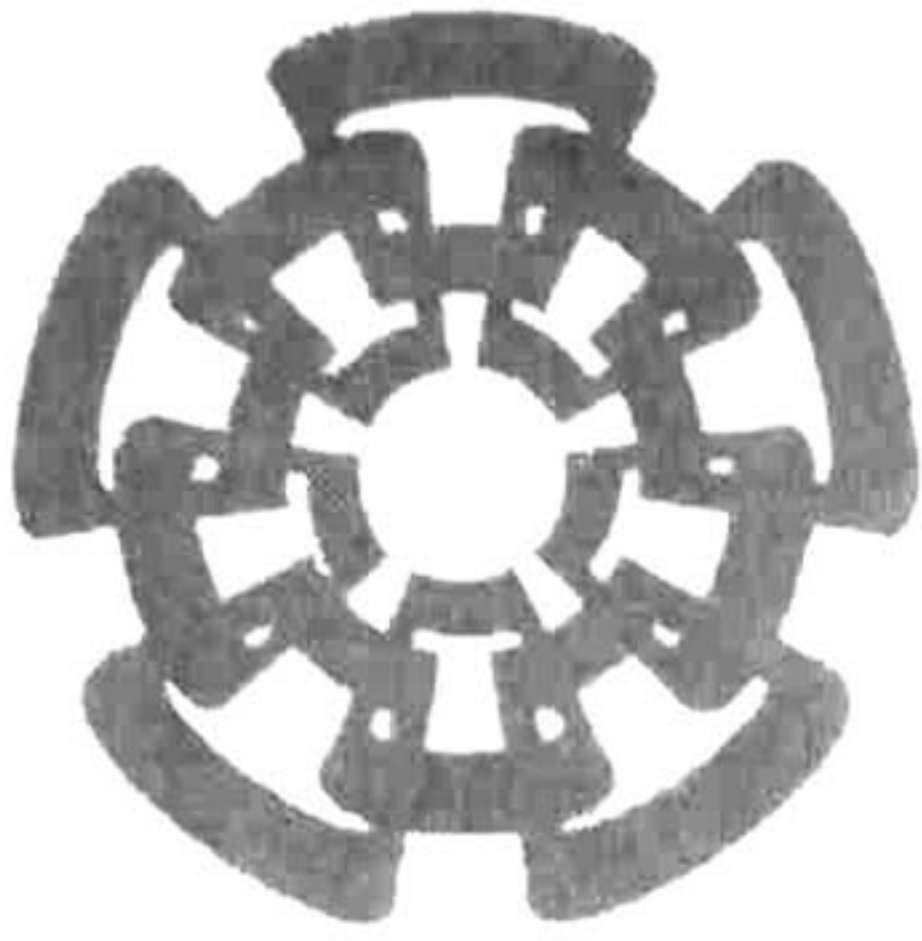






XX(147067.1)





Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N.  
Unidad Guadalajara

# **Análisis del Transformador con Elementos Finitos Bidimensional**

Tesis que presenta:

**José Enrique Paredes Reyes**

para obtener el grado de:

**Maestro en Ciencias**

en la especialidad de:

**Ingeniería Eléctrica**

Director de Tesis

**Dr. José Manuel Cañedo Castañeda**

**CINVESTAV  
IPN  
ADQUISICION  
DE LIBROS**



CLASIF.: TK165.68 . P37 2008  
ADQUIS.: BC-506  
FECHA: 12-XI-2008  
PROCED.: Don. - 2008  
\$ \_\_\_\_\_

10: 144219-1001



# **Análisis del Transformador con Elementos Finitos Bidimensional**

**Tesis de Maestría en Ciencias  
Ingeniería Eléctrica**

Por:

**José Enrique Paredes Reyes**  
Ingeniero Eléctrico

Instituto Tecnológico de la Laguna 1997-2002

Becario de Conacyt, expediente no. 191351

Director de Tesis  
**Dr. José Manuel Cañedo Castañeda**



# Agradecimientos

---

A Dios por darme la vida y estar conmigo siempre

A mi Mamá, por el apoyo incondicional que me brinda

A mi hermano, por el apoyo emocional que me ha brindado

A Cristina Morán, por su apoyo en los momentos mas difíciles.

A Oscar Morán, porque llegó a mi vida.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico brindado para la realización de este proyecto.



# Resumen

---

Con el acelerado desarrollo que tiene la tecnología y la escasez inminente de los combustibles fósiles que son utilizados en la generación de energía eléctrica, la eficiencia energética en los equipos eléctricos se han vuelto un tema muy importantes. Por lo anterior que muchos investigadores y diseñadores han optado por utilizar en sus modelos técnicas de aproximación numérica, tal es el caso de la técnica del elemento finito.

En la actualidad muchos diseñadores siguen usando formulas matemáticas empíricas de poco sustento matemático y que en muchos casos introducen gran incertidumbre a los resultados. La técnica del elemento finito da una solución en el diseño de equipos eléctricos como lo son los motores y transformadores de potencia. Los diseñadores que utilizan el elemento finito típicamente emplean densidades de corriente como fuentes excitadoras, pero en la realidad esto no es del todo cierto. Se conoce que todo equipo eléctrico es excitado por fuentes de voltajes.

En este trabajo se analiza un transformador monofásico, considerando primeramente que tiene una permeabilidad igual al del aire, enseguida se analiza el mismo transformador monofásico pero considerando que el núcleo tiene una permeabilidad no lineal, y posteriormente se establecen equivalentes lineales. Por ultimo se analiza un transformador trifásico, en dos casos, caso magnetostático y caso armónico.



# Abstract

---

With the fast development in the technology and the impending shortage of fossil fuels that are used in power generation, the energy efficiency in electrical equipment have become very important. For these reasons many researchers and designers have chosen to use in their numerical models approximation techniques, such is the case with the finite element technique (FEM).

Many designers are still using empirical formulas of little mathematician support and that often introduced considerable uncertainty and errors in the results. The finite element technique is a solution in the design of electrical equipment such as motors and transformers of power. Designers using the Finite element typically employ current densities as exciting sources, but in reality this is not quite true. We know that every electrical is excited by voltages source.

This work discusses a transformer single-phase, first considering a permeability like the air, then the same single-phase transformer is analyzed but now considering that the core has a nonlinear permeability, and then equivalent linear are established. Finally discusses a three phase, transformer in both cases, case magnetostatic and harmonic case.



# Índice general

---

<b>Agradecimientos</b>	<b>I</b>
<b>Resumen</b>	<b>II</b>
<b>Abstract</b>	<b>III</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Ecuaciones de Maxwell.</b>	<b>5</b>
2.1. Ecuaciones de Maxwell. . . . .	5
2.2. Potencial magnético. . . . .	7
2.3. Condiciones Gauge. . . . .	8
2.4. Relación entre potenciales. . . . .	8
2.5. Clasificación de métodos de solución. . . . .	9
2.5.1. Métodos analíticos . . . . .	9
2.5.2. Métodos numéricos. . . . .	10
2.5.3. Métodos basados en formulaciones de ecuaciones diferenciales. . . . .	10
2.5.4. Métodos basados en formulaciones integrales. . . . .	15
2.6. Principios variacionales. . . . .	17



2.7. Formulación del modelo matemático. . . . .	20
2.8. Elementos finitos. . . . .	22
2.9. Elementos triangulares. . . . .	23
2.10. Funcionales en materiales ferromagnéticos. . . . .	25
2.11. Minimización de la Funcional. . . . .	26
2.12. Método de Newton. . . . .	27
2.13. Aplicación del elemento Finito, en 2D. . . . .	28
2.14. Solución. . . . .	32
<b>3. Acoplamiento de elementos finitos a circuitos eléctricos.</b>	<b>34</b>
3.1. Formulación de elementos finitos. . . . .	35
3.2. Elementos circuitales en la región de elementos finitos . . . . .	36
3.3. Formulación de Galerkin. . . . .	39
3.4. Formulación de la ecuación de corrientes . . . . .	41
3.5. Corriente en una barra de una bobina. . . . .	41
3.6. Discretización de las ecuaciones en el tiempo. . . . .	43
3.7. Discretización en el tiempo de la ecuación de difusión . . . . .	43
3.8. Discretización en el tiempo de la ecuación de corriente. . . . .	44
3.9. Discretización en el tiempo de las ecuaciones circuitales. . . . .	45
3.10. Circuitos en paralelo. . . . .	46
3.11. Linealización de la ecuación de difusión. . . . .	47
3.12. Sistema global de ecuaciones. . . . .	48
3.12.1. Ecuación de campo. . . . .	48
3.12.2. Corriente total. . . . .	48
3.12.3. Ecuación de una bobina con barras en serie. . . . .	49
3.12.4. Ecuación de bobinas con barras en paralelo. . . . .	49



3.12.5. Ensamblado del sistema global de ecuaciones. . . . .	49
3.13. Modelos de transformadores. . . . .	52
3.14. Modelo magnetostático. . . . .	53
3.15. Resistencia de una bobina. . . . .	54
3.16. Factor de relleno. . . . .	55
3.17. Resistencia en una bobina. . . . .	57
3.18. Inductancia diferencial no lineal, en un sistema multipuerto. . . . .	57
3.18.1. Análisis incremental. . . . .	58
3.19. Modelo en el dominio del tiempo. . . . .	60
3.20. Modelo en el dominio armónico. . . . .	60
3.21. Representación de la curva B-H en el dominio de la frecuencia. . . . .	61
3.22. Laminaciones. . . . .	63
<b>4. Modelado del transformador. . . . .</b>	<b>67</b>
4.1. Construcción del modelo. . . . .	68
4.2. Transformador utilizado. . . . .	69
4.2.1. Representación de la bobina. . . . .	70
4.3. Mallado en el modelo magnetostático. . . . .	71
4.3.1. Mallado de las bobinas. . . . .	71
4.3.2. Mallado de piernas y yugo, modelo I. . . . .	71
4.3.3. Mallado de entre-hierros. . . . .	72
4.3.4. Mallado de regiones de aislamiento. . . . .	74
4.3.5. Condiciones frontera. . . . .	74
4.4. Mallado en el modelo II y III. . . . .	76
4.4.1. Mallado de piernas y yugo, modelo II y III. . . . .	77
4.4.2. Mallado de regiones de aislamiento. . . . .	79



<b>5. Resultados</b>	<b>81</b>
5.1. Análisis de una bobina en el caso axisimétrico . . . . .	81
5.1.1. Modelo Magnetostático axisimétrico. . . . .	83
5.1.2. Modelo en el dominio de la frecuencia. . . . .	83
5.1.3. Modelo en el dominio del tiempo. . . . .	85
5.2. Transformador con bobinas planares. . . . .	86
5.2.1. Transformador con bobinas planares modelo magnetostático. . . . .	87
5.2.2. Transformador con bobinas planares modelo armónico. . . . .	88
5.2.3. Transformador con bobinas planares, modelo en el tiempo. . . . .	90
5.3. Transformador con bobinas planares modelo reducido. . . . .	93
5.3.1. Modelo magnetostático, reducido. . . . .	93
5.3.2. Modelo reducido planar en el dominio de la frecuencia. . . . .	95
5.3.3. Modelo reducido planar en el dominio del tiempo. . . . .	96
5.3.4. Comparación de modelos. . . . .	99
5.4. Transformador monofásico con saturación. . . . .	101
5.4.1. Caso estático del transformador monofásico, modelo no lineal. . . . .	101
5.4.2. Transformador monofásico en el dominio de la frecuencia, modelo no lineal. . . . .	103
5.4.3. Transformador monofásico en el dominio del tiempo modelo no lineal.	103
5.5. Transformador monofásico núcleo ferromagnético caso lineal. . . . .	106
5.5.1. Transformador monofásico modelo magnetostático lineal. . . . .	107
5.5.2. Transformador monofásico modelo armónico lineal. . . . .	108
5.5.3. Transformador monofásico en el dominio del tiempo, modelo lineal. . . . .	108



5.6.	Transformador Trifásico. . . . .	111
5.6.1.	Comprobación de asimetría, modelo estático. . . . .	112
5.6.2.	Comprobación de Asimetría, modelo armónico. . . . .	116
5.7.	Modelo del transformador trifásico, modelo estático. . . . .	120
5.8.	Modelo del transformador trifásico en el dominio de la frecuencia. . . . .	124
<b>A.</b>		<b>131</b>
A.1.	Potenciales Magnéticos. . . . .	131
A.2.	Unicidad del potencial Magnético . . . . .	132



# Índice de figuras

---

2.1. Elemento Triangular . . . . .	23
2.2. Densidad de energía . . . . .	26
2.3. Diagrama de Flujo, método de Newton . . . . .	33
3.1. Acoplamiento entre fuente de voltaje y bobina. . . . .	36
3.2. Acoplamiento entre fuente de voltaje y bobina, conexión serie. . . . .	37
3.3. Acoplamiento entre fuente de voltaje y bobina, conexión en paralelo. . . . .	38
3.4. Bobina. . . . .	55
3.5. Sección transversal de una bobina. . . . .	56
3.6. Aproximación por rectángulos. . . . .	56
3.7. Flujo en la dirección Y. . . . .	64
3.8. Reluctancia equivalente en paralelo. . . . .	64
3.9. Flujo en la dirección X del sistema de coordenadas cartesianas. . . . .	65
3.10. Reluctancia en serie. . . . .	66
4.1. Transformador trifásico. . . . .	69
4.2. Representación de una bobina. . . . .	70
4.3. Elemento rectangular de 8 nodos. . . . .	71



4.4. Elemento triangular de 8 nodos. . . . .	71
4.5. Mallado de una sección de una bobina. . . . .	72
4.6. Mallado de la pierna I. . . . .	73
4.7. Mallado de la pierna III. . . . .	73
4.8. Mallado de la pierna II del modelo I. . . . .	73
4.9. Mallado del yugo superior del modelo I. . . . .	74
4.10. Mallado del entre-hierro I, modelo I. . . . .	75
4.11. Mallado de la región I de aire, modelo I. . . . .	75
4.12. Mallado de la región II de aire, modelo I. . . . .	75
4.13. Mallado de la región externa de aire, modelo I. . . . .	76
4.14. Media sección del transformador. . . . .	77
4.15. Mallado de la pierna I, modelo II y III. . . . .	78
4.16. Mallado de la pierna III, modelo II y III. . . . .	78
4.17. Mallado de la pierna II, modelo II y III. . . . .	78
4.18. Mallado del yugo superior, modelo II y III. . . . .	79
4.19. Mallado de la región I de aire, para el modelo II y III. . . . .	80
4.20. Mallado de la región I de aire, para el modelo II y III. . . . .	80
4.21. Mallado de la región externa de aire, para el modelo II y III. . . . .	80
5.1. Bobina modelo axisimétrico. . . . .	82
5.2. 1/4 del modelo axisimétrico. . . . .	82
5.3. Modelo del circuito equivalente. . . . .	82
5.4. Potencial Magnético modelo estático axisimétrico . . . . .	84
5.5. Densidad de Flujo modelo estático axisimétrico. . . . .	84
5.6. Potencial magnético, parte real axisimétrico. . . . .	85
5.7. Potencial magnético, parte imaginaria axisimétrico. . . . .	85



5.8. Densidad de flujo, parte real del modelo axisimétrico. . . . .	85
5.9. Densidad de flujo, parte imaginaria del modelo axisimétrico. . . . .	85
5.10. Potencial magnético en $t = 0.0232$ s modelo axisimétrico. . . . .	86
5.11. Densidad de flujo magnético en el instante $t = 0.0232$ s modelo axisimétrico. . . . .	86
5.12. Voltaje aplicado en las terminales de la bobina. . . . .	87
5.13. Corriente en el caso transitorio, axisimétrico. . . . .	87
5.14. Flujo magnético, modelo magnetostático planar completo. . . . .	88
5.15. Densidad de flujo, modelo magnetostático planar completo. . . . .	88
5.16. Flujo magnético en la trayectoria, modelo magnetostático completo . . . . .	89
5.17. Densidad de flujo en la trayectoria, modelo magnetostático completo. . . . .	89
5.18. Potencial magnético, parte real, modelo planar completo. . . . .	90
5.19. Potencial magnético, parte real, modelo planar completo. . . . .	90
5.20. Densidad de flujo, parte real, modelo planar completo. . . . .	90
5.21. Densidad de flujo, parte imaginaria, modelo planar completo. . . . .	90
5.22. Flujo magnético en la trayectoria, modelo armónico completo. . . . .	91
5.23. Densidad de flujo en la trayectoria, modelo armónico completo. . . . .	91
5.24. Potencial magnético, en el tiempo $t=0.0232$ modelo planar completo. . . . .	91
5.25. Densidad de flujo, en el tiempo $t=0.0232$ modelo planar completo. . . . .	91
5.26. Flujo magnético en la trayectoria modelo planar completo en el tiempo. . . . .	92
5.27. Densidad de flujo en la trayectoria, modelo planar completo en el tiempo. . . . .	92
5.28. Corriente modelo planar completo en el tiempo. . . . .	92
5.29. Flujo magnético modelo magnetostático reducido. . . . .	94
5.30. Densidad de flujo modelo magnetostático reducido. . . . .	94
5.31. Flujo magnético en la trayectoria modelo magnetostático reducido. . . . .	94
5.32. Densidad de flujo en la trayectoria modelo magnetostático reducido. . . . .	94



5.33. Potencial magnético, parte real modelo reducido. . . . .	95
5.34. Potencial magnético, parte imaginaria modelo reducido. . . . .	95
5.35. Densidad de flujo, parte real modelo reducido. . . . .	96
5.36. Densidad de flujo, parte imaginaria modelo reducido. . . . .	96
5.37. Flujo magnético en la trayectoria modelo armónico reducido. . . . .	96
5.38. Densidad de flujo en la trayectoria modelo armónico reducido. . . . .	96
5.39. Potencial magnético, en el instante $t=0.0232$ , modelo planar reducido. . . . .	97
5.40. Densidad de flujo, en el instante $t=0.0232$ , modelo planar reducido. . . . .	97
5.41. Corriente, modelo planar reducido. . . . .	98
5.42. Flujo magnético en la trayectoria modelo planar reducido en el tiempo. . . . .	98
5.43. Densidad de flujo en la trayectoria modelo planar reducido en el tiempo. . . . .	98
5.44. Comparación de potencial magnético, modelo magnetostático completo y reducido. . . . .	99
5.45. Comparación de densidades de Flujo, modelo magnetostático completo y reducido. . . . .	99
5.46. Comparación de potencial magnético, modelo armónico completo y reducido. . . . .	100
5.47. Comparación de densidades de Flujo, modelo armónico completo y reducido. . . . .	100
5.48. Comparación de potencial magnético, modelo en el tiempo completo y reducido. . . . .	100
5.49. Comparación de densidades de Flujo, modelo en el tiempo completo y reducido. . . . .	100
5.50. Dimensiones del núcleo del transformador monofásico. . . . .	101
5.51. Curva de saturación del transformador monofásico. . . . .	101
5.52. Flujo magnético, transformador monofásico modelo estático con saturación no lineal. . . . .	102
5.53. Densidad de flujo, transformador monofásico modelo estático con saturación no lineal. . . . .	102



5.54. Flujo magnético parte real, transformador monofásico con saturación no lineal.	104
5.55. Densidad de flujo parte real, transformador monofásico con saturación no lineal.	104
5.56. Flujo magnético parte imaginaria, transformador monofásico con saturación no lineal. . . . .	104
5.57. Densidad de flujo parte imaginaria, transformador monofásico con saturación no lineal. . . . .	104
5.58. Corriente transitoria, transformador monofásico con saturación no lineal. . .	105
5.59. Corriente en estado estable, transformador monofásico con saturación no lineal.	105
5.60. Flujo magnético en $t = 5.925$ s del transformador monofásico con saturación no lineal. . . . .	106
5.61. Densidad de flujo en $t = 5.925$ s del transformador monofásico con saturación no lineal. . . . .	106
5.62. Flujo magnético modelo estático del transformador monofásico caso lineal. .	107
5.63. Densidad de flujo modelo estático del transformador monofásico caso lineal. .	107
5.64. Flujo magnético parte real del transformador monofásico caso lineal. . . . .	109
5.65. Densidad de flujo parte real del transformador monofásico caso lineal. . . . .	109
5.66. Flujo magnético parte imaginaria del transformador monofásico caso lineal. .	109
5.67. Densidad de flujo, parte imaginaria del transformador monofásico caso lineal.	109
5.68. Corriente transitoria del transformador monofásico, caso lineal. . . . .	110
5.69. Corriente en estado estable del transformador monofásico, caso lineal. . . . .	110
5.70. Flujo magnético en $t = 5.925$ s del modelo en el tiempo del transformador monofásico caso lineal. . . . .	111
5.71. Densidad de flujo en $t = 5.925$ s del modelo en el tiempo del transformador monofásico caso lineal. . . . .	111
5.72. Curva de saturación del modelo trifásico del transformador. . . . .	112



5.73. Distribución del potencial magnético debida a la fase A del modelo trifásico. . . . .	114
5.74. Densidad de flujo debida a la fase A del modelo trifásico. . . . .	114
5.75. Distribución del potencial magnético debida a la fase B del modelo trifásico. . . . .	115
5.76. Densidad de flujo debida a la fase B del modelo trifásico. . . . .	115
5.77. Distribución del potencial magnético debida a la fase C del modelo trifásico. . . . .	115
5.78. Densidad de flujo debida a la fase C del modelo trifásico. . . . .	115
5.79. Distribución del potencial magnético debida a la fase A, parte real del modelo trifásico. . . . .	117
5.80. Densidad de flujo debida a la fase A, parte real del modelo trifásico. . . . .	117
5.81. Distribución del potencial magnético debida a la fase A, parte imaginaria del modelo trifásico. . . . .	117
5.82. Densidad de flujo debida a la fase A, parte imaginaria del modelo trifásico. . . . .	117
5.83. Distribución del potencial magnético debido a la fase B, parte real del modelo trifásico. . . . .	118
5.84. Densidad de flujo debida a la fase B, parte real del modelo trifásico. . . . .	118
5.85. Distribución del potencial magnético debido a la fase B, parte imaginaria del modelo trifásico. . . . .	118
5.86. Densidad de flujo debida a la fase B, parte imaginaria del modelo trifásico. . . . .	118
5.87. Distribución del potencial magnético debido a la fase C, parte real del modelo trifásico. . . . .	119
5.88. Densidad de flujo debida a la fase C, parte real del modelo trifásico. . . . .	119
5.89. Distribución del potencial magnético debida a la fase C, parte imaginaria del modelo trifásico. . . . .	119
5.90. Densidad de flujo debida a la fase C, parte imaginaria del modelo trifásico. . . . .	119
5.91. Densidad de flujo en pierna I, modelo estático trifásico. . . . .	121



5.92. Densidad de flujo en la pierna II, modelo estático trifásico. . . . .	121
5.93. Densidad de flujo en la pierna III, modelo estático trifásico. . . . .	122
5.94. Potencial magnético, cuando el flujo es mayor en la pierna I del modelo estático trifásico. . . . .	122
5.95. Potencial magnético, cuando el flujo es mayor en la pierna II del modelo estático trifásico. . . . .	122
5.96. Potencial magnético, cuando el flujo es mayor en la pierna III del modelo estático trifásico. . . . .	123
5.97. Densidad de flujo, cuando es mayor en la pierna I del modelo estático trifásico.	123
5.98. Densidad de flujo, cuando es mayor en la pierna II del modelo estático trifásico.	123
5.99. Densidad de flujo, cuando es mayor en la pierna III del modelo estático trifásico.	123
5.100 Densidad de flujo en la trayectoria de la pierna I del modelo armónico trifásico.	124
5.101 Densidad de flujo en la trayectoria de la pierna II del modelo armónico trifásico.	124
5.102 Densidad de flujo en la trayectoria de la pierna III del modelo armónico trifásico.	125
5.103 Potencial magnético, parte real del modelo armónico trifásico. . . . .	126
5.104 Potencial magnético, parte imaginaria del modelo armónico trifásico. . . . .	126
5.105 Densidad de Flujo, parte real del modelo armónico trifásico. . . . .	126
5.106 Densidad de flujo, parte real del modelo armónico trifásico. . . . .	126
A.1. Regiones de trabajo. . . . .	132



# Introducción

---

Con el acelerado desarrollo que tiene la tecnología y la escasez inminente de los combustibles fósiles que son utilizados en la generación de energía eléctrica, la eficiencia energética en los equipos eléctricos se han vuelto un tema muy importantes. En la búsqueda de nuevas técnicas matemáticas muchos diseñadores e investigadores han regresado la mirada a la utilización de técnicas de aproximación numérico, tal es el caso de la técnica del elemento finito. Los elementos finitos triangulares de primer orden se emplearon por primera vez en aplicaciones de ingeniería eléctrica en 1968. En ese entonces se usaron para resolver problemas de guías de ondas relativamente sencillos, posteriormente se han utilizado en muchas áreas en donde es necesario determinar potenciales escalares bidimensionales o funciones de onda. No obstante se siguen usando en problemas en donde se encuentran no linealidades de los materiales o formas geométricas complejas; por ejemplo, al analizar los campos magnéticos en las máquinas eléctricas o las distribuciones de carga y corriente en dispositivos semiconductores [1]. Actualmente algunos diseñadores siguen empleando técnicas que utilizan fórmulas matemáticas poco claras, muchas de estas de carácter empírico, de poco sustento matemático y que en ocasiones generan una gran incertidumbre. Típicamente los equipos eléctricos tales como motores y transformadores son analizados empleando circuitos eléctricos, que son una manera simplificada de las ecuaciones de Maxwell, la simplicidad



en el manejo de estos modelos proporcionan una opción de solución muy atractiva y rápida, sin embargo, se tiene el inconveniente de que el análisis está orientado principalmente a condiciones de entrada y salida balanceadas. Mientras que las técnicas matemáticas que solucionan las ecuaciones de Maxwell en una forma numérica, se aproximan más a los fenómenos naturales porque no consideran tantos supuestos como los modelos circuitales.

**Justificación.** Antes de 1940, muchos problemas de electromagnetismo eran resueltos empleando los métodos clásicos llamados métodos directos. Para obtener una solución utilizando estos métodos era necesario tener un alto grado de ingeniosidad y experiencia, por lo que muy pocos problemas prácticos podían ser resueltos e investigados. Las técnicas matemáticas que emplean métodos iterativos de solución contribuyen hoy a resolver el problema. A mediados de 1960 con la aparición de las computadoras de alta velocidad estos métodos se hicieron muy populares, y desde entonces se han utilizado en la solución de problemas cada vez más complejos para los cuales las soluciones analíticas son muy complejas o de plano se encuentran truncadas [4]. Una de las técnicas existentes que emplean métodos iterativos de solución para las ecuaciones de Maxwell, es el llamado método del elemento finito cuyas siglas en inglés son FEM (Finite Elements Method). Los beneficios de este método se encuentran en la eficiencia computacional, además, no está restringido a geometrías regulares e isotropías de materiales, y no solo se aplica al electromagnetismo también se puede aplicar a problemas combinados con la mecánica, fluidos, análisis estructural etc. y es muy efectivo en fenómenos electromagnéticos ya sea que se encuentren en una forma estática (Fenómenos magnéticos básicos en estado estable) o bien se encuentran en el dominio de la frecuencia (En estado estable) o en el dominio del tiempo (fenómenos transitorios).[11]. En particular, si se emplean métodos iterativos de solución de ecuaciones, las técnicas del elemento finito de primer orden algunas veces se asemejan a los métodos clásicos de diferencias finitas.



La pregunta que surge entonces es cual método debe preferirse. Demerdash y Nehl [12] investigaron este problema (1976) comparando resultados de problemas resueltos por ambos métodos. Los elementos finitos parecen ser preferibles aun en el nivel de primer orden. Los fenómenos estáticos típicamente son utilizados en situaciones físicas que se encuentran en estado estable, donde fenómenos tales como corrientes inducidas por movimiento o por fuentes externas no son tomados en cuenta, en otras palabras, los fenómenos debidos a la dinámica del problema son ignorados, en lo particular, cuando se tratan de dispositivos eléctricos como motores o transformadores las fuentes excitadoras deben ser definidas por densidades de corrientes. La mayoría de los artículos y revistas especializadas reportan que los fenómenos electromagnéticos son bien aproximados utilizando densidades de corriente como fuentes excitadoras. En varios artículos se reportan métodos que aproximan la dinámica del dispositivo eléctrico una vez modelado el problema estático.

El método del elemento finito también permite modelar fenómenos electromagnéticos que se encuentran en forma fasorial, siendo de gran utilidad porque fenómenos derivados tales como corrientes y voltajes inducidos se pueden considerar en el modelado, y por si fuera poco se pueden modelar fenómenos transitorios.

**Objetivos.** Analizar en detalle los modelos utilizados en el estudio de fenómenos magnéticos en transformadores eléctricos utilizados en la técnica de elementos finitos bidimensional; Magnetostático, Armónico y Transitorio. Los resultados de los modelos deben ser precisos y se deben incorporar fuentes de voltaje como excitación de los devanados. Proponer equivalentes de bobinas no axisimétricas en estudios bidimensionales. Proponer equivalentes lineales para núcleos saturados que proporcionen resultados confiables.



**Organización de la tesis.** En el primer capítulo se abordan las ideas principales que dieron origen a este trabajo, objetivos y justificaciones. En el segundo capítulo se explican temas generales del electromagnetismo, como son las ecuaciones de Maxwell, de estas últimas son obtenidas las ecuaciones diferenciales que representan a cada una las regiones del transformador y como punto final de este capítulo se desarrolla la técnica del elemento finito aplicado a estas ecuaciones. En el tercer capítulo se describe el acoplamiento de circuitos externos a regiones del elemento finito y se describen los modelos matemáticos de cada una de las tres opciones que se utilizan en el estudio de fenómenos electromagnéticos de baja frecuencia . En el cuarto capítulo se describen las características del transformador utilizado en este estudio, así como los diferentes modelos (del punto de vista del FEM) que se emplean en cada región del transformador. Y por último, en el capítulo cinco se muestran los resultados obtenidos al emplear un paquete comercial llamado Ansys, se hacen comparaciones y se dan conclusiones.



# Ecuaciones de Maxwell.

---

La necesidad de obtener una predicción más exacta del comportamiento del transformador a obligado a los diseñadores a usar el modelo electromagnético que se formula con las ecuaciones de Maxwell. Las solución de estas ecuaciones aproximan el comportamiento real de dispositivos eléctricos, tales como el motor y transformador por ejemplo. En este capítulo se desarrollan las ecuaciones con las cuales se pueden modelar estos dispositivos eléctricos. Las ecuaciones son formuladas empleando cálculo de variaciones y en la cual se obtiene una funcional, y finalmente en la última sección se da solución a esta funcional utilizando la técnica del elemento finito.

## 2.1. Ecuaciones de Maxwell.

Las leyes que describen los fenómenos electromagnéticos en baja frecuencia pueden ser expresadas por cuatro ecuaciones denominadas de Maxwell, que en forma diferencial se expresan como sigue [1].

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.1)$$



$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.4)$$

Las variables que relacionan las ecuaciones de Maxwell son resumidas en cinco vectores y un escalar.

Intensidad de campo eléctrico.	$\mathbf{E}$	$\frac{V}{m}$
Intensidad de campo magnético.	$\mathbf{H}$	$\frac{A}{m}$
Densidad del flujo magnético.	$\mathbf{B}$	$T$
Densidad de corriente eléctrica.	$\mathbf{J}$	$\frac{A}{m^2}$
Densidad volumétrica de carga eléctrica.	$\rho$	$\frac{C}{m^3}$

Las relaciones que describen las propiedades del medio (relaciones constitutivas) son.

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{H} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.7)$$

Donde:

$\epsilon$	<i>Permitividad</i>	$\frac{F}{m}$
$\mu$	<i>Permeabilidad</i>	$\frac{H}{m}$
$\sigma$	<i>Conductividad</i>	$\frac{S}{m}$

Estos tres últimos parámetros generalmente no son homogéneos y sus propiedades dependen del campo magnético o eléctrico y en el caso general (anisotrópicos) deben ser representados



mediante tensores. En dispositivos eléctricos de potencia, típicamente los materiales empleados para conducir el flujo y evitar así la dispersión del mismo son de alta permeabilidad y son laminados con el propósito de reducir pérdidas debidas a corrientes parásitas inducidas. En muchas aplicaciones se emplean deliberadamente materiales anisotrópicos como por ejemplo, aceros de granos orientados en núcleos de transformadores. Estos materiales tienen un valor de reluctividad en una dirección de preferencia y otro diferente en la dirección ortogonal [1]. La correcta modelación de estos parámetros hace más realista la representación de los fenómenos que tienen lugar en los dispositivos eléctricos de potencia.

## 2.2. Potencial magnético.

La formulación de las ecuaciones de Maxwell se simplifican considerablemente en el cálculo cuando se representan los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  mediante funciones potenciales. En el caso de un campo eléctrico estático la intensidad de campo es representado por una variable potencial escalar.

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (2.8)$$

El potencial magnético vectorial  $\mathbf{A}$  es derivado de la ecuación (2.4), la divergencia del rotacional de cualquier cualquier variable vectorial debe anularse, por tanto, la densidad de flujo magnético con el vector identidad  $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{U} = 0$ , nos conduce a que la divergencia de un rotacional es igual a cero [2].

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad (2.9)$$

De la ecuación (2.9) se observa que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.10)$$



## 2.3. Condiciones Gauge.

Recordado el teorema de Helmholtz, que dice, " un campo vectorial está determinado si su divergencia y su rotacional están especificados en todos los puntos del dominio" [3]. De la ecuación (2.10) se observa que existe un elemento de arbitrariedad que al añadir el gradiente de cualquier función escalar de posición  $\nabla c$  a  $\mathbf{A}$  no afecta el resultado de la ecuación (2.10). En virtud de la arbitrariedad descrita anteriormente  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  puede especificarse a voluntad.

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (2.11)$$

Esta condición usualmente llamada Coulomb gauge es la mayormente empleada en problemas de baja frecuencia. Una segunda condición es conocida como condición de difusión de gauge.

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \quad (2.12)$$

Esta elección es muy popular por el bajo costo computacional en problemas de gran tamaño. Una tercera condición es la llamada condición de Lorentz Gauge, muy usado en problemas de propagación de ondas.

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\sigma V - \mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \quad (2.13)$$

## 2.4. Relación entre potenciales.

La intensidad de campo eléctrico  $\mathbf{E}$  puede ser expresado en términos del potencial magnético vectorial y del potencial eléctrico, esto se hace aplicando la identidad  $\nabla \times \nabla V = 0$  y considerando la ecuación (2.4) y posteriormente se sustituye la ecuación de inducción de Faraday. Véase el apéndice A-1 para más detalle de la obtención de la formulación.

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V \quad (2.14)$$



## 2.5. Clasificación de métodos de solución.

Una clasificación de los métodos utilizados para el análisis de problemas de electromagnetismo pueden ser sub-divididos en experimental, analítico y técnicas numéricas. El primero es costosa y absorbe sbastante tiempo de trabajo. Si se desean utilizar técnicas analíticas en estructuras complejas es necesario tener una gran experiencia y gran ingenio para poder llegar a una solución. Las técnicas numéricas utilizan métodos de aproximación que con la ayuda de las computadoras permiten representar con mayor exactitud la gran cantidad de elementos y de fenómenos físicos de distinta naturaleza que ocurren en el interior de los dispositivos eléctricos de potencia.

### 2.5.1. Métodos analíticos

Una clasificación de los métodos analíticos es la siguiente:

- Mapeado conformal, es esencialmente una técnica estática. Este emplea una transformación de coordenadas del problema original en una más simplificada, en donde se obtienen una solución analítica en el dominio mapeado. Aplicable a geometrías simples. Puede ser aplicado a configuraciones complejas después de desarrollar ciertas aproximaciones que simplifican el problema. En estos casos se pueden obtener soluciones semi-analíticas. También puede ser utilizado como complemento con otros métodos [14].
- Separación de variables. (también llamado método de Fourier), trata de una solución que puede expresarse como un producto de funciones, cada una de ellas dependientes de una variable. Tiene una flexibilidad limitada [14].
- Expansión en series, escribe la solución como una serie de funciones infinitas. Como la



serie infinita puede ser truncada, el método es esencialmente semi-analítico. En muchos casos puede ser utilizado junto con otros métodos como los anteriormente descritos o con técnicas numéricas [14].

- Métodos integrales, (como la transformada de Laplace y de Fourier). Son utilizados en conjunto con otras técnicas numéricas. Un ejemplo es método del dominio espectral, en donde la transformada de Fourier es usada junto con el método de Rayleigh-Ritz [14].

## **2.5.2. Métodos numéricos.**

En la tabla (2.5.2) se muestra una clasificación de los métodos numéricos mas comúnmente usados para solucionar problemas de electromagnetismo. En años recientes muchos de estos métodos han sufrido variaciones [14].

## **2.5.3. Métodos basados en formulaciones de ecuaciones diferenciales.**

Estos métodos dan solución en el campo electromagnético en el dominio espacial del problema, requieren de la discretización del dominio. Son apropiados para estructuras cerradas que pueden ser no homogéneos y anisotrópicos.

### **2.5.3.1. Diferencias finitas**

Uno de los métodos más utilizados para encontrar las solución a las ecuaciones de Maxwell es el de Diferencias finitas desarrollado por A. Thom en 1920 bajo el título de "El método de los cuadrados" Éste inicialmente fue desarrollado para resolver ecuaciones no lineales de



Tabla 2.1: Clasificación de Métodos numéricos.

Ecuaciones de Maxwell			
Dominio de la frecuencia		Dominio del tiempo	
Ecuaciones diferenciales	Ecuaciones integrales	Ecuaciones diferenciales	Ecuaciones integrales
* Método de diferencias finitas	* Método de momentos	* Método de diferencias finitas	* Método de momentos
* Método de líneas	- Colocación	- Método de líneas	
* Métodos variacionales	- Sub-dominio	Método de líneas de transmisión	
- Rayleigh-Ritz	- Galerkin	- Método del elemento finito	
- Residuos ponderados	- Mínimos cuadrados		
- Colocación	* Raleigh-Ritz		
- Sub-dominio	* Método de elementos frontera		
- Galerkin			
- Mínimos cuadrados			



la hidrodinámica. En 1966 Yee describió las bases de la primera técnica de malla espacial en el dominio del tiempo para solucionar las ecuaciones de Maxwell. La aportación de Yee a la solución de las ecuaciones de Maxwell fue utilizar dos mallas cartesianas rectangulares entrelazadas; una para los vectores del campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y otra para los del campo magnético  $\mathbf{H}$ . Al método propuesto por Yee se le conoce como "Diferencias finitas en el dominio del tiempo" (FDTD del inglés Finite Difference Time Domain), comúnmente llamado el método de Yee. En este método se utiliza una malla de campo eléctrico desplazada espacial y temporalmente de la malla de campo magnético. Todo esto dentro de un ciclo progresivo de avance en tiempo, en el que se actualizan los valores del campo eléctrico y del magnético tomando como base los valores de campos calculados en el paso de tiempo anterior [13]. El método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo, fue la primera técnica numérica en su tipo.

#### **2.5.3.2. Método de líneas.**

Se remonta a 1965. Este es una variación del método de diferencias finitas. Este método reduce la dimensión del problema, resolviendo analíticamente en una dimensión. Es aplicable a estructuras mecánicas en donde los materiales deben ser homogéneos en una dirección. Esta condición reduce el rango de aplicabilidad del método. Por otra parte tiene la ventaja de reducir el número de incógnitas y por consecuencia el tiempo, almacenamiento y memoria en el equipo de computo.

#### **2.5.3.3. Métodos variacionales.**

Estos métodos permiten transformar el problema de solución de ecuaciones diferenciales en un problema equivalente, en donde se busca una función que proporcione un extremo de una funcional (por lo regular esta funcional es una integral del residual, esto se explica en capítulos siguientes). Los métodos variacionales pueden ser subdivididas en dos categorías:



directos e indirectos.

El método directo también es llamado, " El método de *Rayleigh-Ritz* " o " método Ritz " Este método requiere de una funcional y se busca su mínimo. Las variables del problema son aproximadas por una combinación lineal de expansiones o funciones básicas que pueden ser convenientemente seleccionadas [16]. Los coeficientes de las funciones son las incógnitas del problema discreto que se obtienen sustituyendo la aproximación de las variables en la funcional. La solución es el valor estacionario con respecto a estos coeficientes. Los métodos indirectos son referidos como *Método de residuos ponderados*. Las variables son aproximadas como en el método de *Rayleigh-Ritz*. El residuo de la ecuación diferencial es entonces *ponderado* por pesos o funciones de prueba seleccionados convenientemente [16]. Dependiendo del tipo de funciones de peso utilizados los métodos se clasifican:

1. *Colocación o punto coincidente*, donde las funciones de peso son funciones del tipo de delta de Dirac; este método es equivalente a forzar al residual a cero en un número de puntos seleccionados en el dominio.
2. *Subdominio*, en este las funciones de peso son iguales a cero en todo el dominio, excepto en un subdominio seleccionado, donde puede ser constante, una función lineal o una función senoidal.
3. *Galerkin o Bubnov-Galerkin*, en donde las funciones de prueba son las mismas que las funciones de expansión.
4. *Mínimos cuadrados*, aquí las funciones de peso son el resultado de aplicar el operador diferencial a cada una de las incógnitas de las funciones de prueba; es equivalente a encontrar puntos estacionarios de la funcional obtenidos ponderando el residual por ella misma.



5. Petrov-Galerkin, las funciones de peso pueden ser cualquier otra función.

Los métodos indirectos son menos analíticos que los métodos directos. En general, los métodos variacionales proporcionan buenos resultados sin hacer excesivo el almacenamiento y tiempo de cómputo [14].

#### **2.5.3.4. El método del elemento finito.**

Es un método variacional en donde las incógnitas son aproximadas por subdominios, esto es, mediante una combinación lineal de funciones polinomiales localmente definidas en cada subdominio, todo el dominio es dividido en subdominios, entonces estos subdominios son llamados elementos en el sentido geométrico. Estos típicamente tienen geometrías sencillas, como formas triangulares o rectangulares para problemas en dos dimensiones o tetraedros o hexaedros para problemas en tres dimensiones. La aproximación de las incógnitas por subdominios es usado en conjunto con el método de Rayleigh-Ritz y otro método de residuos ponderados. El más utilizado para la aproximación es el procedimiento de Galerkin. La formulación se transforma en otra, en donde se elimina el requerimiento de la derivada de segundo orden. obteniéndose así una forma integral debilitada. Entonces la aproximación es aplicada localmente resultando en un grupo de expresiones discretas para cada elemento, llamados forma integral local discreta. Un concepto importante es la condición de continuidad. Estas condiciones permiten el ensamblado de las formas integrales locales, discretas de todos los elementos resultando una forma global discreta. Finalmente, la imposición de las condiciones frontera proveen el sistema general de ecuaciones algebraicas. El esfuerzo analítico del Método del elemento finito es relativamente bajo. Puede ser aplicado a figuras geométricas irregulares que pueden ser no-homogéneos y anisotrópicos. El método es aplicable a materiales no lineales. El sistema matricial puede tener grandes dimensiones. Sin embargo, las matrices son bandeadas y altamente dispersas ya que las incógnitas de un elemento son



conectadas solo a los elementos contiguos. Estas características permiten el uso de algoritmos computaciones eficientes , y por consiguiente se reduce el uso de almacenamiento, memoria y uso del CPU. Para resultados exactos y buena convergencia, el método requiere un mallado refinado en regiones donde el campo electromagnético tiene un comportamiento intenso o en zonas con propiedades discontinuas o cambios abruptos en las características físicas de los diferentes medios y efectos de acoplamiento.

#### **2.5.4. Métodos basados en formulaciones integrales.**

Los métodos integrales tienen una formulación integro-diferencial del problema. Estos métodos se aplican a estructuras abiertas. De hecho, los problemas abiertos se han abordado tradicionalmente usando métodos integrales para solución de integrales de superficie o de volumen. A diferencia de los métodos basados en ecuaciones diferenciales, la formulación en ecuaciones integrales solucionan para fuentes de carga (corrientes y cargas). Las fuentes pueden ser líneas (para antenas), superficies (para platos metálicos) o fuentes volumétricas (para cuerpos dieléctricos no homogéneos). Las ecuaciones integrales son generalmente formuladas iniciando de las condiciones frontera o de algunas relaciones locales entre campos o de principios variacionales. Los campos se expresan en términos de las fuentes mediante ciertas integrales (generalmente con las ayuda de potenciales), que implican funciones de Green. En la forma final de las ecuaciones, las fuentes aparecen como incógnitas bajo integrales. Estas ecuaciones son lineales en términos de los campos de las fuentes.

Los métodos basados en ecuaciones integrales tienen numerosos atractivos. Por ejemplo, si se usa la formulación de una superficie, solo se requiere la discretización de la frontera y las interfases de los medios (son más adecuados para estructuras no homogéneas). Sin embargo estos también tienen ciertas desventajas. En particular las ecuaciones integrales pueden



llegar a ser imprácticas con estructuras con medios altamente no homogéneos o no lineales. La formulación integral siempre requiere un conocimiento a priori de las funciones de Green. Sin embargo, en medios electromagnéticos complejos estas funciones son complicadas. Para resolver el problema, es a menudo necesario formular las ecuaciones integrales en términos de fuentes equivalentes del campo situadas a través de todo el volumen con no homogeneidades. En estos casos, las incógnitas tienen la misma localización y complejidad que cuando son formuladas mediante ecuaciones diferenciales. En contraste con la aproximación de la ecuación integral, las formulaciones con ecuaciones diferenciales son simples de establecer sin importar la complejidad de la estructura analizada.

Las formulaciones de las ecuaciones integrales dan lugar a sistemas de ecuaciones lineales con matrices densas. La evaluación de estos coeficientes es un trabajo numérico pesado y que consume mucho tiempo. Cuando se trata de una formulación tridimensional el número de incógnitas es generalmente muy elevado. Por consecuencia el tiempo de CPU utilizado para formar la matriz de elementos y resolver el sistema de ecuaciones lineales requiere de una gran cantidad de memoria en el equipo de cómputo.

#### **2.5.4.1. El método de momentos.**

Es el método más conocido basado en ecuaciones integrales que típicamente se nombra como MOM por sus siglas del idioma inglés (Method of Moments). Coincide formalmente con el método de residuos ponderados porque las fuentes (las incógnitas) son expandidas por una suma de ciertas funciones básicas multiplicadas por los coeficientes desconocidos. El residual de la ecuación integral es ponderado usando el producto interno y un grupo apropiado de funciones de peso. Esto resulta en un conjunto de ecuaciones lineales, los cuales pueden ser resueltas de una manera usual. Dependiendo de la definición de producto interno de las operaciones de peso, varios métodos son posibles. MOM utiliza el producto escalar. El



método del gradiente conjugado utiliza el producto de Hilbert (equivalente al principio de conservación de la energía). MOM es usado en conjunto con el método del elemento finito para problemas de regiones abiertas.

La técnica de Rayleigh-Ritz también puede ser usada para obtener métodos integrales ya que puede ser aplicado a principios variacionales involucrando funciones de Green.

En los métodos de MOM y Rayleigh la transformada de Fourier es frecuentemente usada para simplificar el cálculo de las funciones de Green, ya que la dimensión del problema original es reducido. Este procedimiento da lugar a la *Aproximación espectral del dominio* que por sus siglas del idioma inglés es (SDA), Spectral Domain Approach, introducido por E. Yamashita y R. Miltra en 1968. Por el contrario, los métodos espectrales son difíciles de aplicar a estructuras que no son homogéneas a lo largo de la dirección en la cual se ha utilizado la transformada de Fourier. Sin embargo, se han ideado procedimientos para hacer frente a esta dificultad. Los métodos espectrales reducen la dimensión del sistema de matrices y consecuentemente, la memoria, almacenamiento y tiempo de CPU en el equipo de computo.

#### **2.5.4.2. El método del elemento frontera.**

Que por sus siglas en inglés se abrevia BEM, *Boundary element Method*. Este relaciona los métodos de momentos MOM y el método del elemento finito. Mediante el elemento finito se discretiza la frontera usando el operador de las funciones de Green.

## **2.6. Principios variacionales.**

El objetivo del calculo de variaciones es encontrar una condición necesaria para que una funcional logre un valor estacionario. Esta condición necesaria es generalmente una ecuación



diferencial con condiciones frontera conocidas. Dada una funcional que es expresada de una manera general como.

$$\begin{aligned}
F(\{u\}) &= F\left(u, \left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\}, \left\{\frac{\partial u}{\partial y}\right\}, \left\{\frac{\partial u}{\partial z}\right\}, \dots\right) \\
&= \int_{\Omega} f\left(\{u\}, \left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\}, \left\{\frac{\partial u}{\partial y}\right\}, \left\{\frac{\partial u}{\partial z}\right\}, \dots\right) d\Omega + \\
&\quad \int_{\Gamma} g\left(\{u\}, \left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\}, \left\{\frac{\partial u}{\partial y}\right\}, \left\{\frac{\partial u}{\partial z}\right\}\right) d\Gamma
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Donde  $\{u\}$  puede ser un vector de variables en dos,  $\{u\} = \{u(x, y)\}$  o en tres dimensiones,  $\{u\} = \{u(x, y, z)\}$ . La expresión (2.15) implica que, para un valor dado de la variables independientes  $(x, y)$  o  $(x, y, z)$  la funcional  $F$  es una función de  $\{u\}$  y de sus derivadas parciales. Así que una funcional es una función de funciones. Una variación de  $\{u\}$  es representada como.

$$\delta\{u\} = \{\delta u\} = \{\gamma u\} \tag{2.16}$$

Donde los coeficientes,  $\gamma$  son constantes. La variación de  $\delta u$  de una función  $u$  representa una modificación admisible de la función  $u(x, y)$  para valores fijos de  $(x, y)$  o  $(x, y, z)$ . Si  $u$  es especificado para un punto dado (como en el caso de puntos que pertenecen a las fronteras con condiciones del tipo de Dirichlet),  $\delta u$  debe ser cero,  $u$  no puede cambiar. Asociado con la variación  $\delta u$  en  $u$  esta la variación en  $F$ ,  $\delta F$ , que se escribe como.

$$\begin{aligned}
\delta F &= \left\{\frac{\partial F}{\partial u}\right\}^T \{\delta u\} + \left\{\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}\right\}^T \left\{\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right\} + \left\{\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}\right\}^T \left\{\delta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\} + \dots \\
&= \{\delta u\}^T \left\{\frac{\partial F}{\partial u}\right\} + \left\{\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right\}^T \left\{\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}\right\} + \left\{\delta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\}^T \left\{\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}\right\} + \dots \tag{2.17}
\end{aligned}$$



Donde:

$$\begin{aligned}\delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= \frac{\partial \delta u}{\partial x} \\ \delta \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \frac{\partial \delta u}{\partial y} \\ \delta \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= \frac{\partial \delta u}{\partial z}\end{aligned}\tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}\delta \int_{\Omega} u \, d\Omega &= \int_{\Omega} \delta u \, d\Omega \\ \delta \int_{\Gamma} u \, d\Gamma &= \int_{\Gamma} \delta u \, d\Gamma\end{aligned}\tag{2.19}$$

De la ecuación (2.17) la siguiente expresión se puede obtener.

$$\begin{aligned}\delta F &= \int_{\Omega} \left\{ l \left( \{u\}, \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \right\}, \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} \right\}, \dots \right) \right\}^T \{ \delta u \} \, d\Omega + \\ &\int_{\Gamma} \left\{ m \left( \{u\}, \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \right\}, \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} \right\}, \dots \right) \right\}^T \{ \delta u \} \, d\Gamma\end{aligned}$$

Donde  $l$  y  $m$  son operadores diferenciales del tipo residual (por ejemplo  $KU-F=0$ , para sistemas lineales en el dominio) y del tipo frontera (por ejemplo  $KU-F = 0$  en las fronteras) respectivamente.

El principio de estacionalidad menciona. De entre todas las soluciones admisibles solo una satisface al residual (por ejemplo  $KU - F = 0$ ) junto con sus condiciones frontera, produciendo así un punto estacionario de la funcional  $F$ . De esta manera la primera variación,  $\delta F$  es cero.

$$\delta F (\{u\}) = 0\tag{2.20}$$



Refiriéndose al principio de estacionalidad la ecuación (2.20) se escribe como.

$$\begin{aligned} \delta F = & \int_{\Omega} \left\{ l \left( \{u\}, \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \right\}, \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} \right\}, \dots \right) \right\}^T \{\delta u\} d\Omega + \\ & \int_{\Gamma} \left\{ m \left( \{u\}, \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \right\}, \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} \right\}, \dots \right) \right\}^T \{\delta u\} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

puesto que se debe de satisfacer para cualquier variación  $\delta\{u\}$ , lo que implica.

$$\begin{aligned} \left\{ l \left( \{u\}, \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \right\}, \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} \right\}, \dots \right) \right\} &= 0, & \text{en el dominio } (\Omega) \\ \left\{ m \left( \{u\}, \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \right\}, \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} \right\}, \dots \right) \right\} &= 0, & \text{en las fronteras } (\Gamma) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Así la expresión (2.22) representa las ecuaciones diferenciales o ecuaciones de Euler correspondientes a la funcional (2.15)

## 2.7. Formulación del modelo matemático.

A continuación se detalla la forma general de la ecuación diferencial típica que se utiliza en el estudio de equipos eléctricos, como motores, transformadores, dispositivos, etc.

Partimos del hecho de que la densidad de flujo es igual al rotacional del potencial magnético vectorial.  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  y aplicando la relación constitutiva (2.6) queda que.

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{H} \quad (2.23)$$

Ahora bien, aplicando el rotacional en ambos lados de la ecuación (2.23) queda.

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \right) = \nabla \times \mathbf{H} \quad (2.24)$$

Sustituyendo la ecuación (2.2) en la formulación (2.24) queda.

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J} \quad (2.25)$$



Ahora considerando la relación constitutiva (2.7) queda.

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.26)$$

y finalmente se sustituye (2.7) en (2.26) quedando

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} + \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\sigma \nabla V \quad (2.27)$$

A la expresión (2.27) se le conoce como ecuación general del potencial magnético en el dominio del tiempo. De esta ecuación se pueden obtener otras formulaciones importantes y que son utilizadas frecuentemente. Esta ecuación es utilizada para modelos físicos en dos o tres dimensiones. Cuando no se consideran los efectos de movimiento se pueden utilizar coordenadas cilíndricas, esféricas o cartesianas. En este trabajo se utiliza el sistema de coordenadas cartesianas. La expresión en dos dimensiones en el dominio de la frecuencia es obtenida al reemplazar el término por  $j\omega$ , donde  $\omega = 2 * \pi * f$  y el potencial magnético  $\hat{\mathbf{A}}$  es una cantidad compleja, quedando entonces que la ecuación (2.27).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu_x} \frac{\partial \tilde{\mathbf{A}}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu_y} \frac{\partial \tilde{\mathbf{A}}}{\partial y} \right) - \sigma j\omega \tilde{\mathbf{A}} = \sigma \nabla \tilde{V} \quad (2.28)$$

Para fenómenos magnetostáticos, de la expresión (2.27) desaparecen los términos que son dependientes del tiempo  $\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ , aquí se puede deducir que el término excitador debe ser constante. Cabe mencionar que cuando se analizan fenómenos electromagnéticos estáticos las fuentes de excitación deben ser densidades de corriente o voltajes en DC. La expresión en forma estática es fácil de analizar debido a que no toman en cuenta ciertos factores naturales asociados con el fenómeno electromagnético, como las corrientes de remolino (corrientes de eddy). La expresión (2.27) en forma magnetostática queda como sigue.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) = -\mathbf{J} = -\sigma \Delta V \quad (2.29)$$



De la ecuación general (2.25) pueden ser obtenidas otras expresiones. Por ejemplo, si se considera un material isotrópico y que no existen fuentes excitadoras [17] se obtiene la ecuación de Laplace.

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0$$

o bien la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mathbf{J}$$

## 2.8. Elementos finitos.

Los pasos básicos que involucran un análisis con elemento finito son los siguientes [18].

*Fase de Pre-procesamiento.*

1. Discretización del dominio, por elementos finitos. Esto es subdividir el problema en elementos y a este su vez en nodos.
2. Asumir una función de prueba para formular el comportamiento físico de un elemento.
3. Desarrollar ecuaciones para cada elemento.
4. Ensamble de los elementos que representan el problema completo. Construir la matriz de rigidez global.
5. Aplicar condiciones frontera, condiciones iniciales y cargas.

*Fase de Solución.*

1. Resolver el conjunto de ecuaciones algebraicas lineales o no lineales para obtener resultados en los nodos de los elementos.

*Fase de Post-procesamiento.*



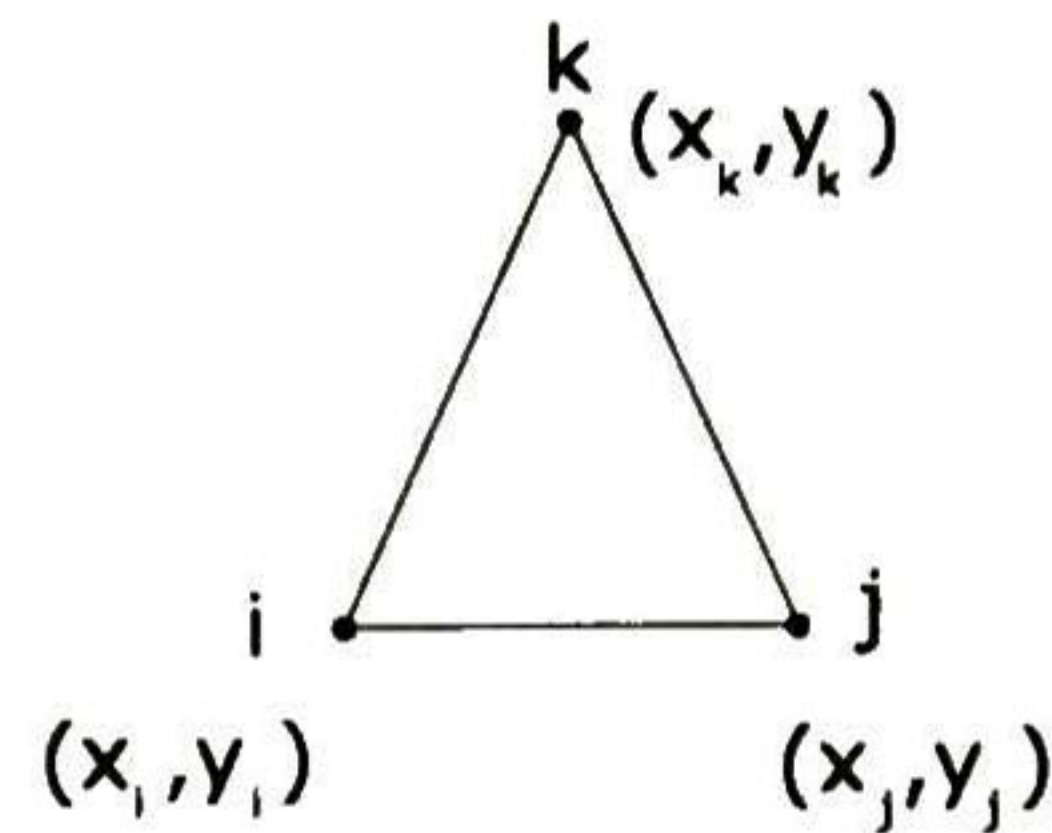


Figura 2.1: Elemento Triangular

1. Obtención de las variables denominadas derivadas a partir de las variables (potenciales) de solución básicas, como densidades de flujo, intensidades de campo etc.

## 2.9. Elementos triangulares.

Los elementos finitos triangulares de primer orden se emplearon por primera vez en aplicaciones de ingeniería eléctrica en 1968 [14]. En ese entonces se usaron para resolver problemas de guías de ondas relativamente sencillos, posteriormente se han utilizado en muchas áreas en donde es necesario determinar potenciales escalares bidimensionales, también en máquinas o ecuaciones de ondas. Posteriormente se utilizaron elementos de orden superior. Estos se siguen usando en problemas en los que se encuentran materiales no lineales o formas geométricas complicadas; por ejemplo, en el analizar campos magnéticos en las máquinas eléctricas [1]. La esencia de la técnica del elemento finito radica en aproximar el potencial magnético  $\mathbf{A}$  en cada elemento en una forma estandarizada. En un elemento triangular lineal típico, figura 2.1, se asume que el potencial magnético  $\mathbf{A}$  en dos dimensiones es representado adecuadamente por la expresión (2.30).

$$\mathbf{A} = a + bx + cy \quad (2.30)$$



Donde los coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$  son desconocidos y son determinados de la solución de tres ecuaciones. Estas ecuaciones se obtienen al asumir conocidos los potenciales  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  en los vértices del triángulo, al sustituir estos potenciales y su posición correspondiente en la ecuación (2.30) se obtiene el sistema de ecuaciones.

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

El determinante de la matriz (2.31) es igual al doble del área del triángulo. Sustituyendo la matriz anterior en la ecuación (2.30).

$$\mathbf{A} = [1 \quad x \quad y] \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Escribiendo en forma de polinomio (Lagrange) (2.32) se tiene.

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 A_i \alpha_i(x, y) \quad (2.33)$$

Donde la función  $\alpha_1(x, y)$  está determinada por.

$$\alpha_1 = \frac{1}{2 \text{ Area}} \{ (x_2 y_3 - x_3 y_2) - (y_2 - y_3) x + (x_3 - x_2) y \} \quad (2.34)$$

y donde  $\alpha_2$  es

$$\alpha_2 = \frac{1}{2 \text{ Area}} \{ (x_3 y_1 - x_1 y_3) - (y_3 - y_1) x + (x_1 - x_3) y \} \quad (2.35)$$

y  $\alpha_3$  es

$$\alpha_3 = \frac{1}{2 \text{ Area}} \{ (x_1 y_2 - x_2 y_1) - (y_1 - y_2) x + (x_2 - x_1) y \} \quad (2.36)$$



Donde  $Area$  es el área del triángulo. Para cada vértice del triángulo se cumple la condición de ortogonalidad.

$$\alpha_i(x_j, y_j) = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

$$\alpha_i(x_j, y_j) = 1 \quad \text{si } i = j$$

## 2.10. Funcionales en materiales ferromagnéticos.

El análisis electromagnético donde los elementos finitos han encontrado un uso extenso, incluyen problemas de magnetismo no lineal con aplicación a dispositivos eléctricos como lo son las máquinas eléctricas, transformadores y otros. Ahora bien la funcional para este tipo de dispositivos eléctricos ecuación (2.25) es [1].

$$F(\mathbf{A}) = \int_{\Omega} \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} d\Omega \quad (2.37)$$

La integral del primer término de la ecuación (2.37) es proporcional a la densidad de energía magnética almacenada [1] y por tanto la expresión (2.37) se puede expresar como.

$$F(\mathbf{A}) = \int_{\Omega} W(\mathbf{A}) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} d\Omega \quad (2.38)$$

Donde  $W(\mathbf{A})$  denota la densidad de energía asociada a la función de prueba (de aproximación)  $\mathbf{A}$ . Sabemos que la densidad de energía no está intrínsecamente ligada a materiales lineales, por tanto la ecuación (2.39) puede considerarse válida para materiales no lineales.

$$W = \int_{\Omega} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \quad (2.39)$$



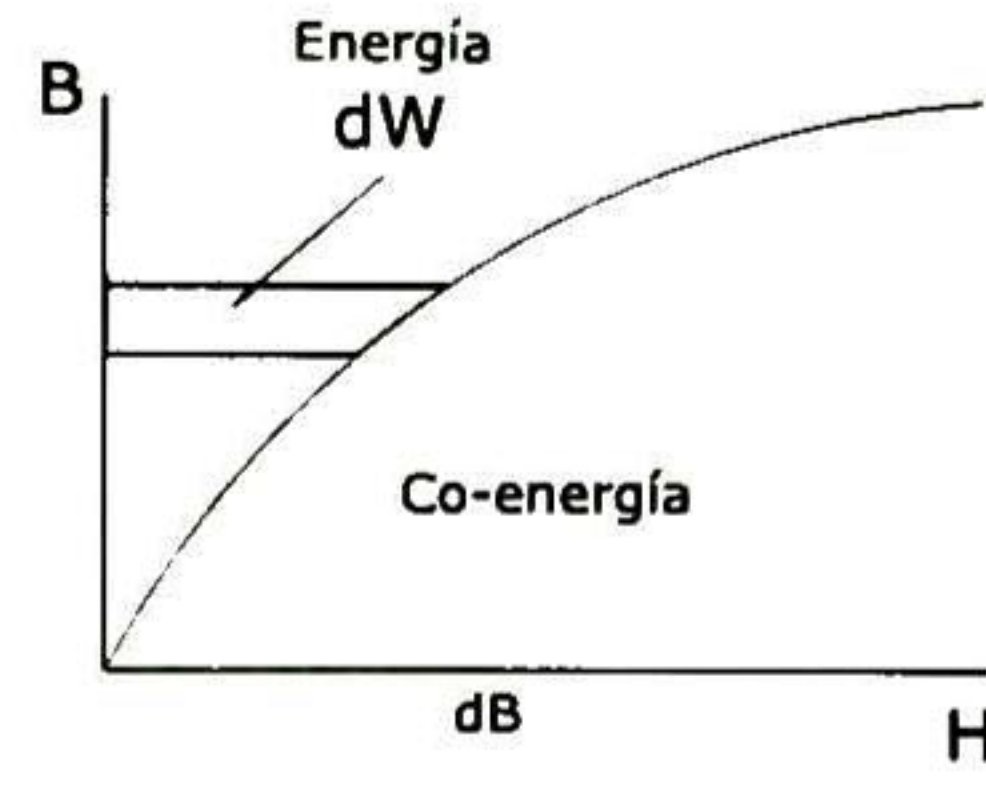


Figura 2.2: Densidad de energía

## 2.11. Minimización de la Funcional.

La solución de la funcional expresada por la ecuación (2.38) consiste en encontrar el mínimo de esta funcional [7]. El mínimo de la funcional se obtiene haciendo cero la variación de la funcional respecto de los coeficientes libres  $A_i$ .

$$\frac{\partial F(A)}{\partial A_i} = 0 \quad (2.40)$$

Diferenciando la ecuación (2.38) respecto a cada coeficiente se tiene.

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial W}{\partial A_i} - \mathbf{J}\alpha_i \right) d\Omega = 0 \quad (2.41)$$

Tomando en cuenta la ecuación (2.39) y la relación constitutiva (2.6) en el primer término del integrando de la ecuación (2.41).

$$\frac{\partial W}{\partial A_i} = \frac{\partial}{\partial A_i} \int_0^B v\mathbf{B} d\mathbf{B} \quad (2.42)$$

Donde  $v = \frac{1}{\mu}$ . En general la intensidad del campo magnético  $\mathbf{H}$  puede ser representado por la relación (2.43) [7].

$$\mathbf{H} = v(\mathbf{B}^2)\mathbf{B} \quad (2.43)$$

Ahora bien, tomando en cuenta (2.43) la ecuación (2.42) se puede escribir.

$$\frac{\partial W}{\partial A_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial A_i} \int_0^{B^2} v(\mathbf{B}^2) d(\mathbf{B}^2) \quad (2.44)$$



Recordando la regla de la cadena para la diferenciación, que dice.

$$F'(g(x)) = \frac{dF(g(x))}{dg(x)} \frac{dg(x)}{dx} \quad (2.45)$$

Ahora, aplicando la regla de la cadena al integrando de la ecuación (2.44) se tiene que

$$g(A) = \mathbf{B}^2 \quad (2.46)$$

y que

$$F(\mathbf{B}^2) = \int_0^{\mathbf{B}^2} v(\mathbf{B}^2) d(\mathbf{B}^2) \quad (2.47)$$

y las derivadas correspondientes son.

$$\frac{\partial g(A)}{\partial A_i} = \frac{\partial}{\partial A_i} \mathbf{B}^2 \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial F(g(A))}{\partial g(A)} = v(\mathbf{B}^2) \quad (2.49)$$

Así entonces la ecuación (2.44) queda como.

$$\frac{\partial W}{\partial A_i} = \frac{1}{2} v(\mathbf{B}^2) \frac{\partial}{\partial A_i} \mathbf{B}^2 \quad (2.50)$$

## 2.12. Método de Newton.

Existen diferentes métodos para la solución de las ecuaciones del tipo de (2.40). Uno de los mas utilizados es el de Newton. El algoritmo de punto fijo de Newton, se obtiene expandiendo la ecuación (2.40) en la serie de Taylor como a continuación se indica.

$$\frac{\partial F}{\partial A_i} = \left. \frac{\partial F}{\partial A_i} \right|_A + \sum_j \left. \frac{\partial^2 F}{\partial A_i \partial A_j} \right|_A \delta A_j + \dots \quad (2.51)$$

Eliminando los términos mayores de segundo grado e igualando a cero (condición estacionaria).

$$\left. \frac{\partial F}{\partial A_i} \right|_A + \left. \frac{\partial^2 F}{\partial A_i \partial A_j} \right|_A \delta A_j = 0 \quad (2.52)$$



despejando  $\delta A_j$  de la ecuación (2.52) se obtiene.

$$\delta A_j = - \left( \frac{\partial^2 F}{\partial A_i \partial A_j} \Big|_A \right)^{-1} \left( \frac{\partial F}{\partial A_i} \Big|_A \right) = -\mathbf{P}^{-1} \mathbf{V} \quad (2.53)$$

Donde,  $\mathbf{P}$  es la matriz jacobiana, evaluada para los valores de la última aproximación.

$$\mathbf{P} = \frac{\partial^2 F}{\partial A_i \partial A_j} \Big|_A \quad (2.54)$$

y  $\mathbf{V}$  en la primera derivada de la funcional.

$$\mathbf{V} = \frac{\partial F}{\partial U_i} \Big|_A = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial W}{\partial A_i} - \mathbf{J} \alpha_i \right) d\Omega \quad (2.55)$$

El proceso iterativo de punto fijo se concluye cuando el valor absoluto de dos valores sucesivos del potencial magnético es menor que la tolerancia especificada  $\varepsilon$

$$|A^{(k+1)} - A^{(k)}| < \varepsilon \quad (2.56)$$

En el proceso iterativo de Newton, ecuación (2.52) es necesario evaluar la matriz  $\mathbf{P}$  (2.53) y tiene la forma

$$\frac{\partial^2 F}{\partial A_i \partial A_j} = \int_{\Omega} \frac{\partial^2 W}{\partial A_i \partial A_j} d\Omega \quad (2.57)$$

Derivando (aplicando la diferenciación de un producto de funciones) la ecuación (2.53) se obtiene.

$$\frac{\partial^2 W}{\partial A_i \partial A_j} = \frac{v(\mathbf{B}^2)}{2} \frac{\partial^2 (\mathbf{B}^2)}{\partial A_i \partial A_j} + \frac{1}{2} \frac{dv(\mathbf{B}^2)}{d(\mathbf{B}^2)} \frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial A_i} \frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial A_j} \quad (2.58)$$

La ecuación (2.58) es el integrando de la ecuación (2.57). El segundo término de (2.58) es cero cuando se trata de permeabilidades lineales.

## 2.13. Aplicación del elemento Finito, en 2D.

La formulación del método de Newton aplicada a la técnica de elemento finito en 2 dimensiones empleando elementos triangulares de primer orden se describe a continuación.



De la definición de la densidad de flujo como el rotacional del potencial magnético vectorial  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  se obtiene.

$$\mathbf{B}^2 = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (2.59)$$

Asumiendo elementos triangulares lineales. Sustituyendo la ecuación de forma (2.33) en la ecuación (2.59) se obtiene.

$$\mathbf{B}^2 = [\nabla \times (A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + A_3\alpha_3)] \cdot [\nabla \times (A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + A_3\alpha_3)] \quad (2.60)$$

Desarrollando, la ecuación (2.60) queda

$$\mathbf{B}^2 = \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial x} (A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + A_3\alpha_3) \right] a_x - \left[ \frac{\partial}{\partial y} (A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + A_3\alpha_3) \right] a_y \right\} \cdot \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial x} (A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + A_3\alpha_3) \right] a_x - \left[ \frac{\partial}{\partial y} (A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + A_3\alpha_3) \right] a_y \right\}$$

Escribiendo la ecuación anterior en forma compacta queda.

$$\mathbf{B}^2 = \left[ \frac{\partial}{\partial x} (A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + A_3\alpha_3) \right] \left[ \frac{\partial}{\partial x} (A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + A_3\alpha_3) \right] + \left[ \frac{\partial}{\partial y} (A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + A_3\alpha_3) \right] \left[ \frac{\partial}{\partial y} (A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + A_3\alpha_3) \right] \quad (2.61)$$



Efectuando las operación de la ecuación (2.61) resulta.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}^2 = & A_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} A_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + A_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} A_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \\
& + A_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} A_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} + A_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} A_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} \\
& + A_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} A_3 \frac{\partial \alpha_3}{\partial x} + A_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} A_3 \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} \\
& + A_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} A_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + A_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} A_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \\
& + A_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} A_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} + A_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} A_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} \\
& + A_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} A_3 \frac{\partial \alpha_3}{\partial x} + A_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} A_3 \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} \\
& + A_3 \frac{\partial \alpha_3}{\partial x} A_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + A_3 \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} A_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \\
& + A_3 \frac{\partial \alpha_3}{\partial x} A_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} + A_3 \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} A_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} \\
& + A_3 \frac{\partial \alpha_3}{\partial x} A_3 \frac{\partial \alpha_3}{\partial x} + A_3 \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} A_3 \frac{\partial \alpha_3}{\partial y}
\end{aligned} \tag{2.62}$$

En forma de sumatoria, la ecuación (2.62) queda.

$$\mathbf{B}^2 = \sum_m \sum_n (\nabla \alpha_m \cdot \nabla \alpha_n) A_m A_n \tag{2.63}$$

Ahora bien, la derivada con respecto a  $A_1$  de la ecuación (2.62) es

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial A_1} = & 2A_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + 2A_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \\
& + 2A_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} + 2A_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} \\
& + 2A_3 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} \frac{\partial \alpha_3}{\partial x} + 2A_3 \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \frac{\partial \alpha_3}{\partial y}
\end{aligned} \tag{2.64}$$



La derivada con respecto a  $A_2$  de la ecuación (2.62) es

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial A_2} &= 2A_1 \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + 2A_1 \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \\ &+ 2A_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} + 2A_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} \\ &+ 2A_3 \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} \frac{\partial \alpha_3}{\partial x} + 2A_3 \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} \frac{\partial \alpha_3}{\partial y}\end{aligned}\quad (2.65)$$

La derivada con respecto a  $A_3$  de la ecuación (2.62) es

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial A_3} &= 2A_1 \frac{\partial \alpha_3}{\partial x} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + 2A_1 \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \\ &+ 2A_2 \frac{\partial \alpha_3}{\partial x} \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} + 2A_2 \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} \\ &+ 2A_3 \frac{\partial \alpha_3}{\partial x} \frac{\partial \alpha_3}{\partial x} + 2A_3 \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} \frac{\partial \alpha_3}{\partial y}\end{aligned}\quad (2.66)$$

Agrupando las ecuaciones (2.64), (2.65) y (2.66) en forma matricial resulta.

$$\frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial A_i} = 2 \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} \frac{\partial \alpha_3}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} \\ \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} \frac{\partial \alpha_3}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} \\ \frac{\partial \alpha_3}{\partial x} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} & \frac{\partial \alpha_3}{\partial x} \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} & \frac{\partial \alpha_3}{\partial x} \frac{\partial \alpha_3}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

$i = 1, 2, 3$

La ecuación (2.67) en forma de sumatoria es.

$$\frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial A_i} = 2 \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 (\nabla \alpha_m \cdot \nabla \alpha_n) A_n \quad (2.68)$$

Entonces, la derivada de la energía magnética almacenada, ecuación (2.50) es igual a.

$$\frac{\partial W}{\partial A_i} = v(\mathbf{B}^2) \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\nabla \alpha_i \cdot \nabla \alpha_j) A_j \quad (2.69)$$



Sustituyendo (2.69) en la ecuación (2.41) tenemos.

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial W}{\partial A_i} - \mathbf{J}\alpha_i \right) d\Omega = \int_{\Omega} v(\mathbf{B})^2 \sum_{i=1} \sum_{j=1} (\nabla\alpha_i \cdot \nabla\alpha_j) A_j d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{J}\alpha_i d\Omega = 0 \quad (2.70)$$

La primera integral del lado derecho de (2.70) en forma matricial es

$$\int_{\Omega} v(\mathbf{B})^2 \sum_{i=1} \sum_{j=1} (\nabla\alpha_i \cdot \nabla\alpha_j) A_j d\Omega = \mathbf{S}\mathbf{A} \quad (2.71)$$

Donde  $\mathbf{S}$  se le conoce como la matriz de rigidez y  $\mathbf{A}$  es el vector solución,  $\mathbf{J}$  es la fuente efectiva.

$$\mathbf{S}\mathbf{A} = \sum S_{ij} A_j =$$

$$\int_{\Omega} v(\mathbf{B})^2 \begin{bmatrix} \frac{\partial\alpha_1}{\partial x} \frac{\partial\alpha_1}{\partial x} + \frac{\partial\alpha_1}{\partial y} \frac{\partial\alpha_1}{\partial y} & \frac{\partial\alpha_1}{\partial x} \frac{\partial\alpha_2}{\partial x} + \frac{\partial\alpha_1}{\partial y} \frac{\partial\alpha_2}{\partial y} & \frac{\partial\alpha_1}{\partial x} \frac{\partial\alpha_3}{\partial x} + \frac{\partial\alpha_1}{\partial y} \frac{\partial\alpha_3}{\partial y} \\ \frac{\partial\alpha_2}{\partial x} \frac{\partial\alpha_1}{\partial x} + \frac{\partial\alpha_2}{\partial y} \frac{\partial\alpha_1}{\partial y} & \frac{\partial\alpha_2}{\partial x} \frac{\partial\alpha_2}{\partial x} + \frac{\partial\alpha_2}{\partial y} \frac{\partial\alpha_2}{\partial y} & \frac{\partial\alpha_2}{\partial x} \frac{\partial\alpha_3}{\partial x} + \frac{\partial\alpha_2}{\partial y} \frac{\partial\alpha_3}{\partial y} \\ \frac{\partial\alpha_3}{\partial x} \frac{\partial\alpha_1}{\partial x} + \frac{\partial\alpha_3}{\partial y} \frac{\partial\alpha_1}{\partial y} & \frac{\partial\alpha_3}{\partial x} \frac{\partial\alpha_2}{\partial x} + \frac{\partial\alpha_3}{\partial y} \frac{\partial\alpha_2}{\partial y} & \frac{\partial\alpha_3}{\partial x} \frac{\partial\alpha_3}{\partial x} + \frac{\partial\alpha_3}{\partial y} \frac{\partial\alpha_3}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} d\Omega$$

y la segunda integral de la ecuación (2.70) en una forma matricial es.

$$\mathbf{J}_{ef} = \int_{\Omega} \mathbf{J}\alpha_i d\Omega \quad (2.72)$$

La ecuación (2.70) en forma matricial es entonces.

$$\mathbf{S}\mathbf{A} = \mathbf{J}_{ef} \quad (2.73)$$

## 2.14. Solución.

En la solución de las ecuaciones por el método de Newton, primero se asumen potenciales magnéticos iguales a cero como una primera estimación y condición inicial, posteriormente se calcula el residual  $\mathbf{V}$  y la matriz jacobiana  $\mathbf{P}$  Se calcula la diferencia aparente  $\delta A$ , esta



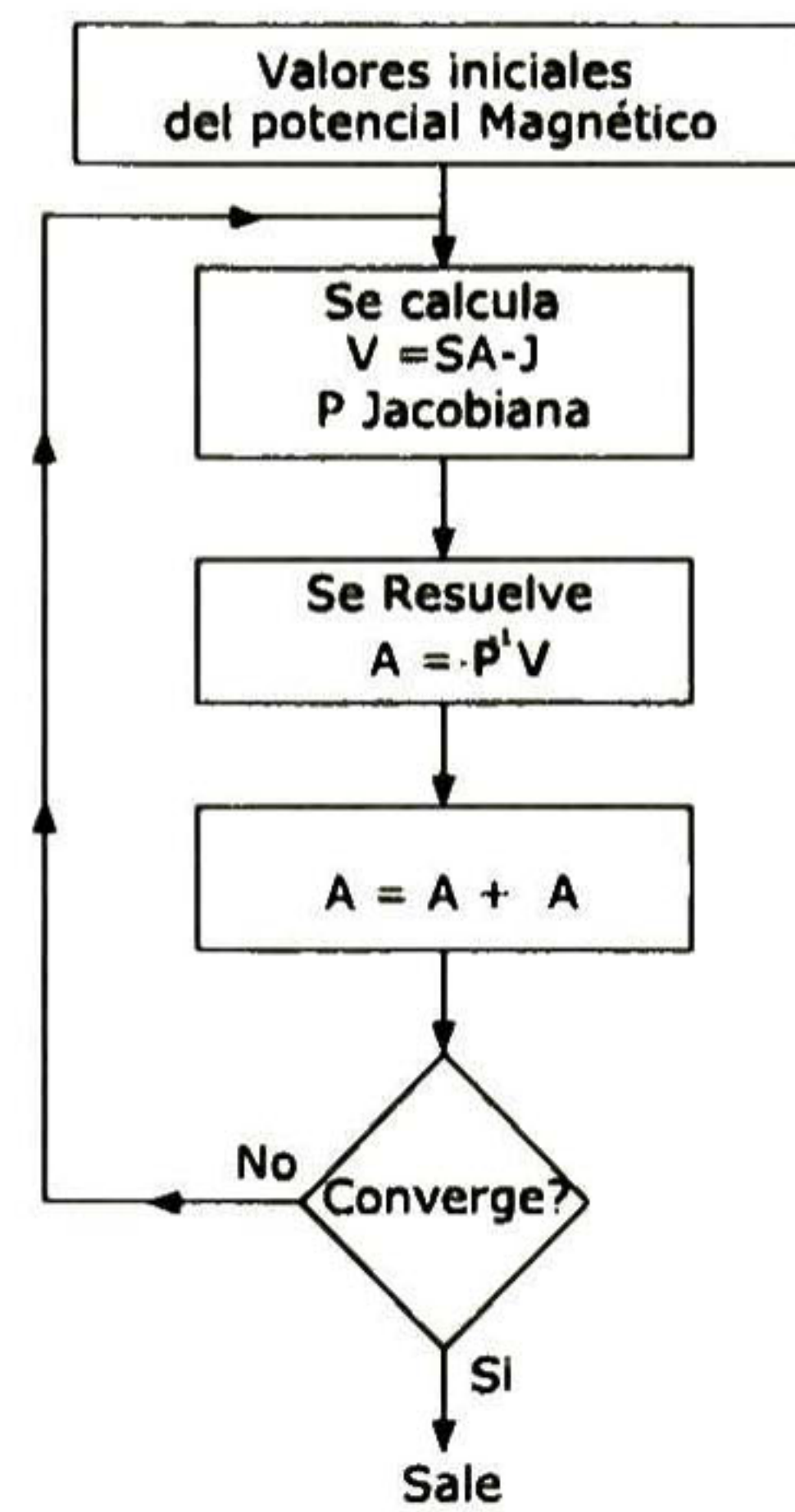


Figura 2.3: Diagrama de Flujo

diferencia aparente se suma a la aproximación del potencial anterior y por último se verifica la convergencia, en caso afirmativo se tiene la solución de los potenciales, de no ser así, este proceso se repite hasta encontrar solución. El diagrama de flujo de este proceso se muestra en la figura 2.3. Es conveniente aclarar que existen otras técnicas de solución de las ecuaciones. La mayoría de estas son desarrollos obtenidos a partir de los métodos de Newton.



# Acoplamiento de elementos finitos a circuitos eléctricos.

---

En muchos problemas de magnetismo no se conoce a priori el valor numérico de la densidad de corriente en los conductores localizados en regiones conductoras en el dominio de interés. Además, es necesario acoplar las componentes de los circuitos externos, resistencias, inductancias, fuentes de voltaje, de corriente con los elementos de la región del modelo del elemento finito. Las componentes externas pueden además ser usadas para aproximar los efectos de las partes que están fuera de la región del elemento finito sobre todo en modelos de dos dimensiones. La modelación de un dispositivo real deberá incluir el modelado de los elementos finitos tradicionales, conocido como región de elemento finito, y el modelado de otra región externa donde se incluyen los elementos de circuitos eléctricos externos. En este capítulo se describe la formulación del problema que considera estas dos regiones así como las técnicas de acoplamientos entre estas dos regiones. Posteriormente se describen los modelos matemáticos para los tres casos de estudio de este trabajo, magnetostático, armónico y transitorio.

Existen diferentes estrategias para acoplar los circuitos externos a los modelos de elementos finitos [20],[21]. En este trabajo se describe una de las técnicas más utilizadas [9],



su principal ventaja es su sencillez y su implementación fácil en los programas de elementos finitos convencionales.

### 3.1. Formulación de elementos finitos.

La formulación en la región de elementos finito tiene la forma general de la ecuación (4.1)

$$\nabla \times \nu \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J} \quad (3.1)$$

La densidad de corriente en su forma general consta de tres componentes

$$\mathbf{J} = \sigma \nabla V - \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \sigma \nu \times \mathbf{B} \quad (3.2)$$

El primer término significa la densidad de corriente debida al voltaje externo (excitación)  $\sigma \frac{V_b}{l}$ , el segundo es la densidad de corriente inducida de eddy y el tercer término es la densidad de corriente por efecto de movimiento. En éste trabajo no se considera el efecto por movimiento. Las componentes de corriente no pueden ser separadas experimentalmente. Sustituyendo la expresión de densidad de corriente (3.2) en (3.1) resulta.

$$\nabla \times \nu \nabla \times \mathbf{A} = \sigma \nabla V - \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (3.3)$$

Para acoplar los elementos circuitales con las ecuaciones de campo es necesario calcular la corriente total que circula en cada conductor del problema circuital de la región del elemento finito (ecuaciones de campo), que están interconectados a las ecuaciones circuitales externas. La corriente total de cada conductor en la región de campo se obtiene de la integración de la densidad de corriente sobre el area de cada conductor. Tiene como expresión

$$I_c = \int \int_{sc} \left( \sigma \nabla V - \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) ds \quad (3.4)$$



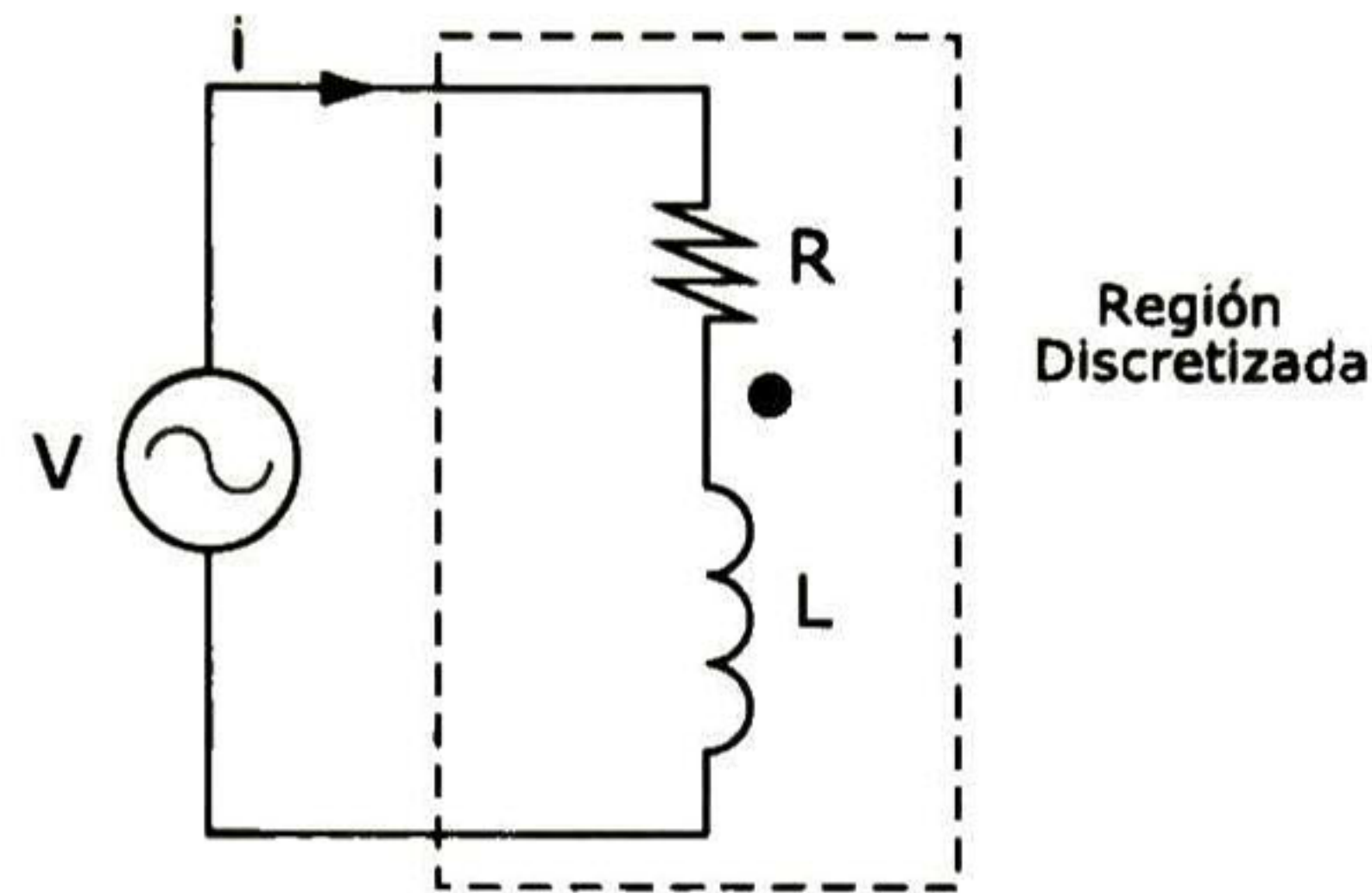


Figura 3.1: Acoplamiento entre fuente de voltaje y bobina.

Donde  $ds$  es un elemento diferencial que pertenece al área del conductor. La corriente de cada conductor es acoplada a la fuente de voltaje o de corriente a través de resistencias, inductancias, etc. En el caso general las fuentes de voltaje o de corriente pueden ser dependientes. Los elementos circuitales inclusive pueden ser no lineales

### 3.2. Elementos circuitales en la región de elementos finitos

El elemento básico de un circuito en la región de elemento finito es una barra (conductor). Esta se define como una región de conducción de longitud  $l$  en la dirección perpendicular al plano bidimensional (dirección  $z$ ). Las barras se pueden conectar en serie para formar una bobina y las bobinas pueden ser conectadas en serie o en paralelo. Cada barra esta formada por la unión de los elementos finitos que se encuentra en el interior del área de la sección transversal de la barra. La corriente de cada barra tiene como expresión la ecuación (3.4) y debe ser igual a la corriente de los elementos circuitales externos conectados en serie con la barra o bobina. Un conjunto de  $n$  barras ( $b_1, b_2, \dots, b_n$ ) se pueden conectar en serie para formar una bobina. La corriente total es la misma en cada barra y en barras sucesivas circula



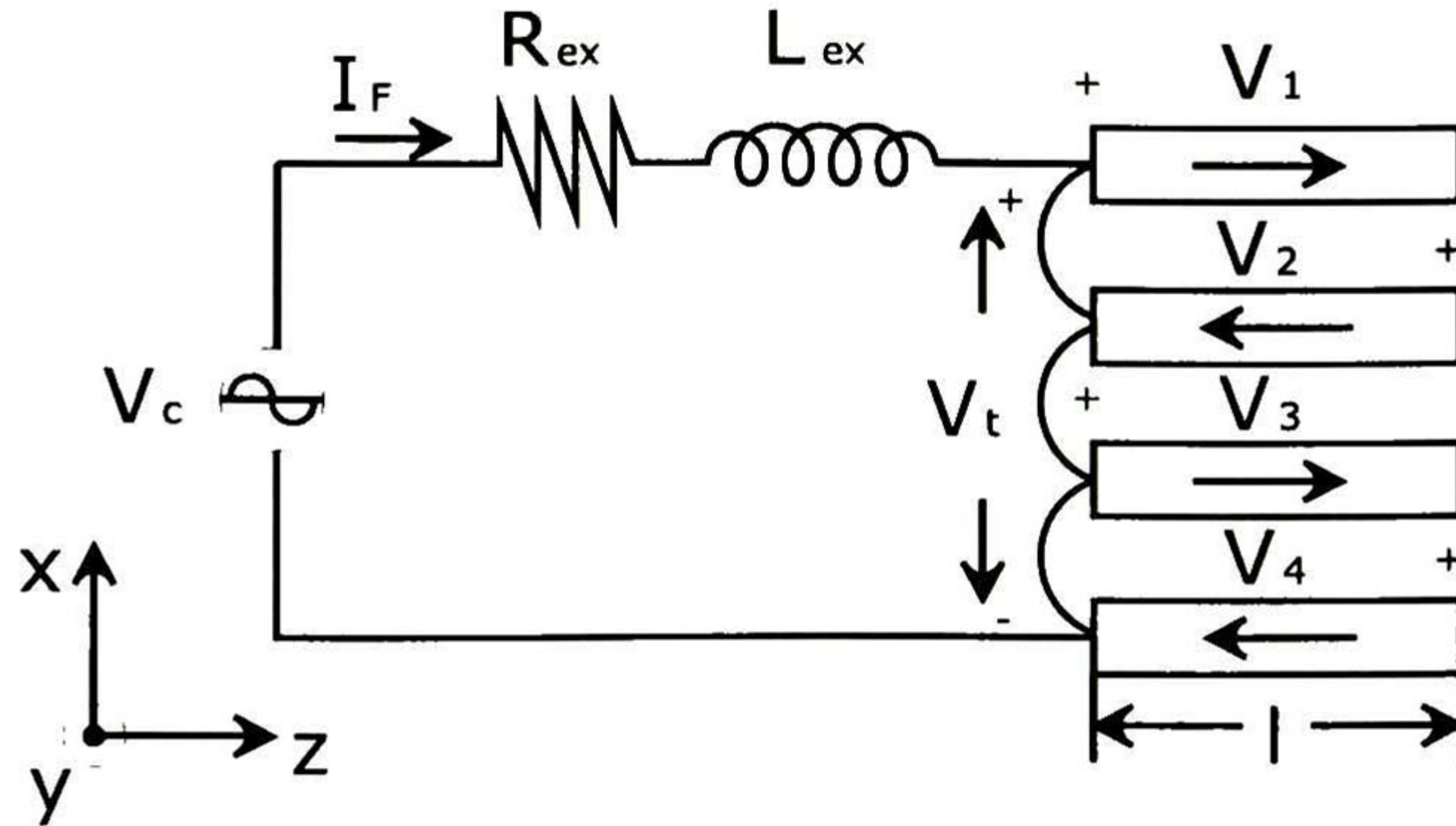


Figura 3.2: Acoplamiento entre fuente de voltaje y bobina, conexión serie.

la misma corriente pero con direcciones opuestas, figura (3.2). En las terminales de las barras o de las bobinas se pueden conectar elementos resistivos o inductivos así como a fuentes de voltaje o de corriente. El voltaje aplicado a las terminales externas de la bobina es  $V_c$  y  $V_i$  es el voltaje en las terminales de cada barra en la región de elementos finitos. De acuerdo a la segunda ley de Kirchhoff sabemos que el voltaje  $V_t$  es igual a la suma de las caídas de voltaje de todas las barras que conforman la bobina, esto es, el voltaje para la bobina  $c$  es

$$V_{t,c} = \sum_{b \in c} d_b V_b \quad (3.5)$$

donde  $d_b = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$  según sea la polaridad de la corriente en la barra  $b$

La ecuación circuital que sirve para acoplar la región de elementos finitos con voltaje terminal  $V_t$ , con los circuitos externos y las fuentes, representadas por elementos pasivos  $R_{ext}$ ,  $L_{ext}$  y



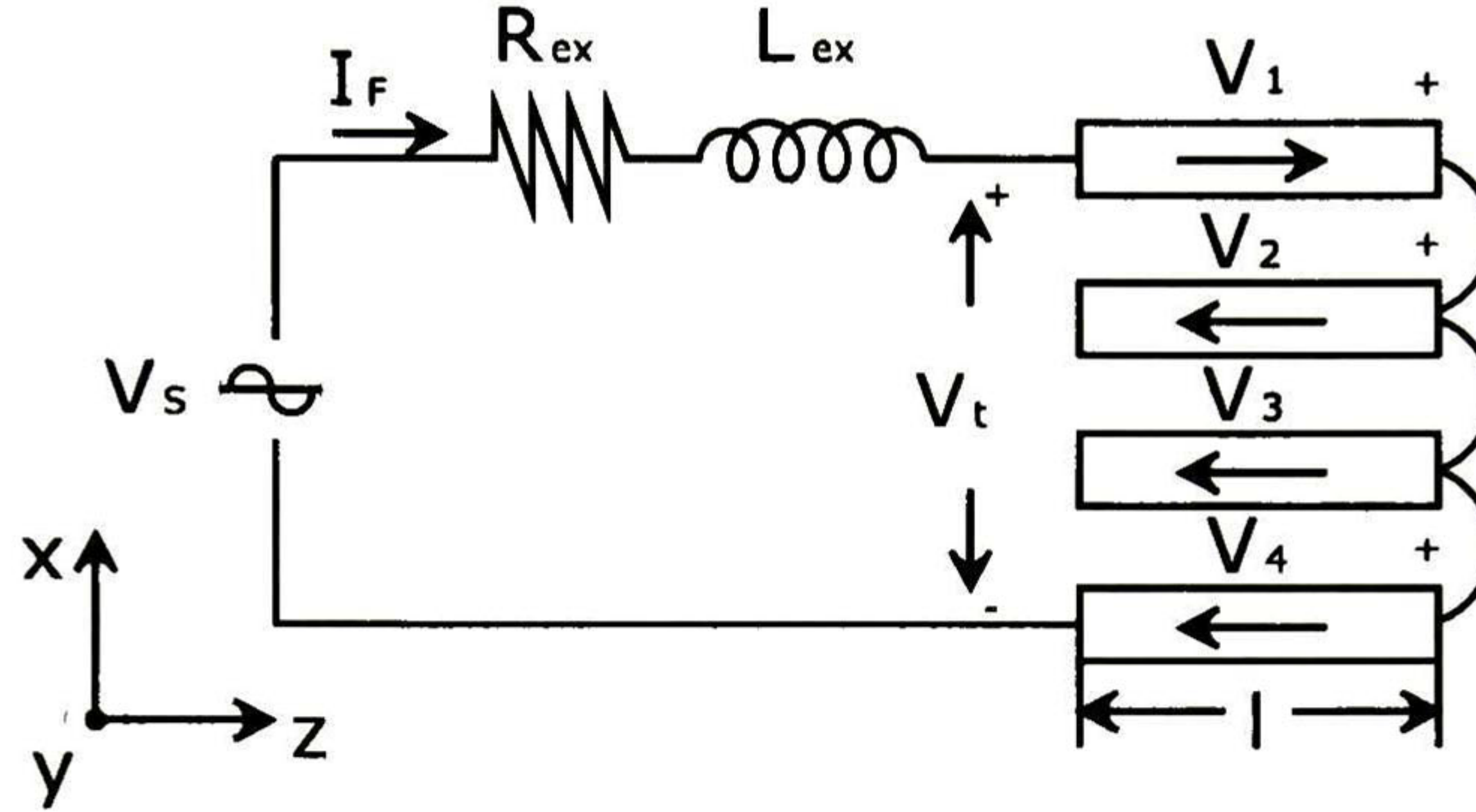


Figura 3.3: Acoplamiento entre fuente de voltaje y bobina, conexión en paralelo.

la fuente de voltaje  $V_c$  es expresada por

$$\begin{aligned} V_c &= V_t + L_{ext} \frac{dI_c}{dt} + R_{ext} I_c \\ &= \{d_b\}^T \{V_b\} + L_{ext} \frac{dI_c}{dt} + R_{ext} I_c \end{aligned} \quad (3.6)$$

Cuando las bobinas están conectadas en paralelo figura (3.3) se tiene

$$V_s = R_s \sum_{bob} I_c + L_s \sum_{bob} \frac{dI_c}{dt} + V_c$$

O también

$$V_s = R_s \{1\} \{I\}_c + L_s \{1\}^T \left\{ \frac{dI}{dt} \right\}_c + V_c \quad (3.7)$$

Donde  $\{1\}$  es un vector columna de valor unitario de dimensión igual al número de bobinas en paralelo  $p$ . En el sistema global de ecuaciones hay una ecuación de esta forma para cada conjunto de bobinas conectadas en paralelo.

La modelación de las bobinas en la región de elementos finitos generalmente implica; la



forma y posición geométrica, número de vueltas, factor de relleno, dirección de la corriente, simetría, consideración o no de las corrientes de eddy (conductor sólido o de hilos trenzados) y finalmente los grados de libertad.

### 3.3. Formulación de Galerkin.

La parte del problema que corresponde a la región del elemento finito deberá ser discretizada. La aproximación de las ecuaciones de campo y de las ecuaciones de corrientes generalmente son discretizadas en el espacio utilizando el método de Galerkin. Para el caso bidimensional, la densidad de corriente  $J$  y el vector potencial magnético  $A$  se consideran invariantes en la dirección  $z$ , entonces la ecuación (3.3) tiene la forma.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial A}{\partial y} \right) + \sigma \frac{V_b}{l} - \sigma \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (3.8)$$

Esta ecuación se resuelve para el vector potencial magnético  $A$ . Aplicando el método de residuales ponderados para aproximar la solución con el potencial  $\hat{A}$ , y la función de peso  $W$ , entonces se tiene

$$\int \int \nu \left[ \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial \hat{A}}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial \hat{A}}{\partial y} \right] dx dy + \int \int \sigma W \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} dx dy - \int \int \sigma W \frac{V_b}{l} dx dy = 0 \quad (3.9)$$

Para el caso de elementos triangulares de primer orden

$$\hat{A} = \sum_{i=1}^3 N_i A_i(t) \quad (3.10)$$

Donde  $N_i$  es la función de forma y  $A_i$  son las aproximaciones al vector potencial magnético en los nodos de la malla. El método de Galerkin de residuales ponderados usa las funciones de forma como función de peso  $W_i$ .

$$W_i = N_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.11)$$



Sustituyendo (3.10) y (3.11) en (3.9) se obtiene

$$\sum_e \iint \left\{ \nu \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial (\sum_{j=1}^3 N_j A_j)}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial (\sum_{j=1}^3 N_j A_j)}{\partial y} \right] + \sigma \left[ N_i \sum N_j \frac{\partial A_j}{\partial t} - N_i \frac{V_b}{l} \right] \right\} dx dy$$

Expresado en forma matricial

$$\sum_e \left[ \nu [S]_e \{A(t)\}_e + \sigma [T]_e \left\{ \frac{\partial A(t)}{\partial t} \right\} - \sigma \{Q\}_e \frac{V_b}{l} \right] = 0 \quad (3.12)$$

Donde  $\sum_e$  significa la suma sobre todos los elementos y el subíndice  $e$  significa que las matrices se refieren a un elemento particular. Los elementos típicos de las matrices son:

$$\begin{aligned} S_{e,ij} &= \iint \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy = \frac{b_i b_j + c_i c_j}{4\Delta_e} \\ T_{e,ij} &= \iint N_i N_j dx dy = \begin{cases} \frac{\Delta_e}{6} & i=j \\ \frac{\Delta_e}{12} & i \neq j \end{cases} \\ Q_{e,ij} &= \iint N_i dx dy = \frac{\Delta_e}{3} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Donde  $\Delta_e$  es el área de los elementos (con ordenamiento en sentido contrario al reloj) y  $b$  y  $c$  son los coeficientes de los elementos triangulares de primer orden. Para elementos que se deforman con el tiempo, las matrices  $[S]$ ,  $[T]$  y  $[Q]$  dependen del tiempo. Sin embargo solo los elementos en el espacio libre se pueden deformar. La conductividad  $\sigma$  en estos elementos es cero y por lo tanto nulifica la contribución de las matrices  $[T]$  y  $[Q]$  en la ecuación (3.12). Esto hace que solo se deberá de considerar la dependencia de la matriz  $[S]$ . La forma de Galerkin para la ecuación de difusión es

$$\sum_e \left[ \nu [S(t)]_e \{A(t)\}_e + \sigma [T]_e \left\{ \frac{\partial A(t)}{\partial t} \right\}_e - \sigma \{Q\}_e \frac{V_b}{l} \right] \quad (3.14)$$

o

$$\nu [S] \{A(t)\} + \sigma [T] \left\{ \frac{\partial A(t)}{\partial t} \right\} - \sigma \{Q\} \frac{V_b}{l} = 0 \quad (3.15)$$



### 3.4. Formulación de la ecuación de corrientes

La corriente total en cada elemento  $e$ , es dada por

$$I_e = \int \int \sigma \frac{V_b}{l} dx dy - \int \int \sigma \frac{\partial A}{\partial t} dx dy \quad (3.16)$$

El integrando del primer termino es constante, por lo que la integral tiene la forma

$$\int \int \sigma \frac{V_b}{l} dx dy = \sigma \frac{V_b}{l} \Delta_e \quad (3.17)$$

Además tenemos que para el elemento triangular de primer orden

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \sum_{i=1}^3 N_i \frac{\partial A}{\partial t} \quad (3.18)$$

Por lo tanto

$$\int \int_e \sigma \frac{\partial A}{\partial t} dx dy = \int \int_e \sigma \sum_{i=1}^3 N_i \frac{\partial A_i}{\partial t} dx dy \quad (3.19)$$

o en forma matricial

$$\int \int_e \sigma \frac{\partial A}{\partial t} dx dy = \sigma \{Q\}_e^T \left\{ \frac{\partial A}{\partial t} \right\} \quad (3.20)$$

Donde  $\{Q\}$  esta definida en (3.13). La corriente total en un elemento se obtiene sustituyendo la ecuación (3.17) y (3.20) en la ecuación (3.16)

$$I_e = \sigma \frac{V_b}{l} \Delta_e - \sigma \{Q\}_e^T \left\{ \frac{\partial A}{\partial t} \right\}_e \quad (3.21)$$

### 3.5. Corriente en una barra de una bobina.

Consideremos una barra de longitud  $l$ , la corriente total en la barra  $b$  es igual a la suma de las corrientes de todos los elementos que se encuentran localizados en la sección transversal de la barra.

$$I_b = \sum_{e \in b} \left[ \sigma \frac{V_b}{l} \Delta_e - \sigma \{Q\}_e^T \left\{ \frac{\partial A}{\partial t} \right\}_e \right] \quad (3.22)$$



o

$$I_b = \sigma_b \frac{V_b}{l} \Delta_b - \sigma_b \{Q\}_b^T \left\{ \frac{\partial A}{\partial t} \right\}_b \quad (3.23)$$

Donde  $\Delta_b$  es el área de la sección transversal de la barra,  $\{Q\}$  y  $\left\{ \frac{\partial A}{\partial t} \right\}$  son vectores  $m$  dimensionales, donde  $m$  es el número de nodos de malla contenidos en la sección transversal de la barra. Si se tiene un número par de barras ( $b_1, b_2, \dots, b_n$ ) conectadas en serie para formar una bobina. Por todas las barras pertenecientes a una misma bobina circula la misma corriente, pero en las barras sucesivas las corrientes son de sentido opuesto. La ecuación (3.23) se modifica para representar una bobina, y es:

$$[D] \{I_b\}_c = \left[ \frac{\sigma}{l} \Delta_b \right] \{V_b\}_c - [\sigma Q]_c^T \left\{ \frac{\partial A}{\partial t} \right\} \quad (3.24)$$

Donde

$[D]$  = es una matriz diagonal de valores +1 o -1 según sea la polaridad de la barra en la bobina

$\{I_b\}_c = \{I_{b1}, I_{b1}, \dots, I_{bn}\}^T = I_b \{1, 1, \dots, 1\}^T$  vector de corrientes de las barras en conexión serie.

$\left[ \frac{\sigma}{l} \Delta_b \right]$  = es una matriz diagonal donde el  $i$ -ésimo elemento es  $\left[ \frac{\sigma}{l} \Delta_b \right]_{c,ii} = \frac{\sigma_{bi}}{l} \Delta_{bi}$

$\{\sigma Q\}_c^T = \{\sigma_{bl} \{Q\}_{bl}, \sigma_{bl} \{Q\}_{bl}, \dots, \sigma_{bn} \{Q\}_{bn}\}^T$

$\{V_b\} = \{V_{b1}, V_{b1}, \dots, V_{bn}\}^T$

Hay que hacer notar que los elementos del vector  $\{I_b\}_c$  son iguales ya que las barras están conectadas en serie.



### 3.6. Discretización de las ecuaciones en el tiempo.

La ecuación de difusión se discretiza respecto del tiempo. Para esto se utilizan ecuaciones de diferencia. Una de las expresiones más utilizadas es la siguiente.

$$\beta \left\{ \frac{\partial A}{\partial t} \right\}^{t+\Delta t} + (1 - \beta) \left\{ \frac{\partial A}{\partial t} \right\}^t = \frac{\{A\}^{t+\Delta t} - \{A\}^t}{\Delta t} \quad (3.25)$$

El valor del coeficiente  $\beta$  determina el algoritmo de acuerdo a su valor como se indica

$$\beta \begin{cases} 0 & \text{Diferencias hacia a delante} \\ 1 & \text{Diferencias hacia atras} \\ \frac{1}{2} & \text{Crank-Nicholson} \end{cases}$$

El propósito es resolver para  $\{A\}^{t+\Delta t}$ , donde  $\left\{ \frac{\partial A}{\partial t} \right\}^{t+\Delta t}$  y  $\left\{ \frac{\partial A}{\partial t} \right\}^t$  son conocidos

### 3.7. Discretización en el tiempo de la ecuación de difusión

La ecuación de difusión en la forma de Galerkin tiene la forma

$$\nu [S] \{A(t)\} + \sigma [T] \left\{ \frac{\partial A(t)}{\partial t} \right\} - \sigma \{Q\} \frac{V_b}{l} = 0 \quad (3.26)$$

extendiendo la ecuación (3.26) en dos ecuaciones de la forma

$$\beta \sigma [T] \left\{ \frac{\partial A}{\partial t} \right\}^{t+\Delta t} = -\beta \nu [S] \{A\}^{t+\Delta t} + \beta \frac{\sigma}{l} \{Q\} V_b^{t+\Delta t} \quad (3.27)$$

$$(1 - \beta) \sigma [T] \left\{ \frac{\partial A}{\partial t} \right\}^t = -(1 - \beta) \nu [S] \{A\}^t + (1 - \beta) \frac{\sigma}{l} \{Q\} V_b^t \quad (3.28)$$



Sustituyendo estas últimas dos ecuaciones en (3.26) resulta

$$\begin{aligned}
& -\beta\nu [S] \{A\}^{t+\Delta t} + \beta \frac{\sigma}{l} \{Q\} V_b^{t+\Delta t} \\
& - (1 - \beta) \nu [S] \{A\}^t + \nu (1 - \beta) \frac{\sigma}{l} \{Q\} V_b^t = \\
& \sigma [T] \frac{\{A\}^{t+\Delta t} - \{A\}^t}{\Delta t}
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Separando los términos de  $t + \Delta t$  resulta

$$\begin{aligned}
& \left[ \nu [S] + \frac{\sigma [T]}{\beta \Delta t} \right] \{A\}^{t+\Delta t} - \frac{\sigma}{l} \{Q\} V_b^{t+\Delta t} = \\
& \left[ \frac{\sigma [T]}{\beta \Delta t} - \frac{1 - \beta}{\beta} \nu [S] \right] \{A\}^t + \frac{\sigma}{l} \{Q\} \frac{1 - \beta}{\beta} V_b^t
\end{aligned} \tag{3.30}$$

### 3.8. Discretización en el tiempo de la ecuación de corriente.

La discretización de la corriente total se hace siguiendo un procedimiento similar al descrito anteriormente. La ecuación de la corriente para una bobina que tiene  $n$  barras conectadas en serie, es

$$[D] \{I_b\}_c = \left[ \frac{\sigma}{l} \Delta_b \right] \{V_b\}_c - [\sigma Q]_c^T \left\{ \frac{\partial A}{\partial t} \right\}_c \tag{3.31}$$

Extendiendo esta última ecuación en dos ecuaciones

$$\beta [\sigma Q]_c^T \left\{ \frac{\partial A}{\partial t} \right\}_c^{t+\Delta t} = \beta \left[ \frac{\sigma}{l} \Delta_b \right] \{V_b\}_c^{t+\Delta t} - \beta [D] \{I_b\}_c^{t+\Delta t} \tag{3.32}$$

$$(1 - \beta) [\sigma Q]_c^T \left\{ \frac{\partial A}{\partial t} \right\}_c^t = (1 - \beta) \left[ \frac{\sigma}{l} \Delta_b \right] \{V_b\}_c^t - (1 - \beta) [D] \{I_b\}_c^t \tag{3.33}$$



Sustituyendo (3.32) y (3.33) en (3.31) resulta

$$\begin{aligned} \beta \left[ \frac{\sigma}{l} \Delta_b \right] \{V_b\}_c^{t+\Delta t} - \beta [D] \{I_b\}_c^{t+\Delta t} + (1 - \beta) \left[ \frac{\sigma}{l} \Delta_b \right] \{V_b\}_c^t - (1 - \beta) [D] \{I_b\}_c^t \\ = [\sigma Q]_c^T \frac{\{A\}^{t+\Delta t} - \{A\}^t}{\Delta t} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Arreglando términos

$$\begin{aligned} - [\sigma Q]_c^T \{A\}^{t+\Delta t} + \beta \Delta t \left[ \frac{\sigma}{l} \Delta_b \right] \{V_b\}_c^{t+\Delta t} - \beta \Delta t [D] \{I_b\}_c^{t+\Delta t} \\ = - [\sigma Q]_c^T \{A\}^{t+\Delta t} - (1 - \beta) \Delta t \left[ \frac{\sigma}{l} \Delta_b \right] \{V_b\}_c^t + (1 - \beta) \Delta t [D] \{I_b\}_c^t \end{aligned} \quad (3.35)$$

El sistema global de ecuaciones contiene una ecuación de esta forma para cada bobina con  $n$  barras conectadas en serie.

### 3.9. Discretización en el tiempo de las ecuaciones circuitales.

Las ecuaciones circuitales, así como la ecuación de difusión son discretizadas de acuerdo a la ecuación (3.36)

$$\beta \frac{dI^{t+\Delta t}}{dt} + (1 - \beta) \frac{dI^t}{dt} = \frac{I^{t+\Delta t} - I^t}{\Delta t} \quad (3.36)$$

Haciendo referencia a la conexión de barras conectadas en serie para formar una bobina, ecuación (3.6) y siguiendo el mismo procedimiento de discretización anterior resulta

$$\beta L_{ext} \frac{di^{t+\Delta t}}{dt} = \beta V_c^{t+\Delta t} - \beta \{D\}_c^T \{V_b\}_c^{t+\Delta t} - \beta R_{ext} I_c^{t+\Delta t} \quad (3.37)$$

$$(1 - \beta) L_{ext} \frac{dI^t}{dt} = (1 - \beta) V_c^t - (1 - \beta) \{D\}_c^T \{V_b\}_c^t - (1 - \beta) R_{ext} I_c^t \quad (3.38)$$

Sustituyendo en (3.36)

$$\begin{aligned} \beta V_c^{t+\Delta t} - \beta \{D\}_c^T \{V_b\}_c^{t+\Delta t} - \beta R_{ext} I_c^{t+\Delta t} + (1 - \beta) V_c^t - (1 - \beta) \{D\}_c^T \{V_b\}_c^t - \\ (1 - \beta) R_{ext} I_c^t = L_{ext} \frac{I^{t+\Delta t} - I^t}{\Delta t} \end{aligned} \quad (3.39)$$



Separando términos resulta

$$\begin{aligned}
& -\beta\Delta t \{D\}_c^T \{V_b\}_c^{t+\Delta t} - (L_{ext} + \beta\Delta t R_{ext}) I_c^{t+\Delta t} + \beta\Delta t V_c^{t+\Delta t} = \\
& (1 - \beta) \Delta t \{D\}_c^T \{V_b\}_c^t - [L_{ext} - (1 - \beta) \Delta t R_{ext}] I_c^t - (1 - \beta) \Delta t V_c^t
\end{aligned} \tag{3.40}$$

La ecuación (3.40) es la expresión de la discretización en el tiempo de la unión de barras conectadas en serie que forman una bobina con terminales de conexión fuera de la región del elemento finito, conectadas a través de una resistencia e inductancia externas  $R_{ext}$ ,  $L_{ext}$ . En el sistema global hay una ecuación de esta forma por cada bobina.

### 3.10. Circuitos en paralelo.

La discretización de las ecuaciones de circuitos en paralelo sigue el mismo procedimiento que el de las barras en serie. Usando la ecuación (3.36) y expandiendo la ecuación (3.7) en dos ecuaciones, resulta

$$\beta L_s \{1\}^T \left\{ \frac{dI}{dt} \right\}^{t+\Delta t} = \beta V_s^{t+\Delta t} - \beta R_s \{1\}^T \{I\}_c^{t+\Delta t} - \beta \{V\}_c^{t+\Delta t} \tag{3.41}$$

$$(1 - \beta) L_s \{1\}^T \left\{ \frac{dI}{dt} \right\}^t = (1 - \beta) V_s^t - (1 - \beta) R_s \{1\}^T \{I\}_c^t - (1 - \beta) \{V\}_c^t \tag{3.42}$$

Sustituyendo (3.41) y (3.42) en (3.7) resulta

$$\begin{aligned}
& \beta V_s^{t+\Delta t} - \beta R_s \{1\}^T \{I\}_c^{t+\Delta t} - \beta \{V\}_c^{t+\Delta t} + (1 - \beta) V_s^t - (1 - \beta) R_s \{1\}^T \{I\}_c^t - \\
& (1 - \beta) \{V\}_c^t = L_s \{1\}^T \frac{\{I\}_c^{t+\Delta t} - \{I\}_c^t}{\Delta t}
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Separando términos

$$\begin{aligned}
& -\{1\}^T (L_s + \beta\Delta t R_s) \{I\}_c^{t+\Delta t} - \beta\Delta t V_c^{t+\Delta t} = \beta\Delta t V_s^{t+\Delta t} - (1 - \beta) \Delta t V_s^t \\
& -\{1\}^T [L_s - (1 - \beta) \Delta t R_s] \{I\}_c^t + (1 - \beta) \Delta t V_c^t
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Donde  $V_s^{t+\Delta t}$  es la fuente de voltaje externa conocida



### 3.11. Linealización de la ecuación de difusión.

La ecuación de campo es una función no lineal en dependencia del vector potencial magnético  $A$ . Estas ecuaciones deben ser linealizadas para que puedan ser combinadas con las otras ecuaciones en el sistema de ecuaciones globales. La ecuación (3.45)

$$\nabla \times \nu \nabla \times A = \sigma \frac{V_b}{l} - \sigma \frac{\partial A}{\partial t} \quad (3.45)$$

es no lineal en  $A$  ya que la reluctividad  $\nu$  es función de la densidad de flujo  $B$  y por lo tanto del potencial vectorial magnético  $A$ . El procedimiento de linealización se desarrolla sobre la ecuación de difusión discretizada en tiempo. Esto es de la ecuación

$$\begin{aligned} & \left[ \nu [S] + \frac{\sigma [T]}{\beta \Delta t} \right] \{A\}^{t+\Delta t} - \frac{\sigma}{l} \{Q\} V_b^{t+\Delta t} = \\ & \left[ \frac{\sigma [T]}{\beta \Delta t} - \frac{1-\beta}{\beta} \nu [S] \right] \{A\}^t + \frac{\Delta}{l} \{Q\} \frac{1-\beta}{\beta} V_b^t \end{aligned} \quad (3.46)$$

Aplicando el procedimiento de Newton-Raphson a esta ecuación, donde se introduce la dependencia respecto del tiempo de la matriz  $[S]$ , se obtiene

$$\begin{aligned} & \left[ [G] + \frac{\sigma [T]}{\beta \Delta t} \right] \{\Delta A\}_{k+1}^{t+\Delta t} - \frac{\sigma}{l} \{Q\} \Delta V_{b,k+1}^{t+\Delta t} = \\ & - \left[ \nu_k^{t+\Delta t} [S]_k^{t+\Delta t} + \frac{\sigma [T]}{\beta \Delta t} \right] \{A\}_k^{t+\Delta t} + \left[ \frac{\sigma [T]}{\beta \Delta t} - \frac{1-\beta}{\beta} \nu^t [S]^t \right] \{A\}^t + \frac{\sigma}{l} \{Q\} \frac{1-\beta}{\beta} V_b^t \end{aligned} \quad (3.47)$$

De donde

$$[G] = \nu_k^{t+\Delta t} [S]_k^{t+\Delta t} + \frac{2}{\Delta} \left( \frac{\partial \nu}{\partial B^2} \right) \left( [S]_k^{t+\Delta t} \{A\}_k^{t+\Delta t} \right) \left( [S]_k^{t+\Delta t} \{A\}_k^{t+\Delta t} \right)^T \quad (3.48)$$

Para materiales lineales  $\frac{\partial^2 \nu}{\partial B^2} = 0$  y la ecuación (3.48) se reduce a la ecuación (3.45)



## 3.12. Sistema global de ecuaciones.

Una vez discretizadas y linealizadas las ecuaciones de campo y las circuitales, se pueden ensamblar las matrices para formar un sistema de ecuaciones globales que describen el problema completo. Estas se resumen en cinco ecuaciones que describen el sistema global general de ecuaciones. Las ecuaciones tienen la forma para la solución empleando el método de Newton-Raphson.

### 3.12.1. Ecuación de campo.

Corresponde una ecuación por cada nodo de la malla.

$$\begin{aligned} & \left[ [G] + \frac{\sigma [T]}{\beta \Delta t} \right] \{A\}_{k+1}^{t+\Delta t} - \frac{\sigma}{l} \{Q\} \Delta V_{b,k+1}^{t+\Delta t} = \\ & \quad - \left[ \nu_k^{t+\Delta t} [S]_k^{t+\Delta t} + \frac{\sigma [T]}{\beta \Delta t} \right] \{A\}_k^{t+\Delta t} + \\ & \left[ \frac{\sigma [T]}{\beta \Delta t} - \frac{1-\beta}{\beta} \nu^t [S]^t \right] \{A\}^t + \frac{\sigma}{l} \{Q\} \frac{1-\beta}{\beta} V_b^t \end{aligned} \quad (3.49)$$

### 3.12.2. Corriente total.

Corresponde una ecuación por bobina

$$\begin{aligned} & - [\sigma Q]_c^T \{\Delta A\}_{k+1}^{t+\Delta t} + \beta \Delta t \left[ \frac{\sigma}{l} \Delta_b \right] \{\Delta V_b\}_{c,k+1}^{t+\Delta t} - \beta \Delta t [D] \{\Delta I_b\}_{c,k+1}^{t+\Delta t} = \\ & 1 \{C\} [\sigma Q]_c^T \{A\}_k^{t+\Delta t} - \beta \Delta t \left[ \frac{\sigma}{l} \Delta_b \right] \{V_b\}_{c,k}^{t+\Delta t} + \beta \Delta t [D] \{I_b\}_{c,k}^{t+\Delta t} - \\ & [\sigma Q]_c^T \{A\}^t - (1-\beta) \Delta t \left[ \frac{\sigma}{l} \Delta_b \right] \{V_b\}_c^t + (1-\beta) \Delta t [D] \{I_b\}_c^t \end{aligned} \quad (3.50)$$



### 3.12.3. Ecuación de una bobina con barras en serie.

Una ecuación por bobina.

$$\begin{aligned}
 & -\beta\Delta t \{D\}_c^T \{\Delta V_b\}_{c,k+1}^{t+\Delta t} - (L_{ext} + \beta\Delta t R_{ext}) \Delta I_{c,k+1}^{t+\Delta t} + \beta\Delta t \Delta V_{c,k+1}^{t+\Delta t} = \\
 & \quad \beta\Delta t \{D\}_c^T \{\Delta V_b\}_{c,k}^{t+\Delta t} - (L_{ext} + \beta\Delta t R_{ext}) I_{c,k}^{t+\Delta t} - \beta\Delta t V_{c,k}^{t+\Delta t} + \\
 & (1 - \beta) \Delta t \{D\}_c^T \{\Delta V_b\}_c^t - [L_{ext} - (1 - \beta) \Delta t R_{ext}] I_c^t - (1 - \beta) \Delta t \Delta V_c^t \quad (3.51)
 \end{aligned}$$

### 3.12.4. Ecuación de bobinas con barras en paralelo.

Una ecuación por conjunto de bobinas en paralelo.

$$\begin{aligned}
 \{1\}^T \beta\Delta t \{\Delta I\}_{c,k+1}^{t+\Delta t} + \frac{(\beta\Delta t)^2}{L_s + \beta\Delta t R_s} \Delta V_{c,k+1}^{t+\Delta t} = & -\{1\}^T \beta\Delta t \{I\}_{c,k}^{t+\Delta t} - \frac{(\beta\Delta t)^2}{L_s + \beta\Delta t R_s} V_{c,k}^{t+\Delta t} + \\
 \frac{(\beta\Delta t)^2}{L_s + \beta\Delta t R_s} V_s^{t+\Delta t} + \frac{\beta\Delta t}{L_s + \beta\Delta t R_s} (1 - \beta) \Delta t V_s^t + \{1\}^T \frac{\beta\Delta t}{L_s + \beta\Delta t R_s} [L_s - (1 - \beta) \Delta t R_s] \{I\}_c^t - & \\
 \frac{\beta\Delta t}{L_s + \beta\Delta t R_s} (1 - \beta) \Delta t V_c^t & (3.52)
 \end{aligned}$$

### 3.12.5. Ensamblado del sistema global de ecuaciones.

Del sistema global de ecuaciones (3.49) a (3.52), se tienen cuatro vectores desconocidos

$\{\Delta A\}_{k+1}^{t+\Delta t}$  : incremento de potencial magnético vectorial en cada nodo

$\{\Delta V_b\}_{k+1}^{t+\Delta t}$  : incremento de la caída de voltaje en cada barra

$\{\Delta I\}_{k+1}^{t+\Delta t}$  : incremento de la corriente en cada bobina

$\{\Delta V_c\}_{k+1}^{t+\Delta t}$  : incremento en el voltaje terminal de cada conjunto de bobinas conectadas en

paralelo. El sistema de ecuaciones matricial global tiene entonces la forma

$$[M] \{F\} = \{N\} \quad (3.53)$$



En forma matricial expandida

$$\begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & & & \\ & M_{2,2} & M_{2,3} & & \\ & M_{2,3}^T & M_{3,3} & M_{3,4} & \\ & & M_{3,4}^T & M_{4,4} & \\ & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Delta A\} \\ \{\Delta V_b\} \\ \{\Delta I\} \\ \{\Delta V_c\} \end{bmatrix}_{k+1}^{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} \{N_1\} \\ \{N_2\} \\ \{N_3\} \\ \{N_4\} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

El sistema global de ecuaciones debe ser resuelto para el vector  $\{F\}$ . La matriz  $[M]$  es simétrica y dispersa sin embargo no es positiva definida, debido a que el termino  $M_{3,3} = -(L_{ext} + \beta\Delta t R_{ext})$  es siempre negativo, mientras que todos los otros elementos diagonales de  $[M]$  son siempre positivos. Los métodos de solución que utilizan la eliminación gaussiana, como el gradiente conjugado incompleto de Choleski no tienen dificultad. Para transformar el sistema de ecuaciones en otro simétrico y definido positivo se procede como se indica a continuación. Tomado la tercera ecuación de (3.54)

$$M_{3,2} \{\Delta V_b\} + M_{3,3} \{\Delta I\} + M_{3,4} \{\Delta V_c\} = \{N_3\} \quad (3.55)$$

Expandiendo la ecuación (3.55) en dos ecuaciones

$$M_{3,2} \{\Delta V_b\} - M_{3,3} \{\Delta I\} + M_{3,4} \{\Delta V_c\} + 2M_{3,3} \{\Delta I_{aux}\} = \{N_3\} \quad (3.56)$$

$$2M_{3,3} \{\Delta I\} - 2M_{3,3} \{\Delta I\}_{aux} = \{0\} \quad (3.57)$$

El nuevo sistema global de ecuaciones tiene la forma

$$\begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & & & \\ M_{1,2}^T & M_{2,2} & M_{2,3} & & \\ & M_{2,3}^T & -M_{3,3} & 2M_{3,3} & M_{3,4} \\ & & 2M_{3,3}^T & -2M_{3,3} & \\ & & M_{3,4}^T & & M_{4,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Delta A\} \\ \{\Delta V_b\} \\ \{\Delta I\} \\ \{\Delta I_{aux}\} \\ \{\Delta V_c\} \end{bmatrix}_{k+1}^{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} \{N_1\} \\ \{N_2\} \\ \{N_3\} \\ \{0\} \\ \{N_4\} \end{bmatrix} \quad (3.58)$$



De donde  $M_{1,1} = 1 \left[ [G] + \frac{\sigma[T]}{\beta\Delta t} \right]$

$$M_{1,2} = \sigma \{Q\}$$

$$M_{2,2} = \beta\Delta t \left[ \frac{\sigma}{l} \Delta_b \right]$$

$$M_{2,3} = \beta\Delta t [D]$$

$$M_{3,3} = -(L_{ext} + \beta\Delta t R_{ext})$$

$$M_{3,4} = \beta\Delta t$$

$$M_{4,4} = \frac{(\beta\Delta t)^2}{L_s + \beta\Delta t R_s}$$

y

$$\begin{aligned} \{N_1\} &= -1 \left[ \nu_k^{t+\Delta t} [S]_k^{t+\Delta t} + \frac{\sigma[T]}{\beta\Delta t} \right] \{A\}_k^{t+\Delta t} + 1 \left[ \frac{\sigma[T]}{\beta\Delta t} - \frac{1-\beta}{\beta} \nu^t [S]^t \right] \{A\} + \sigma \{Q\} \frac{1-\beta}{\beta} V_b^t \\ \{N_2\} &= [\sigma Q]_c^t \{A\}_k^{t+\Delta t} - \beta\Delta t \left[ \frac{\sigma}{l} \Delta_b \right] \{V_b\}_{c,k}^{t+\Delta t} + \beta\Delta t [D] \{I_b\}_{c,k}^{t+\Delta t} - [\sigma Q]_c^T \{A\}^t - \\ &\quad (1-\beta) \Delta t \left[ \frac{\sigma}{l} \Delta_b \right] \{V_b\}_c^t + (1-\beta) \Delta t [D] \{I_b\}_c^t \\ \{N_3\} &= \beta\Delta t \{D\}_c^T \{V_b\}_{c,k}^{t+\Delta t} + (L_{ext} + \beta\Delta t R_{ext}) I_{c,k}^{t+\Delta t} - \beta\Delta t V_{c,k}^{t+\Delta t} + \\ &\quad (1-\beta) \Delta t \{D\}_c^T \{V_b\}_c^t - [L_{ext} - (1-\beta) \Delta t R_{ext}] I_c^t - (1-\beta) \Delta t V_c^t \\ \{N_4\} &= -\{1\} \beta\Delta t \{I\}_{c,k}^{t+\Delta t} - \frac{(\beta\Delta t)^2}{L_s + \beta\Delta t R_s} V_{c,k}^{t+\Delta t} + \frac{(\beta\Delta t)^2}{L_s + \beta\Delta t R_s} V_s^{t+\Delta t} + \\ &\quad \frac{\beta\Delta t}{L_s + \beta\Delta t R_s} (1-\beta) \Delta t V_s^t + \{1\}^T \frac{\beta\Delta t}{L_s + \beta\Delta t R_s} [L_s - (1-\beta) \Delta t R_s] \{I\}_c^t - \\ &\quad \frac{\beta\Delta t}{L_s + \beta\Delta t R_s} (1-\beta) \Delta t V_c^t \end{aligned} \quad (3.59)$$

Este nuevo sistema de ecuaciones global es disperso, simétrico y positivo definido y puede ser resuelto por una gran variedad de métodos. Para el modelado de los transformadores, objetivo de esa tesis. El sistema de ecuaciones (3.54) y (3.58) puede ser simplificado. Para el modelado del transformador trifásico se asume lo siguiente.



- Se desprecian las corrientes inducidas en los devanados. Se consideran que las bobinas están formadas con conductores pequeños trenzados y con aislamiento eléctricos entre estos.
- Las bobinas están formados por conductores en serie
- Las fuentes de excitación son voltajes trifásicos balanceados de forma senoidal sin armónicos.
- El núcleo es laminado no lineal, de material conocido como M5.
- La modelación se hace de forma bidimensional.

### **3.13. Modelos de transformadores.**

En la operación real de un transformador este es alimentado con fuentes de voltaje alterna a la frecuencia de la red. Las corrientes que circulan por los devanados denominados primarios son trifásicas y tienen componentes armónicas debidas a las cargas no lineales y a la característica de saturación del núcleo. Cuando la carga es balanceada, solo por el primario circularán corrientes con componentes armónicas, debidas a la característica de saturación del núcleo. A esta componente de corriente se le conoce como corriente de excitación. Su valor es pequeño comparado con la nominal. Sin embargo siempre esta presente aun cuando no hay carga en el transformador.

Las corrientes de excitación producen flujo magnético alterno que induce voltajes en los circuitos del secundario. Además, induce un voltaje en el núcleo del transformador y como el material del núcleo es conductor, circulan por este corrientes conocidas como de eddy. Estas corrientes generan pérdidas eléctricas y calentamiento en el núcleo. Estas pérdidas conocidas como pérdidas del núcleo son de valor comparativamente igual a las pérdidas en el cobre. De



ahí su interés en el modelado con precisión del núcleo de los transformadores. Para reducir las pérdidas en el núcleo, estos se construyen con apilamientos de laminaciones de espesor pequeño, en nuestro caso de 3 mm de espesor y aisladas eléctricamente entre si. Los efectos de apilamiento no pueden ser representados fielmente en modelos bidimensionales. Además, los núcleos se construyen por partes que se conocen como piernas y yugos. Estas partes son ensambladas y entre estas hay espacios de espesor de .5 a 1 mm, ocupados generalmente por aire. Estos espacios son conocidos como entrehierros. Las propiedades eléctricas y magnéticas del acero del núcleo (piernas y yugos) son muy diferentes respecto del material aislante entre las laminaciones y del aire. Esto hace que la distribución del flujo en las zonas próximas a los entrehierros es compleja y complicada de modelar. El fenómeno es de naturaleza tridimensional, no lineal y anisotrópico. En este trabajo se hacen simplificaciones para poder representar estos fenómenos en modelos bidimensionales.

En zonas donde se desprecian las corrientes inducidas de eddy los términos  $\frac{\partial A}{\partial t}$  son igual a cero simplificando grandemente los cálculos. Otra simplificación importante es en modelos con operación en estado estable, en donde el modelo en el dominio del tiempo se transforma en uno algebraico donde el potencial magnético vectorial  $A$  es un número complejo conocido como fasor del campo magnético vectorial  $\hat{A}$  y el término  $\frac{\partial A}{\partial t}$  se transforma en  $j\omega A$ , donde  $j = \sqrt{-1}$  y  $\omega$  es la frecuencia angular en  $\frac{rad}{seg}$  de la fuente de voltaje de la red.

### 3.14. Modelo magnetostático.

El modelo magnetostático desprecia todos los términos con razón de cambio en el tiempo, por lo que se elimina la inducción electromagnética (corrientes de eddy). Es equivalente a que el transformador se excite con una fuente de voltaje constante (corriente directa). Por extraño que pueda parecer, el modelo magnetostático es actualmente utilizado en el análisis



de los transformadores en problemas de baja frecuencia. Con este estudio se pueden obtener las resistencias e inductancias equivalentes. También es utilizado para estudios de la distribución del campo magnético y aun las pérdidas por corriente de eddy [1], obtenidas de forma indirecta. Para esto se hacen diferentes estudios que corresponden a una fotografía para un punto específico de la onda de voltaje de alimentación. Es además el primer procedimiento de prueba del modelo del transformador. La ecuación de campo se obtiene de la ecuación (3.3) haciendo cero el término de densidad de corriente por inducción, resultado

$$\nabla \times \nu \nabla \times A = \sigma \frac{V_b}{l}$$

la ecuación en la forma de galerkin es

$$\nu [S] \{A(t)\} - \sigma \{Q\} \frac{V_b}{l} = 0$$

La corriente en cada bobina con barras conectadas en serie es.

$$I_b = \sigma_b \frac{V_b}{l} \Delta_b$$

La ecuación de voltaje en estado estable es

$$\begin{aligned} V_c &= V_b + R_{ext} I_c \\ &= \{d_b\}^T \{V_b\} + R_{ext} I_b \end{aligned} \quad (3.60)$$

### 3.15. Resistencia de una bobina.

La resistencia eléctrica de un conductor puede ser calculada con la siguiente formulación.

$$R = \frac{\rho l}{\Delta} \quad (3.61)$$



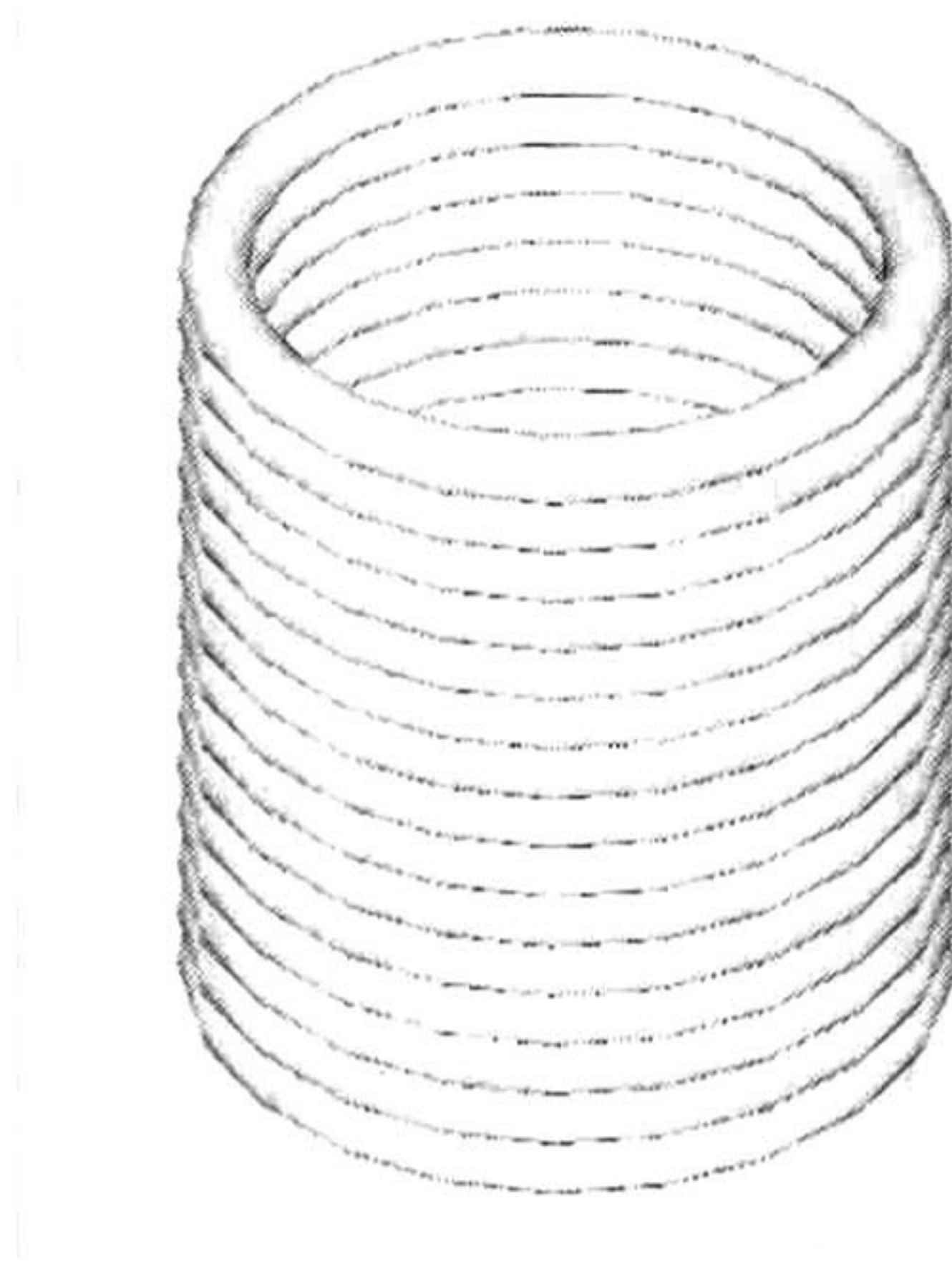


Figura 3.4: Bobina.

Donde,  $\rho$  es la resistividad del material en ohms por metro,  $l$  es la longitud del conductor en metros y  $\Delta$  es el area de la sección transversal del conductor en metros cuadrados. En la figura (3.4) se muestra la geometría típica de una bobina y en la figura (3.5) el aspecto que guarda la bobina cuando se le hace un corte transversal.

### 3.16. Factor de relleno.

Para simplificar el modelado de las bobinas en la técnica del elemento finito generalmente se considera el area total de la sección transversal como rectangular y se especifica el numero de vueltas de cada bobina y el factor de relleno.

$$f_r = \frac{N\Delta}{A} \quad (3.62)$$

Donde,  $N$  es el numero de vueltas de la bobina,  $\Delta$  es el area de la sección transversal de cada conductor y  $A$  es el área del rectángulo.



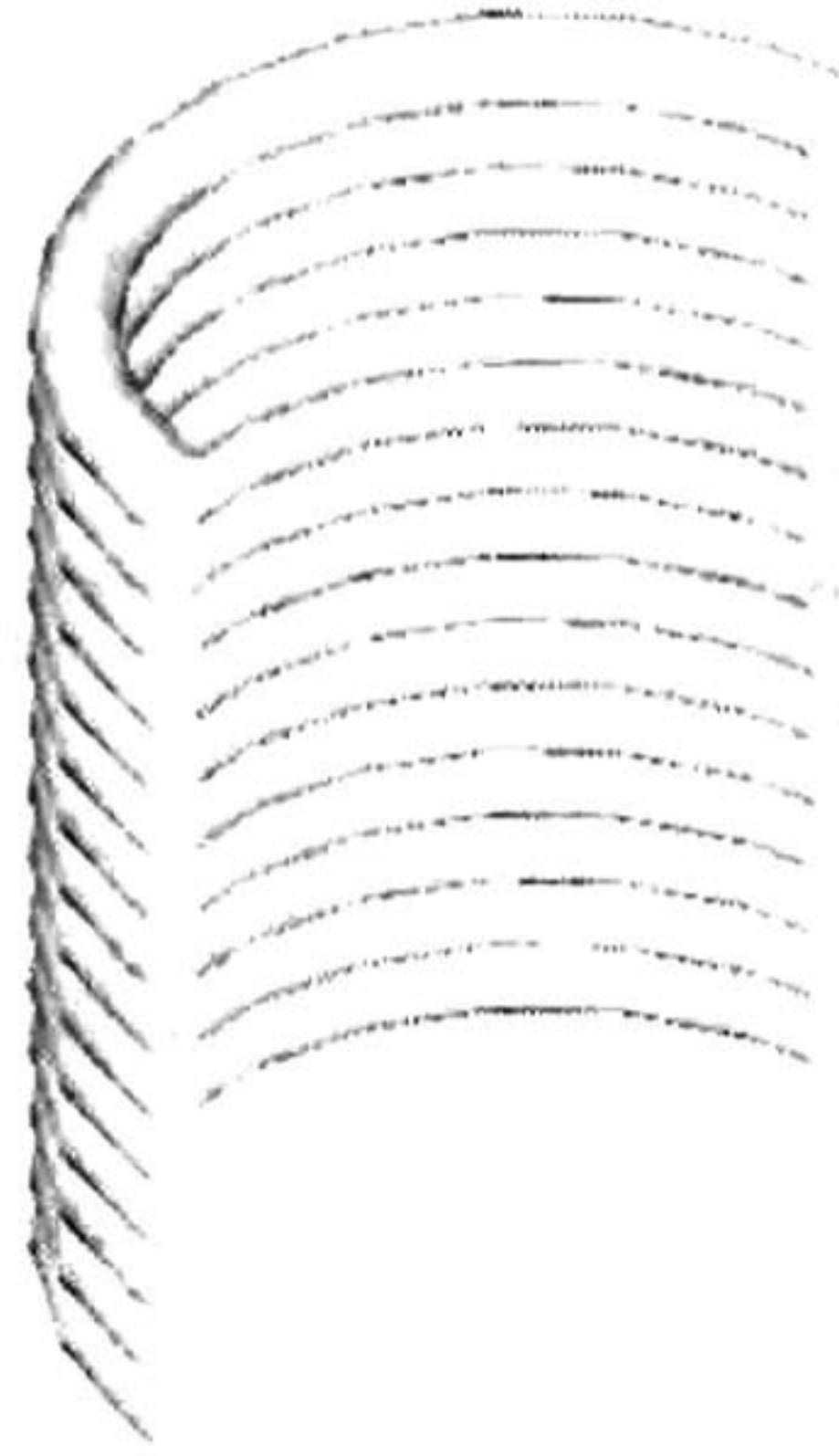


Figura 3.5: Sección transversal de una bobina.

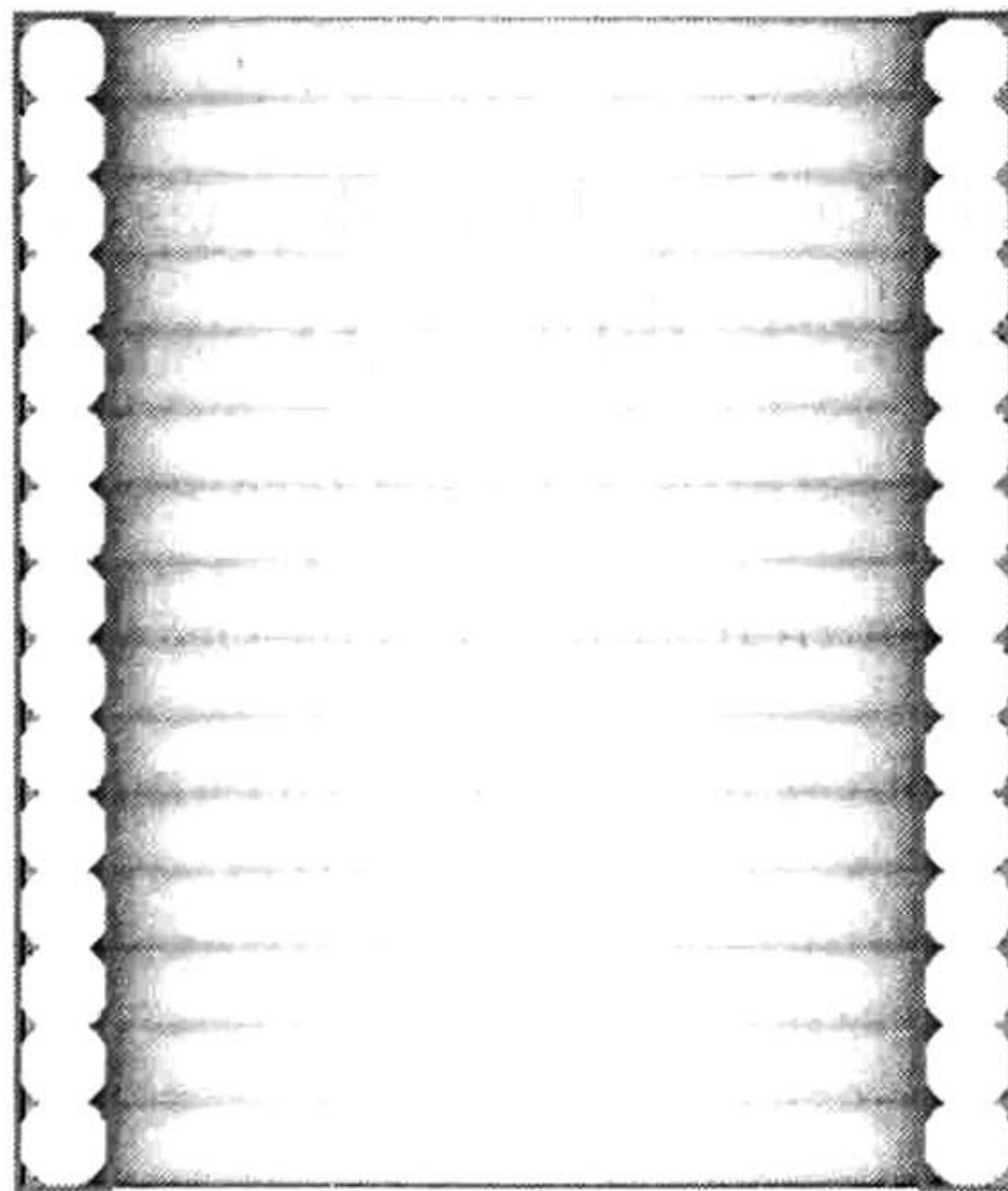


Figura 3.6: Aproximación por rectángulos.



### 3.17. Resistencia en una bobina.

La resistencia de una bobina con elemento finito esta dado por [8].

$$R_c = \frac{N_c^2 l_c \rho}{A_c f_r} \quad (3.63)$$

Donde  $R_c$  es la resistencia de la bobina. Otra manera de expresar la ecuación (3.63) considerando el número de elementos que están contenidos en la bobina es.

$$R_c = \sum_{i=1}^{ne} \frac{\rho_e l_e}{A_e f_{r_e}} \quad (3.64)$$

Donde,  $R_c$  es la resistencia de la bobina, en ohms,  $l_e$  es la longitud en metros en dirección en el eje z,  $A_e$  es el área en metros cuadrados de cada elemento,  $f_{r_e}$  es el factor de relleno del elemento y  $ne$ , es el número de elementos que pertenecen a la bobina.

### 3.18. Inductancia diferencial no lineal, en un sistema multipuerto.

Para el cálculo de la inductancia, el método mas eficiente es conocido como el método de la energía incremental mejorado EIEM (enhanced incremental energy method) [5]. Este método es aplicable a modelos estáticos. Considerando un sistema de N bobinas. Los enlaces de flujo  $\psi_i$  de la i-ésima bobina que tiene  $N_i$  vueltas es.

$$\psi_i = N_i \phi_i \quad (3.65)$$

El voltaje inducido,  $U_i$  en la i-esima bobina de acuerdo a la ley de Faraday.

$$U_i = \frac{d}{dt} \psi_i \quad (3.66)$$



Los enlaces de flujo depende de las corrientes de todas las bobinas.

$$\psi_i = \sum_{J=1}^{\# \text{ bobinas}} L_{si,j}(I_1, I_2, \dots, I_n) I_j \quad (3.67)$$

Donde  $L_{si,j}$  conocida como la inductancia secante. Ahora sustituyendo (3.67) en (3.66).

$$U_i = \sum \left[ L_{si,j} \frac{dI_j}{dt} + I_j \sum \frac{\partial L_{si,j}}{\partial I_k} \frac{dI_k}{dt} \right] = \sum L_{dij} \frac{dI_j}{dt} \quad (3.68)$$

Donde  $L_{dij}$  conocida como la inductancia diferencial.

$$L_{dij} = L_{si,j} + \sum \frac{dL_{sik}}{dI_j} I \quad (3.69)$$

La energía suministrada por cada bobina es

$$\begin{aligned} W &= \sum \int I_i U_i dt = \sum \sum I_i L_{dij} dI_j \\ W &= \sum \int L_{dii} \frac{d(I_i^2)}{2} + \sum \sum \int L_{dij} d(I_i, I_j) \end{aligned} \quad (3.70)$$

Se definen las inductancias basadas en parámetros de energía.

$$L_{dii} = 2 \frac{dW}{d(I_i^2)} \quad L_{dij} = \frac{dW}{d(I_i, I_j)} \quad (3.71)$$

### 3.18.1. Análisis incremental.

En la solución del potencial magnético se evalúa la reluctividad diferencial y es almacenada en cada iteración de la solución no lineal durante el proceso iterativo de Newton Raphson. La ecuación de perturbación de corriente es.

$$I_i = I_{i0} + i_i \quad (3.72)$$

Donde  $i_{i0}$  es la corriente de operación en un bobinado  $i$  e  $i_i$  es el incremento de corriente, puesto que la reluctividad  $\nu_i$  es constante,  $L_d$  también es constante, así la energía incremental



puede ser evaluada analíticamente.

$$\Delta W = \sum L_{dii} \frac{I_i^2 - I_{i0}^2}{2} + \sum \sum i_i I_{j0} + I_{i0} i_{j0} + i_i i_j \quad (3.73)$$

$$\Delta W = \sum L_{dii} \frac{i_i^2 + 2I_{i0}^2 i_i}{2} + \sum \sum L_{dij} [i_i I_{j0} + I_{i0} i_{j0} + i_i i_j]$$

Debido a las perturbaciones de corriente el flujo cambia y puede ser expresado como.

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h} \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{h} \quad \mathbf{h} = \nu_d \mathbf{b}$$

Donde  $\mathbf{H}_0$  y  $\mathbf{B}_0$  son intensidades y densidades del campo magnético respectivamente en el punto de operación,  $\mathbf{h}$  y  $\mathbf{b}$  son los incrementos del campo. Dado que el análisis es linealizado, el principio de superposición puede ser aplicado.

$$\mathbf{h} = \sum \mathbf{h}_i \quad \mathbf{b} = \sum \mathbf{b}_i \quad \mathbf{h}_i = \nu_d \mathbf{b}_i$$

Donde  $\mathbf{h}_i$  y  $\mathbf{b}_i$  son incrementos de campo debidos a incrementos de excitación en la bobina  $i$ . La energía de campo magnético incremental es

$$\Delta W = \int \mathbf{H} d\mathbf{B} dV + \int (\mathbf{H}_0 + \nu_d \mathbf{b}) d\mathbf{B} dV = \int \left[ \mathbf{H}_0 \mathbf{b} + \frac{\mathbf{h} \mathbf{b}}{2} \right] dV \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} \Delta W &= \int \left[ \sum \mathbf{H}_0 \mathbf{b}_i + \sum \sum \frac{\mathbf{h}_i \mathbf{b}_i}{2} \right] dV + \dots \\ &\dots + \int \left[ \sum \mathbf{H}_0 \mathbf{b}_i + \sum \frac{\mathbf{h}_i \mathbf{b}_i}{2} + \sum \sum \mathbf{h}_i \mathbf{b}_i \right] dV \end{aligned}$$

Comparando los términos cuadráticos de (3.37) y (3.74).

$$\frac{1}{2} L_{dij} i_i i_j = \frac{1}{2} \int \mathbf{h}_i \mathbf{b}_j dV \quad (3.75)$$

Esto confirma que el comportamiento de un sistema de bobinados con una relación  $\mathbf{B} - \mathbf{H}$  no lineal es gobernado por la inductancia diferencial.



### 3.19. Modelo en el dominio del tiempo.

El modelo más completo es descrito por el sistema de ecuaciones en el dominio del tiempo, ecuaciones (3.54) o (3.58) en donde se deben de eliminar los términos de inducción de las corrientes de eddy con excepción de los elementos finitos en la zona del núcleo. Además, se deberá tener cuidado especial en la representación equivalente de las corrientes de eddy para el caso de modelos bidimensionales. En la representación en el dominio del tiempo, las no linealidades e isometrías se modelan de forma natural. La desventaja principal del modelo en el dominio del tiempo son los grandes recursos de cómputo que se requieren. Esta es la razón de la búsqueda de la utilización de otros modelos más simplificados. Cuando se desean los resultados en estado estable ante excitación senoidales se puede usar el modelo en el dominio armónico. Para la simulación en el dominio del tiempo se deberá especificar el paso de integración y el método de integración así como la dependencia de las fronteras en el dominio del tiempo.

### 3.20. Modelo en el dominio armónico.

De la experiencia del análisis de circuitos eléctricos en estado estable ante excitaciones senoidales de la forma  $v(t) = V_m \cos(\omega t + \alpha)$  en donde sabemos que podemos transformar el problema en el dominio del tiempo en la forma fasorial, resultando un sistema de ecuaciones algebraicas con escalares complejos.

Aplicando un procedimiento similar al de los circuitos eléctricos, las ecuaciones del campo en el dominio del tiempo las transformamos en cantidades fasoriales (escalares complejos). Entonces la ecuación (3.3) se transforma en

$$\nabla \times \nu \nabla \times \hat{A} = \sigma \frac{\hat{V}_b}{l} - j\omega\sigma\hat{A}$$



Donde  $\hat{A}$  es el vector potencial magnético fasorial,  $\nu_e$  es la reluctancia equivalente. La reluctancia equivalente se obtiene como se indica continuación.

### 3.21. Representación de la curva B-H en el dominio de la frecuencia.

Debido a que el material empleado en el núcleo es ferromagnético, la relación  $B - H$  es no lineal. Es necesario introducir un nuevo concepto que defina la permeabilidad en condiciones no-lineales para casos en el dominio de la frecuencia [10]. Para un medio no lineal la relación entre la densidad del flujo magnético como una función del tiempo consiste de una función periódica conteniendo armónicos. Para un instante de tiempo  $t$ , la densidad de energía almacenada instantánea  $W(x, t)$  es dada como.

$$W(x, t) = \int_0^{\mathbf{B}(x,t)} \mathbf{H}d\mathbf{B} \quad (3.76)$$

La densidad de energía promedio  $W_{av}(x)$  en un ciclo de periodo  $T$

$$W_{av}(x) = \frac{1}{T} \int_0^T \left( \int_0^{\mathbf{B}(x,t)} \mathbf{H}d\mathbf{B} \right) dt \quad (3.77)$$

Se define una permeabilidad efectiva  $\mu e(x)$ , que es usada con cantidades rms, tal que, para cualquier valor de  $\frac{\mathbf{H}(x)}{\sqrt{2}}$  se cumple que para cualquier punto en el espacio [10].

$$W_{av}(x) = \mu e(x) \frac{\{\mathbf{H}(x)\}^2}{4} \quad (3.78)$$

Igualando las formulaciones (3.77) y (3.78), y despejando para  $\mu e(x)$

$$\mu e(x) = \frac{4}{\{\mathbf{H}(x)\}^2} \left[ \frac{1}{T} \int_0^T \left( \int_0^{\mathbf{B}(x,t)} \mathbf{H}d\mathbf{B} \right) dt \right] \quad (3.79)$$



La forma de Galerkin para la ecuación de difusión es

$$\sum_e \left[ \nu_e [\hat{S}] \{ \hat{A} \}_e + \sigma [T]_e \{ j\omega \hat{A} \}_e - \sigma \{ Q \}_e \frac{\hat{V}_b}{l} \right] = 0$$

o

$$\nu_e [\hat{S}] \{ \hat{A} \} + \sigma [T] (j\omega \hat{A}) - \sigma \{ Q \} \frac{\hat{V}_b}{l} = 0$$

La ecuación de una bobina tiene la forma

$$[D] \{ \hat{I}_b \}_c = \left[ \frac{\sigma}{l} \Delta_b \right] \{ \hat{V}_b \}_c - [\sigma Q]_c^T \{ j\omega \hat{A} \}$$

La ecuación de voltaje para la bobina y circuito externo es

$$\begin{aligned} \hat{V}_c &= \hat{V}_t + j\omega L_{ext} \hat{I}_c + R_{ext} \hat{I}_c \\ &= \{ d_b \}^T \{ \hat{V}_b \} + j\omega L_{ext} \hat{I}_c + R_{ext} \hat{I}_c \end{aligned}$$

El sistema global de ecuaciones es ahora algebraico complejo y tiene la forma simplificada

$$[\hat{M}] \{ \hat{F} \} = \{ \hat{N} \} \quad (3.80)$$

La transformación inversa, de la forma fasorial al dominio de tiempo es sencilla. Esta formulación permite grandes ahorros de tiempo de cómputo. En problemas transitorios (en el dominio del tiempo), se pueden usar los resultados en el dominio armónico como valores aproximados a los de estado estable, lográndose una gran reducción de tiempo de computo [11]. Las otras variables de interés como densidad de campo, potencia, etc, se pueden obtener a partir del conocimiento del potencial magnético fasorial. Del conocimiento de la potencia compleja se pueden obtener los parámetros circuitales equivalentes del transformador. La resistencia será el coeficiente proporcional a la parte real de la potencia compleja, la inductancia serán proporcional a la parte imaginaria de la potencia compleja. El procedimiento para el cálculo de inductancias es sencillo para el caso de bobinas únicas. Para sistemas de inductancias acopladas se requiere de un procedimiento más complicado, para hacer eficiente el cálculo de las mismas.



### 3.22. Laminaciones.

Un gran número de dispositivos magnéticos emplean un núcleo construido por láminas delgadas del orden de los milímetros con el propósito de reducir efectos ocasionados por corrientes de eddy. Una manera de modelar estas laminaciones con el elemento finito, es modelar todas y cada una de las laminas que constituyen el núcleo así también el aislamiento entre laminas. Una alternativa es considerar al material laminado como una pieza sólida que tiene propiedades equivalentes y que esencialmente proporcionan el mismo resultado del campo magnético. Reduciendo significativamente el número de elementos en el mallado al modelar el material [15]. Si tomamos el sistema de coordenadas cartesianas y consideramos que el flujo solo existe en la dirección  $Y$  del sistema de coordenadas cartesianas como se muestra en la figura (3.7). Entonces la reluctancia equivalente en la dirección vertical es la combinación en paralelo de las reluctancias del aire y del material de las laminaciones, el circuito magnético equivalente es como se muestra en la figura (3.8).

Donde  $R_i$  es la reluctancia debidas a las laminaciones.

$$R_i = \frac{L}{\mu_i c W} \quad (3.81)$$

Donde  $L$  es la altura del paquete de laminaciones,  $\mu_i$  es la permeabilidad de cada lámina y  $W$  es el ancho del paquete, figura 3.7 y  $c$  es un factor que indica la relación del total del paquete es ocupado por láminas y aire. La reluctancia del aire  $R_v$  es.

$$R_v = \frac{L}{\mu_0 (1 - c) W} \quad (3.82)$$

Donde  $\mu_0$  es la permeabilidad de vacío que es igual al del aire. La reluctancia equivalente es la combinación en paralelo de las reluctancias.

$$R_{eq} = R_i || R_v = \frac{1}{((1 - c) + c\mu_i) \mu_0 W} \quad (3.83)$$



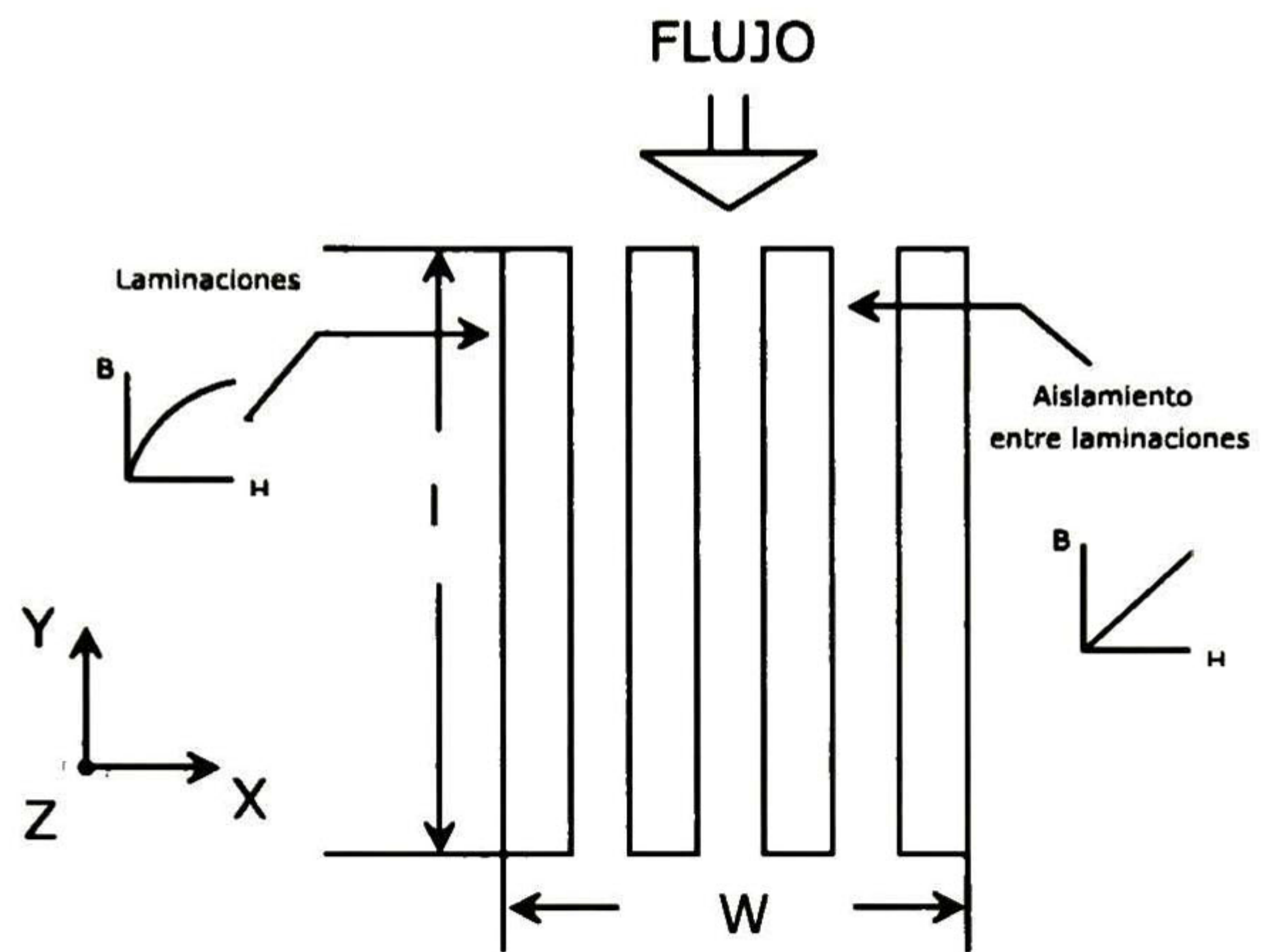


Figura 3.7: Flujo en la dirección Y.

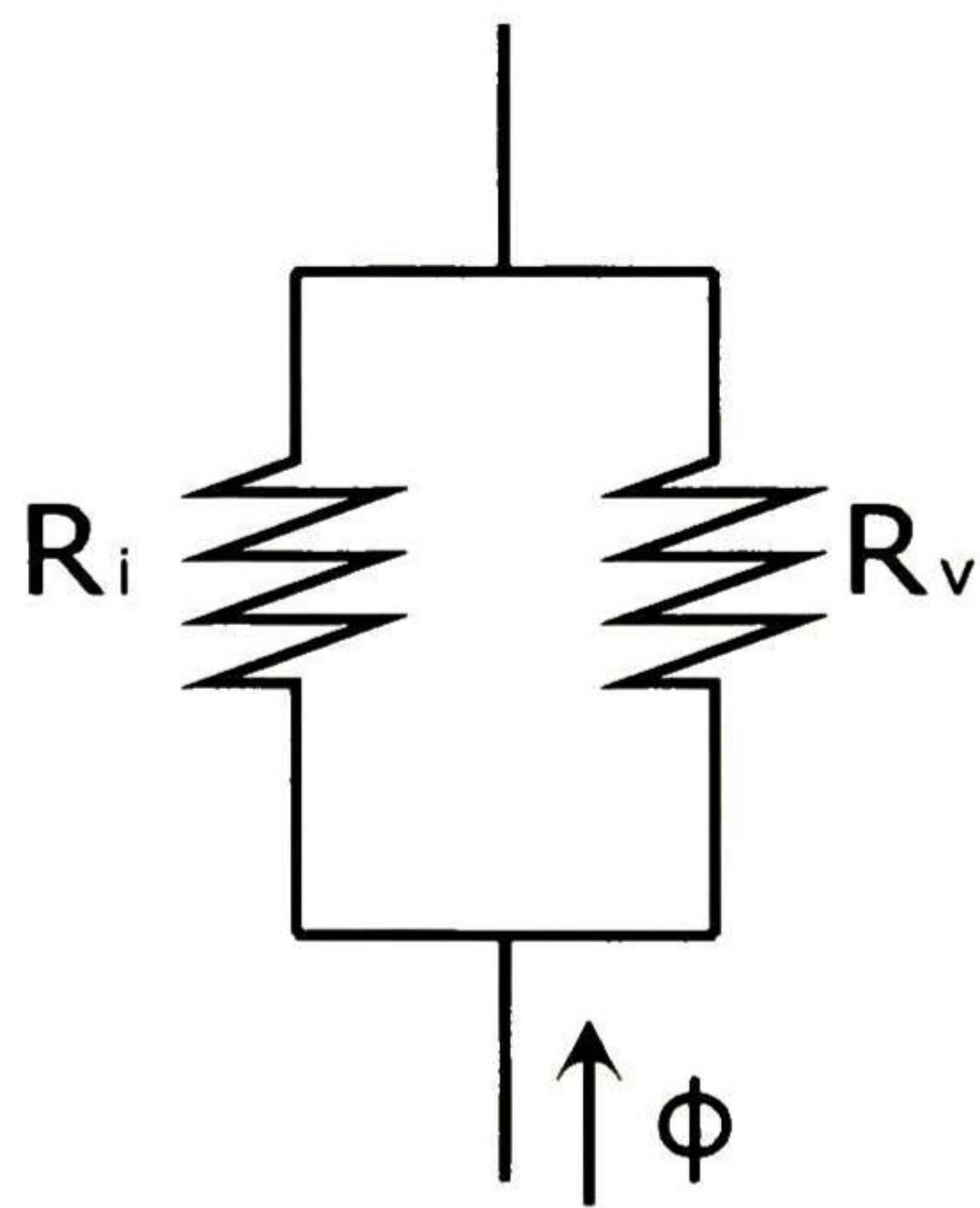


Figura 3.8: Reluctancia equivalente en paralelo.



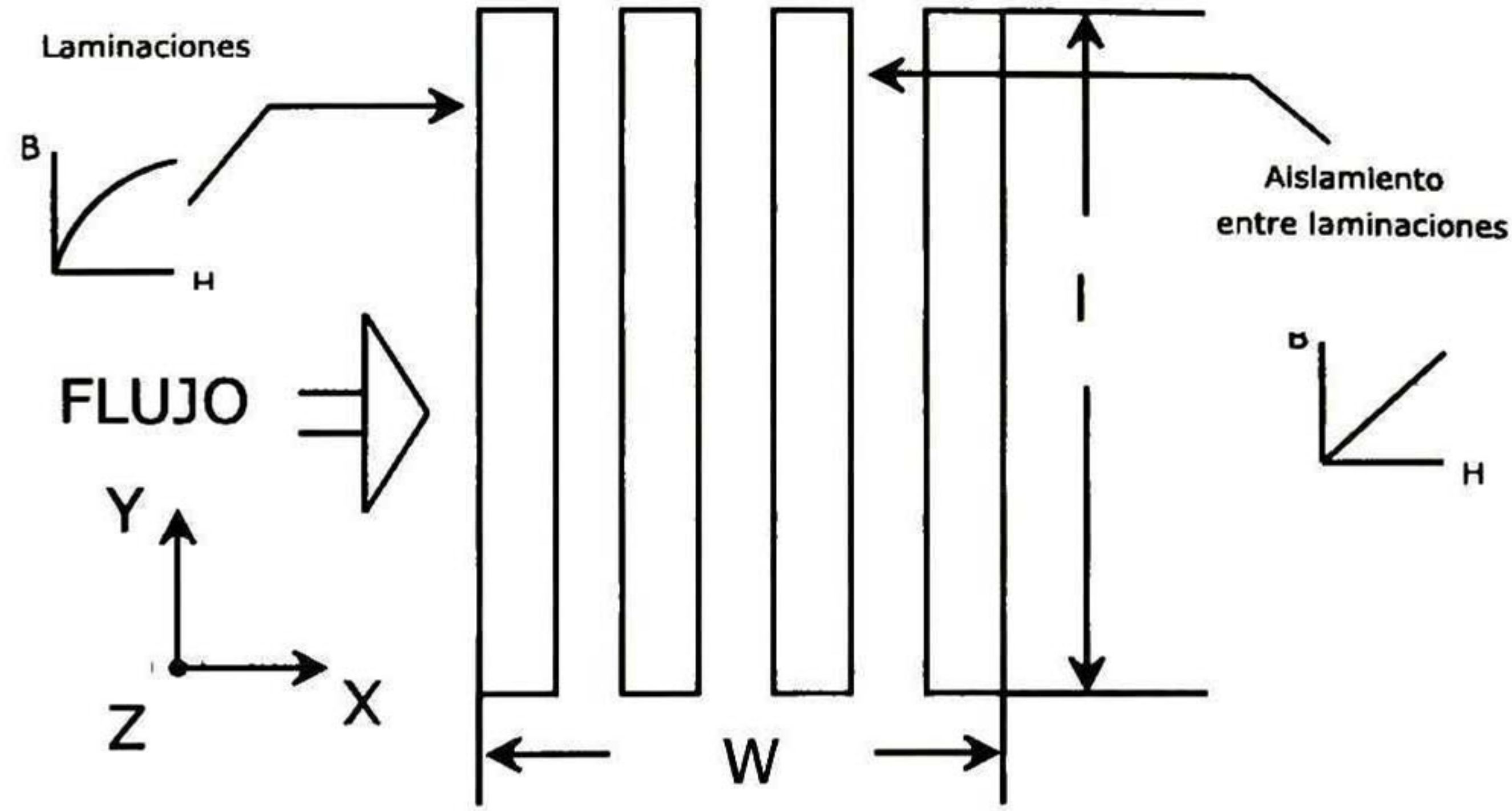


Figura 3.9: Flujo en la dirección X del sistema de coordenadas cartesianas.

Las curvas de saturación pueden ser corregidas aplicando la ecuación de  $R_{eq}$  a cada punto de la curva de saturación. Ahora bien considerando que el flujo fluye paralelo al eje X del sistema de coordenadas cartesianas como se muestra en la figura 3.9, en este caso la reluctancia equivalente es la suma en serie de las dos reluctancias. La reluctancia  $R_i$  para las laminaciones cuando el flujo es paralelo al eje X del sistema cartesiano.

$$R_i = \frac{cL}{\mu_i W} \quad (3.84)$$

y la reluctancia  $R_v$  para las regiones entre láminas

$$R_v = \frac{(1 - c) L}{\mu_0 W} \quad (3.85)$$

Haciendo un equivalente que está en serie resulta.

$$R_{eq} = \left( \frac{c\mu_0 + (1 - c)\mu_i}{\mu_i\mu_0} \right) \frac{L}{W} \quad (3.86)$$



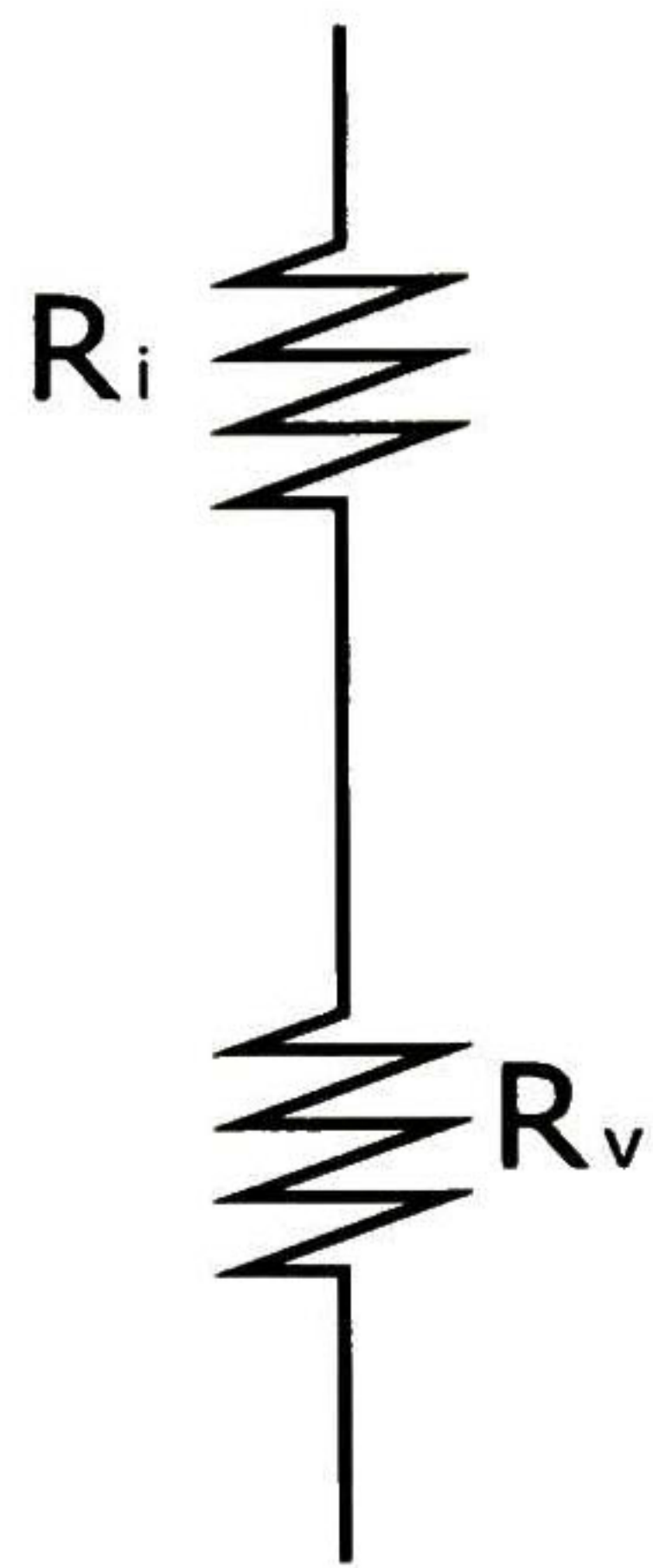


Figura 3.10: Reluctancia en serie.



## Modelado del transformador.

---

En este capítulo se describe el modelo geométrico y las características eléctricas del transformador utilizado en este trabajo. Se describen los mallados usados en cada uno de los componentes que forman el modelo, piernas, entre-hierros, yugos, bobinas, tanque y regiones de aire. Uno de los objetivos de este trabajo es mostrar el estudio de tres técnicas de modelo para el análisis de transformador, caso magneto-estático, caso armónico y caso transitorio. En lo consecuente, en este texto se llamara modelo I, al modelo magneto-estático, modelo II al modelo en el dominio de la frecuencia y modelo III en el dominio del tiempo. Para los modelos que se encuentran en el dominio de la frecuencia y en el dominio del tiempo se utiliza un mallado con elementos mas grandes y por tanto se tendrán menos número de elementos en comparación con el modelo magnetostático, que utiliza un mallano más fino y por consecuencia más elementos. El transformador es modelado y simulado mediante un programa comercial que utiliza la técnica de elemento finito, el nombre de este programa es Ansys.



## 4.1. Construcción del modelo.

La metodología empleada en Ansys para construir un modelo es la siguiente. Primer paso, antes que todo es necesario definir los tipos de elemento que se van a utilizar, posteriormente se definen los materiales, por ejemplo, las bobinas son de cobre, las laminaciones del núcleo son de acero con impurezas de silicio. Posteriormente se forma la geometría (típicamente se emplea un programa alterno). Una vez formada la geometría, Ansys automáticamente divide y etiqueta todas las áreas de las que está compuesto el modelo geométrico, después a cada una de estas áreas se especifica su correspondiente atributo, tipo de elemento y material. Típicamente en los modelados de elementos finitos de dispositivos eléctricos como los transformadores y motores se utilizan densidades de corriente como fuentes de excitación. Sin embargo, la mayor parte de los dispositivos se excitan con fuentes de voltaje aplicados a los devanados. En este trabajo se emplean fuentes de voltaje como fuentes excitadoras. Ansys requiere que se definan los grados de libertad de los elementos, los grados de libertad son variables por nodo a calcular de cada elemento, por ejemplo, los grados de libertad en zona del aire es el potencial magnético, los grados de libertad de los bobinados son, potencial magnético y corriente que circula por cada bobina. Para reducir los requerimientos de memoria por el número de elementos. Se acoplan elementos que tienen los mismos grados de libertad. Por ejemplo la bobina, en la cual los conductores están en serie y por tanto la corriente que circula por estos es la misma. Entonces se acoplan todos los nodos pertenecientes a dicha bobina. En los grados de libertad de corriente y caída de tensión. En las bobinas es posible considerar fenómenos debidos al campo magnético, tales como corrientes de eddy y efecto skin. En este trabajo se considera que las bobinas están aisladas y el fenómeno del efecto skin no se presenta en los conductores que conforman los bobinados. Este acoplamiento se hace mediante una rutina que tiene incorporada Ansys [11]. En este



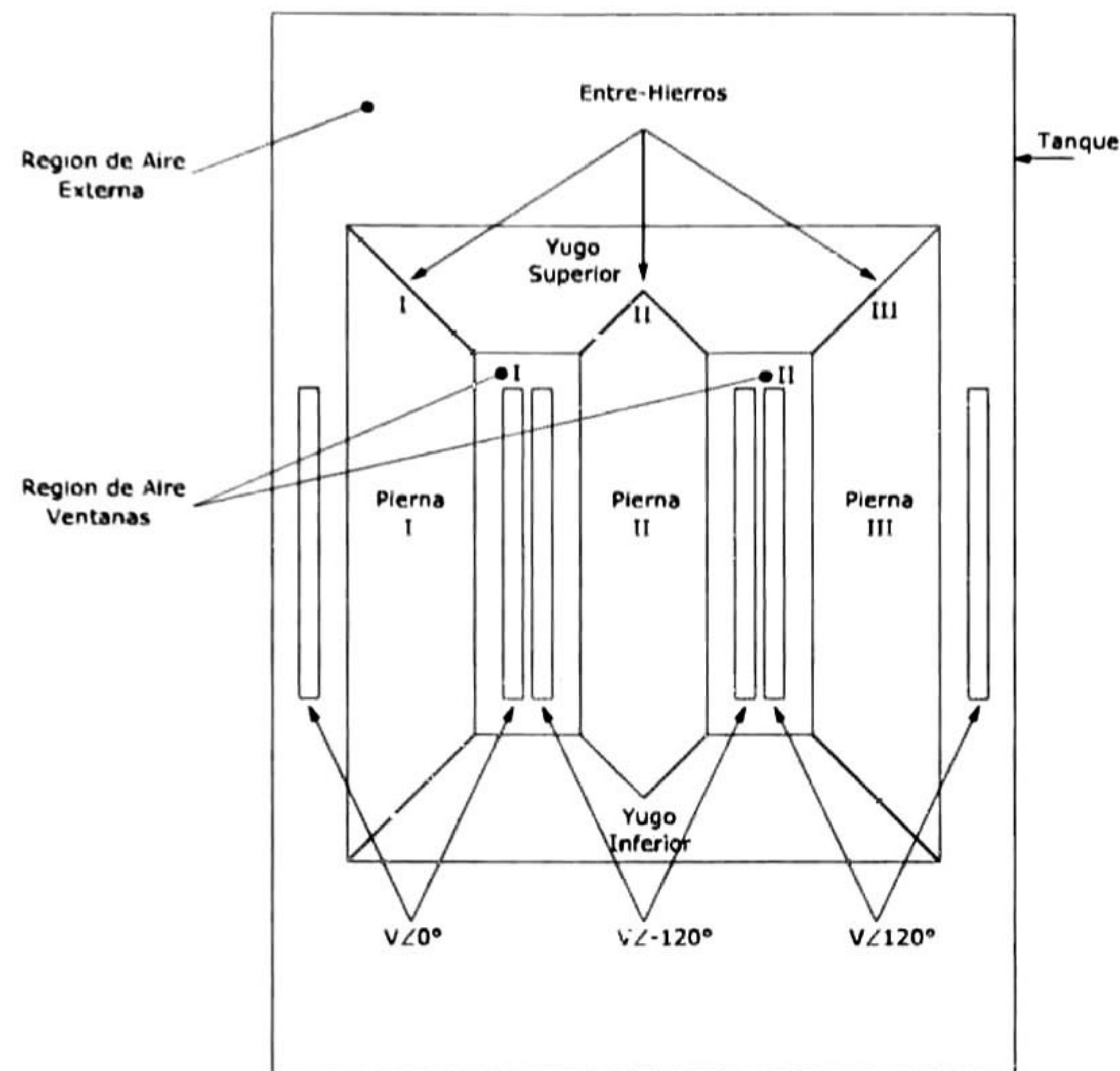


Figura 4.1: Transformador trifásico.

trabajo los modelos y solución es en el plano de dos dimensiones. Después se efectúa el mallado del modelo (discretización) y se sigue con el ensamblado de matrices. Hecho lo anterior se procede a solucionar las ecuaciones y posteriormente al post-procesamiento.

## 4.2. Transformador utilizado.

Las características geométricas y eléctricas del transformador utilizado en este trabajo son las típicas de un transformador trifásico tipo acorazado, los valores nominales son: 25 MVA, 34,5/12,47 kV,  $\Delta - Y$ , en donde cada una de las tres bobinas de alta tensión son montados en cada una de las tres piernas, la configuración de estas bobinas es del tipo disco. En la figura 4.1 se muestra el transformador que se utiliza en este trabajo, como se observa, tiene tres piernas, pierna I, pierna II y pierna III, dos ventanas, ventana I y ventana II,



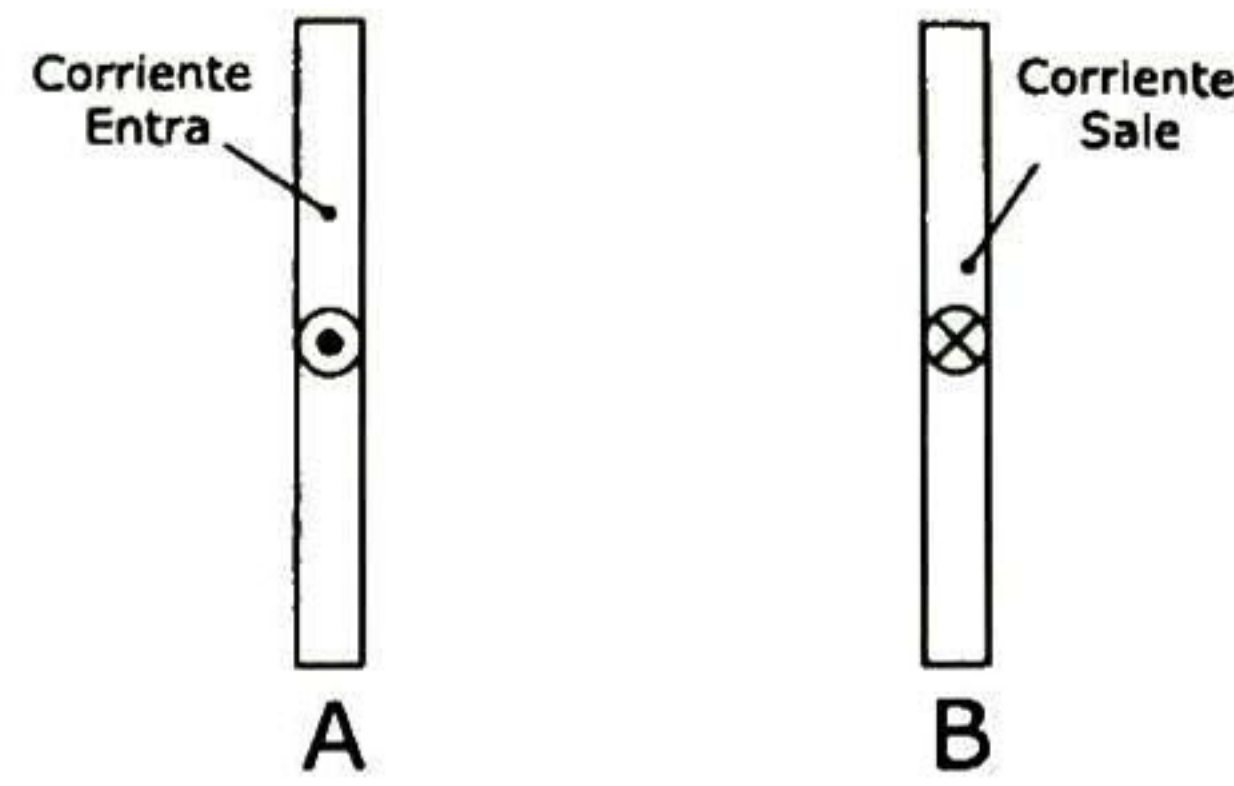


Figura 4.2: Representación de una bobina.

existen dos yugos, yugo superior y yugo inferior, en las intersecciones de los yugos y piernas existen entre-hierros. A los lados de cada pierna se encuentran las bobinas, representadas por dos rectángulos, uno a la derecha y otro en la izquierda en cada pierna, indicando la ida y retorno de la corriente respectivamente. El núcleo y bobina se encuentran inmersas en un tanque, con material aislante (aceite o aire). Aprovechando la simetría (geométrica y magnética) del transformador solo se modela la mitad superior del mismo. Las paredes del tanque se toman como condiciones frontera de Dirichlet (flujo paralelo) y el eje horizontal como condición de Newman homogénea (flujo perpendicular).

#### 4.2.1. Representación de la bobina.

La sección transversal de una bobina es representada geoméricamente por dos rectángulos, uno de ellos representa al conjunto de conductores en donde la corriente entra en dirección perpendicular al papel, mientras que el otro representa a los conductores de donde la corriente sale del plano del papel, figura 4.2, las bobinas pueden ser del tipo disco o del tipo helicoidal y pueden estar conectadas en serie o en paralelo. En este trabajo se considera que las corrientes de eddy y efecto skin no influyen en los bobinados.



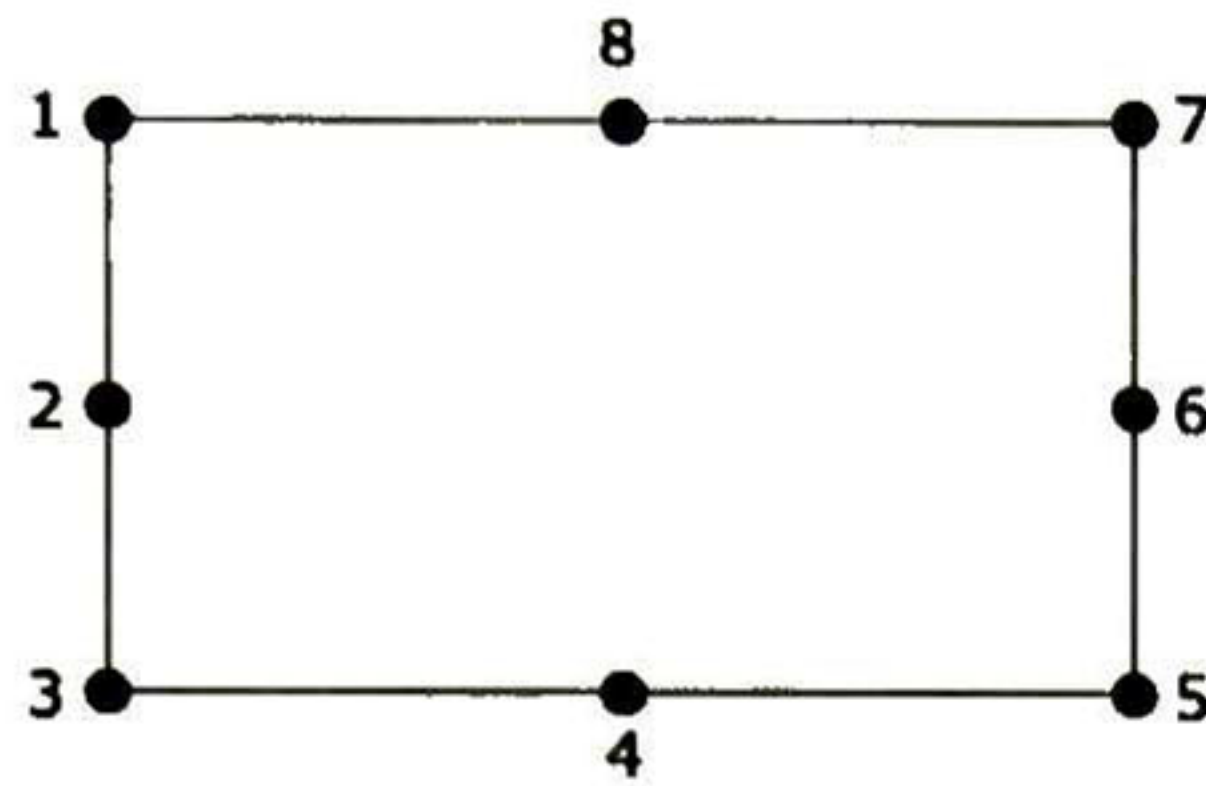


Figura 4.3: Elemento rectangular de 8 nodos.

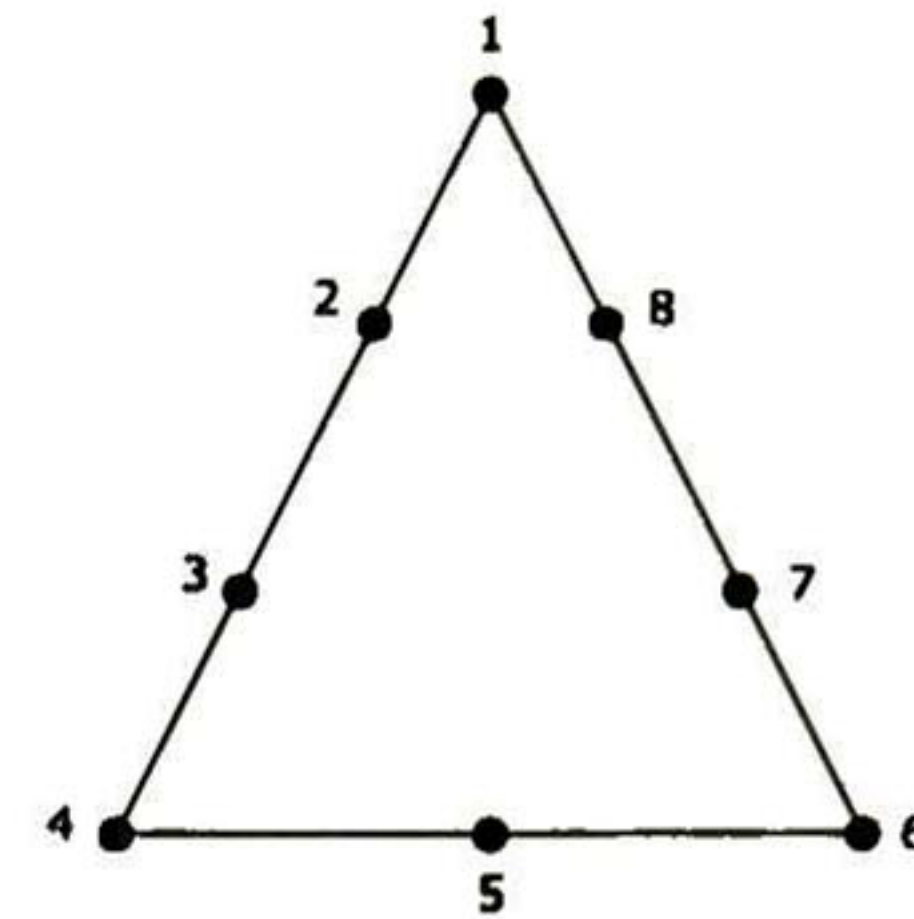


Figura 4.4: Elemento triangular de 8 nodos.

### 4.3. Mallado en el modelo magnetostático.

A continuación se describe el tipo de mallado que es utilizado cuando se modela el transformador en forma magneto-estática. Se muestran por separado el mallado que tiene cada uno de los elementos que componen el transformador.

#### 4.3.1. Mallado de las bobinas.

La bobina está compuesta de  $N_s$  secciones, cada sección contiene  $N_v$  vueltas, la configuración del arrollamiento es del tipo disco. Un elemento representa a una barra conductora con cierta longitud. Los elementos usados en las bobinas son de geometría rectangular de 8 nodos, como se muestra en la figura 4.3. Este mallado es utilizado en los tres modelos de estudio (caso magneto-estático, en el dominio de la frecuencia y en el dominio del tiempo) y se muestra en la figura 4.5. La bobina se discretiza con 451 elementos, esto hace que un elemento corresponda a un conductor.

#### 4.3.2. Mallado de piernas y yugo, modelo I.

Para el mallado en las piernas se utilizan triángulos de 8 nodos, como se muestra en la figura 4.4. El mallado de las piernas se muestra en las figuras 4.6 a 4.8. El número de



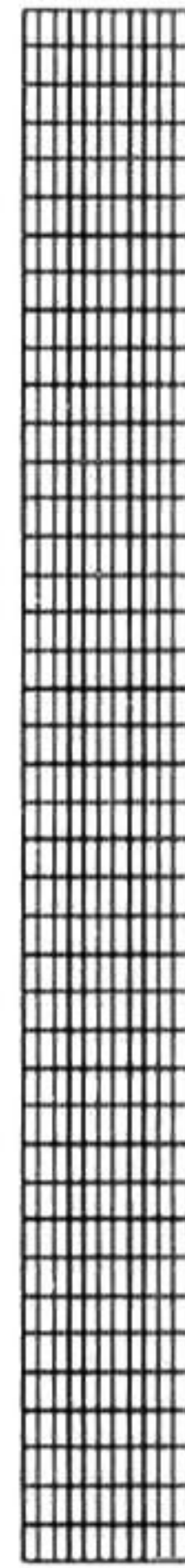


Figura 4.5: Mallado de una sección de una bobina.

elementos usados en la pierna I son de 1671 elementos, en la pierna II se emplean 1530, en la pierna III se utilizan 1671 elementos y el yugo se modela con 3236 elementos. Se observa que el mallado en la parte superior de la pierna es mas denso debido al entre-hierro entre la pierna y el yugo superior figura 4.6, de manera similar ocurre en las piernas II y III. En la figura 4.9 se muestra el mallado del yugo superior.

### 4.3.3. Mallado de entre-hierros.

Existen 3 espacios inter-laminares (entre-hierros) como se observa en la figura 4.1, el primero se encuentra entre el yugo superior y la pierna I, el segundo entre el yugo superior y la pierna II el tercero por el yugo superior y la pierna III. El número de elementos usados en el entre-hierro I, son de 440, en el segundo entre-hierro se usan 442 elementos y en el tercero se emplean 440 elementos. En la figura 4.10 se muestra el mallado del entre-hierro I y como se puede apreciar, los elementos son de geometría triangular. Debido a que las dimensiones



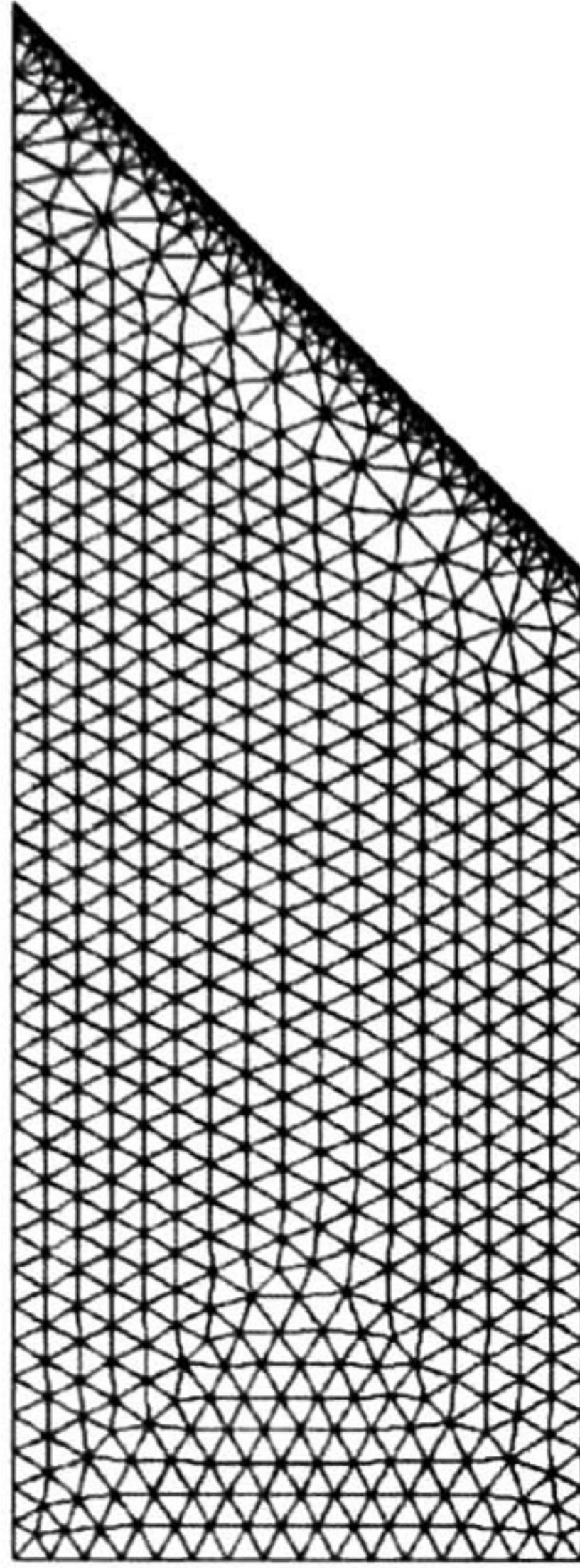


Figura 4.6: Mallado de la pierna I.

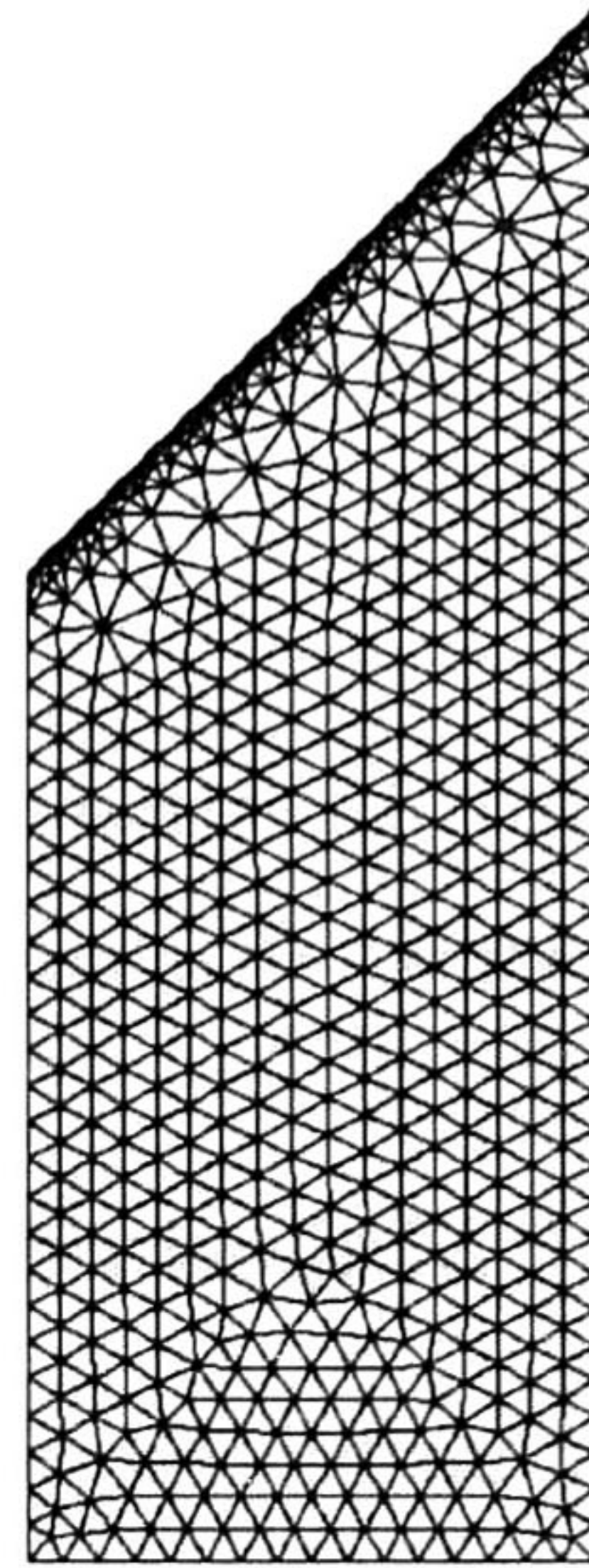


Figura 4.7: Mallado de la pierna III.

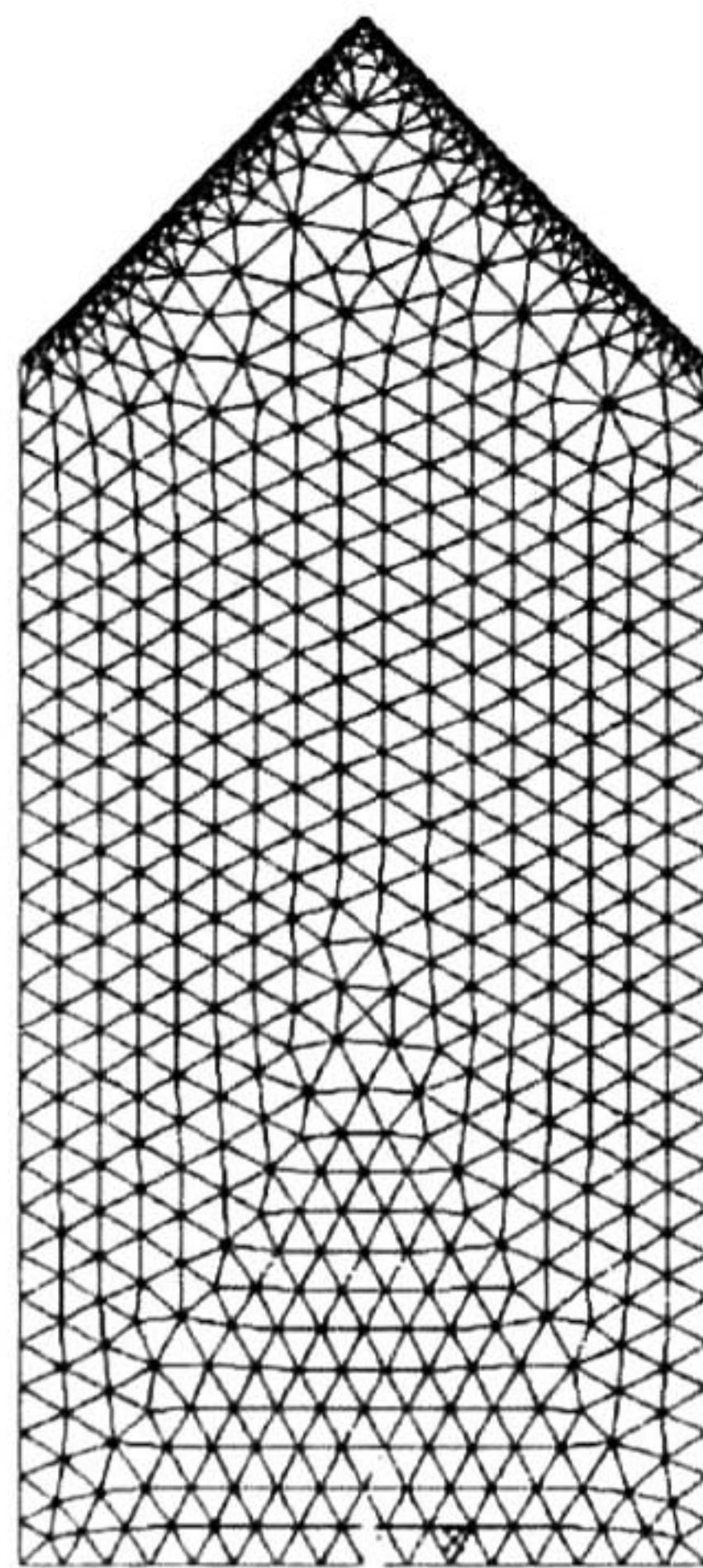


Figura 4.8: Mallado de la pierna II del modelo I.



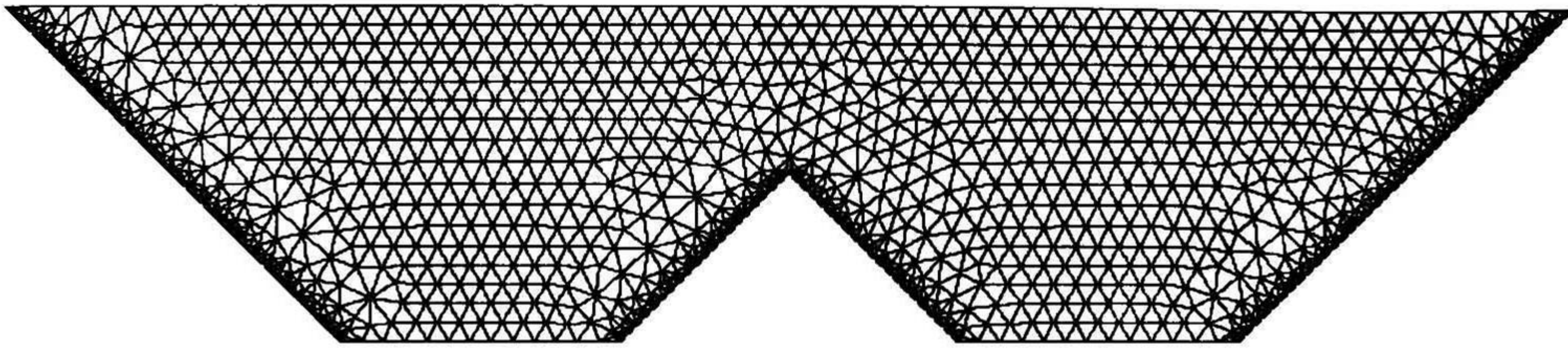


Figura 4.9: Mallado del yugo superior del modelo I.

geométricas del entre-hierro son muy pequeñas y por consiguiente sus elementos, se hace un acercamiento y se muestra en la figura 4.10.

#### 4.3.4. Mallado de regiones de aislamiento.

En el modelo del transformador existen 3 regiones en donde el material es aire. Las ventanas y la region de aire externa. Típicamente ventana se le llama a la region en donde se encuentra una sección de la bobina y una región que puede estar llena de aire o aceite de transformador, figura 4.1. En este trabajo se le llama ventana a la region que esta llena de aire, figura 4.12. La ventana I esta compuesta de 410 elementos trianguladas de 8 nodos , la ventana II esta compuesta de 408 elementos triangulares y la region esterna es discretizada con 706 elementos triangulares. El mallado de las ventanas I y II se muestran en las figuras 4.11 y 4.12 respectivamente y en la figura 4.13 se muestra el mallado de la región de aire externa.

#### 4.3.5. Condiciones frontera.

Las condiciones frontera son un requisito necesario para que las ecuaciones planteadas tengan solución única. El núcleo, bobinas y herrajes varios, son sumergidos típicamente



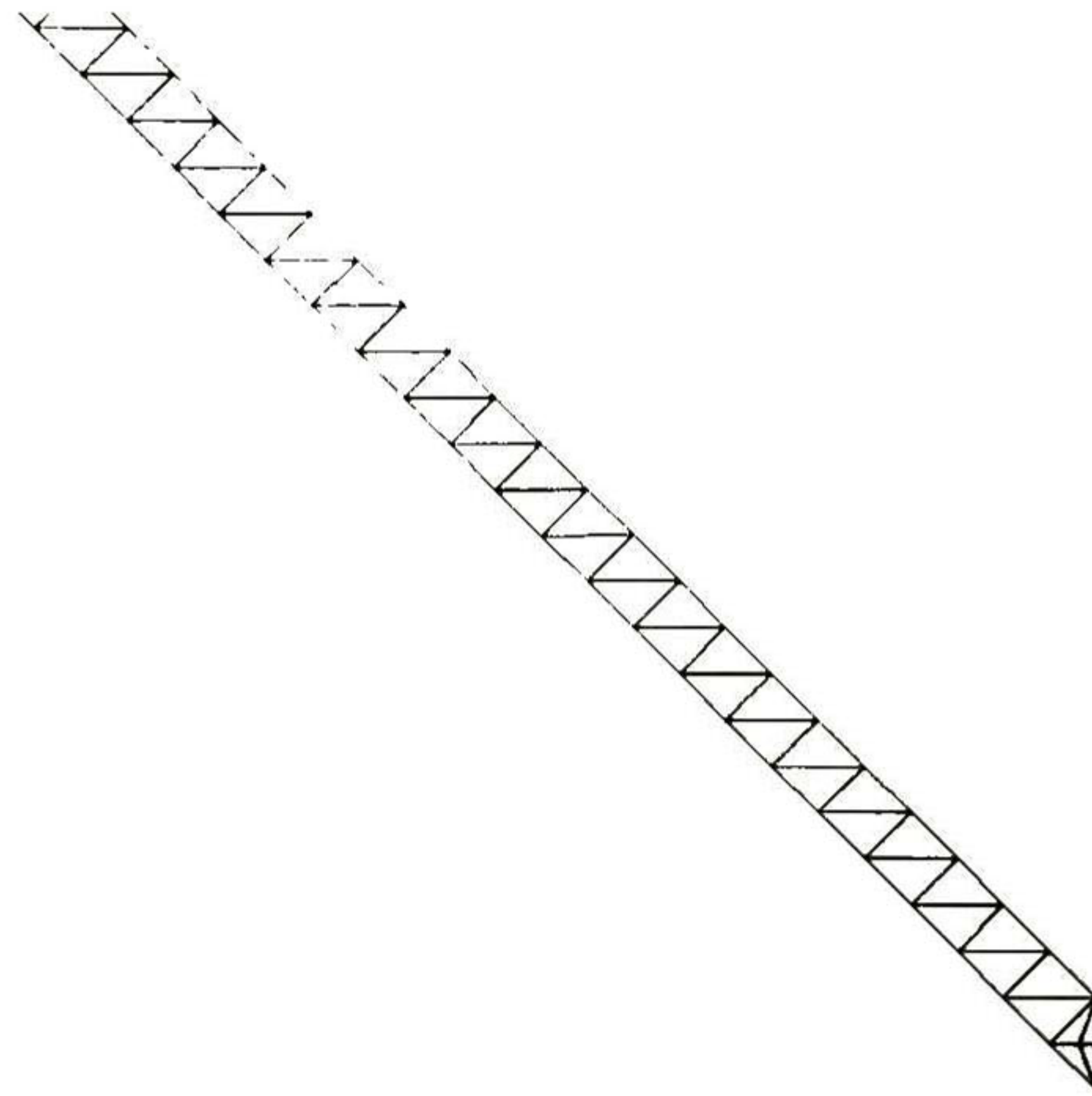


Figura 4.10: Mallado del entre-hierro I, modelo I.

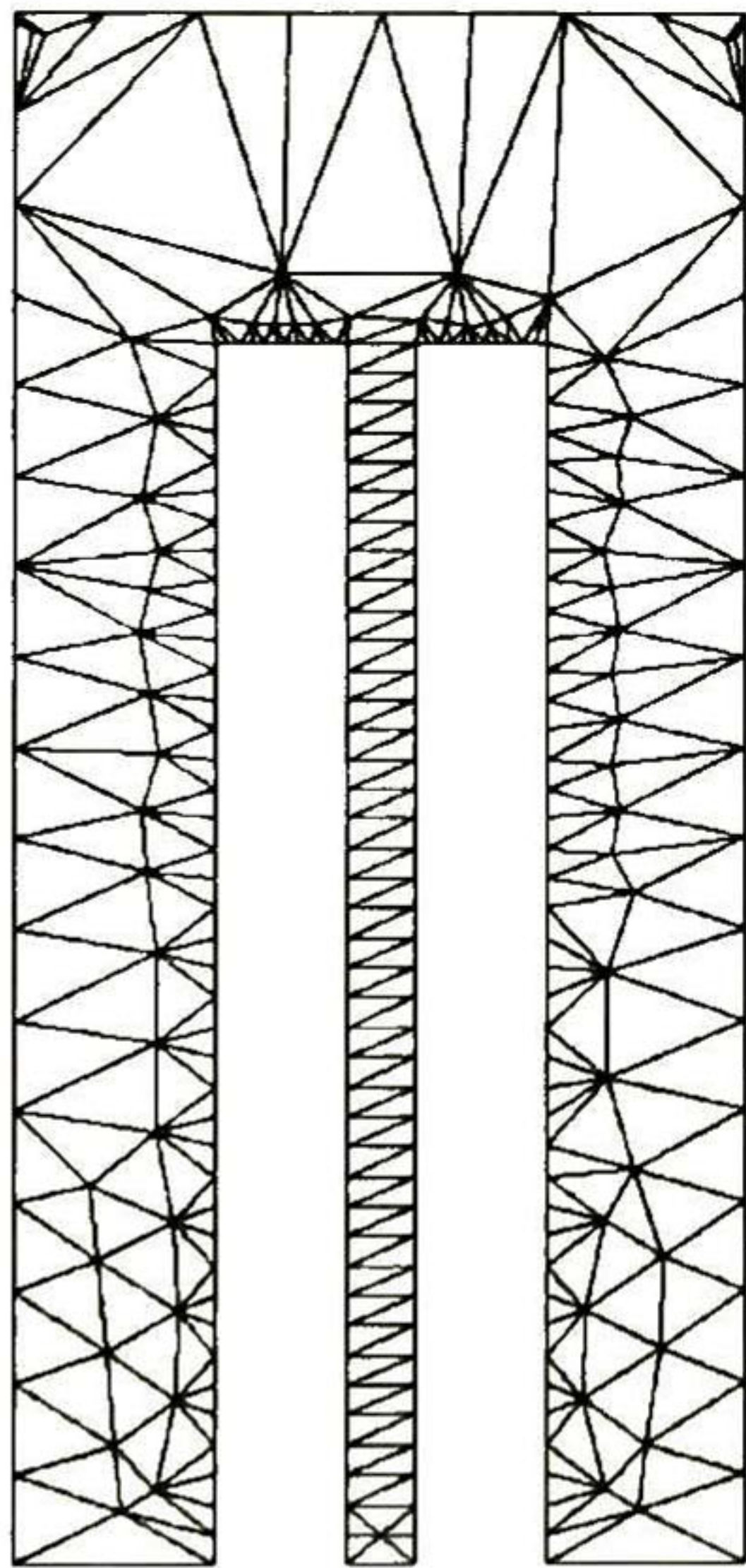


Figura 4.11: Mallado de la región I de aire, modelo I.

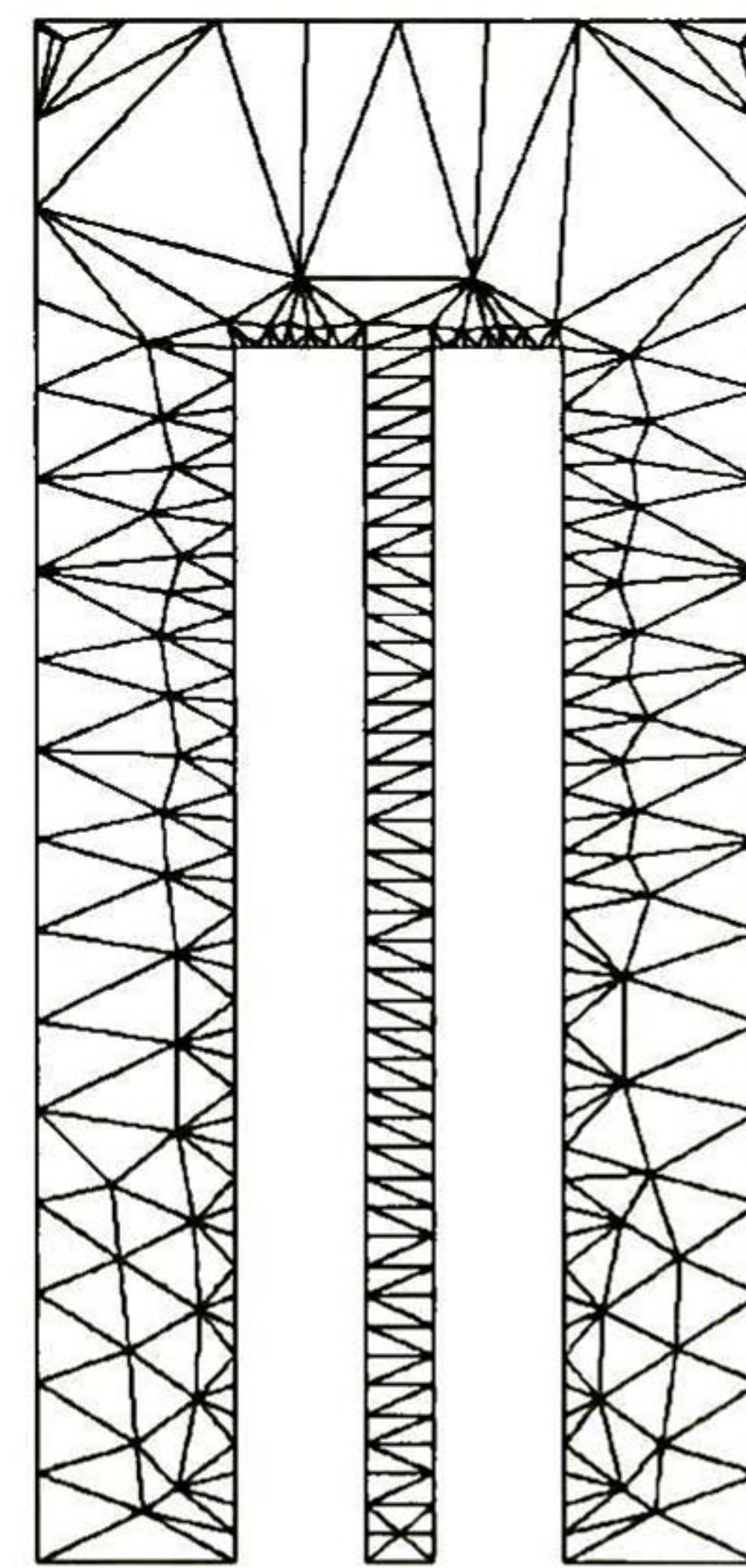


Figura 4.12: Mallado de la región II de aire, modelo I.



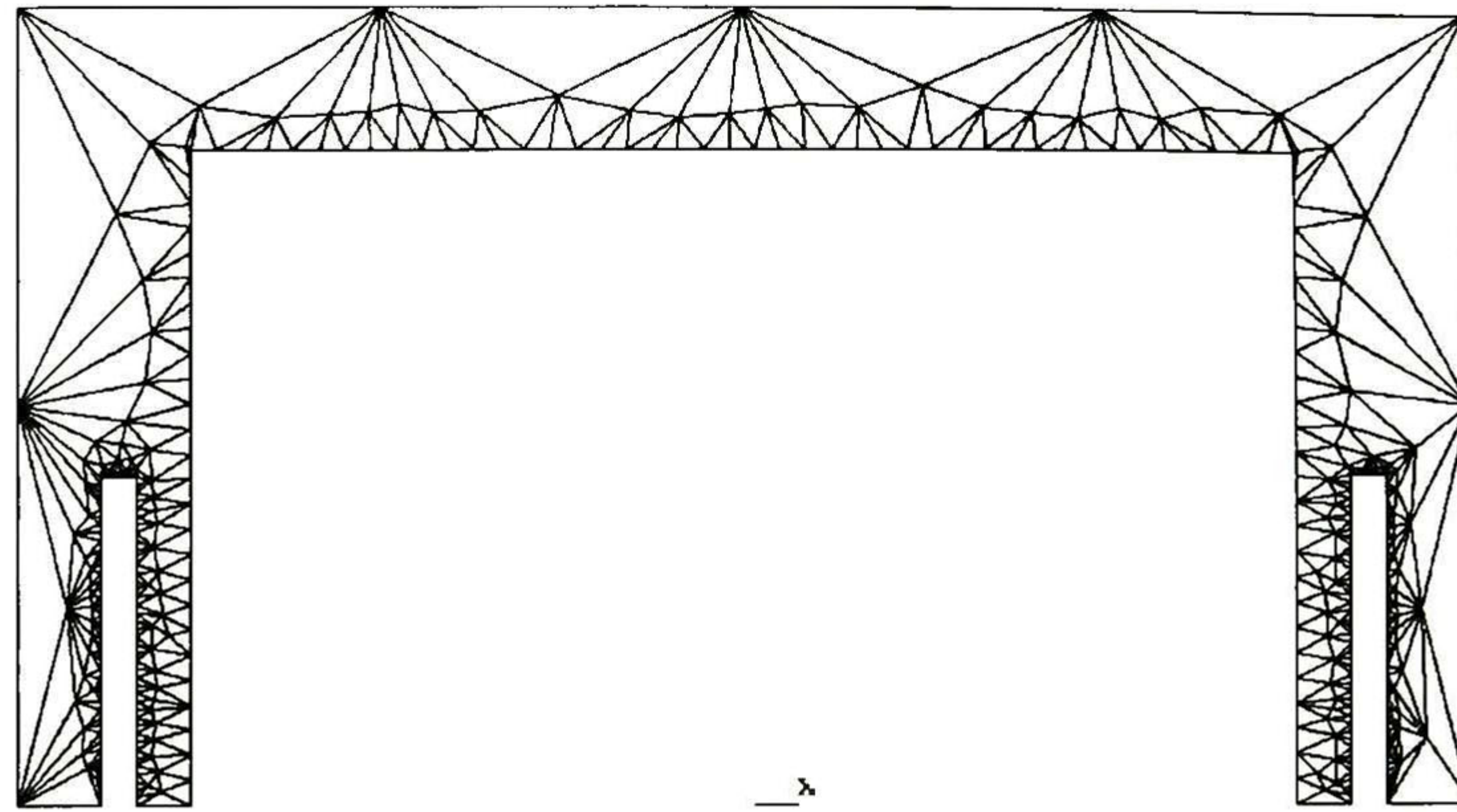


Figura 4.13: Mallado de la región externa de aire, modelo I.

dentro de un tanque, en este caso, lleno de aire, este aceite actúa como aislante impidiendo que descargas eléctricas debidas a condiciones anormales de operación tengan contacto con el tanque, por lo anterior se considera que las paredes del tanque tienen potencial igual a cero, o lo que es lo mismo, que los flujos que pudieran llegar o tocan estas fronteras son flujos paralelos (condición de Dirichlet) a las paredes del tanque. Debido a que solo se modela la mitad del transformador se hace necesario definir los flujos perpendiculares (condición de Neuman), estos se producen debido a simetría y se definen en todas aquellas fronteras que se encuentran en la línea de corte, lo anterior se muestra en la figura 4.14. La línea discontinua representa la frontera donde existen flujos perpendiculares.

#### 4.4. Mallado en el modelo II y III.

Para el modelado del transformador en el dominio del tiempo y de la frecuencia se utiliza otro mallado. Debido a que los tiempos de computo son muy altos se reduce el tamaño de la



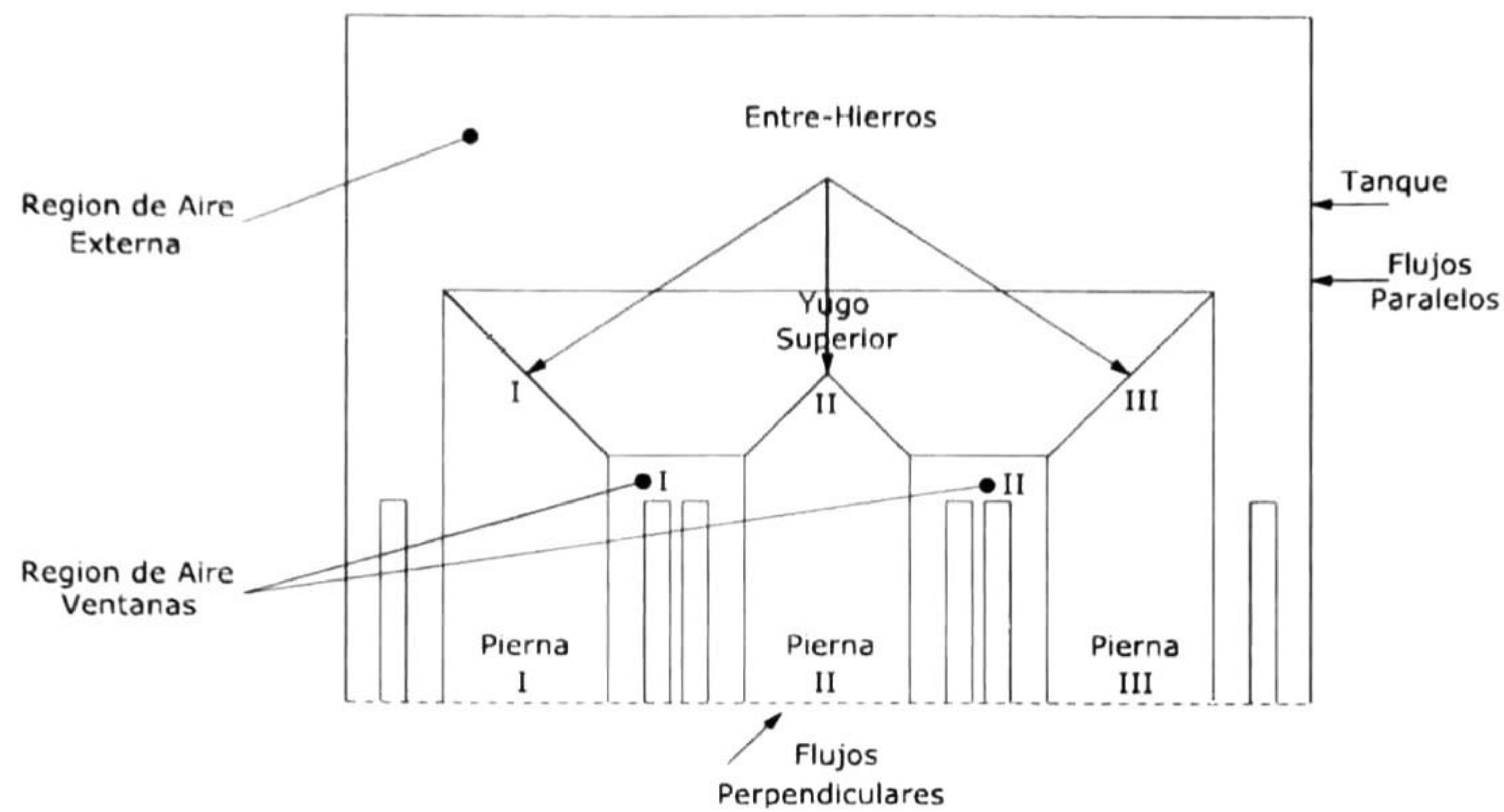


Figura 4.14: Media sección del transformador.

matriz de rigidez. Por tanto que los elementos utilizados son más grandes. A continuación se muestran los mallados utilizados.

El mallado de las bobinas son iguales que para el caso magnetostático tienen el mismo número de elementos, nodos y utiliza el mismo elemento rectangular. Los entre-hierros, también se utilizan el mallado del caso magnetostático.

#### 4.4.1. Mallado de piernas y yugo, modelo II y III.

El mallado de las piernas se muestra en las figuras 4.15 a 4.17. El número de elementos usados en la pierna I son de 974 elementos, en la pierna II se emplean 920, en la pierna III se utilizan 974 elementos y el yugo se modela con 2293 elementos. En la figura (4.18) se muestra el mallado del yugo superior.



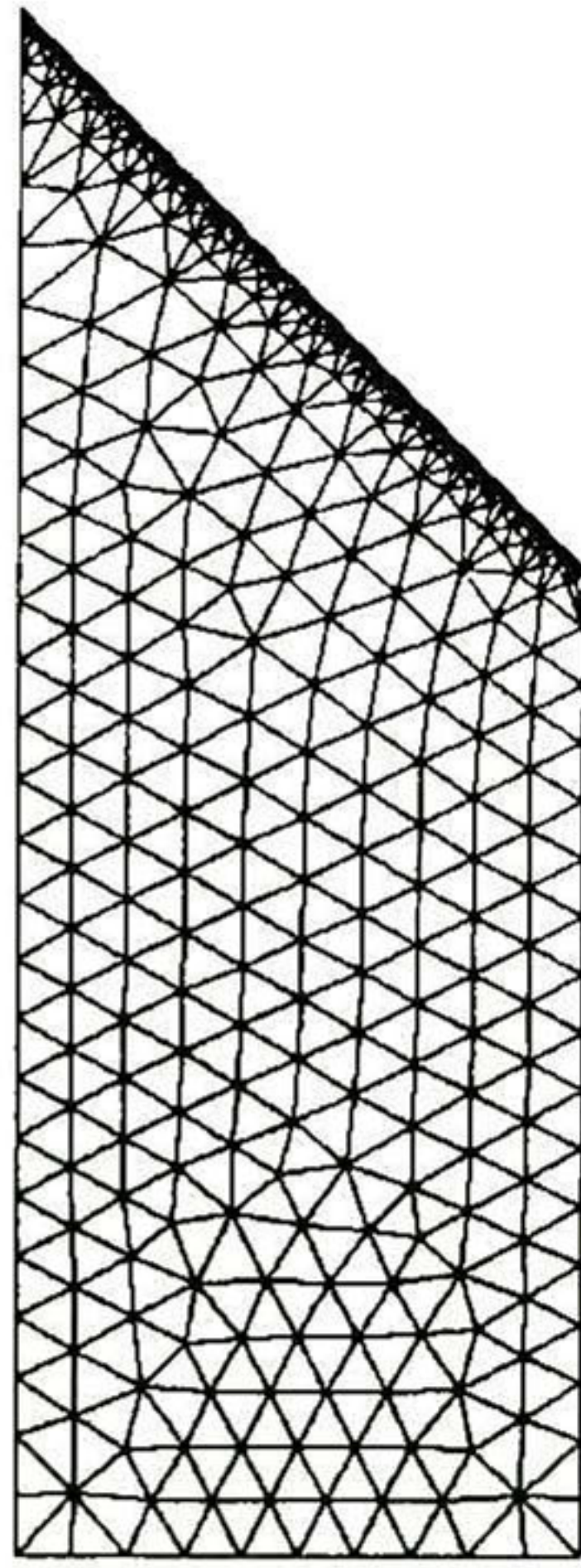


Figura 4.15: Mallado de la pierna I, modelo II y III.

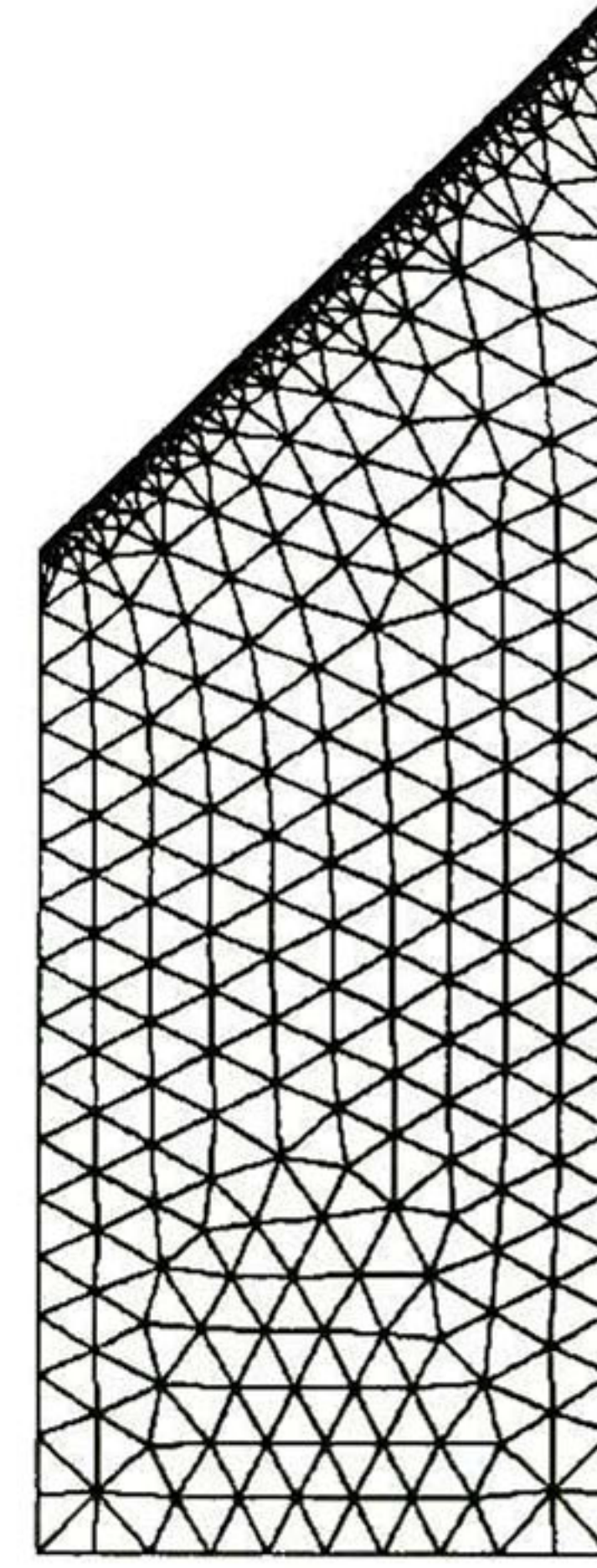


Figura 4.16: Mallado de la pierna III, modelo II y III.

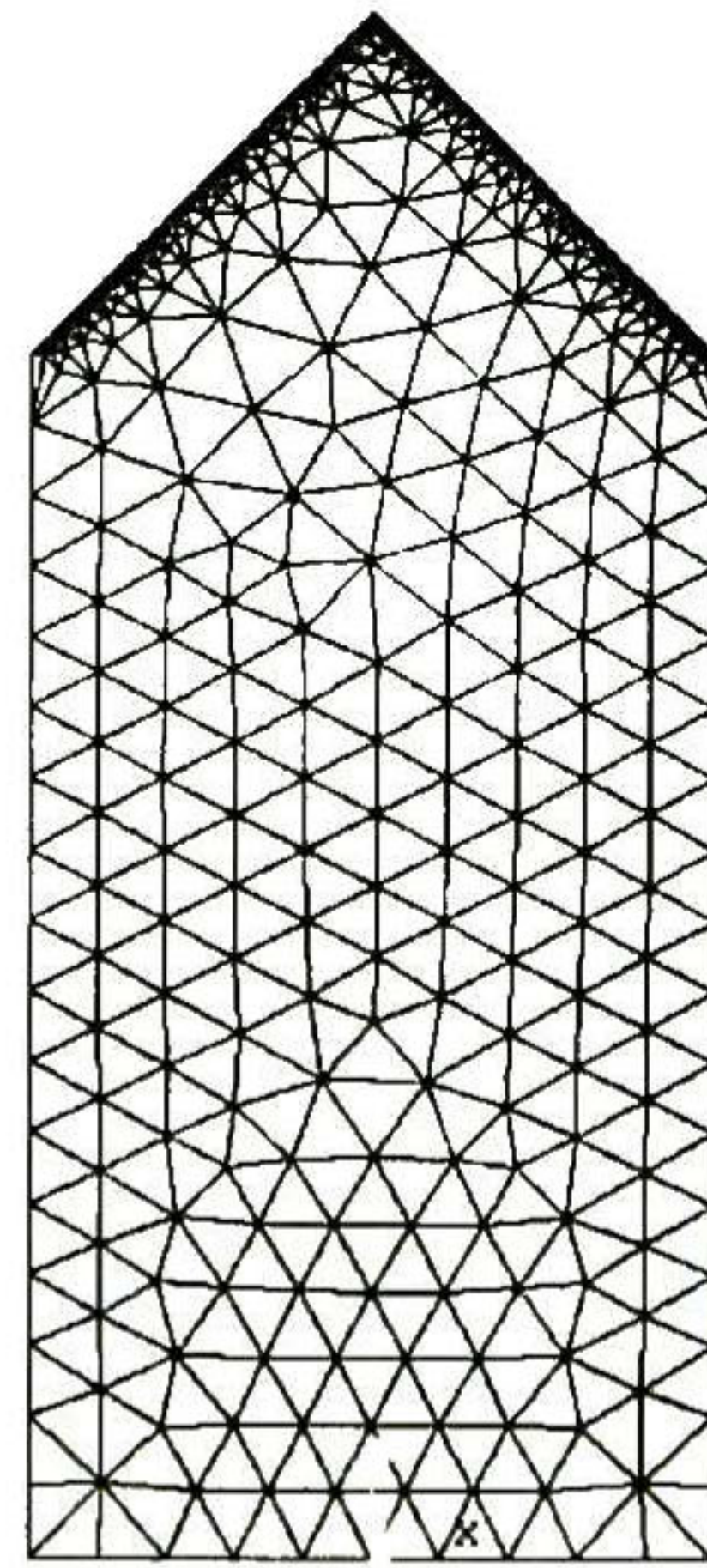


Figura 4.17: Mallado de la pierna II, modelo II y III.



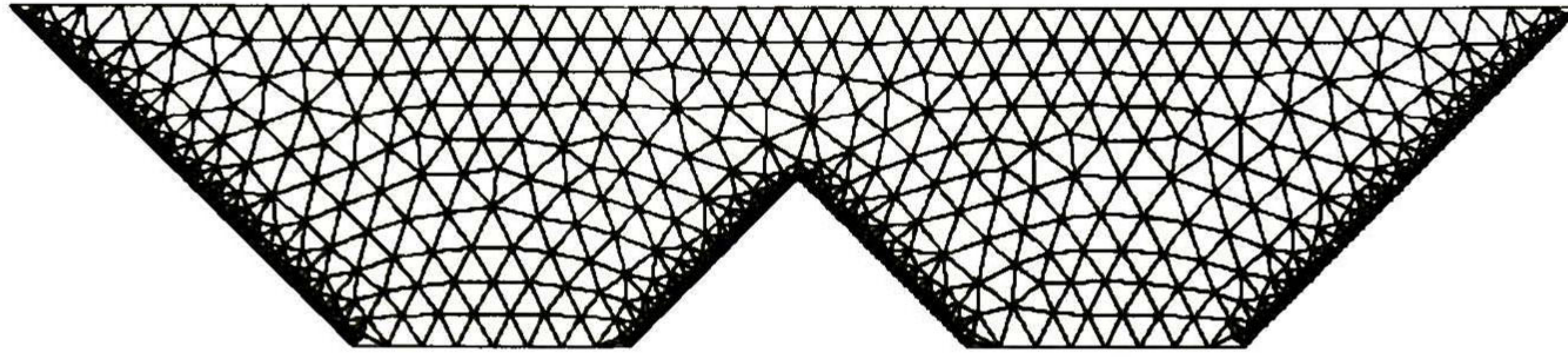


Figura 4.18: Mallado del yugo superior, modelo II y III.

#### 4.4.2. Mallado de regiones de aislamiento.

La región I está compuesta de 410 elementos triangulares, la región II contiene 408 elementos y la región externa 706 elementos. Los elementos utilizados son triangulares construidos con 8 nodos. Los mallados se muestran en las figuras 4.19 a 4.21.



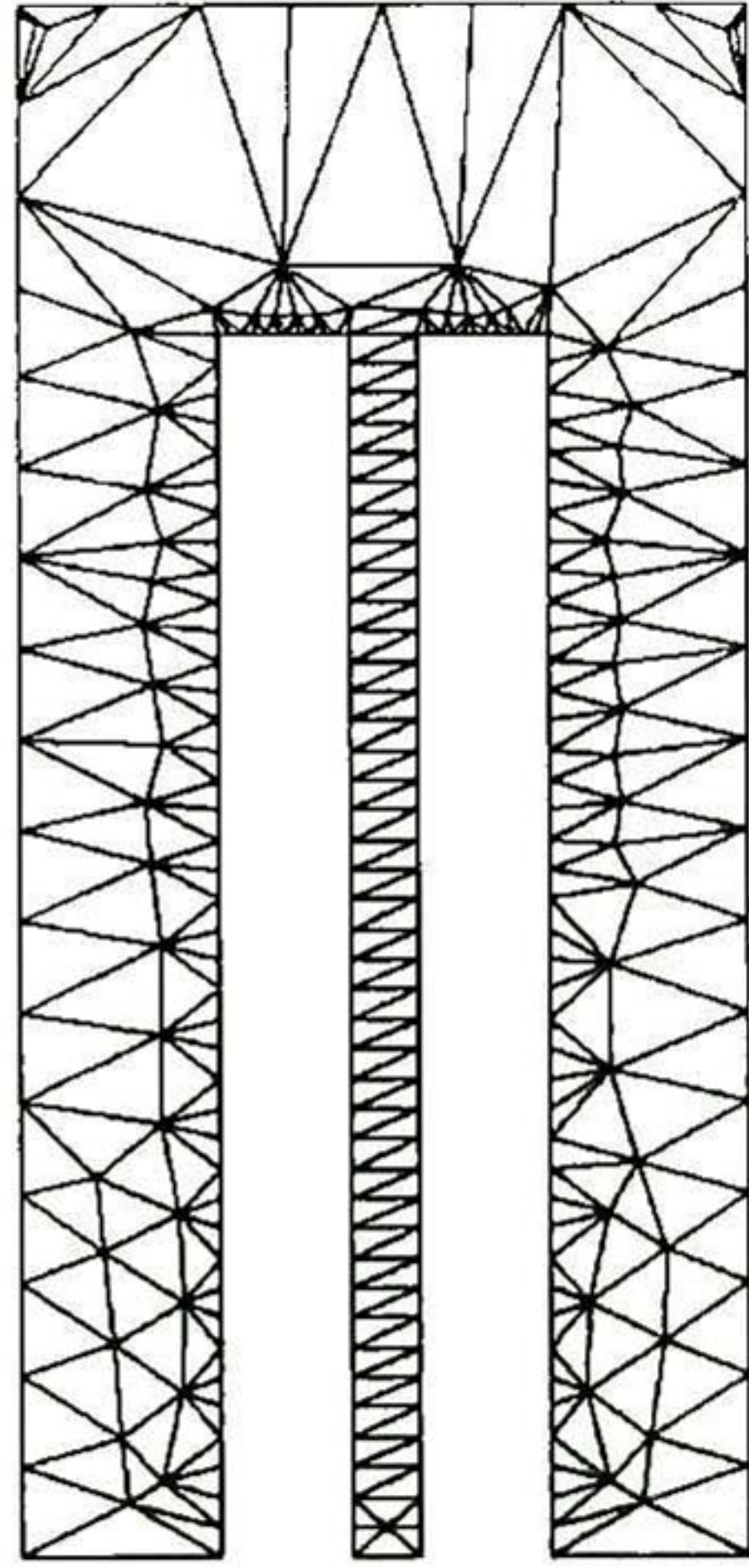


Figura 4.19: Mallado de la región I de aire, para el modelo II y III.

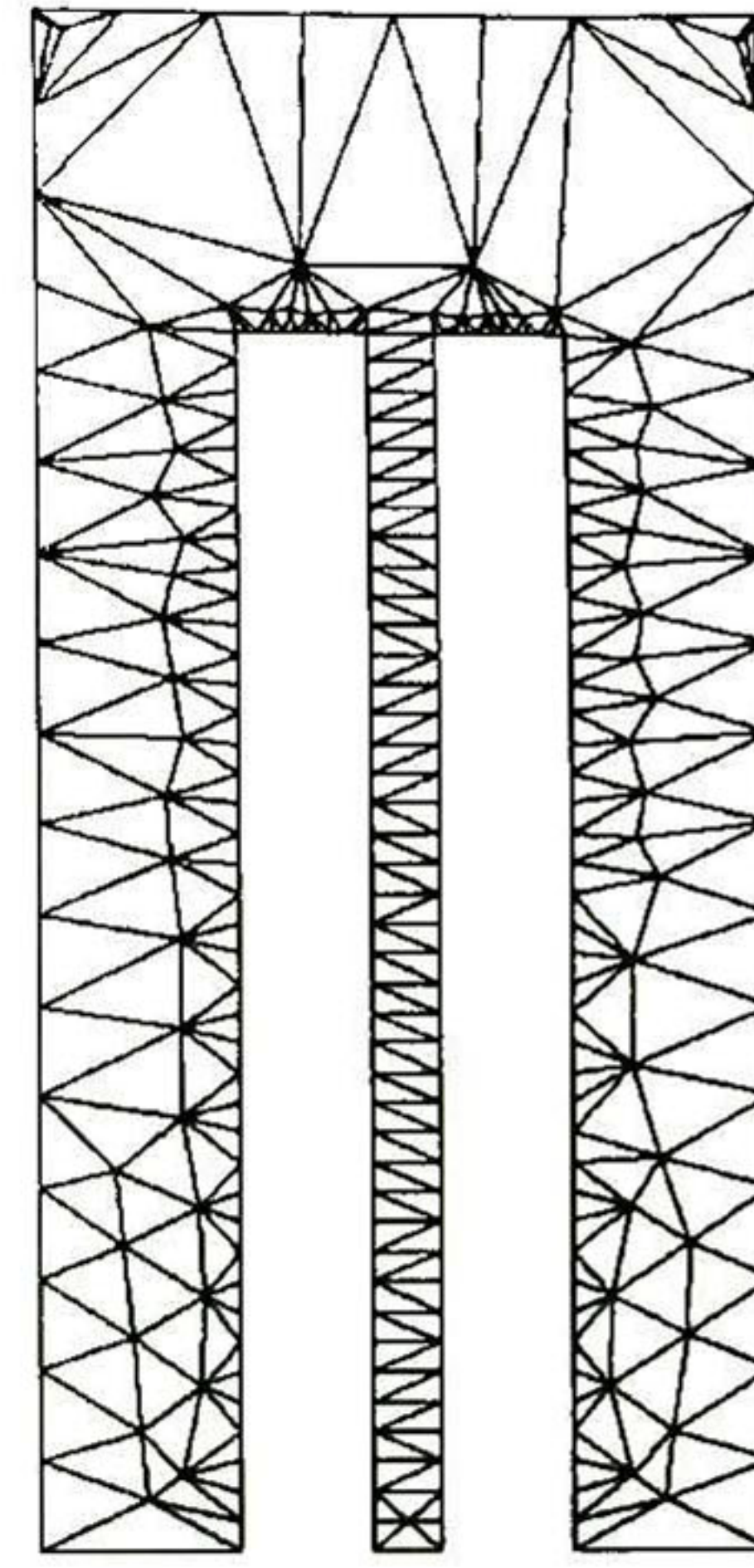


Figura 4.20: Mallado de la región I de aire, para el modelo II y III.

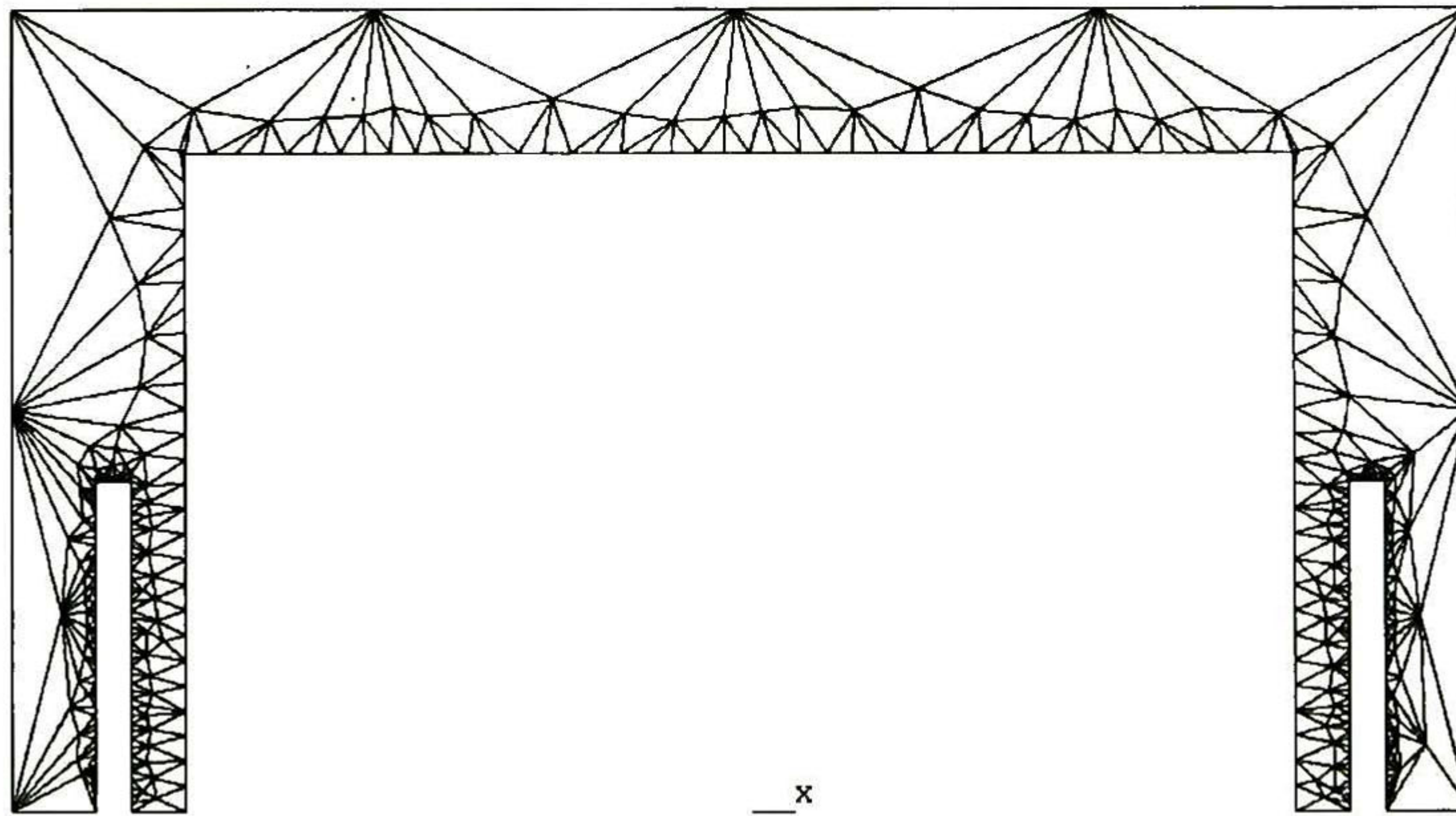


Figura 4.21: Mallado de la región externa de aire, para el modelo II y III.



---

## Capítulo 5

# Resultados

---

En este capítulo se presentan los resultados y análisis de diferentes tipos de transformadores eléctricos, aplicando los tres modelos de la técnica de los elementos finitos: magnetostático, en el dominio de la frecuencia y en el dominio del tiempo. Se hace un estudio de los factores que mas influyen en el modelado y en el desempeño de los transformadores, iniciando con un transformador monofásico hasta un trifásico. En el modelado se incorporan elementos circuitales en el dominio del elemento finito. El transformador es alimentado con fuentes de voltaje independientes.

### 5.1. Análisis de una bobina en el caso axisimétrico

Primero se estudia una bobina con núcleo de aire que tiene simetría axisimétrica respecto al eje vertical.

La bobina es de cobre con geometría rectangular y cada lado es de 0.02 metros, tiene 500 vueltas, la distancia al eje de simetría es de 0.02 metros como se muestra en la figura 5.1, la resistencia del cobre es  $3,04875 \times 10^{-8} \Omega - m$ . Como la bobina está inmersa en el aire se utilizan elementos de frontera infinita a una distancia de 24 cm. Esta bobina también puede representar a un transformador ante la prueba de vacío.



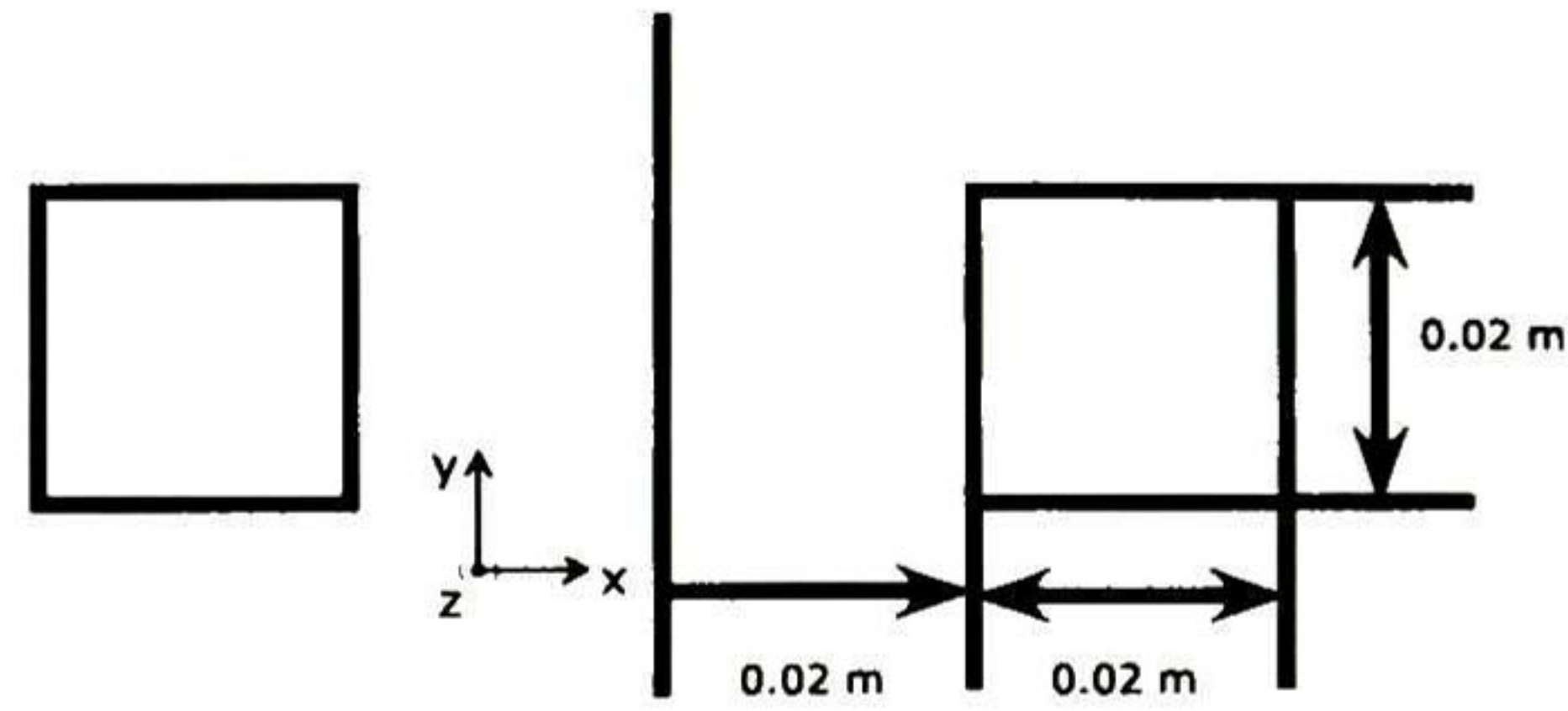


Figura 5.1: Bobina axisimétrica.

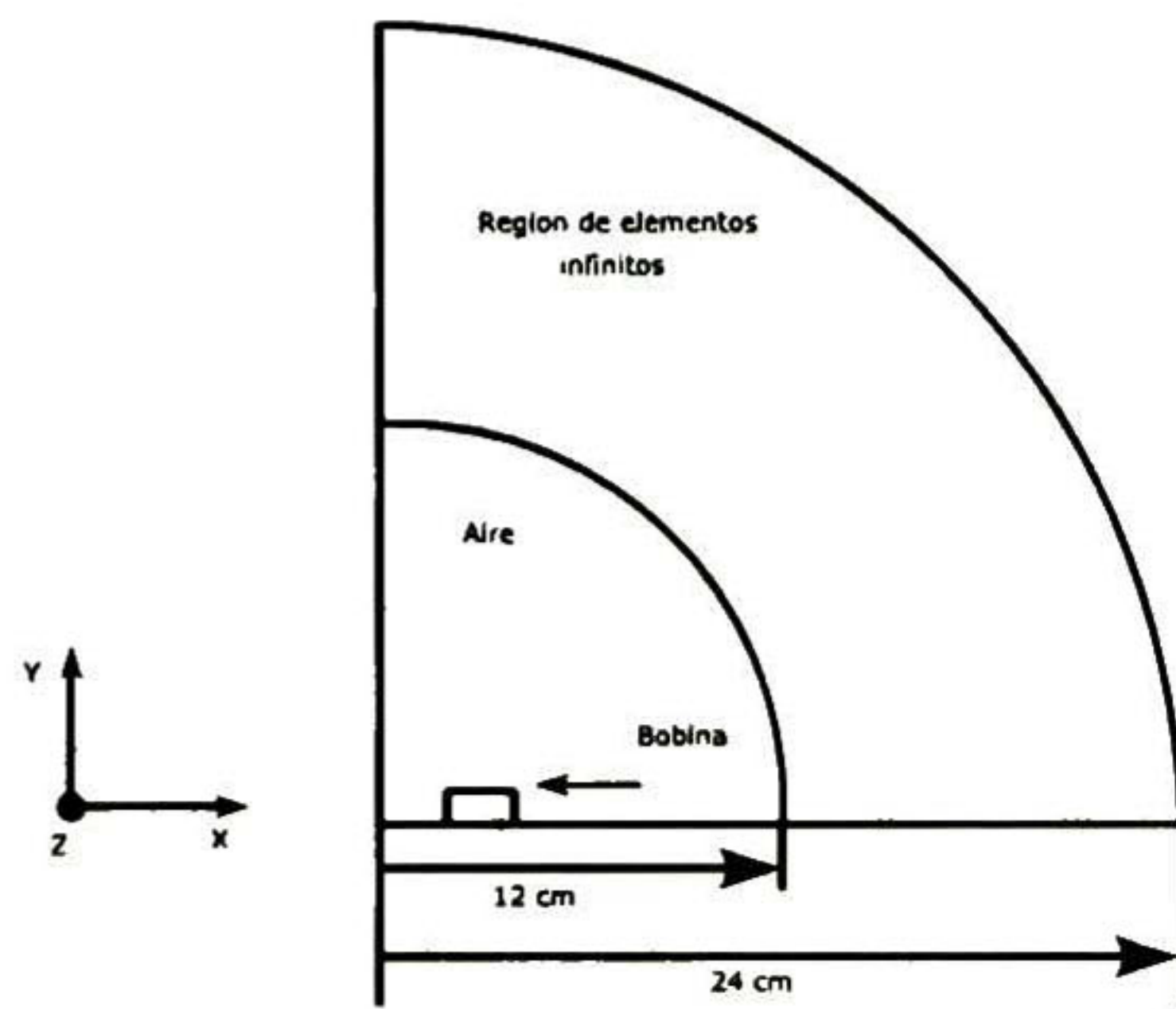


Figura 5.2: 1/4 del modelo axisimétrico.

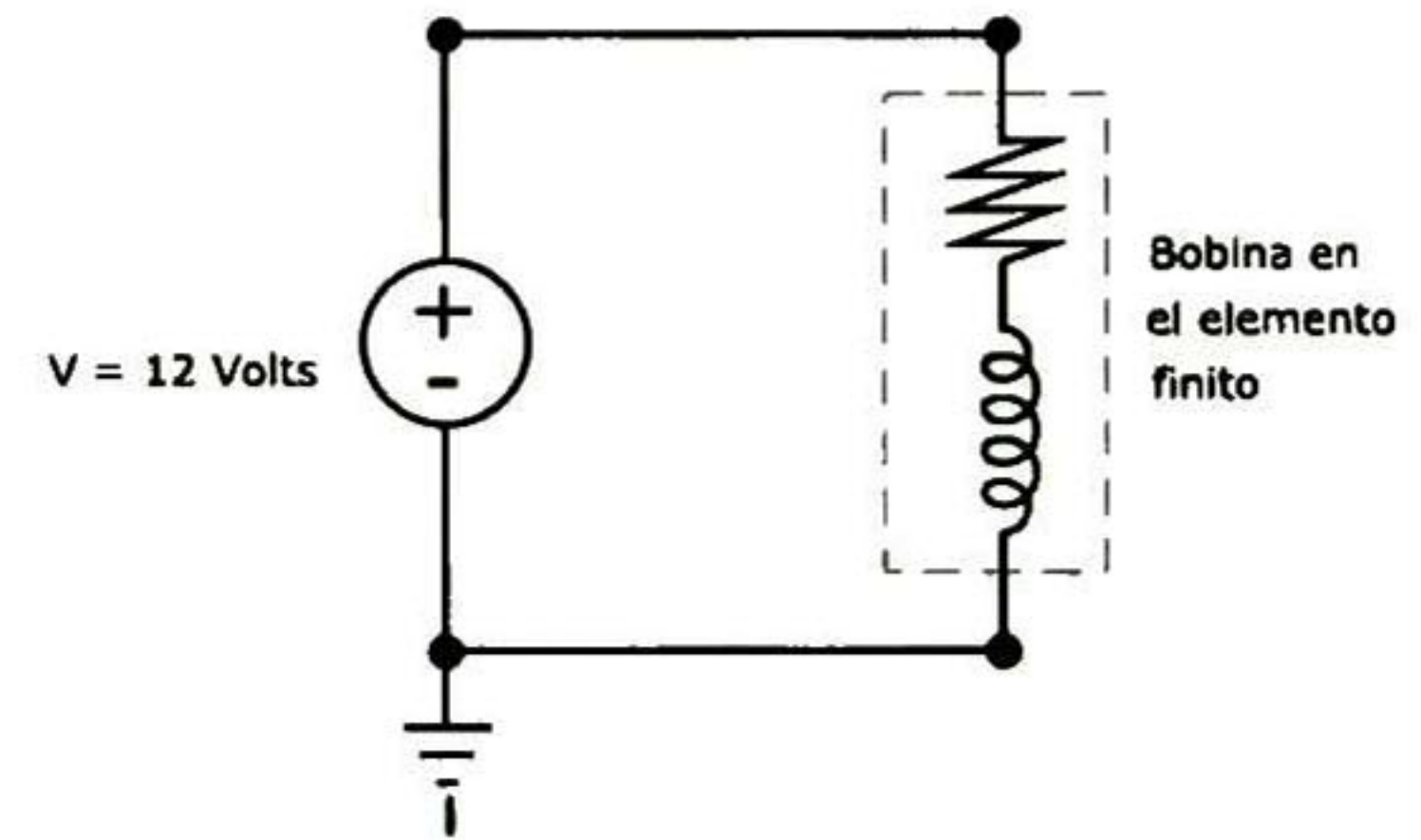


Figura 5.3: Circuito equivalente.

Se aprovecha la simetría de esta configuración y por esta razón solo se modela una cuarta parte del dominio como se muestra en la figura 5.2. Con esta bobina se analizan los tres modelos de elemento finito. Para cada modelo se utiliza una fuente de voltaje independientemente aplicada en las terminales de la bobina como se indica en la figura 5.3. Se calculan los parámetros mas importantes: potencial magnético, densidad de campo, corriente, y parámetros circuitales equivalentes,  $R$ ,  $L$ .



### 5.1.1. Modelo Magnetostático axisimétrico.

La fuente de voltaje aplicada es de CC. con valor de 12 Volts. Se calculan los parámetros eléctricos, resistencia e inductancia del transformador con las formulas tradicionales [ ] y con elemento finito.

Los resultados se muestran en la Tabla 5.1. En estos resultados se observa que los parámetros calculados con las formulas de diseño y de elemento finito son prácticamente iguales. La constante de integración es la relación  $L/R = 0.0032$  Segundos. Las líneas equipotenciales del potencial magnético se muestran en la figura 5.4. La distribución de la densidad de flujo se muestra en la figura 5.5. Como se esperaba, hay mayor concentración de flujo en la zona interna de la bobina. Estos resultados servirán de base de comparación con otros modelos y para obtener otros equivalentes de bobina no axisimétrica.

Tabla 5.1: Parámetros eléctricos del caso Magnetostático axisimétrico.

		Manual	Ansys	Relación
	Inductancia (Henry)	$1.2654 \times 10^{-2}$	$1.2745 \times 10^{-2}$	0.9929
Análisis estático	Resistencia (ohms)	3.99084	3.99084	1.00
	Corriente en (Amperes)	3.0069	3.0069	1.00

### 5.1.2. Modelo en el dominio de la frecuencia.

La fuente de voltaje aplicada es senoidal de amplitud de 12 volts y frecuencia 60 Hz. Se calculan los parámetros eléctricos, resistencia e inductancia del transformador con las formulas tradicionales [22] y con los resultados del elemento finito.



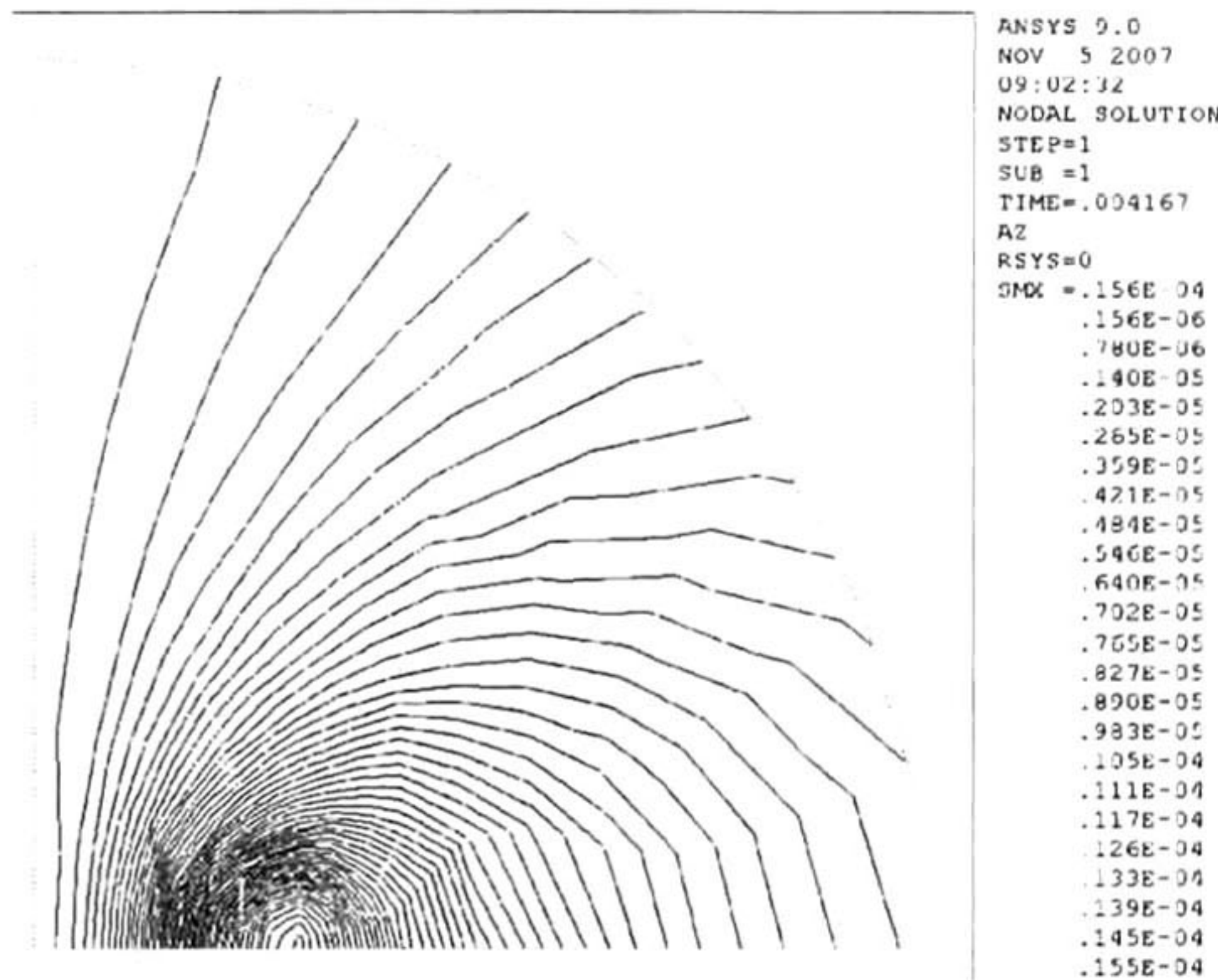


Figura 5.4: Potencial Magnético, estático axisimétrico.

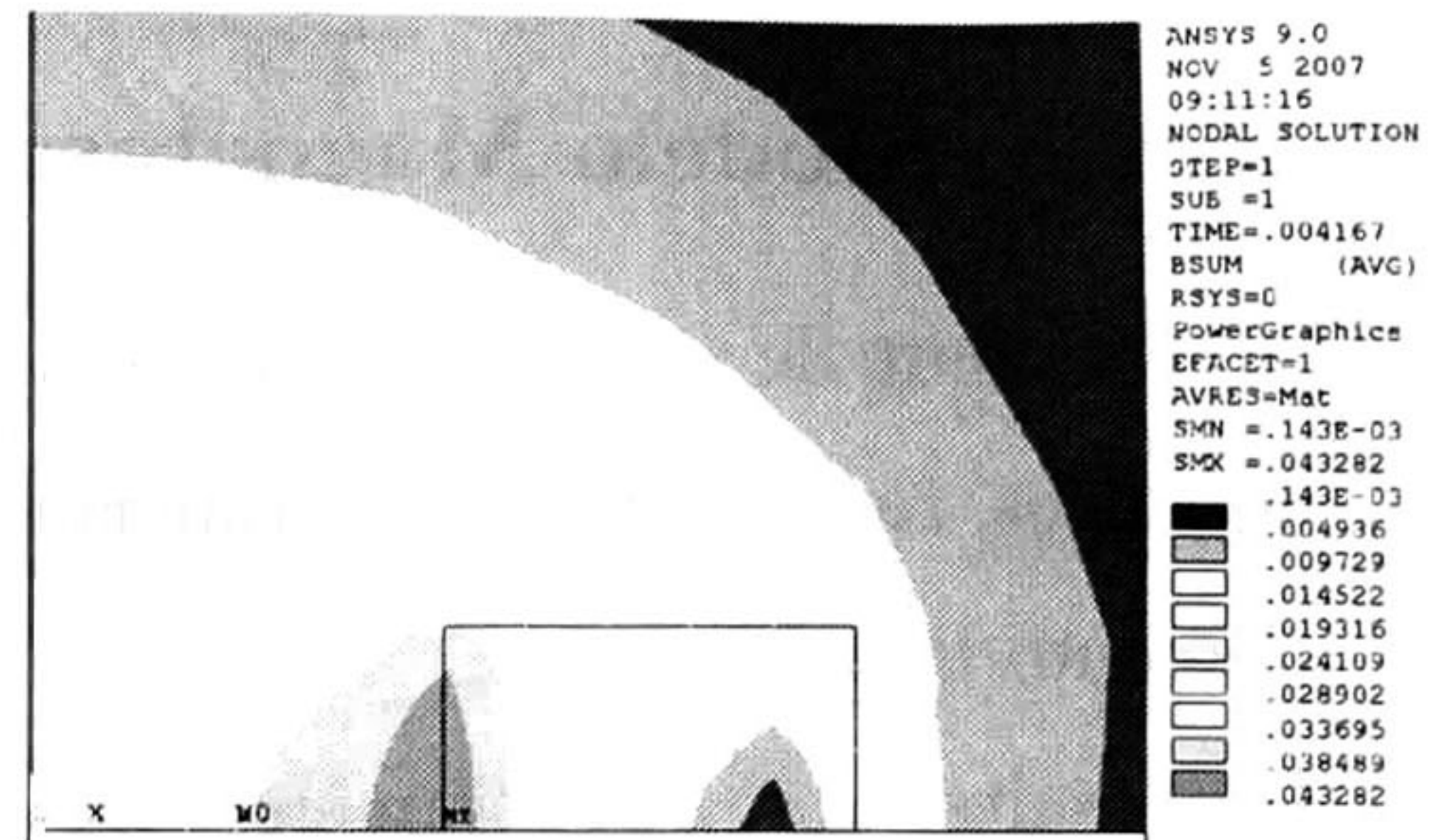


Figura 5.5: Densidad de Flujo, estático axisimétrico.

Los resultados se muestran en la Tabla 5.2. En estos resultados se observa que los parámetros de diseño y de elemento finito son prácticamente iguales. La constante de tiempo es la relación  $L/R = 0.0032$  segundos. Las líneas equipotenciales del potencial magnético se muestran en las figuras 5.6 y 5.7, parte real e imaginaria, respectivamente. La distribución de la densidad de flujo se muestra en la figura 5.8 y 5.9 parte real e imaginaria respectivamente. Al igual que el caso magnetostático hay mayor concentración de flujo en la zona interna de la bobina. Se observa total correspondencia con los resultados en cuanto a los parámetros eléctricos y de campo con los obtenidos en el caso magnetostático

Tabla 5.2: Parámetros eléctricos (armónica)

		Manual	Ansys	Relación
Análisis en el	Inductancia (Henry)	$1.2654 \times 10^{-2}$	$1.2745 \times 10^{-2}$	0.9929
dominio de la	Impedancia en $\Omega$	$3.99084 + 4.8048i$	$3.99084 + 4.7704i$	0.9958
frecuencia	Corriente en A.	1.9212	1.9212	1.00



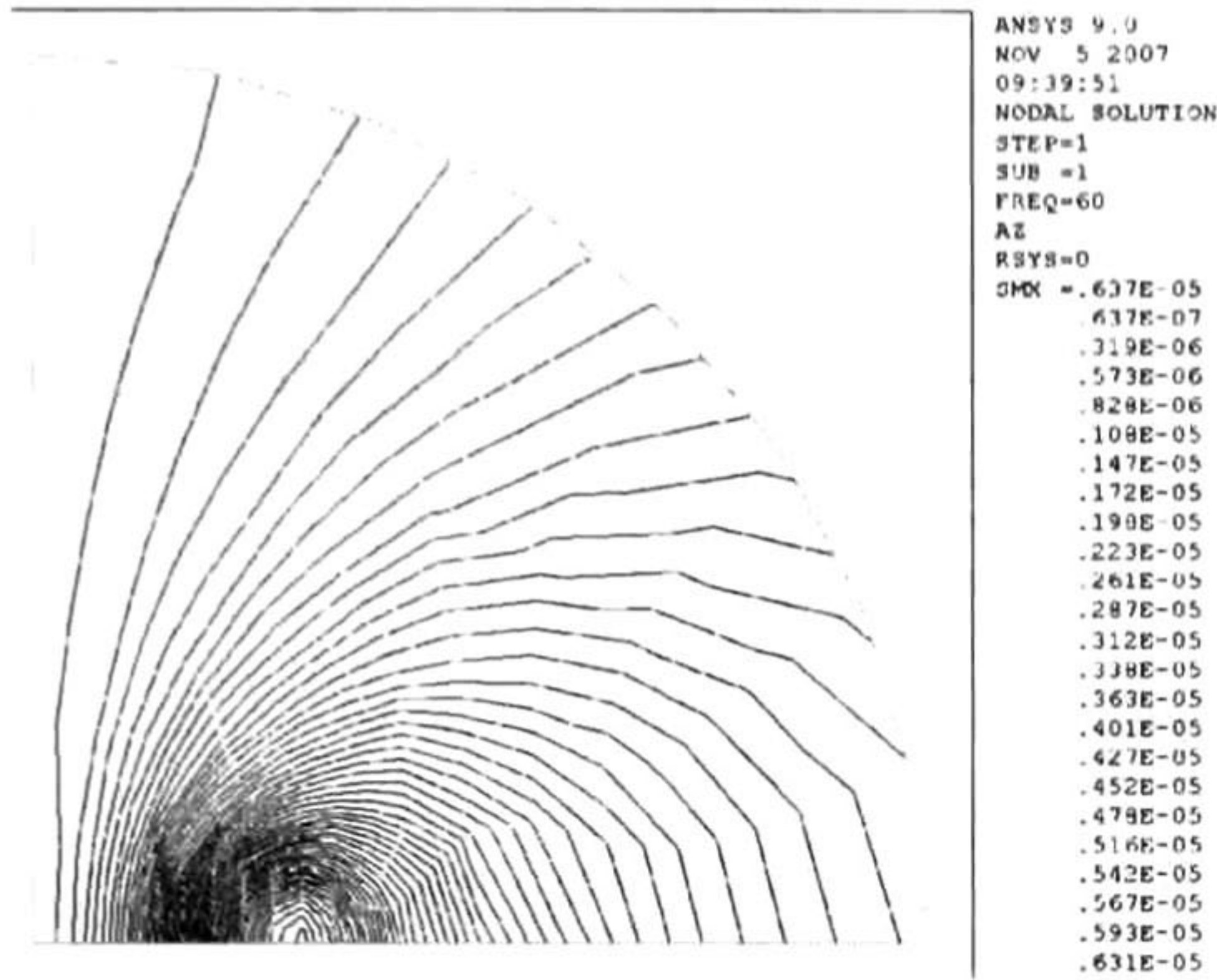


Figura 5.6: Potencial magnético, parte real axisimétrico.

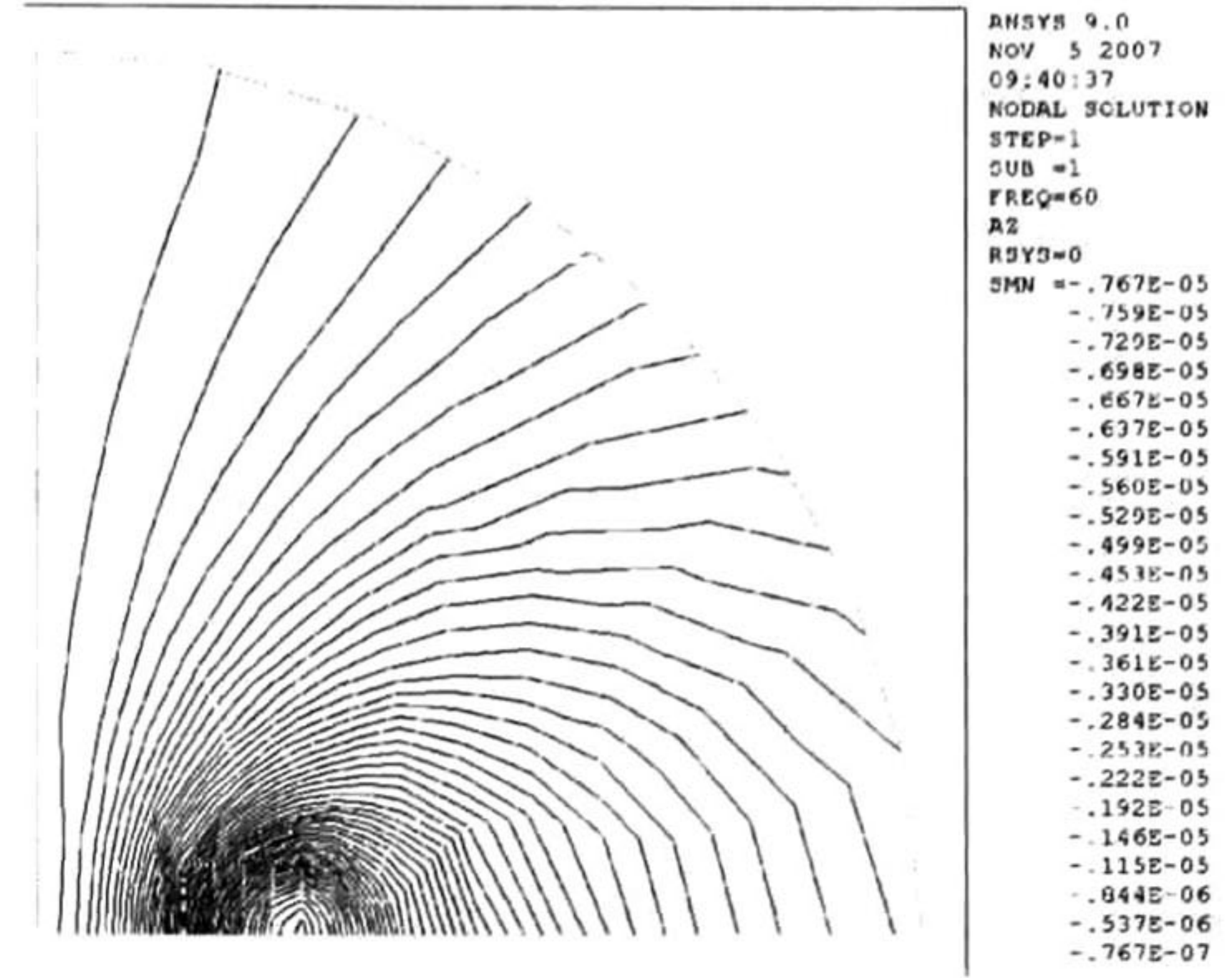


Figura 5.7: Potencial magnético, parte imaginaria axisimétrico.

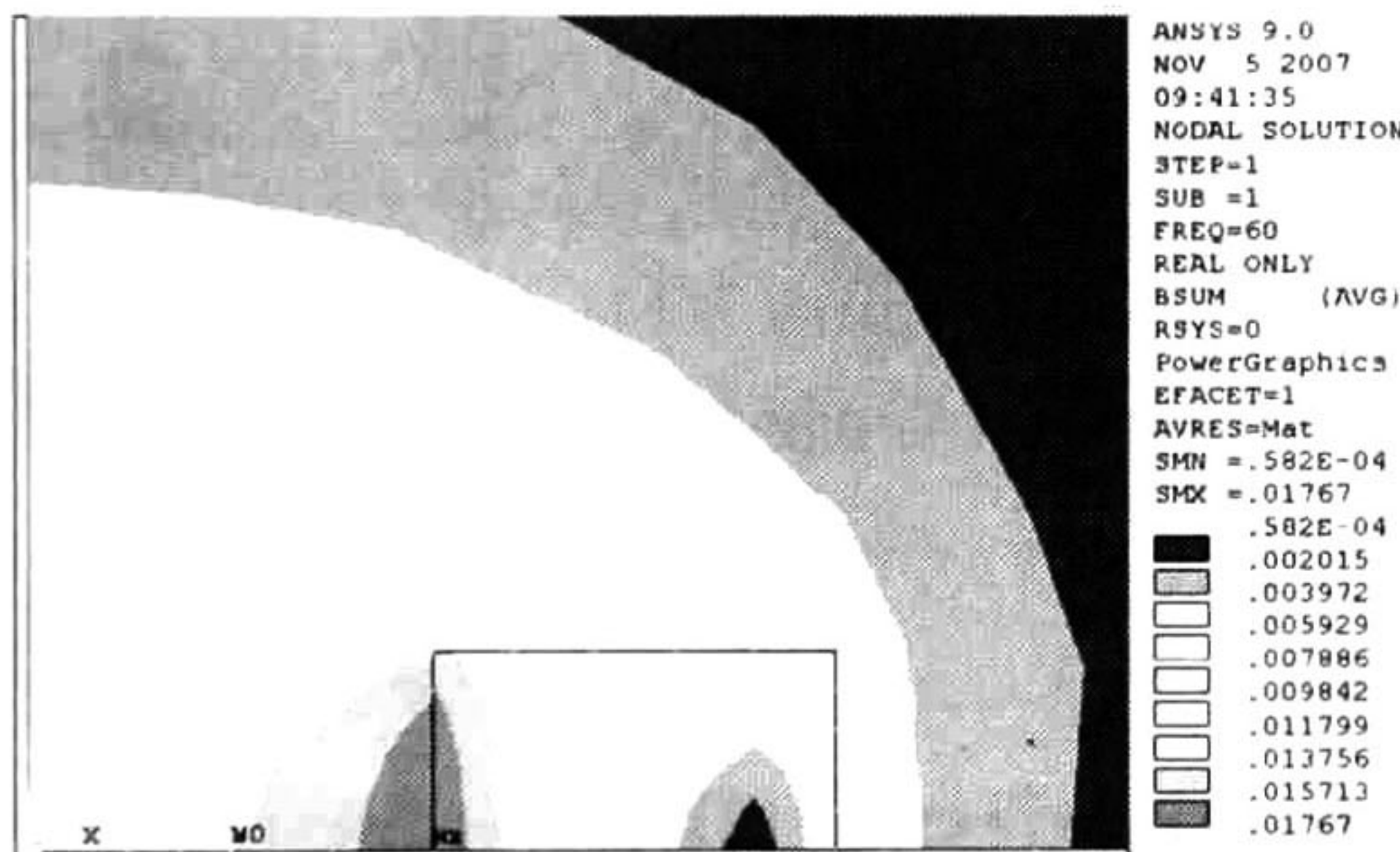


Figura 5.8: Densidad de flujo, parte real axisimétrico.

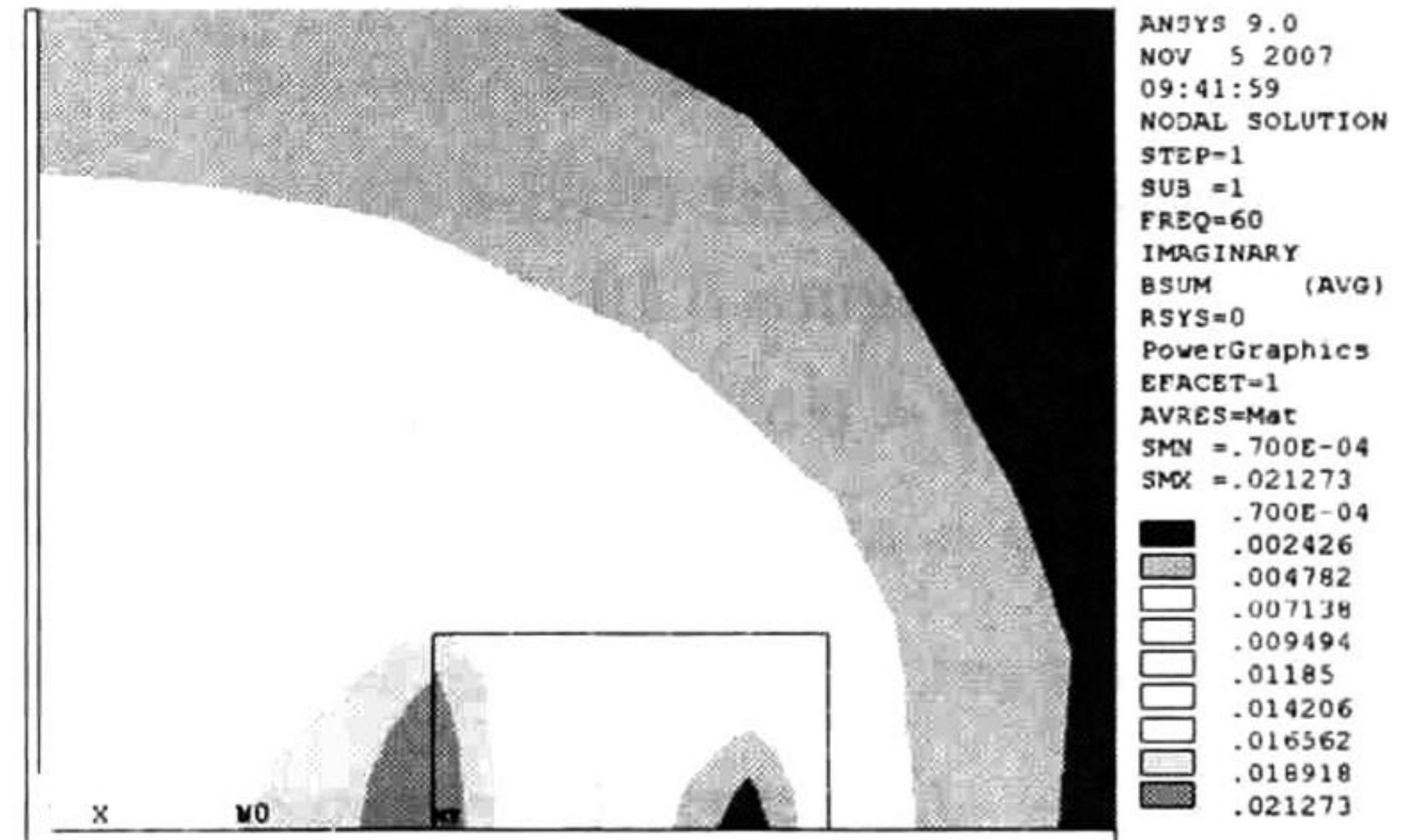


Figura 5.9: Densidad de flujo, parte imaginaria axisimétrico.

### 5.1.3. Modelo en el dominio del tiempo.

Se aplica una fuente de voltaje senoidal en las terminales de la fase para los casos armónico y transitorio y para el caso estático se aplica un voltaje de CD. En la figura 5.13 se muestra



la respuesta de la corriente de la bobina. Se observa el mismo valor de la corriente en estado estable con respecto al caso armónico. La corriente después de un valor máximo se amortigua en forma exponencial, con una constante de tiempo de 0.0032 segundos hasta el estado estable. Las líneas de flujo equipotenciales y de densidad de flujo para un instante de tiempo de 0.0232 segundos (variable ya estabilizada), se muestran en las figuras 5.10, 5.11, respectivamente. Estos patrones son prácticamente iguales a los obtenidos por los modelos anteriores. Para las condiciones en estado estable los parámetros circuitales, inductancias y resistencias son iguales a los obtenidos en los modelo magnetostático y armónico.

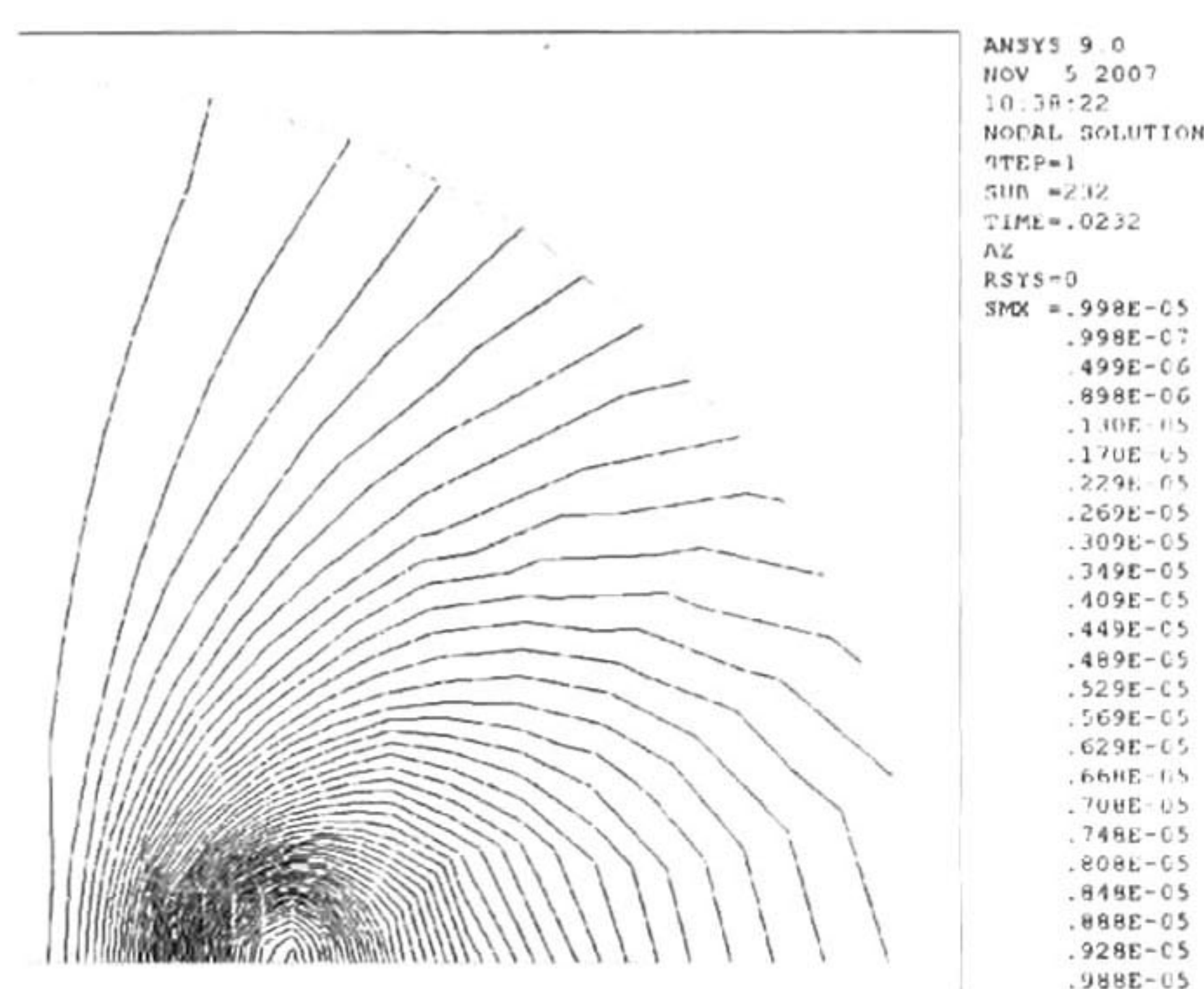


Figura 5.10: Potencial magnético en  $t = 0.0232$  s axisimétrico.



Figura 5.11: Densidad de flujo magnético en  $t = 0.0232$  s axisimétrico.

## 5.2. Transformador con bobinas planares.

En este modelo se considera que la bobina tiene los mismos parámetros que la bobina axisimétrica, pero se modela sin considerar simetría con respecto al eje central de la pierna izquierda. Se analizan los tres modelos del elemento finito, como en el caso anterior.

Primero se modela la bobina completa y posteriormente se modela tomando en cuenta



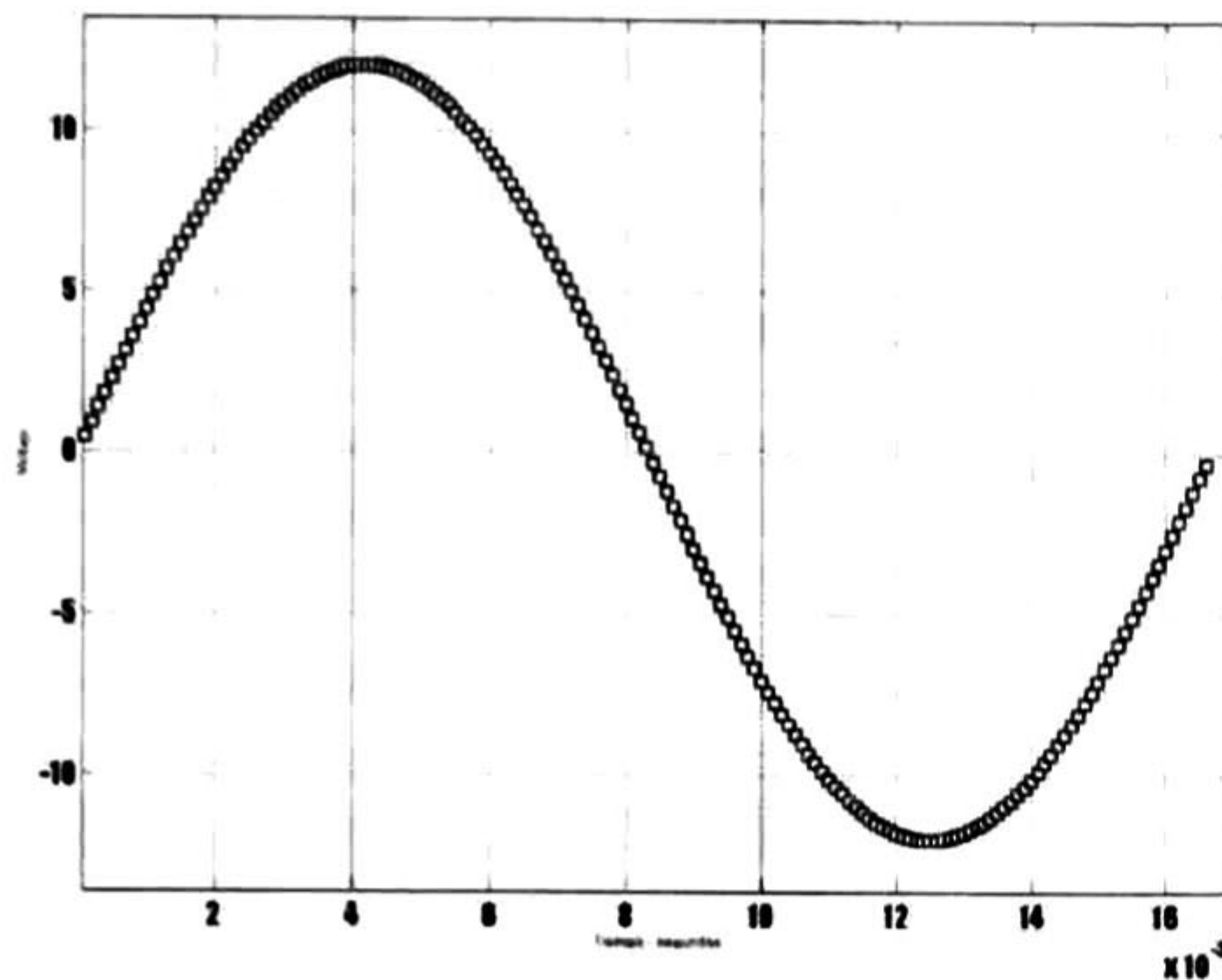


Figura 5.12: Voltaje aplicado en las terminales de la bobina.

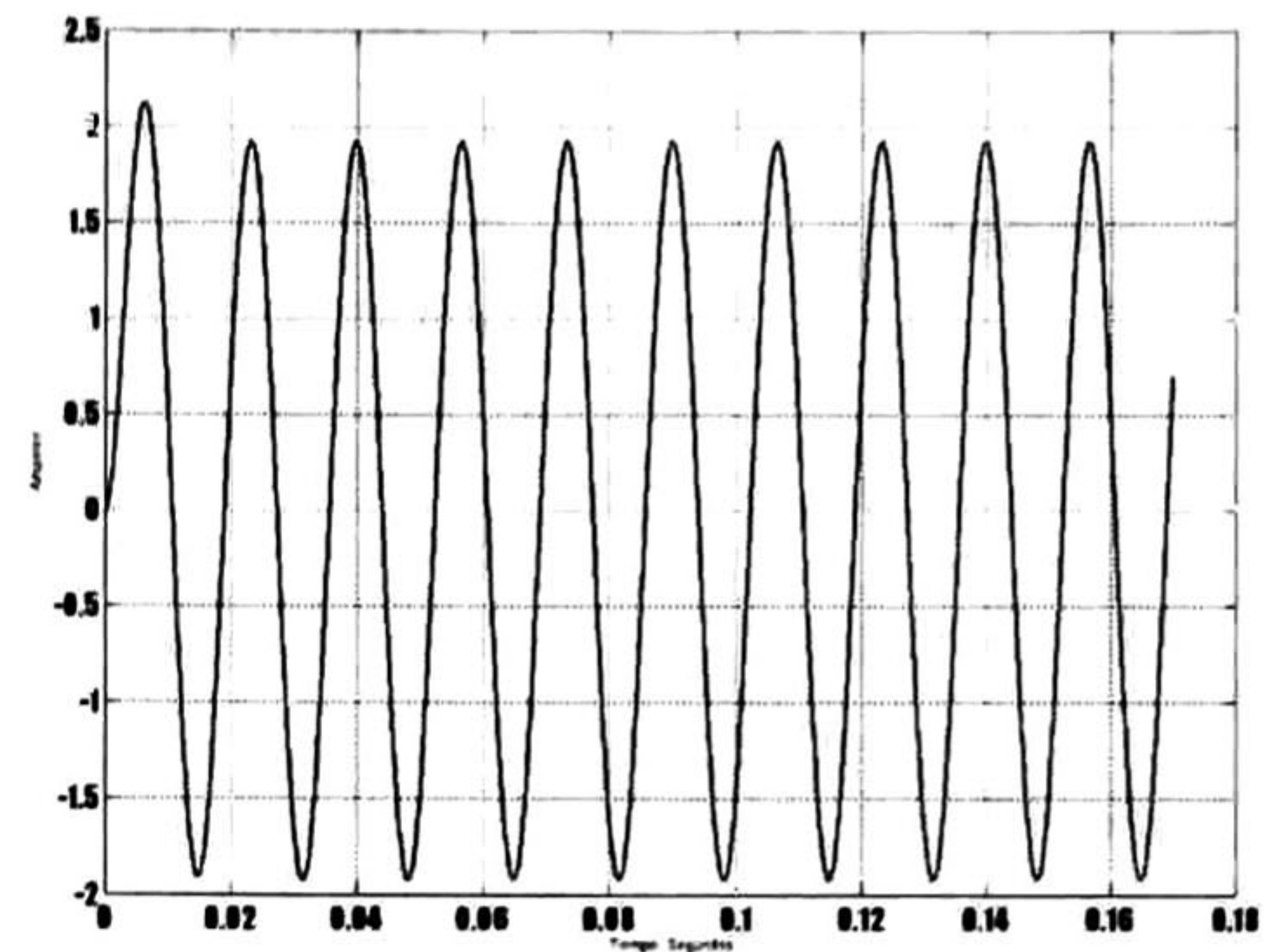


Figura 5.13: Corriente en el caso transitorio, axisimétrico.

simetría respecto del eje horizontal, por lo que solo se simula la mitad del transformador. En cada modelo se aplica la misma fuente de voltaje que en el caso de la bobina axisimétrica.

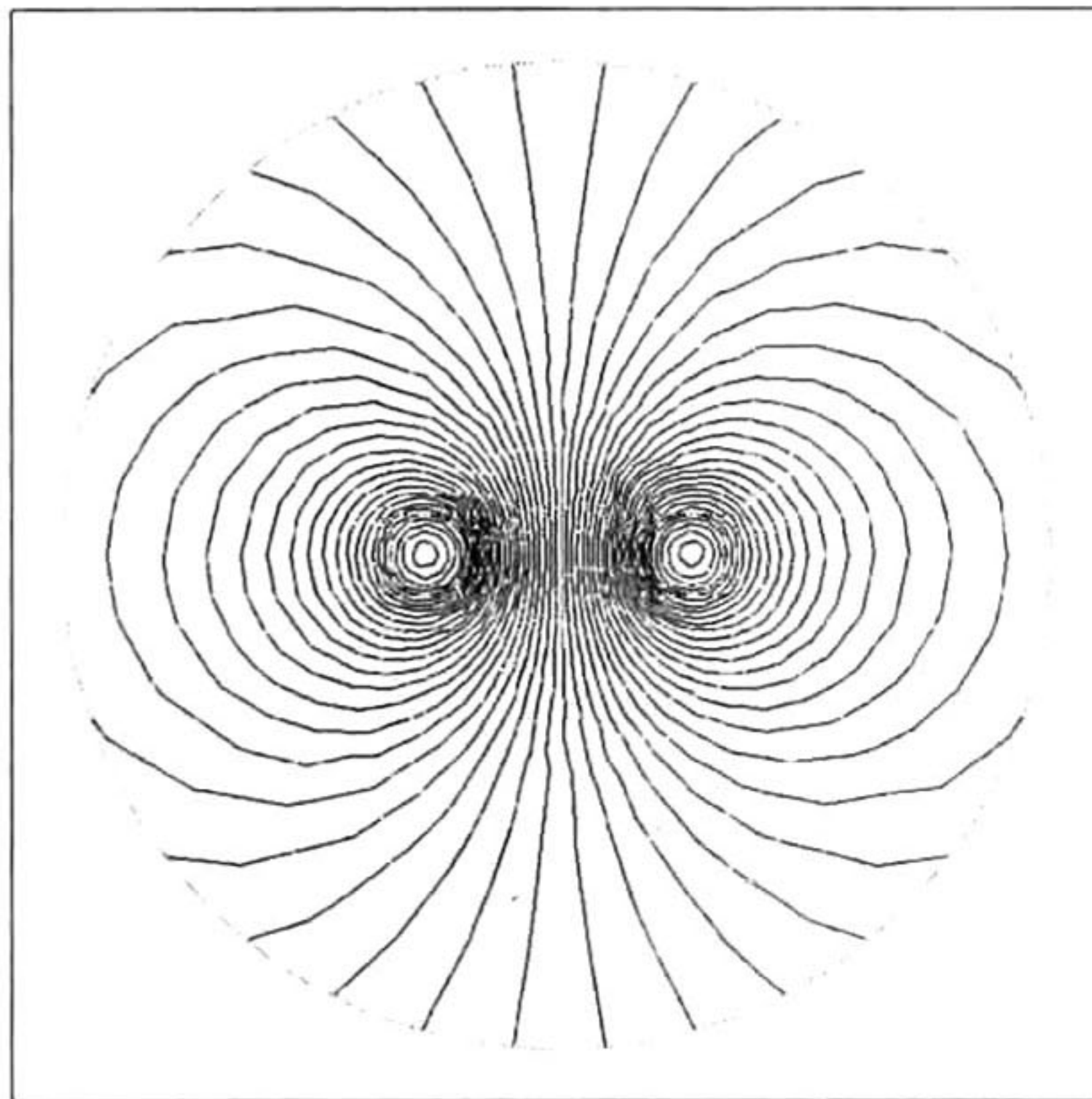
### 5.2.1. Transformador con bobinas planares modelo magnetostático.

Se considera que la bobina tiene una longitud, respecto del eje  $z$  de  $1/4$  del perímetro promedio de la bobina axisimétrica. Para incluir el efecto de la resistencia e inductancia de conexión no considerado en los modelos bidimensionales se añaden elementos circuitales a la bobina de valor igual a la mitad de la resistencia e inductancia calculada del modelo de la bobina axisimétrica. Los parámetros eléctricos para el caso magnetostático del modelo completo se muestra en la tabla 5.3. Se observa que los parámetros son prácticamente iguales a los del caso asimétrico. Las líneas equipotenciales y densidad de flujo magnético son también prácticamente iguales a los del caso axisimétrico, como se aprecia en las figuras 5.14 y 5.15. En las figuras 5.16 y 5.17 se muestra el potencial magnético y la densidad de flujo en la trayectoria que sigue una línea recta con pendiente unitaria y que va del origen a una distancia de 12 cm. De esta curva se observa que la densidad máxima ocurre en el origen.



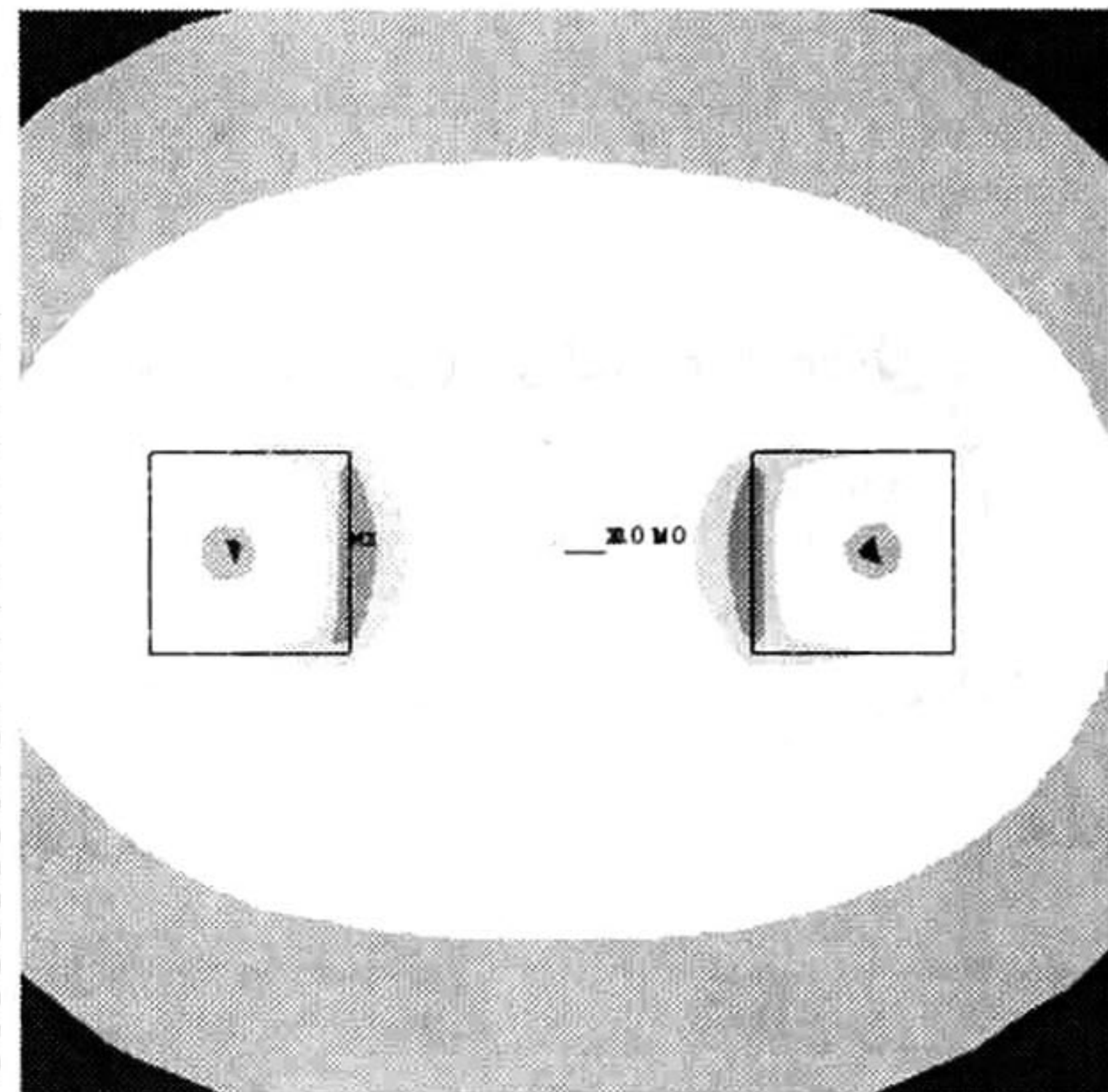
Tabla 5.3: Parámetros del modelo magnetostático planar completo.

		Manual	Ansys	Relación
Análisis estático planar	Inductancia (Henry)	$1.2654 \times 10^{-2}$	$1.2751 \times 10^{-2}$	0.9924
	Resistencia (ohms)	3.99084	3.99084	1.00
	Corriente en (Amperes)	3.0068	3.0022	0.9985



```

ANSYS 9.0
NOV 16 2007
05:09:21
NODAL SOLUTI
STEP=1
SUB =1
TIME=.004167
AZ
RSYS=0
SMN =-.653E-
SMX =.653E-0
-.640E-
-.587E-
-.535E-
-.457E-
-.405E-
-.352E-
-.274E-
-.222E-
-.170E-
-.913E-
-.391E-
.131E-0
.915E-0
.144E-0
.196E-0
.274E-0
.326E-0
.379E-0
.457E-0
.509E-0
.561E-0
.640E-0
    
```



```

ANSYS 9.0
NOV 16 2007
05:09:53
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=.004167
BSUM (AVG)
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
SMN =.574E-03
SMX =.032022
.574E-03
.004068
.007562
.011056
.014551
.018045
.021539
.025033
.028528
.032022
    
```

Figura 5.14: Flujo magnético, modelo magnetostático planar completo.

Figura 5.15: Densidad de flujo, modelo magnetostático planar completo.

### 5.2.2. Transformador con bobinas planares modelo armónico.

Los resultados en el dominio de la frecuencia de las componentes real e imaginarias, del potencial magnético y densidad de flujo se muestran en las figuras 5.18, 5.19, 5.20 y 5.21. En la Tabla 5.4 se muestran los resultados de resistencia e inductancia. Se aprecia que los resultados son iguales a los obtenidos por el caso axisimétrico y en las figuras 5.26 y 5.27 se



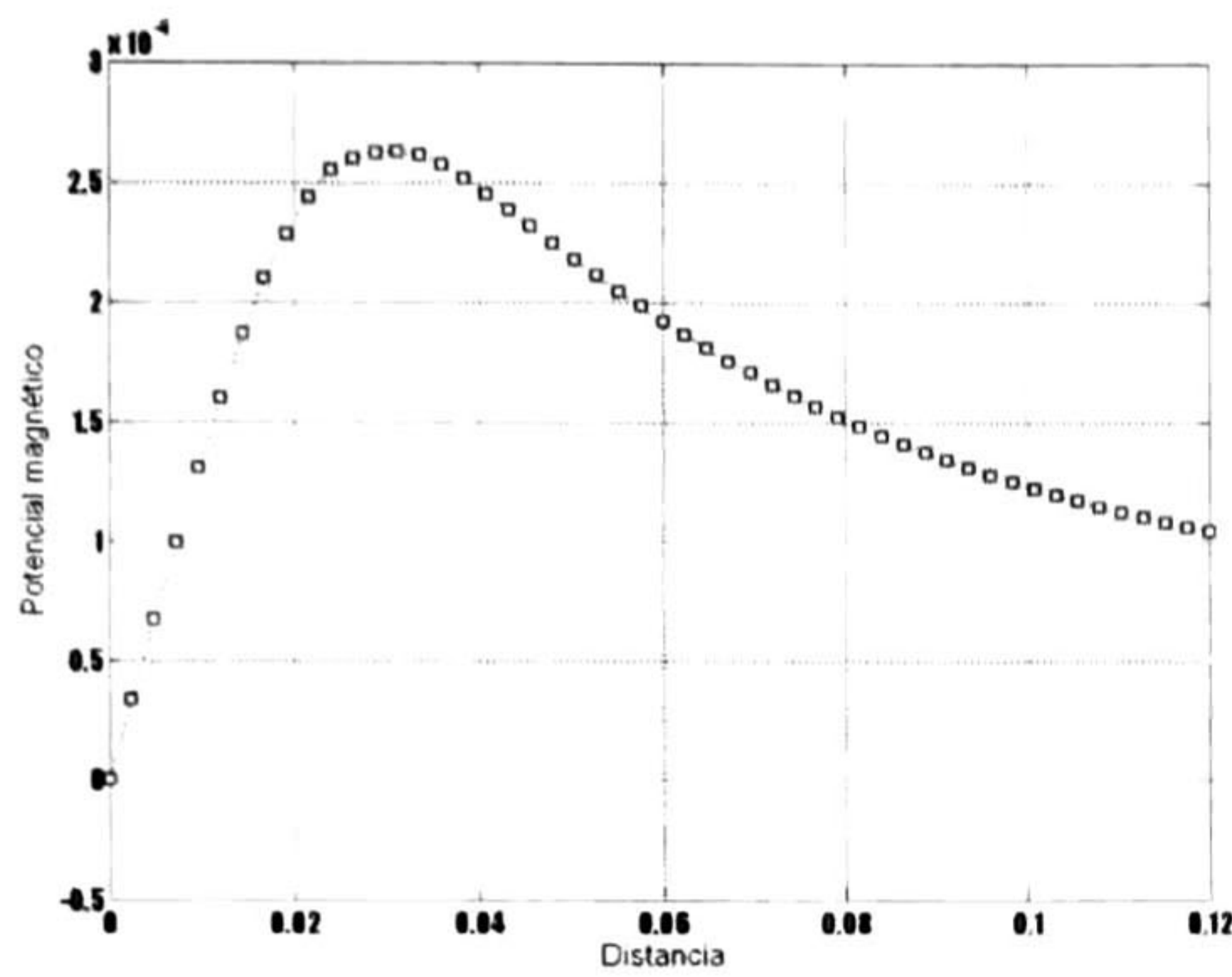


Figura 5.16: Flujo magnético en la trayectoria, modelo magnetostático completo .

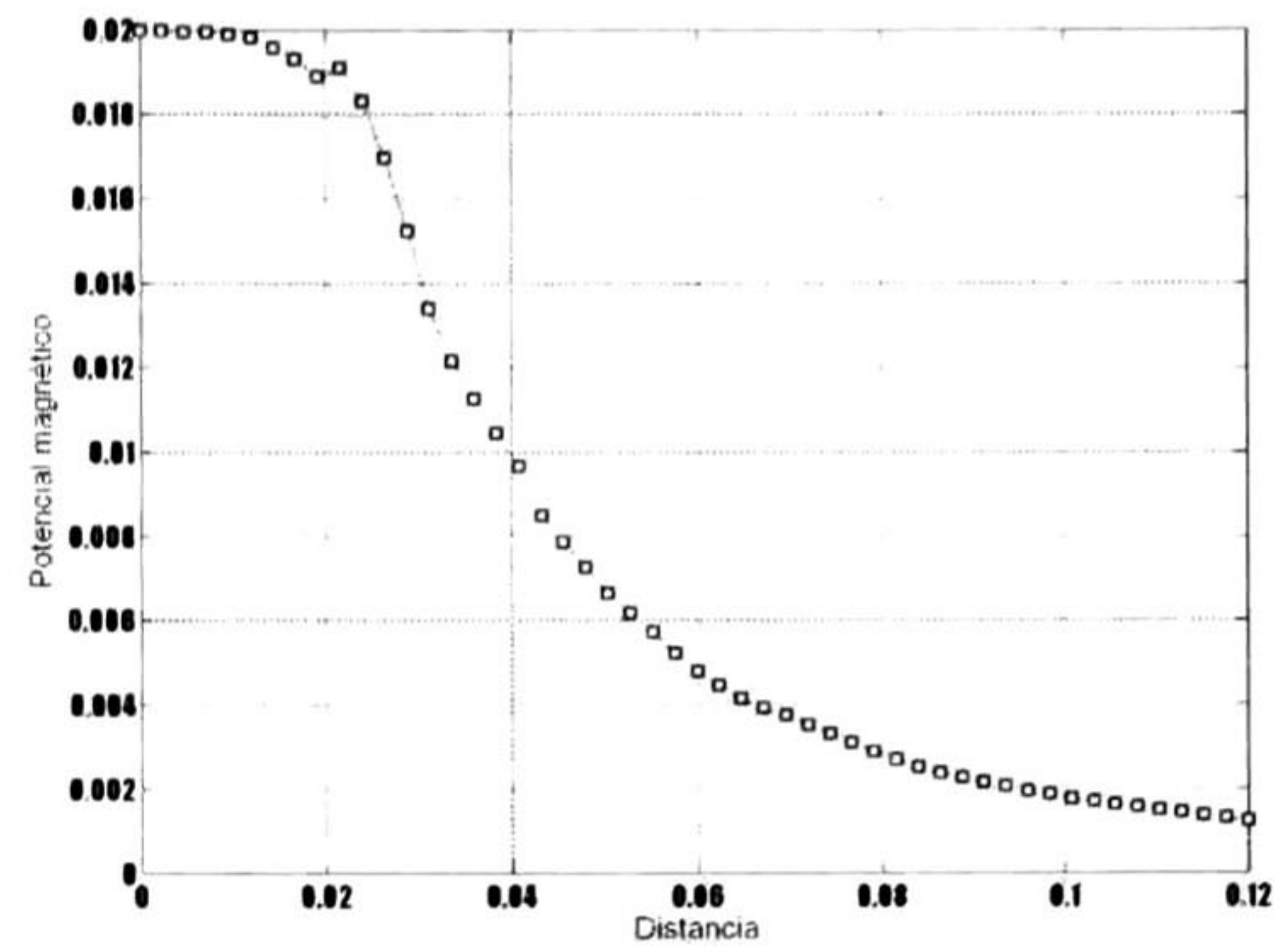


Figura 5.17: Densidad de flujo en la trayectoria, modelo magnetostático completo.

muestra el potencial magnético y la densidad de flujo en la misma trayectoria definida para el caso magnetostático.

Tabla 5.4: Parámetros del modelo planar armónico completo.

		Manual	Ansys	Relación
Análisis armónico	Inductancia (Henry)	$1.2654 \times 10^{-2}$	$1.2752 \times 10^{-2}$	0.9923
	Resistencia (Ohms)	$3.99084 + 4.8048i$	$3.9908 + 4.8074i$	0.9997
	Corriente (Amperes)	1.9212	1.9205	0.9937



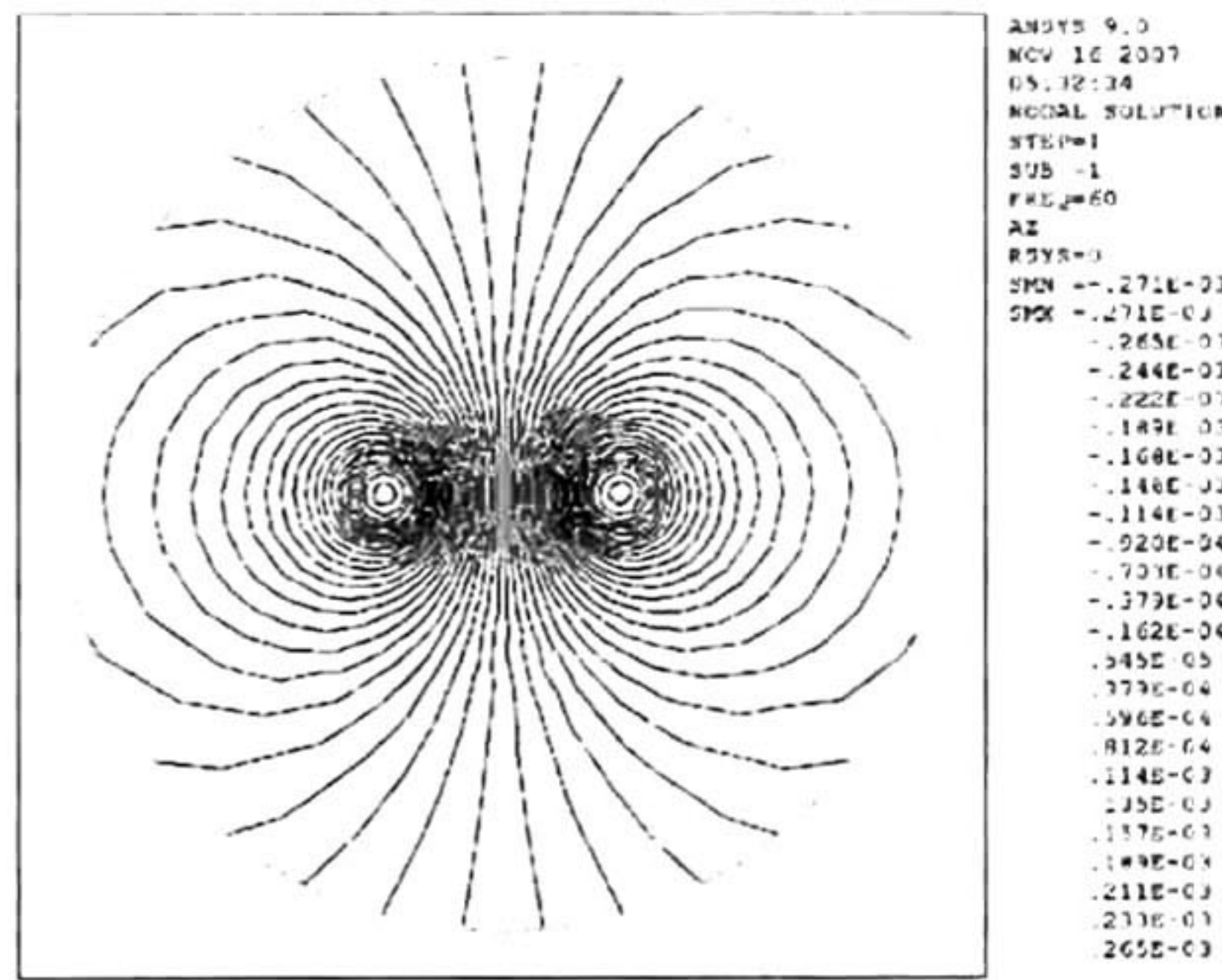


Figura 5.18: Potencial magnético, parte real modelo planar completo.

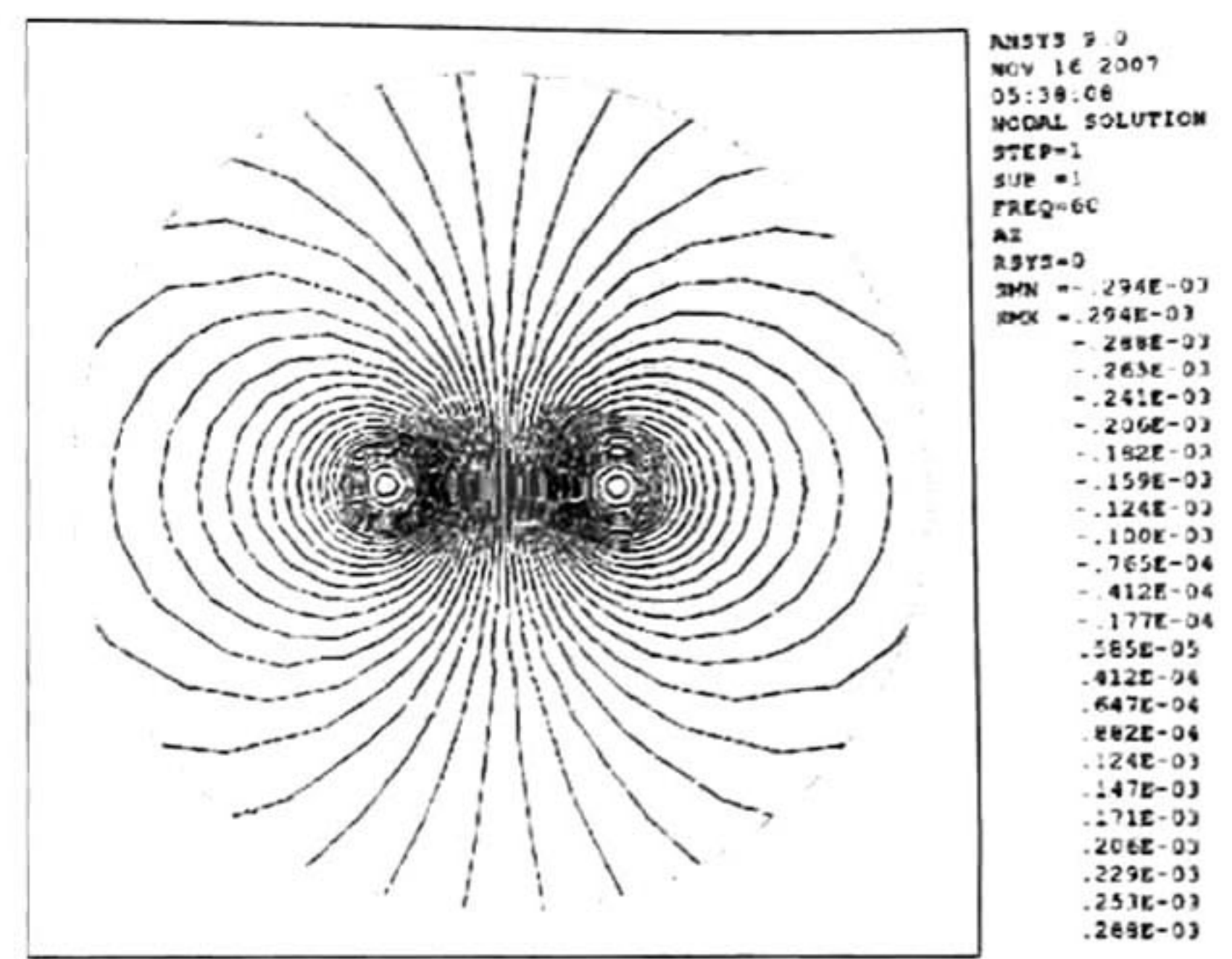


Figura 5.19: Potencial magnético, parte real, modelo planar completo.

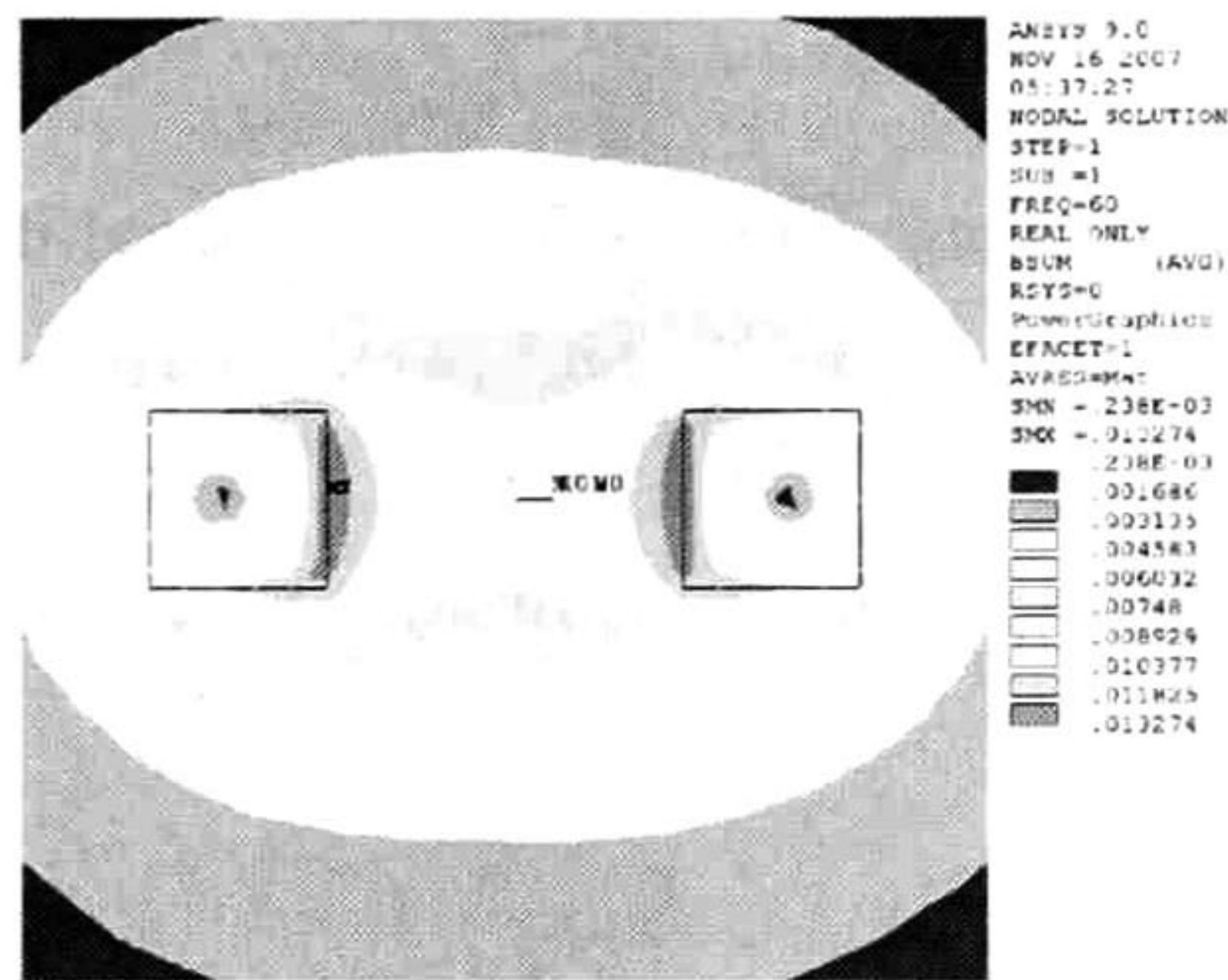


Figura 5.20: Densidad de flujo, parte real, modelo planar completo.

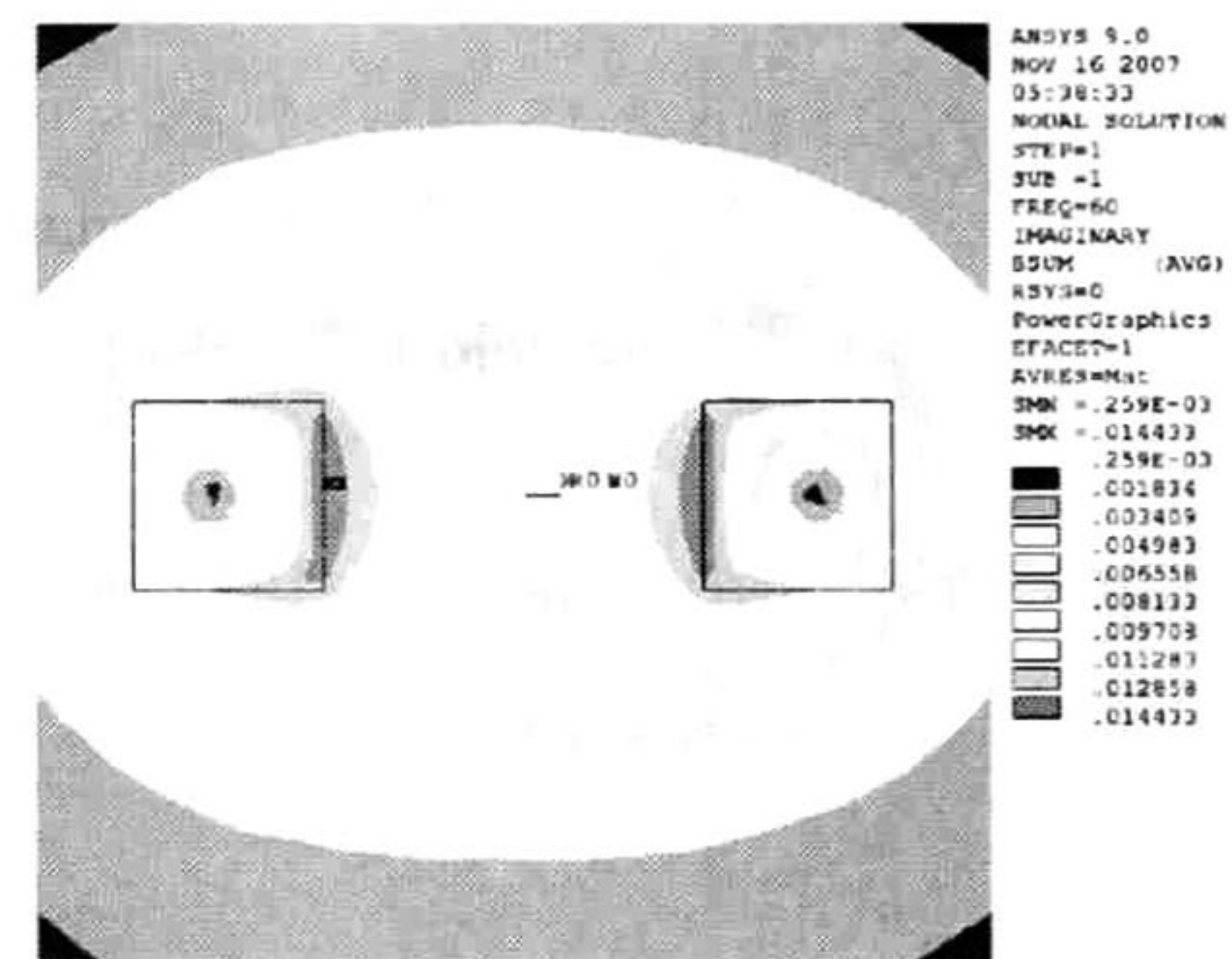


Figura 5.21: Densidad de flujo, parte imaginaria, modelo planar completo.

### 5.2.3. Transformador con bobinas planares, modelo en el tiempo.

En la figura 5.24 y en la figura 5.25 se muestran el potencial y densidad de flujo magnético en el instante de tiempo  $t = 0.0232$  s. El comportamiento de la corriente en el dominio del tiempo se muestra en la figura 5.28. De nuevo se observan resultados prácticamente iguales a las obtenidas para el caso axisimétrico. De los resultados se concluye que la bobina planar representa con buena precisión a la bobina axisimétrica. Este resultado será de gran utilidad



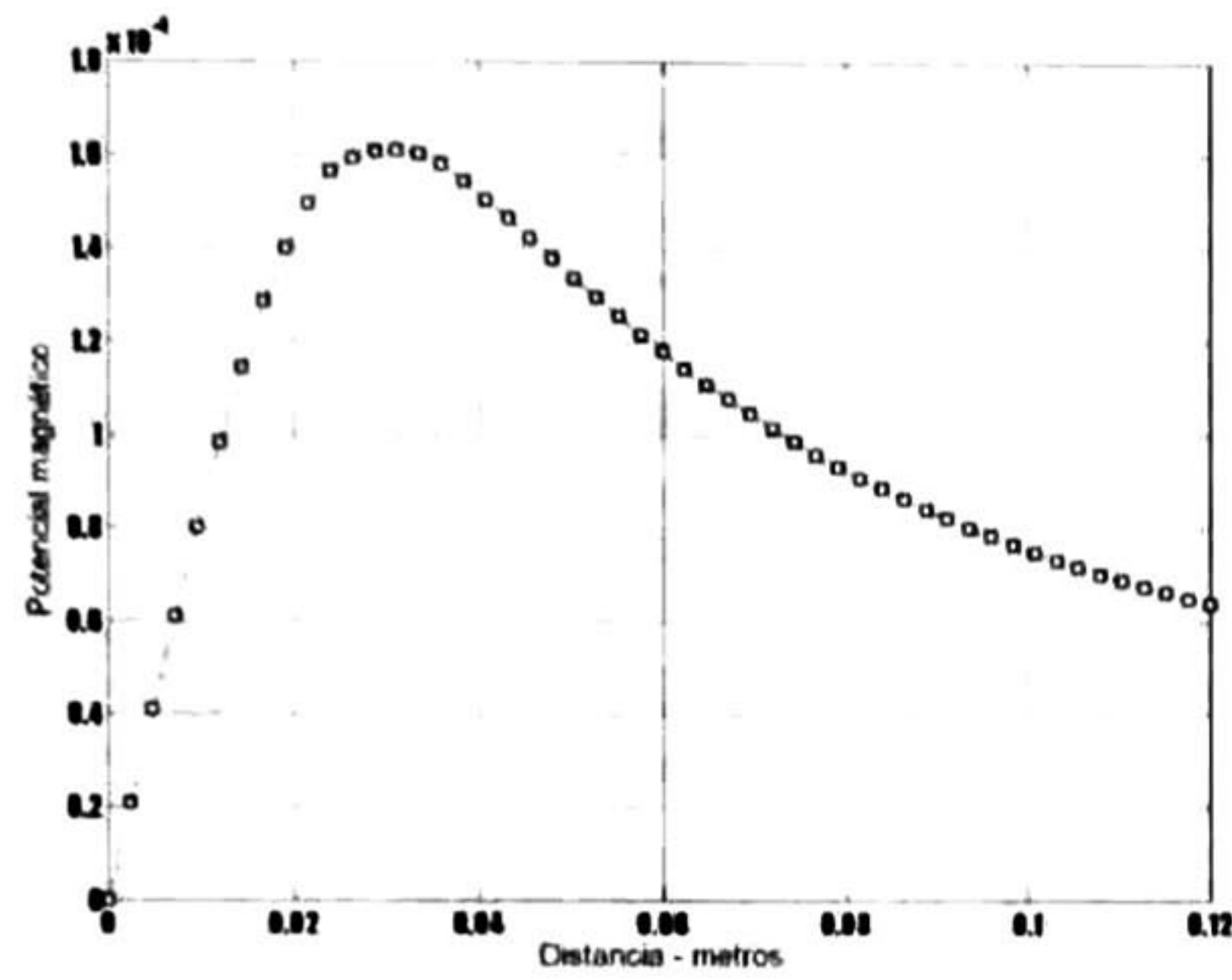


Figura 5.22: Flujo magnético en la trayectoria, modelo armónico completo.

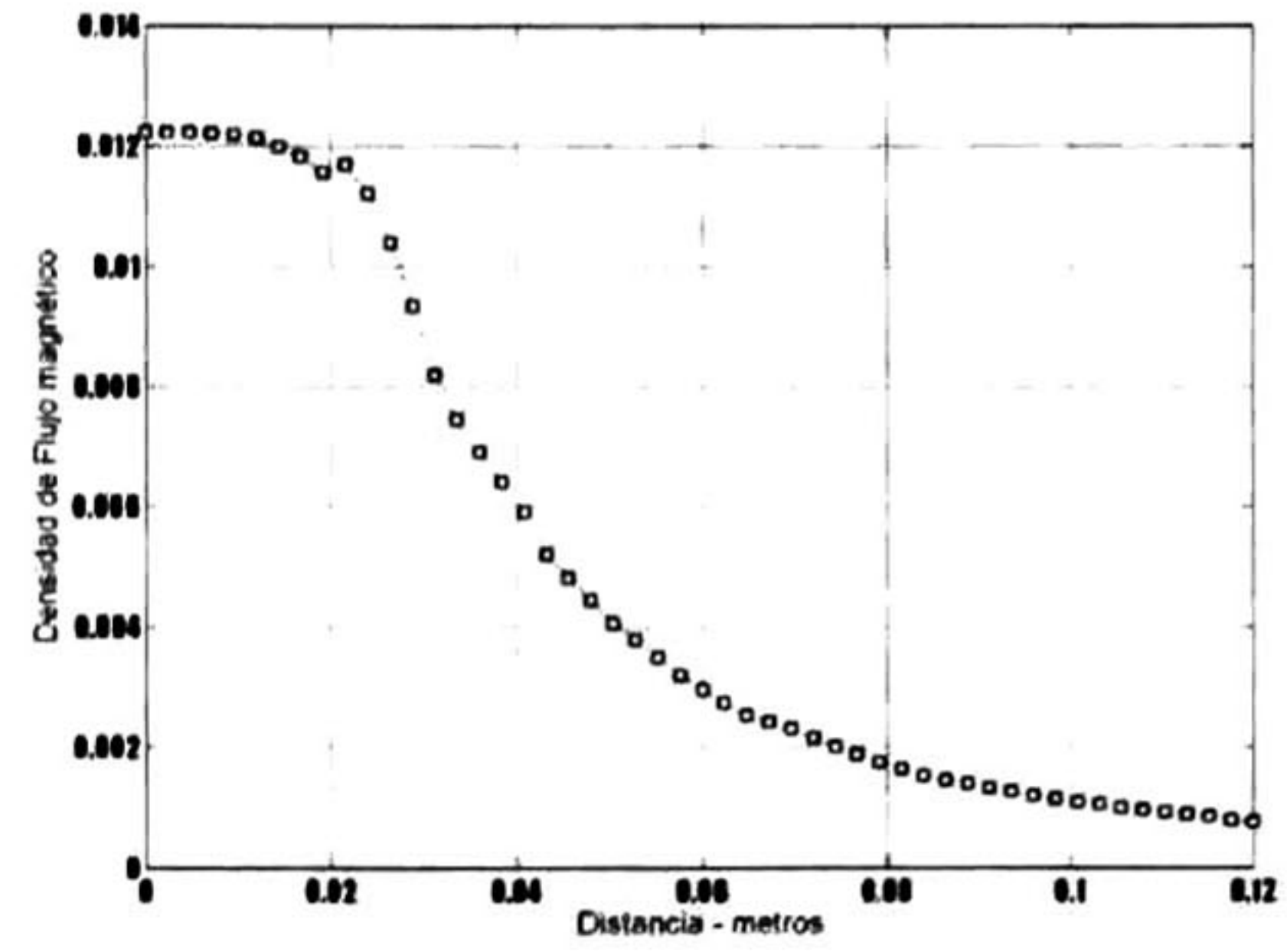


Figura 5.23: Densidad de flujo en la trayectoria modelo armónico completo.

para el modelado de bobinas axisimétricas con equivalentes bobinas planares. En las figuras 5.26 y 5.27 se muestra el potencial magnético y la densidad de flujo en la trayectoria definida anteriormente en el modelo armónico y magnetostático.

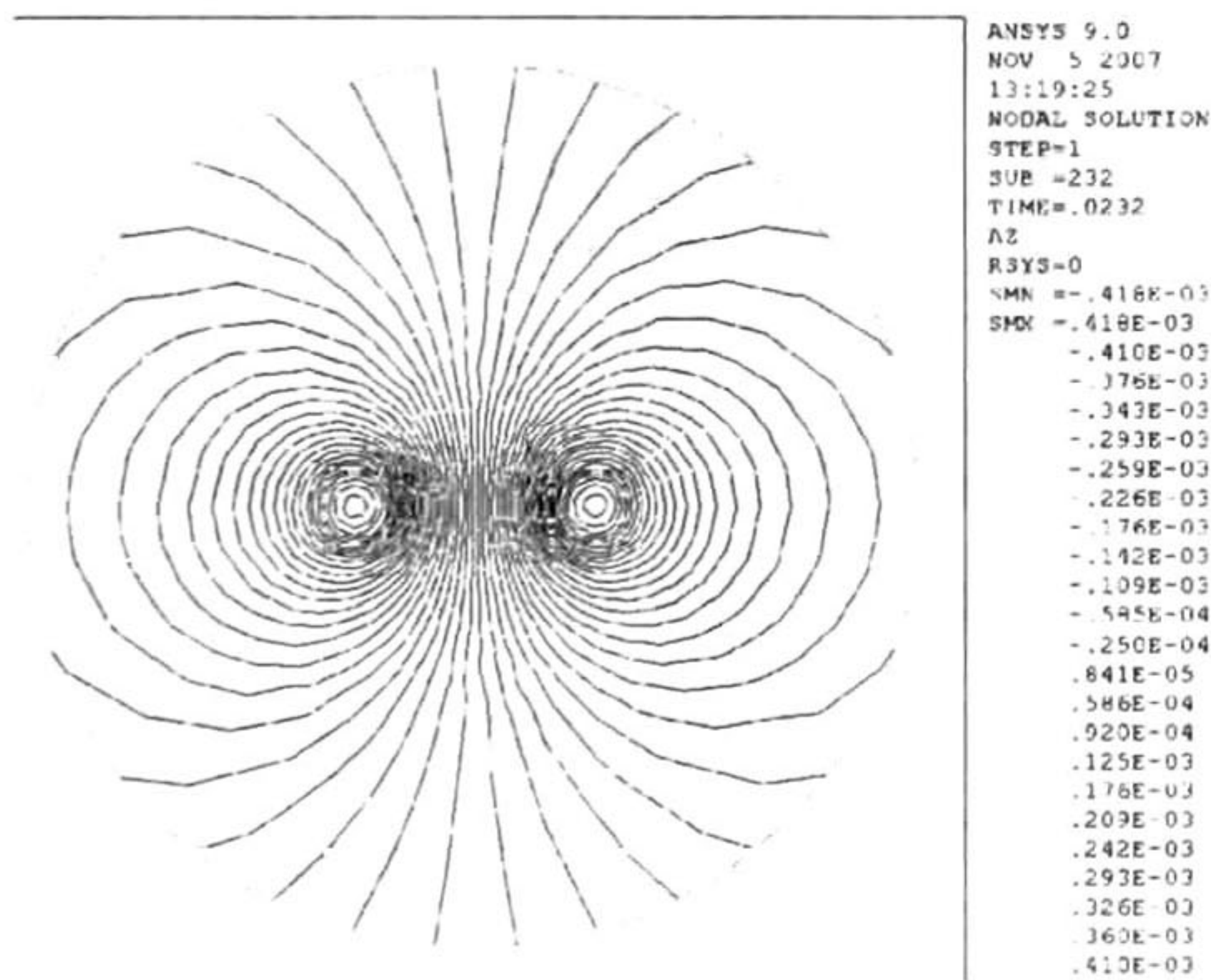


Figura 5.24: Potencial magnético, en  $t=0.0232$  s modelo planar completo.

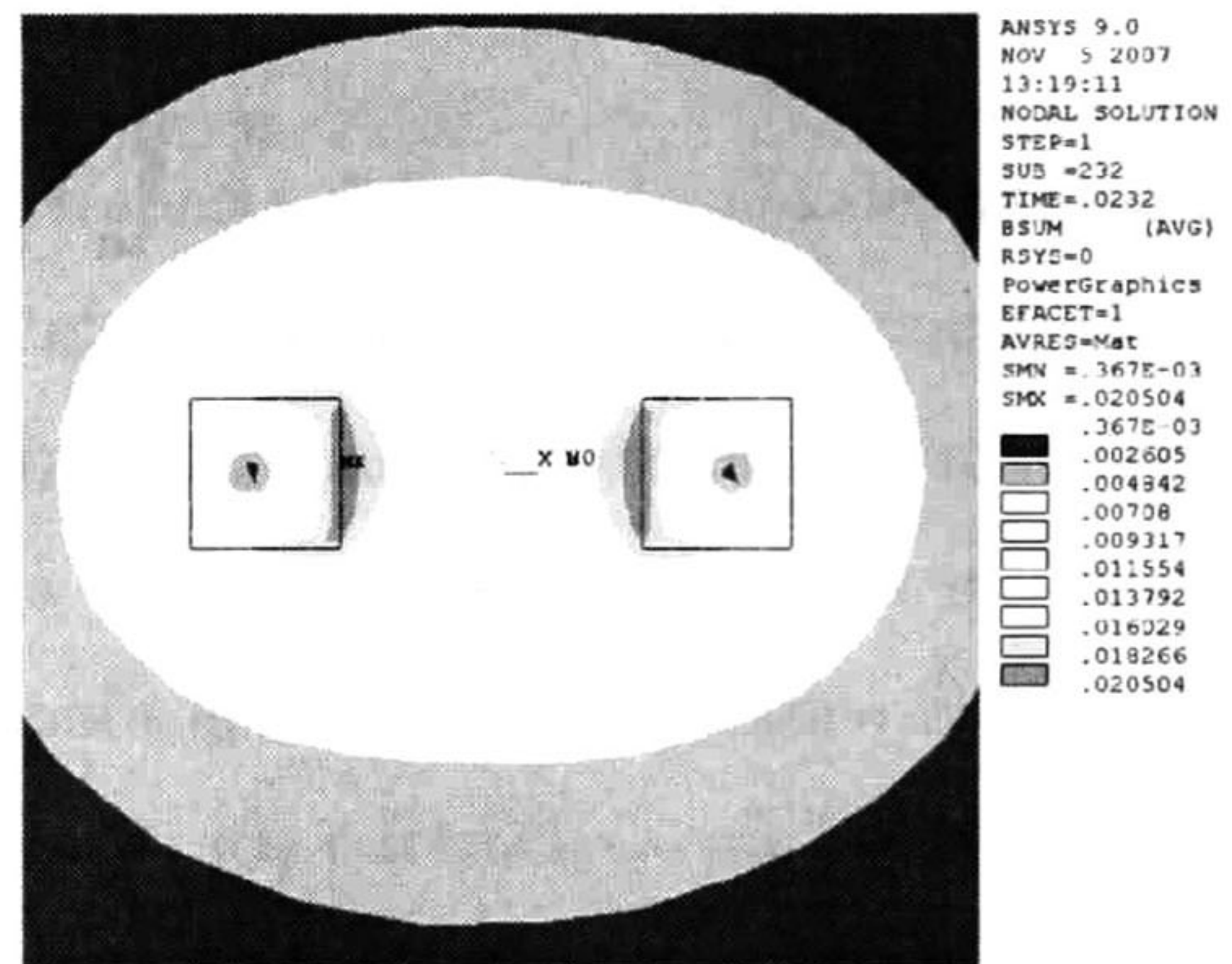


Figura 5.25: Densidad de flujo, en  $t=0.0232$  s modelo planar completo.



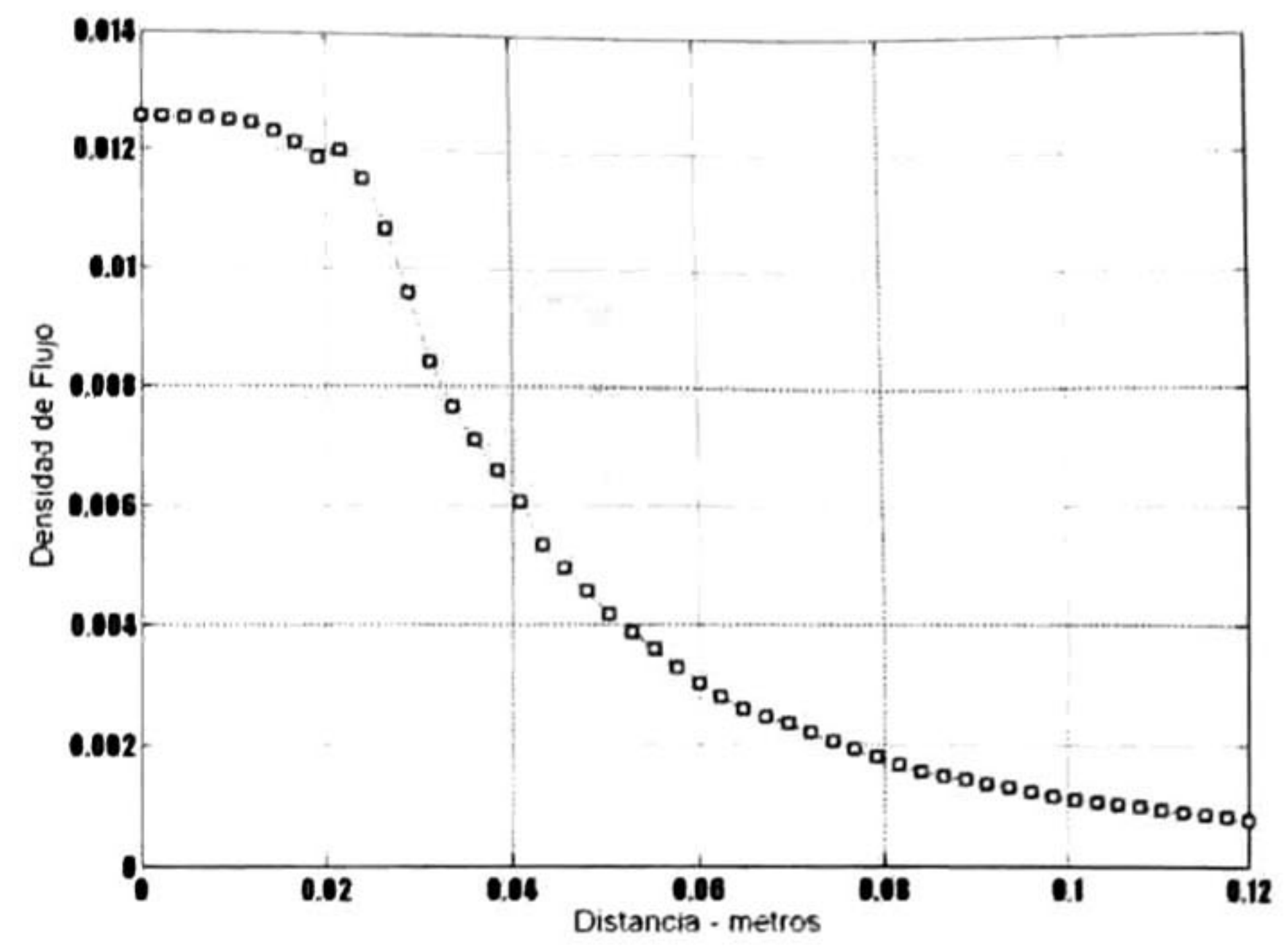
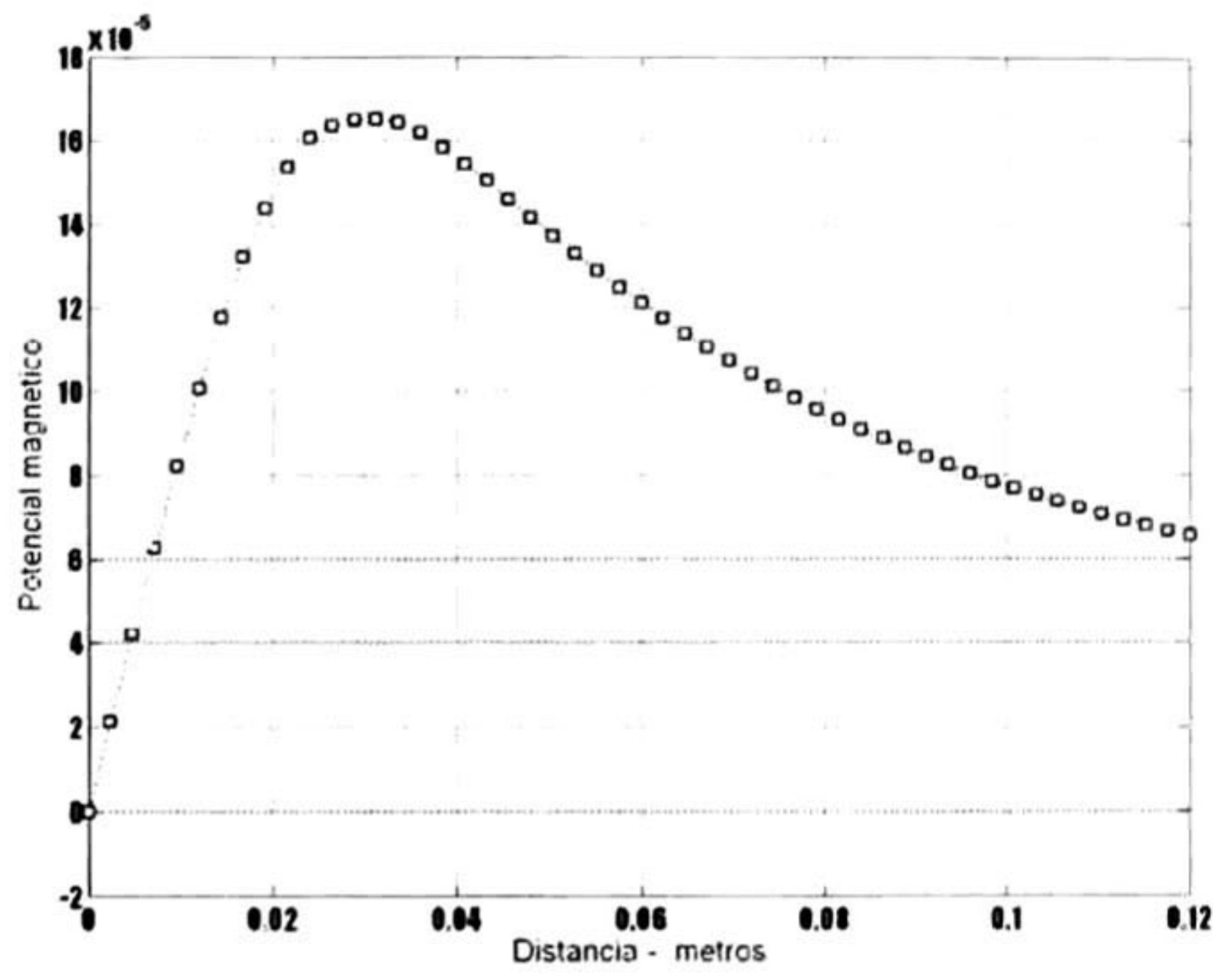


Figura 5.26: Flujo magnético en la trayectoria, modelo planar completo en el tiempo.      Figura 5.27: Densidad de flujo en la trayectoria, modelo planar completo en el tiempo.

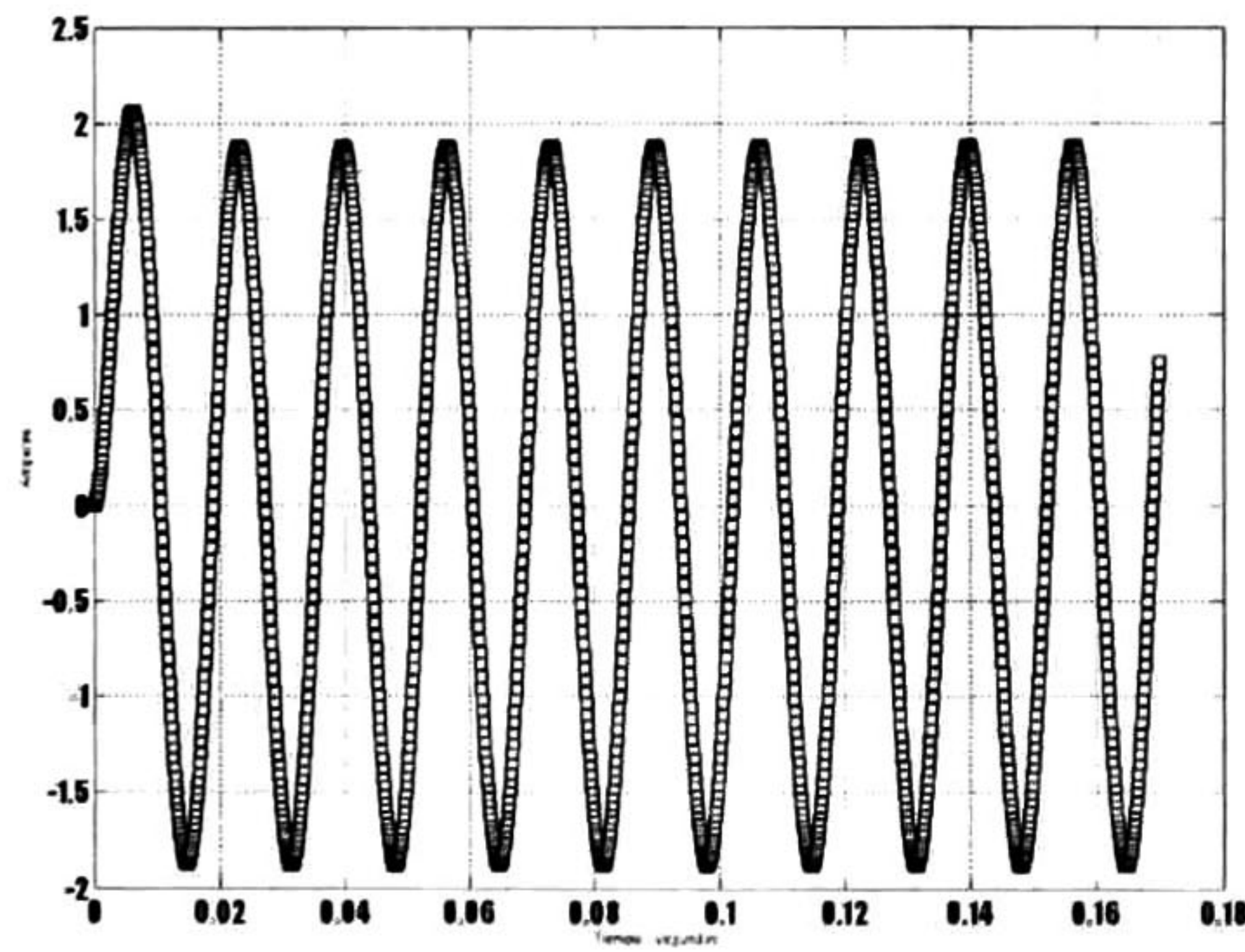


Figura 5.28: Corriente modelo planar completo en el tiempo.



## **5.3. Transformador con bobinas planares modelo reducido.**

En este modelo se considera que la bobina tiene los mismos parámetros que la bobina axisimétrica. Se modela sin considerar simetría con respecto al eje central de la pierna izquierda, y considera simetría respecto del eje horizontal por lo que se simula la mitad del transformador. De igual manera se analizan los tres modelos del elemento finito, como en el caso anterior.

### **5.3.1. Modelo magnetostático, reducido.**

Se considera que la bobina tiene una longitud, respecto del eje  $z$  de  $1/4$  del perímetro promedio de la bobina axisimétrica. Para incluir el efecto de la resistencia e inductancia de conexión no considerado en los modelos bidimensionales se añaden elementos circuitales a la bobina de valor igual a la mitad de la resistencia e inductancia calculada del modelo de la bobina axisimétrica. Los parámetros eléctricos para el caso magnetostático del modelo completo se muestran en la Tabla 5.5. Se observa que los parámetros son prácticamente iguales a los del caso axisimétrico. Las líneas equipotenciales y densidad de flujo magnético son también prácticamente iguales a los del caso axisimétrico, como se aprecia en las figuras 5.29 y 5.30, y en las figuras 5.31 y 5.32 se muestra el potencial magnético y la densidad de flujo en la trayectoria definida en los modelos anteriores.



Tabla 5.5: Parámetros del modelo planar reducido, modelo magnetostático.

		Manual	Ansys	Relación
Análisis estático planar	Inductancia (Henry)	$1.2654 \times 10^{-2}$	$1.2752 \times 10^{-2}$	0.9923
	Resistencia (ohms)	3.99084	3.99084	1.00
	Corriente en (Amperes)	3.0068	3.0068	1.00

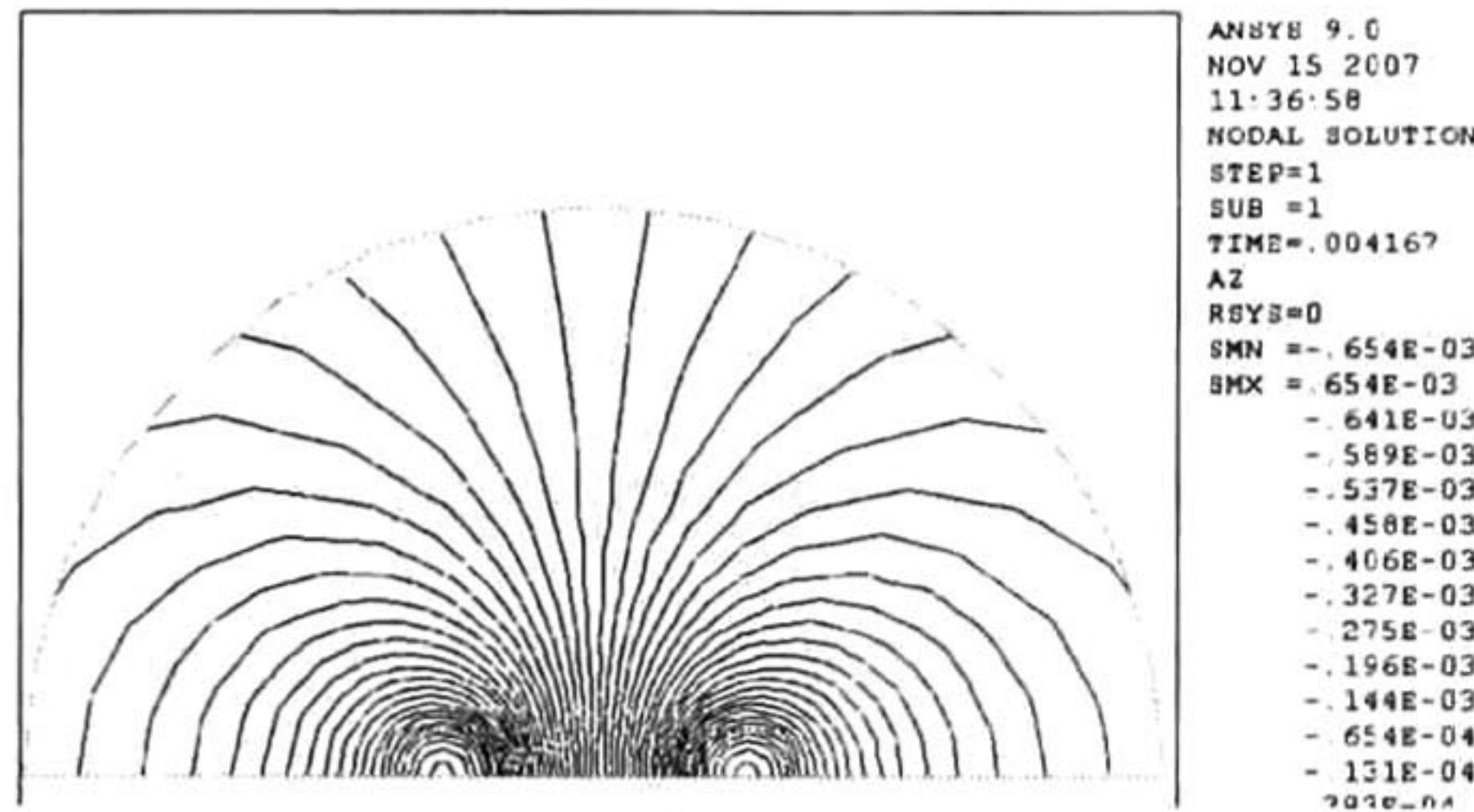


Figura 5.29: Flujo magnético modelo magnetostático reducido.

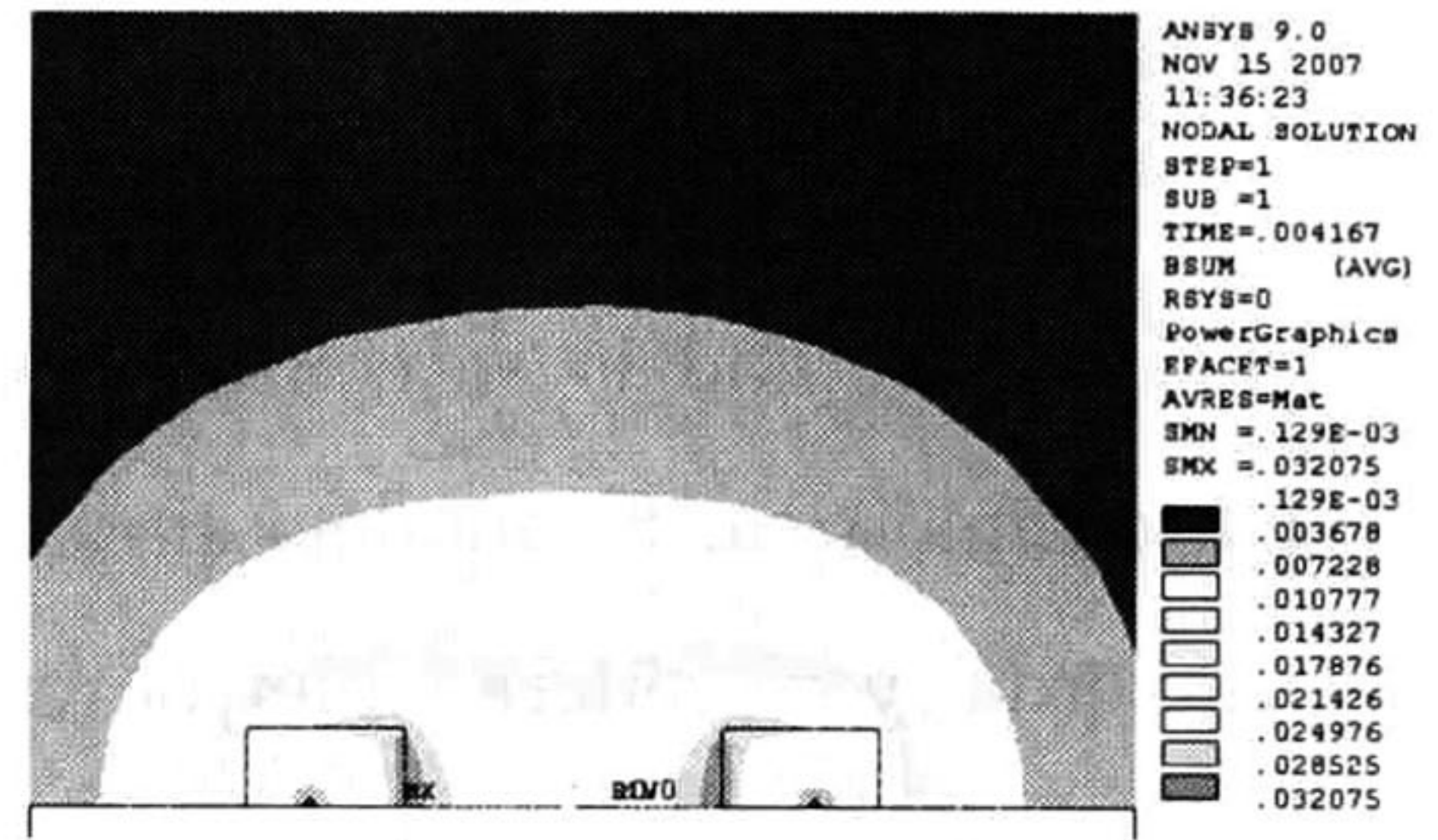


Figura 5.30: Densidad de flujo modelo magnetostático reducido.

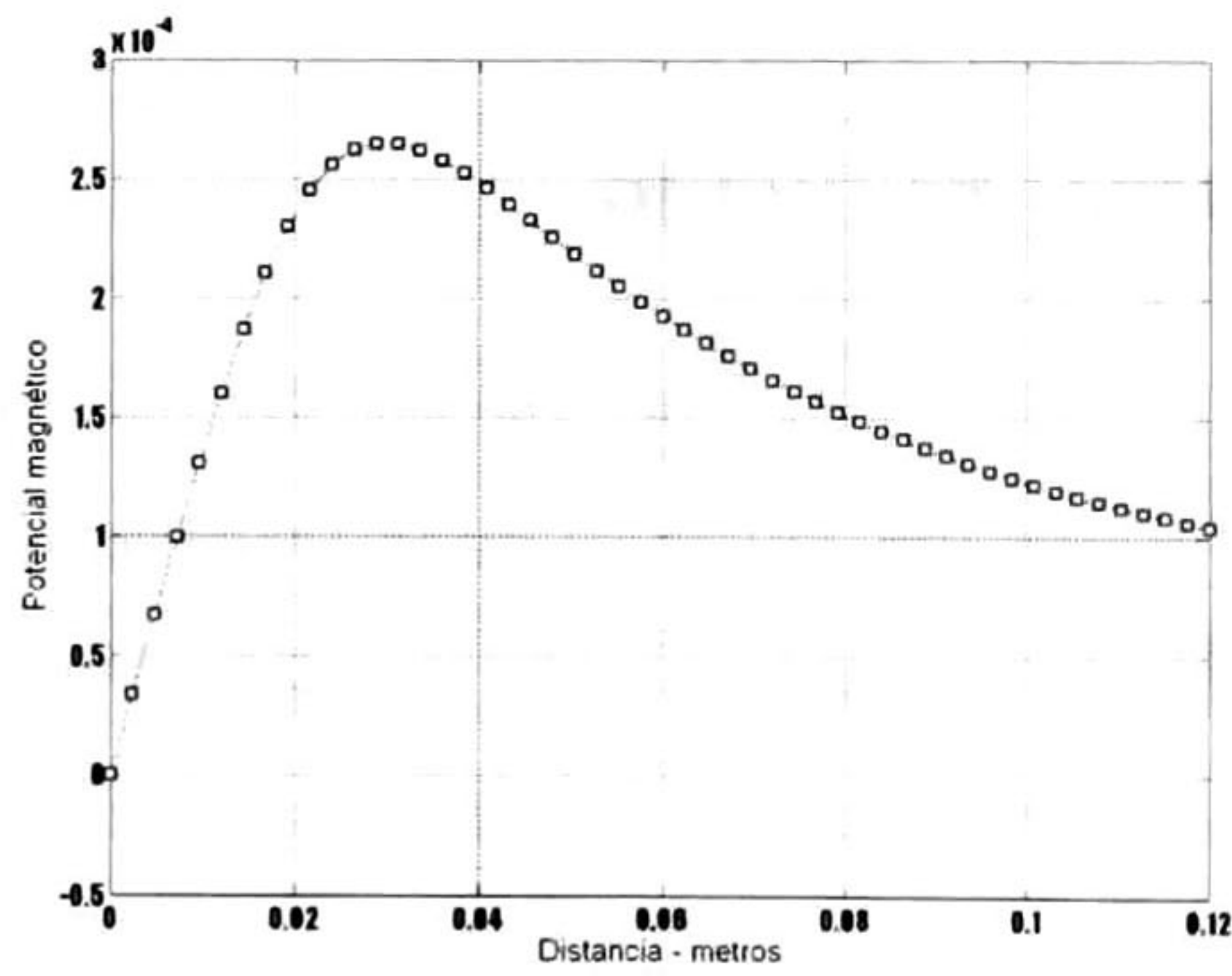


Figura 5.31: Flujo magnético en la trayectoria modelo magnetostático reducido.

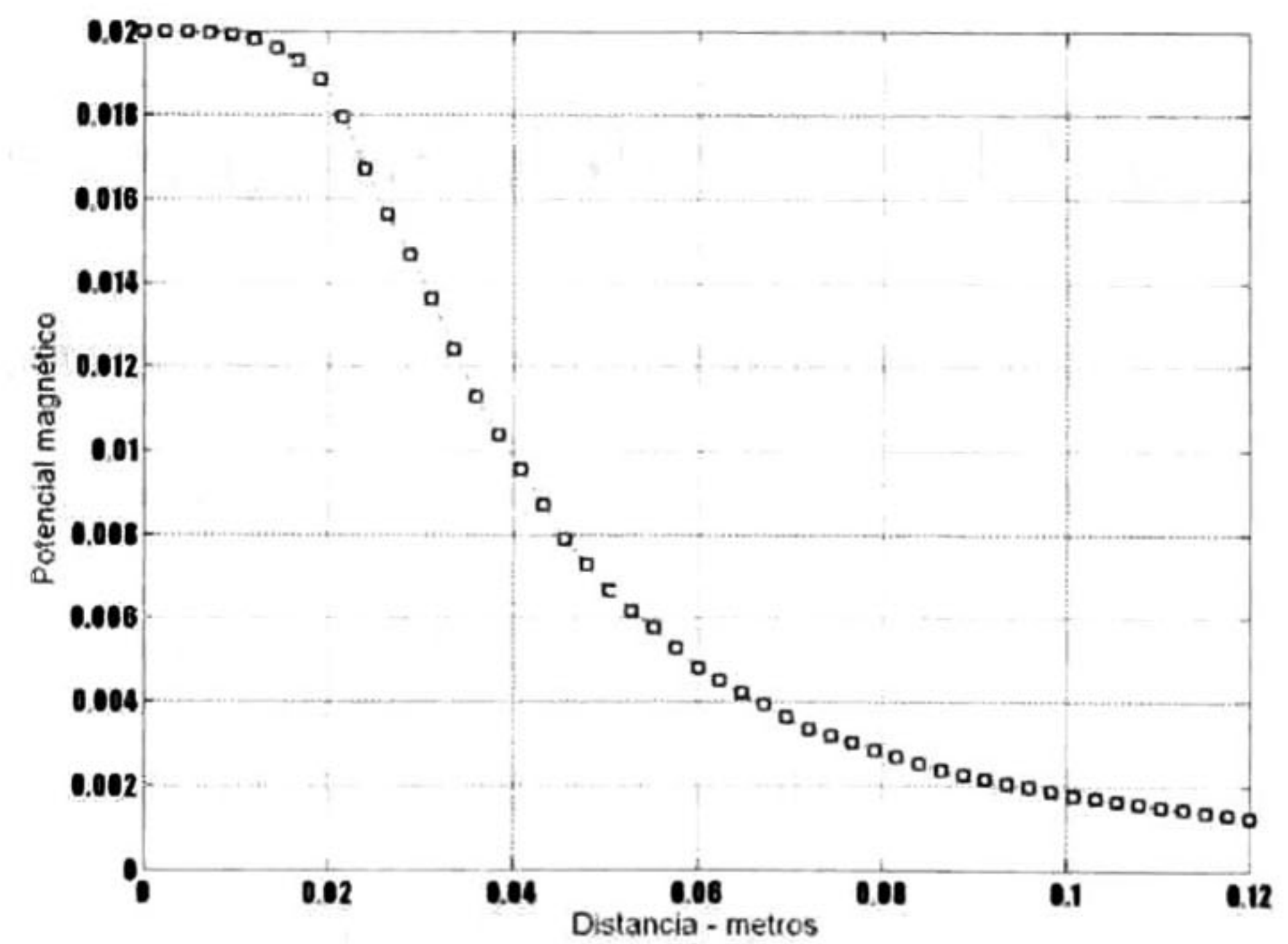


Figura 5.32: Densidad de flujo en la trayectoria modelo magnetostático reducido.



### 5.3.2. Modelo reducido planar en el dominio de la frecuencia.

Los resultados en el dominio de la frecuencia de las partes real e imaginaria, del potencial magnético y densidad de flujo se muestran en las figuras 5.33, 5.34, 5.35 y 5.36. En la Tabla 5.6 se muestran los resultados de resistencia e inductancia. Se aprecia que los resultados son iguales a los obtenidos por el caso axisimétrico. En las figuras 5.37 y 5.38 se muestra el potencial magnético y la densidad de flujo en la trayectoria.

Tabla 5.6: Parámetros del modelo planar en el dominio de la frecuencia.

		Manual	Ansys	Relación
Modelo Armónico planar	Inductancia (Henry)	$1.2654 \times 10^{-2}$	$1.2752 \times 10^{-2}$	0.9923
	Resistencia (Ohms)	$3.99084 + 4.8048i$	$3.9908 + 4.8074i$	0.9997
	Corriente (Amperes)	1.9212	1.9205	0.9937

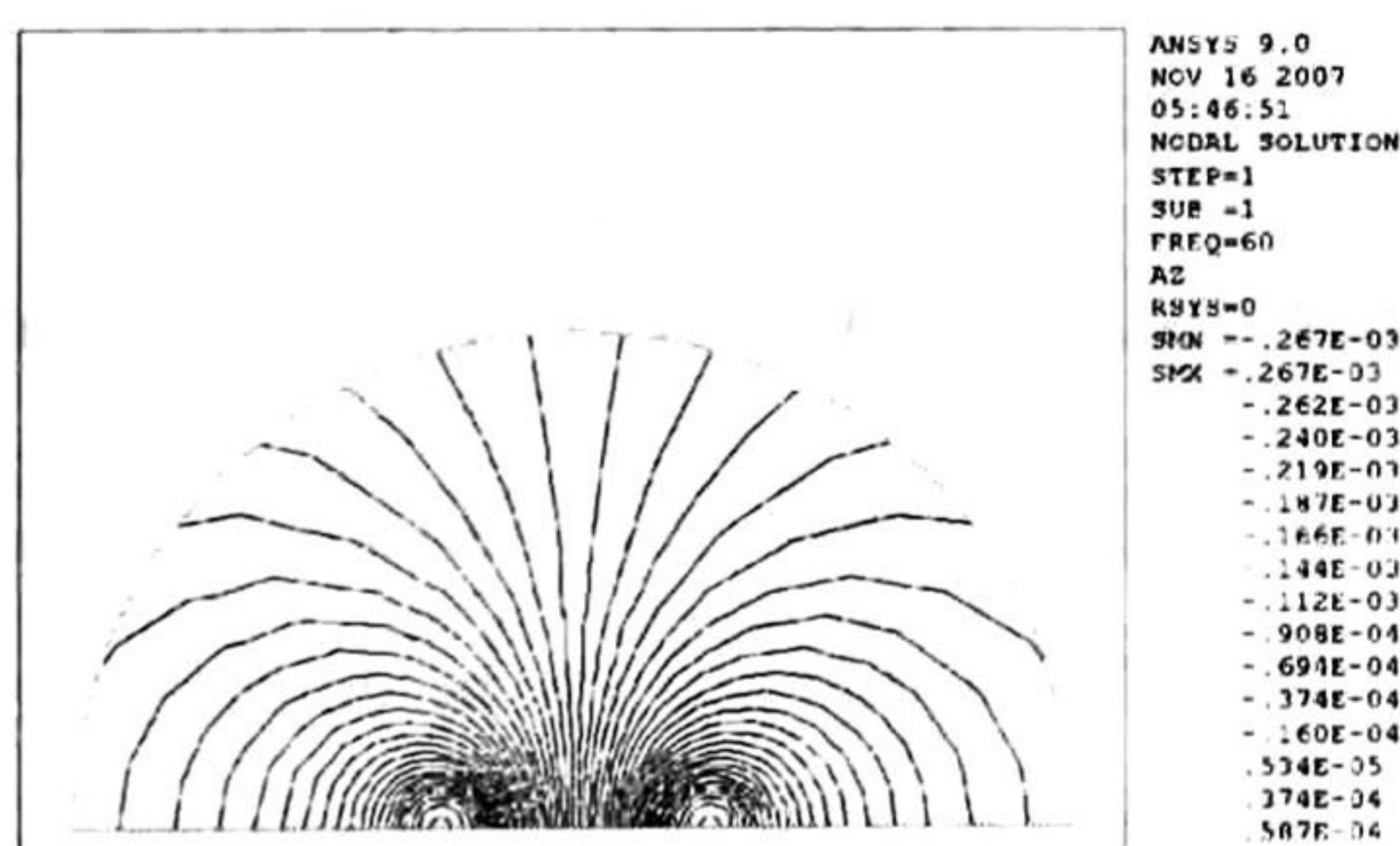


Figura 5.33: Potencial magnético, parte real modelo reducido.

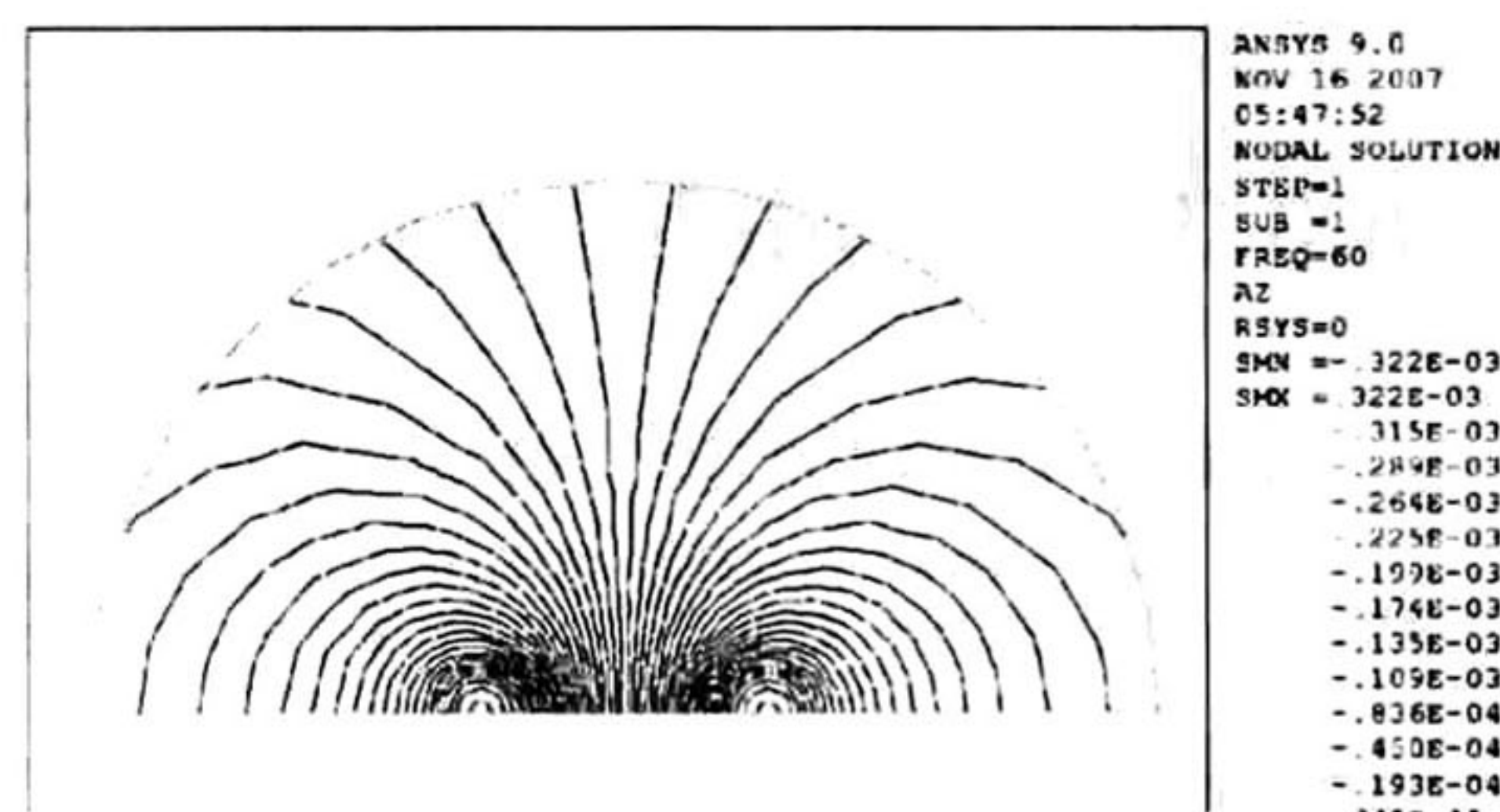


Figura 5.34: Potencial magnético, parte imaginaria modelo reducido.



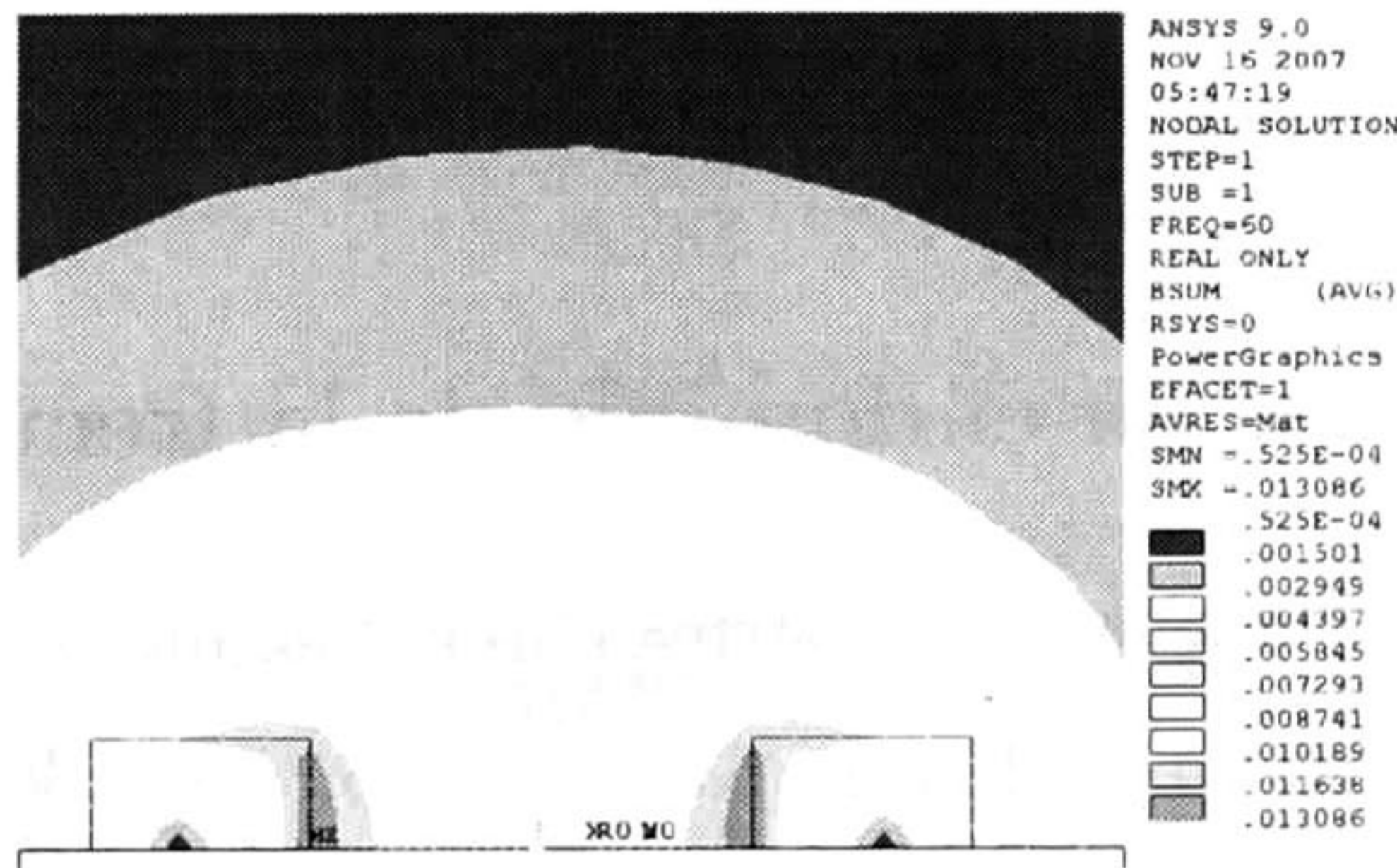


Figura 5.35: Densidad de flujo, parte real modelo reducido.

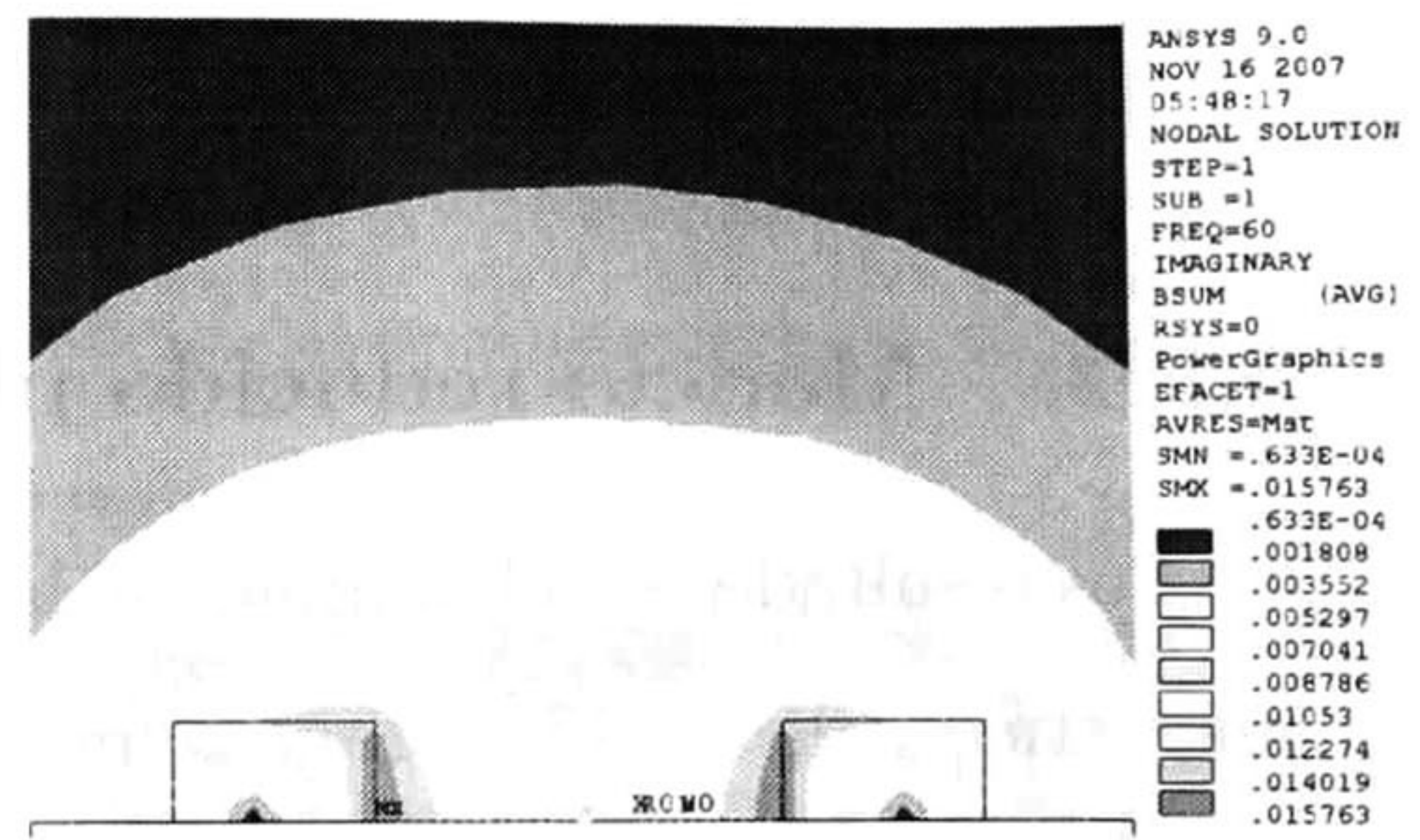


Figura 5.36: Densidad de flujo, parte imaginaria modelo reducido.

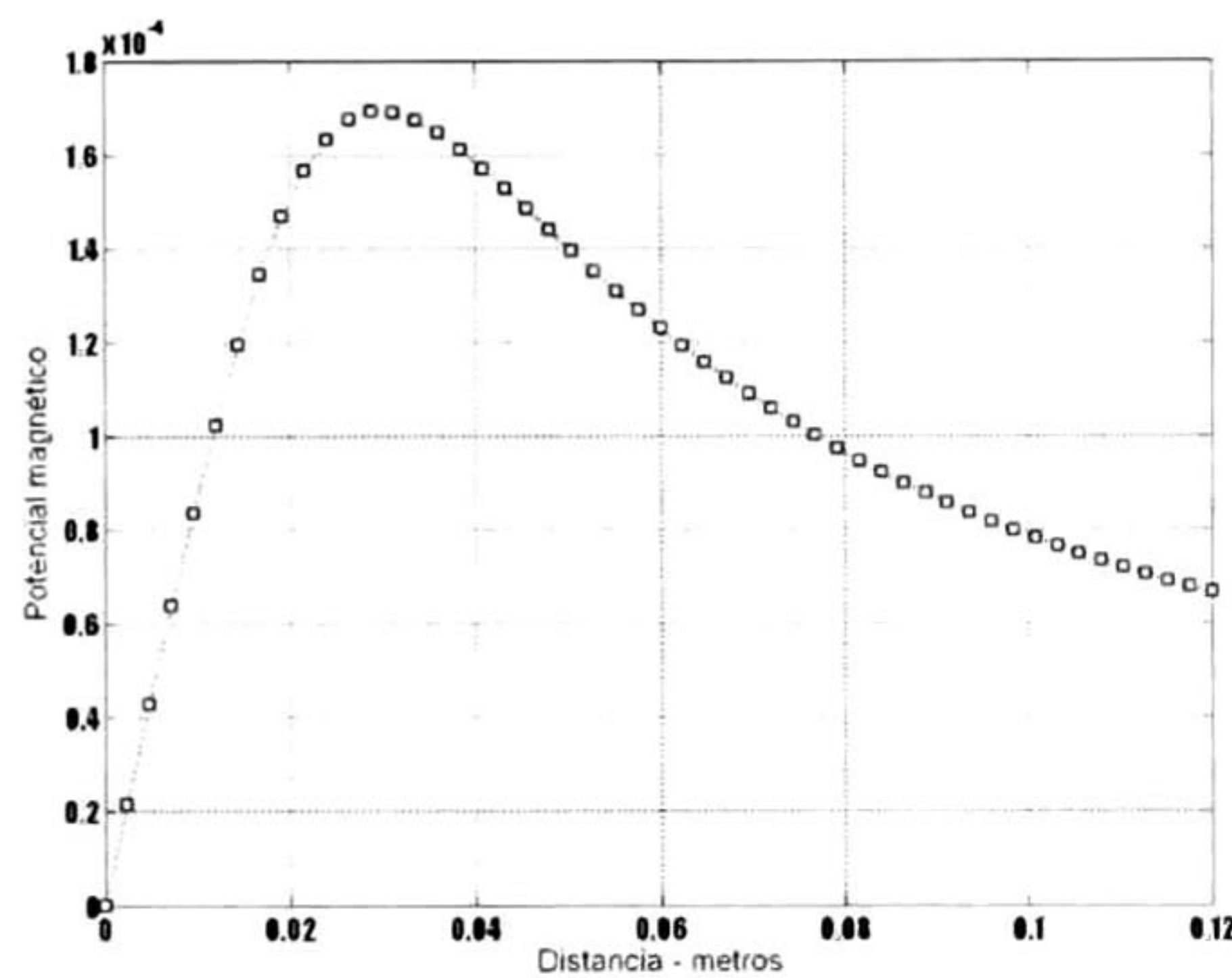


Figura 5.37: Flujo magnético en la trayectoria modelo armónico reducido.

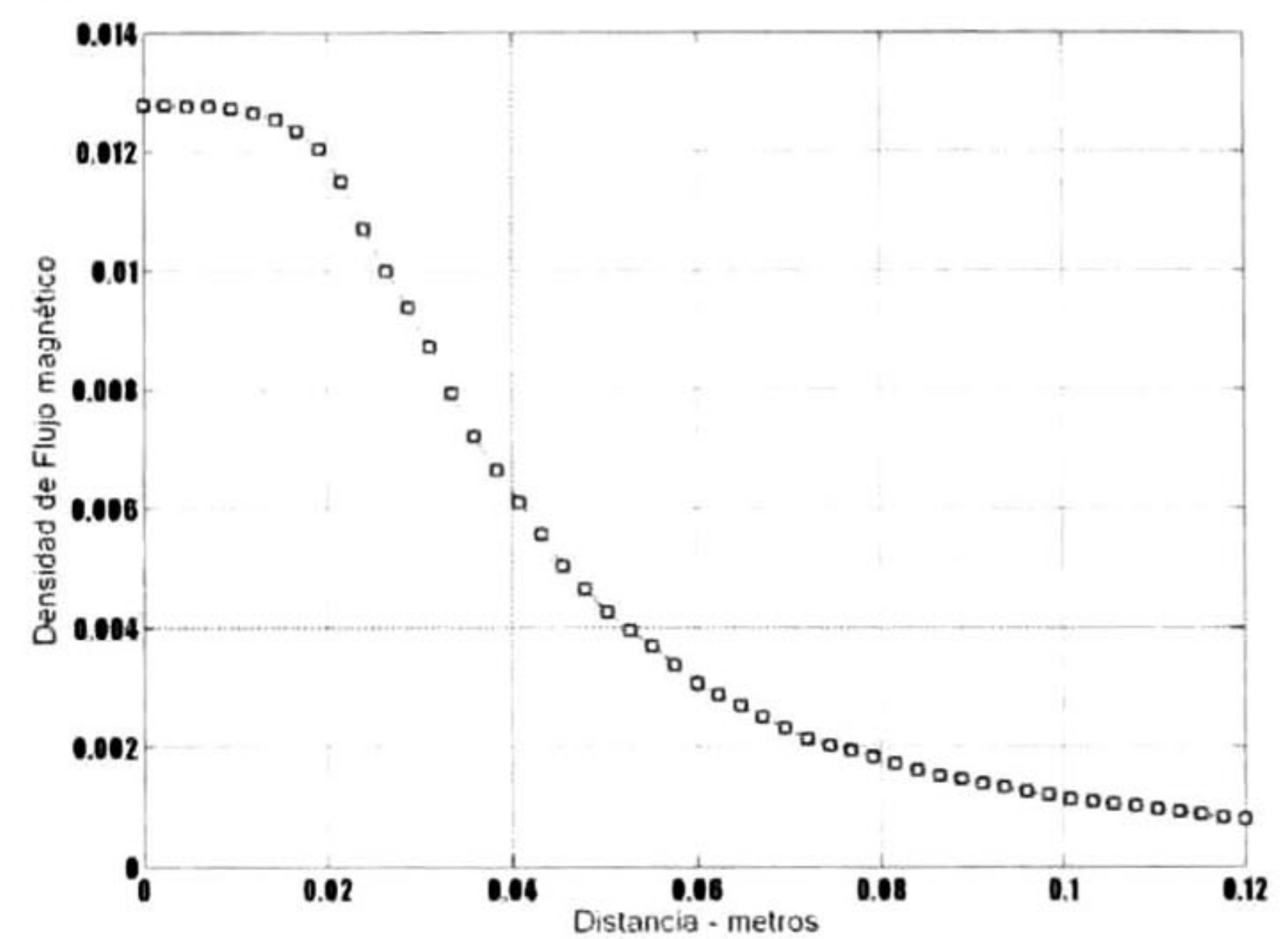


Figura 5.38: Densidad de flujo en la trayectoria modelo armónico reducido.

### 5.3.3. Modelo reducido planar en el dominio del tiempo.

En la figura 5.39 y en la figura 5.40 se muestran el potencial y densidad de flujo magnético en el instante de tiempo  $t = 0.0232$  s. El comportamiento de la corriente en el dominio del tiempo se muestra en la figura 5.41. De nuevo se muestran resultados prácticamente iguales a las obtenidas para el caso axisimétrico. De los resultados se concluye que la bobina planar reducida representa con precisión a la bobina axisimétrica. Este resultado será de gran



utilidad para la correcta representación de bobinas axisimétricas en equivalentes bobinas planares en los bidimensionales. En las figuras 5.42 y 5.43 se muestra el potencial magnético y la densidad de flujo en la trayectoria.

Tabla 5.7: Parámetros del modelo planar reducido en el dominio del tiempo.

		Manual	Ansys	Relación
Análisis en el tiempo	Inductancia Henry	$1.2654 \times 10^{-2}$	$1.2752 \times 10^{-2}$	0.9923
	Resistencia (Ohms)	$3.99084 + 4.8048i$	$3.9908 + 4.8074i$	0.9997
	Corriente (Amperes).	1.9212	1.9210	0.9990

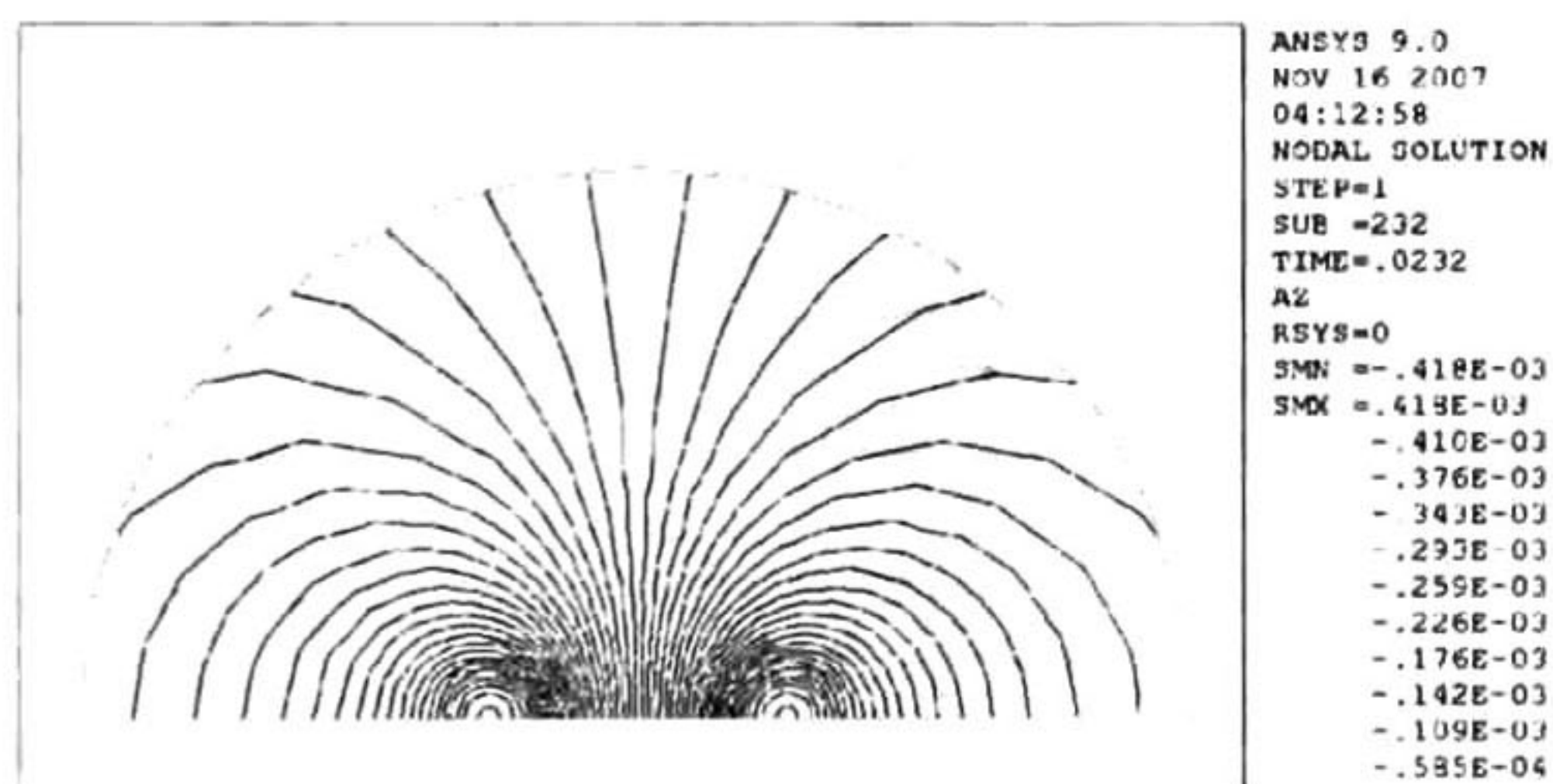


Figura 5.39: Potencial magnético, en  $t=0.0232$  s, modelo planar reducido.

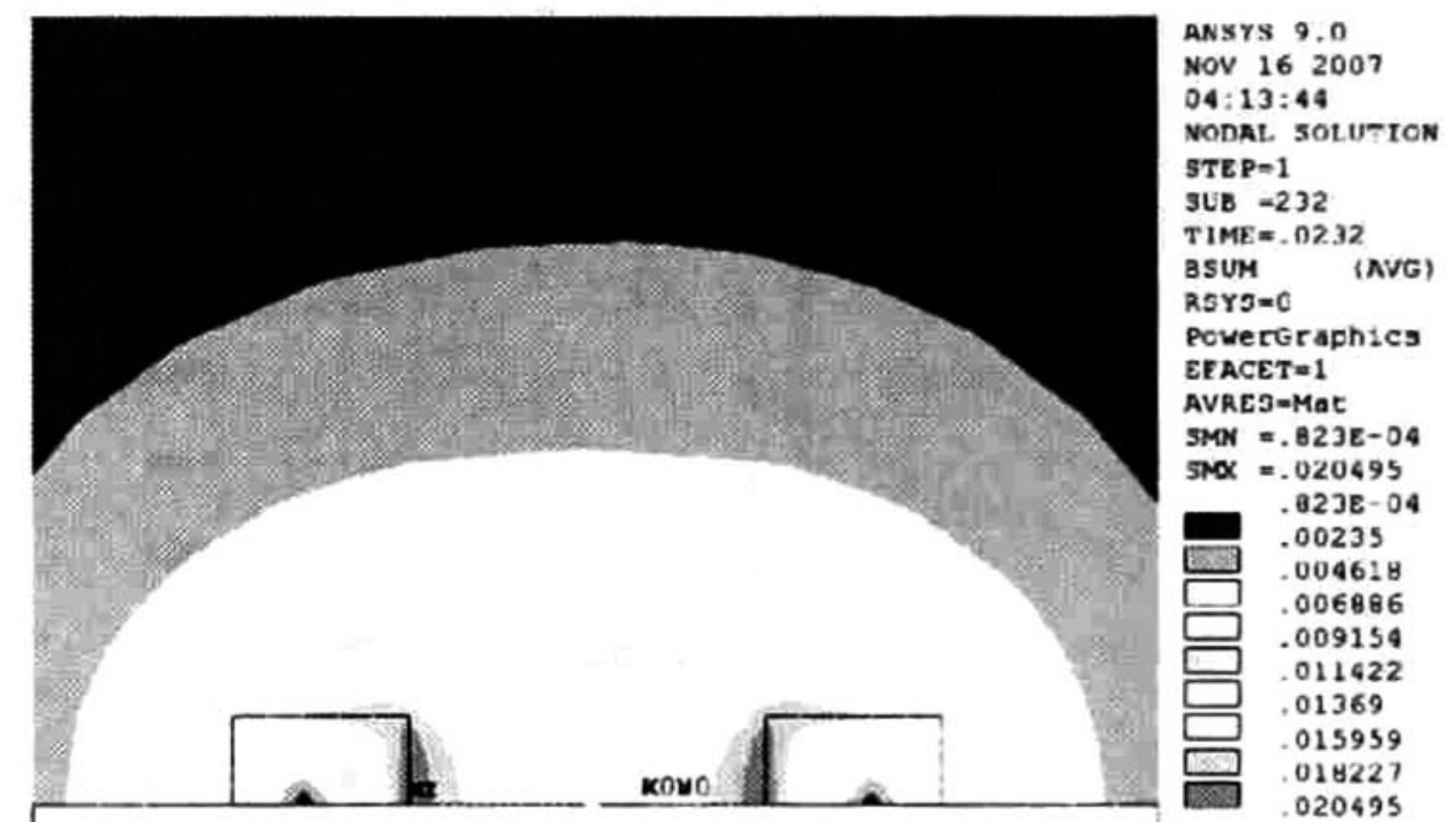


Figura 5.40: Densidad de flujo, en  $t=0.0232$  s, modelo planar reducido.



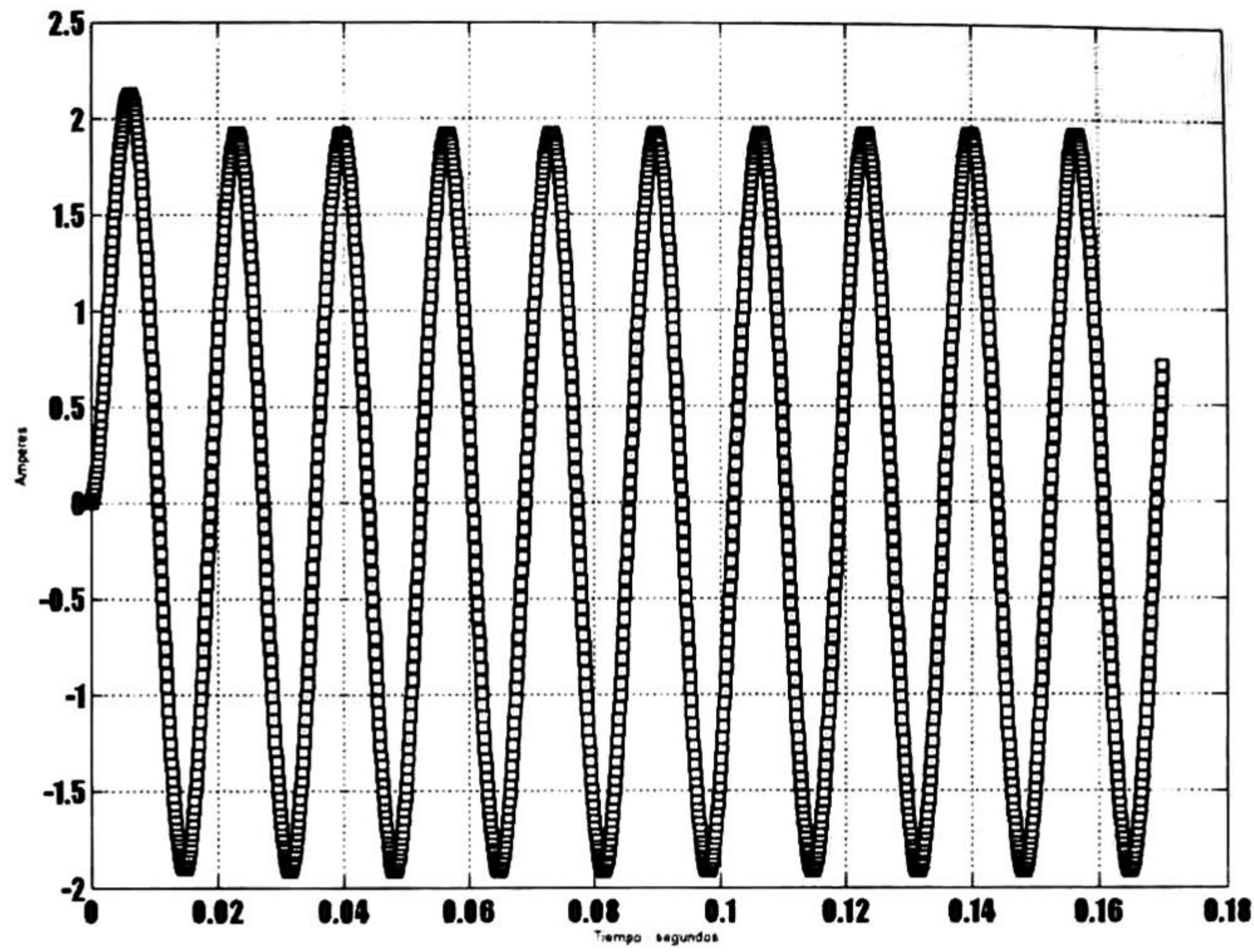


Figura 5.41: Corriente, modelo planar reducido.

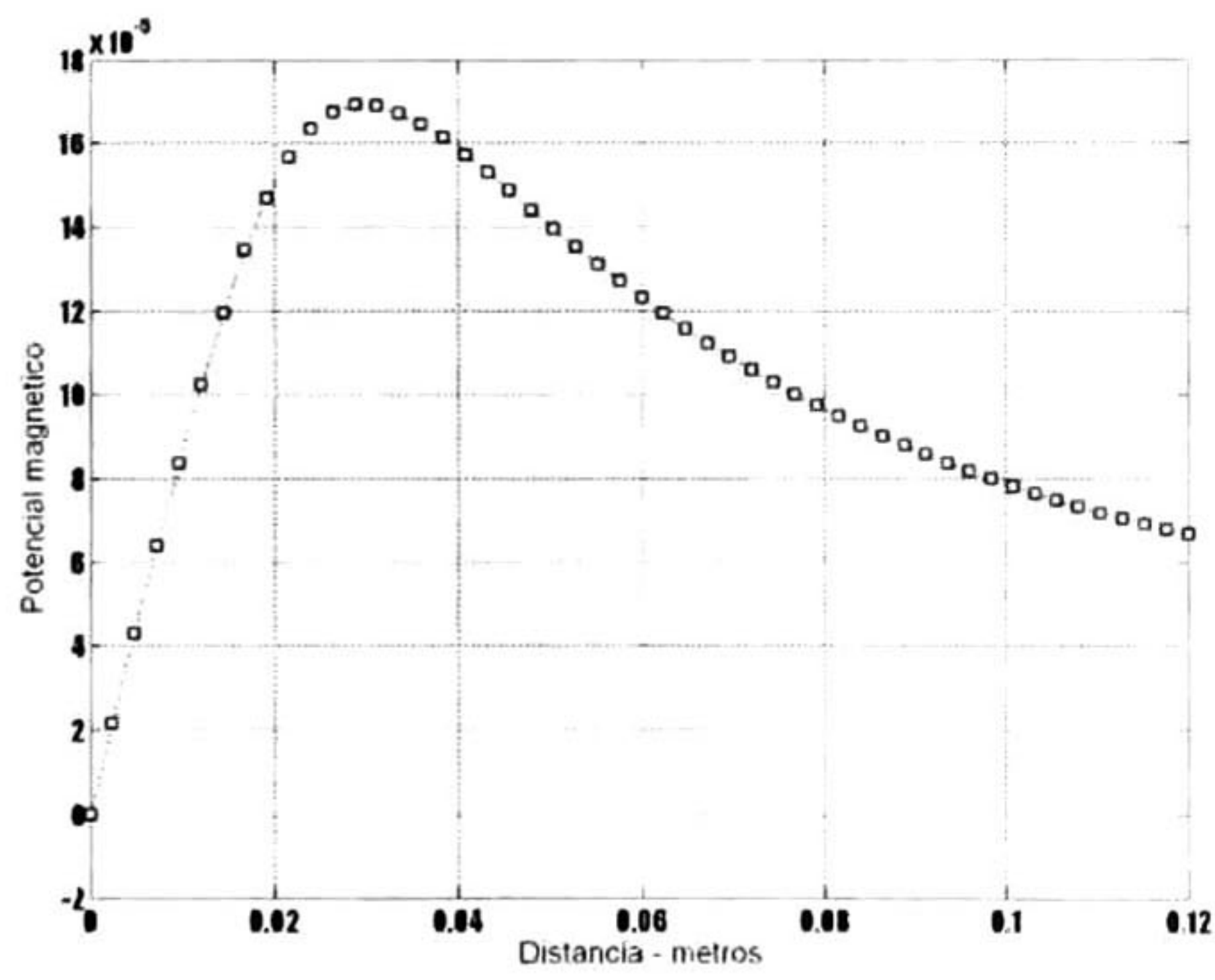


Figura 5.42: Flujo magnético en la trayectoria modelo planar reducido en el tiempo.

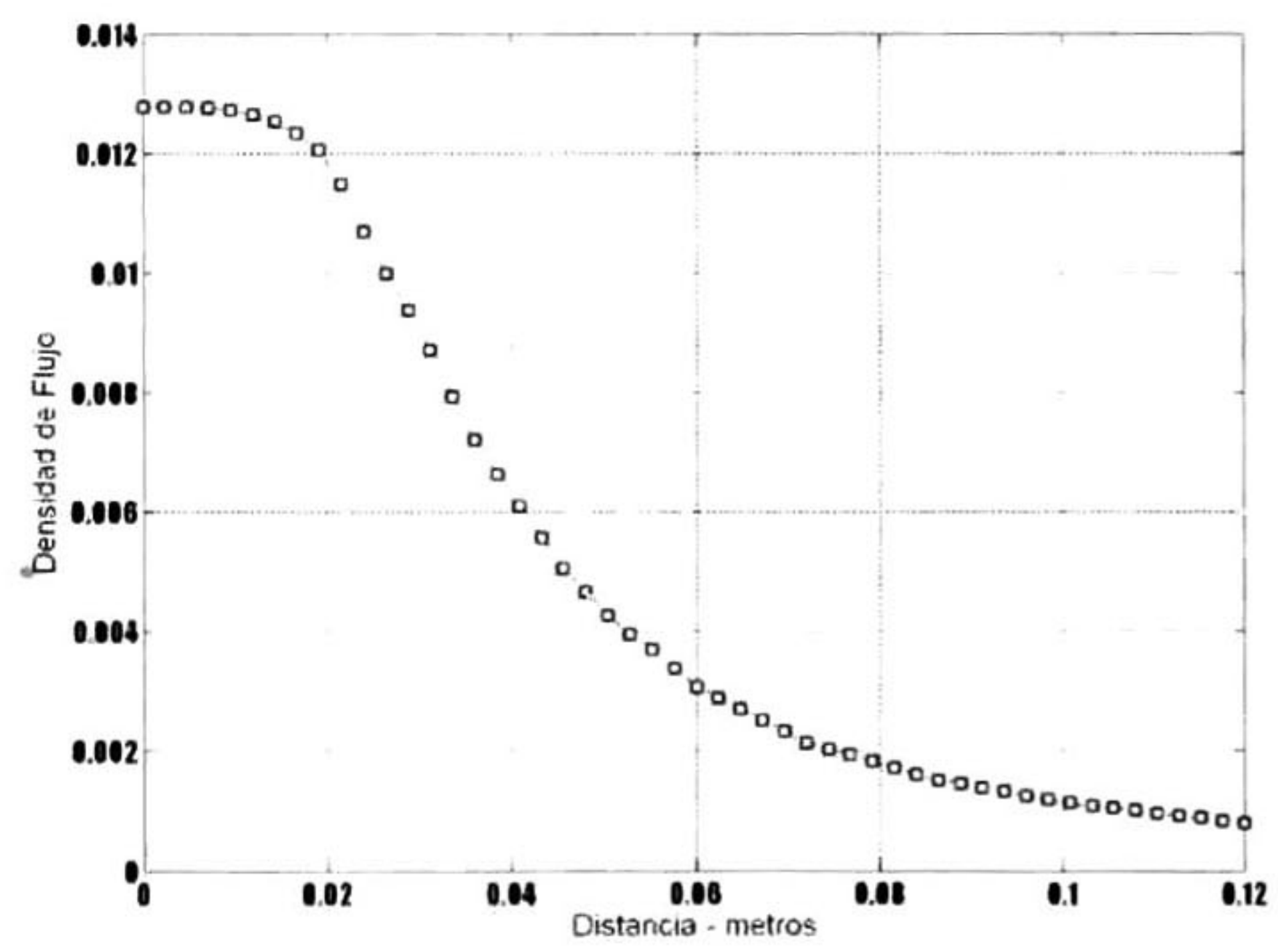


Figura 5.43: Densidad de flujo en la trayectoria modelo planar reducido en el tiempo.



### 5.3.4. Comparación de modelos.

En esta sección se comparan los resultados de los modelos completos con los modelos de simetría horizontal. En las figura 5.44 se comparan los potenciales magnéticos en la trayectoria establecida, que va del origen a un distancia de 12 cm, siguiendo a una línea recta con una pendiente unitaria. En la figura 5.45 se muestran las densidades de flujo para el modelo magnetostático. Para el modelo armónico se muestran en las figuras 5.46 y 5.47, potencial magnético y densidad de flujo respectivamente, y para los modelos en el tiempo en las figuras 5.48 y 5.49 para el potencial magnético y la densidad de flujo.

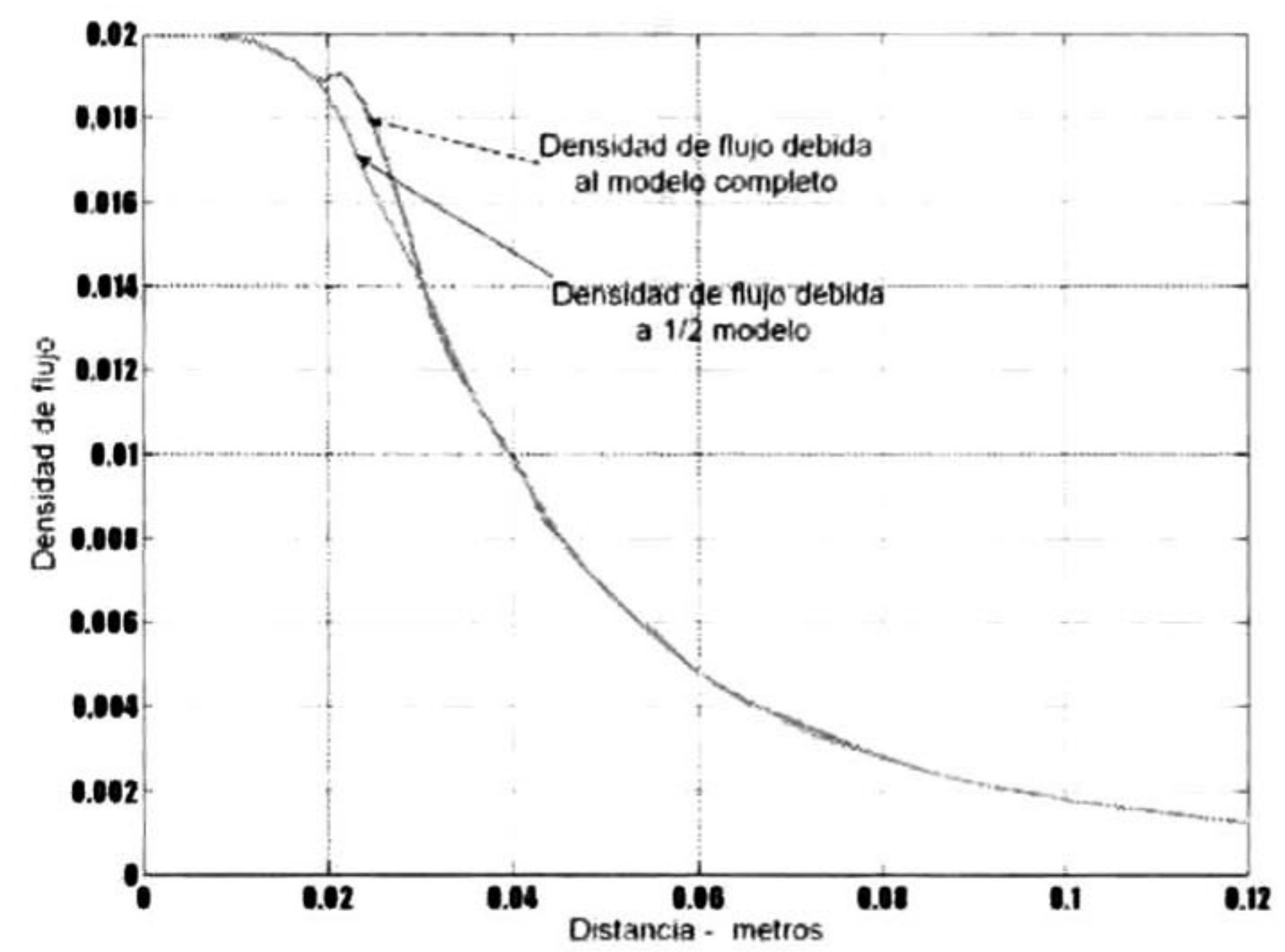
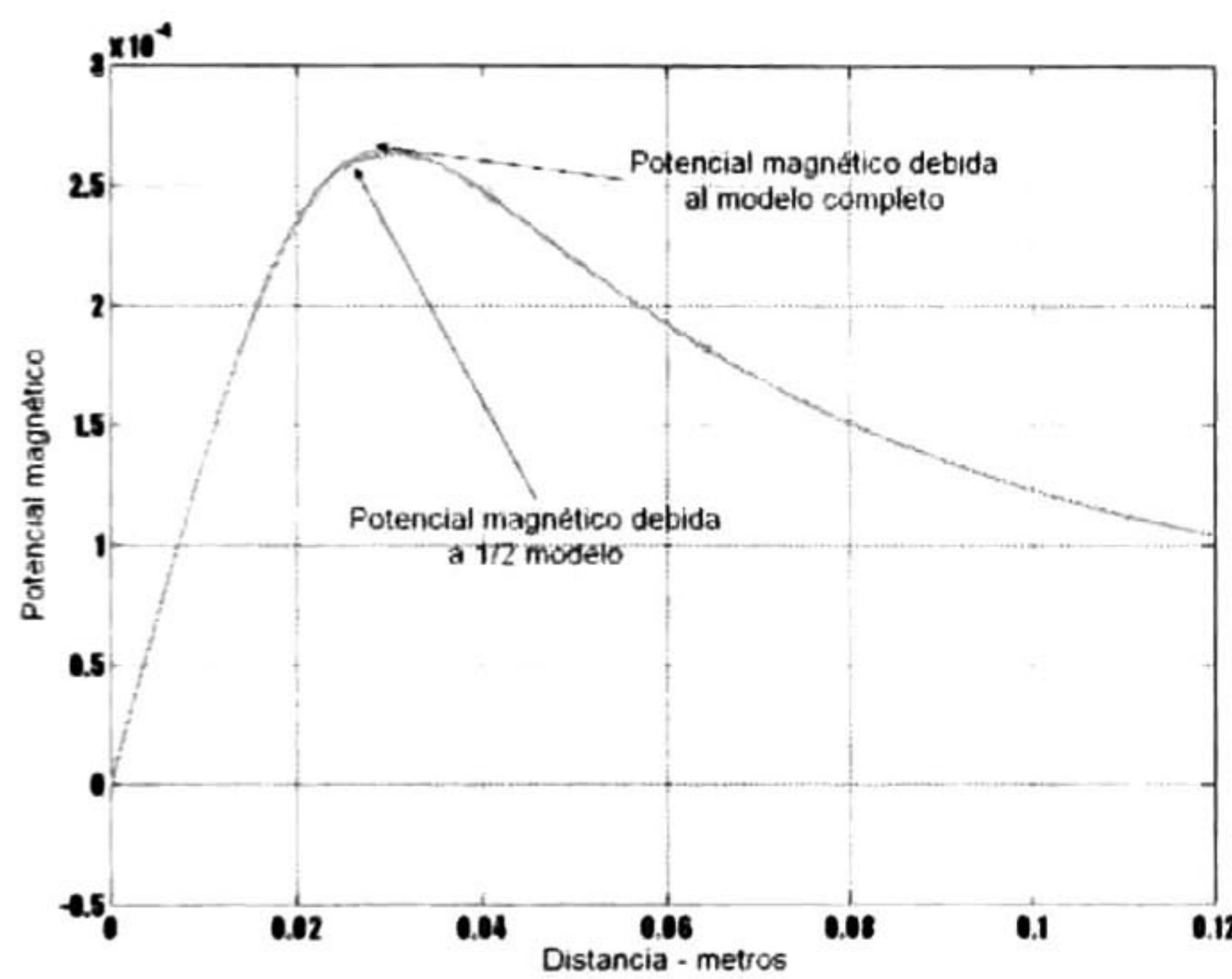


Figura 5.44: Comparación de potencial magnético, modelo magnetostático completo y reducido.  
Figura 5.45: Comparación de densidades de Flujo, modelo magnetostático completo y reducido.



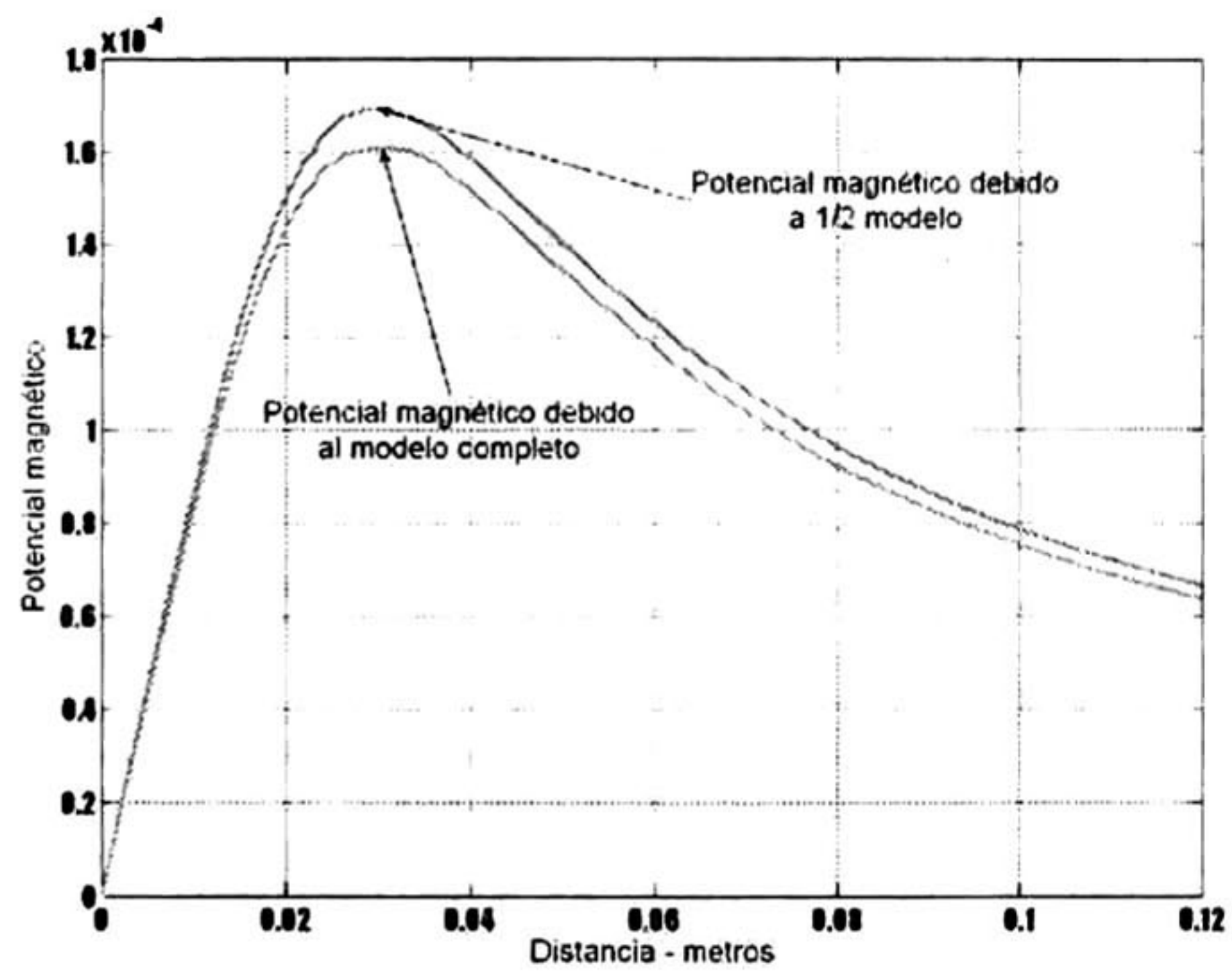


Figura 5.46: Comparación de potencial magnético, modelo armónico completo y reducido.

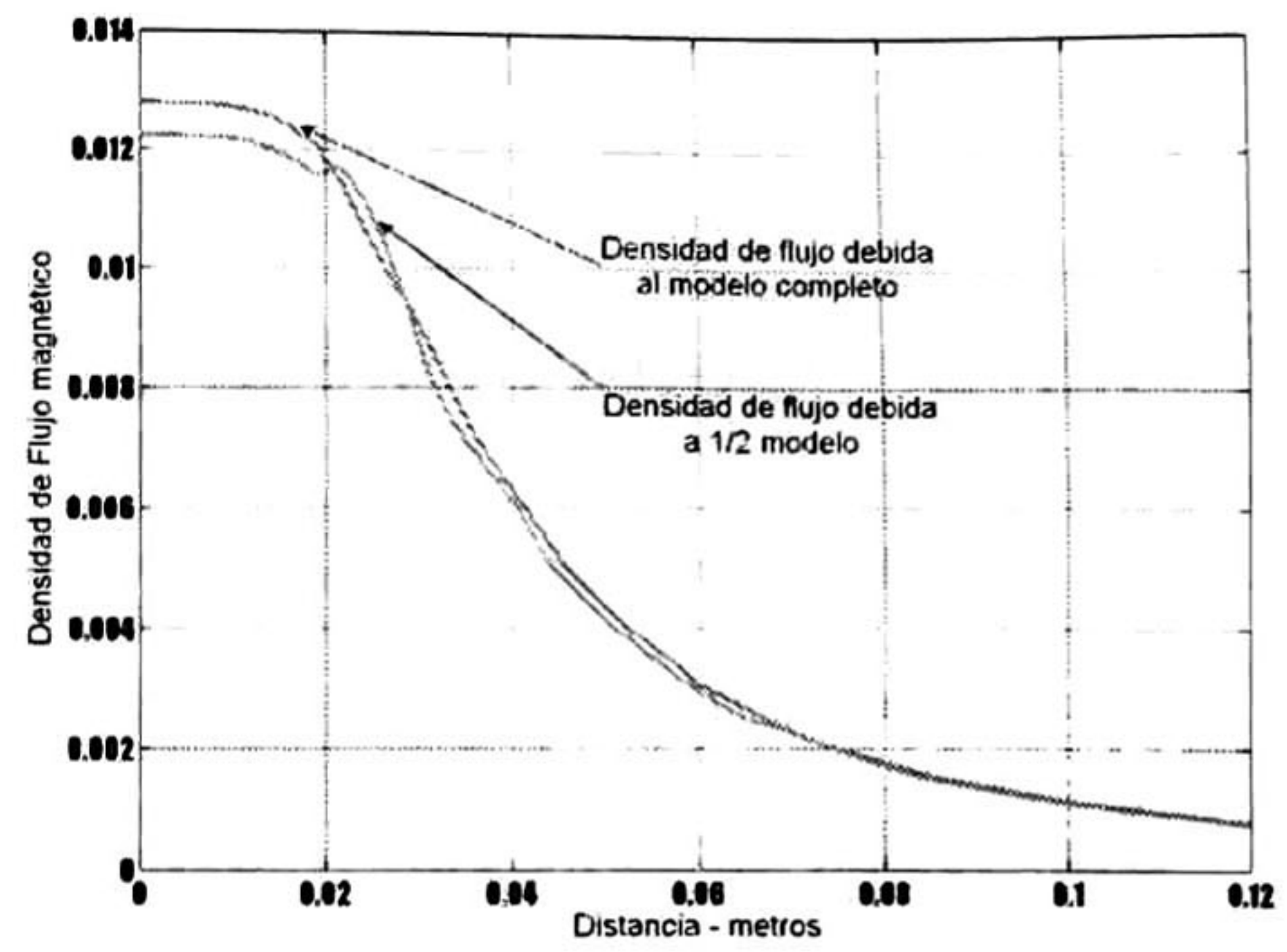


Figura 5.47: Comparación de densidades de Flujo, modelo armónico completo y reducido.

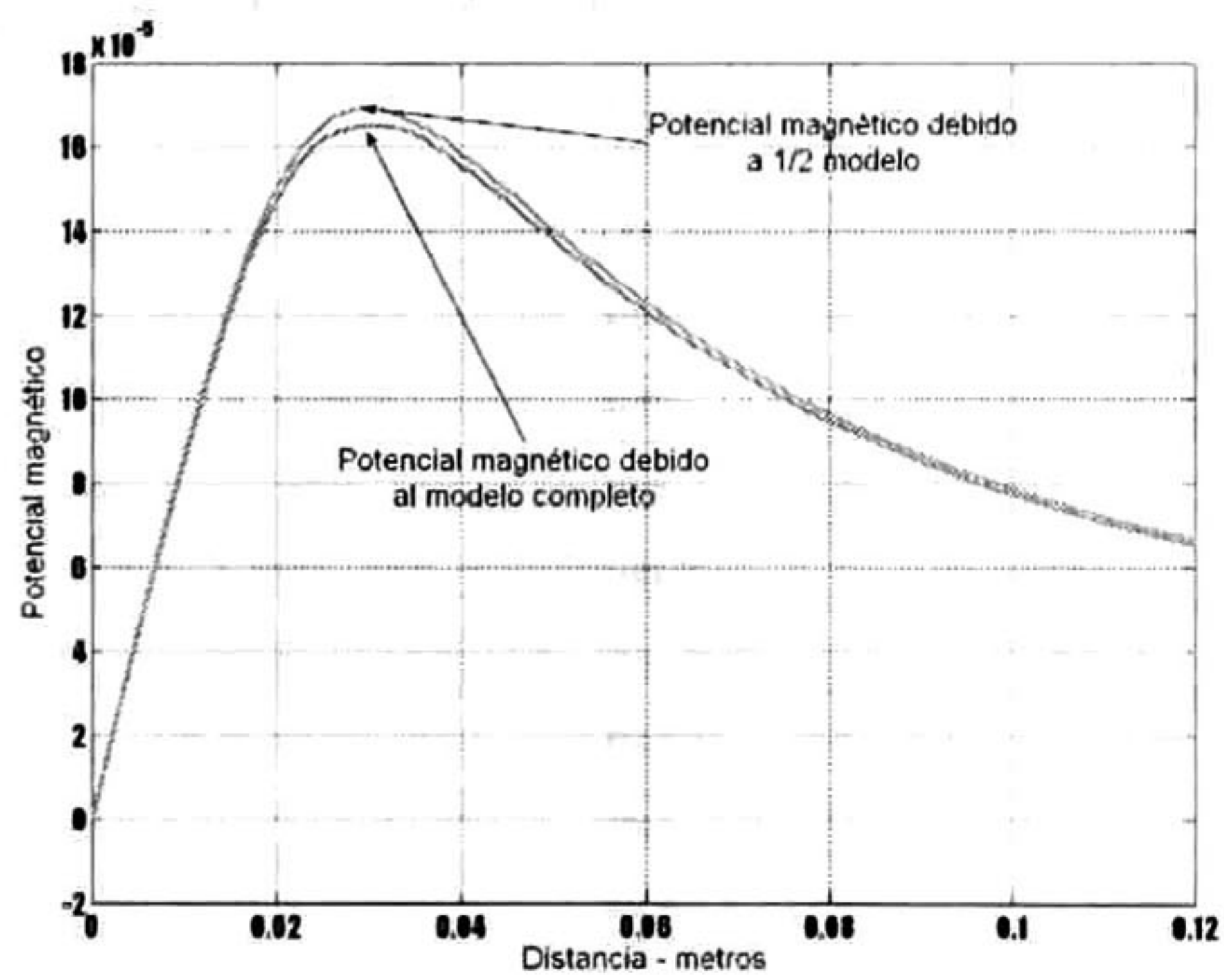


Figura 5.48: Comparación de potencial magnético, modelo en el tiempo completo y reducido.

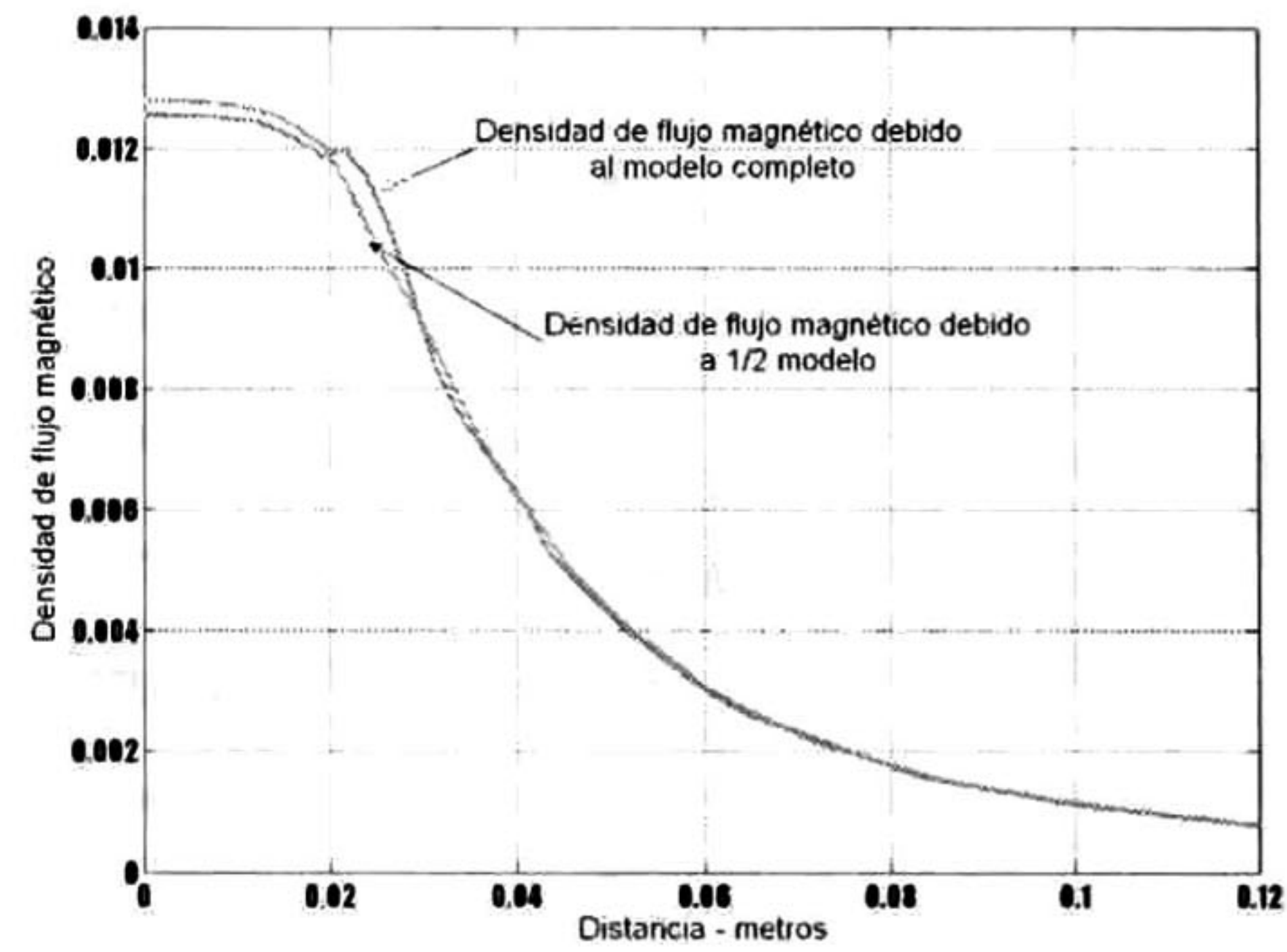


Figura 5.49: Comparación de densidades de Flujo, modelo en el tiempo completo y reducido.



## 5.4. Transformador monofásico con saturación.

Al modelo no axisimétrico, se le añade un núcleo de material ferromagnético del tipo M5. La característica  $B(H)$  se muestra en la figura 5.51. Se analiza el transformador empleando los tres modelos y aplicando la mismo tipo de fuente de voltaje que en el caso no saturado (núcleo de aire). El dimensionamiento del núcleo se muestra en la figura 5.50. Se aplican las mismas fuentes de voltaje que los modelos insertados en el aire.

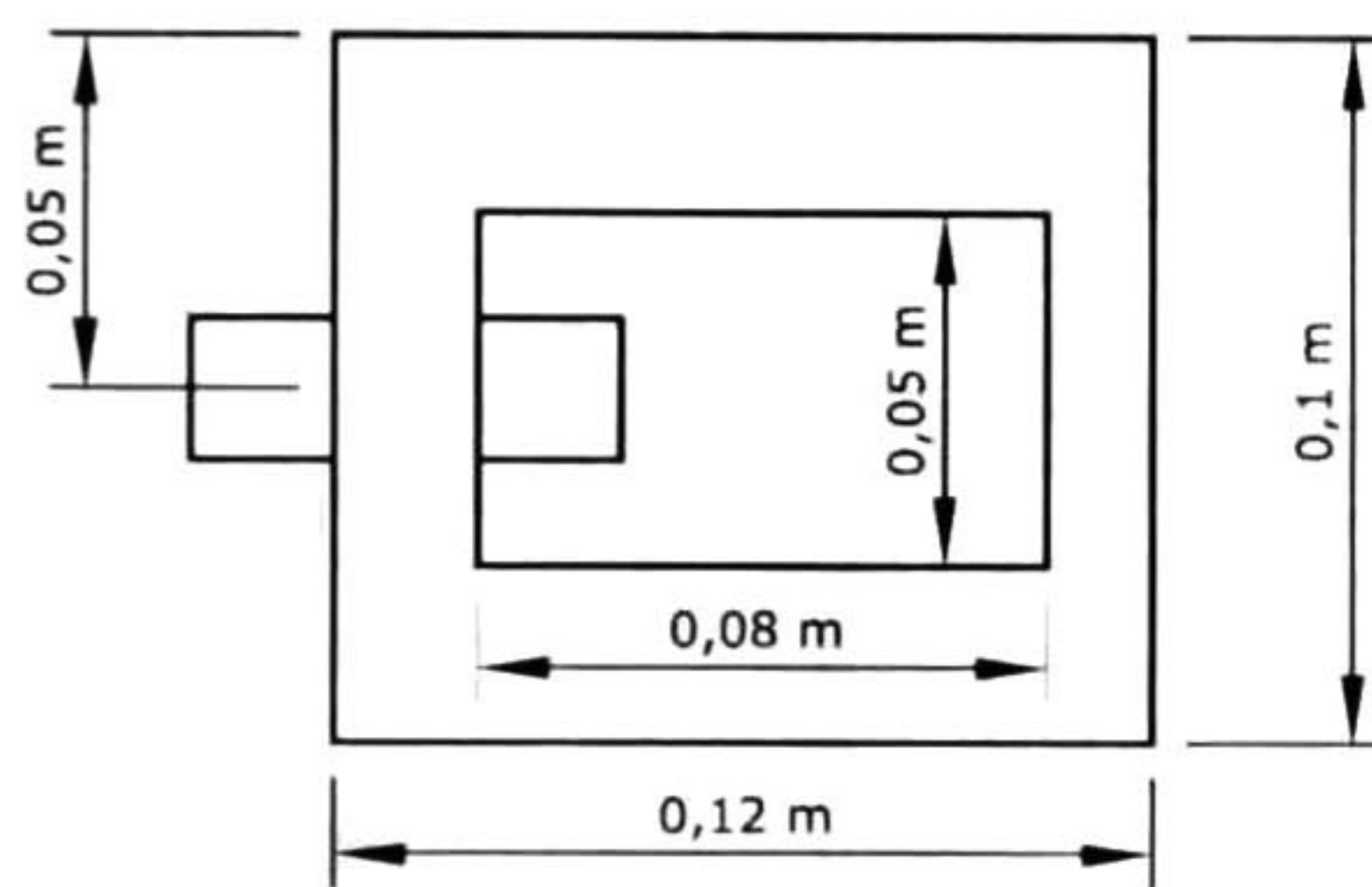


Figura 5.50: Dimensiones del núcleo del transformador monofásico.

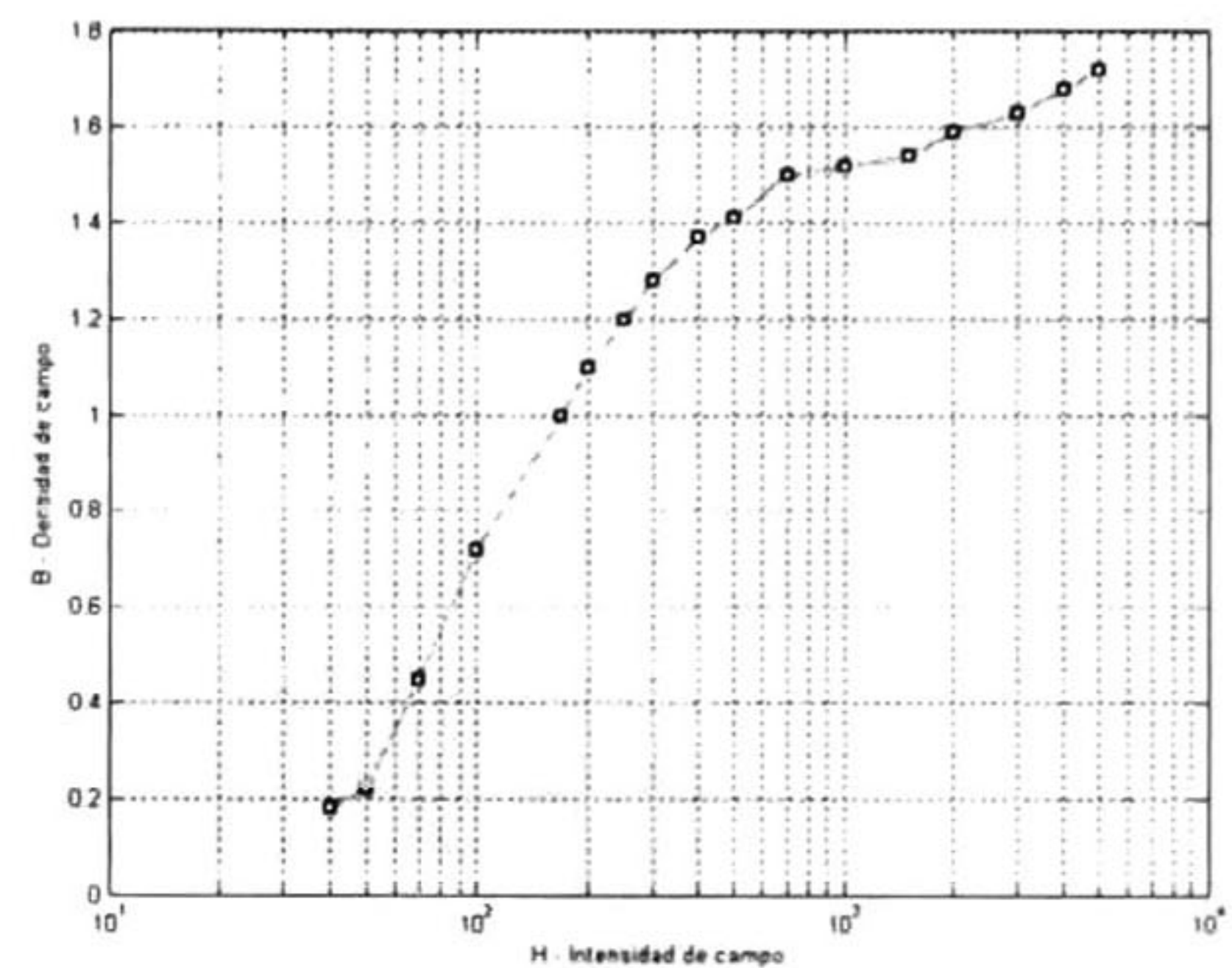


Figura 5.51: Curva de saturación del transformador monofásico.

### 5.4.1. Caso estático del transformador monofásico, modelo no lineal.

El voltaje aplicado es de 12 volts de CC. Los resultados del potencial magnético se muestran en la figura 5.52 y en la figura 5.53 la densidad de flujo. En la Tabla 5.8 se muestra la resistencia e inductancia. Se observa un incremento sustancial en la inductancia de la bobina con núcleo de aire, esto es debido al núcleo ferromagnético. La resistencia permanece en el mismo valor. El patrón de las líneas de flujo es diferente. Las líneas de campo tienen



trayectorias dentro del núcleo y muy pocas líneas tienen trayectoria fuera del núcleo como se observa en la figura 5.52. La máxima densidad de flujo se presenta en las esquinas internas y alcanzan un valor máximo de 0.09 Teslas. La densidad mínima ocurre en las esquinas externas. Hay que hacer notar que se asume que la permeabilidad magnética es isotrópica y que no existen traslapos en el núcleo. El tiempo de cómputo se incrementa ya que el sistema de ecuaciones es no lineal y se resuelve por un método iterativo.

Tabla 5.8: Parámetros eléctricos modelo magnetostático, caso no-lineal.

Ansys		
Análisis estático	Inductancia (Henry)	5.5
	Resistencia (Ohms)	3.99084
	Corriente (Amperes).	$6.034 \times 10^{-3}$

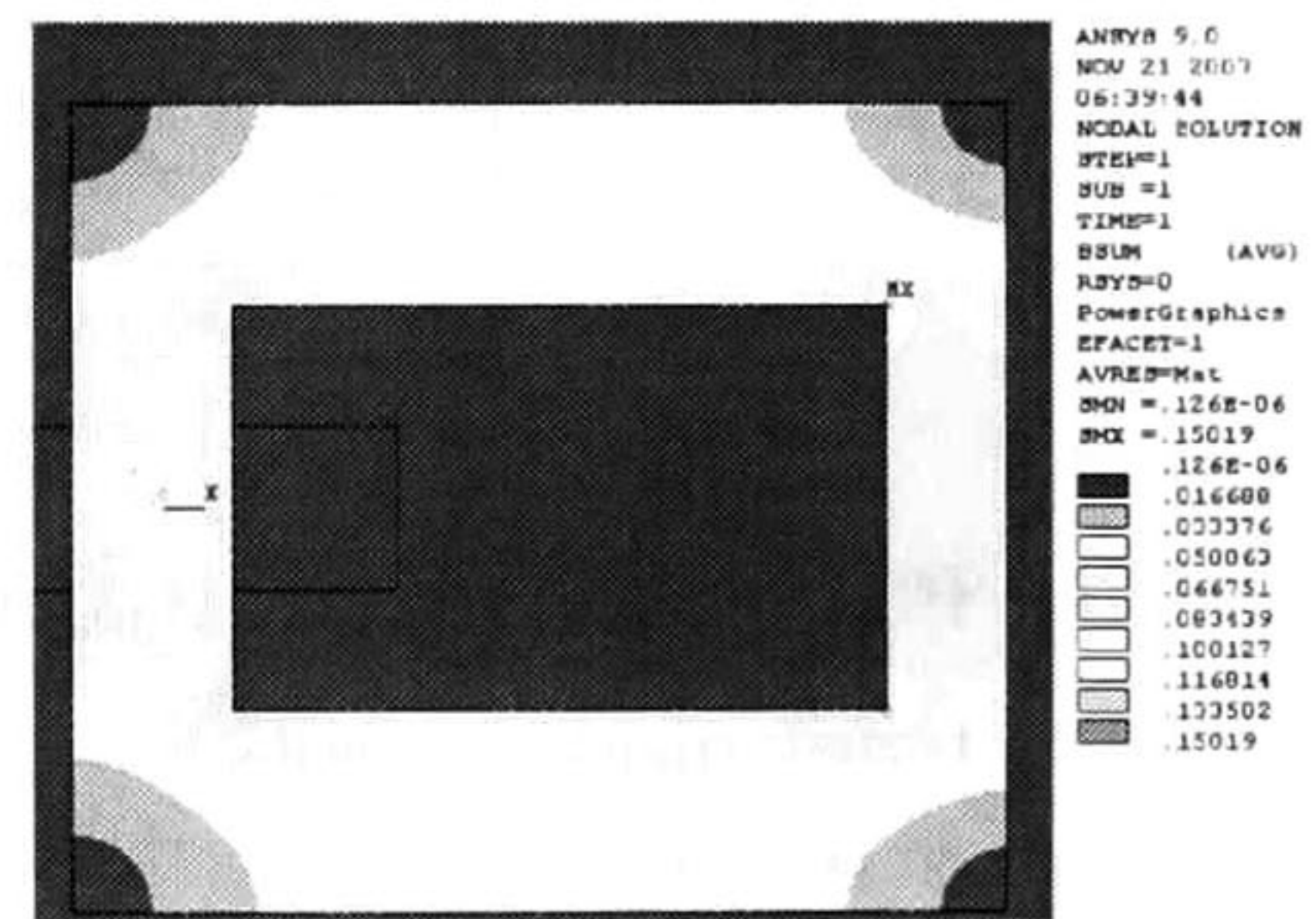
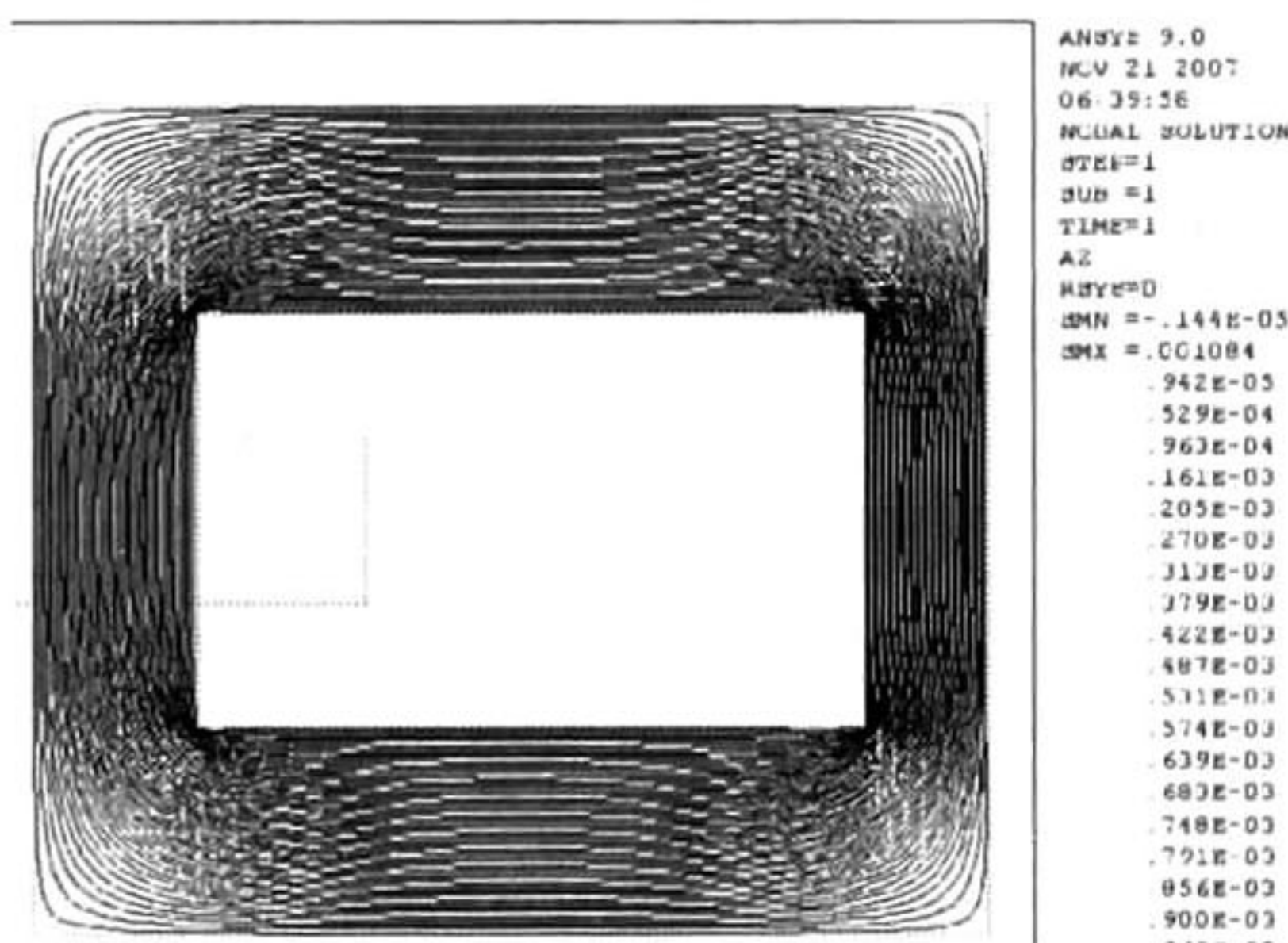


Figura 5.52: Flujo magnético, transformador monofásico modelo estático con saturación no lineal.

Figura 5.53: Densidad de flujo, transformador monofásico modelo estático con saturación no lineal.



### 5.4.2. Transformador monofásico en el dominio de la frecuencia, modelo no lineal.

Se alimenta con una fuente de voltaje de 12 Volts 60 Hz. Los resultados gráficos son valores RMS. En las figuras 5.54 y 5.55 se muestra el potencial y la densidad de flujo en sus componentes real e imaginaria. En la tabla 5.9 se muestran la resistencia e inductancia en el embobinado cuando se modela un transformador monofásico en el dominio de la frecuencia. Se observa el mismo patron de la distribución del flujo de la densidad de flujo con respecto del caso magnetostático. La resistencia es la misma la inductancia es ligeramente diferente del caso magnetostático. Esto debido a la característica no lineal de la curva de saturación.

Tabla 5.9: Parámetros eléctricos, modelo armónico caso no-lineal.

	Ansys	
	Inductancia (Henry)	5.2771
Caso armónico	Resistencia (Ohms)	3.99084
	Corriente (Amperes)	$6.031 \times 10^{-3}$

### 5.4.3. Transformador monofásico en el dominio del tiempo modelo no lineal.

En este apartado se analiza un transformador monofásico en el dominio del tiempo. En el núcleo de éste se desprecian las corrientes inducidas, se muestran la solución en el instante donde la corriente alcanza el estado estable y es máxima. Se comparan los resultados de resistencia e inductancia de los tres modelos del transformador monofásico, en donde se considera que el núcleo tiene saturación. Se observa de estas figuras el mismo patrón que para



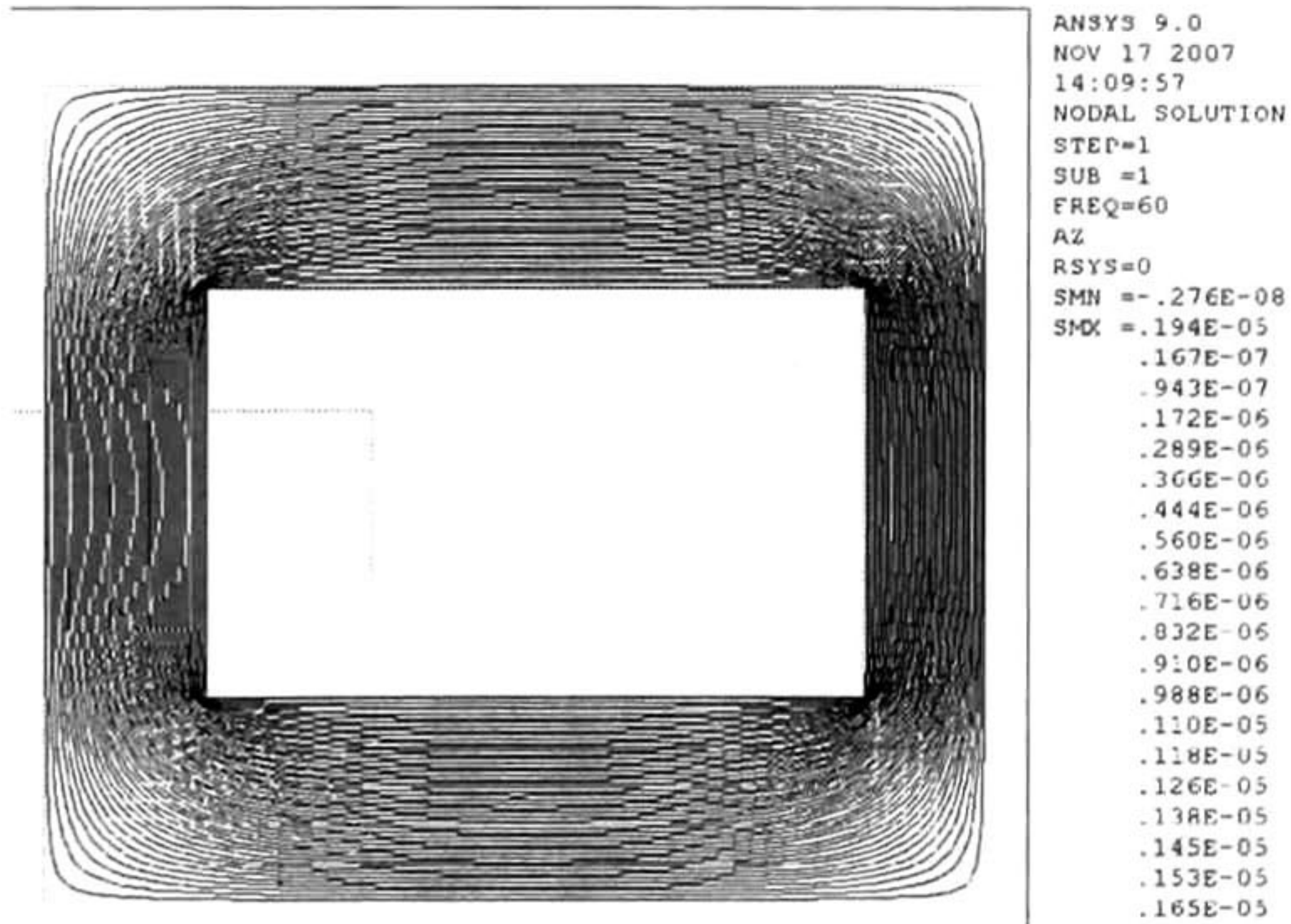


Figura 5.54: Flujo magnético parte real, transformador monofásico con saturación no lineal.

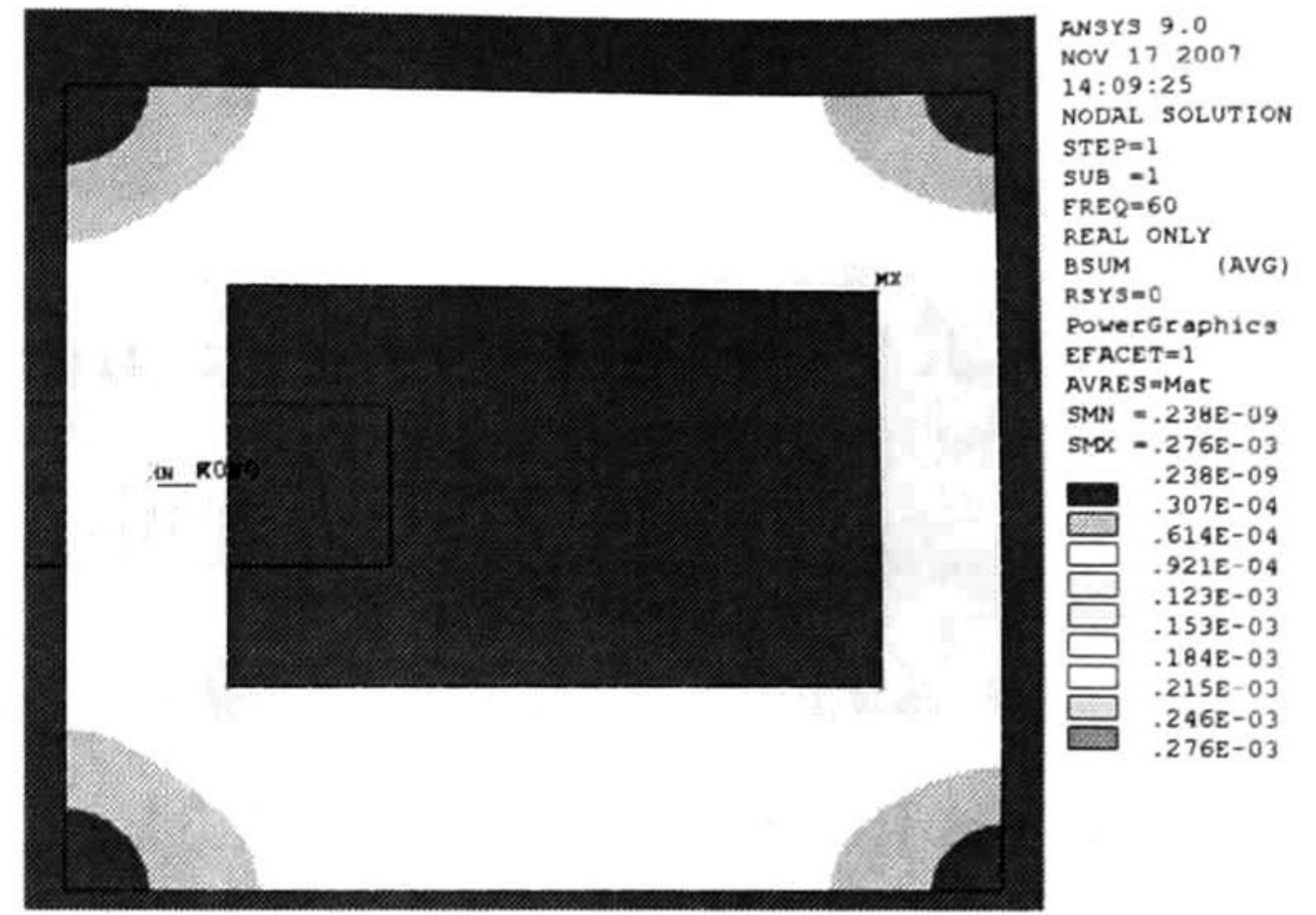


Figura 5.55: Densidad de flujo parte real, transformador monofásico con saturación no lineal.

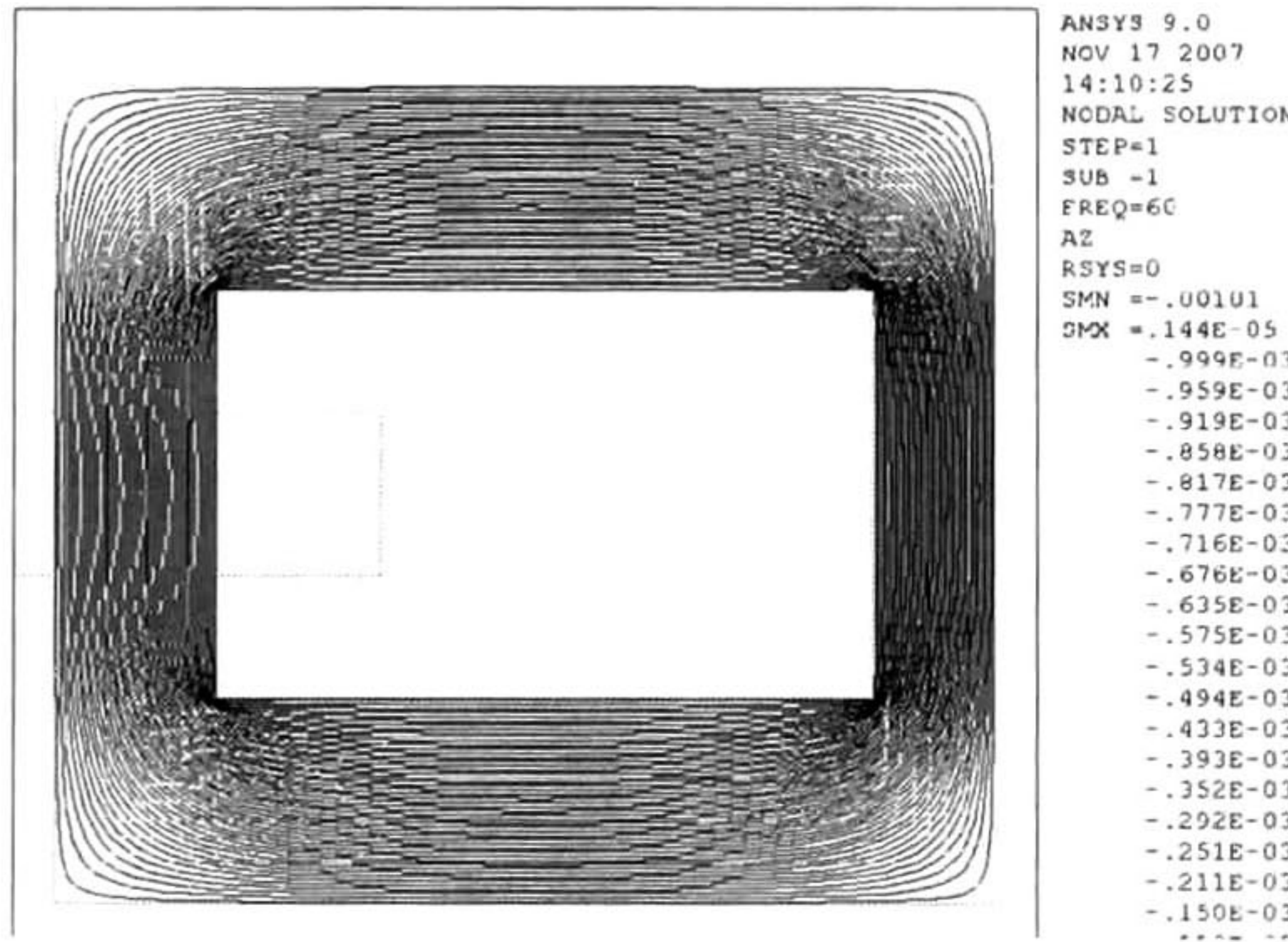


Figura 5.56: Flujo magnético parte imaginaria, transformador monofásico con saturación no lineal.

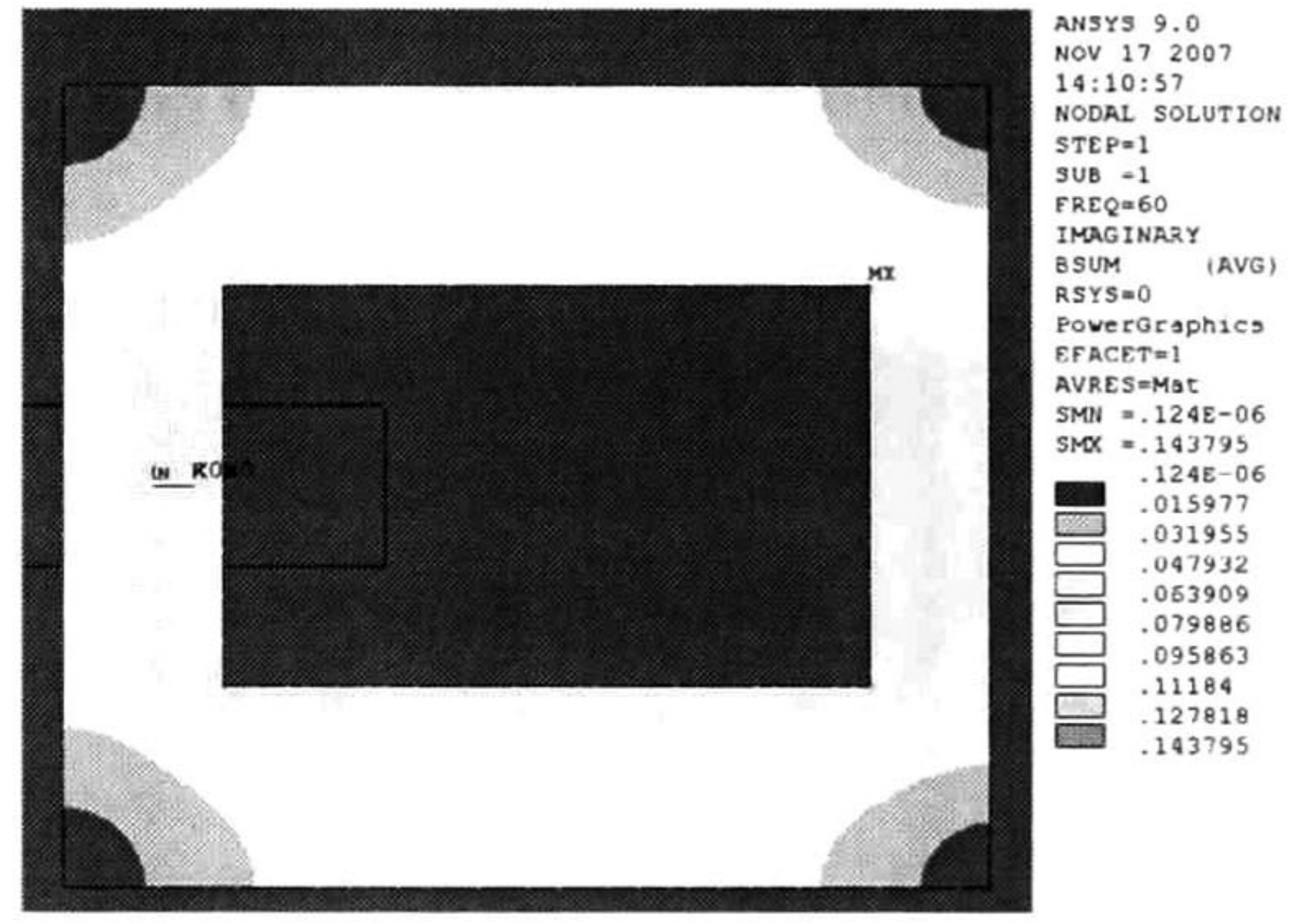


Figura 5.57: Densidad de flujo parte imaginaria, transformador monofásico con saturación no lineal.

los casos magnetostático y armónico. El comportamiento dinámico de la corriente se muestra en la figura 5.58 y 5.59. Se calculó la razón de decremento de la constante que equivale a la constante de tiempo del circuito equivalente. Este coincide con la calculada para el caso armónico. El tiempo de cómputo se incrementa con respecto a los casos magnetostático y



armónico. Para el instante de tiempo de 5.925 s, se muestran en las figuras 5.60 y 5.61 potencial magnético y densidad de flujo respectivamente.

Tabla 5.10: Parámetros eléctricos modelo en el tiempo, caso no-lineal.

Ansys		
Análisis en el tiempo.	Inductancia (Henry)	5.5
	Resistencia (Ohms)	3.99084
	Corriente (Amperes)	$5.291 \times 10^{-3}$

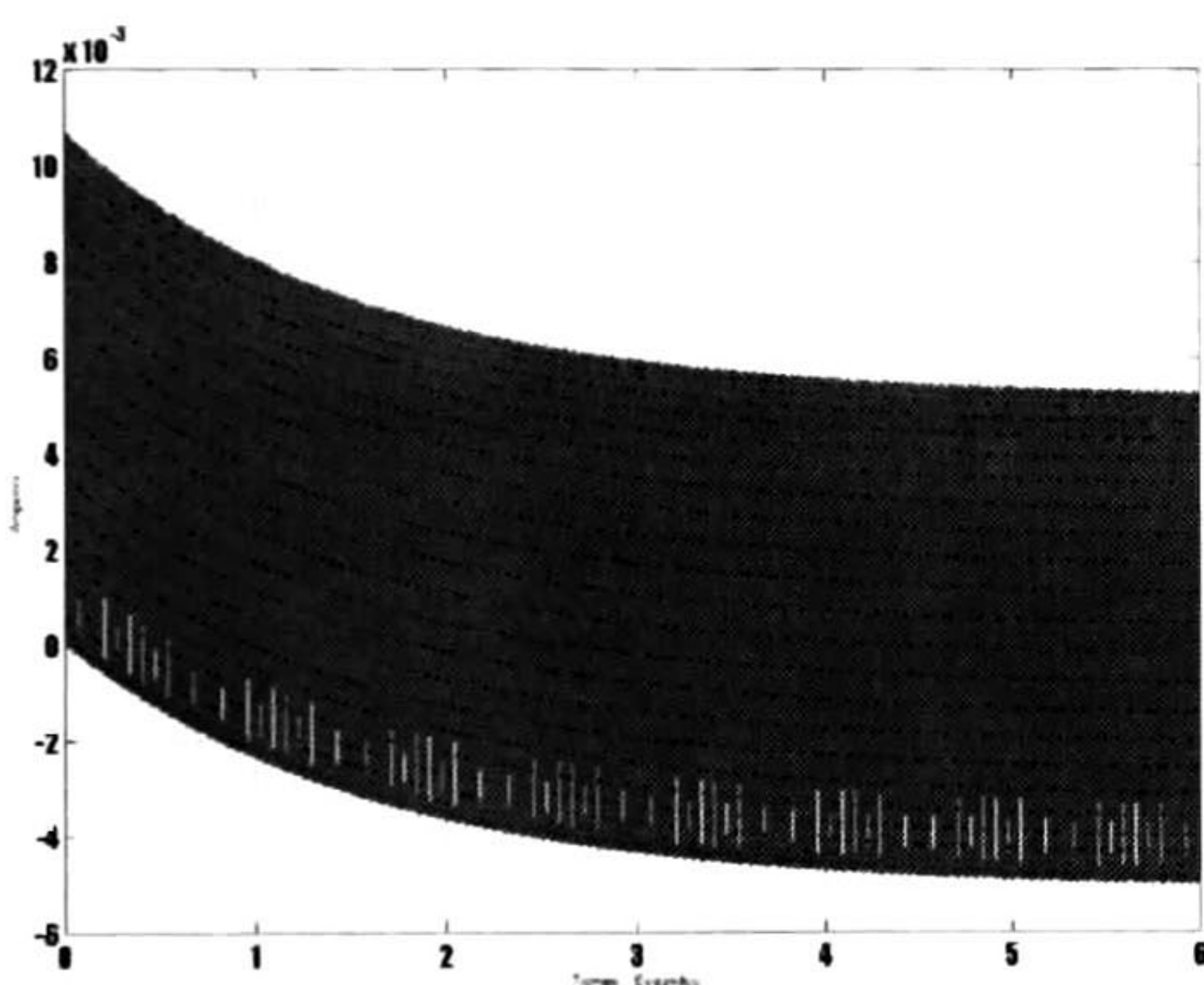


Figura 5.58: Corriente transitoria, transformador monofásico con saturación no lineal.

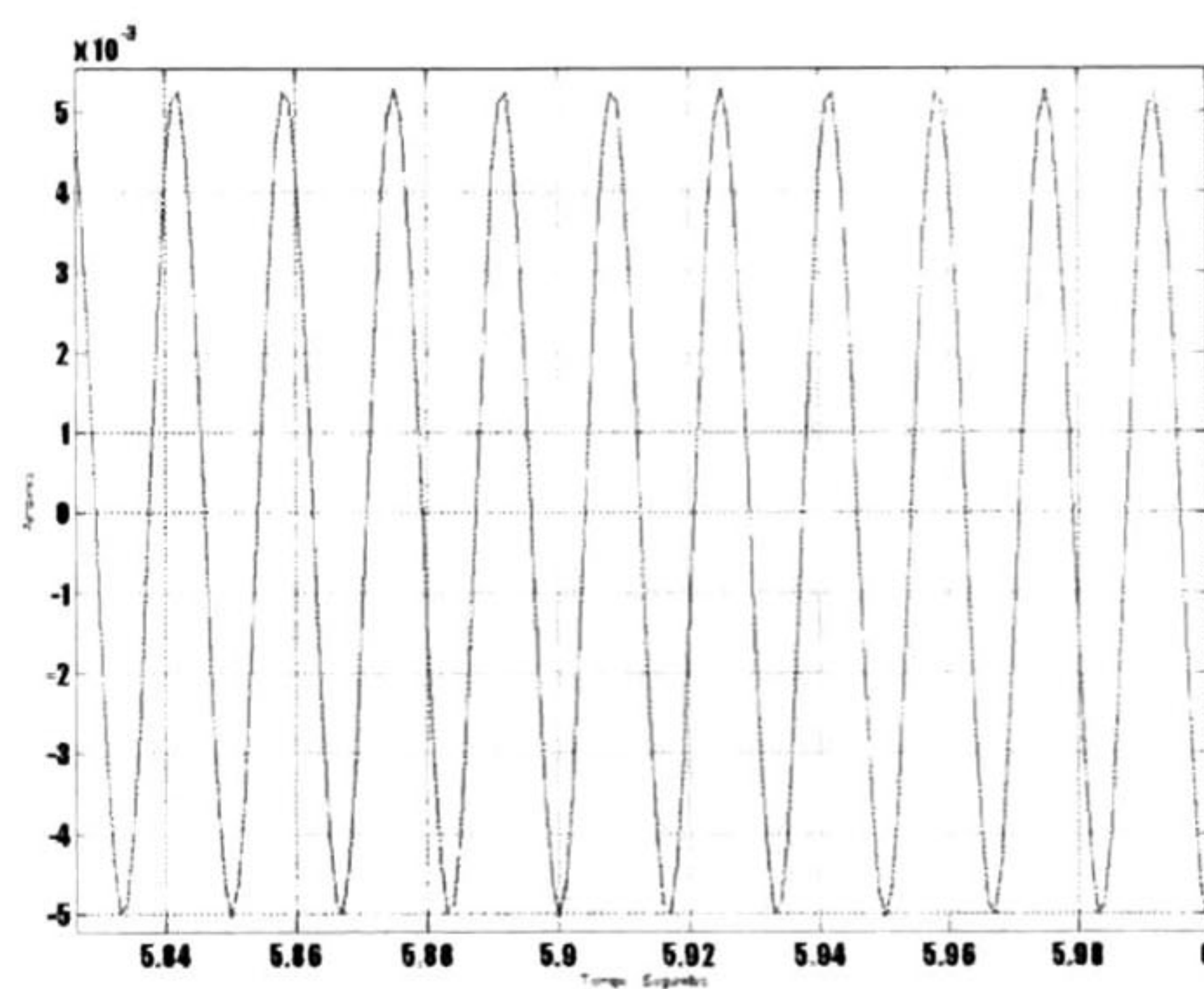


Figura 5.59: Corriente en estado estable, transformador monofásico con saturación no lineal.



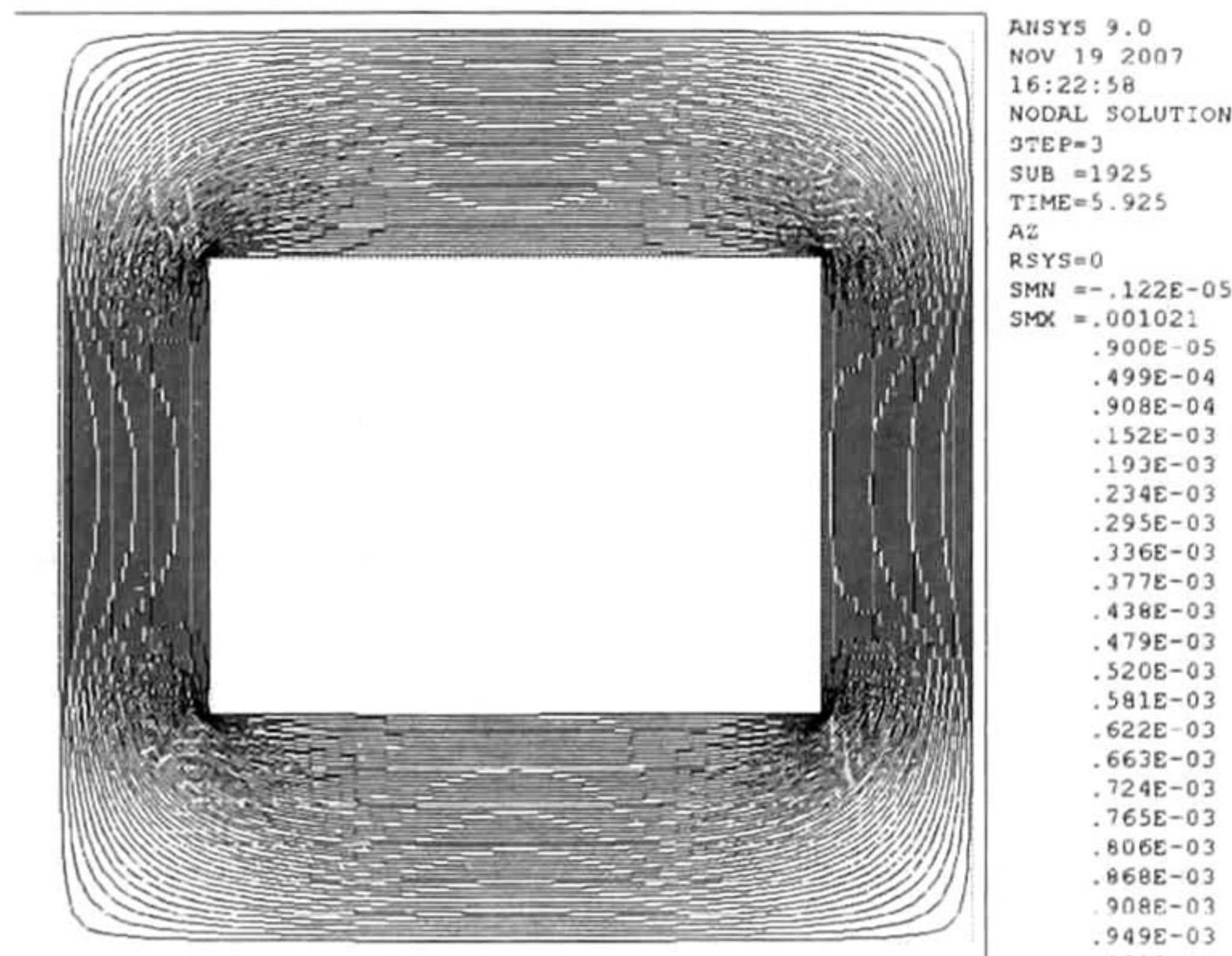


Figura 5.60: Flujo magnético en  $t = 5.925$  s del transformador monofásico con saturación no lineal.

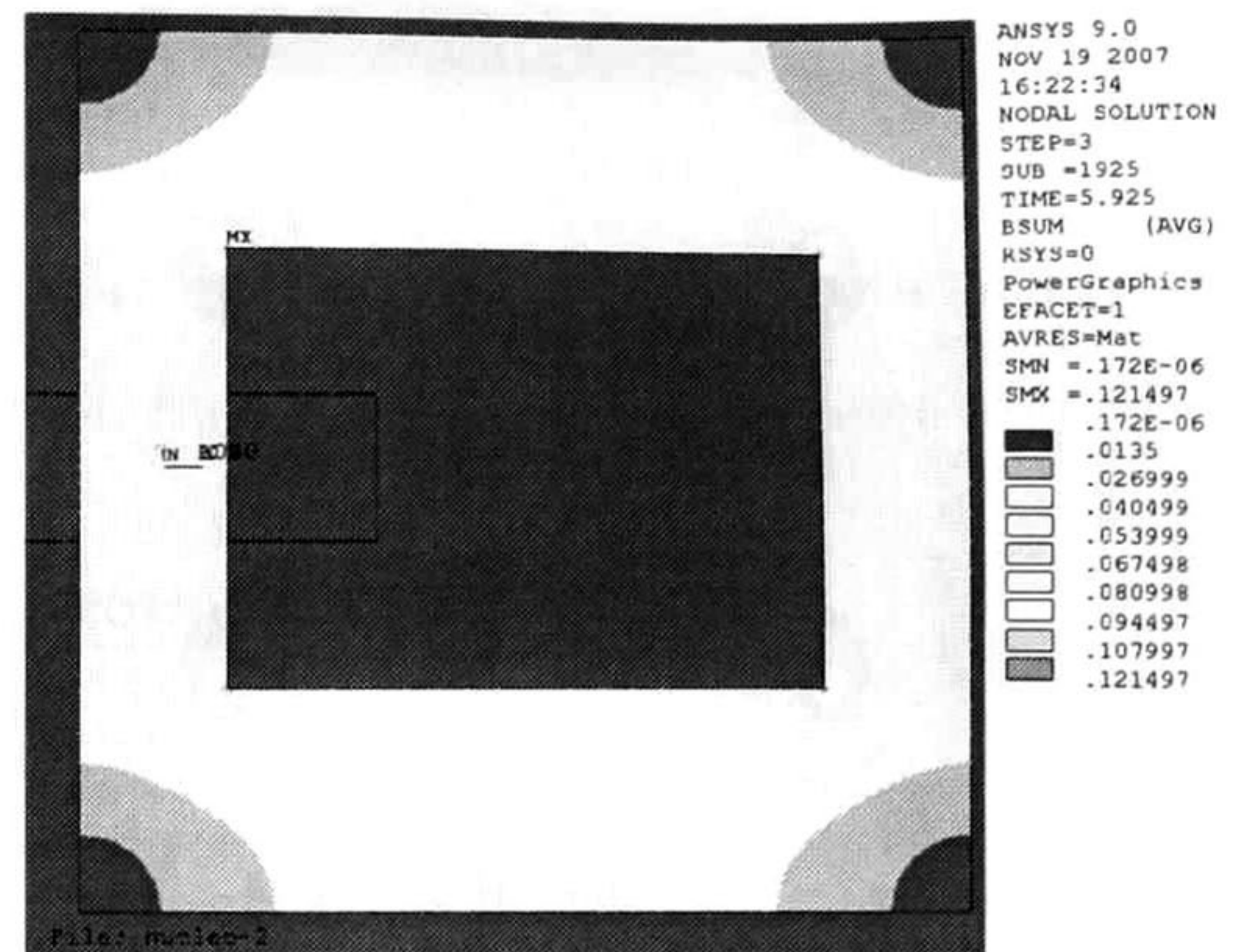


Figura 5.61: Densidad de flujo en  $t = 5.925$  s del transformador monofásico con saturación no lineal.

## 5.5. Transformador monofásico núcleo ferromagnético caso lineal.

El cálculo transitorio cuando se incluye la saturación requiere de mucho tiempo de cálculo cerca de las 12 horas de cómputo. En esta sección se busca un valor de la permeabilidad constante del núcleo equivalente que reproduzca con buena aproximación las variables importantes del transformador con núcleo ferromagnético. El valor de la permeabilidad relativo es de 3640. El transformador de nuevo se analiza para los tres modelos del elemento finito.



### 5.5.1. Transformador monofásico modelo magnetostático lineal.

En la figura 5.62 se muestran las líneas de contorno del potencial magnético y en la figura 5.63 se observa la densidad de flujo magnético y los parámetros circuitales se muestran en la Tabla 5.11.

Tabla 5.11: Parámetros eléctricos modelo magnetostático caso lineal.

Ansys		
Caso estático lineal.	Inductancia (Henry)	5.2632
	Resistencia (Ohms)	3.9970
	Corriente (Amperes)	$6.034 \times 10^{-3}$

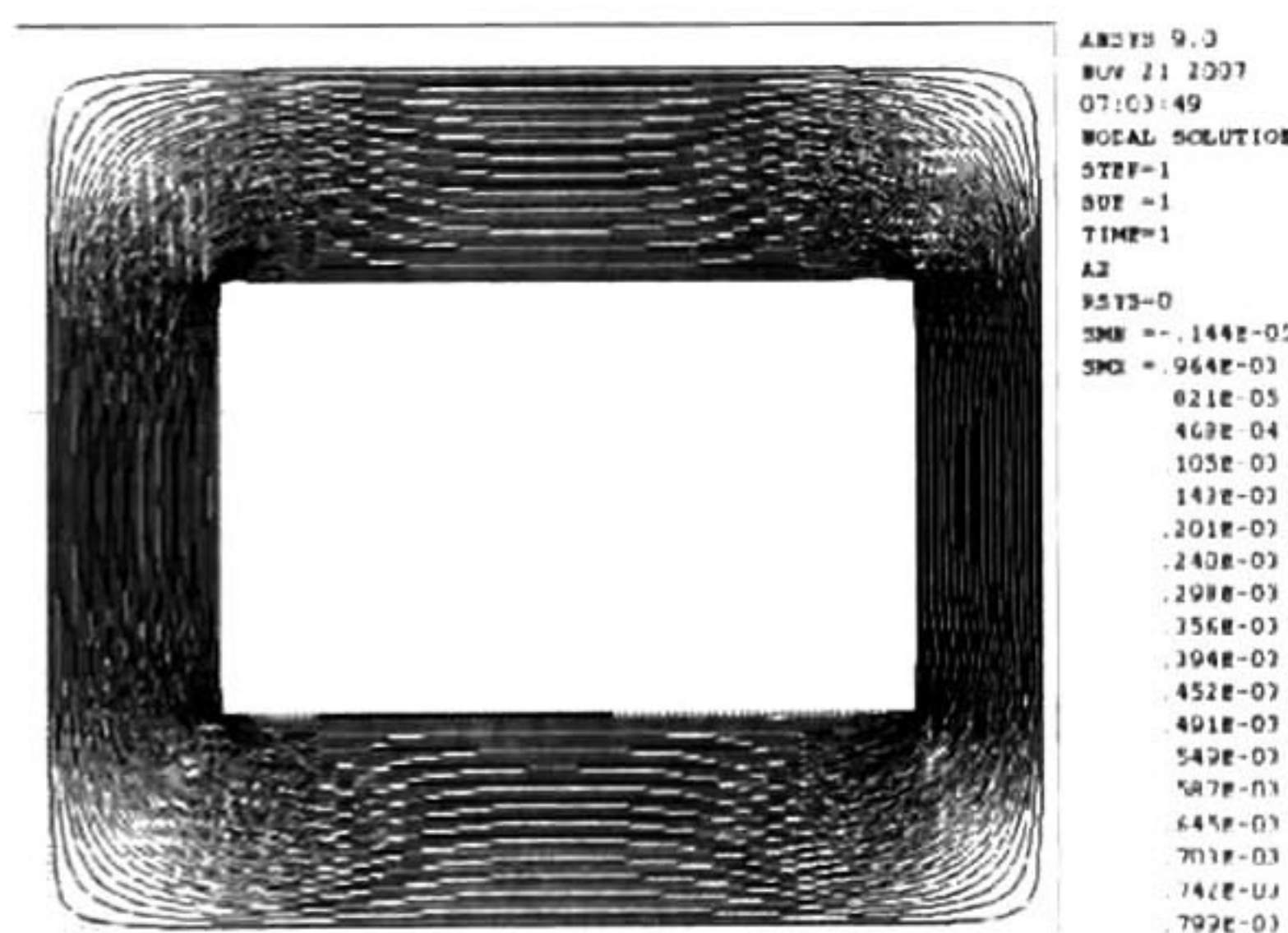


Figura 5.62: Flujo magnético modelo estático del transformador monofásico caso lineal.

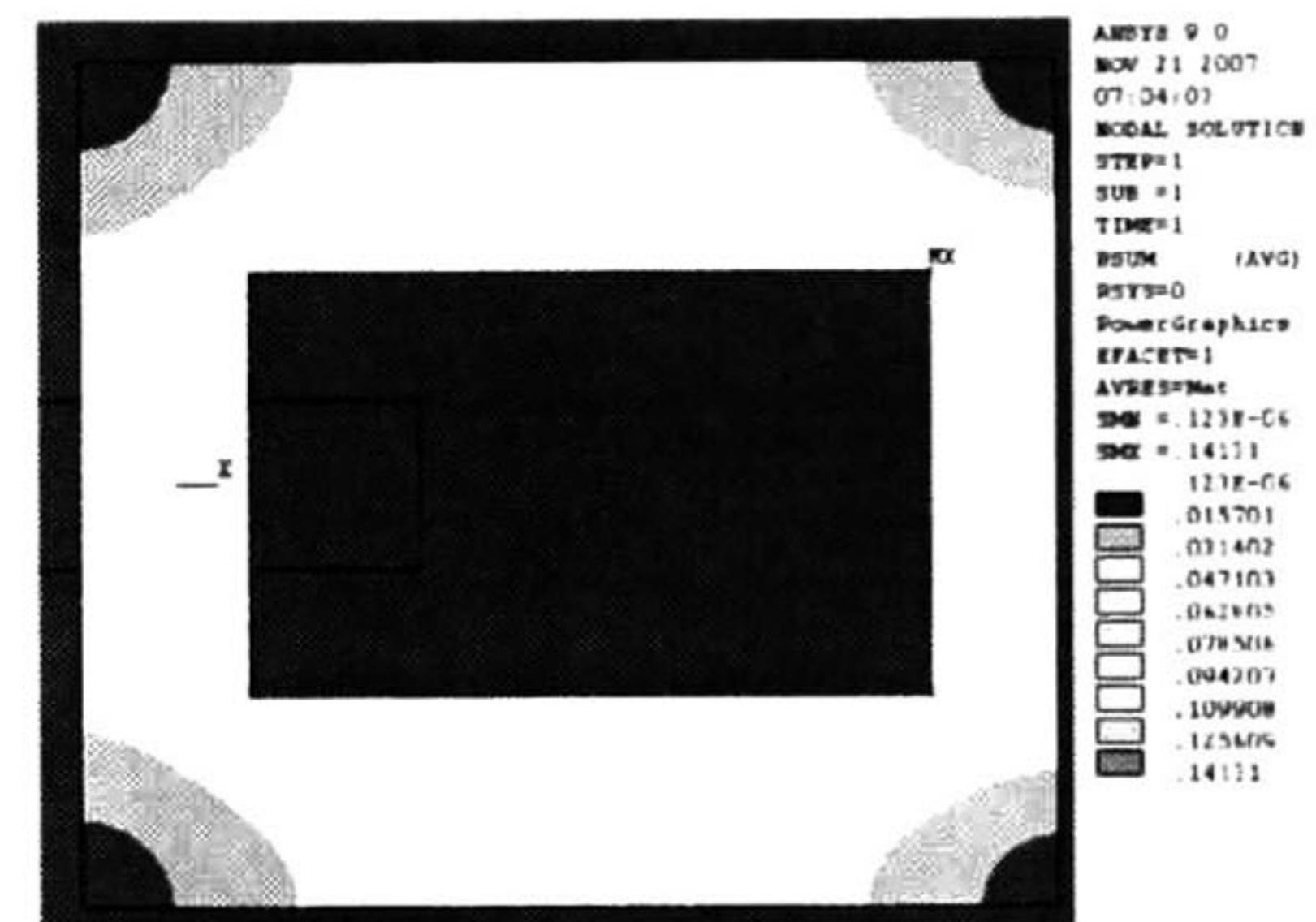


Figura 5.63: Densidad de flujo modelo estático del transformador monofásico caso lineal.



### 5.5.2. Transformador monofásico modelo armónico lineal.

Los resultados obtenidos de simular el transformador monofásico en el dominio de la frecuencia donde el voltaje aplicado en terminales es de 12 volts a 60 hz, cuando el núcleo tiene saturación lineal. Se desprecia el efecto de las corrientes inducidas. En las figuras 5.64 y 5.65 se muestra el potencial y la densidad de flujo parte real, y en las figuras 5.66 y 5.67 se muestran las componentes imaginarias de flujo y de la densidad de flujo. En la Tabla 5.12 se muestran los parámetros circuitales, resistencia e inductancia. Los parámetros de inductancia y resistencia entre el modelo magnetostático y el modelo en el dominio de la frecuencia se puede observar que prácticamente son iguales.

Tabla 5.12: Parámetros eléctricos modelo armónico, caso lineal.

Ansys		
	Inductancia (Henry)	5.2747
Análisis Armónico.	Resistencia (Ohms)	3.9970
	Corriente (Amperes)	$6.034 \times 10^{-3}$

### 5.5.3. Transformador monofásico en el dominio del tiempo, modelo lineal.

Los parámetros circuitales se muestran en la Tabla 5.13 del transformador monofásico en el dominio del tiempo. En la figuras 5.68 y en la figura 5.69 se presenta el flujo y la densidad de flujo magnético, respectivamente, en el instante de tiempo  $t = 0.975$  segundos. En este instante la corriente alcanza su valor máximo en estado estable. De los tres casos resulta que los valores numéricos de resistencia e inductancia son iguales y los patrones de las líneas



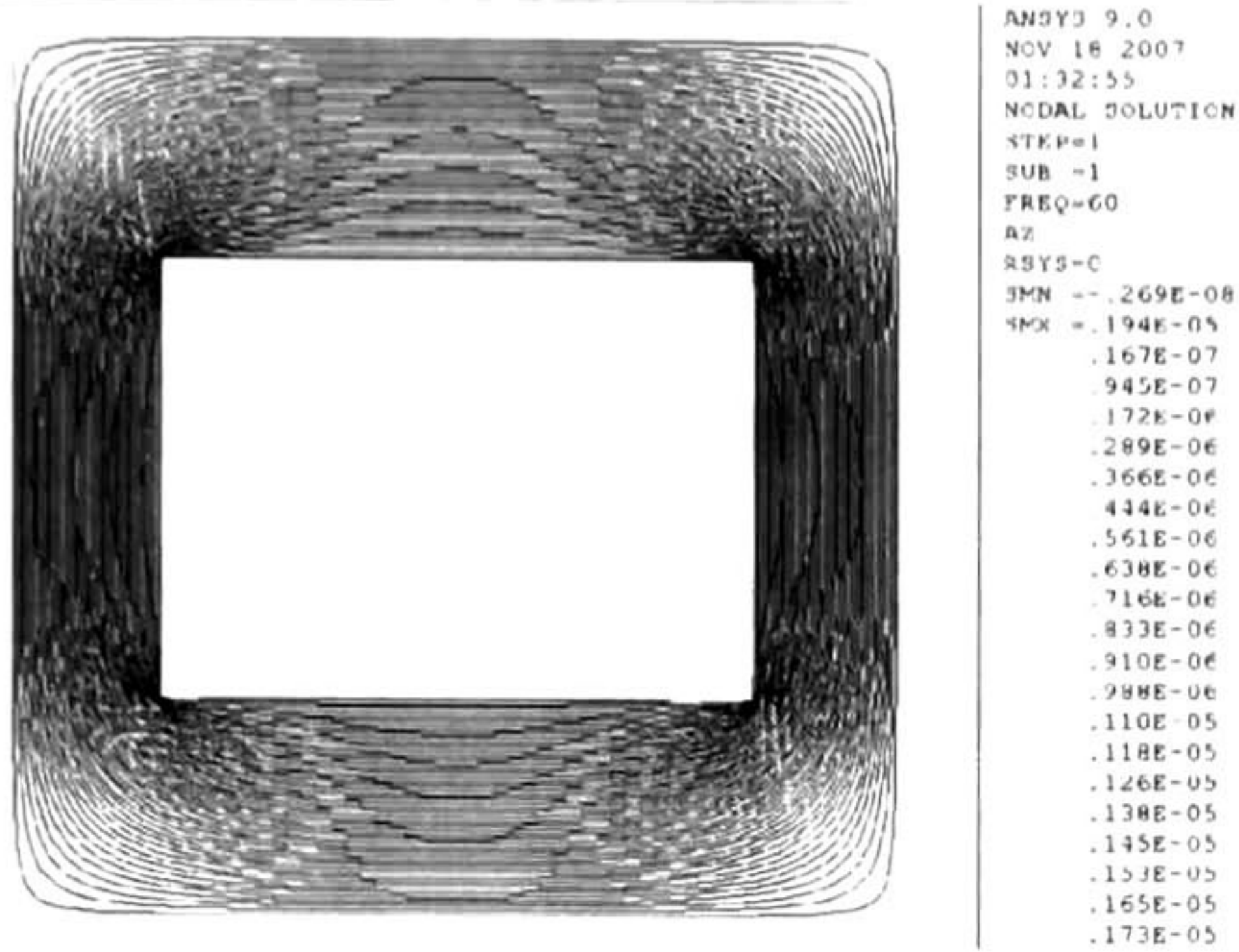


Figura 5.64: Flujo magnético parte real del transformador monofásico caso lineal.

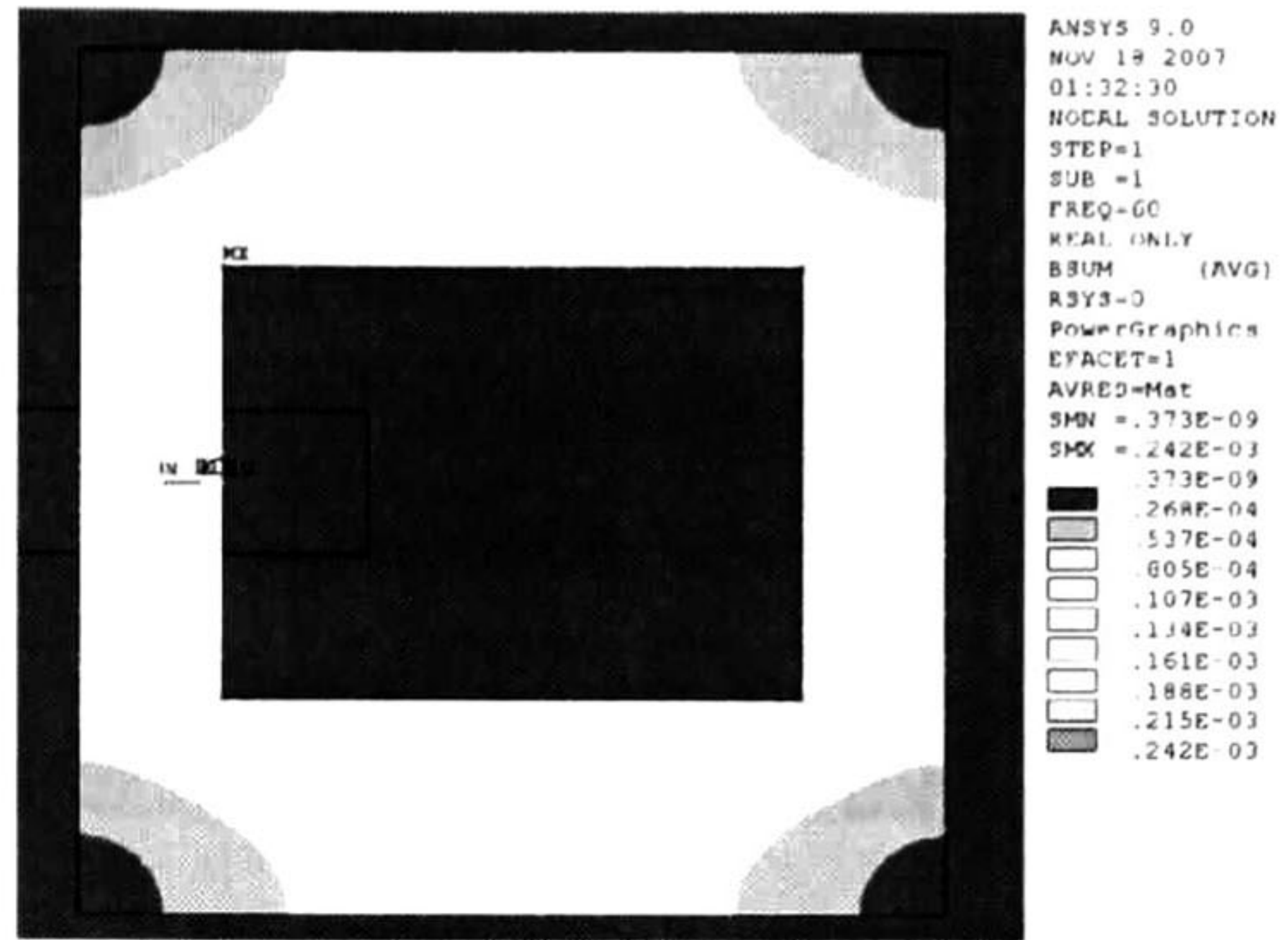


Figura 5.65: Densidad de flujo parte real del transformador monofásico caso lineal.

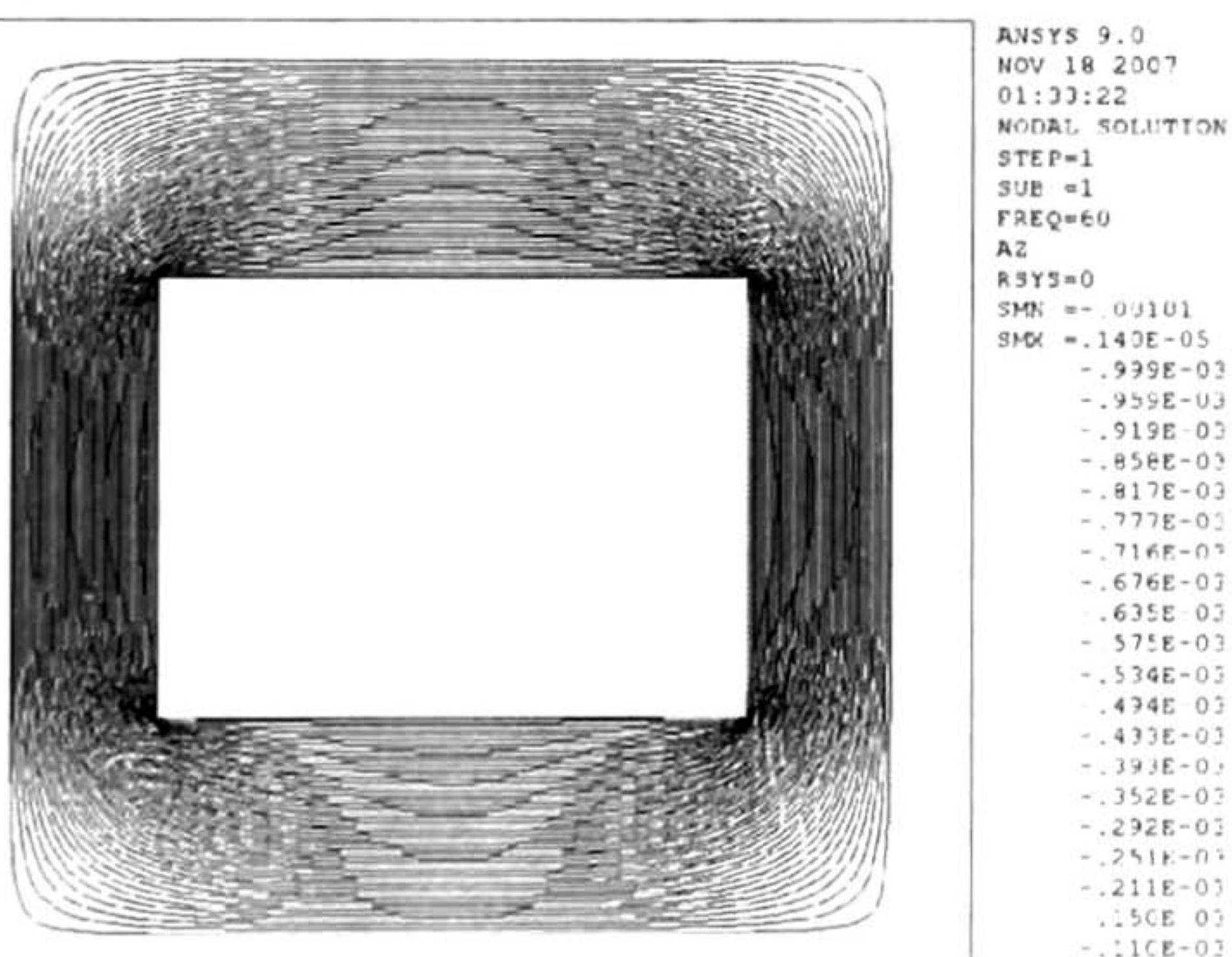


Figura 5.66: Flujo magnético parte imaginaria del transformador monofásico caso lineal.

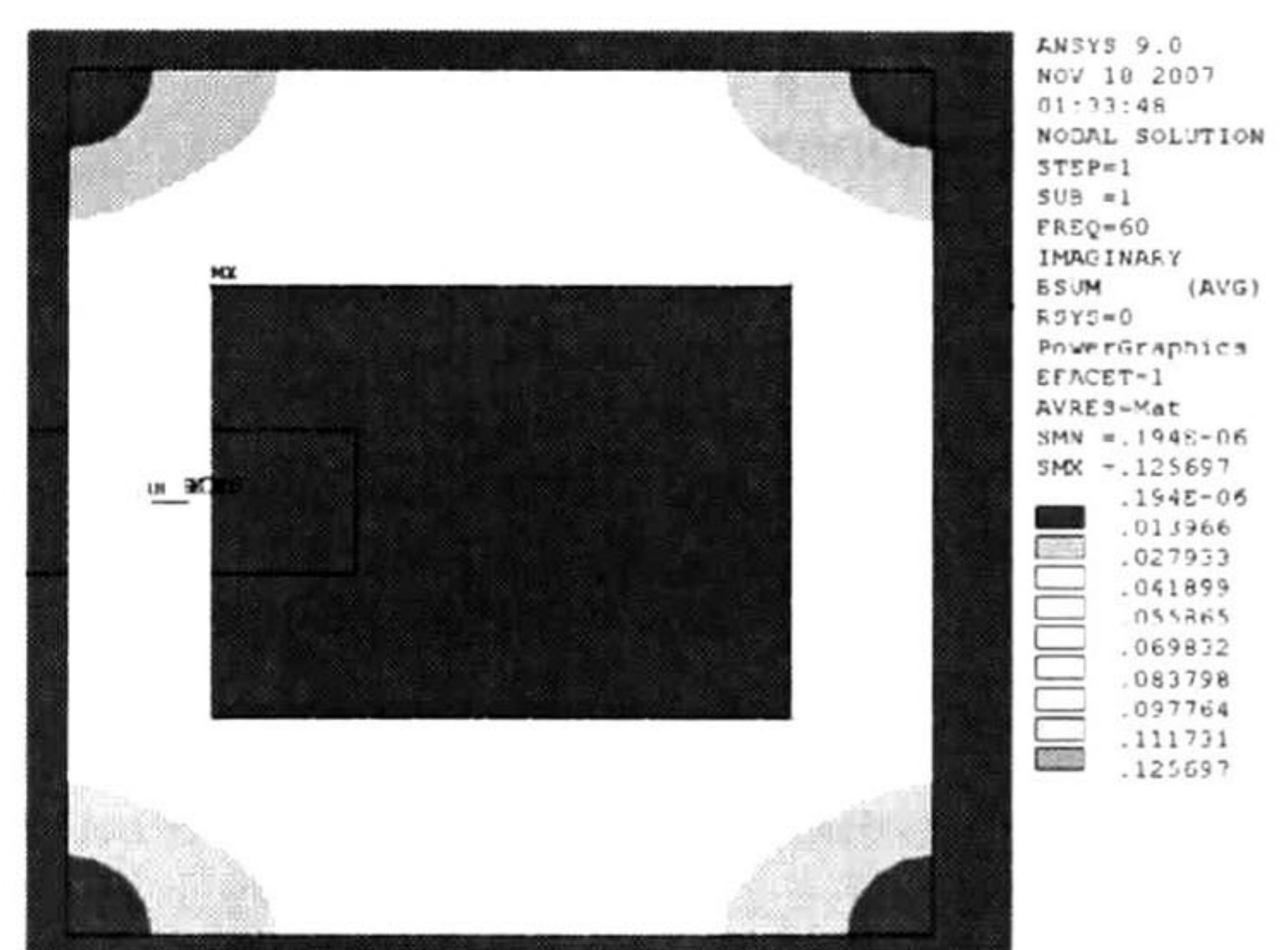


Figura 5.67: Densidad de flujo parte imaginaria del transformador monofásico caso lineal.



equipotenciales y de densidad de flujo son iguales para los tres modelos de elemento finito. Esto demuestra que se pueden utilizar modelos equivalentes que ofrezcan buena aproximación del caso no lineal. El modelo transitorio es el modelo mas completo pero requiere de mayores recursos computacionales.

Tabla 5.13: Parámetros eléctricos, modelo en el tiempo, caso lineal.

Ansys		
Análisis en el dominio del tiempo	Inductancia (Henry)	5.2747
	Resistencia (Ohms)	3.99084
	Corriente (Amperes)	$6.044 \times 10^{-3}$

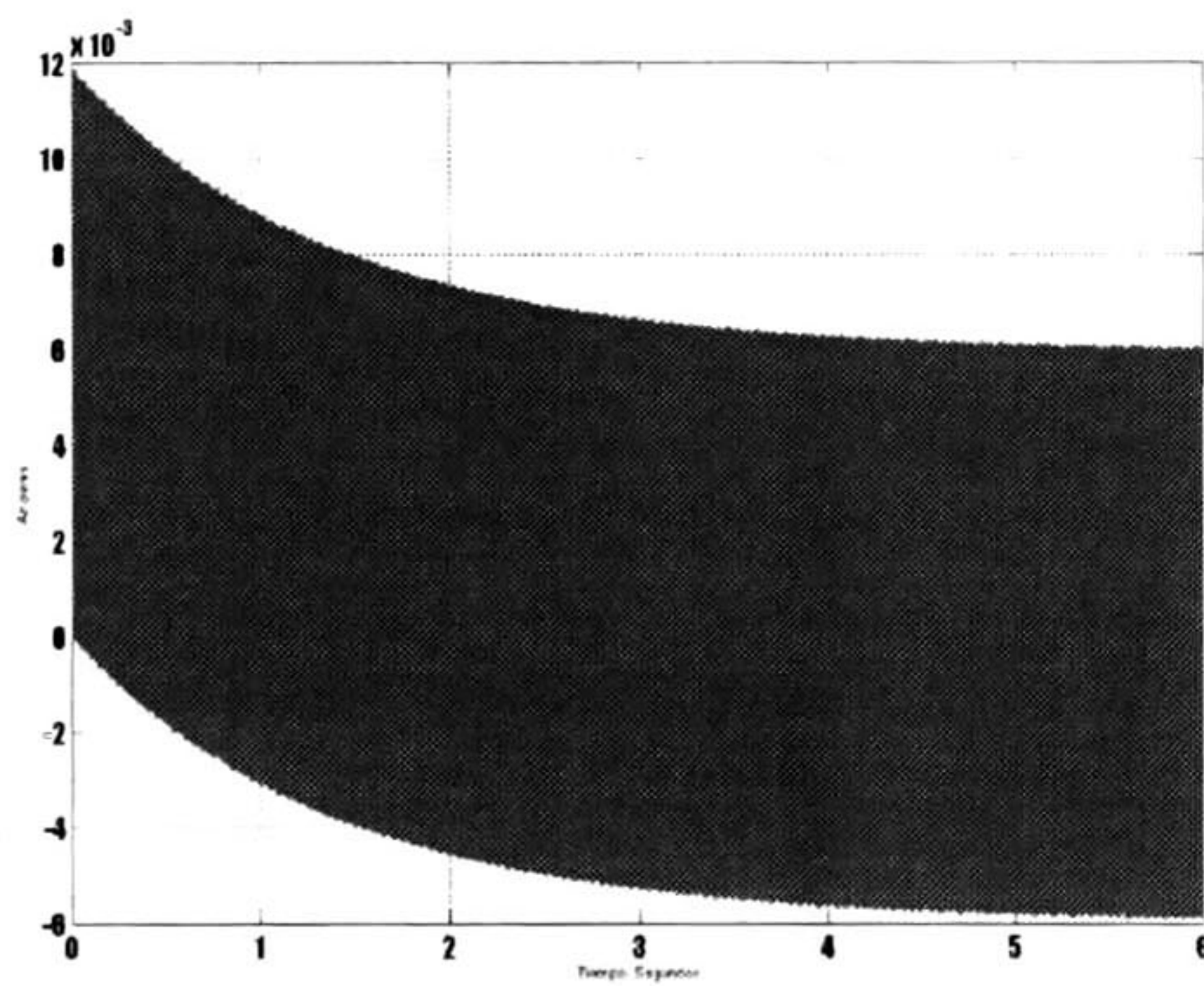


Figura 5.68: Corriente transitoria del transformador monofásico, caso lineal.

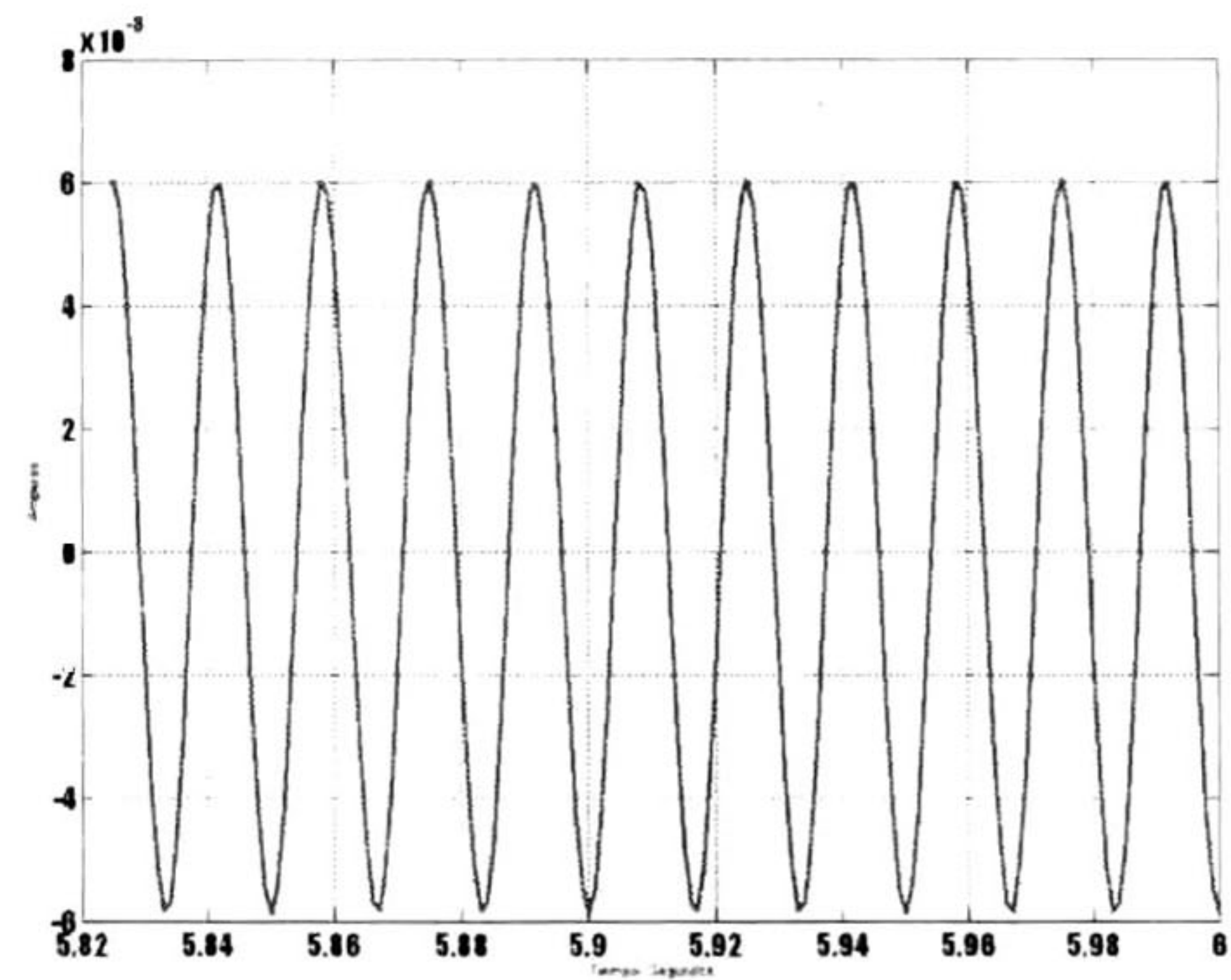


Figura 5.69: Corriente en estado estable del transformador monofásico, caso lineal.



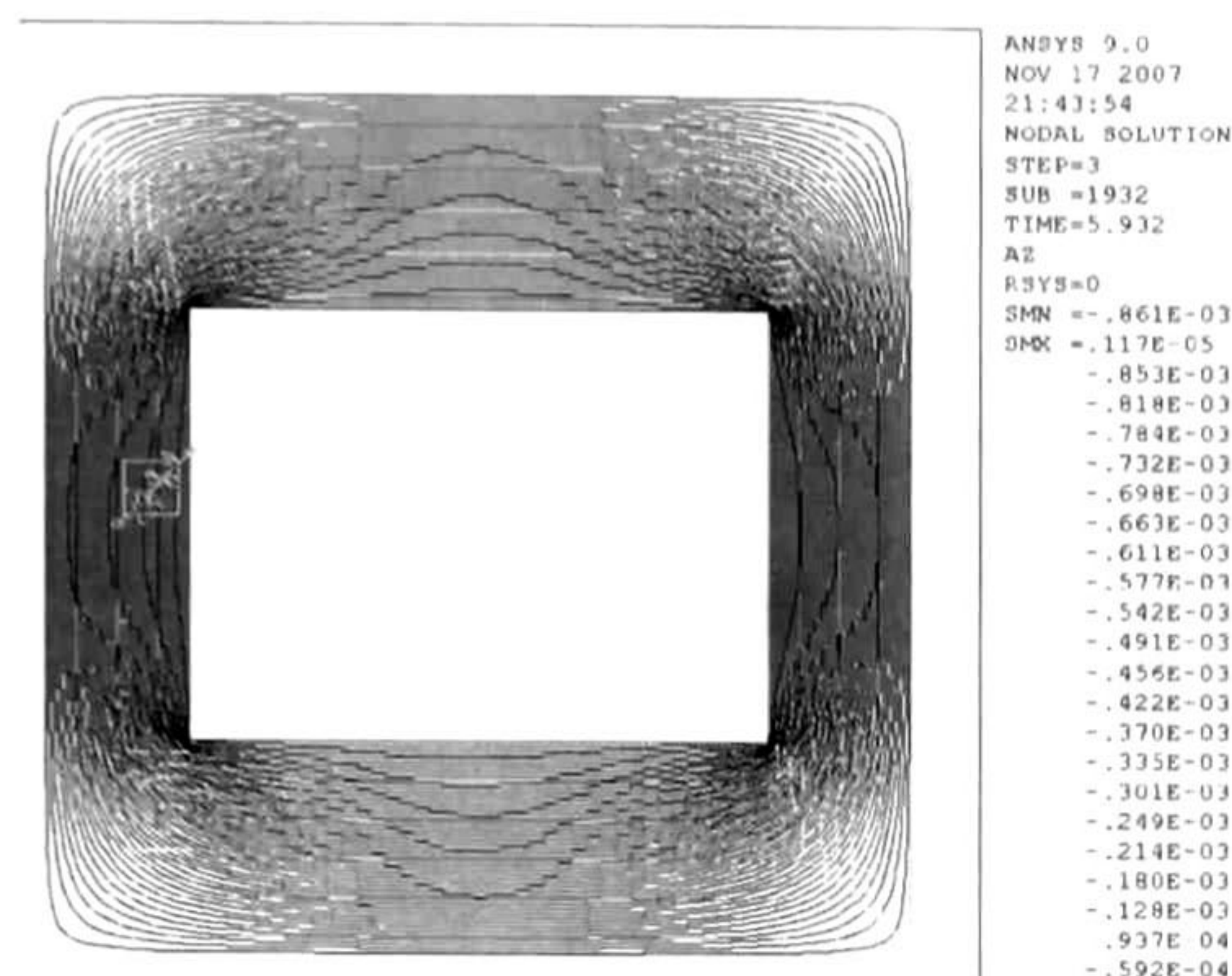


Figura 5.70: Flujo magnético en  $t = 5.925$  s del transformador monofásico caso lineal.

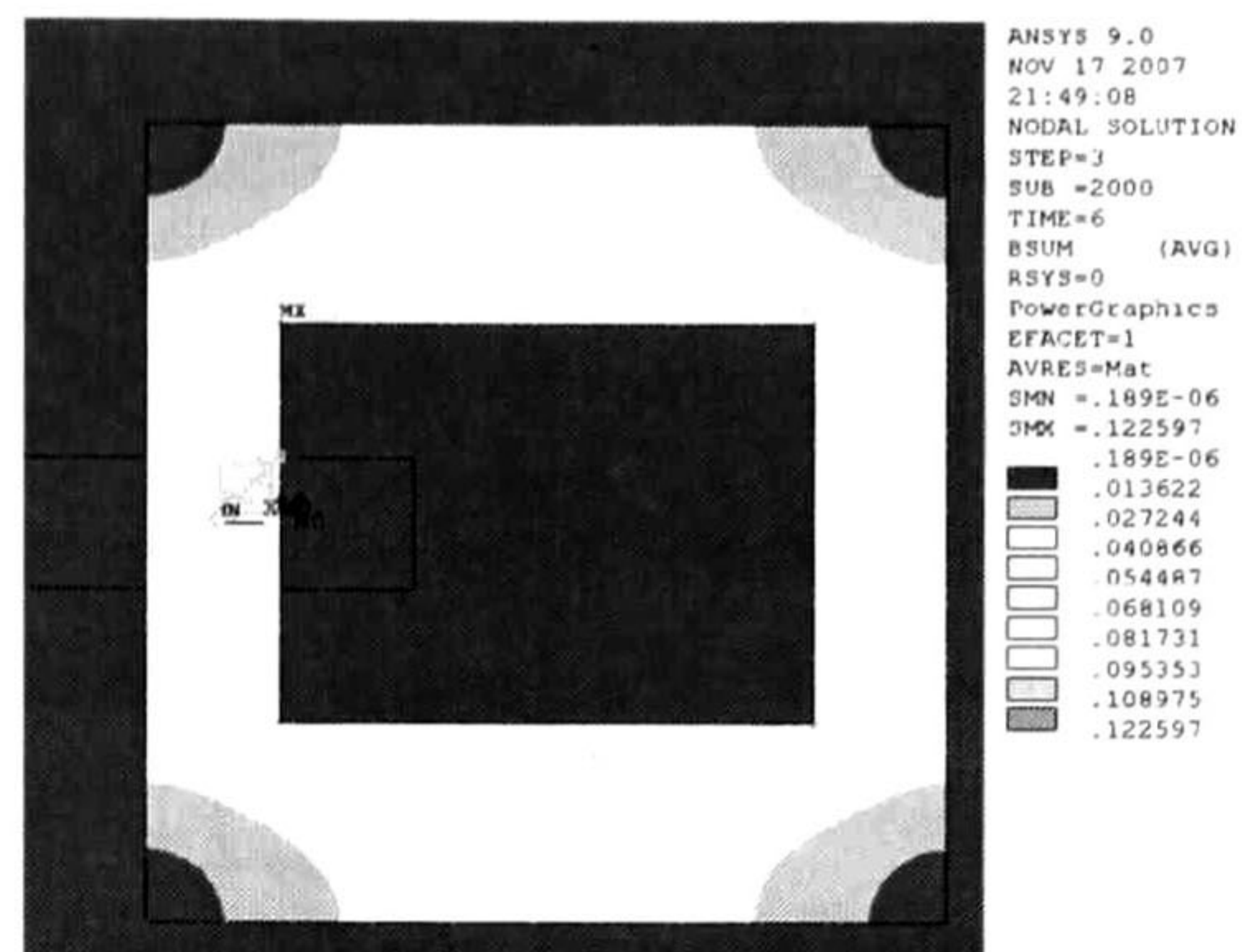


Figura 5.71: Densidad de flujo en  $t = 5.925$  s del transformador monofásico caso lineal.

## 5.6. Transformador Trifásico.

En este apartado se modela un transformador trifásico. Debido a las características geométricas que tiene la disposición de los bobinados y la del núcleo, es conveniente considerar flujos asimétricos en el núcleo. El flujo se considera que es asimétrico debido a las trayectorias geométricas por donde circula este. Para este caso en particular, se comprueba esta asimetría haciendo dos experimentos que consisten en lo siguiente. En un primer experimento se calcula el voltaje en terminales considerando la resistencia en CD de la bobina y considerando la corriente de excitación que es 0.1617 Amperes. Se hace un análisis de elemento finito aplicando este voltaje encontrado a cada una de las fases. El entre-hierro se considera que tiene una permeabilidad relativa de 25.7, y el comportamiento magnético del núcleo es no lineal, la curva se muestra en la figura 5.72. El objetivo de estos experimentos consiste en encontrar la asimetría de estas corrientes, y de paso comprobar que esta existe en transformadores que tienen la misma característica geométrica del núcleo.



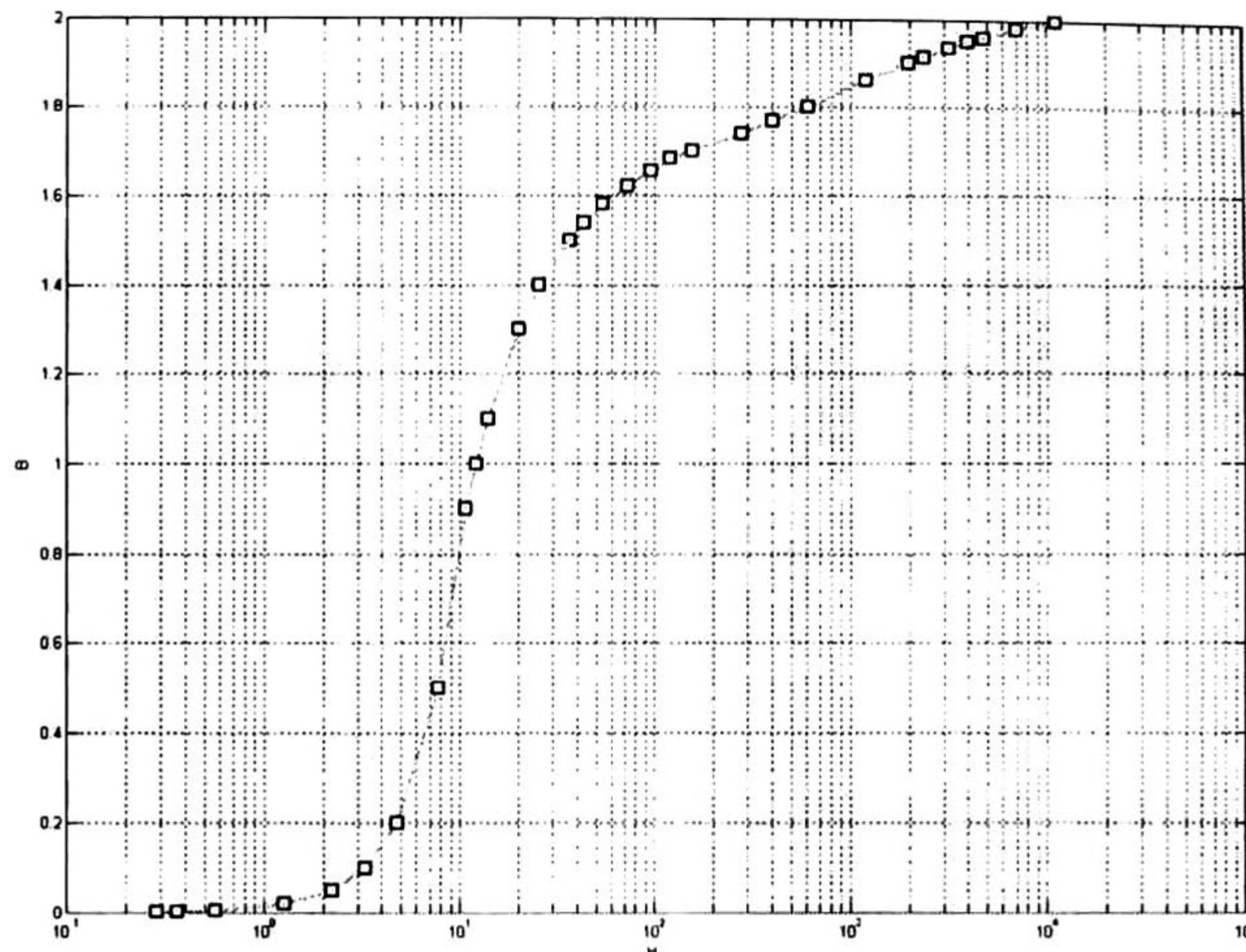


Figura 5.72: Curva de saturación del modelo trifásico del transformador.

### 5.6.1. Comprobación de asimetría, modelo estático.

La asimetría magnética en transformadores trifásicos de tres piernas es debida a la diferencia de longitud de las trayectorias de los flujos magnéticos de las piernas externas respecto de la pierna central. También se ha observado asimetría en las pruebas de laboratorio de los transformadores debida a las imperfecciones de manufactura [11].

La asimetría magnética puede ser determinada por medios magnetostáticos o con el modelo armónico. El modelo magnetostático es más sencillo y rápido de implementar. En este trabajo se propone una técnica magnetostática que consiste en alimentar con una fuente de voltaje de CD en cada una de las fases y manteniendo las otras en circuito abierto. Es decir se alimenta la fase A y las otras se mantienen en circuito abierto, posteriormente se alimenta la fase B y las otras se mantiene en circuito abierto, de la misma forma se procede con la fase C. Se asigna la fase A a la bobina que se encuentra en la pierna izquierda, la fase B a



la bobina en la pierna central y finalmente la fase C a la pierna derecha. Con esta prueba además, se calculan los parámetros eléctricos con las formulas de diseño y con las rutinas de la técnica de elementos finitos. Se alimenta a la fase A con una fuente de corriente que hace circular aproximadamente la corriente de excitación nominal. Los parámetros eléctricos se muestran en la Tabla 5.14. De esta tabla se observa que la resistencia calculada es la misma en cada bobina, la inductancia vista del lado de cada bobina es igual en las bobinas externas, fase A y fase C. La inductancia en la fase B es de valor diferente y nos indica la diferencia entre las trayectorias de los flujos magnéticos, y por tanto la diferencia de los circuitos magnéticos entre las bobinas externas y la bobina central. Los resultados de la distribución del potencial magnético y de la densidad de flujo magnético cuando se alimenta la fase A se muestran en las figuras 5.73 y 5.74. El flujo magnético es mayor en la pierna de la fase A, izquierda, y este se distribuye en las fases B, central y la Fase C, derecha. Se observa que el flujo por la pierna central es mayor que el flujo en la pierna derecha, esto debido a que la longitud de la trayectoria es mayor en la pierna derecha que en la pierna central. Se observa que la densidad de flujo es mayor en la zona de traslape que se conoce como V invertida. En la figura 5.75 se muestran las líneas equipotenciales del potencial magnético cuando se alimenta la fase B. Se observa que el flujo magnético es mayor en la pierna central y este se distribuye por igual en las piernas externas. En la figura 5.76 se muestra la distribución de la densidad de flujo magnético, en la pierna central. Se observa de nuevo la simetría de la densidad de flujo en las piernas externas. Los resultados cuando se alimenta la fase C, pierna derecha, se muestran en las figuras 5.77 y 5.78. Se observa que los resultados son los mismos que cuando se alimenta la fase A, con la diferencia que la dirección del flujo es en sentido contrario.



Tabla 5.14: Resultados de Asimetría, modelo magnetostático.

	Ansyst	voltaje F-A	voltaje F-B	voltaje F-C
Análisis	Inductancia (Henry)	4125.42011	4447.95596	4125.44089
Estático	Resistencia (Ohms)	2.09437	2.09437	2.09437

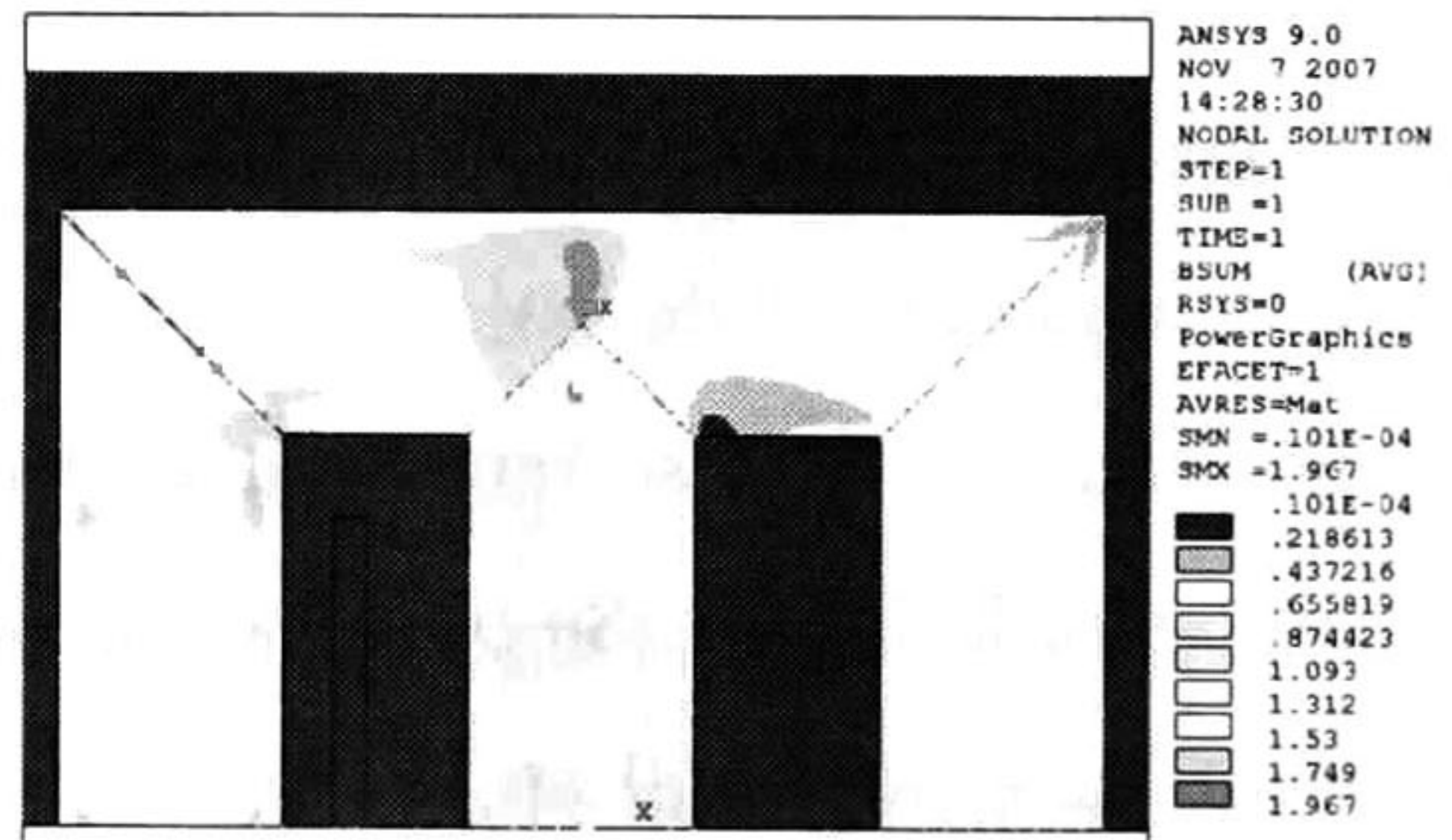
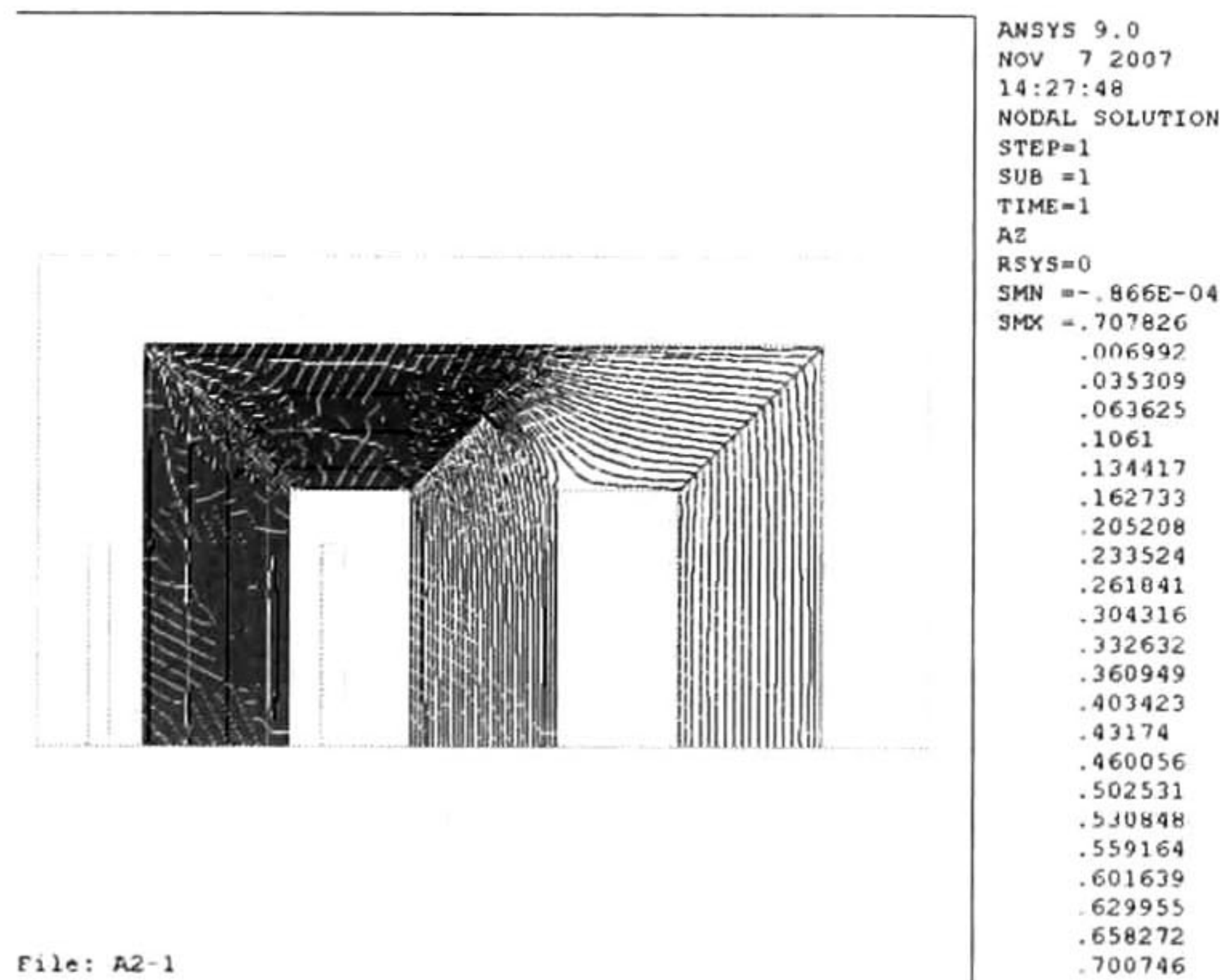


Figura 5.73: Distribución del potencial magnético debida a la fase A del modelo trifásico.  
 Figura 5.74: Densidad de flujo debida a la fase A del modelo trifásico.



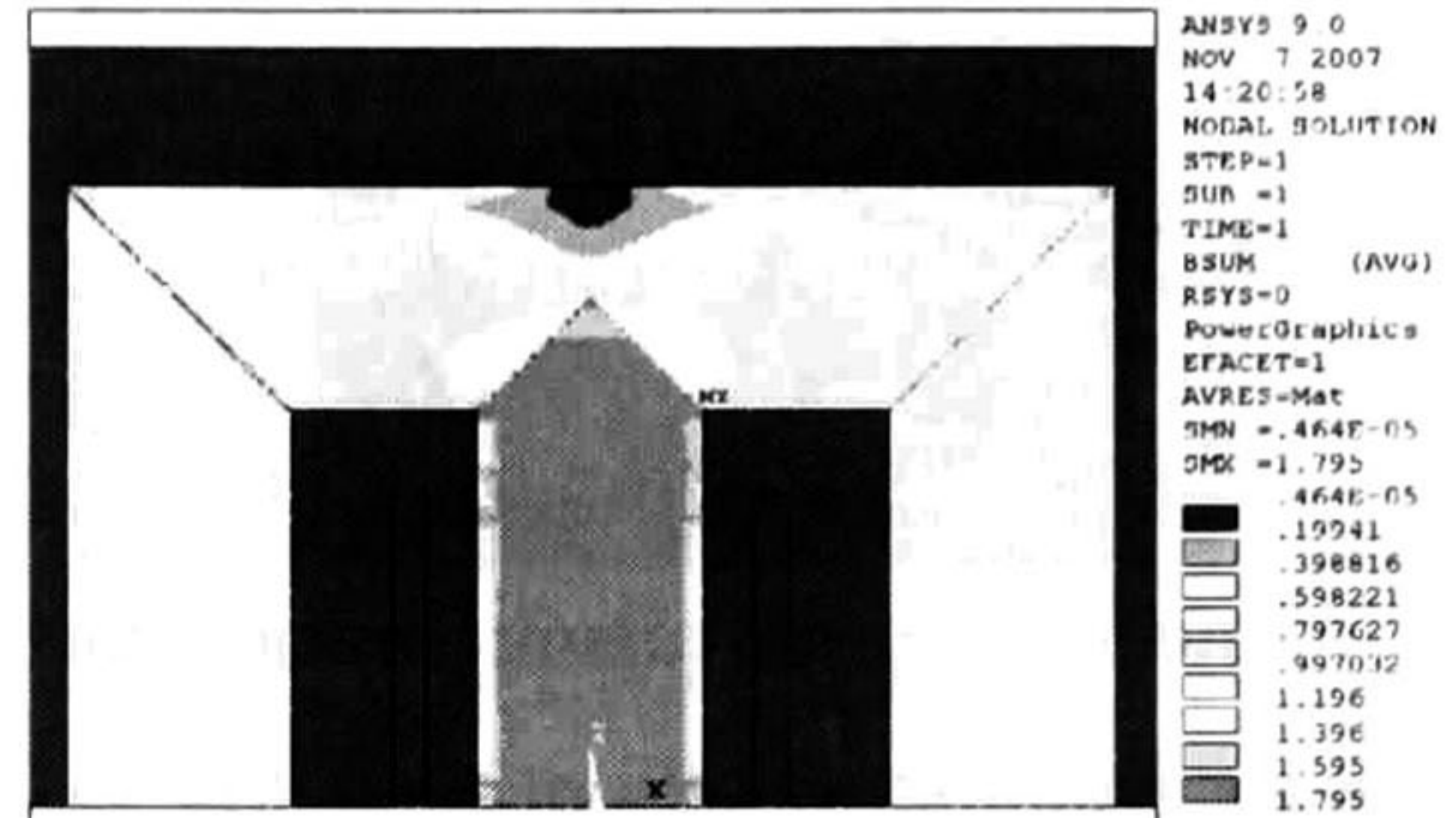
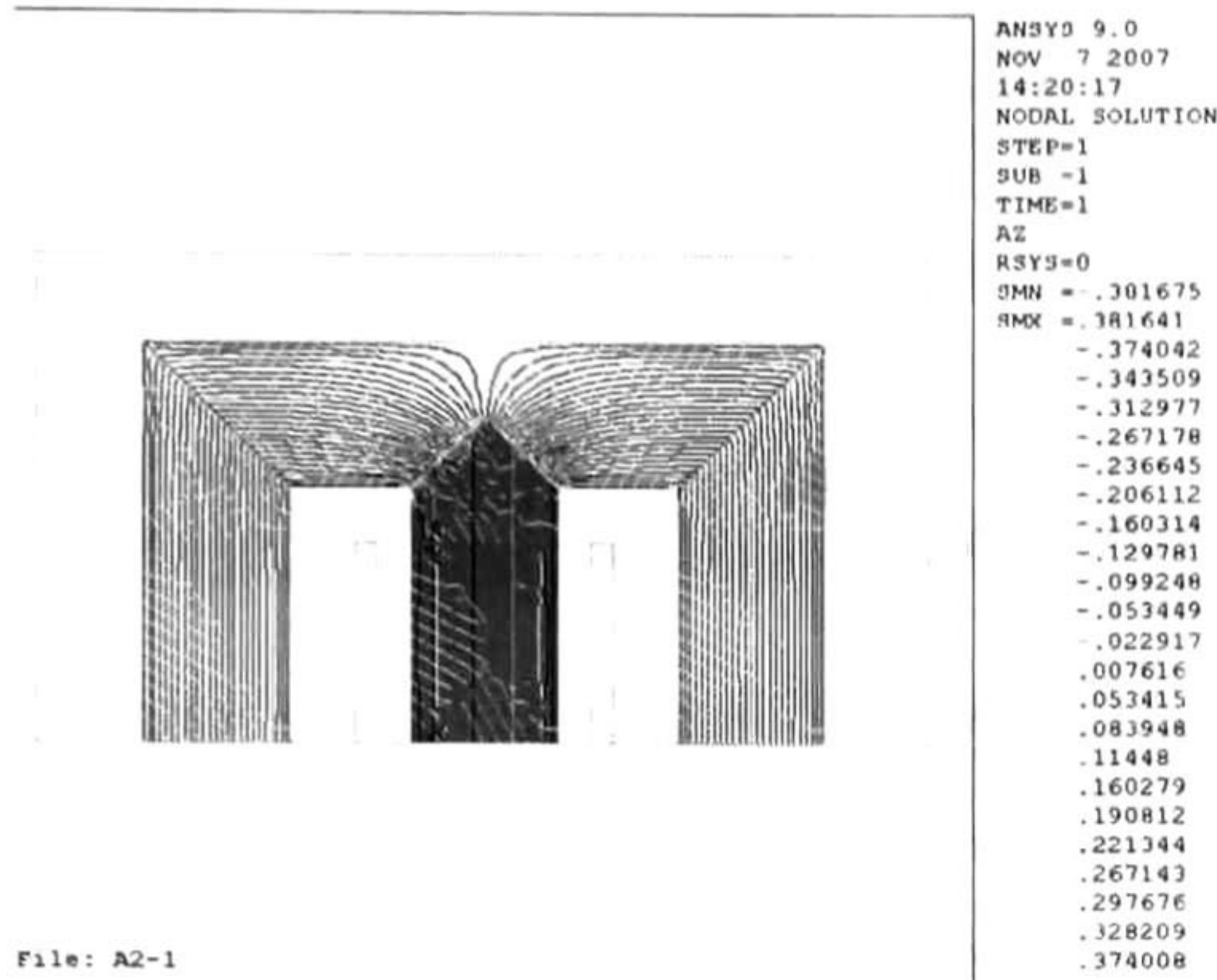


Figura 5.75: Distribución del potencial magnético debida a la fase B del modelo trifásico. Figura 5.76: Densidad de flujo debida a la fase B del modelo trifásico.

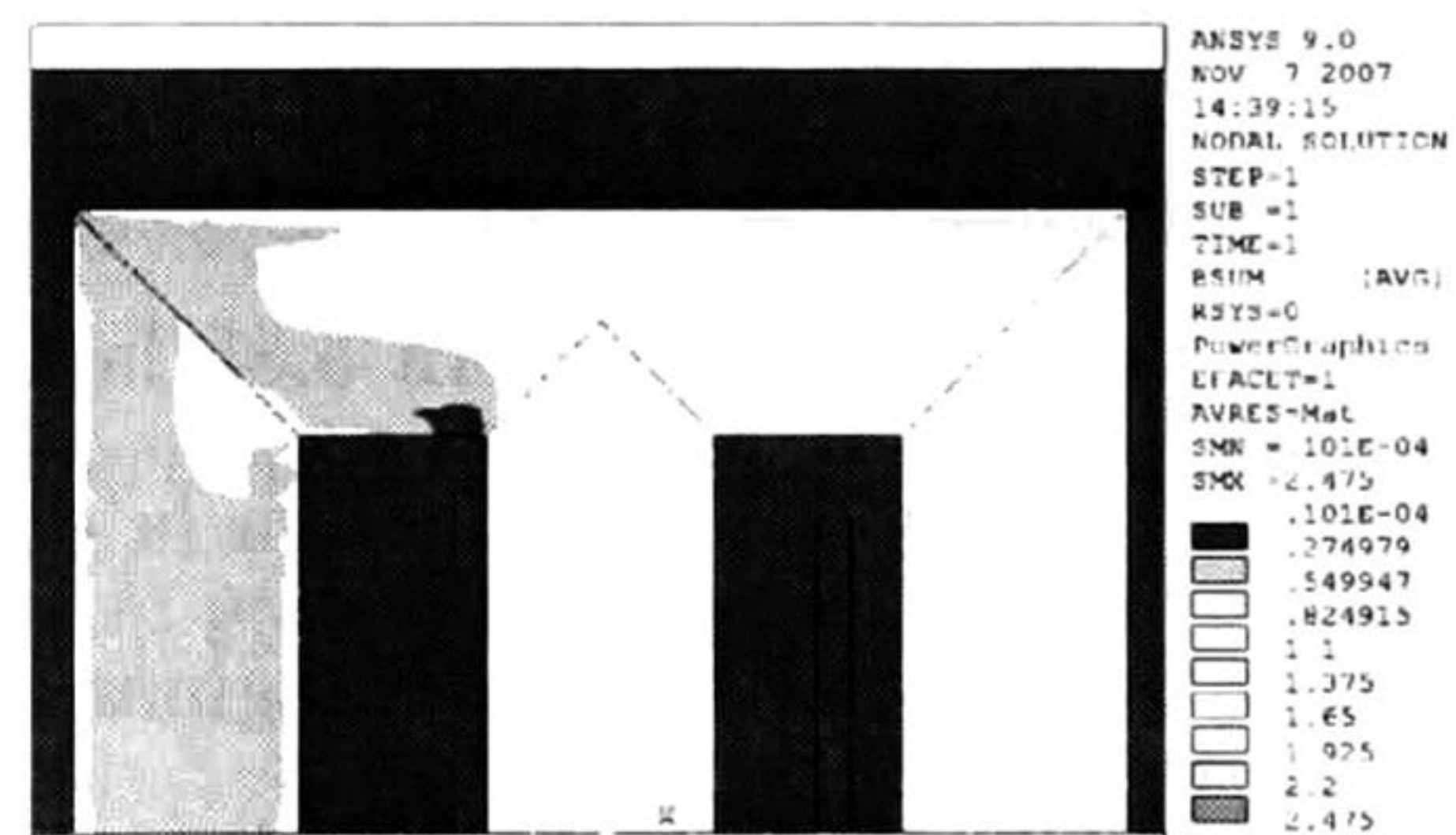
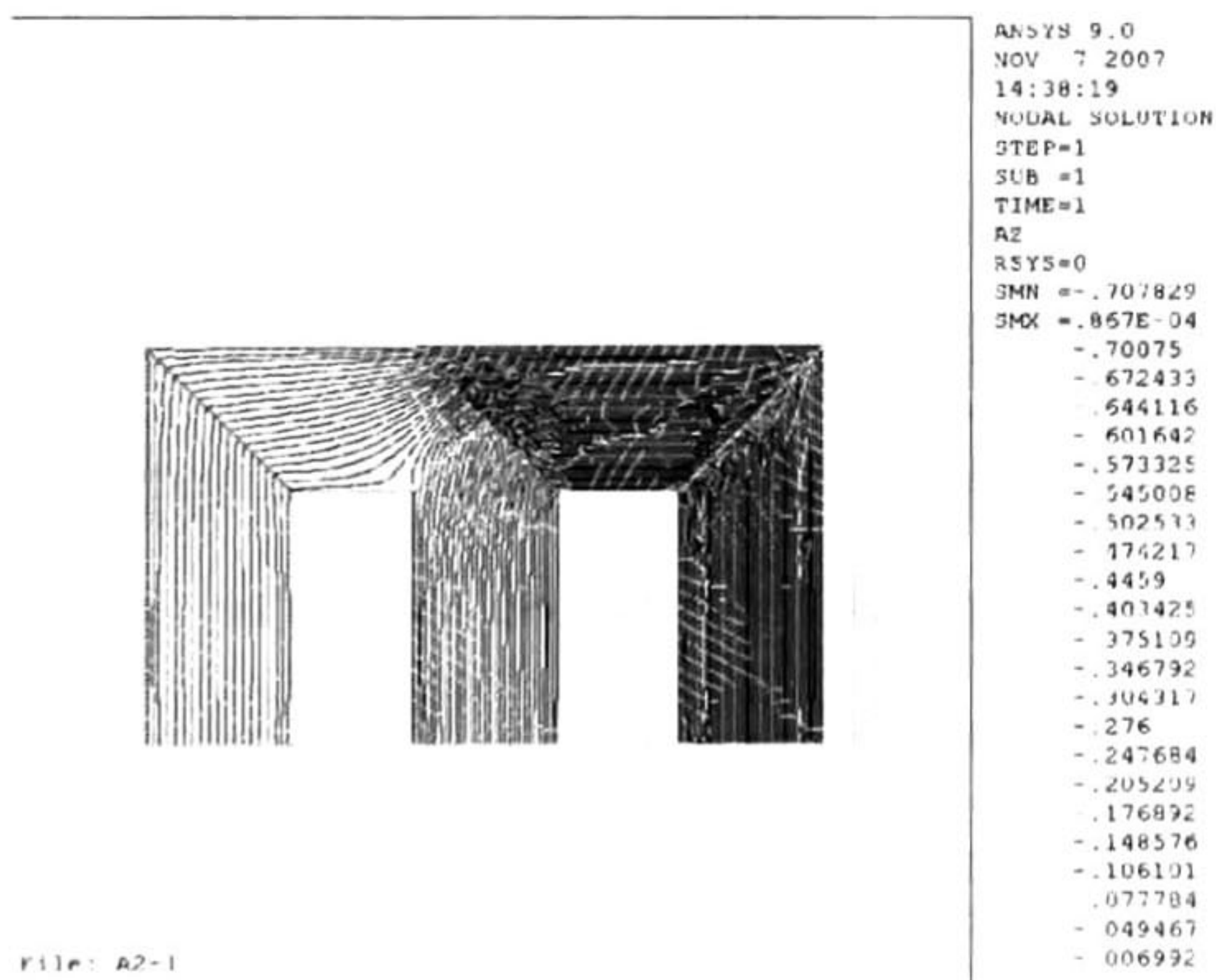


Figura 5.77: Distribución del potencial magnético debida a la fase C del modelo trifásico. Figura 5.78: Densidad de flujo debida a la fase C del modelo trifásico.



Tabla 5.15: Resultados de Asimetría, modelo armónico.

	Ansys	Voltaje F-A	Voltaje F-B	Voltaje F-C
Análisis	Inductancia (Henry)	628.4760	810.2486	628.1734
Estático	Resistencia (Ohms)	2.09437	2.09437	2.09437

### 5.6.2. Comprobación de Asimetría, modelo armónico.

La prueba se repite ahora empleando el modelo armónico. Cada una de las fases se alimenta con un mismo voltaje fasorial. Los parámetros se muestran en la Tabla 5.15. En esta tabla se puede observar el valor de la inductancia, cuando solo se excita la fase A o la fase C, la inductancia es la misma, pero cuando se excita solo a fase B la inductancia aumenta considerablemente. Haciendo una relación entre estas inductancias de 3/4.

La distribución del potencial magnético y de la densidad de flujo se muestran en las siguientes figuras. En la figura 5.79 se muestra la distribución del potencial magnético debido a la excitación de la fase A parte real, y en la figura 5.80 la parte imaginaria. En la figura 5.81 se muestra la distribución del potencial magnético debida a la excitación de la fase B, parte real y en la figura 5.82 la parte imaginaria, y en la figura 5.83 se muestra la distribución del potencial magnético debida a la excitación de la fase C, parte real y en la figura 5.84 la parte imaginaria. La distribución de la densidad de flujo debida a la excitación de la fase A se muestra en la figura 5.85 la parte real y en la figura 5.86 la parte imaginaria. En las figuras 5.87 y 5.88 se muestra la distribución de la densidad de flujo debida a la excitación de la fase B, parte real e imaginaria, respectivamente, y en las figuras 5.89 y 5.90 se observa la distribución de la densidad de flujo debida a la excitación de la fase C.



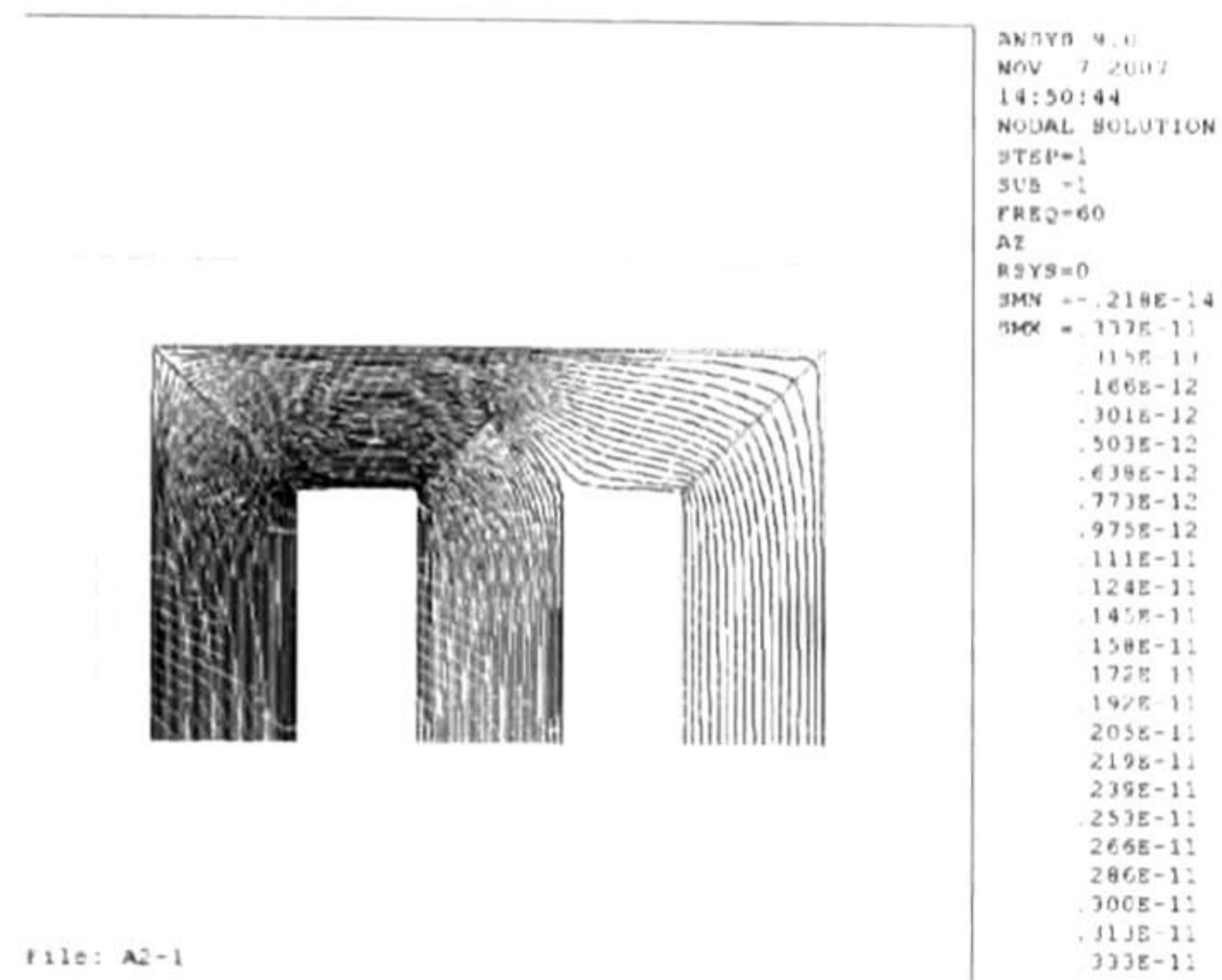


Figura 5.79: Distribución del potencial magnético debida a la fase A, parte real del modelo trifásico.

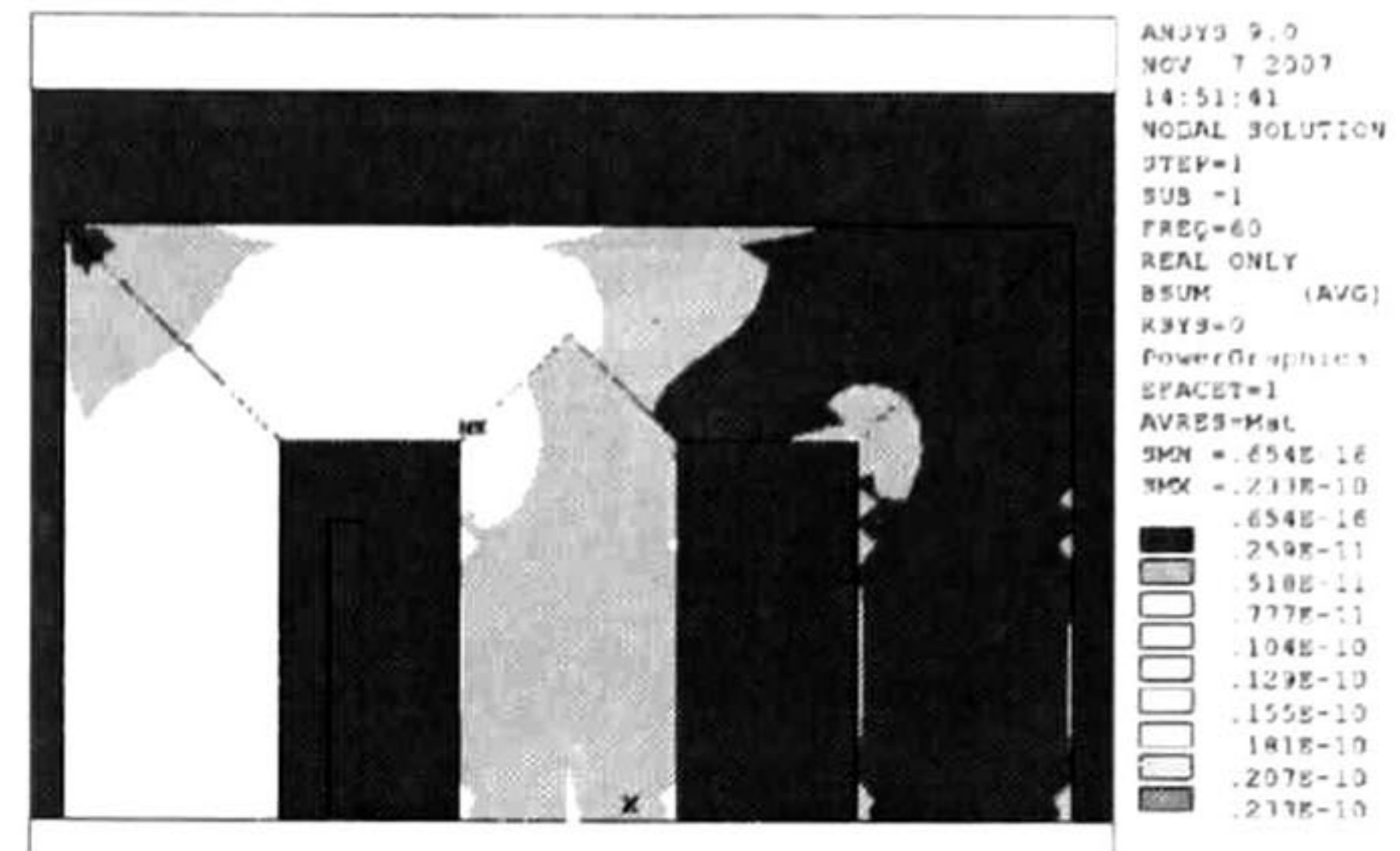


Figura 5.80: Densidad de flujo debida a la fase A, parte real del modelo trifásico.

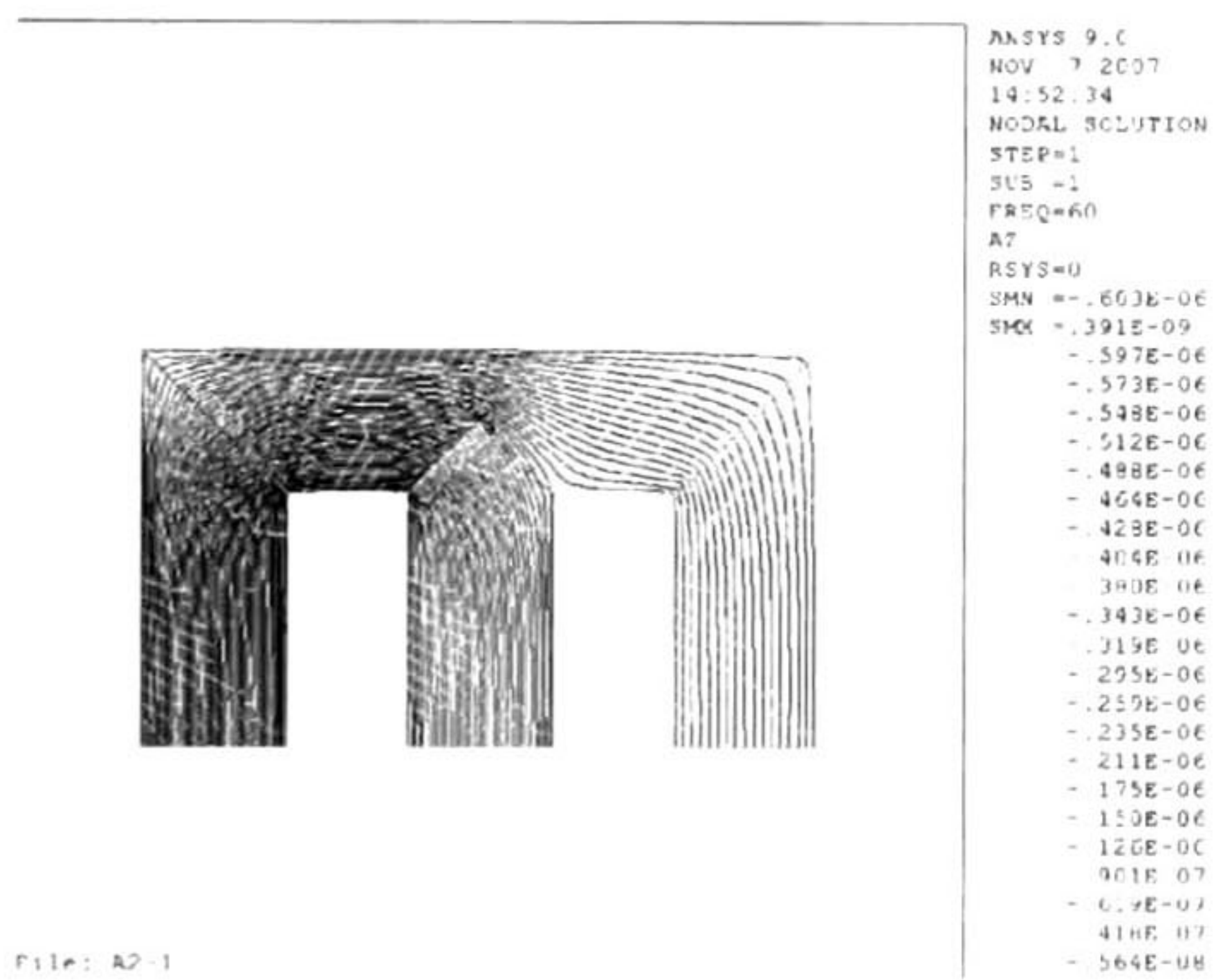


Figura 5.81: Distribución del potencial magnético debida a la fase A, parte imaginaria del modelo trifásico.

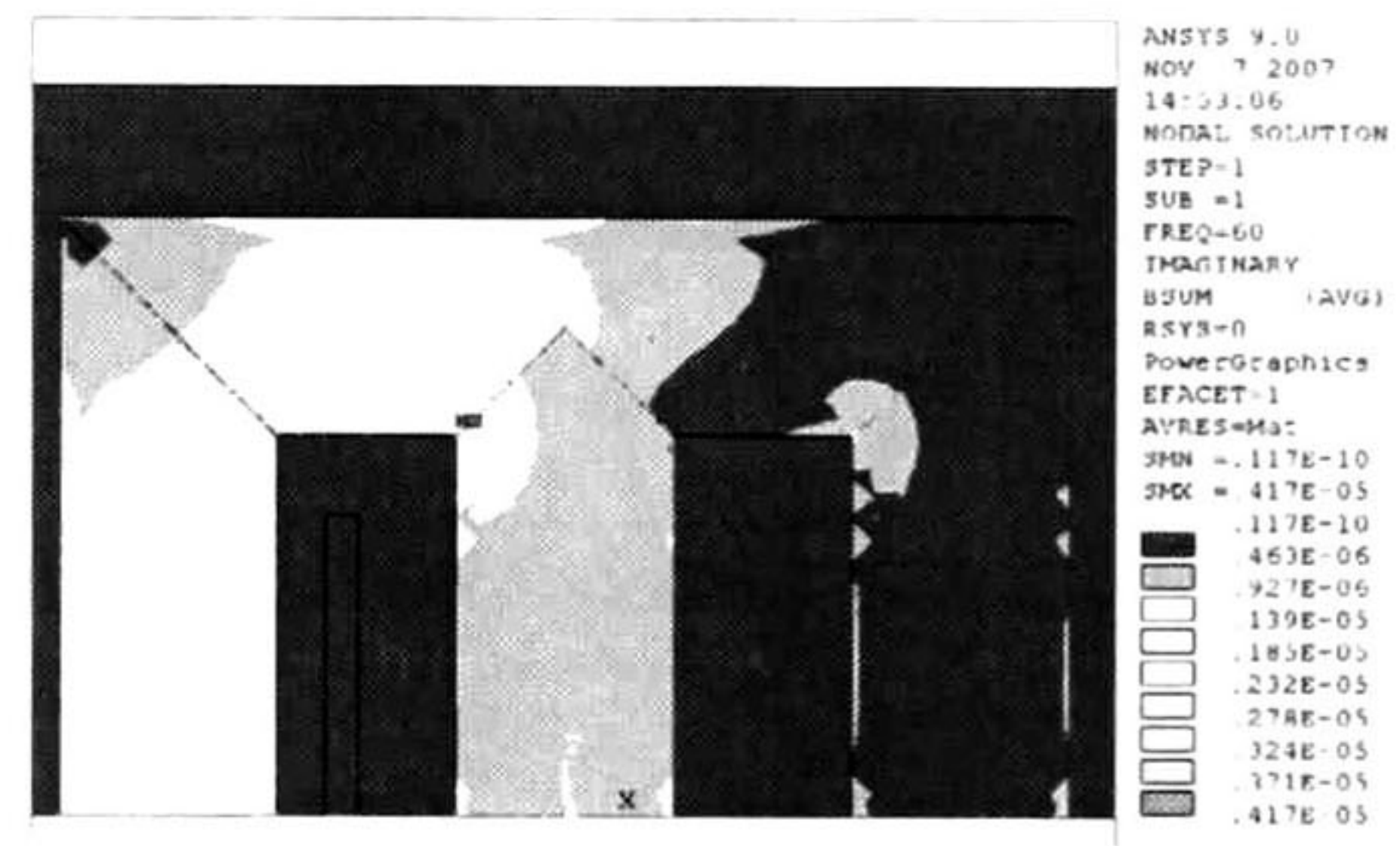


Figura 5.82: Densidad de flujo debida a la fase A, parte imaginaria del modelo trifásico.



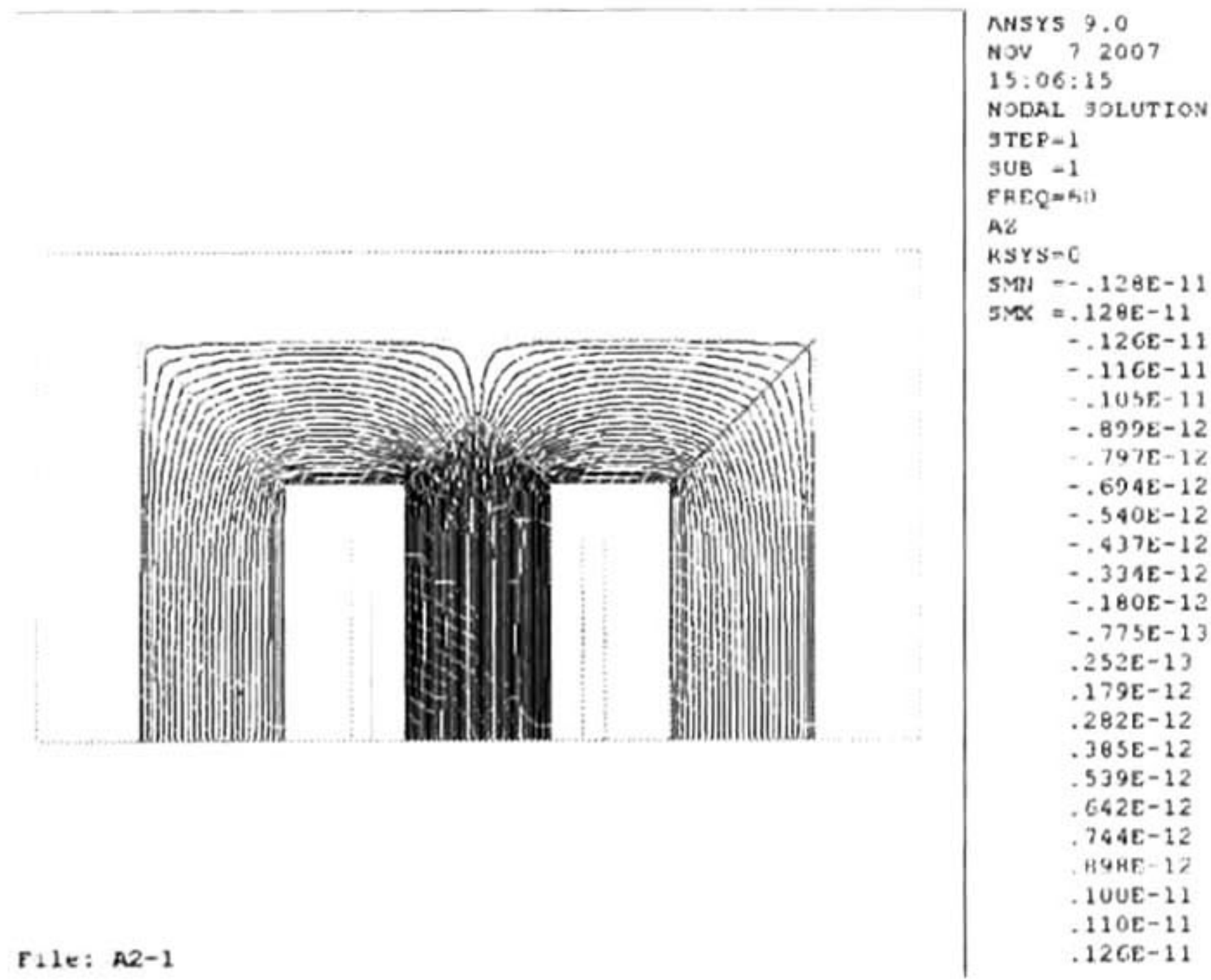


Figura 5.83: Distribución del potencial magnético debido a la fase B, parte real del modelo trifásico.

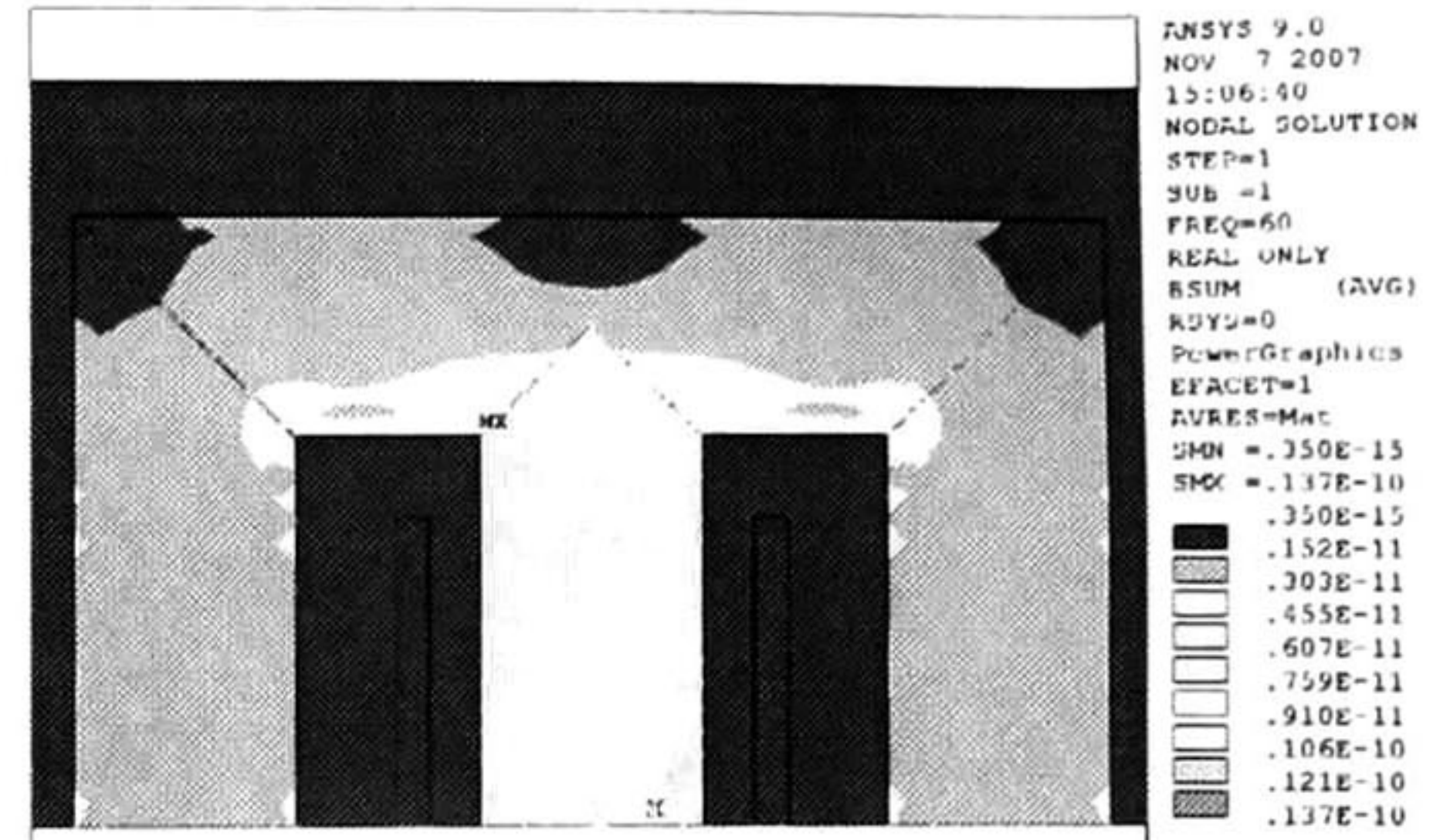


Figura 5.84: Densidad de flujo debida a la fase B, parte real del modelo trifásico.

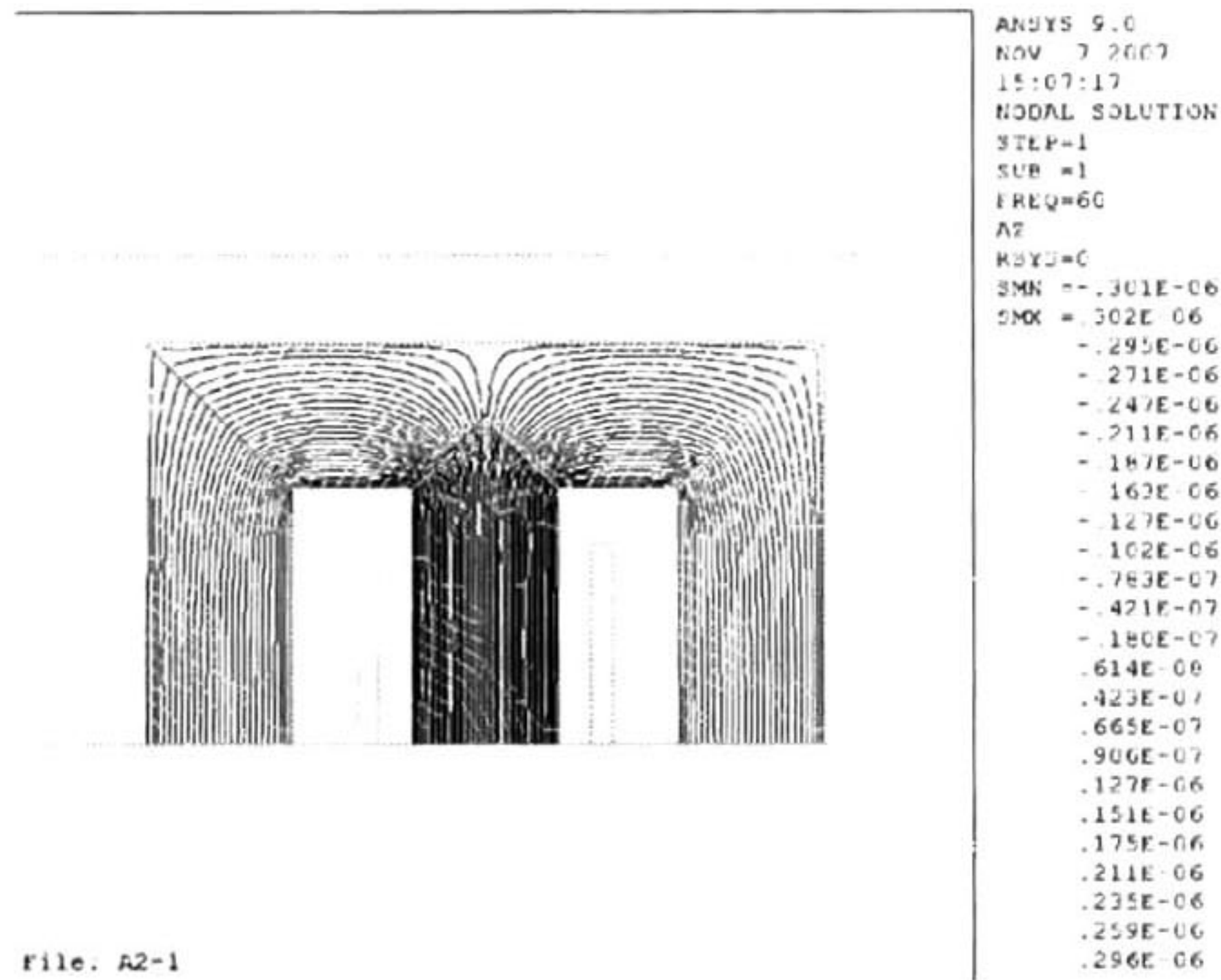


Figura 5.85: Distribución del potencial magnético debido a la fase B, parte imaginaria del modelo trifásico.

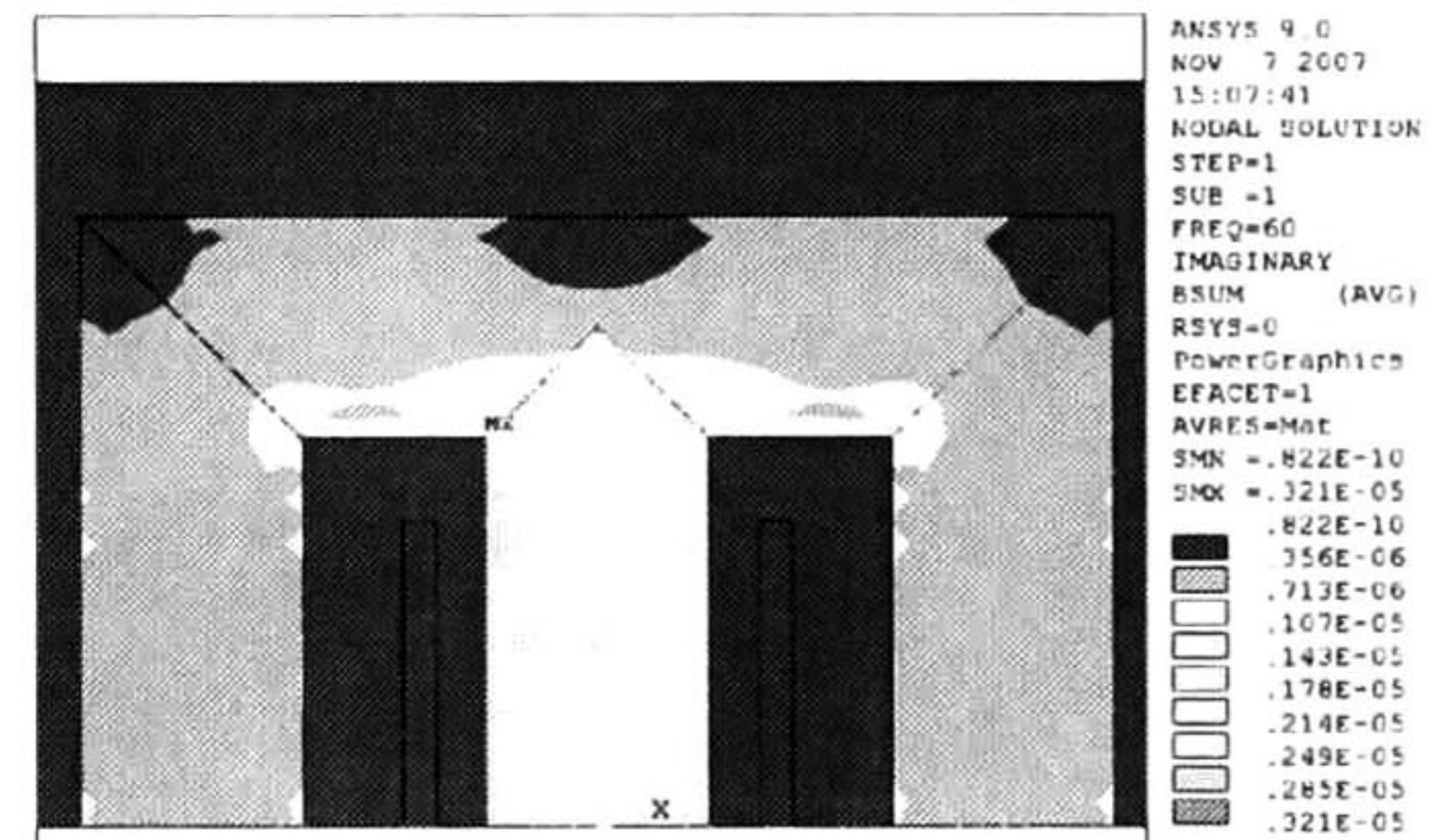


Figura 5.86: Densidad de flujo debida a la fase B, parte imaginaria del modelo trifásico.



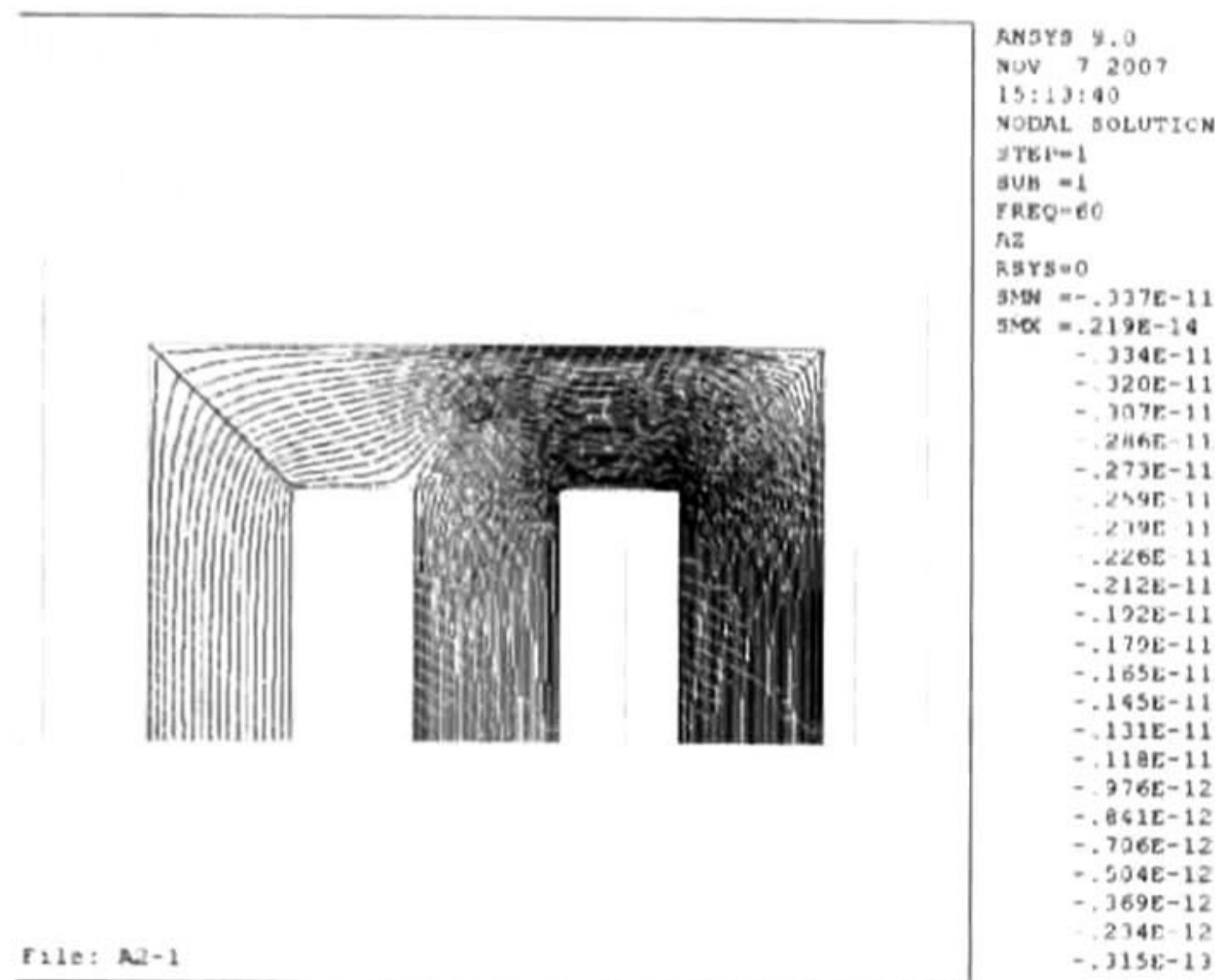


Figura 5.87: Distribución del potencial magnético debido a la fase C, parte real del modelo trifásico.

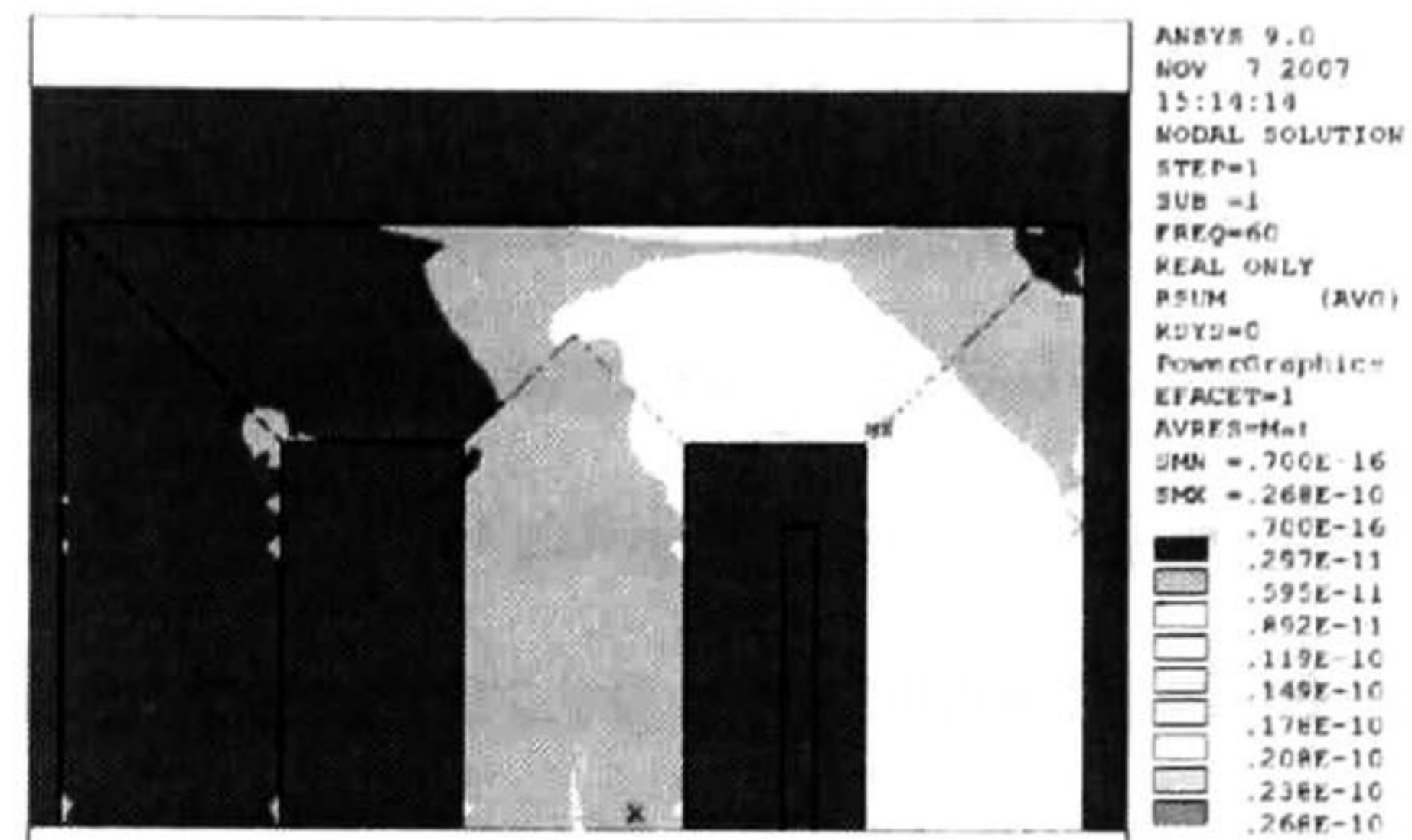


Figura 5.88: Densidad de flujo debida a la fase C, parte real del modelo trifásico.

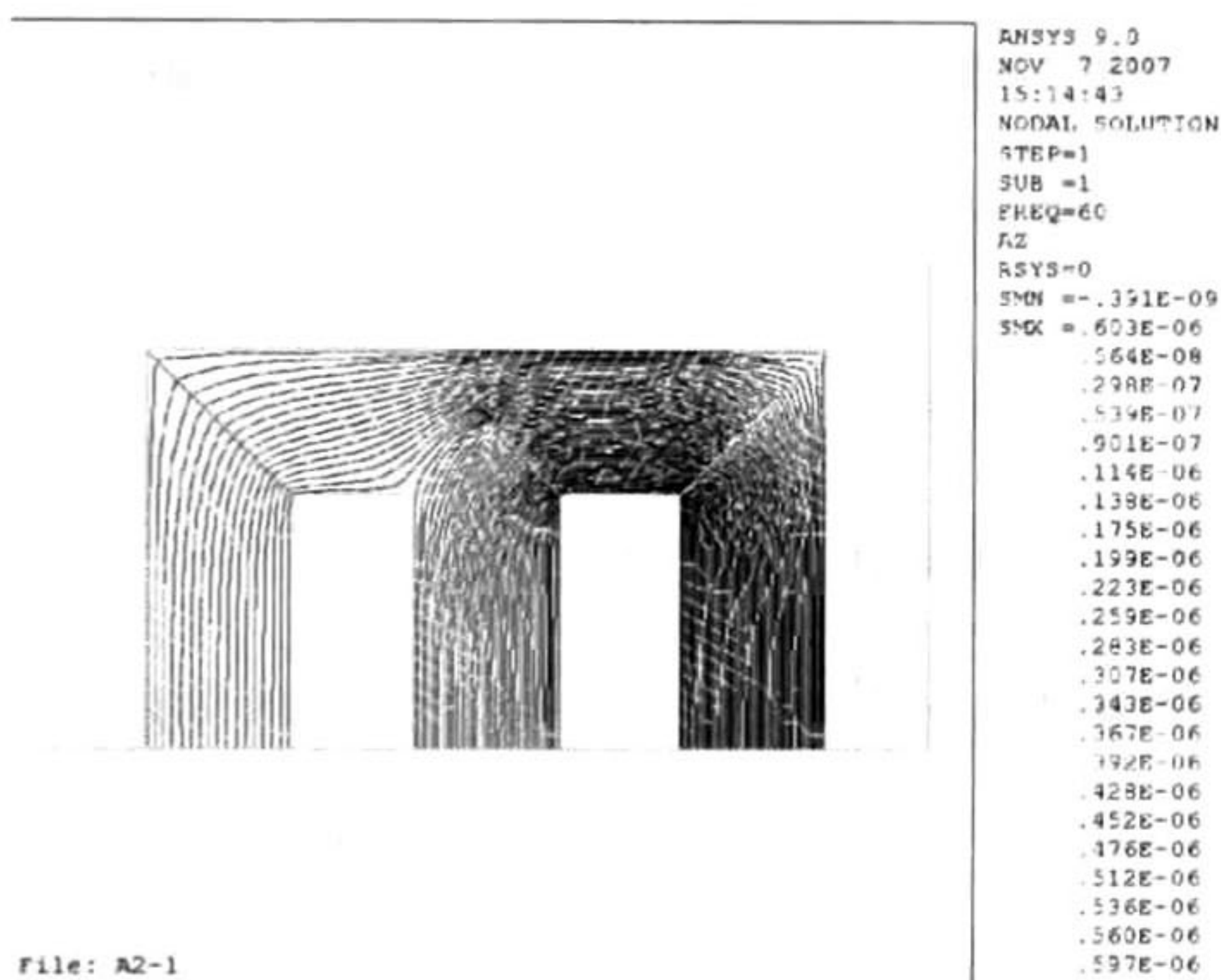


Figura 5.89: Distribución del potencial magnético debida a la fase C, parte imaginaria del modelo trifásico.

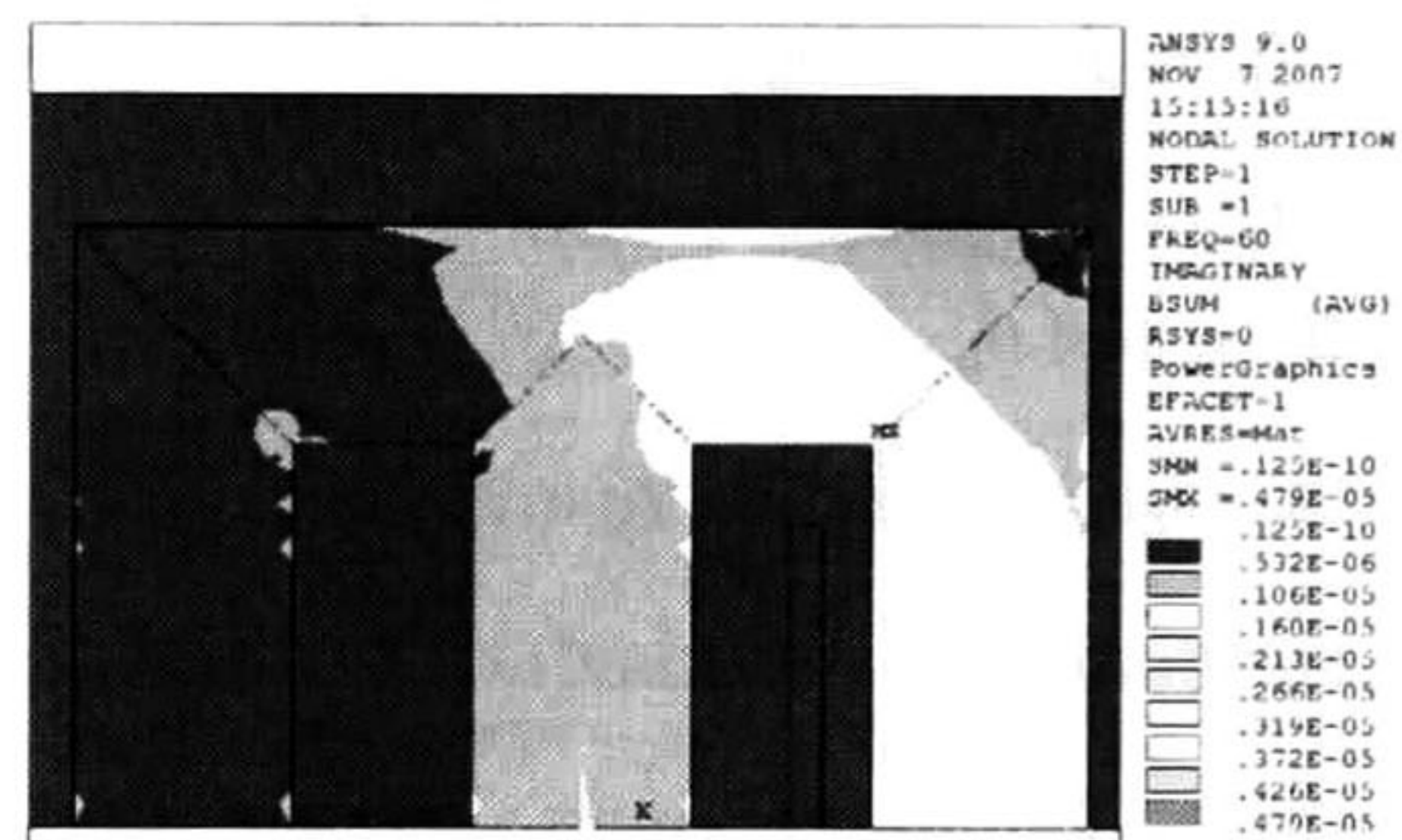


Figura 5.90: Densidad de flujo debida a la fase C, parte imaginaria del modelo trifásico.



## 5.7. Modelo del transformador trifásico, modelo estático.

A continuación se presentan los resultados del análisis del transformador descrito y modelado en el capítulo cuatro; se utilizan los modelos magnetostático y armónico. Cada fase se modela con su representación planar, se incluye la saturación del núcleo y se alimenta con fuentes de voltajes, independientes trifásicas balanceadas. En la parte central de cada pierna se monitorea la densidad de flujo magnético.

Esta técnica magnetostática es actualmente muy usada por los diseñadores para el cálculo de la distribución de la densidad de flujo en los transformadores. Esto permite determinar puntos de generación de calor y por lo tanto de alta temperatura. El procedimiento consiste en hacer estudios magnetostáticos para diferentes valores de corriente de excitación. Es decir, de la fuente de corriente senoidal  $i(t) = i_m \cos(\theta)$  de donde  $\theta = 2\pi ft$ . Se hacen por ejemplo 18 cálculos magnetostáticos, alimentados con corrientes constantes desplazados un ángulo de 10 grados, por lo que las fases se alimentan como se indica a continuación.

$$I_a = I_{exc} \cos(\theta_a)$$

$$I_b = I_{exc} \cos(\theta_b - 120^\circ) \quad \text{De donde}$$

$$I_c = I_{exc} \cos(\theta_c + 120^\circ)$$

$$\theta_a = \theta_k, \theta_b = \theta_k - 120^\circ, \theta_c = \theta_k + 120^\circ \text{ y } \theta_k = 10k, k = 1, 2, 3, \dots, 8.$$

Se obtuvieron los resultados para cada instante de tiempo. Los valores significativos son los siguientes. La densidad de flujo máxima en la pierna I fue de 1.6 Teslas, en la pierna II de 1.77 y en la pierna III de 1.6 Teslas. En las figuras 5.91, 5.92 y 5.93 se muestran las gráficas de los valores máximos en el eje central de cada pierna en función del ángulo de fase  $\theta_k$ . Se observa que la densidad máxima en la pierna I (Fase A) ocurre cuando el ángulo de fase  $\theta_k$  es igual a cero y tiene como magnitud 1.6 Teslas, el valor cero en esta pierna se da cuando  $\theta_k = 90^\circ$ . En la pierna III, que es la pierna derecha, el valor máximo de densidad se



encuentra en la esquina interna izquierda de valor 1.6 Teslas cuando  $\theta_k = 70^\circ$ . La densidad de flujo es mayor en la pierna central con respecto de la derecha. Las líneas equipotenciales y la distribución de la densidad de flujo magnético para el caso de densidad máxima en la pierna central  $\theta_k = 120^\circ$  se muestra en la figura 5.92. La máxima densidad de esta pierna ocurre cuando  $\theta_k = 120^\circ$ . Las líneas de potencial magnético se distribuyen por igual en las piernas izquierda y derecha así como también la distribución de la densidad de flujo. El valor máximo de densidad de flujo ocurre en la esquina inferior derecha y es de valor 1.804 Teslas. Los resultados para el caso donde la densidad de flujo magnético es máxima en la pierna I (izquierda) se muestra en las figuras 5.94 y 5.97. Los resultados de flujo y potencial magnético cuando estos son máximos en la pierna II (centro) se presentan en las figuras 5.95 y 5.98, y cuando el potencial y la densidad son máximos en la pierna III se presentan en las figuras 5.96 y 5.99. Estos resultados tienen simetría con respecto de los obtenidos para la pierna izquierda y tienen direcciones opuestas.

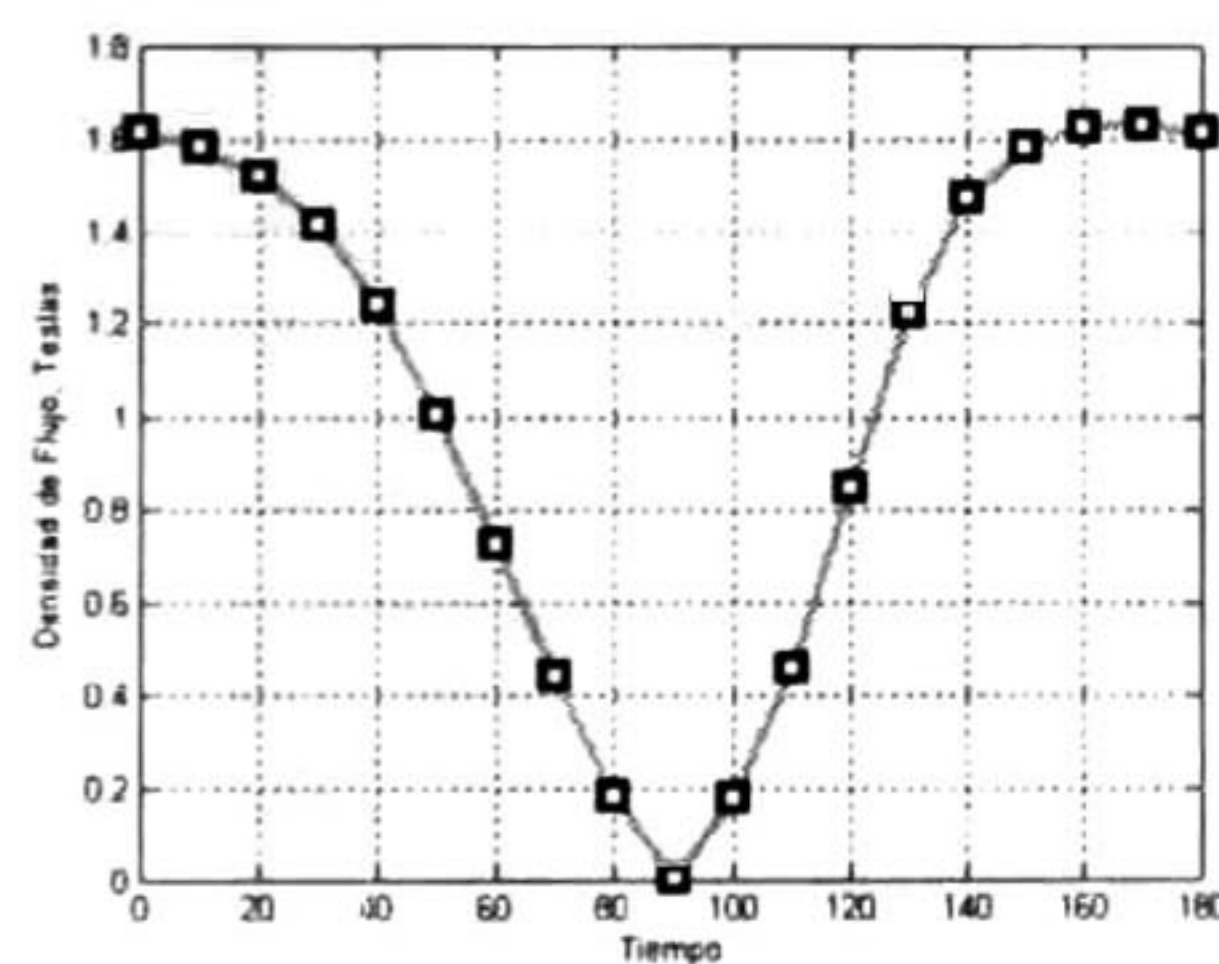


Figura 5.91: Densidad de flujo en la pierna I, modelo estático trifásico.

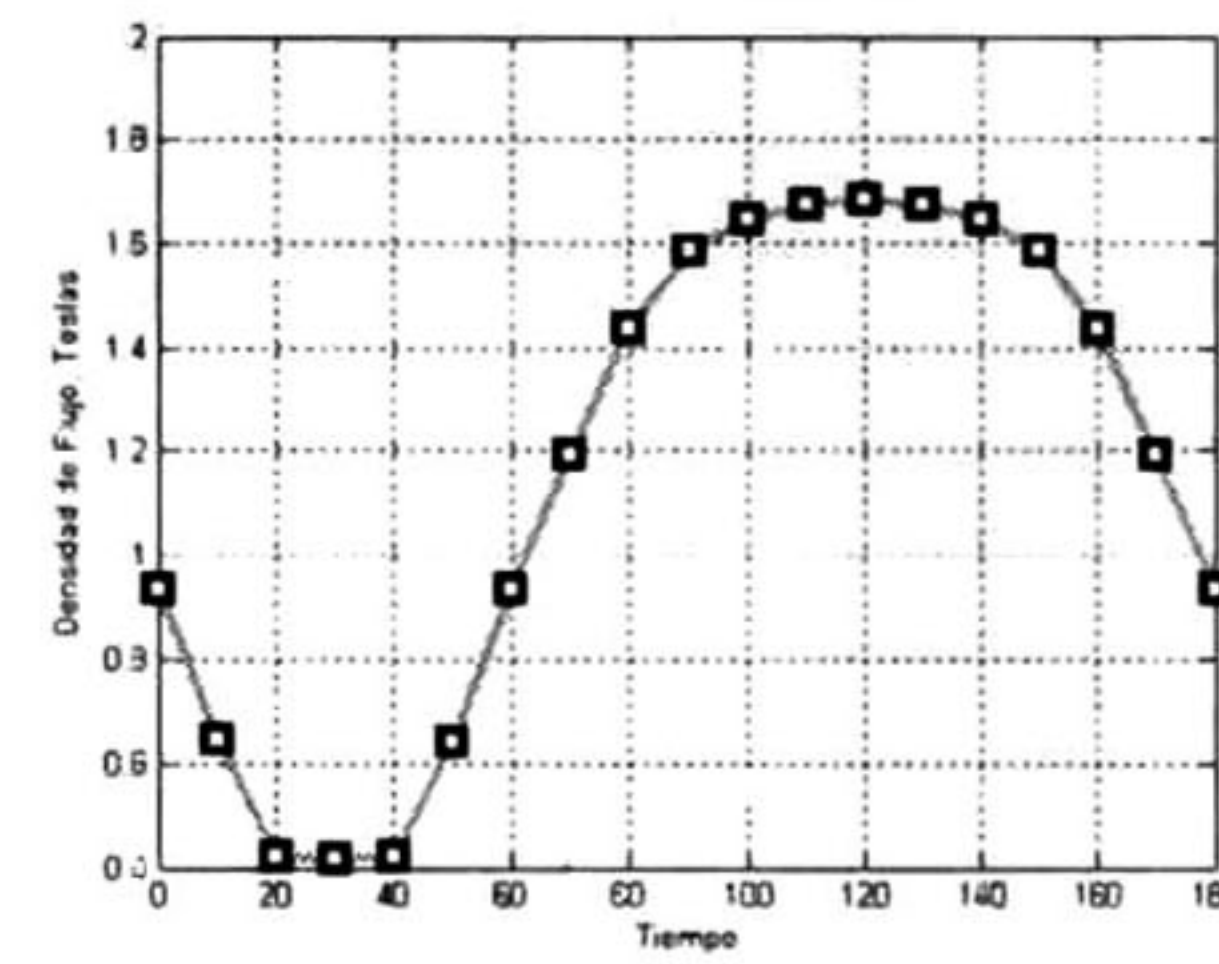


Figura 5.92: Densidad de flujo en la pierna II, modelo estático trifásico.

En la figura 5.94 se muestra el potencial magnético cuando la densidad de flujo magnético es mayor en la pierna I, cuando el flujo es mayor en la pierna II se muestra en la figura 5.95, y cuando la densidad de flujo es mayor en la pierna III se muestra en la figura 5.96. En la figura 5.97 se observa que la densidad de flujo máxima se concentra en la pierna I, mientras



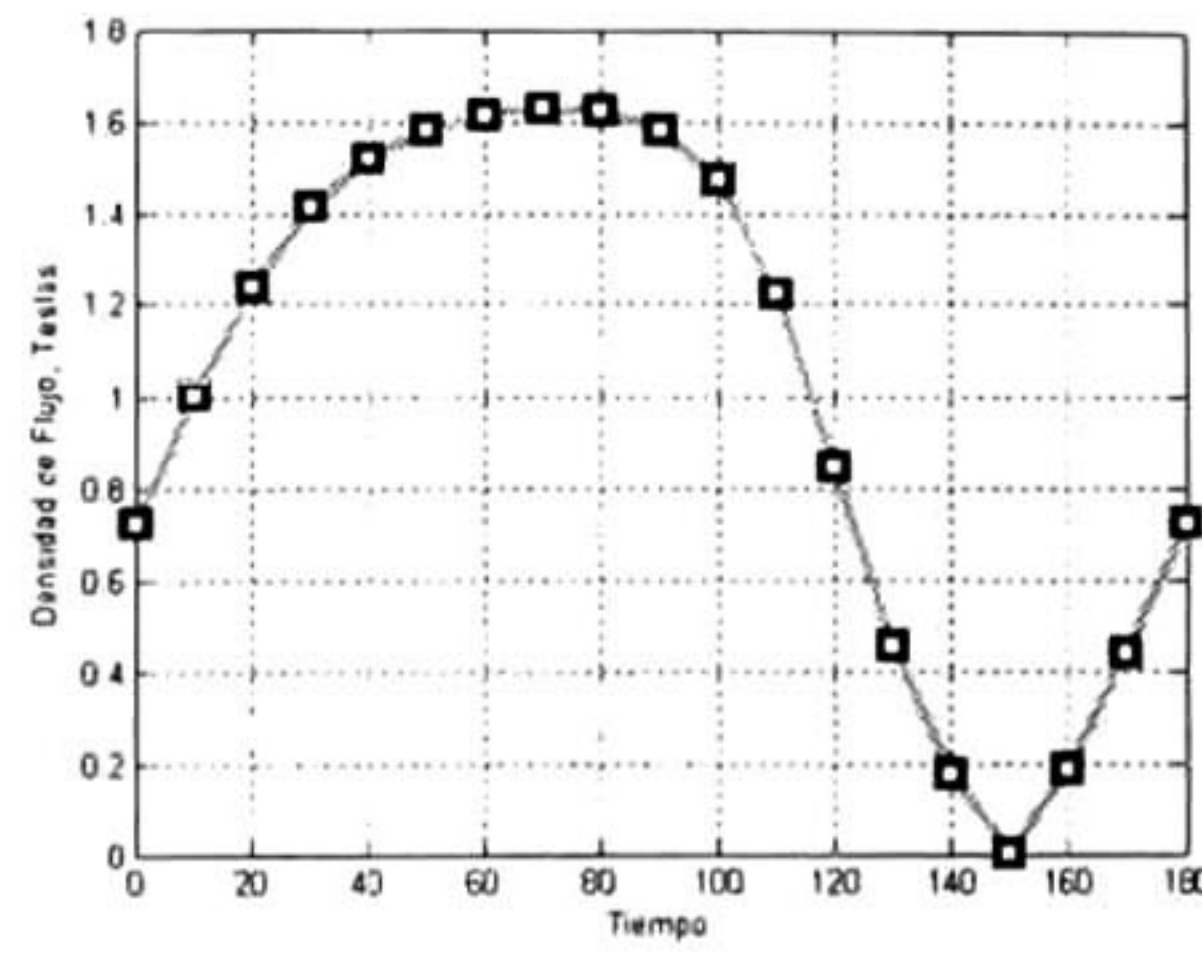


Figura 5.93: Densidad de flujo en la pierna III, modelo estático trifásico.

que en la pierna 5.98 se observa que la densidad de flujo máximo se concentra en la pierna II, y en la figura 5.99 se observa que la densidad de flujo maxima esta concentrado en la pierna III.

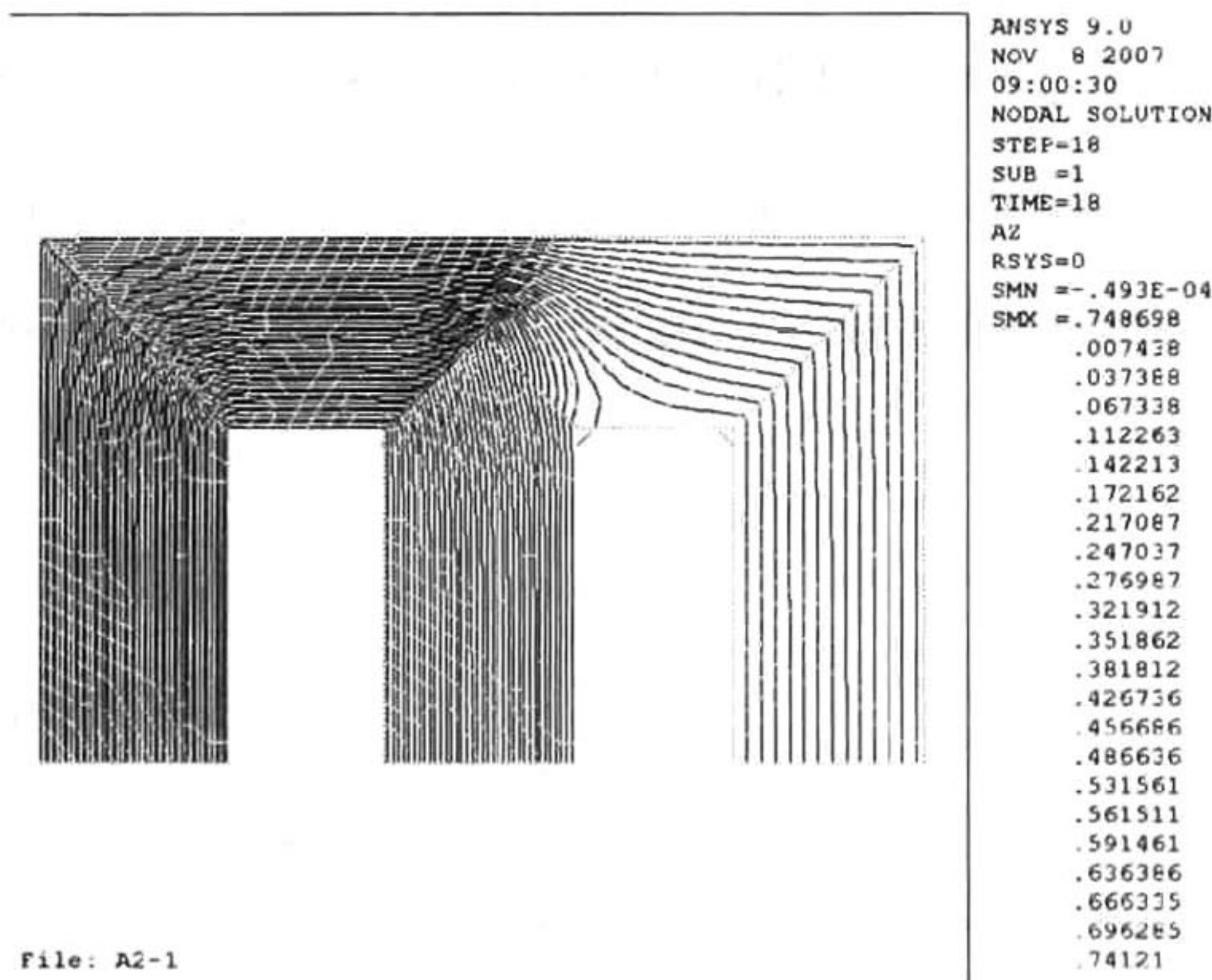


Figura 5.94: Potencial magnético, cuando el flujo es mayor en la pierna I del modelo estático trifásico.

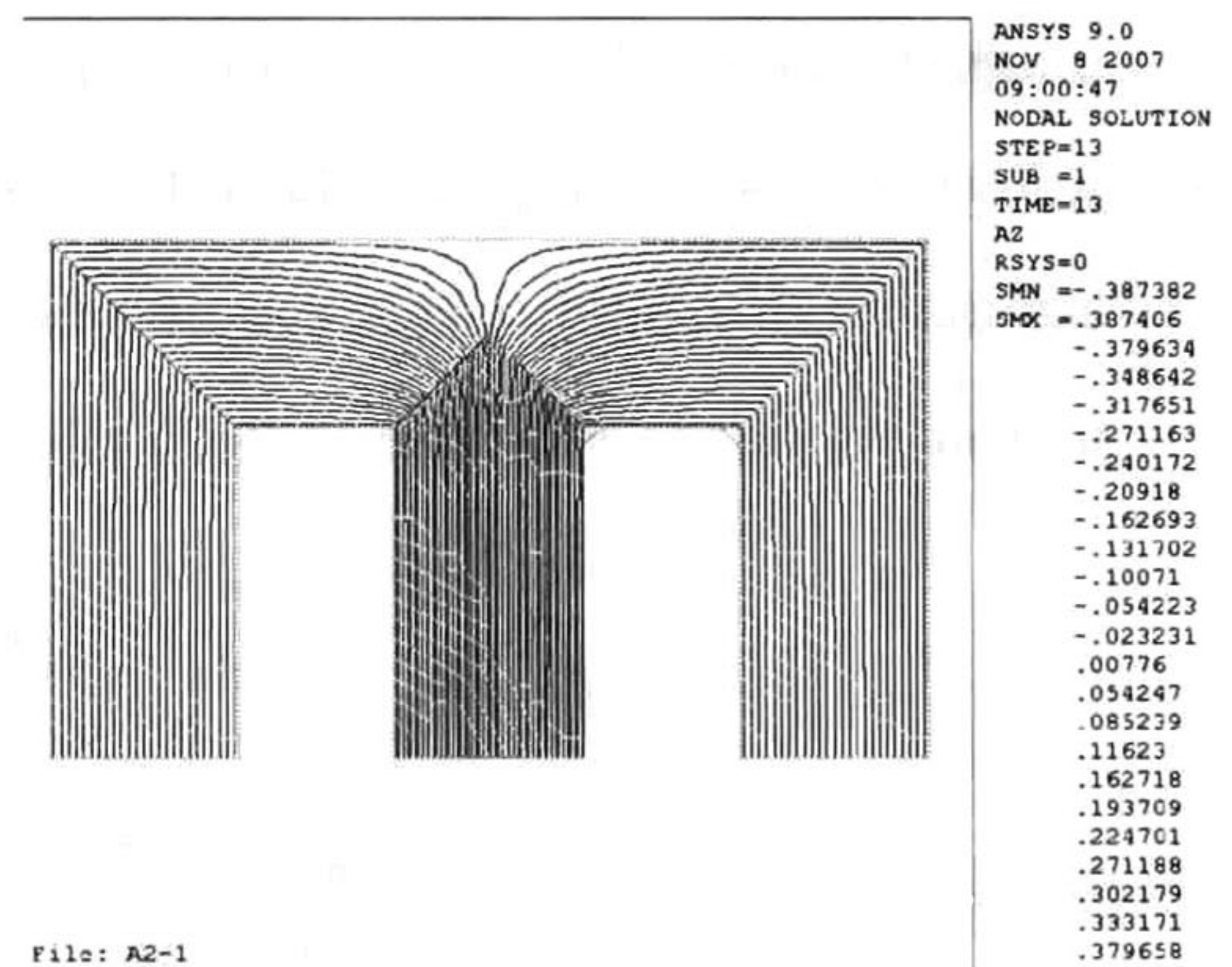


Figura 5.95: Potencial magnético, cuando el flujo es mayor en la pierna II del modelo estático trifásico.



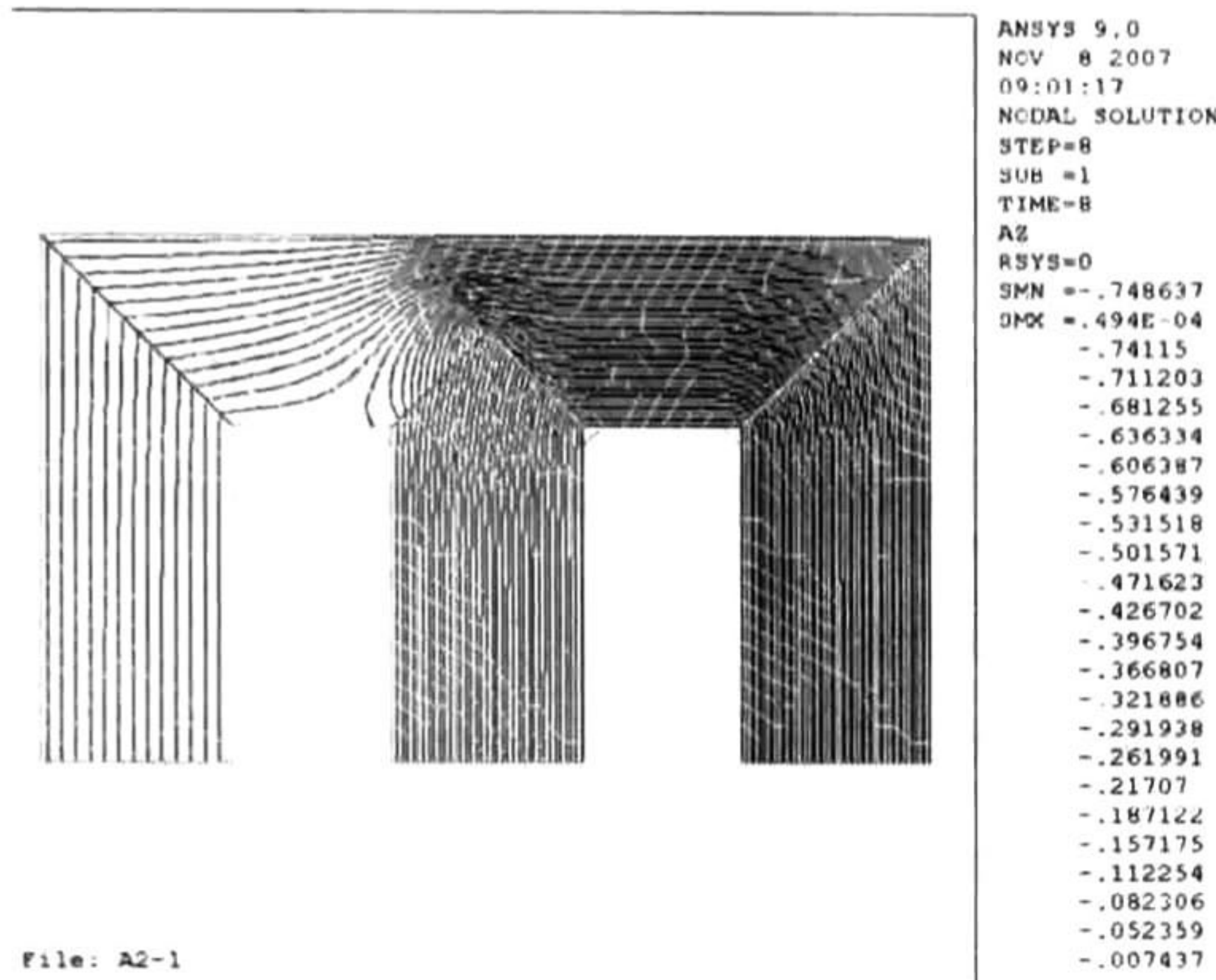


Figura 5.96: Potencial magnético, cuando el flujo es mayor en la pierna III del modelo estático trifásico.

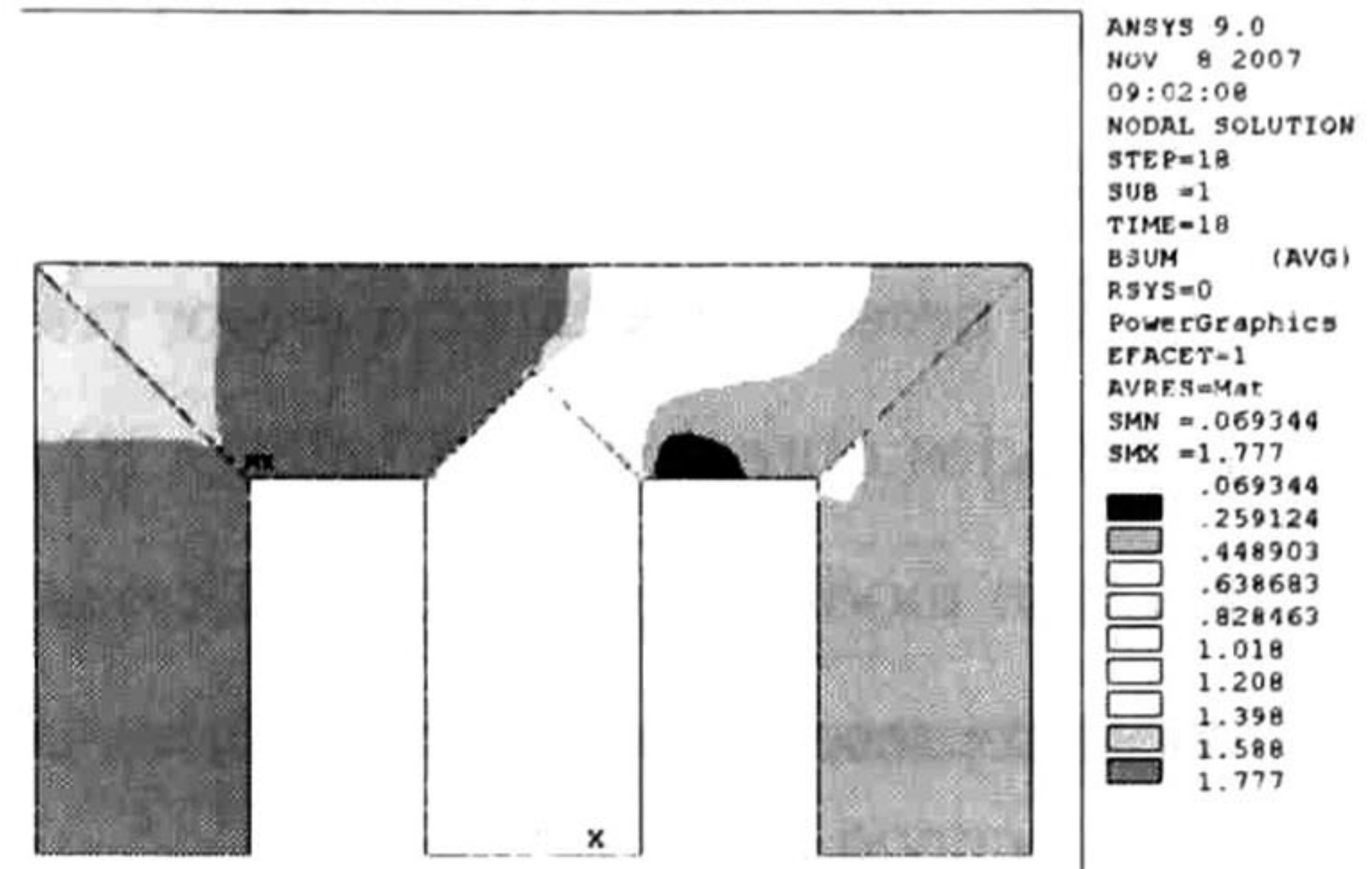


Figura 5.97: Densidad de flujo, cuando es mayor en la pierna I del modelo estático trifásico.

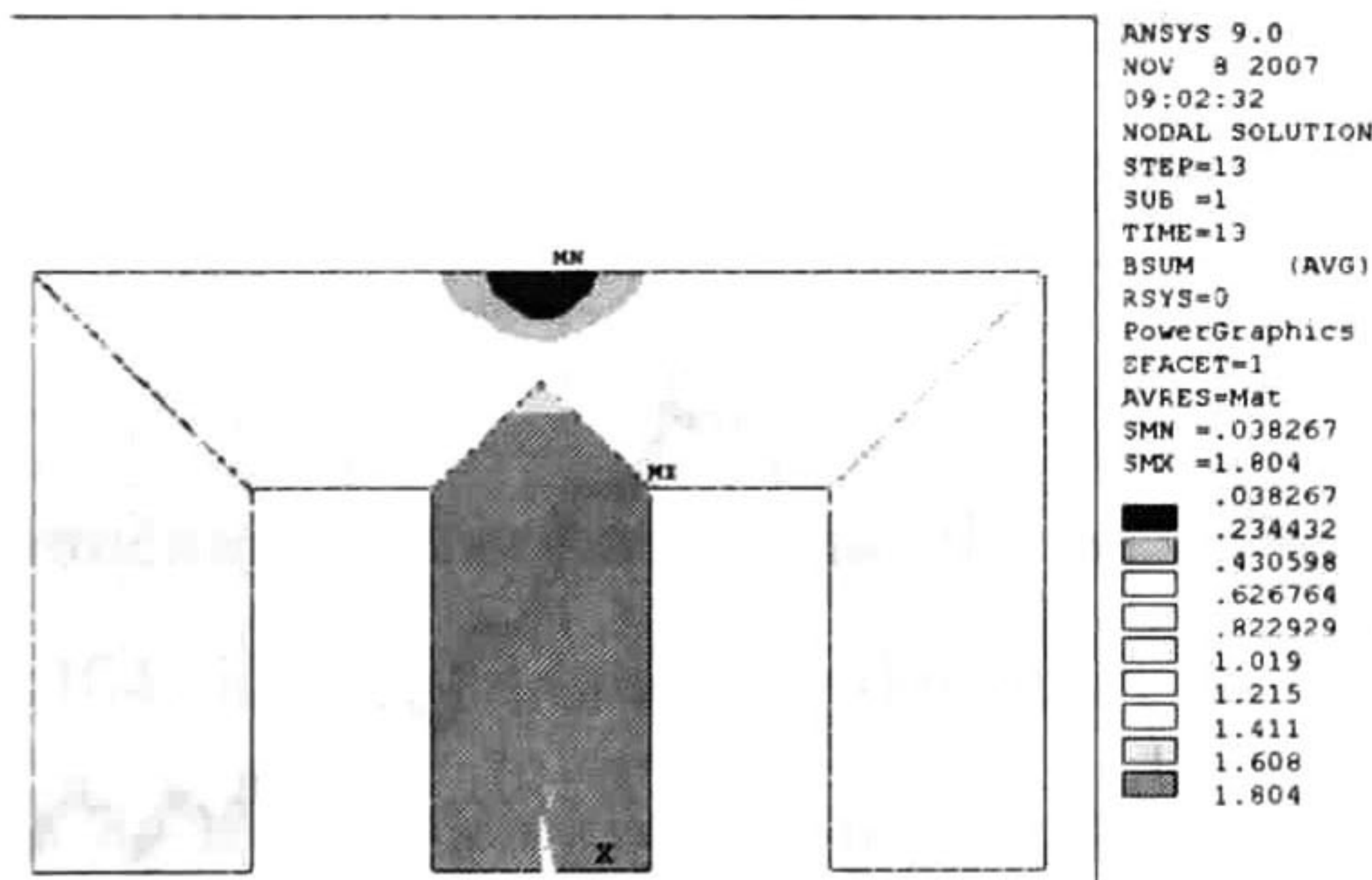


Figura 5.98: Densidad de flujo, cuando es mayor en la pierna II del modelo estático trifásico.

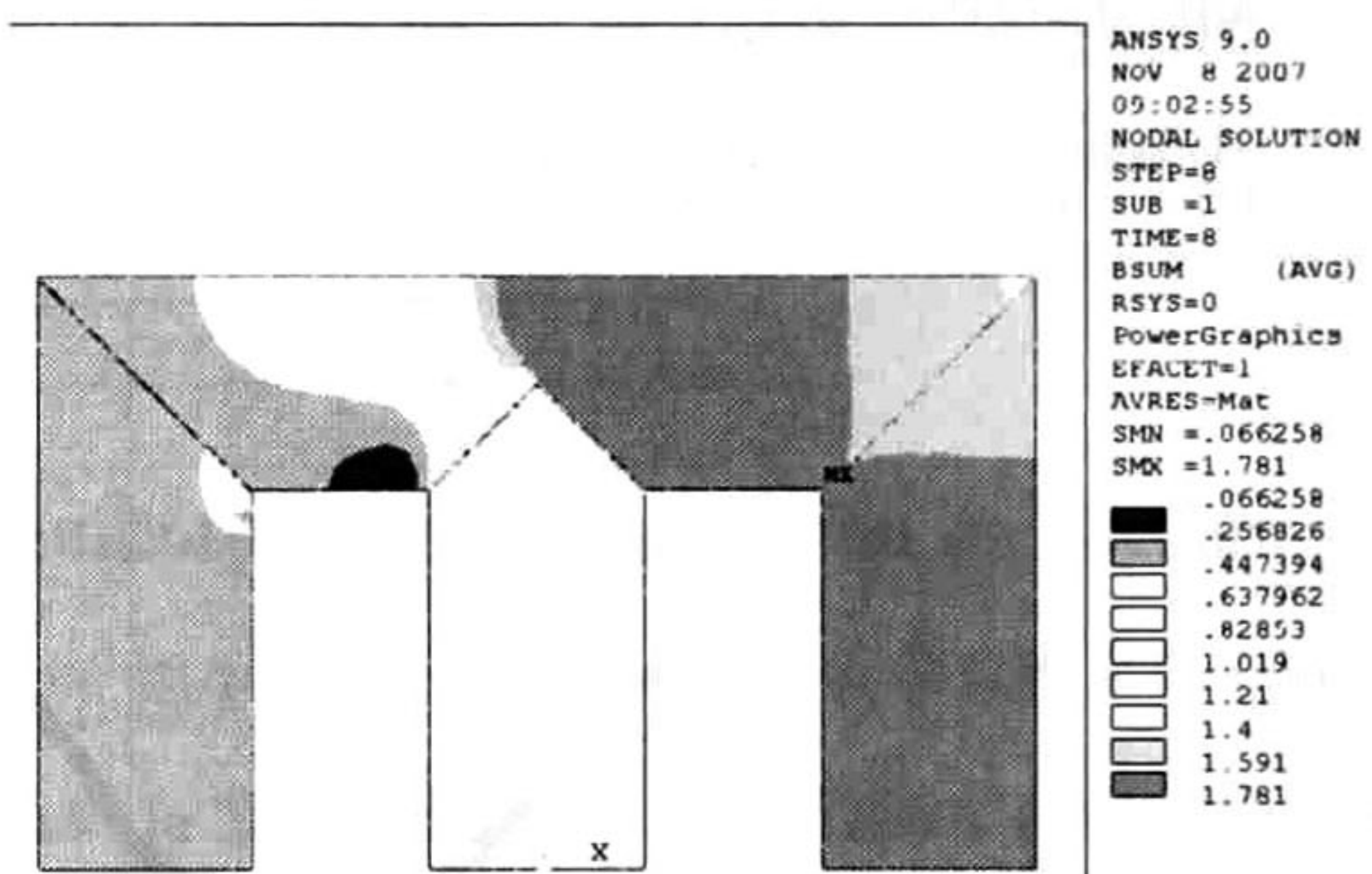


Figura 5.99: Densidad de flujo, cuando es mayor en la pierna III del modelo estático trifásico.



## 5.8. Modelo del transformador trifásico en el dominio de la frecuencia.

A continuación se presentan los resultados de simular un transformador trifásico descrito en secciones anteriores en el dominio de la frecuencia. La frecuencia fundamental es de 60 Hz. Es necesario aclarar que por tratarse de un problema en el dominio de la frecuencia los resultados obtenidos son valores RMS.

En este modelo se alimenta al transformador con fuentes de voltajes trifásicas balanceadas en su representación fasorial.

$$\hat{V}_a = 69000 \angle 0^\circ$$

$$\hat{V}_b = 69000 \angle -120^\circ$$

$$\hat{V}_c = 69000 \angle 120^\circ$$

En la figura 5.100 se muestra la densidad de flujo magnético en la trayectoria de la pierna I, en la figura 5.101 la densidad de flujo en la trayectoria de la pierna II y en la figura 5.102 la densidad de flujo en la trayectoria de la pierna III.

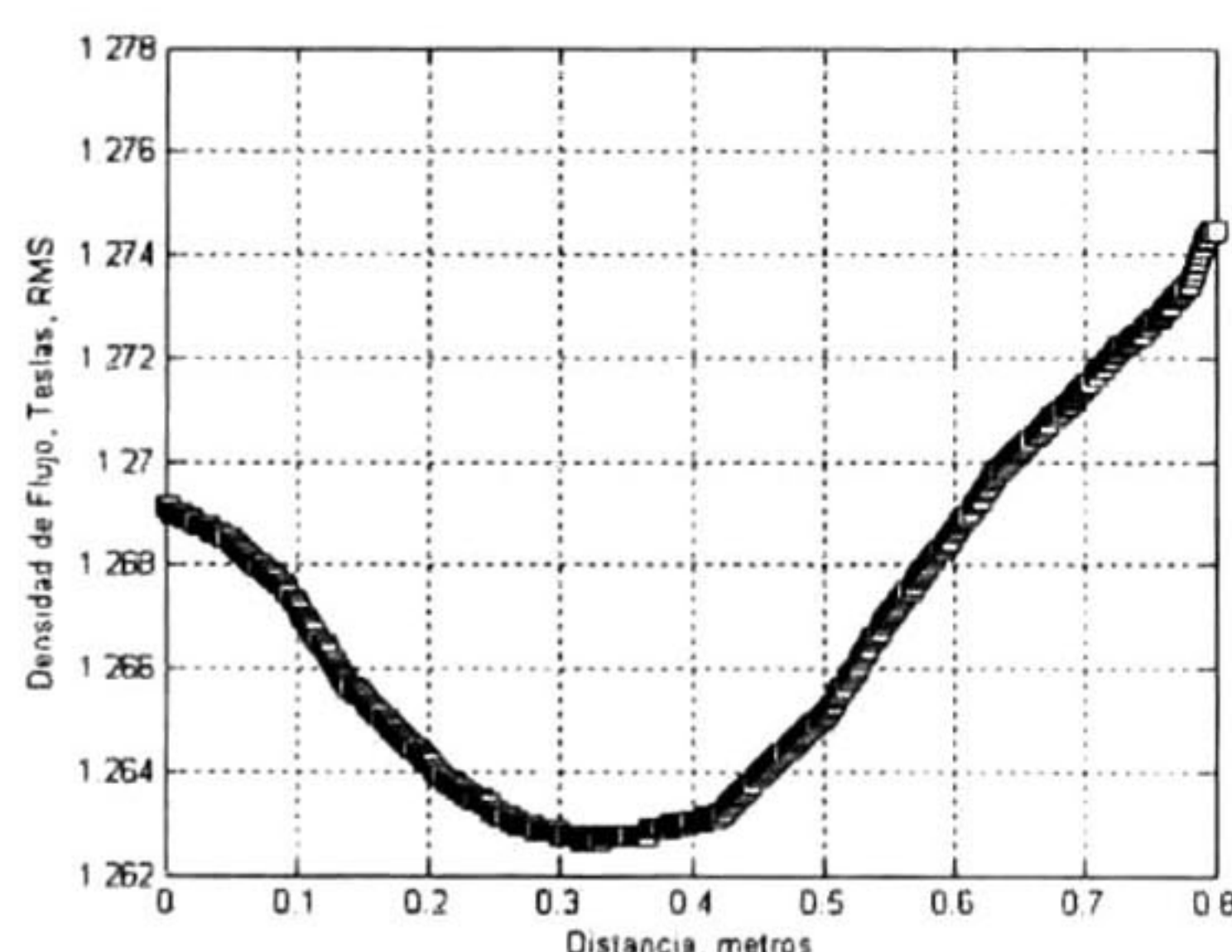


Figura 5.100: Densidad de flujo en la trayectoria de la pierna I del modelo armónico trifásico.

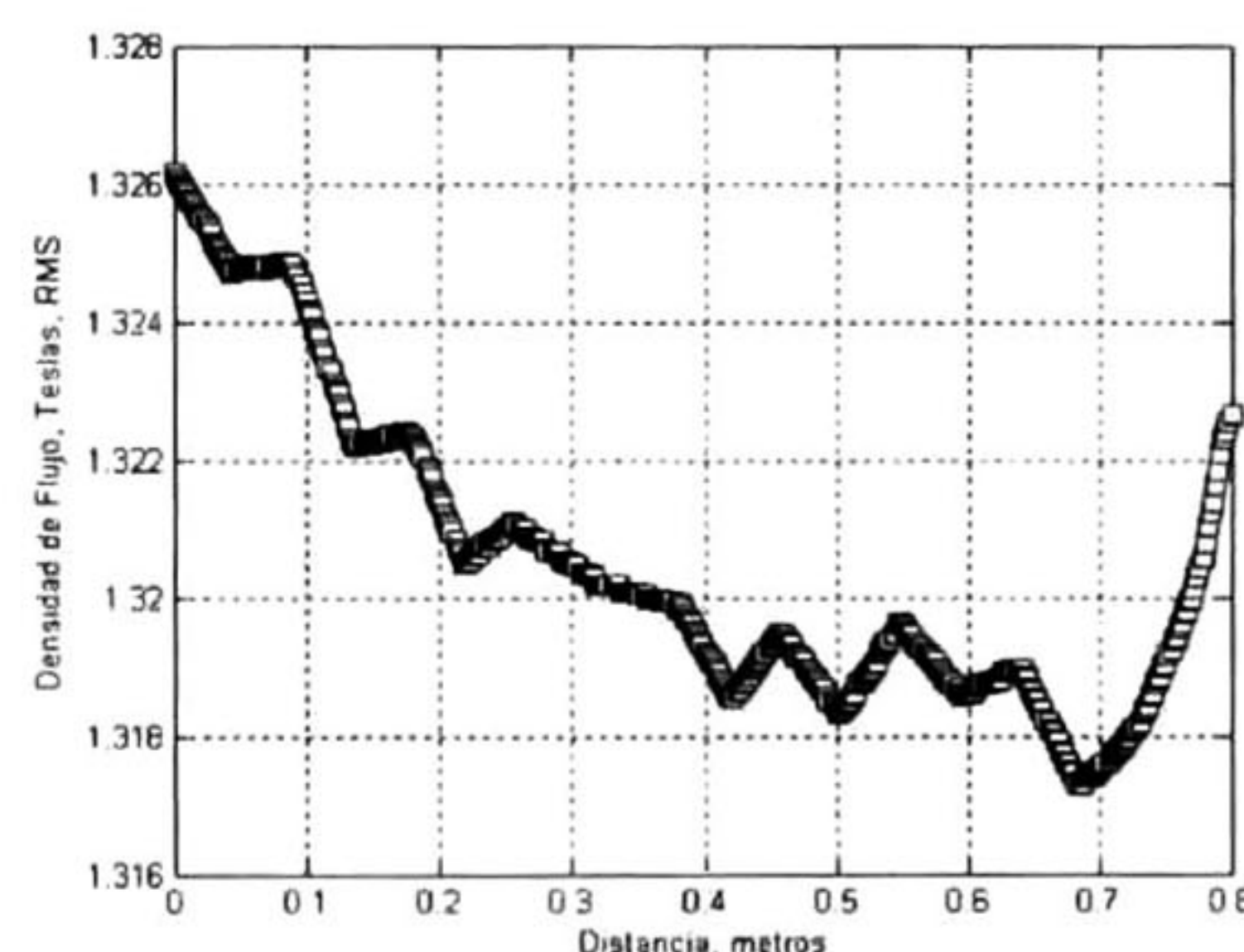


Figura 5.101: Densidad de flujo en la trayectoria de la pierna II del modelo armónico trifásico.



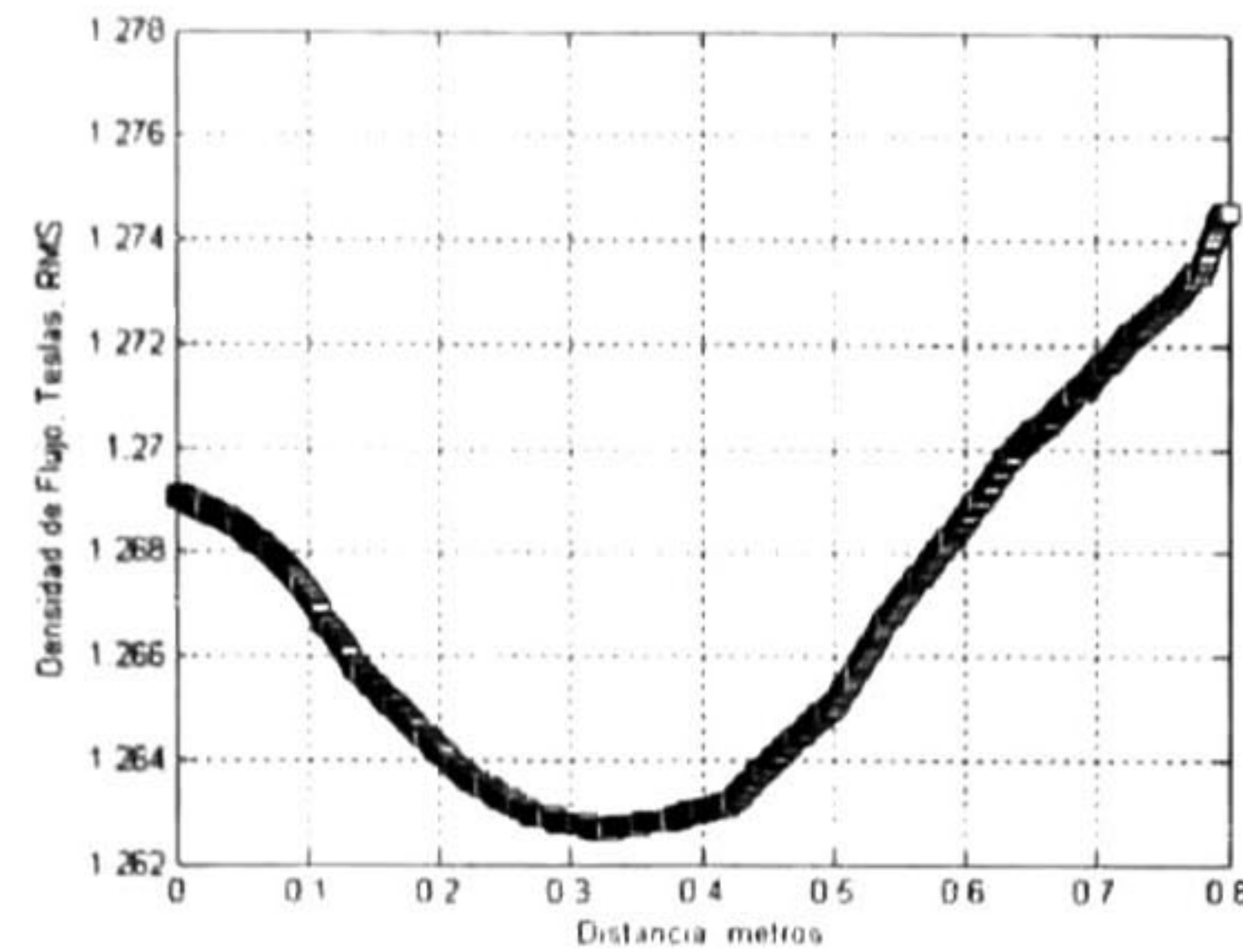


Figura 5.102: Densidad de flujo en la trayectoria de la pierna III del modelo armónico trifásico.

Tabla 5.16: Parámetros del transformador trifásico, modelo armónico.

Ansys		Traye. 1	Traye. 2	Traye. 3
Análisis	Corriente-Fase, Amperes (RMS)	0.1189	0.12874	0.1085
Armónico	Densidad de Flujo Max. T (RMS)	1.2745	1.3261	1.2746

Las componentes real e imaginaria de las líneas equipotenciales se muestran en las figuras 5.103 y 5.104. La distribución de densidad de flujo se muestra en las figuras 5.105 y 5.106. El valor de la distribución máxima ocurre en la zona de translapés de la pierna central y es de valor 1.3 Teslas. Las corrientes en cada fase son mostradas en la Tabla 5.16.

Se aprecia que la magnitud de las corrientes en las piernas externas son iguales y de mayor valor que la de la bobina alojada en la pierna central.



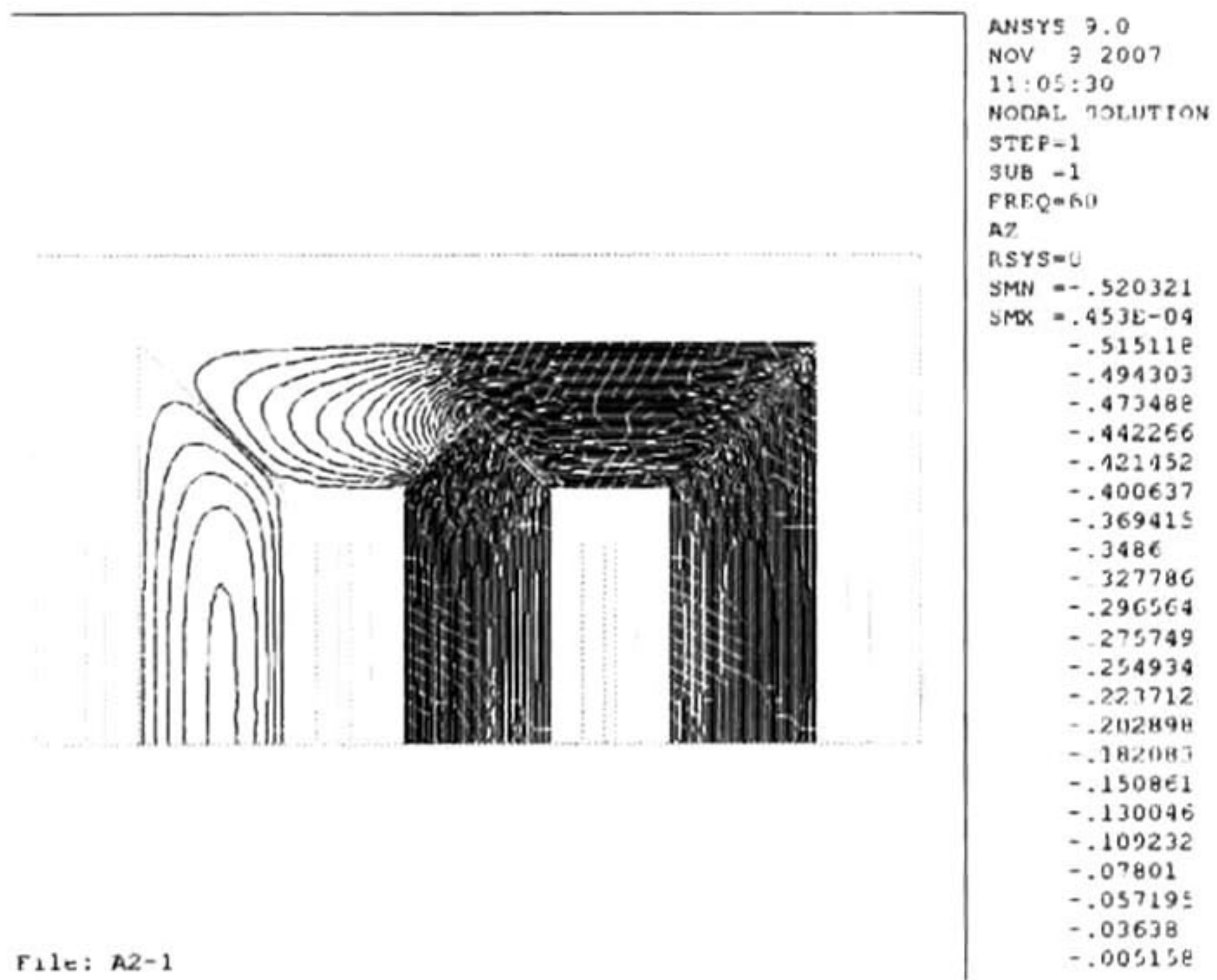


Figura 5.103: Potencial magnético, parte real del modelo armónico trifásico.

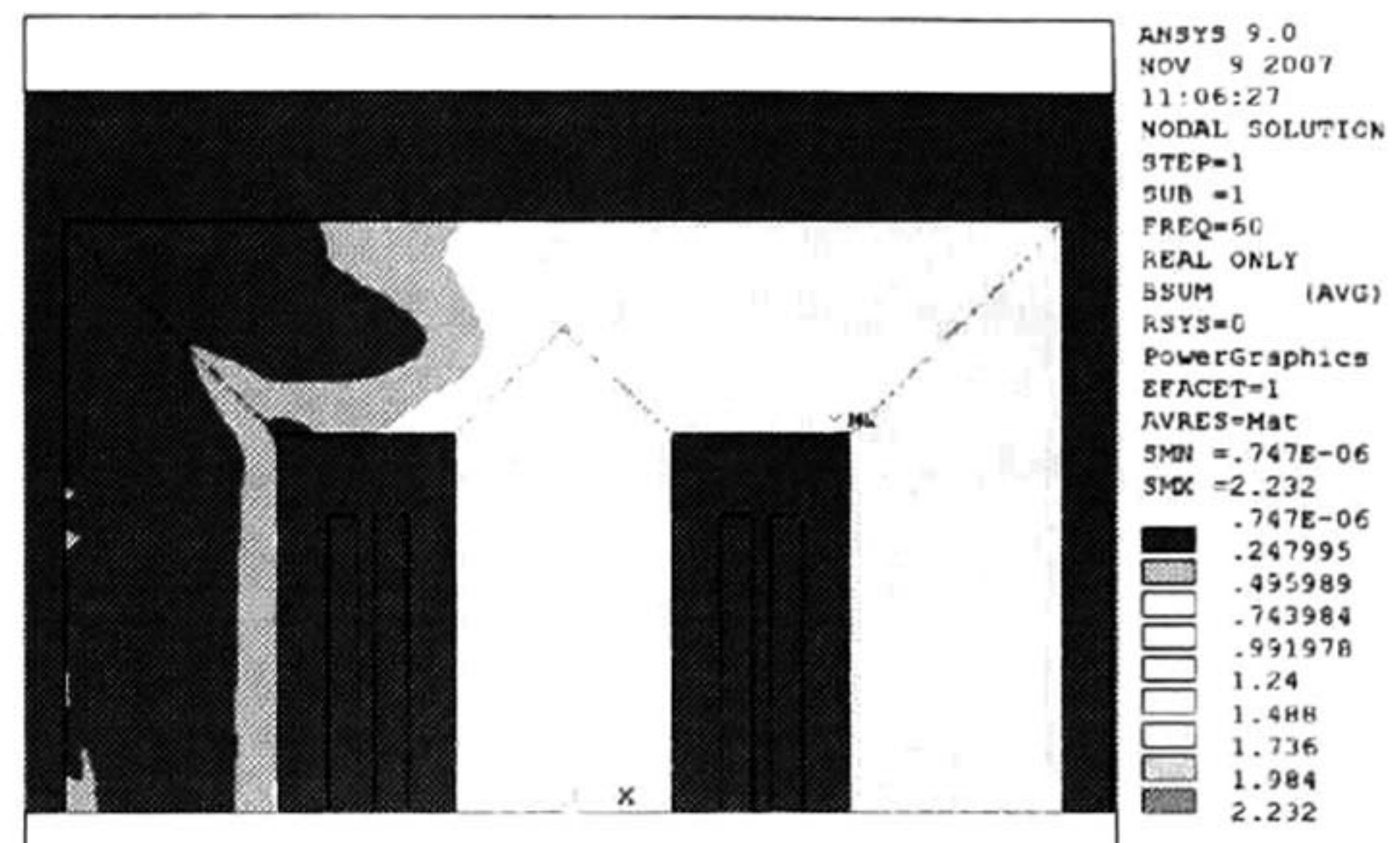


Figura 5.104: Potencial magnético, parte imaginaria del modelo armónico trifásico.

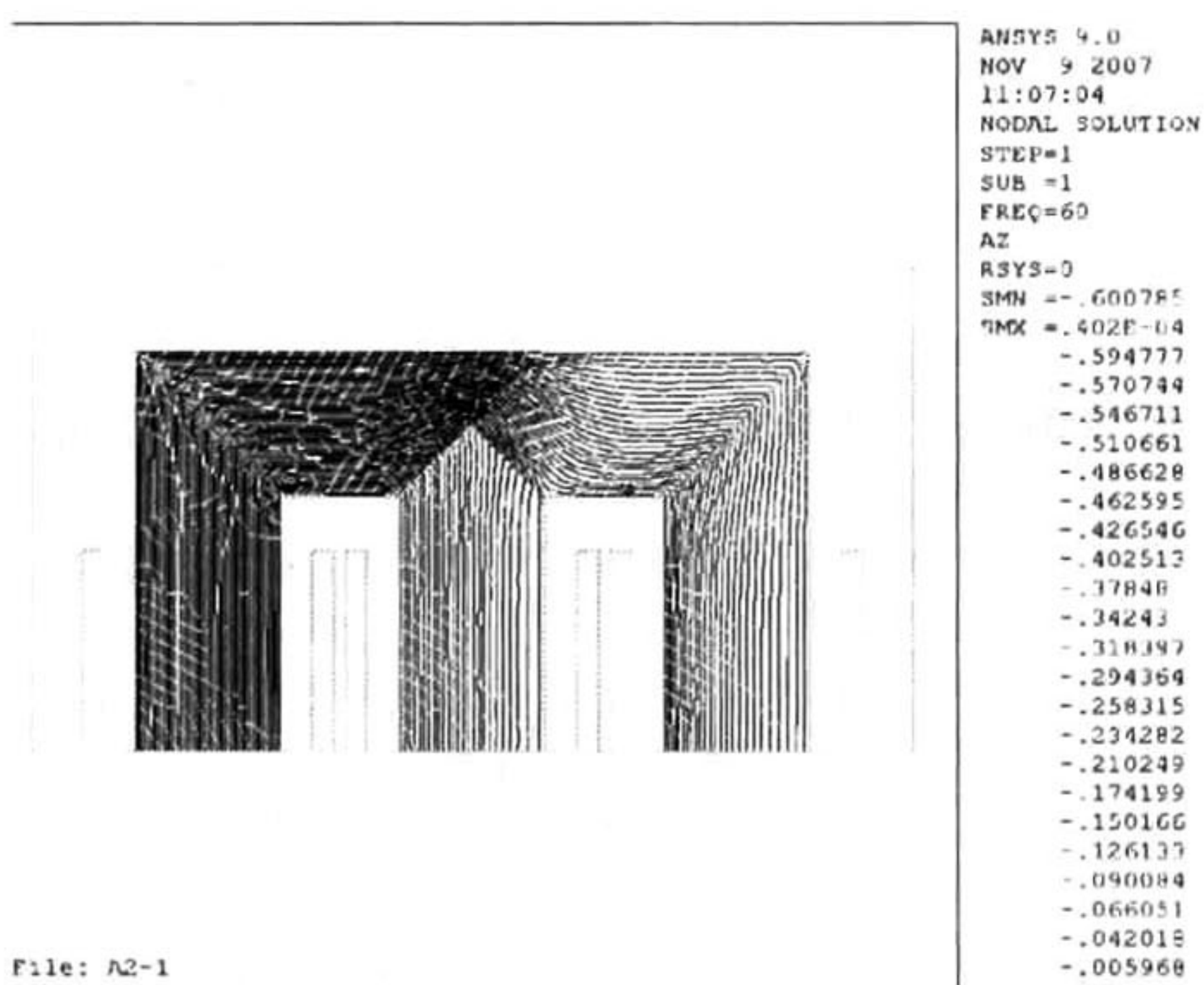


Figura 5.105: Densidad de Flujo, parte real del modelo armónico trifásico.

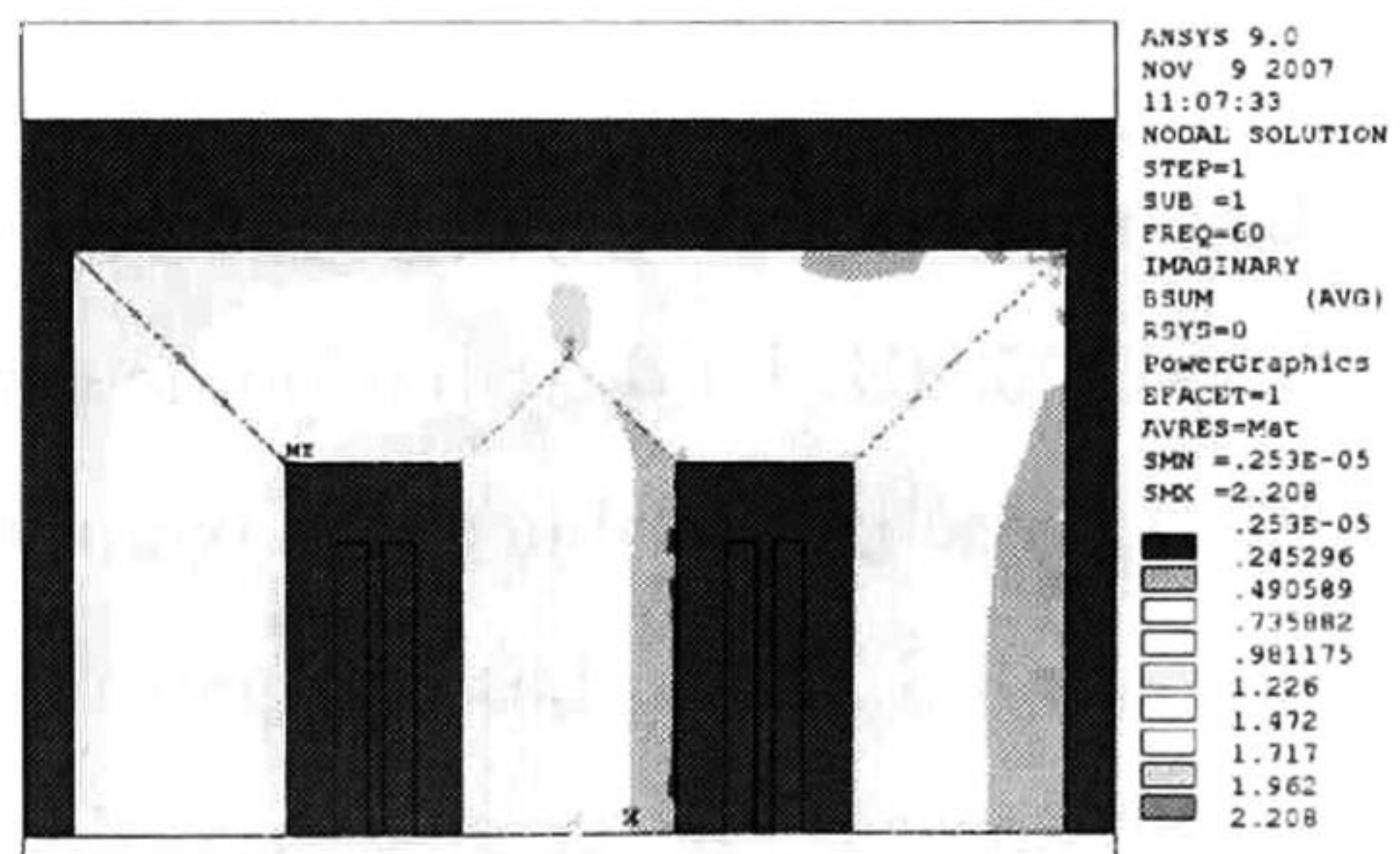


Figura 5.106: Densidad de flujo, parte imaginaria del modelo armónico trifásico.



# Conclusiones

---

Las conclusiones más importantes de este trabajo son las siguientes:

Se analizó en detalle la problemática de cada uno de los modelos de elementos desde un transformador monofásico axisimétrico con núcleo de aire hasta el transformador trifásico con núcleo de tres piernas saturado.

Se propusieron modelos de bobinas planares equivalentes a las bobinas axisimétricas que proporcionan buenos resultados. La incorporación de elementos circuitales R, L en la modelación en dos dimensiones de bobinas no axisimétricas permite aproximar aceptablemente el efecto no considerado en modelos bidimensionales

Se propusieron modelos equivalentes lineales de núcleos saturados con buenos resultados y que disminuyen apreciablemente los tiempos de cálculo con respecto de los modelos no lineales que modelan la curva de saturación completa.

Se analizaron los tres modelos utilizados en la técnica de elementos finitos y se describen la utilidad y ventajas respecto de los otros en la determinación de las variables de interés específicas. Se demostró que los parámetros eléctricos circuitales, resistencia e inductancia, con prácticamente iguales cuando los modelos son lineales.

Los parámetros circuitales, potenciales y densidad de flujo obtenidos por el modelo armónico no lineal pueden diferir respecto de los obtenidos por los métodos magnetostático y transi-



torio como consecuencia de la aproximación RMS de la curva de saturación del material. Aunque existen metodológicas generales para el modelado de transformadores eléctricos. En cada transformador se deberán considerar todas las particularidades específicas para el correcto modelado del mismo. De especial importancia son los datos de la curva de saturación que deberá ser suficientemente suave para lograr buena convergencia en la solución no lineal. El modelo transitorio permite incluir prácticamente cualquier detalle en su formulación a costo de grandes tiempos de cómputo. Especialmente se incluye el efecto de la saturación del núcleo.

En todos los modelos y de todos los tipos de transformadores se utilización fuentes de voltaje independiente como excitación en los devanados de las bobinas.

Al analizar el transformador en tres modelos diferentes, modelo estático, modelo en el dominio de la frecuencia y modelo en el tiempo, se encontraron ventajas y desventajas de cada uno de ellos. La gran ventaja de modelar el transformador de una forma estática es el tiempo de simulación, este tiempo se encuentra entre 1 Y 5 minutos, dependiendo de la forma en que sean aplicadas las cargas, circuitos externos o voltajes forzados. Otra ventaja está en el cálculo de los parámetros, cálculo de inductancias propias, mutuas y resistencias en los bobinados, entre las desventajas están, el no poder observar el fenómeno transitorio.

En cuanto al modelo en el dominio de la frecuencia, el tiempo de simulación es aceptable y oscila entre 1 a 120 minutos, esto depende de la forma en que sean aplicadas las cargas. Una desventaja esta en que es imposible observar el fenómeno transitorio directamente. Otra muy notable es que no pueden analizarse materiales con no linealidades, a menos que se obtenga un equivalente, como es el caso de este trabajo. Comparando los tres modelos, el tiempo que utiliza el modelo transitorio es muy elevado comparado con los otros 2 modelos es de alrededor las 48 horas de simulación y la ventaja que se tiene es el poder observar el comportamiento en el tiempo que tiene el transformador.



# Trabajos futuros

---

1. Encontrar un equivalente efectivo para los entre-hierros.
2. Analizar el comportamiento del núcleo del transformador ante fallas simétricas o asimétricas.
3. Analizar el fenómeno térmico magnético en el núcleo del transformador.
4. Analizar las vibraciones que se presentan en el transformador.
5. Hacer estudios tridimensionales de los transformadores en donde se incluyan las laminaciones del núcleo.
6. Hacer estudios de la distribución del flujo en zonas de traslapes.
7. Hacer estudios para proponer solución al problema no lineal cuando se aplica el modelo armónico cuando se incluye saturación magnética.
8. Hacer estudios para un mallado óptimo para estudios de transformadores
9. Analizar la influencia de la resistividad del núcleo.



### A.1. Potenciales Magnéticos.

Considerando que  $B = \nabla \times \mathbf{A}$  y sustituyéndolo en la ecuación (2.1) queda.

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (\text{A.1})$$

Ó lo que es lo mismo

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (\text{A.2})$$

Pasando los términos derechos al lado izquierdo de la ecuación (A.2)

$$\nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0 \quad (\text{A.3})$$

Agrupando términos en un solo rotacional de la ecuación (A.3) queda.

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (\text{A.4})$$

Haciendo similitud entre la ecuación (A.4) y la identidad  $\nabla \times \nabla V$  queda.

$$\nabla V = \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (\text{A.5})$$

Despejando para  $\mathbf{E}$  en la ecuación (A.5) resulta.

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V \quad (\text{A.6})$$



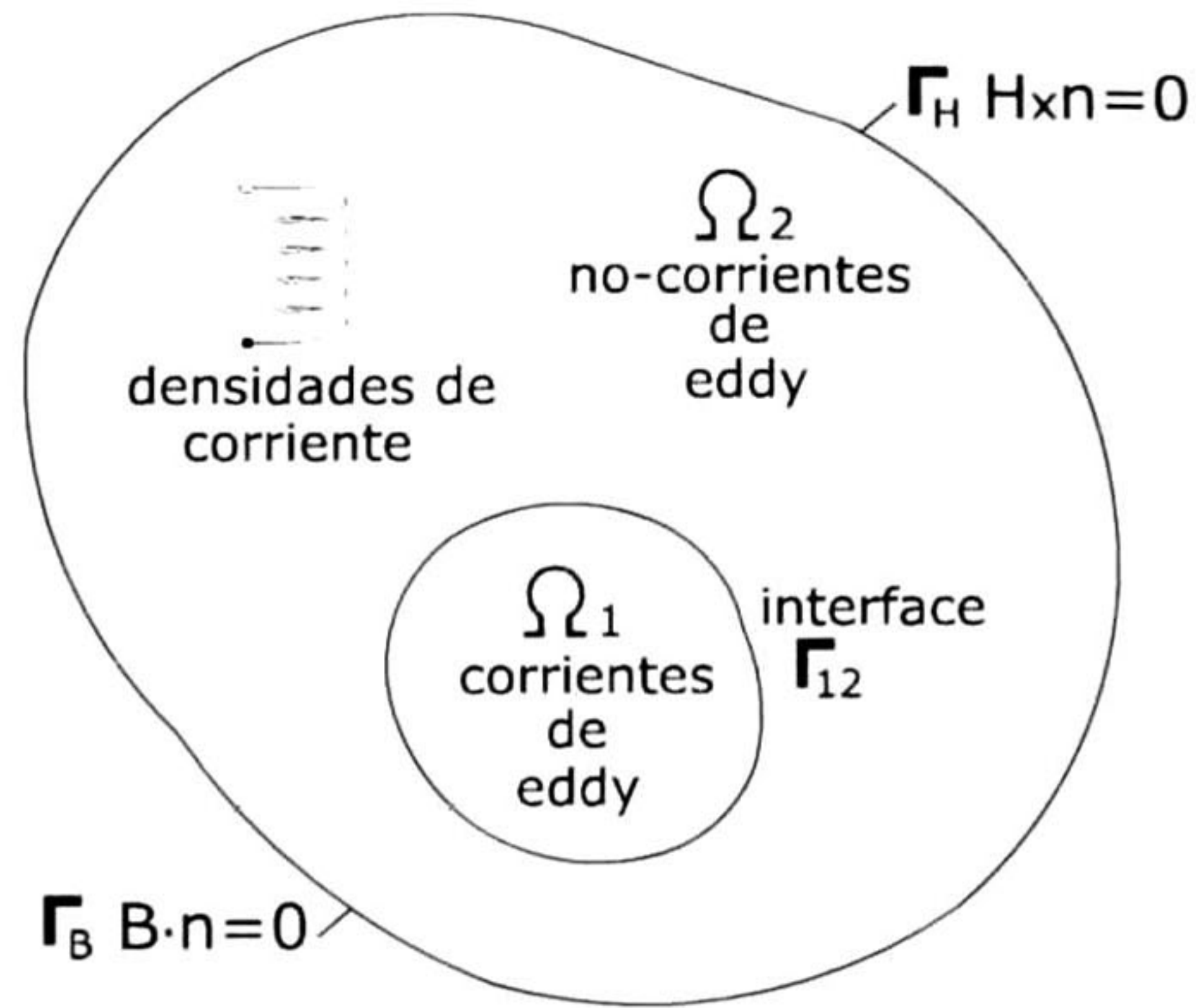


Figura A.1: Regiones de trabajo.

## A.2. Unicidad del potencial Magnético

Una de las formas de comprobar la unicidad del potencial magnético es reemplazando la condición frontera  $\mathbf{n} \times \mathbf{A} = 0$ . Y definiendo la componente normal de  $\mathbf{B}$  por la siguiente condición frontera. En la figura A.1 se muestran las regiones de trabajo.

$$\mathbf{n} \times \mathbf{A} = 0 \text{ sobre } \Gamma_B \quad (\text{A.7})$$

El conjunto de condiciones que encierra la unicidad en  $\mathbf{A}$  en  $\Omega$  es [6]

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \text{ en } \Omega \quad (\text{A.8})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \text{ en } \Omega \quad (\text{A.9})$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{A} \text{ Sobre } \Gamma_B \quad (\text{A.10})$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \text{ Sobre } \Gamma_H \quad (\text{A.11})$$



Para demostrar la unicidad se asumen dos vectores  $\mathbf{A}^{(1)}$  y  $\mathbf{A}^{(2)}$ , ambos satisfacen las 4 condiciones anteriores, entonces.

$$\mathbf{A}^{(0)} = \mathbf{A}^{(1)} - \mathbf{A}^{(2)} \quad (\text{A.12})$$

$$\nabla \times \mathbf{A}^{(0)} = 0 \text{ en } \Omega \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{A}^{(0)} \text{ Sobre } \Gamma_B \quad (\text{A.14})$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}^{(0)} \text{ Sobre } \Gamma_H \quad (\text{A.15})$$

$\mathbf{A}^{(0)}$  en A,20 puede ser expresado como.

$$\mathbf{A}^{(0)} = \nabla u \text{ en } \Omega \quad (\text{A.16})$$

De acuerdo con A,21, la función escalar  $u$  satisface la ecuación de Laplace.

$$\nabla^2 u = 0 \quad (\text{A.17})$$

Las ecuaciones A,21 y A,22 implican que  $u$  es una constante en  $\Gamma_B$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (\text{A.18})$$



# Bibliografía

---

- [1] Peter P. Silvester and Ronald L. Ferrari, Finite Elements for Electrical Engineers, Cambridge University press, 1996
- [2] S. Ratnajeevan, H. Hoole, Finite Elements, Electromagnetics and Design, Elsevier, California.
- [3] David K. Cheng, Fundamentals of Engineering Electromagnetics, Addison Wesley, 1993
- [4] Matthew N. O. Sadiku, Numerical Techniques in Electromagnetics, 2nd ed, Ed. Boca Raton, Fla
- [5] Miklos Gyimesi and Dale Ostergaard, Inductance Computation by Incremental Finite Element Analysis, IEEE Trans. On Magnetic, Vol. 35, No.3 May 1999.
- [6] M.V.K. Chari, Finite-Element Solution of the eddy-currents problem in magnetic structures
- [7] P. Silvester, H.S. Cabayan, B.T. Browne, Efficient Techniques for Finite Element Analysis of Electric Machines, Department of Electrical Engineering, McGill University, Montreal, Canada.



- [8] Herbert De Gersem, A topological Method used for Field-Circuit Coupling, IEEE Trans. On Magnetic, Vol. 34, No.5 May 1998.
- [9] S.J. Salon, Finite Element Analysis of electrical Machines, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York.
- [10] Demerdash, N.A. and Gillott, D.H., A New Approach for Determination of Eddy Currents and Flux Penetration in Nonlinear Ferromagnetic Materials, IEEE Trans. on Magnetics, Vol. 10, pp. 682-685 (1974)
- [11] ANSYS Release 9.0 Documentation.
- [12] N.A, & Nelh, T.W. (1976), Flexibility and economics of the finite elements and difference techniques in nolinear magnetic fields of power devices, IEEE, Trans. on Magnetics, MAG-12, 1036-8.
- [13] Alejandro Osiris Perera, Evaluación de fronteras absorbentes en el cálculo de campos electromagnéticos utilizando el método de diferencias finitas en el dominio del tiempo, Tesis de maestría, Cinvestav Unidad Guadalajara, 2003
- [14] Magdalena S. P., Tapan K. S., Luis E. G. C., Tanmoy R., Antoni D., Iterative and Self-Adaptive Finite Element in Electromagnetic, Ed. Artech House, London, 1998.
- [15] David Meeker, Finite Element Method Magnetics, User's Manual, January 8 2006. [http:// femm.foster-miller.net/wiki/HomePage](http://femm.foster-miller.net/wiki/HomePage).
- [16] Sarkar, T. K., A Note on the Variational Method (Rayleigh-Ritz), Galerkin's Method, and the Method of Least Squares, Radio Science, vol.8 pp. 1207-1224.
- [17] <http://es.wikipedia.org/wiki/Isotrop%C3%ADa>, wikipedia la enciclopedia libre.



- [18] Saeed Moaveni, *Finite Element Analysis, Theory and Application with Ansys*, Prentice Hall.
- [19] ARMCO Oriented and Tran-Cor H, *Electrical Steels*. New Edition of Armco's design manual.
- [20] J. Salon, *Transient Finite Element Analysis of an Induction Motor with External Circuit Connections and Electromechanical Coupling*, IEEE Trans. on Magnetics, 1997
- [21] Sheppard J. Salon, *Transient Finite Element Analysis of an Induction Motor with External Circuit Connections and Electromechanical Coupling*, IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 14, No. 4, December 1999
- [22] Joseph A. Edminister, *Circuitos Eléctricos*, 2nd ed, Ed. McGRAW-HILL.





**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL I.P.N.  
UNIDAD GUADALAJARA**

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional aprobó la tesis

Análisis del Transformador con Elementos Finitos Bidimensional

del (la) C.

José Enrique PAREDES REYES

el día 11 de Enero de 2008.

Dr. Juan Manuel Ramírez Arredondo  
Investigador CINESTAV 3C  
CINESTAV Unidad Guadalajara

Dr. José Manuel Cañedo Castañeda  
Investigador CINESTAV 3A  
CINESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Amner Israel Ramírez Vázquez  
Investigador CINESTAV 3A  
CINESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Felipe Alejandro Uribe Campos  
Profesor Investigador Titular A  
Universidad de Guadalajara





CINVESTAV  
BIBLIOTECA CENTRAL



SSIT000006327