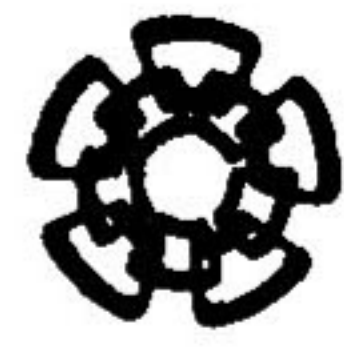
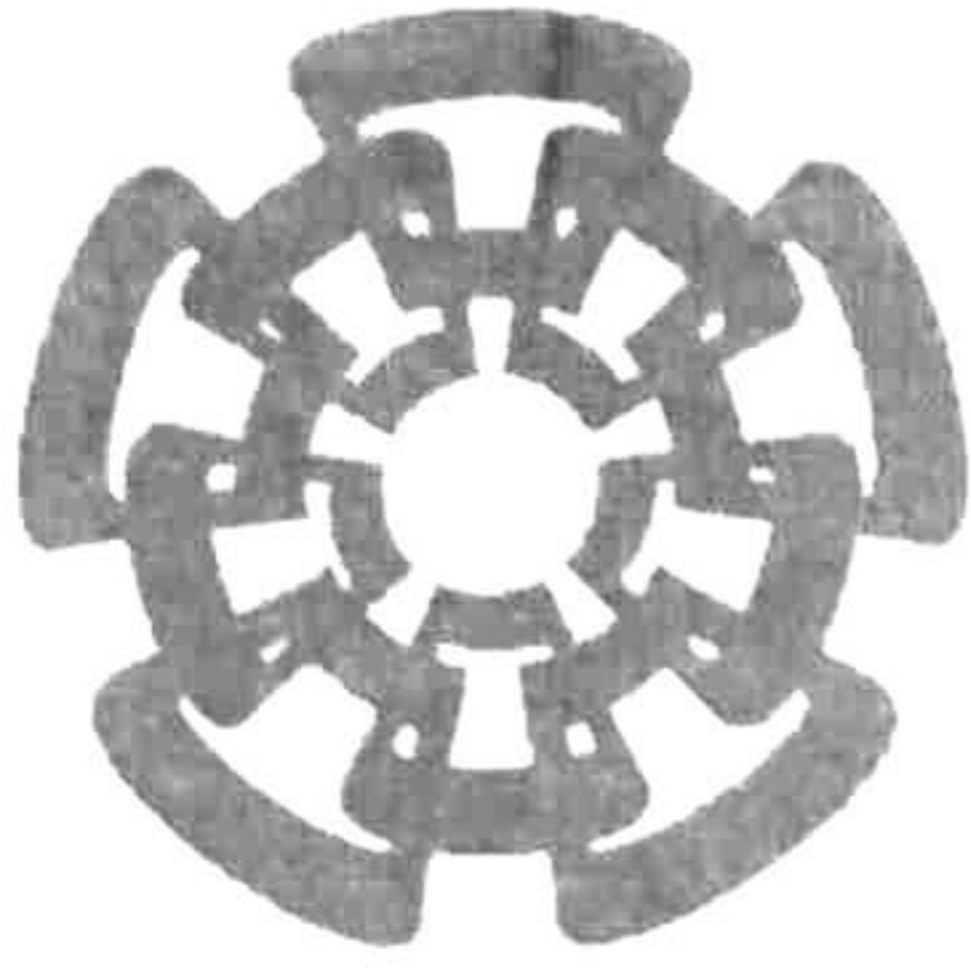


xx (178593.1)



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y
DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL
INSTITUTO POLITÉCNICO
NACIONAL**

**COORDINACIÓN GENERAL DE
SERVICIOS BIBLIOGRÁFICOS**

**Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N.
Unidad Guadalajara**

Cálculo Eficiente de Impedancias de Tierra en Sistemas de Transmisión

**CINVESTAV
IPN
ADQUISICION
DE LIBROS**

Tesis que presenta:
Octavio Trinidad Ramos Leaños

para obtener el grado de:
Maestro en Ciencias

en la especialidad de:
Ingeniería Eléctrica

Director de Tesis
Dr. José Luis Naredo Villagrán

Guadalajara, Jalisco, Noviembre de 2008.

CLASIF.: <u>TK 165.658</u>	<u>R37 2008</u>
ADQUIS.: <u>SSI-537</u>	
FECHA: <u>18 Jul 2009</u>	
PROCED.: <u>Den-2009</u>	
\$	

ID. 159237-1001

Cálculo Eficiente de Impedancias de Tierra en Sistemas de Transmisión

**Tesis de Maestría en Ciencias
Ingeniería Eléctrica**

Por:

Octavio Trinidad Ramos Leños

Ingeniero en Electromecánica

Instituto Tecnológico Superior Zacatecas Sur 2000-2005

Becario de Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, expediente
no. 203891

Director de Tesis

Dr. José Luis Naredo Villagrán

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Noviembre de 2008.

RESUMEN

El parámetro de impedancia de tierra es muy importante dentro del modelado matemático de sistemas eléctricos. Además es necesario para estudiar la interferencia inductiva en circuitos de comunicación ocasionada por líneas de potencia cercanas, así como también por vías ferroviarias electrificadas. Adicionalmente, la obtención de dichas impedancias es un primer paso para el cálculo de los sobrevoltajes de las líneas de transmisión causados por descargas atmosféricas, fallas u otros eventos.

En 1926, casi simultáneamente, J. R. Carson en EUA y F. Pollaczek en Alemania publicaron métodos para determinar la impedancia de retorno por tierra para líneas aéreas y cables subterráneos, respectivamente. No obstante, el mayor problema de dichas formulaciones es que contienen integrales infinitas sin solución analítica cerrada.

Debido a esto, varios investigadores han tratado de aproximar la solución de dichas integrales por medios numéricos al utilizar métodos de integración numérica, elementos finitos, redes neuronales, etc., los cuales en ciertos casos entregan resultados precisos con requerimientos de recursos computacionales usualmente excesivos. Aunado a esto no todos ellos garantizan convergencia ni buenos resultados en ciertos rangos de aplicación.

Otros investigadores han propuesto el uso de fórmulas cerradas de aproximación, las cuales son mucho más sencillas en aplicación y forma que cualquiera de los métodos antes mencionados. No obstante, aun cuando la precisión de dichas formulaciones es aceptable, esta puede ser mejorada. Debido a que en muchas ocasiones las decisiones de instalación de nuevos sistemas de transmisión así como de sus protecciones son tomadas en base a simulaciones computacionales donde el término de impedancia de tierra es muy influyente.

Es por ello que en esta tesis se ha abordado el problema de sintetizar fórmulas más precisas que las existentes en la literatura especializada.

En el Capítulo I se describe brevemente el parámetro de impedancia de tierra y su importancia en los sistemas de transmisión de energía eléctrica. También, se describe de manera breve la evolución histórica de las fórmulas de aproximación a la integral de Carson y a la de Pollaczek. Así, como también la de algunos otros métodos que dan solución a estas expresiones.

El Capítulo II describe de manera breve el modelado de líneas de transmisión y de cables subterráneos.

El Capítulo III presenta un análisis de distintos algoritmos de integración numérica que han sido utilizados para dar solución al término de impedancia de tierra.

En el Capítulo IV se analizan varias fórmulas de aproximación a la integral de Carson y a la integral de Pollaczek. Además, se proponen nuevas fórmulas para este mismo fin con una precisión mayor a las demás analizadas en la tesis. Se explica el procedimiento tomado para llegar a las formulaciones propuestas.

En el Capítulo V se analiza el efecto que tiene el error del cálculo de impedancia de tierra en la predicción de respuestas transitorias de redes eléctricas.

En el Capítulo VI se dan las conclusiones de esta tesis.

Por último, en el Capítulo VII se presentan posibles investigaciones futuras.

ABSTRACT

Earth impedance is a very important parameter for the mathematical modeling of electrical systems. It also is necessary for studying the inductive interference in communication circuits due to nearby power lines, or to electrified railways. Additionally, obtaining these impedances is a first step for the calculation of transmission line overvoltages caused by lightning, failures, or other events.

In 1926, J. R. Carson in the US and F. Pollaczek in Germany almost, simultaneously, published methods for determining the return earth impedance for overhead lines and underground cables, respectively. However, the mayor problem of their formulations is that they have the form of infinite integrals without analytic close-form solutions.

Due to this problem, many researchers have approximated the solution to these integrals by numerical means; *e.g.*, numerical integration, finite elements, neural networks, etc. These methods in some cases deliver very precise results usually with an excessive requirement for computational time. In addition, not all these methods guarantee convergence and good results for some applications.

Other researchers have proposed the use of approximated close-form formulas, which are simpler than the above mentioned numerical methods. Some of these formulae have an acceptable accuracy that can be, nevertheless, improved. Due that in many occasions the decisions of installing a new transmission system and its protections are based in simulation results where the earth impedance is very important. For this reason, in this thesis the problem of synthesizing new formulae with an improved precision has been addressed.

In Chapter I the earth impedance parameter, as well as its importance in electrical energy transmission systems, are described briefly. A brief history on the evolution of approximate formulas for Carson and Pollaczek integrals is given also in this chapter.

Chapter II describes in a brief manner the modeling of transmission lines and underground cables.

Chapter III presents an analysis of different numerical integration algorithms that have been used to solve the earth impedance term.

In Chapter IV several formulae for approximating Carson and Pollaczek integrals are analyzed. Moreover, new formulae are proposed here with a higher precision than those found elsewhere. The method to arrive to these formulae also is given here.

In Chapter V the effect of the earth impedance approximations on transient simulation is addressed.

In Chapter VI the conclusions of this thesis are given.

Finally, in Chapter VII future research topics are proposed.

Agradecimientos Especiales

Deseo expresar mi más profundo respeto y admiración a mi supervisor Dr. José Luis Naredo Villagrán, quien a través de sus enseñanzas y largas horas de amena charla se ha convertido en un gran amigo incluso el mejor que he tenido. No tengo manera de pagar los arduos momentos de supervisión técnica, gratas charlas e increíbles relaciones públicas que tuvimos a lo largo de este trayecto. Como olvidar las maravillosas pláticas que me mostraron mundos desconocidos, los viajes que me permitieron conocer personajes maravillosos, pero sobretodo la calidad humana del Editor de este libro.

Quiero agradecer a mi gran amigo Larry mejor conocido como Dr. Felipe Uribe por su apoyo incondicional, por los momentos de trabajo y risas, pero sobre todo por su amistad.

A mi buen amigo Dr. Pablo Moreno quien siempre me ha brindado tiempo, ayuda y sabios consejos. Gracias por defender nuestra portería.

Al Dr. Abner Ramírez gracias por el apoyo brindado durante mi estancia en Cinvestav.

A mi buen amigo Dr. Arturo Roman Messina quien me a apoyado a lo largo de mi estancia en Cinvestav. Muchas gracias por proporcionarnos un lugar para vivir.

A la secretaria académica Lupita Ciprian. Muchas gracias por su dedicación.

Muchas gracias a CONACYT por estos años de apoyo económico. Finalmente deseo agradecer de manera especial a mi querida Madre, Maria del Socorro Leños Mares por su apoyo incondicional.

Por su tiempo y paciencia, muchas gracias.

Dedicatoria

Esta tesis está dedicada a todas aquellas personas que me han apoyado para alcanzar esta meta. Todas aquellas personas que han sacrificado incluso parte de su vida para permitirme alcanzar nuevos horizontes. A todos ellos les entrego mi gratitud y mi corazón.

Mi querida madre

María del Socorro Leños Mares, Gracias por iluminar mi camino.

Mis pequeños hermanos

Edgar, Eric, Ariana, Jorge y Michelle, Gracias a ustedes me he mantenido vivo y he aprendido que en la vida hay que luchar por lo que se desea alcanzar.

Mi abuela

Mi jechu Toñita, Gracias por cuidar de mí.

A la memoria de mi abuela

María Auxilio Álvarez, Gracias por enseñarme a leer y escribir.

A mis compañeros y amigos del Cinvestav

Horacio, Mikey, Nino, Francisco, Pepe, Chaman, Carlitos, Reynaldo, Omar, el Bocho y a todos aquellos con quienes compartí grandes momentos.

Y una dedicación especial para mi novia

Charlotte, Gracias por todo el apoyo incondicional.

A ustedes, gracias por todo

LISTA DE TABLAS

	Página
Capítulo III	
TABLA 3.1 Rangos de variables físicas	40
TABLA 3.2 Comparación del tiempo computacional, Carson	47
TABLA 3.3 Comparación del tiempo computacional, Pollaczek	53

LISTA DE FIGURAS

	Página
Capítulo II	
FIGURA 2.1. Esquema de sistemas multiconductores.	12
FIGURA 2.2. Configuración típica de línea de transmisión aérea.	15
FIGURA 2.3. Cable monofásico.	20
FIGURA 2.4. Cable para 1 kV con armadura.	21
FIGURA 2.5. Cable tipo tubo sin pantalla ni armadura en disposición asimétrica.	21
FIGURA 2.6. Cable tipo tubo con pantalla y armadura en disposición trébol.	22
FIGURA 2.7. Cable tipo auto-contenido con hueco en el núcleo.	22
FIGURA 2.8. Corte transversal cable concéntrico.	23
FIGURA 2.9. Conductor o aislante cilíndrico hueco.	26
FIGURA 2.10. Configuración típica de un sistema subterráneo.	28
FIGURA 2.11. Configuración trifásica subterránea con corrientes de lazo.	28
FIGURA 2.12. Representación de dos puertos de un sistema multiconductor.	33
Capítulo III	
FIGURA 3.1. Sistema de conducción subterráneo compuesto por dos cables.	38
FIGURA 3.2. Resultados de la integración numérica, utilizando (3.5) y (3.9).	41
FIGURA 3.3. Resultados de la integración numérica, utilizando (3.6) y (3.10).	42
FIGURA 3.4. Resultado obtenido al evaluar (3.5), utilizando el algoritmo Gauss-Lobato.	44
FIGURA 3.5. Resultado obtenido al evaluar (3.5), utilizando el algoritmo Uribe-Ramírez.	45
FIGURA 3.6. Resultado obtenido al evaluar (3.5), utilizando el algoritmo híbrido.	47
FIGURA 3.7. Resultados obtenidos al integrar (3.6) por medio del algoritmo QMC.	49
FIGURA 3.8. Resultados obtenidos al integrar (3.6) por medio del algoritmo Uribe.	50
FIGURA 3.9. Resultados obtenidos al integrar (3.6) por medio del algoritmo Gauss-Lobato.	51
FIGURA 3.10. Resultados obtenidos al integrar (3.6) por medio del algoritmo híbrido.	52

Capítulo IV

FIGURA 4.1. Valores de $f(\eta)$ y su aproximación por mínimos cuadrados.	64
FIGURA 4.2. Gráficos de la función $g(\xi, \eta)$.	65
FIGURA 4.3. Valores de a y su aproximación por mínimos cuadrados.	65
FIGURA 4.4. Valores de b y su aproximación por mínimos cuadrados.	66
FIGURA 4.5. $f(\Delta)$ y sus aproximaciones.	67
FIGURA 4.6. Aproximación a los valores de c .	68
FIGURA 4.7. Aproximación a los valores de d .	69
FIGURA 4.8. Mapa de error relativo porcentual para la fórmula de Gary y Dubanton.	71
FIGURA 4.9. Mapa de error relativo porcentual para la fórmula de Alvarado y Betancourt.	72
FIGURA 4.10. Mapa de error relativo porcentual para la fórmula de Noda.	72
FIGURA 4.11. Mapa de error relativo porcentual para la fórmula Propuesta.	72
FIGURA 4.12. Esquema de cables en configuración paralela horizontal.	73
FIGURA 4.13. Mapa de error relativo porcentual para la fórmula de Wedepohl y Wilcox con $\chi=0$.	74
FIGURA 4.14. Mapa de error relativo porcentual para la fórmula de Per Pettersson con $\chi=0$.	74
FIGURA 4.15. Mapa de error relativo porcentual para la fórmula de Saad, Gaba y Giroux con $\chi=0.74$	74
FIGURA 4.16. Mapa de error relativo porcentual para la fórmula Propuesta con $\chi=0$.	75
FIGURA 4.17. Esquema de configuración para cables a distintas profundidades.	75
FIGURA 4.18. Mapas de error para la fórmula SGG con $\chi =$ a) 0.3, b) 0.6 y c) 0.9.	76
FIGURA 4.19. Mapas de error para la fórmula Propuesta con $\chi =$ a) 0.3, b) 0.6 y c) 0.9.	77
FIGURA 4.20. Error relativo porcentual para $r=0$, Carson.	78
FIGURA 4.21. Sección transversal de línea de distribución.	79
FIGURA 4.22. Z_T propia para el caso mostrado en la fig. 4.21.	80
FIGURA 4.23. Z_T mutua para el caso mostrado en la fig. 4.21.	81
FIGURA 4.24. Z_T propia para el sistema de la fig. 4.12.	82
FIGURA 4.25. Z_T mutua para el sistema de la fig. 4.12.	83
FIGURA 4.26. Sección transversal de dos conductores acoplados EM.	84
FIGURA 4.27. Z_T mutua para el sistema de la fig. 4.26.	85
FIGURA 4.28. Sistema de transmisión subterráneo cercano a tubería.	86
FIGURA 4.29. Z_T mutua para el sistema de la fig. 4.28.	87

Capítulo V

FIGURA 5.1. Representación circuital de un sistema simple.	92
FIGURA 5.2. Línea de 400Kv en paralelo con línea de 13.8Kv.	94
FIGURA 5.3. Forma de onda resultante del cálculo transitorio para el sistema de la fig. 5.2.	95
FIGURA 5.4. Forma de onda inducida resultante del sistema de la fig. 5.2.	96

FIGURA 5.5. Sistema de transmisión subterráneo.	97
FIGURA 5.6. Forma de onda resultante del cálculo transitorio para el sistema de la fig. 5.5, transitorio propagado.	98
FIGURA 5.7. Forma de onda resultante del cálculo transitorio para el sistema de la fig. 5.2, transitorio inducido núcleo 2.	99
FIGURA 5.8. Forma de onda resultante del cálculo transitorio para el sistema de la fig. 5.2, transitorio inducido núcleo 3.	100

Capítulo VII

FIGURA 7.1. Función $f(\xi, \eta)$ en el caso de Carson.	104
FIGURA 7.2. Función $f(\xi, \eta)$ en el caso de Pollaczek.	105

CONTENIDO

	Pagina
RESUMEN	i
ABSTRACT	iii
AGRADECIMIENTOS	v
DEDICATORIA	vi
LISTA DE TABLAS	vii
LISTA DE FIGURAS	viii
CONTENIDO	xi
CAPÍTULO I INTRODUCCIÓN	
1.1 Impedancia de retorno por tierra	1
1.2 Fórmulas y Metodologías para evaluar la Z_T	3
1.3 Planteamiento del Problema	7
1.4 Objetivo de la tesis	7
1.5 Metodología	7
CAPÍTULO II LÍNEAS DE TRANSMISIÓN DE ENERGÍA ELÉCTRICA	
2.1 Preámbulo	9
2.2 Modelado de Líneas de Transmisión	9
2.3 Parámetros de Líneas Aéreas	14
2.4 Parámetros de Cables	20
2.5 Representación de dos Puertos para Sistemas de Transmisión	32
2.6 Análisis Modal	34
2.7 Comentarios del Capítulo	35

CAPÍTULO III	ALGORITMOS PARA EL CÁLCULO DE IMPEDANCIAS DE TIERRA	
3.1	Preámbulo	36
3.2	Integrales de Carson y Pollaczek	36
3.3	Normalización de las Integrales de Carson y Pollaczek	38
3.4	Solución Algorítmica de la Integral de Carson	43
3.5	Solución Algorítmica de la Integral de Pollaczek	48
3.6	Observaciones del Capítulo	53
CAPÍTULO IV	FÓRMULAS APROXIMADAS PARA LAS INTEGRALES DE CARSON Y POLLACZEK	
4.1	Preámbulo	55
4.2	Aproximaciones de la integral de Carson	55
4.3	Aproximaciones de la integral de Pollaczek	59
4.4	Fórmula Propuesta para la integral de Carson	62
4.5	Fórmula Propuesta para la integral de Pollaczek	64
4.6	Evaluación global de Fórmulas	70
4.7	Casos de aplicación	78
4.8	Comentarios del Capítulo	88
CAPÍTULO V	CÁLCULO DE IMPEDANCIAS DE TIERRA Y RESPUESTA TRANSITORIA	
5.1	Introducción	89
5.2	Descripción general de la TNL	89
5.3	Análisis Transitorio con la TNL	92
5.4	Resultados	93
5.5	Comentarios del Capítulo	101
CAPÍTULO VI	CONCLUSIONES	102

CAPÍTULO VII	TRABAJOS FUTUROS	
7.1	Bases para una mejor Fórmula para la Integral de Carson	103
7.2	Bases para una mejor Fórmula para la Integral de Pollaczek	105
CAPÍTULO VIII	REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFÍA	
		107
APÉNDICE A	Documentos Técnicos Generados	111

INTRODUCCIÓN

1.1 IMPEDANCIA DE RETORNO POR TIERRA

La historia de la industria eléctrica inició con Edison y su estación eléctrica de la calle Pearl en la ciudad de Nueva York en 1882, la cual entregaba 110V de corriente directa (CD). Posteriormente, la primera línea monofásica de corriente alterna (CA) entre las Ciudades de Oregon y Portland, en Oregon E.U.A., comenzó a operar en 1889 [10,41]. La primera línea de transmisión trifásica de CA inició operaciones en Alemania en 1891[41]. La transición de energía eléctrica de CD a CA polifásica implicó que la frecuencia de trabajo del sistema de potencia se incrementara desde cero hasta varios cientos de Hz. En algún momento, las primeras centrales europeas y norteamericanas operaban a $16^{2/3}$ Hz y 25 Hz, respectivamente. Las centrales eléctricas modernas trabajan a 50 o 60 Hz y algunos equipos especiales, como los utilizados en naves aéreas, submarinos y equipo militar se diseñan para operar a 400 Hz [41].

El cambio de transmisión de potencia de CD a CA permitió que el nivel de voltaje pudiera cambiarse fácilmente al utilizar transformadores. Esto, aunado al incremento en la frecuencia operacional, permitió que los pesos y dimensiones de los equipos eléctricos se vieran reducidos. Sin embargo, varios tipos de disturbios se presentan al incrementar la frecuencia: armónicos, transitorios, interferencia electromagnética, etc., que se han convertido en nuevos retos para los ingenieros eléctricos.

La impedancia de los sistemas de transmisión, un término dependiente de la frecuencia, también se ha convertido en uno de los parámetros más importantes de los sistemas eléctricos. En ocasiones, un ingeniero eléctrico necesita conocer la impedancia de la línea o cable desde la frecuencia fundamental (50/60Hz) hasta la 25ava armónica (1,250/1,500Hz)

o más para realizar análisis de armónicos, y desde 0 Hz (CD) hasta 1 MHz para realizar análisis de transitorios. Dicha impedancia está compuesta principalmente por la impedancia geométrica, la impedancia interna del conductor y la impedancia de retorno por tierra (Z_T). Esta última se debe a que en líneas aéreas y en cables subterráneos la tierra representa un conductor adicional, el cual debe tomarse en cuenta para realizar análisis electromagnéticos. En el caso de cables submarinos el agua también representa un conductor [12]. El término Z_T debe calcularse de manera precisa, ya que influye de sobremanera en el modelado matemático de sistemas eléctricos de potencia [35,41].

Cabe mencionar que el cálculo de la impedancia de tierra es importante, no solamente en sistemas de potencia, sino también en otras áreas que involucran aplicaciones de altas frecuencias, como son las comunicaciones y el diseño de microchips. De hecho, conforme la frecuencia se incrementa a varios gigahertz, un pequeño segmento de conductor en un microchip se comporta en forma semejante a una línea de transmisión de energía de 100 Km de longitud trabajando; ya sea en estado estable o en estado transitorio. Consecuentemente, los métodos para calcular la impedancia de tierra y demás parámetros de líneas también son aplicables al análisis de interferencia electromagnética en sistemas de comunicación, tarjetas PCB (Printed Circuit Board) y microchips [41].

Además de los numerosos problemas de transmisión, presentes en el desarrollo y operación de sistemas de potencia, también surge un gran número de problemas de interferencia y protección debido a los inevitables conflictos entre dichos sistemas, así como con el entorno físico que los rodea y con otros sistemas cercanos, como son los de comunicación. La circunstancia de este conflicto reside en que la tierra está involucrada en alguna medida como un conductor de retorno; tanto en operación normal como en los momentos de ocurrencia de disturbios. La tierra también funciona como conductor de retorno para corrientes de descargas atmosféricas, las cuales pueden causar disturbios en los sistemas de potencia. Debido a que el suelo es electrolítico, los conductores subterráneos pueden experimentar corrosión si existe un intercambio de corriente entre el conductor y la tierra [9]. Problemas como este surgen en los sistemas eléctricos (Potencia o Comunicaciones), involucrando la protección de líneas de transmisión y equipos asociados

a la protección contra fallas o interferencias debidas a los voltajes excesivos. La protección también debe brindarse al personal para evitarle daños ocasionados por voltajes anormales en estructuras metálicas aterrizadas y que son de fácil acceso. Adicionalmente, las estructuras metálicas subterráneas deben protegerse contra corrosión excesiva debida a las corrientes de tierra [9].

El cálculo de las protecciones necesarias para un sistema eléctrico a menudo se realiza de acuerdo a los resultados obtenidos con simulaciones de la operación del sistema bajo condiciones extremas, como son los eventos transitorios. Para ello, un modelo detallado de la línea o sistema bajo estudio es requerido. Es sabido que la precisión de dichos modelos se ve sumamente afectada por las suposiciones tomadas en la evaluación de la impedancia del circuito y, por lo tanto, de la impedancia de tierra Z_T [35]. De hecho, una mala aproximación al término Z_T puede afectar los resultados de la simulación con errores mayores al 20%. Tomar una decisión referente a las protecciones de un sistema basada en resultados erróneos puede ocasionar que éste se sobreproteja y se incrementen de esta manera los costos del mismo; o en el peor de los casos, que se subproteja ocasionando que el sistema sea más vulnerable o incluso que resulte inoperante.

1.2 FÓRMULAS Y METODOLGÍAS PARA EVALUAR LA Z_T

La influencia de la tierra como conductor imperfecto sobre la impedancia de un conductor ha sido analizada desde 1926, tanto para el caso de líneas aéreas como para el de cables subterráneos, por Carson [21] y por Pollaczek [16], respectivamente. Ambos investigadores desarrollaron expresiones que dan solución al término Z_T para el caso correspondiente; no obstante, dichas formulaciones incluyen integrales infinitas sin solución analítica cerrada. Estas se conocen como las integrales de Carson y Pollaczek. Desde entonces se han desarrollado varias aproximaciones a dichas integrales. Para el caso de la impedancia de una línea aérea, Carson propuso una solución mediante series a la integral que lleva su nombre [21]. El problema con dicha solución es que presenta discontinuidades.

En 1976 C. Gary [6] publicó la extensión a un trabajo previo desarrollado por C. Dubanton [5] mediante el cual se aproxima la solución a la integral de Carson haciendo uso del método de las imágenes complejas. Ambos investigadores estaban adscritos a Electricité de France, y en su momento creyeron haber encontrado la solución a la integral de Carson. Posteriormente en 1980 A. Deri, *et.al.*, [1] demostraron que se trataba de una aproximación y no de la solución a la integral. Esta fórmula a pesar de su sencillez es bastante precisa para la mayoría de aplicaciones de ingeniería, no obstante, para algunos casos puede llegar a presentar errores de hasta un 15% [1].

En 1983 Alvarado y Betancourt [11] propusieron una mejora a la formulación publicada por Gary donde, al introducir un término adicional de corrección, aumentaron la precisión de ésta. Sin embargo, como resultado de esta tesis se ha determinado que la formulación de Alvarado, *et. al.*, puede presentar errores de hasta un 8%.

En 1991 Pizarro y Eriksson [26] introdujeron el concepto de doble plano complejo de retorno por tierra y desarrollaron una fórmula con mayor precisión, aunque no mejor que la fórmula propuesta por Alvarado, *et. al.*, para el caso de voltajes inducidos. En 2005 T. Noda [36] retomó la formulación de Pizarro y Eriksson y sustituyó algunos valores constantes por variables permitiendo obtener así mayor precisión. Dicha fórmula entrega resultados de muy alta precisión para el caso de impedancias propias, no obstante, en el caso de impedancias mutuas llega a presentar errores de hasta un 15%.

En el caso de la integral de Pollaczek, Wedepohl y Wilcox propusieron en 1972 una solución a esta. Dicha solución incluye otra integral infinita sin solución analítica cerrada que se conoce como la integral de Wedepohl [8,24,34]. Wedepohl y Wilcox postularon una solución en series a esta última integral. La solución está limitada a bajas frecuencias y se reporta con errores de transcripción entre las referencias [8] y [24]. Estos investigadores también propusieron una fórmula cerrada de aproximación, derivada de las series, a la integral de Wedepohl para bajas frecuencias [12,24,34]. Esta última fórmula entrega resultados aceptables para muchas aplicaciones de ingeniería, sin embargo, existen aproximaciones más recientes que ofrecen mayor precisión.

Saad, Gaba y Giroux en la referencia [29] retomaron el concepto de imágenes complejas introducido previamente por C. Dubanton y lo aplicaron a la solución de la integral de Pollaczek, proponiendo en 1997 una fórmula que aproxima la solución a dicha integral. Los resultados obtenidos con esta aproximación, aunque apropiados para la mayoría de aplicaciones de ingeniería, aquí se considera que pueden ser mejorados.

En una discusión a la referencia [29] Pettersson [31] presentó una formulación obtenida con un análisis apegado a la Teoría Electromagnética. Sin embargo, la fórmula propuesta por Pettersson no entrega mejores resultados que la de Saad, Gaba y Giroux.

Otro enfoque al problema de evaluar Z_T que ha sido adoptado por otros autores, es el Análisis Numérico. Dos estrategias para su solución pueden ser utilizadas aquí. La primera de ellas consiste en utilizar un algoritmo de integración numérica para resolver las integrales de Carson y Pollaczek. La segunda consiste en aplicar las ecuaciones de Maxwell y plantear las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) que relacionan los campos electromagnéticos transversales y sus condiciones de frontera, para posteriormente resolver éstas mediante técnicas de Diferencias Finitas o de Elementos Finitos.

Al respecto de la primera técnica diversos investigadores [3,13,34,39] han propuesto algoritmos de integración numérica para dar solución al término Z_T . Ejemplos de estos son el algoritmo de integración numérica Gauss-Lobato el cual, a pesar de ser considerado uno de los algoritmos con mayor estabilidad numérica [3,13,34,36,38], presenta oscilaciones en alta frecuencia al ser aplicado a las integrales de Carson y de Pollaczek. Además, el tiempo de cómputo que consume es elevado y se incrementa conforme la relación entre la distancia horizontal y la altura de los conductores aumenta al igual que el error del método. El algoritmo Cuasi-Monte Carlo introducido por X. Legrand, *et. al.*, [39] en 2008 es un método de integración estadístico y resuelve la integral de Pollaczek en un tiempo de cómputo menor al utilizado por el método anterior, sin embargo, presenta oscilaciones en bajas frecuencias. El algoritmo Uribe, *et. al.*, [3,12,13] resuelve las integrales de Carson y Pollaczek en un tiempo de cómputo menor al utilizado por los mencionados anteriormente; no obstante, algunas de sus implementaciones presentan pequeñas oscilaciones en muy

bajas frecuencias y relaciones entre la distancia horizontal y la suma de las alturas de los conductores mayores a 15.

Sirvallipurandan aproximó la solución numérica a la integral de Pollaczek en 1985 [12]. T. T. Nguyen adoptó una aproximación numérica intensiva en 1998 [12]. El problema aquí recae en el comportamiento altamente oscilatorio e irregular de la integral de Pollaczek. Ambos, Srivallipurandan y Nguyen reportaron tiempos de cómputo excesivos y sus algoritmos no garantizan convergencia. Para minimizar tiempos de cómputo, Nguyen aplicó su solución numérica en el entrenamiento de una red neuronal (RN) la cual “resolvería” la integral de Pollaczek. El método de Nguyen requirió 2 horas de CPU de una estación de trabajo *Sun Spark*[®] IV para generar 600 resultados. Para producir los 20,000 casos requeridos para entrenar la RN, se necesitaron 72 horas de CPU; el entrenamiento por si solo necesitó de 720 horas CPU y, finalmente, la RN entrenada fue capaz de “resolver” 600 casos en alrededor de 6.0 segundos CPU [12]. Aparentemente, después del trabajo de Nguyen no se han seguido desarrollando las técnicas basadas en RNs para dar solución a las integrales de Carson y de Pollaczek.

Concerniente a la segunda estrategia, Y. Yanan en 1992 aplicó el método de Elementos Finitos al cálculo de impedancias de tierra en cables subterráneos [12]. Satsios, Labridis y Dokopoulos adoptaron el mismo enfoque en 1998 [12]. En aquel entonces la mayor limitante encontrada por estos autores es que el método de Elemento Finito debe trabajar con fronteras abiertas y con fuentes de corriente de grosor infinitesimal, y no se contaba con una metodología efectiva para manejar esta situación. Aun más, los casos que involucraban elementos finitos y fronteras cerradas a menudo requerían de tiempos de cómputo excesivos, de alrededor de 3 horas o más por caso en una computadora personal [12]. Hoy en día existen metodologías y herramientas que permiten utilizar la técnica de Elementos Finitos en forma más eficiente de lo que se hacía 10 años atrás. No obstante, Elementos Finitos ha logrado resolver cada caso en un tiempo de 150 segundos [22]. El inconveniente de este método consiste en el alto costo tanto económico como computacional del software y hardware requeridos, así como en la necesidad de contar con personal experimentado para manejar dicho software [12,41].

1.3 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La adecuada simulación tanto de fenómenos transitorios como los de interferencia electromagnética, que involucra a los sistemas de potencia, requiere de métodos precisos y a la vez computacionalmente eficientes que permitan evaluar la impedancia de tierra de sistemas de transmisión aéreos y subterráneos. Actualmente se cuenta con métodos numéricos que ofrecen una precisión apropiada; sin embargo, sus requerimientos de recursos computacionales son elevados. Por otro lado, existen fórmulas para aproximar la impedancia de tierra, las cuales son computacionalmente eficientes; pero, su precisión y su rango de validez no han sido bien establecidos. Se requiere pues, de métodos de evaluación de Z_T que sean rápidos y precisos dentro de un amplio rango de aplicaciones prácticas.

1.4 OBJETIVO DE LA TESIS

Se plantean los siguientes objetivos para esta tesis:

- 1.- Establecer rangos de validez de las fórmulas aproximadas que se utilizan comúnmente en la evaluación de impedancias de retorno por tierra, tanto de líneas aéreas como de cables subterráneos.
- 2.- Proponer nuevas fórmulas para el cálculo aproximado de las impedancias de tierra en líneas aéreas y cables subterráneos de transmisión de energía, las cuales deberán tener un amplio rango de aplicaciones prácticas.
- 3.- Evaluar los efectos del error en la aproximación de las impedancias de tierra sobre la predicción de las respuestas transitorias de los sistemas eléctricos.

1.5 METODOLOGÍA

Las soluciones algorítmicas permiten lograr una alta precisión a costa de tiempos elevados de cómputo. Sin embargo, en una primera etapa se buscará o se desarrollará el

algoritmo que entregue mayor precisión con el fin de tener una base sólida de evaluación. Una vez hecho esto, se desarrollará una fórmula mejorada que ofrezca una mayor precisión que las existentes en la literatura especializada. La metodología algorítmica previamente adoptada servirá para evaluar las fórmulas que sean generadas.

La metodología utilizada para la generación de nuevas fórmulas consiste en perturbar y mapear parámetros en las fórmulas existentes. Buscando que en las fórmulas obtenidas exista un buen compromiso entre precisión, complejidad e interpretación física.

2.1 PREÁMBULO

Las líneas de transmisión se encargan principalmente de llevar la energía eléctrica desde una planta de generación hidroeléctrica, termoeléctrica, etc., hasta una subestación cercana a los consumidores. También se utilizan para entrelazar dos o más sistemas de potencia. Las líneas de transmisión se pueden clasificar en dos categorías muy generales: líneas aéreas y cables subterráneos. Las líneas aéreas tienen ventajas sobre los cables subterráneos en términos de costos de construcción, capacidad de transmisión y mantenimiento. Por otro lado, los cables subterráneos rara vez sufren accidentes por descargas atmosféricas, tormentas y nieve; por tanto, su confiabilidad es relativamente alta. Además, el impacto estético es superior al de las líneas. El reciente incremento en la demanda de energía eléctrica en áreas urbanas y la dificultad de obtener sitios para la colocación de nuevas torres de transmisión, aunado a razones de tipo estético, han incrementado la instalación de cables subterráneos [37].

2.2 MODELADO DE LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

El comportamiento electromagnético de las líneas aéreas y cables multiconductores se describe por medio de las Ecuaciones del Telegrafista desarrolladas por Oliver Heaviside; las cuales, para sistemas monofásicos ideales se dan a continuación [18]

$$-\frac{\partial}{\partial z} v = L_0 \frac{\partial}{\partial t} i \quad (2.1a)$$

y

$$-\frac{\partial}{\partial z} i = C_0 \frac{\partial}{\partial t} v, \quad (2.1b)$$

donde, para el caso de dos conductores cilíndricos:

$$L_0 = \frac{\mu}{\pi} \ln\left(\frac{2h}{r}\right) \quad (2.1c)$$

y

$$C_0 = \frac{\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{2h}{r}\right)}, \quad (2.1d)$$

L_0 y C_0 son la inductancia y capacitancia, respectivamente, ambas en por unidad de longitud, v es el voltaje de fase, i es la corriente correspondiente en los conductores, h es la altura del conductor, r es el radio del conductor, $\mu = \mu_0\mu_r$ es la permeabilidad total del medio aislante y $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$ es la permitividad total del mismo medio. Para líneas con pérdidas, las expresiones (2.1a) y (2.1b) se suelen reescribir de la siguiente manera:

$$-\frac{\partial}{\partial z} v = L_0 \frac{\partial}{\partial t} i + Ri \quad (2.2a)$$

y

$$-\frac{\partial}{\partial z} i = C_0 \frac{\partial}{\partial t} v + Gv. \quad (2.2b)$$

Donde

$$R = \rho_c / A, \quad [\Omega/m] \quad (2.2c)$$

$$G = \frac{\sigma C_0}{\epsilon}, \quad [s/m] \quad (2.2d)$$

A es el área transversal de los conductores, ρ_c es la resistividad del material conductor y σ es la conductividad del material aislante que, en el caso de líneas aéreas, es el aire. Las ecuaciones (2.2a) y (2.2b) también se conocen como Ecuaciones Modificadas del Telegrafista.

Ahora, considere el caso de un sistema multiconductor con “n” conductores más el plano de tierra, como se muestra en la figura 2.1. La caída de tensión por unidad de longitud en el i-ésimo conductor, debida al flujo magnético producido por el resto de los conductores, está dada por

$$-\frac{\partial}{\partial z} v_i = L_{i1} \frac{\partial}{\partial t} i_1 + L_{i2} \frac{\partial}{\partial t} i_2 + \cdots + L_{ii} \frac{\partial}{\partial t} i_i + \cdots + L_{in} \frac{\partial}{\partial t} i_n, \quad (2.3a)$$

Para los “n” conductores se tiene en forma matricial:

$$-\frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & \cdots & L_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & \cdots & L_{nn} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix}. \quad (2.3b)$$

donde v_i e i_i son el voltaje y la corriente en el i-ésimo conductor, respectivamente,

$$L_{ik} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \left(\frac{D_{ik}}{d_{ik}} \right), \quad (2.3c)$$

es la inductancia geométrica, donde

$$D_{ik} = \sqrt{(h_i + h_k)^2 + x_{ik}^2}, \quad (2.3d)$$

$$d_{ik} = \sqrt{(h_i - h_k)^2 + x_{ik}^2} \quad (2.3e)$$

y x_{ik} es la distancia horizontal entre el i-ésimo y el k-ésimo conductor. Las expresiones (2.3d) y (2.3e) pueden entenderse de la figura 2.2. En forma compacta, la expresión (2.3b) se escribe como

$$-\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{v} = \mathbf{L} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{i}. \quad (2.3f)$$

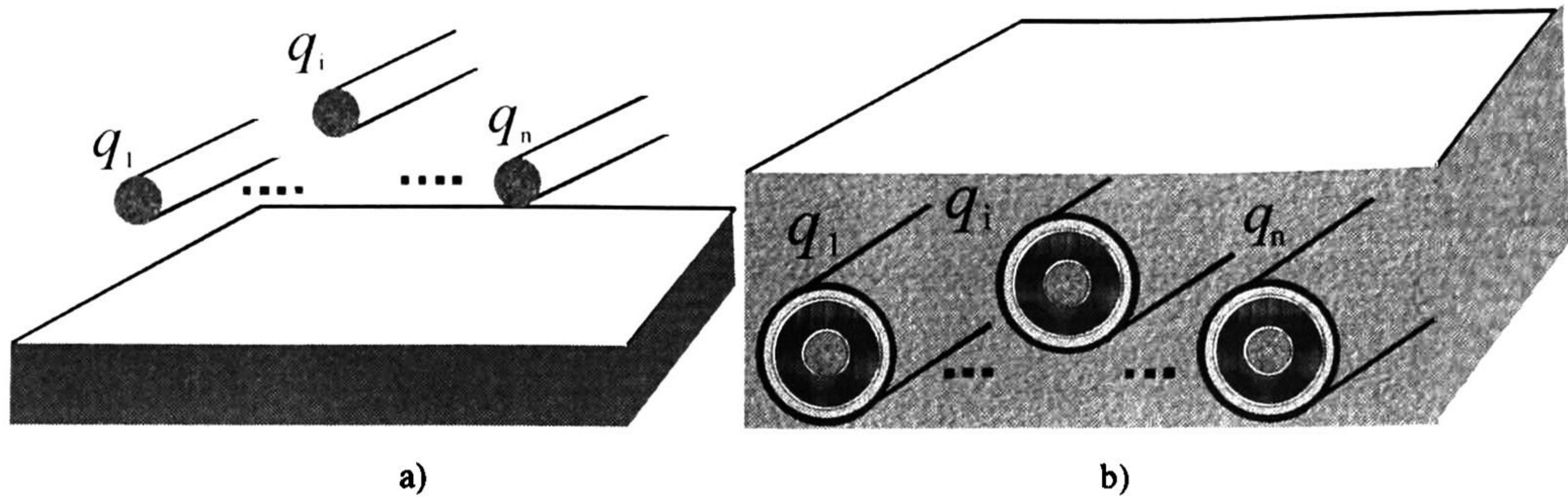


Fig. 2.1. Esquema de sistemas multiconductores. a) Sistema aéreo, b) Sistema subterráneo.

La expresión (2.3f) es conocida como la Primera Ecuación del Telegrafista para líneas multiconductoras [18].

Para obtener la Segunda Ecuación del Telegrafista, considere que cada conductor dentro del sistema contiene una densidad de carga lineal q_i . El voltaje en el n -ésimo conductor se obtiene por superposición de los potenciales debidos a todas las cargas.

$$\begin{aligned}
 v_1 &= q_1 P_{11} + q_2 P_{12} + \dots + q_n P_{1n} \\
 v_2 &= q_1 P_{21} + q_2 P_{22} + \dots + q_n P_{2n} \\
 &\vdots \\
 v_n &= q_1 P_{n1} + q_2 P_{n2} + \dots + q_n P_{nn}
 \end{aligned}
 \tag{2.4a}$$

Donde las constantes de proporcionalidad P_{ik} , son conocidas como coeficientes de potencial de Maxwell. Para el caso de n conductores cilíndricos cuyas distancias sean mucho mayores a sus radios, dichas constantes son de la forma

$$P_{ik} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{D_{ik}}{d_{ik}}\right),
 \tag{2.4b}$$

con D_{ik} y d_{ik} definidos por las expresiones (2.3d) y (2.3e) y, considerando que $D_{ii} = 2h_i$ y $d_{ii} = r_i$. En forma matricial compacta la ecuación (2.4a) se puede expresar como

$$\mathbf{v} = \mathbf{qP}
 \tag{2.4c}$$

Donde \mathbf{P} es la matriz de coeficientes de potenciales de Maxwell. Derivando la expresión (2.4c) y utilizando el principio de conservación de la carga se tiene

$$-\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{i} = \mathbf{C} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}. \quad (2.4d)$$

Donde

$\mathbf{C} = \mathbf{P}^{-1}$, es la matriz de capacitancias.

La expresión (2.4d), es la Segunda Ecuación del Telegrafista para líneas multiconductoras, expresada en el dominio del tiempo.

Para obtener las Ecuaciones del Telegrafista en el dominio de la frecuencia considere la siguiente propiedad fasorial.

$$v(z,t) = V(z)e^{j\omega t}; \quad i(z,t) = I(z)e^{j\omega t} \quad (2.5a)$$

Sustituyendo en (2.1a)

$$-\frac{dV(z)}{dz} e^{j\omega t} = j\omega L e^{j\omega t} I \quad (2.5b)$$

y eliminando $e^{j\omega t}$ se obtiene

$$-\frac{dV}{dz} = j\omega LI \quad (2.5c)$$

donde ω es la frecuencia angular, V e I se denominan los fasores respectivos de voltaje y de corriente. Aplicando lo anterior a las ecuaciones (2.2a) y (2.2b) se obtiene

$$-\frac{d}{dz} V = j\omega LI + RI \quad (2.6a)$$

y

$$-\frac{d}{dz} I = j\omega CV + GV \quad (2.6b)$$

Dado que las expresiones en (2.6) dependen mayormente de z , estas se pueden escribir de la siguiente forma

$$-\frac{d}{dz}V = ZI \quad (2.6c)$$

y

$$-\frac{d}{dz}I = YV, \quad (2.6d)$$

donde

$$Z = R + j\omega L$$

$$Y = G + j\omega C.$$

Las expresiones (2.6c) y (2.6d) también pueden aplicarse a sistemas multiconductores y se escriben en su forma compacta como se muestra a continuación:

$$-\frac{d}{dz}V = ZI \quad (2.7a)$$

y

$$-\frac{d}{dz}I = YV \quad (2.7b)$$

Estas últimas expresiones (2.7a y 2.7b) son las Ecuaciones del Telegrafista para sistemas multiconductores expresadas en el dominio de la frecuencia. Estas ecuaciones son aplicables tanto para líneas como para cables. La diferencia entre ambos tipos de conductores es el cálculo de sus parámetros, lo cual se analiza de manera muy general en la siguiente sección.

2.3 PARÁMETROS DE LÍNEAS AÉREAS

Los parámetros básicos de una línea son: la impedancia serie de los conductores y la admitancia en derivación. Cada conductor tiene una impedancia propia y existe una impedancia mutua entre pares de conductores, incluyendo la tierra. La impedancia generalmente consta de una resistencia y una reactancia. La admitancia en derivación

consta de la conductancia del dieléctrico entre conductores y tierra y la susceptancia entre conductores y entre cada conductor y tierra [2]. A continuación se describen los principales métodos de cálculo de los parámetros de líneas multiconductoras.

Matriz de Impedancias Serie

La figura 2.2 presenta una configuración transversal típica de una línea aérea, al igual que las imágenes del conductor por debajo de la tierra; las cuales se usan para el cálculo de los parámetros de línea eléctrica [2].

La matriz de parámetros de impedancias serie consiste en la suma de cuatro términos:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_G + \mathbf{Z}_T + \mathbf{Z}_C + \mathbf{Z}_{HG}, \quad (2.8)$$

donde \mathbf{Z}_G es la matriz de impedancia geométrica, \mathbf{Z}_T es la matriz de impedancia de retorno por tierra, \mathbf{Z}_C es la matriz de impedancia de los conductores y \mathbf{Z}_{HG} es la matriz de impedancia de los hilos de guarda.

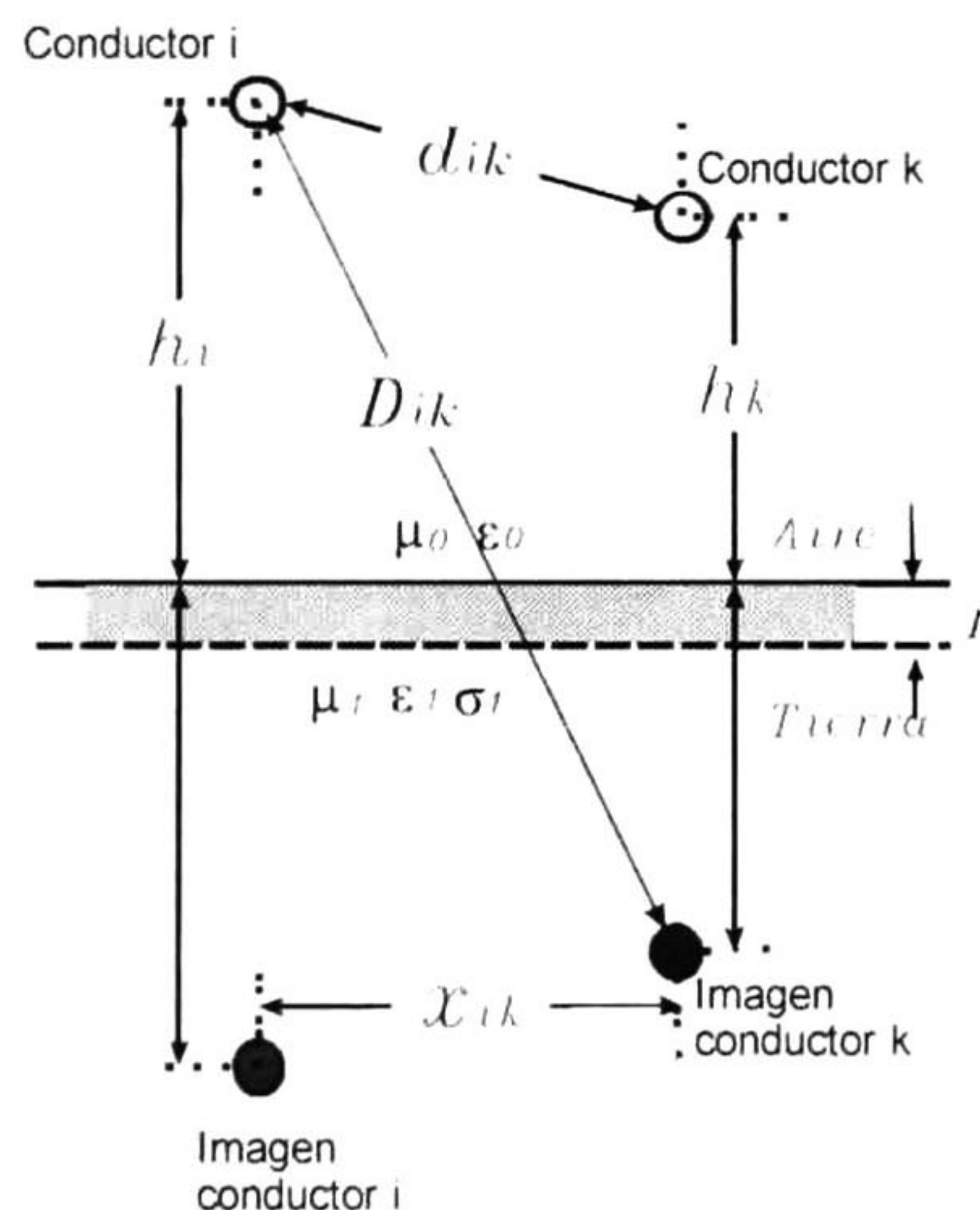


Fig. 2.2. Configuración típica de línea de transmisión aérea.

Matriz de impedancias Geométricas

La matriz de impedancias geométricas Z_G se define de la siguiente forma:

$$Z_G = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \mathbf{B}, \quad (2.9a)$$

donde ω es la frecuencia en radianes, μ_0 es la permeabilidad del espacio libre y \mathbf{B} tiene una forma proporcional a la matriz de coeficientes de potenciales de Maxwell y se define de la siguiente forma, similar a las expresiones (2.4b) y (2.4c).

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \ln \frac{D_{11}}{r_1} & \dots & \ln \frac{D_{1n}}{d_{1n}} \\ \vdots & \cdot & \vdots \\ \ln \frac{D_{n1}}{d_{n1}} & \dots & \ln \frac{D_{nn}}{r_n} \end{bmatrix}, \quad (2.9b)$$

donde D_{ik} y d_{ik} se definieron en (2.3d) y (2.3e), respectivamente.

Matriz de Impedancias de Retorno por Tierra

Los elementos de la matriz de impedancias de tierra Z_T están dados por [18,21]

$$Z_{T_{ik}} = \frac{j\omega\mu_0}{\pi} J_{ik}, \quad i,k=1,2,\dots,n \quad (2.10a)$$

donde

$$J_{ik} = \int_0^\infty \frac{e^{-(h_i+h_k)\lambda}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}} \frac{\cos(\lambda x_{ik})}{p^2} d\lambda, \quad (2.10b)$$

es la integral de Carson para el caso de la impedancia mutua. El caso de la impedancia propia se obtiene al hacer $i=k$ y $x_{ik}=0$ en (2.10b). Dicha integral no tiene solución analítica cerrada. $\lambda = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r}$ es el número de onda y sólo participa en (2.10b) como una variable de integración. p está dada por

$$p = \sqrt{\frac{1}{j\omega\mu\sigma}}. \quad (2.10c)$$

que corresponde a la profundidad de penetración compleja de la capa de conducción por Efecto Piel en la tierra.

Matriz de Impedancias de los Conductores

La matriz de impedancias de los conductores Z_C es diagonal:

$$Z_C = \begin{bmatrix} Z_{c1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_{c2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_{cn} \end{bmatrix}. \quad (2.11a)$$

Los términos Z_{ci} , son calculados por medio de la siguiente expresión, que es exacta para conductores cilíndricos [42].

$$Z_{ci} = \frac{\rho_c I_0(r/p)}{2\pi p I_1(r/p)}, \quad (2.11b)$$

siendo ρ_c la resistividad del conductor, r es el radio de éste, p es la profundidad de penetración compleja por Efecto Piel para el i -ésimo conductor y está dada por (2.10c); finalmente, $I_0()$ e $I_1()$ son las funciones modificadas de Bessel de primera clase y ordenes cero y uno, respectivamente. También se suele utilizar la siguiente aproximación propuesta por Deri y Semlyen [15,28]:

$$Z_{ci} = \frac{\sqrt{R_{cd}^2 + Z_{af}^2}}{n_c} \quad i=1,2,\dots,n \quad (2.12a)$$

Donde n_c es el número de conductores en el haz, R_{cd} es la resistencia de corriente directa y Z_{af} es la impedancia de alta frecuencia. Estos dos últimos términos están dados por

$$R_{cd} = \frac{\rho_c}{\pi r^2} \quad (2.12b)$$

y

$$Z_{af} = \frac{\rho_c}{2\pi r p} \quad (2.12c)$$

donde ρ_c es la resistividad del conductor.

Matriz de Impedancias de Hilos de Guarda

La matriz de impedancias de los hilos de guarda Z_{HG} se obtiene al considerar que estos se encuentran a un potencial cero. Para esto, la ecuación (2.7a) se particiona de la siguiente forma:

$$-\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} V_\phi \\ V_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{\phi\phi} & Z_{\phi g} \\ Z_{g\phi} & Z_{gg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_\phi \\ I_g \end{bmatrix}, \quad (2.13a)$$

donde V_ϕ e I_ϕ son subvectores de voltajes y corrientes de fase, V_g e I_g son los respectivos vectores de voltajes y corrientes en los hilos de guarda. Nótese que además en (2.13a) se ha particionado la matriz Z en los siguientes cuatro bloques: 1) $Z_{\phi\phi}$ que corresponde a la matriz de impedancias propias y mutuas entre los conductores de fase, 2) $Z_{\phi g}$ que corresponde a la matriz de impedancias mutuas entre los conductores de fase y los hilos de guarda, 3) $Z_{g\phi}$ que corresponde a la transpuesta de $Z_{\phi g}$ y 4) Z_{gg} , que corresponde a la matriz de impedancias propias y mutas entre los hilos de guarda.

Habiendo supuesto que los hilos de guarda se encuentran perfectamente aterrizados se tiene que

$$V_g = 0. \quad (2.13b)$$

Al sustituir (2.13b) en (2.13a) y despejar se obtienen las siguientes dos expresiones:

$$-\frac{d}{dz}V_{\phi} = \mathbf{Z}_{\phi\phi}I_{\phi} + \mathbf{Z}_{\phi g}I_g \quad (2.13c)$$

y

$$0 = \mathbf{Z}_{g\phi}I_{\phi} + \mathbf{Z}_{gg}I_g. \quad (2.13d)$$

De esta última se despeja I_g :

$$I_g = -\mathbf{Z}_{gg}^{-1}\mathbf{Z}_{g\phi}I_{\phi} \quad (2.13e)$$

substituyendo I_g en (2.13c) resulta

$$-\frac{d}{dz}V_{\phi} = (\mathbf{Z}_{\phi\phi} + \mathbf{Z}_{HG})I_{\phi}, \quad (2.13f)$$

siendo

$$\mathbf{Z}_{HG} = -\mathbf{Z}_{\phi g}\mathbf{Z}_{gg}^{-1}\mathbf{Z}_{g\phi} \quad (2.14)$$

que corresponde a la matriz de impedancias de los hilos de guarda.

Matriz de Admitancias, Capacitancias y Susceptancias

La matriz de admitancia en derivación se expresa de la siguiente forma [16,21].

$$\mathbf{Y} = \mathbf{G} + j\omega\mathbf{C} \quad (2.15a)$$

Usualmente para líneas aéreas:

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_G = \mathbf{P}^{-1}, \quad (2.15b)$$

donde \mathbf{C}_G denota la matriz de capacitancias geométricas y \mathbf{P} a la matriz de coeficientes de potencial de Maxwell previamente obtenida en las expresiones (2.4a), (2.4b) y (2.4c). Por su parte, para conductividades del material aislante que sean muy pequeñas ($\sigma \ll \omega\epsilon$), la matriz de conductancias es proporcional a la de capacitancias:

$$\mathbf{G} = \frac{\mathbf{C}\sigma}{\epsilon} \quad (2.15c)$$

Los elementos de la matriz G son normalmente despreciables, permitiendo que la matriz de admitancia se reduzca a [16,21]:

$$Y = j\omega C_G \quad (2.15d)$$

2.4 PARÁMETROS DE CABLES

Los cables de transmisión de energía suelen ser estructuras longitudinales que pueden estar o no blindadas y ser conformadas por varios conductores en disposición concéntrica. Existen cables monofásicos que son estructuras concéntricas como la mostrada en la figura 2.3. Dichos cables son conocidos con el nombre de monofásicos o de núcleo sencillo. Estos a menudo son diseñados con una pantalla conductora, la cual puede ser de Plomo, Aluminio corrugado o alambres de Cobre [12,18,34]. Estos cables también son diseñados con una capa semiconductor interna y una externa, las cuales están en contacto con el núcleo y la pantalla, respectivamente. El aislamiento puede ser una capa de polivinilo o papel impregnado con aceite. El núcleo del conductor puede estar hueco en el caso de cables con relleno líquido. Este tipo de conductor es usualmente utilizado a nivel de distribución.

En el caso de cables trifásicos existen conductores para bajos voltajes los cuales usualmente no tienen pantalla y son aislados con polivinilo [18]. Un ejemplo de cable trifásico a 1 kV con conductor neutro y armadura se muestra en la figura 2.4.

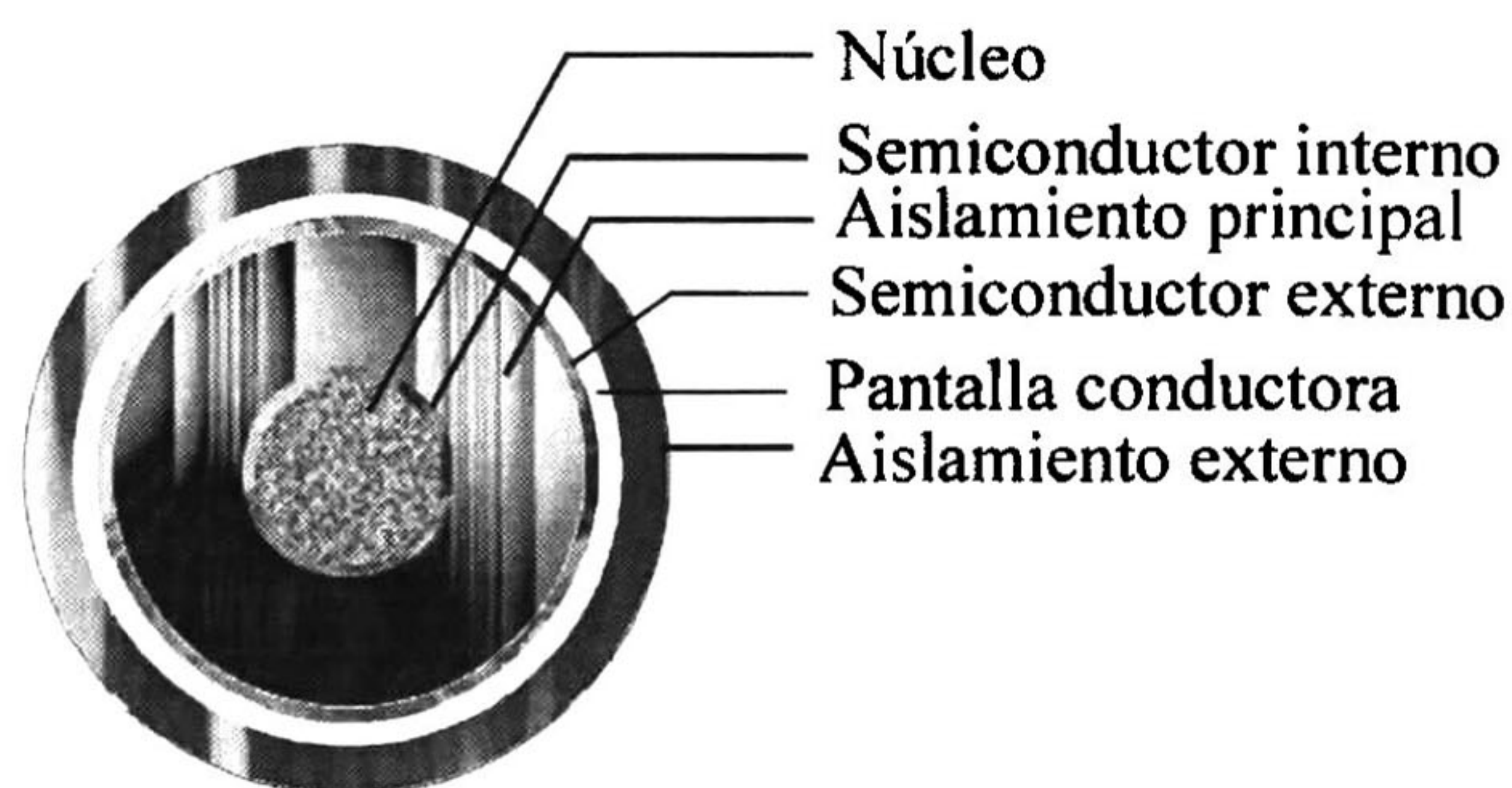


Fig. 2.3. Cable monofásico.

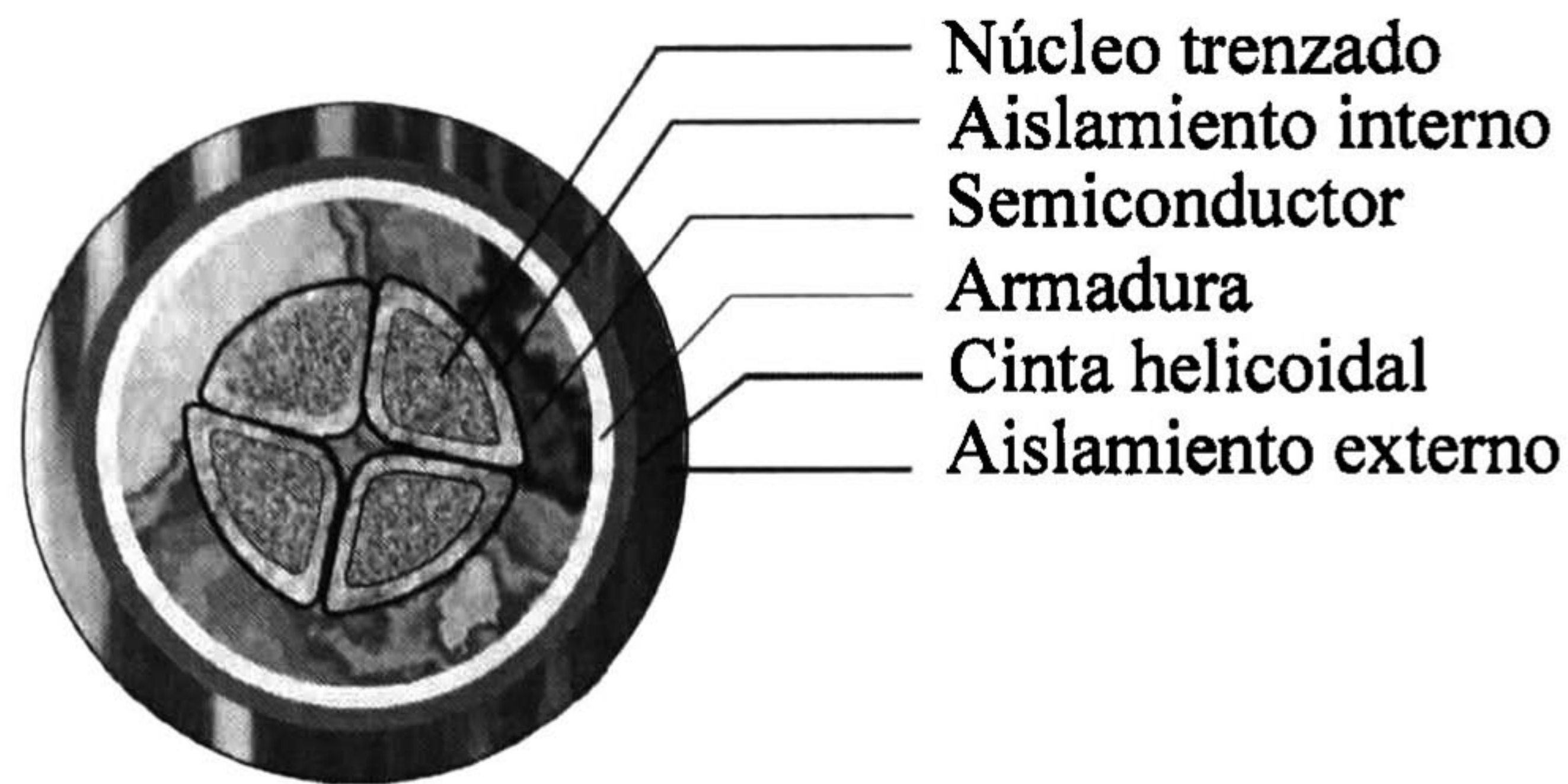


Fig. 2.4. Cable para 1 kV con armadura.

Para voltajes a nivel de transmisión, los cables con mayor utilización son el cable tipo tubo mostrado en las figuras 2.5 y 2.6 y el cable autocontenido mostrado en la figura 2.7. Los cables tipo tubo constan de tres cables monofásicos aislados por papel impregnado de aceite dentro de un tubo de acero o plástico, el cual es llenado con aceite de baja viscosidad o con gas. Actualmente estos cables pueden soportar voltajes desde 69 hasta 600 kV. Los cables autocontenidos rellenos de aceite son cables monofásicos los cuales tienen una perforación a lo largo del núcleo que es llenada con aceite presurizado [18,34].

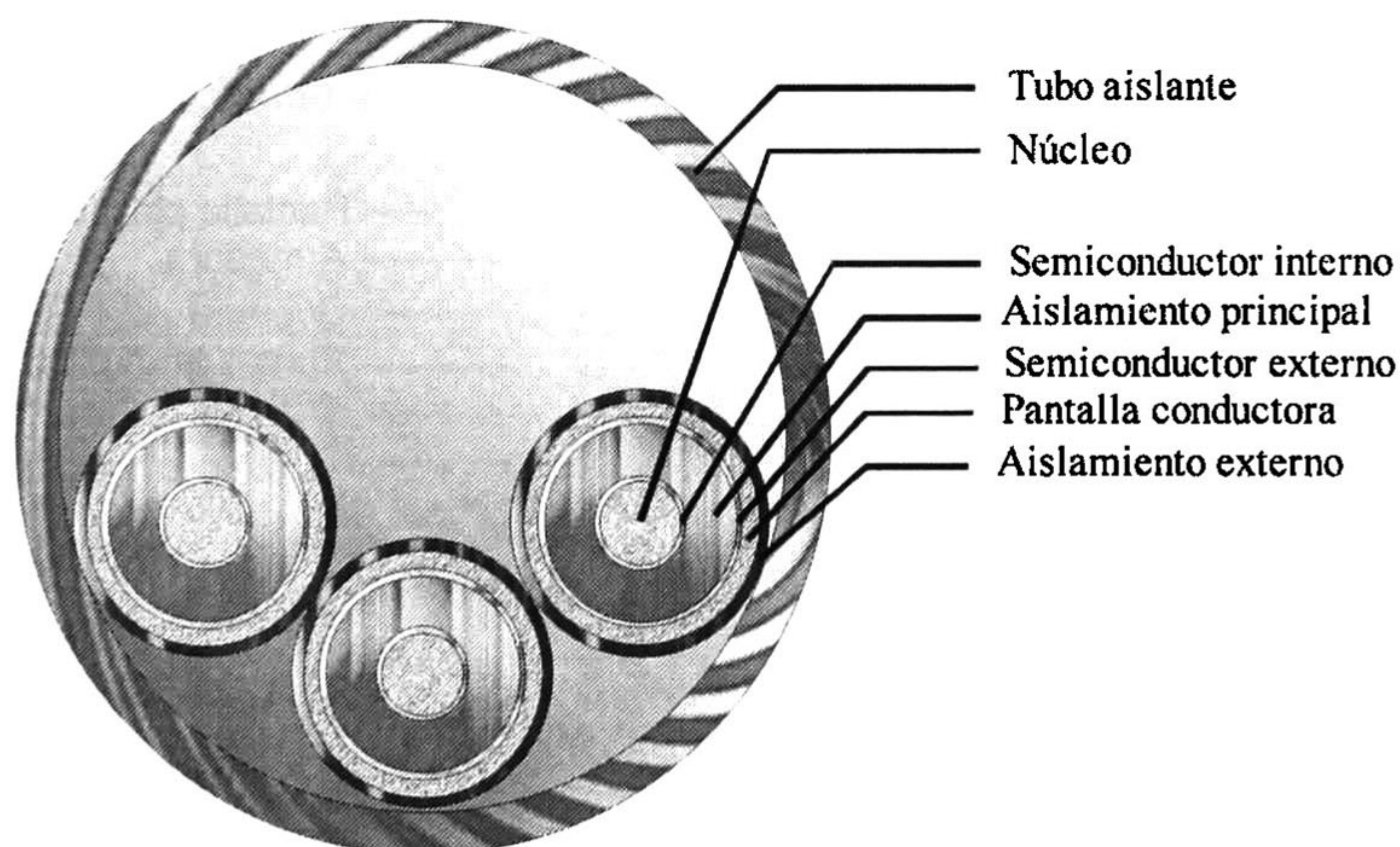


Fig. 2.5. Cable tipo tubo sin pantalla ni armadura en disposición asimétrica.

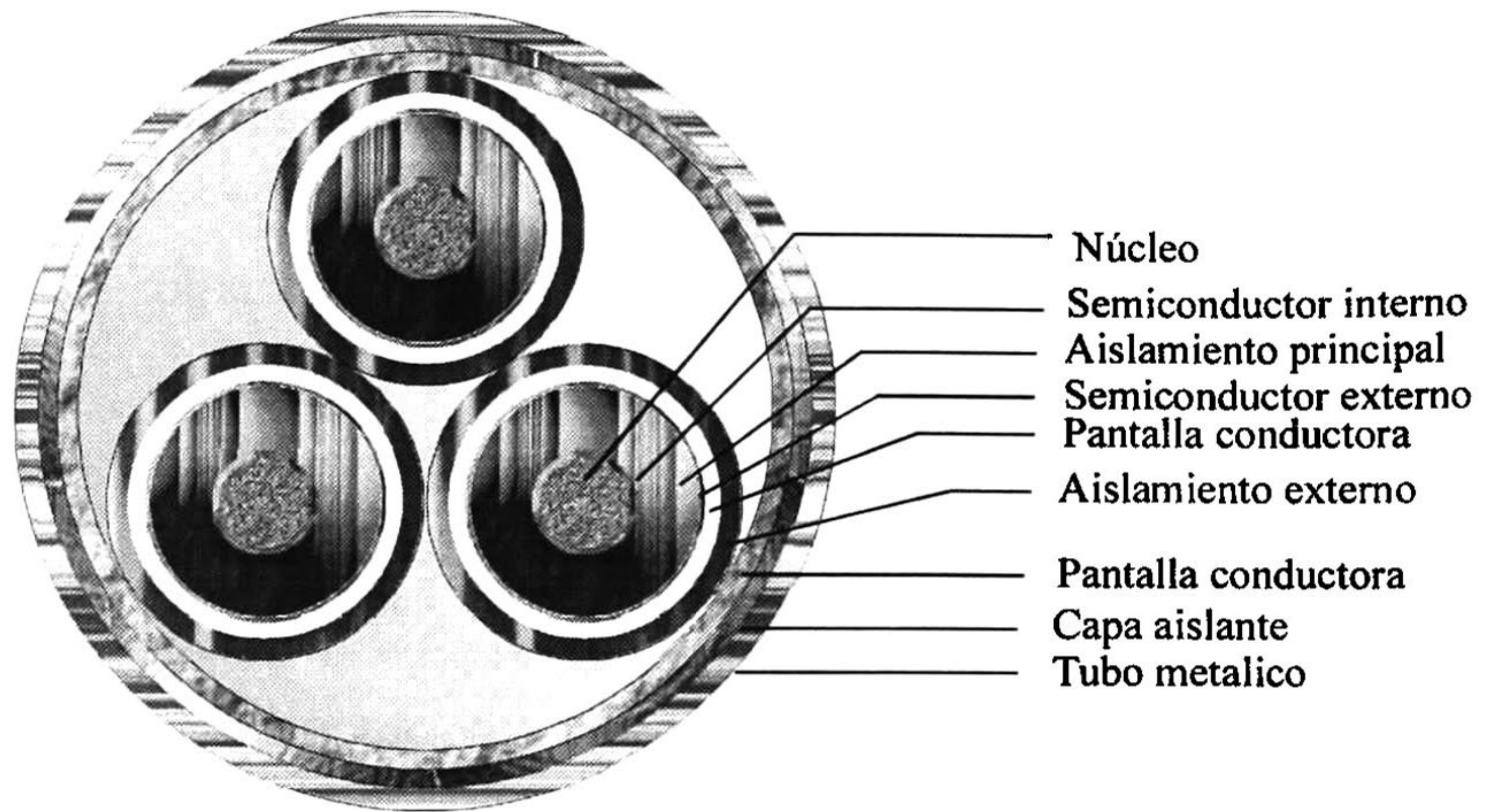


Fig. 2.6. Cable tipo tubo con pantalla y armadura en disposición trébol.

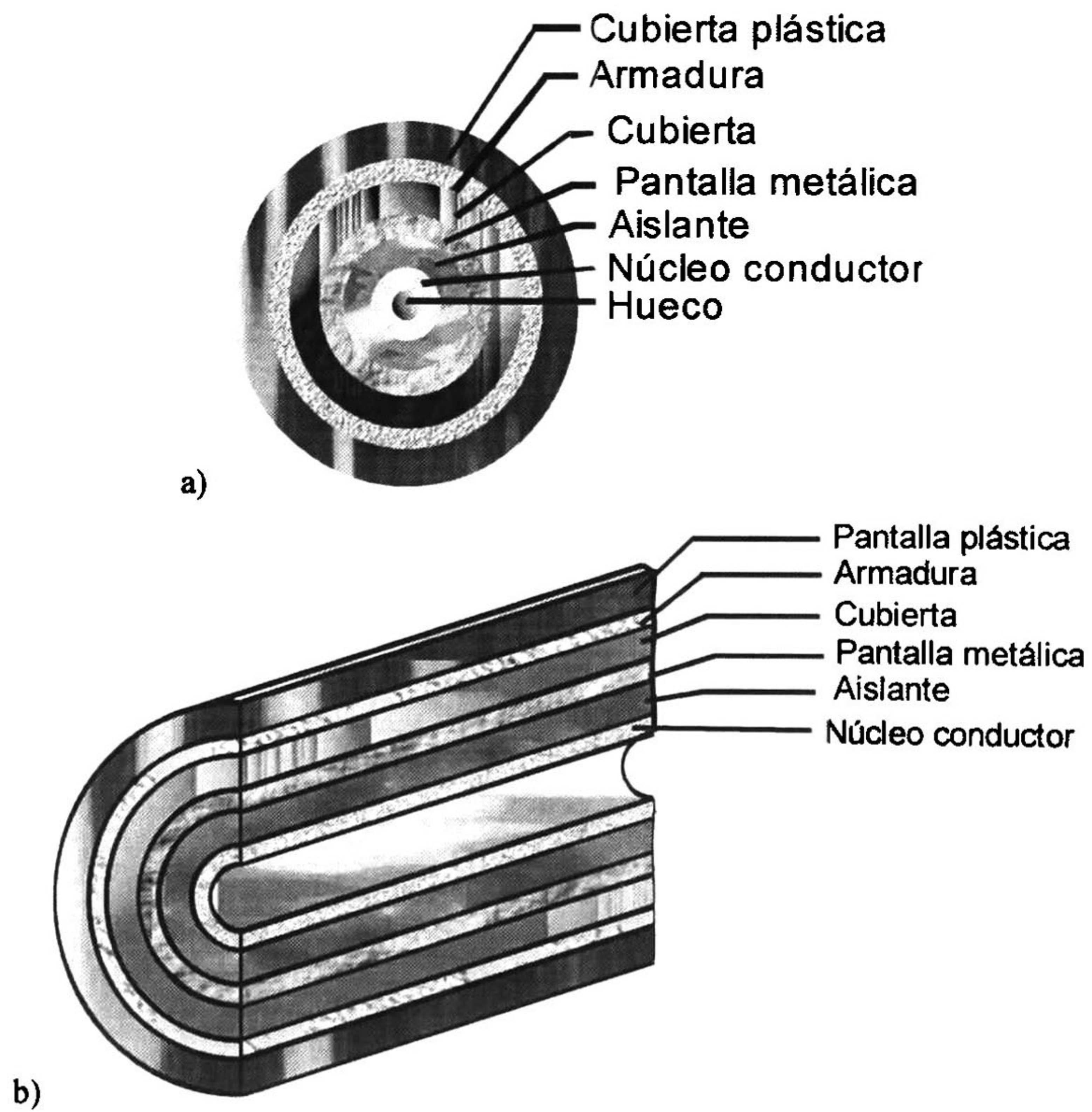


Fig. 2.7. Cable tipo auto-contenido con hueco en el núcleo. a) Vista frontal, b) Corte transversal.

Existe un gran número de diseños de cables en el mercado; no obstante en esta tesis sólo se consideran los cables concéntricos coaxiales. De manera similar a una línea aérea, los parámetros eléctricos básicos de cables son la impedancia propia y mutua entre conductores, así como las admitancias en derivación de éstos.

Matriz de Impedancias Serie, propia y mutua

Considérese un cable concéntrico de tres conductores, como el mostrado en la figura 2.8. El modelo electromagnético considerando corrientes y voltajes de lazo para dicho cable está dado por la siguiente expresión [12,18,34]:

$$-\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} V_{NP} \\ V_{PA} \\ V_{AT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z'_{11} & Z'_{12} & 0 \\ Z'_{21} & Z'_{22} & Z'_{23} \\ 0 & Z'_{32} & Z'_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}, \tag{2.16}$$

donde

V_{NP} , voltaje existente entre el núcleo y la pantalla,

V_{PA} , voltaje existente entre la pantalla y la armadura,

V_{AT} , voltaje existente entre la armadura y tierra,

I_1 , corriente en el núcleo,

I_2 , suma de la corriente en la pantalla más la corriente en el núcleo,

I_3 , I_2 + la corriente en la armadura.

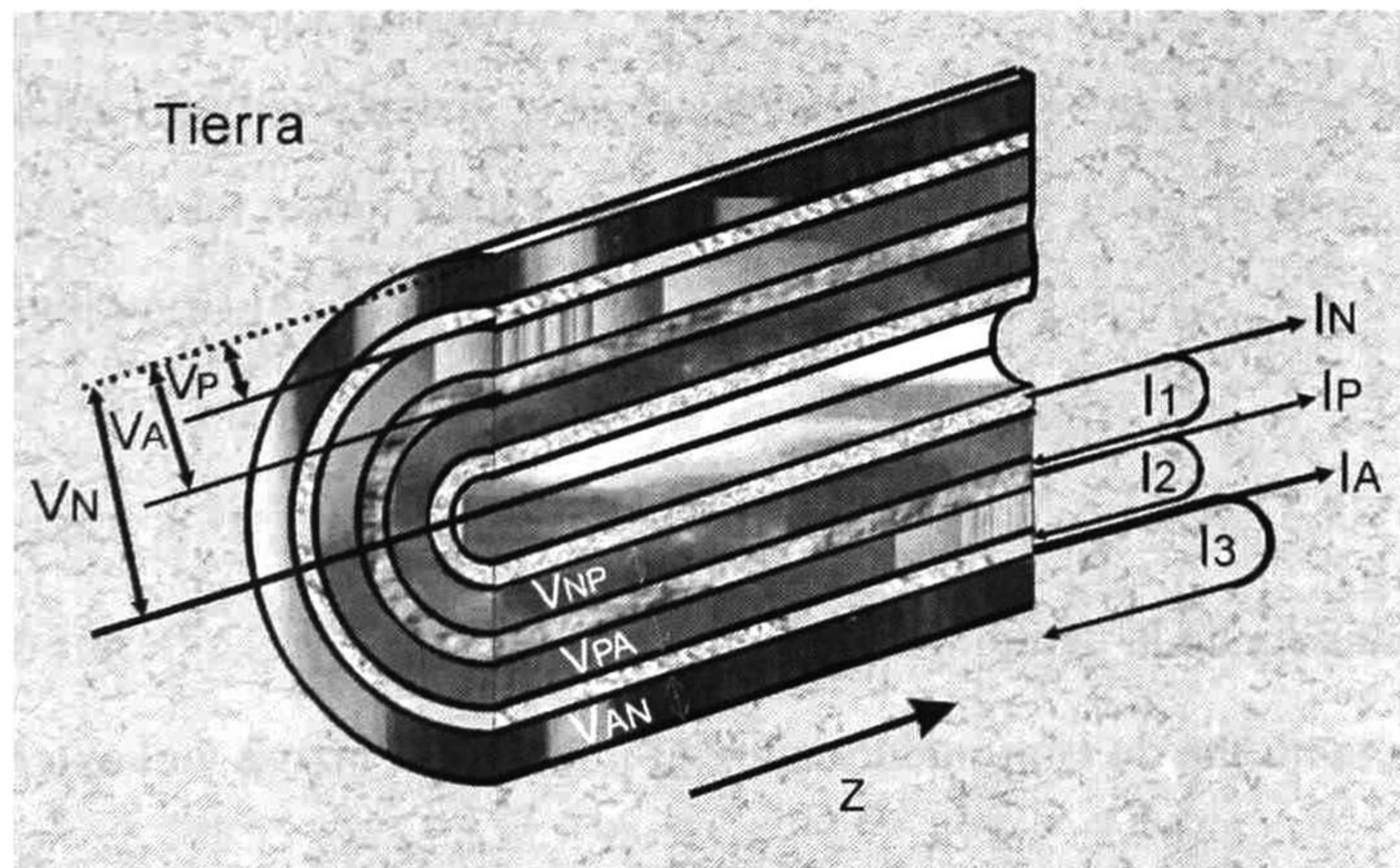


Fig. 2.8. Corte transversal cable concéntrico.

Los términos propios de la matriz de impedancia serie están dados por [12,18,34]

$$Z'_{11} = Z_N + Z_{\text{Dielectrico}N/P} + Z_{P-Int}, \quad (2.17a)$$

$$Z'_{22} = Z_{P-Ext} + Z_{\text{Dielectrico}P/A} + Z_{A-Int}, \quad (2.17b)$$

y

$$Z'_{33} = Z_{A-Ext} + Z_{\text{Dielectrico}A/T} + Z_T, \quad (2.17c)$$

donde

Z_N , es la impedancia de núcleo sólido.

$Z_{\text{Dielectrico}N/P}$, impedancia del dieléctrico existente entre el núcleo y la pantalla.

Z_{P-Int} , impedancia interna de la pantalla.

Z_{P-Ext} , impedancia externa de la pantalla.

$Z_{\text{Dielectrico}P/A}$, impedancia del dieléctrico entre pantalla y armadura.

Z_{A-Int} , impedancia interna de la armadura.

Z_{A-Ext} , impedancia externa de la armadura.

$Z_{\text{Dielectrico}A/T}$, impedancia del dieléctrico entre armadura y tierra.

Z_T , impedancia propia de la tierra.

Los términos mutuos o de acoplamiento están dados por [12,18,34]

$$Z'_{12} = Z'_{21} = -Z_{P-M} \quad (2.17c)$$

y

$$Z'_{23} = Z'_{32} = -Z_{A-M} \quad (2.17d)$$

donde

Z_{P-M} , impedancia de la pantalla entre el interior del lazo 1 y el exterior del lazo 2.

Z_{A-M} , impedancia mutua de la armadura entre el interior del lazo 2 y el exterior del lazo 3.

Debido a que no existe contacto entre los lazos 1 y 3, $Z'_{13} = Z'_{31} = 0$. Las formulaciones para el cálculo de los términos anteriores son presentadas a continuación.

Impedancia interna del núcleo sólido

La impedancia del núcleo, es calculada de la misma manera que se calcula la impedancia del conductor para líneas; es decir, se utiliza la ecuación (2.11b) donde r, representa el radio del núcleo sólido. También se puede emplear la aproximación de Deri y Semlyen dada en la expresión (2.12).

Impedancia del dieléctrico

La impedancia interna de cada uno de los dieléctricos dentro del conductor está dada por

$$Z_{Dieléctrico} = j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{r_{Ext}}{r_{Int}}\right), \tag{2.18}$$

donde:

- r_{Ext} , es el radio exterior del conductor,
- r_{Int} , es el radio interior del conductor,

como se muestra en la figura 2.9.

Impedancia de Conductores Cilíndricos

Las impedancias interna, externa y mutua debidas a los lazos internos de acoplamiento de un conductor tubular están dadas, en forma respectiva y de manera exacta, por las fórmulas de Schelkunoff [42,12,34]:

$$Z_{Int} = \frac{\rho_c}{2\pi r_{Int} p} \left[\frac{I_0(r_{Int}/p)K_1(r_{Ext}/p) + K_0(r_{Int}/p)I_1(r_{Ext}/p)}{I_1(r_{Ext}/p)K_1(r_{Int}/p) - I_1(r_{Int}/p)K_1(r_{Ext}/p)} \right], \tag{2.19a}$$

$$Z_{Ext} = \frac{\rho_c}{2\pi r_{Ext} p} \left[\frac{I_0(r_{Ext}/p)K_1(r_{Int}/p) + K_0(r_{Ext}/p)I_1(r_{Int}/p)}{I_1(r_{Ext}/p)K_1(r_{Int}/p) - I_1(r_{Int}/p)K_1(r_{Ext}/p)} \right] \tag{2.19b}$$

y

$$Z_M = \frac{\rho_c}{2\pi r_{Ext} r_{Int} p} \left[\frac{1}{I_1(r_{Ext}/p)K_1(r_{Int}/p) - I_1(r_{Int}/p)K_1(r_{Ext}/p)} \right], \quad (2.19c)$$

donde

$K_0()$ y $K_1()$, son las funciones modificadas de Bessel de segunda clase de orden cero y uno, respectivamente.

$I_0()$ e $I_1()$, son las funciones modificadas de Bessel de primera clase de orden cero y uno, respectivamente.

p , grosor de la capa de conducción por Efecto Piel dada por (2.10c).

Estas mismas impedancias pueden calcularse por medio de las siguientes aproximaciones propuestas por Wedepohl y Wilcox, validas para los casos en que $(r_{Ext}-r_{Int})/(r_{Ext}+r_{Int}) < 1/8$ [8]:

$$Z_{Int} = \frac{\rho_c}{2p\pi r_{Int}} \coth((r_{Ext} - r_{Int})/p) - \frac{\rho_c}{2\pi r_{Ext}(r_{Int} + r_{Ext})}. \quad (2.20a)$$

$$Z_{Ext} = \frac{\rho_c}{2p\pi r_{Ext}} \coth((r_{Ext} - r_{Int})/p) + \frac{\rho_c}{2\pi r_{Ext}(r_{Int} + r_{Ext})}. \quad (2.20b)$$

$$Z_M = \frac{\rho_c}{p\pi(r_{Int} + r_{Ext})} \operatorname{csch}((r_{Ext} - r_{Int})/p), \quad (2.20c)$$

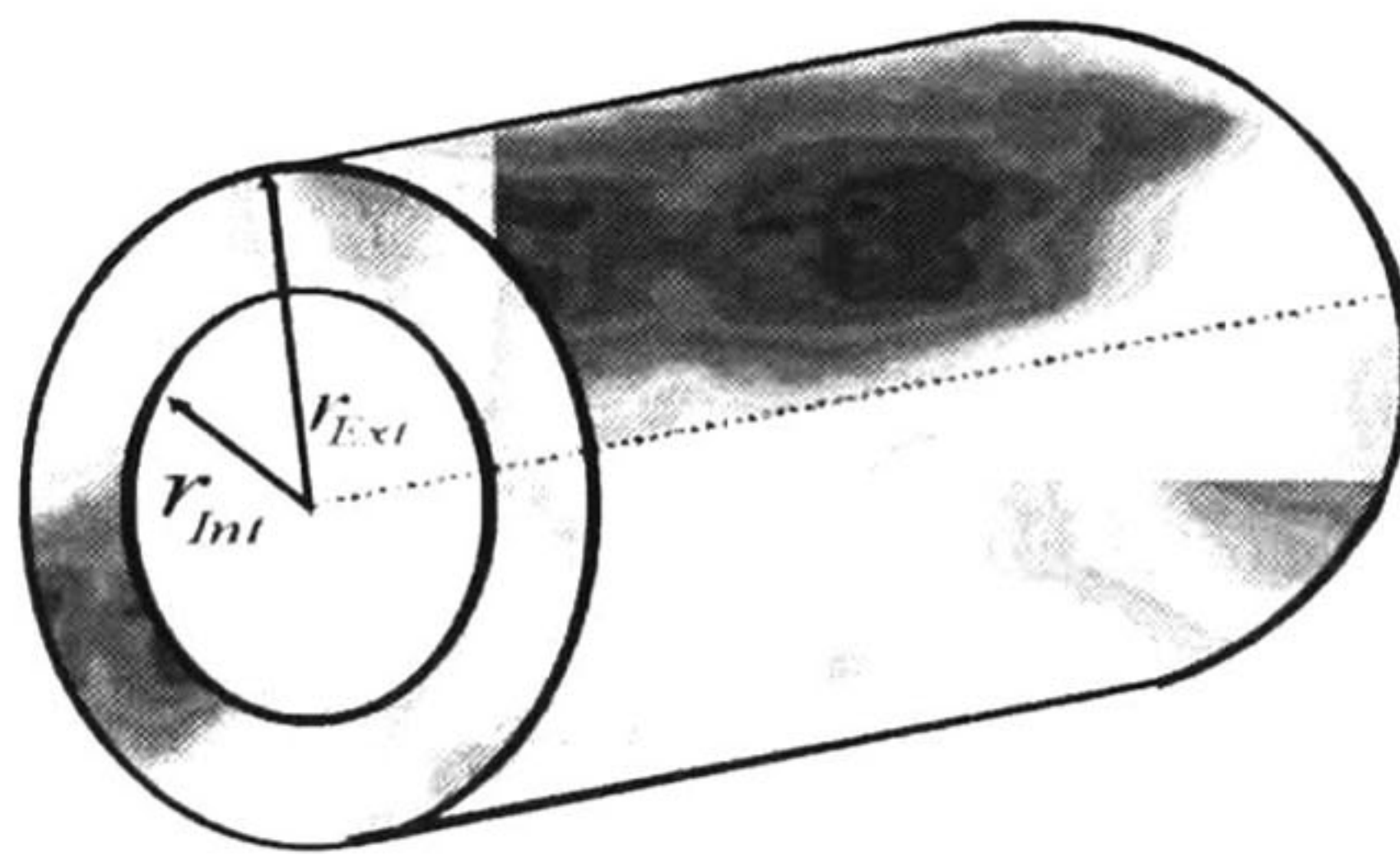


Fig. 2.9. Conductor o aislante cilíndrico hueco.

Impedancia de Retorno por Tierra

La impedancia de retorno por tierra para cables está dada por la siguiente expresión [16,18]:

$$Z_{T_{ik}} = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} [K_0(d_{ik}/p) - K_0(D_{ik}/p) + J_{ik}], \quad (2.21a)$$

donde

$$D_{ik} = \sqrt{(h_i + h_k)^2 + x_{ik}^2}, \quad (2.21b)$$

$$d_{ik} = \sqrt{(h_i - h_k)^2 + x_{ik}^2} \quad (2.21c)$$

y

$$J_{ik} = 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-(h_i + h_k)\sqrt{\lambda^2 + j\omega\mu\sigma}}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + j\omega\mu\sigma}} \cos(\lambda x_{ik}) d\lambda \quad (2.21d)$$

Esta última expresión es la integral de Pollaczek. Todas estas expresiones representan al caso de impedancias mutuas. Para obtener el de las propias se sustituyen los valores $x_{ik} = r_i$, $h_i = h_k$, $D_{ik} = 2h_i$ en ellas.

La figura 2.10 muestra una configuración transversal de un sistema de cables subterráneos y sus imágenes. En ella se muestran gráficamente los parámetros físicos que se usan para el cálculo de los parámetros eléctricos [2].

Transformación de Cantidades de Lazo a Cantidades de Conductor

Para poder convertir la expresión (2.16) a voltajes y corrientes de conductor, se refieren las cantidades de lazo a una referencia común, que en este caso será la tierra. De esta forma se pueden relacionar las cantidades de lazo con cantidades de conductor por medio de las siguientes expresiones [12,18,34]:

$$\begin{aligned} V_N &= V_{NP} + V_{PA} + V_{AT}, & I_N \\ V_P &= V_{PA} + V_{AT}, & I_P \\ V_A &= V_{AT}, & I_A \end{aligned} \quad (2.22)$$

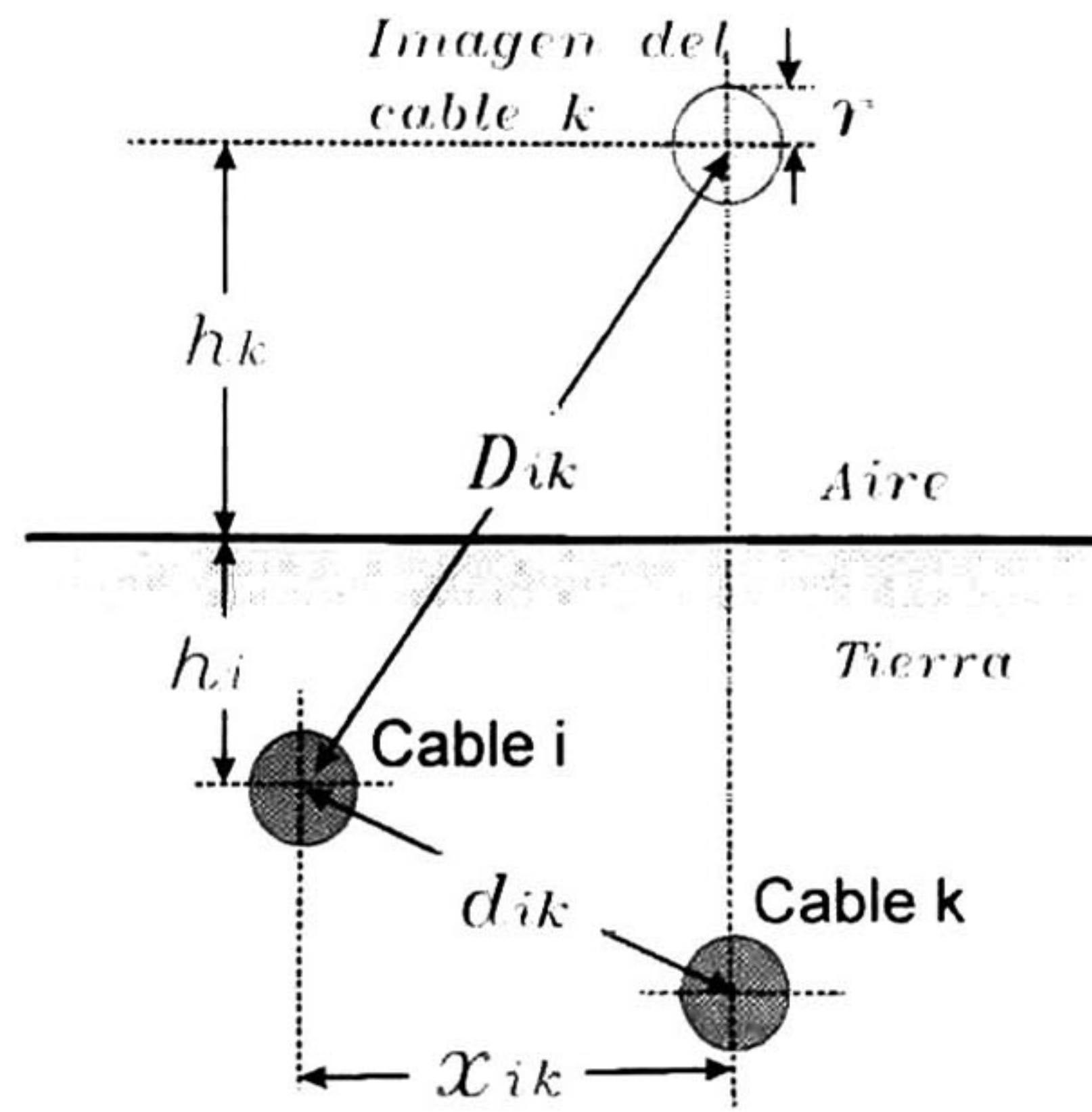


Fig. 2.10. Configuración típica de un sistema subterráneo.

En la figura 2.8 se mostró el corte transversal de un cable monofásico concéntrico donde se ilustran dichos voltajes y corrientes. La figura 2.11 muestra un sistema de tres cables monofásicos concéntricos con sus respectivas corrientes de lazo entre armadura y tierra. Así, para transformar los vectores de voltaje y corrientes de lazo a cantidades de conductor, se aplican las siguientes expresiones [12,18,34]:

$$\begin{bmatrix} V_N \\ V_P \\ V_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{NP} \\ V_{PA} \\ V_{AT} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_N \\ I_P \\ I_A \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

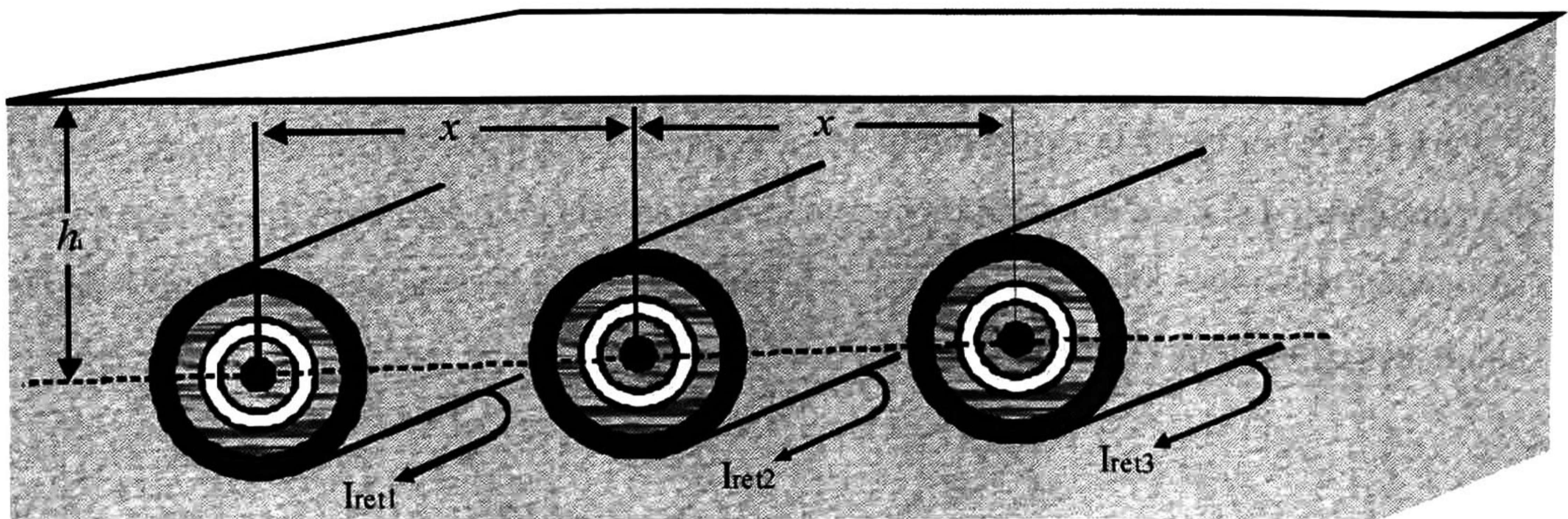


Fig. 2.11. Configuración trifásica subterránea con corrientes de lazo.

Sustituyendo en la ecuación (2.7a) se tiene

$$-\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} V_N \\ V_P \\ V_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_N & Z_{NP} & Z_{NA} \\ Z_{NP} & Z_P & Z_{PA} \\ Z_{NA} & Z_{PA} & Z_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_N \\ I_P \\ I_A \end{bmatrix}. \quad (2.24a)$$

Donde

$$\begin{aligned} Z_N &= Z'_{11} + 2Z'_{12} + Z'_{22} + 2Z'_{23} + Z'_{33} \\ Z_{NP} &= 2Z'_{12} + Z'_{22} + 2Z'_{23} + Z'_{33} \\ Z_{NA} &= Z'_{23} + Z'_{33} \\ Z_P &= Z'_{22} + 2Z'_{23} + Z'_{33} \\ Z_{PA} &= Z'_{23} + Z'_{33} \\ Z_A &= Z'_{33}. \end{aligned} \quad (2.24b)$$

Admitancia en Paralelo

Para obtener la admitancia en paralelo considere la expresión (2.7b) aplicada a un sistema con tres conductores concéntricos:

$$-\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} I_N \\ I_P \\ I_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 & -Y_1 & 0 \\ -Y_1 & Y_1 + Y_2 & -Y_2 \\ 0 & -Y_2 & Y_2 + Y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_N \\ V_P \\ V_A \end{bmatrix}, \quad (2.25a)$$

donde

$$Y_i = G_i + j\omega C_i \quad (2.25b)$$

es la admitancia en paralelo y los términos C_i y G_i son las respectivas capacitancia y conductancia paralelo por unidad de longitud para cada capa de dieléctrico. Las capacitancias están dadas por

$$C_i = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(r_{Ext}/r_{Int})} \quad (2.25c)$$

Las conductancias en paralelo suelen tener un valor muy pequeño, y suelen despreciarse estas de la expresión (2.25b).

$$G_i = (\omega C_i) \tan(\varphi), \quad (2.25d)$$

donde $\tan(\varphi)$ es el factor (o tangente) de pérdidas

$$\tan(\varphi) = \frac{\sigma_i}{\omega\epsilon_i}. \quad (2.25e)$$

Al sustituir (2.25e) en (2.25d) se obtiene

$$G_i = C_i \frac{\sigma_i}{\epsilon_i}. \quad (2.25f)$$

Sistemas Multiconductores

Los sistemas de cables suelen tener arreglos paralelos de “n” conductores, algunos de ellos pueden ser concéntricos. Por lo general el núcleo se encarga de conducir la mayor parte de la corriente eléctrica, la pantalla confina los campos electromagnéticos en su interior y la armadura proporciona rigidez mecánica al cable [2]. Para modelar este tipo de sistemas se debe aplicar la ecuación (2.7a) de la siguiente manera:

$$-\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \cdots & Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}, \quad (2.26a)$$

donde cada término Z_{ik} es una submatriz simétrica de 3x3. Cada submatriz Z_{ii} está dada por

$$\mathbf{Z}_{ii} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}'_N & \mathbf{Z}'_{NP} & \mathbf{Z}'_{NA} \\ \mathbf{Z}'_{NP} & \mathbf{Z}'_P & \mathbf{Z}'_{PA} \\ \mathbf{Z}'_{NA} & \mathbf{Z}'_{PA} & \mathbf{Z}'_A \end{bmatrix}. \quad (2.26b)$$

Cada submatriz \mathbf{Z}_{ik} está dada por

$$\mathbf{Z}_{ik} = Z_{Mik} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.26c)$$

donde Z_{Mik} representa la impedancia mutua entre armaduras de los cables “ i ” y “ k ”. Esto es debido al lazo de acoplamiento entre las corrientes que circulan por la tierra y las capas conductoras externas de los cables [18]. Este término involucra la solución de la integral de Pollaczek.

$\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_n$ son sub-vectores de voltajes de fase de la forma:

$$\mathbf{V}_i = \begin{bmatrix} V_{N,i} \\ V_{P,i} \\ V_{A,i} \end{bmatrix}. \quad (2.26d)$$

Los índices N , P y A se refieren al núcleo, a la pantalla y a la armadura de los cables correspondientes. De la misma manera, $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \dots, \mathbf{I}_n$ son sub-vectores de corrientes con la siguiente forma:

$$\mathbf{I}_i = \begin{bmatrix} I_{N,i} \\ I_{P,i} \\ I_{A,i} \end{bmatrix}. \quad (2.26e)$$

La ecuación (2.7b), aplicada a un sistema multiconductor se separa como sigue:

$$-\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Y_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & Y_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}. \quad (2.27a)$$

Los sub-bloques diagonales Y_{ii} , tienen la forma [12,18,34]:

$$Y_{ii} = \begin{bmatrix} Y_1 & -Y_1 & 0 \\ -Y_1 & Y_1 + Y_2 & -Y_2 \\ 0 & -Y_2 & Y_2 + Y_3 \end{bmatrix}. \quad (2.27b)$$

De esta manera, se obtienen los parámetros necesarios para modelar un sistema subterráneo multiconductor.

2.5 REPRESENTACIÓN DE DOS PUERTOS PARA SISTEMAS DE TRANSMISIÓN

Un tramo de línea o de cable de transmisión puede ser representado por un modelo de dos puertos. Por medio de esta representación se pueden relacionar los voltajes y corrientes de respuesta en una terminal con los de la otra. La solución a (2.7a) y (2.7b) es [12,18]

$$V(z) = \exp(-\Psi z)C_1 + \exp(\Psi z)C_2, \quad (2.28a)$$

y

$$I(z) = Y_0 \exp(-\Psi z)C_1 - Y_0 \exp(\Psi z)C_2. \quad (2.28b)$$

Donde

$$\Psi = \bar{\bar{Z}}\bar{\bar{Y}} \quad (2.28c)$$

y

$$Y_0 = \bar{\bar{Z}}^{-1}\Psi \quad (2.28d)$$

Note que las expresiones (2.28a), (2.28b), (2.28c) y (2.28d) requieren de la evaluación de funciones de matrices de $\bar{\bar{Z}}\bar{\bar{Y}}$. Esto se realiza por medio del Análisis Modal [25]. La

expresión (2.28d) corresponde a la admitancia característica de la línea. C_1 y C_2 son vectores que contienen las constantes de integración determinadas por las condiciones de frontera de la línea o cable bajo análisis.

Considere un sistema multiconductor de longitud “ l ” con una de sus terminales en $z = 0$ y la otra en $z = l$. En lo sucesivo V_l e I_l denotarán los correspondientes vectores de voltaje y corriente en $z = l$, de forma tal que $V_l = V(l)$ e $I_l = -I(l)$. Si se aplican estos valores de frontera a (2.28a) y (2.28b), se obtiene la siguiente expresión nodal de dos puertos:

$$\begin{bmatrix} I_l \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ V_l \end{bmatrix}, \quad (2.29a)$$

donde

$$A = Y_0 \coth(\Psi l) \quad (2.29b)$$

y

$$B = -Y_0 \operatorname{csch}(\Psi l). \quad (2.29c)$$

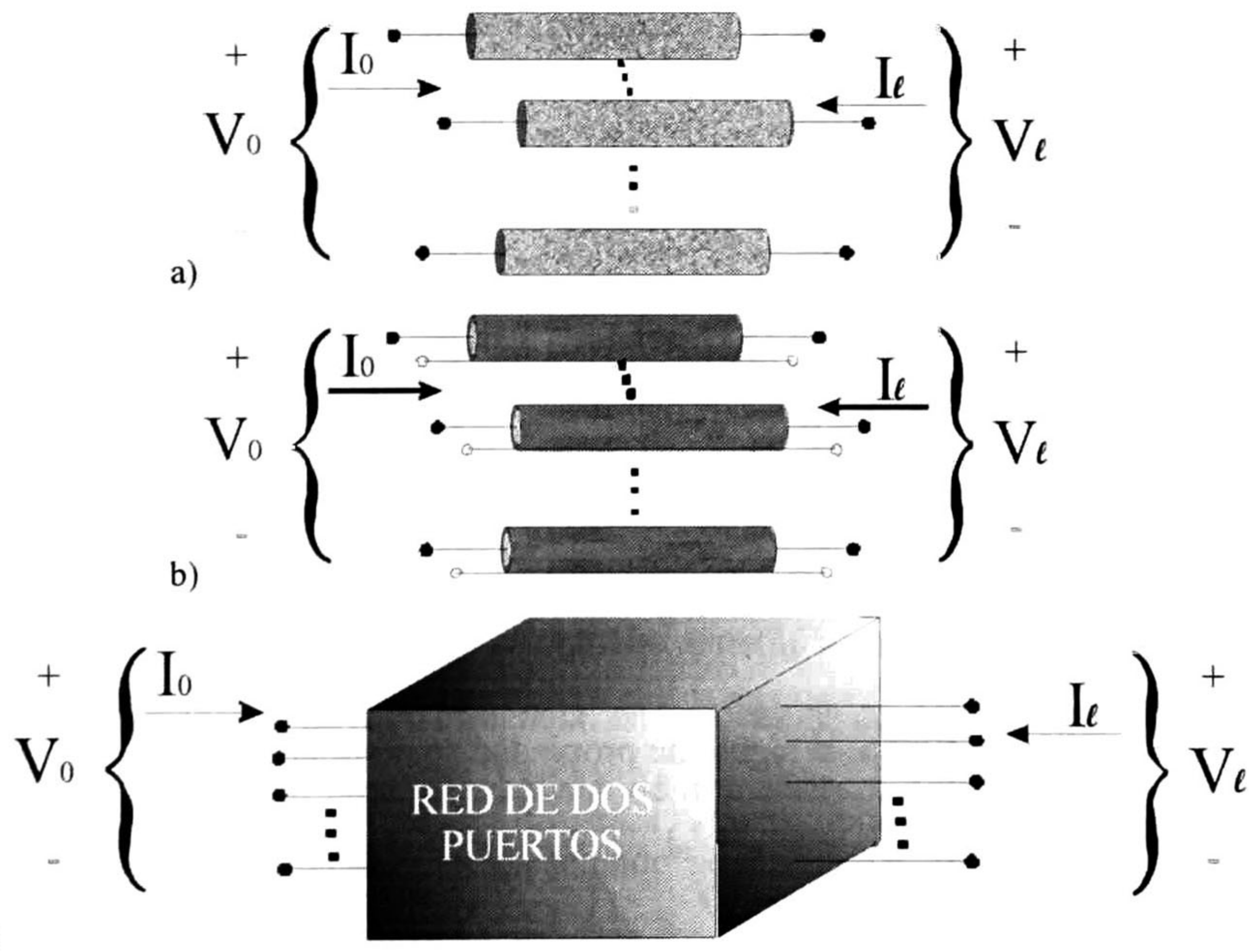


Fig. 2.12. Representación de dos puertos de un sistema multiconductor. a) Sistema aéreo multipuertos. b) Sistema subterráneo multipuertos. c) Sistema conductor de dos puertos.

Note que en las expresiones (2.29b) y (2.29c) la representación exponencial implícita en las funciones hiperbólicas contiene argumentos con funciones exponenciales positivas en su denominador, esto provocara inestabilidad numérica en los cálculos. Por tanto, es conveniente transformar la expresión anteriormente mencionada, a una representación con argumentos negativos [25].

2.6 ANÁLISIS MODAL

Una vez que las matrices Z e Y han sido obtenidas, se procede a calcular las matrices Ψ , Y_0 , A y B para implementar la ecuación (2.29a). En lo sucesivo X denotará al producto ZY :

$$X = ZY \quad (2.30a)$$

Las matrices Ψ , Y_0 , A y B están dadas como funciones de X . Las funciones involucradas son trascendentales y analíticas, esto permite la utilización del Análisis Modal y del Cálculo Matricial [25]. Se asume que la matriz X es diagonalizable, así que:

$$X = M\Lambda M^{-1}, \quad (2.30b)$$

con

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad (2.30c)$$

y M es la matriz cuyas columnas son los eigenvectores de X .

Siendo $f()$ una función analítica, la siguiente propiedad se mantiene [25]:

$$f(\Lambda) = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{bmatrix}. \quad (2.30d)$$

Del Cálculo Matricial, para una X no diagonal [25]:

$$f(X) = Mf(\Lambda)M^{-1} \quad (2.30e)$$

Desde un punto de vista físico, los eigenvectores de X , corresponden a los Modos Naturales de propagación de voltaje a lo largo de la línea bajo análisis. Los elementos diagonales de Λ (es decir, los eigenvalores de X), son los cuadrados de las constantes de propagación para los correspondientes modos de voltaje y de corriente [25]; esto es:

$$\gamma_i = \sqrt{\lambda_i} = \alpha_i + j\beta_i \quad (2.30f)$$

donde α_i y β_i son las constantes de atenuación y cambio de fase, respectivamente, ambas en por unidad de longitud y ambas correspondientes al i -ésimo modo de voltaje y de corriente, [25].

Las constantes de cambio de fase se relacionan a las velocidades modales de la siguiente manera [25]:

$$v_i = \omega / \beta_i, \quad (2.30g)$$

siendo v_i la velocidad de propagación del i -ésimo modo.

2.7 COMENTARIOS DEL CAPÍTULO

En este capítulo se ha presentado un análisis general para el cálculo de los parámetros eléctricos que presentan mayor influencia en líneas y cables de transmisión. Dichos parámetros son utilizados para el análisis de transitorios electromagnéticos en redes eléctricas. El análisis de parámetros presentado aquí incluye los efectos de dependencia frecuencial en sistemas de transmisión.

3.1 PREÁMBULO

La impedancia de retorno por tierra, ya sea propia o mutua, es un parámetro necesario para estudiar la interferencia inductiva en circuitos de comunicación ocasionada por líneas de potencia cercanas, así como también por vías ferroviarias electrificadas. Adicionalmente, la obtención de dichas impedancias es un primer paso para el cálculo de sobrevoltajes de las líneas de transmisión causados por descargas atmosféricas, fallas u otros eventos [9]. En este capítulo se presentan las fórmulas de Carson [21] y Pollaczek [16], las cuales dan solución a la impedancia de tierra para sistemas de transmisión aéreos y subterráneos, respectivamente. Dichas formulaciones presentan términos integrales conocidos como integral de Carson e integral de Pollaczek, respectivamente. Estos no tienen solución analítica cerrada.

Se presentan algunos algoritmos de integración numérica existentes que dan solución a las integrales antes mencionadas. Se analizan aquí y se muestran las limitaciones de los algoritmos considerados. Se proporcionan graficas que muestran las precisiones logradas con cada uno de los algoritmos analizados. Se aplica el concepto de normalización introducido por Uribe, *et. al.*, [3,12,13]. En el caso de la integral de Carson, se propone un algoritmo híbrido de integración.

3.2 INTEGRALES DE CARSON Y POLLACZEK***Integral de Carson***

En 1926 John R. Carson [21] obtuvo la integral que lleva su nombre la cual permite calcular la impedancia de retorno por tierra. Dicha integral no tiene solución analítica

cerrada. En ese mismo artículo, Carson también propuso una solución a su integral en forma de series [21]. Implementaciones actuales de las series de Carson presentan discontinuidades debidas al uso de dos series distintas [1,18]. La fórmula de Carson para calcular impedancias de tierra se da a continuación:

$$Z_{T_{ik}} = \frac{j\omega\mu_0}{\pi} J_{ik}, \quad (3.1a)$$

donde

$$J_{ik} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-2h\lambda}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + j\omega\mu\sigma}} \cos(\lambda x_{ik}) d\lambda, \quad (3.1b)$$

es la integral de Carson

$$h = (h_i + h_k)/2.$$

h_i y h_k son alturas del conductor al suelo y

x_{ik} es la distancia horizontal entre los conductores i y k

La fórmula (3.1) provee el parámetro de impedancia mutua de tierra. Para obtener la impedancia propia, se considera en (3.1b) que $x_{ik}=0$ y que $h=h_i$.

Integral de Pollaczek

Pollaczek [16] presentó también en 1926 la formulación que lleva su nombre para el cálculo de impedancias de retorno por tierra en sistemas subterráneos de transmisión de energía. El integrando de Pollaczek es altamente oscilatorio y dicha integral tampoco tiene solución analítica cerrada [8,12,13,18]. La expresión obtenida por Pollaczek para el cálculo de impedancias de tierra se da a continuación:

$$Z_{T_{ik}} = j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \left[K_0\left(\frac{d_{ik}}{p}\right) - K_0\left(\frac{D_{ik}}{p}\right) + J_{ik} \right], \quad (3.2a)$$

donde $K_0()$ es la función de Bessel modificada de segunda clase y orden cero, D_{ik} y d_{ik} se definen por las expresiones (2.21b) y (2.21c), respectivamente, J_{ik} es la integral de Pollaczek y p se define en la expresión (2.10c).

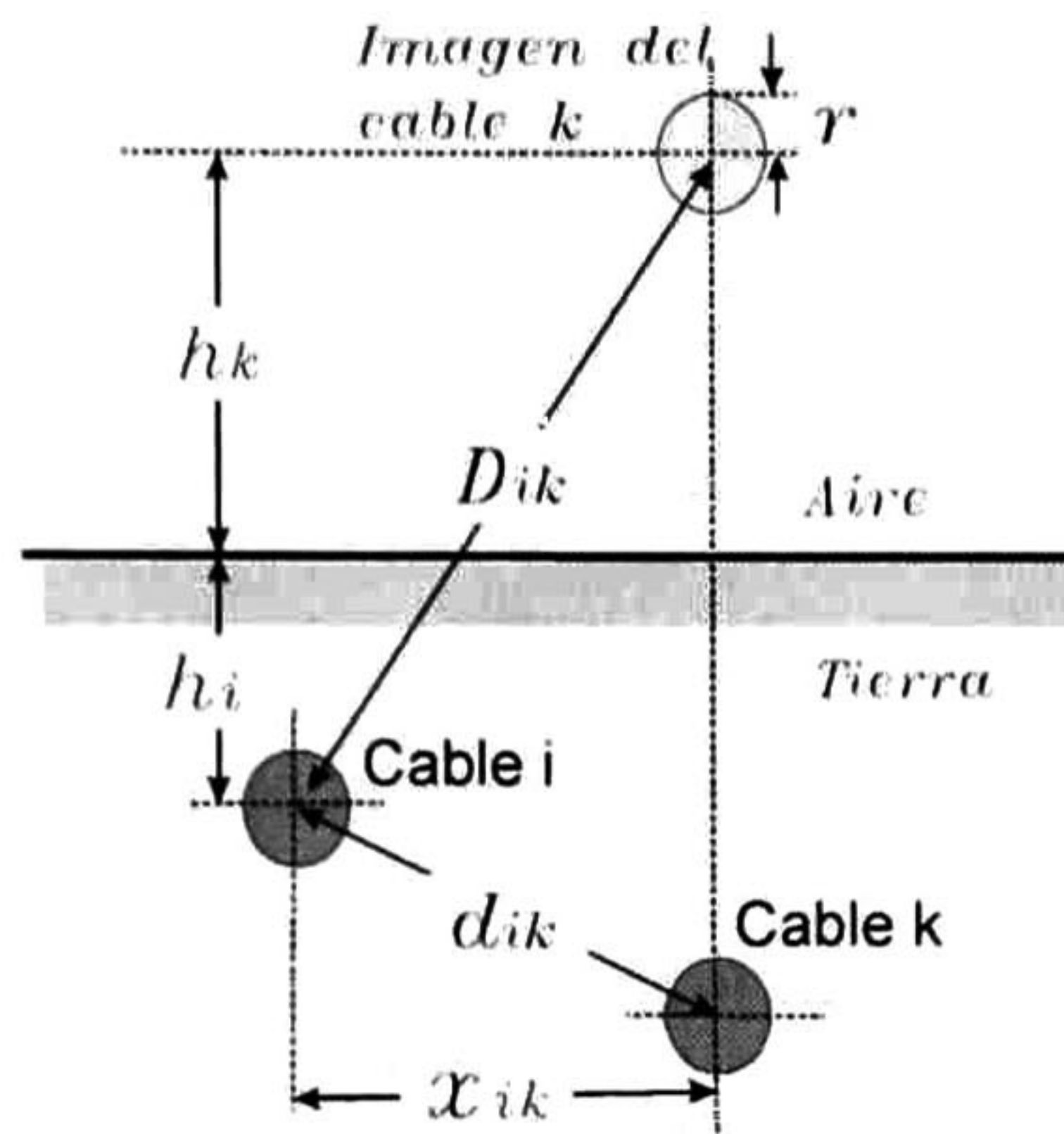


Fig. 3.1. Sistema de conducción subterráneo compuesto por dos cables.

Adicionalmente, la figura 3.1 muestra una representación esquemática para el cálculo de D_{ik} y d_{ik} . El término de corrección J_{ik} en la expresión (3.2a) está dado por la siguiente integral infinita:

$$J_{ik} = 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-2h \sqrt{\lambda^2 + j\omega\mu\sigma}}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + j\omega\mu\sigma}} \cos(\lambda x_{ik}) d\lambda \quad (3.2b)$$

Al igual que la formulación dada en (3.1) para líneas aéreas, la expresión (3.2) proporciona la impedancia mutua de tierra. Para obtener valores de impedancia propia se deben realizar las siguientes sustituciones en (3.2): $x_{ik}=r$, $h=h_i$ y $D_{ik}=2h_i$.

3.3 NORMALIZACIÓN DE LAS INTEGRALES DE CARSON Y POLLACZEK

Las integrales de Carson y Pollaczek son funciones de cinco parámetros: dos geométricos (h,x) y tres eléctricos (ω,μ,σ). Sin embargo, la normalización introducida por Uribe, *et. al.*, [3,12,13] muestra que dichas integrales equivalen a funciones de sólo dos variables adimensionales (ξ,η). Para aplicar dicha normalización se introducen las siguientes variables [3,13]:

$$\beta = |p|\lambda, \quad (3.3a)$$

$$\xi = 2h/|p| \quad (3.3b)$$

y

$$\eta = x_{ik}/2h \quad (3.3c)$$

Nótese que β es sólo una variable auxiliar de integración, mientras que ξ y η representan dos distancias relativas. ξ mide la altura referida al grosor de la capa de conducción por el Efecto Piel, mientras que η mide la relación entre la distancia horizontal y la suma de las alturas o de las profundidades reales de los conductores.

Se sustituye ahora (3.3a), (3.3b) y (3.3c) en (3.1b) y (3.2b), y se aplica la siguiente relación:

$$\frac{j}{\sqrt{u^2 + j} - u} = \sqrt{u^2 + j} + u, \quad (3.4)$$

De ese modo se obtienen las siguientes formas paramétricas respectivas para la integral de Carson y para la integral de Pollaczek:

$$J_{ik} = j \int_0^{\infty} e^{-\beta\xi} \left[\beta - \sqrt{\beta^2 + j} \right] \cos(\beta\xi\eta) d\beta \quad (3.5)$$

y

$$J_{ik} = 2j \int_0^{\infty} e^{-\xi\sqrt{\beta^2 + j}} \left[\beta - \sqrt{\beta^2 + j} \right] \cos(\beta\xi\eta) d\beta \quad (3.6)$$

Se tiene además que [12, 13]:

$$\sqrt{\beta^2 + j} = F(\beta) + jG(\beta) \quad (3.7)$$

Con [12,13]:

$$F(\beta) = \sqrt{\beta^2 + \sqrt{\beta^4 + 1}} / \sqrt{2} \quad (3.8a)$$

y

$$G(\beta) = \sqrt{-\beta^2 + \sqrt{\beta^4 + 1}} / \sqrt{2}. \quad (3.8b)$$

De modo tal que (3.5) y (3.6) se pueden escribir como:

$$J_{ik} = j \int_0^{\infty} e^{-\beta\xi} [\beta - F(\beta) - jG(\beta)] \cos(\beta\xi\eta) d\beta \quad (3.9)$$

y

$$J_{ik} = 2j \int_0^{\infty} e^{-\xi[F(\beta)+jG(\beta)]} [\beta - F(\beta) - jG(\beta)] \cos(\beta\xi\eta) d\beta \quad (3.10)$$

Más adelante se comparan los resultados obtenidos con las formulaciones (3.5) y (3.6) contra aquellos obtenidos con (3.9) y (3.10). Esto con el fin de observar cual de estas formulaciones entrega resultados de mayor precisión.

Para establecer los rangos de las nuevas variables adimensionales ξ y η , se considera la variación de las variables físicas y geométricas contenidas dentro de la tabla 3.1. Así, se establecen los siguientes rangos:

$$10^{-6} < \xi < 10^3 \quad (3.11a)$$

y

$$10^{-4} < \eta < 10^3 \quad (3.11b)$$

TABLA 3.1
RANGOS DE VARIABLES FÍSICAS

Variables reales	Descripción
$10^{-1} < h < 2 \times 10^2$	Altura media del conductor (m)
$10^{-1} < x < 10^3$	Separación entre conductores (m)
$2\pi < \omega < 2\pi \times 10^7$	Frecuencia (rad/seg)
$10^{-4} < \sigma < 10^0$	Conductividad (S/m)

En la figura 3.2 se muestran los resultados obtenidos al integrar (3.5) y (3.9) por medio del algoritmo Gauss-Lobato (comando “quadl” de Matlab[®]). En dicha figura se puede apreciar que los resultados obtenidos con la expresión (3.9) muestran oscilaciones cuando el valor de ξ tiende a cero; esto puede ser debido a que los algoritmos se vuelven inestables al evaluar valores pequeños de $F(\beta)$ y $G(\beta)$. Por otro lado, los resultados obtenidos con (3.5) se comportan bien para todo el rango de ξ . Es por ello que aquí se considera que la utilización de (3.5) es preferible.

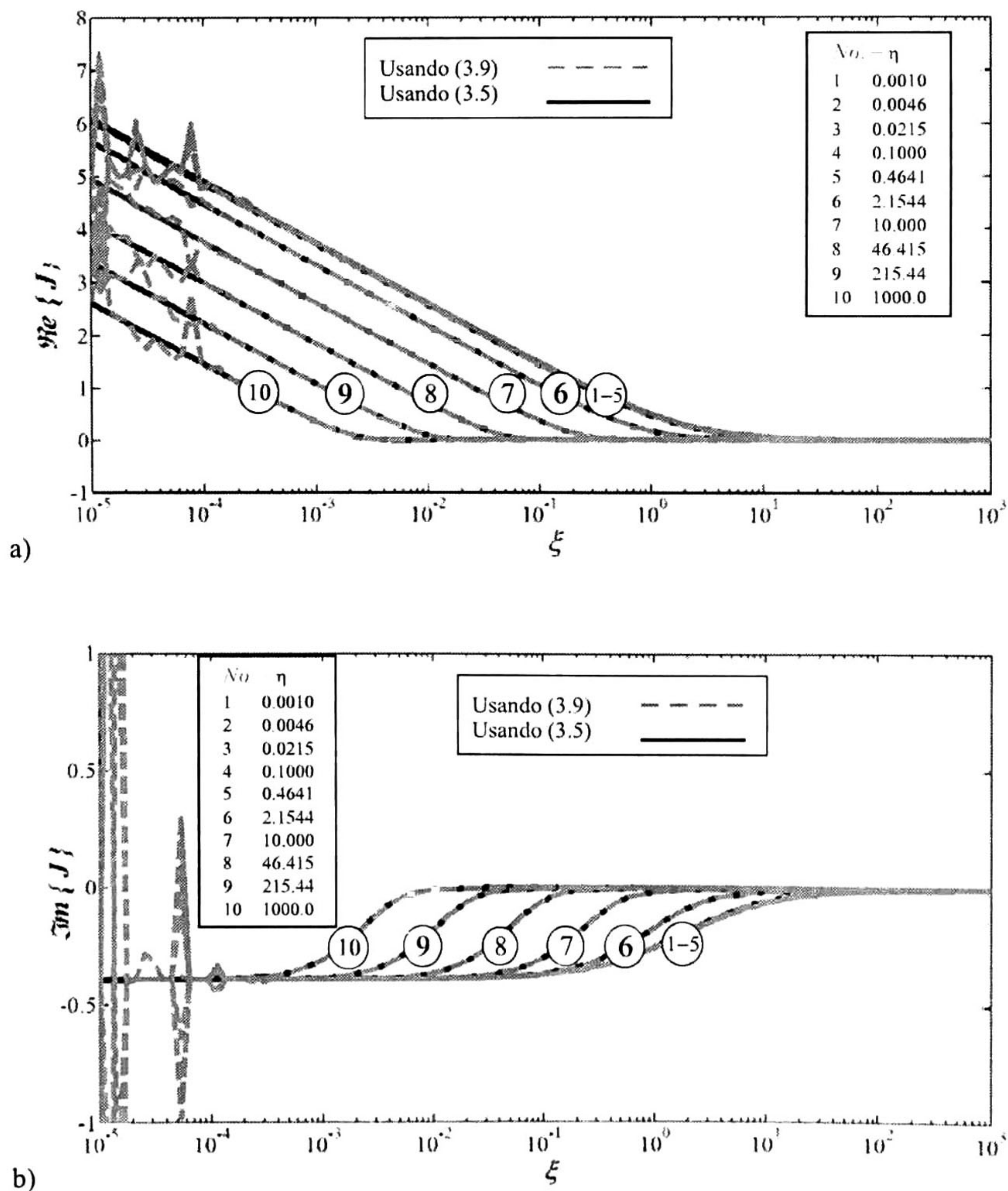


Fig.3.2. Resultados de la integración numérica para el caso de Carson, utilizando (3.5) y (3.9), a) parte real, b) parte imaginaria. Los números de 1 a 10 corresponden a la discretización de η .

También, el tiempo computacional aumenta considerablemente al utilizar (3.9), como se puede apreciar en la tabla 3.2. Además del algoritmo Gauss-Lobato, la tabla 3.2 incluye evaluaciones de los algoritmos Uribe-Ramírez e híbrido que se describen más adelante.

En la figura 3.3 se observan resultados similares a los de la figura 3.2, sólo que ahora aplicados al caso de Pollaczek. Al utilizar la expresión (3.10) los resultados oscilan cuando ξ tiende a cero. Estos presentan un mejor comportamiento al utilizar la expresión (3.6).

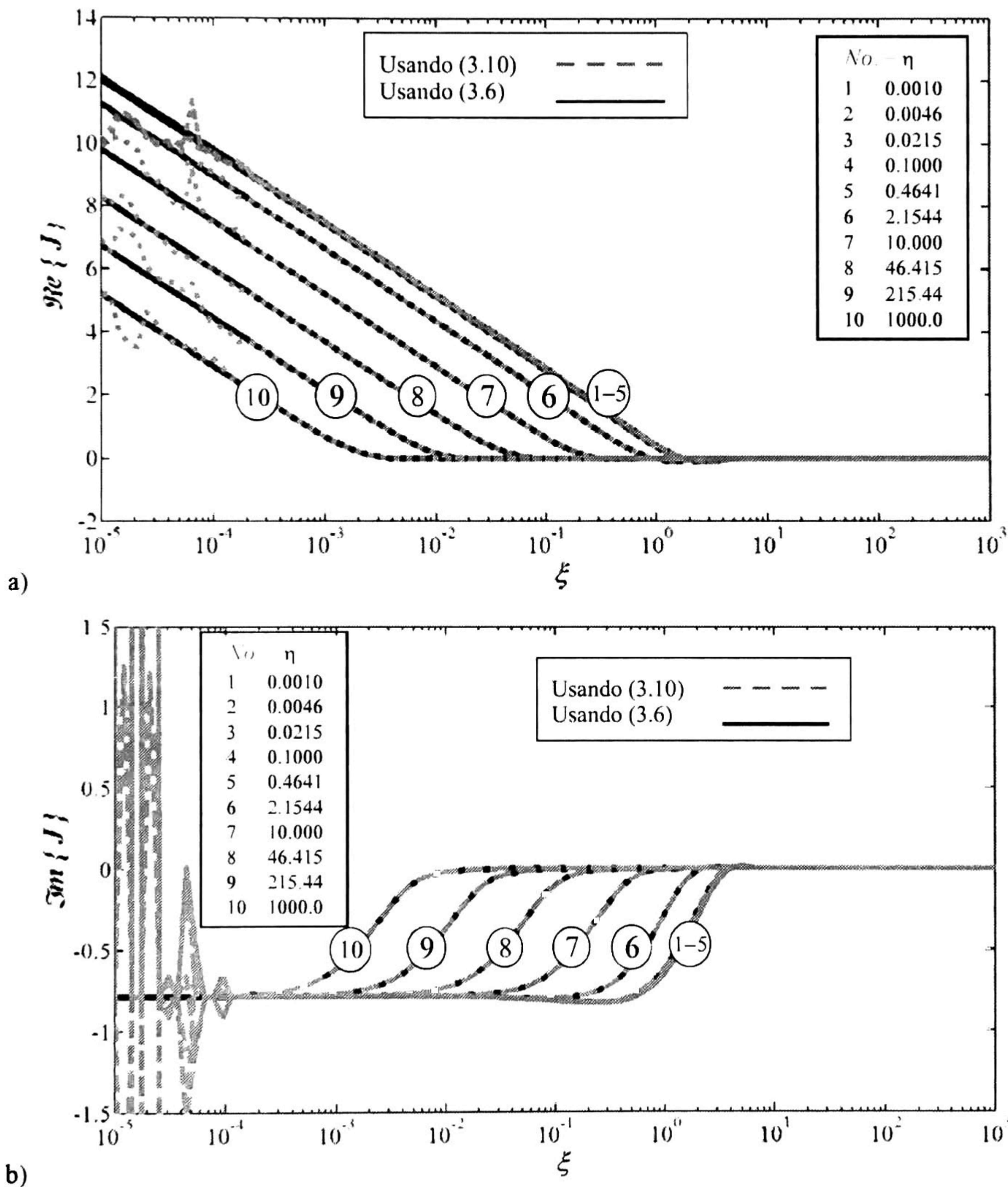


Fig.3.3. Resultados de la integración numérica para el caso de Pollaczek, utilizando (3.6) y (3.10), a) parte real, b) parte imaginaria. Los números de 1 a 10 corresponden a la discretización de η .

Los resultados de las figuras 3.2 y 3.3 muestran que la utilización de las formulaciones (3.5) y (3.6), es preferible a la de (3.9) y (3.10); por lo tanto, las primeras son las que se adoptan para esta tesis.

3.4 SOLUCIÓN ALGORÍTMICA DE LA INTEGRAL DE CARSON

Se presentan ahora los siguientes tres algoritmos para el cálculo de la integral de Carson: 1) Gauss-Lobato [38], 2) Uribe-Ramírez [3] e 3) Híbrido. Los dos primeros están reportados en la literatura especializada, el tercero es propuesto en esta tesis. Se compara el rendimiento y precisión obtenidos con cada uno de estos algoritmos y se concluye con las recomendaciones pertinentes.

Algoritmo de Gauss-Lobato

En la referencia [36] Noda propuso el algoritmo Gauss-Lobato como referencia para fines de comparación y validación de una fórmula simplificada para calcular la Z_T de líneas aéreas. Este mismo algoritmo fue utilizado por Uribe y Ramírez [3] con propósitos de comparación, y está catalogado como uno de los más confiables en términos de precisión computacional. Sin embargo, al evaluar la integral de Carson con las formulaciones (3.5) o (3.9), se presentan oscilaciones para valores de $\eta > 15$ y el tiempo de cómputo necesario es demasiado alto comparado con otros algoritmos. La figura 3.4 muestra los resultados obtenidos con este método, así como las oscilaciones del mismo. La tabla 3.2 proporciona el tiempo de cómputo requerido para calcular 2000 muestras, 20 valores de η por 100 valores de ξ .

Algoritmo de Uribe y Ramírez

En 2007 Uribe y Ramírez, presentaron en la referencia [3] un método para calcular la integral de Carson de manera más rápida y precisa que con el algoritmo de Gauss-Lobato antes mencionado. El fundamento principal de este método se encuentra en la detección del primer cruce por cero del integrando. No obstante, este algoritmo presenta pequeños quiebres en la parte real para valores de $\eta \leq 15$, probablemente debido al uso de la regla trapezoidal o al ajuste del muestreo interno. Esto puede ser visto en la figura 3.5.

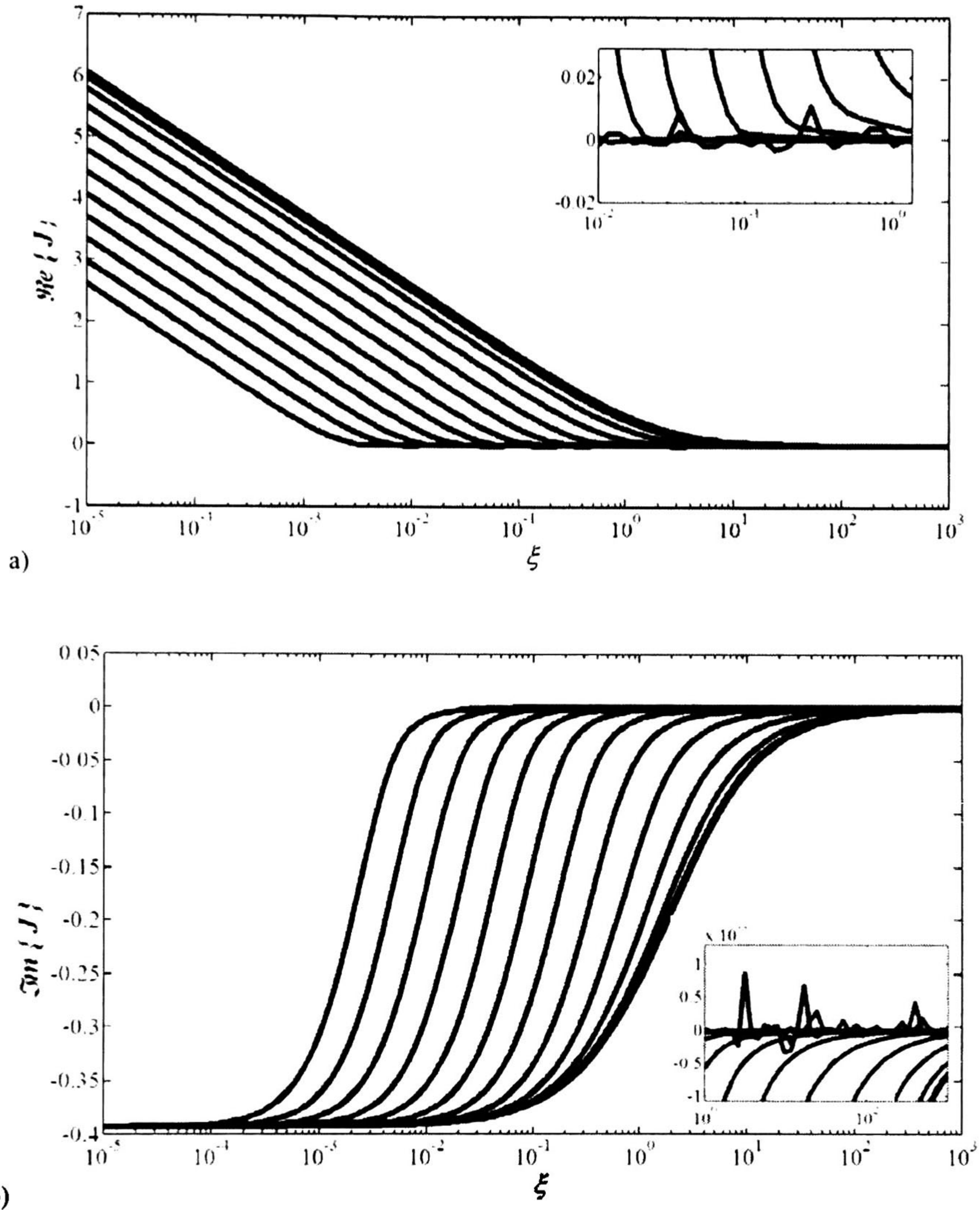


Fig. 3.4. Resultado obtenido al evaluar (3.5), utilizando el algoritmo Gauss-Lobato, las inserciones muestran las oscilaciones, a) parte real, b) parte imaginaria.

Donde además se observa una pequeña caída en la parte imaginaria para dichos valores de η y valores de ξ cercanos a cero. Dado que se requiere de la mayor precisión posible se propone aquí el siguiente algoritmo híbrido.

Algoritmo híbrido

Para garantizar la mayor precisión posible, así como un bajo tiempo de cómputo, se planteó un algoritmo híbrido que combina el algoritmo Gauss-Lobato y las Series de

Carson. El problema con el planteamiento original de Carson es que se presenta una discontinuidad en el punto $a=5$ [1,3], siendo:

$$a = \frac{\sqrt{2D_{ik}}}{|p|} \tag{3.12a}$$

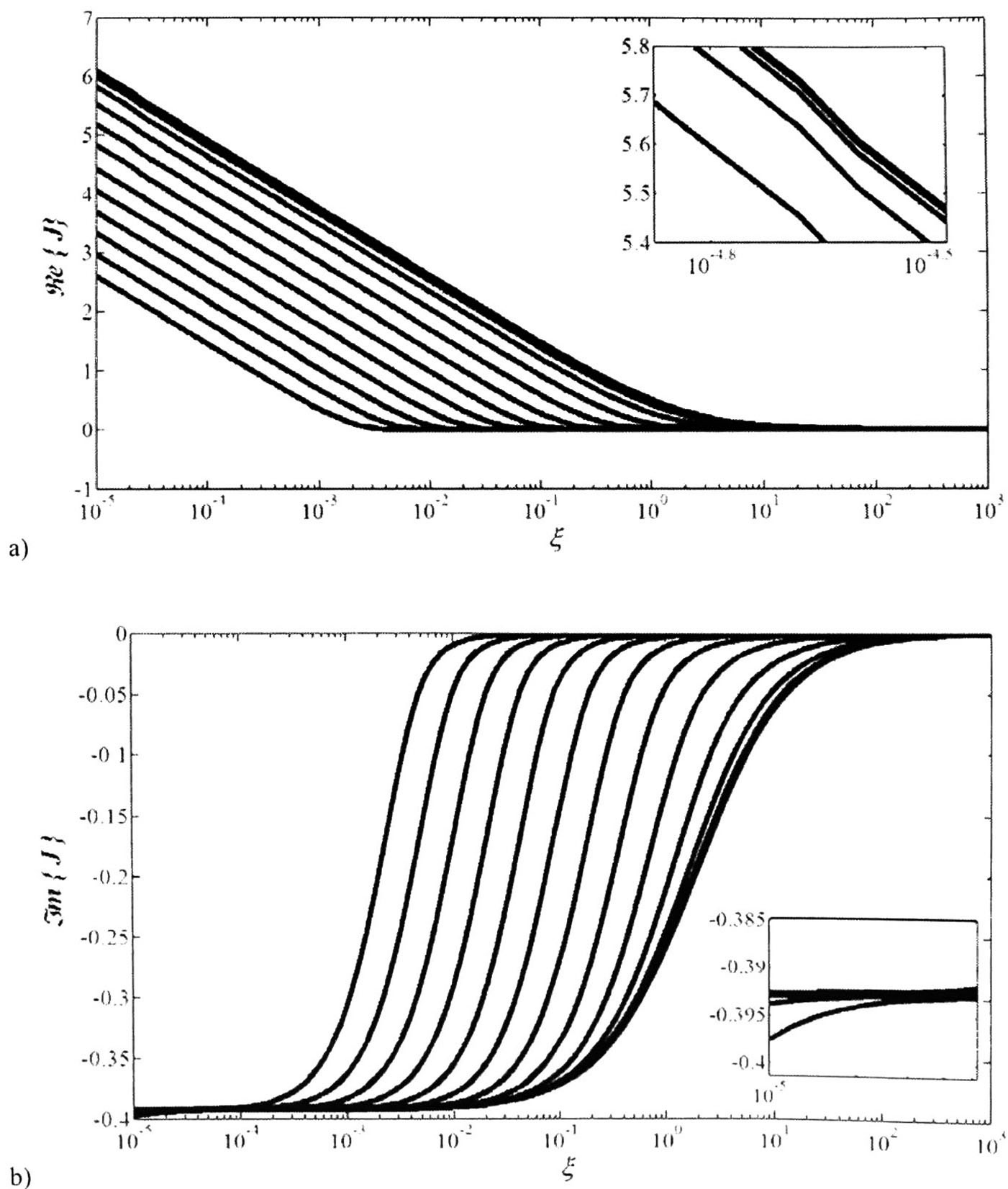


Fig. 3.5. Resultado obtenido al evaluar (3.5), utilizando el algoritmo Uribe-Ramírez, las inserciones muestran las imprecisiones, a) parte real, b) parte imaginaria.

La discontinuidad se debe a que en el rango $a > 5$, se cambian las series por aproximaciones asintóticas que entregan resultados precisos para valores de $a > 5$ [18,21]; sin embargo, para valores cercanos a $a=5$, éstas presentan mucho error, ocasionando que la solución en series presente la discontinuidad antes mencionada.

En términos de las variables normalizadas ξ y η , se tiene la siguiente forma alterna para el parámetro “a”:

$$a = \sqrt{2\xi} \sqrt{(1+\eta^2)}. \quad (3.12b)$$

Se puede observar que el valor de “a” es una función de ξ y η ; no obstante, el algoritmo híbrido consiste en utilizar las series de Carson para todo el rango de las variables normalizadas dado en (3.11a) y (3.11b) excepto en el rango

$$0.9 \leq \eta < 3. \quad (3.13)$$

El rango en (3.13) fue observado al evaluar la fórmula de Gary y Dubanton [5,6] por medio de las series de Carson [1]. De igual manera se observó un grupo de valores para ξ donde se presentan las discontinuidades del método de Carson. Sin embargo, estos valores no fueron tomados en cuenta en éste algoritmo. Aquí se propone pues utilizar la integración de Gauss-Lobato en lugar de las aproximaciones asintóticas para cubrir el rango dado en (3.13). Esta combinación permite agilizar el tiempo de cómputo y obtener resultados altamente confiables. En la figura 3.6 se aprecia que con el algoritmo híbrido las oscilaciones presentes en la figura 3.4 han desaparecido al igual que los quiebres y caídas presentes en la figura 3.5.

La tabla 3.2 muestra los tiempos de ejecución para cada uno de los algoritmos antes descritos. Dicha tabla muestra una disminución sustancial en el tiempo de cómputo con el algoritmo híbrido; además, cómo se observa en la fig. 3.6, éste último entrega mejores resultados que los dos restantes. Los tiempos de cómputo presentados fueron obtenidos en una PC con procesador Intel Pentium 4 x 3GHz con 2Gb de RAM y con Matlab[®] V7a en ambiente Windows XP.

TABLA 3.2
COMPARACIÓN DEL TIEMPO COMPUTACIONAL, CARSON

Algoritmo	tolerancia	Cantidad de valores para η/ξ	Tiempo-cpu (s), usando (3.5)	Tiempo-cpu (s), usando (3.9)
Gauss-Lobato	10^{-6}	20/100	89.6241	230.8316
Uribe-Ramírez	10^{-6}	20/100	39.8948	50.1524
Híbrido	10^{-6}	20/100	2.3902	8.5912

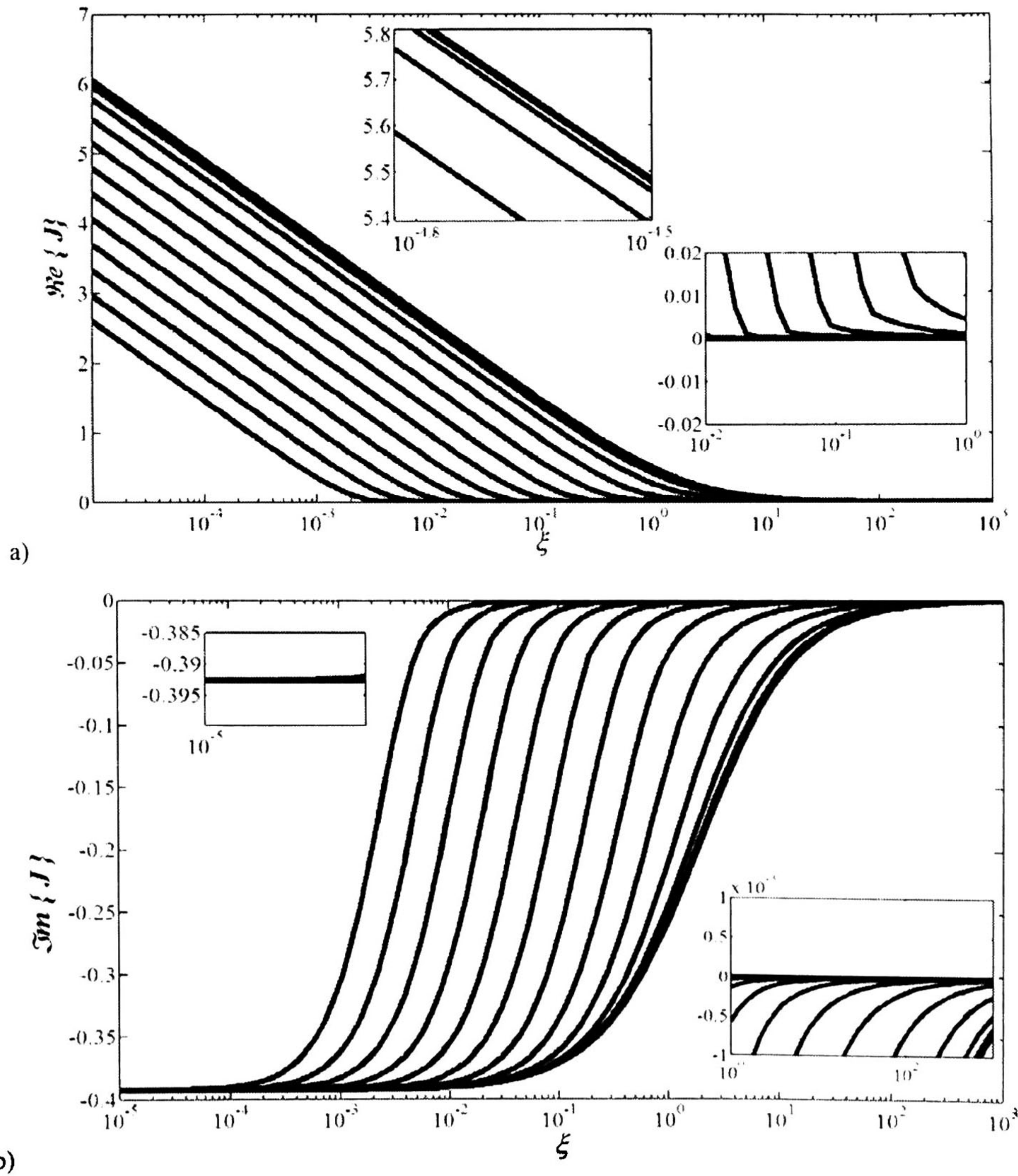


Fig. 3.6. Resultado obtenido al evaluar (3.5), utilizando el algoritmo híbrido, a) parte real, b) parte imaginaria.

3.5 SOLUCIÓN ALGORITMICA DE LA INTEGRAL DE POLLACZEK

Actualmente existen varios métodos de integración numérica que se han enfocado a dar solución a la integral de Pollaczek [12,38,39]; así también, existen algunos otros de propósito general que se pueden aplicar con este fin. Tal es el caso del método de integración numérica de Gauss-Lobato. En esta sección se presentan los criterios por los cuales se eligió el algoritmo denominado “híbrido” [34] para producir las soluciones de referencia para la integral de Pollaczek en esta tesis. Nótese que éste último no tiene ninguna relación con el algoritmo híbrido descrito en la sección anterior.

Algoritmo Cuasi-Monte Carlo (QMC)

En 2007 Legrand, *et. a.l.*, [39] presentaron un método de integración numérica llamado Cuasi-Monte Carlo (QMC, Quasi-Monte Carlo). Este algoritmo está basado en un método de integración estadístico tipo Monte Carlo con series de Van Der Corput [39]. El problema del algoritmo, es que presenta oscilaciones para valores de $\eta > 1$. Estas se pueden ver en la figura 3.7. Adicionalmente, el método QMC requiere tiempos de cómputo muy grandes (ver tabla 3.3). Debido a estas oscilaciones el QMC no puede ser utilizado para evaluar otros métodos o fórmulas. Los resultados presentes en la figura 3.7 se obtuvieron directamente del algoritmo proporcionado por el Dr. X. Legrand, el cual es descrito en la referencia [39].

Algoritmo Uribe

En 2004 Uribe, *et. a.l.*, [13] demostraron que la integral de Pollaczek es función de sólo dos variables adimensionales: ξ y η . En este algoritmo se descompone a la integral de Pollaczek en sus componentes oscilatorias y esto se utiliza para desarrollar un método de integración que se basa en la detección de cruces por cero, en la subdivisión del rango de integración, así como en la integración de cada sub-rango por medio de la regla Trapezoidal o de la de Simpson. No obstante, este algoritmo presenta ligeras desviaciones en la parte real e imaginaria como se aprecia en la fig. 3.8.

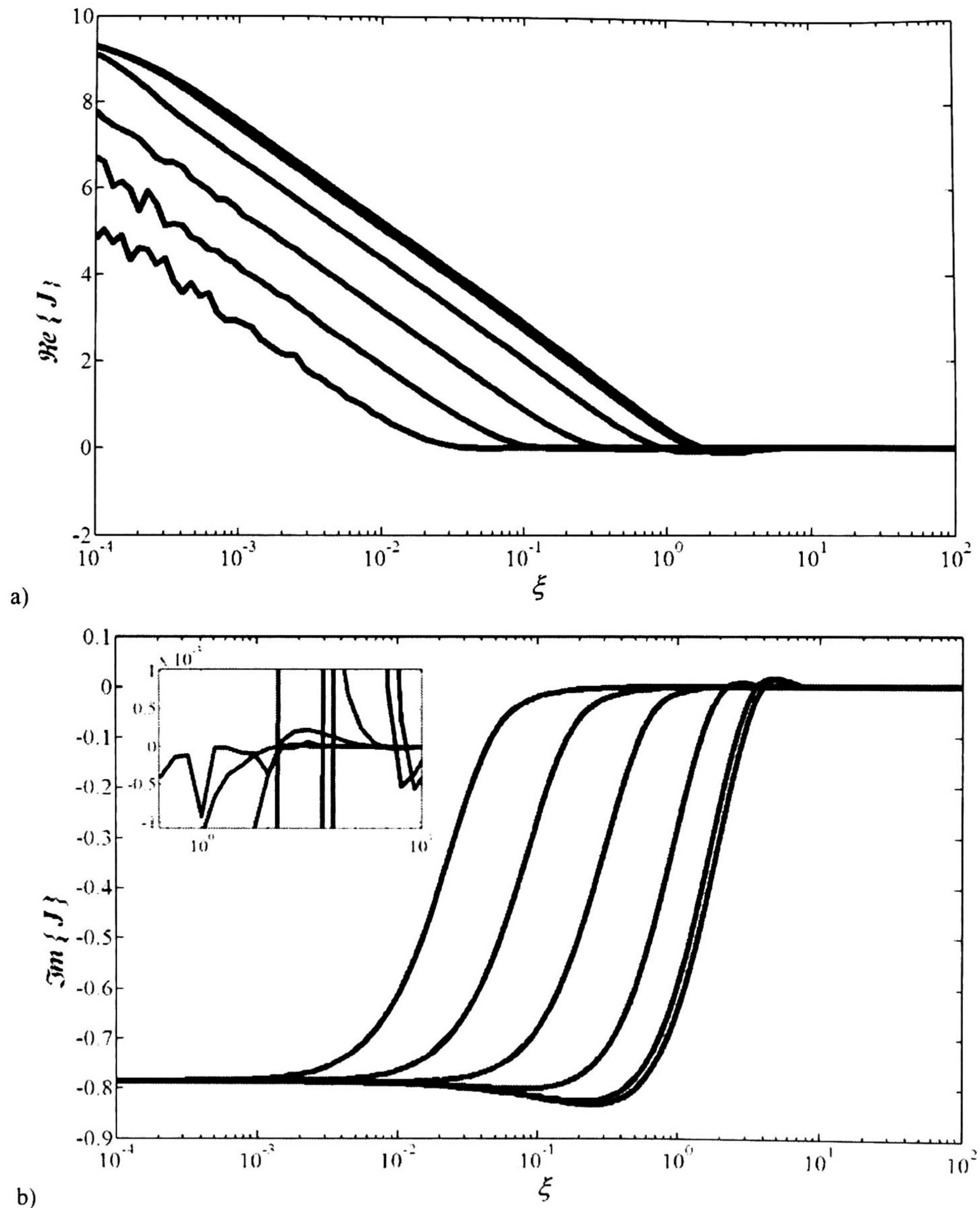


Fig. 3.7. Resultados obtenidos al integrar (3.6) por medio del algoritmo QMC para 10 valores de η y 100 valores de ξ espaciados logarítmicamente, a) parte real, b) parte imaginaria.

Algoritmo Gauss-Lobato

El algoritmo Gauss-Lobato se basa en un esquema de integración adaptativa; concretamente en la fórmula de cuatro puntos de Gauss-Lobato combinada con dos extensiones sucesivas de Kronrod [3,38]. Este método es muy utilizado como medio de

comparación debido a su excelente comportamiento para varios rangos de ξ y η , así como también por su confiabilidad y precisión computacional con respecto a otros (*i.e.*, Simpson, IMSL y librerías NAG) [3,38]. Este método proporciona buenos resultados los cuales se muestran en la fig. 3.9.

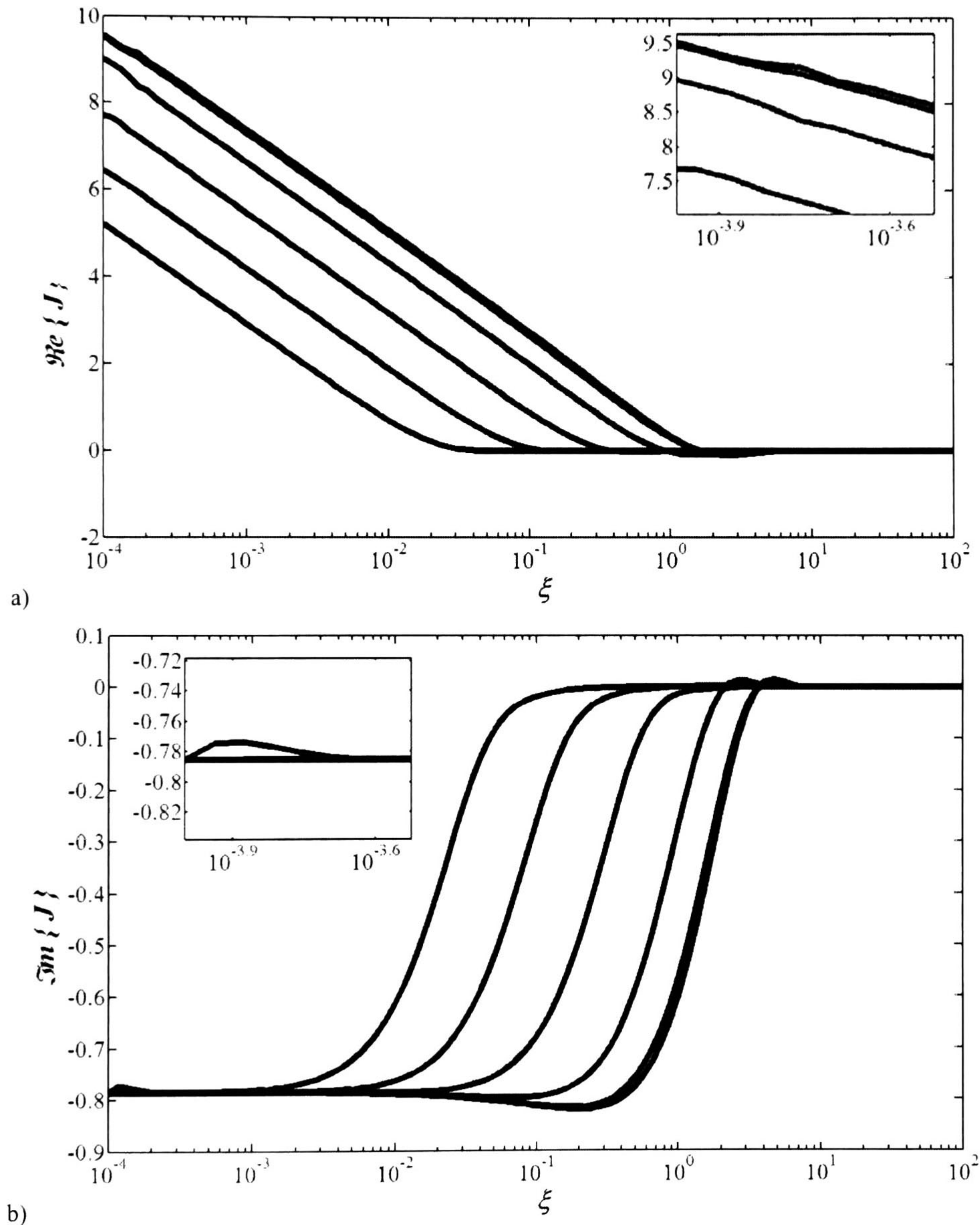


Fig. 3.8. Resultados obtenidos al integrar (3.6) por medio del algoritmo Uribe para 10 valores de η y 100 valores de ξ espaciados logarítmicamente, a) parte real, b) parte imaginaria.

Sin embargo, el tiempo de cómputo requerido por éste algoritmo es demasiado alto como puede observarse en la tabla 3.3. Los resultados obtenidos en la fig. 3.9, se obtuvieron utilizando la función “quadl” de Matlab[®] al integrar la función (3.6).

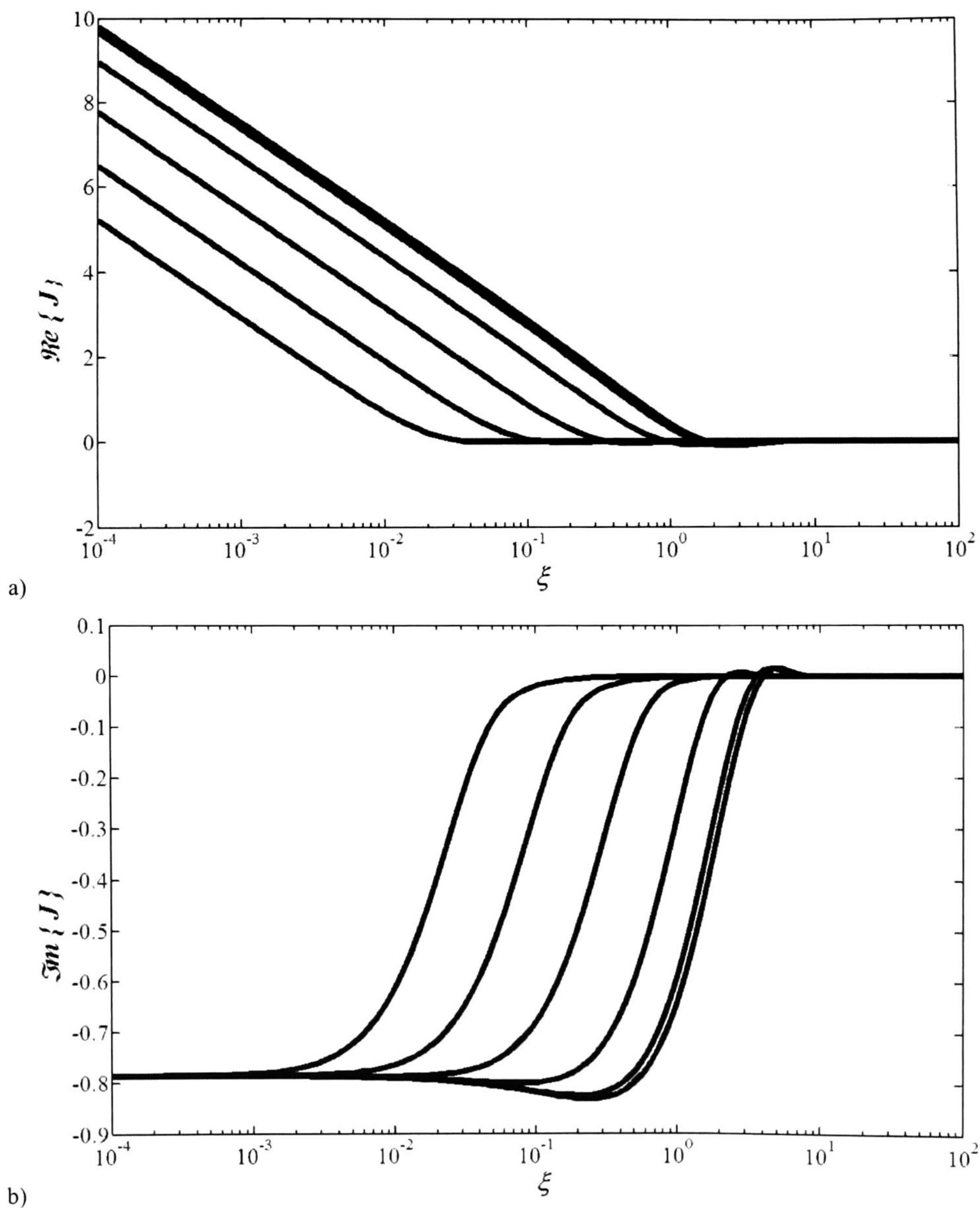


Fig. 3.9. Resultados obtenidos al integrar (3.6) por medio del algoritmo Gauss-Lobato para 10 valores de η y 100 valores de ξ espaciados logarítmicamente, a) parte real, b) parte imaginaria.

Algoritmo híbrido

Este método presenta muy buenos resultados, comparables con los resultados obtenidos por el algoritmo anterior de Gauss-Lobato. Los resultados obtenidos con el algoritmo híbrido se muestran en la figura 3.10.

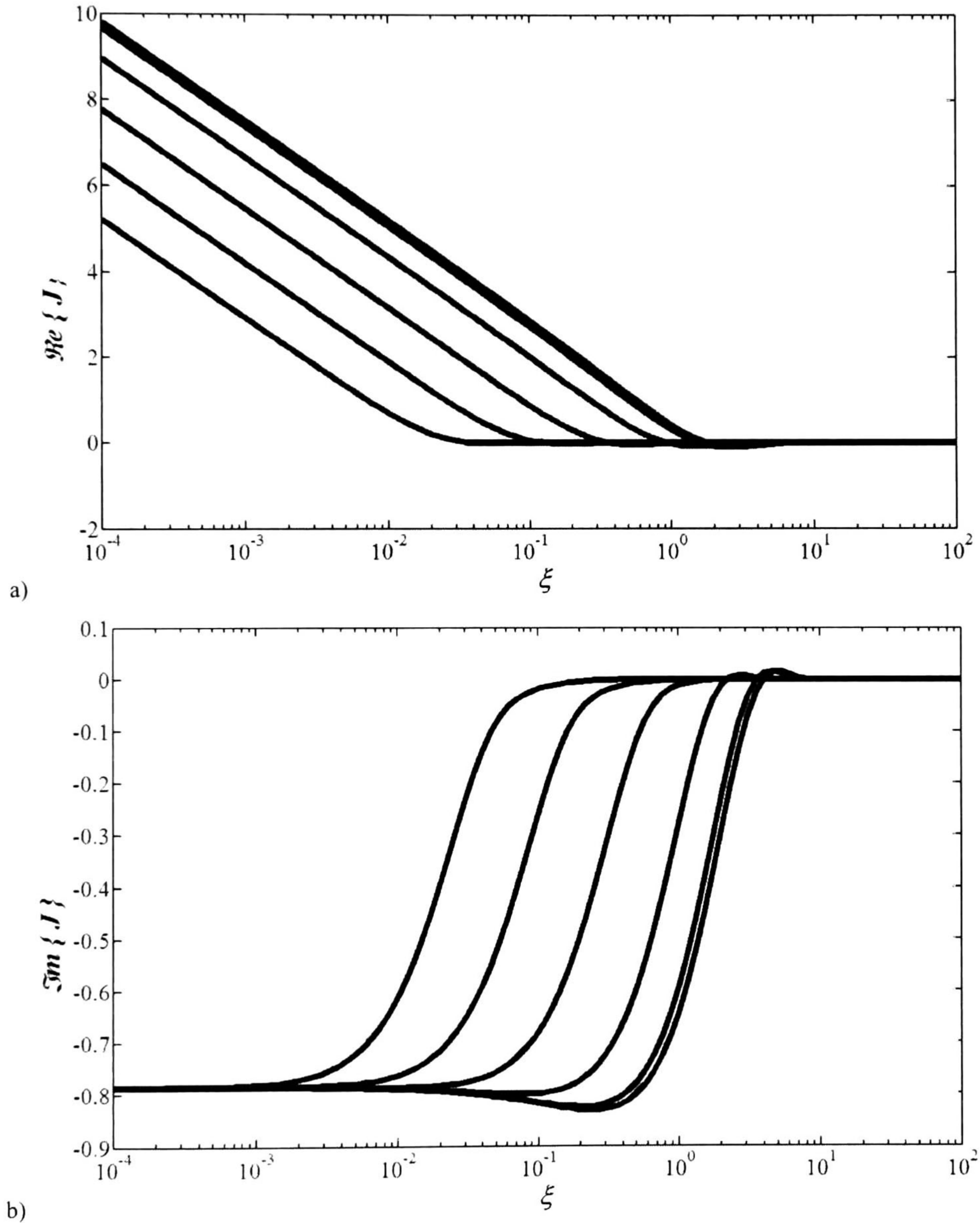


Fig. 3.10. Resultados obtenidos al integrar (3.6) por medio del algoritmo híbrido para diez valores de η y 100 valores de ξ espaciados logarítmicamente, a) parte real, b) parte imaginaria.

Dicho algoritmo fue introducido en 2007 por Iracheta [34] y lo denominó híbrido, dado que se basa en la utilización de las series de Wedepohl y Wilcox [8] para valores de $D_{ik} / p \leq 1$ y en la integración numérica de la integral de Wedepohl [8], la cual sustituye a la integral de Pollaczek. Dicha integración se realiza por medio del algoritmo Gauss-Lobato para valores de $D_{ik} / p > 1$.

La tabla 3.3 muestra que los tiempos de cómputo disminuyen al utilizar (3.6); también muestra que el algoritmo híbrido es el más rápido de los analizados en esta sección. Los tiempos de cómputo reportados en la tabla 3.3 fueron obtenidos utilizando una PC con procesador Intel Pentium 4 x 3GHz, con 2Gb de RAM y corriendo Matlab[®] V7a en ambiente Windows XP.

TABLA 3.3
COMPARACIÓN DEL TIEMPO COMPUTACIONAL, POLLACZEK

Algoritmo	tolerancia	Cantidad de valores para η/ξ	Tiempo-cpu (s), usando (3.6)	Tiempo-cpu (s), usando (3.10)
QMC	No tiene	10/100	10.8741	16.0113
Gauss-Lobato	10^{-6}	10/100	16.1797	60.7240
Uribe	10^{-6}	10/100	4.9558	8.70311
Híbrido	10^{-6}	10/100	No utiliza (3.6) 3.5342	No utiliza (3.10) 3.5342

3.6 OBSERVACIONES DEL CAPÍTULO

En este capítulo se han descrito y analizado algunos de los algoritmos de integración numérica más utilizados para dar solución a las integrales de Carson [21] y de Pollaczek [16]. Se ha mostrado la velocidad de cada uno de los algoritmos utilizados en este trabajo, así como algunos de los errores presentes en cada algoritmo. En el caso de Carson, un algoritmo de integración híbrido ha sido propuesto. Dicho algoritmo, aunado al de Iracheta [34] lleva a apreciar el valor de los algoritmos combinados, los cuales pueden entregar muy buenos resultados en poco tiempo; esto en comparación a los algoritmos no compuestos.

Cabe mencionar que la velocidad y estabilidad de los algoritmos híbridos se debe en gran parte al uso de series.

Debido a la precisión y a la velocidad con que los algoritmos híbridos calculan el término de corrección J_{ik} , para Carson y Pollaczek, estos se recomiendan como base de comparación para otros algoritmos y aproximaciones cerradas.

**FÓRMULAS APROXIMADAS PARA
LAS INTEGRALES
DE CARSON Y POLLACZEK****4.1 PREÁMBULO**

Debido a las complicaciones presentadas por los algoritmos de integración numérica, así como al tiempo de cómputo consumido por éstos, el uso de fórmulas cerradas de aproximación es más atractiva que la integración numérica del término J_{ik} ; ya sea para la integral de Carson o para la integral de Pollaczek. Al respecto, varios autores han propuesto fórmulas cerradas de aproximación [1,6,11,17,19,26,29,31,32,36,], las cuales presentan requerimientos mínimos en cuanto a tiempos de cómputo y su complejidad es menor a la de cualquier algoritmo de integración numérica; sin embargo, la precisión obtenida por estas fórmulas aún puede y debe ser mejorada.

En este capítulo, se analizan las principales fórmulas aproximadas para el cálculo de Z_T , tanto para líneas aéreas como para cables subterráneos, las cuales están disponibles en la literatura especializada. Estas fórmulas son evaluadas utilizando como métodos de referencia los algoritmos híbridos propuestos en el capítulo anterior. Los resultados de las comparaciones se proporcionan por medio de los mapas de error introducidos por Uribe, *et al.*, en la referencia [12]. Además de la evaluación de las fórmulas disponibles en la literatura especializada, en este capítulo se proponen nuevas fórmulas de mayor precisión. Estas se desarrollaron a partir de fórmulas existentes y mediante un proceso de mínimos cuadrados.

4.2 APROXIMACIONES DE LA INTEGRAL DE CARSON

En esta sección se presentan las fórmulas de Gary y Dubanton (GD) [6], de Alvarado y Betancourt (AB) [11], así como de Noda (N) [36,37].

Fórmulas de Gary y Dubanton

En 1969, C. Dubanton propuso una fórmula para calcular la impedancia propia de tierra de una línea aérea [5]. Esta fórmula fue obtenida utilizando una extensión del método de las imágenes que consiste en colocar el plano de simetría, o de las corrientes de retorno, a una profundidad compleja bajo el piso. Dicha profundidad compleja corresponde al grosor de la capa de conducción por Efecto Piel. En 1976 C. Gary presentó una extensión de la técnica de la profundidad compleja con la cual obtuvo una fórmula para la impedancia mutua de tierra entre conductores de una línea aérea [6]. Los resultados de las fórmulas de Gary y Dubanton coinciden bastante bien con los resultados de diversas soluciones numéricas y por series de la integral de Carson, al grado que Gary considero la posibilidad de haber dado con la solución cerrada a dicha integral. En 1981, Deri, *et. al.*, [1] mostraron que la fórmula de Gary y Dubanton correspondía a una aproximación a la solución de la integral de Carson y que podía presentar errores de hasta un 15%.

La solución de Gary para la integral de Carson, correspondiente a las impedancias mutuas de tierra de una línea aérea, puede escribirse de la siguiente forma:

$$J_{ik} \approx \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{(2h+2p)^2 + x_{ik}^2}}{\sqrt{(2h)^2 + x_{ik}^2}} \quad (4.1a)$$

El significado de h , x_{ik} y p puede entenderse de la figura 2.2. La fórmula de Dubanton, para la impedancia propia de tierra, se obtiene al sustituir los valores $h=h_i$ y $x_{ik}=0$ en la fórmula anterior de Gary.

Para efectos de análisis la fórmula (4.1a) se expresa ahora en forma normalizada; es decir, introduciendo las variables adimensionales ξ y η definidas por las expresiones (3.3b) y (3.3c):

$$J_{ik} \approx \frac{1}{4} \ln \left(\frac{\left(1 + \frac{2}{\xi} \frac{-j}{-j}\right)^2 + \eta^2}{1 + \eta^2} \right). \quad (4.1b)$$

Para el caso de la impedancia propia, la fórmula normalizada se obtiene al sustituir el valor de $\eta=0$ en (4.1b).

Fórmula de Alvarado y Betancourt

Deri, *et. al.*, [1] propusieron una aproximación del integrando de Carson, que lo hace integrable y da como resultado las fórmulas de Gary y Dubanton. En 1983 Alvarado y Betancourt propusieron agregar un término adicional a aquella aproximación del integrando [11]. El término adicional propuesto también es integrable y proporciona una fórmula de corrección para las fórmulas de Gary y Dubanton como se indica a continuación.

$$J_{ik} \approx \frac{1}{2} \ln \frac{(2h+2p)^2 + x_{ik}^2}{\sqrt{(2h)^2 + x_{ik}^2}} - \frac{1}{48} \left[\frac{1}{\left(\frac{h}{p} + j \frac{x_{ik}}{2p} + 1\right)^3} + \frac{1}{\left(\frac{h}{p} - j \frac{x_{ik}}{2p} + 1\right)^3} \right]. \quad (4.2a)$$

Para su análisis y evaluación, esta fórmula se expresa a continuación en su forma normalizada; es decir, en función de las variables adimensionales ξ y η :

$$J_{ik} \approx \frac{1}{4} \ln \left(\frac{\left(1 + \frac{2}{\xi} \frac{-j}{-j}\right)^2 + \eta^2}{1 + \eta^2} \right) - \frac{1}{48} \left[\frac{1}{\left(\frac{\xi(1+j\eta)}{2 \frac{-j}{-j}} + 1\right)^3} + \frac{1}{\left(\frac{\xi(1-j\eta)}{2 \frac{-j}{-j}} + 1\right)^3} \right]. \quad (4.2b)$$

Al igual que las expresiones (4.1a) y (4.1b), las fórmulas anteriores proporcionan la impedancia mutua de tierra para una línea aérea. Si se sustituyen los valores $h=h_i$ y $x_{ik}=0$ en

(4.2a), o el valor $\eta=0$ en (4.2b), se obtienen las expresiones correspondientes a la impedancia propia.

Fórmula de Noda

Con el fin de mejorar la precisión de la fórmula de Gary y Dubanton, en 1991 Pizarro y Eriksson introdujeron en el método de las imágenes complejas el uso de dos planos de simetría, junto con sus dos profundidades complejas [26]. En 2005 Noda propuso una mejora sustancial a la formulación de Pizarro y Eriksson al cambiar algunos valores constantes en dicha formulación por valores variables [36,37]. La fórmula propuesta por Noda se da a continuación:

$$J_{ik} \approx \frac{A}{2} \ln \frac{\sqrt{(2h + 2\alpha p)^2 + x_{ik}^2}}{\sqrt{(2h)^2 + x_{ik}^2}} + \frac{B}{2} \ln \frac{\sqrt{(2h + 2\beta p)^2 + x_{ik}^2}}{\sqrt{(2h)^2 + x_{ik}^2}}. \quad (4.3a)$$

donde

$$A = \begin{cases} 0.07360 & (\theta \leq 50.45^\circ) \\ 0.002474\theta - 0.05127 & (\theta > 50.45^\circ) \end{cases}$$

$$\alpha = \begin{cases} 0.1500 & (\theta \leq 50.45^\circ) \\ 0.004726\theta - 0.08852 & (\theta > 50.45^\circ) \end{cases}$$

$$\theta = a \tan(x/2h),$$

$$B = 1 - A,$$

$$\beta = \frac{1 - A\alpha}{B}.$$

Utilizando las variables normalizadas ξ y η definidas por las expresiones (3.3b) y (3.3c), la fórmula de Noda queda de la siguiente forma:

$$J_{ik} \approx \frac{A}{4} \ln \left(\frac{\left(1 + \frac{2\alpha \sqrt{-j}}{\xi} \right)^2 + \eta^2}{1 + \eta^2} \right) + \frac{B}{4} \ln \left(\frac{\left(1 + \frac{2\beta \sqrt{-j}}{\xi} \right)^2 + \eta^2}{1 + \eta^2} \right), \quad (4.3b)$$

donde

$$A = \begin{cases} 0.07360 & \eta \leq 1.2109 \\ 0.002474\theta - 0.05127 & \eta > 1.2109 \end{cases}$$

$$\alpha = \begin{cases} 0.1500 & \eta \leq 1.2109 \\ 0.004726\theta - 0.08852 & \eta > 1.2109 \end{cases}$$

$$\theta = a \tan(\eta),$$

$$\beta = \frac{1 - A\alpha}{1 - A},$$

$$B = 1 - A.$$

Las formulaciones anteriores expresan la impedancia mutua de tierra. Para obtener la impedancia propia se debe sustituir $h=h_i$ y $x_{ik}=0$ en la expresión (4.3a) y $\eta=0$ en la expresión (4.3b).

Las expresiones para la impedancia de tierra de líneas aéreas se obtienen al sustituir el respectivo término J_{ik} en la ecuación (3.1a). La impedancia de tierra normalizada se obtiene al sustituir el respectivo término J_{ik} normalizado en la expresión (4.4).

$$\tilde{Z}_T = J_{ik}, \quad (4.4)$$

donde el término \tilde{Z}_T se define como la impedancia de tierra normalizada.

4.3 APROXIMACIONES DE LA INTEGRAL DE POLLACZEK

En esta sección se presentan las formulaciones de Saad, Gabba y Giroux (SGG), de Per Pettersson (PP) y de Wedepohl y Wilcox (WW).

Fórmula de Wedepohl y Wilcox

De su solución en series a la integral de Pollaczek, Wedepohl y Wilcox sintetizaron la siguiente expresión para el cálculo de impedancias de tierra en sistemas de transmisión subterránea. Estos autores puntualizan que la fórmula es válida para bajas frecuencia [24]:

$$Z_T \approx \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \left[-\ln\left(\frac{\gamma d_{ik}}{2p}\right) + 0.5 - \frac{4h}{3p} \right], \quad (4.5)$$

siendo γ la constante de Euler. El significado de h , x_{ik} , p , d_{ik} y D_{ik} puede entenderse de la figura 3.1. Para obtener la impedancia propia de tierra hay que sustituir $d_{ik}=r$ y $h=h_i$ en la expresión anterior. Para poder normalizar esta y las demás fórmulas de Z_T para cables, es necesario introducir una nueva variable adimensional, la cual fue propuesta por Uribe, *et. al.*, en la referencia [12]:

$$\chi = \frac{h_i - h_k}{h_i + h_k} \quad (4.6)$$

Nótese que χ vale cero para el caso de cables enterrados a la misma profundidad (disposición horizontal) y que $|\chi|$ tiende a uno en la medida que la diferencia entre las profundidades aumenta. De esta forma, al normalizar la expresión (4.5) en función de ξ , η y χ se tiene:

$$\tilde{Z}_T \approx j \left[-\ln\left(\gamma \sqrt{j\xi} \sqrt{\chi^2 + \eta^2} / 2\right) + 0.5 - \frac{2}{3} \sqrt{j\xi} \right]. \quad (4.7)$$

Nótese que esta última expresión no corresponde a la impedancia de tierra Z_T para cables, sino a la impedancia para cables normalizada \tilde{Z}_T como se define en la referencia [12]:

$$\tilde{Z}_T = Z_T \cdot (\omega\mu/2\pi)$$

Adicionalmente, las expresiones (4.5) y (4.7) corresponden al caso de impedancias mutuas de tierra. El caso de impedancias propias puede obtenerse de estas expresiones al sustituir $h=h_i$ y $d_{ik}=x_{ik}=r$ en (4.5) y $h=h_i$, $\chi=0$ y $\eta=r/2h$ en (4.7).

Fórmula de Saad, Gaba y Giroux

La formulación de Saad, Gaba y Giroux, es una de las más utilizadas hoy en día, dada su aceptable precisión y su relativa simplicidad. Esta fue publicada en 1996 [29] y propone la siguiente aproximación para la integral de Pollaczek:

$$J_{ik} \approx K_0(D_{ik}/p) + \frac{2e^{-(2h/p)}}{4 + (x_{ik}/p)^2} \quad (4.8a)$$

Al sustituir esta expresión en (3.2a), la impedancia de tierra para cables subterráneos queda de la siguiente forma:

$$Z_T \approx \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \left[K_0(d_{ik}/p) + \frac{2e^{-(2h/p)}}{4 + (x_{ik}/p)^2} \right] \quad (4.8b)$$

Para obtener la aproximación (4.8a), Saad, Gaba y Giroux utilizaron el concepto de imágenes complejas, así como técnicas de aproximación similares a las de Deri, *et. al.*, en la referencia [1]. La normalización de (4.8a) y (4.8b) respecto a las variables ξ , η y χ definidas por (3.3b), (3.3c) y (4.6), respectivamente, queda de la siguiente manera:

$$J_{ik} \approx K_0\left(\sqrt{j\xi}\sqrt{1+\eta^2}\right) + \frac{2e^{-\sqrt{j\xi}}}{4 + j(\xi\eta)^2} \quad (4.9a)$$

y

$$\tilde{Z}_T \approx j \left[K_0\left(\sqrt{j\xi}\sqrt{\chi^2 + \eta^2}\right) + \frac{2e^{-\sqrt{j\xi}}}{4 + j(\xi\eta)^2} \right] \quad (4.9b)$$

Las expresiones (4.8a), (4.8b), (4.9a) y (4.9b) corresponden al caso de impedancias mutuas. No obstante, el caso de impedancias propias está comprendido dentro de estas expresiones al sustituir $d_{ik}=x_{ik}=r$ y $h=h_i$ en (4.8a) y (4.8b) y $h=h_i$, $\chi=0$ y $\eta=r/2h$ en (4.9a) y (4.9b).

Fórmula de Per Pettersson

En una discusión al artículo [29] en el que Saad, Gaba y Giroux propusieron la fórmula (4.8a), Per Pettersson propuso como alternativa la siguiente fórmula, la cual obtuvo apelando a ciertos principios de la Teoría Electromagnética [31,32]:

$$J_{ik} \approx K_0(D_{ik}/p) - K_0\left(\sqrt{(2h+2p)^2 + x_{ik}^2}/p\right). \quad (4.10a)$$

Al sustituir la expresión (4.10a) en (3.2a), la impedancia de tierra para cables subterráneos queda de la forma:

$$Z_T \approx \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \left[K_0(d_{ik}/p) - K_0\sqrt{(2h+2p)^2 + x_{ik}^2}/p \right]. \quad (4.10b)$$

La normalización de (4.10a) y (4.10b) respecto a las variables ξ , η y χ está dada por las expresiones respectivas.

$$J_{ik} \approx K_0\left(\sqrt{j\xi} \sqrt{1+\eta^2}\right) - K_0\left[4\left(1 + \sqrt{j\xi}\right) + j\xi^2(1+\eta^2)\right] \quad (4.11a)$$

y

$$\tilde{Z}_T \approx j\left\{K_0\left(\sqrt{j\xi} \sqrt{\chi^2 + \eta^2}\right) - K_0\left[4\left(1 + \sqrt{j\xi}\right) + j\xi^2(1+\eta^2)\right]\right\}. \quad (4.11b)$$

Al igual que en las expresiones anteriores, las formulaciones (4.10a), (4.10b), (4.11a) y (4.11b) corresponden al caso de impedancias mutuas. El caso de impedancias propias se obtiene al sustituir $d_{ik}=x_{ik}=r$ y $h=h_i$ en (4.10a) y (4.10b); o bien, $h=h_i$, $\chi=0$ y $\eta=r/2h$ en (4.11a) y (4.11b).

4.4 FÓRMULA PROPUESTA PARA LA INTEGRAL DE CARSON

La fórmula que aquí se propone básicamente parte de la expresión (4.2), aunque se realizó un cambio en el factor de corrección en el que el exponente 3 ya no es tratado como una constante, sino como una función de η y el factor 1/48 es sustituido por 1/52; esto es:

$$J_{ik} \approx \frac{1}{4} \ln \left(\frac{\left(1 + \frac{2\sqrt{-j}}{\xi}\right)^2 + \eta^2}{1 + \eta^2} \right) - \frac{1}{52} \left(\frac{1}{\left(\frac{\xi(1+j\eta)}{2\sqrt{-j}} + 1\right)^{f(\eta)}} + \frac{1}{\left(\frac{\xi(1-j\eta)}{2\sqrt{-j}} + 1\right)^{f(\eta)}} \right), \quad (4.12)$$

$f(\eta)$ es una función de η que permite obtener un valor de J_{ik} lo más cercano posible al valor del mismo término obtenido por medio del algoritmo híbrido. Para obtener el valor de dicha función se ha utilizado la técnica de mínimos cuadrados para aproximar 3000 puntos por medio de la función “lsqcurvefit” de Matlab[®]. La función $f(\eta)$ obtenida por medio de dicha técnica tiene la forma dada en la figura 4.1, la cual presenta los valores de $f(\eta)$, que en lo sucesivo se denotará por “ c ” y que tiene la forma:

$$c = (C_R + jC_I), \quad (4.13a)$$

con

$$C_R = 3.3122 - 0.0069 \arctan(0.3410\eta) \quad (4.13b)$$

$$C_I = \frac{1}{(0.1036\eta + 1.2421)^5} - 0.5129. \quad (4.13c)$$

La razón por la cual se afectó sólo el exponente, es debido a que el mayor grado de error en (4.2) se presenta en el rango $10^{-2} < \xi < 1$, como se aprecia en las figuras de la 4.8 a la 4.11. El cambio a 1/52 se realizó para disminuir el error en el rango $10^{-5} < \xi < 10^{-2}$

La forma final de la fórmula propuesta para la integral de Carson es pues:

$$J_{ik} \approx \frac{1}{2} \ln \frac{(2h+2p)^2 + x_{ik}^2}{(2h)^2 + x_{ik}^2} - \frac{1}{52} \left[\frac{1}{\left(\frac{h}{p} + j\frac{x_{ik}}{2p} + 1\right)^c} + \frac{1}{\left(\frac{h}{p} - j\frac{x_{ik}}{2p} + 1\right)^c} \right]. \quad (4.14a)$$

La forma normalizada de esta fórmula propuesta es:

$$J_{ik} \approx \frac{1}{4} \ln \left(\frac{\left(1 + \frac{2-j}{\xi}\right)^2 + \eta^2}{1 + \eta^2} \right) - \frac{1}{52} \left[\frac{1}{\left(\frac{\xi(1+j\eta)}{2\sqrt{-j}} + 1\right)^c} + \frac{1}{\left(\frac{\xi(1-j\eta)}{2\sqrt{-j}} + 1\right)^c} \right]. \quad (4.14b)$$

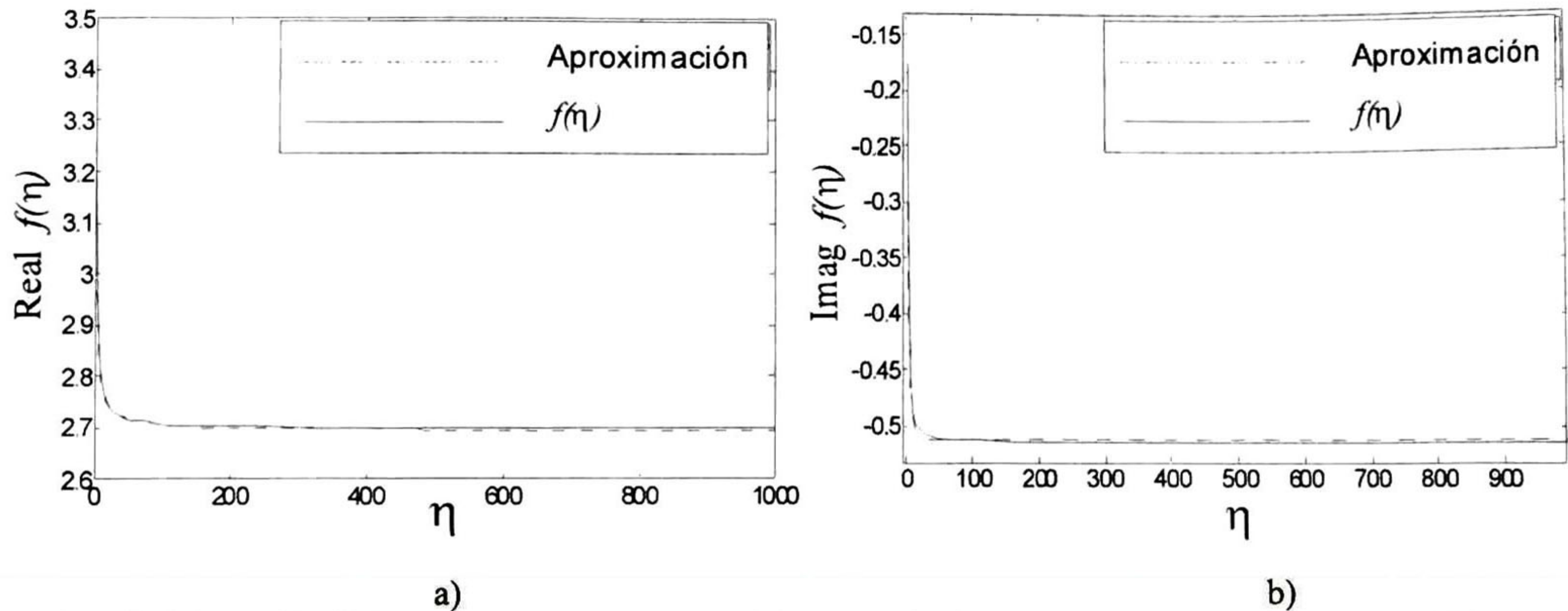


Fig. 4.1. Valores de $f(\eta)$ y su aproximación por mínimos cuadrados con respecto a η , a) parte real, b) parte imaginaria.

Las fórmulas anteriores corresponden a la impedancia mutua, para obtener la propia se debe sustituir $h=h_i$ y $x_{ik}=0$ en la expresión (4.14a), o bien $h=h_i$ y $\eta=0$ en la expresión (4.14b).

4.5 FÓRMULA PROPUESTA PARA LA INTEGRAL DE POLLACZEK

La fórmula que aquí se propone para la integral de Pollaczek parte de la formulación SGG; no obstante, aquí se contemplan dos rangos de η : $\eta < 1$ y $\eta \geq 1$. Para obtener la fórmula del primer rango se utiliza la función $g(\xi, \eta)$, dependiente de ξ y η , en (4.9a), aplicada de la siguiente manera:

$$J_{ik} = K_0 \left(\sqrt{j\xi} \sqrt{1+\eta^2} \right) + \frac{2e^{-\sqrt{j\xi}}}{4 + jg^2(\xi, \eta)}. \quad (4.15a)$$

Note que se ha sustituido el valor $(\xi\eta)$ por la función $g(\xi, \eta)$; así, despejando $g(\xi, \eta)$ de (4.15a), ya que se supone a J_{ik} conocido por medio del algoritmo híbrido, se tiene:

$$g(\xi, \eta) = \sqrt{\frac{-j2e^{-\sqrt{j\xi}}}{J_{ik} - K_0 \left(\sqrt{j\xi} \sqrt{1+\eta^2} \right)} + j4}. \quad (4.15b)$$

En la figura 4.2 se muestra la función $g(\xi, \eta)$, la cual tiene la forma $a\xi^b$, donde a y b son funciones de η . Los valores de a y b se aproximan para 15 valores de η en el rango $0.001 \leq \eta < 1$. Utilizando mínimos cuadrados, se obtienen las curvas de la figura 4.3 y 4.4 para a y para b respectivamente.

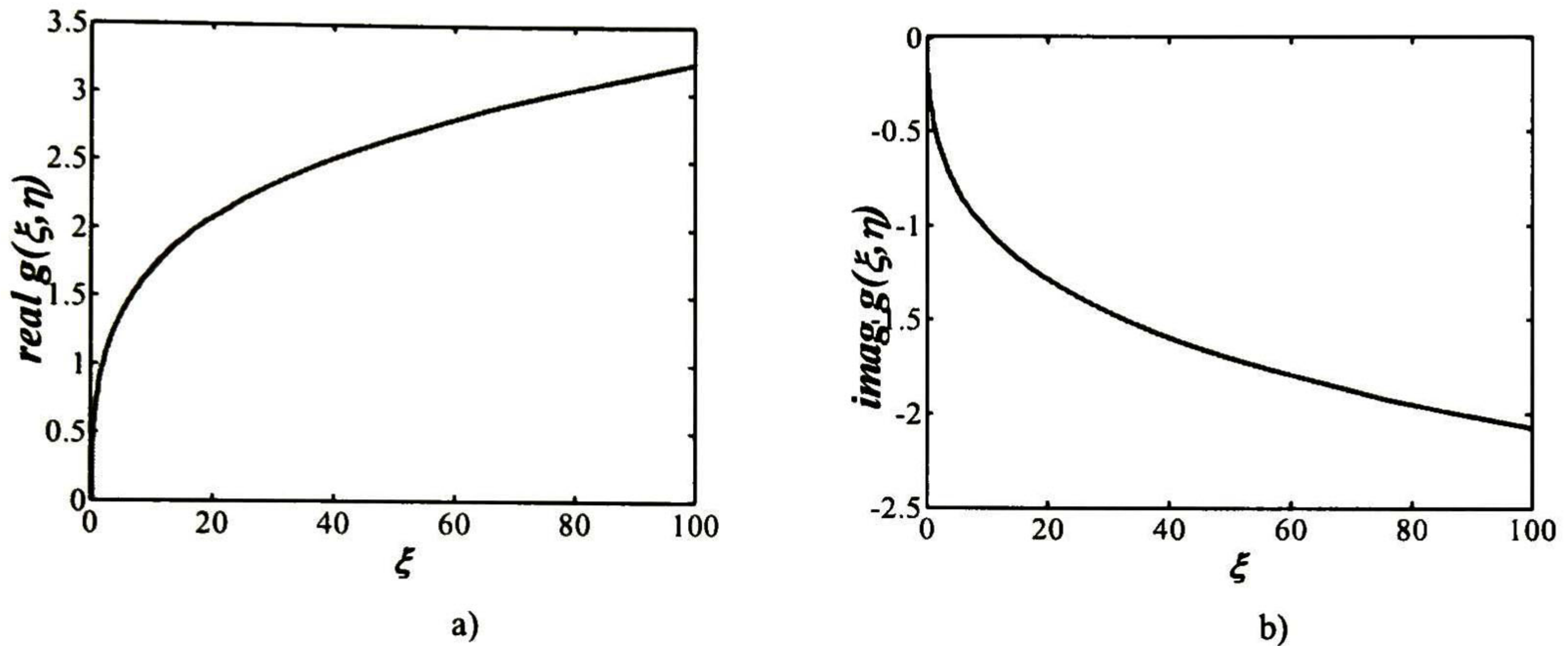


Fig. 4.2. Gráficos de la función $g(\xi, \eta)$, a) parte real, b) parte imaginaria.

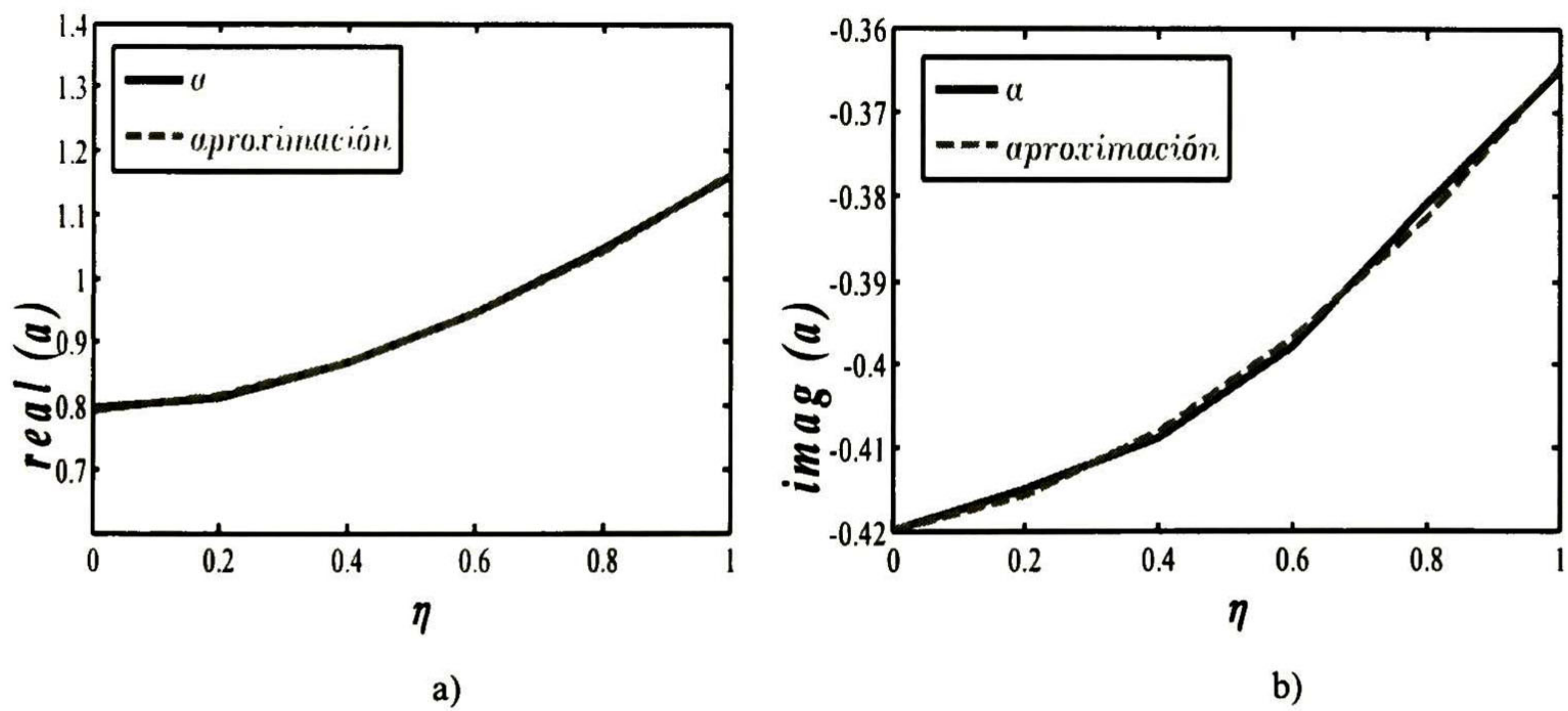


Fig. 4.3. Valores de a y su aproximación por mínimos cuadrados con respecto a η , a) parte real, b) parte imaginaria.

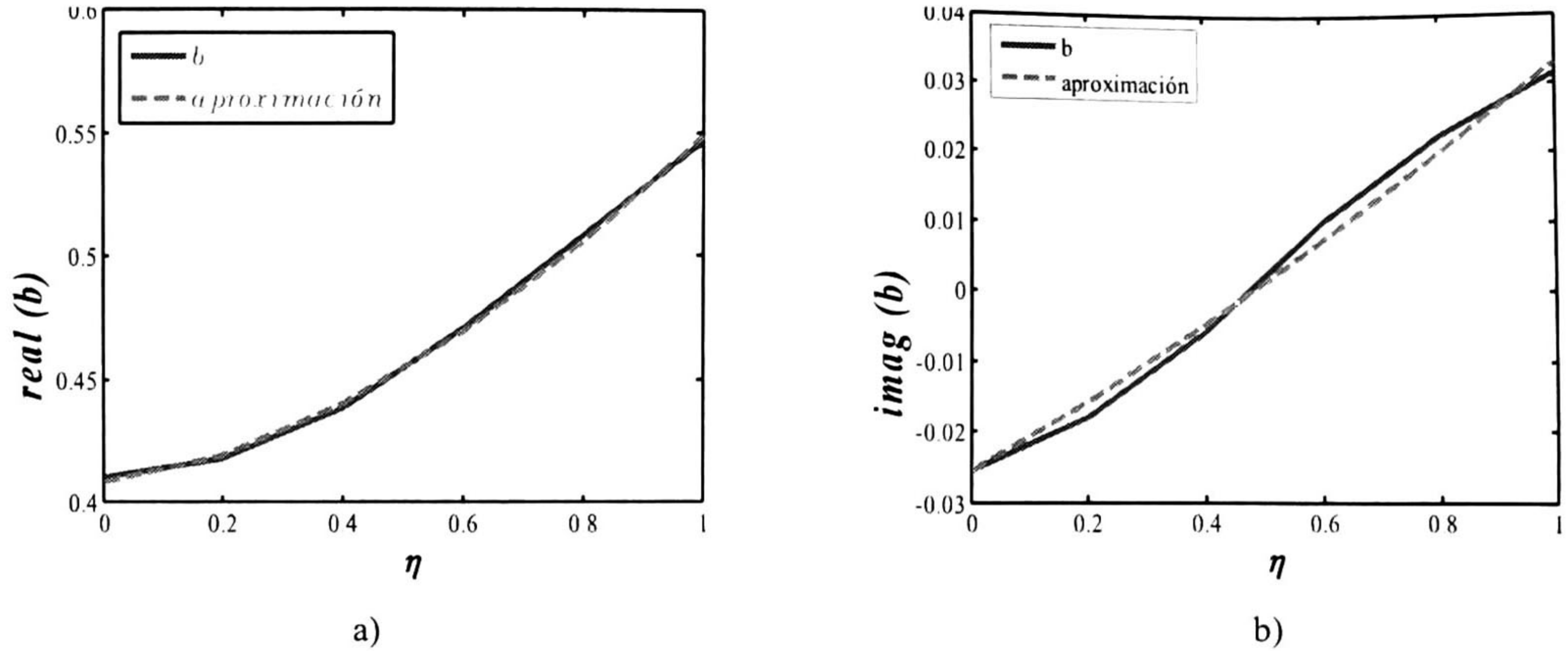


Fig. 4.4. Valores de b y su aproximación por mínimos cuadrados con respecto a η , a) parte real, b) parte imaginaria.

De los resultados de las figuras 4.3 y 4.4 se obtiene la siguiente forma para a :

$$a \approx (A_R + jA_I), \quad (4.16a)$$

con

$$A_R = 0.7945 + 0.3688\eta^{1.7534},$$

$$A_I = 0.0435\eta^2 + 0.0119\eta - 0.4196.$$

También se obtiene la siguiente forma para b :

$$b \approx (B_R + jB_I), \quad (4.16b)$$

donde

$$B_R = 0.4081 + 0.0423\eta^{0.099},$$

$$B_I = 0.0587\eta^{1.1178} - 0.0256.$$

La formulación anterior no puede ser utilizada para valores de $\eta \geq 1$, dado que la forma de la función $g(\xi, \eta)$ cambia abruptamente, evitando así que la aproximación por medio de esta función sea práctica.

Para el rango $\eta > 1$ a continuación se recurre al método de Alvarado y Betancourt de la referencia [11]. Saad, *et. al.*, utilizan la siguiente aproximación en el integrando de Pollaczek:

$$f(\Delta) = \frac{\sqrt{\Delta^2 + 1}}{\Delta + \sqrt{\Delta^2 + 1}} \approx \frac{1 + e^{-2\Delta}}{2} \quad (4.17a)$$

Dicha aproximación se mejora al agregar otro término, quedando de la siguiente forma:

$$f(\Delta) = \frac{\sqrt{\Delta^2 + 1}}{\Delta + \sqrt{\Delta^2 + 1}} \approx \frac{1 + e^{-2\Delta}}{2} + \frac{1}{30} \Delta^2 e^{-\Delta}. \quad (4.17b)$$

La figura 4.5 muestra los gráficos de estas dos últimas aproximaciones junto con la grafica de la función $f(\Delta)$ original. En dicha figura se puede ver que la aproximación dada por (4.17b) entrega valores más cercanos a $f(\Delta)$ que (4.17a) y mantiene la tendencia asintótica de la función. Introduciendo (4.17b) en la formulación original de SGG y después de resolver e integrar se obtiene:

$$J_{ik} \approx K_0 \left(j\xi \sqrt{1 + \eta^2} \right) + \frac{2e^{-j\xi}}{4 + j(\xi\eta)^2} + \frac{e^{-j\xi}}{30} \left(\frac{1}{(1 - j\sqrt{j\xi\eta})^2} + \frac{1}{(1 + j\sqrt{j\xi\eta})^2} \right). \quad (4.18a)$$

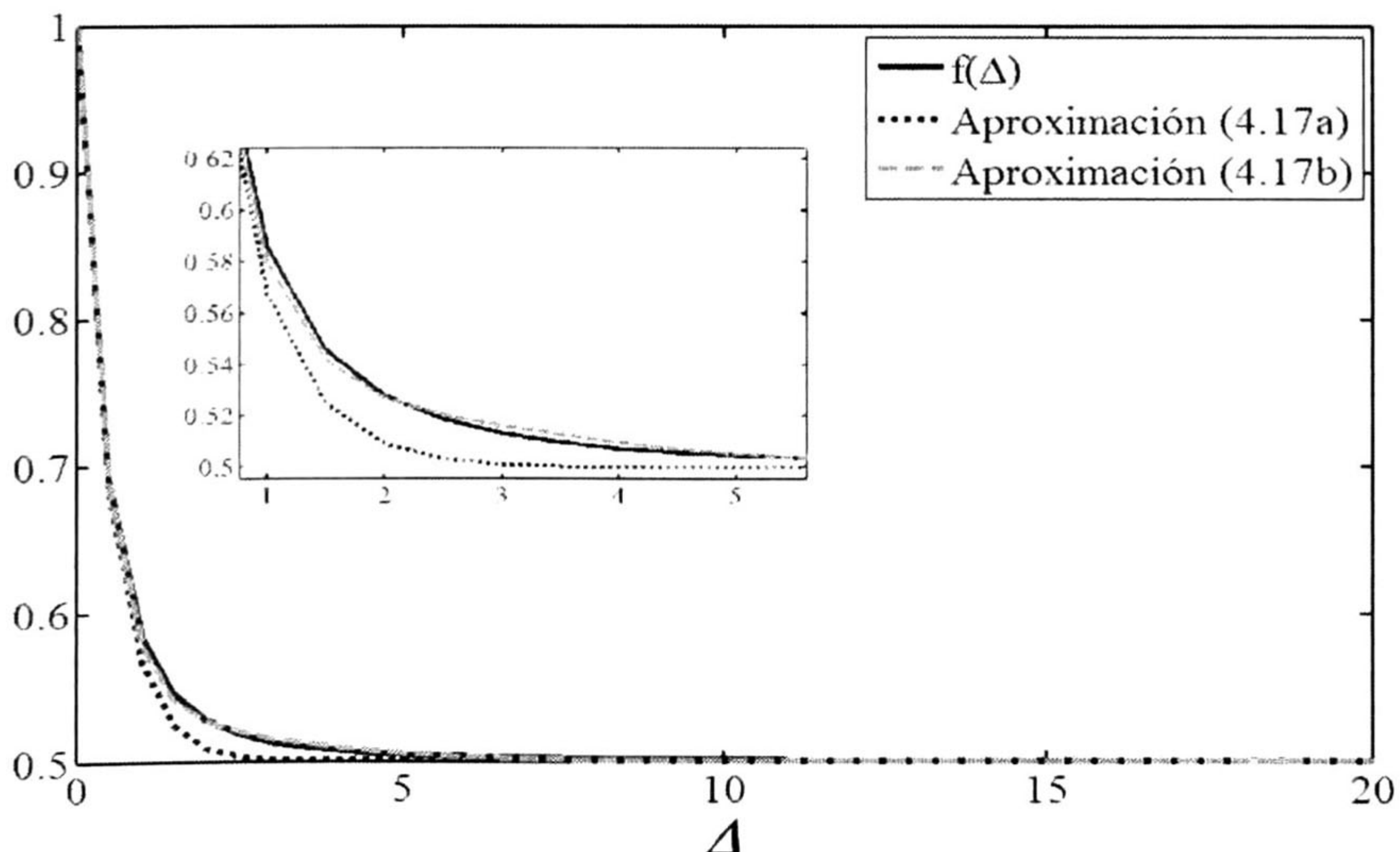


Fig. 4.5. $f(\Delta)$ y sus aproximaciones.

La expresión (4.18a) aún no produce mejores resultados que los obtenidos con la expresión (4.9a), por esta razón se han modificado algunos de sus valores reescribiendo los dos últimos términos del lado derecho de (4.18a) de la siguiente forma:

$$\frac{e^{-\sqrt{j}\xi}}{4 + j(c\xi)^2} + \frac{1}{8}e^{-d\sqrt{j}\xi} \left(\frac{1}{(1 - j\sqrt{j\xi\eta})^w} + \frac{1}{(1 + j\sqrt{j\xi\eta})^w} \right), \quad (4.18b)$$

donde c , d y w son funciones de η obtenidas por mínimos cuadrados. Los valores obtenidos para c tienen la siguiente forma:

$$c \approx 0.7058\eta - 0.0558. \quad (4.19)$$

La figura 4.6 muestra la grafica, tanto de c como de su aproximación anterior. Para d se obtiene la siguiente aproximación:

$$d \approx (D_R + jD_I), \quad (4.20a)$$

donde

$$D_R \approx 0.5750 + 0.5418\eta, \quad (4.20b)$$

$$D_I \approx 0.0117 + 0.021\eta. \quad (4.20c)$$

La figura 4.7 proporciona las graficas de la parte real y de la parte imaginaria de d , tanto de la función original como de su aproximación dada por (4.20a), (4.20b) y (4.20c).

Finalmente w está dada por una constante:

$$w = -1.0315 + j0.0406. \quad (4.21)$$

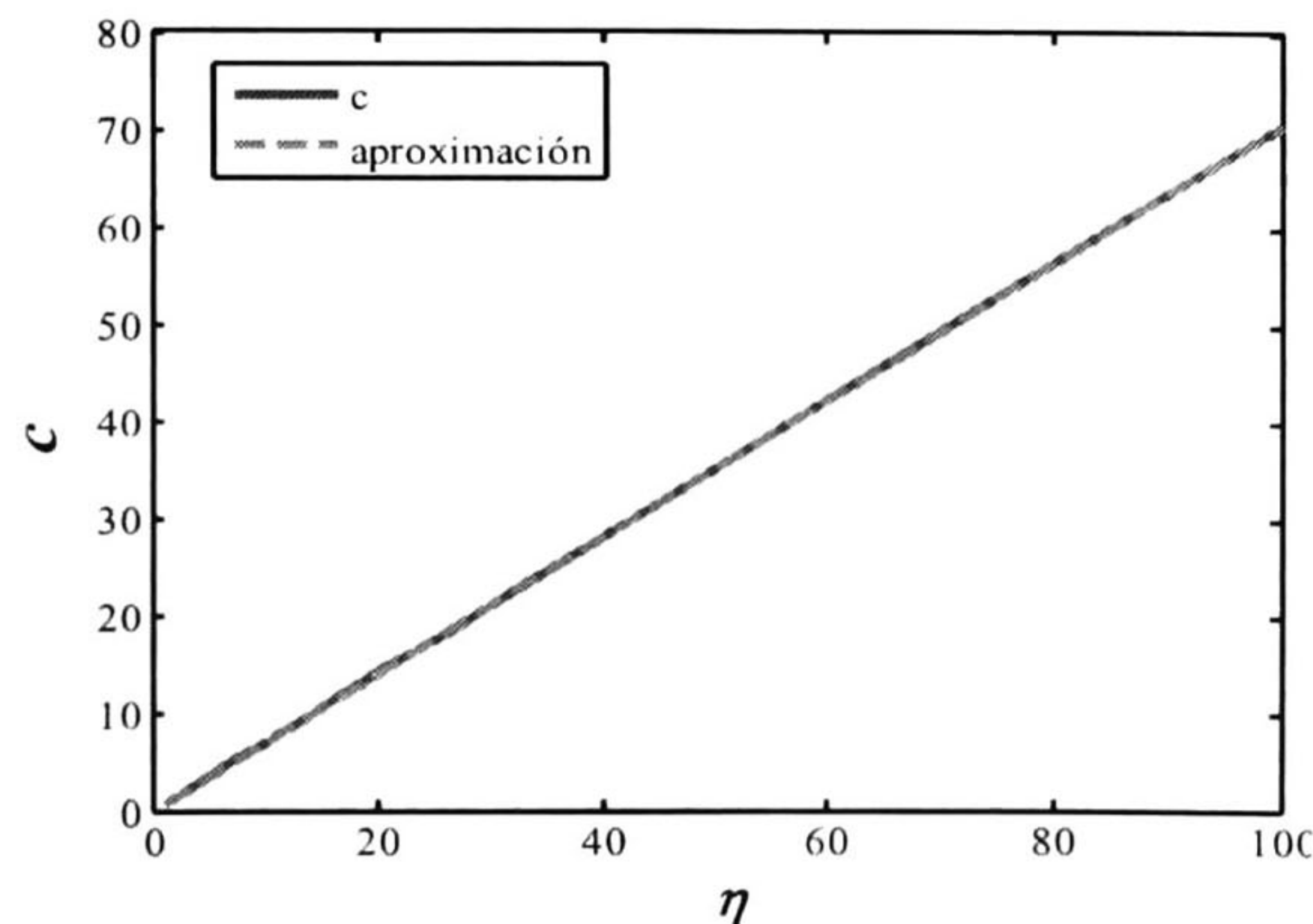


Fig. 4.6. Aproximación a los valores de c .

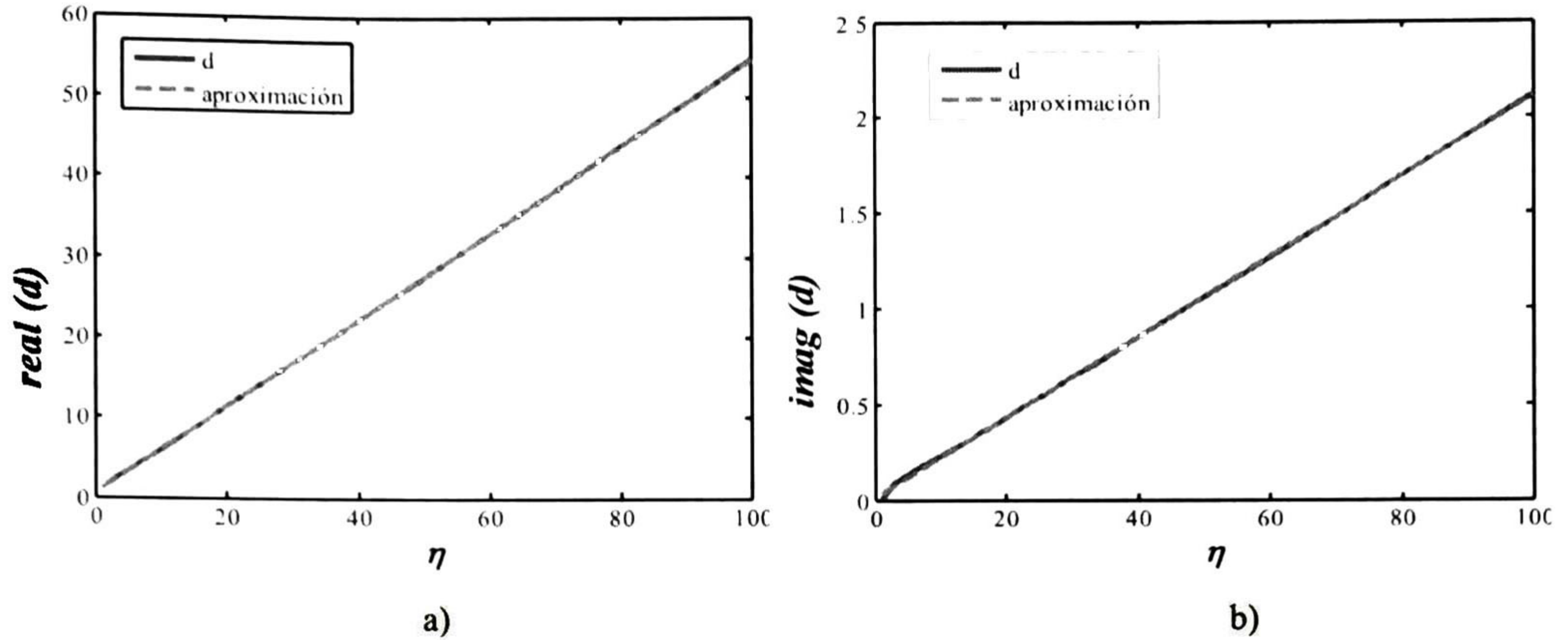


Fig. 4.7. Aproximación a los valores de d , a) parte real, b) parte imaginaria.

De esta manera la forma final de la fórmula aquí propuesta para la integral de Pollaczek es

$$J_{ik} \approx K_0 \left(\frac{j\xi}{1+\eta^2} \right) + \frac{Ae^{-\sqrt{j}\xi}}{4 + j(a\xi^b)^2} + Be^{-c\sqrt{j}\xi} \left(\frac{1}{(1-j\sqrt{j\xi\eta})^d} + \frac{1}{(1+j\sqrt{j\xi\eta})^d} \right). \quad (4.22)$$

Donde

$$a = A_R + jA_I$$

$$b = B_R + jB_I$$

$$c = C_R + jC_I$$

$$A = \begin{cases} 2, & \eta < 1 \\ 1, & \eta \geq 1 \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} 0, & \eta < 1 \\ \frac{1}{8}, & \eta \geq 1 \end{cases}$$

$$A_R = \begin{cases} 0.7945 + 0.3688\eta^{1.7534}, & \eta < 1 \\ 0.7058\eta - 0.0558, & \eta \geq 1 \end{cases}$$

$$A_I = \begin{cases} 0.0435\eta^2 + 0.0119\eta - 0.4196, & \eta < 1 \\ 0, & \eta \geq 1 \end{cases}$$

$$B_R = \begin{cases} 0.4081 + 0.0423\eta^{0.099}, & \eta < 1 \\ 1, & \eta \geq 1 \end{cases}$$

$$B_I = \begin{cases} 0.0587\eta^{1.1178} - 0.0256, & \eta < 1 \\ 0, & \eta \geq 1 \end{cases}$$

$$C_R = 0.5750 + 0.5418\eta,$$

$$C_I = 0.0117 + 0.0210\eta,$$

$$d = (-1.0315 + j0.0406).$$

4.6 EVALUACIÓN GLOBAL DE FÓRMULAS

Un problema con las fórmulas y con los métodos aproximados para la solución de la integral de Carson y la integral de Pollaczek es que no existen evaluaciones confiables y de amplio rango para todos ellos. En el caso de Pollaczek, Uribe, *et. al.*, introdujeron mapas de contorno [12] para evaluar errores de algunas fórmulas y métodos; no obstante, esto no se ha realizado para la integral de Carson en ninguno de sus casos, ni tampoco para la de Pollaczek en los casos donde los conductores no se encuentran a la misma profundidad. Los mapas de contorno se aplican ahora en la evaluación de las fórmulas descritas anteriormente en este capítulo.

Metodología para la Evaluación de Fórmulas

En el capítulo III se introdujeron las variables adimensionales ξ y η a través de las expresiones (3.3b) y (3.3c). Además, fue posible determinar que las integrales de Carson y Pollaczek son funciones de ξ y η solamente, al igual que el término de impedancia de tierra “ Z_T ” para el caso de Carson. En el caso de Pollaczek, esto también es cierto pero para el caso particular de cables en disposición horizontal; es decir, cuando $\chi=0$. Los mapas de contorno o de error introducidos por Uribe, *et. al.*, en la referencia [12] expresan el error relativo de acuerdo a la expresión (4.23) en un solo mapa; permitiendo de esta manera establecer rangos de aplicación para cada fórmula.

Además de los mapas de contorno, se presentan comparaciones de los resultados obtenidos por medio de fórmulas aproximadas contra aquellos obtenidos mediante los algoritmos híbridos. Estas comparaciones ayudarán al mejor entendimiento en cuanto a la

utilización de los mapas, al mismo tiempo que representan otro punto de validación para las fórmulas que aquí se analizan.

Mapas de Error

Los mapas de error en las figuras de la 4.8 a la 4.11 muestran los errores relativos para las aproximaciones a la integral de Carson dentro de los rangos prácticos de ξ y η dados por (4.24). Cada mapa de error fue obtenido al muestrear 3000 puntos, 30 valores de η por 100 valores de ξ , y a través de la siguiente expresión

$$\delta = \frac{|Z_{T\text{ referencia}} - Z_{T\text{ aproximada}}|}{|Z_{T\text{ referencia}}|} \times 100, \tag{4.23}$$

donde δ representa el error relativo porcentual. $Z_{T\text{ referencia}}$ corresponde al valor obtenido con el algoritmo híbrido y $Z_{T\text{ aproximada}}$ al valor obtenido con el método o fórmula a evaluar.

De acuerdo con los rangos de las variables físicas proporcionadas en la tabla 3.1 y tomando en cuenta los rangos proporcionados en las expresiones (3.11a) y (3.11b), se establecen los siguientes rangos de interés para ξ y para η en el caso de líneas:

$$10^{-5} \leq \xi \leq 10^3 \tag{4.24a}$$

y

$$10^{-3} \leq \eta \leq 10^3 \tag{4.24b}$$

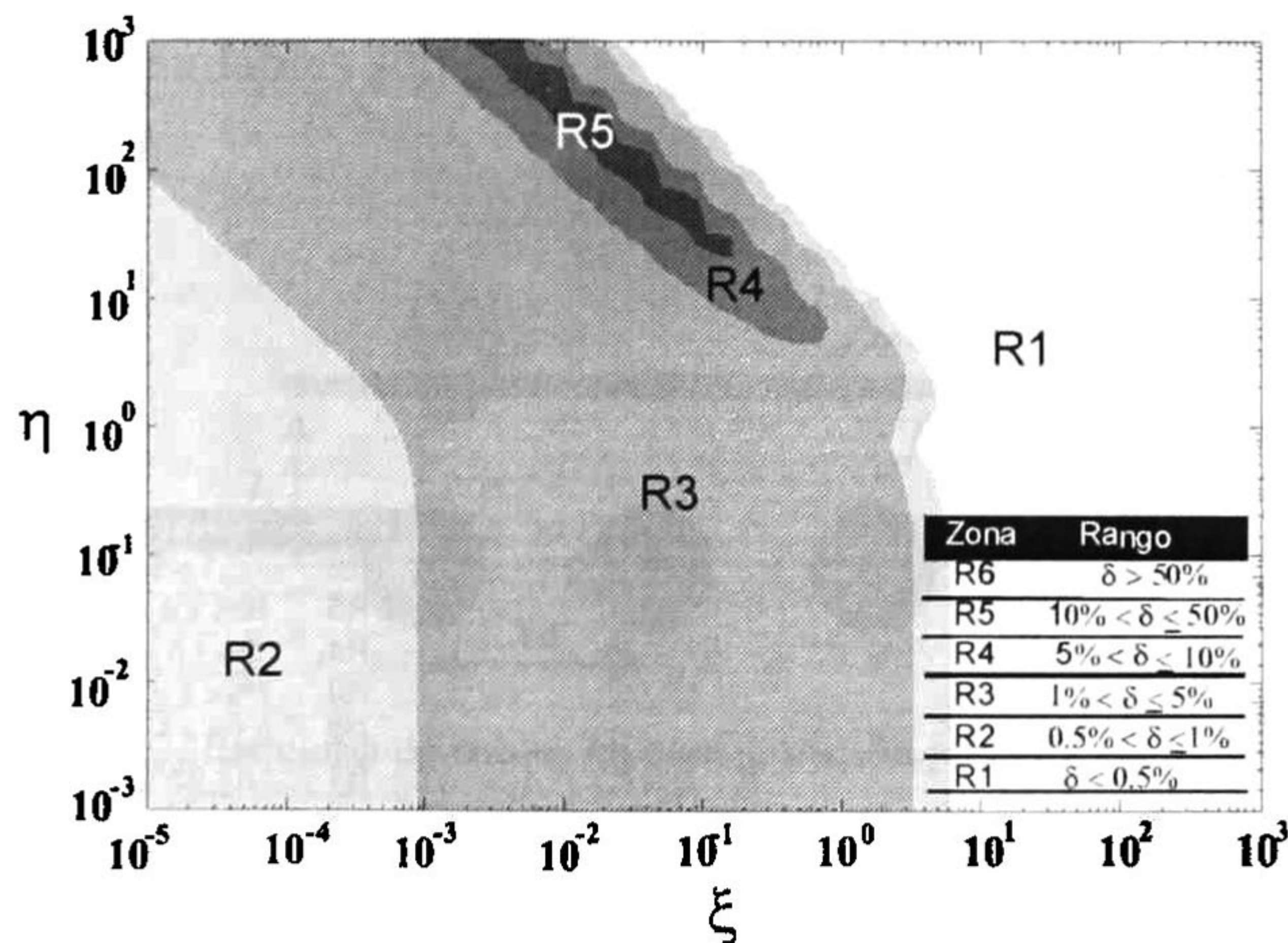


Fig. 4.8. Mapa de error relativo porcentual para la fórmula de Gary y Dubanton.

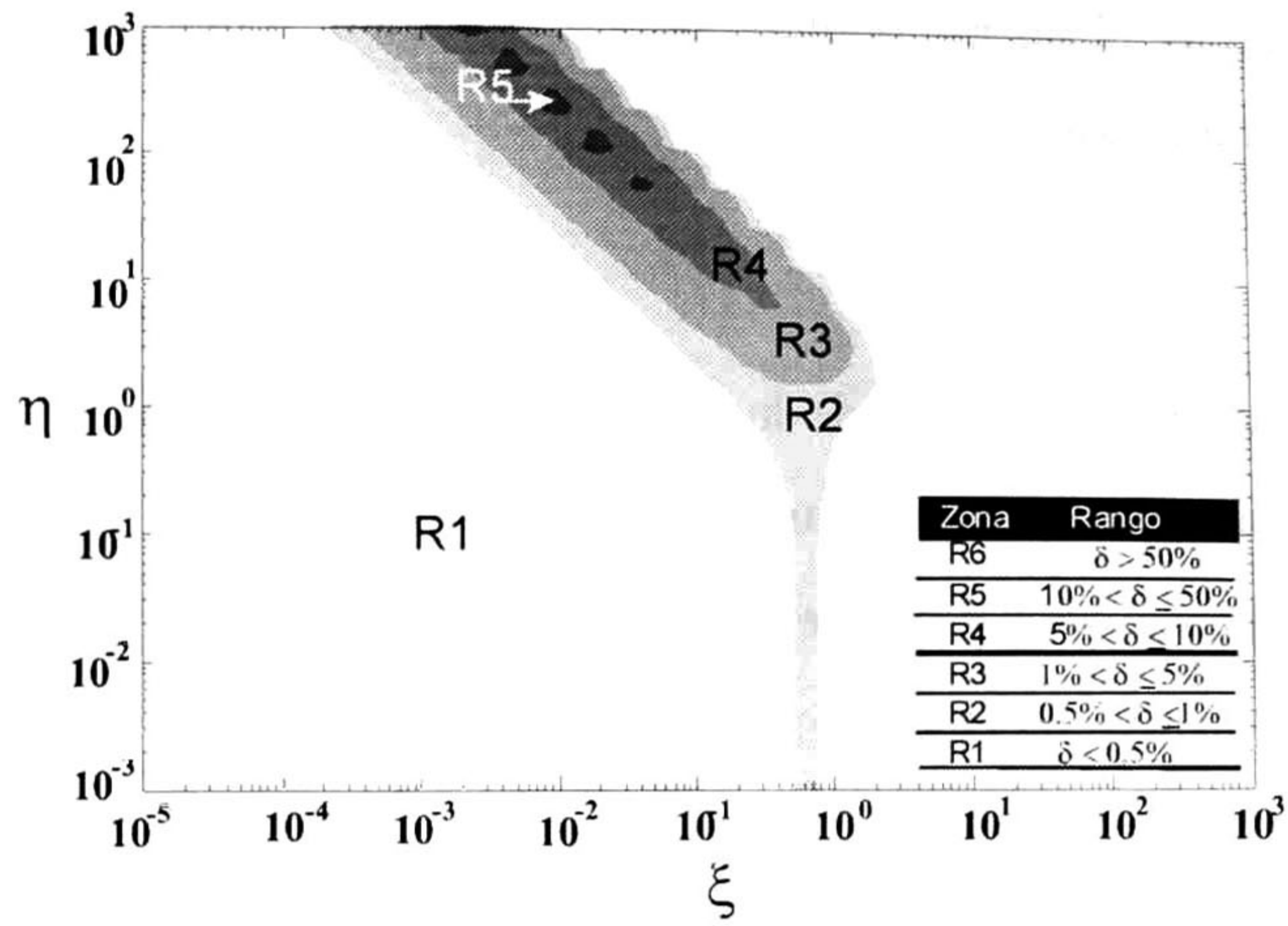


Fig. 4.9. Mapa de error relativo porcentual para la fórmula de Alvarado y Betancourt.

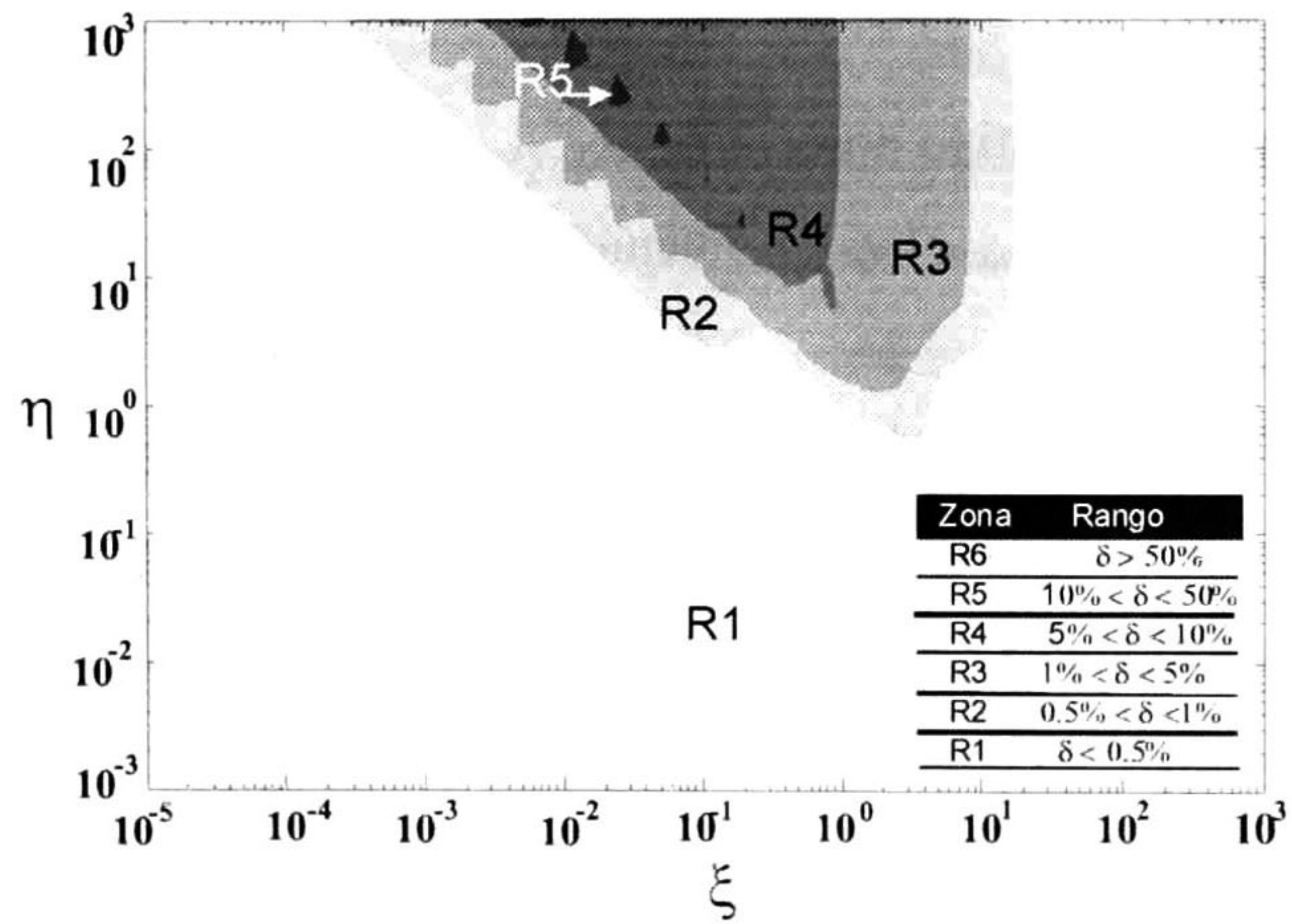


Fig. 4.10. Mapa de error relativo porcentual para la fórmula de Noda.

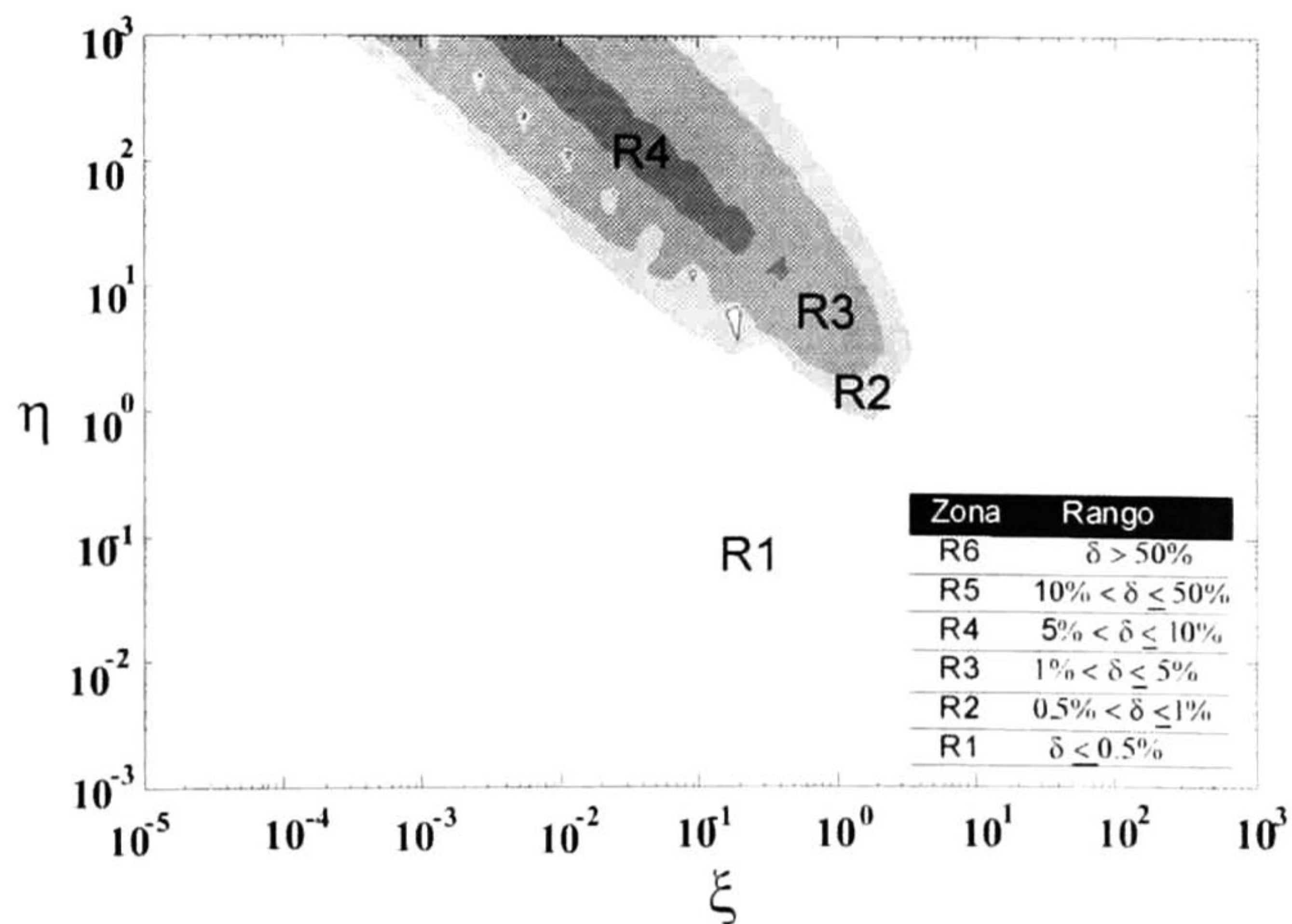


Fig. 4.11. Mapa de error relativo porcentual para la fórmula Propuesta.

De los mapas anteriores se puede apreciar que la fórmula de Gary y Dubanton entrega la precisión más baja para la gran mayoría de los casos, en tanto que la fórmula de Noda presenta zonas R2, R3 y R4 más prominentes que las formulaciones restantes; no obstante esta última, presenta una menor cantidad de zonas R5. La fórmula propuesta no presenta zonas R5 y por lo tanto reporta mejores resultados para la gran mayoría de los casos; esto en comparación con las demás formulaciones.

La figura 4.12 muestra un sistema de cables en disposición horizontal, en tanto que las figuras de la 4.13 a la 4.16 presentan los mapas de error relativo para éste caso ($\chi=0$) de las fórmulas WW, PP, SGG y Propuesta. Dichos mapas comprenden el siguiente rango práctico:

$$10^{-4} \leq \xi \leq 10^2, \quad (4.25a)$$

y

$$10^{-3} \leq \eta \leq 10^2. \quad (4.25b)$$

De la comparación de las figuras 4.13 a 4.16 se puede observar que las formulaciones SGG y Propuesta entregan los mejores resultados para todo el rango considerado; sin embargo, la fórmula Propuesta presenta zonas R4 y R5 mucho más pequeñas que las entregadas por la fórmula SGG, además de presentar sólo zonas R1 en el rango $10^{-3} \leq \eta < 0.6$. En resumen, de las cuatro fórmulas evaluadas a través de las figuras 4.13 a 4.16 se sigue que las más recomendables son la SGG y la que aquí se propone.

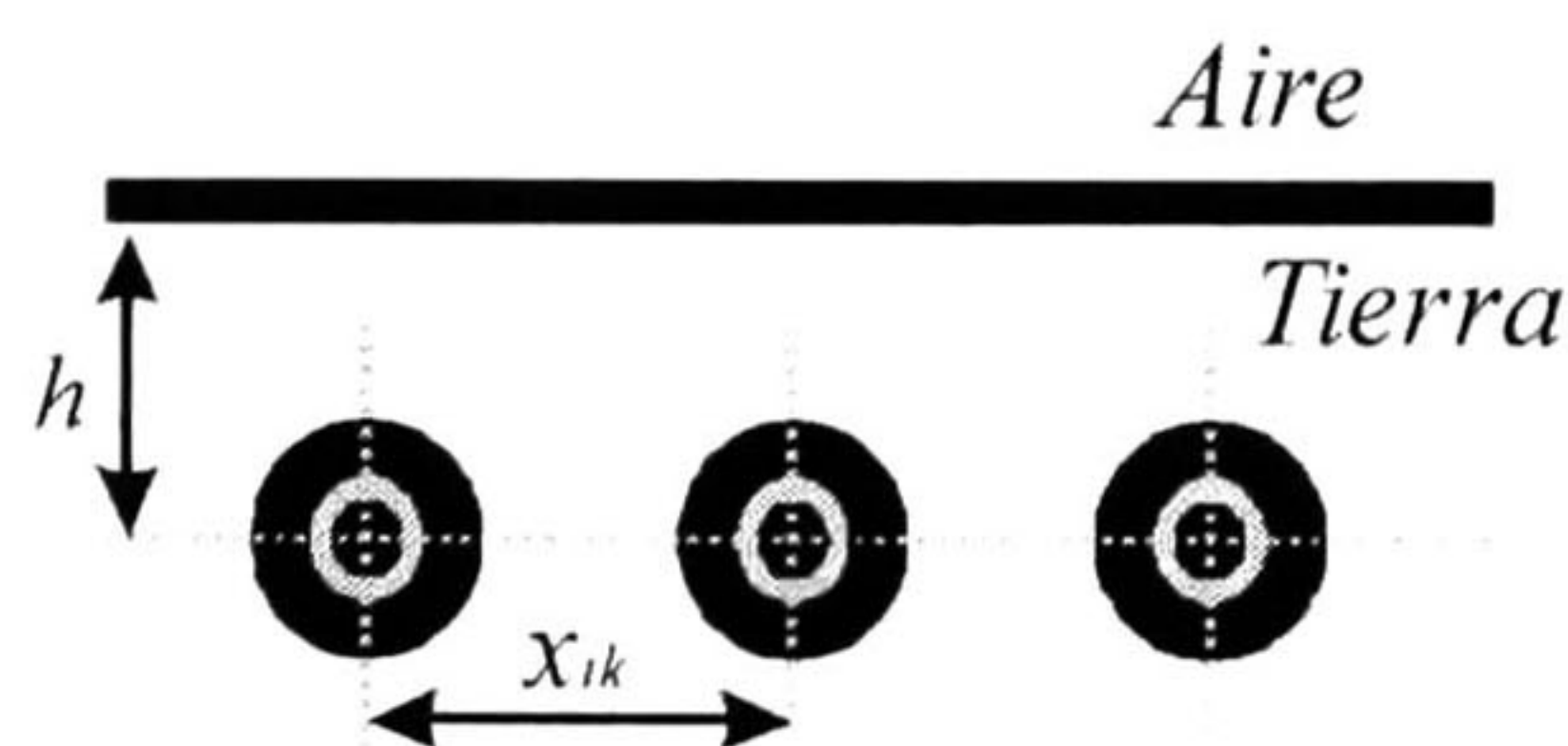


Fig. 4.12. Esquema de cables en configuración paralela horizontal.

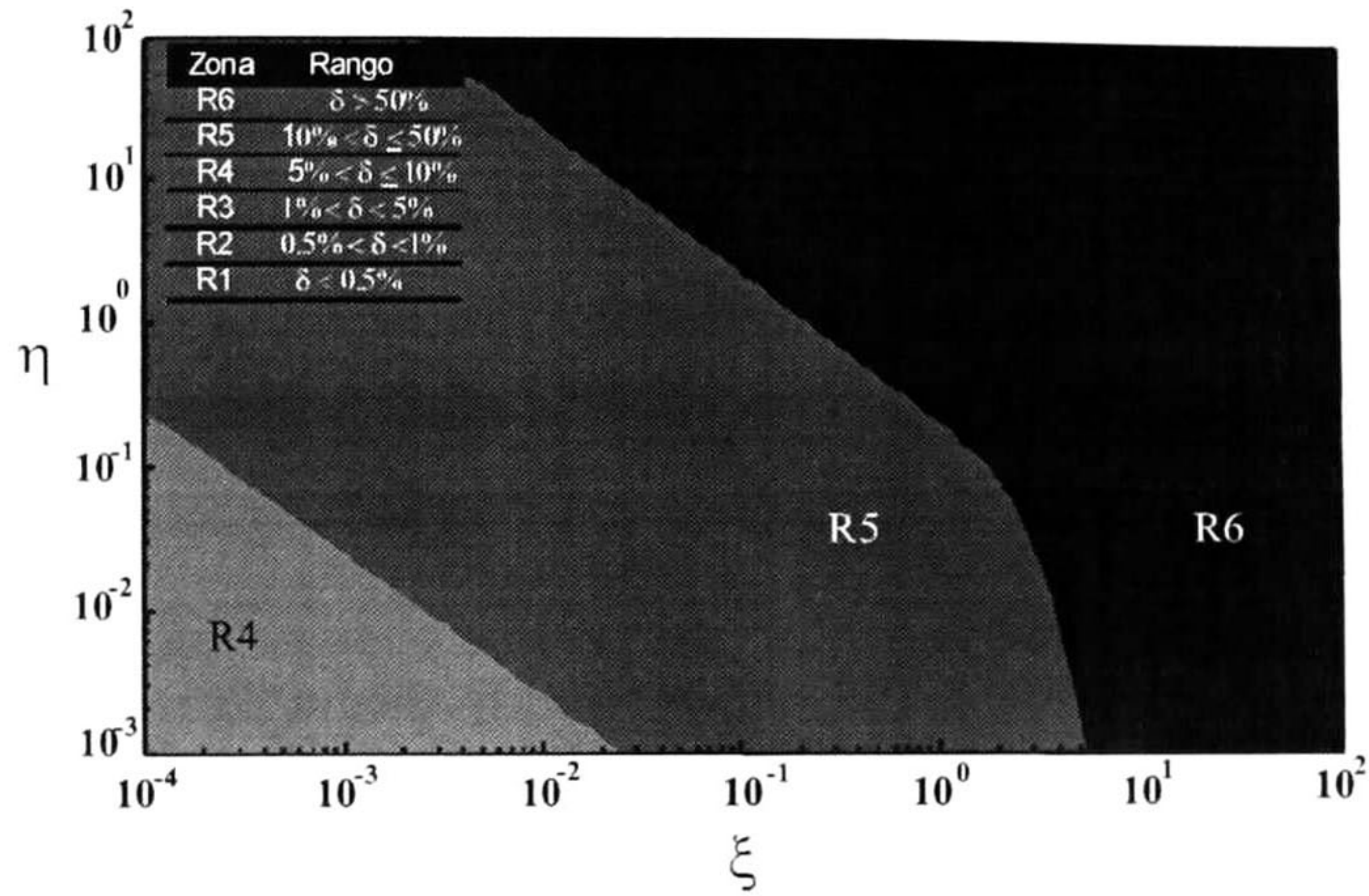


Fig. 4.13. Mapa de error relativo porcentual para la fórmula de Wedepohl y Wilcox con $\chi = 0$.

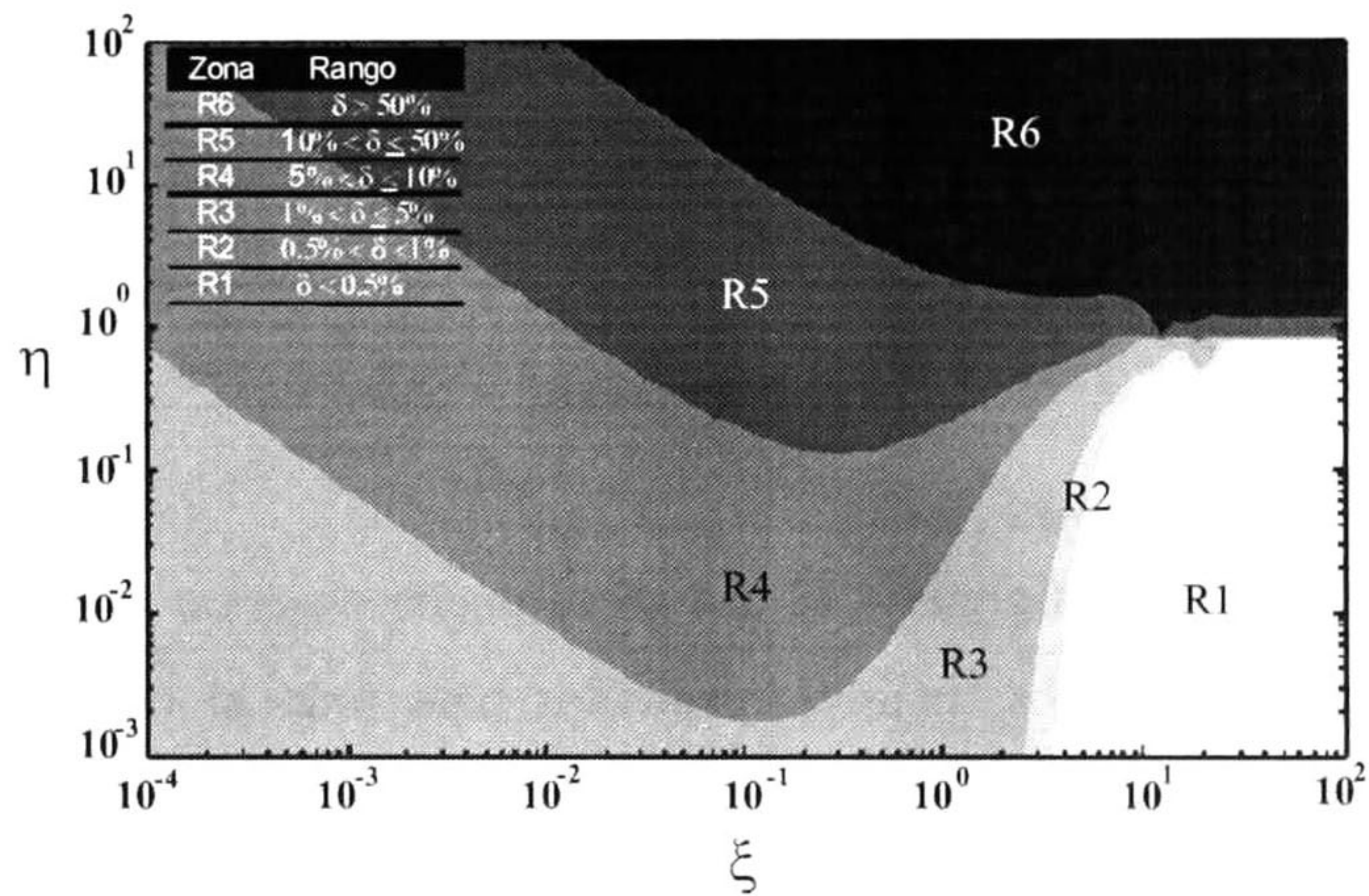


Fig. 4.14. Mapa de error relativo porcentual para la fórmula de Per Petterson con $\chi = 0$.

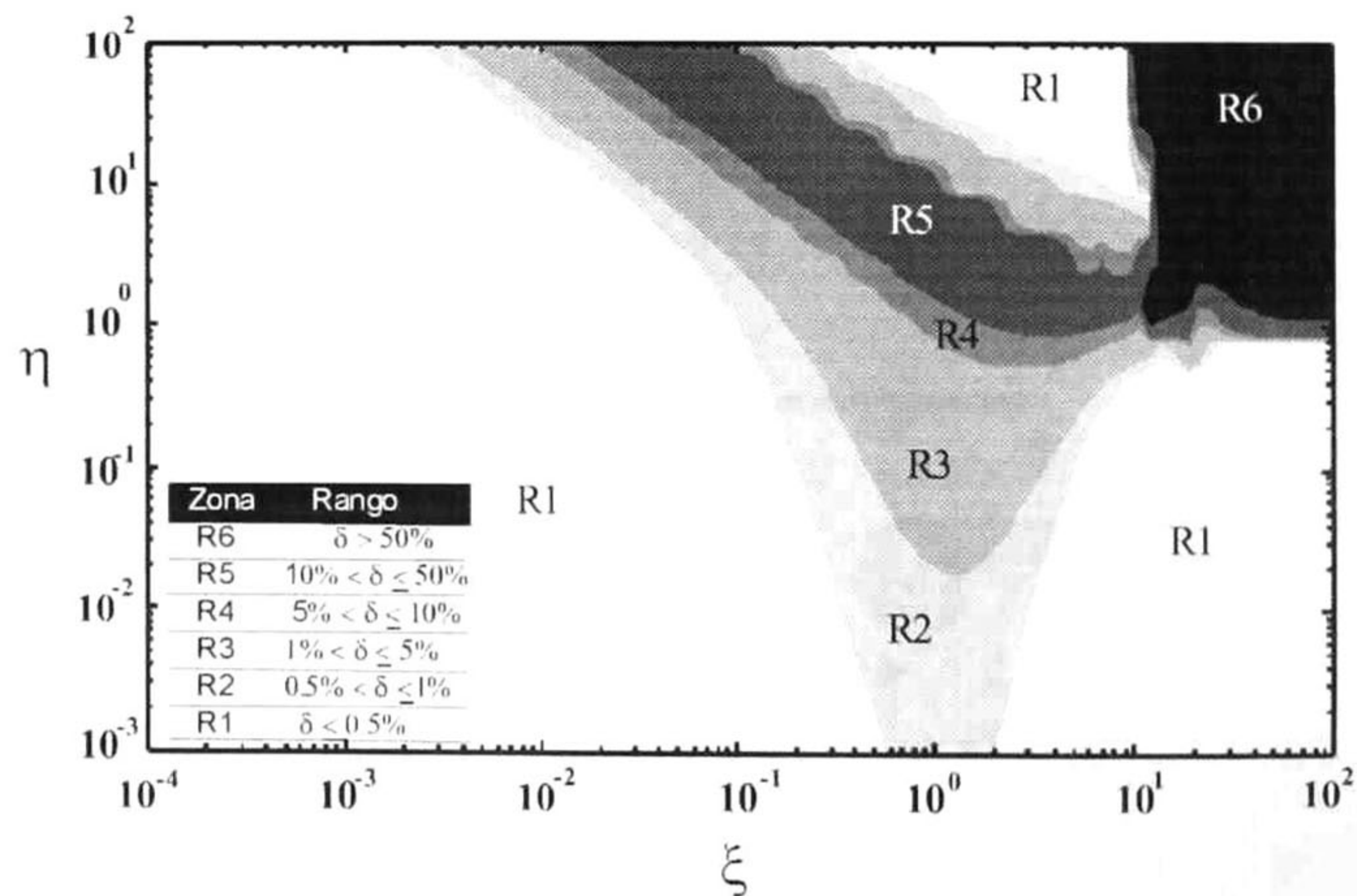


Fig. 4.15. Mapa de error relativo porcentual para la fórmula de Saad, Gaba y Giroux con $\chi = 0$.

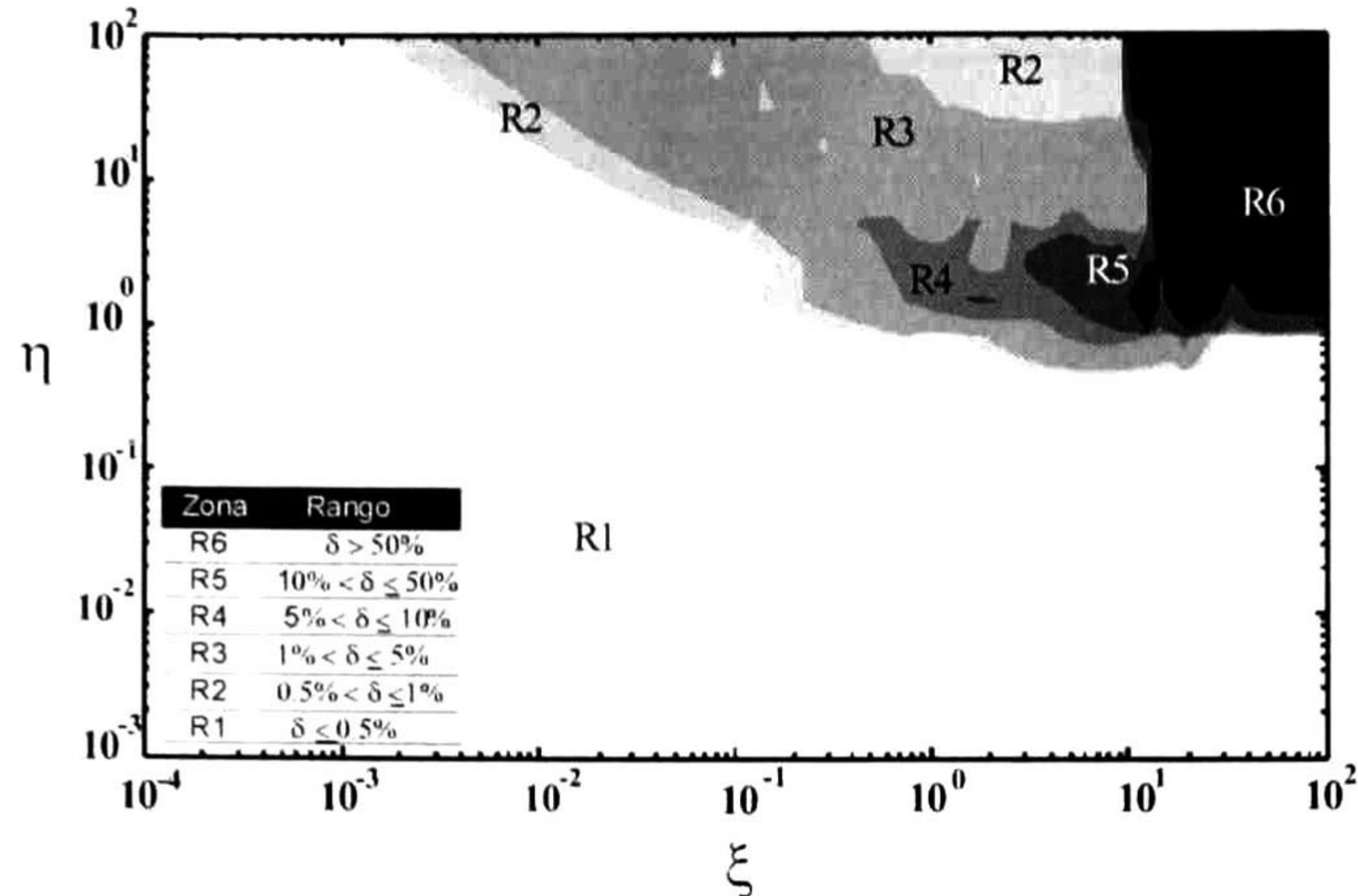


Fig. 4.16. Mapa de error relativo porcentual para la fórmula Propuesta con $\chi = 0$.

Para el caso general de cables subterráneos la variable adimensional χ , que está definida por la expresión (4.6), considera el efecto de configuraciones no horizontales dentro del término de impedancias de tierra, como se esquematiza en la figura 4.17. A continuación se obtienen los mapas de error de la fórmula SGG y de la Propuesta para los siguientes valores de χ : 0.3, 0.6 y 0.9. En la figura 4.18 se muestran los mapas de la fórmula SGG. De la comparación de estos, junto con el mapa de la figura 4.15, se observa que para el rango $\eta > 1$ el valor de χ no modifica la distribución del error; sin embargo, en el rango $\eta \leq 1$ se observa un crecimiento gradual de las zonas R3, R4 y R5; es decir, se disminuye el rango de aplicabilidad de la aproximación.

La figura 4.19 muestra los mapas de error para la fórmula propuesta y para los valores de χ arriba mencionados. La comparación de estos mapas, entre sí y con los de la figura 4.16, muestra que para valores de $\eta > 1$ la distribución del error no se modifica en forma apreciable. Y que para valores de $\eta \leq 1$ hay un ligero crecimiento de las zonas R2, R3 y R4; sin embargo, éste es mucho menor al presentado por la fórmula SGG.

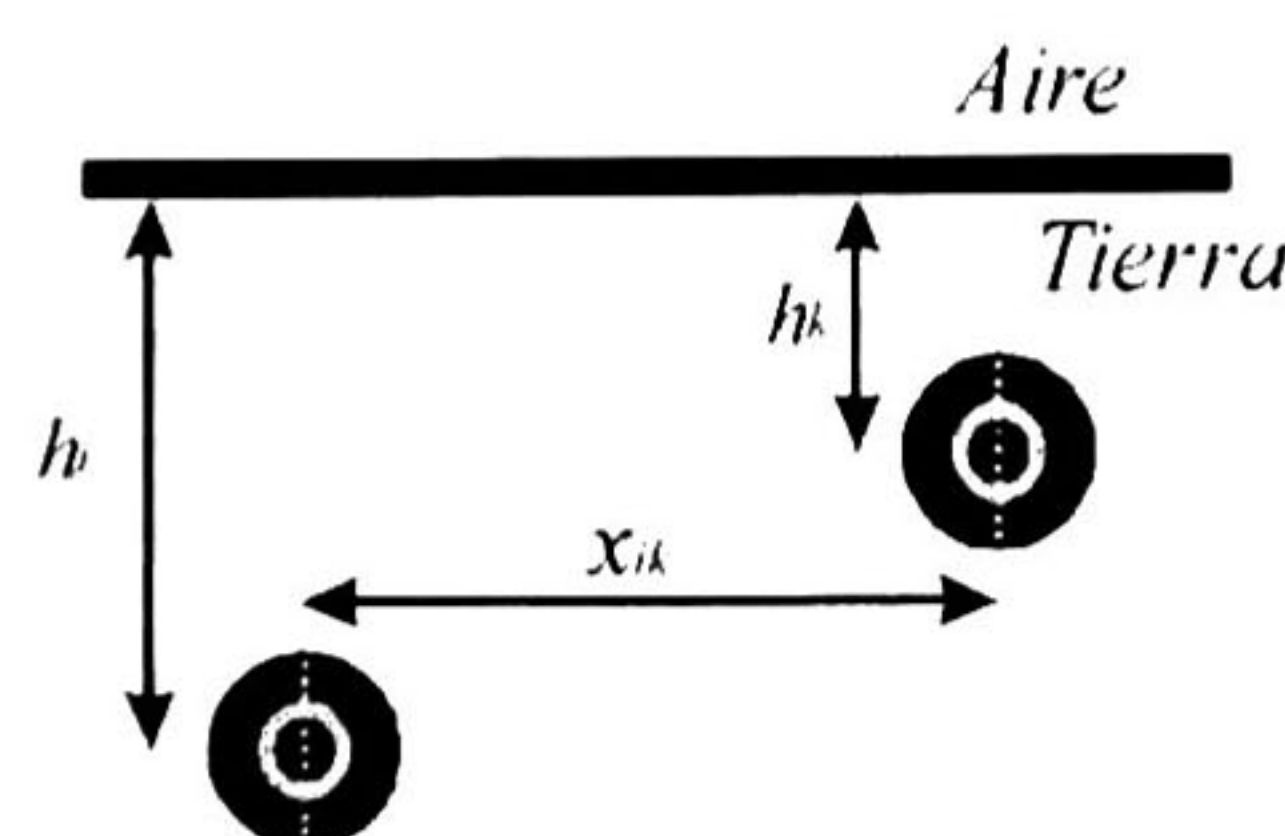


Fig. 4.17. Esquema de configuración para cables a distintas profundidades.

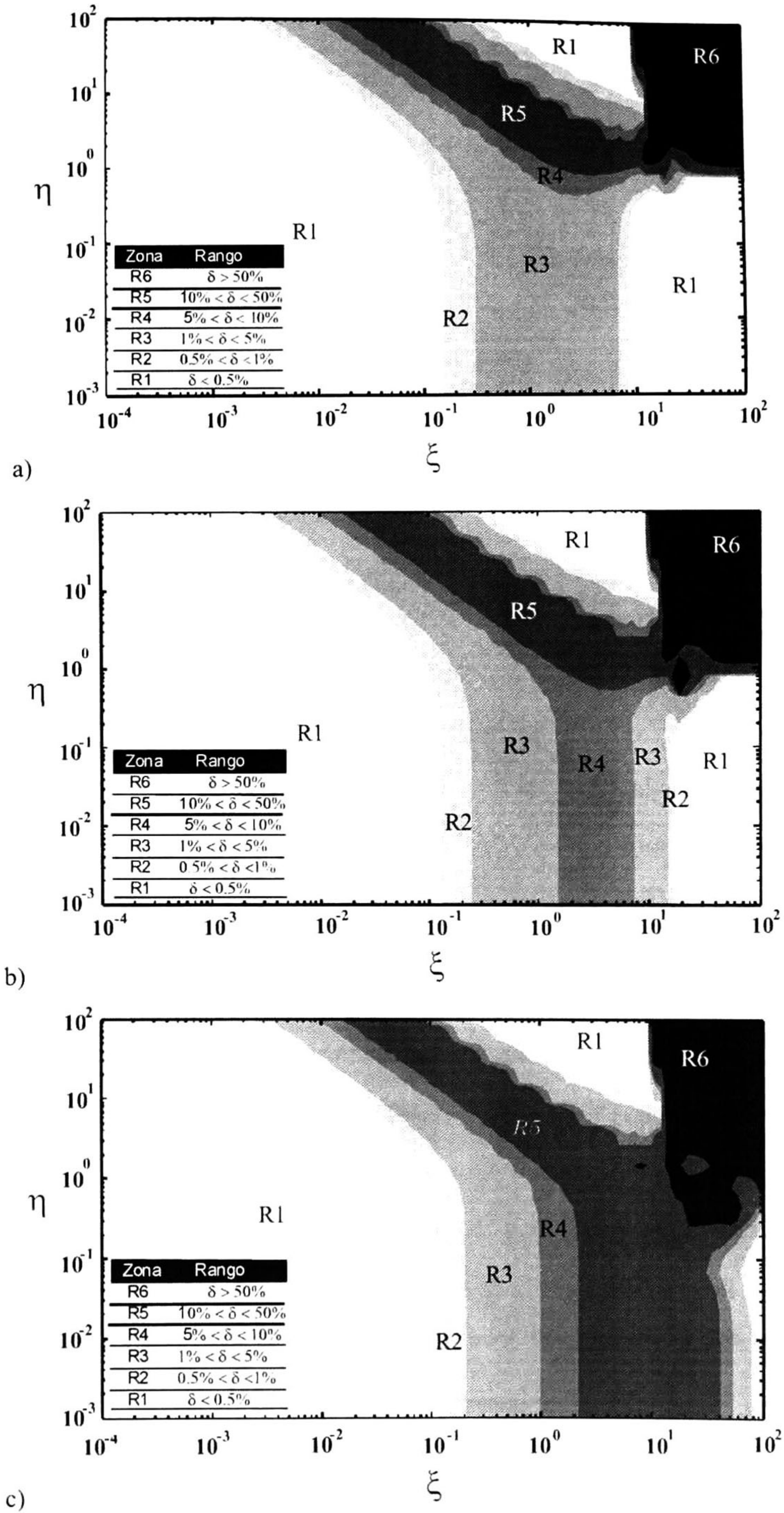


Fig. 4.18. Mapas de error relativo porcentual para la fórmula SGG con $\chi =$ a) 0.3, b) 0.6 y c) 0.9.

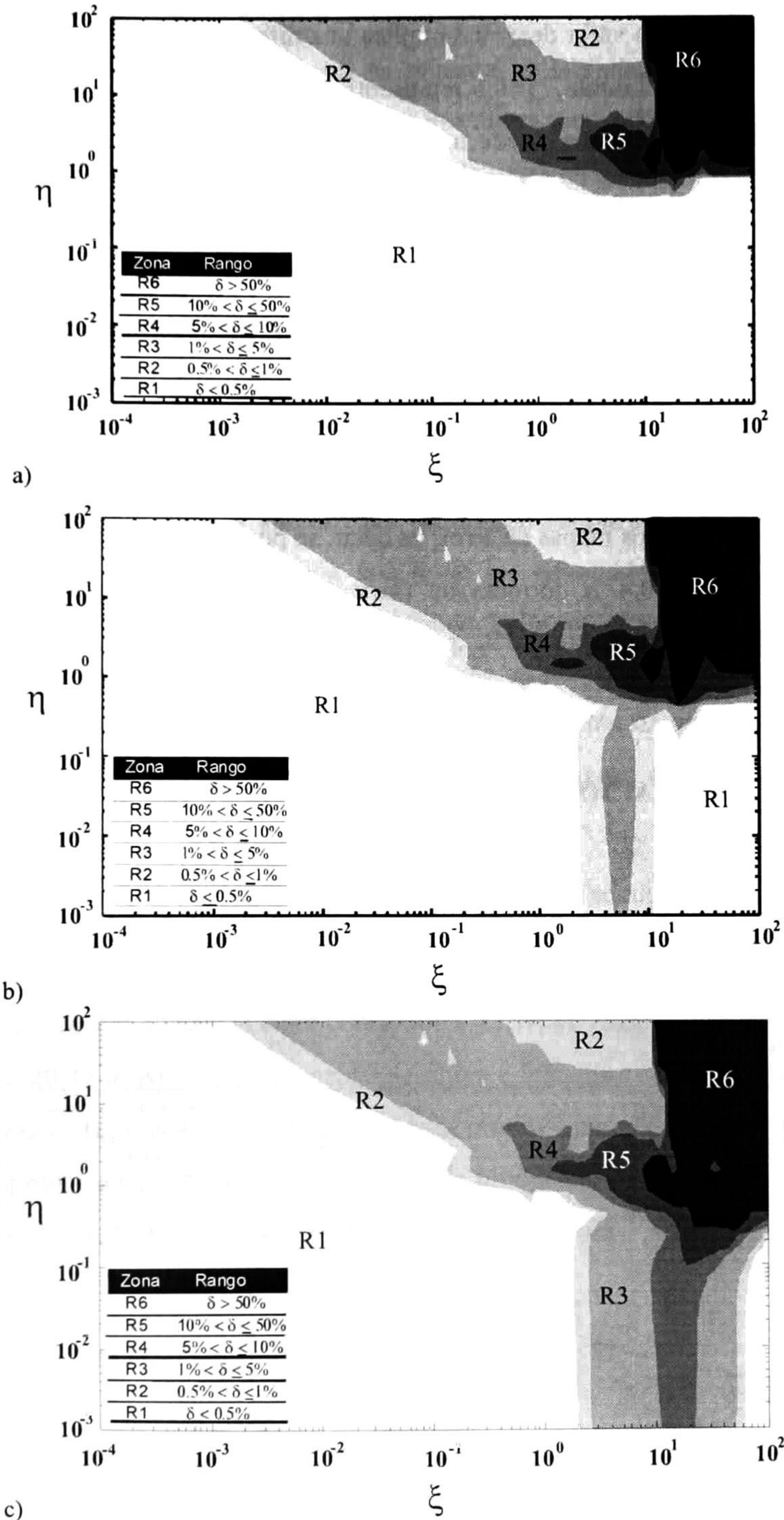


Fig. 4.19. Mapas de error relativo porcentual para la fórmula Propuesta con $\chi =$ a) 0.3, b) 0.6 y c) 0.9.

Cabe mencionar que un valor de $\chi=0.3$ implica una diferencia entre las profundidades de los conductores de casi el doble, $\chi=0.6$ representa una diferencia del cuádruple y $\chi=0.9$ es una diferencia de 19 o también puede implicar que un cable se encuentra prácticamente arriba de otro.

Uso de los Mapas de Error

Los mapas de error pueden ser de gran utilidad tanto para seleccionar una determinada fórmula como para predecir el error relativo, tanto del término Z_T como del resultado en la simulación de un transitorio. La figura 4.20 presenta los resultados obtenidos para el caso de impedancia propia en líneas aéreas. En dicha figura se puede observar de manera puntual la utilización de los mapas de error; es decir, se puede apreciar que para un valor de $\eta=0$ y un valor de $\xi=0.4$ la fórmula de Gary y Dubanton entrega un error relativo porcentual de aproximadamente 2.5% que concuerda bien con la región R3 donde se encuentra esta coordenada.

4.7 CASOS DE APLICACIÓN

Se presentan ahora algunos casos prácticos en los cuales la resistencia e inductancia de tierra son evaluadas en cierto rango de frecuencias. Además se analizan los errores concurrentes al calcular dichas componentes por medio de las diferentes fórmulas consideradas en esta tesis.

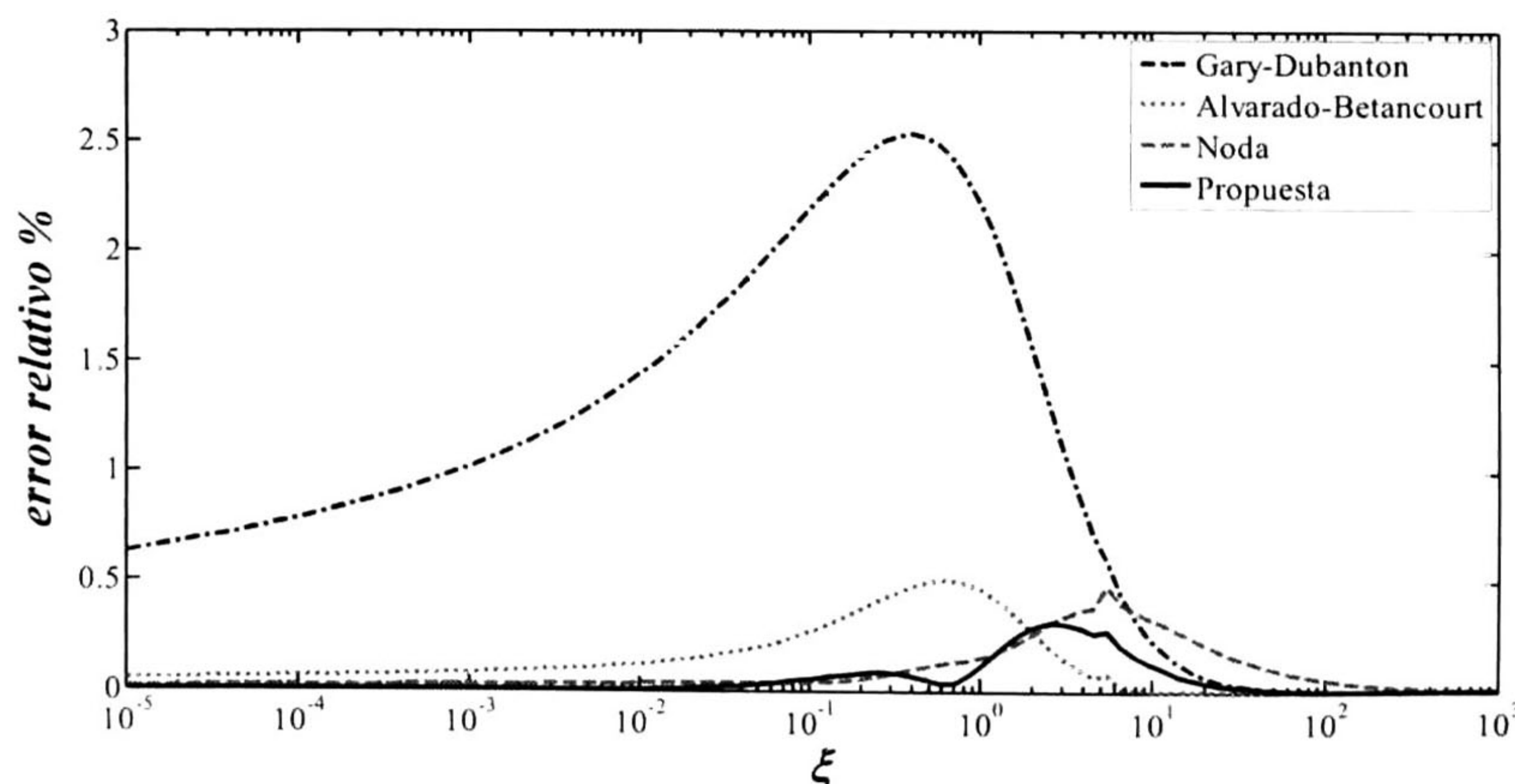


Fig. 4.20. Error relativo porcentual para $\eta=0$, Carson.

Caso I

Considere la línea de distribución que se muestra en la figura 4.21. Los conductores tienen un radio de $r=0.5\text{cm}$ y están colocados a una altura media de 10m, con una distancia entre ellos de 3m. Se asume que la resistividad de la tierra es igual a $100\ \Omega\cdot\text{m}$. Se calculan los valores de la impedancia propia y mutua de los conductores con respecto a la frecuencia mediante las fórmulas previamente expuestas y mediante el algoritmo híbrido descrito en la sección 3.4. La figura 4.22 muestra los parámetros propios, mientras que la figura 4.23 muestra los mutuos. Nótese la inclusión en ambas graficas de un recuadro que proporciona la grafica de los errores correspondientes.

En las figuras 4.22 y 4.23 se aprecia que la fórmula Propuesta y la fórmula de Noda entregan resultados de mayor precisión que la de los entregados por las formulaciones Gary-Dubanton y Alvarado Betancourt. No obstante, la fórmula Propuesta presenta mejores resultados en los casos de alta frecuencia $f > 10^4$, cabe resaltar que la precisión obtenida por medio de cualquiera de las fórmulas evaluadas en esta sección es bastante buena para el caso propio y para el caso mutuo aquí analizado, ya que ninguna fórmula rebasa el 4% de error.

Caso II

Considere ahora el sistema mostrado en la figura 4.12 con las siguientes características: profundidad $h=76.2\text{cm}$, distancia entre conductores 15.24cm , radio de 3.45cm y resistividad de la tierra de $20\ \Omega\cdot\text{m}$. Ambas componentes resistiva e inductiva de la impedancia de tierra se muestran en las figuras 4.24 y 4.25 para el caso propio y para el mutuo respectivamente. De dichas figuras puede observarse que la fórmula propuesta, entrega mejores resultados a los obtenidos con las formulaciones Ametani, Wedepohl y SGG.

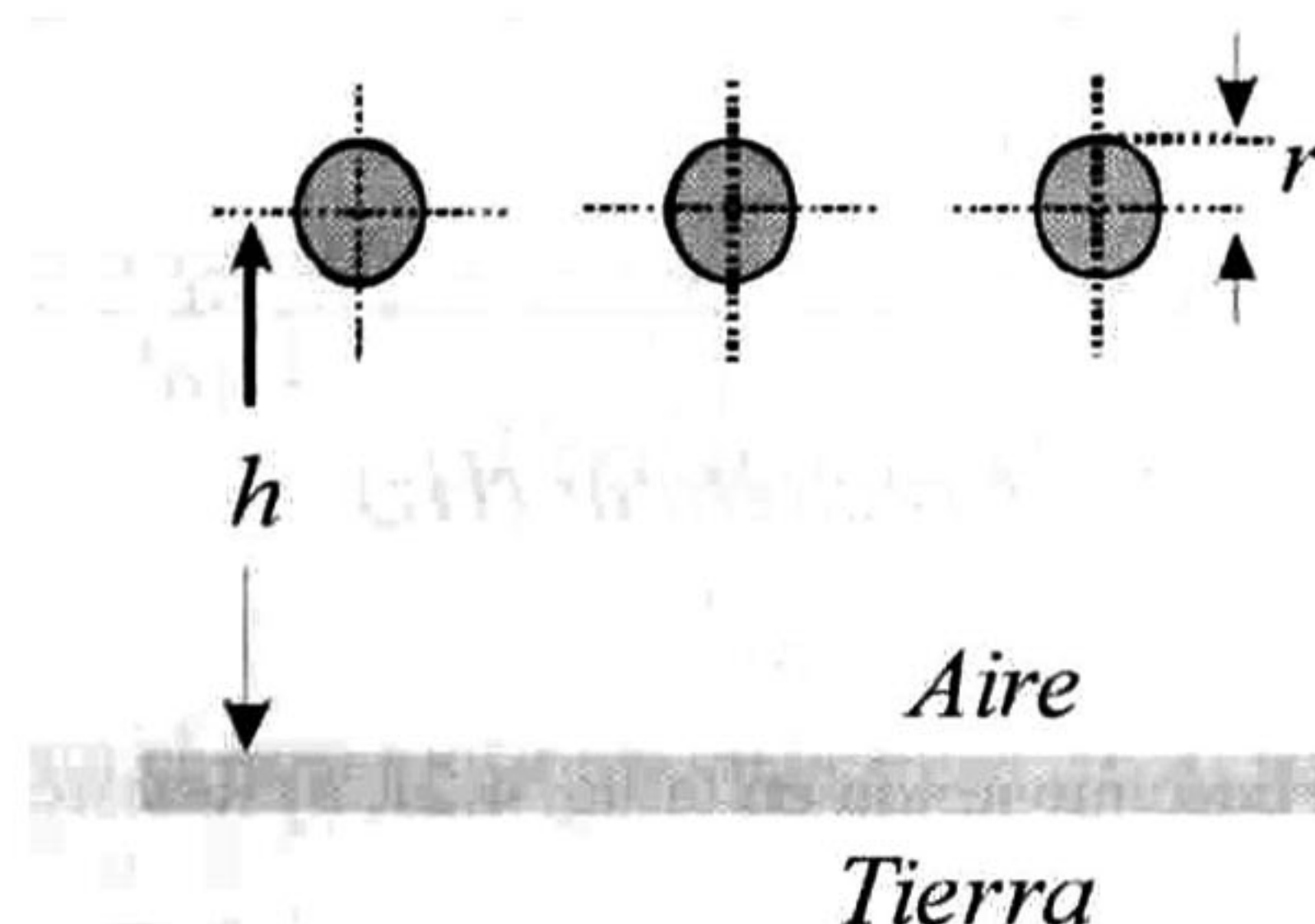
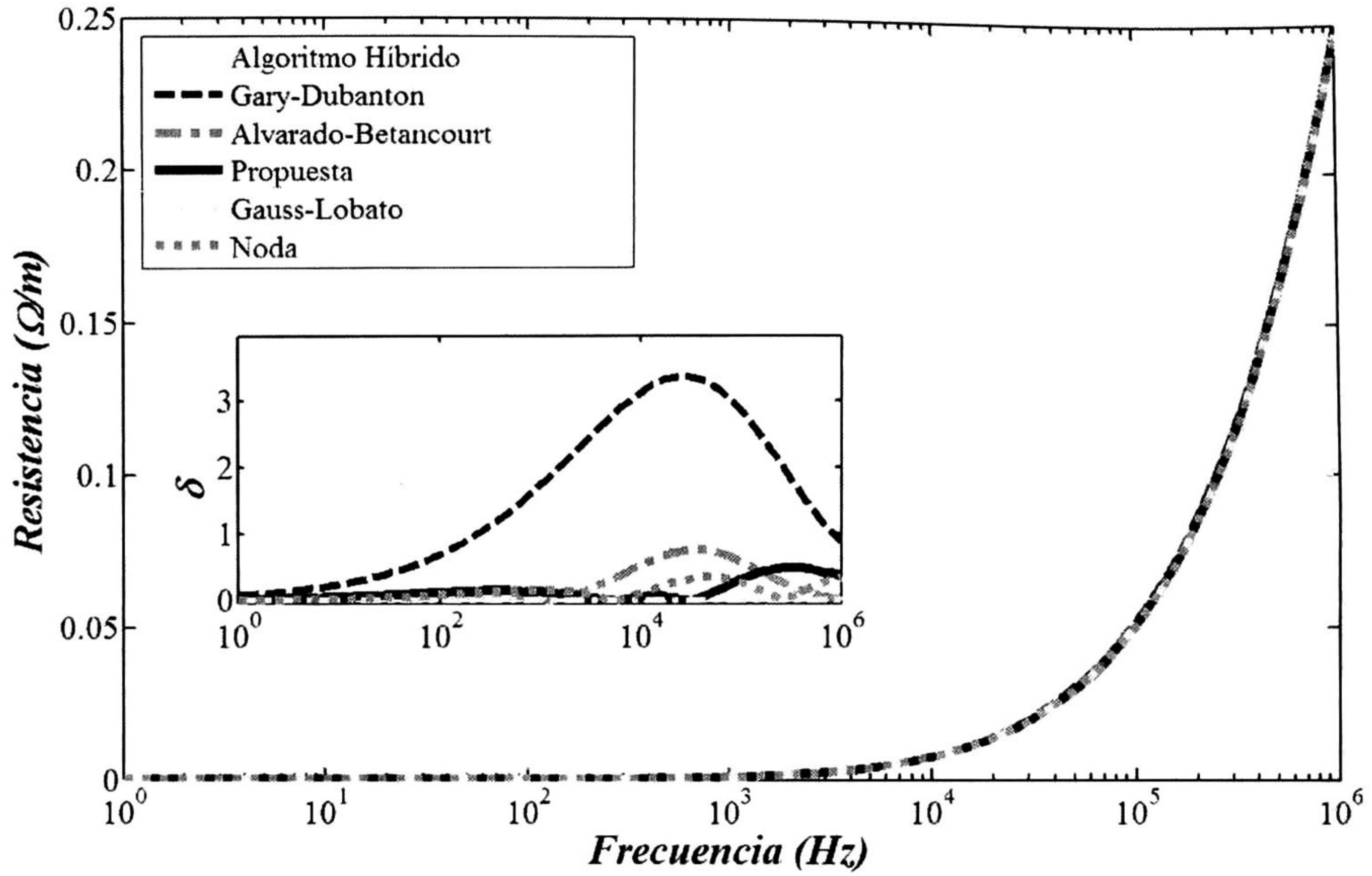
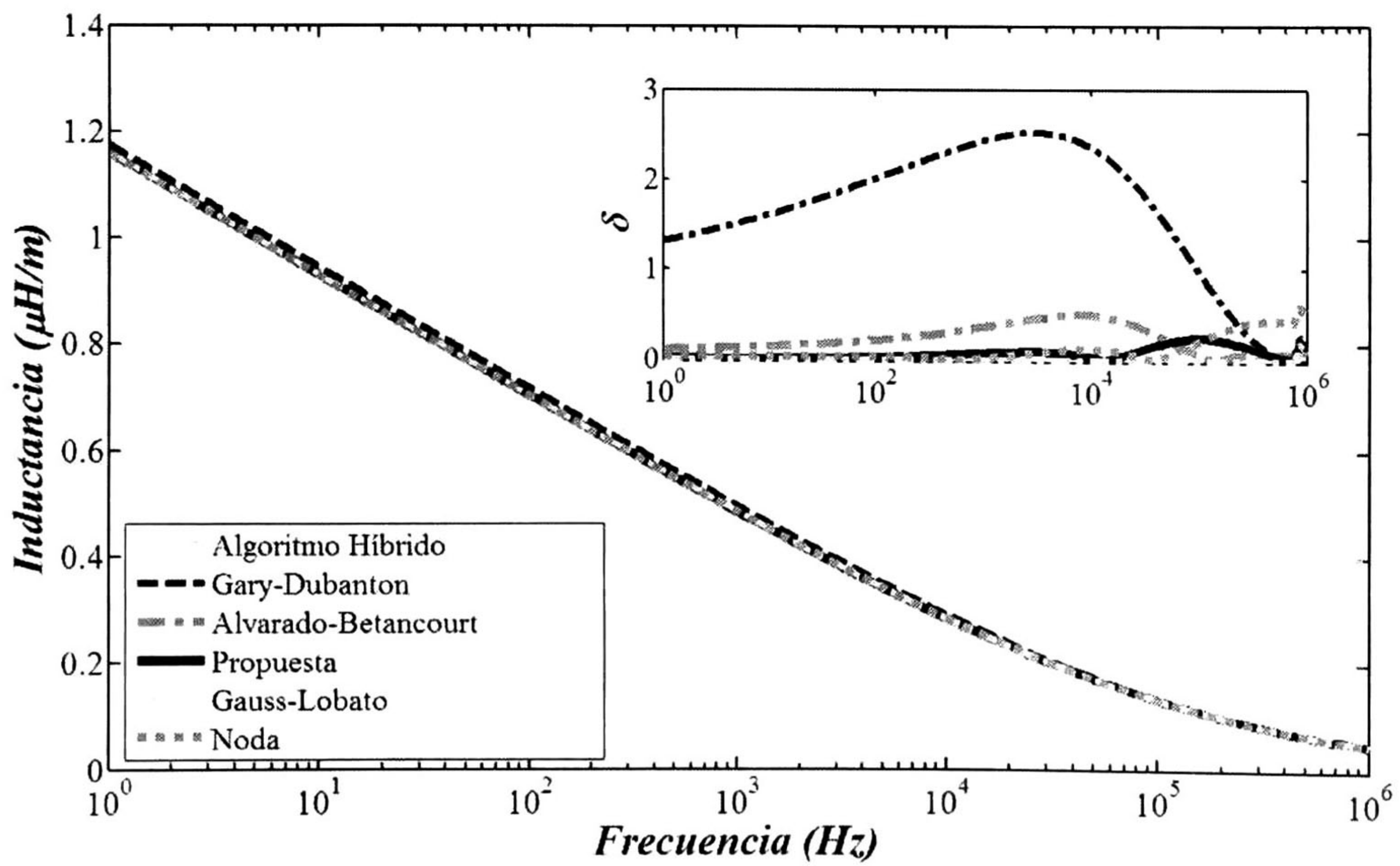


Fig.4.21. Sección transversal de línea de distribución.

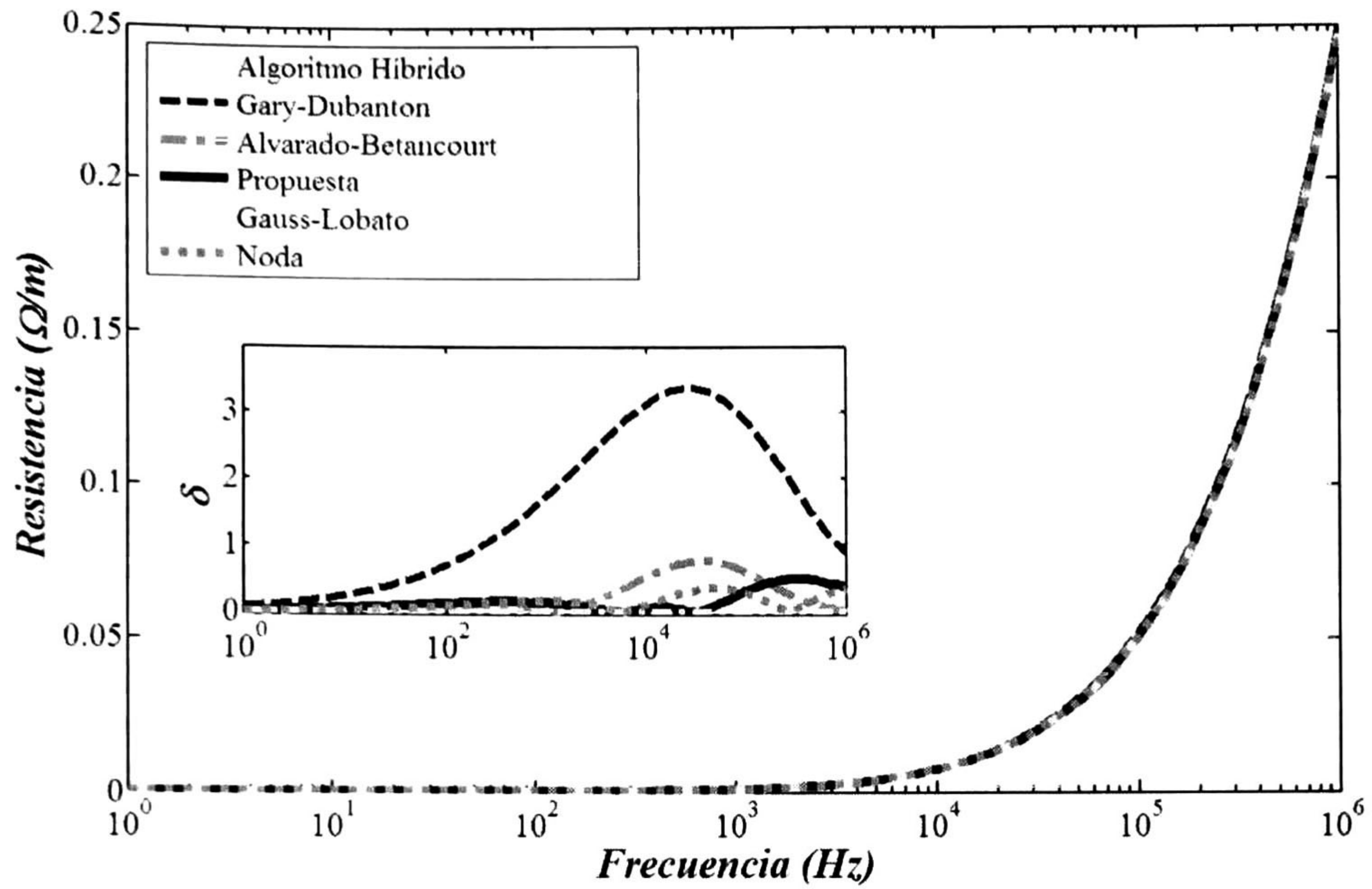


a)

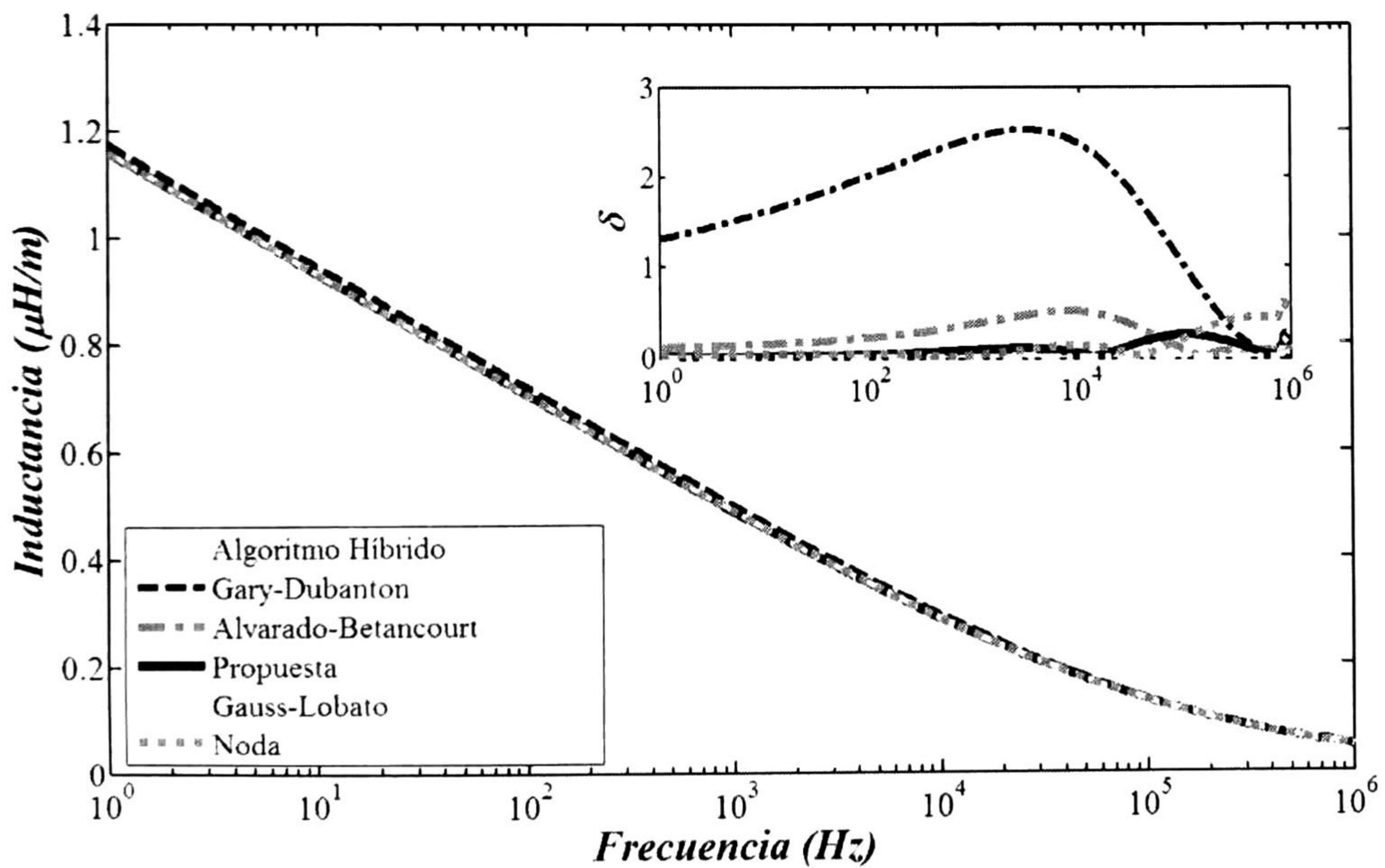


b)

Fig. 4.22. Z_T propia para el caso mostrado en la fig. 4.21, a) Resistencia, b) Inductancia.

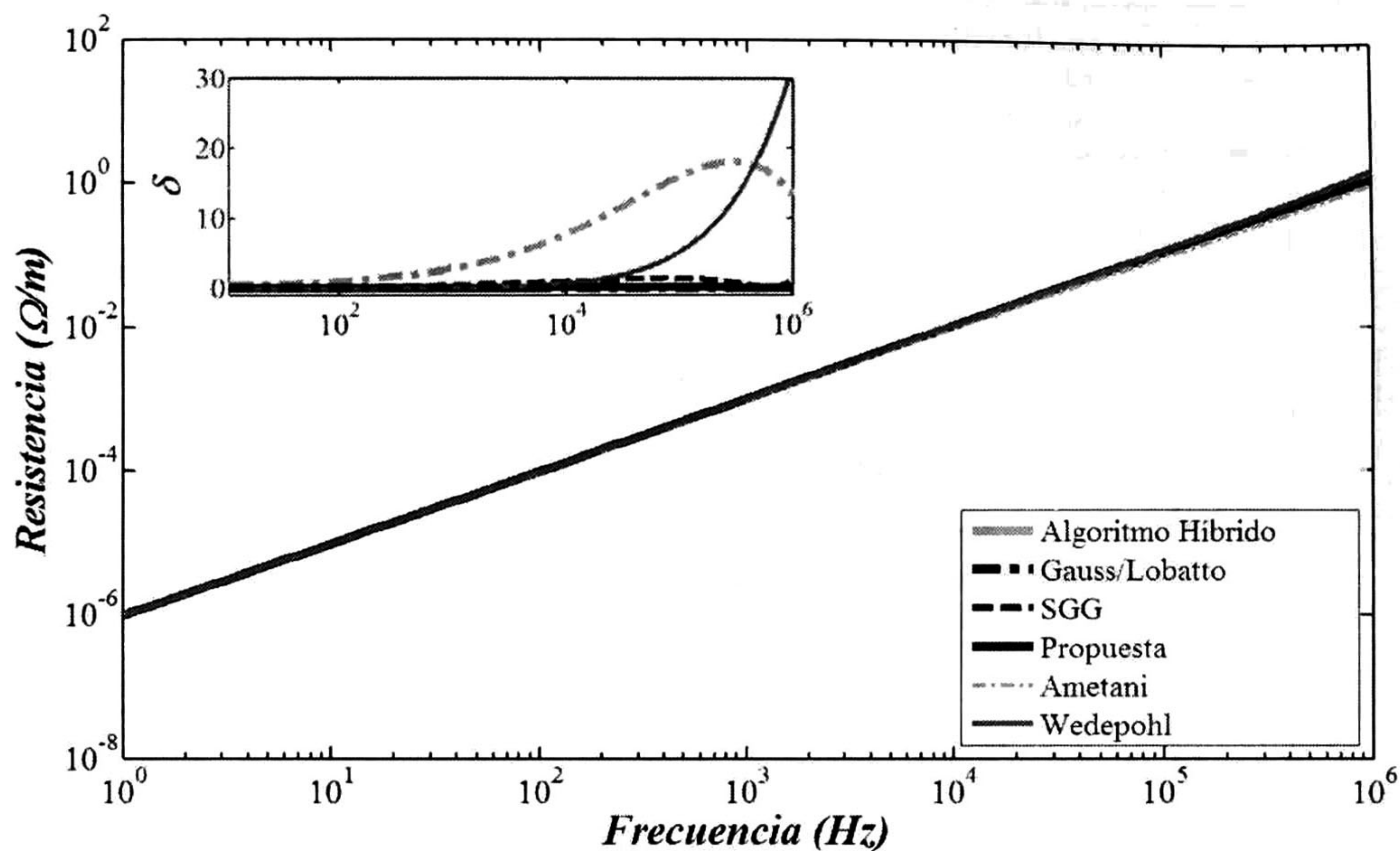


a)

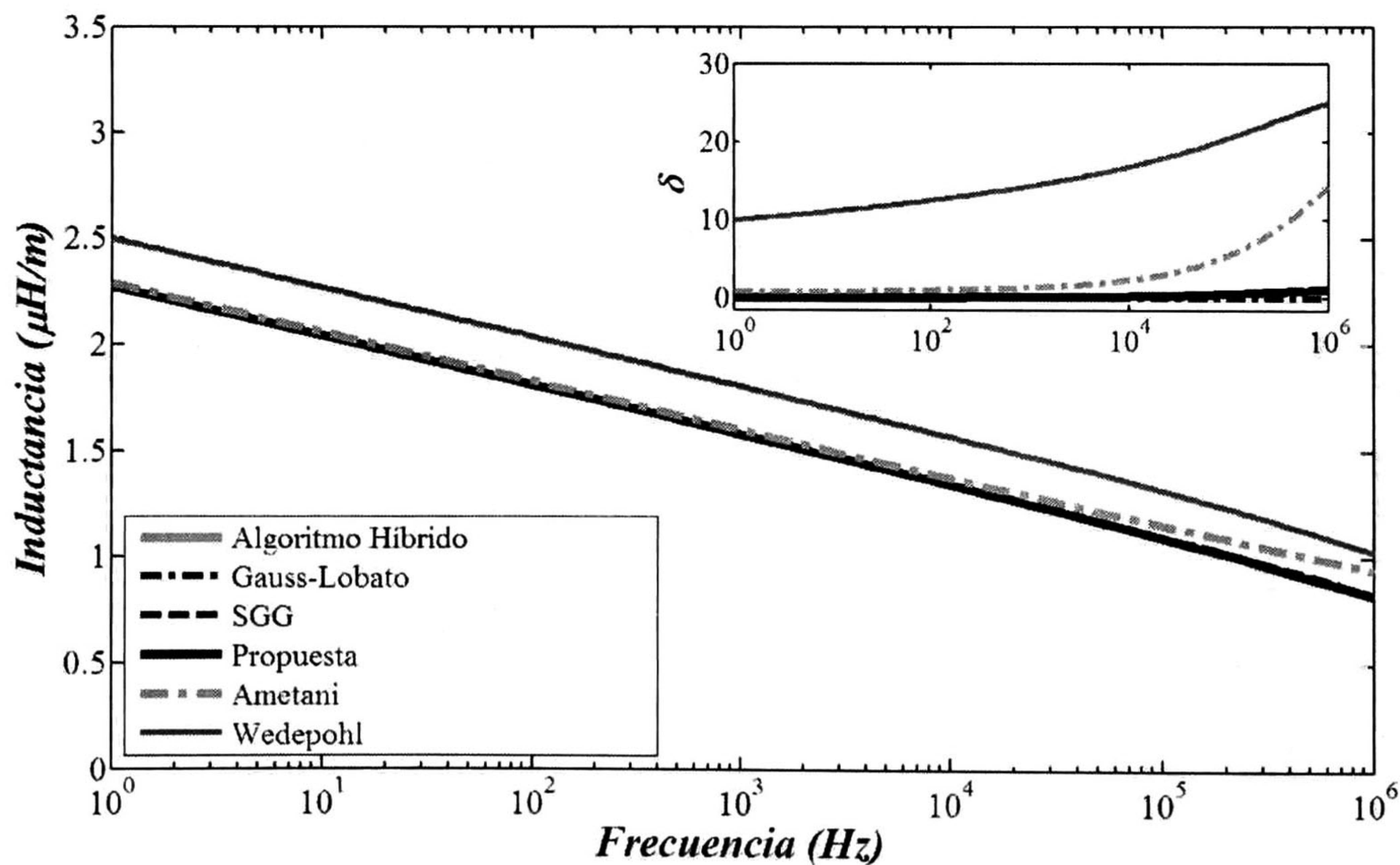


b)

Fig. 4.23. Z_T mutua para el caso mostrado en la fig. 4.21, a) Resistencia, b) Inductancia.



a)



b)

Fig. 4.24. Z_T propia para el sistema de la fig. 4.12, a) Resistencia b) Inductancia.

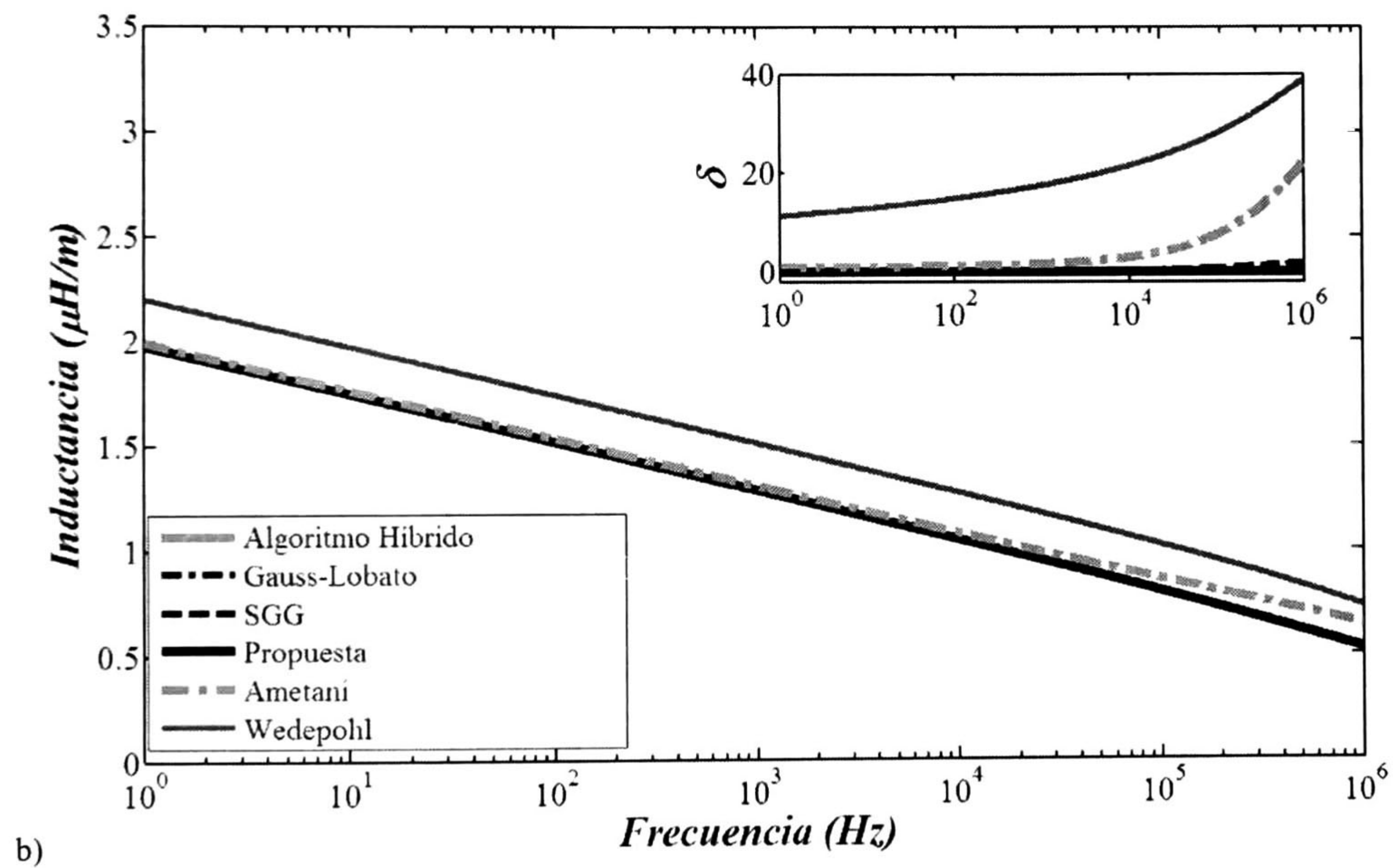
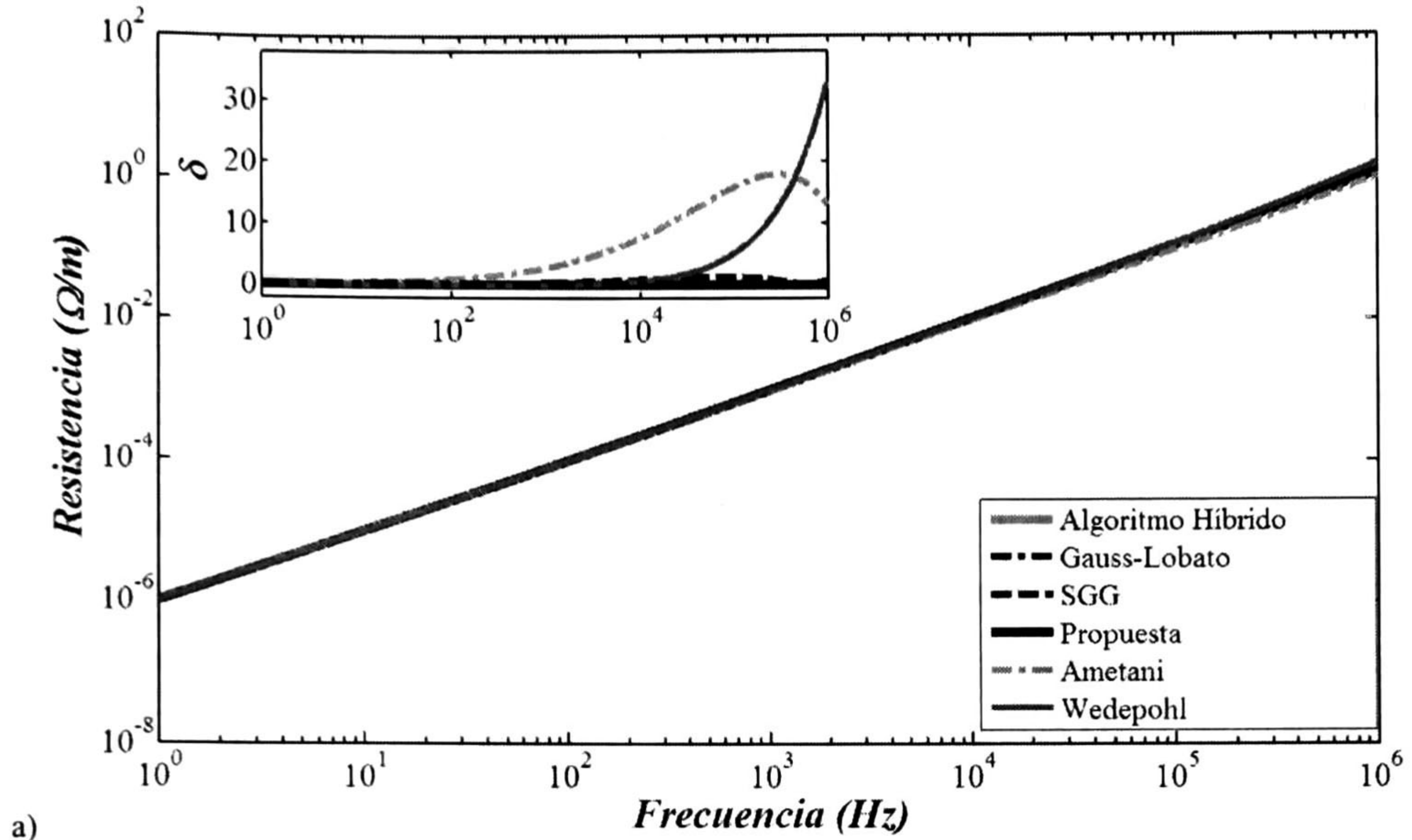


Fig. 4.25. Z_T mutua para el sistema de la fig. 4.12, a) Resistencia b) Inductancia.

Caso III

Ahora se considera el caso especial de inducción EM donde se calcula la Z_T mutua para el sistema esquematizado en la figura 4.26 ya que, tanto en estado estable como en estado

transitorio, las líneas inducen voltajes y corrientes entre sí y en cualquier otro sistema conductor presente en el entorno. Es sabido que existen ocasiones en la práctica en las cuales un sistema o sistemas de transporte, comunicaciones, o de suministro de agua, energía, gas, petróleo, etc., comparten el mismo derecho de vía, o se encuentran a cierta distancia de un sistema de transmisión de energía eléctrica, aéreo o subterráneo, de baja o alta tensión.

Además, cuando ocurre una falla franca a tierra dentro del sistema, este produce un sobrevoltaje inducido a cualquier sistema conductor vecino, dicho sobrevoltaje en ocasiones puede representar un peligro. En estas condiciones la precisión de las técnicas de análisis disponibles para el ingeniero analista resulta bastante valiosa.

El sistema en la figura 4.26 está compuesto por un conductor de un sistema típico de distribución colocado a una altura $h_i=10m$ y por un conductor de un sistema de comunicaciones colocado a una altura de $h_k=5m$ con una distancia entre conductores de $x_{ik}=500m$ donde la tierra tiene una resistividad de $1 \Omega \cdot m$. La figura 4.27 muestra las componentes de la impedancia mutua de tierra, la resistiva y la inductiva. El inserto en dicha figura muestra los errores obtenidos con cada una de las fórmulas utilizadas.

La figura 4.27 muestra que la fórmula aquí propuesta entrega mayor precisión que las fórmulas de Gary-Dubanton, Alvarado-Betancourt y Noda en la componente resistiva mientras que la fórmula Noda entrega la precisión más baja para altas frecuencias $f > 10^1$. En esta misma figura se observa que el algoritmo Gauss-Lobato presenta oscilaciones para valores de $f > 10^3$.

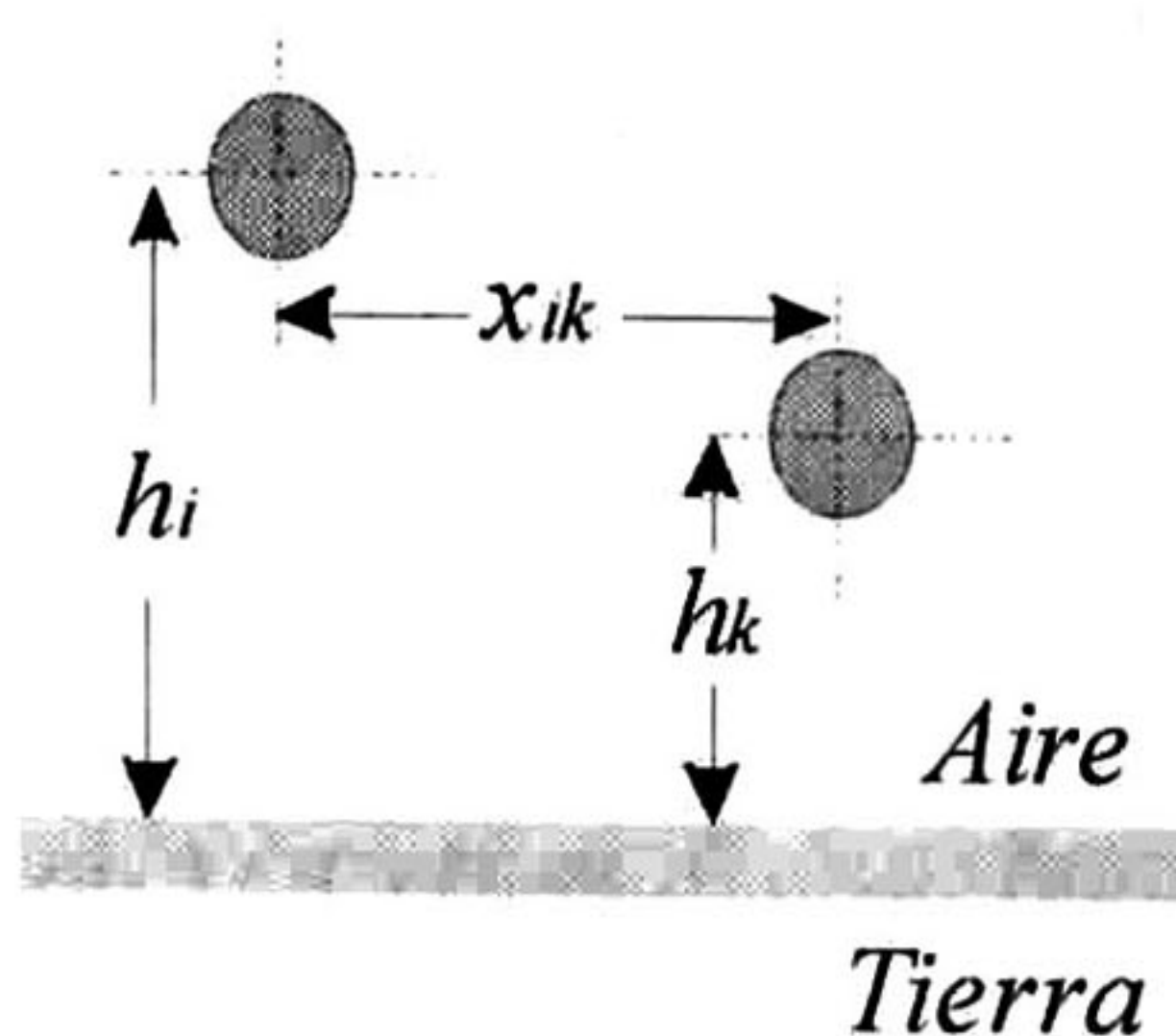


Fig. 4.26. Sección transversal de dos conductores acoplados EM.

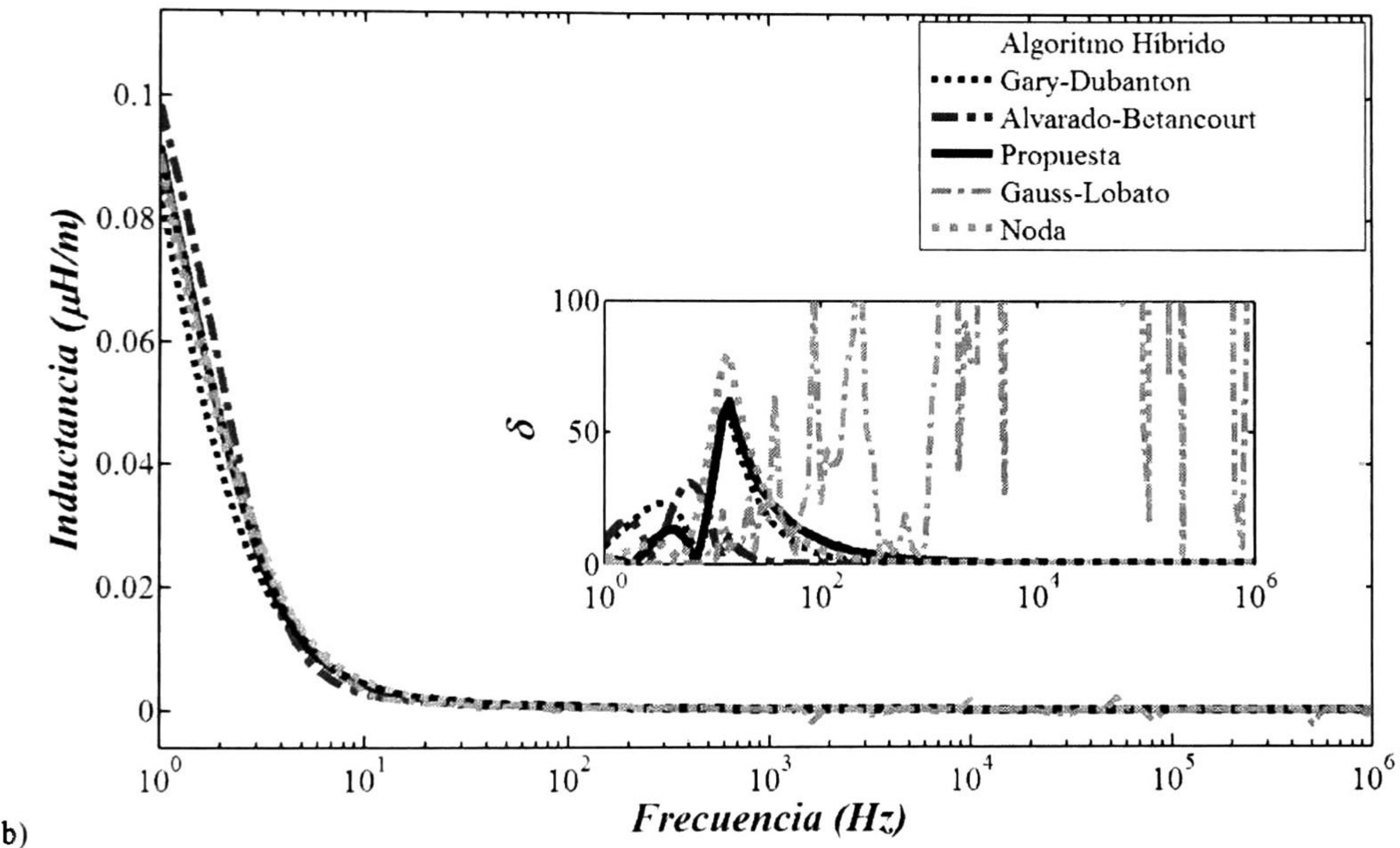
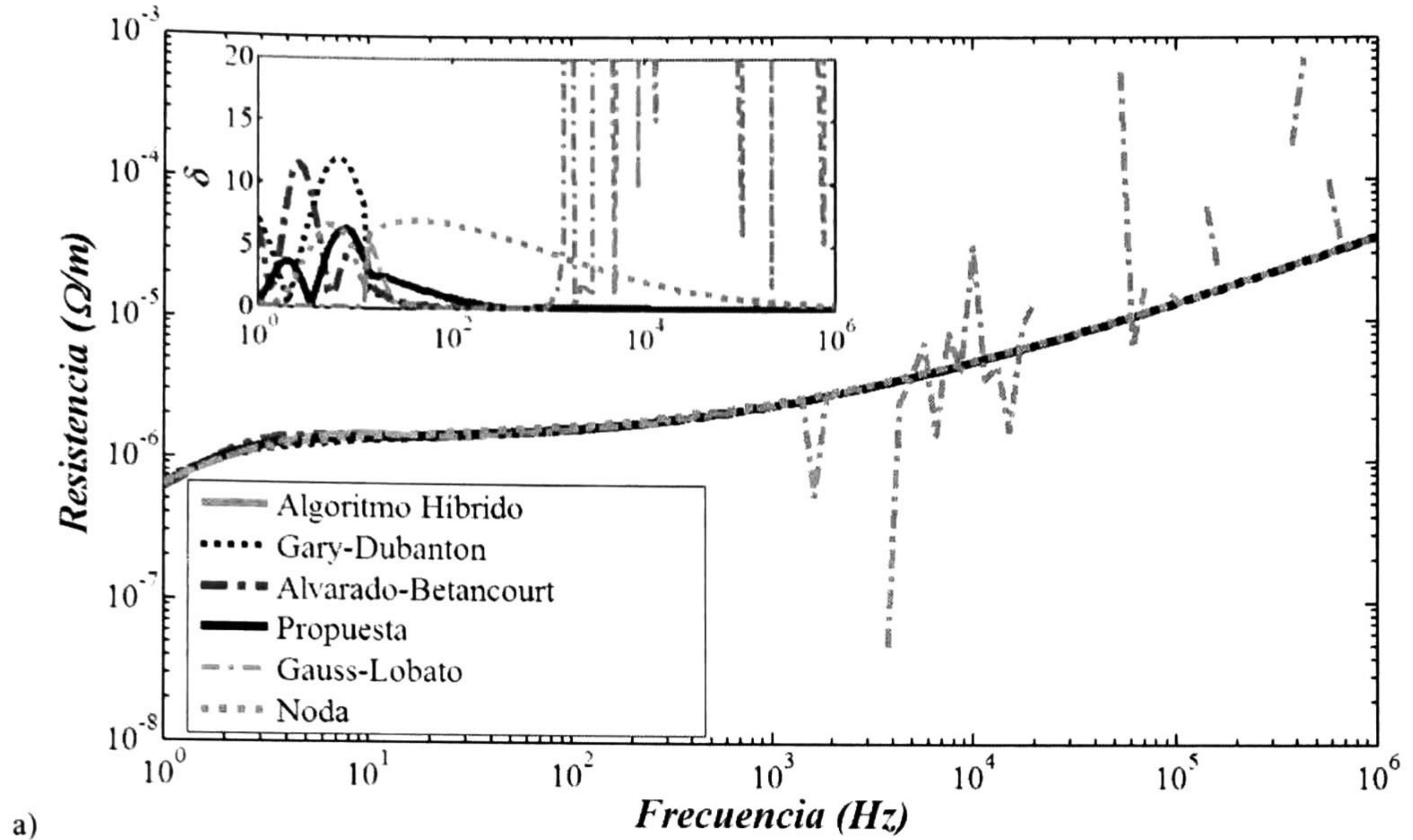


Fig. 4.27. Z_T mutua para el sistema de la fig. 4.26, a) Resistencia b) Inductancia.

Observando la componente inductiva se aprecia que la fórmula de Alvarado y Betancourt entrega los mejores resultados con un máximo de error del 30%, la fórmula de Noda presenta el máximo error con un 80%. Los resultados obtenidos con la fórmula Propuesta son comparables a los obtenidos por la fórmula de Gary y Dubanton con un error máximo

de 62%, aunque para bajas frecuencias $f < 10^1$ la fórmula Noda o la fórmula Propuesta entregan los mejores resultados con un error menor al 10%. Una vez más, los resultados obtenidos por medio de la integración Gauss-Lobato presentan oscilaciones para altas frecuencias $f > 10^1$.

Caso IV

Como ejemplo de inducción subterránea, considere el sistema de transmisión por cable de la figura 4.28, el cual se encuentra electromagnéticamente acoplado con una tubería de gas o petróleo. Las características del sistema son: profundidad de los conductores y de la tubería $h=72.6\text{cm}$, distancia entre el conductor y la tubería $x_{ik}=30\text{m}$, se considera la resistividad del terreno igual a $1 \Omega\cdot\text{m}$. Las figuras 4.29a y 4.29b muestran los resultados obtenidos al calcular Z_T mutua y sus componentes resistiva e inductiva, respectivamente. Las figuras 4.30a y 4.30b muestran el error obtenido al calcular las componentes por medio de las fórmulas de aproximación descritas en este capítulo.

Las figuras 4.29 y 4.30 muestran que el algoritmo de integración de Gauss-Lobato presenta oscilaciones para altas frecuencias en ambas componentes. La formulación aproximada de Wedepohl y Wilcox presenta errores bastante grandes para altas frecuencias en ambas componentes; incluso en las bajas frecuencias se presentan errores grandes en la componente inductiva. La fórmula SGG presenta un error máximo del 25% para la componente resistiva y un poco más del 50% para la componente inductiva, la fórmula Propuesta presenta un error menor al 10% en todo el rango para ambas componentes. Lo anteriormente descrito implica que la fórmula Propuesta entrega buenos resultados para los casos en los que el cálculo de la inducción EM es necesario.

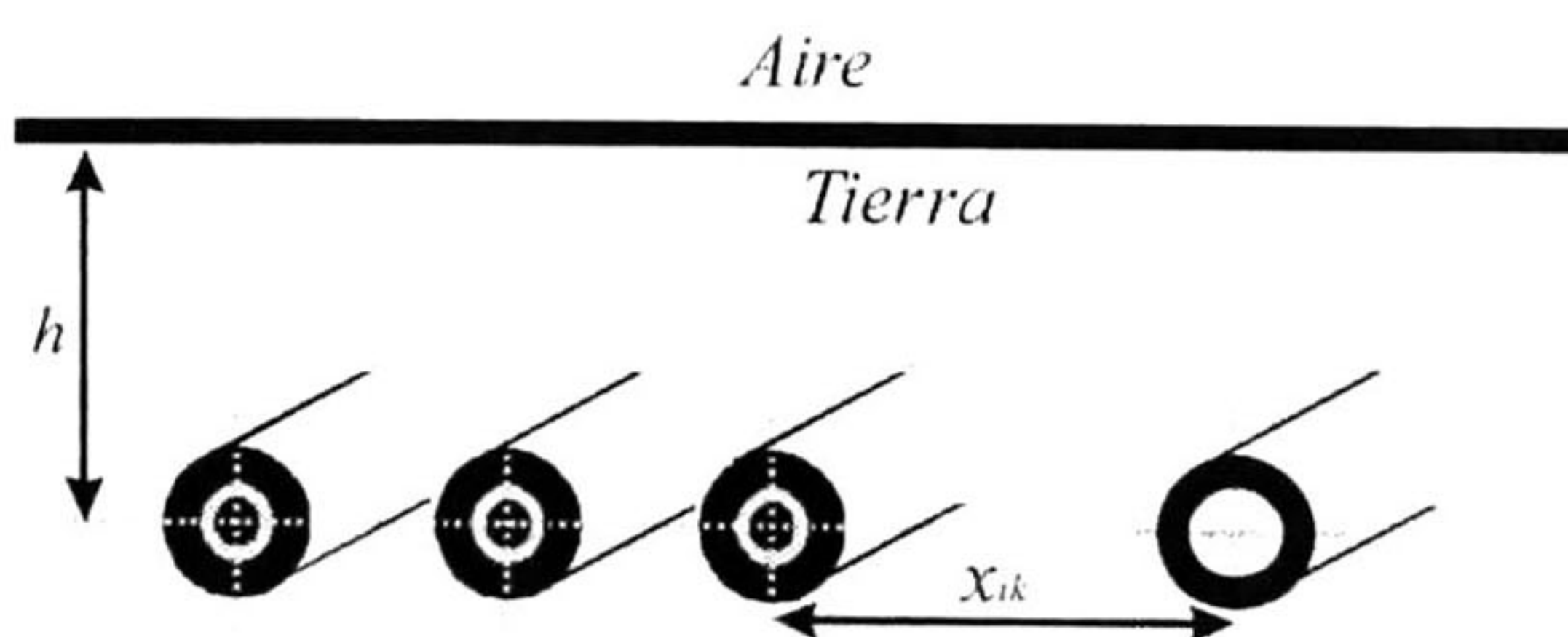
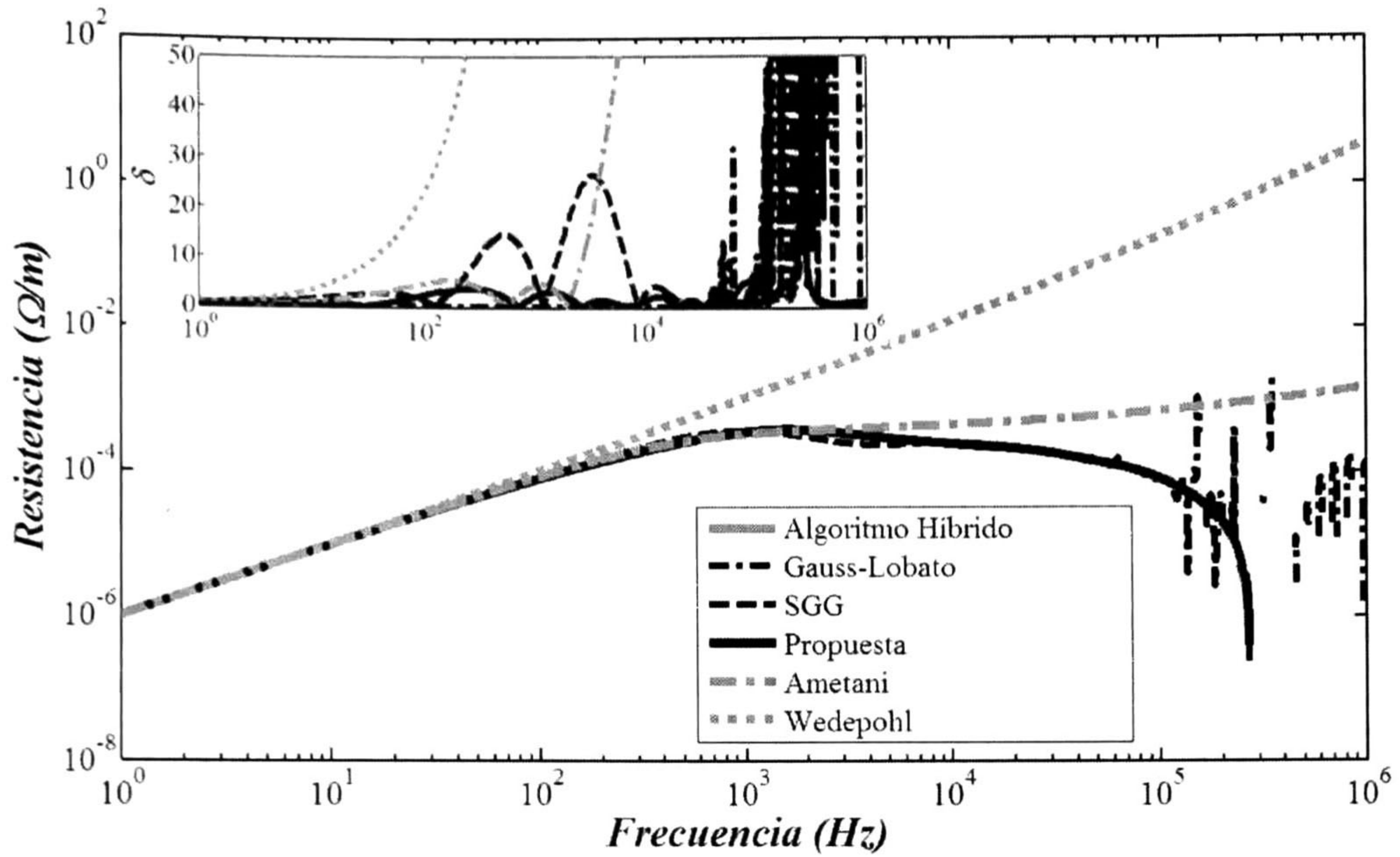
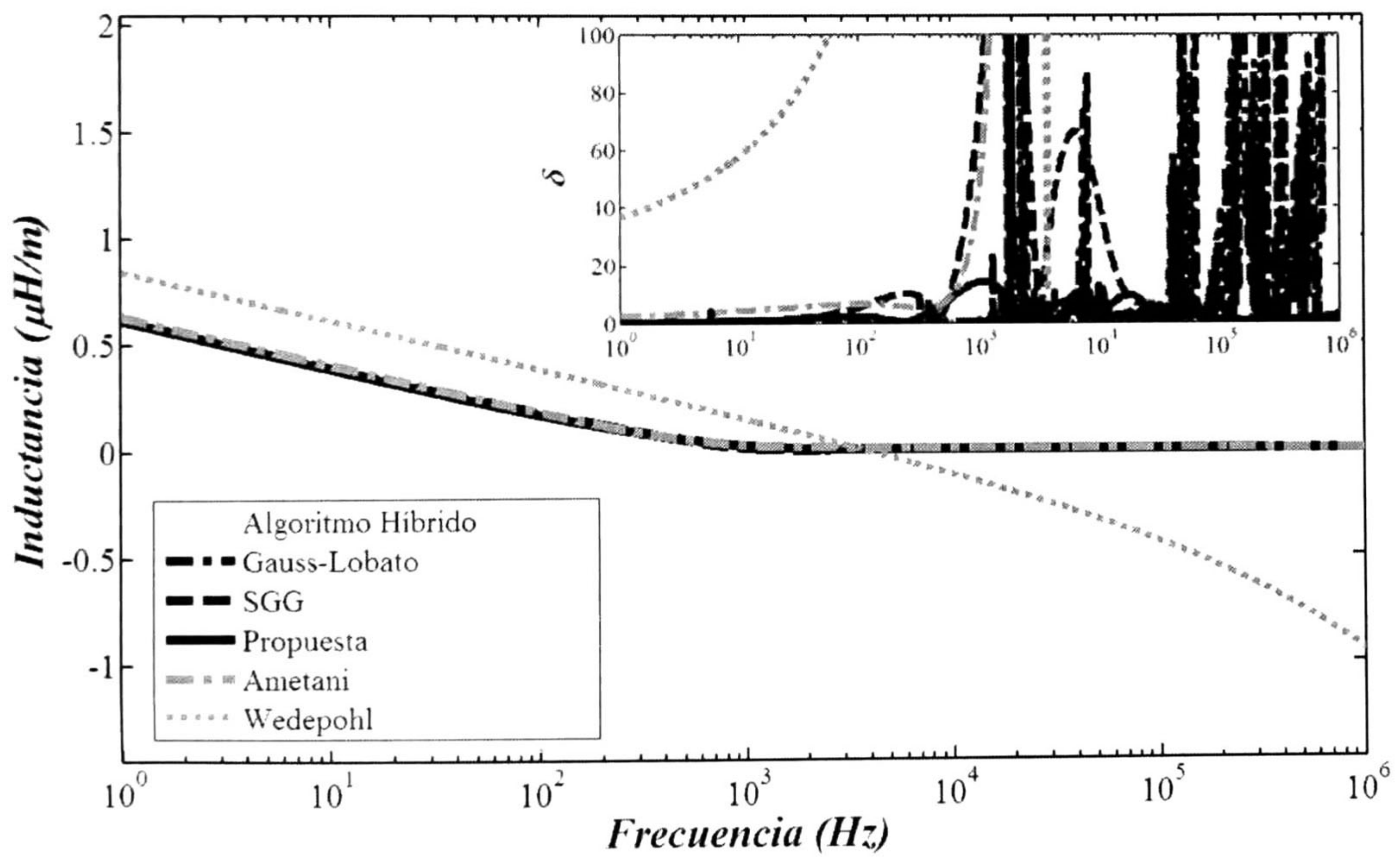


Fig. 4.28. Sistema de transmisión subterráneo cercano a tubería.



a)



b)

Fig. 4.29. Z_T mutua para el sistema de la fig. 4.28, a) Resistencia, b) Inductancia.

En las figuras 4.22-4.25, 4.27 y 4.29 se observa que los errores obtenidos en la frecuencia concuerdan bien con aquellos obtenidos por los mapas de error en el dominio adimensional. Esto representa una gran ventaja para la persona interesada en utilizar alguna de las formulaciones aquí mostradas, ya que los mapas permiten visualizar el error obtenido con cada una de las aproximaciones para casos puntuales.

4.8 COMENTARIOS DEL CAPÍTULO

Se han presentado varios ejemplos numéricos los cuales ilustran la aplicabilidad de las fórmulas utilizadas en ésta tesis, así como las fórmulas propuestas. Por medio de las variables adimensionales ξ y η que se mostraron en el capítulo III, fue posible la generación y presentación de mapas de error para un amplio rango de aplicaciones reportado. Además de los mapas se han presentado casos puntuales en el dominio normalizado y en el dominio de la frecuencia, se han calculado y se han presentado los errores obtenidos con las fórmulas aquí utilizadas; Finalmente se mostró que los resultados concuerdan de manera precisa con dichos mapas.

Se observó que las fórmulas propuestas entregan resultados bastante precisos para la gran mayoría de los casos incluso mucho mejores que otras formulaciones, sobre todo para los casos de alta frecuencia, alta conductividad de la tierra y altura y distancias grandes. Adicionalmente, se ha mostrado que el algoritmo de integración Gauss-Lobato oscila en altas frecuencias.

Por medio de los mapas de error se ha presentado una manera de validar las fórmulas de aproximación a las integrales de Carson y Pollaczek utilizadas en esta tesis.

Finalmente, se han propuesto fórmulas cerradas de aproximación a las integrales de Carson y Pollaczek cuya precisión supera en la mayoría de los casos a las demás presentes en esta tesis, incluso en los casos de altas frecuencias, alta conductividad de la tierra, grandes alturas y/o distancias grandes entre conductores.

CÁLCULO DE IMPEDANCIAS DE TIERRA Y RESPUESTA TRANSITORIA

5.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se analiza el efecto que tienen diversas aproximaciones del término Z_T sobre la respuesta transitoria de sistemas de conductores. El análisis transitorio se lleva a cabo por medio de la técnica denominada Transformada Numérica de Laplace (TNL) debido a que la precisión obtenida con dicha técnica es muy alta [30].

5.2 DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA TNL

La Transformada de Laplace (TL) tiene una serie de propiedades que la hacen muy útil en el análisis de sistemas, ya que convierte las Ecuaciones Integro Diferenciales que los describen en Ecuaciones Algebraicas. Una de las ventajas más significativas para los sistemas lineales radica en que la convolución se convierte en multiplicación. No obstante, su uso se limita sólo a funciones simples. En el análisis transitorio de sistemas eléctricos a menudo se presentan funciones cuyas transformadas no pueden ser resueltas en forma analítica. Es por ello que se suelen utilizar métodos numéricos. Aquí se adopta la técnica de la Transformada Numérica de Laplace definida en las referencias [4,20,27,28,30].

La Transformada Numérica de Laplace es una técnica del Dominio de la Frecuencia (DF) muy poderosa para analizar la dinámica de sistemas eléctricos de potencia [27]. Dicha técnica permite relacionar las transformadas de los voltajes $V_L(s)$ en cualquier nodo de una red con las transformadas de las fuentes de excitación $F(s)$ en esta. Posteriormente las correspondientes señales en el Dominio del Tiempo $f(t)$ pueden ser obtenidas al aplicar la integral inversa de Laplace:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (5.1a)$$

donde $s=c+j\omega$ es la variable de Laplace, c es un factor de amortiguamiento y ω es la frecuencia angular [4,20,28,27,30].

Debido a que la TNL es una versión numérica de su contraparte analítica surgen varios errores, de los cuales los más importantes son: 1) error por truncamiento de rangos de integración, 2) error por discretización y 3) error por cuantificación. El primero es debido a que al aplicar la TNL se trunca el rango de frecuencias de la señal provocando un fenómeno conocido como de Gibbs. El segundo causa solapamiento de la señal de salida. El tercero se debe a la representación con precisión finita de los números en la computadora, produciendo errores conocidos como ruido de cuantificación, que para fines de esta tesis se consideran despreciables.

La TNL consiste en aproximar numéricamente a la integral (5.1a) de la siguiente forma [4,20,28,27,30]:

$$f_n = \frac{e^{cn\Delta t}}{\Delta t} \left[\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F_m \sigma_m e^{2\pi j mn/N} \right], \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (5.1b)$$

donde $N=T/\Delta t$ es el número de muestras en tiempo y frecuencia que representan a las señales continuas $f(t)$ y $F(s)$; T es el tiempo de observación máximo; Δt es el intervalo entre muestras; f_n se define como $f(n\Delta t)$ y F_m como $F(m\Delta\omega)$; $\sigma_m = \sigma(m\Delta\omega)$, es una función ventana (Blackman, Lanczos, Hanning, etc.) utilizada para atenuar los errores por el fenómeno de Gibbs [30]. En esta tesis la función ventana de Hanning es utilizada dado que presenta el menor error [30]:

$$\sigma(\omega) = \frac{1}{2} [1 + \cos(\pi\omega / \Omega)]. \quad (5.2)$$

La discretización en el DF de la señal $F(s)$ en (5.1b) provoca errores por solapamiento en la aproximación numérica de $f(t)$. Para eliminar dichos errores se utiliza el factor de amortiguamiento “ c ”. Si sólo se tuvieran errores por discretización, c podría tomar un valor grande arbitrario; sin embargo, ya que las funciones ventana no eliminan por completo los errores por Gibbs, sus vestigios pueden ser amplificados por la función “ $\exp(cn\Delta t)$ ” en (5.1b). Por lo tanto, la selección del valor de c implica un compromiso entre solapamiento y el fenómeno de Gibbs. Existen distintos criterios para determinar c [4,20,27,28,30]. Wedepohl propuso el siguiente criterio para calcular el valor de c [30]:

$$c = \ln(N^2) / T \quad (5.3)$$

Dicho criterio junto con el uso de la ventana de Hanning permiten obtener un error numérico relativo de alrededor de 10^{-6} [30]. En la expresión (5.1b) se encuentra implícito un intervalo de discretización de la frecuencia $\Delta\omega$ el cual se elige como:

$$\Delta t \Delta \omega = 2\pi / N, \quad (5.4a)$$

de esta expresión se tiene que

$$N\Delta\omega / 2 = \pi / \Delta t. \quad (5.4b)$$

$N\Delta\omega/2$ es la frecuencia de truncamiento para la representación discreta de $F(s)$, $\pi/\Delta t$ es el doble de la frecuencia angular de muestreo. Por lo tanto las expresiones (5.4a) y (5.4b) concuerdan con el principio de muestreo de Nyquist.

La siguiente expresión corresponde a la implementación en Matlab[®] de (5.1b). Cabe mencionar que la expresión dentro de los corchetes en (5.1b) corresponde a la Transformada Discreta Inversa de Fourier (TDIF) [12]:

$$f(t) = \exp(ct) \text{ifft}(F(s)\sigma) / \Delta t, \quad (5.5)$$

donde $\text{ifft}()$ es la función programada en Matlab[®] que implementa el algoritmo de Transformada Rápida de Fourier desarrollado por Cooley y Tukey [12]. Una descripción más detallada de la técnica TNL puede obtenerse en la referencia [30].

5.3 ANÁLISIS TRANSITORIO CON LA TNL

El cálculo de transitorios utilizando la transformada de Laplace se realiza al sustituir “ $j\omega$ ” por “ $s=c+j\omega$ ” en el cálculo de las matrices A y B en (2.29). En el caso de una red bajo análisis, los elementos son representados por medio de admitancias generales obtenidas al asumir excitaciones de la forma “ $\exp[(-c+j\omega)t]$ ”. De tal manera que se puede representar a la red por medio de su matriz nodal en el dominio “ s ”. Al excitar a ésta se puede obtener su respuesta a través del método de la función de transferencia. Como un ejemplo de esto considere la red en la figura 5.1, donde el elemento central representado por sus parámetros nodales A y B puede ser un sistema de transmisión. La representación nodal de la red es:

$$\begin{bmatrix} I_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+Y_0 & -B \\ -B & A+Y_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ V_L \end{bmatrix}. \quad (5.6a)$$

Ahora suponga que I_0 es una excitación conocida y que V_L es la respuesta desconocida. Despejando de (5.6a) se obtiene:

$$V_L = H(s)I_0, \quad (5.6b)$$

donde

$$H(s) = [(A+Y_0)B^{-1}(A+Y_L) - B]^{-1}; \quad (5.6c)$$

$H(s)$ corresponde entonces a la función de transferencia del sistema en la figura 5.1.

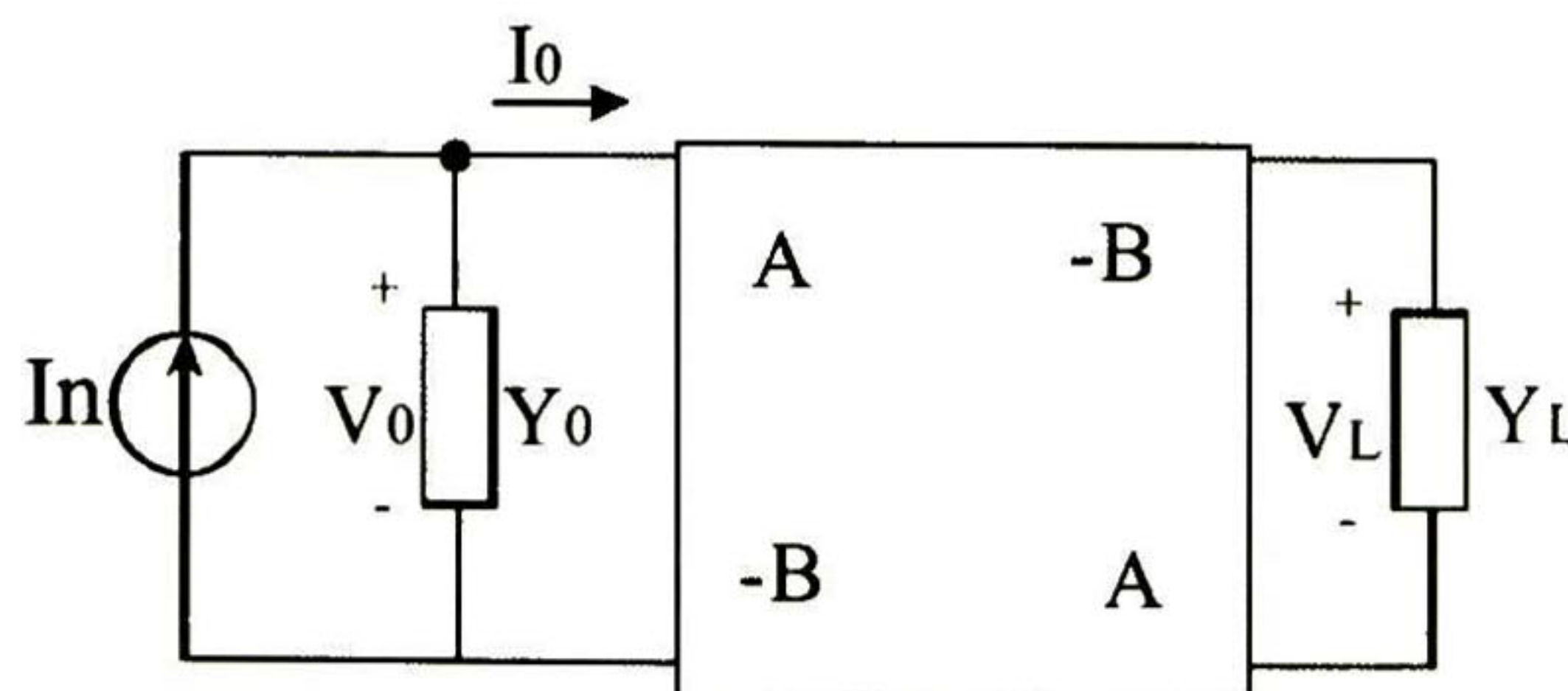


Fig. 5.1. Representación circuital de un sistema simple.

A continuación, se utiliza esta técnica para aplicar las diferentes fórmulas cerradas de aproximación de Z_T y mostrar el efecto que producen en la respuesta transitoria los errores en cada una de ellas.

5.4 RESULTADOS

Los siguientes ejemplos muestran el impacto que tiene el nivel de error de Z_T sobre la respuesta transitoria de sistemas de potencia.

Ejemplo 1

Considere el sistema mostrado en la figura 5.2, el cual consiste en una línea de transmisión de 400 kV alimentada por una fuente ideal cosenoidal que corre en paralelo con una línea de distribución de 13.8 kV a lo largo de 20 km. Considere una distancia de separación entre las dos líneas de 3.7 km. Las líneas de transmisión y distribución están terminadas en cargas de 200 y 2000 ohms, respectivamente. Los conductores de la línea de transmisión tienen un radio medio geométrico de 4 cm y están localizados a una altura promedio de 30 m. Para la línea de distribución el radio es de 2 cm y la altura media es de 7 m. Se considera una resistividad de tierra de $600 \Omega \cdot m$. El interruptor en el lado de la fuente se cierra en 1.0 ms. La resistencia del interruptor r_i se toma como 0.001Ω y la resistencia de la fuente R_s como 0.1Ω . El cálculo es realizado con 1024 muestras. Se simula la energización de la línea de transmisión, se calcula su voltaje en la terminal de recepción, así como el voltaje inducido en la línea de distribución. Se utilizan cinco formulaciones distintas para calcular Z_T : 1) algoritmo híbrido, 2) fórmula de Alvarado y Betancourt, 3) fórmula de Gary y Dubanton, 4) fórmula de Noda y 5) fórmula Propuesta.

La figura 5.3a muestra los voltajes en la terminal de recepción del conductor energizado. En este caso las diferencias son pequeñas y difíciles de detectar a simple vista. La figura 5.3b muestra los errores correspondientes tomando como referencia los resultados obtenidos utilizando el algoritmo híbrido.

La figura 5.4a muestra los voltajes inducidos en la terminal de recepción para la línea de distribución, mientras que la figura 5.4b muestra los errores obtenidos con cada fórmula aproximada. Nótese que en el caso mostrado en la figura 5.4 los errores en el cálculo de Z_T pueden provocar diferencias de hasta 15%. Adicionalmente, la fórmula GD considerada la de menor precisión, entrega los mejores resultados.

Ejemplo 2

Considere ahora el sistema de cables subterráneos de transmisión a 400kV esquematizado en la figura 5.5a. La figura 5.5b muestra una vista longitudinal del sistema. El cual consta de tres cables concéntricos de 20 Km de longitud enterrados a la profundidad de 1m bajo tierra y con una separación entre cables de 10m. Sólo el núcleo 1 está conectado a la fuente, los núcleos restantes al igual que las tres fundas se aterrizan y todas las terminales de recepción se dejan abiertas.

Para este caso la resistividad del terreno se considera de $10 \Omega \cdot m$. El núcleo 1 se energiza con un voltaje escalón de magnitud 1 pu. Se obtiene la respuesta transitoria del sistema por medio del método TNL y se utilizan las siguientes cuatro formulaciones para calcular Z_T : 1) fórmula de Sadd, Gabba y Giroux. 2) fórmula de Per Petterson. 3) fórmula Propuesta y 4) algoritmo híbrido. La figura 5.6a muestra los voltajes transitorios obtenidos en la terminal de recepción del núcleo energizado. En este caso las diferencias son pequeñas y difíciles de apreciar a simple vista. La figura 5.6b muestra el error en estas curvas tomando como referencia los resultados obtenidos por medio del algoritmo híbrido propuesto por Iracheta [34].

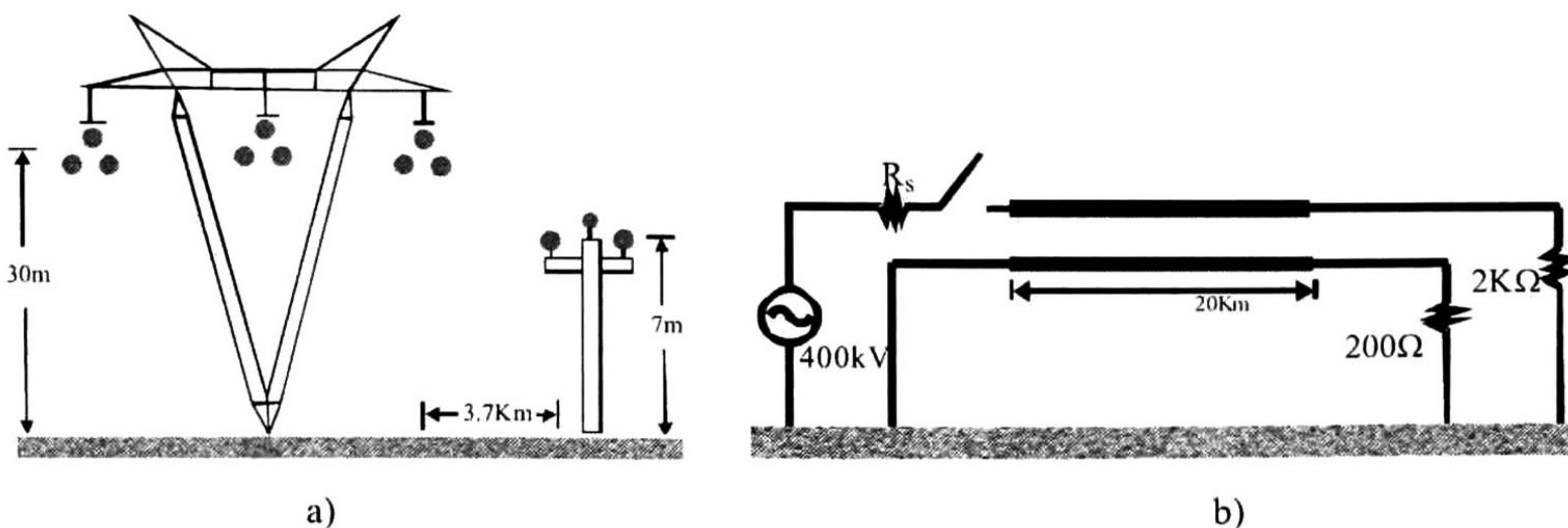
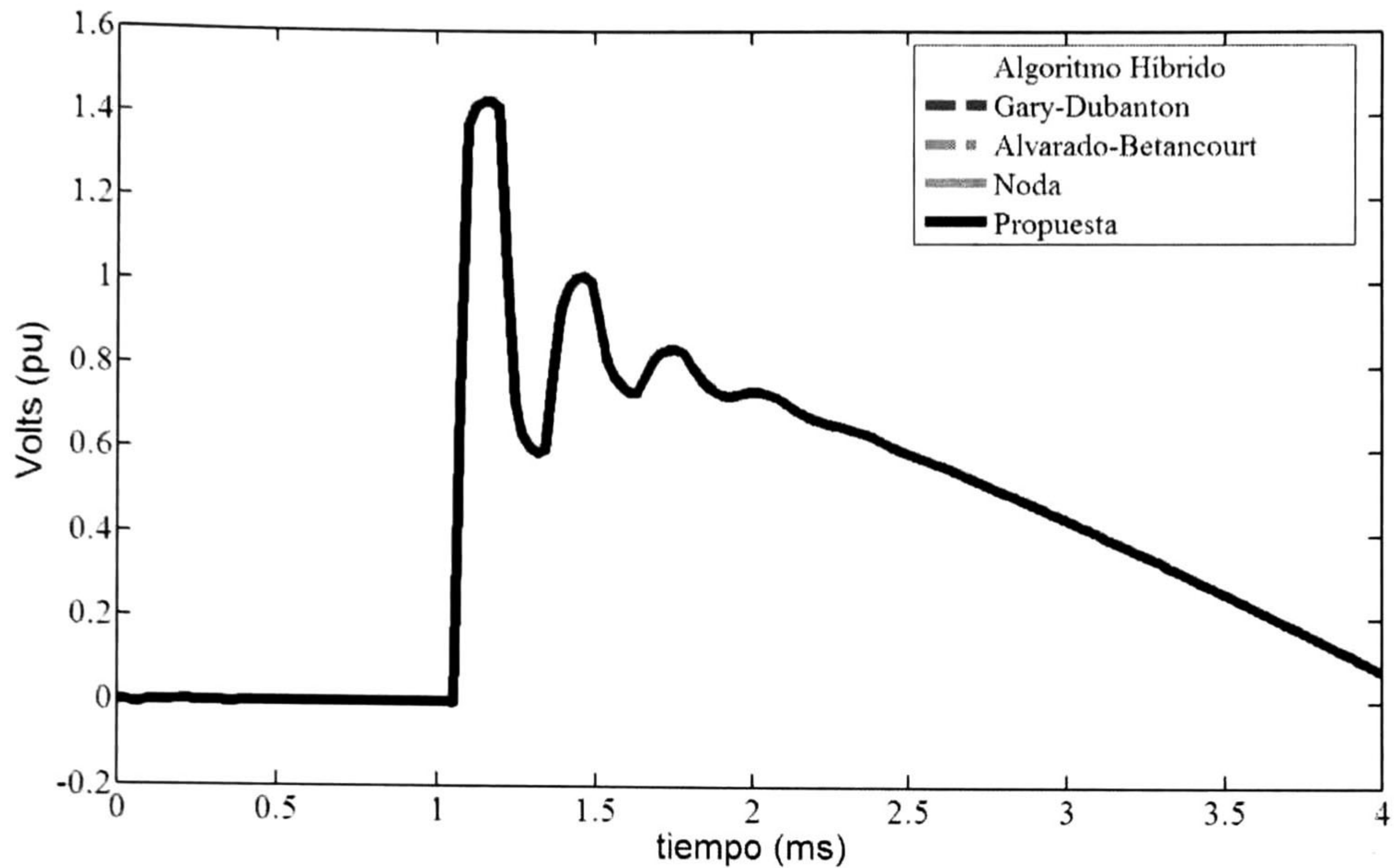
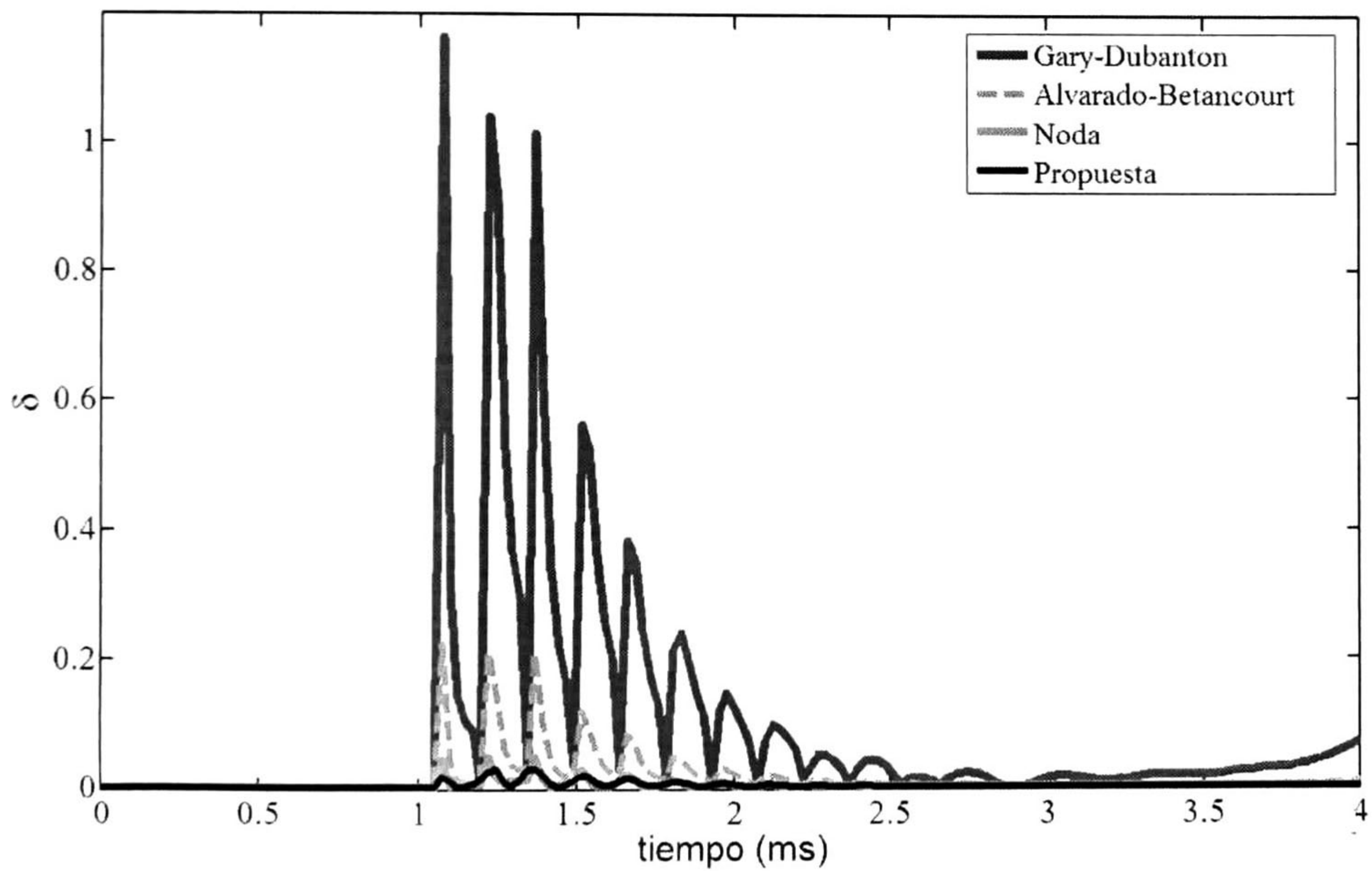


Fig. 5.2. Línea de 400Kv en paralelo con línea de 13.8Kv. a) Vista frontal, b) Circuito de inducción.

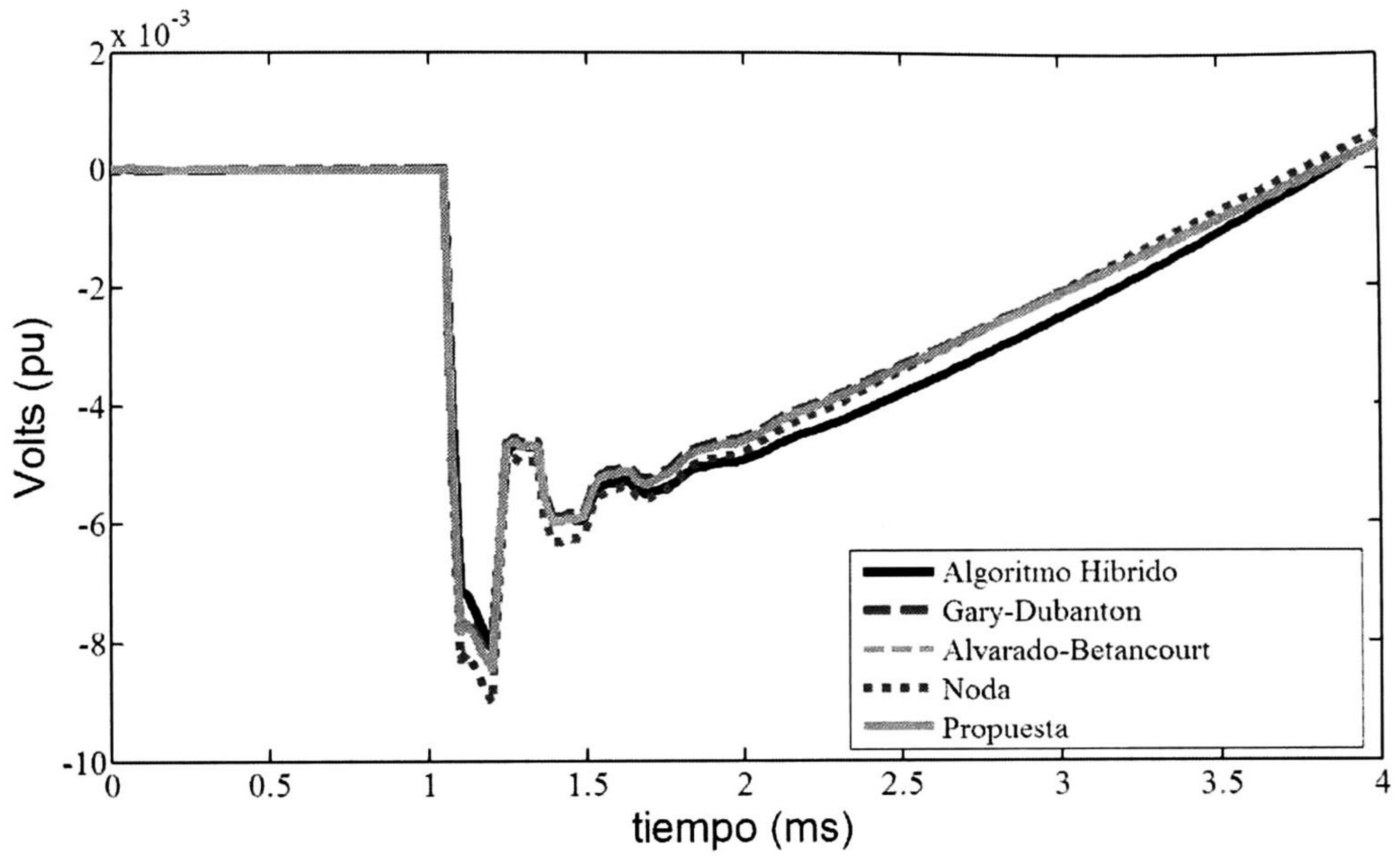


a)

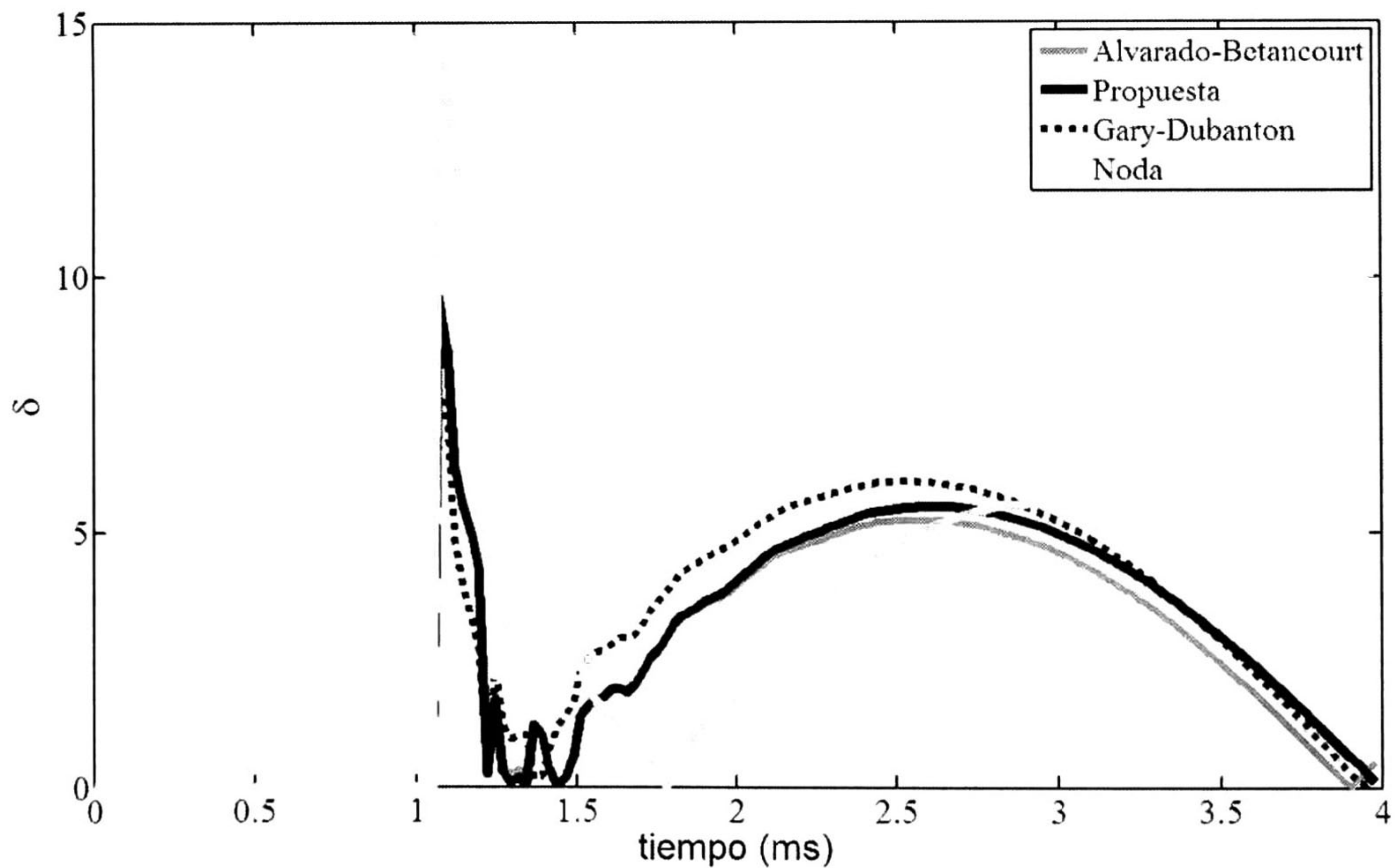


b)

Fig. 5.3. Forma de onda resultante del cálculo transitorio para el sistema de la fig. 5.2. a) Voltaje en la terminal de recepción de la línea de transmisión, b) error obtenido con las fórmulas.



a)



b)

Fig. 5.4. Forma de onda inducida resultante del sistema de la fig. 5.2. a) Voltaje inducido en la línea de distribución, b) error obtenido con las fórmulas.

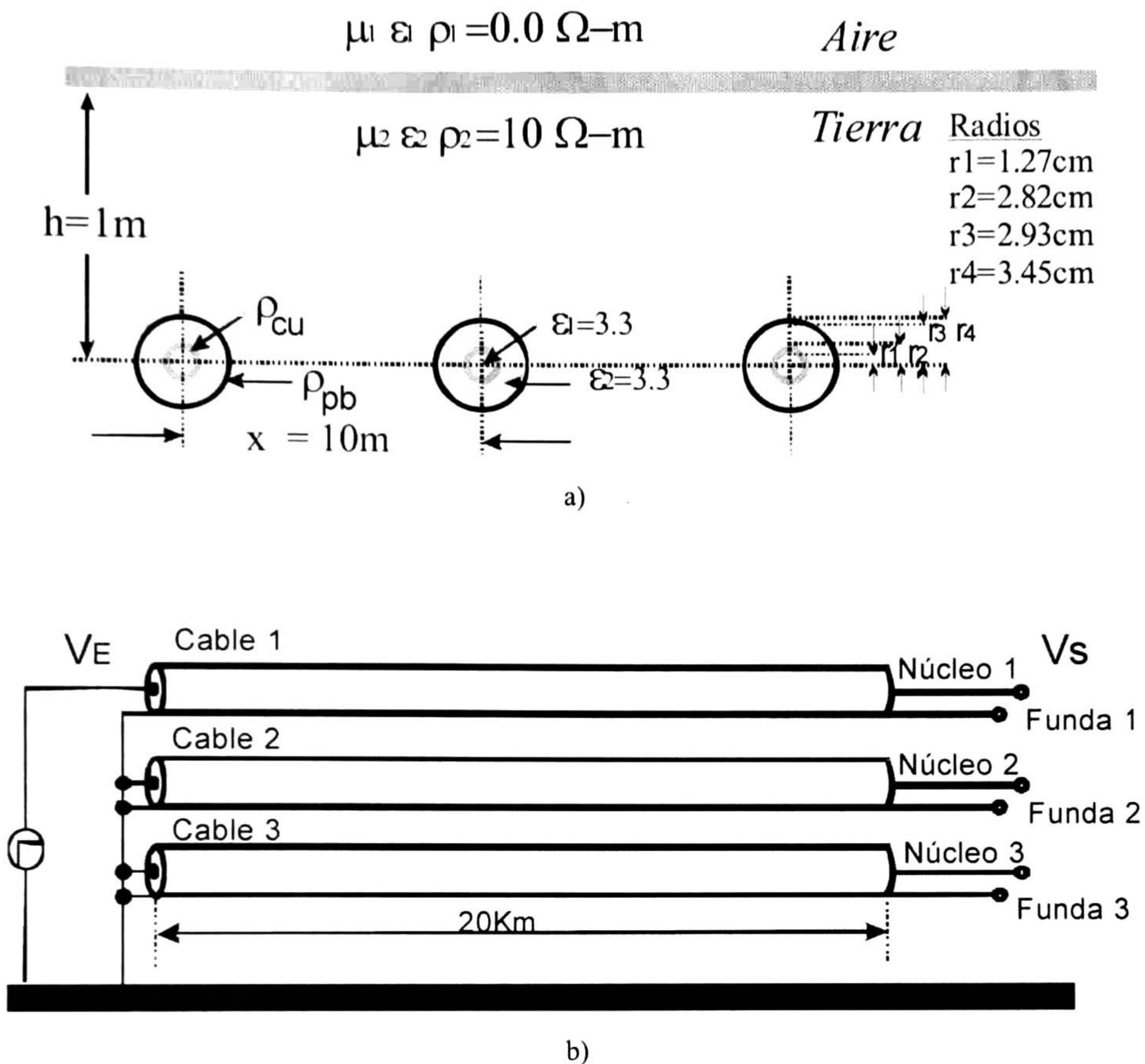
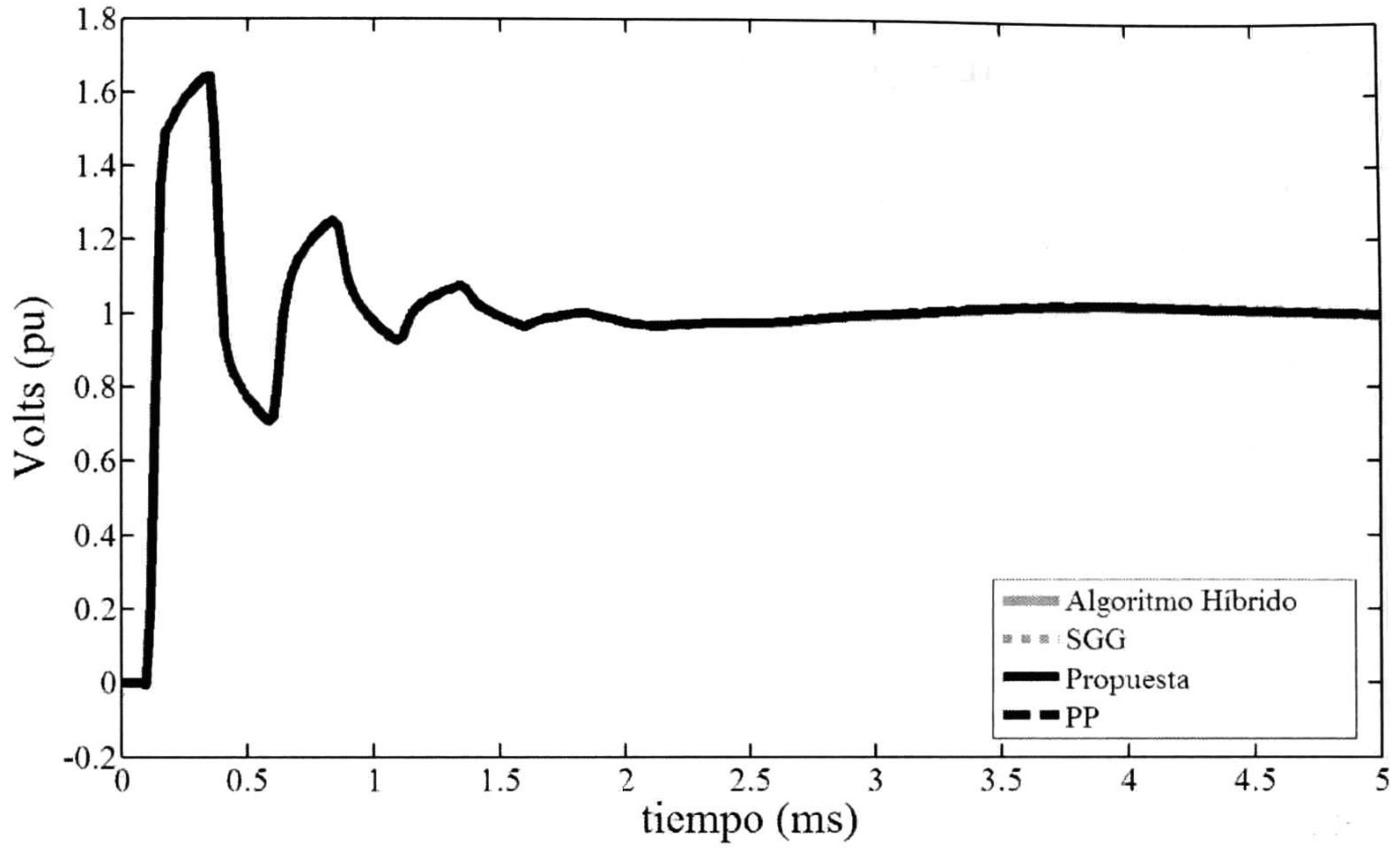


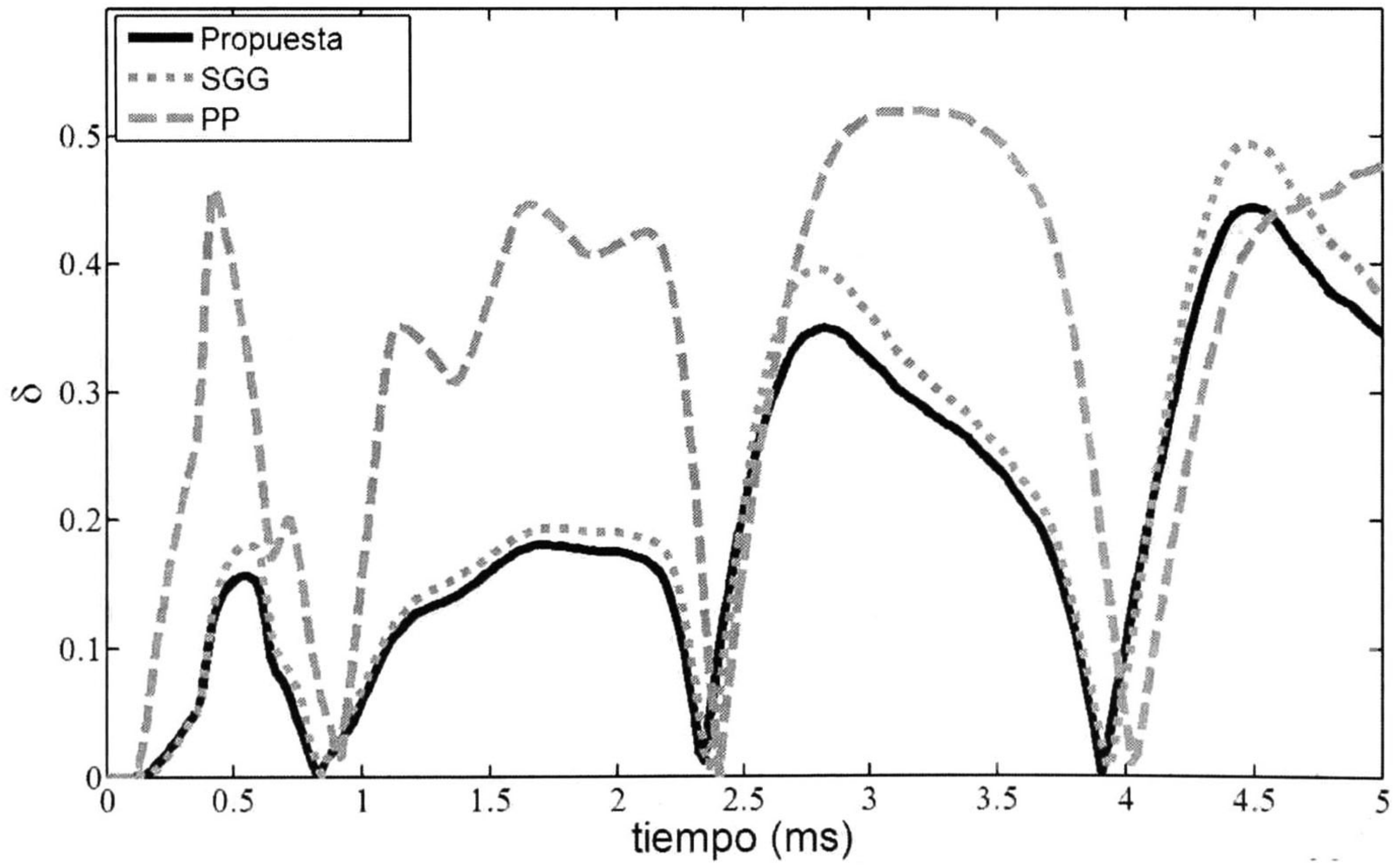
Fig. 5.5. Sistema de transmisión subterráneo. a) Configuración geométrica. b) Diagrama de conexión.

La figura 5.7a muestra los voltajes inducidos en la terminal de recepción del núcleo 2; los errores correspondientes son mostrados en la figura 5.7b. En dichas figuras los errores son más notables que en la figura 5.6. Nuevamente se ha tomado como referencia los resultados obtenidos por medio del algoritmo híbrido.

La figura 5.8 muestra los voltajes inducidos en la terminal de recepción del núcleo 3. También se muestra el error obtenido al calcular dicho voltaje por medio de las fórmulas aproximadas. Con este ejemplo se puede apreciar que el error obtenido por la aproximación de Z_T tiene una mayor influencia en los voltajes inducidos que en los voltajes propios.

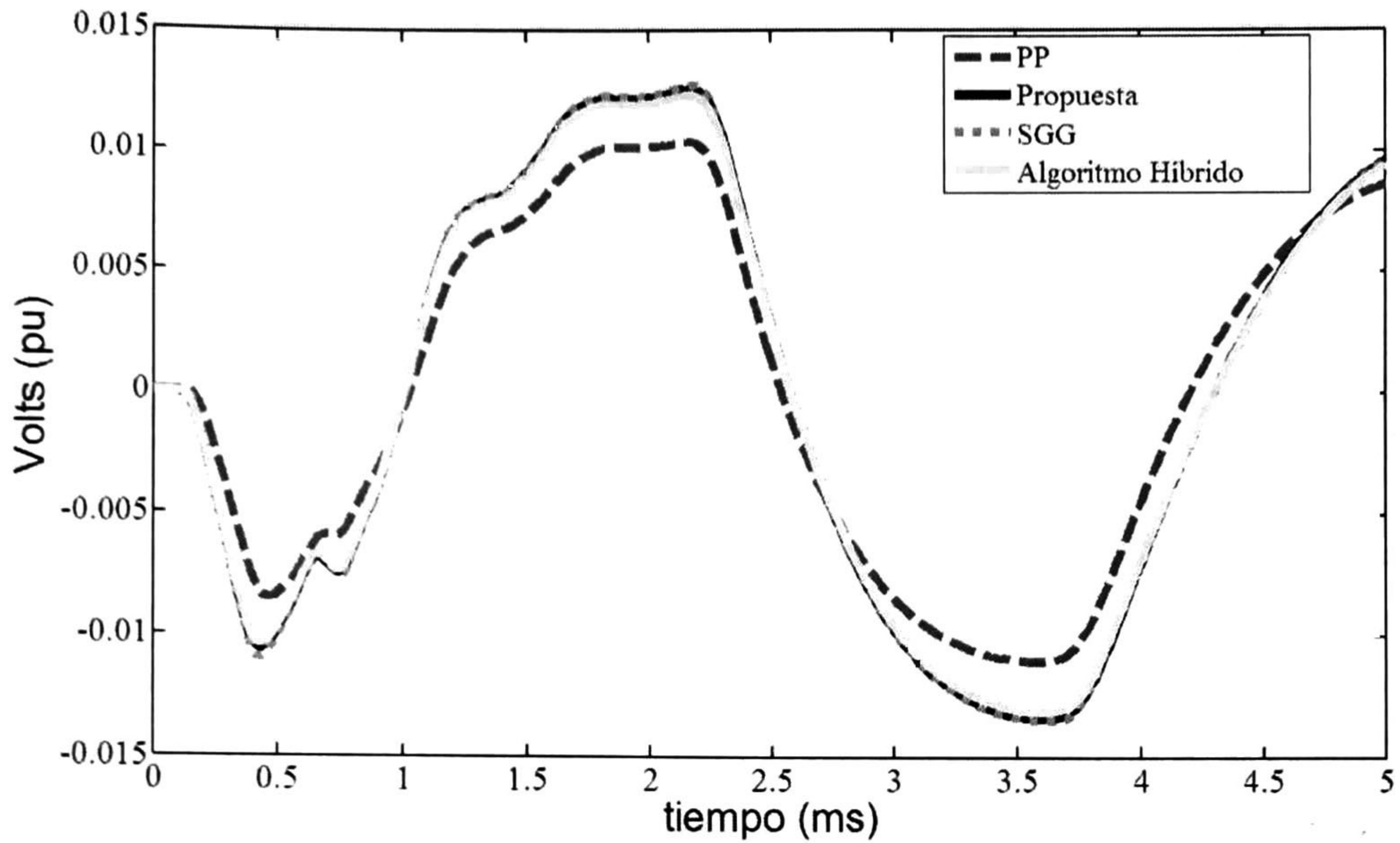


a)

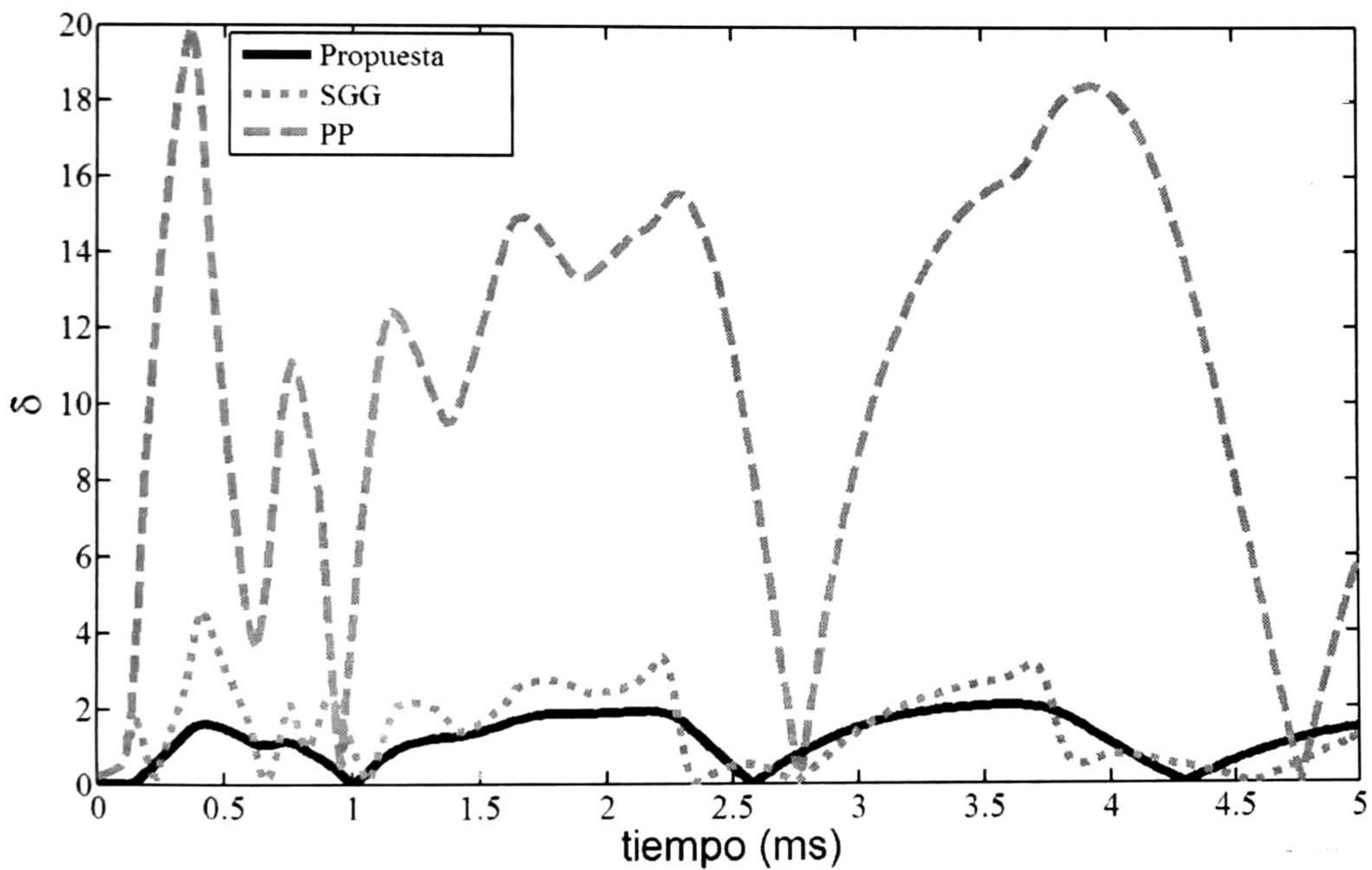


b)

Fig. 5.6. a) Voltaje en el extremo receptor del cable energizado. b) Error obtenido con las fórmulas.

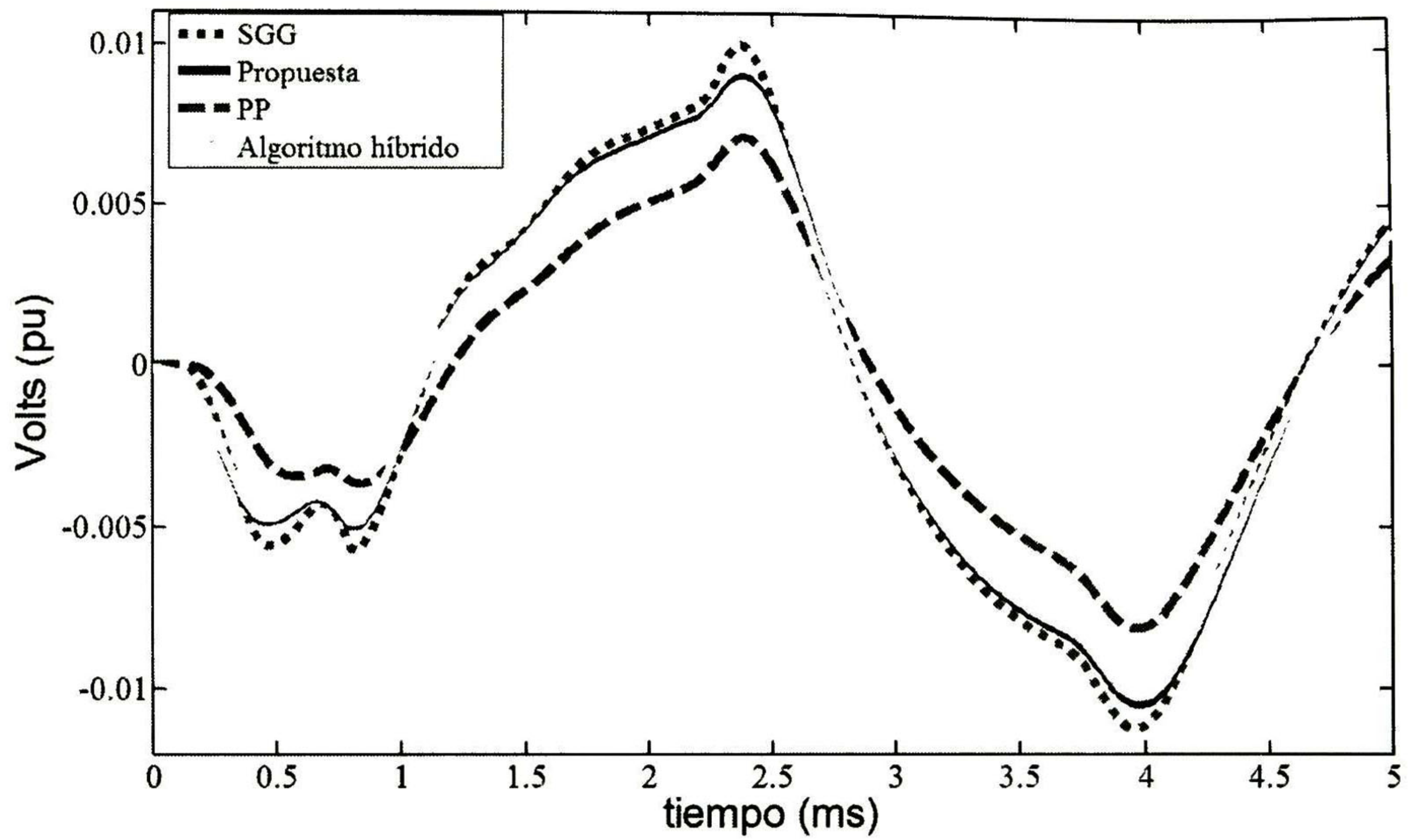


a)

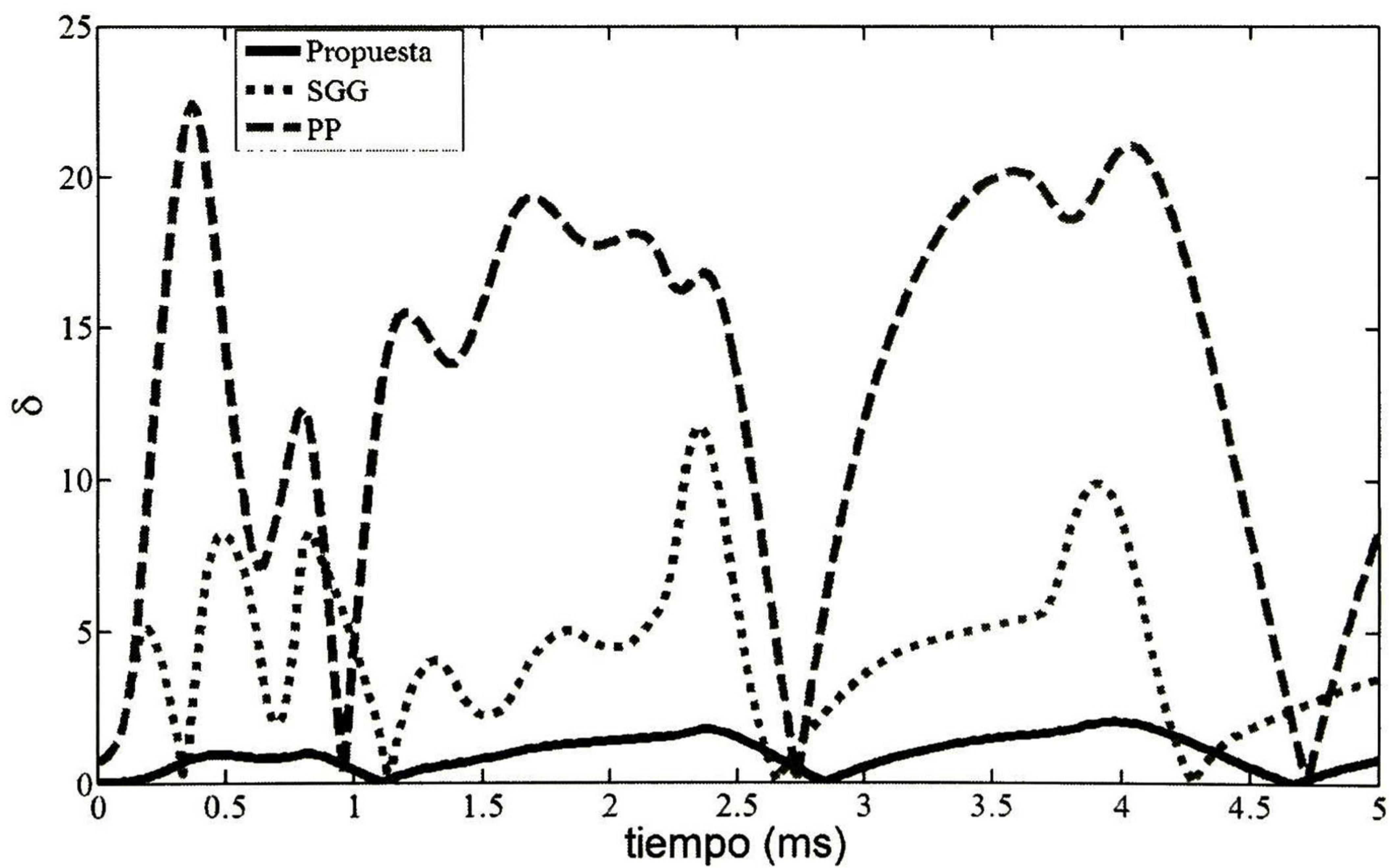


b)

Fig. 5.7. Voltajes inducidos en el núcleo 2. a) Voltajes inducidos en núcleo 2. b) Errores obtenidos con las fórmulas.



a)



b)

fig. 5.8. Voltajes inducidos en el núcleo 3. a) Voltajes inducidos en el núcleo 3. b) error obtenido con cada una de las fórmulas.

De las figuras de la 5.6 a la 5.8 puede observarse que la fórmula Propuesta entrega mejores resultados que los obtenidos por medio de las fórmulas restantes. En el caso de cables, la relación entre el error de Z_T y el cálculo de un transitorio no es tan directa como en el caso de líneas.

5.5 COMENTARIOS DEL CAPÍTULO

En este capítulo se han evaluado respuestas transitorias para ambos casos: Líneas aéreas y Cables subterráneos. Estos han sido calculados por medio de la técnica TNL y se han aplicado distintas fórmulas y algoritmos para calcular Z_T . Esto con la finalidad de evaluar el error obtenido al utilizar cada una de las diferentes aproximaciones de Z_T . Se constató que las formulaciones propuestas entregan resultados bastante confiables para la mayoría de los casos. Se observó que los mapas de error pueden dar una buena idea del error que se obtendrá al calcular transitorios con las distintas formulaciones para Z_T . Se constató que el error del término Z_T mantiene una relación directa con el error obtenido en cálculos transitorios mostrando ser un término que tiene una influencia importante en dicho cálculo.

CONCLUSIONES

Un parámetro muy importante en el modelado matemático de sistemas de transmisión de energía es el de impedancia de tierra Z_T . En su forma analítica, las expresiones para las impedancias de tierra están dadas por integrales que no poseen solución analítica cerrada. En el análisis práctico, estas impedancias son estimadas mediante algoritmos y fórmulas aproximadas.

En esta tesis se ha abordado el problema de evaluar las distintas fórmulas y algoritmos más utilizados para el cálculo de Z_T , tanto de líneas aéreas como de cables subterráneos para la transmisión de energía eléctrica. Encontrando que la precisión de las formulaciones aquí analizadas depende del caso de aplicación. Se propusieron nuevas fórmulas y se demostró que estas tienen en general mayor precisión que las previamente establecidas por otros autores.

En el caso de algoritmos de integración numérica, se observó que el algoritmo Gauss-Lobato oscila en altas frecuencias al evaluar las integrales de Carson y Pollaczek. En el caso de Carson se propuso un nuevo algoritmo de integración el cual resuelve la integral de Carson en un tiempo de cómputo menor y con mayor precisión que los demás analizados aquí.

Al analizar el efecto que tiene el error del cálculo de Z_T en la predicción de respuestas transitorias de redes eléctricas. Se observó que dicho error puede afectar la respuesta transitoria hasta en un 20% para ambos casos, líneas aéreas y cables subterráneos. Por lo cual se concluye que dicho error tiene en general un impacto importante sobre la respuesta transitoria y por consecuencia es un parámetro de gran importancia en el modelado matemático de sistemas eléctricos.

- 1.- Las fórmulas obtenidas en esta tesis a pesar de ser bastante precisas presentan una forma muy complicada. Es por esta razón que se propone obtener fórmulas más simples y precisas.
- 2.- Las fórmulas entregadas por Carson [21] y Pollaczek [16] consideran terrenos homogéneos. Sin embargo, en la práctica el suelo puede estar formado por varias capas de materiales con distintas propiedades electromagnéticas. Es por esto que se pretende desarrollar fórmulas cerradas y métodos aproximados para este tipo de suelos que se denominan estratificados.

7.1 BASES PARA UNA MEJOR FÓRMULA PARA LA INTEGRAL DE CARSON

Para obtener la nueva fórmula de aproximación a Carson se toma como punto de partida la fórmula de Gary y Dubanton [5,6] la cual en su forma normalizada es:

$$J_{ik} \approx \frac{1}{4} \ln \left(\frac{\left(1 + \frac{2\sqrt{-j}}{\xi} \right)^2 + \eta^2}{1 + \eta^2} \right). \quad (7.1)$$

Se observa que (7.1) contiene solo un término ξ del lado izquierdo. Ahora se reescribe (7.1) como:

$$J_{ik} = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{\left(1 + \frac{2\sqrt{-j}}{f(\xi, \eta)} \right)^2 + \eta^2}{1 + \eta^2} \right). \quad (7.2)$$

Donde se ha intercambiado el signo de aproximación por el de igualdad y el término ξ por una función de ξ y η . Al suponer J_{ik} conocido, debido a que se cuenta con el algoritmo híbrido desarrollado en el capítulo III, es posible despejar la función $f(\xi, \eta)$:

$$f(\xi, \eta) = \frac{2\sqrt{-j}}{\sqrt{(1 + \eta^2)e^{4J_{ik}} - \eta^2 - 1}}. \quad (7.3)$$

Al graficar (7.3) contra ξ para diez valores de η y cien valores de ξ espaciados logarítmicamente se obtienen los gráficos de la figura 7.1.

La figura 7.1 muestra que la parte real de la función corresponde al simple valor de ξ , sin embargo, la parte imaginaria depende de ξ y η . De lo anterior se aprecia que el problema ahora reside en encontrar dicha función para la parte imaginaria, lamentablemente en este trabajo no se llevó a cabo por falta de tiempo. No obstante se cree que esta función puede ser obtenida fácilmente ya que aparentemente dicha función es una exponencial decreciente.

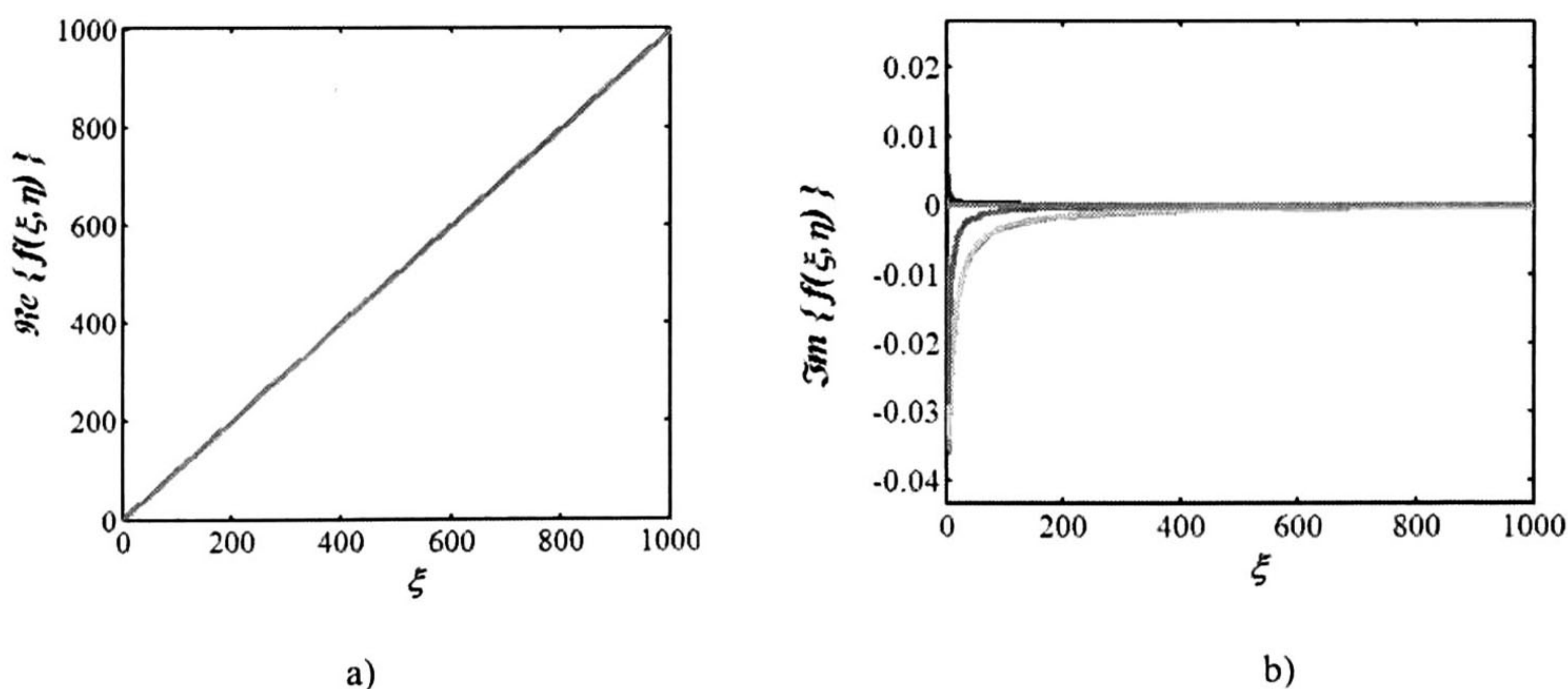


Fig. 7.1. Función $f(\xi, \eta)$ en el caso de Carson. a) Parte real, b) parte imaginaria.

7.2 BASES PARA UNA MEJOR FÓRMULA PARA LA INTEGRAL DE POLLACZEK

Para el caso de Pollaczek se parte de la formulación de Saad, Gabba y Giroux [29] la cual en su forma normalizada se escribe como:

$$J_{ik} \approx K_0 \left(\sqrt{j\xi} \sqrt{1+\eta^2} \right) + \frac{2e^{-\sqrt{j\xi}}}{4 + j(\xi\eta)^2}. \quad (7.4)$$

Introduciendo una función $f(\xi, \eta)$ y reescribiendo (7.4) se tiene:

$$J_{ik} \approx K_0 \left(\sqrt{j\xi} \sqrt{1+\eta^2} \right) + \left(f(\xi, \eta) + 2e^{-\sqrt{j\xi}} \right) (4 + j(\xi\eta)^2). \quad (7.5)$$

Despejando la función $f(\xi, \eta)$ de (7.5) se obtiene:

$$f(\xi, \eta) = \frac{J_{ik} - K_0 \left(\sqrt{j\xi} \sqrt{1+\eta^2} \right)}{4 + j(\xi\eta)^2} - 2e^{-\xi\sqrt{j}}. \quad (7.6)$$

Al graficar (7.6) contra ξ para diez valores de η y cien valores de ξ espaciados logarítmicamente se obtienen los siguientes gráficos

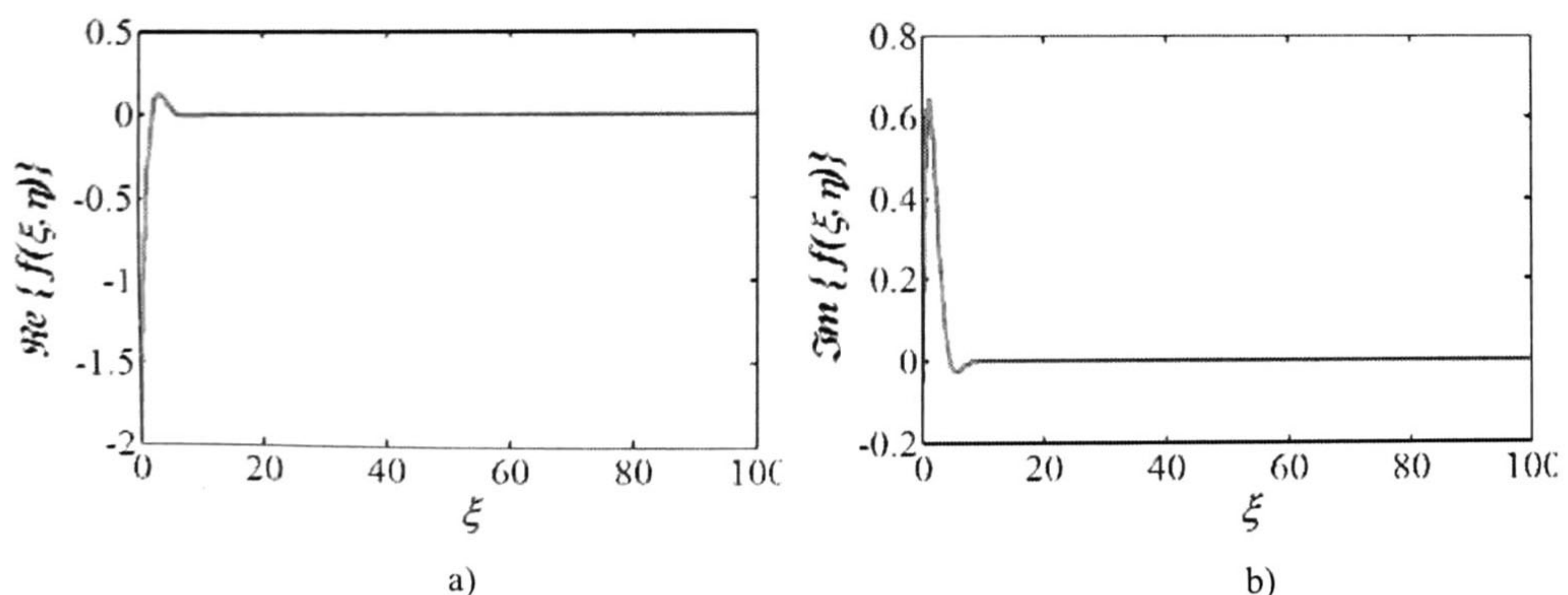


Fig. 7.2. Función $f(\xi, \eta)$ en el caso de Pollaczek. a) Parte real, b) parte imaginaria.

En la figura 7.2 se puede observar que a diferencia de lo que pasa con Carson la función en el caso de Pollaczek es un poco más complicada, no obstante, para ambos casos: real e imaginario todos los valores de η distintos se encuentran superpuestos, por lo cual se intuye que dicha función depende únicamente de ξ . Ahora el problema consiste en aproximar dicha función.

- [1]. A. Deri, G. Tevan, A. Semelyen and A. Castanheira, "The complex ground return plane: A simplified model for homogeneous and multilayer earth return," IEEE Trans. Power App. Syst., vol. PAS-100, no. 8, pp.3686-3693, Aug. 1981.
- [2]. A. N. Tleis, Power Systems Modelling and Fault Analysis, Newnes Elsevier, Lincare House, Jordan Hill, Oxford UK, ISBN 978-0-7506, Copyright© 2008.
- [3]. A. Ramirez and F.A. Uribe, "A broad range algorithm for the evaluation of Carson's integral", IEEE Trans. Power Del., vol. 22, no.2, pp. 1188-1193, April 2007.
- [4]. A. Ramirez, P. Gomez, P. Moreno, A. Gutierrez, "Frequency Domain Analysis of Electromagnetic Transients trough the Numerical Laplace Transform", IEEE.
- [5]. C. Dubanton, "Calcule Approché des paramètres primaires et secondaires d'une ligne de transport Valeurs homopolaires ", E.D.F. Bulletin de la direction des études et recherches, série 2, No. 1, pp.53-62 ,1969.
- [6]. C. Gary, "Approche Complète de la Propagation Multifilar en Haute Fréquence par Utilisation des Matrices Complexes," EDF Bulletin de la Direction des Études et Recherches-Série B, no. ¾, pp.5-20, 1976.
- [7]. D. A. Tsiमितros, Grigoris K. Papagiannis, D. P. Labridis, P. S. Dokopulos, " Earth return path impedances of underground cables for the two layers earth case", IEEE Transactions on Power Delivery, vol. 20, No. 3, July 2005.
- [8]. D. J. Wilcox, Transient and Harmonic Induction in Underground Cables Systems, Ph. D. Thesis, The Victoria University of Manchester, Institute of Science and Technology, 1969.
- [9]. Erling D. Sunde, "Earth Conduction Effects in Transmission Systems", Bell Telephones Laboratories, Inc., 1968.
- [10]. F. A. Furfari, "The First Electrical Power Transmission Line in North America Oregon City, Oregon" IEEE Industry application magazine, pp. 7-10, July/August, 2003.

- [11]. F. Alvarado and R. Betancourt, "An accurate closed-form approximation for ground return impedance calculations", Proc. IEEE, vol. 71, no.2, pp. 279-280, Feb 1983.
- [12]. F. A. Uribe, Algorithmic Evaluation of Pollaczek Integral and its Applications to Electromagnetic Transient Analysis of Underground Transmission Systems, Ph. D. Thesis, Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, 2002.
- [13]. F. A. Uribe, J. L. Naredo, P. Moreno and L. Guardado, "Algorithmic Evaluation of Underground Cable Earth Impedances", IEEE Trans. on Power. Del., vol. 19, no.1, pp. 316-332, Jan. 2004.
- [14]. F.A. Uribe, J. L. Naredo, P. Moreno and L. Guardado, "Electromagnetic transients in underground transmission systems through the Numerical Laplace Transform", International Journal of Electrical Power and Energy Systems, Elsevier Science Ltd, September 2000.
- [15]. F. A. Uribe, Técnicas del Dominio de la Frecuencia Aplicadas al Análisis de Transitorios Electromagnéticos en Cables de Transmisión de Energía Eléctrica, Tesis de Maestría, Universidad de Guadalajara, Guadalajara, 1998.
- [16]. F. Pollaczek, "Über das feld einer unendlich langen wechsel stromdurchflossenen Einfachleitung," E. N. T. vol 3 no.9, pp. 339-360, 1926.
- [17]. G. Lucca, "Mutual impedance between an overhead and buried line with earth return", Electromagn. Compat., IEE Conf. Publ. 396, 1994.
- [18]. H. W. Dommel, Electromagnetic theory book Prepared for Bonneville Power Administration, P.O. Box 3621, Portland OR, 1986.
- [19]. H. W. Dommel, "Overhead line parameters from handbook formulas and computer programs", IEEE Trans. PAS, vol. PAS-104, pp. 366-372, February 1985.
- [20]. J. L. Naredo, J. A. Gutiérrez, F. A. Uribe, J. L. Guardado, V. H. Ortiz "Frequency Domain Methods for Electromagnetic Transient Analysis", IEE Power Engineering Society General Meeting, Tampa FL., pp. 1.7, June 2007.
- [21]. J. R. Carson, "Wave propagation in overhead wires with ground return", Bell Syst. Tech J., pp. 539-554, 1926.

- [22]. J. Zou, J. Lee, Y. Jeon and S. Chang, "Calculation of the Earth Return Impedance of a Conductor Inside a Tunnel by Using the Fictitious Medium Method", *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 22, no. 4, pp. 2481-2488, October 2007.
- [23]. K. J. Satsios, D. P. Libridis, P.S. Dokopoulos, "Finite Element computation of field and Eddy Currents of a system consisting of a power transmission line above conductors buried in non-homogeneous earth", *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 13, no. 3, pp. 876-882, July 1998.
- [24]. L. M. Wedepohl and D.J. Wilcox, "Transient analysis of underground power transmission systems, -System model and wave-propagation characteristics," *Proc. IEE*, vol. 120, no. 2, pp. 253-260, February 1973.
- [25]. L. M. Wedepohl, "Electrical characteristics of poly-phase transmission systems with special reference to boundary-calculations at power line Carrier frequencies", *Proceedings of the IEE*, vol. 112, No. 11, November 1965.
- [26]. M. Pizarro and R. Eriksson, "Modelling of the Ground Mode in Transmission Lines in Time Domain Simulation," *Proc. 7th ISH in Dresden*, pp.179-182, 1991.
- [27]. N. Mullineux, J. P. Bickford, J. R. Reed, *Computation of Power Systems Transients*, Stevenage, Eng., 1976.
- [28]. O. G. Villaseñor, *Simulación de Transitorios Electromagnéticos empleando la Transformada Numérica de Laplace*, Tesis de Maestría, Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del I.P.N., Guadalajara, 2007.
- [29]. O. Saad, G. Gaba, M. Giroux, "A closed-form approximation for ground return impedance of underground cables", *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 11, no. 3, pp. 1536-1545, July 1996.
- [30]. P. Moreno, A. Ramirez, "Implementation of the Numerical Laplace Transform: A Review", *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 23, no. 4, pp. 2599-2609, October 2008.
- [31]. P. Pettersson, discussion of O. Saad, G. Gaba and M. Giroux, "A closed-form approximation for ground return impedance of underground cables", *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 11, No. 3, pp. 1536-1545, July 1996.
- [32]. P. Pettersson, "Image representation of wave propagation above, on and underground", *IEEE Trans. Power Delivery* . vol. 9, no. 2, pp. 1049-1055, April 1994.

- [33]. R. H. Galloway, W. B. Shorrocks and L. M. Wedepohl, "Calculation of electrical parameters for short and long polyphase transmission lines", PROC. IEE., Vol. 111 no. 12, December 1964.
- [34]. R. Iracheta, *Análisis de Transitorios Electromagnéticos en Sistemas de Cables Subterráneos*, Tesis de Maestría, Universidad Autónoma de Nuevo León, México, Agosto 2007.
- [35]. T. Martins, A. Lima, S. Carneiro Jr., "Effect of Impedance Approximate Formulae on Frequency Dependence Realization", IPST, Montreal, Canada, June 19-23, 2005.
- [36]. T. Noda, "A double logarithmic approximation of Carson's ground-return impedance," IEEE Trans. Power Del., vol. 21, no.1, January 2005.
- [37]. T. Noda, *Development of a Transmission Line Model Considering the Skin and Corona Effects for Power Systems Transient Analysis*, Ph. D. Thesis, Dhoshisha University, Kyoto, Japan, December 1996.
- [38]. W. Gander, W. Gautschi, "Adaptive quadrature----revisited", BIT, vol. 40, pp. 84-101, 2000.
- [39]. X. Legrand, A. Xémard, G. Fleury, Philippe Auriol, C. A. Nucci, "A quasi-Monte Carlo integration method applied to the computation of the Pollaczek integral", IEEE Transaction on Power Delivery, for its inclusion in 2008.
- [40]. Y. Baba, N. Tanabe, N. Nagaoka and A. Ametani, "Transient analysis of a cable with low-conducting layers by finite-difference time-domain method ", IEEE Transactions on EMC, Vol. 46, No. 3, pp. 1536-1545, August 2004.
- [41]. Y. Wang and S. Liu, "A Review of Methods for Calculation of Frequency-dependent Impedance of Overhead Power Transmission Lines", Proc. Natl. Sci. Counc. ROC(A), vol. 25, no. 6, pp. 329-338, 2001.
- [42]. S. A. Schelkunoff, "The Electromagnetic Theory of Coaxial Transmission Lines and Cylindrical Shields", Bell Syst. Tech. J., Vol. 13, pp. 532-579, 1934.

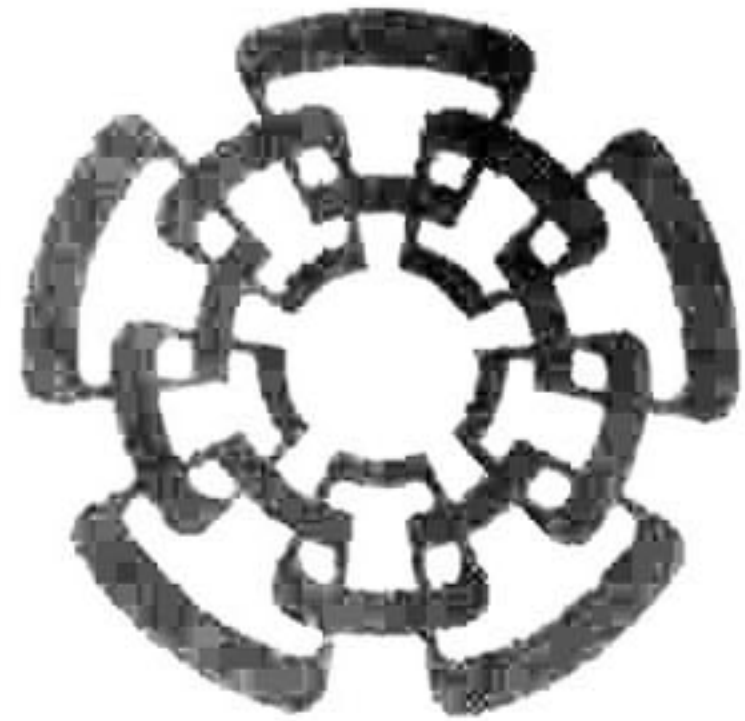
APENDICE

A

**DOCUMENTOS TECNICOS
GENERADOS**

Conferencias Internacionales

O. R. Leños, J. L. Naredo, P. Moreno, "Assessment of Approximate Formulas for Calculating Overhead-Line Earth-Impedances", NAPS 2008 *North American Power Symposium*, September 28-30, 2008, Calgary, Canada.



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL I.P.N.
UNIDAD GUADALAJARA**

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional aprobó la tesis

Cálculo Eficiente de Impedancias de Tierra en Sistemas de Transmisión

del (la) C.

Octavio Trinidad RAMOS LEAÑOS

el día 07 de Noviembre de 2008.

Dr. Pablo Moreno Villalobos
Investigador CINVESTAV 3C
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. José Luis Naredo Villagran
Investigador CINVESTAV 3C
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Amner Israel Ramírez Vázquez
Investigador CINVESTAV 3B
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Felipe Alejandro Uribe Campos
Profesor Investigador Titular B
Universidad de Guadalajara

Dr. Laurence Snider Makarowsky
Retired Full Professor
Tulane University



CINEVESTAV
BIBLIOTECA CENTRAL



SSIT000008844