leq 1$ se mantiene siempre que $N_{i,r} > 0$. La función $\Psi_{i,r}(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(i-1)})$ es continua en cualquier parte (puede re-definirse por continuidad) excepto en el punto $\sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(i)} = 0$

Teorema 1: Siempre que $\beta_1, \dots, \beta_{r-1}, \alpha > 0$ se elijan lo suficientemente grandes en orden de lista, el controlador

$$u = -\alpha \Psi_{r-1,r}(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}) \quad (3.2.61)$$

es homogéneo r -deslizante y proporciona estabilidad en tiempo finito de (3.2.60), (3.2.61). El tiempo finito estable del modo r -deslizante $\sigma \equiv 0$ se establece en el sistema (3.2.57), (3.2.61). La prueba se encuentra en [40]. Se desprende de la proposición que el control (3.2.61) es continuo en todas partes excepto en el modo r -deslizamiento $\sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0$. El concepto de estabilidad en tiempo finito significa que el tiempo transitorio máximo es una función acotada localmente [41].

Cada elección de los parámetros $\beta_1, \dots, \beta_{r-1}$ determina una familia de controladores aplicable a todos los sistemas (3.2.57) de grado relativo r . El parámetro α se elige específicamente para cualquier constante C, K_m, K_M , más convenientemente mediante simulación por computadora, evitando de forma redundante grandes estimaciones de C, K_m, K_M . Obviamente, α debe ser negativo con $(\partial/\partial u)\sigma^{(r)} < 0$. Los siguientes son controladores con $r \leq 4$ y para β_i tal que:

$$1) \quad u = -\alpha \text{sign} \sigma$$

$$2) \quad u = -\alpha \left(\dot{\sigma} + |\sigma|^{1/2} \text{sign} \sigma \right) / \left(|\dot{\sigma}| + |\sigma|^{1/2} \right)$$

$$3) \quad u = -\alpha \left[\ddot{\sigma} + 2 \left(|\dot{\sigma}| + |\sigma|^{2/3} \right)^{-1/2} \left(\dot{\sigma} + |\sigma|^{2/3} \text{sign} \sigma \right) \right] / \left[|\ddot{\sigma}| + 2 \left(|\dot{\sigma}| + |\sigma|^{2/3} \right)^{1/2} \right]$$

$$4) \quad u = -\alpha \varphi_{3,4} / N_{3,4}$$

$$\varphi_{3,4} = \ddot{\sigma} + \dots$$

$$3 \left[\ddot{\sigma} + \left(|\dot{\sigma}| + 0.5|\sigma|^{3/4} \right)^{-1/3} \left(\dot{\sigma} + 0.5|\sigma|^{3/4} \text{sign} \sigma \right) \right] \left[|\ddot{\sigma}| + \left(|\dot{\sigma}| + 0.5|\sigma|^{3/4} \right)^{2/3} \right]^{-1/2}$$

$$N_{3,4} = |\ddot{\sigma}| + 3 \left[|\dot{\sigma}| + \left(|\dot{\sigma}| + 0.5|\sigma|^{3/4} \right)^{2/3} \right]^{1/2}$$

El control es una función continua de tiempo, excepto el conjunto de r -deslizamiento de (3.2.56). Puede tener derivadas infinitas cuando se cruzan ciertas superficies.

Control de salida con retroalimentación SISO

El controlador (3.2.60) requiere del cálculo exacto en tiempo real o la medición directa de $\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}$. La igualdad (3.2.58) implica $|\sigma^{(r)}| \leq C + \alpha K_M$ lo que permite la diferenciación robusta $(r-1)$ -orden de σ [39]. Considere el sistema incierto (3.2.57), (3.2.59). Combinando el controlador (3.2.61) y el diferenciador homogéneo [39], [41] se logra

$$u = -\alpha \psi_{r-1,r}(z_0, z_1, \dots, z_{r-1}) \quad (3.2.62)$$

$$\dot{z}_0 = v_0, v_0 = -\lambda_r L^{1/r} |z_0 - \sigma|^{(r-1)/r} \text{sign}(z_0 - \sigma) + z_1 \quad (3.2.63)$$

$$\dot{z}_k = v_k, v_k = -\lambda_{r-k} L^{1/(r-k)} |z_k - v_{k-1}|^{(r-k-1)/(r-k)} \text{sign}(z_k - v_{k-1}) + z_{k+1}, k = 1, \dots, r-2 \quad (3.2.64)$$

$$\dot{z}_{r-1} = -\lambda_1 L \text{sign}(z_{r-1} - v_{r-2}) \quad (3.2.65)$$

donde los parámetros del diferenciador (3.2.63) (3.2.65) se eligen acorde a la condición $|\sigma^{(r)}| \leq L$, L satisface $L \geq C + \alpha K_M$. La secuencia de λ_i se elige en antelación [39]. Por lo tanto, en el caso cuando C y K_m, K_M se conocen, sólo el parámetro α es el que realmente necesita ser ajustado. Por lo general, tanto L y α se encuentran por simulación en computadora.

Diferenciador robusto exacto utilizando de la técnica de modos deslizantes [38]

Diferenciador robusto exacto práctico de primer orden.

Considere el problema de un diferenciador práctico en tiempo real. Sea la señal de entrada $f(t)$ una función medible localmente acotada definida en $(0, \infty)$ y permite que contenga una señal base, que tiene una derivada con constante Lipschitz $C > 0$ y ruido. Para diferenciar la señal de base desconocida, considere la ecuación auxiliar

$$\dot{x} = u. \quad (3.2.66)$$

Se aplica un algoritmo modificado de 2^{do} orden deslizante [37] para mantener $x - f(t) = 0$, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} u &= u_1 - \lambda |x - f(t)|^{(1/2)} \text{sign}(x - f(t)) \\ \dot{u}_1 &= -\alpha \text{sign}(x - f(t)) \end{aligned} \quad (3.2.67)$$

donde $\alpha, \lambda > 0$. Aquí $u(t)$ es la salida de el diferenciador. La solución del sistema (3.2.66), (3.2.67) se entiende en el sentido de Filippov [22].

Se define una función $\Phi(\alpha, \lambda, C) = |\Psi(t_*)|$, donde $(\Sigma(t), \Psi(t))$ es la solución de

$$\begin{aligned} \dot{\Sigma} &= -|\Sigma|^{1/2} + \Psi \\ \dot{\Psi} &= \begin{cases} -\frac{1}{\lambda^2}(\alpha - C), & -|\Sigma|^{1/2} + \Psi > 0 \\ -\frac{1}{\lambda^2}(\alpha + C), & -|\Sigma|^{1/2} + \Psi \leq 0 \end{cases} \\ \Sigma(0) &= 0 \quad \Psi(0) = 1 \end{aligned} \quad (3.2.68)$$

$\alpha > C$, $\lambda \neq 0$ y $t_* = \inf \{t | t > 0, \Sigma(t) = 0, \Psi(t) < 0\}$. Es fácil comprobar que $t_* < \infty$. En la práctica $\Phi(\alpha, \lambda, C)$ es calculada empleando simulación por computadora.

Teorema 2: (Criterio de convergencia). Sea $\alpha > c > 0$, $\lambda > 0$, $\Phi(\alpha, \lambda, C) < 1$. Entonces proporcionando $f(t)$ que tiene una derivada con constante de Lipschitz $C(f \in W(C, 2))$, la igualdad $u(t) = \dot{f}(t)$ se cumple de manera idéntica después de un tiempo finito en un proceso transitorio. No hay convergencia de $u(t)$ a $\dot{f}(t)$ para algún $f \in W(C, 2)$ si $\Phi(\alpha, \lambda, C) > 1$

Cuanto menor sea $\Phi(\alpha, \lambda, C)$, mas rápida es la convergencia. Φ es obviamente el mismo para todo (α, λ, C) con $\alpha = \mu_1 C$, $\lambda = \mu_2 C^{1/2}$ donde $\mu_1 > 1$, $\mu_2 > 0$ son algunas constantes. También cualquier incremento de λ decremента a Φ . Los siguientes son las condiciones suficientes para la convergencia de $u(t)$ a $\dot{f}(t)$:

$$\alpha > C, \quad \lambda^2 \geq 4C \frac{\alpha + C}{\alpha - C}. \quad (3.2.69)$$

Las condiciones $\alpha > C > 0$, $\lambda > 0$, $\Phi < 1$ se asume que se satisfacen en el siguiente teorema.

Teorema 3: Sea la señal de entrada representada en la forma $f(t) = f_0(t) + v(t)$, donde $f_0(t)$ es una señal base diferenciable, $\dot{f}_0(t)$ es una derivada con constante Lipschitz $C > 0$, y $v(t)$ es ruido, $|v(t)| \leq \epsilon$. Entonces existe una constante $b > 0$ dependiente de $(\alpha - C)/\lambda^2$ y $(\alpha + C)/\lambda^2$ que en un tiempo finito la desigualdad $|u(t) - \dot{f}_0(t)| < \lambda b \epsilon^{1/2}$ se mantiene.

Si λ y α se eligen de la forma $\alpha = \mu_1 C$, $\lambda = \mu_2 C^{1/2}$, la desigualdad $|u(t) - \dot{f}_0(t)| < \bar{b} C^{1/2} \epsilon^{1/2}$ se mantiene para algún $\bar{b}(\mu_1, \mu_2) > 0$.

3.2.6 Variedades deslizantes que incluyen algoritmos cuasi-continuos [21]

Un nuevo diseño de algoritmos para sistemas en forma estricta retroalimentación, se presenta en un caso especial de la forma no lineal controlable a bloques (NBC-form). El seguimiento

en tiempo finito exacto de la salida deseada se obtiene con este algoritmo aun en la presencia de perturbaciones unmatched p. ej. parámetros con incertidumbres y disturbios externos. Como primer paso, se define la dinámica deseada del primer estado mediante la señal de seguimiento deseado. Después de esto la dinámica deseada para cada estado siguiente se define por la anterior. Cada control virtual se divide en dos partes, el primero se realiza (intended) para compensar la parte no lineal nominal del sistema y el segundo se selecciona (aimed) para alcanzar la dinámica deseada a pesar de las perturbaciones. Esto supone que la señal de referencia y la perturbación son acotadas y además se supone que el control virtual es acotado. Los estados actúan como controles virtuales acotados. En la segunda parte del modo deslizante de alto orden (Modos Deslizantes de Orden Superior (HOSM)) cuasi-continuo (Cuasi-Continuo (QC)) [40] se utiliza para compensar incertidumbres unmatched.

Controlador cuasi-continuo [40]

En esta sección se presenta el controlador homogéneo cuasi-continuo (QC) que se muestra en la sección 3.2.5 y que se reporta en [40]. Después de esto se introduce el diseño del algoritmo del controlador jerárquico.

Considere un sistema SISO

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= a(t, \xi) + b(t, \xi)u, \quad \xi \in \mathbb{R}^m, \quad u \in \mathbb{R} \\ \sigma &: (t, \xi) \mapsto \sigma(t, \xi) \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (3.2.70)$$

donde σ es la salida medida del sistema, u es el control. Las funciones suaves a, b, σ se asumen que son desconocidas. La dimensión de m debe ser también desconocida. El objetivo es hacer σ desvaneciente en tiempo finito, esto significa la posibilidad de una retroalimentación discontinua y mantener $\sigma \equiv 0$. Esto es si se asume que el sistema (3.2.70) tiene grado relativo constante r y conocido. Como sigue de [29] la ecuación

$$\sigma^{(r)} = h(t, \xi) + g(t, \xi)u, \quad g(t, \xi) \neq 0 \quad (3.2.71)$$

se mantiene, donde $h(t, \xi) = \sigma^{(r)}|_{u=0}$, $g(t, \xi) = \frac{\partial}{\partial u}\sigma^{(r)}$. La incertidumbre previene de la inmediata reducción de (3.2.70) a (3.2.71). Supone que las desigualdades

$$0 < K_m \leq \frac{\partial}{\partial u}\sigma^{(r)} \leq K_M, \quad |\sigma^{(r)}|_{u=0}| \leq C \quad (3.2.72)$$

se mantienen globalmente para algunas $K_m, K_M, C > 0$. Luego (3.2.71), (3.2.72) implica incluir la diferencial

$$\sigma^{(r)} \in [-C, C] + [K_m, K_M]u. \quad (3.2.73)$$

El control de retroalimentación acotado, u , se construye tal que el modo r -deslizante $\sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0$ se establece en tiempo finito. Una propuesta para reducir el

chattering, es el diseño de un controlador que sea continuo en todas partes excepto en este conjunto. A esto control se llama cuasi-continuo (QS).

En la práctica, en presencia de retraso de switcheo, ruido de medición y perturbaciones singulares, el movimiento puede tomar lugar en alguna vecindad del conjunto r -deslizamiento $\sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0$ sin llegar a tocarlo, con $r > 1$. Se denota

$$\begin{aligned} \varphi_{0,r} &= \sigma \quad N_{0,r} = |\sigma| \quad \Psi_{0,r} = \varphi_{0,r}/N_{0,r} = \text{sign}\sigma \\ \varphi_{i,r} &= \sigma^{(i)} + \beta_i N_{i-1,r}^{(r-i)/(r-i+1)} \Psi_{i-1,r} \\ N_{i,r} &= |\sigma^{(i)}| + \beta_i N_{i-1,r}^{(r-i)/(r-i+1)} \quad \Psi_{i,r}(\bullet) = \varphi_{i,r}/N_{i,r}. \end{aligned} \tag{3.2.74}$$

Teorema 4: [40] Siempre que $\beta_1, \dots, \beta_{r-1}, \alpha > 0$ se elijan lo suficientemente grandes en orden de lista, el controlador

$$u = -\alpha \Psi_{r-1,r}(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}) \tag{3.2.75}$$

es homogéneo r -deslizante y proporciona estabilidad en tiempo finito de (3.2.73), (3.2.75). El tiempo finito estable del modo r -deslizante $\sigma \equiv 0$ se establece en el sistema (3.2.70), (3.2.75).

Planteamiento del problema

Considere una clase de sistemas no lineales, con grado relativo constante, se presenta en la especial forma no lineal controlable a bloques (NBC-form) [49]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, t) + b_1(x_1, t) x_2 + \omega_1(x_1, t) \\ \dot{x}_i &= f_i(\bar{x}_i, t) + b_i(\bar{x}_i, t) x_{i+1} + \omega_i(\bar{x}_i, t) \\ \dot{x}_n &= f_n(x, t) + b_n(x, t) u + \omega_n(x, t) \quad i = 2, \dots, n-1 \end{aligned} \tag{3.2.76}$$

donde $x \in R^n$ es el vector de estados, $x_i \in R$, $\bar{x}_i = [x_1 \dots x_i]^T$; $u \in R$ es el control. Sin embargo f_i y b_i son funciones escalares suaves, ω_i es un término de perturbación desconocido acotado esto se debe a la variación de los parámetros y a los disturbios externos con al menos $n-i$ derivadas acotadas con respecto al sistema (3.2.76), $b_i \neq 0 \forall x \in X \subset R^n, t \in [0, \infty)$. La salida es $y = x_1$. El problema de control es diseñar un controlador tal que la salida y siga a la referencia suave deseada y_d con derivadas acotadas a pesar de la presencia de perturbaciones desconocidas pero acotadas. Todo el vector de estados x se asume que se conoce. En este desarrollo, la solución de todas las ecuaciones diferenciales e inclusiones se entienden en el sentido de Filippov [22].

Diseño de algoritmo

En cada paso i se establece la restricción $\sigma_i = 0$ y se mantiene; esto significa que el control virtual $x_{i+1} = \phi_i$, forma la restricción $\sigma_{i+1} = x_{i+1} - \phi_i$ para el siguiente paso.

Paso 1: Se define $x_2 = \phi_1$, el siguiente controlador virtual se construye como

$$\begin{aligned}\phi_1(x_1, t, u_1) &= b_1(x_1, t)^{-1} \{-f_1(x_1, t) + u_1\} \\ u_1^{(n-1)} &= -\alpha \Psi_{n-1, n}(\sigma_1, \dot{\sigma}_1, \dots, \sigma_1^{(n-1)})\end{aligned}\quad (3.2.77)$$

donde $\sigma_1 = x_1 - y_d$ es el enésimo orden de QC-HOSM y se define en (3.2.74), este se introduce en ϕ_1 mediante $n - 1$ integradores. Las derivadas $\sigma_1, \dot{\sigma}_1, \dots, \sigma_1^{(n-1)}$ son calculadas mediante diferenciadores robustos con tiempo finito de convergencia [39].

Nota: Los valores para cada β_i se toman de [41]; solamente α_i , para cada control QC, y el parámetro L del correspondiente diferenciador [39], tiene que ser ajustado. El ajuste se realiza por medio de simulaciones paso a paso.

Paso i Se retoma los controles virtuales construidos a continuación

$$\begin{aligned}\phi_i(\bar{x}_i, t, u_i) &= b_i(\bar{x}_i, t)^{-1} \{-f_i(\bar{x}_i, t) + u_i\} \\ u_i^{(n-i)} &= -\alpha_i \Psi_{n-i, n-i+1}(\sigma_i, \dot{\sigma}_i, \dots, \sigma_i^{(n-i)}) \\ \sigma_i &= x_i - \phi_{i-1}; i = 2, \dots, n.\end{aligned}\quad (3.2.78)$$

$\Psi_{n-i, n-i+1}$ se define de acuerdo a (3.2.74), con $\sigma = \sigma_i$. Cabe notar que en el paso n , el control real se calcula como $\phi_n = u$.

$$u = b_n(x, t)^{-1} \{-f_n(x, t) + u_n\}; u_n = -\alpha_n \text{sign}(\sigma_n).$$

Esto es posible debido la señal de control suave y a que se alcanza el orden del controlador QC para cada ϕ . Si esto se realiza, el algoritmo super-twisting puede utilizarse también en u_n .

Considere el estado x_n

$$\dot{x}_n = f_n(x, t) + b_n(x, t) u + \omega_n(x, t)$$

con $u = b_n(x, t)^{-1} \{-f_n(x, t) - \alpha_n \text{sign}(\sigma_n)\}$, $\sigma_n = x_n - \phi_{n-1}$, ϕ_{n-1} suficientemente suave.

Tal que $\dot{\sigma}_n = -\text{sign}(\sigma_n) + \omega_n(x, t) - \dot{\phi}_{n-1}$. Al considerar $\alpha_n \geq |\omega_n(x, t)| + |\dot{\phi}_{n-1}|$ previene la apariencia del primer modo deslizamiento para la restricción σ_n .

Ahora para el estado x_{n-1} , se tiene

$$\begin{aligned}
 \dot{\sigma}_{n-1} &= \dot{x}_{n-1} - \dot{\phi}_{n-2} \\
 &= f_{n-1}(\bar{x}_{n-1}, t) + b_{n-1}(\bar{x}_{n-1}, t) - \phi_{n-1} + \omega_{n-1}(\bar{x}_{n-1}, t) - \dot{\phi}_{n-2} \\
 &= u_{n-1,1} + \omega_{n-1}(\bar{x}_{n-1}, t) - \dot{\phi}_{n-2} \\
 \ddot{\sigma}_{n-1} &= \dot{u}_{n-1} + \dot{\omega}_{n-1}(\bar{x}_{n-1}, t) - \ddot{\phi}_{n-2}
 \end{aligned} \tag{3.2.79}$$

y de acuerdo a (3.2.78)

$$\dot{u}_{n-1} = -\alpha_{n-1} \Psi_{1,2}(\sigma_{n-1}, \dot{\sigma}_{n-1}). \tag{3.2.80}$$

Esto es que (3.2.79) toma de la forma (3.2.71):

$$\ddot{\sigma}_{n-1} = h_{n-1}(t, x) + g_{n-1}(t, x) \dot{u}_{n-1} \tag{3.2.81}$$

con $h_{n-1}(t, x) = \ddot{\sigma}_{n-1}|_{\dot{u}_{n-1}=0} = \dot{\omega}_{n-1} - \ddot{\phi}_{n-2}$, $g_{n-1}(t, x) = \partial \ddot{\sigma}_{n-1} / \partial \dot{u}_{n-1}$. Si por alguna $K_{m_{n-1}}, K_{M_{n-1}}, C_{n-1} > 0$ las desigualdades $0 < K_{m_{n-1}} \leq g_{n-1} \leq K_{M_{n-1}}$, $h_{n-1} \leq C_{n-1}$ se cumplen, entonces la siguiente inclusión diferencial es implícita

$$\ddot{\sigma}_{n-1} \in [-C_{n-1}, C_{n-1}] + [K_{m_{n-1}}, K_{M_{n-1}}] \dot{u}_1^{(n-1)} \tag{3.2.82}$$

y el controlador (3.2.80) establece la estabilidad en tiempo finito de (3.2.82), (3.2.80). El tiempo finito para el segundo modo de deslizamiento estable se establece por la restricción σ_{n-1} .

Es posible obtener una ecuación análoga a (3.2.79) para cada uno de los restantes estados, tal que para el estado x_1

$$\sigma_1^{(n)} = h_1(t, x) + g_1(t, x) u_1^{(n-1)} \tag{3.2.83}$$

$$u_1^{(n-1)} = -\alpha_n \Psi_{n-1,n}(\sigma_1, \dot{\sigma}_1, \dots, \sigma_1^{(n-1)}) \tag{3.2.84}$$

$$\sigma_1^{(n)} \in [-C_1, C_1] + [K_{m_1}, K_{M_1}] u_1^{(n-1)} \tag{3.2.85}$$

la inclusión diferencial (3.2.85) es implícita para algunas constantes K_{m_1} , K_{M_1} y C_1 . El controlador (3.2.84) proporciona estabilidad en tiempo finito para (3.2.85). La estabilidad en tiempo finito del n -ésimo modo deslizante se establece por la restricción σ_1 .

Debido a la dependencia de los estados de las funciones en (3.2.83) la inclusión (3.2.85) puede asegurarse solamente local. Lo mismo aplica a la inclusión obtenida para cada control virtual.

3.3 Diseño de observadores para una clase de sistemas no lineales [58]

3.3.1 Introducción

En un sistema dinámico, que se representa mediante un modelo matemático en variables de estado, algunas variables de estado tienen un significado físico, de modo que sus valores se pueden medir o determinar directamente del sistema. De lo anterior, se tiene que si se dispone de los sensores adecuados, estas variables físicas se podrían medir. Sin embargo, en la mayoría de los casos, o no existen los sensores para medirlas o éstos resultan extremadamente caros. En este caso los valores de las variables de estado que se desean conocer tendrán que ser determinados a partir de las variables conocidas del sistema. El cálculo de las variables de estado se realiza por medio de un sistema que se denomina observador. Un observador es una copia del sistema original más un término de corrección, de tal forma que los valores de sus variables convergen exponencialmente a los valores reales del sistema. Contrario a lo que sucede con los sistemas lineales, no existe un método sistemático que permita diseñar un observador para un sistema no lineal dado, como en el caso del motor jaula de ardilla. Una solución es considerar el sistema no lineal como la interconexión entre varios subsistemas, cada uno de los cuales satisfacen ciertas propiedades, de tal manera que se pueda diseñar un observador para cada subsistema. Esto con la finalidad de que los estados de los subsistemas se encuentren disponibles y el diseño del observador completo este dado por la interconexión de los observadores.

En las secciones anteriores se establecen las bases para el diseño de controladores de sistemas, al suponer que todas las variables de estado de la planta son conocidas. En esta sección se considera una clase de sistemas no lineales; como en el caso del MJAM se tiene una transformación no lineal donde están vinculadas variables no medibles, donde es necesario el diseño de observadores sobre el sistema transformado. Gracias a la estructura de este sistema es posible proponer un observador no lineal con altas ganancias. Además en este caso se considera el problema de diseño de observadores por modos deslizantes, para estimar los estados no medibles y parámetros, como es el caso del par de carga T_L .

3.3.2 Representación de la planta y observador de orden reducido

Se considera la planta por medio de la dinámica que representa un sistema no lineal

$$\dot{z} = f_z(z, x, w) \quad (3.3.1)$$

$$\dot{x} = f_x(z, x) + Bu \quad (3.3.2)$$

$$y = Cx \quad (3.3.3)$$

donde $z \in R^k, x \in R^n, y \in R^p, u \in R^m, B \in R^{n \times m}, C \in R^{p \times n}$, los vectores z y y son medibles, con:

$$f_x(z, x) = \sum_{i=1}^k z_i A_i x \quad (3.3.4)$$

con las matrices A_i de $(n \times n)$ constantes, $z = (z_1, \dots, z_k)^T$. Ya que las variables z_i son medibles podemos presentar (3.3.4) como un sistema lineal con la matriz $A(t)$,

$$A(t) = \sum_{i=1}^k z_i(t) A_i \quad (3.3.5)$$

que tiene parámetros variantes en el tiempo. Ahora si se considera (3.3.5), el problema de diseño de un observador para el sistema no lineal (3.3.1)-(3.3.2) se convierte al problema de diseño de un observador para el siguiente sistema lineal y no autónomo:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + Bu \\ y &= Cx. \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Se supone que el sistema (3.3.6) es observable, entonces se pueden diseñar un observador de orden reducido.

Diseño de observador de orden reducido

Se hace la suposición que el rango $C = p$, entonces se puede representar el vector de salida del sistema (3.3.6) como

$$y = C_1 x_1 + C_2 x_2 \quad (3.3.7)$$

donde $x = (x_1, x_2)^T$, $x_1 \in R^{n-p}$, $x_2 \in R^p$, y rango $C_2 = p$. El sistema (3.3.6) se presenta en términos de las variables x_1 y de salida y como

$$\dot{x}_1 = \bar{A}_{11}(t)x_1 + \bar{A}_{12}(t)y + B_1 u \quad (3.3.8)$$

$$\dot{y} = \bar{A}_{21}(t)x_1 + \bar{A}_{22}(t)y + B_2 u \quad (3.3.9)$$

donde $\begin{bmatrix} \bar{A}_{11}(t) & \bar{A}_{12}(t) \\ \bar{A}_{21}(t) & \bar{A}_{22}(t) \end{bmatrix} = T A(t) T$, $\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = T B$, $T = \begin{bmatrix} I_{n-p} & 0 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix}$. El problema del diseño del observador de orden reducido se resuelve con la ayuda del siguiente lema.

Lema 1 Si el par $\{C, A(t)\}$ en (3.3.6) es observable, entonces el sistema

$$\dot{x}_1 = \bar{A}_{11}(t)x_1$$

con salida

$$z_1 = \bar{A}_{21}(t)x_1$$

o el par $\{\bar{A}_{21}(t), \bar{A}_{11}(t)\}$ en (3.3.8)-(3.3.9) es también observable.

Prueba. Si se supone que el par $\{\bar{A}_{21}(t), \bar{A}_{11}(t)\}$ es no observable, entonces por medio de un transformación no singular el subsistema (3.3.8) con y y u como las entradas, se puede representar en la forma canónica observable

$$\begin{aligned}\dot{x}_{11} &= A'_1(t)x_{11} + A'_1(t)x_{12} + B'_1u \\ \dot{x}_{12} &= A''_1(t)x_{11} + A''_2(t)x_{12} + A''_{22}(t)y + B''_1u\end{aligned}\quad (3.3.10)$$

con la salida

$$z_1 = A'_{21}(t)x_{11} \quad (3.3.11)$$

donde $x_1 = (x_{11}, x_{12})^T$. En (3.3.10)-(3.3.11) el par $\{A'_{21}(t), A'_1(t)\}$ es observable, y x_{12} es el subespacio de estado no observable. El sistema (3.3.9) después de la transformación anterior queda de la forma

$$\dot{y} = A'_{21}(t)x_{11} + \bar{A}_{22}(t)y + B_2u \quad (3.3.12)$$

Esto significa que la salida y no es afectada por x_{12} , y el subespacio x_{12} será no observable no solamente con respecto a la salida z_1 , sino también al vector y , el cual es la salida del sistema original. Esta conclusión es contradictoria a la hipótesis de que el par $\{C, A(t)\}$ es observable. Por lo tanto el par $\{\bar{A}_{21}(t), \bar{A}_{11}(t)\}$ es observable también. El diseño del observador de orden reducido para el sistema (3.3.8)-(3.3.9) esta basado en la siguiente transformación

$$x_1^* = x_1 - L_1y \quad (3.3.13)$$

donde la dinámica del sistema se considerará en el espacio (x_1^*, y) , $L_1 \in R^{(n-p) \times p}$ es una matriz de valores constantes positivos. Si se deriva (3.3.13) a lo largo de las trayectorias del sistema (3.3.8)-(3.3.9), se obtiene

$$\dot{x}_1^* = \bar{A}_{11}(t)x_1 + \bar{A}_{12}(t)y + B_1u - L_1(\bar{A}_{21}(t)x_1 + \bar{A}_{22}(t)y + B_2u) \quad (3.3.14)$$

Entonces la planta queda de la forma

$$\dot{x}_1^* = [\bar{A}_{11}(t) - L_1\bar{A}_{21}(t)]x_1^* + \bar{A}_2(t)y + \bar{B}u \quad (3.3.15)$$

donde $\bar{A}_2(t) = \bar{A}_{11}(t)L_1 - L_1^2\bar{A}_{21}(t)L_1 + \bar{A}_{12}(t) - L_1\bar{A}_{22}(t)$, $\bar{B} = B_1 - L_1B_2$.

Ahora se diseña el observador para el sistema (3.3.15) como

$$\dot{\hat{x}}_1^* = [\bar{A}_{11}(t) - L_1\bar{A}_{21}(t)]\hat{x}_1^* + \bar{A}_2(t)y + \bar{B}u. \quad (3.3.16)$$

Se define el error de observación como

$$e_1 = x_1^* - \hat{x}_1^* \quad (3.3.17)$$

se obtiene

$$\dot{e}_1 = [\bar{A}_{11}(t) - L_1\bar{A}_{21}(t)]e_1 \quad (3.3.18)$$

Diseño de observador de orden reducido para el MJAM

Se considera el sistema (3.3.8)-(3.3.9) con las siguientes hipótesis

S1. $n = 2P$;

S2. La dinámica del sistema (3.3.8)-(3.3.9) tiene la forma

$$\dot{x}_1 = [\Lambda_{11} + A_{11}(t)] x_1 + A_{12}(t) y + B_1 u \quad (3.3.19)$$

$$\dot{y} = [\Lambda_{21} + A_{21}(t)] x_1 + A_{22}(t) y + B_2 u \quad (3.3.20)$$

donde

$\Lambda_{11} \in R^{p \times p}$ es una matriz diagonal con elementos constantes negativos;

$\Lambda_{21} \in R^{p \times p}$ es una matriz diagonal con elementos constantes positivos;

$A_{11}(t) \in R^{p \times p}$ y $A_{21}(t) \in R^{p \times p}$ son matrices con parámetros variantes en tiempo;

$A_{12}(t) \in R^{p \times p}$ y $A_{22}(t) \in R^{p \times p}$ son matrices con parámetros variantes en tiempo.

La dinámica del motor jaula de ardilla monofásico (2.3.56)-(2.3.59) se puede representar en la forma (3.3.1)-(3.3.3) con:

$$x_1 = (\lambda_{\alpha r}, \lambda_{\beta r})^T \quad y = (i_{\alpha s}, i_{\beta s})^T$$

$$f_z = d_1 d_2 (\lambda_{\beta r} i_{\alpha s} - \lambda_{\alpha r} i_{\beta s}) - d_2 T_L, \quad f_x(x, z) = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11}(t) & \bar{A}_{12}(t) \\ \bar{A}_{21}(t) & \bar{A}_{22}(t) \end{bmatrix}$$

donde

$$\bar{A}_{11}(t) = \Lambda_{11} + A_{11}(t), \quad \bar{A}_{12}(t) = \Lambda_{21} + A_{21}(t)$$

$$\Lambda_{11} = \begin{bmatrix} -a_3 & 0 \\ 0 & -a_3 \end{bmatrix}, \quad A_{11}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_r \\ -\omega_r & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_{12}(t) = A_{12}(t) = \begin{bmatrix} a_4 & 0 \\ 0 & a_4 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_{21} = \begin{bmatrix} c_1 c_4 & 0 \\ 0 & c_2 c_4 \end{bmatrix}, \quad A_{21}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -c_1 c_3 \omega_r \\ c_1 c_3 \omega_r & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_{22}(t) = A_{22}(t) = \begin{bmatrix} -a_1 c_1 & 0 \\ 0 & -a_2 c_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad B_1 = 0, \quad B_2 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}$$

Para diseñar el observador de orden reducido para la planta (3.3.19)-(3.3.20), utilizamos el cambio de variables (3.3.13), y la dinámica (3.3.19) en el espacio (x_1^*, y) se representa en la forma

$$\dot{x}_1^* = [\Lambda_{11} + A_{11}(t) - L_1 \Lambda_{21} - L_1 A_{21}(t)] x_1^* + [A_{12} - L_1 A_{22} - L_1 (\Lambda_{21} + A_{21}(t)) L_1] y + (B_1 - L_1 B_2) u \quad (3.3.21)$$

se define el observador como

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1^* &= [\Lambda_{11} + A_{11}(t) - L_1\Lambda_{21} - L_1A_{21}(t)] \hat{x}_1^* \\ &+ [A_{12} - L_1A_{22} - L_1(\Lambda_{21} + A_{21}(t))L_1]y + (B_1 - L_1B_2)u \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

donde $L_1 \in R^{p \times p}$. Se define el error de observación como,

$$e_1 = x_1^* - \hat{x}_1^* \quad (3.3.23)$$

se obtiene

$$\dot{e}_1 = [\Lambda_{11} + A_{11}(t) - L_1\Lambda_{21} - L_1A_{21}(t)] e_1. \quad (3.3.24)$$

Para demostrar que existe la matriz L_1 tal que el sistema (3.3.21) sea exponencialmente estable, se selecciona una función

$$V(e_1) = \frac{1}{2} e_1^T e_1$$

como la función candidata de Lyapunov. Se deriva la función anterior y se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_1) &= e_1^T \dot{e}_1 \\ &= e_1^T \Lambda_{11} e_1 + e_1^T A_{11}(t) e_1 - e_1^T L_1 \Lambda_{21} e_1 - e_1^T L_1 A_{21}(t) e_1 \end{aligned}$$

se sabe que la forma cuadrática de una matriz antisimétrica es

$$e_1^T A_{11}(t) e_1 = 0$$

Se selecciona L_1 como una matriz diagonal $L_1 = l_1 I_p$, con un parámetro $l_1 > 0$, se tiene

$$e_1^T L_1 A_{21}(t) e_1 = e_1^T l_1 I_p L_1 A_{21}(t) e_1 = 0$$

Entonces

$$\dot{V}(e_1) = e_1^T (\Lambda_{11} - l_1 \Lambda_{21}) e_1. \quad (3.3.25)$$

Se sabe por la hipótesis **S2** que la matriz Λ_{11} es una matriz diagonal con elementos negativos y Λ_{21} es una matriz diagonal con elementos positivos. Entonces la derivada $\dot{V}(e_1)$ con $l_1 > 0$ es definida negativa y por lo tanto el sistema (3.3.24) es asintóticamente estable. Esto significa que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}_1^*(t) = x_1^*(t).$$

Se utiliza la estimación \hat{x}_1^* , se puede obtener la estimación \hat{x}_1 del vector x_1 como

$$\hat{x}_1 = \hat{x}_1^* + l_1 y.$$

Este valor estimado se utiliza en la ley de control.

3.4 Resumen del capítulo de teoría de control y observadores

En este capítulo se presenta la teoría de los diferentes controladores y observador utilizados en el MJAM. Se desarrolla el algoritmo de MD de segundo orden super-twisting para el controlador y observador de orden reducido, para esto se utilizan las técnicas de control a bloques, control equivalente y cuasi-continuo.

Capítulo 4

Control por MD de segundo orden con observador de flujos y par para MJAM

(Sistema nominal sin incertidumbre)

4.1 Introducción

El objetivo en este capítulo es proponer un esquema de control no lineal, para la planta nominal, que consta de dos lazos (maestro y esclavo), en el primer lazo se definen las superficies deslizantes y en el segundo lazo se proponen los controladores para la velocidad y el flujo de rotor. Se propone un observador no lineal de orden reducido (sección:3.3.2) para las variables no medidas, en este caso el flujo de rotor y el par de carga. En el lazo maestro, se diseñan las superficies de deslizamiento utilizando la técnica de linealización por retroalimentación a bloques (sección:3.2.2), [47], donde la superficie de deslizamiento se formula como la diferencia entre los valores medido y los que deseados. Como es el caso de las corrientes de estator, a las cuales se le asigna un perfil deseado para la velocidad y el módulo de flujo. El lazo de control esclavo (corriente) se diseña para aplicar un algoritmo de control continuo que se denomina MD super-twisting (sección:3.2.4), [37], [26], que se aplica directamente a un modulador de ancho de pulso PWM. Un algoritmo de control discontinuo MD (sección:3.2.3) se propone para el devanado auxiliar donde se considera el esquema del MJAM con capacitor controlado (ver Fig.2.18). En este esquema, la capacitancia equivalente se podría ajustar para incrementar el par electromagnético durante el arranque, para mejorar el rendimiento en estado estable así como la mejora del factor de potencia, etc.

Se utiliza el modelo del MJAM en el marco de referencia estacionario $\alpha\beta$ con las corrientes de estator y los flujos del rotor como variables de estado. Estas son descritas por las ecuaciones

(2.3.55)-(2.3.62) de la sección 2.3.2, que se presentan como

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_r &= d_1 d_2 (\lambda_{\beta r} i_{\alpha s} - \lambda_{\alpha r} i_{\beta s}) - d_2 T_L \\ \dot{\lambda}_{\alpha r} &= -a_3 \lambda_{\alpha r} + n_p \omega_r \lambda_{\beta r} + a_4 i_{\alpha s} \\ \dot{\lambda}_{\beta r} &= -n_p \omega_r \lambda_{\alpha r} - a_3 \lambda_{\beta r} + a_4 i_{\beta s} \\ \dot{i}_{\alpha s} &= -c_1 a_1 i_{\alpha s} + c_1 c_4 \lambda_{\alpha r} - c_1 c_3 n_p \omega_r \lambda_{\beta r} + c_1 v_{\alpha s} \\ \dot{i}_{\beta s} &= -c_2 a_2 i_{\beta s} + c_2 c_4 \lambda_{\beta r} + c_2 c_3 n_p \omega_r \lambda_{\alpha r} + c_2 v_{\beta s}\end{aligned}$$

con el voltaje de alimentación $v_{\alpha s}$ y $v_{\beta s}$ como

$$\begin{aligned}v_{\alpha s} &= v_s \\ v_{\beta s} &= n^{-1} v_s - v_c \rho\end{aligned}$$

el voltaje del capacitor

$$\dot{v}_c = \omega X_c i_{\beta s}$$

y el par de carga T_L se asume como una función con variación lenta en el tiempo, y durante el proceso transitorio del sistema en lazo cerrado es constante, no conocido y satisface la siguiente expresión,

$$\dot{T}_L = 0.$$

También se considera la entrada de control acotada por

$$|v_s| \leq v_0$$

donde v_0 es un escalar positivo.

4.2 Diseño del control basado en el observador por MD

4.2.1 Diseño de las superficies de velocidad y flujo (Lazo Maestro)

Siempre que el vector de estado completo y el par de carga sean conocidos, el objetivo aquí es diseñar un controlador MD que siga efectivamente las señales de referencia de la velocidad deseada ω_r y el módulo de flujos del rotor ϕ_{ref} mediante un control continuo en v_s y un control discontinuo en el devanado auxiliar con el interruptor ρ .

El modelo (α, β) del motor jaula de ardilla monofásico (2.3.55)-(2.3.59) presenta la forma triangular, pero no la forma controlable por bloques, esto se debe a que la matriz $\tilde{B}_1(\lambda_r)$, en el bloque (2.3.55)-(2.3.57), sobre el control ficticio $(i_{\alpha s}, i_{\beta s})$ es de la forma

$$\tilde{B}_1(\lambda_r) = \begin{bmatrix} d_1 d_2 \lambda_{\beta r} & -d_1 d_2 \lambda_{\alpha r} \\ a_4 & 0 \\ 0 & a_4 \end{bmatrix}$$

Con el objetivo de obtener la forma no lineal controlable a bloques (NBC-form), es necesario aplicar la siguiente transformación no lineal,

$$[\omega_r \ \lambda_{\alpha_r} \ \lambda_{\beta_r} \ i_{\alpha_s} \ i_{\beta_s}]^T \Rightarrow [\omega_r \ \phi \ \theta \ i_{\alpha_s} \ i_{\beta_s}]^T$$

Ahora se define el error de seguimiento como

$$x_1 = \begin{bmatrix} \omega_r - \omega_{ref} \\ \phi - \phi_{ref} \end{bmatrix} \quad y \quad x_2 = \begin{bmatrix} i_{\alpha_s} \\ i_{\beta_s} \end{bmatrix}$$

donde $\phi = |\psi|^2 = \lambda_{\alpha_r}^2 + \lambda_{\beta_r}^2$ es el módulo de flujos del rotor. El sistema (2.3.55)-(2.3.59) se puede representar en la forma conocida como control no lineal a bloques con perturbación, [47], que consiste de dos bloques:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1) + B_1(\lambda_r)x_2 + D_1T_L + h(t) \quad (4.2.1)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + B_2u \quad (4.2.2)$$

donde $\lambda_r = (\lambda_{\alpha_r}, \lambda_{\beta_r})$, $\text{rank}B_1(\lambda_r) = n_1$, $\text{rank}B_2 = n_2$ y $n_1 = n_2 = 2$ con

$$\begin{aligned} f_1 &= \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2a_3\phi \end{bmatrix} & B_1(\lambda_r) &= \begin{bmatrix} d_1d_2\lambda_{\beta_r} & -d_1d_2\lambda_{\alpha_r} \\ 2a_4\lambda_{\alpha_r} & 2a_4\lambda_{\beta_r} \end{bmatrix}, \\ D_1 &= \begin{bmatrix} -d_2 \\ 0 \end{bmatrix} & h(t) &= \begin{bmatrix} \dot{\omega}_{ref}(t) \\ \dot{\phi}_{ref}(t) \end{bmatrix} & f_2 &= \begin{bmatrix} f_{21} - a_1c_1i_{\alpha_s} \\ f_{22} - a_2c_2i_{\beta_s} \end{bmatrix} & B_2 &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \\ u &= \begin{bmatrix} v_{\alpha_s} \\ v_{\beta_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_s \\ n^{-1}v_s - v_c\rho \end{bmatrix} & f_{21} &= c_1c_4\lambda_{\alpha_r} - c_1c_3\omega_r\lambda_{\beta_r} \\ & & f_{22} &= c_2c_3\omega_r\lambda_{\alpha_r} + c_2c_4\lambda_{\beta_r} \end{aligned}$$

Como $z_1 = x_1$, con el vector $z_1 = (z_{11}, z_{12})^T$ se utiliza la técnica de control por bloques, [47], tal que el valor deseado x_{2des} para el control virtual x_2 en el primer bloque (4.2.1) se forma como sigue

$$x_{2des} = -B_1^{-1}(\lambda_r)(f_1 + D_1T_L + h(t)) + B_1^{-1}(\lambda_r)(K_1z_1) \quad (4.2.3)$$

con la dinámica deseada K_1z_1 para el error de seguimiento z_1 y la matriz de ganancias del controlador

$$K_1 = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{bmatrix}, \quad k_1 > 0, \quad k_2 > 0.$$

Ahora se define la variable de deslizamiento z_2 de la forma

$$z_2 = x_2 - x_{2des} \quad (4.2.4)$$

donde

$$\begin{aligned} z_2 &= (z_{21}, z_{22})^T \quad z_{21} = (i_{\alpha s} - i_{\alpha s}^{des}), \quad z_{22} = (i_{\beta s} - i_{\beta s}^{des}), \quad x_2^{des} = (i_{\alpha s}^{des}, i_{\beta s}^{des}), \\ i_{\alpha s}^{des} &= \frac{1}{\phi} \left[\frac{\lambda_{\beta r}}{d_1 d_2} (d_2 T_L - k_1 z_{11}) + \frac{\lambda_{\alpha r}}{2a_4} (2a_3 \phi - k_2 z_{12}) \right] \\ i_{\beta s}^{des} &= \frac{1}{\phi} \left[-\frac{\lambda_{\alpha r}}{d_1 d_2} (d_2 T_L - k_1 z_{11}) + \frac{\lambda_{\beta r}}{2a_4} (2a_3 \phi - k_2 z_{12}) \right] \end{aligned}$$

Se utilizan las variables (4.2.3) y (4.2.4), para que el sistema (4.2.1)-(4.2.2) sea descrito en las nuevas coordenadas z_1 y z_2 como

$$\dot{z}_1 = K_1 z_1 + B_1 (\lambda_r) z_2 \quad (4.2.5)$$

$$\dot{z}_2 = f_2(x_1, x_2) + B_2 u - \dot{x}_{2des}. \quad (4.2.6)$$

Ahora el sistema tiene la forma para el diseño del lazo (esclavo) de control de corriente.

4.2.2 Diseño del control de corrientes del estator (Lazo esclavo)

Se tiene el desarrollo del bloque (4.2.6) de la forma

$$\begin{aligned} \dot{z}_{21} &= f_{21} - a_1 c_1 i_{\alpha s} + c_1 v_s - i_{\alpha s}^{des} \\ \dot{z}_{22} &= f_{22} - a_2 c_2 i_{\beta s} + c_2 (n^{-1} v_s - v_c \rho) - i_{\beta s}^{des} \end{aligned}$$

Tal que para el lazo esclavo, primero se formula, el control básico v_s en \dot{z}_{21} , para para inducir movimientos deslizantes sobre la superficie $z_{21} = 0$ o $i_{\alpha s} = i_{\alpha s}^{des}$, se aplica el algoritmo de control MD super-twisting, [37], [26]:

$$v_s = -\alpha_1 |z_{21}|^{1/2} \text{sign}(z_{21}) + u_1 \quad (4.2.7)$$

$$\dot{u}_1 = -\alpha_2 \text{sign}(z_{21}). \quad (4.2.8)$$

Se sustituye la ley de control (4.2.7) y (4.2.8) en (4.2.6), el sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{z}_{21} &= f_s - c_1 \alpha_1 |z_{21}|^{1/2} \text{sign}(z_{21}) + c_1 u_1 \\ \dot{u}_1 &= -\alpha_2 \text{sign}(z_{21}) \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

con $f_s = f_{21} - a_1 c_1 i_{\alpha s}^{des} - i_{\alpha s}^{des}$, $\alpha_1 > 0$ y $\alpha_2 > 0$.

Proposición 4: Considere una región admisible Ω donde el término f_s , se considera como una perturbación en (4.2.9) y es acotada por $\|f_s\| \leq \delta_1 |z_{21}|$ con $\delta_1 > 0$. Se seleccionan

las ganancias del control α_1 y α_2 en (4.2.7)-(4.2.8) tal que las siguientes condiciones se cumplen:

$$\alpha_1 > 2\delta_1 \text{ y } \alpha_2 > \alpha_1^2 \frac{\delta_1^2}{16}. \quad (4.2.10)$$

Entonces el vector de estado del el sistema en lazo cerrado (4.2.9) alcanza la variedad $z_{21} = 0$ en tiempo finito, por lo que se tiene estabilidad asintótica semiglobal [54].

La prueba de la proposición 1 se describe en el Apéndice C.1

Observación 1: El algoritmo de control propuesto (4.2.7-4.2.8) es de señal continua, esto se debe a que el primer término en (4.2.7) converge a cero sobre la variedad de deslizamiento $z_{21} = 0$ en tiempo finito t_s y es igual a cero para toda $t \geq t_s$. Este control se realiza por medio de un Modulador de Ancho de Pulso (PWM) a causa de su característica continua. La amplitud del chattering depende de la frecuencia de conmutación, estos valores de frecuencia se consideran como finitos y máximos admisibles para la operación del PWM, mientras que la frecuencia en el controlador MD discontinuo estándar es definida y es inferior al admisible. Como consecuencia, el efecto chattering del controlador de segundo orden (MD + PWM) se disminuye en comparación con los controladores discontinuos estándar. Por otro lado, el controlador de segundo orden MD continuo (4.2.7) incluye el término integral (4.2.8), que asegura invariancia del sistema en lazo cerrado con respecto a disturbios acotados (Proposición 4), similar a un algoritmo MD discontinuo convencional.

Diseño de control Auxiliar

En el movimiento de MD sobre la variedad $z_{21} = 0$, el voltaje equivalente $v_{s,eq}$ del control v_s se obtiene como una solución para $\dot{z}_{21} = 0$ (4.2.9) [67], es de la forma

$$v_{s,eq} = c_1^{-1} f_s. \quad (4.2.11)$$

Ahora se sustituye (4.2.11) en la ecuación (4.2.6) lo que resulta

$$\dot{z}_{22} = -a_{22}z_{22} + \bar{f}_{22}(\bar{z}) - c_2 v_c \rho \quad (4.2.12)$$

donde $\bar{z} = (z_{11}, z_{12}, z_{22})^T$, $a_{22} = a_2 c_2$ y $\bar{f}_{22}(\bar{z}) = f_{22} + c_2 (nc_1)^{-1} f_s - a_{22} i_{\beta s}^{des} - \dot{i}_{\beta s}^{des}$

Por lo tanto, el movimiento MD sobre $z_{21} = 0$ se rige por el siguiente sistema de orden reducido:

$$\begin{aligned} \dot{z}_{11} &= -k_1 z_{11} + f_{11}(\bar{z}) \\ \dot{z}_{12} &= -k_2 z_{12} + f_{12}(\bar{z}) \\ \dot{z}_{22} &= -a_{22} z_{22} + f_{22}(\bar{z}) - c_2 v_c \rho \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

con $f_{11}(\bar{z}) = -d_1 d_2 \lambda_{\alpha r} z_{22}$ y $f_{12}(\bar{z}) = 2a_4 \lambda_{\beta r} z_{22}$.

El sistema (4.2.13) se puede presentar como un sistema lineal perturbado:

$$\dot{\bar{z}} = A\bar{z} + \zeta\rho + g(\bar{z}) \quad (4.2.14)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{22} \end{bmatrix} \quad \zeta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -c_2 v_c \end{bmatrix}, \quad g(\bar{z}) = \begin{bmatrix} f_{11}(\bar{z}) \\ f_{12}(\bar{z}) \\ f_{22}(\bar{z}) \end{bmatrix}$$

Se asume la perturbación $g(\bar{z})$ es acotada en una región Ω por

$$\|g(\bar{z})\| \leq \gamma_1 \|\bar{z}\| + \gamma_2, \quad \gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0. \quad (4.2.15)$$

Para el diseño del control auxiliar ρ se aplica la siguiente función cuadrática candidata de Lyapunov:

$$\bar{V} = \frac{1}{2} (z_{11}^2 + z_{12}^2 + z_{22}^2). \quad (4.2.16)$$

La derivada en el tiempo de (4.2.16) a lo largo de las trayectorias de (4.2.13) o (4.2.14) se calcula como

$$\dot{\bar{V}} = -k_1 z_{11}^2 - k_2 z_{12}^2 - a_{22} z_{22}^2 + \bar{z}^T g(\bar{z}) - c_2 z_{22} v_c \rho. \quad (4.2.17)$$

La lógica de switcheo del capacitor se elige como se indica

$$\rho = \begin{cases} 1 & \text{si } z_{22} > 0 \text{ y } v_c > 0 \\ 0 & \text{si } z_{22} > 0 \text{ y } v_c < 0 \\ 0 & \text{si } z_{22} < 0 \text{ y } v_c > 0 \\ 1 & \text{si } z_{22} < 0 \text{ y } v_c < 0 \end{cases}$$

esto resulta en

$$\rho = 0.5 \text{sign}(z_{22} v_c) + 0.5 \quad (4.2.18)$$

Al sustituir (4.2.18) en (4.2.17) y al utilizar $z_{22} v_c \text{sign}(z_{22} v_c) = |z_{22} v_c|$, la derivada (4.2.17) se vuelve

$$\begin{aligned} \dot{\bar{V}} &\leq -k_1 |z_{11}|^2 - k_2 |z_{12}|^2 - a_{22} |z_{22}|^2 + \|\bar{z}\| \|g(\bar{z})\| - 0.5 c_2 [|z_{22} v_c| + z_{22} v_c] \\ &\leq -\alpha \|\bar{z}\|^2 + \|\bar{z}\| \|g(\bar{z})\| \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

se aplican las propiedades $z_{22} v_c \leq |z_{22} v_c|$ y $\alpha = \min\{k_1, k_2, a_{22}\}$ y se utilizan (4.2.15) en (4.2.19) y al incluir el término $(\alpha - \gamma_1) \beta \|\bar{z}\|^2$, se tiene

$$\begin{aligned} \dot{\bar{V}} &\leq -(\alpha - \gamma_1) (1 - \beta) \|\bar{z}\|^2 - \|\bar{z}\| [(\alpha - \gamma_1) \beta \|\bar{z}\| - \gamma_2] \\ &\leq -(\alpha - \gamma_1) (1 - \beta) \|\bar{z}\|^2, \quad 0 < \beta < 1 \\ \forall \|\bar{z}\| &> \frac{\gamma_2}{(\alpha - \gamma_1) \beta}. \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

Una solución de el sistema (4.2.13) es últimamente acotada por

$$\|\bar{z}(t)\| \leq \delta_0, \quad \delta_0 = \frac{\gamma_2}{(\alpha - \gamma_1)\beta}.$$

Finalmente, para limitar las corrientes en el estator se propone la siguiente lógica para las variables de deslizamiento z_{21} y z_{22} :

$$z_{21} = \begin{cases} i_{\alpha s} - i_{\alpha s}^{des} & \text{si } |i_{\alpha s}| \leq I_{max} \\ i_{\alpha s} & \text{si } |i_{\alpha s}| > I_{max} \end{cases} \quad (4.2.21)$$

$$z_{22} = \begin{cases} i_{\beta s} - i_{\beta s}^{des} & \text{si } |i_{\beta s}| \leq I_{max} \\ i_{\beta s} & \text{si } |i_{\beta s}| > I_{max} \end{cases} \quad (4.2.22)$$

donde I_{max} es el máximo valor de corriente admisible, $I_{max} \approx 3 * I_{nom}$, I_{nom} es el valor nominal del módulo de corriente.

4.3 Observador de orden reducido No-Linear

Para realizar el observador se considera la velocidad del rotor ω_r y las corrientes de estator $i_{\alpha s}$ y $i_{\beta s}$ medibles. En esta sección se diseña un observador reducido no-lineal con convergencia arbitraria para estimar los flujos del rotor por lo que se introduce una transformación, ya que si se tratara con el sistema original la convergencia estaría definida por las propiedades del motor. Por lo tanto se presenta la siguiente transformación para flujos:

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha r}^* &= \lambda_{\alpha r} - l_1 i_{\alpha s} \\ \lambda_{\beta r}^* &= \lambda_{\beta r} - l_2 i_{\beta s} \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

donde l_1 y l_2 son las ganancias del observador. Se aplica (4.3.1) a las dinámicas de flujo (2.3.56)-(2.3.57) se presentan por nuevas variables $\lambda_{\alpha r}^*$ y $\lambda_{\beta r}^*$ de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_{\alpha r}^* &= -l_{11}\lambda_{\alpha r}^* + l_{12}\omega_r\lambda_{\beta r}^* + \varsigma_{11}\omega_r i_{\beta s} + \varsigma_{12}i_{\alpha s} - \vartheta_1 v_{\alpha s} \\ \dot{\lambda}_{\beta r}^* &= -l_{21}\lambda_{\beta r}^* - l_{22}\omega_r\lambda_{\alpha r}^* - \varsigma_{21}\omega_r i_{\alpha s} + \varsigma_{22}i_{\beta s} - \vartheta_2 v_{\beta s} \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

donde

$$\begin{aligned} l_{11} &= (a_3 + l_1 c_1 c_4), \quad l_{12} = (1 + l_1 c_1 c_3), \quad \vartheta_1 = l_1 c_1, \\ l_{21} &= (a_3 + l_2 c_2 c_4), \quad l_{22} = (1 + l_2 c_2 c_3), \quad \vartheta_2 = l_2 c_2, \\ \varsigma_{11} &= (l_2 + l_1 l_2 c_1 c_3), \quad \varsigma_{12} = (a_4 + l_1 a_1 c_1) - (a_3 l_1 + l_1^2 c_1 c_4), \\ \varsigma_{21} &= (l_1 + l_2 l_1 c_2 c_3), \quad \varsigma_{22} = (a_4 + l_2 a_2 c_2) - (a_3 l_2 + l_2^2 c_2 c_4) \end{aligned}$$

Ahora se parte de (4.3.2) y se diseña un observador reducido no-lineal como sigue:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\lambda}}_{\alpha r}^* &= -l_{11}\hat{\lambda}_{\alpha r}^* + l_{12}\omega_r\hat{\lambda}_{\beta r}^* + \varsigma_{11}\omega_r i_{\beta s} + \varsigma_{12}i_{\alpha s} - \vartheta_1 v_{\alpha s} \\ \dot{\hat{\lambda}}_{\beta r}^* &= -l_{21}\hat{\lambda}_{\beta r}^* - l_{22}\omega_r\hat{\lambda}_{\alpha r}^* - \varsigma_{21}\omega_r i_{\alpha s} + \varsigma_{22}i_{\beta s} - \vartheta_2 v_{\beta s}\end{aligned}\quad (4.3.3)$$

donde $\hat{\lambda}_{\alpha r}^*$ y $\hat{\lambda}_{\beta r}^*$, son las estimaciones de $\lambda_{\alpha r}^*$ y $\lambda_{\beta r}^*$, respectivamente. Se definen los errores de estimación como

$$\begin{aligned}e_{\alpha r} &= \lambda_{\alpha r}^* - \hat{\lambda}_{\alpha r}^* \\ e_{\beta r} &= \lambda_{\beta r}^* - \hat{\lambda}_{\beta r}^*\end{aligned}\quad (4.3.4)$$

de (4.3.2)-(4.3.4), las dinámicas de error del observador se obtienen de la forma siguiente

$$\begin{aligned}\dot{e}_{\alpha r} &= -l_{11}e_{\alpha r} + l_{12}\omega_r e_{\beta r} \\ \dot{e}_{\beta r} &= -l_{21}e_{\beta r} - l_{22}\omega_r e_{\alpha r}.\end{aligned}\quad (4.3.5)$$

La estabilidad del sub-sistema (4.3.5) se determina mediante la siguiente función candidata de Lyapunov :

$$V_e = \frac{1}{2} (e_{\alpha r}^2 + e_{\beta r}^2). \quad (4.3.6)$$

Se toma la derivada en el tiempo de la función de Lyapunov (4.3.6), a lo largo de las trayectorias de (4.3.5), y se seleccionan las ganancias del observador l_1 y l_2 tal que $l_{11} = l_{12}$, se tiene

$$\begin{aligned}\dot{V}_e &= - [l_{11}e_{\alpha r}^2 + l_{21}e_{\beta r}^2] < 0 \\ &\leq - (l_0) \|e\|^2 < 0.\end{aligned}$$

Como resultado, el punto de equilibrio $e_{\alpha r} = 0$ y $e_{\beta r} = 0$ de el sistema (4.3.5) es exponencial-mente estable, esto es

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\lambda}_{\alpha r}^*(t) = \lambda_{\alpha r}^*(t) \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\lambda}_{\beta r}^*(t) = \lambda_{\beta r}^*(t).$$

Finalmente, se utiliza (4.3.1) y las estimaciones de flujos del rotor $\hat{\lambda}_{\alpha r}$ y $\hat{\lambda}_{\beta r}$ se obtienen como

$$\hat{\lambda}_{\alpha r} = \hat{\lambda}_{\alpha r}^* + l_1 i_{\alpha s} \quad \text{y} \quad \hat{\lambda}_{\beta r} = \hat{\lambda}_{\beta r}^* + l_2 i_{\beta s}.$$

Observador para el par de carga

Ahora se realiza la parte del observador para el par de la carga, considerando las estimaciones de flujos $\hat{\lambda}_{\alpha r} = \lambda_{\alpha r}$ y $\hat{\lambda}_{\beta r} = \lambda_{\beta r}$ tal que se presenta la dinámica de velocidad y par como

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_r &= d_1 d_2 (\lambda_{\beta r} i_{\alpha s} - \lambda_{\alpha r} i_{\beta s}) - d_2 T_L \\ \dot{T}_L &= 0\end{aligned}\quad (4.3.7)$$

y se tiene que el observador es

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\omega}}_r &= d_1 d_2 (\lambda_{\beta r} i_{\alpha s} - \lambda_{\alpha r} i_{\beta s}) - d_2 \hat{T}_L + l_3 (\omega_r - \hat{\omega}_r) \\ \dot{\hat{T}}_L &= l_4 (\omega_r - \hat{\omega}_r)\end{aligned}\quad (4.3.8)$$

donde $\hat{\omega}_r$ y \hat{T}_L son las estimaciones de ω_r y T_L , respectivamente, y l_3 y l_4 las ganancias del observador. Se definen los errores de estimación como

$$\begin{aligned}e_\omega &= \omega_r - \hat{\omega}_r \\ e_{T_L} &= T_L - \hat{T}_L\end{aligned}\quad (4.3.9)$$

de (4.3.7)-(4.3.9), las dinámicas de error del observador se obtienen de la forma siguiente

$$\begin{aligned}\dot{e}_\omega &= -d_2 e_{T_L} - l_3 e_\omega \\ \dot{e}_{T_L} &= -l_4 e_\omega.\end{aligned}\quad (4.3.10)$$

Las ganancias l_3 y l_4 en el sub-sistema autónomo (4.3.10) se seleccionan tal que $\begin{bmatrix} -l_3 & -d_2 \\ -l_4 & 0 \end{bmatrix}$ es una matriz Hurwitz, esto resulta en

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_\omega(t) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e_{T_L}(t) = 0.$$

Las estimaciones de flujo $\hat{\lambda}_{\alpha r}$ y $\hat{\lambda}_{\beta r}$, así como el par de carga estimado \hat{T}_L , se aplican en el algoritmo de control (4.2.7) y (4.2.18) como:

$$\begin{aligned}v_s &= -\alpha_1 |\hat{z}_{21}|^{1/2} \text{sign}(\hat{z}_{21}) + u_1 \\ \dot{u}_1 &= -\alpha_2 \text{sign}(\hat{z}_{21})\end{aligned}\quad (4.3.11)$$

y

$$\rho = 0.5 \text{sign}(\hat{z}_{22} v_c) + 0.5 \quad (4.3.12)$$

donde

$$\hat{z}_{21} = \left(i_{\alpha s} - \hat{i}_{\alpha s}^{des} \right) = \left(i_{\alpha s} - \frac{1}{\hat{\phi}} \left[\frac{\hat{\lambda}_{\beta r}}{d_1 d_2} \left(d_2 \hat{T}_L - k_1 z_{11} \right) + \frac{\hat{\lambda}_{\alpha r}}{2a_4} \left(2a_3 \hat{\phi} - k_2 \hat{z}_{12} \right) \right] \right)$$

$$\hat{z}_{22} = \left(i_{\beta s} - \hat{i}_{\beta s}^{des} \right) = \left(i_{\beta s} - \frac{1}{\hat{\phi}} \left[-\frac{\hat{\lambda}_{\alpha r}}{d_1 d_2} \left(d_2 \hat{T}_L - k_1 z_{11} \right) + \frac{\hat{\lambda}_{\beta r}}{2a_4} \left(2a_3 \hat{\phi} - k_2 \hat{z}_{12} \right) \right] \right)$$

$$\text{con } \hat{\phi} = \hat{\lambda}_{\alpha r}^2 + \hat{\lambda}_{\beta r}^2 \text{ y } \hat{z}_{12} = \hat{\phi} - \phi_{ref}.$$

La estabilidad semi-global asintótica del sistema en lazo cerrado (4.2.5)-(4.2.6) con el controlador basado en el observador que es propuesto en (4.3.11)-(4.3.12), considera el principio de separación, [3]. Este requiere de estabilidad asintótica del observador (4.3.3) como una condición necesaria y suficiente, que en este caso se cumple.

4.4 Resultados

Con el fin de verificar el desempeño del controlador propuesto (4.3.11)-(4.3.12), simulaciones numéricas se realizan utilizando el método de Euler con un paso de integración $t_s = 1 \times 10^{-3}$. Los parámetros y datos del MJAM son los siguientes, [34]:

$$H.P. = 0.25, V_s = 110 \text{ (volts)}, f = 60 \text{ (Hz)}, n_p = 2, n = N_A/N_B = 1.18, r_{\alpha s} = 2.02 \text{ (ohms)}, \\ r_{\beta s} = 5.13 \text{ (ohms)}, r_r = 4.12 \text{ (ohms)}, L_m = 0.1772 \text{ (H)}, L_{\alpha s} = 0.1846 \text{ (H)}, L'_{\beta s} = 0.1833 \text{ (H)}, \\ L_r = 0.1828 \text{ (H)}, J = 0.0146 \text{ (Kg} \cdot \text{m}^2\text{)}, I_{\max} = 15 \text{ (amps)}, C_{run} = 35 \text{ } \mu\text{f}.$$

Las ganancias del controlador y del observador son $k_1 = k_2 = 100$, $\alpha_1 = 33$, $l_1 = l_2 = 0.1$, $l_3 = 50$ y $l_4 = -5$. Las condiciones iniciales de las variables de estado son seleccionadas cero.

El seguimiento del desempeño es verificado en las dos salidas: La velocidad del motor ω_r y el módulo del flujo del rotor ϕ .

Para el análisis se aplican las siguientes perturbaciones:

- 1) El MJAM inicia en reposo con un par de carga del 50% del nominal (0.5 N-m), y la velocidad de referencia se fija de 100 rad/seg.
- 2) En el primer segundo, se presenta un cambio en la velocidad de referencia – en forma de escalón – de 100 rad/seg a 140 rad/seg.
- 3) En el segundo 1.5, se aumenta el par de carga de 0.5 N-m a 1 N-m.

Los resultados de la simulación son los siguientes:

El seguimiento de la velocidad del rotor se muestra en la Fig. 4.1, se observa un buen

desempeño al cambio de la velocidad de referencia en $t = 1$ seg.. El resultado del seguimiento de la velocidad, indica que alcanza la velocidad de referencia después de 0.18 seg. La respuesta del módulo de los flujos del rotor ϕ sigue la trayectoria del valor de referencia como se observa en la Fig. 4.2.

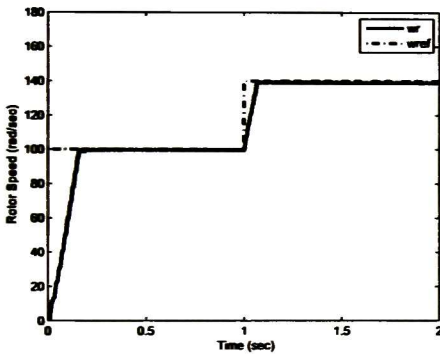


Figura 4.1: Velocidad del rotor $\omega_r(wr)$ y referencia $\omega_{ref}(wref)$.

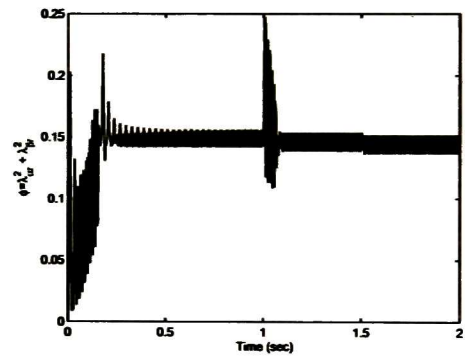


Figura 4.2: Módulo de flujo del rotor ϕ .

El par de carga estimado alcanza el estado estable después de 0.36 seg. Fig.4.3. La respuesta del par electromagnético se muestra en la Fig. 4.4, en la cual se observa que el par electromagnético tiene un valor de $11 N - m$ durante el intervalo de $[0 - 0.18 \text{ seg.}]$ y en el cambio de velocidad de referencia en $t = 1$ seg. tiene un valor de $10 N - m$.

Las componentes de oscilación de la segunda armónica aparecen en estado estable debido a la acción del devanado auxiliar y el capacitor, ver figuras 4.1, 4.2, y 4.4. Donde la amplitud de estas componentes es pequeña.

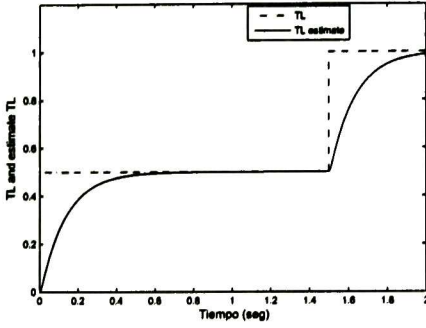


Figura 4.3: Par de carga T_L y par de carga estimado \hat{T}_L .

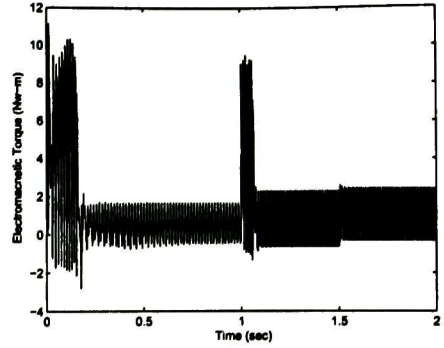


Figura 4.4: Par electromagnético T_e .

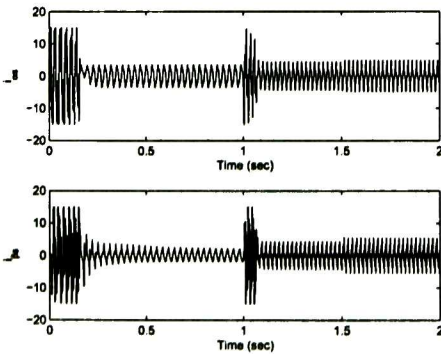


Figura 4.5: Corrientes de estator en el marco de referencia $\alpha \beta$.

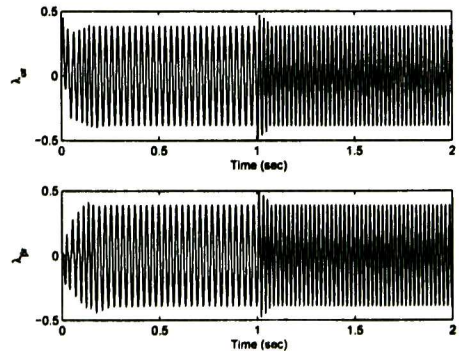


Figura 4.6: Flujos del rotor y estimaciones en el marco de referencia $\alpha \beta$.

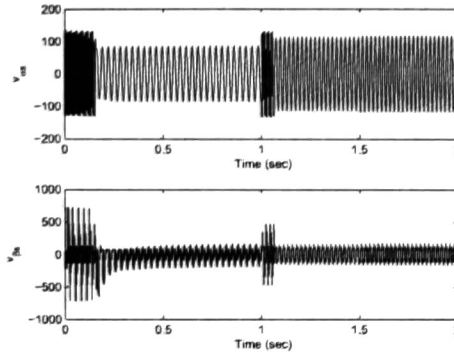


Figura 4.7: Voltajes de estator en el marco de referencia $\alpha \beta$.

Por otro lado, las corrientes de estator (ver Fig. 4.5) en el intervalo de arranque ($0 < t < 0.2 \text{seg.}$) adquieren un valor elevado, pero son acotados por el control de limitador de corriente, donde las corrientes de arranque se mantienen por debajo del límite I_{max} , de igual manera durante el cambio de referencia de velocidad en el intervalo ($1.0 < t < 1.1 \text{seg.}$). En Fig. 4.6, se muestran las componentes de flujo del rotor $\lambda_{\alpha r}$ y $\lambda_{\beta r}$, las estimaciones $\hat{\lambda}_{\alpha r}$ y $\hat{\lambda}_{\beta r}$ respectivamente, y el valor de las componentes de flujo del rotor con magnitudes de 0.4 wb. Finalmente, en Fig. 4.7, se muestran las respuestas de los voltajes, donde $v_{\alpha s}$ es el control super-twisting MD y $v_{\beta s}$ es el control MD discontinuo.

4.5 Conclusiones

En este capítulo se desarrolla el esquema de control propuesto que se basa en la técnica de control a bloques y el algoritmo de MD super-twisting, propuesto para regular la velocidad angular ω_r y un control discontinuo por MD para el módulo de flujo del rotor ϕ . Además se describe un observador no lineal de orden reducido para estimar el flujo del rotor y el par de carga. La condición de estabilidad asintótica se establece con el principio de separación, donde la condición necesaria es que el observador tenga estabilidad asintótica y el controlador sea estable. Los resultados de simulación muestran un desempeño robusto del controlador al seguimiento de velocidad y módulo de flujos, en presencia de la perturbación del par de carga. El controlador propuesto asegura la limitación de las corrientes de estator.

Capítulo 5

Control Robusto por MD de segundo orden con variación en resistencia del rotor, observador de flujos y par.

(Sistema con incertidumbre en resistencia de rotor)

5.1 Introducción

En el capítulo 4 se propuso un esquema de control bajo la consideración que los parámetros de la planta son conocidos. Bajo estas consideraciones el análisis de estabilidad del controlador basado en el observador se le aplica el principio de separación. En la práctica la resistencia del rotor cambia con las condiciones de operación, y la planta se considera como un sistema con incertidumbre. En este caso el análisis de estabilidad del sistema completo perturbado en lazo cerrado no aplica el principio de separación.

En este capítulo se considera el motor jaula de ardilla monofásico con incertidumbre en resistencia del rotor (sección 2.3.6), se asume que esta perturbación es acotada. Primero se propone el diseño del observador super-twisting para estimar los flujos del rotor y el par de carga. Después se consideran las estimaciones en el algoritmo de control propuesto en el capítulo 4, donde ahora se incluye la perturbación. Y finalmente se analiza la estabilidad en lazo cerrado del sistema completo.

El modelo dinámico del MJAM con variación en la resistencia del rotor en el marco de referencia $(\alpha - \beta)$, el cual es descrito por las ecuaciones (2.3.55) y (2.3.109)-(2.3.112) del capítulo 2. Además, en este análisis se consideran los voltajes y dinámica del capacitor (2.3.60)-(2.3.62), donde se considera la entrada de control acotada por

$$|v_s| \leq v_0 \quad (5.1.1)$$

donde v_0 es un escalar positivo. El modelo del MJAM con incertidumbre es:

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_{\alpha r} &= -a_{3,0}\lambda_{\alpha r} + n_p\omega_r\lambda_{\beta r} + a_{4,0}i_{\alpha s} + \Delta_{\alpha r} \\
\dot{\lambda}_{\beta r} &= -n_p\omega_r\lambda_{\alpha r} - a_{3,0}\lambda_{\beta r} + a_{4,0}i_{\beta s} + \Delta_{\beta r} \\
\dot{i}_{\alpha s} &= -c_1a_{1,0}i_{\alpha s} + c_1c_{4,0}\lambda_{\alpha r} - c_1c_3n_p\omega_r\lambda_{\beta r} + c_1v_{\alpha s} + \Delta_{\alpha s} \\
\dot{i}_{\beta s} &= -c_2a_{2,0}i_{\beta s} + c_2c_{4,0}\lambda_{\beta r} + c_2c_3n_p\omega_r\lambda_{\alpha r} + c_2v_{\beta s} + \Delta_{\beta s}.
\end{aligned}$$

El par de carga T_L se asume como una función con variación lenta en el tiempo, y durante el proceso transitorio del sistema en lazo cerrado es constante, no conocido y satisface la siguiente expresión,

$$\dot{T}_L = 0. \quad (5.1.2)$$

5.2 Observador por MD ST invariante a cambios paramétricos

Si se consideran las mediciones de la velocidad del rotor ω_r y las corrientes de estator $i_{\alpha s}$ y $i_{\beta s}$; en esta sección se diseña un observador por modos deslizantes super-twisting para estimar el flujo del rotor y el par de carga. Un esquema de este observador se muestra en la Fig. 5.1, [51]. Esta técnica se puede utilizar en muchas aplicaciones como son estimación de parámetros en donde la estimación de los estados es requerida. El control del sistema re-alimentado resultante de los estimadores se puede usar en lazo cerrado y en lazo abierto debido a que este método no tiene dependencia entre el sistema de entrada y de salida.

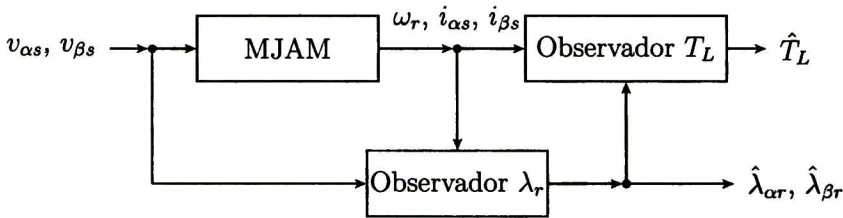


Figura 5.1: Esquema del observador.

5.2.1 Observador por MD para flujos de rotor

En el caso perturbado, para dar robustez al sistema, es necesario el diseño de un observador de orden completo. Para tener mas libertad de diseño del observador, se utiliza la misma

transformación (4.3.1) del capítulo 4:

$$\begin{aligned}\lambda_{\alpha r}^* &= \lambda_{\alpha r} - l_1 i_{\alpha s} \\ \lambda_{\beta r}^* &= \lambda_{\beta r} - l_2 i_{\beta s}\end{aligned}\quad (5.2.1)$$

donde l_1 y l_2 son las ganancias de transformación que serán seleccionadas posteriormente. Se utiliza (5.2.1), en las dinámicas de los flujos de rotor y las corrientes de estator (2.3.109)-(2.3.112) que se representan en las nuevas variables $\lambda_{\alpha r}^*$ y $\lambda_{\beta r}^*$ con los términos no conocidos de la forma

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_{\alpha r}^* &= -l_{11}\lambda_{\alpha r}^* + l_{12}n_p\omega_r\lambda_{\beta r}^* + s_{11}n_p\omega_r i_{\beta s} + s_{12}i_{\alpha s} - \varphi_1 v_{\alpha s} - l_1\Delta_{\alpha s} + \Delta_{\alpha r} \\ \dot{\lambda}_{\beta r}^* &= -l_{21}\lambda_{\beta r}^* - l_{22}n_p\omega_r\lambda_{\alpha r}^* - s_{21}n_p\omega_r i_{\alpha s} + s_{22}i_{\beta s} - \varphi_2 v_{\beta s} - l_2\Delta_{\beta s} + \Delta_{\beta r} \\ \dot{i}_{\alpha s} &= -\vartheta_{11}i_{\alpha s} - \vartheta_{12}n_p\omega_r i_{\beta s} - \varphi_3 n_p\omega_r \lambda_{\beta r}^* + \varphi_4 \lambda_{\alpha r}^* + c_1 v_{\alpha s} + \Delta_{\alpha s} \\ \dot{i}_{\beta s} &= -\vartheta_{21}i_{\beta s} + \vartheta_{22}n_p\omega_r i_{\alpha s} + \varphi_5 n_p\omega_r \lambda_{\alpha r}^* + \varphi_6 \lambda_{\beta r}^* + c_2 v_{\beta s} + \Delta_{\beta s}\end{aligned}\quad (5.2.2)$$

donde

$$\begin{aligned}l_{11} &= a_{3,0} + l_1 c_1 c_{4,0}, \quad l_{12} = 1 + l_1 c_1 c_3, \quad l_{21} = a_{3,0} + l_2 c_2 c_{4,0}, \quad l_{22} = 1 + l_2 c_2 c_3; \\ s_{11} &= l_{12} l_2, \quad s_{12} = a_{4,0} - l_{11} l_1 + l_1 c_1 a_{1,0}, \quad s_{21} = l_{22} l_1, \quad s_{22} = a_{4,0} - l_{21} l_2 + l_2 c_2 a_{2,0}; \\ \vartheta_{11} &= c_1 a_{1,0} - l_1 c_1 c_{4,0}, \quad \vartheta_{12} = l_2 c_1 c_3, \quad \vartheta_{21} = c_2 a_{2,0} - l_2 c_2 c_{4,0}, \quad \vartheta_{22} = l_1 c_2 c_3; \\ \varphi_1 &= l_1 c_1, \quad \varphi_2 = l_2 c_2, \quad \varphi_3 = c_1 c_3, \quad \varphi_4 = c_1 c_{4,0}, \quad \varphi_5 = c_2 c_3, \quad \varphi_6 = c_2 c_{4,0}.\end{aligned}$$

Se considera el modelo (5.2.2) y se propone el siguiente observador no lineal para flujos:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\lambda}}_{\alpha r}^* &= -l_{11}\hat{\lambda}_{\alpha r}^* + l_{12}n_p\omega_r\hat{\lambda}_{\beta r}^* + s_{11}n_p\omega_r i_{\beta s} + s_{12}i_{\alpha s} - \varphi_1 v_{\alpha s} + k_{11}v_1 + v_3 \\ \dot{\hat{\lambda}}_{\beta r}^* &= -l_{21}\hat{\lambda}_{\beta r}^* - l_{22}n_p\omega_r\hat{\lambda}_{\alpha r}^* - s_{21}n_p\omega_r i_{\alpha s} + s_{22}i_{\beta s} - \varphi_2 v_{\beta s} + k_{12}v_2 + v_4 \\ \dot{\hat{i}}_{\alpha s} &= -\vartheta_{11}\hat{i}_{\alpha s} - \vartheta_{12}n_p\omega_r\hat{i}_{\beta s} - \varphi_3 n_p\omega_r \hat{\lambda}_{\beta r}^* + \varphi_4 \hat{\lambda}_{\alpha r}^* + c_1 v_{\alpha s} + v_1 \\ \dot{\hat{i}}_{\beta s} &= -\vartheta_{21}\hat{i}_{\beta s} + \vartheta_{22}n_p\omega_r\hat{i}_{\alpha s} + \varphi_5 n_p\omega_r \hat{\lambda}_{\alpha r}^* + \varphi_6 \hat{\lambda}_{\beta r}^* + c_2 v_{\beta s} + v_2\end{aligned}\quad (5.2.3)$$

donde $\hat{\lambda}_{\alpha r}^*$, $\hat{\lambda}_{\beta r}^*$, $\hat{i}_{\alpha s}$, y $\hat{i}_{\beta s}$ son las estimaciones de $\lambda_{\alpha r}^*$, $\lambda_{\beta r}^*$, $i_{\alpha s}$ e $i_{\beta s}$, respectivamente, y v_1, \dots, v_4 son las entradas del observador.

Ahora, de (5.2.2) y (5.2.3), se tiene que las dinámicas del error del observador son

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\lambda}}_{\alpha r}^* &= -l_{11}\tilde{\lambda}_{\alpha r}^* + l_{12}n_p\omega_r\tilde{\lambda}_{\beta r}^* - l_1\Delta_{\alpha s} + \Delta_{\alpha r} - k_{11}v_1 + v_3 \\ \dot{\tilde{\lambda}}_{\beta r}^* &= -l_{21}\tilde{\lambda}_{\beta r}^* - l_{22}n_p\omega_r\tilde{\lambda}_{\alpha r}^* + l_2\Delta_{\beta s} + \Delta_{\beta r} - k_{12}v_2 + v_4 \\ \dot{\tilde{i}}_{\alpha s} &= -\vartheta_{11}\tilde{i}_{\alpha s} - \vartheta_{12}n_p\omega_r\tilde{i}_{\beta s} - \varphi_3 n_p\omega_r \tilde{\lambda}_{\beta r}^* + \varphi_4 \tilde{\lambda}_{\alpha r}^* + \Delta_{\alpha s} - v_1 \\ \dot{\tilde{i}}_{\beta s} &= -\vartheta_{21}\tilde{i}_{\beta s} + \vartheta_{22}n_p\omega_r\tilde{i}_{\alpha s} + \varphi_5 n_p\omega_r \tilde{\lambda}_{\alpha r}^* + \varphi_6 \tilde{\lambda}_{\beta r}^* + \Delta_{\beta s} - v_2\end{aligned}\quad (5.2.4)$$

donde los errores son $\tilde{\lambda}_{\alpha r}^* = \lambda_{\alpha r}^* - \hat{\lambda}_{\alpha r}^*$, $\tilde{\lambda}_{\beta r}^* = \lambda_{\beta r}^* - \hat{\lambda}_{\beta r}^*$, $\tilde{i}_{\alpha s} = i_{\alpha s} - \hat{i}_{\alpha s}$ y $\tilde{i}_{\beta s} = i_{\beta s} - \hat{i}_{\beta s}$. Para introducir modos deslizantes en las dinámicas de corrientes se asignan v_1 y v_2 como algoritmos del sistema (5.2.4) de la forma

$$\begin{aligned} v_1 &= -k_{01_a} \|\tilde{i}_{\alpha s}\|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{i}_{\alpha s}) - k_{03_a} \tilde{i}_{\alpha s} + u_1 \\ \dot{u}_1 &= -k_{02_a} \text{sign}(\tilde{i}_{\alpha s}) \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

$$\begin{aligned} v_2 &= -k_{01_b} \|\tilde{i}_{\beta s}\|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{i}_{\beta s}) - k_{03_b} \tilde{i}_{\beta s} + u_2 \\ \dot{u}_2 &= -k_{02_b} \text{sign}(\tilde{i}_{\beta s}) \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

se sustituyen las entradas (5.2.5)-(5.2.6) en $(\dot{\tilde{i}}_{\alpha s}, \dot{\tilde{i}}_{\beta s})$ de (5.2.4), el sistema en lazo cerrado resulta

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{i}}_{\alpha s} &= \Delta_a - k_{01_a} |\tilde{i}_{\alpha s}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{i}_{\alpha s}) - k_{03_a} \tilde{i}_{\alpha s} + u_1 \\ \dot{u}_1 &= -k_{02_a} \text{sign}(\tilde{i}_{\alpha s}) \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{i}}_{\beta s} &= \Delta_b - k_{01_b} |\tilde{i}_{\beta s}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{i}_{\beta s}) - k_{03_b} \tilde{i}_{\beta s} + u_1 \\ \dot{u}_1 &= -k_{02_b} \text{sign}(\tilde{i}_{\beta s}) \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

con $\Delta_a = -\vartheta_{11} \tilde{i}_{\alpha s} - \vartheta_{12} n_p \omega_r \tilde{i}_{\beta s} - \varphi_3 n_p \omega_r \tilde{\lambda}_{\beta r}^* + \varphi_4 \tilde{\lambda}_{\alpha r}^* + c_1 v_{\alpha s}$, $\Delta_b = -\vartheta_{11} \tilde{i}_{\alpha s} - \vartheta_{12} n_p \omega_r \tilde{i}_{\beta s} - \varphi_3 n_p \omega_r \tilde{\lambda}_{\beta r}^* + \varphi_4 \tilde{\lambda}_{\alpha r}^* + c_1 v_{\alpha s}$, y las ganancias de ajuste como $k_{01_a} > 0$, $k_{01_b} > 0$, $k_{02_a} > 0$, $k_{02_b} > 0$, $k_{03_b} > 0$, y $k_{03_a} > 0$.

Proposición 5: Considere una región admisible Ω_2 donde el término Δ_i con $i = a, b$, se considera como una perturbación en (5.2.7) y (5.2.8), que se considera acotada por $\|\Delta_i\| \leq \delta_1 |\tilde{i}| + \delta_2$ con $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$. Se seleccionan las ganancias del observador $k_{01_i} > 0$, $k_{02_i} > 0$ y $k_{03_i} > 0$ en (5.2.5) y (5.2.6) tal que las siguientes condiciones se cumplen:

$$k_{01_i} > 0, \quad k_{02_i} > k_{01_i} \frac{(k_{01_i} \delta_2 + \frac{1}{8} \delta_2^2)}{2 (\frac{1}{2} k_{01_i} - \delta_2)}, \quad \text{and} \quad k_{03_i} > \frac{6}{8} \delta_1. \quad (5.2.9)$$

Esto asegura la convergencia de $\tilde{i}_{\alpha s}$ a $i_{\alpha s}$ e $\tilde{i}_{\beta s}$ a $i_{\beta s}$ en tiempo finito t_s , por lo que se tiene estabilidad asintótica global, [54].

La prueba de la proposición 5 se describe en el Apéndice D.1. Se considera la observación 1 del 4 para este caso.

Cuando ocurren los MD sobre $\tilde{i}_{\alpha s} \equiv 0$ y $\tilde{i}_{\beta s} \equiv 0$, las dinámicas de error de flujos de rotor (5.2.4) se representa de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\lambda}}_{\alpha r}^* &= -l_{11} \tilde{\lambda}_{\alpha r}^* + l_{12} n_p \omega_r \tilde{\lambda}_{\beta r}^* - l_1 \Delta_{\alpha s} + \Delta_{\alpha r} - k_{11} v_{1eq} + v_3 \\ \dot{\tilde{\lambda}}_{\beta r}^* &= -l_{21} \tilde{\lambda}_{\beta r}^* - l_{22} n_p \omega_r \tilde{\lambda}_{\alpha r}^* - l_2 \Delta_{\beta s} + \Delta_{\beta r} - k_{12} v_{2eq} + v_4 \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

donde los valores equivalentes de las entradas del observador $v_{1,eq}$ y $v_{2,eq}$ son calculadas de la forma $\dot{\hat{i}}_{\alpha s} \equiv 0$ y $\dot{\hat{i}}_{\beta s} \equiv 0$, como

$$\begin{aligned} v_{1,eq} &= -\varphi_3 n_p \omega_r \tilde{\lambda}_{\beta r}^* + \varphi_4 \tilde{\lambda}_{\alpha r}^* + \Delta_{\alpha s} \\ v_{2,eq} &= \varphi_5 n_p \omega_r \tilde{\lambda}_{\alpha r}^* + \varphi_6 \tilde{\lambda}_{\beta r}^* + \Delta_{\beta s}. \end{aligned}$$

Para cancelar algunos términos en (5.2.10), se seleccionan $k_{11} = -\frac{L_r}{c_1 L_m} - l_1$, $k_{12} = -\frac{L_r}{c_2 L_m} - l_2$; tal que

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\lambda}}_{\alpha r}^* &= -v_3 \\ \dot{\tilde{\lambda}}_{\beta r}^* &= -v_4 \end{aligned}$$

se elige

$$\begin{aligned} v_3 &= k_{2ob} \hat{\lambda}_{\alpha}^* \\ v_4 &= k_{2ob} \hat{\lambda}_{\beta}^* \end{aligned}$$

con la siguiente consideración para la constante $k_{2ob} > 0$ que resulta en

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\lambda}}_{\alpha r}^* &= -k_{2ob} \tilde{\lambda}_{\alpha}^* + k_{2ob} \lambda_{\alpha}^* \\ \dot{\tilde{\lambda}}_{\beta r}^* &= -k_{2ob} \tilde{\lambda}_{\beta}^* + k_{2ob} \lambda_{\beta}^*. \end{aligned}$$

Se reescriben las derivadas de las dinámicas de error de flujo anterior en forma matricial como

$$\dot{\tilde{\Psi}} = -k_{2ob} \tilde{\Psi} + k_{2ob} \Psi \quad (5.2.11)$$

donde $\Psi = \begin{bmatrix} \lambda_{\alpha}^* \\ \lambda_{\beta}^* \end{bmatrix}$ para mostrar que el sistema resultante es estable se aplica la siguiente función candidata de Lyapunov $V = \frac{1}{2} \tilde{\Psi}^T \Psi$ y se define la siguiente nivel de acotamiento $\Omega_c = \{ \tilde{\Psi} \in R^n \mid V \leq \gamma \}$. $\gamma > 0$.

La derivada de la función de Lyapunov a través de las trayectorias de las dinámicas de error de flujos (5.2.11) resulta en

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \tilde{\Psi}^T \dot{\tilde{\Psi}} \\ &= \tilde{\Psi}^T \left(-k_{2ob} \tilde{\Psi} + k_{2ob} \Psi \right) \\ &= -k_{2ob} \tilde{\Psi}^T \tilde{\Psi} + k_{2ob} \tilde{\Psi}^T \Psi \\ &= -k_{2ob} \left\| \tilde{\Psi} \right\|_2^2 + k_{2ob} \left\| \tilde{\Psi} \right\|_2 \left\| \Psi \right\|_2 \end{aligned}$$

Se utiliza el lemma 9.2 de [30], tal que el disturbio se puede presentar como $\left\| \Psi \right\|_2 \leq \gamma$, $\gamma > 0$, $\forall t \geq 0$ y este satisface $\left\| \tilde{\Psi} \right\|_2 \leq b$, $\forall t_0 + T$

El acotamiento del flujo con un valor constante es físicamente razonable, puesto que un motor funciona con energía limitada.

Por lo tanto, se considera que $0 < \theta < 1$. La cota final de las trayectorias del error de flujos, resulta

$$\begin{aligned}
 &= -k_{2ob} \left\| \tilde{\Psi} \right\|_2^2 + k_{2ob} \gamma \left\| \tilde{\Psi} \right\|_2 \\
 &= -k_{2ob} \left\| \tilde{\Psi} \right\|_2^2 + \theta k_{2ob} \left\| \tilde{\Psi} \right\|_2^2 - \theta k_{2ob} \left\| \tilde{\Psi} \right\|_2^2 + k_{2ob} \gamma \left\| \tilde{\Psi} \right\|_2 \\
 &= -(1 - \theta) k_{2ob} \left\| \tilde{\Psi} \right\|_2^2 + (\gamma - \theta \left\| \tilde{\Psi} \right\|_2) k_{2ob} \left\| \tilde{\Psi} \right\|_2 \\
 \dot{V} &= -(1 - \theta) \gamma \left\| \tilde{\Psi} \right\|_2^2; \quad \forall \left\| \tilde{\Psi} \right\|_2 \geq \frac{\gamma}{\theta} = b
 \end{aligned}$$

Tenga en cuenta que la cota última b , es proporcional a la cota superior en la perturbación γ . Por lo tanto todas las trayectorias que llegan dentro de Ω_c en $t_0 - T$ permanecen $\forall t \geq T$ en Ω_c . Entonces se tiene la solución $\left\| \tilde{\Psi}(t) \right\| \leq b$ para $t > T$. Este resultado en el origen puede ser visto como una propiedad de robustez de los sistemas nominales teniendo estabilidad exponencial en el origen. Esto muestra que una perturbación arbitrariamente pequeña (uniformemente acotada) no dará lugar a grandes desviaciones de estado estable en el origen.

Ahora se considera la transformación (5.2.3) para obtener los flujos estimados $\hat{\lambda}_{\alpha r}$ y $\hat{\lambda}_{\beta r}$ como

$$\hat{\lambda}_{\alpha r} = \hat{\lambda}_{\alpha r}^* + l_1 i_{\alpha s} \quad \text{y} \quad \hat{\lambda}_{\beta r} = \hat{\lambda}_{\beta r}^* + l_2 i_{\beta s}.$$

5.2.2 Observador MD para el par de carga

En el anterior para el observador del par T_L se supone $\hat{\lambda}_{\alpha r}(t) = \lambda_{\alpha r}(t)$ y $\hat{\lambda}_{\beta r}(t) = \lambda_{\beta r}(t)$ a partir t_0 , pero realmente se tiene un proceso transitorio en el observador de flujos por esta razón en esta sección se considera para el momento t_0 a $\hat{\lambda}_{\alpha r}(t) \neq \lambda_{\alpha r}(t)$ y $\hat{\lambda}_{\beta r}(t) \neq \lambda_{\beta r}(t)$. Debido a esta desigualdad aparece una perturbación y para obtener robustez se utiliza el algoritmo super-twisting por lo que se propone el siguiente observador para el par de carga (T_L) donde se consideran las estimaciones de $\hat{\lambda}_{\beta}^*$ y $\hat{\lambda}_{\alpha}^*$, así como el la estimación de la velocidad ω_r para la dinámica mecánica:

$$\begin{aligned}
 \dot{\omega}_r &= d_1 d_2 (\lambda_{\beta r} i_{\alpha s} - \lambda_{\alpha r} i_{\beta s}) - d_2 T_L \\
 \dot{T}_L &= 0
 \end{aligned} \tag{5.2.12}$$

donde \dot{T}_L , se considera como parte del algoritmo de modos deslizantes super-twisting. Por lo que se propone el siguiente observador:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\omega}}_r &= d_1 d_2 \left(\hat{\lambda}_{\beta r} i_{\alpha s} - \hat{\lambda}_{\alpha r} i_{\beta s} \right) - d_2 \hat{T}_L + l_3 |\omega_r - \hat{\omega}_r|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\omega_r - \hat{\omega}_r) + l_5 (\omega_r - \hat{\omega}_r) \\ \dot{\hat{T}}_L &= l_4 \text{sign}(\omega_r - \hat{\omega}_r)\end{aligned}\quad (5.2.13)$$

donde $\hat{\omega}_r$ y \hat{T}_L son las estimaciones de ω_r y T_L , respectivamente, l_3 , l_4 y l_5 las ganancias del observador. Se definen los errores de estimación como

$$\begin{aligned}e_\omega &= \omega_r - \hat{\omega}_r \\ e_{T_L} &= T_L - \hat{T}_L.\end{aligned}$$

al utilizar (5.2.12) y (5.2.13) se obtienen las siguientes dinámicas de error:

$$\begin{aligned}\dot{e}_\omega &= d_1 d_2 (\lambda_{\beta r} i_{\alpha s} - \lambda_{\alpha r} i_{\beta s}) - d_1 d_2 \left(\hat{\lambda}_{\beta r} i_{\alpha s} - \hat{\lambda}_{\alpha r} i_{\beta s} \right) - l_3 |e_\omega|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_\omega) - l_5 e_\omega - d_2 e_{T_L} \\ \dot{e}_{T_L} &= -l_4 \text{sign}(e_\omega).\end{aligned}\quad (5.2.14)$$

Y se considera la suposición de estabilidad de la proposición 5 para (5.2.14), se tiene que para una región de operación admisible Ω donde el término $f_\omega = d_1 d_2 (\lambda_{\beta r} i_{\alpha s} - \lambda_{\alpha r} i_{\beta s}) - d_1 d_2 (\hat{\lambda}_{\beta r} i_{\alpha s} - \hat{\lambda}_{\alpha r} i_{\beta s})$ es una función acotada $\|f_\omega\| \leq \delta_3 |e_\omega| + \delta_4$. Entonces se toman las mismas condiciones de estabilidad y las ganancias del observador super-twistig tienen que ser $l_3 > 0$, $l_4 > 0$ y $l_5 > 0$ tal que se tiene $e_\omega = 0$ y $e_{T_L} = 0$ en tiempo finito t_s .

5.3 Diseño del control basado en el observador

5.3.1 Superficies de control de velocidad y flujo (Lazo Principal)

Se asume que la velocidad ω_r y las corrientes de estator son medidos, y además los flujos de rotor y el par de carga son estimados, el objetivo en esta parte es el diseño de un controlador MD que siga efectivamente las señales de referencia de la velocidad que se desea ω_r y el módulo de flujos del rotor ϕ_{ref} mediante un control continuo en v_s y un control discontinuo para el interruptor ρ en el devanado auxiliar. Se definen los errores de seguimiento como

$$x_1 = \begin{bmatrix} \omega_r - \omega_{ref} \\ \phi - \phi_{ref} \end{bmatrix} \quad y \quad x_2 = \begin{bmatrix} i_{\alpha s} \\ i_{\beta s} \end{bmatrix}$$

donde $\phi = |\psi|^2 = \lambda_{\alpha r}^2 + \lambda_{\beta r}^2$ es el módulo de flujos del rotor. El sistema (2.3.55) y (2.3.109)-(2.3.112) puede representarse en la forma conocida como control no lineal a bloques con

perturbación, [47], que consiste de dos bloques:

$$\dot{x}_1 = f_1(\phi) + B_1(\lambda_r)x_2 + D_1T_L + h(t) + \Delta_\alpha(t) \quad (5.3.1)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(\omega_r, \lambda_r, i_s) + B_2u + \Delta_\beta(t) \quad (5.3.2)$$

donde $\lambda_r = (\lambda_{\alpha r}, \lambda_{\beta r})$, $i_s = (i_{\alpha s}, i_{\beta s})$, $\text{rank}B_1(\lambda_r) = n_1$, $\text{rank}B_2 = n_2$ y $n_1 = n_2 = 2$ con

$$u = \begin{bmatrix} v_{\alpha s} \\ v_{\beta s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_s \\ n^{-1}v_s - v_c\rho \end{bmatrix}, f_1 = \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2a_{3,0}\phi \end{bmatrix}, f_2 = \begin{bmatrix} f_{21} - a_{1,0}c_1i_{\alpha s} \\ f_{22} - a_{2,0}c_2i_{\beta s} \end{bmatrix}$$

$$f_{21} = c_1c_{4,0}\lambda_{\alpha r} - c_1c_3\omega_r\lambda_{\beta r}, B_1(\lambda_r) = \begin{bmatrix} d_1d_2\lambda_{\beta r} & -d_1d_2\lambda_{\alpha r} \\ 2a_{4,0}\lambda_{\alpha r} & 2a_{4,0}\lambda_{\beta r} \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}, \Delta_\alpha(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\Delta_{\alpha r}(t)\lambda_{\alpha r} + 2\Delta_{\beta r}(t)\lambda_{\beta r} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_\beta(t) = \begin{bmatrix} \Delta_{\alpha s}(t) \\ \Delta_{\beta s}(t) \end{bmatrix}, h(t) = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_{ref}(t) \\ \dot{\phi}_{ref}(t) \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} -d_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Puesto que $z_1 = x_1$, con el vector $z_1 = (z_{11}, z_{12})^T$, y usando la técnica de control por bloques, [47], el valor deseado \hat{x}_{2des} para el control virtual x_2 en el primer bloque (4.2.1) se forma como sigue

$$\hat{x}_{2des} = -B_1^{-1}(\hat{\lambda}_r) \left(f_1 + D_1\hat{T}_L + h(t) \right) + B_1^{-1}(\hat{\lambda}_r) (K_1z_1) \quad (5.3.3)$$

con la dinámica deseada K_1z_1 para el error de seguimiento z_1 y la matriz de ganancias del controlador

$$K_1 = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{bmatrix} \quad k_1 > 0, \quad k_2 > 0.$$

Ahora se define la variable de deslizamiento z_2 de la forma

$$z_2 = x_2 - \hat{x}_{2des} \quad (5.3.4)$$

donde $\hat{x}_{2des} = (\hat{i}_{\alpha s}^{des}, \hat{i}_{\beta s}^{des})^T = (i_{\alpha s}^{des} - \Delta_{\alpha s}, i_{\beta s}^{des} - \Delta_{\beta s})^T$ con

$$\hat{i}_{\alpha s}^{des} = \frac{1}{\phi} \left[\frac{\lambda_{\beta r}}{d_1d_2} \left(d_2\hat{T}_L - k_1z_{11} - \dot{\omega}_{ref}(t) \right) + \frac{\lambda_{\alpha r}}{2a_{4,0}} \left(2a_{3,0}\hat{\phi} - k_2\hat{z}_{12} - \dot{\phi}_{ref}(t) \right) \right]$$

$$i_{\alpha s}^{des} = \frac{1}{\phi} \left[\frac{\lambda_{\beta r}}{d_1d_2} \left(d_2T_L - k_1z_{11} - \dot{\omega}_{ref}(t) \right) + \frac{\lambda_{\alpha r}}{2a_{4,0}} \left(2a_{3,0}\phi - k_2z_{12} - \dot{\phi}_{ref}(t) \right) \right]$$

$$\hat{i}_{\beta s}^{des} = \frac{1}{\phi} \left[-\frac{\lambda_{\alpha r}}{d_1d_2} \left(d_2\hat{T}_L - k_1z_{11} - \dot{\omega}_{ref}(t) \right) + \frac{\lambda_{\beta r}}{2a_{4,0}} \left(2a_{3,0}\hat{\phi} - k_2\hat{z}_{12} - \dot{\phi}_{ref}(t) \right) \right]$$

$$i_{\beta s}^{des} = \frac{1}{\phi} \left[-\frac{\lambda_{\alpha r}}{d_1d_2} \left(d_2T_L - k_1z_{11} - \dot{\omega}_{ref}(t) \right) + \frac{\lambda_{\beta r}}{2a_{4,0}} \left(2a_{3,0}\phi - k_2z_{12} - \dot{\phi}_{ref}(t) \right) \right]$$

Utilizando la transformación (5.3.3)-(5.3.4) y $B_1(\lambda_r)B_1^{-1}(\hat{\lambda}_r) = [I - B_1(\hat{\lambda}_r)B_1^{-1}(\lambda_r)]$, el sistema (5.3.1)-(5.3.2) se representa en las nuevas coordenadas z_1 y $z_2 = (z_{21}, z_{22})^T =$

$$\begin{bmatrix} \left(i_{\alpha s} - \hat{i}_{\alpha s}^{des} \right) \\ \left(i_{\beta s} - \hat{i}_{\beta s}^{des} \right) \end{bmatrix} \text{ de la forma}$$

$$\dot{z}_1 = K_1 z_1 + B_1(\lambda_r) z_2 + \Delta_\alpha(t) + \Delta\varphi \quad (5.3.5)$$

$$\dot{z}_2 = f_2(\omega_r, \lambda_r, i_s) + B_2 u - \dot{x}_{2des} + \Delta_\beta(t) \quad (5.3.6)$$

donde $\Delta\varphi = B_1(\tilde{\lambda}_r) B_1^{-1}(\lambda_r) (f_1 + D_1 \hat{T}_L + h(t) - k_1 z_1) + \Delta_\alpha(t)$ y con

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_1 = & -(a_{3,0} d_1 d_2 / a_{3,0}) (\lambda_{\alpha r} \tilde{\lambda}_{\beta r} - \lambda_{\beta r} \tilde{\lambda}_{\alpha r}) - (d_2 / \phi) \hat{T}_L (\lambda_{\alpha r} \tilde{\lambda}_{\alpha r} + \lambda_{\beta r} \tilde{\lambda}_{\beta r}) \dots \\ & + (1/\phi) \left(\dot{\omega}_{ref} (\lambda_{\alpha r} \tilde{\lambda}_{\alpha r} + \lambda_{\beta r} \tilde{\lambda}_{\beta r}) + (d_1 d_2 / 2a_{4,0}) \dot{\phi}_{ref} (\lambda_{\alpha r} \tilde{\lambda}_{\beta r} - \lambda_{\beta r} \tilde{\lambda}_{\alpha r}) \right) \dots \\ & + (1/\phi) \left(k_1 z_{11} (\lambda_{\alpha r} \tilde{\lambda}_{\alpha r} + \lambda_{\beta r} \tilde{\lambda}_{\beta r}) + (d_1 d_2 / 2a_{4,0}) k_1 z_{12} (\lambda_{\alpha r} \tilde{\lambda}_{\beta r} - \lambda_{\beta r} \tilde{\lambda}_{\alpha r}) \right) \\ \Delta\varphi_2 = & -2a_{3,0} (\lambda_{\alpha r} \tilde{\lambda}_{\beta r} + \lambda_{\beta r} \tilde{\lambda}_{\alpha r}) - (2a_{4,0} / d_1 \phi) \hat{T}_L (\lambda_{\alpha r} \tilde{\lambda}_{\beta r} - \lambda_{\beta r} \tilde{\lambda}_{\alpha r}) \dots \\ & + (1/\phi) \left(\dot{\phi}_{ref} (\lambda_{\alpha r} \tilde{\lambda}_{\alpha r} + \lambda_{\beta r} \tilde{\lambda}_{\beta r}) - (2a_{4,0} / d_1 d_2) \dot{\omega}_{ref} (\lambda_{\alpha r} \tilde{\lambda}_{\beta r} + \lambda_{\beta r} \tilde{\lambda}_{\alpha r}) \right) \dots \\ & + (1/\phi) \left(k_2 z_{12} (\lambda_{\alpha r} \tilde{\lambda}_{\alpha r} + \lambda_{\beta r} \tilde{\lambda}_{\beta r}) - (2a_{4,0} / d_1 d_2) k_1 z_{11} (\lambda_{\alpha r} \tilde{\lambda}_{\beta r} - \lambda_{\beta r} \tilde{\lambda}_{\alpha r}) \right) + 2\Delta_{\alpha r}(t) \lambda_{\alpha r} \dots \\ & + 2\Delta_{\beta r}(t) \lambda_{\beta r}. \end{aligned}$$

Ahora el sistema tiene la forma para el diseño del lazo (esclavo) de control de corrientes.

5.3.2 Control de corrientes del estator (Lazo esclavo)

Diseño del control básico

En el lazo esclavo, primero se formula, el control básico u_s . Para para inducir movimientos deslizantes sobre la superficie $z_{21} = 0$ or $i_{\alpha s} = \hat{i}_{\alpha s}^{des}$, se aplica el algoritmo de control MD super-twisting, [37], [26]:

$$u_s = -\alpha_1 |z_{21}|^{1/2} \text{sign}(z_{21}) - \alpha_3 z_{21} + u_1(t) \quad (5.3.7)$$

con

$$\dot{u}_1 = -\alpha_2 \text{sign}(z_{21}). \quad (5.3.8)$$

Ahora se sustituye la ley de control (5.3.7) y (5.3.8) en (5.3.6), el sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{z}_{21} &= f_s(\tilde{\lambda}_r, z_{21}) - c_1 \alpha_1 |z_{21}|^{1/2} \text{sign}(z_{21}) - c_1 \alpha_3 z_{21} + c_1 u_1 \\ \dot{u}_1 &= -\alpha_2 \text{sign}(z_{21}) \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

con $f_s(\tilde{\lambda}_r, z_{21}) = f_{21}(\tilde{\lambda}_r) - a_1 c_1 (\hat{i}_{\alpha s}^{des}) - \hat{i}_{\alpha s}^{des} + \Delta_{\alpha s}(t)$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, y $\alpha_3 > 0$.

Considerando la suposición de estabilidad de la proposición 5, donde se asume que en una región admisible Ω donde el término $f_s(\tilde{\lambda}_r, z_{21})$ es una función acotada por $\|f_s(\tilde{\lambda}_r, z_{21})\| \leq \delta_5 |z_{21}| + \delta_6$, y cumpliendo con las condiciones para estabilidad, se eligen las ganancias del control como $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > c_1 \alpha_1 \frac{(c_1 \alpha_1 \delta_6 + (1/8)\delta_6^2)}{2((1/2)c_1 \alpha_1 - \delta_6)}$, y $\alpha_3 > (6/8)\delta_5$. Entonces el vector de estados del sistema en lazo cerrado (5.3.9) llega a la superficie $z_{21} = 0$, en tiempo finito t_s , y se tiene estabilidad asintótica.

Diseño de control Auxiliar

En el movimiento por MD sobre la variedad $z_{21} = 0$, el valor equivalente $v_{s,eq}$ del control v_s se calcula como una solución para $\dot{z}_{21} = 0$ (5.3.9) [67], de la forma

$$v_{s,eq} = c_1^{-1} f_s(\lambda_r, z_{21}). \quad (5.3.10)$$

Se sustituye (5.3.10) en la ecuación (5.3.6) y se tiene

$$\dot{z}_{22} = -a_{22} z_{22} + \bar{f}_{22}(\tilde{\lambda}_r, z_{22}) - c_2 v_c \rho \quad (5.3.11)$$

donde $a_{22} = a_2 c_2$ y $\bar{f}_{22}(\tilde{\lambda}_r, z_{22}) = f_{22}(\tilde{\lambda}_r) + c_2 (nc_1)^{-1} f_s - a_{22} (\hat{i}_{\beta s}^{des}) - \dot{\hat{i}}_{\beta s}^{des} + \Delta_{\beta s}(t)$.

Por lo tanto, el movimiento MD sobre

$$z_{21} = 0, \tilde{i}_s = 0 y e_{\omega_r} = 0, e_{T_L} = 0 \quad (5.3.12)$$

llega en tiempo finito. Como resultado, la dinámicas de MD para (5.3.12), son descritas para el sistema completo en lazo cerrado (incluyendo el observador) por el siguiente sistema de orden reducido:

$$\begin{aligned} \dot{z}_{11} &= -k_1 z_{11} + f_{11}(\tilde{\lambda}_r, z_{11}, z_{12}, z_{22}) \\ \dot{z}_{12} &= -k_2 z_{12} + f_{12}(\tilde{\lambda}_r, z_{11}, z_{12}, z_{22}) \\ \dot{z}_{22} &= -a_{22} z_{22} - c_2 v_c \rho + \bar{f}_{22}(\tilde{\lambda}_r, z_{22}) \\ \dot{\tilde{\lambda}}_{\alpha r} &= -k_{2ob} \tilde{\lambda}_{\alpha r} + k_{2ob} \lambda_{\alpha r} - k_{2ob} i_{\alpha s} \\ \dot{\tilde{\lambda}}_{\beta r} &= -k_{2ob} \tilde{\lambda}_{\beta r} + k_{2ob} \lambda_{\beta r} - k_{2ob} i_{\beta s} \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

con $f_{11}(\lambda_r, z_{11}, z_{12}, i_{\beta s}) = -d_1 d_2 \lambda_{\alpha r} (z_{22} - \Delta_{\beta s}) + \Delta \varphi_1$ y $f_{12}(\lambda_r, z_{11}, z_{12}, i_{\beta s}) = 2a_{4,0} \lambda_{\beta r} (z_{22} - \Delta_{\beta s}) + \Delta \varphi_2$.

El sistema (5.3.13) puede representarse como un sistema lineal perturbado:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}} &= A \bar{z} + \Gamma \rho + g_1(\tilde{\lambda}_r, \bar{z}) \\ \dot{\tilde{\lambda}}_r &= K_{2ob} \tilde{\lambda}_r + g_2(\lambda_r, i_s) \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

o

$$\dot{\bar{z}} = A_c \bar{z} + B\rho + \zeta(\bar{z}) \quad (5.3.15)$$

donde $\bar{z} = (z_{11}, z_{12}, z_{22})^T$, $\tilde{\lambda}_r = (\tilde{\lambda}_{\alpha r}, \tilde{\lambda}_{\beta r})^T$, $\bar{z} = (z_{11}, z_{12}, z_{22}, \tilde{\lambda}_{\alpha r}, \tilde{\lambda}_{\beta r})^T$,

$$A_c = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & K_{ob} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \end{bmatrix}, \zeta(\bar{z}) = \begin{bmatrix} g_1(\tilde{\lambda}_r, \bar{z}) \\ g_2(\lambda_r, i_s) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{22} \end{bmatrix}, K_{2ob} = \begin{bmatrix} -k_{2ob} & 0 \\ 0 & -k_{2ob} \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -c_2 v_c \end{bmatrix}$$

$$g_1(\tilde{\lambda}_r, \bar{z}) = \begin{bmatrix} f_{11}(\tilde{\lambda}_r, z_{11}, z_{12}, z_{22}) \\ f_{12}(\tilde{\lambda}_r, z_{11}, z_{12}, z_{22}) \\ \bar{f}_{22}(\tilde{\lambda}_r, z_{22}) \end{bmatrix}, g_2(\lambda_r, i_s) = \begin{bmatrix} k_{2ob} \lambda_{\alpha r} - k_{2ob} l_1 i_{\alpha s} \\ k_{2ob} \lambda_{\beta r} - k_{2ob} l_2 i_{\beta s} \end{bmatrix}$$

Se asume la perturbación $\zeta(\bar{z})$ es acotada en una región Ω por

$$\|\zeta(\bar{z})\| \leq \gamma_1 \|\bar{z}\| + \gamma_2, \quad \gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0. \quad (5.3.16)$$

En el diseño del control auxiliar ρ se aplica la siguiente función cuadrática candidata de Lyapunov:

$$\bar{V} = \frac{1}{2} \left(z_{11}^2 + z_{12}^2 + z_{22}^2 + \tilde{\lambda}_{\alpha r}^2 + \tilde{\lambda}_{\beta r}^2 \right) \quad (5.3.17)$$

La derivada en el tiempo de (5.3.17) a través de las trayectorias de (5.3.13) o (5.3.14) se calcula como

$$\dot{\bar{V}} = -k_1 z_{11}^2 - k_2 z_{12}^2 - a_{22} z_{22}^2 - k_{2ob} \tilde{\lambda}_{\alpha r}^2 - k_{2ob} \tilde{\lambda}_{\beta r}^2 + \bar{z}^T \zeta(\bar{z}) - c_2 z_{22} v_c \rho. \quad (5.3.18)$$

La lógica de conmutación del capacitor se elige de igual forma que el anterior, que resulta en

$$\rho = 0.5 \text{sign}(z_{22} v_c) + 0.5. \quad (5.3.19)$$

Se sustituye (5.3.19) en (5.3.18) y se utiliza $z_{22} v_c \text{sign}(z_{22} v_c) = |z_{22} v_c|$, la derivada (5.3.18) se convierte

$$\begin{aligned} \dot{\bar{V}} &\leq -k_1 |z_{11}|^2 - k_2 |z_{12}|^2 - a_{22} |z_{22}|^2 - k_{2ob} |\tilde{\lambda}_{\alpha r}|^2 - k_{2ob} |\tilde{\lambda}_{\beta r}|^2 + \dots \\ &\|\bar{z}\| \|\zeta(\bar{z})\| - 0.5 c_2 [|z_{22} v_c| + z_{22} v_c] \\ &\leq -\alpha \|\bar{z}\|^2 + \|\bar{z}\| \|\zeta(\bar{z})\| \end{aligned} \quad (5.3.20)$$

donde se utilizan las propiedades $z_{22}v_c \leq |z_{22}v_c|$ y $\alpha = \min\{k_1, k_2, a_{22}, k_{2ob}, k_{2ob}\}$. Se sustituye ahora (5.3.16) en (5.3.20) y sumando y restando $(\alpha - \gamma_1)\beta \|\bar{z}\|^2$, se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -(\alpha - \gamma_1)(1 - \beta)\|\bar{z}\|^2 - \|\bar{z}\|[(\alpha - \gamma_1)\beta\|\bar{z}\| - \gamma_2] \\ &\leq -(\alpha - \gamma_1)(1 - \beta)\|\bar{z}\|^2, \quad 0 < \beta < 1 \\ \forall \|\bar{z}\| &> \frac{\gamma_2}{(\alpha - \gamma_1)\beta}. \end{aligned} \quad (5.3.21)$$

Por lo tanto, una solución de el sistema (5.3.13) es últimamente acotado por

$$\|\bar{z}(t)\| \leq \delta_0, \quad \delta_0 = \frac{\gamma_2}{(\alpha - \gamma_1)\beta}.$$

De esta expresión, es posible ver la última cota δ_0 que puede reducirse incrementando las ganancias del control k_1 , k_2 y k_{2ob} . De cualquier manera, la selección de estas ganancias es $k_1 > a_{22}$, $k_2 > a_{22}$ y $k_{2ob} > a_{22}$ y esto resulta en $\delta_0 = ((\gamma_2)/((a_{22} - \gamma_1)\beta))$. Entonces en este caso, la cota última δ_0 depende de los parámetros de la planta.

Finalmente, se consideran las limitaciones en las corrientes (4.2.21) y (4.2.22) que se expresan en el 4.

5.4 Resultados de simulación

Para verificar el desempeño del controlador propuesto (5.3.7)-(5.3.19), simulaciones numéricas se realizan utilizando el método de Euler con un paso de integración $t_s = 1 \times 10^{-3}$. Donde se consideran los parámetros y datos del MJAM así como las perturbaciones aplicadas en el 4. Se incluye la perturbación del incremento en el valor de la resistencia del rotor de un 30% de su valor nominal.

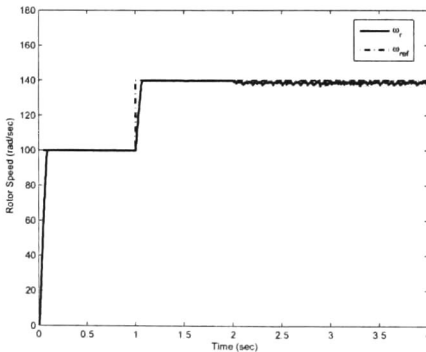


Figura 5.2: Velocidad del rotor $\omega_r(wr)$ y referencia $\omega_{ref}(wref)$.

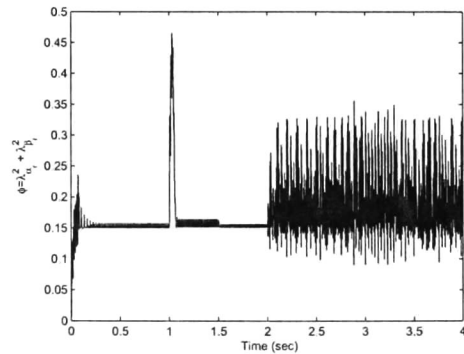


Figura 5.3: Módulo de flujo del rotor ϕ .

En las figuras 5.2 y 5.3 se muestran los resultados de las variables controladas cuando se utiliza el controlador y observador diseñados en el 4, con perturbación paramétrica del motor. Los resultados de las demás variables importantes se muestran en las figuras 5.4-5.8.

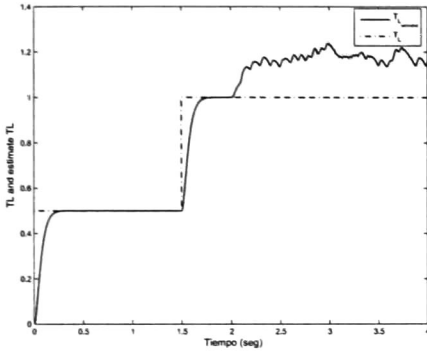


Figura 5.4: Par de carga T_L y par de carga estimado \hat{T}_L .

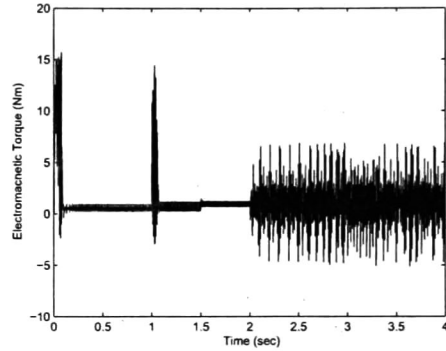


Figura 5.5: Par electromagnético T_e .

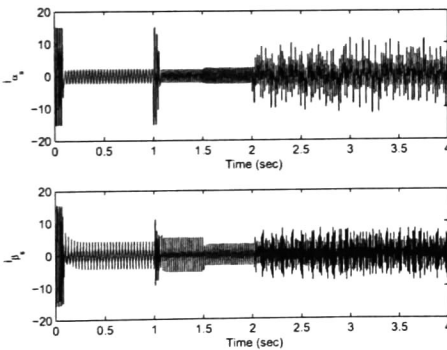


Figura 5.6: Corrientes de estator en el marco de referencia $\alpha \beta$.

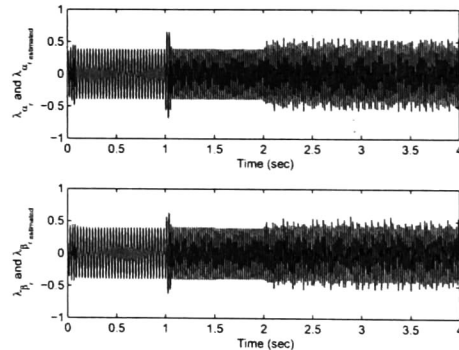


Figura 5.7: Flujos del rotor y estimaciones en el marco de referencia $\alpha \beta$.

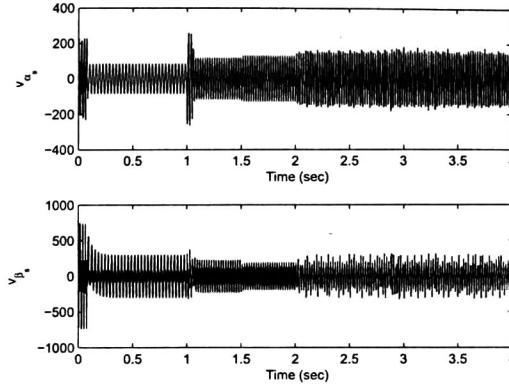


Figura 5.8: Voltajes de estator en el marco de referencia $\alpha \beta$.

En estos gráficos se tienen que el controlador no es robusto ante la incertidumbre de la resistencia del rotor.

Ahora se muestran los resultados del observador ST y el controlador basado en el observado propuesto. Donde se considera la incertidumbre de la resistencia del rotor. Los valores de las ganancias del control son ajustados a $k_1 = k_2 = 500$ y $\alpha_1 = 36, \alpha_2 = 22581$ y $\alpha_3 = 1$. Las ganancias de la transformación se seleccionan como $l_1 = l_2 = 0.0899$, Finalmente, las ganancias para el observador en cascada super-twisting son $k_{01a} = 300, k_{02a} = 187210, k_{01b} = 450, k_{02b} = 280760, k_{03a} = k_{03b} = 1$ y $l_3 = 160, l_4 = 30, l_5 = -24$.

Las gráficas que se obtienen son:

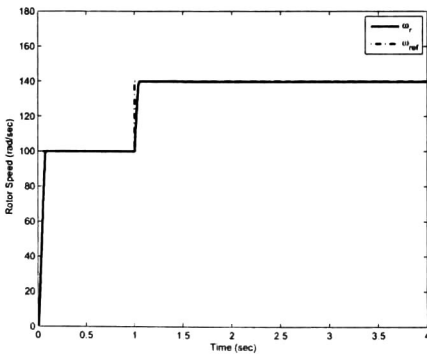


Figura 5.9: Velocidad del rotor $\omega_r(wr)$ y referencia $\omega_{ref}(wref)$.

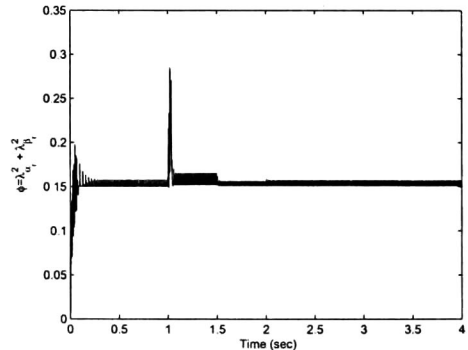


Figura 5.10: Módulo de flujo del rotor ϕ .

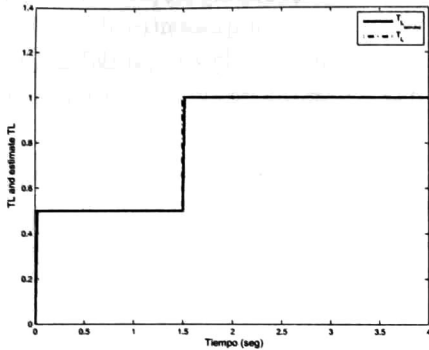


Figura 5.11: Par de carga T_L y par de carga estimado \hat{T}_L .

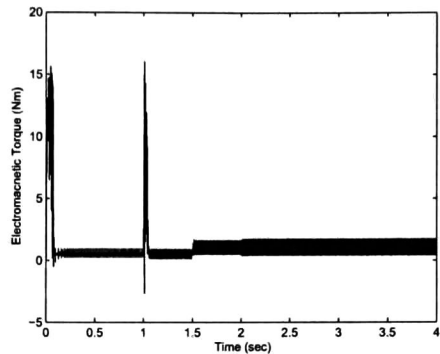


Figura 5.12: Par electromagnético T_e .

El seguimiento de la velocidad del rotor se muestra en la Fig. 5.9, se observa un buen desempeño al cambio de la velocidad de referencia en $t = 1$ seg. Alcanza la velocidad de referencia después de 0.08 seg. La respuesta del módulo de los flujos del rotor ϕ sigue la trayectoria del valor de referencia como se observa en la Fig. 5.10. El par de carga estimado alcanza el estado estable después de 0.02 seg. Fig.5.11.

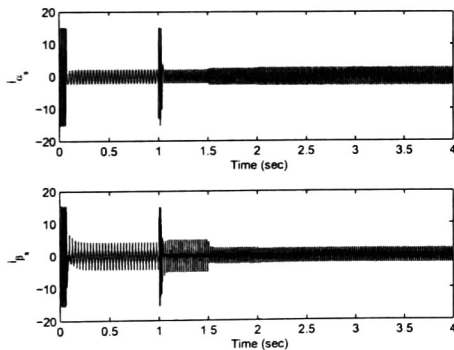


Figura 5.13: Corrientes de estator en el marco de referencia $\alpha \beta$.

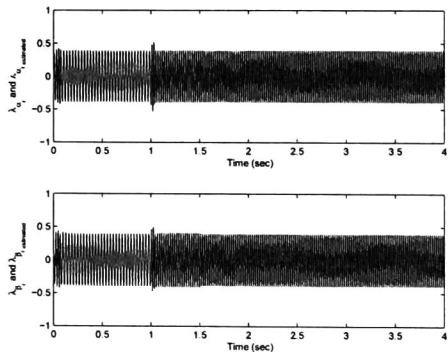


Figura 5.14: Flujos del rotor y estimaciones en el marco de referencia $\alpha \beta$.

La respuesta del par electromagnético se muestra en la Fig. 5.12, se observa un valor de 15 N-m durante el intervalo de $[0 - 0.18 \text{ seg.}]$ y en el cambio de velocidad de referencia en

$t = 1$ seg. tiene un valor de 16 N-m y presenta una pequeña variación en $t = 2$ seg debido al cambio paramétrico del valor de la resistencia del rotor. Las componentes de oscilación de la segunda armónica aparecen en estado estable a consecuencia de la acción del devanado auxiliar y el capacitor, ver Figuras 5.9, 5.10, y 5.12. Donde la amplitud de estas componentes es pequeña.

Por otro lado, las corrientes de estator (ver Fig. 5.13) en el intervalo de arranque ($0 < t < 0.2$ seg.) adquieren un valor elevado, son acotados por el control de limitador de corriente, donde las corrientes de arranque se mantienen por debajo del límite I_{max} , se realiza la misma operación en el cambio de referencia de velocidad en el intervalo ($1.0 < t < 1.1$ seg.), en $t = 2$ seg. se presenta la perturbación debido a la incertidumbre, teniendo un cambio en la corriente de 0.03 Amps. En Fig. 5.14, se muestran las componentes de flujo del rotor $\lambda_{\alpha r}$ y $\lambda_{\beta r}$ y las estimaciones $\hat{\lambda}_{\alpha r}$ y $\hat{\lambda}_{\beta r}$ respectivamente mostrando robustez ante la incertidumbre de la resistencia del rotor. El valor de las componentes de flujo del rotor tienen un valor al rededor de 0.4 wb.

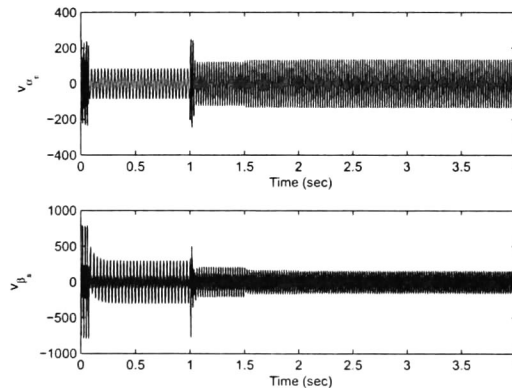


Figura 5.15: Voltajes de estator en el marco de referencia $\alpha \beta$.

Finalmente, en Fig. 5.15, se muestran los voltajes, donde $v_{\alpha s}$ es el control super-twisting MD y $v_{\beta s}$ es el control MD discontinuo.

Como resultado se tiene que el observador ST y el controlador basado en el observador presentan robustez ante incertidumbre paramétrica.

5.5 Conclusiones

Un esquema de control basado en el observador con algoritmo de MD super-twisting, es propuesto para regular la velocidad angular ω_r y el módulo del cuadrado de los flujos del rotor ϕ . Un Observador por MD ST se desarrolla para estimar el flujo del rotor y el par de carga. Se considera como perturbación la resistencia del rotor y el par de carga. El control basado en el observador es robusto ante perturbación externa (Par de carga) e incertidumbre de la resistencia del rotor, no así, el controlador propuesto en el capítulo 4. La estabilidad del sistema completo en lazo cerrado es últimamente acotada. Los resultados de simulación muestran un desempeño robusto del controlador y observador diseñado. Además, el controlador propuesto asegura la limitación de las corrientes de estator.

Capítulo 6

Control por MD de alto orden (QC) y observador ST para flujos.

(Sistema con incertidumbre en resistencia de rotor sin estimación del par)

6.1 Introducción

En el capítulo 5 se desarrolló un controlador ST basado en el observador, para un sistema con variación en resistencia de rotor y perturbación del par de carga con dinámica constante. Se demostró la estabilidad del sistema completo en lazo cerrado del observador no lineal por modos deslizantes ST para flujos y par.

En este capítulo, se diseña para el lazo principal, un controlador ST con superficie de control cuasi-continua (QC) de corrientes para regular la velocidad del MJAM en presencia de incertidumbre en resistencia del rotor y perturbación del par de carga (arbitrario pero acotado); y para el lazo auxiliar un controlador discontinuo para el módulo de flujos. En el diseño del control, primero, se diseña un observador de segundo orden ST como en [37], para estimar el flujo del rotor. El observador se formula tal que la dinámica de error de estimación tiene la estructura del algoritmo de MD *super-twisting* [41], es robusto y se estabiliza en tiempo finito. Esta idea fue propuesta anteriormente para sistemas mecánicos en [15]. Se desarrolla el análisis de estabilidad del sistema completo observado/control y se presenta variables de error de estimación y de control. La propiedad de convergencia tiempo finito MD permite estudiar, primero la dinámica de error de observación, y luego el error de control, lo que facilita el análisis.

6.2 Modelo Matemático del MJAM

El modelo dinámico del MJAM donde se considera la variación de resistencia del rotor que se presentan en el capítulo 2 se re-formulan como

$$\begin{aligned}
 \dot{i}_{\alpha s} &= -c_1 a_{10} i_{\alpha s} + c_1 c_{40} \lambda_{\alpha r} - c_1 c_3 n_p \omega_r \lambda_{\beta r} + c_1 v_{\alpha s} + \Delta_{\alpha s} \\
 \dot{\lambda}_{\alpha r} &= -a_{30} \lambda_{\alpha r} + n_p \omega_r \lambda_{\beta r} + a_{40} i_{\alpha s} + \Delta_{\alpha r} \\
 \dot{i}_{\beta s} &= -c_2 a_{20} i_{\beta s} + c_2 c_{40} \lambda_{\beta r} + c_2 c_3 n_p \omega_r \lambda_{\alpha r} + c_2 v_{\beta s} + \Delta_{\beta s} \\
 \dot{\lambda}_{\beta r} &= -n_p \omega_r \lambda_{\alpha r} - a_{30} \lambda_{\beta r} + a_{40} i_{\beta s} + \Delta_{\beta r} \\
 \dot{\omega}_r &= d_1 d_2 (\lambda_{\beta r} i_{\alpha s} - \lambda_{\alpha r} i_{\beta s}) - d_2 T_L
 \end{aligned} \tag{6.2.1}$$

La dinámica del capacitor (ver Fig.2.18) esta dada por (2.3.62) y la de voltajes (2.3.60) y (2.3.61) del capítulo 2. Se considera la entrada de control acotada por

$$|v_s| \leq v_0 \tag{6.2.2}$$

donde v_0 es un escalar positivo.

6.3 Observador de MD de segundo orden ST para flujos de rotor

Con la velocidad ω_r y la corriente de estator $i_{\alpha s}$ y $i_{\beta s}$ medibles, en esta sección se diseña un observador por modos deslizantes (MD) de segundo orden ST para estimar los flujos de rotor. Se considera la siguiente transformación dando convergencia arbitraria y robustez al igual que el capítulo anterior, en este caso se considera la transformación para dar una forma natural super-twisting:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{\alpha r}^* &= \lambda_{\alpha r} - l_1 i_{\alpha s} \\
 \lambda_{\beta r}^* &= \lambda_{\beta r} - l_2 i_{\beta s}
 \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

donde l_1 y l_2 son las ganancias de la transformación. Se utiliza (6.3.1), así como el flujo perturbado y las dinámicas de corriente (6.2.1) las cuales se presentan en las nuevas variables $\lambda_{\alpha r}^*$ y $\lambda_{\beta r}^*$ de la forma

$$\begin{aligned}
 \dot{i}_{\alpha s} &= -p_{11} i_{\alpha s} - p_{12} n_p \omega_r i_{\beta s} - q_3 n_p \omega_r \lambda_{\beta r}^* + q_4 \lambda_{\alpha r}^* + c_1 v_{\alpha s} + \Delta_{\alpha s} \\
 \dot{\lambda}_{\alpha r}^* &= -l_{11} \lambda_{\alpha r}^* + l_{12} n_p \omega_r \lambda_{\beta r}^* + \varsigma_{11} n_p \omega_r i_{\beta s} + \varsigma_{12} i_{\alpha s} - q_1 v_{\alpha s} - l_1 \Delta_{\alpha s} + \Delta_{\alpha r} \\
 \dot{i}_{\beta s} &= -p_{21} i_{\beta s} + p_{22} n_p \omega_r i_{\alpha s} + q_5 n_p \omega_r \lambda_{\alpha r}^* + q_6 \lambda_{\beta r}^* + c_2 v_{\beta s} + \Delta_{\beta s} \\
 \dot{\lambda}_{\beta r}^* &= -l_{21} \lambda_{\beta r}^* - l_{22} n_p \omega_r \lambda_{\alpha r}^* - \varsigma_{21} n_p \omega_r i_{\alpha s} + \varsigma_{22} i_{\beta s} - q_2 v_{\beta s} - l_2 \Delta_{\beta s} + \Delta_{\beta r}
 \end{aligned} \tag{6.3.2}$$

donde $p_{11} = c_1 a_{10} - l_1 c_1 c_{40}$, $p_{12} = l_2 c_1 c_3$, $p_{21} = c_2 a_{20} - l_2 c_2 c_{40}$, $p_{22} = l_1 c_2 c_3$, $l_{11} = a_{30} + l_1 c_1 c_{40}$, $l_{12} = 1 + l_1 c_1 c_3$, $l_{21} = a_{30} + l_2 c_2 c_{40}$, $l_{22} = 1 + l_2 c_2 c_3$, $s_{11} = l_{12} l_2$, $s_{12} = a_{40} - l_{11} l_1 + l_1 c_1 a_{10}$, $s_{21} = l_{22} l_1$, $s_{22} = a_{40} - l_{21} l_2 + l_2 c_2 a_{20}$, $q_1 = l_1 c_1$, $q_2 = l_2 c_2$, $q_3 = c_1 c_3$, $q_4 = c_1 c_{40}$, $q_5 = c_2 c_3$, y $q_6 = c_2 c_{40}$.

Considerando (6.3.2), se diseña un observador no lineal de tal forma que da lugar a una estructura de dinámicas de error de observación por MD de segundo orden (ver sección 6.5). Por tanto, se define $\hat{\lambda}_{\alpha r}^*$, $\hat{\lambda}_{\beta r}^*$, $\hat{i}_{\alpha s}$, y $\hat{i}_{\beta s}$ como estimaciones de $\lambda_{\alpha r}^*$, $\lambda_{\beta r}^*$, $i_{\alpha s}$, y $i_{\beta s}$, respectivamente, tal que el observador se presenta como:

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{i}}_{\alpha s} &= -p_{11} \hat{i}_{\alpha s} - p_{12} n_p \omega_r \hat{i}_{\beta s} - q_3 n_p \omega_r \hat{\lambda}_{\beta r}^* + q_4 \hat{\lambda}_{\alpha r}^* \\
 &\quad + c_1 v_{\alpha s} + k_{1\alpha} |\tilde{i}_{\alpha s}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{i}_{\alpha s}) + k_{3\alpha} \tilde{i}_{\alpha s} \\
 \dot{\hat{\lambda}}_{\alpha r}^* &= -l_{11} \hat{\lambda}_{\alpha r}^* + l_{12} n_p \omega_r \hat{\lambda}_{\beta r}^* + s_{11} n_p \omega_r i_{\beta s} + s_{12} i_{\alpha s} - q_1 v_{\alpha s} + \frac{k_{2\alpha}}{q_4} \text{sign}(\tilde{i}_{\alpha s}) \\
 \dot{\hat{i}}_{\beta s} &= -p_{21} \hat{i}_{\beta s} + p_{22} n_p \omega_r \hat{i}_{\alpha s} + q_5 n_p \omega_r \hat{\lambda}_{\alpha r}^* + q_6 \hat{\lambda}_{\beta r}^* \\
 &\quad + c_2 v_{\beta s} + k_{1\beta} |\tilde{i}_{\beta s}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{i}_{\beta s}) + k_{3\beta} \tilde{i}_{\beta s} \\
 \dot{\hat{\lambda}}_{\beta r}^* &= -l_{21} \hat{\lambda}_{\beta r}^* - l_{22} n_p \omega_r \hat{\lambda}_{\alpha r}^* - s_{21} n_p \omega_r i_{\alpha s} + s_{22} i_{\beta s} - q_2 v_{\beta s} + \frac{k_{2\beta}}{q_6} \text{sign}(\tilde{i}_{\beta s})
 \end{aligned} \tag{6.3.3}$$

donde $\tilde{i}_{\alpha s} = i_{\alpha s} - \hat{i}_{\alpha s}$, y $\tilde{i}_{\beta s} = i_{\beta s} - \hat{i}_{\beta s}$ son los errores del observador y $k_{i\alpha}, k_{i\beta} > 0$ para $i = 1, 2, 3$.

Como resultado de (6.3.1), las estimaciones de los flujos de rotor $\hat{\lambda}_{\alpha r}$ y $\hat{\lambda}_{\beta r}$ se obtienen como $\hat{\lambda}_{\alpha r} = \hat{\lambda}_{\alpha r}^* + l_1 \hat{i}_{\alpha s}$ y $\hat{\lambda}_{\beta r} = \hat{\lambda}_{\beta r}^* + l_2 \hat{i}_{\beta s}$.

6.4 Diseño del controlador por modos deslizantes

Siempre y cuando las corrientes y la velocidad sean medidas continuamente y los flujos del rotor se estimen, el objetivo en esta sección es diseñar un controlador de MD que pueda seguir las señales de referencia de la velocidad deseada ω_{ref} y el módulo del flujo del rotor ϕ_{ref} por medio del control básico continuo v_s y de control auxiliar ρ como una función discontinua.

6.4.1 Diseño de la superficie de deslizamiento

La aplicación de una combinación de *Linealización por retroalimentación en forma de bloques* [49] y técnicas de MD cuasi-continuos [21,40], se utiliza para formular una superficie deslizante en la cual el control de seguimiento de error es cero en tiempo finito.

Al igual que en el capítulo 5 se presenta el sistema (6.2.1) en *Forma No-Lineal Controlable a bloques* con perturbación [49] como:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(\phi) + B_1(\lambda_r)x_2 + D_1T_L + \Delta_r \\ \dot{x}_2 &= f_2(\omega_r, \lambda_r, i_s) + B_2u + \Delta_s\end{aligned}\quad (6.4.1)$$

donde $x_1 = [\omega_r \ \phi]^T$, $x_2 = [i_{\alpha s} \ i_{\beta s}]^T$, $\lambda_r = [\lambda_{\alpha r} \ \lambda_{\beta r}]^T$, $u = [v_{\alpha s} \ v_{\beta s}]^T$, $f_1(\phi) = [f_{11} \ f_{12}]^T = [0 \ -2a_{30}\phi]^T$, $D_1 = [-d_2 \ 0]^T$, $f_2 = [f_{21} \ f_{22}]^T$, $\Delta_r = [0 \ 2\Delta_{\alpha r}\lambda_{\alpha r} + 2\Delta_{\beta r}\lambda_{\beta r}]^T$, $\Delta_s = [\Delta_{\alpha s} \ \Delta_{\beta s}]^T$, $B_1(\lambda_r) = \begin{bmatrix} d_1d_2\lambda_{\beta r} & -d_1d_2\lambda_{\alpha r} \\ 2a_{40}\lambda_{\alpha r} & 2a_{40}\lambda_{\beta r} \end{bmatrix}$ y, $B_2 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}$, con $f_{21} = -a_{10}c_1i_{\alpha s} + c_1c_{40}\lambda_{\alpha r} - c_1c_3\omega_r\lambda_{\beta r}$ y $f_{22} = -a_{20}c_2i_{\beta s} + c_2c_3\omega_r\lambda_{\alpha r} + c_2c_{40}\lambda_{\beta r}$.

Se tiene presente que sólo las estimaciones de los flujos de rotor están disponibles para el diseño del control, se definen las siguientes estimaciones de variables $\hat{\phi} = \hat{\lambda}_{\alpha r}^2 + \hat{\lambda}_{\beta r}^2$, $\hat{\lambda}_r = (\hat{\lambda}_{\alpha r}, \hat{\lambda}_{\beta r})$ y sus errores $\tilde{\phi} = \phi - \hat{\phi}$, $\tilde{\lambda}_r = \lambda_r - \hat{\lambda}_r$, respectivamente.

Se presenta el error del *Controlador* y la dinámica de errores *reales*, respectivamente

$$\hat{z}_1 = [z_{11} \ \hat{z}_{12}]^T \quad z_1 = [z_{11} \ z_{12}]^T$$

con $z_{11} = \omega_r - \omega_{ref}(t)$, $\hat{z}_{12} = \hat{\phi} - \phi_{ref}(t)$ y, $z_{12} = \phi - \phi_{ref}(t) = \hat{\phi} + \tilde{\phi} - \phi_{ref}(t) = \hat{z}_{12} + \tilde{\phi}$, las dinámicas del primer bloque transformado (6.4.1) se convierten a

$$\dot{z}_1 = f_1(\hat{\phi}) + B_1(\hat{\lambda}_r)x_2 + \tilde{\Phi} + \bar{\Delta}_1 \quad (6.4.2)$$

donde $\tilde{\Phi} = [0 \ \dot{\tilde{\phi}}]^T$ y $\bar{\Delta}_1 = D_1T_L + \Delta_r + [\dot{\omega}_{ref} \ \dot{\phi}_{ref}]^T$

Se utiliza la técnica de control a bloques [49] con HOSM QC [40]. El valor deseado $x_{2des} = [i_{\alpha s}^{des} \ i_{\beta s}^{des}]^T$ para el control virtual x_2 en (6.4.2) se propone de la forma

$$\begin{aligned}x_{2des} &= B_1^{-1}(\hat{\lambda}_r) \left(-f_1(\hat{\phi}) - K_0z_0 - K_1\hat{z}_1 + \nu \right) \\ \dot{z}_0 &= \hat{z}_1 \\ \dot{\nu}_2 &= -k_{a2} \frac{\hat{z}_{12} + |\hat{z}_{12}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\hat{z}_{12})}{|\hat{z}_{12}| + |\hat{z}_{12}|^{\frac{1}{2}}} \\ \dot{\nu}_1 &= -k_{a1} \frac{\hat{z}_{11} + |z_{11}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_{11})}{|\hat{z}_{11}| + |z_{11}|^{\frac{1}{2}}}\end{aligned}\quad (6.4.3)$$

donde $z_0 = [z_{01} \ z_{02}]^T$, $\nu = [\nu_1 \ \nu_2]^T$, $K_0 = \text{diag}(k_{11}, k_{12})$, $K_1 = \text{diag}(k_1, k_2)$ con k_{a1} , k_{a2} , k_{11} , k_{12} , k_1 y k_2 como constantes positivas. Las derivadas de \dot{z}_{11} y \dot{z}_{12} se obtienen al utilizar un diferenciador de MD [38].

Ahora el error de la variable z_2 se define como:

$$z_2 = x_2 - x_{2des}. \quad (6.4.4)$$

Al utilizar la transformación (6.4.3)-(6.4.4), el sistema (6.4.1)-(6.4.2) puede representarse en las nuevas coordenadas $z_1, z_2 = [z_{21} \ z_{22}]^T$ $z_{21} = i_{\alpha s} - i_{\alpha s}^{des}$, $z_{22} = i_{\beta s} - i_{\beta s}^{des}$ de la forma

$$\begin{cases} \dot{z}_0 &= z_1 - \tilde{z}_1 \\ \dot{i}_1 &= -k_{a1} \frac{\dot{z}_{11} + |z_{11}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_{11})}{|\dot{z}_{11}| + |z_{11}|^{\frac{1}{2}}} \\ \dot{i}_2 &= -k_{a2} \frac{\dot{z}_{12} + |\dot{z}_{12}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\dot{z}_{12})}{|\dot{z}_{12}| + |\dot{z}_{12}|^{\frac{1}{2}}} \\ \dot{z}_1 &= -K_0 z_0 - K_1 z_1 + \nu + B_1(\hat{\lambda}_r) z_2 + \tilde{\Phi} + \Delta_1 \end{cases} \quad (6.4.5)$$

$$\begin{cases} \dot{z}_2 &= f_2(\omega_r, \hat{\lambda}_s, i_s) + B_2 u + \Delta_2 \end{cases} \quad (6.4.6)$$

donde $\tilde{z}_1 = [0 \ \tilde{\phi}]^T$, $\Delta_1 = \bar{\Delta}_1 + K_1 \tilde{z}_1$, $\Delta_2 = \Delta_r - \dot{x}_{2des}$.

6.4.2 Control de modos deslizantes

Entonces, de nuevo se propone el algoritmo super-twisting para la entrada de control básica y la lógica de conmutación para la entrada auxiliar con el fin de asegurar que el diseño de la superficie de deslizamiento sea atractiva en tiempo finito.

Para inferir movimiento de MD sobre la superficie $z_{21} = 0$ o $i_{\alpha s} = i_{\alpha s}^{des}$ en el lazo de corriente (6.4.6), se considera (2.3.60), el control básico v_s el cual se presenta en [37]

$$\begin{aligned} v_s &= -\alpha_1 |z_{21}|^{1/2} \text{sign}(z_{21}) - \alpha_3 z_{21} + u_1 \\ \dot{u}_1 &= -\alpha_2 \text{sign}(z_{21}) \end{aligned} \quad (6.4.7)$$

con $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, y $\alpha_3 > 0$. Luego para inferir movimiento de modos cuasi-deslizables sobre la superficie $z_{22} = 0$ o $i_{\beta s} = i_{\beta s}^{des}$, se diseña el control auxiliar ρ para el capacitor, por medio de la siguiente lógica de conmutación:

$$\rho = \frac{1}{2} \text{sign}(z_{22} v_c) + \frac{1}{2}. \quad (6.4.8)$$

6.5 Análisis de estabilidad del controlador basado en el observador

Se sustituye la ley de control (6.4.7) en (6.4.6) y se utiliza el sistema en lazo cerrado (6.3.2)-(6.3.3), en el control z_{11} , z_{12} , z_{21} , z_{22} y las variables de error del observador $\tilde{i}_{\alpha s}$, $\tilde{i}_{\beta s}$, $\tilde{\lambda}_{\alpha r}^*$, $\tilde{\lambda}_{\beta r}^*$ se convierten en

$$\begin{cases} \dot{z}_{01} &= z_{11} \\ \dot{z}_{11} &= -k_1 z_{11} - k_{11} z_{01} + \nu_1 + \Delta_{11} + d_1 d_2 (\hat{\lambda}_{\beta r} z_{21} - \hat{\lambda}_{\alpha r} z_{22}) \\ \dot{\nu}_1 &= -k_{a1} \frac{\dot{z}_{11} + |z_{11}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_{11})}{|\dot{z}_{11}| + |z_{11}|^{\frac{1}{2}}}, \\ \dot{z}_{02} &= z_{12} - \tilde{\phi} \\ \dot{z}_{12} &= -k_2 z_{12} - k_{12} z_{02} + \nu_2 + \Delta_{12} + 2a_{40} (\hat{\lambda}_{\alpha r} z_{21} + \hat{\lambda}_{\beta r} z_{22}) \\ \dot{\nu}_2 &= -k_{a2} \frac{\dot{z}_{12} + |\dot{z}_{12}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\dot{z}_{12})}{|\dot{z}_{12}| + |\dot{z}_{12}|^{\frac{1}{2}}} \end{cases} \quad (6.5.1)$$

$$\begin{cases} \dot{z}_{21} &= f_s(\hat{\lambda}_r) - c_1 \alpha_1 |z_{21}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_{21}) - c_1 \alpha_3 z_{21} + c_1 u_1 \\ \dot{u}_1 &= -\alpha_2 \text{sign}(z_{21}) \end{cases} \quad (6.5.2)$$

$$\begin{cases} \dot{z}_{22} &= -a_{22} z_{22} + \bar{f}_{22}(\bar{z}) - c_2 v_c \rho \end{cases} \quad (6.5.3)$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{i}}_{\alpha s} &= -k_{1\alpha} |\tilde{i}_{\alpha s}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{i}_{\alpha s}) - (k_{3\alpha} + p_{11}) \tilde{i}_{\alpha s} + \Delta_{1\alpha} \\ \dot{\tilde{\lambda}}_{\alpha r}^* &= -\frac{k_{2\alpha}}{q_4} \text{sign}(\tilde{i}_{\alpha s}) + \Delta_{2\alpha} \\ \dot{\tilde{i}}_{\beta s} &= -k_{1\beta} |\tilde{i}_{\beta s}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{i}_{\beta s}) - (k_{3\beta} + p_{21}) \tilde{i}_{\beta s} + \Delta_{1\beta} \\ \dot{\tilde{\lambda}}_{\beta r}^* &= -\frac{k_{2\beta}}{q_6} \text{sign}(\tilde{i}_{\beta s}) + \Delta_{2\beta} \end{cases} \quad (6.5.4)$$

donde

$$\tilde{\lambda}_{\alpha r}^* = \lambda_{\alpha r}^* - \hat{\lambda}_{\alpha r}^* \text{ and } \tilde{\lambda}_{\beta r}^* = \lambda_{\beta r}^* - \hat{\lambda}_{\beta r}^*$$

son los errores de estimación de flujos, con la siguientes perturbaciones: $\Delta_{11} = -d_2 T_L - \dot{\omega}_{ref}$, $\Delta_{12} = 2\Delta_{\alpha s} \hat{\lambda}_{\alpha r} + 2\Delta_{\beta s} \hat{\lambda}_{\beta r} - \dot{\phi}_{ref} + k_2 \tilde{\phi}$, $\Delta_{1\alpha} = -p_{12} n_p \omega_r \tilde{i}_{\beta s} - q_3 n_p \omega_r \tilde{\lambda}_{\beta r}^* + q_4 \tilde{\lambda}_{\alpha r}^* + \Delta_{\alpha r}$, $\Delta_{2\alpha} = -l_{11} \tilde{\lambda}_{\alpha r}^* + l_{12} n_p \omega_r \tilde{\lambda}_{\beta r}^* - l_1 \Delta_{\alpha r} + \Delta_{\alpha s}$, $\Delta_{1\beta} = p_{22} n_p \omega_r \tilde{i}_{\alpha} + q_5 n_p \omega_r \tilde{\lambda}_{\alpha r}^* + q_6 \tilde{\lambda}_{\beta r}^* + \Delta_{\beta r}$, $\Delta_{2\beta} = -l_{21} \tilde{\lambda}_{\beta r}^* - l_{22} n_p \omega_r \tilde{\lambda}_{\alpha r}^* + l_2 \Delta_{\beta r} + \Delta_{\beta s}$ y $f_s(\hat{\lambda}_r) = f_{21}(\hat{\lambda}_r) - a_{10} c_1 i_{\alpha s}^{des} - i_{\alpha s}^{des} + \Delta_{\alpha r}$.

Primero, se analiza la estabilidad de fase a alcanzar en tiempo finito, y luego se estudia la estabilidad de la ecuación de MD.

6.5.1 Estabilidad de fase a alcanzar en tiempo finito

Para poder analizar la etapa de estabilidad de fase a alcanzar para las variables de error $\tilde{i}_{\alpha s}$, $\tilde{i}_{\beta s}$, $\tilde{\lambda}_{\alpha r}^*$, $\tilde{\lambda}_{\beta r}^*$, z_{21} y z_{22} in (6.5.2)-(6.5.4), se consideran las siguientes acotaciones para los términos con perturbación

$$\begin{aligned} |\Delta_{1\alpha}|, |\dot{\Delta}_{1\alpha}| &< \delta_{1\alpha}, \\ |\Delta_{2\alpha}| &< \delta_{2\alpha}, \\ |\Delta_{1\beta}|, |\dot{\Delta}_{1\beta}| &< \delta_{1\beta}, \\ |\Delta_{2\beta}| &< \delta_{2\beta} \text{ and,} \\ |f_s(\hat{\lambda}_r)| &\leq \delta_1 |z_{21}| + \delta_2. \end{aligned} \quad (6.5.5)$$

con constantes positivas δ_1 , δ_2 , $\delta_{1\alpha}$, $\delta_{2\alpha}$, $\delta_{1\beta}$ y $\delta_{2\beta}$.

Se consideran las condiciones (6.5.5) y la aproximación de Lyapunov propuesta en [54], si las ganancias del observador (6.3.3) y controlador (6.4.7) se seleccionan bajo las condiciones

$$\begin{aligned} k_{1\alpha} &> 0, k_{1\beta} > 0 \\ k_{2\alpha} &> \frac{k_{1\alpha}\delta_{2\alpha} + \frac{1}{9}\delta_{2\alpha}^2}{2(\frac{1}{8}k_{1\alpha} - \delta_{2\alpha})} k_{1\alpha}, k_{2\beta} > \frac{k_{1\beta}\delta_{2\beta} + \frac{1}{9}\delta_{2\beta}^2}{2(\frac{1}{8}k_{1\beta} - \delta_{2\beta})} k_{1\beta} \\ k_{3\alpha} &> \frac{17}{8}\delta_{1\alpha} - p_{11}, k_{3\beta} > \frac{17}{8}\delta_{1\beta} - p_{21} \\ \alpha_1 &> 0, \alpha_2 > c_1\alpha_1 \frac{(\delta_2 c_1 \alpha_1 + \frac{1}{9}\delta_2^2)}{2(\frac{1}{8}c_1\alpha_1 - \delta_2)}, \alpha_3 > \frac{17}{8}\delta_1, \end{aligned}$$

por tanto el sistema (6.5.2) y (6.5.4) alcanzan la superficie de estado $(\tilde{i}_{\alpha s}, \tilde{i}_{\beta s}, \tilde{\lambda}_{\alpha r}^*, \tilde{\lambda}_{\beta r}^*, z_{21}) = (0, 0, 0, 0, 0)$ en tiempo finito.

En el movimiento de MD sobre la superficie, el valor equivalente $v_{s,eq}$ [65] en el control v_s se calcula como una solución continua $\dot{z}_{21} = f_s(\lambda_r) - c_1 v_s = 0$ (6.5.2), de la forma

$$v_{s,eq} = c_1^{-1} f_s(\lambda_r) \quad (6.5.6)$$

se sustituye (6.4.8) y (6.5.6) en la ecuación (6.5.3) tal que

$$\dot{z}_{22} = -a_{22}z_{22} + \bar{f}_{22}(\bar{z}) - c_2 v_c \left[\frac{1}{2} \text{sign}(z_{22} v_c) + \frac{1}{2} \right] \quad (6.5.7)$$

donde $\bar{z} = [z_{11} \quad z_{12} \quad z_{22}]^T$, $a_{22} = a_2 c_2$ y $\bar{f}_{22}(\bar{z}) = f_{22} + c_2 (nc_1)^{-1} f_s(\lambda_r) - a_{22} i_{\beta s}^{des} - i_{\beta s}^{des} + \Delta_{\beta r}$.

Ahora se considera $\bar{f}_{22}(\bar{z})$ como una perturbación acotada por

$$\|\bar{f}_{22}(\bar{z})\| \leq \gamma_1 |z_{22}| + \gamma_2, \quad \gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0. \quad (6.5.8)$$

Por consiguiente, para analizar la estabilidad de (4.2.12) se propone la siguiente función cuadrática candidata de Lyapunov $V = \frac{1}{2}z_{22}^2$. Tal que, la derivada a través de la trayectorias (6.5.7) se calcula como

$$\dot{V} = -a_{22}z_{22}^2 + \bar{f}_{22}(\bar{z})z_{22} - \frac{1}{2}c_2(|z_{22}v_c| + z_{22}v_c)$$

y, se utiliza (6.5.8) lo que resulta en

$$\dot{V} \leq -(a_{22} - \gamma_1)|z_{22}|^2 + \gamma_2|z_{22}| - \frac{1}{2}c_2(|z_{22}v_c| + z_{22}v_c).$$

Ahora sumiendo que $a_{22} > \gamma_1$. Para el caso $z_{22}v_c < 0$ se tiene

$$\dot{V} \leq -(a_{22} - \gamma_1)|z_{22}|^2 + \gamma_2|z_{22}|.$$

Sumando y restando el término $(a_{22} - \gamma_1)\beta_1|z_{22}|^2$ con $0 < \beta_1 < 1$ resulta

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -(a_{22} - \gamma_1)(1 - \beta_1)|z_{22}|^2 - [(a_{22} - \gamma_1)\beta_1|z_{22}| - \gamma_2]|z_{22}| \\ &< -[(a_{22} - \gamma_1)\beta_1|z_{22}| - \gamma_2]|z_{22}|. \end{aligned}$$

Si $|z_{22}| > \varepsilon_1$ con $\varepsilon_1 = \frac{\gamma_2}{(a_{22} - \gamma_1)\beta_1}$, entonces $\dot{V} < 0$. Por lo tanto, existe $T_1 > 0$ tal que la solución $z_{22}(t)$ satisface [30]

$$|z_{22}(t)| < \varepsilon_1, \forall t \geq t_0 + T_1.$$

En cambio, para el caso $z_{22}v_c > 0$, se tiene

$$\dot{V} \leq -(a_{22} - \gamma_1)|z_{22}|^2 - (c_2|v_c| - \gamma_2)|z_{22}|.$$

Si $|v_c| > \frac{\gamma_2}{c_2}$, entonces

$$\dot{V} \leq -(c_2v^- - \gamma_2)|z_{22}|$$

con $v^- = \frac{\gamma_2}{c_2} + \epsilon$ y $\epsilon > 0$. Por consiguiente, $z_{22}(t)$ converge a cero en tiempo finito.

Ahora, si $|v_c| \leq \frac{\gamma_2}{c_2}$ entonces sumando y restando $(a_{22} - \gamma_1)\beta_2|z_{22}|^2$ con $0 < \beta_2 < 1$, se tiene

$$\dot{V} < -[(a_{22} - \gamma_1)\beta_2|z_{22}| - (\gamma_2 - c_2v^+)]|z_{22}|$$

con $v^+ \in (-\frac{\gamma_2}{c_2}, \frac{\gamma_2}{c_2})$. Tal que, la solución $z_{22}(t)$ satisface

$$|z_{22}(t)| < \varepsilon_2, \forall t \geq t_0 + T_2$$

Para algún $T_2 > 0$, donde $\varepsilon_2 = \frac{\gamma_2 - c_2 v^+}{(a_{22} - \gamma_1)\beta_2}$. Por consiguiente, se infiere un movimiento cuasi-deslizante en la vesindad definida por $|z_{22}| < \varepsilon_0$, donde $\varepsilon_0 = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$.

6.5.2 Estabilidad de la ecuación de Modos Deslizantes

El movimiento de MD sobre la superficie $(\tilde{i}_{\alpha s}, \tilde{i}_{\beta s}, \tilde{\lambda}_{\alpha r}^*, \tilde{\lambda}_{\beta r}^*, z_{21}) = (0, 0, 0, 0, 0)$ con la restricción $|z_{22}| \leq \varepsilon_0$ es descrita para el sistema de orden reducido (6.5.1)

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \quad \dot{\xi}_2 = \xi_3, \\ \dot{\xi}_3 &= -k_1 \xi_3 - k_{11} \xi_2 - k_{a1} \frac{\xi_3 + |\xi_2|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\xi_2)}{|\xi_2| + |\xi_2|^{\frac{1}{2}}} + \bar{\Delta}_{11}, \\ \dot{\xi}_4 &= \xi_5, \quad \dot{\xi}_5 = \xi_6, \\ \dot{\xi}_6 &= -k_2 \xi_6 - k_{12} \xi_5 - k_{a2} \frac{\xi_6 + |\xi_5|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\xi_5)}{|\xi_6| + |\xi_5|^{\frac{1}{2}}} + \bar{\Delta}_{12}, \end{aligned}$$

donde $\xi_1 = z_{01}$, $\xi_2 = \dot{z}_{01} = z_{11}$, $\xi_3 = \dot{z}_{11}$, $\xi_4 = z_{02}$, $\xi_5 = \dot{z}_{02} = z_{12}$, $\xi_6 = \dot{z}_{12}$, $\bar{\Delta}_{11} = \frac{d}{dt}(\Delta_{11} - d_1 d_2 \lambda_{\alpha r} \varepsilon)$ y $\bar{\Delta}_{12} = \frac{d}{dt}(\Delta_{12} + 2a_{40} \lambda_{\beta r} \varepsilon)$, con $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ y note que $\hat{z}_{12} = z_{12}$.

Se asume que $|\bar{\Delta}_{11}| < \delta_{11}$ y $|\bar{\Delta}_{12}| < \delta_{12}$ con $\delta_{11}, \delta_{12} > 0$. Si $k_{a1} > \delta_{11}$ y $k_{a2} > \delta_{12}$ entonces la superficie $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6) = (z_{01}^{ss}, 0, 0, z_{02}^{ss}, 0, 0)$ se alcanza en tiempo finito [40], donde z_{01}^{ss} y z_{02}^{ss} son los valores de estado estable para z_{01} y z_{02} , respectivamente. Entonces, un movimiento de modos deslizante en tiempo finito sobre la superficie de control de seguimiento $(z_{11}, z_{12}) = (0, 0)$ se establece a pesar de las perturbaciones Δ_{11} y Δ_{12} los cuales se rechazan en (6.5.1) por $(k_{11} z_{01}^{ss} - \nu_{1,eq})$ y $(k_{12} z_{02}^{ss} - \nu_{2,eq})$, respectivamente. He aquí $\nu_{1,eq}$ y $\nu_{2,eq}$ que son los valores del control equivalente [65] calculado de (6.5.1) al poner $\dot{z}_{11} = 0$ y $\dot{z}_{12} = 0$, respectivamente.

El controlador propuesto exhibe robustez del sistema en lazo cerrado lo que evita la estimación del par de carga, y esto a su vez permite superar la incertidumbre debido a las variaciones de la resistencia del rotor y la mejora en la exactitud de seguimiento. Como resultado de ello, el controlador propuesto ajusta la capacitancia equivalente al incrementar el par electromagnético del MJAM durante el arranque y la mejora de su rendimiento en estado estacionario.

Por último, para limitar las corrientes del estator al igual que en los capítulos anteriores se propone una lógica para las variables deslizantes z_{21} y z_{22} . Este límite de corriente proporciona máximo par eléctrico que produce el motor durante el proceso transitorio de lazo cerrado.

6.6 Resultados de Simulación

Para verificar el desempeño del controlador basado en el observador propuesto, simulaciones numéricas se realizan utilizando el método de Euler con un paso de integración $t_s = 1 \times 10^{-3}$.

Parámetros y datos del MJAM se presentan en la Table 1. [34]:

MJAM			
H.P.	0.25	V_s	110 (V)
f	60 (Hz)	n_p	2
$n = \frac{N_A}{N_B}$	1.18	$R_{\alpha s}$	2.02 (Ω)
$R_{\beta s}$	5.13 (Ω)	R_r	4.12 (Ω)
$L_{\alpha s}$	0.1846(H)	$L_{\beta s}$	0.1833 (H)
L_r	0.1828 (H)	L_m	0.1772 (H)
J	0.0146 (Kgm^2)	k_d	0 (kgm^2/s)
I_{max}	15 (A)	C_{run}	35 μf

Tabla 6.1: Parámetros del MJAM

Las ganancias del control son ajustadas a $k_1 = k_2 = 500$, $k_{01} = k_{02} = 30$, $k_{\alpha 1} = k_{\alpha 2} = 5$, $\alpha_1 = 36$, y $\alpha_3 = 1$. Así como, las ganancias para el observador $k_{1\alpha} = 195$, $k_{1\beta} = 140$, $k_{3\alpha} = k_{3\beta} = 7000$, $k_{2\alpha} = k_{2\beta} = 0.02$ y, $l_1 = l_2 = 0.01$.

Para propósitos de simulación, las condiciones iniciales de las variables de estado se seleccionan a cero. El desempeño del seguimiento se verifica para las dos salidas de la planta: La conducción del cuadrado del flujo del rotor ϕ a una referencia constante $\phi_{ref} = 0.15$, y un perfil de velocidad ω_{ref} para ω_r , propuesta como sigue:

1. El MJAM inicia en reposo con una referencia de velocidad de 100 rad/sec.
2. En el primer segundo, se presenta un cambio en la velocidad de referencia –en forma de rampa– de 100 rad/sec a 120 rad/sec.
3. Por último, en el cuarto segundo, se presenta un cambio en la velocidad de referencia – en forma de rampa negativa– de 120 rad/sec a 100 rad/sec.

Adicional mente, el sistema esta sujeto a disturbios los cuales se introducen como sigue::

1. El MJAM arranca en reposo con un par de carga de $\frac{1}{2} + 0.1 \sin(2.5t)$ N-m.
2. A los 2 segundos, se presenta un 30% de incremento en el valor de la resistencia de rotor.

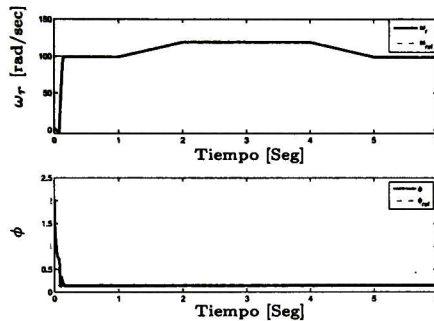


Figura 6.1: Velocidad del rotor ω_r y módulo de flujo ϕ .

La respuesta del seguimiento de velocidad del rotor se muestra en la Fig. 6.1 se observa un desempeño satisfactorio bajo el cambio de velocidad de referencia en $t = 1,4$ seg., donde el efecto de seguimiento de velocidad se alcanza después de 0.087 seg. La Fig. 6.1 muestra la respuesta del módulo del cuadrado del flujo del rotor ϕ ; es posible ver que el módulo se mantiene en la referencia dada. Los errores de las respuestas de los flujos de rotor se muestran en la Fig. 6.2.

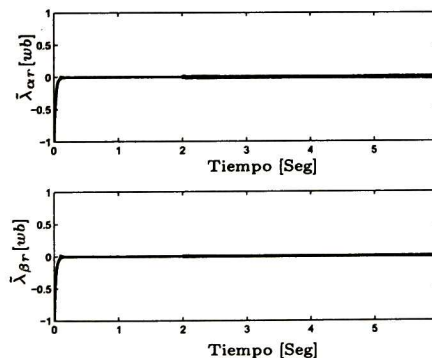


Figura 6.2: Error de flujos de rotor en el marco de referencia $\alpha \beta$.

120 6. SISTEMA CON INCERTIDUMBRE EN RESISTENCIA DE ROTOR SIN ESTIMACIÓN DEL PAR

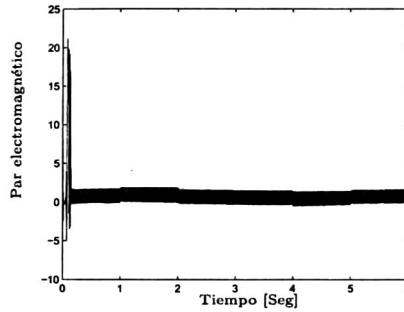


Figura 6.3: Par Electromagnético T_e .

La respuesta del par electromagnético se representa en la Fig. 6.3, donde se muestra que el par tiene un alto valor de 20 Nm durante el intervalo $[0, 0.088]$ seg. Este alto valor asegura una respuesta rápida de la velocidad (véase la Fig. 6.1.).

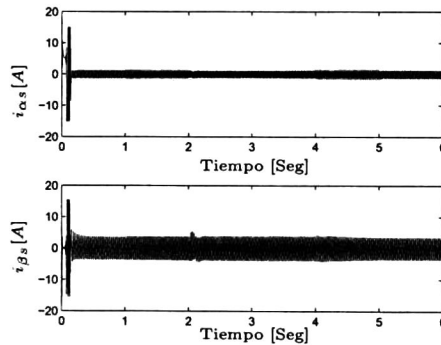


Figura 6.4: Corrientes de estator en el marco de referencia $\alpha \beta$.

Por otra parte, las corrientes del estator (véase la Fig. 6.4.) están en el intervalo apropiado durante el inicio ($0 < t < 0,2$).

Por último, en la figura. 6.5, se presentan las respuestas de los voltajes, donde $v_{\alpha s}$ es el Control por MD *Super-twisting* y $v_{\beta s}$ es el control discontinuo por MD.

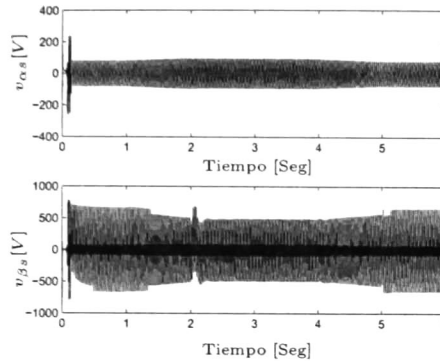


Figura 6.5: Voltajes de control de estator en el marco de referencia $\alpha \beta$.

6.7 Conclusiones

Se propone un esquema de control basado en la técnica de control por bloques, el diseño de una superficie cuasi-continua, y un algoritmo super-twisting que rechaza la perturbación del par de carga, para el seguimiento de la velocidad del rotor ω_r y el módulo cuadrado de flujo del rotor ϕ del MJAM sujeto a perturbaciones internas y externas. Un observador de segundo orden no lineal por MD se diseña para estimar el flujo del rotor con las dinámicas de error con estructura super-twisting. A diferencia de los controladores utilizados en los capítulos 4 y 5, para el nuevo diseño el par de carga es arbitrario pero acotado y se considera como una perturbación acotada. Se demuestra estabilidad en tiempo finito del sistema en lazo cerrado completo. Los resultados de simulación muestran que el controlador es robusto con respecto a las perturbaciones causadas por el par de carga y la incertidumbre de resistencia del rotor. Por otra parte, el controlador propuesto garantiza las limitaciones de la corriente del estator.

Capítulo 7

Control por MD integral de alto orden con observador de flujos.

(Sistema con incertidumbre en resistencia de rotor e inductancia y sin estimación del par)

7.1 Introducción

En el capítulo 6 se diseña un controlador para un sistema, con variación de resistencia del rotor, con un observador de segundo orden para flujos con dinámicas de error con estructura ST, y se propuso un controlador ST con superficies de control cuasi-continuo de corrientes para velocidad, donde no se requiere la estimación del par. Se presentó el análisis de estabilidad del sistema completo en lazo cerrado.

En este capítulo, se diseña un controlador por MD integral de alto orden el MJAM con capacitor conmutado en presencia de incertidumbre de resistencia de rotor, inductancias y par de carga arbitrario pero acotado. Primero se diseña un observador de segundo orden para estimar el flujo del rotor, que se basa en el *control equivalente* [18] y en una generalización [14] del algoritmo *Super-twisting* [37]. Con la medición de corrientes de estator y estimación del flujo del rotor, se propone un controlador mediante una combinación de la linealización por retroalimentación para sistemas que se presentan en la forma controlable a bloques [49] y algoritmos cuasi-continuos [40] con el fin de diseñar una estructura integral anidada como [28, 59] pero con rechazo de perturbaciones exacta, debido a generalmente existen perturbaciones en la medición de las corrientes de estator y la estimación del flujo del rotor, similar a las técnicas presentadas en [16, 21]. Se propone un algoritmo super-twisting para la entrada de control básica y una lógica de conmutación discontinua por MD para la entrada auxiliar con el fin de asegurar una superficie de deslizamiento que sea atrayente en tiempo finito. El sistema en lazo cerrado muestra robustez, que permite superar las perturbaciones internas debida a las variaciones de resistencia e inductancia y perturbaciones externas como

el par de carga arbitrario pero acotado.

7.2 Modelo Matemático del MJAM

El modelo dinámico del MJAM donde se considera la variación de resistencia del rotor que se presentan en el capítulo 2 se re-formulan como

$$\begin{aligned}
 \dot{i}_{\alpha s} &= -c_1 a_{10} i_{\alpha s} + c_1 c_{40} \lambda_{\alpha r} - c_1 c_3 n_p \omega_r \lambda_{\beta r} + c_1 v_{\alpha s} + \Delta_{\alpha s} \\
 \dot{i}_{\beta s} &= -c_2 a_{20} i_{\beta s} + c_2 c_{40} \lambda_{\beta r} + c_2 c_3 n_p \omega_r \lambda_{\alpha r} + c_2 v_{\beta s} + \Delta_{\beta s} \\
 \dot{\lambda}_{\alpha r} &= -a_{30} \lambda_{\alpha r} + n_p \omega_r \lambda_{\beta r} + a_{40} i_{\alpha s} + \Delta_{\alpha r} \\
 \dot{\lambda}_{\beta r} &= -n_p \omega_r \lambda_{\alpha r} - a_{30} \lambda_{\beta r} + a_{40} i_{\beta s} + \Delta_{\beta r} \\
 \dot{\omega}_r &= d_1 d_2 (\lambda_{\beta r} i_{\alpha s} - \lambda_{\alpha r} i_{\beta s}) - d_2 T_L
 \end{aligned} \tag{7.2.1}$$

La dinámica del capacitor (ver Fig.2.18) esta dada por (2.3.62) y la de voltajes (2.3.60) y (2.3.61) del capítulo 2. Se considera la entrada de control acotada por

$$|v_s| \leq v_0 \tag{7.2.2}$$

donde v_0 es un escalar positivo.

7.3 Observador de modos deslizantes de segundo orden para flujos de rotor

Con la velocidad ω_r y la corriente de estator $i_{\alpha s}$ y $i_{\beta s}$ medibles, en esta sección se diseña un observador por modos deslizantes (MD) de segundo orden para estimar los flujos de rotor.

Al igual que en capítulos anteriores se considera la siguiente transformación:

$$\lambda_{\alpha r}^* = i_{\alpha s} + c_1 c_3 \lambda_{\alpha r}, \quad \lambda_{\beta r}^* = i_{\beta s} + c_2 c_3 \lambda_{\beta r} \tag{7.3.1}$$

la dinámica de corrientes y flujos (7.2.1) se representan en las nuevas variables como

$$\begin{aligned}
 \dot{i}_{\alpha s} &= -\vartheta_{11} i_{\alpha s} + \vartheta_{12} \lambda_{\alpha r}^* - \varphi_1 \omega_r \lambda_{\beta r}^* + c_1 v_{\alpha s} + \Delta_{\alpha s} \\
 \dot{i}_{\beta s} &= -\vartheta_{21} i_{\beta s} + \vartheta_{22} \lambda_{\beta r}^* + \varphi_2 \omega_r \lambda_{\alpha r}^* + c_2 v_{\beta s} + \Delta_{\beta s} \\
 \dot{\lambda}_{\alpha r}^* &= \varsigma_{11} i_{\alpha s} + \varsigma_{12} \lambda_{\alpha r}^* + c_1 v_{\alpha s} + \Delta_{\alpha r} \\
 \dot{\lambda}_{\beta r}^* &= \varsigma_{21} i_{\beta s} + \varsigma_{22} \lambda_{\beta r}^* + c_2 v_{\beta s} + \Delta_{\beta r}
 \end{aligned} \tag{7.3.2}$$

donde $\vartheta_{11} = c_1 a_1 + \frac{c_4}{c_3}$, $\vartheta_{12} = \vartheta_{22} = \frac{c_4}{c_3}$, $\vartheta_{21} = c_2 a_2 + \frac{c_4}{c_3}$, $\varphi_1 = c_1 c_3 n_p$, $\varphi_2 = c_2 c_3 n_p$, $\varsigma_{11} = c_1 c_3 a_4 - c_1 a_1 - \varsigma_{12}$, $\varsigma_{21} = c_2 c_3 a_4 - c_2 a_1 - \varsigma_{22}$, $\varsigma_{12} = \left(\frac{c_1 c_4 - c_1 c_3 a_3}{c_1 c_3} \right)$ y $\varsigma_{22} = \left(\frac{c_2 c_4 - c_2 c_3 a_3}{c_2 c_3} \right)$. Aquí, las perturbaciones $\Delta_{\alpha s}$ y $\Delta_{\beta s}$ se consideran que son de variación lenta, esto es $\dot{\Delta}_{\alpha s} = \dot{\Delta}_{\beta s} = 0$.

En base a (7.3.2), y definiendo $\hat{\lambda}_{\alpha r}^*$, $\hat{\lambda}_{\beta r}^*$, $\hat{i}_{\alpha s}$, y $\hat{i}_{\beta s}$ como estimaciones de $\lambda_{\alpha r}^*$, $\lambda_{\beta r}^*$, $i_{\alpha s}$, y $i_{\beta s}$, respectivamente, un observador basado en el método del control equivalente [18] se diseña como

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{i}}_{\alpha s} &= -\vartheta_{11} \hat{i}_{\alpha s} + \vartheta_{12} \hat{\lambda}_{\alpha r}^* - \varphi_1 \omega_r \hat{\lambda}_{\beta r}^* + c_1 v_{\alpha s} + \hat{\Delta}_{\alpha s} + l_{11} \rho_1 (\tilde{i}_{\alpha s}) + V_1 \\
 \dot{\hat{i}}_{\beta s} &= -\vartheta_{21} \hat{i}_{\beta s} + \vartheta_{22} \hat{\lambda}_{\beta r}^* + \varphi_2 \omega_r \hat{\lambda}_{\alpha r}^* + c_2 v_{\beta s} + \hat{\Delta}_{\beta s} + l_{21} \rho_1 (\tilde{i}_{\beta s}) + V_2 \\
 \dot{\hat{\lambda}}_{\alpha r}^* &= \varsigma_{11} \hat{i}_{\alpha s} + \varsigma_{12} \hat{\lambda}_{\alpha r}^* + c_1 v_{\alpha s} + l_3 V_1 \\
 \dot{\hat{\lambda}}_{\beta r}^* &= \varsigma_{21} \hat{i}_{\beta s} + \varsigma_{22} \hat{\lambda}_{\beta r}^* + c_2 v_{\beta s} + l_4 V_2 \\
 \dot{\hat{\Delta}}_{\alpha s} &= l_5 V_1, \quad \dot{V}_1 = l_{12} \rho_2 (\tilde{i}_{\alpha s}) \\
 \dot{\hat{\Delta}}_{\beta s} &= l_6 V_2, \quad \dot{V}_2 = l_{22} \rho_2 (\tilde{i}_{\beta s})
 \end{aligned} \tag{7.3.3}$$

donde $\tilde{i}_{\alpha s} = i_{\alpha s} - \hat{i}_{\alpha s}$, y $\tilde{i}_{\beta s} = i_{\beta s} - \hat{i}_{\beta s}$ son errores de estimación de $i_{\alpha s}$, e $i_{\beta s}$, respectivamente, con

$$\begin{aligned}
 \rho_1(\cdot) &= \mu_1 |\cdot|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\cdot) + \mu_2(\cdot) + \mu_3 |\cdot|^{\frac{3}{2}} \text{sign}(\cdot), \\
 \rho_2(\cdot) &= \frac{1}{2} \mu_1^2 \text{sign}(\cdot) + \frac{3}{2} \mu_1 \mu_2 |\cdot|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\cdot) + (\mu_2^2 + 2\mu_1 \mu_3)(\cdot) + \frac{5}{2} \mu_2 \mu_3 |\cdot|^{\frac{3}{2}} \text{sign}(\cdot) + \frac{3}{2} \mu_3^2 |\cdot|^2 \text{sign}(\cdot),
 \end{aligned}$$

$l_j > 0$ para $j = 1, \dots, 6$ y, $\mu_i > 0$ para $i = 1, 2, 3$.

Como resultado, las estimaciones del flujo del rotor $\hat{\lambda}_{\alpha r}$ y $\hat{\lambda}_{\beta r}$ se obtienen como

$$\hat{\lambda}_{\alpha r} = \frac{\hat{\lambda}_{\alpha r}^* - \hat{i}_{\alpha s}}{c_1 c_3} \quad \text{y} \quad \hat{\lambda}_{\beta r} = \frac{\hat{\lambda}_{\beta r}^* - \hat{i}_{\beta s}}{c_2 c_3}.$$

7.4 Diseño del controlador por modos deslizantes

Siempre y cuando las corrientes y la velocidad sean medidas continuamente y los flujos del rotor se estimen, el objetivo en esta sección es diseñar un controlador de MD que pueda seguir las señales de referencia de la velocidad deseada ω_{ref} y el módulo al cuadrado del flujo del rotor ϕ_{ref} por medio del control básico continuo v_s y de control auxiliar ρ como una función discontinua.

7.4.1 Diseño de la superficie de deslizamiento

Al igual que en el capítulo 5 se presenta el sistema (7.2.1) en *Forma No-Linear Controlable a bloques* con perturbación [49] como:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(\phi) + B_1(\lambda_r)x_2 + D_1T_L + \Delta_r \\ \dot{x}_2 &= f_2(\omega_r, \lambda_r, i_s) + B_2u + \Delta_s\end{aligned}\quad (7.4.1)$$

donde $x_1 = [\omega_r \ \phi]^T$ $x_2 = [i_{\alpha s} \ i_{\beta s}]^T$ $\lambda_r = [\lambda_{\alpha r} \ \lambda_{\beta r}]^T$, $u = [v_{\alpha s} \ v_{\beta s}]^T$
 $f_1(\phi) = [f_{11} \ f_{12}]^T = [0 \ -2a_{30}\phi]^T$ $D_1 = [-d_2 \ 0]^T$ $f_2 = [f_{21} \ f_{22}]^T$
 $\Delta_r = [0 \ 2\Delta_{\alpha r}\lambda_{\alpha r} + 2\Delta_{\beta r}\lambda_{\beta r}]^T$ $\Delta_s = [\Delta_{\alpha s} \ \Delta_{\beta s}]^T$ $B_1(\lambda_r) = \begin{bmatrix} d_1d_2\lambda_{\beta r} & -d_1d_2\lambda_{\alpha r} \\ 2a_{40}\lambda_{\alpha r} & 2a_{40}\lambda_{\beta r} \end{bmatrix}$
y $B_2 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}$, con $f_{21} = -a_{10}c_1i_{\alpha s} + c_1c_{40}\lambda_{\alpha r} - c_1c_3\omega_r\lambda_{\beta r}$
y $f_{22} = -a_{20}c_2i_{\beta s} + c_2c_3\omega_r\lambda_{\alpha r} + c_2c_{40}\lambda_{\beta r}$.

Solamente las estimaciones de los flujos del rotor están disponibles para el diseño del control. Po consiguiente, las variables estimadas $\hat{\phi} = \hat{\lambda}_{\alpha r}^2 + \hat{\lambda}_{\beta r}^2$, $\hat{\lambda}_r = (\hat{\lambda}_{\alpha r}, \hat{\lambda}_{\beta r})$ y sus errores $\tilde{\phi} = \phi - \hat{\phi}$, $\tilde{\lambda}_r = \lambda_r - \hat{\lambda}_r$, son definidas.

El vector de error utilizado es $\hat{z}_1 = [z_{11} \ \hat{z}_{12}]^T$ y el error *real* $z_1 = [z_{11} \ z_{12}]^T$ con

$$z_{11} = \omega_r - \omega_{ref}(t), \hat{z}_{12} = \hat{\phi} - \phi_{ref}(t) \text{ y } z_{12} = \phi - \phi_{ref}(t) = \hat{\phi} + \tilde{\phi} - \phi_{ref}(t) = \hat{z}_{12} + \tilde{\phi},$$

las dinámicas del primer bloque transformado (7.4.1) son

$$\dot{\hat{z}}_1 = f_1(\hat{\phi}) + B_1(\hat{\lambda}_r)x_2 + \tilde{\Phi} + \bar{\Delta}_1 \quad (7.4.2)$$

donde $\tilde{\Phi} = [0 \ \dot{\tilde{\phi}}]^T$ y $\bar{\Delta}_1 = D_1T_L + \Delta_r + [\dot{\omega}_{ref} \ \dot{\phi}_{ref}]^T$

El valor deseado para el control virtual x_2 se define como $x_{2des} = [i_{\alpha s}^{des} \ i_{\beta s}^{des}]^T$ y se propone como

$$x_{2des} = x_{2des}^0 + x_{2des}^1 \quad (7.4.3)$$

donde x_{2des}^1 esta diseñado para rechazar la perturbación $\bar{\Delta}_1$ en tiempo finito al utilizar la técnica de modos deslizantes integral [68]. El término x_{2des}^0 es tal que z_1 converge exponencialmente a cero.

Para establecer el control x_{2des} en (7.4.2), la variable de error $z_2 = [z_{21} \ z_{22}]^T$ se define como

$$z_2 = x_2 - x_{2des}. \quad (7.4.4)$$

y (7.4.2) es reescrita como

$$\dot{\hat{z}}_1 = f_1(\hat{\phi}) + B_1(\hat{\lambda}_r)x_{2des}^0 + B_1(\hat{\lambda}_r)x_{2des}^1 + B_1(\hat{\lambda}_r)z_2 + \tilde{\Phi} + \bar{\Delta}_1. \quad (7.4.5)$$

Ahora para determinar x_{2des}^1 , la variable $\sigma = [\sigma_1 \quad \sigma_2]^T$ se propone como

$$\sigma = \hat{z}_1 + \xi \quad (7.4.6)$$

donde $\xi = [\xi_1 \quad \xi_2]^T$ es una variable integral definida a continuación.

De (7.4.6), la dinámica de σ está dada por

$$\dot{\sigma} = f_1(\hat{\phi}) + B_1(\hat{\lambda}_r)x_{2des}^0 + B_1(\hat{\lambda}_r)x_{2des}^1 + B_1(\hat{\lambda}_r)z_2 + \tilde{\Phi} + \bar{\Delta}_1 + \dot{\xi}. \quad (7.4.7)$$

Con la selección de $\dot{\xi}$ como

$$\dot{\xi} = -f_1(\hat{\phi}) - B_1(\hat{\lambda}_r)x_{2des}^0 \quad (7.4.8)$$

donde $\xi(0) = -z_1(0)$, el sistema (7.4.7) se reduce a

$$\dot{\sigma} = B_1(\hat{\lambda}_r)x_{2des}^1 + B_1(\hat{\lambda}_r)z_2 + \tilde{\Phi} + \bar{\Delta}_1. \quad (7.4.9)$$

Para forzar movimiento de modos deslizantes sobre la superficie $\sigma = 0$ a pesar de la perturbación $\bar{\Delta}_1$, el término x_{2des}^1 en (7.4.9) se elige como $x_{2des}^1 = B_1^{-1}(\hat{\lambda}_r)\nu$, con $\nu = [\nu_1 \quad \nu_2]^T$ definido como la solución para

$$\begin{aligned} \nu_1 &= -k_{\sigma_1} \frac{\dot{\sigma}_1 + k_{\delta_1} |\sigma_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma_1)}{|\dot{\sigma}_1| + k_{\delta_1} |\sigma_1|^{\frac{1}{2}}} \\ \nu_2 &= -k_{\sigma_2} \frac{\dot{\sigma}_2 + k_{\delta_2} |\sigma_2|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma_2)}{|\dot{\sigma}_2| + k_{\delta_2} |\sigma_2|^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (7.4.10)$$

donde las derivadas $\dot{\sigma}_1$ y $\dot{\sigma}_2$ se obtienen utilizando un diferenciador de MD [38].

Cuando el movimiento sobre la superficie $\sigma = 0$ se alcanza, la solución a $\dot{\sigma} = 0$ en (7.4.9)

$$\{B_1(\hat{\lambda}_r)x_{2des}^1\}_{eq} = B_1(\hat{\lambda}_r)z_2 + \tilde{\Phi} + \bar{\Delta}_1 \quad (7.4.11)$$

muestra que la perturbación $\tilde{\Phi} + \bar{\Delta}_1$ se rechaza por el control equivalente $\{B_1(\hat{\lambda}_r)x_{2des}^1\}_{eq}$ [65]. La dinámica sobre $\sigma = 0$ esta dada por

$$\dot{z}_1 = f_1(\hat{\phi}) + B_1(\hat{\lambda}_r)x_{2des}^0. \quad (7.4.12)$$

La dinámica deseada $-K_1\hat{z}_1$ para \dot{z}_1 en (7.4.12) es introducida por medio de

$$x_{2des}^0 = B_1^{-1}(\hat{\lambda}_r) \left[-f_1(\hat{\phi}) - K_1\hat{z}_1 \right] \quad (7.4.13)$$

donde $K_1 = \text{diag}(k_1, k_2)$ con $k_1 > 0$, $k_2 > 0$. Con (7.4.13) en (7.4.8), $\dot{\xi}$ se reduce a

$$\dot{\xi} = K_1\hat{z}_1. \quad (7.4.14)$$

7.4.2 Inducción de modos deslizantes

De (7.4.4) , se desprende que

$$\dot{z}_2 = f_2(\omega_r, \hat{\lambda}_s, i_s) + B_2 u + \Delta_2 \quad (7.4.15)$$

donde el término $\Delta_2 = \Delta_r - \dot{x}_{2des}$ es una perturbación acotada.

Para inducir movimiento de MD sobre la superficie $z_{21} = 0$ o $i_{\alpha s} = i_{\alpha s}^{des}$ en el lazo de corriente, tomando en consideración (2.3.60-2.3.61), el control básico v_s se formula como [37]

$$\begin{aligned} v_s &= -\alpha_1 |z_{21}|^{1/2} \text{sign}(z_{21}) - \alpha_3 z_{21} + u_1 \\ \dot{u}_1 &= -\alpha_2 \text{sign}(z_{21}) \end{aligned} \quad (7.4.16)$$

con $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, y $\alpha_3 > 0$. Para inducir movimiento modo casideslizante sobre la superficie $z_{22} = 0$ o $i_{\beta s} = i_{\beta s}^{des}$, se diseña el control auxiliar ρ para el capacitor mediante la siguiente lógica de interrupción:

$$\rho = \frac{1}{2} \text{sign}(z_{22} v_c) + \frac{1}{2}. \quad (7.4.17)$$

7.5 Análisis de estabilidad del controlador basado en el observador

El sistema en lazo cerrado extendido se presenta como

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= -K_1 \hat{z}_1 + \nu + B_1(\hat{\lambda}_r) z_2 + \tilde{\Phi} + \Delta_1 \end{cases} \quad (7.5.1)$$

$$\begin{cases} \dot{\sigma} &= \nu + B_1(\hat{\lambda}_r) z_2 + \tilde{\Phi} + \bar{\Delta}_1 \\ \dot{\nu}_1 &= -k_{\sigma_1} \frac{\dot{\sigma}_1 + k_{\delta_1} |\sigma_1|^{1/2} \text{sign}(\sigma_1)}{|\dot{\sigma}_1 + k_{\delta_1} |\sigma_1|^{1/2}} \end{cases} \quad (7.5.2)$$

$$\begin{cases} \dot{\nu}_2 &= -k_{\sigma_2} \frac{\dot{\sigma}_2 + k_{\delta_2} |\sigma_2|^{1/2} \text{sign}(\sigma_2)}{|\dot{\sigma}_2 + k_{\delta_2} |\sigma_2|^{1/2}} \end{cases} \quad (7.5.3)$$

$$\begin{cases} \dot{z}_2 = f_2(\omega_r, \hat{\lambda}_s, i_s) + B_2 u + \Delta_2 \end{cases} \quad (7.5.4)$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{i}}_{\alpha s} = \vartheta_{12} \tilde{\lambda}_{\alpha r}^* - \varphi_1 \omega_r \tilde{\lambda}_{\beta r}^* + \tilde{\Delta}_{\alpha s} - l_{11} \rho_1 (\tilde{i}_{\alpha s}) - V_1 \\ \dot{\tilde{i}}_{\beta s} = \vartheta_{22} \tilde{\lambda}_{\beta r}^* + \varphi_2 \omega_r \tilde{\lambda}_{\alpha r}^* + \tilde{\Delta}_{\beta s} - l_{21} \rho_1 (\tilde{i}_{\beta s}) - V_2 \end{cases} \quad (7.5.5)$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\lambda}}_{\alpha r}^* = \varsigma_{12} \tilde{\lambda}_{\alpha r}^* + \Delta_{\alpha r} - l_3 V_1 \\ \dot{\tilde{\lambda}}_{\beta r}^* = \varsigma_{22} \tilde{\lambda}_{\beta r}^* + \Delta_{\beta r} - l_4 V_2 \\ \dot{\tilde{\Delta}}_{\alpha s} = -l_5 V_1 \\ \dot{\tilde{\Delta}}_{\beta s} = -l_6 V_2. \end{cases} \quad (7.5.6)$$

Es posible demostrar para el bloque (7.5.2) que hay MD sobre la superficie $\sigma = 0$ en tiempo finito con los resultados que se presentan en [40]. De manera similar se puede mostrar convergencia en tiempo finito del sistema (7.5.4) para la superficie $z_2 = 0$ en el capítulo 6. Finalmente, la convergencia uniforme en tiempo finito a cero de los errores de estimación $\tilde{i}_{\alpha s}$ y $\tilde{i}_{\beta s}$ en el sistema (7.5.5) se pueden probar con los resultados mostrados en [14].

El movimiento de MD dado por el sistema (7.5.1) y (7.5.6) es limitado al conjunto $[\sigma_1 \ \sigma_2 \ z_{21} \ z_{22} \ \tilde{i}_{\alpha s} \ \tilde{i}_{\beta s}]^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ como:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -K_1(z_1 + \tilde{z}_1) \\ \dot{\tilde{\lambda}}_{\alpha r}^* &= (\varsigma_{12} - l_3 \vartheta_{12}) \tilde{\lambda}_{\alpha r}^* - l_3 \tilde{\Delta}_{\alpha s} + \Delta_{\alpha r} + l_3 \varphi_1 \omega_r \tilde{\lambda}_{\beta r}^* \\ \dot{\tilde{\lambda}}_{\beta r}^* &= (\varsigma_{22} - l_4 \vartheta_{22}) \tilde{\lambda}_{\beta r}^* - l_4 \tilde{\Delta}_{\beta s} + \Delta_{\beta r} - l_4 \varphi_2 \omega_r \tilde{\lambda}_{\alpha r}^* \\ \dot{\tilde{\Delta}}_{\alpha s} &= -l_5 \vartheta_{12} \tilde{\lambda}_{\alpha r}^* - l_5 \tilde{\Delta}_{\alpha s} + l_5 \varphi_1 \omega_r \tilde{\lambda}_{\beta r}^* \\ \dot{\tilde{\Delta}}_{\beta s} &= -l_6 \vartheta_{22} \tilde{\lambda}_{\beta r}^* - l_6 \tilde{\Delta}_{\beta s} - l_6 \varphi_2 \omega_r \tilde{\lambda}_{\alpha r}^*. \end{aligned} \quad (7.5.7)$$

Para analizar la estabilidad del el sistema (7.5.7), se puede reescribir como un sistema lineal con perturbaciones no desvanecientes de la forma

$$\dot{e} = Me + \Delta \quad (7.5.8)$$

donde $e = [z_1^T \ \tilde{\lambda}_{\alpha r}^* \ \tilde{\lambda}_{\beta r}^* \ \tilde{\Delta}_{\alpha s} \ \tilde{\Delta}_{\beta s}]^T$, M es la matriz

$$M = \begin{bmatrix} -K_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varsigma_{12} - l_3 \vartheta_{12} & 0 & -l_3 & 0 \\ 0 & 0 & \varsigma_{22} - l_4 \vartheta_{22} & 0 & -l_4 \\ 0 & -l_5 \vartheta_{12} & 0 & -l_5 & 0 \\ 0 & 0 & -l_6 \vartheta_{22} & 0 & -l_6 \end{bmatrix}$$

$$y \Delta = \begin{bmatrix} \tilde{z}_1^T & \Delta_{\alpha r} + l_3 \varphi_1 \omega_r \tilde{\lambda}_{\beta r}^* & \Delta_{\beta r} - l_4 \varphi_2 \omega_r \tilde{\lambda}_{\alpha r}^* \\ l_5 \varphi_1 \omega_r \tilde{\lambda}_{\beta r}^* & l_6 \varphi_2 \omega_r \tilde{\lambda}_{\alpha r}^* & \end{bmatrix}^T$$

Para (7.5.8), la función candidata de Lyapunov $V = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e}$ se propone, con $\mathbf{P} > 0$. Con la elección adecuada de l_i cuando $i = 3, \dots, 6$ y K_1 , la matriz \mathbf{M} es Hurwitz. Por tanto, existe una única solución \mathbf{P} para la ecuación de Lyapunov $\mathbf{M}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{M} = -\mathbf{Q}$, donde $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$ y $\mathbf{Q} > 0$.

Para el sistema (7.5.8), esto se satisface

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(\mathbf{P}) \|\mathbf{e}\|_2^2 &\leq \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{Q} \mathbf{e} \leq \lambda_{\max}(\mathbf{P}) \|\mathbf{e}\|_2^2 \\ \frac{\partial V}{\partial \mathbf{e}} \mathbf{M} \mathbf{e} &= -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} \leq -\lambda_{\min}(\mathbf{Q}) \|\mathbf{e}\|_2^2 \end{aligned} \quad (7.5.9)$$

y el término de la perturbador se considera acotado por $\|\Delta\| \leq \alpha_2 \|\mathbf{e}\|_2 + \beta_2$, con $\alpha_2 > 0$ y $\beta_2 > 0$.

La derivada de V , resulta como

$$\dot{V} = -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} - 2\mathbf{e}^T \mathbf{P} \Delta \quad (7.5.10)$$

sustituyendo las acotaciones (7.5.9) in (7.5.10), resulta

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq (-\lambda_{\min}(\mathbf{Q}) + 2\alpha_2 \lambda_{\max}(\mathbf{P})) \|\mathbf{e}\|_2^2 + 2\beta_2 \lambda_{\max}(\mathbf{P}) \|\mathbf{e}\|_2 \\ &= -\alpha (1 - \theta) \|\mathbf{e}\|_2^2 - \alpha \theta \|\mathbf{e}\|_2^2 + \beta \|\mathbf{e}\|_2 \end{aligned}$$

donde $\alpha = \lambda_{\min}(\mathbf{Q}) - 2\alpha_2 \lambda_{\max}(\mathbf{P})$, $\beta = 2\beta_2 \lambda_{\max}(\mathbf{P})$ y $0 < \theta < 1$. finalmente, $\dot{V} \leq -\alpha (1 - \theta) \|\mathbf{e}\|_2^2$, $\forall \|\mathbf{e}\|_2 > \delta$, con $\delta = \frac{\beta}{\alpha \theta}$.

Así, el sistema nominal $\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{M} \mathbf{e}$ tiene un punto de equilibrio exponencialmente estable $\mathbf{e} = 0$, la solución $\mathbf{e}(t)$ de (7.5.8) es últimamente acotada. La ultima cota esta dada por $\|\mathbf{e}\|_2 \leq \delta \frac{\sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{P})}}{\sqrt{\lambda_{\min}(\mathbf{P})}}$.

7.6 Resultados de Simulación

Para verificar el desempeño del controlador basado en el observador propuesto, simulaciones numéricas se realizan utilizando el método de integración de Euler con paso $t_s = 1 \times 10^{-3}$

Parámetros y datos del MJAM se presentan en la Table 1. [34]:

MJAM			
H.P.	0.25	V_s	110 (V)
f	60 (Hz)	n_p	2
$n = \frac{N_A}{N_B}$	1.18	$R_{\alpha s}$	2.02 (Ω)
$R_{\beta s}$	5.13 (Ω)	R_r	4.12 (Ω)
$L_{\alpha s}$	0.1846(H)	$L_{\beta s}$	0.1833 (H)
L_r	0.1828 (H)	L_m	0.1772 (H)
J	0.0146 (Kgm^2)	k_d	0 (kgm^2/s)
I_{max}	15 (A)	C_{run}	35 μf

Tabla 7.1: Parámetros del MJAM

Las ganancias del control son ajustadas a $k_1 = 500$, $k_2 = 750$, $k_{\sigma_1} = 30$, $k_{\sigma_2} = -10$, $k_{\delta_1} = 1$, $k_{\delta_2} = 0.0015$, $\alpha_1 = 36$, y $\alpha_3 = 1$. Así como, las ganancias para el observador $l_{11} = 15000$, $l_{21} = 17000$, $l_{12} = 0.01$, $l_{22} = 0.01$, $l_5 = 50$ y, $l_6 = 50$.

Para propósitos de simulación, las condiciones iniciales de las variables de estado se seleccionan a cero. El desempeño del seguimiento se verifica para las dos salidas de la planta: La conducción del cuadrado del flujo del rotor ϕ a una referencia constante $\phi_{ref} = 0.15$, y un perfil de velocidad ω_{ref} para ω_r , propuesta como sigue:

1. El MJAM inicia en reposo con una referencia de velocidad de 100 rad/seg.
2. En el primer segundo, se presenta un cambio en la velocidad de referencia de 100 rad/seg a 120 rad/seg.
3. Por último, en el tercer segundo, se presenta un cambio en la velocidad de referencia de 120 rad/seg a 140 rad/seg.

Adicional mente, el sistema esta sujeto a disturbios los cuales se introducen como sigue:

1. El MJAM arranca en reposo con un par de carga de 0.5 N-m, luego en $t = 1$ seg. un cambio en el par de carga de 0.5 N-m a 0.8 N-m. Después en $t = 3$ seg. otro cambio en el par de carga de 0.8 N-m a 1 N-m. Finalmente en $t = 4$ seg. un cambio mas en el par de 1 N-m a 0.5 N-m.
2. A los 2 segundos, se presenta un 30% de incremento en el valor de la resistencia de rotor.

132 7. SISTEMA CON INCERTIDUMBRE EN RESISTENCIA DE ROTOR E INDUCTANCIA

3. El MJAM arranca con un incremento en el valor de inductancia del 15% del valor nominal.

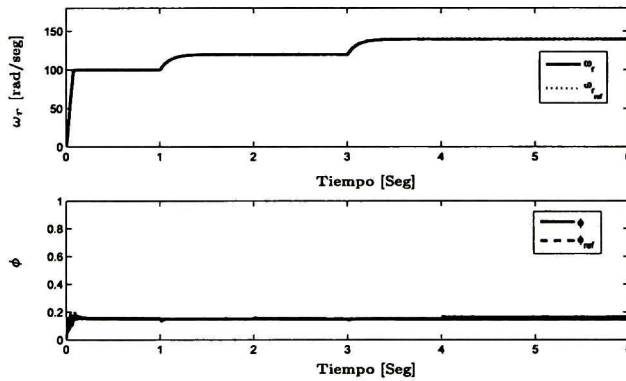


Figura 7.1: Velocidad del rotor ω_r y cuadrado del módulo del flujo del rotor ϕ .

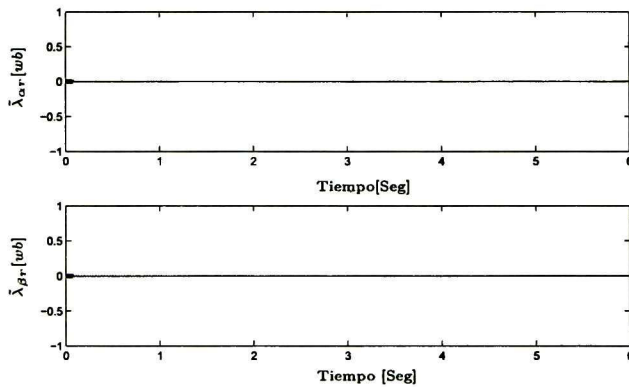


Figura 7.2: Error de flujos de rotor en el marco de referencia $\alpha \beta$.

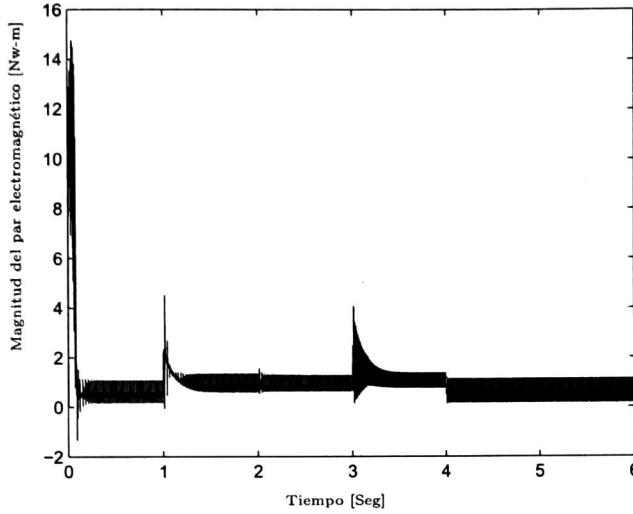


Figura 7.3: Par electromagnético T_e .

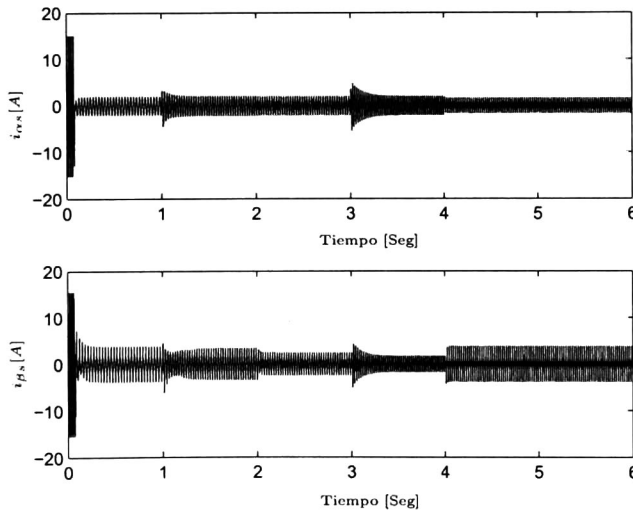


Figura 7.4: Corrientes de estator en el marco de referencia $\alpha \beta$.

La respuesta de seguimiento de velocidad del rotor se representa en la Fig. 7.1 que muestra un desempeño satisfactorio bajo el cambio de la referencia de velocidad en $t = 1.04$ seg. y

134 7. SISTEMA CON INCERTIDUMBRE EN RESISTENCIA DE ROTOR E INDUCTANCIA

$t = 3.04$ seg., donde se alcanza el efecto de seguimiento de velocidad casi totalmente después de 0.082 seg. Fig. 7.1 también muestra la respuesta del módulo al cuadrado del flujo del rotor ϕ , es posible ver que el módulo se mantiene en la referencia. Los errores de las respuestas de los flujos de rotor se muestran en la Fig. 7.2 y el par electromagnético se presenta en la Fig. 7.3.

Las corrientes del estator (véase la Fig. 7.4.) Están en el intervalo apropiado durante el inicio ($0 < t < 0,2$) que corresponde al algoritmo de control propuesto. Por último, en la Fig. 7.5, se presentan los voltajes de control, donde $v_{\alpha s}$ es el control de MD *super-twisting* y $v_{\beta s}$ es el control discontinuo de MD.

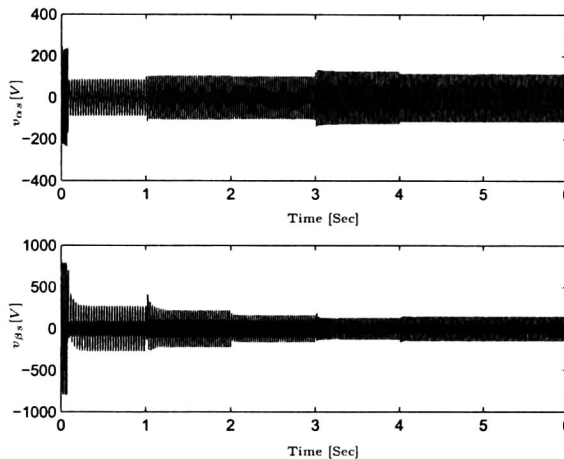


Figura 7.5: Voltajes de estator en el marco de referencia $\alpha \beta$.

7.7 Conclusiones

En este capítulo se propuso un esquema de control robusto por MD de alto orden integral QC con el objetivo de controlar las variables de velocidad ω_r y el módulo de flujo del rotor ϕ para el MJAM en presencia de perturbaciones internas y externas. Se desarrolla un observador de orden completo para flujos de rotor con incertidumbres. Se demuestra estabilidad últimamente acotada del sistema completo en lazo cerrado. Los resultados de simulación muestran un desempeño robusto del controlador con respecto a las perturbaciones causadas por el par de carga arbitrario y las variaciones de resistencia de rotor e inductancias. Cumple con las limitaciones de corrientes del estator.

Capítulo 8

Conclusiones y trabajos futuros

8.1 Conclusiones

Las conclusiones más importantes de este trabajo son las siguientes:

- Se eligió un esquema de control que es una modificación del motor jaula de ardilla monofásico y capacitor permanente. El devanado auxiliar en serie con capacitor permanente, tiene un interruptor en paralelo con una lógica de control automático, que permite regular la magnitud del flujo del motor para una operación segura y flexible; puede generar un par de arranque apropiado y minimizar la amplitud de par pulsante en estado estable, para diferentes velocidades del motor.
- Se desarrolló en detalle el modelo del motor; en el marco de referencia ab , en el marco de referencia estacionario $\alpha\beta$ y en componentes simétricas para operación desbalanceada en estado estable. El modelo incluye incertidumbre paramétrica.
- Basado en las técnicas de control no lineal por modos deslizantes (MD) y control a bloques, se diseña un control basado en el observador super-twisting (ST) para controlar la velocidad y un control discontinuo para el módulo de flujo del MJAM. Se proponen cuatro esquemas de controlador-observador y son los siguientes:
 - Para la planta nominal se diseña un observador de orden reducido de altas ganancias para estimar el flujo y par de carga. Se utiliza el principio de separación para determinar que el sistema completo tiene estabilidad asintótica. Los resultados de simulación muestran que el algoritmo propuesto es robusto ante perturbaciones externas, par de la carga.
 - Para la planta con incertidumbre, con variación en la resistencia de rotor, se diseña un observador de orden reducido por modos deslizante ST para flujos del rotor

y el par de carga considerando incertidumbre. Se tiene estabilidad últimamente acotada del sistema en lazo cerrado completo (controlador y observador). Las simulaciones muestran que el algoritmo propuesto es robusto ante perturbaciones internas (incertidumbre de resistencia del rotor) y externas (par de la carga).

- Para la planta con incertidumbre (variación en resistencia de rotor y el par de carga arbitraria pero acotada), se diseña un observador de orden completo por modos deslizantes, con dinámica de error de estructura ST, para flujos de rotor considerando incertidumbre. Para el controlador de velocidad se desarrolla una superficie deslizante cuasi-continua (QC) de corriente. La estabilidad del sistema en lazo cerrado es de tiempo finito. Los simulaciones muestran que el algoritmo propuesto es robusto ante perturbaciones internas (incertidumbre de resistencia del rotor) y externas (par de la carga arbitrario pero acotado).
- Para la planta con incertidumbre (variación de resistencia de rotor, inductancias y el par de la carga arbitrario pero acotado), se diseña un observador de orden completo por modos deslizantes ST para flujos de rotor considerando incertidumbres. Se diseñan las superficies de deslizamiento para el controlador y observador mediante MD integrales QC para el rechazo de las perturbaciones en la medición de velocidad y la estimación del flujo del rotor. Se tiene estabilidad últimamente acotada del sistema en lazo cerrado. Las simulaciones muestran que el algoritmo propuesto es robusto ante perturbaciones internas (variación de la resistencia de rotor e inductancias) y externas (par de la carga arbitrario pero acotado).

Los resultados de simulación verifican la validez de los, controladores y observadores propuestos, así como de los algoritmos de solución propuestos. Los controladores son robustos y de buen desempeño.

8.2 Trabajos futuros

Como trabajos futuros se propone:

- La implementación en tiempo real los controladores y observadores propuestos en este trabajo de tesis.
- Estudio de un controlador que optimice la eficiencia del motor ante la diversidad de condiciones de operación.
- Un estudio técnico-económico entre las opciones de un motor trifásico y un motor monofásico para potencias fraccionarias, en donde se incluyan los distintos controladores.

- Análisis armónico del motor de jaula de ardilla monofásico

Bibliografía

- [1] Alanis, Alma Y. and Sanchez, Edgar N. and Loukianov, Alexander G. and Perez-Cisneros, M.A., (2010), "*Real-Time Discrete Neural Block Control Using Sliding Modes for Electric Induction Motors* ", IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 18, No.1., pp. 11-21.
- [2] Alanis, Alma Y. and Sanchez, Edgar N. and Loukianov, Alexander G., (2011), "*Real-time Discrete Backstepping Neural Control for Induction Motors* ", IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 19, No.2, pp. 350-366.
- [3] Atassi A. N., Khalil H. K., (1999), "*A Separation Principle for the Stabilization of a Class of Nonlinear Systems* ", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 44, No. 9., pp. 1672-1687.
- [4] Aurora, C. and Ferrara, A. and Levant, A., (2001), "*Speed regulation of induction motors: a sliding mode observer-differentiator based control scheme* ", Proceedings of the 40th IEEE Conference Decision and Control, Vol. 3, pp. 2651-2656.
- [5] Bartolini G., Ferrara A. and Usai E., (1998), "*Chattering avoidance by second-order sliding mode control.* ", IEEE Trans. Automat. Control, 43(2), pp. 241-246.
- [6] Bartolini G., Pisano A., Punta E., Usai E., (2003), "*A survey of applications of second-order sliding mode control to mechanical systems* ", Int. J. Control, vol. 76, no. 9-10, pp. 875-892
- [7] Ba-thunya A. S., Khopkar R., Wei Kexin, Toliyat H. A., (2001), "*Single phase induction motor drives-a literature survey* ", Proc. of IEEE International Electric Machines and Drives Conference, pp. 911-916
- [8] Beltrao de Rossiter Correa, M. and Jacobina, C.B. and Cabral da Silva, E.R. and Lima, A. M N, (2004), "*Vector control strategies for single-phase induction motor drive systems* ", IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 51, No.5 pp. 1073-1080.
- [9] Bijan Zahedi, S. V.-Z. (2007), "*Analysis of Electrical Loss in Single Phase Induction Motors* ", IEEE pp. 1621-1625.

- [10] Caruso M. and Cecconi, V. and Di Tommaso, A. O. and Rocha, R., (2012), "*Sensorless variable speed single-phase induction motor drive system based on direct rotor flux orientation* ", International Conference on Electrical Machines (ICEM), pp. 1062-1068.
- [11] Castillo B., Di Gennaro S., Loukianov A., Rivera J., (2007), "*Robust nested sliding mode regulation with application to induction motors*", American Control Conference, New York City, pp. 5242-5247
- [12] Chapman S. J., (1999), "*Electric Machinery Fundamentals*", 3rd ed., McGraw-Hill, New York.
- [13] Collins E.R., Jr. and Puttgen, H.B. and Sayle II, W.E., (1988), "*Single-phase induction motor adjustable speed drive: direct phase angle control of the auxiliary winding supply*", Industry Applications Society Annual Meeting, Conference Record of the 1988 IEEE, Vol. 1, pp. 246-252.
- [14] Cruz-Zavala, E. and Moreno, J.A. and Fridman, (2010), "*Uniform Second-Order Sliding Mode Observer for mechanical systems* "; 11th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS), pp. 14-19.
- [15] Davila, J. and Fridman, L. and Levant, Arie, (2005), "*Second-order sliding-mode observer for mechanical systems* ", Transactions on Automatic Control, Vol.50, No.11, pp. 1785-1789.
- [16] Jorge Dávila, (2013), "*Exact Tracking Using Backstepping Control Design and High-order Sliding Modes* ", IEEE Transactions on Automatic Control, To be published - early access.
- [17] Djeghali, N. and Ghanes, M. and Djennoune, S. and Barbot J., (2011), "*Backstepping fault tolerant control based on second order sliding mode observer: Application to induction motors* ", 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), pp. 4598-4603.
- [18] Drakunov, S. V., (1992), "*Sliding-mode observers based on equivalent control method* ", Proceedings of the 31st IEEE Conference on Decision and Control, 1992, Vol. 2, pp. 2368-2369.
- [19] Emelyanov S.V. Korovin S.K., (1981), "*Applying the principle of control by deviation to extend the set of possible feedback types* ", Soviet Physics, Doklady, 26(6), pp. 562-564.
- [20] Emelyanov S.V., Korovin S.K. and Levantovsky L.V., (1986), "*Higher order sliding modes in the binary control systems* ", Soviet Physics, Doklady, 31(4), pp. 291-293.

- [21] Estrada Antonio, Fridman Leonid, (2010), "*Quasi-continuous HOSM control for systems with unmatched perturbations*", *Automatica*, vol.46, no.11, pp. 1916-1919.
- [22] Filippov A. F. (1988), "*Diferential Equations with Discontinuous Right-Hand Side*", Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- [23] Fitzgerald A. E., Kingsley C. Jr., Umans S. D., (1990), "*Electric Machinery*", 5th ed., McGraw-Hill, New York.
- [24] Floquet, T. and Barbot, J. -P and Perruquetti, W., (2002), "*A finite time observer for flux estimation in the induction machine*", *Proceedings of the 2002 International Conference on Control Applications*, vol. 2, pp. 1303-1308.
- [25] Fridman L., and Levant A., (1996), "*Higher order sliding modes as a natural phenomenon in control theory*", *Lectures notes in Control and Information Science*, vol. 217, Springer-Verlag, New York, N. Y., United States, pp. 107-133.
- [26] Fridman L., Levant A., (2002), "*Higher Order Sliding Modes*", In *Sliding Mode Control in Engineering*, J.P Barbet, Perruquetti (Eds.), Marcel Dekker, New York, pp.53-101.
- [27] Fuchs E.F., A. V. (1990), "*Design analysis of capacitor-start, capacitor-run single phase induction motor*", *IEEE Trans. Energy Convers*, Vol. 5, No. 2 , pp. 327-336.
- [28] Huerta-Avila H., Loukianov A.G. and Canedo J.M., (2007), "*Nested integral sliding modes of large scale power system*", *46th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1993-1998.
- [29] Isidori A., (1995), "*Nonlinear Control Systems*", 3rd. ed., Springer-Verlag.
- [30] Khalil H. K., (1996), "*Nonlinear Systems*", 2nd. ed., Prentice-Hall, Inc., New Jersey.
- [31] Kirtley, H. B. (1998), "*Electric Motor Handbook*", New York: McGraw-Hill.
- [32] Kostenko M. P., L. P. (1975), "*Máquinas Eléctricas*", Moscú: MIR.
- [33] Kothari, I. N. (1992), "*Electric Machines*", New Delhi, India: Tata McGraw-Hill.
- [34] Krause P. C., Wasynczuk O., Sudhoff S. D., (c2002), "*Analysis of Electric Machinery and Drive Systems*", 2nd ed., New York : IEEE Press ; Wiley-Interscience.
- [35] Law J. D., Lipo T. A., (1986), "*A single phase induction motor voltage controller with improved performance*", *IEEE Trans. Power Electron.*, vol. PE-1, no.4, pp. 240-247.
- [36] Lettenmaier T. A., Novotny D.W., Lipo T. A., (1991), "*Single-phase induction motor with an electrically controlled capacitor*", *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 27, no. 1, pp. 38-43.

- [37] Levant A. (1993), "*Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control*", International Journal of Control, vol. 58, no. 6, pp. 1247-1263.
- [38] Levant A., (1998), "*Robust exact differentiation via sliding mode technique* ", Automatica, vol. 34, no. 3, pp. 379-384.
- [39] Levant A. (2003), "*Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control* ", Int. J. Control, vol. 76, no. 9/10, pp. 924-941.
- [40] Levant A. (2005), "*Quasi-Continuous High-Order Sliding-Mode Controllers* ", IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 50, no. 11, pp. 1812-1816.
- [41] Levant A. (2005), "*Homogeneity approach to high-order sliding mode design* ", Automatica, vol. 41, no. 5, pp. 823-830.
- [42] Liu T. H., Pi-Chieh Wang (1994), "*Implementation of a single phase induction motor control on a DSP based system* ", Power Electronics Specialists Conference, PESC '94 Record., 25th Annual IEEE, vol. 1, pp. 514-521.
- [43] Liu T. H. (1995), "*A maximum torque control with a controlled capacitor for a single-phase induction motor*", IEEE Trans. Ind. Electron., vol. 42, no. 1, pp. 17-24.
- [44] Liu T. H., Ming-Tsan Lin, Hann-Chung Wu (1998), "*A single phase induction motor drive with improved performance* ", Elsevier Electric Power System Research, vol. 47, pp. 29-38.
- [45] Loukianov A. G., Utkin V. I., (1981), "*Methods of reducing equations for dynamic systems to regular form*", Automation and Remote Control, Vol.42, pp. 413-420.
- [46] Loukianov A. G., (1993) "*Optimal nonlinear block control method* ", Proceeding of the 2nd European Control Conference, Groningen, pp. 1853-1855.
- [47] Loukianov A. G., (1998), "*A block method of synthesis of linear systems at sliding mode*", Automation and Remote Control, vol.59, no. 7, pp. 916-933.
- [48] Loukianov, A. G. and Canedo, J. M. and Serrano, O. and Utkin, V. I. and Celikovskiy, S., (2001), "*Adaptive sliding mode block control of induction motors* ", American Control Conference, 2001. Proceedings of the 2001, Vol.1, pp. 149-154.
- [49] Loukianov A. G., (2002), "*Robust Block Decomposition Sliding Mode Control Design* ", Mathematical Problems in engineering, Vol.8(4-5), pp. 349-365.
- [50] Mademlis Christos, I. K. (2005), "*Optimization of Single-Phase Induction Motors Part I: Maximum Energy Efficiency Control* ", IEEE Transactions on Energy Conversion, VOL. 20, No. 1 pp. 187-195.

- [51] Mamani G., Becedas J., Feliu-Batlle V., Sira-Ramírez H. , (2007), "*An Algebraic State Estimation Approach for DC Motors*", WCECS, San Francisco.
- [52] Marino, R. and Peresada, S. and Tomei, P., (1995), "*Exponentially convergent rotor resistance estimation for induction motors* ", IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol.42, No.5, pp. 508-515.
- [53] Maurício Beltrão de Rossiter Correa, Cursino Brandão Jacobina, Antonio Marcus Nogueira Lima and Edison Roberto Cabral da Silva, (2000), "*Rotor-Flux-Oriented Control of a Single-phase Induction Motor Drive* ", IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol.47, No.4, pp. 832-841.
- [54] Moreno J. A., Osorio M., (2008), "*A Lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers*", 47th IEEE Conference on Decision and Control, pp. 2856-2861.
- [55] Muljadi E., Zhao Y., Liu T. H., Lipo T. A., (1993), "*Adjustable ac capacitor for a single-phase induction motor*", IEEE Trans. Ind. Appl., vol. 29, no. 3, pp. 479-485.
- [56] Pilloni, A. and Pisano, A. and Usai, E. and Puche-Panadero, R., (2012), "*Detection of rotor broken bar and eccentricity faults in induction motors via second order sliding mode observer* ", IEEE 51st Annual Conference on Decision and Control (CDC), pp. 7614-7619.
- [57] Reicy, S. and Vaez-Zadeh, S, (2005), "*Vector control of single-phase induction machine with maximum torque operation* ", Industrial Electronics. ISIE 2005. Proceedings of the IEEE International Symposium, vol. 3, pp. 923-928.
- [58] Reyes J. M., (2008), "*Control no Lineal Robusto del Motor de Inducción Monofásico* ", Tesis de Maestria, CINVESTAV del IPN unidad Guadalajara.
- [59] Rivera Jorge and Loukianov A. (2006), "*Integral Nested Sliding Mode Control: Application to the Induction Motor* ", International Workshop on Variable Structure Systems, 2006. VSS'06., pp. 110-114.
- [60] Rocha R. and De Siqueira Martins, L. and De Melo, J. C D (2005), "*A Speed Control for Variable-Speed Single-Phase Induction Motor Drives* ", International Symposium on ISIE 2005, Proceedings of the IEEE Industrial Electronics, vol. 1, pp. 43-48.
- [61] Sadegh Vaez-Zadeh, B. Z. (2007), "*A Steady State Model Including Iron Loss for Variable Speed Single Phase Induction Motors* ", IEEE pp. 606-611.
- [62] Slotine, J.-J. E., (1984), "*Sliding controller design for nonlinear systems* ", Int. J. of Control, 40(2).
- [63] Sousa Gilberto, B. K. (1992), "*Loss Modeling of converter induction machine system* ", IEEE pp. 114-120.

- [64] Umans, S. (1996), "*Steady-state, lumped-parameter model for capacitor-run, single-phase induction motors* ", IEEE Trans. Ind. Appl., Vol. 32, No. 1 pp. 169-179.
- [65] Utkin V. I., (1992), "*Sliding mode in control and optimization*", Springer Verlag, London.
- [66] Utkin V. I., (1993), "*Sliding mode control design principles and applications to electric drives* ", IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol.40, No.1, pp. 23-36.
- [67] Utkin V. I., Guldner J., Shi J., (1999), "*Sliding mode control in electromechanical systems*", Taylor & Francis, London.
- [68] Utkin V.I., Guldner J., and Shi J., (2009), "*Sliding mode control in electro-mechanical systems* ", Automation and control engineering, CRC Press.
- [69] Verghese, George C. and Sanders, S.R., (1988), "*Observers for flux estimation in induction machines* ",IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol.35, No.1, pp.85-94.
- [70] Vaez-Zadeh, S. and Harooni, S.R., (2005), "*Decoupling Vector Control of Single Phase Induction Motor Drives* "Power Electronics Specialists Conference. PESC '05. IEEE 36th, pp. 733-738.
- [71] Zahedi Bijan, and Sadegh Vaez-Zadeh, (2009), "*Efficiency Optimization Control of Single Phase Induction Motor Drives* ",IEEE Transactions on Power Electronics, VOL. 24, NO. 4, pp. 1842-1847.
- [72] Zhang Yan and Utkin, V., (2002), "*Sliding mode observers for electric machines-an overview* ",IECON 02 (IEEE 2002 28th Annual Conference of the Industrial Electronics Society), Vol.3, pp. 1062-1071.
- [73] Yeadon, W. Y. (2001), "*Handbook of small Electric Motors*", New York: Mc-Graw-Hill.

Apéndice A

A.1 Artículos publicados

Rubio G. J., Cañedo J. M., Loukianov A.G., Reyes J. M., “*Second Order Sliding Mode Block Control of Single-Phase Induction Motors*”, Proceeding of the 18th IFAC World Congress Milano (Italy), 2011, pp. 3938-3943.

Guillermo J. Rubio, Cañedo J. M., Vadim I. Utkin, Alexander G. Loukianov, “*Second order sliding mode block control of single-phase induction motors*”, Int. J. Robust. Nonlinear Control, 2012, pp. 1-17.

Rubio G.J., Diego Sanchez-Torres, Cañedo J. M., Loukianov, A.G., “*HOSM block control of SPIM*”, Proceeding of 9th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE), 2012, pp. 1-6.

Rubio G.J., Diego Sanchez-Torres, Cañedo J. M., Loukianov, A.G., (2013), “*High Order Sliding Mode Block Control of Single Phase Induction Motor*”, IEEE Transactions on Control System Technology, 2013. Aceptado para publicación.

Rubio G.J., Diego Sanchez-Torres, Cañedo J. M., Loukianov, A.G., “*Integral High Order Sliding Mode Control of Single-Phase Induction Motor*”, Proceeding of 10th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE), 2013, pp. 1-6.

Apéndice B

B.1 Derivadas parciales para par electromagnético promedio y pulsante.

Con la segunda derivada parcial del par electromagnético promedio con respecto a la reactancia del capacitor menor que cero se obtiene el máximo par de arranque, esto es de la ecuación (2.3.106) se tiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T_e^{(avg)}}{\partial X_c} &= (AX_c^2 + BX_c + D)(MX_c^2 + NX_c + Q)^{-1} = 0 \\
 &= (AX_c^2 + BX_c + D) \frac{\partial}{\partial X_c} \left\{ (MX_c^2 + NX_c + Q)^{-1} \right\} + \dots \\
 &\quad (MX_c^2 + NX_c + Q)^{-1} \frac{\partial}{\partial X_c} \{ AX_c^2 + BX_c + D \} \\
 &= -\frac{(2MX_c + N)(AX_c^2 + BX_c + D)}{(MX_c^2 + NX_c + Q)^2} + \frac{2AX_c + B}{(MX_c^2 + NX_c + Q)} \\
 &= \frac{(MX_c^2 + NX_c + Q) \left\{ -(2MX_c + N)(AX_c^2 + BX_c + D) + (2AX_c + B)(MX_c^2 + NX_c + Q) \right\}}{(MX_c^2 + NX_c + Q)^2 (MX_c^2 + NX_c + Q)}
 \end{aligned}$$

Si se realizan simplificaciones algebraicas con la expresión anterior se tiene

$$\begin{aligned}
 \frac{(NA - MB)X_c^2 - 2(MD - QA)X_c + (QB - ND)}{(MX_c^2 + NX_c + Q)^2} &= 0 \\
 (NA - MB)X_c^2 - 2(MD - QA)X_c + (QB - ND) &= 0 \\
 aX_c^2 + bX_c + c &= 0
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 a &= NA - MB \\
 b &= -2(MD - QA) \\
 c &= QB - ND.
 \end{aligned}$$

Ahora si se simplifica la expresión cuadrática anterior se obtiene:

$$aX_c^2 + bX_c + c = \left(X_c + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$$

Es decir:

$$\begin{aligned} \left[X_c - \frac{2(MD-QA)}{2(NA-MB)} \right]^2 + \frac{QB-ND}{NA-MB} - \frac{4(MD-QA)^2}{4(NA-MB)^2} &= 0 \\ \frac{[(NA-MB)X_c - (MD-QA)]^2}{(NA-MB)^2} + \frac{QB-ND}{NA-MB} - \frac{(MD-QA)^2}{(NA-MB)^2} &= 0 \\ [(NA-MB)X_c - (MD-QA)]^2 + (QB-ND)(NA-MB) - (MD-QA)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Agrupando términos se obtiene:

$$\begin{aligned} [(NA-MB)X_c - (MD-QA)]^2 &= (MD-QA)^2 - (QB-ND)(NA-MB) \\ (NA-MB)X_c &= (MD-QA) + \sqrt{(MD-QA)^2 - (QB-ND)(NA-MB)} \\ X_c &= \frac{(MD-QA) + \sqrt{(MD-QA)^2 - (QB-ND)(NA-MB)}}{(NA-MB)} \end{aligned}$$

se simplifica la expresión anterior se obtiene finalmente:

$$X_c = \frac{MD - QA + \Omega}{NA - MB} \quad (B.1.1)$$

donde

$$\Omega = \sqrt{(MD - QA)^2 - (QB - ND)(NA - MB)}$$

la ecuación anterior depende del voltaje de alimentación y velocidad del rotor.

El par pulsante en estado estable se presenta en la ecuación (2.3.99), y se tiene que

$$\begin{aligned} T_e(pul) &= \frac{P}{2} \eta L_m \left| \tilde{i}_{\alpha s}^s \tilde{i}_{\alpha r}^s - \tilde{i}_{\beta s}^s \tilde{i}_{\beta r}^s \right| |e^{j2\omega_e t}| \\ &= \frac{P}{2} \eta L_m \left| \tilde{i}_{\alpha s}^s \tilde{i}_{\alpha r}^s - \tilde{i}_{\beta s}^s \tilde{i}_{\beta r}^s \right| \end{aligned}$$

se sustituyen las corrientes del motor para expresar el par promedio en función del voltaje de alimentación, la velocidad del rotor, la reactancia del capacitor y los parámetros del motor.

Así se parte de

$$\begin{aligned} \tilde{i}_{\alpha r}^s &= -Z_a \tilde{i}_{\alpha s}^s + Z_b \tilde{i}_{\beta s}^s \\ \tilde{i}_{\beta r}^s &= -Z_b \tilde{i}_{\alpha s}^s - Z_a \tilde{i}_{\beta s}^s \end{aligned}$$

tal que

$$\begin{aligned} \left| \tilde{i}_{\alpha s}^s \tilde{i}_{\beta r}^s - \tilde{i}_{\beta s}^s \tilde{i}_{\alpha r}^s \right| &= \left| \tilde{i}_{\alpha s}^s \left(-\frac{Z_b}{n} \tilde{i}_{\alpha s}^s - Z_a \tilde{i}_{\beta s}^s \right) - \tilde{i}_{\beta s}^s \left(-Z_a \tilde{i}_{\alpha s}^s + n Z_b \tilde{i}_{\beta s}^s \right) \right| \\ &= \left| -\frac{Z_b}{n} \tilde{i}_{\alpha s}^s \tilde{i}_{\alpha s}^s - Z_a \tilde{i}_{\alpha s}^s \tilde{i}_{\beta s}^s + Z_a \tilde{i}_{\beta s}^s \tilde{i}_{\alpha s}^s - n Z_b \tilde{i}_{\beta s}^s \tilde{i}_{\beta s}^s \right| \\ &= \left| Z_b \left(-n \tilde{i}_{\beta s}^s \tilde{i}_{\beta s}^s - \frac{1}{n} \tilde{i}_{\alpha s}^s \tilde{i}_{\alpha s}^s \right) + Z_a \left(\tilde{i}_{\beta s}^s \tilde{i}_{\alpha s}^s - \tilde{i}_{\alpha s}^s \tilde{i}_{\beta s}^s \right) \right| \end{aligned}$$

tomando por separado cada término de la expresión anterior se tiene:

$$\begin{aligned} \tilde{i}_{\alpha s}^s &= \frac{v_s}{\Delta} [\alpha_1 + j(\alpha_2 - X_c)] \\ \tilde{i}_{\beta s}^s &= \frac{v_s}{\Delta} [\beta_1 + j\beta_2] \end{aligned}$$

para la primer parte de la ecuación

$$\begin{aligned}
 (-n\tilde{i}_{\beta s}^s \tilde{i}_{\beta s}^s - \frac{1}{n}\tilde{i}_{\alpha s}^s \tilde{i}_{\alpha s}^s) &= -n \left(\frac{v_s}{\Delta} [\beta_1 + j\beta_2] \right)^2 - \frac{1}{n} \left(\frac{v_s}{\Delta} [\alpha_1 + j(\alpha_2 - X_c)] \right)^2 \\
 &= \frac{|v_s|^2}{|\Delta|^2} \left[-n(\beta_1^2 - \beta_2^2) - \frac{1}{n}(\alpha_1^2 - \alpha_2^2 + 2\alpha_2 X_c - X_c^2) + \dots \right. \\
 &\quad \left. 2j(-n\beta_1\beta_2 - \frac{1}{n}\alpha_1\alpha_2 + \frac{1}{n}\alpha_1 X_c) \right] \\
 &= \frac{v_s^2}{|\Delta|^2} \left[-n(\beta_1^2 - \beta_2^2) - \frac{1}{n}(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) - \frac{1}{n}(2\alpha_2 X_c - X_c^2) - \dots \right. \\
 &\quad \left. 2j(n\beta_1\beta_2 + \frac{1}{n}\alpha_1\alpha_2) + 2j\frac{1}{n}\alpha_1 X_c \right]
 \end{aligned}$$

los términos siguientes γ_1 y γ_2 como:

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= -n(\beta_1^2 - \beta_2^2) - \frac{1}{n}(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \\
 \gamma_2 &= 2(n\beta_1\beta_2 + \frac{1}{n}\alpha_1\alpha_2)
 \end{aligned}$$

resulta

$$-n\tilde{i}_{\beta s}^s \tilde{i}_{\beta s}^s - \frac{1}{n}\tilde{i}_{\alpha s}^s \tilde{i}_{\alpha s}^s = \frac{v_s^2}{\Delta^2} \left[\gamma_1 - \frac{1}{n}(2\alpha_2 X_c - X_c^2) - j \left(\gamma_2 - \frac{2}{n} X_c \alpha_1 \right) \right]$$

se desarrolla el segundo término de la ecuación

$$\begin{aligned}
 \tilde{i}_{\beta s}^s \tilde{i}_{\alpha s}^s - \tilde{i}_{\alpha s}^s \tilde{i}_{\beta s}^s &= \frac{|v_s|^2}{|\Delta|^2} [(\beta_1 + j\beta_2)(\alpha_1 + j(\alpha_2 - X_c))] - \frac{|v_s|^2}{|\Delta|^2} [(\alpha_1 + j(\alpha_2 - X_c))(\beta_1 + j\beta_2)] \\
 &= \frac{|v_s|^2}{|\Delta|^2} [(\alpha_1\beta_1 + \beta_2(\alpha_2 - X_c)) + j(\alpha_1\beta_2 + \beta_1(\alpha_2 - X_c))] - \dots \\
 &\quad \frac{|v_s|^2}{|\Delta|^2} [(\alpha_1\beta_1 + \beta_2(\alpha_2 - X_c)) + j(\alpha_1\beta_2 + \beta_1(\alpha_2 - X_c))] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

estos términos se incorporan a la ecuación

$$\begin{aligned}
 |\tilde{i}_{\alpha s}^s \tilde{i}_{\beta r}^s - \tilde{i}_{\beta s}^s \tilde{i}_{\alpha r}^s| &= \left| Z_b \left(\frac{v_s^2}{\Delta^2} \left[\gamma_1 - \frac{1}{n}(2\alpha_2 X_c - X_c^2) - j \left(\gamma_2 - \frac{2}{n} X_c \alpha_1 \right) \right] \right) + Z_a(0) \right| \\
 &= |Z_b| \frac{|v_s|^2}{|\Delta|^2} \left| \left[\gamma_1 - \frac{1}{n}(2\alpha_2 X_c - X_c^2) - j \left(\gamma_2 - \frac{2}{n} X_c \alpha_1 \right) \right] \right| \\
 &= |Z_b| \frac{|v_s|^2}{|\Delta|^2} \left| \left(\gamma_1 - \frac{1}{n}(2\alpha_2 X_c - X_c^2) \right) - j \left(\gamma_2 - \frac{2}{n} X_c \alpha_1 \right) \right|
 \end{aligned}$$

se obtiene el módulo del resultado anterior

$$\begin{aligned}
 |\tilde{i}_{\alpha s}^s \tilde{i}_{\beta r}^s - \tilde{i}_{\beta s}^s \tilde{i}_{\alpha r}^s| &= |Z_b| \frac{|v_s|^2}{|\Delta|^2} \sqrt{\left(\gamma_1 - \frac{1}{n}(2\alpha_2 X_c - X_c^2) \right)^2 - \left(j \left(\gamma_2 - \frac{2}{n} X_c \alpha_1 \right) \right)^2} \\
 &= |Z_b| \frac{|v_s|^2}{|\Delta|^2} \sqrt{\frac{1}{n^2} X_c^4 - \frac{4}{n^2} \alpha_2 X_c^3 + \frac{2}{n} (\gamma_1 + \frac{2}{n} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)) X_c^2 + \frac{4}{n} (-\gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1) X_c + \gamma_1^2 + \gamma_2^2} \\
 &= |Z_b| \frac{|v_s|^2}{|\Delta|^2} \sqrt{\frac{1}{n^2} X_c^4 - \frac{4}{n^2} \alpha_2 X_c^3 + \zeta_1 X_c^2 + \zeta_2 X_c + \zeta_3}
 \end{aligned}$$

donde

$$\zeta_1 = \frac{2}{n} (\gamma_1 + \frac{2}{n} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)), \zeta_2 = \frac{4}{n} (-\alpha_1 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_1), \zeta_3 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2,$$

$$\Delta \triangleq (\delta_{11} + \delta_{21}X_c) + j(\delta_{12} + \delta_{22}X_c).$$

Ahora se toma en cuenta

$$|\Delta|^2 = MX_c^2 + NX_c + Q$$

donde

$$M = \delta_{21}^2 + \delta_{22}^2, N = 2(\delta_{11}\delta_{21} - \delta_{12}\delta_{22}), Q = \delta_{11}^2 + \delta_{12}^2$$

tal que se tiene la expresión del par electromagnético pulsante que se expresa en la ecuación (2.3.107), la primer derivada parcial del par pulsante con respecto a la reactancia capacitiva de la ecuación (2.3.108) se iguala a cero y se desarrolla de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{e(pul)}}{\partial X_c} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial X_c} \left[\left(\sqrt{\frac{1}{n^2}X_c^4 - \frac{4}{n^2}\alpha_2 X_c^3 + \zeta_1 X_c^2 + \zeta_2 X_c + \zeta_3} \right) (MX_c^2 + NX_c + Q)^{-1} \right] &= 0 \\ = |Z_b| \frac{\partial}{\partial X_c} \left[\left(\frac{1}{n^2}X_c^4 - \frac{4}{n^2}\alpha_2 X_c^3 + \zeta_1 X_c^2 + \zeta_2 X_c + \zeta_3 \right)^{1/2} (MX_c^2 + NX_c + Q)^{-1} \right] \\ = |Z_b| \left[\left(\frac{1}{n^2}X_c^4 - \frac{4}{n^2}\alpha_2 X_c^3 + \zeta_1 X_c^2 + \zeta_2 X_c + \zeta_3 \right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial X_c} (MX_c^2 + NX_c + Q)^{-1} + \dots \right. \\ \left. (MX_c^2 + NX_c + Q)^{-1} \frac{\partial}{\partial X_c} \left(\frac{1}{n^2}X_c^4 - \frac{4}{n^2}\alpha_2 X_c^3 + \zeta_1 X_c^2 + \zeta_2 X_c + \zeta_3 \right)^{1/2} \right] \\ = |Z_b| \left[- \frac{(2MX_c + N) \left(\frac{1}{n^2}X_c^4 - \frac{4}{n^2}\alpha_2 X_c^3 + \zeta_1 X_c^2 + \zeta_2 X_c + \zeta_3 \right)^{1/2}}{(MX_c^2 + NX_c + Q)^2} + \dots \right. \\ \left. \frac{\left(\frac{4}{n^2}X_c^3 - \frac{12}{n^2}\alpha_2 X_c^2 + 2\zeta_1 X_c + \zeta_2 \right)}{2(MX_c^2 + NX_c + Q) \left(\frac{1}{n^2}X_c^4 - \frac{4}{n^2}\alpha_2 X_c^3 + \zeta_1 X_c^2 + \zeta_2 X_c + \zeta_3 \right)^{1/2}} \right] \\ = - |Z_b| \frac{2(2MX_c + N) \left(\frac{1}{n^2}X_c^4 - \frac{4}{n^2}\alpha_2 X_c^3 + \zeta_1 X_c^2 + \zeta_2 X_c + \zeta_3 \right)}{2(MX_c^2 + NX_c + Q)^2 \left(\frac{1}{n^2}X_c^4 - \frac{4}{n^2}\alpha_2 X_c^3 + \zeta_1 X_c^2 + \zeta_2 X_c + \zeta_3 \right)^{3/2}} + \dots \\ \frac{\left(\frac{4}{n^2}X_c^3 - \frac{12}{n^2}\alpha_2 X_c^2 + 2\zeta_1 X_c + \zeta_2 \right) (MX_c^2 + NX_c + Q)}{2(MX_c^2 + NX_c + Q)^2 \left(\frac{1}{n^2}X_c^4 - \frac{4}{n^2}\alpha_2 X_c^3 + \zeta_1 X_c^2 + \zeta_2 X_c + \zeta_3 \right)^{3/2}} \\ = |Z_b| \frac{\left(\frac{2}{n^2}N + \frac{4}{n^2}\alpha_2 M \right) X_c^4 + \left(\frac{4}{n^2}Q - \frac{4}{n^2}\alpha_2 N - 2M\zeta_1 \right) X_c^3 + \left(-3M\zeta_2 - \frac{12}{n^2}\alpha_2 Q \right) X_c^2}{2(MX_c^2 + NX_c + Q)^2 \left(\frac{1}{n^2}X_c^4 - \frac{4}{n^2}\alpha_2 X_c^3 + \zeta_1 X_c^2 + \zeta_2 X_c + \zeta_3 \right)^{3/2}} + \dots \\ \frac{(2\zeta_1 Q - 4M\zeta_3 - N\zeta_2) X_c + (\zeta_2 Q - 2\zeta_3 N)}{2(MX_c^2 + NX_c + Q)^2 \left(\frac{1}{n^2}X_c^4 - \frac{4}{n^2}\alpha_2 X_c^3 + \zeta_1 X_c^2 + \zeta_2 X_c + \zeta_3 \right)^{3/2}} \\ = |Z_b| \frac{OX_c^4 + RX_c^3 + EX_c^2 + FX_c + G}{2(MX_c^2 + NX_c + Q)^2 \left(\frac{1}{n^2}X_c^4 - \frac{4}{n^2}\alpha_2 X_c^3 + \zeta_1 X_c^2 + \zeta_2 X_c + \zeta_3 \right)^{1/2}} = 0 \\ |Z_b| (OX_c^4 + RX_c^3 + EX_c^2 + FX_c + G) = 0 \end{aligned}$$

B.1. DERIVADAS PARCIALES PARA PAR ELECTROMAGNÉTICO PROMEDIO Y PULSANTE.151

donde

$$O = \left(\frac{2}{n^2}N + \frac{4}{n^2}\alpha_2M \right), R = \left(\frac{4}{n^2}Q - \frac{4}{n^2}\alpha_2N - 2M\zeta_1 \right),$$
$$E = \left(-3M\zeta_2 - \frac{12}{n^2}\alpha_2Q \right), F = (2\zeta_1Q - 4M\zeta_3 - N\zeta_2), G = (\zeta_2Q - 2\zeta_3N).$$

Finalmente es posible encontrar un reactancia del capacitor (X_c) que mejore el par de arranque y minimice la componente oscilatoria del par pulsante en estado estable.

Apéndice C

C.1 Prueba de proposición 4

Prueba: Utilizando

$$V(x) = 2c_1\alpha_1 |z_{21}| + \frac{1}{2}c_1^2 u_1^2 + \frac{1}{2} \left(c_1\alpha_1 |z_{21}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_{21}) - c_1 u_1 \right)^2$$

como una función candidata de Lyapunov y tomando la derivada de la misma a través de las trayectorias de el sistema perturbado (6.4.7) se tiene

$$\dot{V} = -\frac{1}{|z_{21}|^{\frac{1}{2}}} \xi^T Q \xi + \frac{f_s}{|z_{21}|^{\frac{1}{2}}} q_1^T \xi \quad (A1)$$

$$\text{donde } \xi = \begin{bmatrix} |z_{21}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_{21}) & c_1 u_1 \end{bmatrix}^T \quad q_1 = \begin{bmatrix} \left(2\alpha_2 + \frac{c_1^2 \alpha_1^2}{2} \right) & -\frac{c_1 \alpha_1}{2} \end{bmatrix}^T$$

$$Q = \frac{c_1 \alpha_1}{2} \begin{bmatrix} 2\alpha_2 + c_1^2 \alpha_1^2 & -c_1 \alpha_1 \\ -c_1 \alpha_1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Utilizando la acotación en el término de la perturbación (4.2.10) y $|z_{21}|^{\frac{1}{2}} \leq \|\xi\|_2$, el segundo término en (A1) puede ser estimado como

$$\frac{f_s}{|z_{21}|^{\frac{1}{2}}} q_1^T \xi = \frac{\delta_1 |z_{21}|}{|z_{21}|^{\frac{1}{2}}} q_1^T \xi = \delta_1 |z_{21}|^{\frac{1}{2}} q_1^T \xi \leq \xi^T Q_1 \xi$$

$$\text{con } Q_1 = \begin{bmatrix} \left(2\alpha_2 + \frac{c_1^2 \alpha_1^2}{2} \right) \delta_1 & -\frac{c_1 \alpha_1 \delta_1}{2} \\ -\frac{c_1 \alpha_1 \delta_1}{2} & 1 \end{bmatrix}; \text{ esto resulta en}$$

$$\dot{V} = -\frac{1}{|z_{21}|^{\frac{1}{2}}} \xi^T Q \xi + \xi^T Q_1 \xi. \quad (A2)$$

De la condición (4.2.10) se tiene que $Q_1 > 0$. Entonces resulta

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\leq -\frac{1}{|z_{21}|^{\frac{1}{2}}} \lambda_{\min}\{Q\} \|\xi\|_2^2 + \lambda_{\max}\{Q_1\} \|\xi\|_2^2 & (A3) \\
&\leq -\left(\frac{1}{|z_{21}|^{\frac{1}{2}}} \lambda_{\min}\{Q\} - \lambda_{\max}\{Q_1\}\right) \|\xi\|_2^2 \\
&\leq -\varrho \|\xi\|_2^2
\end{aligned}$$

donde $\varrho = \left(\frac{1}{|z_{21}|^{\frac{1}{2}}} \lambda_{\min}\{Q\} - \lambda_{\max}\{Q_1\}\right)$

entonces, si $\varrho > 0$ o

$$|z_{21}| \leq \left(\frac{\lambda_{\min}\{Q\}}{\lambda_{\max}\{Q_1\}}\right)^2$$

luego la derivada de (A3) es negativa lo que garantiza estabilidad semi-global. La prueba de la convergencia en tiempo finito se encuentra en [54].

Apéndice D

D.1 Prueba de proposición 5

Prueba: Utilizando

$$V(x) = 2c_1\alpha_1 |z_{21}| + \frac{1}{2}c_1^2 u_1^2 + \frac{1}{2} \left(c_1\alpha_1 |z_{21}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_{21}) + \alpha_3(z_{21}) - c_1 u_1 \right)^2$$

como una función candidata de Lyapunov y tomando la derivada de la misma a través de las trayectorias de el sistema perturbado (5.3.7) se tiene

$$\dot{V} = -\frac{1}{|z_{21}|^{\frac{1}{2}}} \xi^T Q_1 \xi - \xi^T Q_2 \xi + \frac{f_s}{|z_{21}|^{\frac{1}{2}}} q_1^T \xi \quad (A4)$$

$$\text{donde } \xi = \begin{bmatrix} |z_{21}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_{21}) & \alpha_3(z_{21}) & c_1 u_1 \end{bmatrix}^T \quad q_1 = \begin{bmatrix} \left(2\alpha_2 + \frac{c_1^2 \alpha_1^2}{2}\right) & 0 & -c_1 \alpha_1 \end{bmatrix}^T$$

$$Q_1 = \frac{c_1 \alpha_1}{2} \begin{bmatrix} 2\alpha_2 + c_1^2 \alpha_1^2 & 0 & -c_1 \alpha_1 \\ 0 & 5\alpha_3^2 & -3\alpha_3 \\ -c_1 \alpha_1 & -3\alpha_3 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \alpha_3 \begin{bmatrix} \alpha_2 + 2c_1^2 \alpha_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_3^2 & -\alpha_3 \\ 0 & -\alpha_3 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizando la acotación en el término de la perturbación (5.2.9) y $|z_{21}|^{\frac{1}{2}} \leq \|\xi\|_2$, el segundo término en (A4) puede ser estimado como

$$\begin{aligned} \frac{f_s}{|z_{21}|^{\frac{1}{2}}} q_1^T \xi &= \frac{(\delta_1 |z_{21}| + \delta_2)}{|z_{21}|^{\frac{1}{2}}} q_1^T \xi \\ &= \delta_1 |z_{21}|^{\frac{1}{2}} q_1^T \xi + \frac{\delta_2}{|z_{21}|^{\frac{1}{2}}} q_1^T \xi \\ &\leq \delta_1 \xi^T \Delta_1 \xi + \frac{\delta_2}{|z_{21}|^{\frac{1}{2}}} \xi^T \Delta_1 \xi; \end{aligned}$$

esto resulta en

$$\dot{V} = -\frac{1}{|z_{21}|^{\frac{1}{2}}} \xi^T Q_1 - \delta_2 \Delta_1 \xi - \xi^T Q_2 - \delta_1 \Delta_1 \xi. \quad (A5)$$

De la condición (5.2.9) se tiene que $Q_2 - \delta_1 \Delta_1 > 0$. Entonces resulta

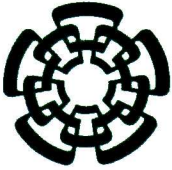
$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\frac{1}{|z_{21}|^{\frac{1}{2}}} \lambda_{\min} \{Q_1 - \delta_2 \Delta_1\} \|\xi\|_2^2 + \lambda_{\max} \{Q_2 - \delta_1 \Delta_1\} \|\xi\|_2^2 \\ &\leq -\left(\frac{1}{|z_{21}|^{\frac{1}{2}}} \lambda_{\min} \{Q_1 - \delta_2 \Delta_1\} - \lambda_{\max} \{Q_2 - \delta_1 \Delta_1\} \right) \|\xi\|_2^2 \\ &\leq -\varrho \|\xi\|_2^2 \end{aligned} \quad (A6)$$

donde $\varrho = \left(\frac{1}{|z_{21}|^{\frac{1}{2}}} \lambda_{\min} \{Q_1 - \delta_2 \Delta_1\} - \lambda_{\max} \{Q_2 - \delta_1 \Delta_1\} \right)$.

entonces, si $\varrho > 0$ o

$$|z_{21}| \leq \left(\frac{\lambda_{\min} \{Q_1 - \delta_2 \Delta_1\} + \lambda_{\min} \{Q_2 - \delta_1 \Delta_1\}}{\lambda_{\max} \{Q_1 - \delta_2 \Delta_1\}} \right)^2$$

luego la derivada de (A6) es negativa lo que garantiza estabilidad semi-global. La prueba de la convergencia en tiempo finito se encuentra en [54].



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL I.P.N. UNIDAD GUADALAJARA

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional aprobó la tesis

Control robusto por modos deslizantes de segundo orden para el motor jaula de ardilla monofásico

del (la) C.

Guillermo Javier RUBIO ASTORGA

el día 18 de Diciembre de 2013.

Dr. José Manuel Cañedo Castañeda
Investigador CINVESTAV 3C
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Juan Manuel Ramirez Arredondo
Investigador CINVESTAV 3C
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. José Javier Ruíz León
Investigador CINVESTAV 3C
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Alexander Georgievich Loukianov
Investigador CINVESTAV 3C
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dra. Susana Ortega Cisneros
Investigador CINVESTAV 2C
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Jorge Rivera Dominguez
Profesor Investigador
Universidad de Guadalajara



CINVESTAV - IPN
Biblioteca Central



SSIT0012183