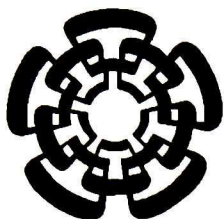




XX (111043.1)



Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto  
Politécnico Nacional  
UNIDAD GUADALAJARA

---

---

**CINVESTAV**  
**IPN**  
**ADQUISICION**  
**DE LIBROS**

ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO  
DINÁMICO NO LINEAL DE  
SISTEMAS DE POTENCIA USANDO  
FORMAS NORMALES DE ORDEN  
SUPERIOR

TESIS PRESENTADA POR

**IRMA MARTÍNEZ CARRILLO**

PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS

EN LA ESPECIALIDAD DE  
INGENIERÍA ELÉCTRICA

GUADALAJARA, JALISCO, AGOSTO DEL 2003.

**CINVESTAV I. P. N.**  
SECCION DE INFORMACION  
Y DOCUMENTACION

CLASIF.: TK165.68 M37 2003  
ADQUIS.: SSI- 279  
FECHA: 28-I-2004  
PROCED.: Don. - 2004  
\$ \_\_\_\_\_

**ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO  
DINÁMICO NO LINEAL DE SISTEMAS DE  
POTENCIA USANDO FORMAS NORMALES  
DE ORDEN SUPERIOR**

**TESIS DE MAESTRÍA EN CIENCIAS**

**INGENIERÍA ELÉCTRICA**

**POR**

**IRMA MARTÍNEZ CARRILLO  
INGENIERO ELECTROMECAÁNICO  
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE TOLUCA**

**DIRECTOR DE TESIS**

**DR. ARTURO ROMÁN MESSINA**

Cinvestav del IPN Unidad Guadalajara, Agosto del 2003.

**A DIOS**

Por todas las bendiciones siempre me da

**A MIS PADRES**

Por la confianza que siempre han depositado en mi

**A MIS HERMANAS Y HERMANOS**

Por que aun sin su presencia, siempre están conmigo

**A CARLOS JUÁREZ TOLEDO**

Por su apoyo y compañía incondicional de siempre

**AL DR. ARTURO ROMÁN MESINA**

Por que sin su apoyo y profesionalismo  
esta tesis no se hubiera culminado.

# RESUMEN

Esta tesis investiga la aplicación de métodos de análisis de perturbación de parámetros en la teoría de sistemas dinámicos no lineales, al estudio de la estabilidad de pequeña señal de sistemas eléctricos de potencia. El trabajo se centra en la determinación de dos aspectos fundamentales de interés en el estudio del comportamiento dinámico no lineal del sistema: la caracterización y cuantificación del grado de la interacción no lineal entre los modos fundamentales de oscilación del sistema y el estudio de los modos con mayor influencia en la respuesta del sistema ante perturbaciones pequeñas.

Con estos objetivos, se propone un modelo matemático general, basado en la aplicación de la expansión en series de potencia del modelo no lineal del sistema de potencia y la teoría de formas normales de campos vectoriales para el estudio del comportamiento dinámico del sistema de potencia. La herramienta propuesta generaliza los métodos existentes en la literatura para considerar efectos de orden superior en el modelo dinámico del sistema de potencia

Partiendo de esta representación, se propone una metodología para obtener soluciones analíticas de lazo cerrado y se investiga la extensión de los métodos existentes para identificar y cuantificar el grado de interacción entre los modos fundamentales de oscilación del sistema. La herramienta desarrollada permite, a partir de expresiones analíticas de lazo cerrado, el desarrollo de medidas analíticas para evaluar el grado de estrés en el sistema, la interacción entre los modos fundamentales de oscilación y la determinación de fronteras de estabilidad. El desarrollo conceptual del método propuesto en esta tesis ofrece, por otra parte, una gran flexibilidad para incorporar modelos detallados del sistema de potencia y la evaluación de diversas medidas de la interacción modal no lineal.

Por último, se presentan los resultados de la aplicación del método de análisis propuesto al estudio del comportamiento dinámico no lineal en un sistema máquina bus infinito considerando diferentes grados de modelado del generador y se proponen criterios y procedimientos para interpretar el fenómeno de interacción modal.

# ACRÓNIMOS

Acrónimo	Definición
MNF	Método de formas normales
MTC	Método de escalas múltiples en el tiempo (Multiple Time Scales por su denominación en la literatura inglesa)
NF	Teoría de formas normales
PEE	Punto de equilibrio estable
MBI	Máquina bus infinito



# ÍNDICE GENERAL

RESUMEN . . . . .	ii
ACRÓNIMOS . . . . .	iii
ÍNDICE GENERAL . . . . .	iv
ÍNDICE DE FIGURAS . . . . .	vii
ÍNDICE DE TABLAS . . . . .	viii

## CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA . . . . .	1
1.2 BREVE REVISIÓN DEL TRABAJO PREVIO . . . . .	2
1.2.1 Análisis basado en la integración numérica del modelo no lineal del sistema de potencia . . . . .	2
1.2.2 Aproximaciones basadas en métodos de perturbación de parámetros . . . . .	3
1.2.2.1 <i>El método de formas normales</i> . . . . .	4
1.2.2.2 <i>Otros métodos de análisis</i> . . . . .	4
1.3 OBJETIVO DE LA TESIS . . . . .	5
1.4 CONTRIBUCIONES DE LA TESIS . . . . .	5
1.5 ESTRUCTURA DE LA TESIS . . . . .	5
1.6 REFERENCIAS . . . . .	6

## CAPÍTULO 2 EL MÉTODO DE FORMAS NORMALES DE CAMPOS VECTORIALES

2.1 INTRODUCCIÓN . . . . .	8
2.2 CONCEPTOS GENERALES . . . . .	8
2.2.1 Modelado de sistemas débilmente no lineales . . . . .	8
2.2.2 Soluciones numéricas . . . . .	10
2.3 EL MÉTODO DE FORMAS NORMALES . . . . .	10
2.3.1 Reducción a la forma normal . . . . .	10
2.3.2 Forma canónica de Jordan . . . . .	12
2.4 TRANSFORMACIÓN A LA FORMA NORMAL . . . . .	13
2.5 REFERENCIAS . . . . .	21

### **CAPÍTULO 3      DESARROLLO DE APROXIMACIONES DE ORDEN SUPERIOR AL COMPORTAMIENTO DINÁMICO DEL SISTEMA**

3.1	INTRODUCCIÓN . . . . .	23
3.2	PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA . . . . .	24
3.3	MODELO INCREMENTAL DEL SISTEMA NO LINEAL . . . . .	25
3.3.1	Análisis en coordenadas físicas . . . . .	25
3.3.2	Modelos de orden superior . . . . .	29
3.3.3	Modelo no lineal en coordenadas de Jordan . . . . .	31
3.4	SOLUCIONES ANALÍTICAS DE FORMA CERRADA . . . . .	34
3.4.1	Aproximación de cuarto orden al comportamiento dinámico del sistema . . . . .	35
3.4.2	Contenido armónico . . . . .	38
3.4.3	Medidas prácticas de la separación entre soluciones . . . . .	39
3.5	DETERMINACIÓN DE CONDICIONES INICIALES . . . . .	40
3.6	REFERENCIAS . . . . .	42

### **CAPÍTULO 4      APLICACIÓN**

4.1	INTRODUCCIÓN . . . . .	43
4.2	APLICACIÓN A UN SISTEMA CLÁSICO MÁQUINA BUS INFINITO	43
4.2.1	Modelo dinámico del sistema de potencia . . . . .	44
4.2.2	Aproximación de forma normal de cuarto orden . . . . .	45
4.2.3	Aproximación de primer orden . . . . .	46
4.2.4	Soluciones aproximadas de forma normal . . . . .	47
4.2.4.1	<i>Evaluación de condiciones iniciales</i> . . . . .	48
4.2.4.2	<i>Soluciones analíticas</i> . . . . .	54
4.2.5	Soluciones en el dominio del tiempo . . . . .	56
4.2.6	Soluciones en el plano de fase . . . . .	60
4.3	APLICACIÓN A UN SISTEMA MBI CON CONTROLES . . . . .	63
4.4	REFERENCIAS . . . . .	68

<b>CAPÍTULO 5</b>	<b>CONCLUSIONES GENERALES Y RECOMENDACIONES PARA TRABAJOS FUTUROS</b>	
5.1	CONCLUSIONES GENERALES . . . . .	69
5.2	TRABAJOS FUTUROS . . . . .	69
<b>APÉNDICE A</b>	<b>CONDICIONES DE OPERACIÓN</b>	
A.1	PARÁMETROS DEL SISTEMA MÁQUINA BUS INFINITO . . . . .	71
A.2	PARÁMETROS DEL SISTEMA MBI CON CONTROLES . . . . .	71

# ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1	Representación esquemática del método de formas normales adoptado en el análisis . . . . .	21
Figura 3.1	Diagrama esquemático ilustrando la solución de formas normales en coordenadas físicas . . . . .	39
Figura 4.1	Diagrama unifilar del sistema en estudio . . . . .	44
Figura 4.2	Interpretación geométrica de las transformaciones no lineales de coordenadas . . . . .	51
Figura 4.3	Soluciones de forma normal ilustrando el efecto de estrés en la determinación de las condiciones iniciales . . . . .	51
Figura 4.4	Contribución de efectos de orden superior en la respuesta del sistema . . . . .	56
Figura 4.5	Comparación del comportamiento dinámico de la máquina para una perturbación inicial $\Delta\delta^0 = 15^\circ, \Delta\omega^0 = 0^\circ$ . . . . .	58
Figura 4.6	Comparación del comportamiento dinámico de la máquina para una perturbación inicial $\Delta\delta^0 = 30^\circ, \Delta\omega^0 = 0^\circ$ . . . . .	59
Figura 4.7	Comparación del comportamiento dinámico de la máquina para una perturbación inicial $\Delta\delta^0 = 45^\circ, \Delta\omega^0 = 0^\circ$ . . . . .	60
Figura 4.8	Diagrama de fase correspondiente al caso A . . . . .	61
Figura 4.9	Diagrama de fase correspondiente al caso B . . . . .	62
Figura 4.10	Diagrama de fase correspondiente al caso C . . . . .	62
Figura 4.11	Modelo equivalente de la máquina síncrona . . . . .	63
Figura 4.12	Comparación del comportamiento dinámico de la máquina para una perturbación inicial $\Delta\delta^0 = 45^\circ, \Delta\omega^0 = 0^\circ$ . . . . .	67
Figura 4.13	Diagrama de fase correspondiente al caso C . . . . .	67

# ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 3.1	Componentes armónicos en la solución de forma normal . . . . .	38
Tabla 4.1	Condiciones de operación consideradas en el estudio . . . . .	48
Tabla 4.2	Condiciones iniciales en los distintos marcos coordenados correspondientes al caso A de operación . . . . .	52
Tabla 4.3	Condiciones iniciales en los distintos marcos coordenados correspondientes al caso B de operación . . . . .	53
Tabla 4.4	Condiciones iniciales en los $x^o$ distintos marcos coordenados correspondientes al caso C de operación . . . . .	54

# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN

### 1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El estudio del comportamiento no lineal alrededor de un punto de equilibrio estable es uno de los problemas de mayor interés en el campo de la estabilidad de pequeña señal de sistemas de potencia. En condiciones de estrés o carga máxima, el comportamiento del sistema ante perturbaciones pequeñas puede exhibir oscilaciones débilmente amortiguadas o sostenidas de origen electromecánico, caracterizadas por un comportamiento no lineal y variante en el tiempo.

La presencia de efectos no lineales de origen electromecánico, se manifiesta fundamentalmente en el comportamiento dinámico del sistema, cuando las desviaciones del ángulo del rotor llegan a ser excesivamente grandes ante una perturbación o cambio en las condiciones de operación. La naturaleza de estas oscilaciones es compleja y puede incluir la interacción no lineal de los modos fundamentales de oscilación así como otros fenómenos no lineales [1-3].

Tradicionalmente, el estudio de éste fenómeno se ha planteado por la industria eléctrica, utilizando métodos de análisis lineal donde los modos fundamentales de oscilación están desacoplados; las características de estabilidad y comportamiento del proceso oscilatorio se interpretan en estos enfoques como una combinación lineal de los modos electromecánicos del sistema [4,5].

En la actualidad, ante el crecimiento y complejidad de los sistemas de potencia, se ha conducido al desarrollo de oscilaciones compuestas en la conducta del sistema, envolviendo la interacción no lineal de dos o más modos de oscilación fundamentales. Este tipo de fenómenos no pueden ser analizados o explicados adecuadamente utilizando técnicas convencionales de análisis. Adicionalmente, éste tipo de herramientas, no permiten identificar la magnitud de las oscilaciones resultantes o el mecanismo que conduce a la inestabilidad del sistema.

Un problema de particular importancia surge cuando la perturbación aplicada es lo suficientemente grande para causar que los términos no lineales en el modelo del sistema tengan un efecto significativo en el estudio e interpretación de la respuesta dinámica del sistema de potencia. El comportamiento del sistema está descrito en estos casos por un modelo dinámico no lineal donde los modos fundamentales de oscilación exhiben un fuerte acoplamiento no lineal; el estudio

de este fenómeno puede ser estudiado en forma aproximada en términos de un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales con coeficientes constantes en donde los efectos no lineales se aproximan mediante perturbaciones en los parámetros.

El desarrollo de modelos no lineales del sistema de potencia, basados en métodos de perturbación de parámetros en la teoría de ecuaciones diferenciales y el estudio de los diferentes aspectos del comportamiento no lineal de un sistema de potencia, constituye el tema central de este trabajo de investigación. Concretamente, se investiga la aplicación del método de formas normales de campos vectoriales, al estudio del fenómeno de interacción modal no lineal al análisis y caracterización de oscilaciones de origen electromecánico.

## **1.2 BREVE REVISIÓN DEL TRABAJO PREVIO**

El crecimiento y complejidad creciente de los sistemas eléctricos ha provocado el desarrollo de métodos y técnicas de análisis alternativos o complementarios al estudio convencional de la estabilidad de pequeña señal. La mayoría de las herramientas desarrolladas en este campo analizan el comportamiento del sistema utilizando técnicas de análisis lineal donde los modos de oscilación proporcionan una medida de la estabilidad del sistema y permiten caracterizar de manera precisa la naturaleza y origen de las oscilaciones. Las referencias [4,5] resumen las principales características de este tipo de enfoques. Estos modelos pueden ser analíticos, o estar basados en el procesamiento de señales obtenidas de la simulación numérica o medición del comportamiento dinámico del sistema de potencia.

El estudio del comportamiento no lineal de sistemas de potencia ha sido planteado en la literatura desde diversas perspectivas. A continuación se describen brevemente, los trabajos orientados al estudio de diversos aspectos del comportamiento dinámico no lineal del sistema de potencia, con énfasis en el desarrollo e implementación de modelos analíticos.

### **1.2.1 Análisis basado en la integración numérica del modelo no lineal del sistema de potencia**

En este tipo de enfoques, la solución numérica de las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento dinámico del sistema se utiliza para verificar y cuantificar la presencia de efectos no lineales. El procesamiento posterior de las señales de interés obtenidas de la integración numérica permite identificar los modos dominantes de oscilación así como el grado de estrés en el sistema.

Existen dos enfoques alternativos para el estudio de varios aspectos del comportamiento no lineal:

La integración numérica detallada del modelo no lineal del sistema de

potencia mediante un programa de estabilidad transitoria [4]

- La simulación numérica de modelos del sistema obtenidos de la utilización de una serie truncada de potencia [6-8]

La aplicación de este último tipo de enfoque para predecir diversos aspectos del comportamiento no lineal del sistema ha sido reportada recientemente en la literatura.

En [6], Starret *et al.* mostraron que los modelos dinámicos basados en la expansión en series de Taylor de tercer orden pueden capturar condiciones de estabilidad, particularmente en condición de estrés en la operación del sistema. En un trabajo posterior, Sobajic *et al.* [7] utilizaron un enfoque similar para mostrar la importancia de la incorporación de efectos de orden superior en la expansión en series de potencia del modelo del sistema y proporcionaron una interpretación física del mecanismo de interacción modal. Otros estudios indican que la utilización de modelos lineales no permite estudiar de manera precisa la amplitud de la oscilación así como las condiciones que conducen a la pérdida de sincronismo [8,9].

La desventaja de estas formulaciones se deriva fundamentalmente de su incapacidad para proporcionar medidas analíticas para identificar el origen de los efectos no lineales, y con ello, el desarrollo de medidas correctivas.

### **1.2.2 Aproximaciones basadas en métodos de perturbación de parámetros**

Las técnicas de perturbación de parámetros, particularmente el método de Formas Normales (MFN) de campos vectoriales han encontrado una gran aceptación como herramientas de interés para el análisis de comportamiento no lineal de sistemas de potencia, especialmente en condiciones de estrés en su operación. Esos métodos consisten de una aproximación lineal o de primer orden, a la cual se agregan términos no lineales en la forma de una serie truncada de potencia del modelo no lineal original; en la teoría de perturbación de sistemas dinámicos los términos no lineales se reinterpretan como términos de corrección que permiten aproximar el comportamiento dinámico de manera más precisa.

Este tipo de metodologías proporcionan una mejor comprensión de la naturaleza fundamental del proceso oscilatorio y permiten el estudio de diversos aspectos del comportamiento no lineal del sistema de potencia [1,2]. No obstante, la utilización de este tipo de enfoques conduce comúnmente a un aumento substancial en la carga computacional del modelo dinámico resultante.

Los métodos existentes para el análisis de oscilaciones no lineales en sistemas de potencia, se restringen a representaciones de baja dimensión del sistema, particularmente representaciones de segundo orden [10-13]. Estudios recientes, sin embargo, sugieren que la inclusión de efectos de orden superior puede ayudar a explicar la naturaleza de diversos efectos no lineales como la



interacción entre modos, la generación de efectos armónicos e intermodulación así como a identificar de manera más precisa las fronteras y el mecanismo de pérdida de la estabilidad [1,14].

A continuación se revisan brevemente las principales técnicas planteadas en la literatura para estudiar diversos aspectos del comportamiento no lineal del sistema de potencia, agrupadas temáticamente.

#### 1.2.2.1 *El método de formas normales*

El MFN es una herramienta analítica y eficaz que permite simplificar el estudio de procesos físicos descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias. El interés de la teoría de formas normales como herramienta analítica para el estudio de diversos aspectos del comportamiento no lineal del sistema de potencia ha sido extensamente reconocido en la literatura [2-8] e incluye el estudio de la determinación de interacción no lineal, la evaluación de fronteras de estabilidad y el análisis de resonancia entre modos.

Sin embargo, existen pocos trabajos analíticos que investiguen el efecto de términos no lineales de alto orden en la respuesta del sistema. En [6], Starret *et al.* mostraron que la respuesta dinámica del sistema puede incluir combinaciones de los modos fundamentales de oscilación. Más recientemente, diversos investigadores [3]-[6] han sugerido la necesidad de incluir términos de orden mayor en la respuesta dinámica del sistema.

La extensión de los métodos de análisis desarrollados para el estudio de sistemas de mayor dimensión, es un problema extremadamente complejo para el cual se han reportado escasos resultados [14]. Por una parte, el costo computacional requerido para su implementación práctica puede resultar prohibitivo para el estudio de sistemas de gran dimensión, y por otra no existen herramientas analíticas generales o procedimientos sistemáticos para el modelado de efectos de orden superior de modelos no lineales.

#### 1.2.2.2 *Otros métodos de análisis*

En el estudio del comportamiento dinámico del sistema de potencia se han desarrollado diversas herramientas para el modelado y análisis de efectos no lineales. En la referencia [2] se presenta una revisión fundamental de las características de varios métodos para el estudio del comportamiento no lineal del sistema de potencia. Destacan por su mayor interés, el método de las escalas múltiples de tiempo (MTC) (Multiple Time Scales por su denominación en la literatura inglesa), la teoría de Floquet-Lyapunov y el método espectral de Galerkin.

Estos métodos han sido aplicados al estudio de diversos aspectos del comportamiento no lineal del sistema de potencia. Las referencias [9],[15]-[17] resumen algunas aplicaciones de este tipo de metodologías. La extensión de éste

tipo de enfoques para tratar con sistemas complejos no ha sido reportada en la literatura.

### **1.3 OBJETIVO DE LA TESIS**

El objetivo fundamental de esta tesis es generalizar y desarrollar técnicas de análisis basados en la teoría de perturbaciones en el estudio de sistemas dinámicos, para el estudio del comportamiento no lineal del sistema de potencia en condiciones de estrés. Otros objetivos identificados son el desarrollo de modelos computacionales generales para el modelado de efectos no lineales de alto orden así como el estudio de criterios analíticos para la identificación y caracterización de la interacción modal no lineal y su efecto en la operación del sistema.

### **1.4 CONTRIBUCIONES DE LA TESIS**

A continuación se resumen los aspectos desarrollados que constituyen aportaciones originales de este trabajo:

- 1) El establecimiento de un modelo matemático generalizado del sistema de potencia para el estudio de la estabilidad de pequeña señal de sistemas de potencia, con énfasis en el estudio de la interacción modal no lineal y su efecto en el comportamiento del sistema.
- 2) La extensión de los modelos matemáticos existentes en la literatura para el modelado de efectos de orden superior en la representación del sistema de potencia. Asimismo, el desarrollo de soluciones analíticas basadas en la utilización de transformaciones no lineales.
- 3) El desarrollo conceptual y la implementación computacional de los algoritmos desarrollados utilizando matemática simbólica en el ambiente de Matlab.
- 4) La aplicación de los métodos desarrollados al estudio de la interacción modal no lineal en un sistema de potencia.

### **1.5 ESTRUCTURA DE LA TESIS**

La tesis esta estructurada en la siguiente forma. En el capítulo 2 se hace una revisión de métodos utilizados para la simplificación de ecuaciones diferenciales lineales y se propone un método sistemático para la obtención de la forma normal de orden arbitrario, de un campo vectorial analítico.

En el capítulo 3 se desarrolla un procedimiento sistemático basado en la teoría de formas normales para modelar en forma explícita, los efectos de orden superior del modelo matemático de un sistema no lineal. También se describe la implantación computacional de los modelos desarrollados en el ambiente de Matlab y se proponen algoritmos para la determinación de las soluciones analíticas

del sistema, así como la interpretación física de los modelos desarrollados. Además se proponen expresiones matemáticas para abordar las no linealidades de orden finito producidas al expandir el sistema original en series de Taylor.

En el capítulo 4 se presenta la aplicación del método propuesto aplicado como un primer ejemplo al modelo clásico de un sistema máquina bus infinito considerando distintos grados de complejidad en la representación del sistema

Por último, en el capítulo 5 se mencionan las conclusiones principales del trabajo realizado y se mencionan los posibles trabajos futuros referentes a este tema.

## 1.6 REFERENCIAS

- [1]. EPRI Report TR-107798, Nonlinear power system behavior-Extension of linear system analysis via higher order correction, February 1997.
- [2]. EPRI Report TR-108821, Nonlinear analysis methods for sustained inter-area oscillations, September 1997.
- [3]. IEEE Task Force on the Need to Assess the Effect of Higher Order Terms, The Institute of Electrical & Electronics Engineers.
- [4]. P. Kundur, Power System Control and Stability, McGraw-Hill, 1994, (ISBN 0-07-035958-X).
- [5]. CIGRE, Task Force 07, Analysis and Control of Power System Oscillations, Final Report, December 1996.
- [6]. S. K Starret, W. Klieman, V. Vittal, A.A. Fouad, "Power system modal behavior: Significance of second and third order nonlinear terms", North America Power Symposium, Washington D.C., October, 1993.
- [7]. Dejan J. Sobajic, "An introduction to normal forms of vector fields: New framework for assessing stability of highly stressed power systems". Electrotechnical Conference MELECON'96, 8<sup>th</sup> Mediterranean, vol. 1, May 1996, pp. 13-16.
- [8]. E. Barocio Espejo, Estimación de la interacción modal no lineal en sistemas de potencia operando en condiciones de estrés usando formas normales, Tesis Doctoral, Cinvestav, Marzo 1993.
- [9]. M. Y. Vaiman, Dejan J. Sobajic, "A novel approach to compute characteristics of sustained inter-area oscillations", IEEE Power Engineering Review, vol. 18, Issue 1, January 1998, pp. 52-54.
- [10]. Vittal V., Bhatia N. and Fouad A. A. "Analysis of the inter-area mode phenomenon in power systems following large disturbances" *IEEE/PES 1991 Winter Meeting*, New York, USA, 1991, paper 91 WM 228-7 PWRS.

- [11]. Thapar, Jyotika, Vittal, Vijay, Kliemann, Wolfgang and Fouad, A. A. "Application of the normal form of vector fields to predict interarea separation in power systems" *IEEE Trans. on Power Systems*, Vol. 12, no. 2, (1997) 844-850.
- [12]. A. R. Messina, E. Barocio, "Assessment of non-linear modal interaction in stressed power networks using the method of normal forms" *Electrical Power & Energy Systems* 25 (2003) 21-29.
- [13]. Gilsoo Jang, Vijay Vittal, Wolfgang Kliemann, Effect of nonlinear modal interaction on control performance: Use of normal forms technique in control design, Part I: General theory and procedure, *IEEE Trans. on Power Systems*, 13 (2) 1998 401-407.
- [14]. A. R. Messina, E. Barocio, J. Arroyo, "Análisis of modal interaction in power systems with FACTS controllers using normal forms" *IEEE General Meeting*, July 13-17,2003, Toronto, Canada, Paper 03GM0697.
- [15]. Y. Tamura, N. Yorino, "Possibility of auto-&hetero parametric resonances in power systems and their relationship with long term dynamics", *IEEE/PES 1986 Summer Meeting*, Mexico City, Paper 86SM 349-5.
- [16]. Y. Tamura, N. Yorino, "A generalized analysis method of auto-parametric resonances in power systems" *IEEE Trans on Power Systems* 4, no. 3 (Aug. 1989), 1057-1064.
- [17]. Takao Watanabe, Junichi Ohishi, Keiichiro Yasuda, "Robust damping control of power oscillation incorporating parametric resonance", *Electrical Engineering in Japan*, vol. 142, no. 1, 2003, pp. 42-49.

## EL MÉTODO DE FORMAS NORMALES DE CAMPOS VECTORIALES

### 2.1 INTRODUCCIÓN

El estudio del comportamiento no lineal alrededor de un punto de equilibrio es de suma importancia en el análisis de estabilidad de sistemas eléctricos de potencia. En este capítulo, se propone un modelo matemático general, basado en la teoría de formas normales (NF), para estudiar la influencia de términos de orden superior que se originan de la expansión en series de Taylor del modelo dinámico no lineal del sistema de potencia en la estabilidad de pequeña señal.

Se presenta, en primer lugar, una revisión de métodos utilizados para el estudio de sistemas dinámicos no lineales con énfasis en la teoría de las formas normales de campos vectoriales. A continuación se desarrolla un procedimiento sistemático, basado en la noción de formas normales para el estudio de diversos aspectos de comportamiento no lineal de un sistema dinámico y se introduce el enfoque de análisis utilizado en este trabajo.

Por último se describe brevemente la validación del método propuesto en el contexto de su aplicación utilizando matemática simbólica. La técnica propuesta es general y puede aplicarse al estudio de formas normales de orden arbitrario de sistemas físicos descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias.

### 2.2 CONCEPTOS GENERALES

#### 2.2.1 Modelado de sistemas débilmente no lineales

Considérese un sistema dinámico no lineal descrito por el conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{R}^n \quad \mathbf{f} : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n \quad (2.1)$$

en donde  $\mathbf{x}$  es el vector de estados del sistema y  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  representa un campo

vectorial suave<sup>1</sup> el cual contiene términos lineales y no lineales [1,2]. Se asume, además, que el sistema en (2.1) es analítico, y satisface las condiciones

$$\begin{cases} \mathbf{f}_i = \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial x_j} = 0 \end{cases}$$

en el origen  $\mathbf{x} = \mathbf{0}, \forall i, j = 1, 2, \dots, n$ . En la práctica, la serie de potencia se aproxima mediante una serie finita, truncada idealmente en un valor lo suficientemente alto para capturar los efectos dinámicos esenciales. Los coeficientes de esta serie pueden determinarse numéricamente, pero esto conduce a una formulación discreta del problema.

Si se considera ahora que el vector de campo,  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ , es continuo y suave, la expansión en series de potencia de la ecuación (2.1) en la vecindad de  $\mathbf{x}_{sep}$ , hasta orden  $k$  estará dada por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_{lin} + \mathbf{f}_{nolin} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \sum_{i=2}^k \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) + O(\|\mathbf{x}\|^{k+1}) \quad (2.2)$$

en donde  $\mathbf{f}_{lin}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} = D\mathbf{f}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{sep}}$   $\mathbf{x}$  contiene la parte lineal del campo vectorial original y  $\mathbf{f}_{nolin} = \sum_{i=2}^k \mathbf{f}_i(\mathbf{x})$  contiene la parte no lineal del campo vectorial; cada  $\mathbf{f}_i(\mathbf{x})$  es un vector de expresiones suaves representadas por funciones polinomiales de grado  $i$  en  $\mathbf{x}$ , para  $i \geq 2$ , el cual puede expresarse en la forma compacta

$$f_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\substack{m_1+m_2+\dots+m_n=m \\ m_1, \dots, m_n \geq 0}} \frac{1}{m_1! \dots m_n!} \left( \frac{\partial^m}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} f_i(0) \right) x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$$

El desarrollo de modelos analíticos generales para la determinación de aproximaciones no lineales para  $\mathbf{f}_{nolin}$ , así como su simplificación mediante técnicas analíticas en el contexto de la teoría de formas normales, son dos objetivos fundamentales del presente trabajo de investigación.

---

<sup>1</sup> Se define un campo vectorial suave si cada componente de  $\mathbf{f}$  tiene derivadas continuas de todos los órdenes con respecto a todas las combinaciones de sus argumentos

## 2.2.2 Soluciones numéricas

La integración numérica de las ecuaciones (2.1) permite encontrar soluciones aproximadas al comportamiento dinámico del sistema con la precisión deseada. Este modelo es el que adopta en este trabajo como referencia para validar la exactitud de los modelos propuestos.

## 2.3 EL MÉTODO DE FORMAS NORMALES

El MFN es una técnica analítica para simplificar sistemas dinámicos descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. Conceptualmente, el MFN busca simplificar o eliminar las partes no esenciales del modelo dinámico mediante transformaciones analíticas de coordenadas. La cancelación de términos no lineales puede ser completa para sistemas hiperbólicos, sin embargo, existe una parte del modelo llamada *esencial*, la cual no puede ser simplificada [3].

A continuación se revisa brevemente la teoría de formas normales y se introduce la aproximación utilizada en este trabajo. Para una descripción más completa de la teoría de FN pueden consultarse las referencias [2-6].

### 2.3.1 Reducción a la forma normal

El principio fundamental del método de Formas Normales (MNF) es el de encontrar una sucesión de transformaciones no lineales de coordenadas, con el origen como punto de equilibrio, para eliminar o simplificar los términos no lineales en (2.2), iniciando con los términos de segundo orden.

Asuma con objeto de introducir estos conceptos, que el sistema en estudio puede representarse mediante la ecuación (2.2). En la teoría de FN es necesario determinar una transformación no lineal de coordenadas de la forma [4,5].

$$\mathbf{x} = \mathbf{z} + \mathbf{h}(\mathbf{z}) = \mathbf{z} + \mathbf{h}_2(\mathbf{z}) + \mathbf{h}_3(\mathbf{z}) + \dots + \mathbf{h}_k(\mathbf{z}) + \dots = \mathbf{z} + \sum_{i=2}^k \mathbf{h}_i(\mathbf{z}) \quad (2.3)$$

En donde  $\mathbf{z} = (z_1 \ z_2 \ \dots \ z_n) \in C^n$  representa el nuevo espacio o sistema coordinado, y los  $\mathbf{h}_i(\mathbf{z}) \geq 2$  representan vectores polinomiales de orden  $i$  los cuales deben determinarse para obtener la forma más simple o forma normal del campo vectorial.

Substituyendo (2.3) en (2.2) se obtiene el sistema simplificado

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Lz} + \mathbf{g}(\mathbf{z}) = \mathbf{\Lambda z} + \sum_{i=2}^k \mathbf{g}_i(\mathbf{z}) + \mathbf{R}_i(\mathbf{z}) \quad (2.4)$$

donde la matriz  $\Lambda$  representa el Jacobiano del sistema en el origen. Los términos  $g_i(\mathbf{z}) \geq 2$  se denominan términos resonantes o seculares que no pueden ser eliminados por la transformación (2.3) y contienen la parte *esencial* del sistema dinámico y  $\mathbf{R}_i(\mathbf{z})$  es el residuo del sistema.

El sistema en (2.4) se denomina la forma normal de la ecuación (2.2). Se puede mostrar, que bajo ciertas condiciones, los términos  $g_i(\mathbf{z})$  pueden ser eliminados mediante una selección apropiada de coordenadas  $\mathbf{h}_i(\mathbf{z})$ , resultando en el sistema simplificado  $\dot{\mathbf{z}} = \Lambda \mathbf{z}$ .

Los siguientes teoremas y definiciones proporcionan la base teórica del método de formas normales.

**Definición 2.1** Se dice que un campo vectorial  $\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  tiene una forma normal resonante si  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{J}\mathbf{x} + (f_1 \ f_2 \ \dots \ f_n)^T$ , donde  $\mathbf{J}$  tiene la forma normal de Jordan y la parte no lineal  $(f_1 \ f_2 \ \dots \ f_n)^T$  consiste, exclusivamente, de términos resonantes. En otras palabras, la serie  $f_j$  contiene solamente monomios  $x_1^{m_1} x_1^{m_2} \dots x_1^{m_n}$ , donde  $m_1, m_2, \dots, m_n$  satisfacen las relaciones

$$\lambda_j = (m, \lambda) = \sum_{i=1}^n m_i \lambda_i \tag{2.5}$$

$$m = (m_1 \ m_2 \ \dots \ m_n) \ , \ m_k \geq 0 \ . \ \sum_{i=1}^n m_i \geq 2$$

entre los valores propios de la matriz  $\mathbf{A}$ . Obsérvese además, que la condición  $m_i \geq 2$  asegura que los términos en  $x_1^{m_1} x_1^{m_2} \dots x_1^{m_n}$  son puramente no lineales.

**Teorema 2.1** [2,4] Si los valores propios de la matriz  $\mathbf{A}$  no son resonantes, entonces el sistema descrito en (2.4), puede ser reducido a la ecuación lineal

$$\dot{\mathbf{z}} = \Lambda \mathbf{z} \tag{2.6}$$

mediante un cambio formal de variables o transformaciones no lineales de la forma (2.3). Este es el Teorema de Poincaré-Dulac.

Se deduce entonces, que si los valores propios de  $\Lambda$  no son resonantes, el campo vectorial no lineal en (2.2) pueden ser transformado a un campo vectorial lineal. Es importante destacar, asimismo, que las transformaciones no lineales son invertibles por lo que es posible obtener soluciones analíticas de forma cerrada.



En la teoría convencional de FN, este proceso involucra tres pasos preliminares [7]:

- a) Para cada PEE se introduce una traslación de coordenadas  $X = x - x^{(i)}$ , tal que  $f(0) = 0$ . El análisis de estabilidad se realiza para cada PEE por separado.
- b) El campo vectorial se aproxima mediante una serie de potencia truncada alrededor del origen.
- c) El campo vectorial lineal se transforma a su forma canónica de Jordan mediante un cambio de coordenadas lineales.

Para el desarrollo del modelo del sistema, se asumen adicionalmente las siguientes simplificaciones: i) El sistema en estudio es autónomo con no linealidades representadas mediante polinomios de orden finito, y ii) Se asume que la matriz  $A$  es diagonalizable.

Los detalles de estos procedimientos computacionales se describen en las siguientes secciones.

### 2.3.2 Forma canónica de Jordan

Sea  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  el espectro de valores propios de la matriz  $A$  y sean  $U = \text{col}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ ,  $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  las matrices asociadas de vectores propios izquierdos y derechos, respectivamente. Entonces, el cambio lineal de coordenadas  $x = Uy$  transforma el sistema en (2.2) a su forma canónica compleja de Jordan:

$$\dot{y} = U^{-1}f(Uy) = \Lambda y + \sum_{i=2}^k F_i(Uy) \quad (2.7)$$

donde  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in C^n$  es el vector de coordenadas en forma de Jordan, y los vectores  $F_i(y) = U^{-1}f_i(Uy)$ ,  $i = 2, 3, \dots, k$  representan vectores polinomiales de orden  $i$ , los cuales son función de las variables modales  $y$ . Por consiguiente, las ecuaciones (2.7) pueden expresarse en la forma diagonal

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \sum_{i=2}^k F_i(y) \quad (2.8)$$

en donde  $\mathbf{f}_i(\mathbf{y}) = (f_i^1 \ f_i^2 \ \dots \ f_i^n)^T$  y los términos no lineales se expresan de la siguiente manera:

$$f_2^j = \sum_{k=1}^n \sum_{l=k}^n F_{2kl}^j y_k y_l \quad \text{para } i = 2$$

$$f_3^j = \sum_{k=1}^n \sum_{l=k}^n \sum_{m=k}^n F_{3klm}^j y_k y_l y_m \quad \text{para } i = 3$$

$$f_4^j = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \sum_{p=1}^n F_{3klmp}^j y_k y_l y_m y_p \quad \text{para } i = 4$$

....

Nótese que la ecuación (2.8) presenta desacoplamiento en la parte lineal y acoplamiento en la parte no lineal a través de los coeficientes  $F_{2kl}^j, F_{3klm}^j, \dots$ . Los términos  $F_{2kl}^j, F_{3klm}^j, \dots$  representan respectivamente los coeficientes cuadráticos, cúbicos, y de orden superior en el modelo dinámico y pueden interpretarse físicamente como el acoplamiento no lineal entre los modos fundamentales del sistema.

Es importante destacar también, que en el modelo desarrollado, la matriz  $\Lambda = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{V}^T \mathbf{A} \mathbf{U} = \text{diag}(\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_n)$  es la matriz diagonal de valores propios del sistema, y se asume que los vectores propios se normalizan para satisfacer las relaciones  $\mathbf{V}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}$ . La generalización de este procedimiento para incluir valores propios repetidos se discute en las referencias [4].

## 2.4 TRANSFORMACIÓN A LA FORMA NORMAL

En el algoritmo propuesto, la obtención de la forma normal aproximada de orden  $k$  requiere de la aplicación de  $k$  transformaciones no lineales de coordenadas. Estas transformaciones pueden expresarse en la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{z}_2 + \mathbf{h}_2(\mathbf{z}_2) \\ \mathbf{z}_{s-1} &= \mathbf{z}_s + \mathbf{h}_s(\mathbf{z}_s) \\ s &= 3, \dots, k \end{aligned} \quad (2.9)$$

en donde los vectores  $\mathbf{h}_s(\mathbf{z}_s) = O(|\mathbf{z}|^s)$  son vectores polinomiales complejos cuyos coeficientes deben ser determinados de tal forma que los términos de orden  $s$  puedan

ser simplificados o eliminados; los vectores  $\mathbf{z}_s \in C^n$  denotan los nuevos espacios coordenados del sistema y las relaciones no lineales en (2.9) se conocen como las transformaciones de Poincaré-Dulac..

Diferenciando de ambos lados de (2.9) con respecto al tiempo, se obtiene

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{y}} &= \dot{\mathbf{z}}_2 + D\mathbf{h}_2(\mathbf{z}_2)\dot{\mathbf{z}}_2 = (\mathbf{I} + D\mathbf{h}_2(\mathbf{z}_2))\dot{\mathbf{z}}_2 \\
 \dot{\mathbf{z}}_2 &= \dot{\mathbf{z}}_3 + D\mathbf{h}_3(\mathbf{z}_3)\dot{\mathbf{z}}_3 = (\mathbf{I} + D\mathbf{h}_3(\mathbf{z}_3))\dot{\mathbf{z}}_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{\mathbf{z}}_{k-1} &= \dot{\mathbf{z}}_k + D\mathbf{h}_k(\mathbf{z}_k)\dot{\mathbf{z}}_k = (\mathbf{I} + D\mathbf{h}_k(\mathbf{z}_k))\dot{\mathbf{z}}_k
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

donde  $\mathbf{D}$  es el Jacobiano u operador diferencial, e  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad de dimensión  $n \times n$ ; los términos  $D\mathbf{h}_k(\mathbf{z}_k) = \partial\mathbf{h}_k / \partial\mathbf{z}_k$  representan el Jacobiano del cambio de coordenadas, evaluado en la condición de equilibrio.

Substituyendo (2.10) en (2.7), y repitiendo el proceso de  $m = 3$  a  $m = k$ , la forma normal de orden  $k$  puede expresarse en la forma compacta

$$\dot{\mathbf{z}}_k = (\mathbf{I} + D\mathbf{h}_k(\mathbf{z}_k))^{-1}(\mathbf{I} + D\mathbf{h}_{k-1}(\mathbf{z}_{k-1}))^{-1} \dots (\mathbf{I} + D\mathbf{h}_3(\mathbf{z}_3))^{-1}(\mathbf{I} + D\mathbf{h}_2(\mathbf{z}_2))^{-1}(\hat{\mathbf{F}}_{k-1}) \tag{2.11}$$

La desventaja fundamental de este enfoque, está asociada al número de cálculos numéricos requeridos para obtener la forma normal y a la complejidad en el manejo computacional de un gran número de variables. Adicionalmente, no es posible conocer de antemano el número requerido de aproximaciones  $k$  para determinar la aproximación de forma normal. Esto ha motivado el desarrollo de diferentes enfoques analíticos para obtener la representación de forma normal.

En la aproximación adoptada en este trabajo, la forma normal de orden  $k$ , se obtiene al aplicar, de manera secuencial, una serie de transformaciones no lineales

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y} &= \mathbf{z}_2 + \mathbf{h}_2(\mathbf{z}_2) \\
 \mathbf{z}_2 &= \mathbf{z}_3 + \mathbf{h}_3(\mathbf{z}_3) \\
 &\vdots \\
 \mathbf{z}_{k-1} &= \mathbf{z}_k + \mathbf{h}_k(\mathbf{z}_k)
 \end{aligned}$$

Este enfoque permite fijar el grado de aproximación deseado en el análisis, y asimismo, facilita el desarrollo computacional de algoritmos de uso práctico.

Con la finalidad de introducir estos conceptos y definir la nomenclatura usada en capítulos posteriores, considere la transformación no lineal de segundo orden  $\mathbf{y} = \mathbf{z}_2 + \mathbf{h}_2(\mathbf{z}_2)$ . Introduciendo esta transformación en la ecuación (2.7) y haciendo uso de (2.10) se obtiene el sistema simplificado [8]

$$\dot{\mathbf{y}} = [\mathbf{I} + D\mathbf{h}_2(\mathbf{z}_2)]\dot{\mathbf{z}}_2 = \Lambda\mathbf{z} + \mathbf{F}_2(\mathbf{z}_2) + \sum_{i=3}^k \hat{\mathbf{F}}_i(\mathbf{z}_2) \quad (2.12a)$$

o también:

$$\dot{\mathbf{z}}_2 = [\mathbf{I} + D\mathbf{h}_2(\mathbf{z}_2)]^{-1} \left\{ \Lambda\mathbf{z} + \mathbf{F}_2(\mathbf{z}_2) + \sum_{i=3}^k \hat{\mathbf{F}}_i(\mathbf{z}_2) \right\} \quad (2.12b)$$

en donde los términos  $\hat{\mathbf{F}}_i(\mathbf{z}_2)$  representan términos que fueron modificados por la transformación no lineal.

En el procedimiento anterior, la matriz inversa  $[\mathbf{I} + D\mathbf{h}_2(\mathbf{z}_2)]^{-1}$  se suele aproximar mediante una serie truncada de primer orden [3]. Para valores pequeños de  $\mathbf{z}_2$ , la expansión en series de Taylor de  $[\mathbf{I} + D\mathbf{h}_2(\mathbf{z}_2)]^{-1}$  con respecto a  $D\mathbf{h}_2$  existe y esta dada por

$$\begin{aligned} [\mathbf{I} + D\mathbf{h}_2(\mathbf{z}_2)]^{-1} &= (\mathbf{I} - D\mathbf{h}_2(\mathbf{z}_2))^{-1} - (\mathbf{I} + D\mathbf{h}_2(\mathbf{z}_2))^{-2} (D\mathbf{h}_2(\mathbf{z}_2)) + \\ &(\mathbf{I} + D\mathbf{h}_2(\mathbf{z}_2))^{-3} (D\mathbf{h}_2(\mathbf{z}_2))^2 - (\mathbf{I} + D\mathbf{h}_2(\mathbf{z}_2))^{-4} (D\mathbf{h}_2(\mathbf{z}_2))^3 + \dots \end{aligned} \quad (2.13a)$$

Por consiguiente para  $D\mathbf{h}_2(\mathbf{z}_2)$  pequeña, se tiene

$$[\mathbf{I} + D\mathbf{h}_2(\mathbf{z}_2)]^{-1} = \mathbf{I} - D\mathbf{h}_2(\mathbf{z}_2) + (D\mathbf{h}_2(\mathbf{z}_2))^2 - (D\mathbf{h}_2(\mathbf{z}_2))^3 + \dots \quad (2.13b)$$

de donde:

$$[\mathbf{I} - D\mathbf{h}_2(\mathbf{z}_2) + (D\mathbf{h}_2(\mathbf{z}_2))^2 - (D\mathbf{h}_2(\mathbf{z}_2))^3 + \dots][\mathbf{I} + D\mathbf{h}_2(\mathbf{z}_2)] = \mathbf{I} \quad (2.14)$$

comprobando la validez del método de análisis.

Substituyendo (2.13b) en (2.12b), el comportamiento del sistema de segundo orden estará dado por

$$\dot{\mathbf{z}}_2 = \Lambda \mathbf{z} + \hat{\mathbf{F}}_2(\mathbf{z}_2) + \sum_{i=3}^k \hat{\mathbf{F}}_i(\mathbf{z}_2) \quad (2.15)$$

en donde

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}}_2 &= \mathbf{F}_2(\mathbf{z}_2) - D\mathbf{h}_2(\mathbf{z}_2)\Lambda\mathbf{h}_2(\mathbf{z}_2) \\ \hat{\mathbf{F}}_3 &= \mathbf{F}_3(\mathbf{z}_2) - D\mathbf{h}_2(\mathbf{z}_2)\Lambda\mathbf{h}_2(\mathbf{z}_2) - D\mathbf{h}_2(\mathbf{z}_2)\mathbf{F}_2(\mathbf{z}_2) \\ &\quad + (D\mathbf{h}_2(\mathbf{z}_2))^2 \Lambda \mathbf{z}_2 \\ \hat{\mathbf{F}}_4 &= \mathbf{F}_4(\mathbf{z}_3) - D\mathbf{h}_2(\mathbf{z}_2)\Lambda\mathbf{h}_2(\mathbf{z}_2) - D\mathbf{h}_2(\mathbf{z}_2)\mathbf{F}_2(\mathbf{z}_2) \\ &\quad + (D\mathbf{h}_2(\mathbf{z}_2))^2 \Lambda \mathbf{z}_2 \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.16)$$

La generalización del proceso anterior para considerar términos de orden superior es inmediata, al observar que la matriz inversa  $[\mathbf{I} + D\mathbf{h}_k(\mathbf{z}_k)]^{-1}$  puede expresarse en la forma de una serie infinita de potencia:

$$[\mathbf{I} + D\mathbf{h}_k(\mathbf{z}_k)]^{-1} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} [(-1)^\alpha (D\mathbf{h}_k(\mathbf{z}_k))^\alpha] \quad (2.17)$$

o, equivalentemente:

$$(\mathbf{I} + D\mathbf{h}_k(\mathbf{z}_k))^{-1} = \mathbf{I} - D\mathbf{h}_k(\mathbf{z}_k) + O(\|\mathbf{z}\|^{2k-2}) \quad (2.18)$$

en donde el término  $O(\|\mathbf{z}\|^{2n-2})$  representa términos no lineales de orden  $\geq 2n - 2$ .

Así, por ejemplo, para  $k = 3$ , los términos no lineales en (2.18) serán de cuarto orden, para  $k = 4$  de sexto orden, y así sucesivamente. El análisis anterior proporciona una medida útil para analizar el orden deseado en el cálculo de (2.17).

Siguiendo un mecanismo de deducción análogo al utilizado para el caso de segundo orden, los términos no lineales  $i \geq 2$  en (2.15) pueden determinarse mediante las relaciones recursivas

$$\left\{ \begin{array}{l}
\dot{\mathbf{z}}_3 = \Lambda \mathbf{z}_3 + \hat{\mathbf{F}}_2(\mathbf{z}_3) + \left[ \hat{\mathbf{F}}_3(\mathbf{z}_3) + \Lambda \mathbf{h}_3(\mathbf{z}_3) - D\mathbf{h}_3(\mathbf{z}_3)\Lambda \mathbf{z}_3 \right] + \\
\quad \sum_{m=4}^k \hat{\mathbf{F}}_m(\mathbf{z}_3) \\
\dot{\mathbf{z}}_4 = \Lambda \mathbf{z}_4 + \sum_{m=2}^3 \hat{\mathbf{F}}_m(\mathbf{z}_4) + \left[ \hat{\mathbf{F}}_4(\mathbf{z}_4) + \Lambda \mathbf{h}_4(\mathbf{z}_4) - D\mathbf{h}_4(\mathbf{z}_4)\Lambda \mathbf{z}_4 \right] + \\
\quad \sum_{m=5}^k \hat{\mathbf{F}}_m(\mathbf{z}_3) \\
\dots \\
\dot{\mathbf{z}}_k = \Lambda \mathbf{z}_k + \sum_{m=2}^{k-1} \hat{\mathbf{F}}_m(\mathbf{z}_k) + \left[ \hat{\mathbf{F}}_k(\mathbf{z}_k) + \Lambda \mathbf{h}_k(\mathbf{z}_k) - D\mathbf{h}_k(\mathbf{z}_k)\Lambda \mathbf{z}_k \right] \\
\quad + O(k+1)
\end{array} \right. \quad (2.19)$$

en donde los  $\hat{\mathbf{F}}_m$  representan los términos de orden  $m$  que han sido modificadas por cada transformación no lineal. En general, puede mostrarse que

$$\hat{\mathbf{F}}_m = \mathbf{F}_m \quad \forall m < k \quad (2.20)$$

mientras que los términos de orden  $m \leq k$  están determinados por la relación (2.19).

El análisis sugiere que para eliminar o simplificar términos no lineales de orden  $s$ , los vectores de transformaciones no lineales  $\mathbf{h}_s(\mathbf{z}_s)$ ,  $s=1, \dots, k$  pueden ser determinados de la solución de las ecuaciones homológicas [1]

$$L_{\mathcal{A}} = [\mathbf{h}_s(\mathbf{z}_s), \Lambda \mathbf{z}] = D\mathbf{h}_s(\mathbf{z}_s)\Lambda \mathbf{z} - \Lambda \mathbf{h}_s(\mathbf{z}_s) = \mathbf{F}_s(\mathbf{z}_s) \quad (2.21)$$

en donde  $L_{\mathcal{A}}(\mathbf{h}_s(\mathbf{z}_s)) = [\mathbf{h}_s(\mathbf{z}_s), \Lambda]$  es el operador Lie o Poisson definido como

$$L[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g} = \sum_{j=1}^n \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g_j}{\partial x_i} f_i - \frac{\partial f_j}{\partial x_i} g_i \right) \right] \quad (2.22)$$

Si  $L_{\mathcal{A}}^{-1}$  existe, los términos no lineales de orden  $s$  pueden ser eliminados y los vectores  $\mathbf{h}_s(\mathbf{z}_s)$  son obtenidos de la solución de las ecuaciones

$$\mathbf{h}_s(\mathbf{z}_s) = L_{\mathcal{A}}^{-1} \hat{\mathbf{F}}_s(\mathbf{z}_s) \quad (2.23)$$

para  $s = 2, 3, \dots, k$  La aplicación sistemática de éste método permite simplificar términos no lineales, considerando un solo término a la vez. En la figura 2.1 se muestra gráficamente la naturaleza del método de análisis propuesto, indicando el orden en que se aplican las transformaciones.

Con objeto de clarificar el proceso de obtención de soluciones explícitas para los coeficientes  $h_{kl..p}^j$ , considere que la ecuación (2.21) se escribe en la forma

$$D\mathbf{h}_k(\mathbf{z}_k)\Lambda\mathbf{z} - \Lambda\mathbf{h}_k(\mathbf{z}_k) = \mathbf{F}_k - \mathbf{g}_k \quad (2.24)$$

o bien, en forma de componentes:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h_k^1}{\partial z_1} & \frac{\partial h_k^1}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial h_k^1}{\partial z_n} \\ \frac{\partial h_k^2}{\partial z_1} & \frac{\partial h_k^2}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial h_k^2}{\partial z_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_k^n}{\partial z_1} & \frac{\partial h_k^n}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial h_k^n}{\partial z_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_k^1 \\ h_k^2 \\ \vdots \\ h_k^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_k^1 \\ F_k^2 \\ \vdots \\ F_k^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_k^1 \\ g_k^2 \\ \vdots \\ g_k^n \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

donde:

$$\mathbf{h}_k(\mathbf{z}_k) = \begin{bmatrix} h_k^1 \\ h_k^2 \\ \vdots \\ h_k^n \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{g}_k(\mathbf{z}_k) = \begin{bmatrix} g_k^1 \\ g_k^2 \\ \vdots \\ g_k^n \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

En las ecuaciones anteriores, los términos  $h_k^j, g_k^j$  están definidos como

$$h_2^j = \sum_{k=1}^n \sum_{l=k}^n h_{2kl}^j z_k z_l \quad \text{para } k = 2$$

$$h_3^j = \sum_{k=1}^n \sum_{l=k}^n \sum_{m=k}^n h_{3klm}^j z_k z_l z_m \quad \text{para } k = 3$$

$$h_4^j = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \sum_{p=1}^n h_{3klm}^j z_k z_l z_m z_p \quad \text{para } k = 4$$

....

y

$$g_2^j = \sum_{k=1}^n \sum_{l=k}^n g_{2kl}^j z_k z_l \quad \text{para } k = 2$$

$$g_3^j = \sum_{k=1}^n \sum_{l=k}^n \sum_{m=k}^n g_{3klm}^j z_k z_l z_m \quad \text{para } k = 3$$

$$g_4^j = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \sum_{p=1}^n g_{3klm}^j z_k z_l z_m z_p \quad \text{para } k = 4$$

....

Substituyendo las expresiones para  $h_s^j, s = 3, 4, \dots, k$  en (2.18), y asumiendo  $g_k^j = 0$ , se obtiene la relación lineal

$$\mathbf{Bh} = \mathbf{C} \quad (2.27)$$

en donde el vector  $\mathbf{h}$  contiene los coeficientes  $h_s^j$  y  $\mathbf{B}$  es una matriz de estructura diagonal que contiene combinaciones de los valores propios de  $\mathbf{J}$ , y la matriz  $\mathbf{C}$  contiene los términos asociados al vector  $\mathbf{F}$

Resolviendo para los coeficientes de los  $h_k^j$ , se puede mostrar que los coeficientes de la transformación no lineal de  $k$ -ésimo orden pueden expresarse de la manera siguiente

$$h_s(z_s) = \frac{\hat{\mathbf{F}}}{(m\lambda_i - \lambda_j)}, \quad \text{para } s=2,3,\dots,k \text{ y } j=1,2,3,\dots \quad (2.28)$$



para  $m, j$  el denominador en (2.28) es diferente de cero, y

$$\begin{cases} \mathbf{h}_s^j = 0 \\ \mathbf{g}_k^j = \mathbf{F}_k^j \end{cases} \quad \text{para} \left( \sum_{i=1}^n \lambda_k \right) - \lambda_j = 0 \quad (2.29)$$

La aplicación sistemática de este procedimiento permite expresar la forma normal de  $k$ -ésimo orden de la siguiente manera:

$$\dot{\mathbf{z}}_k = \Lambda_k \mathbf{z}_k + \mathbf{F}_k^r + O(\|\mathbf{z}\|^{k+1}) \quad (2.30)$$

donde:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_k^r \neq 0 & \text{si} & \sum_{i=1}^n m_i \lambda_i - \lambda_j = 0 \\ 0 & \text{si} & \sum_{i=1}^n m_i \lambda_i - \lambda_j \neq 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

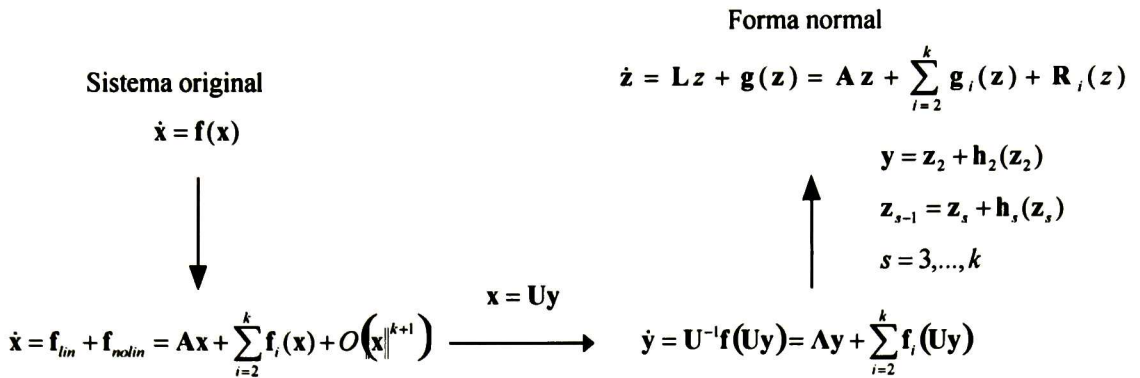
Obsérvese que, en esta expresión, los términos  $\mathbf{F}_k$  son términos resonantes y  $O(k+1)$  denota una expresión que contiene términos residuales en  $\mathbf{z}_k$  de orden  $k+1$  y mayores. La ecuación (2.30) con las condiciones (2.31) se denomina la FN del campo vectorial (2.2). Si no existen términos resonantes, el sistema en (2.1) puede ser transformado a su forma normal

$$\dot{z}_j = \lambda_j z_j \quad j = 1, \dots, n \quad (2.32)$$

En coordenadas de formas normales, la solución del sistema en (2.28) puede entonces expresarse en la forma

$$z_j(t) = e^{\lambda_j t} P_j(t, N_j), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.33)$$

en donde  $P_j$  es un polinomio función del tiempo de orden  $N_j$ , con  $N_j = 0$  para el caso de un sistema hiperbólico.



**Figura 2.1 Representación esquemática del método de formas normales adoptado en el análisis**

En la aplicación del método de formas normales es preciso indicar lo siguiente:

- La introducción de una transformación de la condición inicial permite eliminar términos constantes
- La obtención de la forma normal de orden  $k$ , requiere, en general, de  $k$  transformaciones no lineales
- Aunque las transformaciones son funciones no lineales de los estados, los coeficientes de estas transformaciones se determinan resolviendo una secuencia de problemas lineales; las transformaciones que conduce a la forma normal están basadas en la parte lineal del campo vectorial.
- Las transformaciones son cercanas a la identidad por lo que la parte lineal del sistema no se ve afectada. Es decir, la estructura de las ecuaciones de FN depende solo de la parte lineal del campo vectorial original.

El procedimiento anterior constituye la base del método de FN utilizado en este trabajo.

## 2.5 REFERENCIAS

- [1]. Lawrence Perko, Differential equations and dynamical systems, Text in Applied Mathematics, 1996, Springer Verlag, New York, ISBN 0-387-94778-7.
- [2]. V.I. Arnold, Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations, 1998, Springer Verlag, New York, ISBN 3-540-96649-8.
- [3]. J. Guckenheimer, P. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcation of Vector Fields, Springer Verlag, 1983.
- [4]. Ali H. Nayfeh, Theory of normal forms, Wiley series in nonlinear science, John

Wiley & Sons, New York, 1993, ISBN 0-471-59354-0.

- [5]. Leon O. Chua, "Normal forms for nonlinear vector fields-Part I: Theory and algorithm". IEEE Trans. On Circuits and Systems, vol. 35, no. 7, July, 1988, pp. 863-880.
- [6]. Peter B. Kahn, "Nonlinear dynamics: A tutorial on the method of normal forms", Am. J. Phys. 68 (10), October 2000, pp. 907-919.
- [7]. Victor F. Edneral, "A symbolic approximation of periodic solutions of the Henon-Heiles system by the normal form method". Mathematics and Computers in Simulation, 45 (1998), pp. 445-463.
- [8]. Emilio Barocio Espejo, Estimación de la interacción modal no lineal en sistemas de potencia operando en condiciones de estrés usando formas normales, Tesis Doctoral, CINVESTAV, IPN, 2003.

# CAPÍTULO 3

## DESARROLLO DE APROXIMACIONES DE ORDEN SUPERIOR AL COMPORTAMIENTO DINÁMICO DEL SISTEMA

### 3.1 INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones matemáticas que describen comportamiento dinámico de un sistema eléctrico de potencia contienen no linealidades que pueden afectar en forma importante la estabilidad de pequeña señal. El tratamiento de este problema se ha abordado fundamentalmente desde dos perspectivas diferentes. La primera y más convencional está basada en la aplicación de técnicas de análisis lineal. La segunda, se centra en la aplicación de la teoría de perturbación de parámetros al modelo dinámico del sistema.

En este capítulo se desarrolla un procedimiento sistemático, basado en la teoría de formas normales, para modelar en forma explícita efectos de orden superior en el modelo matemático de un sistema no lineal. La técnica propuesta es de interés general y puede aplicarse al estudio de diferentes fenómenos físicos.

Se introduce, en primer lugar, la naturaleza del fenómeno en estudio y se hace una revisión de técnicas existentes para su análisis, con énfasis en la aplicación de herramientas de análisis no lineal. El modelo propuesto forma parte de una programa de computadora digital para el estudio de diversos aspectos del comportamiento no lineal del sistema de potencia.

A continuación se propone un modelo matemático general del sistema de potencia donde los efectos no lineales se aproximan mediante una serie truncada de cuarto orden del campo vectorial original. A partir de este modelo se proponen algoritmos para la determinación de soluciones de forma cerrada y se presenta una interpretación física de los modelos desarrollados en el contexto del análisis de interacción modal en procesos físicos.

Para finalizar se describe brevemente la implantación computacional de los métodos de análisis propuestos y se discute el problema de la validación de los algoritmos desarrollados.

### 3.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Considérese un sistema no lineal de orden  $n$  descrito por el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad \hat{\mathbf{x}} \in \mathfrak{R}^n \quad \mathbf{F} : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n \quad (3.1)$$

en donde  $\hat{\mathbf{x}}$  es el vector de estados del sistema, y  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  representa un campo vectorial suave y analítico. Asuma ahora que  $\mathbf{x}^o = \mathbf{x}_{sep} = [x_1^o \ x_2^o \ \dots \ x_n^o]^T$  es un PEE, satisfaciendo que  $F_i(\mathbf{x}_{sep}) = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . El problema que se plantea en este trabajo es el estudio de la estabilidad del PEE, ante una perturbación arbitraria,  $\xi$

En la teoría de perturbación en sistemas físicos de potencia, la respuesta dinámica del sistema puede entonces reformularse como el estudio del modelo dinámico con perturbación en los estados [1,2]:

$$\left( \dot{\hat{\mathbf{x}}} + \xi \right) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{sep} + \xi) \quad (3.2)$$

donde  $\mathbf{x}$  es el vector que contiene los estados que representan al sistema y  $f(\mathbf{x})$  representa un campo vectorial suave.

Definiendo  $\Delta\mathbf{x} = \xi$  y expandiendo  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_{sep} + \Delta\mathbf{x})$  en una serie de Taylor alrededor de  $\mathbf{x}_{sep}$ , conduce al modelo de perturbación

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{sep}) + \mathbf{F}_x(\mathbf{x}_{sep})\Delta\mathbf{x} + \mathbf{F}_{xx}(\mathbf{x}_{sep})\Delta\mathbf{x}^2 + \dots \quad (3.3)$$

en donde  $\mathbf{F}_x, \mathbf{F}_{xx}$  representan las matrices variacionales de primero y segundo orden, respectivamente, evaluadas en la condición de equilibrio. Convencionalmente, la estabilidad ante perturbaciones pequeñas en la vecindad de  $\mathbf{x}_{sep}$ , puede analizarse asumiendo que  $\Delta\mathbf{x}$  es pequeño; éste análisis permite, bajo ciertas condiciones, despreciar el efecto de perturbaciones de alto orden  $\Delta\mathbf{x}^2, \Delta\mathbf{x}^3, \dots$  en el modelo del sistema, conduciendo al modelo lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_{sep})\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (3.4)$$

en donde se asume que  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_{sep}) = \mathbf{0}$ .

Si el sistema es estable en el sentido asintótico, las soluciones  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  tienden al origen cuando  $t \rightarrow \infty$ , y los valores propios del sistema  $\mathbf{A} = \mathbf{F}_x(\mathbf{x}_{sep}) = D\mathbf{F}(\mathbf{x}_{sep})$  tienen partes reales negativas.

El problema que se plantea en este trabajo de investigación es el estudio del comportamiento dinámico del sistema (3.2) cuando las perturbaciones  $\Delta \mathbf{x}^2, \Delta \mathbf{x}^3, \dots$  son lo suficientemente grandes para hacer que los términos no lineales tengan un efecto importante en la respuesta del sistema.

En el contexto de éste estudio, las perturbaciones  $\Delta \mathbf{x}$  se asocian a cambios en los estados asociados a las desviaciones de velocidad y posiciones angulares de los rotores de los generadores en sistemas de potencia. La formulación propuesta, sin embargo, es general y puede utilizarse para estudiar sistemas no lineales descritos por (3.3).

### 3.3 MODELO INCREMENTAL DEL SISTEMA NO LINEAL

#### 3.3.1 Análisis en coordenadas físicas

Asuma con el propósito de ilustrar la naturaleza del modelo propuesto que el comportamiento dinámico del sistema está descrito por la relación (3.1). Sea  $\mathbf{x}^o = [x_1^o \ x_2^o \ \dots \ x_n^o]^T$  un PEE de interés. Expandiendo la  $k$ -ésima función no lineal en (3.2) en una serie de Taylor alrededor de  $\mathbf{x}^o$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \Delta f_k(\mathbf{x}) = f_k(\mathbf{x}) - f_k(\mathbf{x}^o) &= \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{sep}} \Delta x_j + \frac{1}{2!} \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \left. \frac{\partial^2 f_k(\mathbf{x})}{\partial x_l \partial x_m} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{sep}} \Delta x_l \Delta x_m + \\ &\frac{1}{3!} \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \sum_{r=1}^n \left. \frac{\partial^3 f_k(\mathbf{x})}{\partial x_p \partial x_q \partial x_r} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{sep}} \Delta x_p \Delta x_q \Delta x_r + O(4) \end{aligned} \quad (3.5)$$

para  $k = 1, 2, \dots, n$  las derivadas parciales se evalúan en la condición de equilibrio.

Para obtener el modelo dinámico del sistema, asuma ahora que se define el gradiente y las matrices variacionales de segundo y tercer orden, como

$$\left( \frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right) = \left[ \frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right]^T$$

$$\frac{\partial^2 f_k(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left( \frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} \right)^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \left( \frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_k(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f_k(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f_k(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f_k(\mathbf{x})}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

...

Se deduce, entonces, que la  $k$ -ésima componente del campo vectorial en (3.1) puede expresarse en la forma

$$f_k(\mathbf{x}) = f_k(\mathbf{x}^o) + \left( \frac{\partial f_k(\mathbf{x}^o)}{\partial \mathbf{x}^o} \right)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^o) + \frac{1}{2!} + (\mathbf{x} - \mathbf{x}^o)^T \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^o} \left( \frac{\partial f_k(\mathbf{x}^o)}{\partial \mathbf{x}^o} \right) \right]^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^o) + \frac{1}{3!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^o)^T \left\{ (\mathbf{x} - \mathbf{x}^o)^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^o} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^o} \left( \frac{\partial f_k(\mathbf{x}^o)}{\partial \mathbf{x}^o} \right) \right)^T \right\} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^o) + O(4) \quad (3.6)$$

$k = 1, \dots, n$

Por consiguiente, el modelo del sistema puede expresarse en la forma vectorial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \sum_{k=2}^{r-1} \mathbf{f}_k(\mathbf{x}) + \mathbf{f}_r(\mathbf{x}) + O(\|\mathbf{x}^{r+1}\|) \quad (3.7)$$

donde:

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{f}_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T \mathbf{H}_2^1 \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T \mathbf{H}_n^1 \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n F_{2_{kl}}^1 x_k x_l \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n F_{2_{kl}}^n x_k x_l \end{bmatrix}$$

$$f_3(\mathbf{x}) = \frac{1}{3!} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T \mathbf{H}_3^1 \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T \mathbf{H}_3^n \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n F_{3klm}^1 x_k x_l x_m \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n F_{3klm}^n x_k x_l x_m \end{bmatrix}$$

$$f_4(\mathbf{x}) = \frac{1}{4!} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T \mathbf{H}_4^1 \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T \mathbf{H}_4^n \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \sum_{p=1}^n F_{4klmp}^1 x_k x_l x_m x_p \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \sum_{p=1}^n F_{4klmp}^n x_k x_l x_m x_p \end{bmatrix}$$

Obsérvese que, en las relaciones anteriores los coeficientes  $F_{2kl}^j, F_{3klm}^j, F_{4klmp}^j, \dots, \in \mathfrak{R}, j = 1, \dots, n$  representan coeficientes reales asociados con los términos cuadráticos, cúbicos y de cuarto orden, respectivamente, en la aproximación polinomial, y las matrices variacionales están dadas por



$$\mathbf{A} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}^o) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{H}_2^1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}, \mathbf{H}_2^2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_n^2} \end{bmatrix},$$

$$, \quad , \quad \mathbf{H}_n^2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

...

donde

$$\mathbf{H}_3^1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_1^3} & \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_1^2 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_1 \partial x_n^2} \\ \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_1^2 \partial x_2} & \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_2 \partial x_n^2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_1^2 \partial x_n} & \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_n} & \dots & \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_n^3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_3^2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^3 f_2}{\partial x_1^3} & \frac{\partial^3 f_2}{\partial x_1^2 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^3 f_2}{\partial x_1 \partial x_n^2} \\ \frac{\partial^3 f_2}{\partial x_1^2 \partial x_2} & \frac{\partial^3 f_2}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^3 f_2}{\partial x_2 \partial x_n^2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial^3 f_2}{\partial x_1^2 \partial x_n} & \frac{\partial^3 f_2}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_n} & \dots & \frac{\partial^3 f_2}{\partial x_n^3} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_3^n = \begin{bmatrix} \frac{\partial^3 f_n}{\partial x_1^3} & \frac{\partial^3 f_n}{\partial x_1^2 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^3 f_n}{\partial x_1 \partial x_n^2} \\ \frac{\partial^3 f_n}{\partial x_1^2 \partial x_2} & \frac{\partial^3 f_n}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^3 f_n}{\partial x_2 \partial x_n^2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial^3 f_n}{\partial x_1^2 \partial x_n} & \frac{\partial^3 f_n}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_n} & \dots & \frac{\partial^3 f_n}{\partial x_n^3} \end{bmatrix}$$

Es importante destacar que, en los algoritmos desarrollados, el coeficiente  $r$  representa el grado de precisión en la expansión en series del sistema y  $O(\|\mathbf{x}\|^{r+1})$  representa vectores polinomiales de orden  $r + 1$ .

Para la implementación computacional del método, estos coeficientes se determinan utilizando el siguiente procedimiento híbrido:

- 1). Se obtienen expresiones analíticas para el modelo (3.7) utilizando la capacidad de matemática simbólica en Matlab.
- 2). Una vez que se han determinado las expresiones analíticas, se evalúan numéricamente estas expresiones en la condición de equilibrio.

El procedimiento anterior se implantó computacionalmente utilizando la capacidad de matemática simbólica en Matlab.

### 3.3.2 Modelos de orden superior

En la aproximación desarrollada en este trabajo, el comportamiento dinámico del sistema de potencia se expresa en la forma general (refiérase a la ecuación 3.7)

$$x = Ax + \frac{1}{2!} x^T H_2 x + \frac{1}{3!} x^T H_3 \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} + \frac{1}{4!} x^T H_4 \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \dots + \frac{1}{r!} x^T H_r \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \dots$$

$$\frac{1}{5!} x^T H_5 \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \dots + \frac{1}{r!} x^T H_r \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{r!} x^T H_r \mathcal{O}(r) x \tag{3.8}$$

Definiendo

$$M_3 = \begin{bmatrix} x & & \\ & \ddots & \\ & & x \end{bmatrix} x, \quad M_4 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} x & & \\ & \ddots & \\ & & x \end{bmatrix} x & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{bmatrix} x & & \\ & \ddots & \\ & & x \end{bmatrix} x \end{bmatrix} x, \dots, M_r = (O(r))x$$

se tiene que

$$x = Ax + \frac{1}{2!} x^T H_2 x + \frac{1}{3!} x^T H_3 M_3 + \sum_{k=4}^r \frac{1}{k!} x^T H_k \begin{bmatrix} M_{k-1} & & \\ & \ddots & \\ & & M_{k-1} \end{bmatrix} x \quad (3.9)$$

### 3.3.3 Modelo no lineal en coordenadas de Jordan

La aplicación de una primera transformación lineal permite identificar en forma explícita el efecto de los parámetros del sistema en la evolución de cada modo de interés.

Con el propósito de permitir una mejor comprensión del modelo propuesto, considérese por simplicidad, que el sistema en (3.1) contiene modos distintos  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Haciendo uso de la transformación lineal  $x = Uy$  en (3.7) se obtiene la forma canónica de Jordan

$$\dot{y} = \Lambda y + \sum_{k=1}^r F_k(y) + O(\|y^{r+1}\|) \quad (3.10)$$

en donde  $y \in C^n$  es el vector de variables de Jordan, y

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \mathbf{U}^{-1} \begin{bmatrix} (\mathbf{Uy})^T \mathbf{H}_2^1 \mathbf{Uy} \\ (\mathbf{Uy})^T \mathbf{H}_2^2 \mathbf{Uy} \\ \vdots \\ (\mathbf{Uy})^T \mathbf{H}_2^n \mathbf{Uy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n F_{2_{kl}}^1 y_k y_l \\ \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n F_{2_{kl}}^2 y_k y_l \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n F_{2_{kl}}^n y_k y_l \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_3(\mathbf{y}) = \frac{1}{3!} \mathbf{U}^{-1} \begin{bmatrix} (\mathbf{Uy})^T \mathbf{H}_3^1 \begin{bmatrix} \mathbf{Uy} \\ \mathbf{Uy} \\ \vdots \\ \mathbf{Uy} \end{bmatrix} \\ (\mathbf{Uy})^T \mathbf{H}_3^2 \begin{bmatrix} \mathbf{Uy} \\ \mathbf{Uy} \\ \vdots \\ \mathbf{Uy} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ (\mathbf{Uy})^T \mathbf{H}_3^n \begin{bmatrix} \mathbf{Uy} \\ \mathbf{Uy} \\ \vdots \\ \mathbf{Uy} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n F_{3_{klm}}^1 y_k y_l y_m \\ \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n F_{3_{klm}}^2 y_k y_l y_m \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n F_{3_{klm}}^n y_k y_l y_m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_4(\mathbf{y}) = \frac{1}{4!} \mathbf{U}^{-1} \begin{bmatrix} (\mathbf{Uy})^T \mathbf{H}_4^1 \begin{bmatrix} \mathbf{Uy} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{Uy} & \\ & & & \mathbf{Uy} \end{bmatrix} \\ (\mathbf{Uy})^T \mathbf{H}_4^2 \begin{bmatrix} \mathbf{Uy} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{Uy} & \\ & & & \mathbf{Uy} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ (\mathbf{Uy})^T \mathbf{H}_4^n \begin{bmatrix} \mathbf{Uy} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{Uy} & \\ & & & \mathbf{Uy} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Uy} & & & \\ & \mathbf{Uy} & & \\ & & \mathbf{Uy} & \\ & & & \mathbf{Uy} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{Uy} & & & \\ & \mathbf{Uy} & & \\ & & \mathbf{Uy} & \\ & & & \mathbf{Uy} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} \mathbf{Uy} & & & \\ & \mathbf{Uy} & & \\ & & \mathbf{Uy} & \\ & & & \mathbf{Uy} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \sum_{p=1}^n F_{klmp}^1 y_k y_l y_m y_p \\ \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \sum_{p=1}^n F_{klmp}^2 y_k y_l y_m y_p \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \sum_{p=1}^n F_{klmp}^n y_k y_l y_m y_p \end{bmatrix}$$

En coordenadas modales, la ecuación (3.10) puede expresarse como

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \\
 &\left[ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n F_{2_{kl}}^1 y_k y_l + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n F_{3_{klm}}^1 y_k y_l y_m + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \sum_{p=1}^n F_{4_{klmp}}^1 y_k y_l y_m y_p \\ \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n F_{2_{kl}}^2 y_k y_l + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n F_{3_{klm}}^2 y_k y_l y_m + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \sum_{p=1}^n F_{4_{klmp}}^2 y_k y_l y_m y_p \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n F_{2_{kl}}^n y_k y_l + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n F_{3_{klm}}^n y_k y_l y_m + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \sum_{p=1}^n F_{4_{klmp}}^n y_k y_l y_m y_p \end{array} \right] + O(\|y\|^5)
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

en donde los coeficientes complejos  $F_{2_{kl}}^j$ ,  $F_{3_{klm}}^j$ , y  $F_{4_{klmp}}^j$  representan, respectivamente, la contribución de los modos  $k, l, m$  y  $p$  a la ecuación del  $j$ -ésimo modo [3]. Como se observa, el sistema en (3.11) presenta desacoplamiento en la parte lineal, y acoplamiento en la parte no lineal.

### 3.4 SOLUCIONES ANALÍTICAS DE FORMA CERRADA

Una vez que se ha obtenido la representación de formas normales, es posible determinar soluciones analíticas generales de forma cerrada donde los elementos que influyen en la respuesta del sistema se pueden expresar de manera explícita.

En la metodología de obtención de soluciones analíticas generales se pueden distinguir dos elementos básicos: la determinación de condiciones iniciales en los distintos espacios coordenados y los algoritmos de análisis de los coeficientes de forma normal. Las condiciones iniciales determinan los modos que se excitan durante una perturbación [4]. Los coeficientes de forma normal, por otro lado, determinan la magnitud de una componente modal en la respuesta aproximada del sistema. En los siguientes apartados se describen separadamente los algoritmos desarrollados para analizar estos aspectos.

Con el objetivo de aclarar estos conceptos, asuma, que el sistema se representa en la forma normal en (3.10). En el modelo propuesto, las soluciones analíticas de forma cerrada se obtienen al introducir las transformaciones no lineales

$$\begin{aligned}
\mathbf{y} &= \mathbf{z}_2 + \mathbf{h}_2(\mathbf{z}_2) \\
\mathbf{z}_2 &= \mathbf{z}_3 + \mathbf{h}_3(\mathbf{z}_3) \\
\mathbf{z}_3 &= \mathbf{z}_4 + \mathbf{h}_4(\mathbf{z}_4)
\end{aligned}
\tag{3.12}$$

en donde los coeficientes  $\mathbf{h}_s$ ,  $s = 2, \dots, r$  se determinan de la solución de las ecuaciones homológicas en la sección 2.4.

De éste análisis se deduce que, los coeficientes de forma normal se obtienen de las relaciones (2.27) y (2.28), como

$$h_{s \frac{n}{i=1}^{k_i}}^j = \frac{F_s^j}{\left( \left( \sum_{i=1}^n \lambda_{k_i} \right) - \lambda_j \right)}, \text{ para } s = 2, 3, \dots
\tag{3.13}$$

asumiendo que  $\sum_{i=1}^n (\lambda_{k_i}) - \lambda_j \neq 0$

### 3.4.1 Aproximación de cuarto orden al comportamiento dinámico del sistema

Siguiendo el procedimiento propuesto en el Capítulo 2, la aproximación de forma normal de cuarto orden tendrá la forma

$$\dot{\mathbf{z}}_4 = \Lambda \mathbf{z}_4 \quad \mathbf{z}_4 \in C^n
\tag{3.14}$$

Entonces:

$$z_{4_j}(t) = z_{4_j}^o e^{\lambda_j t}
\tag{3.15}$$

para  $j = 1, \dots, n$ , en donde los términos  $z_{4_j}^o$  representan las condiciones iniciales en el espacio de formas normales  $\mathbf{z}_4$ . La aplicación inversa de las transformadas de Poincaré-Dulac en (3.12) permite obtener el siguiente conjunto de soluciones analíticas de lazo cerrado



$$\begin{bmatrix} z_{3_1}(t) \\ z_{3_2}(t) \\ \vdots \\ z_{3_n}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{4_1}^o e^{\lambda_1 t} \\ z_{4_2}^o e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ z_{4_n}^o e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \sum_{p=1}^n h_{4_{klmp}}^1 z_{4_k}^o z_{4_l}^o z_{4_m}^o z_{4_p}^o e^{(\lambda_k + \lambda_l + \lambda_m + \lambda_p)t} \\ \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \sum_{p=1}^n h_{4_{klmp}}^2 z_{4_k}^o z_{4_l}^o z_{4_m}^o z_{4_p}^o e^{(\lambda_k + \lambda_l + \lambda_m + \lambda_p)t} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \sum_{p=1}^n h_{4_{klmp}}^n z_{4_k}^o z_{4_l}^o z_{4_m}^o z_{4_p}^o e^{(\lambda_k + \lambda_l + \lambda_m + \lambda_p)t} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$\begin{bmatrix} z_{2_1}(t) \\ z_{2_2}(t) \\ \vdots \\ z_{2_n}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{3_1}(t) \\ z_{3_2}(t) \\ \vdots \\ z_{3_n}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n h_{3_{klm}}^1 z_{3_k}(t) z_{3_l}(t) z_{3_m}(t) \\ \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n h_{3_{klm}}^2 z_{3_k}(t) z_{3_l}(t) z_{3_m}(t) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n h_{3_{klm}}^n z_{3_k}(t) z_{3_l}(t) z_{3_m}(t) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{2_1}(t) \\ z_{2_2}(t) \\ \vdots \\ z_{2_n}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \sum_{l=k}^n h_{2_{kl}}^1 z_{2_k}(t) z_{2_l}(t) \\ \sum_{k=1}^n \sum_{l=k}^n h_{2_{kl}}^2 z_{2_k}(t) z_{2_l}(t) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n \sum_{l=k}^n h_{2_{kl}}^n z_{2_k}(t) z_{2_l}(t) \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

El último paso en este proceso es la obtención de soluciones analíticas en coordenadas físicas. Aplicando la transformación inversa,  $\mathbf{x} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{y}$ , se obtiene que:

$$\mathbf{x} = \mathbf{U}^{-1} \left[ \begin{bmatrix} z_{2_1}(t) \\ z_{2_2}(t) \\ \vdots \\ z_{2_n}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \sum_{l=k}^n h_{2_{kl}}^1 z_{2_k}(t) z_{2_l}(t) \\ \sum_{k=1}^n \sum_{l=k}^n h_{2_{kl}}^2 z_{2_k}(t) z_{2_l}(t) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n \sum_{l=k}^n h_{2_{kl}}^n z_{2_k}(t) z_{2_l}(t) \end{bmatrix} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} c_1^1 e^{\lambda_1 t} + \sum_{j=1}^n c_{2_m}^1 e^{(\lambda_1 + \lambda_j)t} + \sum_{j=2}^n c_{2_m}^1 e^{(\lambda_2 + \lambda_j)t} + \dots + c_{2_m}^1 e^{2\lambda_n t} \\ c_1^2 e^{\lambda_1 t} + \sum_{j=1}^n c_{2_m}^2 e^{(\lambda_1 + \lambda_j)t} + \sum_{j=2}^n c_{2_m}^2 e^{(\lambda_2 + \lambda_j)t} + \dots + c_{2_m}^2 e^{2\lambda_n t} \\ \dots \\ c_1^n e^{\lambda_1 t} + \sum_{j=1}^n c_{2_m}^n e^{(\lambda_1 + \lambda_j)t} + \sum_{j=2}^n c_{2_m}^n e^{(\lambda_2 + \lambda_j)t} + \dots + c_{2_m}^n e^{2\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Las soluciones analíticas tienen una interpretación física de interés. Desarrollando, la expresión (3.19) se puede mostrar que la solución aproximada de cuarto orden puede interpretarse como la suma de componentes de lineales y de segundo, tercero y cuarto orden. Si los modos son complejos conjugados de la forma  $\lambda_j = -\alpha \pm j\omega$   $j=1, \dots, n$ , la respuesta del sistema puede expresarse como una combinación lineal de componentes senoidales de la forma

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^n A_{sm} e^{\lambda_j t} \cos(\phi_j \pm \omega_j t) \pm j \operatorname{sen}(\phi_j \pm \omega_j t) + \sum_{k,l,m,\dots}^n A_{cmklm\dots} e^{(\alpha_m + \alpha_l + \dots + \alpha_r)t} \cos(\phi_{k,l,\dots,j} \pm (\omega_k, \omega_l, \dots)t) + \operatorname{sen}(\phi_{k,l,\dots,j} \pm (\omega_k, \omega_l, \dots)t) \quad (3.20)$$

Como se observa en (3.20), la variación en el tiempo de la respuesta del  $i$ -ésimo estado muestra la presencia de componentes senoidales caracterizadas por frecuencias armónicas formadas por la combinación de las frecuencias fundamentales del sistema. El mismo análisis permite mostrar que el amortiguamiento de cada componente estará dado por la suma de las partes reales de los valores propios  $\alpha_m + \alpha_l + \dots + \alpha_r$ .

El análisis del modelo desarrollado permite concluir que:

- En coordenadas de formas normales, los coeficientes  $h_k^j$  determinan el efecto de la interacción modal  $k, l, \dots$  en el  $j$ -ésimo modo. Cuando  $h_k^j \approx 0$ , el sistema exhibe un comportamiento prácticamente lineal.
- En coordenadas reales, el efecto de la interacción modal en la respuesta en el tiempo del  $k$ -ésimo estado estará dado por términos de la forma  $\sum_{j=1}^n \sum \sum h_{klm\dots r}^j e^{(\lambda_k + \lambda_l + \dots + \lambda_r)t}$  Para  $t=0$ , estos coeficientes tendrán la forma

$\sum_{j=1}^n \sum \sum h_{klm\dots r}^j$ . En coordenadas modales, estas relaciones proporcionan una medida del efecto de la interacción modal no lineal causada por la combinación de modos  $k, l, m$  en la excitación del  $j$ -ésimo modo: en coordenadas reales, estas medidas proporcionan una estimación de la relación entre modos y estados.

- La respuesta del sistema contendrá frecuencias de intermodulación y efectos armónicos.

A continuación se analiza la presencia de efectos armónicos en la señal y se proporciona una interpretación física a la naturaleza de las soluciones.

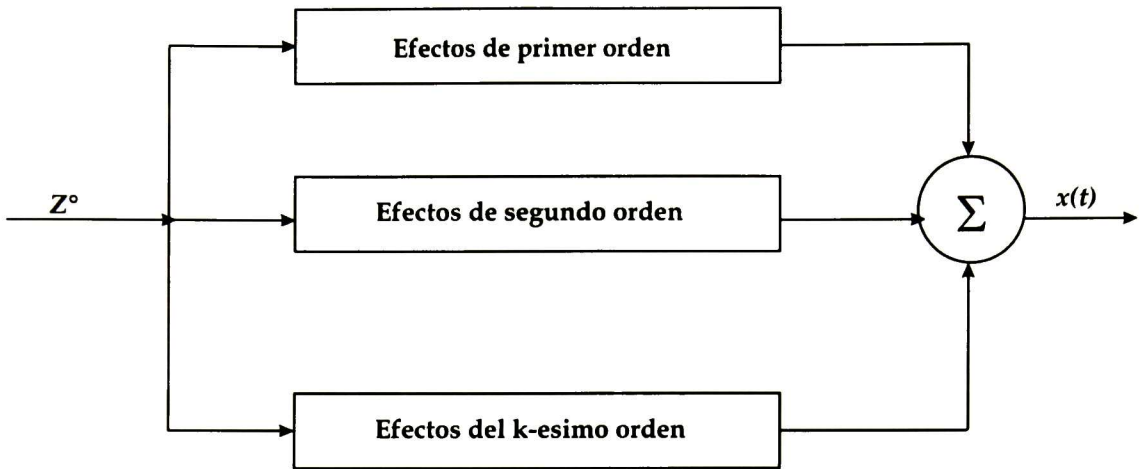
### 3.4.2 Contenido armónico

Como se observa en (3.20), las soluciones analíticas de forma normal contienen componentes armónicas (intermodulación) caracterizadas por la suma (resta) de combinaciones modales de la forma  $\lambda_k + \lambda_l + \lambda_m + \lambda_p$  y sus combinaciones armónicas e intermodulación.

En la figura 3.1 se muestra una interpretación gráfica de la solución de forma cerrada obtenida, mientras que en la Tabla 3.1 se describe la naturaleza de los modos presentes en cada solución analítica. En esta figura, cada lazo representa la contribución de términos de orden  $k = 1, \dots, 4$  a la solución de forma cerrada.

Tabla 3.1  
Componentes armónicos en la solución de forma normal

Espacio coordinado	Contenido armónico
Coordenadas de forma normal $(z_4)$	$\omega$
$(z_3)$	$\omega, 4\omega$
$(z_2)$	$\omega, 3\omega, 4\omega$
Coordenadas Jordan	$\omega_1, 2\omega_2, 3\omega, 4\omega, 6\omega$
Coordenadas físicas	$\omega_1, 2\omega_2, 3\omega, 4\omega, 6\omega$



Nota :  $z^\circ$  representa las coordenadas en formas normales

Figura 3.1 Diagrama esquemático ilustrando la solución de formas normales en coordenadas físicas

### 3.4.3 Medidas prácticas de la separación entre soluciones

Uno de los aspectos más complejos en la evaluación de la exactitud de las soluciones de forma normal, es la determinación práctica de la fidelidad con la que la  $k$ -ésima aproximación refleja el comportamiento del sistema. Este aspecto no ha sido considerado en la literatura de sistemas de potencia.

Considere un sistema dinámico descrito por la ecuación (3.3). Separando el comportamiento del sistema en  $n$  componentes se obtiene

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)
 \end{aligned}
 \tag{3.21}$$

Supóngase ahora, que  $x^*(t)$  y  $x(t)$  son dos soluciones al sistema (3.21) con componentes

$$\begin{aligned}
 x^*(t) &= [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]^T \\
 x(t) &= [x_1, x_2, \dots, x_n]^T
 \end{aligned}
 \tag{3.22}$$

La separación o distancia entre las dos soluciones en cualquier instante  $t$  puede expresarse como

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)\| = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n |x_i(t) - x_i^*(t)|^2\right)} \quad (3.23)$$

Esta medida es cero cuando las soluciones comparadas son iguales y se utiliza para comparar la validez de las soluciones analíticas de forma cerrada.

### 3.5 DETERMINACIÓN DE CONDICIONES INICIALES

La determinación de soluciones analíticas generales considerada en la sección 3.4, supone el conocimiento de condiciones iniciales para las variables asociadas a las transformaciones no lineales. Se plantea aquí la utilización de transformaciones inversas entre espacios coordenados para la determinación de condiciones iniciales.

Considérese que en  $t=0$ , el sistema se encuentra en una condición de equilibrio definida por la condición inicial  $\mathbf{x}^o = \mathbf{x}_{sep}$ . En el algoritmo propuesto, las condiciones iniciales se obtienen aplicando transformaciones de variables entre espacios coordenados como se explica a continuación.

- 1). *Coordenadas de Jordan*: Las condiciones iniciales se obtienen de la transformación inversa

$$\mathbf{y}^o = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{x}^o \quad (3.24)$$

- 2). *Espacio de formas normales*: Las condiciones iniciales en los distintos espacios coordenados se obtienen de la resolución de las ecuaciones

$$\begin{cases} \mathbf{F}_2(\mathbf{z}_2^o) = \mathbf{z}_2^o + \mathbf{h}_2(\mathbf{z}_2^o) - \mathbf{U}^{-1} \mathbf{x}^o = \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_3(\mathbf{z}_3^o) = \mathbf{z}_3^o + \mathbf{h}_3(\mathbf{z}_3^o) - \mathbf{z}_2^o = \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_4(\mathbf{z}_4^o) = \mathbf{z}_4^o + \mathbf{h}_4(\mathbf{z}_4^o) - \mathbf{z}_3^o = \mathbf{0} \end{cases} \quad (3.25)$$

o también

$$\mathbf{F}_4(\mathbf{z}_4^o) = \mathbf{z}_4^o + \mathbf{h}_2(\mathbf{z}_2^o) + \mathbf{h}_3(\mathbf{z}_3^o) + \mathbf{h}_4(\mathbf{z}_4^o) + \mathbf{U}^{-1} \mathbf{x}^o = \mathbf{0} \quad (3.26)$$

en donde

$$\begin{aligned}
 \mathbf{h}_2(\mathbf{z}_2) &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n h_{2_{kl}} z_{2_k} z_{2_l} \\
 \mathbf{h}_3(\mathbf{z}_3) &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n h_{3_{klm}} z_{3_k} z_{3_l} z_{3_m} \\
 \mathbf{h}_4(\mathbf{z}_4) &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \sum_{p=1}^n h_{4_{klmp}} z_{4_k} z_{4_l} z_{4_m} z_{4_p}
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

y

$$\begin{aligned}
 \mathbf{z}_2 &= [z_{2_1} \quad z_{2_2} \quad \cdots \quad z_{2_n}]^T \\
 \mathbf{z}_3 &= [z_{3_1} \quad z_{3_2} \quad \cdots \quad z_{3_n}]^T \\
 \mathbf{z}_4 &= [z_{4_1} \quad z_{4_2} \quad \cdots \quad z_{4_n}]^T \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Debido a la complejidad del modelo, una alternativa al problema de un cálculo adecuado de condiciones iniciales consiste en la solución individual de cada problema de determinación de raíces. Además, en el caso de aproximaciones de orden superior, las condiciones iniciales entre en espacio coordenado y el espacio adyacente pueden ser muy similares como se muestra en el capítulo 4.

En el método de análisis desarrollado, cada ecuación en (3.24) se resuelve independientemente; los resultados de proceso de solución se proporcionan como entrada al siguiente proceso. Numéricamente, la solución de cada ecuación para la determinación de condiciones iniciales de la aproximación de forma normal de orden  $k$  se expresa como la determinación de raíces del sistema

$$\mathbf{F}_k(\mathbf{z}_k^o) = \mathbf{0} \tag{3.28}$$

para  $k = 2,3,4$ .

Obsérvese que la solución de este problema, requiere la solución de un sistema de gran dimensión de ecuaciones algebraicas con coeficientes complejos. El tratamiento de este problema en el contexto de estudios dinámicos en sistemas de potencia es inexistente. Este aspecto requiere de mayor investigación.

### 3.6 REFERENCIAS

- [1]. J.M.T. Thompson, H. B. Stewart, "Nonlinear dynamics and Chaos Geometrical method for Engineers and Scientists", John Wiley & Sons, Great Britain, 1986, ISBN 0-471-90960 -2.
- [2]. Ali Nayfeh, Perturbation Methods, John Wiley & Sons, New York, 1933, ISBN 0 -471 - 63059 - 4.
- [3]. Ian Dobson, E. Barocio, "Scaling of normal form coefficients under coordinate changes", Artículo aceptado para su publicación en los IEEE Trans. on Power Systems, IEEE, 2003.
- [4]. E. Barocio, Estimación de la interacción modal no lineal en sistemas de potencia operando en condiciones de estrés usando formas normales" Tesis Doctoral, CINVESTAV, IPN, Marzo 2003.

# CAPÍTULO 4

## APLICACIÓN

### 4.1 INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo se describe la aplicación de la metodología desarrollada, al análisis de interacción modal no lineal y su efecto en el comportamiento dinámico del sistema de potencia. El estudio de la aplicación del método desarrollado se enfoca en el análisis de dos aspectos de interés: El efecto de los términos de orden superior en la aproximación de forma normal del sistema de potencia y la identificación y caracterización de la interacción modal no lineal entre los modos fundamentales de oscilación.

El capítulo está estructurado de la siguiente manera. Se presenta, en primer lugar, una breve descripción del sistema en estudio y se describen las principales simplificaciones consideradas en el análisis. A continuación se investiga la aplicación del método desarrollado al estudio de la respuesta dinámica no lineal del sistema ante diferentes perturbaciones en un sistema simplificado máquina-bus infinito. Se aborda el problema de identificación de los modos que interactúan a través de la representación de orden superior del modelo del sistema y se discute la aplicación de criterios analíticos para cuantificar el grado de la interacción y su origen.

Por último, se analiza el comportamiento dinámico no lineal del sistema máquina bus infinito (MBI) considerando la incorporación de un modelo transitorio del generador y su control de excitación.

### 4.2 APLICACIÓN A UN SISTEMA CLÁSICO MÁQUINA BUS INFINITO

El sistema en estudio se muestra en la figura 4.1. Este sistema representa una planta generadora ubicada en una región remota, compuesta por cuatro generadores de 555 MVA, 24 kV y 60 Hz, transmitiendo potencia a través de un enlace radial a un sistema de gran dimensión representado por un bus infinito. Detalles sobre su modelado se pueden encontrar en la referencia [1].

Para propósitos de estudio, el sistema se representó mediante un modelo clásico; se desprecia la resistencia del enlace de transmisión y el comportamiento dinámico del generador se representan mediante la ecuación de oscilación con amortiguamiento. Los parámetros utilizados en el estudio se proporcionan en el Apéndice A.



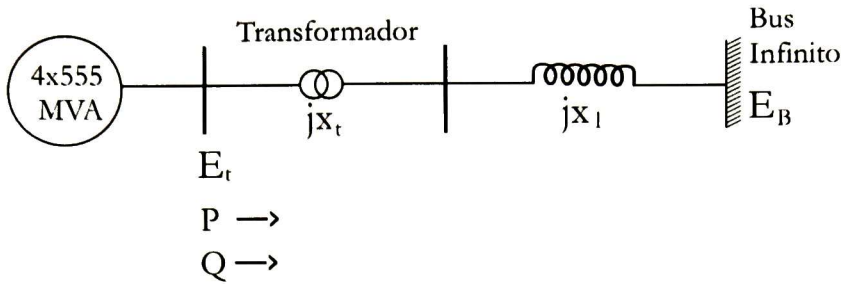


Figura 4.1 Diagrama unifilar del sistema en estudio

#### 4.2.1 Modelo dinámico del sistema de potencia

Para el modelo clásico, las ecuaciones de movimiento del sistema máquina bus infinito (MBI) con respecto a un eje de referencia síncrono arbitrario son las siguientes:

$$\frac{d\delta}{dt} = \omega \quad (4.1)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2H} [P_m - D\omega - P_{\max} \sin \delta] \quad (4.2)$$

en donde  $\delta$  es la posición angular del rotor en radianes eléctricos con respecto al sistema infinito,  $\omega$  es la velocidad angular del rotor en rad eléctricos/s,  $P_m$  es la energía mecánica de entrada en p.u.,  $D$  es el coeficiente de amortiguamiento del generador en p.u. torque/p.u velocidad, y  $H$  es la constante de inercia en MWs/MVA.

Si se define el vector de estado como  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T = [\delta \ \omega]^T$ , la ecuación de movimiento del sistema puede expresarse como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ \frac{1}{2H} [P_m - D\omega - P_{\max} \sin \delta] \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

donde:

$$f_1(x_1, x_2) = \omega,$$

y

$$f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2H} [P_m - D\omega - P_{\max} \sin \delta]$$

con condiciones de equilibrio definidos por la relación  $(\delta^\circ, \omega^\circ) = \left( k\pi - \sin^{-1} \left( \frac{P_m}{P_{\max}} \right), 0 \right)$  donde  $k \in \mathfrak{R}$ . Las funciones  $f_1$  y  $f_2$  son funciones analíticas que satisfacen las relaciones

$$f_i(\delta^\circ, \omega^\circ) = 0$$

$$\frac{\partial f_i(\delta^\circ, \omega^\circ)}{\partial x_j} = 0$$

para  $i = 1, 2, j = 1, 2$ .

#### 4.2.2 Aproximación de forma normal de cuarto orden

En este estudio, el comportamiento dinámico se aproximó mediante el modelo de forma normal de cuarto orden ( $k = 4$  en el modelo propuesto). Expandiendo (4.3) alrededor de la condición de equilibrio,  $\mathbf{x}_{sep}$  y reteniendo términos de cuarto orden se pueden establecer las ecuaciones siguientes

$$x = \mathbf{A}x + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} x^T \mathbf{H}_2^1 x \\ x^T \mathbf{H}_2^2 x \end{bmatrix} + \frac{1}{3!} \begin{bmatrix} x^T \mathbf{H}_3^1 \begin{bmatrix} x & \bar{0} \\ \bar{0} & x \end{bmatrix} x \\ x^T \mathbf{H}_3^2 \begin{bmatrix} x & \bar{0} \\ \bar{0} & x \end{bmatrix} x \end{bmatrix} + \frac{1}{4!} \begin{bmatrix} x^T \mathbf{H}_4^1 \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} x & \bar{0} \\ \bar{0} & x \end{bmatrix} x & \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x & \bar{0} \\ \bar{0} & x \end{bmatrix} x \end{bmatrix} x \\ x^T \mathbf{H}_4^2 \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} x & \bar{0} \\ \bar{0} & x \end{bmatrix} x & \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x & \bar{0} \\ \bar{0} & x \end{bmatrix} x \end{bmatrix} x \end{bmatrix} x + O(5)$$

$$= \mathbf{A}x + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) + O(5) \quad (4.4)$$

en donde  $\mathbf{A} = \mathbf{f}'_1(\mathbf{x})$  representa la parte lineal del sistema y las matrices  $\mathbf{H}_k^j$  son:

$$\mathbf{H}_2^1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}_{|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{sep}}}, \quad \mathbf{H}_2^2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}_{|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{sep}}},$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_3^1 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_1^3} & \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_1^2 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_2 \partial x_1} \\ \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_1^2 \partial x_2} & \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_2^3} \end{bmatrix}_{|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{sep}}} & \mathbf{H}_3^2 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^3 f_2}{\partial x_1^3} & \frac{\partial^3 f_2}{\partial x_1^2 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^3 f_2}{\partial x_2 \partial x_1} \\ \frac{\partial^3 f_2}{\partial x_1^2 \partial x_2} & \frac{\partial^3 f_2}{\partial x_1 \partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^3 f_2}{\partial x_2^3} \end{bmatrix}_{|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{sep}}} \\
\mathbf{H}_4^1 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_1^4} & \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_1^3 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_2^3 \partial x_1} \\ \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_1^3 \partial x_2} & \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_2^4} \end{bmatrix}_{|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{sep}}} & \mathbf{H}_4^2 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^3 f_2}{\partial x_1^4} & \frac{\partial^3 f_2}{\partial x_1^3 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^3 f_2}{\partial x_2^3 \partial x_1} \\ \frac{\partial^3 f_2}{\partial x_1^3 \partial x_2} & \frac{\partial^3 f_2}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^3 f_2}{\partial x_2^4} \end{bmatrix}_{|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{sep}}}
\end{aligned}$$

Introduciendo la transformación lineal  $\mathbf{x} = \mathbf{U}\mathbf{y}$  en la ecuación (4.4) se obtiene la forma canónica de Jordan del sistema:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{y} + \sum_{i=2}^4 \mathbf{F}_i(\mathbf{y}) + O(\|\mathbf{y}^5\|) \quad (4.5)$$

en donde  $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{V}^T \mathbf{A} \mathbf{U} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ , y la estructura del campo vectorial se describe en la sección 3.3. Esta primera aproximación permite desacoplar la parte lineal; el objetivo del análisis es simplificar los términos  $\mathbf{F}_i(\mathbf{y}), i = 2, \dots, 4$ .

#### 4.2.3 Aproximación de primer orden

Si se desprecian los términos no lineales, el comportamiento dinámico del sistema puede aproximarse mediante la relación  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ , donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_o \\ -\frac{K_s}{2H} & -\frac{D}{2H} \end{bmatrix}$$

Para propósitos del estudio se asume  $P_m = 0.8$ ,  $Q = -j0.3$ ,  $\delta^o = 49.9^\circ$  y  $D = 10.0$ . Con estas condiciones de operación, el sistema exhibe dos valores propios complejos conjugados dados por  $\lambda_{1,2} = -0.7143 \pm j6.346$ .

Para pequeñas variaciones alrededor de la condición de equilibrio, la solución general del sistema lineal, con condiciones iniciales  $\Delta\delta(0) = \Delta\delta^o$ ,  $\Delta\omega(0) = 0$  en  $t=0$ , puede expresarse en la forma siguiente:

$$\Delta\delta(t) = 1.008 \left[ e^{-0.714t} \cos(6.35t - 0.112) \right] (\Delta\delta^o) \text{ rad} \quad (4.6a)$$

y

$$\Delta\omega(t) = -0.015 \left[ e^{-0.714t} \text{sen}(6.35t) \right] (\Delta\delta^\circ) \text{ p.u.} \quad (4.6b)$$

en donde  $\Delta\delta^\circ$  representa la perturbación inicial.

Las ecuaciones (4.6a) y (4.6b) describen un movimiento armónico simple con una frecuencia de  $\omega = 6.35 \text{ rad/s}$ , y una constante de tiempo  $1/0.714\text{s}$ . Como se observa, la perturbación inicial  $\Delta\delta^\circ$  afecta, fundamentalmente, la magnitud de las desviaciones de velocidad y ángulo del generador; la constante de tiempo y frecuencia de la oscilación son constantes e independientes de la perturbación.

#### 4.2.4 Soluciones aproximadas de forma normal

La determinación de soluciones analíticas de lazo cerrado requiere la solución de dos problemas principales. Por una parte, la evaluación de condiciones iniciales en los distintos espacios coordenados, y por otra, la determinación de los coeficientes asociados a las transformaciones no lineales. Estos aspectos se discuten a continuación separadamente.

Con el fin de analizar el efecto del estrés en la respuesta del sistema, se obtuvieron soluciones analíticas de forma cerrada siguiendo el procedimiento descrito en la sección 3.3. El estudio se centra en el análisis del efecto de variaciones pequeñas en las condiciones iniciales  $\Delta\delta^\circ, \Delta\omega^\circ$  en la respuesta del sistema.

En el estudio se consideraron las siguientes alternativas de modelado:

- 1) La representación del sistema mediante un modelo de segundo orden ( $k=2$  en el procedimiento desarrollado).
- 2) La representación del sistema mediante un modelo de tercer orden ( $k=3$ ).
- 3) La representación propuesta de cuarto orden. En todos los casos, las soluciones normales aproximadas de la forma normal fueron obtenidas usando los procedimientos en la sección 3.3.

En la Tabla 4.1 se resumen las condiciones de operación consideradas en los estudios presentados en las siguientes secciones. Es importante destacar que estos puntos corresponden a las condiciones de equilibrio en la curva potencia-ángulo del sistema.

Tabla 4.1

**Condiciones de operación consideradas en el estudio**

Caso	$P_c$	$\delta^\circ$
A	0.90 p.u.	15°
B	0.90 p.u.	30°
C	0.90 p.u.	45°

4.2.4.1 *Evaluación de condiciones iniciales*

Uno de los problemas más complejos en la determinación de soluciones analíticas de forma normal es la determinación de condiciones iniciales en los diferentes marcos coordenados. En general, este proceso involucra la determinación de raíces de ecuaciones algebraicas con coeficientes complejos. Adicionalmente, estas ecuaciones pueden exhibir puntos múltiples de equilibrio y la determinación de una solución válida depende fuertemente de la estimación inicial.

Supóngase, con objeto de introducir estas ideas, que el sistema se encuentra en la condición de equilibrio  $\mathbf{x}^\circ = [\delta^\circ \quad \omega^\circ]^T = [\Delta\delta^\circ \quad 0]^T$ . Una vez determinado el punto de equilibrio de interés en coordenadas reales, las condiciones iniciales en los diferentes marcos coordenados pueden obtenerse de la solución de las transformaciones inversas:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}^\circ &= \mathbf{U}^{-1}\mathbf{x}^\circ = \mathbf{f}_1(\mathbf{y}) \\
 \mathbf{y}^\circ &= \mathbf{U}^{-1}\mathbf{x}^\circ = \mathbf{z}_2^\circ + \mathbf{h}_2(\mathbf{z}_2^\circ) = \mathbf{f}_2(\mathbf{z}_2) \\
 \mathbf{z}_2^\circ &= \mathbf{z}_3^\circ + \mathbf{h}_3(\mathbf{z}_3^\circ) = \mathbf{f}_3(\mathbf{z}_3) \\
 \mathbf{z}_3^\circ &= \mathbf{z}_4^\circ + \mathbf{h}_4(\mathbf{z}_4^\circ) = \mathbf{f}_4(\mathbf{z}_4)
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

Como se observa en (4.7), la solución de estas ecuaciones, conduce en general, a un problema de determinación de raíces de ecuaciones algebraicas no lineales con coeficientes complejos. Así por ejemplo, en coordenadas modales, las condiciones iniciales pueden expresarse en la forma

$$\begin{bmatrix} y_1^\circ \\ y_2^\circ \end{bmatrix} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{x}^\circ = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta^\circ \\ \Delta\omega^\circ \end{bmatrix}
 \tag{4.8}$$

o, equivalentemente:

$$\begin{aligned} y_1 &= V_{11}x_1 + V_{12}x_2 \\ y_2 &= V_{21}x_1 + V_{22}x_2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

En el plano complejo, las ecuaciones anteriores definen una familia de líneas rectas caracterizadas con pendientes  $V_{11}$ ,  $V_{21}$  las cuales cruzan por cero para  $x_1^o = \Delta\delta^o = 0$ ; éstas funciones son, en general, complejas.

La extensión de estos conceptos al espacio coordenado de formas normales es inmediata. Resolviendo (4.7) para  $z_2$  se tiene que

$$\begin{aligned} V_{11}x_1 + V_{12}x_2 = y_1 &= z_2 + h_{21}^1 z_2^2 + h_{22}^1 z_1 z_2 + h_{23}^1 z_2^2 = f_1(z_2) \\ V_{21}x_1 + V_{22}x_2 = y_2 &= z_2 + h_{21}^2 z_2^2 + h_{22}^2 z_1 z_2 + h_{23}^2 z_2^2 = f_2(z_2) \end{aligned} \quad (4.10)$$

El análisis de las relaciones (4.10) sugiere que en condiciones de baja carga o estrés (i.e. en ausencia de efectos no lineales),  $h_{kl}^j \approx 0$ ,  $z_2^o \approx y_1^o$  y  $z_2^o \approx y_2^o$ . Geométricamente, estas aproximaciones son equivalentes a asumir que en la condición de equilibrio, las ecuaciones (4.7) tendrán un comportamiento prácticamente lineal. La extensión de estas ideas a los espacios coordenados de forma normales de orden superior,  $z_3, z_4$  permite obtener conclusiones similares.

Cuando se aumenta el nivel de estrés, y con ello, la presencia de efectos no lineales, las ecuaciones (4.10) describen de manera aproximada el comportamiento de una parábola; el mismo análisis permite observar que la solución buscada se interpreta como la intersección de la condición inicial en cada espacio coordenado  $y^o$  con la curva no lineal  $f_1(z_2)$  para el caso de la solución de segundo orden.

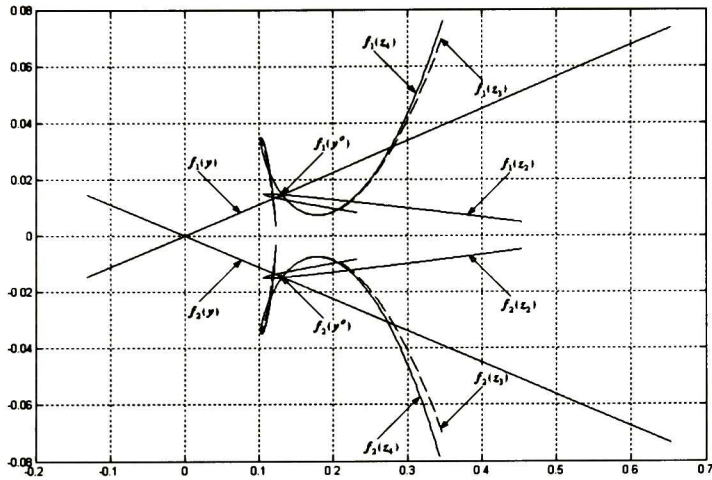
En las figuras 4.2.a a 4.2.c se muestra el comportamiento de las transformaciones para diferentes condiciones de estrés del sistema. El análisis permite comprobar que las diferentes funciones  $f_1(z_2) = f_1(z_3) = f_1(z_4)$  y  $f_2(z_2) = f_2(z_3) = f_2(z_4)$  convergen a la misma solución cuando existe poco estrés (refiérase a la figura 4.2a).

Se observa, también, que las soluciones de tercer y cuarto orden son prácticamente similares para las diferentes condiciones de operación. Se plantea aquí la idea de que la solución de tercer orden puede ser suficiente para proporcionar una estimación adecuada del comportamiento del sistema.

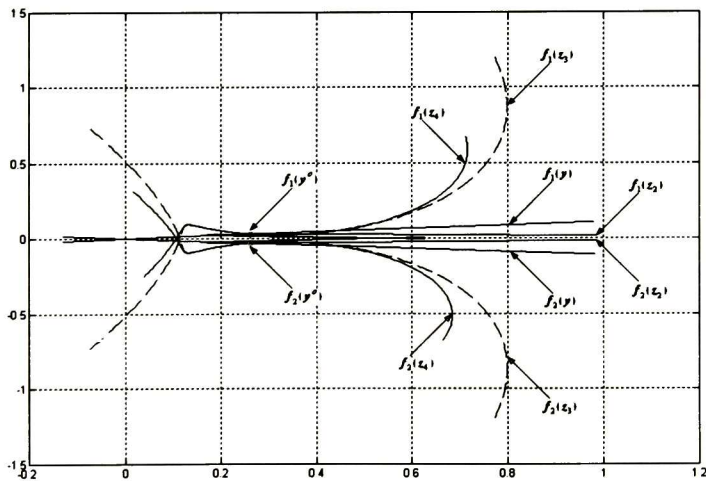
Con objeto de verificar estas conclusiones, se calcularon las condiciones iniciales para las distintas variables de forma normal. La figuras 4.3 muestra el comportamiento de las raíces para las distintas variables de forma normal para

diferentes condiciones de carga en el sistema. El análisis permite comprobar que las soluciones de tercero y cuarto orden son prácticamente similares, sugiriendo que la aproximación de tercer orden captura la dinámica esencial del sistema.

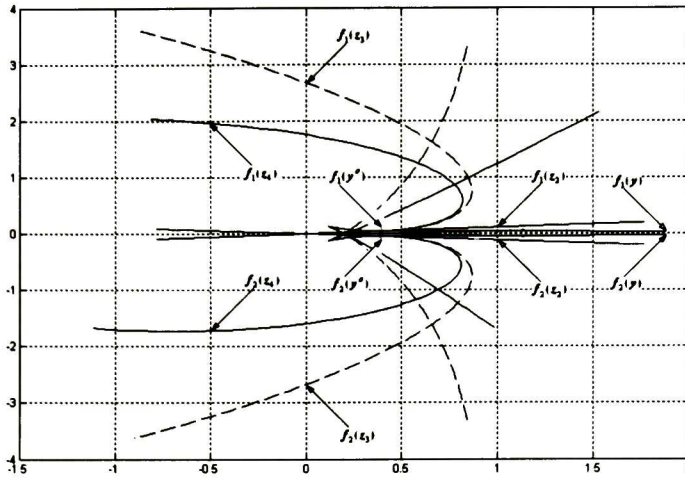
En las Tablas 4.2 a 4.4 se resumen los resultados obtenidos, para las distintas condiciones de operación. El análisis permite confirmar que, en general, la solución de cuarto orden para la condición inicial es prácticamente idéntica a la solución de tercer orden.



a) Caso A



b) Caso B



c) Caso

Figura 4.2 Interpretación geométrica de las transformaciones no lineales de coordenadas

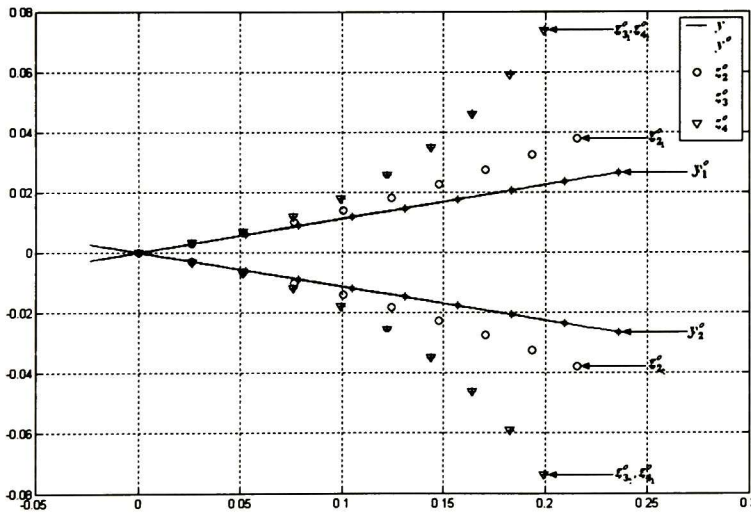


Figura 4.3 Soluciones de forma normal ilustrando el efecto de estrés en la determinación de las condiciones iniciales



**Tabla 4.2**  
**Condiciones iniciales en los distintos marcos coordenados**  
**correspondientes al caso A de operación**

$x^o$	$x_1^o$	$15^\circ \approx 0.2618 \text{ rad.}$
	$x_2^o$	$0 \text{ rad./seg.}$
$y^o$	$y_1^o$	$0.1309 - 0.0147i$
	$y_2^o$	$0.1309 + 0.0147i$
$z_2^o$	$z_{21}^o$	$0.1244 - 0.0181i$
	$z_{22}^o$	$0.1244 + 0.0181i$
$z_3^o$	$z_{31}^o$	$0.1222 - 0.0256i$
	$z_{32}^o$	$0.1222 + 0.0256i$
$z_4^o$	$z_{41}^o$	$0.1221 - 0.0255i$
	$z_{42}^o$	$0.1221 - 0.0255i$

**Tabla 4.3**  
**Condiciones iniciales en los distintos marcos coordenados**  
**correspondientes al caso B de operación**

$x^{\circ}$	$x_1^{\circ}$	$30^{\circ} \approx 0.5236\text{rad}$
	$x_2^{\circ}$	0
$y^{\circ}$	$y_1^{\circ}$	$0.2618 - 0.0295i$
	$y_2^{\circ}$	$0.2618 + 0.0295i$
$z_2^{\circ}$	$z_{21}^{\circ}$	$0.2373 - 0.0436i$
	$z_{22}^{\circ}$	$0.2373 + 0.0436i$
$z_3^{\circ}$	$z_{31}^{\circ}$	$0.2150 - 0.0903i$
	$z_{32}^{\circ}$	$0.2150 + 0.0903i$
$z_4^{\circ}$	$z_{41}^{\circ}$	$0.2142 - 0.0900i$
	$z_{42}^{\circ}$	$0.2142 + 0.0900i$

**Tabla 4.4**  
**Condiciones iniciales en los  $x^o$  distintos marcos coordenados**  
**correspondientes al caso C de operación**

$x^o$	$x_1^o$	45° ≈ 0.7854
	$x_2^o$	0
$y^o$	$y_1^o$	0.3928 - 0.0442i
	$y_2^o$	0.3928 + 0.0442i
$z_2^o$	$z_{21}^o$	0.3404 - 0.0774i
	$z_{22}^o$	0.3404 + 0.0774i
$z_3^o$	$z_{31}^o$	0.2595 - 0.1880i
	$z_{32}^o$	0.2595 + 0.1880i
$z_4^o$	$z_{41}^o$	0.2569 - 0.1867i
	$z_{42}^o$	0.2569 + 0.1867i

#### 4.2.4.2 Soluciones analíticas

Siguiendo la aproximación propuesta en el capítulo 3, la solución aproximada de cuarto orden, estará dada por

$$\begin{bmatrix} z_{3_1}(t) \\ z_{3_2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{4_1}^o e^{\lambda_1 t} \\ z_{4_2}^o e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \sum_{l=k}^n \sum_{m=k}^n \sum_{p=1}^n h_{4_{klmp}}^1 z_{4_k}^o z_{4_l}^o z_{4_m}^o z_{4_p}^o e^{(\lambda_k + \lambda_l + \lambda_m + \lambda_p)t} \\ \sum_{k=1}^n \sum_{l=k}^n \sum_{m=k}^n h_{4_{klmp}}^2 z_{4_k}^o z_{4_l}^o z_{4_m}^o z_{4_p}^o e^{(\lambda_k + \lambda_l + \lambda_m + \lambda_p)t} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$\begin{bmatrix} z_{2_1}(t) \\ z_{2_2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{3_1}(t) \\ z_{3_2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n h_{3_{klm}}^1 z_{3_k}(t) z_{3_l}(t) z_{3_m}(t) \\ \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n h_{3_{klm}}^2 z_{3_k}(t) z_{3_l}(t) z_{3_m}(t) \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

y

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \sum_{l=k}^n h_{2_n}^1 z_{2_k}(t) z_{2_l}(t) \\ \sum_{k=1}^n \sum_{l=k}^n h_{2_n}^2 z_{2_k}(t) z_{2_l}(t) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

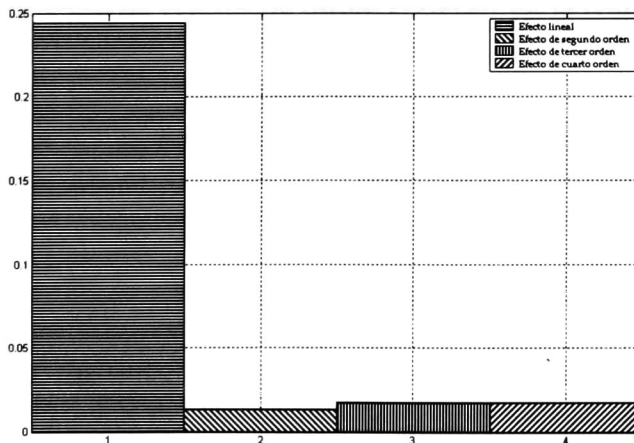
Finalmente, las desviaciones de los estados en coordenadas físicas se obtienen a partir de las expresiones

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\delta(t) \\ \Delta\omega(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

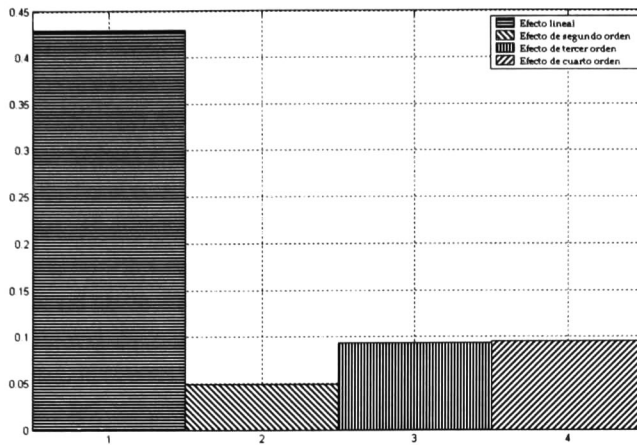
en donde los coeficientes  $h_{k_{lm}}^j$ ,  $h_{2_{lm}}^j$  y  $h_{2_n}^j$  representan, respectivamente, el efecto de términos de segundo, tercer y cuarto orden, obtenidas de las relaciones (2.28). Estos coeficientes indican el grado de no linealidad existente en la solución y pueden interpretarse como medidas de interacción modal.

Las ecuaciones (4.11) a (4.14) definen el comportamiento ante variaciones pequeñas de las variables de forma normal. Como se observa, la solución de forma normal de cuarto orden incluye frecuencias armónicas expresadas como combinaciones de frecuencia de la forma  $(\omega_k + \omega_l + \omega_m + \omega_p)$ ,  $(\omega_k + \omega_l + \omega_m)$ ,  $(\omega_k + \omega_l)$ ,  $\omega_k, \omega_l, \omega_m, \omega_p$  y sus combinaciones.

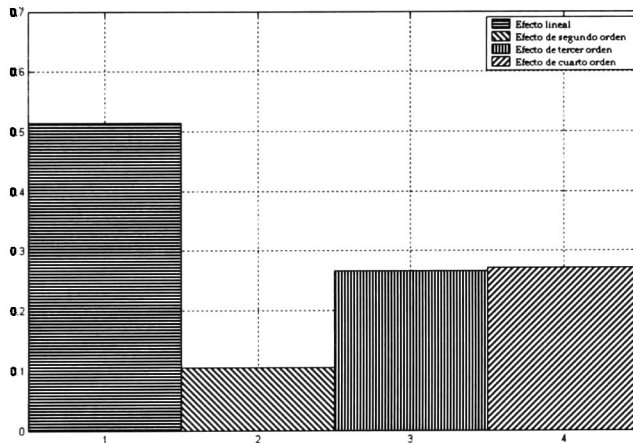
Para condiciones de baja carga (refiérase a la Figura 4.4a), la respuesta está determinada esencialmente por la solución lineal. Cuando se aumenta el nivel de carga, las contribuciones de orden superior aumentan en forma significativa como se muestra en las figuras 4.4b y 4.4.c.



a) Caso A



b) Caso B



c) Caso C

Figura 4.4 Contribución de efectos de orden superior en la respuesta del sistema

#### 4.2.5 Soluciones en el dominio del tiempo

En las figuras 4.5 a 4.7 se muestran las soluciones analíticas de forma normal, obtenidas utilizando los procedimientos desarrollados. Para permitir una mejor comprensión de los resultados, se incluyen las soluciones lineales obtenidas mediante (4.6a) y (4.6b).

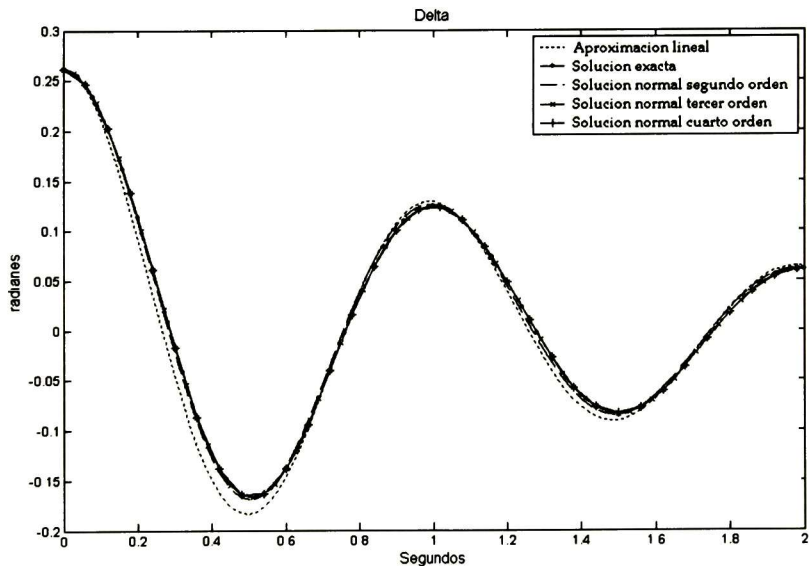
Se observa, comparando las soluciones en el tiempo, que para condiciones de bajo estrés, la aproximación de primer orden proporciona una medida precisa del comportamiento dinámico del sistema. Cuando la perturbación se incrementa, sin embargo, las soluciones de tercer orden permite aproximar en forma apropiada a la respuesta exacta del sistema.

El análisis de las soluciones en el tiempo permite establecer las siguientes conclusiones generales:

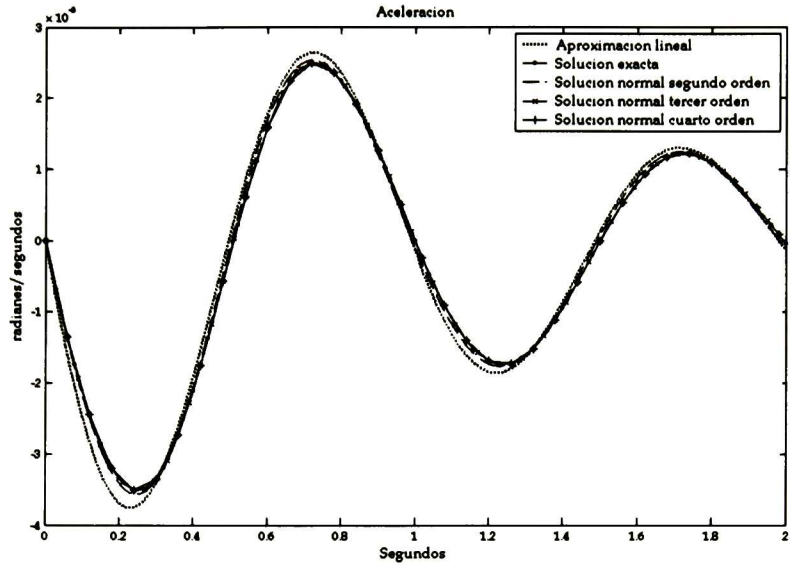
- El grado de exactitud de las aproximaciones de orden superior es función de la magnitud perturbación inicial y del nivel de estrés en el sistema. El análisis también sugiere que los efectos no lineales se presenten en el sistema cuando la perturbación llega a ser grande.
- En condiciones de estrés, la solución lineal conduce a errores significativos en la evaluación de la respuesta del sistema. El error en la aproximación se aprecia tanto en la fase de la señal como en la magnitud de la estimación.

En general, el grado de exactitud de la aproximación de formas normales aumenta al considerar mayor número de términos en la aproximación no lineal. Sin embargo, la inclusión de términos de orden mayor aumenta el costo computacional y puede mejorar marginalmente la exactitud de la aproximación. Se puede concluir que, la solución de cuarto orden no mejora en forma significativa la solución de tercer orden

Estos resultados son de interés práctico porque sugieren que la aproximación de tercer orden proporciona un compromiso entre la exactitud del modelo y el esfuerzo computacional asociado al cálculo de soluciones analíticas.

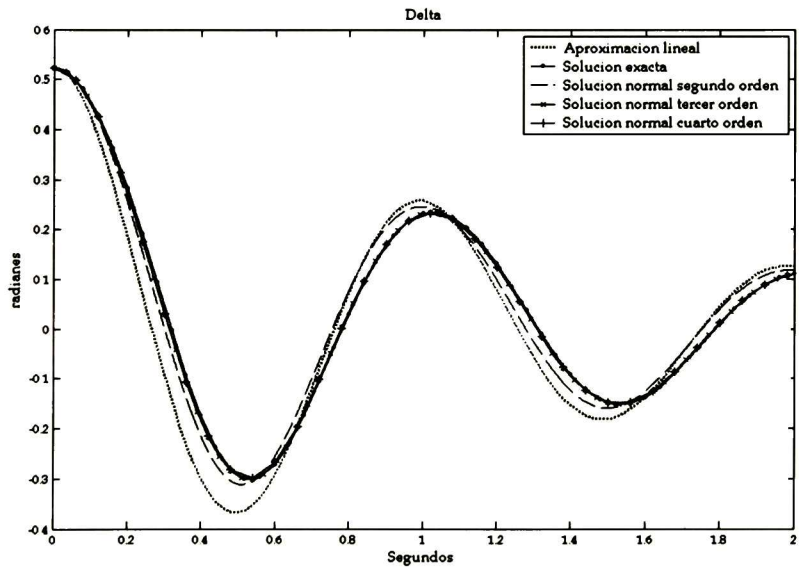


a) desviación angular del rotor

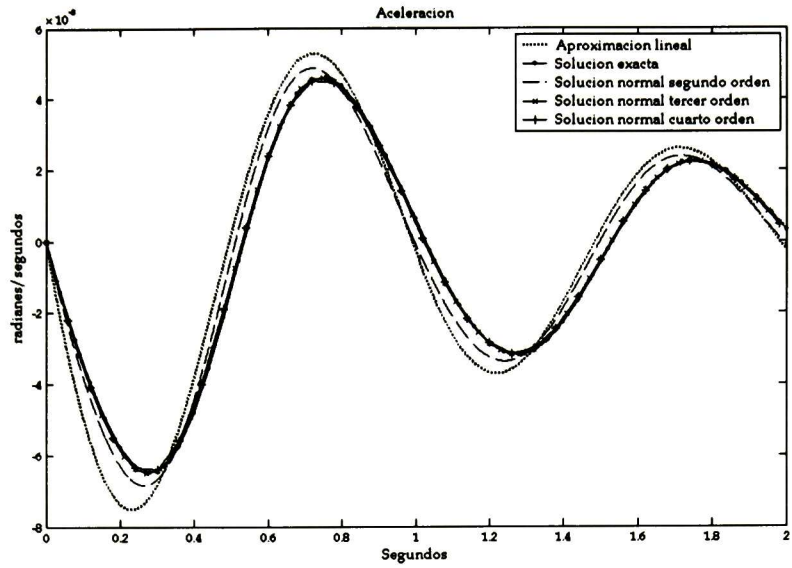


b) desviación de la aceleración

Figura 4.5 Comparación del comportamiento dinámico de la máquina para una perturbación inicial  $\Delta\delta^0 = 15^\circ$ ,  $\Delta\omega^0 = 0^\circ$

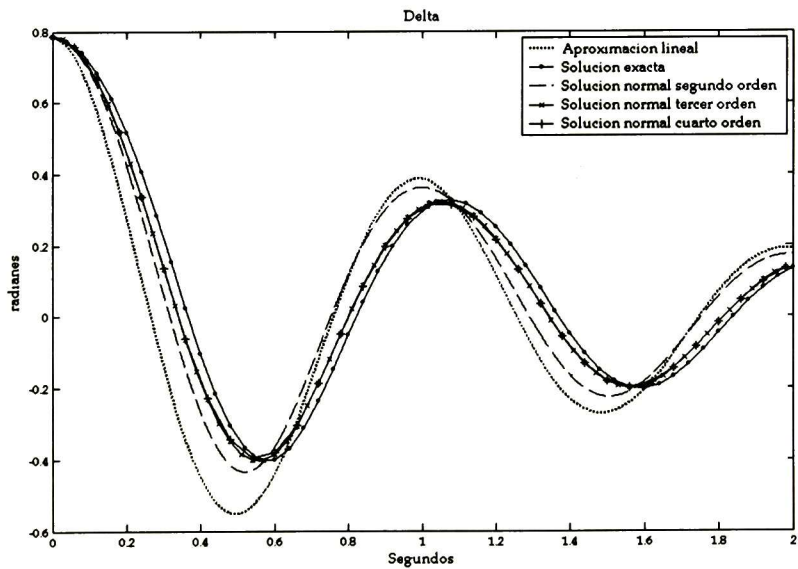


a) Desviación angular del rotor



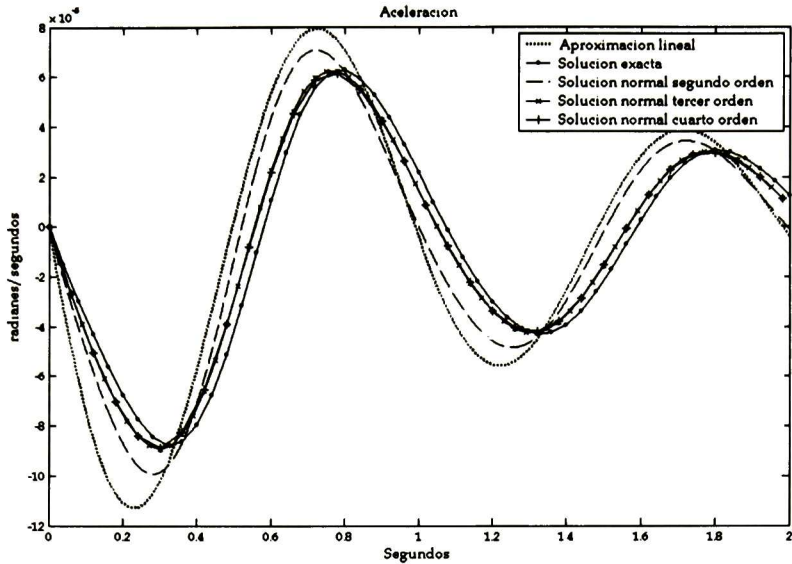
b) Desviación de velocidad del generador

Figura 4.6 Comparación del comportamiento dinámico de la máquina para una perturbación inicial  $\Delta\delta^0 = 30^\circ$ ,  $\Delta\omega^0 = 0^\circ$



a) Desviación angular del rotor





b) Desviación de velocidad del generador

Figura 4.7 Comparación del comportamiento dinámico de la máquina para una perturbación inicial  $\Delta\delta^0 = 45^\circ$ ,  $\Delta\omega^0 = 0^\circ$

#### 4.2.6 Análisis en el plano de fase

Una característica adicional del método propuesto, es la posibilidad de aproximar las trayectorias en el plano de fase y permitir el cálculo de fronteras de estabilidad. En el plano de fase  $(\delta, \omega)$ , el comportamiento del sistema puede obtenerse de la solución del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{d\delta}{dt} \\ \dot{x}_2 &= \frac{d\omega}{dt} \end{aligned} \approx \frac{d\Delta\delta}{dt} \quad \frac{d\Delta\omega}{dt} \quad (4.15)$$

Convencionalmente, la trayectoria del plano de fase para la solución exacta del sistema es calculada por integración numérica, mientras que para las comparaciones se usó aproximación lineal y las aproximaciones por formas normales de segundo, tercer y cuarto orden. El análisis de forma normal también permite calcular trayectorias de fase aproximadas. Las figuras 4.8 - 4.10 muestran el comportamiento del sistema máquina bus infinito mostrado en la Fig. 4.1. para diferentes cambios de potencia mecánica.

El diagrama de fase consiste en trayectorias de naturaleza espiral que convergen a el origen para  $t \rightarrow \infty$ . Debe notarse que, en esta representación, el inicio de la trayectoria representa el punto de equilibrio estable del sistema  $(\delta^0, 0)$ .

Recíprocamente, el punto al final de la trayectoria representa un punto estable en el análisis del no lineal.

La comparación de estos gráficos con las soluciones en el dominio de tiempo permite confirmar que la solución de formas normales de tercer orden proporciona una solución aproximada más cercana al comportamiento del sistema. También puede observarse, que la exactitud de las representaciones de sistema de orden baja es muy pobre en condiciones de tensión alta.

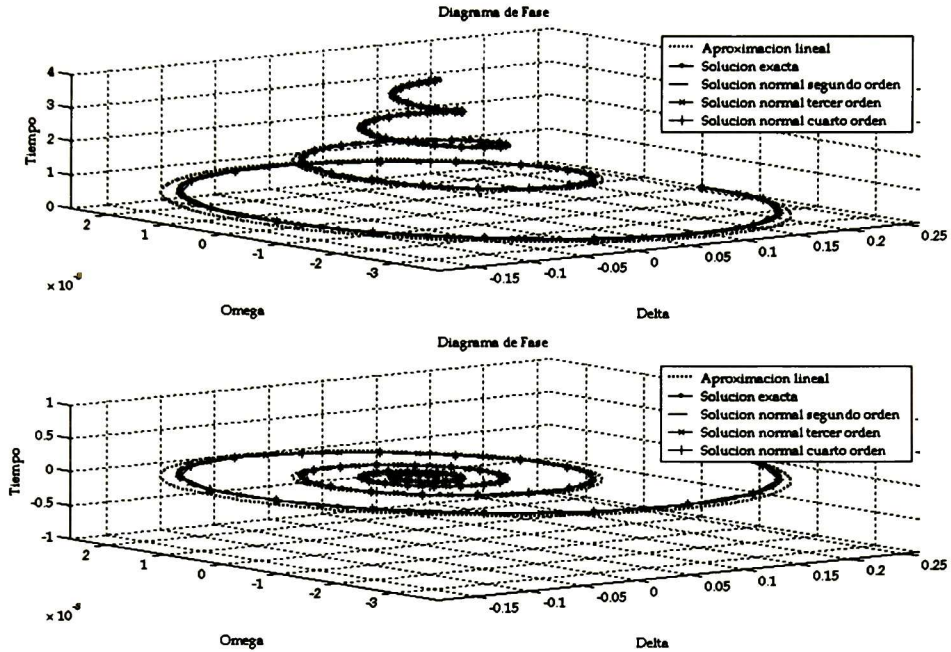


Figura 4.8 Diagrama de fase correspondiente al caso A

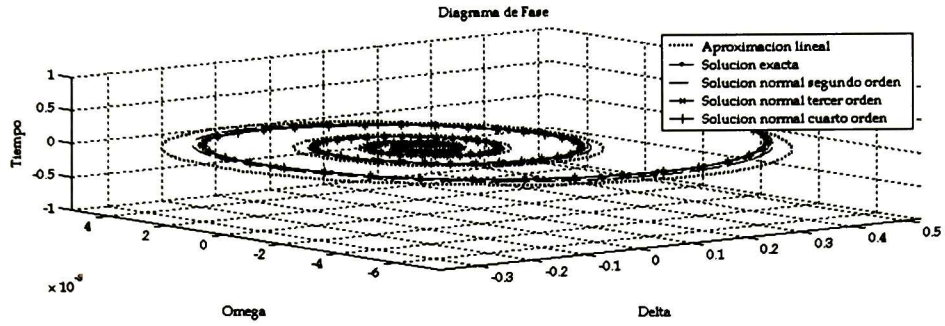
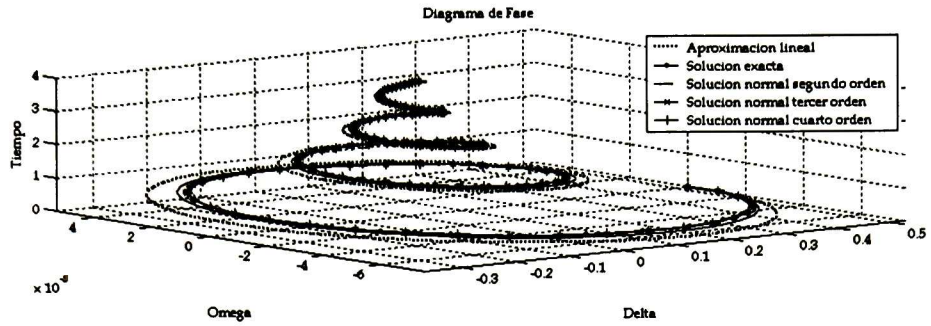


Figura 4.9 Diagrama de fase correspondiente al caso B

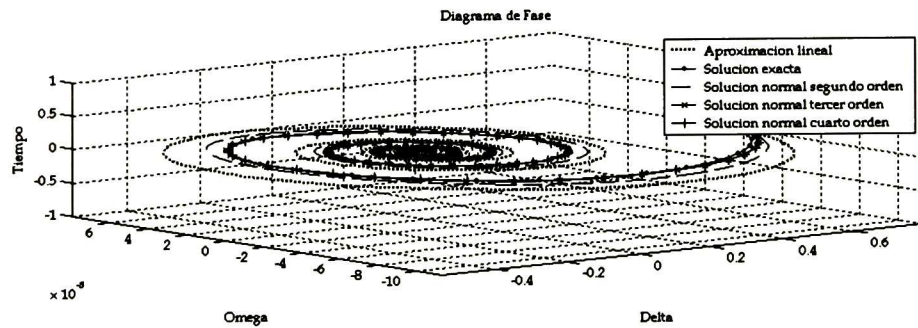
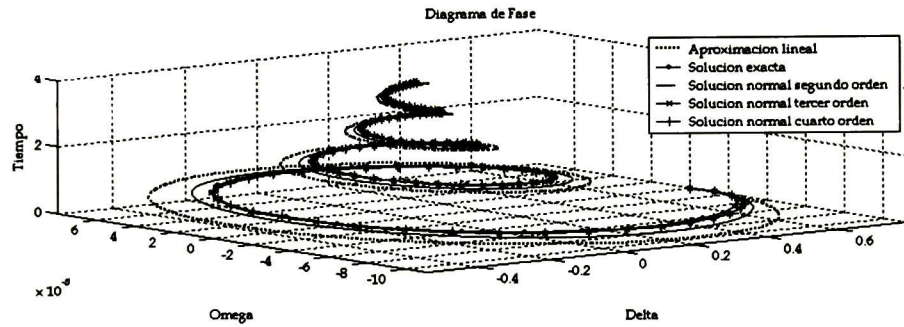


Figura 4.10 Diagrama de fase correspondiente al caso C

b) Sistema de excitación

$$\frac{dE_{fd}}{dt} = -\frac{1}{T_E} [K_E + S_E(E_{fd})E_{fd} - V_R] \quad (4.19)$$

$$\frac{dR_f}{dt} = \frac{1}{T_F} \left[ -R_f + \frac{K_F}{T_F} E_{fd} \right] \quad (4.20)$$

$$\frac{dV_R}{dt} = -\frac{1}{T_A} \left[ -V_R + K_A R_f - \frac{K_A K_F}{T_F} E_{fd} + K_A (V_{ref} - E_t) \right] \quad (4.21)$$

en donde  $E'_q$  es el voltaje interno de armadura del generador en p.u.,  $E_t$  es el voltaje en terminales de el generador en p.u.,  $X'_d$  es la reactancia transitoria en p.u.,  $X$  es la reactancia de la línea en p.u.,  $X_d$  es la reactancia sincronía en p.u.,  $T'_d$  es constate de tiempo en segundos.

En los estudios presentados se asumieron las siguientes simplificaciones:

- El sistema de excitación se representa mediante un regulador de voltaje del tipo IEEE-1
- Se desprecia el efecto de límites en la acción de control y la saturación

Si se define ahora el vector de estado como  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6]^T = [\delta \ \omega \ E'_q \ E_{fd} \ R_f \ V_R]^T$ , el comportamiento dinámico del sistema puede expresarse mediante el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \\ f_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \\ f_4(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \\ f_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \\ f_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \omega \\ \frac{1}{2H} [P_m - D\omega - E'_q E_t g_1 \sin \delta] \\ \frac{1}{T'_d} [E_{fd} - g_2 E'_q + g_3 E_t \cos \delta] \\ -\frac{1}{T_E} [K_E + S_E(E_{fd}) E_{fd} - V_R] \\ \frac{1}{T_F} [-R_f + \frac{K_F}{T_F} E_{fd}] \\ -\frac{1}{T_A} [-V_R + K_A R_f - \frac{K_A K_F}{T_F} E_{fd} + K_A (V_{ref} - E_t)] \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

donde:

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \omega$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{2H} [P_m - D\omega - E'_q E_t g_1 \sin \delta]$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{T'_d} [E_{fd} - g_2 E'_q + g_3 E_t \cos \delta]$$

$$f_4(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = -\frac{1}{T_E} [K_E + S_E(E_{fd}) E_{fd} - V_R]$$

$$f_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{T_F} [-R_f + \frac{K_F}{T_F} E_{fd}]$$

y

$$f_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = -\frac{1}{T_A} [-V_R + K_A R_f - \frac{K_A K_F}{T_F} E_{fd} + K_A (V_{ref} - E_t)]$$

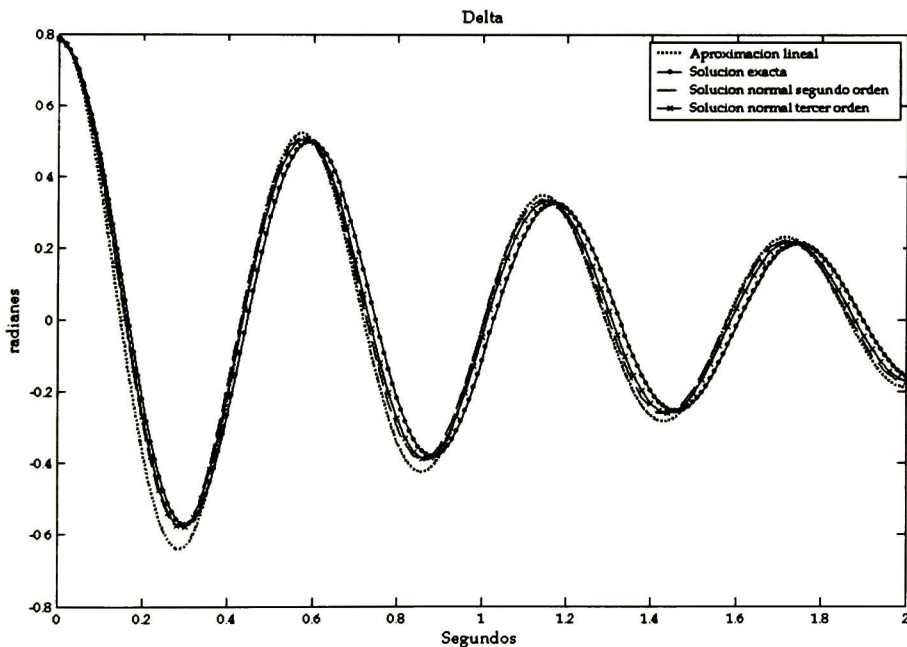
con los puntos de equilibrio asociados en  $[\delta^o \ \omega^o \ E'^o_q \ E^o_{fd} \ R^o_f \ V^o_R]^T$  donde  $\delta^o \ \omega^o, E'^o_q, E^o_{fd}, R^o_f$  y  $V^o_R \in \mathfrak{R}$ .

Usando un proceso de análisis similar al considerado para la representación clásica se obtuvieron soluciones analíticas de lazo cerrado. En la figura 4.12 se muestran una comparación de la solución exacta del sistema con la solución de segundo y tercer orden de formas normales para una perturbaciones inicial de ángulo en la máquina de  $\Delta\delta^0 = 45^\circ$

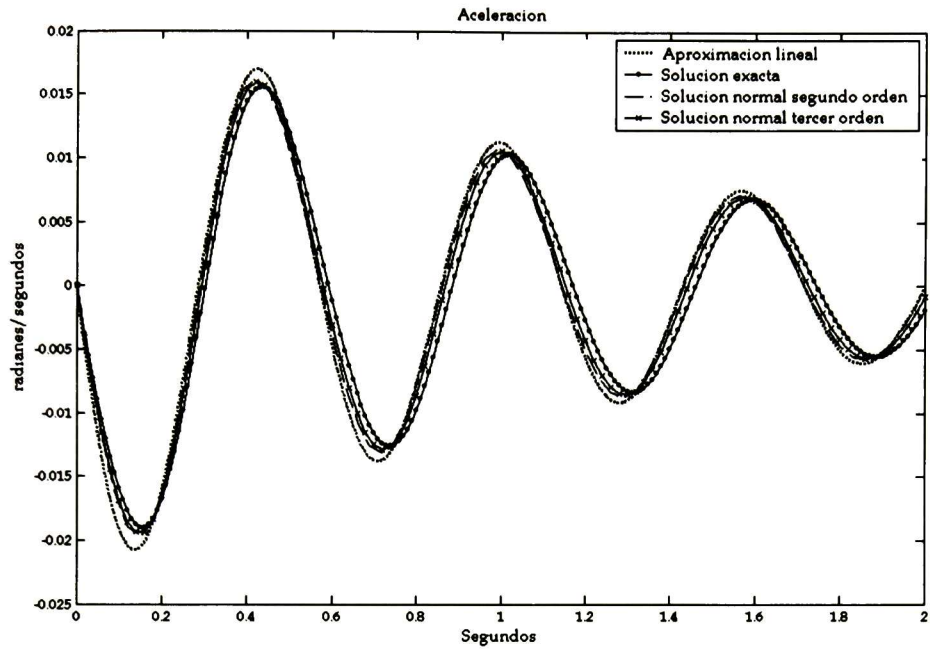
También de interés, en la figura 4.13 se muestran las trayectorias del plano de fase para el caso ejemplo considerado. Se puede observar que para perturbaciones grandes las aproximaciones de la forma normal de tercer orden y la solución exacta del sistema coinciden muy bien, mientras que la aproximación lineal y la solución de forma normal de segundo orden

Las siguientes conclusiones generales son descritas en el siguiente análisis:

- Las soluciones de forma normal para el sistema detallado permiten confirmar que la aproximación de tercer orden es adecuada para el estudio del comportamiento dinámico del sistema
- El estudio permite confirmar asimismo que la aproximación lineal pierde precisión conforme aumenta el tiempo; esta pérdida de precisión se manifiesta tanto en la frecuencia como en la amplitud
- En el plano de fase, la amplitud de las oscilaciones corresponde a la amplitud de las soluciones en el dominio del tiempo. La extensión de este enfoque para derivar fronteras de estabilidad es inmediata y se omite.



a) Desviación angular del rotor



b) desviación de la aceleración

Figura 4.12 Comparación del comportamiento dinámico de la máquina para una perturbación inicial  $\Delta\delta^0 = 45^\circ$ ,  $\Delta\omega^0 = 0^\circ$

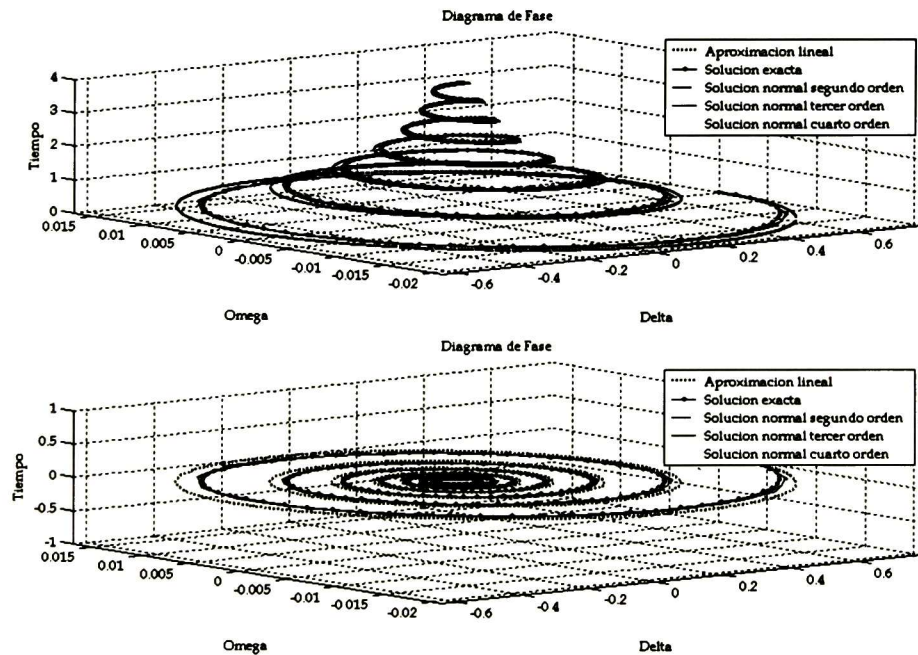


Figura 4.13 Diagrama de fase correspondiente al caso C

#### **4.4 REFERENCIAS**

- [1]. P. Kundur, Power System Control and Stability, McGaw-Hill, 1994, (ISBN 0-07-035958-X).
- [2]. Yao-Nan Yu, Electric system power system dynamics, Academic press, New York London, ISBN 0 - 12 -774820 - 2.



# CAPÍTULO 5

## CONCLUSIONES GENERALES Y RECOMENDACIONES PARA TRABAJOS FUTUROS

### 5.1 CONCLUSIONES GENERALES

En esta tesis, se propone una metodología sistemática basada en la aplicación conjunta de la teoría de formas normales y matemática simbólica para determinar los efectos de orden superior en el comportamiento dinámico no lineal del sistema de potencia. El marco conceptual desarrollado proporciona una base rigurosa para determinar los efectos no lineales débiles del modelo del sistema en la estabilidad de pequeña señal. Por otra parte, el procedimiento presentado generaliza los resultados existentes en la literatura para obtener representaciones de forma normal de orden superior.

Los resultados numéricos derivados de las soluciones de formas normales aplicadas al sistema máquina bus infinito y al modelo detallado permiten verificar la validez del modelo propuesto. Se demuestra que las soluciones de formas normales de tercer y cuarto orden proporcionan información considerable sobre el comportamiento del sistema y mejoran drásticamente la exactitud.

Sin embargo el grado de exactitud para ambas soluciones, depende de la magnitud de la perturbación inicial y del nivel de estrés en el sistema. El análisis también sugiere que los efectos no lineales se presentan en el sistema cuando la perturbación llega a ser grande.

### 5.2 TRABAJOS FUTUROS

Las áreas futuras de trabajo relacionadas con el análisis de efectos no lineales en el sistema de potencia se pueden agrupar en cinco apartados principales:

- 1) El desarrollo de medidas analíticas para identificar y cuantificar el grado de interacción modal no lineal en sistemas de orden superior
- 2) La generalización de los algoritmos propuestos para considerar perturbaciones generales, especialmente en el caso de fallas en el sistema de transmisión

- 3) La extensión de la metodología computacional basado en la teoría de formas normales de orden superior, para considerar sistemas no lineales multi-dimensionales
- 4) La búsqueda de formas alternativas más eficientes para el cálculo generalizado de formas normales de orden superior
- 5) La aplicación de los métodos de estudio desarrollados al análisis de formas normales de orden superior en sistemas de gran dimensión

# APÉNDICE A

## CONDICIONES DE OPERACIÓN

### A1 PARÁMETROS DEL SISTEMA MÁQUINA BUS INFINITO

#### Parámetros de la máquina

Los parámetros de la máquina y de la red están expresados en 2220 MVA. base y son los siguientes

$$H = 3.5 \text{ MWs/MVA}, D = 10 \text{ p.u.}, X'_d = 0.30 \text{ p.u.}$$

#### Parámetros del sistema de transmisión

$$X_l = 0.15 \text{ p.u.}, X_l = 0.50 \text{ p.u.}$$

#### Condiciones iniciales de operación

$$P = 0.90 \text{ p.u.}, Q = -0.30 \text{ p.u.}, (\text{sobreexcitado}), E_t = 1.00 \angle 36^\circ, E_b = 0.995 \angle 0^\circ, P_{\text{máx}} = 1.1762, \\ \delta^s = \delta^\circ = 49.92^\circ, \omega = 0.$$

### A2 PARÁMETROS DEL SISTEMA MBI CON CONTROLES

#### Parámetros del generador (modelo de tercer orden)

Los parámetros de la máquina, de la red y del regulador de voltaje están expresados en 2220 MVA. base y son los siguientes

$$H = 3.5 \text{ MWs/MVA}, D = 10 \text{ p.u.}, X'_d = 0.30 \text{ p.u.}, X_d = 0.50 \text{ p.u.}, X_q = 0.30 \text{ p.u.}$$

#### Parámetros del sistema de transmisión

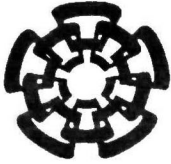
$$X_l = 0.15 \text{ p.u.}, X_l = 0.50 \text{ p.u.}$$

#### Parámetros del excitador

$$T_A = 0.05, K_A = 50, T_E = 0.5, K_E = 0.05, T_F = 0.85, K_F = 0.05.$$

#### Condiciones iniciales de operación

$$P = 0.90 \text{ p.u.}, Q = -0.30 \text{ p.u.}, (\text{subexcitado}), E_t = 1.00 \angle 36^\circ, E_b = 0.995 \angle 0^\circ, P_{\text{máx}} = 0.3462, \\ \delta^s = \delta^\circ = 49.92^\circ, \omega = 0.$$



CINVESTAV

**Centro de Investigación y de Estudios Avanzados  
del IPN**

**Unidad Guadalajara**

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, aprobó la tesis: ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO NO LINEAL DE SISTEMAS DE POTENCIA USANDO FORMAS NORMALES DE ORDEN SUPERIOR del(a) C. Irma MARTINEZ CARRILLO el día 1 de Agosto de 2003

DR. ARTURO ROMAN  
MESSINA  
INVESTIGADOR CINVESTAV  
3B  
CINVESTAV GDL  
GUADALAJARA

DR. JOSÉ JAVIER RUIZ  
LEÓN  
INVESTIGADOR  
CINVESTAV 2C  
CINVESTAV GDL  
GUADALAJARA

DR. ANTONIO RAMIREZ  
TREVÍÑO  
INVESTIGADOR CINVESTAV  
2A  
CINVESTAV GDL  
GUADALAJARA



*CINVESTAV*  
*BIBLIOTECA CENTRAL*



SS1T000007033