

xx(111042 1)



CINVESTAV

*Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Unidad Guadalajara*

**CINVESTAV
IPN
ADQUISICION
DE LIBROS**

**CÁLCULO DE FRECUENCIAS DE CORTE EN GUÍAS
DE ONDA CON SECCIÓN TRANSVERSAL ELÍPTICA**

TESIS PRESENTADA POR:
ING. SERGIO GONZÁLEZ VELÁZQUEZ

PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

EN LA ESPECIALIDAD DE:
INGENIERÍA ELÉCTRICA

**CINVESTAV I. P. N.
SECCION DE INFORMACION
Y DOCUMENTACION**

GUADALAJARA, JAL. AGOSTO 2003

CLASIF.: TK165.G8 G66 2003
ADQUIS.: SSI - 273
FECHA: 28-I-2004
PROCED.: Don. - 2004
\$ _____

CÁLCULO DE FRECUENCIAS DE CORTE EN GUÍAS DE ONDA CON SECCIÓN TRANSVERSAL ELÍPTICA

Tesis de Maestría en Ciencias
Ingeniería Eléctrica

Por:

Sergio González Velázquez

Ingeniero Electricista

Universidad Autónoma de Aguascalientes

Becario del CONACyT, expediente no. 165101

Director de Tesis:

Dr. Pablo Moreno Villalobos

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Agosto de 2003

AGRADECIMIENTOS

A mi DIRECTOR DE TESIS **Pablo Moreno Villalobos** por la magnífica asesoría que recibí durante la realización de esta tesis.

A el **CONACyT** por el apoyo económico que me brindó durante para poder realizar mis estudios de postgrado.

A **Silvia del Carmen Rodríguez Solís** por estos ocho años donde siempre ha estado a mi lado, compartiendo triunfos y fracasos, y por todo su amor.

A mis PADRES **Sergio González Viramontes** y **Silvia Velázquez Martínez** por haberme dado la vida y valores para afrontarla.

A mis HERMANOS **Jacobo, Gabriel y Eduardo** por la fraternidad incondicional que siempre me han brindado.

A DIOS por haberme dejado llegar hasta aquí.

A mis AMIGOS **Rubén Blanco Aviles, Luis Flores Gómez, Martín Barrera Cerda, Enrique Camarillo Mayagoitia** y **Juan Ernesto Dávila** por compartir su amistad y conocimientos.

RESUMEN

Las guías de onda son estructuras de transmisión que son muy útiles para transportar energía electromagnética a muy altas frecuencias (en el orden de los gigahertz).

En esta tesis se realiza el análisis de guías de onda que poseen una sección transversal elíptica. Una característica importante de este tipo de guías de onda es que el transporte de la energía presenta muy bajas pérdidas de propagación en el espacio interior. Por lo que las pérdidas más significativas se presentan por la circulación de corrientes inducidas en el material conductor.

La energía que transportan las guías de onda puede viajar formando diferentes estructuras de campo electromagnético. A estas estructuras se les conoce como modos de propagación, los cuales pueden ser transversal eléctricos o transversal magnéticos. Cada uno de los modos de propagación definen una relación geométrica espacial diferente entre el campo eléctrico y el magnético.

Un parámetro importante para el diseño de las guías de onda es la frecuencia de corte de cada modo de propagación. Estas frecuencias depende de las dimensiones y la forma de la sección transversal de la guía.

En este trabajo se presenta una metodología para determinar las frecuencias de corte de guías de onda elípticas. Para determinar estas frecuencias se emplean las soluciones de las ecuaciones de Mathieu: radial y angular. Las soluciones de dicho par de ecuaciones está dada en términos de las funciones de Mathieu y de las funciones de Mathieu modificadas; debido a esto en este trabajo se presenta también un análisis amplio de estas funciones.

INDICE

AGRADECIMIENTOS.....	<i>ii</i>
RESUMEN	<i>iii</i>
LISTA DE FIGURAS.....	<i>vi</i>
LISTA DE TABLAS.....	<i>viii</i>
GUIAS DE ONDA.....	1
1.1. Introducción / 1	
1.2. Objetivos / 2	
CAMPOS <i>E</i> Y <i>H</i> Y MODOS DE PROPAGACION.....	4
2. Preámbulo / 4	
2.1. Soluciones generales para las ondas TEM, TE y TM / 5	
2.2. Ondas TEM / 7	
2.3. Ondas TE / 9	
2.4. Ondas TM / 10	
2.5. Ecuación de onda en coordenadas elípticas / 11	
FUNCIONES DE MATHIEU.....	14
3.1. Definición de las Funciones de Mathieu / 14	
3.2 Cálculo de los coeficientes de expansión y los valores característicos/15	
3.2.1. Cálculo de los coeficientes de expansión $A(q)$ y $B(q)$ / 15	
3.2.2. Cálculo de los valores característicos / 17	
3.3. Aproximaciones de los valores característicos / 20	
3.4. Expansión de las funciones de Mathieu cuando $ q < 1$ / 22	
3.5. Propiedades de las funciones de Mathieu / 24	
3.5.1. Derivadas de la funciones de Mathieu / 26	

3.6. Gráficos de las funciones de Mathieu y sus derivadas	/ 26
3.7. Definición de la Función de Mathieu Modificada	/ 30
3.8. Derivadas de la funciones modificadas de Mathieu	/ 33
3.9. Relación de las funciones de Mathieu	/ 35
3.9.1 Propiedades de las funciones de Mathieu modificadas	/ 35
3.10. Gráficos de las funciones de Mathieu Modificadas	/ 36
GUIAS DE ONDA ELIPTICAS.....	42
Introducción	/ 42
4.1. Modo transversal Magnético	/ 43
4.2. Modo transversal Eléctrico	/ 43
4.3. Cálculo de las frecuencias de corte	/ 44
4.4. Frecuencias de corte modo transversal Magnético	/ 46
4.5. Frecuencias de corte modo transversal Eléctrico	/ 47
4.6. Guías de onda elípticas con excentricidades cercanas a 0.1	/ 50
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES PARA TRABAJOS FUTUROS....	52
5.1. CONCLUSIONES	/ 52
5.2. Recomendaciones para trabajos futuros	/ 53
REFERENCIAS.....	54
APENDICE I.....	56
APENDICE II.....	61
APENDICE III.....	66

LISTA DE FIGURAS

FIGURAS CAPITULO DOS

- 2.1. Relación de la ecuación de onda y de Maxwell con los campos /4
- 2.2. Sistema de coordenadas elípticas /12

FIGURAS CAPITULO TRES

- 3.1. Funciones de Mathieu $ce_m(z, q)$ $q=10$ /27
- 3.2. Funciones de Mathieu $ce_m(z, q)$ $q=1$ /28
- 3.3. Funciones de Mathieu $se_m(z, q)$ $q=10$ /28
- 3.4. Funciones de Mathieu $se_m(z, q)$ $q=1$ /29
- 3.5. Funciones de Mathieu $\frac{\partial ce_m(z, q)}{\partial z}$ $q=5$ /29
- 3.6. Funciones de Mathieu $\frac{\partial se_m(z, q)}{\partial z}$ $q=5$ /30
- 3.7. Funciones de Mathieu $Mc_m^{(1)}(z, q)$ $q=5$ /37
- 3.8. Funciones de Mathieu $Ms_m^{(1)}(z, q)$ $q=5$ /38
- 3.9. Funciones de Mathieu $Mc_m^{(2)}(z, q)$ $q=3$ /38
- 3.10. Funciones de Mathieu $Ms_m^{(2)}(z, q)$ $q=5$ /39
- 3.11. Funciones de Mathieu $\frac{\partial Ms_m^{(1)}(z, q)}{\partial z}$ $q=3$ /39
- 3.12. Funciones de Mathieu $\frac{\partial Ms_m^{(2)}(z, q)}{\partial z}$ $q=5$ /40
- 3.13. Funciones de Mathieu $\frac{\partial Mc_m^{(1)}(z, q)}{\partial z}$ $q=5$ /40
- 3.14. Funciones de Mathieu $\frac{\partial Mc_m^{(2)}(z, q)}{\partial z}$ $q=3$ /41

FIGURAS CAPITULO CUATRO

- 4.1. Guía de Onda Elíptica /42
- 4.2. Sistema de coordenadas elípticas /44

- 4.3. λ_c con diferentes excentricidades TMce (01,02,03,11,12,13) /48
- 4.4. λ_c con diferentes excentricidades TMse (11,12,13,21,22,23) /48
- 4.5. λ_c con diferentes excentricidades TEce (01,02,03,12,13) /49
- 4.6. λ_c con diferentes excentricidades TEse (11,12,13,21,22,23) /49

LISTA DE TABLAS**TABLAS CAPITULO CUATRO**

- 4.2.1. Valor de q para diferentes excentricidades modo TMce y TMse /46
- 4.2.2. Valor de q para diferentes excentricidades modo TEce y TEse /47
- 4.3.1. Ceros X'_{mn} de la derivada de la función de Bessel /50
- 4.3.2. Ceros X_{mn} de la derivada de la función de Bessel /50
- 4.3.3. Aproximación del valor de q para una excentricidad de .1 /51

CAPITULO UNO

GUIAS DE ONDA

1.1. Introducción

Algunos sistemas de comunicaciones utilizan la propagación de ondas en el espacio libre, sin embargo también se puede transmitir información mediante la confinación de las ondas en cables o guías. Las guías son conductos metálicos o dieléctricos que tienen como finalidad la conducción de ondas electromagnéticas.

Los tipos de guías de onda más comunes son:

- Rectangular
- Circular
- Elíptica

En las guías de onda metálicas los campos eléctrico y magnético están confinados en el espacio que se encuentra en su interior. De este modo no hay pérdidas de potencia por radiación y las pérdidas en el dieléctrico son muy bajas debido a que éste suele ser aire. Este sistema evita que existan interferencias con otros dispositivos o sistemas, al contrario de lo que ocurre en los sistemas de transmisión abiertos. Como contrapartida en las paredes de la guía se producen pequeñas pérdidas de energía por el calor generado por la circulación de corrientes en el material conductor.

Las guías de onda se utilizan para la transmisión de energía de Radio Frecuencia (RF). La configuración clásica de guías de onda rígida rectangular o circular se ha ido sustituyendo desde hace más de veinte años por guías de onda de sección transversal elíptica.

La guía rectangular hoy en día se utiliza principalmente como paredes cortas de interconexión, la guía de onda circular se utiliza en lugares donde se requiere valores muy bajos de atenuación, la guía de onda elíptica es la más utilizada para la alimentación de sistema de antenas, en centrales telefónicas para bajar y subir señales provenientes de antenas de satélite o estaciones terrenas de microondas.

La caracterización del fenómeno ondulatorio en el interior de las guías viene de la mano de la adecuada combinación de las ecuaciones de Maxwell y de las condiciones de frontera. La mencionada combinación da como resultado la ecuación de onda y las soluciones de esta ecuación son los modos de propagación de la guía de onda.

En coordenadas elípticas la solución a la ecuación de onda por separación de variables da lugar a las ecuaciones de Mathieu: la ecuación de Mathieu, para la coordenada angular, y la ecuación de Mathieu modificada, para la coordenada radial. La solución a este par de ecuaciones esta dada en términos de las llamadas funciones de Mathieu. Si bien estas funciones no han sido objeto de una amplia investigación matemática han encontrado variadas aplicaciones en física e ingeniería.

Una aplicación importante de las ecuaciones de Mathieu se encuentra en las guías de onda elípticas. Algunos autores [1], [10] muestran abundante bibliografía sobre ellas; no obstante esto, una discusión y posteriores aplicaciones son generalmente omitidas en la gran mayoría de las publicaciones y textos modernos de matemáticas para ciencias e ingeniería.

Uno de los primeros artículos publicados sobre guías de onda elípticas fue el escrito por L. J. Chu en 1938; el cual se refiere a las soluciones analíticas para algunos de los primeros modos.

En años recientes se han publicado aplicaciones importantes de esas funciones y se han desarrollado métodos para calcular autofunciones y autovalores de la ecuación de onda en coordenadas elípticas.

En 1990 D. A. Goldberg, L. J. Laslett, and R. A. Rimmer [2] publican correcciones importantes al artículo de L. J. Chu publicado en 1938, correcciones a las frecuencias de corte de los modos transversal eléctrico y transversal magnético, y también a los patrones de los campos eléctrico y magnético dentro de la guía.

En 1995 S. Zhang and Y. Shen [5] publican un método para calcular los autovalores de las ecuaciones de Mathieu. A partir de aquí se publican varios métodos para calcular los autovalores [3], [7], [14].

1.2. Objetivos

Los objetivos que se desean alcanzar en la presente tesis son:

- **Desarrollar procedimientos para obtener las funciones de Mathieu en forma numérica.**
- **Desarrollar procedimientos para calcular las frecuencias de corte para los diferentes modos de propagación de guías de onda elípticas**
- **Encontrar los campos eléctrico y magnético para los diferentes modos de propagación en guías de onda elípticas.**

CAPITULO DOS

ECUACIÓN DE ONDA EN COORDENADAS ELIPTICAS

Preámbulo

Hay determinados problemas en electromagnetismo en los que se desea hallar los campos conociendo únicamente una serie de condiciones de frontera que estos campos deben cumplir. Por ejemplo, cuando se quiere calcular el campo en el interior de una guía o una cavidad formada por superficies conductoras perfectas, se buscan soluciones tales que el campo eléctrico tenga una componente tangencial nula en estas superficies. En estos problemas resulta adecuado utilizar las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial junto con las condiciones de frontera que permitirán hallar las constantes de integración.

Las ecuaciones de Maxwell son ecuaciones en derivadas parciales de primer orden *acopladas*, lo que significa que en una misma ecuación aparecen relacionados diferentes campos desconocidos que se quieren calcular. La única forma de *desacoplar* estas ecuaciones, esto es, de obtener ecuaciones diferenciales en las que solo se involucre uno de los campos desconocidos, es elevando el orden de las derivadas. Para cada uno de los campos se puede encontrar una ecuación diferencial de segundo orden desacoplada, en la que solo aparezca el campo considerado. Estas nuevas ecuaciones se conocen con el nombre de ecuaciones de onda.

La solución de las ecuaciones de onda junto con las condiciones de frontera permite hallar las soluciones deseadas.

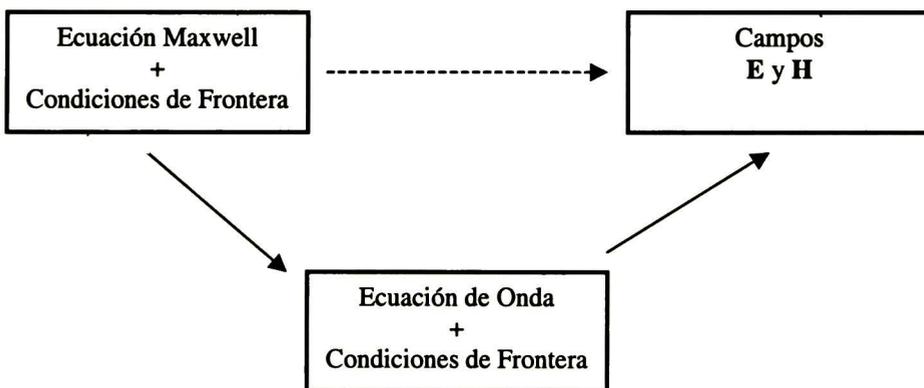


Figura 2.1. Relación de la ecuación de onda y de Maxwell con los campos.

Las soluciones a la ecuación de onda tienen la forma de ondas viajeras. Si una onda viajera es una perturbación periódica que se propaga por el espacio con

el tiempo, en el caso de las ondas electromagnéticas es el campo electromagnético el que se propaga y con él la energía asociada al campo.

La propagación de las ondas electromagnéticas es el fenómeno en que se basan la transmisión de la información y todas las telecomunicaciones actuales.

2.1. Soluciones generales para las ondas TEM, TE y TM

Si se asume que los campos son armónicos en el tiempo con una dependencia $e^{j\omega t}$ y una propagación de la onda a lo largo del eje z , los campos eléctrico y magnético pueden ser escritos como:

$$\bar{E}(x, y, z) = [\bar{e}(x, y) + z\bar{e}_z(x, y)] e^{-j\beta z} \quad (2.1.1)$$

$$\bar{H}(x, y, z) = [\bar{h}(x, y) + z\bar{h}_z(x, y)] e^{-j\beta z} \quad (2.1.2)$$

donde $\bar{e}(x, y)$ y $\bar{h}(x, y)$ representan las componentes transversales de los campos eléctrico y magnético, mientras que e_z y h_z son las componentes longitudinales. Las ecuaciones anteriores representan una onda que se propaga en la dirección $+z$, la propagación $-z$ puede ser obtenida reemplazando β por $-\beta$. Además si el conductor o dieléctrico presenta pérdidas, la constante de propagación será compleja; $j\beta$ deberá entonces ser reemplazada por $\gamma = \alpha + j\beta$.

Asumiendo que la región de la línea de transmisión o guía de onda está libre de fuentes, las ecuaciones de Maxwell pueden ser escrita como:

$$\nabla \times \bar{E} = -j\omega\mu\bar{H} \quad (2.1.3)$$

$$\nabla \times \bar{H} = -j\omega\epsilon\bar{E} \quad (2.1.4)$$

Empleando las expresiones (2.1.1) y (2.1.2) en (2.1.3) y (2.1.4) se puede escribir:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + j\beta E_y = -j\omega\mu H_x \quad (2.1.5)$$

$$-j\beta E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu H_y \quad (2.1.6)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu H_z \quad (2.1.7)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + j\beta H_y = -j\omega\mu E_x \quad (2.1.8)$$

$$-j\beta H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = -j\omega\mu E_y \quad (2.1.9)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = -j\omega\mu E_z \quad (2.1.10)$$

Las seis ecuaciones anteriores pueden ser resueltas para las cuatro componentes transversales de los campos en términos de E_z y H_z , (por ejemplo, H_z puede ser obtenida usando (2.1.5) y (2.1.9)) de esta forma se obtienen los siguientes campos transversales:

$$H_x = \frac{j}{k_c^2} \left[\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial x} \right] \quad (2.1.11)$$

$$H_y = \frac{-j}{k_c^2} \left[\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \beta \frac{\partial H_z}{\partial y} \right] \quad (2.1.12)$$

$$E_x = \frac{-j}{k_c^2} \left[\beta \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right] \quad (2.1.13)$$

$$E_y = \frac{j}{k_c^2} \left[-\beta \frac{\partial E_z}{\partial y} + \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right] \quad (2.1.14)$$

donde k_c es la frecuencia de corte dada por

$$k_c^2 = k^2 - \beta^2 \quad (2.1.15)$$

y

$$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.1.16)$$

es el número de onda del material en el que está inmersa la línea de transmisión o que llena la guía de onda. Si el dieléctrico presenta pérdidas, ϵ puede hacerse complejo usando $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r(1 - j \tan \delta)$, donde $\tan \delta$ es la tangente de las pérdidas del material.

Las ecuaciones (2.1.11)-(2.1.14) son muy útiles para resultados generales y pueden ser aplicadas a una gran variedad de sistemas de ondas guiadas.

2.2. Ondas TEM

Las ondas transversales electromagnéticas (TEM) se caracterizan por que cumplen con $E_z = H_z = 0$. Obsérvese que si $E_z = H_z = 0$, en (2.1.11) entonces los campos transversales también son cero, a menos que $k_c^2 = 0$ ($k^2 = \beta^2$), en cuyo caso tenemos una indeterminación. De esta manera se debe regresar a (2.1.5)-(2.1.10) y aplicar la condición $E_z = H_z = 0$. Entonces de (2.1.5) y (2.1.9), se puede eliminar H_x para obtener

$$\beta^2 E_y = \omega^2 \mu \epsilon E_x \quad (2.2.1)$$

o

$$\beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = k \quad (2.2.2)$$

Por lo tanto. la frecuencia de corte es cero para las ondas TEM.

Ahora. la ecuación de onda de Helmholtz para E_x es:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) E_x = 0 \quad (2.2.3)$$

Pero, para $e^{-j\beta z}$, $(\partial^2 / \partial z^2) E_x = -\beta^2 E_x = -k^2 E_x$, entonces (2.2.3) se reduce a:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) E_x = 0 \quad (2.2.4a)$$

De manera similar, se puede aplicar este procedimiento para E_y ,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) E_y = 0 \quad (2.2.4b)$$

usando (2.1.1) (2.2.4a) y (2.2.4b) se puede escribir

$$\nabla_t^2 \bar{e}(x, y) = 0 \quad (2.2.5)$$

donde $\nabla_t^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ es el operador Laplaciano en dos dimensiones.

El resultado de (2.2.5) muestra que los campos transversales eléctricos, $\bar{e}(x, y)$, de una onda TEM satisface la ecuación de Laplace. De igual manera es fácil demostrar que los campos transversales magnéticos satisfacen la ecuación de Laplace:

$$\nabla_t^2 \bar{h}(x, y) = 0 \quad (2.2.6)$$

Los campos transversales de una onda TEM son los mismos que los campos estáticos que pueden existir entre los conductores. En el caso electrostático, se sabe que el campo eléctrico puede ser expresado como el gradiente del potencial escalar $\Phi(x, y)$:

$$\bar{e}(x, y) = -\nabla_t \Phi(x, y) \quad (2.2.7)$$

donde $\nabla_t = x(\partial/\partial x) + y(\partial/\partial y)$ es el operador gradiente transversal en dos dimensiones. Para que la regla de la relación (2.2.7) sea válida, el rotacional de \bar{e} debe anularse, en este caso:

$$\nabla_t \times \bar{e} = -j\omega\mu h_z \hat{z} = 0 \quad (2.2.8)$$

Usando el hecho de que $\nabla \cdot \bar{D} = \varepsilon \nabla_t \cdot \bar{e} = 0$ en (2.2.7) se muestra que $\Phi(x, y)$ también satisface la ecuación de Laplace,

$$\nabla_t^2 \Phi(x, y) = 0 \quad (2.2.9)$$

En condiciones estáticas, el voltaje entre dos conductores se puede encontrar usando:

$$V_{12} = \Phi_1 - \Phi_2 = \int_1^2 \bar{E} \cdot d\bar{l} \quad (2.2.10)$$

donde Φ_1 y Φ_2 representan el potencial de los conductores 1 y 2, respectivamente.

El flujo de corriente en un conductor se puede encontrar usando la ley de Ampere:

$$I = \oint_C \bar{H} \cdot d\bar{l} \quad (2.2.11)$$

donde C es el contorno de la sección transversal del conductor.

Las ondas TEM pueden existir cuando dos o mas conductores están presentes; las ondas planas son también ejemplos de ondas TEM, ya que no hay componentes de campo en la dirección de propagación; en este caso los conductores de la línea de transmisión pueden ser considerados como dos placas separadas de longitud infinita.

La impedancia de onda de un modo TEM puede ser encontrada con la relación de los campos transversales eléctrico y magnético:

$$Z_{TEM} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \eta \quad (2.2.12)$$

donde (2.1.8) fue usada. La otra parte de las componentes de los campos transversales, se obtiene de (2.1.5)

$$Z_{TEM} = \frac{-E_y}{H_x} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta \quad (2.2.12)$$

Combinando los resultados de (2.2.11) y (2.2.12) se obtiene una expresión general para los campos transversales como:

$$\bar{h}(x, y) = \frac{1}{Z_{TEM}} \mathbf{z} \times \bar{e}(x, y) \quad (2.2.13)$$

Nótese que la impedancia de la onda es igual que la impedancia de una onda plana en un medio con pérdidas no se debe confundir esta impedancia con la impedancia característica.

2.3. Ondas TE

Las ondas transversales electromagnéticas (TE) (también llamadas ondas-H) se caracterizan por que $E_z = 0$ y $H_z \neq 0$. Las ecuaciones (2.1.11)-(2.1.14) se reducen a:

$$H_x = \frac{-j\beta}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (2.3.1)$$

$$H_y = \frac{-j\beta}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (2.3.2)$$

$$E_x = \frac{-j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (2.3.3)$$

$$E_y = \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (2.3.4)$$

En este caso $k_c \neq 0$, y la constante de propagación $\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2}$ que es generalmente una función de la frecuencia y de la geometría de la línea o de la guía. Para aplicar (2.3.1)-(2.3.4), primero se debe encontrar H_z de la ecuación de onda de Helmholtz,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) H_z = 0 \quad (2.3.5)$$

Ya que $H_z(x, y, z) = h_z(x, y)e^{-j\beta z}$ (2.3.5) puede ser reducida a la ecuación de onda en dos dimensiones para h_z :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2 \right) h_z = 0 \quad (2.3.6)$$

Ya que $k_c^2 = k^2 - \beta^2$ Esta ecuación puede ser resuelta aplicando las condiciones de frontera de una guía con una geometría específica.

La impedancia de la onda TE puede ser encontrada como sigue:

$$Z_{TE} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{-E_y}{H_x} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{k\eta}{\beta} \quad (2.3.7)$$

donde se puede observar la dependencia que existe con la frecuencia.

2.4. Ondas TM

Las ondas transversales magnéticas (también llamadas ondas-*E*) se caracterizan porque $E_z \neq 0$ y $H_z = 0$. Las ecuaciones (2.1.11)-(2.1.14) se reducen a:

$$H_x = \frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (2.4.1)$$

$$H_y = \frac{-j\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (2.4.2)$$

$$E_x = \frac{-j\beta}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (2.4.3)$$

$$E_y = \frac{-j\beta}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (2.4.4)$$

Como en el caso de las ondas TE $k_c \neq 0$ y la constante de propagación $\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2}$ que es generalmente una función de la frecuencia y de la geometría de la línea o de la guía. E_z Se obtiene aplicando la ecuación de onda de Helmholtz.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) E_z = 0 \quad (2.4.5)$$

Ya que $E_z(x, y, z) = e_z(x, y)e^{-j\beta z}$ (2.4.5) puede ser reducida a la ecuación de onda en dos dimensiones para e_z :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2 \right) e_z = 0 \quad (2.4.6)$$

Ya que $k_c^2 = k^2 - \beta^2$. Esta ecuación puede ser resuelta aplicando las condiciones de frontera de una guía con una geometría específica.

La impedancia de la onda TE puede ser encontrada como sigue:

$$Z_{TEM} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{-E_y}{H_x} = \frac{\beta}{\omega\epsilon} = \frac{\beta\eta}{k} \quad (2.4.7)$$

donde se puede observar la dependencia que existe con la frecuencia.

2.5. Ecuación de onda en coordenadas elípticas

La relación entre las coordenadas cartesianas (x,y,z) y las coordenadas elípticas (u,v,z) son:

$$x = \frac{1}{2} f \cosh(u) \cos(v) \quad (2.5.1)$$

$$y = \frac{1}{2} f \sinh(u) \sin(v) \quad (2.5.2)$$

donde $0 \leq u \leq \infty$, $0 \leq v \leq 2\pi$ y $-\infty \leq z \leq \infty$ y f es la distancia entre focos de la elipse.

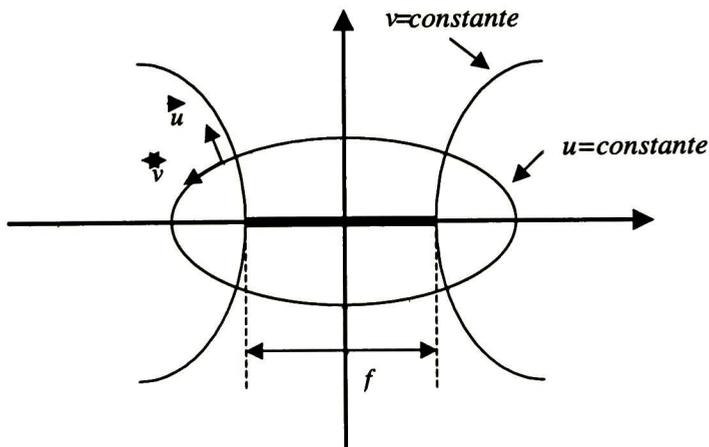


Figura 2.2. Sistema de coordenadas elípticas

Existen dos variables alternativas las cuales son usadas algunas veces en lugar de (u,v) y se definen como:

$$\xi = \cosh(u) \quad (2.5.3)$$

$$\eta = \cos(v) \quad (2.5.4)$$

En coordenadas cartesianas la ecuación de Helmholtz está dada por:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_o \right) H(x, y, z) = 0 \quad (2.5.5)$$

En coordenadas cilíndricas la ecuación de Helmholtz toma la forma:

$$\frac{1}{\Psi} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) H(u, v, z) + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_o^2 \right) H(u, v, z) = 0 \quad (2.5.6)$$

donde

$$\Psi = \left(\frac{f}{2} \right)^2 (\cosh^2(u) - \cos^2(v)) = \frac{1}{2} \left(\frac{f}{2} \right)^2 (\cosh(2u) - \cos(2v)) \quad (2.5.7)$$

Aplicando separación de variables a (2.5.5) podemos obtener una solución de la forma:

$$H(u, v, z) = Z(z) f(u) g(v) \quad (2.5.8)$$

Sustituyendo (2.5.8) en (2.5.5) y después dividiendo por $H(u, v, z)$

$$k_o^2 + \frac{1}{\Psi} \left(\frac{1}{f(u)} \frac{\partial^2 f(u)}{\partial u^2} + \frac{1}{g(v)} \frac{\partial^2 g(v)}{\partial v^2} \right) = k_z^2 = - \frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} \quad (2.5.9)$$

donde k_z^2 es una constante de separación. El lado derecho ecuación (2.5.9) toma la forma:

$$\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} + k_z^2 Z(z) = 0 \quad (2.5.10)$$

Por lo que $f(u)$ y $g(v)$

$$\frac{\partial^2 f(u)}{\partial u^2} - (\lambda - 2q \cosh 2u) f(u) = 0 \quad (2.5.11)$$

$$\frac{\partial^2 g(v)}{\partial v^2} - (\lambda - 2q \cos 2u) g(v) = 0 \quad (2.5.12)$$

donde λ es otra constante de separación y

$$q \equiv \frac{k^2 - k_z^2}{4} f^2 \quad (2.5.13)$$

La ecuacion (2.5.11) es la ecuación de Mathieu modificada y (2.5.12) la ecuación de Mathieu por lo que la solución a la ecuación (2.5.9) es el producto de una función de Mathieu modificada y una ordinaria.

CAPITULO TRES

FUNCIONES DE MATHIEU

3.1. Definición de las Funciones de Mathieu

La ecuación diferencial de segundo orden:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + (\lambda - 2q \cos 2z)y = 0 \quad (3.1.1)$$

es conocida como ecuación de Mathieu donde λ y q son parámetros, usualmente limitados a números reales. Esta es una de dos ecuaciones en coordenadas elípticas y corresponde a la coordenada angular.

Para muchos problemas físicos, se requiere que la solución de (3.1.1) sea una función periódica, con periodo π ó 2π . Esto ocurre solo cuando los parámetros λ y q satisfacen ciertas relaciones. Estas relaciones pueden ser escritas simbólicamente como $F(\lambda, q) = 0$ o $\lambda = \lambda(q)$ y son llamadas ecuaciones características. Por consiguiente, λ es llamado valor característico y la correspondiente solución de (3.1.1) es llamada función característica.

Cuando $q = 0$, (3.1.1) se convierte en

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \lambda(0)y = 0 \quad (3.1.2)$$

La cual tienes dos soluciones linealmente independientes, dadas por:

$$y(z) = \begin{cases} \cos mz \\ \sin mz \end{cases} \quad (3.1.3)$$

donde m es definida por $\lambda(0) = m^2$

Cuando q es diferente de cero, (3.1.1) tiene también dos soluciones que corresponden a $\lambda = \lambda(q)$ y $\lambda = m^2$. Estas soluciones se denotan como $ce_m(z, q)$ y $se_m(z, q)$ y son conocidas como funciones de Mathieu de orden m . Los símbolos "ce" y "se" son abreviaciones de "coseno elíptico" y "seno elíptico" Cuando q tiende a cero, $ce_m(z, q)$ y $se_m(z, q)$ se reduce a $\cos(mz)$ y $\sin(mz)$ respectivamente. Como $ce_m(z, q)$ y $se_m(z, q)$ son funciones periódicas pueden expandirse en series de Fourier de senos y cosenos. Dependiendo si m es un entero par o impar y si el periodo es π o 2π , la expansión en series de Fourier puede ser escrita como

$$ce_{2r}(z, q) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k}^{2r}(q) \cos 2kz \quad (3.1.4)$$

$$ce_{2r+1}(z, q) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+1}^{2r+1}(q) \cos(2k + 1)z \quad (3.1.5)$$

$$se_{2r+1}(z, q) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1}^{2r+1}(q) \sin(2k + 1)z \quad (3.1.6)$$

$$se_{2r+2}(z, q) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+2}^{2r+2}(q) \sin(2k + 2)z \quad (3.1.7)$$

Donde $r = 0, 1, 2, \dots$, y A y B son los coeficientes de expansión que se deben determinar.

Las funciones de Mathieu de orden par (ce_{2r}, se_{2r+2}) tienen periodo π y las funciones de orden impar (ce_{2r+1}, se_{2r+1}) tienen un periodo 2π . $ce_m(z, q)$ es una función par de z y es de esta manera conocida como *solución par* de la ecuación de Mathieu. $se_m(z, q)$ es una función impar de z y es conocida como *solución impar* de la ecuación de Mathieu. Por conveniencia, el valor característico de la solución par $ce_m(z, q)$ es denotado como a y para la solución impar $se_m(z, q)$ como b .

Dado un valor q diferente de cero los valores característicos de las cuatro funciones dadas por (3.1.4)-(3.1.7) son diferentes. Por lo tanto, estas cuatro funciones no satisfacen la misma ecuación de Mathieu, en otras palabras, no son las soluciones para la misma ecuación. Ya que la ecuación de Mathieu es una ecuación diferencial de segundo orden tiene dos soluciones linealmente independientes. La primer solución es periódica dada por (3.1.4)-(3.1.7) La segunda solución para el mismo valor característico es, sin embargo, no periódica cuando q es diferente de cero.

3.2. Cálculo de los coeficientes de expansión y los valores característicos

Para evaluar las funciones de Mathieu usando (3.1.4)-(3.1.7) primero se tienen que calcular los coeficientes de expansión, para lo cual es necesario conocer los valores característicos.

3.2.1 Cálculo de los coeficientes de expansión $A(q)$ y $B(q)$

Sustituyendo cada ecuación (3.1.4)-(3.1.7) dentro de (3.1.1) y haciendo los coeficientes de $\cos(2kz)$, $\cos(2k+1)z$, $\sin(2k)z$, y $\sin(2k+1)z$ cero para $k=0, 1,$

2, ..., se obtiene un conjunto de relaciones recurrentes para los coeficientes de expansión. Estas relaciones recurrentes pueden determinar solo el radio entre coeficientes. Para determinar los coeficientes se introduce la siguiente normalización.

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} ce_m^2(z, q) dz = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} se_m^2(z, q) dz = 1$$

1. Para $ce_{2r}(z, q)$ la relación recurrente es:

$$\begin{aligned} aA_0^{2r} - qA_2^{2r} &= 0 \\ (a - 4)A_2^{2r} - q(2A_0^{2r} + A_4^{2r}) &= 0 \\ [a - (2k)^2]A_{2k}^{2r} - q(A_{2k-2}^{2r} + A_{2k+2}^{2r}) &= 0 \quad (k \geq 2) \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Normalizando la relación:

$$2(A_0^{2r})^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_{2k}^{2r})^2 = 1 \tag{3.2.2}$$

2. Para $ce_{2r+1}(z, q)$ la relación recurrente es:

$$\begin{aligned} (a - 1 - q)A_1^{2r+1} - qA_3^{2r+1} &= 0 \\ [a - (2k + 1)^2]A_{2k+1}^{2r+1} - q(A_{2k-1}^{2r+1} + A_{2k+3}^{2r+1}) &= 0 \quad (k \geq 1) \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Normalizando la relación:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (A_{2k+1}^{2r+1})^2 = 1 \tag{3.2.4}$$

3. Para $se_{2r+1}(z, q)$ la relación recurrente es:

$$\begin{aligned} (b - 1 + q)B_1^{2r+1} - qB_3^{2r+1} &= 0 \\ [b - (2k + 1)^2]B_{2k+1}^{2r+1} - q(B_{2k-1}^{2r+1} + B_{2k+3}^{2r+1}) &= 0 \quad (k \geq 1) \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Normalizando la relación:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (B_{2k+1}^{2r+1})^2 = 1 \tag{3.2.6}$$

4. Para $se_{2r+2}(z, q)$ la relación recurrente es:

$$\begin{aligned} (b-1+q)B_2^{2r+2} - qB_4^{2r+2} &= 0 \\ [b - (2k+1)^2]B_{2k+2}^{2r+2} - q(B_{2k}^{2r+2} + B_{2k+4}^{2r+2}) &= 0 \quad (k \geq 1) \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Normalizando la relación:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (B_{2k+2}^{2r+2})^2 = 1 \tag{3.2.8}$$

Para calcular los coeficientes usando las relaciones recurrentes, se debe prestar especial atención a los procesos de estabilidad. Para ordenes pequeños, una recurrencia hacia atrás es generalmente mas estable. Para ordenes mas grandes una recurrencia mixta puede mejorar sustancialmente la precisión de los resultados. Nótese que para calcular los coeficientes se requieren los valores característicos **a y b.**

3.2.2. Calculo de los valores característicos

Los valores característicos $a(q)$ y $b(q)$ pueden ser calculados de dos formas: resolviendo el problema de eigenvalores o con una ecuación trascendental. Para ilustrar el primer método primero se considera la función de Mathieu definida por (3.1.4). Nótese que la relación recurrente (3.2.1) puede también ser considerada como un conjunto lineal de ecuaciones algebraicas cuya matriz puede ser escrita como sigue

$$\begin{bmatrix} a & -q & & & & & \\ -2q & a-4 & -q & & & & \\ & -q & a-16 & & & & \\ & & & \dots & & & \\ & & & & \dots & & \\ & & & & & -q & a-(2k)^2 & -q \\ & & & & & & & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0^{2r} \\ A_2^{2r} \\ A_4^{2r} \\ \dots \\ \dots \\ A_{2k}^{2r} \\ \dots \end{bmatrix} = 0 \tag{3.2.9}$$

Para que esta ecuación no tenga una solución no trivial el determinante debe ser:

$$\begin{vmatrix} a & -q & & & & \\ -2q & a-4 & -q & & & \\ & -q & a-16 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -q & a-(2k)^2 & -q \\ & & & & & & & \ddots \end{vmatrix} = 0 \quad (3.2.10)$$

Esta es la ecuación característica que determina los valores característicos para las funciones de Mathieu dada en (3.1.4). Esta expansión es de un polinomio infinito de a con q como un parámetro. Por lo tanto, dado un valor de q existen un valor infinito de valores característicos los cuales pueden ser denotados por a_{2r} ($r = 0, 1, 2, \dots$) con el subíndice correspondiendo al orden de la función de Mathieu.

Ya que dado un valor finito de q el valor de los coeficientes en (3.1.4) decrece conforme k se incrementa, o en otras palabras, $A_{2k}^{2r}(q) \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$, se puede truncar la expansión en cierto valor, $k = N$, para obtener una solución aproximada de a . Haciendo esto la serie en (3.1.4) se convierte en una serie finita, y el determinante de (3.2.10) de dimensión finita. Para una precisión dada, el valor de N se incrementa con el valor del parámetro q y, el orden de la función de Mathieu. En la práctica, solamente es necesario un número finito de valores característicos; por lo que N es siempre finito.

Resolver (3.2.9) es equivalente a resolver el problema de eigenvalores siguiente

$$\{ [C_1] - a[I] \} [A] = 0 \quad (3.2.11)$$

donde $[I]$ es la matriz identidad y $[C_1]$ está dado por

$$[C_1] = \begin{bmatrix} 0 & q & & & & \\ 2q & 4 & q & & & \\ & q & 16 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & q & (2k)^2 & q \\ & & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.2.12)$$

La cual es una matriz tridiagonal. Una vez que los eigenvalores de (3.2.11) estén resueltos, se puede también resolver para los correspondientes eigenvectores $[A]$ cuyos elementos corresponden a los coeficientes de expansión. Sin embargo, es usualmente mas conveniente calcular los coeficientes de expansión usando las relaciones recurrentes presentadas anteriormente.

De manera similar, es posible calcular los valores característicos de las funciones de Mathieu definidos en (3.1.5)-(3.1.7) resolviendo un problema de eigenvalores cuya matriz está dada por

$$[C_2] = \begin{bmatrix} 1+q & q & & & & \\ & q & 9 & q & & \\ & & q & 25 & & \\ & & & \dots & & \\ & & & & \dots & \\ & & & & & q & (2k+1)^2 & q \\ & & & & & & & \dots \end{bmatrix} \quad (3.2.13)$$

para $ce_{2r+1}(z, q)$,

$$[C_3] = \begin{bmatrix} 1-q & q & & & & \\ & q & 9 & q & & \\ & & q & 25 & & \\ & & & \dots & & \\ & & & & \dots & \\ & & & & & q & (2k+1)^2 & q \\ & & & & & & & \dots \end{bmatrix} \quad (3.2.14)$$

para $se_{2r+1}(z, q)$,

$$b_5 = 25 + .020833333333q^2 + 1.420924272*10^5q^4 - 6.781684028*10^6q^5 + 4.148847702*10^8q^6 + O(q^7)$$

$$a_5 = b_5(-q)$$

$$b_6 = 36 + .01428571429q^2 + 4.259293003*10^6q^4 - 6.307172471*10^8q^6 + O(q^8)$$

$$a_6 = 36 + .01428571429q^2 + 4.259293003*10^6q^4 + 7.256195585*10^8q^6 + O(q^8)$$

(3.3.1)

Cuando $m \geq 7$ y $q < 3m$,

$$a_m, b_m = m^2 + \frac{q^2}{2(m^2 - 1)} + \frac{5m^2 + 7}{32(m^2 - 1)^3(m^2 - 4)}q^4 + \frac{9m^4 + 58m^2 + 29}{64(m^2 - 1)^5(m^2 - 4)(m^2 - 9)}q^6 + O(q^7 \approx q^8)$$

(3.3.2)

2. Cuando $1 < q < 10$ o $1 < q < m^2$,

$$a_0 \approx .5542818 - .88297q - .09638957q^2 + .003999267q^3 \quad (1 < q < 10)$$

$$a_1 \approx .811752 + 1.33372q - .3089229q^2 + .0192917q^3 - .000494603q^4 \quad (1 < q < 10)$$

$$b_1 \approx 1.10427 - 1.152218q - .05482465q^2 + .001971096q^3 \quad (1 < q < 10)$$

$$a_2 \approx 3.3290504 + .992q - .0001829032q^2 - .008667445q^3 + .0003200972q^4 \quad (1 < q < 15)$$

$$b_2 \approx 4.00909 - .004732542q - .08725329q^2 + .00238446q^3 \quad (1 < q < 10)$$

$$a_3 \approx 8.9449274 - .1039356q + .19069602q^2 - .01453021q^3 + .0003035731q^4 \quad (1 < q < 20)$$

$$b_3 \approx 8.771735 + .2689874q - .03569325q^2 + .00009369364q^3 \quad (1 < q < 15)$$

$$a_4 \approx 16.620847 - .5924058q + .17344854q^2 - .0079684875q^3 + .00010766q^4 \quad (1 < q < 25)$$

$$b_4 \approx 15.411 + .01907493q - .0038216144q^2 + .000708719q^3 \quad (1 < q < 20)$$

$$a_5 \approx 25.93515 - .600205q + .10706975q^2 - .002983416q^3 + .00002238231q^4 \quad (1 < q < 35)$$

$$b_5 \approx 24.897 + .0416399q + .0218225q^2 + .0007425364q^3 \quad (1 < q < 25)$$

$$a_6 \approx 36.423 - .181233q + .0253998q^2 + .000480263q^3 - .0000166846q^4 \quad (1 < q < 40)$$

$$b_6 \approx 35.9925 - .02349616q + .0216609q^2 + .000457146q^3 \quad (1 < q < 35)$$

$$a_7 \approx 49.0547 + .0353597q - .003097887q^2 + .0009730514q^3 - .000014q^4 \quad (1 < q < 50)$$

$$b_7 \approx 49.19035 - .0916292q + .0205511q^2 - .0003043872q^3 \quad (1 < q < 40) \quad (3.3.3)$$

3. Cuando $q \geq 10$ o $q \geq m^2$,

$$\left. \begin{matrix} a_r \\ b_{r+1} \end{matrix} \right\} \approx -2q + 2w\sqrt{q} - \frac{w^2 + 1}{8} - \frac{w + 3/w}{2^7 \sqrt{\varphi}} - \frac{d_1}{2^{12} \varphi} - \frac{d_2}{2^{17} \varphi^{3/2}} - \frac{d_3}{2^{20} \varphi^2} - \frac{d_4}{2^{25} \varphi^{5/2}} \quad (3.3.4)$$

en donde :

$$w = 2r + 1$$

$$\varphi = \frac{q}{w^4}$$

(φ real)

$$d_1 = 5 + \frac{34}{w^2} + \frac{9}{w^4}$$

$$d_2 = \frac{33}{w} + \frac{410}{w^3} + \frac{405}{w^5}$$

$$d_3 = \frac{63}{w^2} + \frac{1260}{w^4} + \frac{2943}{w^6} + \frac{486}{w^8}$$

$$d_4 = \frac{527}{w^3} + \frac{15617}{w^5} + \frac{69001}{w^7} + \frac{41607}{w^9}$$

3.4. Expansión de las funciones de Mathieu cuando $|q| < 1$

Con los valores característicos aproximados, se puede determinar los coeficientes de expansión, con los cuales se puede obtener las siguientes expansiones para las funciones de Mathieu.

Cuando $|q| < 1$,

$$ce_0(z, q) = 2^{1/2} \left[1 - \frac{q}{2} \cos 2z + q^2 \left(\frac{\cos 4z}{32} - \frac{1}{16} \right) - q^3 \left(\frac{\cos 6z}{1152} - \frac{11 \cos 2z}{128} \right) \right] + O(q^4)$$

$$ce_1(z, q) = \cos z - \frac{q}{8} \cos 3z + q^2 \left(\frac{\cos 5z}{192} - \frac{\cos 3z}{64} - \frac{\cos z}{128} \right) - q^3 \left(\frac{\cos 7z}{9216} - \frac{\cos 5z}{1152} - \frac{\cos 3z}{3072} + \frac{\cos z}{512} \right) + O(q^4)$$

$$se_1(z, q) = \sin z - \frac{q}{8} \sin 3z + q^2 \left(\frac{\sin 5z}{192} - \frac{\sin 3z}{64} - \frac{\sin z}{128} \right) - q^3 \left(\frac{\sin 7z}{9216} - \frac{\sin 5z}{1152} - \frac{\sin 3z}{3072} + \frac{\sin z}{512} \right) + O(q^4)$$

$$ce_2(z, q) = \cos 2z - q \left(\frac{\cos 4z}{12} - \frac{1}{4} \right) + q^2 \left(\frac{\cos 6z}{384} - \frac{19 \cos 2z}{288} \right) + O(q^3)$$

$$se_2(z, q) = \sin 2z - \frac{q}{12} \sin 4z + q^2 \left(\frac{\sin 6z}{384} - \frac{\sin 2z}{288} \right) + O(q^3)$$

$$ce_3(z, q) = \cos 3z - q \left(\frac{\cos 5z}{16} - \frac{\cos z}{8} \right) + q^2 \left(\frac{\cos 7z}{640} - \frac{5 \cos 3z}{512} + \frac{\cos z}{64} \right) + O(q^3)$$

$$se_3(z, q) = \sin 3z - q \left(\frac{\sin 5z}{16} - \frac{\sin z}{8} \right) + q^2 \left(\frac{\sin 7z}{640} - \frac{5 \sin 3z}{512} + \frac{\sin z}{64} \right) + O(q^3)$$

(3.4.1)

Cuando $m \geq 4$,

$$ce_m(z, q) = \cos mz - q \left[\frac{\cos(m+2)z}{4(m+1)} - \frac{\cos(m-2)z}{4(m-1)} \right] + q^2 \left[\frac{\cos(m+4)z}{32(m+1)(m+2)} + \frac{\cos(m-4)z}{32(m-1)(m-2)} \right] - \frac{1}{32} \left(\frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m-1)^2} \right) \cos mz + O(q^3)$$

$$se_m(z, q) = \sin mz - q \left[\frac{\sin(m+2)z}{4(m+1)} - \frac{\sin(m-2)z}{4(m-1)} \right] + q^2 \left[\frac{\sin(m+4)z}{32(m+1)(m+2)} + \frac{\sin(m-4)z}{32(m-1)(m-2)} \right] - \frac{1}{32} \left(\frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m-1)^2} \right) \sin mz + O(q^3)$$

(3.4.2)

3.5. Propiedades de las funciones de Mathieu

(1) Valores Especiales

$$\begin{aligned}
 A_0^0(0) &= \frac{1}{\sqrt{2}}; & A_m^m(0) &= 1; & B_m^m(0) &= 1; & m > 0 \\
 A_k^m(0) &= 0; & B_k^m(0) &= 0; & k &\neq m
 \end{aligned}
 \tag{3.5.1}$$

(2) Periodicidad

Cuando m es un número par, $ce_m(z, q)$ y $se_m(z, q)$ tienen periodo π . Cuando m es un número impar $ce_m(z, q)$ y $se_m(z, q)$ tienen periodo 2π .

(3) Simetría sobre z

La función $ce_m(z, q)$ es simétrica,

(4) Simetría en q

Para los valores característicos

$$\begin{aligned}
 a_{2r}(-q) &= a_{2r}(q) \\
 a_{2r+1}(-q) &= b_{2r+1}(q) \\
 b_{2r+1}(-q) &= a_{2r+1}(q) \\
 b_{2r+2}(-q) &= b_{2r+2}(q)
 \end{aligned}
 \tag{3.5.2}$$

Para los coeficientes,

$$\begin{aligned}
 A_{2k}^{2r}(-q) &= (-1)^{k-r} A_{2k}^{2r}(q) \\
 A_{2k+1}^{2r+1}(-q) &= (-1)^{k-r} B_{2k+1}^{2r+1}(q) \\
 B_{2k+1}^{2r+1}(-q) &= (-1)^{k-r} A_{2k+1}^{2r+1}(q) \\
 B_{2k+2}^{2r+2}(-q) &= (-1)^{k-r} B_{2k+2}^{2r+2}(q)
 \end{aligned}
 \tag{3.5.2}$$

(5) Ceros de las funciones de Mathieu

Dentro del intervalo $[0, \pi]$, $ce_m(z, q)$ y $se_m(z, q)$ tiene el mismo número de ceros que $\cos(mz)$ y $\sin(mz)$. Cuando $q=0$ los ceros están igualmente espaciados.

(6) Relación de las funciones de Mathieu con q y $-q$

$$\begin{aligned}
 ce_{2r}(z, -q) &= (-1)^r ce_{2r}\left(\frac{\pi}{2} - z, q\right) \\
 ce_{2r+1}(z, -q) &= (-1)^r se_{2r+1}\left(\frac{\pi}{2} - z, q\right) \\
 se_{2r+1}(z, -q) &= (-1)^r ce_{2r+1}\left(\frac{\pi}{2} - z, q\right) \\
 se_{2r+2}(z, -q) &= (-1)^r se_{2r+2}\left(\frac{\pi}{2} - z, q\right)
 \end{aligned}
 \tag{3.5.4}$$

(7) Relaciones Ortogonales

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} ce_m(z, q) ce_{m'}(z, q) dz &= \begin{cases} 0 & m' \neq n \\ \pi & m = n \end{cases} \\
 \int_0^{2\pi} se_m(z, q) se_{m'}(z, q) dz &= \begin{cases} 0 & m' \neq n \\ \pi & m = n \end{cases} \\
 \int_0^{2\pi} ce_m(z, q) se_{m'}(z, q) dz &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.5.5}$$

Normalizando las integrales de las funciones ordinarias de Mathieu se obtiene

$$\begin{aligned}
 Nce_{2r} &= \int_0^{2\pi} [ce_{2r}]^2 dz = 2\pi(A_0^{2r}) + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (A_{2k}^{2r})^2 \\
 Nce_{2r+1} &= \int_0^{2\pi} [ce_{2r+1}]^2 dz = \pi \sum_{k=0}^{\infty} (A_{2k+1}^{2r+1})^2 \\
 Nse_{2r+1} &= \int_0^{2\pi} [se_{2r+1}]^2 dz = \pi \sum_{k=1}^{\infty} (B_{2k+1}^{2r+1})^2 \\
 Nse_{2r+2} &= \int_0^{2\pi} [se_{2r+2}]^2 dz = \pi \sum_{k=1}^{\infty} (B_{2k+2}^{2r+2})^2
 \end{aligned}
 \tag{3.5.6}$$

3.5.1. Derivadas de la funciones de Mathieu

Las derivadas de las funciones ordinarias de Mathieu son necesarias para muchas aplicaciones y se pueden obtener fácilmente a partir de (3.14)-(3.1.7)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} [ce_{2r}(z, q)] &= -\sum_{k=1}^{\infty} 2kA_{2k}^{2r} \sin 2kv \\ \frac{\partial}{\partial v} [ce_{2r+1}(z, q)] &= -\sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)A_{2k+1}^{2r+1} \sin(2k+1)v \\ \frac{\partial}{\partial v} [se_{2r+1}(z, q)] &= -\sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)B_{2k+1}^{2r+1} \cos(2k+1)v \\ \frac{\partial}{\partial v} [se_{2r+2}(z, q)] &= -\sum_{k=1}^{\infty} (2k+2)B_{2k+2}^{2r+2} \cos(2k+2)v \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

3.6. Gráficas

Empleando las definiciones y los procedimientos descritos anteriormente se desarrollaron programas en MatLab para el cálculo de las funciones de Mathieu. Los valores característicos se obtienen resolviendo el problema de eigenvalores, y para la sumatoria se usan 40 coeficientes de expansión. En las Figuras 3.1-3.6 se presentan gráficas de las funciones de Mathieu para valor de $q = 1, 5, 10$.

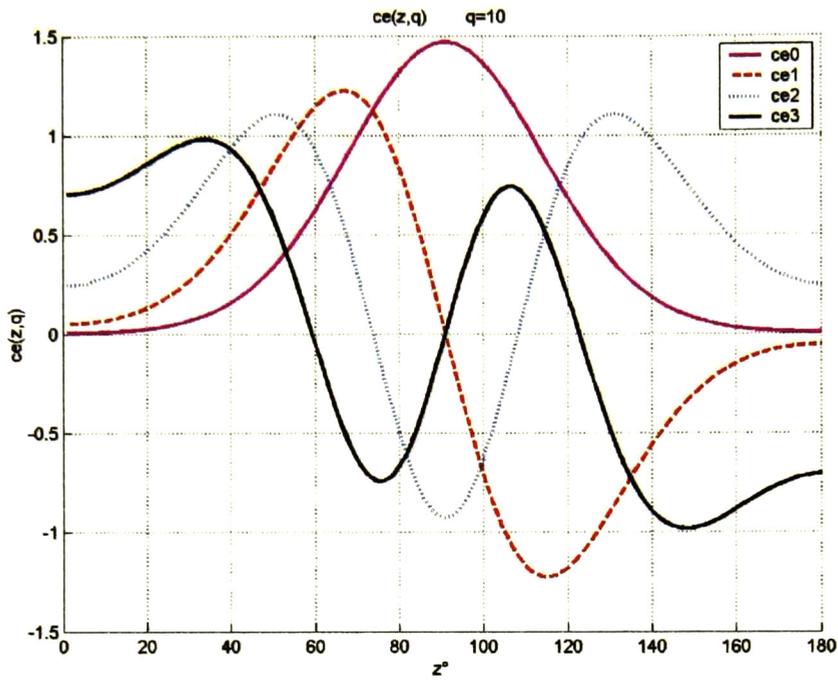


Figura 3.1. Funciones de Mathieu $ce_m(z, q)$ $q=10$

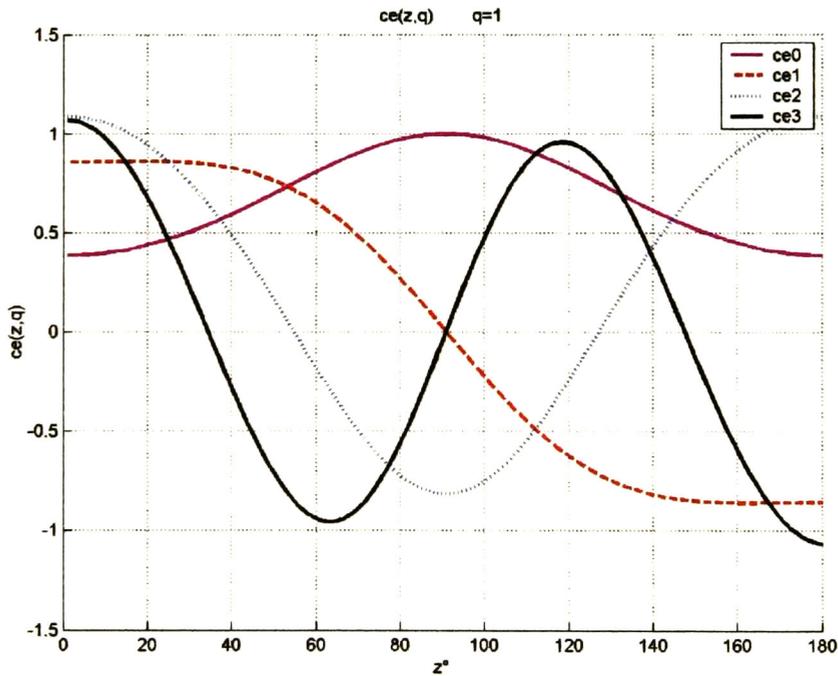


Figura 3.2. Funciones de Mathieu $ce_m(z, q)$ $q=1$

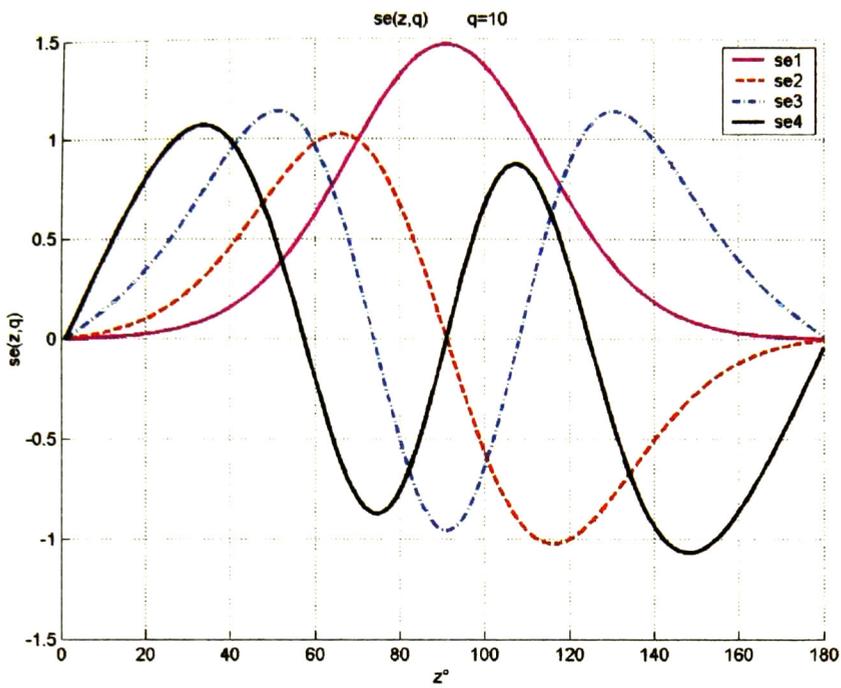


Figura 3.3. Funciones de Mathieu $se_m(z, q)$ $q = 10$

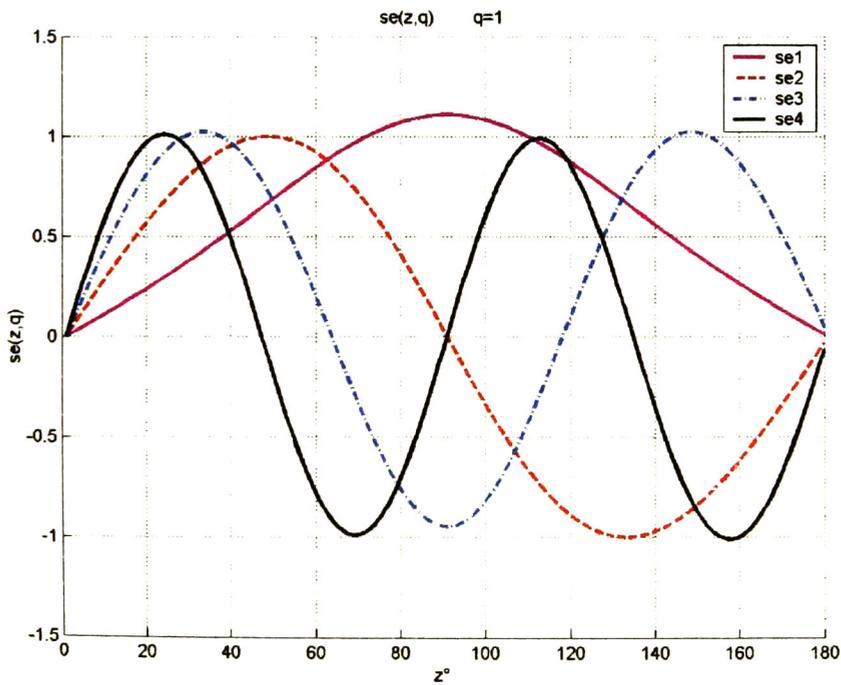


Figura 3.4. Funciones de Mathieu $se_m(z, q)$ $q = 1$

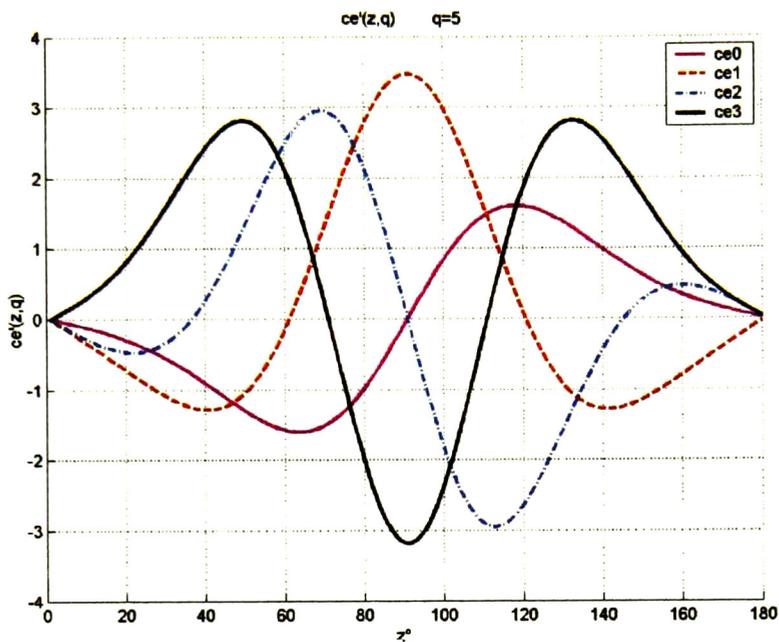


Figura 3.5. Funciones de Mathieu $\frac{\partial ce_m(z, q)}{\partial z}$ q = 5

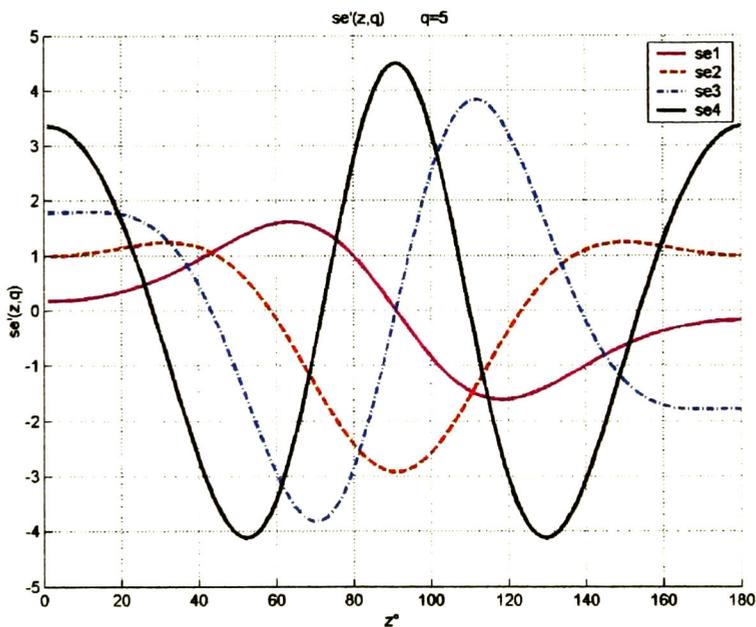


Figura 3.6. Funciones de Mathieu $\frac{\partial se_m(z, q)}{\partial z}$ q = 5

3.7. Funciones de Mathieu Modificadas

La ecuación diferencial

$$\frac{d^2 y}{dz^2} - (\lambda - 2q \cosh 2z)y = 0 \quad (3.6.1)$$

es llamada ecuación de Mathieu modificada. Esta es la segunda ecuación en coordenadas elípticas y corresponde a la coordenada radial. Como en el caso de la ecuación de Mathieu, es un parámetro y λ es el valor característico. Las soluciones de (3.6.1) son conocidas como funciones de Mathieu modificadas.

La ecuación (3.6.1) también se puede obtener de (3.1.1) haciendo $z \rightarrow iz$. Las funciones de Mathieu modificadas se denotan como $Ce_m(z, q)$ y $Se_m(z, q)$ y se obtiene sustituyendo iz por z en $ce_m(z, q)$ y $se_m(z, q)$.

$$\begin{aligned} Ce_m(z, q) &= ce_m(iz, q) \\ Se_m(z, q) &= -ise_m(iz, q) \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

De (3.1.4)-(3.1.7) se tiene que

$$Ce_{2r}(z, q) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k}^{2r}(q) \cosh 2kz \quad (3.6.3)$$

$$Ce_{2r+1}(z, q) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+1}^{2r+1}(q) \cosh(2k+1)z \quad (3.6.4)$$

$$Se_{2r+1}(z, q) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1}^{2r+1}(q) \sinh(2k+1)z \quad (3.6.5)$$

$$Se_{2r+2}(z, q) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+2}^{2r+2}(q) \sinh(2k+2)z \quad (3.6.6)$$

Las funciones modificadas de Mathieu pueden ser expandidas en términos de funciones de Bessel de la siguiente forma

$$\begin{aligned} Ce_{2r}(z, q) &= \frac{ce_{2r}(\pi/2, q)}{A_0^{2r}(q)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A_{2k}^{2r}(q) J_{2k}(2\sqrt{q} \cosh z) \\ &= \frac{ce_{2r}(0, q)}{A_0^{2r}(q)} \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k}^{2r}(q) J_{2k}(2\sqrt{q} \sinh z) \end{aligned} \quad (3.6.7)$$

$$\begin{aligned}
 Ce_{2r+1}(z, q) &= \frac{ce'_{2r+1}(\pi/2, q)}{\sqrt{q}A_0^{2r+1}(q)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A_{2k+1}^{2r+1}(q) J_{2k+1}(2\sqrt{q} \cosh z) \\
 &= \frac{ce_{2r+1}(0, q)}{\sqrt{q}A_0^{2r}(q)} \coth z \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) A_{2k+1}^{2r+1}(q) J_{2k+1}(2\sqrt{q} \sinh hz)
 \end{aligned} \tag{3.6.8}$$

$$\begin{aligned}
 Se_{2r+1}(z, q) &= \frac{se_{2r+1}(\pi/2, q)}{\sqrt{q}B_1^{2r+1}(q)} \tanh z \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1) B_{2k+1}^{2r+1}(q) J_{2k+1}(2\sqrt{q} \cosh z) \\
 &= \frac{se'_{2r+1}(0, q)}{\sqrt{q}B_1^{2r}(q)} \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1}^{2r+1}(q) J_{2k+1}(2\sqrt{q} \sinh hz)
 \end{aligned} \tag{3.6.9}$$

$$\begin{aligned}
 Se_{2r+2}(z, q) &= \frac{se'_{2r+2}(\pi/2, q)}{\sqrt{q}B_2^{2r+2}(q)} \tanh z \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} (2k+2) B_{2k+2}^{2r+2}(q) J_{2k+2}(2\sqrt{q} \cosh z) \\
 &= \frac{se'_{2r+2}(0, q)}{qB_1^{2r+2}(q)} \coth z \sum_{k=0}^{\infty} (2k+2) B_{2k+2}^{2r+2}(q) J_{2k+2}(2\sqrt{q} \sinh hz)
 \end{aligned} \tag{3.6.10}$$

Tambi3n pueden ser expandidas en productos de funciones de Bessel de la siguiente manera

$$Ce_{2r}(z, q) = \frac{ce_{2r}(0, q)ce_{2r}(\pi/2, q)}{[A_0^{2r}(q)]^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A_{2k}^{2r}(q) J_k(\sqrt{q}e^{-z}) J_k(\sqrt{q}e^z) \tag{3.6.11}$$

$$\begin{aligned}
 Ce_{2r+1}(z, q) &= \frac{ce_{2r+1}(0, q)ce'_{2r+1}(\pi/2, q)}{\sqrt{q}[A_1^{2r+1}(q)]^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A_{2k+1}^{2r+1}(q) * \\
 &\quad [J_k(\sqrt{q}e^{-z})J_{k+1}(\sqrt{q}e^z) + \\
 &\quad J_{k+1}(\sqrt{q}e^{-z})J_k(\sqrt{q}e^z)]
 \end{aligned} \tag{3.6.12}$$

$$\begin{aligned}
 Se_{2r+1}(z, q) &= \frac{se'_{2r+1}(0, q)se_{2r+1}(\pi/2, q)}{\sqrt{q}[B_1^{2r+1}(q)]^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k B_{2k+1}^{2r+1}(q) * \\
 &\quad [J_k(\sqrt{q}e^{-z})J_{k+1}(\sqrt{q}e^z) - \\
 &\quad J_{k+1}(\sqrt{q}e^{-z})J_k(\sqrt{q}e^z)]
 \end{aligned} \tag{3.6.13}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Se}_{2r+2}(z, q) &= \frac{se'_{2r+2}(0, q)se'_{2r+2}(\pi/2, q)}{q[B_2^{2r+2}(q)]^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} B_{2k+2}^{2r+2}(q) * \\
 & \quad [J_k(\sqrt{qe^{-z}})J_{k+2}(\sqrt{qe^z}) - \\
 & \quad J_{k+2}(\sqrt{qe^{-z}})J_k(\sqrt{qe^z})]
 \end{aligned} \tag{3.6.14}$$

Ya que las funciones de Mathieu modificadas son las funciones de Mathieu ordinarias, solo que el argumento es imaginario, los valores característicos y los coeficientes de expansión son los mismos que los de las funciones ordinarias.

La manera general de definir las funciones de Mathieu modificadas es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 \text{Mc}_{2r}^{(j)}(z, q) &= \frac{1}{ce_{2r}(0, q)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A_{2k}^{2r}(q) Z_{2k}^j(2\sqrt{q} \cosh z) \\
 &= \frac{1}{ce_{2r}(\pi/2, q)} (-1)^r \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k}^{2r}(q) Z_{2k}^j(2\sqrt{q} \sinh z)
 \end{aligned} \tag{3.6.15}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Mc}_{2r+1}^{(j)}(z, q) &= \frac{1}{ce_{2r+1}(0, q)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+r} A_{2k+1}^{2r+1}(q) Z_{2k+1}^j(2\sqrt{q} \cosh z) \\
 &= \frac{1}{ce'_{2r+1}(\pi/2, q)} (-1)^{r+1} \coth z \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) A_{2k+1}^{2r+1}(q) Z_{2k+1}^j(2\sqrt{q} \sinh z)
 \end{aligned} \tag{3.6.16}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ms}_{2r+1}^{(j)}(z, q) &= \frac{1}{se'_{2r+1}(0, q)} \tanh z \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+r} (2k+1) B_{2k+1}^{2r+1}(q) Z_{2k+1}^j(2\sqrt{q} \cosh z) \\
 &= \frac{1}{se_{2r+1}(\pi/2, q)} (-1)^r \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1}^{2r+1}(q) Z_{2k+1}^j(2\sqrt{q} \sinh z)
 \end{aligned} \tag{3.6.17}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ms}_{2r+2}^{(j)}(z, q) &= \frac{1}{se'_{2r+2}(0, q)} \tanh z \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+r} (2k+2) B_{2k+2}^{2r+2}(q) Z_{2k+2}^j(2\sqrt{q} \cosh z) \\
 &= \frac{1}{se'_{2r+2}(\pi/2, q)} (-1)^{r+1} \coth z \sum_{k=0}^{\infty} (2k+2) B_{2k+2}^{2r+2}(q) Z_{2k+2}^j(2\sqrt{q} \sinh z)
 \end{aligned} \tag{3.6.18}$$

donde $r = 0, 1, 2, \dots$; la función correspondiente a $j = 1$, $Z_k^{(1)}(x) \equiv J_k(x)$, es la función de Bessel de primera clase y la función correspondiente a $j = 2$, $Z_k^{(2)}(x) \equiv Y_k(x)$, es la función de Bessel segunda clase.

Las funciones $Mc_m^{(j)}(z, q)$ también pueden ser expresadas en series de productos de funciones de Bessel

$$Mc_{2r}^{(j)}(z, q) = \frac{1}{A_0^{2r}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+r} A_{2k}^{2r}(q) J_k(u_1) Z_k^{(j)}(u_2) \quad (3.6.19)$$

$$Mc_{2r+1}^{(j)}(z, q) = \frac{1}{A_1^{2r+1}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+r} A_{2k+1}^{2r+1}(q) [J_k(u_1) Z_{k+1}^{(j)}(u_2) + J_{k+1}(u_1) Z_k^{(j)}(u_2)] \quad (3.6.20)$$

$$Ms_{2r+1}^{(j)}(z, q) = \frac{1}{B_1^{2r+1}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+r} B_{2k+1}^{2r+1}(q) [J_k(u_1) Z_{k+1}^{(j)}(u_2) - J_{k+1}(u_1) Z_k^{(j)}(u_2)] \quad (3.6.21)$$

$$Ms_{2r+2}^{(j)}(z, q) = \frac{1}{B_2^{2r+2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+r} B_{2k+2}^{2r+2}(q) [J_k(u_1) Z_{k+2}^{(j)}(u_2) - J_{k+2}(u_1) Z_k^{(j)}(u_2)] \quad (3.6.22)$$

donde $u_1 = \sqrt{q}e^{-z}$ y $u_2 = \sqrt{q}e^z$

3.8. Derivadas de la funciones modificadas de Mathieu

Aplicando la derivada con respecto a z a las funciones anteriores se obtiene la derivada de las funciones modificadas de Mathieu, las cuales están expresadas en términos de productos de funciones de Bessel:

$$\frac{\partial Mc_{2r}^{(j)}(z, q)}{\partial z} = \frac{2\sqrt{q} \sinh z}{ce_{2r}(0, q)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+r} A_{2k}^{2r}(q) Z'_{2k}{}^j(2\sqrt{q} \cosh z) \quad (3.7.1)$$

$$\frac{\partial Mc_{2r+1}^{(j)}(z, q)}{\partial z} = \frac{2\sqrt{q} \sinh z}{ce_{2r+1}(0, q)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+r} A_{2k+1}^{2r+1}(q) Z'_{2k+1}{}^j(2\sqrt{q} \cosh z) \quad (3.7.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{Ms}_{2r+1}^{(j)}(z, q)}{\partial z} &= \frac{2\sqrt{q} \sinh z \tanh z}{se'_{2r+1}(0, q)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+r} (2k+1) B_{2k+1}^{2r+1}(q) Z_{2k+1}^{(j)}(2\sqrt{q} \cosh z) \\ &+ \frac{1}{se'_{2r+1}(0, q) \cosh^2 z} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+r} (2k+1) B_{2k+1}^{2r+1}(q) Z_{2k+1}^j(2\sqrt{q} \cosh z) \end{aligned} \quad (3.7.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{Ms}_{2r+2}^{(j)}(z, q)}{\partial z} &= \frac{2\sqrt{q} \sinh z \tanh z}{se'_{2r+2}(0, q)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+r} (2k+2) B_{2k+2}^{2r+2}(q) Z_{2k+2}^{(j)}(2\sqrt{q} \cosh z) \\ &+ \frac{1}{se'_{2r+2}(0, q) \cosh^2 z} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+r} (2k+2) B_{2k+2}^{2r+2}(q) Z_{2k+2}^j(2\sqrt{q} \cosh z) \end{aligned} \quad (3.7.4)$$

y

$$\frac{\partial \text{Mc}_{2r}^{(j)}(z, q)}{\partial z} = \frac{\sqrt{q}}{A_0^{2r}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+r} A_{2k}^{2r}(q) \left[e^z J_k(u1) Z_k^{(j)}(u2) - e^{-z} J'_k(u1) Z_k^{(j)}(u2) \right] \quad (3.7.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{Mc}_{2r+1}^{(j)}(z, q)}{\partial z} &= \frac{\sqrt{q}}{A_1^{2r+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \begin{aligned} &(-1)^{k+r} A_{2k+1}^{2r+1}(q) \\ &e^z \left[J_k(u1) Z_{k+1}^{(j)}(u2) + J_{k+1}(u1) Z_k^{(j)}(u2) \right] - \\ &e^{-z} \left[J'_k(u1) Z_{k+1}^{(j)}(u2) + J'_{k+1}(u1) Z_k^{(j)}(u2) \right] \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (3.7.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{Ms}_{2r+1}^{(j)}(z, q)}{\partial z} &= \frac{\sqrt{q}}{B_1^{2r+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \begin{aligned} &(-1)^{k+r} B_{2k+1}^{2r+1}(q) \\ &e^z \left[J_k(u1) Z_{k+1}^{(j)}(u2) - J_{k+1}(u1) Z_k^{(j)}(u2) \right] - \\ &e^{-z} \left[J'_k(u1) Z_{k+1}^{(j)}(u2) - J'_{k+1}(u1) Z_k^{(j)}(u2) \right] \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (3.7.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{Ms}_{2r+2}^{(j)}(z, q)}{\partial z} &= \frac{\sqrt{q}}{B_1^{2r+2}} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \begin{aligned} &(-1)^{k+r} B_{2k+2}^{2r+2}(q) \\ &e^z \left[J_k(u1) Z_{k+2}^{(j)}(u2) - J_{k+2}(u1) Z_k^{(j)}(u2) \right] - \\ &e^{-z} \left[J'_k(u1) Z_{k+2}^{(j)}(u2) - J'_{k+2}(u1) Z_k^{(j)}(u2) \right] \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (3.7.8)$$

para $j=1$ y $j=2$

3.9. Relaciones de las funciones de Mathieu Modificadas

Las funciones $Mc_{2r}^{(1)}(z, q)$, $Mc_{2r+1}^{(1)}(z, q)$, $Ms_{2r+1}^{(1)}(z, q)$ y $Ms_{2r+2}^{(1)}(z, q)$ están relacionadas con las funciones $Ce_{2r}(z, q)$, $Ce_{2r+1}(z, q)$, $Se_{2r+1}(z, q)$, $Se_{2r+2}(z, q)$ por:

$$Ce_{2r}(z, q) = \frac{ce_{2r}(0, q)ce_{2r}(\pi/2, q)}{(-1)^r A_0^{2r}(q)} Mc_{2r}^{(1)}(z, q) \quad (3.8.1)$$

$$Ce_{2r+1}(z, q) = \frac{ce_{2r+1}(0, q)ce'_{2r+1}(\pi/2, q)}{(-1)^{r+1} \sqrt{q} A_1^{2r+1}(q)} Mc_{2r+1}^{(1)}(z, q) \quad (3.8.2)$$

$$Se_{2r+1}(z, q) = \frac{se'_{2r+1}(0, q)se_{2r+1}(\pi/2, q)}{(-1)^r \sqrt{q} B_1^{2r+1}(q)} Ms_{2r+1}^{(1)}(z, q) \quad (3.8.3)$$

$$Se_{2r+2}(z, q) = \frac{se'_{2r+2}(0, q)se_{2r+2}(\pi/2, q)}{(-1)^{r+1} \sqrt{q} B_1^{2r+2}(q)} Ms_{2r+2}^{(1)}(z, q) \quad (3.8.4)$$

En analogía con el caso de las funciones de Hankel, las funciones de Mathieu–Hankel están definidas por:

$$M_m^{(3)}(z, q) = M_m^{(1)}(z, q) + iM_m^{(2)}(z, q) \quad (3.8.5)$$

$$M_m^{(4)}(z, q) = M_m^{(1)}(z, q) - iM_m^{(2)}(z, q) \quad (3.8.6)$$

donde M_m puede ser Mc_m o Ms_m y $M_m^{(3)}(z, q)$ y $M_m^{(4)}(z, q)$ son también llamadas funciones de Mathieu modificadas de tercer y cuarta clase, respectivamente.

Las funciones de modificadas de Mathieu de primer y segunda clase son linealmente independientes. Sin embargo, cualquier combinación lineal de dos funciones $M_m^{(1)}(z, q)$, $M_m^{(2)}(z, q)$, $M_m^{(3)}(z, q)$ y $M_m^{(4)}(z, q)$ pueden formar una solución completa a la ecuación (3.6.1).

3.9.1 Propiedades de las funciones de Mathieu modificadas

(1) Wroskiano

$$W[Mc_m^{(1)}(z, q), Mc_m^{(2)}(z, q)] = Mc_m^{(1)}(z, q) \frac{\partial}{\partial z} Mc_m^{(2)}(z, q) - Mc_m^{(2)}(z, q) \frac{\partial}{\partial z} Mc_m^{(1)}(z, q) = \frac{2}{\pi} \quad (3.8.7)$$

$$W[\mathbf{Ms}_m^{(1)}(z, q), \mathbf{Ms}_m^{(2)}(z, q)] = \mathbf{Ms}_m^{(1)}(z, q) \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{Ms}_m^{(2)}(z, q) - \mathbf{Ms}_m^{(2)}(z, q) \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{Ms}_m^{(1)}(z, q) = \frac{2}{\pi} \quad (3.8.8)$$

3.10. Gráficos de las funciones de Mathieu Modificadas

Al igual que con las funciones de Mathieu en las figuras siguientes se presenta graficas de las funciones de Mathieu modificadas. Las curvas se obtuvieron con el parámetro $q = 5$.

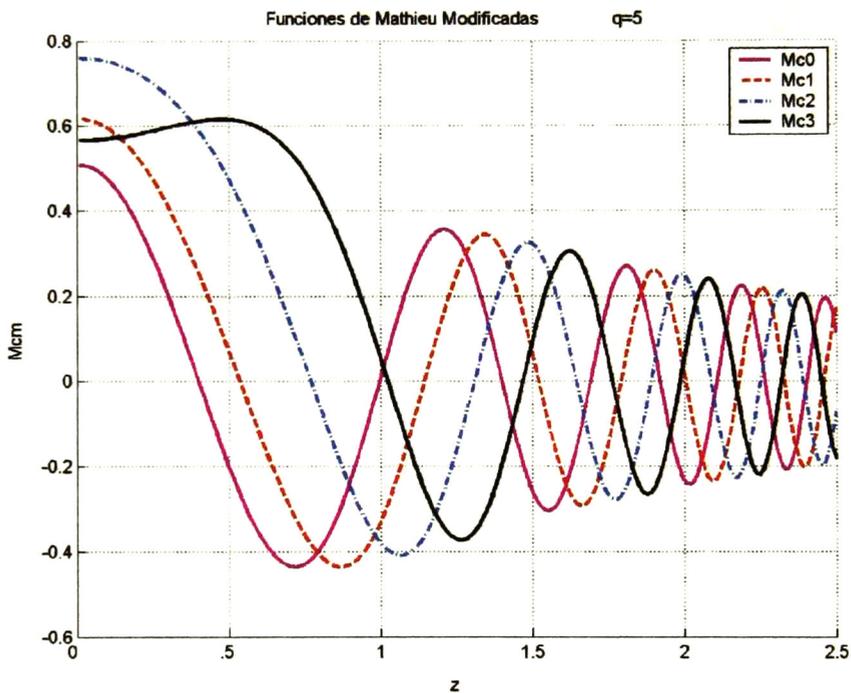


Figura 3.7. Funciones de Mathieu $Mc_m^{(1)}(z, q)$ $q = 5$

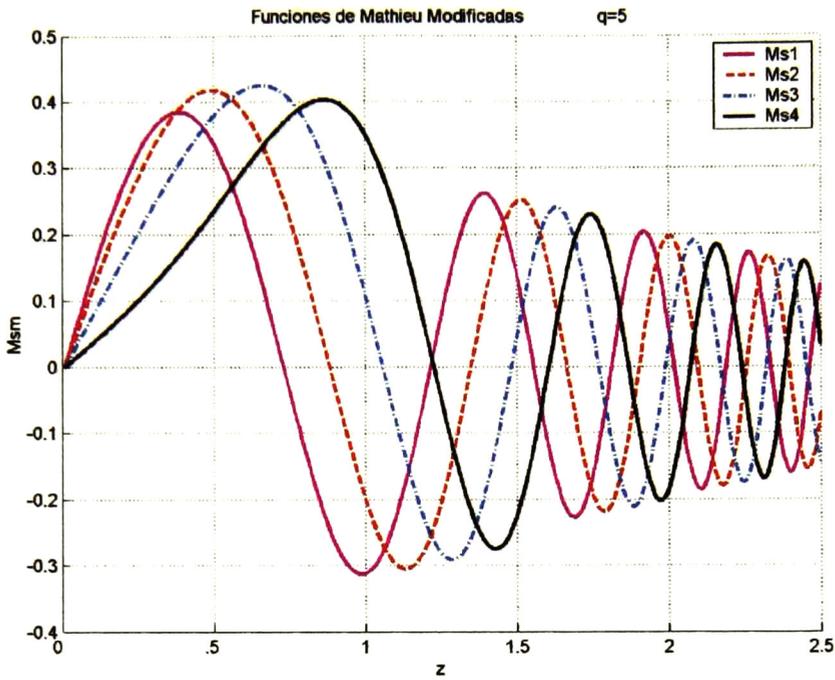


Figura 3.8. Funciones de Mathieu $M_{s_m}^{(1)}(z, q)$ $q = 5$

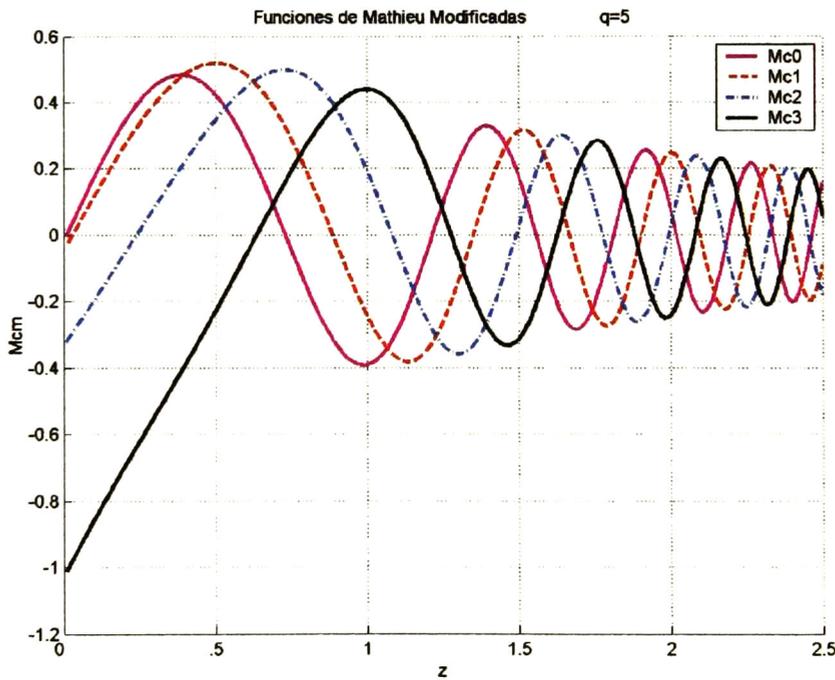


Figura 3.9. Funciones de Mathieu $M_{c_m}^{(2)}(z, q)$ $q = 5$

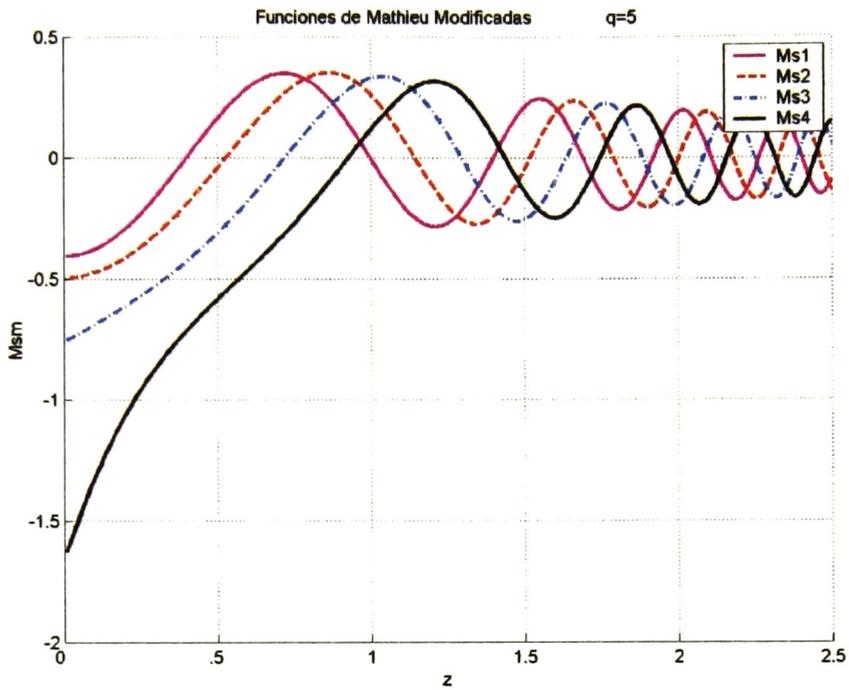


Figura 3.10. Funciones de Mathieu $M_{s_m}^{(2)}(z, q)$ $q = 5$

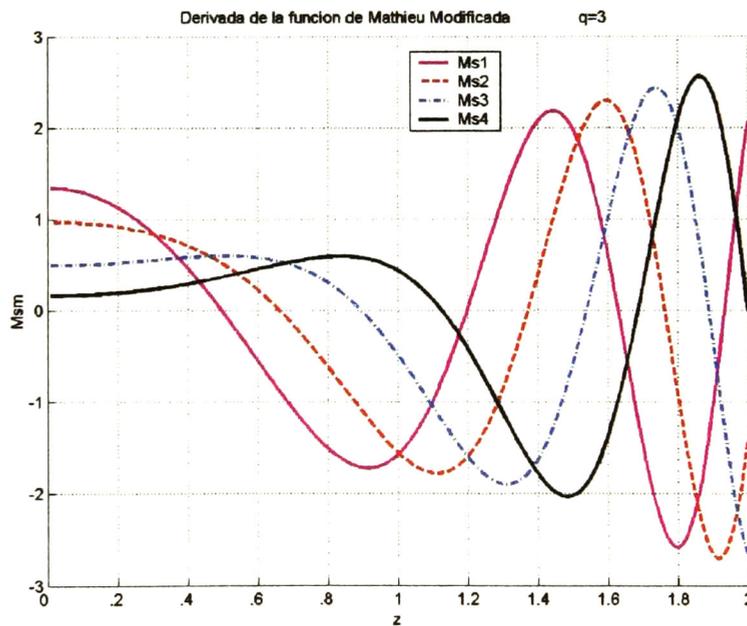


Figura 3.11. Funciones de Mathieu $\partial M_{s_m}^{(1)}(z, q) / \partial z$ $q = 3$

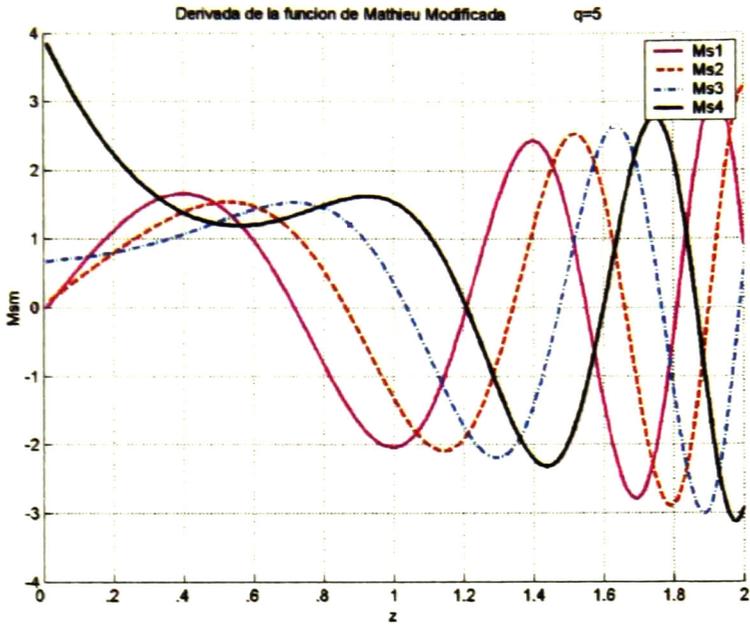


Figura 3.12. Funciones de Mathieu $\partial Ms_m^{(2)}(z, q) / \partial z$ $q = 5$

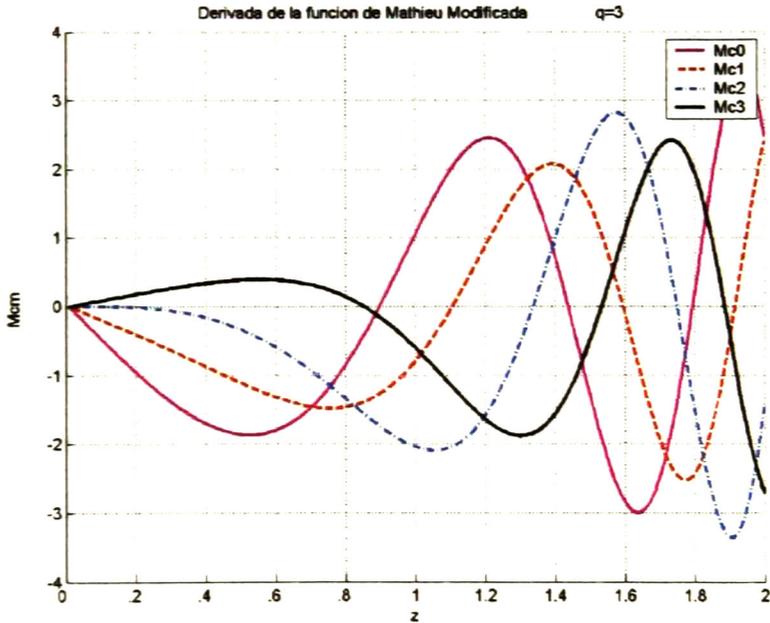


Figura 3.13. Funciones de Mathieu $\partial Mc_m^{(1)}(z, q) / \partial z$ $q = 3$

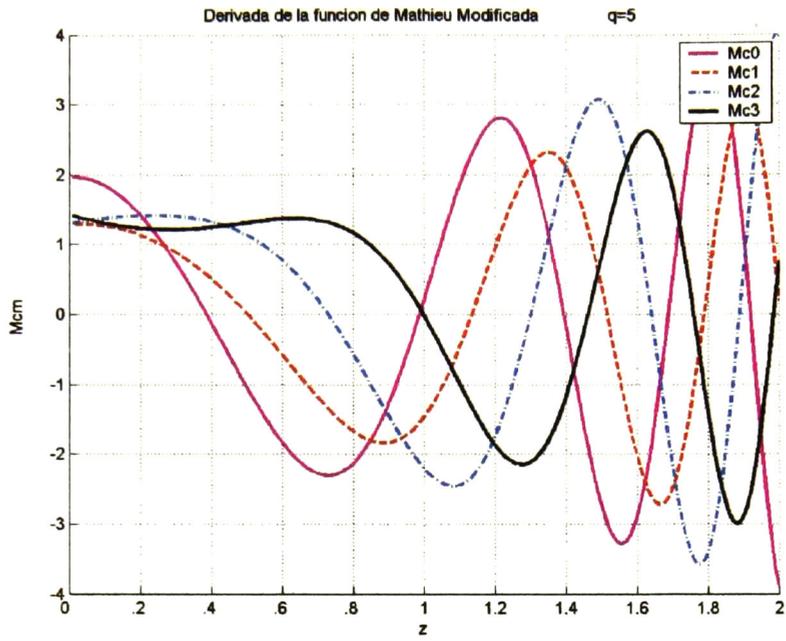


Figura 3.14. Funciones de Mathieu $\partial M_{cm}^{(2)}(z, q) / \partial z$ $q = 5$

CAPITULO CUATRO

GUIAS DE ONDA ELIPTICAS

Introducción.



Figura 4.1. Guía de Onda Elíptica

En las guías de onda los campos eléctrico y magnético viajan en el espacio que se encuentra en el interior de la guía, de este modo no hay pérdidas de potencia por radiación y, las pérdidas en el dieléctrico son muy bajas debido a que suele ser aire.

Este sistema evita que existan interferencias en el campo por la presencia de otros objetos, al contrario de lo que ocurre en los sistemas de transmisión abiertos. Pero, por otro lado, en las paredes de la guía las corrientes inducidas producen calor que da lugar a que existan algunas pérdidas.

Existen varios tipos de configuraciones para las guías de onda, pero las más comunes son: guías de onda de sección transversal rectangular, guías de sección transversal circular y guías de sección transversal elíptica, que es el caso que se trata en este trabajo.

La propagación de los campos eléctrico y magnético dentro de una guía de onda elíptica obedece a la ecuación de onda en coordenadas elípticas analizada en el capítulo anterior.

Dentro de las guías de onda es posible la propagación de varios modos de ondas electromagnéticas. Cada modo de propagación tiene asociada una frecuencia de corte, de tal manera que si la frecuencia de la señal a transmitir es mayor que la frecuencia de corte, la energía electromagnética se transmitirá a través de la guía. En caso contrario, si la frecuencia de la señal es menor que la de corte, la energía se atenuará exponencialmente con la distancia, teniendo un valor extremadamente bajo a una distancia muy corta.

El modo dominante en una guía determinada es aquél que tiene la frecuencia de corte más baja. Las dimensiones de la guía pueden escogerse de modo que para una señal dada, sólo el modo principal pueda transmitirse por ella. Para el caso de guías de onda existen dos estructuras básicas transversales de propagación:

- **Modo TM** (Transversal Magnético) en el que $H_z=0$, y las dos componentes restantes del campo magnético están contenidas en el plano transversal.
- **Modo TE** (Transversal Eléctrico) en el que $E_z=0$, y las dos componentes restantes están contenidas en el plano transversal.

4.1. Modo transversal Magnético

Para el modo transversal magnético las soluciones de los campos en coordenadas elípticas son las siguientes [2]:

$$E_z = AU(\xi)V(\eta) \quad (4.1.1)$$

$$E_\xi = Z_{TM}H_\eta = -\frac{jk_zAU'(\xi)V(\eta)}{f_1(k^2 - k_z^2)} \quad (4.1.2)$$

$$E_\eta = -Z_{TM}H_\xi = \frac{jk_zAU(\xi)V'(\eta)}{f_1(k^2 - k_z^2)} \quad (4.1.3)$$

$$Z_{TM} = \frac{k_z}{\epsilon\omega} = Z_o \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} \quad (4.1.4)$$

donde las funciones $U(\xi)$ y $V(\eta)$ son las funciones de Mathieu radial y angular, respectivamente.

4.2. Modo transversal Eléctrico

Para el modo transversal eléctrico, las ecuación de los campos en coordenadas elípticas son las siguientes:
[2]

$$H_z = AU(\xi)V(\eta) \quad (4.2.1)$$

$$H_\xi = -\frac{E_\eta}{Z_{TE}} = -\frac{jk_z AU'(\xi)V(\eta)}{f_1(k^2 - k_z^2)} \quad (4.2.2)$$

$$H_\eta = \frac{E_\xi}{Z_{TE}} = -\frac{jk_z AU(\xi)V'(\eta)}{f_1(k^2 - k_z^2)} \quad (4.2.3)$$

$$Z_{TE} = \frac{\mu\omega}{k_z} = \frac{Z_o}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}} \quad (4.2.4)$$

Para el modo transversal eléctrico, así como para el magnético, f_1 está dado por:

$$f_1 = f\sqrt{\cosh^2 \xi - \cosh^2 \eta} = f\sqrt{\sin^2 \xi - \sinh^2 \eta} \quad (4.2.5)$$

4.3. Calculo de las frecuencias de corte

Para calcular las frecuencias de corte en una guía de onda elíptica se aplican la condiciones de frontera a las soluciones generales en coordenadas elípticas, esto es cuando $\xi = \xi_0$ la función de Mathieu debe ser cero en ese punto, donde ξ_0 es la coordenada radial de la frontera de la elipse.

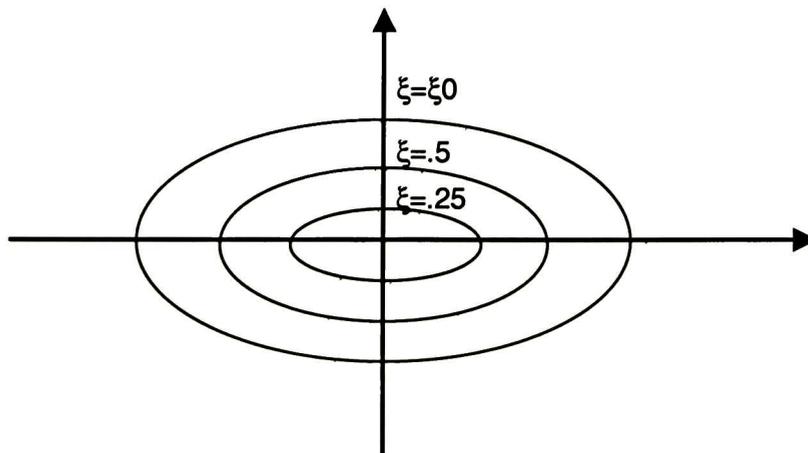


Figura 4.2. Sistema de coordenadas elípticas

Las condiciones de frontera pueden ser escritas de la siguiente forma:

$$C e_m(\xi_0, q) = 0 \quad \text{para} \quad \text{TM}_{cm} \quad (4.3.1)$$

$$S e_m(\xi_0, q) = 0 \quad \text{para} \quad \text{TM}_{sm} \quad (4.3.2)$$

$$C e'_m(\xi_0, q) = 0 \quad \text{para} \quad \text{TE}_{cm} \quad (4.3.3)$$

$$S e'_m(\xi_0, q) = 0 \quad \text{para} \quad \text{TE}_{sm} \quad (4.3.4)$$

y $\cosh \xi_0 = 1/e$

$$e = f / a \quad (4.3.5)$$

donde f es la distancia ínterfocal y a es el eje mayor de la elipse y e es llamada excentricidad de la elipse.

Como el parámetro q está relacionado con la frecuencia de corte por (2.5.13) hay una serie de valores de q que satisfacen la ecuación. Para evitar ambigüedades se escribe un tercer subíndice n , que corresponde a la n th raíz paramétrica, y es requerida en la designación de los modos. TM_{cmn} , TM_{smn} , TE_{cmn} , TE_{smn} . La ecuación (2.5.13) se puede escribir como:

$$f_{mn} = \frac{k_{mn} c}{2\pi} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{4q_{mn}}{f^2} + k_z^2} \quad (4.3.6)$$

La ecuación (2.5.9) puede ser usada para encontrar la frecuencia de corte del modo mn haciendo $k_z=0$, por lo tanto se tiene que:

$$f_{mn}^{corte} = \frac{c}{f\pi} \sqrt{q_{mn}} \quad (4.3.7)$$

La ecuación (4.3.7) se puede normalizar dividiendo entre c y multiplicando y dividiendo entre el eje mayor de la elipse, a , para obtener (4.3.8)

$$\frac{\lambda_{corte}}{a} = \frac{\pi e}{\sqrt{q_{mn}}} \quad (4.3.9)$$

donde λ_{corte} / a es la frecuencia de corte normalizada

Los valores de q se pueden calcular para diferentes valores de e y diferentes modos por medio de un procedimiento que busca las raíces paramétricas de la ecuación de Mathieu en la frontera. En el apéndice III se presentan valores de q , para modos TM para los modos TE. También en el apéndice III se muestran gráficas de frecuencias de corte normalizadas [5] para diferentes excentricidades, y para los modos transversal eléctrico y transversal magnético:

4.4. Frecuencias de corte modo transversal Magnético

En las siguientes tablas se presentan algunos valores de q necesarios para obtener la frecuencia de corte de guías de onda elípticas con diferentes excentricidades.

e	q	Modo
0.2	0.059036023449010	TM _{ce} 0,1
0.3	0.136548042428703	
0.4	0.253306416606599	
0.5	0.421453904232460	
0.6	0.665971219355991	
0.7	1.045528844877250	
0.8	1.735307966988110	
0.9	3.597889970323430	

e	q	Modo
0.2	0.151405237181987	TM _{se} 1,1
0.3	0.354815771877970	
0.4	0.670970116123765	
0.5	1.146085466074150	
0.6	1.875189972423890	
0.7	3.081309054447810	
0.8	5.430076145466500	
0.9	12.205519572647600	

Tabla 4.2.1 Valor de q para diferentes excentricidades modo TM_{ce} y TM_{se}

4.5. Frecuencias de corte modo transversal Eléctrico

Al igual que para el modo transversal magnético donde se cálculo la frecuencia de corte la calculamos ahora en el modo transversal eléctrico y obtenemos los siguientes resultados:

<i>e</i>	<i>q</i>	<i>Modo</i>
0.2	0.149961652157753	TE _{ce} 0,1
0.3	0.347698208785478	
0.4	0.649504849999544	
0.5	1.097515907578020	
0.6	1.785229889729140	
0.7	2.938484124594300	
0.8	5.230424597119060	
0.9	11.957485866648400	

<i>e</i>	<i>q</i>	<i>Modo</i>
0.2	0.035252503409125	TE _{se} 1,1
0.3	0.083485601048063	
0.4	0.160215280672287	
0.5	0.278880117692013	
0.6	0.466814513131151	
0.7	0.787207591711533	
0.8	1.424734926453410	
0.9	3.264233096155710	

Tabla 4.2.2 Valor de *q* para diferentes excentricidades modo TE_{ce} y TE_{se}

En las siguientes graficas se puede observar el comportamiento de la frecuencia de corte normalizada [5] con diferentes excentricidades, para los modos transversal eléctrico y modo transversal magnético:

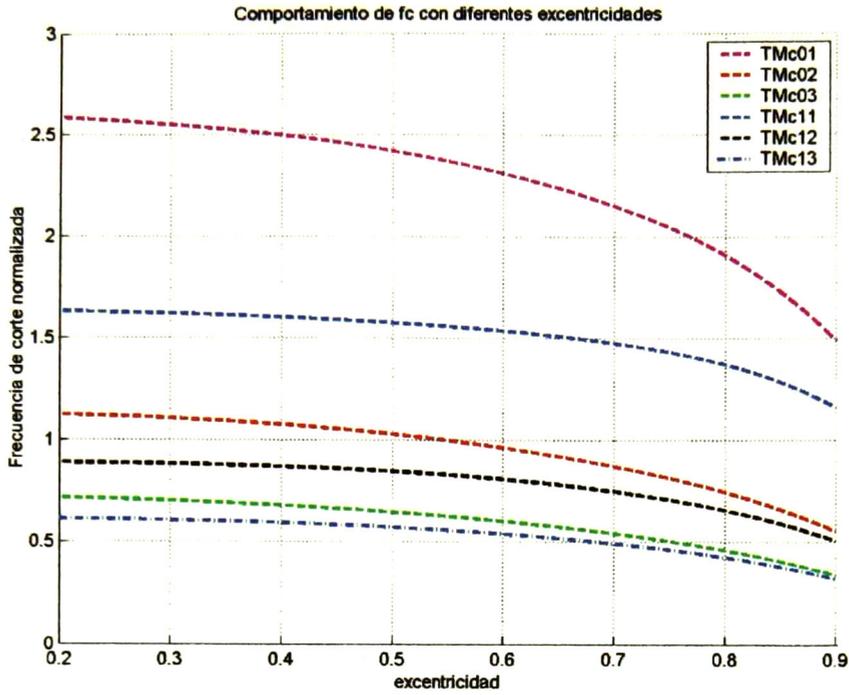


Figura 4.3. λ_c con diferentes excentricidades TMce (01,02,03,11,12,13)

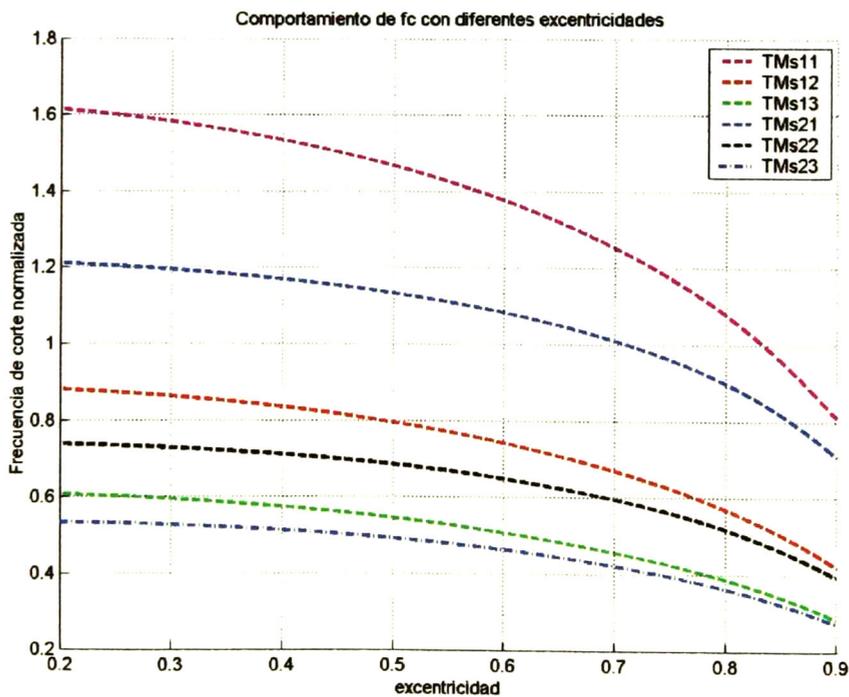


Figura 4.4. λ_c con diferentes excentricidades TMse (11,12,13,21,22,23)

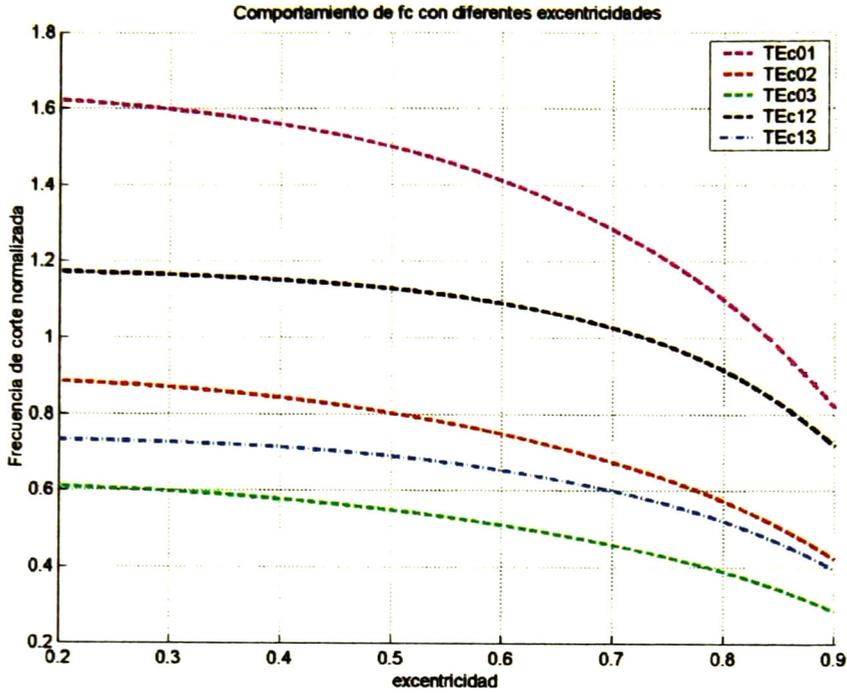
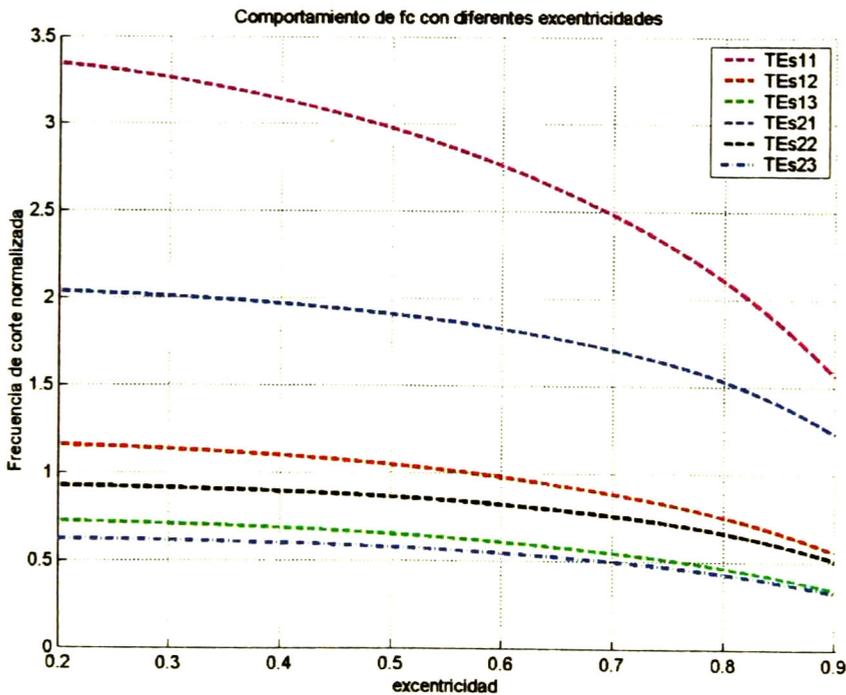


Figura 4.5. λ_c con diferentes excentricidades TEce (01,02,03,12,13)



En el apéndice 3 se presentan un mayor número de valores de q y gráficas del comportamiento de la frecuencia de corte normalizada, para diferentes modos de propagación y excentricidades

4.4. Guías de onda elípticas con excentricidades cercanas a 0.1

Para el cálculo de la frecuencia de corte en guías de onda elípticas con excentricidades cercanas a 0.1 podemos hacer una aproximación usando los valores donde las funciones de Bessel y sus derivadas toman el valor de cero.

En el modo transversal Eléctrico los valores donde la derivada de las funciones de Bessel cruzan por cero son:

[11]

	$M=0$	$M=1$	$M=2$	$M=3$
$n=1$	3.8318	1.8412	3.0542	4.2012
$n=2$	7.0156	5.3315	6.7062	8.0153
$n=3$	10.1735	8.5363	9.9695	11.3459
$n=4$	13.3237	11.7060	13.1704	14.5859

Tablas 4.3.1 Ceros X'_{mn} de la derivada de la función de Bessel

$$J'_m(X'_{mn}) = 0 (n=1,2,3\dots)$$

Y para el modo transversal magnético los valores donde las funciones de Bessel cruzan por cero son:

	$M=0$	$M=1$	$M=2$	$M=3$
$n=1$	2.4049	3.8318	5.1357	6.3802
$n=2$	5.5201	7.0156	8.4173	9.7610
$n=3$	8.6537	10.1735	11.6199	13.0152
$n=4$	11.7915	13.3237	14.7960	16.2235

Tablas 4.3.2 Ceros X_{mn} de la derivada de la función de Bessel

$$J_m(X_{mn}) = 0 (n=1,2,3\dots)$$

Con los valores de las tablas podemos obtener el valor de q_{mn} aproximado para obtener la frecuencia de corte de guías elípticas, aplicando la siguiente formula:

$$q_{mn}^{TE} = \frac{(X'_{mn})^2 e^2}{4} \quad (4.6.1)$$

Para el modo transversal eléctrico y para el modo transversal magnético:

$$q_{mn}^{TM} = \frac{(X_{mn})^2 e^2}{4} \quad (4.6.2)$$

Estas aproximaciones solo se pueden usar para excentricidades en el intervalo [0.0,0.15] para excentricidades mayores, la aproximación ya no es buena.

Comparando los valores obtenidos con la aproximación y con los publicados en [5] se obtiene la siguiente tabla:

MODO	[5]	APLICANDO 3.3.1 Y 3.3.2	ERROR RELATIVO %
TE11	3.41188201	3.4125490480010789	0.01955044
TM01	2.60616852	2.6126596977752033	0.24906976
TE21	2.05208977	2.0572278525242572	0.25038293
TM11	1.63772228	1.6397477183515805	0.1236741
TE01	1.63543513	1.6397477183515805	0.26369669
TE31	1.49183109	1.4955691962247896	0.25057168
TM21	1.22042951	1.2234330874427218	0.24610823
TE41	1.17863600	1.1816051353417181	0.25191283
TE12	1.17713084	1.1785023552808002	0.11651341
TM02	1.13533477	1.1382375875762371	0.25567944
TM31	0.98234023	0.9847944119588079	0.24983014
TE02	0.89328695	0.8956019880237736	0.2591595
TE23	0.62874749	0.6302407650513653	0.23749996

Tablas 4.3.3 Aproximación del valor de q para una excentricidad de .1

CAPITULO CINCO

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES PARA TRABAJOS FUTUROS

5.1. CONCLUSIONES

Desde que se publicaron las ecuaciones diferenciales de Mathieu y sus soluciones en 1868 se ha encontrado un diverso número de aplicaciones, una de las cuales son las guías de onda elípticas. Para este tipo de guías de onda es necesario utilizar las soluciones tanto de la ecuación de Mathieu como de la ecuación de Mathieu modificada.

L.-J. Chu en 1938 publicó un documento, ya clásico, sobre las frecuencias de corte de algunos modos así como también los patrones de los campos eléctricos y magnéticos de guías de onda elípticas. La precisión presentada en el trabajo de L.-J. Chu estaba muy limitada, por lo que en este trabajo se ha mejorado sustancialmente la precisión de las frecuencias de corte, así como también se ha aumentado el número de modos de propagación para los que se proporciona la solución.

El primer paso que se realizó para el análisis de las guías de onda elípticas fue encontrar los coeficientes de las ecuaciones de Mathieu usando el problema de eigenvalores y eigenvectores de la matriz formada por la relación recurrente (3.2.1). Con este procedimiento se obtuvo una precisión bastante buena para dichos coeficientes.

También se desarrollaron procedimientos de cálculo empleando MatLab tanto para las funciones de Mathieu como para sus derivadas. Para el caso de las funciones de Mathieu modificadas fue necesario, adicionalmente, el desarrollo de programas para el cálculo numérico de las derivadas de las funciones de Bessel de primera y segunda especie.

En el caso de guías de onda circulares las frecuencias de corte tienen dependencia con el radio de la circunferencia, mientras que en el caso de las guías de onda elípticas la frecuencia de corte depende del foco (radio mayor y menor de la elipse). De esta manera, como en las guías elípticas se tienen dos parámetros de los que dependen las frecuencias de corte, surgen un gran número de opciones para fabricar infinidad de geometrías que posean diferentes frecuencias de corte.

Los resultados obtenidos con los programas realizados para calcular las frecuencias de corte de los diferentes modos proporcionaron resultados bastante exactos, como se puede comprobar al compararlos con resultados publicados por los diferentes autores a los que hace referencia este trabajo.

Finalmente se desarrollaron procedimientos para generar los patrones de los campos eléctricos y magnéticos en el plano $z=0$ para los diferentes modos de propagación

5.2. Recomendaciones para trabajos futuros

Algunas de las recomendaciones para trabajos futuros son el desarrollo de los procedimientos de cálculo de los patrones del campo eléctrico para los modos trasversal magnético y del campo magnético para los modos trasversal eléctrico.

Adicionalmente, un tema que no se abordó en este trabajo y que representa un complemento interesante y de suma utilidad práctica, es el desarrollo de expresiones para el cálculo de la atenuación de las guías de onda elípticas para diferentes geometrías y frecuencias.

REFERENCIAS

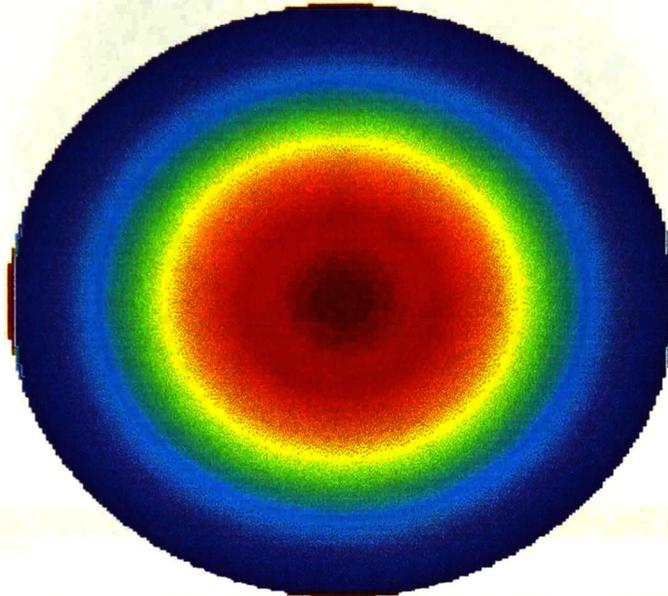
- [1] M. Abramowitz and I. Stegun, Eds., *Handbook of Mathematical Functions*. Washington, DC: National Bureau of Standards, 1964. Reprinter by Dover Publications, New York, 1968.
- [2] D. A. Goldberg, L. J. Laslett, and R. A. Rimmer, "Modes of elliptical waveguides: A Correction," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 38, no. 11, pp. 1603-1608, Nov. 1990.
- [3] B. K. Wang, K. Y. Lam, M. S. Leong, and P. S. Kooi, "Ellipticalc waveguide analysis using improved polynomial approximation," in *IEEE Proc. Microwave Ant. Propag.*, vol. 141, no. 6, pp. 483-488, Dec. 1994.
- [4] Hassan, A. Ragheb, "Analysis of a Nonconfocal Suspended Strip in an Elliptical Cylindrical Waveguide," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 48, no. 7, pp. 1148-1151, July 2000.
- [5] S. Zhang and Y. Shen, "Eigenmode sequence for an elliptical waveguide with arbitrary rllipticity," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 43, pp. 227-230, Jan 1995.
- [6] C. Shu "Analysis of Elliptical Waveguide by Differential Quadrature Method," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 48 no. 2, pp. 319-322, Feb. 2000.
- [7] Martin Schneider and Jürgen Marquardt, "Fast Computation of Modified Mathieu Functions Applied to Elliptical Waveguide Problems," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 47 no.4, pp. 513-515, April 1999.
- [8] Sen Li and Bai-Suo Wang, "Field Expressions and Paterns in Elliptical Waveguide," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 48 no. 5, pp. 864-867, May 2000.
- [9] Stanley I. Grossman , *Algebra Lineal*, Mc Graw Hill, pp. 533-605 Abril 2000.
- [10] Shanjie Zhang and Jianming Jin, *Computation of Special Functions*, Wiley-Interscience Publications, pp. 475-535, 1996.
- [11] Balanis, Constantine A., *Advanced Enginerering Electromagnetics*, Wiley-Interscience Publications, pp.470-535, 1989.
- [12] P. Moreno,"Extra low frequency magnetic field shielding with finite width planar shields", Ph. D. Thesis, Washington State University, 1997.
- [13] S. P. Yeo and S. Selvaraju, "Computational Test on use of a Rayleigh Hypothesis in Elliptical-Waveguide Analysis," *IEEE Tans. On Magnetics*, vol. 29, no. 2 pp. 1620-1623, March 1993.

- [14] Yang Hao, Chris J. Railton, "A New FDTD Model in the Study of Hollow Conducting Elliptical Waveguides And Cylindrical Cavity Resonator," *IEEE* pp. 994-997, 1997.

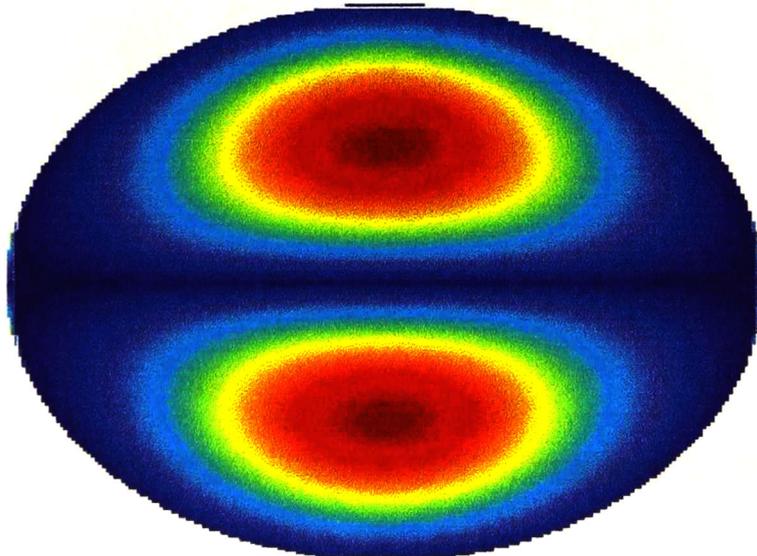
APENDICE I

Patrón del campo eléctrico para diferentes modos de propagación

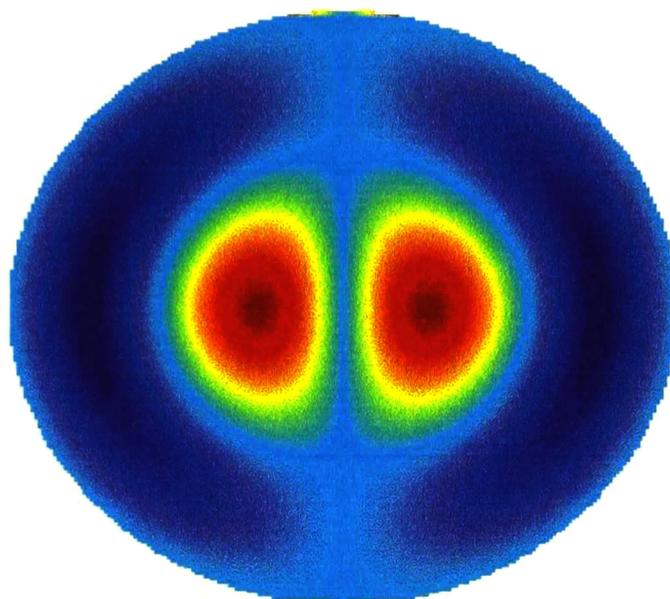
TM_{c01}, exentricidad = .2, FRECUENCIA DE CORTE NORMALIZADA = 2.58595712524536



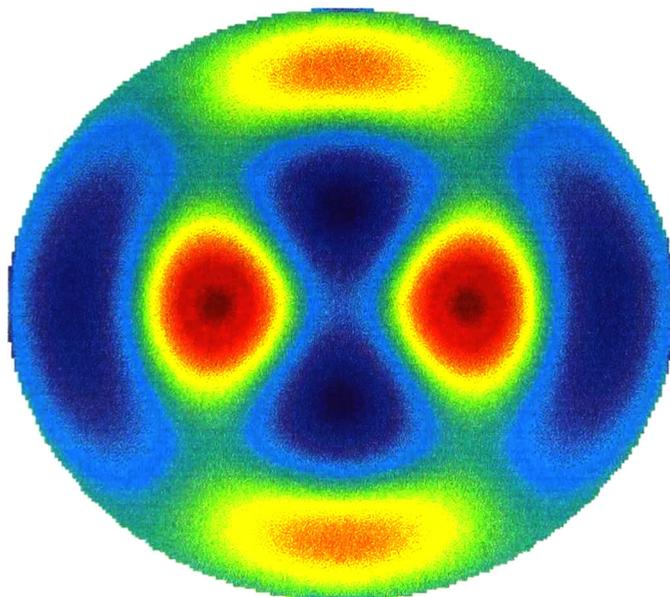
TM_{s11}, exentricidad = .6, FRECUENCIA DE CORTE NORMALIZADA = 1.37650719914804



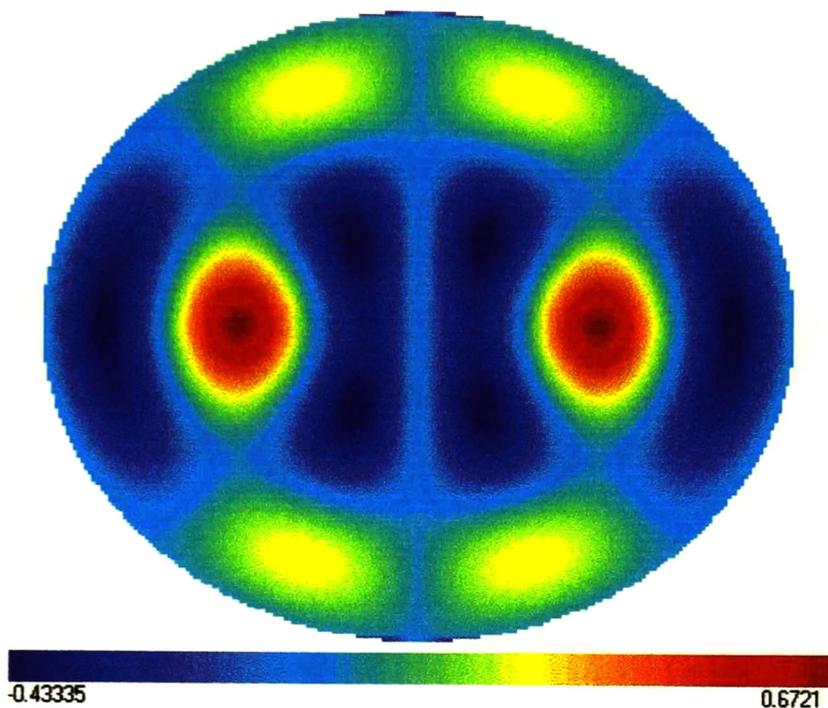
TMc12, exentricidad = .2, FRECUENCIA DE CORTE NORMALIZADA = 0.89076889324624



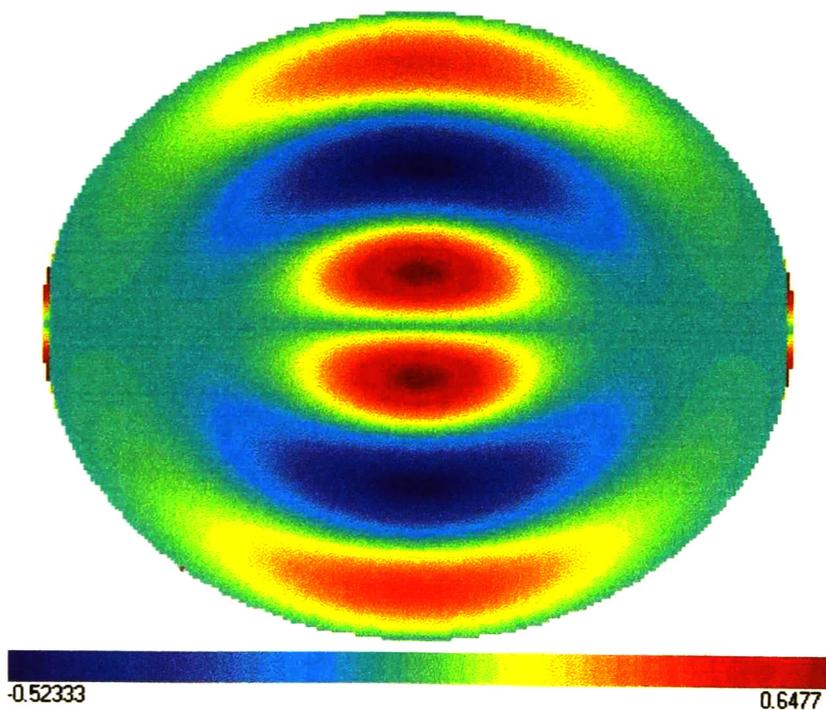
TMc22, exentricidad = .2, FRECUENCIA DE CORTE NORMALIZADA = 0.740005122817585



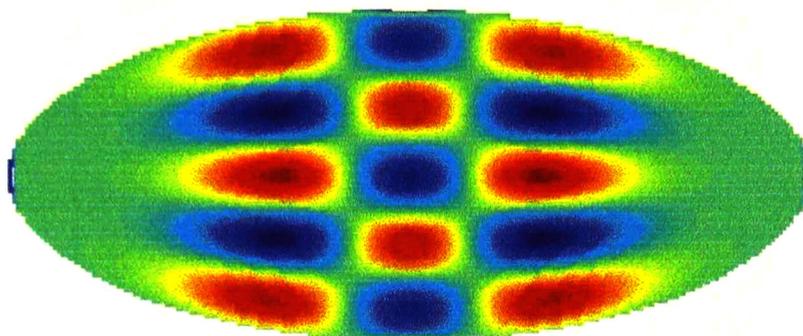
TMc32, exentricidad = .4, FRECUENCIA DE CORTE NORMALIZADA = 0.622686539348556



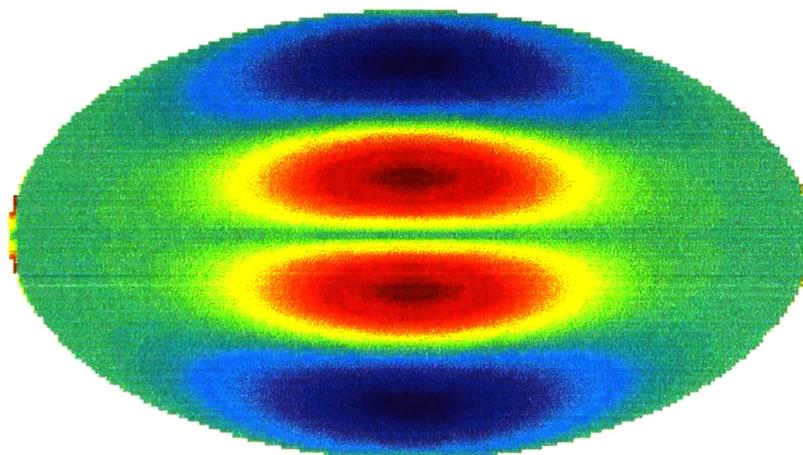
TMz13, exentricidad = .4, FRECUENCIA DE CORTE NORMALIZADA = 0.574325775837947



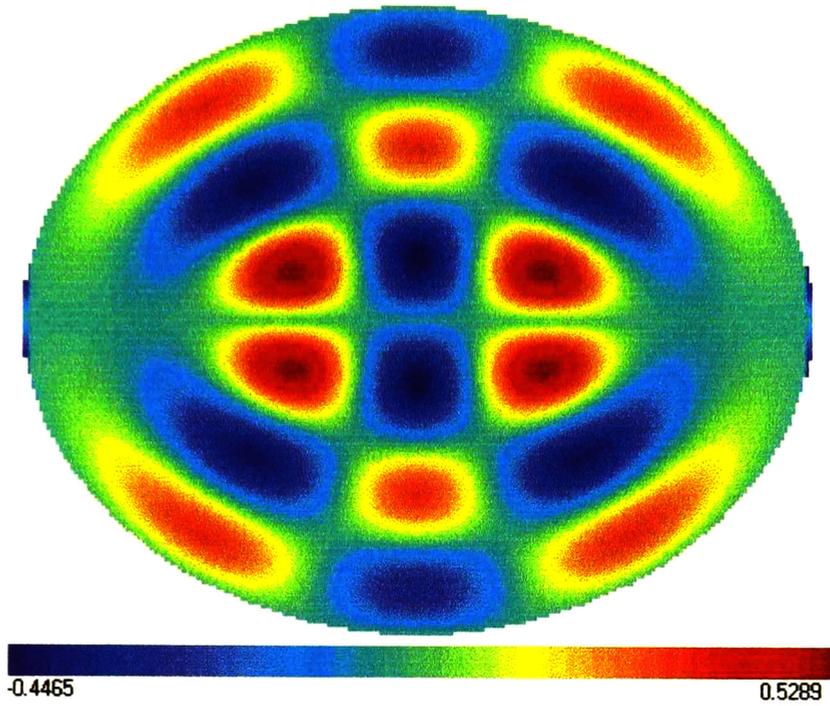
TMc23, exentricidad = .9, FRECUENCIA DE CORTE NORMALIZADA = 0.30351081007903



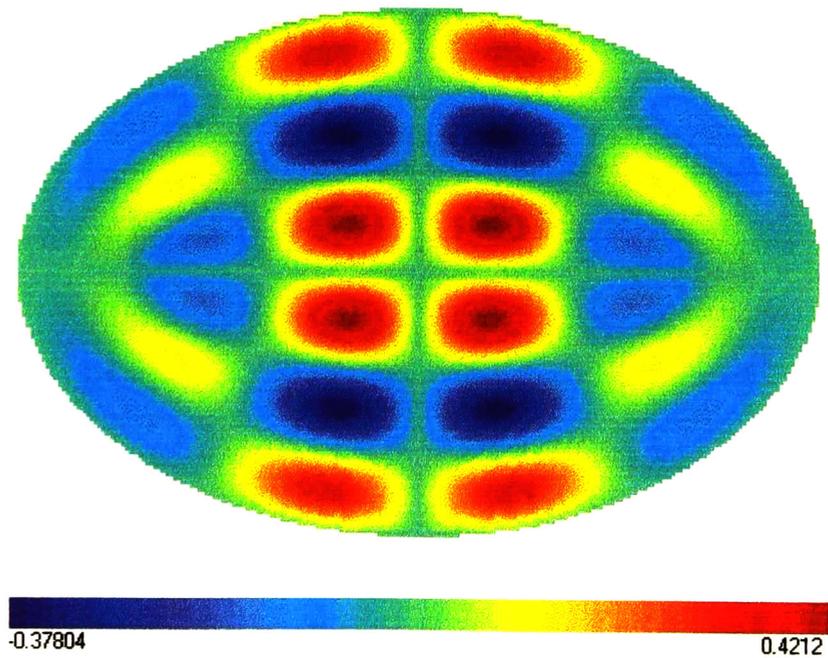
TMs12, exentricidad = .8, FRECUENCIA DE CORTE NORMALIZADA = 0.569458725633117



TM_s33, exentricidad = .5, FRECUENCIA DE CORTE NORMALIZADA = 0.447063225025022



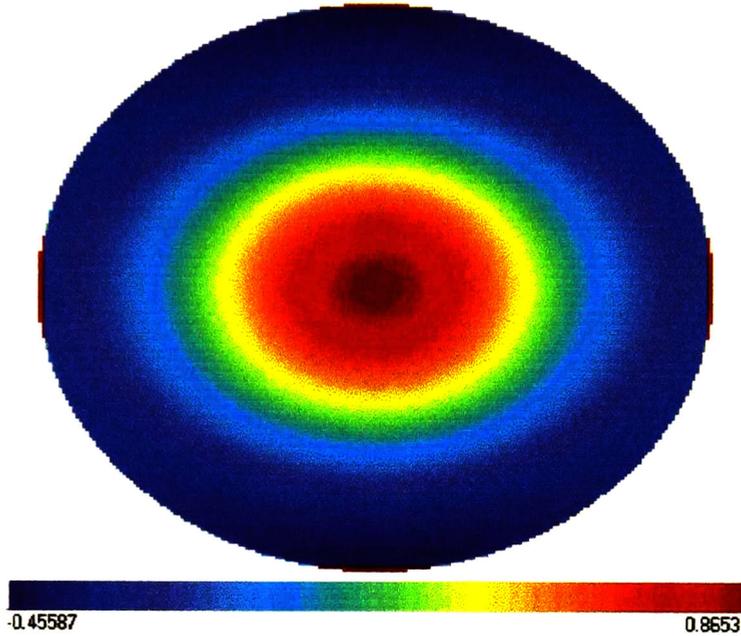
TM_s43, exentricidad = .7, FRECUENCIA DE CORTE NORMALIZADA = 0.362706578744802



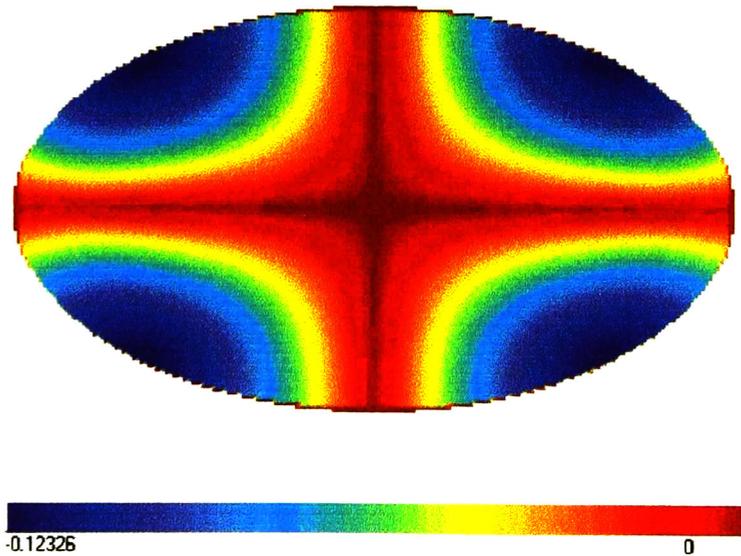
APENDICE II

Patrón del campo magnético para diferentes modos de propagación.

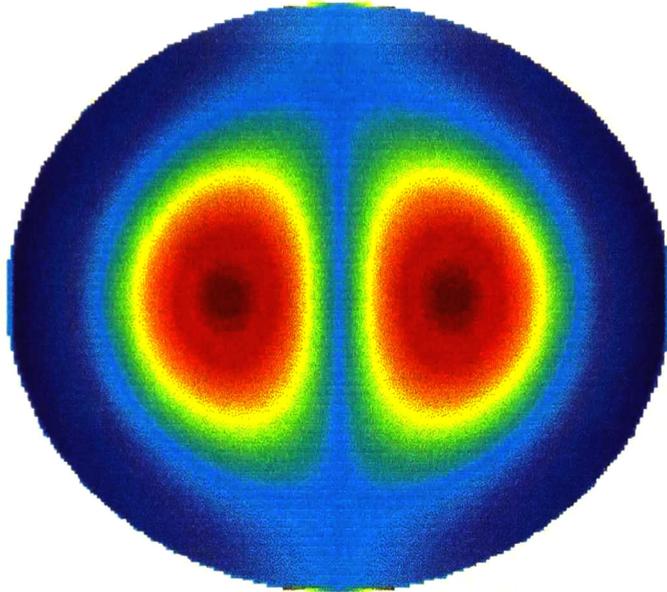
TEc01, exentricidad = .4, FRECUENCIA DE CORTE NORMALIZADA = 1.55926045536751



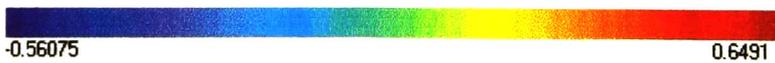
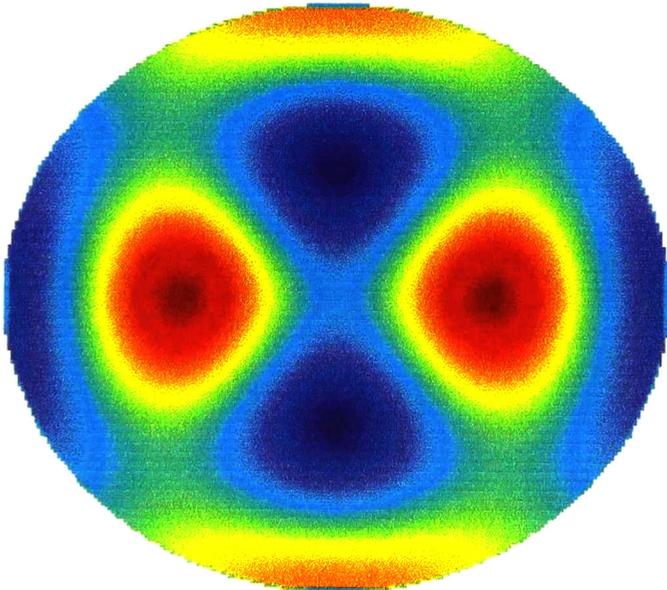
TEs21, exentricidad = .8, FRECUENCIA DE CORTE NORMALIZADA = 1.5300145708734



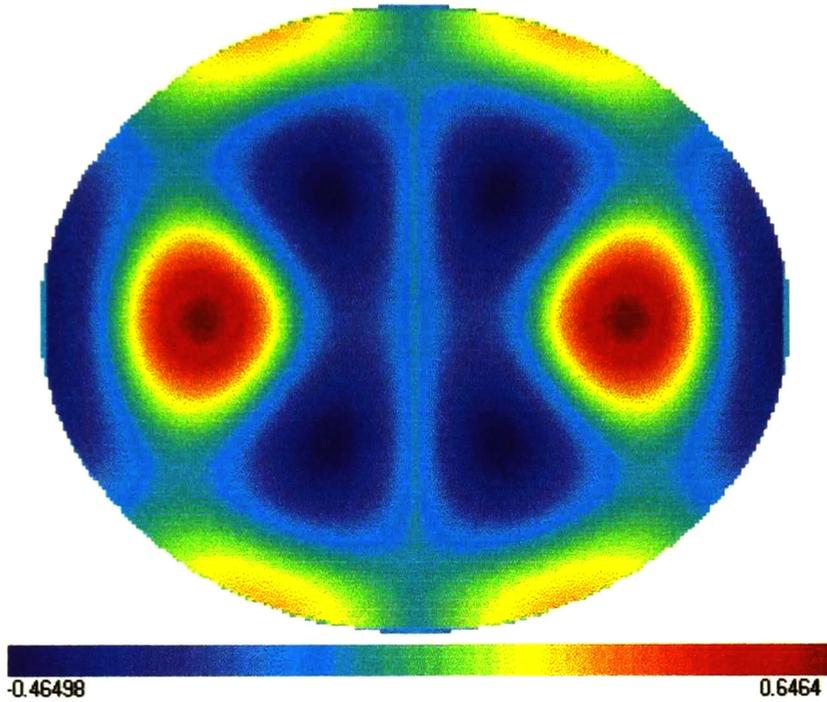
TEc12, exentricidad = .2, FRECUENCIA DE CORTE NORMALIZADA = 1.17274531109463



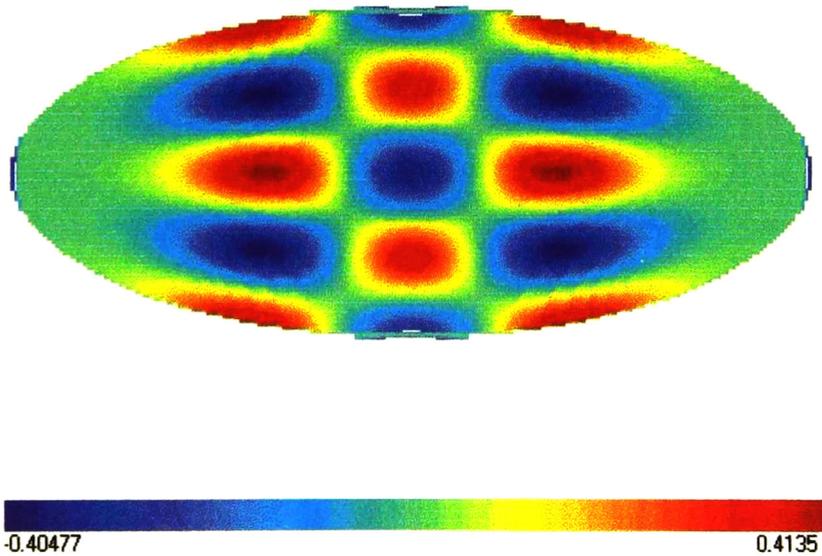
TEc22, exentricidad = .2, FRECUENCIA DE CORTE NORMALIZADA = 0.928416160303119



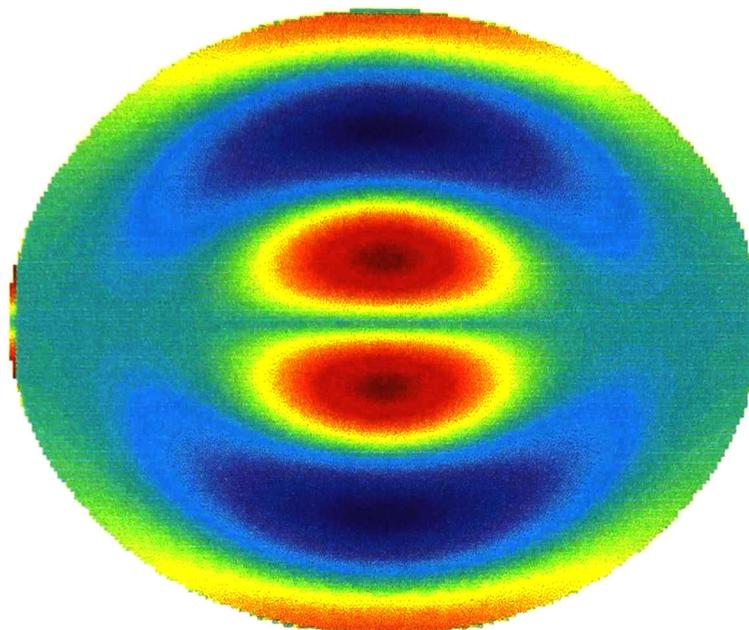
TEc32, exentricidad = .4, FRECUENCIA DE CORTE NORMALIZADA = 0.756053974433357



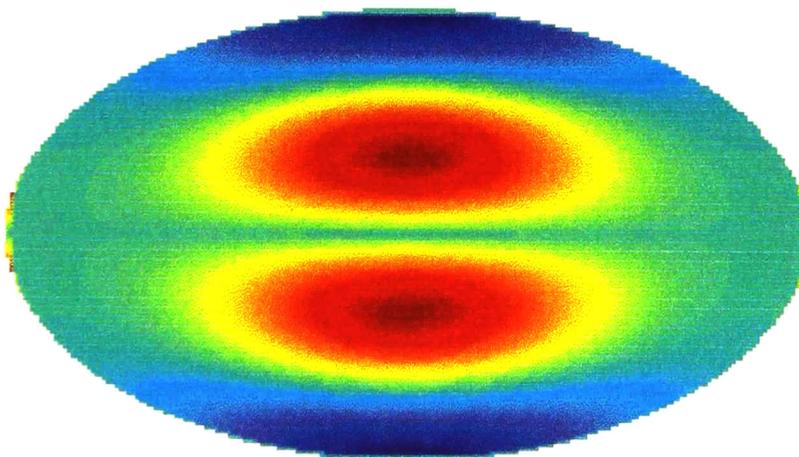
TEc23, exentricidad = .9, FRECUENCIA DE CORTE NORMALIZADA = 0.367934577614576



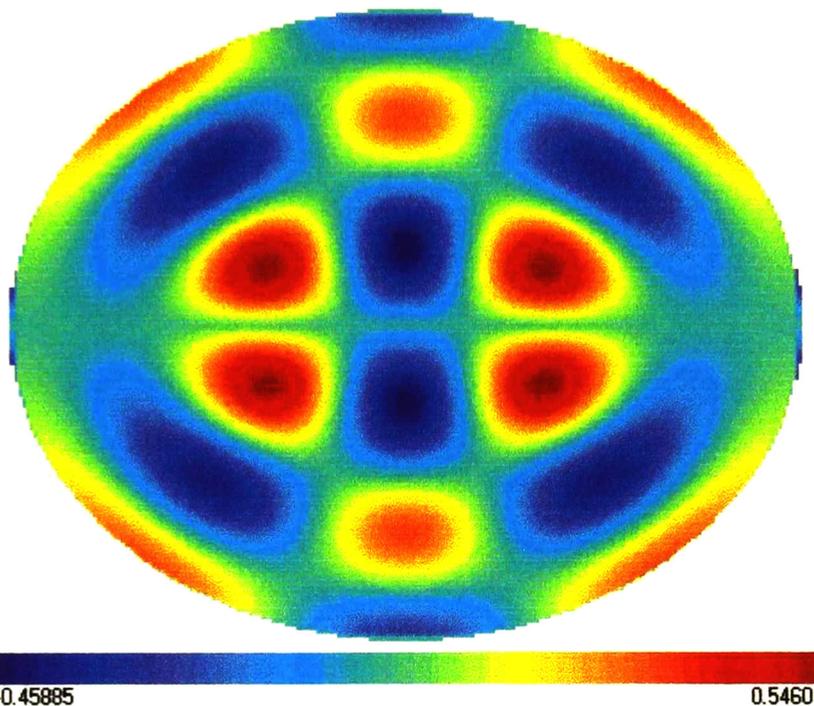
TEs13, exentricidad = .4, FRECUENCIA DE CORTE NORMALIZADA = 0.684975767302496



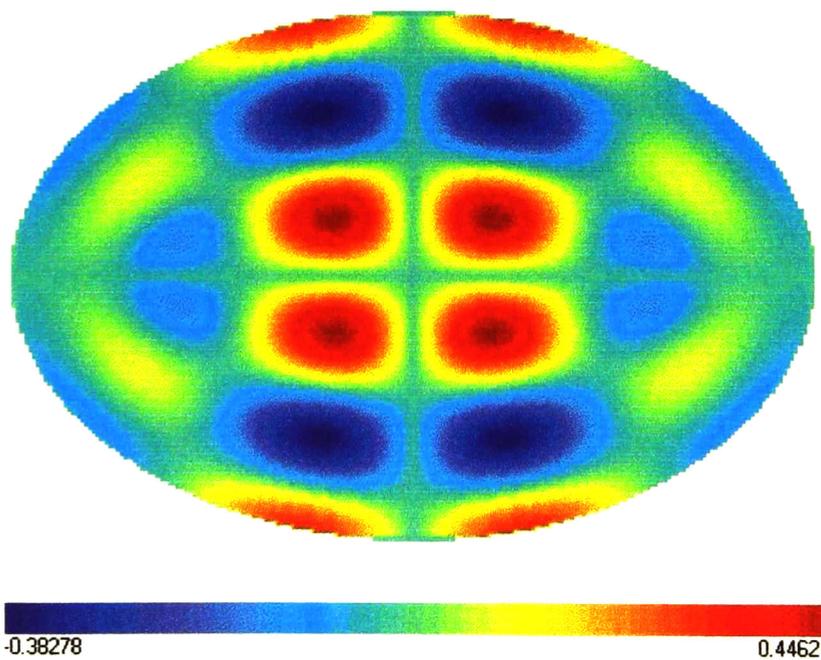
TEs12, exentricidad = .8, FRECUENCIA DE CORTE NORMALIZADA = 0.752017222604284



TE_{s33}, exentricidad = .5, FRECUENCIA DE CORTE NORMALIZADA = 0.51464617103565



TE_{s43}, exentricidad = .7, FRECUENCIA DE CORTE NORMALIZADA = 0.415826475244055



APENDICE III

4.4. Frecuencias de corte modo transversal Magnético con diferentes excentricidades (e =excentricidad)

e	q	Modo
0.2	0.059036023449010	TMce 0,1
0.3	0.136548042428703	
0.4	0.253306416606599	
0.5	0.421453904232460	
0.6	0.665971219355991	
0.7	1.045528844877250	
0.8	1.735307966988110	
0.9	3.597889970323430	

e	q	Modo
0.2	0.311453313985232	TMce 0,2
0.3	0.724163078263144	
0.4	1.361691429266750	
0.5	2.324183749330370	
0.6	3.821406948388150	
0.7	6.344197471270280	
0.8	11.356378362750600	
0.9	26.101465857830100	

e	q	Modo
0.2	0.767062226388189	TMce 0,3
0.3	1.795140703196750	
0.4	3.409634016899820	
0.5	5.883107316569330	
0.6	9.778336036459070	
0.7	16.422365848680400	
0.8	29.795326729820900	
0.9	69.681677599732400	

e	q	Modo
0.2	0.268838459421059	TMce 2,1
0.3	0.617995813331100	
0.4	1.127925618889130	
0.5	1.817335313130590	
0.6	2.720452642553680	
0.7	3.918357424454460	
0.8	5.653014523498710	
0.9	9.095082695077910	

e	q	Modo
0.2	0.720925328952895	TMce 2,2
0.3	1.649282506793870	
0.4	2.995818901645090	
0.5	4.842715650165600	
0.6	7.423205166995430	
0.7	11.369553116830900	
0.8	18.487015724441400	
0.9	37.225956132257100	

e	q	Modo
0.2	1.371278852215880	TMce 2,3
0.3	3.131617838954090	
0.4	5.716915188084210	
0.5	9.424678634252960	
0.6	14.937312846252000	
0.7	23.783759327254400	
0.8	40.457689197299500	
0.9	86.783355165462600	

Tabla A3.1 Valor de q para diferentes excentricidades modo TM_{ce} y TM_{se}

<i>e</i>	<i>q</i>	<i>Modo</i>
0.2	0.148346520348281	TMce 1,1
0.3	0.338480841171071	
0.4	0.615047891302039	
0.5	0.993215532319297	
0.6	1.503940377414870	
0.7	2.219292672773360	
0.8	3.352244998371700	
0.9	5.933936979435450	

<i>e</i>	<i>q</i>	<i>Modo</i>
0.2	0.497541890104946	TMce 1,2
0.3	1.137846942617830	
0.4	2.083483202397020	
0.5	3.432954102996970	
0.6	5.422732073257410	
0.7	8.613214308264730	
0.8	14.627416479145000	
0.9	31.315600615413700	

<i>e</i>	<i>q</i>	<i>Modo</i>
0.2	1.047135471577120	TMce 1,3
0.3	2.405182938930650	
0.4	4.461773143442210	
0.5	7.515128005910330	
0.6	12.177253297564100	
0.7	19.873450729315600	
0.8	34.843859794942000	
0.9	77.896261405530300	

<i>e</i>	<i>q</i>	<i>Modo</i>
0.2	0.415292110350535	TMce 3,1
0.3	0.957856903357722	
0.4	1.760565075736248	
0.5	2.859731535448690	
0.6	4.293625669295500	
0.7	6.140019485780150	
0.8	8.657649770987740	
0.9	13.131156706873600	

<i>e</i>	<i>q</i>	<i>Modo</i>
0.2	0.971561895238457	TMce 3,2
0.3	2.234548084427390	
0.4	4.072684546724650	
0.5	6.546843717245390	
0.6	9.854645331117900	
0.7	14.653593076258900	
0.8	22.967581570453300	
0.9	43.864827629774900	

<i>e</i>	<i>q</i>	<i>Modo</i>
0.2	1.725970026179500	TMce 3,3
0.3	3.954091558170140	
0.4	7.178863027886350	
0.5	11.641275075288600	
0.6	18.080422384550600	
0.7	28.172382915830400	
0.8	46.657862733837600	
0.9	96.364429929256700	

Tabla A3.1 Valor de *q* para diferentes excentricidades modo TM_{ce} y TM_{se} (cont.)

<i>e</i>	<i>q</i>	<i>Modo</i>
0.2	0.151405237181987	TMse 1,1
0.3	0.354815771877970	
0.4	0.670970116123765	
0.5	1.146085466074150	
0.6	1.875189972423890	
0.7	3.081309054447810	
0.8	5.430076145466500	
0.9	12.205519572647600	

<i>e</i>	<i>q</i>	<i>Modo</i>
0.2	0.507769701770738	TMse 1,2
0.3	1.191882728921100	
0.4	2.263019501761800	
0.5	3.895144126050000	
0.6	6.451561516033200	
0.7	10.789874470768400	
0.8	19.478486809270400	
0.9	45.261077165330300	

<i>e</i>	<i>q</i>	<i>Modo</i>
0.2	1.068394191491240	TMse 1,3
0.3	2.512513605285760	
0.4	4.787437443654160	
0.5	8.281228143189020	
0.6	13.799152863155000	
0.7	23.240682645050200	
0.8	42.306112615235500	
0.9	99.362460702343200	

<i>e</i>	<i>q</i>	<i>Modo</i>
0.2	0.415318144495144	TMse 3,1
0.3	0.958583381836067	
0.4	1.768527235677570	
0.5	2.910229790742030	
0.6	4.510605106769780	
0.7	6.859483296647730	
0.8	10.803713194309100	
0.9	20.389444178900100	

<i>e</i>	<i>q</i>	<i>Modo</i>
0.2	0.971865512132547	TMse 3,2
0.3	2.242366945603330	
0.4	4.141004577201200	
0.5	6.853415358606610	
0.6	10.792914253454000	
0.7	16.967931899549400	
0.8	28.366724657529800	
0.9	59.366005599486500	

<i>e</i>	<i>q</i>	<i>Modo</i>
0.2	1.727560281072800	TMse 3,3
0.3	3.987604539218460	
0.4	7.389479220812270	
0.5	12.345306042579500	
0.6	19.764095046664600	
0.7	31.789394199779600	
0.8	54.750059791484800	
0.9	119.468894832146000	

Tabla A3.1 Valor de *q* para diferentes excentricidades modo TM_{ce} y TM_{se} (cont.)

<i>e</i>	<i>q</i>	<i>Modo</i>
0.2	0.269232405055297	TMse 2,1
0.3	0.622669688317366	
0.4	1.154796747464490	
0.5	1.920151168113540	
0.6	3.029953333605810	
0.7	4.742604648346090	
0.8	7.819102522266000	
0.9	15.935690293683000	

<i>e</i>	<i>q</i>	<i>Modo</i>
0.2	0.723516183184602	TMse 2,2
0.3	1.676078795668440	
0.4	3.123105193242500	
0.5	5.247428386244910	
0.6	8.442975002342110	
0.7	13.646290734964800	
0.8	23.635691938516700	
0.9	51.972809012469700	

<i>e</i>	<i>q</i>	<i>Modo</i>
0.2	1.379582261583360	TMse 2,3
0.3	3.203059125186180	
0.4	6.001722156543720	
0.5	10.182378503799200	
0.6	16.604308001104600	
0.7	27.288031631474500	
0.8	48.248387907312100	
0.9	109.082425323063000	

<i>e</i>	<i>q</i>	<i>Modo</i>
0.2	0.587525332849997	TMse 4,1
0.3	1.356009493819850	
0.4	2.499984833108410	
0.5	4.101690469954630	
0.6	6.307364839859270	
0.7	9.435139748604190	
0.8	14.406061125773900	
0.9	25.606698957934800	

<i>e</i>	<i>q</i>	<i>Modo</i>
0.2	1.248872469810920	TMse 4,2
0.3	2.880104764039910	
0.4	5.303028287272630	
0.5	8.706441492542080	
0.6	13.509187903252600	
0.7	20.774218015109000	
0.8	33.696262226383100	
0.9	67.466527092120100	

<i>e</i>	<i>q</i>	<i>Modo</i>
0.2	2.106638989856750	TMse 4,3
0.3	4.855117535156920	
0.4	8.944772359820970	
0.5	14.776134904941600	
0.6	23.291660448669800	
0.7	36.760800477601900	
0.8	61.829342811492700	
0.9	130.540192366372000	

Tabla A3.1 Valor de *q* para diferentes excentricidades modo TM_{ce} y TM_{se} (cont.)

4.5. Frecuencias de corte modo transversal Eléctrico con diferentes excentricidades (*e*=excentricidad)

<i>e</i>	<i>q</i>	<i>Modo</i>
0.2	0.149961652157753	TEce 0,1
0.3	0.347698208785478	
0.4	0.649504849999544	
0.5	1.097515907578020	
0.6	1.785229889729140	
0.7	2.938484124594300	
0.8	5.230424597119060	
0.9	11.957485866648400	

<i>e</i>	<i>q</i>	<i>Modo</i>
0.2	0.503591928990200	TEce 0,2
0.3	1.175162953524010	
0.4	2.224624796979440	
0.5	3.828667587197960	
0.6	6.351971958896000	
0.7	10.652266761144900	
0.8	19.298674960799400	
0.9	45.037898327491100	

<i>e</i>	<i>q</i>	<i>Modo</i>
0.2	1.061501924697760	TEce 0,3
0.3	2.491041017594380	
0.4	4.745916750165100	
0.5	8.214761028060010	
0.6	13.702350330000900	
0.7	23.108157593381400	
0.8	42.133235579900100	
0.9	99.146583855241900	

<i>e</i>	<i>q</i>	<i>Modo</i>
0.2	0.033955303691112	TEce 1,1
0.3	0.076558827610623	
0.4	0.136510390478973	
0.5	0.214138012818132	
0.6	0.309896471507810	
0.7	0.424396804790557	
0.8	0.558448479902228	
0.9	0.713119234839904	

<i>e</i>	<i>q</i>	<i>Modo</i>
0.2	0.287046546576776	TEce 1,2
0.3	0.654960746606200	
0.4	1.192204870166890	
0.5	1.937965124392370	
0.6	2.987966081898760	
0.7	4.597796129567920	
0.8	7.554849764153840	
0.9	15.592523499652300	

<i>e</i>	<i>q</i>	<i>Modo</i>
0.2	0.736690268947911	TEce 1,3
0.3	1.687435413628930	
0.4	3.108112094826190	
0.5	5.185781633886730	
0.6	8.329567387106090	
0.7	13.480359385707100	
0.8	23.416227355213000	
0.9	51.706942030210000	

Tabla A3.2 Valor de *q* para diferentes excentricidades modo TE_{ce} y TE_{se}

<i>e</i>	<i>q</i>	<i>Modo</i>
----------	----------	-------------

0.2	0.095132037208798	TEce 2,1
-----	-------------------	----------

0.3	0.219103533390759	
0.4	0.401456101753202	
0.5	0.649096688077600	
0.6	0.967945767353460	
0.7	1.362015963818800	
0.8	1.834562481452070	
0.9	2.390529715304590	

0.2	0.458009360668270	TE _{ce} 2,2
0.3	1.049811810965530	
0.4	1.907475509251280	
0.5	3.065443506085210	
0.6	4.611268468620430	
0.7	6.801880724455600	
0.8	10.513376379658300	
0.9	19.939448587587200	

<i>e</i>	<i>q</i>	<i>Modo</i>
----------	----------	-------------

<i>e</i>	<i>q</i>	<i>Modo</i>
0.2	1.010299762745950	TE _{ce} 2,3
0.3	2.307735308993710	
0.4	4.196160137125430	
0.5	6.839701876448040	
0.6	10.684682426366400	
0.7	16.777937848800100	
0.8	28.106127782777900	
0.9	59.053216388600000	

<i>e</i>	<i>q</i>	<i>Modo</i>
0.2	0.180093311725809	TE _{ce} 3,1
0.3	0.415700670727218	
0.4	0.766244721920111	
0.5	1.253934894927030	
0.6	1.905524804180970	
0.7	2.742640599542120	
0.8	3.771416053507650	
0.9	4.992443683656520	

<i>e</i>	<i>q</i>	<i>Modo</i>
0.2	0.655283705769835	TE _{ce} 3,2
0.3	1.509519529025260	
0.4	2.762575313137420	
0.5	4.451294471403200	
0.6	6.644723610492930	
0.7	9.579155121381600	
0.8	14.163980648172700	
0.9	25.046826076395500	

<i>e</i>	<i>q</i>	<i>Modo</i>
0.2	1.312205426458260	TE _{ce} 3,3
0.3	3.012014499959010	
0.4	5.472174008115250	
0.5	8.810721530512000	
0.6	13.452320775918300	
0.7	20.571843702513300	
0.8	33.394666221700100	
0.9	67.102899154029900	

Tabla A3.2 Valor de *q* para diferentes excentricidades modo TE_{ce} y TE_{se} (cont.)

<i>e</i>	<i>q</i>	<i>Modo</i>
----------	----------	-------------

0.2	0.035252503409125	TE _{se} 1,1
-----	-------------------	----------------------

0.3	0.083485601048063	
0.4	0.160215280672287	
0.5	0.278880117692013	
0.6	0.466814513131151	
0.7	0.787207591711533	
0.8	1.424734926453410	
0.9	3.264233096155710	

0.2	0.293396458725460	TEse 1,2
0.3	0.688789036945559	
0.4	1.307190148780420	
0.5	2.247157926923850	
0.6	3.715177094776870	
0.7	6.200633198988770	
0.8	11.169253442029400	
0.9	25.870511516066800	

<i>e</i>	<i>q</i>	<i>Modo</i>
----------	----------	-------------

<i>e</i>	<i>q</i>	<i>Modo</i>
0.2	0.752192480582380	TEse 1,3
0.3	1.768016887141340	
0.4	3.365652805833880	
0.5	5.815406791350510	
0.6	9.680147713970390	
0.7	16.287784616290000	
0.8	29.619714413812000	
0.9	69.462933862360000	

<i>e</i>	<i>q</i>	<i>Modo</i>
0.2	0.095220295616062	TEse 2,1
0.3	0.220183994817196	
0.4	0.408143489557013	
0.5	0.677805687269941	
0.6	1.066621145150720	
0.7	1.659512691067090	
0.8	2.698289763690210	
0.9	5.290884193167890	

<i>e</i>	<i>q</i>	<i>Modo</i>
0.2	0.459164426897094	TEse 2,2
0.3	1.062809428497410	
0.4	1.975814806350610	
0.5	3.303752185330050	
0.6	5.272720876558350	
0.7	8.426008443815820	
0.8	14.386040732563500	
0.9	31.025430772858000	

<i>e</i>	<i>q</i>	<i>Modo</i>
0.2	1.015240099029620	TEse 2,3
0.3	2.354505357716940	
0.4	4.400190968084470	
0.5	7.434682393744390	
0.6	12.063294614728300	
0.7	19.715433258581000	
0.8	34.636884621670900	
0.9	77.644169090483500	

Tabla A3.2 Valor de *q* para diferentes excentricidades modo TE_{ce} y TE_{se} (cont.)

<i>e</i>	<i>q</i>	<i>Modo</i>
----------	----------	-------------

0.2	0.180097079033402	TEse 3,1
-----	-------------------	----------

0.3	0.415807389987445	
0.4	0.767470383995492	
0.5	1.262649234805650	
0.6	1.951561383831340	
0.7	2.940814445548130	
0.8	4.523744772765980	
0.9	8.016735098014940	

0.2	0.655384937354523	TEse 3,2
0.3	1.512270247966760	
0.4	2.790332414128700	
0.5	4.601392922197220	
0.6	7.184196253403000	
0.7	11.123660500323100	
0.8	18.187656120841400	
0.9	36.869308733880000	

<i>e</i>	<i>q</i>	<i>Modo</i>
----------	----------	-------------

<i>e</i>	<i>q</i>	<i>Modo</i>
0.2	1.312944323502100	TEse 3,3
0.3	3.029571374827000	
0.4	5.602869855800000	
0.5	9.315845174101970	
0.6	14.805841746912400	
0.7	23.602760249923500	
0.8	40.218030348037100	
0.9	86.495161609010000	

<i>e</i>	<i>q</i>	<i>Modo</i>
0.2	0.288531571923123	TEse 4,1
0.3	0.666165521441230	
0.4	1.229265268923980	
0.5	2.019699949337550	
0.6	3.107699809502170	
0.7	4.627631787478820	
0.8	6.922656601474120	
0.9	11.494139272523500	

<i>e</i>	<i>q</i>	<i>Modo</i>
0.2	0.879036873529329	TEse 4,2
0.3	2.027983586509530	
0.4	3.735678442798100	
0.5	6.125990567856930	
0.6	9.446725366278110	
0.7	14.309096663530200	
0.8	22.604590367225000	
0.9	43.435378468142700	

<i>e</i>	<i>q</i>	<i>Modo</i>
0.2	1.640401990883000	TEse 4,3
0.3	3.781595925155030	
0.4	6.962600330930400	
0.5	11.459245880320000	
0.6	17.920582609362300	
0.7	27.968653045530970	
0.8	46.384846406564300	
0.9	96.037516071003990	

Tabla A3.2 Valor de *q* para diferentes excentricidades modo TE_{ce} y TE_{se} (cont.)

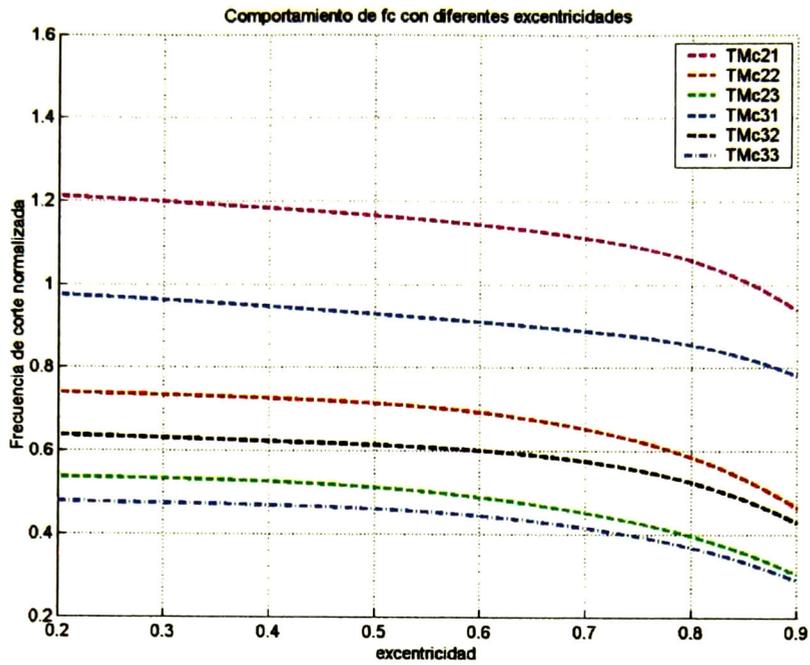


Figura A3.1 λ_c con diferentes excentricidades TMce (21,22,23,31,32,33)

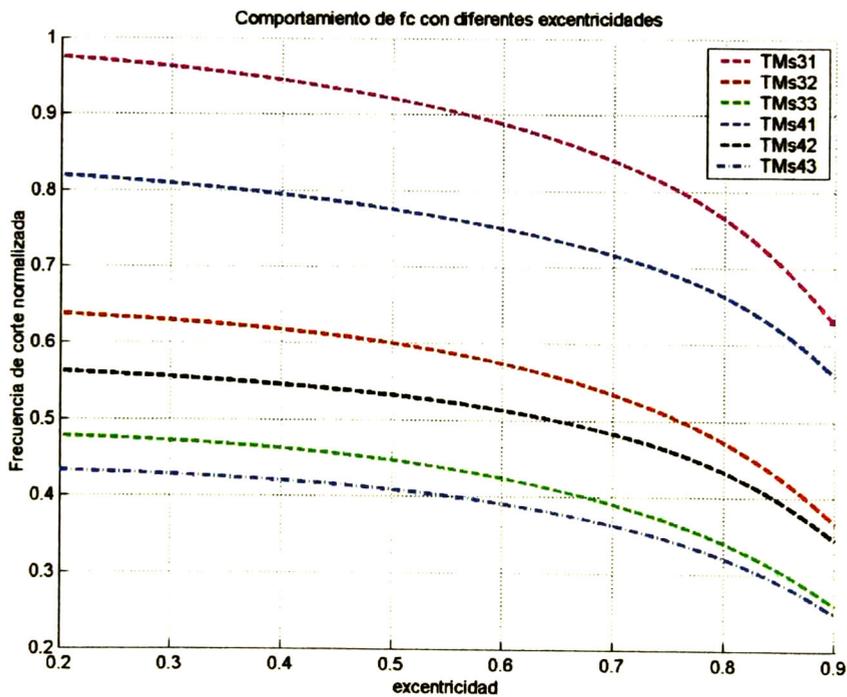


Figura A3.2 λ_c con diferentes excentricidades TMse (31,32,33,41,42,43)

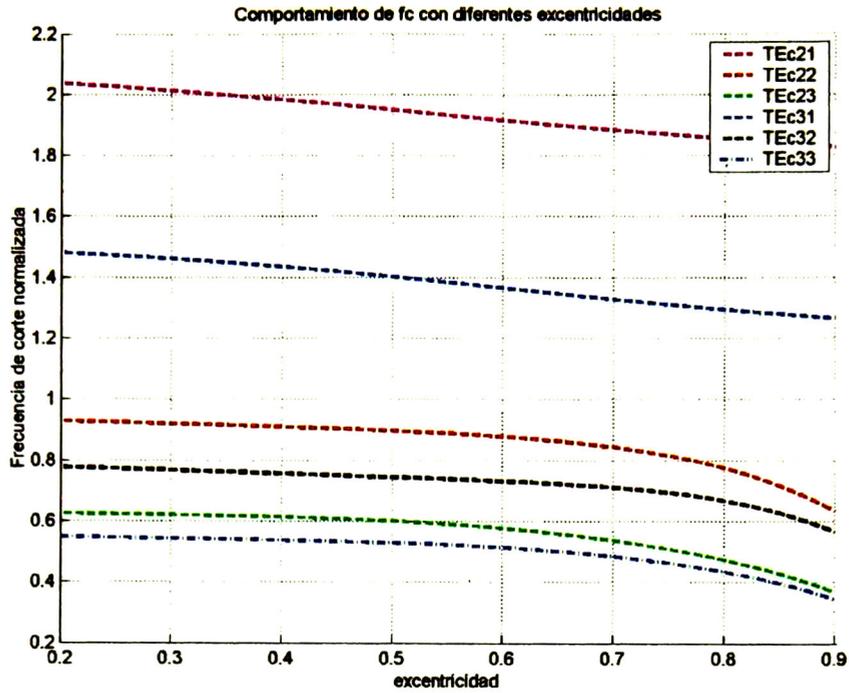


Figura A3.3 λ_c con diferentes excentricidades TE_c (21,22,23,31,32,33)

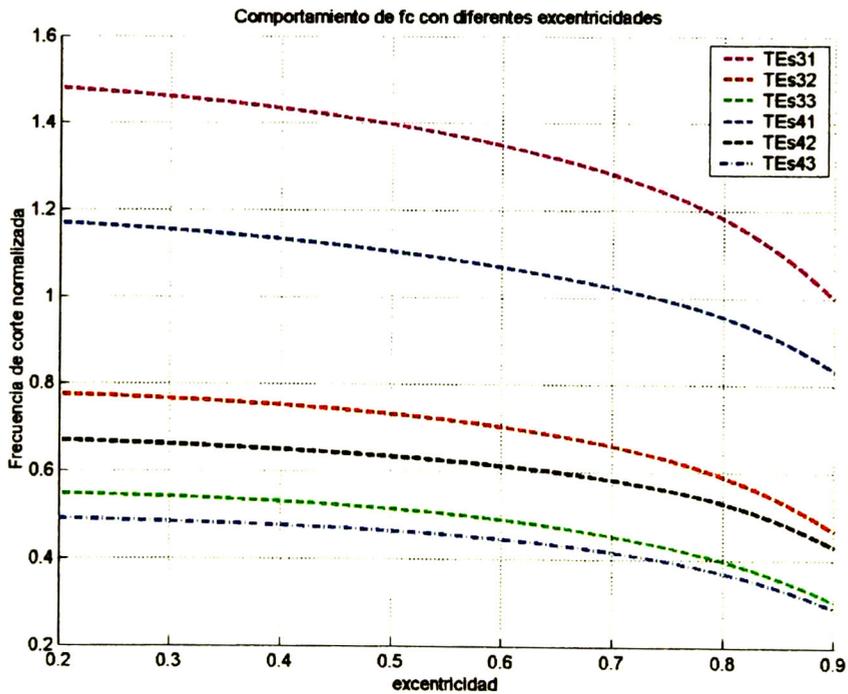


Figura A3.4. λ_c con diferentes excentricidades TE_s (31,32,33,41)

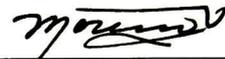
**Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del IPN**

Unidad Guadalajara

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, aprobó la tesis: CALCULO DE FRECUENCIAS DE CORTE EN GUÍAS DE ONDA CON SECCIÓN TRANSVERSAL ELÍPTICA del(a) C. Sergio GONZALEZ VELAZQUEZ el día 22 de Agosto de 2003



DR. YURIY SHKVARKO
INVESTIGADOR 3C
CINVESTAV GDL
GUADALAJARA



DR. PABLO MORENO
VILLALOBOS
INVESTIGADOR
CINVESTAV 3A
CINVESTAV GDL
GUADALAJARA



DR. FEDERICO SANDOVAL
IBARRA
INVESTIGADOR CINVESTAV
2C
CINVESTAV GDL
GUADALAJARA



CINVESTAV
BIBLIOTECA CENTRAL



SS1T000007027