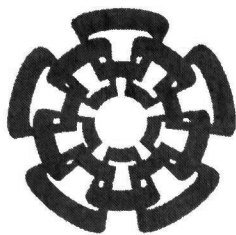


xx (135292,1)



CINVESTAV

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N.
Unidad Guadalajara

Identificación de Sistemas Equivalentes Utilizando Aproximación Racional

**CINVESTAV
IPN
ADQUISICION
DE LIBROS**

Tesis que presenta:

Pedro Esquivel Prado

para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias

en la especialidad de:

Ingeniería Eléctrica

CINVESTAV IPN
USB INFORMACION Y DOCUMENTACION
SERVICIO DOCUMENTAL

Director de Tesis

Dr. Amner Israel Ramírez Vázquez

Guadalajara, Jalisco, Agosto de 2007.

CLASIF.: TK165.G8 .E87 2007
ADQUIS.: SS1-460
FECHA: 7-01-08
PROCED.: Donc 2007
\$ _____

ID: 134664-1001

Identificación de Sistemas Equivalentes Utilizando Aproximación Racional

**Tesis de Maestría en Ciencias
Ingeniería Eléctrica**

Por:

Pedro Esquivel Prado
Ingeniero Eléctrico

Instituto Tecnológico de Tepic 1999-2003

Becario de Conacyt, expediente no. 199427

Director de Tesis

Dr. Amner Israel Ramírez Vázquez

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Agosto de 2007.

RESUMEN

En esta tesis se hace énfasis, como parte inicial, en la necesidad de la obtención de sistemas equivalentes para la simulación de transitorios electromagnéticos en redes de gran tamaño. Se presenta, además, una breve historia del desarrollo y planteamiento de técnicas de identificación a lo largo de los últimos 50 años.

Enseguida, se describen tres técnicas de identificación utilizadas con frecuencia en el área de Sistemas de Potencia. Tales técnicas son: la aproximación de funciones mediante mínimos cuadrados, un método propuesto por T. Noda, basado en un proceso iterativo de aproximación por funciones polinomiales, y el método conocido por Vector Fitting el cual fue propuesto por B. Gustavsen. Estas técnicas tienen su base en las funciones racionales en el dominio de la frecuencia (dominio s).

Luego, se describe una metodología alterna basada en la aproximación polinomial en el dominio discreto (dominio z) combinada con la partición del rango de frecuencia y con la aplicación de técnicas lineales (descomposición en valores singulares o realización balanceada) para la reducción de orden de modelos.

En este trabajo, se recomienda utilizar el rango completo de frecuencias para la identificación de funciones *suaves* con respecto a la frecuencia. Por otro lado, se recomienda particionar el rango de frecuencias cuando es el caso de una función con muchas resonancias (picos) en la frecuencia.

Después, se presentan algunas aplicaciones numéricas para la comparación tanto de las técnicas desarrolladas anteriormente a este trabajo como la propuesta por el autor.

Finalmente, se presentan las conclusiones de este trabajo y las recomendaciones para trabajos futuros.

ABSTRACT

Initially, in this thesis the necessity of calculating system equivalents for transient analysis purposes is highlighted. Additionally, a brief history at the development and proposal of identification techniques over the last 50 years is presented.

Subsequently, three identification techniques usually used in the Power Systems area are described. Those techniques are: basic approximation through least squares solution, a method proposed by T. Noda and based on an iterative procedure to calculate polynomial approximations, and the method known as Vector Fitting, proposed by B. Gustavsen. The mentioned methods have their common base on rational function approximation in the frequency domain (s -domain).

Later on, an alternate methodology, based on polynomial approximation in the discrete domain (z -domain) combined with frequency partitioning and model order reduction, is described.

In this work, the author recommends to use a complete frequency range only for smooth functions with respect to the frequency. On the other hand, it is recommended to partitioning the frequency range in the case of having a function with many resonances (spikes).

Then, some numerical applications for validation of the proposed technique are presented.

Finally, the conclusions and recommendations for future work are outlined.

DEDICATORIA

*...a mi Padre que con su pureza de corazón y
fortaleza de voluntad me ha enseñado a ser capaz
de enfrentar las adversidades de la vida.*

*...a ti Mamá que desde que nací, tu infinito amor
me lo has demostrado día a día.*

*...a mis hermanos que me han mostrado la fortaleza
de la unión familiar, en especial a José Alejandro
que con su ejemplo me ha motivado a ser mejor
cada día.*

AGRADECIMIENTOS

...a mi Padre quien de él brota todo el valor que necesito y de quien adquirí la fortaleza de voluntad que tengo.

...a ti Madre quien eres fuente de amor y respeto para todos tus hijos.

...a mis hermanos quienes me han apoyado en todo momento durante el desarrollo de mi formación personal.

...a mi asesor Dr. Abner Israel Ramírez Vázquez que durante el desarrollo de formación y estructuración de la presente tesis mantuvo una atenta atención y una ética inquebrantable.

...a los Drs. Juan Manuel Ramírez Arredondo y Pablo Moreno Villalobos por su apoyo incondicional, paciencia y amistad.

...a los Ings. Josué Terrones Rayas, Omar Gabriel Villaseñor Vidrio, José Alfonso Vega Ruiz, José de Jesús Chávez Muro y Fernando Ornelas Tellez quienes me dieron su amistad y me apoyaron en todo momento.

...al resto de mis compañeros y amigos por darme la oportunidad de conocerlos.

...al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico otorgado.

ÍNDICE GENERAL

DEDICATORIA.....	iii
AGRADECIMIENTOS	iv
ÍNDICE GENERAL.....	v
ÍNDICE DE FIGURAS	vii
ÍNDICE DE TABLAS.....	viii
RESUMEN.....	ix
I INTRODUCCIÓN.....	1
1.1 Redes de gran tamaño y equivalentes	1
1.2 Dependencia frecuencial.....	2
1.3 Precisión de simulación.....	2
1.4 Historia (antecedentes).....	3
II IDENTIFICACIÓN EN EL DOMINIO s	4
2.1 Introducción.....	4
2.2 Identificación por mínimos cuadrados (LSI).....	4
2.3 Método T-Noda.....	6
2.4 Vector Fitting (VF).....	9
2.5 Ejemplo.....	12
III IDENTIFICACIÓN EN EL DOMINIO z	15
3.1 Introducción.....	15
3.2 Función racional en el dominio z y ecuación de diferencias	15
3.3 Identificación de rango completo.....	16
3.4 Estabilidad de la función racional.....	18
3.5 Identificación por secciones	19
3.6 Reducción de orden del modelo equivalente.....	21

IV APLICACIONES.....	24
4.1 Introducción.....	24
4.2 Red monofásica.....	24
4.3 Línea trifásica en circuito abierto.....	28
V CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS	31
5.1 Conclusiones.....	31
5.2 Trabajos futuros	32
REFERENCIAS	33
APÉNDICE A	36
APÉNDICE B.....	39

ÍNDICE DE FIGURAS

CAPÍTULO I

Fig. 1.1. Zona interna y zona externa de una red	2
--	---

CAPÍTULO II

Fig. 2.1. Respuesta a la frecuencia de una función arbitraria.	13
---	----

Fig. 2.2. Respuesta a la frecuencia sin escalamiento de columnas	14
--	----

CAPÍTULO III

Fig. 3.1. Relación entrada-salida en el dominio z	15
---	----

Fig. 3.2. Plano de transformación.....	18
--	----

Fig. 3.3. Aproximación por secciones	20
--	----

CAPÍTULO IV

Fig. 4.1. Configuración de la red monofásica	25
--	----

Fig. 4.2. Admitancia de entrada para red monofásica	25
---	----

Fig. 4.3. Admitancia de entrada para red monofásica con orden reducido.....	26
---	----

Fig. 4.4. Corriente en el dominio del tiempo	28
--	----

Fig. 4.5. Línea de transmisión trifásica en circuito abierto.....	29
---	----

Fig. 4.6. Admitancia de secuencia positiva para línea trifásica	29
---	----

Fig. 4.7. Admitancia de secuencia positiva para línea trifásica con orden reducido.....	30
---	----

APÉNDICE A

Fig. A.1. Circuito π equivalente en parámetros AB	37
---	----

ÍNDICE DE TABLAS

CAPÍTULO II

Tabla 2.1. Resultados obtenidos en aproximación de función arbitraria.....	13
--	----

CAPÍTULO IV

Tabla 4.1. Resultados obtenidos en la aproximación red monofásica.....	26
Tabla 4.2. Resultados obtenidos en reducción del modelo equivalente (red monofásica)...	27
Tabla 4.3. Resultados obtenidos en simulación en el dominio del tiempo.....	28
Tabla 4.4. Resultados obtenidos en la aproximación para línea trifásica.....	30
Tabla 4.5. Resultados obtenidos en reducción del modelo equivalente (línea trifásica).....	30

RESUMEN

En esta tesis se hace énfasis, como parte inicial, en la necesidad de la obtención de sistemas equivalentes para la simulación de transitorios electromagnéticos en redes de gran tamaño. Se presenta, además, una breve historia del desarrollo y planteamiento de técnicas de identificación a lo largo de los últimos 50 años.

Enseguida, se describen tres técnicas de identificación utilizadas con frecuencia en el área de Sistemas de Potencia. Tales técnicas son: la aproximación de funciones mediante mínimos cuadrados, un método propuesto por T. Noda, basado en un proceso iterativo de aproximación por funciones polinomiales, y el método conocido por Vector Fitting el cual fue propuesto por B. Gustavsen. Estas técnicas tienen su base en las funciones racionales en el dominio de la frecuencia (dominio s).

Luego, se describe una metodología alterna basada en la aproximación polinomial en el dominio discreto (dominio z) combinada con la partición del rango de frecuencia y con la aplicación de técnicas lineales (descomposición en valores singulares o realización balanceada) para la reducción de orden de modelos.

En este trabajo, se recomienda utilizar el rango completo de frecuencias para la identificación de funciones *suaves* con respecto a la frecuencia. Por otro lado, se recomienda particionar el rango de frecuencias cuando es el caso de una función con muchas resonancias (picos) en la frecuencia.

Después, se presentan algunas aplicaciones numéricas para la comparación tanto de las técnicas desarrolladas anteriormente a este trabajo como la propuesta por el autor.

Finalmente, se presentan las conclusiones de este trabajo y las recomendaciones para trabajos futuros.

I INTRODUCCIÓN

1.1 Redes de gran tamaño y equivalentes

Actualmente las redes eléctricas son constituidas por cientos de miles de elementos [1]. El comportamiento de dichas redes durante un fenómeno transitorio se puede analizar a partir de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (ODEs, por sus siglas en Inglés) que rigen la respuesta de cada uno de los elementos básicos que las forman. Por lo tanto, es inoperativo e incluso imposible simular con detalle dichas redes, aún a pesar de los avances tecnológicos de la computación. Una de las soluciones a esta problemática es el uso de equivalentes de redes.

Se puede definir un sistema equivalente como aquel cuya respuesta aproxima con un error mínimo a la del sistema real [2]. Generalmente, el sistema equivalente contiene en su modelo matemático un número de ODEs menor al del sistema original; por lo tanto, se emplea un tiempo de cómputo notablemente menor al de éste último.

Un sistema equivalente es de utilidad práctica para estudiar los efectos producidos por los fenómenos transitorios en una región en particular de la red, ver Fig. 1.1. A la región de interés donde ocurre el transitorio se le conoce como *zona interna* y es modelada con detalle. El resto del sistema es conocido como *zona externa* y es representada por un circuito equivalente [2].

En este trabajo se presenta una metodología matemática basada en aproximación racional en el dominio z para el cálculo de equivalentes. Inicialmente, se obtiene la función de transferencia del sistema en el dominio s . Luego, se calculan aproximaciones polinomiales en el dominio z de dicha función por medio de la partición del rango de frecuencias. Enseguida, debido a la aparición de polos redundantes en la aproximación por secciones, se calcula un modelo de orden reducido utilizando Descomposición en Valores Singulares (SVD, por sus siglas en Inglés), o, alternativamente, la técnica de Realización Balanceada. Finalmente, con el polinomio de orden reducido se obtiene la ecuación de diferencias en el dominio del tiempo para el análisis de transitorios.

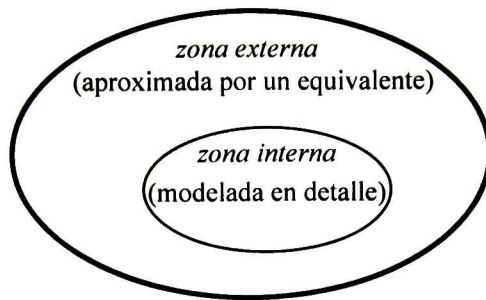


Fig. 1.1. Zona interna y zona externa de una red

1.2 Dependencia frecuencial

En general, los elementos que forman parte de una red eléctrica presentan variaciones con respecto a la frecuencia. Lo anterior se acentúa en el caso de transitorios electromagnéticos donde se presenta un amplio rango de frecuencias [3]. Por lo tanto, si se desea una buena representación del fenómeno transitorio, es necesario tomar en cuenta la dependencia frecuencial de los elementos de la red, especialmente en la *zona interna*. Usualmente, la máxima frecuencia a considerar en el modelado de los elementos de red está relacionada con la contenida en la excitación y/o perturbación. La respuesta a la frecuencia de un sistema puede ser representada a través de ecuaciones analíticas o a través de una tabla de datos resultado de mediciones experimentales.

1.3 Precisión de simulación

Es deseable que la dinámica del sistema equivalente se comporte de la forma más aproximada a la del sistema original. Algunas consideraciones para que se cumpla lo anterior son:

- Definir un rango de frecuencias de acuerdo con el tipo de transitorio.
- Definir un número adecuado de muestras de la señal.
- Definir un orden adecuado del sistema equivalente, esto puede ser por experiencia del usuario o puede incrementarse gradualmente.
- Utilizar un método de integración preciso y estable al resolver las ODEs resultantes.

1.4 Historia (antecedentes)

En 1959 E. C. Levy introdujo una técnica en el dominio s para la obtención de sistemas equivalentes. Dicha técnica, basada en mínimos cuadrados, se utilizó para la identificación la respuesta a la frecuencia obtenida experimentalmente [4]. Desde entonces, muchos investigadores han contribuido para mejorar este método. Por ejemplo, C. K. Sanathanan y J. Koerner en 1963 introdujeron un factor de ponderación para mejorar la aproximación en bajas frecuencias [5].

W. D. Humpage, *et. al.*, en 1980 desarrollaron una metodología en el dominio z para el análisis de transitorios electromagnéticos en líneas de transmisión [3].

A. Abur y H. Singh en 1993 propusieron el uso de una formulación recursiva para el desarrollo de redes equivalentes, donde la identificación es directamente en el dominio z a partir de los datos del dominio del tiempo donde se utilizó una señal de excitación multi-seno [6]. Esta técnica fue modificada y aplicada para modelar líneas de transmisión por G. Angelidis y A. Semlyen en 1995. Estos autores aproximaron la matriz de propagación de onda y la matriz de admitancia característica [7].

Por su parte T. Noda, *et. al.*, propusieron una metodología en el dominio z para obtener modelos equivalentes de líneas de transmisión [8],[9].

B. Gustavsen y A. Semlyen desarrollaron un método de aproximación en el dominio s llamado Vector Fitting (VF) que también ha sido aplicado a modelar líneas de transmisión y redes eléctricas en general [10].

Y. P. Wang y N. R. Watson en 2003 presentaron el uso de la función racional en el dominio z para la aproximación de la respuesta a la frecuencia para 1 y 2 puertos [11].

Recientemente T. Noda y A. Ramírez describieron ampliamente los aspectos teórico-prácticos de la identificación en el dominio z con aplicación al estudio de transitorios electromagnéticos [12].

II IDENTIFICACIÓN EN EL DOMINIO s

2.1 Introducción

En este Capítulo se describen algunas metodologías para la obtención de sistemas equivalentes en el dominio s . La primera de ellas, Identificación por Mínimos Cuadrados (LSI, por sus siglas en Inglés), tiene como objetivo encontrar una función racional que aproxime con la mayor precisión al sistema real en todo el rango de frecuencia [13]. La segunda, propuesta por Taku Noda (T-Noda), propone un procedimiento iterativo para aproximar una función en el dominio s de manera eficiente mediante una función racional [14]. Esta técnica puede aplicarse en todo el rango de frecuencias o por subrangos. La tercera, método de Vector Fitting (VF), está basada en la aproximación a través de fracciones parciales iniciando con un conjunto de polos propuestos y mejorando su posición con respecto a la frecuencia a través de un procedimiento iterativo [10]. La parte final de este capítulo se presenta un ejemplo con fines de comparación de los métodos mencionados anteriormente.

2.2 Identificación por mínimos cuadrados (LSI)

Sea $f(s)$ la función de transferencia (impedancia o admitancia) de un sistema, obtenida analíticamente o a través de una colección de datos experimentales, para la cual se desea obtener un sistema equivalente. En esta metodología se propone aproximar $f(s)$ mediante una función racional de la forma:

$$f(s) \cong \frac{a_0 + a_1 s + \dots + a_M s^M}{1 + b_1 s + \dots + b_N s^N} \quad (2.1)$$

donde $M \leq N$. La expresión equivalente a (2.1) es entonces (fracciones parciales):

$$f(s) \cong \sum_{k=1}^N \frac{r_k}{s - p_k} + d, \quad (2.2)$$

donde:

$s = j\omega$ es la frecuencia imaginaria pura y $\omega = 2\pi \Omega$, para $\Omega_{\min} \leq \Omega \leq \Omega_{\max}$ Hz.

N, M = orden del polinomio respectivo.

La precisión de la aproximación (2.1) ó (2.2) estará determinada por el grado del polinomio (número de polos) así como también por el método numérico que se utilice para la obtención de los coeficientes (2.1) o polos/residuos (2.2).

El cálculo de los coeficientes de (2.1) puede ser formulado como un problema lineal de mínimos cuadrados multiplicando ambos lados de (2.1) por el denominador y evaluando para las frecuencias $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_h$ la expresión resultante. De esta forma se obtiene el sistema sobredeterminado:

$$Ax = b, \quad (2.3)$$

donde el l -ésimo renglón de A está dado por:

$$A_l = [1 \quad s_l \quad \dots \quad s_l^M \quad -s_l f_l \quad \dots \quad -s_l^N f_l], \quad (2.4)$$

y:

$$x = [a_0, a_1, \dots, a_M \quad b_1, b_2, \dots, b_N]^T \quad (2.5)$$

$$b = [f_1 \quad \dots \quad f_h]^T \quad (2.6)$$

En (2.4) y (2.6) se utiliza la definición $f_l = f(s_l)$, para $l=1, 2, \dots, h$, siendo $h \geq N$ el número de mediciones.

Es importante mencionar que (2.3), generalmente es un sistema de ecuaciones mal condicionado debido a que s_l^k puede tomar un amplio rango de valores. Además, en la literatura se ha demostrado que esta técnica usualmente produce un error mayor en bajas frecuencias [14]. El mal condicionamiento de la matriz A y el error en bajas frecuencias pueden resolverse escalando sus columnas, a_k , a través de la matriz diagonal D , para $k=1, 2, \dots, M+N+1$ [2]:

$$D = \text{diag} \left\{ \frac{1}{\|a_k\|_2} \right\}, \quad (2.7)$$

donde $\|\bullet\|_2$ denota la norma euclidiana, resultando en el nuevo sistema:

$$ADD^{-1}x = b, \quad (2.8)$$

o:

$$A'x = b. \quad (2.9)$$

Para asegurar que los coeficientes en (2.1) sean reales, (2.9) se plantea en cantidades reales:

$$\begin{bmatrix} A'_r \\ A'_i \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} b_r \\ b_i \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

donde los subíndices r e i denotan parte real e imaginaria respectivamente.

Una vez resolviendo (2.10), se calcula el vector solución x como:

$$x = Dx . \quad (2.11)$$

Finalmente, se calculan los residuos, polos y la constante d de (2.2) usando la función “*residue*” de Matlab a (2.1).

2.3 Método T-Noda

Esta metodología propone un procedimiento iterativo para aproximar $f(s)$ mediante una función racional de la forma (2.2) de una manera más eficiente que el método LSI.

El algoritmo [20], consiste en los siguientes pasos:

- a) Formulación del sistema (2.3) en cantidades reales (ver (2.10)) a partir de la función racional (2.1).
- b) Factor de peso adaptivo:

El sistema $Ax = b$ arrojado en el paso anterior, se resuelve iterativamente aplicando factores de ponderación para muestras en la frecuencia con un error grande en la iteración anterior, como se describe a continuación.

Considere la función error para la l -ésima muestra en la frecuencia como:

$$e_l(x) = f(s_l) - \hat{f}(s_l, x), \quad (2.12)$$

donde x es el vector solución y $\hat{f}(s_l, x)$ es la respuesta en la frecuencia de la aproximación racional (2.1). Alternativamente, se puede utilizar el error relativo dado por:

$$e_l(x) = \frac{f(s_l) - \hat{f}(s_l, x)}{|f(s_l)|} \quad (2.13)$$

El objetivo es minimizar una función error $S(x)$ respecto al vector solución x :

$$\min_x S(x), \quad (2.14)$$

donde $S(x)$ está dada por:

d) Cálculo de residuos

Una vez que el vector solución “x” converge, los polos y sus correspondientes residuos de (2.2) son obtenidos aplicando el comando “*residue*” de Matlab a (2.1). En caso de obtener polos inestables, éstos se fuerzan a ser estables mediante el cambio de signo de su parte real.

En el caso de que se aplique identificación mediante la partición del rango total de frecuencias, el resultado viene dado por la suma de funciones del tipo (2.2) para cada subrango de frecuencias [14]. Entonces, es necesario un recálculo de los residuos encontrados para el rango completo de frecuencias donde los polos son mantenidos fijos, como se describe enseguida.

Asumamos que un total de N_r polos reales y N_c pares de polos complejos conjugados han sido obtenidos del proceso de identificación por secciones; entonces se tiene:

$$f(s) \cong \sum_{n=1}^{N_r} \frac{r_n}{s - p_n} + \sum_{m=1}^{N_c} \left(\frac{\hat{r}_m}{s - \hat{p}_m} + \frac{\hat{r}_m^*}{s - \hat{p}_m^*} \right), \quad (2.23)$$

donde * denota el conjugado.

Evaluando (2.23) para varias frecuencias, se obtiene un sistema de la forma:

$$Ax = b, \quad (2.24)$$

donde el l -ésimo renglón de A está dado por:

$$A_l = \left[\frac{1}{s_l - p_1} + \dots + \frac{1}{s_l - p_{N_r}} \quad \frac{1}{s_l - \hat{p}_1} + \dots + \frac{1}{s_l - \hat{p}_{2N_c}} \right], \quad (2.25)$$

y:

$$x = [r_1 \quad \dots \quad r_{N_r} \quad \hat{r}_1 \quad \dots \quad \hat{r}_{2N_c}]^T \quad (2.26)$$

$$b = [f_1 \quad \dots \quad f_h]^T \quad (2.27)$$

Para asegurar que los residuos correspondientes a los polos complejos vengan en pares conjugados perfectos, (2.24) se formula en cantidades reales en forma similar a (2.10). En el caso de que aparezcan polos repetidos o con valores muy cercanos entre sí, éstos son agrupados antes de continuar con el siguiente paso.

e) Implementación en el dominio del tiempo.

Una vez aproximada la función de transferencia $f(s)$, la relación entrada-salida del sistema puede ser expresada en el dominio del tiempo como un conjunto de ODEs de la forma [15]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + du,\end{aligned}\tag{2.28}$$

donde A es una matriz diagonal con los polos obtenidos como sus elementos, B es un vector columna de “unos”, C es un vector renglón con los residuos de (2.23) y d es una constante.

La solución de (2.28) puede ser llevada a cabo mediante la aplicación de la regla trapezoidal de integración con un paso de tiempo Δt ; o en su defecto, utilizando el comando “ode” de Matlab.

2.4 Vector Fitting (VF)

Esta metodología es ampliamente utilizada en la literatura, considerando que su robustez y precisión son altas, incluso para funciones con un alto número de resonancias [10],[15]. De igual forma a los otros métodos descritos anteriormente, el objetivo de este método es la aproximación de una función $f(s)$ con una función racional. VF comienza con un conjunto de polos iniciales y mejora su posición con respecto a la frecuencia a través de un procedimiento iterativo hasta lograr la precisión deseada.

Considere la aproximación:

$$f(s) \cong \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{s - a_k} + d + sg,\tag{2.29}$$

donde los residuos, c_k , y los polos, a_k , pueden tener valores reales o venir en pares complejos conjugados, mientras que d y g son reales. El problema consiste en determinar los coeficientes de (2.29) tal que se obtenga una aproximación en el sentido de mínimos cuadrados de $f(s)$. Nótese que, debido a las incógnitas a_k , (2.29) es un problema no lineal. VF resuelve (2.29) secuencialmente como un problema lineal en dos etapas.

Etapa 1: Identificación de polos

Se especifica un conjunto de polos iniciales \bar{a}_k para (2.29) y se multiplica a $f(s)$ con una función desconocida $\sigma(s)$. Entonces se tiene:

$$\begin{bmatrix} \sigma(s)f(s) \\ \sigma(s) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{s - \bar{a}_k} + d + sg \\ \sum_{k=1}^N \frac{\tilde{c}_k}{s - \bar{a}_k} + 1 \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

Se observa de (2.30) que $\sigma(s)$ tiene los mismos polos que $\sigma(s)f(s)$. Además, se ha forzado a $\sigma(s)$ a tener valor de “uno” a altas frecuencias.

Multiplicando el segundo renglón de (2.30) por $f(s)$ e igualando con el primer renglón de (2.30) resulta en:

$$\left(\sum_{k=1}^N \frac{c_k}{s - \bar{a}_k} + d + sg \right) \approx \left(\sum_{k=1}^N \frac{\tilde{c}_k}{s - \bar{a}_k} + 1 \right) f(s), \quad (2.31)$$

o:

$$(\sigma f)_{fit}(s) \approx \sigma_{fit}(s)f(s), \quad (2.32)$$

donde a las aproximaciones se les ha incluido el subíndice “fit”

Despejando $f(s)$ de (2.31) :

$$\left(\sum_{k=1}^N \frac{c_k}{s - \bar{a}_k} + d + sg \right) - \left(\sum_{k=1}^N \frac{\tilde{c}_k}{s - \bar{a}_k} \right) f(s) \approx f(s). \quad (2.33)$$

La expresión (2.33) es lineal en las incógnitas c_k, d, g, \tilde{c}_k . Por lo tanto puede evaluarse para un conjunto de frecuencias resultando en el sistema sobredeterminado:

$$Ax = b. \quad (2.34)$$

Por ejemplo, considere la evaluación para la l -ésima frecuencia de $f(s_l)$, entonces el l -ésimo renglón de (2.34) está dado por:

$$A_l = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_l - \bar{a}_1} & \cdots & \frac{1}{s_l - \bar{a}_N} & 1 & s_l & \frac{-f_l}{s_l - \bar{a}_1} & \cdots & \frac{-f_l}{s_l - \bar{a}_N} \end{bmatrix}, \quad (2.35)$$

y:

$$x = [c_1 \quad \cdots \quad c_N \quad d \quad g \quad \tilde{c}_1 \quad \cdots \quad \tilde{c}_N]^T \quad (2.36)$$

$$b = [f_1 \quad \cdots \quad f_h]^T \quad (2.37)$$

En caso de polos complejos de (2.33), el sistema (2.34) se descompone en su parte real e imaginaria como se indica en (2.10).

Una vez que se obtiene el vector solución x de (2.34), se calcula $f(s)$ de (2.31) de la siguiente manera. De (2.31) y (2.32) se tienen:

$$(\sigma f)_{fit}(s) = g \frac{\prod_{k=1}^{N+1} (s - \Upsilon_k)}{\prod_{k=1}^N (s - \bar{a}_k)}, \quad (2.38)$$

$$\sigma_{fit}(s) = \frac{\prod_{k=1}^N (s - \tilde{\Upsilon}_k)}{\prod_{k=1}^N (s - \bar{a}_k)}. \quad (2.39)$$

Entonces, tomando en cuenta (2.31), (2.38) y (2.39) se tiene:

$$f(s) = \frac{(\sigma f)_{fit}(s)}{\sigma_{fit}(s)} = g \frac{\prod_{k=1}^{N+1} (s - \Upsilon_k)}{\prod_{k=1}^N (s - \tilde{\Upsilon}_k)}. \quad (2.40)$$

La expresión (2.40) muestra que los polos de $f(s)$ son iguales a los ceros de $\sigma_{fit}(s)$. Nótese de (2.40) que los polos iniciales han sido cancelados en la división.

De esta forma se obtiene un conjunto de polos para $f(s)$ mediante el cálculo de los ceros de $\sigma_{fit}(s)$, el cual se lleva a cabo aplicando el comando “zpk” de Matlab a la parte derecha de (2.31). De igual forma al método T-Noda, se tiene la opción de convertir los polos inestables a estables.

En el caso $g=0$ o $(d=0)$ se hacen las modificaciones correspondientes en (2.30) a (2.33).

Etapa 2: Identificación de residuos

En principio, se podrían calcular los residuos de $f(s)$ a través de (2.40); sin embargo, se obtiene un resultado más preciso si se evalúa el problema original (2.29) con los polos a_k de $f(s)$ dado por los ceros de $\sigma_{fit}(s)$ [10]. Esto resulta en un problema lineal sobredeterminado de la forma $Ax = b$, donde la solución del vector x contiene los términos c_k , d y g .

En la técnica de VF se recomienda la selección de los polos de inicio de la siguiente forma [10]:

$$a_i = -\alpha + j\beta, \quad (2.41)$$

$$a_{i+1} = -\alpha - j\beta, \quad (2.42)$$

donde:

$$\alpha = \frac{\beta}{100}, \quad (2.43)$$

siendo β una cantidad linealmente distribuida a lo largo del rango de frecuencias.

2.5 Ejemplo

Con propósitos de ilustración, considere $f(s)$ como una función de transferencia arbitraria dada por (2.44) y evaluada con 300 puntos en un rango de 1 Hz a 1 KHz.

$$f(s) = \frac{0.05}{s+0.01} + \frac{0.03}{s+(10+j20)} + \frac{0.03}{s+(10-j20)} + \frac{10}{s+(10+j200)} + \frac{10}{s+(10-j200)} + \frac{15}{s+(10+j1000)} + \frac{15}{s+(10-j1000)} + \frac{8}{s+(10+j3000)} + \frac{8}{s+(10-j3000)} \quad (2.44)$$

En la Fig. 2.1 se presenta la comparación de la aproximación racional dada por los métodos descritos en este Capítulo; esto es, LSI, T-Noda y VF. En todos los métodos se ha utilizado un orden de aproximación de 8 polos. De la Fig. 2.1 se puede apreciar que los tres métodos dan resultados muy similares. Para la evaluación de los métodos anteriores, el error *rms* relativo se calcula con:

$$rms = \sqrt{\frac{\int (f - \hat{f})^2 dt}{\int f^2 dt}}. \quad (2.45)$$

donde \hat{f} es la aproximación resultante de la función real f

La Tabla 2.1 presenta el error *rms* obtenido en la aproximación y el tiempo de cómputo requerido por cada método considerando 3 iteraciones para los métodos de VF y T-Noda. La computadora que se utilizó para obtener dichos resultados es una Pentium IV con 512 Mb de memoria RAM y con una velocidad de procesamiento de 3 GHz.

Tabla 2.1. Resultados obtenidos en aproximación de función arbitraria

Método	Error(<i>rms</i>)	Tiempo(s)
LSI	5.77×10^{-3}	0.031
T-Noda	4.68×10^{-3}	0.15
VF	3.12×10^{-3}	0.21

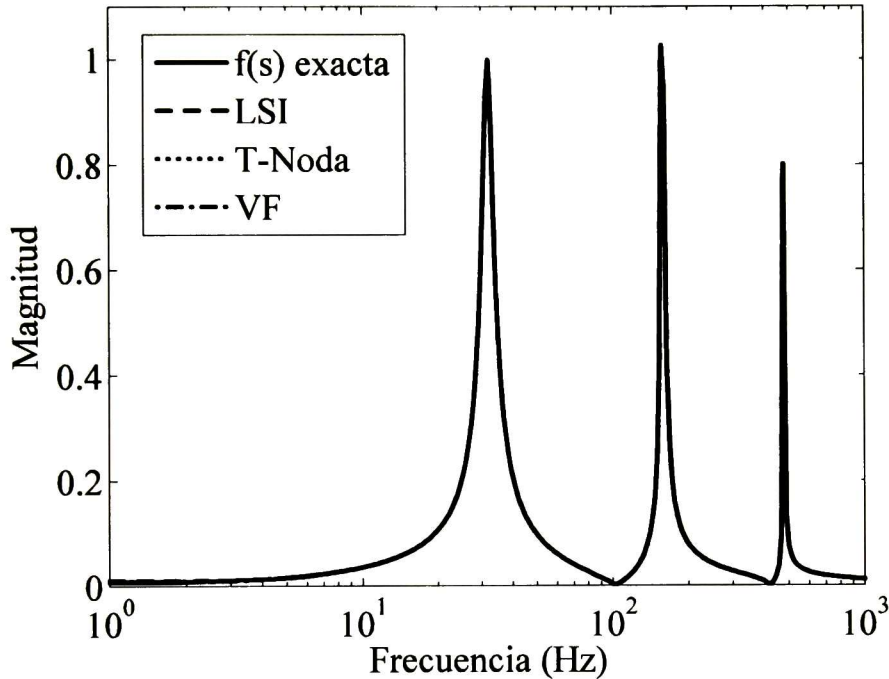


Fig. 2.1. Respuesta a la frecuencia de una función arbitraria.

Como se puede observar en la Fig. 2.1 y de los resultados de la Tabla 2.1, las aproximaciones dadas por las técnicas LSI y VF arrojan un error similar.

Es importante mencionar que el método básico LSI se modificó en este trabajo mediante el escalamiento de la matriz A en el sistema $Ax = b$ resultante como es descrito en (2.7) a (2.11); de otra forma, sin escalamiento los resultados arrojados viene con un error *rms* igual a 0.96, véase Fig. 2.2.

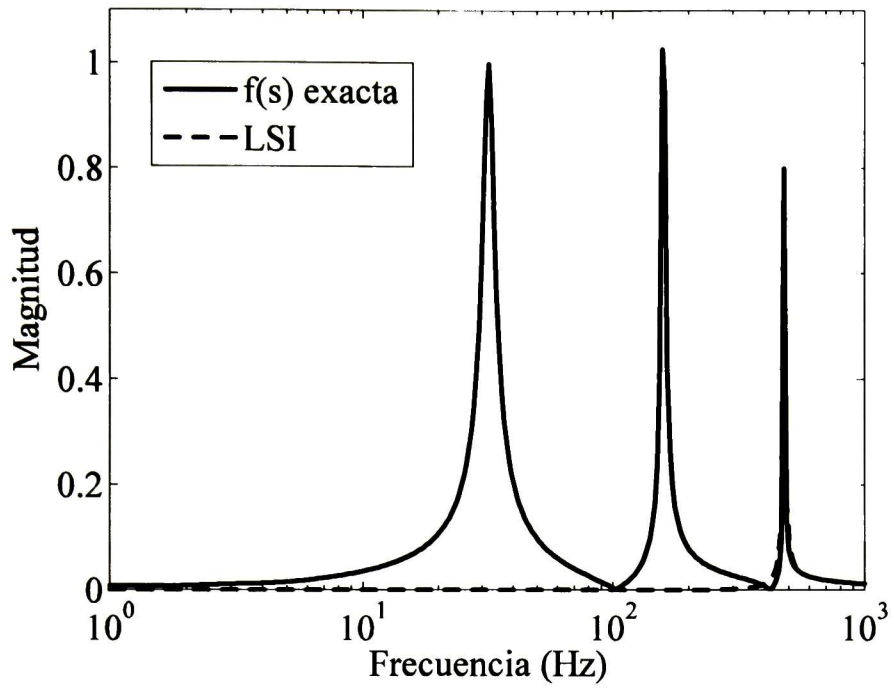


Fig. 2.2. Respuesta a la frecuencia sin escalamiento de columnas

III IDENTIFICACIÓN EN EL DOMINIO z

3.1 Introducción

En este Capítulo se presenta una metodología para el cálculo de equivalentes basada en aproximación racional en el dominio z [12]. Inicialmente, se establece la conversión de una función racional en el dominio z a una ecuación de diferencias en el dominio del tiempo. Esta última es utilizada para el cálculo de la dinámica del sistema. Luego, se describe la formulación matemática del cálculo de equivalentes considerando un rango completo de frecuencias y aplicando un criterio de estabilidad para la obtención de la función racional. Enseguida, se extiende el algoritmo para el cálculo de aproximación por secciones en el dominio z (nombrado aquí como z -D), en base a la partición del rango de frecuencias. Finalmente, se obtiene un modelo de orden reducido de la función racional obtenida utilizando una técnica basada en descomposición de valores singulares (SVD) o en realización balanceada.

3.2 Función racional en el dominio z y ecuación de diferencias

Considere para una red eléctrica la excitación $v(z)$ y la respuesta $i(z)$ relacionadas a través de una función de transferencia $y(z)$, como se muestra en la Fig. 3.1.

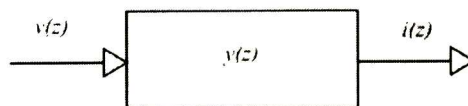


Fig. 3.1. Relación entrada-salida en el dominio z

Entonces, y puede representar, por ejemplo, la admitancia de la red, siendo expresada como:

$$y = \frac{i}{v} \quad (3.1)$$

En este trabajo se propone aproximar a “ y ” a través de una función racional del tipo [11]:

$$y \cong \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_M z^{-M}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}}, \quad (3.2)$$

donde $M \leq N$, multiplicando (3.2) por el denominador se obtiene:

$$(1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N})i = (a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_M z^{-M})v, \quad (3.3)$$

o:

$$i = a_0 v + (a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_M z^{-M})v - (b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N})i. \quad (3.4)$$

En el dominio del tiempo (3.4) puede ser expresada como la siguiente ecuación de diferencias (donde Δt es el paso de tiempo) [16][17]:

$$i(n\Delta t) = a_0 v(n\Delta t) + a_1 v(n\Delta t - \Delta t) + a_2 v(n\Delta t - 2\Delta t) + \dots + a_M v(n\Delta t - M\Delta t) - b_1 i(n\Delta t - \Delta t) - b_2 i(n\Delta t - 2\Delta t) - \dots - b_N i(n\Delta t - N\Delta t). \quad (3.5)$$

Nótese que, de acuerdo a (3.5), la respuesta del sistema en un tiempo $n\Delta t$ está dada en función de sí misma y de la excitación en tiempos anteriores. Nótese además que, (3.5) está estrechamente relacionada con el concepto de convolución recursiva [18].

3.3 Identificación de rango completo

La identificación de una función a través de una función racional considerando un amplio rango de frecuencias se propone aquí solamente para funciones suaves, es decir, funciones con un número reducido de resonancias (picos). Entonces, el algoritmo resultante es robusto y computacionalmente eficiente, el cual arroja una aproximación precisa y de bajo orden. Por otro lado, si la función a aproximar tiene muchos picos en la frecuencia, se obtiene una eficiencia computacional baja y un orden de aproximación alto.

Sea $f(s)$ una función de transferencia dada por una colección de datos discretos en el dominio de la frecuencia. Se desea obtener un sistema equivalente a $f(s)$ de orden M, N mediante una función racional de la forma [11]:

$$f(z) \cong \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}}{1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}}. \quad (3.6)$$

o en forma equivalente (fracciones parciales) asumiendo que $M \leq N$:

$$f(z) \cong \sum_{k=1}^N \frac{r_k}{z - p_k} + d. \quad (3.7)$$

Para el cálculo de los coeficientes en (3.6), se considera la definición [16]:

$$z = e^{s\Delta t} \quad (3.8)$$

Entonces tenemos que para cualquier potencia k :

$$z^{-k} = e^{-ks\Delta t} = \cos(k\omega\Delta t) - j \sin(k\omega\Delta t). \quad (3.9)$$

Tomando en cuenta (3.9), se multiplica ambos lados de (3.6) por el denominador y se evalúa para varias frecuencias, $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_h$, obteniendo el sistema sobredeterminado de la forma:

$$Ax = b, \quad (3.10)$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_{up} & x_{low} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_0 \dots a_M & b_1 \dots b_N \end{bmatrix}^T \quad (3.12)$$

$$b = \begin{bmatrix} b_{up} & b_{low} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -f_1^r & \dots & -f_h^r - f_1^i & \dots & -f_h^i \end{bmatrix}^T \quad (3.13)$$

Asumiendo $h \geq N$ el número de mediciones, las submatrices de A están dadas por:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -1 & -\cos(\omega_1\Delta t) & \dots & -\cos(M\omega_1\Delta t) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -1 & -\cos(\omega_h\Delta t) & \dots & -\cos(M\omega_h\Delta t) \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} f_1^r \cos(\omega_1\Delta t) + f_1^i \sin(\omega_1\Delta t) & \dots & f_1^r \cos(N\omega_1\Delta t) + f_1^i \sin(N\omega_1\Delta t) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ f_h^r \cos(\omega_h\Delta t) + f_h^i \sin(\omega_h\Delta t) & \dots & f_h^r \cos(N\omega_h\Delta t) + f_h^i \sin(N\omega_h\Delta t) \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & \sin(\omega_1\Delta t) & \dots & \sin(M\omega_1\Delta t) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \sin(\omega_h\Delta t) & \dots & \sin(M\omega_h\Delta t) \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} f_1^i \cos(\omega_1\Delta t) - f_1^r \sin(\omega_1\Delta t) & \dots & f_1^i \cos(N\omega_1\Delta t) - f_1^r \sin(N\omega_1\Delta t) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ f_h^i \cos(\omega_h\Delta t) - f_h^r \sin(\omega_h\Delta t) & \dots & f_h^i \cos(N\omega_h\Delta t) - f_h^r \sin(N\omega_h\Delta t) \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Si se desea una mayor precisión para algunas frecuencias de interés, el sistema (3.10) es modificado con una matriz diagonal de ponderación [13], esto es:

$$WAx = Wb, \quad (3.18)$$

donde en W se definen con un valor igual a la unidad a aquellos elementos correspondientes a frecuencias sin ponderar.

3.4 Estabilidad de la función racional

Una vez obtenidos los coeficientes de (3.6), la estabilidad de la función aproximada se analiza a través de (3.7) donde el comando “*residue*” de Matlab es utilizado para el cálculo de las fracciones parciales en (3.7) [25].

De acuerdo a la transformación (3.8), los polos estables, situados en el lado izquierdo del plano s , son mapeados en el plano z dentro de una circunferencia con un radio igual a la unidad [17], ver Fig. 3.2.

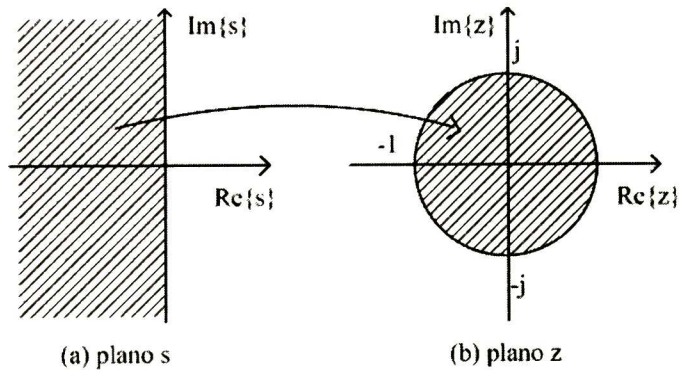


Fig. 3.2. Plano de transformación.

La metodología propuesta (ver sección 3.3) arroja tanto polos estables como inestables. La solución a este problema consiste básicamente en tomar el recíproco de la magnitud de los polos inestables en (3.7) para forzarlos a estar dentro del círculo unitario con el mismo ángulo “ θ ”, esto es:

$$p_{est} = \frac{1}{|p_{mest}|} e^{j\theta} \quad |p_{est}| \leq 1. \quad (3.19)$$

En base a la modificación (3.19), se calcula nuevamente el polinomio del denominador de (3.6) a través del comando “*poly*” de Matlab. Esto resulta en un nuevo conjunto de coeficientes:

$$x'_{low} = [b'_1 \quad \dots \quad b'_N]^T \quad (3.20)$$

De igual manera, es necesario recalcular los coeficientes del numerador de (3.6). Esto se realiza en base a un problema lineal de mínimos cuadrados, cuyo sistema sobredeterminado es de la forma $A'x'_{up} = b'$, donde:

$$A' = \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

$$b' = b - \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} x'_{low}, \quad (3.22)$$

resultando en:

$$x'_{up} = [a'_0 \quad \dots \quad a'_M]^T \quad (3.23)$$

3.5 Identificación por secciones

Para la identificación de una función de transferencia, $f(s)$, dentro de un amplio rango de frecuencias y con un gran número de resonancias, es necesario un alto orden de la función racional equivalente (3.6). De la misma forma, también se necesita una matriz de ponderación adecuada la cual disminuya errores producidos por el mal condicionamiento de la matriz A en (3.10). En este trabajo se propone la aproximación por secciones basada en particionar el rango total de frecuencias en subrangos [19], ver Fig. 3.3. El método consiste en los pasos descritos a continuación.

- Considere el rango completo de frecuencias dado por $\Omega = [\Omega_{\min} \Omega_{\max}]$ y que es dividido en un número, η , de subrangos $\Omega_1, \dots, \Omega_\eta$ de tal forma que sus uniones resultan en Ω . El rango de cada sección puede ser seleccionado por el usuario según la forma de la señal y los números de resonancias que la componen o se puede automatizar [20]. Sin pérdida de generalidad, en este trabajo se utiliza la primera opción.

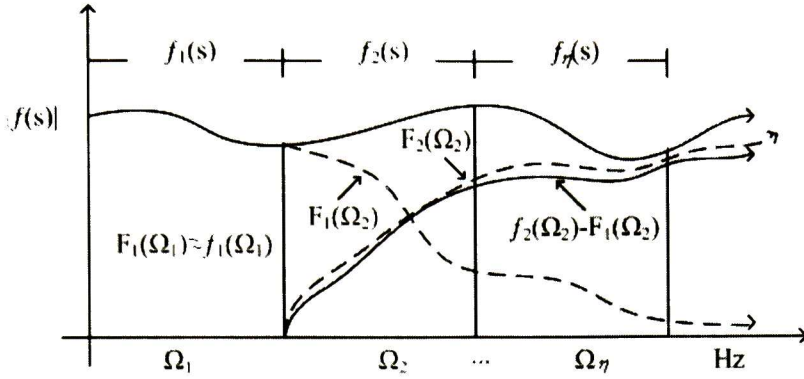


Fig. 3.3. Aproximación por secciones

Una vez que se han definido los subrangos de frecuencias, f se aproxima para cada sección con un polinomio de la forma (3.6), como se indica abajo, donde los polos son forzados a ser estables en el dominio z como se describió en la sección 3.4.

- Considere $M_i \leq N_i$ como el orden de la aproximación polinomial para la i -ésima sección. Inicialmente se aproxima f para la primer sección como:

$$F_1(\Omega_1) \cong f_1(\Omega_1). \quad (3.24)$$

- Enseguida se aproxima el error dado por $F_1(\Omega_2)$ y $f_2(\Omega_2)$ (en el subrango $\Omega_1 \cup \Omega_2$) como:

$$F_2(\Omega_2) \cong f_2(\Omega_2) - F_1(\Omega_2). \quad (3.25)$$

Entonces, la aproximación resultante en la segunda sección está dada por:

$$\hat{f}_2(\Omega_2) = F_2(\Omega_2) + F_1(\Omega_2). \quad (3.26)$$

- Este proceso se sigue hasta aproximar la función f para el último rango de frecuencias Ω_n .

Con el procedimiento descrito anteriormente se obtiene la aproximación total dada por:

$$f(z) \cong \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{M_1} z^{-M_1}}{1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{N_1} z^{-N_1}} + \frac{c_0 + c_1 z^{-1} + \dots + c_{M_2} z^{-M_2}}{1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_{N_2} z^{-N_2}} + \dots + \frac{e_0 + e_1 z^{-1} + \dots + e_{M_i} z^{-M_i}}{1 + g_1 z^{-1} + \dots + g_{N_i} z^{-N_i}}. \quad (3.27)$$

En base a (3.27), se realiza un refinamiento en el rango completo de frecuencia de los coeficientes de los numeradores a través del planteamiento de un sistema lineal sobredeterminado de la forma:

$$Ax = b, \quad (3.28)$$

donde el l -ésimo renglón de A está dado por:

$$A_l = \left[R_{1(l)} \quad R_{1(l)}^{-1} \quad \cdots \quad R_{1(l)}^{-N_1} \quad \cdots \quad R_{\eta(l)} \quad R_{\eta(l)}^{-1} \quad \cdots \quad R_{\eta(l)}^{-N_\eta} \right], \quad (3.29)$$

y:

$$x = \left[a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_{M_1} \quad c_0 \quad c_1 \quad \cdots \quad c_{M_2} \quad \cdots \quad e_0 \quad e_1 \quad \cdots \quad e_{M_r} \right]^T \quad (3.30)$$

$$b = \left[f_1^r \quad \cdots \quad f_h^r \quad f_1^i \quad \cdots \quad f_h^i \right]^T \quad (3.31)$$

donde $R_{m(l)}$, $m=1,2,\dots,\eta$, corresponden al recíproco de cada uno de los denominadores de (3.27) evaluados para la l -ésima frecuencia y los superíndices r e i indican la parte real y la parte imaginaria, respectivamente, del elemento en cuestión. Entonces, (3.28) se formula en variables reales como en (2.10) para su solución.

3.6 Reducción de orden del modelo equivalente

La aproximación racional (3.27) resulta con un gran número de polos, de los cuales algunos son redundantes. Este innecesario alto orden del modelo puede ser reducido utilizando descomposición en valores singulares (SVD) o realización balanceada [21],[25].

- Descomposición en Valores Singulares

Inicialmente, la aproximación racional (3.27) (después del refinamiento de los coeficientes de los numeradores) se expresa en fracciones parciales (utilizando el comando “*residue*” de Matlab) como:

$$f(z) \cong \sum_{k=1}^{N_1} \frac{r_k}{z-p_k} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{r_k}{z-p_k} + \cdots + \sum_{k=1}^{N_\eta} \frac{r_k}{z-p_k} \quad (3.32)$$

Luego, de (3.32) se forma el sistema lineal de ecuaciones sobredeterminado de la forma:

$$Ax = b, \quad (3.33)$$

considere la evaluación para la l -ésima frecuencia de $f(s_l)$, entonces el l -ésimo renglón de (3.33) está dado por:

$$A_l = \left[\frac{1}{z_l - p_1} \quad \cdots \quad \frac{1}{z_l - p_{N_1}} \quad \frac{1}{z_l - p_1} \quad \cdots \quad \frac{1}{z_l - p_{N_2}} \quad \cdots \quad \frac{1}{z_l - p_1} \quad \cdots \quad \frac{1}{z_l - p_{N_\eta}} \right], \quad (3.34)$$

y:

$$x = [r_1 \ \cdots \ r_{N_1} \ r_1 \ \cdots \ r_{N_2} \ \cdots \ r_1 \ \cdots \ r_{N_r}]^T \quad (3.35)$$

$$b = [f_1 \ \cdots \ f_h]^T \quad (3.36)$$

Entonces, aplicando SVD a la matriz A de (3.33), tenemos que:

$$U\Sigma V^T x = b, \quad (3.37)$$

o:

$$\Sigma V^T x = q, \quad (3.38)$$

donde $q = U^H b$ (donde el superíndice H denota el conjugado transpuesto).

Usando solamente los $2r$ valores singulares más significativos de A (incluidos en la diagonal de Σ), el sistema (3.38) puede ser truncado para obtener un sistema de orden r con $r < N$

$$q_r = \Sigma_r V_r x, \quad (3.39)$$

donde $q_r \in \mathfrak{R}^{2r}$, $\Sigma_r \in \mathfrak{R}^{2r \times 2r}$ y $V_r \in \mathfrak{R}^{2r \times 2N}$

Enseguida la solución de (3.39) (utilizando el comando “\” de Matlab) resulta en un vector disperso x , la dispersidad de x determina los polos de (3.32) que son significativos en la dinámica del sistema. El resto de fracciones parciales en (3.32) es entonces ignorada.

Finalmente, la aproximación racional resultante en fracciones parciales es transformada a su equivalente de la forma (3.6), la cual ya involucra un orden de modelo reducido. De ésta última se obtiene la ecuación de diferencias como se describe en la Sección 3.2.

- Realización Balanceada

Esta técnica se basa en el principio de asegurar que los gramianos de controlabilidad y observabilidad de un sistema sean iguales. El objetivo principal es el de reducir el sistema de orden completo [25]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + du, \end{aligned} \quad (3.40)$$

a uno de orden reducido:

$$\begin{aligned}\dot{x}_r &= A_r x_r + B_r u, \\ y &= C_r x_r + du,\end{aligned}\tag{3.41}$$

En esta tesis se utilizó la técnica de Realización Balanceada a través de los comandos “*balreal*” y “*modred*” de Matlab. La descripción de la teoría respectiva está fuera del alcance de este trabajo, para dichos detalles ver [25].

IV APLICACIONES

4.1 Introducción

En este Capítulo se describen dos ejemplos ilustrativos para la obtención de equivalentes de redes. En el primer ejemplo se obtiene la función de transferencia de una red de tres líneas aéreas monofásicas. En el segundo ejemplo se calcula la función de transferencia de secuencia positiva de una línea aérea multiconductora en circuito abierto. Para dichos ejemplos se presenta la comparación de los diferentes métodos descritos en el Capítulo II y la metodología propuesta para la obtención de equivalentes de redes en el dominio z , descrita en el Capítulo III. Finalmente, se muestran simulaciones en el dominio del tiempo para validar la red equivalente identificada.

4.2 Red monofásica

Como primer ejemplo ilustrativo, considere la red mostrada en la Fig. 4.1. Dicha red está formada por tres líneas de transmisión monofásicas idénticas de longitud igual a 100 Km, altura del conductor igual a 27 m y radio del conductor igual a 2.5 cm. La resistividad del terreno se ha tomado como $100 \Omega\text{m}$. Cada una de las líneas tiene conectada en sus terminales una carga RL con $R = 1 \Omega$ y $L = 0.3 \text{ H}$. Al lado izquierdo de la red se tiene una fuente senoidal con parámetros $R_0 = 0.001 \Omega$ y $L_0 = 5 \text{ mH}$.

La función de transferencia a aproximar consiste en la relación entre la corriente inyectada al nodo 1 y el respectivo voltaje. Dicha admitancia es calculada utilizando 800 muestras en el rango de 1 Hz a 100 KHz, como se indica en el Apéndice A.

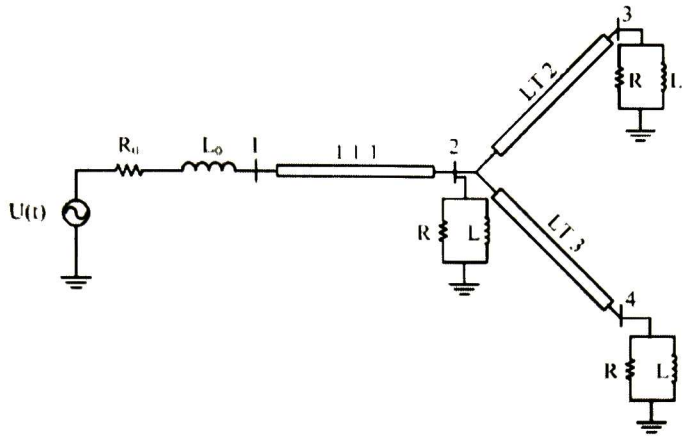


Fig. 4.1. Configuración de la red monofásica

En la Fig. 4.2 se muestran los resultados de la aproximación dados por los métodos descritos en esta tesis; esto es, T-Noda, VF y z-D. En todos los métodos se ha utilizado un orden de aproximación de 20 pares de polos complejos. De la Fig. 4.2 se puede apreciar que los tres métodos dan resultados muy similares, superponiéndose las aproximaciones con la función exacta.

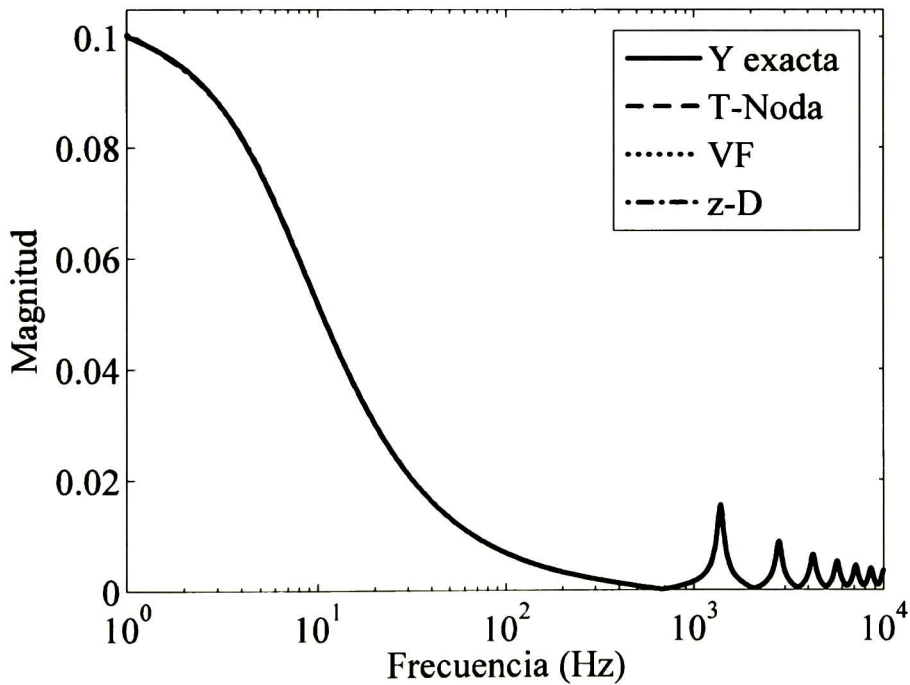


Fig. 4.2. Admitancia de entrada para red monofásica

La Tabla 4.1 presenta el error *rms* obtenido en la aproximación, el tiempo de cómputo requerido por cada método así como el número de secciones en que se ha dividido el rango completo de frecuencias. La computadora que se utilizó para obtener dichos resultados es la descrita en la sección 2.5. Cabe hacer notar que para los métodos de T-Noda y VF se utilizaron 5 iteraciones para obtener los resultados presentados en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1. Resultados obtenidos en la aproximación red monofásica

Método	Error(<i>rms</i>)	Tiempo(s)	Secciones (Hz)
T-Noda	6.93×10^{-5}	0.32	$[10^0 \ 10^2 \ 10^{3.4} \ 10^{3.8} \ 10^4]$
VF	1.84×10^{-6}	1.20	$[10^0 \ 10^4]$
z-D	2.63×10^{-3}	1.06	$[10^0 \ 10^2 \ 10^{3.4} \ 10^{3.8} \ 10^4]$

En la Fig. 4.3 se muestran los resultados de aproximación obtenidos aplicando la técnica de reducción de orden de modelos descrita en la sección 3.6. En todos los métodos se ha fijado un orden de 5 pares de polos complejos.

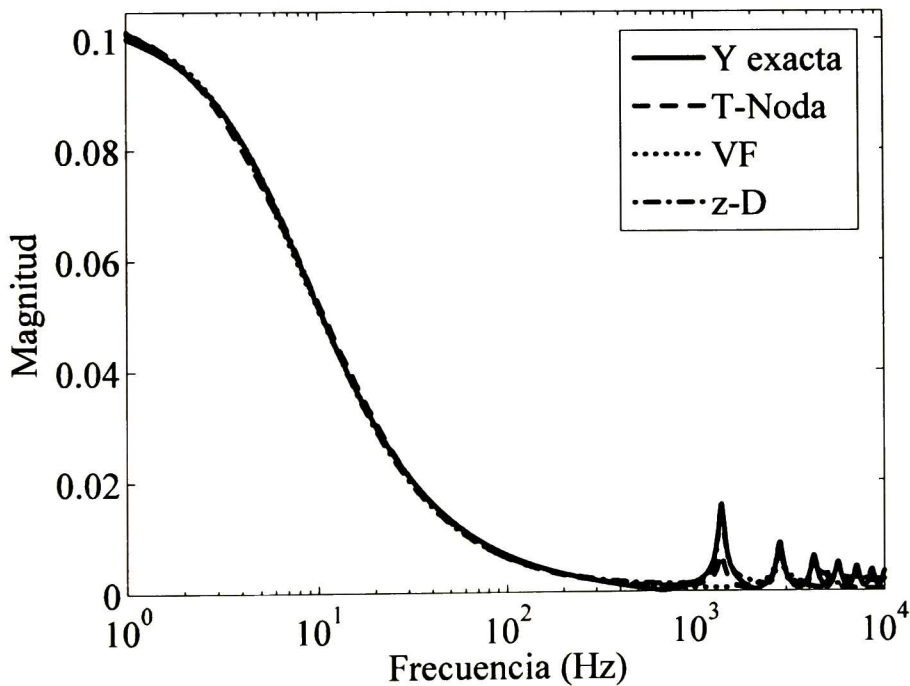


Fig. 4.3. Admitancia de entrada para red monofásica con orden reducido

En forma similar a la Tabla 4.1, en la Tabla 4.2 se presentan los resultados correspondientes al modelo reducido.

Nótese que el método propuesto arroja un error menor a los de T-Noda y VF después de la reducción de orden. Es importante mencionar que el propuesto no es un método iterativo.

Tabla 4.2. Resultados obtenidos en reducción del modelo equivalente (red monofásica)

Método	Error(rms)
T-Noda	5.20×10^{-2}
VF	3.71×10^{-2}
z-D	2.54×10^{-2}

La Fig. 4.4 muestra la corriente entrando en el nodo 1 de la red mostrada en la Fig. 4.1 en respuesta a una fuente de voltaje $v(t) = \sin(\omega_0 k \Delta t)$ con $\omega_0 = 2\pi 60$ rad/s conectada a la red en $t = 0$ y utilizando $\Delta t = 2.5 \times 10^{-5}$ s en un rango de 0 s a 0.18 s. Para los resultados de la Fig. 4.4 se asumieron condiciones iniciales iguales a cero y la red equivalente resultante de orden reducido.

Para ésta comparación se tomó como base el resultado producido por la transformada numérica de Laplace (línea continua en Fig. 4.4) [22]. El error *rms* de la simulación de la Fig. 4.4 se presenta en la Tabla 4.3.

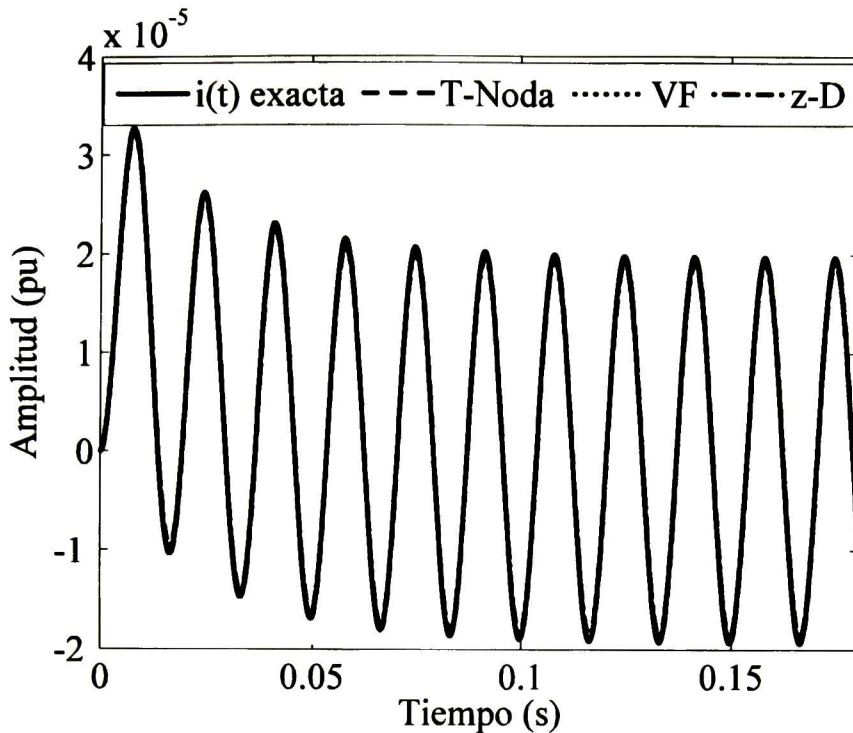


Fig. 4.4. Corriente en el dominio del tiempo

Tabla 4.3. Resultados obtenidos en simulación en el dominio del tiempo

Método	Error(<i>rms</i>)
T-Noda	3.53×10^{-2}
VF	2.12×10^{-2}
z-D	3.89×10^{-2}

4.3 Línea trifásica en circuito abierto

Considere la configuración de una línea de transmisión aérea trifásica como la mostrada en la Fig. 4.5, con longitud igual a 20 Km, altura de conductores igual a 7 m, radio del conductor igual a 1.1 cm, separación entre hilos de fase de 1.5 m y con una resistividad del terreno de $1000 \Omega\text{m}$.

En este ejemplo se calcula el parámetro de admitancia de secuencia positiva de dicha línea en circuito abierto considerando el rango de 1 Hz a 1 MHz como se indica en Apéndice B con un número de 900 muestras.

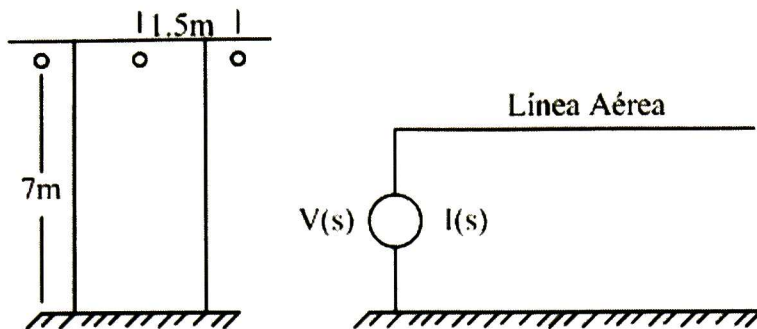


Fig. 4.5. Línea de transmisión trifásica en circuito abierto

En forma similar al ejemplo de la sección 4.2, en la Fig. 4.6 se presenta la admitancia (secuencia positiva) en función de la frecuencia y las aproximaciones dadas por los métodos descritos en ésta tesis. Debido al número de resonancias, para ésta aproximación se han utilizado 40 pares de polos complejos para todos los métodos.

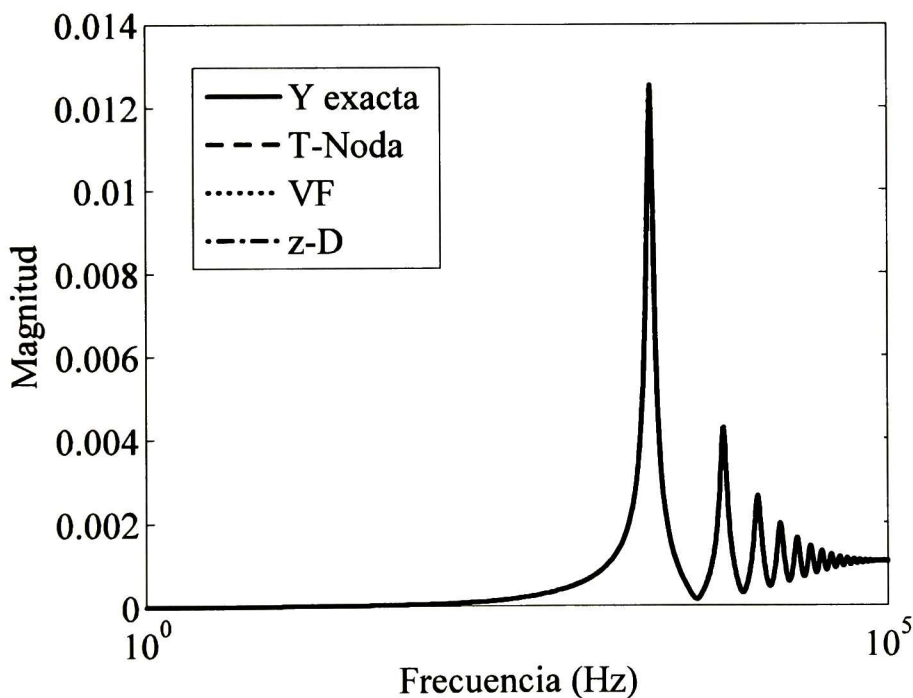


Fig. 4.6. Admitancia de secuencia positiva para línea trifásica

En la Tabla 4.4 se muestra el error *rms* obtenido, el tiempo de cómputo requerido por cada método así como el número de secciones en que se ha dividido el rango completo de frecuencias.

Tabla 4.4. Resultados obtenidos en la aproximación para línea trifásica

Método	Error(<i>rms</i>)	Tiempo(s)	Secciones (Hz)
T-Noda	2.501×10^{-3}	0.51	$[10^0 \ 10^{3.72} \ 10^{4.4} \ 10^{4.7} \ 10^5]$
VF	2.28×10^{-8}	3.35	$[10^0 \ 10^5]$
z-D	3.78×10^{-3}	2.51	$[10^0 \ 10^{3.72} \ 10^{4.4} \ 10^{4.7} \ 10^5]$

En la Fig. 4.7 se muestran los resultados de la aproximación aplicando la técnica de reducción de orden de modelos. En todos los métodos se ha fijado un orden de 15 pares de polos complejos. Además, en la Tabla 4.5 se presenta el error *rms* dado por la técnica de reducción de modelo.

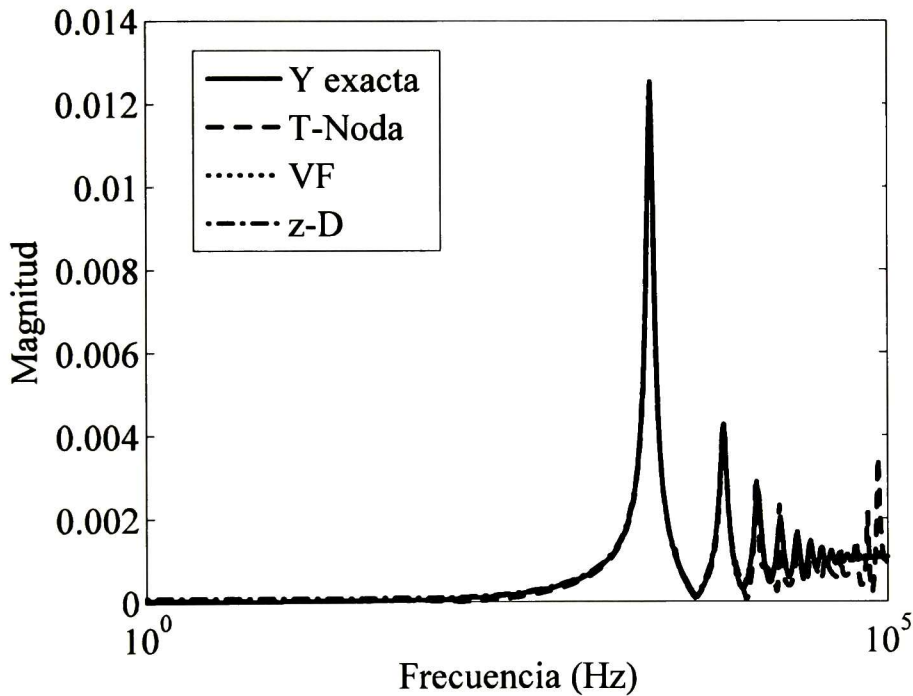


Fig. 4.7. Admitancia de secuencia positiva para línea trifásica con orden reducido

Tabla 4.5. Resultados obtenidos en reducción del modelo equivalente (línea trifásica)

Método	Error(<i>rms</i>)
T-Noda	2.87×10^{-1}
VF	3.74×10^{-3}
z-D	1.99×10^{-1}

V CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

5.1 Conclusiones

En esta tesis se han descrito tres de las técnicas más utilizadas en el área de Sistemas de Potencia para la obtención de sistemas equivalentes en el dominio s . Esta son: identificación básica basada en mínimos cuadrados, método de identificación propuesto por Taku Noda y el método de Vector Fitting. Además, se ha descrito la propuesta de una técnica de identificación en el dominio z . Esta última metodología se basa en la aproximación polinomial en z para subrangos predeterminados de la frecuencia compleja, seguida de un proceso de reducción de orden aplicando técnicas de descomposición de valores singulares o realización balanceada.

Se ha presentado, además, la comparación numérica entre la identificación en el dominio s y la propuesta en el dominio z . Los resultados arrojados por ésta última son comparables con las técnicas de la primera. Aunque cabe hacer notar que la técnica propuesta consiste en un método no-iterativo.

Adicionalmente, una de las ventajas de la identificación en el dominio z es que lleva al usuario a un planteamiento de ecuaciones recursivas en el tiempo de forma directa, mientras que las técnicas del dominio s realizan un proceso intermedio de discretización de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Una de las desventajas del método propuesto es que para un paso de tiempo distinto al predefinido se necesita recalcular la aproximación. Sin embargo, esto se propone como una tarea sencilla si solamente se recalculan los residuos de la aproximación con el paso de tiempo anterior.

5.2 Trabajos futuros

- Convertir la metodología propuesta en un proceso iterativo. Esto permitirá mayor precisión en los resultados.
- Obtención de un criterio para definir el orden de aproximación partiendo de un error predeterminado.
- Implementar metodología de aproximación para un distinto Δt del definido inicialmente mediante el re-cálculo de los residuos solamente.

REFERENCIAS

- [1] Roger C. Dugan, Mark F. McGranaghan, Surya Santoso, H. Wayne Beaty, "Electrical power systems quality," McGraw-Hill Companies, 2002.
- [2] T. Noda, A. Semlyen, and R. Iravani, "Reduced-order realization of a nonlinear power network using companion-form state equations with periodic coefficients," *IEEE Trans. Power Delivery*, vol. 18, pp. 1478-1488, Oct. 2003.
- [3] W. D. Humpage, K. P. Wong, T. T. Nguyen, and D. Sutanto, "Z-transform electromagnetic transient analysis in power systems," *IEE Proc.*, vol. 127, Pt. C, no. 6, pp. 307-378, Nov. 1980.
- [4] E. C. Levy, "Complex-curve fitting," *IRE Trans. Autom. Contr.*, vol. 4, pp. 37-43, May 1959.
- [5] C. K. Sanathanan and J. Koerner, "Transfer function synthesis as a ratio of two complex polynomials," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. AC-8, no. 1, pp. 56-58, Jan. 1963.
- [6] A. Abur and H. Singh, "Time domain modeling of external systems for electromagnetic transient programs," *IEEE Trans. Power Syst.* Vol. 8, no. 2, pp. 671-679, 1993.
- [7] G. Angelidis and A. Semlyen, "Direct phase-domain calculation of transmission line transients using two-sided recursions," *IEEE Trans. On Power Delivery*, vol. 10, no. 2, pp. 941-949, Apr 1995.
- [8] T. Noda, N. Nagaoka and A. Ametani, "Phase domain modeling of frequency-dependent transmission lines by means of an ARMA model," *IEEE Trans. Power Deliv.*, vol. 11, no. 1, pp. 401-411, 1996.
- [9] T. Noda, N. Nagaoka and A. Ametani, "Further improvements to a phase-domain ARMA line model in terms of convolution, steady-state initialization, and stability," *IEEE Trans. Power Deliv.*, Vol. 12, no. 3, pp. 1327-1334, 1997.
- [10] B. Gustavsen and A. Semlyen, "Rational approximation of frequency domain responses by vector fitting," *IEEE Trans. Power Delivery*, vol. 14, pp. 1052-1061, July 1999.

- [11] Y.P. Wang and N.R. Watson, "Z-domain frequency-dependent AC-system equivalent for electromagnetic transient simulation," *IEE Proc. Gener. Transm. Distrib.*, vol. 150, no. 2, pp. 141-146, Mar. 2003.
- [12] T. Noda and A. Ramirez, "z-transform based methods for electromagnetic transient simulations", */IEEE Trans. on Power Delivery/*, vol. 22, no. 3, pp. 1799-1805, July 2007.
- [13] Michael Hassul, Bahram Shahian, "Frequency domain identification for undergraduates," *IEEE Trans. On Education*, vol. 35, no. 4. pp. 368-375, 1992.
- [14] T. Noda, "Identification of a multiphase network equivalent for electromagnetic transient calculations using partitioned frequency response," *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 20, no. 2, pt. 1, pp. 1134-1142, Apr. 2005.
- [15] B. Gustavsen, "Improving the poles relocating properties of vector fitting," *IEEE Trans. On Power Delivery*, vol. 21, no. 3, July 2006.
- [16] J. G. Proakis, D. G. Manolakis,"Digital signal processing: principles, algorithms, and applications," Prentice Hall, Inc. Editores, 1996.
- [17] C. L. Phillips, "Digital control system analysis and design," Prentice Hall International, Inc, 3ra edición, 1995.
- [18] A. Semlyen and A. Dabuleau, "Fast and accurate switching transient calculations on transmission lines with ground return using recursive convolutions," *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems.*, Vol. PAS-94, no. 2, pp. 561-571, Mar/Apr 1975.
- [19] L. M. Silveira, I. M. Elfadel, and J. K. White, "Efficient frequency-domain modeling and circuit simulation of transmission lines," *Proc. 31st Design Automat. Conf.*, pp. 634-639, San Diego, CA, June 1994.
- [20] T. Noda, "A binary frequency-region partitioning algorithm for the identification of a multiphase network equivalent for EMT studies," *IEEE Trans. On Power Delivery*. Paper no. PESL-00062-2006, Aug. 2006.
- [21] A. Ramirez, A. Semlyen, R. Iravani, "Order Reduction of the Dynamic Model of a linear Weakly Periodic System-Part I: General Methodology," *IEEE Trans. on Power Systems*, vol 19, no. 2,pp. 857-865, May 2004.
- [22] P. Moreno, P. Gómez, J. L. Naredo, "Disminución de errores en la inversión numérica de la transformada de Laplace para el estudio de transitorios electromagnéticos," Paper presentado en ITESM, Monterrey 2004. CIMNE, Barcelona 2004, CINVESTAV.

- [23] John J. Grainger, William D. Stevenson Jr., "Análisis de sistemas de potencia," McGraw-Hill, Inc., U.S.A, 1996.
- [24] Electro-Magnetic Transients Program (EMTP), Theory Book, 1981.
- [25] B. Moore, "Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability, and model reduction," IEEE Trans. Automat. Contr. vol. AC-26, no. 1, pp. 17-32, Feb. 1981.
- [26] A. Semlyen, A. Deri, "Time domain modeling of frequency dependent three-phase transmission line impedance," IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems., Vol. PAS-104, no. 6, June 1985.

APÉNDICE A

Cálculo de la respuesta frecuencial de la red monofásica, Capítulo IV

Para cada una de las frecuencias se realiza el procedimiento siguiente. Primeramente se calcula la impedancia del conductor (por unidad de longitud) Z_c [26]:

$$Z_c = \sqrt{R_{CD}^2 + Z_{AF}^2} \quad (\text{A.1})$$

donde:

$$R_{CD} = \frac{\rho_c}{\pi r_c^2} \quad (\text{A.2})$$

$$Z_{AF} = \frac{\sqrt{s\mu_0\rho_c}}{2\pi r_c} \quad (\text{A.3})$$

En (A.2) y (A.3) ρ_c representa la resistividad del conductor (Ωm), r_c es el radio del conductor (m), y $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ (H/m).

De la misma forma, se calcula la impedancia de tierra Z_t y la impedancia geométrica Z_g :

$$Z_g + Z_t = \frac{s\mu_0}{2\pi} \log \left[\frac{2(h+p)}{r_c} \right], \quad (\text{A.4})$$

donde h es la altura del conductor (m) y p es la profundidad de penetración en tierra por efecto piel (profundidad compleja) dada por:

$$p = \sqrt{\frac{\rho_t}{s\mu_0}} \quad (\text{A.5})$$

donde ρ_t es la resistividad del terreno. De ésta forma, se obtienen la impedancia total Z y la admitancia total Y de la línea como:

$$Z = Z_c + Z_t + Z_g, \quad (\text{A.6})$$

$$Y = s \frac{2\pi\epsilon_0}{\log(2hr_c)} \quad (\text{A.7})$$

donde $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ (F/m) es la permitividad del espacio libre.

Enseguida, con Z y Y se obtienen la función de propagación de onda, γ , y la admitancia característica de la línea, Y_{ch} , con:

$$\gamma = \sqrt{ZY} \quad (\text{A.8})$$

$$Y_{ch} = \sqrt{\frac{Y}{Z}}. \quad (\text{A.9})$$

Entonces, los parámetros AB de la línea con dependencia frecuencial por unidad de longitud (ℓ) están dados por:

$$A = Y_{ch} \coth(\gamma\ell), \quad (\text{A.10})$$

$$B = -Y_{ch} \operatorname{cosech}(\gamma\ell). \quad (\text{A.11})$$

Luego, para cada línea se obtiene el modelo π de admitancias como el mostrado en la Fig. A.1.

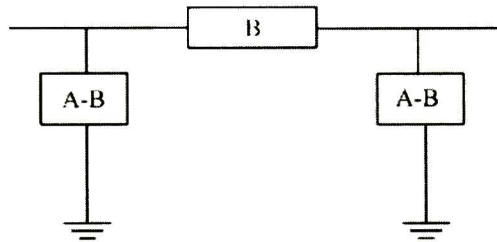


Fig. A.1. Circuito π equivalente en parámetros AB

Una vez obtenida la representación π de cada línea, se procede a calcular la matriz nodal de la red mostrada en la Fig. 4.1 como:

$$i = Y_{nodal}V \quad (\text{A.12})$$

donde:

$$i = [i_0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (\text{A.13})$$

$$V = [V_1 \quad V_2 \quad V_3 \quad V_4]^T \quad (\text{A.14})$$

$$Y_{nodal} = \begin{bmatrix} A + \frac{1}{R_0 + sL_0} & -B & 0 & 0 \\ -B & 3A + \frac{R + sL}{sRL} & -B & -B \\ 0 & -B & A + \frac{R + sL}{sRL} & 0 \\ 0 & -B & 0 & A + \frac{R + sL}{sRL} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.15})$$

Finalmente, de (A.12) se obtiene la relación entre la corriente entrando al nodo 1 y voltaje del nodo 1 como:

$$\frac{I_1}{V_1} = Y_{11} - Y_{12}Y_{22}^{-1}Y_{21} - Y_0 \quad (\text{A.16})$$

donde:

$$Y_{11} = A + Y_0, \quad (\text{A.17})$$

$$Y_{12} = [-B \ 0 \ 0], \quad (\text{A.18})$$

$$Y_{21} = [-B \ 0 \ 0]^T \quad (\text{A.19})$$

$$Y_{22} = \begin{bmatrix} 3A + \frac{R+sL}{sRL} & -B & -B \\ -B & A + \frac{R+sL}{sRL} & 0 \\ -B & 0 & A + \frac{R+sL}{sRL} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.20})$$

$$Y_0 = \frac{1}{R_0 + sL_0}. \quad (\text{A.21})$$

Cálculo de la respuesta frecuencial de la línea trifásica, Capítulo IV

La admitancia H de circuito abierto de la línea aérea trifásica de la Fig. 4.5 está dada por:

$$H = A - B(A)^{-1}B, \quad (\text{B.1})$$

donde los parámetros AB del circuito π es el equivalente de (A.10) y (A.11) para líneas multiconductoras y son calculados como [23],[24]:

$$A = Y_{ch} \coth(\varphi\ell), \quad (\text{B.2})$$

$$B = Y_{ch} \csc h(\varphi\ell), \quad (\text{B.3})$$

donde:

$$\varphi = \sqrt{ZY} \quad (\text{B.4})$$

$$Y_{ch} = Z^{-1}\sqrt{ZY} \quad (\text{B.5})$$

En (B.4) y (B.5) Z y Y son las matrices de impedancia y admitancia, respectivamente, de la línea en por unidad de longitud. Para el análisis de la línea en componentes de secuencia cero, positiva y negativa se utiliza una transformación tal que:

$$H_{0+-} = TY_{sm}T^{-1} \quad (\text{B.6})$$

donde:

$$Y_{sm} = \begin{bmatrix} Y_s & Y_m & Y_m \\ Y_m & Y_s & Y_m \\ Y_m & Y_m & Y_s \end{bmatrix}, \quad (\text{B.7})$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.8})$$

donde:

$$Y_s = \frac{H(1,1) + H(2,2) + H(3,3)}{3}, \quad (\text{B.9})$$

$$Y_m = \frac{H(1,2) + H(1,3) + H(2,3)}{3}, \quad (\text{B.10})$$

$$a = e^{\frac{j2\pi}{3}} \quad (\text{B.11})$$

De la matriz diagonal en (B.6), se toma el elemento (2,2) para formar la función de transferencia utilizada en el ejemplo de la sección 4.3, esto es, la componente de secuencia positiva.



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DE UNIDAD GUADALAJARA

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional aprobó la tesis

Identificación de Sistemas Equivalentes Utilizando Aproximación
Racional

del (la) C.

Pedro ESQUIVEL PRADO

el día 31 de Agosto de 2007.

Dr. José Luis Naredo Villagrán
Investigador CINVESTAV 3C
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Juan Manuel Ramírez Arredondo
Investigador CINVESTAV 3B
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Amner Israel Ramírez Vázquez
Investigador CINVESTAV 3A
CINVESTAV Unidad Guadalajara



CINVESTAV
BIBLIOTECA CENTRAL



SSIT000006792