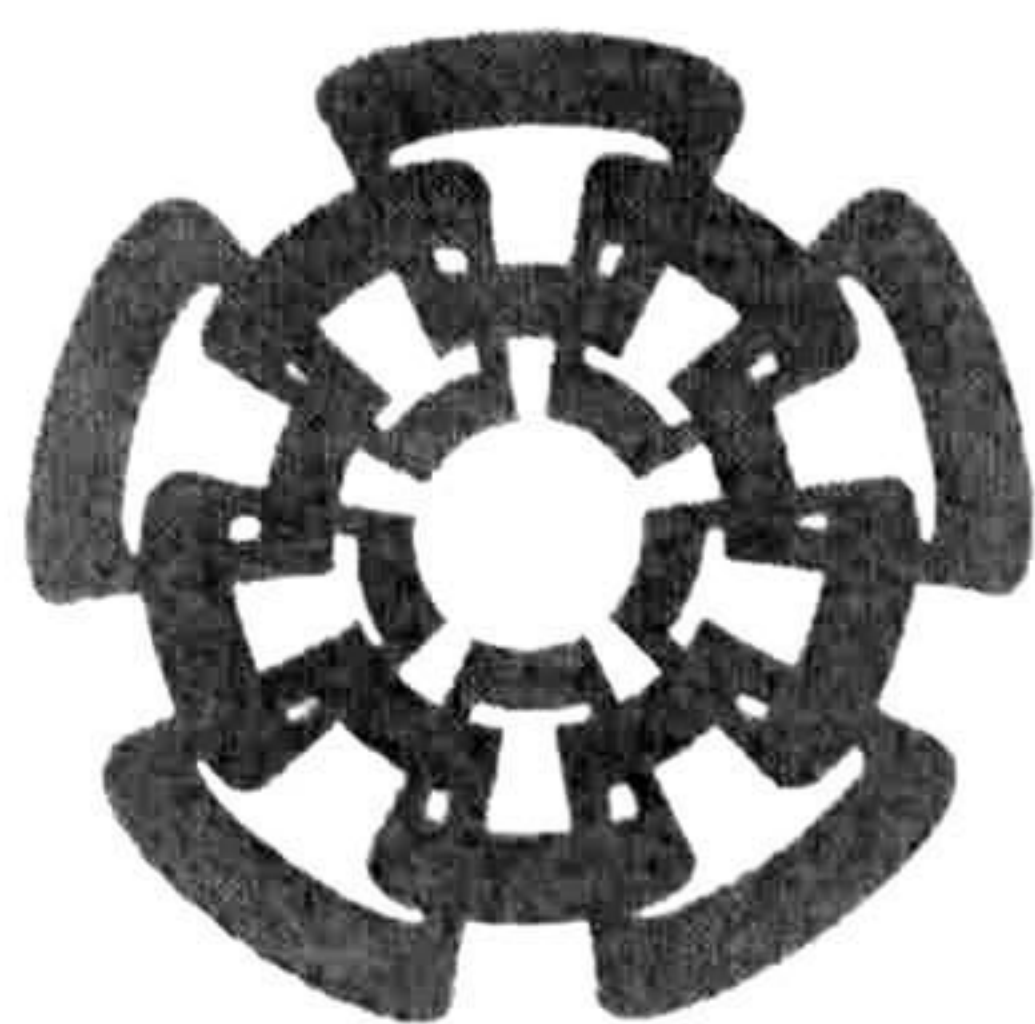


xx (178594.1)



Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N.
Unidad Guadalajara

Control no Lineal Robusto del Motor de Inducción Monofásico

**CINVESTAV
IPN
ADQUISICION
DE LIBROS**



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y
DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL
INSTITUTO POLITÉCNICO
NACIONAL**

**COORDINACIÓN GENERAL DE
SERVICIOS BIBLIORÁFICOS**

Tesis que presenta:

Juan Miguel Reyes López

para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias

en la especialidad de:

Ingeniería Eléctrica

Directores de Tesis

**Dr. José Manuel Cañedo Castañeda
Dr. Alexander Georgievich Loukianov**

Guadalajara, Jalisco, Diciembre de 2008.

CLASIF.:	TK65.68 .R49 2008
ADQUIS.:	SS1-547
FECHA:	09/11/2009
PROCE:	San-2009

FD: 159641-1001

Control no Lineal Robusto del Motor de Inducción Monofásico

**Tesis de Maestría en Ciencias
Ingeniería Eléctrica**

Por:

Juan Miguel Reyes López
Ingeniero Electromecánico

Instituto Tecnológico de Tuxtepec 2001-2006

Becario de Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, expediente
no. 203218

Directores de Tesis

Dr. José Manuel Cañedo Castañeda

Dr. Alexander Georgievich Loukianov

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Diciembre de 2008.

Dedicatoria

*A dos seres maravillosos que han sabido
infundir en mí el deseo de superación;
y de los que solo he recibido amor, confianza y apoyo.*

Con todo cariño y admiración.

A mis padres:

*Josefina López Pérez
Celso Reyes Mendoza*

Con mi mayor gratitud, cariño y respeto

A mis hermanos:

Adriana, Rafael y Omar de Jesús Reyes López

Agradecimientos

A Dios, por estar presente a cada momento en el efímero suspiro que lleva mi vida.

A mis compañeros y amigos de generación del Instituto Tecnológico de Tuxtepec, Mateo Cohetero, Joel Escobar, Carlos Tomás, Raymundo Nicolás, José Luís Vicente, Jorge Mogollan y muchos más por sus consejos y los gratos momentos que compartimos.

Agradezco a mis directores de tesis, Dr. José Manuel Cañedo y Dr. Alexander Loukianov, por sus enseñanzas y sobre todo por su invaluable paciencia en este trabajo de tesis.

A mis amigos y compañeros en esta etapa de mi vida, de quienes he aprendido grandes cosas, les agradezco su apoyo y los agradables momentos que compartimos juntos. No se puede mejorar una buena nueva como esta.

A los profesores de la especialidad por las enseñanzas impartidas durante estos estudios de maestría.

A un ser maravilloso que llegó a mi vida y compartió su alegría para cambiar mi forma de enfrentar la vida, gracias por todo tu apoyo, cariño y comprensión en momentos difíciles, te quiero mucho Gloritz E. Lila G.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por el apoyo económico otorgado para la realización de los estudios de maestría.

Contenido

Dedicatoria	v
Agradecimientos	vii
Contenido	ix
Lista de Figuras	xi
Resumen	xiii
Abstract	xv
Capítulo 1	1
Introducción	1
1. 1 Planteamiento del problema	1
1. 2 Importancia actual de los motores de inducción monofásicos	2
1.2. 1 Introducción	2
1.2. 2 Los motores de inducción monofásicos	2
1.2. 3 Trabajos previos	5
1. 3 Objetivos del trabajo	5
1. 4 Modos deslizantes y control por bloques	6
1. 5 Estructura de la tesis	7
Capítulo 2	9
Modelado	9
2. 1 Introducción	9
2. 2 Teoría de operación del motor de inducción monofásico	10
2.2.1 Motor bifásico	10
2. 3 Modelo del motor de inducción monofásico	14
2.3. 1 Dinámica eléctrica	14
2.3. 2 Modelo en términos del sistema de referencia estacionario	18
2.3. 3 Dinámica mecánica	21
2. 4 Modelo en estado estable	22
2.4. 1 Componentes simétricas	24
2.4. 2 Par electromagnético	29
Capítulo 3	31
Control no lineal por modos deslizantes	31
3. 1 Introducción	31
3. 2 Formulación del problema	31
3.2. 1 Método del control equivalente	32
3.2. 2 Control por bloques	34
3. 3 Control por bloques para sistemas con dinámica cero	35
3. 4 Control por bloques para sistemas con perturbaciones	46
3. 5 Observadores para una clase de sistemas no lineales	54
3.5. 1 Representación del problema	55
3.5. 2 Observador de orden reducido	55
3.5. 3 Observador de orden completo	57

3. 6 Observador para una clase de sistemas no autónomos	58
3.6. 1 Observador de orden reducido.....	58
3.6. 2 Observador de orden completo.....	60
Capítulo 4	61
Diseño de control para el motor de inducción monofásico	61
4. 1 Introducción.....	61
4. 2 Modelo de la planta	61
4. 3 Control de velocidad.....	63
4.3. 1 Ley de control I.....	63
4.3. 2 Ley de control II	69
4. 4 Observador no lineal.....	74
4.4. 1 Observador para los flujos del rotor en lazo abierto.....	74
4.4. 2 Observador para los flujos del rotor en lazo cerrado.....	75
4.4. 3 Observador para el par de la carga	77
Capítulo 5	79
Resultados del sistema de control	79
5. 1 Introducción.....	79
5.1. 1 Parámetros de la máquina.....	79
5. 2 Motor de inducción.....	79
5. 3 Ley de control I.....	83
5. 4 Ley de control II	87
5. 5 Observador de estados y del par de carga.....	91
5. 6 Respuesta en lazo cerrado con retroalimentación de los estados estimados	93
Capítulo 6	97
Conclusiones y trabajos futuros	97
Apéndices.....	99
A- 1 Sistema referido a la fase A del estator	99
A- 2 Desarrollo de la transformación de Park	101
A- 3 Variables utilizadas en el modelo en estado estable.....	103
A- 4 Modelo en Componentes Simétricas.....	104
A- 5 Cálculo del par promedio en estado estable	105
A- 6 Constantes	106
Referencias Bibliográficas.....	107

Lista de Figuras

Figura 1. 1 Motor monofásico tipo fase partida	3
Figura 1. 2 Motor monofásico tipo capacitor de arranque	3
Figura 1. 3 Motor monofásico tipo capacitor permanente.....	4
Figura 1. 4 Motor monofásico tipo doble capacitor	4
Figura 2. 1 Diagrama conceptual del motor bifásico de 2 polos	10
Figura 2. 2 Representación esquemática del motor de inducción.	14
Figura 2. 3 Transformación de variables	18
Figura 2. 4 Circuito equivalente: a) Eje en cuadratura. b) Eje directo.	19
Figura 2. 5 Circuito equivalente en estado estable.	28
Figura 4. 1 Configuración propuesta del motor de inducción monofásico	62
Figura 5. 1 Característica par-velocidad con capacitor de arranque.....	80
Figura 5. 2 Característica par-velocidad con capacitor de marcha nominal.....	80
Figura 5. 3 Velocidad del motor ω_r	81
Figura 5. 4 Par electromagnético T_e	81
Figura 5. 5 Flujo magnético del rotor λ_{qr} y λ_{dr} : a) Estado transitorio, b) Estado estable	82
Figura 5. 6 Corriente eléctrica del estator i_{qs} y i_{ds} : a) Estado transitorio, b) Estado estable.....	82
Figura 5. 7 Seguimiento de velocidad constante y su acercamiento	83
Figura 5. 8 Seguimiento del módulo del flujo del rotor	84
Figura 5. 9 Par electromagnético T_e y su acercamiento	84
Figura 5. 10 Superficies de modos deslizantes z_{21} y z_{22}	85
Figura 5. 11 Acción de control: a) $u_s = -u_0 \text{sign}(z_{21})$, b) $\rho = 0.5 \text{sign}(z_{22} v_c') + 0.5$	85
Figura 5. 12 Flujo magnético del rotor λ_{qr} y λ_{dr}	85
Figura 5. 13 Corrientes del motor i_{qs} y i_{ds}	86
Figura 5. 14 Magnitud de la corriente eléctrica del estator $ I_s = \sqrt{i_{qs}^2 + i_{ds}^2}$	86
Figura 5. 15 Seguimiento de velocidad constante y su acercamiento	87
Figura 5. 16 Par electromagnético T_e	88
Figura 5. 17 Superficies de modos deslizantes z_2	88
Figura 5. 18 Acción de control: a) $u_s = -u_0 \text{sign}(z_2 b_2)$, b) $\rho = 0.5 \text{sign}(z_2 \eta_2 \eta_4) - 0.5 $	89
Figura 5. 19 Flujo magnético del rotor λ_{qr} y λ_{dr}	89
Figura 5. 20 Corrientes del motor i_{qs} y i_{ds}	89
Figura 5. 21 Magnitud de la corriente eléctrica del estator $ I_s = \sqrt{i_{qs}^2 + i_{ds}^2}$	90
Figura 5. 22 Flujo magnético λ_{qr} y su estimado $\hat{\lambda}_{qr}$	91
Figura 5. 23 Flujo magnético λ_{dr} y su estimado $\hat{\lambda}_{dr}$	91
Figura 5. 24 Error e_q	91
Figura 5. 25 Error e_d	91

Figura 5. 26 Velocidad ω_r con su estimación $\hat{\omega}_r$	92
Figura 5. 27 Error e_ω	92
Figura 5. 28 Par de carga T_L con su estimación \hat{T}_L	92
Figura 5. 29 Error e_{T_L}	92
Figura 5. 30 Seguimiento de velocidad de referencia	93
Figura 5. 31 Par electromagnético T_e	93
Figura 5. 32 λ_{qr} y su estimado $\hat{\lambda}_{qr}$	93
Figura 5. 33 λ_{dr} y su estimado $\hat{\lambda}_{dr}$	93
Figura 5. 34 Corriente del motor i_{qs}	93
Figura 5. 35 Corriente del motor i_{ds}	93
Figura 5. 36 Entradas de control.....	94
Figura 5. 37 Par de carga T_L con su estimación \hat{T}_L	95
Figura 5. 38 Error e_{T_L}	95

Resumen

En este trabajo se diseñan dos controladores robustos, utilizando la técnica de modos deslizantes, para controlar la velocidad de motores eléctricos de inducción monofásicos.

Los controladores proporcionan un par de arranque apropiado y además minimizan las componentes armónicas del par pulsante.

Se describe en detalle el modelo del motor monofásico. El modelo se representa en términos de las corrientes del estator y de los enlaces de flujo en el rotor. Se desarrolla el estimador de estados para las variables no medibles, enlaces de flujo del rotor y par de carga.

Se demuestra la estabilidad de los controladores propuestos. Se desarrollan los algoritmos y el programa digital en código matlab, y se implementan los controladores propuestos. Se presentan los resultados de simulación ante diferentes condiciones de carga y de perturbaciones.

Abstract

In this work, two robust controllers are designed using sliding modes techniques to control the speed of single phase induction motors.

The drivers provide an appropriate torque and as well as minimizing the harmonic components of the pulsating torque.

It describes in detail the model of the single-phase motor. The model is represented in terms of stator currents and the flux links into the rotor. The state estimator is designed for the non-measurable variables, rotor flux links and load torque.

The stability of the proposed controllers is demonstrated. The algorithms and program code in matlab are developed and the proposed controllers are implemented. It is describe the results of simulation at different load conditions and disturbances.

Capítulo 1.

Introducción.

1. 1 Planteamiento del problema

Un reciente interés en todo el mundo por el medio ambiente, consumo de agua, ahorro de energía afecta particularmente al área de aparatos electrodomésticos.

La mayoría de los motores eléctricos utilizados en electrodomésticos son generalmente controlados mediante la fijación de la velocidad en niveles predefinidos o conectando directamente a la fuente de suministro sin control.

Muchas aplicaciones domesticas requieren de motores de baja potencia operando esencialmente a velocidad constante para controlar compresores, bombas y otros equipos que arrancan bajo carga. En general en todas las dependencias domésticas e industriales se utilizan “pequeños motores” con alimentación monofásica.

Es bien conocido por su fiabilidad y robustez en operación que el motor de inducción monofásico es el tipo de las máquinas de CA más ampliamente utilizado.

El control de los motores monofásicos no ha sido estudiado ampliamente como los motores trifásicos. Una de las razones es el costo adicional en el sistema de control comparado con el costo total del motor. Sin embargo, considerando el ahorro potencial de energía y la amplia aplicación de los controladores en los motores de inducción monofásicos, el control de velocidad variable es un tema de interés tanto económico como ambiental.

El empleo de motores de velocidad variable mejora el rendimiento global de la eficiencia energética. Así, electrodomésticos con controles de velocidad variable e inteligentes gobernados vía electrónica mejoran su rendimiento.

El rápido desarrollo en electrónica de potencia de dispositivos microelectrónicos, aunado con su constante reducción en costo, aumentó el uso de motores monofásicos en aplicaciones de velocidad variable en los últimos años.

El aumento del costo de la energía eléctrica ha traído a la discusión el compromiso entre el costo inicial y los costos de operación del motor llevando conceptos como la eficiencia y densidad de energía nuevamente como objetivos de diseño. Mejorando la eficiencia se consumiría menos energía, es decir, se disminuye la temperatura en condiciones de operación continua, una vida mayor del equipo, menores niveles de ruido, etc. Esto hace del diseño una tarea estimulante y llena de desafíos.

1. 2 Importancia actual de los motores de inducción monofásicos

1.2. 1 Introducción

Hoy día, los motores de inducción monofásicos se encuentran en todos los ámbitos de la vida cotidiana moderna. Incontables ejemplos de la aplicación y utilización de éstos se encuentran en la industria, el comercio, los servicios y el hogar.

Es significativo el hecho de que los motores eléctricos suministran, en su mayor parte, la energía que mueve los procesos industriales, por lo que la conservación y adecuada operación de los motores en la industria representa uno de los campos más fértiles de oportunidades en el ahorro de energía que se traduce en una reducción en los costos de producción y en una mayor competitividad.

Son muy usados, debido a su confiabilidad, robustez y bajo precio. Además, en todo lugar hay necesidad de motores pequeños que trabajen con suministro monofásico para hacer funcionar diversos artefactos electrodomésticos como lavadoras, refrigeradores, equipos de aire acondicionado, congeladores, aspiradoras y muchos otros aparatos similares.

1.2. 2 Los motores de inducción monofásicos

Los motores de inducción monofásicos sufren de una severa limitación. Puesto que solo tienen una fase en el devanado del estator, el campo magnético de un motor de inducción monofásico no gira; en cambio, *pulsa*, al principio con gran intensidad que luego va disminuyendo, pero siempre manteniendo la misma dirección. Puesto que no hay campo magnético de estator giratorio, un motor de inducción monofásico *no tiene par de arranque*.

Como el campo magnético del estator no gira, no hay movimiento relativo entre el campo del estator y las barras del rotor. Por lo tanto, no hay voltaje inducido debido al movimiento relativo en el rotor, no hay flujo de corriente del rotor debido al movimiento relativo y no hay par inducido.

Aunque los motores de inducción monofásicos funcionan normalmente con una bobina del estator, es común utilizar una segunda bobina en el estator para arrancar el dispositivo. Realmente, los motores de inducción monofásicos que se utilizan en hogares son motores de inducción bifásicos con la restricción de desconectar una de las bobinas una vez que el rotor se acelera y alcanza una velocidad de su velocidad síncrona.

Una de las técnicas para proporcionar un par de arranque es usar lo que se llama una "fase partida", que es un devanado auxiliar más pequeño en el estator. Si la corriente que circula por este devanado está desfasada, se puede lograr un campo rotatorio como el de un motor bifásico. Sin embargo, el devanado asimétrico causa un acoplamiento entre los dos devanados del estator, que en el tiempo provoca operación desbalanceada en la máquina.

Como el motor es alimentado por una fuente monofásica, el desfaseamiento se logra añadiendo una reactancia en serie al devanado auxiliar. Se usa generalmente un capacitor para dicho propósito.

Los diferentes tipos de motores monofásicos presentan características específicas para satisfacer necesidades distintas. Varían en sus características de operación, como par de arranque, factor de potencia, eficiencia, vibración y potencia, sin embargo, todos funcionan bajo los mismos principios y leyes.

Las características típicas de cada tipo de motor, aunque pueden variar según el diseño, son las siguientes:

Motor de fase partida:

- par de arranque moderado (cerca del 200% del nominal);
- baja eficiencia (nominal, cerca del 60%);
- bajo fp (nominal, cerca de 0.6);
- vibración moderada;
- potencias pequeñas.

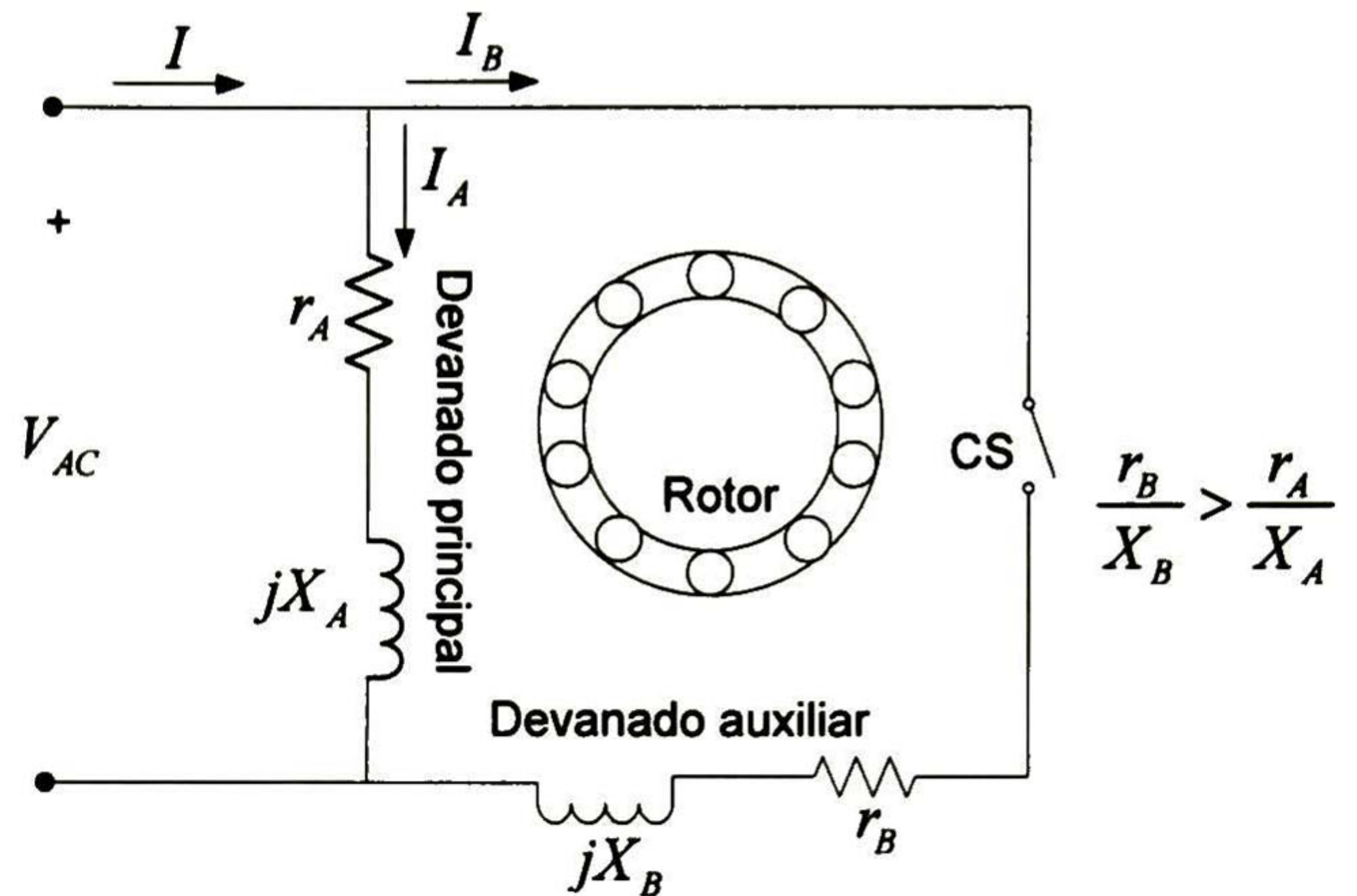


Figura 1. 1 Motor monofásico tipo fase partida

Al motor de fase partida también se le llama de uso general, y es el más simple. Se utiliza en las aplicaciones donde no se necesitan características especiales.

Motor con capacitor de arranque:

- par de arranque alto (superior a 300% del nominal);
- baja eficiencia. bajo fp;
- vibración moderada;
- potencias hasta 10 HP.

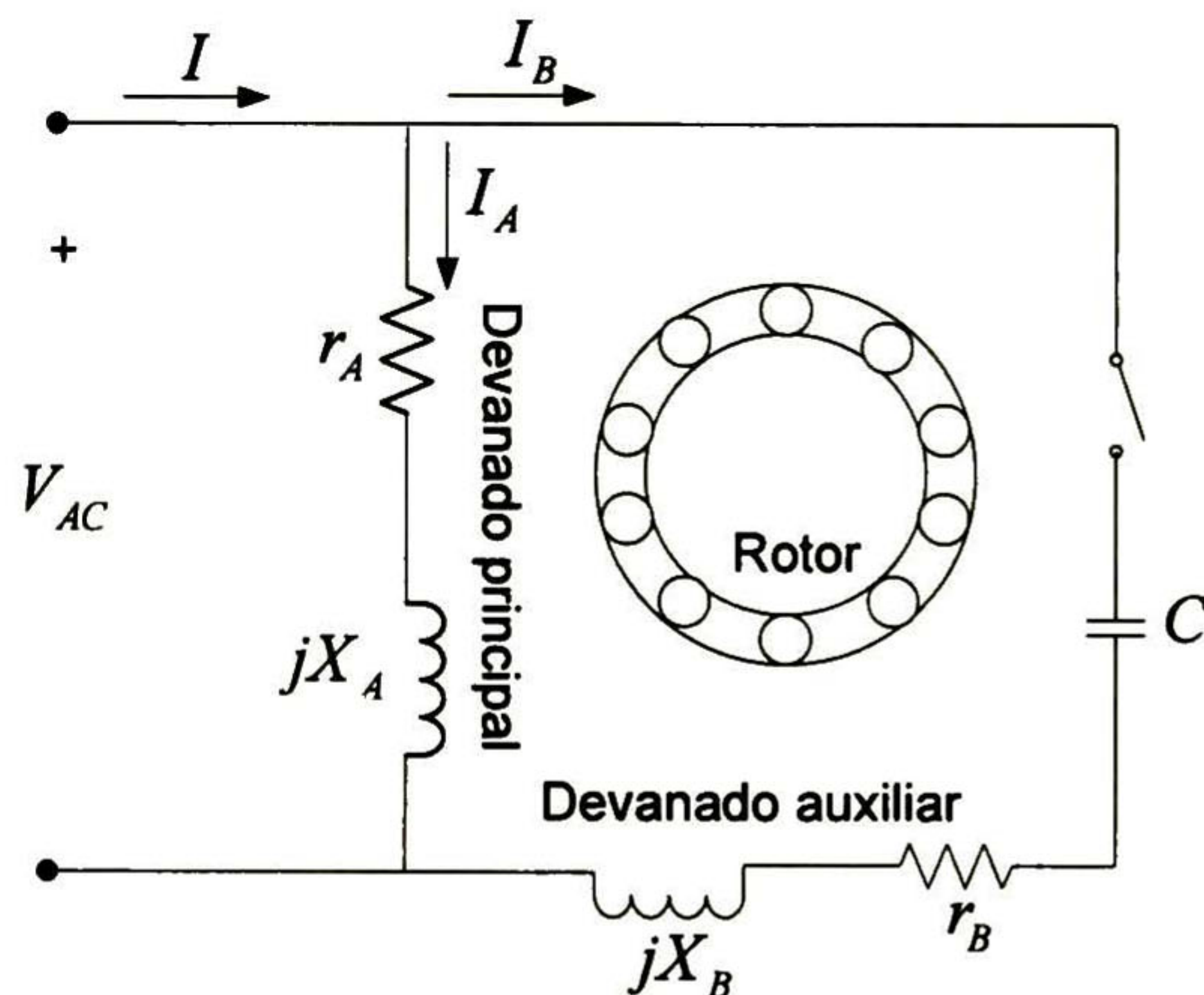


Figura 1. 2 Motor monofásico tipo capacitor de arranque

El motor con capacitor de arranque es muy similar al de fase partida en operación permanente, ya que el capacitor se desconecta en el arranque. Generalmente se utiliza cuando se requiere un alto par de arranque, o muchos arranques sucesivos.

Motor con capacitor permanente:

- par de arranque bajo (menor que el nominal);
- alta eficiencia (cerca de 70%);
- alto fp (entre 0.8 y 0.9);
- poca vibración;
- potencias pequeñas.

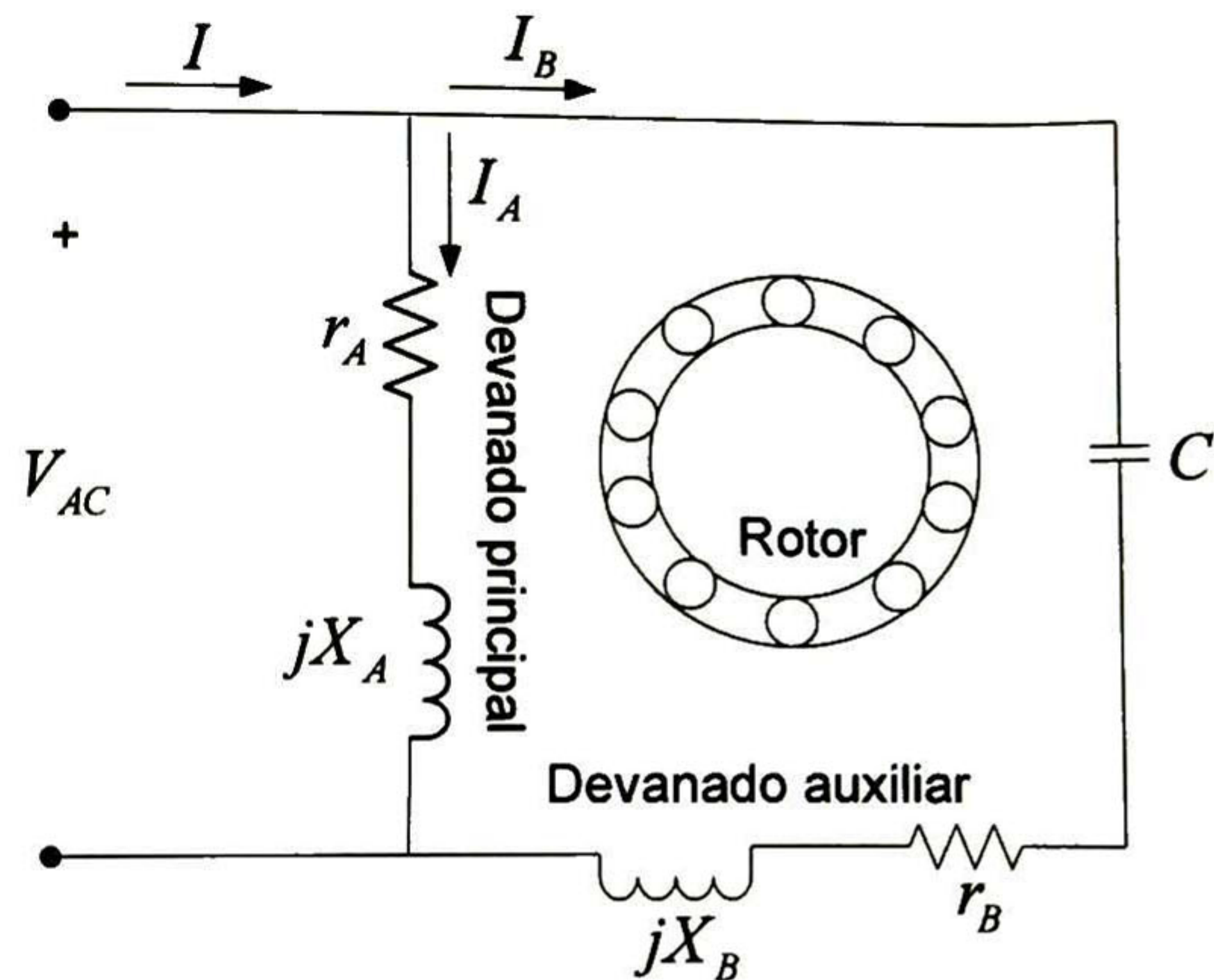


Figura 1. 3 Motor monofásico tipo capacitor permanente

El motor con capacitor permanente tiene muy buenas características en operación permanente, y se utiliza generalmente en aplicaciones que deben ser silenciosas o que necesitan alta eficiencia, y que casi no se apagan.

Motor con doble capacitor:

- par de arranque moderado (cerca del 200% del nominal);
- alta eficiencia;
- alto fp;
- poca vibración;
- amplio rango de potencias.

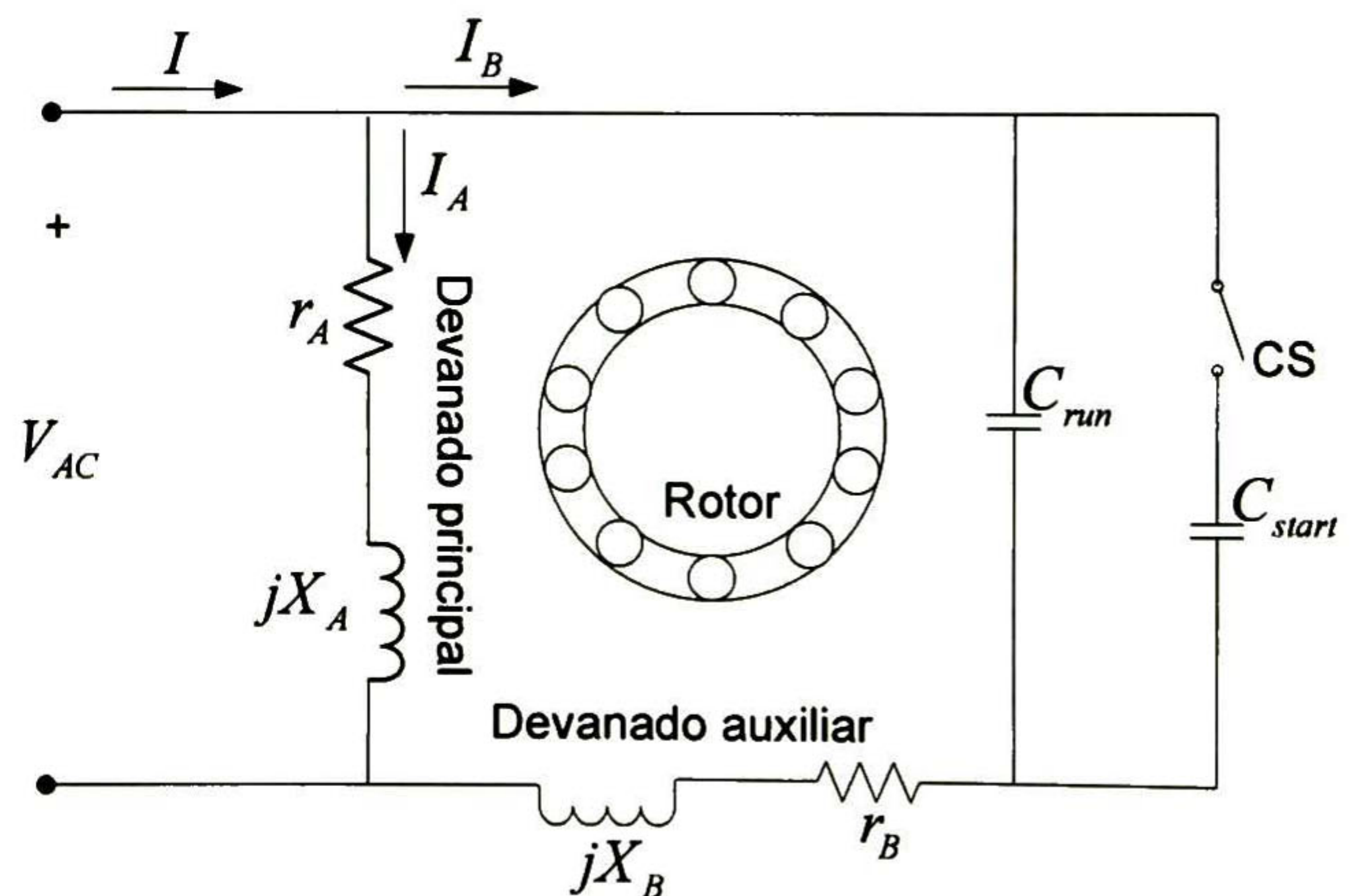


Figura 1. 4 Motor monofásico tipo doble capacitor

El motor con doble capacitor tiene un capacitor que funciona permanentemente y otro que se desconecta después del arranque. Esto hace que combine las ventajas de los otros dos tipos de motor con capacitor, y que se preste para aplicaciones que requieran alto par de arranque, eficiencia y fp. Además, se utiliza un interruptor centrífugo para sustituir el capacitor de arranque por el capacitor permanente cuando el motor alcanza una velocidad cercana al 70% de su velocidad síncrona.

El tipo más común de motor monofásico es el que utiliza doble capacitor. El capacitor mayor (capacitor de arranque) es utilizado solo durante el periodo de arranque para incrementar el par de arranque, mientras que el capacitor de menor capacidad (capacitor de marcha) es permanentemente conectado en serie con el devanado auxiliar para mejorar las condiciones en operación continua. Un interruptor centrífugo es utilizado para desconectar el capacitor de arranque cuando el motor alcanza un umbral de velocidad.

El uso de los dos capacitores, junto con el interruptor centrífugo, incrementa el costo total del sistema.

El interruptor centrífugo y el capacitor de arranque pueden ser eliminados utilizando un capacitor controlado mediante una ley de control que mejore el funcionamiento del motor y reduzca los costos del sistema. Utilizando este esquema se puede ajustar la capacitancia equivalente para obtener el máximo par electromagnético a cualquier velocidad durante el periodo de arranque. El máximo par del motor es una función no lineal de la velocidad y del capacitor.

1.2. 3 Trabajos previos

En la literatura actual se conocen diferentes implementaciones que mejoran el funcionamiento de los motores de inducción monofásicos utilizando tecnologías basadas en la electrónica de potencia. Las más sobresalientes son:

- 1) *Donald W. Novotny [1]*, propone un capacitor controlado electrónicamente conectado en serie con el devanado auxiliar, con ello proporciona continuamente una capacitancia variable para incrementar el par promedio del SPIM.
- 2) *Thomas A. Lipo [2]*, presenta un capacitor de ca ajustable para SPIM, en la cual conecta directamente a la fuente de voltaje el devanado principal y utiliza un inversor bidireccional en paralelo con un capacitor permanente, logrando un ajuste del valor óptimo de capacitancia para obtener el máximo par de aceleración posible para cualquier velocidad del rotor.
- 3) *Joseph D. Law [3]*, implementa un controlador de voltaje para mejorar el funcionamiento del SPIM, en lo concerniente a un mejor control sobre el voltaje, así como también una estrategia de control, en la cual mejora sustancialmente la forma de onda de la corriente bajo condiciones de carga.
- 4) *Tian-Hua Liu [4]*, propone dos estrategias para alcanzar el máximo par posible en los SPIM, un capacitor de ca variable con un conmutador electrónico es utilizado en paralelo con otro capacitor.

1. 3 Objetivos del trabajo

El objetivo principal de este trabajo es diseñar controladores robustos aplicados en motores de inducción monofásicos. Los controladores deben de cumplir con los siguientes requerimientos:

- Controlar la velocidad del rotor con precisión e insensible ante perturbaciones.
- Proporcionar un par de arranque máximo posible.
- Minimizar las componentes armónicas.

1. 4 Modos deslizantes y control por bloques

El control robusto de sistemas es de gran interés para los investigadores. Cualquier sistema que se desee controlar tendrá perturbaciones. Sin embargo existen problemas prácticos que no han sido abordados con el éxito deseado en su conjunto. En primer lugar, los sistemas tienen dinámicas muy complejas, es decir, no lineales y discontinuas, como cuando se involucra la fricción, y muchas veces las trayectorias a seguir por el sistema se expresan en términos de velocidades y aceleraciones, por lo que la dinámica del error es no lineal, no suave y variante en el tiempo. En segundo lugar, el sistema se ve afectado por perturbaciones desconocidas, lo que provoca errores en la medición de los estados del sistema [5], [6].

Es por eso que se necesita de controles robustos que sean insensibles ante las perturbaciones y sean aplicables a los sistemas más complejos.

Una técnica relativamente simple, especialmente tratando con plantas no lineales, es el uso de control con modos deslizantes [7], [8]. Los modos deslizantes aparecieron por primera vez dentro del control de estructura variable. Se hicieron muy populares tanto para desarrollos teóricos como para aplicaciones prácticas gracias a su propiedad de reducir el orden del sistema y a su baja sensibilidad a perturbaciones. Estas características los hacen ideales para controlar plantas complejas y de alto orden bajo perturbaciones, algo muy común en la industria. Estas mismas razones nos llevaron a optar por la utilización de los modos deslizantes para desarrollar esta tesis.

Las ventajas de esta técnica son bien conocidas. Primero, este método permite la descomposición del problema de diseño en dos etapas independientes: Selección de la variedad de modos deslizantes con el movimiento deseado, y el diseño del control discontinuo que fuerce los modos deslizantes a lo largo de esta variedad. Segundo, con un diseño adecuado del controlador discontinuo, el efecto de las no linealidades, incertidumbres en los parámetros y las perturbaciones en el subespacio de control pueden ser suprimidas, e invariancia total puede obtenerse cuando el movimiento del sistema se encuentra sobre la variedad de los modos deslizantes.

Muchos sistemas físicos contienen incertidumbres dentro y fuera del subespacio de control (matched y unmatched). En ausencia de las condiciones matching, leyes de control discontinuas garantizan movimiento acotado alrededor de la dinámica nominal de modos deslizantes, y cuando el sistema alcanza la variedad de modos deslizantes las perturbaciones que no se encuentran en el subespacio de control pueden ser rechazadas utilizando altas ganancias.

Por otro lado la técnica de control por bloques [9] se ha utilizado para el control de sistemas lineales y para una clase de sistemas no lineales que poseen la forma controlable por bloques, la cual consiste en una serie de bloques interconectados, de manera que la estructura del sistema permite diseñar paso a paso un control tal que el sistema en lazo cerrado tenga las propiedades deseadas. Muchos de los modelos matemáticos de sistemas físicos tienen la forma controlable por bloques; este es el caso del modelo del motor de inducción monofásico.

1. 5 Estructura de la tesis

En el capítulo 2 se presenta, de forma sintética, el proceso de modelado del motor. Este desarrollo tiene como objetivo presentar los conceptos básicos utilizados, las hipótesis consideradas, las suposiciones introducidas, etc., con el fin de mostrar el modelo del motor de inducción monofásico, como la planta del proceso de control.

En el capítulo 3 se explica la teoría actual sobre los conceptos fundamentales del control por modos deslizantes y se definen las bases de la metodología de diseño, que es la técnica de control por bloques. Esta metodología, es aplicada a una clase de sistemas lineales y no lineales que están en la forma controlable por bloques, además, se incluye un análisis de estabilidad basado en la teoría de Lyapunov.

En el capítulo 4 se presentan las aplicaciones de las técnicas que se describen en el capítulo 3 al motor de inducción monofásico en estudio del capítulo 2. Se aplica un esquema de control no lineal robusto por modos deslizantes al modelo del motor, así como también el diseño se observadores no lineales para estimar las variables no medibles como los enlaces de flujo del rotor y el par de carga y se analiza la estabilidad del sistema en lazo cerrado.

En el capítulo 5 se presentan los resultados, en simulaciones, de la dinámica del motor en lazo abierto y en lazo cerrado aplicando los estimadores bajo las diferentes leyes de control propuestas en el capítulo 4 y se analizan sus ventajas y desventajas.

En el capítulo 6, se dan las conclusiones y se sugiere el trabajo futuro. Y por último un apéndice que recopila desarrollos alternos del trabajo de investigación.

Capítulo 2

Modelado

2.1 Introducción

Uno de los conceptos más importantes en el análisis y diseño de las máquinas eléctricas rotatorias, es la construcción de un modelo dinámico apropiado, y los motores de inducción monofásicos no son la excepción. El motor de inducción monofásico debido a sus características constructivas y a su naturaleza de funcionamiento, es un sistema de significativa complejidad en términos de análisis y modelado. Para obtener modelos más simplificados para el motor de inducción monofásico son utilizadas transformaciones de variables. En la literatura, sobre el control del motor de inducción, el modelo es presentado de formas distintas. Las diferentes formas de modelado del motor se relacionan entre sí por las funciones de transformación.

En este capítulo se presenta en forma condensada el modelado del motor de inducción monofásico de acuerdo a sus características constructivas y a la operación del mismo.

Para fines de modelado, se considera un motor de inducción monofásico, con P polos, constituido por dos devanados asimétricos alojados en el estator, separados entre sí 90 grados, y de un rotor simétrico tipo jaula de ardilla.

La teoría generalizada de las máquinas eléctricas introduce una serie de consideraciones con el objetivo de simplificar el modelado. Equivale a decir que las máquinas son consideradas ideales. Las hipótesis son las siguientes:

- La saturación magnética es despreciada. Se considera válida la superposición de los flujos y todas las inductancias son consideradas independientes de la magnitud de las corrientes.
- La distribución espacial de fuerzas magnetomotrices y del flujo en el entrehierro son consideradas senoidales y simétricas en relación con el eje magnético de los devanados.
- La distorsión en el flujo introducida por el efecto de las ranuras es ignorada. Se considera que los devanados están geoméricamente distribuidos de forma senoidal y que el diámetro de los conductores es despreciable.
- Las pérdidas por histéresis y por corrientes parásitas en el material magnético son despreciadas.

2. 2 Teoría de operación del motor de inducción monofásico

Un principio básico importante, es el establecimiento de un campo magnético giratorio en el entrehierro del motor para que el motor de inducción inicie su giro. Idealmente, una fuerza magnetomotriz (fmm) de magnitud constante que gire a una velocidad constante es preferida. El concepto del campo magnético giratorio es importante no solo para el entender el funcionamiento del motor de inducción monofásico sino para todos los dispositivos electromecánicos giratorios de CA.

Un motor monofásico es diseñado para operar como un motor bifásico desbalanceado, alimentado con una fuente monofásica.

Por esta razón el concepto de campo magnético giratorio se ejemplifica primeramente para un motor de inducción bifásico simétricamente balanceado operando con una fuente de alimentación bifásica balanceada. Este motor tiene por lo menos dos devanados en el estator distribuidos senoidalmente (o tan cercanos como sea posible), cada uno de los devanados se encuentra separado 90° eléctricos, alojados en las ranuras del estator. Esto significa que un motor de 4 polos tendría 4 devanados en el estator separados 90° eléctricos, equivalente a 45° mecánicos.

2.2.1 Motor bifásico

Un diagrama esquemático de un motor bifásico de dos polos se muestra en la figura 2.1. El motor es balanceado y tiene una distribución senoidal de los devanados a y b desplazados 90° eléctricos entre sí, alojados en las ranuras del estator. La dirección de los ejes magnéticos de los devanados, para corrientes positivas i_a y i_b coinciden con los ejes horizontal y vertical respectivamente. Las formas de onda de cada fmm permanecerán sobre los ejes estacionarios y con magnitud cambiando en el tiempo.

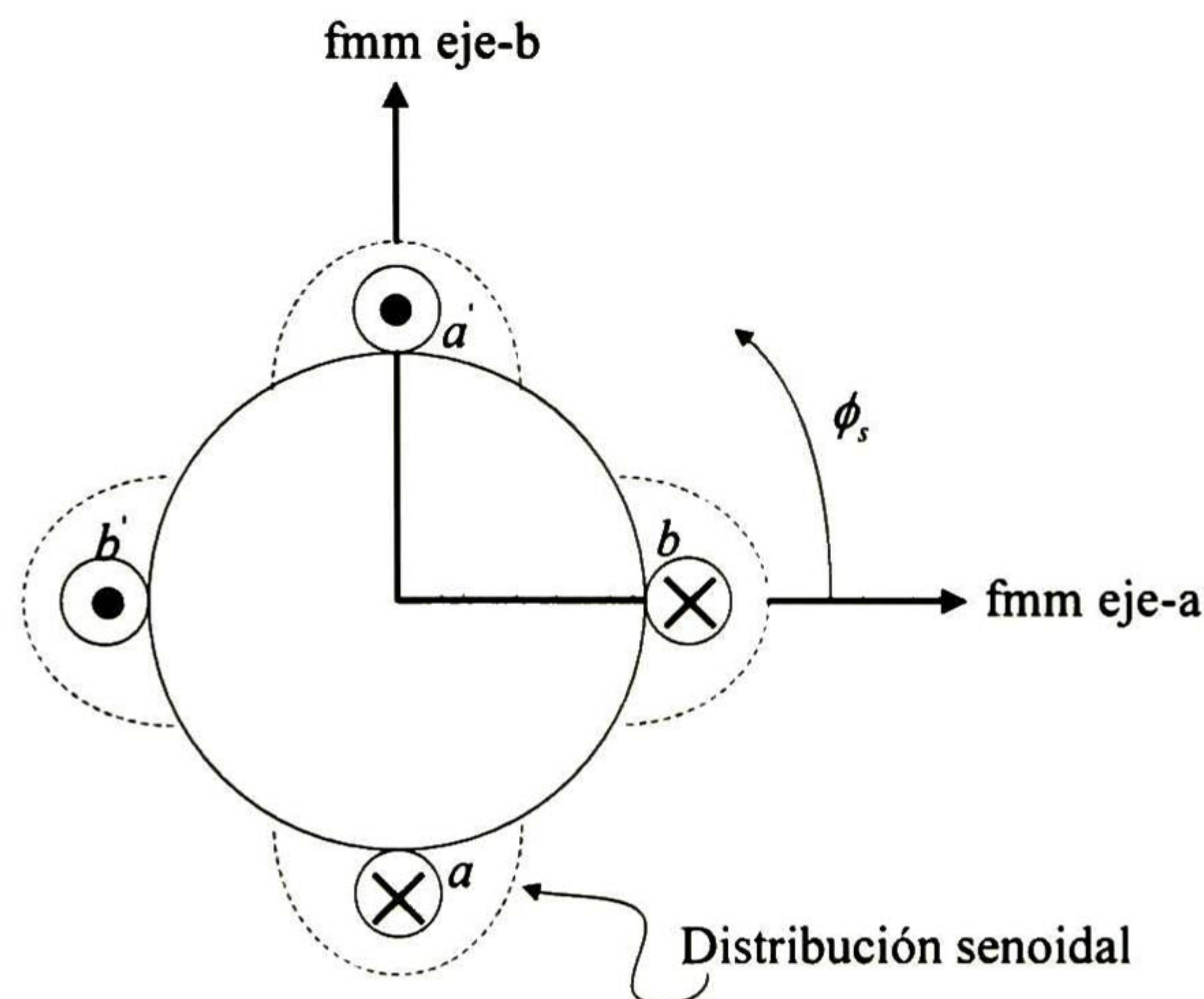


Figura 2. 1 Diagrama conceptual del motor bifásico de 2 polos

Se genera un flujo resultante (debido a las fmm de las bobinas a y b), de magnitud constante que gira a velocidad de la alternancia de la fuente de alimentación, en la dirección

contraria al sentido de las manecillas del reloj (CCW). A continuación se explica el establecimiento del campo magnético giratorio generado por cada uno de los devanados del estator.

Cada devanado tiene un número efectivo de vueltas N_s y distribuidos senoidalmente. La fmm debida a la corriente que circula por la bobina a , en un punto en el entrehierro desplazado un ángulo ϕ_s respecto del eje de la bobina a , es:

$$fmm_a = \frac{N_s}{2} i_a \cos \phi_s \quad (2.1)$$

de igual forma la fmm debida a la bobina b es:

$$fmm_b = \frac{N_s}{2} i_b \sin \phi_s \quad (2.2)$$

donde i_a y i_b son las corrientes de alimentación de una fuente bifásica balanceada, que son expresadas como:

$$i_a = \sqrt{2} I \cos \omega_e t \quad (2.3)$$

$$i_b = \sqrt{2} I \sin \omega_e t \quad (2.4)$$

donde I es el valor RMS de las corrientes y $\omega_e = 2\pi f_e$ es la frecuencia asociada con la fuente de voltaje. La componente de la fmm de la fase a puede ser expresada como la suma de dos ondas de magnitud constante de igual valor, una que se desplaza en el sentido positivo y otra en sentido negativo.

$$fmm_a = \frac{N_s}{2} \sqrt{2} I \left[\frac{1}{2} \cos(\omega_e t + \phi_s) + \frac{1}{2} \cos(\omega_e t - \phi_s) \right] \quad (2.5)$$

Si $(\omega_e t + \phi_s)$ y $(\omega_e t - \phi_s)$ son constantes se cumple:

$$(\omega_e t + \phi_s) = A \quad \text{y} \quad (\omega_e t - \phi_s) = B$$

donde A y B son constantes. Tomando la derivada con respecto al tiempo de ambas ecuaciones, tenemos

$$\omega_e + \frac{d\phi_s}{dt} = 0 \quad (2.6)$$

y

$$\omega_e - \frac{d\phi_s}{dt} = 0 \quad (2.7)$$

La ecuación (2.7) indica un desplazamiento en dirección CCW con una velocidad constante $\omega_e = \omega_s$ y la ecuación (2.6) indica un desplazamiento en la dirección de las manecillas del reloj (CW) con una velocidad $\omega_e = -\omega_s$.

El devanado a produce dos fmm 's giratorias de amplitud constante, una que gira en dirección CCW y la otra en dirección CW.

En el devanado b se generan dos fmm 's de la forma:

$$fmm_b = \frac{N_s}{2} \sqrt{2} I \left[\frac{1}{2} \cos(\omega_e t - \phi_s) - \frac{1}{2} \cos(\omega_e t + \phi_s) \right] \quad (2.8)$$

La fmm total en el entrehierro con los dos devanados energizados es la suma de las dos fmm 's giratorias (2.5) y (2.8)

$$\begin{aligned} fmm_t &= fmm_a + fmm_b \\ &= \frac{N_s}{2} \sqrt{2} I \left[\cos(\omega_e t - \phi_s) \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

La fmm_t resultante es equivalente a una fmm de valor constante que gira a una velocidad $\omega_e = \omega_s$. Si la corriente en la fase b es negativa:

$$i_b = -\sqrt{2} I \sin \omega_e t$$

La fmm_t resultante es

$$fmm_t = \frac{N_s}{2} \sqrt{2} I \left[\cos(\omega_e t + \phi_s) \right] \quad (2.10)$$

Que indica una fmm de magnitud constante que gira en dirección CW. A continuación se describen dos formas de fmm para un motor bifásico

2.2.1. 1 Dos devanados simétricos balanceados excitados con la misma fuente de alimentación (equivalente a una fuente de excitación monofásica).

Las corrientes que circulan por las fases a y b son iguales y tienen la forma

$$i_a = i_b = \sqrt{2} I \cos \omega_e t \quad (2.11)$$

Entonces las fmm_a y fmm_b son de la forma

$$fmm_a = \frac{N_s}{2} i_a \cos \phi_s = \frac{N_s}{2} \sqrt{2} I \cos \omega_e t \cos \phi_s$$

$$fmm_b = \frac{N_s}{2} i_a \sin \phi_s = \frac{N_s}{2} \sqrt{2} I \cos \omega_e t \sin \phi_s$$

además

$$fmm_a = \frac{N_s}{2} \sqrt{2} I \left[\frac{1}{2} \cos(\omega_e t + \phi_s) + \frac{1}{2} \cos(\omega_e t - \phi_s) \right] \quad (2.12)$$

$$fmm_b = \frac{N_s}{2} \sqrt{2} I \left[\frac{1}{2} \sin(\omega_e t + \phi_s) - \frac{1}{2} \sin(\omega_e t - \phi_s) \right] \quad (2.13)$$

y la fmm_t total en el entrehierro es:

$$\begin{aligned} fmm_t &= fmm_a + fmm_b \\ &= \frac{N_s}{2} \sqrt{2} I \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\omega_e t + \phi_s - 45^\circ) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\omega_e t - \phi_s + 45^\circ) \right] \end{aligned} \quad (2.14)$$

La fmm_r es igual a dos fmm de magnitud igual que giran en direcciones opuestas. El primer término de la fmm gira en dirección CCW y el segundo en la dirección CW. Para velocidad del rotor cero, la velocidad relativa entre la fmm resultante y el rotor es cero y no existe par impulsor en el rotor.

2.2.1. 2 Dos devanados asimétricos excitados con la misma fuente de alimentación (equivalente a una fuente de excitación monofásica).

Se asume que el número de vueltas de los devanados a y b son diferentes $N_a \neq N_b$, por lo que $i_a \neq i_b$ donde

$$i_a = \sqrt{2}I_a \cos \omega_e t \quad \text{y} \quad i_b = \sqrt{2}I_b \cos \omega_e t$$

La fmm resultante es:

$$\begin{aligned} fmm_r &= fmm_a + fmm_b \\ &= \frac{N_a}{2} \sqrt{2} \left\{ \frac{I_a}{2} [\cos(\omega_e t + \phi_s) + \cos(\omega_e t - \phi_s)] \right\} + \dots \\ &\quad + \frac{N_b}{2} \sqrt{2} \left\{ \frac{I_b}{2} [\cos(\omega_e t - \phi_s) - \cos(\omega_e t + \phi_s)] \right\} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Simplificando se obtiene:

$$fmm_r = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\frac{N_a I_a - N_b I_b}{2} \cos(\omega_e t + \phi_s) + \frac{N_a I_a + N_b I_b}{2} \cos(\omega_e t - \phi_s) \right] \quad (2.16)$$

La fmm_r resultante (2.16) indica que se tienen dos componentes de fmm , la primera es de magnitud igual a la mitad de la diferencia entre los amperes-vuelta de los dos devanados, y gira en dirección CW. La segunda de magnitud igual a la mitad de la suma de los amperes-vuelta de los dos devanados y gira en dirección CCW. Esto significa que habrá una fmm neta que gira en dirección CCW a la velocidad ω_e . Por lo tanto, la fmm neta es diferente de cero produciendo un par impulsor al rotor aun para velocidad del rotor cero (par de arranque diferente de cero). Este es el concepto básico de arranque de un motor monofásico.

2.3 Modelo del motor de inducción monofásico

El motor de inducción es una máquina que convierte energía eléctrica en energía mecánica y puede ser subdividido en dos bloques dinámicos, uno eléctrico y otro mecánico.

2.3.1 Dinámica eléctrica

A continuación se desarrolla el modelo matemático considerando dos devanados ortogonales desbalanceados en el estator. Los devanados tienen diferente número de vueltas y cada uno tiene los conductores distribuidos senoidalmente. En la Figura 2.2 se muestra el diagrama esquemático de motor. Los dos devanados equivalentes en el rotor son simétricos.

Se denotarán a las variables y parámetros asociados a los devanados del estator con los subíndices en mayúsculas A y B , y a las variables y parámetros asociados con los devanados del rotor con los subíndices en minúsculas a y b .

En el estator se encuentra el devanado principal (A) y el devanado auxiliar (B), estos devanados se encuentran separados 90° eléctricos.

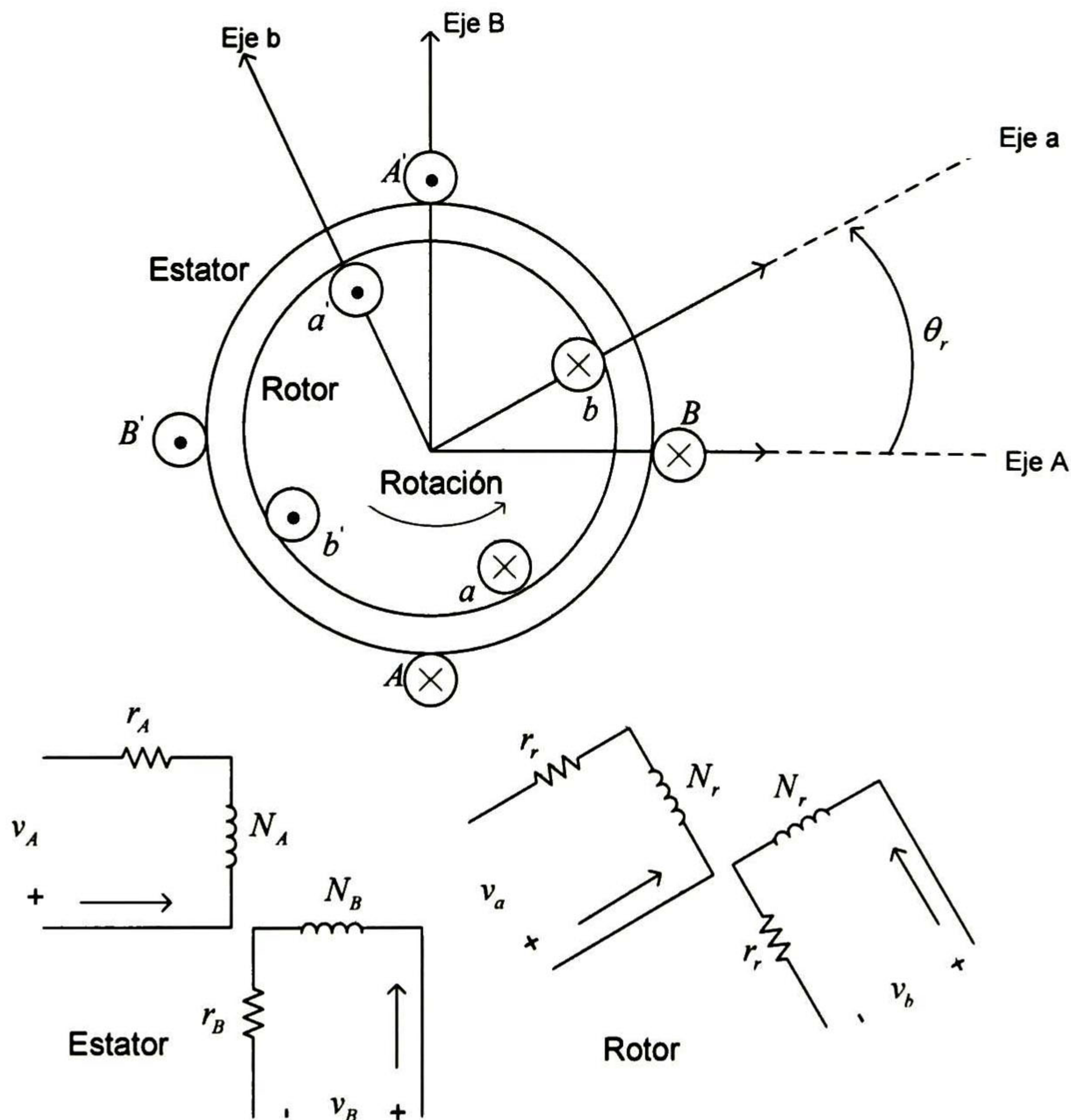


Figura 2.2 Representación esquemática del motor de inducción.

De las leyes de Kirchhoff y la ley de Faraday, podemos obtener las ecuaciones de equilibrio eléctrico para el motor de inducción monofásico.

Para el estator

$$v_A = r_A i_A + \frac{d\lambda_A}{dt} \quad (2.17)$$

$$v_B = r_B i_B + \frac{d\lambda_B}{dt} \quad (2.18)$$

Para el rotor

$$v_a = r_a i_a + \frac{d\lambda_a}{dt} \quad (2.19)$$

$$v_b = r_b i_b + \frac{d\lambda_b}{dt} \quad (2.20)$$

donde $r_a = r_b$, $N_a = N_b$ y λ son los enlaces de flujo cortados por cada devanados en el estator o rotor, el rotor es tipo jaula de ardilla, con entrehierro uniforme. Se asume que el circuito magnético del motor es lineal, donde la permeancia es grande en los núcleos del rotor y del estator.

Las ecuaciones de los enlaces de flujo son:

$$\lambda_A = L_A i_A + M_{AB} i_B + M_{Aa} i_a + M_{Ab} i_b \quad (2.21)$$

$$\lambda_B = M_{BA} i_A + L_B i_B + M_{Ba} i_a + M_{Bb} i_b \quad (2.22)$$

$$\lambda_a = M_{aA} i_A + M_{aB} i_B + L_a i_a + M_{ab} i_b \quad (2.23)$$

$$\lambda_b = M_{bA} i_A + M_{bB} i_B + M_{ba} i_a + L_b i_b \quad (2.24)$$

En estas ecuaciones, L significa inductancia propia y M indica inductancia mutua entre dos devanados. En forma matricial.

$$\begin{bmatrix} \lambda_A \\ \lambda_B \\ \lambda_a \\ \lambda_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_A & 0 & M_{Aa} & M_{Ab} \\ 0 & L_B & M_{Ba} & M_{Bb} \\ M_{aA} & M_{aB} & L_a & 0 \\ M_{bA} & M_{bB} & 0 & L_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_a \\ i_b \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Las inductancias mutuas entre los devanados del estator y del rotor son funciones de la posición angular del rotor θ_r y son.

$$M_{Aa} = M_{aA} = \frac{N_A N_r}{R_m} \cos \theta_r = M_{srA} \cos \theta_r \quad (2.26)$$

$$M_{Ab} = M_{bA} = -\frac{N_A N_r}{R_m} \sin \theta_r = -M_{srA} \sin \theta_r \quad (2.27)$$

$$M_{Ba} = M_{aB} = \frac{N_B N_r}{R_m} \sin \theta_r = M_{srB} \sin \theta_r \quad (2.28)$$

$$M_{Bb} = M_{bB} = \frac{N_B N_r}{R_m} \cos \theta_r = M_{srB} \cos \theta_r \quad (2.29)$$

R_m es la reluctancia de magnetización de los circuitos magnéticos, N_A y N_B son el número de vueltas efectivas de los devanados del estator, y N_r es el número de vueltas efectivas de los devanados equivalentes del rotor. Las inductancias de magnetización son:

$$L_{mA} = \frac{N_A^2}{R_m}, \quad L_{mB} = \frac{N_B^2}{R_m}, \quad L_{mr} = \frac{N_r^2}{R_m}$$

Las inductancias de dispersión tienen la forma:

$$L_{lA} = \frac{N_A^2}{R_{lA}} \quad (2.30)$$

$$L_{lB} = \frac{N_B^2}{R_{lB}} \quad (2.31)$$

$$L_{lr} = \frac{N_r^2}{R_{lr}} \quad (2.32)$$

donde

L_{lA} es la inductancia de dispersión de la bobina principal (A) del estator.

L_{lB} es la inductancia de dispersión de la bobina auxiliar (B) del estator.

L_{lr} es la inductancia de dispersión de las bobinas equivalentes del rotor.

L_{mA} es la inductancia de magnetización de la bobina principal (A) del estator.

L_{mB} es la inductancia de magnetización de la bobina principal (B) del estator.

L_{mr} es la inductancia de magnetización de las bobinas equivalentes del rotor.

M_{srA} es el valor máximo de la inductancia mutua entre la bobina A del estator y las bobinas equivalentes del rotor.

M_{srB} es el valor máximo de la inductancia mutua entre la bobina B del estator y las bobinas equivalentes del rotor.

Las inductancias propias son:

$$L_A = L_{lA} + L_{mA} \quad (2.33)$$

$$L_B = L_{lB} + L_{mB} \quad (2.34)$$

$$L_r = L_{lr} + L_{mr} \quad (2.35)$$

Las ecuaciones de voltaje se expresan en términos de las inductancias y estas son función de la posición del rotor. La representación matricial de las ecuaciones de voltaje (2.17)-(2.20) es.

$$\bar{V}_{AB} = R_s \bar{i}_{AB} + \frac{d}{dt} \bar{\lambda}_{AB} \quad (2.36)$$

$$\bar{V}_{ab} = R_r \bar{i}_{ab} + \frac{d}{dt} \bar{\lambda}_{ab} \quad (2.37)$$

donde

$$R_s = \begin{bmatrix} r_A & 0 \\ 0 & r_B \end{bmatrix} \quad R_r = \begin{bmatrix} r_a & 0 \\ 0 & r_b \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

$$\bar{i}_{AB} = \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \end{bmatrix} \quad \bar{i}_{ab} = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

y los enlaces de flujo son,

$$\bar{\lambda}_{AB} = \bar{L}_s \bar{i}_{AB} + \bar{M}_{sr} \bar{i}_{ab} \quad (2.40)$$

$$\bar{\lambda}_{ab} = \bar{M}'_{sr} \bar{i}_{AB} + \bar{L}_r \bar{i}_{ab} \quad (2.41)$$

donde las matrices de inductancia son:

$$\bar{L}_s = \begin{bmatrix} L_{lA} + L_{mA} & 0 \\ 0 & L_{lB} + L_{mB} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

$$\bar{L}_r = \begin{bmatrix} L_{lr} + L_{mr} & 0 \\ 0 & L_{lr} + L_{mr} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

$$\bar{M}_{sr} = \begin{bmatrix} M_{srA} \cos \theta_r & -M_{srA} \sin \theta_r \\ M_{srB} \sin \theta_r & M_{srB} \cos \theta_r \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Un modelo más apropiado se obtiene en términos de las inductancias de dispersión y de magnetización. Para esto, los parámetros de cada uno de los devanados del motor son referidos con respecto del devanado principal del estator A . Se representa con apóstrofe los parámetros del motor referidos al devanado A (ver apéndice A-1).

Los enlaces de flujo pueden ser ahora expresados como:

$$\bar{\lambda}'_{AB} = \bar{L}'_s \bar{i}'_{AB} + \bar{M}'_{sr} \bar{i}'_{ab} \quad (2.45)$$

$$\bar{\lambda}'_{ab} = \bar{M}'_{sr} \bar{i}'_{AB} + \bar{L}'_r \bar{i}'_{ab} \quad (2.46)$$

Las ecuaciones de voltaje por:

$$\bar{V}'_{AB} = R'_s \bar{i}'_{AB} + \frac{d\bar{\lambda}'_{AB}}{dt} \quad (2.47)$$

$$\bar{V}'_{ab} = R'_r \bar{i}'_{ab} + \frac{d\bar{\lambda}'_{ab}}{dt} \quad (2.48)$$

de donde

$$R'_s = \begin{bmatrix} r_A & 0 \\ 0 & r_B \end{bmatrix} \quad R'_r = \begin{bmatrix} r'_a & 0 \\ 0 & r'_b \end{bmatrix}, \quad \bar{i}'_{AB} = \begin{bmatrix} i_A \\ i'_B \end{bmatrix}, \quad \bar{i}'_{ab} = \begin{bmatrix} i'_a \\ i'_b \end{bmatrix} \quad \lambda'_{AB} = \begin{bmatrix} \lambda_A \\ \lambda'_B \end{bmatrix}, \quad \lambda'_{ab} = \begin{bmatrix} \lambda'_a \\ \lambda'_b \end{bmatrix}$$

y

$$\bar{L}'_s = \begin{bmatrix} L_{lA} + L_{mA} & 0 \\ 0 & L'_{lB} + L_{mA} \end{bmatrix}, \quad \bar{L}'_r = \begin{bmatrix} L'_{lr} + L_{mA} & 0 \\ 0 & L'_{lr} + L_{mA} \end{bmatrix}, \quad \bar{M}'_{sr} = L_{mA} \begin{bmatrix} \cos \theta_r & -\sin \theta_r \\ \sin \theta_r & \cos \theta_r \end{bmatrix}$$

2.3. 2 Modelo en términos del sistema de referencia estacionario.

El modelo desarrollado en la sección anterior es bastante complejo para un análisis adecuado del comportamiento del motor de inducción monofásico. Esta complejidad está relacionada principalmente con el hecho de que la inductancia estator-rotor es dependiente de la posición angular del rotor.

Una simplificación significativa del modelo puede ser obtenida con una transformación de las variables. Esta transformación consiste en expresar las variables del sistema original, estator y rotor, respecto de un sistema de coordenadas ortogonales estaconarfias. Las variables del nuevo sistema de coordenadas son distinguidas por los índices d y q representando el eje directo y eje de cuadratura respectivamente, fig. 2.3.

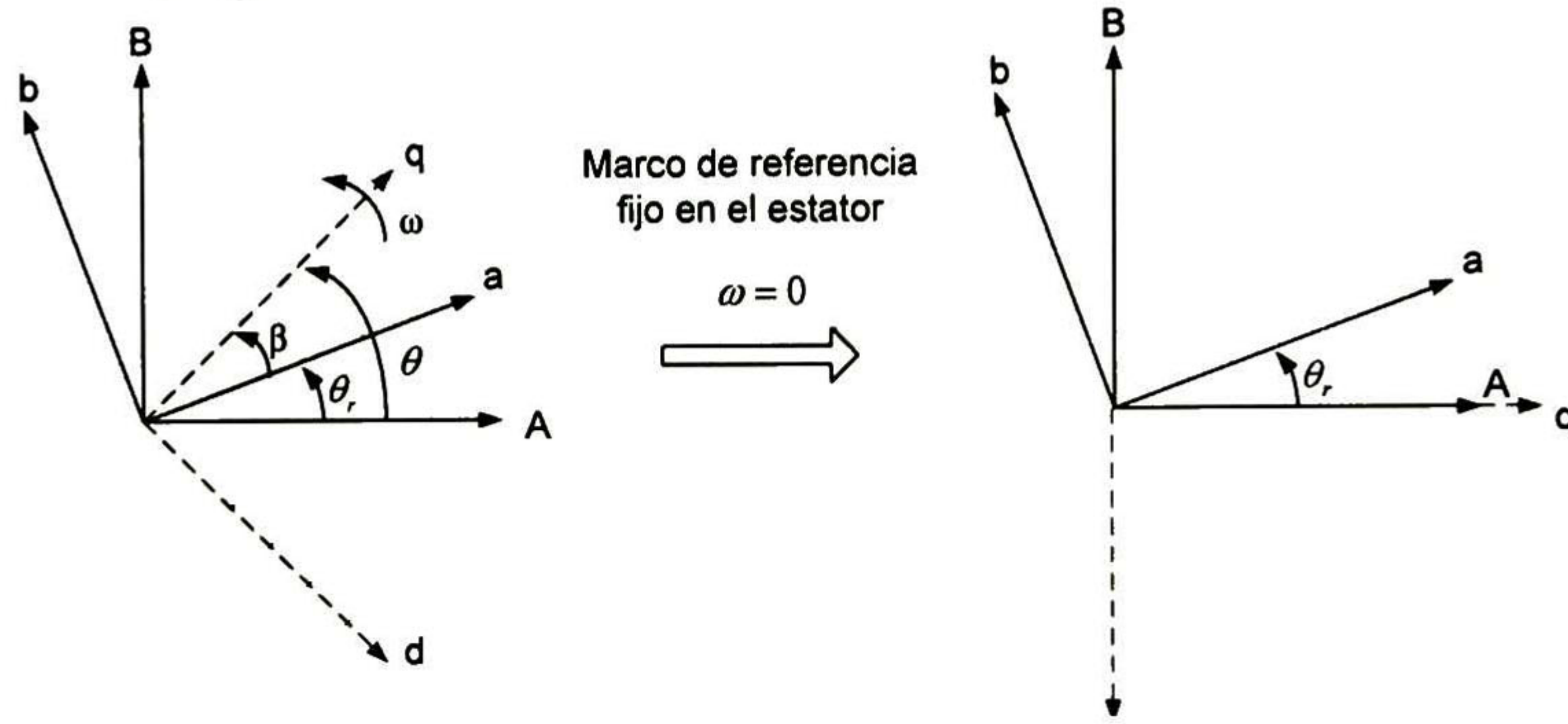


Figura 2. 3 Transformación de variables

El nuevo conjunto de variables transformarán los parámetros de la máquina del estator y del rotor con respecto de dos ejes $d-q$ estacionarios y con $\theta = 0$. Las variables transformadas se identifican con superíndice s para indicar la transformación al sistema de referencia estacionario.

Las ecuaciones de voltaje de los devanados del estator y rotor y enlaces de flujo después de aplicar la transformación (ver apéndice A-2) son de la forma:

$$v_{qs}^s = r_{qs} i_{qs}^s + \frac{d\lambda_{qs}^s}{dt} \quad (2.49)$$

$$v_{ds}^s = r_{ds} i_{ds}^s + \frac{d\lambda_{ds}^s}{dt} \quad (2.50)$$

$$v_{qr}^s = r_r i_{qr}^s - \omega_r \lambda_{dr}^s + \frac{d\lambda_{qr}^s}{dt} \quad (2.51)$$

$$v_{dr}^s = r_r i_{dr}^s + \omega_r \lambda_{qr}^s + \frac{d\lambda_{dr}^s}{dt} \quad (2.52)$$

$$\lambda_{qs}^s = L_{lqs} i_{qs}^s + L_{mq} (i_{qs}^s + i_{qr}^s) \quad (2.53)$$

$$\lambda_{ds}^s = L_{lds} i_{ds}^s + L_{mq} (i_{ds}^s + i_{dr}^s) \quad (2.54)$$

$$\lambda_{qr}^s = L_{lr} i_{qr}^s + L_{mq} (i_{qs}^s + i_{qr}^s) \quad (2.55)$$

$$\lambda_{dr}^s = L_{lr} i_{dr}^s + L_{mq} (i_{ds}^s + i_{dr}^s) \quad (2.56)$$

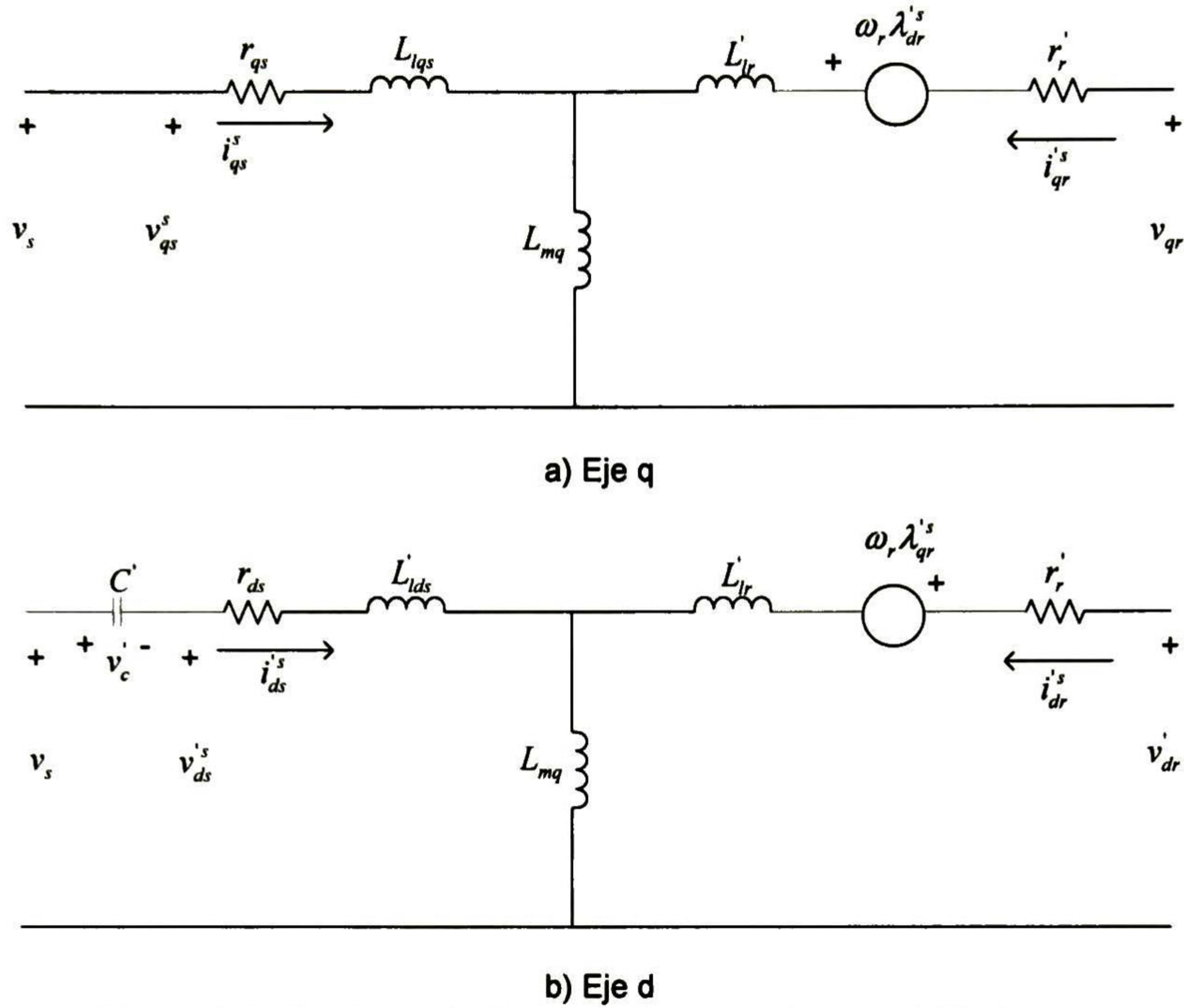


Figura 2. 4 Circuito equivalente: a) Eje en cuadratura. b) Eje directo.

Los circuitos equivalentes de eje directo y de cuadratura de las ecuaciones del motor monofásico (2.49)-(2.56) se muestran en la fig. 2.4.

El modelo de la dinámica eléctrica del motor monofásico se obtiene de las ecuaciones (2.49)-(2.56) en donde se eligen como variables de estado, las corrientes del estator y los enlaces de flujo del rotor. A continuación se describe el desarrollo matemático para obtener la dinámica eléctrica. Las corrientes en el rotor se obtiene de las ecuaciones (2.55), (2.56) y tienen la forma

$$i_{qr}^s = \frac{1}{L_r'} (\lambda_{qr}^s - L_{mq} i_{qs}^s) \quad (2.57)$$

$$i_{dr}^s = \frac{1}{L_r'} (\lambda_{dr}^s - L_{mq} i_{ds}^s) \quad (2.58)$$

Se sustituyen las corrientes del rotor (2.57),(2.58) en las ecuaciones (2.51) y (2.52):

$$0 = \frac{r_r'}{L_r'} \lambda_{qr}^s - \frac{r_r'}{L_r'} L_{mq} i_{qs}^s - \omega_r \lambda_{dr}^s + \frac{d\lambda_{qr}^s}{dt} \quad (2.59)$$

$$0 = \frac{r_r'}{L_r'} \lambda_{dr}^s - \frac{r_r'}{L_r'} L_{mq} i_{ds}^s + \omega_r \lambda_{qr}^s + \frac{d\lambda_{dr}^s}{dt} \quad (2.60)$$

La dinámica de los enlaces del flujo del rotor es:

$$\frac{d\lambda_{qr}^s}{dt} = -\frac{r_r'}{L_r'} \lambda_{qr}^s + \omega_r \lambda_{dr}^s + \frac{r_r' L_{mq}}{L_r'} i_{qs}^s \quad (2.61)$$

$$\frac{d\lambda_{dr}^s}{dt} = -\frac{r_r'}{L_r'} \lambda_{dr}^s - \omega_r \lambda_{qr}^s + \frac{r_r' L_{mq}}{L_r'} i_{ds}^s \quad (2.62)$$

Sustituyendo las corrientes del rotor en (2.53) y (2.54),

$$\lambda_{qs}^s = \frac{L_{qs}L_r' - L_{mq}^2}{L_r'} i_{qs}^s + \frac{L_{mq}}{L_r'} \lambda_{qr}^s \quad (2.63)$$

$$\lambda_{ds}^s = \frac{L_{ds}L_r' - L_{mq}^2}{L_r'} i_{ds}^s + \frac{L_{mq}}{L_r'} \lambda_{dr}^s \quad (2.64)$$

derivando

$$\frac{d\lambda_{qs}^s}{dt} = \frac{L_{qs}L_r' - L_{mq}^2}{L_r'} \frac{di_{qs}^s}{dt} + \frac{L_{mq}}{L_r'} \frac{d\lambda_{qr}^s}{dt} \quad (2.65)$$

$$\frac{d\lambda_{ds}^s}{dt} = \frac{L_{ds}L_r' - L_{mq}^2}{L_r'} \frac{di_{ds}^s}{dt} + \frac{L_{mq}}{L_r'} \frac{d\lambda_{dr}^s}{dt} \quad (2.66)$$

sustituyendo (2.61) en (2.65) y (2.62) en (2.66),

$$\frac{d\lambda_{qs}^s}{dt} = \frac{L_{qs}L_r' - L_{mq}^2}{L_r'} \frac{di_{qs}^s}{dt} + \frac{L_{mq}}{L_r'} \left(-\frac{r_r'}{L_r'} \lambda_{qr}^s + \omega_r \lambda_{dr}^s + \frac{r_r' L_{mq}}{L_r'} i_{qs}^s \right) \quad (2.67)$$

$$\frac{d\lambda_{ds}^s}{dt} = \frac{L_{ds}L_r' - L_{mq}^2}{L_r'} \frac{di_{ds}^s}{dt} + \frac{L_{mq}}{L_r'} \left(-\frac{r_r'}{L_r'} \lambda_{dr}^s - \omega_r \lambda_{qr}^s + \frac{r_r' L_{mq}}{L_r'} i_{ds}^s \right) \quad (2.68)$$

sustituyendo (2.67) en (2.49) y (2.68) en (2.50) tenemos

$$v_{qs}^s = r_{qs} i_{qs}^s + \frac{L_{qs}L_r' - L_{mq}^2}{L_r'} \frac{di_{qs}^s}{dt} - \frac{r_r' L_{mq}}{L_r'^2} \lambda_{qr}^s + \frac{L_{mq}}{L_r'} \omega_r \lambda_{dr}^s + \frac{r_r' L_{mq}^2}{L_r'^2} i_{qs}^s \quad (2.69)$$

$$v_{ds}^s = r_{ds} i_{ds}^s + \frac{L_{ds}L_r' - L_{mq}^2}{L_r'} \frac{di_{ds}^s}{dt} - \frac{r_r' L_{mq}}{L_r'^2} \lambda_{dr}^s - \frac{L_{mq}}{L_r'} \omega_r \lambda_{qr}^s + \frac{r_r' L_{mq}^2}{L_r'^2} i_{ds}^s \quad (2.70)$$

La dinámica de las corrientes del estator es:

$$\frac{di_{qs}^s}{dt} = \frac{L_r'}{L_{qs}L_r' - L_{mq}^2} \left(v_{qs}^s - \left(r_{qs} + \frac{r_r' L_{mq}^2}{L_r'^2} \right) i_{qs}^s + \frac{r_r' L_{mq}}{L_r'^2} \lambda_{qr}^s - \frac{L_{mq}}{L_r'} \omega_r \lambda_{dr}^s \right) \quad (2.71)$$

$$\frac{di_{ds}^s}{dt} = \frac{L_r'}{L_{ds}L_r' - L_{mq}^2} \left(v_{ds}^s - \left(r_{ds} + \frac{r_r' L_{mq}^2}{L_r'^2} \right) i_{ds}^s + \frac{L_{mq}}{L_r'} \omega_r \lambda_{qr}^s + \frac{r_r' L_{mq}}{L_r'^2} \lambda_{dr}^s \right) \quad (2.72)$$

La dinámica eléctrica del motor de inducción son expresadas por las ecuaciones (2.61), (2.62), (2.71) y (2.72). Las entradas del control, son los voltajes de las componentes de voltaje de estator en eje directo y cuadratura y son:

$$v_{qs}^s = v_s \quad (2.73)$$

$$v_{ds}^s = n^{-1} v_s - v_c' \quad (2.74)$$

El voltaje de eje directo (2.74) es modificado por el voltaje del capacitor serie, conectado al devanado auxiliar. La ecuación del voltaje en el capacitor es:

$$\frac{dv_c'}{dt} = \omega_e X_c' i_{ds}^s \quad (2.75)$$

2.3. 3 Dinámica mecánica

El par es producido por interacción de los flujos del rotor y del estator. El par puede ser obtenido de la energía magnética almacenada como se indica a continuación.

La energía almacenada en la máquina de inducción es igual a la suma de la inductancias propias de cada devanado multiplicada por la mitad del cuadrado de sus corrientes, más la inductancia mutua multiplicada por las corrientes del estator y del rotor. La energía almacenada en las inductancias de dispersión no contribuye al par electromagnético.

La energía magnética almacenada es

$$W_f = \frac{1}{2} (\bar{i}_{AB}')^T (\bar{L}_s - \bar{L}_{ls}) I_2 \bar{i}_{AB}' + (\bar{i}_{AB}')^T \bar{M}_{sr}' \bar{i}_{ab}' + \frac{1}{2} (\bar{i}_{ab}')^T (\bar{L}_r - \bar{L}_{lr}) I_2 \bar{i}_{ab}' \quad (2.76)$$

donde I_2 es la matriz identidad. Suponemos que la máquina es magnéticamente lineal, entonces, la energía W_f es igual a la coenergía W_c .

De la expresión del par electromagnético en sistemas rotatorios, el diferencial de la energía magnética almacenada se puede expresar por

$$dW_m = -T_e d\theta_m \quad (2.77)$$

donde T_e es el par electromagnético positivo, debido a la acción del motor y θ_m es el desplazamiento angular del rotor. La energía (coenergía) magnética almacenada, W_f y W_c son funciones que dependen del desplazamiento angular θ_r . La relación entre el desplazamiento angular del rotor expresado en términos eléctricos y mecánicos es:

$$\theta_r = \frac{P}{2} \theta_m \quad (2.78)$$

donde P es el número de polos en la máquina; θ_r , θ_m son los desplazamientos angulares del rotor en términos eléctricos y mecánicos respectivamente. Sustituyendo (2.78) en (2.77) tenemos

$$dW_m = -T_e \left(\frac{2}{P} \right) d\theta_r \quad (2.79)$$

como $W_f = W_c$, el par electromagnético puede ser expresado como

$$T_e(i_j, \theta_r) = \frac{P}{2} \frac{\partial W_c(i_j, \theta_r)}{\partial \theta_r} \quad (2.80)$$

sustituyendo W_f de (2.76) en (2.80) da como resultado la ecuación que define el par electromagnético (N.m)

$$T_e = \frac{P}{2} (\bar{i}_{AB}')^T \frac{\partial}{\partial \theta_r} [\bar{M}_{sr}'] \bar{i}_{ab}' \quad (2.81)$$

La ecuación del par en términos de las componentes d - q tiene la forma

$$T_e = \frac{P}{2} \left((K_{2s})^{-1} \bar{i}_{qds}' \right)^T \frac{\partial}{\partial \theta_r} [\bar{M}_{sr}'] (K_{2r})^{-1} \bar{i}_{qdr}' \quad (2.82)$$

Expandiendo la ecuación (2.82) obtenemos la expresión para el par electromagnético

$$T_e = \frac{P}{2} L_{mq} (i_{qs}^s i_{dr}^s - i_{ds}^s i_{qr}^s) \quad (2.83)$$

Otras expresiones para el par electromagnético son:

$$T_e = \frac{P}{2} \frac{L_{mq}}{L_r} (i_{qs}^s \lambda_{dr}^s - i_{ds}^s \lambda_{qr}^s) \quad (2.84)$$

$$T_e = \frac{P}{2} (\lambda_{qr}^s i_{dr}^s - \lambda_{dr}^s i_{qr}^s) \quad (2.85)$$

$$T_e = \frac{P}{2} (\lambda_{ds}^s i_{qs}^s - \lambda_{qs}^s i_{ds}^s) \quad (2.86)$$

La dinámica mecánica del motor se obtiene del principio de D'Alembert

$$T_e = T_L + J \frac{d\omega_m}{dt} + D\omega_m + \frac{1}{K} \int_{-\infty}^t \omega_m dt \quad (2.87)$$

donde J es el momento de inercia del rotor y de cualquier objeto acoplado a él, D es el coeficiente angular de fricción viscosa y ventilación y K es la constante de elasticidad. Al término $Jd\omega_m/dt$

se le denomina par inercial, a $D\omega_m$ par por fricción y a $\frac{1}{K} \int_{-\infty}^t \omega_m dt$ par elástico.

Sustituyendo (2.84) en (2.87) se obtiene la dinámica mecánica del motor

$$\frac{d\omega_m}{dt} = \frac{P}{2J} \frac{L_{mq}}{L_r} (\lambda_{dr}^s i_{qs}^s - \lambda_{qr}^s i_{ds}^s) - \frac{1}{J} T_L - \frac{1}{J} D\omega_m - \frac{1}{JK} \int_{-\infty}^t \omega_m dt \quad (2.88)$$

Para los propósitos de este trabajo se desprecia el par por fricción y el par elástico, resultando la siguiente expresión que define la dinámica de la velocidad angular del rotor

$$\frac{d\omega_m}{dt} = \frac{P}{2J} \frac{L_{mq}}{L_r} (\lambda_{dr}^s i_{qs}^s - \lambda_{qr}^s i_{ds}^s) - \frac{1}{J} T_L \quad (2.89)$$

2.4 Modelo en estado estable

El modelo en estado estable se obtiene a partir de las ecuaciones dinámicas del motor (2.61), (2.62), (2.71), (2.72) y (2.89), donde $\dot{\omega}_r = 0$. Las ecuaciones en estado estable se expresan por los valores fasoriales de los voltajes y de las corrientes.

Un procedimiento sencillo consiste en sustituir los operadores diferencial y de integración como se indica continuación

$$\frac{d}{dt} = j\omega_e \quad \text{y} \quad \int dt = \frac{1}{j\omega_e} \quad (2.90)$$

resultando

$$V_s = (r_{qs} + j\omega_e L_{qs}) I_{qs}^s + j\omega_e L_{mq} I_{qr}^s \quad (2.91)$$

$$V_s' = (r_{ds}' + j\omega_e L_{ds}' - jX_c') I_{ds}'^s + j\omega_e L_{mq}' I_{dr}'^s \quad (2.92)$$

$$V_{qr}'^s = j\omega_e L_{mq}' I_{qs}'^s - \omega_r L_{mq}' I_{ds}'^s + (r_r' + j\omega_e L_r') I_{qr}'^s - \omega_r L_r' I_{dr}'^s \quad (2.93)$$

$$V_{dr}'^s = \omega_r L_{mq}' I_{qs}'^s + j\omega_e L_{mq}' I_{ds}'^s + \omega_r L_r' I_{qr}'^s + (r_r' + j\omega_e L_r') I_{dr}'^s \quad (2.94)$$

Las variables en mayúsculas representan valores fasoriales y el superíndice s indica marco de referencia estacionario. Empleando las variables que se describen en el apéndice A-3 y con los devanados del rotor cortocircuitados ($V_{qr}'^s = V_{dr}'^s = 0$), las ecuaciones (2.91)-(2.94) se expresan por:

$$V_s = Z_{qs}' I_{qs}'^s + j\omega_e L_{mq}' I_{qr}'^s \quad (2.95)$$

$$V_s' = (Z_{ds}' + Z_c') I_{ds}'^s + j\omega_e L_{mq}' I_{dr}'^s \quad (2.96)$$

$$0 = j\omega_e L_{mq}' I_{qs}'^s - \omega_r L_{mq}' I_{ds}'^s + Z_r' I_{qr}'^s - \omega_r L_r' I_{dr}'^s \quad (2.97)$$

$$0 = \omega_r L_{mq}' I_{qs}'^s + j\omega_e L_{mq}' I_{ds}'^s + \omega_r L_r' I_{qr}'^s + Z_r' I_{dr}'^s \quad (2.98)$$

En forma matricial

$$\begin{bmatrix} V_s \\ V_s' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{qs}' & 0 & j\omega_e L_{mq}' & 0 \\ 0 & Z_{ds}' + Z_c' & 0 & j\omega_e L_{mq}' \\ j\omega_e L_{mq}' & -\omega_r L_{mq}' & Z_r' & -\omega_r L_r' \\ \omega_r L_{mq}' & j\omega_e L_{mq}' & \omega_r L_r' & Z_r' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{qs}'^s \\ I_{ds}'^s \\ I_{qr}'^s \\ I_{dr}'^s \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

La ecuación (2.99) se particiona como se indica

$$\begin{bmatrix} V_s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{qds}'^s \\ I_{qdr}'^s \end{bmatrix} \quad (2.100)$$

donde las matrices A y B son constantes y las matrices $C(\omega_r)$ y $D(\omega_r)$ son función de la velocidad del motor. Las corrientes del rotor se obtienen de (2.100) y tienen la forma compacta

$$\begin{aligned} I_{qr}'^s &= -Z_a I_{qs}'^s + Z_b I_{ds}'^s \\ I_{dr}'^s &= -Z_b I_{qs}'^s - Z_a I_{ds}'^s \end{aligned} \quad (2.101)$$

donde Z_a y Z_b son

$$\begin{aligned} Z_a &= \frac{L_{mq}'}{Z_r'^2 + \omega_r^2 L_r'^2} [(\omega_r^2 - \omega_e^2) L_r' + j\omega_e r_r'] = Z_{a1} + jZ_{a2} \\ Z_b &= \frac{L_{mq}'}{Z_r'^2 + \omega_r^2 L_r'^2} [\omega_r r_r'] = Z_{b1} + jZ_{b2} \end{aligned}$$

Las corrientes del estator son

$$\begin{aligned} I_{qds}'^s &= (A - BD^{-1}C)^{-1} V_s \\ \begin{bmatrix} I_{qs}'^s \\ I_{ds}'^s \end{bmatrix} &= \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} Z_{ds}' + Z_c' - j\omega_e L_{mq}' Z_a & -j\omega_e L_{mq}' Z_b \\ j\omega_e L_{mq}' Z_b & Z_{qs}' - j\omega_e L_{mq}' Z_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s \\ n^{-1} V_s' \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.102)$$

y las componentes de las corrientes en el estator en los ejes directo y cuadratura son de la forma:

$$I_{qs}^s = \frac{V_s}{\Delta} (\alpha_1 + j(\alpha_2 - X_c')) \quad (2.103)$$

$$I_{ds}^s = \frac{V_s}{\Delta} (\beta_1 + j\beta_2)$$

donde V_s es el voltaje de alimentación y las variables $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ y Δ , son función de la velocidad del motor y se especifican en el apéndice A-3. De las ecuaciones (2.101) y (2.103) se observa que el desempeño del motor de inducción monofásico es influenciado por el capacitor conectado en serie con el devanado auxiliar.

2.4. 1 Componentes simétricas

El método de componentes simétricas permite representar un sistema bifásico desbalanceado en dos sistemas bifásicos balanceados. Los sistemas balanceados son denominados como *componentes de secuencia positiva y negativa*.

En general, un sistema bifásico desbalanceado puede ser expresado de la forma:

$$F_{qs}^s = \sqrt{2}F_q \cos[\omega_e t + \theta_{qs}(0)] \quad (2.104)$$

$$F_{ds}^s = \sqrt{2}F_d \sin[\omega_e t + \theta_{ds}(0)] \quad (2.105)$$

donde $F_q \neq F_d$ y $\theta_{qs}(0) \neq \theta_{ds}(0)$. Cada fase del sistema bifásico desbalanceado se puede representar como la suma de las componentes de secuencia positiva y negativa como se indica

$$F_{qs}^s = F_{qs}^+ + F_{qs}^- \quad (2.106)$$

$$F_{ds}^s = F_{ds}^+ + F_{ds}^- \quad (2.107)$$

En (2.106) y (2.107), F_{qs}^+ y F_{ds}^+ forman el sistema de secuencia positiva, donde

$$F_{ds}^+ = jF_{qs}^+ \quad (2.108)$$

El sistema de secuencia negativa es F_{qs}^- y F_{ds}^- , donde

$$F_{ds}^- = -jF_{qs}^- \quad (2.109)$$

Para operación desbalanceada en estado estable, donde la velocidad del rotor es constante, las corrientes de secuencia positiva que circulan en los devanados del estator producen una *fmm* en el entrehierro, que gira en sentido contrario a las agujas del reloj, mientras que las corrientes de secuencia negativa producen una *fmm* que gira en sentido de las agujas del reloj [11]-[13].

Las ecuaciones en estado estable (2.106)-(2.109) pueden ser expresadas en la forma:

$$\begin{bmatrix} F_{qs}^+ \\ F_{qs}^- \end{bmatrix} = S_2 \begin{bmatrix} F_{qs}^s \\ F_{ds}^s \end{bmatrix} \quad (2.110)$$

donde la matriz de transformación es

$$S_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad (S_2)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix}$$

Si $F_{qr}'^s$ y $F_{dr}'^s$ son las componentes fasoriales del rotor, estas se pueden representar por sus componentes de secuencia positiva y negativa de la misma manera que para F_{qs}^s y F_{ds}^s .

En particular tenemos

$$F_{qr}'^s = F_{qr}'^+ + F_{qr}'^- \quad (2.111)$$

$$F_{dr}'^s = jF_{qr}'^+ - jF_{qr}'^- \quad (2.112)$$

Es común que en los modelos matemáticos, sobre todo en estado estable, se utilicen los parámetros de reactancias $X = \omega_e L$ en lugar de las inductancias. Las expresiones de los enlaces de flujo son reemplazadas por un término de voltaje de la forma $\psi = \omega_e \lambda$.

Las ecuaciones de los enlaces de flujo del estator (2.53) y (2.54) se transforman en las ecuaciones

$$\begin{bmatrix} \psi_{qs}^s \\ \psi_{ds}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{lqs} + X_{mq} & 0 \\ 0 & X'_{lds} + X_{mq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{qs}^s \\ I_{ds}^s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{mq} & 0 \\ 0 & X_{mq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{qr}'^s \\ I_{dr}'^s \end{bmatrix}$$

Escritas en forma compacta

$$\psi_{qds} = X_{SS} I_{qds} + X_{MQ} I'_{qdr}$$

La representación en componentes simétricas es

$$\psi_{qs}^{+-} = S_2 X_{SS} S_2^{-1} I_{qs}^{+-} + S_2 X_{MQ} S_2^{-1} I_{qr}'^{+-}$$

de donde

$$S_2 X_{SS} S_2^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} X_{lqs} + X'_{lds} + 2X_{mq} & X_{lqs} - X'_{lds} \\ X_{lqs} - X'_{lds} & X_{lqs} + X'_{lds} + 2X_{mq} \end{bmatrix}$$

y

$$S_2 X_{MQ} S_2^{-1} = \begin{bmatrix} X_{mq} & 0 \\ 0 & X_{mq} \end{bmatrix}$$

finalmente

$$\begin{bmatrix} \psi_{qs}^+ \\ \psi_{qs}^- \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} X_{lqs} + X'_{lds} & X_{lqs} - X'_{lds} \\ X_{lqs} - X'_{lds} & X_{lqs} + X'_{lds} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{qs}^+ \\ I_{qs}^- \end{bmatrix} + X_{mq} \begin{bmatrix} I_{qs}^+ + I_{qr}'^+ \\ I_{qs}^- + I_{qr}'^- \end{bmatrix} \quad (2.113)$$

Procediendo de manera similar para los enlaces de flujo del rotor (2.55) y (2.56)

$$\begin{bmatrix} \psi_{qr}'^s \\ \psi_{dr}'^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'_{lr} + X_{mq} & 0 \\ 0 & X'_{lr} + X_{mq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{qr}'^s \\ I_{dr}'^s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{mq} & 0 \\ 0 & X_{mq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{qs}^s \\ I_{ds}^s \end{bmatrix}$$

$$\psi'_{qdr} = X_{RR} I'_{qdr} + X_{MQ} I_{qds}$$

$$\psi_{qr}'^{+-} = S_2 X_{RR} S_2^{-1} I_{qr}'^{+-} + S_2 X_{MQ} S_2^{-1} I_{qs}^{+-}$$

de donde

$$S_2 X_{RR} S_2^{-1} = \begin{bmatrix} X'_{lr} + X_{mq} & 0 \\ 0 & X'_{lr} + X_{mq} \end{bmatrix}$$

finalmente

$$\begin{bmatrix} \psi'_{qr} \\ \psi'_{qr} \end{bmatrix} = X'_{lr} \begin{bmatrix} I'_{qr} \\ I'_{qr} \end{bmatrix} + X_{mq} \begin{bmatrix} I'_{qs} + I'_{qr} \\ I'_{qs} + I'_{qr} \end{bmatrix} \quad (2.114)$$

Los voltajes del estator (2.49) y (2.50) incluyendo la reactancia del capacitor son de la forma

$$\begin{bmatrix} V_s \\ V_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{qs} & 0 \\ 0 & r'_{ds} - jX'_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I'_{qs} \\ I'_{ds} \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} \psi'_{qs} \\ \psi'_{ds} \end{bmatrix}$$

Escritas en forma compacta

$$V_s = R_{SS} I_{qds} + j\psi_{qds}$$

La representación en componentes simétricas es

$$V_{qs}^{+-} = S_2 R_{SS} S_2^{-1} I_{qs}^{+-} + j\psi_{qs}^{+-}$$

de donde

$$S_2 R_{SS} S_2^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} r_{qs} + r'_{ds} - jX'_c & r_{qs} - r'_{ds} + jX'_c \\ r_{qs} - r'_{ds} + jX'_c & r_{qs} + r'_{ds} - jX'_c \end{bmatrix}$$

finalmente

$$\begin{bmatrix} V_{qs}^+ \\ V_{qs}^- \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} r_{qs} + r'_{ds} - jX'_c & r_{qs} - r'_{ds} + jX'_c \\ r_{qs} - r'_{ds} + jX'_c & r_{qs} + r'_{ds} - jX'_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{qs}^+ \\ I_{qs}^- \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} \psi_{qs}^+ \\ \psi_{qs}^- \end{bmatrix} \quad (2.115)$$

Los voltajes del rotor (2.51) y (2.52) son de la forma

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r'_r & 0 \\ 0 & r'_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I'_{qr} \\ I'_{dr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_r/\omega_e \\ \omega_r/\omega_e & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi'_{qr} \\ \psi'_{dr} \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} \psi'_{qr} \\ \psi'_{dr} \end{bmatrix}$$

Escritos en forma compacta

$$0 = R_r I'_{qdr} + \Omega \psi'_{qdr} + j\psi_{qdr}$$

La representación en componentes simétricas es

$$0 = S_2 R_r S_2^{-1} I'_{qr} + S_2 \Omega S_2^{-1} \psi'_{qr} + j\psi_{qr}$$

de donde

$$S_2 R_r S_2^{-1} = \begin{bmatrix} r'_r & 0 \\ 0 & r'_r \end{bmatrix}, \quad S_2 \Omega S_2^{-1} = \begin{bmatrix} -j\omega_r/\omega_e & 0 \\ 0 & j\omega_r/\omega_e \end{bmatrix}$$

finalmente

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r'_r/s & 0 \\ 0 & r'_r/(2-s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I'_{qr} \\ I'_{qr} \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} \psi'_{qr} \\ \psi'_{qr} \end{bmatrix} \quad (2.116)$$

El modelo en estado estable en términos de las componentes simétricas (2.113)-(2.116) es

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_{qs}^+ \\ V_{qs}^- \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} r_{qs} + r_{ds}' - jX_c' & r_{qs} - r_{ds}' + jX_c' \\ r_{qs} - r_{ds}' + jX_c' & r_{qs} + r_{ds}' - jX_c' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{qs}^+ \\ I_{qs}^- \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} \psi_{qs}^+ \\ \psi_{qs}^- \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} r_r'/s & 0 \\ 0 & r_r'/(2-s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{qr}^+ \\ I_{qr}^- \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} \psi_{qr}^+ \\ \psi_{qr}^- \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \psi_{qs}^+ \\ \psi_{qs}^- \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} X_{lqs} + X_{lds}' & X_{lqs} - X_{lds}' \\ X_{lqs} - X_{lds}' & X_{lqs} + X_{lds}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{qs}^+ \\ I_{qs}^- \end{bmatrix} + X_{mq} \begin{bmatrix} I_{qs}^+ + I_{qr}^+ \\ I_{qs}^- + I_{qr}^- \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \psi_{qr}^+ \\ \psi_{qr}^- \end{bmatrix} &= X_{lr}' \begin{bmatrix} I_{qr}^+ \\ I_{qr}^- \end{bmatrix} + X_{mq} \begin{bmatrix} I_{qs}^+ + I_{qr}^+ \\ I_{qs}^- + I_{qr}^- \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Eliminado los términos ψ de los voltajes del estator y simplificando las expresiones algebraicas tenemos:

$$\begin{bmatrix} V_{qs}^+ \\ V_{qs}^- \end{bmatrix} = (r_{qs} + jX_{lqs}) \begin{bmatrix} I_{qs}^+ \\ I_{qs}^- \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \left\{ (r_{ds}' - r_{qs}') + j(X_{lds}' - X_{lqs}' - X_c') \right\} \begin{bmatrix} I_{qs}^+ - I_{qs}^- \\ I_{qs}^- - I_{qs}^+ \end{bmatrix} + jX_{mq} \begin{bmatrix} I_{qs}^+ + I_{qr}^+ \\ I_{qs}^- + I_{qr}^- \end{bmatrix} \quad (2.117)$$

De la ecuación de voltajes del rotor se obtiene:

$$I_{qr}^+ = \frac{-jX_{mq}}{\frac{r_r'}{s} + j(X_{lr}' + X_{mq})} I_{qs}^+ \quad (2.118)$$

$$I_{qr}^- = \frac{-jX_{mq}}{\frac{r_r'}{2-s} + j(X_{lr}' + X_{mq})} I_{qs}^- \quad (2.119)$$

Sustituyendo (2.118) y (2.119) en ultimo termino de la derecha de (2.117) se tiene la siguiente relación

$$jX_{mq} \begin{bmatrix} I_{qs}^+ + I_{qr}^+ \\ I_{qs}^- + I_{qr}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_f I_{qs}^+ \\ Z_b I_{qs}^- \end{bmatrix}$$

donde

$$Z_f = \frac{jX_{mq} (r_r'/s + jX_{lr}')}{r_r'/s + j(X_{lr}' + X_{mq})} \quad \text{y} \quad Z_b = \frac{jX_{mq} (r_r'/(2-s) + jX_{lr}')}{r_r'/(2-s) + j(X_{lr}' + X_{mq})}$$

Sustituyendo esta relación en la ecuación (2.122) se tiene finalmente

$$\begin{bmatrix} V_{qs}^+ \\ V_{qs}^- \end{bmatrix} = Z_{1qs} \begin{bmatrix} I_{qs}^+ \\ I_{qs}^- \end{bmatrix} + \frac{1}{2} (Z_{1ds}' - Z_{1qs}' + Z_c') \begin{bmatrix} I_{qs}^+ - I_{qs}^- \\ I_{qs}^- - I_{qs}^+ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_f I_{qs}^+ \\ Z_b I_{qs}^- \end{bmatrix} \quad (2.120)$$

de donde $Z_{1qs} = r_{qs} + jX_{lqs}$, $Z_{1ds}' = r_{ds}' + jX_{lds}'$, $Z_c' = -jX_c'$. Manipulando (2.120) las componentes de secuencia positiva y negativa son:

$$V_{qs}^+ = \left(0.5(Z'_{1ds} + Z_{1qs} + Z'_c) + Z_f\right) I_{qs}^+ - 0.5(Z'_{1ds} - Z_{1qs} + Z'_c) I_{qs}^- \quad (2.121)$$

$$V_{qs}^- = \left(0.5(Z'_{1ds} + Z_{1qs} + Z'_c) + Z_b\right) I_{qs}^- - 0.5(Z'_{1ds} - Z_{1qs} + Z'_c) I_{qs}^+ \quad (2.122)$$

de la transformación (2.110) tenemos lo siguiente

$$V_{qs}^+ = \frac{1}{2}(V_s - jV_s/n) = \frac{V_s}{2}(1 - j/n) \quad y \quad V_{qs}^- = \frac{1}{2}(V_s + jV_s/n) = \frac{V_s}{2}(1 + j/n)$$

con

$$Z_1 = \frac{1}{2}(Z'_{1ds} + Z_{1qs} + Z'_c), \quad Z_2 = \frac{1}{2}(Z'_{1ds} - Z_{1qs} + Z'_c), \quad Z_{1qs} = Z_1 - Z_2$$

la ecuación (2.120) se puede expresar en forma matricial de la forma

$$\begin{bmatrix} V_{qs}^+ \\ V_{qs}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Z_1 + Z_f) & -Z_2 \\ -Z_2 & (Z_1 + Z_b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{qs}^+ \\ I_{qs}^- \end{bmatrix} \quad (2.123)$$

las componentes de secuencia positiva y negativa de las corrientes del estator se pueden obtener de (2.123). Finalmente el circuito equivalente en estado estable se muestra en la figura 2.5. La combinación en paralelo de jX_{mq} y $r'_r/s + jX'_{lr}$ es comúnmente referida como la impedancia de secuencia positiva y la combinación en paralelo de jX_{mq} y $r'_r/(2-s) + jX'_{lr}$ es la impedancia de secuencia negativa.

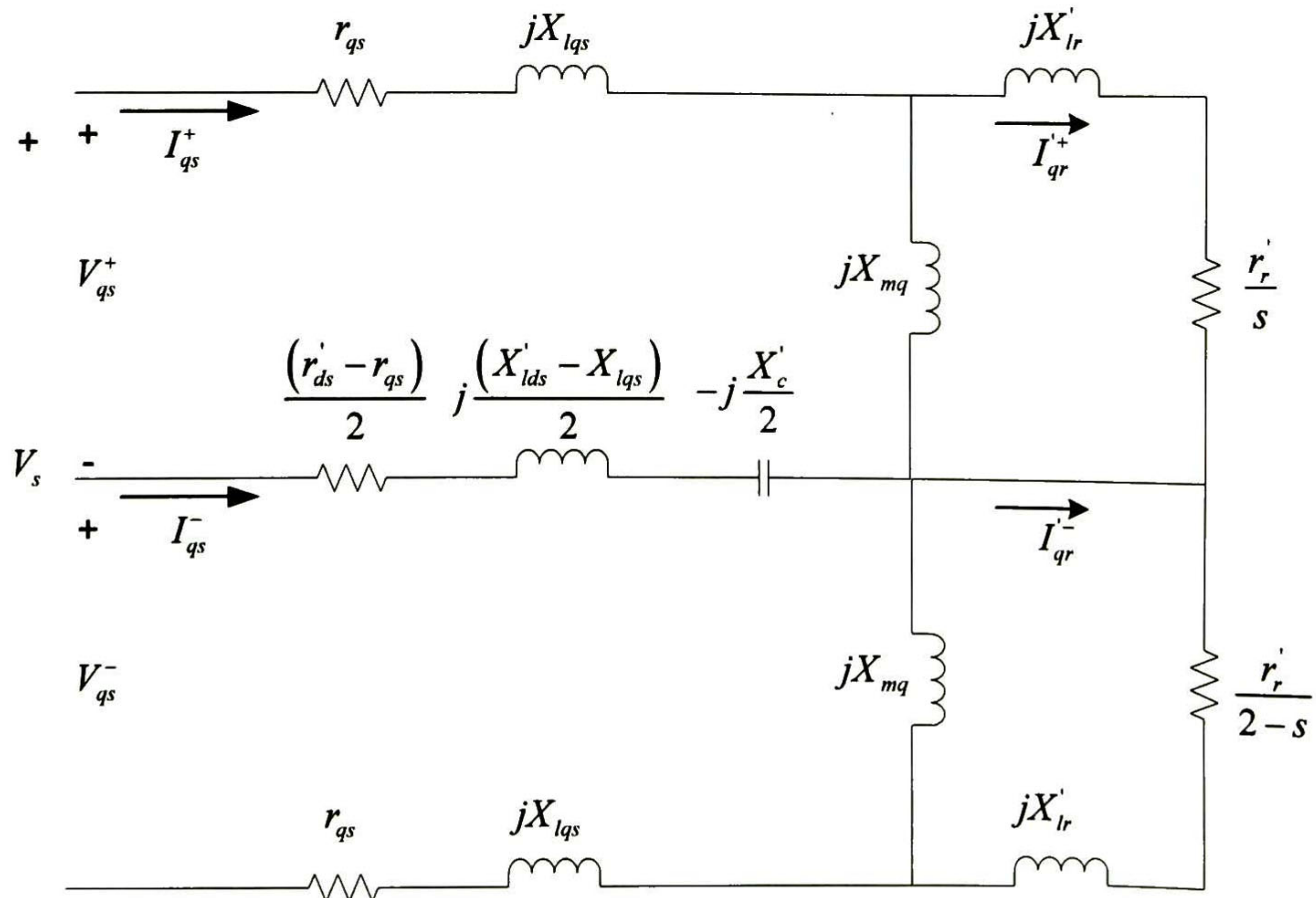


Figura 2. 5 Circuito equivalente en estado estable.

2.4. 2 Par electromagnético

El par electromagnético se puede expresar en la forma:

$$T_e = n_p L_{mq} (i_{qs}^s i_{dr}^{s'} - i_{ds}^{s'} i_{qr}^s) \quad (2.124)$$

donde n_p representa el número de pares de polos. Los valores instantáneos de las corrientes en estado estable se pueden representar en términos de fasores como,

$$\begin{aligned} i_{qs}^s &= \text{Re} \left[\sqrt{2} I_{qs}^s e^{j\phi_{qs}} e^{j\omega_e t} \right] = \text{Re} \left[\sqrt{2} \tilde{I}_{qs}^s e^{j\omega_e t} \right] \\ i_{ds}^{s'} &= \text{Re} \left[\sqrt{2} I_{ds}^{s'} e^{j\phi_{ds}} e^{j\omega_e t} \right] = \text{Re} \left[\sqrt{2} \tilde{I}_{ds}^{s'} e^{j\omega_e t} \right] \\ i_{qr}^s &= \text{Re} \left[\sqrt{2} I_{qr}^s e^{j\phi_{qr}} e^{j\omega_e t} \right] = \text{Re} \left[\sqrt{2} \tilde{I}_{qr}^s e^{j\omega_e t} \right] \\ i_{dr}^{s'} &= \text{Re} \left[\sqrt{2} I_{dr}^{s'} e^{j\phi_{dr}} e^{j\omega_e t} \right] = \text{Re} \left[\sqrt{2} \tilde{I}_{dr}^{s'} e^{j\omega_e t} \right] \end{aligned} \quad (2.125)$$

Sustituyendo (2.125) en (2.124) el par puede ser expresado de la forma

$$T_e = n_p L_{mq} \left\{ \text{Re} \left[\tilde{I}_{qs}^s \tilde{I}_{dr}^{s'*} - \tilde{I}_{ds}^{s'} \tilde{I}_{qr}^s \right] + \text{Re} \left[\left(\tilde{I}_{qs}^s \tilde{I}_{dr}^{s'} - \tilde{I}_{ds}^{s'} \tilde{I}_{qr}^s \right) e^{j2\omega_e t} \right] \right\} \quad (2.126)$$

donde * representa complejo conjugado. Se observa que el par electromagnético en estado estable tiene dos términos, uno constante (par promedio) y otro que oscila con el doble de la frecuencia de la fuente de alimentación (par pulsante).

El par promedio es

$$T_{e(avg)} = n_p L_{mq} \text{Re} \left[\tilde{I}_{qs}^s \tilde{I}_{dr}^{s'*} - \tilde{I}_{ds}^{s'} \tilde{I}_{qr}^s \right] \quad (2.127)$$

La amplitud del par pulsante es

$$T_{e(pul)} = n_p L_{mq} \left| \tilde{I}_{qs}^s \tilde{I}_{dr}^{s'} - \tilde{I}_{ds}^{s'} \tilde{I}_{qr}^s \right| \quad (2.128)$$

En general, en el arranque es deseable un par promedio elevado. El par promedio del motor depende de la velocidad del motor y del capacitor.

Sustituyendo las corrientes del rotor (2.101) en (2.127) resulta en

$$T_{e(avg)} = n_p L_{mq} \text{Re} \left\{ Z_b^* \left(-\tilde{I}_{ds}^{s'} \tilde{I}_{ds}^{s'} - \tilde{I}_{qs}^s \tilde{I}_{qs}^{s'} \right) + Z_a^* \left(\tilde{I}_{ds}^{s'} \tilde{I}_{qs}^{s'} - \tilde{I}_{qs}^s \tilde{I}_{ds}^{s'} \right) \right\}$$

ahora sustituyendo las corrientes del estator (2.103) en la ecuación anterior tenemos

$$T_{e(avg)} = n_p L_{mq} \text{Re} \left\{ \frac{|V_s|^2}{|\Delta|^2} \left\{ Z_b^* \left(\alpha + 2\alpha_2 X_c' - X_c'^2 \right) + j2Z_a^* \left(\beta_2 \alpha_1 - \beta_1 \alpha_2 + \beta_1 X_c' \right) \right\} \right\}$$

con $\alpha = -(\beta_1^2 + \beta_2^2) - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)$.

Tomando la parte real de la expresión anterior tenemos lo siguiente:

$$T_{e(avg)} = n_p L_{mq} \frac{|V_s|^2}{|\Delta|^2} \left\{ \left(Z_{b1} \left(\alpha + 2\alpha_2 X_c' - X_c'^2 \right) + 2Z_{a2} \left(\beta_2 \alpha_1 - \beta_1 \alpha_2 + \beta_1 X_c' \right) \right) \right\}$$

finalmente el par promedio como una función explícita de la reactancia del capacitor es de la forma

$$T_{e(avg)} = n_p L_{mq} |V_s|^2 \left\{ \frac{AX_c'^2 + BX_c' + D}{MX_c'^2 + NX_c' + Q} \right\} \quad (2.129)$$

donde A, B, D, M, N, Q son definidos en términos de los parámetros y la velocidad del motor en el apéndice A-3.

El valor extremo del par promedio se obtiene haciendo cero la derivada del par respecto de la capacitancia. El máximo será aquel valor de la capacitancia donde la segunda derivada del par respecto de la capacitancia sea positiva.

$$\frac{\partial T_{e(avg)}}{\partial X_c'} = 0 \quad (2.130)$$

y

$$\frac{\partial^2 T_{e(avg)}}{\partial X_c'^2} > 0 \quad (2.131)$$

Realizando un procedimiento similar con la ecuación (2.128) se obtiene el par pulsante como una función explícita de la reactancia del capacitor de la forma

$$T_{e(pul)} = n_p L_{mq} |V_s|^2 \left\{ \frac{|Z_b| \sqrt{X_c'^4 - 4\alpha_2 X_c'^3 + \zeta_1 X_c'^2 + \zeta_2 X_c' + \zeta_3}}{MX_c'^2 + NX_c' + Q} \right\} \quad (2.132)$$

donde $Z_b, \alpha_2, \zeta_1, \zeta_2$ y ζ_3 son definidos en términos de los parámetros y velocidad del motor.

El valor extremo de la magnitud del par pulsante se obtiene de igualar a cero la derivada de la magnitud del par pulsante respecto de la capacitancia. El valor mínimo será aquel donde la segunda derivada sea menor que cero.

$$\frac{\partial T_{e(pul)}}{\partial X_c'} = 0 \quad (2.133)$$

y

$$\frac{\partial^2 T_{e(pul)}}{\partial X_c'^2} < 0 \quad (2.134)$$

Finalmente seleccionando un valor apropiado para X_c' , es posible encontrar una reactancia del capacitor tal que mejore el par al arranque y minimice la componente oscilatoria del par pulsante en estado estable.

Un capacitor variable puede ser construido por un capacitor constante en paralelo con un dispositivo de conmutación [1].

Capítulo 3

Control no lineal por modos deslizantes

3.1 Introducción

En este capítulo se desarrollan los conceptos fundamentales de la técnica de control por bloques [9] con modos deslizantes [8], [14] y [15]. Esta metodología, es aplicada a una clase de sistemas lineales y no lineales que están en la forma controlable por bloques; este es el caso del modelo del motor de inducción monofásico desarrollado en el capítulo anterior.

En primera instancia se plantea la técnica para resolver el problema de control de sistemas no lineales con dinámica interna, y posteriormente la técnica para resolver el problema de seguimiento de trayectoria de referencia para sistemas no lineales con perturbación.

El problema se enfoca a la construcción de una variedad no lineal en el espacio de estado del sistema, tal que la dinámica de la ecuación de modos deslizantes en esta variedad satisfaga un conjunto de propiedades requeridas. Se determinan las condiciones bajo las cuales la solución del sistema en lazo cerrado tiende asintóticamente al valor de referencia y por lo tanto, el error de trayectoria tiende a cero.

Al desarrollar la ecuación para la entrada de control, se supone que todas las variables de estado y la perturbación externa, están disponibles para ser medidas o retroalimentadas. Esta suposición puede no ser totalmente cierta en la práctica, ya que algunas variables de estado no son accesibles directamente por que los sensores o transductores para algunos estados no están disponibles en el mercado o son muy caros. En este caso se considera el problema de diseño de observadores por modos deslizantes, para estimar los estados no medibles y parámetros que pueden cambiar su valor, tal es el caso del par de carga T_L .

3.2 Formulación del problema

Consideremos un sistema no lineal sujeto a perturbaciones

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)\mathbf{u} + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \quad (3.1)$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbf{X} \subset \mathbf{R}^n$ es el vector de estados, $\mathbf{u} \in \mathbf{U} \subset \mathbf{R}^m$ es el vector de control acotado por,

$$|u_i| \leq u_0 \quad \text{con } u_0 > 0, \quad \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)^T \quad (3.2)$$

El vector $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ y las columnas de $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ son campos vectoriales acotados y suficientemente suaves de clase $C_{[0, \infty)}^\infty$, el vector desconocido $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ representa las incertidumbres debido a variaciones en los parámetros, dinámicas no modeladas y perturbaciones externas. $\mathbf{f}(0, t) = 0$, y rango $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = m$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ y $t \geq 0$.

El problema del diseño de control por modos deslizantes consiste en dos pasos:

- 1) Diseñar una superficie deslizante en espacio de estado

$$\sigma(\mathbf{x}) = 0, \quad \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)^T \quad (3.3)$$

y se elige de manera que movimiento del sistema sobre esta superficie exhiba las propiedades deseadas como estabilización, seguimiento de trayectorias, invarianza ante perturbaciones, etc.

- 2) Elegir una acción de control discontinua

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} u_i^+(\mathbf{x}, t) & \text{si } \sigma_i(\mathbf{x}) > 0 \\ u_i^-(\mathbf{x}, t) & \text{si } \sigma_i(\mathbf{x}) < 0 \end{cases}, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.4)$$

que garantice que el estado del sistema alcance la superficie y permanezca en ella.

El efecto de este control discontinuo por modos deslizantes conduce al estado del sistema hacia una superficie de conmutación (o deslizante) y lo restringe de ahí en adelante. El movimiento del sistema en dicha superficie, llamado *modo deslizante*, es robusto respecto a incertidumbres y perturbaciones acopladas al control.

Los modos deslizantes son una propuesta excepcional en la investigación reciente del control discontinuo. Primero que todo, en modos deslizantes, el elemento de implementación genera una función discontinua, por ejemplo un relevador, un conmutador de alta frecuencia, etc., donde sus entradas de energía tienden a cero mientras la salida (más precisamente el valor promedio) toma valores infinitos. Por lo tanto los elementos de implementación tienen una alta ganancia (teóricamente infinita), esto significa que se suprime la influencia de perturbaciones e incertidumbre en el comportamiento del sistema. Diferente a los sistemas continuos, el efecto de invariabilidad es alcanzado usando una ley de control finita. En segundo lugar, las trayectorias de los modos deslizantes están en alguna variedad de dimensión menor que la del sistema, por lo tanto también se reduce el orden de la ecuación de movimiento. Esto permite la simplificación, la descomposición del procedimiento y el diseño del control.

Una parte crucial de la naturaleza de los esquemas de control de modo deslizante es el control discontinuo. En lazo cerrado, la "conmutación" en la acción de control frecuentemente resulta en oscilaciones de alta frecuencia en implementaciones prácticas.

Las dinámicas rápidas, como en actuadores y sensores, son excitadas por los interruptores de control de modo deslizante, ocurriendo frecuencias altas, pero finitas. Este fenómeno, el cual es común en todos los sistemas de control de alta ganancia, es conocida como castañeteo (*chattering*).

Existen varios métodos para obtener las ecuaciones de modos deslizantes, empezando con un método heurístico más fácil de comprender que se llama método del control equivalente.

3.2. 1 Método del control equivalente

Como se mencionó anteriormente, la estrategia de control propuesta es un control por modos deslizantes, por lo que este cambia a una frecuencia muy alta, teóricamente infinita. Esto dificulta la concepción sobre el comportamiento de las ecuaciones dinámicas en lazo cerrado, por lo tanto para obtener la ecuación de modos deslizantes a lo largo de la intersección de un conjunto de superficies discontinuas para el sistema (3.1) se utiliza el método de control equivalente.

Suponiendo que existen modos deslizantes sobre la variedad

$$\sigma(\mathbf{x}) = 0, \quad \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)^T \quad (3.5)$$

y un control continuo tal que para cualquier condición inicial del vector de estado sobre la variedad, la derivada del vector $\sigma(\mathbf{x})$ se debe igualar a cero respecto al tiempo a lo largo de la trayectoria del sistema (3.1), i.e.:

$$\dot{\sigma} = \mathbf{G}f + \mathbf{G}B\mathbf{u} + \mathbf{G}g = 0 \quad (3.6)$$

donde los renglones de la matriz $\mathbf{G} = \partial\sigma/\partial\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ son los gradientes de las funciones $\sigma_i(\mathbf{x})$ y suponiendo que la matriz $\mathbf{G}B$ es de rango pleno $\forall \mathbf{x} \in X$ y $t \geq 0$ entonces existe una solución para el sistema de ecuaciones algebraicas (3.6) con respecto al control $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{eq}(\mathbf{x}, t)$, el cual es llamado *control equivalente*, por lo tanto la función continua $\mathbf{u}_{eq}(\mathbf{x}, t) = -(\mathbf{G}B)^{-1}(\mathbf{G}f + \mathbf{G}g)$, es sustituida por el control discontinuo \mathbf{u} en el sistema original (3.1):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_s(\mathbf{x}, t) + \mathbf{g}_s(\mathbf{x}, t), \quad \sigma(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.7)$$

donde

$$\mathbf{f}_s = \left(\mathbf{I}_n - \mathbf{B}(\mathbf{G}B)^{-1} \mathbf{G} \right) \mathbf{f} \quad \text{y}$$

$$\mathbf{g}_s = \left(\mathbf{I}_n - \mathbf{B}(\mathbf{G}B)^{-1} \mathbf{G} \right) \mathbf{g}$$

Es evidente que para condiciones iniciales $\sigma(\mathbf{x}(t_0)) = 0$, conforme a (3.6), movimientos adicionales determinados por (3.7) llevará las trayectorias de los estados sobre la variedad $\sigma(\mathbf{x})$. Este procedimiento es llamado *método del control equivalente* y la ecuación (3.7) se conoce como la *ecuación del modo deslizante*, que garantiza el movimiento sobre las intersecciones de las superficies discontinuas $\sigma_i(\mathbf{x}) = 0$, $i = 1, \dots, m$.

Desde el punto de vista geométrico, el método del control equivalente implica una sustitución del control discontinuo no definido sobre el límite de la discontinuidad por un control continuo, el cual dirige el vector velocidad de espacio de estado del sistema, a lo largo de las intersecciones de las superficies discontinuas. Por ejemplo, para encontrar este vector en un sistema con una superficie discontinua simple $\sigma(\mathbf{x}) = 0$ en algún punto (\mathbf{x}, t) , se debe variar la amplitud del control escalar desde $u_i^-(\mathbf{x}, t)$ hasta $u_i^+(\mathbf{x}, t)$, graficar el lugar geométrico de (3.7) y encontrar el punto donde interseca al plano tangencial. El punto de intersección, determina al control equivalente $\mathbf{u}_{eq}(\mathbf{x}, t)$ y al lado derecho de la ecuación diferencial de modos deslizantes.

Si $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ en la ecuación (3.1) satisface la condición de acoplamiento (“matching condition”), [16] $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \in \text{span } \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$, i.e. existe un vector $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}, t)$ tal que

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in X \text{ y } t \geq 0 \quad (3.8)$$

entonces $\mathbf{g}_s = \left(\mathbf{I}_n - \mathbf{B}(\mathbf{G}\mathbf{B})^{-1} \mathbf{G} \right) \mathbf{B}\boldsymbol{\mu} = 0$, esto significa que el movimiento del modo deslizante es invariante respecto a estas perturbaciones. En este caso (3.7) se reduce a:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_s(\mathbf{x}, t), \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.9)$$

Notamos que la ecuación (3.9) tiene orden reducido ($n-m$), que simplifica la solución del primer paso en el problema del diseño del control por modos deslizantes, con respecto a la solución del problema original, sin embargo, el sistema es todavía no lineal y no autónomo. Para asegurar la estabilidad del sistema (3.9), se pueden usar técnicas de la teoría de linealización por retroalimentación. Existen entre otras técnicas las siguientes:

- Control por bloques o linealización paso a paso basada en la forma controlable por bloques [9];
- Linealización basada en la transformación del sistema original a la forma canónica [17];
- Linealización basada en la función de Lyapunov paso a paso o Backstepping [18].

3.2. 2 Control por bloques

La técnica permite obtener una transformación adicional en el sistema con el objetivo de obtener un sistema linealizado en lazo cerrado con los valores propios deseados mismos que se pueden ajustar a través de las ganancias del controlador [19]. La forma para reducir el sistema (3.1) a la Forma No Lineal Controlable por Bloques (FNLCB) es descrito por,

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, t) + \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_1, t) \mathbf{x}_2 + \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1, t) \quad (3.10)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}_i(\bar{\mathbf{x}}_i, t) + \mathbf{B}_i(\bar{\mathbf{x}}_i, t) \mathbf{x}_{i+1} + \mathbf{g}_i(\bar{\mathbf{x}}_i, t), \quad i = 2, \dots, r-1 \quad (3.11)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_r = \mathbf{f}_r(\bar{\mathbf{x}}_r, t) + \mathbf{B}_r(\bar{\mathbf{x}}_r, t) \mathbf{u} + \mathbf{g}_r(\bar{\mathbf{x}}_r, t) \quad (3.12)$$

donde el vector \mathbf{x} se descompone como $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r, \mathbf{x}_{r+1})^T$, $\bar{\mathbf{x}}_i = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i)^T$, $i = 2, \dots, r$, $\bar{\mathbf{x}}_i$ es un vector $n_i \times 1$, y los índices (n_1, n_2, \dots, n_r) definen la estructura del sistema y satisfacen la siguiente relación:

$$n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_r \leq m \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^r n_i = n \quad (3.13)$$

El vector \mathbf{x}_{i+1} se considera en cada i -ésimo bloque de (3.10)-(3.12) como control ficticio, y la matriz \mathbf{B}_i que aparece antes de este vector tiene rango pleno, esto es

$$\text{rango } \mathbf{B}_i = n_i \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X} \subset \mathbf{R}^n \quad \text{y} \quad t \in [0, \infty), \quad i = 1, \dots, r \quad (3.14)$$

El procedimiento para llevar el sistema (3.1) a la forma controlable por bloques basado en el método de transformación integral, así como las condiciones de existencia de la forma controlable por bloques, se explica en [20] y [21] respectivamente. Cabe mencionar que muchos sistemas físicos, en especial los electromecánicos poseen esta forma particular.

La relación (3.13) significa

$$n_i = n_{i+1} \quad (3.15)$$

ó

$$n_i < n_{i+1} \quad (3.16)$$

3.3 Control por bloques para sistemas con dinámica cero

Consideramos una clase de sistemas no lineales que se presentan en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= f_1(x_1, t) + B_1(x_1, t)x_2 \\
 \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, t) + B_2(x_1, x_2, t)x_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_i &= f_i(x_1, \dots, x_i, t) + B_i(x_1, \dots, x_i, t)x_{i+1} \quad i = 3, \dots, r-1 \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_r &= f_r(x_1, \dots, x_{r+1}, t) + B_r(x_1, \dots, x_{r+1}, t)u \\
 \dot{x}_{r+1} &= f_{r+1}(x_1, \dots, x_{r+1}, t) + B_{r+1}(x_1, \dots, x_{r+1}, t)u
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

con la salida

$$y = h(x) = x_1 \tag{3.18}$$

donde $y \in Y \subset \mathbf{R}^n$ es una función suave. Se dice que el sistema (3.17) está en la FNCB con dinámica cero si la matriz B_i que aparece antes del vector x_{i+1} satisface la condición (3.14).

Aplicando el cambio de variables, podemos encontrar la ley de control por modos deslizantes para el sistema (3.17), que asegura la estabilidad en el punto de equilibrio $x = 0$ del sistema en lazo cerrado, definiendo la siguiente proposición [9].

Proposición 3.1. *Suponga que en el sistema (3.17)*

- (1) $f_i(x_1, \dots, x_i, t)$ y $B_i(x_1, \dots, x_i, t)$ son funciones continuamente diferenciables de orden $(i-1)$, $i=1, \dots, r$ con respecto a todos los argumentos sobre el intervalo del tiempo $t \in [0, \infty)$, y todas las derivadas son acotadas;
- (2) La condición (3.14) se cumple, y
- (3) Se tiene la estructura (3.15).

Entonces existe una transformación difeomórfica

$$z = \Phi(x, t), \quad \Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_r)^T \tag{3.19}$$

una superficie

$$\sigma(x, t) = 0, \quad \sigma \in \mathbf{R}^{n_r} \tag{3.20}$$

y una ley de control discontinua

$$u = -u_0 \text{sign}(M(z, t)\sigma) \tag{3.21}$$

que garantiza modos deslizantes sobre la superficie (3.20) en tiempo finito, tal que el movimiento de modos deslizantes con respecto a la nueva variable z está descrito por un sistema reducido de orden $(n - n_r)$:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= K_1 z_1 + B_1 z_2 \\
\dot{z}_i &= K_i z_i + B_i z_{i+1} \\
\dot{z}_{r-1} &= K_{r-1} z_{r-1} \\
\dot{z}_{r+1} &= \bar{f}_{r+1}(z, t) + B_{r+1}(z, t) u_{eq}
\end{aligned} \tag{3.22}$$

donde $z = (z_1, \dots, z_r, z_{r+1})^T$, $z_i \in \mathbf{R}^{n_i}$, $i = 1, \dots, r+1$, $\bar{f}_r(z, x_{r+1}, t)$ es una función acotada, con $\sigma = z_r$ y todas las K_i son matrices Hurwitz, $M(z, t)$ es una matriz no singular tal que el rango $[MB_r] \neq 0$, y u_{eq} es el control equivalente calculado como una solución de la ecuación $\dot{z}_r = 0$.

Tomando la estructura (3.15), se introduce la siguiente transformación recursiva:

$$\begin{aligned}
z_1 &= x_1 := \Phi_1(x_1, t) \\
z_2 &= x_2 + B^{-1}(x_1, t)[f_1(x_1, t) - K_1 x_1] := \Phi_2(x_1, x_2, t) \\
z_3 &= x_3 + B_2^{-1}(x_1, x_2, t)[\bar{f}_2(x_1, x_2, t) - K_2 \Phi_2(x_1, x_2, t)] := \Phi_3(x_1, x_2, x_3, t) \\
&\vdots \\
z_{i+1} &= x_{i+1} + B_i^{-1}(x_1, \dots, x_i, t)[\bar{f}_i(x_1, \dots, x_i, t) - K_i \Phi_i(x_1, \dots, x_i, t)] := \Phi_{i+1}(x_1, \dots, x_{i+1}, t)
\end{aligned} \tag{3.23}$$

donde $i = 4, \dots, r-1$.

Prueba. La prueba es iterativa para obtener el cambio de variables (3.19) sobre la superficie (3.20), donde se desarrolla la dinámica de modos deslizantes descrita por el sistema (3.22). Suponga que los condiciones (1)-(3) se satisfacen. Bajo estas condiciones la transformación (3.19) puede ser encontrada paso a paso considerando el estado x_{i+1} , $i = 1, \dots, r-1$ como un control ficticio en el i -ésimo bloque del sistema (3.17) bajo el siguiente procedimiento.

Paso 1: Definimos

$$z_1 = x_1 := \Phi_1(x_1, t)$$

y al calcular su derivada tenemos,

$$\dot{z}_1 = f_1(x_1, t) + B_1(x_1, t)x_2 \tag{3.24}$$

entonces se elige x_2 como el control ficticio del primer bloque del sistema (3.17) de la siguiente forma:

$$x_2 = B_1^{-1}(x_1, t)[-f_1(x_1, t) + K_1 z_1] + z_2 \tag{3.25}$$

donde K_1 es una matriz Hurwitz y $B_1^{-1}(x_1, t)$ existe bajo la condición (3). Con el control ficticio x_2 (3.25) podemos obtener la nueva dinámica deseada para el primer bloque del sistema (3.24) eligiendo los valores propios de la matriz K_1 .

Con la transformación de variables (3.25), el primer bloque queda descrito en las nuevas variables z_1 y z_2 como

$$\dot{z}_1 = \mathbf{K}_1 z_1 + \mathbf{B}_1(z_1, t) z_2$$

La variable z_2 se obtiene a partir de (3.25) como

$$z_2 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}_1, t) [\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, t) - \mathbf{K}_1 \mathbf{x}_1] \equiv \Phi_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t)$$

Paso 2: Derivando z_2 sobre las trayectorias del sistema (3.17) resulta

$$\dot{z}_2 = \bar{\mathbf{f}}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) + \mathbf{B}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) \mathbf{x}_3, \quad (3.26)$$

donde

$$\bar{\mathbf{f}}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) = (\partial \Phi_2 / \partial \mathbf{x}_1)(\mathbf{f}_1 + \mathbf{B}_1 \mathbf{x}_2) + (\partial \Phi_2 / \partial \mathbf{x}_2) \mathbf{f}_2 + \partial \Phi_2 / \partial t$$

y \mathbf{x}_3 actúa como el control ficticio en (3.26). Ahora \mathbf{x}_3 se elige de la misma manera como en (3.25)

$$\mathbf{x}_3 = \mathbf{B}_2^{-1}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) [-\bar{\mathbf{f}}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) + \mathbf{K}_2 z_2] + z_3 \quad (3.27)$$

de tal forma que la nueva dinámica para z_2 resulta

$$\dot{z}_2 = \mathbf{K}_2 z_2 + \mathbf{B}_2(z_1, z_2, t) z_3$$

con \mathbf{K}_2 como una matriz Hurwitz.

La variable z_3 se obtiene a partir de (3.27) como

$$z_3 = \mathbf{x}_3 + \mathbf{B}_2^{-1}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) [\bar{\mathbf{f}}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) - \mathbf{K}_2 \Phi_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t)] \equiv \Phi_3(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, t) \quad (3.28)$$

Paso i: En este paso es posible demostrar que si tenemos, después de $(i-1)$ pasos, los bloques transformados del sistema (3.17) con las nuevas variables z_1, z_2, \dots, z_{i-1} (bajo la estructura (3.16)) de la forma

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \mathbf{K}_1 z_1 + \mathbf{B}_1(z_1, t) z_2 \\ \dot{z}_2 &= \mathbf{K}_2 z_2 + \mathbf{B}_2(z_1, z_2, t) z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{i-1} &= \mathbf{K}_{i-1} z_{i-1} + \mathbf{B}_{i-1}(z_1, \dots, z_{i-1}, t) z_i \end{aligned} \quad (3.29)$$

con

$$z_i = \Phi_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, t) \quad (3.30)$$

entonces en el i -ésimo paso del procedimiento de transformación, tendremos el i -ésimo bloque transformado con un nuevo vector de estado z_i de forma similar a (3.29). Para llevar acabo esto, tomamos la derivada de (3.30) a lo largo de las trayectorias de (3.17) resultando

$$\dot{z}_i = \bar{\mathbf{f}}_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, t) + \mathbf{B}_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, t) \mathbf{x}_{i+1}, \quad i = 3, \dots, r-1 \quad (3.31)$$

donde

$$\bar{f}_i = \sum_{j=1}^{i-1} (\partial\Phi_i/\partial x_j) [f_j + B_j x_{j+1}] + (\partial\Phi_i/\partial x_i) f_i + (\partial\Phi_i/\partial t)$$

donde el control ficticio x_{i+1} en (3.31) puede ser seleccionado similar a (3.25) de la forma

$$x_{i+1} = B_i^{-1} (x_1, \dots, x_i, t) [-\bar{f}_i (x_1, \dots, x_i, t) + K_i z_i] + z_{i+1} \quad (3.32)$$

con K_i como una matriz Hurwitz. Es decir, la ecuación (3.32) con (3.31) toma la misma forma como (3.29), esto es

$$\dot{z}_i = K_i z_i + B_i (z_1, \dots, z_i, t) z_{i+1}.$$

de (3.32) podemos obtener la transformación recursiva

$$z_{i+1} = x_{i+1} + B_i^{-1} (x_1, \dots, x_i, t) [\bar{f}_i (x_1, \dots, x_i, t) - K_i \Phi_i (x_1, \dots, x_i, t)] \equiv \Phi_{i+1} (x_1, \dots, x_{i+1}, t) \quad (3.33)$$

Paso r: En el último paso, calculando la derivada con respecto al tiempo de $z_r = \Phi_r (x_1, \dots, x_r, t)$, tenemos el último bloque

$$\dot{z}_r = \bar{f}_r (z, t) + B_r (z, t) u$$

donde

$$\bar{f}_r = \sum_{j=1}^{r-1} (\partial\Phi_r/\partial x_j) [f_j + B_j x_{j+1}] + (\partial\Phi_r/\partial x_r) f_r + (\partial\Phi_r/\partial t)$$

A partir de la transformación (3.23) se puede obtener la superficie de modos deslizantes (3.20) como

$$\sigma (x, t) \equiv z_r = \Phi_r (x_1, \dots, x_r, t). \quad (3.34)$$

De esta forma la transformación (3.23) reduce el sistema (3.17) a las nuevas variables de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= K_1 z_1 + B_1 z_2 \\ \dot{z}_2 &= K_2 z_2 + B_2 z_3 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_{r-1} &= K_{r-1} z_{r-1} + B_{r-1} \sigma \\ \dot{\sigma} &= \bar{f}_r (z, t) + B_r (z, t) u \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\dot{z}_{r+1} = \bar{f}_{r+1} (z, t) + B_{r+1} (z, t) u \quad (3.37)$$

donde $z = (z_1, \dots, z_r, z_{r+1})^T$, $z_{r+1} = x_{r+1}$, $\bar{f}_r (z, t)$ de la condición (1), es una función continuamente diferenciable y todas sus derivadas son acotadas, y $\bar{f}_{r+1} (z, t) = [\bar{f}_{r+1} (x, t)]_{x=\Phi^{-1}(z, t)}$

Control discontinuo: En orden de generar modo deslizante en (3.35)-(3.37), una selección natural de la variedad deslizante usando la transformación (3.23), es $\sigma(x,t) = 0$ definido por (3.34).

Entonces, tomando en cuenta la acotación (3.2), la siguiente estrategia de control discontinua, es propuesta:

$$u = -u_0 \text{sign}(B_r^T \sigma) \quad (3.38)$$

Proposición 3.2: La ley de control (3.38) garantiza convergencia del movimiento del sistema en lazo cerrado sobre la variedad $\sigma = 0$ en un tiempo finito definido como

$$t_s < t_0 + \frac{1}{\eta} \|\sigma(t_0)\|_2, \quad \eta > 0 \quad (3.39)$$

Prueba: Para probar la proposición 3.2 elegimos una función definida positiva,

$$V = \frac{1}{2} \sigma^T \sigma \quad (3.40)$$

como la función candidata de Lyapunov. La derivada de (3.40) a lo largo de (3.36) es

$$\dot{V} = \sigma^T \bar{f}_r(z,t) - u_0 \sigma^T B_r \text{sign}(B_r^T \sigma)$$

Se usa la relación $\sigma^T \text{sign}(\sigma) = \|\sigma\|_1$ y $\|\sigma\|_1 \geq \|\sigma\|_2$, así tenemos,

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sigma^T B_r B_r^{-1} \bar{f}_r - u_0 \|\sigma^T B_r\|_2 \\ &\leq -\|\sigma^T B_r\|_2 \left[u_0 - \|B_r^{-1} \bar{f}_r\|_2 \right] \end{aligned}$$

En el siguiente dominio:

$$\|B_r^{-1} \bar{f}_r\|_2 \leq r_0, \quad r_0 < u_0 \quad (3.41)$$

la derivada,

$$\dot{V} \leq -q_0 \|\sigma^T B_r\|_2, \quad q_0 = u_0 - r_0,$$

es negativa y asegura la convergencia del vector de estado a la variedad $\sigma = 0$. En orden de demostrar que esta convergencia es finita, primero asumimos que $\|B_r^{-1}\|_2 \leq b_0$, y utilizando la siguiente relación:

$$\|\sigma^T\|_2 = \|\sigma^T B_r B_r^{-1}\|_2 \leq \|\sigma^T B_r\|_2 \|B_r^{-1}\|_2 \leq b_0 \|\sigma^T B_r\|_2$$

entonces $\|\sigma^T B_r\|_2 \geq \frac{1}{b_0} \|\sigma^T\|_2$ Por lo tanto,

$$\dot{V} \leq -\beta \|\sigma\|_2, \quad \beta = \frac{q_0}{b_0}, \quad \text{ó}$$

de $V = \frac{1}{2} \|\sigma\|_2^2$ (3.40) despejamos $\|\sigma\|_2 = \sqrt{2V}$ y tenemos,

$$\dot{V} \leq -\beta \sqrt{2V} \quad (3.42)$$

Utilizando el Lema de Comparación [22] podemos estimar la cota superior para cualquier solución de la desigualdad diferencial (3.42) como:

$$V(t) < \frac{1}{2} \left(\sqrt{2V(t_0)} - \beta(t-t_0) \right)^2,$$

debido a que,

$$\|\sigma(t)\|_2 < \|\sigma(t_0)\|_2 - \beta(t-t_0).$$

Por lo tanto $\|\sigma(t)\|_2$ se desvanece en un tiempo finito,

$$t_s < t_0 + \frac{1}{\beta} \|\sigma(t_0)\|_2$$

y el después de este tiempo el modo deslizante inicia sobre la variedad $\sigma = 0$.

Ahora cuando el movimiento de modos deslizantes ocurre, de acuerdo al método de control equivalente [8], tenemos $\dot{\sigma} = 0$ y $\sigma = 0$, y su trayectoria es descrita por el sistema de orden reducido $(n-n_r)$ (3.22). Esto concluye la prueba. ■

Ahora se investigan las condiciones bajo las cuales el punto de equilibrio del sistema (3.17) con el control (3.38) es asintóticamente estable.

Se efectúa la siguiente redefinición: $\xi \equiv (\xi_1, \dots, \xi_{r-1})^T = (z_1, \dots, z_{r-1})$ y $\eta = z_{r+1}$, y el sistema (3.22) se representa como

$$\dot{\xi} = A_1 \xi + g(\xi, t) \quad (3.43)$$

$$\dot{\eta} = q(\xi, \eta, t) \quad (3.44)$$

donde $q(\xi, \eta, t) = \left[\bar{f}_{r+1}(z, t) - B_{r+1}(z, t) B_r^{-1}(z, t) \bar{f}_r(z, t) \right]_{\sigma=0}$ y

$$A_1 = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & K_{r-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & K_{r-1} \end{bmatrix}$$

$$g(\xi, t) = \begin{bmatrix} B_1(\xi_1) \xi_2 \\ B_2(\xi_1, \xi_2) \xi \\ \vdots \\ B_{r-2}(\xi_1, \dots, \xi_{r-2}) \xi_{r-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ahora definimos

$$D_1 = \{ \xi \in R^{n-n_r-n_{r+1}} \mid \|\xi\|_2 \leq r_1 \} \quad y \quad D_2 = \{ \eta \in R^{n_{r+1}} \mid \|\eta\|_2 \leq r_2 \}$$

con constantes positivas r_1 y $r_2 \quad \forall [0, \infty) \times D_1 \times D_2$.

El sistema (3.43) es autónomo en el sentido que no depende de la variable η . Podemos considerar a este sistema como un sistema lineal con una perturbación no lineal que se desvanece en $g(0, t) = 0$.

La siguiente suposición sobre la cota para el término de perturbación desconocido en (3.43) se enuncian como sigue:

H.0. Existe una constante positiva γ tal que

$$\|g(\xi, t)\|_2 \leq \gamma \|\xi\|_2 \quad (3.45)$$

para todo $t \geq 0$ y toda $\xi \in R^{n-n_r-n_{r+1}}$.

Sabemos que A_1 es Hurwitz, entonces existe una solución única $P_1 = P_1^T > 0$ de la ecuación de Lyapunov

$$P_1 A_1 + A_1^T P_1 = -Q_1$$

para $Q_1 = Q_1^T > 0$. En este caso la forma cuadrática $V_1 = \xi^T P_1 \xi$ es la función de Lyapunov, con las siguientes propiedades

$$\lambda_{\min}(P_1) \|\xi\|_2^2 \leq \xi^T P_1 \xi \leq \lambda_{\max}(P_1) \|\xi\|_2^2 \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial V_1(\xi, t)}{\partial \xi} A_1 \xi = -\xi^T Q_1 \xi \leq -\lambda_{\min}(Q_1) \|\xi\|_2^2 \quad (3.47)$$

$$\left\| \frac{\partial V_1(\xi, t)}{\partial \xi} \right\|_2 = 2 \|\xi^T P_1\|_2 \leq 2 \lambda_{\max}(P_1) \|\xi\|_2. \quad (3.48)$$

Tomando la derivada de V_1 sobre las trayectorias de (3.43) satisface

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq -\lambda_{\min}(Q_1) \|\xi\|_2^2 + 2 \lambda_{\max}(P_1) \gamma \|\xi\|_2^2 \\ &\leq -[\lambda_{\min}(Q_1) - 2 \lambda_{\max}(P_1) \gamma] \|\xi\|_2^2 \\ &\leq -\delta \|\xi\|_2^2 \end{aligned} \quad (3.49)$$

De la desigualdad (3.49), tenemos

$$\lambda_{\min}(Q_1) - 2 \lambda_{\max}(P_1) \gamma \geq \delta$$

Por lo tanto resulta

$$\gamma \leq \frac{\lambda_{\min}(Q_1) - \delta}{2 \lambda_{\max}(P_1)}$$

De (3.46) podemos decir

$$\frac{V_1}{\lambda_{\max}(P_1)} \leq \|\xi\|_2^2$$

Sustituyendo la desigualdad anterior en (3.49) resulta

$$\dot{V}_1 \leq -\frac{\delta}{\lambda_{\max}(P_1)} V_1 \quad (3.50)$$

La solución en el tiempo de (3.50) es

$$V_1(t) \leq V_1(t_s) e^{-\frac{\delta}{\lambda_{\max}(\mathbf{P}_1)}(t-t_s)}$$

donde t_s es el tiempo inicial del movimiento de los modos deslizantes. Utilizando de nuevo (3.46), tenemos que la solución del sistema (3.43) es

$$\begin{aligned} \|\xi\|_2^2 &\leq \frac{1}{\lambda_{\min}(\mathbf{P}_1)} V_1(t) \\ &\leq \frac{1}{\lambda_{\min}(\mathbf{P}_1)} V_1(t_s) e^{-\frac{\delta}{\lambda_{\max}(\mathbf{P}_1)}(t-t_s)} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Sabemos que $V_1(t_s) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{P}_1) \|\xi(t_s)\|_2^2$ y sustituyendo en (3.51) resulta

$$\|\xi\|_2 \leq h_1 \|\xi(t_s)\|_2 e^{-h_2(t-t_s)} \quad (3.52)$$

donde $h_1 = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\mathbf{P}_1)}{\lambda_{\min}(\mathbf{P}_1)}}$ y $h_2 = \frac{\delta}{2\lambda_{\max}(\mathbf{P}_1)}$. Entonces tenemos

$$\|\xi\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad t \rightarrow \infty$$

y la dinámica del sistema (3.43)-(3.44) dentro del subespacio $\{\xi = 0, \eta \in D_2 \in \mathbb{R}^{n_r+1}\}$ se representa por la ecuación:

$$\dot{\eta} = \mathbf{q}(0, \eta, t) \quad (3.53)$$

que está definida como la *dinámica cero*.

Ahora podemos establecer las siguientes hipótesis:

H.1 El sistema no lineal (3.43)-(3.44) es exponencialmente de fase mínima tal que $\eta = 0$ es un punto de equilibrio localmente exponencialmente estable de dinámica cero (3.53).

H.2 El mapeo $\mathbf{q} : D_2 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n_r+1}$ es continuo en tiempo t y localmente Lipschitz en ξ y η tal que

$$\|\mathbf{q}(\xi, \eta, t) - \mathbf{q}(0, \eta, t)\|_2 \leq L \|\xi\|_2 \quad \forall \xi \in D_1, \quad \forall \eta \in D_2, \quad \forall t \geq t_0$$

donde L es una constante de Lipschitz.

Si la hipótesis H.1 se satisface, entonces para el sistema (3.53) por el teorema converso de Lyapunov [22], existe una función de Lyapunov, $V_2(\eta, t)$ tal que satisface las siguientes propiedades

$$c_1 \|\eta\|_2^2 \leq V_2(\eta, t) \leq c_2 \|\eta\|_2^2 \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial V_2(\eta, t)}{\partial t} + \frac{\partial V_2(\eta, t)}{\partial t} \mathbf{q}(0, \eta, t) \leq -c_3 \|\eta\|_2^2 \quad (3.55)$$

$$\left\| \frac{\partial V_2(\boldsymbol{\eta}, t)}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right\|_2 \leq c_4 \|\boldsymbol{\eta}\|_2 \quad (3.56)$$

en $[0, \infty) \times D_1 \times D_2$, con constantes positivas c_1, c_2, c_3 y c_4 .

La siguiente proposición [22] establece la propiedad de estabilidad de la dinámica de modos deslizantes (3.43)-(3.44).

Proposición 3.3: *Supóngase que se satisfacen las hipótesis H.1 y H.2, y*

$$\|\boldsymbol{\xi}(t_s)\|_2 < \frac{r_2}{h_1} \sqrt{\frac{c_1}{c_2} \frac{c_3 \theta}{c_4 L}}, \quad 0 < \theta < 1 \quad (3.57)$$

$$\|\boldsymbol{\eta}(t_s)\|_2 < r_2 \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \quad (3.58)$$

entonces, la solución $(\|\boldsymbol{\xi}(t)\|, \|\boldsymbol{\eta}(t)\|)^T$ del sistema (3.43)-(3.44) converge a cero exponencialmente.

Prueba. La convergencia exponencial de $\boldsymbol{\xi}(t)$ del subsistema autónomo (3.43) fue establecida anteriormente en (3.52). Se necesita ahora establecer la convergencia de la solución $\boldsymbol{\eta}(t)$ del subsistema (3.44) donde el vector $\boldsymbol{\xi}(t)$ se considera como la entrada. Para esto podemos usar la función $V_2(\boldsymbol{\eta}, t)$ con las propiedades (3.54)-(3.56). La derivada de $V_2(\boldsymbol{\eta}, t)$ con respecto al tiempo sobre las trayectorias del subsistema (3.44), es:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \frac{\partial V_2(\boldsymbol{\eta}, t)}{\partial t} + \frac{\partial V_2(\boldsymbol{\eta}, t)}{\partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{q}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, t) \\ &= \frac{\partial V_2(\boldsymbol{\eta}, t)}{\partial t} + \frac{\partial V_2(\boldsymbol{\eta}, t)}{\partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{q}(0, \boldsymbol{\eta}, t) + \frac{\partial V_2(\boldsymbol{\eta}, t)}{\partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{q}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, t) - \frac{\partial V_2(\boldsymbol{\eta}, t)}{\partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{q}(0, \boldsymbol{\eta}, t) \end{aligned}$$

Utilizando la condición (3.55) tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq -c_3 \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2 + \frac{\partial V_2(\boldsymbol{\eta}, t)}{\partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{q}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, t) - \frac{\partial V_2(\boldsymbol{\eta}, t)}{\partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{q}(0, \boldsymbol{\eta}, t) \\ &\leq -c_3 \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2 + \left\| \frac{\partial V_2(\boldsymbol{\eta}, t)}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right\|_2 \|\mathbf{q}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, t) - \mathbf{q}(0, \boldsymbol{\eta}, t)\|_2 \end{aligned}$$

Bajo la hipótesis H.2 la derivada,

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq -c_3 \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2 + c_4 L \|\boldsymbol{\eta}\|_2 \|\boldsymbol{\xi}\|_2 \\ &\leq -c_3 \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2 + \theta c_3 \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2 - \theta c_3 \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2 + c_4 L \|\boldsymbol{\eta}\|_2 \|\boldsymbol{\xi}\|_2 \\ &\leq -(1-\theta) c_3 \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2 - \|\boldsymbol{\eta}\|_2 \left(\theta c_3 \|\boldsymbol{\eta}\|_2 - c_4 L \|\boldsymbol{\xi}\|_2 \right) \\ &\leq -(1-\theta) c_3 \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2 \end{aligned} \quad (3.59)$$

es negativa en el dominio

$$\|\boldsymbol{\eta}\|_2 > \frac{c_4 L}{\theta c_3} \|\boldsymbol{\xi}\|_2 \equiv \mu(t) \quad (3.60)$$

De (3.54) podemos decir

$$\frac{V_2}{c_2} \leq \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2$$

Sustituyendo la desigualdad anterior en (3.59) resulta

$$\dot{V}_2 \leq -\frac{(1-\theta)c_3}{c_2} V_2 \quad (3.61)$$

Utilizando el Lema de Comparación [22] obtenemos la solución en el tiempo de (3.61) es

$$V_2(t) \leq V_2(t_s) e^{-\frac{(1-\theta)c_3}{c_2}(t-t_s)}$$

donde $V_2(t_s)$ es la condición inicial de los modos deslizantes, entonces esa es la condición inicial para este estudio. Eligiendo de (3.54)

$$\|\boldsymbol{\eta}(t)\|_2^2 \leq \frac{1}{c_1} V_2(t)$$

resulta

$$\|\boldsymbol{\eta}(t)\|_2^2 \leq \frac{1}{c_1} V_2(t_s) e^{-\frac{(1-\theta)c_3}{c_2}(t-t_s)} \quad (3.62)$$

Sustituyendo $V_2(t_s) \leq c_2 \|\boldsymbol{\eta}(t_s)\|_2^2$ en (3.62) resulta

$$\|\boldsymbol{\eta}(t)\|_2 \leq \gamma_1 \|\boldsymbol{\eta}(t_s)\|_2 e^{-\gamma_2(t-t_s)}, \quad \forall t_s \leq t < t_1 \quad (3.63)$$

$$\text{donde } \gamma_1 = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \text{ y } \gamma_2 = \frac{(1-\theta)c_3}{2c_2}$$

Si (3.58) se cumple, la solución de (3.63) pertenece al dominio $D_2 = \{\boldsymbol{\eta} \in R^{n_r+1} \mid \|\boldsymbol{\eta}\|_2 \leq r_2\}$ para todo $t_s \leq t < t_1$.

Ahora utilizando (3.52) el dominio (3.60) se presenta como

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \frac{c_4 L}{\theta c_3} \|\boldsymbol{\xi}\|_2 \\ &\leq \frac{c_4 L}{\theta c_3} h_1 \|\boldsymbol{\xi}(t_s)\|_2 e^{-h_2(t-t_s)} \end{aligned}$$

y si la condición (3.57) se cumple entonces tenemos

$$\mu(t) < r_2 \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} e^{-h_2(t-t_s)} \quad (3.64)$$

Por lo tanto

$$\mu(t) < r_2 \sqrt{\frac{c_1}{c_2}}, \quad \forall t \geq t_s$$

y por el corolario 5.3 [22] tenemos que

$$\|\eta(t)\|_2 \leq \mu(t) \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}, \quad \forall t \geq t_1 \geq t_s \quad (3.65)$$

Sustituyendo (3.64) en (3.65) resulta

$$\|\eta(t)\|_2 \leq r_2 e^{-h_2(t-t_s)}, \quad \forall t \geq t_1 \quad (3.66)$$

Las ecuaciones (3.63) y (3.66) en conjunto dan la solución estimada para $\|\eta(t)\|_2$ completamente para todo $t \geq t_s$, es decir

$$\|\eta(t)\|_2 \leq \gamma_1 \|\eta(t_s)\|_2 e^{-\gamma_2(t-t_s)} + r_2 e^{-h_2(t-t_s)}, \quad \forall t \geq t_s \quad (3.67)$$

Las ecuaciones (3.52) y (3.66) presenta la solución estimada del sistema (3.43)-(3.44), concluyendo así que la solución $(\xi(t), \eta(t))$ converge exponencialmente a cero. ■

Finalmente el análisis realizado en la sección 3.3 se puede resumir de la siguiente forma:

Corolario 3.1. *Supongamos que se cumplen*

- A** *Las condiciones de las proposiciones 3.1 y 3.3;*
- B** *Las hipótesis H0, H1 y H2.*

Entonces la ley de control (3.38) con $M(z,t) = \mathbf{B}_r^T(z,t)$ y la función de conmutación (3.34) bajo la condición $r_0 < u_0$ en (3.41) estabiliza el sistema (3.17)

3. 4 Control por bloques para sistemas con perturbaciones

En secciones anteriores el controlador fue diseñado para casos cuando consideramos que los términos del lado derecho del sistema son funciones conocidas. Realmente, todos los modelos matemáticos, obtenidos usando leyes físicas o técnicas de identificación, contienen incertidumbres por errores de modelado y/o de perturbaciones externas desconocidas. Se sabe, que el controlador con modos deslizantes asegura trayectorias de movimiento invariante solo ante perturbaciones, que pertenecen al subespacio del control (“matching condition”). Es importante resolver el problema de diseño de superficies deslizantes para sistemas no lineales que consideren las incertidumbres que no se satisfacen de las condiciones anteriores.

Se considera el caso de sistemas no lineales sujetos a perturbaciones de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x,t) + B(x,t)u + D(x,t)w(t) \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{3.68}$$

donde $x \in X \subset \mathbf{R}^n$ es el vector de estados, $u \in U \subset \mathbf{R}^m$ es el vector de control, $y \in Y \subset \mathbf{R}^p$ es la salida regulada, w es un disturbio originado por un sistema externo

$$\dot{w} = s(w)\tag{3.69}$$

Los campos vectores f , s y las columnas de B y D son campos vectoriales acotados y suficientemente suaves de clase $C_{[0,\infty)}^\infty$, con $f(0,t) = 0$, $h(0) = 0$, $s(0) = 0$

La salida y debe seguir a una señal de referencia $r(t)$ generada por un exosistema descrito por

$$\dot{r} = g(r), \quad g(0) = 0\tag{3.70}$$

Suponemos que el sistema (3.68) se presenta (posiblemente después de una transformación no lineal) en la llamada forma no lineal controlable por bloques (FNLCB) sujeto a perturbaciones:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1,t) + B_1(x_1,t)x_2 + D_1(x_1,t)w(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_i &= f_i(x_1,\dots,x_i,t) + B_i(x_1,\dots,x_i,t)x_{i+1} + D_i(x_1,\dots,x_i,t)w(t), \quad i = 2,\dots,r-1 \\ &\vdots \\ \dot{x}_r &= f_r(x_1,\dots,x_{r+1},t) + B_r(x_1,\dots,x_{r+1},t)u + D_r(x_1,\dots,x_{r+1},t)w(t) \\ \dot{x}_{r+1} &= f_{r+1}(x_1,\dots,x_{r+1},t) + B_{r+1}(x_1,\dots,x_{r+1},t)u + D_{r+1}(x_1,\dots,x_{r+1},t)w(t)\end{aligned}\tag{3.71}$$

con la salida

$$y = h(x) = x_1\tag{3.72}$$

donde $x = (x_1,\dots,x_r,x_{r+1})^T$, $x_i \in X_i \subset \mathbf{R}^{n_i}$, y los índices (n_1,n_2,\dots,n_r) definen la estructura del sistema y satisfacen la siguiente relación:

$$n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_r \leq m \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^r n_i = n\tag{3.73}$$

El vector x_{i+1} se considera en cada i -ésimo bloque de (3.71) como control ficticio, y la matriz B_i que aparece antes de este vector tiene rango pleno, esto es

$$\text{rango } B_i = n_i \quad \forall x \in X \subset \mathbf{R}^n \text{ y } t \in [0, \infty), \quad i = 1, \dots, r \quad (3.74)$$

Vamos a considerar el caso cuando la estructura del sistema (3.68), transformado a la forma (3.71), se presenta por

$$n_1 = n_2 < \dots < n_r = m \quad (3.75)$$

En síntesis, el problema consiste en el diseño de la estrategia de control para un sistema no lineal (3.71), de manera que la salida y siga a la referencia $q(\omega)$, la cual sea invariante a las perturbaciones w , producida por el sistema externo (3.70).

Tomando en cuenta la estructura (3.75) tenemos que $n_1 = n_2$, por lo tanto $B_1(x_1, t)$ es cuadrada y existe su inversa debido a (3.74). Se define el error de control como

$$z_1 = x_1 - r = \Phi_1(x_1, r) \quad (3.76)$$

y al calcular su derivada tenemos,

$$\dot{z}_1 = f_1(x_1, t) + B_1(x_1, t)x_2 + d_1(x_1, w, r, t) \quad (3.77)$$

donde $d_1(x_1, w, r, t) = D_1(x_1, t)w - g(r)$.

Entonces se elige x_2 como el control ficticio del sistema (3.77) de la siguiente forma:

$$x_2 = -B_1^{-1}(x_1, t)[f_1(x_1, t) + d_1(x_1, w, r, t)] + B_1^{-1}(x_1, t)[-k_1 z_1 + \dot{z}_1] \quad (3.78)$$

donde z_2 es un vector de variables nuevas de $n_2 \times 1$ y k_1 es una constante positiva.

Con la transformación de variables (3.78), el primer bloque queda descrito en las nuevas variables z_1 y z_2 como

$$\dot{z}_1 = -k_1 z_1 + z_2$$

La variable z_2 se obtiene a partir de (3.78) como

$$z_2 = f_1(x_1, t) + B_1(x_1, t)x_2 + d_1(x_1, w, r, t) + k_1(x_1 - r) \equiv \Phi_2(x_1, x_2, w, r, t) \quad (3.79)$$

Ahora derivando (3.79) a lo largo de las trayectorias (3.69), (3.70) y (3.71) resulta

$$\dot{z}_2 = \bar{f}_2(x_1, x_2, t) + \bar{B}_2(x_1, x_2, t)x_3 + d_2(x_1, x_2, w, r, t) \quad (3.80)$$

donde

$$\bar{f}_2 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial t}, \quad d_2 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} D_1 w + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} D_2 w + \frac{\partial \Phi_2}{\partial w} s + \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} g, \quad \bar{B}_2 = B_1 B_2$$

Se puede observar que el rango $\bar{B}_2 = \text{rango } B_2 = n_2$. Suponemos ahora que $n_2 < n_3$, entonces la matriz $\bar{B}_2(x_1, x_2, t)$ no es cuadrada, y el control ficticio x_3 en (3.80) se selecciona de manera similar a (3.78)

$$\mathbf{x}_3 = -\bar{\mathbf{B}}_2^+ (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) [\bar{\mathbf{f}}_2 (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) + \mathbf{d}_2 (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t)] + \bar{\mathbf{B}}_2^+ (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) [-k_2 \mathbf{z}_2 + \mathbf{E}_{2,1} \mathbf{z}_3] \quad (3.81)$$

donde \mathbf{z}_3 es un vector de variables nuevas de $n_3 \times 1$, $k_1 > 0$, $\bar{\mathbf{B}}_2^+$ denota la pseudo inversa derecha de $\bar{\mathbf{B}}_2$ y $\mathbf{E}_{2,1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_2} & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{E}_{2,1} \in \mathbf{R}^{n_2 \times n_3}$, \mathbf{I}_{n_2} es la matriz identidad. De esta forma, la ecuación (3.80) con (3.81) resulta en la forma

$$\dot{\mathbf{z}}_2 = -k_2 \mathbf{z}_2 + \mathbf{E}_{2,1} \mathbf{z}_3$$

Ahora suponemos lo siguiente:

H1. Los elementos de la matriz $\bar{\mathbf{B}}_2$ se pueden ordenar de tal forma que la matriz cuadrada,

$$\tilde{\mathbf{B}}_3 (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) := \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_2 (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) \\ \mathbf{E}_{2,2} \end{bmatrix}$$

con matriz $\mathbf{E}_{2,2} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_{n_3-n_2} \end{bmatrix}$ tenga rango n_3 , $\mathbf{E}_{2,2} \in \mathbf{R}^{(n_3-n_2) \times n_3}$, $\mathbf{I}_{n_3-n_2}$ es una matriz identidad.

Usando (3.81) la variable \mathbf{z}_3 puede ser obtenida como:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_3 &= \tilde{\mathbf{B}}_3 (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) \mathbf{x}_3 + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}_2 (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) + \mathbf{d}_2 (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t) + k_2 \Phi_2 (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &:= \Phi_3 (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (3.82)$$

Para el próximo paso se toma la derivada de \mathbf{z}_3 y se plantea de la misma manera que en los pasos anteriores.

Siguiendo el mismo procedimiento para los restantes i bloques, $i = 3, \dots, r-1$, para el caso $n_i < n_{i+1}$ y bajo el supuesto **H1** para las matrices $\bar{\mathbf{B}}_i$, tenemos que el control ficticio es de la forma

$$\mathbf{x}_{i+1} = -\bar{\mathbf{B}}_i^+ (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, t) [\bar{\mathbf{f}}_i (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, t) + \mathbf{d}_i (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, t)] + \bar{\mathbf{B}}_i^+ (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, t) [-k_i \mathbf{z}_i + \mathbf{E}_{i,1} \mathbf{z}_{i+1}]$$

donde $\bar{\mathbf{B}}_i^+$ es la pseudo inversa por la derecha de $\bar{\mathbf{B}}_i = \tilde{\mathbf{B}}_{i-1} \mathbf{B}_i$ y $\mathbf{E}_{i,1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_i} & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{E}_{i,1} \in \mathbf{R}^{n_i \times n_{i+1}}$, \mathbf{I}_{n_i} es una matriz identidad. Las variables \mathbf{z}_{i+1} obtenidas forman una transformación no lineal de las variables de estado de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1 &= \mathbf{x}_1 - \mathbf{r} = \Phi_1 (\mathbf{x}_1, \mathbf{r}) \\ \mathbf{z}_2 &= \mathbf{f}_1 (\mathbf{x}_1, t) + \mathbf{B}_1 (\mathbf{x}_1, t) \mathbf{x}_2 + \mathbf{d}_1 (\mathbf{x}_1, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t) + k_1 (\mathbf{x}_1 - \mathbf{r}) := \Phi_2 (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t) \\ \mathbf{z}_3 &= \tilde{\mathbf{B}}_3 (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) \mathbf{x}_3 + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}_2 (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) + \mathbf{d}_2 (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t) + k_2 \Phi_2 (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &:= \Phi_3 (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t) \\ \mathbf{z}_{i+1} &= \tilde{\mathbf{B}}_{i+1} (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i+1}, t) \mathbf{x}_{i+1} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}_i (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i+1}, t) + \mathbf{d}_i (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t) + k_i \Phi_i (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &:= \Phi_{i+1} (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (3.83)$$

donde $i = 3, \dots, r-1$, \mathbf{z}_i es un vector de variables nuevas de $n_i \times 1$, k_i es una constante positiva,

$\tilde{\mathbf{B}}_{i+1} := \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_i \\ \mathbf{E}_{i,2} \end{bmatrix}$, $\mathbf{E}_{i,2} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_{n_{i+1}-n_i} \end{bmatrix}$, $\mathbf{E}_{i,2} \in \mathbf{R}^{(n_{i+1}-n_i) \times n_{i+1}}$ Entonces, el sistema en las nuevas

coordenadas se presenta de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_1 &= -k_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 \\ \dot{\mathbf{z}}_i &= -k_i \mathbf{z}_i + \mathbf{E}_{i,1} \mathbf{z}_{i+1}, & i = 2, \dots, r-1 \\ \dot{\mathbf{z}}_r &= \bar{\mathbf{f}}_r(\mathbf{z}, \mathbf{x}_{r+1}, t) + \bar{\mathbf{B}}_r(\mathbf{z}, \mathbf{x}_{r+1}, t) \mathbf{u} + \mathbf{d}_r(\mathbf{z}, \mathbf{x}_{r+1}, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t) \\ \dot{\mathbf{z}}_{r+1} &= \bar{\mathbf{f}}_{r+1}(\mathbf{z}, \mathbf{x}_{r+1}, t) + \bar{\mathbf{B}}_{r+1}(\mathbf{z}, \mathbf{x}_{r+1}, t) \mathbf{u} + \bar{\mathbf{D}}_{r+1}(\mathbf{z}, \mathbf{x}_{r+1}, t) \mathbf{w}(t) \end{aligned} \quad (3.84)$$

donde $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_r)^T$, $\bar{\mathbf{B}}_r = \tilde{\mathbf{B}}_{r-1} \mathbf{B}_r$, $\text{rango } \bar{\mathbf{B}}_r = \text{rango } \mathbf{B}_r = n_r$,

Ahora se elige la ley de control discontinua como

$$\mathbf{u} = -k_r \bar{\mathbf{B}}_r^{-1} \text{sign}(\mathbf{z}_r) \quad (3.85)$$

Utilizando (3.40) como la función de Lyapunov candidata de la misma manera que en la proposición 3.2, podemos concluir que el control (3.85) asegura estabilidad de modos deslizantes si

$$k_r \geq \left\| \bar{\mathbf{B}}_r^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{x}_{r+1}, t) \mathbf{u}_{eq} \right\|_2 \quad (3.86)$$

donde \mathbf{u}_{eq} es el control equivalente [8] calculado cuando $\dot{\mathbf{z}}_r = 0$ de la siguiente forma:

$$\mathbf{u}_{eq} = -\bar{\mathbf{B}}_r^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{x}_{r+1}, t) \left[\bar{\mathbf{f}}_r(\mathbf{z}, \mathbf{x}_{r+1}, t) + \mathbf{d}_r(\mathbf{z}, \mathbf{x}_{r+1}, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t) \right] \quad (3.87)$$

Sustituyendo (3.87) en (3.84), la dinámica de modos deslizantes sobre la variedad $\mathbf{z}_r = 0$, está gobernada por el sistema de orden reducido

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_1 &= -k_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 \\ \dot{\mathbf{z}}_i &= -k_i \mathbf{z}_i + \mathbf{E}_{i,1} \mathbf{z}_{i+1}, & i = 2, \dots, r-2 \\ \dot{\mathbf{z}}_{r-1} &= -k_r \mathbf{z}_{r-1} \\ \dot{\mathbf{z}}_{r+1} &= \hat{\mathbf{f}}_{r+1}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{r-1}, 0, \mathbf{z}_{r+1}, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (3.88)$$

donde $\mathbf{z}_{r+1} = \mathbf{x}_{r+1}$,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{f}}_{r+1} &= \bar{\mathbf{f}}_{r+1}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{r-1}, 0, \mathbf{z}_{r+1}, t) + \bar{\mathbf{D}}_{r+1}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{r-1}, 0, \mathbf{z}_{r+1}, t) \mathbf{w}(t) \\ &\quad - \bar{\mathbf{B}}_{r+1}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{r-1}, 0, \mathbf{z}_{r+1}, t) \bar{\mathbf{B}}_r^{-1}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{r-1}, 0, \mathbf{z}_{r+1}, t) \\ &\quad \left[\bar{\mathbf{f}}_r(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{r-1}, 0, \mathbf{z}_{r+1}, t) + \mathbf{d}_r(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{r-1}, 0, \mathbf{z}_{r+1}, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t) \right] \end{aligned}$$

Se efectúa la siguiente redefinición: $\boldsymbol{\xi}^T = (\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{r-1})$ y $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{z}_{r+1}$, y el sistema (3.88) se representa como

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\xi} \quad (3.89)$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{q}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t) \quad (3.90)$$

donde $\mathbf{q} = \hat{\mathbf{f}}_{r+1}$ y

$$A_1 = \begin{bmatrix} -k_1 I_{n_1} & I_{n_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 I_{n_2} & E_{2,1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_{r-2} I_{n_{r-2}} & E_{r-2,1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -k_{r-1} I_{n_{r-1}} \end{bmatrix}$$

Ahora definimos los siguientes dominios

$$D_1 = \left\{ \xi \in R^{n-n_r-n_{r+1}} \mid \|\xi\|_2 \leq r_1 \right\} \quad \text{y} \quad D_2 = \left\{ \eta \in R^{n_{r+1}} \mid \|\eta\|_2 \leq r_2 \right\}$$

Entonces, como en la sección anterior, el sistema (3.89) es autónomo con respecto a la variable η , y la matriz A_1 es Hurwitz, por lo que la solución de este sistema está definido como

$$\|\xi(t)\|_2 \leq h_1 \|\xi(t_s)\|_2 e^{-h_2(t-t_s)} \quad (3.91)$$

donde $h_1 = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P_1)}{\lambda_{\min}(P_1)}}$ y $h_2 = \frac{1}{2\lambda_{\max}(P_1)}$. y existe una solución única $P_1 = P_1^T > 0$ de la

ecuación de Lyapunov

$$P_1 A_1 + A_1^T P_1 = -Q_1$$

para $Q_1 = Q_1^T > 0$, y t_s es el tiempo de inicio de los modos deslizantes.

Y la dinámica del sistema (3.89)-(3.90) dentro del subespacio $\{\xi = 0, \eta \in D_2 \in R^{n_{r+1}}\}$ se representa por la ecuación:

$$\dot{\eta} = q(0, \eta, w, r, t) \quad (3.92)$$

que está definida como la *dinámica cero*.

Ahora podemos establecer las siguientes hipótesis:

A.1 La dinámica de (3.92) converge exponencialmente a un conjunto compacto

$$\|\eta\|_2 \leq b_1$$

A.2 El mapeo $q : D_2 \times [0, \infty) \rightarrow R^{n_{r+1}}$ es continuo en tiempo t y localmente Lipschitz en ξ y η tal que

$$\|q(\xi, \eta, w, r, t) - q(0, \eta, w, r, t)\|_2 \leq L \|\xi\|_2 \quad \forall \xi \in D_1, \quad \forall \eta \in D_2, \quad \forall t \geq t_0$$

donde $b_1 > 0$ y L es una constante de Lipschitz.

Si la hipótesis A.1 se satisface, entonces para el sistema (3.92) por el teorema converso de Lyapunov [22], existe una función de Lyapunov, $V(\eta, t)$ tal que satisface las siguientes propiedades

$$c_1 \|\eta\|_2^2 \leq V(\eta, t) \leq c_2 \|\eta\|_2^2 \quad (3.93)$$

$$\frac{\partial V(\eta, t)}{\partial t} + \frac{\partial V(\eta, t)}{\partial \eta} q(0, \eta, w, r, t) \leq -c_3 \|\eta\|_2^2 \quad (3.94)$$

$$\left\| \frac{\partial V(\eta, t)}{\partial \eta} \right\|_2 \leq c_4 \|\eta\|_2 \quad (3.95)$$

para todo

$$\|\eta\|_2 > \mu_1$$

en $[0, \infty) \times D_1 \times D_2$, con constantes positivas c_1, c_2, c_3 y c_4 , donde μ_1 está definido por el corolario 5.3 [21] como

$$\mu_1 = b_1 \sqrt{\frac{c_1}{c_2}}$$

La siguiente proposición [22] establece la propiedad de estabilidad de la dinámica de modos deslizantes (3.89)-(3.90).

Proposición 3.4: *Supóngase que se satisfacen las hipótesis A.1 y A.2, y*

$$\|\xi(t_s)\|_2 < \frac{r_2}{h_1} \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \frac{c_3 \theta}{c_4 L} \quad (3.96)$$

$$\|\eta(t_s)\|_2 < r_2 \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \quad (3.97)$$

entonces, la solución $(\|\xi(t)\|, \|\eta(t)\|)^T$ del sistema (3.89)-(3.90) es uniformemente acotada, y además $\xi(t)$ converge rápidamente a cero exponencialmente.

Prueba. Entonces, al igual que en la sección anterior, se procede a demostrar que la dinámica cero del sistema converge a un conjunto compacto y la solución de $\xi(t)$ converge a cero exponencialmente. La convergencia exponencial $\xi(t)$ del subsistema autónomo (3.89) se estableció anteriormente por (3.91). Se necesita ahora establecer la convergencia de la solución $\eta(t)$ del subsistema (3.90) donde el vector $\xi(t)$ se considera como la entrada. Para esto podemos usar la función $V(\eta, t)$ con las propiedades (3.93)-(3.95). La derivada de $V(\eta, t)$ con respecto al tiempo sobre las trayectorias del subsistema (3.90), es:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \eta} q(\xi, \eta, w, r, t) \\ &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \eta} q(0, \eta, w, r, t) + \frac{\partial V}{\partial \eta} q(\xi, \eta, w, r, t) - \frac{\partial V}{\partial \eta} q(0, \eta, w, r, t) \end{aligned}$$

Utilizando la condición (3.94) tenemos que

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq -c_3 \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2 + \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{q}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t) - \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{q}(0, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t) \\ &\leq -c_3 \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2 + \left\| \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right\|_2 \|\mathbf{q}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t) - \mathbf{q}(0, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{w}, \mathbf{r}, t)\|_2\end{aligned}$$

Bajo la hipótesis A.2 la derivada,

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &\leq -c_3 \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2 + c_4 L \|\boldsymbol{\eta}\|_2 \|\boldsymbol{\xi}\|_2 \\ &\leq -c_3 \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2 + \theta c_3 \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2 - \theta c_3 \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2 + c_4 L \|\boldsymbol{\eta}\|_2 \|\boldsymbol{\xi}\|_2 \\ &\leq -(1-\theta) c_3 \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2 - \|\boldsymbol{\eta}\|_2 (\theta c_3 \|\boldsymbol{\eta}\|_2 - c_4 L \|\boldsymbol{\xi}\|_2) \\ &\leq -(1-\theta) c_3 \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2, \quad 0 < \theta < 1\end{aligned}\tag{3.98}$$

es negativa en el dominio

$$\|\boldsymbol{\eta}\|_2 > \frac{c_4 L}{\theta c_3} \|\boldsymbol{\xi}\|_2 \equiv \mu_2(t)\tag{3.99}$$

De (3.93) podemos decir

$$\frac{V}{c_2} \leq \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2$$

Sustituyendo la desigualdad anterior en (3.98) resulta

$$\dot{V} \leq -\frac{(1-\theta)c_3}{c_2} V\tag{3.100}$$

Utilizando el Lema de Comparación [22] obtenemos la solución en el tiempo de (3.100) es

$$V(t) \leq V(t_s) e^{-\frac{(1-\theta)c_3}{c_2}(t-t_s)}$$

donde $V(t_s)$ es la condición inicial de los modos deslizantes, entonces esa es la condición inicial para este estudio. Eligiendo de (3.93)

$$\|\boldsymbol{\eta}(t)\|_2^2 \leq \frac{1}{c_1} V(t)$$

resulta

$$\|\boldsymbol{\eta}(t)\|_2^2 \leq \frac{1}{c_1} V(t_s) e^{-\frac{(1-\theta)c_3}{c_2}(t-t_s)}\tag{3.101}$$

Sustituyendo $V(t_s) \leq c_2 \|\boldsymbol{\eta}(t_s)\|_2^2$ en (3.101) resulta

$$\|\boldsymbol{\eta}(t)\|_2 \leq \gamma_1 \|\boldsymbol{\eta}(t_s)\|_2 e^{-\gamma_2(t-t_s)}, \quad \forall t_s \leq t < t_1\tag{3.102}$$

donde $\gamma_1 = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}$ y $\gamma_2 = \frac{(1-\theta)c_3}{2c_2}$. Si (3.96) se cumple tenemos

$$\mu_2(t) < r_2 \sqrt{\frac{c_1}{c_2}}$$

y si además se cumple la condición (3.97), entonces por el corolario 5.3 [22] la solución $\eta(t)$ del sistema (3.89)-(3.90) converge exponencialmente al dominio

$$\|\eta(t)\|_2 \leq b_2(t), \quad \forall t \geq t_1 \quad (3.103)$$

Con $b_2(t)$ definido como

$$b_2(t) = \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \mu_2(t)$$

Notemos que la convergencia (3.103) tiene lugar cuando

$$b_2(t) = b_1$$

Usando (3.99) y (3.91) tenemos

$$\begin{aligned} b_2(t) &= \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \mu_2(t) \\ &= \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \frac{c_4 L}{\theta c_3} \|\xi(t)\|_2 \\ &= \bar{h}_1 \|\xi(t_s)\|_2 e^{-h_2(t-t_s)} \end{aligned}$$

donde $\bar{h}_1 = \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \frac{c_4 L}{\theta c_3} h_1$. Entonces tenemos

$$b_2(t) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad t \rightarrow \infty$$

Definimos el momento del tiempo t_2 como

$$b_2(t) < b_1$$

Entonces

$$\|\eta(t)\|_2 \leq \gamma_1 \|\eta(t_s)\|_2 e^{-\gamma_2(t-t_s)}, \quad \forall t_s \leq t < t_2 < t_1$$

y

$$\|\eta(t)\|_2 \leq b_1, \quad t \geq t_2$$

Que significa que la solución $\|\eta\|_2$ en el sistema (3.89)-(3.90) es uniformemente acotada. Esto concluye la prueba. ■

Finalmente el análisis realizado en la sección 3.4 se puede resumir de la siguiente forma:

Corolario 3.2. *Supongamos que se cumplen*

- A. *La condición (3.86);*
- B. *Las hipótesis A.1 y A.2;*
- C. *Las condiciones de la proposición 3.4.*

Entonces la solución del sistema (3.71) con la ley de control (3.85) es uniformemente acotada, y además el error de control $z_1(t)$ converge exponencialmente a cero.

3.5 Observadores para una clase de sistemas no lineales

En un sistema dinámico, representado mediante un modelo matemático en variables de estado, resulta que algunas variables de estado pueden tener un significado físico, de modo que sus valores pueden ser medidos o determinados directamente a partir de magnitudes físicas del sistema. De lo anterior, se tiene que si se contara con los sensores adecuados estas variables físicas se podrían medir. Sin embargo, en la mayoría de los casos, para determinar el valor de estas variables de estado, o no existen los sensores para medirlas o éstos resultan extremadamente caros. En este caso general, los valores de las variables de estado que se desean conocer para efectuar el control por retroalimentación han de ser calculados a partir de la evolución de las variables conocidas del sistema que son sus salidas y sus entradas. El cálculo de las variables de estado se realiza en el sistema denominado observador.

Un observador (o sensor computacional) es una copia del sistema original más un término de corrección, de tal forma que sus valores de sus variables convergen exponencialmente a los valores reales del sistema que se desean medir.

Contrario a lo que sucede con los sistemas lineales, es un hecho bien conocido que no existe un método sistemático a través del cual se permita diseñar un observador para un sistema no lineal dado, como en el caso del motor de inducción. Una solución es considerar el sistema no lineal como la interconexión entre varios subsistemas, cada uno de los cuales satisfacen ciertas propiedades, de tal manera que se pueda diseñar un observador para cada subsistema. La idea principal es, mediante la síntesis de observadores para cada subsistema y considerando que para cada observador los estados de los demás subsistemas se encuentran disponibles, diseñar un observador para el sistema completo. Entonces, un observador para el sistema completo está dado por la interconexión de los observadores.

En las secciones anteriores se establecen las bases para el diseño de controladores de sistemas, suponiendo que todas las variables de estado de la planta son conocidas. En esta sección se considera una clase de sistemas no lineales, que incluyen a los sistemas electromecánicos.

Por ejemplo, en el caso del motor de inducción monofásico tenemos una transformación no lineal en la cual están vinculadas variables no medibles. Por lo anterior se buscará el diseño de observadores sobre el sistema transformado. Gracias a la estructura de este sistema es posible proponer un observador no lineal con altas ganancias. Se diseñará un sistema de observadores operando en modos deslizantes y se comprobará que es posible garantizar estabilidad asintótica usando una adecuada selección de las señales de compensación.

3.5. 1 Representación del problema

Consideremos la planta por medio de la dinámica que representa un sistema no lineal

$$\dot{z} = f_z(z, x, w) \quad (3.104)$$

$$\dot{x} = f_x(z, x) + Bu \quad (3.105)$$

$$y = Cx \quad (3.106)$$

donde $z \in \mathbf{R}^k$, $x \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{R}^p$, $u \in \mathbf{R}^m$, $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbf{R}^{p \times n}$, los vectores z y y son medibles, con:

$$f_x(z, x) = \sum_{i=1}^k z_i A_i x \quad (3.107)$$

con las matrices A_i de $(n \times n)$ constantes, $z = (z_1, \dots, z_k)^T$

Ya que las variables z_i son medibles podemos presentar (3.107) como un sistema lineal con la matriz $A(t)$,

$$A(t) = \sum_{i=1}^k z_i(t) A_i \quad (3.108)$$

la cual tiene parámetros variantes en el tiempo. Basado en (3.108), el problema de diseño de un observador para el sistema no lineal (3.104)-(3.106) se convierte al problema de diseño de un observador para el siguiente sistema lineal y no autónomo:

$$\dot{x} = A(t)x + Bu \quad (3.109)$$

$$y = Cx \quad (3.110)$$

Supongamos que el sistema (3.109)-(3.110) es observable, entonces se pueden diseñar observadores de dos tipos:

- A. Observador de orden reducido.
- B. Observador de orden completo.

3.5. 2 Observador de orden reducido

Supongamos que el rango $C = p$, entonces se puede representar el vector de salida (3.110) como

$$y = C_1 x_1 + C_2 x_2 \quad (3.111)$$

donde $x = (x_1, x_2)^T$, $x_1 \in \mathbf{R}^{n-p}$, $x_2 \in \mathbf{R}^p$, y rango $C_2 = p$. El sistema (3.109) se presenta en variables x_1 y y como

$$\dot{x}_1 = \bar{A}_{11}(t)x_1 + \bar{A}_{12}(t)y + B_1 u \quad (3.112)$$

$$\dot{y} = \bar{A}_{21}(t)x_1 + \bar{A}_{22}(t)y + B_2 u \quad (3.113)$$

$$\text{donde } \begin{bmatrix} \bar{A}_{11}(t) & \bar{A}_{12}(t) \\ \bar{A}_{21}(t) & \bar{A}_{22}(t) \end{bmatrix} = TA(t)T, \quad \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = TB, \quad T = \begin{bmatrix} I_{n-p} & 0 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix}.$$

El problema del diseño del observador de orden reducido es resuelto con la ayuda del siguiente lema.

Lema 3.1. Si el par $\{C, A(t)\}$ en (3.109)-(3.110) es observable, entonces el sistema

$$\dot{x}_1 = \bar{A}_{11}(t)x_1$$

con salida

$$z_1 = \bar{A}_{21}(t)x_1$$

o el par $\{\bar{A}_{21}(t), \bar{A}_{11}(t)\}$ en (3.112)-(3.113) es también observable.

Prueba. Supongamos que el par $\{\bar{A}_{21}(t), \bar{A}_{11}(t)\}$ es no observable, entonces por medio de un transformación no singular el subsistema (3.112) con y y u considerados como las entradas, se puede representar en la forma canónica observable

$$\begin{aligned} \dot{x}_{11} &= A_1'(t)x_{11} + A_1'(t)x_{12} + B_1'u \\ \dot{x}_{12} &= A_1''(t)x_{11} + A_2''(t)x_{12} + A_{22}''(t)y + B_1''u \end{aligned} \quad (3.114)$$

con la salida

$$z_1 = A_{21}'(t)x_{11} \quad (3.115)$$

donde $x_1 = (x_{11}, x_{12})^T$. En (3.114)-(3.115) el par $\{A_{21}'(t), A_1'(t)\}$ es observable, y x_{12} es el subespacio de estado no observable. El sistema (3.113) después de la transformación anterior queda de la forma

$$\dot{y} = A_{21}'(t)x_{11} + \bar{A}_{22}(t)y + B_2u \quad (3.116)$$

Esto significa que la salida y no esta afectada por x_{12} , y el subespacio x_{12} será no observable no solamente con respecto a la salida z_1 , sino también al vector y , el cual es la salida del sistema original. Esta conclusión es contradictoria a la hipótesis de que el par $\{C, A(t)\}$ es observable. Por lo tanto el par $\{\bar{A}_{21}(t), \bar{A}_{11}(t)\}$ es observable también.

El diseño del observador de orden reducido para el sistema (3.112)-(3.113) esta basado en la siguiente transformación

$$x_1^* = x_1 - L_1y \quad (3.117)$$

donde el comportamiento del sistema se considerará en el espacio (x_1^*, y) , $L_1 \in \mathbf{R}^{(n-p) \times p}$ es una matriz de valores constantes positivos. Derivando (3.117) a lo largo de las trayectorias del sistema (3.112)-(3.113), obtenemos

$$\dot{x}_1^* = \bar{A}_{11}(t)x_1 + \bar{A}_{12}(t)y + B_1u - L_1(\bar{A}_{21}(t)x_1 + \bar{A}_{22}(t)y + B_2u) \quad (3.118)$$

Entonces la planta queda de la forma

$$\dot{x}_1^* = [\bar{A}_{11}(t) - L_1 \bar{A}_{21}(t)] x_1^* + \bar{A}_2(t) y + \bar{B} u \quad (3.119)$$

donde $\bar{A}_2(t) = \bar{A}_{11}(t) L_1 - L_1 \bar{A}_{21}(t) L_1 + \bar{A}_{12}(t) - L_1 \bar{A}_{22}(t)$, $\bar{B} = B_1 - L_1 B_2$

Ahora diseñamos el observador para el sistema (3.119) como

$$\dot{\hat{x}}_1^* = [\bar{A}_{11}(t) - L_1 \bar{A}_{21}(t)] \hat{x}_1^* + \bar{A}_2(t) y + \bar{B} u \quad (3.120)$$

Definiendo el error de observación como

$$e_1 = x_1^* - \hat{x}_1^* \quad (3.121)$$

se obtiene

$$\dot{e}_1 = [\bar{A}_{11}(t) - L_1 \bar{A}_{21}(t)] e_1 \quad (3.122)$$

Puesto que el par $\{\bar{A}_{21}(t), \bar{A}_{11}(t)\}$ sea observable, podemos elegir la matriz L_1 de manera que el sistema (3.122) sea asintóticamente estable. Usando la transformación, podemos encontrar la estimación \hat{x}_1 como

$$\hat{x}_1 = \hat{x}_1^* + L_1 y \quad (3.123)$$

3.5.3 Observador de orden completo

El observador de orden completo para el sistema (3.112)-(3.113) esta descrito por la ecuación diferencial

$$\dot{\hat{x}}_1 = \bar{A}_{11}(t) \hat{x}_1 + \bar{A}_{12}(t) \hat{y} + B_1 u + L_1 (y - \hat{y}) \quad (3.124)$$

$$\dot{\hat{y}} = \bar{A}_{21}(t) \hat{x}_1 + \bar{A}_{22}(t) \hat{y} + B_2 u + L_2 (y - \hat{y}) \quad (3.125)$$

donde \hat{x}_1 y \hat{y} son las variables de estimación de los estados del sistema, y las matrices L_1 y L_2 se eligen tal que la dinámica del error de estimación e con respecto a

$$e_1 = x_1 - \hat{x}_1, \quad e_2 = y - \hat{y}$$

se obtiene

$$\dot{e}_1 = \bar{A}_{11}(t) e_1 + [\bar{A}_{12}(t) + L_1] e_2 \quad (3.126)$$

$$\dot{e}_2 = \bar{A}_{21}(t) e_1 + [\bar{A}_{22}(t) + L_2] e_2 \quad (3.127)$$

sea asintóticamente estable.

Para estabilizar los errores de observación (3.122) o (3.126)-(3.127) podemos utilizar técnicas de sistemas con alta ganancia [8].

3. 6 Observador para una clase de sistemas no autónomos

Considerando el sistema (3.112)-(3.113) con las siguientes hipótesis

S1. $n = 2p$;

S2. La dinámica del sistema (3.112)-(3.113) tiene la forma

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = [\mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}_{11}(t)] \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12}(t) \mathbf{y} + \mathbf{B}_1 \mathbf{u} \quad (3.128)$$

$$\dot{\mathbf{y}} = [\mathbf{A}_{21} + \mathbf{A}_{21}(t)] \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22}(t) \mathbf{y} + \mathbf{B}_2 \mathbf{u} \quad (3.129)$$

donde

$\mathbf{A}_{11} \in \mathbf{R}^{p \times p}$ es una matriz diagonal con elementos constantes negativos;

$\mathbf{A}_{21} \in \mathbf{R}^{p \times p}$ es una matriz diagonal con elementos constantes positivos;

$\mathbf{A}_{11}(t) \in \mathbf{R}^{p \times p}$ y $\mathbf{A}_{21}(t) \in \mathbf{R}^{p \times p}$ son matrices con parámetros variantes en tiempo;

$\mathbf{A}_{12}(t) \in \mathbf{R}^{p \times p}$ y $\mathbf{A}_{22}(t) \in \mathbf{R}^{p \times p}$ son matrices con parámetros variantes en tiempo.

La dinámica del motor de inducción monofásico se puede representar en la forma(3.104)-(3.106) con:

$$\mathbf{z} = \omega_r, \quad \mathbf{x}_1 = (\lambda_{qr}, \lambda_{dr})^T, \quad \mathbf{y} = (i_{qs}, i_{ds})^T$$

$$\mathbf{f}_z = d_1 d_2 (\lambda_{dr} i_{qs} - \lambda_{qr} i_{ds}) - d_2 T_L, \quad \mathbf{f}_x(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11}(t) & \bar{\mathbf{A}}_{12}(t) \\ \bar{\mathbf{A}}_{21}(t) & \bar{\mathbf{A}}_{22}(t) \end{bmatrix}$$

donde

$$\bar{\mathbf{A}}_{11}(t) = \mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}_{11}(t), \quad \bar{\mathbf{A}}_{21}(t) = \mathbf{A}_{21} + \mathbf{A}_{21}(t),$$

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} -a_3 & 0 \\ 0 & -a_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{11}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_r \\ -\omega_r & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{A}}_{12}(t) = \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} a_4 & 0 \\ 0 & a_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} c_1 c_4 & 0 \\ 0 & c_2 c_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{21}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -c_1 c_3 \omega_r \\ c_2 c_3 \omega_r & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{A}}_{22}(t) = \mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} -a_1 c_1 & 0 \\ 0 & -a_2 c_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = 0, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}$$

A continuación vamos a considerar el diseño del observador de orden reducido y el observador de orden completo.

3.6. 1 Observador de orden reducido

Para diseñar el observador de orden reducido para la planta (3.128)-(3.129), utilizamos el cambio de variables (3.117), y la dinámica (3.128) se representa en el espacio $(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{y})$ en la forma

$$\dot{\mathbf{x}}_1^* = [\mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}_{11}(t) - \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_{21} - \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_{21}(t)] \mathbf{x}_1^* + [\mathbf{A}_{12} - \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_{22} - \mathbf{L}_1 (\mathbf{A}_{21} + \mathbf{A}_{21}(t)) \mathbf{L}_1] \mathbf{y} + (\mathbf{B}_1 - \mathbf{L}_1 \mathbf{B}_2) \mathbf{u} \quad (3.130)$$

Podemos definir el observador como

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_1^* &= \left[\mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}_{11}(t) - \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_{21} - \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_{21}(t) \right] \hat{\mathbf{x}}_1^* \\ &+ \left[\mathbf{A}_{12} - \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_{22} - \mathbf{L}_1 (\mathbf{A}_{21} + \mathbf{A}_{21}(t)) \mathbf{L}_1 \right] y + (\mathbf{B}_1 - \mathbf{L}_1 \mathbf{B}_2) u\end{aligned}\quad (3.131)$$

donde $\mathbf{L}_1 \in \mathbf{R}^{p \times p}$. Definiendo el error de observación como,

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{x}_1^* - \hat{\mathbf{x}}_1^* \quad (3.132)$$

se obtiene

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = \left[\mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}_{11}(t) - \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_{21} - \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_{21}(t) \right] \mathbf{e}_1. \quad (3.133)$$

Para demostrar que existe la matriz \mathbf{L}_1 tal que el sistema (3.130) es exponencialmente estable, seleccionamos una función

$$V(\mathbf{e}_1) = \frac{1}{2} \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_1$$

como la función de Lyapunov candidata. Derivando la función anterior tenemos

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{e}_1) &= \mathbf{e}_1^T \dot{\mathbf{e}}_1 \\ &= \mathbf{e}_1^T \mathbf{A}_{11} \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1^T \mathbf{A}_{11}(t) \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1^T \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_{21} \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1^T \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_{21}(t) \mathbf{e}_1\end{aligned}$$

sabemos que la forma cuadrática de una matriz antisimétrica es

$$\mathbf{e}_1^T \mathbf{A}_{11}(t) \mathbf{e}_1 = 0$$

Seleccionamos \mathbf{L}_1 como una matriz diagonal $\mathbf{L}_1 = l_1 \mathbf{I}_p$, con un parámetro $l_1 > 0$, tenemos

$$\mathbf{e}_1^T \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_{21}(t) \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1^T l_1 \mathbf{I}_p \mathbf{A}_{21}(t) \mathbf{e}_1 = 0$$

Entonces

$$\dot{V}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1^T (\mathbf{A}_{11} - l_1 \mathbf{A}_{21}) \mathbf{e}_1 \quad (3.134)$$

Sabemos por la hipótesis S2 que la matriz \mathbf{A}_{11} es una matriz diagonal con elementos negativos y \mathbf{A}_{21} es una matriz diagonal con elementos positivos. Entonces la derivada $\dot{V}(\mathbf{e}_1)$ con $l_1 > 0$ es definida negativa y por lo tanto el sistema (3.133) es asintóticamente estable. Esto significa que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{x}}_1^*(t) = \mathbf{x}_1^*(t)$$

Usando la estimación $\hat{\mathbf{x}}_1^*$, se puede obtener la estimación $\hat{\mathbf{x}}_1$ del vector \mathbf{x}_1 como

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = \hat{\mathbf{x}}_1^* + l_1 y$$

Este valor estimado se utiliza en la ley de control.

3.6. 2 Observador de orden completo

Considerando la planta (3.128)-(3.129) se diseña el observador de la siguiente manera:

$$\dot{\hat{x}}_1 = [A_{11} + A_{11}(t)]\hat{x}_1 + A_{12}(t)y + B_1u + L_1(y - \hat{y}) \quad (3.135)$$

$$\dot{\hat{y}} = [A_{21} + A_{21}(t)]\hat{x}_1 + A_{22}(t)\hat{y} + B_2u + L_2(y - \hat{y}) \quad (3.136)$$

con las matrices de ganancias $L_1 \in \mathbb{R}^{p \times p}$ y $L_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$. Ahora se definen los errores como

$$e_1 = x_1 - \hat{x}_1 \quad (3.137)$$

$$e_2 = y - \hat{y} \quad (3.138)$$

La dinámica de los errores (3.137)-(3.138) se obtiene de las ecuaciones anteriores de la siguiente forma:

$$\dot{e}_1 = [A_{11} + A_{11}(t)]e_1 - L_1e_2 \quad (3.139)$$

$$\dot{e}_2 = [A_{21} + A_{21}(t)]e_1 + A_{22}(t)e_2 - L_2e_2 \quad (3.140)$$

Tomando la derivada de la siguiente función de Lyapunov

$$V(e_1, e_2) = \frac{1}{2}[e_1^T e_1 + e_2^T e_2] \quad (3.141)$$

resulta

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_1, e_2) &= e_1^T A_{11} e_1 + e_1^T A_{11}(t) e_1 - e_1^T L_1 e_2 + e_2^T [A_{21} + A_{21}(t)] e_1 + e_2^T [A_{22}(t) - L_2] e_2 \\ &= e_1^T A_{11} e_1 - e_1^T L_1 e_2 + e_1^T [A_{21} + A_{21}(t)]^T e_2 + e_2^T [A_{22}(t) - L_2] e_2 \\ &= e_1^T A_{11} e_1 + e_1^T [A_{21} + A_{21}^T(t) - L_1] e_2 + e_2^T [A_{22}(t) - L_2] e_2 \end{aligned}$$

si seleccionamos las matrices de ganancias L_1 y L_2 positivas

$$L_1 = A_{21} + A_{21}^T(t)$$

y

$$L_2 = A_{22}(t) + Q$$

donde $Q = Q^T$, $Q < 0$ resulta con la derivada,

$$\dot{V}(e_1, e_2) = e_1^T A_{11} e_1 + e_2^T Q e_2 \quad (3.142)$$

definida negativa. Esto significa que el sistema (3.139)-(3.140) es asintóticamente estable.

Capítulo 4

Diseño de control para el motor de inducción monofásico

4.1 Introducción

En este capítulo se aplica la técnica de control por bloques con modos deslizantes para sistemas no lineales con perturbaciones, establecida en el capítulo 3, para diseñar el control discontinuo aplicado al motor de inducción monofásico, cuyo modelo fue descrito en el capítulo 2. Se consideran dos versiones de la ley de control. En la primera versión el modelo de la máquina se representa por una transformación de variables a la forma No Lineal Controlable por Bloques (NCB), la cual consiste de dos bloques de segundo orden. Usando la técnica control por bloques, se puede encontrar del primer bloque el vector de corriente del estator demandado, la cual se formulará para controlar la velocidad y el modulo del flujo del rotor. La ley control por medio de modos deslizantes, debe operar de tal forma que el vector de corriente del estator siga al vector de corriente demandado. Entonces, la superficie de conmutación se conformará de ambos vectores de corriente, el real y demandado.

En segundo caso, el modelo de la máquina es transformado a la forma No Lineal Controlable por Bloques, la cual consiste de dos bloques de primer orden y la dinámica interna de cuarto orden. Aplicando la técnica control por bloques para controlar solamente la velocidad del motor, se diseña una superficie de conmutación para dos componentes del control. Esto da como resultado el movimiento en modos deslizantes singulares. Se demuestra que la dinámica cero es exponencialmente atrayente sobre una bola en espacio de estado. Por lo tanto, utilizando los resultados del capítulo 3, se concluye que la solución del sistema en lazo cerrado es uniformemente acotada, y el error de control converge asintóticamente a cero.

Posteriormente se diseñan observadores no lineales para estimar los flujos magnéticos del rotor y el par de carga, los cuales no se pueden medir.

4.2 Modelo de la planta

El diseño del sistema de control se desarrolló basado en el modelo del motor en el sistema coordinado (d, q) con sistema de referencia fijo al estator

$$\frac{d\omega_r}{dt} = \frac{n_p}{J} \left(\frac{n_p L_{mq}}{L_r} (\lambda_{dr} i_{qs} - \lambda_{qr} i_{ds}') \right) - \frac{n_p}{J} T_L$$

$$\frac{d\lambda_{qr}}{dt} = -\frac{r_r}{L_r} \lambda_{qr} + \omega_r \lambda_{dr} + \frac{r_r L_{mq}}{L_r} i_{qs}$$

$$\frac{d\lambda_{dr}}{dt} = -\frac{r_r}{L_r} \lambda_{dr} - \omega_r \lambda_{qr} + \frac{r_r L_{mq}}{L_r} i_{ds}'$$

$$\frac{di_{qs}}{dt} = \frac{L_r}{L_{qs}L_r - L_{mq}^2} \left(u_q - \left(r_{qs} + \frac{r_r L_{mq}^2}{L_r^2} \right) i_{qs} + \frac{r_r L_{mq}}{L_r^2} \lambda_{qr} - \frac{L_{mq}}{L_r} \omega_r \lambda_{dr} \right)$$

$$\frac{di'_{ds}}{dt} = \frac{L_r}{L'_{ds}L_r - L_{mq}^2} \left(u_d - \left(r_{ds} + \frac{r_r L_{mq}^2}{L_r^2} \right) i'_{ds} + \frac{L_{mq}}{L_r} \omega_r \lambda_{qr} + \frac{r_r L_{mq}}{L_r^2} \lambda_{dr} \right)$$

$$\frac{dv'_c}{dt} = \omega_e X_c i'_{ds}$$

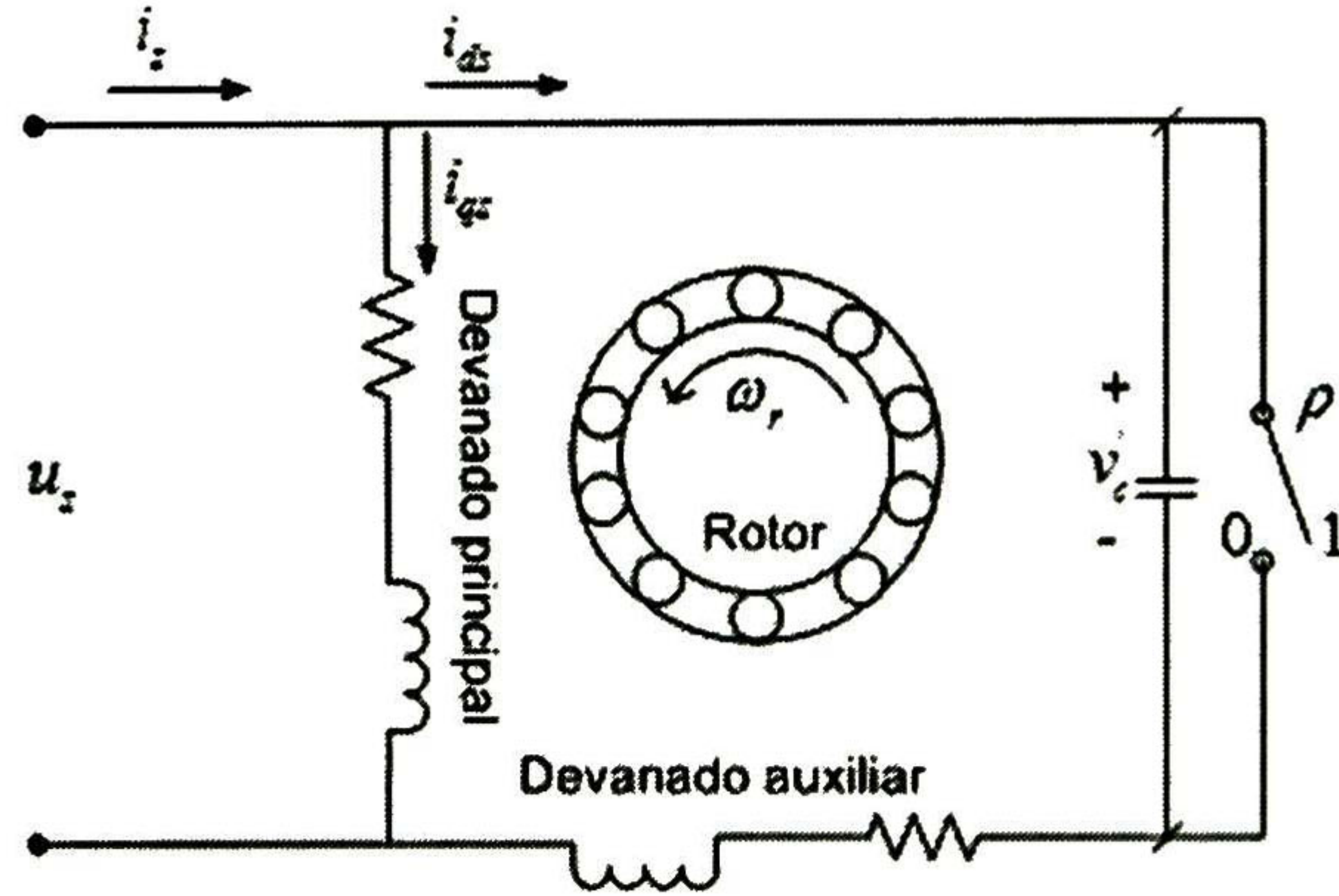


Figura 4. 1 Configuración propuesta del motor de inducción monofásico

y usando la siguiente relación:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_q \\ u_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_s \\ n^{-1}u_s - v_c \rho \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

donde ρ puede tomar dos valores discretos

$$\rho = \begin{cases} 1 & \Rightarrow u_d = n^{-1}u_s - v_c \\ 0 & \Rightarrow u_d = n^{-1}u_s \end{cases} \quad (4.2)$$

Se asume que el par de carga T_L puede variar como una función del tiempo suave tal que, durante el proceso transitorio del sistema en lazo cerrado es constante y no conocido y satisface la siguiente expresión,

$$\dot{T}_L = 0 \quad (4.3)$$

y también el control es acotado como se indica:

$$|u_s| \leq u_0 \quad (4.4)$$

donde u_0 es un escalar positivo.

Renombrando los valores de los parámetros (ver apéndice A- 6) se tiene el siguiente sistema:

$$\frac{d\omega_r}{dt} = d_1 d_2 (\lambda_{dr} i_{qs} - \lambda_{qr} i'_{ds}) - d_2 T_L \quad (4.5)$$

$$\frac{d\lambda_{qr}}{dt} = -a_3 \lambda_{qr} + \omega_r \lambda_{dr} + a_4 i_{qs} \quad (4.6)$$

$$\frac{d\lambda_{dr}}{dt} = -a_3 \lambda_{dr} - \omega_r \lambda_{qr} + a_4 i'_{ds} \quad (4.7)$$

$$\frac{di_{qs}}{dt} = c_1 c_4 \lambda_{qr} - c_1 c_3 \omega_r \lambda_{dr} - a_1 c_1 i_{qs} + c_1 u_q \quad (4.8)$$

$$\frac{di'_{ds}}{dt} = c_2 c_4 \lambda_{dr} + c_2 c_3 \omega_r \lambda_{qr} - a_2 c_2 i'_{ds} + c_2 u_d \quad (4.9)$$

$$\frac{dv'_c}{dt} = \omega_e X_c i'_{ds} \quad (4.10)$$

4.3 Control de velocidad

En este trabajo se proponen dos leyes de control por bloques con modos deslizantes. El diseño de la primera ley de control se basa en dos salidas a controlar, la velocidad del motor y el módulo del flujo del rotor, y la segunda ley de control se diseña para controlar únicamente la velocidad del motor.

4.3.1 Ley de control I

Se tienen dos variables de control u_s y ρ , por tal razón se propone el seleccionar como variables de salida la velocidad del motor ω_r y el módulo cuadrado del flujo del rotor φ , el cual se define como

$$\varphi = |\psi|^2 = \lambda_{qr}^2 + \lambda_{dr}^2 \quad (4.11)$$

Suponemos que todos los parámetros, variables de estado y perturbación son conocidos. El modelo (d, q) del motor de inducción monofásico (4.5)-(4.10) presenta la forma triangular, pero no la forma controlable por bloques, debido a que la matriz $B_1(x_1)$, en el bloque (4.5)-(4.7), sobre el control ficticio (i_{qs}, i'_{ds})

$$B_1(x_1) = \begin{bmatrix} d_1 d_2 \lambda_{dr} & -d_1 d_2 \lambda_{qr} \\ a_4 & 0 \\ 0 & a_4 \end{bmatrix}$$

no es de rango pleno. Con el objetivo de obtener la forma no lineal controlable por bloques (FNLCB), será necesario aplicar una transformación no lineal.

Se propone la siguiente transformación

$$\begin{bmatrix} \omega_r \\ \lambda_{qr} \\ \lambda_{dr} \\ i_{qs} \\ i'_{ds} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \omega_r \\ \varphi \\ \theta \\ i_{qs} \\ i'_{ds} \end{bmatrix}$$

donde φ es el cuadrado de magnitud del flujo magnético del rotor y θ es el ángulo. Se define el vector de error de control como

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_r - \omega_{ref} \\ \varphi - \varphi_{ref} \end{bmatrix}$$

y además las variables

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{qs} \\ i'_{ds} \end{bmatrix}$$

donde ω_{ref} y φ_{ref} son señales de referencia.

Entonces el sistema (4.5)-(4.9) se puede presentar en la FNFB con perturbación (capítulo 3) que consiste de dos bloques

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) + \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_1)\mathbf{x}_2 + \mathbf{D}T_L \quad (4.12)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \quad (4.13)$$

donde rango $\mathbf{B}_1(\mathbf{x}_1) = n_1$, rango $\mathbf{B}_2 = n_2$ y $n_1 = n_2 = m = 2$. Con

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2a_3\varphi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_1) = \begin{bmatrix} d_1d_2 & 0 \\ 0 & 2a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{dr} & -\lambda_{qr} \\ \lambda_{qr} & \lambda_{dr} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -d_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1c_4\lambda_{qr} - c_1c_3\omega_r\lambda_{dr} - a_1c_1i_{qs} \\ c_2c_3\omega_r\lambda_{qr} + c_2c_4\lambda_{dr} - a_2c_2i'_{ds} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_q \\ u_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_s \\ n^{-1}u_s - \rho v'_c \end{bmatrix}$$

Utilizando la técnica de control por bloques para sistemas con perturbación, se define $\mathbf{z}_1 = \mathbf{x}_1$, con el vector $\mathbf{z}_1 = (z_{11}, z_{12})^T$ y tomando la derivada de la misma resulta

$$\dot{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) + \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_1)\mathbf{x}_2 + \mathbf{D}T_L \quad (4.14)$$

El control ficticio \mathbf{x}_2 en (4.14) consiste de dos partes, la primera de ellas esta diseñada para contrarrestar la dinámica antigua del sistema y obtener $\dot{\mathbf{z}}_1 = 0$ sobre la trayectoria del primer bloque de (4.12). La segunda parte tiene como objetivo obtener la nueva dinámica deseada, esto es

$$\mathbf{x}_{2des} = -\mathbf{B}_1^{-1}(\mathbf{f}_1 + \mathbf{D}T_L) + \mathbf{B}_1^{-1}(-k_1\mathbf{z}_1) \quad (4.15)$$

donde $k_1 > 0$.

Se selecciona la variedad deslizante de la siguiente manera

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_{2des} \quad (4.16)$$

donde $\mathbf{z}_2 = (z_{21}, z_{22})^T$, $z_{21} = (i_{qs} - i_{qdes})$ y $z_{22} = (i_{ds}' - i_{ddes})$

Derivando (4.16) tenemos

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_2 &= \dot{\mathbf{x}}_2 - \dot{\mathbf{x}}_{2des} \\ \dot{\mathbf{z}}_2 &= \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{B}_2 \mathbf{u} - \dot{\mathbf{x}}_{2des} \end{aligned}$$

despejando \mathbf{x}_2 de (4.16) y sustituyendo en (4.14) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2 &= \mathbf{z}_2 + \mathbf{x}_{2des} = \mathbf{z}_2 + \mathbf{B}_1^{-1}(-\mathbf{f}_1 - \mathbf{D}T_L) + \mathbf{B}_1^{-1}(-\mathbf{k}_1 \mathbf{z}_1) \\ \dot{\mathbf{z}}_1 &= \mathbf{f}_1 + \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_1) \{ \mathbf{z}_2 + \mathbf{B}_1^{-1}(-\mathbf{f}_1 - \mathbf{D}T_L) + \mathbf{B}_1^{-1}(-\mathbf{k}_1 \mathbf{z}_1) \} + \mathbf{D}T_L \\ \dot{\mathbf{z}}_1 &= -\mathbf{k}_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_1) \mathbf{z}_2 \end{aligned}$$

Entonces el sistema (4.12)-(4.13) en las nueva coordenadas \mathbf{z}_1 y \mathbf{z}_2 queda de la forma

$$\dot{\mathbf{z}}_1 = \begin{bmatrix} \dot{z}_{11} \\ \dot{z}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 d_2 \lambda_{dr} & -d_1 d_2 \lambda_{qr} \\ 2a_4 \lambda_{qr} & 2a_4 \lambda_{dr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{21} \\ z_{22} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$$\dot{\mathbf{z}}_2 = \begin{bmatrix} \dot{z}_{21} \\ \dot{z}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s \\ n^{-1} u_s - v_c \boldsymbol{\rho} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} di_q^{des}/dt \\ di_d^{des}/dt \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Expresando en forma compacta (4.17)-(4.18) tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_1 &= -\mathbf{k}_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_1) \mathbf{z}_2 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 &= \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{B}_2 \mathbf{u} - \dot{\mathbf{x}}_{2des} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Como segundo paso en el diseño de este procedimiento se elegirá el control básico u_s y el control auxiliar $\boldsymbol{\rho}$ en el subsistema (4.18) como funciones discontinuas y se probará la estabilidad del sistema en lazo cerrado sobre la variedad $z_{21} = 0$. Para esto, elegimos una función definida positiva como

$$V_1 = \frac{1}{2} z_{21}^2 \quad (4.20)$$

que será la función candidata de Lyapunov. Derivando esta función sobre las trayectorias del subsistema (4.18), resulta

$$\dot{V}_1 = z_{21} \left(f_3 - \left(di_q^{des}/dt \right) \right) + c_1 z_{21} u_s \quad (4.21)$$

Tomando en cuenta la acotación (4.4), y que la matriz \mathbf{B}_2 es de rango pleno, seleccionamos el control discontinuo como,

$$u_s = -u_0 \text{sign}(z_{21}) \quad (4.22)$$

Con el control (4.22) la ecuación (4.21) resulta en

$$\dot{V}_1 = z_{21} \left(f_3 - \left(\frac{di_q^{des}}{dt} \right) \right) - c_1 u_0 z_{21} \text{sign}(z_{21})$$

Sabemos que $z_{21} \text{sign}(z_{21}) = |z_{21}|$ entonces la ecuación anterior queda

$$\dot{V}_1 = z_{21} \left(f_3 - \left(\frac{di_q^{des}}{dt} \right) \right) - c_1 u_0 |z_{21}|$$

De la propiedad $\left| z_{21} \left(f_3 - \left(\frac{di_q^{des}}{dt} \right) \right) \right| \leq |z_{21}| \left| f_3 - \left(\frac{di_q^{des}}{dt} \right) \right|$ tenemos

$$\dot{V}_1 \leq -|z_{21}| \left(c_1 u_0 - \left| f_3 - \left(\frac{di_q^{des}}{dt} \right) \right| \right) \quad (4.23)$$

Por lo tanto (4.23) será definida negativa para

$$c_1^{-1} \left| f_3 - \left(\frac{di_q^{des}}{dt} \right) \right| < u_0 \quad (4.24)$$

Es decir, bajo la condición (4.24) la derivada (4.23) es negativa y el estado del sistema converge a la variedad $z_{21} = 0$. Del capítulo 3 sabemos que el tiempo en que suceden los modos deslizantes es finito y este tiempo puede decrecer al incrementar la magnitud u_0 del control discontinuo. Mientras suceden los movimientos del sistema sobre la variedad $z_{21} = 0$, el control u_s es igual al control equivalente u_{eq} [8] que se obtuvo de la ecuación $\dot{z}_{21} = 0$, y tiene la siguiente forma

$$u_{eq} = c_1^{-1} \left(-f_3 + \left(\frac{di_q^{des}}{dt} \right) \right) \quad (4.25)$$

Sustituyendo (4.25) en \dot{z}_{22} de (4.18) y realizando manipulaciones algebraicas resulta

$$\dot{z}_{22} = -a_{22} z_{22} + f_{22}(\bar{z}) - c_2 v_c \rho \quad (4.26)$$

donde $\bar{z} = (z_{11}, z_{12}, z_{22})^T$ y

$$a_{22} = a_2 c_2 + a_3$$

$$f_{22}(\bar{z}) = c_2 (nc_1)^{-1} q_a(t) - q_b(t) + c_2 (c_3 \omega_r - n^{-1} c_4) \lambda_{qr} + c_2 (n^{-1} c_2 \omega_r + c_4) \lambda_{dr} + c_2 (n^{-1} a_1 i_q^{des} - a_2 i_d^{des})$$

$$q_a(t) = \left\{ \frac{a_4 T_L}{d_1 \varphi} + \frac{2a_4 c_2 T_L \lambda_{dr}^2}{nc_1 d_1 \varphi^2} - \frac{a_4 k_1 z_{11}}{d_1 d_2 \varphi} + (k_1 - k_2) \frac{\lambda_{dr} \lambda_{qr}}{\varphi} + \frac{2a_4 k_1 \lambda_{dr}^2 z_{11}}{d_1 d_2 \varphi^2} + k_2 \frac{\lambda_{dr} \lambda_{qr} z_{12}}{\varphi^2} \right\} z_{22} + \frac{T_L \chi_3}{d_1 \varphi}$$

$$- \frac{T_L \lambda_{dr} \chi_1}{d_1 \varphi^2} - \frac{k_1 (z_{11} \chi_3 - k_1 z_{11} \lambda_{dr})}{d_1 d_2 \varphi} + \frac{k_1 z_{11} \lambda_{dr} \chi_1}{d_1 d_2 \varphi^2} + \frac{a_3}{a_4} \chi_2 - \frac{k_2 (z_{12} \chi_2 - k_2 z_{12} \lambda_{qr})}{2a_4 \varphi} + \frac{k_2 z_{12} \lambda_{qr} \chi_1}{2a_4 \varphi^2}$$

$$q_b(t) = \left\{ \frac{2a_4 T_L \lambda_{dr} \lambda_{qr}}{d_1 \varphi^2} - k_1 \frac{\lambda_{qr}^2}{\varphi} - \frac{2a_4 k_1 \lambda_{dr} \lambda_{qr} z_{11}}{d_1 d_2 \varphi^2} - \frac{k_2 (z_{12} + 2\lambda_{dr}^2)}{2 \varphi} + k_2 \frac{\lambda_{dr}^2 z_{12}}{\varphi^2} \right\} z_{22} - \frac{T_L \chi_2}{d_1 \varphi} + \frac{T_L \lambda_{qr} \dot{\chi}_1}{d_1 \varphi^2} \\ + \frac{k_1 (z_{11} \chi_2 - k_1 z_{11} \lambda_{qr})}{d_1 d_2 \varphi} - \frac{k_1 z_{11} \lambda_{qr} \chi_1}{d_1 d_2 \varphi^2} + \frac{a_3}{a_4} \chi_3 - \frac{k_2 (z_{12} \chi_3 - k_2 z_{12} \lambda_{dr})}{2a_4 \varphi} + \frac{k_2 z_{12} \lambda_{dr} \chi_1}{2a_4 \varphi^2}$$

$$\chi_1 = -2a_3 \varphi + 2a_4 \lambda_{qr} i_q^{des} + 2a_4 \lambda_{dr} i_d^{des}$$

$$\chi_2 = -a_3 \lambda_{qr} + \omega_r \lambda_{dr} + a_4 i_q^{des}$$

$$\chi_3 = -a_3 \lambda_{dr} - \omega_r \lambda_{qr} + a_4 i_d^{des}$$

$$i_q^{des} = \frac{1}{\varphi} \left[\frac{\lambda_{dr}}{d_1 d_2} (d_2 T_L - k_1 z_{11}) + \frac{\lambda_{qr}}{2a_4} (2a_3 \varphi - k_2 z_{12}) \right]$$

$$i_d^{des} = \frac{1}{\varphi} \left[-\frac{\lambda_{qr}}{d_1 d_2} (d_2 T_L - k_1 z_{11}) + \frac{\lambda_{dr}}{2a_4} (2a_3 \varphi - k_2 z_{12}) \right]$$

Una vez llevado a cabo esto, el movimiento deslizante sobre $z_{21} = 0$ es gobernado por el siguiente sistema,

$$\begin{aligned} \dot{z}_{11} &= -k_1 z_{11} + f_{11}(\bar{z}) \\ \dot{z}_{12} &= -k_2 z_{12} + f_{12}(\bar{z}) \\ \dot{z}_{22} &= -a_{22} z_{22} + f_{22}(\bar{z}) - c_2 v_c' \rho \end{aligned} \quad (4.27)$$

donde $f_{11}(\bar{z}) = -d_1 d_2 \lambda_{qr} z_{22}$ y $f_{12}(\bar{z}) = 2a_4 \lambda_{dr} z_{22}$, o en la forma

$$\dot{\bar{z}} = A\bar{z} + \zeta\rho + g(\bar{z}) \quad (4.28)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{22} \end{bmatrix}, \quad \zeta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -c_2 v_c' \end{bmatrix}, \quad g(\bar{z}) = \begin{bmatrix} f_{11}(\bar{z}) \\ f_{12}(\bar{z}) \\ f_{22}(\bar{z}) \end{bmatrix}$$

Estableciendo la siguiente suposición sobre la cota para el término de perturbación donde existen constantes positivas γ_1 y γ_2 tal que

$$\|g(\bar{z})\| \leq \gamma_1 \|\bar{z}\| + \gamma_2 \quad (4.29)$$

Ahora seleccionamos una función de Lyapunov definida positiva de la siguiente forma

$$\bar{V} = \frac{1}{2} (z_{11}^2 + z_{12}^2 + z_{22}^2) \quad (4.30)$$

La derivada con respecto al tiempo a lo largo de las trayectorias (4.27) es de la forma

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{V}} &= z_{11}\dot{z}_{11} + z_{12}\dot{z}_{12} + z_{22}\dot{z}_{22} \\
&= -k_1 z_{11}^2 - k_2 z_{12}^2 - a_{22} z_{22}^2 + f_{11} z_{11} + f_{12} z_{12} + f_{22} z_{22} - c_2 z_{22} v_c' \rho \\
&= -k_1 z_{11}^2 - k_2 z_{12}^2 - a_{22} z_{22}^2 + \bar{z}^T \mathbf{g}(\bar{z}) - c_2 z_{22} v_c' \rho
\end{aligned} \tag{4.31}$$

La lógica de conmutación para el capacitor se elige de la forma siguiente:

$$\rho = \begin{cases} 1 & \text{si } z_{22} > 0 \text{ y } v_c' > 0 \\ 0 & \text{si } z_{22} > 0 \text{ y } v_c' < 0 \\ 0 & \text{si } z_{22} < 0 \text{ y } v_c' > 0 \\ 1 & \text{si } z_{22} < 0 \text{ y } v_c' < 0 \end{cases}$$

Finalmente tomando en consideración lo anterior, ρ se expresa como:

$$\rho = 0.5 \text{sign}(z_{22} v_c') + 0.5 \tag{4.32}$$

Sustituyendo (4.32) en (4.31) resulta

$$\dot{\bar{V}} = -k_1 z_{11}^2 - k_2 z_{12}^2 - a_{22} z_{22}^2 + \bar{z}^T \mathbf{g}(\bar{z}) - 0.5 c_2 z_{22} v_c' \text{sign}(z_{22} v_c') - 0.5 c_2 z_{22} v_c'$$

Sabemos que $z_{22} v_c' \text{sign}(z_{22} v_c') = |z_{22} v_c'|$ entonces la ecuación anterior queda

$$\dot{\bar{V}} = -k_1 z_{11}^2 - k_2 z_{12}^2 - a_{22} z_{22}^2 + \bar{z}^T \mathbf{g}(\bar{z}) - 0.5 c_2 |z_{22} v_c'| - 0.5 c_2 z_{22} v_c'$$

De la propiedad $-0.5 c_2 z_{22} v_c' \leq 0.5 c_2 |z_{22} v_c'|$ la ecuación anterior resulta

$$\dot{\bar{V}} \leq -k_1 |z_{11}|^2 - k_2 |z_{12}|^2 - a_{22} |z_{22}|^2 + \|\bar{z}\| \|\mathbf{g}(\bar{z})\| \tag{4.33}$$

y además si existe una constante positiva $\alpha = \min(k_1, k_2, a_{22})$ tal que se cumple la siguiente propiedad

$$-k_1 |z_{11}|^2 - k_2 |z_{12}|^2 - a_{22} |z_{22}|^2 \leq \alpha \|\bar{z}\|^2 \tag{4.34}$$

Sustituyendo (4.29) y (4.34) en (4.33) tenemos

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{V}} &\leq -\alpha \|\bar{z}\|^2 + \|\bar{z}\| (\gamma_1 \|\bar{z}\| + \gamma_2) \\
&\leq -(\alpha - \gamma_1) \|\bar{z}\|^2 + \gamma_2 \|\bar{z}\|
\end{aligned}$$

Ahora sumamos y restamos $(\alpha - \gamma_1) \beta \|\bar{z}\|^2$ en la ecuación anterior para obtener

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq -(\alpha - \gamma_1)\|\bar{z}\|^2 + \gamma_2\|\bar{z}\| + (\alpha - \gamma_1)\beta\|\bar{z}\|^2 - (\alpha - \gamma_1)\beta\|\bar{z}\|^2 \\ &= -(\alpha - \gamma_1)(1 - \beta)\|\bar{z}\|^2 - ((\alpha - \gamma_1)\beta\|\bar{z}\| - \gamma_2)\|\bar{z}\|\end{aligned}$$

Así, la función de Lyapunov es negativa

$$\dot{V} \leq -(\alpha - \gamma_1)(1 - \beta)\|\bar{z}\|^2, \quad 0 < \beta < 1$$

en el dominio

$$\|\bar{z}\| > \frac{\gamma_2}{(\alpha - \gamma_1)\beta} := \mu(t) \quad (4.35)$$

Por lo tanto, el estado llega a una región acotada en un tiempo finito.

4.3. 2 Ley de control II

Para el diseño de esta ley de control se considera únicamente como salida la velocidad del motor ω_r . Suponemos como en el caso anterior que todos los parámetros, variables de estado y perturbación son conocidos. Definimos el error de control como

$$z_1 = \omega_r - \omega_{ref}$$

con $\dot{\omega}_{ref} = 0$. Aplicando control por bloques se toma la derivada de z_1 con respecto al tiempo, tenemos

$$\dot{z}_1 = d_1 d_2 (\lambda_{dr} i_{qs} - \lambda_{qr} i'_{ds}) - d_2 T_L \quad (4.36)$$

Se quiere que la dinámica deseada de (4.36) sea

$$d_1 d_2 (\lambda_{dr} i_{qs} - \lambda_{qr} i'_{ds}) - d_2 T_L = -k_1 z_1 + z_2 \quad (4.37)$$

Entonces de (4.37) se puede encontrar el valor de la variable nueva z_2 como

$$z_2 = d_1 d_2 (\lambda_{dr} i_{qs} - \lambda_{qr} i'_{ds}) - d_2 T_L + k_1 z_1 \quad (4.38)$$

Para tener la transformación no singular se introducen las siguientes variables nuevas:

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_r - \omega_{ref} \\ d_1 d_2 (\lambda_{dr} i_{qs} - \lambda_{qr} i'_{ds}) - d_2 T_L + k_1 z_1 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

$$\eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n^{-1} c_2 i_{qs} - c_1 i'_{ds} \\ \lambda_{qr} \\ \lambda_{dr} \\ v_c \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Las ecuaciones (4.39)-(4.40) presentan una transformación difeomórfica del sistema a las nuevas variables de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \omega_r \\ \lambda_{qr} \\ \lambda_{dr} \\ i_{qs} \\ i_{ds} \\ v_c \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{bmatrix}$$

El subsistema (4.39) en nuevas variables z_1 y z_2 se puede presentar en la forma

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -k_1 z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= f_2(\mathbf{z}, \boldsymbol{\eta}, \omega_{ref}, T_L) + d_1 d_2 [c_1 \eta_3 \quad -c_2 \eta_2] \mathbf{u} \end{aligned}$$

y utilizando la relación (4.1) y (4.2) el sistema original queda reducido a la forma NCB con perturbación y dinámica interna de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -k_1 z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= f_2(\mathbf{z}, \boldsymbol{\eta}, \omega_{ref}, T_L) + b_2(\boldsymbol{\eta}) u_s + d_0 \eta_2 \eta_4 \boldsymbol{\rho} \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= q_1(\mathbf{z}, \boldsymbol{\eta}, \omega_{ref}, T_L) \\ \dot{\eta}_2 &= q_2(\mathbf{z}, \boldsymbol{\eta}, \omega_{ref}, T_L) \\ \dot{\eta}_3 &= q_3(\mathbf{z}, \boldsymbol{\eta}, \omega_{ref}, T_L) \\ \dot{\eta}_4 &= q_4(\mathbf{z}, \boldsymbol{\eta}, \omega_{ref}, T_L) \end{aligned} \quad (4.42)$$

donde $\mathbf{z} = (z_1, z_2)^T$, $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_4)^T$,

$$\begin{aligned} f_2 &= \frac{k_1 \varphi_4}{\varphi_3} z_1^2 + \left\{ \frac{1}{\varphi_3} \left[k_1 (m_2 \eta_2 - m_3 \eta_3) + \frac{d_1 d_2}{c_1} \varphi_4 \eta_1 \eta_2 \right] + \frac{d_1 d_2}{c_1} (\eta_1 \eta_3 - c_3 \varphi_1) \right\} z_1 - \left\{ \frac{m_2 \eta_2 - m_3 \eta_3 + \varphi_4 z_1}{\varphi_3} \right\} z_2 \\ &+ \frac{nd_1 d_2}{\varphi_3} \left\{ \omega_{ref} \eta_2 - (h_0 - h_1) \eta_3 + \omega_{ref} \eta_1 \eta_3^2 \right\} \eta_1 \eta_2 + \frac{d_1 d_2}{c_1} (\varphi_2 - c_3 \omega_{ref} \varphi_1) - \frac{d_2}{\varphi_3} \left\{ \varphi_4 z_1 + m_2 \eta_2 - m_3 \eta_3 + k_1 \varphi_3 \right\} T_L \end{aligned}$$

$$b_2(\boldsymbol{\eta}) = d_1 d_2 \left(c_1 \eta_3 - \frac{c_2}{n} \eta_2 \right),$$

$$\begin{aligned} q_1 &= (nd_1 d_2 \varphi_3)^{-1} \left(nm_1 k_1 - c_1 c_2 c_3 d_1 d_2 \left((n^2 c_1 - c_2) \eta_2 \eta_3 - n(c_2 \eta_2^2 - c_1 \eta_3^2) \right) \right) z_1 - m_1 (d_1 d_2 \varphi_3)^{-1} z_2 \\ &+ w_0 \eta_2 - w_1 \eta_3 + c_1 c_2 \eta_4 \boldsymbol{\rho} + a_1 c_1 c_2 \frac{\eta_1 \eta_2}{\varphi_3} - na_2 c_1 c_2 \frac{\eta_1 \eta_3}{\varphi_3} - \frac{m_1 T_L}{d_1 \varphi_3}. \end{aligned}$$

$$q_2 = \left\{ \eta_3 - \frac{na_4 c_1 k_1}{d_1 d_2 \varphi_3} \right\} z_1 + \left\{ \frac{na_4 c_1}{d_1 d_2 \varphi_3} \right\} z_2 - a_3 \eta_2 + \omega_{ref} \eta_3 - na_4 \frac{\eta_1 \eta_2}{\varphi_3} + \frac{na_4 c_1 T_L}{d_1 \varphi_3},$$

$$q_3 = \left\{ -\eta_2 - \frac{a_4 c_2 k_1}{d_1 d_2 \varphi_3} \right\} z_1 + \left\{ \frac{a_4 c_2}{d_1 d_2 \varphi_3} \right\} z_2 - \frac{a_4}{c_1} \eta_1 - \omega_{ref} \eta_2 - a_3 \eta_3 - \frac{a_4 c_2}{c_1} \frac{\eta_1 \eta_2}{\varphi_3} + \frac{a_4 c_2 T_L}{d_1 \varphi_3},$$

$$q_4 = \left\{ -\frac{\omega_e X'_c c_2 k_1}{d_1 d_2 \varphi_3} \right\} z_1 + \left\{ \frac{\omega_e X'_c c_2}{d_1 d_2 \varphi_3} \right\} z_2 - \frac{\omega_e X'_c}{c_1} \eta_1 - \frac{c_2 \omega_e X'_c}{c_1} \frac{\eta_1 \eta_2}{\varphi_3} + \frac{c_2 \omega_e X'_c}{d_1} \frac{T_L}{\varphi_3},$$

$$\begin{aligned} d_0 &= c_2 d_1 d_2 & h_0 &= k_1 - a_3 - a_1 c_1 & m_1 &= c_1 c_2 (a_1 c_1 - a_2 c_2) & w_0 &= c_1 c_2 (n^{-1} c_4 - c_3 \omega_{ref}) \\ h_1 &= k_1 - a_3 - a_2 c_2 & m_2 &= c_2 h_1 + n c_1 \omega_{ref} & w_1 &= c_1 c_2 (c_4 + n^{-1} c_3 \omega_{ref}) \\ m_3 &= n c_1 h_0 - c_2 \omega_{ref} \end{aligned}$$

$$\varphi_1 = c_2 \eta_2^2 + c_1 \eta_3^2, \quad \varphi_2 = c_4 (c_1 - c_2) \eta_2 \eta_3, \quad \varphi_3 = n c_1 \eta_3 - c_2 \eta_2, \quad \varphi_4 = n c_1 \eta_2 + c_2 \eta_3.$$

A continuación se elegirá el control básico u_s y el control auxiliar ρ en el subsistema (4.41) como unas funciones discontinuas y se probará la estabilidad del sistema en lazo cerrado sobre la superficie $z_2 = 0$.

Para esto, elegimos una función definida positiva como

$$V = \frac{1}{2} z_2^2 \quad (4.43)$$

que será la función candidata de Lyapunov. Derivando esta función sobre las trayectorias del subsistema (4.41), resulta

$$\dot{V} = z_2 f_2 + z_2 b_2 u_s + d_0 z_2 \eta_2 \eta_4 \rho \quad (4.44)$$

Recordando que b_2 es una función escalar que depende de la dinámica interna η , y tomando en cuenta el acotamiento (4.4), se selecciona el control u_s como una función discontinua de la forma

$$u_s = -u_0 \text{sign}(z_2 b_2) \quad (4.45)$$

La lógica de conmutación en la rama del capacitor se elige en base a lo siguiente:

$$\rho = \begin{cases} 0 & \text{si } z_2 > 0 \text{ y } \eta_2 \eta_4 > 0 \\ 1 & \text{si } z_2 > 0 \text{ y } \eta_2 \eta_4 < 0 \\ 1 & \text{si } z_2 < 0 \text{ y } \eta_2 \eta_4 > 0 \\ 0 & \text{si } z_2 < 0 \text{ y } \eta_2 \eta_4 < 0 \end{cases}$$

Por lo tanto tenemos,

$$\rho = |0.5 \text{sign}(z_2 \eta_2 \eta_4) - 0.5| \quad (4.46)$$

Tomando en cuenta que $x \text{sign}(x) = |x|$, la ecuación (4.44) con (4.45) y (4.46) queda de la forma,

$$\dot{V} = z_2 f_2 - u_0 |z_2 b_2| + d_0 z_2 \eta_2 \eta_4 |0.5 \text{sign}(z_2 \eta_2 \eta_4) - 0.5| \quad (4.47)$$

y de la propiedad $z_2 f_2 \leq |z_2| |f_2|$ la ecuación (4.47) queda

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\leq |z_2| \left| |f_2| - u_0 |z_2 b_2| + d_0 |z_2 \eta_2 \eta_4| \left| 0.5 \text{sign}(z_2 \eta_2 \eta_4) - 0.5 \right| \right| \\
&\leq |z_2| \left| |f_2| - u_0 |z_2| |b_2| + d_0 |z_2| |\eta_2 \eta_4| \left| 0.5 \text{sign}(z_2 \eta_2 \eta_4) - 0.5 \right| \right| \\
&\leq -|z_2| \left(u_0 |b_2| - \left(|f_2| + d_0 |\eta_2 \eta_4| \left| 0.5 \text{sign}(z_2 \eta_2 \eta_4) - 0.5 \right| \right) \right)
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Bajo la condición (4.4) existe una constante positiva q_0 tal que

$$\frac{|f_2| + d_0 |\eta_2 \eta_4| \left| 0.5 \text{sign}(z_2 \eta_2 \eta_4) - 0.5 \right|}{|b_2|} \leq q_0$$

Entonces, para alcanzar la superficie de modos deslizantes se deber cumplir que:

$$u_0 > q_0 \tag{4.49}$$

lo que aseguraría que la función de Lyapunov desaparezca en un tiempo finito, y el movimiento del sistema en lazo cerrado es estable sobre la superficie $z_2 = 0$ en un tiempo también finito.

El movimiento del sistema (4.41) y (4.42) con controles (4.45) y (4.46) que garantiza modos deslizantes sobre la superficie $z_2 = 0$, se describe por el sistema de orden reducido con la dinámica interna,

$$\dot{z}_1 = -k_1 z_1 \tag{4.50}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\eta}_1 &= q_1(z_1, 0, \boldsymbol{\eta}, \omega_{ref}, T_L) \\
\dot{\eta}_2 &= q_2(z_1, 0, \boldsymbol{\eta}, \omega_{ref}, T_L) \\
\dot{\eta}_3 &= q_3(z_1, 0, \boldsymbol{\eta}, \omega_{ref}, T_L) \\
\dot{\eta}_4 &= q_4(z_1, 0, \boldsymbol{\eta}, \omega_{ref}, T_L)
\end{aligned} \tag{4.51}$$

el cual representa la dinámica de los modos deslizantes. Mientras suceden los movimientos del sistema sobre la superficie $z_2 = 0$, el control u_s es igual al control equivalente u_{eq} [8] que se obtuvo de la ecuación $\dot{z}_2 = 0$, y tiene la siguiente forma:

$$u_{eq} = -b_2^{-1} [f_2 + d_0 \eta_2 \eta_4 \rho] \tag{4.52}$$

La ecuación (4.50) es exponencialmente estable con $k_1 > 0$, esto es

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = 0$$

y por lo tanto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega_r(t) = \omega_{ref}$$

La dinámica de $\boldsymbol{\eta}$ sobre el espacio invariante $[z(0,0)^T, \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{R}^4]$ es la dinámica cero del sistema (4.50)-(4.51) y esta gobernada por

$$\begin{aligned}
\dot{\eta}_1 &= w_0 \eta_2 - w_1 \eta_3 + c_1 c_2 \rho \eta_4 + a_1 c_1 c_2 \frac{\eta_1 \eta_2}{\varphi_3} - n a_2 c_1 c_2 \frac{\eta_1 \eta_3}{\varphi_3} - \frac{m_1 T_L}{d_1 \varphi_3}, \\
\dot{\eta}_2 &= -a_3 \eta_2 + \omega_{ref} \eta_3 - n a_4 \frac{\eta_1 \eta_2}{\varphi_3} + \frac{n a_4 c_1 T_L}{d_1 \varphi_3}, \\
\dot{\eta}_3 &= -\frac{a_4}{c_1} \eta_1 - \omega_{ref} \eta_2 - a_3 \eta_3 - \frac{a_4 c_2}{c_1} \frac{\eta_1 \eta_2}{\varphi_3} + \frac{a_4 c_2 T_L}{d_1 \varphi_3}, \\
\dot{\eta}_4 &= -\frac{\omega_e X'_c}{c_1} \eta_1 - \frac{c_2 \omega_e X'_c}{c_1} \frac{\eta_1 \eta_2}{\varphi_3} + \frac{c_2 \omega_e X'_c T_L}{d_1 \varphi_3}.
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Podemos ver que la estructura del sistema (4.53) se asemeja a un sistema lineal con perturbación no desvaneciente, de la forma,

$$\dot{\eta} = A_1 \eta + g_1(\eta, t) \tag{4.54}$$

donde

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & w_0 & -w_1 & c_1 c_2 \rho \\ 0 & -a_3 & \omega_{ref} & 0 \\ -\frac{a_4}{c_1} & -\omega_{ref} & -a_3 & 0 \\ -\frac{\omega_e X'_c}{c_1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad g_1 = \begin{bmatrix} a_1 c_1 c_2 \frac{\eta_1 \eta_2}{\varphi_3} - n a_2 c_1 c_2 \frac{\eta_1 \eta_3}{\varphi_3} - \frac{m_1 T_L}{d_1 \varphi_3} \\ -n a_4 \frac{\eta_1 \eta_2}{\varphi_3} + \frac{n a_4 c_1 T_L}{d_1 \varphi_3} \\ -\frac{a_4 c_2}{c_1} \frac{\eta_1 \eta_2}{\varphi_3} + \frac{a_4 c_2 T_L}{d_1 \varphi_3} \\ -\frac{c_2 \omega_e X'_c}{c_1} \frac{\eta_1 \eta_2}{\varphi_3} + \frac{c_2 \omega_e X'_c T_L}{d_1 \varphi_3} \end{bmatrix}$$

y estableciendo la siguiente suposición sobre la cota para el término de perturbación donde existen constantes positivas γ_3 y γ_4 tal que

$$\|g_1(\eta, t)\|_2 \leq \gamma_3 \|\eta\|_2 + \gamma_4 \tag{4.55}$$

para $t \geq 0$. De (4.54) sabemos que A_1 es Hurwitz, entonces existe una matriz P_1 simétrica y definida positiva que satisface la ecuación de Lyapunov:

$$P_1 A_1 + A_1^T P_1 = -Q_1$$

con Q_1 definida positiva. Entonces la función de Lyapunov,

$$V_{A_1} = \eta^T P_1 \eta \tag{4.56}$$

satisface las siguientes propiedades:

$$\alpha_4 \|\eta\|_2^2 \leq \eta^T P_1 \eta \leq \alpha_5 \|\eta\|_2^2 \tag{4.57}$$

$$-\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{Q}_1 \boldsymbol{\eta} \leq -\alpha_6 \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2 \quad (4.58)$$

con constantes positiva α_4, α_5 y α_6 . Ahora derivando (4.56), tenemos

$$\dot{V}_{A_1} = -\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{Q}_1 \boldsymbol{\eta} + 2\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{g}_1(\boldsymbol{\eta}, t) \quad (4.59)$$

Sustituyendo las cotas (4.55), (4.57) y (4.58) en (4.59) resulta

$$\begin{aligned} \dot{V}_{A_1} &\leq -\alpha_6 \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2 + 2\alpha_5 \|\boldsymbol{\eta}\|_2 (\gamma_3 \|\boldsymbol{\eta}\|_2 + \gamma_4) \\ &\leq -\beta_1 \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2 + 2\alpha_5 \gamma_4 \|\boldsymbol{\eta}\|_2 \end{aligned}$$

Ahora sumamos y restamos $\xi_1 \beta_1 \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2$ con $\beta_1 = (\alpha_3 - 2\alpha_5 \gamma_3)$ en la ecuación anterior para obtener

$$\begin{aligned} \dot{V}_{A_1} &\leq -\beta_1 \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2 + 2\alpha_5 \gamma_4 \|\boldsymbol{\eta}\|_2 + \xi_1 \beta_1 \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2 - \xi_1 \beta_1 \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2 \\ &= -\beta_1 (1 - \xi_1) \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2 - (\xi_1 \beta_1 \|\boldsymbol{\eta}\|_2 - 2\alpha_5 \gamma_4) \|\boldsymbol{\eta}\|_2 \end{aligned}$$

Así, la función de Lyapunov es negativa

$$\dot{V}_{A_1} \leq -\beta_1 (1 - \xi_1) \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2, \quad 0 < \xi_1 < 1$$

en el dominio

$$\|\boldsymbol{\eta}\|_2 \geq \frac{2\alpha_5 \gamma_4}{\xi_1 \beta_1} := \mu_2(t) \quad (4.60)$$

Por lo tanto, el estado llega a una región acotada en un tiempo finito.

4. 4 Observador no lineal

En las secciones anteriores se establecen las bases para el diseño de controladores de sistemas, suponiendo que todas las variables de estado, los parámetros del modelo y el par de carga del motor son conocidas. En la práctica no todas las variables de estado se pueden medir directamente, especialmente la medición de los flujos del rotor es muy difícil ya que es necesario colocar dentro del motor los sensores. El mismo problema se presenta para la medición del par de carga y por lo tanto es necesario el uso de observadores para estimar la información desconocida de la planta.

4.4. 1 Observador para los flujos del rotor en lazo abierto

Supongamos que tres de los estados de la planta son medibles tal como la velocidad del rotor ω_r , y ambas corrientes del estator i_{qs} y i_{ds} .

Entonces las variables medibles (salidas) son

$$\mathbf{y} = (\omega_r, i_{qs}, i_{ds}) \quad (4.61)$$

Para diseñar el observador vamos a usar las ecuaciones (4.6) y (4.7) que actuarán como la planta,

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda_{qr}}{dt} &= -a_3\lambda_{qr} + \omega_r\lambda_{dr} + a_4i_{qs} \\ \frac{d\lambda_{dr}}{dt} &= -a_3\lambda_{dr} - \omega_r\lambda_{qr} + a_4i_{ds}\end{aligned}\tag{4.62}$$

las cuales describen la dinámica del rotor. En este sistema los flujos magnéticos λ_{qr} y λ_{dr} serán estimados y las corrientes i_{qs} y i_{ds} actúan como entradas.

Entonces la ecuación del observador es

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\lambda}_{qr}}{dt} &= -a_3\hat{\lambda}_{qr} + \omega_r\hat{\lambda}_{dr} + a_4i_{qs} \\ \frac{d\hat{\lambda}_{dr}}{dt} &= -a_3\hat{\lambda}_{dr} - \omega_r\hat{\lambda}_{qr} + a_4i_{ds}\end{aligned}\tag{4.63}$$

donde $\hat{\lambda}_{qr}$ y $\hat{\lambda}_{dr}$ son estimaciones de λ_{qr} y λ_{dr} . Entonces tenemos un sistema lineal con parámetros variantes en el tiempo. Definimos el error de estimación como

$$\begin{aligned}e_1 &= \hat{\lambda}_{qr} - \lambda_{qr} \\ e_2 &= \hat{\lambda}_{dr} - \lambda_{dr}\end{aligned}$$

La dinámica del error obtenido de (4.62) y (4.63) es

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= -a_3e_1 + \omega_re_2 \\ \dot{e}_2 &= -a_3e_2 - \omega_re_1\end{aligned}\tag{4.64}$$

Ahora proponemos una función de Lyapunov definida positiva para comprobar la estabilidad del observador

$$V_e = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2)$$

Derivando la función de Lyapunov y sustituyendo (4.64) tenemos

$$\begin{aligned}\dot{V}_e &= e_1\dot{e}_1 + e_2\dot{e}_2 \\ &= -a_3(e_1^2 + e_2^2) < 0\end{aligned}$$

Entonces en el punto de equilibrio $e_1 = 0$ y $e_2 = 0$ el sistema (4.64) es asintóticamente estable, esto es

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\lambda}_{qr}(t) &= \lambda_{qr}(t) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\lambda}_{dr}(t) &= \lambda_{dr}(t)\end{aligned}$$

Note que la convergencia a cero de los errores e_1 y e_2 depende solamente del parámetro del motor a_3 .

4.4.2 Observador para los flujos del rotor en lazo cerrado

Supongamos que podemos medir la velocidad del rotor ω_r , las corrientes del estator i_{qs} y i_{ds} y además los voltajes u_q y u_d definidos en (4.1). Utilizando la siguiente transformación tenemos

$$\lambda_{qr}^* = \lambda_{qr} - l_1 i_{qs} \quad (4.65)$$

$$\lambda_{dr}^* = \lambda_{dr} - l_2 i_{ds} \quad (4.66)$$

donde l_1 y l_2 son constantes positivas. Basados de (4.6)-(4.9), las ecuaciones de la planta de orden reducido sobre las variables nuevas λ_{qr}^* y λ_{dr}^* son

$$\dot{\lambda}_{qr}^* = -\left[(a_3 + l_1 c_1 c_4)(\lambda_{qr}^* + l_1 i_{qs}) - (1 + l_1 c_1 c_3)(\lambda_{dr}^* + l_2 i_{ds})\omega_r\right] + (a_4 + l_1 a_1 c_1)i_{qs} - l_1 c_1 u_q \quad (4.67)$$

$$\dot{\lambda}_{dr}^* = -\left[(a_3 + l_2 c_2 c_4)(\lambda_{dr}^* + l_2 i_{ds}) + (1 + l_2 c_2 c_3)(\lambda_{qr}^* + l_1 i_{qs})\omega_r\right] + (a_4 + l_2 a_2 c_2)i_{ds} - l_2 c_2 u_d \quad (4.68)$$

El observador se propone de la siguiente forma

$$\dot{\hat{\lambda}}_{qr}^* = -\left[(a_3 + l_1 c_1 c_4)(\hat{\lambda}_{qr}^* + l_1 i_{qs}) - (1 + l_1 c_1 c_3)(\hat{\lambda}_{dr}^* + l_2 i_{ds})\omega_r\right] + (a_4 + l_1 a_1 c_1)i_{qs} - l_1 c_1 u_q \quad (4.69)$$

$$\dot{\hat{\lambda}}_{dr}^* = -\left[(a_3 + l_2 c_2 c_4)(\hat{\lambda}_{dr}^* + l_2 i_{ds}) + (1 + l_2 c_2 c_3)(\hat{\lambda}_{qr}^* + l_1 i_{qs})\omega_r\right] + (a_4 + l_2 a_2 c_2)i_{ds} - l_2 c_2 u_d \quad (4.70)$$

donde $\hat{\lambda}_{qr}^*$ y $\hat{\lambda}_{dr}^*$ son estimaciones de λ_{qr}^* y λ_{dr}^* . Definimos el error de estimación como,

$$e_q = \lambda_{qr}^* - \hat{\lambda}_{qr}^*$$

$$e_d = \lambda_{dr}^* - \hat{\lambda}_{dr}^*$$

y la dinámica del error se obtiene de (4.67)-(4.70) como

$$\begin{aligned} \dot{e}_q &= -(a_3 + l_1 c_1 c_4)e_q + (1 + l_1 c_1 c_3)e_d \omega_r \\ \dot{e}_d &= -(a_3 + l_2 c_2 c_4)e_d - (1 + l_2 c_2 c_3)e_q \omega_r \end{aligned} \quad (4.71)$$

Para elegir las ganancias l_1 y l_2 del observador usamos la misma función

$$V_e = \frac{1}{2}(e_q^2 + e_d^2)$$

como la función de Lyapunov candidata. Derivando la función de Lyapunov alrededor de las trayectorias de (4.71) y seleccionamos $l_1 = l_2 = l$ tenemos

$$\begin{aligned} \dot{V}_e &= e_q \dot{e}_q + e_d \dot{e}_d \\ &= -\left[(a_3 + l c_1 c_4)e_q^2 + (a_3 + l c_2 c_4)e_d^2\right] + c_3 l (c_1 - c_2)e_q e_d \omega_r \end{aligned}$$

De la propiedad $c_3 l (c_1 - c_2) e_q e_d \omega_r \leq -c_3 l (c_1 - c_2) |e_q e_d| |\omega_r|$ la ecuación anterior resulta

$$\dot{V}_e \leq -[(a_3 + l c_1 c_4) e_q^2 + (a_3 + l c_2 c_4) e_d^2] - c_3 l (c_1 - c_2) |e_q e_d| |\omega_r| \leq 0 \quad (4.72)$$

Con $l_1 = l_2 = l$ en el punto de equilibrio $e_q = 0$ y $e_d = 0$ el sistema (4.71) es exponencialmente estable, esto es

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\lambda}_{qr}^*(t) &= \lambda_{qr}^*(t) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\lambda}_{dr}^*(t) &= \lambda_{dr}^*(t) \end{aligned}$$

Utilizando (4.65) y (4.66), el flujo estimado es

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_{qr} &= \hat{\lambda}_{qr}^* + l_1 i_{qs} \\ \hat{\lambda}_{dr} &= \hat{\lambda}_{dr}^* + l_2 i_{ds} \end{aligned} \quad (4.73)$$

La ventaja que nos ofrece este observador con respecto al anterior es que aquí podemos manipular la rapidez de la respuesta debido a las constantes l_1 y l_2 , por lo tanto, podemos obtener una estimación más rápida de los flujos magnéticos del rotor.

4.4.3 Observador para el par de la carga

Suponemos que el par de carga puede variar como una función del tiempo suave tal que, durante el comportamiento transitorio del sistema en lazo cerrado es constante no conocido, entonces satisface el siguiente modelo

$$\dot{T}_L = 0$$

En el diseño del observador para estimar el par de carga T_L , vamos a emplear los flujos magnéticos del rotor estimados en la sección 4.4.2, por lo que van a ser considerados como entradas o estados medibles. También vamos a considerar como entrada la velocidad del rotor ω_r que también es medible.

Empleando la ecuación (4.5) del modelo de la máquina, tenemos que la planta es

$$\dot{\omega}_r = d_1 d_2 (\lambda_{dr} i_{qs} - \lambda_{qr} i_{ds}) - d_2 T_L \quad (4.74)$$

$$\dot{T}_L = 0 \quad (4.75)$$

El observador será

$$\dot{\hat{\omega}}_r = d_1 d_2 (\hat{\lambda}_{dr} i_{qs} - \hat{\lambda}_{qr} i_{ds}) - d_2 \hat{T}_L + l_3 (\omega_r - \hat{\omega}_r) \quad (4.76)$$

$$\dot{\hat{T}}_L = l_4 (\omega_r - \hat{\omega}_r) \quad (4.77)$$

donde l_3 y l_4 son ganancias del observador. Definimos el error como

$$e_\omega = \omega_r - \hat{\omega}_r$$

$$e_{T_L} = T_L - \hat{T}_L$$

De (4.74)-(4.77) la dinámica del error es

$$\dot{e}_\omega = -d_2 e_{T_L} - l_3 e_\omega$$

$$\dot{e}_{T_L} = -l_4 e_\omega$$

Entonces podemos elegir las ganancias l_3 y l_4 tales que la matriz,

$$A_e = \begin{bmatrix} -l_3 & -d_2 \\ -l_4 & 0 \end{bmatrix}$$

tiene los valores propios deseados. Entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_\omega(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_{T_L}(t) = 0$$

Por lo tanto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{T}_L = T_L$$

Capítulo 5

Resultados del sistema de control

5.1 Introducción

En los capítulos anteriores se presentaron las herramientas para el diseño del control del motor de inducción monofásico. En el capítulo 2 se obtuvo el modelo del motor en términos de coordenadas (d, q) en un sistema de referencia estacionario; en el capítulo 3 se desarrollaron las bases matemáticas para el control del motor de inducción monofásico utilizando la técnica de control de bloques con modos deslizantes, así como el diseño de observadores para estimar los estados no medibles y el par de carga; por último, en el capítulo 4, se diseñaron los controladores para del motor de inducción monofásico.

En este capítulo se presentan los resultados y el análisis del comportamiento dinámico del motor. Se desarrolló un algoritmo y programa digital escrito en código de matlab. Se comparan los resultados de las leyes de control, así como la respuesta en lazo abierto.

5.1.1 Parámetros de la máquina

Para mostrar el desempeño de las leyes de control propuestas, se utilizó un motor monofásico de jaula de ardilla con las siguientes características. La potencia del motor nominal es de 0.25 h.p., par nominal de 1 Nm, voltaje nominal de 110 V RMS a una frecuencia de $f = 60 \text{ Hz}$.

Los parámetros eléctricos y mecánicos del motor son: $r_{qs} = 2.02 \Omega$, $r_{ds} = 5.13 \Omega$, $r_r = 4.12 \Omega$, $L_{qs} = 0.1846 \text{ H}$, $L'_{ds} = 0.1833 \text{ H}$, $L_{mq} = 0.1772 \text{ H}$, $L'_r = 0.1828 \text{ H}$, $J = 0.0146 \text{ kg.m}^2$, $n = 1.18$, $n_p = 2$. Todos los parámetros fueron referidos al devanado principal, en el eje- q del estator.

5.2 Motor de inducción

Operación en lazo abierto del motor de inducción monofásico

En operación en lazo abierto no se utiliza control alguno. Se alimenta el motor a su voltaje y frecuencia nominal. El motor se estabiliza a una velocidad, que depende de la carga mecánica conectada a la flecha del motor. Se presentan resultados para dos casos; en uno se conecta un capacitor en serie con el devanado auxiliar y se mantiene constante desde el arranque hasta el estado estable. En el segundo caso el motor se arranca con un valor de capacitancia tal que se consigue el par de arranque máximo y cuando el motor alcanza una velocidad igual al 75% de su valor en estado estable, la capacitancia se modifica por un valor tal que minimiza la componente de par pulsante.

Se asume que el motor es excitado por una fuente senoidal sin armónicos, que los devanados de estator tienen distribución senoidal y que la máquina es magnéticamente lineal. El par de carga nominal es $T_{nom} = 1.0 \text{ N.m}$, voltaje de alimentación $u_s = \sqrt{2}(110)\cos(2\pi ft)$, la capacitancia para el arranque es $C_{start} = 305 \mu F$ y $C_{run} = 32 \mu F$ para operación continua. El valor de la capacitancia para la condición de par de arranque máximo y para minimizar la componente pulsante se calculó siguiendo el procedimiento indicado en la sección 2.4.2.

En las figuras 5.1-5.6 se muestran las variables más importantes del motor de inducción monofásico cuando se opera con la carga nominal en lazo abierto. La característica par-velocidad en estado estable con una capacitancia constante conectada en serie en el devanado auxiliar se muestra en las figuras 5.1 y 5.2, con línea continua se muestran el par promedio $T_{e(avg)}$ y con línea discontinua la magnitud de la componente del par pulsante $|T_{e(pul)}|$. Cuando el capacitor se mantiene constante al valor de $C_{start} = 305 \mu F$ se desarrolla el par de arranque máximo 5 N-m, fig 5.1. Sin embargo la componente de par pulsante es muy grande para la condición en estado estable, 25 N.m. En la fig. 5.2 se muestran las componentes de par cuando la capacitancia se mantiene constante en el valor de $C_{run} = 32 \mu F$, el par de arranque es pequeño 0.6 N-m. La componente de par pulsante es mínima 0.8 N-m para la condición en estado estable y par nominal.

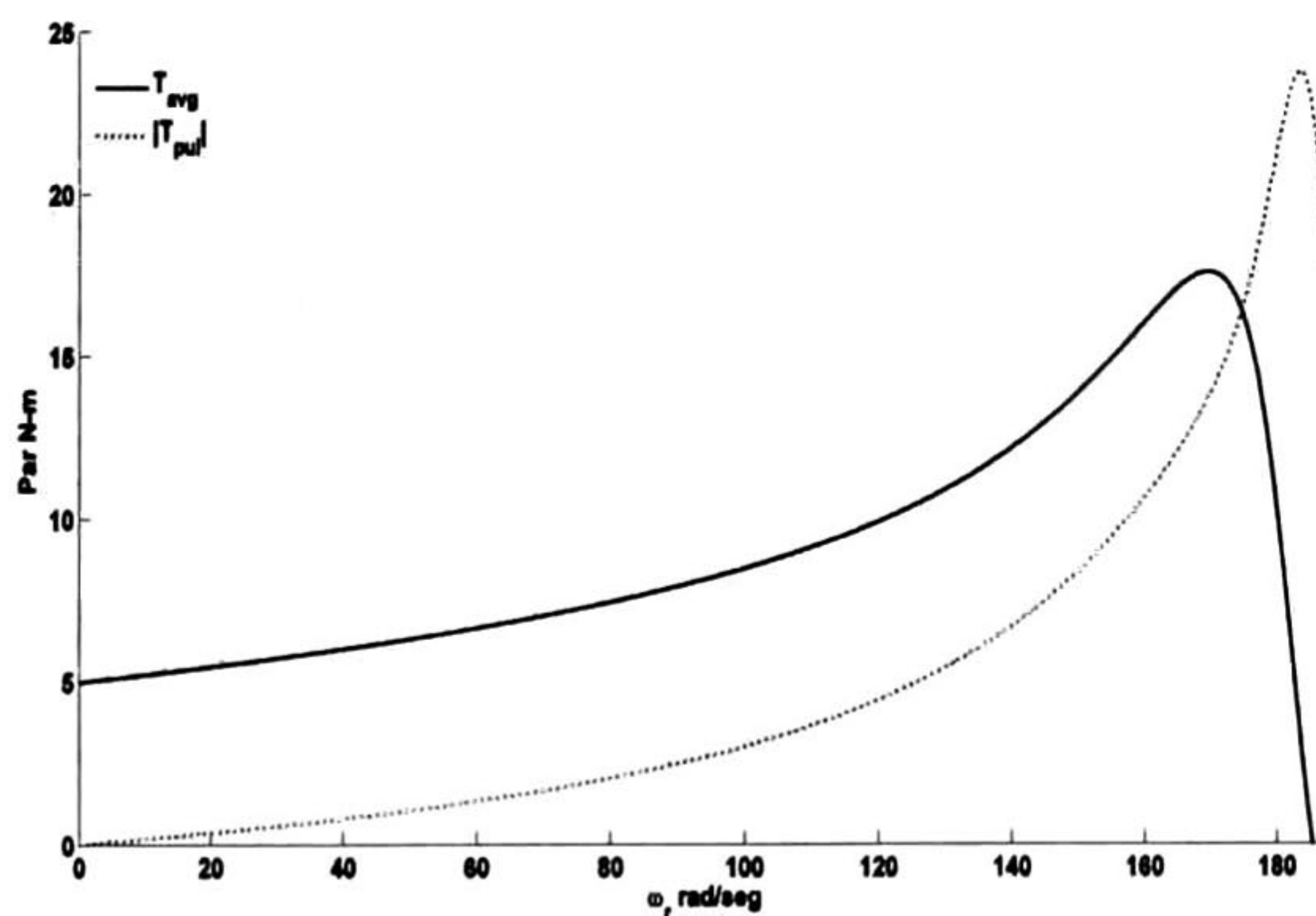


Figura 5. 1 Característica par-velocidad con capacitor de arranque

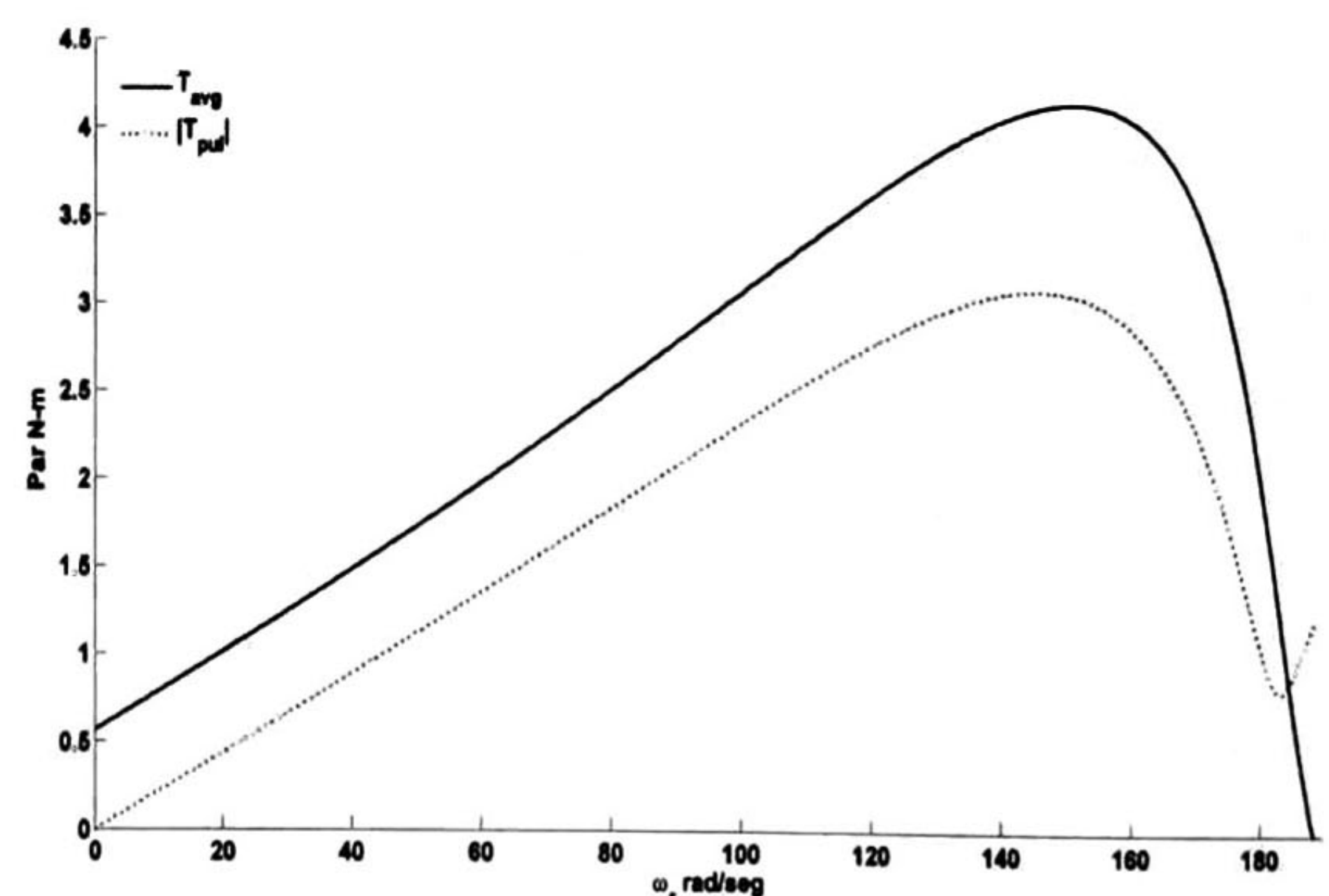


Figura 5. 2 Característica par-velocidad con capacitor de marcha nominal

Es claro que una operación adecuada del motor de inducción requiere de un par de arranque apropiado y que además se minimice la amplitud del par pulsante en estado estable, para la carga específica. Para conseguir estas propiedades se requiere de una capacitancia que cambie de valor en dependencia de los parámetros del motor así como de la carga mecánica. Se debe tener presente que el motor monofásico opera en condiciones no simétricas que se reflejarán por la presencia de componentes oscilatorias, alrededor del valor promedio, del doble de la frecuencia de la fuente de alimentación. Esto provoca vibraciones y pérdida de eficiencia.

En las figuras 5.3-5.6 se muestran los resultados del comportamiento transitorio en lazo abierto, cuando se utiliza un dispositivo centrífugo que modifica la capacitancia de un valor de arranque a un valor que minimice la componente pulsante en estado estable.

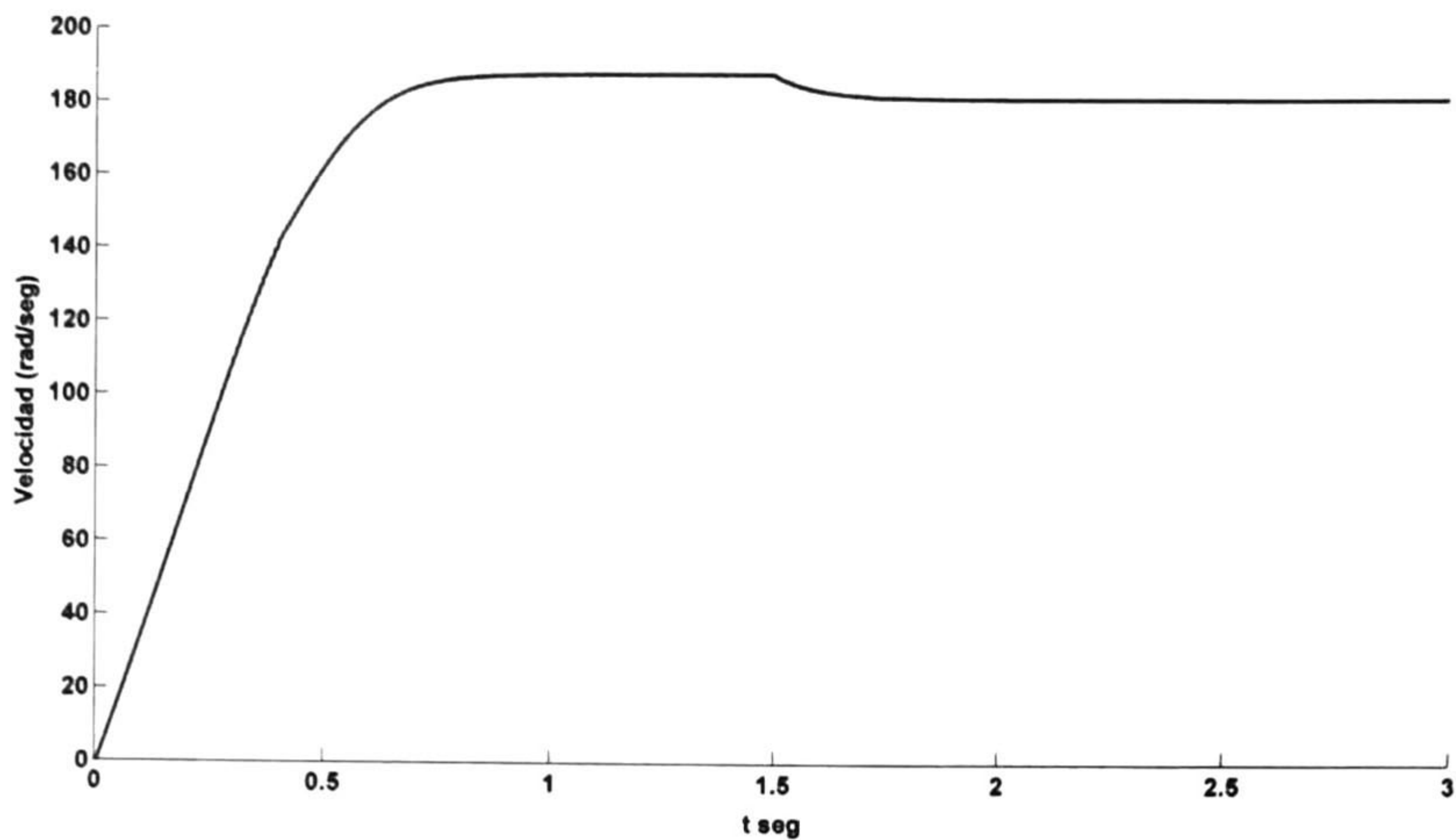


Figura 5. 3 Velocidad del motor ω_r

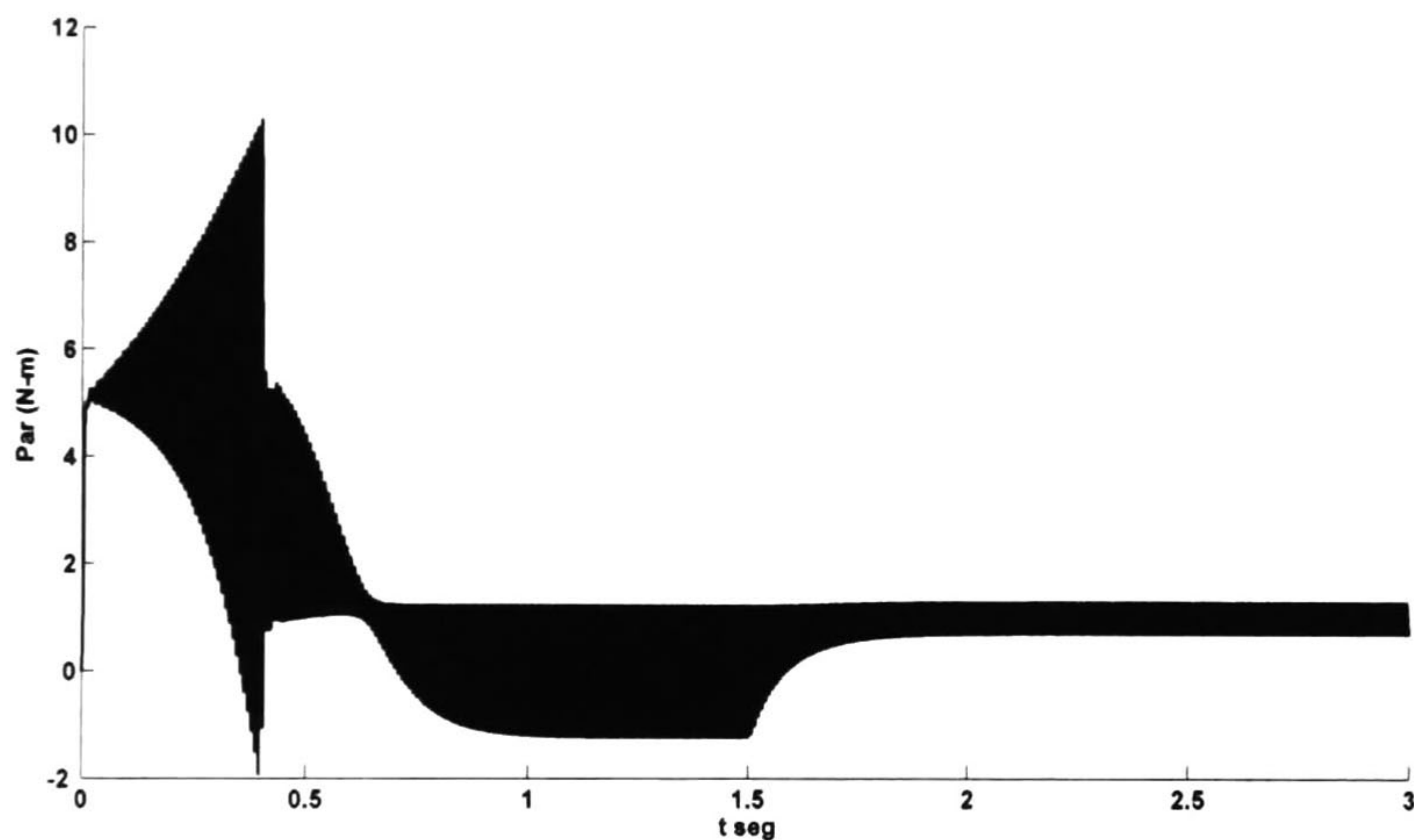


Figura 5. 4 Par electromagnético T_e

En la Figura 5. 3 se muestra la velocidad del motor; primero se arranca en vacío $T_L = 0$ Nm y en el instante de 1.5 se conecta la carga nominal. En la operación con carga inicial cero, la velocidad de 188.5 rad/seg se estabiliza en 1 seg. Cuando se conecta la carga nominal la velocidad del motor disminuye y se estabiliza rápidamente en su valor nominal. No se observan componentes pulsantes en la velocidad del rotor.

En la figura 5.4 se muestra la respuesta transitoria del par electromagnético del motor. Se observa un par de arranque de 5 Nm (par máximo) y un par en estado estable de un valor promedio igual al par nominal con una componente pulsante que oscila aproximadamente entre valores de 1.3 a 0.72 Nm en estado estable. De la respuesta dinámica, fig. 5.4, se observa que después del arranque, la amplitud de la componente armónica crece en el tiempo, al alcanzar el motor una velocidad próxima al 75 % del valor nominal, el interruptor centrifugo cambia de valor la capacitancia conectada al devanado auxiliar, inmediatamente después la componente pulsante

del par reduce substancialmente su amplitud hasta que finalmente se estabiliza. El valor de la capacitancia en estado estable se calculó para minimizar la componente pulsante para la condición de carga nominal, por esta razón la componente pulsante para esta condición es menor en comparación con la operación sin carga.

Los flujos magnéticos del rotor se muestran en la Figura 5. 5, en estado estable oscilan con amplitud aproximada de 0.4 Wb con frecuencia muy próxima a la síncrona. Las componentes de los flujos en los ejes directo y en cuadratura están desfasadas en un ángulo de 90 grados, Figura 5. 5b

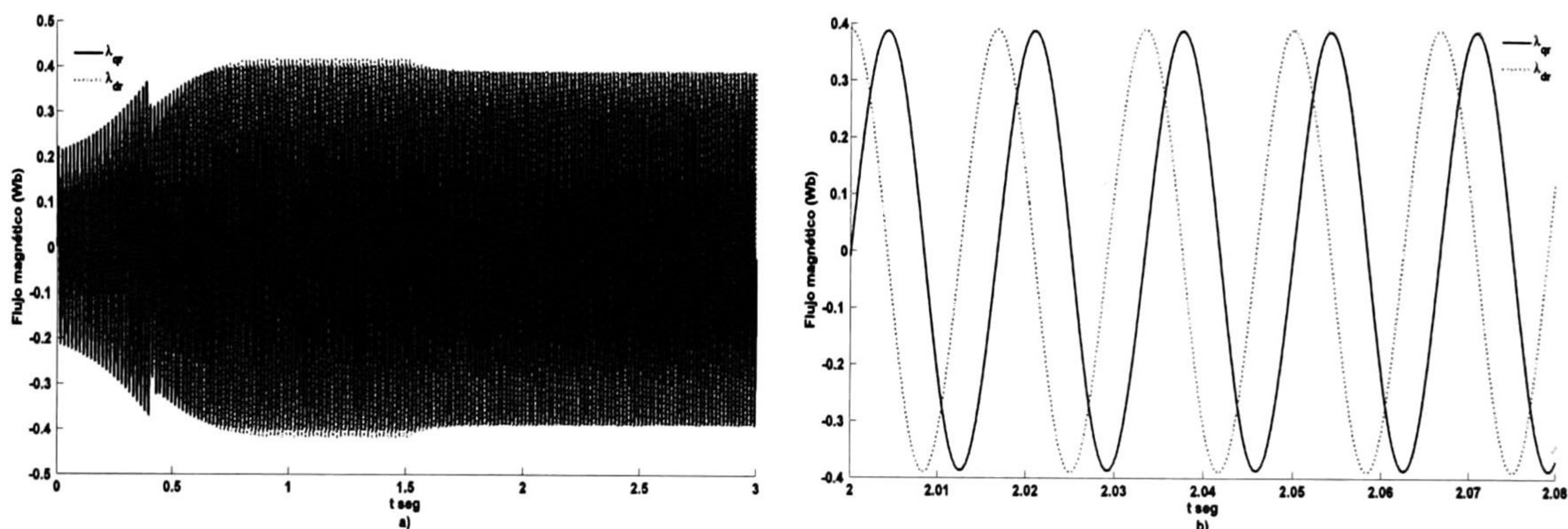


Figura 5. 5 Flujo magnético del rotor λ_{qr} y λ_{dr} : a) Estado transitorio, b) Estado estable

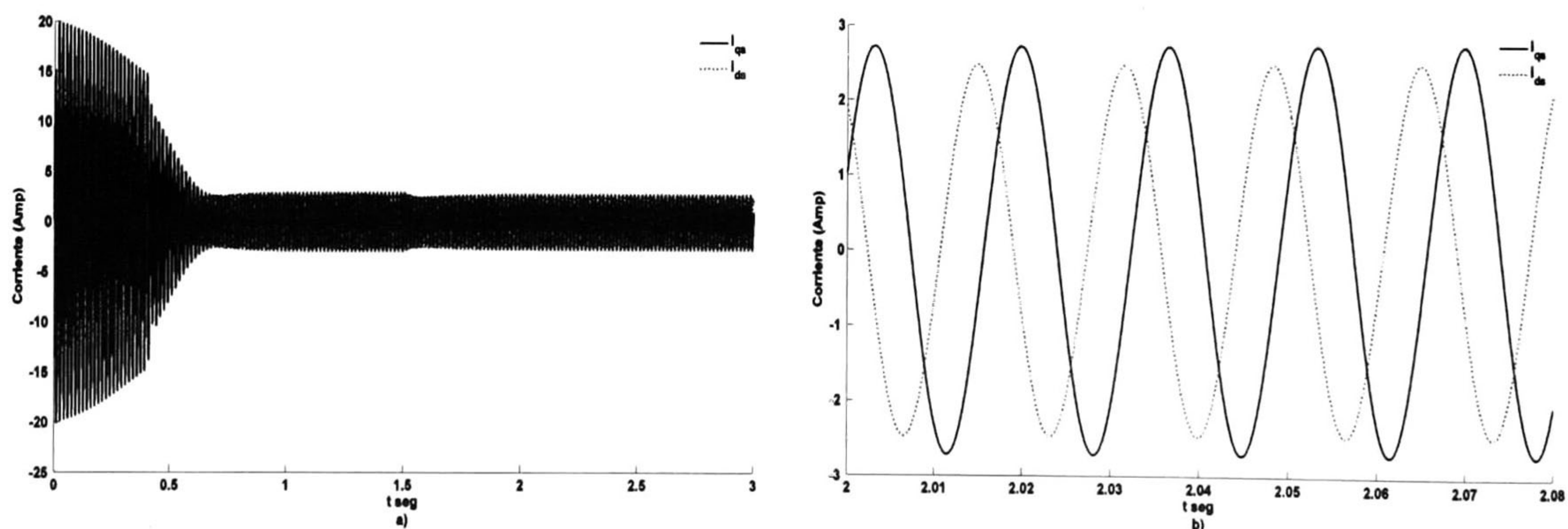


Figura 5. 6 Corriente eléctrica del estator i_{qs} y i_{ds} : a) Estado transitorio, b) Estado estable

La dinámica de las componentes de la corriente de estator se muestra en la figura 5.6. Se observa que durante el arranque las corrientes son altas y que se estabilizan rápidamente con amplitudes cercanas a 3 Amp con frecuencia próxima a la de sincronismo. Las componentes de la corriente en los ejes directo y en cuadratura están desfasadas en un ángulo cercano a 90 grados, figura 5.6b. Se observa que la componente en el eje directo es de menor amplitud que la componente en el eje en cuadratura debido a la asimetría de los devanados.

La utilización de dos capacitores mejora el funcionamiento del motor monofásico, pero aun siguen presentes componentes armónicas no deseables, que dependen de las condiciones de la carga.

A continuación se describe el desempeño de las leyes de control propuestas para el motor monofásicos que se desarrollan en el capítulo 4, y se comparan con los resultados de lazo abierto.

5.3 Ley de control I

A continuación se presentan los resultados del desempeño de la ley de control I en el motor con los parámetros descritos anteriormente. Se asume un par con una carga constante de $T_L = 0.5 \text{ Nm}$ y una velocidad de referencia $\omega_{ref} = 100 \text{ rad/seg}$. La referencia del módulo del flujo del rotor es de 0.15 Wb^2 , corresponde al flujo de diseño del motor. Los parámetros del controlador son: $k_1 = 500, k_2 = 500$ y $u_0 = 110 \text{ V}$.

El control discontinuo utilizado en la ley de control tiene como expresiones:

$$u_s = -u_0 \text{sign}(z_{21}) \quad y \quad \rho = 0.5 \text{sign}(z_{22} v_c) + 0.5$$

Para limitar las corrientes del estator durante el arranque se utiliza la siguiente lógica de control para las superficies de las componentes de corriente en eje directo y en cuadratura

$$z_{21} = \begin{cases} i_{qs} - i_{qdes} & \text{si } |I_s| \leq I_{max} \\ i_{qs} & \text{si } |I_s| > I_{max} \end{cases}, \quad y \quad z_{22} = \begin{cases} i_{ds} - i_{ddes} & \text{si } |I_s| \leq I_{max} \\ i_{ds} & \text{si } |I_s| > I_{max} \end{cases}$$

donde I_{max} es la corriente máxima que puede soportar el motor, y en el arranque no debe ser mayor a 4 o 6 veces la corriente nominal del mismo, en este caso $I_{max} = 15 \text{ Amperes}$, tomando como corriente nominal correspondiente al estado estable en lazo abierto (ver figura 5.6b).

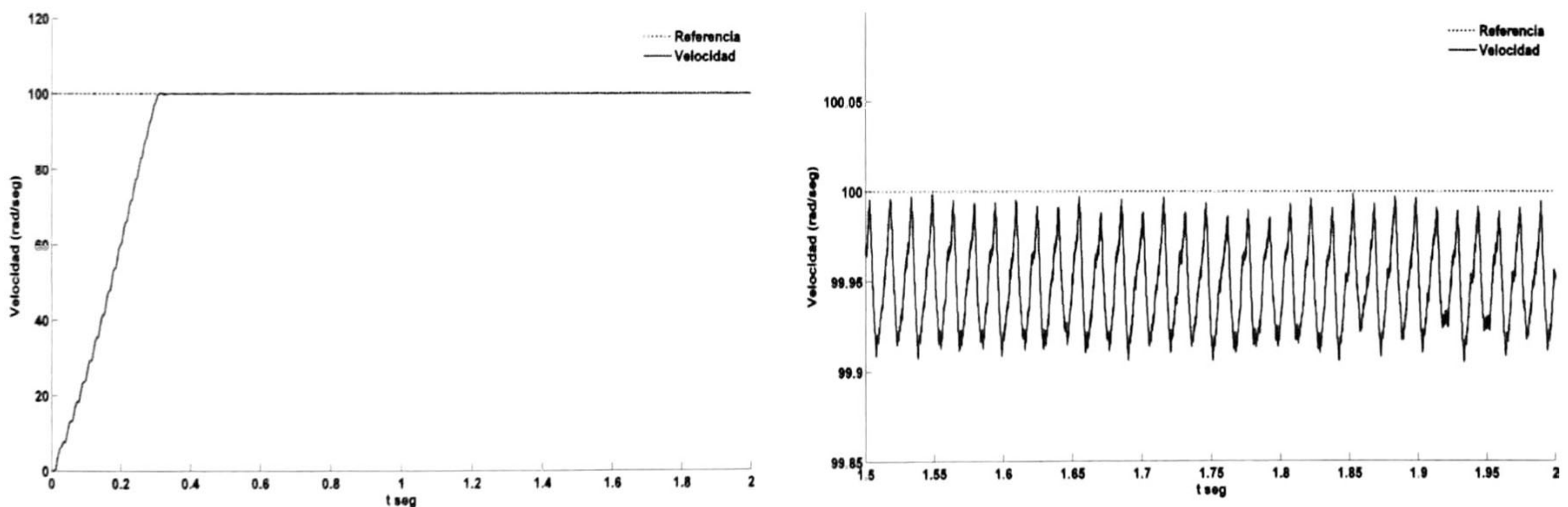


Figura 5.7 Seguimiento de velocidad constante y su acercamiento

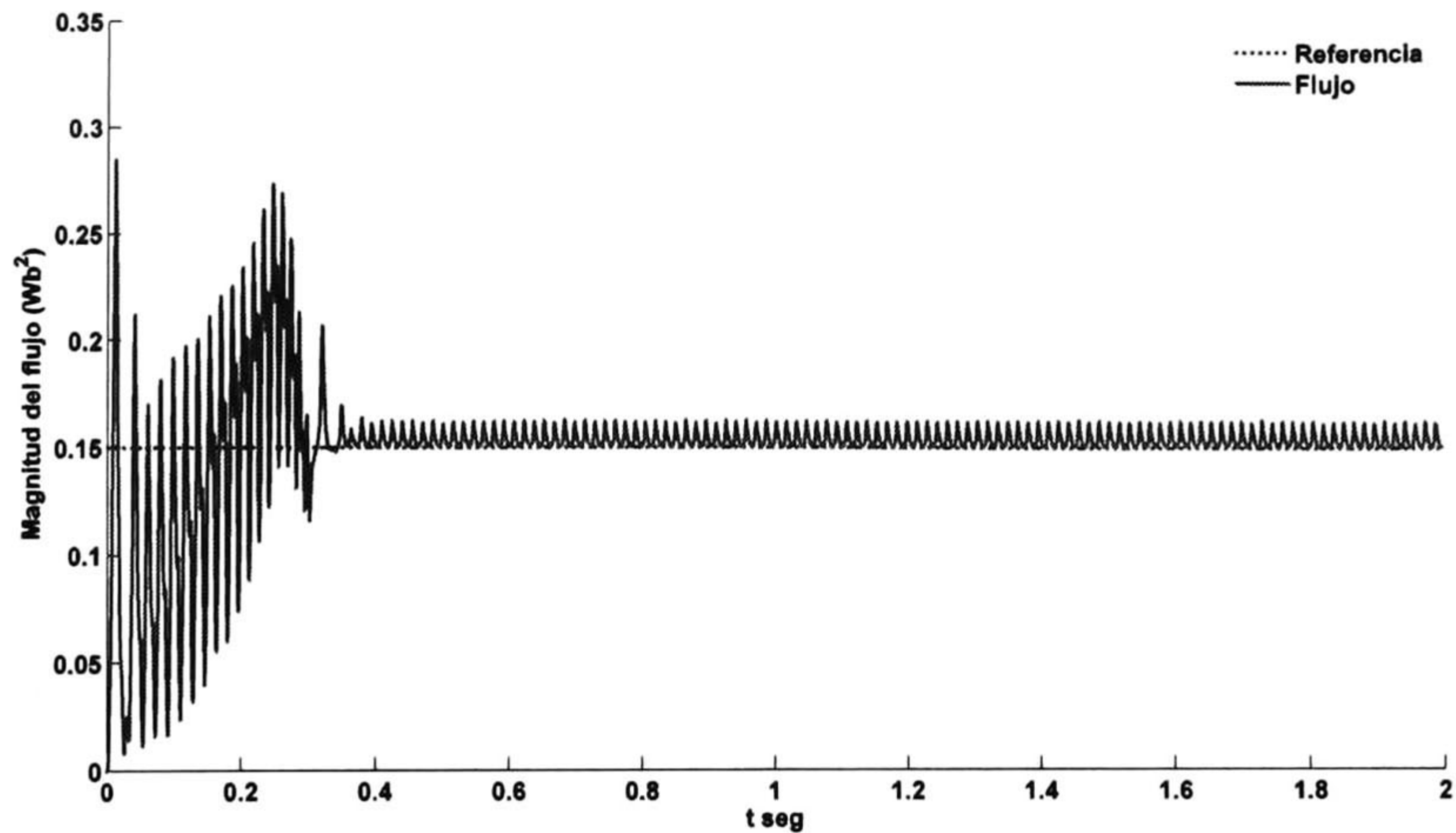


Figura 5. 8 Seguimiento del módulo del flujo del rotor

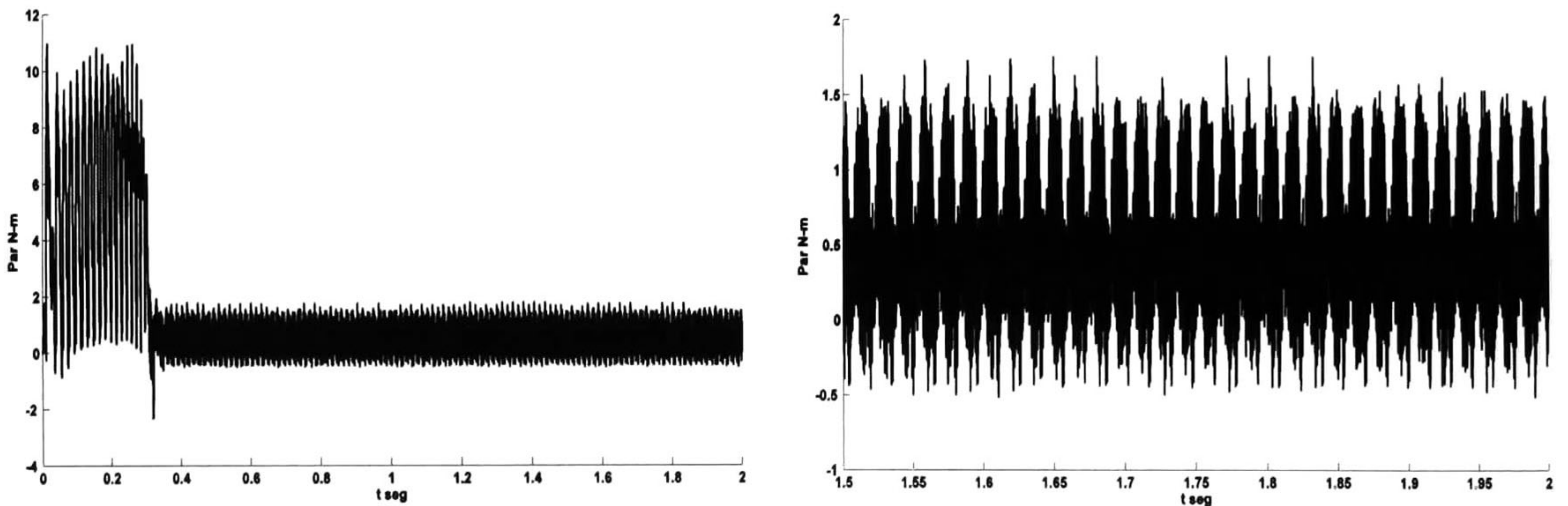


Figura 5. 9 Par electromagnético T_e y su acercamiento

En la figura 5.7 se muestra la velocidad del rotor y de la velocidad de referencia. La velocidad de referencia ω_{ref} se alcanza en un tiempo aproximado de 0.3 segundos para una carga constante de 0.5 Nm . El modulo del flujo del rotor, figura 5.8, alcanza su referencia alrededor de su valor promedio. El par electromagnético, figura 5.9, tiene un valor pico de 10 Nm aproximadamente y se estabiliza en el valor promedio de la carga. Las superficies de deslizamiento, figura 5.10, tienden a cero rápidamente para cumplir con el seguimiento de trayectoria de referencia. Se muestran los controles discontinuos u_s y ρ , figura 5.11, que conmutan entre ± 110 volts y $\{0,1\}$. Se observa que mantienen su magnitud, pero aumentan su frecuencia de conmutación para controlar la velocidad del motor ω_r .

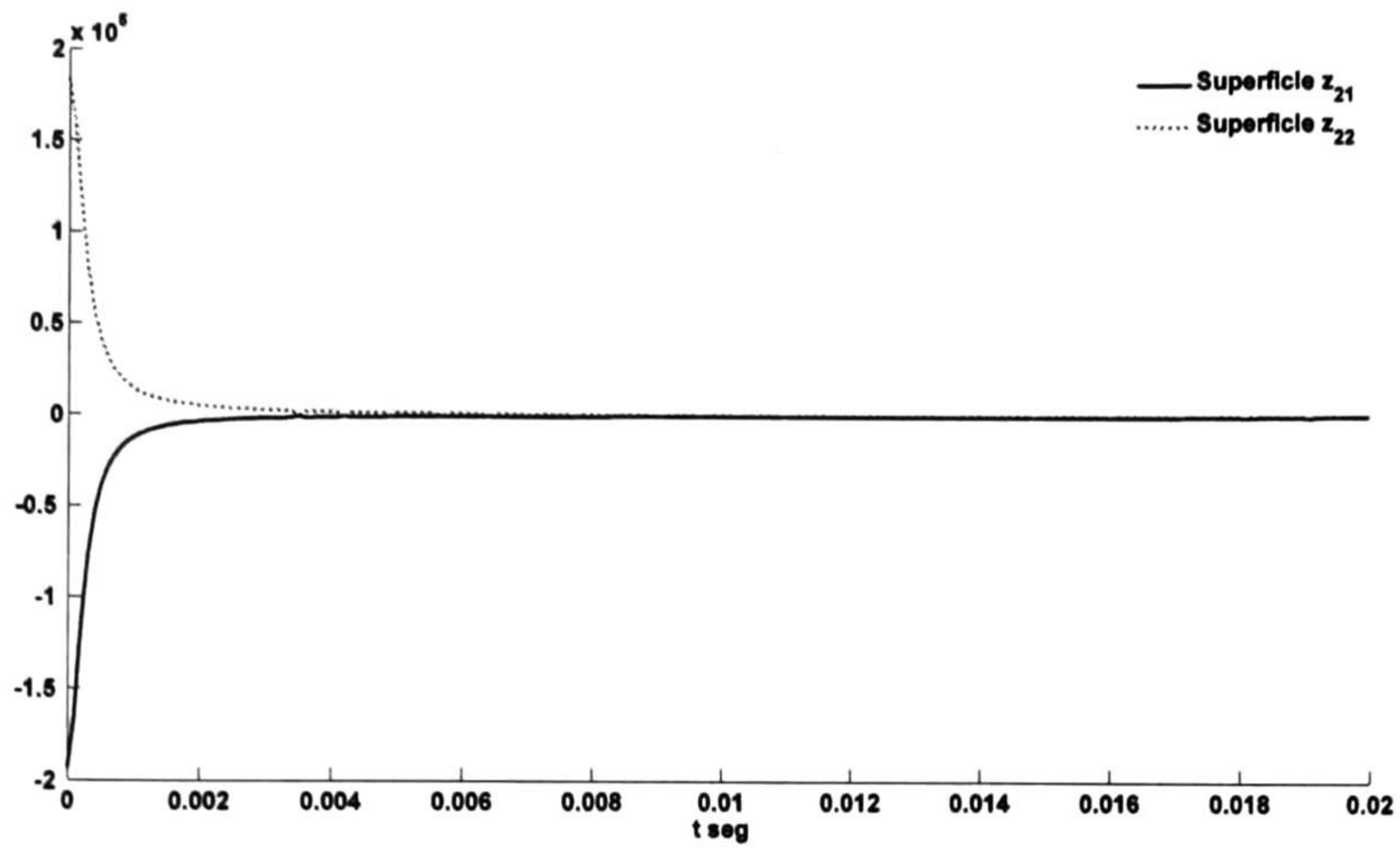


Figura 5. 10 Superficies de modos deslizantes z_{21} y z_{22}

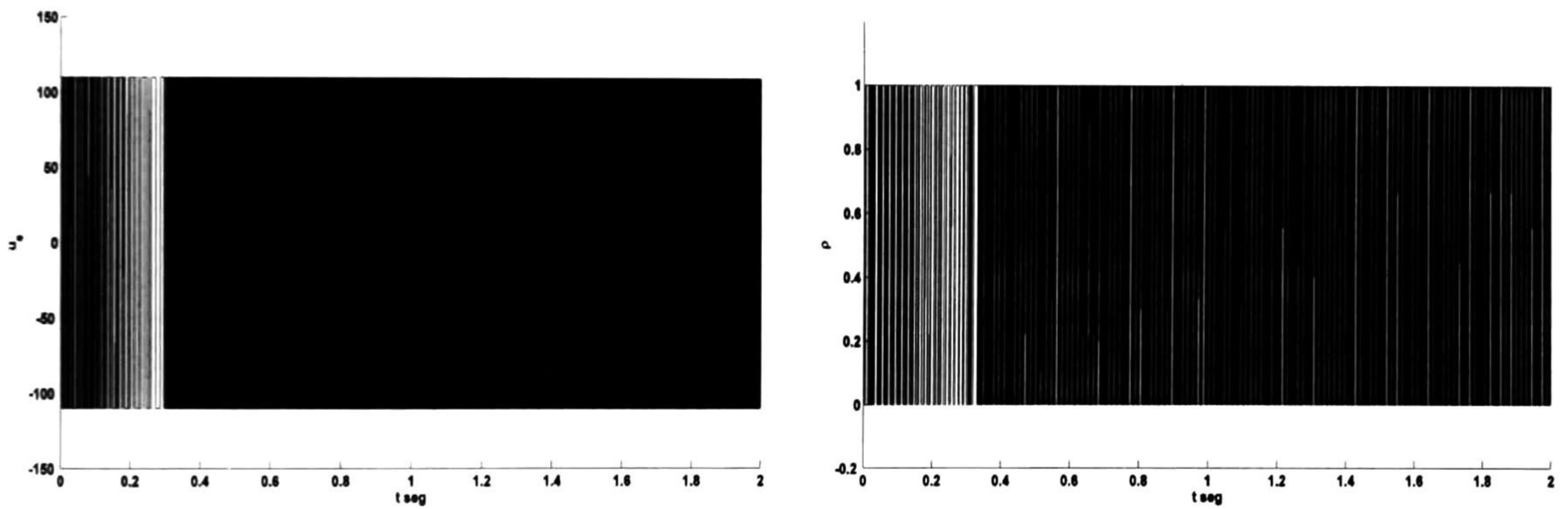


Figura 5. 11 Acción de control: a) $u_s = -u_0 \text{sign}(z_{21})$, b) $\rho = 0.5 \text{sign}(z_{22} v_c) + 0.5$

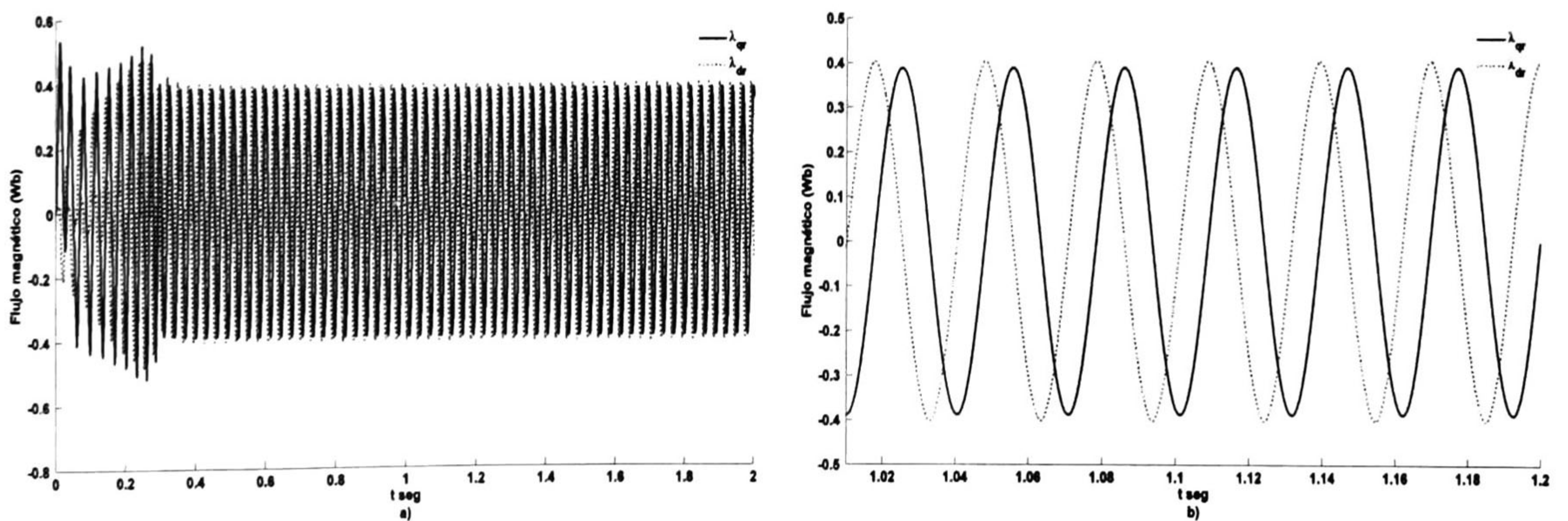


Figura 5. 12 Flujo magnético del rotor λ_{qr} y λ_{dr}

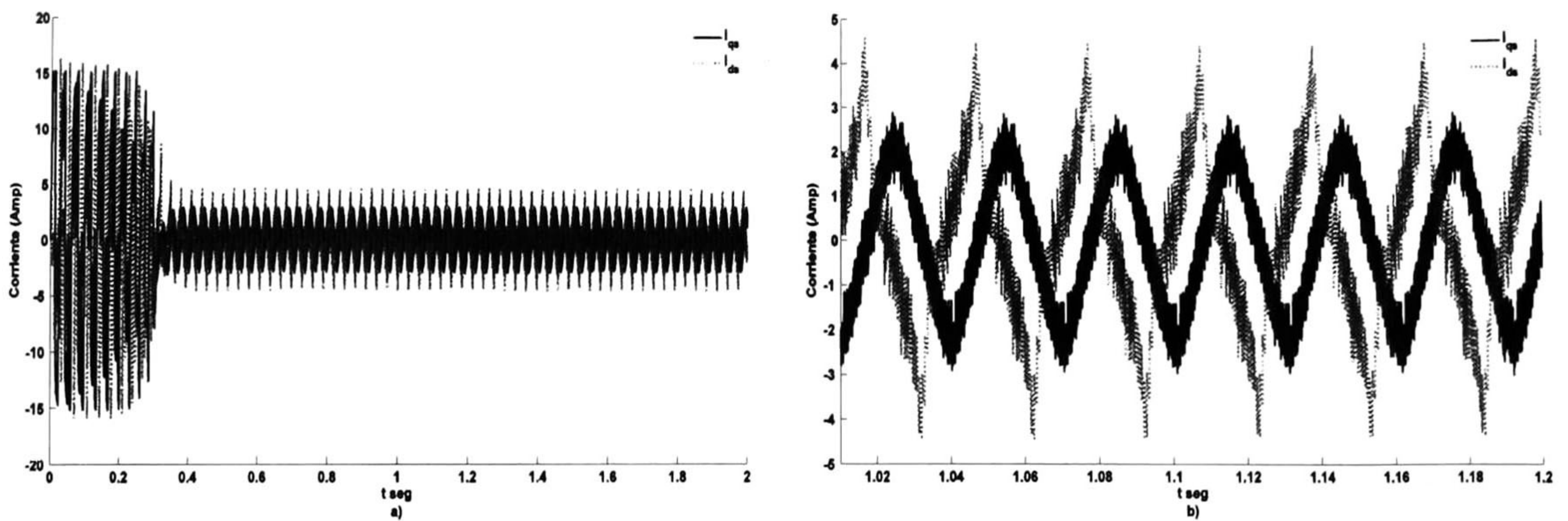


Figura 5. 13 Corrientes del motor i_{qs} y i_{ds}

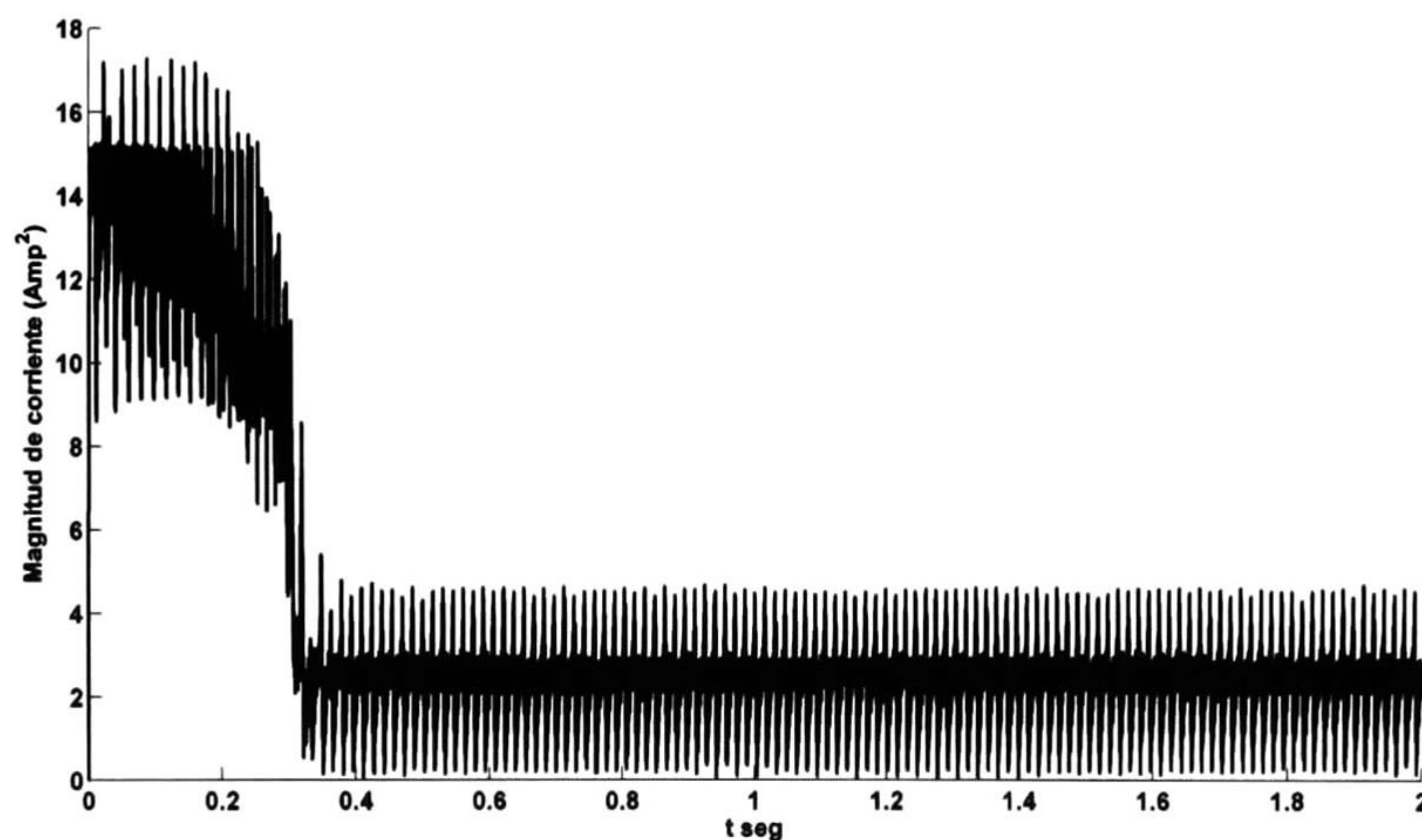


Figura 5. 14 Magnitud de la corriente eléctrica del estator $|I_s| = \sqrt{i_{qs}^2 + i_{ds}^2}$

Los flujos magnéticos del rotor, figura 5.12, se estabilizan en 0.3 segundos al igual que la velocidad, alcanzando un valor pico de 0.4 Wb aproximadamente. Las corrientes del estator, figura 5.13, al arranque adquieren un valor elevado, pero son acotados por el control de limitador de corrientes. Se observa buen resultado en el seguimiento de la velocidad de referencia. Las corrientes de arranque se mantienen por debajo del límite I_{max} . Como consecuencia de la limitación de la corriente, el tiempo de estabilización se alcanza en 0.4 segundos con un valor aproximado de 3 Amperes.

Se observa que el módulo de la corriente del estator, figura 5.14, oscila alrededor de su valor promedio cuando el motor se encuentra en en estado estable.

5. 4 Ley de control II

En la segunda ley propuesta se empleo la técnica de control por bloques con modos deslizantes singulares. La salida es la velocidad del motor.

Se valida el algoritmo de control ante un par de carga constante $T_L = 0.5 \text{ Nm}$ y una velocidad de referencia $\omega_{ref} = 100 \text{ rad/seg}$. Los parámetros del controlador son: $k_1 = 100$ y $u_0 = 110 \text{ V}$ para satisfacer las condiciones de convergencia.

Los controles discontinuos para la ley de control son:

$$u_s = -u_0 \text{sign}(z_2 b_2) \quad y \quad \rho = |0.5 \text{sign}(z_2 \eta_2 \eta_4) - 0.5|$$

Se emplea un limitador de corriente para el arranque del motor en base a lo siguiente:

$$z_2 = \begin{cases} k_1 z_1 + d_1 d_2 (\lambda_{dr} i_{qs} - \lambda_{qr} i'_{ds}) - d_2 T_L & \text{si } |I_s| \leq I_{\max} \\ d_1 d_2 (\lambda_{dr} i_{qs} - \lambda_{qr} i'_{ds}) - d_2 T_L & \text{si } |I_s| > I_{\max} \end{cases}$$

donde I_{\max} es la corriente máxima que puede soportar el motor, y en el arranque debe no ser mayor a 4 o 6 veces la corriente nominal del mismo, en este caso $I_{\max} = 15 \text{ Amperes}$.

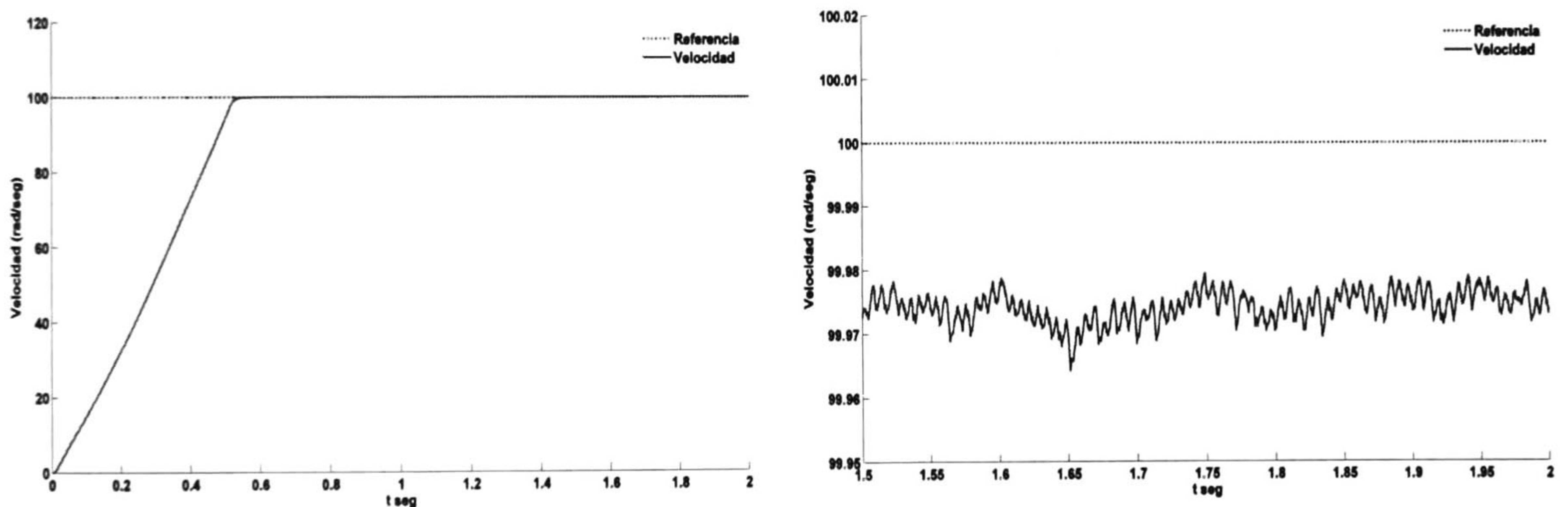


Figura 5. 15 Seguimiento de velocidad constante y su acercamiento

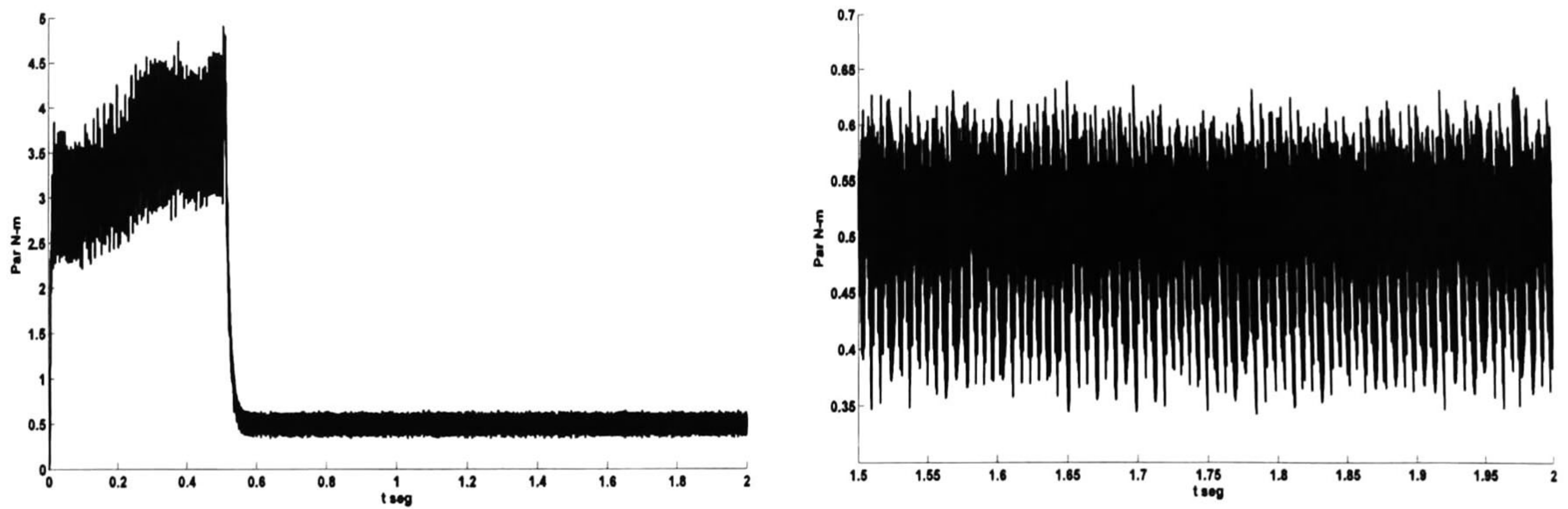


Figura 5. 16 Par electromagnético T_e

En la figura 5.15 se observa que la velocidad de referencia ω_{ref} es alcanzada en un tiempo aproximado de 0.6 segundos, tiempo mayor comparado con la figura 5.7. El par electromagnético, figura 5.16, tiene un valor pico de 4 Nm aproximadamente y su valor promedio se estabiliza en el valor del par de carga. La superficie de modos deslizantes, figura 5.17, tiende a cero y los controles discontinuos u_s y ρ , figura 5.18, conservan la magnitud, y aumentan su frecuencia de conmutación para cumplir con el seguimiento de trayectoria.

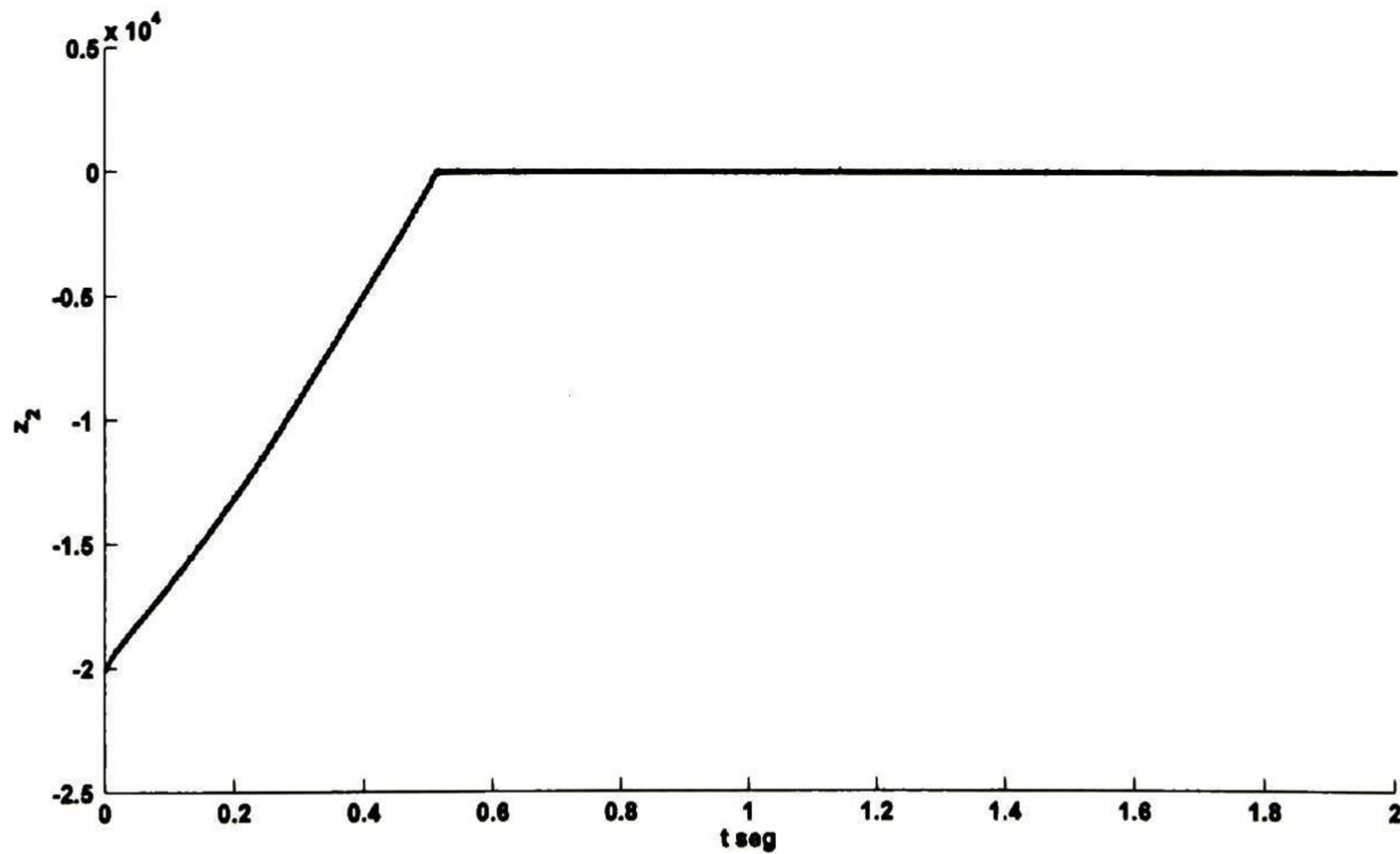


Figura 5. 17 Superficies de modos deslizantes z_2

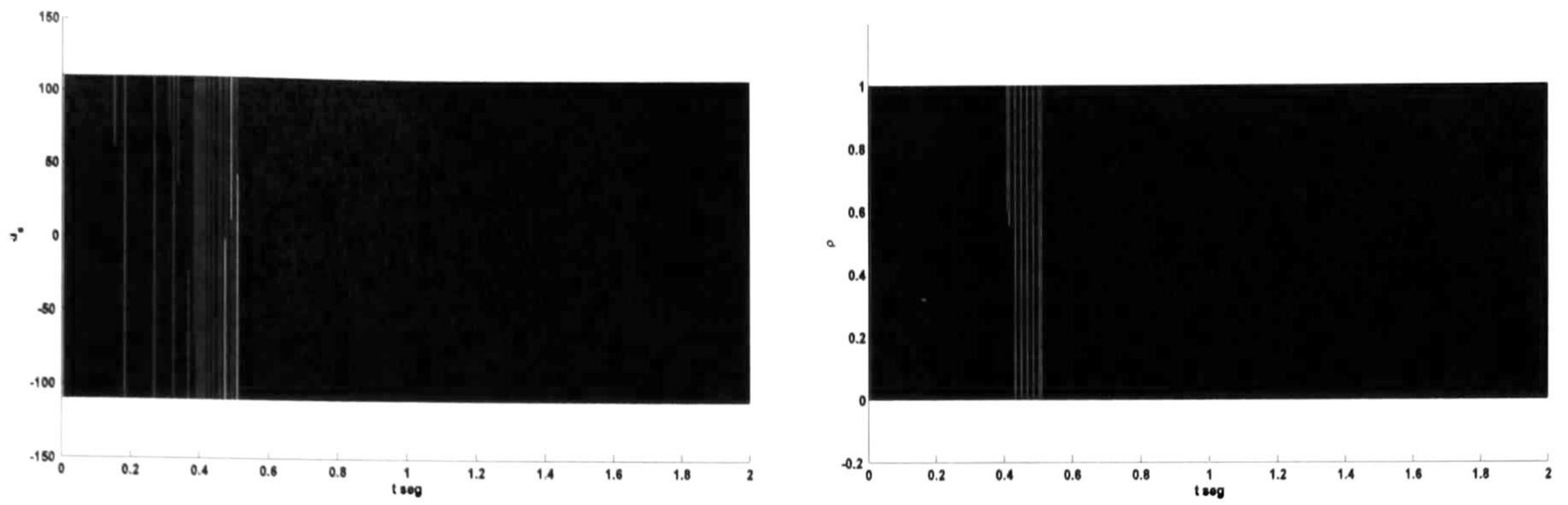


Figura 5. 18 Acción de control: a) $u_s = -u_0 \text{sign}(z_2 b_2)$, b) $\rho = |0.5 \text{sign}(z_2 \eta_2 \eta_4) - 0.5|$

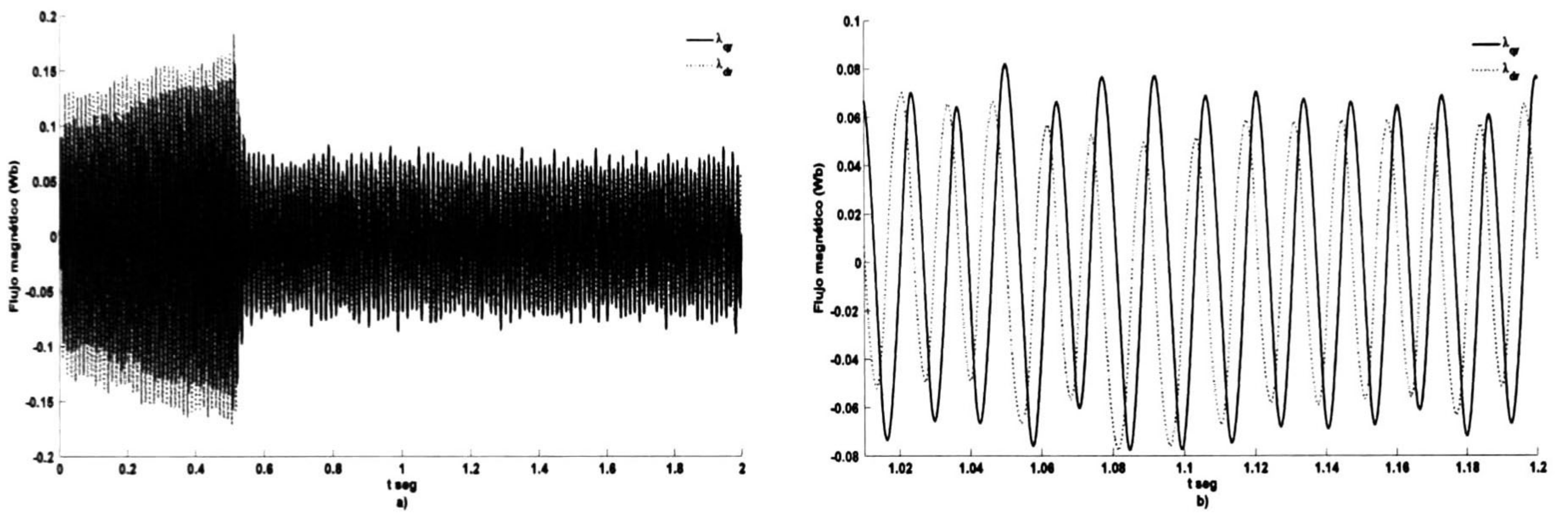


Figura 5. 19 Flujo magnético del rotor λ_{qr} y λ_{dr}

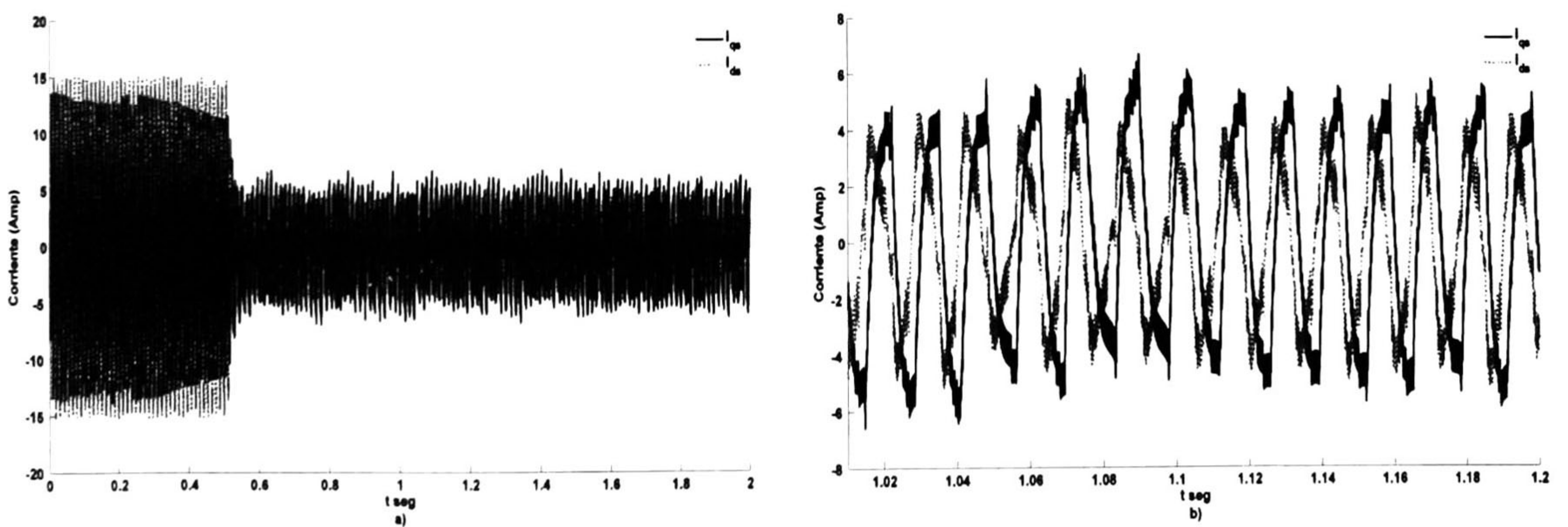


Figura 5. 20 Corrientes del motor i_{qs} y i_{ds}

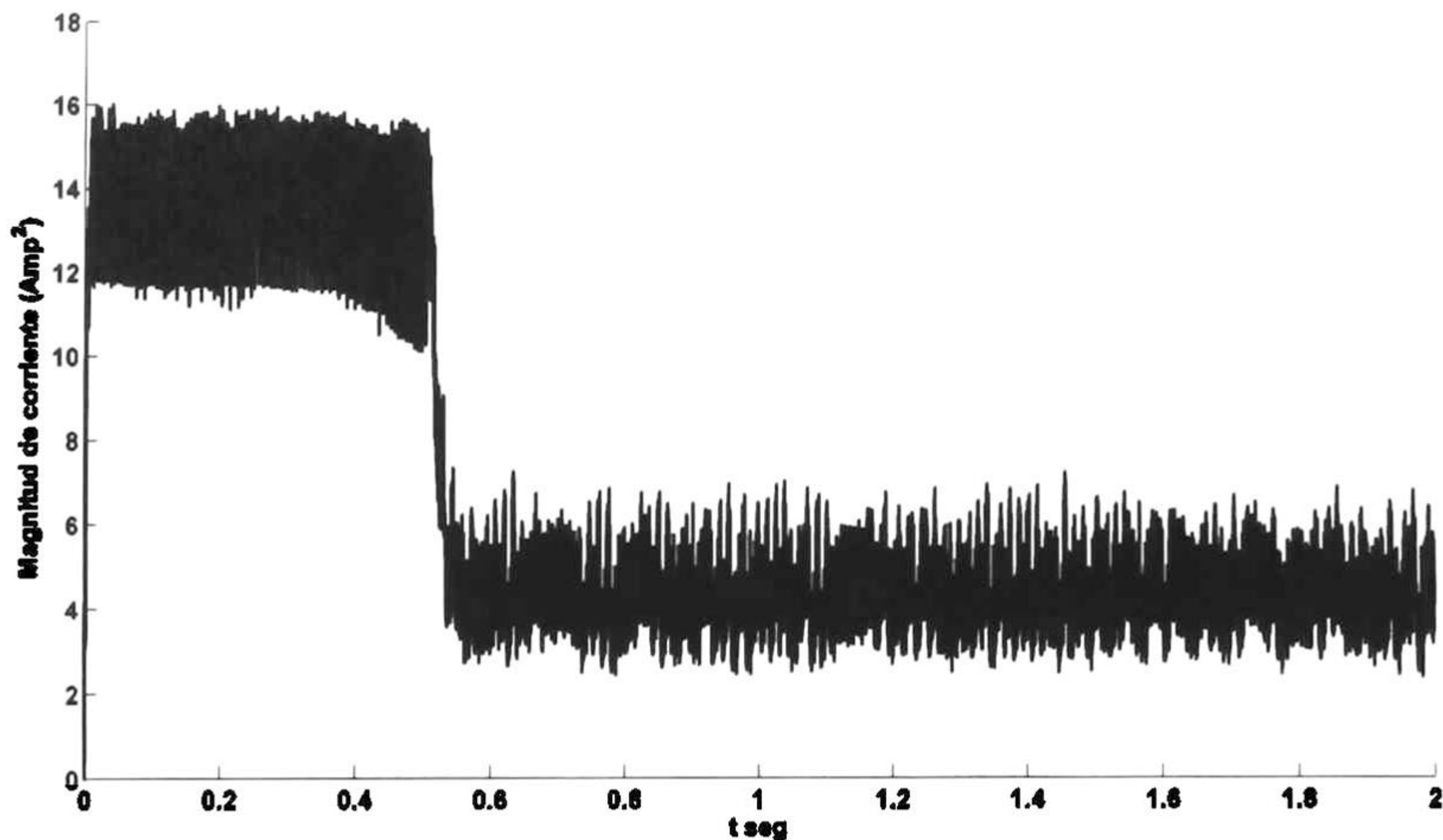


Figura 5. 21 Magnitud de la corriente eléctrica del estator $|I_s| = \sqrt{i_{qs}^2 + i_{ds}^2}$

Los flujos magnéticos del rotor, figura 5.19, se estabilizan en 0.6 segundos al igual que la velocidad, alcanzando un valor pico de 0.08 Wb aproximadamente, un valor muy pequeño con respecto a 0.4 Wb, figura 5.11. Las corrientes del estator, figura 5.20, al arranque adquieren un valor elevado, y al aplicar en el control el limitador de corriente esta se acota a su valor límite. Se observa buen resultado en el seguimiento de la velocidad de referencia. El módulo de la corriente del estator, figura 5.21, se mantiene en un valor promedio constante en estado estable.

Las corrientes del estator, figuras 5.13 y 5.20, presentan contenido armónico en estado estable donde se aprecia una disminución en la corriente de arranque durante el proceso transitorio, debido al uso del limitador de corriente. Se observa un comportamiento oscilatorio en la mayoría de las variables.

5.5 Observador de estados y del par de carga

Las ganancias del observador se ajustaron en los valores $l_1 = l_2 = 0.1$ para el observador de flujos de orden reducido, propuesto en la sección 4.4.2 y $l_3 = 50$ y $l_4 = -5$ para el observador del par de carga propuesto en la sección 4.4.3.

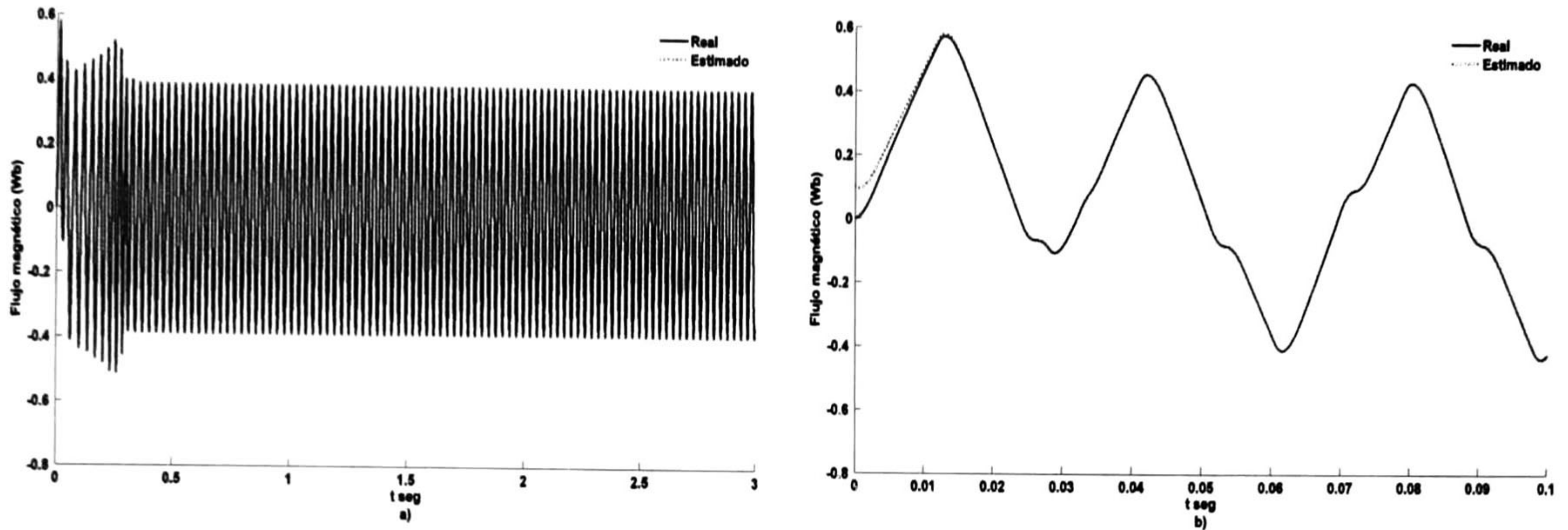


Figura 5. 22 Flujo magnético λ_{qr} y su estimado $\hat{\lambda}_{qr}$

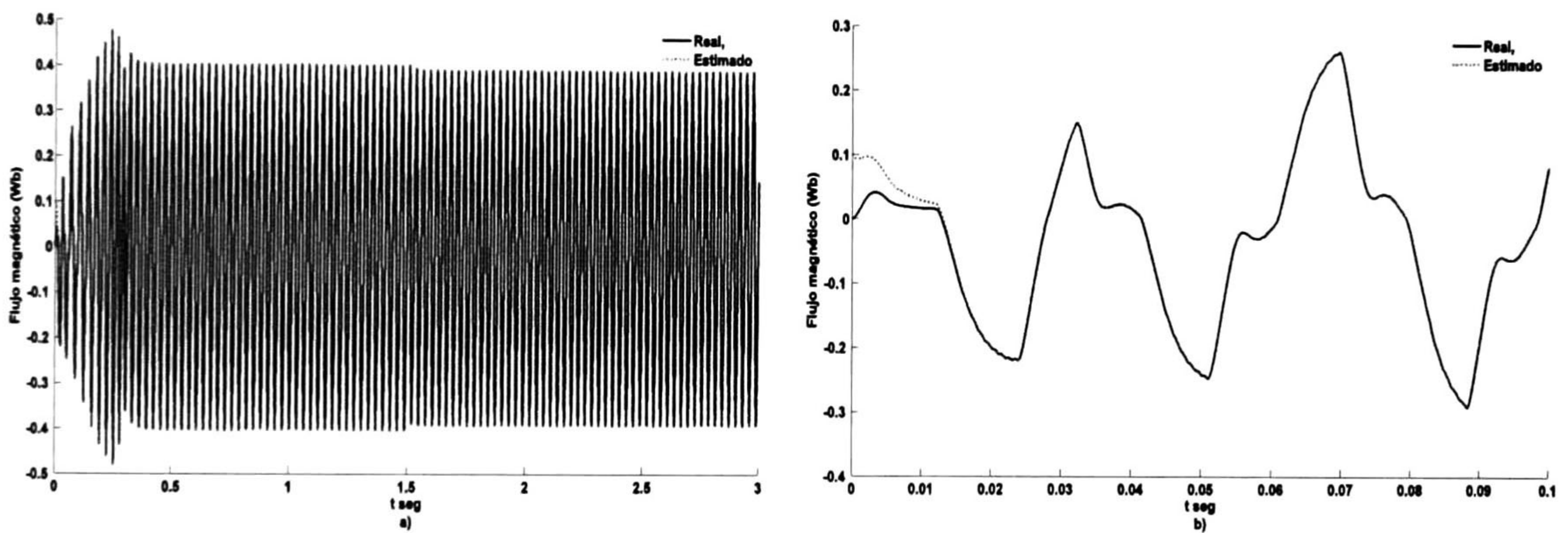


Figura 5. 23 Flujo magnético λ_{dr} y su estimado $\hat{\lambda}_{dr}$

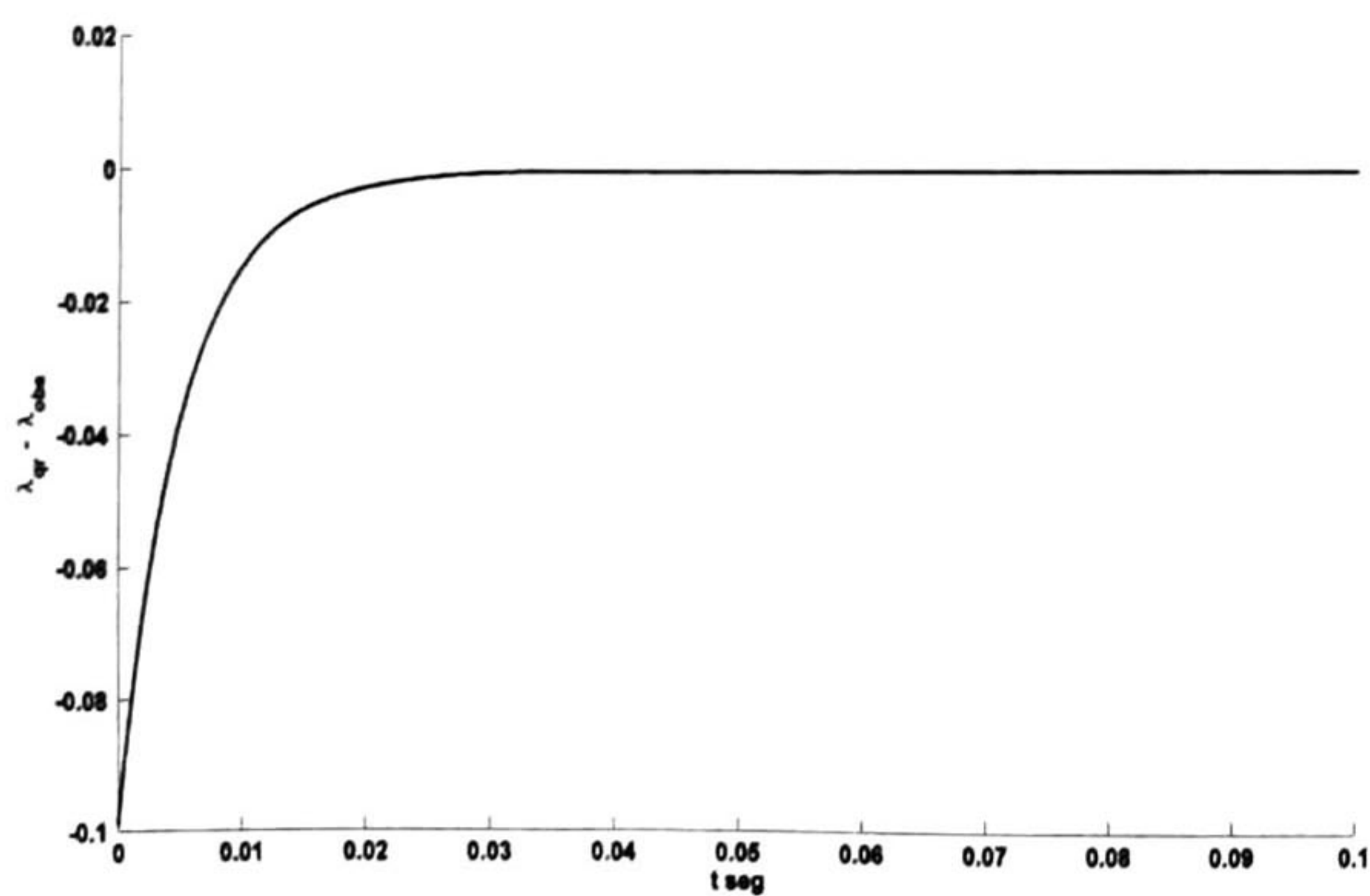


Figura 5. 24 Error e_q

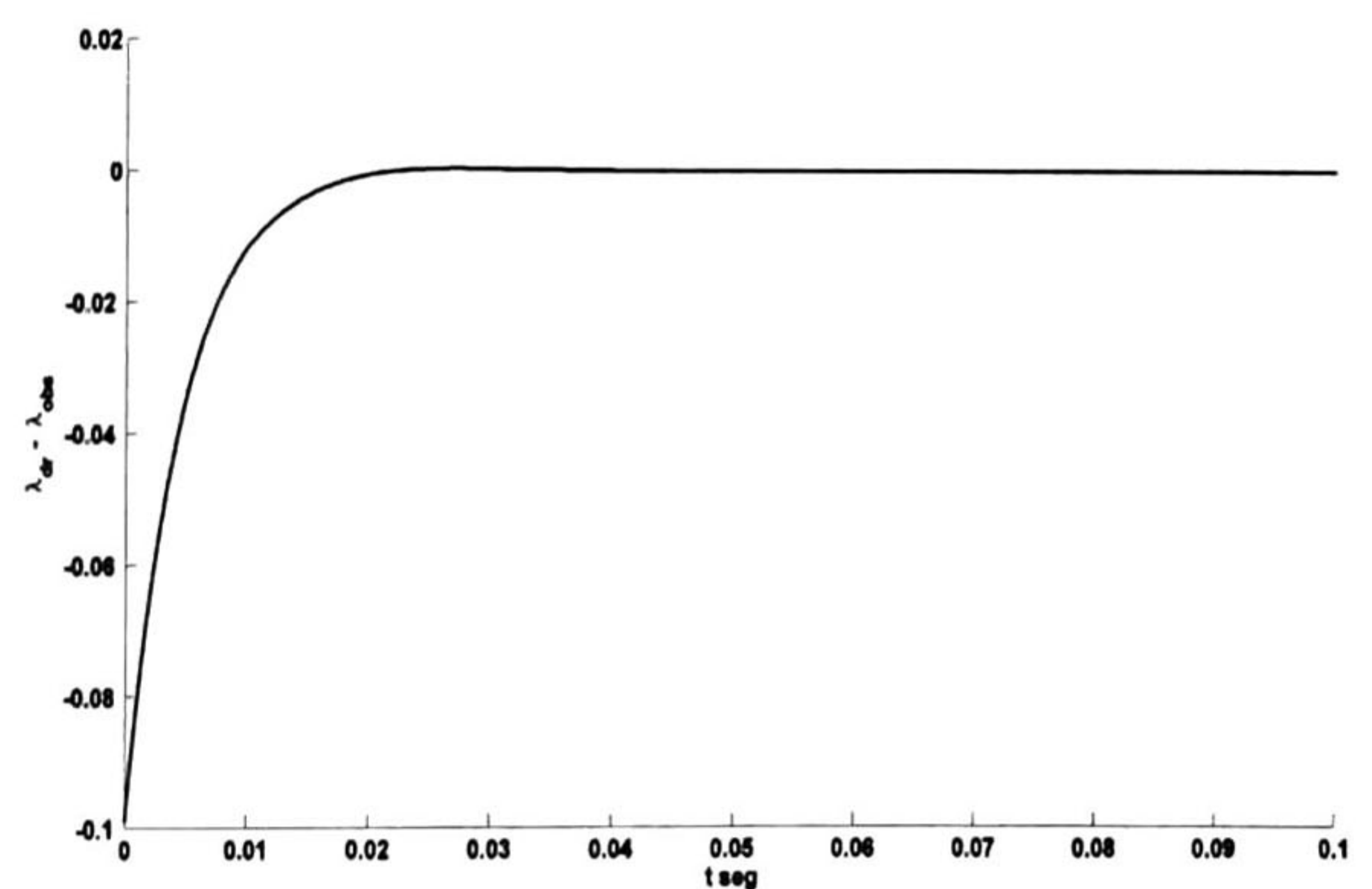


Figura 5. 25 Error e_d

En las figuras 5.22 y 5.23 se muestran los flujos magnéticos del rotor y sus valores estimados. Aquí podemos observar que la respuesta de las variables estimadas es muy rápida. El error en las componentes de los flujos, figuras 5.24 y 5.25, alcanza al valor cero en aproximadamente 0.04 segundos.

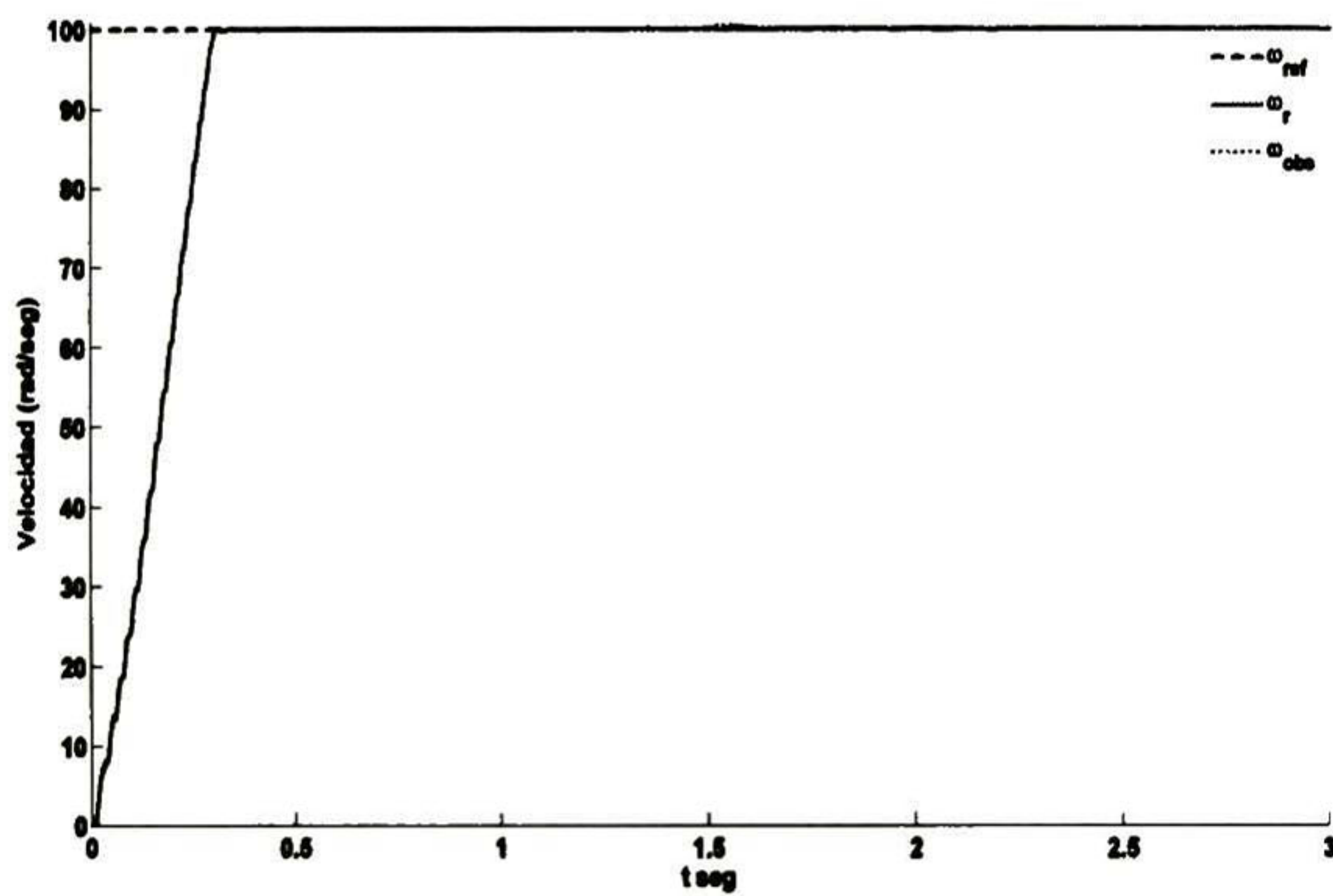


Figura 5. 26 Velocidad ω_r con su estimación $\hat{\omega}_r$

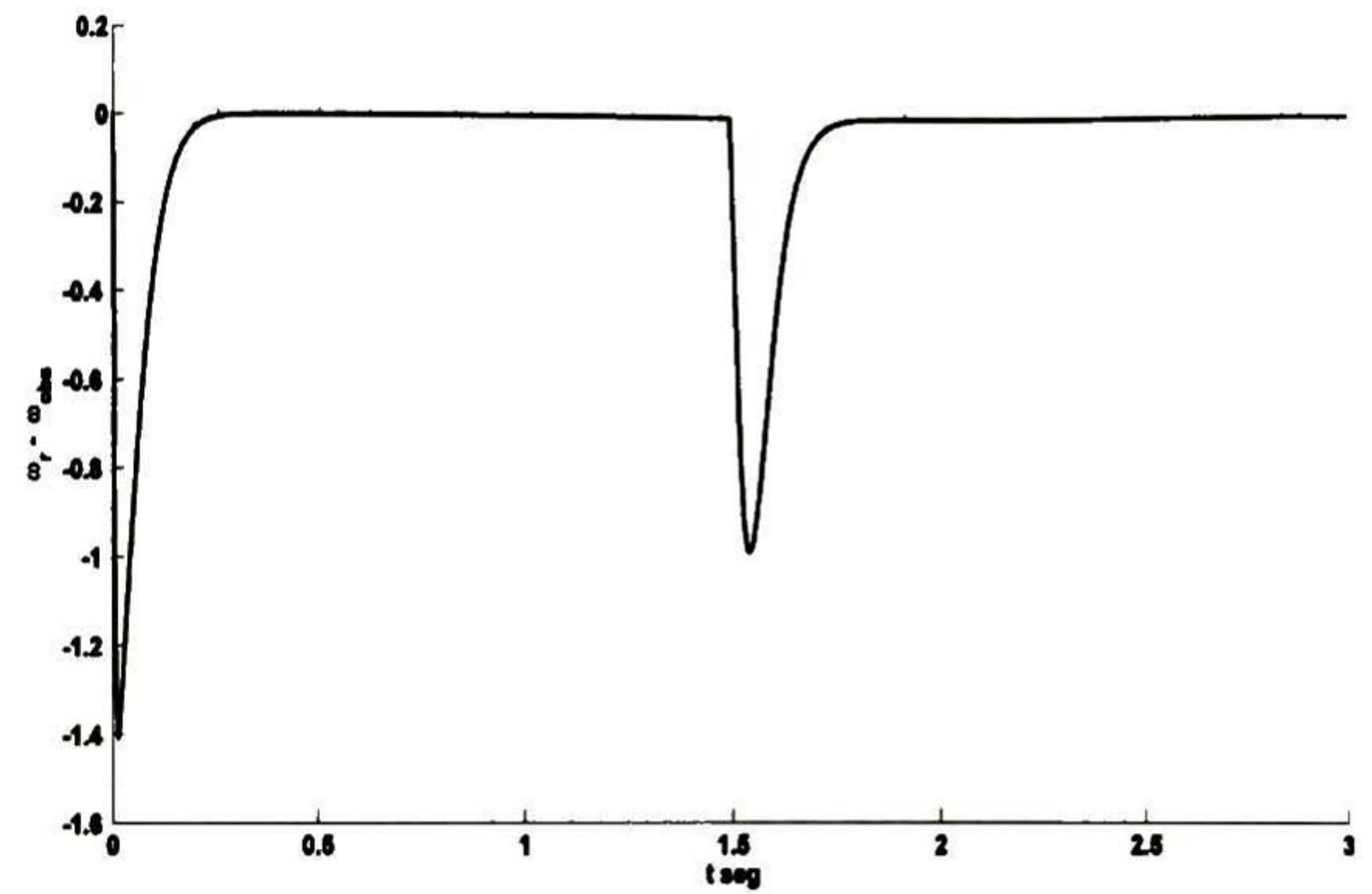


Figura 5. 27 Error e_ω

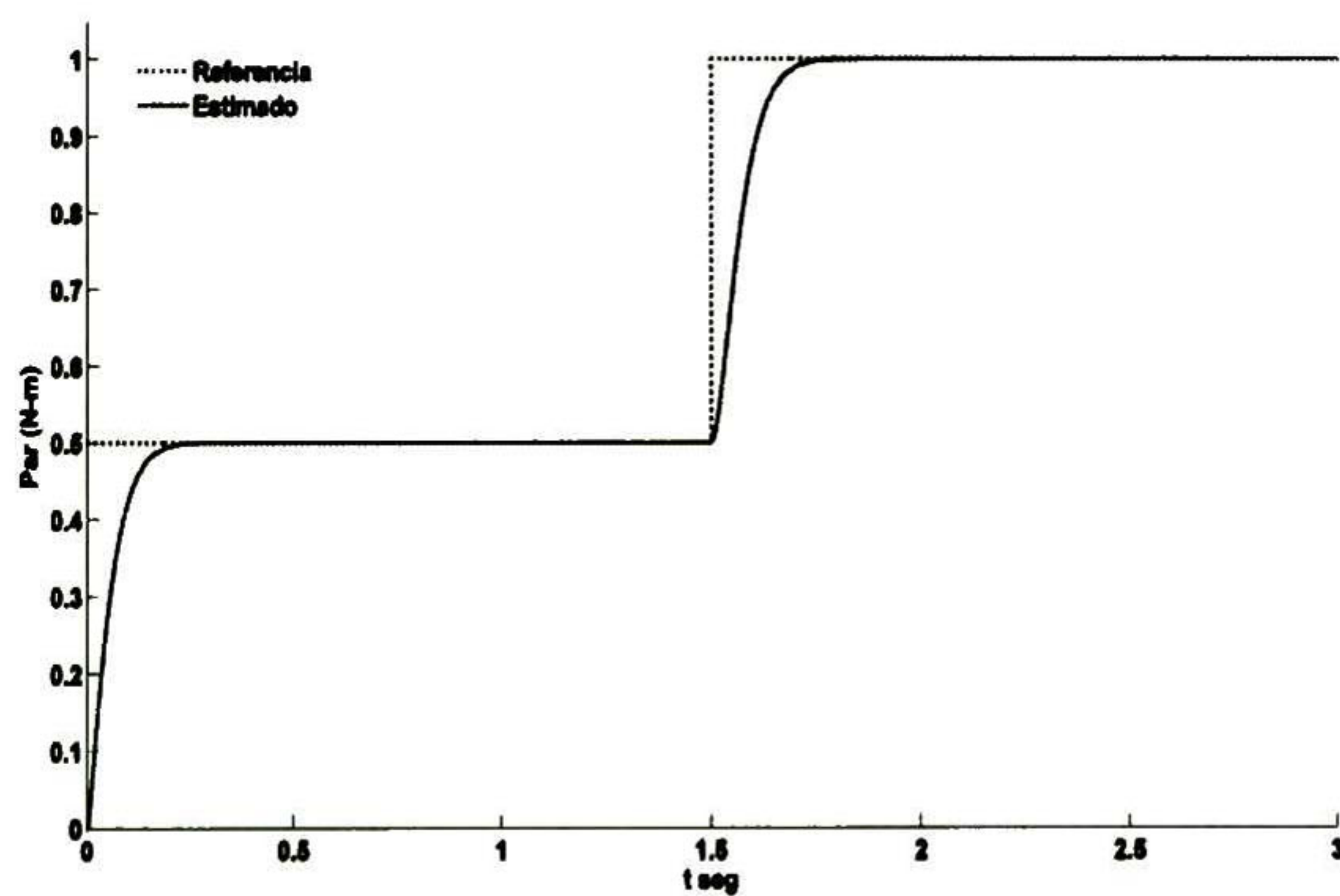


Figura 5. 28 Par de carga T_L con su estimación \hat{T}_L

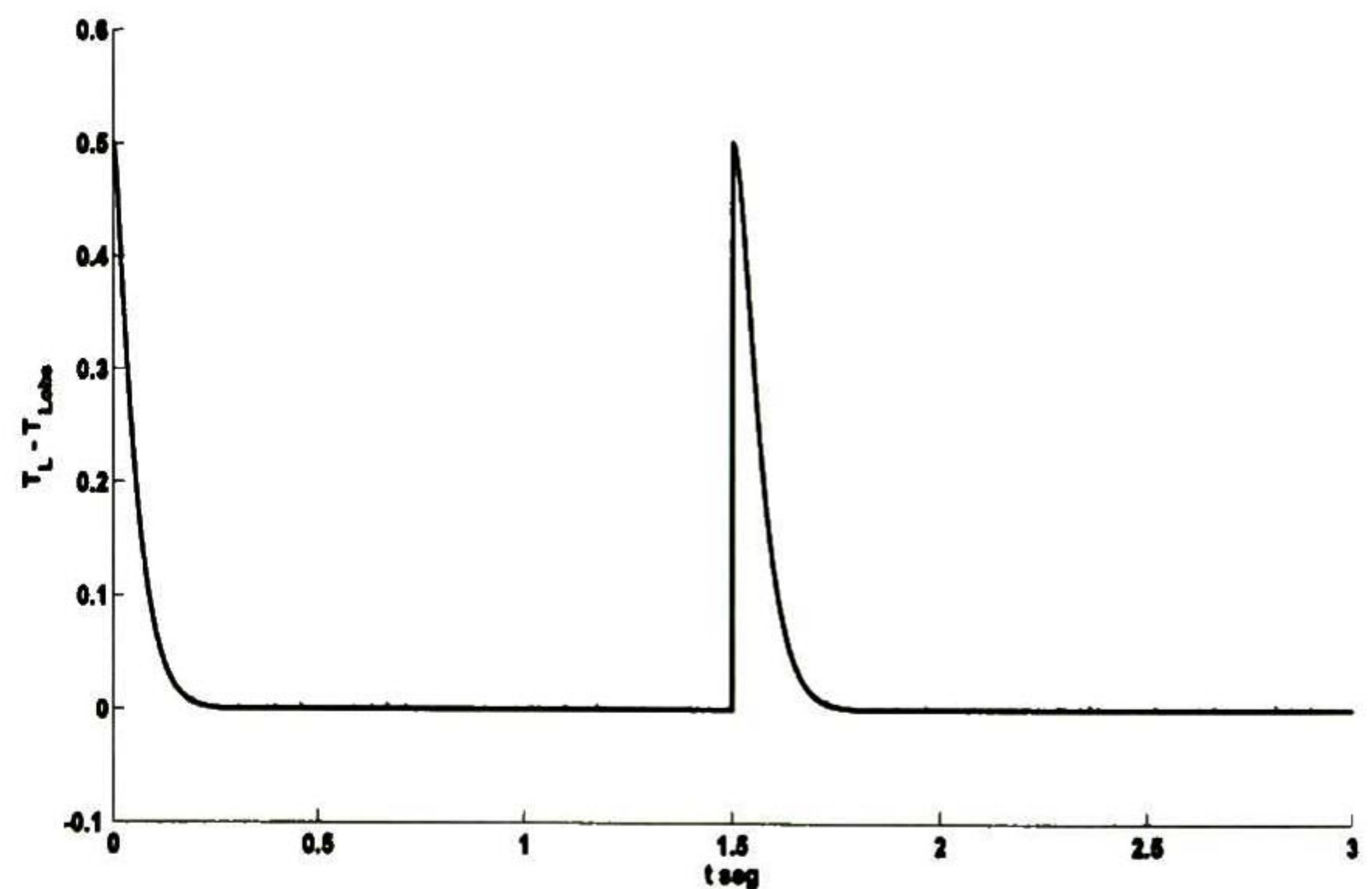


Figura 5. 29 Error e_{T_L}

Debido a que el motor puede tener variaciones de carga durante condiciones de operación, es necesario hacer una estimación adecuada del par T_L . Para demostrar la robustez del sistema y del observador del par de carga propuesto, se presentan resultados de simulación ante cambios súbitos en el par de carga. El motor se arranca con un par de carga de 0.5 Nm y en el instante de 1.5 segundos se incrementa hasta su valor nominal de 1 Nm, la velocidad de referencia se fija en 100 rad/seg.

Como se puede apreciar en las figuras (5.26)-(5.29) el observador es estable. En la figura 5.26 se observa que la velocidad del rotor ω_r es seguida por su valor estimado con un error de seguimiento pequeño, figura 5.27. En la figura 5.28, se muestra el par de carga y su estimación se aprecia que el observador de par \hat{T}_L satisface adecuadamente el valor de referencia. En la figura 5.29 se muestra el error del par ante el cambio súbito del par de carga y rápidamente se compensa regresando al valor de cero.

5. 6 Respuesta en lazo cerrado con retroalimentación de los estados estimados

En las secciones anteriores se mostraron las respuestas de los diferentes estados y parámetros y de sus estimados. Las variables estimadas no fueron utilizadas en el lazo cerrado de la ley de control. A continuación se presenta la respuesta del sistema en lazo cerrado cuando se utilizan en el controlador los estados calculados con el observador propuesto.

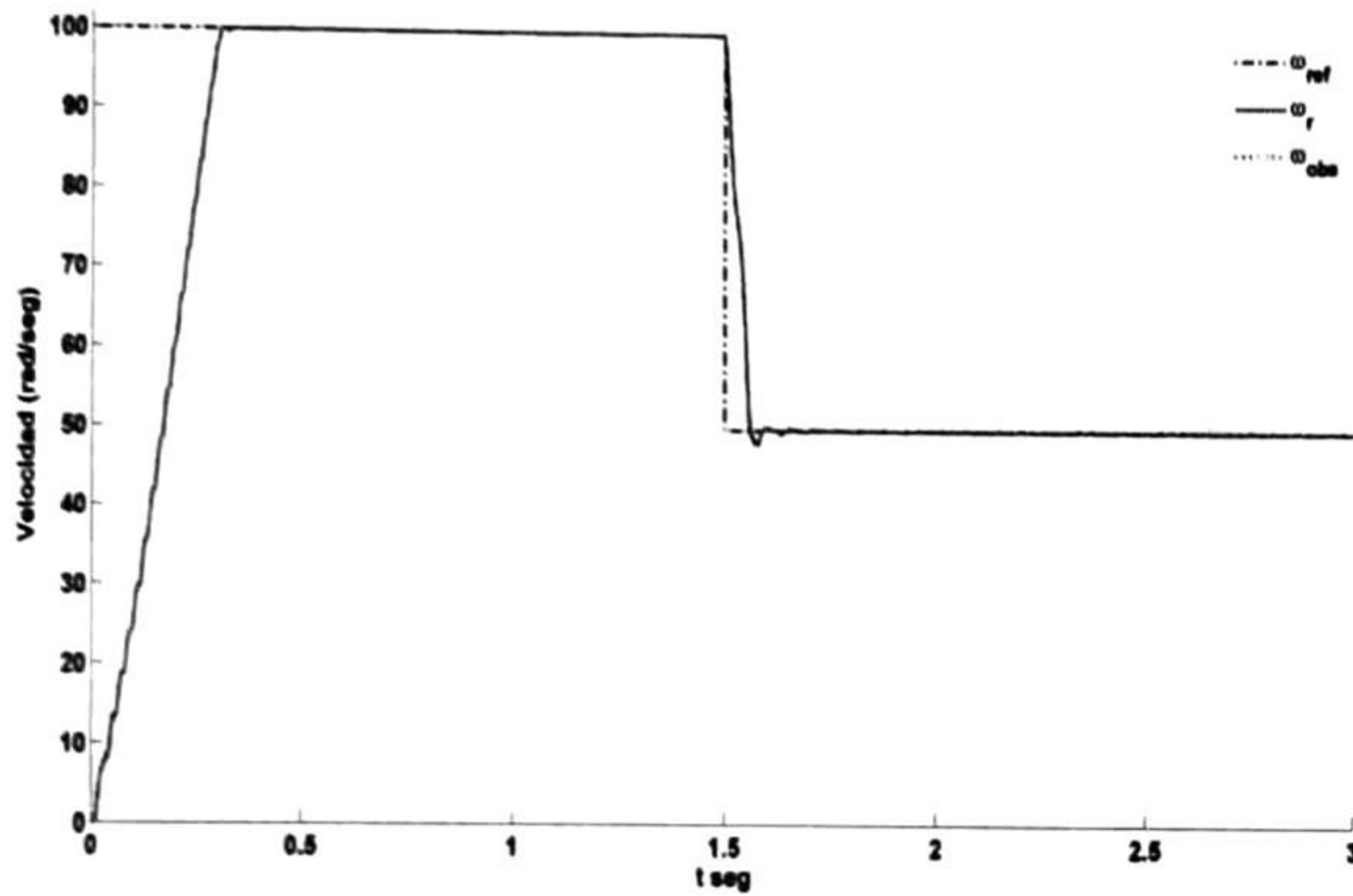


Figura 5. 30 Seguimiento de velocidad de referencia

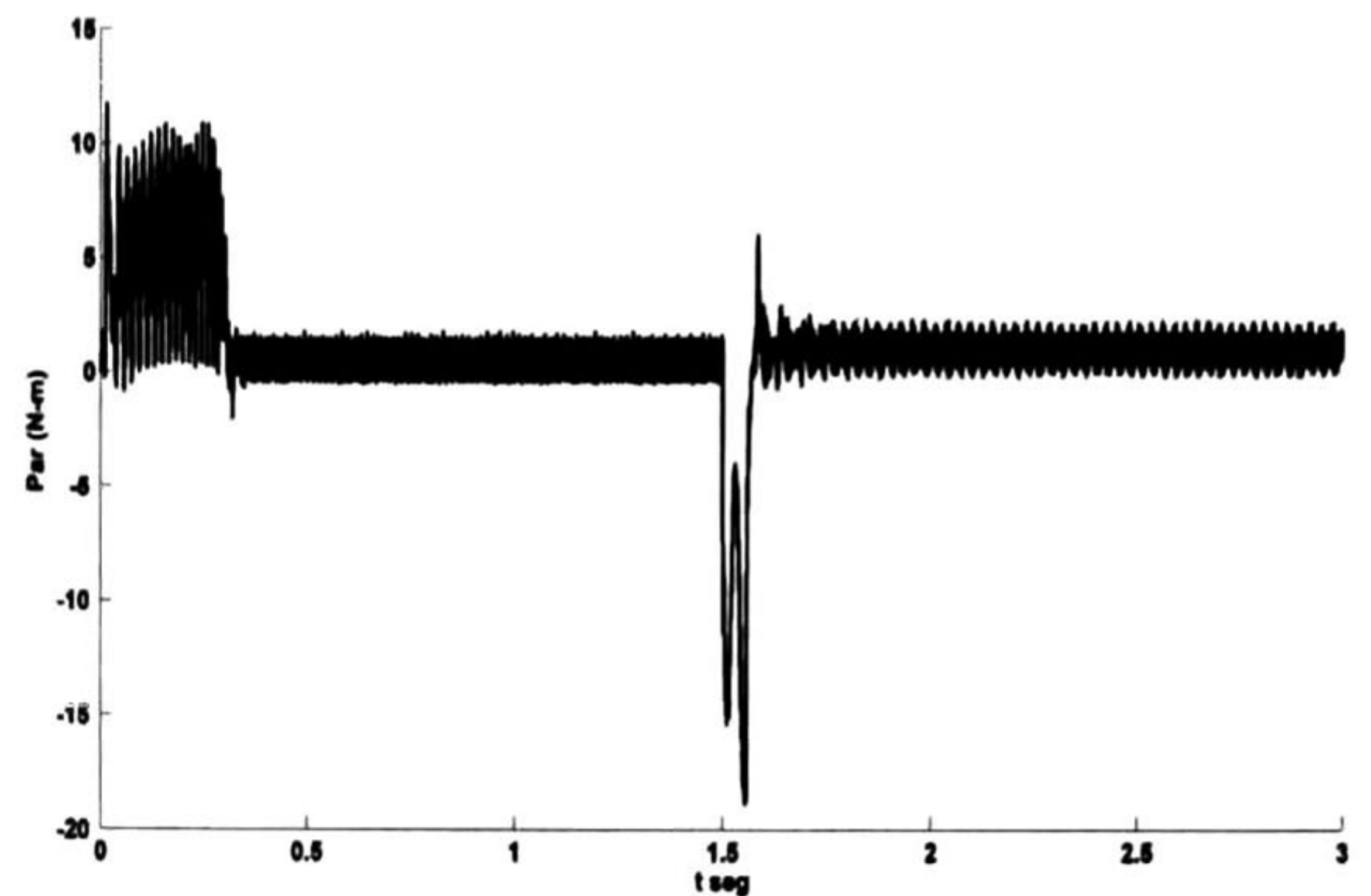


Figura 5. 31 Par electromagnético T_e

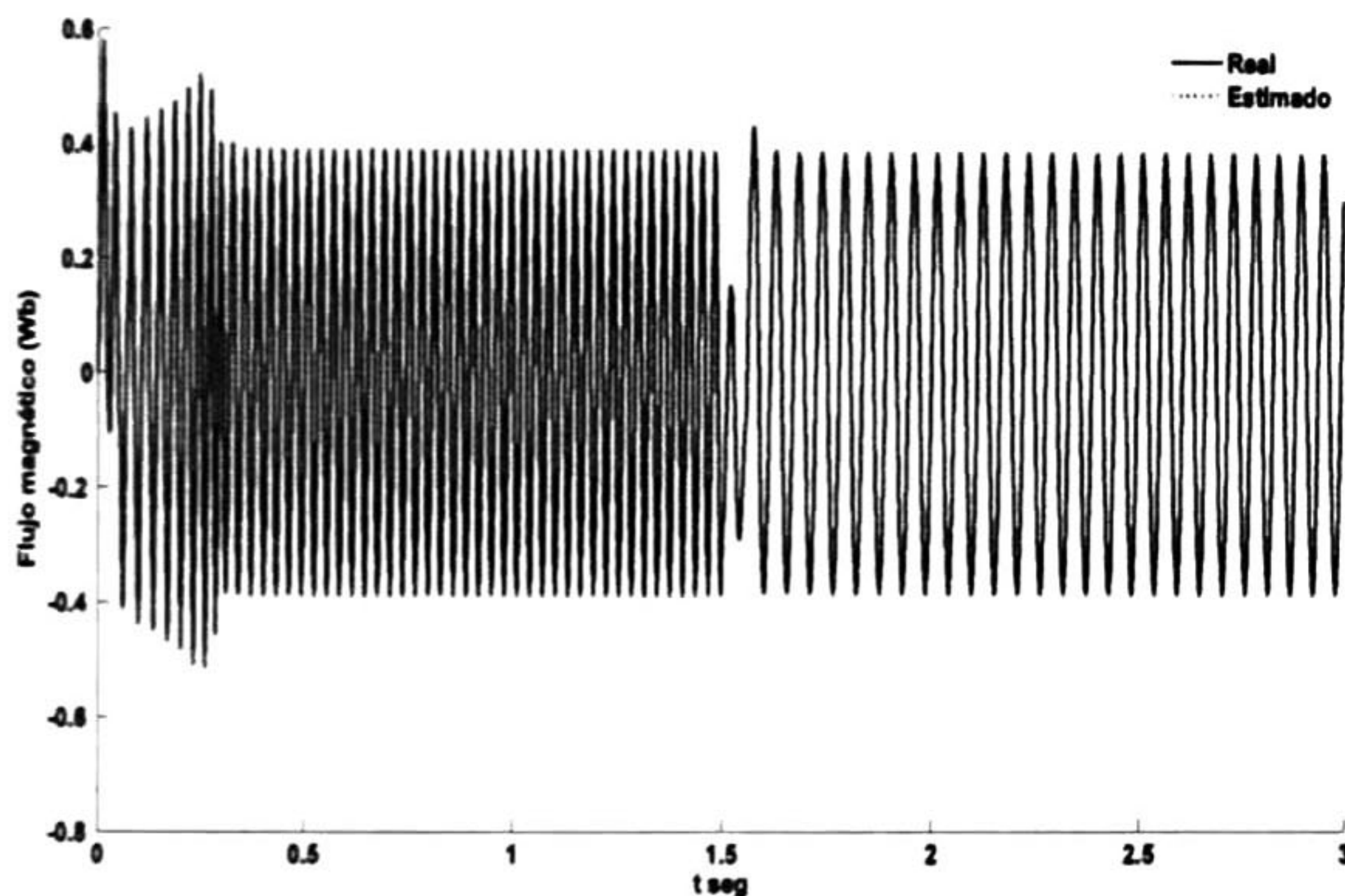


Figura 5. 32 λ_{qr} y su estimado $\hat{\lambda}_{qr}$

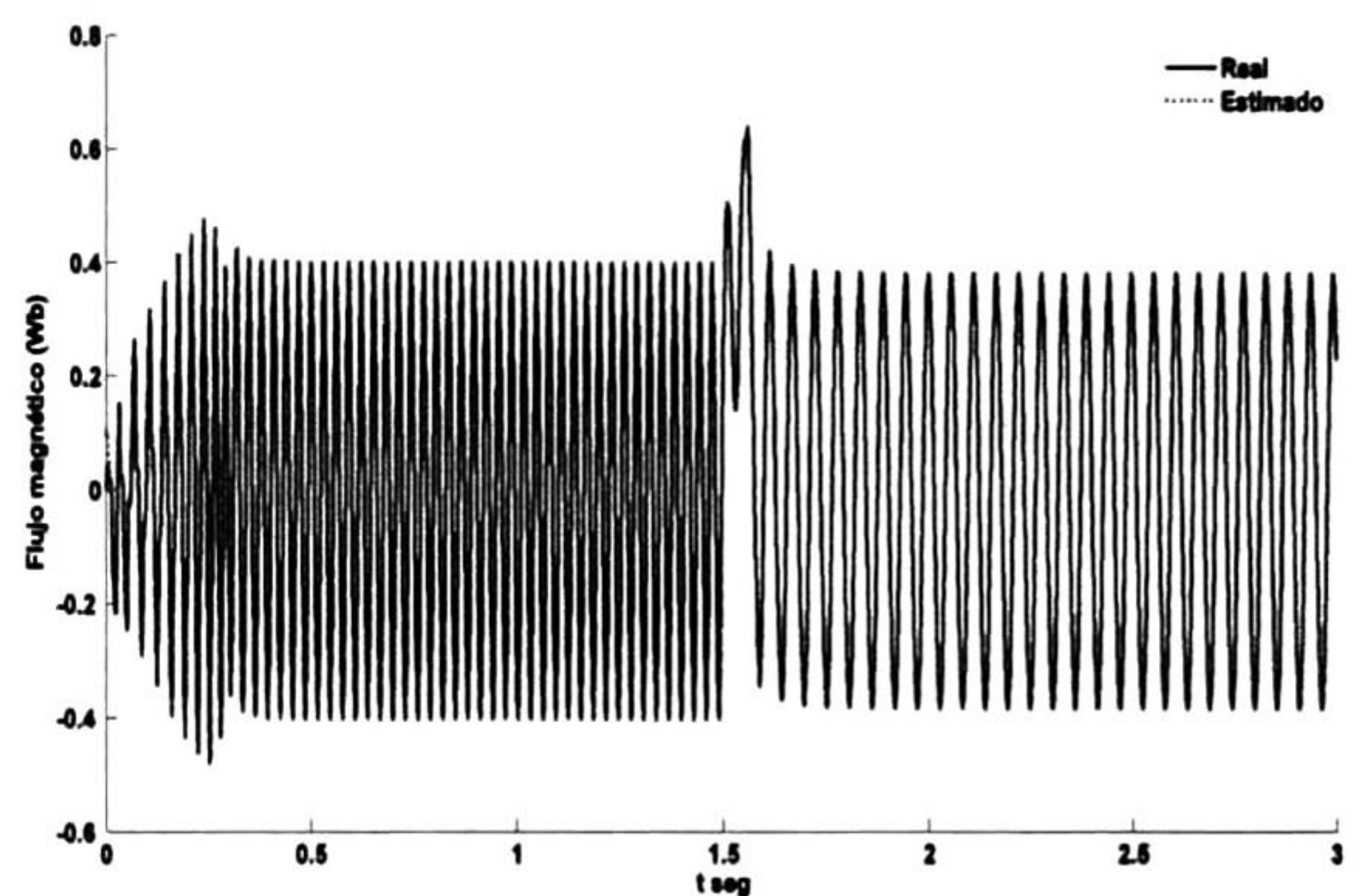


Figura 5. 33 λ_{dr} y su estimado $\hat{\lambda}_{dr}$

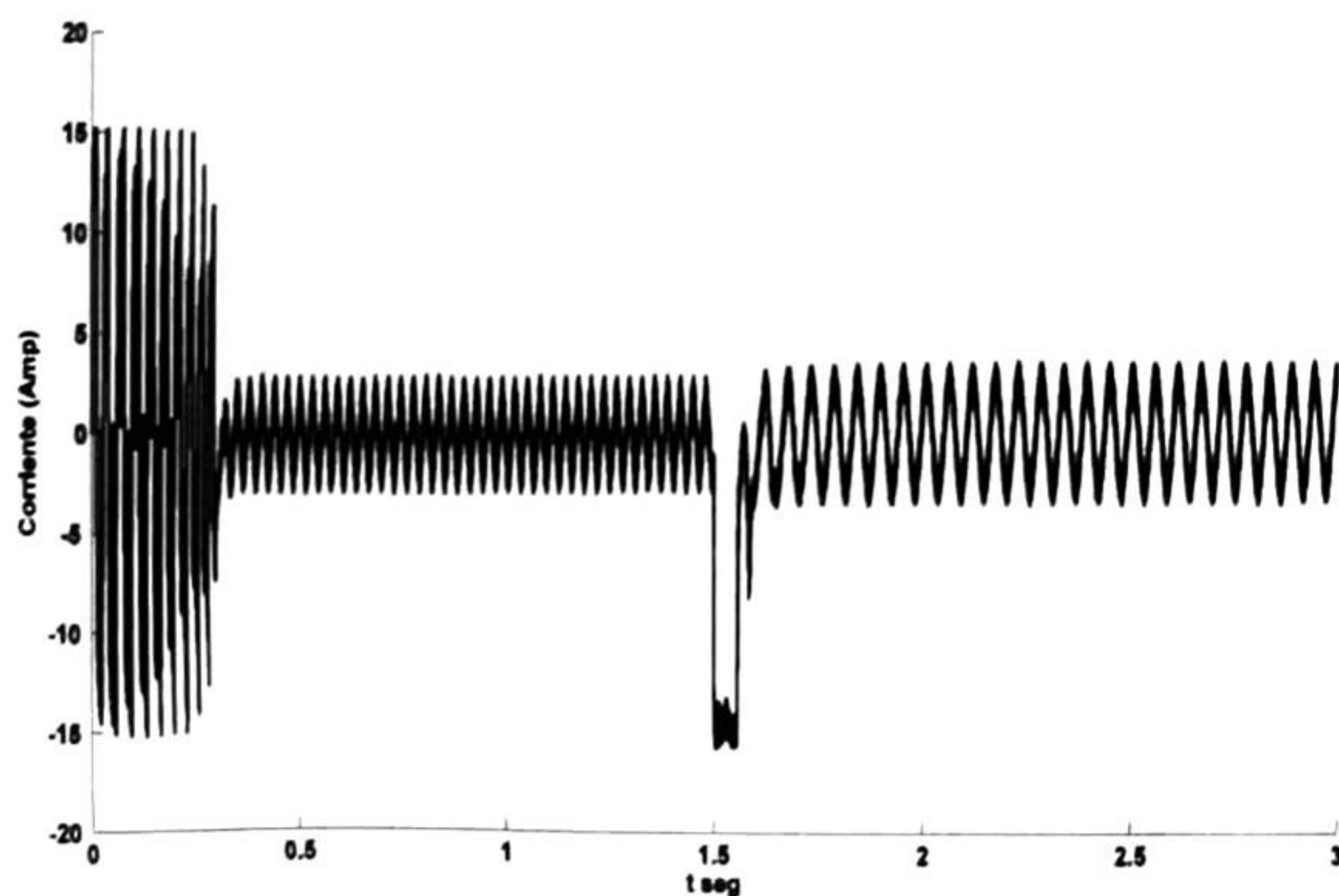


Figura 5. 34 Corriente del motor i_{qs}

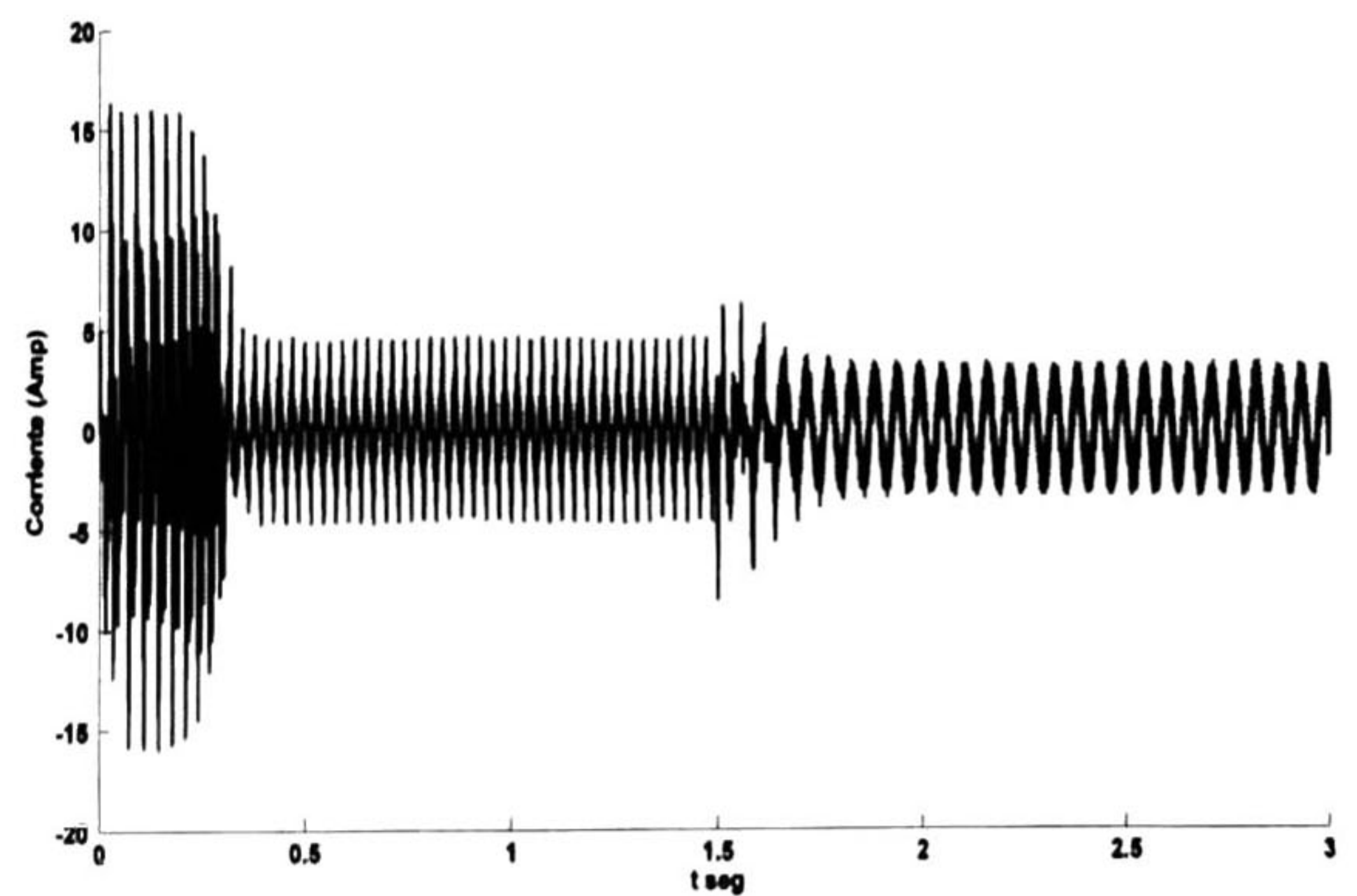


Figura 5. 35 Corriente del motor i_{ds}

El motor se arranca con un par de carga constante de 0.5 Nm y se establece 100 rad/seg como velocidad de referencia. El motor rápidamente se estabiliza. En el instante de 1.5 segundos se cambian súbitamente y simultáneamente la velocidad de referencia y el par de carga. Los nuevos valores de referencia son de 50 rad/seg para la velocidad y de 1 Nm para el par de carga.

En la figura 5.30 se aprecia que la velocidad de referencia ω_{ref} es seguida por la velocidad del rotor ω_r y por su valor estimado ω_{obs} . Se observa una pequeña diferencia en el par electromagnético que rápidamente se hace cero, figura 5.31, debido al cambio de 100 a 50 rad/seg en la referencia de la velocidad, así como también un aumento en el par de carga de 0.5 a 1 Nm

En la figuras 5.32 y 5.33 se observan los flujos de rotor y sus valores estimados. Las corrientes del estator, figuras 5.34 y 5.35, son mantenidas por debajo del valor máximo por el efecto del limitador de corriente utilizado. Se observa una reducción en la frecuencia de alternancia de las componentes de los flujos y de las corrientes, por efecto de la disminución de la velocidad del rotor.

En el mismo instante de los cambios de referencia se origina un transitorio de 0.15 segundos de duración aproximadamente, y después de ese tiempo se alcanza nuevamente el estado estable.

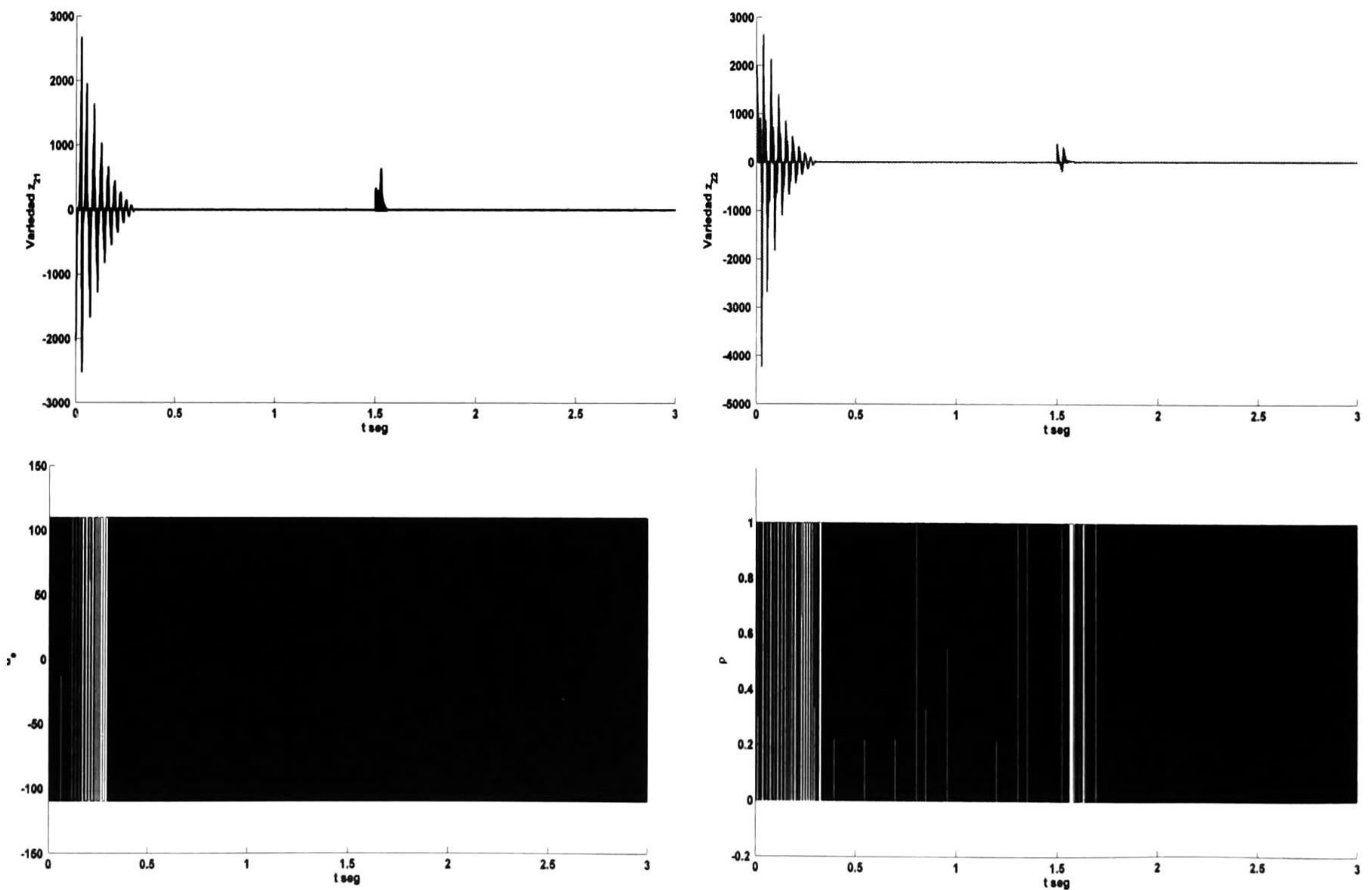


Figura 5. 36 Entradas de control

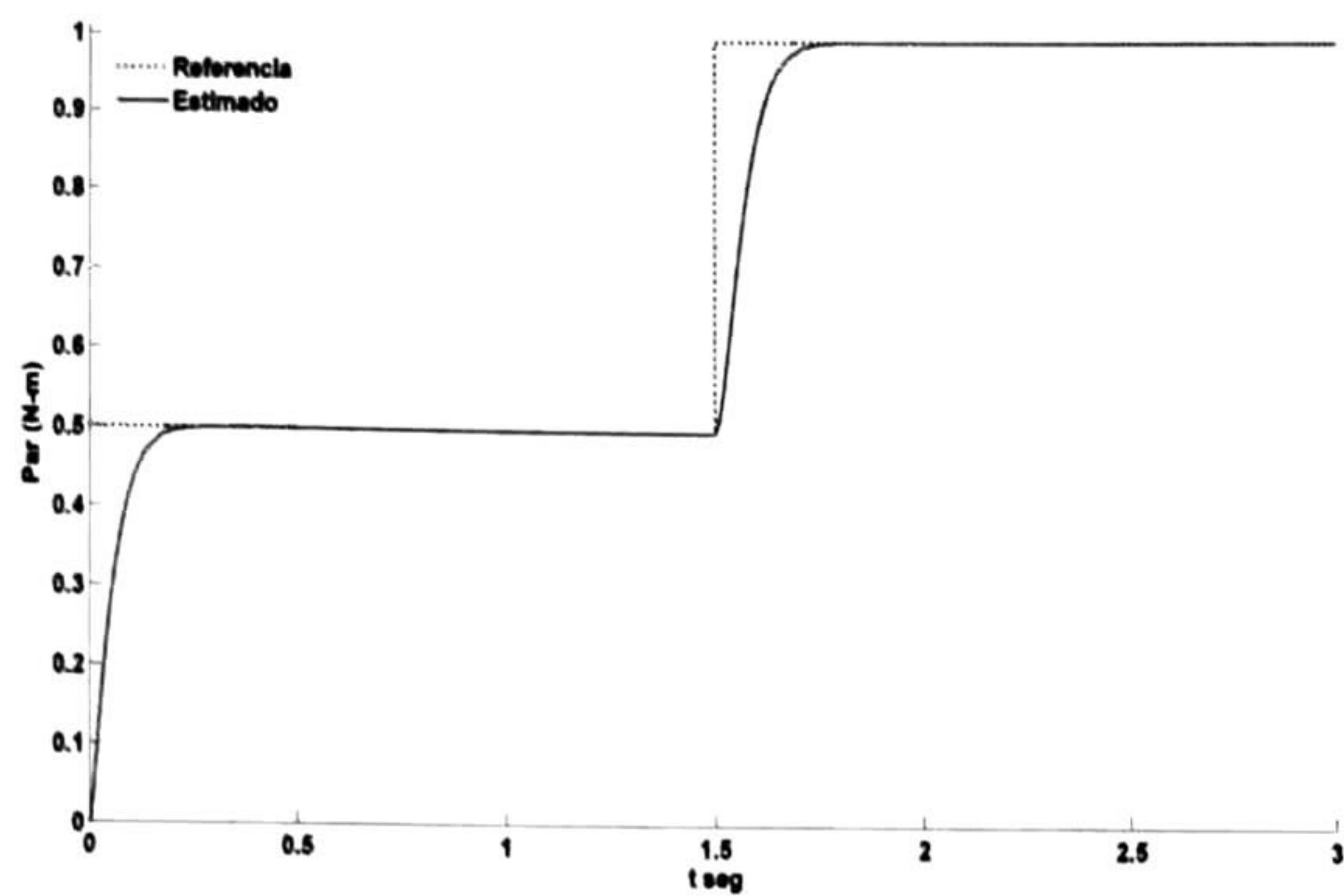


Figura 5. 37 Par de carga T_L con su estimación \hat{T}_L

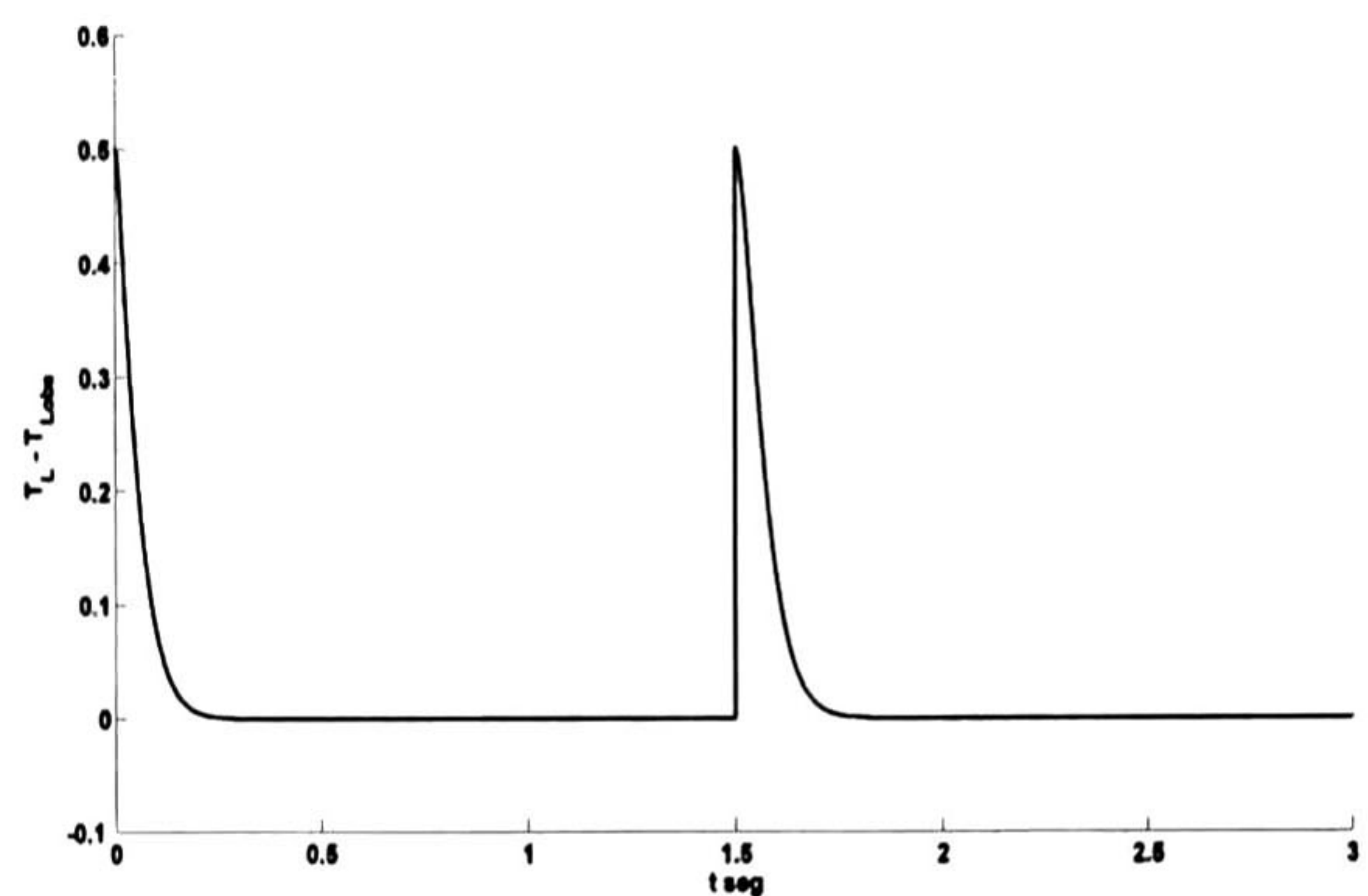


Figura 5. 38 Error e_{T_L}

La variedad deslizante, y las entradas de control se muestran en la figura 5.36, donde se observa un transitorio.

El par de carga, figura 5.37, experimenta una variación de 0.5 a 1 Nm y el observador de \hat{T}_L satisface adecuadamente la nueva condición de referencia. En la figura 5.38 se muestra el error del par y de su estimado, sufre una variación, pero rápidamente converge exponencialmente a cero.

Como resumen se concluye que la ley de control y los observadores propuestos tienen buen desempeño así como gran robustez ante cambios en la velocidad y en el par de carga, validando la efectividad del algoritmo de control propuesto.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajos futuros

Las conclusiones más importantes de este trabajo son:

- Se desarrollaron dos controladores empleando la técnica de modos deslizantes. Los controladores regulan la velocidad del rotor ante diferentes condiciones. Además, proporcionan un par de arranque apropiado y minimizan la componente armónica del par electromagnético resultante.
- Se desarrollo en detalle el modelo del motor de inducción monofásico. El modelo dinámico y en estado estable. En donde se explican los detalles sobresalientes de operación del motor monofásico.
- Se desarrolla un estimador de estados para las variables no medibles, enlaces de flujo en el rotor y par de carga.
- Se desarrollo un algoritmo y programa digital en código matlab en donde se implementan los controladores y el estimador de estados.
- Los resultados de las simulaciones demuestran el buen desempeño de los controladores propuestos.

Como trabajos futuros se propone lo siguiente:

- Implementación de los controladores propuestos en motores reales.
- Inclusión de la característica de saturación en el modelo.
- Desarrollo de controladores con modos deslizantes de alto orden.
- Desarrollo de controladores que consideren como variables a regular otras variables físicas relacionadas con los procesos que utilizan el motor de inducción como actuador principal.

Apéndices

A- 1 Sistema referido a la fase A del estator

Para obtener el modelo circuital comúnmente utilizado para el motor de inducción monofásico, las cantidades del motor son referidas al eje de la fase A del estator por la relación de vueltas correspondientes entre los devanados del estator y rotor. Se representa con apóstrofe las variables del motor referidas. Considerando las variables de voltaje, corriente y enlace de flujo en términos de su relación de vueltas para ambos devanados:

$$\bar{i}'_{ab} = \frac{N_r}{N_A} \bar{i}_{ab}, \quad \bar{V}'_{ab} = \frac{N_A}{N_r} \bar{V}_{ab}, \quad \text{y} \quad \bar{\lambda}'_{ab} = \frac{N_A}{N_r} \bar{\lambda}_{ab}$$

Además

$$i'_B = \frac{N_B}{N_A} i_B, \quad v'_B = \frac{N_A}{N_B} v_B, \quad \text{y} \quad \lambda'_B = \frac{N_A}{N_B} \lambda_B$$

Relación entre las inductancias de magnetización y mutua: $L_{mA} = \frac{N_A}{N_r} M_{srA}$ y $L_{mB} = \frac{N_B}{N_r} M_{srB}$

y L_{mA} también puede ser expresada en $L_{mA} = \frac{N_A^2}{N_B^2} L_{mB}$

Así, se define:

$$\bar{M}'_{sr} = L_{mA} \begin{bmatrix} \cos \theta_r & -\sin \theta_r \\ \sin \theta_r & \cos \theta_r \end{bmatrix}$$

L_{mr} puede ser expresado como: $L_{mr} = \frac{N_r^2}{N_A^2} L_{mA}$

Entonces la matriz de inductancias del rotor referida a la fase A del estator es:

$$\bar{L}_r = \begin{bmatrix} L'_{lr} + L_{mA} & 0 \\ 0 & L'_{lr} + L_{mA} \end{bmatrix}$$

donde $L'_{lr} = \frac{N_A^2}{N_r^2} L_{lr}$

Y la matriz de inductancias del estator con la fase B referida a la fase A es:

$$\bar{L}_s = \begin{bmatrix} L_{lA} + L_{mA} & 0 \\ 0 & L_{lB} + L_{mA} \end{bmatrix}$$

donde $L_{lB} = \frac{N_A^2}{N_B^2} L_{lB}$

Aplicando las consideraciones anteriores tenemos:

$$\lambda_A = (L_{lA} + L_{mA})i_A + \frac{N_A}{N_r} M_{srA} \cos \theta_r i'_a - \frac{N_A}{N_r} M_{srA} \sin \theta_r i'_b$$

$$\lambda_A = (L_{lA} + L_{mA})i_A + L_{mA} (\cos \theta_r i'_a - \sin \theta_r i'_b)$$

$$\frac{N_A}{N_B} \lambda_B = (L_{lB} + L_{mB}) \frac{N_A}{N_B} i_B + \frac{N_A}{N_B} M_{srB} \sin \theta_r i'_a + \frac{N_A}{N_B} M_{srB} \cos \theta_r i'_b$$

$$\lambda'_B = (L_{lB} + L_{mB}) \frac{N_A^2}{N_B^2} i'_B + \frac{N_A^2}{N_B^2} L_{mB} \sin \theta_r i'_a + \frac{N_A^2}{N_B^2} L_{mB} \cos \theta_r i'_b$$

$$\lambda'_B = (L'_{lB} + L_{mA})i'_B + L_{mA} (\sin \theta_r i'_a + \cos \theta_r i'_b)$$

$$v_B = r_B i'_B + \frac{d\lambda_B}{dt}$$

$$\frac{N_A}{N_B} v_B = r_B \frac{N_A}{N_B} i'_B + \frac{d}{dt} \frac{N_A}{N_B} \lambda_B$$

$$v_B = r_B \frac{N_A^2}{N_B^2} i'_B + \frac{d\lambda'_B}{dt}$$

$$v'_B = r'_B i'_B + \frac{d\lambda'_B}{dt}$$

donde $r'_B = \frac{N_A^2}{N_B^2} r_B$

$$\frac{N_A}{N_r} \lambda_a = \frac{N_A}{N_r} M_{srA} \cos \theta_r i_A + \frac{N_A^2}{N_B^2} L_{mB} \sin \theta_r i'_B + \frac{N_A^2}{N_r^2} (L_{lr} + L_{mr}) i'_a$$

$$\lambda'_a = L_{mA} (\cos \theta_r i_A + \sin \theta_r i'_B) + (L'_{lr} + L_{mA}) i'_a$$

$$\frac{N_A}{N_r} \lambda_b = -\frac{N_A}{N_r} M_{srA} \sin \theta_r i_A + \frac{N_A^2}{N_B^2} L_{mB} \cos \theta_r i'_B + \frac{N_A^2}{N_r^2} (L_{lr} + L_{mr}) i'_b$$

$$\lambda'_b = L_{mA} (-\sin \theta_r i_A + \cos \theta_r i'_B) + (L'_{lr} + L_{mA}) i'_b$$

$$\frac{N_A}{N_r} \bar{V}_{ab} = R_r \frac{N_A}{N_r} \bar{i}_{ab} + \frac{d}{dt} \frac{N_A}{N_r} \bar{\lambda}_{ab}$$

$$\bar{V}'_{ab} = R_r \frac{N_A^2}{N_r^2} \bar{i}'_{ab} + \frac{d\bar{\lambda}'_{ab}}{dt}$$

$$\bar{V}'_{ab} = R'_r \bar{i}'_{ab} + \frac{d\bar{\lambda}'_{ab}}{dt}$$

donde $R'_r = \frac{N_A^2}{N_r^2} R_r$

Los enlaces de flujo pueden ser ahora expresados como:

$$\bar{\lambda}_{AB} = \bar{L}_s \bar{i}_{AB} + \bar{M}_{sr} \bar{i}_{ab} \quad (\text{A.1})$$

$$\bar{\lambda}_{ab} = \bar{M}_{sr} \bar{i}_{AB} + \bar{L}_r \bar{i}_{ab} \quad (\text{A.2})$$

Las ecuaciones de voltaje pueden ser ahora descritas por:

$$\bar{V}_{AB} = R_s \bar{i}_{AB} + \frac{d\bar{\lambda}_{AB}}{dt} \quad (\text{A.3})$$

$$\bar{V}_{ab} = R_r \bar{i}_{ab} + \frac{d\bar{\lambda}_{ab}}{dt} \quad (\text{A.4})$$

A- 2 Desarrollo de la transformación de Park

La transformación de las variables asociadas a los circuitos del estator al marco dq puede ser expresada por,

$$f_{qds} = K_{2s} f_{AB} \quad (\text{A.5})$$

donde

$$f_{qds} = [f_{qs} \ f_{ds}]^T, \quad f_{AB} = [f_A \ f_B]^T$$

$$K_{2s} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}, \quad \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

f puede representar voltaje, corriente o enlaces de flujo.

El subíndice s indica las variables o parámetros asociados con los circuitos del estator. Las variables del rotor referidas al sistema dq tienen la forma,

$$f_{qdr} = K_{2r} f_{ab} \quad (\text{A.6})$$

donde

$$f_{qdr} = [f_{qr} \ f_{dr}]^T, \quad f_{ab} = [f_a \ f_b]^T$$

$$K_{2r} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{bmatrix}, \quad \beta = \theta - \theta_r \quad \text{y} \quad \omega_r = \frac{d\theta_r}{dt}$$

θ_r es el desplazamiento angular del rotor.

El subíndice r indica que las variables, parámetros y transformación están asociados con los devanados del rotor. La velocidad y desplazamiento angular del marco de referencia arbitrario, están relacionados por:

$$\theta = \int_{\theta_0} \omega(\tau) d\tau + \theta_0 \quad (\text{A.7})$$

Como es un marco de referencia estacionario ($\omega = 0$), las matrices de transformación K_{2s} y K_{2r} se reducen de la siguiente forma:

$$K_{2s} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (K_{2s})^{-1} = K_{2s}$$

$$K_{2r} = \begin{bmatrix} \cos \theta_r & -\sin \theta_r \\ -\sin \theta_r & -\cos \theta_r \end{bmatrix} \quad (K_{2r})^{-1} = K_{2r}$$

Las ecuaciones de voltaje del estator se transforman como se indica a continuación:

$$\bar{V}_{qds}^s = K_{2s} \bar{V}_{AB}$$

Premultiplicando (A.3) por K_{2s} ,

$$\bar{V}_{qds}^s = K_{2s} R_s' \bar{i}_{AB}' + K_{2s} \frac{d\bar{\lambda}_{AB}'}{dt}$$

desarrollando la ecuación anterior,

$$\begin{aligned} \bar{V}_{qds}^s &= K_{2s} R_s' K_{2s}^{-1} K_{2s} \bar{i}_{AB}' + K_{2s} \frac{d(K_{2s}^{-1} K_{2s} \bar{\lambda}_{AB}')}{dt} = K_{2s} R_s' K_{2s}^{-1} \bar{i}_{qds}^s + K_{2s} \frac{d(K_{2s}^{-1} \bar{\lambda}_{qds}^s)}{dt} \\ &= K_{2s} R_s' K_{2s}^{-1} \bar{i}_{qds}^s + K_{2s} K_{2s}^{-1} \frac{d\bar{\lambda}_{qds}^s}{dt} + K_{2s} \frac{d(K_{2s}^{-1}) \bar{\lambda}_{qds}^s}{dt} = R_s' \bar{i}_{qds}^s + \frac{d\bar{\lambda}_{qds}^s}{dt} + \omega J \bar{\lambda}_{qds}^s \end{aligned}$$

con

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_{2s} R_s' K_{2s}^{-1} = R_s'$$

Con $\omega = 0$, el término $\omega J \bar{\lambda}_{qds}^s$ no se toma en consideración, finalmente los voltajes del estator son:

$$\bar{V}_{qds}^s = R_s' \bar{i}_{qds}^s + \frac{d\bar{\lambda}_{qds}^s}{dt} \quad (\text{A.8})$$

Realizando un procedimiento similar para los voltajes del rotor (A.4) se obtiene:

$$\bar{V}_{qdr}^s = R_r' \bar{i}_{qdr}^s - \omega_r J \bar{\lambda}_{qdr}^s + \frac{d\bar{\lambda}_{qdr}^s}{dt} \quad (\text{A.9})$$

y respecto a los enlaces de flujo (A.1) y (A.2) tenemos:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_{qds}^s &= K_{2s} \bar{L}_s K_{2s}^{-1} \bar{i}_{qds}^s + K_{2s} \bar{M}_{sr}' K_{2r}^{-1} \bar{i}_{qdr}^s \\ \bar{\lambda}_{qdr}^s &= K_{2r} (\bar{M}_{sr}')^T K_{2s}^{-1} \bar{i}_{qds}^s + K_{2r} \bar{L}_r K_{2r}^{-1} \bar{i}_{qdr}^s \end{aligned}$$

donde:

$$K_{2s} \bar{L}_s K_{2s}^{-1} = \bar{L}_s, \quad K_{2r} \bar{L}_r K_{2r}^{-1} = \bar{L}_r, \quad K_{2s} \bar{M}_{sr}' K_{2r}^{-1} = K_{2r} (\bar{M}_{sr}')^T K_{2s}^{-1} = \begin{bmatrix} L_{mA} & 0 \\ 0 & L_{mA} \end{bmatrix}$$

Finalmente tenemos los enlaces de flujo:

$$\bar{\lambda}_{qds}^s = \bar{L}_s \bar{i}_{qds}^s + \bar{M}_{sr} \bar{i}_{qdr}^s \quad (\text{A.10})$$

$$\bar{\lambda}_{qdr}^s = (\bar{M}_{sr})^T \bar{i}_{qds}^s + \bar{L}_r \bar{i}_{qdr}^s \quad (\text{A.11})$$

A- 3 Variables utilizadas en el modelo en estado estable

$$Z_{qs} = r_{qs} + j\omega_e L_{qs}, \quad Z_{ds} = r_{ds} + j\omega_e L_{ds}, \quad Z_r = r_r + j\omega_e L_r, \quad Z_c = -jX_c, \quad f_r = n_p \omega_m = (1-s)\omega_e$$

$$Z_a = \frac{L_{mq}}{Z_r'^2 + f_r^2 L_r'^2} [(f_r^2 - \omega_e^2) L_r' + j\omega_e r_r'] \triangleq Z_{a1} + jZ_{a2}$$

$$Z_b = \frac{L_{mq}}{Z_r'^2 + f_r^2 L_r'^2} [f_r r_r'] \triangleq Z_{b1} + jZ_{b2}$$

$$\delta_{21} = \omega_e L_{qs} - \omega_e L_{mq} Z_{a1}$$

$$\delta_{22} = r_{qs} + \omega_e L_{mq} Z_{a2}$$

$$\delta_{11} = (r_{ds} + \omega_e L_{mq} Z_{a2}) \delta_{22} - (\omega_e L_{ds} - \omega_e L_{mq} Z_{a1}) \delta_{21} - (\omega_e L_{mq})^2 (Z_{b1}^2 - Z_{b2}^2)$$

$$\delta_{12} = (\omega_e L_{ds} - \omega_e L_{mq} Z_{a1}) \delta_{22} + (r_{ds} + \omega_e L_{mq} Z_{a2}) \delta_{21} - 2(\omega_e L_{mq})^2 Z_{b1} Z_{b2}$$

$$\alpha_1 = r_{ds}' + \omega_e L_{mq} (Z_{a2} + n^{-1} Z_{b2})$$

$$\alpha_2 = \omega_e L_{ds}' - \omega_e L_{mq} (Z_{a1} - n^{-1} Z_{b1})$$

$$\beta_1 = n^{-1} r_{qs} + \omega_e L_{mq} (n^{-1} Z_{a2} - Z_{b2})$$

$$\beta_2 = n^{-1} \omega_e L_{qs} + \omega_e L_{mq} (Z_{b1} - n^{-1} Z_{a1})$$

$$\gamma_1 = \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \beta_1^2 - \beta_2^2$$

$$\gamma_2 = 2(\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2)$$

$$\zeta_1 = 4\alpha_1^2 + 4\alpha_2^2 - 2\gamma_1$$

$$\zeta_2 = 4\gamma_1 \alpha_2 - 4\gamma_2 \alpha_1$$

$$\zeta_3 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2$$

$$\Delta \triangleq (\delta_{11} + \delta_{21} X_c') + j(\delta_{12} - \delta_{22} X_c')$$

A- 4 Modelo en Componentes Simétricas

Enlaces de flujo en el estator

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \psi_{qs} \\ \psi_{ds}' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_{lqs} + X_{mq} & 0 \\ 0 & X_{lds}' + X_{mq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{qs} \\ I_{ds}' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{mq} & 0 \\ 0 & X_{mq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{qr}' \\ I_{dr}' \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \psi_{qsf} \\ \psi_{qsb} \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} X_{lqs} + X_{lds}' & X_{lqs} - X_{lds}' \\ X_{lqs} - X_{lds}' & X_{lqs} + X_{lds}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{qsf} \\ I_{qsb} \end{bmatrix} + X_{mq} \begin{bmatrix} I_{qsf} + I_{qrf}' \\ I_{qsb} + I_{qrb}' \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Enlaces de flujo en el rotor

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \psi_{qr} \\ \psi_{dr}' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_{lr}' + X_{mq} & 0 \\ 0 & X_{lr}' + X_{mq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{qr}' \\ I_{dr}' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{mq} & 0 \\ 0 & X_{mq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{qs} \\ I_{ds}' \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \psi_{qrf} \\ \psi_{qrb}' \end{bmatrix} &= X_{lr}' \begin{bmatrix} I_{qrf}' \\ I_{qrb}' \end{bmatrix} + X_{mq} \begin{bmatrix} I_{qsf} + I_{qrf}' \\ I_{qsb} + I_{qrb}' \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Voltajes en el estator

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_s \\ V_s' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} r_{qs} & 0 \\ 0 & r_{ds}' - jX_c' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{qs} \\ I_{ds}' \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} \psi_{qs} \\ \psi_{ds}' \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} V_{qsf} \\ V_{qsb} \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} r_{qs} + r_{ds}' - jX_c' & r_{qs} - r_{ds}' + jX_c' \\ r_{qs} - r_{ds}' + jX_c' & r_{qs} + r_{ds}' - jX_c' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{qsf} \\ I_{qsb} \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} \psi_{qsf} \\ \psi_{qsb} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Voltajes en el rotor

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} r_r' & 0 \\ 0 & r_r' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{qr}' \\ I_{dr}' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_r/\omega_e \\ \omega_r/\omega_e & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{qr}' \\ \psi_{dr}' \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} \psi_{qr}' \\ \psi_{dr}' \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} r_r'/s & 0 \\ 0 & r_r'/(2-s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{qrf}' \\ I_{qrb}' \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} \psi_{qrf}' \\ \psi_{qrb}' \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Finalmente manipulando algebraicamente (A.14) tenemos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_{qsf} \\ V_{qsb} \end{bmatrix} &= (r_{qs} + jX_{lqs}) \begin{bmatrix} I_{qsf} \\ I_{qsb} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \left[(r_{ds}' - r_{qs}) + j(X_{lds}' - X_{lqs} - X_c') \right] \begin{bmatrix} I_{qsf} - I_{qsb} \\ I_{qsb} - I_{qsf} \end{bmatrix} \\ &\quad + jX_{mq} \begin{bmatrix} I_{qsf} + I_{qrf}' \\ I_{qsb} + I_{qrb}' \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

y del mismo modo para (A.15)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_r'/s + j(X_{lr}' + X_{mq}) & 0 \\ 0 & r_r'/(2-s) + j(X_{lr}' + X_{mq}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{qrf}' \\ I_{qrb}' \end{bmatrix} + jX_{mq} \begin{bmatrix} I_{qsf} \\ I_{qsb} \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

A- 5 Cálculo del par promedio en estado estable

La expresión del par electromagnético es:

$$T_e = n_p L_{mq} (i_{qs}^s i_{dr}^s - i_{ds}^s i_{qr}^s) \quad (\text{A.18})$$

Los valores de las corrientes en estado estable se representan en términos de sus fasores como:

$$i_{qs}^s = \text{Re} \left[\sqrt{2} I_{qs}^s e^{j\phi_{qs}} e^{j\omega_e t} \right] = \text{Re} \left[\sqrt{2} \tilde{I}_{qs}^s e^{j\omega_e t} \right] \quad (\text{A.19})$$

$$i_{ds}^s = \text{Re} \left[\sqrt{2} I_{ds}^s e^{j\phi_{ds}} e^{j\omega_e t} \right] = \text{Re} \left[\sqrt{2} \tilde{I}_{ds}^s e^{j\omega_e t} \right] \quad (\text{A.20})$$

$$i_{qr}^s = \text{Re} \left[\sqrt{2} I_{qr}^s e^{j\phi_{qr}} e^{j\omega_e t} \right] = \text{Re} \left[\sqrt{2} \tilde{I}_{qr}^s e^{j\omega_e t} \right] \quad (\text{A.21})$$

$$i_{dr}^s = \text{Re} \left[\sqrt{2} I_{dr}^s e^{j\phi_{dr}} e^{j\omega_e t} \right] = \text{Re} \left[\sqrt{2} \tilde{I}_{dr}^s e^{j\omega_e t} \right] \quad (\text{A.22})$$

Sustituyendo las ecuaciones (A.19)-(A.22) en (A.18), obtenemos

$$T_e = n_p L_{mq} \left\{ \text{Re} \left[\tilde{I}_{qs}^s \tilde{I}_{dr}^{s*} - \tilde{I}_{ds}^s \tilde{I}_{qr}^{s*} \right] + \text{Re} \left[\left(\tilde{I}_{qs}^s \tilde{I}_{dr}^s - \tilde{I}_{ds}^s \tilde{I}_{qr}^s \right) e^{j2\omega_e t} \right] \right\} \quad (\text{A.23})$$

El par promedio resulta

$$T_{e(avg)} = n_p L_{mq} \text{Re} \left[\tilde{I}_{qs}^s \tilde{I}_{dr}^{s*} - \tilde{I}_{ds}^s \tilde{I}_{qr}^{s*} \right] \quad (\text{A.24})$$

El par pulsante varía con el tiempo y tiene dos veces la frecuencia de suministro

$$T_{e(pl)} = n_p L_{mq} \text{Re} \left[\left(\tilde{I}_{qs}^s \tilde{I}_{dr}^s - \tilde{I}_{ds}^s \tilde{I}_{qr}^s \right) e^{j2\omega_e t} \right] \quad (\text{A.25})$$

Se procederá a desarrollar la parte real de (A.24), con lo cual tenemos finalmente la expresión del par promedio en función de la velocidad del motor, voltaje de alimentación, reactancia capacitiva y parámetros del motor:

$$T_{e(avg)} = n_p L_{mq} |V_s|^2 \frac{AX_c'^2 + BX_c' + D}{MX_c'^2 + NX_c' + Q} \quad (\text{A.26})$$

donde

$$\begin{aligned} A &= -Z_{b1} & M &= \delta_{21}^2 + \delta_{22}^2 \\ B &= 2\beta_1 Z_{a2} + 2\alpha_2 Z_{b1} & N &= 2(\delta_{11}\delta_{21} - \delta_{12}\delta_{22}) \\ D &= 2Z_{a2}(\beta_2\alpha_1 - \beta_1\alpha_2) + \alpha Z_{b1} & Q &= \delta_{11}^2 + \delta_{12}^2 \\ \alpha &= -(\beta_1^2 + \beta_2^2) - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) & |\Delta|^2 &= MX_c'^2 + NX_c' + Q \end{aligned}$$

Ahora procedemos a encontrar una expresión matemática que nos permita obtener un valor de reactancia para otorgarle al motor un par de arranque grande en función de la velocidad del motor, por lo tanto se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\partial T_{e(avg)}}{\partial X_c'} = 0 \quad (\text{A.27})$$

Con la derivada parcial del par electromagnético con respecto a la reactancia obtenemos el máximo par de arranque, y resulta en lo siguiente

$$(NA - MB)X_c'^2 + 2(QA - MD)X_c' + (QB - ND) = 0$$

$$aX_c'^2 + bX_c' + c = 0$$

donde

$$a = NA - MB$$

$$b = 2(QA - MD)$$

$$c = QB - ND$$

Resolviendo la ecuación cuadrática obtenemos la reactancia que nos maximiza el par promedio al arranque

$$X_{cav}' = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (\text{A.28})$$

A- 6 Constantes

Constantes para el modelo de la planta en variables de estado

$$c_1 = \frac{L_r}{L_{qs}L_r - L_{mq}^2}, \quad c_2 = \frac{L_r}{L_{ds}L_r - L_{mq}^2}, \quad c_3 = \frac{L_{mq}}{L_r}, \quad c_4 = \frac{r_r L_{mq}}{L_r^2}, \quad a_1 = r_{qs} + \frac{r_r L_{mq}^2}{L_r^2}.$$

$$a_2 = r_{ds} + \frac{r_r L_{mq}^2}{L_r^2}, \quad a_3 = \frac{r_r}{L_r}, \quad a_4 = \frac{r_r L_{mq}}{L_r}, \quad d_1 = \frac{n_p L_{mq}}{L_r}, \quad d_2 = \frac{n_p}{J}$$

Referencias Bibliográficas.

- [1]. T. A. Lettenmaier, D.W. Novotny, and T. A. Lipo, *Single-phase induction motor with an electrically controlled capacitor*, *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 27, no. 1, pp. 38–43, Jan./Feb. 1991.
- [2]. E. Muljadi, Y. Zhao, T. H. Liu, and T. A. Lipo, *Adjustable ac capacitor for a single-phase induction motor*, *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 29, no. 3, pp. 479–485, May/Jun. 1993.
- [3]. J. D. Law and T. A. Lipo, *A single phase induction motor voltage controller with improved performance*,” *IEEE Trans. Power Electron.*, vol. PE-1, no. 4, pp. 240–247, Oct. 1986.
- [4]. T. H. Liu, *A maximum torque control with a controlled capacitor for a single-phase induction motor*, *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 42, no. 1, pp. 17–24, Feb. 1995.
- [5]. L. T. Aguilar, Y. Orlov, L. Acho, *Nonlinear H-infinite control of nonsmooth time varying systems with application to friction mechanical manipulators*, *Automatica*, 2003, 39; 1531-1542.
- [6]. Chen, B., Chang, Y., & Feng, J. (1994). *A nonlinear H_{∞} control design in robotic systems under parameter perturbations and external disturbances*. *International Journal of Control*, 59, 439-461.
- [7]. V. I. Utkin, *Sliding Mode in Control and Optimization*, Springer Verlag, London 1992.
- [8]. V. I. Utkin, J. Guldner and J. Shi, *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*, Taylor & Francis, London, 1999.
- [9]. A. G. Loukianov, *Nonlinear Block Control with Sliding Mode*, *Automation and Remote Control*, Vol. 59(7), pp. 916-933, 1998.
- [10]. P. C. Krause, O. Wasynczuk, S. D. Sudhoff, *Analysis of Electric Machinery and Drive Systems*, 2nd ed., New York : IEEE Press ; Wiley-Interscience, c2002.
- [11]. A. E. Fitzgerald, C. Kingsley, Jr., S. D. Umans, *Electric Machinery*, 5th ed., McGraw-Hill, New York, 1990.
- [12]. S. J. Chapman, *Electric Machinery Fundamentals*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1999.
- [13]. G. McPherson and R. D. Laramore, *An Introduction to Electrical Machines and Transformers*, 2nd ed., John Wiley and Sons, New York, 1990.
- [14]. V. I. Utkin, *The Problems of Induction Motor Control*, *Automation and Remote Control*, no.12, pp. 53-65, 1994.
- [15]. S. J. Dodds, J. Vittek, V. Utkin, *Sensorless Induction Motor Drive with Independent Speed and Rotor Magnetic Flux Control, Part I – Theoretical Background*, *Journal of Electrical Engineering*, vol. 49, no. 7-8, pp. 186-193, 1998.
- [16]. B. Drazenovic, *The Invariance Conditions for Variable Structure Systems*, *Automatica*, 5(3), 287-295, 1969.
- [17]. Alberto Isidori, *Nonlinear Control Systems*, (3rd. ed.), Springer-Verlag, 1995.
- [18]. M. Krstic, I. Kanellakopoulos and P. Kokotovic, *Nonlinear and Adaptive Control Design*, Wiley Interscience, 1995.
- [19]. A. G. Loukianov, *Optimal nonlinear block control method*, *Proceeding of the 2nd European Control Conference*, Groningen, pp. 1853-1855, 1993.

- [20]. A. G. Loukianov, V. I. Utkin, *Methods for reducing dynamic systems to regular form*, Automation and Remote Control, Vol.42, pp. 413-420, 1981.
- [21]. A. G. Loukianov, *Robust Block Decomposition Sliding Mode Control Design*, Mathematical Problems in engineering, Vol.8(4-5), pp. 349-365, 2002.
- [22]. H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, (2nd. ed.), Prentice-Hall, Inc., New Jersey. 1996.



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL IPN**


Secretaría Académica

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional aprobó la tesis
Control no Lineal Robusto del Motor de Inducción Monofásico

Del (la) C.

Juan Miguel REYES LOPEZ


el día 17 de Diciembre de 2008.



Dr. Juan Manuel Ramírez Arredondo
Investigador CINVESTAV 3C
CINVESTAV Unidad Guadalajara



Dr. Alexander Georgievich Loukianov
Investigador CINVESTAV 3C
CINVESTAV Unidad Guadalajara



Dr. José Manuel Cañedo Castañeda
Investigador CINVESTAV 3A
CINVESTAV Unidad Guadalajara



Dr. Jorge Rivera Domínguez
Profesor Investigador C
Universidad de Guadalajara



CINVESTAV
BIBLIOTECA CENTRAL



SSIT000008950