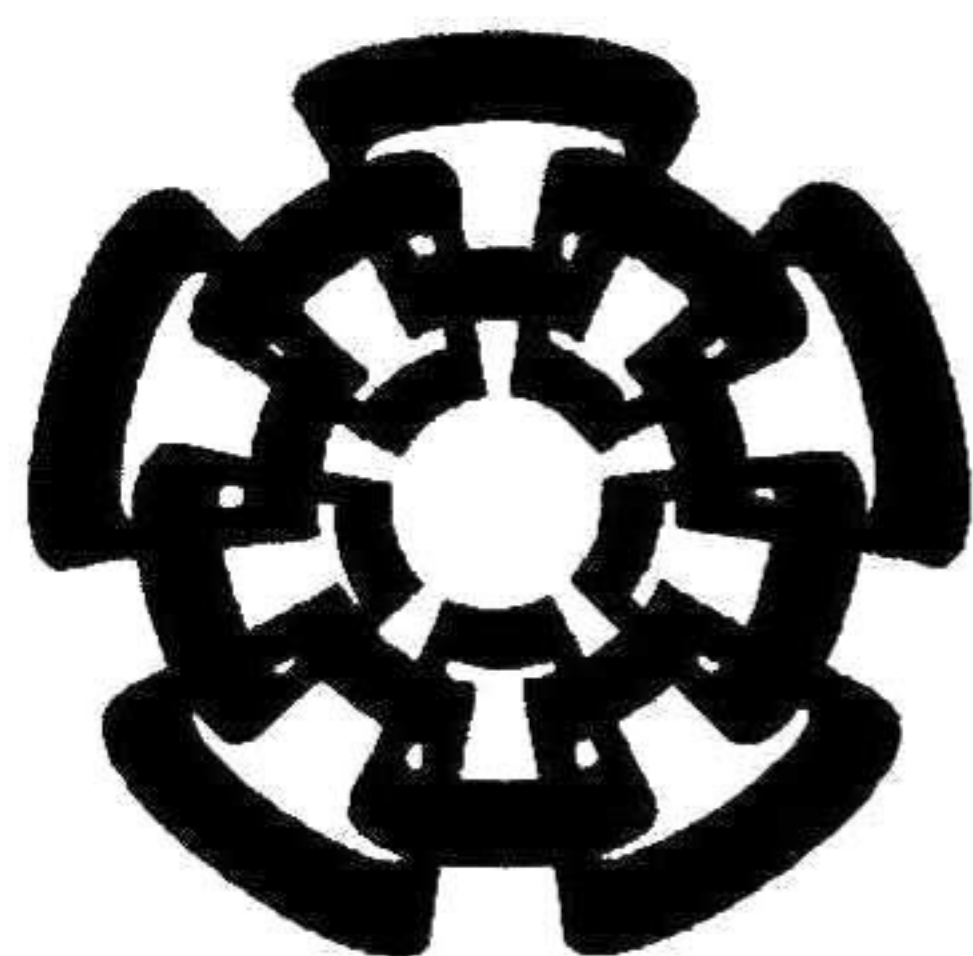


07-866-221
Dec. 2015



Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional
Unidad Guadalajara

Banco de filtros, ondeletas y análisis de multirresolución para la simulación de transitorios electromagnéticos

Tesis que presenta:
Jean René Zuluaga Duque

para obtener el grado de:
Maestro en Ciencias

en la especialidad de:
Ingeniería Eléctrica

**CINVESTAV
IPN
ADQUISICION
LIBROS**

Director de Tesis
Dr. José Luis Alejandro Naredo Villagrán

CLASIF..	CT00767
ADQUIS..	CT-866-SS1
FECHA:	08-08-2015
PROCED..	2015
	\$

**Banco de filtros, ondeletas y análisis
de multirresolución para la simulación
de transitorios electromagnéticos**

**Tesis de Maestría en Ciencias
Ingeniería Eléctrica**

Por:

Jean René Zuluaga Duque
Ingeniero Electricista

Universidad Nacional de Colombia - Sede Medellín 2006-20011

Director de Tesis

Dr. José Luis Alejandro Naredo Villagrán

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi familia por todo el amor y apoyo que me han dado durante toda mi formación no solo como maestro en ciencias sino como persona de bien, en especial a mi Padre Gilberto Zuluaga y a mi Madre Gilma Duque.

En segundo lugar agradezco al cuerpo profesoral del Cinvestav por compartir toda su sabiduría conmigo y con mis compañeros durante estos dos años de formación. En especial quiero agradecer al Dr José Naredo, mi asesor de tesis, por toda su paciencia, sabiduría y amistad.

En tercer lugar agradezco al Cinvestav y al CONACYT por otorgarme la beca y apoyos económicos sin los cuales no hubiese podido realizar mis estudios de postgrado.

Finalmente agradezco a Dios por permitirme vivir tan bonitas experiencias, rodearme de tanta gente especial y darme las oportunidades y el conocimiento necesario para aprovechar mi estancia en el bonito país de México.

*Dedicado:
A mi Familia*

Resumen

Esta tesis está enfocada en la solución de sistemas lineales para la aplicación en Transitorios electromagnéticos y sistemas eléctricos de potencia en general. Los esquemas propuestos están basados en la teoría de multirresolución y Banco de Filtros; esto con el fin de simular redes de manera más rápida mediante la implementación de múltiples procesadores y así realizar los cálculos en paralelo.

La estructura de procesamiento opera basada en filtros digitales integrados con etapas de diezmado e interpolación para así lograr múltiples velocidades y la descomposición del sistema en sub-bandas de frecuencia. Estos conceptos se aplican en el dominio del tiempo ajustan el paso de integración durante la simulación.

Se presentan 3 métodos diferentes de cálculo, los cuales usan esquemas de bancos de filtros. El primero de ellos está basado en la transformada discreta ondeleta y opera mediante procesos en paralelo. El segundo, al igual que el anterior, usa la transformada discreta ondeleta para modelar el sistema y llegar a la solución de este mediante la ecuación de Lyapunov. El último, además de bancos de filtros, también hace uso de las estructuras de filtros polifásicos con el fin de obtener un modelo de multirresolución y poder hacer convoluciones con múltiples procesadores en paralelo.

Abstract

This thesis focuses on the solution of linear systems for applications in electromagnetic transient phenomena occurring in power systems. Three solution schemes are proposed here based on multiresolution techniques and Filter Bank theory. Their purpose is to achieve accurate and fast simulations of power systems using parallel processing to reduce the stringent requirements imposed on digital hardware when performing simulations in real-time.

The processing structures that are proposed here employ digital filters with decimation and interpolation stages. This is to achieve multiple speeds by and decompose the system signals into sub-frequency bands. As this concept is applied in the time domain, the integration step-length can be adjusted during the simulation.

The first solution method is based on the discrete wavelet transform and is operated through parallel processors. The second solution method uses discrete wavelet transform too for modeling the system and to attain its representation by the Lyapunov-equation. The last solution method uses, in addition to filter-banks, polyphase filters. This leads to a system model able to make calculations with multiresolution and as multiple processes running in parallel.

Contenido

Contenido.....	1
Lista de figuras	3
Lista de tablas.....	5
1 Introducción	6
1.1 Antecedentes	6
1.2 Estado del arte	7
1.3 Objetivo de la tesis	10
2 Ondeletas	11
2.1 Transformada Ondeleta	11
2.2 Transformada Discreta Ondeleta (TDO).....	13
3 Multirresolución - Multitasa	15
3.1 Diezmado.....	15
3.2 Interpolación	18
3.3 Filtrado	21
4 Bancos de filtros y filtros de espejo en cuadratura.....	22
4.1 Respuesta en frecuencia de las bases Ondeleta	23
4.2 Filtro de media móvil	27
4.3 Filtro de diferencia móvil	28
4.4 Intercambio de filtros con interpoladores y diezmadores.....	29
4.5 Transformada Ondeleta Matricial.....	30
5 Cálculo de Transitorios Electromagnéticos	33
5.1 Reglas de integración	33
5.2 Elementos pasivos de circuitos	35
5.3 Transitorio en un circuito RC en serie	36
6 Simulación de sistemas lineales usando esquemas de <u>Multirresolución, Ondeletas y Bancos de Filtros</u>	39
6.1 Método1 - Disminución de la frecuencia de muestreo en la simulación de un sistema	40
6.1.1 Ejemplo 1 - Circuito RC.....	41
6.1.2 Ejemplo 2 - Circuito Resistivo.....	45
6.2 Método 1 modificado - Reglas de integración modificadas.....	46

6.3 Método 2- Ecuación de Lyapunov con Ondeletas.....	49
6.4 Método 3 - Realizaciones con filtros polifásicos y con bancos de filtros	53
6.4.1 Banco de filtros de M canales	54
6.4.2 Estructuras de filtros polifásicos	56
6.4.3 Esquema de convolución.....	57
Conclusiones	61
Trabajos futuros	63
Bibliografía	64
7 Anexos.....	69
7.1 Anexo 1 - Circuito 3 nodos	69
7.2 Anexo 2 - Circuito 4 nodos	72
7.3 Anexo 3 - Circuito con doble accionamiento de interruptor	76
7.4 Anexo 4 - Circuito 9 Nodos.....	78
7.5 Anexo 5 - Circuito 9 Nodos.....	80

Lista de figuras

Figura 2.1 Banco de Filtros para la TDO	14
Figura 3.1 Diezmado de orden M.....	15
Figura 3.2 Proceso de Diezmado en el dominio del tiempo y la frecuencia	18
Figura 3.3 Interpolación de orden M	18
Figura 3.4 Proceso de Interpolación en el dominio del tiempo y la frecuencia.....	20
Figura 4.1 Banco de Filtros para la implementación de la TDO	22
Figura 4.2 Respuesta en frecuencia fase y amplitud, Ondeleta Haar	25
Figura 4.3 Respuesta en frecuencia fase y amplitud, Ondeleta Coiflet 4	25
Figura 4.4 Respuesta en frecuencia fase y amplitud, Ondeleta Symlet 2	26
Figura 4.5 Respuesta en frecuencia Familia de filtros Daubechies	26
Figura 4.6 Regla conmutativa con diezmadores	29
Figura 4.7 Regla de conmutativa con interpoladores	30
Figura 5.1 Circuitos acompañantes para elementos pasivos.....	35
Figura 5.2 Circuito RC serie	36
Figura 5.3 Solución circuito RC.....	37
Figura 5.4 Método circuitos acompañantes circuito RC	37
Figura 5.5 Error relativo para voltaje en el capacitor.....	38
Figura 6.1 Esquemas de cálculo mediante banco de filtros.....	39
Figura 6.2 Primera identidad Noble.	40
Figura 6.3 Esquemas de cálculo mediante banco de filtros - múltiples etapas.	41
Figura 6.4 Voltaje capacitor circuito RC serie, Ondeleta Haar - Euler hacia atrás	42
Figura 6.5 Voltaje capacitor circuito RC serie, Ondeleta Haar - Trapezoidal	42
Figura 6.6 Voltaje capacitor circuito RC serie, Ondeleta DB2 - Euler hacia atrás	43
Figura 6.7 Voltaje capacitor circuito RC serie, Ondeleta DB2 - Gear segundo orden	43
Figura 6.8 Error relativo Voltaje capacitor circuito RC serie	44
Figura 6.9 Circuito resistivo	45
Figura 6.10 Error del voltaje en el nodo 1.....	45
Figura 6.11 Identidades nobles	46
Figura 6.12 Circuito de prueba de 9 estados	47
Figura 6.13 Corriente inductor I_1	48
Figura 6.14 Corriente inductor I_2	49
Figura 6.15 Esquema de banco de filtros de M canales.....	53
Figura 6.16 Estructura de filtros polifásicos.....	54
Figura 6.17 Banco de filtros de M canales con retardos.....	54
Figura 6.18 Cancelación del aliasing.....	55
Figura 6.19 Diagrama de convolución propuesto	57
Figura 6.20 Implementación de bancos de filtros y estructuras polifásicas para la convolución en sistemas lineales.....	58
Figura 6.21 Sistema de Prueba.....	58
Figura 6.22 Corriente del inductor	59
Figura 6.23 Voltaje del Capacitor	60
Figura 6.24 División por frecuencias	61

Figura 7.1 Circuito 4 Nodos	69
Figura 7.2 Voltaje nodo 1	70
Figura 7.3 Voltaje nodo 2	70
Figura 7.4 Voltaje nodo 3.	71
Figura 7.5 Errores voltaje nodo 1.....	71
Figura 7.6 Circuito 4 nodos.	72
Figura 7.7 Simulación 4 etapas Circuito 4 Nodos - Voltaje nodo1	73
Figura 7.8 Simulación 4 etapas Circuito 4 Nodos - Voltaje nodo2	73
Figura 7.9 Simulación 4 etapas Circuito 4 Nodos - Voltaje nodo3	74
Figura 7.10 Simulación 4 etapas Circuito 4 Nodos - Voltaje nodo4	74
Figura 7.11 Error relativo - método de Euler	75
Figura 7.12 Error relativo - método Trapezoidal.....	75
Figura 7.13 Circuito doble suicheo.....	76
Figura 7.14 Voltaje Nodo 1.....	77
Figura 7.15 Voltajes nodo 2.....	77
Figura 7.16 Circuito de prueba 9 nodos	78
Figura 7.17 Corriente Inductor I_2	79
Figura 7.18 Corriente Inductor I_3	79
Figura 7.19 Circuito de prueba 9 nodos	80
Figura 7.20 Corriente Inductor I_1	80
Figura 7.21 Corriente Inductor I_2	81

Lista de tablas

Tabla 1 Coeficientes de algunas bases Ondeleta	24
Tabla 2 Ecuación en diferencias para la expresión (5.2) por diferentes métodos.....	33
Tabla 3 Función de transferencia de diferentes reglas de integración.....	34
Tabla 4 Elementos pasivo para circuitos acompañantes	35
Tabla 5 Reglas de integración.	46
Tabla 6 Reglas de integración modificadas	47
Tabla 7 Parámetros del sistema	59
Tabla 8 Parámetros del sistema de la figura 7.1	69
Tabla 9 Parámetros del sistema de la figura 7.6	72
Tabla 10 Parámetros del sistema de la figura 7.13	76
Tabla 11 Parámetros del sistema de la figura 7.16	78

1 Introducción

En el presente trabajo se proponen esquemas de solución de ecuaciones diferenciales lineales para el cálculo de transitorios electromagnéticos las cuales utilizan técnicas de multirresolución basadas en la transformada Ondeleta, y en esquemas de bancos de filtros. Se hace una explicación detallada del cálculo de la Transformada Discreta Ondeleta (TDO), de los esquemas de bancos de filtros, así como de la implementación de éstos en la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. Se hace énfasis en las condiciones bajo las cuales los métodos propuestos funcionan correctamente.

En el capítulo 1 se hace una revisión del estado del arte y de los campos en que la herramienta ondeleta se ha venido utilizando. Se hace énfasis en las aplicaciones en sistemas eléctricos de potencia; en específico, en el análisis y cálculo de transitorios electromagnéticos.

En los capítulos 2, 3 y 4 se presenta un marco teórico de la tesis, donde se explica la conexión entre los 3 temas más importantes: TDO, Multirresolución y Banco de filtros; esto además de los conceptos básicos para su completo entendimiento. En el capítulo 5 se explica la metodología usada por el programa EMTP (Electro-Magnetic Transients Program) para la solución de transitorios electromagnéticos. Se extiende esta metodología para diferentes reglas de integración. Por último en los capítulos 6 se explican algunas formas de resolver sistemas de ecuaciones diferenciales y de realizar convoluciones en sistemas eléctricos, usando la teoría desarrollada en los capítulos 2, 3, 4 y 5. Se explica bajo qué condiciones los sistemas propuestos funcionan correctamente, así como sus ventajas y sus desventajas. Para finalizar, se exponen algunos trabajos futuros, las conclusiones y algunos ejemplos prácticos en el capítulo 7 de anexos.

1.1 Antecedentes

Las técnicas de modelado y simulación de sistemas eléctricos de potencia se pueden agrupar de diferentes maneras como por ejemplo: Transitorio Electromagnético (TE) y fenómenos de frecuencia fundamental (FF). O también como: Transitorios Electromagnéticos y Transitorios electromecánicos, entre otras. El método aquí propuesto está ubicado en la familia de los transitorios electromagnéticos; sin embargo, se puede hacer extensivo a cualquier sistema en general, ya que su objetivo es la solución de sistemas lineales. El problema que se busca solucionar está relacionado con el esfuerzo computacional para realizar cálculos. La simulación de TE por lo general consume mucho tiempo computacional, lo cual no las hace apropiadas para hacer frente a la simulación en tiempo real de sistemas eléctricos a gran escala [50].

Para aminorar este problema, se han propuesto numerosas aplicaciones y métodos, los cuales se dividen básicamente en tres: 1) Mejor Hardware, el cual implica en el desarrollo de procesadores cada vez más rápidos y eficientes, 2) División Física del sistema, el cual busca dividir la simulación del sistema en dos ó más procesadores mediante la partición de los cálculos de tal forma que se puedan realizar paralelamente y 3) modelos de orden reducido, los cuales hacen simplificaciones sobre el modelo original con el objetivo de reducir los cálculos realizados.

Entre las muchas aplicaciones y utilidades de una metodología de solución rápida de sistemas se encuentra la simulación en tiempo real. Hay situaciones en la que un equipo tiene que ser probado bajo las mismas condiciones que enfrentaría en un sistema de potencia real [20]. Para esto se cuenta con los procesadores de señales digitales (DSP) que han permitido el desarrollo de los denominados analizadores digitales de Transitorios de red (DTNA). Las aplicaciones principales de estos equipos son la prueba y el ajuste de los relés de protección y de los diferentes dispositivos del sistema de control electrónico de potencia. Los dispositivos probados se conectan a través de interfaces adecuadas para modelos discretos que simulan, en tiempo real, el funcionamiento de la red. La simulación en tiempo real es muy exigente y, sin embargo, con la tecnología actual el desarrollo de modelos computacionales eficientes es vital [15]. Un aspecto importante de los simuladores digitales lo constituye la rapidez con que la computadora efectúa las operaciones necesarias para generar los puntos de la forma de onda de prueba. Cuando el tiempo requerido por la computadora para calcular y generar cada punto de la forma de onda de prueba es mayor que el lapso de tiempo entre puntos sucesivos, es necesario almacenar los resultados de la simulación y reproducirla en tiempo real por medio de un dispositivo reproductor de archivos. Cuando el tiempo requerido por la computadora para calcular y generar cada punto de la forma de onda es menor al paso de tiempo entre puntos sucesivos, el simulador puede operar en tiempo real [59].

El paso de tiempo utilizado para integrar las ecuaciones diferenciales es un factor limitante en la precisión y en el cálculo en tiempo real ya que influye directamente en el esfuerzo computacional de la simulación. En la práctica, se limita la extensión y la complejidad de los sistemas simulados y el ancho de banda de los modelos [14].

En este trabajo, se busca encontrar una alternativa eficiente para la simulación de transitorios electromagnéticos haciendo uso de la TDO y esquemas de Bancos de filtros. Más que la simulación con Ondeletas y banco de filtros, el énfasis es en el análisis en multirresolución para brindar una opción adicional de paralelizar los cálculos, haciendo más eficiente el modelado de los sistemas eléctricos y la solución de ecuaciones diferenciales, en general.

1.2 Estado del arte

Existen diversos trabajos que abordan el problema de procesamiento en paralelo para cálculos de transitorios electromagnéticos, algunos basados en Hardware y otros en Software. Los basados en Hardware, explican en qué consiste la implementación de un equipo de cálculo en tiempo real; como por ejemplo, los DTNA (Digital Transient Network Analysis) y los DSP (Digital signal processor). En estos, se describe la comunicación entre los PC's de cálculo, características técnicas del equipo, interfaces graficas de usuario, entre otros aspectos importantes.

Por su parte, en lo que respecta al Software, se encuentran numerosos trabajos dependiendo de la aplicación requerida, aunque en general la mayoría de las investigaciones están basadas en cómo hacer una división del sistema de ecuaciones diferenciales en varios subsistemas que se puedan solucionar en paralelo y que cada uno tenga un costo computacional inferior al sistema total. Se suele separar las dinámicas más rápidas de las más lentas y, mediante procesos de interpolación,

se integran resultados. En términos matemáticos se pueden encontrar varios métodos para el cálculo de un sistema de ecuaciones diferenciales usando multirresolución como por ejemplo: los métodos Multi-tasa Runge–Kutta particionados, los métodos Multi-tasa Rosenbrock–Wanner, por nombrar algunos.

En [17], [21] y [49] se presentan soluciones integradas Software-Hardware, las cuales explican el funcionamiento de un sistema que realiza cálculos de sistemas en paralelo. Con respecto al Hardware, se recalcan en estas referencias las limitaciones de dichos sistemas, su poca flexibilidad, su costo de mantenimiento, así como la capacidad de simular eventos de alta frecuencia. También ahí se explica la secuencia de operación y cómo se inicializan las variables internas, cómo se hace la secuencia de los cálculos y la interfaz gráfica de usuario.

En lo que respecta al análisis de transitorios electromagnéticos usando técnicas de multirresolución y mediante cálculos en paralelo, resaltamos dos grupos de trabajo. Uno que está concentrado en el método de Equivalentes de Thevenin Multiarea o MATE como lo indican sus siglas en inglés (Multiarea Thevenin Equivalent), el cual se está desarrollando en la Universidad de British Columbia (UBC), Canadá, y consiste en dividir físicamente un sistema eléctrico para resolver, como su nombre lo indica, por sub-áreas [17], [18], [19], [20], y [21]. El segundo grupo de trabajo se basa en la aplicación de la teoría de multirresolución y banco de filtros para solucionar sistemas eléctricos, también divididos físicamente, mediante diferentes pasos de integración. Estos últimos estudios se están desarrollando en la Universidad Nacional de San Juan, Argentina, principalmente por Zini y Ratta [13], [14] y [15].

Con respecto a una simulación en la cual se haga una división en frecuencias de la red y se simulen las sub-bandas resultantes en paralelo, que es uno de los métodos usados en la presente tesis, hay algunos avances hechos por Jacques Szczupak, quien utiliza un esquema en banco de filtros para simular redes eléctricas lineales [10], [11] y [12].

La TDO y el análisis en multirresolución están estrechamente ligados, esto debido a que la estructura de cálculo de ambos está basada en la teoría de bancos de filtros y en el procesamiento digital de señales. Sin embargo, en la literatura especializada no se suele relacionar a la multirresolución con las Ondeletas de manera directa, mientras que al hablar de Ondeletas si se aborda el tema de multirresolución y de las aplicaciones en este campo.

El uso de las Ondeletas en aplicaciones relacionadas con los sistemas eléctricos de potencia es un tema que ha sido estudiado, desde su desarrollo en los 80's, gracias a varios investigadores entre los cuales están: Alfred Haar, J. Morlet, E Aslaksen, J. Klauder, Alex Grossman, Yves Meyer, Ingrid Daubechies, por nombrar algunos [26]. La teoría Ondeleta incluye tanto a la transformada continua Ondeleta (TCO) como a su contraparte discreta (TDO). Esta última, a pesar del trabajo que se ha hecho para unificar su formulación, aún no cuenta con un rigor y claridad matemática como lo cuenta el análisis de Fourier, el cual ya es una herramienta importante para la ingeniería y la ciencia en general. Sin embargo, la conexión existente entre la TDO y la teoría de bancos de filtros, ha permitido una formulación más clara, que a su vez ha abierto camino para el uso en ingeniería y en especial en los sistemas eléctricos.

Las Ondeletas tienen muchos usos en representación de señales, compresión de banda, supresión del desorden, reconocimiento de patrones, análisis de multirresolución [28], procesamiento de

imágenes, protección y detección de fallas, detección de disturbios, calidad de la energía etc. El mayor campo de aplicación de las Ondeleta en la ingeniería eléctrica está referido a la calidad de la energía y a los sistemas de protección; campos en los cuales la TDO ya lleva varios años de desarrollo [24]. Con respecto al uso de las Ondeletas para la simulación de transitorios electromagnéticos existen muy pocos trabajos en comparación con los desarrollados usando Ondeletas para análisis y clasificación de señales.

En la literatura especializada, las primeras aplicaciones de las Ondeletas en sistemas eléctricos datan de 1994 [46]. En esta referencia los autores proponen una metodología para clasificar disturbios en sistemas de potencia. Más adelante, Ribeiro [47] presenta un trabajo donde explica cuales son las posibles aplicaciones de las Ondeletas en sistemas eléctricos de potencia. De aquí en adelante, el uso de Ondeletas se vuelve un tema muy activo y en la literatura se encuentran numerosos trabajos que la usan. La mayoría de los trabajos, se concentran en el análisis de señales para identificar patrones y caracterizar formas de onda. En las referencias [34] a [48] se usan las Ondeletas para este tipo de aplicaciones.

En [44] se explica de manera escrita y mediante gráficas las ventajas que tiene el uso de las Ondeletas y su posible superioridad con respecto a otros métodos para análisis de señales transitorias. En [40] se explica la teoría Ondeleta y se usa la TDO para analizar señales procedentes de sistemas eléctricos; se explica por qué una base Ondeleta es mejor que otra. En [39], cómo en la mayoría de los trabajos, se presenta una metodología para analizar señales mediante la TDO buscando, no solo analizar las señales, sino también para reducir el volumen de información a almacenar, manteniendo además la mínima necesaria para poder caracterizar un transitorio.

De esta manera, es evidente que la teoría Ondeleta es muy usada en identificación y análisis de señales, mientras su uso en simulación y cálculo es incipiente aún. El uso de las Ondeletas en cálculos comprende la solución de voltajes y corrientes en un sistema; es decir, la solución de las ecuaciones diferenciales que rigen su comportamiento. En el campo de cálculo y simulación de transitorios electromagnéticos se tienen pocos trabajos al respecto. A.W. Galli y G.T. Heydt en [5] y [6], proponen una implementación del análisis Ondeleta para la propagación de transitorios en sistemas eléctricos de potencia. Ellos representan una ecuación diferencial lineal en espacio de estados en el dominio Ondeleta y la solucionan con la regla de integración de Euler. Por otra parte, Tongxin Zheng, Elham B. Makram y Adly A. Girigis en [9], usan las Ondeletas para analizar y simular redes eléctricas mediante equivalentes circuitales, modelando las operaciones equivalentes de derivadas e integrales y, luego, solucionando la ecuación diferencial con la regla Euler hacia atrás. Por último, A. P. Meliopoulos y Ching-Hsing Lee en [7] y [8], proponen un método para el análisis de transitorios mediante dos etapas, la primera es el análisis tradicional en la frecuencia para capturar el resultado de estado estable y la segunda es el método de Ondeletas para capturar la dinámica del sistema y los disturbios. El método es denominado "Wavelet-Based Transient Analysis" (WBTA) que básicamente consiste en resolver las ecuaciones integrodiferenciales del sistema en el dominio Ondeleta mediante el uso de matrices lineales de transformación.

1.3 Objetivo de la tesis

El objetivo de este trabajo es el desarrollo y aplicación de algoritmos basados en Ondeleta, multirresolución y bancos de filtros para la simulación de transitorios electromagnéticos en redes de energía eléctrica, de tal manera que se puedan llevar a cabo en varios procesos independientes y así poder hacer simulaciones en paralelo que individualmente sean más rápidas y para redes cada vez más grandes. El método consiste en usar la transformada Ondeleta y esquemas de bancos de filtros para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales, buscando hacer dichos cálculos mediante procesos en paralelo que impliquen una frecuencia de muestreo inferior a la original, lo cual conlleva, entre otras ventajas, la relajación del paso de integración.

2 Ondeletas

Varios autores remontan el desarrollo de lo que hoy en día son las Ondeletas a la década de 1900-1910, cuando el matemático húngaro Alfred Haar descubre una base de funciones que con el tiempo demostraron ser las primeros Ondeletas. Siguiendo cronológicamente, solo hasta 1980, al ingeniero geofísico J. Morlet se le ocurrió una alternativa para la transformada de Fourier. Tratando de ganar resolución en tiempo para los transitorios de alta frecuencia escogió una banda de corta duración para la transformada de Fourier, mientras que para los componentes de baja frecuencia escogió una banda estrecha y. En 1984, con la ayuda del físico Alex Grossman, Morlet desarrolla su modelo donde el término wavelet (ondeleta) aparece por primera vez [26].

2.1 Transformada Ondeleta

Numerosos libros y artículos donde se explica la teoría de Ondeletas se han publicado, haciendo que sea muy difícil estudiar y citar a todos ellos. Los desarrollos aquí mostrados en lo que respecta a la transformada Ondeleta y a su implementación son basados en las referencias [1], [2], [22] y [23]; por tanto, si se requiere de una información más detallada se recomienda consultar éstas.

Una "onda" (wave) es usualmente definida como una función oscilatoria que depende del tiempo o del espacio, como por ejemplo una función senoidal. El análisis de Fourier es un análisis de onda (wave analysis) donde se expande una señal cualquiera en términos de funciones senoidales. Una "Ondeleta" es una pequeña onda cuya energía está concentrada en un intervalo finito de tiempo y da una herramienta para el análisis de fenómenos transitorios, no estacionarios, variantes en el tiempo [2]. De esta manera, en un análisis de onda una señal cualquiera $f(t)$ puede ser expresada por una descomposición lineal cómo:

$$f(t) = \sum_l a_l \varphi_l(t) \quad (2.1a)$$

O bien para la expansión en Ondeletas de dos parámetros:

$$f(t) = \sum_k \sum_j a_{j,k} \varphi_{j,k}(t) \quad (2.1b)$$

Donde l y k son índices enteros, $a_{j,k}$ es un valor real y $\varphi_{j,k}(t)$ es un conjunto de funciones reales. Si la expansión descrita en (2.1a) y (2.1b) es única este conjunto es denominado base. En caso contrario se denomina "marco". Para bases ortogonales tenemos la siguiente relación para las expansiones, tanto de (2.1a) como de (2.1b):

$$\langle \varphi_k(t), \varphi_l(t) \rangle = \int_{t_i}^{t_f} \varphi_k(t) \varphi_l(t) dt = 0 \quad k \neq l \quad (2.2a)$$

$$\int_T \varphi_{j,k} \varphi_{l,m} dt = 0 \quad \text{si } j \neq k \text{ o } l \neq m \quad (2.2b)$$

A través de esta relación, los coeficientes a_l se calculan a partir del producto interno de las dos funciones, el cual está dado por:

$$a_l = \langle f(t), \varphi_k(t) \rangle = \int_{t_i}^{t_f} f(t)\varphi_k(t)dt \quad (2.3)$$

Si se substituye (2.1a) en (2.3) se observa claramente que solo cuándo $k=l$ la integral es diferente de cero como se muestra en (2.2b), por tal motivo, el valor para a_l sería único, lo cual es una prueba que determina la importancia de tener bases ortogonales en el desarrollo de las Ondeletas.

Todas las llamadas primera generación de Ondeletas son generadas mediante la llamada Ondeleta madre ("mother wavelet φ ") a partir de contracciones y traslaciones de ésta, lo cual se logra con:

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\varphi(2^j t - k) \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (2.4)$$

El termino $2^{j/2}$ mantiene la norma constante en un intervalo definido e independiente del valor de j . En la expresión (2.4) podemos ver que la función madre está en términos de dos índices: La traslación en tiempo k y el índice de escalamiento j .

Para la mayoría de las transformaciones existentes las bases ya están determinadas y a partir de esto se deriva una serie de propiedades; por ejemplo, para la transformada de Fourier las bases son las funciones senos y cosenos, o su equivalente en exponenciales complejas. Para las Ondeletas, por otro lado, dichas propiedades matemáticas son requeridas y luego las bases se derivan de ellas; por ejemplo, la Ondeleta de Daubechies requiere "suavidad" lo cual se logra con ciertas condiciones en las derivadas, y a partir de éstas se calcula la Ondeleta madre.

La propiedad de localización tanto en tiempo como en frecuencia de las Ondeletas logra una expansión que se adapte bien a señales transitorias y permite modelar este tipo de fenómenos con un pequeño número de coeficientes. El análisis de Ondeletas está especialmente indicado para señales con pulsos o intermitencias, sucesos que ocurren de manera no periódica. Para estas señales, la transformada de Fourier da muy poca información al perderla casi toda la de tipo temporal. Además, es "inestable" frente a señales de tipo intermitente. Si añadimos un impulso localizado en el tiempo a una señal, todo el espectro de Fourier se verá afectado; en cambio para la transformada ondeleta solo algunos coeficientes se modificarán. Esto también indicaría en cierto modo que, con las Ondeletas, el fenómeno de Gibbs, presente en la serie de Fourier, se anularía [2]. Sin embargo, ésta es una técnica reciente; aunque en los últimos años se ha hecho un gran esfuerzo por darle todo el rigor matemático como el que se tiene con la transformada de Fourier y así unificar métodos y notaciones, el ritmo de aparición de publicaciones sobre el tema hace que no sea tarea fácil; además, esta técnica no permite realizar algunos cálculos que con la transformada de Fourier se pueden lograr.

El objetivo de la expansión en series de una función o señal es que los coeficientes dados por la expresión (2.3) den la información más útil de ésta. Como objetivo secundario se tiene que la mayoría de coeficientes de la señal sean cero o muy pequeños. Esto se denomina representación dispersa que es muy importante en estimación, detección y compresión de datos.

Aunque no es el objetivo de estudio en este trabajo, la transformada Ondeleta también está definida para señales continuas en tiempo de la siguiente forma:

$$F(a, b) = \int f(t)w\left(\frac{t-a}{b}\right) dt \quad (2.5)$$

y su transformada inversa por:

$$f(t) = \iint F(a, b)w\left(\frac{t-a}{b}\right) dadb \quad (2.6)$$

Donde $w(t)$ es una Ondeleta base y a, b son variables reales continuas.

2.2 Transformada Discreta Ondeleta (TDO)

La obtención de la TDO de una función o señal es equivalente a filtrar dicha señal o función por un banco de filtros. Sarkar y coautores en [22] explican de manera detallada cómo se llega a esta equivalencia matemática. Dicha propiedad hace que obtener la transformada Ondeleta discreta de una señal sea un trabajo más intuitivo y sencillo, donde la función de escala ("mother wavelet") se generan desde la perspectiva de la teoría de filtros. Es muy interesante ver que no es necesario tener las funciones de escala y Ondeleta con el fin de poner en práctica la transformada Ondeleta discreta.

Supongamos que tenemos una señal $x(n)$ y la pasamos a través de dos filtros uno pasa-altas $h(n)$ y uno pasa-bajas $g(n)$, y llamamos $u'(n)$ la señal que resulta del filtro pasa-bajas y $v'(n)$ a la que resulta del pasa-altas. Luego, se pasan las señales filtradas por un diezmador obteniendo $U(z)$ y $V(z)$. Esto es equivalente a la reducción de la tasa de muestreo. El diezmado por un factor de dos implica que los datos se comprimen con el propósito de reducir la tasa de muestreo y, con ello, el ancho de banda de la señal. Esto es posible gracias a que la señal fue filtrada con antelación. Hasta este punto el proceso que se ha llevado a cabo es la TDO de una señal. Posterior a esto se le aplica una expansión por un factor de dos a las señales obteniendo las señales $u''(n)$ y $v''(n)$ y finalmente se pasan de nuevo por dos filtros $g'(n)$ y $h'(n)$. Este último proceso es equivalente a la inversa de la transformada discreta Ondeleta ITDO. La figura 2.1 muestra el esquema en bloques del proceso.

Los procesos iniciales de filtrado y diezmado, que son equivalentes a obtener la TDO de una señal o función, están contenidos en el denominado banco de análisis; por otro lado la ITDO que es el proceso de interpolación y filtrado está contenido en el denominado banco de síntesis.

La TDO tiene pues una relación muy estrecha con la teoría de bancos de filtros, y esta última a su vez está estrechamente ligada con la teoría de multirresolución.

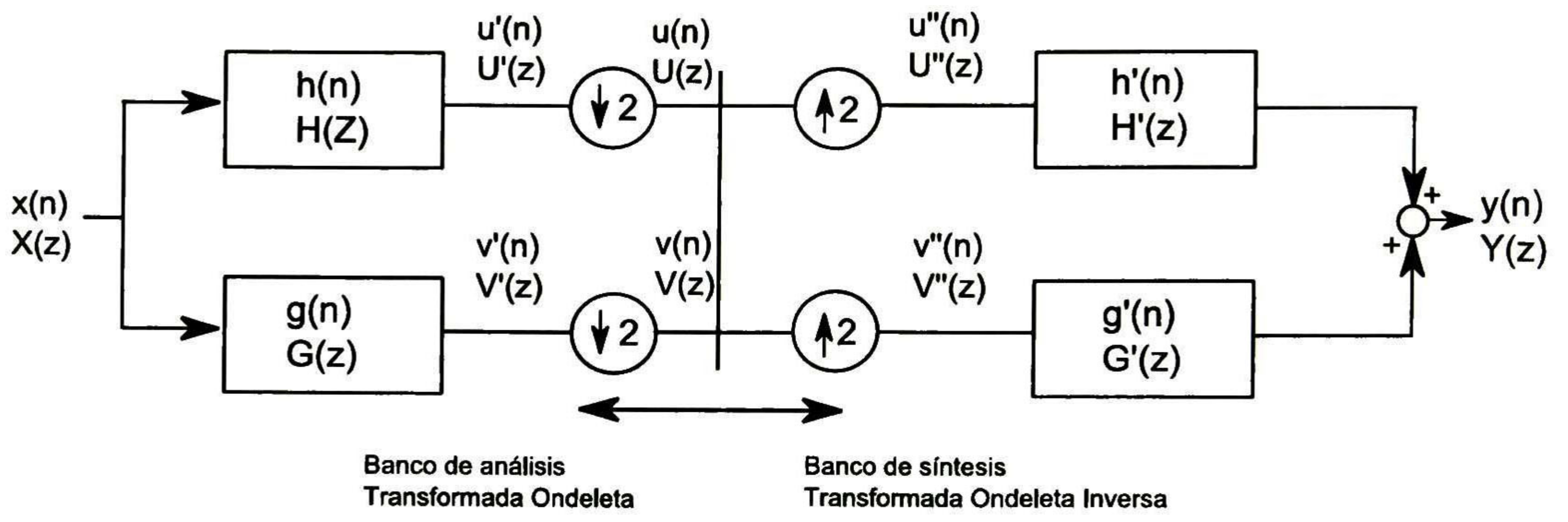


Figura 2.1 Banco de Filtros para la TDO

3 Multirresolución - Multitasa

En muchas aplicaciones de tratamiento digital de señales y de ingeniería, en general, es necesario cambiar la tasa o la frecuencia de muestreo de una señal aumentándola o disminuyéndola en cierta cantidad. El proceso de convertir la frecuencia de muestreo de una señal a una tasa se denomina conversión de tasa o de frecuencia de muestreo. Los sistemas que emplean múltiples tasas de muestreo en el procesamiento de señales digitales se denominan sistemas de tratamiento digital de señales de tasa múltiple [3].

En este capítulo explicaremos algunos conceptos básicos de este tipo de sistemas para aplicarlos a la simulación de transitorios electromagnéticos. El concepto multi-rate, multi-tasa o multirresolución viene ligado a la capacidad de simular o modelar una red con diferentes pasos de integración. Este concepto es aplicado en el dominio del tiempo con la idea de ajustar el paso de integración durante la simulación. La implementación de sistemas con multirresolución es a través de la teoría de procesamiento de señales y bancos de filtros.

El área de aplicaciones de la teoría de multirresolución y procesamiento de señales digitales concierne básicamente a los sistemas que requieren más de una frecuencia de muestreo. El problema principal es el diseño de sistemas eficientes, ya sea para incrementar o reducir la frecuencia de muestreo. El proceso de disminuir la frecuencia de muestreo de una señal se denomina diezmado, mientras que el proceso inverso de incrementar la frecuencia de muestreo es denominado interpolación [4].

3.1 Diezmado

El proceso de reducir la frecuencia de muestreo de una señal se conoce como diezmado, o también como submuestreo. Esta es una operación que se hace sobre una señal o vector con el fin de remover algunas componentes. La figura 3.1 muestra la representación de la operación de diezmado en un diagrama de bloques.

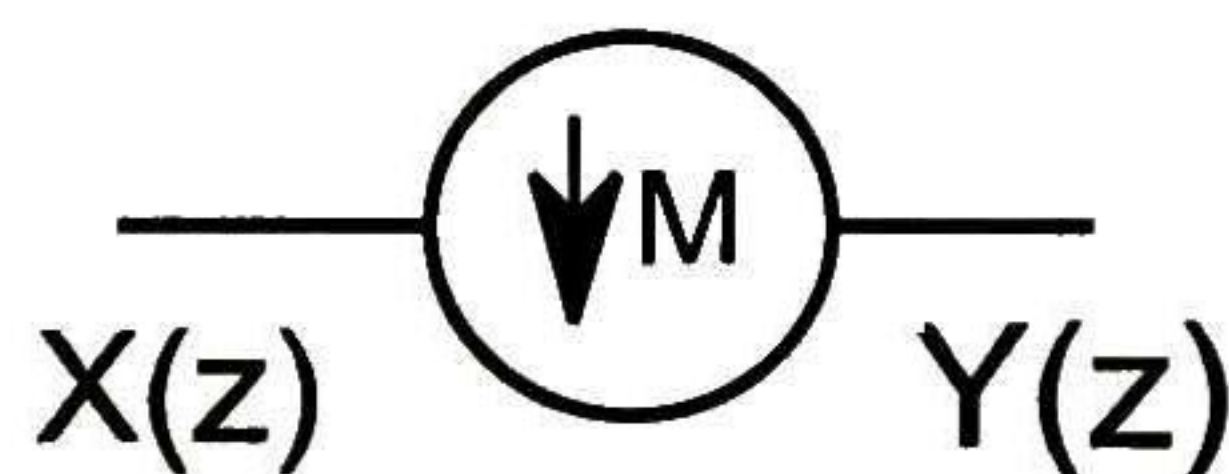


Figura 3.1 Diezmado de orden M

El diezmado de una señal $x(n)$ por un factor M consiste en borrar las muestras que están comprendidas entre los intervalos $[iM, (i+1)M]$ (con i un número entero) y así la salida, $y(n)$, estaría compuesta por [1]:

$$y(n/M) = x(n) \text{ si } n = \pm 0, \pm M, \pm 2M \dots \quad (3.1)$$

Evidentemente $y(n)$ se puede ver como la multiplicación de $x(n)$ por un tren de pulsos discretos $p(n)$ de periodo M , donde $p(n)$ estará dado por la siguiente representación como una serie discreta de Fourier:

$$y(n) = p(n)x(n) \quad (3.2)$$

$$p(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{j2\pi kn/M} \quad (3.3)$$

Ahora, aplicando transformada Z tenemos lo siguiente:

$$Y(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y(m)z^{-m} \quad (3.4)$$

$$Y(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \left[\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{j2\pi km/M} \right] z^{-m/M} \quad n = m/M \quad (3.5)$$

$$Y(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) (e^{-j2\pi k/M} z^{1/M})^{-m} \quad (3.6)$$

$$Y(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(e^{-j2\pi k/M} z^{1/M}) \quad (3.7)$$

La relación entrada-salida de este sistema se proporciona en las siguientes dos expresiones, una para el dominio del tiempo y la otra para el dominio de la frecuencia:

$$y_D(n) = x(Mn) \quad (3.8)$$

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{M-1} X(W^k z^{1/M}), \quad (3.9)$$

donde W , según la expresión (3.7) estará dada por:

$$W = e^{-j2\pi/M} \quad (3.10)$$

Claramente la operación de diezmado no es invertible puesto que el vector $x(n)$ original no se puede reconstruir ya que todas las muestras que no son múltiplos de M fueron borradas. Se puede encontrar que bajo algunas condiciones del espectro de $x(n)$, al ser este diezmado que se puede llegar a reconstruir la señal. Esta condición se ilustra en la figura 3.2, en la cual, cuando el ancho de banda del sistema es finito y además se escoge una frecuencia de muestreo mucho más grande que el ancho de banda, la reconstrucción se puede hacer para algunos valores de diezmado. Esta condición es muy teórica, ya que los espectros de señales finitas en tiempo son de ancho de banda ilimitado.

Si observamos la figura 2.1, para la TDO se realizan diezmados de orden 2 y según (3.7) la salida resultante estará dada por:

$$Y(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 X(e^{-j2\pi k/2} z^{1/2}) \quad (3.11)$$

$$Y(z) = \frac{1}{2} (X(e^{-j\pi} z^{1/2}) + X(e^{-j2\pi} z^{1/2})) \quad (3.12)$$

$$Y(z) = \frac{1}{2} (X(z^{1/2}) + X(-z^{1/2})) \quad (3.13)$$

Las anteriores ecuaciones en el dominio z . En el dominio del tiempo, el diezmado de orden 2 ilustra a continuación:

$$(\downarrow 2)x(n) = (\downarrow 2) \begin{bmatrix} x(-2) \\ x(-1) \\ x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(-2) \\ x(0) \\ x(2) \\ x(4) \end{bmatrix}$$

Este proceso se puede ver de manera matricial de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(-2) \\ x(-1) \\ x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(-2) \\ x(0) \\ x(2) \\ x(4) \end{bmatrix} \quad (\downarrow 2) = \begin{bmatrix} . & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \end{bmatrix}$$

Otra forma de observar el diezmado de orden 2 es como se muestra a continuación:

$$y(n) = x(2n) \quad (3.14)$$

Aplicando la transformada Z tenemos:

$$Y(z) = \sum_n y(n)z^{-n} = \sum_{m \rightarrow \text{pares}} x(m)z^{-m/2} \quad (3.15)$$

$$Y(z) = \sum_m \frac{x(m)}{2} [1 + (-1)^m] z^{-m/2} \quad (3.16)$$

$$Y(z) = \frac{1}{2} [X(\sqrt{z}) + X(-\sqrt{z})] \quad (3.17)$$

La figura 3.2 ilustra el proceso de diezmado, tanto en el tiempo, como en la frecuencia

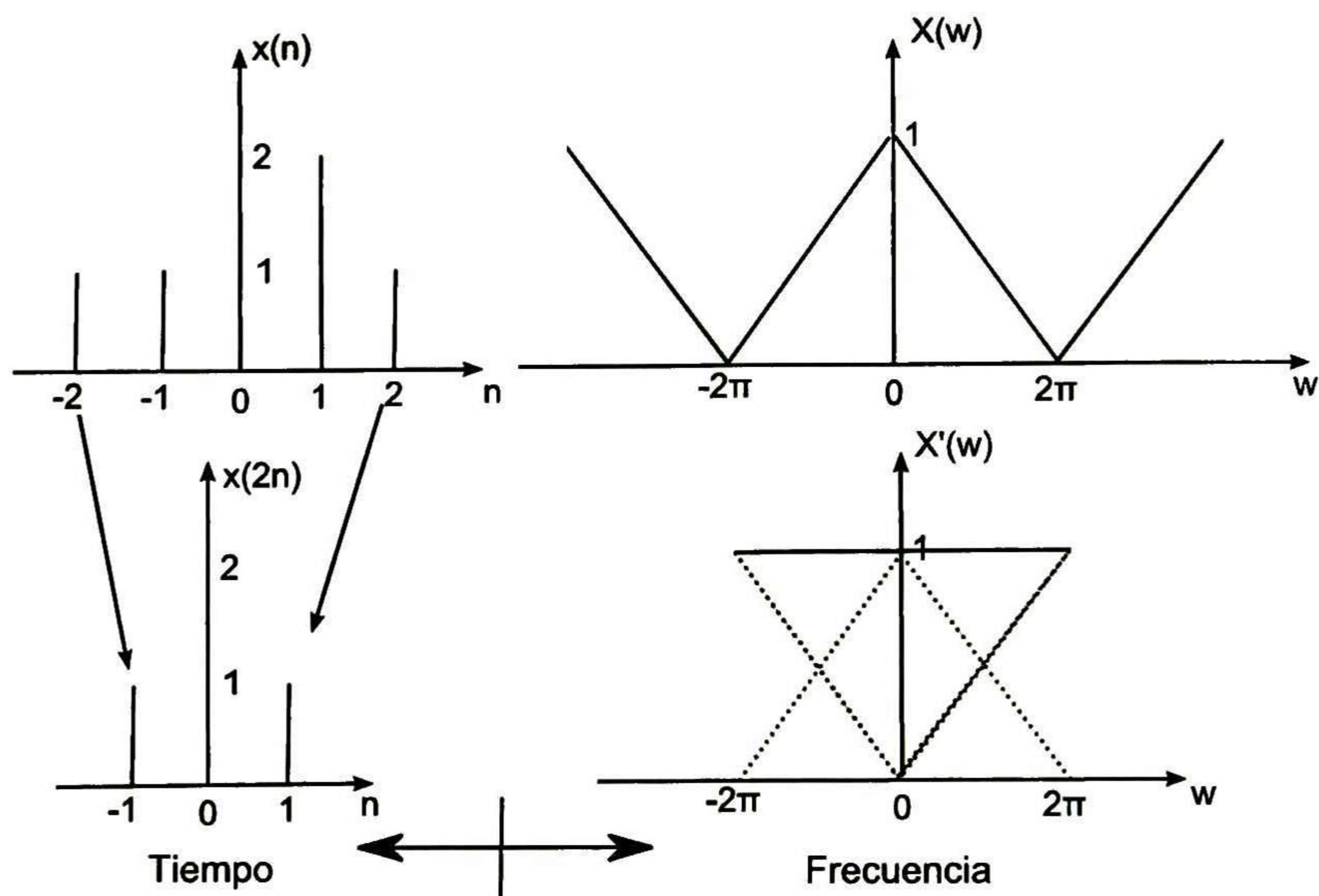


Figura 3.2 Proceso de Diezmado en el dominio del tiempo y la frecuencia

De la figura 3.2 se puede ver que el diezmado tiene aliasing y, por tal motivo, dicho proceso solo sería invertible cuando la señal tenga un ancho de banda máximo de π ; es decir, que la mitad del ancho de banda (de π a 2π) sea nulo.

3.2 Interpolación

La interpolación es el proceso de aumentar la frecuencia de muestreo de una señal. La interpolación, que también es conocida como sobremuestreo (up-sampling), es una operación que se hace sobre un vector con el fin de insertar M ceros después de cada muestra de la señal. Es un proceso que se puede considerar contrario al de diezmado. La figura 3.3 muestra el símbolo utilizado para indicar el proceso de interpolación sobre una entrada $X(z)$

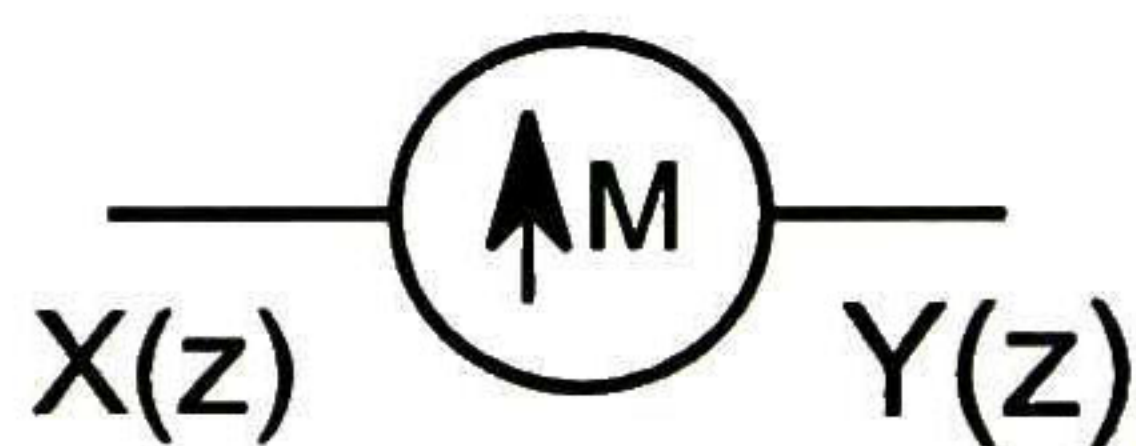


Figura 3.3 Interpolación de orden M

$$y(n) = \begin{cases} x(n/M) & \text{si } n = \pm 0, \pm M, \pm 2M \dots \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.18)$$

La ecuación (3.18) representa la salida del bloque de la figura 3.3 y si aplicamos transformada Z se obtendrá la siguiente expresión:

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n/M)z^{-n} \quad (3.19)$$

Aplicando cambio de variable $m=n/M$

$$Y(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)z^{-Mm} \quad (3.20)$$

$$Y(z) = x(z^M) \quad (3.21)$$

La interpolación de orden 2 se representa como sigue:

$$(\uparrow 2)x(n) = (\uparrow 2) \begin{bmatrix} x(-1) \\ x(0) \\ x(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(-1) \\ 0 \\ x(0) \\ 0 \\ x(1) \end{bmatrix}$$

El proceso anterior también se puede representar como la siguiente operación o transformación matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(-1) \\ x(0) \\ x(1) \\ x(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(-1) \\ 0 \\ x(0) \\ 0 \\ x(1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\uparrow 2) = \begin{bmatrix} \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nótese que si trasponemos la matriz de diezmado, obtenemos la matriz de interpolación, es decir:

$$(\uparrow 2) = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (\uparrow 2)^T = \begin{bmatrix} \cdot & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \end{bmatrix} = (\downarrow 2)$$

La operación de interpolación a, diferencia de la de diezmado, sí es invertible pues solo basta con diezmado el vector interpolado y se llegará al vector original como se muestra a continuación:

$$(\uparrow 2)(\downarrow 2) = \begin{bmatrix} \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\downarrow 2)(\uparrow 2) = \begin{bmatrix} \cdot & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Siguiendo un proceso similar al que llevamos a cabo con el diezmado, para la interpolación de orden 2, que es la usada en la transformada Ondeleta, tendremos las siguientes expresiones:

$$y(n) = x\left(\frac{n}{2}\right) \quad (3.22)$$

Aplicando la transformada z obtenemos:

$$Y(z) = \sum_n y(n)z^{-n} = \sum_m x(m)z^{-2m} \quad (3.23)$$

$$Y(z) = X(z^2) \quad (3.24)$$

La relación de entrada-salida para el interpolador de orden 2 se representa mediante las siguientes dos expresiones, una para el dominio del tiempo y la otra para el dominio de la frecuencia:

$$y_D(n) = x\left(\frac{n}{M}\right) \quad (3.25)$$

$$Y(z) = X(z^M) \quad (3.26)$$

En la figura 3.4 se ilustra el proceso de interpolación, tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia.

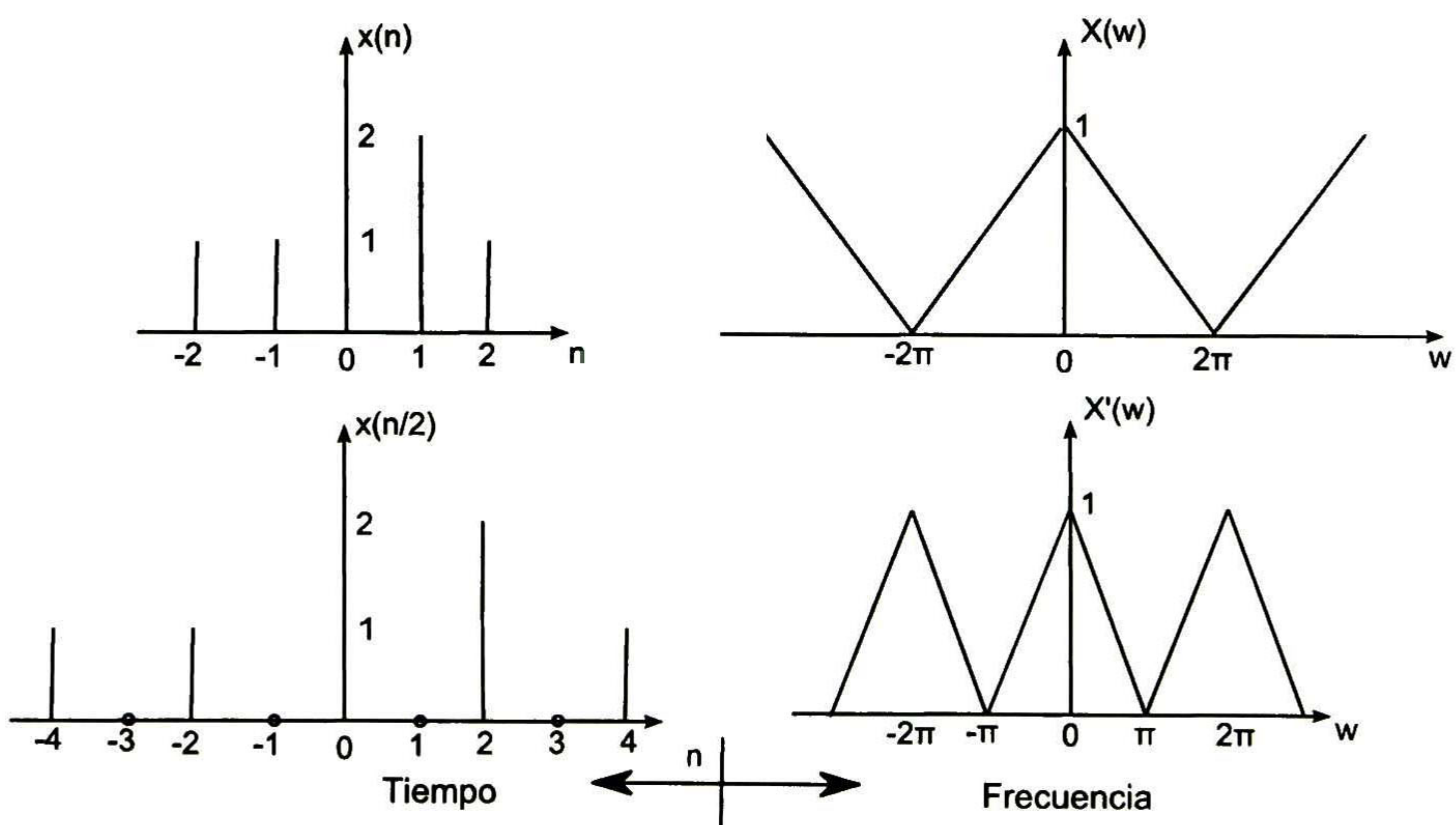


Figura 3.4 Proceso de Interpolación en el dominio del tiempo y la frecuencia

3.3 Filtrado

Existen varias configuraciones para la realización de un sistema lineal, discreto e invariante con el tiempo a través de estructuras IIR y FIR. Los sistemas FIR (Finite Impulse Response) e IIR (Infinite Impulse Response) también se denominan filtros. Estos no son más que bloques que realizan operaciones sobre la entrada de un sistema.

La expresión general para un filtro discreto, causal, lineal e invariante con el tiempo está dada por la siguiente ecuación en diferencias:

$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k) \quad (3.27)$$

Para que un filtro sea realizable, la salida $y(n)$ solo puede depender de salidas anteriores y de valores actuales o anteriores de la entrada. En el dominio z tenemos la siguiente función de transferencia:

$$H(Z) = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (3.28)$$

Las expresiones (3.27) y (3.28) son propias de los filtros IIR. En un filtro FIR los coeficientes a_k son iguales a cero obteniéndose las dos siguientes expresiones [3]:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k) \quad (3.29)$$

$$H(Z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k} \quad (3.30)$$

La implementación de la TDO mediante un banco de filtros como se muestra en la figura 2.1 es muy versátil debido a que los coeficientes de los filtros $H(z)$, $H'(z)$, $G(z)$ y $G'(z)$ pueden tomar diferentes valores, dependiendo la madre Ondeleta que se quiera usar. Algunas Ondeletas madre, con sus respectivos coeficientes de los filtros asociados (todos FIR), se muestran en la tabla 1.

4 Bancos de filtros y filtros de espejo en cuadratura

Por conveniencia la figura 2.1 se repite aquí como la figura 4.1, que muestra el esquema usado en la transformada Ondeleta, así como en algunos esquemas de multirresolución. Se quiere encontrar la relación entrada-salida de este esquema aplicado las relaciones vistas anteriormente.

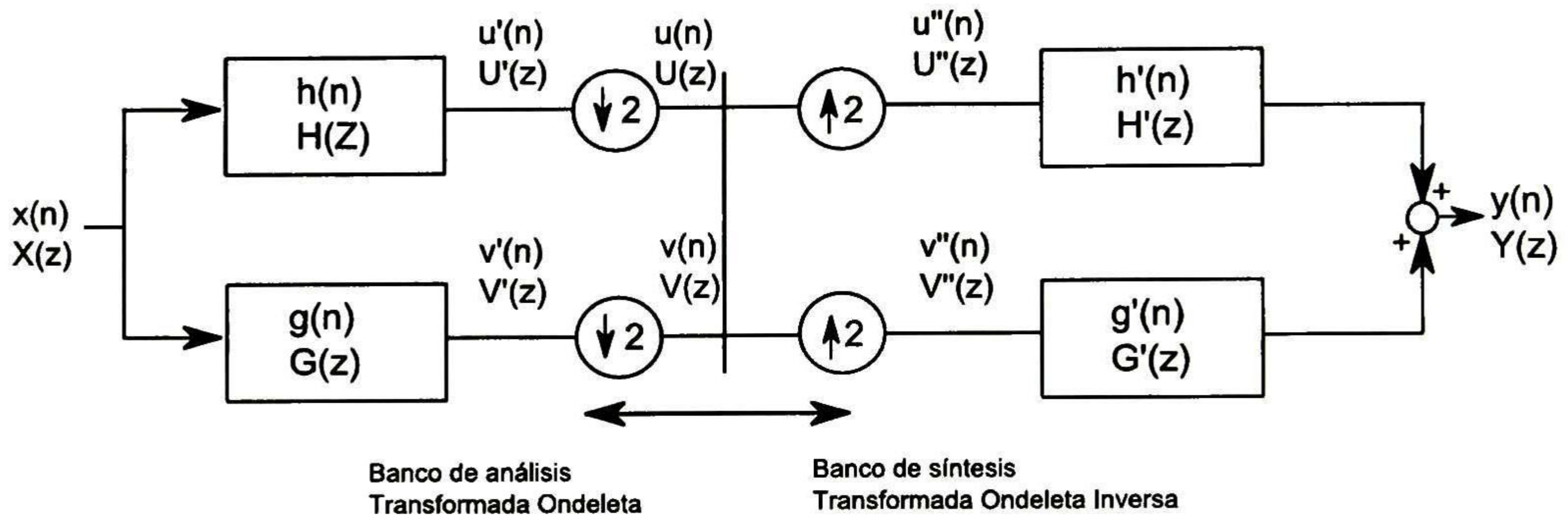


Figura 4.1 Banco de Filtros para la implementación de la TDO

Por medio del Álgebra de bloques y de las expresiones (3.17) y (3.24) se puede encontrar el valor de $Y(z)$. El procedimiento se resume a continuación [22]:

$$U'(z) = H(z)X(z) \quad (4.1)$$

$$V'(z) = G(z)X(z) \quad (4.2)$$

$$U''(z) = \frac{1}{2} [U'(z) + U'(-z)] \quad (4.3)$$

$$V''(z) = \frac{1}{2} [V'(z) + V'(-z)] \quad (4.4)$$

A partir de (4.30) y (4.4) se llega a la siguiente expresión:

$$Y(z) = \frac{1}{2} [G(z)X(z) + G(-z)X(-z)]G'(z) + [H(z)X(z) + H(-z)X(-z)]H'(z) \quad (4.5)$$

$$Y(z) = \frac{1}{2} [G(z)G'(z) + H(z)H'(z)]X(z) + [G(-z)G'(z) + H(-z)H'(z)]X(-z) \quad (4.6)$$

Se puede ver en (4.6) que la señal reconstruida $Y(z)$ contiene a la señal original dada por su primer término y también una parte debida al aliasing dada por su segundo término. Para remover el efecto de aliasing tenemos que hacer a este último término igual cero:

$$G(-z)G'(z) + H(-z)H'(z) = 0 \quad (4.7)$$

Ahora hacemos que $H(z)$ sea un filtro FIR, como el de la expresión (3.30):

$$H(z) = \sum_{i=0}^{N-1} h(i) z^{-i} \quad (4.8)$$

Los filtros que permiten una reconstrucción perfecta de la entrada; (es decir, que la entrada $X(z)$ y la salida $Y(z)$ sean iguales) son los denominados filtros QMF (Quadrature Mirror Filters). Este tipo de filtros dividen la señal de entrada en dos bandas que posteriormente suelen ser submuestreadas por un factor 2. Cada filtro está relacionado con los otros 3 y la elección de uno de ellos define a los demás; es decir, a partir de uno de ellos se pueden calcular los demás como se muestra a continuación.

$$H'(z) = z^{-N} H(z^{-1}) \xrightarrow{Z\text{-Inversa}} h'(n) = h(N - n) \quad (4.9)$$

$$G(z) = -z^{-N} H(-z^{-1}) = -H'(-z) \xrightarrow{Z\text{-Inversa}} g(n) = (-1)^n h(N - n) \quad (4.10)$$

$$G'(z) = -H(-z) = z^{-N} H'(-z^{-1}) \xrightarrow{Z\text{-Inversa}} g'(n) = -(-1)^n h(n) \quad (4.11)$$

Sustituyendo (4.8), (4.9), (4.10) y (4.11) en (4.7) se demuestra que esta elección de filtros es consistente. Además, haciendo la misma sustitución anterior en la expresión (4.6) obtenemos que:

$$\bar{X}(z) = \frac{1}{2} [H(-z^{-1})H(-z) + H(z)H(z^{-1})] z^{-N} X(z) \quad (4.12)$$

La expresión (4.12) es consistente siempre y cuando el filtro tenga un número par de coeficientes; de lo contrario, la componente de aliasing permanecerá. Luego, el filtro $H(z)$ se elige de manera que:

$$H(-z^{-1})H(-z) + H(z)H(z^{-1}) = 2 \quad (4.13)$$

O, en forma equivalente:

$$|H(e^{j\omega})|^2 + |H(e^{j\omega+\pi/2})|^2 = 2 \quad (4.14)$$

De todo lo anterior se tendrá la propiedad de reconstrucción perfecta, donde la salida solo será una versión retrasada de la entrada.

$$\bar{X}(z) = z^{-N} X(z) \xrightarrow{inv(z)} x(n - N) \quad (4.15)$$

La señal estimada solo está desfasada N intervalos de muestra con respecto a la original, donde N depende del orden del filtro; es decir, si el filtro es de L coeficientes la salida tendrá un retardo de $N=L-1$ muestras.

4.1 Respuesta en frecuencia de las bases Ondeleta

Sabiendo que podemos representar una señal como la composición lineal de versiones trasladadas y dilatadas de una función base que es llamada la Ondeleta madre, también se sabe que se pueden usar diversas bases para dicha descomposición; ésto, dependiendo de la aplicación que se

quiera realizar. Por último, para el caso discreto, dicha descomposición equivale a pasar la señal por un banco de filtros, como se muestra en la figura 4.1. Se pueden usar numerosos filtros para hacer la transformada Ondeleta, dependiendo de la aplicación. En la tabla 1 se proporcionan los coeficientes de los filtros asociados a las Ondeletas más usadas en la actualidad. Estos coeficientes se pueden consultar en Matlab® con el comando "wfilters"

Ondeletas Haar, y Daubechies y Symlets de orden 1
$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{\sqrt{2}}$ $G(z) = \frac{-1 + z^{-1}}{\sqrt{2}}$
Ondeleta Daubechies de orden 2
$H(z) = -0.1294 + 0.2241z^{-1} + 0.8365z^{-2} + 0.4830z^{-3}$ $G(z) = -0.4830 + 0.8365z^{-1} - 0.2241 - 0.1294z^{-3}$
Ondeleta Daubechies de orden 3
$H(z) = 0.0352 - 0.0854z^{-1} - 0.135z^{-2} + 0.4599z^{-3} + 0.8069z^{-4} + 0.3327z^{-5}$ $G(z) = -0.3327 + 0.8069z^{-1} - 0.4599z^{-2} - 0.135z^{-3} + 0.0854z^{-4} + 0.0352z^{-5}$
Ondeleta Coiflets de orden 1
$H(z) = -0.0157 - 0.0727z^{-1} + 0.3849z^{-2} + 0.8526z^{-3} + 0.3379z^{-4} + 0.0727z^{-5}$ $G(z) = 0.0727 + 0.3379z^{-1} - 0.8526z^{-2} + 0.3849z^{-3} + 0.0727z^{-4} - 0.0157z^{-5}$
Ondeleta Symlets de orden 2
$H(z) = -0.1294 + 0.2241z^{-1} + 0.8365z^{-2} + 0.4830z^{-3}$ $G(z) = -0.4830 + 0.8365z^{-1} - 0.2241 - 0.1294z^{-3}$

Tabla 1 Coeficientes de algunas bases Ondeleta

Los filtros de la tabla 1 cumplen con los requerimientos de las ecuaciones (4.9), (4.10), (4.11) y (4.14), los cuales, como ya se mencionó son los necesarios para que el banco de filtros tenga la propiedad de reconstrucción perfecta; además, son filtros que dividen a una señal en sub-bandas de frecuencia. En las figuras 4.2, 4.3, 4.4 y 4.5 se pueden observar las respuestas en frecuencia (magnitud y fase) de las Ondeletas base Haar, Coiflet de orden 2, Symlet de orden 2 y Daubechies de órdenes 1, 6, 16 y 35.

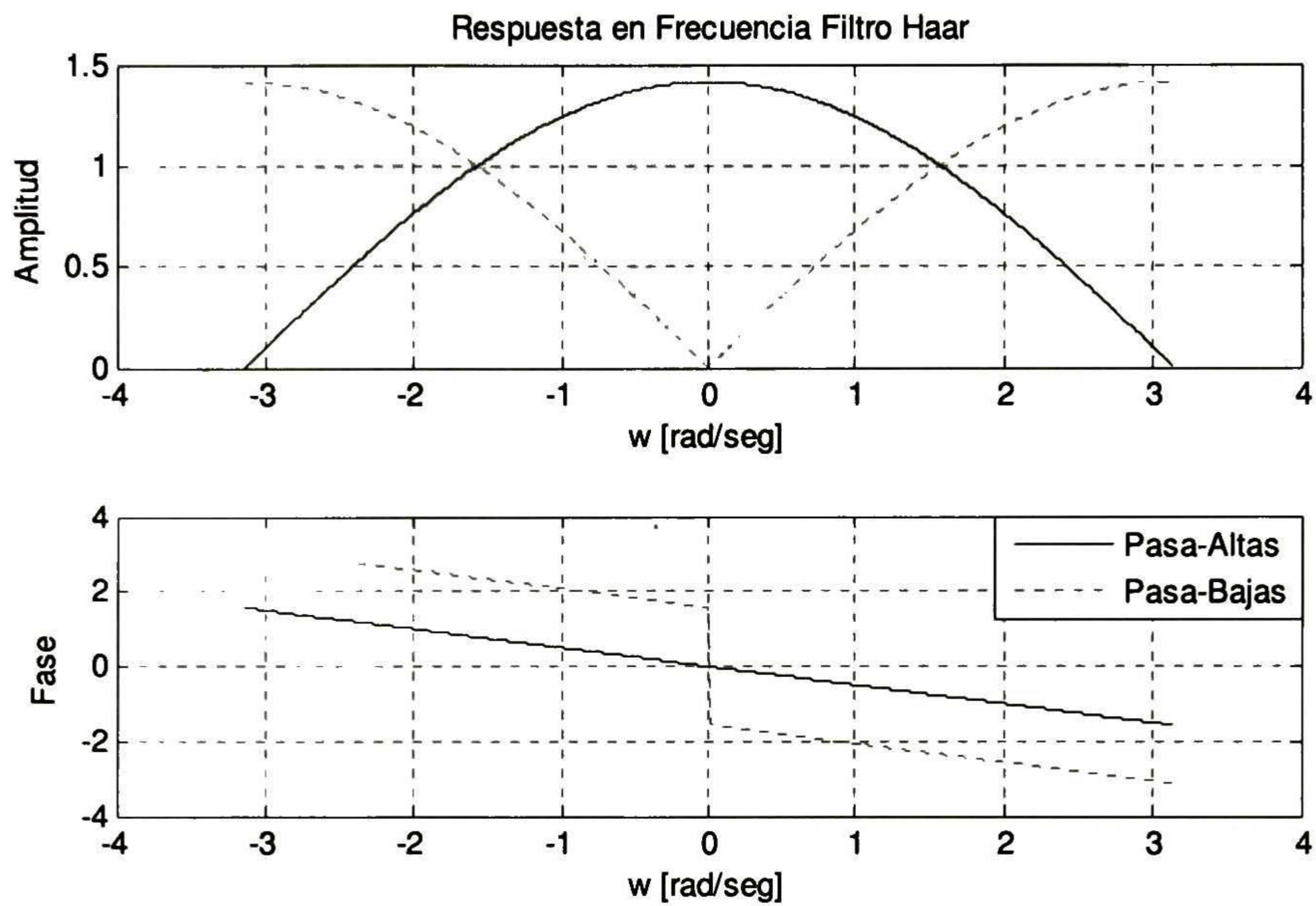


Figura 4.2 Respuesta en frecuencia fase y amplitud, Ondeleta Haar

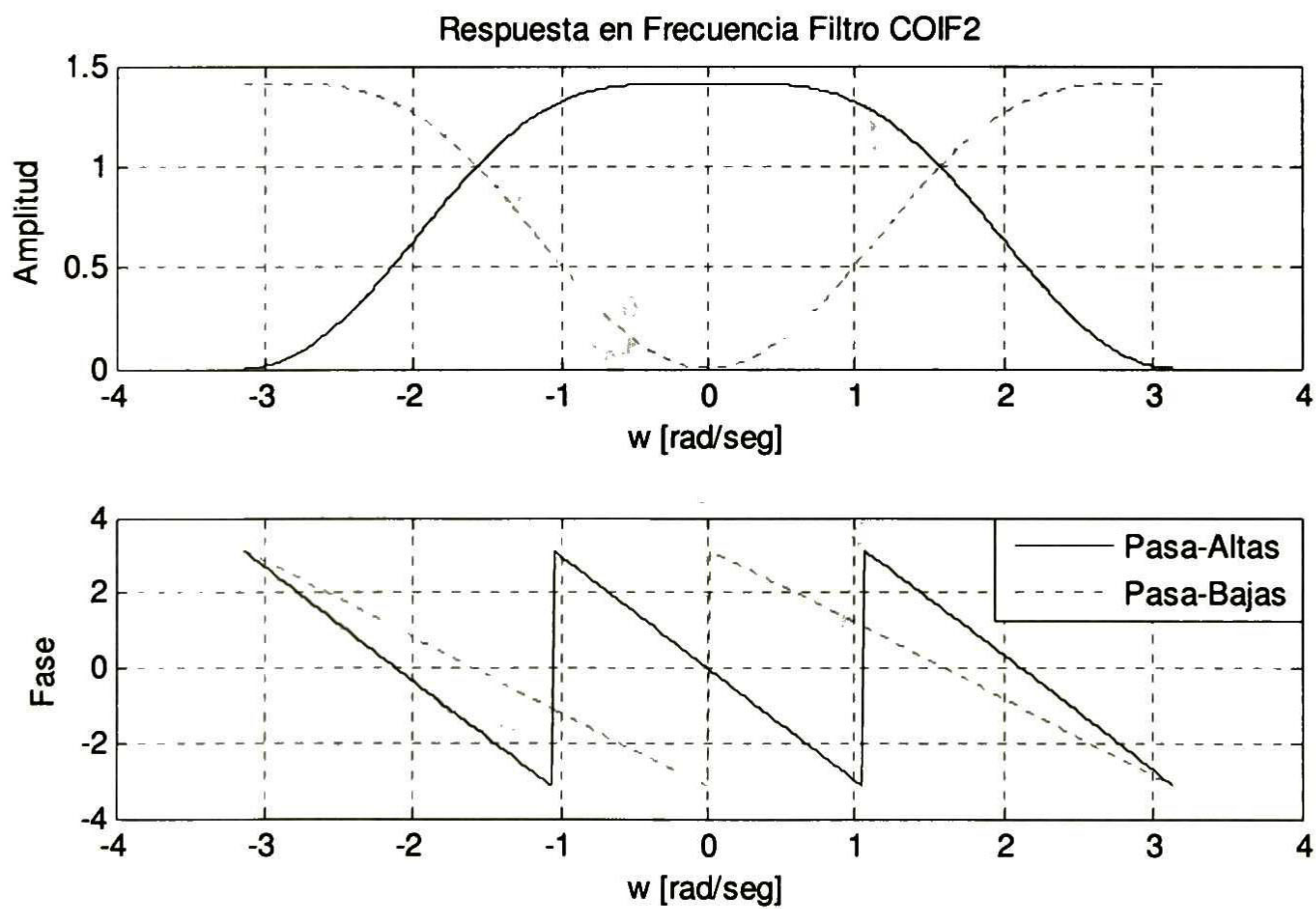


Figura 4.3 Respuesta en frecuencia fase y amplitud, Ondeleta Coiflet 4

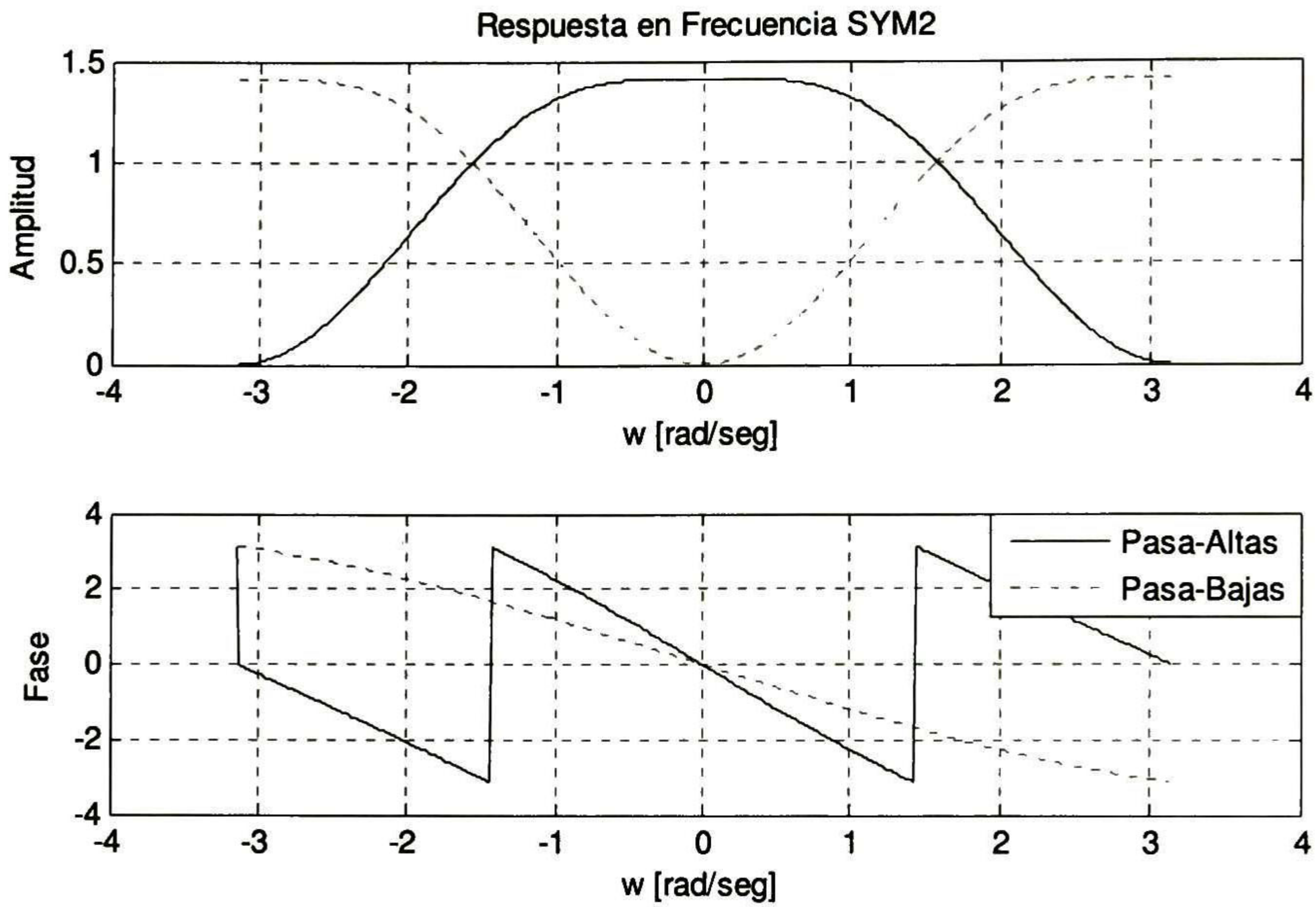


Figura 4.4 Respuesta en frecuencia fase y amplitud, Ondeleta Symlet 2

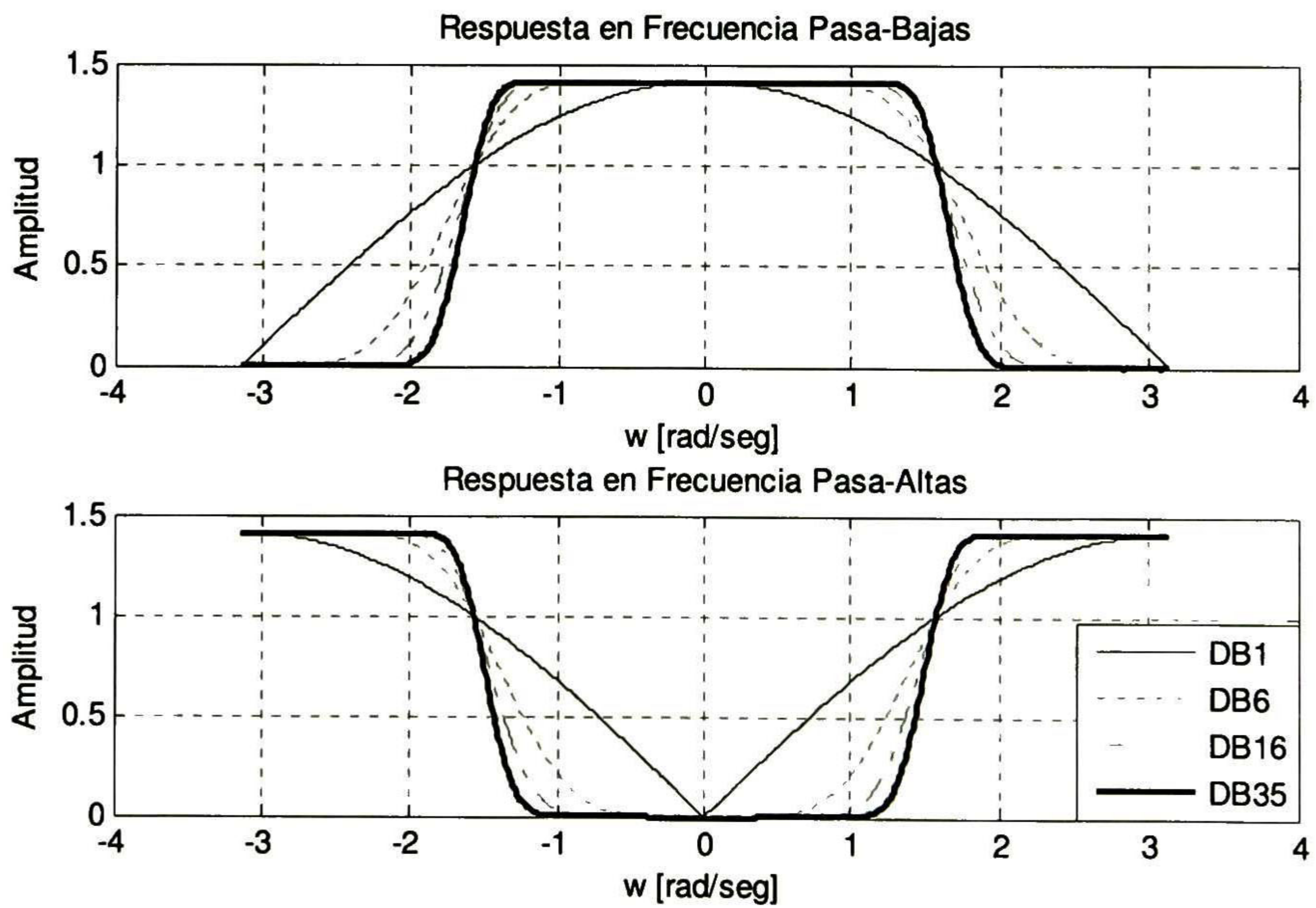


Figura 4.5 Respuesta en frecuencia Familia de filtros Daubechies

Como se observa en la figura 4.5, para acercarse más a la característica de filtro ideal, el filtro Ondeleta deberá tener cada vez más coeficientes y el retardo será cada vez mayor. Un filtro de orden mayor suele ser más selectivo, pero esto se logra a costa de aumentar el número de coeficientes, y en consecuencia el número de cálculos y el retardo en la salida. Si retomamos la expresión 4.7 podemos ver que el error de aliasing, sin importar el orden del filtro, es anulado; por tal motivo, para las aplicaciones requeridas en este trabajo el aumentar el orden del filtro no es necesario.

4.2 Filtro de media móvil

Como su nombre lo indica, este filtro no es más que el promedio entre la muestra de entrada actual y la muestra anterior:

$$y(n) = \frac{1}{2}x(n) + \frac{1}{2}x(n-1) \quad (4.16)$$

Este es el filtro pasa-bajos más simple de todos y sus coeficientes serían $b_0 = 0.5$, $b_1 = 0.5$. Si queremos que éste cumpla con los requisitos para ser usado en la TDO, es necesario que cumpla con las expresiones (4.13) y (4.14), lo cual se logra modificando los coeficientes b_0 y b_1 de la forma: $b_0 = 1/\sqrt{2}$, $b_1 = 1/\sqrt{2}$. Si consultamos la tabla 1 observamos que estos coeficientes corresponden a la Ondeleta Haar. Cualquier operador lineal en forma de filtro FIR se puede representar mediante una matriz, siempre y cuando se añadan ceros, dependiendo del orden del filtro al final y al inicio de la señal para que la convolución entre la respuesta al impulso del filtro y señal esté completa. Si la convolución es circular, no es necesario agregar ceros. La forma matricial que representa la operación de un filtro de media móvil o de Haar es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} y(-1) \\ y(0) \\ y(1) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(-1) \\ x(0) \\ x(1) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} x(-1) + x(0) \\ x(0) + x(1) \\ x(1) + x(2) \end{bmatrix}$$

La respuesta en frecuencia de este filtro se obtiene aplicando primero la transformada Z a (4.16):

$$H(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}z^{-1} \quad (4.17)$$

Luego, introduciendo la relación $z = e^{j\omega}$ en (4.17) obtenemos la expresión (4.18):

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{j\omega/2} + e^{-j\omega/2})e^{-j\omega/2} \quad (4.18)$$

La magnitud y la fase de $H(\omega)$ estarán dadas por:

$$|H(\omega)| = \frac{2}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (4.19)$$

$$y \varphi(\omega) = -\frac{\omega}{2} \quad (4.20)$$

En la figura 4.2 ya se ha mostrado la respuesta, tanto en fase como en amplitud, de este filtro graficándolo con línea continua.

4.3 Filtro de diferencia móvil

Este filtro tiene un comportamiento muy similar al de media móvil. Como su nombre lo indica no es más que la diferencia entre la muestra actual y la anterior:

$$y(n) = \frac{1}{2}x(n) - \frac{1}{2}x(n-1) \quad (4.21)$$

Este es el filtro pasa-altos más simple de todos y sus coeficientes son $b_0 = 0.5$, $b_1 = -0.5$. Al igual que con el filtro pasabajos, si se quiere que éste cumpla con los requisitos para ser usado en la transformada Ondeleta es necesario que cumpla con las expresiones (4.13) y (4.14), lo cual se logra modificando los coeficientes $b_0 = 1/\sqrt{2}$ y $b_1 = -1/\sqrt{2}$. Si consultamos la tabla 1, estos términos corresponden a la Ondeleta Haar. Este operador se puede representar mediante una matriz como se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} y(-1) \\ y(0) \\ y(1) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(-1) \\ x(0) \\ x(1) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -x(-1) + x(0) \\ -x(0) + x(1) \\ -x(1) + x(2) \end{bmatrix}$$

La respuesta en frecuencia del filtro de diferencia móvil se obtiene primero aplicando la transformada Z de (4.21):

$$H(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}z^{-1} \quad (4.22)$$

Luego, introduciendo la relación $z = e^{j\omega}$ tenemos la siguiente expresión:

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})e^{-j\omega/2} \quad (4.23)$$

La magnitud y la fase de $H(\omega)$ estarán dadas por:

$$|H(\omega)| = \frac{2}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (4.24)$$

$$y \varphi(\omega) = \frac{3\pi}{2} - \frac{\omega}{2} \quad (4.25)$$

En la figura 4.2 también se incluye la respuesta en frecuencia del filtro de diferencia móvil graficada con línea punteada.

4.4 Intercambio de filtros con interpoladores y diezmadores

Usualmente en los bancos de filtros, el diezmado se hace después de un filtrado de la señal, lo cual a veces puede resultar muy ineficiente computacionalmente hablando y, en algunas ocasiones, se busca invertir este proceso como se muestra en la figura 4.6.

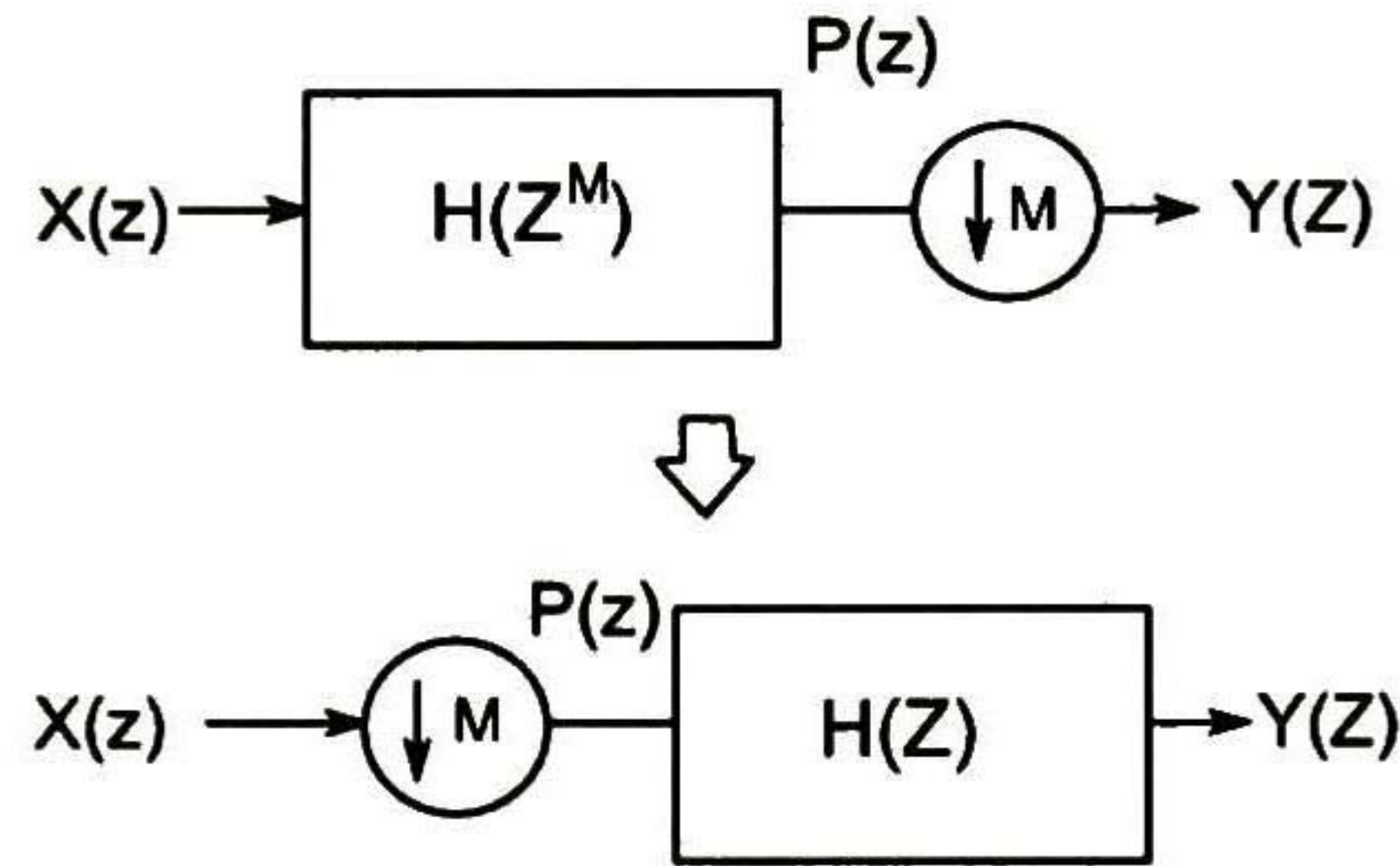


Figura 4.6 Regla conmutativa con diezmadores

La operación de intercambiar filtros y diezmadores es conocida como la primera identidad noble y explica bajo qué circunstancias se puede cambiar una etapa de diezmado con otro bloque [1]. Para probarla basta con mostrar que la relación entrada salida de los bloques sea la misma. Para el diagrama inferior de la figura 4.6 tenemos las siguientes relaciones asumiendo que $M=2$:

$$P(z) = \frac{1}{2} (X(\sqrt{z}) + X(-\sqrt{z})) \quad (4.26)$$

$$Y(z) = \frac{1}{2} (X(\sqrt{z}) + X(-\sqrt{z})) H(z) \quad (4.27)$$

La expresión (4.27) se obtiene directamente a partir de (3.17). Ahora, para la parte superior del diagrama de la figura 4.6 tenemos:

$$P(z) = X(z)G(z^2) \quad (4.28)$$

$$Y(z) = \frac{1}{2} (X(\sqrt{z})G((\sqrt{z})^2) + X(-\sqrt{z})G((-\sqrt{z})^2)) \quad (4.29)$$

$$Y(z) = \frac{1}{2} (X(\sqrt{z}) + X(-\sqrt{z})) G(z) \quad (4.30)$$

De manera similar, existe otra identidad que explica cómo y bajo qué condiciones se puede intercambiar una etapa de interpolación con otro bloque, ésta es la llamada segunda identidad noble. Si se desea mayor información al respecto se recomienda consultar la referencia [1].

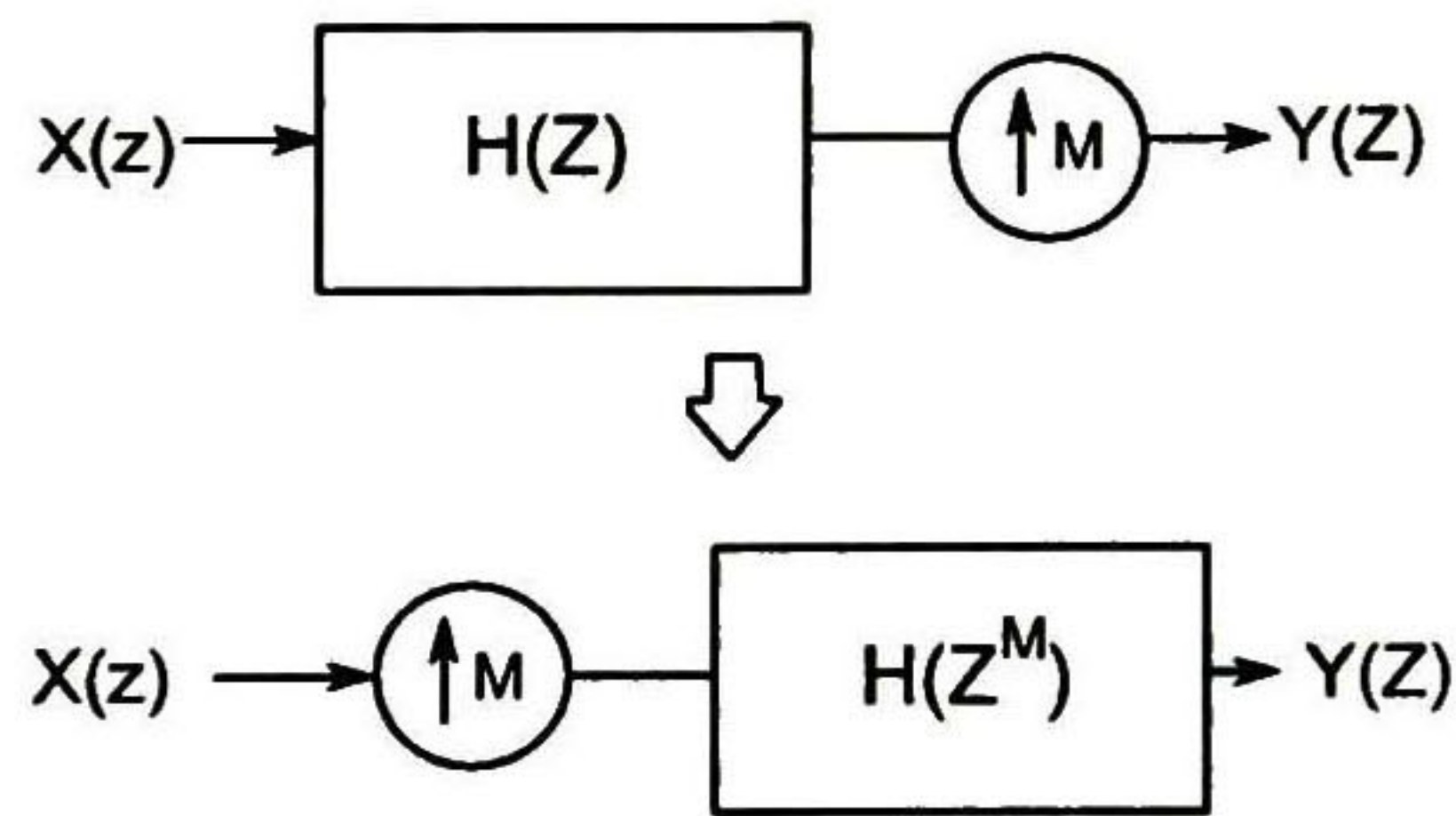


Figura 4.7 Regla de conmutativa con interpoladores

En general, para un diezmador o interpolador de orden M , el intercambio solo sería posible cuando la función $G(z)$ solo dependa de potencias de z de la forma z^M . En caso contrario, dicho cambio no será equivalente; es decir, los dos procesos de la figura 4.7 no serán equivalentes debido a que en tiempo discreto potencias fraccionarias de z se tendrán que aproximar a la hora de aplicarlas en el dominio del tiempo. Este problema es debido a la varianza con el tiempo de los diezmadores e interpoladores.

4.5 Transformada Ondelela Matricial.

A partir de las ilustraciones anteriores, podemos llegar a varias formas de aplicar la TDO a una señal. La primera y la más sencilla se obtiene mediante la aplicación directa de cada etapa sobre las señales, lo cual resulta ineficiente en el sentido computacional. La otra manera, según Sarkar [22], se puede ilustrar tomando en cuenta la solución del sistema matricial $[A][X] = [Y]$, donde $[A]$ es una matriz de orden $n \times n$, $[Y]$ es un vector de orden $n \times 1$ y $[X]$ es el vector que hay que resolver. Teniendo en cuenta que n tiene que ser una potencia entera de dos para que las técnicas Ondelela sean aplicables. Si la matriz $[A]$ no es de tamaño 2^m , se puede aumentar a la matriz $[A]$ con una matriz identidad en la diagonal principal ajustando el orden a 2^m . Para lograr la transformada Ondelela matricial se representarán las etapas de filtrado como correlaciones circulares con respecto a los filtros $h(n)$, $h'(n)$, $g(n)$ y $g'(n)$. Este proceso representa una forma computacionalmente eficiente para llevar a cabo la convolución.

El objetivo de la representación matricial es hacer el cálculo de manera más simplificada mediante dos matrices T_1 y T_2 , las cuales equivaldrían a la transformación Ondelela y su inversa, respectivamente. La matriz T_1 no es más que la matriz de coeficientes del filtro y la matriz diezmadora como se muestra a continuación:

$$T_1 x = \begin{bmatrix} ((\downarrow 2)H(z)) \\ ((\downarrow 2)G(z)) \end{bmatrix} x$$

Básicamente la transformación matricial divide a la señal de entrada en dos bandas denominadas \overline{X}_A y \overline{X}_D , lo cual nos permite tener dos o más señales, dependiendo el número de etapas de descomposición que usemos, divididas en sub-bandas de frecuencia.

La matriz de transformación T_2 que consiste en el proceso de reconstrucción, o proceso inverso, no es más que la matriz inversa de T_1 y, ésta al ser una matriz ortonormal su inversa es su traspuesta. Así, la transformada discreta Ondeleta se reduce a multiplicar por una matriz como la de la expresión (4.31).

5 Cálculo de Transitorios Electromagnéticos

El EMTP (Electromagnetic Transients Program) es quizá el programa de transitorios más utilizado por la industria eléctrica. Trabaja de forma similar a Spice mediante el uso de reglas de integración numérica para la solución de la dinámica de sistemas. El EMTP fue originado por H. W. Dommel en los 1970s, y posteriormente fue expandido por el mismo Dommel, W. S. Meyer y otros especialistas. Con este programa se pueden simular gran número de sistemas eléctricos incluyendo una gran diversidad de elementos lineales, no lineales entre otros. El método de solución implementado en el EMTP se basa en discretizar el conjunto de ecuaciones diferenciales que representan a la red eléctrica que se desea resolver mediante la regla de integración Trapezoidal. Dicha regla de integración numérica se usa para convertir las ecuaciones diferenciales de los componentes de una red en relaciones algebraicas simples que involucran sólo valores presentes y pasados de las corrientes y voltajes de la red [60 y 61].

La representación de la red en forma matricial está dada como se muestra a continuación:

$$Gv(t) = i(t) - H_{hist} \quad (5.1)$$

donde G es la matriz de conductancias, $v(t)$ es el vector de voltajes nodales, $i(t)$ es el vector de corrientes entre nodos y H_{hist} es la corriente que se actualiza con los datos de historia de un paso atrás para la regla trapezoidal o varios pasos atrás, según el método de integración utilizado.

5.1 Reglas de integración

Además de la regla de integración trapezoidal otras reglas se pueden utilizar para convertir a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en otro de ecuaciones en diferencias. La solución numérica de la expresión (5.2) mediante el uso de algunas reglas de integración se resume en la tabla 2.

$$v(t) = \frac{di}{dt} \quad (5.2)$$

Regla	Ecuación en Diferencias
Trapezoidal	$i(t) - i(t - \Delta t) = \frac{\Delta t}{2} [v(t) + v(t - \Delta t)]$
Euler hacia atrás	$i(t) - i(t - \Delta t) = \Delta t v(t)$
Simpson	$i(t) - i(t - 2\Delta t) = \frac{\Delta t}{3} [v(t) + 4v(t - \Delta t) + v(t - 2\Delta t)]$
Gear de segundo Orden	$i(t) - \frac{4}{3}i(t - \Delta t) + \frac{1}{3}i(t - 2\Delta t) = \frac{2\Delta t}{3}v(t)$

Tabla 2 Ecuación en diferencias para la expresión (5.2) por diferentes métodos

Las reglas de integración de la tabla 2 se expresan en la tabla 3 en el dominio z .

Regla	Función de transferencia
Trapezoidal	$\frac{\Delta t z + 1}{2 z - 1}$
Euler hacia atrás	$\Delta t \frac{z}{z - 1}$
Simpson	$\Delta t \frac{\left(\frac{1}{3}\right) z^2 + \left(\frac{4}{3}\right) z + \frac{1}{3}}{z^2 - 1}$
Gear de segundo Orden	$\Delta t \frac{2z^2}{3z^2 - 4z + 1}$

Tabla 3 Función de transferencia de diferentes reglas de integración

Martí y Lin [30], hacen un estudio de estabilidad, precisión y convergencia de estas reglas usadas como integradores o diferenciadores, donde descartan a la regla Simpson por ser inestable y resaltan a la regla de integración trapezoidal por ser de orden 2 y con costo computacional equivalente a la de una regla de orden 1; sin embargo, esta regla presenta oscilaciones y es necesario modificarla para evitar este problema. Esto se logra usando la regla de integración de Euler hacia atrás en dos semi-pasos de integración. Este método es llamada "Critical Damping Adjustment" CDA [62].

En numerosos casos, principalmente cuando se trata de circuitos muy grandes, se puede dificultar llegar a ecuaciones de circuitos que estén en la forma de espacio de estados como en la ecuación (5.3). Por ese motivo, aplicar una regla de integración directamente está sujeto a obtener dicha representación y por esto se han desarrollado otros métodos de solución, como es el uso de circuitos acompañantes.

$$\frac{dX}{dt} = AX(t) + bu(t)$$

$$y(t) = CX(t) + Du(t) \tag{5.3}$$

En (5.3) $X(t)$ es el vector de estados del sistema, $u(t)$ es el vector de entradas, A es la matriz de estados, b es un vector o matriz que asocia cada entrada con los estados, $y(t)$ es el vector de salidas, C es la matriz de salida y D es denominada la matriz de transmisión directa.

Para el análisis de circuitos, una forma muy útil de solución es el método de circuitos acompañantes de EMTP que también hace uso de las reglas de integración. Éste consiste en modelar los elementos pasivos de circuitos como una resistencia equivalente en paralelo con una fuente de corriente dependiente solo de valores históricos.

5.2 Elementos pasivos de circuitos

Los elementos pasivos de los circuitos eléctricos son básicamente tres: el inductor, el capacitor y el resistor. Estos se pueden modelar linealmente por la relación voltaje-corriente entre sus terminales. En la figura 5.1 se muestra el esquemático de estos elementos y su equivalente para el cálculo numérico de transitorios electromagnéticos.

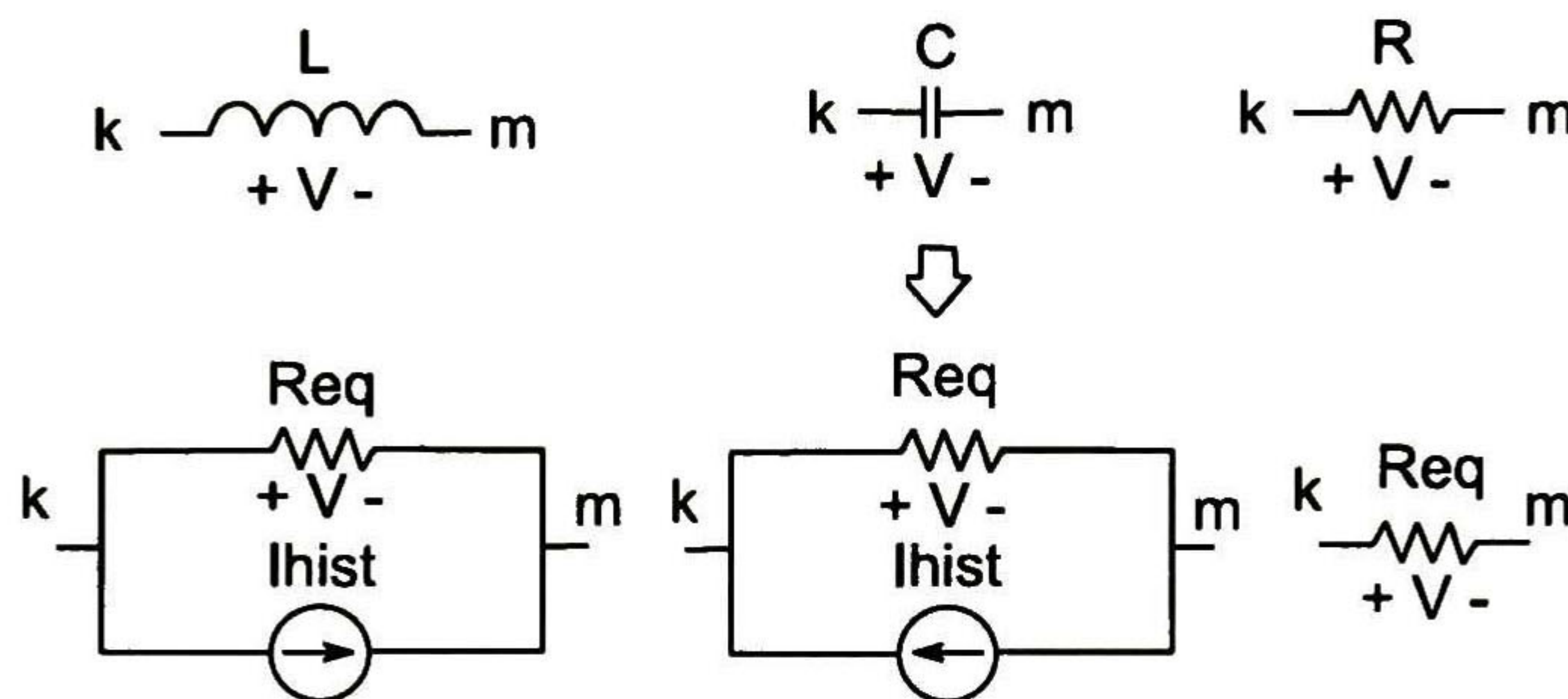


Figura 5.1 Circuitos acompañantes para elementos pasivos

Haciendo uso de las reglas de integración de la tabla 1, se pueden deducir las expresiones para R_{eq} e I_{hist} en términos de corrientes de historia y resistencias equivalentes. De esta manera, se puede plantear la solución de un sistema eléctrico constituido por elementos pasivos a partir de la construcción de una matriz de conductancias G y llegar a una expresión de la forma (5.1).

El cálculo de la corriente de historia y de la R_{eq} dependen del método de integración usado. Para el método de Euler hacia atrás, el trapezoidal y el Gear de segundo orden se tienen las expresiones resumidas en la tabla 4:

	Regla Euler hacia atrás	Regla Trapezoidal	Regla Gear de segundo Orden
R_{eq} inductancia	$R_{Leq} = \frac{L}{\Delta t}$ (5.4a)	$R_{Leq} = \frac{2L}{\Delta t}$ (5.4b)	$R_{Leq} = \frac{3L}{2\Delta t}$ (5.4c)
R_{eq} capacitancia	$R_{Ceq} = \frac{\Delta t}{C}$ (5.5a)	$R_{Ceq} = \frac{\Delta t}{2C}$ (5.5b)	$R_{Ceq} = \frac{2\Delta t}{3C}$ (5.5c)
I_{hist} Inductancia	$I_{Lhist} = I_{km}(t - \Delta t)$ (5.6a)	$I_{Lhist} = \frac{V_{km}(t - \Delta t)}{R_{eq}} + I_{km}(t - \Delta t)$ (5.6b)	$I_{Lhist} = \frac{4}{3}I_{km}(t - \Delta t) - \frac{1}{3}I_{km}(t - 2\Delta t)$ (5.6c)
I_{hist} Capacitancia	$I_{Chist} = \frac{V_{km}(t - \Delta t)}{R_{eq}}$ (5.7a)	$I_{Chist} = \frac{V_{km}(t - \Delta t)}{R_{eq}} + I_{km}(t - \Delta t)$ (5.7b)	$I_{Chist} = \frac{\frac{4}{3}V_{km}(t - \Delta t)}{R_{eq}} - \frac{\frac{1}{3}V_{km}(t - 2\Delta t)}{R_{eq}}$ (5.7c)

Tabla 4 Elementos pasivo para circuitos acompañantes

Donde el índice "a" indica que se trata del método de Euler hacia atrás, el índice "b" indica la regla trapezoidal y el índice "c" indica el método de Gear de segundo orden. Estas expresiones se pueden deducir fácilmente usando las reglas de la tabla 2 a las relaciones voltaje corriente en los elementos capacitor e inductor.

5.3 Transitorio en un circuito RC en serie

Como ejemplo del método de cálculo usado por el EMTP consideremos el circuito de la figura 5.2, el cual está descrito por la siguiente ecuación diferencial:

$$V_{in} - RC \frac{dV_c}{dt} - V_c = 0 \quad (5.8)$$

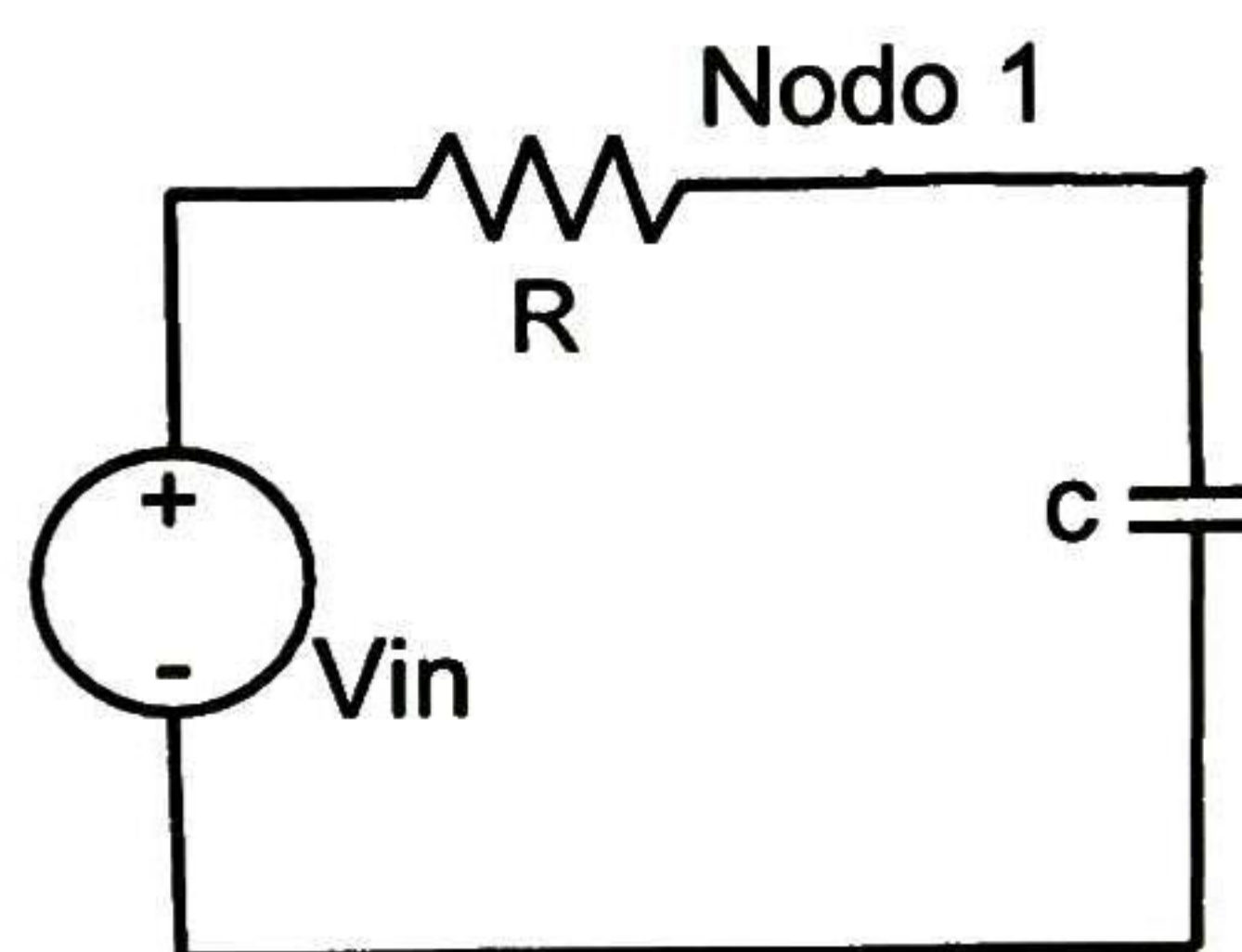


Figura 5.2 Circuito RC serie

A la expresión (5.8), que claramente es una ecuación diferencial de orden 1 en la forma de espacio de estados (5.3), se le puede aplicar cualquiera de los métodos de integración de la tabla 2 directamente. Para la regla de Euler hacia atrás se obtiene:

$$V_c(t) = \frac{\left[V_c(t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{RC} V_{in}(t) \right]}{\left(1 + \frac{\Delta t}{RC} \right)} \quad (5.9)$$

Para la regla Trapezoidal se obtiene:

$$V_c(t) = \frac{\left(V_c(t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{2RC} (V_{in}(t) + V_{in}(t - \Delta t) - V_c(t - \Delta t)) \right)}{\left(1 + \frac{\Delta t}{2RC} \right)} \quad (5.10)$$

Para la regla de Gear de segundo orden se obtiene:

$$V_c(t) = \frac{\left(\frac{2\Delta t}{3RC} V_{in}(t) + 4V_c(t - \Delta t) - V_c(t - 2\Delta t) \right)}{\left(1 + \frac{2\Delta t}{3RC} \right)} \quad (5.11)$$

Para la solución de estas expresiones es necesario conocer las condiciones iniciales del sistema que, para el caso de un circuito RC, la condición inicial es el voltaje en el capacitor en $t=0$ y, adicionalmente, es necesario escoger un Δt que satisfaga el criterio de muestreo de Nyquist-Shanon, el cual está relacionada con el ancho de banda del sistema [3].

La figura 5.3 presenta la solución del circuito RC para una excitación V_{in} consistente en un escalón unitario, el voltaje inicial del capacitor es de 0 Volts, la resistencia es de 10Ω , el capacitancia es de 10mF , el tiempo de observación es de 0.35 segundos y el paso de integración Δt es de 0.01s.

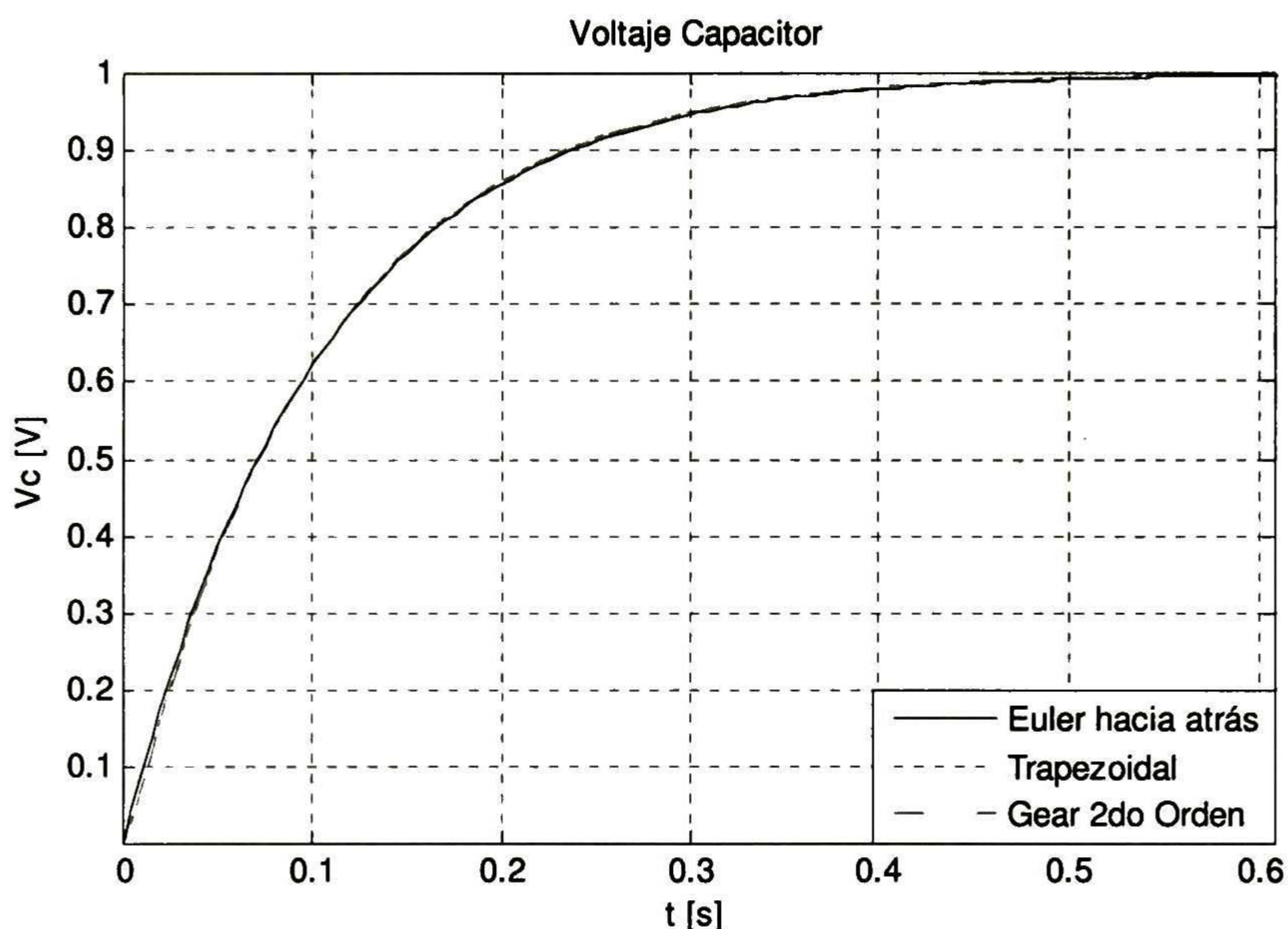


Figura 5.3 Solución circuito RC

Ahora se usará el método de circuitos acompañantes para la solución del mismo circuito. Inicialmente se llevará el circuito a su equivalente resistivo con fuentes de corrientes históricas como se muestra en la figura 5.4. Esta representación no varía con la regla de integración, lo único que varía con dicha regla son los valores de las I_{hist} y las R_{eq} .

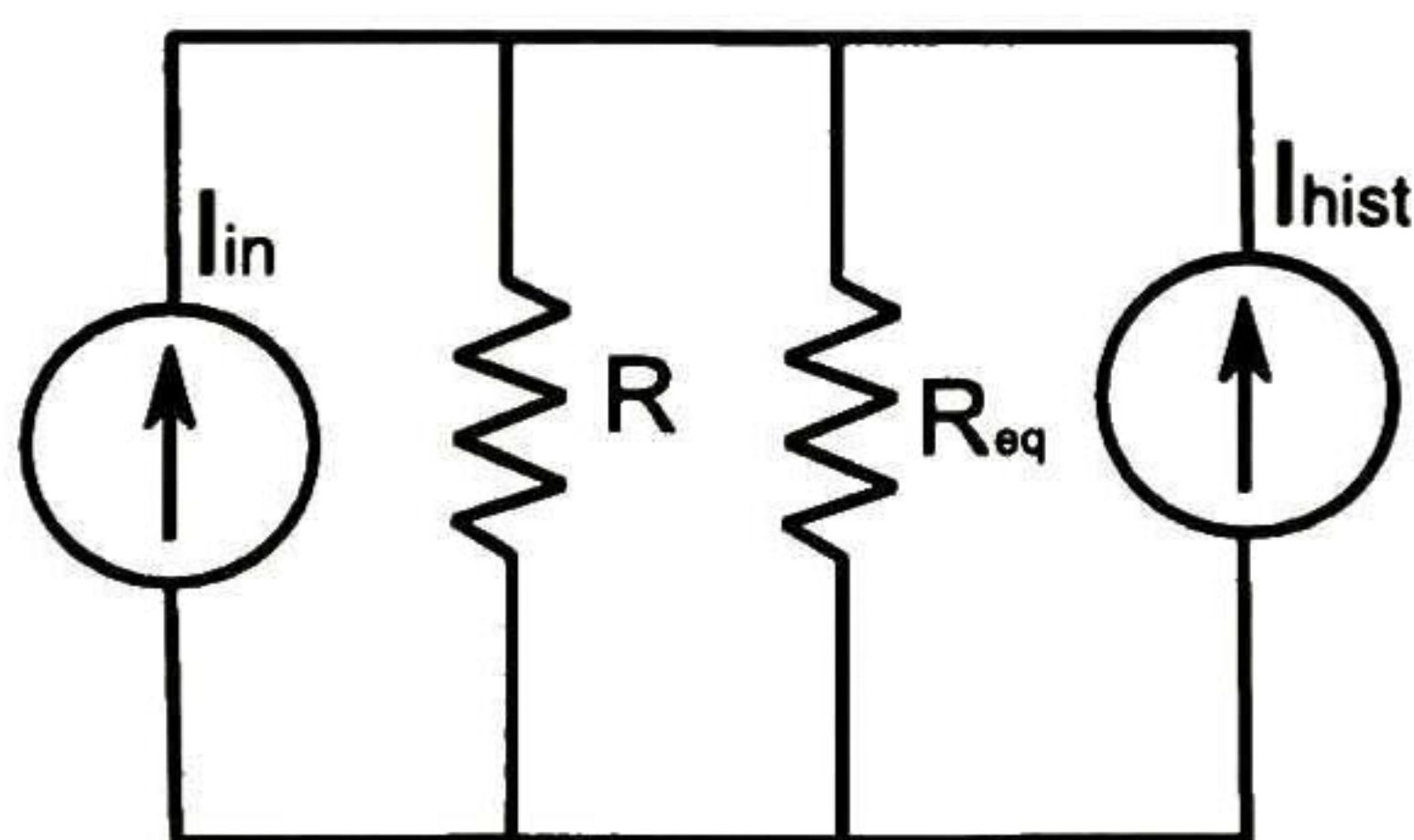


Figura 5.4 Método circuitos acompañantes circuito RC

Las ecuaciones para la corriente de historia y para la R_{eq} están dadas por las expresiones correspondientes (5.4) a (5.7). La corriente de entrada se calcula con el método de transformación de fuentes.

$$I_{in} = \frac{V_{in}}{R} \quad (5.12)$$

Así, tenemos una ecuación que se puede escribir fácilmente en la forma de la expresión (5.1):

$$(I_{in} + I_{hist}) = V_c \frac{R + R_{eq}}{RR_{eq}} \quad (5.13)$$

De esta manera se puede solucionar el circuito en forma secuencial, ya sea mediante la metodología de espacio de estados o mediante circuitos acompañantes. La ecuación diferencial (5.8) tiene solución analítica que es muy conocida y está dada por la expresión (5.14). La figura 5.3 muestra los resultados del circuito para los 3 métodos aquí vistos y con el método analítico exacto. Cabe notar que la solución obtenida por el método de circuitos acompañantes y por integración numérica dan resultados exactamente iguales cuando el método de integración usado es el mismo.

$$V_c(t) = 1 - e^{-t/RC} \quad (5.14)$$

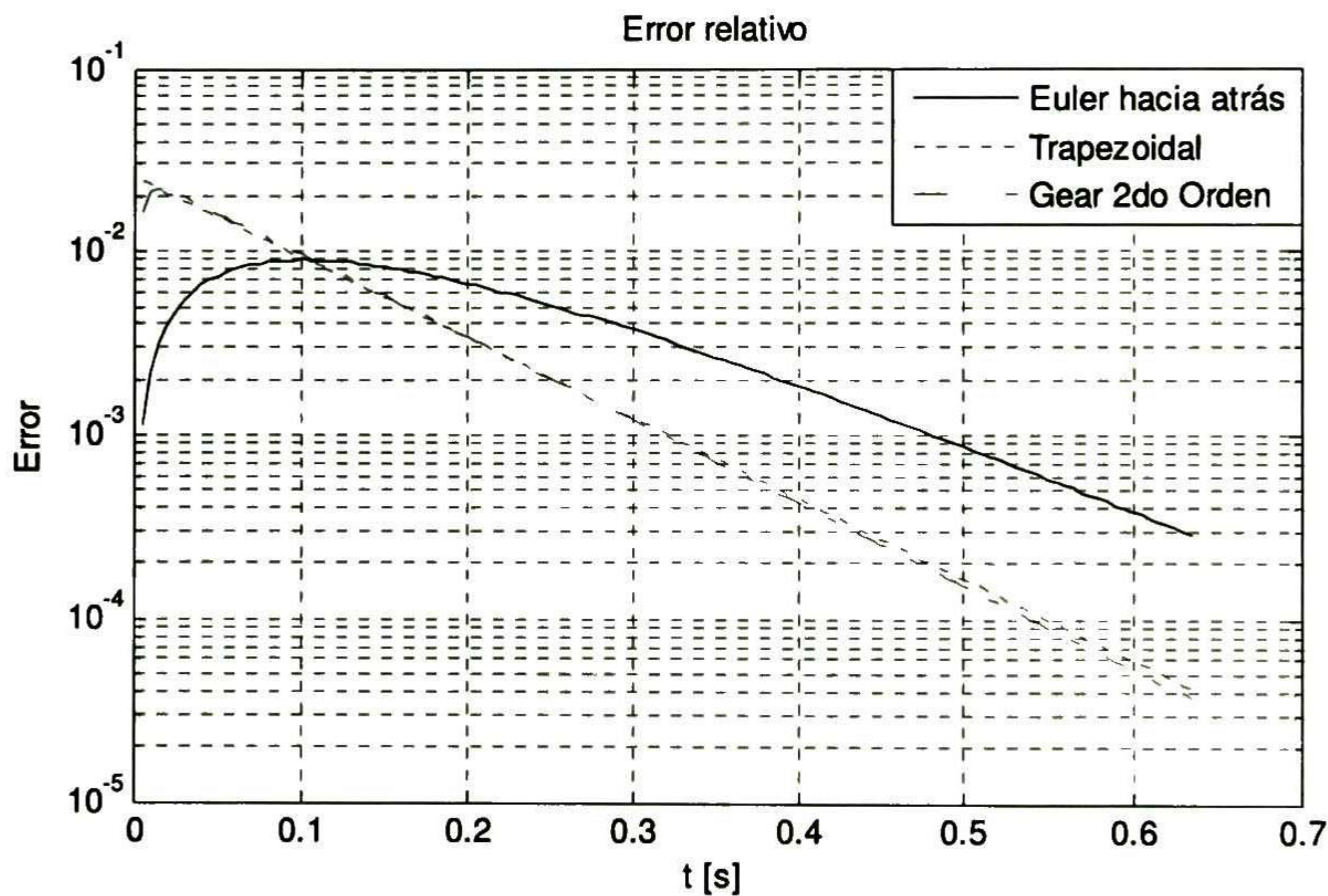


Figura 5.51 Error relativo para voltaje en el capacitor

6 . Simulación de sistemas lineales usando esquemas de Multirresolución, Ondeletas y Bancos de Filtros

Una estructura de banco de filtros para implementar la transformada Ondeleta consta de dos partes: Banco de Análisis y Banco de Síntesis. El objetivo de estas estructuras, que están compuestas por filtros QMF, es dividir el espectro de una señal en un número correspondiente de sub-bandas. Por su parte, un banco de síntesis tiene como objetivo reconstruir la señal original teniendo como entrada las dos señales originadas en el banco de análisis. Para la simulación de circuitos mediante Ondeletas, que es equivalente a un esquema de simulación con bancos de filtros, a continuación se usarán varias metodologías y se explicará bajo qué circunstancias dichos sistemas son válidos. Esto debido a que algunas de las soluciones que se obtienen mediante Ondeletas presentan diferencias con respecto a la obtenida usando reglas de integración directas. La solución por Ondeletas consiste básicamente en aplicar la transformada Ondeleta a la señal de entrada del circuito y resolver con una regla de integración específica el sistema.

Primero escogemos una base Ondeleta para el análisis, la cual define los coeficientes de la matriz de transformación (4.31). Luego se resuelve el sistema de manera independiente para \overline{X}_A y \overline{X}_D obteniendo \overline{Y}_A y \overline{Y}_D que son las soluciones del sistema respectivas a las entradas \overline{X}_A y \overline{X}_D . Finalmente se hace la transformada inversa, que consiste en multiplicar la salida compuesta por \overline{Y}_A y \overline{Y}_D por la matriz de transformación inversa calculada simplemente trasponiendo la matriz de transformación directa. El esquema para simular dicho sistema en paralelo se muestra en la figura 6.1:

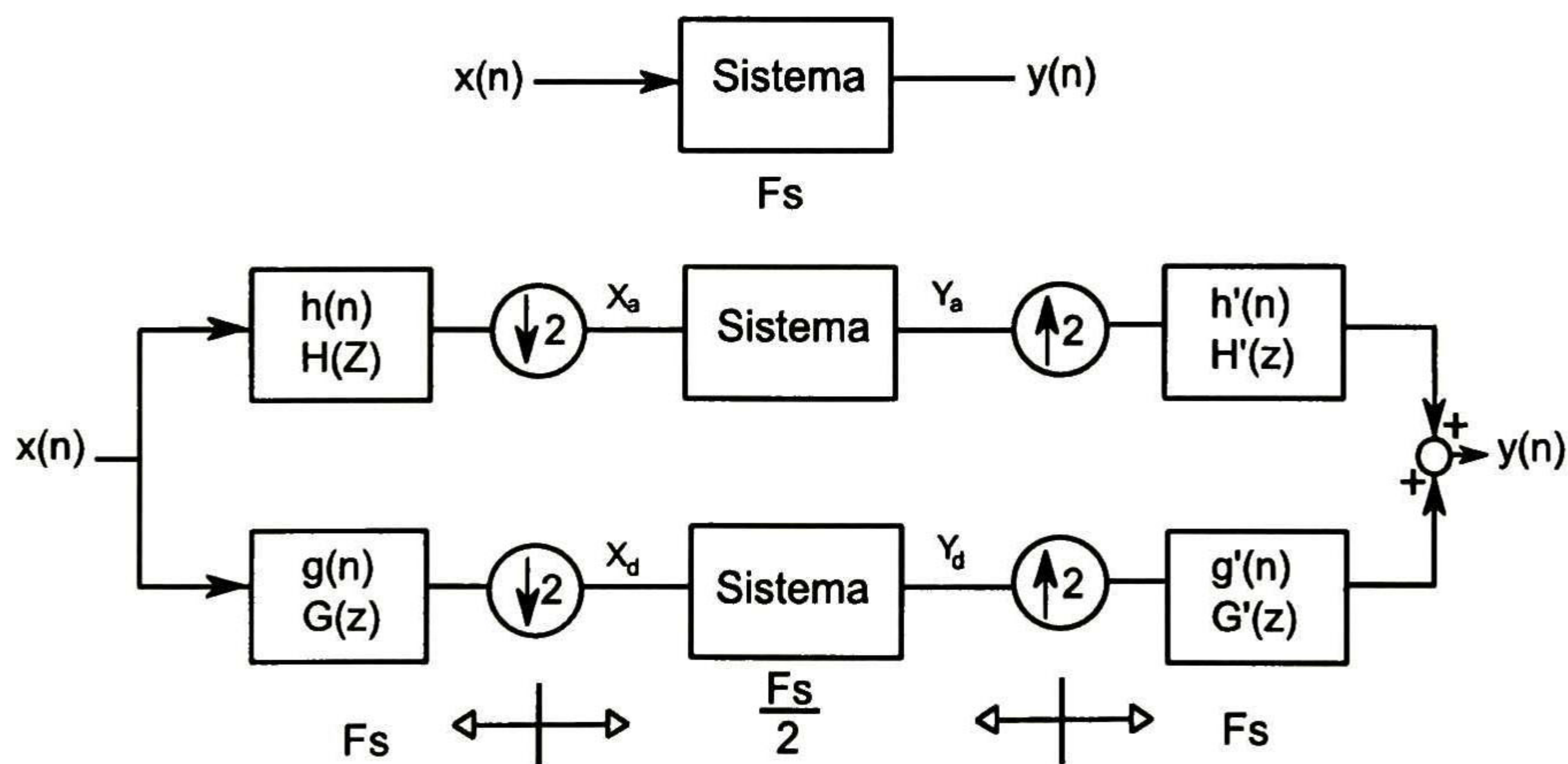


Figura 6.12 Esquemas de cálculo mediante banco de filtros.

El objetivo de esta propuesta es buscar una manera de modificar las ecuaciones del sistema bajo estudio, de tal modo que se pueda simular en el dominio Ondeleta y preferiblemente en paralelo como se muestra en la figura 6.1. Las pruebas que se han realizado se enumeran a continuación.

6.1 Método1 - Disminución de la frecuencia de muestreo en la simulación de un sistema

Para resolver el problema de simular la dinámica de un red eléctrica se necesita solucionar el sistema de ecuaciones diferenciales que lo representa mediante la aplicación de alguna regla de integración. La primera prueba que se realiza es el cambio del paso de integración Δt usado en las reglas numéricas. Este cambio se hace basado en las identidades nobles explicadas en la sección 4.4.

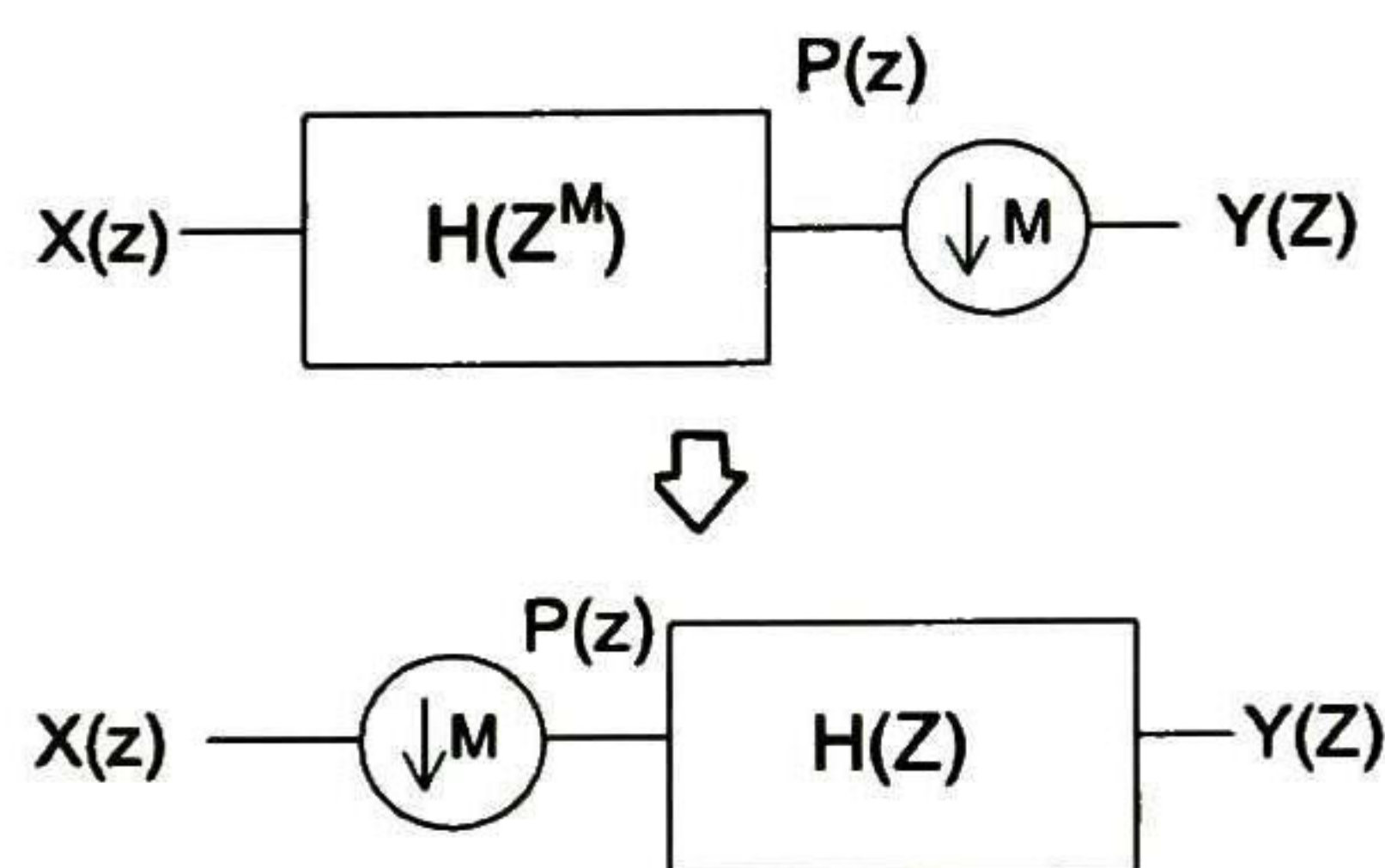


Figura 6.23 Primera identidad Noble.

Se ve claramente en la figura 6.2, que si el bloque $H(z^M)$ es cambiado por $H(z)$, entonces el intercambio sería equivalente a cambiar z por $z^{1/M}$, es decir:

$$z = e^{j\omega\Delta t} \quad (6.1)$$

$$z^{1/M} = e^{j\omega\Delta t/M} \quad (6.2)$$

Por tal motivo, si cambiamos Δt , por $M\Delta t$, los dos valores de z serían en cierto modo iguales y las ecuaciones que resuelven al sistema no se modificarán. Lo único que se modifica es el paso de integración usado.

Para este tipo de prueba se usaron los sistemas que se enumeran a continuación:

- Derivada.
- Integral.
- Circuito L y Circuito C (Derivada e integral).
- Circuitos R, RL, RC y RLC en espacio de estados o con circuitos acompañantes.
- Ecuaciones diferenciales de varios órdenes en espacio de estados.
- Circuitos eléctricos RLC de 3,4,5 y 9 nodos, que involucren 1, 2 y 3 entradas.
- Circuitos que involucran operaciones de interruptores en tiempos diferentes.

Todos estos sistemas se simularon con las reglas de integración de la tabla 2, excluyendo la regla de Simpson, y algunos resultados se adjuntan en los anexos. Todos los sistemas probados incrementan su error con el uso del esquema Ondeleta propuesto. lo que nos indica que el procesamiento realizado no es equivalente al original y no se logra la reconstrucción perfecta. El esquema de la figura 6.2 se aplicó a múltiples etapas de descomposición, como se muestra en la figura 6.3 que propone un esquema de más estructuras en paralelo. El cálculo para este esquema es similar al de la figura 6.1, lo único que se modificó fue el paso de integración Δt , duplicándolo

con respecto al de la anterior etapa. Los circuitos simulados fueron los mismos antes enumerados y los resultados obtenidos cada vez presentaban un error mayor con respecto al obtenido sin etapas de descomposición. En los anexos se pueden encontrar algunos de los sistemas usados como ejemplo.

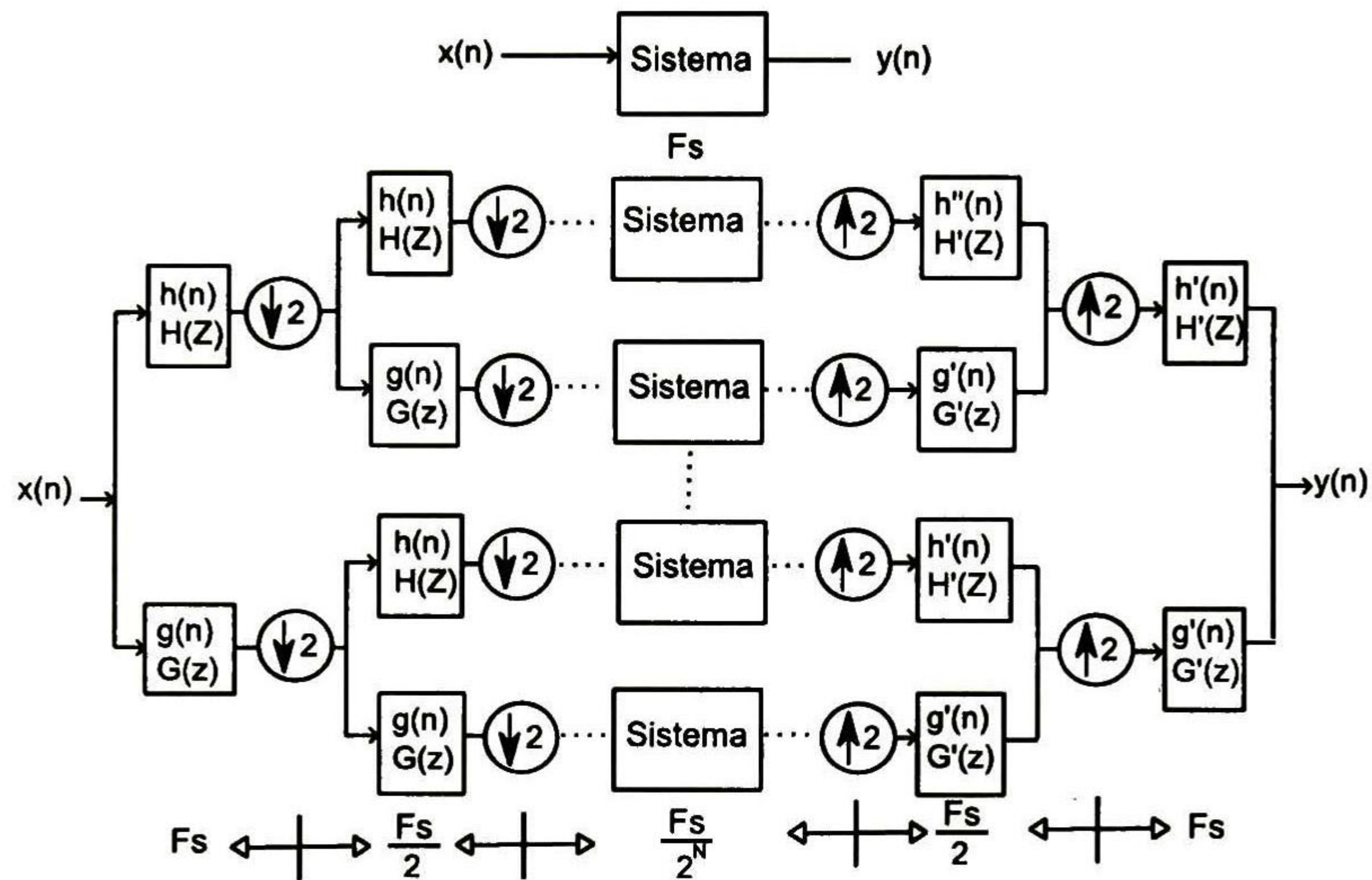


Figura 6.3 Esquemas de cálculo mediante banco de filtros - múltiples etapas.

Para muchos casos se logra llegar a una solución bastante aproximada y el estado estable se captura bien en la mayoría de los casos; sin embargo, la reconstrucción nunca es del todo perfecta. Una observación con respecto a esta prueba es que, a medida que nos acercamos al ancho de banda del sistema, la paralelización de los cálculos conlleva un error mayor. Pero si usamos una frecuencia de muestreo mucho más alta que el ancho de banda del sistema, el error disminuye notablemente.

6.1.1 Ejemplo 1 - Circuito RC

El circuito RC a simular es el de la figura 5.2. El procedimiento llevado a cabo para la simulación es idéntico al descrito en la solución sin Ondeleta de la sección 5.3. La diferencia es que el cálculo es en paralelo como se muestra en la figura 6.1 para el caso de dos etapas y en la figura 6.3 para el caso de n etapas. El paso de integración Δt es modificado según el número de etapas que usemos; además, se hace la transformada Ondeleta de la excitación dividiéndola en tantas bandas como sea requerido. A continuación se presenta la solución del circuito RC para la excitación escalón unitario, con un voltaje inicial de 0 Volts, con una resistencia de 10Ω , capacitancia de 10mF , el tiempo de observación es de 1 segundo y el paso de integración Δt es de 0.005s . Las bases Ondeleta que se usaron para los cálculos fueron la Haar y la DB2.

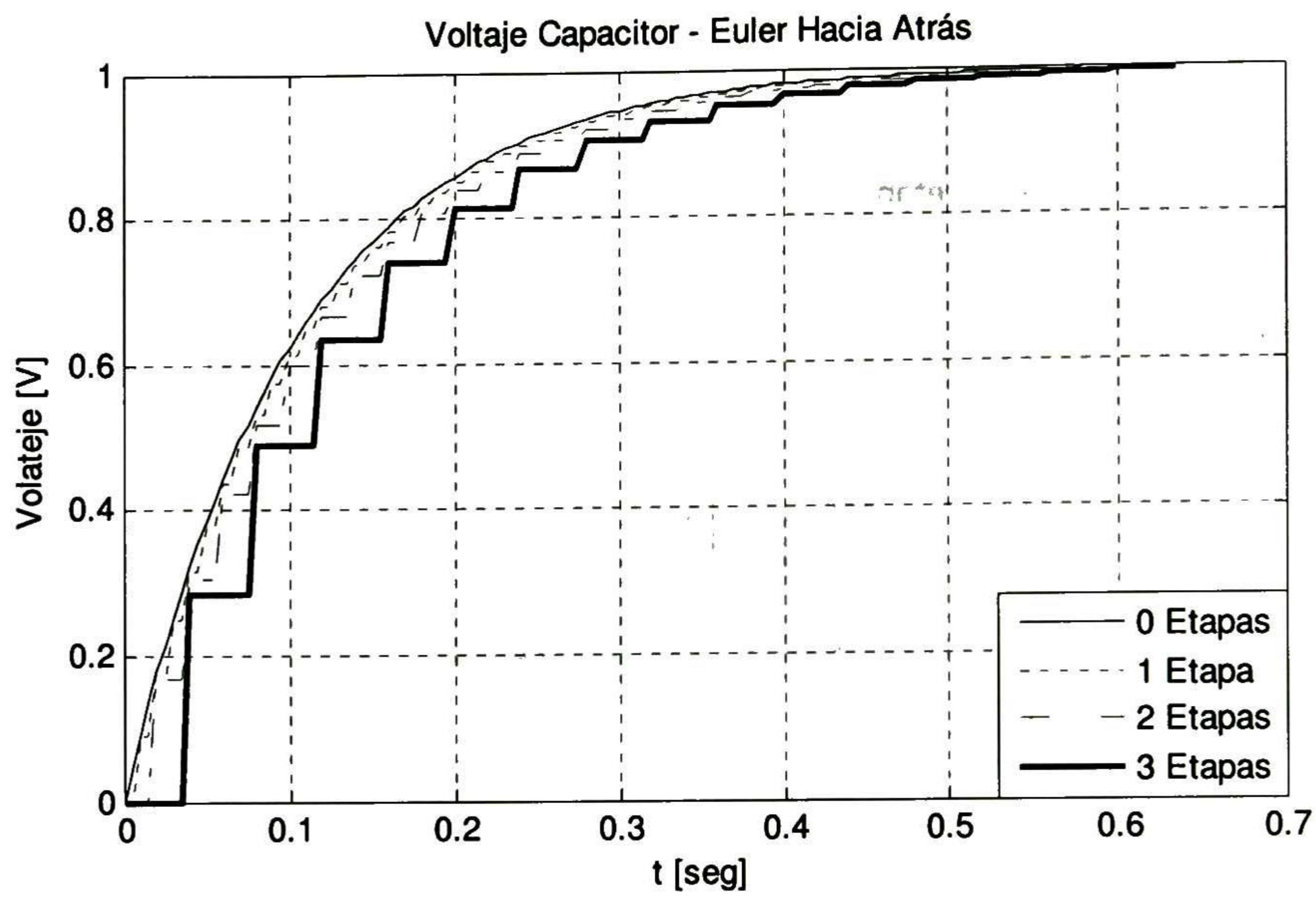


Figura 6.4 Voltaje capacitor circuito RC serie, Ondeleta Haar - Euler hacia atrás

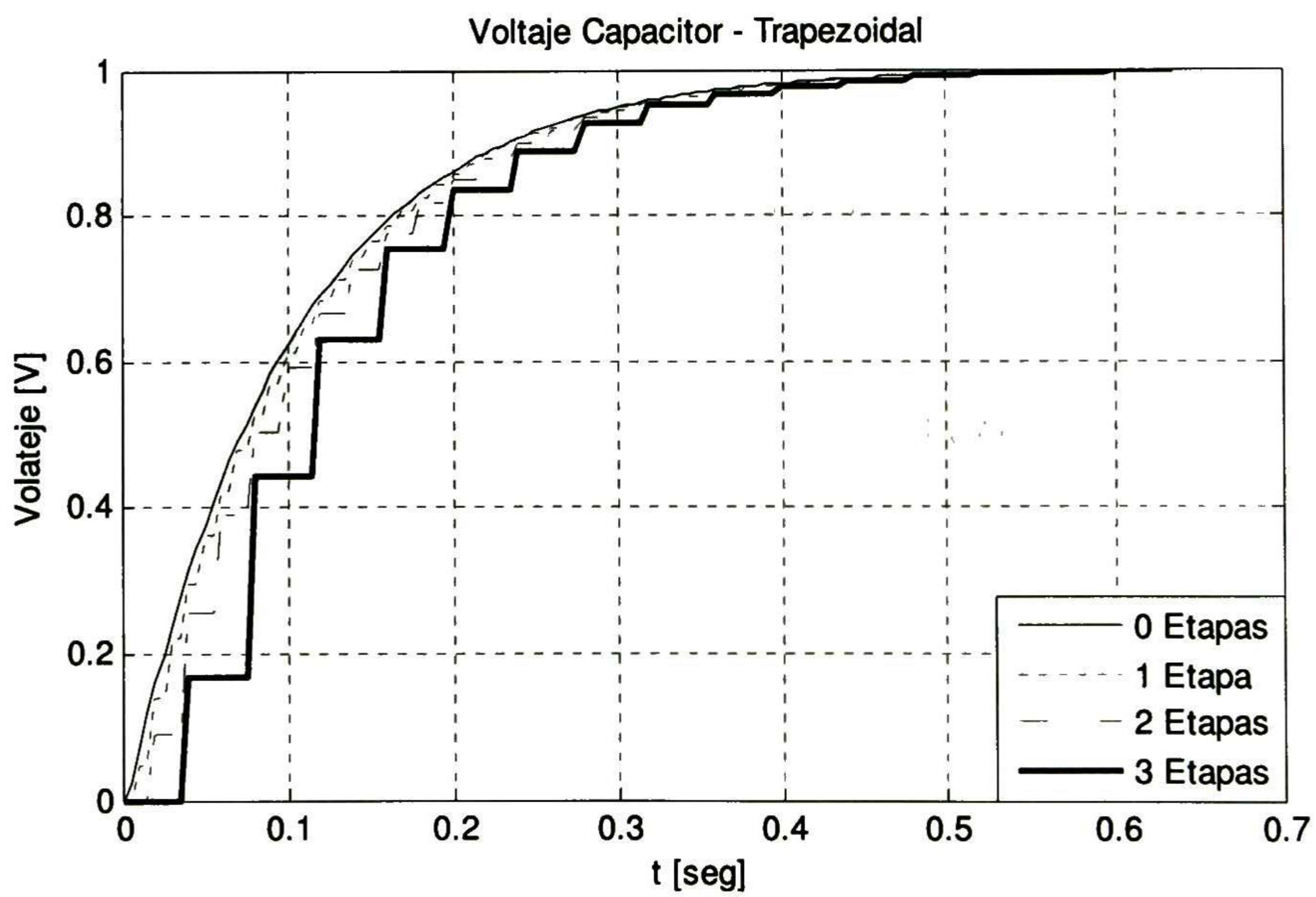


Figura 6.5 Voltaje capacitor circuito RC serie, Ondeleta Haar - Trapezoidal

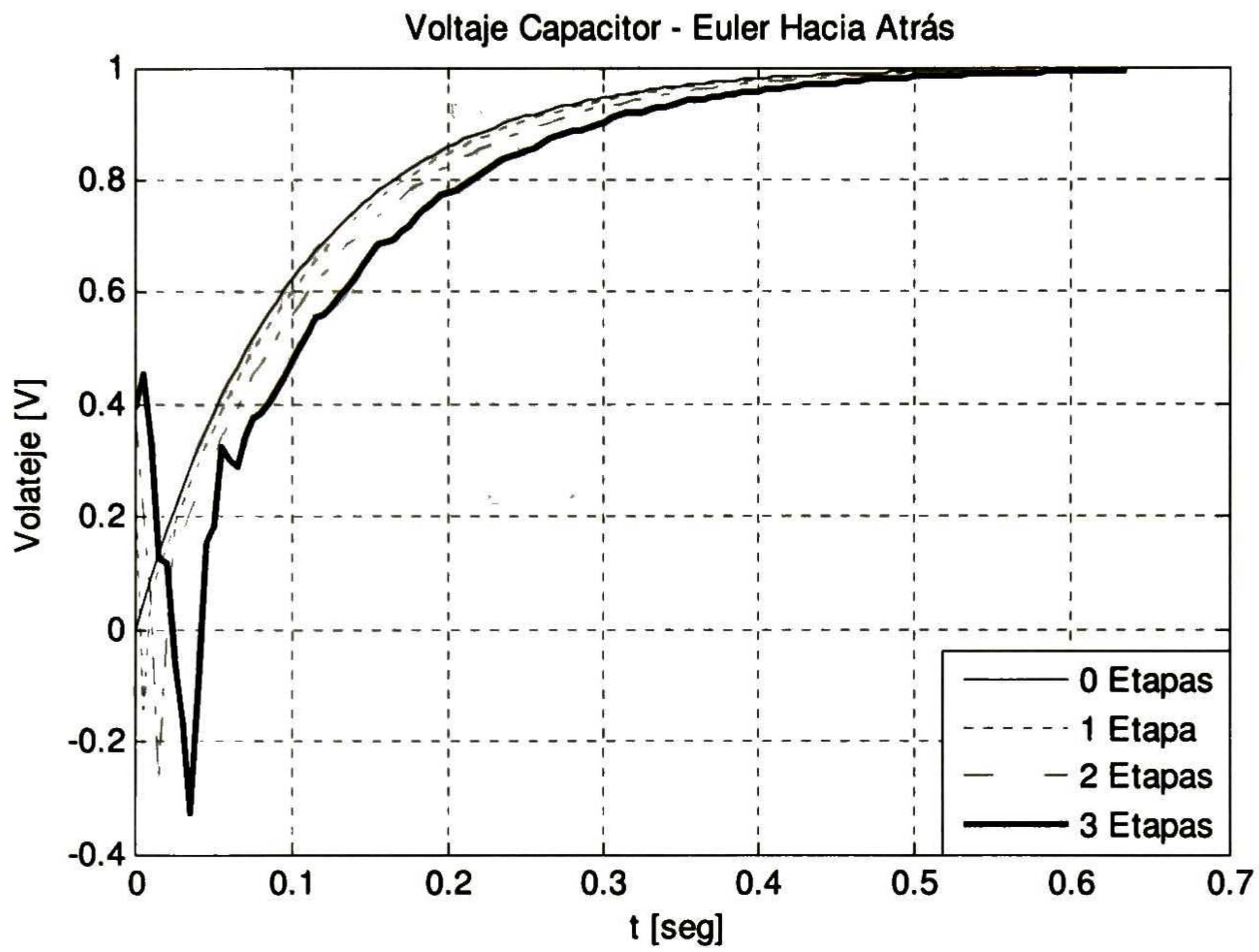


Figura 6.6 Voltaje capacitor circuito RC serie, Ondeleta DB2 - Euler hacia atrás

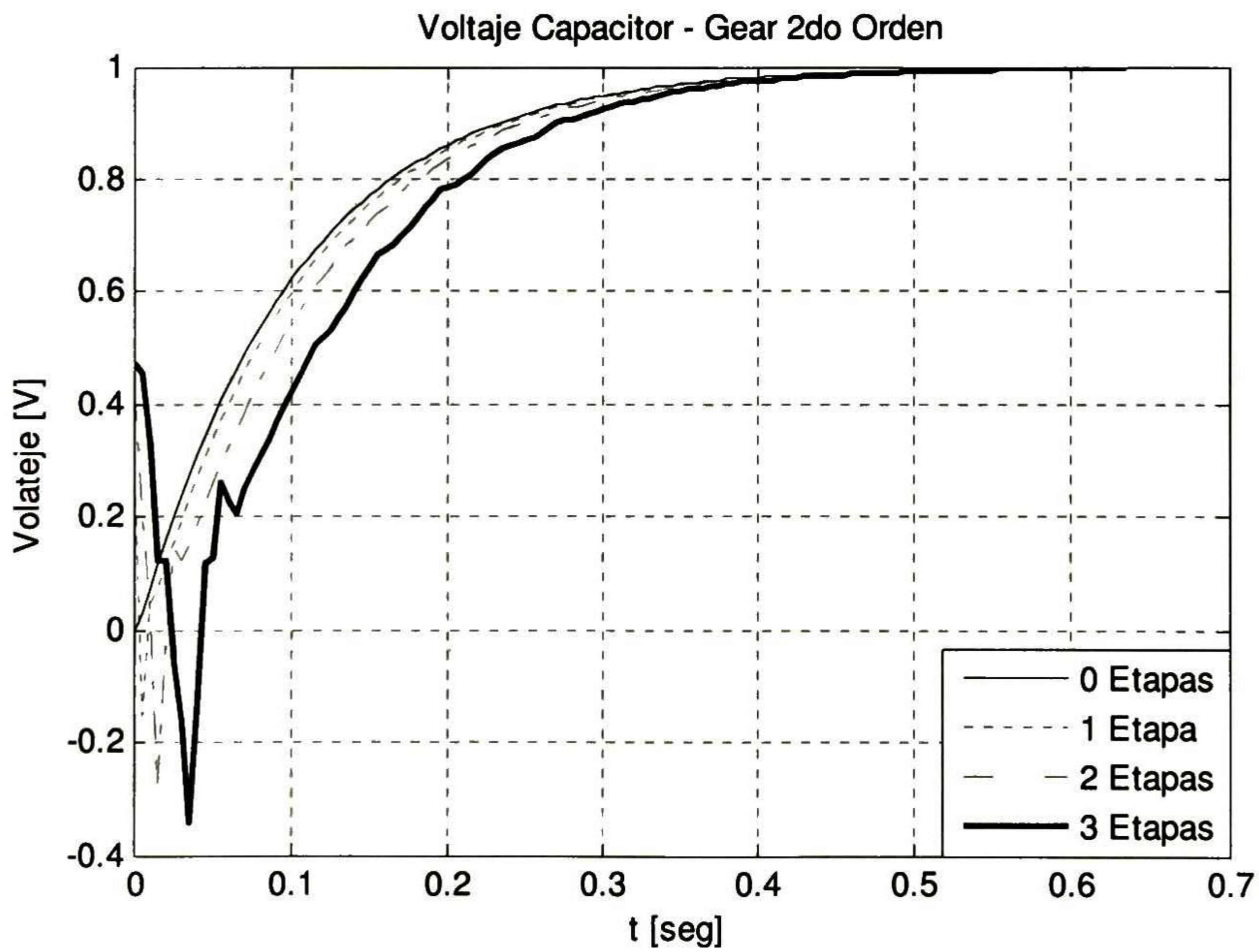


Figura 6.7 Voltaje capacitor circuito RC serie, Ondeleta DB2 - Gear segundo orden

El análisis de error para los ejemplos aquí tratados será mediante el error relativo de acuerdo con la expresión (6.3).

$$\text{Log}_{10}(|\text{Resultado con Wlets} - \text{Valor de referencia}|) \tag{6.3}$$

El valor de referencia se tomará como el resultado obtenido analíticamente en los casos que sea posible o mediante un método de integración convencional que garantice alta precisión.

Para el caso de un circuito RC con excitación escalón unitario la solución analítica está dada por la ecuación (6.4).

$$V_c(t) = 1 - e^{-t/RC} \tag{6.4}$$

Las gráficas de los errores se proporcionan en las figuras 6.8:

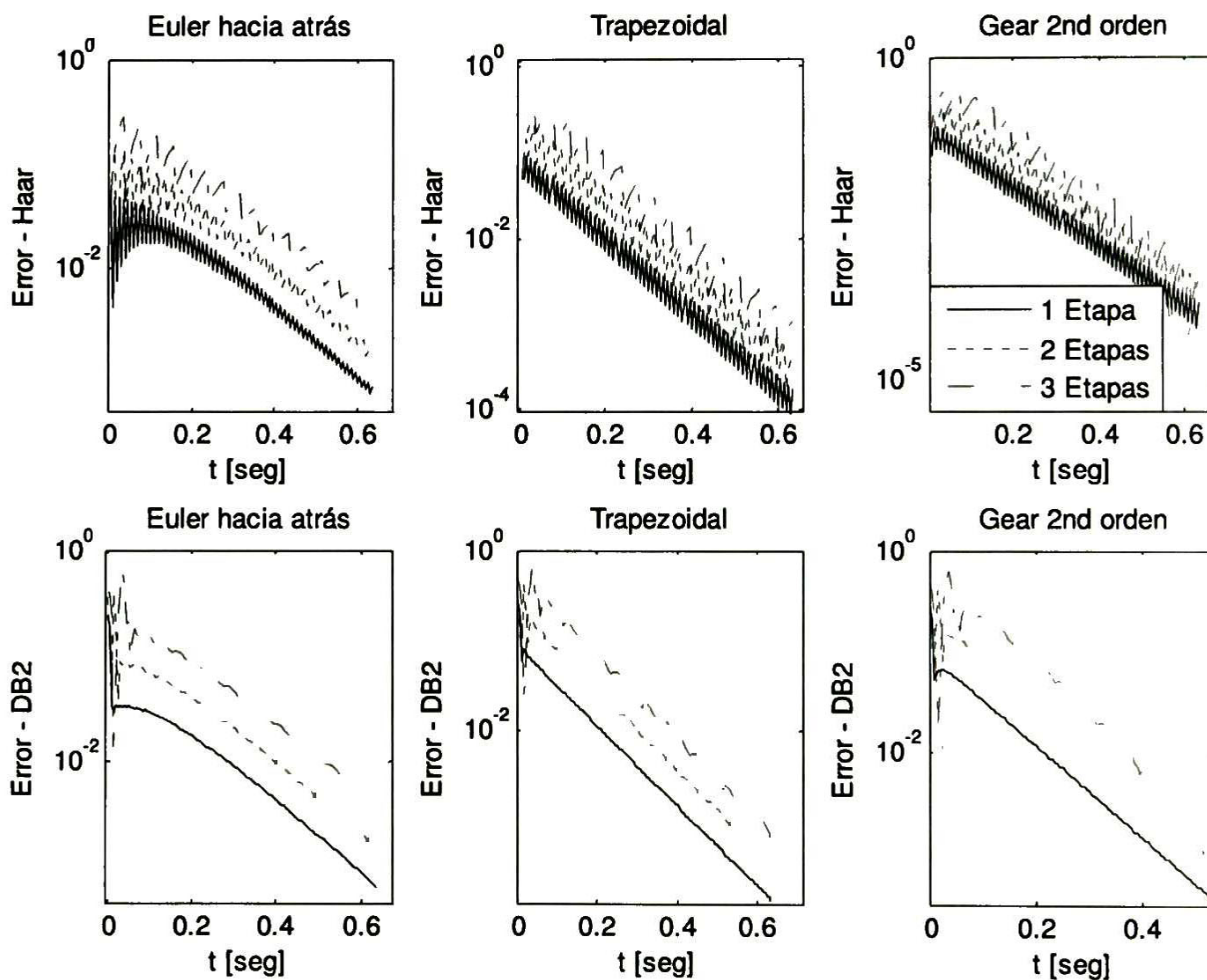


Figura 6.8 Error relativo Voltaje capacitor circuito RC serie

Los errores obtenidos en la simulación no solo son por causa del uso de las Ondeletas. El paso de integración Δt y el error de cuantificación son valores que influyen también directamente en la precisión de las simulaciones.

6.1.2 Ejemplo 2 - Circuito Resistivo

Para un circuito resistivo, el cual no tiene elementos almacenadores de energía y por tal motivo no implica operaciones que contengan retardos, el método ondeleta de la sección 6.1 sí permite una reconstrucción perfecta. Esto nos indica que el error en los cálculos obtenidos se debe más que todo a la característica de varianza con el tiempo de la operación de diezmado, pues una red resistiva no contiene retardos y por tal motivo el paso de integración usado solo afecta a la excitación. Las figuras 6.9 y 6.10 ilustran, en forma respectiva, al circuito simulado y a los resultados obtenidos mediante Ondeletas junto con sus respectivos errores.

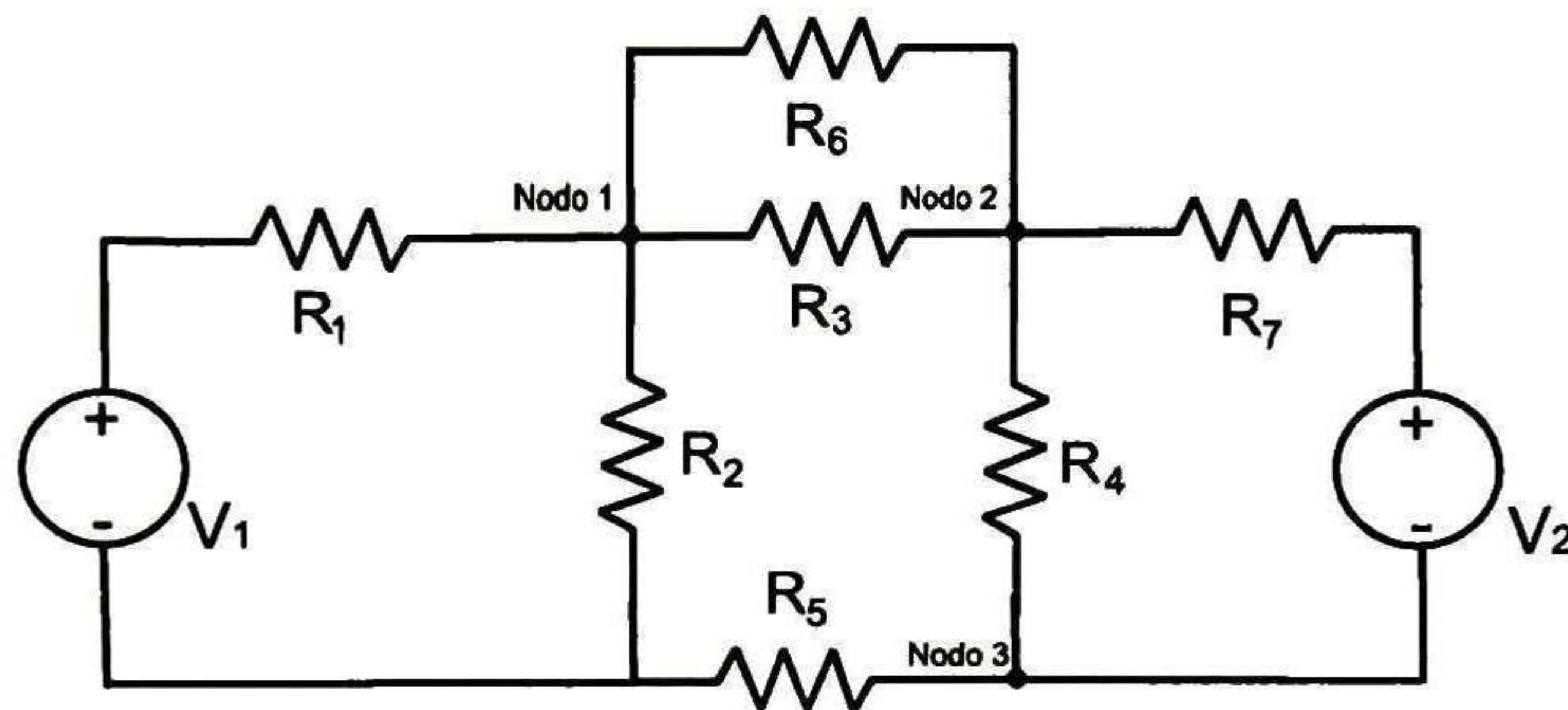


Figura 6.9 Circuito resistivo

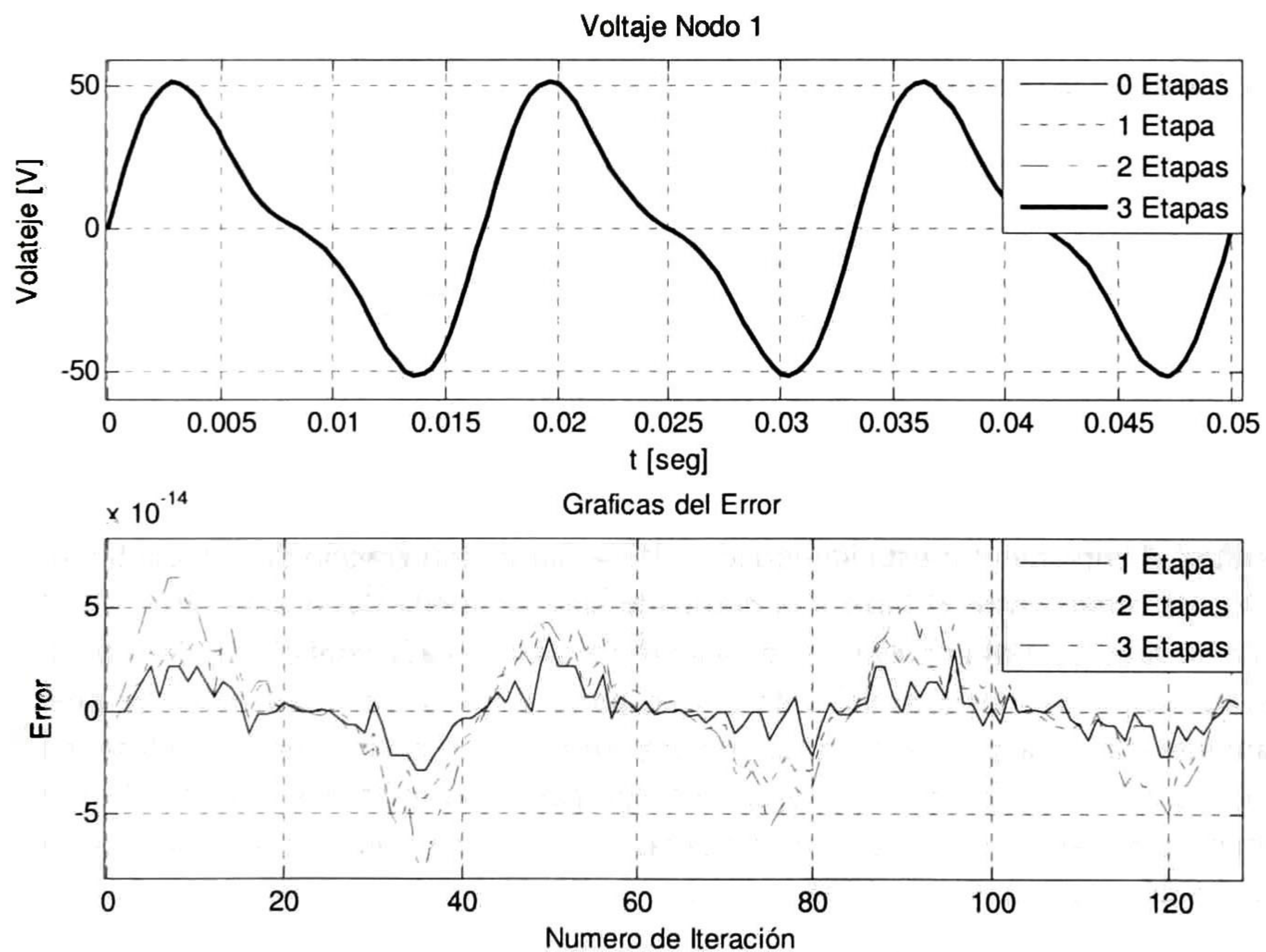


Figura 6.10 Error del voltaje en el nodo 1

El error se calculó tomando como referencia la simulación con cero etapas de descomposición que en este caso es idéntica a la analítica. Se observa claramente que éste es debido más bien a la cuantificación o longitud de palabra.

6.2 Método 1 modificado - Reglas de integración modificadas

Las reglas de integración en el dominio de la transformada z se pueden ver en la tabla 2 que, por conveniencia, aquí se repiten en la tabla 5.

Regla	Función de transferencia
Trapezoidal	$\frac{\Delta t}{2} \frac{z+1}{z-1}$
Euler hacia atrás	$\Delta t \frac{z}{z-1}$
Gear de segundo Orden	$\Delta t \frac{2z^2}{3z^2 - 4z + 1}$

Tabla 5 Reglas de integración.

Según la identidad noble, para un factor de diezmado de $M=2$, podemos intercambiar interpoladores o diezmadores con bloques de filtrado como se muestra en la figura 6.11, tal y como se indicó en la sección 6.1.

$$\begin{aligned}
 X(z) \xrightarrow{(\downarrow 2)} \xrightarrow{P(z)} \xrightarrow{G(z)} Y(z) &\equiv X(z) \xrightarrow{G(z^2)} \xrightarrow{P(z)} \xrightarrow{(\downarrow 2)} Y(z) \\
 X(z) \xrightarrow{(\uparrow 2)} \xrightarrow{P(z)} \xrightarrow{G(z^2)} Y(z) &\equiv X(z) \xrightarrow{G(z)} \xrightarrow{P(z)} \xrightarrow{(\uparrow 2)} Y(z)
 \end{aligned}$$

Figura 6.11 Identities nobles

La dificultad al implementar esta identidad en las reglas de integración de la tabla 5 radica en que el cambio de orden entre el filtro y el diezmado solo se puede hacer si el filtro, en el caso FIR, tenga en su respuesta al impulso un coeficiente cero entre cada coeficiente de subíndice par, lo que se traduce a que las potencias de z sean pares y así la identidad noble se puede aplicar directamente y la señal procesada no contendrá errores. En el caso de un filtro IIR se requiere que la variable z en la función de transferencia tenga potencias múltiplos enteros. En la tabla 6 se presentan las reglas de integración modificadas de tal manera que cumplan los requisitos de la identidad noble para un diezmado de orden 2.

Regla	Función de transferencia
Trapezoidal	$\frac{2\Delta t z^2 + 1}{2 z^2 - 1}$
Euler hacia atrás	$2\Delta t \frac{z^2}{z^2 - 1}$
Gear de segundo Orden	$2\Delta t \frac{2z^4}{3z^4 - 4z^2 + 1}$

Tabla 6 Reglas de integración modificadas

Las funciones de transferencia de la tabla 6 realizan el proceso de integración o derivación de manera similar a los de la tabla 5. La diferencia es que el error será mayor en los de la tabla 6. Los resultados obtenidos aplicando estas fórmulas son equivalentes a aplicar las de la tabla 5 en el dominio Ondeleta de una etapa de descomposición y duplicando el Δt ; es decir, las operaciones que hacemos al duplicar la frecuencia de muestreo en el dominio Ondeleta de la sección 6.1 son equivalentes a aplicar las reglas de integración de la tabla 6 a una sistema sin Ondeletas.

Mediante el circuito de la figura 6.12 se ilustrará ahora la aplicación de las reglas de integración modificadas. Éste se simuló con los siguientes parámetros: $R_1=160\Omega$, $R_2=110\Omega$, $R_3=45\Omega$, $R_4=52\Omega$, de $C_1=6\mu F$, $C_2=12 \mu F$, de $L_1=200\mu H$, $L_2=33mH$, tiempo de simulación de 0.006s y Δt de 0.0001s. La Ondeleta base que se usó para los cálculos fue la de Haar.

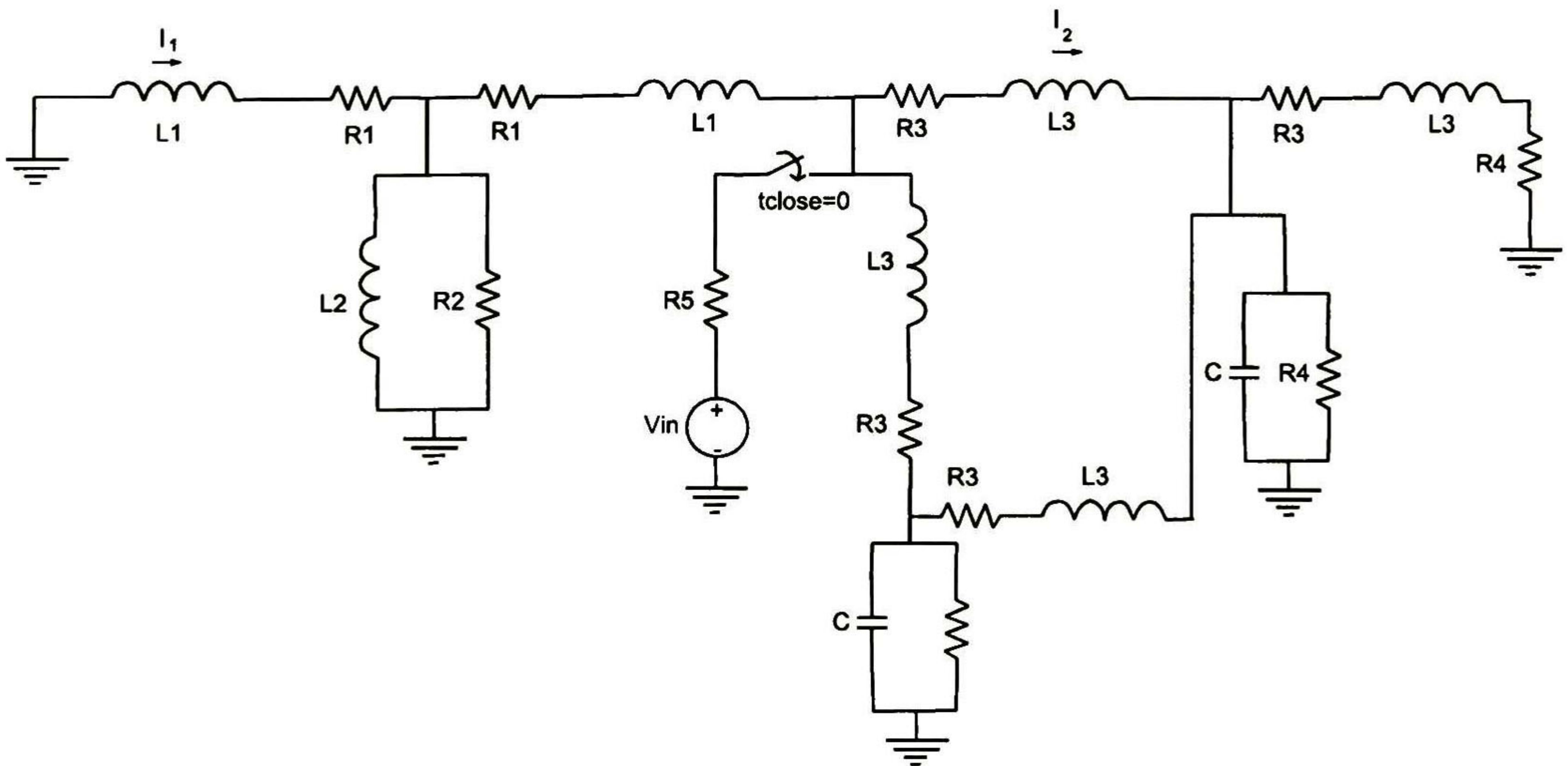


Figura 6.12 Circuito de prueba de 9 estados

Las figuras 6.13 y 6.14 muestran las corrientes I_1 e I_2 del circuito de prueba de la figura 6.12, usando las reglas de integración modificadas y usando Ondeletas con el cambio de la frecuencia de muestreo que se explicó en la sección 6.1.

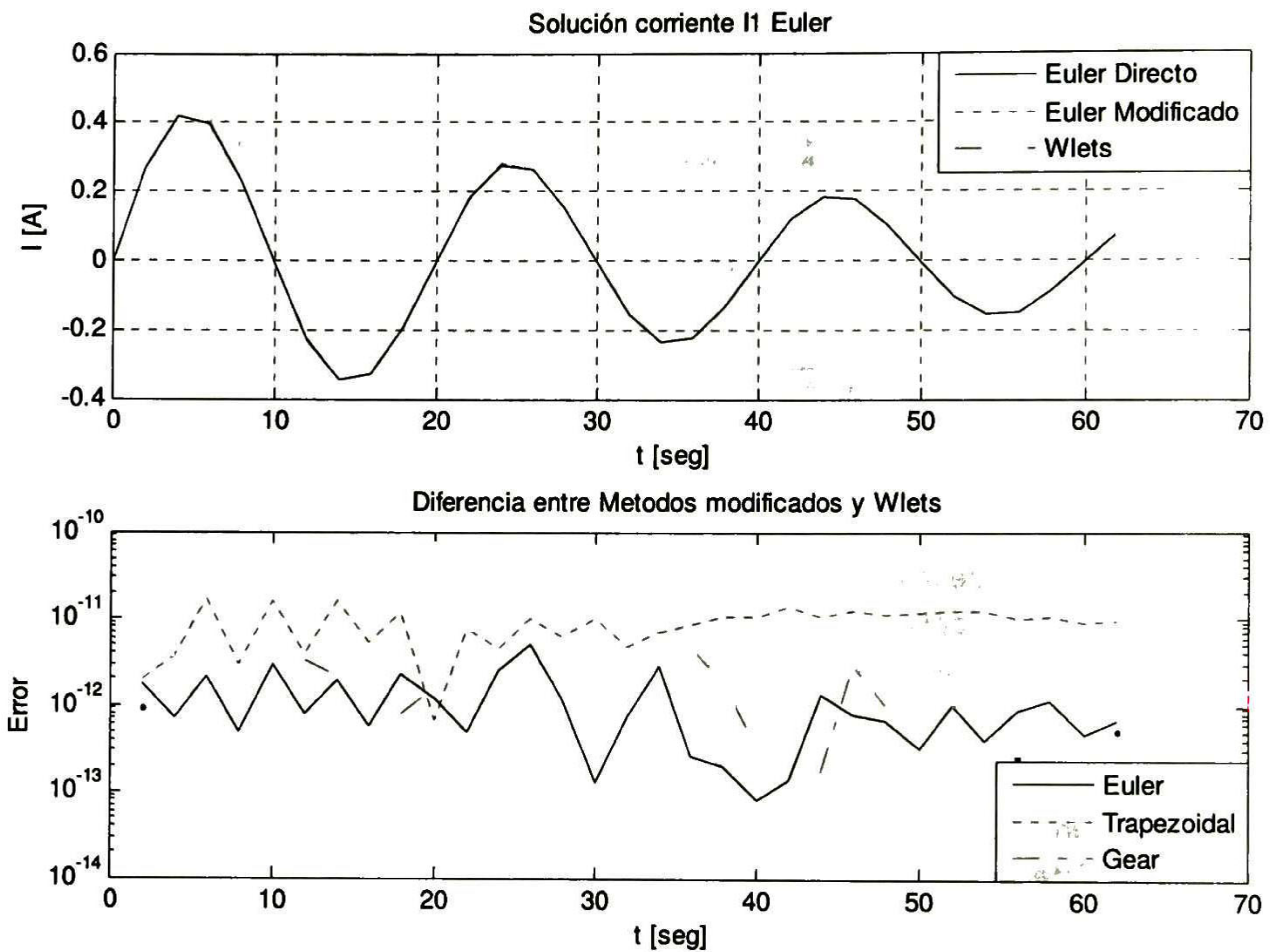


Figura 6.13 Corriente inductor I_1

con base en estas figuras se puede ver que al cambio de la frecuencia de muestreo para la solución con Ondeletas de un sistema de ecuaciones diferenciales es equivalente a solucionar el mismo sistema sin Ondeletas usando las reglas de integración modificadas de la tabla 6.

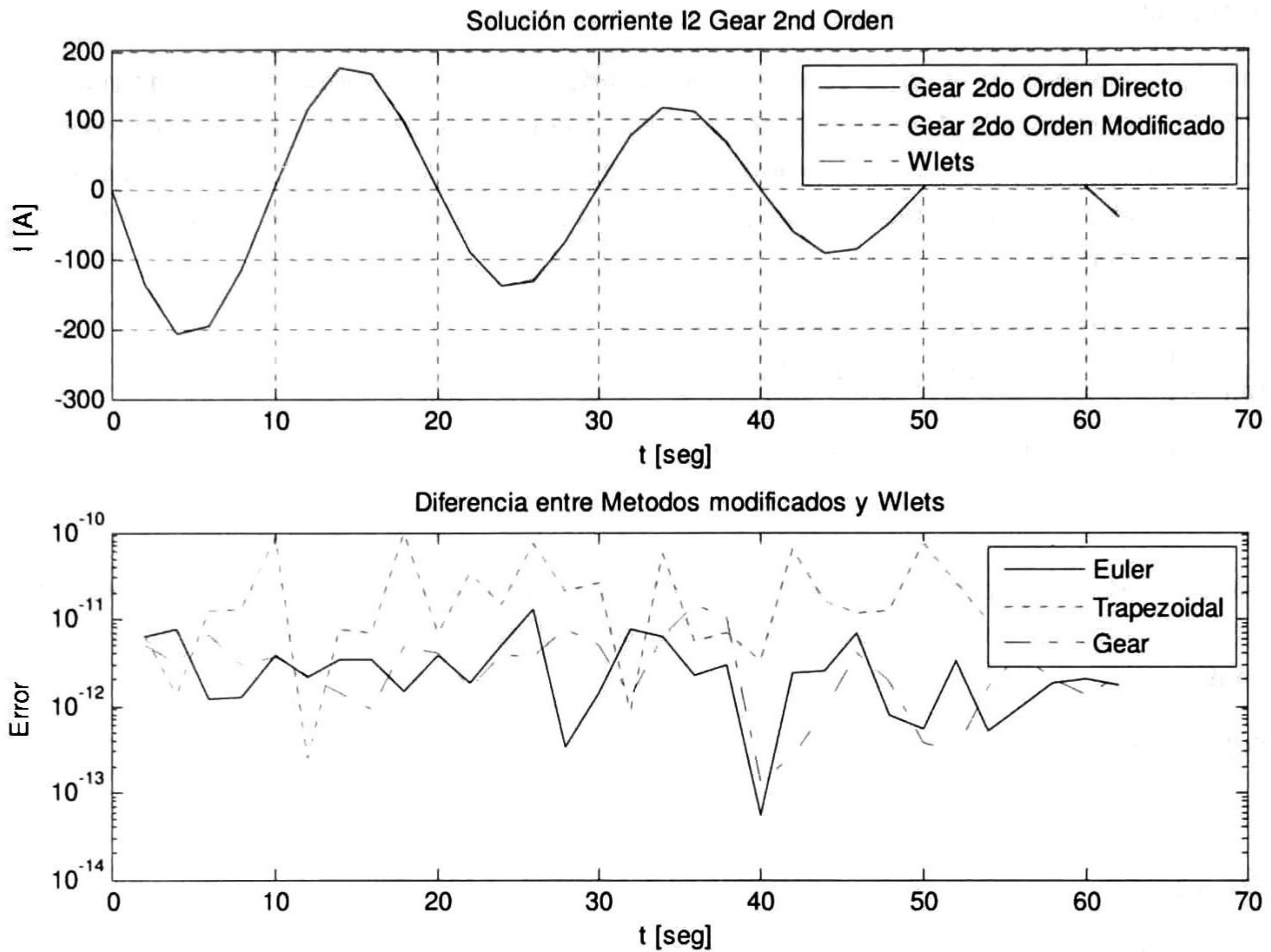


Figura 6.14 Corriente inductor I_2

6.3 Método 2- Ecuación de Lyapunov con Ondeletas

La transformada Ondeleta de una señal que representa los estados internos de un sistema bajo estudio se efectúa multiplicando dicha señal por una matriz de transformación T_1 tal y como se describió en la sección 4.5. Esta matriz hace las operaciones entre las muestras actuales y las pasadas. La expresión (6.5) muestra cómo se hace la transformación Ondeleta matricial para unas muestras organizadas en forma de vector renglón o columna; es decir, que cada columna o renglón de la matriz de señales represente las muestras de una variable de entrada.

$$TDW\{x\} = [x(-3) \quad x(-2) \quad x(-1) \quad x(0) \quad x(1) \quad x(2) \quad x(3)][T_1]^T \quad (6.5)$$

Ahora se resuelve un sistema en espacio de estados que está dispuesto tal como se explicó en la sección 5.1 de la siguiente manera:

$$\dot{X} = [A]X + [b][u] \quad (6.6)$$

Las expresiones (6.9), (6.10) y (6.11) se asemejan a la denominada ecuación de Lyapunov [65]:

$$[A][X] + [X][B] + [C] = 0 \quad (6.16)$$

De lo cual, resolver un sistema en espacio de estados con condiciones iniciales 0 se resume en resolver la ecuación de Lyapunov (6.16). Si se aplica la Transformada Ondeleta a esta expresión se obtiene:

$$[X]^{st \times n} [D_1]^{n \times n} [T]^{n \times n} = [A]^{st \times st} [X]^{st \times n} [T]^{n \times n} + [b]^{st \times k} [u]^{k \times n} [T]^{n \times n} \quad (6.17)$$

$$[X]^{st \times n} [T]^{n \times n} ([T]^T)^{n \times n} D_1^{n \times n} [T]^{n \times n} = [A]^{st \times st} [X]^{st \times n} [T]^{n \times n} + [b]^{st \times k} [u]^{k \times n} [T]^{n \times n}$$

$$\begin{aligned} & \left[[X_a]^{st \times \frac{n}{2}} \quad [X_d]^{st \times \frac{n}{2}} \right] \begin{bmatrix} [D_{w1}]^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}} & [D_{w2}]^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}} \\ [D_{w3}]^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}} & [D_{w4}]^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}} \end{bmatrix}^{n \times n} \\ & = [A]^{st \times st} \left[[X_a]^{st \times \frac{n}{2}} \quad [X_d]^{st \times \frac{n}{2}} \right] + [b]^{st \times k} \left[[u_a]^{k \times \frac{n}{2}} \quad [u_d]^{k \times \frac{n}{2}} \right] \end{aligned} \quad (6.18)$$

La ecuación (6.18) es similar para los 3 métodos de integración con una ligera diferencia para el método Trapezoidal. Resolverla es resolver el sistema en el dominio de las Ondeletas sin introducir ningún error adicional al relacionado con la regla de integración usada.

El método explicado en la sección 6.1, que consiste en aumentar el paso de integración Δt de la simulación, es equivalente a resolver el problema (6.18) con la siguiente modificación.

$$\begin{aligned} & \left[[X_a]^{st \times \frac{n}{2}} \quad [X_d]^{st \times \frac{n}{2}} \right] \begin{bmatrix} [D_1]^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}} & [0]^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}} \\ [0]^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}} & [D_1]^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}} \end{bmatrix} \\ & = [A]^{st \times st} \left[[X_a]^{st \times \frac{n}{2}} \quad [X_d]^{st \times \frac{n}{2}} \right] + [b]^{st \times k} \left[[u_a]^{k \times \frac{n}{2}} \quad [u_d]^{k \times \frac{n}{2}} \right] \end{aligned} \quad (6.19)$$

Donde D_1 es la matriz dada en (6.12) para el método de Euler y la dada por (6.15) para el método Gear de 2do orden. Para el caso de la regla trapezoidal se tiene un cálculo adicional. Cabe notar que el paso de integración Δt para la construcción de la matriz D_1 es duplicado para la ecuación (6.19). De aquí que el error en la solución aumente cuando se duplica la frecuencia de muestreo del sistema, ya que la matriz D_w es modificada con respecto al cálculo original. Por tal motivo, el sistema tendrá un error si se simula en forma independiente como se muestra en las figuras 6.1 y 6.3. Siempre va a existir un acoplamiento entre subsistemas y tratar de simular el sistema duplicando la longitud del paso de integración Δt de la manera que se propuso anteriormente siempre va a introducir errores en la simulación.

En el anexo 4 se presente la simulación usando el comando LYAP de Matlab® para obtener los resultados del sistema de 9 nodos, donde se observa que el error usando la formulación de Lyapunov completa (ecuación (6.18)) solo tiene los errores relacionados a la regla de integración usada y a los errores por cuantificación, mientras que, el error por el uso de Ondeletas será nulo; sin embargo, con esta metodología, no se gana velocidad en comparación con la anterior.

6.4 Método 3 - Realizaciones con filtros polifásicos y con bancos de filtros

Una técnica muy útil en el procesamiento de señales multi-frecuencia es la representación polifásica de estructuras de filtrado. Aquí se propone una estructura de bancos de filtros integrada con realizaciones polifásicas con el fin de realizar convoluciones en el dominio del tiempo en paralelo. La metodología presentada se implementará para bancos de filtros, aunque también se puede hacer extensiva a esquemas de Ondeletas de n etapas.

El banco de filtros es usado para descomponer la señal de entrada en M sub-señales, donde M es el factor de diezmado deseado y la estructura polifásica es usada para descomponer al sistema en la suma de M sub-sistemas en paralelo. La figura 6.15 muestra un esquema de bancos de filtros convencional y la figura 6.16 muestra un esquema de filtros polifásico.

La transformada Ondeleta es un esquema de bancos de filtros de orden 2 como el de la figura 4.1; sin embargo, la cualidad de reconstrucción perfecta de un banco de filtros no es exclusiva para los bancos de orden 2. Esta propiedad también se puede cumplir para bancos de orden M como el que se muestra en la figura 6.15. Por su parte, las realizaciones de filtros polifásicas permiten representar sistemas de una manera muy específica que permitirá, integrado con un banco de filtros, realizar cálculos de sistemas de una manera ágil.

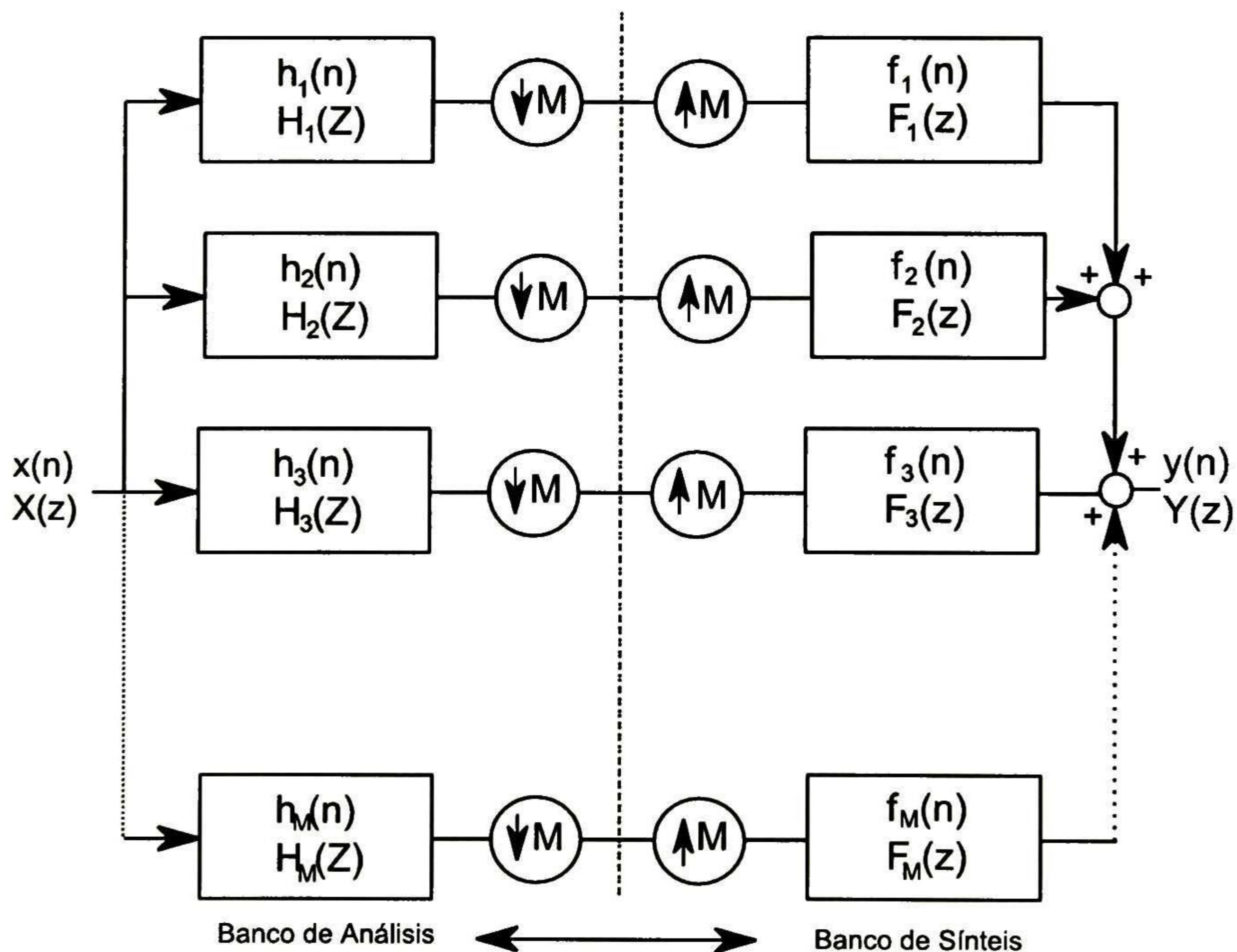


Figura 6.15 Esquema de banco de filtros de M canales

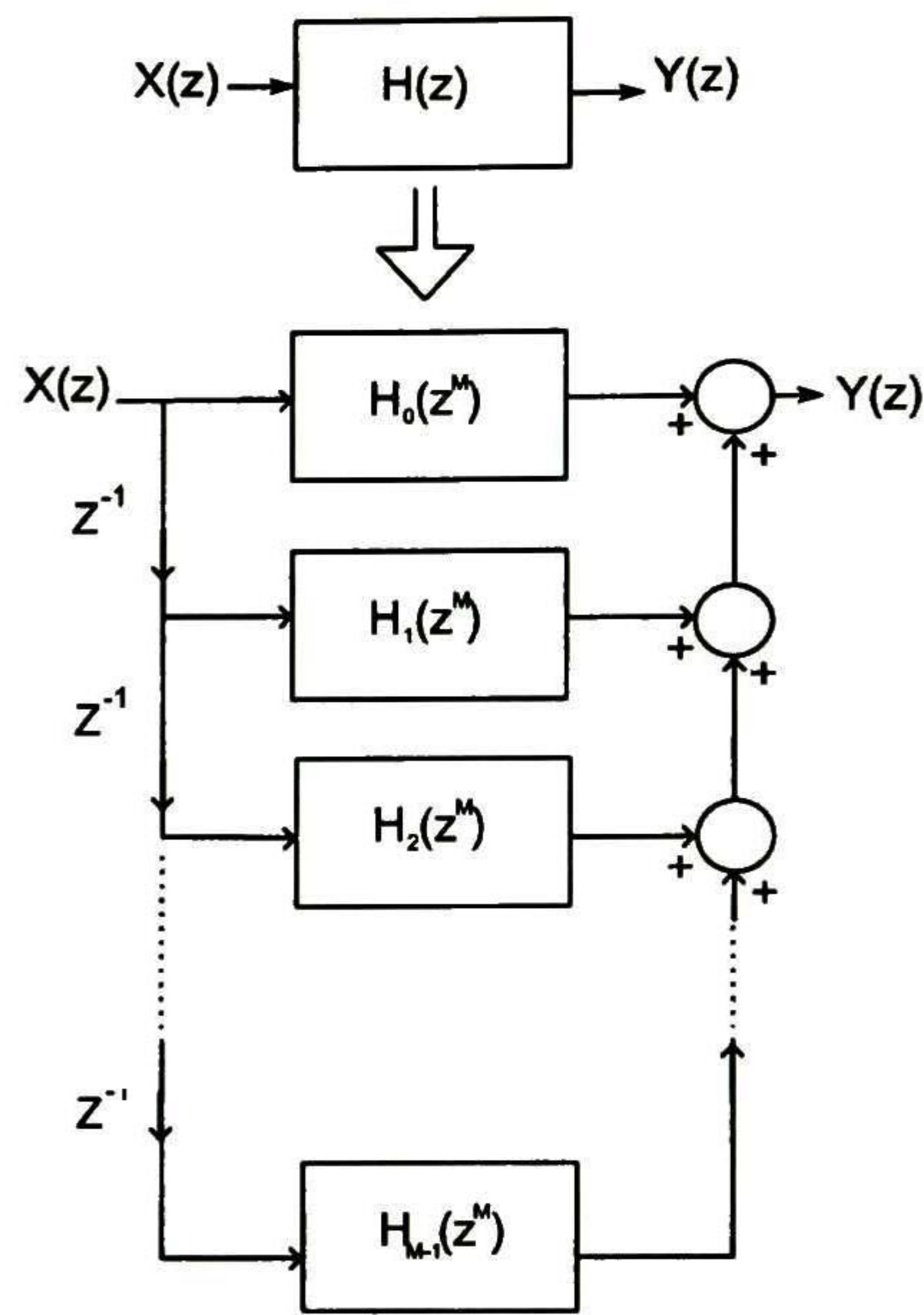


Figura 6.16 Estructura de filtros polifásicos

6.4.1 Banco de filtros de M canales

Para propósitos de este trabajo solo se considera la estructura en bancos de filtros de la figura 6.16. Esta es la más sencilla de todas porque los bloques usados en el banco son retardos en vez de filtros, y esto hace que los cálculos sean más rápidos y también permite mantener la propiedad de reconstrucción perfecta.

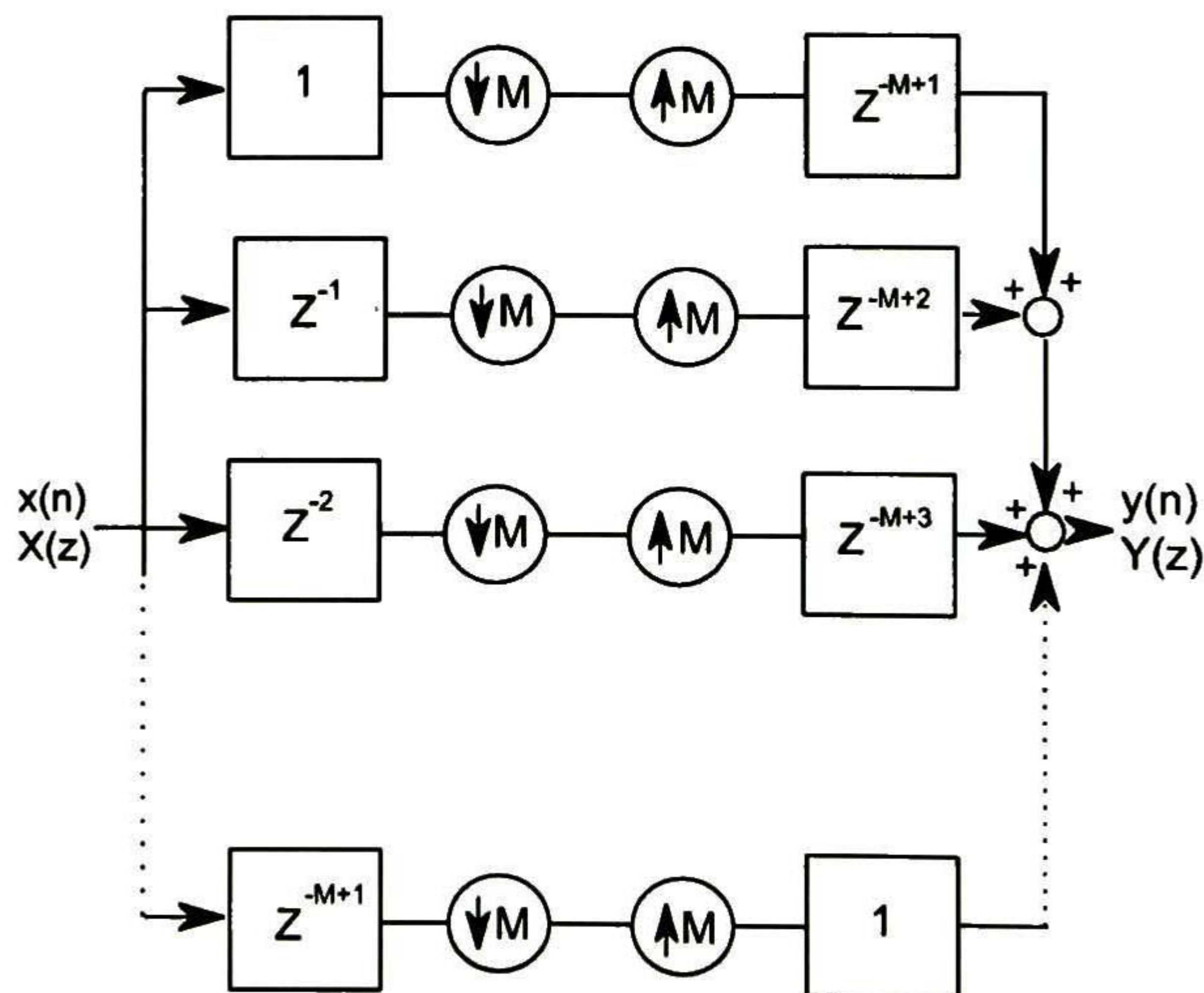


Figura 6.174 Banco de filtros de M canales con retardos

La relación entrada salida de este banco se puede calcular como sigue haciendo uso de las expresiones (3.9) y (3.21):

$$Y(z) = \frac{1}{M} \left[\sum_{k=0}^{M-1} X(W_k z) z^{-M+1} + \sum_{K=0}^{M-1} (W_k z)^{-1} X(W_k z) z^{-M+2} + \sum_{K=0}^{M-1} (W_k z)^{-2} X(W_k z) z^{-M+3} + \dots + \sum_{K=0}^{M-1} (W_k z)^{-M+1} X(W_k z) z^{-M+M} \right] \quad (6.20)$$

donde:

$$W_k = e^{-j2\pi k/M} \quad (6.21)$$

La ecuación 6.20 se puede reescribir como sigue:

$$Y(z) = \frac{1}{M} \left[\sum_{i=0}^{M-1} \sum_{K=0}^{M-1} (W_k z)^{-i} X(W_k z) z^{-M+1+i} \right] \quad (6.22)$$

O bien, intercambiando el orden de las sumatorias:

$$Y(z) = \frac{1}{M} \sum_{K=0}^{M-1} X(W_k z) z^{-M+1} \sum_{i=0}^{M-1} W_k^i \quad (6.23)$$

Para $k \neq 0$ la suma interior en (6.23) siempre es cero, como se ilustra en la figura 6.18 que proporciona 3 diferentes ejemplos: para $M=N, M=3$ y $M=4$. Para cada uno de éstos, la suma de los W_k s siempre es cero ya que son fasores y por tal motivo la suma en (6.23) es una suma fasorial. Para $k=0$, que es el único valor en el que no se anula la suma, entonces se tiene la relación entrada salida de la expresión (6.24).

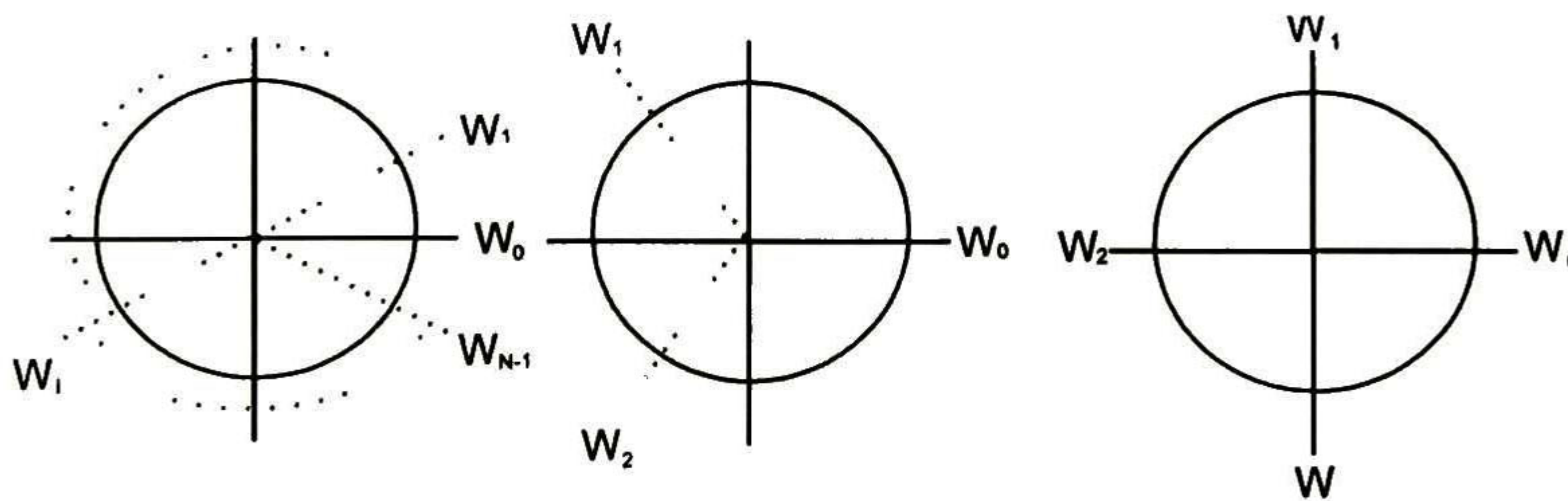


Figura 6.18 Cancelación del aliasing

$$Y(z) = X(z) z^{-M+1} \quad (6.24)$$

Se puede observar en esta expresión que la salida solo es un versión retardada en $M-1$ muestras con respecto a la entrada, lo cual me permite obtener una reconstrucción perfecta.

6.4.2 Estructuras de filtros polifásicos

El término polifásico en diseño teoría de filtros hace referencia a un esquema como el de la figura 6.16, que tiene como objetivo dividir un sistema en M subsistemas paralelos como lo expresa la relación:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} H_k(z)z^{-k} \quad (6.25)$$

Supongamos que se tiene un filtro FIR con N coeficientes, y sea M un múltiplo entero de N ; de esta manera, podemos hacer una partición de un filtro de N coeficientes en M sub-filtros de menor longitud. Por ejemplo para $N=6$ y $M=2$ tenemos qué:

$$H(z) = \sum_{k=0}^5 h_k z^{-k} = h_0 z^{-0} + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + h_3 z^{-3} + h_4 z^{-4} + h_5 z^{-5} \quad (6.26)$$

$$H(z) = z^{-0}[h_0 z^{-0} + h_2 z^{-2} + h_4 z^{-4}] + z^{-1}[h_1 z^{-0} + h_3 z^{-2} + h_5 z^{-4}] \quad (6.27)$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^2 z^{-k} H_k(z^M) \quad (6.28)$$

Cada sub-filtro $H_k(z^D)$ se puede escribir en forma genérica como sigue:

$$H_k(z^M) = \sum_{m=0}^{M-1} h_{k+mM} z^{mM} \quad (6.29)$$

Se denomina realización polifásica del filtro $H(z)$ a la representación en (6.29). Con esta implementación se puede llegar a versiones más eficientes de realizaciones y cálculos con bancos de filtros en los que, tanto el uso de memoria como el número de operaciones se ven reducidos. Una cualidad muy importante de este tipo de filtros es que z aparece como una potencia de M para cada sub-filtro y de esta manera la identidad noble se puede usar sin pérdida de precisión.

Para los filtros IIR existe una restricción adicional en su implementación mediante una estructura polifásica. Los filtros IIR pueden ser factorizados con estructuras polifásicas si en el denominador los términos en z son potencias del factor de diezmado M . Si el denominador no tiene esta forma, en algunos casos se pueden hacer algunas operaciones para lograr la forma deseada como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} &= \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \frac{1+\alpha z^{-1}}{1+\alpha z^{-1}} = \\ \frac{1+\alpha z^{-1}}{1-\alpha z^{-2}} &= \frac{1}{1-\alpha z^{-2}} + z^{-1} \frac{\alpha}{1-\alpha z^{-2}} \end{aligned} \quad (6.30)$$

6.4.3 Esquema de convolución

El esquema de convolución propuesto a continuación consiste en una conexión en cascada de los modelos mostrados en las figuras 6.16 y 6.17 como se ilustra en la figura 6.19.

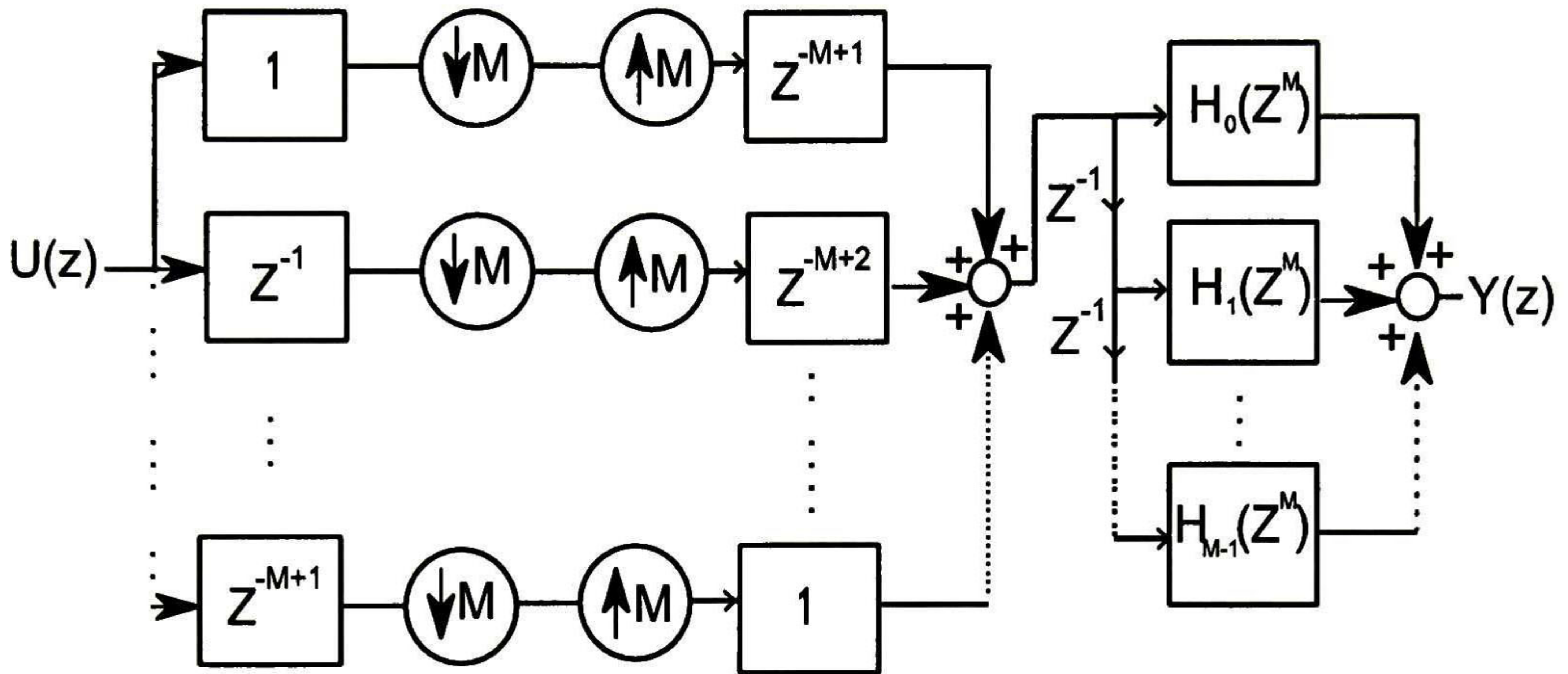


Figura 6.19 Diagrama de convolución propuesto

Aplicando álgebra de bloques y la identidad noble se llega al esquema de la figura 6.20. Éste tiene la ventaja de que los cálculos se hacen en la etapa entre el diezmado y el interpolado, de tal manera que el número de muestras es reducido y, de este modo, se hace un número menor de operaciones. Este ahorro tiene asociados dos efectos: 1) la salida estará retardada $M-1$ muestras con respecto a la entrada, y 2) Se hará un número mucho mayor de operaciones (dependiendo del factor de diezmado usado) en comparación con el sistema original. La ventaja está en que las operaciones se pueden realizar en etapas totalmente independientes permitiendo el uso de procesadores en paralelo y garantizando que cada procesador tenga menos carga computacional en la medida que se incremente el factor de diezmado.

Para el modelo de la figura 6.20 se requiere calcular la estructura polifásica de la función de transferencia en el dominio del tiempo y luego convolucionar esta con las entradas del sistema previamente descompuesta con el banco de filtros. Para este enfoque se probaron 2 sistemas, un sistema de 9 nodos en los anexos y el sistema de orden 2 de la figura 6.21 con los respectivos parámetros proporcionados en la tabla 7.

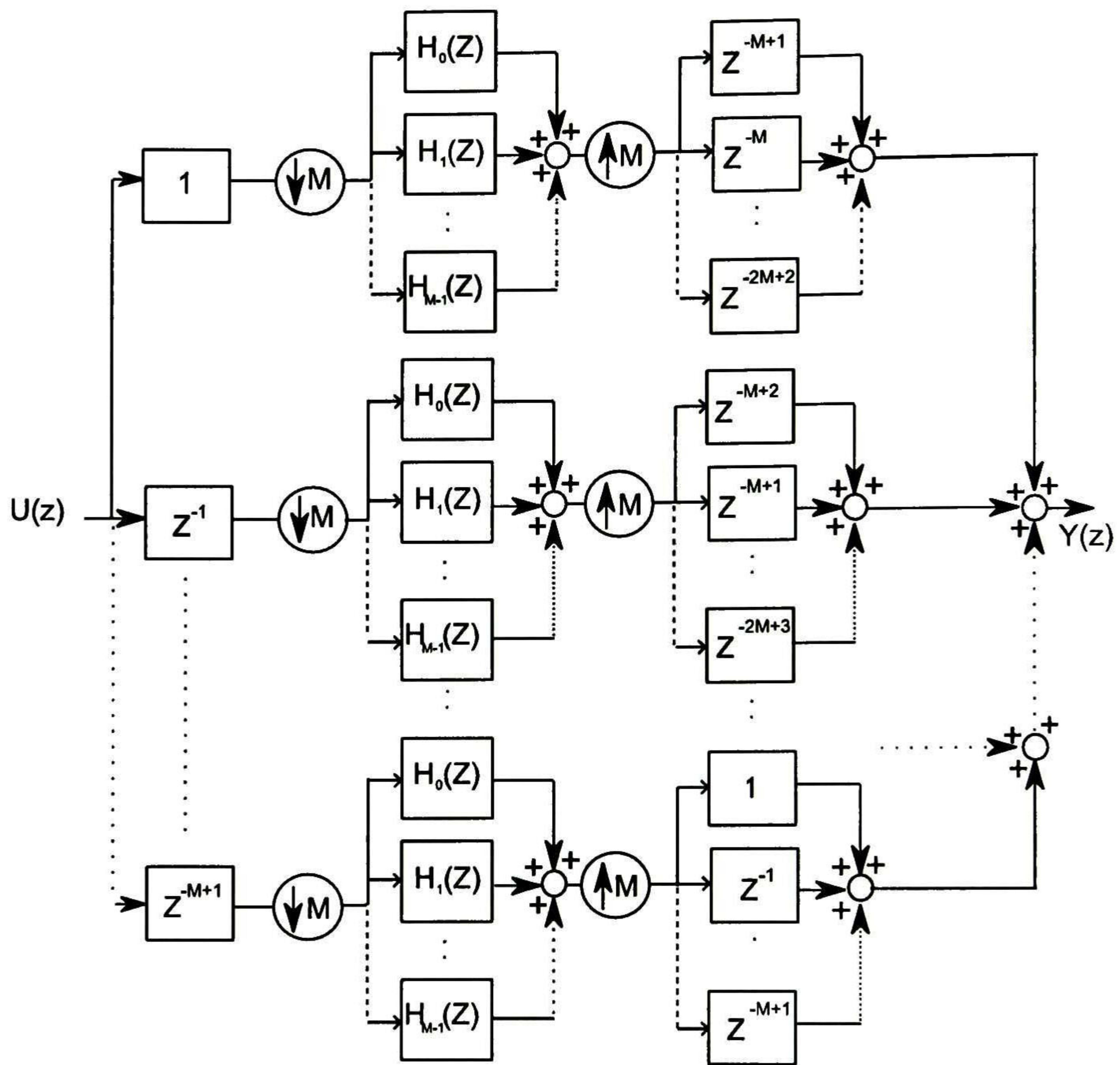


Figura 6.20 Implementación de bancos de filtros y estructuras polifásicas para la convolución en sistemas lineales

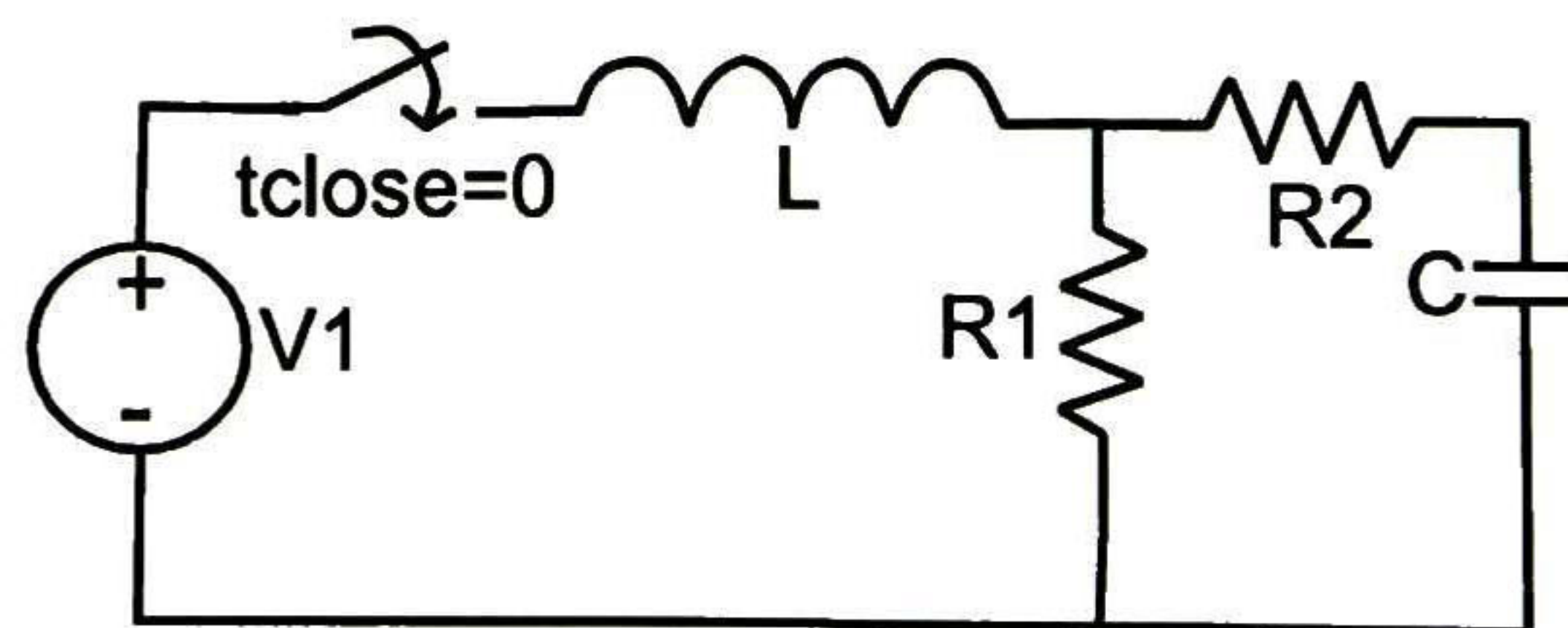


Figura 6.21 Sistema de Prueba

Parámetros	Valores
Resistencias	$R_1 = 5\Omega$ $R_2 = 2\Omega$
Inductor	_____
Capacitor	
Excitación	$V_{in} = 120 \sin(2\pi 2t)$
Δt	0.0125 s
Condiciones iniciales	

Tabla 7 Parámetros del sistema

Las figuras 6.22 y 6.23 muestran la solución del sistema mediante el esquema de convolución aquí propuesto. Se han considerado los factores de diezmado de $M=1$, $M=3$, $M=4$ y $M=6$.

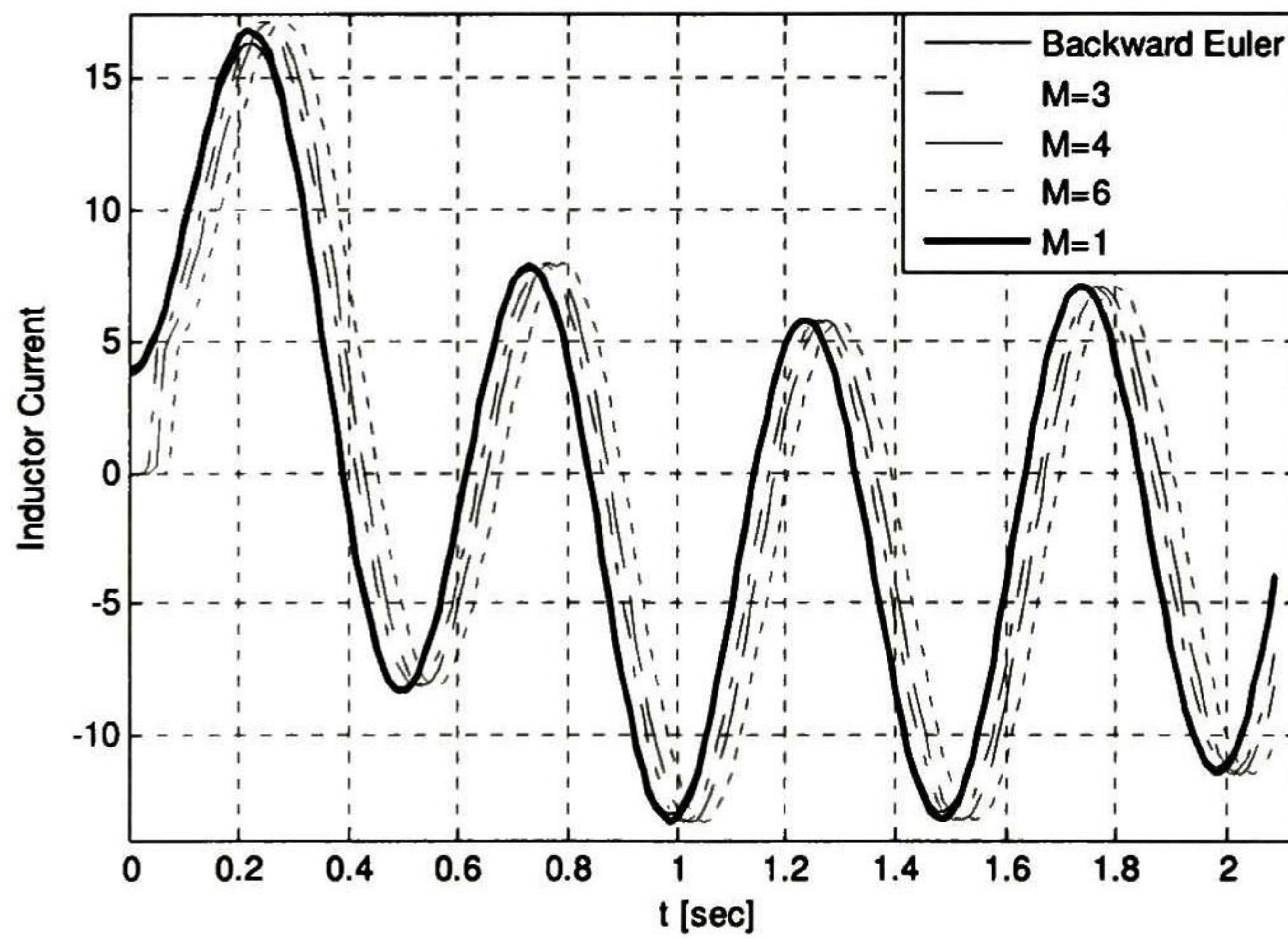


Figura 6.22 Corriente del inductor

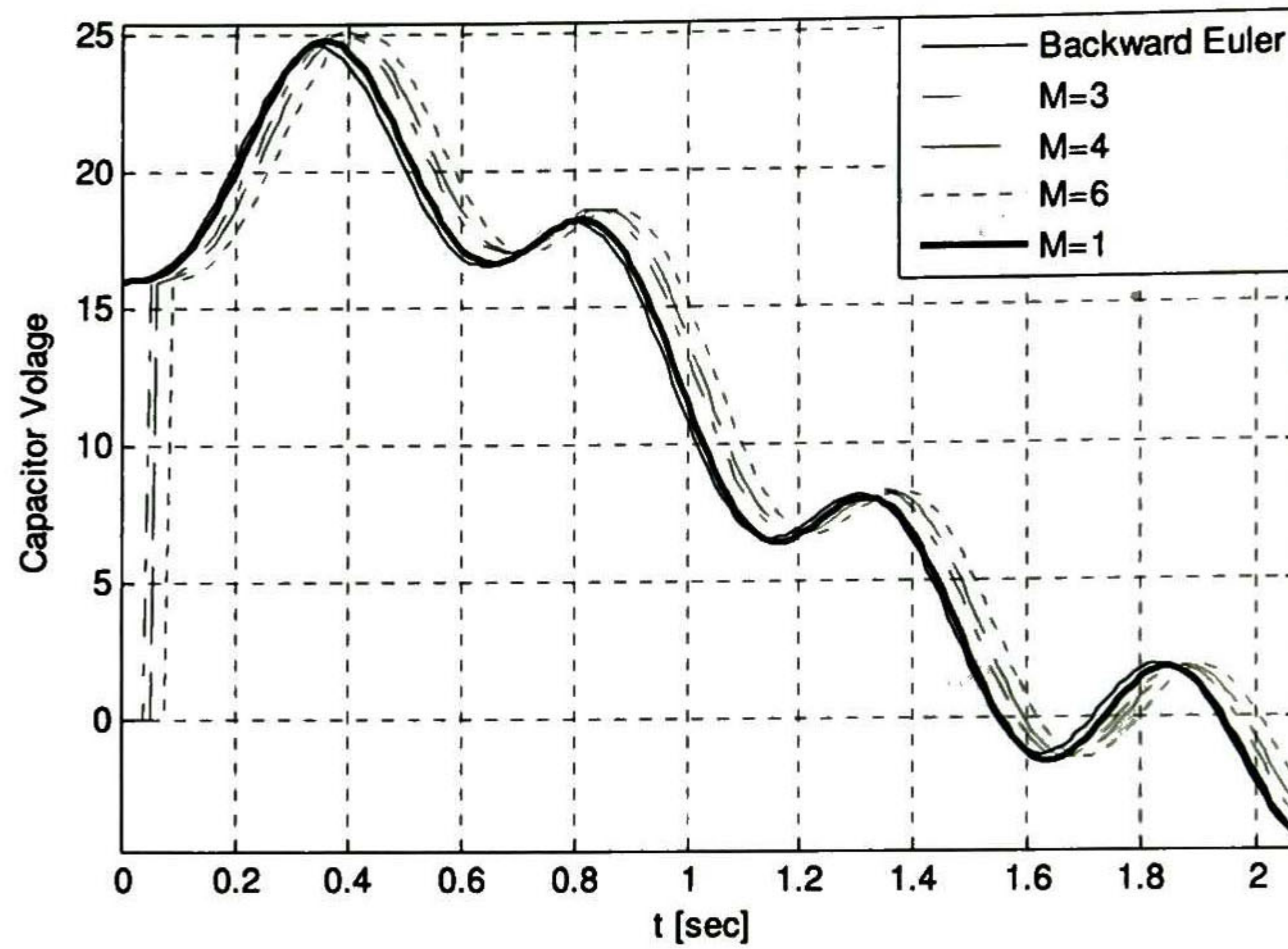


Figura 6.23 Voltaje del Capacitor

En los resultados de las figuras 6.22 y 6.23 podemos observar que a pesar de los problemas de varianza con el tiempo mencionados anteriormente, las estructuras de filtros polifásicos en conjunto con los bancos de filtros nos proporcionan una excelente herramienta para solucionar este inconveniente. Sin embargo, la solución con esta metodología está atada a la obtención de estructuras polifásicas de los sistemas a desarrollar; además, la respuesta tendrá un retardo proporcional al valor de diezmado que usemos en las simulaciones.

Conclusiones

El crecimiento en tamaño y complejidad de las redes de suministro de energía ha motivado en los últimos años el uso de técnicas digitales para analizar y simular sus respuestas dinámicas. Los cálculos propuestos en este trabajo se basan en técnicas de procesamiento digital de señales, las cuales se vienen usando cada vez más debido a la evolución tecnológica en este campo. En este trabajo, se han usado esquemas de bancos de filtros con el fin de explorar más herramientas para aplicaciones de sistemas eléctricos de potencia y, a su vez, se ha buscado aprovechar las características de multirresolución y ubicación tiempo-frecuencia de la metodología y, de esta manera, poder relajar el ancho de bandas de las simulaciones.

Es posible hacer uso de la TDO y de esquemas de bancos de filtros con su enfoque de multirresolución para la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales y, en específico, para la simulación de sistemas eléctricos de potencia. Se han tomado en cuenta tres enfoques dependiendo de la aplicación que se requiera. El primero que se ha denominado método 1 disminuye el costo computacional pero pierde precisión. El segundo, que se ha denominado método 2, no pierden precisión pero tiene un costo computacional elevado. El tercero denominado método 3, es un esquema con buena precisión y además permite implementación en paralelo. El inconveniente de este último radica en el retardo en la salida y en lo complejo que puede resultar el llegar al modelo polifásico del sistema bajo estudio.

El primer enfoque propuesto, que tiene que ver con la perspectiva de cálculo en paralelo con Ondeletas, es muy útil cuando se desean hacer simulaciones de manera ágil y cuando se puedan desprestigiar algunas bandas de frecuencias; además del hecho de que el cálculo es efectuado en paralelo. Cada sistema en paralelo corresponde a una sub-banda de frecuencias del sistema como se muestra en la figura 6.21. De esta manera uno puede escoger las bandas que más aportan en el modelo y las demás se pueden obviar.

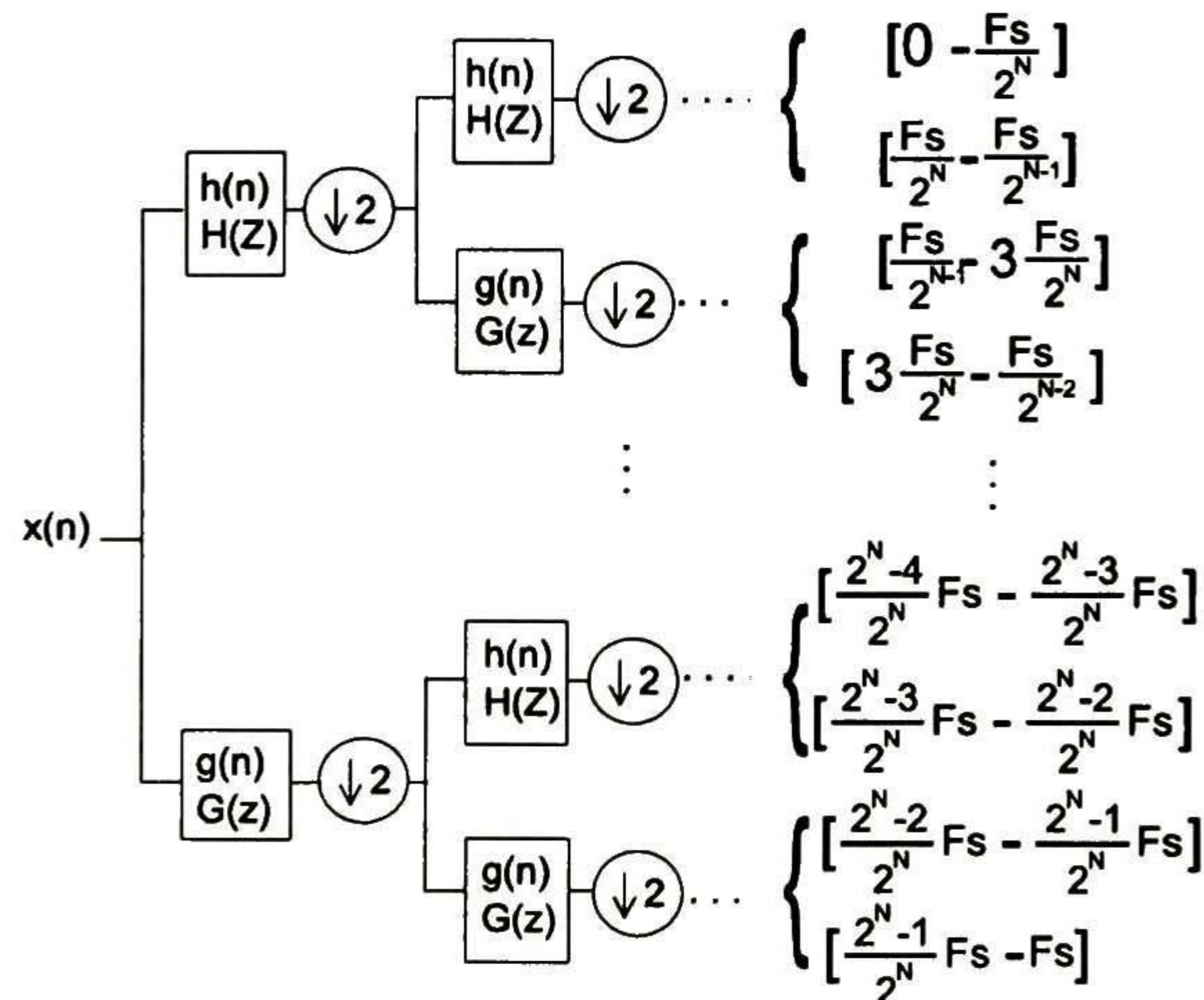


Figura 6.24 División por frecuencias

Una de las limitantes de este enfoque es que, al dividir al sistema de estudio en muchas sub-bandas de frecuencia hace que el modelo no funcione de manera adecuada debido a que las reglas de integración, a medida que se incluyen más etapas de diezmado, se van modificando como se explicó en la sección 6.2 llegando a un punto en el cual no serán validas. Para los ejemplos aquí desarrollados, después de 3 etapas de descomposición, (es decir $N=3$) los resultados no son muy precisos aunque este valor se ve muy influenciado por la frecuencia de muestreo F_s que escogamos para la simulación sin incluir etapas de descomposición. A medida que usemos un F_s mucho mayor al ancho de banda del sistema, podemos aplicar cada vez más etapas de descomposición sin perder mucha precisión en los resultados.

Las soluciones obtenidas en algunos de los sistemas propuestos están en el dominio Ondeleta. Para pasarlas al dominio del tiempo es necesario aplicar la transformada Ondeleta inversa, lo cual se traduce en multiplicar la respuesta del sistema por la matriz de transformación Ondeleta transpuesta. De esta manera, el estudio realizado nos ofrece una solución en dos dominios. Esto nos permite explotar todas las utilidades que la herramienta Ondeleta proporciona; como por ejemplo, la representación tiempo-escala de las señales, la clasificación de señales, entre otras.

El principal inconveniente de la implementación de esquemas de cálculo en paralelo usando la teoría de bancos de filtros y multirresolución es la variación temporal de la operación de diezmado, la cual no nos permite obtener una reconstrucción perfecta limitando así en gran parte el potencial de la herramienta. La solución que se propone para este problema con los esquemas de filtros polifásicos es muy eficiente, pero con algunos inconvenientes, entre los cuales está la representación del sistema, que tiene que ser mediante funciones de transferencia en el dominio del tiempo o con filtros FIR.

El segundo enfoque propuesto en esta tesis, que está basado en la ecuación de Lyapunov representa una alternativa buena para solucionar sistemas lineales en general que puedan representarse en la forma de espacio de estados como se explicó en la sección 6. De esta manera, este segundo enfoque es aplicable a cualquier transformación matricial en general. Una de las ventajas de usarlo para el dominio Ondeleta es que es posible anular algunas sub-bandas de frecuencia y de esta manera hacer cada vez más ligero el cálculo. El único inconveniente es que se necesita resolver la ecuación de Lyapunov para llegar a la solución del sistema y en algunos casos esto puede resultar muy tardado.

En teoría el uso de la TDO, de los bancos de filtros y de los esquemas de multirresolución para la solución de sistemas eléctricos es posible, aunque la competencia con otras técnicas es muy fuerte. Esto hace que el desarrollo de las aplicaciones de Ondeletas en este campo sea muy limitado y poco estudiado. Sin embargo, promete tener muchas aplicaciones si se llegan a resolver algunos de los problemas planteados en este documento.

Por último, el tercer enfoque que está basado en bancos de filtros y en estructuras de filtros polifásicos, nos permite paralelizar el sistema tantas veces como deseemos. El costo de esto es que, a medida que incrementemos el número de etapas en paralelo la salida estará más retardada con respecto a la entrada pero sin perder precisión. La variación temporal de las etapas de diezmado e interpolación no son problema para el esquema propuesto; sin embargo, el principal inconveniente de esta estructura está relacionado con la obtención de las funciones de transferencia del sistema.

Trabajos futuros

Como ya se ha comentado, hay muchos tópicos que aún faltan por explotar en aplicaciones de bancos de filtros, y en específico, en su enfoque en multirresolución. A modo general, lo que se busca con esta investigación es obtener una herramienta para hacer cálculos de manera más ágil mediante un enfoque de multirresolución y transformada Ondeleta. Esto en teoría se puede hacer mediante la aplicación de la primera identidad noble; pero, llevarlo a la práctica aún no es un hecho real. Por este motivo se debe seguir estudiando cómo poder llegar a una reconstrucción perfecta sin incrementar el costo computacional; o, si éste es incrementado, que sea mediante procesos en paralelo para así no alargar el tiempo de simulación del sistema en conjunto.

Otro aspecto que se puede agregar a este trabajo es el incluir otro tipo de elementos en los cálculos y evaluar cómo se comportan los esquemas propuestos con dichos elementos por ejemplo: Modelos avanzados de líneas de transmisión; elementos no lineales, con histéresis y dependientes de alguna variable; entre otros.

Una aplicación muy promisoriosa de este trabajo es poder integrar esta herramienta con otras, que a su vez, también reduzcan el esfuerzo de cálculo. Estas herramientas pueden ser sistemas de orden reducido o modelos que empleen una división física del sistema, como por ejemplo el MATE [18], un sistema que estaría dividido, tanto en frecuencia como físicamente, que promete ser mucho más veloz y potente para cálculos en tiempo real.

Aunque los ejemplos de aplicación aquí presentados han sido simples, se puede buscar la manera de modelar sistemas más complejos y también cuantificar los costos computacionales de los modelos desarrollados. Ésto para tener un punto de comparación más tangible en cuanto a la velocidad de los esquemas aquí propuestos.

Bibliografía

- [1] J. Strang and T. Nguyen, *Wavelet and Filter Banks*, Wellesley-Cambridge Press, 1996.
- [2] C. S. Burrus, R. A. Gopinath and H. Guo, *Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms*, Prentice Hall, 1998.
- [3] J. G. Proakis and D. G. Manolakis, *Tratamiento digital de señales, 4ed.* Prentice Hall, 2007.
- [4] Ronald E. Crochiere and Lawrence R. Rabiner, *Multirate Digital Signal Processing*, Acoustics Research department Bell Laboratories, Muurray hills - New Jersey 1983.
- [5] A. W. Galli, *Analysis of Electrical Transients in Power Systems Via a Novel Wavelet Recursion Method*, Tesis Doctoral Purdue University, 1997.
- [6] G.T.Heydt, A.W.Galli, "Transient power quality problems analyzed using wavelets," *Power Delivery, IEEE Transactions on* , vol.12, no.2, pp.908,915, Apr 1997.
- [7] Meliopoulos, A. P S; Chien-Hsing Lee, "An alternative method for transient analysis via wavelets," *Power Delivery, IEEE Transactions on* , vol.15, no.1, pp.114,121, Jan 2000.
- [8] Meliopoulos, A. P S; Chien-Hsing Lee, "Power disturbance analysis via wavelet domain equivalents," *Harmonics and Quality of Power Proceedings, 1998. Proceedings. 8th International Conference On*, vol.1, 14-18, pp.388,394 Oct 1998.
- [9] Tongxin Zheng; Makram, E.B.; Girgis, A.A., "Power system transient and harmonic studies using wavelet transform," *Power Delivery, IEEE Transactions on* , vol.14, no.4, pp.1461,1468, Oct 1999.
- [10] Szczupak, J.; Facerolli, S. T.; Guedes, K. B., "Electrical network simulation by multirate parallel digital filter structures," *Power Tech Conference Proceedings, 2003 IEEE Bologna* , vol.3, no., pp.6 pp. Vol.3,, 23-26 June 2003.
- [11] Szczupak, J.; Faceroli, S.T.; da Silva, K.G.C., "Subband decomposition oriented multirate electrical power network digital simulation," *Circuits and Systems, 2003. ISCAS '03. Proceedings of the 2003 International Symposium on* , vol.3, no., pp.III-391,III-394 vol.3, 25-28 May 2003.
- [12] Szczupak, J.; Klausner, J.C.; Duque, C.A., "Power system simulation using digital filter structures," *Circuits and Systems, 1993., ISCAS '93, 1993 IEEE International Symposium on* vol., no., pp.2672,2675 vol.4, 3-6 May 1993.
- [13] Venerdini, G.D.G.; Zini, H.C.; Rattá, G., "Two-channel multirate network equivalent aimed to real-time electromagnetic transient calculation," *Generation, Transmission & Distribution, IET*, vol.6, no.8, pp.738,750, August 2012.
- [14] Zini, H.; Ratta, G., "Multirate modeling scheme for electromagnetic transients calculation," *Power Delivery, IEEE Transactions on* , vol.19, no.1, pp.240,247, Jan. 2004.
- [15] Venerdini, G.D.G.; Zini, H.C.; Ratta, G.; Arispe, J.C.G., "Multirate network equivalent model for electromagnetic transient calculation in real time," *Transmission and Distribution Conference and Exposition: Latin America (T&D-LA), 2010 IEEE/PES* , vol., no., pp.155,162, 8-10 Nov. 2010.

- [16] Falcao, D.M.; Kaszkurewicz, E.; Almeida, H. L S, "Application of parallel processing techniques to the simulation of power system electromagnetic transients," *Power Systems, IEEE Transactions on* , vol.8, no.1, pp.90,96, Feb 1993.
- [17] José R. Martí, Luis R. Linares, Jorge A. Hollman, Fernando A. Moreira, "OVNI: Integrated Software/Hardware Solution for Real-Time Simulation of Large Power System," *Power Systems Computation Conference, Sevilla Spain 2002*.
- [18] M.A. Tomim J. R. Martí, L. Wang, "Parallel solution of large power system networks using the Multi-Area Thévenin Equivalents (MATE) algorithm," *ELSEVIER Power Systems Computation Conference (PSCC)*, vol 31, Issue 9, pp 497–503, October 2009.
- [19] Armstrong, M.; Marti, J.; Linares, L.; Kundur, P., "Multilevel MATE for Efficient Simultaneous Solution of Control Systems and Nonlinearities in the OVNI Simulator," *Power Engineering Society General Meeting, 2007. IEEE* , vol, pp.1,1, 24-28 June 2007.
- [20] Fernando A. Moreira, José R. Martí, and Luis Linares "Electromagnetic Transients Simulation with Different Timency Steps – The Latency Approach." *IPST New Orleans 2003*.
- [21] F.A. Moreira, J.A. Hollman, L.R. Linares and J.R. Martí "Network Decoupling by Latency Exploitation and Distributed Hardware Architecture," *Department of Electrical and Computer Engineering, The University of British Columbia*.
- [22] Sarkar, T.K.; Su, C.; Adve, R.; Salazar-Palma, M.; Garcia-Castillo, L.; Boix, R.R., "A tutorial on wavelets from an electrical engineering perspective. I. Discrete wavelet techniques," *Antennas and Propagation Magazine, IEEE* , vol.40, no.5, pp.49,68, Oct 1998.
- [23] Sarkar, T.K.; Su, C., "A tutorial on wavelets from an electrical engineering perspective .2. The continuous case," *Antennas and Propagation Magazine, IEEE* , vol.40, no.6, pp.36,49, Dec. 1998.
- [24] Chul-Hwan Kim; Aggarwal, R., "Wavelet transforms in power systems. I. General introduction to the wavelet transforms," *Power Engineering Journal* , vol.14, no.2, pp.81,87, April 2000.
- [25] Chul-Hwan Kim; Aggarwal, R., "Wavelet transforms in power systems. II. Examples of application to actual power system transients," *Power Engineering Journal* vol.15, no.4, pp.193,202, Aug. 2001.
- [26] Daubechies, I., "Where do wavelets come from? A personal point of view," *Proceedings of the IEEE* , vol.84, no.4, pp.510,513, Apr 1996.
- [27] Nason, G.P., "A little introduction to wavelets," *Applied Statistical Pattern Recognition (Ref. No. 1999/063), IEE Colloquium on* , pp.1/1,1/6, 1999.
- [28] A. HAbibi , *Introduction to wavelets*, IEEE 1995.
- [29] G. Strang, "Wavelets Transform VS Fourier Transform," *American Mathematical Society*, 1993.
- [30] Marti, Jose R.; Lin, Jiming, "Suppression of numerical oscillations in the EMTP power systems," *Power Systems, IEEE Transactions on* , vol.4, no.2, pp.739,747, May 1989.

- [31] Alvarado, F.L., "Parallel Solution of Transient Problems by Trapezoidal Integration," Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on , vol.PAS-98, no.3, pp.1080,1090, May 1979.
- [32] Naredo, J.L.; Guardado, L.; Gutierrez-Robles, J. A.; Moreno, P.; Uribe, F.A.; Ortiz, V.H.; Snider, L. A., "Trends in the frequency domain analysis of electromagnetic transients," Power & Energy Society General Meeting, 2009. PES '09. IEEE, pp.1,5, 26-30 July 2009.
- [33] Tan, R.H.G.; Ramachandramurthy, V.K., "Power system transient analysis using scale selection wavelet transform," TENCON 2009 - 2009 IEEE Region 10 Conference , pp.1,6, 23-26 Jan. 2009.
- [34] Galli, A.W.; Nielsen, O.M., "Wavelet analysis for power system transients," Computer Applications in Power, IEEE , vol.12, no.1, pp.16, 18, 20, 22, 24,25, Jan 1999.
- [35] Parameswariah, C.; Cox, M., "Frequency characteristics of wavelets," Power Delivery, IEEE Transactions on , vol.17, no.3, pp.800,804, Jul 2002.
- [36] Koppurapu, C.; Chandrasekaran, A., "A study on the application of wavelet analysis to power quality," System Theory, 1998. Proceedings of the Thirtieth Southeastern Symposium on , vol., no., pp.350,353, 8-10 Mar 1998.
- [37] Chirag A. Naik , Prasanta Kundu, "Power Quality index based on discrete wavelet transform," ELSEVIER International Journal of Electrical Power & Energy Systems, Volume 53, Pages 994–1002, December 2013.
- [38] Al-rawi, A.; Devaney, M., "Wavelets and power system transient analysis," Instrumentation and Measurement Technology Conference, 1998. IMTC/98. Conference Proceedings. IEEE , vol.2, pp.1331,1334, May 1998.
- [39] Robertson, D.C.; Camps, O.I.; Mayer, J.S.; Gish, William B., "Wavelets and electromagnetic power system transients," Power Delivery, IEEE Transactions on , vol.11, no.2, pp.1050,1058, Apr 1996.
- [40] Wilkinson, W.A.; Cox, M.D., "Discrete wavelet analysis of power system transients," Power Systems, IEEE Transactions on , vol.11, no.4, pp.2038,2044, Nov 1996.
- [41] Reddy, V.M.; Rao, S.; Mercede, F.J., "On the use of wavelets for the detection and analysis of power system transients," Power Engineering Society 1999 Winter Meeting, IEEE vol.2, no., pp.1293,1299 vol.2, 31 Jan-4 Feb 1999.
- [42] Jaehak Chung; Powers, E.J.; Grady, W.M.; Bhatt, S.C., "Electric power transient disturbance classification using wavelet-based hidden Markov models," Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2000. ICASSP '00. Proceedings. 2000 IEEE International Conference on vol.6, no., pp.3662,3665 vol.6, 2000.
- [43] Lobos, T.; Rezmer, J.; Koglin, H.-J, "Analysis of power system transients using wavelets and Prony method," Power Tech Proceedings, 2001 IEEE Porto , vol.4, no., pp.4 pp. vol.4,, 2001.
- [44] Galli, A.W.; Heydt, G.T.; Ribeiro, P.F., "Exploring the power of wavelet analysis," Computer Applications in Power, IEEE , vol.9, no.4, pp.37,41, Oct 1996.

- [45] E Gómez, D Silva, G Aponte, "Selección de una Wavelet madre para el análisis frecuencial de señales eléctricas transitorias usando WPD," *Ingeniare, Revista chilena de ingeniería*, 2013.
- [46] D. Robertson, O. Campos and J. Meyer "Wavelets and Power System Transients," SPIE International Symposium on Optical Engineering in Aerospace Sensing, 1994.
- [47] Paul F. Ribeiro, "Wavelet Transform: An Advanced tool for Analysis Non-stationary Harmonic Distortions in Power Systems," IEEE International Conference on Harmonics in Power Systems, pp.365-369, Bologna - Italy, 1994.
- [48] Mo, F.; Kinsner, W., "Wavelet modelling of transients in power systems," WESCANEX 97: Communications, Power and Computing. Conference Proceedings., IEEE, pp.132,137, May 1997.
- [49] Devaux, O.; Levacher, L.; Huet, O., "An advanced and powerful real-time digital transient network analyser," *Power Delivery, IEEE Transactions on* , vol.13, no.2, pp.421,426, Apr 1998.
- [50] F. Plumier, C. Geuzaine, and T. Van Cutsem "A multirate approach to combine electromagnetic transients and fundamental-frequency simulations," International Power System Transients conference - IPST Vancouver - July 2013.
- [51] Jingjia Chen; Crow, M.L.; Chowdhury, B.H.; Acar, Levent, "An error analysis of the multirate method for power system transient stability simulation," *Power Systems Conference and Exposition, 2004. IEEE PES* , vol., no., pp.982,986 vol.2, 10-13 Oct. 2004.
- [52] A. Verhoeven, B. Tasi, T.G.J. Beelen, E .J.W. ter Maten and R.M.M. Mattheij, "BDF Compound-Fast Multirate Transient Analysis with Adaptive Stepsize Control,' *Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics* 2008.
- [53] Toshiji Kato and Takeshi Kataoka', "Circuit Analysis by a New Multirate Method," *Electrical Engineering in Japan*, 1999.
- [54] Semlyen, A.; de Leon, F., "Computation of electromagnetic transients using dual or multiple time steps," *Power Systems, IEEE Transactions on* , vol.8, no.3, pp.1274,1281, Aug 1993.
- [55] Xiaoji Ye; Wei Dong; Peng Li; Nassif, S., "MAPS: Multi-Algorithm Parallel circuit Simulation," *Computer-Aided Design, 2008. ICCAD 2008. IEEE/ACM International Conference on* vol., no., pp.73,78, 10-13 Nov. 2008.
- [56] Tsuboi, N.; Asai, H., "Multi-Rate Latency insertion Method for the Fast Transient Simulation of Large Networks with Nonlinear Termination," *Electrical Performance of Electronic Packaging, 2006 IEEE* , vol., no., pp.137,140, 23-25 Oct. 2006.
- [57] Gunther, A. Kværnø and P. Rentrop, "Multirate Partitioned Runge–Kutta Methods," *BIT Numerical Mathematics*, Vol. 41, No. 3, pp. 504–514, 2001.
- [58] Vetterli, M., "A theory of multirate filter banks," *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on* , vol.35, no.3, pp.356,372, Mar 1987.
- [59] Eduardo Jacobo Arroyo, "*Algoritmos Rápidos para la Simulación de Transitorios Electromagnéticos en Redes de Energía Eléctrica*," Tesis de Maestría Cinvestav unidad Guadalajara 2006.

- [60] H. W. Dommel, "*Electromagnetic Transients Program Reference Manual (EMTP Theory Book)*," Prepared for Power Bonneville Administration, USA, 1986.
- [61] Felipe Alfonso Morales Silva, "*Simulación de Transitorios Electromecánicos en Sistemas Eléctricos de Potencia Mediante Procesamiento Paralelo*," Tesis Doctoral Pontificia Universidad Católica de Chile 1999.
- [62] Lin, Jiming; Marti, Jose R., "Implementation of the CDA procedure in the EMTP," *Power Systems*, IEEE Transactions on , vol.5, no.2, pp.394,402, May 1990.
- [63] N. Watson and J. Arrillaga, *Power Systems Electromagnetic Transient Simulations*, 2003.
- [64] Vaidyanathan, *Multirate systems and filter banks*, Prentice-Hall, Inc - 1993.
- [65] Kemin Zhou, John Comstock Doyle and Keith Glover, *Robust and optimal control*, Prentice Hall- 1996.

7 Anexos

Los métodos vistos sirven para solucionar cualquier sistema físico que se pueda describir como un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales. Los ejemplos ilustrados son basados en sistemas y redes eléctricas de cualquier orden. Los anexos aquí mostrados muestran los resultados de aplicar las tres metodologías propuestas para la solución y simulación de sistemas.

7.1 Anexo 1 - Circuito 3 nodos

En este anexo se ilustra el uso de la transformada Ondeleta para la solución de circuitos eléctricos mediante simulación en paralelo con duplicación de frecuencia de muestreo.

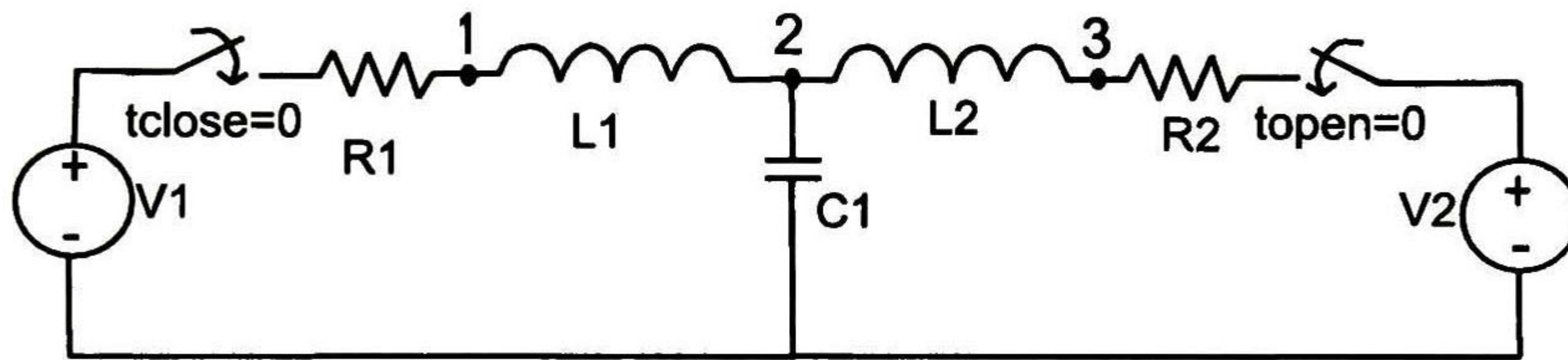


Figura 7.1 Circuito 4 Nodos

Parámetro	Valor
Resistencias	$R_1 = 160\Omega$ $R_2 = 110\Omega$
Inductancias	$L_1 = 200\mu H$ $L_2 = 10mH$
Capacitancias	$C_1 = 6\mu F$
Excitaciones	$V_1 = \mu(t)escalón\ unitario$ $V_2 = \mu(t)escalón\ unitario$
Paso de Integración	$\Delta t = 20\mu s$
Ondeleta Base	Haar

Tabla 8 Parámetros del sistema de la figura 7.1

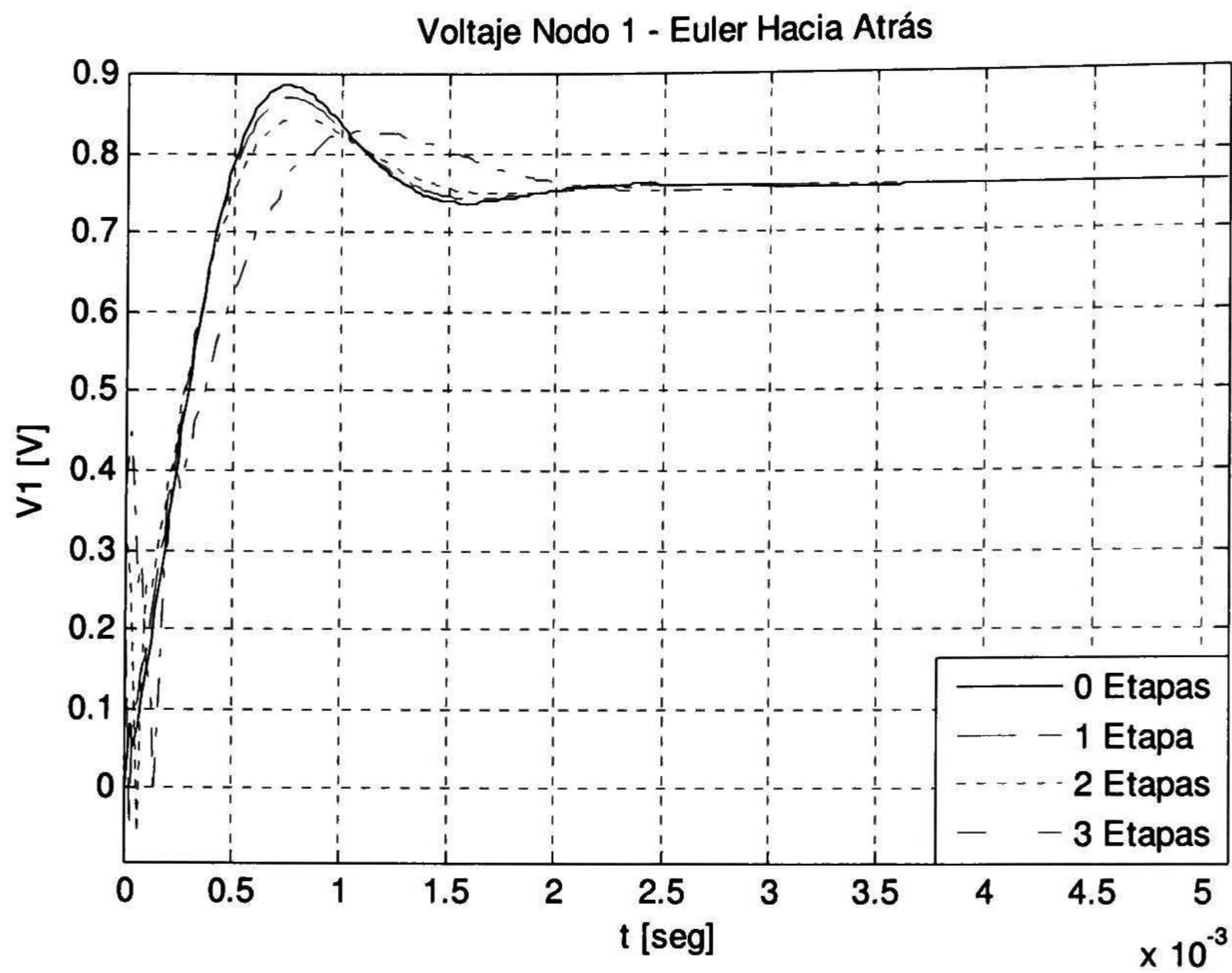


Figura 7.2 Voltaje nodo 1

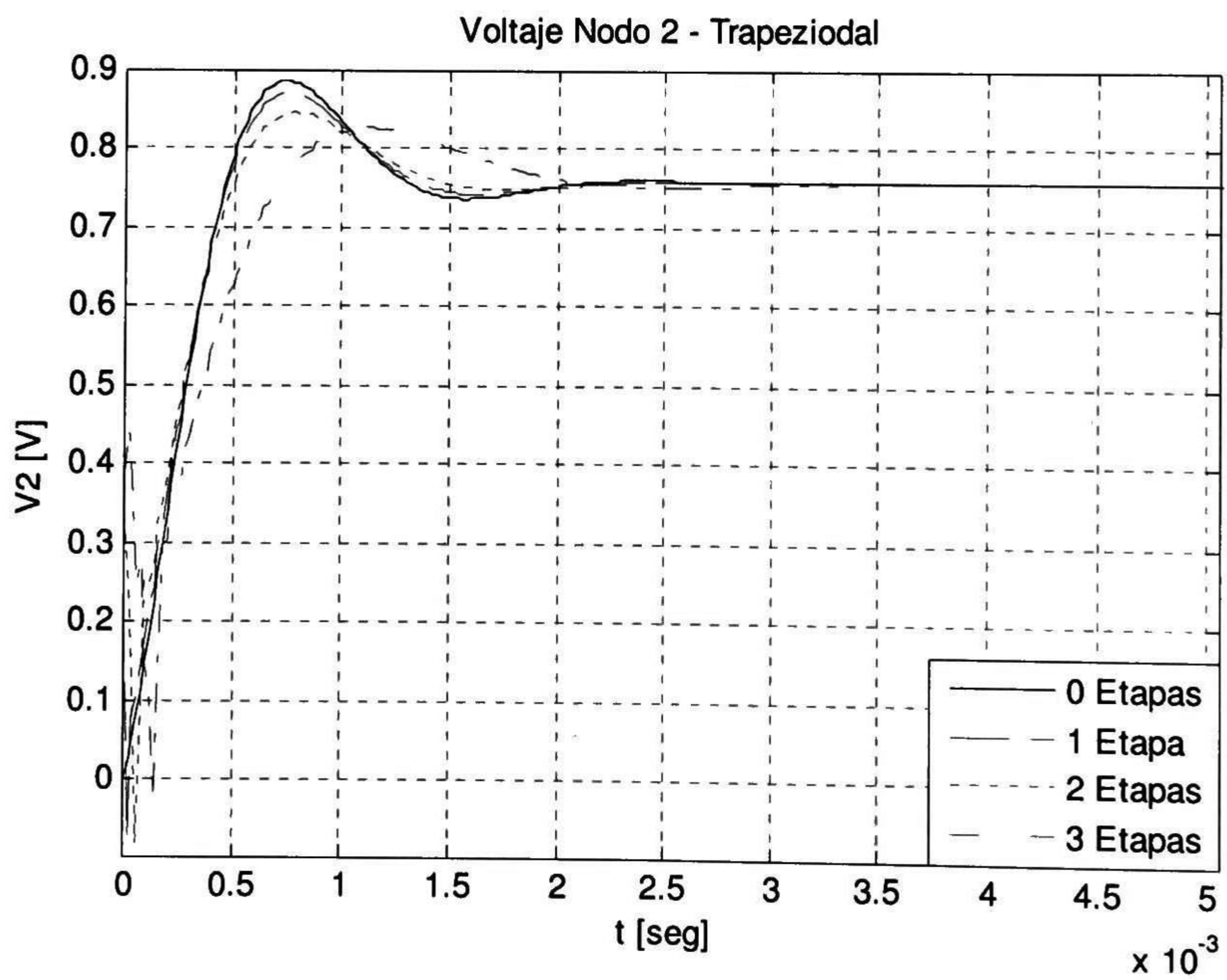


Figura 7.3 Voltaje nodo 2

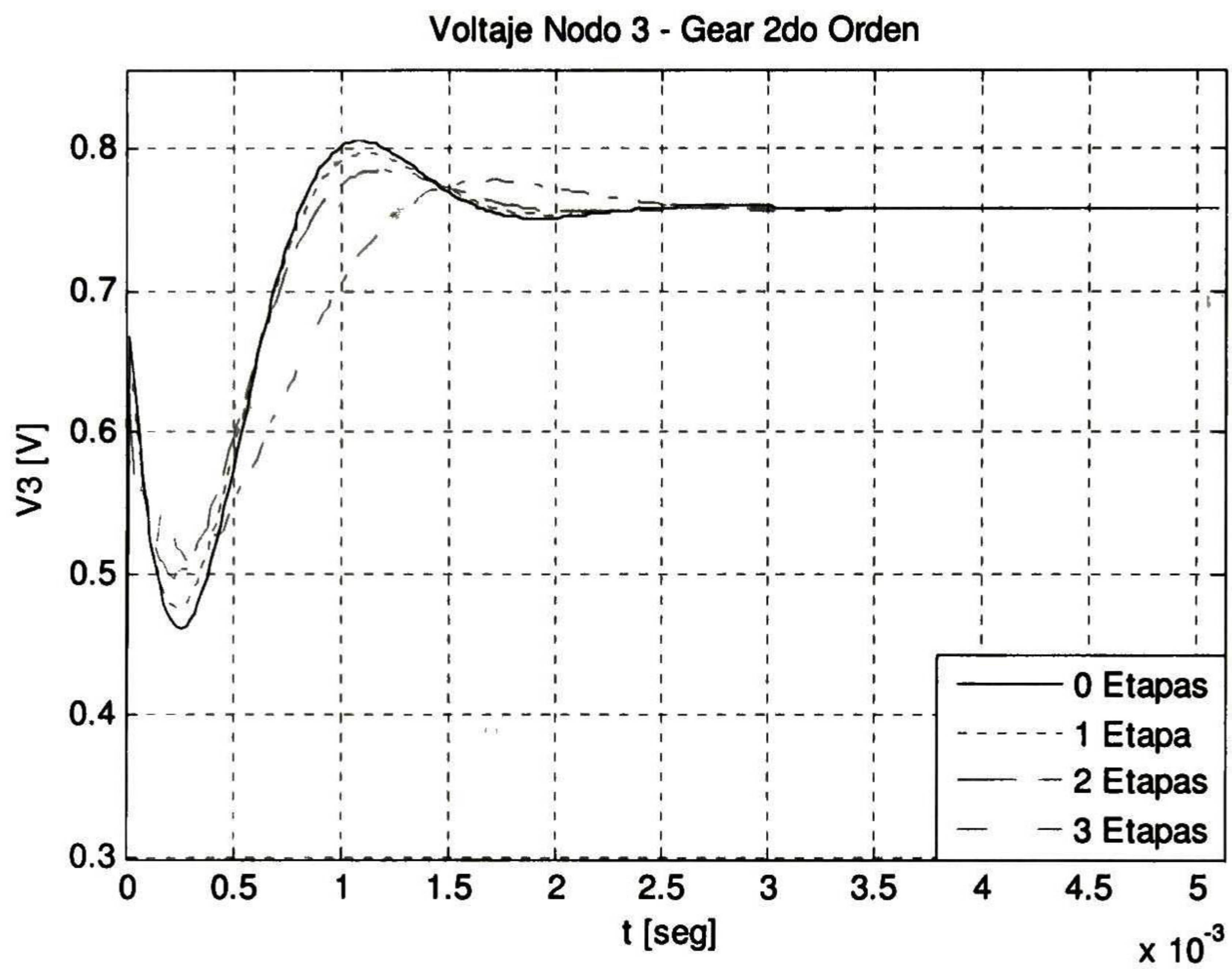


Figura 7.4 Voltaje nodo 3.

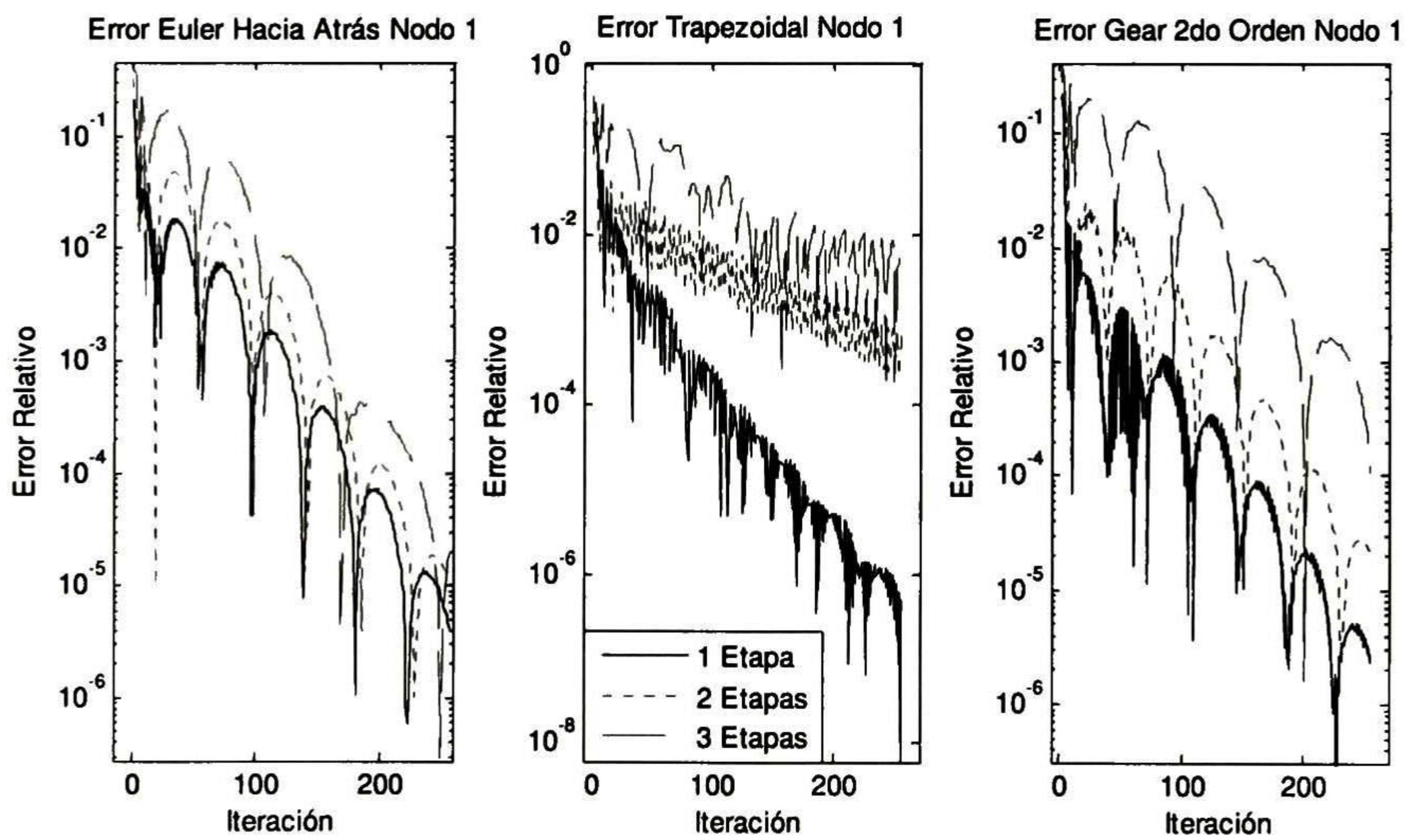


Figura 7.5 Errores voltaje nodo 1.

7.2 Anexo 2 - Circuito 4 nodos

En el anexo 2 se ilustra la misma metodología del anexo 1.

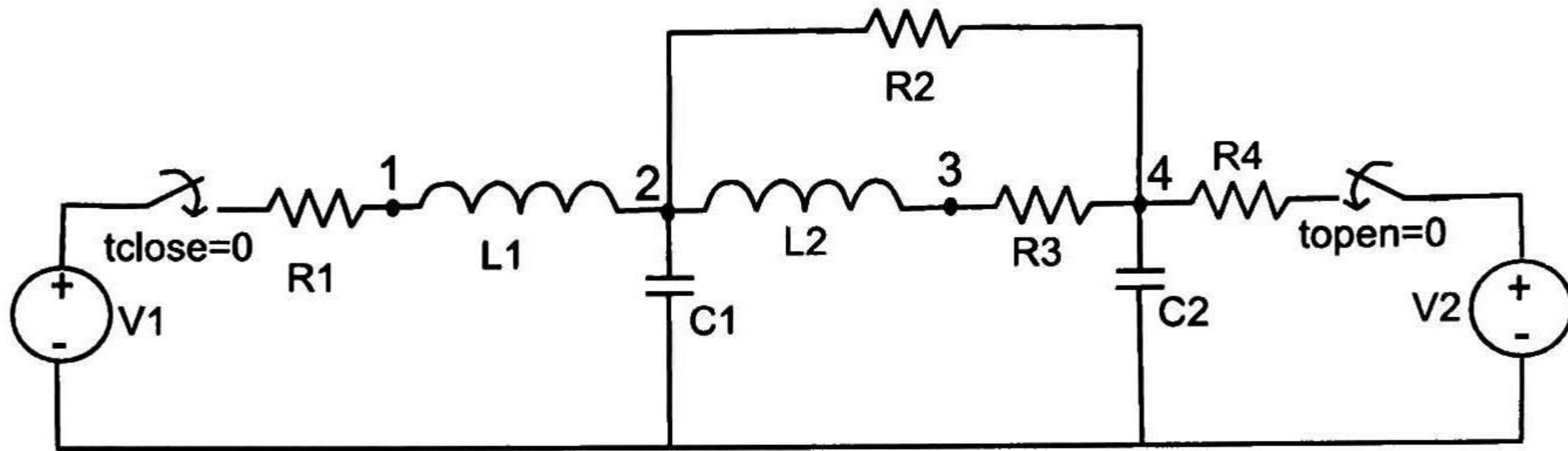


Figura 7.6 Circuito 4 nodos.

Parámetro	Valor
Resistencias	$R_1 = 160\Omega$ $R_2 = 110\Omega$ $R_3 = 45\Omega$ $R_4 = 52\Omega$
Inductancias	$L_1 = 200\mu H$ $L_2 = 33mH$
Capacitancias	$C_1 = 6\mu F$ $C_2 = 12\mu F$
Excitaciones	$V_1 = \mu(t)escalón\ unitario$ $V_2 = \cos(2\pi 120t)$
Paso de Integración	$\Delta t = 100\mu s$
Ondeleta Base	Haar

Tabla 9 Parámetros del sistema de la figura 7.6

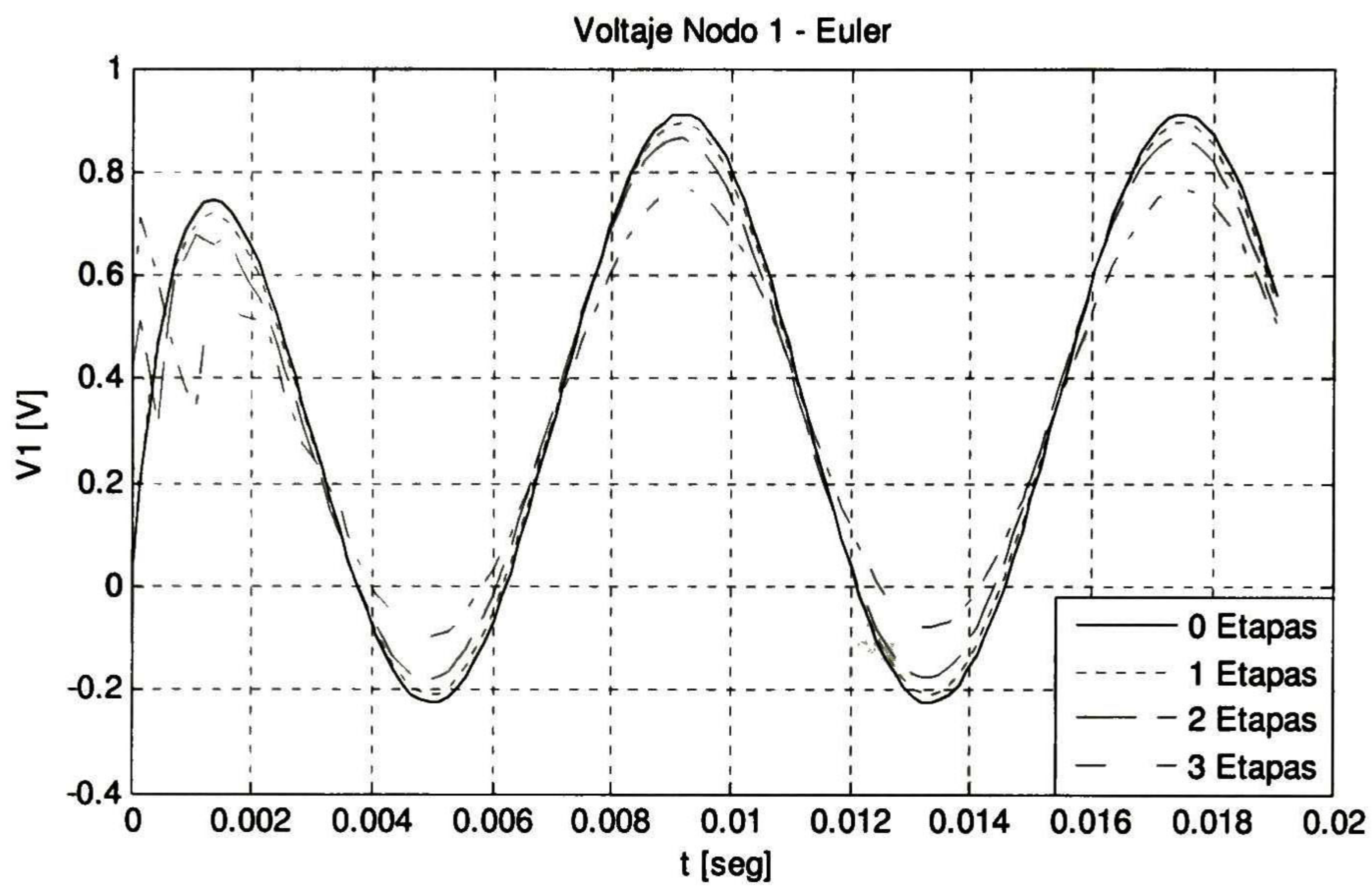


Figura 7.7 Simulación 4 etapas Circuito 4 Nodos - Voltaje nodo1

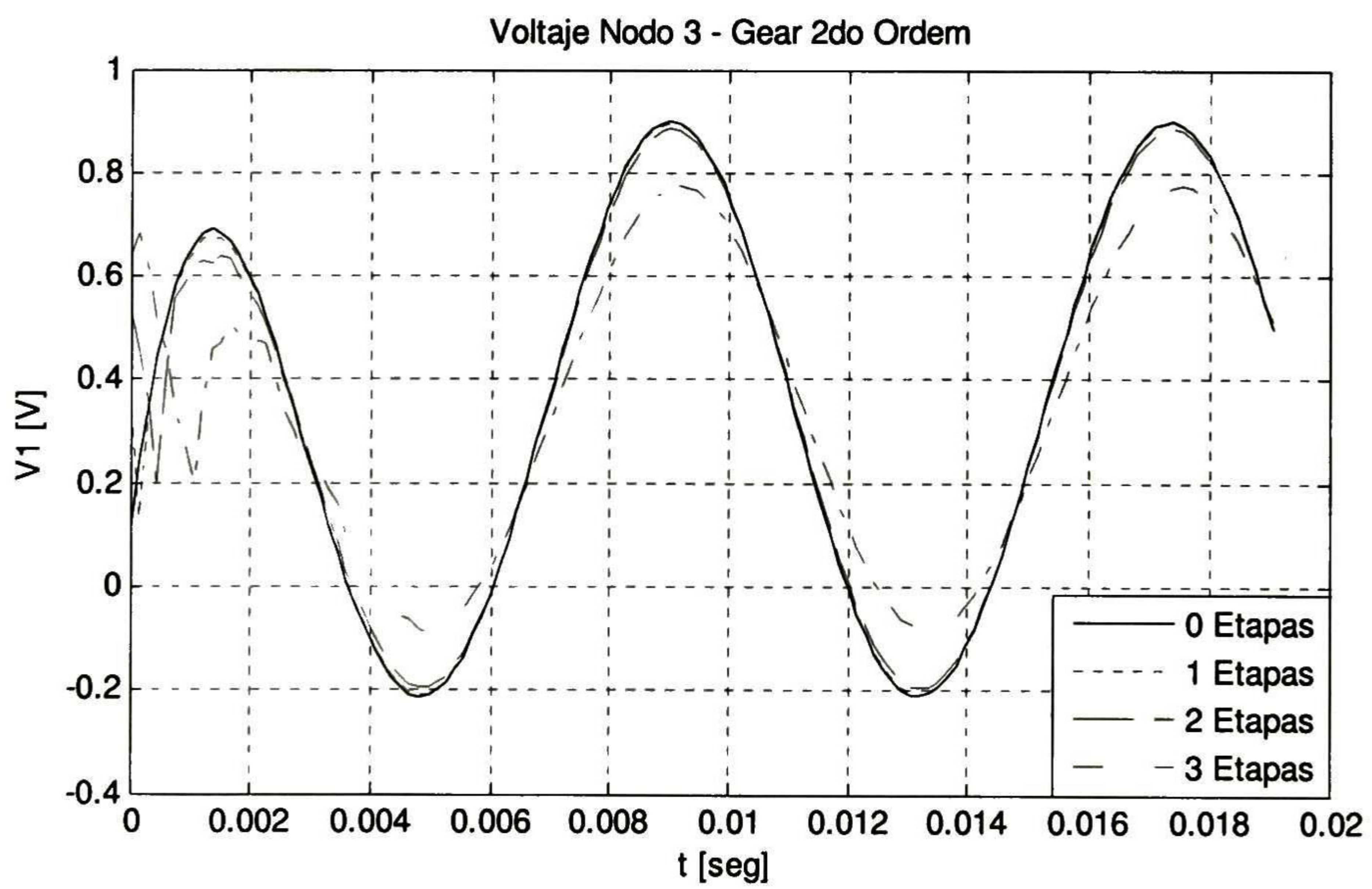


Figura 7.8 Simulación 4 etapas Circuito 4 Nodos - Voltaje nodo2

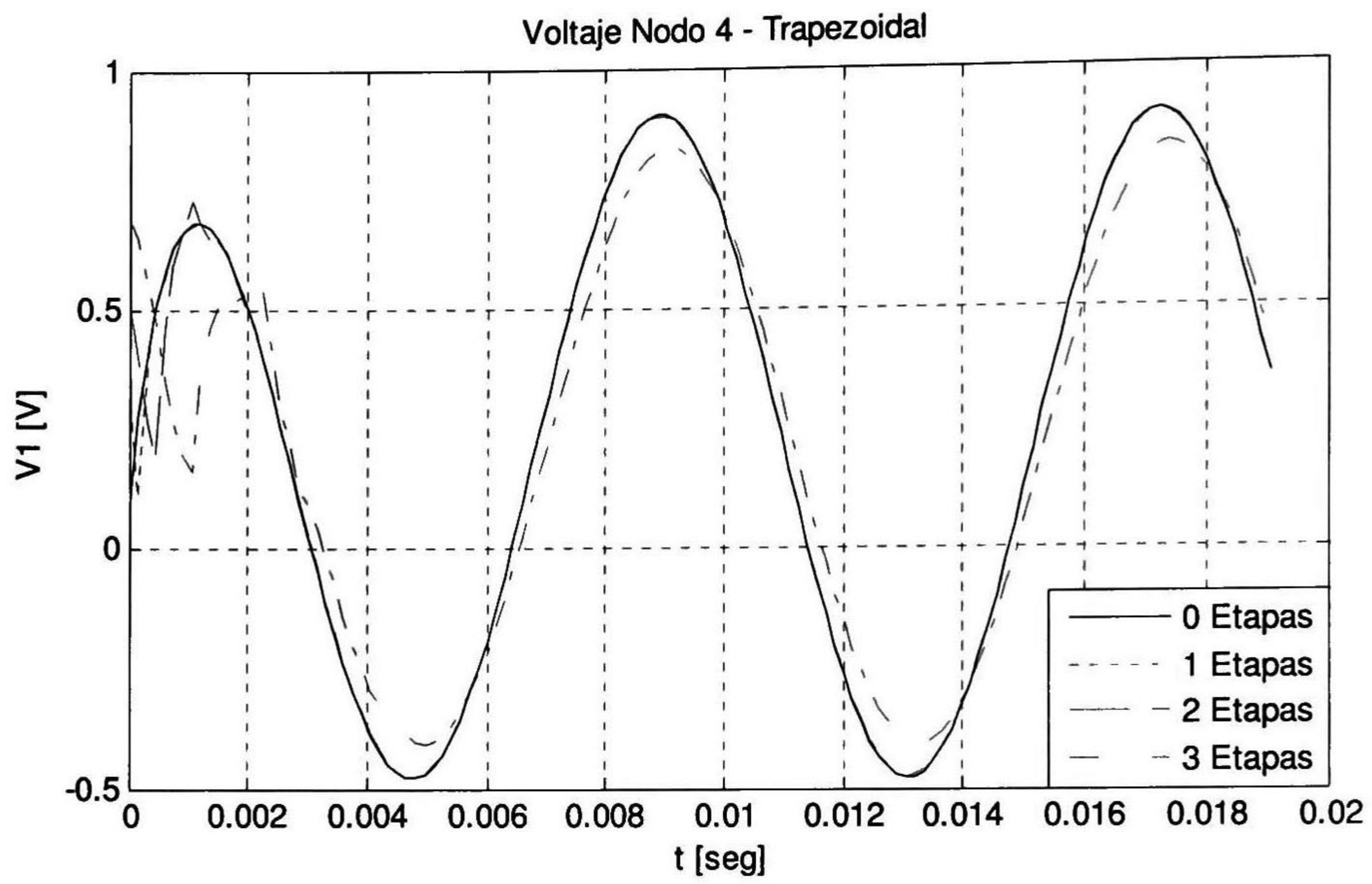


Figura 7.9 Simulación 4 etapas Circuito 4 Nodos - Voltaje nodo3

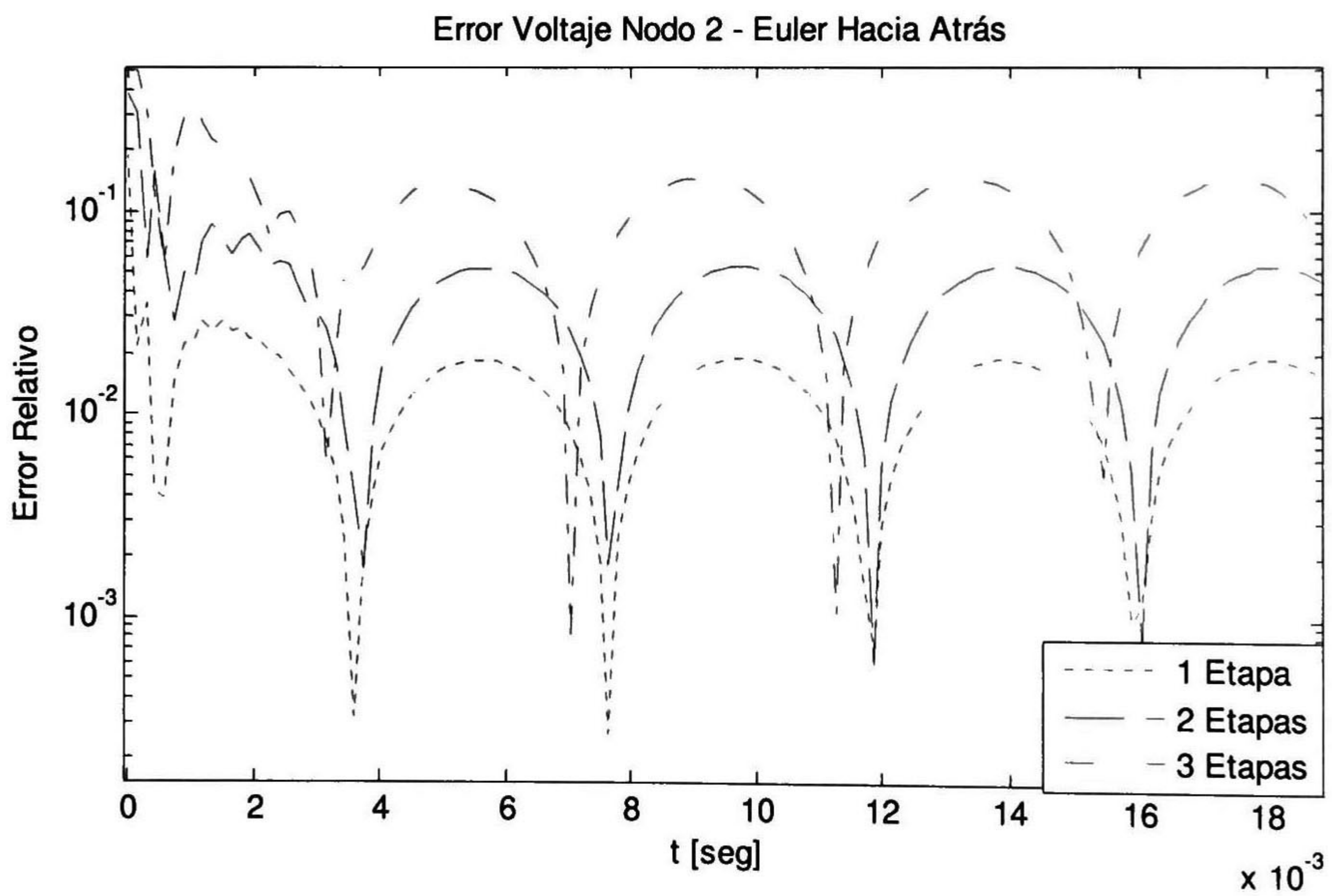


Figura 7.10 Simulación 4 etapas Circuito 4 Nodos - Voltaje nodo4

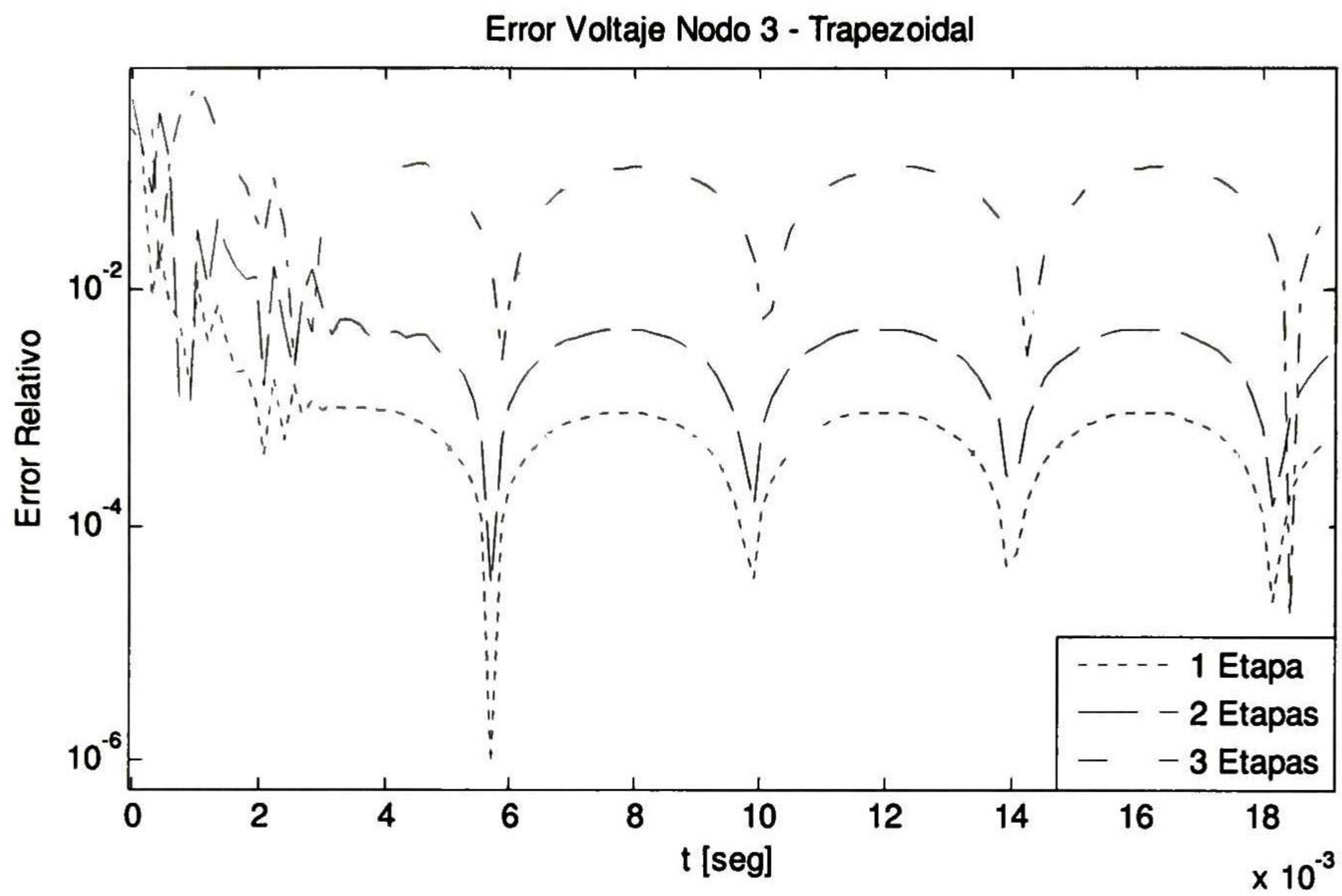


Figura 7.115 Error relativo - método de Euler

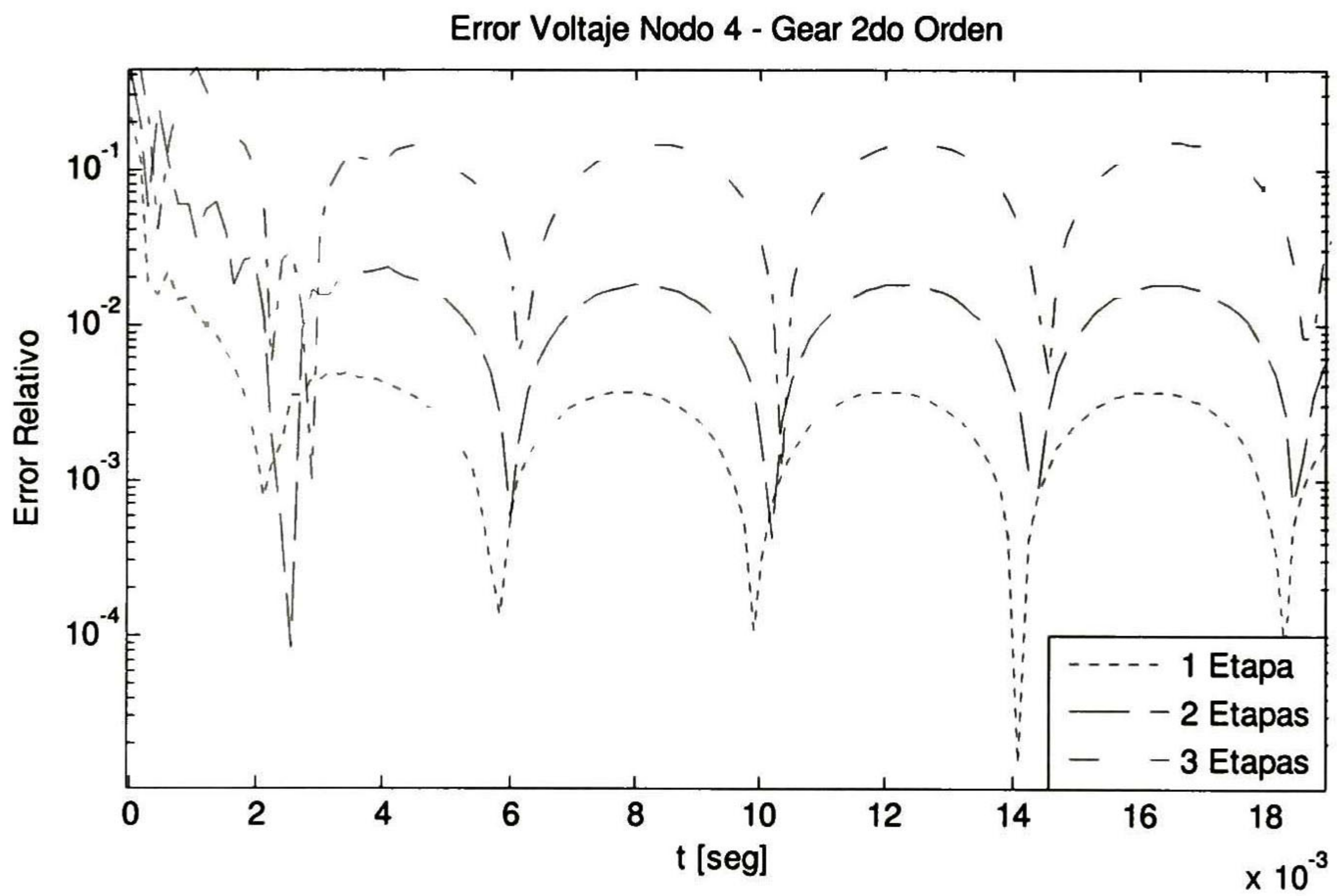


Figura 7.12 Error relativo - método Trapezoidal

7.3 Anexo 3 - Circuito con doble accionamiento de interruptor

En este ejemplo se ilustra el uso de la herramienta Ondeleta, cuando el sistema tiene más de una acción de switch.

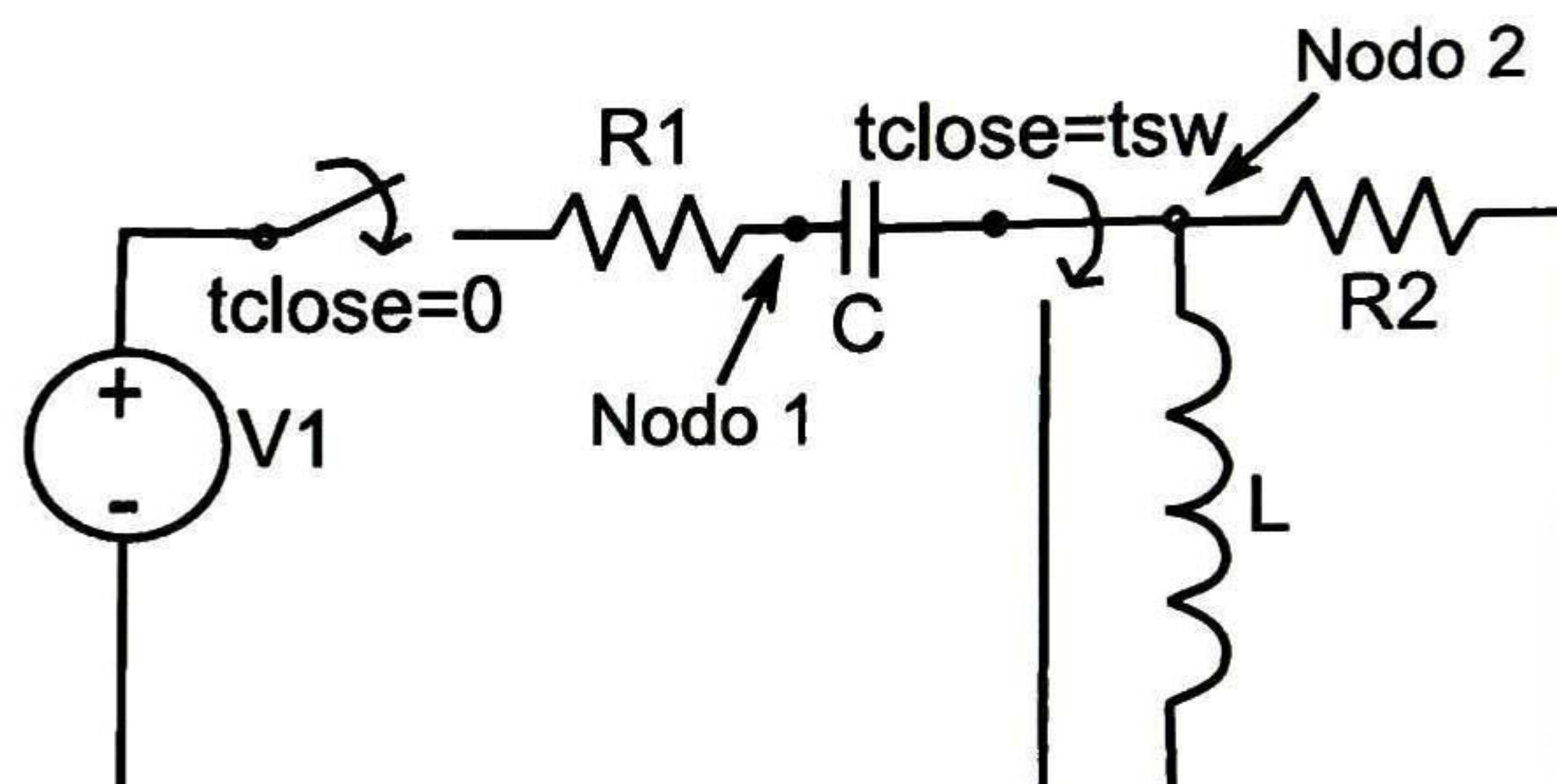


Figura 7.13 Circuito doble suicheo

Parámetro	Valor
Resistencias	$R_1 = 10\Omega$ $R_2 = 5\Omega$
Inductancias	$L_1 = 1H$
Capacitancias	$C_1 = 0.2F$
Excitaciones	$V_1 = \mu(t)$ escalón unitario
Paso de Integración	$\Delta t = 12.5\mu s$
Ondeleta Base	Haar
Tiempo de suicheo 2	0.4s

Tabla 10 Parámetros del sistema de la figura 7.13

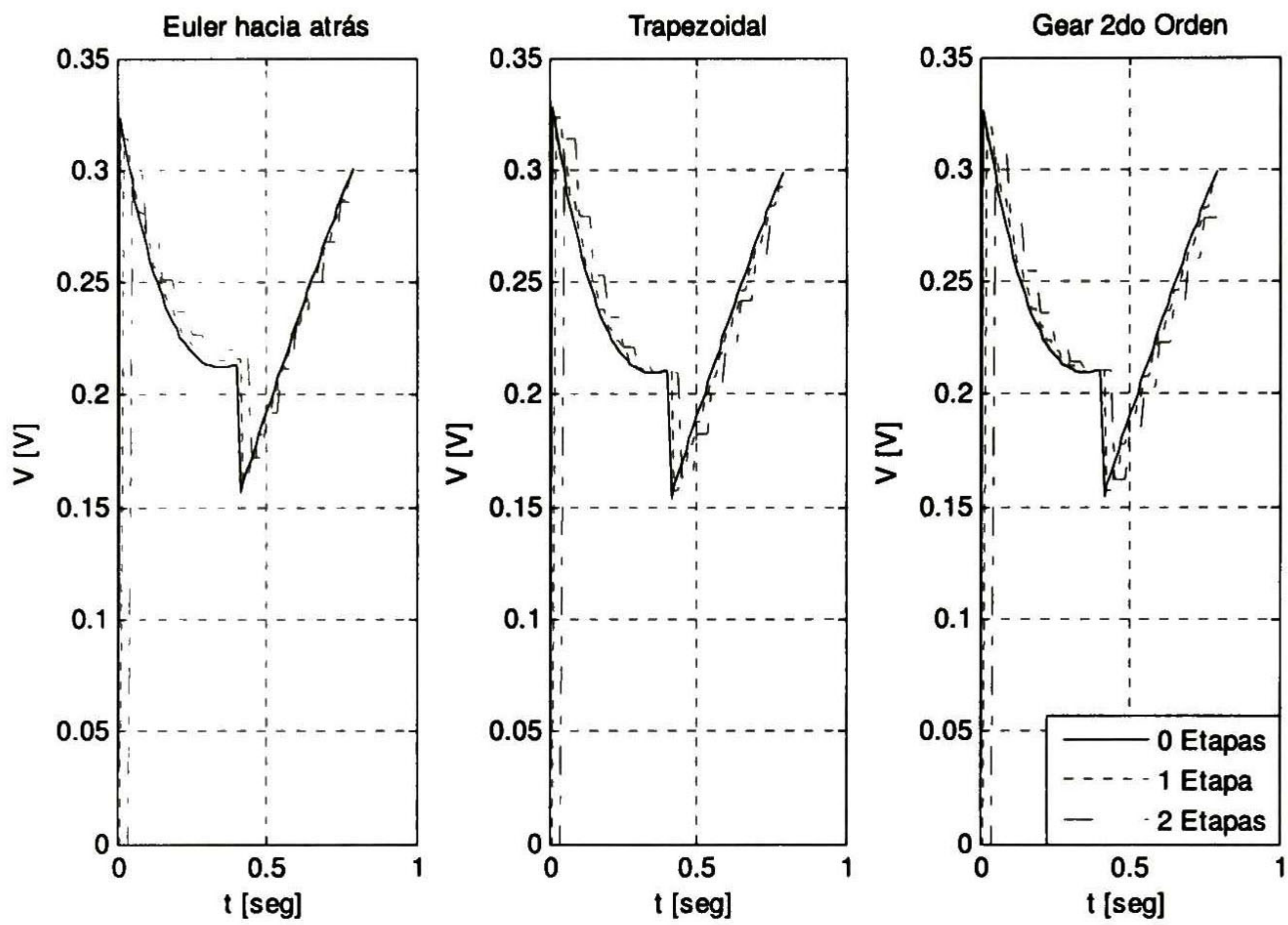


Figura 7.146 Voltaje Nodo 1

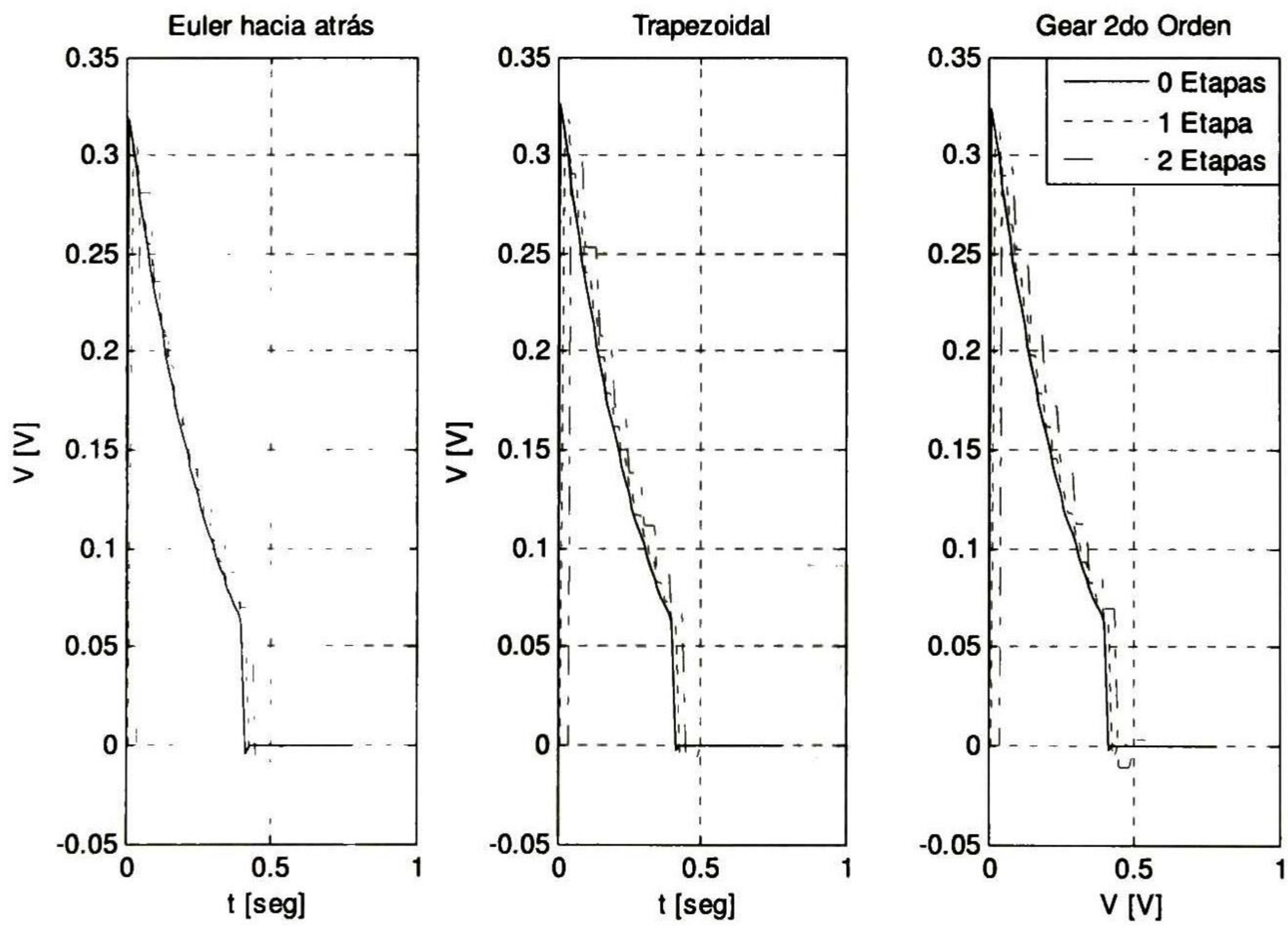


Figura 7.15 Voltajes nodo 2

7.4 Anexo 4 - Circuito 9 Nodos

Para este Anexo, se incluye la simulación con la ecuación de Lyapunov y se evalúa el error en los resultados en comparación con la solución obtenida con una regla de integración tradicional.

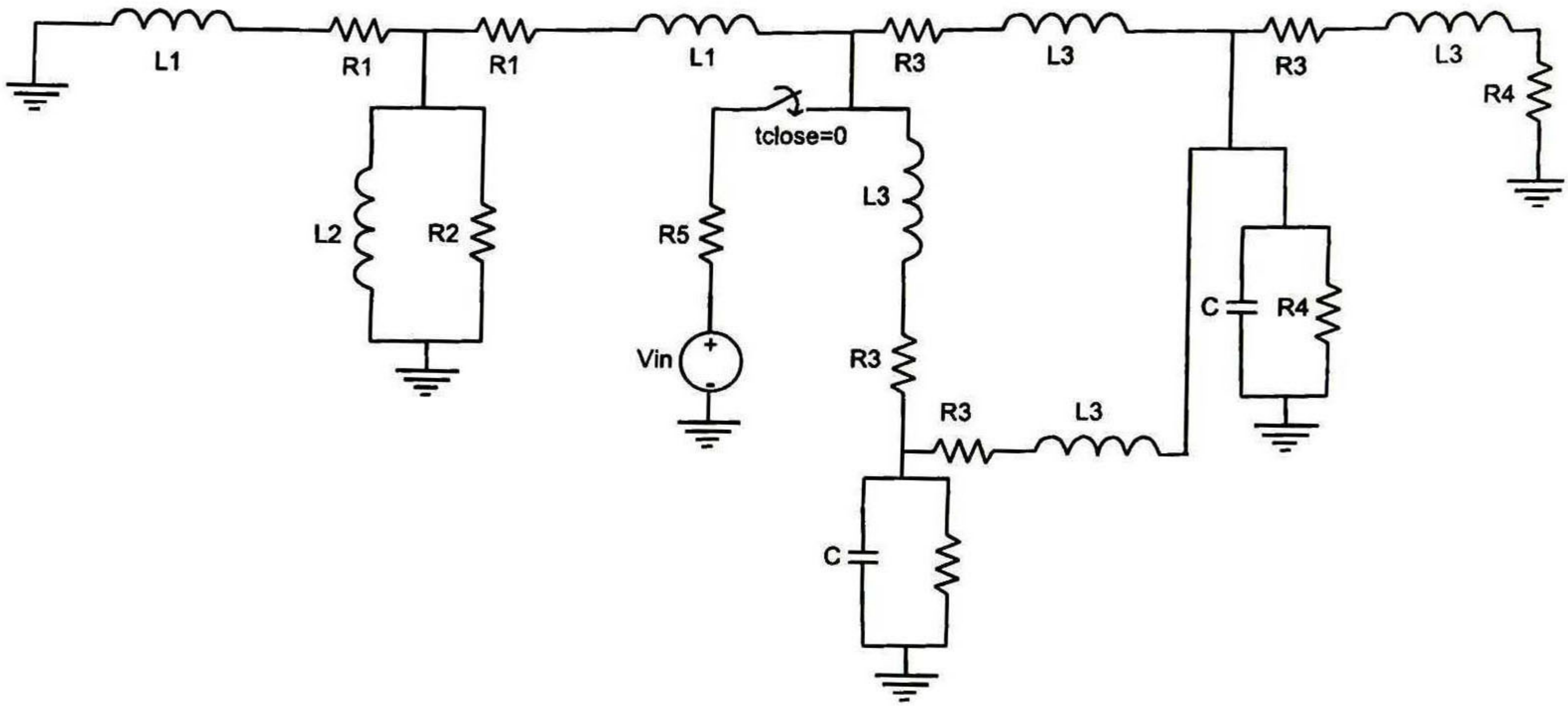


Figura 7.16 Circuito de prueba 9 nodos

Parámetro	Valor
Resistencias	$R_1 = 1.98\Omega$
	$R_2 = 140.4k\Omega$
	$R_3 = 0.397\Omega$
	$R_4 = 1.984k\Omega$
	$R_5 = 198.4k\Omega$
Inductancias	$L_1 = 52.63mH$
	$L_2 = 372.4H$
	$L_3 = 10.53mH$
Capacitancias	$C = 334.3nF$
Excitaciones	$V_1 = \mu(t)$
Paso de Integración	$\Delta t = 50\mu s$
Ondeleta Base	Haar

Tabla 11 Parámetros del sistema de la figura 7.16

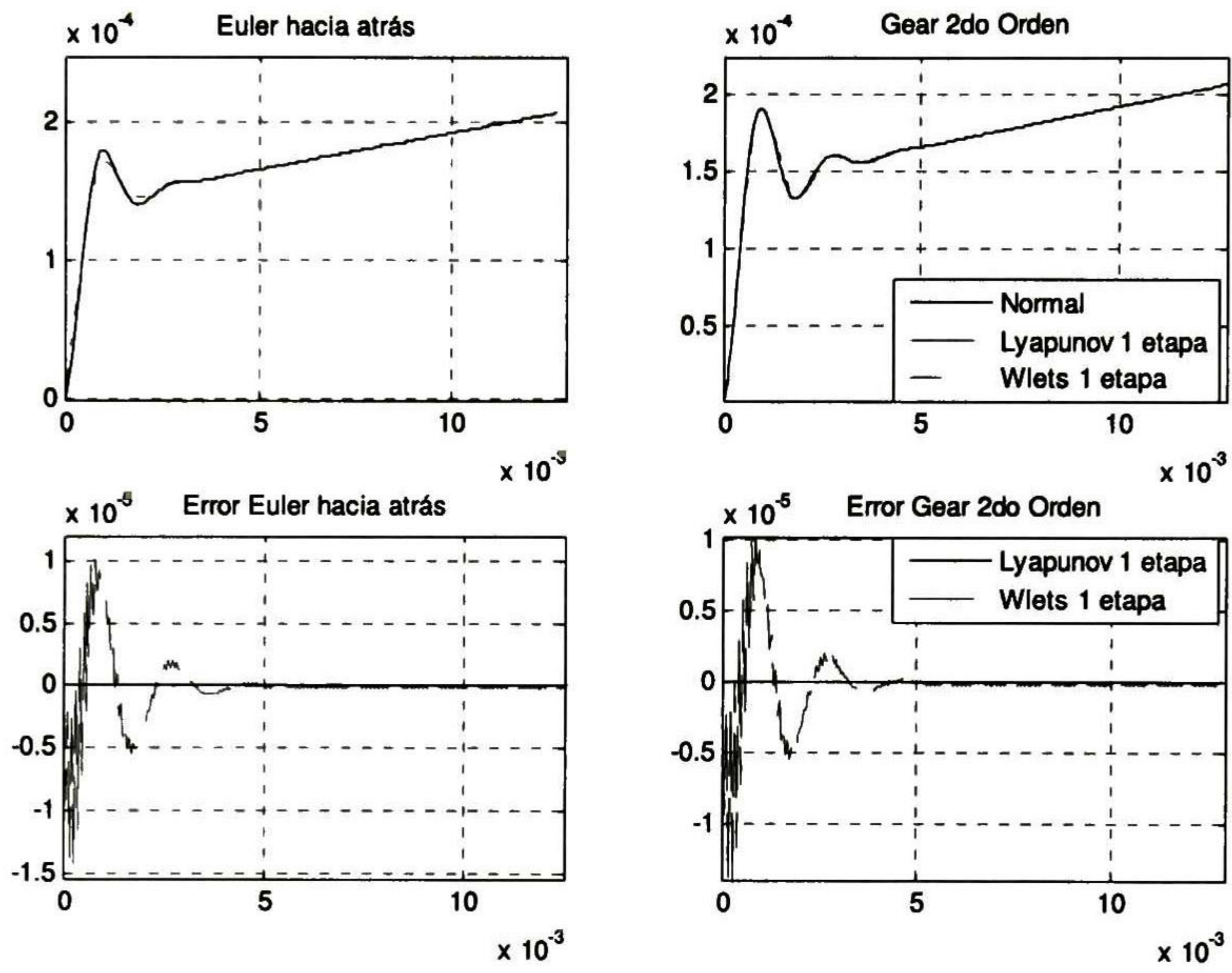


Figura 7.17 Corriente Inductor I_2 .

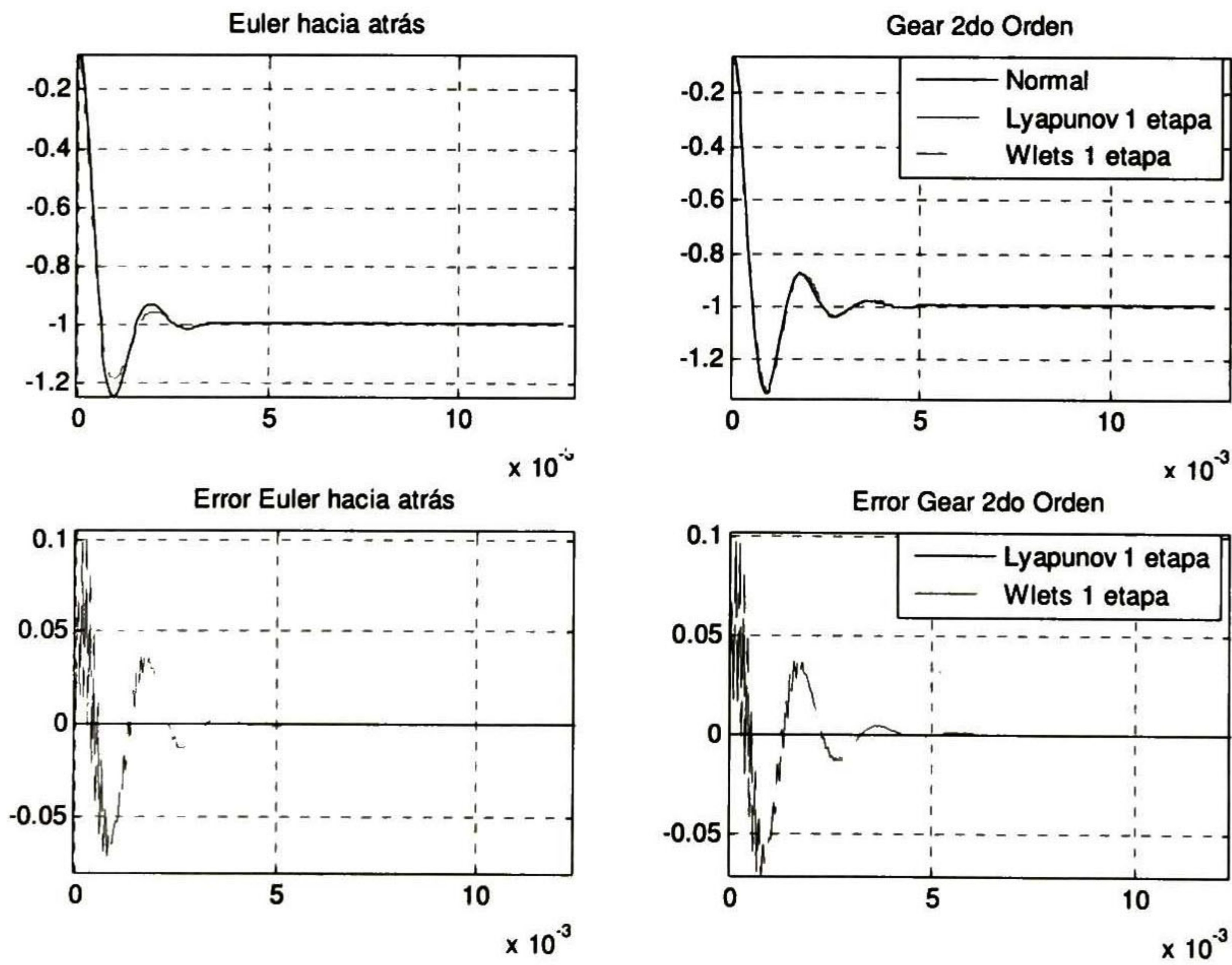


Figura 7.18 Corriente Inductor I_3 .

7.5 Anexo 5 - Circuito 9 Nodos

En este Anexo se usa el esquema de filtros polifásico que se explicó en la sección 6.4

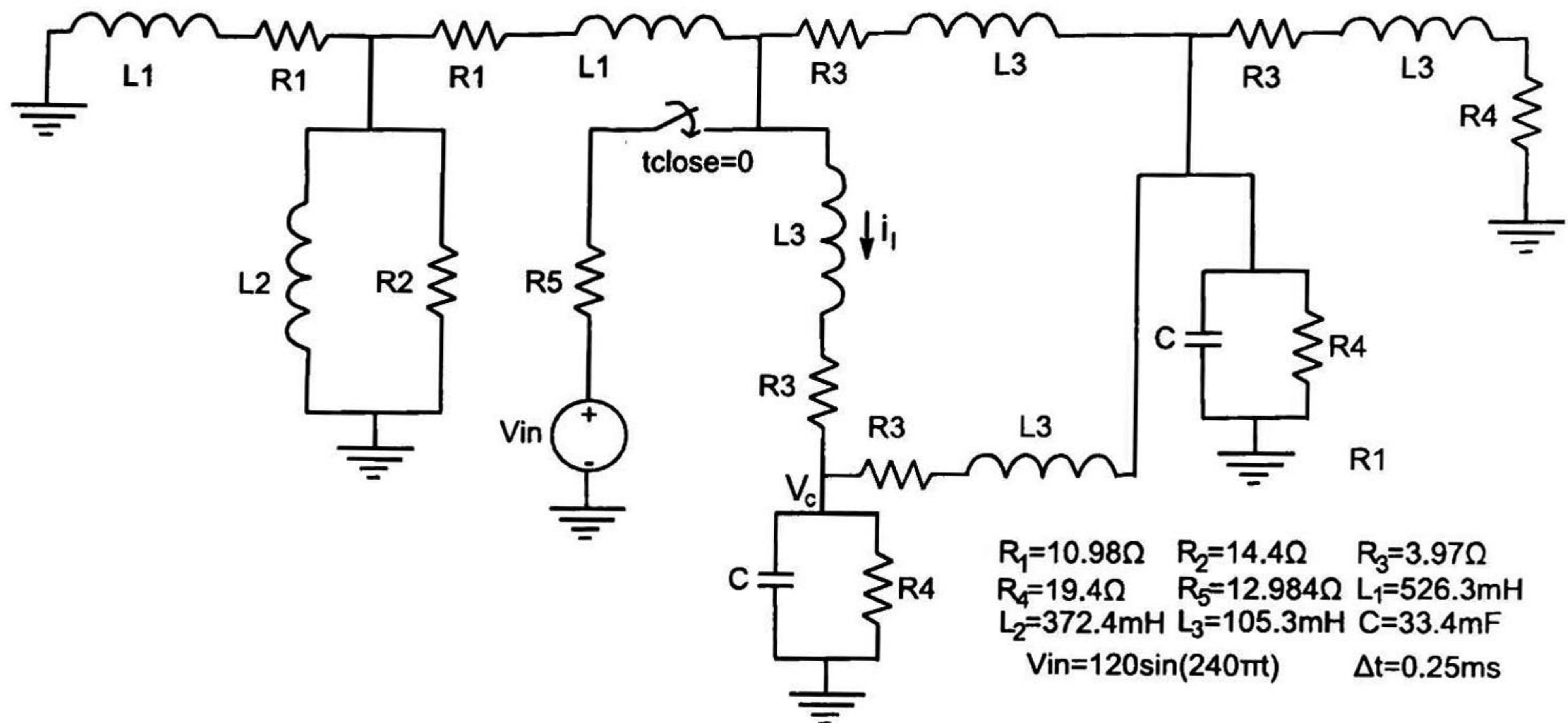


Figura 7.19 Circuito de prueba 9 nodos

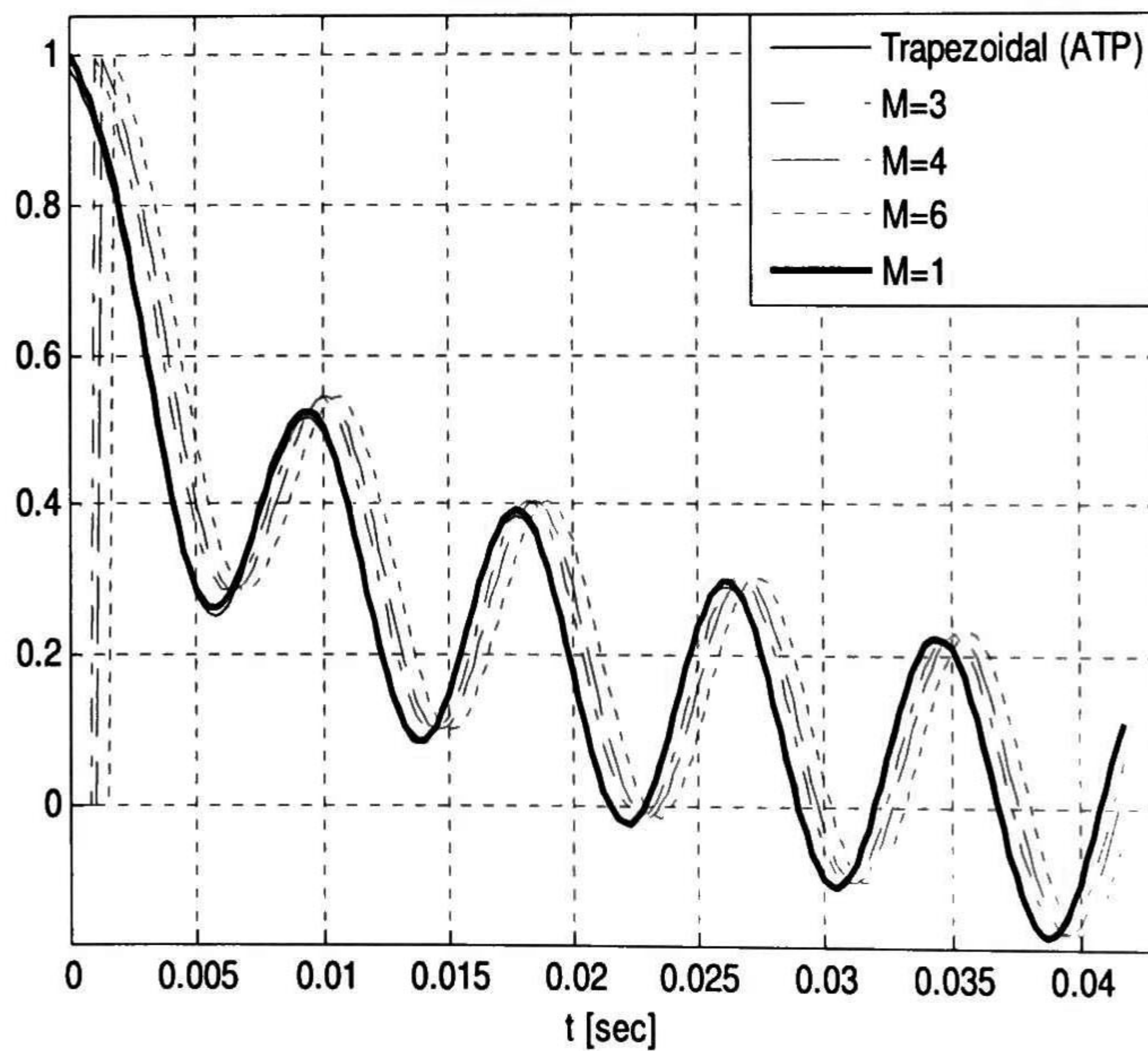


Figura 7.20 Corriente Inductor I_1 .

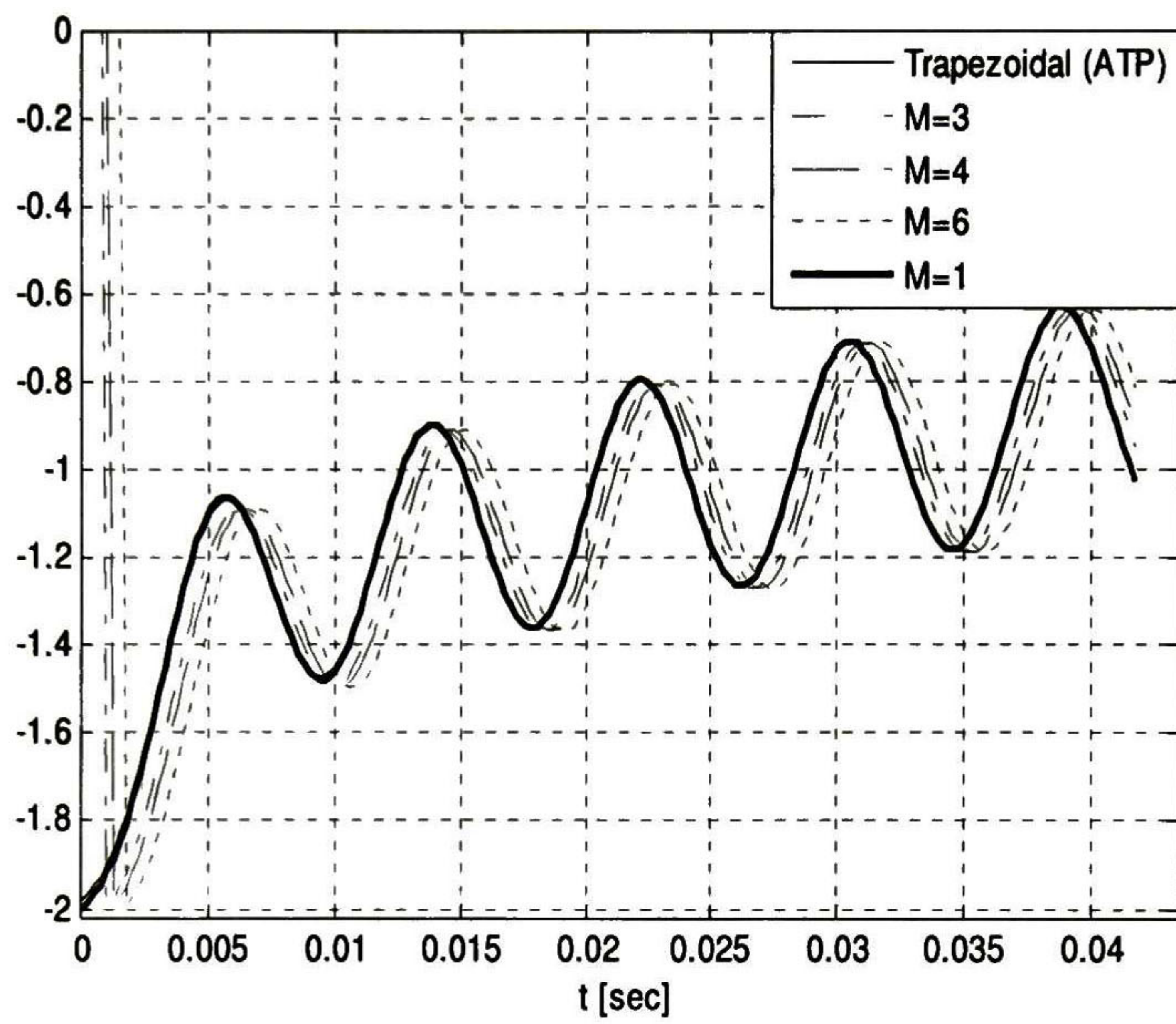
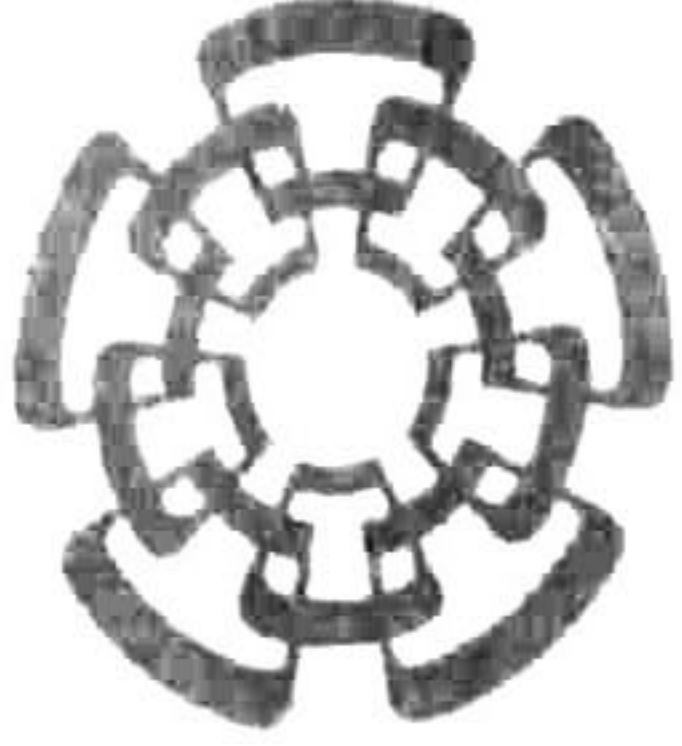


Figura 7.21 Corriente Inductor I_2 .



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL I.P.N.
UNIDAD GUADALAJARA**

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional aprobó la tesis

**Banco de filtros, ondeletas y análisis de multirresolución para
la simulación de transitorios electromagnéticos**

del (la) C.

Jean René ZULUAGA DUQUE

el día 20 de Octubre de 2014.

Dr. José Luis Alejandro Naredo
Villagrán
Investigador CINVESTAV 3C
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Ramón Parra Michel
Investigador CINVESTAV 3C
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. José Luis Leyva Montiel
Investigador CINVESTAV 3B
CINVESTAV Unidad Guadalajara



CINVESTAV - IPN
Biblioteca Central



SSIT0012827