



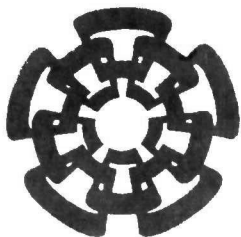
xx (178600.1)



CINVESTAV  
BIBLIOTECA CENTRAL



SSIT000004100



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y  
DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL  
INSTITUTO POLITÉCNICO  
NACIONAL

COORDINACIÓN GENERAL DE  
SERVICIOS BIBLIOGRÁFICOS

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N.  
Unidad Guadalajara

# **Simulación de Transitorios en Líneas de Transmisión Multiconductoras con Parámetros Dependientes de la Frecuencia empleando el Método de las Características**

Tesis que presenta:

**Armando Ambrosio López**

para obtener el grado de:

**Doctor en Ciencias**

en la especialidad de:

**Ingeniería Eléctrica**

Director de Tesis

**Dr. Pablo Moreno Villalobos**

**CINVESTAV**  
IPN  
**ADQUISICION  
DE LIBROS**

Guadalajara, Jalisco, Agosto de 2009.

CLASIF.: TR165 G8 A482009  
ADQUIS.: 551-565  
FECHA: 19/III/2010  
PROCED.: Don. = 2010  
\$

163326-1001

**Simulación de Transitorios en Líneas  
de Transmisión Multiconductoras con  
Parámetros Dependientes de la  
Frecuencia empleando el Método de las  
Características**

**Tesis de Doctorado en Ciencias  
Ingeniería Eléctrica**

Por:

**Armando Ambrosio López**

Maestro en Ciencias

Cinvestav 1997-1999

Becario de PROMEP, expediente no. ITSON-075

Director de Tesis

**Dr. Pablo Moreno Villalobos**

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Agosto de 2009.

# Agradecimientos

*Sin lugar a duda, ésta es una de las partes más difícil de este trabajo, y no lo digo por no saber que redactar, si no porque me invade la dicha y felicidad de ver concluida una etapa más en mi vida profesional y humana, ya que hemos tenido la oportunidad de conocer y tratar con tanta gente que ha hecho que este andar sea agradable. Quiero primeramente agradecer a Dios por haberme permitido concluir este trabajo. También, quiero agradecer infinitamente al Dr. Pablo Moreno Villalobos, por compartir sus conocimientos, por su paciencia, por su disponibilidad de tiempo en la dirección de esta tesis y sobre todo por su amistad. Dr. Abner Ramírez V., Dr. José Alberto Gutiérrez R., Dr. José Raúl LooY. y Dr. José Leonardo Guardado Z., les agradezco su valiosa ayuda y recomendaciones en la parte final de este trabajo. A mis compañeros y amigos del CINVESTAV e ITSON mi gratitud y aprecio para cada uno de ustedes. A mi esposa Carmina, mis hijos Armando y Mariel Andrea, a mis padres Armando y María Matilde, de una manera muy especial les agradezco todo su apoyo, paciencia, comprensión y amor. Aprovecho también para agradecer a mis hermanos Ángel Octavio y Carlos Alberto y a sus respectivas esposas por el apoyo sincero siempre brindado. Con todo cariño agradezco el apoyo a mis abuelos Ángel, Soledad, María de los Ángeles y Ascención'.*

*Agradezco al Instituto Tecnológico de Sonora y al PROMEP por el apoyo brindado durante la realización de este trabajo; así como también agradezco al CINVESTAV por darme la oportunidad de realizar mis estudios doctorales.*

# Dedicatoria

*Con todo mi amor y cariño quiero dedicar este trabajo a mi familia, por todo el apoyo, paciencia y comprensión que siempre he recibido por parte de ustedes:*

*Carmina, Armando y Mariel Andrea, los quiero mucho...*

*Armando Ambrosio López*

# Abstract

It has long been recognized that one of the most important aspects in the modelling of transmission lines for electromagnetic transient studies is the frequency dependence of the electrical parameters. Until now, the models that have been proposed have solved the problem in partial way, since there are still cases where they do not yield satisfactory results. In addition to these, current efforts to produce real time simulators of electromagnetic transients have created new challenges. One of these is the computational burden that represents the simulation of transmission lines with frequency dependence of the electrical parameters. This problem has not been solved yet and such model does not exist in commercial real time simulators.

In this thesis, a new model for multiconductor transmission lines with frequency dependent electrical parameters, for analysis of electromagnetic transients in the time domain is presented. The proposed model is based on the method of characteristics of partial differential equations (PDE). The method of characteristics has been used successfully in modelling of non-uniform lines, external field excited lines and lines with corona. Notwithstanding such success it had not been used so far in the developing of an efficient model for uniform transmission lines.

Unlike other models that employ the method of characteristics, the model presented in this work does not require spatial discretization for the case of uniform transmission lines. Furthermore, for the case of overhead transmission lines, this new model requires the approximation by rational functions of the transient resistance only.

The solutions of the equations of the multiconductor transmission line are expressed in a mathematical form such that it becomes possible to identify Norton's circuits for the modelling of the conditions at the ends of the line. These Norton's circuits are similar to the corresponding ones of the Bergeron's model, in the sense that in both the ends of the transmission line are topologically uncoupled at any time.

Finally, the results obtained in several application examples using the proposed model, are compared to those obtained with the EMTDC.



# Resumen

Durante mucho tiempo se ha reconocido que uno de los aspectos más importantes en el modelado de líneas de transmisión para estudios de transitorios electromagnéticos es la dependencia frecuencial de los parámetros eléctricos. Hasta este momento, los modelos que se han propuesto han resuelto el problema de manera parcial, ya que aún existen casos donde no arrojan resultados satisfactorios. Aunado a esto los esfuerzos actuales por producir simuladores de transitorios electromagnéticos en tiempo real han planteado nuevos retos. Uno de estos es la carga computacional que representa la simulación de líneas de transmisión con parámetros eléctricos dependientes de la frecuencia. Este problema no se ha resuelto aún y tal modelo no existe en los simuladores comerciales de tiempo real.

En esta tesis se presenta un nuevo modelo para líneas de transmisión multiconductoras, con parámetros eléctricos dependientes de la frecuencia, para el análisis de transitorios electromagnéticos en el dominio del tiempo. El modelo propuesto se basa en el método de las características de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP). El método de las Características ya se ha empleado con éxito en el modelado de líneas no uniformes, líneas excitadas con campos externos y líneas con efecto corona. A pesar de esto no se había empleado hasta ahora en el desarrollo de un modelo eficiente para líneas de transmisión uniformes.

A diferencia de otros modelos que emplean el método de las Características, el modelo que se presenta en este trabajo no requiere de discretización espacial para el caso de líneas de transmisión uniformes. Además, para el caso de líneas de transmisión aéreas, este nuevo modelo requiere la aproximación por medio de funciones racionales de la Resistencia Transitoria solamente.

La solución de las ecuaciones de la línea multiconductora se expresan en un forma matemática tal que se hace posible la identificación de circuitos de Norton para el modelado de la condiciones en los extremos de la línea. Estos circuitos de Norton son similares a los correspondientes al modelo de Bergeron, en el sentido de que ambos extremos de la línea de transmisión se encuentran topológicamente desacoplados en cada instante de tiempo.

Finalmente, los resultados que se obtienen en varios ejemplos de aplicación usando el modelo propuesto, se comparan con los que se obtienen con el EMTDC.

# Índice General

RESUMEN.....	iii
--------------	-----

## CAPÍTULO 1

### INTRODUCCIÓN

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....	2
1.2 OBJETIVO DE LA TESIS.....	2

## CAPÍTULO 2

### REVISIÓN HISTÓRICA DEL MODELADO DE LÍNEAS DE TRANSMISIÓN DEPENDIENTES DE LA FRECUENCIA

2.1 SOLUCIONES PARA TRANSITORIOS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO.....	6
2.2 FORMULACIÓN DE MEYER Y DOMMEL .....	6
2.3 FORMULACIÓN DE MARTÍ.....	10
2.3.1 <i>Desarrollo Matemático del Modelo de Martí</i> .....	11
2.3.2 <i>Síntesis de la Impedancia Característica</i> .....	13
2.3.3 <i>Funciones de Peso y Convolución de las historias</i> .....	14
2.4 FORMULACIÓN DE NODA .....	15
2.4.1 <i>Modelado en el Dominio de Fase</i> .....	15
2.4.1.1 <i>Formulación en el dominio de Fase</i> .....	15
2.4.1.1 <i>Circuito Equivalente para la Simulación en el Dominio del Tiempo</i> .....	17
2.4.2 <i>Convolución por medio de un Modelo ARMA</i> .....	19
2.4.2.1 <i>Modelo ARMA</i> .....	19
2.4.2.2 <i>Convolución a Través de una Operación Matriz-Vector en el Dominio de Fase</i> .....	19
2.5 FORMULACIÓN DE NGUYEN.....	20
2.5.1 <i>Modelado de Línea de Transmisión en el Dominio de Fase</i> .....	20
2.5.2 <i>Síntesis de las funciones <math>Y_C</math> y <math>A</math></i> .....	22
2.5.2.1 <i>Síntesis de la Matriz <math>Y_C</math></i> .....	22
2.5.2.2 <i>Síntesis de la Matriz <math>A</math></i> .....	22
2.6 FORMULACIÓN DE MORCHED .....	23
2.6.1 <i>Formulación del Modelo</i> .....	23
2.6.2 <i>Aproximación de la Función Racional</i> .....	24
2.6.2.1 <i>Aproximación de <math>H</math></i> .....	24

## CAPÍTULO 3

### LÍNEAS DE TRANSMISIÓN MONOFÁSICAS CON PARÁMETROS ELÉCTRICOS DEPENDIENTES DE LA FRECUENCIA

3.1 INTRODUCCIÓN .....	27
3.2 ECUACIONES DE LA LÍNEA DE TRANSMISIÓN .....	28
3.3 SÍNTESIS DE LA RESISTENCIA TRANSITORIA .....	28
3.4 MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS.....	31
3.5 TRATAMIENTO NUMÉRICO DE LA CONVOLUCIÓN RECURSIVA .....	34
3.6 SOLUCIÓN NUMÉRICA PARA LOS PUNTOS EN LAS FRONTERAS.....	35
3.7 EJEMPLO DE APLICACIÓN .....	39
3.8 CONCLUSIONES .....	41

## CAPÍTULO 4

### LÍNEAS DE TRANSMISIÓN MULTICONDUCTORAS CON PARÁMETROS ELÉCTRICOS DEPENDIENTES DE LA FRECUENCIA

4.1 INTRODUCCIÓN .....	43
4.2 ECUACIONES DEL TELEGRAFISTA PARA LÍNEAS DE TRANSMISIÓN CON PARÁMETROS ELÉCTRICOS DEPENDIENTES DE LA FRECUENCIA .....	43
4.3 SÍNTESIS DE LA RESISTENCIA TRANSITORIA .....	44
4.4 MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS PARA LÍNEAS MULTICONDUCTORAS .....	49
4.5 TRATAMIENTO NUMÉRICO DE LA CONVOLUCIÓN RECURSIVA .....	52
4.6 SOLUCIÓN NUMÉRICA PARA LOS PUNTOS EN LAS FRONTERAS.....	53
4.7 EJEMPLOS DE APLICACIÓN.....	60
4.7.1 <i>Primer Ejemplo de Aplicación para Línea de Transmisión Multiconductora</i> .....	60
4.7.2 <i>Segundo Ejemplo de Aplicación para Línea de Transmisión Multiconductora</i> .....	64
4.7.3 <i>Tercer Ejemplo de Aplicación para Línea de Transmisión Multiconductora</i> .....	70
4.7.4 <i>Cuarto Ejemplo de Aplicación para Línea de Transmisión Multiconductora</i> .....	73

## CAPÍTULO 5

### CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1 CONCLUSIONES .....	77
5.2 TRABAJOS FUTUROS.....	78

## REFERENCIAS

79

# Índice de Figuras

<b>Fig. 2.1</b> Modelo de línea simplificado, a) Circuito de línea, b) Circuito equivalente visto desde ambas terminales de la línea. ....	7
<b>Fig. 2.2</b> Funciones de peso en la formulación de Meyer y Dommel. ....	8
<b>Fig. 2.3</b> Modelo de línea dependiente de la frecuencia de Meyer y Dommel. ....	9
<b>Fig. 2.4</b> Interpretación física de las funciones de peso de Meyer y Dommel. ....	10
<b>Fig. 2.5</b> Interpretación física de la función de peso $a_1(t)$ para la nueva formulación. ...	10
<b>Fig. 2.6</b> Funciones de peso $a_1(t)$ y $a_2(t)$ para la nueva formulación. ....	11
<b>Fig. 2.7</b> Nuevos modelos de línea dependientes de la frecuencia en los nodos $k$ y $m$ . ...	13
<b>Fig. 2.8</b> 1 <sup>ra</sup> realización de Foster para $Z_C(\omega)$ . ....	13
<b>Fig. 2.9</b> Línea de transmisión multiconductora con parámetros distribuidos ....	16
<b>Fig. 2.10</b> Circuitos equivalentes de las ecuaciones básicas del modelo de Noda, a) en el dominio del tiempo, b) en el dominio de fase. ....	18
<b>Fig. 2.11</b> Circuito equivalente en el dominio del tiempo. ....	21
<b>Fig. 3.1</b> Magnitud y fase resistencia transitoria. ....	30
<b>Fig. 3.2</b> Curvas Características. ....	33
<b>Fig. 3.3</b> Diagrama de Líneas Características. ....	36
<b>Fig. 3.4</b> a) Línea de Transmisión, b) Representación circuital de las líneas características en las fronteras. ....	38
<b>Fig. 3.5</b> Circuito equivalente de Norton para la línea de transmisión de la Fig. 3.4b. ...	39
<b>Fig. 3.6</b> Configuración de la línea de transmisión para un ejemplo de aplicación. ....	40
<b>Fig. 3.7</b> Formas de onda en la terminal de envío y recepción de la línea de transmisión, energizada por una fuente función doble rampa. ....	40
<b>Fig. 3.8</b> Formas de onda en la terminal de envío y recepción de la línea de transmisión, energizada por una fuente función escalón unitario. ....	41
<b>Fig. 4.1</b> Gráfica de la resistencia transitoria en el dominio de la frecuencia $R(j\omega)$ , a) elementos propios, b) elementos mutuos. ....	46
<b>Fig. 4.2</b> Gráfica de la resistencia transitoria sin el polo en el origen en el dominio de la frecuencia $H(j\omega)$ , a) elementos propios, b) elementos mutuos. ....	47
<b>Fig. 4.3</b> Malla de discretización, método de las características sin puntos internos. ...	54
<b>Fig. 4.4</b> Línea de transmisión multiconductora, a) Circuito equivalente, b) Representación circuital de Thevenin. ....	58
<b>Fig. 4.5</b> Circuito equivalente de Norton para una línea de transmisión multiconductora. ....	59
<b>Fig. 4.6</b> Ejemplo de aplicación para línea de transmisión multiconductora, a) Circuito equivalente, b) Configuración de la línea de transmisión. ....	60
<b>Fig. 4.7</b> Formas de onda en la terminal de envío y recepción de la línea de transmisión de la fase "a", con cierre secuencial. ....	61
<b>Fig. 4.8</b> Formas de onda en la terminal de envío y recepción de la línea de transmisión de la fase "b", con cierre secuencial. ....	61
<b>Fig. 4.9</b> Formas de onda en la terminal de envío y recepción de la línea de transmisión de la fase "c" con cierre secuencial. ....	62
<b>Fig. 4.10</b> Formas de onda en la terminal de envío y recepción de la línea de transmisión de la fase "a", con cierre simultáneo en $t=3$ [ms]. ....	62
<b>Fig. 4.11</b> Formas de onda en la terminal de envío y recepción de la línea de transmisión de la fase "b", con cierre simultáneo en $t=3$ [ms]. ....	63

<b>Fig. 4.12</b> Formas de onda en la terminal de envío y recepción de la línea de transmisión de la fase "c", con cierre simultáneo en $t=3$ [ms].	63
<b>Fig. 4.13</b> a) Circuito para el ejemplo de voltajes inducidos, b) Configuración de la línea de transmisión.	64
<b>Fig. 4.14</b> Forma de onda del voltaje en la fase "C" de la terminal receptora para un cierre simultáneo en $t=0$ [ms].	65
<b>Fig. 4.15</b> Forma de onda del voltaje inducido en la fase "D" de la terminal receptora para un cierre simultáneo en $t=0$ [ms].	65
<b>Fig. 4.16</b> Forma de onda del voltaje inducido en la fase "E" de la terminal receptora para un cierre simultáneo en $t=0$ [ms].	66
<b>Fig. 4.17</b> Forma de onda del voltaje inducido en la fase "F" de la terminal receptora para un cierre simultáneo en $t=0$ [ms].	66
<b>Fig. 4.18</b> Forma de onda del voltaje en la fase "C" de la terminal receptora para un cierre simultáneo en $t=2$ [ms].	67
<b>Fig. 4.19</b> Forma de onda del voltaje inducido en la fase "D" de la terminal receptora para un cierre simultáneo en $t=2$ [ms].	68
<b>Fig. 4.20</b> Forma de onda del voltaje inducido en la fase "E" de la terminal receptora para un cierre simultáneo en $t=2$ [ms].	68
<b>Fig. 4.21</b> Forma de onda del voltaje inducido en la fase "F" de la terminal receptora para un cierre simultáneo en $t=2$ [ms].	69
<b>Fig. 4.22</b> Circuitos de las líneas de transmisión multiconductora para el tercer ejemplo de aplicación.	70
<b>Fig. 4.23</b> Forma de onda del voltaje en la fase "C" de la terminal receptora para un cierre simultáneo en $t=2$ [ms].	70
<b>Fig. 4.24</b> Forma de onda del voltaje en la fase "D" de la terminal receptora para un cierre simultáneo en $t=2$ [ms].	71
<b>Fig. 4.25</b> Forma de onda del voltaje en la fase "E" de la terminal receptora para un cierre simultáneo en $t=2$ [ms].	71
<b>Fig. 4.26</b> Forma de onda del voltaje en la fase "F" de la terminal receptora para un cierre simultáneo en $t=2$ [ms].	72
<b>Fig. 4.27</b> Forma de onda del voltaje en la fase "C" de la terminal receptora para un cierre simultáneo en $t=0$ [ms].	73
<b>Fig. 4.28</b> Forma de onda del voltaje en la fase "D" de la terminal receptora para un cierre simultáneo en $t=0$ [ms].	74
<b>Fig. 4.29</b> Forma de onda del voltaje en la fase "E" de la terminal receptora para un cierre simultáneo en $t=0$ [ms].	74
<b>Fig. 4.30</b> Forma de onda del voltaje en la fase "F" de la terminal receptora para un cierre simultáneo en $t=0$ [ms].	75

# Capítulo 1

## Introducción

En un sistema eléctrico de potencia, las líneas de transmisión de alta tensión tienen el propósito de transportar la energía eléctrica, la cual usualmente es generada en lugares lejanos a las áreas de consumo, tales como ciudades y zonas industriales. Debido a esto, las líneas de transmisión forman una parte importante de los sistemas de potencia.

El diseño y operación de redes eléctricas de potencia requiere de un conocimiento preciso de la magnitud y duración de los sobrevoltajes que pueden ocurrir en el sistema. Los sobrevoltajes aparecen principalmente debido a descargas atmosféricas y a operaciones por maniobra [66]. Para proveer un servicio eléctrico confiable el nivel de aislamiento de las líneas de transmisión y el equipo conectado en las terminales, tales como transformadores e interruptores, deben poder soportar el estrés generado por estos sobrevoltajes.

La manera más práctica y eficaz actualmente disponible para el estudio de los diferentes tipos de sobrevoltajes, sus efectos y el diseño de los niveles adecuados de aislamiento es a través de software de simulación. Uno de los programas mayormente conocidos es el EMTP (Electro-Magnetic Transients Program) [16], el cual es una combinación de modelos matemáticos y técnicas de solución que representan los diferentes componentes de una red eléctrica y su interrelación. El EMTP modela cada componente en el dominio del tiempo a través de resistencias equivalentes y fuentes de corrientes de historia obtenidas de los modelos matemáticos, una vez que una regla de integración es aplicada. Finalmente, el sistema eléctrico completo es resuelto usando métodos numéricos para la solución de las ecuaciones simultáneas resultantes.

El modelado y la simulación de las ondas viajeras presentes en los sobrevoltajes no es una tarea fácil. Cuando las ondas se propagan a través de las líneas de transmisión, su amplitud y forma de onda están sujetas a una atenuación y distorsión que, básicamente, dependen de las características propias de la línea de transmisión, su configuración

geométrica y de los elementos eléctricos conectados en sus terminales. La principal fuente de distorsión es el proceso continuo de reflexión de energía que resulta de las pérdidas resistivas en serie.

Sin lugar a dudas, un aspecto importante en la precisión de la simulación de las ondas de propagación electromagnética en líneas de transmisión es la representación de la dependencia frecuencial de los parámetros eléctricos [67]. Para poder encontrar una solución satisfactoria, los modelos de línea de transmisión y cables multiconductores tradicionales utilizados en el EMTP [1, 19, 68] emplean la teoría de descomposición modal propuesta por Wedepohl [69, 70] con el fin de desacoplar el sistema físico de conductores (dominio de fase) en uno equivalente matemáticamente desacoplado (dominio modal). La principal ventaja de esta técnica es que cada modo natural desacoplado tiene su propia velocidad de propagación. Esto es particularmente importante en el caso del modelado por medio de síntesis de funciones racionales [19, 11, 68], donde el tiempo de retardo en las funciones de propagación se puede extraer fácilmente de la síntesis en el dominio modal, mientras que en la síntesis en el dominio de fase se dificulta debido precisamente a la diferencia entre los tiempos de retardo de los diferentes modos de propagación.

## **1.1 Planteamiento del Problema**

Uno de los principales aspectos en el modelado de líneas de transmisión para el estudio de transitorios electromagnéticos en el dominio del tiempo es considerar la dependencia frecuencial de los parámetros y la naturaleza distribuida de las pérdidas. En el caso de los modelos que asumen parámetros constantes (e.g. a 60 Hz) no pueden simular adecuadamente la respuesta de la línea sobre el rango total de frecuencias que se encuentran presentes en la señal durante el transitorio. En la mayoría de los casos la representación de parámetros constantes produce una amplificación de los armónicos de alto orden en la señal y como consecuencia una distorsión general de las formas de onda y picos de magnitud exagerada [19]. En este sentido, los modelos que se han propuesto han resuelto el problema de manera parcial ya que no han arrojado resultados satisfactorios para todos los casos.

Actualmente, los esfuerzos por generar simuladores de transitorios en tiempo real han provocado nuevos desafíos. Uno de estos es la carga computacional que representa la simulación de las líneas de transmisión con parámetros eléctricos dependientes de la frecuencia. Este problema no se ha resuelto aún, por lo tanto no se han incorporado dichos modelos de línea de transmisión en simuladores comerciales de tiempo real.

## **1.2 Objetivo de la Tesis**

El objetivo de esta tesis es desarrollar un nuevo modelo general y eficiente para líneas de transmisión uniformes multiconductoras con

parámetros eléctricos dependientes de la frecuencia.

El modelo propuesto se basa en el método de las Características de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP). Para el caso de las líneas de transmisión aéreas, este nuevo modelo requiere la aproximación de sólo un parámetro eléctrico por medio de funciones racionales: la resistencia transitoria.





## Capítulo 2

# Revisión Histórica del Modelado de Líneas de Transmisión Dependientes de la Frecuencia

Los parámetros de líneas de transmisión con retorno por tierra son altamente dependientes de la frecuencia y la precisión en su modelado es de suma importancia para una correcta simulación de los transitorios electromagnéticos. Los métodos de solución en el dominio del tiempo para las ecuaciones de la línea con parámetros dependientes de la frecuencia son muy complicados, por lo que para soluciones prácticas se requieren técnicas de aproximación numéricas.

El EMTP desarrollado por Bonneville Power Administration (BPA) [1] es el programa para el análisis de transitorios en el dominio del tiempo más utilizado. En el EMTP se utiliza la Teoría Modal [34] para la representación de líneas de transmisión. Se han propuesto varias alternativas de solución, entre las que se destacan las funciones de peso [35], convolución recursiva exponencial [11, 38], convolución recursiva lineal [36], transformada Z [37], convolución recursiva modificada [39, 19], entre otras. En estos métodos se relacionan los dominios de fase y modal por medio de matrices de transformación constante, se ignora la dependencia frecuencial de las matrices, cuando esta no debería de ignorarse para líneas no transpuestas o cables ya que en estos casos, las matrices de transformación dependen fuertemente de la frecuencia. Teóricamente puede introducirse la dependencia frecuencial de las matrices en una simulación en el dominio del tiempo por medio de la convolución [40]. Sin embargo, para una línea de transmisión de  $n$ -fases, la aproximación requiere de  $2n(n-1)$  convoluciones para la transformación modal en cada paso de tiempo,  $n$  convoluciones para la respuesta de propagación modal y otras  $n$  convoluciones para la admitancia característica. En total se requieren de  $2n(n-1)+2n$  convoluciones para la aproximación, repercutiendo directamente tanto en la carga computacional como en el requerimiento de memoria.

## 2.1 Soluciones para Transitorios en el Dominio del Tiempo

Si bien, el modelado de líneas de transmisión es mucho más fácil cuando la solución es formulada en el dominio de la frecuencia, para el estudio de un sistema completo con operaciones de conmutación, elementos no lineales y otros fenómenos, las soluciones en el dominio del tiempo paso por paso son mucho más flexibles.

Probablemente el ejemplo mejor conocido de solución de transitorios en el dominio del tiempo es el EMTP, desarrollado del trabajo básico de Dommel [16]. Con el gran uso que se le ha dado a este programa, se ha probado su validez y flexibilidad para el estudio de transitorios electromagnéticos en una amplia variedad de condiciones.

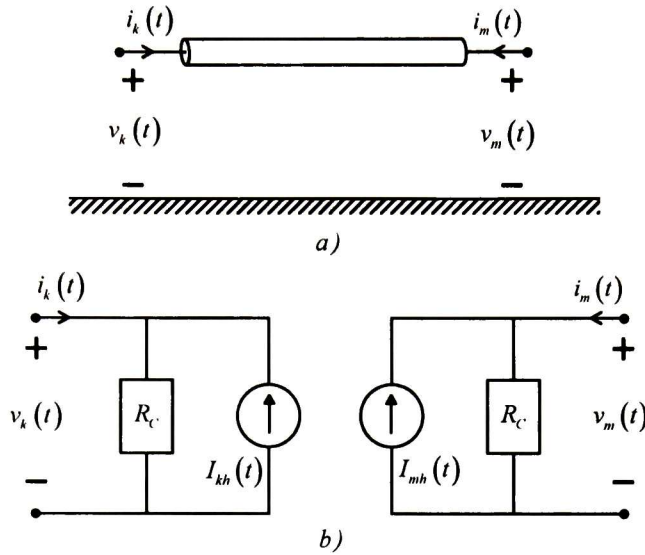
En el EMTP, las líneas de transmisión multiconductoras primeramente son desacopladas a través de las matrices de transformación modal, para que después cada modo pueda estudiarse separadamente como un circuito de una sola fase. Para estas descomposiciones se asumen matrices de transformación independientes de la frecuencia. Este procedimiento es exacto para el caso de configuraciones de líneas balanceadas y aún más preciso para el caso de líneas transpuestas. Para el caso más general, sin embargo, de circuitos con líneas desbalanceadas, líneas no transpuestas, las matrices de transformación son dependientes de la frecuencia.

## 2.2 Formulación de Meyer y Dommel

En el trabajo básico de Dommel [16] se asume que la línea tiene parámetros constantes y sin pérdidas. Bajo estas suposiciones las ecuaciones de línea se resuelven directamente en el dominio del tiempo. Para considerar las pérdidas Dommel dividió la resistencia total de la línea en tres partes iguales, localizadas en la mitad y en cada extremo de la línea cada una. De la solución de d'Alembert de las ecuaciones de onda simplificadas y del concepto de Bergeron de la relación constante entre las ondas viajeras de voltaje y corriente a lo largo de la línea, Dommel obtuvo el circuito equivalente mostrado en la Fig. 2.1b. En este modelo  $R_C$  es la impedancia característica de la línea,  $I_{kh}(t)$  es la fuente de corriente cuyo valor en cada paso de tiempo  $t$  se obtiene de los valores de historia conocidos de la corriente y voltaje en el nodo  $m$  e  $I_{mh}(t)$  es la fuente de corriente cuyo valor en cada paso de tiempo  $t$  se obtiene de los valores de historia conocidos de la corriente y voltaje en el nodo  $k$ .

Cuando se toma en cuenta la dependencia frecuencial de los parámetros y la naturaleza distribuida de las pérdidas se vuelve muy complicado, sino es que imposible, obtener la solución de las ecuaciones de la línea de transmisión directamente en el dominio del tiempo de una manera práctica. En el dominio de la frecuencia la solución para los voltajes en los extremos de la línea es

$$V_k(\omega) = \cosh[\gamma(\omega)\ell]V_m(\omega) - Z_c(\omega)\sinh[\gamma(\omega)\ell]I_m(\omega) \quad (2.1)$$



**Fig. 2.1** Modelo de línea simplificado, a) Circuito de línea, b) Circuito equivalente visto desde ambas terminales de la línea.

y

$$I_k(\omega) = \frac{I}{Z_c(\omega)} \sinh[\gamma(\omega)\ell]V_m(\omega) - \cosh[\gamma(\omega)\ell]I_m(\omega) \quad (2.2)$$

donde

$$Z_c(\omega) = \sqrt{Z'(\omega) \cdot Y'(\omega)} \quad \text{Impedancia Característica}, \quad (2.3)$$

$$\gamma(\omega) = \sqrt{\frac{Z'(\omega)}{Y'(\omega)}} \quad \text{Constante de Propagación}, \quad (2.4)$$

$$Z'(\omega) = R'(\omega) + j\omega L', \quad Y'(\omega) = G'(\omega) + j\omega C'$$

donde  $R'$  es la resistencia en serie,  $L'$  es la inductancia en serie,  $G'$  es la conductancia en paralelo,  $C'$  es la capacitancia en paralelo (las cantidades primas están en por unidad de longitud).

Para desarrollar un modelo en el dominio del tiempo (2.1) y (2.2) tienen que ser transformadas. Esta operación de cambio de dominio origina la aparición de convoluciones que envuelven a funciones irracionales. Uno de los primeros modelos para líneas de transmisión dependientes de la frecuencia para la simulación de transitorios en el dominio del tiempo fue propuesto por Budner [17], en el se utilizó el concepto de funciones de peso

en un modelo de línea de admitancias. Las funciones de peso en este modelo son muy oscilatorias y difíciles de evaluar con precisión.

En un esfuerzo para mejorar el método de las funciones de peso propuesto por Budner, Snelson [18] introdujo un cambio de variables para relacionar corrientes y voltajes en el dominio del tiempo que en cierto sentido es análogo a la interpretación de Bergeron de las ecuaciones de onda simplificadas. Las nuevas variables fueron definidas de la siguiente manera:

$$f_k(t) = v_k(t) + R_l i_k(t) \quad (2.5)$$

$$f_m(t) = v_m(t) + R_l i_m(t) \quad (2.6)$$

$$b_k(t) = v_k(t) + R_l i_k(t) \quad (2.7)$$

$$b_m(t) = v_m(t) + R_l i_m(t) \quad (2.8)$$

Donde  $f_k(t)$  y  $f_m(t)$  son las funciones de onda viajera hacia adelante,  $b_k(t)$  y  $b_m(t)$  son las funciones de onda viajera hacia atrás y  $R_l$  es una constante real definida como  $R_l = \lim_{\omega \rightarrow \infty} Z_c(\omega)$ .

Las ecuaciones (2.5) a la (2.8) fueron transformadas al dominio de la frecuencia y comparadas con la solución de línea dadas por las ecuaciones (2.1) y (2.2). Esta idea fue desarrollada aún mas por Meyer y Dommel [35] de la cual resultaron las funciones de peso  $a_1(t)$  y  $a_2(t)$  mostradas en la Fig. 2.2. La representación equivalente de línea se muestra en la Fig. 2.3, en este circuito las funciones de onda viajera hacia atrás  $b_k(t)$  y  $b_m(t)$ , se obtienen de las funciones de peso de historia de voltajes y corrientes en ambas terminales de la línea y están dadas por las integrales de convolución

$$b_k(t) = \int_0^{\infty} \{f_m(t-u)a_1(u) + f_k(t-u)a_2(u)\} du \quad (2.9)$$

y

$$b_m(t) = \int_0^{\infty} \{f_k(t-u)a_1(u) + f_m(t-u)a_2(u)\} du \quad (2.10)$$

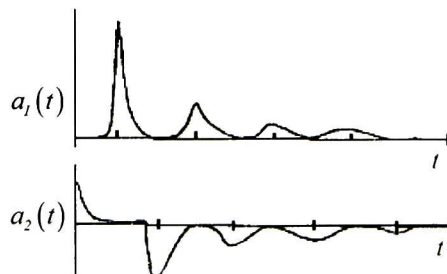


Fig. 2.2 Funciones de peso en la formulación de Meyer y Dommel.

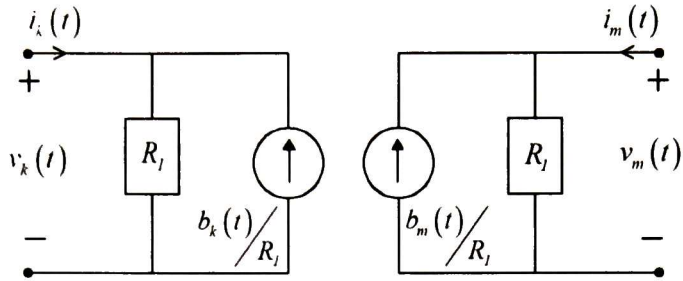


Fig. 2.3 Modelo de línea dependiente de la frecuencia de Meyer y Dommel.

La técnica de la función de peso que formularon Meyer y Dommel representó una considerable mejora sobre los otros métodos de funciones de peso ya que arrojó resultados confiables en muchos de los casos de estudio de transitorios desarrollados por BPA. Sin embargo, esta técnica presenta algunas desventajas numéricas. Una de las desventajas es con relación al tiempo requerido por el proceso de evaluación para la integral (2.9) y (2.10) en cada paso de tiempo de la solución. En el caso de estudio presentado en [35] con dependencia frecuencial, el tiempo de simulación por cada paso fue alrededor de tres veces mayor que el tiempo de simulación sin dependencia frecuencial. Otra desventaja es la dificultad para evaluar la contribución de la parte final de las funciones de peso  $a_1(t)$  y  $a_2(t)$  para la integral de la convolución (2.9) y (2.10). Los picos sucesivos en estas funciones tienden a aplanarse y ser más extensos conforme se incrementa el valor a lo largo del eje  $t$ .

Uno de los principales problemas encontrados en este método está relacionado con la exactitud en frecuencias bajas, incluyendo la frecuencia de operación del sistema (60 Hz). Este problema parece estar relacionado con la evaluación de la parte final de las funciones de peso. También, un análisis del error parecería indicar que la función  $a_2(t)$  es más difícil de evaluar con suficiente exactitud que la función  $a_1(t)$ .

Como sugieren Meyer y Dommel, la interpretación de las funciones de peso  $a_1(t)$  y  $a_2(t)$  se puede observar físicamente en el modelo mostrado en la Fig. 2.4. En este modelo la línea es excitada con una fuente de voltaje tipo impulso  $\delta(t)$ , además en ambas terminales cuenta con una resistencia  $R_l$ , de acuerdo a lo que indican las ecuaciones (2.5) a la (2.8). Bajo estas condiciones  $a_1(t)$  está directamente relacionada con el voltaje en el nodo  $m$  y  $a_2(t)$  con el voltaje en el nodo  $k$ . En este modelo se puede ver que los picos sucesivos en estas funciones (Fig. 2.2) son generados por reflexiones sucesivas en ambas terminales de la línea.

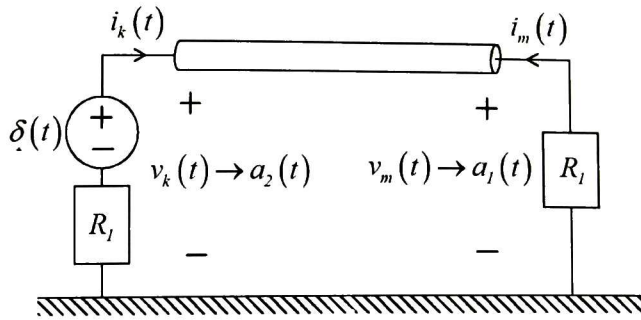


Fig. 2.4 Interpretación física de las funciones de peso de Meyer y Dommel.

### 2.3 Formulación de Marti

El desarrollo de este modelo [19] se puede explicar de mejor manera por medio de la interpretación física del concepto de las funciones de peso desarrolladas por Meyer y Dommel.

Del sistema mostrado en la Fig. 2.4 se puede ver que si la resistencia  $R_l$  se remplaza por una red equivalente cuya respuesta a la frecuencia es igual a la impedancia característica de la línea,  $Z_C(\omega)$ , no habrá ninguna reflexión en los extremos. Si se pudiera encontrar una red equivalente, la nueva función de peso  $a_1(t)$  tendría solo el primer pico y la función  $a_2(t)$  sería cero, esto se muestra en la Fig. 2.5. Las formas de las nuevas funciones de peso se muestran en la Fig. 2.6. Con este nuevo modelo se elimina el problema de la parte final de la forma de onda y la determinación exacta de la función  $a_2(t)$ .

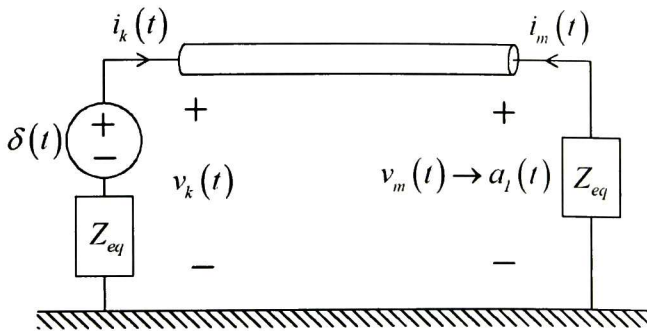
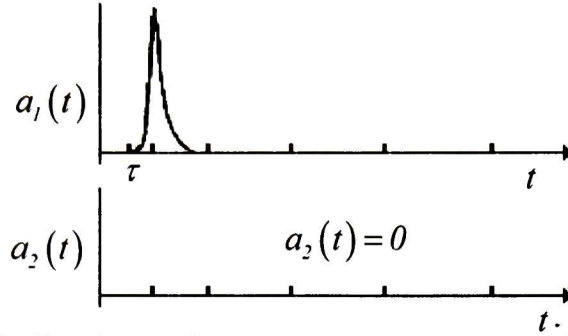


Fig. 2.5 Interpretación física de la función de peso  $a_1(t)$  para la nueva formulación.



**Fig. 2.6** Funciones de peso  $a_1(t)$  y  $a_2(t)$  para la nueva formulación.

### 2.3.1 Desarrollo Matemático del Modelo de Martí

Al remplazar la resistencia  $R_l$  por la impedancia característica de la línea  $Z_{eq}$  con el fin de generar las nuevas funciones de peso, las funciones para las ondas viajeras hacia adelante y atrás (ecuaciones (2.5) a (2.8)) se pueden definir en el dominio de la frecuencia de la siguiente manera:

$$F_m(\omega) = V_m(\omega) + Z_{eq}(\omega)I_m(\omega) \quad (2.11)$$

$$B_k(\omega) = V_k(\omega) - Z_{eq}(\omega)I_k(\omega) \quad (2.12)$$

y

$$F_k(\omega) = V_k(\omega) + Z_{eq}(\omega)I_k(\omega) \quad (2.13)$$

$$B_m(\omega) = V_m(\omega) - Z_{eq}(\omega)I_m(\omega) \quad (2.14)$$

donde  $Z_{eq}(\omega)$  es la impedancia de la red lineal que aproxima a  $Z_C(\omega)$ .

Comparando las ecuaciones (2.11) a la (2.14) con la solución general en el dominio de la frecuencia representada por las ecuaciones (2.1) y (2.2), resulta

$$B_k(\omega) = A_l(\omega)F_m(\omega) \quad (2.15)$$

y

$$B_m(\omega) = A_l(\omega)F_k(\omega) \quad (2.16)$$

donde

$$A_l(\omega) = e^{-\gamma(\omega)\ell} = \frac{1}{\cosh[\gamma(\omega)\ell] + \sinh[\gamma(\omega)\ell]} \quad (2.17)$$



La forma en el dominio del tiempo de  $A_I(\omega)$  es la función de peso  $a_I(t)$  mostrada en la Fig. 2.6. La forma en el dominio del tiempo de las ecuaciones (2.15) y (2.16) está dada por las integrales de la convolución

$$b_k(t) = \int_{\tau}^{\infty} f_m(t-u) a_I(u) du \quad (2.18)$$

y

$$b_m(t) = \int_{\tau}^{\infty} f_k(t-u) a_I(u) du \quad (2.19)$$

El límite inferior de estas integrales es  $\tau$  debido a que, como se puede ver en la Fig. 2.6, la función de peso  $a_I(t)=0$  para  $t < \tau$ . El tiempo de retardo  $\tau$  representa el tiempo de viaje de la componente de frecuencia más rápida del impulso aplicado.

En las ecuaciones (2.18) y (2.19) se puede observar que los valores de  $b_k$  y  $b_m$  en el paso de tiempo  $t$  se definen completamente de los valores de historia de las funciones  $f_m$  y  $f_k$ , siempre que el paso de integración  $\Delta t$  de la solución de la red sea más pequeño que  $\tau$ . Con  $b_k$  y  $b_m$  conocidos, la forma en el dominio del tiempo de las ecuaciones (2.13) y (2.14) lleva directamente a los circuitos equivalentes deseados en las terminales de la línea de transmisión, esto es

$$b_k(t) = E_{kh} \quad (\text{término de historia}) \quad (2.20)$$

y

$$b_m(t) = E_{mh} \quad (\text{término de historia}) \quad (2.21)$$

Entonces de las ecuaciones (2.13) y (2.14) se tiene

$$V_k(t) = e_k(t) + E_{kh} \quad (2.22)$$

$$V_m(t) = e_m(t) + E_{mh} \quad (2.23)$$

donde  $e_k(t)$  y  $e_m(t)$  son los voltajes a través de la red  $Z_{eq}$ . Después de la conversión a la representación modal, las ecuaciones (2.22) y (2.23) arrojan para cada paso de tiempo  $t$  los modelos de línea equivalentes mostrados en la Fig. 2.7.

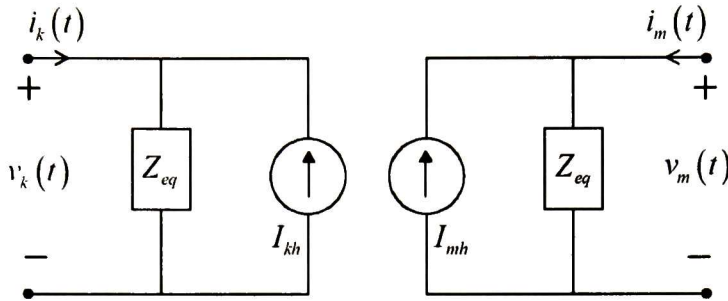


Fig. 2.7 Nuevos modelos de línea dependientes de la frecuencia en los nodos  $k$  y  $m$ .

### 2.3.2 Síntesis de la Impedancia Característica

La red  $Z_{eq}$  que representa a la impedancia característica de la línea  $Z_C(\omega)$  se simula por bloques de resistencias y capacitores ( $R$ - $C$ ) en paralelo (red de la 1<sup>ra</sup> realización de *Foster*), como se muestra en la Fig. 2.8

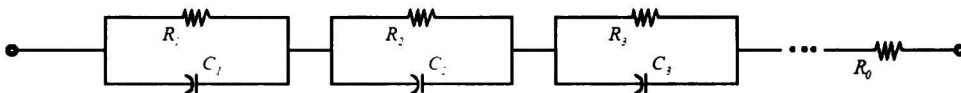


Fig. 2.8 1<sup>ra</sup> realización de Foster para  $Z_C(\omega)$ .

El número de bloques  $R$ - $C$  se determina automáticamente por una rutina de aproximación, la cual depende en particular de la línea y del modo que se esté simulando. Para la síntesis de  $Z_{eq}$  la función a tabular  $Z_C(\omega)$  evaluada de la ecuación (2.3) (con parámetros dependientes de la frecuencia), se aproxima  $s=j\omega$  por una función racional de la forma

$$Z_{eq}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = H \frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_n)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} \quad (2.24)$$

Los ceros y polos  $z_i$  y  $p_i$  respectivamente de esta función son reales, positivos y simples. Los valores de los parámetros de la red equivalente  $R$ - $C$  se obtienen expandiendo la ecuación (2.24) en una serie de fracciones parciales:

$$Z_{eq}(s) = k_0 + \frac{k_1}{s+p_1} + \frac{k_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{k_n}{s+p_n} \quad (2.25)$$

de donde, para la Fig. 2.8,  $R_0 = k_0$ ,  $R_i = \frac{k_i}{p_i}$ ,  $C_i = \frac{1}{k_i}$ , para  $i=1, 2, \dots, n$ .

La idea para la aproximación de la impedancia característica por combinaciones de  $R$ - $C$  fue sugerida por Groschupf [61], quien concluyó de manera errónea que ésta aproximación no era necesaria y que la dependencia frecuencial de la impedancia característica podía ser

despreciada

### 2.3.3 Funciones de Peso y Convolución de las historias

Para obtener las fuentes de corriente en los circuitos equivalentes de la Fig. 2.7, es necesario evaluar las funciones de peso de historia dadas por las ecuaciones (2.18) y (2.19). Como lo reportó Semlyen ([11], [62] y [38]) el proceso para evaluar las integrales de la convolución tiene la forma de las ecuaciones (2.18) y (2.19) las cuales se pueden acelerar enormemente si las funciones de peso correspondientes pueden ser expresadas como una sumatoria de términos exponenciales. Es decir, si en general la integral de la convolución en el paso de tiempo  $t$  tiene la forma

$$s(t) = \int_T^{\infty} f(t-u) k e^{-\alpha(u-T)} du \quad (2.26)$$

Entonces  $s(t)$  se puede obtener directamente del valor conocido  $s(t-\Delta t)$  en un paso de tiempo previo y de los términos de historia de  $f$  en  $T$  y  $(T+\Delta t)$  unidades de tiempo atrás:

$$s(t) = ms(t-\Delta t) + pf(t-T) + qf(t-T-\Delta t) \quad (2.27)$$

donde  $m$ ,  $p$  y  $q$  son constantes que dependen de  $k$ ,  $\alpha$ , el paso de integración  $\Delta t$  y la técnica de interpolación numérica. Esta propiedad también fue aplicada por Meyer y Dommel [35] para evaluar la integral de la ecuación (2.9) en la parte final de las funciones de peso  $a_1(t)$  y  $a_2(t)$ .

La evaluación recursiva de las integrales de convolución también fue adoptada por Martí, sin embargo, el proceso numérico para aproximar  $a_1(t)$  es una sumatoria de exponenciales diferente a la forma propuesta por Semlyen, evitando los problemas numéricos mencionados en la referencia [16].

De la Fig. 2.6, puede verse que  $a_1(t)$  puede expresarse como

$$a_1(t) = p(t-\tau) \quad (2.28)$$

donde  $p(t)$  tiene la misma forma que  $a_1(t)$ , pero está desplazado  $\tau$  unidades de tiempo hacia el origen. De la propiedad de desplazamiento de la transformada de Fourier, la forma correspondiente en el dominio de la frecuencia de la ecuación (2.28) es

$$A_1(\omega) = P(\omega) e^{-j\omega\tau} \quad (2.29)$$

La función  $P(s)$  correspondiente a  $P(\omega)$  en el plano complejo es aproximada por una función racional de la forma

$$P_a(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = H \frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_n)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_m)} \quad (2.30)$$

donde, puesto que  $A_1(\omega)$  corresponde a la respuesta de un sistema físico pasivo que tiende a cero cuando  $\omega \rightarrow \infty$ , el número de ceros debe de ser menor que el número de polos y la parte real de los polos debe de estar en la lado izquierdo del plano complejo.

Después de la expansión en fracciones parciales de la ecuación (2.30) y la subsecuente transformación al dominio del tiempo, la aproximación de la función  $a_I(t)$  es

$$a_{I_a}(t) = \left[ k_1 e^{-p_1(t-\tau)} + k_2 e^{-p_2(t-\tau)} + \cdots + k_m e^{-p_m(t-\tau)} \right] u(t-\tau) \quad (2.31)$$

de la cual las integrales de historia (ecuaciones (2.18) y (2.19)) se pueden evaluar recursivamente.

## 2.4 Formulación de Noda

En su trabajo, Noda [25] presentó un método para el cálculo de transitorios en el dominio del tiempo en el cual la dependencia frecuencial de la línea de transmisión y los cables son modelados en el dominio de fase en lugar del dominio modal. En este método las convoluciones en el dominio del tiempo son remplazadas por un modelo ARMA (Auto-Regressive Moving Average). Esto evita convoluciones debidas a la transformación modal así como también una posible inestabilidad numérica ocasionada por el problema de cruzamiento de modos. Con este método, se han resuelto dos problemas: 1) La determinación de un modelo ARMA de orden apropiado que se ha resuelto utilizando la teoría del Criterio de Información de Akaike (Akaike Information Criterion, AIC por sus siglas en inglés) [46]; y 2) Se asegura la estabilidad de un modelo ARMA con el uso del método de Jury [47]. Finalmente, el circuito equivalente derivado del nuevo método es compatible con los programas tradicionales tales como el EMTP, el cual se basa en la representación de la admitancia nodal.

### 2.4.1 Modelado en el Dominio de Fase

#### 2.4.1.1 Formulación en el domino de Fase

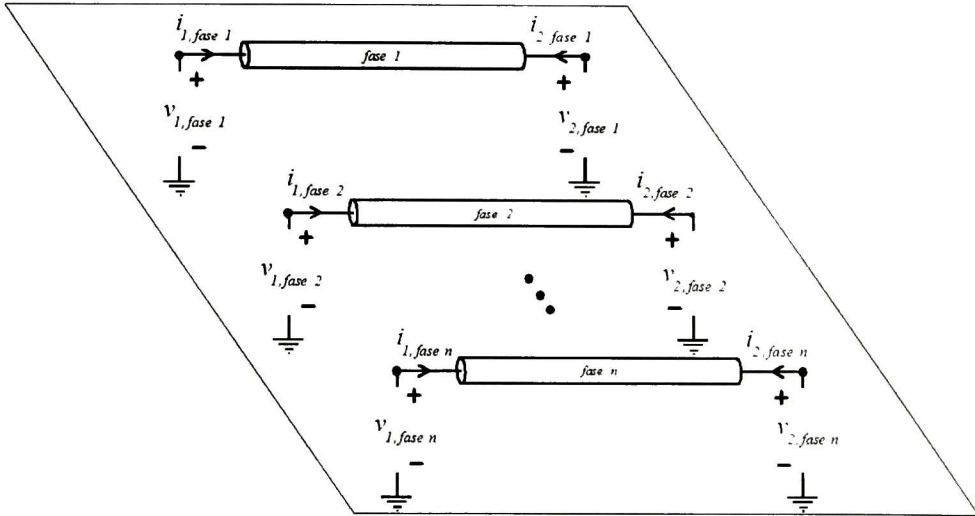
Para la simulación de transitorios, una línea de transmisión se puede representar como una línea multiconductora con parámetros distribuidos como se muestra en la Fig. 2.9. Considerese que la línea de transmisión contiene  $n$  conductores de longitud  $l$ . En el dominio de la frecuencia, los voltajes y las corrientes a través de la distancia  $x$  se pueden expresar para la terminal de envío como un vector columna de la siguiente manera,  $V(x, \omega) = (V_1, V_2, \dots, V_n)^T$   $I(x, \omega) = (I_1, I_2, \dots, I_n)^T$ , donde  $V_i$ ,  $I_i$ , son voltaje y corriente en el  $i$ -ésimo conductor. Las ondas electromagnéticas pueden ser descritas por un par de ecuaciones diferenciales (Ecuaciones del Telegrafista) cuya

solución es de la siguiente manera:

$$V(x, \omega) = e^{-\Gamma(\omega)x} V_f(\omega) + e^{\Gamma(\omega)x} V_b(\omega) \quad (2.32)$$

$$I(x, \omega) = Y_0(\omega) \left\{ e^{-\Gamma(\omega)x} V_f(\omega) - e^{\Gamma(\omega)x} V_b(\omega) \right\} \quad (2.33)$$

donde  $V_f(\omega)$  es el vector de voltajes de la onda viajera hacia adelante,  $V_b(\omega)$  es el vector de voltajes de la onda viajera hacia atrás,  $Y_0(\omega)$  es la matriz de admitancia característica y  $\Gamma(\omega)$  es la matriz constante de propagación.



**Fig. 2.9** Línea de transmisión multiconductora con parámetros distribuidos

Estableciendo  $V_1(\omega)$  como el vector de voltaje en la terminal de envío y  $V_2(\omega)$  para la terminal de recepción, de la manipulación algebraica de las ecuaciones (2.1) y (2.33) resulta:

$$I_1(\omega) = Y_0(\omega) V_1(\omega) - Y_0(\omega) e^{-j\omega\tau} H(\omega) \{ V_2(\omega) + Z_0(\omega) I_2(\omega) \} \quad (2.34)$$

$$I_2(\omega) = Y_0(\omega) V_2(\omega) - Y_0(\omega) e^{-j\omega\tau} H(\omega) \{ V_1(\omega) + Z_0(\omega) I_1(\omega) \} \quad (2.35)$$

donde  $H(\omega) = e^{j\omega\tau} e^{-\Gamma(\omega)\ell}$  es la matriz de distorsión de la onda en el dominio de fase,  $\tau$  es el tiempo de viaje menor,  $Z_0(\omega) = Y_0^{-1}(\omega)$  es la matriz de impedancia característica. Si las ecuaciones anteriores se transforman al dominio del tiempo, estas requieren ocho convoluciones.

Para reducir el tiempo de cómputo se establece la siguiente relación

$$Y_0(\omega) H(\omega) = H(\omega)^T Y_0(\omega) \quad (2.36)$$

Aplicando (2.36) a las ecuaciones (2.34) y (2.35) se obtiene

$$I_1(\omega) = Y_0(\omega)V_1(\omega) - e^{-j\omega\tau} H(\omega)^T \{Y_0(\omega)V_2(\omega) + I_2(\omega)\} \quad (2.37)$$

$$I_2(\omega) = Y_0(\omega)V_2(\omega) - e^{-j\omega\tau} H(\omega)^T \{Y_0(\omega)V_1(\omega) + I_1(\omega)\} \quad (2.38)$$

Transformando las ecuaciones (2.37) y (2.38) al dominio del tiempo (se utilizan letras minúsculas para denotar la contraparte en el dominio del tiempo):

$$i_1(t) = \underline{y_0(t) * v_1(t)} - i_{p1}(t) \quad (2.39)$$

$$i_{p1}(t) = h^T(t) * \left\{ \underline{\underline{y_0(t) * v_2(t-\tau)}} + i_2(t-\tau) \right\} \quad (2.40)$$

$$i_2(t) = \underline{\underline{y_0(t) * v_2(t)}} - i_{p2}(t) \quad (2.41)$$

$$i_{p2}(t) = h^T(t) * \left\{ \underline{y_0(t) * v_1(t-\tau)} + i_1(t-\tau) \right\} \quad (2.42)$$

donde (\*) denota la convolución a través de una operación matriz-vector y  $h(t) = F^{-1}\{H(\omega)\}$  es la Transformada Inversa de Fourier. Las ecuaciones anteriores son compatibles con la expresión de Bergeron [16]. Cuando los términos subrayados con    y    son iguales, el número de convoluciones se reduce a cuatro, consecuentemente, el tiempo de cómputo es enormemente reducido utilizando las ecuaciones (2.39) a la (2.42).

#### 2.4.1.1 Circuito Equivalente para la Simulación en el Dominio del Tiempo

Las Ecuaciones Básicas del Método en el Dominio de Fases indican que el circuito equivalente para la simulación en el dominio del tiempo se expresa como una admitancia de  $n$ -terminales a la par de una fuente de corriente de  $n$ -terminales (Fig. 10a). Puede verse que el primer término de las ecuaciones (2.39) y (2.41) corresponden a la admitancia de  $n$ -terminales y el segundo término a una fuente de corriente de historia de  $n$ -terminales obtenida de las ecuaciones (2.40) y (2.42). Cuando se representa un circuito equivalente por medio de la admitancia nodal, es importante modelarlo por medio de la admitancia característica dependiente de la frecuencia  $Y_0(\omega)$ . Para modelar  $Y_0(\omega)$  con modelos ARMA, la operación de convolución  $y_0(t) * v(t)$  fácilmente se descompone de la siguiente manera:

$$y_0(t) * v(t) = y_{00}v(t) + y_{01}(t) * v(t - \Delta t) \quad (2.43)$$

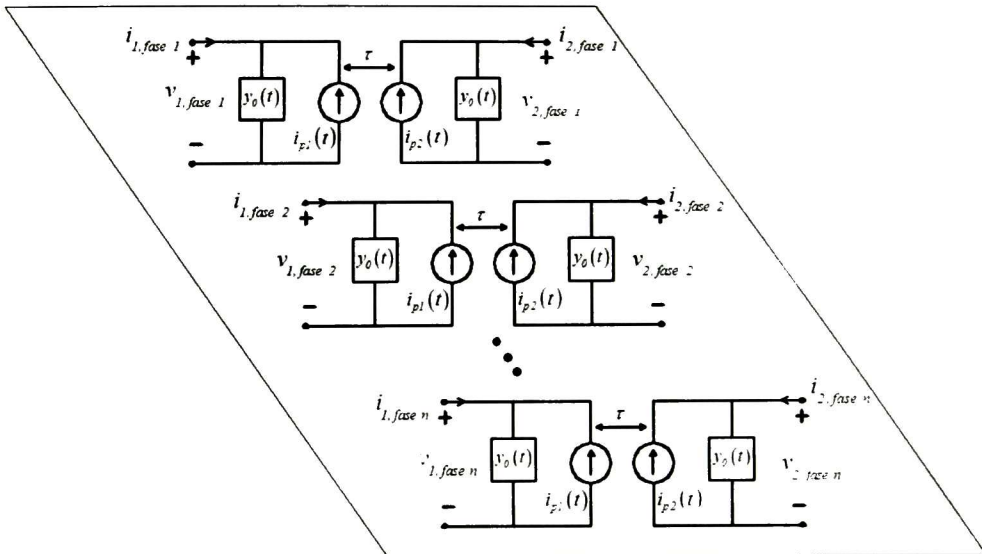
La matriz  $y_{00}$  es constante y  $y_{01}(t) * v(t - \Delta t)$  es la convolución a través de una operación matriz-vector. De la ecuación (2.43), las ecuaciones básicas del Método en el Dominio de Fase resultan como:

$$i_1(t) = y_{00}v_1(t) - i'_{p1}(t) \quad (2.44)$$

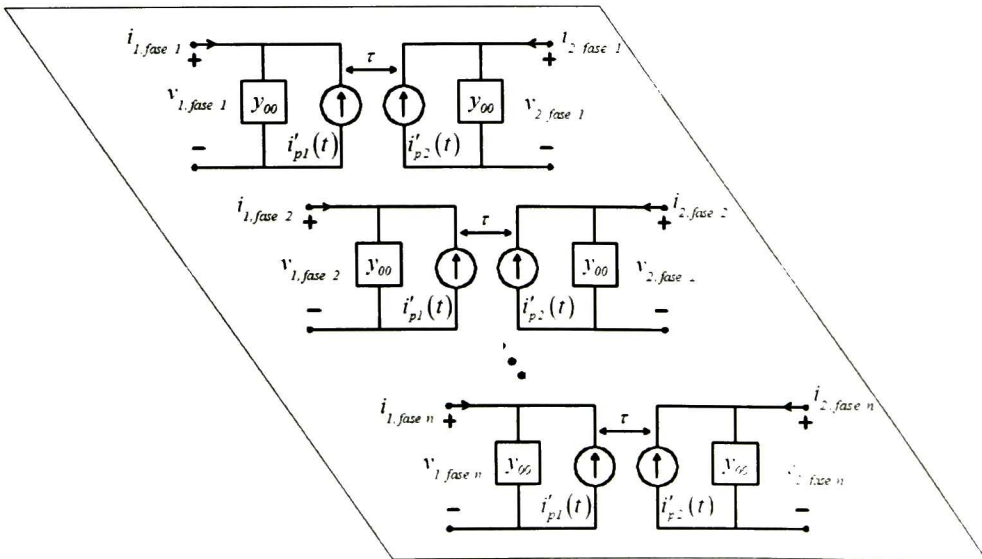
$$i'_{p1}(t) = i_{p1}(t) - y_{01}(t) * v_1(t - \Delta t) \quad (2.45)$$

$$i_2(t) = y_{00}v_2(t) - i'_{p2}(t) \quad (2.46)$$

$$i'_{p2}(t) = i_{p2}(t) - y_{01}(t) * v_2(t - \Delta t) \quad (2.47)$$



a)



b)

**Fig. 2.10** Circuitos equivalentes de las ecuaciones básicas del modelo de Noda, a) en el dominio del tiempo, b) en el dominio de fase.

Este grupo de ecuaciones corresponden al circuito equivalente ilustrado en la Fig. 2.10b. Estas ecuaciones pueden introducirse fácilmente en programas basados en la representación de la admitancia nodal, tales

como el EMTP. Primero, la matriz constante  $y_{00}$  se suma directamente a la matriz de conductancia nodal del sistema completo antes del cálculo del transitorio. Durante la simulación, los vectores de la fuente de corriente de historia  $i'_{p1}(t)$  e  $i'_{p2}(t)$  se suman al vector de las fuentes de corriente del sistema en cada paso de tiempo.

## 2.4.2 Convolución por medio de un Modelo ARMA

### 2.4.2.1 Modelo ARMA

Un modelo ARMA representa esencialmente un sistema discreto en el tiempo. La entrada  $x(t)$  y salida  $y(t)$  son muestreadas en intervalos de cálculo  $\Delta t$ , se denotan como  $x(n)=x(t)|_{t=n\Delta t}$ ,  $y(n)=y(t)|_{t=n\Delta t}$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ). Utilizando la teoría de la transformada Z, un modelo ARMA se define por medio de la siguiente función racional de  $z^{-1}$  en el dominio  $z$ :

$$G(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}{1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}} \quad (2.48)$$

donde  $a_n$ ,  $b_n$  son los coeficientes del modelo ARMA y  $N$  es el orden del modelo. Debido a que el operador  $z^{-n}$  denota un retraso de  $n$  muestras, la ecuación (2.48) es transformada al dominio del tiempo como:

$$y(n) = a_0 x(n) + a_1 x(n-1) + \dots + a_N x(n-N) - b_1 y(n-1) - \dots - b_N y(n-N) \quad (2.49)$$

La ecuación anterior es la representación en el dominio del tiempo de un modelo ARMA y es equivalente a aplicar la convolución recursiva [11-19]. Utilizando esta ecuación, la salida  $y(n)$  puede ser calculada con solo  $2N+1$  multiplicaciones y  $2N$  sumas.

### 2.4.2.2 Convolución a Través de una Operación Matriz-Vector en el Dominio de Fase

Un cálculo de transitorios basado en "Las Ecuaciones Básicas del Método en el Dominio de Fase" requiere de convoluciones a través de una operación matriz-vector en la siguiente forma:

$$y(t) = g(t) * x(t) \quad (2.50)$$

donde  $g(t)$  es la matriz de la función de transferencia,  $x(t)$  es el vector de entrada y  $y(t)$  es el vector de salida. La matriz de la función de transferencia  $g(t)$  corresponde a la matriz de distorsión de onda  $h(t)$  o matriz de admitancia característica  $y_0(t)$  de la ecuación (2.39) a (2.42). Cada elemento de  $g(t)$  es remplazado por un modelo ARMA utilizando un método de optimización descrito en la siguiente sección. Cuando los elementos de  $G(z)=Z\{g(t)\}$  ( $Z\{\}$  denota la transformada Z) son remplazados por un modelo ARMA, la relación en el dominio  $z$  entre el vector de entrada  $X(z)$  y el vector de salida  $Y(z)$  se representa como  $Y(z)=G(z)X(z)$ . Por lo tanto, el  $i$ -ésimo elemento del



vector de salida  $Y(z)$  se expresa como:

$$Y_i(z) = \sum_{j=1}^n G_{ij}(z) X_j(z) \quad (2.51)$$

Sustituyendo la ecuación (2.48) en (2.51), la transformada  $Z$  inversa se puede escribir como

$$y_i(n) = \sum_{j=1}^n \{ a_0^{ij} x_j(n) + a_1^{ij} x_j(n-1) + \dots + a^{N_{ij}} x_j(n-N_{ij}) - b_1^{ij} u_{ij}(n-1) + \dots + b^{N_{ij}} u_{ij}(n-N_{ij}) \} \quad (2.52)$$

donde  $a_m^{ij}$ ,  $b_n^{ij}$  son los coeficientes del elemento  $(i, j)$ ,  $N_{ij}$  es el orden del elemento  $(i, j)$  y  $u_{ij}(n) = Z^{-1} \{ G_{ij}(z) X_j(z) \}$ .

## 2.5 Formulación de Nguyen

En su trabajo, Nguyen [22] lleva a cabo un modelado directo en el dominio de fase, donde la solución resulta muy eficiente con funciones de ajuste absolutamente estables. La principal suposición en el modelo es que las funciones de frecuencia en la matriz de propagación en el dominio de fase pueden ser ajustadas precisamente utilizando funciones racionales de fase mínima estables.

### 2.5.1 Modelado de Línea de Transmisión en el Dominio de Fase

Para una línea de transmisión de  $n$  fases con una longitud  $l$ , los voltajes y las corrientes en las terminales de envío y recepción,  $k$  y  $m$  respectivamente, se pueden expresar en el dominio de la frecuencia como

$$I_k = Y_C V_k - A(Y_C V_m + I_m) \quad (2.53a)$$

$$I_k = Y_C V_k - A(Y_C V_m + I_m) \quad (2.53b)$$

donde

$$Y_C = \sqrt{(YZ)^{-1}} Y \quad (2.53c)$$

$$A = e^{-\sqrt{YZ}l} \quad (2.53d)$$

$Y_C$  es la matriz de admitancia característica;  $A$  es la matriz de propagación de onda;  $V$  e  $I$  son los vectores de voltaje y corriente;  $Y$  y  $Z$  son las matrices de admitancia en paralelo e impedancia en serie por unidad de longitud, respectivamente.

Para cada frecuencia, las expresiones (2.53c) y (2.53d) pueden evaluarse por medio del análisis modal

$$\mathbf{T}_l^{-1} \mathbf{Y} \mathbf{Z} \mathbf{T}_l = \lambda \quad (2.54)$$

donde  $\mathbf{T}_l$  es la matriz de transformación de corrientes y  $\lambda$  es la matriz diagonal de eigenvalores. Entonces, de la teoría de eigenvalores [27, 20],

$$\mathbf{Y}_C = \mathbf{T}_l \mathbf{Y}_{Cmode} \mathbf{T}_l \quad (2.55a)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}_l \mathbf{A}_{mode} \mathbf{T}_l^{-1} \quad (2.55b)$$

Como la matriz de la admitancia característica modal  $\mathbf{Y}_{Cmode}$  y la matriz de propagación  $\mathbf{A}_{mode}$  son diagonales,  $\mathbf{Y}_{Cmode}$  se puede evaluar de acuerdo a lo descrito en [54], considerando que los elementos de  $\mathbf{A}_{mode}$  son obtenidos de los eigenvalores de la ecuación (2.54):

$$\mathbf{A}_{mode-i} = e^{-\sqrt{\lambda_i} \ell} \quad (2.56)$$

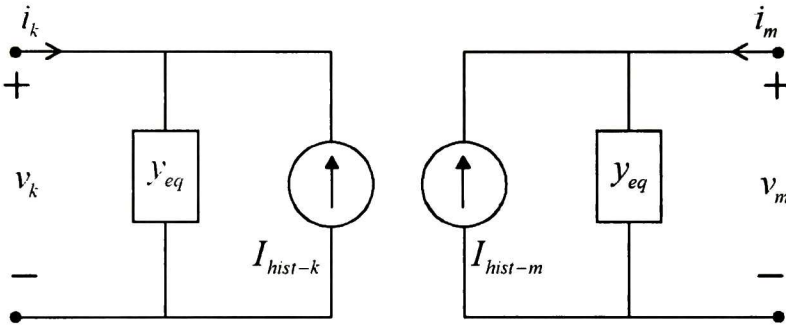


Fig. 2.11 Circuito equivalente en el dominio del tiempo.

Transformando al dominio del tiempo, las ecuaciones (2.53a) y (2.53b) resulta:

$$i_k(t) = y_c(t) * v_k(t) - a(t) * f_m(t) \quad (2.57a)$$

$$i_m(t) = y_c(t) * v_m(t) - a(t) * f_k(t) \quad (2.57b)$$

donde

$$f_m(t) = y_c(t) * v_m(t) + i_m(t) \quad (2.57c)$$

$$f_k(t) = y_c(t) * v_k(t) + i_k(t) \quad (2.57d)$$

el símbolo \* denota convolución a través de una operación matriz-vector.

Si los elementos de las matrices  $\mathbf{Y}$  y  $\mathbf{A}$  son sintetizados utilizando aproximaciones de funciones racionales, entonces las funciones

correspondientes en el dominio del tiempo  $y_c(t)$  y  $a(t)$  se convierten en matrices cuyos elementos contienen sumatorias simples de funciones exponenciales [19, 20]. Las convoluciones en las ecuaciones (2.57a) y (2.57b) pueden ser evaluadas utilizando métodos recursivo rápidos [56, 19, 20]. Las ecuaciones nodales en ambas terminales de la línea de transmisión se pueden expresar en una forma más conveniente como:

$$i_k(t) = y_{eq}(t) * v_k(t) - i_{hist-k}(t) \quad (2.58a)$$

$$i_m(t) = y_{eq}(t) * v_m(t) - i_{hist-m}(t) \quad (2.58b)$$

donde  $y_{eq}$  es una matriz simétrica constante real. El segundo término del lado derecho de las ecuaciones (2.58a) y (2.58b) es la fuente de corriente de historia evaluada con los valores ya conocidos de las variables en los pasos de tiempo previos. Estas ecuaciones están representadas por medio del circuito equivalente de la Fig. 2.11, las cuales pueden ser fácilmente incorporadas en el EMTP.

## 2.5.2 Síntesis de las funciones $Y_C$ y $A$

La rutina de ajuste usada para sintetizar estas funciones es una versión ligeramente modificada de la versión descrita en [19, 20]. La modificación principal se ha descrito en [54]. La técnica de diagonalización de [54] se usa para evaluar las matrices  $Y_C$  y  $A$  en función de la frecuencia.

### 2.5.2.1 Síntesis de la Matriz $Y_C$

La matriz de admitancia característica  $Y_C$  en el dominio de fase es una matriz cuadrada y simétrica, por lo tanto, solo son necesarios  $n+n(n-1)/2$  elementos para sintetizarla. La experiencia en la síntesis de esta matriz muestra que todos sus elementos se pueden ajustar utilizando funciones de desplazamiento de fase mínima, esto es, utilizando solo polos reales negativos y ceros.

### 2.5.2.2 Síntesis de la Matriz $A$

La matriz diagonal  $A_{mode}$  se evalúa con los eigenvalores encontrados de la ecuación (2.54) y se extrae un desplazamiento de fase para dar

$$P_{mode} = e^{j\omega\tau} A_{mode} \quad (2.59)$$

donde  $\tau$  es el tiempo de viaje de la línea basado en la velocidad de la luz, después, se lleva a cabo un triple producto matricial, resultando:

$$P = T_1 P_{mode} T_1^{-1} \quad (2.60)$$

La matriz  $P$  resultante se sintetiza usando funciones racionales. Cada uno de los elementos de esta síntesis contiene un pequeño desplazamiento de fase adicional, el cual corresponde a un tiempo de retardo agregado en el

dominio del tiempo. Debido a la extracción del desplazamiento de fase en la ecuación (2.59), los ángulos de los elementos de la matriz  $\mathbf{P}$  son uniformes a través del rango de frecuencias propuesto y el tiempo de retardo adicional puede ser determinado exactamente. La aproximación para la matriz de propagación  $\mathbf{A}$  se encuentra entonces como

$$\mathbf{A}_{fitted} = e^{-j\omega\tau} \mathbf{P}_{fitted} \quad (2.61)$$

Note que cada elemento de la matriz de ajuste  $\mathbf{A}$  tiene un tiempo de retardo simple. Este tiempo de retardo es la suma de  $\tau$  (velocidad de la luz) y el retardo de la matriz  $\mathbf{P}$  ajustada. Debe enfatizarse que si la matriz  $\mathbf{A}$  se calculara directamente del triple producto en la ecuación (2.55b) sin que primero se extraiga el desplazamiento de fase  $e^{j\omega\tau}$ , estos elementos presentarían ángulos de oscilación muy altos en la región de frecuencias altas.

## 2.6 Formulación de Morched

El modelo propuesto por Morched [24] puede aplicarse tanto para líneas de transmisión aéreas como para cables, incluso cuando se tiene una fuerte dependencia frecuencial de la matriz de transformación. Esto se ha logrado a través de una formulación en el dominio de fase donde las características modales se han utilizado en la aproximación para la matriz de propagación. Se ha logrado una alta eficiencia computacional por medio del agrupamiento de modos con velocidades muy cercanas y con la realización por columnas de las matrices de propagación y admitancia característica.

Este se puede emplear para cualquier configuración de línea de transmisión. La matriz de propagación  $\mathbf{H}$  es primeramente ajustada en el dominio modal. Los polos resultantes y los tiempos de retardo se utilizan para ajustar  $\mathbf{H}$  en el dominio de fase, bajo el supuesto de que todos los polos contribuyen a todos los elementos de  $\mathbf{H}$ . Los residuos desconocidos se calculan por medio de la solución de una ecuación lineal sobredeterminada como un problema de mínimos cuadrados. Como todos los elementos en  $\mathbf{H}$  obtienen polos idénticos, se puede utilizar una realización por columnas [59], lo que da una mayor eficiencia computacional para la simulación en el dominio del tiempo.

### 2.6.1 Formulación del Modelo

La relación voltaje/corriente en las terminales de la línea de transmisión está dada por

$$\mathbf{Y}_c \mathbf{v} - \mathbf{i} = 2\mathbf{i}_i = 2\mathbf{H}\mathbf{i}_{far} \quad (2.62)$$

donde todas las cantidades están en el dominio de la frecuencia. El término  $i_i$  es la onda incidente de corriente y  $i_{far}$  es la onda reflejada de corriente de

la terminal opuesta en la línea. Las matrices para la propagación  $\mathbf{H}$  y la admitancia característica  $\mathbf{Y}_C$ , se pueden expresar como

$$\mathbf{H} = \exp(-\sqrt{\mathbf{Y}\mathbf{Z}}l) \quad (2.63)$$

$$\mathbf{Y}_C = \mathbf{Z}^{-1}\sqrt{\mathbf{Z}\mathbf{Y}} \quad (2.64)$$

$\mathbf{Z}$  e  $\mathbf{Y}$  son la impedancia serie y la admitancia en paralelo por unidad de longitud y  $l$  es la longitud de la línea de transmisión. Para un sistema de  $n$  conductores,  $\mathbf{Z}$  e  $\mathbf{Y}$  son matrices de  $n \times n$ .

Utilizando la descomposición modal, podemos escribir para  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{T}e^{-\Lambda(\omega)l}\mathbf{T}^{-1} = \sum_{k=1}^n \Gamma_k(\omega)e^{-\lambda_k(\omega)l} = \sum_{k=1}^n \mathbf{H}'_k(\omega)e^{-j\omega\tau_k} \quad (2.65)$$

donde  $\Lambda$  es diagonal y  $\mathbf{T}$  es la matriz de eigenvectores.  $\Gamma_k$  es la matriz cuadrada que resulta del producto de la  $k$ -ésima columna de  $\mathbf{T}$  con el  $k$ -ésimo renglón de  $\mathbf{T}^{-1}$ . Introduciendo la ecuación (2.65) en (2.62) y utilizando convoluciones se obtiene la solución en el dominio del tiempo:

$$\mathbf{Y}_C * \mathbf{v} - \mathbf{i} = 2 \sum_{k=1}^n \mathbf{H}'_k(t - \tau_k) * \mathbf{i}_{fur} \quad (2.66)$$

## 2.6.2 Aproximación de la Función Racional

### 2.6.2.1 Aproximación de $\mathbf{H}$

La ecuación (2.65) muestra que cada contribución modal de  $\mathbf{H}$  puede expresarse como

$$\mathbf{H}_k(\omega) = \Gamma_k(\omega)e^{-\lambda_k(\omega)l} = \Gamma_k(\omega)e^{-\lambda'_k(\omega)l}e^{-j\omega\tau_k} \quad (2.67)$$

En principio, se podría encontrar una aproximación para  $\mathbf{H}$  por cada factor de ajuste  $\Gamma_k$  y  $\exp(-\lambda'_k l)$  separadamente. Los polos del modelo deberían incluir los polos de todos los factores, sin embargo la variación en la frecuencia en  $\Gamma_k$  esta siempre acompañada por una variación en la frecuencia en  $\exp(-\lambda'_k l)$ , se descubrió que es posible obtener un ajuste exacto utilizando solo los polos de los factores  $\exp(-\lambda'_k l)$ . Por lo tanto se planteó que  $\mathbf{H}$  puede ser ajustada con precisión utilizando solo los polos de los modos [24].

La técnica de ajuste en [59] se utiliza para calcular una aproximación para la función racional de los factores  $\exp(-\lambda'_k l)$ , así como los tiempos de retardo  $\tau_k$ . Los polos de las funciones ajustadas y los tiempos de retardo son usados en el ajuste de  $\mathbf{H}$  en el dominio de fase. En cada punto de la frecuencia  $\omega$ ,  $\mathbf{H}$  se puede escribir como:

$$H_{ij}(j\omega_l) = \sum_{k=1}^n \left[ \sum_{m=1}^{N_k} \frac{c_{mk \ ij}}{j\omega_l - p_{mk}} \right] e^{-j\omega_l \tau_k} \quad (2.68)$$

donde  $N_k$  es el número de polos para el modo  $k$ . Escribiendo la ecuación (2.68) para varias frecuencias se obtiene una ecuación matricial lineal sobredeterminada de la forma

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \quad (2.69)$$

donde los residuos desconocidos ( $c$ ) están en  $\mathbf{X}$ . Cada renglón de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  corresponden a un punto de frecuencia y cada columna de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  corresponden a un elemento de  $\mathbf{H}$ . La ecuación (2.69) se resuelve como un problema de mínimos cuadrados. Cabe señalar que todos los polos  $p_{mk}$ , están presentes en todos los elementos ( $i, j$ ) de la matriz ajustada  $\mathbf{H}$ . Esto permite una realización por columnas para  $\mathbf{H}$ , lo que conduce a un ahorro computacional en el dominio del tiempo.

La experiencia con el método de ajuste ha demostrado que los eigenvalores  $\lambda$  de  $\mathbf{H}$  pueden calcularse con suficiente exactitud utilizando una matriz de transformación real y constante evaluada en alta frecuencia (e.g. 1 MHz). Los eigenvalores resultantes diferirán ligeramente de los exactos, ya que los polos resultantes difieren ligeramente cuando se ajusta  $\exp(-\lambda' t)$ . Sin embargo, esto es de poca importancia para los resultados finales ya que los pequeños desplazamientos de los polos llegan a ser compensados por pequeños cambios en los residuos cuando se resuelve la ecuación (2.69). La ventaja de usar una matriz de transformación constante es que elimina la necesidad de un seguimiento rutinario [54] o rutinas de diagonalización especial [20, 54] para evitar el problema de cruzamiento de modos.



# Capítulo 3

## Líneas de Transmisión monofásicas con Parámetros Eléctricos Dependientes de la Frecuencia

### 3.1 Introducción

Las variaciones en la frecuencia de los parámetros de línea provocan distorsión progresiva y atenuación de las ondas transitorias durante su propagación a lo largo de la línea de transmisión. Este fenómeno es conocido como dispersión lineal.

La mayoría de los programas desarrollados para la simulación de transitorios están basados en el método de Bergeron. Cuando se ignoran las pérdidas, éste método proporciona una técnica de onda viajera sencilla y elegante, la cual se complementa agregando resistencias concentradas en serie para representar las pérdidas. En el caso de que los parámetros eléctricos de la línea de transmisión estén en función de la frecuencia, el modelo de Bergeron es abandonado y las ecuaciones pertinentes primeramente son expresadas en el dominio de la frecuencia. En el dominio de la frecuencia se deduce un modelo circuital basado en las funciones de onda viajera hacia adelante y atrás. Para la conversión del circuito en el dominio de la frecuencia al dominio del tiempo, la función de propagación y la admitancia característica son aproximadas por funciones racionales expresadas en términos de fracciones parciales.

En este capítulo se presenta un nuevo modelo en el dominio del tiempo para líneas monofásicas con parámetros eléctricos con dependencia frecuencial. Este modelo se presenta con dos propósitos, el primero es realizar una revisión del Método de las Características y el segundo es proporcionar una introducción de los conceptos necesarios para el desarrollo del modelo para línea multiconductora.



### 3.2 Ecuaciones de la Línea de Transmisión

Las ecuaciones del Telegrafista para una línea de transmisión monofásica con parámetros eléctricos dependientes de la frecuencia, se definen de la siguiente manera [5]:

$$\frac{\partial v}{\partial x} + L_G \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t r'(t-\tau) i(\tau) d\tau = 0 \quad (3.1a)$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} + C_G \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t g'(t-\tau) v(\tau) d\tau = 0 \quad (3.1b)$$

donde  $v=v(x,t)$  e  $i=i(x,t)$  son el voltaje y corriente de línea respectivamente;  $r'(t)$  es la resistencia transitoria en el dominio del tiempo,  $g'(t)$  es la conductancia transitoria de la línea;  $L_G$  y  $C_G$  son la inductancia y la capacitancia geométrica de la línea por unidad de longitud (*p.u.l.*) respectivamente. Generalmente para el caso de líneas de transmisión aéreas el parámetro  $g'(t)$  se desprecia [6].

La resistencia transitoria de la línea  $r'(t)$  se define como la caída de tensión por unidad de longitud que aparece en los conductores cuando se inyecta un escalón unitario de corriente  $u(t)$ .

$$r'(t) = - \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{t=u(t)} \quad t > 0 \quad (3.2)$$

$r'(t)$  se debe al efecto piel en la línea de transmisión y al plano de tierra como retorno. Esta función es positiva, monotónicamente decreciente y tiene los siguientes límites [5]:

$$\lim_{t \rightarrow 0} r'(t) = \infty \quad (3.3a)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r'(t) = R_{DC} \quad (3.3b)$$

donde  $R_{DC}$  es la resistencia de corriente directa de la línea de transmisión.

### 3.3 Síntesis de la Resistencia Transitoria

En el dominio de la frecuencia, la primera ecuación del Telegrafista se representa de la siguiente manera:

$$- \frac{dV(s)}{dx} = [sL_G + Z_T(s) + Z_C(s)]I(s) \quad (3.4)$$

donde  $L_G$  es la inductancia geométrica o de línea ideal,  $Z_T(s)$  es la impedancia debida al retorno por tierra y  $Z_C(s)$  es la impedancia interna del conductor.

Aplicando la transformada de Laplace a (3.1a), se obtiene:

$$-\frac{dV}{dx} = [sL_G + sR'(s)]I(s) \quad (3.5)$$

Comparando (3.4) y (3.5), se puede escribir:

$$R'(s) = \frac{[Z_T(s) + Z_C(s)]}{s} \quad (3.6a)$$

donde

$$Z_T(s) = R_T(s) + sL_T(s) \quad (3.6b)$$

$$Z_C(s) = R_C(s) + sL_C(s) \quad (3.6c)$$

Para poder efectuar la convolución indicada en (3.1a) es necesario transformar (3.6a) al dominio del tiempo, desafortunadamente  $R'(s)$  es una función irracional difícil si no imposible de transformar al dominio del tiempo analíticamente. Este problema se resuelve aproximando  $R'(s)$  mediante una función racional de la siguiente manera:

$$R'(s) = \frac{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_n s^{N+1}}{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_n s^{N+1}} \quad (3.7)$$

Observe que la aproximación no es estrictamente propia. Considerando que  $R'(s)$  tiene polos simples se obtiene la siguiente expansión en fracciones parciales:

$$R'(s) \cong \frac{k_0}{s} + \sum_{i=1}^N \frac{k_i}{s + p_i} + k_\infty \quad (3.8)$$

donde  $N$  es el orden de la aproximación racional,  $p_1, p_2, \dots, p_N$  son los polos de  $R'(s)$  y  $k_0, k_1, k_2, \dots, k_N$  y  $k_\infty$  son los residuos correspondientes. El residuo  $k_0$  se identifica como la resistencia de corriente directa de la línea  $R_{DC}$  y el resto de los parámetros se pueden obtener aplicando la técnica de Vector Fitting descrita en [9].

Aplicando los teoremas de valor inicial y final a la ecuación (3.8)

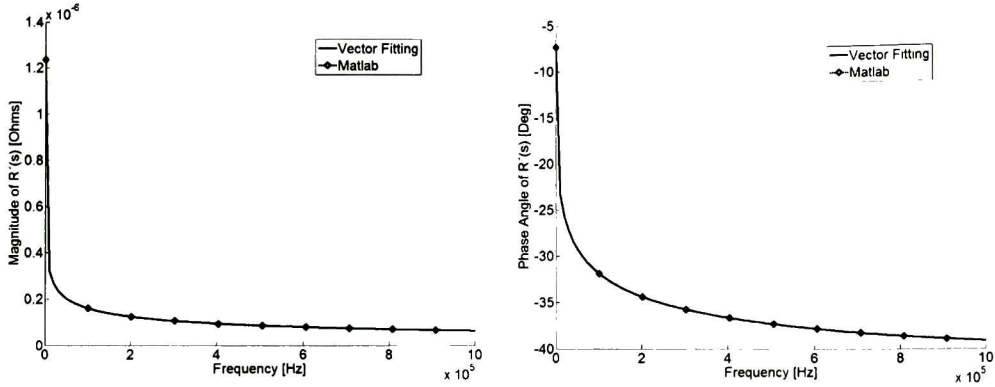
$$\lim_{t \rightarrow \infty} r'(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sR'(s) = k_0 \quad (3.9a)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} r'(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sR'(s) = \infty \quad (3.9b)$$

Las expresiones (3.9a) y (3.9b) coinciden con las expresiones (3.3a) y (3.3b), siempre que  $k_0 = R_{DC}$ . Al extraer el término que contiene  $R_{DC}$  de la ecuación (3.8), la función que resulta para ser sintetizada es:

$$H(s) = R'(s) - \frac{R_{CD}}{s} = \sum_{i=1}^N \frac{k_i}{s + p_i} + k_{\infty} \quad (3.10)$$

La Fig. 3.1 muestra la curva de ajuste para la magnitud y fase de la resistencia transitoria, que para el caso de línea de transmisión es una función suave.



**Fig. 3.1** Magnitud y fase resistencia transitoria.

La transformada inversa de Laplace de la ecuación (3.8) es:

$$r'(t) \cong R_{CD}u(t) + h(t) + k_{\infty}\delta(t) \quad (3.11a)$$

donde  $\delta(t)$  es la función delta de Dirac,  $u(t)$  es la función escalón y

$$h(t) = \sum_{i=1}^N k_i e^{-p_i t} \quad (3.11b)$$

Aplicando las ecuaciones (3.11a) y (3.11b) en el término que contiene la derivada parcial de la convolución de la ecuación (3.1a), se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t r'(t-\tau)i(\tau)d\tau &= k_{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \delta(t-\tau)i(\tau)d\tau + R_{CD} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t u(t-\tau)i(\tau)d\tau + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t h(t-\tau)i(\tau)d\tau \\ &= k_{\infty} \frac{\partial i(t)}{\partial t} + R_{CD}i(t) + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t h(t-\tau)i(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (3.12)$$

Sustituyendo la ecuación (3.12) en (3.1a), resulta:

$$\frac{\partial v}{\partial x} + D \frac{\partial i}{\partial t} + R_{lx}i + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t h(t-\tau)i(\tau)d\tau = 0 \quad (3.13a)$$

donde

$$D = k_{\infty} + L_G \quad (3.13b)$$

La aplicación directa de la transformación característica para las ecuaciones (3.13a) y (3.1b) constituye el modelo propuesto en [10]. Un problema aquí presente es que la derivada parcial del término que contiene la convolución en la ecuación (3.13a) no se elimina con la transformación; con el fin de eliminar la derivada parcial del término de convolución se aplica la regla de Leibnitz para la diferenciación de una integral [5]

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t h(t-\tau)i(\tau)d\tau = h(0)i(t) + \int_0^t h'(t-\tau)i(\tau)d\tau \quad (3.14a)$$

donde

$$h'(t) = \frac{\partial h(t)}{\partial t} \quad (3.14b)$$

Sustituyendo la ecuación (3.14a) en la ecuación (3.13a):

$$\frac{\partial v}{\partial x} + D \frac{\partial i}{\partial t} + R_X i + \psi = 0 \quad (3.15a)$$

donde

$$\psi = \int_0^t h'(t-\tau)i(\tau)d\tau = -\sum_{i=1}^N k_i p_i \int_0^t e^{-p_i(t-\tau)} i(\tau) d\tau \quad (3.15b)$$

$$h(0) = \sum_{i=1}^N k_i \quad (3.15c)$$

$$R_X = R_{D_X} + h(0) \quad (3.15d)$$

Las ecuaciones (3.15a) y (3.1b) constituyen un sistema de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) que representan una línea de transmisión dispersiva. Estas ecuaciones se utilizan como base para el modelo propuesto en esta tesis. Cabe mencionar que, dado que  $h'(t)$  es una sumatoria de exponenciales, su convolución con  $i(t)$  puede resolverse de manera recursiva [11].

### 3.4 Método de las Características

El objetivo principal del método de las Características es el de transformar un sistema de EDP en un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) [61] el cual es mucho más conveniente para el análisis numérico

Para una línea cuyos parámetros se consideran dependientes de la frecuencia, las ecuaciones del Telegrafista (3.15a) y (3.1b) se pueden representar utilizando notación matricial de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{u} + \mathbf{A} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{W} = 0 \quad (3.16a)$$

donde

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & D \\ C_G & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & R_X \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \psi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.16b)$$

Por definición, (3.16a) es hiperbólica si  $\mathbf{A}$  es algebraicamente similar a una matriz diagonal cuyos elementos diferentes de cero son reales y distintos, es decir, a una matriz de valores propios positivos [13]. Los eigenvalores de  $\mathbf{A}$  son:

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{DC_G} \quad (3.17a), (3.17b)$$

Las matrices de eigenvectores izquierdos y derechos correspondientes de  $\mathbf{A}$  son:

$$\mathbf{E}_{Left} = \begin{bmatrix} 1 & Z_w \\ 1 & -Z_w \end{bmatrix} \quad y \quad \mathbf{E}_{Right} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ Y_w & -Y_w \end{bmatrix} \quad (3.18a), (3.18b)$$

donde

$$Z_w = \sqrt{\frac{D}{C_G}} \quad and \quad Y_w = Z_w^{-1} \quad (3.18c), (3.18d)$$

$Z_w$  tiene dimensiones de una impedancia, por lo tanto se denomina impedancia de onda [12] y  $\lambda$  tiene los recíprocos de las velocidades.

Para obtener una forma adecuada para realizar la transformación a coordenadas características se premultiplica la ecuación (3.16a) por  $\mathbf{E}_{Left}$  y aplicando las ecuaciones (3.17a), (3.17b), (3.18c) y (3.18d), se obtiene:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) v + Z_w \left( \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) i + R_X i + \psi = 0 \quad (3.19a)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) v - Z_w \left( \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) i + R_X i + \psi = 0 \quad (3.19b)$$

Empleando los valores característicos (3.17) se pueden definir las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\frac{dt}{dx} = \lambda_1 = \sqrt{DC_G} \quad (3.20a)$$

$$\frac{dt}{dx} = \lambda_2 = -\sqrt{DC_G} \quad (3.20b)$$

Cuyas soluciones se pueden escribir como:

$$t = +\sqrt{DC_G} x + \alpha \quad (3.21a)$$

$$t = -\sqrt{DC_G} x + \beta \quad (3.21b)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes reales. Las ecuaciones (3.21a) y (3.21b) representan dos familias de líneas en el plano  $x-t$  llamadas características, la familia de líneas generada por la ecuación (3.21a) incluye solo líneas con pendiente positiva y la ecuación (3.21b) incluye líneas con pendiente negativa. Este conjunto de *rectas características* representa un nuevo sistema de coordenadas para las ecuaciones (3.19a) y (3.19b) [13]. Empleando las definiciones (3.20) se puede observar en (3.19) que:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \quad (3.22a)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \quad (3.22b)$$

Por lo tanto, usando las ecuaciones (3.22a) y (3.22b) en (3.19a) y (3.19b) se puede escribir:

$$\frac{dv}{dx} + Z_w \frac{di}{dx} + R_x i + \psi = 0 \quad (3.23a)$$

$$\frac{dv}{dx} - Z_w \frac{di}{dx} + R_x i + \psi = 0 \quad (3.23b)$$

La Fig. 3.2 muestra las dos familias de líneas características obtenidas como solución a las ecuaciones (3.20a) y (3.20b) para la línea de transmisión con parámetros  $D$  y  $C_G$  constantes. Observe que las pendientes para cada familia de líneas corresponden al inverso de las velocidades de propagación de la línea de transmisión.

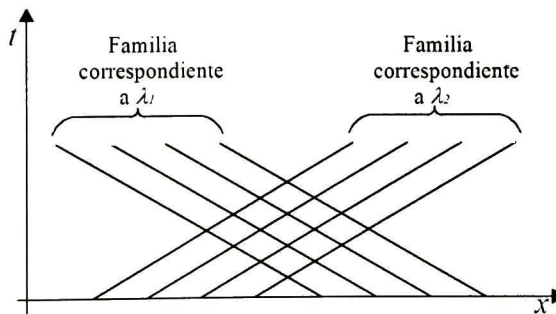


Fig. 3.2 Curvas Características

La ecuación (3.23a) es válida a lo largo de la línea característica (3.21a), mientras que la ecuación (3.23b) lo es a lo largo de la línea característica definida por la ecuación (3.21b). El hecho de que el sistema (3.16a) sea hiperbólico garantiza que en cada punto del plano  $x-t$  se cruce solo una característica perteneciente a la familia de soluciones para la ecuación (3.20a) y otra que pertenezca a la familia de soluciones de la ecuación (3.20b).

Para el caso de una línea de transmisión ideal  $\psi=0$ ,  $R_X=0$  y  $Z_w=(L_G/C_G)^{1/2}=Z_0$ ; en este caso las ecuaciones (3.23a) y (3.23b) se pueden integrar directamente y así obtener el método de Branin o Bergeron. Para el caso más general de una línea de transmisión con pérdidas las ecuaciones (3.23a) y (3.23b) se resuelven dividiendo la longitud de la línea en varios segmentos y utilizando diferencias finitas a lo largo de las líneas características [61,62].

### 3.5 Tratamiento numérico de la convolución recursiva

De acuerdo con el modelo de línea de transmisión propuesto en esta tesis,  $\psi$  contiene los términos exponenciales de la resistencia transitoria. En el dominio de Laplace, el término de la convolución en la ecuación (3.15b) puede ser expresado de la siguiente manera:

$$\Psi(s) = L(\psi(t)) \quad (3.24a)$$

donde

$$\Psi(s) = - \left[ \frac{k_1 p_1}{s + p_1} + \frac{k_2 p_2}{s + p_2} + \dots + \frac{k_N p_N}{s + p_N} \right] I(s) \quad (3.24b)$$

Conviene ahora introducir  $N$  variables auxiliares en  $\Psi_i$ , tales que:

$$\Psi(s) = - \sum_{i=1}^N \Psi_i = \sum_{i=1}^N \frac{k_i p_i}{s + p_i} I(s) \quad (3.25)$$

es decir,

$$\Psi_i = \frac{k_i p_i}{s + p_i} I(s) \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.26)$$

Reacomodando la ecuación (3.26) se puede escribir

$$s \Psi_i + p_i \Psi_i = k_i p_i I(s) \quad (3.27)$$

Convirtiendo la ecuación (3.27) al dominio del tiempo se obtiene

$$\frac{d\psi_i}{dt} + p_i\psi_i = k_i p_i i(t) \quad (3.28)$$

donde  $\psi_i$  son los términos correspondientes a la transformada inversa de Laplace de los  $\Psi_i$ . La ecuación (3.28) se puede aproximar por diferencias finitas como a continuación se muestra:

$$\psi_{i,n+1} = \frac{\Delta t}{1 + p_i \Delta t} \left[ \frac{\psi_{i,n}}{\Delta t} + k_i p_i i_{n+1} \right] \quad (3.29)$$

donde  $\psi_{i,n}$  denota  $\psi_{i(n\Delta t)}$ . Además, los subíndices  $n$  y  $n+1$  corresponden a las muestras en los tiempos  $n\Delta t$  y  $(n+1)\Delta t$ , respectivamente. Finalmente, el término de la convolución total  $\psi_{n+1}$  se obtiene de la siguiente forma:

$$\psi_{n+1} = \sum_{i=1}^N \psi_{i,n+1} = \sum_{i=1}^N \frac{\Delta t}{1 + p_i \Delta t} \left[ \frac{\psi_{i,n}}{\Delta t} + k_i p_i i_{n+1} \right] \quad (3.30)$$

La expresión anterior es una convolución numérica de orden  $O(\Delta t)$ . Cabe mencionar que a partir de la ecuación (3.28) es posible desarrollar convoluciones recursivas de órdenes superiores.

### 3.6 Solución Numérica para los Puntos en las Fronteras

Las ecuaciones (3.23a) y (3.23b) se satisfacen a lo largo de las rectas características que inciden en el nodo de recepción y en el nodo de envío, respectivamente, [15]. En cada uno de los extremos de la línea existe solamente una línea característica, por lo que para encontrar la solución para el voltaje y la corriente en estos puntos es necesario tomar en cuenta las condiciones de frontera, las cuales deben proporcionar una ecuación más para cada extremo de la línea de transmisión. En una red eléctrica las condiciones de frontera para las líneas de transmisión dependen de los elementos conectados a ellas, los cuales pueden ser de diversos tipos y por lo tanto poseer diferentes propiedades. Esto hace necesario el desarrollo de un modelo para los extremos de las líneas de transmisión que permita realizar la conexión de elementos arbitrarios.

Dividir la longitud de la línea de transmisión en varios segmentos, como se ha hecho en varios de los trabajos anteriores [61]-[63], ocasiona un gran consumo de tiempo y por lo tanto un algoritmo ineficiente para el caso de líneas de transmisión uniformes. En esta tesis, se aplica un procedimiento de diferencias finitas para resolver las ecuaciones (3.23a) y (3.23b) que no requiere el seccionamiento de la línea. Considere el diagrama de líneas características mostrado en la Fig. 3.3, donde  $\tau$  es el tiempo de viaje de las ondas de propagación en la línea de transmisión,  $\ell$  es la longitud de la línea de transmisión y  $\Delta t$  es el tiempo del paso de simulación del transitorio.

Utilizando un esquema de diferencias hacia atrás en (3.23a) y (3.23b)

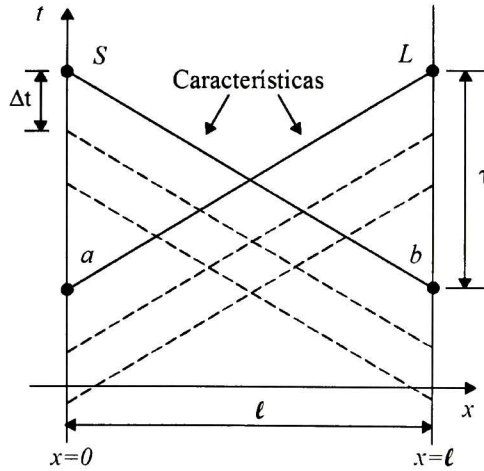


resulta:

$$(v_S - v_b) - Z_w(i_S - i_b) - \frac{R_x}{2}(i_S + i_b)\Delta x - \frac{l}{2}(\psi_S + \psi_b)\Delta x = 0 \quad (3.31a)$$

y

$$(v_L - v_a) + Z_w(i_L - i_a) + \frac{R_x}{2}(i_L + i_a)\Delta x + \frac{l}{2}(\psi_L + \psi_a)\Delta x = 0 \quad (3.31b)$$



**Fig. 3.3** Diagrama de Líneas Características

Reacomodando los términos de voltajes y corrientes, se obtiene:

$$v_S - Z_1 i_S - \frac{\Delta x}{2} \psi_S = v_b - Z_2 i_b + \frac{\Delta x}{2} \psi_b \quad (3.32a)$$

$$v_L + Z_1 i_L + \frac{\Delta x}{2} \psi_L = v_a + Z_2 i_a - \frac{\Delta x}{2} \psi_a \quad (3.32b)$$

donde

$$Z_1 = Z_w + \frac{R_x \Delta x}{2} \quad (3.32c)$$

y

$$Z_2 = Z_w - \frac{R_x \Delta x}{2} \quad (3.32d)$$

Observe que  $\psi_a$  y  $\psi_b$  representan las convoluciones en el punto "a" y "b" respectivamente.

De acuerdo con la ecuación (3.30) las convoluciones en los puntos “S” y “L” se pueden expresar de la manera siguiente:

$$\psi_S = -\sum_{i=1}^N \frac{\Delta t}{I + p_i \Delta t} \left[ \frac{I}{\Delta t} \psi_{i,S-\Delta t} + k_i p_i i_S \right] \quad (3.33a)$$

$$\psi_L = -\sum_{i=1}^N \frac{\Delta t}{I + p_i \Delta t} \left[ \frac{I}{\Delta t} \psi_{i,L-\Delta t} + k_i p_i i_L \right] \quad (3.33b)$$

Note que las convoluciones en los puntos “S” y “L” para un tiempo de cálculo están en función de las corrientes para el mismo instante de tiempo,

Al introducir las ecuaciones (3.33a) y (3.33b) en las ecuaciones (3.32a) y (3.32b), respectivamente, resulta:

$$v_S - Z_1' i_S = v_b - Z_2 i_b + \frac{\Delta x}{2} (\psi_S + \psi_b) \quad (3.34a)$$

$$v_L + Z_1' i_L = v_a + Z_2 i_a - \frac{\Delta x}{2} (\psi_L' + \psi_a) \quad (3.34b)$$

donde

$$Z_1' = Z_1 - \frac{\Delta x \Delta t}{2} \sum_{i=1}^N \frac{k_i p_i}{I + p_i \Delta t} \quad (3.34c)$$

$$\psi_S = -\sum_{i=1}^N \frac{\psi_{i,S-\Delta t}}{I + p_i \Delta t} \quad (3.34d)$$

y

$$\psi_L = -\sum_{i=1}^N \frac{\psi_{i,L-\Delta t}}{I + p_i \Delta t} \quad (3.34e)$$

Ambas ecuaciones (3.34a) y (3.34b) contienen en su lado derecho la representación de los voltajes y corrientes de historia conocidos un tiempo  $\tau$  previo, excepto los términos  $\psi_S'$  y  $\psi_L'$  que son conocidos un tiempo  $\Delta t$  atrás, por lo tanto, es posible determinar como quedan los voltajes de historia

$$v_{hst,b} = v_b - Z_2 i_b + \frac{\Delta x}{2} (\psi_S + \psi_b) \quad (3.35a)$$

$$v_{hst,a} = v_a + Z_2 i_a - \frac{\Delta x}{2} (\psi_L' + \psi_a) \quad (3.35b)$$

Observe, que  $i_S$  está entrando a la terminal de envío de la línea de transmisión, mientras que  $i_L$  sale de la terminal de recepción. Para considerar la misma convención de polaridad de voltajes y corrientes en

ambas terminales de la línea de transmisión, se presenta la siguiente definición:

$$i_{L_m} = -i_L \quad (3.36a)$$

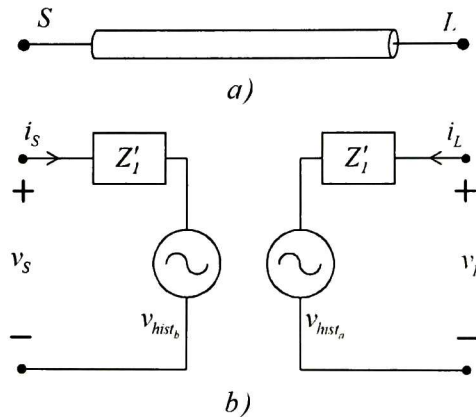
$$v_{L_m} = v_L \quad (3.36b)$$

Ahora bien, considere las ecuaciones (3.34a), (3.34b), (3.35a), (3.35b), (3.36a) y (3.36b) resultando:

$$v_S = Z'_l i_S + v_{hist_b} \quad (3.37a)$$

$$v_{L_m} = Z'_l i_{L_m} + v_{hist_a} \quad (3.37b)$$

Las ecuaciones (3.37a) y (3.37b) corresponden a circuitos equivalentes de Thevenin, tal y como se muestra en la Fig 3.4b. En este circuito las terminales de la línea de transmisión no están conectadas topológicamente, las condiciones en los extremos dependen únicamente de las condiciones de frontera y de los valores de voltaje dados por los términos de historia (3.35a) y (3.35b).



**Fig. 3.4** a) Línea de Transmisión, b) Representación circuital de las líneas características en las fronteras.

El sistema de ecuaciones (3.37a) y (3.37b) se puede representar también por medio de un modelo de Norton de la siguiente manera:

$$i_S = Y'_l v_S - i_{hist_b} \quad (3.38a)$$

$$i_{L_m} = Y'_l v_{L_m} - i_{hist_a} \quad (3.38b)$$

donde

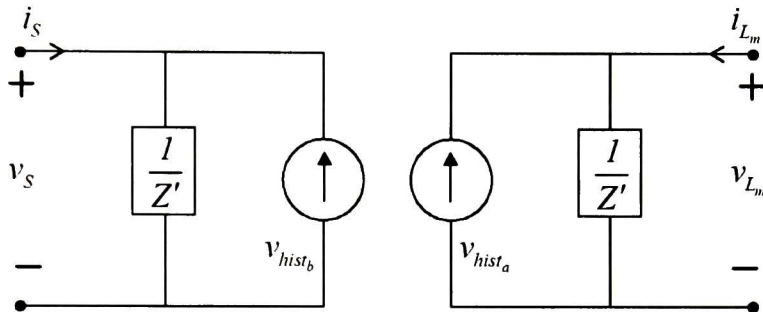
$$Y'_l = \frac{1}{Z'_l} \quad (3.38c)$$

$$i_{hist_b} = \frac{v_{hist_b}}{Z'_l} \quad (3.38d)$$

y

$$i_{hist_a} = \frac{v_{hist_a}}{Z'_l} \quad (3.38e)$$

La Fig. 3.5 muestra esquemáticamente el modelo de Norton de acuerdo con las ecuaciones (3.38a) y (3.38b).



**Fig. 3.5** Circuito equivalente de Norton para la línea de transmisión de la Fig. 3.4b.

Los modelos resultantes de las ecuaciones (3.37a), (3.37b), (3.38a) y (3.38b) representan circuitos que pueden incluirse en cualquier programa de análisis de transitorios en redes eléctricas, como son los programas SPICE, EMTP y EMTDC, entre otros.

### 3.7 Ejemplo de Aplicación

La nueva formulación del método de las características sin puntos internos fue validada por medio de un ejemplo de aplicación. Para este ejemplo, se ha realizado una comparación de los resultados con el programa EMTDC.

Se analiza una línea de transmisión monofásica de 600 m de longitud, con una altura promedio de 10 m (ver Fig. 3.6). Una fuente de corriente función doble rampa con un tiempo de subida de  $1 \mu\text{s}$  y tiempo de bajada de  $17 \mu\text{s}$  se conecta al nodo de envío. Se conecta en paralelo a la fuente, una resistencia de  $1 \times 10^{-9} \Omega$  y en la terminal de recepción una carga resistiva de  $1 \times 10^6 \Omega$ . El conductor es de aluminio con un radio de 2.5 cm y la resistividad del terreno es de  $100 \Omega\text{m}$ . Se presentan en la Fig. 3.7 los resultados de las formas de onda en las terminales de envío y recepción de la línea de transmisión utilizando el método propuesto en esta tesis y el EMTDC. También, como un ejemplo más se consideró una fuente función escalón unitario con un tiempo de subida de  $1 \mu\text{s}$  conectada a la terminal de envío (ver Fig. 3.8).

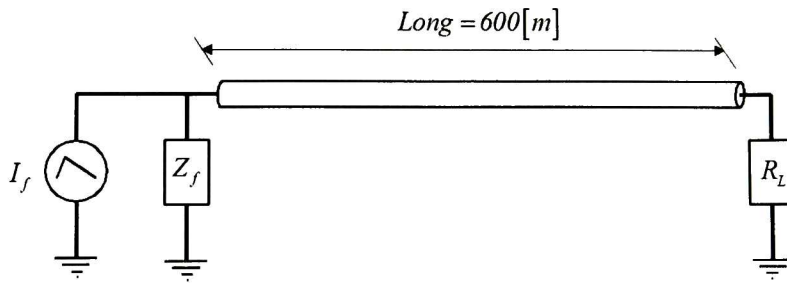


Fig. 3.6 Configuración de la línea de transmisión para un ejemplo de aplicación.

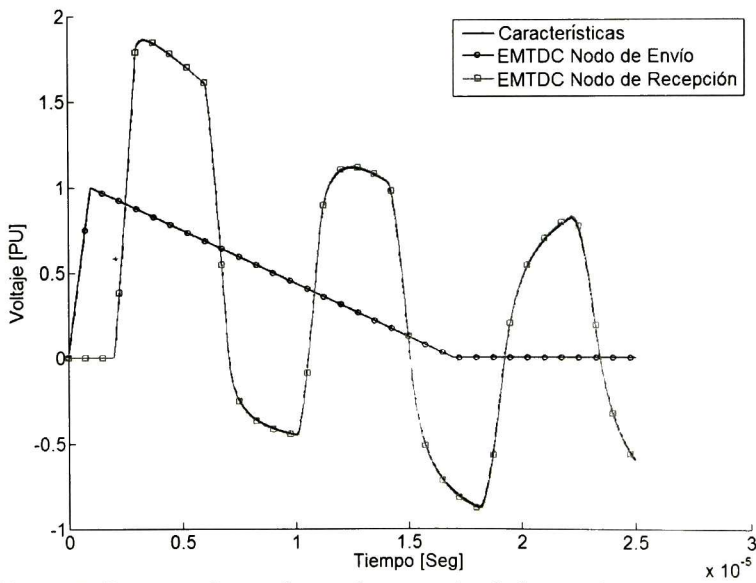
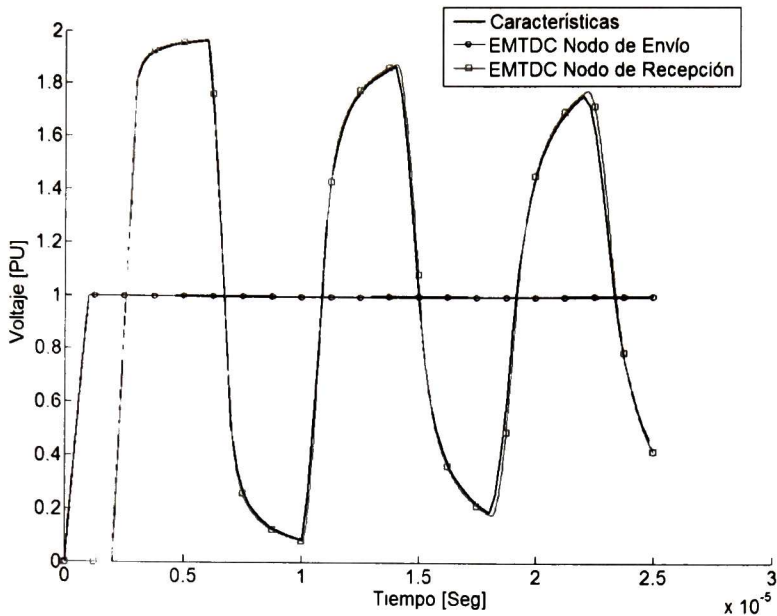


Fig. 3.7 Formas de onda en la terminal de envío y recepción de la línea de transmisión, energizada por una fuente función doble rampa.



**Fig. 3.8** Formas de onda en la terminal de envío y recepción de la línea de transmisión, energizada por una fuente función escalón unitario.

A partir de la Fig. 3.7 y Fig. 3.8 se puede observar que los resultados obtenidos con el modelo propuesto en esta tesis y con el EMTDC, son prácticamente los mismos tanto en el nodo de envío como en el nodo de recepción en la línea de transmisión.

### 3.8 Conclusiones

En este capítulo se ha presentado un modelo en el dominio del tiempo para el análisis de líneas de transmisión monofásicas con parámetros eléctricos dependientes de la frecuencia. El dividir la longitud de las líneas en varios segmentos resulta un mayor consumo de tiempo, por ende un algoritmo ineficiente para el caso de las líneas de transmisión uniforme. Se aplicó un procedimiento de diferencias finitas con el fin de resolver las ecuaciones (3.23a) y (3.23b), pero sin subdividir la longitud de la línea de transmisión. El modelo se basa en el Método de las características para Ecuaciones Diferenciales Parciales. Esta propuesta tiene la ventaja de que requiere sólo la curva de ajuste para la resistencia transitoria, la cual para el caso de líneas de transmisión es una función suave. Cabe mencionar que el método de las características representa una técnica muy completa para modelar varios fenómenos en líneas de transmisión.



# Capítulo 4

## Líneas de Transmisión Multiconductoras con Parámetros Eléctricos Dependientes de la Frecuencia

### 4.1 Introducción

En este capítulo se extiende el modelo de línea de transmisión monofásico para el caso multiconductor. Este modelo se basa en las ecuaciones de línea de transmisión propuestas por Radulet, *et. al.* [5], así como en el método de las características [13]. Este procedimiento tiene la ventaja de que para líneas aéreas solo requiere aproximar la curva de la resistencia transitoria.

### 4.2 Ecuaciones del Telegrafista para Líneas de Transmisión con Parámetros Eléctricos Dependientes de la Frecuencia

Para una línea de transmisión de  $n$ -fases, las ecuaciones del Telegrafista modificadas propuestas por Radulet, se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \mathbf{L}_o \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \mathbf{r}'(t-\tau) \mathbf{i}(\tau) d\tau = 0 \quad (4.1a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x} + \mathbf{C}_o \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \mathbf{g}'(t-\tau) \mathbf{v}(\tau) d\tau = 0 \quad (4.1b)$$

donde  $\mathbf{r}'(t)$  es la resistencia transitoria en serie,  $\mathbf{g}'(t)$  es la conductancia transitoria en paralelo,  $\mathbf{L}_o$  es la inductancia geométrica y  $\mathbf{C}_o$  es la capacitancia geométrica [7]. Todas estas matrices son de dimensión  $n \times n$ . Generalmente en la mayoría de los estudios prácticos para el caso de líneas de transmisión aéreas el parámetro  $\mathbf{g}'(t)$  se desprecia [6].



La resistencia transitoria de la línea de transmisión se define a continuación:

$$\mathbf{r}'(t) = - \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right) \Big|_{x=u(t)} \quad t > 0 \quad (4.2)$$

De manera similar al caso de línea de transmisión monofásica, esta es una función positiva, monótonicamente decreciente y tiene los siguientes límites [5]:

$$\lim_{t \rightarrow 0} (\mathbf{r}'(t)) = (\infty)_{n \times n} \quad (4.3a)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{r}'(t)) = \text{diag} \{ R_{CD,1}, R_{CD,2}, \dots, R_{CD,n} \} \quad (4.3b)$$

donde  $R_{CD,q}$ ,  $q = 1, 2, \dots, n$  es la resistencia de corriente directa del  $q$ -ésimo conductor y  $(\infty)_{n \times n}$  es una matriz de  $n \times n$  cuyos elementos son infinitos.

### 4.3 Síntesis de la resistencia Transitoria

Con el fin de obtener un procedimiento eficiente y general para la evaluación de la convolución en la ecuación (4.1a),  $\mathbf{r}'(t)$  se obtiene por medio de la síntesis de su imagen en el dominio de la frecuencia. Considere la primera ecuación del telegrafista en el dominio de la frecuencia:

$$-\frac{d\mathbf{v}(s)}{dx} = [s\mathbf{L}_o + \mathbf{Z}_T(s) + \mathbf{Z}_C(s)] \mathbf{i}(s) \quad (4.4)$$

donde  $\mathbf{Z}_T(s)$  es la impedancia debida al retorno por tierra y  $\mathbf{Z}_C(s)$  es la impedancia interna del conductor, estas dos impedancias son matrices de dimensión  $n \times n$ .

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación (4.1a), se obtiene:

$$-\frac{d\mathbf{v}}{dx} = [s\mathbf{L}_o + s\mathbf{R}'(s)] \mathbf{i}(s) \quad (4.5)$$

Comparando las ecuaciones (4.4) y (4.5), obtenemos:

$$\mathbf{R}'(s) = \frac{[\mathbf{Z}_T(s) + \mathbf{Z}_C(s)]}{s} \quad (4.6a)$$

donde

$$\mathbf{Z}_T(s) = \mathbf{R}_T(s) + s\mathbf{L}_T(s) \quad (4.6b)$$

$$\mathbf{Z}_c(s) = \mathbf{R}_c(s) + s\mathbf{L}_c(s) \quad (4.6c)$$

La resistencia transitoria  $\mathbf{R}'(s)$  es una función irracional, difícil de transformar al dominio del tiempo, sin embargo, cada elemento de  $\mathbf{R}'(s)$  se puede aproximar por medio de una función racional de la siguiente forma:

$$R'_{ij}(s) = \frac{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ns^{N+1}}{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ns^{N+1}} \quad (4.7)$$

Considerando que cada  $R'_{ij}(s)$  tiene polos simples se obtiene una expansión en fracciones parciales de la siguiente manera:

$$\mathbf{R}'(s) \cong \frac{\mathbf{k}_0}{s} + \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{k}_i}{s + p_i} + \mathbf{k}_\infty \quad (4.8)$$

donde  $N$  es el orden de la aproximación racional,  $\mathbf{k}_i (i=1, \dots, N)$  es la matriz de residuos y  $p_i$  corresponde a los polos [8]. De las ecuaciones (4.8) y (4.3b) resulta

$$\mathbf{k}_0 = \text{diag}\{R_{DC,1}, R_{DC,2}, \dots, R_{DC,n}\} \quad (4.9)$$

Aplicando los teoremas de valor inicial y final a la ecuación (4.8) tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{r}'(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\mathbf{R}'(s) = \mathbf{k}_0 \quad (4.10a)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{r}'(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\mathbf{R}'(s) = [\infty]_{n \times n} \quad (4.10b)$$

Las ecuaciones (4.10a) y (4.10b) coinciden con las ecuaciones (4.3a) y (4.3b) siempre que:

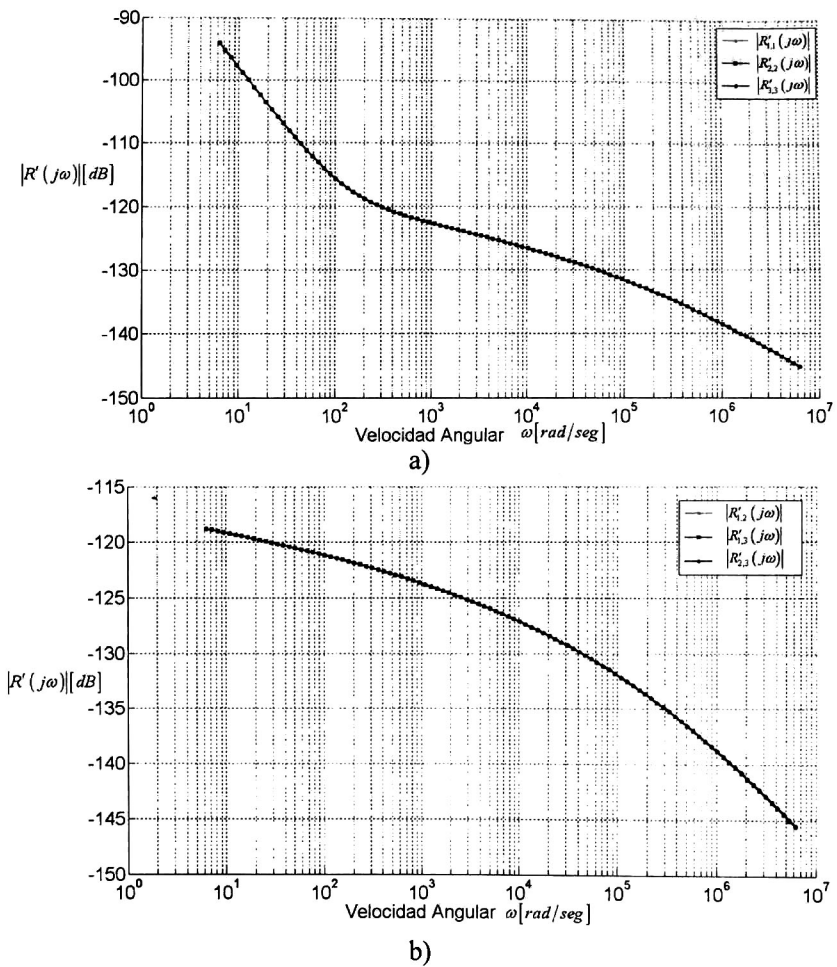
$$\mathbf{k}_0 = \mathbf{R}_{DC} \quad (4.11)$$

Al extraer el término que contiene  $\mathbf{R}_{DC}$  de la ecuación (4.8), la función que resulta para ser sintetizada es:

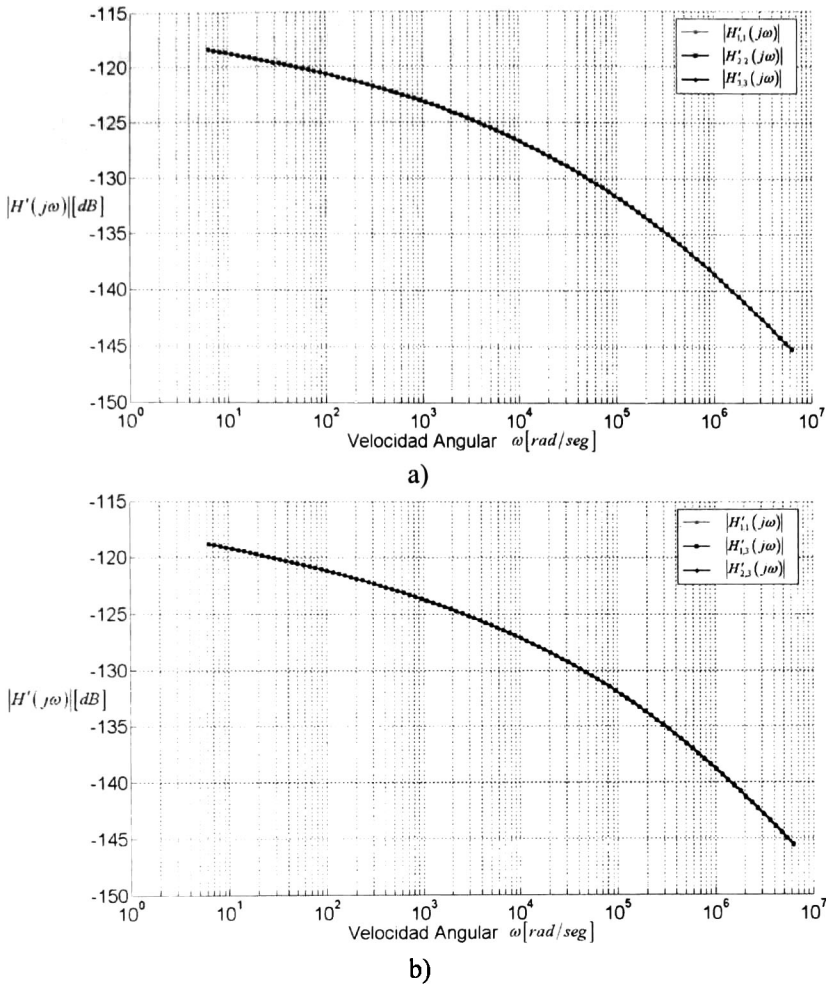
$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{R}'(s) - \frac{\mathbf{R}_{DC}}{s} = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{k}_i}{s + p_i} + \mathbf{k}_\infty \quad (4.12)$$

La Fig. 4.1 muestra la curva de ajuste para la magnitud de la resistencia transitoria  $\mathbf{R}(j\omega)$ , que para el caso de líneas de transmisión de potencia es una función suave. Como se puede observar en la Fig. 4.1a las tres fases muestran gran similitud para esta configuración de línea de transmisión (ver configuración del segundo ejemplo de aplicación al final de este capítulo). Para los elementos mutuos graficados en la Fig. 4.1b también se puede observar la gran similitud entre ellos. La Fig. 4.2 muestra la

magnitud de  $H(j\omega)$ , donde es claro el efecto de la extracción del polo  $k_0/s$  de  $R'(s)$ .



**Fig. 4.1** Gráfica de la resistencia transitoria en el dominio de la frecuencia  $R(j\omega)$ , a) elementos propios, b) elementos mutuos.



**Fig. 4.2** Gráfica de la resistencia transitoria sin el polo en el origen en el dominio de la frecuencia  $H(j\omega)$ , a) elementos propios, b) elementos mutuos

En el dominio del tiempo  $\mathbf{R}'(s)$  es:

$$\mathbf{r}'(t) \cong \mathbf{R}_{CD}u(t) + \mathbf{h}(t) + \mathbf{k}_\infty \delta(t) \quad (4.13a)$$

donde  $\delta(t)$  es la función delta de Dirac,  $u(t)$  es la función escalón y

$$\mathbf{h}(t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{k}_i e^{-p_i t} \quad (4.13b)$$

Para resolver la integral de convolución en la ecuación (4.1a) la imagen en el dominio de Laplace de la resistencia transitoria,  $\mathbf{R}'(s)$ , se puede sintetizar utilizando funciones racionales.

Aplicando las ecuaciones (4.13a) y (4.13b) en el término que contiene

la derivada parcial de la integral de convolución, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \mathbf{r}'(t-\tau) \mathbf{i}(\tau) d\tau &= \mathbf{k}_\infty \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \delta(t-\tau) \mathbf{i}(\tau) d\tau + \mathbf{R}_{\text{CD}} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \mathbf{u}(t-\tau) \mathbf{i}(\tau) d\tau + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \mathbf{h}(t-\tau) \mathbf{i}(\tau) d\tau \\ &= \mathbf{k}_\infty \frac{\partial \mathbf{i}(t)}{\partial t} + \mathbf{R}_{\text{CD}} \mathbf{i}(t) + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \mathbf{h}(t-\tau) \mathbf{i}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.14)$$

Finalmente, sustituyendo la ecuación (4.14) en (4.1a), resulta:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t} + \mathbf{R}_{\text{CD}} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \mathbf{h}(t-\tau) \mathbf{i}(\tau) d\tau = 0 \quad (4.15a)$$

donde

$$\mathbf{D} = \mathbf{k}_\infty + \mathbf{L}_o \quad (4.15b)$$

La aplicación directa de las transformaciones características para las ecuaciones (4.15a) y (4.1b) constituyen el modelo propuesto en [10]. Un problema aquí presente es que la derivada parcial del término que contiene la convolución en la ecuación (4.15a) no se elimina con la transformación; con el fin de eliminar la derivada parcial del término de convolución se aplica la regla de Leibnitz para la diferenciación de una integral [5]

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \mathbf{h}(t-\tau) \mathbf{i}(\tau) d\tau = \mathbf{h}(0) \mathbf{i}(t) + \int_0^t \mathbf{h}'(t-\tau) \mathbf{i}(\tau) d\tau \quad (4.16a)$$

donde

$$\mathbf{h}'(t) = \frac{\partial \mathbf{h}(t)}{\partial t} \quad (4.16b)$$

Sustituyendo la ecuación (4.16a) en la ecuación (4.15a) se tiene que:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t} + \mathbf{R}_x \mathbf{i} + \boldsymbol{\psi} = 0 \quad (4.17a)$$

donde

$$\boldsymbol{\psi} = \int_0^t \mathbf{h}'(t-\tau) \mathbf{i}(\tau) d\tau = - \sum_{i=1}^N \mathbf{k}_i p_i \int_0^t e^{-p_i(t-\tau)} \mathbf{i}(\tau) d\tau \quad (4.17b)$$

$$\mathbf{h}(0) = \sum_{i=1}^N \mathbf{k}_i \quad (4.17c)$$

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{R}_{\text{CD}} + \mathbf{h}(0) \quad (4.17d)$$

Resumiendo, las ecuaciones (4.17a) y (4.1b) constituyen un sistema de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) que representan una línea de transmisión dispersiva. Estas ecuaciones se utilizan como base para el modelo propuesto en esta tesis para el caso de líneas de transmisión multiconductoras por lo que se reescriben a continuación:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t} + \mathbf{R}_x \mathbf{i} + \boldsymbol{\psi} = 0 \quad (4.18a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x} + \mathbf{C}_o \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0 \quad (4.18b)$$

#### 4.4 Método de las Características para Líneas Multiconductoras.

El modelo de línea de transmisión multiconductora basado en el método de las características ya ha sido desarrollado en [63] para el caso de líneas con parámetros eléctricos sin dependencia en la frecuencia. Para una línea multiconductora cuyos parámetros son dependientes de la frecuencia, las ecuaciones del Telegrafista (4.18a) y (4.18b) se pueden representar como un sistema  $2n$  de ecuaciones:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \mathbf{A} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{u} + \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{W} = 0 \quad (4.19a)$$

donde

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}_o^{-1} \\ \mathbf{D}^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}^{-1} \mathbf{R}_x \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\psi} \end{bmatrix} \quad (4.19b)$$

Observe la similitud entre las ecuaciones (3.16a) y (4.19a). Éste último es un sistema hiperbólico de primer orden donde la matriz  $\mathbf{A}$  tiene eigenvalores reales y  $2n$  eigenvectores linealmente independientes; es decir,  $\mathbf{A}$  es similar a una matriz diagonal real [63]. La matriz diagonal de eigenvalores de  $\mathbf{A}$  tiene la siguiente estructura:

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Gamma}_2 \end{bmatrix} \quad (4.20a)$$

donde

$$\boldsymbol{\Gamma}_2 = -\boldsymbol{\Gamma}_1 \quad (4.20b)$$

De la teoría modal para sistemas multiconductores, los productos matriciales  $\mathbf{D} \mathbf{C}_o$  y  $\mathbf{C}_o \mathbf{D}$  son siempre diagonalizables [63]. Si se escogen  $\mathbf{T}_v$  y  $\mathbf{T}_i$  como las matrices que diagonalizan estos productos se tiene entonces que:

$$\mathbf{T}_v^{-1} \mathbf{D} \mathbf{C}_o \mathbf{T}_v = \Lambda \quad (4.21a)$$

$$\mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{C}_o \mathbf{D} \mathbf{T}_i = \Lambda \quad (4.21b)$$

y

$$\mathbf{T}_v^i = \mathbf{T}_i^{-1} \quad (4.21c)$$

$\mathbf{T}_v$  corresponde a la matriz cuyas columnas son los modos de voltaje,  $\mathbf{T}_i$  corresponde a la matriz cuyas columnas son los modos de corriente y  $\Lambda$  es una matriz diagonal cuyos elementos son positivos e igual al inverso de la raíz cuadrada de las velocidades de los modos de propagación. Como se puede observar, estas expresiones podrían ser calculadas aún si la línea fuera ideal de parámetros constantes, es decir, para  $\mathbf{R}_{CD} = \mathbf{0}$ . Las siguientes cantidades modales se definen a continuación:

$$\mathbf{v} = \mathbf{T}_v \mathbf{v}_m \quad (4.22a)$$

$$\mathbf{i} = \mathbf{T}_i \mathbf{i}_m \quad (4.22b)$$

Utilizando las ecuaciones (4.22a) y (4.22b), en el dominio modal las ecuaciones (4.18a) y (4.18b) resultan:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial x} + \tilde{\mathbf{D}} \frac{\partial \mathbf{i}_m}{\partial t} + \tilde{\mathbf{R}}_x \mathbf{i}_m + \boldsymbol{\psi}_m = 0 \quad (4.23a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{i}_m}{\partial x} + \tilde{\mathbf{C}}_o \frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial t} = 0 \quad (4.23b)$$

donde

$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{T}_v \boldsymbol{\psi}_m \quad (4.23c)$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{T}_v^{-1} \mathbf{D} \mathbf{T}_i \quad (4.23d)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_o = \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{C}_o \mathbf{T}_v \quad (4.23e)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_x = \mathbf{T}_v^{-1} \mathbf{R}_x \mathbf{T}_i \quad (4.23f)$$

Las matrices modales  $\tilde{\mathbf{D}}$  y  $\tilde{\mathbf{C}}_o$  son matrices diagonales que satisfacen la siguiente relación:

$$\Lambda = \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{C}}_o = \tilde{\mathbf{C}}_o \tilde{\mathbf{D}} \quad (4.24)$$

La matriz diagonal de velocidades modales  $\Gamma$  se puede definir de la siguiente manera:

$$\Gamma = \sqrt{\Lambda^{-1}} = \sqrt{\tilde{\mathbf{D}}^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_o^{-1}} \quad (4.25)$$

A partir de estos, es posible calcular las correspondientes matrices de eigenvectores izquierdos y derechos para  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{E}_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_v^{-1} & \mathbf{Z}_w \mathbf{T}_i^{-1} \\ \mathbf{T}_v^{-1} & -\mathbf{Z}_w \mathbf{T}_i^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.26a)$$

$$\mathbf{E}_R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_v & \mathbf{T}_v \\ \mathbf{T}_i \mathbf{Y}_w & -\mathbf{T}_i \mathbf{Y}_w \end{bmatrix} \quad (4.26b)$$

donde

$$\mathbf{Z}_w = \sqrt{\tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{C}}_o^{-1}} \quad y \quad \mathbf{Y}_w = \sqrt{\tilde{\mathbf{D}}^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_o} \quad (4.26c), (4.26d)$$

Con el fin de transformar el sistema de las ecuaciones (4.23a) y (4.23b) en un sistema de  $2n$  ecuaciones diferenciales ordinarias, este es premultiplicado por  $\Gamma$  obteniéndose

$$\Gamma \frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial x} + \mathbf{Z}_w \frac{\partial \mathbf{i}_m}{\partial t} + \Gamma \tilde{\mathbf{R}}_x \mathbf{i}_m + \Gamma \Psi_m = \mathbf{0} \quad (4.27a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial t} + \Gamma \mathbf{Z}_w \frac{\partial \mathbf{i}_m}{\partial x} = \mathbf{0} \quad (4.27b)$$

donde

$$\Gamma \mathbf{Z}_w = \tilde{\mathbf{C}}_o^{-1} \quad (4.27c)$$

Ahora bien, sumando y restando las ecuaciones (4.27b) y (4.27a) tenemos que:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \Gamma \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{v}_m + \mathbf{Z}_w \left( \frac{\partial}{\partial t} + \Gamma \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{i}_m + \Gamma \tilde{\mathbf{R}}_x \mathbf{i}_m + \Gamma \Psi_m = \mathbf{0} \quad (4.28a)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \Gamma \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{v}_m - \mathbf{Z}_w \left( \frac{\partial}{\partial t} - \Gamma \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{i}_m - \Gamma \tilde{\mathbf{R}}_x \mathbf{i}_m - \Gamma \Psi_m = \mathbf{0} \quad (4.28b)$$

Las expresiones (4.28a) y (4.28b) representan  $2n$  ecuaciones de la forma:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \gamma_l \frac{\partial}{\partial x} \right) v_{m,l} + Z_{w,l} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \gamma_l \frac{\partial}{\partial x} \right) i_{m,l} + \gamma_l \tilde{R}_x i_m + \gamma_l \Psi_{m,l} = 0 \quad l = 1, \dots, n \quad (4.29a)$$



$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \gamma_l \frac{\partial}{\partial x}\right) v_{m,l} - Z_{w,l} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \gamma_l \frac{\partial}{\partial x}\right) i_{m,l} - \gamma_l \tilde{R}_X i_m - \gamma_l \psi_{m,l} = 0 \quad l = 1, \dots, n \quad (4.29b)$$

donde  $n$  es el numero de modos,  $\gamma_l$  y  $Z_{w,l}$  corresponden a los  $l$ -ésimos elementos de la diagonal de  $\Gamma$  y  $Z_w$ ;  $i_{m,l}$ ,  $v_{m,l}$  y  $\psi_{m,l}$  corresponden a los  $l$ -ésimos de los vectores  $\mathbf{i}_m$ ,  $\mathbf{v}_m$  y  $\boldsymbol{\psi}_m$  respectivamente.

Considerando ahora que las ecuaciones (4.29a) y (4.29b) se restringen a las curvas características, en el plano  $x-t$ , definidas por:

$$\gamma_l = \pm \frac{dx}{dt}; \quad l = 1, \dots, n \quad (4.30a), (4.30b)$$

se pueden escribir las siguientes expresiones:

$$dv_{m,l} + Z_{w,l} di_{m,l} + dx \tilde{R}_X i_{m,l} + dx \psi_{m,l} = 0 \quad (4.31a)$$

$$dv_{m,l} - Z_{w,l} di_{m,l} - dx \tilde{R}_X i_{m,l} - dx \psi_{m,l} = 0 \quad (4.31b)$$

Las ecuaciones (4.30a)-(4.31b) conforman un sistema de  $4n$  ecuaciones diferenciales de primer orden equivalente a las  $2n$  ecuaciones diferenciales parciales de las ecuaciones (4.18a) y (4.18b).

#### 4.5 Tratamiento Numérico de la Convolución Recursiva

Un asunto que aún no se ha tratado es el de evaluar el término de convolución  $\psi$ . Considere el vector  $\boldsymbol{\psi}$  de dimensión  $n \times 1$ , el cual contiene los términos exponenciales de la resistencia transitoria, en el dominio de Laplace

$$\boldsymbol{\Psi}(s) = L(\boldsymbol{\psi}(t)) \quad (4.32a)$$

donde

$$\boldsymbol{\Psi}(s) = - \left[ \frac{\mathbf{k}_1 p_1}{s + p_1} + \frac{\mathbf{k}_2 p_2}{s + p_2} + \dots + \frac{\mathbf{k}_N p_N}{s + p_N} \right] \mathbf{I}(s) \quad (4.32b)$$

Es conveniente introducir  $N$  variables auxiliares en  $\boldsymbol{\Psi}_i$ , en el dominio de la frecuencia la integral de convolución no es más que un producto dado por:

$$\boldsymbol{\Psi}(s) = - \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\Psi}_i = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{k}_i p_i}{s + p_i} \mathbf{I}(s) \quad (4.33)$$

De esta forma es posible decir que:

$$\Psi_i = \frac{k_i p_i}{s + p_i} \mathbf{I}(s) \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (4.34)$$

Reordenando la ecuación (4.34)

$$s\Psi_i + p_i\Psi_i = k_i p_i \mathbf{I}(s) \quad (4.35)$$

Convirtiendo la ecuación (4.35) al dominio del tiempo

$$\frac{d}{dt}\Psi_i + p_i\Psi_i = k_i p_i \mathbf{i}(t) \quad (4.36)$$

La ecuación (4.36) se puede aproximar por diferencias finitas, obteniendo:

$$\Psi_{i,q+1} = \frac{\Delta t}{1 + p_i \Delta t} \left[ \frac{\Psi_{i,q}}{\Delta t} + k_i p_i \mathbf{i}_{q+1} \right] \quad (4.37)$$

Finalmente, el término de convolución total  $\Psi_{q+1}$  se calcula de la siguiente manera

$$\Psi_{q+1} = \sum_{i=1}^N \Psi_{i,q+1} = \sum_{i=1}^N \frac{\Delta t}{1 + p_i \Delta t} \left[ \frac{\Psi_{i,q}}{\Delta t} + k_i p_i \mathbf{i}_{q+1} \right] \quad (4.38)$$

#### 4.6 Solución Numérica para los Puntos en las Fronteras

Como en el caso de la línea de transmisión monofásica,  $\Delta t$  está relacionado con la máxima frecuencia de interés del fenómeno transitorio y se determina a partir de la frecuencia de muestreo de Nyquist. Por otro lado los tiempos de viaje  $\tau_i$  para cada modo, junto con el  $\Delta x$ , deben satisfacer la condición de Courant-Friederichs-Lewi (CFL) [64]. De acuerdo con la Fig. 4.3, es claro que

$$\tau_i = \frac{\Delta x}{\gamma_i} \quad (4.39)$$

Suponga que la solución es conocida para los puntos " $a_n$ " y " $b_n$ " y que se extenderá para los puntos " $S$ " y " $L$ " a lo largo de las  $n$  características negativas y positivas, respectivamente. Para su solución, las ecuaciones (4.31a) y (4.31b) son discretizadas en el espacio (*coordenada-x*) y tiempo (*coordenada-t*). Utilizando un esquema de diferencias finitas hacia atrás para las ecuaciones (4.31b) y (4.31a) resulta:

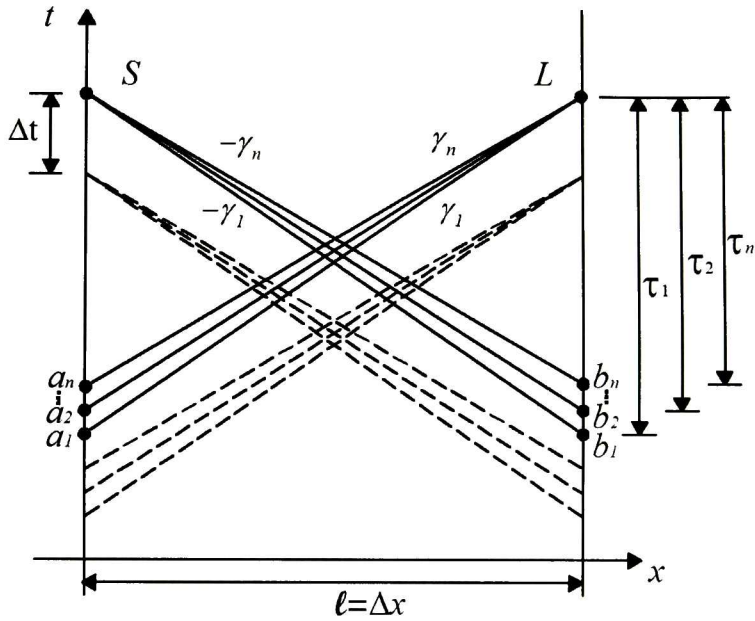


Fig. 4.3 Malla de discretización, método de las características sin puntos internos.

$$(v_{m,l}^S - v_{m,l}^{b_l}) - Z_{w,l} (i_{m,l}^S - i_{m,l}^{b_l}) - \frac{\tilde{R}_X}{2} (i_{m,l}^S + i_{m,l}^{b_l}) \Delta x - \frac{I}{2} (\psi_{m,l}^S + \psi_{m,l}^{b_l}) \Delta x = 0 \quad (4.40a)$$

y

$$(v_{m,l}^L - v_{m,l}^{a_l}) + Z_{w,l} (i_{m,l}^L - i_{m,l}^{a_l}) + \frac{\tilde{R}_X}{2} (i_{m,l}^L + i_{m,l}^{a_l}) \Delta x + \frac{I}{2} (\psi_{m,l}^L + \psi_{m,l}^{a_l}) \Delta x = 0 \quad (4.40b)$$

Reordenando los términos de voltajes y corrientes en las ecuaciones (4.40a) y (4.40b):

$$v_{m,l}^S - i_{m,l}^S \left[ Z_w + \frac{\tilde{R}_X \Delta x}{2} \right] - v_{m,l}^{b_l} + i_{m,l}^{b_l} \left[ Z_w - \frac{\tilde{R}_X \Delta x}{2} \right] - \frac{\Delta x}{2} (\psi_{m,l}^S + \psi_{m,l}^{b_l}) = 0 \quad (4.41a)$$

$$v_{m,l}^L + i_{m,l}^L \left[ Z_w + \frac{\tilde{R}_X \Delta x}{2} \right] - v_{m,l}^{a_l} - i_{m,l}^{a_l} \left[ Z_w - \frac{\tilde{R}_X \Delta x}{2} \right] + \frac{\Delta x}{2} (\psi_{m,l}^L + \psi_{m,l}^{a_l}) = 0 \quad (4.41b)$$

Las ecuaciones anteriores pueden volverse a escribir de la siguiente manera:

$$v_{m,l}^S - Z_1 i_{m,l}^S - \frac{\Delta x}{2} \psi_{m,l}^S = v_{m,l}^{b_l} - Z_2 i_{m,l}^{b_l} + \frac{\Delta x}{2} \psi_{m,l}^{b_l} \quad (4.42a)$$

$$v_{m,l}^L + Z_1 i_{m,l}^L + \frac{\Delta x}{2} \psi_{m,l}^L = v_{m,l}^{a_l} + Z_2 i_{m,l}^{a_l} - \frac{\Delta x}{2} \psi_{m,l}^{a_l} \quad (4.42b)$$

donde

$$Z_1 = Z_w + \frac{\tilde{R}_x \Delta x}{2} \quad (4.42c)$$

y

$$Z_2 = Z_w - \frac{\tilde{R}_x \Delta x}{2} \quad (4.42d)$$

De acuerdo con la ecuación (4.38) las convoluciones en los puntos "S" y "L" se expresan de la siguiente manera:

$$\psi_{m,l}^S = -\sum_{i=1}^N \frac{\Delta t}{l + p_i \Delta t} \left[ \frac{l}{\Delta t} \psi_{m,l}^{S-\Delta t} + \mathbf{k}_i p_i i_{m,l}^S \right] \quad (4.43a)$$

$$\psi_{m,l}^L = -\sum_{i=1}^N \frac{\Delta t}{l + p_i \Delta t} \left[ \frac{l}{\Delta t} \psi_{m,l}^{L-\Delta t} + \mathbf{k}_i p_i i_{m,l}^L \right] \quad (4.43b)$$

Introduciendo las ecuaciones (4.43a) y (4.43b) en las ecuaciones (4.42a) y (4.42b) respectivamente, tenemos:

$$v_{m,l}^S - Z_1 i_{m,l}^S + \frac{\Delta x}{2} \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{\Delta t}{l + p_i \Delta t} \left[ \frac{l}{\Delta t} \psi_{m,l}^{S-\Delta t} + \mathbf{k}_i p_i i_{m,l}^S \right] \right\} = v_{m,l}^{b_1} - Z_2 i_{m,l}^{b_1} + \frac{\Delta x}{2} \psi_{m,l}^{b_1} \quad (4.44a)$$

$$v_{m,l}^L + Z_1 i_{m,l}^L - \frac{\Delta x}{2} \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{\Delta t}{l + p_i \Delta t} \left[ \frac{l}{\Delta t} \psi_{m,l}^{L-\Delta t} + \mathbf{k}_i p_i i_{m,l}^L \right] \right\} = v_{m,l}^{a_1} + Z_2 i_{m,l}^{a_1} - \frac{\Delta x}{2} \psi_{m,l}^{a_1} \quad (4.44b)$$

Reordenando los términos de las ecuaciones (4.44a) y (4.44b), resulta:

$$v_{m,l}^S - i_{m,l}^S Z_1 = v_{m,l}^{b_1} - Z_2 i_{m,l}^{b_1} + \frac{\Delta x}{2} (\psi_{m,l}^{S'} + \psi_{m,l}^{b_1}) \quad (4.45a)$$

$$v_{m,l}^L + i_{m,l}^L Z_1 = v_{m,l}^{a_1} + Z_2 i_{m,l}^{a_1} - \frac{\Delta x}{2} (\psi_{m,l}^{L'} + \psi_{m,l}^{a_1}) \quad (4.45b)$$

donde

$$Z_1' = Z_1 - \frac{\Delta x \Delta t}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{k}_i p_i}{l + p_i \Delta t} \quad (4.45c)$$

$$\psi_{m,l}^{S'} = -\sum_{i=1}^N \frac{\psi_{m,l}^{S-\Delta t}}{l + p_i \Delta t} \quad (4.45d)$$

y

$$\psi_{m,l}^{L'} = -\sum_{l=1}^N \frac{\psi_{m,l}^{L-\Delta t}}{1+p_l \Delta t} \quad (4.45e)$$

La evaluación de las variables dependientes en los puntos “ $a_n$ ” y “ $b_n$ ” se puede llevar a cabo por medio de interpolación en el tiempo. Con la incorporación de las fórmulas de interpolación cuadrática en las ecuaciones (4.45a) y (4.45b), ordenándolas de una forma más conveniente, resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_m^S - \mathbf{i}_m^S \mathbf{Z}_l' &= \mathbf{f}_1 \left\{ \mathbf{v}_m^{b_1} - \mathbf{Z}_2 \mathbf{i}_m^{b_1} + \frac{\Delta x}{2} \Psi_m^{b_1} \right\} + \\ &\mathbf{f}_2 \left\{ \mathbf{v}_m^{b_2} - \mathbf{Z}_2 \mathbf{i}_m^{b_2} + \frac{\Delta x}{2} \Psi_m^{b_2} \right\} + \\ &\mathbf{f}_3 \left\{ \mathbf{v}_m^{b_3} - \mathbf{Z}_2 \mathbf{i}_m^{b_3} + \frac{\Delta x}{2} \Psi_m^{b_3} \right\} + \frac{\Delta x}{2} \Psi_m^{S'} \end{aligned} \quad (4.46a)$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_m^L - \mathbf{Z}_l' \mathbf{i}_m^L &= \mathbf{f}_1 \left\{ \mathbf{v}_m^{a_1} + \mathbf{Z}_2 \mathbf{i}_m^{a_1} - \frac{\Delta x}{2} \Psi_m^{a_1} \right\} + \\ &\mathbf{f}_2 \left\{ \mathbf{v}_m^{a_2} + \mathbf{Z}_2 \mathbf{i}_m^{a_2} - \frac{\Delta x}{2} \Psi_m^{a_2} \right\} + \\ &\mathbf{f}_3 \left\{ \mathbf{v}_m^{a_3} + \mathbf{Z}_2 \mathbf{i}_m^{a_3} - \frac{\Delta x}{2} \Psi_m^{a_3} \right\} - \frac{\Delta x}{2} \Psi_m^{L'} \end{aligned} \quad (4.46b)$$

donde

$$f_{1,l} = \frac{1}{2} [r_l^2 - 5r_l + 6] \quad (4.46c)$$

$$f_{2,l} = [4r_l - r_l^2 - 3] \quad (4.46d)$$

$$f_{3,l} = \frac{1}{2} [r_l^2 - 3r_l + 2] \quad (4.46e)$$

$$r_l = \frac{\tau_l}{\tau_l} \quad (4.46f)$$

$$\mathbf{f}_1 = \text{diag}(1, f_{1,2}, \dots, f_{1,n}) \quad (4.46g)$$

$$\mathbf{f}_2 = \text{diag}(0, f_{2,2}, \dots, f_{2,n}) \quad (4.46h)$$

$$\mathbf{f}_3 = \text{diag}(0, f_{3,2}, \dots, f_{3,n}) \quad (4.46i)$$

Ambas ecuaciones (4.46a) y (4.46b) contienen al lado derecho de su igualdad, los términos que representan el voltaje y corriente de historia:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_{hist_m}^b &= \mathbf{f}_1 \left\{ \mathbf{v}_m^{b_1} - \mathbf{Z}_2 \mathbf{i}_m^{b_1} + \frac{\Delta x}{2} \boldsymbol{\Psi}_m^{b_1} \right\} + \\
 &\mathbf{f}_2 \left\{ \mathbf{v}_m^{b_2} - \mathbf{Z}_2 \mathbf{i}_m^{b_2} + \frac{\Delta x}{2} \boldsymbol{\Psi}_m^{b_2} \right\} + \\
 &\mathbf{f}_3 \left\{ \mathbf{v}_m^{b_3} - \mathbf{Z}_2 \mathbf{i}_m^{b_3} + \frac{\Delta x}{2} \boldsymbol{\Psi}_m^{b_3} \right\} + \frac{\Delta x}{2} \boldsymbol{\Psi}_m^{S'}
 \end{aligned} \tag{4.47a}$$

y

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_{hist_m}^a &= \mathbf{f}_1 \left\{ \mathbf{v}_m^{a_1} + \mathbf{Z}_2 \mathbf{i}_m^{a_1} - \frac{\Delta x}{2} \boldsymbol{\Psi}_m^{a_1} \right\} + \\
 &\mathbf{f}_2 \left\{ \mathbf{v}_m^{a_2} + \mathbf{Z}_2 \mathbf{i}_m^{a_2} - \frac{\Delta x}{2} \boldsymbol{\Psi}_m^{a_2} \right\} + \\
 &\mathbf{f}_3 \left\{ \mathbf{v}_m^{a_3} + \mathbf{Z}_2 \mathbf{i}_m^{a_3} - \frac{\Delta x}{2} \boldsymbol{\Psi}_m^{a_3} \right\} - \frac{\Delta x}{2} \boldsymbol{\Psi}_m^{L'}
 \end{aligned} \tag{4.47b}$$

Utilizando las definiciones de los términos de historia, se puede escribir:

$$\mathbf{v}_m^S - \mathbf{i}_m^S \mathbf{Z}_1^S = \mathbf{v}_{hist_m}^b \tag{4.48a}$$

y

$$\mathbf{v}_m^L - \mathbf{Z}_1^L \mathbf{i}_m^L = \mathbf{v}_{hist_m}^a \tag{4.48b}$$

Transformando al dominio de fase las ecuaciones (4.48a) y (4.48b), tenemos:

$$\mathbf{v}^S = \mathbf{Z}_1^S \mathbf{i}^S + \mathbf{v}_{hist}^b \tag{4.49a}$$

$$\mathbf{v}^L = \mathbf{Z}_1^L \mathbf{i}^L + \mathbf{v}_{hist}^a \tag{4.49b}$$

donde

$$\mathbf{i}^{L_a} = -\mathbf{i}^L \tag{4.49c}$$

$$\mathbf{v}^{L_a} = \mathbf{v}^L \tag{4.49d}$$

Las ecuaciones (4.49a) y (4.49b) representan los circuitos de Thevenin para ambas terminales de la línea de transmisión como se muestra en la Fig. 4.4

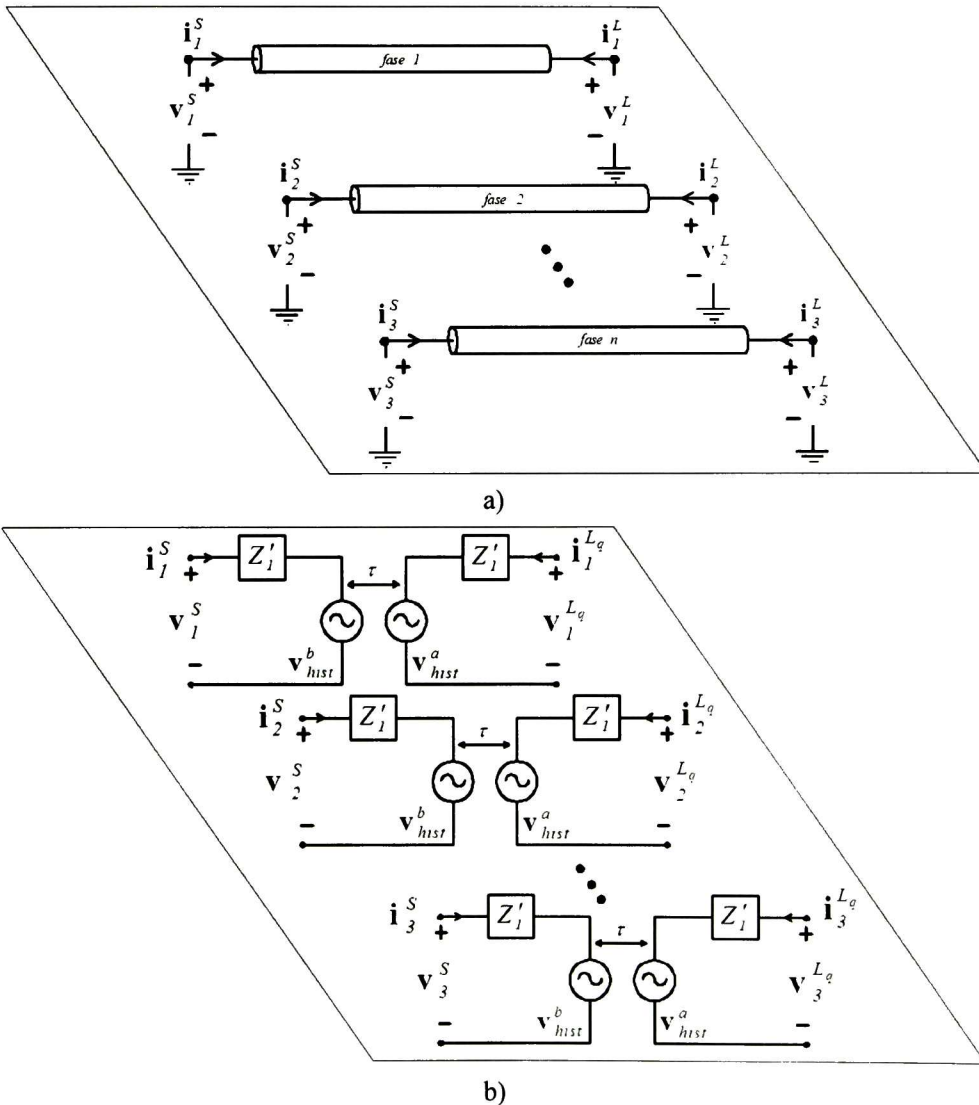


Fig. 4.4 Línea de transmisión multiconductora, a) Circuito equivalente, b) Representación circuital de Thevenin.

Utilizando las ecuaciones (4.49a) y (4.49b) también se puede obtener:

$$\mathbf{i}^S = \mathbf{Y}'_l \mathbf{v}^S - \mathbf{i}_{hist}^b \quad (4.50a)$$

$$\mathbf{i}^{Lq} = \mathbf{Y}'_l \mathbf{v}^{Lq} - \mathbf{i}_{hist}^a \quad (4.50b)$$

donde

$$\mathbf{Y}'_l = (\mathbf{Z}'_l)^{-1} \quad (4.50c)$$

$$\mathbf{i}^b_{hist} = (\mathbf{Z}'_l)^{-1} \mathbf{v}^b_{hist} \quad (4.50d)$$

y

$$\mathbf{i}^a_{hist} = (\mathbf{Z}'_l)^{-1} \mathbf{v}^a_{hist} \quad (4.50e)$$

Las ecuaciones (4.50a) y (4.50b) representan los modelos de Norton para ambas terminales de la línea de transmisión. Esto se muestra en la Fig. 4.5. Las terminales de envío y recepción de la línea de transmisión topológicamente no están conectadas, las condiciones en las terminales dependen únicamente de las condiciones de frontera y de los valores dados por los términos de historia.

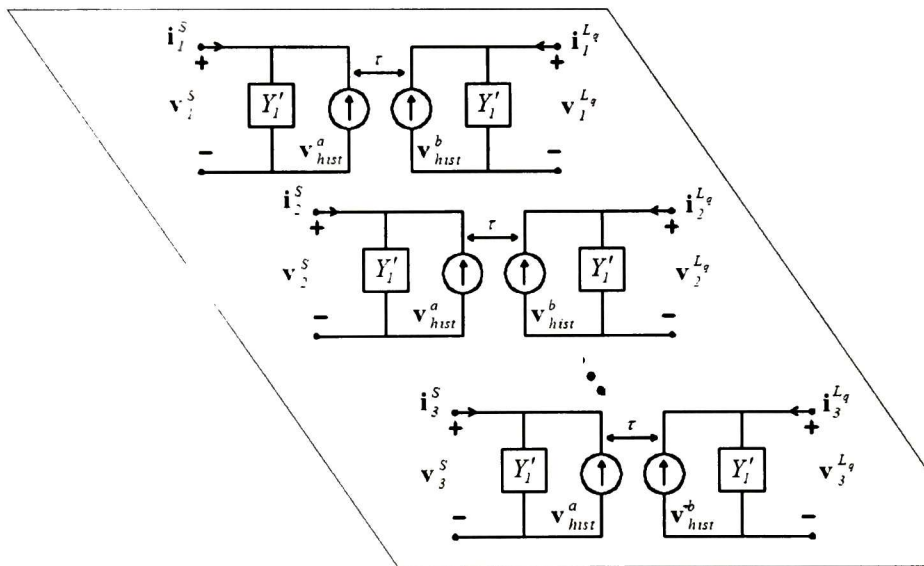


Fig. 4.5 Circuito equivalente de Norton para una línea de transmisión multiconductora.



## 4.7 Ejemplos de Aplicación

### 4.7.1 Primer Ejemplo de Aplicación para Línea de Transmisión Multiconductora

Como primer ejemplo de aplicación, considere la energización de una línea de transmisión de 203 Km de longitud como se muestra en la Fig. 4.6. La línea consta de tres fases con dos subconductores Bluejay ACSR en haz separados 450 mm. La altura promedio y la distancia de separación horizontal entre los centros de haz son de 40 m y 8.8 m, respectivamente. La resistividad del terreno es de  $100 \Omega m$ . Los tres polos del interruptor cierran secuencialmente, los tiempos de cierre son de 3.0, 5.0 y 8.0 ms para las fases A, B (centro) y C, respectivamente. La resistencia del interruptor ( $r_{sw}$ ) tiene un valor de  $0.1 \Omega$ , la resistencia de la fuente es  $Z_f=0.001 \Omega$ , mientras que la terminal de recepción de la línea de transmisión se encuentra abierta. Además, se simuló un cierre simultáneo con tiempo de cierre de  $t=3$  ms para este circuito.

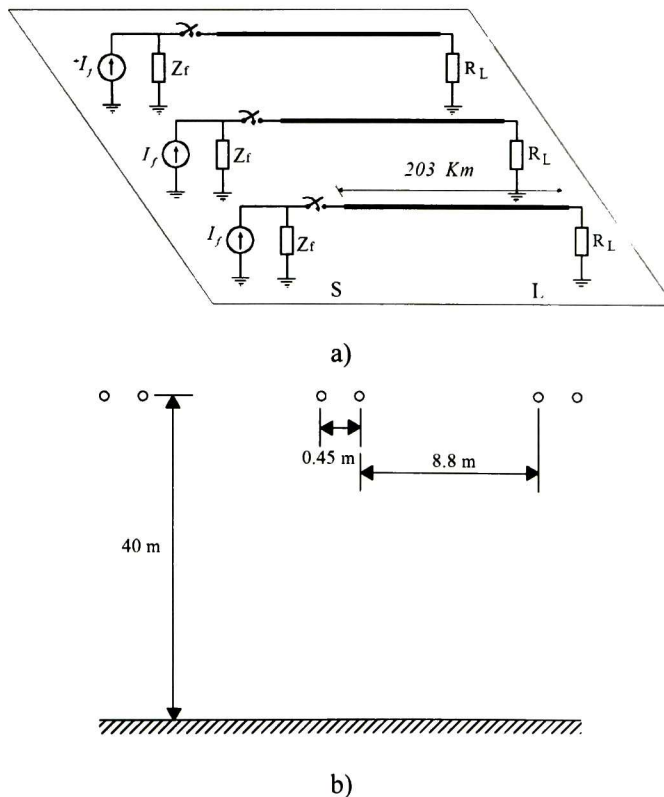
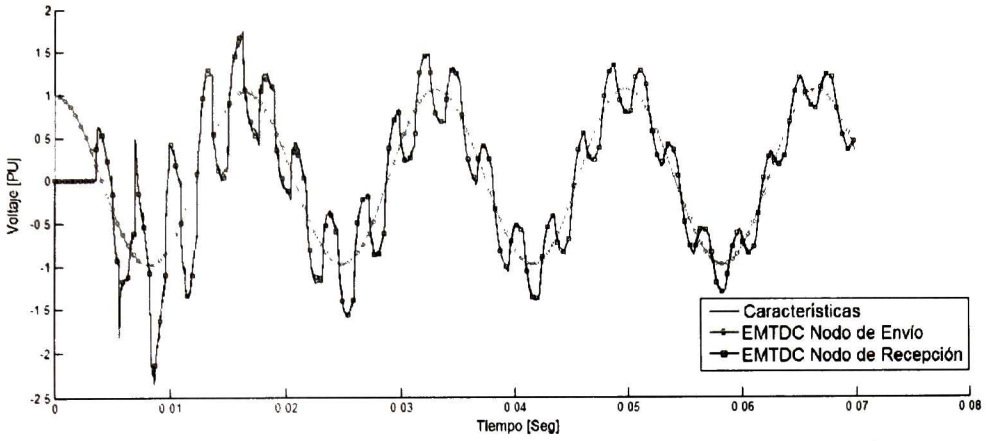
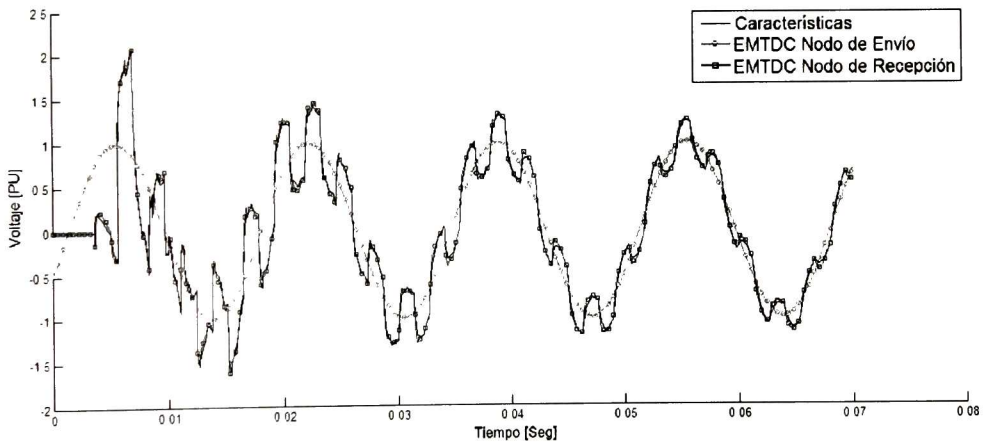


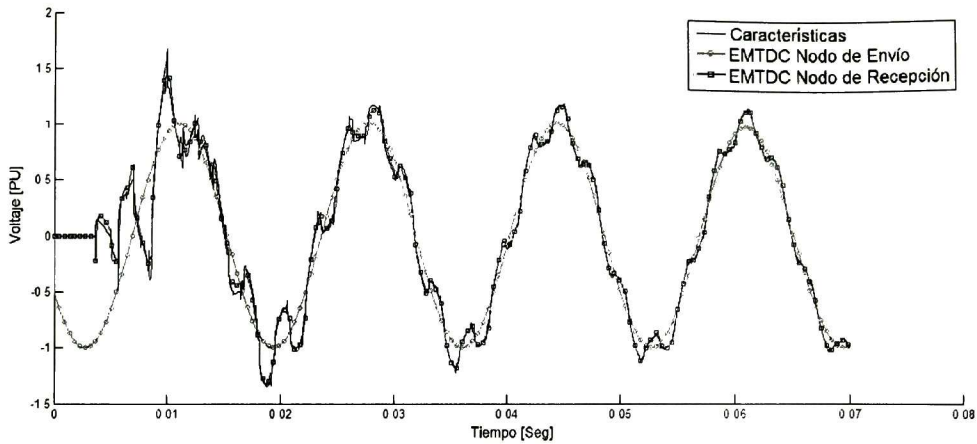
Fig. 4.6 Ejemplo de aplicación para línea de transmisión multiconductora, a) Circuito equivalente, b) Configuración de la línea de transmisión.



**Fig. 4.7** Formas de onda en la terminal de envío y recepción de la línea de transmisión de la fase "a", con cierre secuencial.

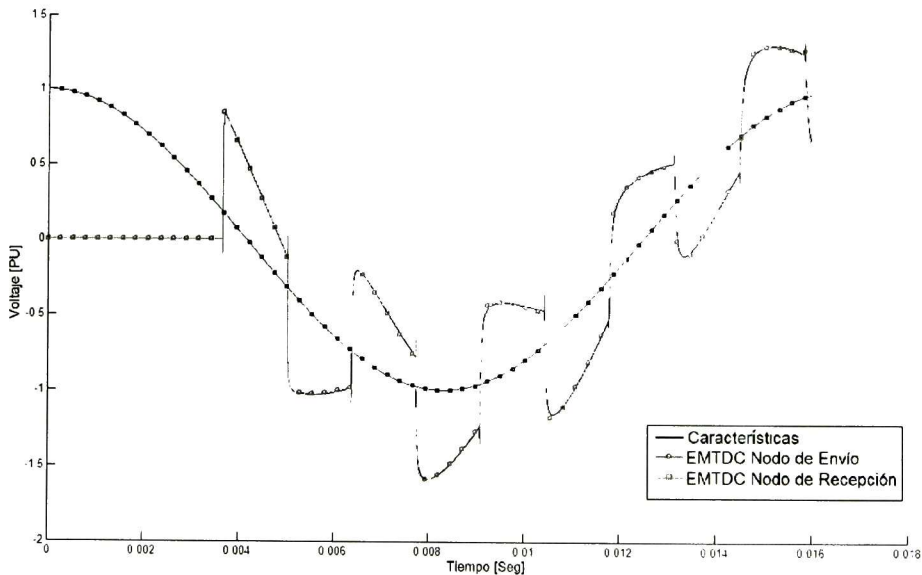


**Fig. 4.8** Formas de onda en la terminal de envío y recepción de la línea de transmisión de la fase "b", con cierre secuencial.

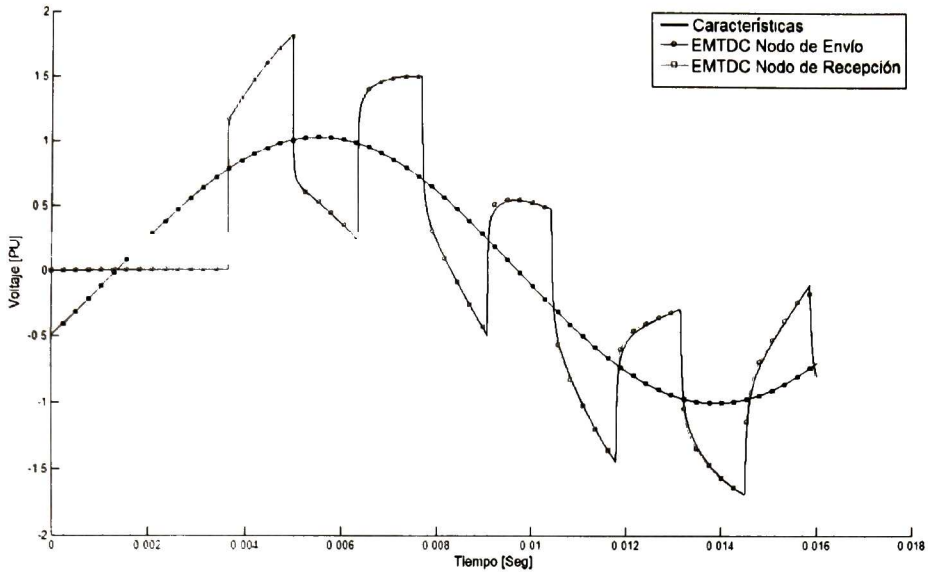


**Fig. 4.9** Formas de onda en la terminal de envío y recepción de la línea de transmisión de la fase “c” con cierre secuencial.

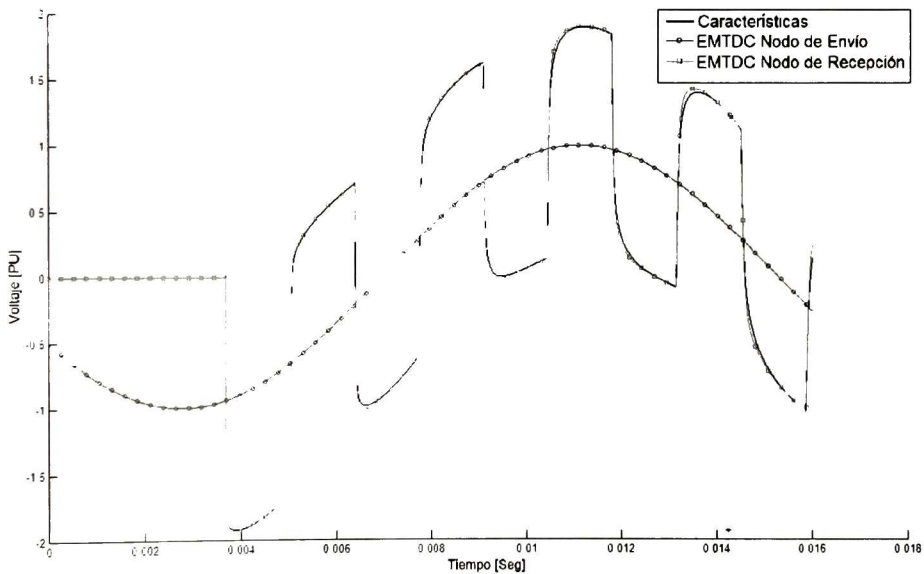
Como se puede observar en la Fig. 4.7, Fig. 4.8 y Fig. 4.9, la forma de onda del voltaje obtenido con el modelo propuesto en este capítulo y con el EMTDC, son prácticamente iguales tanto en el nodo de envío como en el nodo de recepción en la línea de transmisión, para cada una de las fases con cierre secuencial.



**Fig. 4.10** Formas de onda en la terminal de envío y recepción de la línea de transmisión de la fase “a”, con cierre simultáneo en  $t=3$  [ms].



**Fig. 4.11** Formas de onda en la terminal de envío y recepción de la línea de transmisión de la fase “b”, con cierre simultáneo en  $t=3$  [ms].



**Fig. 4.12** Formas de onda en la terminal de envío y recepción de la línea de transmisión de la fase “c”, con cierre simultáneo en  $t=3$  [ms].

Al igual que en el caso anterior, en la Fig. 4.10, Fig. 4.11 y Fig. 4.12, se puede observar que la forma de onda del voltaje obtenido con el modelo propuesto en este capítulo y con el EMTDC, son prácticamente iguales tanto en el nodo de envío como en el nodo de recepción en la línea de transmisión, para cada una de las fases con cierre simultáneo en  $t=3$  [ms].

#### 4.7.2 Segundo Ejemplo de Aplicación para Línea de Transmisión Multiconductora

Como segundo ejemplo de aplicación, considere la energización del circuito 1 de una línea de transmisión de 100 Km de longitud, de forma paralela se encuentra el circuito 2 de otra línea de transmisión de 100 Km de longitud como se muestra en la Fig. 4.13. Las líneas constan de un conductor por fase tipo Eagle 557 ACSR. El radio de cada conductor de 1.211 cm; considerando la resistividad del Aluminio en  $2.825 \times 10^{-8} \Omega \cdot m$ . La altura promedio y la distancia de separación horizontal entre los conductores del circuito 1 son de 12 m y 2 m, respectivamente; y para el circuito 2 la altura promedio y la distancia de separación horizontal entre los conductores son de 15 m y 2 m, respectivamente. La resistividad del terreno es de  $100 \Omega \cdot m$ . Los tres polos del interruptor cierran de forma simultánea. La resistencia del interruptor ( $r_{sw}$ ) tiene un valor de  $0.1 \Omega$ , la resistencia de la fuente es  $R_f = 0.001 \Omega$ , mientras que las terminales de recepción de ambos circuitos se encuentran abiertas, la resistencia a tierra en la terminal de envío del circuito 2 es  $1 \times 10^{-6} \Omega$ . Para identificar de las fase, les llamaremos A, B y C a las fases del circuito 1, mientras que D, E y F a las fases del circuito 2. Se alimenta el circuito 1 con una fuente cosenoidal a una frecuencia fundamental de 60 [Hz], un voltaje con valor unitario en sus terminales [PU].

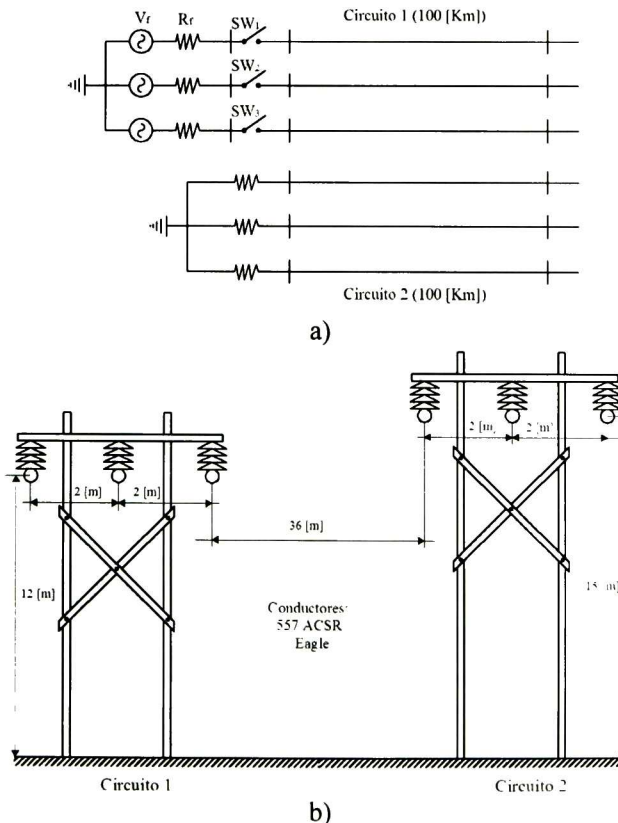
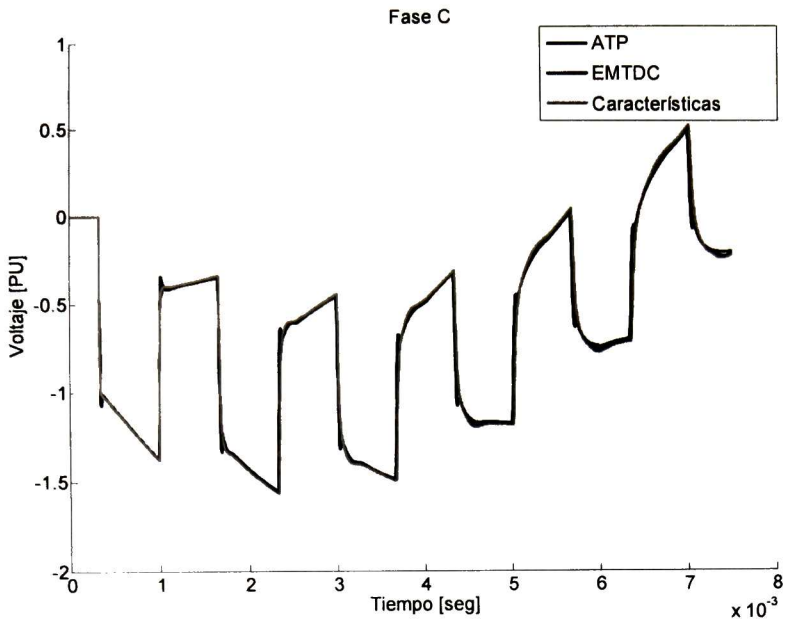
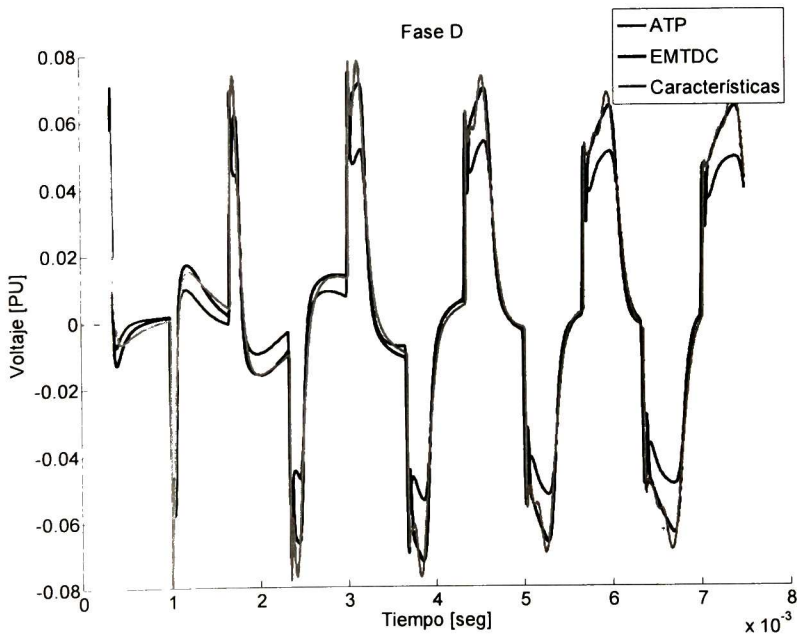


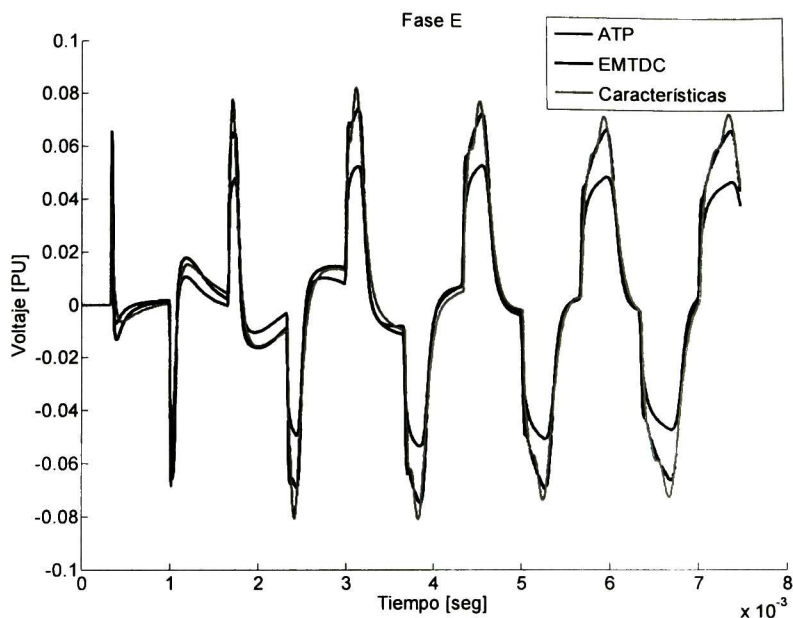
Fig. 4.13 a) Circuito para el ejemplo de voltajes inducidos, b) Configuración de la línea de transmisión.



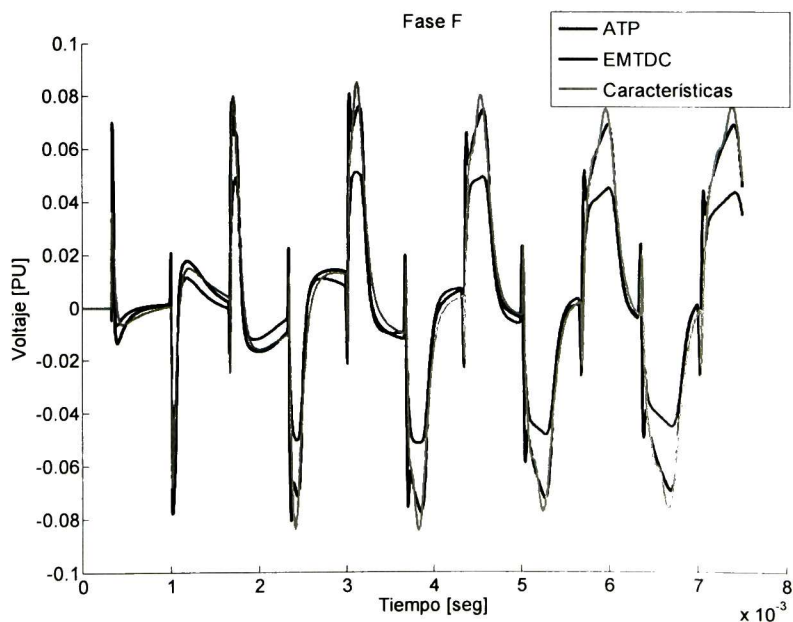
**Fig. 4.14** Forma de onda del voltaje en la fase “C” de la terminal receptora para un cierre simultáneo en  $t=0$  [ms].



**Fig. 4.15** Forma de onda del voltaje inducido en la fase “D” de la terminal receptora para un cierre simultáneo en  $t=0$  [ms].



**Fig. 4.16** Forma de onda del voltaje inducido en la fase “*E*” de la terminal receptora para un cierre simultáneo en  $t=0$  [ms].



**Fig. 4.17** Forma de onda del voltaje inducido en la fase “*F*” de la terminal receptora para un cierre simultáneo en  $t=0$  [ms].

Tal y como se puede observar en la Fig. 4.14, la forma de onda del voltaje obtenido con el modelo propuesto en este capítulo y con los programas ATP y EMTDC, son prácticamente las mismas en el nodo de recepción en la línea de transmisión para la fase C, con cierre simultáneo en  $t=0$  [ms]. Ahora bien, de acuerdo con los resultados mostrados en la Fig. 4.15, Fig. 4.16 y Fig. 4.17, es posible observar que existe una diferencia considerable en la magnitud del voltaje inducido que se obtuvo con el programa ATP con relación a la magnitud del voltaje inducido obtenido con el modelo propuesto en este capítulo y con el programa EMTDC; mientras que los resultados obtenidos con el modelo propuesto en este capítulo y con el programa EMTDC se observa una pequeña diferencia, esto se debe principalmente a los parámetros de ajuste en el programa EMTDC, particularmente en los factores de mínimos cuadrados ponderados, ya que el algoritmo en el programa EMTDC para la curva de ajuste de la línea de transmisión se basa en la técnica de mínimos cuadrados ponderados.

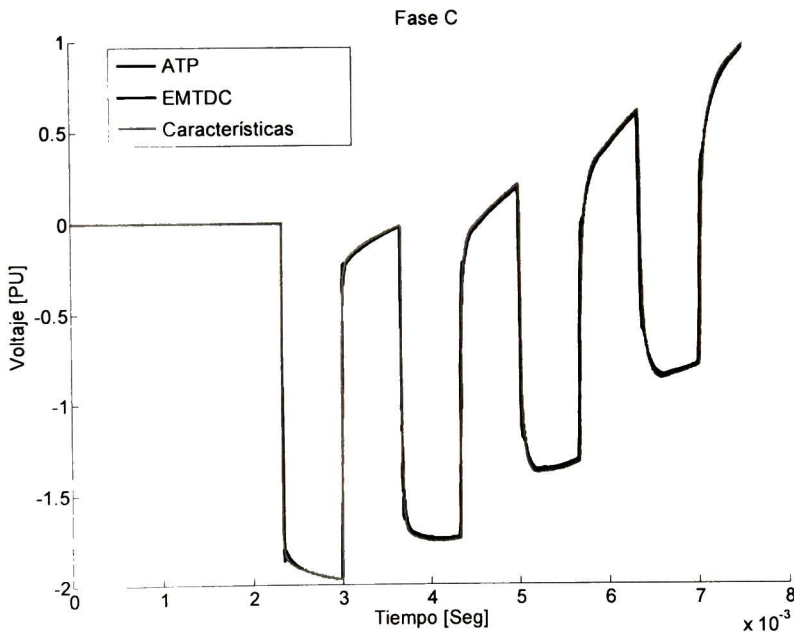
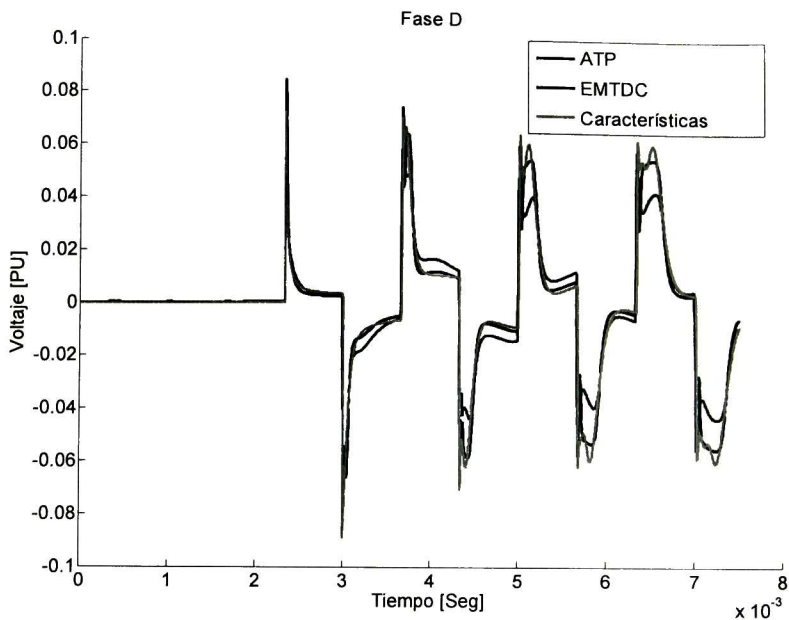
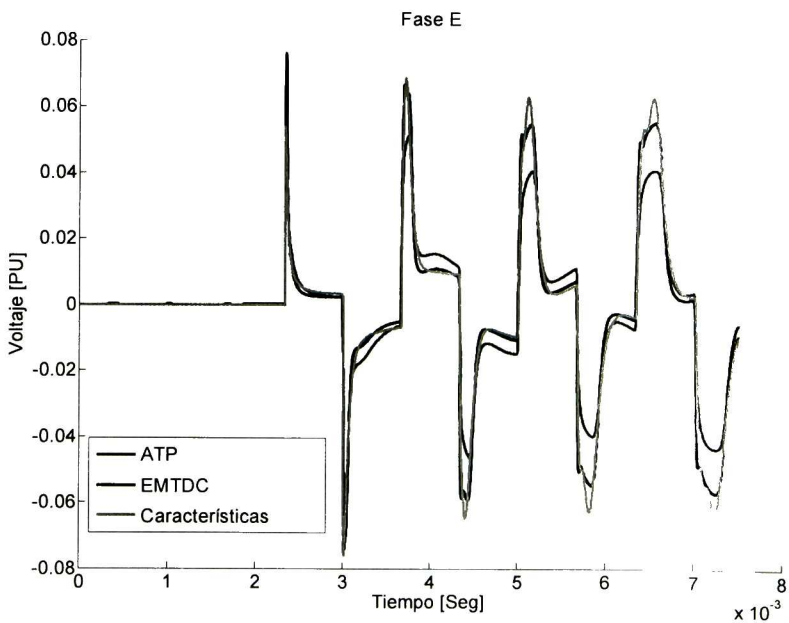


Fig. 4.18 Forma de onda del voltaje en la fase "C" de la terminal receptora para un cierre simultáneo en  $t=2$  [ms].

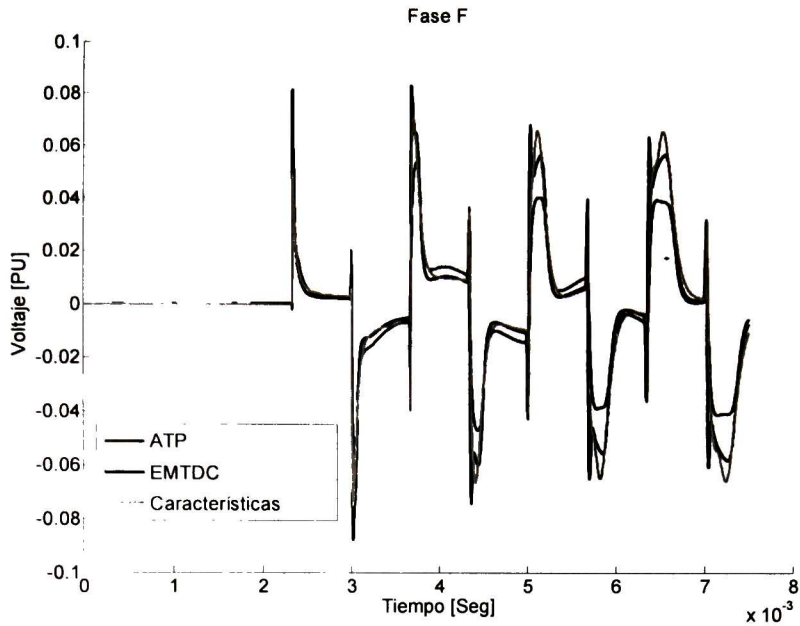




**Fig. 4.19** Forma de onda del voltaje inducido en la fase “*D*” de la terminal receptora para un cierre simultáneo en  $t=2$  [ms].



**Fig. 4.20** Forma de onda del voltaje inducido en la fase “*E*” de la terminal receptora para un cierre simultáneo en  $t=2$  [ms].



**Fig. 4.21** Forma de onda del voltaje inducido en la fase “*F*” de la terminal receptora para un cierre simultáneo en  $t=2$  [ms].

Al igual que en el caso anterior, se presentan las mismas observaciones en los resultados de la Fig. 4.18, así como también en los resultados de la Fig. 4.19, Fig. 4.20 y Fig. 4.21, solo que en este ejemplo se realizó un cierre simultáneo en  $t=2$  [ms].

### 4.7.3 Tercer Ejemplo de Aplicación para Línea de Transmisión Multiconductora

Considere el mismo sistema de transmisión del segundo ejemplo, sólo se le agrega al circuito 2 una fuente cosenoidal a una frecuencia fundamental de 60 [Hz] y de valor unitario en sus terminales [PU] como se muestra en la Fig. 4.22, la resistencia de esta fuente es de  $1 \times 10^{-6} \text{ } [\Omega]$ . Se simuló con un cierre simultáneo en  $t=3 \text{ ms}$ .

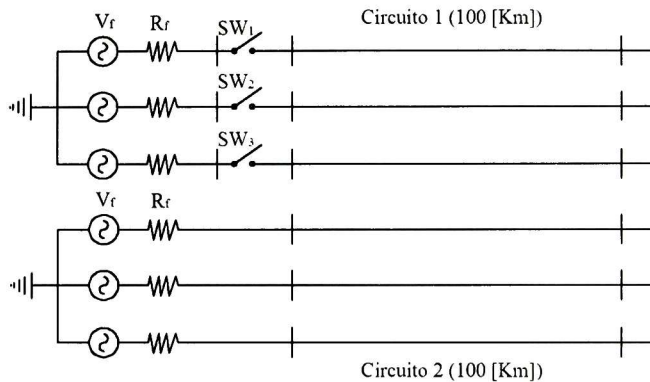


Fig. 4.22 Circuitos de las líneas de transmisión multiconductora para el tercer ejemplo de aplicación.

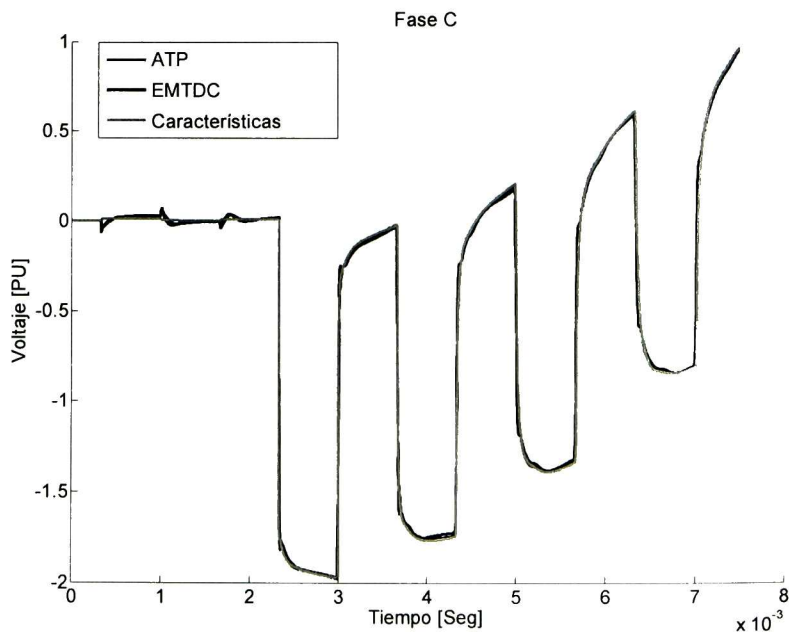
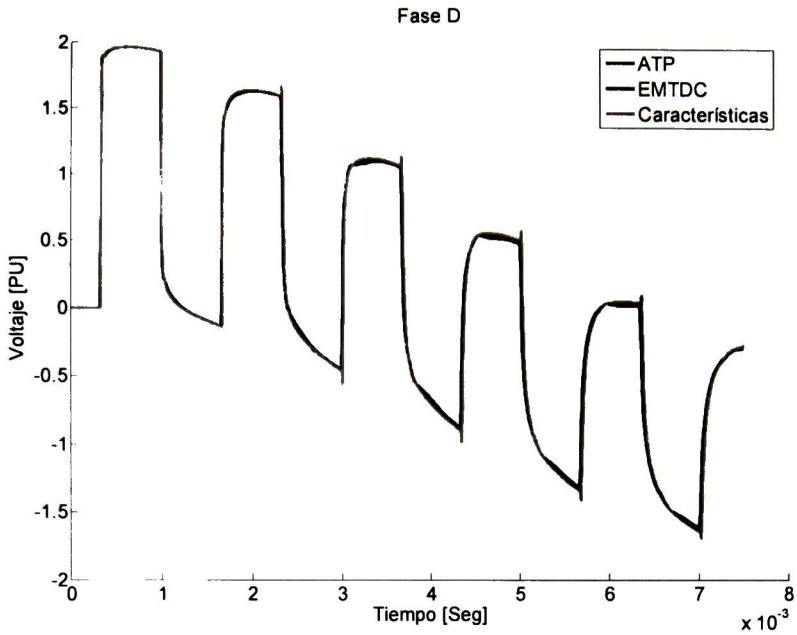
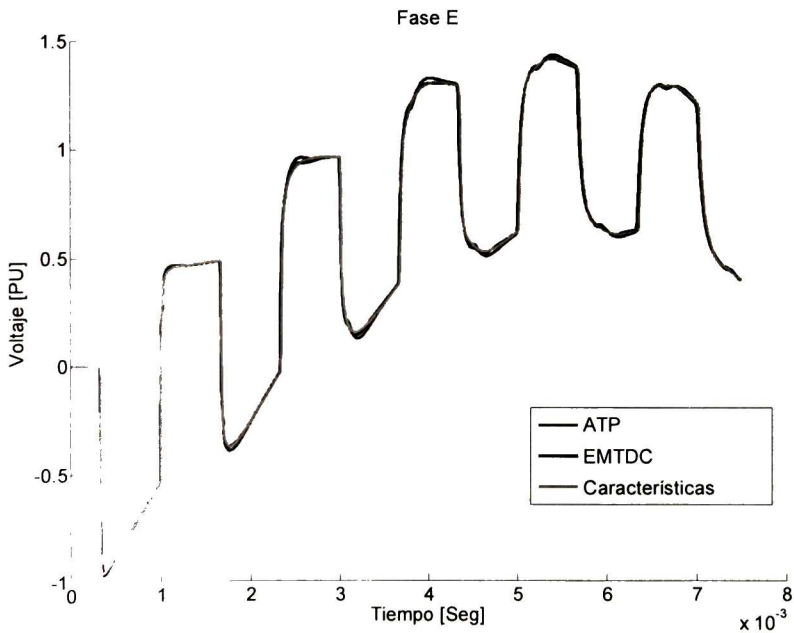


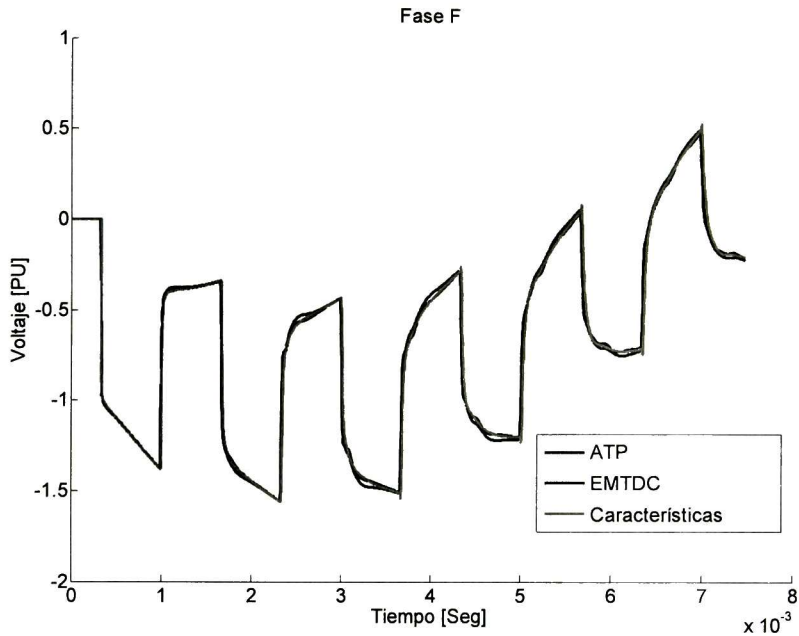
Fig. 4.23 Forma de onda del voltaje en la fase "C" de la terminal receptora para un cierre simultáneo en  $t=2 \text{ ms}$ .



**Fig. 4.24** Forma de onda del voltaje en la fase “*D*” de la terminal receptora para un cierre simultáneo en  $t=2$  [ms].



**Fig. 4.25** Forma de onda del voltaje en la fase “*E*” de la terminal receptora para un cierre simultáneo en  $t=2$  [ms].



**Fig. 4.26** Forma de onda del voltaje en la fase “*F*” de la terminal receptora para un cierre simultáneo en  $t=2$  [ms].

Como se puede observar en la Fig. 4.23, Fig. 4.24, Fig. 4.25 y Fig. 4.26, la forma de onda del voltaje obtenido con el modelo propuesto en este capítulo y con los programas ATP y EMTDC, son prácticamente iguales en el nodo de recepción en la línea de transmisión, con un cierre simultáneo en  $t=2$  [ms].

#### 4.7.4 Cuarto Ejemplo de Aplicación para Línea de Transmisión Multiconductora

Considere el mismo sistema de transmisión del tercer ejemplo, con la única diferencia en el tiempo de cierre simultáneo, el cual se lleva a cabo en  $t=0$  [ms].

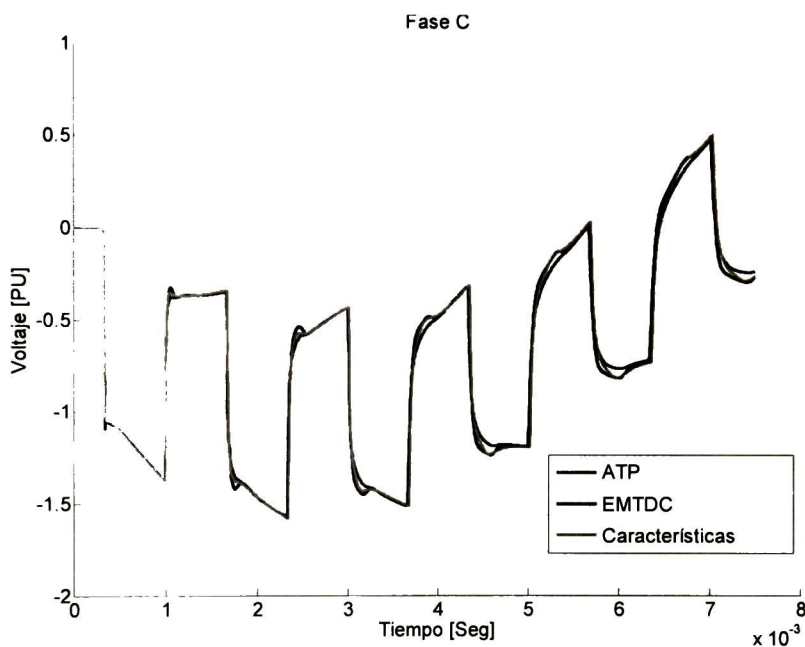


Fig. 4.27 Forma de onda del voltaje en la fase "C" de la terminal receptora para un cierre simultáneo en  $t=0$  [ms].

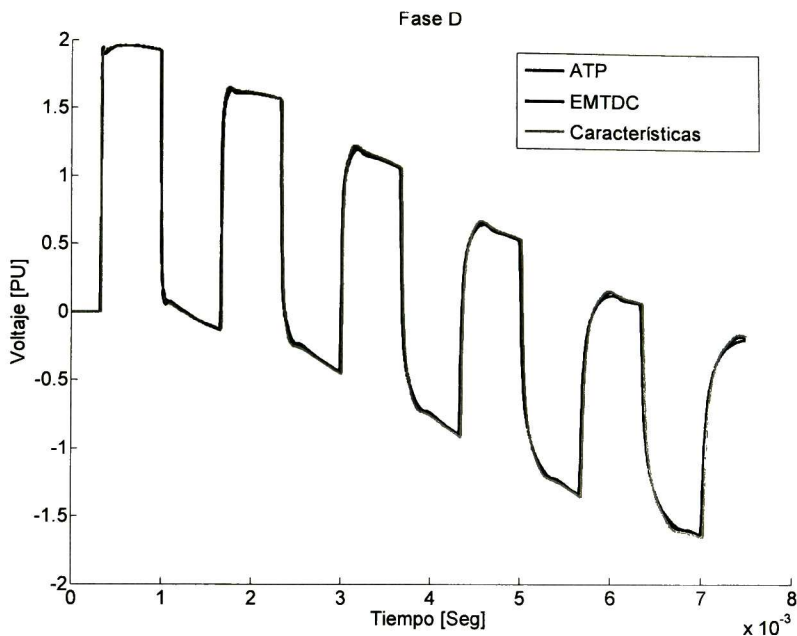


Fig. 4.28 Forma de onda del voltaje en la fase “D” de la terminal receptora para un cierre simultáneo en  $t=0$  [ms].

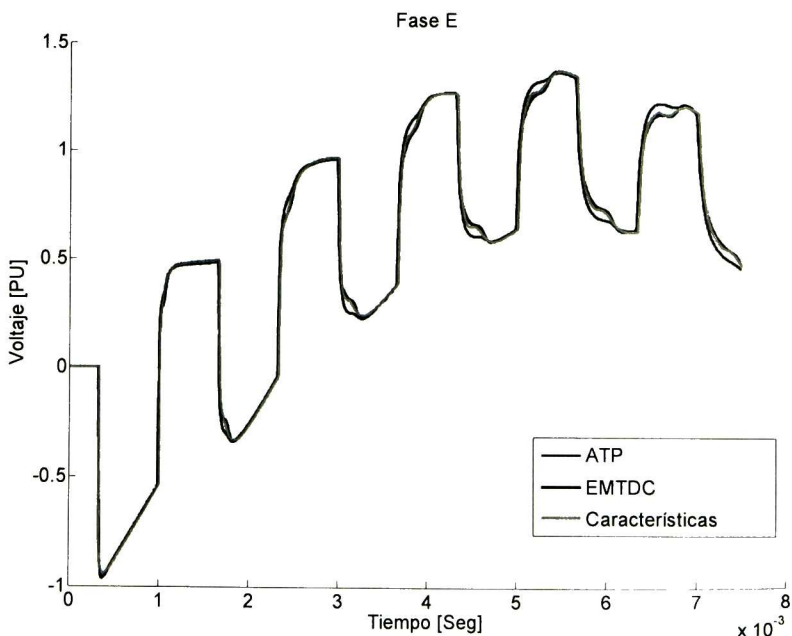
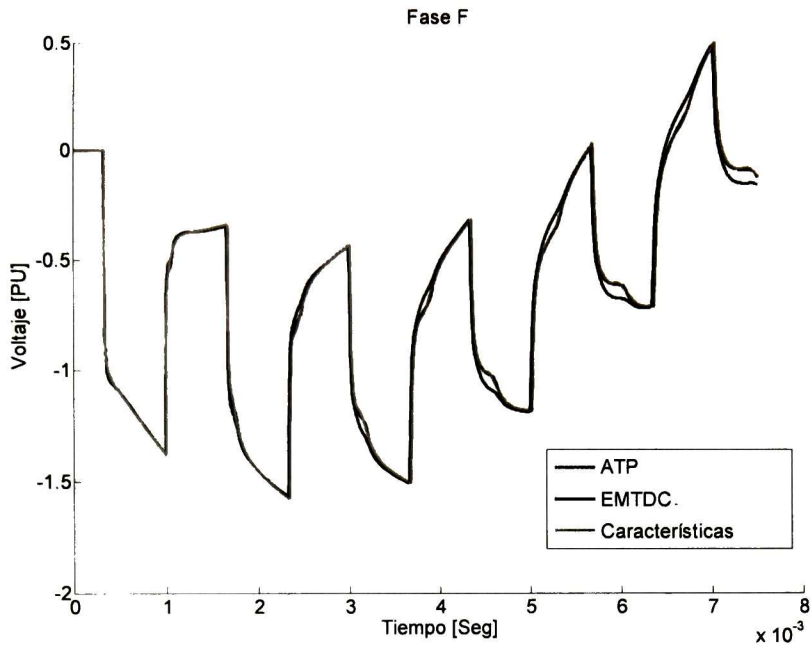


Fig. 4.29 Forma de onda del voltaje en la fase “E” de la terminal receptora para un cierre simultáneo en  $t=0$  [ms].



**Fig. 4.30** Forma de onda del voltaje en la fase “*F*” de la terminal receptora para un cierre simultáneo en  $t=0$  [ms].

Tal como se puede observar en la Fig. 4.27, Fig. 4.28, Fig. 4.29 y Fig. 4.30, la forma de onda del voltaje obtenido con el modelo propuesto en este capítulo y con los programas ATP y EMTDC, son prácticamente las mismas en el nodo de recepción en la línea de transmisión, con un cierre simultáneo en  $t=0$  [ms].





# Capítulo 5

## Conclusiones y Recomendaciones

### 5.1 Conclusiones

En esta tesis se ha presentado el desarrollo de un nuevo modelo de líneas de transmisión multiconductoras con parámetros eléctricos dependientes de la frecuencia para el estudio de transitorios electromagnéticos en el dominio del tiempo. El modelo se basa en el Método de las Características de la teoría de Ecuaciones Diferenciales Parciales. Este Método representa una técnica muy completa para modelar varios fenómenos en líneas de transmisión y ya ha probado su eficacia en el caso líneas de transmisión no uniformes, líneas excitadas con campos externos y líneas con efecto corona [61, 65, 71].

El modelo que se propone en este trabajo, a diferencia de otros modelos que emplean el método de las Características, no requiere de la discretización espacial para el caso de líneas de transmisión uniformes. Además, para el caso de líneas de transmisión aéreas este nuevo modelo requiere la aproximación de sólo un parámetro eléctrico por medio de funciones racionales: la Resistencia Transitoria.

A manera de resumen, el modelo propuesto presentó algunas propiedades muy interesantes:

1. La síntesis de la función de resistencia transitoria fue relativamente simple, ya que para el caso de línea de transmisión es una función suave. Esto permitió que las aproximaciones racionales de los elementos de  $R'(s)$  se realizaran compartiendo el mismo conjunto de polos [19].

2. Únicamente se calculó una convolución por cada punto en los extremos de la línea de transmisión y por cada paso de tiempo  $\Delta t$ .

3. Para las fronteras de la línea de transmisión, se trabajó con un modelo circuital de Norton, en el cual, topológicamente las terminales de la línea no están conectadas entre sí, las condiciones en los extremos dependen

únicamente de las condiciones de frontera y de los valores de corriente dados por los términos de historia.

4. La solución para líneas de transmisión polifásicas se llevó a cabo por medio de parámetros modales [69] desacoplando los conductores y mejorando el tiempo de cálculo mientras que en [19], [22], [24] y [25] se discretizan directamente las ecuaciones utilizando las matrices de impedancia o admitancia completas.

## **5.2 Trabajos Futuros**

Como complemento para el nuevo modelo presentado en esta tesis, a continuación se proporcionan recomendaciones para trabajos futuros:

- Añadir la conductancia transitoria para realizar el análisis de otros tipos de elementos modelados como líneas de transmisión, tales como transformadores y máquinas eléctricas.
- Probar el modelo para el caso de cables de transmisión de energía.
- Incorporar el modelo en simuladores de transitorios en tiempo real.

# Referencias

- [1] H. W. Dommel, EMTP THEORY BOOK, 2nd ed., Microtran Power System Analysis Corporation, Vancouver, B.C., Canada, pp. 4-94 to 4-96, 1992.
- [2] L.F. Woodruff, "*Principles of electric power transmission*". 2<sup>nd</sup> Edition. New York: Wiley, 1938, pp. 105-106.
- [3] P.C. Magnusson, "*Travelling waves on multi-conductors open-wire lines-A Numerical Survey of the effects of frequency dependence of modal composition*". IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, vol. PAS-92, pp. 999-1008, May/June 1973.
- [4] R.G. Wasley and S. Selvavinayagamoorthy, "*Approximate frequency-response values for transmission-line transient analysis*" Proc. IEE, vol. 121, no. 4, pp. 281-286, April 1974.
- [5] R. Radulet, A. Timotin, A. Tugulea, A. Nica, "*The transient response of the electric lines based on the equations with transient line-parameters*", Rev. Roum. Sci. Techn., Vol, 23, No. 1, pp. 3-19, 1978.
- [6] C. Gary, D. Cristescu, G. Dragan, "*Distortion and attenuation of travelling waves caused by transient corona*", CIGRE report, Study committee 33: Overvoltages and insulation coordination, 1989.
- [7] A. Deri, G. Tevan, A. Semlyen, and A. Castanheira, "*The Complex Ground Return Plane: A Simplified Model for Homogeneous and Multi-layer Earth Return*", IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, vol. PAS-100, no. 8, pp. 3686-3693, August 1981.
- [8] M. E. Van Valkenburg, "*Introduction to Modern Network Synthesis*", John Wiley & Sons, Inc., 1960.
- [9] B. Gustavsen and A. Semlyen, "*Rational approximation of frequency domain responses by Vector Fitting*", IEEE Trans. PWRD, vol. 14, no. 3, July 1999, pp. 1052-1061.
- [10] A. Ramirez, J.L. Naredo and P. Moreno, "*Full Frequency-Dependent Line Model for Electromagnetic Transient Simulation Including Lumped and Distributed Sources*", IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 20, no. 1, pp. 292-299, January 2005.

- [11] A. Semlyen, A. Dabuleanu, “*Fast and Accurate Switching Transient Calculations on Transmission Lines with ground return using recursive convolutions*”, IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-94, pp. 561-571, March/April 1975.
- [12] J.L. Naredo, A.C. Soudack, J.R. Martí, “*Simulation of Transients on Transmission Lines with Corona via the Method of Characteristics*”, IEE Proc. Gener. Transm. Distrib., vol. 142, no.1, pp. 81-87, January 1995.
- [13] G. B. Whitham, “*Linear and Nonlinear Waves*”, John Wiley & Sons, U.S.A. 1974.
- [14] Richard Haberman, “*Elementary Applied Partial Differential Equations*”, Prentice-Hall, Inc. 1998.
- [15] F. H. Branin, Jr., “*Transient Analysis of Lossless Transmission Lines*”, Proc. IEEE Lett., Vol. 55, pp 2012-2013, Nov. 1967.
- [16] H. W. Dommel, “*Digital Computer Solution of Electromagnetic Transients in Single an Multiphase Networks*”, IEEE 68 TP 657-PWR, Summer Power Meeting, Chicago, 1968.
- [17] A. Budner, “*Introduction of Frequency Dependent Line Parameters into an Electromagnetic Transients Program*”, IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, vol. PAS-89, pp. 88-97, January 1970.
- [18] J. K. Snelson, “*Propagation of Travelling Waves on Transmission Lines-Frequency Dependent Parameters*”, IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, vol. PAS-91, pp. 85-91, January/February 1972.
- [19] J. R. Martí, “*Accurate Modelling of Frequency-Dependent Transmission Lines in Electromagnetic Transient Simulations*”, IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, vol. PAS-101, no. 1, pp. 147-157, January 1982.
- [20] L. Martí, “*Simulation of Transients in Underground Cables with Frequency-Dependent Modal Transformation Matrices*”, IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 3, no. 3, pp. 1099- 1110, July 1988.
- [21] F. Castellanos and J. R. Martí, “*Full Frequency-Dependent Phase-Domain Transmission Line Model*”, IEEE Trans. on Power Systems, vol. 12, no. 3, pp. 1331-1339, August 1997.
- [22] H. V. Nguyen, H. W. Dommel and J. R. Martí, “*Direct Phase-Domain Modelling of Frequency-Dependent Overhead Transmission Lines*”, IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 12, no. 3, pp. 1335-1342, July 1997.
- [23] B. Gustavsen and A. Semlyen, “*Combined Phase Domain and Modal Domain Calculation of Transmission Line Transients Based on Vector Fitting*”, IEEE Trans. Power Delivery, vol. 13, no. 2, pp. 596-604, April 1998

- [24] A. Morched, B. Gustavsen and M. Tartibi, "*A Universal Model for Accurate Calculation of Electromagnetic Transients on Overhead Lines and Underground Cables*", IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 14, no. 3, pp. 1032-1037, July 1999.
- [25] T. Noda, N. Nagaoka and A. Ametani, "*Phase Domain Modeling of Frequency-Dependent Transmission Lines by Means of an ARMA Model*", IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 11, no. 1, pp. 401-411, January 1996.
- [26] L.M. Wedepohl, "*Theory of Natural Modes in Multiconductor Transmission Lines*", Lecture Notes for Course ELEC-552, The University of British Columbia, 1982.
- [27] F. Castellanos and J. R. Martí, "Phase Domain Multiphase Transmission Line Models", Proc. of the International Conference on Power Systems Transients, pp. 17-22, Lisbon, Portugal, September 1995.
- [28] F. J. Marcano, "Modeling of Transmission Lines Using Idempotent Decomposition", MaSc. Thesis, Department of Electrical Engineering, The University of British Columbia, Vancouver, Canada, August 1996.
- [29] F.J. Marcano and J. R. Martí, "Idempotent Line Model: Case Studies", Proc. of the International Conference on Power Systems Transients, pp. ,Seattle, Washington, une 1997.
- [30] J.R. Carson, "*Wave propagation in overhead wires with ground return*", Bell Syst. Tech., J., Vol. 5, pp.539-554, 1926.
- [31] F.Pollaczek, "*Über das Feld einer unendlich langen wechsel stromdurchflossenen Einfachleitung*", E.N.T., Band 3 (Heft 9), pp.339-360,1926.
- [32] S.A. Schelkunoff, "*The electromagnetic theory of coaxial transmission line and cylindrical shields*", Bell Syst. Tech. J., Vol. 13, pp. 532-579, 1934.
- [33] A. Ametani, "*A general formulation of impedance and admittance of cables*", IEEE Trans., Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-99 (3), pp. 902-910, 1980.
- [34] L.M. Wedepohl and S.E.T. Mohamed, "*Multiconductor transmission lines: Theory of natural modes and Fourier integrals applied to transient analysis*", Proc. IEE, Vol. 116, pp. 1553-1563,1969.
- [35] W.S. Meyer and H.W. Dommel, "*Numerical modeling of frequency dependent transmission parameters in an electromagnetic transient program*", IEEE Trans., Power Apparatus and Systems, Val. PAS-93, pp. 1401-1409, 1974.
- [36] A. Ametani, "*A highly efficient method for calculating transmission line transients*", IEEE Trans., Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-95 (51), pp. 1545-1549, 1976.

- [37] W.D. Humpage, K.P. Wong, and T.T. Nguyen, "*Z-transform electromagnetic transient analysis in power systems*", IEE Proc., Vol. 127, Pt. C, No. 6, pp. 370-378, 1980.
- [38] A. Semlyen, "*Contributions to the theory of calculation of electromagnetic transients on transmission line with frequency dependent parameters*", IEEE Trans., Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-100 (2), pp. 848-856, 1981.
- [39] J.F. Hauer, "*State-space modeling of transmission line dynamics via nonlinear optimization*", IEEE Trans., Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-100(12), pp. 4918-4925, 1981.
- [40] A. Ametani, "*Refraction coefficient method for switching-surge calculations on untransposed transmission lines (Accurate and approximate inclusion of frequency dependency)*", IEEE PES Summer Meeting, C 73-444-7, 1973.
- [41] H. Nakanishi, and A. Ametani, "*Transient calculation of a transmission line using superposition law*", IEE Proc., Vol. 133, Pt. C, No. 5, pp. 263-269, 1986.
- [42] G. Angelidis and A. Semlyen, "*Direct Phase-Domain Calculation of Transmission Line Transients Using Two-Sided Recursions*", IEEE PES Summer Meeting, 94 SM 465-5 PWRD, 1994.
- [43] T. Noda and N. Nagaoka, "*A time domain surge calculation method with frequency-dependent modal transformation matrices*", IEE Japan, Elec. Power Syst. Tech. Record, PE-93-153, 1993.
- [44] T. Noda and N. Nagaoka, "*Development of ARMA models for a transient calculation using linearized least-squares method*", Trans. IEE Japan, Vol. 114-B, No. 4, 1994.
- [45] T. Noda, T. Sawada, K. Fujii and N. Nagaoka, "*ARMA models for transient calculations and their identification (identification of coefficients and order)*", IEE Japan, Annual Meeting Record, Paper No. 1373, 1994.
- [46] J.S. Lim and AV. Oppenheim, "*Advanced Topics in Signal Processing*", Prentice-Hall, 1988.
- [47] E.I. Jury, "*Theory and Application of the z-Transform Method*", Wiley, New York, 1964.
- [48] A. Ametani, T. Ono and A. Honga, "*Surge propagation on Japanese 500 kV untransposed transmission line*", Proc. IEE, Vol. 121, No. 2, 1974.
- [49] A. Ametani, E. Osaki and Y. Honaga, "*Surge characteristics on an untransposed vertical line*", Trans. IEE Japan, Vol. 103-B, pp. 117-124, 1983.
- [50] N. Nagaoka, M. Yamamoto and A. Ametani, "*Surge propagation characteristics of a POF cable*", Trans. IEE Japan, Vol. 105-B, pp.645-652, 1985.

- [51] M. Nagaoka and A. Ametani, "*A development of a generalized frequency-domain transient program-FTP*", IEEE Trans., Power Delivery, Vol. PWRD-3(4), pp. 1996-2004, 1988.
- [52] T. Yahagi, "*Theory of Digital Signal Processing*", vol. 1-3, Corona publishing, 1986.
- [53] J. R. Marti, H. W. Dommel, L. Marti and V. Brandwajn, "*Approximate Transformation Matrices for Unbalanced Transmission Lines*", 9th PSCC Conference, Lisbon 1987.
- [54] L. M. Wedepohl, H. V. Nguyen and G. W. Irwin, "*Frequency-Dependent Transformation Matrices for Untransposed Transmission Lines using Newton-Raphson Method*", Paper 95SM602-3 PWRD, IEEE PES Summer Meeting, Portland 1995.
- [55] B. Gustavsen, J. Sletbak, and T. Henriksen, "*Calculation of Electromagnetic Transients in Transmission Cables and Lines Taking Frequency Dependent Effects Accurately into Account*", IEEE Trans. on PWRD, Vol 10, No. 2, pp. 1076-1084, April 1995.
- [56] L. M. Wedepohl, "*Frequency Domain Analysis of Wave Propagation in Multiconductor Transmission Systems*", EE 55 Class Notes and Computer Program, Dept. of Elec. Eng., The University of British Columbia, 1993.
- [57] J. M. Schneider et al, "*The Rockport Transient Voltage Monitoring System*", CIGRE Paper 23-04, 1988 Session.
- [58] CIGRE WG 33/01, "*Guide to Procedures for Estimating the Lightning Performance of Transmission Lines*", CIGRE Technical Brochure 63, 1991.
- [59] B. Gustavsen and A. Semlyen, "*Simulation of Transmission Line Transients Using Vector Fitting and Modal Decomposition*", paper PE-347-PWRD-0-01-1997, presented at the IEEE/PES Winter Meeting, New York, 1997.
- [60] T. Noda, N. Nagaoka and A. Ametani, "*Further Improvements to a Phase-Domain ARMA Line Model in Terms of Convolution, Steady State Initialization, and Stability*", paper 96 SM 457-2 PWRD, presented at IEEE/PES Summer Meeting, Denver, Colorado, 1996.
- [61] A. Ramírez, J.L. Naredo, P. Moreno, L. Guardado, "*Electromagnetic Transients in Overhead Lines Considering Frequency Dependence and Corona Effect via the Method of Characteristics*", Int. Journal of Electrical Power and Energy Systems, vol. 23, pp. 179-188, 2001.
- [62] J. A. Gutierrez, P. Moreno, J. L. Naredo, J. C. Gutierrez, "*Fast Transients Analysis of Nonuniform Transmission Lines Through the Method of Characteristics*", Int. Journal of Electrical Power and Energy Systems, vol. 24, pp. 781-788, 2002.
- [63] J. L. Naredo, P. Moreno, A. Soudack and J. R. Martí, "*Frequency Independent Representation of Transmission Lines for Transient Analysis Through the Method of*



*Characteristics*’, Proc. of The Athens Power Tech. 1993, NTUA IEEE/PES Joint International Power Conference 1993, Athens, Greece, vol. 1, pp. 28-32, September 5-8 1993.

[64] W. F. Ames, “*Numerical Methods for Partial Differential Equations*”, Academic Press Inc, Third Ed., USA, 1992.

[65] P. Gómez, P. Moreno, J. L. Naredo and M. Dávila, “*Frequency Domain Transient Analysis of Transmission Networks Including Non-linear Conditions*”, IEEE Bologna Power Tech International Conference, June 23-26, 2003, Bologna Italy.

[66] A. Greenwood, “*Electrical Transients in Power Systems*”. Second Edition. John Wiley and Sons. USA. 1991.

[67] H.M. Barros, R.M. Azevedo, S. Carneiro, “*A Comparison of Frequency-Dependent Models in Connection with Implicit Segmentation Schemes*”, Proc. International Conference on Power Systems Transients, p.p. 29-34, Lisbon, Portugal, Sept. 1995.

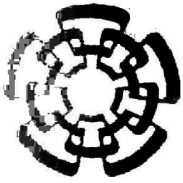
[68] L. Martí, “*Simulation of Transients in Underground Cables with Frequency-Dependent Modal Transformation Matrices*”, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. PWRD-3, No. 3, pp. 1099-1110, July 1988.

[69] L. M. Wedepohl, “*Application of Matrix Methods to The Solution of Travelling-Wave Phenomena in Polyphase Systems*”, Proc. IEEE, Vol. 110, pp. 2200-2212, 1963.

[70] D.E. Hedman, “*Propagation on Overhead Transmission Lines. I- Theory of Modal Analysis*”, IEEE Transaction PAS, pp. 200-205, March 1965.

[71] M. Dávila Calderon “*Electromagnetic Transient Analysis of Multiconductor Lines with Corona and Frequency Dependence*” Doctoral dissertation, CINVESTAV-IPN, Unidad Guadalajara, June 2005.

[72] D. B. Kuznetsov, *et al.* “*Optimal transient simulation of transmission lines*” IEEE Trans. On Circuits and Systems-I: Fundamental theory and applications. Vol. 43 No. 2, Febrero 1996.



# CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL I.P.N. UNIDAD GUADALAJARA

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional aprobó la tesis

Simulación de Transitorios en Líneas de Transmisión  
Multiconductoras con Parámetros Dependientes de la Frecuencia  
empleando el Método de las Características

del (la) C.

Armando AMBROSIO LÓPEZ

el día 31 de Agosto de 2009.

Dr. Pablo Moreno Villalobos  
Investigador CINVESTAV 3C  
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Amner Israel Ramírez Vázquez  
Investigador CINVESTAV 3B  
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. José Raúl Loo Yau  
Investigador CINVESTAV 2B  
CINVESTAV

Dr. José Alberto Gutiérrez Robles  
Profesor Investigador Titular C  
Universidad de Guadalajara

Dr. José Leonardo Guardado Zavala  
Profesor Investigador Titular C  
Instituto Tecnológico de Morelia

