XX(178556.1)

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N.
Unidad Guadalajara

Evaluación de Técnicas para el Seguimiento Dinámico de Armónicos en Estado Transitorio

CINVESTAV
IPN
ADQUISICION
DE LIBROS

Tesis que presenta:

Horacio García Máximo

para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias

en la especialidad de:

Ingeniería Eléctrica

Directores de Tesis

Dr. José Luis Naredo Villagrán
Dr. Amner Israel Ramírez Vázquez

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
COORDINACIÓN GENERAL DE SERVICIOS BIBLIOGRÁFICOS

Guadalajara, Jalisco, Octubre de 2008.

CLASIF.: TK165 .G8 , G37 2008
ADQUIS.: SSI-541
FECHA: 18/01/2009
PROCED.: Don-2009
$

ID 159238-1001

Evaluación de Técnicas para el Seguimiento Dinámico de Armónicos en Estado Transitorio

Tesis de Maestría en Ciencias
Ingeniería Eléctrica

Por:
Horacio García Máximo
Ingeniero en Comunicaciones y Electrónica
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica del Instituto Politécnico Nacional 2000-2005

Becario de Consejo Nacional de Ciencia y Tecnologìa, expediente no. 203224

Directores de Tesis
Dr. José Luis Naredo Villagrán
Dr. Amner Israel Ramírez Vázquez

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Octubre de 2008.

Dedicatoria

A mis padres, Ángel García H. y María de la Luz Máximo C.,

A mis hermanos, Ely, Sandy, Miguel A. y Rosy,

A mis sobrinas Dany, Araceli, Paola, Arely y mi sobrino Carlos,

A la memoria de mis abuelos Ma. Concepción, José Guadalupe y Antonio,

A María del Consuelo Murillo.

A todos y cada uno ellos,

con todo mi respeto, admiración y

sobre todo con todo mi Amor...

Agradecimientos

Principalmente a Dios, gracias a ti por la vida y gracias porque me has ayudado a cumplir esta meta que en alguna etapa de mi vida me planteé. Gracia Señor por las innumerables bendiciones y por la gran familia que me diste.

A mi mamá María de la Luz Máximo, que con su amor, su cariño y con sus palabras siempre me alentó a salir a delante y a ser alguien en la vida. Porque siempre me diste lo necesario y por procurar que no me faltara cariño y calor de hogar, gracias por brindar gran parte tu vida para que mis hermanos y yo fuéramos personas de bien.

A mi papá Ángel García, que con su apoyo y el gran ejemplo de inquebrantable fortaleza siempre me inspiraron a seguir a delante a pesar de los obstáculos. Gracias por tu apoyo porque sin él no hubiera sido posible todo esto, gracias por enseñarme a valorar las cosas y gracias por enseñarme lo valioso que es el trabajo.

A mi hermana Ely, por todo su apoyo brindado a lo largo de mi vida profesional, pero sobre todo por ser uno de mis principales ejemplos de superación. Muchas gracias por ser mi amiga, y muchas gracias porque siempre pude recurrir a ti cuando más lo necesitaba.

A mi hermana Sandy, por ser otro de mis ejemplos más de superación y sacrificio por alcanzar las cosas que uno más quiere. Gracias por enseñarme a luchar para alcanzar lo que uno desea y muchas gracias por todo tu cariño y por esas dos hermosas sobrinas que nos has dado que también son mi inspiración.

A mi hermano Miguel A., por su valiosa compañía en la etapa más importante de mi vida profesional, por el valioso ejemplo de perseverancia y lucha. Gracias porque me enseñaste el sentido de responsabilidad y a seguir por el buen camino cuando uno está fuera de casa y lejos de los padres.

A mi hermana Rosy, por su apreciable apoyo en cada una de las etapas de mi vida, por su cariño y compañía. Gracias por darnos esos lindos sobrinos que son un motivo más de mi inspiración.

A quien con su cariño, atención, con sus palabras de aliento y sobre todo con su Amor hizo más llevadero el andar a lo largo de esta etapa, a ti que llegaste a darle un cambio a mi vida y a alegrar mi corazón... Gracias Mary, TE AMO.

A Martín Cruz López, por ser parte de mi familia, a todos y cada uno de mis sobrinos(as) que con su inocencia y pureza de sentimientos son parte importante de mi inspiración y motivo de superación.

A mis asesores de tesis, Dr. José Luis Naredo y Dr. Abner Ramírez Vázquez por la valiosa enseñanza y orientación para poder llevar a buen término este trabajo, pero sobre todo por su amistad y sus valiosos consejos.

Al resto del grupo de profesores de potencia, Dr. Juan M. Ramírez, Dr. Pablo Moreno, y Dr. José M. Cañedo, por la enseñanza académica, por su gran amistad y por los buenos momentos a lo largo de mi estancia en el CINVESTAV Unidad Guadalajara.

Al Dr. Laurence A. Snaider por ser parte del jurado y por el apoyo brindado para la culminación de este trabajo.

A mis mejores amigos de la ESIME Zacatenco del IPN, Ángel Tamariz, Francisco Velásquez, Alfonso Vega, José L. López, Israel García, Ivonne Escobedo, Yuridia Mosso, Alejandro Aguilera... Gracias a todos ellos por que en algún momento de mi vida me enseñaron a valorar la verdadera amistada y demostraron que los amigos están contigo en las buenas y en las malas.

A Ángel Hernández G. y Carlos Pérez H. por su valiosa amistad y por estar conmigo en las buenas y en las malas. Gracias por permitirme ser su amigo y por todas las aventuras que hemos vivido juntos.

A los profesores de la ESIME Zacatenco del IPN, Ing. Miguel Arizmendi, Ing. Antonio Urbano y al Ing. Ríos, por ser parte fundamental de mi formación académica, pero más por su amistad.

A Omar Espinosa G. y Omar G. Villaseñor por su amistad y por su agradable y apreciable compañía brindada a lo largo de mi estancia en Guadalajara. Gracias por su apoyo y por ser mi familia en esta difícil etapa.

A mis compañeros de generación, Antonino López, Carlos T. Santana, Francisco R. Lezama, Jesús A. Dávila, José F. Herrera y Juan M. Reyes, por su amistad y apoyo brindado durante la realización de este trabajo y la realización de la maestría.

A todo el personal en general del Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional Unidad Guadalajara por todas las facilidades prestadas para poder llevar a cabo la realización de mi maestría y trabajo de tesis.

Por último, al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico otorgado para realizar mis estudios de posgrado.

Resumen

El análisis armónico en estado transitorio es un problema de la Ingeniería Eléctrica que ha dado lugar a desarrollar diversas técnicas para una medición precisa de las diferentes componentes de frecuencia que provocan distorsiones en las señales de voltaje y de corriente de los sistemas eléctricos de potencia.

En este trabajo como primer punto se da a conocer la definición de componentes de frecuencia, se describe lo que es un fenómeno transitorio clasificándolo de acuerdo al contenido espectral, mencionando además las posibles causas que lo originan.

En una etapa siguiente se revisan y describen tres diferentes técnicas para el análisis armónico, se muestran resultados mediante un ejemplo con una señal prueba de frecuencia fundamental con algunas componentes armónicas.

Posteriormente se aborda la teoría fundamental de la transformada ondeleta discreta y la similitud que guarda con el proceso de filtrado digital a través de un esquema de banco de filtros. Se describe cómo una función puede ser representada por medio de funciones ondeleta.

Enseguida, se hace un estudio de comparación de cuatro técnicas diferentes, donde una de ellas hace uso de la representación ondeleta. Se proponen tres casos de estudio, dos de ellos constan de señales de frecuencia fundamental con varias armónicas y sufren cambios abruptos en su amplitud; el tercero es un caso práctico donde se simula una falla en una línea de transmisión monofásica.

Por último, se presentan las conclusiones a las que se llega después de la comparación de las cuatro diferentes técnicas, además de trabajos futuros propuestos que se derivarán del trabajo realizado en esta tesis.

Abstract

Generation of harmonics during transient state of power systems is a major problem affecting control as well as correct measure. Currently, there is growing interest in developing techniques to detect and tracking harmonics component, as fast as possible, where these are produced by an abnormal operation of the network.

This thesis is concerned about the most efficient way to detect harmonics as well as interharmonics when a disturbance occurs on a power system. Four techniques are assessed in this thesis: 1) Enhanced Phase Locked Loop Scheme, 2) Windowed Fourier Transform, 3) Kalman Filtering Schemes and 4) Kalman Wavelet Filters.

First, Phase Locked Loop is explained as applied to the harmonic tracking problem. Next, the Kalman Filter method as applied to the tracking problem is exposed here. Finally, a combined technique of Kalman Filters and wavelets analysis is presented. A complete chapter concerning wavelets and their relationship with Digital Filter theory is included.

The four techniques being considered in this thesis are tasted by mean of three practical examples. It is concluded that the Kalman Wavelet technique is the fast and more accurate, whereas the standard Kalman technique is nearly as fast and requires much more computing power. The windowed Fourier Transform technique is not appropriate for real time applications. The Enhanced Phase Locked Loop technique is the slowest; however, as it converges, it is the most accurate.

Índice General

Resumen vi

Abstract vii

Índice General viii

Índice de Figuras x

Índice de Tablas xii

Capítulo 1. Introducción 1

1.1 Panorama general 1

1. 2 Planteamiento del problema y objetivos 2

1.3 Organización de la tesis 2

Capítulo 2. Componentes espectrales 4

2. 1 Armónicos e interarmónicos 4

2. 2 Tipos de fenómenos transitorios 5

2.2.1 Transitorio por impulso 5

2.2.2 Transitorio oscilatorio 6

Capítulo 3. Métodos de identificación de armónicas 8

3.1 Introducción 8

3.2 Oscilador anclado en fase de lazo cerrado 8

3.2.1 Principio de funcionamiento del PLL 9

3.2.2 Modelo del PLL 10

3.2.3 Análisis de una señal con el EPLL 12

3.3 Transformada rápida de Fourier por ventaneo 13

3.3.1 Resolución en frecuencia 14

3.3.2 Selección de la ventana y frecuencias centrales 15

3.3.3 Análisis de señal de prueba con la WFFT 16

3. 4 Filtro de Kalman 17

3.4.1 Definición del problema en variables de estado 19

3.4.2 Análisis armónico con filtros Kalman 20

3. 5 Observaciones del capítulo 22

Capítulo 4. Ondeletas **23**

4.1 Introducción 23

4.1.1. Bases de la transformada de Haar 23

4.2 Transformada rápida discreta de Haar 26

4.2.1 Representación matricial de la transformada rápida de Haar 30

4.2.2 Transformada Haar y filtros digitales 33

4.2.3 Descomposición espectral y resolución tiempo-frecuencia 39

4.3 Relación entre filtros digitales y ondeletas 41

4.4 Transformadas Ondeleta discretas 44

4.4.1 Ondeleta Haar como caso particular 45

4.4.2 Principales ondeletas discretas y sus requisitos 45

4.5 Ondeletas en tiempo continuo 48

4.5.1 Propiedades de las ondeletas 49

4.5.2 Ejemplos de ondeletas continuas 50

4.6 Observaciones del capítulo 52

Capítulo 5. Comparación de técnicas para el análisis armónico en estado transitorio **53**

5.1 Introducción 53

5.2 Modelo del filtro hibrido Kalman-Ondeleta 53

5.3 Especificaciones de muestreo y evaluación 55

5.4 Diferentes casos de estudio 56

5.4.1 *Caso I.* Señal con armónicos 56

5.4.2 *Caso II.* Señal con interarmónicas y depresión de voltaje 59

5.4.3 *Caso III.* Señal de corriente en una línea de transmisión. 63

5.5 Tiempo de Cómputo 67

5.6 Observaciones del capítulo 69

Capítulo 6. Conclusiones y trabajos futuros **70**

6.1 Conclusiones 70

6.2 Trabajos futuros 71

Referencias **72**

Apéndice A **74**

Índice de Figuras

Capítulo 2. Componentes espectrales 4

Fig. 2.1. Onda sinusoidal distorsionada por armónicas 4

Fig. 2.2. Voltaje durante un transitorio por impulso. 6

Fig. 2.3. Señal de voltaje con transitorio oscilatorio. 7

Capítulo 3. Métodos de identificación de armónicas 8

Fig. 3.1. Diagrama a bloques de un PLL. 9

Fig. 3.2. Oscilador anclado en fase mejorado (EPLL). 11

Fig. 3.3. Diagrama a bloques del esquema para la medición de armónicas. 12

Fig. 3.4. Magnitud de armónicas resultantes empleando EPLL. 12

Fig. 3.5. Ventana de Hanning y espectro. 16

Fig. 3.6. Amplitud de armónicas obtenidas con WFFT. 16

Fig. 3.7. Diagrama de flujo del proceso del filtro de Kalman. 18

Fig. 3.8. Magnitud de armónicas con el filtro de Kalman. 21

Capítulo 4. Ondeletas 23

Fig. 4.1. (a) señal $f(t)$, (b) aproximación $\hat{f}$ con rectángulos. 23

Fig. 4.2. Función rectángulo para aproximación inicial. 24

Fig. 4.3. Función rectángulo y ondeleta. 25

Fig. 4.4. Señal original para aplicar la transformación de Haar 29

Fig. 4.5. *i)* aproximación, *ii)* diferencias cuando m=1. 29

Fig. 4.6. *i) a*proximación, *ii)* diferencias cuando m=2. 30

Fig. 4.7. *i)* aproximación, *ii)* diferencias cuando m=3. 30

Fig. 4.8. *i)* Magnitud y *ii)* fase de $H(\omega)$. Filtro pasa-bajas. 35

Fig. 4.9. Magnitud y fase de la respuesta en frecuencia del filtro pasa-altas. 36

Fig. 4.10. Esquema básico del banco de filtros. 37

Fig. 4.11. Esquema en árbol de un banco de filtros. Análisis y síntesis. Tres niveles. 39

Fig. 4.12. División espectral de la señal con banco de filtros. 40

Fig. 4.13. Resolución tiempo-frecuencia de la transformada ondeleta. 40
Fig. 4.14. Principales ondeletas para la DWT. 46
Fig. 4.15. Ondeleta Morlet en tiempo y frecuencia. 51
Fig. 4.16. Ondeleta sombrero mexicano en tiempo y frecuencia. 51

Capítulo 5. Comparación de técnicas para el análisis armónico en estado transitorio 53

Fig. 5.1. Señal analítica con cuatro armónicas. 57
Fig. 5.2. Magnitud de la componente fundamental 57
Fig. 5.3. Magnitud de la tercera armónica. Caso I. 58
Fig. 5. 4. Magnitud de la tercera armónica empleando la ventana de Hanning para la WFFT. 59
Fig. 5.5. Señal con depresión de voltaje. 60
Fig. 5.6. Magnitud de la componente fundamental con *sag de voltaje*. 60
Fig. 5.7. Magnitud de la tercera armónica con *sag* voltaje. 61
Fig. 5.8. Magnitud de la tercera armónica empleando la ventana de Hanning para la WFFT.. 61
Fig. 5.9. Magnitud del inter-armónico, con *sag* de voltaje. 62
Fig. 5.10. Magnitud del interarmónico empleando la ventana de Hanning en la WFFT. 62
Fig. 5.11. Línea de transmisión de 120 km de longitud. 63
Fig. 5.12. Forma de onda de la corriente en la línea de transmisión. 63
Fig. 5.13. Magnitud de la fundamental de la corriente en la línea de transmisión. 64
Fig. 5.14. Magnitud de la tercera armónica empleando la ventana rectangular en la WFFT... 65
Fig. 5.15. Magnitud de la tercera armónica empleando la ventana de Hanning en la WFFT... 65
Fig. 5.16. Magnitud de la séptima armónica de la corriente en la línea de transmisión 66
Fig. 5.17. Magnitud de la séptima armónica empleando la ventana de Hanning en la WFFT.. 66

Apéndice A 74

Fig. A. 1. Esquema básico de un banco de filtros. 74

Índice de Tablas

Capítulo 2. Componentes espectrales 4

Tabla 1. Definición matemática de las componentes de frecuencia. 5

Tabla 2. Categorización de fenómenos transitorios. 7

Capítulo 3. Métodos de identificación de armónicas 8

Tabla 3. Variables de la formulación del filtro de Kalman 17

Capítulo 5. Comparación de técnicas para el análisis armónico en estado transitorio 53

Tabla 4. Tiempo de cómputo de los cuatro algoritmos (en segundos). 67

Capítulo 1. Introducción

1.1 Panorama general

Los sistemas eléctricos de potencia (SEP) operan con voltajes y corrientes sinusoidales de frecuencia fundamental (50 o 60 Hz). Sin embargo, la inclusión de cargas no lineales, y las maniobras de encendido/apagado con dispositivos electrónicos provocan variaciones en dichas formas de onda [1]. Además, cuando un sistema de potencia trabaja en condiciones de sobre carga es necesaria la inclusión de capacitores para la compensación de caídas de voltaje que se generan. La entrada en operación de estos dispositivos genera componentes de frecuencia que también contribuyen a la distorsión de señales de corriente y de voltaje fundamentales.

La presencia de armónicos en los SEPs puede causar serios problemas. Entre ellos, la distorsión de voltaje y de corriente provoca el incremento de pérdidas por calentamiento en los distintos equipos. Adicionalmente, algunos sistemas de protección no operan correctamente con la presencia de estas señales no deseadas [2].

El análisis de armónicas en sistemas de potencia ha tomado fuerza como un importante tema de estudio en los últimos años. Esto es debido al interés renovado en mejorar la calidad de la energía por parte de las compañías y grupos de investigadores [3]. Tradicionalmente, las armónicas en estado estable han sido el principal campo de estudio.

Varias técnicas han sido propuestas para la caracterización de distorsión armónica en estado transitorio [2]-[4]. La mayoría de los métodos propuestos se basan en la Transformada Discreta de Fourier (DFT, Discrete Fourier Transform). Estos métodos son precisos para ondas estacionarias, pero dejan de serlo cuando se presentan fenómenos transitorios en las formas de onda de voltaje y de corriente [4].

Con el propósito de suplir estas imprecisiones, se ha propuesto un sistema que hace uso de un oscilador anclado en fase de lazo cerrado (PLL, Phase-Locked Loop), donde la solución de un conjunto de ecuaciones diferenciales que contienen como variables la fase, amplitud y frecuencia se aproxima a la solución fundamental [6]. Otra alternativa es la técnica basada en el filtro de Kalman (KF, Kalman Filter) [7], el cual es un tipo especial de filtro muy robusto contra frecuencias indeseadas y ruido en las mediciones [5].

La transformada ondeleta (WT, Wavelet Transform) es una técnica que permite llevar a cabo la transformada de una señal en el dominio del tiempo en diferentes bandas de frecuencia, y que, en conjunto con el KF, forma una técnica muy poderosa para el análisis armónico en estado transitorio [8].

1.2 Planteamiento del problema y objetivos

En este trabajo la evolución en estado transitorio de las componentes armónicas es del mayor interés, ya que en esos períodos transitorios es donde ocurren muchos de los problemas que afectan a dispositivos de las redes eléctricas. Así que, una medición de estas componentes en estado transitorio es de gran utilidad e importancia para prevenir problemas y tomar acciones de control.

El análisis de señales de voltaje y de corriente de los SEPs en estado transitorio es un problema vigente en muchos sectores de la Ingeniería. Una precisa medición de las componentes armónicas de estas señales y la técnica utilizada para tal propósito son de gran importancia en estos sectores. En la mayoría de los casos se requiere que la medición sea muy precisa y que el tiempo de respuesta de la técnica utilizada sea muy pequeño.

También existen aplicaciones o estudios en los que no se requiere un tiempo de respuesta rápido y sólo basta con tener una buena precisión en la medición; por lo regular estos son estudios que se hacen fuera de línea con información almacenada de señales medidas previamente.

En este trabajo se plantea analizar el comportamiento de cuatro técnicas diferentes para determinar las armónicas en señales de corriente y de voltaje; todo esto en estado transitorio.

Como objetivos del presente trabajo se tienen los siguientes:

- A través de diferentes casos de estudio se pretende determinar cuál de las técnicas que se presentan es la más adecuada para el análisis armónico en estado transitorio y en tiempo real; y que el lector pueda hacer una decisión de qué técnica utilizar de acuerdo al tipo de aplicación.

- Se quiere comparar el tiempo de respuesta, grado de precisión y tiempo de cómputo de las cuatro técnicas que se presentarán en este trabajo.

- Se plantea demostrar la efectividad de la transformada ondeleta replanteando la técnica propuesta en [8], cambiando el tamaño de "ventana" para obtener un tiempo de cómputo bajo que sea comparable con el del resto de las técnicas. Además se quiere reducir el tiempo de respuesta de esta técnica.

1.3 Organización de la tesis

En el capítulo 2 se menciona el concepto básico de componentes de frecuencia (armónicas) y su clasificación. También se aborda el tema de fenómenos transitorios dando una categorización de ellos; mencionando además sus propiedades y posibles causas. En el capítulo 3 se trabaja con tres

técnicas propuestas previamente en la literatura especializada (WFFT, PLL y KF) haciendo una completa descripción matemática de cada una de ellas y validándolas a través de un ejemplo.

La teoría de la WT y los diferentes conceptos que ésta involucran se presentan en el capítulo 4. Se explica la transformada de ondeleta discreta (DWT, Discrete Wavelet Transform) y la relación que existe con el proceso de filtrado digital. También se muestra que una señal se puede representar por medio de funciones ondeleta, lo anterior con el propósito de entender la combinación de esta herramienta matemática con la técnica del KF para la estimación de armónicas que se propone en [8] y que en este trabajo se denomina como filtro Kalman-Ondeleta. (KWF, Kalman-Wavelet Filter).

En el capítulo 5 se realiza la evaluación de las ventajas y desventajas de cada una de las técnicas mencionadas a través de tres diferentes casos de estudio. En esta evaluación se toma mayor interés en tres factores importantes los cuales son: precisión, tiempo de cómputo y robustez.

En el último capítulo se darán a conocer las conclusiones finales del trabajo así como las futuras investigaciones o trabajos que se pueden llevar a cabo y que se derivan del presente estudio.

Capítulo 2. Componentes espectrales

2. 1 Armónicos e interarmónicos

En Ingeniería Eléctrica, una componente armónica está definida como una sinusoidal que tiene una frecuencia múltiplo entero de la fundamental a la cual opera el sistema. En la figura 2.1*a* se observan algunas armónicas y en la siguiente expresión se define matemáticamente [9]:

$$f_h = (h) \times (\textit{frecuencia fundamental}), \tag{2.1}$$

donde h es un entero. Cuando estas componentes de frecuencia existen, se encuentran superpuestas a la componente de frecuencia fundamental, quedando esta última distorsionada. En la figura 2.1*b* se observa una onda sinusoidal distorsionada con la tercera, quinta y séptima armónica.

A diferencia de las armónicas, la frecuencia de las interarmónicas no es múltiplo entero de la fundamental, pero también contribuyen a la distorsión de ésta. En la tabla 1 se definen componentes de frecuencia en términos de componentes espectrales en un estado quasi-estable sobre un rango de frecuencia definido [10].

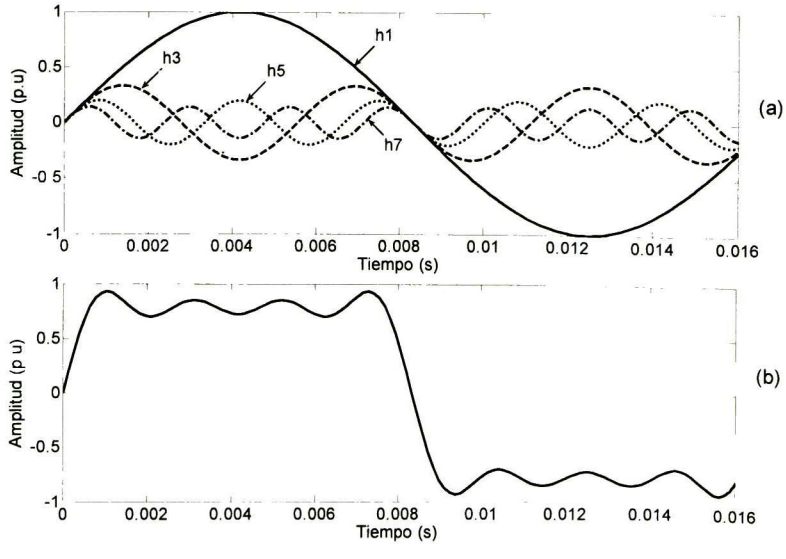


Fig. 2.1. Onda sinusoidal distorsionada por armónicas.

Tabla 1. Definición matemática de las componentes de frecuencia.

Armónico	$f = h \times f_1$	h entero > 0.
Componente de CD	$f = h \times f_1$	h=0.
Inter-armónico	$f \neq h \times f_1$	h entero > 0.
Sub-armónico	$f > 0 \quad y \quad f < f_1$	
f_1 Frecuencia fundamental de la señal de voltaje o corriente.		

2. 2 Tipos de fenómenos transitorios

En teoría de circuitos eléctricos el término *transitorio* es adoptado para indicar que una señal de corriente o voltaje tiene un periodo de transición de un estado estable a otro. Este fenómeno transitorio está asociado a maniobras con interruptores, fallas, descargas atmosféricas, etc.

Ahora, en los SEPs el término *transitorio* es utilizado para describir el fenómeno antes mencionado como señales de cortos periodos de tiempo. No existe un límite fijo para estos tiempos; sin embargo, los fenómenos con duración de menos de un ciclo (en señales de 50 o 60 Hz.) se consideran como fenómenos transitorios [11].

En los SEPs, en la mayoría de los casos de estudio, los fenómenos transitorios se clasifican de acuerdo con la forma de onda que se genera ante determinado evento. A continuación se considera la clasificación en dos tipos: *transitorio oscilatorio* y *transitorio por impulso* [12]. Aunque en la operación de los SEPs se generan una variedad de fenómenos electromagnéticos que contribuyen a la distorsión de la señal fundamental, en esta sección solamente se mencionarán los fenómenos que ocurren en periodos muy cortos de tiempo.

2.2.1 Transitorio por impulso

Los transitorios por impulso consisten en un cambio súbito del estado estable del voltaje, de la corriente o de ambos y son unidireccionales en polaridad. Estos impulsos se caracterizan por sus tiempos de subida y caída, los cuales pueden ser determinados por el contenido espectral de la señal [13]. En la figura 2.2 se puede observar una forma típica de un transitorio de esta categoría. La principal causa de este tipo de fenómenos son las descargas atmosféricas (rayos). Cuando un rayo golpea una línea de transmisión se produce una sobretensión que será de muy corta duración. Sobretensiones de menor magnitud se generan también cuando la descarga atmosférica ocurre cerca de una línea de transmisión. Estas se conocen como sobretensiones inducidas.

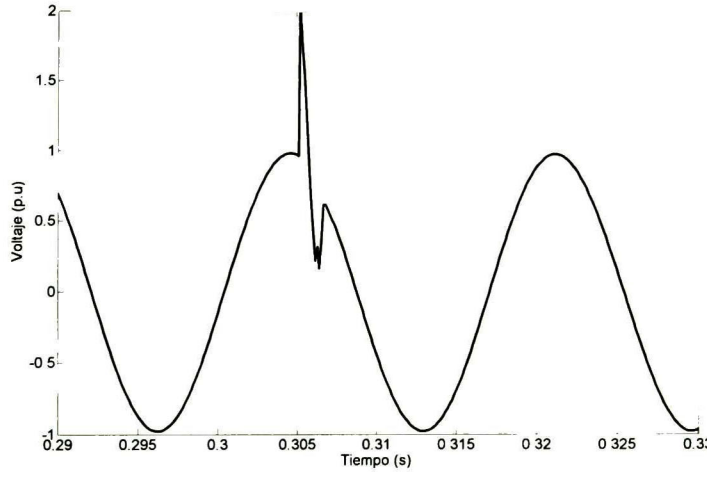


Fig. 2.2. Voltaje durante un transitorio por impulso.

Por ejemplo, un impulso transitorio de 2kV $\angle 1.2x50\mu s$, significa que se genera una sobretensión que alcanza un máximo de 2000 volts en 1.2 μs y después decae a la mitad del valor pico en 50 μs.

Las formas de onda generadas por transitorios incluyen altas frecuencias y, para la mayoría de los casos, la forma del impulso transitorio incluye un repentino aumento en la amplitud seguido de un decaimiento exponencial. Por lo general, estos impulsos se atenúan a lo largo del sistema o de la línea de transmisión. Los fenómenos transitorios por impulso pueden excitar la frecuencia natural (o de resonancia) de un elemento o un subsistema y producir oscilaciones [13].

2.2.2 Transitorio oscilatorio

El transitorio oscilatorio es también un cambio repentino en la magnitud del voltaje o la corriente el cual afecta valores de polaridad. Después del súbito cambio en la magnitud, se presentan oscilaciones dentro de un rango de frecuencia determinado. Obviamente este fenómeno puede ser caracterizado por su respectivo espectro de frecuencia. En la figura 2.3 se muestra una forma típica del transitorio oscilatorio.

Un *transitorio oscilatorio de alta frecuencia,* con componentes de frecuencia mayores a los 500 kHz y una duración típica de microsegundos, suele ser por causa de la respuesta natural del sistema a un transitorio por impulso.

Al energizar un capacitor (*back-to-back*) se genera un *transitorio de frecuencia media*, con componentes de frecuencia que van desde los 5 a los 500 kHz, y con una duración de varios ciclos de la frecuencia fundamental. También, al energizar líneas de transmisión se generan transitorios con características similares.

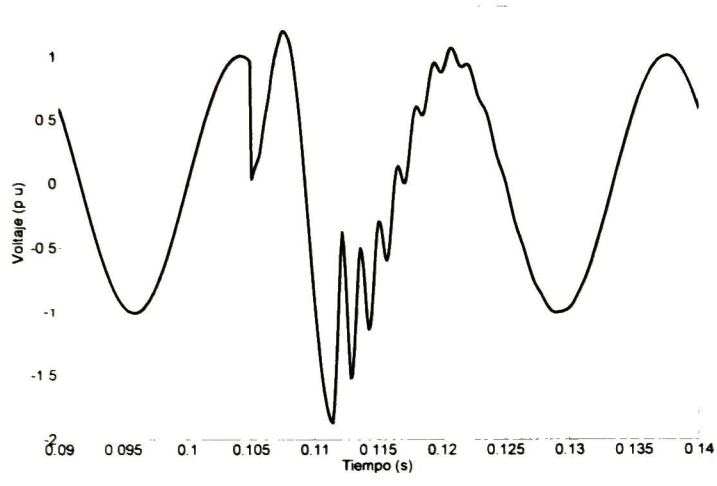


Fig. 2.3. Señal de voltaje con transitorio oscilatorio.

Las oscilaciones de frecuencias menores a los 5 kHz y de duraciones menores a los 50 milisegundos entran en la categoría de *transitorios de baja frecuencia*. Estos transitorios se encuentran principalmente en los sistemas de sub-transmisión y distribución; y principalmente se originan al energizar un banco de capacitores, con lo que se generan oscilaciones de voltaje entre 300 y 900 Hz [13].

En los sistemas de distribución se pueden encontrar transitorios con frecuencias de oscilación menores a los 300 Hz y están asociados a fenómenos de ferro-resonancia y a la energización de transformadores. Los transitorios debidos a capacitores conectados en serie podrían caer dentro de esta categoría. En la tabla 2 se presenta un resumen de los diferentes transitorios con sus características y clasificaciones de acuerdo con su duración y contenido espectral.

Tabla 2. Categorización de fenómenos transitorios.

TRANSITORIOS		**Contenido espectral típico**	**Duración típica**	**Magnitud típica de voltaje**
Por impulso	Nanosegundos	5 *ns* (elevación)	< 50 *ns*	--
	Microsegundos	1 μs (elevación)	50 *ns* -1 *ms*	--
	Milisegundos	0.1 *ms* (elevación)	> 1 *ms*	--
Oscilatorio	Baja frecuencia	< 5 kHz	0.3-50 *ms*	0-4 p.u
	Media frecuencia	5-500 kHz	20 μs	0-8 p.u
	Alta frecuencia	0.5-5 MHz	5 μs	0-4 p.u

Capítulo 3. Métodos de identificación de armónicas

3.1 Introducción

La medición de las componentes armónicas contenidas en una señal es un tema de gran importancia e interés para muchos ingenieros e investigadores, quienes se han dado a la tarea de desarrollar una gran variedad de técnicas para tal propósito; siempre tratando de obtener una respuesta rápida y precisa ante cambios repentinos en una señal eléctrica.

Dentro de esta variedad, la DFT es una técnica bastante utilizada para medir las magnitudes de las armónicas contenidas en una señal. Sin embargo, en estudios o mediciones en estado transitorio la resolución de la DFT no proporciona buenos resultados. Debido a ello suele utilizarse la transformada rápida de Fourier por Ventaneo (WFFT, Windowed Fast Fourier Transform). Una alternativa diferente propuesta en [6] consiste en un método no lineal y adaptivo, el cual hace uso de una unidad compuesta por varios circuitos osciladores anclados en fase de lazo cerrado mejorado (EPLL, Enhanc ed Phase Locked Loop) para la medición de armónicas e interarmónicas. Otras alternativas relativamente recientes han sido el uso de estimadores de estado, donde el filtro de Kalman (KF, Kalman Filter) es uno de ellos. Este es un tipo de filtro especial, gobernado por ecuaciones de estado, que tiene muchas aplicaciones dentro de la Ingeniería Eléctrica. Debido a sus propiedades de predicción y de estimación proporciona una respuesta rápida y precisa.

En este capítulo se abordan las tres diferentes técnicas antes mencionadas para la extracción de la amplitud de la componente fundamental y las armónicas contenidas en una señal.

3.2 Oscilador anclado en fase de lazo cerrado

El PLL es un dispositivo que sincroniza una señal de salida de cualquier sistema en fase y frecuencia con respecto a una señal de referencia generada por un oscilador. Cuando el PLL se encuentra en su estado anclado, o sincronizado, el error de fase entre las dos señales es cero o de un valor sumamente pequeño.

Un PLL consta de tres bloques: 1) un detector de fase (PD, Phase Detector), 2) un filtro de lazo (LF, Loop Filter) y 3) un oscilador controlado por voltaje (VCO, Volatage Controlled Oscillator). La forma como se conectan estos bloques se muestra en la figura 3.1.

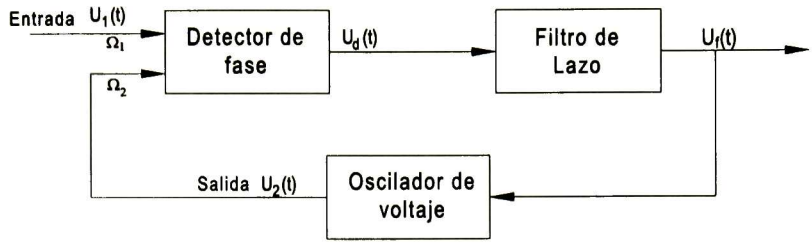


Fig. 3.1. Diagrama a bloques de un PLL.

Si el error cambia durante el proceso, el control actúa sobre el oscilador de tal forma que obliga al error a permanecer en cero, o en un valor muy pequeño. Se obliga así a que el PLL conserve su condición de anclado. La condición de anclado de un PLL se presenta cuando la fase de la señal de salida está enganchada a la fase de la señal de referencia, de ahí el nombre "anclado en fase"

3.2.1 Principio de funcionamiento del PLL

La salida del VCO oscila a una frecuencia Ω_2 determinada por la salida del LF dada por:

$$\Omega_2(t) = \Omega_o + K_o u_f(t), \tag{3.1}$$

donde Ω_0 es la frecuencia central de VCO, y K_o la ganancia del VCO. Entonces, el PD compara la fase de la señal de salida con la fase de la señal de entrada y entrega una salida $u_d(t)$ que representa el error de fase θ_e; el cual es proporcional a la ganancia K_d del PD y que se expresa como:

$$u_d(t) = K_d \theta_e . \tag{3.2}$$

La salida del PD tiene una componente de corriente alterna (CA) montada sobre una de corriente directa (CD). La componente de CA es indeseable y es suprimida por el LF que, en la mayoría de los casos, es un filtro pasa bajas de primer orden.

Para entender el funcionamiento del PLL, se comienza por suponer que la frecuencia angular de la entrada $u_1(t)$ es igual a la frecuencia central Ω_0. Esto quiere decir que el error de fase es cero. Por tanto, la salida del PD y la del LF son cero. Entonces el VCO oscila a la frecuencia central.

Si el error de fase θ_e no fuera cero la salida del PD cambia, también lo hace la salida del LF, produciendo después de un tiempo de retardo una salida finita $u_f(t)$ que hace que el VCO modifique su frecuencia de operación de tal forma que el error de fase disminuya.

Ahora, si la frecuencia de la señal de entrada sufre un cambio $\Delta\Omega$ en un tiempo t_0, la fase de la señal de entrada comienza a guiar a la fase de la señal de salida. Esto genera un error de fase que se incrementa con el tiempo hasta que la salida $u_d(t)$ cambia y, después de un retraso debido al

LF, la salida $u_f(t)$ comienza a crecer obligando así a que la frecuencia de operación del VCO se incremente. Esto hace a su vez que el error disminuya y que el VCO opere a la misma frecuencia que la señal de entrada [14].

3.2.2 Modelo del PLL

El objetivo principal del PLL es extraer las amplitudes de las componentes de una señal sinusoidal. El método propuesto en [6] consiste en un PLL mejorado (EPLL, Enhanced Phase-Locked Loop). Las dos principales características del modelo propuesto son: un funcionamiento preciso en ambientes no estacionarios y variantes en la frecuencia, así como la inmunidad al ruido.

Se tiene una señal que contiene una componente fundamental y un número finito de armónicas, expresada de la siguiente manera:

$$z(t) = A_1 \sin(\phi_1) + \sum_{k=2}^{h} A_k \sin(\phi_k) + v(t), \tag{3.3}$$

donde $\phi_k = \Omega_k t + \theta_k$ es el ángulo de fase total de la k-ésima armónica, Ω_k está definida como $\Omega_k = k\,\Omega_1$, y $v(t)$ es el ruido incluido en la señal. Aunque en la mayoría de los casos la frecuencia Ω_1 es conocida y fija, no se cumple en todos los casos que las "armónicas" Ω_k lo sean; esto quiere decir que las componentes de la señal $z(t)$ pueden variar dentro de un rango $\pm\varepsilon_k$ alrededor de su valor nominal [6].

El seguimiento de los parámetros de las componentes de la señal se hace, en este caso, con un esquema que corresponde a un oscilador anclado en fase mejorado (EPLL). Este dispositivo está descrito por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales.

$$\dot{A}(t) = \mu_1 e(t) \sin\phi(t), \tag{3.4}$$

$$\dot{\Omega}(t) = \mu_2 e(t) \cos\phi(t), \tag{3.5}$$

$$\dot{\phi}(t) = \omega(t) + \mu_3 \dot{\Omega}(t), \tag{3.6}$$

donde $e(t)$ está definido de la siguiente manera:

$$e(t) = z(t) - A(t)\sin\phi(t). \tag{3.7}$$

La derivación de estas ecuaciones se puede encontrar en [15], donde se presentan las propiedades matemáticas de dos filtros adaptivos no lineales capaces de extraer la componente sinusoidal deseada de una señal periódica. Además, se puede estimar su amplitud, fase y frecuencia. El comportamiento dinámico del sistema se explica mejor con el teorema presentado en [6] y [15] que establece lo siguiente:

Teorema 1: Asuma que $z(t)$ está dada por (3.3), donde todos los parámetros son desconocidos pero acotados. El sistema dinámico descrito por (3.4)-(3.6) tiene una única orbita $\gamma(t)$, periódica y asintóticamente estable en una vecindad cercana a $\gamma_1(t) = (A_1, \Omega_1, \phi_1)$.

En otras palabras, lo que establece el teorema es que la solución (es decir amplitud, frecuencia y fase) del conjunto de ecuaciones que describen al EPLL está cerca a los valores reales de la componente de $z(t)$ correspondiente. Por otra parte, un ajuste correcto de las valores μ_1, μ_2, y μ_3 obliga al sistema a dar seguimiento a las variaciones posibles en la señal de entrada.

En la figura 3.2 se muestra una unidad del EPLL que extrae la amplitud, fase y frecuencia de una sola componente. La parte del detector de fase es donde se calcula la amplitud de la señal de entrada. El valor $K=\mu_1$ es el que controla la velocidad de convergencia para el cálculo de la amplitud con una constante de tiempo aproximada a $\tau_A=1/\mu_1$. La fase y la frecuencia son controladas por los otros dos valores constantes, $K_i=\mu_2$ y $K_p = \mu_2\mu_3$.

La unidad presentada en la figura 3.2 tiene como referencia en su estructura interna a la frecuencia central o la frecuencia de la señal a la cual se le quieren extraer sus características. Entonces, se coloca en serie un número determinado N de unidades de EPLLs, según se muestra en la figura 3.3 para calcular cada una de las armónicas bajo estudio. El error resultante de una unidad previa es la entrada para la unidad siguiente.

Las ganancias en las entradas son debidas a que, por lo regular, en una señal las amplitudes de las armónicas disminuyen conforme la frecuencia aumenta. Así que, en cada una de las unidades se aplica una ganancia de entrada igual a $h/(h-1)$ para $h\neq1$, obteniéndose así una amplitud de entrada uniforme en todas las unidades. En la salida se aplica el factor de $1/h$ para obtener la amplitud actual o correspondiente para cada componente.

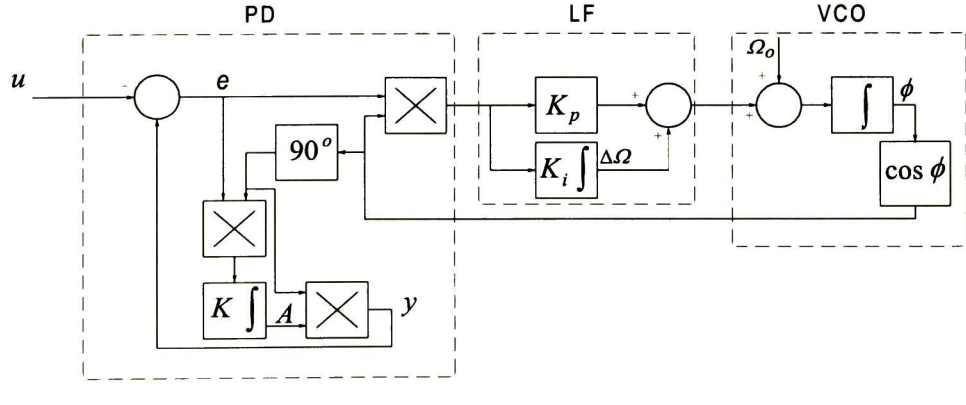


Fig. 3.2. Oscilador anclado en fase mejorado (EPLL).

3.2.3 Análisis de una señal con el EPLL

Para verificar el funcionamiento del método propuesto en la sección anterior, se propone como prueba la siguiente señal de entrada:

$$z(t) = \sin(\Omega_o t) + 0.20\sin(3\Omega_o t) + 0.10\sin(5\Omega_o t) + 0.08\sin(9\Omega_o t) + 0.06\sin(11\Omega_o t). \qquad (3.8)$$

Al aplicar esta señal de entrada al esquema de medición de la figura 3.3 se obtienen los resultados que se muestran en la figura 3.4. El método empleado (EPLL) obtiene valores de amplitudes precisos y muy aproximados a los reales y alcanza el estado estable en aproximadamente 0.25 segundos en el caso de la fundamental.

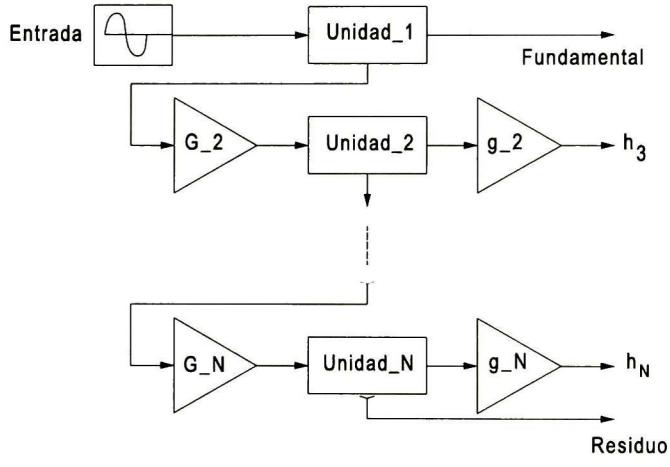


Fig. 3.3. Diagrama a bloques del esquema para la medición de armónicas.

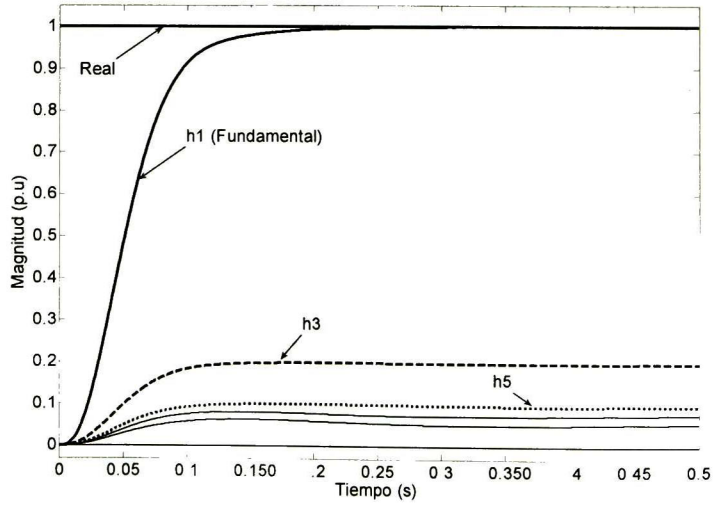


Fig. 3.4. Magnitud de armónicas resultantes empleando EPLL.

3.3 Transformada rápida de Fourier por ventaneo

Otro de los métodos más usuales para extraer la información de componentes de frecuencias contenidas en una señal es la transformada de Fourier. Pero además, si se quiere estimar esta información en una representación tiempo-frecuencia, esto se puede llevar a cabo con la WFFT que proporciona las componentes de la señal en tiempo progresivo para diferentes bandas de frecuencia [16].

La WFFT se implementa a través de la transformada discreta de Fourier de duración corta (STFT, Short Time Fourier Transform), especialmente para señales no estacionarias donde el análisis de Fourier convencional no presenta buenos resultados.

Dada una señal, la componente compleja en una banda de frecuencia k en el instante n se obtiene al aplicar la STFT discreta que se define como:

$$X_n\left(e^{j\omega_k}\right)=\sum_m x(m)w(n-m)e^{-j\omega_k m} \quad k=0,1,\ldots N-1, \tag{3.9}$$

donde $\omega_k = 2\pi k/N$ es la frecuencia normalizada en radianes por muestra, N es el número de bandas de frecuencia y $w(m)$ es una ventana simétrica (Rectangular, Bartlett, Hanning, Blackman, etc.) de tamaño L, donde $L \leq N$ si se requiere llevar a cabo la reconstrucción perfecta mediante un banco de filtros de síntesis. La STFT es una versión de la transformada discreta de Fourier (DFT, Discrete Fourier Transform) que utiliza una ventana móvil que se desplaza hacia adelante en el eje del tiempo. La STFT se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}&\left[X_n(0) \quad X_n(1) \quad \cdots \quad X_n(N-1)\right]= \\ &\quad DFT_N\left[x(n-L+1)w(0) \quad x(n-L+2)w(1) \quad \cdots \quad x(n)w(L-1)\right],\end{aligned} \tag{3.10}$$

donde n denota el instante actual del tiempo y "DFT_N" denota a la transformada discreta de Fourier de N puntos. Usualmente $L=N$; sin embargo, sí $L<N$ los datos para completar el tamaño de la ventana en la ecuación (3.10) son ceros para completar el número de bandas antes de aplicar la DFT.

Los valores resultantes de la DFT son complejos; de hecho, $X_n(e^{j\omega k})$ en la ecuación (3.9) se puede ver como la versión desplazada pasa bajas de la salida $\tilde{X}_n(\omega_k)$ del k-ésimo filtro complejo pasa banda, que se obtiene de la siguiente manera:

$$\tilde{X}_n\left(e^{j\omega_k}\right)=e^{j\omega_k n}\sum_m x(m)w(n-m)e^{-j\omega_k m} \tag{3.11}$$

se agrupan las exponenciales, se cambia el índice de la sumatoria de m por l y se define $l=n-m$, por lo que $m=n-l$ quedando lo siguiente:

$$\tilde{X}_n\left(e^{j\omega_k}\right)=\sum_l x(n-l)w(l)e^{-j\omega_k(l)} \tag{3.12}$$

y como l es un índice auxiliar se puede cambiar por m quedando la expresión anterior de la siguiente manera:

$$\tilde{X}_n\left(e^{j\omega_k}\right)=\sum_m x(n-m)w(m)e^{j\omega_k m}=x(n)*h_k(n). \tag{3.13}$$

La respuesta al impulso del k-ésimo filtro complejo pasa banda esta dado por la s iguiente expresión:

$$h_k(n)=w(n)e^{j\omega_k n} \quad k=0,1,\ldots,N-1, \tag{3.14}$$

y la frecuencia central de cada filtro es:

$$f_k=\frac{f_s k}{N} \tag{3.15}$$

La STFT discreta se puede interpretar como una representación pasa bajas de la salida asociada al filtro pasa banda. Todos los filtros pasa banda tienen el mismo ancho de banda, que está determinado por el tipo y tamaño de la ventana seleccionada. Para la ventana de Hanning de longitud L, que es la más utilizada, el ancho de banda correspondiente a 3-dB del filtro pasa banda está dada por:

$$2B=\frac{4f_s}{L} \quad Hz. \tag{3.16}$$

3.3.1 Resolución en frecuencia

Es importante señalar que el tipo de ventana que se selecciona para llevar a cabo la STFT es de gran importancia, ya que ésta determina si hay buena resolución en frecuencia. Para cada tipo y tamaño de ventana existe una resolución fija de frecuencia. Lo anterior se debe a que el producto entre la varianza (σ_t) de la función en el dominio del tiempo y la varianza de la misma función en el dominio de la frecuencia (σ_ω) está regido por el principio de incertidumbre.

$$\sigma_t\sigma_\omega \geq \frac{1}{2} \tag{3.17}$$

Si se incrementa el tamaño de la ventana se reduce el ancho de banda del filtro pasa banda y viceversa. Ahora, el ancho de banda del filtro determina si cada banda contiene una o más componentes armónicas, si existen más de una componente en un mismo ancho de banda, entonces la salida del filtro no puede considerarse como pasa banda debido a la baja resolución en frecuencia del filtro. Para obtener una buena resolución en frecuencia es necesario calcular la STFT con diferentes tamaños de ventana y extraer la información necesaria de una banda de frecuencia deseada [16].

De otra forma se puede convolucionar la señal $x(n)$ con la respuesta al impulso $h_k(n)$ definida en (3.14), en donde la banda de frecuencias seleccionada es como se indica en (3.13).

3.3.2 Selección de la ventana y frecuencias centrales

En el análisis de disturbios donde se aplica la WFFT es necesario que las frecuencias centrales de los filtros pasa banda coincidan con las frecuencias de las componentes armónicas. Sin embargo, aunque se logre lo anterior, las salidas reales de los filtros no corresponderán a componentes armónicas puras; ya que, usualmente se cuenta con interarmónicos y esto depende de la resolución en frecuencia del filtro. Por tanto, las salidas de estos filtros se consideran como pseudo armónicas.

Lo anterior se explica teniendo en cuenta que la resolución en frecuencia (de 3-dB) de una ventana es igual al ancho del lóbulo principal de su respuesta en frecuencia como se muestra en la figura 3.5b. Si dos componentes de frecuencia se encuentran dentro de este lóbulo, entonces no pueden ser discriminadas por el filtro pasa banda resultando en una sola componente. Entonces, aquí radica la importancia de hacer una correcta elección del tamaño y tipo de la ventana, según la aplicación deseada. En la figura 3.5a se muestra la ventana de Hanning que es una de las más utilizadas.

Existe otro fenómeno en el análisis en frecuencia de señales llamado *Leakage*, que se refiere a una aparente fuga de energía de una componente de frecuencia hacia bandas de frecuencia adyacente. Esto ocurre cuando el intervalo de truncamiento no es múltiplo entero del periodo de la frecuencia fundamental [17].

La clave para disminuir este fenómeno consiste en escoger el tamaño L de ventana adecuado, de tal forma que los ceros del espectro de la función ventana estén localizados exactamente en las frecuencias de las componentes armónicas de la señal [16]. Entonces, a manera de ejemplo si se tiene una ventana rectangular cuyo espectro está definido por:

$$|W(\omega)| = L\left|\frac{\sin(\omega L/2)}{\omega L/2}\right|. \tag{3.18}$$

Los ceros de esta función se localizan a las frecuencias $\omega=2\pi k f_s/L$. Además, si se tiene una frecuencia de muestreo tal que un periodo de la señal por analizar tiene un número entero m de muestras, de tal manera que $f_s=mf_o$, el efecto de fuga de energía se reduce, haciendo que en los ceros del espectro de la función ventana, expresión (3.18), se localicen los valores de las armónicas. Esto se logra haciendo que el tamaño L de la ventana sea igual a los múltiplos de m; es decir: $L = mn$. De esta forma $|W(2\pi f_l/f_s)| = 0$ se mantiene para frecuencias armónicas, $f_l = lf_o$, l=1,2,..., obteniéndose la más alta atenuación para las armónicas de las bandas de frecuencia vecinas.

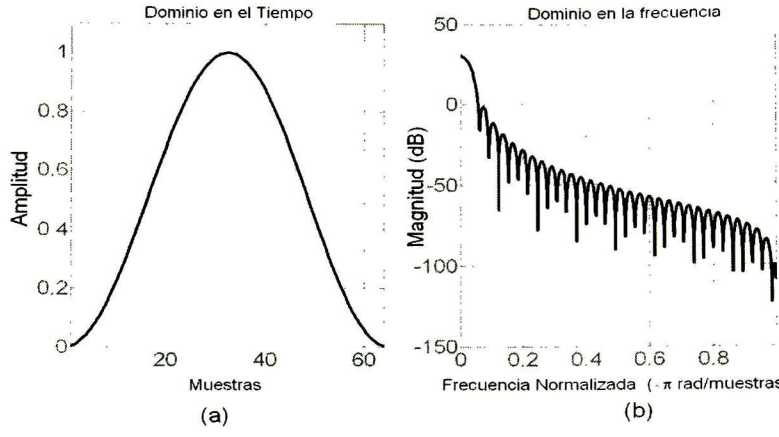


Fig. 3.5. Ventana de Hanning y espectro.

3.3.3 Análisis de señal de prueba con la WFFT

Al igual que en la sección 3.2.3, aquí también se utiliza la señal descrita por (3.8) para mostrar la efectividad de la WFFT. Para este caso, la señal es muestreada con una frecuencia f_s =7680 Hz, o sea 128 muestras por periodo. Se emplea la ventana de Hanning con tamaño L=128. Con los datos mencionados se aplica la WFFT y se obtienen los resultados de la figura 3.6.

Las magnitudes de las diferentes componentes de frecuencia en la figura 3.6 muestran una buena respuesta. Las oscilaciones que se presentan en las magnitudes de cada una de las componentes de frecuencia obedecen a las propiedades de resolución de la ventana utilizada, al efecto *leakage* y también al fenómeno de Gibbs en el dominio de la frecuencia. A pesar de esto, los resultados mostrados son bastante cercanos a los originales.

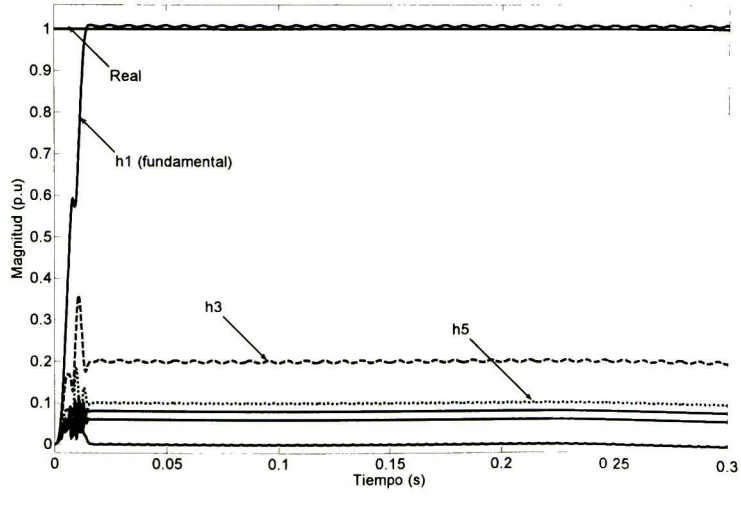


Fig. 3.6. Amplitud de armónicas obtenidas con WFFT.

3.4 Filtro de Kalman

El filtro de Kalman (KF) es otra de las herramientas con múltiples aplicaciones dentro de la Ingeniería Eléctrica. Este es un tipo especial de filtro cuya representación matemática se encuentra en ecuaciones de estado. Su principal característica es que la solución se calcula en forma recursiva. Cada estado se obtiene a partir de un estado estimado previo y de un nuevo dato de entrada; así que, al implementar el algoritmo de este filtro sólo es necesario almacenar un estado estimado previo. Esto hace al KF una herramienta computacionalmente muy eficiente.

El KF está basado en el desarrollo del problema de estimación recursiva de mínimo error cuadrático medio; donde, a partir de un grupo de datos observados se puede establecer el valor de los estados de un sistema por medio de un proceso de innovación que se describe en [18]. La razón de la formulación en forma de KF es debida a que con este se pueden conocer los estados de un sistema, y como se sabe estos estados proveen la información necesaria que describe el comportamiento forzado del sistema.

La formulación general del KF está descrita por el siguiente par de ecuaciones de estado:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{\Phi}_n \mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n, \tag{3.19}$$

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{H}_n \mathbf{x}_n + \mathbf{w}_n. \tag{3.20}$$

La ecuación (3.19) es conocida como la *ecuación de proceso*, y la ecuación (3.20) es *la ecuación de medición*. En la Tabla 3 se resumen las variables contenidas en esta formulación. Los dos parámetros, $\mathbf{v}_n$ y $\mathbf{w}_n$ son variables aleatorias con distribución normal y media cero. Se puede asumir que estos parámetros no presentan correlación en el tiempo y se pueden representar por matrices de covarianza, o de nivel de ruido [17], dadas por:

$$E\left[\mathbf{v}_n \mathbf{v}_k^T\right] = \begin{cases} \mathbf{Q}_n & n = k \\ \mathbf{0} & n \neq k \end{cases}$$
$$E\left[\mathbf{w}_n \mathbf{w}_k^T\right] = \begin{cases} \mathbf{R}_n & n = k \\ \mathbf{0} & n \neq k. \end{cases} \tag{3.21}$$

Tabla 3. Variables de la formulación del filtro de Kalman.

$\mathbf{x}_n$	Vector de estados.
$\mathbf{\Phi}_n$	Matriz de transición. Relaciona los estados del un tiempo actual n y del tiempo $n+1$.
$\mathbf{y}_n$	Es la medición del sistema (estados observados).
$\mathbf{H}$	Matriz de medición.
$\mathbf{v}_n$ y $\mathbf{w}_n$	Ruido debido al proceso y ruido debido a la medición respectivamente. (Ruido blanco).

Las variables $\mathbf{v}_n$ y $\mathbf{w}_n$ también son independientes entre sí; es decir, no están correlacionadas:

$$E[\mathbf{v}_n \mathbf{w}_k] = \mathbf{0} \quad \textit{para todo } n \textit{ y } k. \tag{3.22}$$

El proceso del KF se puede explicar por medio del diagrama de flujo de la figura 3.7, donde se observa la estructura del filtro y el procedimiento que éste lleva a cabo. Como es un proceso recursivo, es necesario contar con ciertas condiciones iniciales definiendo primeramente un estimado aproximado $\bar{\mathbf{x}}_o$, además de una matriz de correlación $\bar{\mathbf{P}}_o$ asociada al error del estado estimado aproximado.

Ahora, como ya se cuenta con un estimado inicial y con la matriz de correlación asociada al error, se puede mejorar este estimado de la siguiente forma:

$$\hat{\mathbf{x}}_n = \mathbf{\Phi}_n \bar{\mathbf{x}}_n + \mathbf{G}_n [\mathbf{y}_n - \mathbf{H}_n \bar{\mathbf{x}}_n]. \tag{3.23}$$

Para hacer la proyección de un estimado futuro se tiene que:

$$\bar{\mathbf{x}}_{n+1} = \mathbf{\Phi}_n \hat{\mathbf{x}}_n . \tag{3.24}$$

El término entre corchetes de (3.23) corresponde al proceso de innovación $\boldsymbol{\alpha}_n$ que relaciona a la medición $\mathbf{y}_n$ con la proyección de un estimado futuro calculado con (3.24). El término $\mathbf{G}_n$ se refiere a la ganancia de Kalman que se encarga de minimizar los elementos de la matriz de correlación del error asociado al vector de estados estimados mejorados. $\mathbf{G}_n$ está dada por:

$$\mathbf{G}_n = \bar{\mathbf{P}}_n \mathbf{H}_n^T \left(\mathbf{H}_n \bar{\mathbf{P}}_n \mathbf{H}_n^T + \mathbf{R}_n \right)^{-1} \tag{3.25}$$

donde $\bar{\mathbf{P}}_n$ es la matriz de correlación asociada al error del estado estimado aproximado y está definida de la siguiente manera:

$$\bar{\mathbf{P}}_{n+1} = \mathbf{\Phi}_n \mathbf{P}_n \mathbf{\Phi}_n^T + \mathbf{Q}_n . \tag{3.26}$$

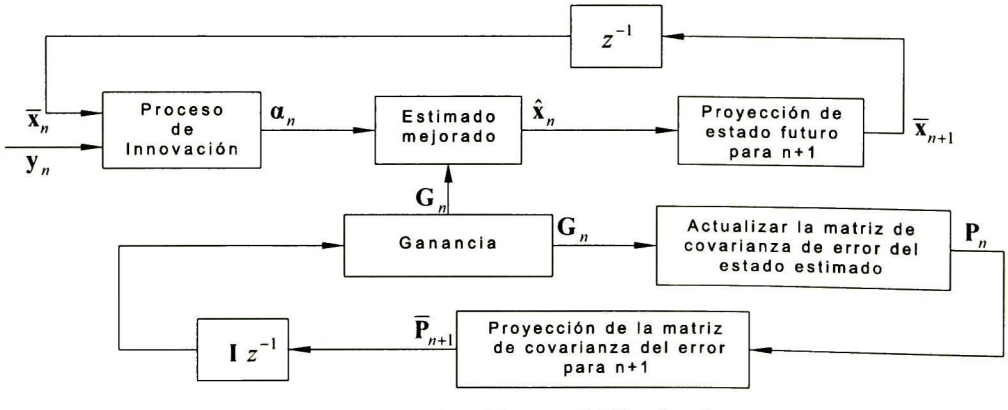


Fig. 3.7. Diagrama de flujo del proceso del filtro de Kalman.

$\mathbf{P}_n$ es pues la matriz de correlación del estimado mejorado $\hat{\mathbf{x}}_n$, que se utiliza como una descripción estadística del error entre la proyección del estado estimado futuro $\bar{\mathbf{x}}_{n+1}$ y el estimado mejorado $\hat{\mathbf{x}}_n$ [18].

$$\mathbf{P}_n = (\mathbf{I} - \mathbf{G}_n \mathbf{H}_n)\bar{\mathbf{P}}_n . \tag{3.27}$$

Las expresiones (3.26) y (3.27) forman la parte recursiva para el cálculo de la matriz de correlación de la predicción de los estados que se lleva a cabo por medio del KF. El principal reto para poder aplicar el KF está en formular el modelo en ecuaciones de estado del sistema que se analiza, y así poder llevar a cabo la acción de estimar los estados del sistema.

3.4.1 Definición del problema en variables de estado

El problema planteado es el de extraer la magnitud de la componente fundamental y de las diferentes armónicas contenidas en una señal. Para adecuar el problema a la formulación del KF, primeramente se considera una señal sinusoidal libre de ruido con un número finito de componentes armónicas:

$$z(t) = \sum_{i=1}^{h} A_i(t)\cos(i\Omega t + \theta_i) . \tag{3.28}$$

Esta señal se puede descomponer de la siguiente manera:

$$z(t) = \sum_{i=1}^{h} \left(A_i(t)\cos\theta_i \cos i\Omega_o t - A_i(t)\sin\theta_i \sin i\Omega_o t \right), \tag{3.29}$$

donde $A_i(t)$ y θ_i son la amplitud y el ángulo de fase de la i-ésima componente en el tiempo t, respectivamente. La fase de cada armónica está referida al eje rotatorio $i\Omega t$. Ahora, como se puede ver cada componente tiene dos variables de estado, y si h es el orden máximo de armónicas se tienen $2h$ variables de estado.

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1(t)\cos\theta_1 & x_2(t) &= A_1(t)\sin\theta_1 \\ x_3(t) &= A_2(t)\cos\theta_2 & x_4(t) &= A_2(t)\sin\theta_2 \\ &\cdots & &\cdots \\ x_{2h-1}(t) &= A_h(t)\cos\theta_h & x_{2h}(t) &= A_h(t)\sin\theta_h \end{aligned} \tag{3.30}$$

Estas variables representan las componentes en fase y en cuadratura de las armónicas con respeto a la referencia rotatoria $i\Omega t$ [7]. Dado que ya se conocen las variables de estado, ahora es posible formular el problema en espacio de estados para aplicar el algoritmo del KF. Sólo que, antes de formular esto, la expresión (3.29) se lleva al tiempo discreto haciendo las consideraciones dadas a continuación:

Se tiene un periodo de muestro T, por lo que la frecuencia de muestreo es $F_s=1/T$. El periodo de muestreo establece una relación entre tiempo continuo y tiempo discreto de la forma $t=nT=n/F_s$. Ahora, si se aplica un muestreo periódico a (3.29), éste da lugar a la señal en tiempo discreto.

$$z(nT) \equiv z(n) = \sum_{i=1}^{h} \left(A_i(n) \cos\theta_i \cos i\omega n - A_i(n) \sin\theta_i \sin i\omega n \right), \tag{3.31}$$

donde $\omega=\Omega T=\Omega/F_s$ expresa la frecuencia normalizada de la señal de tiempo discreto. Entonces, una vez expresada la señal en la forma (3.31), es posible realizar la representación en espacio de estados necesaria para determinar las magnitudes de las componentes armónicas. Así, la representación general para este caso queda como se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2h-1} \\ x_{2h} \end{bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2h-1} \\ x_{2h} \end{bmatrix}_n + [\mathbf{v}]_{1\times 2h} \tag{3.32}$$

Por otra parte, la ecuación de medición queda establecida de la siguiente manera:

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{H}_n \mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n = \begin{bmatrix} \cos\omega n \\ -\sin\omega n \\ \vdots \\ \cos h\omega n \\ -\sin h\omega n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2h-1} \\ x_{2h} \end{bmatrix} + [\mathbf{w}]_{1\times 2h} \tag{3.33}$$

El vector $\mathbf{H}_n$ es un vector variante en tiempo. Ahora, para este caso la matriz de transición Φ_n es igual a la matriz identidad. Los vectores $\mathbf{v}_n$ y $\mathbf{w}_n$ son los ruidos correspondientes al proceso y a la medición. Como ya se mencionó antes, estos consisten en variables aleatorias.

3.4.2 Análisis armónico con filtros Kalman

Una vez realizada la representación de estados del problema por analizar, se procede a aplicar el algoritmo de Kalman. Se toma la misma señal que fue utilizada para los dos métodos anteriores dada por (3.8).

La figura 3.8 muestra las magnitudes de cada una de las componentes contenidas en la señal analítica propuesta. Se observa que existe un tiempo en el cual el algoritmo converge. El tiempo que tarda en alcanzar el estado estable, que es el necesario para que desaparezcan las oscilaciones, es de 13 *m*s aproximadamente; esto es, menos de un ciclo. También las amplitudes calculadas con este algoritmo son muy cercanas a las originales.

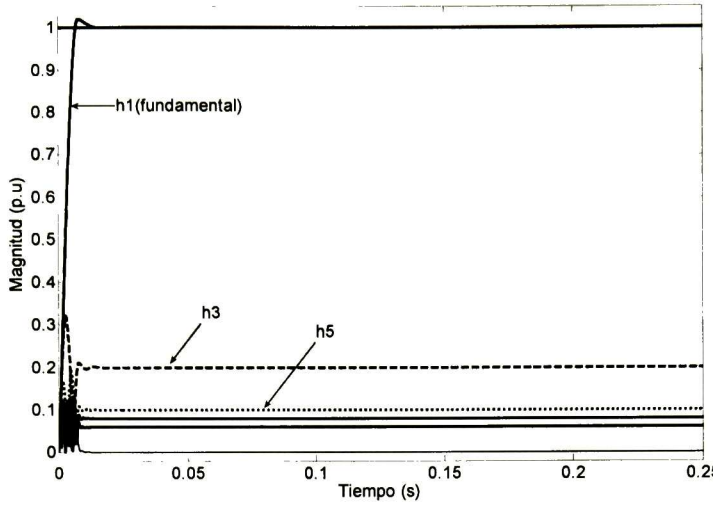


Fig. 3.8. Magnitud de armónicas con el filtro de Kalman.

3. 5 Observaciones del capítulo

Se han presentado tres métodos mediante los cuales se pueden calcular las magnitudes de las componentes armónicas contenidas en una señal. Cada uno de ellos utiliza conceptos diferentes; el EPLL requiere de una conexión en serie de varias unidades para la extracción de amplitud, fase y frecuencia de cada componente. Su algoritmo requiere de tres integrales, tres multiplicaciones y una suma. La principal desventaja de esta técnica es la lenta respuesta que se debe a los filtros incluidos en su estructura para mejorar la calidad de la salida; es decir, que se sacrifica velocidad por precisión.

La WFFT es una técnica que obtiene buenos resultados con señales no estacionarias. Al aplicar una ventana que se desplaza sobre la señal para que en cada paso se realice el análisis DFT y entregue la información de cada componente en bandas de frecuencia a tiempos sucesivos. El ancho de banda de cada filtro y la resolución en frecuencia dependen del tamaño y forma de la ventana. Para un análisis completo con diferentes resoluciones se tiene que re calcular la DFT empleando diferentes tamaños de ventana.

El KF también arroja buenos resultados. Con esta técnica es necesario llevar a cabo una representación en espacio de estados de la señal por analizar. Cada nuevo estado se obtiene con un estimado previo y un nuevo dato de entrada (medición) a través de un proceso recursivo. Para el cálculo de la magnitud de cada componente de la señal se tomaron como variables de estado las componentes en fase y en cuadratura con respecto a una referencia rotatoria. Las magnitudes estimadas de dichas componentes son muy precisas y además el tiempo de respuesta del KF es mucho mejor que el del EPLL.

El uso de la ventana móvil en la WFFT repercute en un mayor número de operaciones debido a la cantidad que información que requiere para el cálculo de las componentes armónicas respectivas. Además, con la WFFT se observan pequeñas oscilaciones en estado estable que con el KF no se presentan.

Capítulo 4. Ondeletas

4.1 Introducción

El nombre de "*wavelets*" (ondeletas en Español) es debido al término en Ingles "*small wave*" o pequeña onda. Las ondeletas son funciones usualmente acotadas en tiempo que satisfacen ciertos requerimientos matemáticos para la representación de funciones. El antecedente de este tipo de análisis fue desarrollado por Joseph Fourier a principios del siglo XIX cuando demostró que con las funciones senos y cosenos superpuestos es posible representar otras funciones matemáticas.

La aplicación de la teoría de ondeletas en el campo de la Ingeniería ha tomado gran popularidad en los últimos años, y ha sido una herramienta con bastantes aplicaciones. Estas funciones han venido a ser de gran ayuda para optimizar y desarrollar nuevas formas de análisis e innovar con nuevas técnicas. En el campo de la Ingeniería eléctrica, la mayor aportación de esta herramienta se puede encontrar en el análisis de disturbios en voltajes o en corrientes en líneas de transmisión, en principios de operación de relevadores para la protección de líneas de transmisión, en calidad de energía y en detección y clasificación de fallas, entre muchas otras.

4.1.1. Bases de la transformada de Haar

La ondeleta Haar es la función más simple con la que se lleva a cabo la transformada ondeleta (WT, Wavelet Transform). El procedimiento consiste en proponer una aproximación $\hat{f}(t)$ de una señal con funciones rectángulo (*box function*) como se muestra en la figura 4.1. Entre más pequeño el rectángulo más precisa será la aproximación. Con esta aproximación se mantiene el valor de cada muestra durante un pequeño intervalo de tiempo $[t_k, t_{k+1})$ ("*sample and hold*"), donde $t_k=kt_1$ y $t_1=1/2^J$, siendo $2^J=N$ el número total de muestras de la señal.

Cuando una muestra (t_k, s_k) incluye un valor $s_k=f(t_k)$, entonces el punto de muestra corresponde a la amplitud de la función rectángulo, como se indica a continuación [19]:

$$f(t) \cong s_k \varphi_{(t_k, t_{k+1})}(t), \quad t_k \le t < t_{k+1}, \tag{4.1}$$

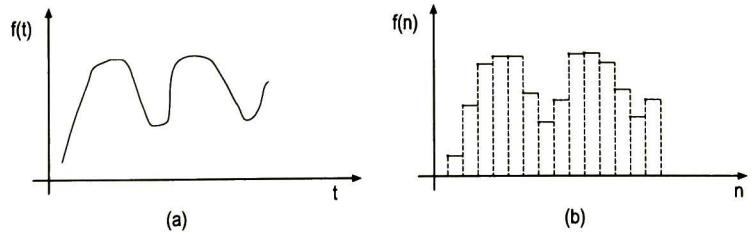


Fig. 4.1. (a) señal $f(t)$, (b) aproximación $\hat{f}$ con rectángulos.

estando la función $\varphi_{(u,v)}$ definida a continuación y representada gráficamente en la figura 4.2:

$$\varphi_{(u,w)}(r) = \begin{cases} c & si\ u \le t < w \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases} \tag{4.2}$$

Entonces, s_k es la amplitud de la señal en el intervalo $[t_k,\ t_{k+1})$. La aproximación $\hat{f}(t)$ se obtiene haciendo la sumatoria de $N=2^J$ rectángulos desplegados:

$$\hat{f}(t) = s_o\varphi_{(t_o,t_1)} + s_1\varphi_{(t_1,t_2)} + \ldots + s_k\varphi_{(t_k,t_{k+1})} \cdots + s_{2^J-1}\varphi_{\left(t_{2^J-1},t_{2^J}\right)} \tag{4.3}$$

$$\hat{f}(t) = \sum_{k=0}^{J-1} s_k\varphi_{(t_k,t_{k+1})}\ . \tag{4.4}$$

La transformada de Haar expresa a un par de rectángulos consecutivos de $\hat{f}(t)$ por un rectángulo de mayor duración más una ondeleta que consiste de dos rectángulos alternados. Con propósitos de explicación se supondrá un intervalo de tiempo normalizado igual a 1, por lo que se tienen dos rectángulos consecutivos de duración de ½; estos se suman para formar el rectángulo de duración 1, y al realizar la diferencia se forma la ondeleta [19]. Esto se ilustra en la figura 4.3.

$$\varphi_{(0,1)} = \varphi_{(0,\frac{1}{2})} + \varphi_{(\frac{1}{2},1)}, \tag{4.5}$$

$$\psi_{(0,1)} = \varphi_{(0,\frac{1}{2})} - \varphi_{(\frac{1}{2},1)}. \tag{4.6}$$

Ahora, cada rectángulo de duración ½ se puede expresar a través de las dos nuevas funciones formadas. Lo anterior se logra sumando y restando las expresiones anteriores:

$$\varphi_{(0,\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}\left[\varphi_{(0,1)} + \psi_{(0,1)}\right] \tag{4.7}$$

$$\varphi_{(\frac{1}{2},1)} = \frac{1}{2}\left[\varphi_{(0,1)} - \psi_{(0,1)}\right]. \tag{4.8}$$

Sí se toman dos rectángulos consecutivos de $\hat{f}(t)$, digamos s_o, y s_1, (4.7) y (4.8) producen la siguiente representación:

$$\hat{f} \doteq s_o\varphi_{(0,\frac{1}{2})} + s_1\varphi_{(\frac{1}{2},1)}. \tag{4.9}$$

Sustituyendo (4.7) y (4.8) en (4.9) se obtiene:

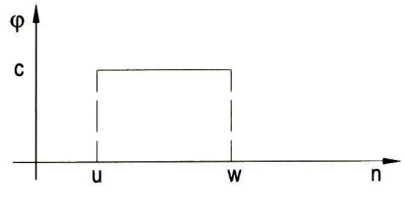


Fig. 4.2. Función rectángulo para aproximación inicial.

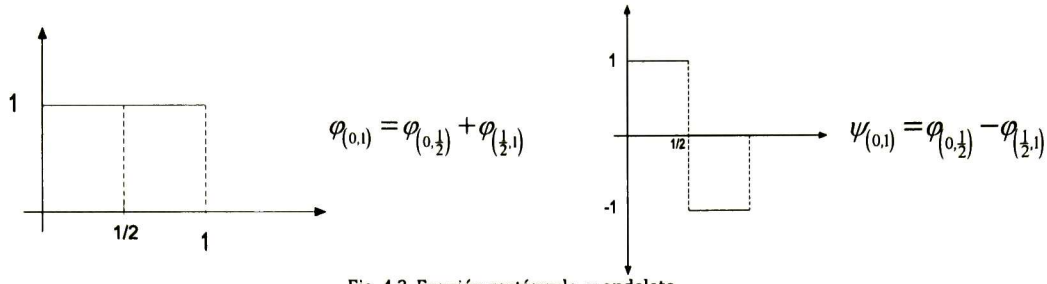


Fig. 4.3. Función rectángulo y ondeleta.

$$\hat{f} = \frac{s_o}{2}\left[\varphi_{(0,1)} + \psi_{(0,1)}\right] + \frac{s_1}{2}\left[\varphi_{(0,1)} - \psi_{(0,1)}\right], \tag{4.10}$$

o bien:

$$\hat{f} = \left(\frac{s_o + s_1}{2}\right)\varphi_{(0,1)} + \left(\frac{s_o - s_1}{2}\right)\psi_{(0,1)}. \tag{4.11}$$

El primer coeficiente de esta última expresión indica el promedio entre los dos rectángulos, mientras que el segundo coeficiente indica la diferencia. Con esta transformación se expresa la misma función pero con *aproximaciones de diferentes resoluciones* y con *coeficientes ondeleta* [19]. Se lleva a cabo una sucesión de promedios y diferencias con el resto de los escalones que describen a una señal.

Para generalizar el procedimiento anterior con diferentes intervalos e instantes de tiempo, sólo se redefine la expresión de la ondeleta con factores de dilatación y desplazamiento para cualquier intervalo e instante de tiempo como se muestra a continuación:

$$\psi_{(u,w)}(t) = \begin{cases} 1 & si\ \ u \le t < v \\ -1 & si\ v \le t < w \end{cases} \quad donde \quad v = \frac{u+w}{2} \tag{4.12}$$

Con estos nuevos intervalos se forma una ondeleta y un rectángulo de mayor duración a partir de dos rectángulos de menor duración.

$$\varphi_{(u,w)} = \varphi_{(u,v)} + \varphi_{(v,w)} \tag{4.13}$$

$$\psi_{(u,w)} = \varphi_{(u,v)} - \varphi_{(v,w)}. \tag{4.14}$$

Nuevamente se hacen la suma y diferencia de las ecuaciones anteriores quedando de la siguiente forma:

$$\varphi_{(u,v)} = \frac{1}{2}\left[\varphi_{(u,w)} + \psi_{(u,w)}\right] \tag{4.15}$$

$$\varphi_{(v,w)} = \frac{1}{2}\left[\varphi_{(u,w)} - \psi_{(u,w)}\right]. \tag{4.16}$$

Con estas expresiones es posible aplicar la transformación de Haar a un conjunto de muestras o rectángulos que describan una función. El tamaño del arreglo por conveniencia, para este caso, puede ser de $2n$ elementos.

$$\vec{f} = \left(s_o, s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{2j}, s_{2j+1}, \ldots, s_{2(n-1)}, s_{2n-1}\right). \tag{4.17}$$

4.2 Transformada rápida discreta de Haar

El proceso de la transformada ondeleta explicado anteriormente se aplica sobre un arreglo con un número de muestras igual a 2^J, el cual representa a una función en forma discreta. Este arreglo se expresa de la siguiente manera:

$$\vec{a}^{(J)} = \left(a_o^{(J)}, a_1^{(J)}, \ldots, a_j^{(J)}, \ldots, a_{2^J-2}^{(J)}, a_{2^J-1}^{(J)}\right). \tag{4.18}$$

Como primer paso se tiene lo siguiente:

$$\hat{f}(t) \equiv \hat{f}^{(J)}(t) = \sum_{k=0}^{2^J-1} a_k^{(J)} \varphi_k(t). \tag{4.19}$$

A esta primera representación se le puede considerar como la aproximación de la función en un nivel m=0. El proceso completo de la transformada consta de J niveles. Para la primera iteración (nivel m=1), el proceso se aplica sobre las 2^J muestras de $\vec{a}^{(J)}$ determinando promedios y diferencias:

$$a_k^{(J-1)} = \frac{a_{2k}^{(J)} + a_{2k+1}^{(J)}}{2} \tag{4.20}$$

y

$$d_k^{(J-1)} = \frac{a_{2k}^{(J)} - a_{2k+1}^{(J)}}{2}, \tag{4.21}$$

para k=0,1,2…,$2^{(J-1)}$–1.

Con los coeficientes anteriores se forman los siguientes dos sub-arreglos:

$$\vec{a}^{(J-1)} = \left(a_o^{(J-1)}, a_1^{(J-1)} \quad ., a_{2^{J-1}-1}^{(J-1)}\right) \tag{4.22}$$

$$\vec{d}^{(J-1)} = \left(d_o^{(J-1)}, d_1^{(J-1)}, . \quad ., d_{2^{J-1}-1}^{(J-1)}\right) \tag{4.23}$$

El sub arreglo $\vec{a}^{(J-1)}$ corresponde a una aproximación de menor resolución de $\hat{f}^{(J)}(t)$ en (4.19). Ahora, el ancho de cada rectángulo es de $2^{(1-J)}$, mientras que en (4.19) era de 2^{-J} Se definen entonces los nuevos rectángulos:

$$\varphi_k^{(J-1)}(t)=\varphi\left(2^{J-1}t-k\right)=\begin{cases}1 & si\ 2^{1-J}k\le t<2^{1-J}(k+1)\\ 0 & en\ otro\ caso,\end{cases} \tag{4.24}$$

con k=0,1,2...,$2^{(J-1)}$–1.

La nueva aproximación de $\hat{f}^{(J)}(t)$ queda ahora de la siguiente forma:

$$\hat{f}^{(J)}(t)\cong\hat{f}^{(J-1)}(t)=\sum_{k=0}^{2^{J-1}-1}a_k^{(J-1)}\varphi_k^{(J-1)}(t). \tag{4.25}$$

Por otra parte, el sub arreglo $\vec{d}^{(J-1)}$ contiene a los coeficientes ondeleta que preservan los detalles que se perdieron cuando se pasó de la resolución alta $\hat{f}^{(J)}(t)$ en (4.19) a un nivel más bajo de resolución $\hat{f}^{(J-1)}(t)$ en (4.25).

A continuación se definen las funciones ondeleta para este nivel de resolución:

$$\psi_k^{(J-1)}(t)=\psi\left(2^{J-1}t-k\right)=\begin{cases}1 & si\ 2^{(1-J)}k\le t<2^{(1-J)}\left(k+\frac{1}{2}\right)\\ -1 & si\ 2^{(1-J)}\left(k+\frac{1}{2}\right)\le t<2^{(1-J)}(k+1)\\ 0 & en\ otro\ caso,\end{cases} \tag{4.26}$$

dando origen a la siguiente función:

$$\hat{g}^{(J-1)}(t)=\sum_{k=0}^{2^{J-1}-1}d_k^{(J-1)}\psi_k^{(J-1)}(t), \tag{4.27}$$

la cual, sumada a $\hat{f}^{(J-1)}(t)$ dada por (4.25) permite recuperar a la señal $\hat{f}^{(J)}(t)$ con el nivel de mayor detalle:

$$\hat{f}^{(J)}(t)=\hat{f}^{(J-1)}(t)+\hat{g}^{(J-1)}(t). \tag{4.28}$$

Así como del arreglo $\vec{a}^{(J)}$ en (4.18) se obtuvieron los dos sub-arreglos $\vec{a}^{(J-1)}$ en (4.22), con un primer nivel de menor resolución, y $\vec{d}^{(J-1)}$ en (4.23) con los detalles, el sub-arreglo $\vec{a}^{(J-1)}$ de $2^{(J-1)}$ muestras se puede descomponer en los dos sub arreglos siguientes: $\vec{a}^{(J-2)}$ y $\vec{d}^{(J-2)}$, cada uno con $2^{(J-2)}$ muestras.

Los coeficientes de éstos se obtienen con la adaptación pertinente de las expresiones (4.20) y (4.21). A su vez, el sub arreglo de promedios resultante puede descomponerse una vez más, y el proceso de descomposición puede aplicarse hasta el nivel J-ésimo obteniéndose los arreglos siguientes: $\vec{a}^{(0)}=\{a_o^{(0)}\}$ y $\vec{d}^{(0)}=\{d_o^{(0)}\}$, cada uno de un sólo elemento. El elemento $a_o^{(0)}$ corresponde al promedio global de todas la muestras de (4.18) y $d_o^{(0)}$ la diferencia global.

Como se mencionó, las expresiones (4.20) y (4.21) corresponden a los coeficientes del primer nivel de aproximación y diferencias de (4.19) respectivamente, y deben ser adaptadas para los demás niveles m=2,3…J. En forma general, la adaptación queda de la siguiente manera:

$$a_k^{(J-m)} = \left(\frac{a_{2k}^{(J-m+1)} + a_{2k+1}^{(J-m+1)}}{2} \right) \tag{4.29}$$

y

$$d_k^{(J-m)} = \left(\frac{a_{2k}^{(J-m+1)} - a_{2k+1}^{(J-m+1)}}{2} \right), \tag{4.30}$$

con k=0,1,2…,$2^{(J-m)}$–1, y m=1,2,…,J.

El nivel m de aproximación de $\hat{f}(t)$ en (4.19) es entonces:

$$\hat{f}^{(J-m)}(t) = \sum_{k=0}^{2^{(J-m)}-1} a_k^{(J-m)} \varphi_k^{(J-m)}(t), \tag{4.31}$$

con $\varphi_k^{(J-m)}(t)$ definida de la siguiente manera:

$$\varphi_k^{(J-m)}(t) \equiv \varphi\left(2^{(J-m)}t - k\right) = \begin{cases} 1 & si\ 2^{(m-J)}k \le t < 2^{(m-J)}(k+1) \\ 0 & en\ otro\ caso, \end{cases} \tag{4.32}$$

La función $\hat{g}^{(J-m)}(t)$ que preserva los detalles y que permite regresar al nivel anterior "m–1", queda como sigue:

$$g^{(J-m)}(t) = \sum_{k=0}^{2^{(J-m)}-1} d_k^{(J-m)} \psi_k^{(J-m)}(t), \tag{4.33}$$

con $\psi_k^{(J-m)}(t)$ definida a continuación:

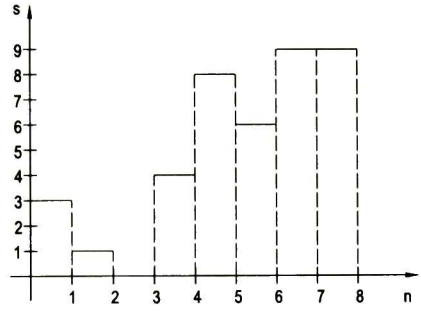
$$\psi_k^{(J-m)}(t) = \psi\left(2^{(J-m)}t - k\right) = \begin{cases} 1 & si\ 2^{(m-J)}k \le t < 2^{(m-J)}\left(k+\frac{1}{2}\right) \\ -1 & si\ 2^{(m-J)}\left(k+\frac{1}{2}\right) \le t < 2^{(m-J)}(k+1) \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases} \tag{4.34}$$

También cabe enfatizar la siguiente relación que es la generalización de (4.28):

$$\hat{f}^{(J-m+1)}(t) = \hat{f}^{(J-m)}(t) + \hat{g}^{(J-m)}(t), \quad con \quad m = 0,1,2\ldots J \tag{4.35}$$

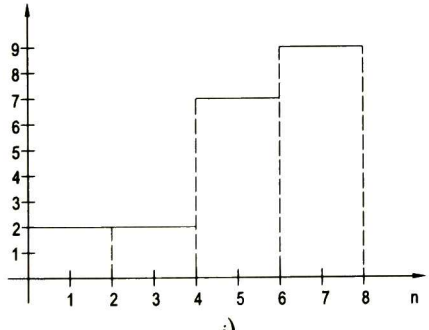
A manera de ejemplo, se considera un arreglo de ocho elementos el cual se puede observar en la figura 4.4. Como 2^J=8, se tiene que J=3 que es igual al número de niveles.

Se aplica (4.29) y (4.30) para obtener los coeficientes de la transformada de Haar. Para el primer nivel (m=1), la aproximación de la figura 4.5*i* corresponde a una representación de la función original con menor resolución. Para recuperar la función original se pueden sumar las diferencias (figura 4.5*ii*) y la aproximación del nivel uno. Ahora bien, la aproximación de la figura 4.6*i* correspondiente al nivel dos que es una representación de menor resolución de la aproximación del nivel anterior, y a su vez es también una representación aún más burda de la señal original; la figura 4.6*ii* corresponde a las diferencias de este nivel. En el nivel tres, la figura 4.7*i* corresponde al promedio general de la función original; sí se quiere recuperar la aproximación del nivel dos basta con sumar la diferencia de la figura 4.7*ii* correspondiente al nivel tres y la aproximación de este mismo, como lo indica (4.35).



$$\vec{s}^{(3)} = (3,1,0,4,8,6,9,9)$$

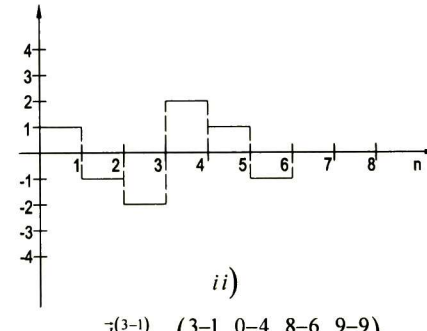
Fig. 4.4. Señal original para aplicar la transformación de Haar.



i)

$$\vec{a}^{(3-1)} = \left(\frac{3+1}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{8+6}{2}, \frac{9+9}{2}\right)$$

$$\vec{a}^{(2)} = (2,2,7,9)$$

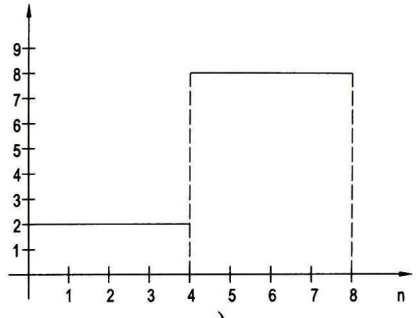


ii)

$$\vec{d}^{(3-1)} = \left(\frac{3-1}{2}, \frac{0-4}{2}, \frac{8-6}{2}, \frac{9-9}{2}\right)$$

$$\vec{d}^{(2)} = (1,-2,1,0)$$

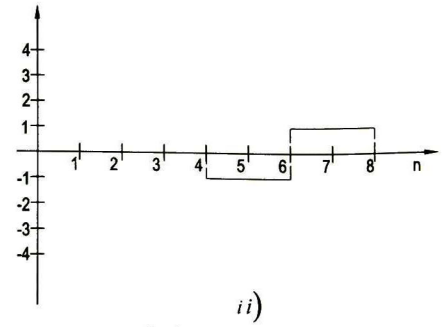
Fig. 4.5. *i)* aproximación, *ii)* diferencias cuando m=1.



i)

$$\vec{a}^{(3-2)} = \left(\frac{2+2}{2}, \frac{7+9}{2}\right)$$

$$\vec{a}^{(1)} = (2,8)$$

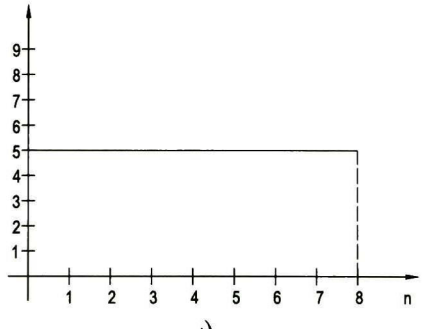


ii)

$$\vec{d}^{(3-2)} = \left(\frac{2-2}{2}, \frac{7-9}{2}\right)$$

$$\vec{d}^{(1)} = (0,-1)$$

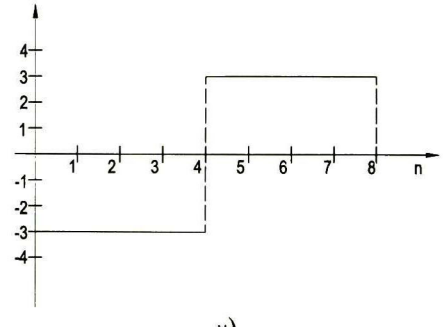
Fig. 4.6. *i)* aproximación, *ii)* diferencias cuando m=2.



i)

$$\vec{a}^{(3-3)} = \left(\frac{2+8}{2}\right)$$

$$\vec{a}^{(0)} = (5)$$



ii)

$$\vec{d}^{(3-3)} = \left(\frac{2-8}{2}\right)$$

$$\vec{d}^{(0)} = (-3)$$

Fig. 4.7. *i)* aproximación, *ii)* diferencias cuando m=3.

4.2.1 Representación matricial de la transformada rápida de Haar

Una forma de representar el proceso iterativo de la transformada Haar es mediante matrices. Así, por cada nivel se tiene una matriz (matriz de nivel) y para mostrar lo anterior se utiliza un arreglo de ocho elementos:

$$\vec{a}^{(J)} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \end{pmatrix},$$

por lo que se tienen tres matrices (2^3=8). El desarrollo de la transformada de Haar en forma matricial se puede apreciar con el siguiente conjunto de ecuaciones. El primer sub índice indica el nivel m:

Nivel m= 1:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & & & & \\ & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & & \\ & & & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ & & & & & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & & & & & & \\ & & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & & & & \\ & & & & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & & \\ & & & & & & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_0+a_1}{2} \\ \frac{a_2+a_3}{2} \\ \frac{a_4+a_5}{2} \\ \frac{a_6+a_7}{2} \\ \frac{a_0-a_1}{2} \\ \frac{a_2-a_3}{2} \\ \frac{a_4-a_5}{2} \\ \frac{a_6-a_7}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{1,0} \\ a_{1,1} \\ a_{1,2} \\ a_{1,3} \\ d_{1,0} \\ d_{1,1} \\ d_{1,2} \\ d_{1,3} \end{bmatrix} \tag{4.36}$$

Nivel m = 2:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & & & & \\ & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & & \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & & & & & & \\ & & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,0} \\ a_{1,1} \\ a_{1,2} \\ a_{1,3} \\ d_{1,0} \\ d_{1,1} \\ d_{1,2} \\ d_{1,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_{1,0}+a_{1,1}}{2} \\ \frac{a_{1,2}+a_{1,3}}{2} \\ \frac{a_{1,0}-a_{1,1}}{2} \\ \frac{a_{1,2}-a_{1,3}}{2} \\ d_{1,0} \\ d_{1,1} \\ d_{1,2} \\ d_{1,3} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{2,0} \\ a_{2,1} \\ d_{2,0} \\ d_{2,1} \\ d_{1,0} \\ d_{1,1} \\ d_{1,2} \\ d_{1,3} \end{bmatrix} \tag{4.37}$$

Nivel m=3:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & & & & \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{2,0} \\ a_{2,1} \\ d_{2,0} \\ d_{2,1} \\ d_{1,0} \\ d_{1,1} \\ d_{1,2} \\ d_{1,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_{2,0}+a_{2,1}}{2} \\ \frac{a_{2,0}-a_{2,1}}{2} \\ d_{2,0} \\ d_{2,1} \\ d_{1,0} \\ d_{1,1} \\ d_{1,2} \\ d_{1,3} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{3,0} \\ d_{3,0} \\ d_{2,0} \\ d_{2,1} \\ d_{1,0} \\ d_{1,1} \\ d_{1,2} \\ d_{1,3} \end{bmatrix} \tag{4.38}$$

En el conjunto anterior de matrices las columnas y filas son mutuamente ortogonales. Un razonamiento lógico es que la recuperación de la señal original necesita que las matrices sean invertibles. La inversa de una matriz ortogonal se define como:

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^{T} \tag{4.39}$$

Sin embargo, para que una matriz sea ortogonal, sus columnas y sus filas también deben ser ortonormales. Efectuando la normalización de la matriz del nivel 1, ésta queda de la siguiente forma:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} r & r & & & & & & \\ & & r & r & & & & \\ & & & & r & r & & \\ & & & & & & r & r \\ r & -r & & & & & & \\ & & r & -r & & & & \\ & & & & r & -r & & \\ & & & & & & r & -r \end{bmatrix} \quad \text{donde } r = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{4.40}$$

Esta normalización se aplica también a las matrices de los otros niveles. Entonces, para el caso de N=8, la transformada ondeleta en forma matricial se expresa con el producto siguiente:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} r^3 & r^3 & r^3 & r^3 & r^3 & r^3 & r^3 & r^3 \\ r^3 & r^3 & r^3 & r^3 & -r^3 & -r^3 & -r^3 & -r^3 \\ r^2 & r^2 & -r^2 & -r^2 & & & & \\ & & & & r^2 & r^2 & -r^2 & -r^2 \\ r & -r & & & & & & \\ & & r & -r & & & & \\ & & & & r & -r & & \\ & & & & & & r & -r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & r & & & & & & \\ r & -r & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & r & & & & & & \\ & & r & r & & & & \\ r & -r & & & & & & \\ & & r & -r & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & r & & & & & & \\ & & r & r & & & & \\ & & & & r & r & & \\ & & & & & & r & r \\ r & -r & & & & & & \\ & & r & -r & & & & \\ & & & & r & -r & & \\ & & & & & & r & -r \end{bmatrix}$$

(4.41)

La matriz resultante **A** también es ortogonal y la *transformada discreta de Haar* se puede representar en forma compacta de la siguiente manera:

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{4.42}$$

donde **x** es el vector de entrada que representa a una señal en forma discreta y **b** es el vector de coeficientes ondeleta.

La matriz **A** contiene muchos elementos que son cero, y en la práctica para efectuar una Transformada Discreta Ondeleta (DWT, Discrete Wavelet Transform), es mucho más eficiente aplicar secuencialmente una por una de las matrices de nivel. Esto se debe principalmente a que dichas matrices incluyen sub bloques "unidad", así como varios sub bloques de elementos nulos y ambos implican cero operaciones. El algoritmo de la Transformada Rápida de Ondeleta (FWT, Fast Wavelet Transform) precisamente consiste en la aplicación secuencial de las matrices de cada nivel. Para una señal **x** con $N=2^J$ muestras la FWT de Haar involucra un número M de operaciones (sumas y multiplicaciones) acotado por la siguiente expresión:

$$M < 2N \tag{4.43}$$

Para la implementación de la FWT con otras ondeletas diferentes a la de Haar el número de operaciones está acotado de la siguiente forma:

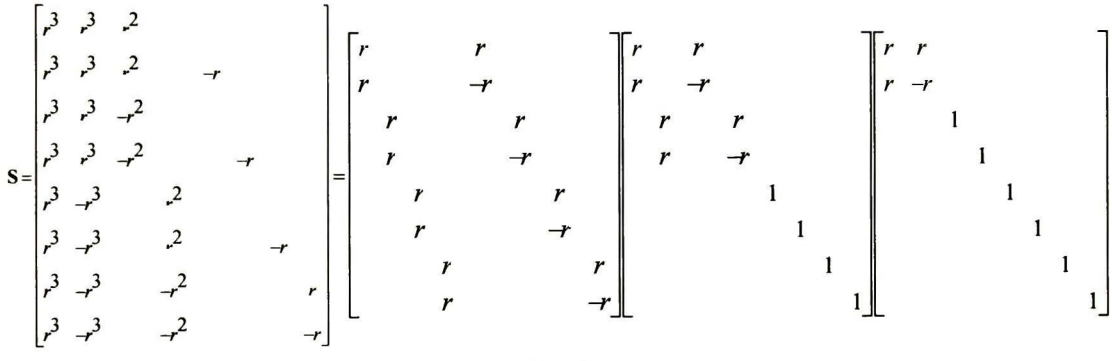
$$M < KN \tag{4.44}$$

siendo K el número de coeficientes distintos de cero en cualquier renglón (o columna) de cualquier matriz de nivel.

Nótese de (4.43) y (4.44) que la eficiencia computacional de la FWT es superior al de la FFT. Ahora, siendo **A** en la aproximación (4.42) una matriz ortogonal; la transformada inversa correspondiente queda de la siguiente forma:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b} = \mathbf{S}\mathbf{b}\,, \tag{4.45}$$

con $\mathbf{S}=\mathbf{A}^T$; y en forma explícita se tiene:



(4.46)

Este patrón matricial se aplica para cualquier tamaño de arreglo igual a 2^J En (4.41) la matriz del lado derecho corresponde al primer nivel, la matriz central al nivel m=2 y la de la izquierda al nivel m=3. En (4.46) la matriz del lado derecho invierte el nivel tres del proceso de análisis y así sucesivamente. Al igual que con la transformada directa, la transformada rápida inversa consiste en la aplicación sucesiva de las matrices de nivel en (4.45)

4.2.2 Transformada Haar y filtros digitales

Antes de establecer una relación entre la transformada ondeleta de Haar y el procedimiento de filtrado, se mencionan algunos aspectos de los filtros digitales.

Un filtro digital se puede ver como un operador lineal invariante en el tiempo, donde la salida $\mathbf{y}(n)$ es el resultado de la convolución entre la entrada y la respuesta al impulso del filtro:

$$\mathbf{y}(n) = \sum_k \mathbf{h}(k)\mathbf{x}(n-k)\,. \tag{4.47}$$

La respuesta al impulso se denota por $\mathbf{h}(n)$; es decir si $\mathbf{x}=(1,0,0,0\ldots)=\delta(n)$, entonces $\mathbf{y}(n)=\mathbf{h}(n)$. En el caso de filtros digitales el vector $\mathbf{h}(n)$ contiene los coeficientes del filtro. En el dominio de la frecuencia la operación de convolución equivale a una multiplicación. De (4.47) se tiene:

$$\begin{aligned} Y\left(e^{j\omega}\right) &= H\left(e^{j\omega}\right)X\left(e^{j\omega}\right) \quad ó \\ Y(\omega) &= H(\omega)X(\omega), \end{aligned} \tag{4.48}$$

donde $H(\omega)$ es la transformada de Fourier de $\mathbf{h}(n)$; o bien, la respuesta en frecuencia del filtro:

$$H(\omega) = \sum \mathbf{h}(n)e^{-jn\omega} \tag{4.49}$$

y $X(\omega)$ por su parte es la transformada de Fourier de $\mathbf{x}(n)$.

El filtro digital, pasa bajas, más simple es el promediador de dos muestras con coeficientes $h(0)=1/2$ y $h(1)=1/2$. Su salida en el dominio del tiempo se expresa como la siguiente serie de *promedios móviles*:

$$\mathbf{y}(n) = \frac{1}{2}\mathbf{x}(n) + \frac{1}{2}\mathbf{x}(n-1). \tag{4.50}$$

La respuesta al impulso es $\mathbf{y}$ = (½, ½, 0, 0, 0,…), que concuerda con los coeficientes del filtro. Para la respuesta en frecuencia se excita al filtro con la entrada $\mathbf{x}(n)=e^{jn\omega}$ para $-\infty<n<\infty$. Esta es una señal de magnitud igual a 1 y con una sola componente de frecuencia que se encuentra en el intervalo $[-\pi,\pi]$. Para dicha entrada, el vector de salida $\mathbf{y}(n)$ es un múltiplo del vector de entrada $\mathbf{x}(n)$ que depende del valor de ω [20].

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(n) &= \tfrac{1}{2}\mathbf{x}(n) + \tfrac{1}{2}\mathbf{x}(n-1) \\ &= \tfrac{1}{2}e^{jn\omega} + \tfrac{1}{2}e^{j(n-1)\omega} \\ &= \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}e^{-jn\omega}\right)e^{jn\omega}. \end{aligned} \tag{4.51}$$

El término entre paréntesis es la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ del filtro pasa bajas. Para graficar esta respuesta se factoriza $e^{-j\omega/2}$ en (4.51) obteniéndose:

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \tfrac{1}{2}\left(e^{j\omega/2} + e^{-j\omega/2}\right)e^{-j\omega/2} \\ H(\omega) &= \left(\cos\tfrac{\omega}{2}\right)e^{-j\omega/2} \end{aligned} \tag{4.52}$$

En la figura 4.8 se muestran las gráficas de magnitud y fase $H(\omega)$. La gráfica de la fase muestra una línea recta, lo que implica que el filtro sea de *fase lineal*. Los coeficientes del filtro son simétricos; es decir, si se invierte el orden de éstos la respuesta del filtro no cambia.

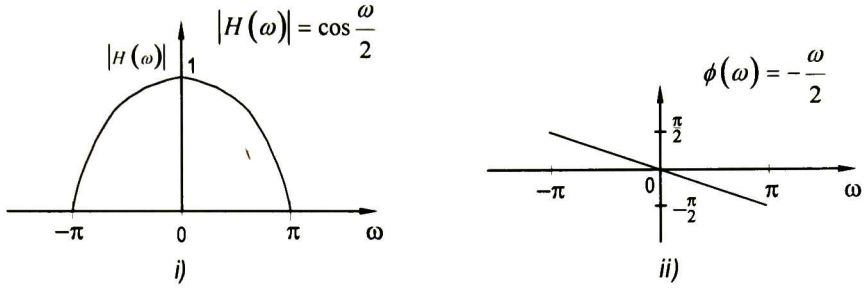


Fig. 4.8. *i)* Magnitud y *ii)* fase de $H(\omega)$. Filtro pasa-bajas.

El filtro pasa altas más simple, que complementa al filtro pasa bajas descrito anteriormente, consiste en tomar la diferencia promediada entre dos muestras sucesivas. Sus coeficientes son $g(0)=½$ y $g(1)=-½$; su salida en el dominio del tiempo se expresa como la siguiente serie diferencias móviles:

$$\mathbf{y}(n)=\frac{1}{2}\mathbf{x}(n)-\frac{1}{2}\mathbf{x}(n-1). \tag{4.53}$$

En este caso la respuesta al impulso es igual $\mathbf{y}=(½, -½, 0,0,\ldots)$, y corresponde nuevamente con los coeficientes que definen al filtro pasa altas. Para la respuesta en frecuencia se utiliza nuevamente la entrada $\mathbf{x}(n)=e^{jn\omega}$ que se sustituye en (4.53), produciendo:

$$\begin{aligned} y(n) &= \tfrac{1}{2}e^{jn\omega}-\tfrac{1}{2}e^{j(n-1)\omega} \\ &= \left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}e^{-j\omega}\right)e^{jn\omega} \\ y(n) &= G(\omega)e^{jn\omega} \end{aligned} \tag{4.54}$$

Dada esta respuesta en frecuencia, se factoriza $e^{-j\omega/2}$ y se obtiene:

$$G(\omega)=\frac{1}{2}\left(e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2}\right)e^{-j\omega/2}=j\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)e^{-j\omega/2} \tag{4.55}$$

Las gráficas de la magnitud y fase de la respuesta en frecuencia del filtro pasa altas se muestran en la figura 4.9. En la fase se presenta una discontinuidad en $\omega=0$, donde se observa que $\phi(\omega)$ brinca de $-\pi/2$ a $\pi/2$. A pesar de esta discontinuidad, este filtro pasa altas se considera de fase lineal.

Para comenzar a establecer la relación entre filtros digitales y la transformada ondeleta, se resalta que la operación de convolución de los filtros digitales se puede representar en forma matricial de la forma $\mathbf{y}=\mathbf{H}\mathbf{x}$. Esto se ilustra, en forma respectiva, para los filtros pasa bajas y pasa altas antes mencionados mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{bmatrix} y(-1) \\ y(0) \\ y(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(-1) \\ x(0) \\ x(1) \\ \end{bmatrix} \tag{4.56}$$

y

$$\begin{bmatrix} y(-1) \\ y(0) \\ y(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ & & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(-1) \\ x(0) \\ x(1) \\ \end{bmatrix}. \tag{4.57}$$

En ambos casos el coeficiente $h(0)$ aparece a lo largo de la diagonal principal mientras que $h(1)$ se encuentra a lo largo de la primera sub diagonal inferior.

Estos filtros no son invertibles, ya que sí se tiene $\mathbf{x}=(\ldots,1,1,1,\ldots)$ a la entrada del filtro **G** se obtiene $\mathbf{y}=(\ldots,0,0,0,\ldots)$. No existe pues un filtro $\mathbf{G}^{-1}$ que recupere esta señal $\mathbf{x}(n)$ a partir de su salida igual a cero. La respuesta en frecuencia de un filtro invertible debe ser entonces $H(\omega) \neq 0$, para todas la frecuencias y así el cociente $1/H(\omega)$ es válido. Los filtros mostrados en esta sección no son invertibles porque $H(\pi)=0$ y $G(0)=0$.

Para obtener la inversa de un filtro de longitud finita a partir de filtros de longitud igualmente finita se necesita recurrir al concepto de *bancos de filtros* [20].

Los filtros **H** y **G** no son invertibles, juntos llevan a cabo una operación particular. Separan una señal en bandas de frecuencia y, en la mayoría de los casos, uno es el complemento del otro; esto a pesar de que la frecuencia de corte no sea muy marcada. Cuando una señal se filtra bajo este esquema, es posible recuperar la señal original. La figura 4.10 muestra el diagrama a bloques de un banco de filtros básico. La demostración matemática del proceso mencionado se encuentra en el apéndice A. La siguiente expresión indica que la señal de salida es la misma que la señal de entrada, sólo que se encuentra desplazada N muestras, siendo N el orden del filtro:

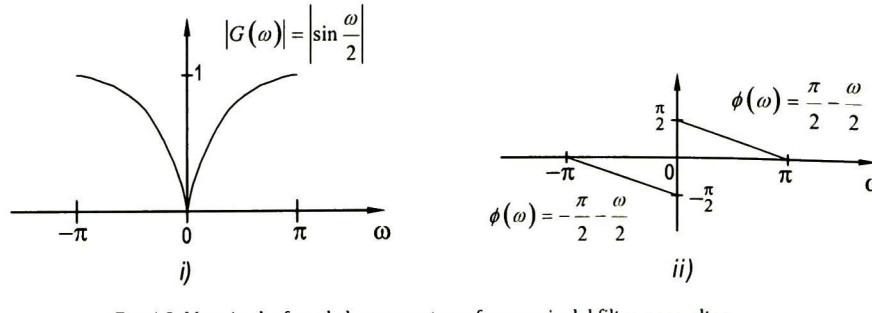


Fig. 4.9. Magnitud y fase de la respuesta en frecuencia del filtro pasa-altas.

$$\bar{X}(z) = z^{-N} X(z) \quad \rightarrow \quad \bar{x}(n) = x(n-N). \tag{4.58}$$

En el diagrama de la figura 4.10 se observa un bloque que indica la operación de diezmado (2↓) o sub muestreo que consiste en eliminar alternadamente la mitad de las muestras de la señal de salida de cada filtro.

La razón práctica del sub muestro es por cuestiones de implementación, debido a que el tamaño de la salida se duplicaría cuando la misma señal pasa a través de dos filtros. La justificación teórica de esta operación radica en el Teorema de Muestreo [21]. Como la señal pasa a través de un par filtros, de tal forma que reduce su ancho de banda a la mitad, entonces el número de muestras necesarias también se reduce a la mitad.

En la notación matricial el sub muestreo se logra suprimiendo las filas impares de las matrices **H** y **G,** respectivamente. Para compensar la pérdida de la mitad de las muestras se introduce un factor $\sqrt{2}$ de normalización [20]. Así los nuevos coeficientes para el filtro pasa bajas y pasa altas, en forma respectiva son:

$$c(0) = c(1) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

y

$$d(0) = -d(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Tomando en cuenta el sub muestreo y los nuevos coeficientes para los filtros, las matrices que aparecen en (4.56) y (4.57) quedan modificadas de la siguiente forma:

$$\mathbf{L} = (\downarrow 2)\sqrt{2}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{4.59}$$

$$\mathbf{B} = (\downarrow 2)\sqrt{2}\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & & \\ & & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \tag{4.60}$$

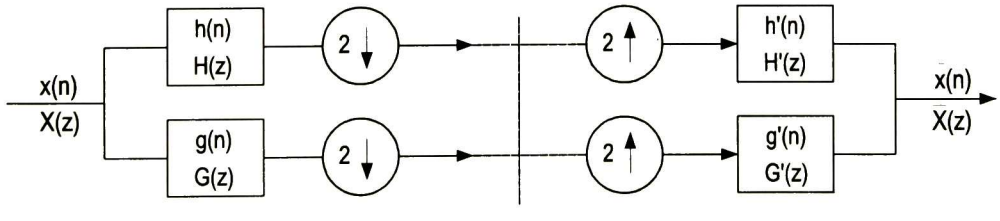


Fig. 4.10. Esquema básico del banco de filtros.

La fusión de estas dos nuevas matrices resulta en una nueva matriz que se muestra a continuación y que representa un banco de filtros, denominado *banco de análisis.*

$$\begin{bmatrix}\mathbf{L}\\ \mathbf{B}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1 & & \\ & & 1 & 1\\ -1 & 1 & & \\ & & -1 & 1\end{bmatrix}. \tag{4.61}$$

Los vectores fila y columna de esta matriz son mutuamente ortonormales, por lo que su inversa es simplemente la transpuesta la cual representa entonces a un *banco de filtros de síntesis* con el que se recupera la señal original:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{L}\\ \mathbf{B}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{L}^T & \mathbf{B}^T\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1 & & \\ 1 & 1 & & \\ & & 1 & -1\\ & & 1 & 1\end{bmatrix}. \tag{4.62}$$

Los canales $\mathbf{L}=(\downarrow 2)\mathbf{H}$ y $\mathbf{B}=(\downarrow 2)\mathbf{G}$ de un banco de filtros ortogonal están representados en el dominio del tiempo por una matriz ortogonal combinada [20].

$$\begin{bmatrix}\mathbf{L}^T & \mathbf{B}^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{L}\\ \mathbf{B}\end{bmatrix}=\mathbf{L}^T\mathbf{L}+\mathbf{B}^T\mathbf{B}=\mathbf{I}. \tag{4.63}$$

Cada bloque de 1x2 de la matriz en (4.61) y 2x1 en (4.62) representa a un filtro. Con este antecedente y observado la similitud entre la estructura matricial del banco de filtros y las matrices dadas por (4.41), mediante las cuales se lleva a cabo la transformada rápida de Haar, es posible establecer *la relación entre la transformada ondeleta de Haar y el proceso de filtrado digital.* El diagrama a bloques de la figura 4.11 muestra la estructura en árbol de un banco de filtros mediante el cual se lleva a cabo la transformada rápida de Haar.

El filtro pasa altas calcula las diferencias, mientras que el filtro pasa bajas determina los promedios, que a su vez serán la entrada para el banco de filtros del siguiente nivel.

Para establecer mejor la relación anterior se debe mencionar que en el esquema de la figura 4.11 se tiene un banco de filtros por cada nivel, la representación matricial equivalente por nivel de cada banco está dada por el factor correspondiente de la relación (4.41) o la matriz de nivel. La misma relación se establece para el proceso inverso, cada banco de filtros de síntesis está representado matricialmente por cada uno de los factores de la relación (4.46), las cuales conforman la matriz de síntesis.

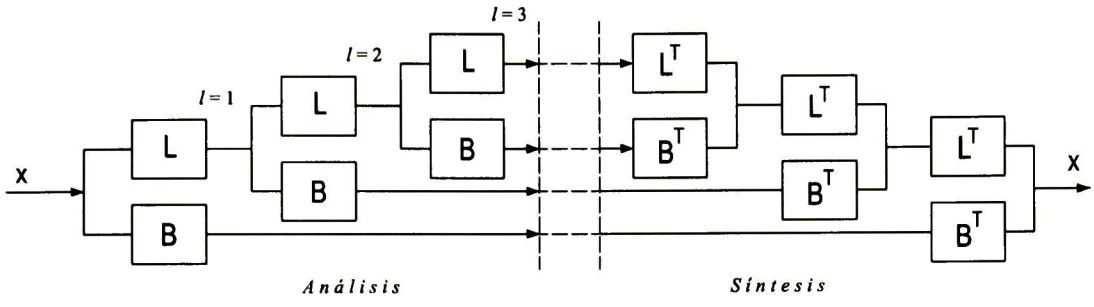


Fig. 4.11. Esquema en árbol de un banco de filtros. Análisis y síntesis. Tres niveles.

4.2.3 Descomposición espectral y resolución tiempo-frecuencia

La WT es la descomposición de una señal para expresarla por medio de aproximaciones y diferencias o detalles de la función. Por cada nivel, estas aproximaciones y diferencias poseen *diferente resolución* y este proceso es equivalente a filtrar la señal por medio de un esquema en árbol de un banco de filtros. En un primer nivel de filtrado la señal original pasa a través del primer banco; después del sub muestreo se tienen dos señales de distintas bandas de frecuencia; una de banda baja y otra de banda alta.

La relación de resolución en tiempo y frecuencia de la transformada ondeleta está basada en el teorema de muestreo de Nyquist, el cual dice que la componente máxima de frecuencia contenida en una señal puede ser unívocamente determinada cuando la señal se muestrea a una frecuencia F_s mayor o igual a dos veces la frecuencia máxima F_{max} de la señal [21]. En el límite cuando $F_s=2F_{max}$ se tiene que:

$$F_{\max} = \frac{F_s}{2} = \frac{1}{2T}, \tag{4.64}$$

donde T es el intervalo de muestreo. Entonces, si la frecuencia máxima F_{max} de la señal original es p se tiene que $F_s=2p$, por lo tanto $T=1/2p$. Pero como la señal en el primer nivel es dividida en dos sub bandas de frecuencia, la frecuencia máxima contenida en la banda pasa bajas es $p/2$, esto trae como consecuencia que $F_s=p$ y $T=1/p$.

El esquema de la figura 4.12 corresponde al proceso de codificación en sub bandas o "*sub-band coding*" que es similar al esquema en árbol de un banco de filtros mediante el cual se lleva a cabo la DWT. Este esquema muestra que por cada nivel de filtrado el espectro de la señal de entrada se divide en una parte de bajas frecuencias y otra parte altas frecuencias. Como la parte de bajas frecuencias se vuelve a filtrar, se aumenta la resolución en frecuencia debido a que el espectro correspondiente se vuelve a dividir en dos sub bandas conforme se avanza en el proceso de filtrado. También se disminuye la resolución en tiempo, debido al proceso de diezmado que se lleva a cabo.

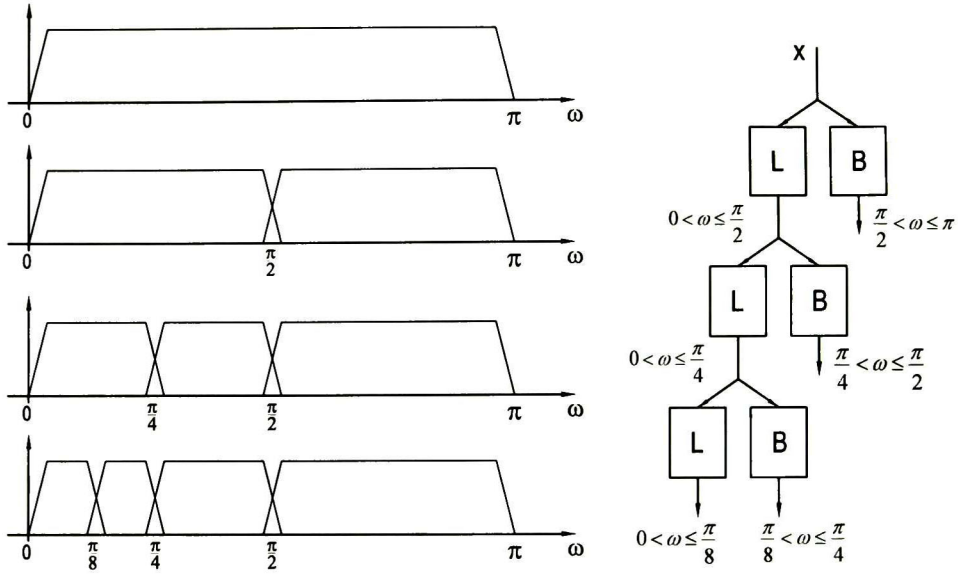


Fig. 4.12. División espectral de la señal con banco de filtros.

En el primer nivel, la frecuencia de muestreo disminuye a la mitad y por tanto el periodo de muestreo T aumenta al doble. Esta es la razón por la cual en el primer nivel la resolución de la señal en tiempo disminuye y, como el proceso de filtrado se repite, la resolución en tiempo irá disminuyendo aún más. Esto se ilustra en el diagrama de la figura 4.13, donde se tiene que las altas frecuencias contenidas en una señal se pueden caracterizar mejor en tiempo, debido a que se requiere un mayor número de muestras. Por el contrario, en este caso es difícil caracterizar a las bajas frecuencias contenidas en una señal debido a su baja resolución temporal.

La localización en tiempo de la información de frecuencia tendrá una resolución que depende en qué nivel de filtrado aparezca dicha información. Si la principal información de la señal cae en las altas frecuencias, la localización en el tiempo de estas frecuencias será muy precisa. Pero si la principal información de la señal cae en las bajas frecuencias, la localización en el tiempo no es muy buena debido a la poca resolución en tiempo y al poco número de muestras que se tienen para expresar la señal en estas frecuencias.

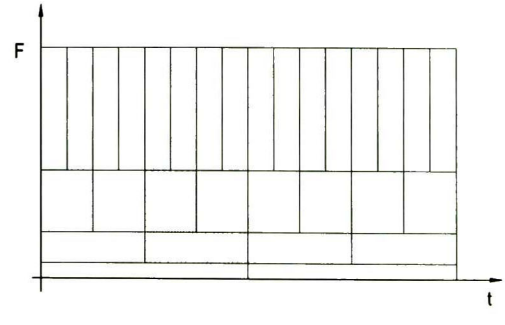


Fig. 4.13. Resolución tiempo-frecuencia de la transformada ondeleta.

4.3 Relación entre filtros digitales y ondeletas

En el análisis ondeleta se representa a una función como la suma de ondeletas con diferentes localizaciones en tiempo y diferentes escalas (frecuencias). Los coeficientes ondeleta cuantifican la intensidad de la contribución de cada ondeleta en sus respectivas escalas y ubicaciones.

Las ondeletas son funciones base acotadas en tiempo y oscilatorias que son localizables en tiempo y frecuencia. Las ondeletas base se forman a partir de una ondeleta "madre" aplicándole escalamientos y corrimientos en el dominio del tiempo.

Como lo que se pretende con la transformada ondeleta es expresar una función en términos de ondeletas, se tiene la siguiente expresión:

$$f(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{i,k} \psi_{i,k}(t), \tag{4.65}$$

donde se tiene que

$$\psi_{i,k}(t) = 2^{-i/2} \psi\left(2^{-i} t - k\right). \tag{4.66}$$

Se hace la suposición de que las funciones $\psi_{i,k}(t)$ son reales y continuas. Así, en la transformada de Haar, el valor de las muestras será visto a través de un proceso "muestra retén" debido a que las ondeletas son funciones de tiempo continuo [22]. Bajo estas condiciones es posible aplicar desplazamientos y escalamientos con números enteros.

En este caso la letra "i" es el factor de escalamiento y "k" es desplazamiento en el tiempo. Debido a estos factores, se tiene que todas las funciones son versiones escaladas y desplazadas de la función original u ondeleta "madre" Cuando i=–1 se tiene a la función ondeleta en la escala más fina.

También se asume que las funciones ondeleta son ortonormales en todas las escalas; es decir que cumplen con la siguiente condición [20]:

$$\int \psi_{i,k}(t) \psi_{j,m}(t) dt = \delta_{i,j} \delta_{k,m}, \tag{4.67}$$

donde $\delta_{i,j}$ y $\delta_{k,m}$ son deltas de Kronecker. Bajo estas condiciones los coeficientes $d_{i,k}$ de la relación (4.65) se calculan mediante la siguiente expresión:

$$d_{i,k} = \int f(t) \psi_{i,k}(t) dt = \langle f, \psi_{i,k} \rangle. \tag{4.68}$$

Esta expresión proporciona los coeficientes ondeleta de $f(t)$. En tiempo discreto estos coeficientes son los mismos que se obtienen cuando se aplica el esquema de árbol de un banco de filtros. El cálculo de los coeficientes mediante (4.68) tomaría mucho tiempo de cómputo, debido a que los escalamientos y corrimientos aplicados a las ondeletas son continuos y se genera redundancia de

información. Es por esto que las técnicas de ondeletas ofrecen una manera rápida, recursiva y eficiente para evaluar los productos internos en (4.68). Esto se logra con la introducción de una función de escalamiento descrita por la siguiente expresión:

$$\phi_{l,k}(t) = 2^{-l/2}\phi\left(2^{-l}t - k\right). \tag{4.69}$$

A la función de escalamiento se le conoce como la ondeleta "padre", la cual satisface una ecuación de dilatación. Para comprender lo anterior supóngase que se tiene la señal $f(t)$ con ancho de banda $0<\omega\leq\pi$ y además una función $\phi(t)$ a la cual se le aplican desplazamientos enteros para obtener $\phi(t-k)$, de la siguiente manera:

$$\phi_k(t) = \phi(t-k). \tag{4.70}$$

Cada función $\phi(t)$ dilatada puede ser representada por una combinación de funciones $\phi(t-m)$ con coeficientes $h(k)$ dando origen a la ecuación (4.71) que es la ecuación de dilatación:

$$\phi(t) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{N} h(k)\phi(2t-k). \tag{4.71}$$

También se asume que $\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t-k)dt = 1$. Entonces, aplicando un desplazamiento m e integrando en ambos lados de (4.71) se obtiene:

$$\sum_{k} h(k) = \sqrt{2} \tag{4.72}$$

Sí los coeficientes $h(k)$ satisfacen la ecuación de dilatación, entonces también deben de cumplir con esta última relación. Ahora, la ondeleta correspondiente está dada por la relación siguiente:

$$\psi(t) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{N} g(k)\phi(2t-k). \tag{4.73}$$

Desde una perspectiva ingenieril, se supone que los coeficientes $h(k)$ describen un filtro digital; así, la función de escalamiento puede ser calculada recursivamente a través de (4.71). Se comienza con una función impulso como entrada, y se continúa hasta que dicha ecuación converja. Una vez que se conoce la función de escalamiento, las ondeletas estarán determinadas por (4.73), en donde:

$$g(k) = (-1)^k h(N-k). \tag{4.74}$$

Una vez explicada la razón de existir de la función de escalamiento, también es conveniente citar algunas propiedades de estas funciones. Las funciones de escalamiento y las ondeletas, en la mayoría de los casos, son ortogonales entre sí:

$$\int\phi_{l,k}(t)\psi_{l,m}(t)dt = 0 \quad si \quad j \leq i. \tag{4.75}$$

También entre las funciones de escalamiento se cumple la siguiente condición de ortogonalidad:

$$\int \phi_{i,k}(t)\phi_{i,m}(t)dt = \delta_{k,m}. \tag{4.76}$$

Para la aproximación de una función $f(t)$, los coeficientes ondeleta $d_{i,k}$ se calculan recursivamente a través de los coeficientes $c_{i,k}$ definidos por:

$$c_{i,k} = \int f(t)\phi_{i,k}(t)dt. \tag{4.77}$$

De (4.67), (4.75) y (4.76) se tiene que el conjunto ortonormal $\{\phi(t-k);\psi(t-k)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ proporciona una base debido a que las funciones involucradas son ortogonales. Así también, de (4.71) se tiene que el conjunto $\left\{\sqrt{2}\phi(2t-k)\right\}_{k=-\infty}^{\infty}$ forma un grupo ortonormal de funciones para el mismo espacio [22]. Por lo tanto, con las anteriores condiciones se puede definir una función $p(t)$ de la siguiente forma:

$$p(t) = \sum_k a_{-1,k}\sqrt{2}\phi(2t-k) \tag{4.78}$$

$$p(t) = \sum_k \left[a_{o,k}\phi(t-k) + b_{o,k}\psi(t-k)\right]. \tag{4.79}$$

En (4.78) se está aproximando a la función $p(t)$ únicamente con funciones $\phi(t)$'s correspondientes a la escala más fina (i=–1). En (4.79) se expresa la misma función $p(t)$ pero en una escala siguiente (i=0) y con funciones del conjunto ortonormal $\{\phi(t-k);\psi(t-k)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ que son de menor resolución. Para encontrar la recursión sobre los coeficientes, primero se aplica un desplazamiento n a las relaciones (4.71) y (4.73) y haciendo k=l–2n se tiene:

$$\begin{aligned}\phi(t-n) &= \sqrt{2}\sum h(k)\phi(2t-2n-k) = \sum h(l-2n)\phi(2t-l)\\ \psi(t-n) &= \sqrt{2}\sum g(k)\phi(2t-2n-k) = \sum g(l-2n)\phi(2t-l);\end{aligned} \tag{4.80}$$

posteriormente se multiplica cada una de las relaciones anteriores por $p(t)$ y se integra con respecto al tiempo. Debido a que las funciones base son ortonormales, el resultado de la integral queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}a_{o,n} &= \sum a_{-1,l}h(l-2n)\\ b_{o,n} &= \sum a_{-1,l}g(l-2n).\end{aligned} \tag{4.81}$$

Estas relaciones muestran la clave de la recursión para el cálculo de los coeficientes ondeleta entre un nivel y el otro. Este proceso resulta ser similar al que lleva a cabo un banco de filtros. Generalizando (4.81) se obtienen las siguientes relaciones que representan el proceso iterativo para el cálculo de los coeficientes ondeleta para la representación de una función $f(t)$.

$$a_{l+1,k} = \sum_k a_{l,l} h(k-2n)$$
$$b_{l+1,k} = \sum_k a_{l,l} g(k-2n). \tag{4.82}$$

Con estas expresiones se puede establecer una clara relación biunívoca entre estos coeficientes y los coeficientes de los filtros que conforman al banco de filtros para la DWT:

$$c_{i,k} \leftrightarrow a_{i,k}$$
$$d_{i,k} \leftrightarrow b_{l,k}. \tag{4.83}$$

Generalizando:

$$c_{i+1,k} = \sum_n c_{i,n} h(n-2k)$$
$$d_{i+1,k} = \sum_n c_{i,n} g(n-2k). \tag{4.84}$$

Observando (4.84) y considerando que los coeficientes $h(k)$ y $g(k)$ pertenecen a un filtro pasa bajas y a uno pasa altas, respectivamente, se tiene que el cálculo de los coeficientes ondeleta se lleva a cabo mediante el proceso iterativo con un banco de filtros. Desde un punto de vista teórico, este desarrollo muestra que no es necesario calcular todo los coeficientes a partir de la expresión (4.68). Esto se puede realizar calculando los coeficientes $c_{-l,k}$, en la escala más fina, que se generan al correlacionar $\phi(2t)$ con $f(t)$, y después calcular los coeficientes ondeleta recursivamente con las relaciones (4.84). Los coeficientes $c_{-l,k}$ son los que se obtienen al realizar la aproximación de la función que se mencionó en la sección 4.1.1 mediante funciones rectángulo y que corresponde a la transformada de Haar.

Otra conclusión importante que surge en esta sección es que no es absolutamente necesario conocer a la función de escalamiento ni las ondeletas para calcular la DWT. Basta con sólo conocer los coeficientes de los filtros que conforman al banco de filtros.

En la representación de $f(t)$ dada por la ecuación (4.65), cuando los límites son infinitos ésta es exacta; sin embargo, en la práctica estos límites deben tomarse como finitos. Entonces, para la aproximación de la función $f(t)$ con ondeletas, además de los coeficientes $d_{i,k}$, también se debe tomar en cuenta la contribución de los coeficientes $c_{l,k}$. Por lo que la función $f(t)$ se expresa mejor de la siguiente manera:

$$f(t) = \sum_{l=0}^{M} \sum_k d_{l,k} \psi_{l,k}(t) + \sum_k c_{M,k} \phi_{M,k}(t). \tag{4.85}$$

4.4 Transformadas Ondeleta discretas

Se ha establecido que para llevar a cabo la DWT no es necesario conocer la expresión analítica de las ondeletas. Basta con conocer los coeficientes que describen a las ecuaciones de recursividad

(4.71) y (4.73) para poder llevar a cabo la transformación, ya que estos coeficientes son los que actúan como un par de filtros digitales.

4.4.1 Ondeleta Haar como caso particular

La ondeleta de Haar es un caso particular de la teoría antes expuesta, debido a que al plantear la ecuación de dilatación y la de la función ondeleta, éstas convergen inmediatamente en la primera iteración [20]. Adicionalmente, la ondeleta Haar resulta ser la más fácil de llevar a la práctica debido a su número reducido de coeficientes.

Si se tienen los coeficientes $h(0)=1/\sqrt{2}$ y $h(1)=1/\sqrt{2}$, la ecuación de dilatación está dada por:

$$\phi(t)=\phi(2t)+\phi(2t-1) \quad \rightarrow \quad \phi(t)=\begin{cases}1 & si\ \ 0\le t<1\\ 0 & en\ otro\ caso.\end{cases} \tag{4.86}$$

De las expresiones (4.73) y (4.74) se tiene que la función ondeleta de Haar se define por:

$$\psi(t)=\phi(2t)-\phi(2t-1) \quad \rightarrow \quad \psi(t)=\begin{cases}1 & si\ \ 0\le t<1/2\\ -1 & si\ \ 1/2\le t<1\\ 0 & en\ otro\ caso.\end{cases} \tag{4.87}$$

Los coeficientes que describen al filtro pasa bajas se introducen en la ecuación de dilatación, obteniéndose así a la función de escalamiento. Con esta última es con la que se obtiene la ondeleta correspondiente, a través del proceso iterativo antes mencionado.

4.4.2 Principales ondeletas discretas y sus requisitos

Además de la ondeleta Haar existe una gran variedad de ondeletas discretas. El uso de cada una de ellas depende del tipo de aplicación. Aquí se mencionan las más utilizadas, así como los requerimientos que éstas deben de cumplir.

Una de las familias de ondeletas discretas más utilizadas es la de ondeletas Daubechies. Cada familia tiene subclases de ondeletas que se clasifican de acuerdo con el número de coeficientes o con el nivel de iteración. En la grafica 4.14 se presenta la ondeleta Daubechies 6, (db6) además de otras ondeletas uso común.

Los coeficientes que describen a las ondeletas discretas son los mismos que se incluyen dentro de estructura matricial de un banco de filtros que realiza la DWT correspondiente. Estos coeficientes

deben cumplir ciertos requerimientos. Uno de ellos es que la matriz del banco de filtros sea ortogonal, o al menos no singular.

Condición de Ortogonalidad: La estructura matricial de un banco de filtros impone ciertos requerimientos a los coeficientes de los filtros $h(n)$ y $g(n)$, respectivamente, para lograr la reconstrucción perfecta [20]. La condición de ortogonalidad es un requerimiento que se cumple cuando las filas y las columnas de las matrices que describen a un banco de filtro son ortonormales.

Si se tiene la matriz **A** que representa al banco de filtros de análisis, junto con el sub muestro y la parte de pasa bajas y pasa altas, la condición de ortogonalidad se puede analizar mediante una matriz infinita con filtros de cuatro coeficientes según la siguiente expresión. Se elige esa longitud de filtro con propósitos de explicación, la cual puede corresponder, en determinado caso, a la ondeleta Daubechies 4.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{L}\\ \mathbf{B}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} h(3) & h(2) & h(1) & h(0) & & \\ & & h(3) & h(2) & h(1) & h(0) \\ g(3) & g(2) & g(1) & g(0) & & \\ & & g(3) & g(2) & g(1) & g(0) \end{bmatrix}. \tag{4.88}$$

Independientemente de la ortogonalidad el banco de síntesis viene a ser la inversa del banco de análisis, logrando así la recuperación completa de la señal. Por lo que la matriz de síntesis es la transpuesta de la matriz de análisis descrita a continuación:

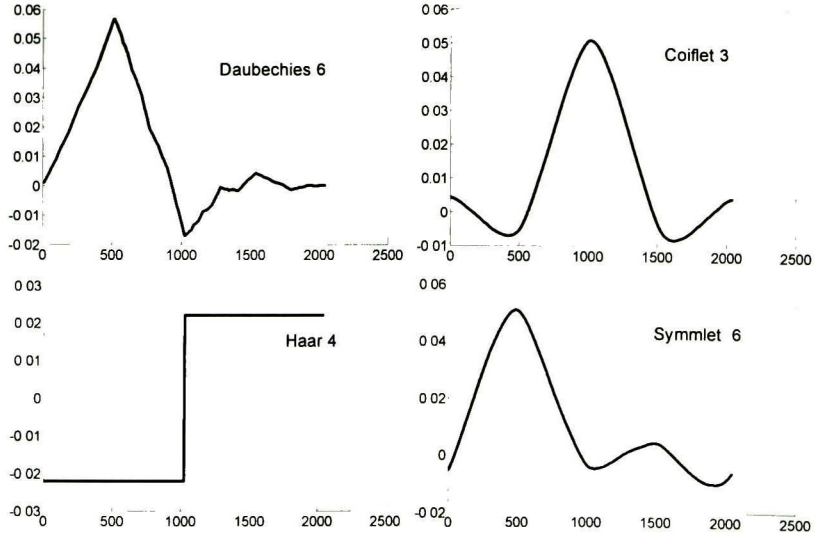


Fig. 4.14. Principales ondeletas para la DWT.

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}^T & \mathbf{B}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(3) & & g(3) & \\ h(2) & & g(2) & \\ h(1) & h(3) & g(1) & g(3) \\ h(0) & h(2) & g(0) & g(2) \\ & h(1) & & g(1) \\ & h(0) & & g(0) \end{bmatrix}, \tag{4.89}$$

y como se requiere la reconstrucción perfecta de la señal original, las matrices de análisis y de síntesis deben cumplir la relación siguiente:

$$\mathbf{A}\mathbf{S}^T = \mathbf{S}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}. \tag{4.90}$$

En forma de bloques o sub matrices se tiene la siguiente relación, la cual indica que los filtros deben ser ortogonales o en espejo de cuadratura (QMF, Quadature Mirror Filters):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}^T & \mathbf{B}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} = \mathbf{L}^T\mathbf{L} + \mathbf{B}^T\mathbf{B} = \mathbf{I}. \tag{4.91}$$

y

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}^T & \mathbf{B}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}\mathbf{L}^T & \mathbf{L}\mathbf{B}^T \\ \mathbf{B}\mathbf{L}^T & \mathbf{B}\mathbf{B}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{4.92}$$

Esta relación se convierte en ortogonalidad de doble desplazamiento para los coeficientes $h(k)$ y $g(k)$ debido a que:

$$\mathbf{L}\mathbf{L}^T = \mathbf{I}: \quad \sum h(n)h(n-2k) = \delta(k) \tag{4.93}$$

$$\mathbf{L}\mathbf{B}^T = \mathbf{0}: \quad \sum h(n)g(n-2k) = 0 \tag{4.94}$$

$$\mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{I}: \quad \sum g(n)g(n-2k) = \delta(k). \tag{4.95}$$

Esta ortogonalidad de doble desplazamientos excluye a los filtros de longitud impar, por lo que N, el orden del filtro, no puede ser par, ya que $L = N+1$.

La relación (4.93) impone las siguientes dos restricciones a los coeficientes del filtro pasa bajas:

$$h(0)^2 + h(1)^2 + h(2)^2 + h(3)^2 = 1 \tag{4.96}$$

y

$$h(0)h(2) + h(1)h(3) = 0 \tag{4.97}$$

La misma condición ocurre para los coeficientes $g(k)$ del filtro pasa altas con la relación (4.95). Esto indica que todas las filas de **A** y las columnas de **S** deben ser ortonormales. Ahora, (4.94) indica que las filas de **L** son ortogonales a las filas de **B**. Esta condición es necesaria para el diseño de banco de filtros ortogonales. La condición que deben cumplir los coeficientes $h(k)$ es independiente de la de los $g(k)$; pero si $h(k)$ satisface la relación (4.93) entonces será fácil

determinar los coeficientes $g(k)$ mediante la ecuación (4.74) y así satisfacer la condición de ortogonalidad en la matriz **A**. Esta condición permite tener una nueva representación de la matriz **A** de la siguiente manera:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{L}\\ \mathbf{B}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} h(3) & h(2) & h(1) & h(0) & & \\ & & h(3) & h(2) & h(1) & h(0) \\ -h(0) & h(1) & -h(2) & h(3) & & \\ & & -h(0) & h(1) & -h(2) & h(3) \end{bmatrix}. \tag{4.98}$$

Al invertir el orden de los coeficientes en **L** y alternar el signo en **B**, como se ve en la expresión anterior, se obliga a que se cumpla que $\mathbf{LB}^{\mathrm{T}}=0$ para todo N impar. Por lo que las filas superiores de **A** son siempre ortogonales a las filas inferiores [20].

4.5 Ondeletas en tiempo continuo

Se debe tener presente que la DWT divide a una señal de banda limitada en diferentes bandas de frecuencia a través de un banco de filtros. Lo que se obtiene durante este proceso iterativo de filtrado son varias representaciones de la misma señal, cada una con diferente resolución.

La transformada continua ondeleta (CWT, Continuos Wavelet Transform) es una herramienta eficiente para el análisis de señales no estacionarias y en estado transitorio. La CWT es un mapeo de la señal a una representación de tiempo-escala así que el aspecto temporal de la señal se preserva. La transformada ondeleta proporciona un análisis en multirresolución a través de diferentes tamaños de ventana. Las funciones base de la CWT son generadas a partir de una función ondeleta "madre" aplicando dilataciones y desplazamientos continuos.

Sea **L** el espacio de funciones cuadráticamente integrables y medibles. La transformada ondeleta de una función $f(t)\in\mathbf{L}$ consiste en una descomposición de $f(t)$ en un grupo de funciones base $\psi_{s,\tau}(t)$ llamadas ondeletas.

$$W_f(s,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi^{*}_{s,\tau}(t)\,dt \tag{4.99}$$

La mayoría de las funciones ondeleta son reales y son generadas por una sola función ondeleta, la ondeleta madre:

$$\psi_{s,\tau}(t)=\frac{1}{\sqrt{s}}\psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right), \tag{4.100}$$

donde s>0 es el factor de escala y τ es el factor de desplazamiento. El término $s^{-1/2}$ se incluye como un factor de normalización para preservar la energía de la señal.

4.5.1 Propiedades de las ondeletas

Las propiedades de admisibilidad y de regularidad, que se describen a continuación, son las más importantes, y son las que dan el nombre de ondeletas a estas funciones.

Las funciones cuadráticamente integrables $\psi(t)$ deben cumplir con la siguiente condición conocida como de admisibilidad [23]:

$$\int \frac{|\Psi(\omega)|^2}{\omega} d\omega < +\infty, \tag{4.101}$$

donde $\Psi(\omega)$ es la transformada de Fourier de $\psi(t)$. Esta condición permite llevar a cabo el análisis y la síntesis de una señal e implica que $\Psi(\omega)$ se cancela en la frecuencia cero (ω=0):

$$|\Psi(\omega)|^2\Big|_{\omega=0} = 0. \tag{4.102}$$

Esto significa que la ondeleta debe tener un espectro pasa banda; y como $|\Psi(\omega)|^2$ =0 cuando ω=0, esto indica que el valor promedio de la ondeleta debe ser cero en el dominio del tiempo y a su vez, se tiene que la ondeleta es una onda oscilatoria, como lo indica la siguiente expresión:

$$\int \psi(t) dt = 0. \tag{4.103}$$

La transformada ondeleta de una función unidimensional es una función bidimensional y la transformada ondeleta de una función bidimensional es de 4 dimensiones. Como consecuencia se puede tener una explosión del producto tiempo y ancho de banda en la transformada ondeleta, lo cual no es una propiedad deseable en muchas aplicaciones [23]. Por lo tanto se imponen algunas condiciones de regularidad a las funciones ondeleta con el fin de que los coeficientes de la transformada disminuyan rápidamente, junto con la disminución del factor de escala s y el incremento de $1/s$. Para este propósito la ondeleta $\psi(t)$ y su transformada de Fourier $\Psi(\omega)$ deben tener suavidad y concentración en ambos, el dominio del tiempo y el de la frecuencia. Esto se logra a través de la condición de regularidad.

Por simplicidad considérese que τ=0 y que los coeficientes de la transformada ondeleta convergen a cero con el incremento de $1/s$. Se hace una expansión en series de Taylor de la función $f(t)$ en la ecuación (4.99) alrededor de t=0 y con n términos.

$$W_f(s,0) = \frac{1}{\sqrt{s}} \left[\sum_{p=0}^{n} f^{(p)}(0) \int \frac{t^p}{p!} \psi\left(\frac{t}{s}\right) dt + O(n+1) \right], \tag{4.104}$$

donde $f^{(p)}$ es la p-ésima derivada de f y O(n+1) es el resto de la expansión. Si se define el momento p de la ondeleta de la siguiente forma:

$$M_p = \int t^p \psi(t) dt, \tag{4.105}$$

ahora se reescribe a (4.104) como un desarrollo finito:

$$W_f(s,0) = \frac{1}{\sqrt{s}} \left[f(0) M_0 s + \frac{f^{(1)}(0)}{1!} M_1 s^2 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} M_2 s^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} M_n s^{n+1} + O(s^{n+2}) \right]. \tag{4.106}$$

De la condición de admisibilidad se tiene que M_0, el 0-ésimo momento, es cero y por tanto el primer término del lado derecho de (4.106) es cero. La rapidez de convergencia a cero de los coeficientes $W_f(s, \tau)$ de la transformada ondeleta, que decrecen con la escala s, o incrementan con $1/s$ está determinada por el primer momento no nulo de la ondeleta básica $\psi(t)$. Sí los primeros momentos $n+1$ de $\psi(t)$ son cero entonces los coeficientes $W_f(s, \tau)$ decaen tan rápido como s^{n+2} para una señal $f(t)$ suave. Por lo tanto, la condición de regularidad de la ondeleta $\psi(t)$ conduce a la localización de la ondeleta en el dominio de la frecuencia.

4.5.2 Ejemplos de ondeletas continuas

La CWT emplea funciones ondeletas continuas. Algunas funciones ondeleta pueden ser empleadas tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto. En esta sección se presentan un par de ejemplos de funciones continuas ondeleta con las cuales se lleva a cabo la CWT.

La función de *ondeleta Morlet* básica está dada por la multiplicación de la función base de la transformada de Fourier y una ventana Gausiana:

$$\psi(t) = e^{(j\omega_o t)} e^{\left(-t^2/2\right)} \tag{4.107}$$

La parte real es un coseno multiplicado por una ventana de Gauss, y la parte imaginaria es el seno igualmente multiplicado por esa misma ventana. En la base que forma la ondeleta Morlet; tanto la ventana de Gauss como la función base de Fourier sufren las mismas dilataciones.

La transformada de Fourier de la parte real de la ondeleta Morlet consta de dos funciones Gausianas desplazadas en ω_0 y en $-\omega_0$.

$$\Psi(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \exp\left[\frac{-(\omega - \omega_o)^2}{2} \right] + \exp\left[\frac{-(\omega + \omega_o)^2}{2} \right] \right\}. \tag{4.108}$$

Esta expresión indica que el espectro es par, real y simétrico con respecto al origen $\omega=0$. La ventana de Gauss es pues perfectamente localizable en tiempo y frecuencia; adicionalmente, consigue el mínimo valor del producto tiempo ancho de banda establecido por el principio de incertidumbre ($\sigma_t \sigma_\omega \geq 1/2$).

El espectro de la parte real de la ondeleta Morlet que aparece en la figura 4.15b, corresponde al de un filtro pasa banda y converge a cero conforme el valor ω se aleja de la banda de paso.

Otra de las ondeletas importantes es la *ondeleta sombrero mexicano* (*Mexican Hat*). Esta ondeleta se define como la segunda derivada de la función de Gauss:

$$\psi(t) = \left(1 - t^2\right) e^{\left(-t^2/2\right)} \tag{4.109}$$

Esta ondeleta es una función par y de valor real que cumple con la condición de admisibilidad. Su transformada de Fourier se define a continuación y su espectro se muestra en la figura 4.16b:

$$H(\omega) = -\omega^2 e^{-\omega^2/2} \tag{4.110}$$

La función de Gauss es perfectamente localizable en tiempo y en frecuencia, además de que es infinitamente derivable; por tanto la derivada *n*-ésima de esta función es una ondeleta.

Se puede hacer una lista muy extensa con las ondeletas existentes mediante las cuales se lleva a cabo la CWT, pero no es el propósito central en esta sección. Para esto se recomienda consultar las referencias [23], [20] y [19].

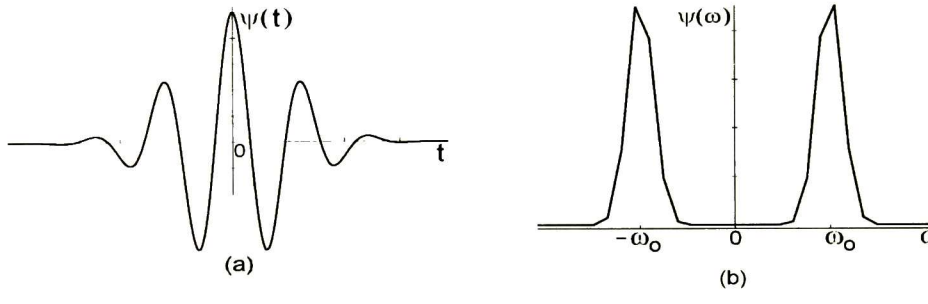


Fig. 4.15. Ondeleta Morlet en tiempo y frecuencia.

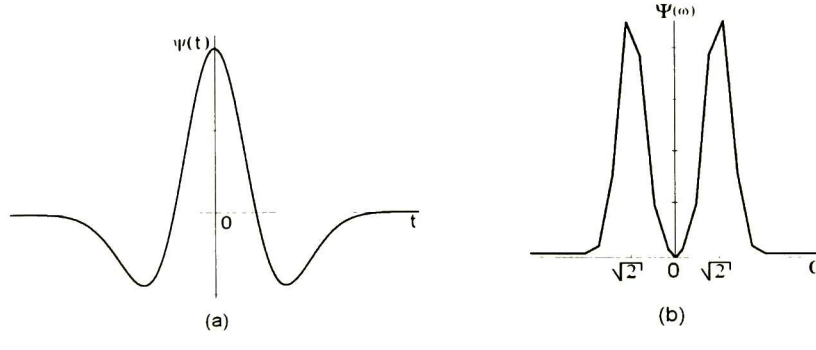


Fig. 4.16. Ondeleta sombrero mexicano en tiempo y frecuencia.

4.6 Observaciones del capítulo

En este capítulo se han abordado los aspectos más importantes para entender la transformada ondeleta. La introducción a dicha transformación inició con la transformada de Haar, que es básicamente una sucesión de promedios y diferencias, que proporcionan representaciones de la misma función en diferentes resoluciones o escalas a través de niveles de transformación. Mediante una representación matricial de la transformada ondeleta de Haar y del proceso de filtrado con un banco de filtros se establece la relación y la similitud entre estos dos procesos concluyendo que son equivalentes.

Como la transformada ondeleta discreta se lleva a cabo mediante un esquema de banco de filtros, se tiene que los coeficientes que definen a una ondeleta cualquiera son los que se incluyen en la estructura matricial que describe a dicho banco de filtros. Se muestra que las matrices de los bancos de filtros de análisis y de síntesis deben ser ortogonales. Esto con el fin de tener la reconstrucción perfecta de la señal de entrada; aunque cabe señalar que esta propiedad no es absolutamente necesaria para llevar a cabo la transformada discreta de ondeleta.

La transformada ondeleta, tanto en tiempo discreto como en tiempo continúo posee propiedades de resolución en tiempo y frecuencia especiales que la hacen apropiada para el análisis de señales, proporcionando información de la señal que otro tipo de transformadas no incluyen.

El panorama general de la Transformada Ondeleta, que aquí se ha presentado, se basa en un enfoque orientado al proceso de filtrado digital. Se considera que esta es la manera más conveniente de poder implementar la transformada ondeleta en aplicaciones de Ingeniería.

Para propósitos de esta tesis sólo se requiere la Transformada Ondeleta Discreta (DWT). Sin embargo, con el fin de proporcionar un panorama amplio de la Teoría de Ondeletas, en este capítulo también se han incluido tópicos relacionados con la Transformada Ondeleta Continua (CWT).

Capítulo 5. Comparación de técnicas para el análisis armónico en estado transitorio

5.1 Introducción

Se presenta una comparación entre cuatro técnicas para la estimación de componentes armónicas en señales de voltaje y de corriente en estado transitorio. Tres de ellas, EPPL, KF y WFFT se abordaron en el capítulo 3. La cuarta técnica se propone en [8], y consiste en combinar el filtro de Kalman con la Transformada Ondeleta, dando origen a una nueva técnica llamada filtro híbrido Kalman Ondeleta (KWF, Kalman-Wavelet Filter). Las ventajas y desventajas de las cuatro técnicas son analizadas a través de tres diferentes casos de estudio.

5.2 Modelo del filtro hibrido Kalman-Ondeleta

En el capítulo 3 se vio que el KF es un tipo especial de filtro que se basa en la técnica de Espacio de Estados, donde los estados del sistema analizado son actualizados de manera recursiva. La inclusión de la transformada ondeleta resulta en una nueva representación que permitirá conocer el contenido armónico de una señal.

Para entender la nueva representación en espacio de estados del KWF se retoma la forma estándar de una señal de voltaje o de corriente dada a continuación (también, expresión (3.29)):

$$z(t)=\sum_{i=1}^{h}\left(A_i(t)\cos\theta_i\cos i\Omega_o t - A_i(t)\sin\theta_i\sin i\Omega_o t\right), \tag{5.1}$$

donde h es el número máximo de armónicas. De la relación (3.30) se sigue que cada componente de frecuencia de una señal contiene dos variables de estado [7]:

$$x_{2i-1}(t)=A_i(t)\cos\theta_i \quad y \quad x_{2i}(t)=A_i(t)\sin\theta_i, \quad i=1,2\ldots,h. \tag{5.2}$$

De acuerdo con la expresión (4.85), cualquier función de energía finita se puede descomponer mediante funciones ondeleta [24], por lo que cada variable de estado en (5.2) se puede expresar de la siguiente forma:

$$x_{(q,i)}=\sum_{k\in Z} c_{o,k}^{(q,i)}\varphi_{o,k}^{(q,i)}(t)+\sum_{j=0}^{J}\sum_{k\in Z} d_{j,k}^{(q,i)}\psi_{j,k}^{(q,i)}(t), \quad q=1,2; \quad i=1,2,\ldots,h, , \tag{5.3}$$

donde q=1 y q=2 representan, en forma respectiva, a las componentes en fase y en cuadratura de cada componente armónica la señal en la expresión (5.2).

Mediante la expresión (5.3) se representa a una función en un intervalo de tiempo determinado, y para eso se lleva a cabo la descomposición en funciones ondeletas de la señal original, obteniéndose 2^J funciones ondeleta y de escalamiento.

Para llevar a cabo la transformación de la señal en línea se toma una ventana de tamaño determinado la cual se desplaza muestra por muestra sobre el eje del tiempo; en cada desplazamiento se lleva a cabo la DWT, este hecho hace que (5.3) se reduzca. Ya que para determinar el valor de la señal en un instante de tiempo determinado se toma solamente la primera ondeleta y la primera función de escalamiento de cada nivel de transformación. Esto se debe a que el resto de las ondeletas desplazadas no influyen en el valor de la señal en ese instante de tiempo. Así, la expresión (5.3) se reduce y cada variable de estado se representa de la siguiente forma:

$$x_{(q,J)} = c_{o,1}^{(q,J)}\,\varphi_{o,1}^{(q,J)}(t) + \sum_{j=0}^{J} d_{j,1}^{(q,J)}\,\psi_{j,1}^{(q,J)}(t). \quad q = 1,2; \quad i = 1,2,\ldots,h. \tag{5.4}$$

Los coeficientes $c_{o,1}$ y $d_{j,1}$ serán las nuevas variables de estado para el KWF ya que $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ son las mismas funciones base para aproximar todas las componentes de frecuencia de la señal.

Con la expresión (5.4) la señal $z(t)$ descrita en (5.1) se puede expresar de la siguiente manera:

$$z(t) = \sum_{i=1}^{h}\left(x_{(1,J)}\cos i\omega t - x_{(2,J)}\sin i\omega t\right). \tag{5.5}$$

y en forma explícita se tiene:

$$z(t) = \sum_{i=1}^{h}\left\{\left[\varphi_{o,k}(t)\left(c_{o,k}^{(1,J)}\cos i\omega t - c_{o,k}^{(2,J)}\sin i\omega t\right)\right] + \sum_{j=0}^{J}\left[\psi_{j,1}(t)\left(d_{j,1}^{(1,J)}\cos i\omega t - d_{j,1}^{(2,J)}\sin i\omega t\right)\right]\right\}. \tag{5.6}$$

La siguiente ecuación de proceso del KWF muestra una estructura matricial, donde cada estado del sistema está descrito por un vector cuyos elementos son los coeficientes ondeleta:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1\\ \vdots \\ \mathbf{X}_h\end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix}\mathbf{I}_d & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & \mathbf{I}_d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1\\ \vdots \\ \mathbf{X}_h\end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix}\mathbf{W}_1\\ \vdots \\ \mathbf{W}_h\end{bmatrix}_k \tag{5.7}$$

donde

$$\mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} c_{o,1}^{(1,J)} & d_{o,1}^{(1,J)} & \cdots & d_{J,1}^{(1,J)} & c_{o,1}^{(2,J)} & d_{J,1}^{(2,J)} & \cdots & d_{J,1}^{(2,J)}\end{bmatrix}^T \qquad \mathbf{W}_i = \begin{bmatrix} w_o \\ \vdots \\ w_{2(J+1)}\end{bmatrix}$$

son los vectores de estado y los vectores de valores aleatorios que representan al ruido del proceso, en forma respectiva. $\mathbf{I}_d$ es una sub matriz identidad de dimensiones apropiadas. También se tiene la siguiente ecuación de medición que completa la representación del KWF.

$$\mathbf{z}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \cdots & \mathbf{H}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_h \end{bmatrix}_k + \mathbf{v}_k , \tag{5.8}$$

Donde

$$\mathbf{H}_i = \Big[\varphi_{o,1}(t_k)\cos i\omega t_k \;\; \psi_{o,1}(t_k)\cos i\omega t_k \;\; \ldots \;\; \psi_{J,1}(t_k)\cos i\omega t_k$$
$$-\varphi_{o,1}(t_k)\sin i\omega t_k \;\; -\psi_{o,1}(t_k)\sin i\omega t_k \;\; \ldots \;\; -\psi_{J,1}(t_k)\sin i\omega t \Big].$$

Para calcular a $A_i(t)$ y a $\theta_i(t)$ para cada componente frecuencial de la señal, primero es necesario obtener los coeficientes ondeleta a través del KWF descrito por las ecuaciones anteriores (5.7) y (5.8). El proceso iterativo del KWF que se aplica es el descrito en la sección 3.4. Después se deben calcular las componentes en fase y en cuadratura de la expresión (5.4). Por último, las amplitudes $A_i(t)$ y las fase $\theta_i(t)$ de cada armónica se obtienen, respectivamente, de la siguiente forma [8]:

$$A_i(t) = \sqrt{x^2_{(1,J)}(t) + x^2_{(2,J)}(t)} \tag{5.9}$$

y

$$\theta_i(t) = arctg \frac{x_{1,J}(t)}{x_{2,J}(t)} \tag{5.10}$$

5.3 Especificaciones de muestreo y evaluación

Para propósitos de validación del KWF, se utiliza la ondeleta de Haar para llevar a cabo la descomposición ondeleta de las componentes en fase y cuadratura de la señal bajo análisis. Una ventaja de esto es la facilidad que ofrece dicha ondeleta para programar el algoritmo del KWF.

Se elige una frecuencia de muestreo f_s =7680 Hz (Δt=130 μs) para señales cuya frecuencia fundamental es de f_o=60 Hz. Se tiene un número m entero de muestras por ciclo igual a 128, que se determina a partir de $f_s = mf_o$. Con la anterior característica se puede obtener la máxima atenuación de armónicas, de bandas de frecuencia vecinas, si el tamaño L de la ventana que se utiliza en la WFFT es múltiplo de m ($L=mn$); esto con el propósito de lograr que los ceros del espectro de la función, que describe a la ventana, se localicen en las frecuencias correspondientes a las armónicas que se desean determinar. Para llevar a cabo el análisis con la WFFT se emplean dos ventanas, la ventana rectangular y en algunos casos se muestran resultados empleando la ventana de Hanning.

El KF y el EPLL son algoritmos que realizan el proceso de identificación muestra por muestra. Por su parte, el KWF es un algoritmo en el que se deben utilizar 2^J muestras. Es importante mencionar que en el caso de una señal no cumpla con esta condición, el número de muestras faltantes se puede completar con ceros. Lo mismo aplica para la WFFT cuando el número de muestras disponibles no es igual a L.

En esta tesis, a diferencia de la referencia [8] donde utiliza un ciclo completo, aquí se hace uso de cuatro muestras; es decir, una ventana de tamaño L=4. Esto trae consigo una reducción sustancial del número de operaciones que lleva a cabo el KWF para cada iteración, a diferencia del caso que utiliza todo un ciclo completo. Así que en [8] se requerirá de más funciones ondeleta para la representación de la señal original, lo que obliga el incremento en el tamaño de las matrices para la representación del KWF y por ende una cantidad mayor de operaciones.

Para los casos y las técnicas que se presentan a continuación, el tiempo de observación es 0.5 s; esto es, de 30 ciclos de periodo fundamental.

5.4 Diferentes casos de estudio

A continuación se estimarán las componentes armónicas en tres diferentes casos de estudio. El primero consiste en analizar una señal con frecuencia fundamental y armónicas; en el segundo caso además de armónicos, la señal contiene un interarmónico. El tercero es un caso más real que consiste en analizar una falla en una línea de transmisión monofásica.

5.4.1 *Caso I.* Señal con armónicos

Se tiene una señal de 60 Hz de frecuencia fundamental a la que se agregan cuatro componentes armónicas. La señal resultante está descrita por la siguiente expresión:

$$z(t) = A\left\{\sin(\Omega_o t) + 0.25\sin(3\Omega_o t) + 0.15\sin(5\Omega_o t) + 0.08\sin(9\Omega_o t) + 0.06\sin(11\Omega_o t)\right\}, \qquad (5.11)$$

donde $$A = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 0.22 \\ 0.7, & 0.22 \le t \le 0.5. \end{cases}$$

La forma de onda de esta señal se muestra en la figura 5.1. Se observa que, además de la distorsión armónica, se presenta una depresión repentina de 0.7 p.u. Esto tiene el propósito de evaluar el comportamiento de las cuatro técnicas consideradas cuando ocurren estos cambios abruptos, los cuales son muy comunes en la práctica y la información generada en estos casos es de gran utilidad en muchas aplicaciones.

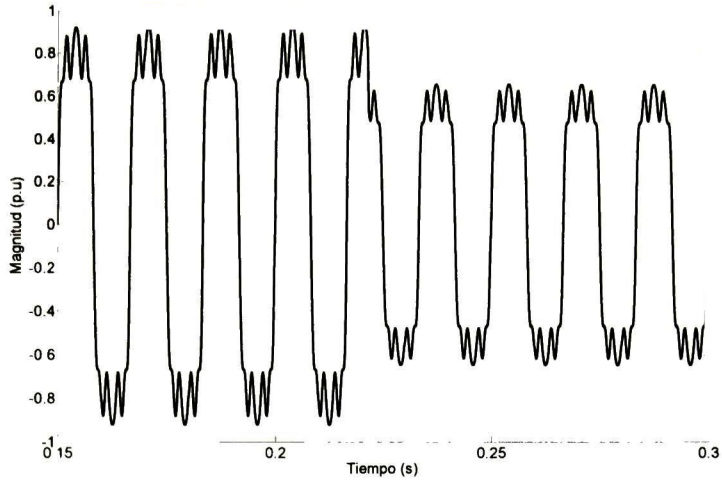


Fig. 5.1. Señal analítica con cuatro armónicas.

La figura 5.2 muestra la magnitud de la componente fundamental estimada con las cuatro técnicas bajo análisis: EPLL, WFFT, KF y KWF. De primera instancia se observa una repuesta lenta del EPLL, causada por los filtros pasa bajas en su estructura interna. Por su parte, la WFFT muestra una respuesta muy cercana al valor real en cuanto a la magnitud. Esto es debido al tipo de la ventana utilizada. También puede verse que esta técnica tarda un ciclo en alcanzar el estado estable, tanto al inicio del análisis como después del cambio abrupto; aunque, sin embargo, la respuesta del EPLL es todavía más lenta. El KF y el KWF, en este caso, tienen una respuesta muy similar, sólo que el KF muestra un sobrepaso antes de alcanzar el estado estable. Debido a esto, el KWF puede considerarse más rápido que el KF.

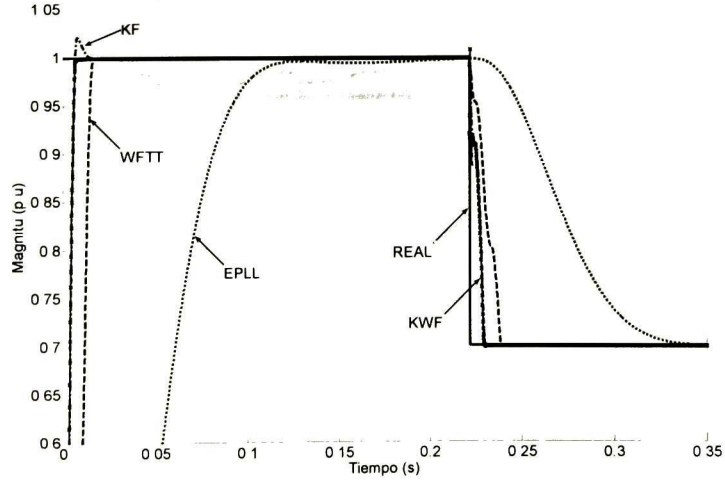


Fig. 5.2. Magnitud de la componente fundamental

En el caso de la tercera armónica, la figura 5.3 muestra el comportamiento de las cuatro técnicas consideradas. Puede verse que éstas tienen un desempeño similar al de la extracción de la fundamental que se muestra en la figura 5.2. El EPLL sigue siendo el algoritmo más lento, tardando aproximadamente 6 ciclos en alcanzar la magnitud correcta de la componente de frecuencia. Este tiempo de respuesta no es muy favorable en muchas aplicaciones; pero, a pesar de esto, el valor de las armónicas medidas es muy aproximado al de las originales cuando el EPLL alcanza el estado estable.

Las respuestas del KF y del KWF siguen siendo similares entre sí, alcanzando la magnitud de la armónica en menos de un ciclo. Las oscilaciones que presentan estas dos técnicas al inicio del análisis y después del cambio de amplitud no se mantienen por mucho tiempo, pero son de mayor magnitud que las que se generan con la WFFT.

La WFFT, a pesar de entregar buenos resultados, tarda más que el KF y el KWF en alcanzar el valor en estado estable. Las oscilaciones posteriores al sobrepaso perduran por más tiempo que las del KF y las del KWF

Cuando se emplea la ventana Hanning pa ra llevar a cabo la WFFT se presentan pequeñas oscilaciones en el estado estable. Esto debido a la distorsión o modulación en amplitud que genera esta ventana a la señal original. A diferencia del análisis empleando la ventana rectangular, al inicio del análisis y en los cambios abruptos no se generan las oscilaciones, sólo un pequeño sobrepaso. Esto se observa comparando las figuras 5.3 y 5.4.

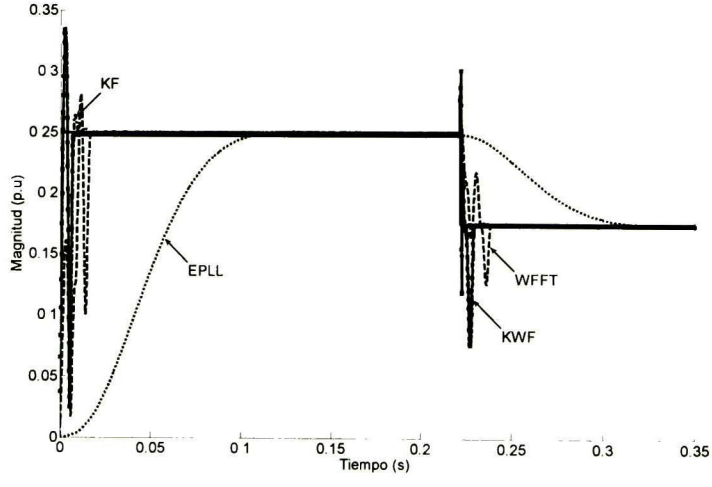


Fig. 5.3. Magnitud de la tercera armónica. Caso I.

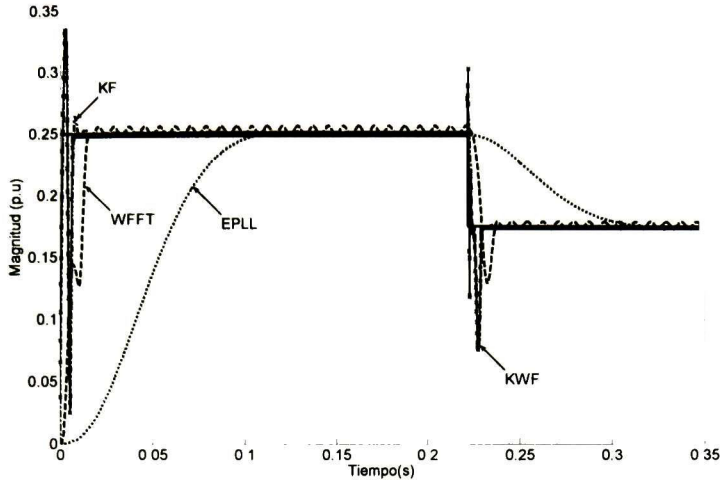


Fig. 5. 4. Magnitud de la tercera armónica empleando la ventana de Hanning para la WFFT.

5.4.2 *Caso II.* Señal con interarmónicas y depresión de voltaje

La señal de la expresión (5.11) se modifica ahora de la siguiente forma:

$$z(t) = A\{\sin(\Omega_o t) + 0.05\sin(2.5\Omega_o t) + 0.25\sin(3\Omega_o t) + \\ + 0.15\sin(5\Omega_o t) + 0.08\sin(9\Omega_o t) + 0.06\sin(11\Omega_o t)\}, \tag{5.12}$$

donde

$$A = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 0.2 \\ 0.7, & 0.2 \le t < 0.3 \\ 1, & 0.3 \le t \le 0.5. \end{cases}$$

Nótese que ahora se incluye un interarmónico. Adicionalmente, aparte de sufrir una caída de amplitud, después de 6 ciclos la señal recupera su amplitud original. Este fenómeno es conocido como una *depresión (o sag) de voltaje.* La forma de onda se aprecia en la figura 5.5.

En este segundo caso se excluye el EPLL debido a la respuesta extremadamente lenta que presentó en el caso anterior. Aquí el KWF es la técnica que más rápido alcanza el valor de la magnitud de la componente fundamental (8 *ms*). Aunque el KF tiene una respuesta similar al KWF, el primero tarda 10 *ms* más en alcanzar el estado estable. Esto se observa en la figura 5.6.

Por otra parte, a la WFFT le lleva aproximadamente 2 ciclos en alcanzar el estado estable. Esto es debido al tamaño de ventana que se ha tenido que duplicar para aumentar su resolución en frecuencia y tratar de medir el interarmónico.

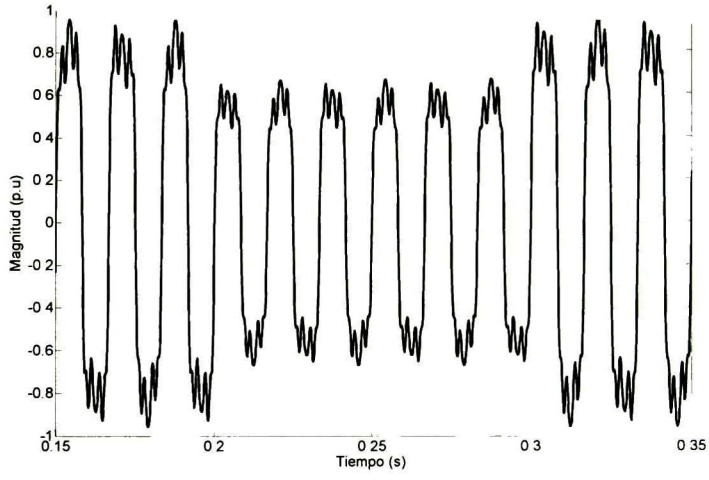


Fig. 5.5. Señal con depresión de voltaje.

En cuanto a la detección de la magnitud de la tercera armónica y del interarmónico, se puede observar a partir de las figuras 5.7 y 5.9, que la técnica que mejor responde es el KWF y que la diferencia en tiempos de respuesta entre el KWF y el KF es considerable. A pesar de las oscilaciones que aparecen en el KWF, esta última es nuevamente la técnica de mejor tiempo de respuesta cuando existen cambios abruptos en la señal de entrada seguida de la del KF.

Cabe mencionar que, en el caso de la tercera armónica, el KWF da un valor de magnitud por debajo del real aproximadamente 0.0018 p.u.

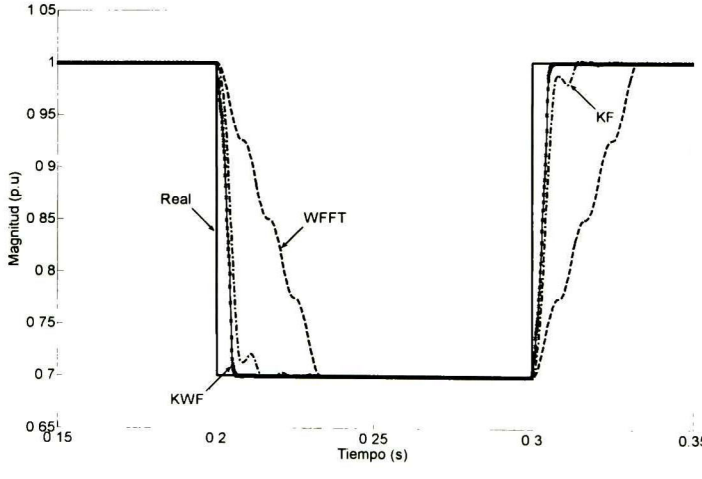


Fig. 5.6. Magnitud de la componente fundamental con *sag de voltaje.*

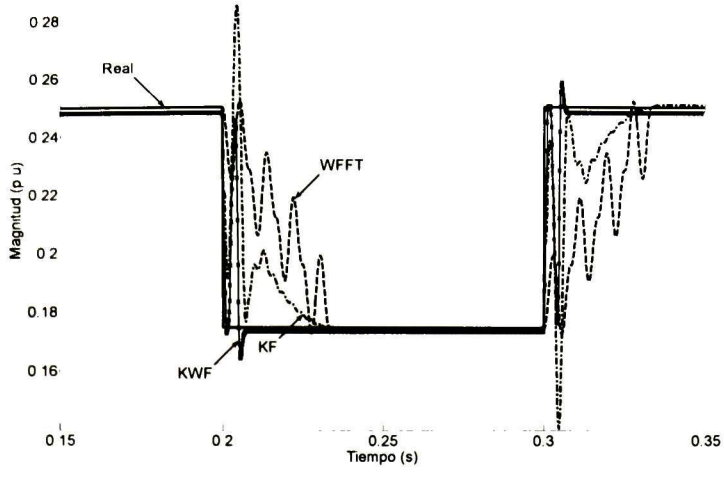


Fig. 5.7. Magnitud de la tercera armónica con *sag* voltaje.

Cuando se emplea la ventana de Hanning en la WFFT para medir la tercera armónica, se observa, a partir de la figura 5.8, que la medición no es correcta ya que se presentan oscilaciones muy pronunciadas a lo largo de toda la medición. Esto se debe principalmente a que el tamaño de la ventana fue duplicado y debido a su forma, ésta distorsiona aún más a la señal original.

El fenómeno de las oscilaciones también se presenta en la medición del interarmónico. En la figura 5.10 se puede observar que el valor medido no se aproxima al valor real. Las propiedades de resolución en frecuencia y el problema de la distorsión siguen siendo la causa de estos malos resultados.

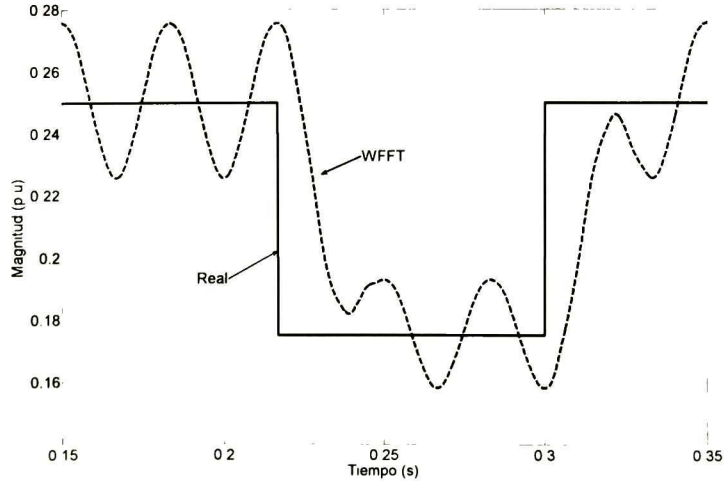


Fig. 5.8. Magnitud de la tercera armónica empleando la ventana de Hanning para la WFFT.

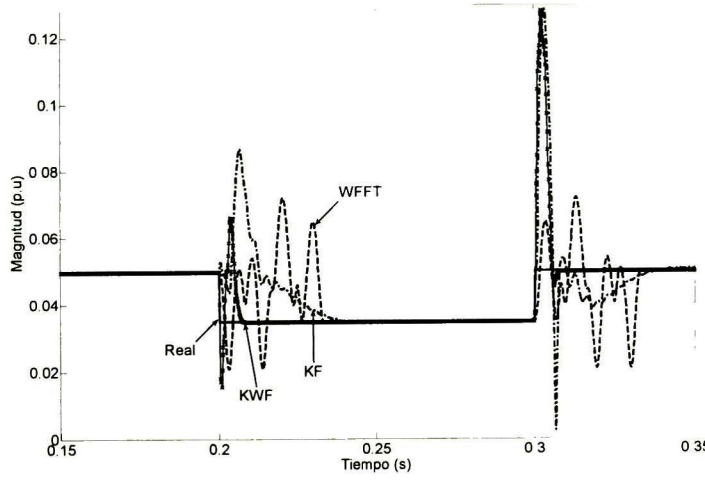


Fig. 5.9. Magnitud del inter-armónico, con *sag* de voltaje.

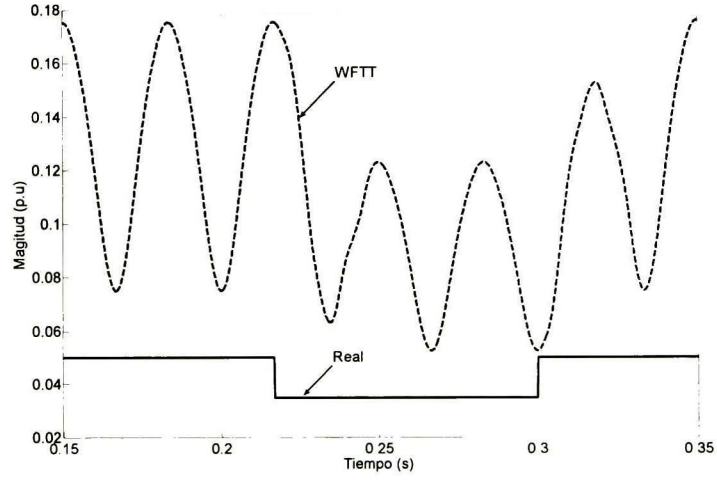


Fig. 5.10. Magnitud del interarmónico empleando la ventana de Hanning en la WFFT.

Para hacer una correcta medición del interarmónico y de la tercera armónica con la WFFT al emplear la ventana de Hanning, se debe aumentar aún más su tamaño para mejorar la resolución en frecuencia y lograr que el valor en frecuencia del interarmónico coincida con un cero del espectro de la función de la ventana. Esto debido a las especificaciones de muestro utilizadas en estos casos de estudio, de otra manera debería aumentarse la frecuencia f_s de muestreo.

Con la ventana rectangular se logra una mejor medición debido a que no contribuye a la distorsión de la señal en el dominio del tiempo, como en el caso de la ventana de Hanning. Esto a pesar de que el efecto de *leakage* es mayor, ya que la atenuación del lóbulo lateral, del espectro de la función de la ventana rectangular es menor.

5.4.3 *Caso III.* Señal de corriente en una línea de transmisión.

Considérese la línea de transmisión monofásica de 120 kilómetros de longitud que se muestra en la figura 5.11, la cual está conectada a una fuente cuyo voltaje es:

$$z(t) = 23000\cos(\Omega_0 t) + 2000\cos(3\Omega_0 t) + 100\cos(7\Omega_0 t)\,. \tag{5.13}$$

Al final de la línea se conecta una carga resistiva de 980 Ω. Además, a una distancia de 50 kilómetros de la fuente se conecta una impedancia de 50 Ω que representa una falla a tierra. Esta impedancia resistiva se conecta después de 310 *m*s de haberse energizado la línea de transmisión y se desconecta después de 90 *m*s adicionales. En la figura 5.12 se muestra la forma de onda de la corriente de línea medida en el lado de la fuente.

El sistema descrito se simula con PSCAD/EMTDC para obtener las formas de onda correspondientes. El análisis armónico se efectúa con las técnicas WFFT, KF y KWF.

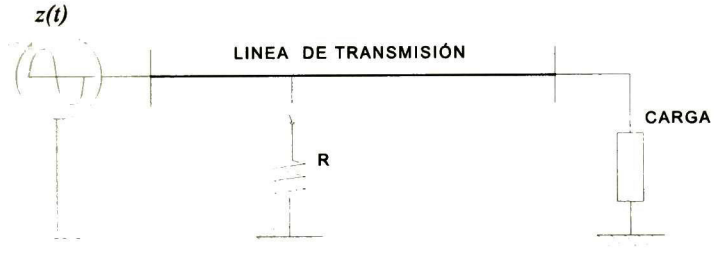


Fig. 5.11. Línea de transmisión de 120 km de longitud.

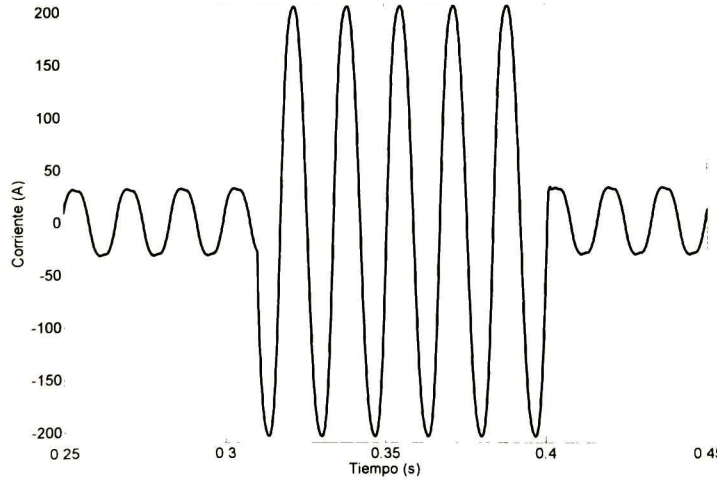


Fig. 5.12. Forma de onda de la corriente en la línea de transmisión.

En la figura 5.13 se aprecia que las tres técnicas detectan el cambio en la magnitud de la fundamental casi al mismo tiempo. Los seguimientos al valor de fundamental con el KF y KWF son mucho muy cercanos al valor original. Una vez que el KWF de tecta el cambio en la magnitud, éste tarda 10 *ms* en estimar el valor siguiente mientras que el KF tarda aproximadamente 18 *ms*.

En el instante que se libera la falla, el sistema recupera sus valores nominales, el KWF es el que detecta más rápido el valor nominal de la fundamental mientras que la WFFT y el KF presentan un sobre paso antes de llegar al estado estable; además, tardan más en estimar el valor nominal de la fundamental. Aun así, el tiempo de respuesta del KF es más corto que el de la WFFT.

Como en los casos anteriores, en este último también se presentan algunas oscilaciones en las mediciones al momento que ocurren los cambios abruptos en las señales. El caso de la tercera armónica se muestra en la figura 5.14. Cuando se emplea la ventana rectangular en la WFFT las oscilaciones son más pronunciadas y su duración se prolonga conforme aumenta el orden de la armónica. Ahora bien, en todos los casos la WFFT con la ventana rectangular, presenta oscilaciones de mayor duración; a pesar de que en su amplitud éstas son menores que las que se generan con las otras dos técnicas.

Se ha visto que la presencia de oscilaciones retarda el tiempo en que el KWF y el KF alcanzan el estado estable al estimar magnitudes de armónicas de mayor orden. Esto se aprecia en las figuras 5.14 y 5.16. En el caso del KWF, el tiempo de respuesta es más grande que para la estimación de la fundamental. Este tarda en llegar al estado estable aproximadamente 20 *ms* después del cambio abrupto; es decir, 10 *ms* adicionales a los que tarda en estimar el valor de la fundamental. Por otra parte las oscilaciones del KF son más pronunciadas que las del KWF.

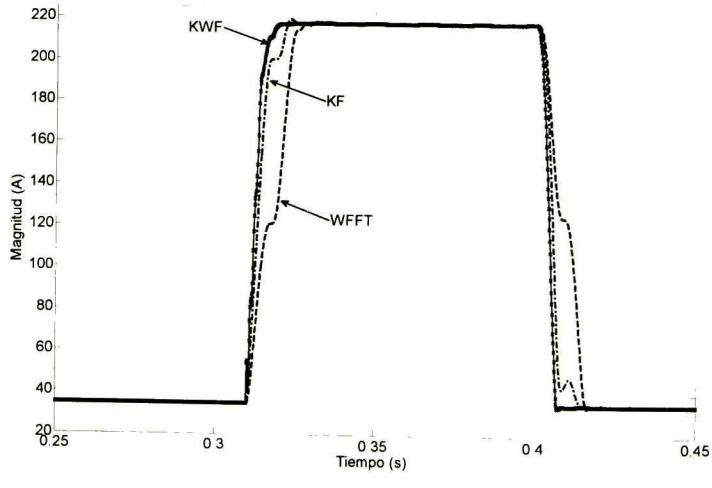


Fig. 5.13. Magnitud de la fundamental de la corriente en la línea de transmisión.

En general, se observa que en la estimación de armónicas de mayor orden, las tres técnicas bajo análisis pierden capacidad de tiempo de respuesta.

Al llevar a cabo el mismo análisis con la WFFT empleando la ventana de Hanning, para el caso de la tercera armónica, se notan algunas diferencias. Por ejemplo, no se presentan oscilaciones al inicio del análisis ni en los cambios abruptos, como en el caso *II*. Sólo se observan, a partir de la figura 5.15, unos sobrepasos antes de llegar al estado estable. Pero en cuanto a tiempo de respuesta se refiere no hay mejora.

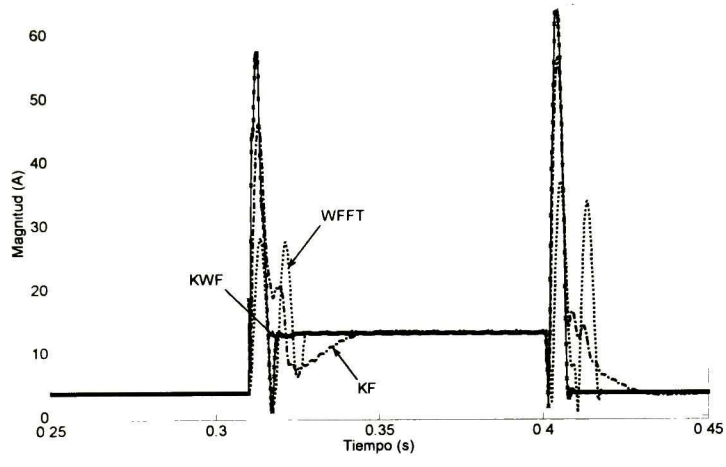


Fig. 5.14. Magnitud de la tercera armónica empleando la ventana rectangular en la WFFT.

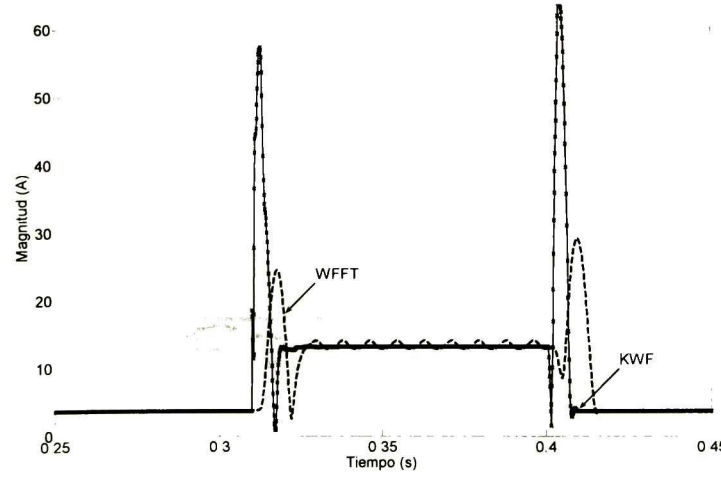


Fig. 5.15. Magnitud de la tercera armónica empleando la ventana de Hanning en la WFFT.

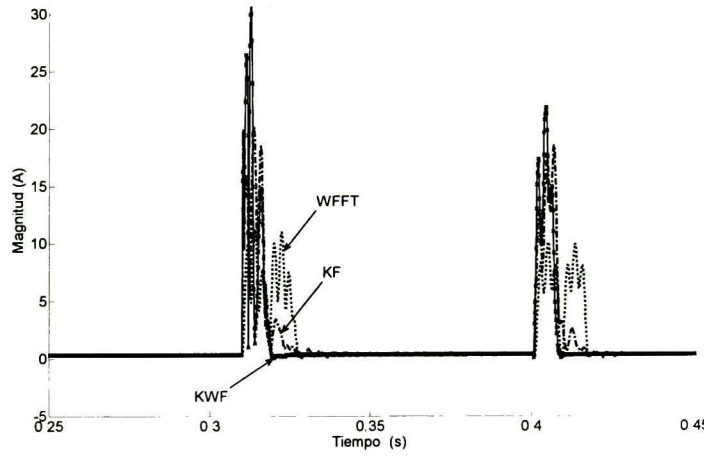


Fig. 5.16. Magnitud de la séptima armónica de la corriente en la línea de transmisión

Para el caso de la séptima armónica medida con la WFFT utilizando la ventana de Hanning, se tiene que las oscilaciones a lo largo del estado estable no son muy notorias, como con la tercera armónica. Así mismo, se observa, a partir de la figura 5.17 que en los cambios repentinos sólo aparecen unos sobrepasos antes de alcanzar al estado estable. No así en el caso del KWF que origina oscilaciones muy pronunciadas. Ahora bien, como en todos los casos anteriores, aquí tampoco se logra una mejora en el tiempo de respuesta de la WFFT al emplear otras ventanas.

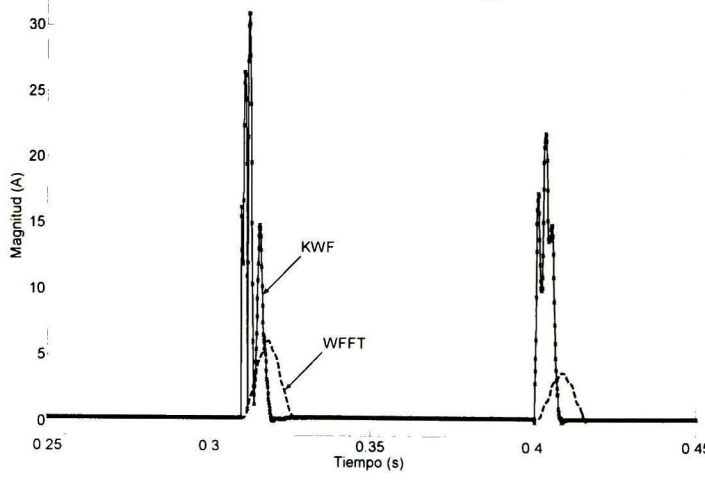


Fig. 5.17. Magnitud de la séptima armónica empleando la ventana de Hanning en la WFFT.

5.5 Tiempo de Cómputo

Además de la precisión y del tiempo de respuesta, para el diseño de dispositivos de medición de armónicos y calidad de la energía, se suele tomar en cuenta el tiempo de cómputo de la técnica seleccionada. En este capítulo se ha medido también el tiempo de cómputo de cada una de las técnicas analizadas. En la tabla 4 se muestra el resumen de estos tiempos para los diferentes casos de estudio. Cabe recordar que el tiempo total del fenómeno, en todos los casos, fue de 0.5 segundos.

De la tabla 4 se puede observar que, en general, la técnica que consume menos tiempo de cómputo es el KF, mientras que la técnica más lenta es la WFFT para todos los casos. Esta última realiza un gran número de operaciones que dependerán del algoritmo que se emplee para calcular la DFT, así como del tamaño L de la ventana empleada. En la referencia [21] esto se analiza en detalle.

Los factores antes mencionados marcan la diferencia que existe entre los tiempos de cómputo de la WFFT y del resto de las técnicas en cuestión. En muchos casos de análisis fuera de línea, esta técnica puede ser utilizada para propósitos de validación de muchas otras, debido a la alta precisión que alcanza con señales en estado estacionario.

Se observa un considerable aumento en el tiempo de cómputo de la WFFT para el segundo caso de estudio. Esto es debido a que el tamaño de ventana fue duplicado a 2 ciclos con el propósito de aumentar la resolución en frecuencia de la WFFT y poder medir el interarmónico. Evidentemente, esto trae como consecuencia el aumento en el tiempo de cómputo.

El EPLL, como se mencionó en la sección 5.4, sólo se aplicó al caso *I*; aún así de la tabla 4 se tiene que está técnica requiere de un tiempo de cómputo considerablemente bajo. A pesar de que en estado estable el EPLL entrega valores muy cercanos a los reales, esta técnica no ha sido incluida en los demás casos de estudio debido a que presenta una respuesta muy lenta.

Tabla 4. Tiempo de cómputo de los cuatro algoritmos (en segundos).

Caso	EPLL	WFFT	KF	KWF
(I). $u(t)$	4.42	22.46	1.01	7.35
(II). $u(t)$ + inter-armónico y *sag*	--	45.68	1.45	13.85
(III). Línea de transmisión	--	21.82	1.43	7.42

De la tabla 4 se sigue que el KWF toma un tiempo de cómputo más grande que el de la KF. A pesar de que ambos algoritmos llevan a cabo el mismo proceso iterativo, el KWF toma más tiempo de cómputo debido a la estructura matricial y vectorial que resulta de aplicar la DWT a las componentes en cuadratura y en fase de las armónicas. A pesar de lo anterior, el KWF presenta mejoras en el tiempo de respuesta a cambios abruptos que se presenten en la señal.

5.6 Observaciones del capítulo

El seguimiento y análisis de las componentes armónicas ha sido analizado a través de las siguientes técnicas: EPLL, WFFT, KF y KWF. Se han presentado tres diferentes casos de estudio con el propósito de evaluar las principales ventajas y desventajas de éstas técnicas. En el caso del EPLL se tiene un tiempo de respuesta muy lento, entre 5 o 6 ciclos, aproximadamente; sin embargo, cuando éste alcanza el estado estable presenta mediciones bastante precisas.

En lo que respecta a la WFFT, su principal desventaja es que pierde precisión cuando en una señal ocurren cambios abruptos de amplitud. Además, otra de sus mayores desventajas es que para obtener diferentes resoluciones en frecuencia y poder medir interarmónicos, el tamaño de ventana se tiene que aumentar. También el tipo de ventana empleada juega un papel importante, ya que las mediciones pueden variar de un tipo de ventana a otro. Lo anterior hace que la WFFT no se apropiada para aplicaciones en tiempo real (*on-line*), así como cuando la señal tenga cambios repentinos en su amplitud.

Tanto el KF como el KWF, debido a su estructura, tienen una respuesta similar. Tienen además un tiempo de cómputo bajo y el seguimiento a los cambios abruptos de amplitud en las formas de onda es bastante cercano al real. Ambas técnicas son apropiadas para el análisis armónico en tiempo real. El KF es el método que consume el menor tiempo de cómputo; pero el KWF es el que alcanza el estado estable en el menor tiempo. De este modo, para la implementación de alguna de estas dos técnicas se tiene que hacer un compromiso entre estos dos factores, tiempo de cómputo y tiempo de respuesta.

Capítulo 6. Conclusiones y trabajos futuros

6.1 Conclusiones

En esta tesis se han presentado cuatro técnicas para el análisis armónico de señales en estado transitorio: un oscilador anclado en fase de lazo cerrado mejorado (EPLL), la transformada rápida de Fourier por ventaneo (WFFT), el filtro de Kalman (KF) y una técnica que combina las funciones ondeleta con el filtro de Kalman, denominado aquí como filtro de Kalman-Ondeleta (KWF). También se ha proporcionado una descripción matemática de cada una de ellas.

Con el propósito de establecer una comparación y evaluación estas técnicas se han desarrollado tres casos de estudio. El último consiste en una línea de transmisión monofásica, que ha sido simulada con PSCAD/EMTDC. En todos los casos, las cuatro técnicas entregan resultados aceptables.

Se ha determinado que el EPLL tiene un tiempo de cómputo bajo, pero su respuesta dinámica es muy lenta cuando ocurren cambios abruptos de amplitud en una señal a detectar.

Por otra parte, la WFFT pierde precisión cuando se presentan cambios repentinos. Además, en estado estable presenta pequeñas oscilaciones debido al efecto de *Leakage* que no es posible eliminar completamente. La resolución en frecuencia es otra desventaja de esta técnica, ya que se tiene que modificar el tamaño de ventana cuando se requiere conocer la magnitud de un interarmónico, ocasionando que el tiempo de cómputo también aumente.

Ahora bien, el KF y el KWF han mostrado una respuesta similar en todos los casos y los seguimientos que estas dos técnicas dan a las magnitudes de las componentes de frecuencia; siendo éstos muy cercanos a los valores originales. En los tres diferentes casos de estudio, el KF tiene el tiempo de cómputo más pequeño en comparación con el KWF, pero el tiempo de respuesta de éste último es más rápido cuando se presentan cambios repentinos de amplitud en una señal.

Por otra parte, para modificar y hacer uso del KWF ha sido necesario entender los aspectos más importantes de la transformada ondeleta (WT), así que se ha presentado un apartado donde se explican los puntos más importantes de dicha transformada para tiempo discreto (DWT). Ya que es ésta la que se utiliza en los casos prácticos. Se tiene que la DWT se lleva a cabo mediante un proceso de filtrado digital bajo un esquema en banco de filtros ortogonales para lograr una reconstrucción perfecta de la señal. Con este proceso se obtiene una representación multirresolución de la señal original, quedando expresada por medio de funciones ondeleta. La técnica del KWF aprovecha esta nueva representación para llevar a cabo el cálculo de armónicas de una manera más rápida que las otras técnicas en cuestión.

El uso de cada una de las cuatro técnicas analizadas dependerá en gran medida de cada aplicación. Por ejemplo, un EPLL no es muy apropiado para la implementación en un relevador de protección a distancia en líneas de transmisión; el KF o el KWF pueden ser una mejor opción.

6.2 Trabajos futuros

- Eliminar las oscilaciones que se presentan con el filtro de Kalman-Ondeleta y el filtro de Kalman al estimar la armónicas de la señal es estado transitorio para mejorar las respuestas de estas técnicas.

- Establecer un modelo aplicando funciones y transformada ondeleta pa ra el oscilador anclado en fase de lazo cerrado mejorado (EPLL) y llevar a cabo el análisis en estado transitorio de las componentes en frecuencia. Esto mejoraría su tiempo de respuesta, tal vez sin aumentar el tiempo de cómputo y sin perder precisión.

- Hacer la implementación de la técnica de Filtro de Kalman-Ondeleta (KWF) mediante el uso de un microprocesador o un procesador digital de señales (DSP) e incluirlo en un sistema de control para una aplicación especifica.

Referencias

[1]. A. Bonner, T. Grebe, E. Gunther, L. Hopkins, M. B. Marz, J. Mahseredjian, N. W. Miller, T.H. Ortmeyer, V Rajagopalan, S. J. Ranade, P.F. Ribeiro, B. R. Shperling, T. R. Sims and W. Xu, "Modeling and simulation of the propagation of harmonics in electric power networks", *IEEE Trans. Power Delivery*, vol. 11, no. 1, pp. 452-465, January 1996.

[2]. H. Ma, A. A. Girgis, "Identification and tracking of harmonics sources in power syatems using a Kalman filter", *IEEE Trans. Power Delivery*, vol. 11, no. 3, pp. 1659-1665, July 1996.

[3]. S. Santoso, W. M. Grady, E. J. Powers, J. Lamoree, S. C. Bhatt, "Characterization of distribution power quality events with Fourier and wavelets Transform", *IEEE Trans. Power Delivery*, vol. 15, no. 1, pp. 247-254, January 2000.

[4]. G. T. Heydt, P.S. Fjeld, C.C. Liu, D. Pierce, L. Tu and G. Hensley, "Applications of the windowed FFT to electrical power quality Assessment", *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 14, no. 4, pp. 1411-1416, October 1999.

[5]. S. Liu, "An adaptive Kalman filter for dynamic estimation of harmonic signals", *8th international conference on harmonics and quality of powers*, Athens, Greece, October 14-16, 1998.

[6]. M. Karimi-Ghatermani and M. R. Iravani, "Measurment of Harmonic/Inter-hormonic of Time-Varying Frecuencies", *IEEE Trans. Power Delibery*, vol. 20. no. 1, pp. 23-31, Junuary 2005.

[7]. A. A. Girgis, W. B. Chang and E. B. Makram, "A Digital recursive Measurement Scheme for On-line Tracking of Power System Harmonics ", *IEEE Trans. Power Delivery*, vol.6, no. 6, pp. 1153-1160, July 1991.

[8]. Y. Z. Liu and S. Chen, "A wavelet based model for on-line tracking of power system harmonic using Kalman filtering", *Power Engineering Society Summer Meeting*, vol. 2, pp. 1237-1242, 2001

[9]. F. de La Rosa, *Harmonics and Power Systems*, Boca Raton, FL: CRC/Taylor & Francis, 2006.

[10]. Z. Hanzelka and A. Bień, *Power Quality Applications Guide*: *Harmonics, Interharmonic,* Copper Development Association, produced by Leonardo Power Quality Initiative, July 2004.

[11]. M. H. J. Bollen, E. Styvaktakis and I. Yu-Hua Gu. "Catergorization and analysis of power system transient", *IEEE Trans. Power Delivery*, vol.20, no. 3, pp. 2298-2306, July 2005.

[12]. IEEE *Recommended Practice for Monitoring Electric Power Quality,* I EEE Standard 1159-1995.

[13]. R.C. Dugan, M. F. McGranaghan, S. Santoso and H. W. Beaty, *Electrical Power Systems Quality.* Second edition, New York : McGraw-Hill, c1996.

[14]. Roland E. Best, *Phase-Locked Loops*, fourth edition, McGraw-Hill, United States of America, 1999.

[15]. M. Karimi-Ghatermani and A. K. Ziarani, "Periodic Orbit Analysis of Two Dynamical Systems for Electrical Engineering Aplications", *Journal of Engineering Mathematics*, vol. 5, no. 45, pp. 135-154, February 2003.

[16]. Math H. J. Bollen and Irene Y. H. Gu, *Signal Processing of Power Quality Disturbance*, John Wiley & Sons, United States of America, 2006.

[17]. D. Giovanni Hernández, "Simulación de la Evolución Dinámica de Armónicos y su Estimación en Tiempo Real Utilizando un Filtro de Kalman", *Tesis de maestría, Cinvestav del IPN unidad Guadalajara México,* Septiembre 2005.

[18]. S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, Third Edition, Prentice Hall, New Jersey, 1996.

[19]. Y. Nievergelt, *Wavelets Made Easy*, Birkhäuser Boston, United States of America, 2001.

[20]. G. Strang, *Waveletes and filter banks*, Wellesley Cambridge Press, United States of America 1996.

[21]. J. G. Proakis y D. G. Manolakis, *Tratamiento Digital de Señales*, Tercera Edición, Prentice Hall, Madrid, 1998.

[22]. T. K. Sarcar, C. Su, R. Adve, M. Salazar-Palmar, L. Garcia-Castillo and Rafael R. Boix, "A tutorial on wavelets from an electrical engineering perspective, Part 1: Discrete Wavelets Techniques", *IEEE Antennas and Propagation Magazine,* vol. 40, no. 5, pp. 49-70, October 1998.

[23]. A. D. Poularikas, *The Transforms and applications handbook*, Boca Raton, F1, (USA): CRC Press, 1996.

[24]. J. Liang, S. Elengovan and J. B. X. Devotta, "A Wavelet multiresolution analysis approach to fault detection and classification in transmission lines", *Electrical Power and Power Energy Systems*, vol. 20, no. 5, pp. 327-332, 1998.

Apéndice A

Se considera una señal $x(t)$ en forma discreta que se expresa por medio de la secuencia $x(n)$: n=1,2,... La transformada de Fourier de esta secuencia se manipula mejor en términos de la transformada z como sigue:

$$X(z) = X\left(e^{j2\pi f}\right) = X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_n x(n) z^{-n} \tag{A.1}$$

donde $\omega=2\pi f$ y $z=e^{j\omega}=e^{j2\pi f}$ Se asume que $x(n)$ es una señal de banda limitada y está muestreada a una frecuencia de 1 Hz, por lo que Δt =1. Así, la señal de $x(n)$ está limitada a una frecuencia máxima de f=½ Hz; lo anterior obedece al teorema de muestreo de Nyquist. Entonces el ancho de banda de la señal, en frecuencia angular, esta dado por la siguiente expresión:

$$\omega_B = 2\pi f_B = 2\pi\left(\tfrac{1}{2}\right) = \pi\,, \tag{A.2}$$

y la frecuencia de muestreo es $\omega_s=2\pi$.

La señal $x(n)$ pasa a través del filtro pasa bajas y pasa altas, obteniéndose $u'(n)$ y $v'(n)$ respectivamente. Después estas señales son sub-muestreadas con el propósito de reducir el ancho de banda y la tasa de muestreo obteniéndose $u(n)$ y $v(n)$ las cuales pueden ser codificadas y transmitidas. Del lado del receptor estas señales pasan a través de un interpolador de orden 2 para producir $u''(n)$ y $v''(n)$, después se filtran con $h'(n)$ y $g'(n)$; y las salidas de estos filtros se combinan para formar $\bar{x}(n)$.

Entonces, de la figura A.1 se tiene que:

$$U'(z) = H(z)X(z) \tag{A.3}$$

$$V'(z) = G(z)X(z)\,. \tag{A.4}$$

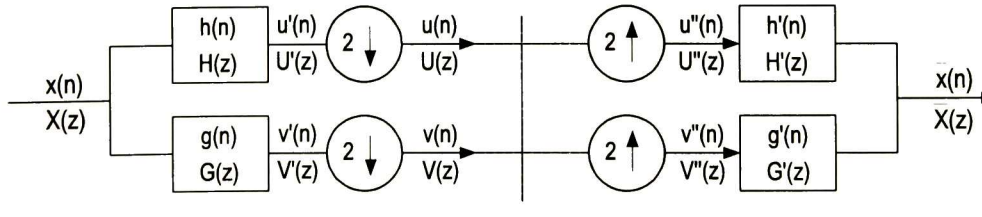


Fig. A. 1. Esquema básico de un banco de filtros.

Ahora bien, como $u'(n)$ y $v'(n)$ son decimadas por un factor de 2, se tiene que [22]:

$$U(z)=\frac{1}{2}\left[U'\left(\sqrt{z}\right)+U'\left(-\sqrt{z}\right)\right] \tag{A.5}$$

$$V(z)=\frac{1}{2}\left[V'\left(\sqrt{z}\right)+V'\left(-\sqrt{z}\right)\right], \tag{A.6}$$

y como del lado del receptor se lleva a cabo el proceso inverso, estas señales pasan por un interpolador, quedando expresadas por lo el siguiente par de ecuaciones:

$$U''(z)=U\left(z^2\right)=\frac{1}{2}\left[U'(z)+U'(-z)\right] \tag{A.7}$$

$$V''(z)=V\left(z^2\right)=\frac{1}{2}\left[V'(z)+V'(-z)\right]. \tag{A.8}$$

Así, al final de la etapa de filtrado se tiene la señal que se expresa como sigue:

$$\begin{aligned}\bar{X}(z)=&\frac{1}{2}\left[G(z)X(z)+G(-z)X(-z)\right]G'(z)+\\&+\frac{1}{2}\left[H(z)X(z)+H(-z)X(-z)\right]H'(z)\end{aligned} \tag{A.9}$$

$$\begin{aligned}\bar{X}(z)=&\frac{1}{2}\left\{\left[G(z)G'(z)+H(z)H'(z)\right]X(z)+\right.\\&\left.\left[G(-z)G'(z)+H(-z)H'(z)\right]X(-z)\right\}.\end{aligned} \tag{A.10}$$

En la expresión anterior el primer término corresponde a la señal original mientras que una porción de *aliasing* está expresado por el segundo término. Este último es indeseable y por lo tanto se hace cero de la siguiente manera:

$$H(-z)H'(z)+G(-z)G'(z)=0. \tag{A.11}$$

Si $H(z)$ es un filtro FIR, de orden N+1, donde N siempre es impar. Entonces

$$H(z)=h(0)+h(1)z^{-1}+.....+h(N)z^{-N} \tag{A.12}$$

Para que se cumpla la relación (A.11) es necesario que los filtros sean de espejo de cuadratura (QMF), ya que estos filtros cumplen con la siguiente relación:

$$H'(z)=z^{-N}H\left(z^{-1}\right) \quad y\ asi \quad h'(n)=h(N-n). \tag{A.13}$$

Estos filtros son causales debido al término z^{-N}. Lo mismo se tiene que cumplir para los filtros pasa altas quedando representado en la siguiente expresión:

$$G'(z) = z^{-N} G(z^{-1}) \quad con \quad g'(n) = g(N-n). \tag{A.14}$$

Ahora, $g'(n)$ se puede expresar también en términos de $h'(n)$ de la siguiente manera:

$$g'(n) = -(-1)^n h'(N-n) = -(-1)^n h(n) \tag{A.15}$$

$$g(n) = (-1)^n h(N-n) = (-1)^n h'(n), \tag{A.16}$$

así también en términos de la transformada z:

$$G'(z) = z^{-N} H'(-z^{-1}) = -H(-z) \tag{A.17}$$

$$G(z) = -z^{-N} H(-z^{-1}) = H'(-z). \tag{A.18}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en (A.11) se cumple la siguiente igualdad:

$$H(-z)H'(z) + \left[-H(-z)H'(z)\right] = 0. \tag{A.19}$$

Además con (A.13) y (A.14) en (A.10) resulta en lo siguiente:

$$\begin{aligned} \bar{X}(z) &= \frac{1}{2}\left[z^{-N} G(z) G(z^{-1}) + z^{-N} H(z) H(z^{-1})\right] X(z) \\ &= \frac{1}{2}\left[H(-z^{-1}) H(-z) + H(z) H(z^{-1})\right] z^{-N} X(z). \end{aligned} \tag{A.20}$$

Si el filtro $H(z)$ se escoge de tal forma que:

$$H(-z)H(-z^{-1}) + H(z)H(z^{-1}) = 2, \tag{A.21}$$

se tiene la reconstrucción completa de la señal original, pero con un retraso natural debido al filtro. Lo anterior se observa en las relaciones siguientes:

$$\bar{X}(z) = z^{-N} X(z) \quad \rightarrow \quad \bar{x}(n) = x(n-N). \tag{A.22}$$

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL I.P.N.
UNIDAD GUADALAJARA

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional aprobó la tesis

Evaluación de Técnicas para el Seguimiento Dinámico de Armónicos
en Estado Transitorio

del (la) C.

Horacio GARCÍA MÁXIMO

el día 24 de Octubre de 2008.

Dr. José Luis Naredo Villagrán
Investigador CINVESTAV 3C
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Pablo Moreno Villalobos
Investigador CINVESTAV 3C
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Amner Israel Ramírez Vázquez
Investigador CINVESTAV 3B
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Laurence Snider Makarowsky
Retired Full Professor
Tulane University

CINVESTAV
BIBLIOTECA CENTRAL

SSIT000008848