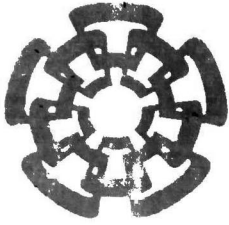




xx (117178.1)



# CINVESTAV

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N.  
Unidad Guadalajara

---

## **Modelado de Líneas de Transmisión en el Dominio de la Transformada Z**

**CINVESTAV  
IPN  
ADQUISICION  
DE LIBROS**

Tesis que presenta:

**Juan Segundo Ramírez**

para obtener el grado de:

**Maestro en Ciencias**

en la especialidad de:

**Ingeniería eléctrica**

Directores de Tesis

**Dr. José Luis Naredo Villagrán  
Dr. José Alberto Gutiérrez Robles**

Guadalajara, Jalisco, Octubre del 2004.

CLASIF.: TK165. G8. S44 2004  
ADQUIS.: Sst 345  
FECHA: 22/II/05  
PROCED.: Don. - 2005  
\$ \_\_\_\_\_

IO: 116470-2001

# **Modelado de Líneas de Transmisión en el Dominio de la Transformada Z**

**Tesis de Maestría en Ciencias  
Ingeniería eléctrica**

Por:

**Juan Segundo Ramírez**  
Ingeniero Electromecánico  
Instituto Tecnológico de Lázaro Cárdenas 1997-2002

Becario de CONACYT, expediente no. 171584

Directores de Tesis  
**Dr. José Luis Naredo Villagrán**  
**Dr. José Alberto Gutiérrez Robles**

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Octubre del 2004.

## *Agradecimientos*

Aprovechando el escenario inmejorable que me brinda esta página, quiero hacer patente mi más amoroso agradecimiento para todas las personas que me han apoyado a lo largo de mi vida. Agradezco a mi Madre Ma. Paz por apoyarme incansablemente ante todo, a mi Papá José Segundo por ayudarme siempre que lo he necesitado, agradezco a mi hermana Isabel por creer en mí, a mi hermana Consuelo por quererme tanto y por ser hermosa, agradezco a mi hermana Yuritzí por ser buena compañera y amiga. Quiero agradecer a mi Hermano Ramses por el apoyo y aguante que ha tenido conmigo y por el tiempo que le he robado cuando he necesitado de su ayuda. Quiero agradecer a todita mi familia por ser buenos conmigo.

Agradezco a mis amigos y amigas que han gastado sus horas en compañía conmigo. Además agradezco a mis compañeros de la maestría por ser buenos cuates. Quiero que quede por escrito mi agradecimiento para Iván, para Eligio, para Eduardo, para Mauricio, para Carlos, para José Manuel, para Hugo, Para Rodolfo, para Pablo, para José, para José Luis, para Cesar, para Nestor. A todos ellos gracias por todo. También mi más sincero agradecimiento para mi amiga Nichte, mi amiga Marisol y para mi amiga Jennifer que está enojada conmigo.

Quiero agradecer a mis profesores, especialmente a mi asesor el Dr. José Luis Naredo por brindarme su tiempo y paciencia.

Al CONACYT mi agradecimiento por apoyarme económicamente durante los dos años de la maestría.

Finalmente, agradezco a Dios por cuidarme y protegerme, para Él mi más amoroso agradecimiento.

## ***Tabla de contenidos***

|                       |    |
|-----------------------|----|
| Agradecimientos.....  | i  |
| Índice.....           | ii |
| Lista de figuras..... | iv |

## ***Índice***

|     |   |    |
|-----|---|----|
| I   | Introducción.....   | 1  |
| II  | Teoría básica de líneas de transmisión .....                | 3  |
| 2.1 | Línea de transmisión ideal monofásica.....                  | 3  |
| 2.2 | Modelo de línea de Bergeron-Dommel.....                     | 6  |
| 2.3 | Línea monofásica con pérdidas.....                          | 7  |
| 2.4 | Línea polifásica con pérdidas.....                          | 10 |
| 2.5 | Modelo PI de líneas.....                                    | 11 |
| III | Modelado de líneas de transmisión en el dominio del tiempo  | 13 |
| 3.1 | Descomposición en idempotentes de la matriz de propagación. | 16 |
| 3.2 | Ajuste racional de la matriz de propagación.....            | 18 |
| 3.3 | Ajuste racional de la admitancia característica.....        | 19 |
| IV  | Formulación de modelos de línea en el dominio de $z$ .....  | 20 |
| 4.1 | Conversión del dominio de Laplace al dominio de $z$ .....   | 20 |
| 4.2 | Convolución recursiva por medio de un filtro ARMA.....      | 22 |
| 4.3 | Modelo de línea polifásica en el dominio de $z$ .....       | 24 |
| V   | Casos de aplicación.....                                    | 28 |
| 5.1 | Cierre simultáneo.....                                      | 28 |
| 5.2 | Cierre secuencial.....                                      | 31 |
| 5.3 | Observaciones del capítulo.....                             | 36 |
| VI  | Conclusiones.....   | 37 |
| 6.1 | Resumen de resultados.....                                  | 37 |

|             |  |    |
|-------------|--|----|
| 6.2         | Recomendaciones para trabajos futuros..... | 38 |
|             | Referencias.....                           | 39 |
| Apéndice A. |  |    |
|             | Transformada z.....                        | 41 |
| Apéndice B. |  |    |
|             | Transformada numérica de Laplace.....      | 43 |



## ***Lista de figuras***

- 2.1** Línea de transmisión sin pérdidas y su representación circuital
- 2.2** Circuito pi equivalente de la ecuación (2.42b).
- 4.1** Circuito equivalente de Northon en el dominio de  $z$ .
- 5.1** Circuito para los ejemplos de aplicación.
- 5.2** Voltaje en el extremo receptor de la fase A.
- 5.3** Error relativo obtenido en la fase A en el extremo receptor. (a) EMTDC<sup>®</sup> vs modelo propuesto con la transformación bilineal e interpolaciones de segundo orden. (b) EMTDC<sup>®</sup> vs modelo propuesto con root matching.
- 5.4** Extremo receptor de la fase A. (a) Voltaje calculado con la transformación bilineal y con interpolaciones de órdenes primero y de segundo. (b) Error obtenido con la transformación bilineal y con interpolaciones de primer orden.
- 5.5** Voltaje en el extremo receptor de la fase B.
- 5.6** Error relativo del voltaje en la fase B en el extremo receptor. (a) Bilineal con interpolaciones de segundo orden vs EMTDC<sup>®</sup>. (b) Root matching vs EMTDC<sup>®</sup>.
- 5.7** Extremo receptor de la fase B. (a) Voltaje calculado la transformación bilineal y con interpolaciones de órdenes primero y segundo. (b) Error obtenido la transformación bilineal y con interpolaciones de órdenes primero y segundo.
- 5.8** Extremo emisor de la fase C. (a) Voltaje en la fase C del extremo emisor. (b) Error relativo del voltaje de la fase C en el extremo emisor.
- 5.9** Extremo emisor de la fase C. (a) Voltaje calculado la transformación bilineal y con interpolaciones de órdenes primero y segundo. (b) Error obtenido con la transformación bilineal y con interpolaciones de órdenes primero de segundo.
- A.1** Correspondencia entre el dominio de Laplace y el de  $z$ .

## ***1 Introducción***

Los modelos matemáticos de líneas de transmisión son necesarios para los estudios de transitorios electromagnéticos en sistemas de potencia. Estos modelos son normalmente formulados en el dominio del tiempo, ya que así se facilita su inclusión en programas de simulación de propósito general, como son el EMTP y el SPICE. Uno de los problemas de esencial importancia en el estudio de transitorios electromagnéticos es la inclusión precisa de los efectos de la frecuencia en los modelos del dominio del tiempo. Durante los últimos treinta años se ha trabajado intensamente en el desarrollo de un modelo de línea que incluya completamente todos estos efectos y que, además, posea características que lo hagan computacionalmente eficiente.

La descomposición modal para líneas de transmisión introducida por Wedepohl [1] en 1963, permite desacoplar al sistema de ecuaciones de línea. Esto se logra mediante la matriz de transformación lineal de eigenvectores del producto  $ZY$  de la línea. Desafortunadamente dicha matriz varía con la frecuencia. Tradicionalmente se ha despreciado la dependencia frecuencial de la matriz de eigenvectores porque hasta hace poco no se contaba con un método que la tomara en cuenta [2], y porque además, así se reduce el tiempo de cómputo. No obstante, para algunas configuraciones de líneas y para cables subterráneos la dependencia frecuencial de las matrices de modos se hace muy fuerte y debe ser incluida.

Cuando los parámetros eléctricos de las líneas son dependientes de la frecuencia, las multiplicaciones en el dominio de la frecuencia se convierten en convoluciones en el dominio del tiempo. La operación de convolución es muy cara computacionalmente hablando; pero, es posible implementar esta operación de una manera mucho más eficiente si las funciones en el dominio de la frecuencia son reemplazadas por aproximaciones racionales.

La admitancia característica  $Y_c(s)$  es generalmente una función fácilmente ajustable. Por otro lado, la función de propagación  $H(s)$  presenta oscilaciones, por lo que el ajuste es mucho más complejo que el de  $Y_c(s)$ . Ajustar  $H(s)$  es difícil porque está compuesta de diferentes términos modales que en general tienen diferentes retardos.

Recientemente se introdujeron los modelos de Idempotentes [4] y Universal [5], los cuales incluyen satisfactoriamente la dependencia frecuencial de los parámetros eléctricos, tanto para líneas como para cables. En ambos métodos, los modelos se pasan directamente del dominio de Laplace al dominio del tiempo por medio de la técnica de la convolución

recursiva [3]. Previamente a estos modelos, había sido introducido el modelo ARMA por Noda [6]. En éste se propone a la transformada  $z$  como el puente entre el dominio de la frecuencia y el dominio del tiempo. El modelo ARMA tiene una desventaja respecto a los dos anteriores. Ésta es que el paso de integración no puede ser variado en las funciones ya ajustadas, pues éstas se sintetizan directamente en el dominio de  $z$ .

En esta tesis se toman los modelos de Idempotentes, Universal y ARMA para crear un nuevo modelo de línea que incluya lo mejor de cada uno de ellos; se usa la descomposición en Idempotentes y, el ajuste racional se hace con una técnica desarrollada por Semlyen y Gustavsen denominada “vector fitting” [7]; misma técnica que es empleada en el modelo Universal. Del modelo ARMA se adopta la idea de emplear a la transformada  $z$  como la interfaz entre el dominio de la frecuencia y el dominio del tiempo, así como también la de llevar a cabo la convolución recursivas por medio filtro ARMA. Se emplean técnicas de procesamiento digital de señales para pasar de un dominio a otro. La transformación de  $s$  a  $z$  se realiza con la técnica propuesta por Watson [8], así como con la regla bilineal. Con estas consideraciones, el modelo aquí propuesto presenta algunas ventajas en cuanto a su desempeño, mismas que serán mostradas en el capítulo cinco.

## 2 Teoría básica de líneas de transmisión

### 2.1 Línea de transmisión ideal monofásica

Las ecuaciones del telegrafista representan matemáticamente el comportamiento electromagnético de una línea ideal; es decir, sin pérdidas.

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = -L \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \quad (2.1)$$

y

$$\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = -C \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \quad (2.2)$$

En estas ecuaciones  $v(x,t)$  es el voltaje e  $i(x,t)$  es la corriente. Las constantes  $L$  y  $C$  son respectivamente, la inductancia y la capacitancia por unidad de longitud.

La combinación de (2.1) y (2.2) conduce a las siguientes ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden, las cuales corresponden a la ecuación de onda en una dimensión espacial:

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \quad (2.3)$$

y

$$\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x^2} = CL \frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2}. \quad (2.4)$$

Un método para la solución de (2.3) y (2.4) es el propuesto por Bergeron. Éste se basa en la solución general obtenida por d'Alembert para las ecuaciones de onda:

$$v(x,t) = f_1(x-ut) + f_2(x+ut), \quad (2.5)$$

donde  $u$  es la velocidad de propagación de una onda en una línea ideal y está dada por:

$$u = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (2.6)$$

A continuación se empleará el método de las características para resolver (2.3) y (2.4); esto en lugar de asumir simplemente la solución de d'Alembert. Puede probarse además que la

solución de d'Alembert nace de manera natural si (2.3) y (2.4) se resuelven con el método de las características. Se emplea el siguiente cambio de variables:

$$\xi = x - ut \quad (2.7)$$

y

$$\eta = x + ut. \quad (2.8)$$

Debe suponerse que  $v$  es una función de  $\xi$  y  $\eta$ ; esto es:

$$v = f(\xi, \eta). \quad (2.9)$$

Derivando a (2.9) parcialmente, dos veces, respecto a "x" ( $\partial^2 v / \partial x^2$ ) se obtiene:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} \quad (2.10)$$

De igual manera se calcula  $\partial^2 v / \partial t^2$ :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = u^2 \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} \right]. \quad (2.11)$$

Sustituyendo (2.10) y (2.11) en (2.3), se obtiene:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (2.12)$$

La solución a esta ecuación es fácil de visualizar bajo la siguiente consideración:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) = 0. \quad (2.13)$$

Es claro que la derivada parcial respecto a  $\xi$  es cero si:

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = F_2(\eta). \quad (2.14)$$

Integrando (2.14), se tiene que la solución de (2.12) es:

$$v(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta), \quad (2.15)$$

donde  $f_1(\xi)$  es la integral respecto a  $\xi$  de  $F_1(\xi)$  y  $f_2(\eta)$  es la integral respecto a  $\eta$  de  $F_2(\eta)$ . La ecuación (2.15) es idéntica a la propuesta por d'Alembert una vez que en ella se sustituyan (2.7) y (2.8). De acuerdo con lo anterior, la solución para la ecuación de onda de corriente (2.4) tiene que ser de la siguiente forma:

$$i(\xi, \eta) = p(\xi) + q(\eta). \quad (2.16)$$

Para encontrar a  $p(\xi)$  y a  $q(\eta)$  en función de  $f_1(\xi)$  y  $f_2(\eta)$ , primeramente se deriva (2.15) respecto a "t":

$$\frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial t} = \left( -\frac{\partial}{\partial \xi} f_1(\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta} f_2(\eta) \right) u. \quad (2.17)$$

Ahora se calcula  $\frac{\partial i(\xi, \eta)}{\partial x}$  de (2.16):

$$\frac{\partial i(\xi, \eta)}{\partial x} = \frac{\partial p(\xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial q(\eta)}{\partial \eta} \quad (2.18)$$

Sustituyendo (2.17) y (2.18) en (2.2) se obtiene la solución para la onda de corriente.

$$i(\xi, \eta) = y_c f_1(\xi) - y_c f_2(\eta), \quad (2.19)$$

donde  $y_c$  es la admitancia característica de una línea de transmisión ideal:

$$y_c \equiv \sqrt{C/L},$$

y su inversa se conoce como la impedancia característica:

$$z_c = y_c^{-1}$$

Las ecuaciones (2.15) y (2.19) llevan a las siguientes expresiones una vez que se hace el cambio de variables según (2.7) y (2.8):

$$v(x, t) + z_c i(x, t) = 2f_1(x - ut) \quad (2.20)$$

y

$$v(x, t) - z_c i(x, t) = 2f_2(x + ut). \quad (2.21)$$

## 2.2 Modelo de línea Bergeron-Dommel

Para una línea ideal de longitud finita  $l$ , el tiempo de viaje está dado por:

$$\tau = l / u . \quad (2.22)$$

El tiempo de viaje es el tiempo en que una onda, de voltaje o de corriente, atraviesa de un extremo al otro de la línea. Las ecuaciones (2.20) y (2.21) indican que una perturbación ocurrida en un extremo de la línea será recibida en el otro extremo un tiempo  $\tau$  después. Suponiendo que los extremos de la línea son “ $m$ ” y “ $k$ ”, una perturbación en “ $m$ ” llegará a “ $k$ ” un tiempo  $\tau$  después. En términos simbólicos esto queda como:

$$v_m(t - \tau) + z_c i_{mk}(t - \tau) = v_k(t) + z_c(-i_{km}(t)). \quad (2.23)$$

De (2.23) se obtiene:

$$i_{km}(t) = y_c v_k(t) + I_{hist,k}(t - \tau), \quad (2.24)$$

donde

$$I_{hist,k}(t - \tau) = -y_c v_m(t - \tau) - i_{mk}(t - \tau).$$

De manera análoga se obtiene también:

$$i_{mk}(t) = y_c v_m(t) + I_{hist,m}(t - \tau), \quad (2.25)$$

donde

$$I_{hist,m}(t - \tau) = -y_c v_k(t - \tau) - i_{km}(t - \tau).$$

Las ecuaciones (2.24) y (2.25) son interpretadas circuitalmente en la figura 2.1, donde puede apreciarse que entre el circuito del nodo de envío y el de recepción no hay conexión directa; sin embargo, hay un acoplamiento entre ambos circuitos a través de las fuentes de corrientes de historia  $I_{hist,k}(t - \tau)$  e  $I_{hist,m}(t - \tau)$ .

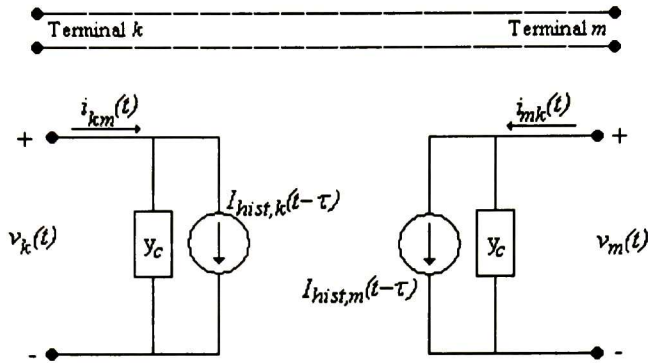


Figura 2.1 Línea de transmisión sin pérdidas y su representación circuital.

### 2.3 Línea monofásica con pérdidas

Las siguientes ecuaciones conocidas como ecuaciones modificadas del telegrafista suelen usarse para describir el comportamiento electromagnético de una línea de transmisión con pérdidas:

$$-\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = L \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + Ri(x,t) \quad (2.26a)$$

y

$$-\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = C \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + Gv(x,t). \quad (2.26b)$$

Estas ecuaciones son exactas sólo para régimen senoidal, donde  $L$ ,  $R$ ,  $C$  y  $G$  se calculan a la frecuencia determinada de la senoide. Para formas de onda no senoidales estas ecuaciones son aproximadas. Las ecuaciones modificadas del telegrafista son lineales, por lo que el principio de superposición es válido. Una señal periódica no senoidal puede en general expresarse según la teoría de Fourier como un ensamble infinito de funciones senoidales. De lo anterior se deduce que la repuesta de las ecuaciones modificadas del telegrafista para una señal periódica no senoidal puede calcularse a través de la expansión en series de Fourier de ésta así como del principio de superposición. Es necesario pasar de la expansión en series de Fourier a la transformada de Fourier pues las señales de excitación empleadas generalmente no son periódicas. Por esto mismo, las ecuaciones modificadas del telegrafista deben trasladarse al dominio de Fourier:



$$-\frac{dV}{dx} = (j\omega L + R)I \quad (2.27a)$$

y

$$-\frac{dI}{dx} = (j\omega C + G)V \quad (2.27b)$$

$V = V(x, j\omega)$  e  $I = I(x, j\omega)$  son respectivamente las imágenes en el dominio de Fourier de  $v(x, t)$  e  $i(x, t)$ .

Se sabe que en líneas con pérdidas, los parámetros eléctricos están en función de la frecuencia. En las ecuaciones (2.27a) y (2.27b) puede fácilmente permitirse la variación frecuencial de  $L$ ,  $R$ ,  $C$  y  $G$ . En estas ecuaciones, el término  $j\omega L + R$  es denominado como la impedancia serie de la línea, y se representa por  $Z$ ; en cambio,  $j\omega C + G$  es denominado como la admitancia paralelo de la línea, y es representada por  $Y$ .

Es conveniente usar la transformada de Laplace sustituyendo en (2.27a) y (2.27b) a  $j\omega$  por  $s$ :

$$-\frac{dV}{dx} = ZI \quad (2.28a)$$

y

$$-\frac{dI}{dx} = YV \quad (2.28b)$$

En las ecuaciones anteriores,  $I$ ,  $V$ ,  $Z$  y  $Y$  son funciones de Laplace. La combinación de (2.28a) y (2.28b) conduce a:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = ZYV. \quad (2.29)$$

La solución de (2.29) es:

$$V(x, s) = e^{-\gamma x} C_1 + e^{\gamma x} C_2, \quad (2.30a)$$

donde  $\gamma$  corresponde al coeficiente de propagación de onda, el cual es usualmente complejo:

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \alpha + j\beta. \quad (2.30b)$$

La solución de (2.28a) y (2.28b) para las corrientes, puede obtenerse derivando a (2.30a) respecto a "x" y sustituyéndola en (2.28a):

$$I(x, s) = Y_c \left[ e^{-\gamma x} C_1 - e^{\gamma x} C_2 \right], \quad (2.30c)$$

donde  $Y_c$  es la admitancia característica de una línea con pérdidas, y ésta se define como:

$$Y_c = Z^{-1}\gamma = \sqrt{Z^{-1}Y} \quad (2.30d)$$

Considérese ahora un segmento de línea de transmisión de longitud  $l$ . El voltaje y la corriente al inicio de la línea, según (2.30a) y (2.30c), son:

$$V_o \equiv V(0, s) = C_1 + C_2 \quad (2.31a)$$

e

$$I_o \equiv I(0, s) = Y_c (C_1 - C_2). \quad (2.31b)$$

De (2.31a) y (2.31b) se llega a:

$$I_o + Y_c V_o = 2Y_c C_1. \quad (2.32)$$

El voltaje  $V_l$  y la corriente  $I_l$  en el extremo final de la línea según (2.30a) y (2.30d) son:

$$V_l \equiv V(l, s) = e^{-\gamma l} C_1 + e^{\gamma l} C_2 \quad (2.33a)$$

e

$$I_l \equiv -I(l, s) = Y_c [-e^{-\gamma l} C_1 + e^{\gamma l} C_2]. \quad (2.33b)$$

Combinando (2.33a) y (2.33b) se obtiene:

$$I_l - Y_c V_l = 2Y_c e^{-\gamma l} C_1. \quad (2.34)$$

Finalmente de (2.32) y (2.34) se obtiene la siguiente relación entre las variables  $I_o$ ,  $I_l$ ,  $V_o$ , y  $V_l$  en los extremos del segmento de línea:

$$I_l = Y_c V_l - H [I_o + Y_c V_o], \quad (2.35a)$$

donde  $H$  es conocida como la función de propagación de la línea, y está definida como:

$$H = e^{-\gamma l}$$

Apelando a razones de simetría de la línea, se obtiene la siguiente expresión que es complementaria de (2.35a):

$$I_o = Y_c V_o - H [I_l + Y_c V_l]. \quad (2.35b)$$

La aplicación de la transformada inversa de Laplace en (2.35a) o (2.35b) da la solución de las ecuaciones de línea en el dominio del tiempo:

$$i_i(t) = y_c(t) * v_i(t) - h(t) * [i_o(t) + y_c(t) * v_o(t)] \quad (2.36a)$$

e

$$i_o(t) = y_c(t) * v_o(t) - h(t) * [i_i(t) + y_c(t) * v_i(t)]. \quad (2.36b)$$

Donde  $y_c(t)$ ,  $h(t)$ ,  $i_i(t)$ ,  $i_o(t)$ ,  $v_i(t)$  y  $v_o(t)$  son las respectivas transformadas inversas de Laplace de  $Y_c$ ,  $H$ ,  $I_i$ ,  $I_o$ ,  $V_i$  y  $V_o$ . El asterisco “\*” denota la operación de convolución. En el caso de línea ideal, la inversión al dominio del tiempo de (2.35a) o de (2.35b) se simplifica. Para esta línea  $R=G=0$  mientras que  $L$  y  $C$  son constantes; entonces:

$$Y_c = \sqrt{L^{-1}C} \quad (2.37a)$$

y

$$\gamma = s\sqrt{CL}. \quad (2.37b)$$

Sustituyendo estas ecuaciones en (2.35a) y (2.35b) se obtiene:

$$i_i(t) = y_c v_i(t) - [i_o(t - \tau) + y_c v_o(t - \tau)] \quad (2.38a)$$

e

$$i_o(t) = y_c v_o(t) - [i_i(t - \tau) + y_c v_i(t - \tau)]. \quad (2.38b)$$

Estas últimas expresiones corresponden al modelo de línea ideal de Bergeron-Dommel ampliamente utilizado en el programa EMTP. Para el caso de una línea con pérdidas donde  $L$ ,  $R$ ,  $C$  y  $G$  son funciones de  $s$ , la inversión analítica de (2.35a) o (2.35b) generalmente no es viable, por lo que un modelo de éstas en el dominio del tiempo es complicado. Es importante destacar que la dependencia frecuencial de los parámetros eléctricos introduce convoluciones.

## 2.4 Línea polifásica con pérdidas

En esta sección el modelo de línea monofásica con pérdidas se extiende al caso polifásico. Para empezar se define a  $\mathbf{A}$  como el producto  $\mathbf{ZY}$ , y se supone que  $\mathbf{A}$  es diagonalizable de la siguiente forma:

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} = \mathbf{\Lambda},$$

siendo  $\mathbf{M}$  la matriz de modos de voltaje y  $\mathbf{\Lambda}$  es la matriz diagonal de eigenvalores de  $\mathbf{A}$ .

La función de propagación  $\mathbf{H}$  en el caso polifásico es:

$$\mathbf{H} = \exp(-\mathbf{\Psi}^T l),$$

donde  $\Psi$  está definida de la siguiente manera:

$$\Psi = \mathbf{M}\Gamma\mathbf{M}^{-1}$$

En esta última expresión  $\Gamma$  es una matriz compuesta por los coeficientes de propagación correspondientes a cada modo y se define como:

$$\Gamma = \sqrt{\Lambda}$$

La admitancia característica de una línea polifásica es:

$$\mathbf{Y}_c = \mathbf{Z}^{-1}\Psi$$

Para una línea polifásica las ecuaciones (2.35a) y (2.35b) toman la siguiente forma:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{Y}_c \mathbf{V}_1 - \mathbf{H}[\mathbf{I}_0 + \mathbf{Y}_c \mathbf{V}_0] \quad (2.39a)$$

e

$$\mathbf{I}_0 = \mathbf{Y}_c \mathbf{V}_0 - \mathbf{H}[\mathbf{I}_1 + \mathbf{Y}_c \mathbf{V}_1] \quad (2.39b)$$

Las ecuaciones (2.39a) y (2.39b) en el dominio del tiempo quedan representadas como:

$$\mathbf{i}_1(t) = \mathbf{y}_c(t) * \mathbf{v}_1(t) - \mathbf{h}(t) * [\mathbf{i}_0(t) + \mathbf{y}_c(t) * \mathbf{v}_0(t)] \quad (2.40a)$$

e

$$\mathbf{i}_0(t) = \mathbf{y}_c(t) * \mathbf{v}_0(t) - \mathbf{h}(t) * [\mathbf{i}_1(t) + \mathbf{y}_c(t) * \mathbf{v}_1(t)] \quad (2.40b)$$

La solución de las ecuaciones (2.39a) y (2.39b) para líneas multiconductoras es generalmente hecha mediante la teoría descomposición modal [2]. Ésta consiste básicamente en desacoplar (2.39a) y (2.39b) en tantas ecuaciones como fases tenga la línea. Sin embargo la técnica de descomposición modal tiene sus limitaciones, debido a que la matriz de transformación modal es generalmente compleja. Es altamente conveniente introducir métodos en el dominio de la frecuencia que permitan solucionar el problema de la dependencia frecuencial, tales como la transformada de Fourier o la transformada numérica de Laplace (TNL) [9, 10].

## 2.5 Modelo PI de líneas

Los métodos de solución basados en el dominio de la frecuencia tienen la gran ventaja de incluir por completo la dependencia frecuencial de los parámetros eléctricos. Sin embargo con este tipo de técnicas no es posible realizar simulaciones. La TNL es uno de los métodos del dominio de la frecuencia, que es ampliamente utilizado para el estudio de transitorios

electromagnéticos cuando se requiere tomar en cuenta por completo los efectos de la frecuencia en el dominio del tiempo. El modelo PI de línea permite aplicar la TNL y por esta razón es que será expuesto a continuación:

La síntesis del modelo PI parte de las ecuaciones modificadas del telegrafista en el dominio de Laplace. Las ecuaciones (2.30a) y (2.30d) para una línea polifásica son:

$$\mathbf{V}(x,s) = e^{(-\Psi l)} \mathbf{C}_1 + e^{(\Psi l)} \mathbf{C}_2 \quad (2.41a)$$

e

$$\mathbf{I}(x,s) = \mathbf{Y}_c \left[ e^{(-\Psi l)} \mathbf{C}_1 - e^{(\Psi l)} \mathbf{C}_2 \right]. \quad (2.41b)$$

Se hacen las siguientes definiciones:  $\mathbf{I}_o \equiv \mathbf{I}(x=0)$ ,  $\mathbf{V}_o \equiv \mathbf{V}(x=0)$ ,  $\mathbf{I}_L \equiv -\mathbf{I}(x=l)$  y  $\mathbf{V}_L \equiv \mathbf{V}(x=l)$ . Después se reemplazan con éstas a las constantes  $\mathbf{C}_1$  y  $\mathbf{C}_2$ . Finalmente se llega a una expresión matricial que relaciona los voltajes y corrientes de los extremos de la línea [12,13].

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_o \\ \mathbf{I}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_c \coth(\Psi l) & -\mathbf{Y}_c \operatorname{csch}(\Psi l) \\ -\mathbf{Y}_c \operatorname{csch}(\Psi l) & \mathbf{Y}_c \coth(\Psi l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_o \\ \mathbf{V}_L \end{bmatrix}. \quad (2.42a)$$

Ahora se introducen las siguientes definiciones:  $\mathbf{A} \equiv \mathbf{Y}_c \coth(\Psi l)$  y  $\mathbf{B} \equiv \mathbf{Y}_c \operatorname{csch}(\Psi l)$ . Al incluir la admitancia de la fuente  $\mathbf{Y}_f$  y la carga conectada  $\mathbf{Y}_L$ , la ecuación (2.42a) se transforma en [12,13]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_s \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{Y}_f & -\mathbf{B} \\ -\mathbf{B} & \mathbf{A} + \mathbf{Y}_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_o \\ \mathbf{V}_L \end{bmatrix}. \quad (2.42b)$$

La ecuación (2.42b) puede ser interpretada circuitalmente como se muestra en la figura 2.2. Esta representación es denominada circuito PI.

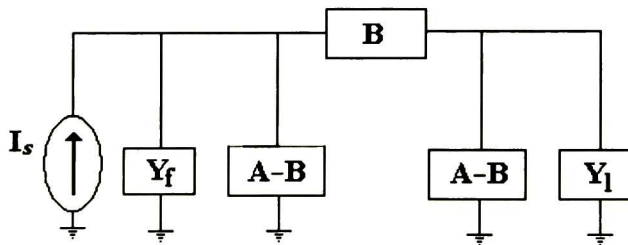


Figura 2.2 Circuito  $\pi$  equivalente de la ecuación (2.42b).

### 3 Modelado de líneas de transmisión en el dominio del tiempo

Las expresiones (2.42a) y (2.42b) establecen un modelo de línea polifásica en el dominio de la frecuencia, con el que se puede lograr una alta precisión en la introducción de la dependencia frecuencial de los parámetros eléctricos. Desafortunadamente, este modelo, como todos en el dominio de la frecuencia no permite realizar simulaciones. Por otro lado, las expresiones (2.40a) y (2.40b) constituyen un modelo de línea en el dominio del tiempo. En este último se pueden llevar a cabo simulaciones; sin embargo, presenta serias dificultades de carácter práctico. Una primera dificultad está en obtener las imágenes en el dominio del tiempo de  $\mathbf{H}(s)$  y de  $\mathbf{Y}_c(s)$ :

$$\mathbf{h}(t) = L^{-1} \{ \mathbf{H}(s) \}$$

y

$$\mathbf{y}_c(t) = L^{-1} \{ \mathbf{Y}_c(s) \}.$$

$\mathbf{h}(t)$  y  $\mathbf{y}_c(t)$  son funciones mal condicionadas, pues suelen tener singularidades.

Otra dificultad está en la realización de las convoluciones que, en el dominio del tiempo, se deben realizar en forma discreta (convolución larga). Además, el número de operaciones requeridas para efectuar la convolución larga aumenta en cada paso de integración:

$$y(n) = g(n) * x(n) = \sum_{k=0}^n x(k) g(n-k).$$

Una alternativa propuesta en 1975 por Semlyen y Dabuleanu [3] para evitar el problema de la convolución larga es la llamada convolución recursiva, que se describe a continuación. En el caso monofásico, si en el producto  $Y_c(s)V(s)$  la admitancia característica  $Y_c(s)$  está aproximada por medio de una función racional propia de orden  $N$ , entonces la convolución puede hacerse en el dominio del tiempo mediante una ecuación en diferencias recursiva de orden  $N$ . En el caso de funciones propias, el orden corresponde al grado del polinomio del denominador. La admitancia característica es una función trascendental, pero que puede ser aproximada mediante una función racional:

$$Y_c(s) \cong \frac{P(s)}{Q(s)},$$

aquí  $P(s)$  y  $Q(s)$  son polinomios, ambos de grado  $N$ . La aproximación racional de  $Y_c(s)$  es propia. Cabe decir que se suele evitar el uso de funciones impropias, ya que éstas se

comportan como diferenciadores a altas frecuencias, y esto introduce ruido en las simulaciones.

Asumiendo que la admitancia característica  $Y_c(s)$  está aproximada mediante una función racional, el producto  $Y_c(s) V(s)$  puede llevarse al dominio del tiempo como se describe a continuación. Sea:

$$\begin{aligned} I(s) &= Y_c(s) V(s) \\ &= \frac{P(s)}{Q(s)} V(s) = \frac{p_0 s^N + p_1 s^{N-1} + \dots + p_N}{q_0 s^N + q_1 s^{N-1} + \dots + q_N} V(s). \end{aligned} \quad (3.1)$$

La expresión (3.1) puede escribirse también como se muestra enseguida:

$$\sum_{k=0}^N q_k s^{N-k} I(s) = \sum_{k=0}^N p_k s^{N-k} V(s). \quad (3.2)$$

En el dominio del tiempo las expresiones (3.1) y (3.2) equivalen a la siguiente ecuación diferencial ordinaria (EDO):

$$\sum_{k=0}^N q_k \frac{d^{N-k} i(t)}{dt^{N-k}} = \sum_{k=0}^M p_k \frac{d^{N-k} v(t)}{dt^{N-k}}, \quad (3.3)$$

siendo  $i(t)$  y  $v(t)$  las respectivas imágenes en el dominio del tiempo de  $I(s)$  y de  $V(s)$ . Según la última expresión, el aproximar  $Y_c(s)$  por medio de una función racional conduce a una EDO en el dominio del tiempo de orden igual al orden del ajuste racional de  $Y_c(s)$ . Si la aproximación racional de  $Y_c(s)$  se expande en fracciones parciales, entonces se puede llegar fácilmente a una representación en variables de estado. La expansión en fracciones parciales de  $Y_c(s)$  es:

$$Y_c(s) \cong \sum_{k=1}^N \frac{r_k}{s - p_k} + D, \quad (3.4)$$

en donde los términos  $p_k$  son los polos del polinomio  $Q(s)$ ,  $r_k$  son los residuos y  $D$  es un término constante.

Introduciendo la aproximación racional de  $Y_c(s)$  dada por (3.4) en (3.1), se tiene:

$$I(s) = \left( \sum_{k=1}^N \frac{r_k}{s - p_k} + D \right) V(s). \quad (3.5)$$

Ahora se introduce la siguiente definición:

$$I_k(s) \equiv \frac{r_k}{s - p_k} V(s), \text{ para } k = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (3.6)$$

La ecuación (3.5) se expresa entonces de la siguiente forma:

$$I(s) = \sum_{k=1}^N I_k(s) + DV(s).$$

Claramente se sigue de lo anterior que el sistema de ecuaciones en el dominio del tiempo equivalente a (3.5) es:

$$\begin{aligned} \frac{di_k(t)}{dt} - p_k i_k(t) &= r_k v(t), \quad k = 1, 2, 3, \dots, N \\ i(t) &= i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + \dots + i_N(t) + Dv(t). \end{aligned} \quad (3.7)$$

El conjunto de ecuaciones (3.7) demuestra también que (3.1) equivale, en el dominio del tiempo, a un sistema de  $N$  EDOs de primer orden, lo que corresponde a una representación en variables de estado. En todo caso, ya sea con (3.3) o con (3.7) se logra cambiar la convolución larga por ecuaciones diferenciales ordinarias que pueden ser resueltas numéricamente en forma recursiva.

La función de propagación  $H(s)$ , a diferencia de la admitancia característica, presenta oscilaciones, por lo que su ajuste debe ser realizado de otra manera. En 1982 [2], J. R. Martí, identificó a estas oscilaciones como una exponencial compleja. En el caso monofásico, J. R. Martí propuso que  $H(s)$  se aproximara por medio del producto de una función racional y una exponencial compleja. La exponencial compleja en  $H(s)$ , equivale a un retardo  $\tau$  en el dominio del tiempo. La aproximación racional de  $H(s)$  es pues:

$$H(s) \cong \frac{P(s)}{Q(s)} e^{-\tau s} \quad (3.8)$$

siendo  $P(s)$  y  $Q(s)$  polinomios de grado  $M$ . En el caso de la admitancia característica, el grado de aproximación racional es  $N$ . En la práctica el autor de esta tesis ha encontrado que en general el orden de la aproximación racional de la función de propagación es mayor que el de la admitancia característica.

Habiendo sido aproximada  $H(s)$  de la forma (3.8), el producto  $H(s)I_b(s)$ , también puede llevarse al dominio del tiempo a través de una EDO de orden  $M$ , o bien, mediante un sistema de  $M$  EDOs de primer orden. El producto



$$I_a(s) = H(s)I_b(s),$$

equivale también a

$$\sum_{k=0}^M q_k s^{M-k} I_a(s) = \sum_{k=0}^M p_k s^{M-k} (e^{-\tau s}) I_b(s). \quad (3.9a)$$

La transformada inversa de Laplace, correspondiente a la expresión (3.9a) es:

$$\sum_{k=0}^M q_k \frac{d^{M-k} i_a(t)}{dt^{M-k}} = \sum_{k=0}^M p_k \frac{d^{M-k} i_b(t-\tau)}{dt^{M-k}}, \quad (3.9b)$$

donde  $i_a(t)$  e  $i_b(t)$  son respectivamente las imágenes en el dominio del tiempo de  $I_a(s)$  e  $I_b(s)$ . Nótese que el factor exponencial  $e^{-\tau s}$  en (3.8) equivale a un retardo  $\tau$  en el dominio del tiempo. Esto es de esperarse debido a que las perturbaciones en uno de los extremos de la línea tardan un tiempo  $\tau$  en llegar al otro extremo. Para una línea ideal, la función de propagación consta solamente del factor exponencial complejo. En caso de una línea con pérdidas,  $H(s)$  está compuesta por un factor de distorsión que deforma a la onda, y de otra que la retrasa. En la aproximación (3.8) la función racional es el factor de distorsión de la onda, mientras que la exponencial compleja es el factor de retraso.

Las anteriores aproximaciones se extienden a líneas polifásicas.  $Y_c(s)$  se extiende de manera directa. La extensión de  $H(s)$  presentó muy serias dificultades que han sido recientemente solucionadas [4,5]. En el caso de una línea de transmisión polifásica, cada modo de propagación tiene su propio tiempo de retardo. En la función de propagación de una línea polifásica  $H(s)$ , todos los retardos correspondientes a cada modo están completamente mezclados en los elementos de  $H(s)$ . Separar cada uno de los retardos es un problema que recientemente se solucionó a través de la descomposición en Idempotentes [4].

### 3.1 Descomposición en Idempotentes de la matriz de propagación

La diagonalización de  $H(s)$  se logra a través de la matriz de modos de corriente  $N(s)$ . De tal forma que  $H_m(s) = N^{-1}(s)H(s)N(s)$  es diagonal.

La descomposición en Idempotentes es derivada de la relación siguiente:

$$H(s) = N(s)H_m(s)N^{-1}(s), \quad (3.10)$$

donde

$$\mathbf{H}_m(s) = \text{diag}\left(e^{-\gamma_1 l}, e^{-\gamma_2 l}, e^{-\gamma_3 l}, \dots, e^{-\gamma_{n_f} l}\right).$$

Para una línea de  $n_f$  fases lo primero es particionar la matriz de modos de corrientes  $\mathbf{N}(s)$  en columnas  $\mathbf{C}_k(s)$ , mientras que  $\mathbf{N}^{-1}(s)$  se particiona en filas  $\mathbf{R}_k(s)$ . Una vez hecho esto, (3.10) se reescribe como:

$$\mathbf{H}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1(s) & \mathbf{C}_2(s) & \dots & \mathbf{C}_{n_f}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\gamma_1 l} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-\gamma_2 l} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\gamma_{n_f} l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1(s) \\ \mathbf{R}_2(s) \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{n_f}(s) \end{bmatrix}. \quad (3.11a)$$

La expresión (3.11a) es equivalente también a:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(s) &= \mathbf{C}_1(s)\mathbf{R}_1(s)e^{-\gamma_1 l} + \mathbf{C}_2(s)\mathbf{R}_2(s)e^{-\gamma_2 l} + \dots + \mathbf{C}_{n_f}(s)\mathbf{R}_{n_f}(s)e^{-\gamma_{n_f} l} \\ &= \Theta_1(s)e^{-\gamma_1 l} + \Theta_2(s)e^{-\gamma_2 l} + \dots + \Theta_{n_f}(s)e^{-\gamma_{n_f} l} \end{aligned} \quad (3.11b)$$

donde  $\Theta_k(s) = \mathbf{C}_k(s)\mathbf{R}_k(s)$  son los Idempotentes de  $\mathbf{H}(s)$ .

La expresión (3.11b) puede escribirse de forma compacta, como se muestra a continuación:

$$\mathbf{H}(s) = \sum_{k=1}^{n_f} \Theta_k(s)e^{-\gamma_k l} \quad (3.12)$$

Los coeficientes  $\gamma_k$  generalmente son complejos y dependen de la frecuencia:

$$\gamma_k(\omega) = \alpha_k(\omega) + j\beta_k(\omega), \quad (3.13)$$

donde  $\alpha_k(\omega)$  representa a la constante de atenuación del  $k$ -ésimo modo de la línea, y  $\beta_k(\omega)$  representa a la correspondiente constante de fase. Es posible separar a  $\beta_k(\omega)$  en una componente lineal  $\beta_{kl}\omega$  y una componente no lineal  $\beta_{kn}(\omega)$ :

$$\beta_k(\omega) = \beta_{kl}\omega + \beta_{kn}(\omega). \quad (3.14)$$

El tiempo mínimo de viaje “ $\tau_k$ ” del  $k$ -ésimo modo está dado por  $\beta_{kl}l$ , por lo que:

$$-\gamma_k l = -\alpha_k(\omega)l - j\omega\tau_k - j\beta_n(\omega)l, \quad (3.15a)$$

o bien, en el dominio de Laplace:

$$-\gamma_k l = -\alpha_k(s)l - s\tau_k - j\beta_n(s)l. \quad (3.15b)$$

Sustituyendo (3.15b) en (3.12) se obtiene:

$$\mathbf{H}(s) = \sum_{k=1}^{n_f} \mathbf{\Theta}_k(s) e^{-\alpha_k(s)l - j\beta_n(s)l} e^{-s\tau_k} \quad (3.16)$$

Ahora se introduce la siguiente definición:

$$\tilde{\mathbf{\Theta}}_k(s) \equiv \mathbf{\Theta}_k(s) e^{-\alpha_k(s)l - j\beta_n(s)l}$$

Finalmente se llega a una representación de  $\mathbf{H}(s)$ , en la cual quedan explícitamente separadas las exponenciales complejas que corresponden a los retardos modales en el dominio del tiempo:

$$\mathbf{H}(s) = \sum_{k=1}^{n_f} \tilde{\mathbf{\Theta}}_k(s) e^{-s\tau_k} \quad (3.17)$$

La descomposición de (3.17) logra separar a los retardos modales. Sólo queda efectuar las aproximaciones racionales de los términos  $\tilde{\mathbf{\Theta}}_k(s)$ .

Al sustituir (3.17) en las ecuaciones (2.39a) y (2.39b), éstas se modifican de la siguiente manera:

$$\mathbf{I}_2(s) = \mathbf{Y}_c(s) \mathbf{V}_2(s) - \sum_{k=1}^{n_f} \tilde{\mathbf{\Theta}}_k(s) e^{-s\tau_k} [\mathbf{I}_1(s) + \mathbf{Y}_c(s) \mathbf{V}_1(s)] \quad (3.18a)$$

e

$$\mathbf{I}_1(s) = \mathbf{Y}_c(s) \mathbf{V}_1(s) - \sum_{k=1}^{n_f} \tilde{\mathbf{\Theta}}_k(s) e^{-s\tau_k} [\mathbf{I}_2(s) + \mathbf{Y}_c(s) \mathbf{V}_2(s)], \quad (3.18b)$$

donde los subíndices 1 y 2 representan a los extremos de la línea.

### 3.2 Ajuste racional de la matriz de propagación

Sea  $\tilde{\Theta}_k^{ij}(s)$  el  $k$ -ésimo elemento  $(i,j)$  de la  $k$ -ésima matriz  $\tilde{\mathbf{\Theta}}_k(s)$ . Éste se aproxima de la siguiente manera:

$$\tilde{\Theta}_k^{ij}(s) \cong \frac{a_{k0}^{ij} s^M + a_{k1}^{ij} s^{M-1} + \dots + a_{kM}^{ij}}{s^M + b_{k1} s^{M-1} + \dots + b_{kM}}. \quad (3.19)$$

En la aproximación racional hecha para la  $k$ -ésima matriz  $\tilde{\Theta}_k(s)$ , se fuerza a que sus elementos tengan polos comunes para todo  $(i,j)$ , pues con esto se disminuye considerablemente el número de operaciones, y por consecuencia se disminuye también el tiempo de cómputo.

### 3.3 Ajuste racional de la admitancia característica

La admitancia característica se sintetiza en forma racional directamente. Se utiliza un grupo común de polos para todos los elementos de ésta.  $Y_c^{ij}(s)$  es el elemento  $(i,j)$  de  $Y_c(s)$ . Éste se aproxima racionalmente de la siguiente manera:

$$Y_c^{ij}(s) \cong \frac{a_0^{ij}s^N + a_1^{ij}s^{N-1} + \dots + a_N^{ij}}{s^N + b_1s^{N-1} + \dots + b_N} \quad (3.20)$$

A diferencia del modelo ARMA de Noda, en el cual el ajuste racional se hace directamente en el dominio de  $z$ , aquí se hará un paso intermedio antes de sintetizar la función en el dominio de  $z$ . Primeramente se ajustarán racionalmente las funciones en el dominio de Laplace con la técnica de “vector fitting”, y posteriormente se emplearán técnicas de procesamiento digital de señales para llevar la función racional de  $s$  a  $z$  [8, 11]. El utilizar el ajuste racional en el dominio de Laplace como preámbulo a los filtros ARMA, tiene la siguiente gran ventaja: una vez obtenida la función racional en el dominio de Laplace, es posible variar el paso de integración  $\Delta t$  sin tener que repetir el proceso de ajuste. Lo anterior no es posible en el modelo ARMA de Noda.

## 4 Formulación de modelos de línea en el dominio de $z$

### 4.1 Conversión del dominio de Laplace al dominio de $z$

Un filtro analógico se puede describir por medio de su función de transferencia o de su respuesta impulsional. Alternativamente, un filtro analógico cuya función de transferencia es racional, puede también ser descrito a través de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes. Cada una de estas tres caracterizaciones equivalentes para un filtro analógico conduce a un método distinto para convertir filtros al dominio digital.

En esta tesis se empleará la regla bilineal [11], así como la técnica de “root matching” [8]. La regla bilineal es una correspondencia que transforma el eje imaginario del plano  $s$  en la circunferencia unidad del plano  $z$ . Además, todos los polos del semiplano izquierdo de  $s$  son mapeados al interior de la circunferencia unidad. La transformación bilineal se puede ligar a la regla trapezoidal para integración numérica [11]. Por ejemplo, considere un filtro analógico con función de transferencia

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = s, \quad (4.1)$$

cuya representación en ecuación diferencial es

$$\frac{dx}{dt} - y(t) = 0.$$

La aproximación de esta ecuación mediante la fórmula trapezoidal en  $t=n\Delta t$  lleva a la ecuación en diferencias

$$\frac{x(n\Delta t) - x(n\Delta t - \Delta t)}{\Delta t} = \frac{y(n\Delta t) + y(n\Delta t - \Delta t)}{2}.$$

donde  $\Delta t$  es el paso de integración.

Aplicando la transformada  $z$  a la ecuación anterior, se obtiene:

$$\frac{(1 - z^{-1})X(z)}{\Delta t} = \frac{(1 + z^{-1})Y(z)}{2}$$

Así pues, la función de transferencia del filtro digital equivalente a (4.1) es

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2}{\Delta t} \left( \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right).$$

Consecuentemente, la correspondencia entre el plano  $s$  y el plano  $z$  es

$$s = \frac{2}{\Delta t} \left( \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right). \quad (4.2)$$

Ésta es la denominada “transformación bilineal” o “regla bilineal”. Aunque aquí la regla bilineal se desarrolló para una ecuación diferencial de primer orden, ésta es válida también para una ecuación diferencial de orden  $N$ . Adviértase que la regla bilineal es una transformación de segundo orden, pues ésta corresponde a la regla trapezoidal.

Otra alternativa para convertir a un filtro analógico en uno digital equivalente consiste básicamente en hacer corresponder los polos y ceros de  $G(s)$  directamente con los polos y ceros de  $G(z)$ , de la función de transferencia del filtro digital en el plano  $z$ . Dentro de este tipo de métodos se encuentra la técnica denominada “root matching” [8]. Hay una familia de fórmulas de “root matching”, las cuales dependen del tipo de aproximación numérica que se asuma del área bajo la curva de la señal de excitación. Aquí se asumirá una aproximación mediante rectángulos circunscritos. Supóngase que la función de transferencia del filtro analógico se expresa en la forma factorizada:

$$G(s) = \frac{\prod_{k=1}^N (s - z_k)}{\prod_{k=1}^M (s - p_k)}$$

donde los valores  $z_k$  son los  $N$  ceros y los  $p_k$  son los  $M$  polos del filtro. Por tanto, la función de transferencia del correspondiente filtro digital es pues:

$$G(z) = K \frac{\prod_{k=1}^N (1 - e^{z_k \Delta t} z^{-1})}{\prod_{k=1}^M (1 - e^{p_k \Delta t} z^{-1})}.$$

donde  $K$  es una constante que se calcula en base al teorema del valor final. En esta tesis, los filtros analógicos están caracterizados por funciones racionales propias y estables, por lo que el valor final a una entrada escalón unitario es siempre finito y diferente de cero. Por esto mismo, es que  $K$  se calculará para una entrada escalón unitario. A diferencia de la regla

bilineal, la técnica de ‘root matching’ aquí empleada es una transformación de primer orden, puesto que la aproximación de la integral de la función de excitación es hecha mediante rectángulos.

#### 4.2 Convolución recursiva por medio de un filtro ARMA

La relación entre la entrada y la salida de un sistema lineal invariante en tiempo se describe en el dominio de  $z$  de la siguiente forma:

$$Y(z) = G(z)X(z), \quad (4.3)$$

donde  $G(z)$  es la función de transferencia del sistema, mientras que  $X(z)$  y  $Y(z)$  representan respectivamente la entrada y la salida del sistema.  $G(z)$  es una función racional de orden  $N$

$$G(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}{1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}} \quad (4.4)$$

Una forma equivalente de (4.3) es:

$$(1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N})Y(z) = (a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N})X(z); \quad (4.5)$$

que, en el dominio del tiempo discreto, equivale a la siguiente ecuación en diferencias:

$$y(n) = a_0 x(n) + \sum_{k=1}^N \{a_k x(n-k) - b_k y(n-k)\}, \quad (4.6)$$

siendo  $y(n)$  y  $x(n)$  las imágenes en el dominio del tiempo discreto de  $Y(z)$  y  $X(z)$  respectivamente. Según esta última expresión, la salida es obtenida con  $2N+1$  multiplicaciones y  $2N$  sumas. Nótese que (4.6) equivale a la convolución entre  $g(n)$  y  $x(n)$ . Esto es:

$$y(n) = g(n) * x(n),$$

donde  $g(n)$  es la imagen en el dominio del tiempo discreto de  $G(z)$ .

Si se supone que la entrada  $x(n)$  es una señal de voltaje denotada por  $v(n)$  y que la salida  $y(n)$  es una señal de corriente denotada por  $i(n)$ , entonces  $G(z)$  es una admitancia generalizada. La expresión (4.6) queda entonces de la siguiente forma:

$$i(n) = G_0 v(n) + i_f(n), \quad (4.7)$$

donde

$$G_0 = a_0$$

e

$$i_f(n) = \sum_{k=1}^N \{a_k v(n-k) - b_k i(n-k)\}.$$

$G_0$  es una conductancia instantánea e  $i_f(n)$  es una corriente formada por corrientes y voltajes pasados; de hecho, es una corriente de historia.

En el caso de un sistema lineal invariante en tiempo de  $n_f$  entradas y  $n_f$  salidas, éste se describe en el dominio de  $z$  de la siguiente forma:

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{G}(z)\mathbf{X}(z), \quad (4.8)$$

donde  $\mathbf{Y}(z)$  y  $\mathbf{X}(z)$  son vectores columna de longitud  $n_f$ , y  $\mathbf{G}(z)$  es una matriz de dimensión  $n_f \times n_f$ . Cada elemento  $(i,j)$  de  $\mathbf{G}(z)$  es una función racional de orden  $N$ .  $G^{ij}(z)$  es el elemento  $(i,j)$  de  $\mathbf{G}(z)$ , el cual se representa como sigue:

$$G^{ij}(z) = \frac{P^{ij}(z)}{Q(z)} = \frac{\sum_{k=0}^N a_k^{ij} z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}}. \quad (4.9)$$

donde  $P^{ij}(z)$  y  $Q(z)$  son polinomios de grado  $N$ . Se ha elegido que  $\mathbf{G}(z)$  contenga un grupo común de polos para todos sus elementos; con el propósito de simplificar la operación de convolución. El sistema  $\mathbf{I}(z) = \mathbf{G}(z)\mathbf{V}(z)$  puede llevarse al dominio del tiempo discreto a través de una ecuación en diferencias recursiva, tal como la siguiente:

$$\mathbf{i}(n) = \mathbf{A}_0 \mathbf{v}(n) + \sum_{k=1}^N \{\mathbf{A}_k \mathbf{v}(n-k) - b_k \mathbf{i}(n-k)\}, \quad (4.10)$$

donde  $\mathbf{i}(n)$  y  $\mathbf{v}(n)$  son, respectivamente, las imágenes en el dominio del tiempo discreto de  $\mathbf{I}(z)$  y de  $\mathbf{V}(z)$ . Los términos  $\mathbf{A}_k$  son matrices constituidas por los coeficientes  $a_k^{ij}$ :

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} a_k^{11} & a_k^{12} & \cdots & a_k^{1n_f} \\ a_k^{21} & a_k^{22} & \cdots & a_k^{2n_f} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_k^{n_f 1} & a_k^{n_f 2} & \cdots & a_k^{n_f n_f} \end{bmatrix}, \text{ para } k = 0, 1, 2, \dots, N.$$



Una forma equivalente en que la ecuación (4.10) puede expresarse es la siguiente:

$$\mathbf{i}(n) = \mathbf{G}_0 \mathbf{v}(n) + \mathbf{i}_r(n), \quad (4.11)$$

donde  $\mathbf{G}_0$  es una matriz de conductancias instantáneas e  $\mathbf{i}_r(n)$  es un vector de corrientes de historia:

$$\mathbf{G}_0 = \mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} a_0^{11} & a_0^{12} & \cdots & a_0^{1n_f} \\ a_0^{21} & a_0^{22} & \cdots & a_0^{2n_f} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_0^{n_f 1} & a_0^{n_f 2} & \cdots & a_0^{n_f n_f} \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{i}_r(n) = \sum_{k=1}^N \{ \mathbf{A}_k \mathbf{v}(n-k) - b_k \mathbf{i}(n-k) \}$$

La representación circuital de (4.11) es la de un circuito tipo Northon. Si los elementos de la matriz de transferencia en el dominio de  $z$  están definidos por (4.9), entonces el sistema (4.8) puede llevarse al dominio del tiempo discreto a través de ecuaciones en diferencias de la forma de (4.10).

### 4.3 Modelo de línea polifásica en el dominio de $z$

Para aplicar la transformada  $z$  en el análisis de transitorios electromagnéticos en líneas de transmisión polifásicas, es necesario que las ecuaciones (3.18a) y (3.18b) se reescriban de la siguiente forma:

$$\mathbf{I}_2(z) = \mathbf{Y}_c(z) \mathbf{V}_2(z) - \sum_{k=1}^{n_f} \tilde{\Theta}_k(z) z^{-T_k} [\mathbf{I}_1(z) + \mathbf{Y}_c(z) \mathbf{V}_1(z)] \quad (4.12a)$$

e

$$\mathbf{I}_1(z) = \mathbf{Y}_c(z) \mathbf{V}_1(z) - \sum_{k=1}^{n_f} \tilde{\Theta}_k(z) z^{-T_k} [\mathbf{I}_2(z) + \mathbf{Y}_c(z) \mathbf{V}_2(z)]. \quad (4.12b)$$

$T_k$  corresponde al número de muestras  $n$  a las que equivale el retardo  $\tau_k$ , éste es debido al tiempo de viaje del modo  $k$  a lo largo de la línea  $\tilde{\Theta}_k(z)$  y  $\mathbf{Y}_c(z)$  son respectivamente las imágenes en el dominio  $z$  de  $\tilde{\Theta}_k(s)$  y  $\mathbf{Y}_c(s)$ . Las aproximaciones racionales de cada uno de los elementos de las matrices  $\mathbf{Y}_c(z)$  y  $\tilde{\Theta}_k(z)$  que aquí se emplearán tienen la siguiente forma:

$$Y_c^{ij}(z) = \frac{\sum_{l=0}^N a_l^{ij} z^{-l}}{1 + \sum_{l=1}^N b_l z^{-l}}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n_f \text{ y } j = 1, 2, \dots, n_f \quad (4.13a)$$

y

$$\tilde{\Theta}_k^{ij}(z) = \frac{\sum_{l=0}^M c_{kl}^{ij} z^{-l}}{1 + \sum_{l=1}^M d_{kl} z^{-l}}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n_f \text{ y } j = 1, 2, \dots, n_f \quad (4.13b)$$

Las ecuaciones (4.12a) y (4.12b) se manipulan algebraicamente con el propósito de hacerlas más tratables; para esto, primeramente se introducen las siguientes definiciones:

$$\mathbf{I}_o(z) \equiv \mathbf{Y}_c(z) \mathbf{V}_1(z) \quad (4.14a)$$

e

$$\mathbf{I}_e(z) \equiv \mathbf{Y}_c(z) \mathbf{V}_2(z). \quad (4.14b)$$

De acuerdo con la expresión (4.11), las ecuaciones en diferencias correspondientes a (4.14a) y (4.14b) son:

$$\mathbf{i}_o(n) = \mathbf{y}_{oo} \mathbf{v}_1(n) + \mathbf{i}_{n1}(n) \quad (4.15a)$$

e

$$\mathbf{i}_e(n) = \mathbf{y}_{oo} \mathbf{v}_2(n) + \mathbf{i}_{n2}(n). \quad (4.15b)$$

donde  $\mathbf{i}_o(n)$ ,  $\mathbf{i}_e(n)$ ,  $\mathbf{v}_1(n)$  y  $\mathbf{v}_2(n)$  son respectivamente las imágenes en el dominio del tiempo discreto de  $\mathbf{I}_o(z)$ ,  $\mathbf{I}_e(z)$ ,  $\mathbf{V}_1(z)$  y  $\mathbf{V}_2(z)$ . Además:

$$\mathbf{i}_{n1}(n) = \sum_{k=1}^N \{ \mathbf{A}_k \mathbf{v}_1(n-k) - b_k \mathbf{i}_o(n-k) \},$$

$$\mathbf{i}_{n2}(n) = \sum_{k=1}^N \{ \mathbf{A}_k \mathbf{v}_2(n-k) - b_k \mathbf{i}_e(n-k) \}$$

y

$$\mathbf{y}_{oo} = \mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} a_0^{11} & a_0^{12} & \cdots & a_0^{1n_f} \\ a_0^{21} & a_0^{22} & \cdots & a_0^{2n_f} \\ \vdots & \vdots & \cdot & \vdots \\ a_0^{n_f 1} & a_0^{n_f 2} & \cdots & a_0^{n_f n_f} \end{bmatrix}.$$

Nótese que  $\mathbf{y}_{oo}$  es una conductancia instantánea. Se introducen ahora el siguiente par adicional de definiciones:

$$\mathbf{I}_{d1} \equiv \sum_{k=1}^{n_f} \tilde{\Theta}_k(z) z^{-T_k} [\mathbf{I}_1(z) + \mathbf{Y}_c(z) \mathbf{V}_1(z)] \quad (4.16a)$$

e

$$\mathbf{I}_{d2} \equiv \sum_{k=1}^{n_f} \tilde{\Theta}_k(z) z^{-T_k} [\mathbf{I}_2(z) + \mathbf{Y}_c(z) \mathbf{V}_2(z)]. \quad (4.16b)$$

Éstas se pueden representar también de la siguiente forma:

$$\mathbf{I}_{d1} = \sum_{k=1}^{n_f} \tilde{\Theta}_k(z) z^{-T_k} [\mathbf{I}_1(z) + \mathbf{I}_o(z)] \quad (4.16c)$$

e

$$\mathbf{I}_{d2} = \sum_{k=1}^{n_f} \tilde{\Theta}_k(z) z^{-T_k} [\mathbf{I}_2(z) + \mathbf{I}_e(z)]. \quad (4.16d)$$

Las imágenes en el dominio del tiempo de (4.16c) y (4.16d) son respectivamente:

$$\mathbf{i}_{d1} = \sum_{k=1}^{n_f} \tilde{\theta}_k(n) * [\mathbf{i}_1(n-T_k) + \mathbf{i}_o(n-T_k)] \quad (4.17a)$$

e

$$\mathbf{i}_{d2} = \sum_{k=1}^{n_f} \tilde{\theta}_k(n) * [\mathbf{i}_2(n-T_k) + \mathbf{i}_e(n-T_k)] \quad (4.17b)$$

La operación de convolución en estas últimas ecuaciones se realiza también mediante una ecuación en diferencias recursiva. Las siguientes ecuaciones son equivalentes a (4.17a) y (4.17b) en forma respectiva:

$$\mathbf{i}_{d1}(n) = \sum_{k=1}^{n_f} \left\{ \mathbf{C}_{k0} [\mathbf{i}_1(n-T_k) + \mathbf{i}_o(n-T_k)] + \sum_{l=1}^M \left\{ \mathbf{C}_{kl} [\mathbf{i}_1(n-T_k-l) + \mathbf{i}_o(n-T_k-l)] - d_{kl} \mathbf{i}_{d1}(n-l) \right\} \right\} \quad (4.18a)$$

e

$$\mathbf{i}_{d2}(n) = \sum_{k=1}^{n_f} \left\{ \mathbf{C}_{k0} [\mathbf{i}_2(n-T_k) + \mathbf{i}_e(n-T_k)] + \sum_{l=1}^M \left\{ \mathbf{C}_{kl} [\mathbf{i}_2(n-T_k-l) + \mathbf{i}_e(n-T_k-l)] - d_{kl} \mathbf{i}_{d2}(n-l) \right\} \right\}, \quad (4.18b)$$

donde  $\mathbf{C}_l$  es la siguiente matriz de coeficientes:

$$\mathbf{C}_{kl} = \begin{bmatrix} c_{kl}^{11} & c_{kl}^{12} & \cdots & c_{kl}^{1n_f} \\ c_{kl}^{21} & c_{kl}^{22} & \cdots & c_{kl}^{2n_f} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{kl}^{n_f 1} & c_{kl}^{n_f 2} & \cdots & c_{kl}^{n_f n_f} \end{bmatrix}, \quad \text{para } l = 0, 1, 2, 3, \dots, M \text{ y } k = 1, 2, \dots, n_f.$$

Por otra parte,  $\tilde{\Theta}_k(n)$ ,  $i_{d1}(n)$ ,  $i_{d2}(n)$ ,  $i_1(n)$  e  $i_2(n)$  son las respectivas imágenes en el dominio del tiempo discreto de  $\tilde{\Theta}_k(z)$ ,  $I_{d1}(z)$ ,  $I_{d2}(z)$ ,  $I_1(z)$  e  $I_2(z)$ .

En general,  $T_k$  no es entero, por lo que habrán de realizarse interpolaciones en  $v_1(n-T_k)$ ,  $v_2(n-T_k)$ ,  $i_1(n-T_k)$ ,  $i_2(n-T_k)$ . En este trabajo se usan interpolaciones polinómicas de órdenes primero y segundo. Por una parte es conveniente emplear interpolaciones de mayor orden, pues éstas son más precisas. Sin embargo, como las transformaciones “root matching” y bilineal son de órdenes uno y dos, respectivamente, la precisión lograda en la interpolación se degradaría con los órdenes de estas transformaciones.

Las ecuaciones (4.12a) y (4.12b) finalmente se representan en el dominio del tiempo discreto en la forma:

$$i_1(n) = y_{oo} v_1(n) + j_1(n) \quad (4.19a)$$

e

$$i_2(n) = y_{oo} v_2(n) + j_2(n), \quad (4.19b)$$

donde:

$$j_1(n) = i_n(n) - i_{d2}(n) \quad (4.20a)$$

y

$$j_2(n) = i_{r2}(n) - i_{d1}(n) \quad (4.20b)$$

son las denominadas fuentes de corriente de historia.

El circuito equivalente para (4.19a) y (4.19b) es un Northon como se esquematiza en la figura 4.1. Éste es compatible con programas de transitorios tipo EMTP.

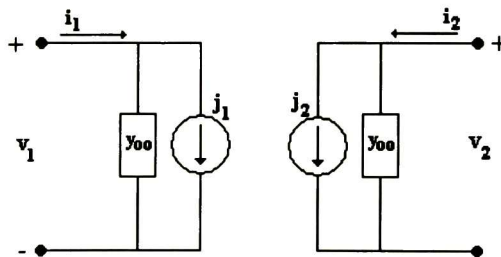


Figura 4.1 Circuito equivalente de Northon en el dominio de z.

## 5 Ejemplos de aplicación

El modelo de línea propuesto en el capítulo anterior, se aplica ahora a algunos ejemplos. Se hacen comparaciones con los resultados obtenidos con el “Phase Line Model”, también conocido como Modelo Universal del EMTDC®. También se hacen comparaciones con el método de la TNL. Para estos ejemplos los ajustes racionales de la función de propagación y de la admitancia característica se hacen bajo los mismos rangos de frecuencia y con el mismo número de polos tanto para el modelo aquí propuesto como para el Universal. Los errores del modelo propuesto y los del EMTDC® serán medidos respecto a la TNL con el siguiente criterio:

$$error = (|r_L - r| / \max |r_L|) \times 100,$$

donde  $r_L$  es la respuesta obtenida con la TNL y  $r$  es la respuesta obtenida con el EMTDC® o con el modelo aquí propuesto.

En estos ejemplos se probará la precisión de la regla bilineal con interpolación de segundo orden y también de primero. Además, se probará la técnica de “root matching” con la interpolación de primer orden.

### 5.1 Cierre simultáneo

Considere la configuración de línea mostrada en la figura 5.1. La fuente es ideal de secuencia positiva. Los interruptores están originalmente abiertos y en el tiempo cero se cierran todos ellos. En este ejemplo se emplearon  $2^{12}=4096$  muestras para todas las técnicas. Se emplearon 8 polos para la función de propagación y 6 para la admitancia característica. El rango de frecuencias bajo el cual se realizaron los ajustes racionales va de 200 Hz a 200KHz.

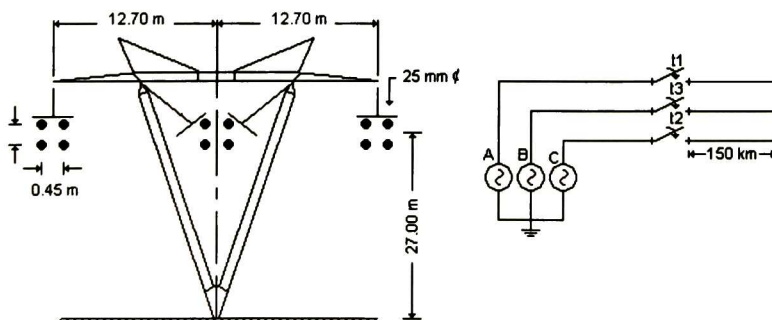


Figura 5.1 Circuito para los ejemplos de aplicación.

En la figura 5.2 se grafica el voltaje calculado en el extremo receptor de la fase A. En esta figura se aprecia una ligera diferencia entre la respuesta obtenida con “root matching” y las demás técnicas.

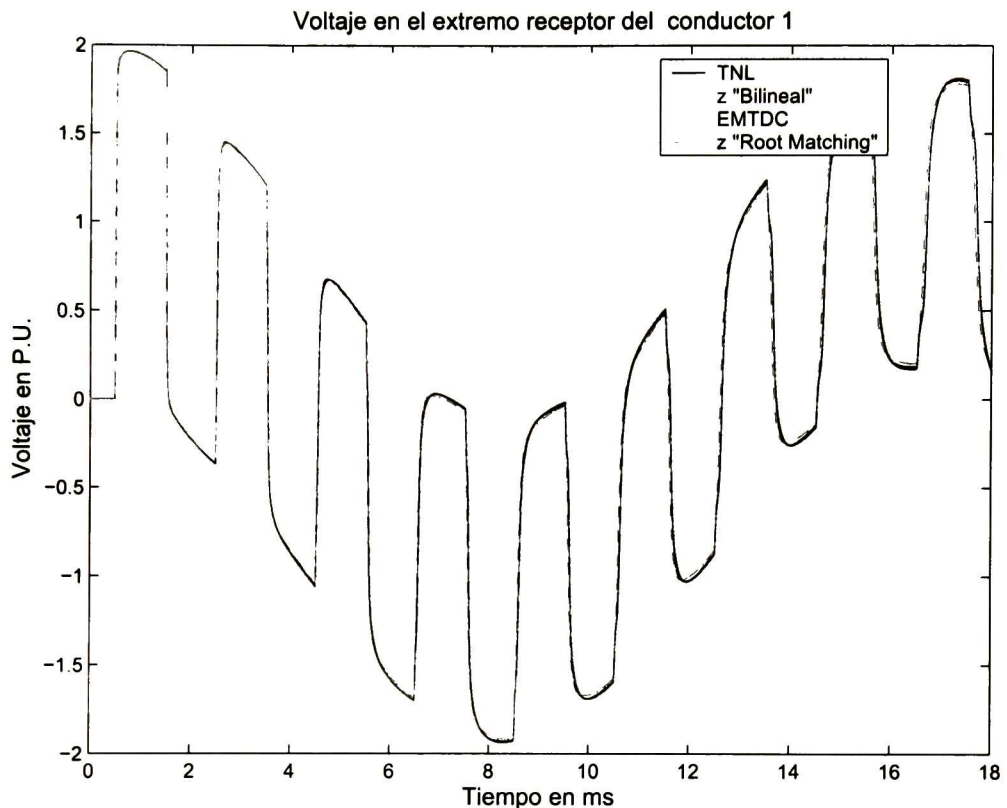
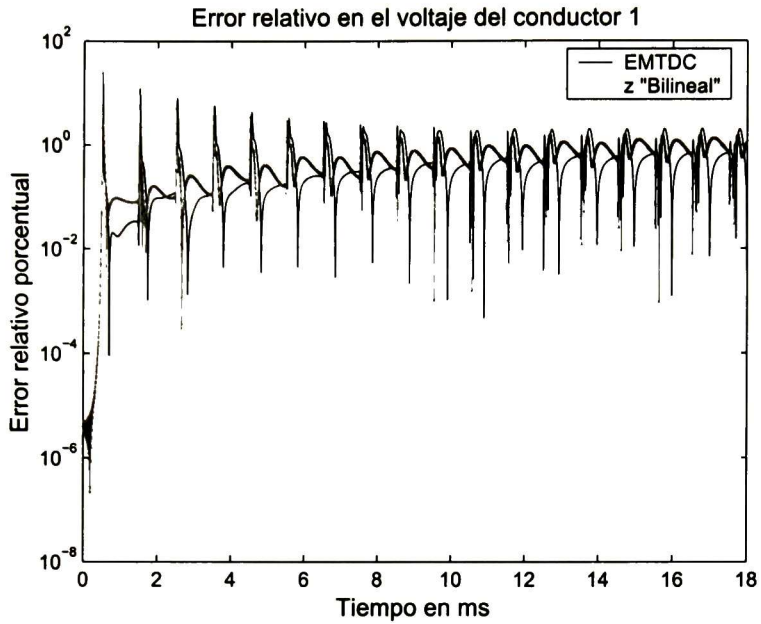
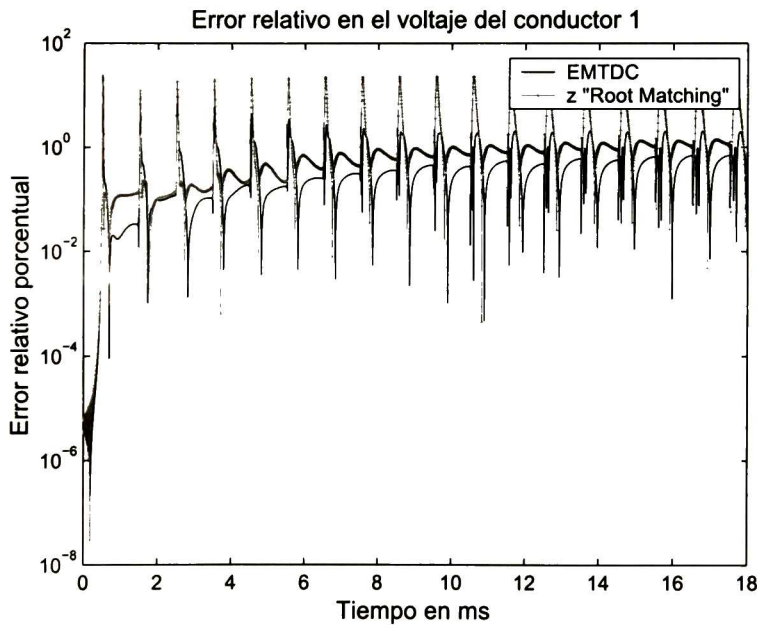


Figura 5.2 Voltaje en el extremo receptor la fase A.

En la figura 5.3 se muestran los errores de los resultados graficados en la figura 5.2. La figura 5.3a muestra los errores obtenidos con el EMTDC<sup>®</sup> y con el modelo aquí propuesto. En esta figura se observa un mejor desempeño del EMTDC<sup>®</sup> sobre el modelo propuesto. En la figura 5.3b se proporcionan las gráficas de los errores obtenidos con el “root matching” y con el EMTDC<sup>®</sup>. Se observa en esta figura también un desempeño mejor del EMTDC<sup>®</sup> sobre el modelo propuesto con “root matching”. Adviértase que para la regla bilineal se han empleado interpolaciones de segundo orden, y que para “root matching” han sido de primer orden.



(a)



(b)

Figura 5.3 Error relativo obtenido en la fase A en el extremo receptor. (a) EMTDC<sup>®</sup> vs modelo propuesto con la transformación bilineal e interpolaciones de segundo orden. (b) EMTDC<sup>®</sup> vs modelo propuesto con "root matching"

Es interesante observar qué tanto se ve afectada la respuesta cuando, para la transformación bilineal, se utiliza la interpolación de primer orden. En la figura 5.4a se muestra la respuesta obtenida empleando la regla bilineal e interpolaciones de órdenes primero y segundo. En esta figura no se observa diferencia alguna entre ambas respuestas. Pero en la figura 5.4b se grafican los errores obtenidos con cada una de ellas. La figura muestra que la interpolación de segundo orden tiene un desempeño notablemente mejor sólo durante los primeros 4 ms.

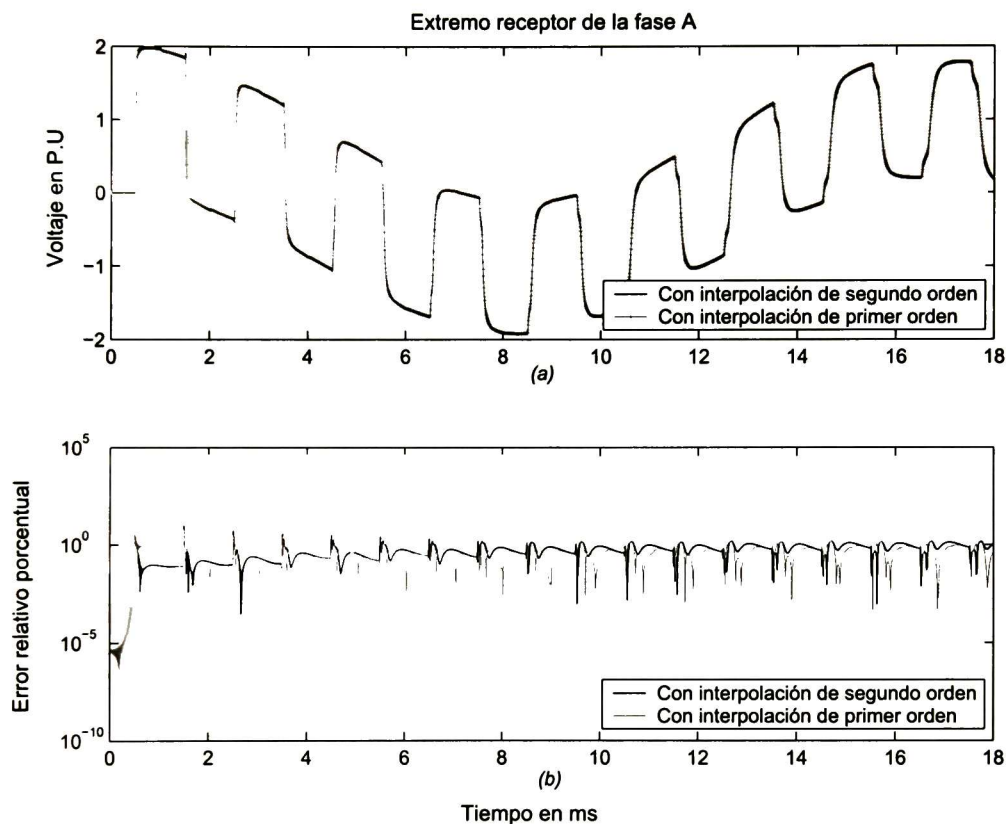


Figura 5.4 Extremo receptor de la fase A. (a) Voltaje calculado con la transformación bilineal y con interpolaciones de órdenes primero y segundo. (b) Error obtenido con la transformación bilineal y con interpolaciones de órdenes primero y segundo.

## 5.2 Cierre secuencial

Como segundo ejemplo de aplicación se efectúa la energización secuencial de la línea del ejemplo 1. Los tiempos de cierre de las fases A, B y C son respectivamente 0, 3 y 6 ms. En la figura 5.5 se muestran los resultados obtenidos con la TNL, con el EMTDC<sup>®</sup> y con el



modelo aquí propuesto. Al igual que en el caso anterior, los errores relativos se proporcionan también. Estos se proveen en la figura 5.6. Se puede apreciar en la figura 5.5 una ligera diferencia entre los resultados obtenidos con las distintas técnicas. Se aprecia también que la respuesta obtenida con el EMTDC<sup>®</sup> se aleja levemente de la respuesta obtenida con la TNL. En esta figura se alcanza a observar que la precisión del EMTDC<sup>®</sup> es menor que la del modelo aquí propuesto. En la figura 5.6a se proporcionan los errores obtenidos con el EMTDC<sup>®</sup> y con el modelo propuesto. En este último se utilizó la regla bilineal con interpolación de segundo orden. Por otro lado, la figura 5.6b muestra los errores del modelo propuesto utilizando "root matching". Para fines de comparación, la figura 5.6b incluye los resultados del EMTDC<sup>®</sup>. Puede decirse que en el caso del cierre secuencial, el modelo propuesto muestra un mejor desempeño que el EMTDC<sup>®</sup>.

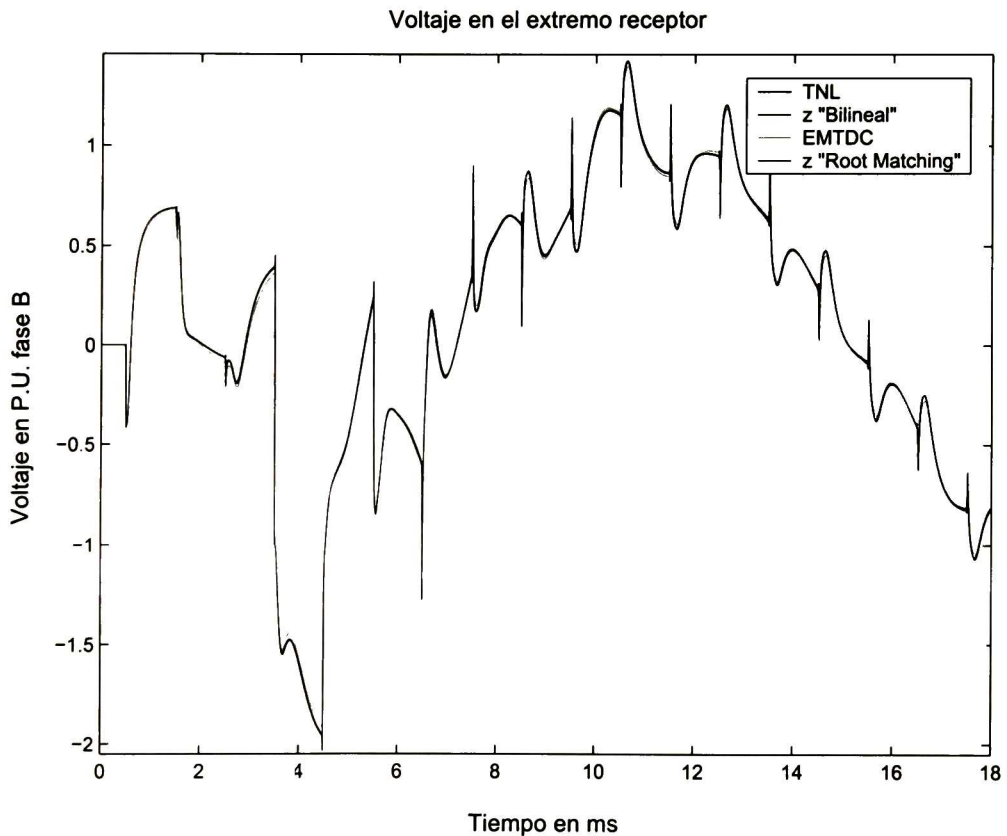
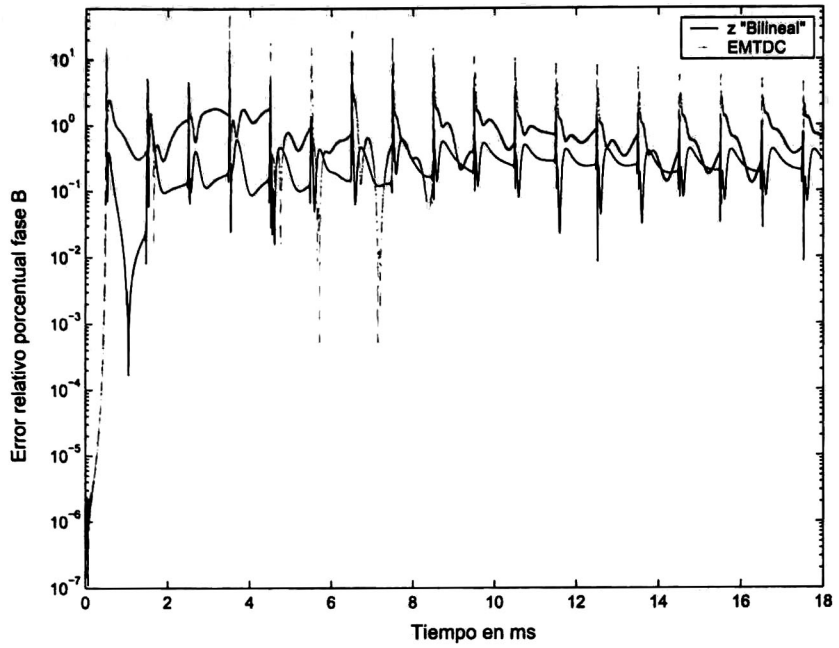
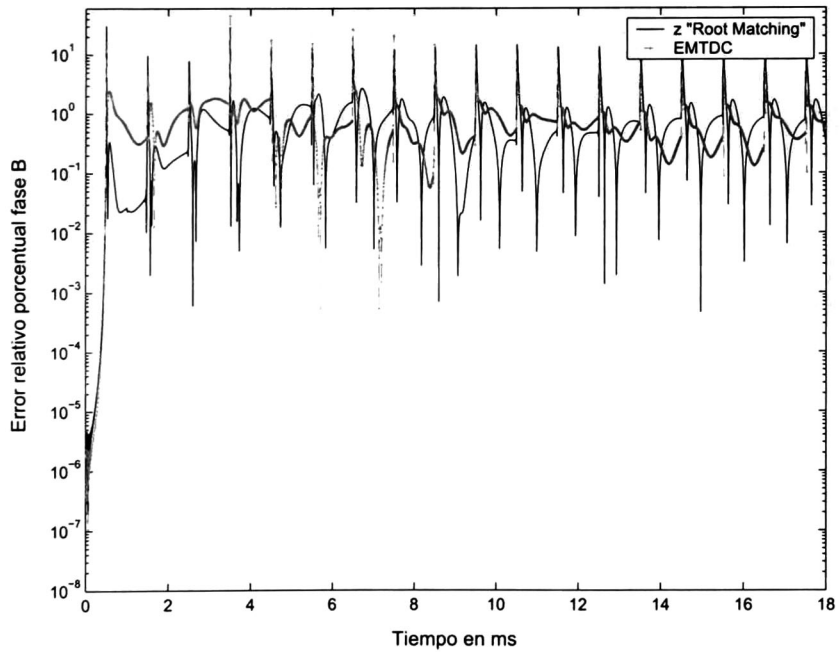


Figura 5.5 Voltaje en el extremo receptor de la fase B.



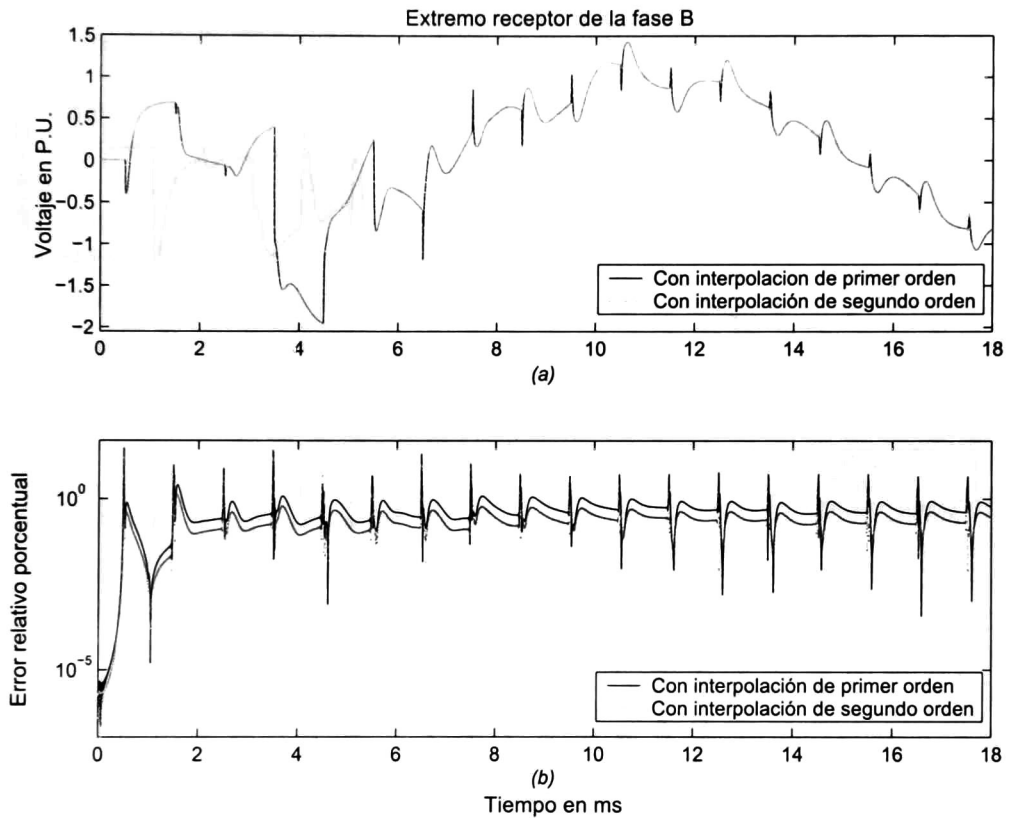
(a)



(b)

Figura 5.6 Error relativo del voltaje de la fase B en el extremo receptor. (a) Bilinear con interpolaciones de segundo orden vs EMTDC<sup>®</sup>. (b) "root matching" vs EMTDC<sup>®</sup>.

Cuando se realizan interpolaciones de primer orden en los extremos de la línea, llevando a cabo el mapeo de  $H(s)$  a  $H(z)$  y el de  $Y_c(s)$  a  $Y_c(z)$  con la transformación bilineal, se espera que la respuesta sea menos precisa que si se efectuaran interpolaciones de segundo orden. Pero también se espera que ésta sea mejor que la respuesta obtenida con “root matching”. En la figura 5.7a se grafican las respuestas obtenidas con interpolaciones de órdenes primero y segundo para la transformación bilineal. En la figura 5.7b se muestran sus errores.



*Figura 5.7 Extremo receptor de la fase B. (a) Voltaje calculado con la transformación bilineal y con interpolaciones de órdenes primero y segundo. (b) Error obtenido con la transformación bilineal y con interpolaciones de órdenes primero y segundo.*

Se observa en la figura 5.7a que las respuestas obtenidas con las dos interpolaciones son prácticamente iguales, pues no se atisba diferencia entre ellas. Sin embargo, en la figura 5.7b se grafican los errores de cada una de estas respuestas. En esta figura se observa que, como era de esperarse, la interpolación de segundo orden tiene un desempeño mejor que la de primer orden

Siendo la fase C la última en cerrarse, resulta interesante observar el voltaje inducido por los cierres de las fases A y B. En este ejemplo, el conductor de la fase C queda flotando durante los primeros 6 ms de simulación, por lo que durante este intervalo el voltaje es netamente inducido por las fases ya energizadas. La figura 5.8a muestra el voltaje durante los primeros 18 ms. En esta figura se observa una repuesta mucho más precisa con el modelo aquí propuesto que con el EMTDC®

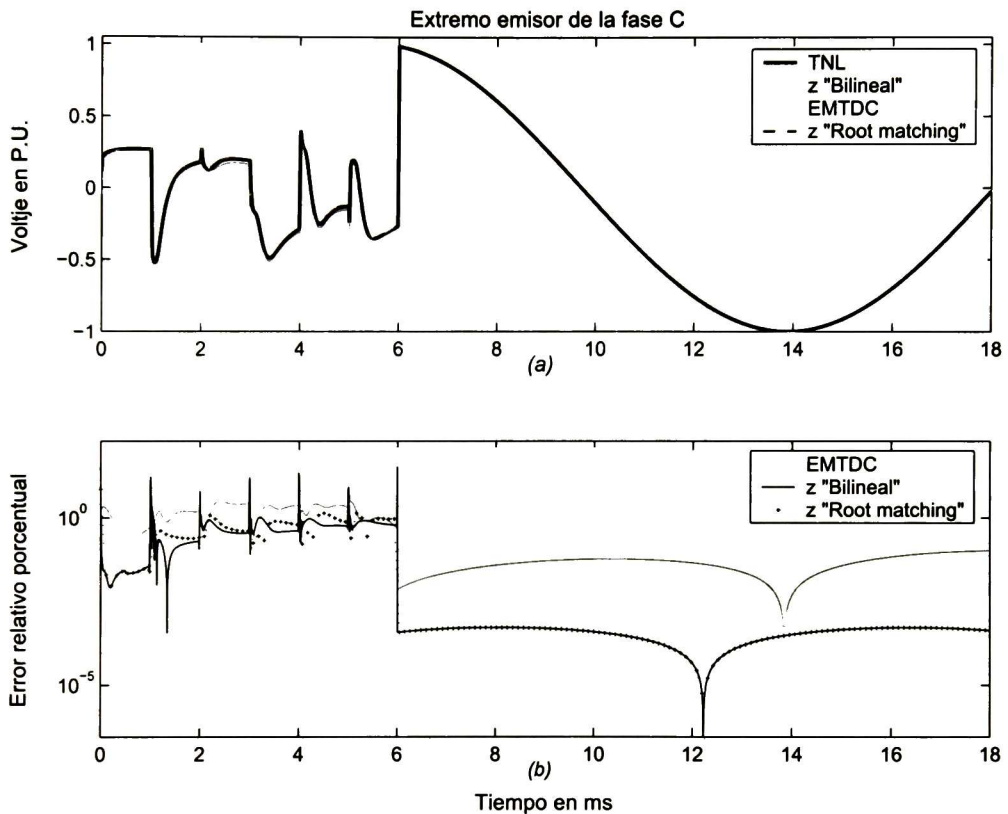


Figura 5.8 Extremo emisor de la fase C. (a) Voltaje en la fase C del extremo emisor. (b) Error relativo del voltaje de la fase C en el extremo emisor.

En la figura 5.9a se muestran los resultados del modelo propuesto usando la regla bilineal e interpolaciones de órdenes primero y segundo. En la figura 5.9b se muestran los errores obtenidos para ambas interpolaciones. Esta última gráfica se deja ver que el error obtenido con cada una de estas interpolaciones es prácticamente el mismo.

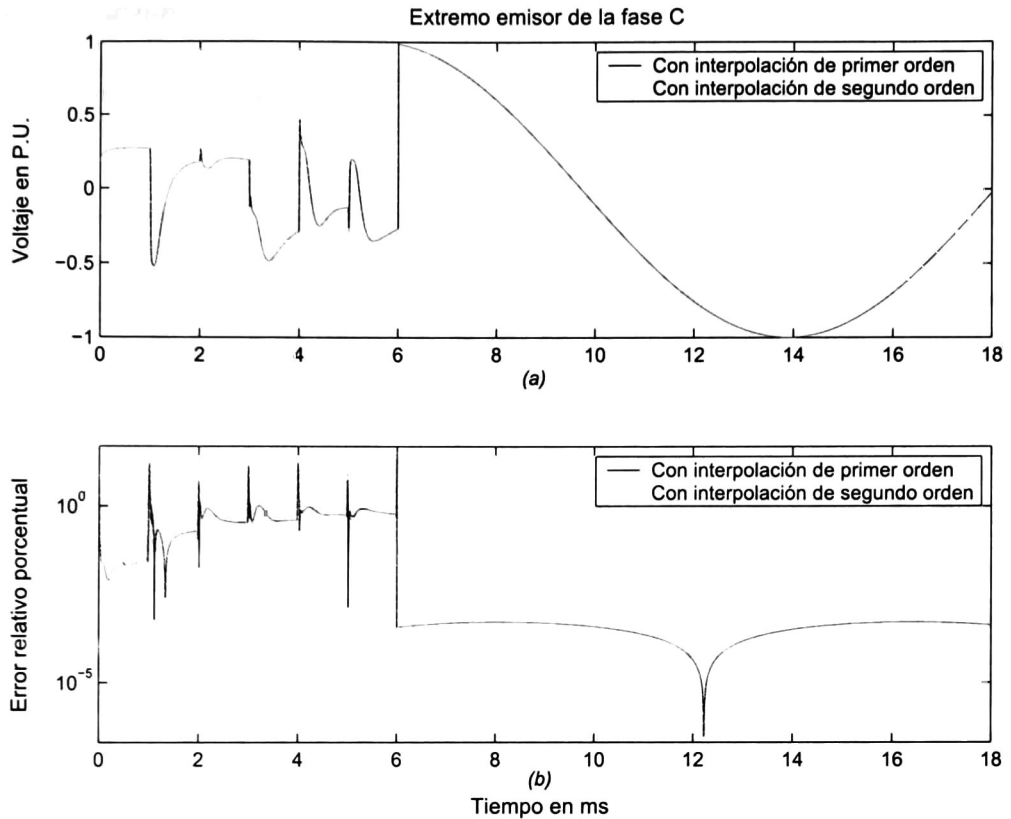


Figura 5.9 Extremo emisor de la fase C. (a) Voltaje calculado con la transformación bilineal y con interpolaciones de órdenes primero y segundo. (b) Error obtenido con la transformación bilineal y con interpolaciones de órdenes primero de segundo.

### 5.3 Observación del capítulo

El modelo de línea propuesto en la tesis muestra su validez, ya que los resultados obtenidos con él son consistentes con los resultados obtenidos con la TNL y con el EMTDC<sup>®</sup>. En uno de los casos, el modelo propuesto tuvo un desempeño ligeramente menor que el EMTDC<sup>®</sup>; por otro lado, en caso del problema del cierre secuencial, se tuvo un mejor desempeño con el modelo aquí propuesto.

De las técnicas de transformación del dominio  $s$  al de  $z$ , utilizadas en estos ejemplos, el autor de esta tesis considera que la transformación bilineal es la mejor opción. También se muestra, con los resultados obtenidos, que la interpolación de segundo orden no representa un aumento considerable en precisión respecto a la interpolación de primer orden. En base a estos resultados puede sugerirse la adopción de la interpolación de primer orden.

## **6 Conclusiones**

### **6.1 Resumen de resultados**

En esta tesis se ha abordado el problema del modelado de líneas de transmisión multiconductoras para el análisis de transitorios electromagnéticos. Se ha visto que cuando estas líneas tienen pérdidas, sus parámetros eléctricos y modales son funciones de la frecuencia. También se ha presentado la técnica de la transformada numérica de Laplace que permite obtener respuestas transitorias de este tipo de líneas en forma muy precisa [9]. Desafortunadamente la TNL, como todas las técnicas en el dominio de la frecuencia, no permite realizar simulaciones secuenciales.

La simulación de sistemas eléctricos de potencia requiere métodos del dominio del tiempo, en los cuales es difícil representar la dependencia frecuencial de los parámetros de línea. El desarrollo de un modelo que incluya todos estos efectos ha llevado más de treinta años de investigación. Es hasta fechas muy recientes, que se han propuesto los modelos de Idempotentes [4] y Universal [5] que en principio resuelven el problema de la dependencia frecuencial. Estos modelos se basan en la síntesis de parámetros eléctricos en el dominio de la frecuencia y en su posterior conversión al dominio del tiempo. En esta tesis se ha buscado simplificar los procesos de síntesis y conversión, así como mejorar la precisión de éstos.

Previo a la aparición de los modelos de Idempotentes y Universal se había propuesto el modelo ARMA [6]. La desventaja de este último es que los coeficientes del filtro ARMA cambian según el paso de tiempo que se emplee en la simulación, lo que obliga a recalcular los coeficientes cada vez que se cambie dicho paso de integración. Lo interesante del modelo de línea ARMA es que plantea a la transformada  $z$  como el puente entre el dominio de la frecuencia y el del tiempo.

La metodología empleada en esta tesis ha conjugado la técnica de síntesis en el dominio de Laplace, la transformada  $z$  como puente entre la frecuencia y el tiempo, y las técnicas de procesamiento digital de señales para la conversión  $s$  a  $z$ . Se ha empleado la regla bilineal [11] y el método de “root matching” [8] para pasar de  $s$  a  $z$ , y se ha concluido que la transformación bilineal es la que da los mejores resultados.

Se han realizado algunos ejemplos de aplicación, en los que se han comparado las respuestas obtenidas con el EMTDC<sup>®</sup>, con el modelo aquí propuesto y con la TNL [12,13]. En la simulación hecha para el cierre simultáneo, se muestra un mejor desempeño del modelo

Universal sobre el modelo aquí propuesto. Por otro lado, en el ejemplo del cierre secuencial se muestra un mejor desempeño del modelo propuesto, en comparación con el modelo Universal.

## ***6.2 Recomendaciones para trabajos futuros***

Mientras se sigan empleando modelos de línea en los que se realicen aproximaciones racionales, se seguirán teniendo errores en los resultados. Esto es debido a que en las aproximaciones se pierde información. En la medida en que la precisión de los ajustes mejore, se obtendrá una mejor descripción de los efectos de la frecuencia en el dominio del tiempo. Para esto es necesario desarrollar una técnica que permita determinar cuál debe ser el orden del ajuste racional, tanto para la función de propagación como para la admitancia característica. Además, se necesita determinar una estrategia para seleccionar las muestras o datos que han de emplearse para ajustar dichas funciones.

El modelo de línea propuesto en esta tesis puede implementarse fácilmente en un procesador digital de señales (DSP), ya que tanto la función de propagación como la admitancia característica están en el dominio de  $z$ . La implementación del modelo propuesto en un DSP abre la posibilidad llevar a cabo simulaciones en tiempo real. Otro de los trabajos que quedan pendientes es extender el modelo aquí propuesto a cables subterráneos y submarinos.

## ***Referencias***

- [1] L. M. Wedepohl, "Application of matrix methods to the solutions of travelling-wave phenomena in polyphase systems", Proc. IEE, vol 110, no. 12, December 1963, pp 2200-2212.
- [2] J. R. Martí, "Accurate Modelling of Frequency-Dependent Transmission Lines in Electromagnetic Transient Simulations", IEEE Trans. PAS, vol. 101, no1, January 1982, pp. 147-157.
- [3] A. Semlyen y Dabuleanu, "Fast and Accurate Switching Transient Calculations on Transmission Lines With Ground Return Using Recursive Convolutions", IEEE Trans. PAS, vol 94, March/April 1975, pp. 561-571.
- [4] F. J. Marcano, *Modelling of Transmission Lines Using Idempotent Decomposition*, MASc. Thesis, Department of electrical Engineering, The University of British Columbia, Vancouver, Canada, August 1996.
- [5] Atef Morched, Bjorn Gustavsen y Manoocher Tartibi, "A Universal Model for Accurate Calculation of Electromagnetic Transients on Overhead Lines and Underground Cables", IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 14, no. 3, July 1999, pp. 1032-1038.
- [6] T. Noda, N. Nagaoka y A. Ametani, "Phase Domain Modeling of Frequency-Dependent Transmission Lines by Means of an ARMA Model", IEEE Trans. PWRD, vol. 11, no. 1, January 1996, pp. 401-411.
- [7] Bjorn Gustavsen y Adam Semlyen, "Rational Approximation of Domain Responses by Vector Fitting", IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 14, no. 3, July 1999, pp. 1052-1060.
- [8] N. R. Watson y G. D. Irwin, "Electromagnetic Transient Simulation of Power System Using Root-Matching Techniques", Proceedings of IEE, pt. Part C.
- [9] J. D. Wilcox, "Numerical Laplace Transformation and Inversion", Int. J. Elect. Enging. Educ, vol. 15, pp. 247-265, 1978.



- [10] L. M. Wedepohl, "Power System Transients: Errors Incurred in the Numerical Inversion of the Laplace Transform", Proc. of the 26<sup>th</sup> Midwest Symposium on Circuits and Systems, August 1983.
- [11] John G. Proakis, Dimitris G. Manolakis, "Tratamiento Digital de Señales", Prentice Hall.
- [12] L. M. Wedepohl y S. E. T. Mohamed, "Multiconductor transmission lines. Theory of natural modes and Fourier integral applied to transient analysis", IEE Vol. 116. No. 9, September 1969, pp. 1553-1563.
- [13] L. M. Wedepohl y S. E. T. Mohamed, "Transient analysis of multiconductor transmission lines with special reference to nonlinear problems", IEE Vol 117, No.5, May 1970, pp 979-988.
- [14] Pablo Gómez, Pablo Moreno, José L. Naredo y Leonardo Guardado, "Frequency domain transient networks including non-linear conditions", Presentation at 2003 IEEE Bologna power tech conference, June 23<sup>th</sup> -26<sup>th</sup>, Bologna, Italy.

## Apéndice A

### Transformada z

La transformada z es usada para el análisis de sistemas en tiempo discreto. La transformada unilateral z de una señal discreta  $f(n)$  se denota por  $F(z)$ , y está definida como:

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n} \quad (\text{A.1})$$

A fin de mostrar la relación entre la transformada de Laplace y la transformada z, puede considerarse que  $f^*(t)$  definida por:

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n\Delta t)\delta(t - n\Delta t).$$

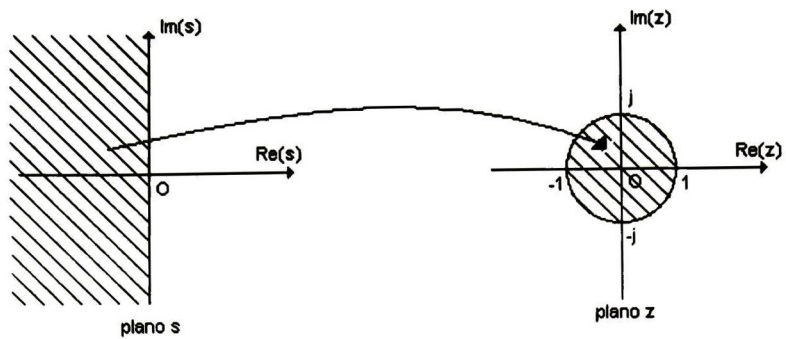
$f^*(t)$  representa el resultado de muestrear a una función continua  $f(t)$ . La transformada de Laplace de  $f^*(t)$  es:

$$\begin{aligned} F^*(s) &= \int_0^{\infty} f^*(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f(n\Delta t)\delta(t - n\Delta t)e^{-st} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f(n\Delta t)e^{-sn\Delta t}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Cambiando la notación de  $f(n\Delta t)$  por  $f(n)$ , y definiendo z como  $z = e^{-s\Delta t}$ , se llega a:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n} \quad (\text{A.3})$$

Se observa que la transformada z de una forma de onda es obtenida reemplazando la frecuencia compleja  $s$  por  $z$ , a través de la relación  $z = e^{-s\Delta t}$ . La figura A.1 muestra la correspondencia entre el plano s y el plano z.



*Figura A.1 Correspondencia entre el dominio de Laplace y el de z.*

## Apéndice B

### Transformada numérica de Laplace

Sea  $f(t)$  una función real y causal y  $F(s)$  su imagen en el dominio de Laplace. Considerando un rango de integración finito, la transformada inversa de Laplace puede ser escrita de la siguiente manera:

$$f(t) = \mathbf{Re} \left\{ \frac{e^{ct}}{\pi} \int_0^{\Omega} F(s) e^{j\omega t} \right\}, \quad (\text{B.1})$$

donde  $s=c+j\omega$ ;  $\omega$  es la frecuencia angular,  $c$  es una constante real y finita mayor o igual a cero y  $\Omega$  es la frecuencia máxima de estudio. Además, truncando la transformada directa de Laplace se obtiene:

$$F(c+j\omega) \cong \int_0^T [f(t) e^{-ct}] e^{-j\omega t} dt, \quad (\text{B.2})$$

donde  $T$  es el tiempo de observación.

La forma numérica de las ecuaciones (B.1) y (B.2) que permite el uso del algoritmo de la transformada rápida de Fourier es como sigue:

$$f_n = \mathbf{Re} \left\{ C_n \sum_{m=0}^{N-1} F_m \exp(j2\pi mn/N) \right\}, \quad n = 1, 2, \dots, N-1 \quad (\text{B.3})$$

y

$$F_m = \sum_{n=0}^{N-1} f_n D_n \exp(-j2\pi mn/N), \quad m = 1, 2, \dots, N-1, \quad (\text{B.4})$$

donde:

$$F_m = F[c + j(2m+1)\Delta\omega], \quad (\text{B.5a})$$

$$f_n = f(n\Delta t), \quad (\text{B.5b})$$

$$D_n = \Delta t \exp(-cn\Delta t - j\pi n/N), \quad (\text{B.5c})$$

$$C_n = \frac{2\Delta\omega}{\pi} \exp(cn\Delta t + j\pi n/N), \quad (\text{B.5d})$$

$$\Delta\omega = \pi/T \quad (\text{B.5e})$$

$$\Delta t = T/N \quad (\text{B.5f})$$

y

$$\Omega = 2\pi/\Delta t \quad (\text{B.5g})$$

siendo  $\Delta\omega$  el paso de integración del espectro,  $\Delta t$  es el paso de integración de tiempo y  $N$  es el número de muestras. En los estudios de transitorios  $T$  es escogido simplemente como el

tiempo de interés del análisis y para una buena elección de  $N$  debe considerarse el teorema del muestreo.

La evaluación numérica de (B.1) introduce dos tipos de error: uno de ellos son las oscilaciones de Gibbs debido al truncamiento del rango de integración y el otro es el aliasing debido a la discretización de la variable continua  $\omega$ . El error por truncamiento se reduce introduciendo una ventana en el integrando de (B.3). Evaluaciones con diferentes tipos de ventanas han sido realizadas [9,10] y se ha optado por la ventana de Hanning [14].

El error por aliasing puede reducirse escogiendo un apropiado valor para la constante  $c$ . La forma en que se calcula esta constante está dada por la siguiente fórmula:

$$c = \frac{\ln(N^2)}{T}. \quad (\text{B.6})$$



**CENTRO DE INVESTIGACION Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL I.P.N.  
UNIDAD GUADALAJARA**

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional aprobó la tesis

**Modelado de Líneas de Transmisión en el Dominio de la Transformada Z**

del (la) C.

Juan SEGUNDO RAMÍREZ

el día 22 de Octubre de 2004.

Dr. José Luis Narro Villagrán  
Investigador CINVESTAV 3C  
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Juan Manuel Ramírez Arredondo  
Investigador CINVESTAV 3B  
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. José Javier Ruíz León  
Investigador CINVESTAV 3A  
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. José Alberto Gutiérrez Robles  
Profesor Investigador Titular A  
Universidad de Guadalajara

Dr. Víctor Hugo Ortiz Muro  
Profesor Investigador Titular A  
Universidad de Guadalajara



*CINVESTAV*  
*BIBLIOTECA CENTRAL*



SS1T000007621