



xx(101579.1)



# **CINVESTAV-IPN**

**CENTRO DE INVESTIGACION Y ESTUDIOS AVANZADOS DEL IPN  
UNIDAD GUADALAJARA**

---



## **VOLTAJES INDUCIDOS EN LÍNEAS DE TRANSMISIÓN DEBIDO A CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS INCIDENTES**

**TESIS QUE PRESENTA:  
ING. ARMANDO AMBROSIO LOPEZ**

**PARA OBTENER EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS**

**EN LA ESPECIALIDAD DE:  
INGENIERIA ELÉCTRICA**

GUADALAJARA, JAL. DICIEMBRE DE 2001

**CINVESTAV I.P.N.  
SECCION DE INFORMACION  
Y DOCUMENTACION**

CLASIF.:	
ADQUIS.:	1925-2002
FECHA:	6 agosto 02
PROCED.:	Serb Bull

# **VOLTAJES INDUCIDOS EN LÍNEAS DE TRANSMISIÓN DEBIDO A CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS INCIDENTES**

**Tesis de Maestría en Ciencias  
Ingeniería Eléctrica**

Por:  
**Armando Ambrosio López**

Ingeniero Electricista  
Instituto Tecnológico de Sonora  
1993-1997

Becario de CONACyT, expediente No. 121134

Directores de tesis:  
**Dr. Pablo Moreno Villalobos**  
**Dr. José Luis Naredo Villagran**

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Diciembre de 2001

## RESUMEN

En este trabajo se presenta el desarrollo de un modelo para el análisis de transitorios electromagnéticos en líneas de transmisión excitadas por campos electromagnéticos incidentes. Se emplea el método de las características para encontrar la solución de las ecuaciones del telegrafista, tanto para líneas monofásicas como para líneas multiconductoras.

Primero se presenta una revisión de las principales formulaciones de las ecuaciones de las líneas de transmisión excitadas con campos electromagnéticos incidentes: el modelo de Rusk, el de Chowdhuri-Gross, el de Agrawal-Price-Gurbaxani y el de Taylor-Satterwhite-Harrison. Después se presenta la deducción completa de un modelo similar al de Taylor-Satterwhite-Harrison para líneas monofásicas que posteriormente se extiende al caso de líneas multiconductoras.

Una vez obtenidas las ecuaciones del telegrafista no homogéneas para líneas de transmisión excitadas por campos electromagnéticos incidentes se emplea el método de las características para convertir estas ecuaciones diferenciales parciales en ecuaciones diferenciales ordinarias. Finalmente la solución para los voltajes y corrientes en la línea de transmisión se encuentra aplicando diferencias finitas a las ecuaciones diferenciales ordinarias obtenidas.

Finalmente los resultados que se obtienen con el modelo propuesto se comparan con los que se obtienen por medio de simulaciones en el EMTP.

## AGRADECIMIENTOS

*A Dios:* por haberme dado la vida y la oportunidad de recibir una educación.

*A mis padres:* Armando y María Matilde, por tanto amor, apoyo y comprensión que siempre me han brindado, impulsándome a lograr todas las metas que me propongo. ¡*Los quiero!* y que Dios me los bendiga hoy y siempre...

*A mi asesor:* Dr. Pablo Moreno Villalobos, por su gran disponibilidad de tiempo, por compartir tantos conocimientos y por su sincera amistad.

*A mi coasesor:* Dr. José Luis Naredo Villagrán, por sus conocimientos brindados, por el apoyo para la realización de este trabajo y por su amistad.

*A mis compañeros y amigos:* mi gratitud y aprecio a todos, por apoyarme y compartir los sentimientos generados durante mi formación profesional.

*A mi esposa:* Carmina, por todo su amor, apoyo y comprensión,

*A mi teke:* Armandito, por tanta felicidad que nos has dado, además de ser un motivo mas y alguien por quien luchar en esta vida.

*A mis hermanos:* Ángel Octavio y Carlos Alberto, quiero compartir con ustedes este entusiasmo y satisfacción que me deja el concluir una etapa más en mi vida, donde nuestra unión de hermanos nos permite gozar la dicha de uno como si fuera la propia. Gracias por mantener siempre una familia unida y que este trabajo los motive siempre a seguir adelante en sus proyectos.

*A mis abuelos:* Ángel, Soledad, Ascensión<sup>t</sup> y María de los Ángeles, por todo ese cariño y amor que siempre he recibido.

*Al ITSON:* por el apoyo y la confianza que me han brindado para la culminación de este trabajo, así como por el buen ambiente de trabajo que me han brindado.

*A CINVESTAV:* por darme la oportunidad de desarrollar este trabajo y mis estudios de maestría además de ser formador de tantas generaciones triunfadoras.

*Al CONACYT:* por el apoyo brindado durante mis estudios de maestría.

## INDICE

	<i>Pag.</i>
Resumen.	i
Agradecimientos.	ii
Indice.	iii
Lista de figuras.	v
Introducción.	vii

### **CAPITULO I. PRINCIPALES MODELOS DE ACOPLAMIENTO PARA LA EVALUACION DE VOLTAJES INDUCIDOS EN LINEAS DE TRANSMISION.**

1.1 Modelo de Rusck.	2
1.2 Modelo de Chowdhuri – Gross.	4
1.3 Modelo de Agrawal, Price y Gurbaxani.	6
1.4 Formulación de Taylor, Satterwhite y Harrison .	9
1.5 Representación de los modelos de Chowdhuri y Agrawal en función del voltaje total	10
1.6 Conclusión	12

### **CAPITULO II. ECUACIONES DEL TELEGRAFISTA PARA LINEAS DE TRANSMISION MONOFASICAS CON CAMPOS INCIDENTES.**

2.1 Primera ecuación del telegrafista.	13
2.2 Segunda ecuación del telegrafista	17

### **CAPITULO III. ANALISIS DE LINEA DE TRANSMISION MONOFASICA CON CAMPOS DE EXCITACION EXTERNOS EMPLEANDO EL METODO DE LAS CARACTERISTICAS.**

3.1 Método de las características.	21
3.2 Solución numérica de las ecuaciones en derivadas totales de la línea de transmisión .	25

3.3 Caso de estudio para una línea de transmisión monofásica con campos electromagnéticos incidentes .	29
--------------------------------------------------------------------------------------------------------	----

#### **CAPITULO IV. LINEAS DE TRANSMISION MULTICONDUCTORAS CON CAMPOS ELECTROMAGNETICOS INCIDENTES.**

4.1 Primera ecuación para líneas de transmisión multiconductoras (LTM) con campos electromagnéticos incidentes. .	34
4.2 Segunda ecuación para líneas de transmisión multiconductoras (LTM) con campos electromagnéticos incidentes.	37

#### **CAPITULO V. SOLUCION A LAS ECUACIONES DE LTM CON CAMPOS ELECTROMAGNETICOS INCIDENTES POR EL METODO DE LAS CARACTERISTICAS.**

5.1 Método de las características.	41
5.2 Solución numérica de las ecuaciones de las LTM con campos electromagnéticos incidentes	46
5.3 Caso de estudio para una línea de transmisión multiconductora iluminada por un campo electromagnético. .	54

Conclusiones y recomendaciones .	58
Referencias	60

## LISTA DE FIGURAS

	<i>Pag.</i>
<b>Figura 1-1</b> Geometría utilizada para el cálculo de sobrevoltajes inducidos en una línea de transmisión de potencia aérea debidos a campos electromagnéticos originados por descargas atmosféricas	1
<b>Figura 1.2-1</b> Circuito acoplado diferencial equivalente de acuerdo al modelo de Chowdhuri – Gross para una línea de transmisión monofásica aérea sin pérdidas, a) representación equivalente de Norton y b) representación equivalente de Thevenin	6
<b>Figura 1.3-1</b> Circuito acoplado diferencial equivalente de acuerdo al modelo de Agrawal en la formulación de una línea de transmisión monofásica aérea sin pérdidas.	8
<b>Figura 1.4-1</b> Circuito acoplado diferencial de acuerdo a la formulación de Taylor para una línea de transmisión monofásica aérea sin pérdidas	9
<b>Figura 2.1</b> Línea de transmisión de dos conductores inmersa en un medio dieléctrico homogéneo	14
<b>Figura 2.2</b> Definición de la superficie para la derivación de la segunda ecuación de línea de transmisión monofásica con iluminación de campos electromagnéticos	18
<b>Figura 3.1</b> Malla de discretización para puntos intermedios.	26
<b>Figura 3.2</b> Mallas de discretización para puntos en las frontera.	27
<b>Figura 3.3.</b> Configuración considerada para la línea de transmisión monofásica con incidencia de campos electromagnéticos. .	30
<b>Figura 3.4.</b> Forma de onda del voltaje distribuido serie utilizado para la simulación.	30
<b>Figura 3.5.</b> Esquema utilizado para llevar a cabo la simulación en EMTP para una línea de transmisión monofásica con incidencia de campos electromagnéticos.	31

<b>Figura 3.6</b> Cálculo por el método de las características de los voltajes en cada extremo de la línea de transmisión	32
<b>Figura 3.7</b> Cálculo con el EMTP de los voltajes en cada extremo de la línea de transmisión. .	33
<b>Figura 3.8</b> Comparación entre el método de las características y el EMTP para los voltajes en cada extremo de la línea de transmisión.	33
<b>Figura 4.1-1</b> Definición del contorno para la derivación de la primer ecuación de LTM iluminada por campos incidentes.	35
<b>Figura 4.1-2</b> Definición de la superficie para la derivación de la segunda ecuación de LTM iluminadas por campos electromagnéticos incidentes.	44
<b>Figura 5.2-1</b> Características de una LTM pasando a través de un punto G en el plano z-t. .	48
<b>Figura 5.2-2</b> Pendiente de la característica negativa en la intersección de la línea en $t=T$ para la frontera $z=0$ .	51
<b>Figura 5.2-3</b> Pendiente de la característica positiva en la intersección de la línea en $t=T$ para la frontera $z=L$ . .	53
<b>Figura 5.3-1.</b> Configuración considerada para la línea de transmisión trifásica con incidencia de campos electromagnéticos.	54
<b>Figura 5.3-2.</b> Esquema utilizado para llevar a cabo la simulación en EMTP para una línea de transmisión multiconductor con incidencia de campos electromagnéticos.	55
<b>Figura 5.3-3</b> Comparación de los voltajes en la fase $a$ en los extremos de la línea de transmisión calculados con el método de las características y el EMTP..	56

## INTRODUCCIÓN

Los voltajes inducidos por descargas atmosféricas cercanas han sido objeto de múltiples estudios teóricos y experimentales desde la primera década del siglo XX. Una descarga atmosférica irradia campos electromagnéticos de rápida variación que inducen corrientes en estructuras conductoras cercanas al punto de ocurrencia. Las líneas de transmisión aéreas actúan como antenas y pueden desarrollar sobrevoltajes en sus conductores. Particularmente entre los conductores y tierra los voltajes inducidos pueden ser lo suficientemente grandes como para causar severos daños en sistemas de bajo voltaje.

Debido a la introducción de equipo eléctrico cada vez más sensible en un número mayor de instalaciones, los daños por descargas atmosféricas se han ido incrementando en los últimos años. Si bien existen diferencias apreciables en costo entre los equipos a diferentes niveles de voltaje (a mayor voltaje, mayor costo), el costo de los daños indirectos en bajo voltaje por descargas es similar al de daños en alto voltaje por descargas directas, esto es debido a que el número de los primeros es mucho mayor.

El fenómeno de acoplamiento ha sido tema de numerosos estudios los cuales han llevado al desarrollo de diversos modelos teóricos. Con tales modelos se han implementado programas computacionales para estimar la severidad de los voltajes inducidos por descargas atmosféricas en líneas de distribución principalmente. Las ecuaciones de acoplamiento entre campos incidentes y líneas de transmisión pueden expresarse en diferentes formulaciones, siendo las más conocidas la de Rusck <sup>[1]</sup>, la de Chowdhuri-Gross <sup>[5]</sup> la de Agrawal-Price-Gurbaxani <sup>[10]</sup> y la de Taylor-Satterwhite-Harrison <sup>[22]</sup> Las diferencias entre dichas formulaciones estriban esencialmente en la representación de los términos de las fuentes como función de las componentes del campo electromagnético de excitación.

En lo que respecta a resultados experimentales, diferentes investigadores han realizado algunos estudios de gran importancia. A continuación se mencionan los resultados más

importantes: Yokoyama et al <sup>[2,3, 24]</sup> reportó un gran número de experimentos en los cuales utilizó una Línea de Transmisión Multiconductora (LTM) desenergizada, compuesta por tres fases con una longitud de 820 mts. Para obtener los sobrevoltajes, Yokoyama conocía el punto de impacto de la descarga atmosférica con respecto a la LTM. Se reportaron mediciones de voltaje y corriente pero no los valores de los campos electromagnéticos correspondientes. Ishii et al <sup>[26]</sup> reportó voltajes y corrientes medidos utilizando el modelo geométrico de la línea de transmisión. Ishii encontró buena concordancia entre los resultados teóricos y las mediciones realizadas. En Sudáfrica, Eriksson et al <sup>[4, 20, 30]</sup> llevó a cabo mediciones de voltajes y corrientes inducidas en una línea de 11 Kv con una longitud de 9.9 Km y una configuración horizontal compuesta por tres fases; una de las terminales se encontraba aterrizada mientras que la otra terminal se encontraba en circuito abierto. Al igual que en los trabajos mencionados anteriormente, Eriksson encontró gran concordancia entre los resultados obtenidos teóricamente y los resultados de las mediciones. La primer medición simultánea de campos electromagnéticos generados por descargas atmosféricas y voltajes inducidos por tales campos en LTM fue llevada a cabo por Uman et. al. <sup>[11,16]</sup> en el área de Tampa Bay Florida durante el verano de 1979. Los voltajes medidos fueron obtenidos de una línea de distribución de 500 m de longitud, la cual se encontraba desenergizada. Nuevamente, comparando los voltajes medidos con los calculados se obtuvo buena concordancia. Uno de los últimos trabajos publicados es el de De la Rosa et al <sup>[21, 39]</sup>, en este trabajo se presentan mediciones de voltajes en una terminal de una LTM estándar de 13 Kv trifásica, la longitud de la LTM era de 2.8 Km y tenía 10 m de altura. Como resultado se obtuvo que la amplitud, polaridad y forma de onda del voltaje inducido medido en un extremo de la LTM están fuertemente relacionadas con la posición del punto de incidencia de la descarga atmosférica con respecto a la LTM y a la conductividad del terreno.

La solución en el dominio del tiempo de las ecuaciones de las líneas de transmisión con campos de excitación externos, obliga a la discretización en distancia de la línea de transmisión. La solución puede plantearse aplicando diferencias finitas a las derivadas parciales de las ecuaciones, sin embargo se ha reportado la aparición de oscilaciones numéricas para los caso de líneas no uniformes y con elementos no lineales. Para la

solución de este problema empleando el EMTP <sup>[40]</sup>, la línea de transmisión se tiene que dividir en cierto número de secciones con fuentes independientes y considerar cada sección como una línea de transmisión por sí sola, por lo que el procedimiento de simulación puede ser muy laborioso y los resultados dependen de la experiencia del usuario.

Para realizar una correcta evaluación de los efectos de descargas atmosféricas cercanas sobre sistemas de bajo voltaje es necesario contar con un método robusto y práctico. El objetivo de la presente tesis es obtener un modelo de líneas de transmisión excitadas por campos electromagnéticos externos empleando el método de las características. El método de las características ha probado ser libre de oscilaciones numéricas y permite la discretización en distancia de las líneas de transmisión en una forma natural.

En el Capítulo I se presenta una revisión de las principales formulaciones para las ecuaciones de líneas de transmisión con excitación con campos electromagnéticos externos. En el Capítulo II se deducen las ecuaciones del telegrafista no homogéneas para líneas monofásicas y en el Capítulo III se aplica el método de las características para encontrar la solución para este tipo de líneas, comparando estos resultados con los resultados obtenidos con el EMTP. En el Capítulo IV se deducen las ecuaciones del telegrafista no homogéneas para Líneas de Transmisión Multiconductoras (LTM) con excitación con campos externos, y en el Capítulo V se aplica el método de las características a la solución de tales ecuaciones. También en el Capítulo V, se presentan finalmente casos de estudio que son comparados con resultados obtenidos con el EMTP.

# CAPITULO I

## PRINCIPALES MODELOS DE ACOPLAMIENTO PARA LA EVALUACION DE VOLTAJES INDUCIDOS EN LINEAS DE TRANSMISION.

Básicamente en la literatura han sido adoptados tres modelos de líneas de transmisión en sistemas eléctricos de potencia donde varios autores han descrito el acoplamiento existente entre campos electromagnéticos debidos a descargas atmosféricas y líneas de transmisión aéreas. Estos modelos son el propuesto por Rusck, el propuesto por Chowdhuri y Gross (de ahora en adelante llamado el modelo de Chowdhuri) y el propuesto por Agrawal, Price y Gurbaxani (llamado de ahora en adelante el modelo de Agrawal). Dichos modelos serán brevemente revisados y comparados a continuación.

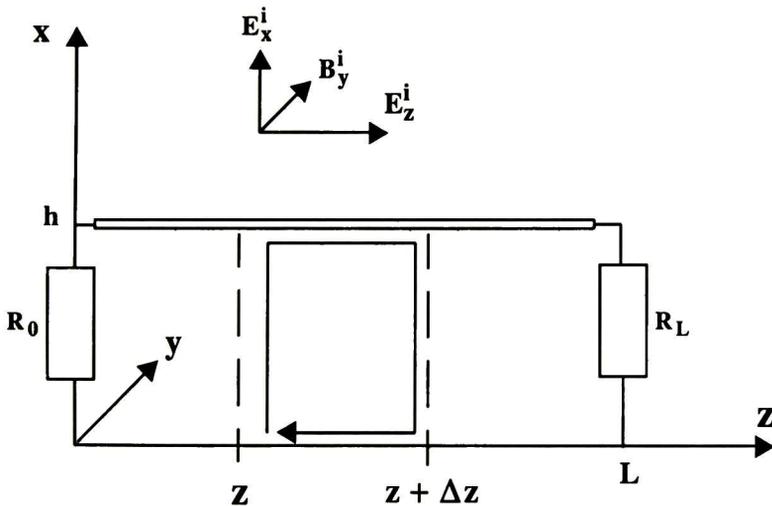


Figura 1-1 Geometría utilizada para el cálculo de sobrevoltajes inducidos en una línea de transmisión de potencia aérea debidos a campos electromagnéticos originados por descargas atmosféricas.

Considérese una línea de transmisión monofásica aérea sin pérdidas, formada por un conductor aéreo (o también llamado “conductor de ida”) y un conductor de retorno paralelo al conductor aéreo el cual se considera un plano equipotencial (generalmente se utiliza el plano de tierra como conductor de retorno). Los conductores están contenidos en el plano  $z-x$ . Se asume que son de longitud infinita y paralelos entre si con dirección en el eje  $z$ . En cada terminal se cuenta con una resistencia, siendo  $R_0$  la resistencia correspondiente a la terminal de inicio y  $R_L$  la correspondiente a la terminal final, tal y como se muestra en la figura 1-1. Es importante observar que los campos incidentes,  $E^i$  y  $B^i$ , mostrados en la figura 1-1 son la suma del campo radiado por la descarga atmosférica y el campo reflejado por el conductor de retorno (que para este caso será el plano de tierra), en ausencia del conductor aéreo. Los campos totales  $E$  y  $B$  están dados por la suma de los campos incidentes  $E^i$ ,  $B^i$  y los campos de distorsión  $E^s$ ,  $B^s$  los cuales representan la reacción de la línea al campo incidente. El campo electromagnético incidente está relacionado con el escalar potencial incidente  $\Phi^i$  y el vector de potencial incidente  $A^i$  por medio de las siguientes expresiones

$$E^i = -\left( \nabla\Phi^i + \frac{\partial}{\partial t} A^i \right) \quad (1.1)$$

y

$$B^i = \nabla \times A \quad (1.2)$$

Para el propósito de comparación de los diferentes modelos, el plano de tierra se considerará como un conductor perfecto.

## 1.1 MODELO DE RUSCK

El modelo propuesto por Rusck <sup>[1]</sup> para el cálculo de voltajes inducidos por descargas atmosféricas consta de dos partes: la primera modela el retorno de la trayectoria de la descarga atmosférica y la segunda modela las ecuaciones para el cálculo de voltajes inducidos. En el presente trabajo solo se discute la segunda parte de este modelo.

Para derivar las ecuaciones de acoplamiento de la línea de transmisión, Rusck partió de la expresión que relaciona al campo eléctrico total en la superficie del conductor con los

potenciales escalar y vectorial. Las ecuaciones de acoplamiento que obtuvo son las siguientes

$$\frac{\partial}{\partial z} \Phi(z, t) + L' \frac{\partial}{\partial t} I(z, t) = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} I(z, t) + C' \frac{\partial}{\partial t} \left| \Phi(z, t) - \Phi^i(z, t) \right| = 0 \quad (1.4)$$

donde

- $L'$  y  $C'$  son la inductancia y capacitancia por unidad de longitud respectivamente.
- $I(z, t)$  es la corriente total de la línea.
- $\Phi$  es el potencial escalar inducido total.

El voltaje inducido total  $U(z, t)$  está dado por

$$U(z, t) = \Phi(z, t) + \int_0^h \frac{\partial}{\partial t} A_x^i(z, x, t) dx \quad (1.5)$$

donde  $h$  es la altura del conductor y  $A_x^i$  es la componente vertical del vector de potencial incidente.

Las condiciones de frontera para las ecuaciones (1.3) y (1.4) son

$$\Phi(0, t) = -R_0 I(0, t) - \int_0^h \frac{\partial}{\partial t} A_x^i(0, x, t) dx \quad (1.6)$$

$$\Phi(L, t) = R_L I(L, t) - \int_0^h \frac{\partial}{\partial t} A_x^i(L, x, t) dx \quad (1.7)$$

En el modelo de Rusck las funciones forzadas que aparecen explícitamente en las ecuaciones de acoplamiento son el potencial escalar incidente a lo largo de la línea de transmisión y la componente vertical del potencial vectorial incidente en las terminales de la línea.

Algunos investigadores han utilizado el modelo de Rusck, tal es el caso de Yokoyama <sup>[2, 3]</sup> que calculó voltajes inducidos a partir de una medición de corriente de descarga atmosférica. El campo se obtuvo con la medición de corriente asumiendo un modelo simple

para la corriente de retorno de la descarga. Yokoyama encontró buena concordancia entre las mediciones y los cálculos.

En su trabajo Rusck propuso una fórmula simplificada que puede ser usada para estimar el valor pico de los sobrevoltajes inducidos  $U_{\max}$  a lo largo de la línea, a partir del valor pico de la corriente de descarga atmosférica  $I_{\max}$ :

$$U_{\max} = Z_0 \frac{I_{\max} h}{d} \quad (1.8)$$

donde

$d$  = distancia de la descarga atmosférica a la línea.

$h$  = altura de la línea de transmisión.

$$Z_0 = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 30\Omega$$

siendo  $\mu_0$  y  $\epsilon_0$  la permeabilidad y la permitividad del espacio libre, respectivamente.

Debe notarse que la ecuación (1.8), no provee ninguna información con respecto al tiempo de subida del frente de onda ni del tiempo en que se alcanza el valor medio de la onda sobre la pendiente decreciente del voltaje inducido. Adicionalmente la fórmula (1.8) se aplica solo al caso en que el plano de tierra es un conductor perfecto y cuando el canal de la descarga atmosférica es perpendicular al plano de tierra.

## 1.2 MODELO DE CHOWDHURI – GROSS

En este caso se tiene también un modelo que consta de dos parte, de las cuales solo se discutirá la parte correspondiente al acoplamiento electromagnético.

Las dos ecuaciones de la línea de transmisión propuestas por Chowdhuri y Gross<sup>[5]</sup> son

$$\frac{\partial}{\partial z} U(z, t) + L' \frac{\partial}{\partial t} I(z, t) = 0 \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} I(z, t) + C' \frac{\partial}{\partial t} [U(z, t) - U^i(z, t)] = 0 \quad (1.10)$$

donde  $U(z,t)$  es el voltaje inducido total a lo largo de la línea y  $U^i(z,t)$  es el voltaje incidente definido por

$$U^i(z,t) = -\int_0^h E_x^i(z,x,t)dx \quad (1.11)$$

siendo  $E_x^i(z,x,t)$  el campo eléctrico vertical incidente.

Es interesante notar que el modelo de Chowdhuri se describe con un par de ecuaciones, las cuales son formalmente las mismas que las propuestas en el modelo de Rusck, solo que el modelo de Chowdhuri está expresado en términos del voltaje inducido total y el voltaje incidente en vez del potencial escalar inducido total y el potencial escalar incidente.

Las condiciones de frontera para este modelo son

$$U(0,t) = -R_0 I(0,t) \quad (1.12a)$$

$$U(L,t) = R_L I(L,t) \quad (1.12b)$$

Como se puede ver, de las ecuaciones (1.9)-(1.12), en el modelo de Chowdhuri solo el campo eléctrico vertical incidente aparece explícitamente como función forzada.

Las ecuaciones propuestas por Chowdhuri y Gross están basadas en el concepto de que el efecto del voltaje incidente es equivalente a conectar una fuente de voltaje en cada sección de la línea a todo lo largo de ella. Por consiguiente, se propusieron circuitos equivalentes para un diferencial de longitud ( $\Delta z$ ), de una línea de transmisión aérea sin pérdidas excitada por un campo electromagnético incidente. Este circuito es presentado en la figura 1.2-1a (representación equivalente de Norton).

Chowdhuri también propuso una fórmula analítica <sup>[6]</sup> para evaluar la forma de onda del voltaje inducido en función de la velocidad del retorno de la descarga atmosférica, altura de la línea de transmisión y la distancia de la descarga atmosférica a la línea. Tal fórmula se derivó asumiendo una línea infinitamente larga y un pulso de corriente como canal-base de una forma de onda simple (función escalón, o una rampa seguida por un valor constante), la cual se propaga en forma ascendente por el canal a una velocidad constante. Para formas de

onda más complicadas, es necesario aplicar el teorema de la convolución. Chowdhuri también extendió su ecuación para el caso de líneas de transmisión de longitud finita terminadas en resistencias [7] El modelo de Chowdhuri ha sido usado por investigadores como Cinieri y Fumi [8] y con algunas modificaciones por Liew y Mar [9]

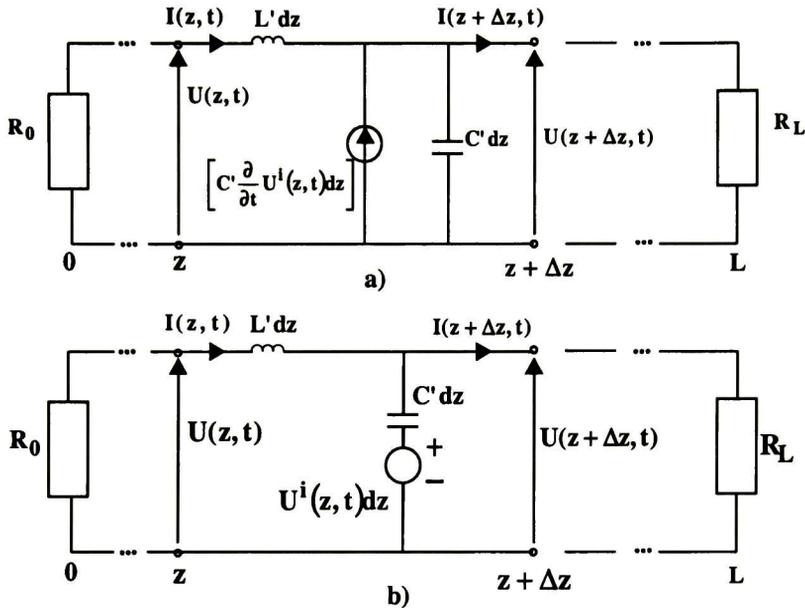


Figura 1.2-1 Circuito acoplado diferencial equivalente de acuerdo al modelo de Chowdhuri – Gross para una línea de transmisión monofásica aérea sin pérdidas, a) representación equivalente de Norton y b) representación equivalente de Thevenin.

### 1.3 MODELO DE AGRAWAL, PRICE Y GURBAXANI.

Las dos ecuaciones para la línea de transmisión introducidas por Agrawal, Price y Gurbaxani [10], conciernen solamente al modelo de acoplamiento electromagnético. El procedimiento consiste en integrar las ecuaciones de Maxwell a lo largo de la trayectoria definida en la figura 1-1. Las expresiones finales están expresadas en términos del voltaje de distorsión:

$$\frac{\partial}{\partial z} U^s(z, t) + L' \frac{\partial}{\partial t} I(z, t) = E_z^i(z, h, t) \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} I(z, t) + C' \frac{\partial}{\partial t} U^s(z, t) = 0 \quad (1.14)$$

donde

- $E_z^i(z, h, t)$  es la componente horizontal del campo eléctrico incidente a lo largo del eje  $z$  a la altura de los conductores.
- $U^s(z, t)$  es el voltaje de distorsión definido por

$$U^s(z, t) = -\int_0^h E_x^s(z, x, t) dx \quad (1.15)$$

donde  $E_x^s(z, x, t)$  es la componente vertical del campo eléctrico de distorsión.

El voltaje de distorsión está relacionado con el voltaje total de línea  $U(z, t)$  por medio de la siguiente expresión

$$U(z, t) = U^i(z, t) + U^s(z, t) \quad (1.16)$$

Así para obtener el voltaje total en un punto dado a lo largo de la línea de transmisión solo tiene que agregarse al voltaje incidente  $U^i(z, t)$  definido por la ecuación (1.11) el voltaje de distorsión  $U^s(z, t)$ , el cual se obtiene de la solución de las ecuaciones (1.13) y (1.14).

Las condiciones de frontera para el voltaje de distorsión son

$$U^s(0, t) = -R_0 I(0, t) - U^i(0, t) \quad (1.17a)$$

$$U^s(L, t) = R_L I(L, t) - U^i(L, t) \quad (1.17b)$$

Al igual que Chowdhuri y Gross, también Agrawal propuso un circuito equivalente. Este circuito es mostrado en la figura 1.3-1 para el caso de una línea de transmisión monofásica sin pérdidas, el cual puede ser extendido para líneas de transmisión multiconductoras.

De acuerdo con el modelo de Agrawal, la componente horizontal del campo incidente a lo largo de la línea y el campo eléctrico vertical en las terminales de la línea de transmisión,

son las funciones forzadas que explícitamente aparecen en las ecuaciones como producto de los voltajes de distorsión. Estas funciones forzadas están representadas por la fuente de voltaje, tal y como se muestra en la figura 1.3-1.

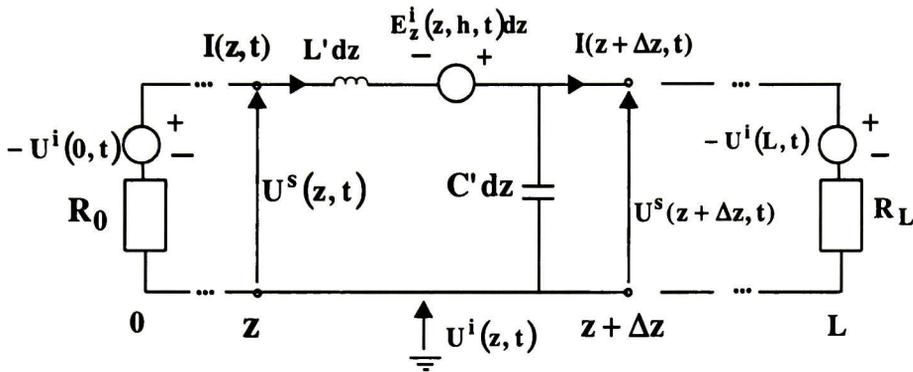


Figura 1.3-1 Circuito acoplado diferencial equivalente de acuerdo al modelo de Agrawal en la formulación de una línea de transmisión monofásica aérea sin pérdidas.

El modelo de Agrawal fue el primero que se aplicó al cálculo de sobrevoltajes inducidos por descargas atmosféricas <sup>[11,12,13,14,15]</sup> Este modelo también, es el único que ha sido cuidadosamente probado con mediciones de campos electromagnéticos y voltajes inducidos. Aunque algunas de las primeras pruebas no brindaron una concordancia satisfactoria entre la teoría y las mediciones <sup>[11, 16]</sup>, en subsecuentes experimentos la concordancia fue mejorada <sup>[12, 13]</sup> Las pruebas de campo han sido discutidas en <sup>[13,17]</sup> y se encontró que las mediciones son afectadas por muchos factores, tales como la incertidumbre en las lecturas tomadas, los errores de calibración, la falta de conocimientos de las causas que originan los campos (en general, mediciones hechas solo en un punto o dos y no a lo largo de toda la línea como los modelos lo requieren) y, en algunos casos, la conductividad del terreno <sup>[17]</sup> Estos son algunos factores que se sugiere tomar en consideración en futuros experimentos bajo condiciones controladas. Recientemente algunas pruebas del modelo de Agrawal han sido efectuadas haciendo uso de simulaciones

de pulsos electromagnéticos nucleares (NEMP) <sup>[18, 19]</sup> Los resultados preliminares han mostrado buena concordancia entre las lecturas y lo obtenido teóricamente. Este es un trabajo difícil, no obstante, si bien las pruebas llevadas a cabo usando simulaciones NEMP probablemente permiten una validación más confiable de los varios modelos, por las razones antes mencionadas; tales pruebas requieren de una importante dedicación humana e inversión económica.

#### 1.4 FORMULACION DE TAYLOR, SATTERWHITE Y HARRISON.

Aunque el modelo de Agrawal es el más comúnmente adoptado en la literatura de sistemas eléctricos de potencia, Taylor, Satterwhite y Harrison en 1965 <sup>[22]</sup> desarrollaron otra formulación de las ecuaciones de acoplamiento de la línea de transmisión:

$$\frac{\partial}{\partial z} \dot{U}(z, t) + L' \frac{\partial}{\partial t} I(z, t) = - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h B_y^i(z, x, t) dx \quad (1.18a)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} I(z, t) + C' \frac{\partial}{\partial t} U(z, t) = -C' \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h E_x^i(z, x, t) dx \quad (1.18b)$$

El circuito de la línea de transmisión descrito por las ecuaciones (1.18a) y (1.18b) es mostrado en la figura 1.4-1. La formulación de Taylor, ha sido ampliamente usada en la literatura de compatibilidad electromagnética, con referencia particular a la interacción entre NEMP y líneas de transmisión <sup>[23]</sup>

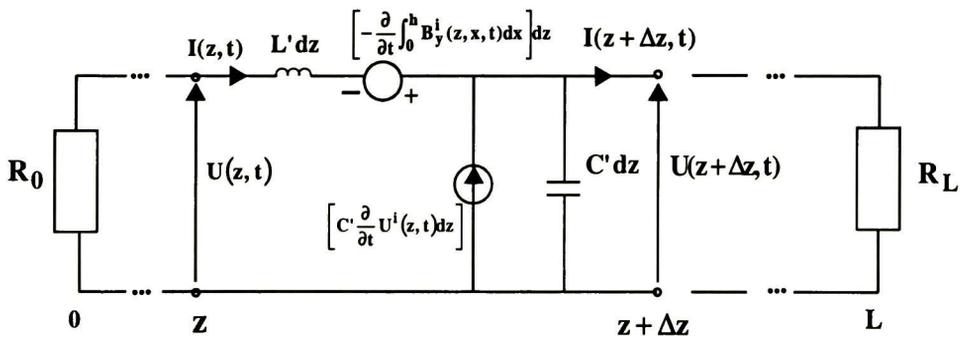


Figura 1.4-1 Circuito acoplado diferencial de acuerdo a la formulación de Taylor para una línea de transmisión monofásica aérea sin pérdidas.

Note que en la formulación de Taylor, el campo eléctrico incidente vertical (fuente de corriente) y el campo magnético (fuente de voltaje) inducido horizontal (transversal) aparecen explícitamente como funciones forzadas.

## 1.5 REPRESENTACION DE LOS MODELOS DE CHOWDHURI Y AGRAWAL EN FUNCION DE VOLTAJE TOTAL.

En esta sección se consideran los modelos planteados por Chowdhuri y Agrawal para representarlos en función del voltaje total, con el propósito de realizar una comparación entre ambos. Considerando primero el modelo propuesto por Chowdhuri

$$\frac{\partial}{\partial z} U(z, t) + L' \frac{\partial}{\partial t} I(z, t) = 0 \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} I(z, t) + C' \frac{\partial}{\partial t} [U(z, t) - U^i(z, t)] = 0 \quad (1.20)$$

por definición

$$U^i(z, t) = -\int_0^h E_x^i(z, x, t) dx \quad (1.21)$$

$$U(z, t) = U^i(z, t) + U^s(z, t) \quad (1.22)$$

sustituyendo la ecuación (1.21) en la ecuación (1.20) para el voltaje incidente, se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial z} I(z, t) + C' \frac{\partial}{\partial t} U(z, t) = -C' \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h E_x^i(z, x, t) dx \quad (1.23)$$

Por lo tanto, las ecuaciones del modelo de Chowdhuri en función del voltaje total, quedan de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial z} U(z, t) + L' \frac{\partial}{\partial t} I(z, t) = 0 \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} I(z, t) + C' \frac{\partial}{\partial t} U(z, t) = -C' \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h E_x^i(z, x, t) dx \quad (1.25)$$

Trabajando ahora con el modelo propuesto por Agrawal

$$\frac{\partial}{\partial z} U^s(z, t) + L' \frac{\partial}{\partial t} I(z, t) = E_z^i(z, h, t) \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} I(z, t) + C' \frac{\partial}{\partial t} U^s(z, t) = 0 \quad (1.27)$$

Es necesario introducir la siguiente relación derivada de las ecuaciones de Maxwell

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h B_y^i(z, x, t) dx = -E_z^i(z, h, t) + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h E_x^i(z, x, t) dx \quad (1.28)$$

Sustituyendo las ecuaciones (1.21) y (1.22) en la ecuación (1.26) se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial z} \left| U(z, t) - U^i(z, t) \right| + L' \frac{\partial}{\partial t} I(z, t) = E_z^i(z, h, t) \quad (1.29a)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} U(z, t) + L' \frac{\partial}{\partial t} I(z, t) = E_z^i(z, h, t) + \frac{\partial}{\partial z} U^i(z, t) \quad (1.29b)$$

Empleando la ecuación (1.28) en el lado derecho de (1.29b), resulta

$$\frac{\partial}{\partial z} U(z, t) + L' \frac{\partial}{\partial t} I(z, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h B_y^i(z, x, t) dx \quad (1.30)$$

Ahora sustituyendo las ecuaciones (1.21) y (1.22) en la ecuación (1.27) se puede escribir

$$\frac{\partial}{\partial z} I(z, t) + C' \frac{\partial}{\partial t} \left| U(z, t) - U^i(z, t) \right| = 0 \quad (1.31a)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} I(z, t) + C' \frac{\partial}{\partial t} U(z, t) = -C' \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h E_x^i(z, x, t) dx \quad (1.31b)$$

Por lo tanto, las ecuaciones acopladas para el modelo de Agrawal en función del voltaje total quedan expresadas de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial z} U(z, t) + L' \frac{\partial}{\partial t} I(z, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h B_y^i(z, x, t) dx \quad (1.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} I(z, t) + C' \frac{\partial}{\partial t} U(z, t) = -C' \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h E_x^i(z, x, t) dx \quad (1.33)$$

Comparando las expresiones (1.24) y (1.25) con (1.32) y (1.33) es fácil observar que en las expresiones de Chowdhuri no aparece el campo magnético transversal como función forzada. Esto puede explicar ciertas diferencias encontradas en los cálculos realizados por diferentes autores.

## **1.6 CONCLUSION.**

Una vez analizadas las principales formulaciones para obtener las ecuaciones de la línea de transmisión con excitación de campos electromagnéticos externos; se observa que las bases para cada formulación difieren considerablemente, aunque las diferentes formulaciones pueden ser transformadas a una representación común en términos de los voltajes totales. Para llevar a cabo la representación de cualquier formulación en función de los voltajes totales solo hay que aplicar la definición de voltaje total que es igual al voltaje incidente más el voltaje de distorsión.

## CAPITULO II

### **ECUACIONES DEL TELEGRAFISTA PARA LINEAS DE TRANSMISION MONOFASICAS CON CAMPOS INCIDENTES.**

Una línea de transmisión es un sistema de dos o más conductores que corren paralelamente entre sí. En este capítulo presenta la teoría de líneas de transmisión que consisten de solo dos conductores (conductor de ida y conductor de retorno). El problema básico en el análisis de líneas de transmisión es la determinación de las corrientes en los conductores y la diferencia de potencial entre ellos en todos los puntos a lo largo de la línea. Sin embargo, muchas veces sólo es de interés el conocer los voltajes y corrientes en los extremos de la línea. Las ecuaciones diferenciales que gobiernan el voltaje y la corriente en una línea de transmisión son conocidas como “ecuaciones del telegrafista”. Estas ecuaciones constituyen el modelo de la línea <sup>[25]</sup>

Los campos incidentes pueden ser en forma de ondas planas uniformes como las que son generadas por antenas de transmisión o descargas atmosféricas. En este capítulo se incorporan los efectos de estos campos incidentes como fuentes distribuidas a lo largo de la línea de transmisión.

#### **2.1 PRIMERA ECUACION DEL TELEGRAFISTA.**

Para la deducción de las ecuaciones del telegrafista se considerará una línea cuyos conductores no son perfectos, esto es, su conductividad es finita, lo que da origen a pérdidas longitudinales. También se considerará que las líneas de transmisión se encuentran inmersas en dieléctricos cuya conductividad es mayor que cero, en este caso se presentan pérdidas transversales. El conductor de retorno puede ser el plano de tierra considerado como un plano equipotencial. Se asume que los conductores son de longitud infinita, y paralelos entre sí como se muestra en la figura 2.1.

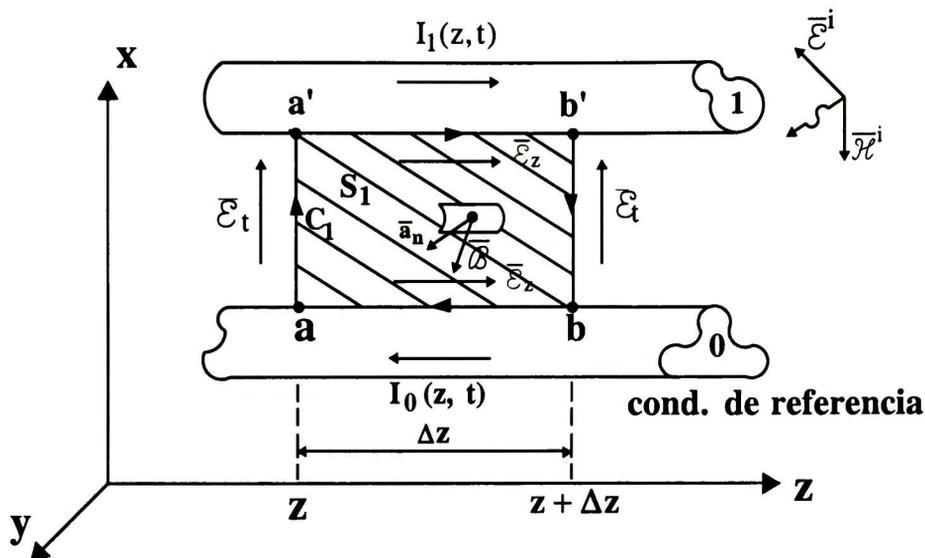


Figura 2.1- Línea de transmisión de dos conductores inmersa en un medio dieléctrico homogéneo.

Considérese primero la ecuación de inducción de Faraday en forma integral, dada por

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (2.1)$$

efectuando la integral del lado izquierdo de la ecuación (2.1) a lo largo de la trayectoria \$aa'b'ba\$

$$\int_a^{a'} \vec{E}_t \cdot d\vec{l} + \int_{a'}^{b'} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_{b'}^b \vec{E}_t \cdot d\vec{l} + \int_b^a \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{a}_n ds \quad (2.2)$$

donde \$\vec{E}\_t\$ es el campo eléctrico transversal en el plano x-y y \$\vec{E}\_1\$ es el campo eléctrico longitudinal (en la dirección del eje z) a lo largo de la superficie de los conductores. Obsérvese que el signo negativo está ausente en el lado derecho de la ley de Faraday en la ecuación (2.2), esto es debido a la elección de la dirección del vector unitario normal \$\vec{a}\_n\$, y a la regla de la mano derecha, tal como se muestra en la figura 2.1.

En este punto es necesario distinguir entre las cantidades del campo incidente y las del campo de distorsión (scattered field). El campo incidente es producto de alguna fuente pero

en ausencia de los conductores, los campos de distorsión son producto de las corrientes y cargas que se inducen en la propia línea de transmisión. El campo total es la suma del campo incidente y el campo de distorsión:

$$\overline{\mathcal{E}}_t = \overline{\mathcal{E}}_t^i + \overline{\mathcal{E}}_t^s \quad (2.3a)$$

$$\overline{\mathcal{E}}_l = \overline{\mathcal{E}}_l^i + \overline{\mathcal{E}}_l^s \quad (2.3b)$$

$$\overline{\mathcal{B}} = \overline{\mathcal{B}}^i + \overline{\mathcal{B}}^s \quad (2.3c)$$

donde el superíndice i denota campos incidentes y el superíndice s denota campos de distorsión. Asumiendo que la corriente en los conductores circula en dirección del eje z, el campo magnético de distorsión esta contenido completamente en el plano transversal. Como  $\overline{\mathcal{B}}^s$  no posee componente en dirección del eje z, la ley de Faraday muestra que es posible definir en forma única el voltaje de distorsión entre el conductor de fase y el de retorno, independientemente de la trayectoria de integración en el plano transversal:

$$V^s(z, t) = -\int_a^{a'} \overline{\mathcal{E}}_t^s \cdot d\bar{l} \quad (2.4a)$$

$$V^s(z + \Delta z, t) = -\int_b^{b'} \overline{\mathcal{E}}_t^s \cdot d\bar{l} \quad (2.4b)$$

Debido a la naturaleza transversal del campo magnético de distorsión, éste se puede relacionar con las corrientes que lo producen por medio de una inductancia por unidad de longitud. Por lo tanto el lado derecho de la ecuación (2.2) puede ser expresado en términos de la inductancia del lazo que forman los dos conductores. La corriente  $I(z, t)$  se define por

$$I(z, t) = \oint_c \overline{\mathcal{H}}^s \cdot d\bar{l} \quad (2.5)$$

y la inductancia de la sección  $\Delta z$  es

$$L = \frac{\phi}{I} \quad (2.6)$$

$$L = \frac{-\mu \int_s \overline{\mathcal{H}}^s \cdot \bar{a}_n d\bar{s}}{I} \quad (2.7)$$

Empleando la ecuación (2.7) la inductancia por unidad de longitud,  $\ell$ , se puede escribir como

$$\ell = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{L}{\Delta z} = -\frac{\mu}{I} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \int_s \mathcal{H}^s \cdot \bar{a}_n ds \quad (2.8)$$

Sustituyendo (2.5) en (2.8)

$$\ell = -\mu \frac{\int_a^{a'} \mathcal{H}^s \cdot \bar{a}_n d\bar{l}}{\oint_c \mathcal{H}^s \cdot d\bar{l}} \quad (2.9)$$

También de (2.8) se puede escribir

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \int_{s_1} \bar{\mathcal{B}}^s \cdot \bar{a}_n ds = -\ell I \quad (2.10)$$

Asumiendo que las características de conductores imperfectos se pueden representar por medio de resistencias por unidad de longitud,  $r$ , los campos longitudinales totales estarán relacionados con las corrientes en los conductores de acuerdo con

$$\int_{a'}^{b'} \bar{\mathcal{E}}_1 \cdot d\bar{l} = \int_{a'}^{b'} \mathcal{E}_z \cdot dz = r \Delta z I_1(z, t) \quad (2.11a)$$

$$\int_a^b \bar{\mathcal{E}}_1 \cdot d\bar{l} = \int_a^b \mathcal{E}_z \cdot dz = r \Delta z I_0(z, t) \quad (2.11b)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.3), (2.4) y (2.11) en la ecuación (2.2), dividiendo por  $\Delta z$ , tomando el límite  $\Delta z \rightarrow 0$  y empleando (2.10) resulta

$$\frac{\partial}{\partial z} V^s(z, t) + r I(z, t) + \ell \frac{\partial}{\partial t} I(z, t) = \frac{\partial}{\partial z} \int_a^{a'} \bar{\mathcal{E}}_1^i \cdot d\bar{l} + \frac{\partial}{\partial t} \int^{a'} \bar{\mathcal{B}}^i \cdot \bar{a}_n dl \quad (2.12)$$

La ecuación (2.12) se puede expresar en una forma alternativa reconociendo que los campos eléctricos transversal y longitudinal y el campo magnético normal están relacionados por medio de la ley de inducción de Faraday. Expandiendo la ley de inducción de Faraday, dada por la ecuación (2.2), alrededor del contorno  $aa'b'ba$  en términos del campo incidente, dividiendo ambos lados del resultado por  $\Delta z$ , y tomando el límite  $\Delta z \rightarrow 0$  resulta

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_a^{a'} \bar{\mathcal{E}}_1^i \cdot d\bar{l} + \frac{\partial}{\partial t} \int_a^{a'} \bar{\mathcal{B}}^i \cdot \bar{a}_n dl = \mathcal{E}_z^i(\text{cond. de fase, } z, t) - \mathcal{E}_z^i(\text{cond. de retorno, } z, t) \quad (2.13)$$

donde:

$\mathcal{E}_z^i(\text{cond. de fase, } z, t)$  es el campo eléctrico incidente longitudinal (en dirección del eje  $z$ ) a lo largo del conductor de fase.

$\mathcal{E}_z^i(\text{cond. de retorno, } z, t)$  es el campo eléctrico incidente longitudinal a lo largo del conductor de retorno.

Sustituyendo la ecuación (2.13) en el lado derecho de la ecuación (2.12) se obtiene la primera ecuación de la línea de transmisión monofásica iluminada por campos electromagnéticos

$$\frac{\partial}{\partial z} V^s(z, t) + r I(z, t) + \ell \frac{\partial}{\partial t} I(z, t) = \mathcal{E}_z^i(\text{cond. de fase, } z, t) - \mathcal{E}_z^i(\text{cond. de retorno, } z, t) \quad (2.14)$$

Obsérvese que los voltajes en esta expresión son los voltajes de distorsión y no los voltajes totales.

## 2.2 SEGUNDA ECUACION DEL TELEGRAFISTA.

La segunda ecuación de la línea de transmisión puede ser derivada al considerar una superficie cerrada  $\mathcal{S}$  alrededor del conductor de fase como se muestra en la figura 2.2. La parte de las tapas en los extremos de la superficie cerrada se denota como  $\mathcal{S}_e$ , mientras la parte cilíndrica se denota como  $\mathcal{S}_o$ . Recordando la ecuación de continuidad o de conservación de la carga:

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{j} \cdot d\vec{\mathcal{S}} = -\frac{\partial}{\partial t} Q_{\text{enc}} \quad (2.15)$$

sobre las tapas en cada extremo se tiene que

$$\oiint_{\mathcal{S}_e} \vec{j} \cdot d\vec{\mathcal{S}} = I(z + \Delta z, t) - I(z, t) \quad (2.16)$$

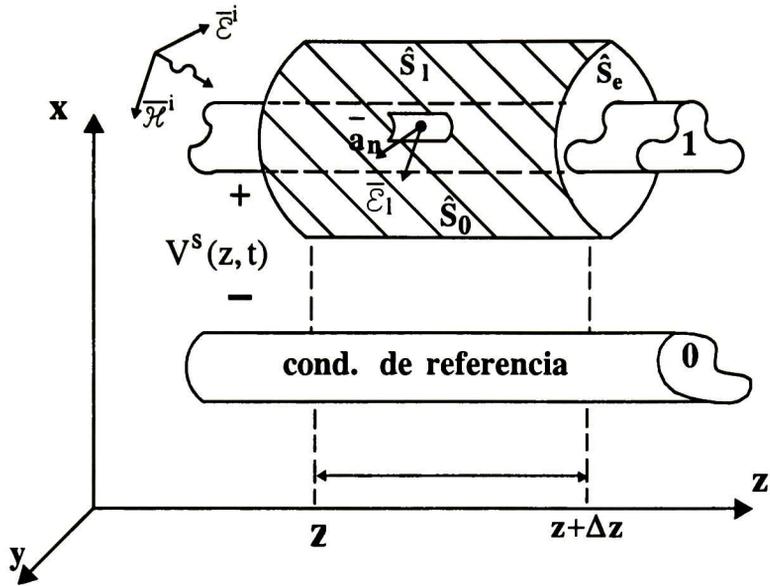


Figura 2.2 Definición de la superficie Gaussiana para la derivación de la segunda ecuación de línea de transmisión monofásica iluminada por un campo electromagnético.

Como el medio homogéneo que rodea a los conductores está caracterizado por una conductividad,  $\sigma$ , y una permitividad,  $\epsilon$ , sobre la parte cilíndrica de la superficie, existen dos corrientes: la corriente de conducción,  $\vec{j}_c = \sigma \vec{E}_1$ , y la corriente de desplazamiento,  $\vec{j}_d = \epsilon(\partial \vec{E}_1 / \partial t)$ . La parte izquierda de la ecuación (2.15) contiene solo la corriente de conducción transversal que fluye entre los conductores:

$$\iint_{\hat{s}_0} \vec{j}_c \cdot d\vec{s} = \sigma \iint_{\hat{s}_0} \vec{E}_t \cdot d\vec{s} \quad (2.17)$$

Definiendo una conductancia por unidad de longitud,  $g$  [s/m], entre los conductores en el plano transversal, se tiene que para una longitud de  $\Delta z$  se puede escribir

$$G = \frac{\iint_{\hat{s}_0} \vec{j}_c \cdot d\vec{s}}{V(z, t)} \quad (2.18)$$

A partir de (2.18) la conductancia por unidad de longitud se define como

$$g = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{G}{\Delta z} \quad (2.19a)$$

Por lo tanto

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \iint_{S_0} \vec{j}_c \cdot d\vec{s} = -gV^s(z, t) \quad (2.19b)$$

Por otro lado la carga encerrada por la superficie (residente en la superficie del conductor) se obtiene por medio la ley de Gauss de la siguiente forma

$$Q_{enc} = \epsilon \iint_{S_0} \vec{E}_t \cdot d\vec{s} \quad (2.20)$$

La carga por unidad de longitud de la línea puede ser definida en términos de capacitancias entre los conductores por unidad de longitud, C. La capacitancia entre los conductores para una sección  $\Delta z$  de la línea es

$$C = \frac{Q_{enc}}{V} \quad (2.21)$$

y la capacitancia por unidad de longitud es

$$c = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{C}{\Delta z} \quad (2.22a)$$

Por lo tanto en forma similar a la ecuación (2.19) se puede escribir

$$\epsilon \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \iint_{S_0} \vec{E}_t \cdot d\vec{s} = -cV^s(z, t) \quad (2.22b)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.16), (2.19) y (2.22) en la ecuación (2.15), dividiendo por  $\Delta z$  y tomando el límite  $\Delta z \rightarrow 0$ , resulta la segunda ecuación de la línea de transmisión.

$$\frac{\partial}{\partial z} I(z, t) + gV^s(z, t) + c \frac{\partial}{\partial t} V^s(z, t) = 0 \quad (2.23)$$

Al igual que en la ecuación (2.14) los resultados de la ecuación (2.23) están en términos de los voltajes de distorsión. Estos pueden ser expresados en términos de los voltajes totales por medio de:

$$V(z, t) = V^i(z, t) + V^s(z, t) = V^s(z, t) - \int_a^{a'} \vec{E}_t^i \cdot d\vec{l} \quad (2.24)$$

Sustituyendo la ecuación (2.24) en las ecuaciones (2.14) y (2.23) resulta

$$\frac{\partial}{\partial z} V(z, t) + r I(z, t) + \ell \frac{\partial}{\partial t} I(z, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_a^{a'} \bar{\mathcal{B}}^i \cdot \bar{a}_n d\bar{l} \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} I(z, t) + g V(z, t) + c \frac{\partial}{\partial t} V(z, t) = -g \int_a^{a'} \bar{\mathcal{E}}_t^i \cdot d\bar{l} - c \frac{\partial}{\partial t} \int_a^{a'} \bar{\mathcal{E}}_t^i \cdot d\bar{l} \quad (2.26)$$

Las ecuaciones (2.25) y (2.26) son las ecuaciones del telegrafista no homogéneas que incluyen el efecto de un campo electromagnético incidente sobre la línea de transmisión.

## CAPITULO III

### ANALISIS DE LINEAS DE TRANSMISION MONOFASICAS CON CAMPOS DE EXCITACION EXTERNOS EMPLEANDO EL METODO DE LAS CARACTERISTICAS.

#### 3.1 METODO DE LAS CARACTERISTICAS.

Las ecuaciones (2.26) y (2.25) que describen la propagación de ondas de voltaje y corriente en una línea de transmisión monofásica, son ecuaciones diferenciales parciales del tipo hiperbólico <sup>[27]</sup>; estas ecuaciones se pueden agrupar matricialmente de la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f1 \\ f2 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.1a)$$

donde

$$f1 = -C \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \vec{E}^i \cdot d\vec{l} \quad (3.1b)$$

$$f2 = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \vec{B}^i \cdot \vec{a}_n dl \quad (3.1c)$$

La expresión (3.1) no considera la conductancia del dieléctrico ni la dependencia de la frecuencia de los parámetros  $R$ ,  $L$  y  $C$ . En el caso más general, tanto la dependencia frecuencial como la conductancia deben incluirse. Nótese que en este capítulo los parámetros eléctricos por unidad de longitud se representan con letras mayúsculas. En las ecuaciones (3.1), la dependencia frecuencial introduce convoluciones. Un planteamiento de dichas ecuaciones, incluyendo convoluciones, es el propuesto por Radulet <sup>[28]</sup>:

$$-\frac{\partial v}{\partial z} = L_o \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t r'(t-\tau)i(\tau)d\tau \quad (3.2a)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial z} = C_o \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t g'(t-\tau)v(\tau)d\tau \quad (3.2b)$$

donde  $r'(t)$  representa la resistencia transitoria y  $g'(t)$  la conductancia transitoria de la línea;  $L_o$  y  $C_o$  son la inductancia y capacitancia geométricas (o de línea ideal) respectivamente. Este capítulo se centra en la solución de las ecuaciones (3.1) por el método de las características. La importancia de esta solución es que constituye la base para resolver el sistema formado por las ecuaciones (3.2a) y (3.2b) e, incluso, el problema de líneas con parámetros no lineales.

La expresión (3.1) puede generalizarse al caso polifásico de la forma siguiente\*\*:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}^{-1} \\ \mathbf{L}^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}\mathbf{L}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

donde  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{f}_1$ ,  $\mathbf{f}_2$  y  $\mathbf{0}$  son vectores de voltaje, corriente, fuente de corriente incidente, fuente de voltaje incidente y de ceros, respectivamente; todos ellos de orden  $m \times 1$ ;  $\mathbf{L}^{-1}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{C}^{-1}$  y  $\mathbf{0}$  son las matrices de inductancia, resistencia, capacitancia y de ceros, todas de orden  $m \times m$ , siendo  $m$  el número de fases en la línea.

El sistema de ecuaciones (3.1) para la línea de transmisión monofásica puede expresarse de la siguiente forma compacta:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \mathbf{A} \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{U} + \mathbf{B}\mathbf{U} + \mathbf{C}\mathbf{D} = \mathbf{0} \quad (3.4)$$

donde

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} \quad (3.5a)$$

---

\*\* En el capítulo V se analiza detalladamente este caso.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.5b)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{R}{L} \end{bmatrix} \quad (3.5c)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (3.5d)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (3.5e)$$

Esta representación tiene la ventaja de que las técnicas desarrolladas pueden ser extendidas a sistemas de ecuaciones diferenciales parciales de mayores dimensiones, como en el caso de líneas de transmisión multiconductoras.

La matriz  $\mathbf{A}$  tiene los siguientes eigenvalores:

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (3.6a)$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (3.6b)$$

los cuales son reales y distintos y, por lo tanto, el sistema (3.4) es hiperbólico. Asociado con estos eigenvalores se encuentran las siguientes matrices de eigenvectores derechos e izquierdos respectivamente:

$$\mathbf{E}_{\text{der}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{C/L} & -\sqrt{C/L} \end{bmatrix} \quad (3.7a)$$

$$\mathbf{E}_{\text{izq}} = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{L/C} \\ 1 & -\sqrt{L/C} \end{bmatrix} \quad (3.7b)$$

$\lambda_1$  y  $\lambda_2$  corresponden a las velocidades de onda. Ya que los elementos del segundo renglón de  $\mathbf{E}_{der}$  tienen las dimensiones de una admitancia y la segunda columna de  $\mathbf{E}_{izq}$  tiene las dimensiones de una impedancia, se les denomina admitancia de onda e impedancia de onda respectivamente <sup>[41]</sup>, y se definen mediante

$$Y_w = \sqrt{C/L} \quad (3.8a)$$

$$Z_w = \sqrt{L/C} \quad (3.8b)$$

Si se multiplica la ecuación (3.4) por el primer renglón de la matriz de eigenvectores izquierdos y se agrupan términos en  $v$  e  $i$  se obtiene:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial z} \right) v + Z_w \left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial z} \right) i + \lambda_1 R i + \lambda_1 Z_w f_1 + \lambda_1 f_2 = 0 \quad (3.9)$$

De la multiplicación del segundo renglón de la matriz de eigenvectores izquierdos por el sistema (3.4) resulta:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial z} \right) v - Z_w \left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial z} \right) i + \lambda_2 R i + \lambda_1 Z_w f_1 + \lambda_2 f_2 = 0 \quad (3.10)$$

Restringiendo ahora la ecuación (3.9) a una curva sobre el plano  $z$ - $t$ , tal que:

$$\frac{dz}{dt} = \lambda_1 \quad (3.11)$$

se tiene que:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{d}{dt} \quad (3.12)$$

De igual forma, la ecuación (3.10) se restringe a la curva

$$\frac{dz}{dt} = \lambda_2 \quad (3.13)$$

de tal manera que

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{d}{dt} \quad (3.14)$$

Por lo tanto, sustituyendo las ecuaciones (3.12) y (3.14) en las ecuaciones (3.9) y (3.10) se obtiene el siguiente par de ecuaciones:

$$dv + Z_w di + Ri dz + Z_w f_1 dz + f_2 dz = 0 \quad (3.15a)$$

$$dv - Z_w di + Ri dz + Z_w f_1 dz + f_2 dz = 0 \quad (3.15b)$$

Las dos familias de curvas definidas por las ecuaciones (3.11) y (3.13) son las curvas características o simplemente características de la ecuación (3.4). El hecho de que el sistema (3.4) sea hiperbólico garantiza que a través de cualquier punto del plano  $z-t$  <sup>[41]</sup> cruzan dos características. Estas curvas pueden ser tomadas como un nuevo sistema de coordenadas para las ecuaciones (3.15a) y (3.15b), en el cual éstas equivalen al sistema de la ecuación (3.4). La principal ventaja de esta formulación radica en la disponibilidad de técnicas poderosas para tratar con sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

### 3.2. SOLUCION NUMERICA DE LAS ECUACIONES EN DERIVADAS TOTALES DE LA LINEA DE TRANSMISION.

Las ecuaciones (3.15a) y (3.15b) se pueden discretizar mediante diferencias centrales y valores promedio para resolverse en el marco de las diferencias finitas <sup>[41]</sup> Primero se comienza por definir la discretización del dominio a través de una malla como se indica en la figura 3.1. Esta figura muestra la discretización que se aplica para puntos intermedios de una línea uniforme. La figura 3.1 corresponde a  $\lambda$ 's constantes, por lo cual, las curvas características son rectas. Cuando los eigenvalores son función de alguna de las variables dependientes, las características son curvas y se deben utilizar interpolaciones para definir los puntos de cruce "e" y "g". Ejemplos de estos son líneas no lineales y no uniformes.

Bajo el esquema de discretización de la figura 3.1 la ecuación (3.15a) se transforma en una ecuación de diferencias de la siguiente forma:

$$(v_j - v_e) + Z_w(i_j - i_e) + \frac{R_{cd}\Delta z}{2}(i_j + i_e) + \frac{Z_w\Delta z}{2}(f_{1j} + f_{1e}) + \frac{\Delta z}{2}(f_{2j} + f_{2e}) = 0 \quad (3.16)$$

donde  $v_e$  e  $i_e$  son los valores de voltaje y corriente en el punto  $e$ , y  $v_j$  e  $i_j$  son los correspondientes al punto  $j$ . Note que en el tercero, cuarto y quinto término de la ecuación (3.15a), la corriente, la fuente de corriente inducida y la fuente de voltaje inducido son aproximados por el valor promedio entre el punto  $e$  y  $j$ .

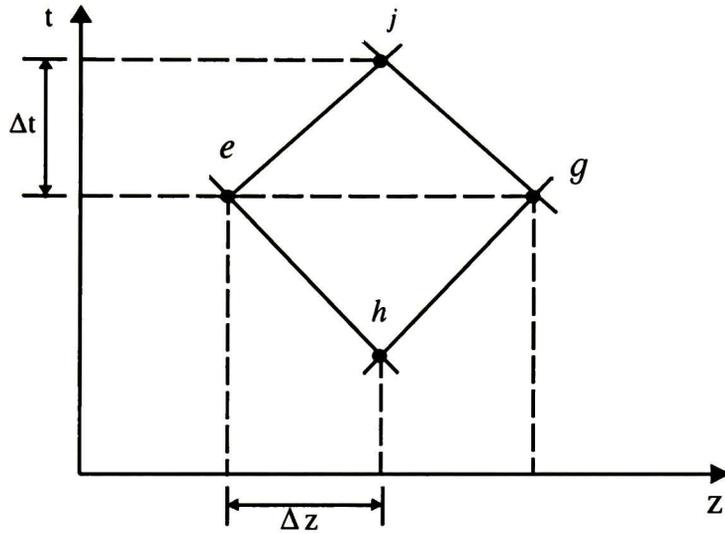


Figura 3.1 Malla de discretización para puntos intermedios.

De la misma forma la ecuación (3.15b) es aproximada entre los puntos  $j$  y  $g$  de la siguiente forma:

$$(v_j - v_g) - Z_w(i_j - i_g) - \frac{R_{cd}\Delta z}{2}(i_j + i_g) - \frac{Z_w\Delta z}{2}(f_{1j} + f_{1g}) - \frac{\Delta z}{2}(f_{2j} + f_{2g}) = 0 \quad (3.17)$$

donde  $v_g$  e  $i_g$  son los respectivos valores de voltaje y corriente en el punto  $g$ . Las ecuaciones (3.16) y (3.17) pueden ser ordenadas de la siguiente forma:

$$v_j + \left[ Z_w + \frac{R_{cd}\Delta z}{2} \right] i_j - v_e - \left[ Z_w - \frac{R_{cd}\Delta z}{2} \right] i_e + \frac{\Delta z}{2} [Z_w(f_{1j} + f_{1e}) + f_{2j} + f_{2e}] = 0 \quad (3.18a)$$

$$v_j - \left[ Z_w + \frac{R_{cd}\Delta z}{2} \right] i_j - v_g + \left[ Z_w - \frac{R_{cd}\Delta z}{2} \right] i_g - \frac{\Delta z}{2} [Z_w(f_{1j} + f_{1g}) + f_{2j} + f_{2g}] = 0 \quad (3.18b)$$

donde

$$Z_{w1} = Z_w + \frac{R_{cd}\Delta z}{2} \quad (3.19a)$$

$$Z_{w2} = Z_w - \frac{R_{cd}\Delta z}{2} \quad (3.19b)$$

Finalmente las ecuaciones (3.18a) y (3.18b) se pueden resolver para obtener el estado de la línea de transmisión en el punto “j”:

$$i_j = \frac{1}{2Z_{w1}} \left\{ v_e - v_g + Z_{w2} (i_e + i_g) - \Delta z \left[ Z_w (f_{1j} + f_{1e}) + f_{2j} + f_{2e} \right] \right\} \quad (3.20a)$$

$$v_j = \frac{1}{2} \left[ v_e + v_g + Z_{w2} (i_e - i_g) \right] \quad (3.20a)$$

Un caso especial es el de los puntos extremos o frontera de la línea de transmisión; la figura 3.2 indica la malla de discretización para estos puntos. En los extremos se tiene únicamente una curva característica representada por la ecuación (3.15a) o (3.15b); la otra ecuación debe ser proporcionada por las condiciones de frontera.

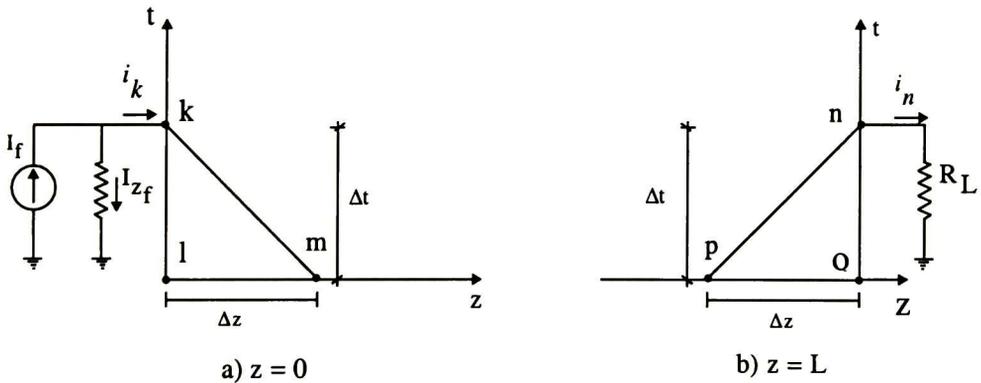


Figura 3.2 Mallas de discretización para puntos en las fronteras.

Supóngase que en la frontera  $z=0$  se tiene una fuente no ideal con una impedancia  $Z_f$ , cuya corriente está dada por:

$$i_k = f(t) \quad (3.21)$$

y una carga resistiva cuya relación está dada por:

$$i_k = i_f - \frac{v_k}{Z_f} \quad (3.22)$$

donde  $f(t)$  es una función cualquiera del tiempo. La ecuación (3.15b) se discretiza de la siguiente forma:

$$(v_k - v_m) - Z_w(i_k - i_m) - \frac{R\Delta z}{2}(i_k + i_m) - \frac{Z_w\Delta z}{2}(f_{1k} + f_{1m}) - \frac{\Delta z}{2}(f_{2k} + f_{2m}) = 0 \quad (3.23)$$

Ordenando términos se tiene:

$$i_k(-Z_f - Z_{w1}) + Z_f i_f - v_m + Z_{w2} i_m - \frac{\Delta z}{2} [Z_w(f_{1k} + f_{1m}) + f_{2k} + f_{2m}] = 0 \quad (3.24)$$

donde  $Z_{w1}$  y  $Z_{w2}$  se definen en las ecuaciones (3.19a) y (3.19b). Finalmente la ecuación para determinar la corriente en el punto frontera "k" es:

$$i_k = \left( \frac{1}{-Z_f - Z_{w1}} \right) \left\{ -Z_f i_f + v_m - Z_{w2} i_m - \frac{\Delta z}{2} [Z_w(f_{1k} + f_{1m}) + f_{2k} + f_{2m}] \right\} \quad (3.25)$$

Suponiendo que en la frontera donde  $z=L$ , se encuentra conectada una carga resistiva cuya relación está dada por:

$$v_n = R_L i_n \quad (3.26)$$

la ecuación (3.15a) se discretiza de la siguiente forma:

$$(v_n - v_p) + Z_w(i_n - i_p) + \frac{R_{cd}\Delta z}{2}(i_n + i_p) + \frac{Z_w\Delta z}{2}(f_{1n} + f_{1p}) + \frac{\Delta z}{2}(f_{2n} + f_{2p}) = 0 \quad (3.27)$$

Agrupando términos comunes

$$i_n(Z_{w1} + R_L) - v_p - Z_{w2} i_p + \frac{\Delta z}{2} [Z_w(f_{1n} + f_{1p}) + f_{2n} + f_{2p}] = 0 \quad (3.28)$$

Finalmente sustituyendo la ecuación (3.26) en la ecuación (3.28) resulta la ecuación:

$$i_n = \frac{1}{Z_{w1} + R_L} \left\{ v_p + Z_{w2} i_p - \frac{\Delta z}{2} [Z_w(f_{1n} + f_{1p}) + f_{2n} + f_{2p}] \right\} \quad (3.29)$$

Condiciones de frontera más complejas resultan en ecuaciones de diferencias que se resuelven simultáneamente con aquellas dadas por las expresiones (3.15).

La convergencia de las ecuaciones que aproximan a las EDPs es garantizada por la condición de Courant – Friederichs Lewy (CFL) <sup>[29]</sup> que para la ecuación (3.1) se puede expresar como:

$$\left| \frac{\Delta z}{\Delta t} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (3.30)$$

Obsérvese que las ecuaciones (3.11) y (3.13) son equivalentes a la ecuación (3.30). Esto quiere decir que el método de las características cumple implícitamente con la condición de Courant.

### **3.3 CASO DE ESTUDIO PARA UNA LINEA DE TRANSMISION MONOFASICA CON CAMPOS ELECTROMAGNETICOS INCIDENTES.**

Para este caso de estudio se simuló una línea de transmisión cuya configuración se muestra en la figura 3.3. La simulación se llevó a cabo por medio del método de las características y el EMTP.

Los datos de la línea fueron los siguientes,  $r=11.743$  [ $\Omega/\text{Km}$ ],  $L=1.25$  [ $\text{mH}/\text{Km}$ ],  $C=9.664 \times 10^{-3}$  [ $\mu\text{F}/\text{Km}$ ] y una frecuencia de operación del sistema de 60 [Hz]. La línea de transmisión se dividió en veinte secciones. De los campos incidentes solo se consideró el campo magnético perpendicular a la superficie definida por la línea y el retorno. La forma de onda del voltaje distribuido serie inducido fue una doble rampa, como se muestra en la figura 3.4.

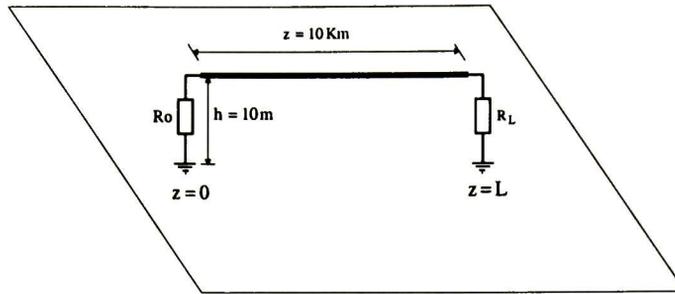
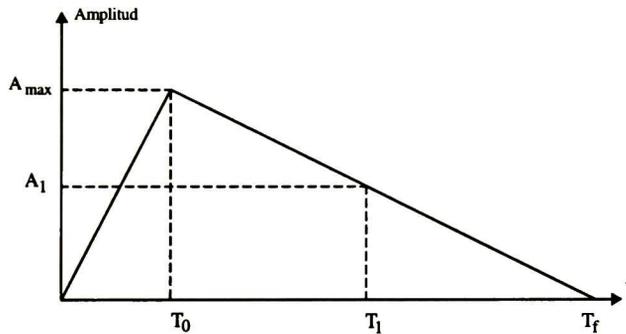


Figura 3.3. Configuración considerada para la línea de transmisión monofásica con incidencia de campos electromagnéticos.



$A_{\max}$  = Amplitud máxima.

$A_1$  = Valor medio de  $A_{\max}$  de la pendiente negativa.

$T_0$  = Tiempo de alcance de  $A_{\max}$ .

$T_1$  = Tiempo de alcance de  $A_1$ .

$T_f$  = Tiempo final de la onda.

Figura 3.4. Forma de onda del voltaje distribuido serie utilizado para la simulación.

Para llevar a cabo la simulación en EMTP, primeramente se determinaron los parámetros independientes de la frecuencia de la línea de transmisión monofásica por medio de la rutina de parámetros eléctricos incluida en el EMTP, en dicha rutina, solo es necesario introducir algunos parámetros constantes de la línea de transmisión y su configuración, tal como la longitud, radio, altura, separación entre los conductores, resistividad del terreno,

entre otros. También es necesario proporcionar la frecuencia a la cual serán calculados los parámetros eléctricos de la línea de transmisión.

Para realizar la simulación en el EMTP fue necesario dividir la línea en un cierto número de secciones y considerar cada sección como una línea independiente. En cada sección de línea se debe incluir el voltaje serie distribuido originado por el campo magnético incidente. Las fuentes de voltaje ideales entre dos nodos, de los cuales ninguno es el nodo de referencia, no pueden simularse en el EMTP. Para resolver este problema fue necesario introducir fuentes de corriente en paralelo y resistencias para obtener el mismo efecto que las fuentes de voltaje serie. La configuración que se utilizó para la simulación es la mostrada en la figura 3.5.

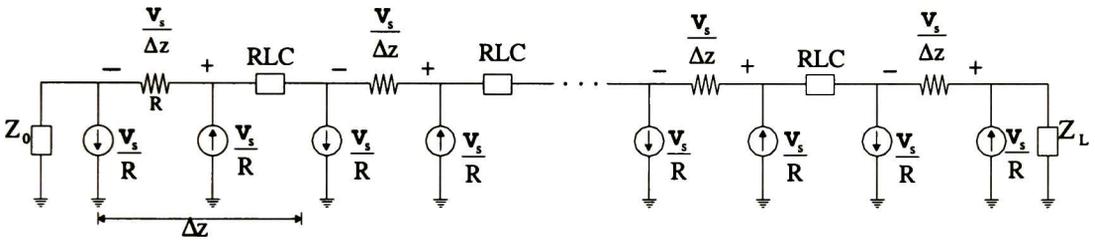


Figura 3.5. Esquema utilizado para llevar a cabo la simulación en EMTP para una línea de transmisión monofásica con incidencia de campos electromagnéticos.

Para cada  $\Delta z$  se debe satisfacer la ecuación de caída de voltaje serie

$$-\frac{\partial v_s}{\partial z} + L \frac{\partial i}{\partial t} + R i = v_s \quad (3.31)$$

Para cumplir con la ec.(3.31) el valor de la resistencia serie entre cuyas terminales aparecerá una caída de voltaje igual a la fuente de voltaje inducida es

$$R = V_s / \Delta z \quad (3.32)$$

y el valor de las fuentes de corriente ideales en paralelo es

$$I = V_s / R \quad (3.33)$$

La impedancia al inicio y la impedancia al final de la línea de transmisión,  $Z_0$  y  $Z_L$  respectivamente, son iguales a la impedancia característica de la línea de transmisión. Este valor para la impedancia característica se obtuvo por medio de la rutina de parámetros eléctricos del EMTP.

En la figura 3.6 se muestran los voltajes en los extremos emisor y receptor de la línea obtenidos empleando el método de las características. En la figura 3.7 se muestran los voltajes en los mismos puntos pero obtenidos con el EMTP. En la figura 3.8 se muestran los resultados con ambos métodos para fines de comparación. Se puede observar que prácticamente se obtienen las mismas formas de onda con los dos métodos. Sin embargo, es importante notar que las simulaciones con el EMTP requieren de una gran cantidad de tiempo y esfuerzo por parte del usuario. Esto se debe que en el EMTP, como ya se mencionó, cada sección de línea de longitud  $\Delta z$  se debe introducir como una línea independiente con su fuente de excitación correspondiente.

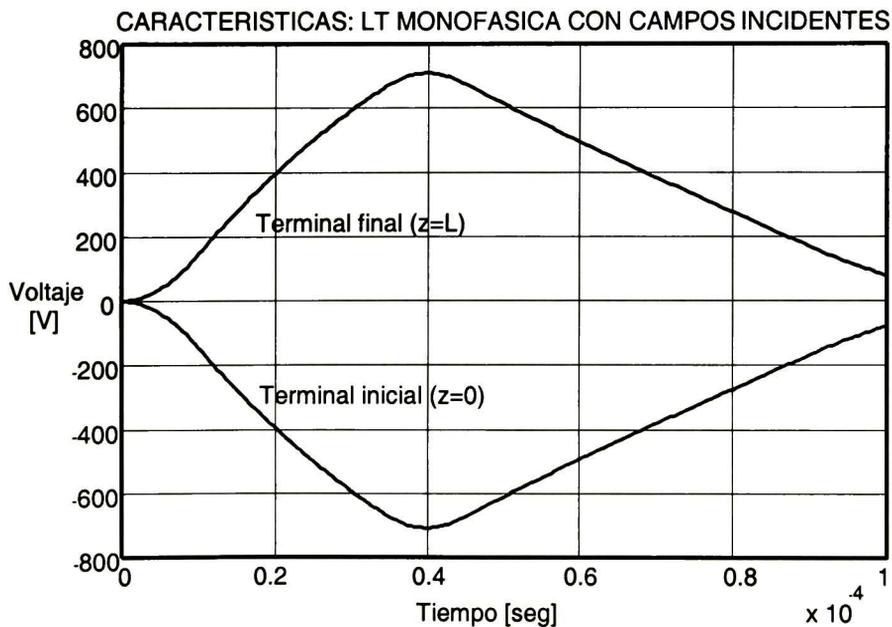


Figura 3.6 Cálculo por el método de las características de los voltajes en cada extremo de la línea de transmisión.

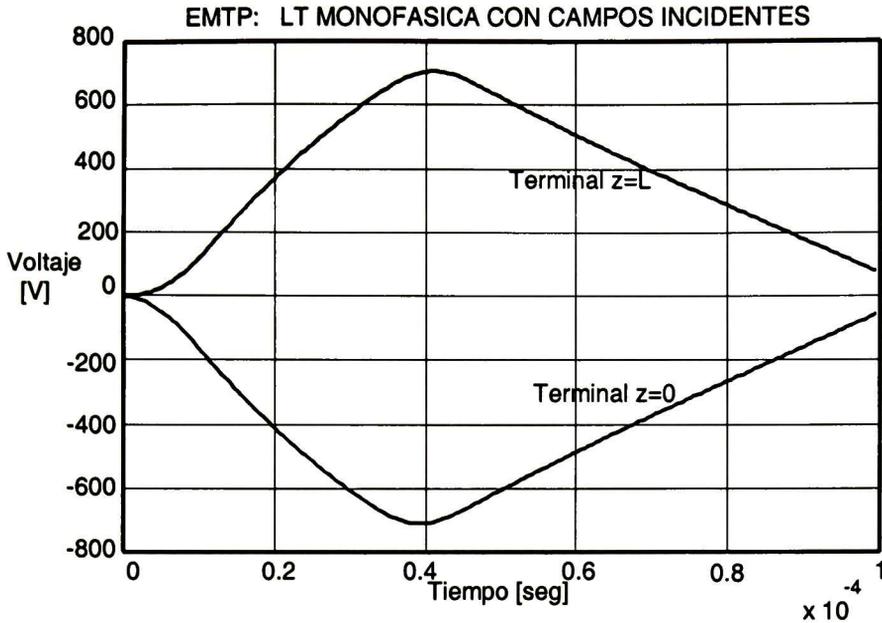


Figura 3.7 Cálculo con el EMTP de los voltajes en cada extremo de la línea de transmisión.

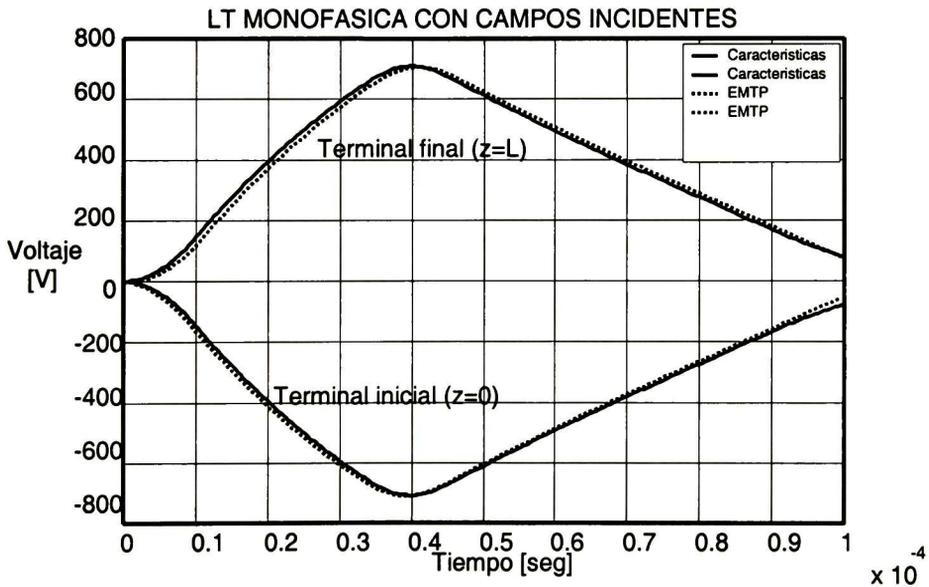


Figura 3.8 Comparación entre el método de las características y el EMTP para los voltajes en cada extremo de la línea de transmisión.

## CAPITULO IV

### LINEAS DE TRANSMISION MULTICONDUCTORAS CON CAMPOS ELECTROMAGNETICOS INCIDENTES

#### 4.1. PRIMERA ECUACION PARA LINEAS DE TRANSMISION MULTICONDUCTORAS (LTM) CON CAMPOS ELECTROMAGNETICOS INCIDENTES.

Considérese una LTM uniforme compuesta de (n+1) conductores paralelos al eje z, como se muestra en la figura 4.1-1. Para derivar la primera ecuación de comportamiento, se aplica la ley de inducción de Faraday en su forma integral a lo largo del contorno  $C_i$ , formado por el i-ésimo conductor y el conductor de retorno, tal y como se indica en la figura 4.1-1.

$$\oint_{C_i} \bar{E} \cdot d\bar{l} = \frac{d}{dt} \int_{S_i} \bar{B} \cdot d\bar{s} \quad (4.1)$$

o bien

$$\int_a^{a'} \bar{E}_t \cdot d\bar{l} + \int_{a'}^{b'} \bar{E}_l \cdot d\bar{l} + \int_{b'}^b \bar{E}_t \cdot d\bar{l} + \int_b^a \bar{E}_l \cdot d\bar{l} = \frac{d}{dt} \int_{S_i} \bar{B} \cdot \bar{a}_n ds \quad (4.2)$$

donde  $\bar{E}_t$  es el campo eléctrico transversal contenido en la sección del plano formado por las coordenadas x-y y  $\bar{E}_l$  es el campo eléctrico longitudinal en dirección del eje z a lo largo de las superficies de los conductores. Observe que el lado derecho de la ley de inducción de Faraday es positiva debido a la elección del sentido para el vector unitario normal,  $\bar{a}_n$ , y a la regla de la mano derecha tal y como se muestra en la figura 4.1-1. Como ya se mencionó en el capítulo 2 el campo total es la suma de los campos incidentes y de distorsión, esto es

$$\begin{aligned} \bar{E}_t &= \bar{E}_t^i + \bar{E}_t^s \\ \bar{E}_l &= \bar{E}_l^i + \bar{E}_l^s \\ \bar{B} &= \bar{B}^i + \bar{B}^s \end{aligned} \quad (4.3)$$

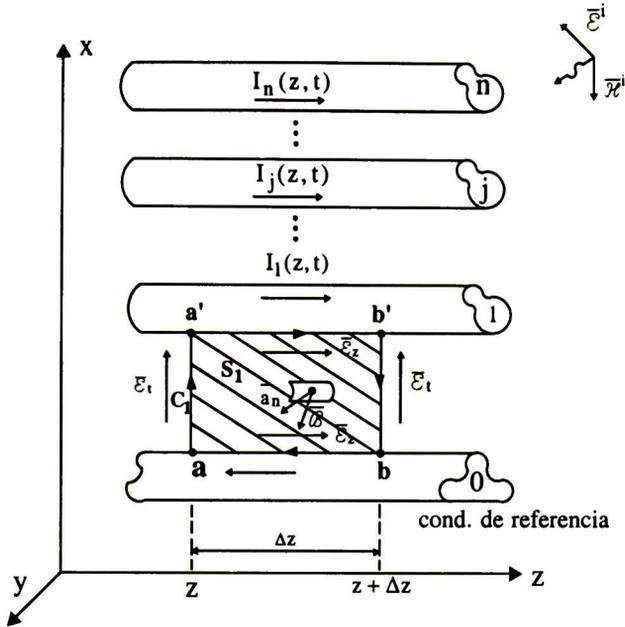


Figura 4.1-1 Definición del contorno para la derivación de la primer ecuación de LTM iluminada por campos incidentes.

donde el superíndice  $i$  denota el campo incidente, mientras que el superíndice  $s$  denota el campo de distorsión. Si se asume que la corriente en los conductores viaja solo en dirección del eje  $z$ , entonces el campo magnético de distorsión estará situado totalmente en el plano transversal. Como el campo  $\vec{B}^s$  no tiene componente en la dirección  $z$ , la ley de inducción de Faraday muestra que es posible definir en forma única el voltaje de distorsión entre el  $i$ -ésimo conductor de fase y el conductor de referencia, esto independiente de la trayectoria de integración en el plano transversal, por lo tanto

$$V_i^s(z, t) = -\int_a^{a'} \vec{E}_t^s \cdot d\vec{l} \quad (4.4a)$$

$$V_i^s(z + \Delta z, t) = -\int_b^{b'} \vec{E}_t^s \cdot d\vec{l} \quad (4.4b)$$

Ahora bien, debido a la naturaleza transversal del campo magnético de distorsión, éste puede relacionarse con las corrientes que lo producen por medio de las inductancias por unidad de longitud:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \int_{S_i} \vec{\mathcal{B}}^s \cdot \vec{a}_n ds = -[l_{i1} \cdots l_{ii} \cdots l_{in}] \begin{bmatrix} I_1(z, t) \\ \vdots \\ I_i(z, t) \\ \vdots \\ I_n(z, t) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Asúmase ahora que las pérdidas en los conductores se pueden representar con resistencias por unidad de longitud,  $r_i$ . Esta resistencia podría estar lógicamente en función de la frecuencia debido al efecto skin, sin embargo se asumirá que es constante. Los campos longitudinales totales están relacionados con las corrientes en los conductores como

$$\int_a^{b'} \vec{\mathcal{E}}_1 \cdot d\vec{l} = \int_a^{b'} \mathcal{E}_z dz = r_i \Delta z I_i(z, t) \quad (4.6a)$$

$$\int_a^b \vec{\mathcal{E}}_1 \cdot d\vec{l} = \int_a^b \mathcal{E}_z dz = r_o \Delta z \sum_{k=1}^n I_k(z, t) \quad (4.6b)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.3), (4.4), (4.5) y (4.6) en la ecuación (4.2), dividiendo por  $\Delta z$  y tomando el límite  $\Delta z \rightarrow 0$  resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} V_i^s(z, t) + [r_o \cdots r_i + r_o \cdots r_o] \begin{bmatrix} I_1(z, t) \\ \vdots \\ I_i(z, t) \\ \vdots \\ I_n(z, t) \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial t} [l_{i1} \cdots l_{ii} \cdots l_{in}] \begin{bmatrix} I_1(z, t) \\ \vdots \\ I_i(z, t) \\ \vdots \\ I_n(z, t) \end{bmatrix} \\ = \frac{\partial}{\partial z} \int_a^{a'} \vec{\mathcal{E}}_t^i \cdot d\vec{l} + \frac{\partial}{\partial t} \int_a^{a'} \vec{\mathcal{B}}^i \cdot \vec{a}_n dl \end{aligned} \quad (4.7)$$

Repetiendo lo anterior para cada conductor y agrupando los resultados en forma matricial, se puede escribir

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{V}^s(z, t) + \mathbf{R} \mathbf{I}(z, t) + \mathbf{L} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{I}(z, t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \int_a^{a'} \vec{\mathcal{E}}_t^1 \cdot d\vec{l} + \frac{\partial}{\partial t} \int_a^{a'} \vec{\mathcal{B}}^1 \cdot \vec{a}_n dl \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial z} \int_a^{a'} \vec{\mathcal{E}}_t^i \cdot d\vec{l} + \frac{\partial}{\partial t} \int_a^{a'} \vec{\mathcal{B}}^i \cdot \vec{a}_n dl \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

La expresión (4.8) se puede escribir en una forma alternativa reconociendo que los campos eléctrico transversal y longitudinal, y el campo magnético normal están relacionados por la ley de inducción de Faraday. Lo anterior puede ser planteado escribiendo la ley de inducción de Faraday alrededor del contorno  $aa'b'ba$  en términos de campo incidente, dado en la ecuación (4.2), dividiendo ambos lados entre  $\Delta z$ , y tomando el límite  $\Delta z \rightarrow 0$ , por lo que resulta la siguiente expresión

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_a^{a'} \vec{E}_t^i \cdot d\vec{l} + \frac{\partial}{\partial t} \int_a^{a'} \vec{B}^i \cdot \vec{a}_n dl = \mathcal{E}_z^i(i\text{-ésimo cond.}, z, t) - \mathcal{E}_z^i(\text{cond. de ref.}, z, t) \quad (4.9)$$

donde  $\mathcal{E}_z^i(i\text{-ésimo cond.}, z, t)$  es el campo eléctrico incidente en dirección del eje  $z$  a lo largo del  $i$ -ésimo conductor de fase con este removido y  $\mathcal{E}_z^i(\text{cond. de ref.}, z, t)$  es el campo eléctrico incidente longitudinal a lo largo del conductor de referencia. Sustituyendo la ecuación (4.9) al lado derecho de la ecuación (4.8) resulta la primera ecuación de LTM iluminada por campos electromagnéticos incidentes

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{V}^s(z, t) + \mathbf{R}\mathbf{I}(z, t) + \mathbf{L} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{I}(z, t) = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathcal{E}_z^i(i\text{-ésimo cond.}, z, t) - \mathcal{E}_z^i(\text{cond. de ref.}, z, t) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Obsérvese que los voltajes en esta expresión son los voltajes de distorsión y no los voltajes totales.

## 4.2. SEGUNDA ECUACION PARA LINEAS DE TRANSMISION MULTICONDUCTORAS (LTM) CON CAMPOS ELECTROMAGNETICOS INCIDENTES.

La segunda ecuación de la LTM se deriva encerrando el  $i$ -ésimo conductor con una superficie cerrada  $\mathcal{S}$ , como se ilustra en la figura 4.1-2, y aplicando la ecuación de la conservación de la carga

$$\oiint_{\mathcal{S}_i} \vec{j} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} Q_{\text{enc}} \quad (4.11)$$

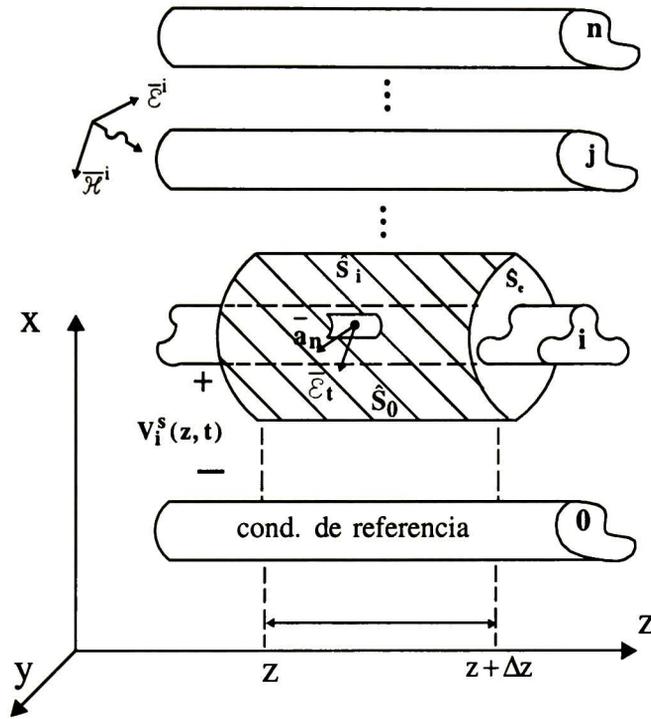


Figura 4.1-2 Definición de la superficie para la derivación de la segunda ecuación de LTM iluminadas por campos electromagnéticos incidentes.

Sobre las tapas en cada extremo de la superficie cerrada se tiene

$$\iint_{S_c} \vec{j} \cdot d\vec{S} = I_i(z + \Delta z, t) - I_i(z, t) \quad (4.12)$$

En forma similar al procedimiento seguido para encontrar la primera ecuación para LTM, es necesario definir ciertos parámetros eléctricos, en este caso se trata de las matrices de inductancia y capacitancia por unidad de longitud. La corriente ohmica total transversal que sale del  $i$ -ésimo conductor se relaciona con los voltajes de todos los conductores por medio de conductancias transversales  $g_{ik}$ , de tal manera que

$$\mathbf{I}_i(z, t) = \text{Lim}_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \iint_{S_0} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \begin{bmatrix} -g_{i1} \cdots \sum_{k=1}^n g_{ik} \cdots -g_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^s(z, t) \\ \vdots \\ V_i^s(z, t) \\ \vdots \\ V_n^s(z, t) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

donde  $\mathbf{I}_i(z, t)$  es la corriente de conducción transversal entre el  $i$ -ésimo conductor y el resto de los conductores. De igual forma para la corriente total de desplazamiento se puede escribir

$$\text{Lim}_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{Q_{enc}}{\Delta z} = \begin{bmatrix} -C_{i1} \cdots \sum_{k=1}^n C_{ik} \cdots -C_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^s(z, t) \\ \vdots \\ V_i^s(z, t) \\ \vdots \\ V_n^s(z, t) \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.12), (4.13) y (4.14) en la ecuación (4.11), dividiendo por  $\Delta z$ , y tomando el límite  $\Delta z \rightarrow 0$ , se obtiene la segunda ecuación de LTM con incidencia de campos electromagnéticos que en forma matricial se puede escribir

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{I}(z, t) + \mathbf{G} \mathbf{V}^s(z, t) + \mathbf{C} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}^s(z, t) = \mathbf{0} \quad (4.15)$$

Los resultados anteriores están en términos del voltaje de distorsión. Las ecuaciones (4.8) y (4.15) pueden ser representadas en términos de los voltajes totales empleando la siguiente relación

$$V_i(z, t) = V_i^j(z, t) + V_i^s(z, t) = V_i^s(z, t) - \int_a^{a'} \vec{E}_t^i \cdot d\vec{l} \quad (4.16)$$

Sustituyendo la ecuación (4.16) en las ecuaciones (4.8) y (4.15) se obtiene las siguientes ecuaciones

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{V}(z, t) + \mathbf{R} \mathbf{I}(z, t) + \mathbf{L} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{I}(z, t) = \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \vdots \\ \int_a^{a'} \vec{B}^i \cdot \vec{a}_n dl \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.17a)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{I}(z, t) + \mathbf{G} \mathbf{V}(z, t) + \mathbf{C} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}(z, t) = -\mathbf{G} \begin{bmatrix} \vdots \\ \int_a^{a'} \bar{\mathcal{E}}_t^i \cdot d\bar{l} \\ \vdots \end{bmatrix} - \mathbf{C} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \vdots \\ \int_a^{a'} \bar{\mathcal{E}}_t^i \cdot d\bar{l} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.17b)$$

Las ecuaciones (4.17a) y (4.17b) son ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento del voltaje y la corriente en la LTM, mejor conocidas como las ecuaciones del telegrafista no homogéneas que incluyen el efecto de un campo electromagnético incidente sobre la LTM, tales ecuaciones están en función de los voltajes totales.

## CAPITULO V

### SOLUCION A LAS ECUACIONES DE LTM CON CAMPOS ELECTROMAGNETICOS INCIDENTES POR EL METODO DE LAS CARACTERISTICAS.

#### 5.1 METODO DE LAS CARACTERISTICAS.

Para aplicar el método de las características a las ecuaciones de las LTM con campos electromagnéticos incidentes, considérese las ecuaciones (4.17a) y (4.17b), con parámetros independientes de la frecuencia<sup>[31, 32]</sup>

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{I}(z,t) + \mathbf{G}\mathbf{V}(z,t) + \mathbf{C} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}(z,t) = -\mathbf{G} \left[ \begin{array}{c} \vdots \\ \int_0^h \overline{\mathcal{E}}^i \cdot d\bar{l} \\ \vdots \end{array} \right] - \mathbf{C} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \begin{array}{c} \vdots \\ \int_0^h \overline{\mathcal{E}}^i \cdot d\bar{l} \\ \vdots \end{array} \right] \quad (5.1a)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{V}(z,t) + \mathbf{R}\mathbf{I}(z,t) + \mathbf{L} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{I}(z,t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \begin{array}{c} \vdots \\ \int_0^h \overline{\mathcal{B}}^i \cdot \bar{a}_n d\bar{l} \\ \vdots \end{array} \right] \quad (5.1b)$$

donde  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{I}$  son los vectores de voltaje y corriente, respectivamente;  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{G}$  son las matrices de inductancia serie, de capacitancia paralelo, de resistencia serie y conductancia paralelo por unidad de longitud, respectivamente;  $\overline{\mathcal{B}}^i$  es la densidad de campo magnético incidente y  $\overline{\mathcal{E}}^i$  es la intensidad del campo eléctrico incidente. Si la LTM tiene  $n$  fases, el orden de las matrices  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{I}$  es  $n \times 1$ , y el de  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{G}$  es  $n \times n$ . En el caso de líneas aéreas la conductividad del medio donde se encuentran los conductores es cero, por lo tanto  $\mathbf{G}=\mathbf{0}$ . Las expresiones (5.1a) y (5.1b) se pueden agrupar matricialmente de la siguiente forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}^{-1} \\ \mathbf{L}^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}^{-1}\mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f1 \\ f2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

donde

$$f1 = -\mathbf{C} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_0^h \vec{\mathcal{E}}^i \cdot d\vec{l} \right] \quad (5.3a)$$

$$f2 = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_0^h \vec{\mathcal{B}}^i \cdot \vec{a}_n dl \right] \quad (5.3b)$$

La ecuación (5.2) constituye un sistema de  $2n$  ecuaciones diferenciales parciales (EDP's) de primer orden, con  $z$  y  $t$  como variables independientes. Por definición la ecuación (5.2) representa un sistema hiperbólico si la matriz  $\mathbf{A}$ , de orden  $2n \times 2n$  tiene solo eigenvalores reales y, además, un conjunto completo de  $2n$  eigenvectores linealmente independientes <sup>[32, 33, 34]</sup>.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}^{-1} \\ \mathbf{L}^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

La matriz  $\mathbf{A}$ , algebraicamente es similar a una matriz diagonal, cuyos elementos diferentes de cero son reales <sup>[35]</sup>. Para verificar este caso, se puede mostrar que la matriz inversa de la ecuación (5.4) es

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{L} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Efectivamente se puede demostrar que para una LTM los eigenvalores de  $\mathbf{A}$  son reales y que hay  $2n$  eigenvectores linealmente independientes. Sea  $\mathbf{T}_v$  la matriz que diagonaliza al producto  $\mathbf{LC}$  de la siguiente forma <sup>[36]</sup>

$$\mathbf{T}_v^{-1} \mathbf{LC} \mathbf{T}_v = \Lambda \quad (5.6)$$

De acuerdo a la teoría modal convencional de LTM <sup>[37]</sup>,  $\mathbf{T}_v$  corresponde a una matriz cuyas columnas son los modos de voltaje de una LTM sin pérdidas. Los elementos diferentes de cero de la matriz diagonal  $\Lambda$  son el inverso de las velocidades al cuadrado del modo correspondiente <sup>[32]</sup>. La naturaleza física de LTM requiere que los elementos diagonales de

la matriz  $\Lambda$  sean reales y positivos. Las matrices  $L$  y  $C$  son reales y simétricas. Una vez asumida la definición de ser positivas, el problema de eigenvalores

$$LCV = \lambda V \quad (5.7)$$

es equivalente al de eigenvalor generalizado solo si

$$CV = \lambda L^{-1}V \quad (5.8)$$

del cual se conoce que tiene eigenvalores reales <sup>[38]</sup>.

Otra matriz importante es  $T_i$ , cuyas columnas están formadas por los modos de corriente, que diagonalizan el producto  $CL$ , esto es

$$T_i^{-1}CLT_i = \Lambda \quad (5.9)$$

De las ecuaciones (5.6) y (5.9) se observa la siguiente relación entre  $T_v$  y  $T_i$  <sup>[37]</sup>

$$T_v^T = T_i^{-1} \quad (5.10)$$

Adicionalmente en la teoría convencional de modos se definen las matrices de inductancia y capacitancia modales,  $L'$  y  $C'$ . Estas matrices se originan como consecuencia directa de la diagonalización del producto  $LC$ . De la ecuación (5.6) se tiene que

$$T_v^{-1}L(T_i T_i^{-1})CT_v = \Lambda \quad (5.11)$$

De la ecuación (5.11) se puede definir

$$L' = T_v^{-1}LT_i \quad (5.12a)$$

y

$$C' = T_i^{-1}CT_v \quad (5.12b)$$

Empleando las definiciones (5.12) la ecuación (5.11) puede ser representada de la siguiente forma

$$L'C' = \Lambda \quad (5.13)$$

Considérese ahora las matrices  $E_L$  y  $E_R$  de  $2n \times 2n$ , cuyas columnas son los eigenvectores izquierdos y los eigenvectores derechos de  $A$ , respectivamente, tal que

$$E_L E_R = 1 \quad (5.14)$$

y

$$\mathbf{E}_L \mathbf{A}^{-1} \mathbf{E}_R = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Gamma_2 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

donde  $\mathbf{1}$  denota la matriz unitaria y  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  son las dos matrices diagonales de  $n \times n$  con los  $2n$  eigenvalores. La relación que existe entre  $\mathbf{E}_L$ ,  $\mathbf{E}_R$ ,  $\Gamma_1$ , y  $\Gamma_2$  con  $\mathbf{T}_V$ ,  $\mathbf{T}_I$  y  $\Lambda$  es de la siguiente forma

$$\Gamma_1 = +\sqrt{\Lambda} \quad (5.15a)$$

$$\Gamma_2 = -\sqrt{\Lambda} \quad (5.15b)$$

$$\mathbf{E}_R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_V & \mathbf{T}_V \\ \mathbf{T}_I \mathbf{Y}_w & -\mathbf{T}_I \mathbf{Y}_w \end{bmatrix} \quad (5.15c)$$

$$\mathbf{E}_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_V^{-1} & \mathbf{Z}_w \mathbf{T}_I^{-1} \\ \mathbf{T}_V^{-1} & -\mathbf{Z}_w \mathbf{T}_I^{-1} \end{bmatrix} \quad (5.15d)$$

donde

$$\mathbf{Z}_w = \sqrt{\mathbf{L}' \mathbf{C}'^{-1}} \quad (5.16a)$$

$$\mathbf{Y}_w = \sqrt{\mathbf{L}'^{-1} \mathbf{C}'} \quad (5.16b)$$

Las matrices  $\mathbf{Z}_w$  y  $\mathbf{Y}_w$  tienen dimensiones de impedancia y admitancia respectivamente y las ecuaciones (5.15c) y (5.15d) proporcionan las matrices de eigenvectores derechos  $\mathbf{E}_R$  e izquierdos  $\mathbf{E}_L$  de  $\mathbf{A}$  en función de los eigenvectores de  $\mathbf{LC}$ .

Con el fin de transformar la ecuación (5.2) en un sistema de  $2n$  ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO's), primeramente debe premultiplicarse por la matriz de eigenvectores izquierdos  $\mathbf{E}_L$ , resultando

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_V^{-1} \mathbf{V} + \mathbf{Z}_w \mathbf{T}_I^{-1} \mathbf{I} \\ \mathbf{T}_V^{-1} \mathbf{V} - \mathbf{Z}_w \mathbf{T}_I^{-1} \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_w \mathbf{T}_I^{-1} \mathbf{L}^{-1} & \mathbf{T}_V^{-1} \mathbf{C}^{-1} \\ -\mathbf{Z}_w \mathbf{T}_I^{-1} \mathbf{L}^{-1} & \mathbf{T}_V^{-1} \mathbf{C}^{-1} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{Z}_w \mathbf{T}_I^{-1} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{Z}_w \mathbf{T}_I^{-1} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} \mathbf{T}_V^{-1} \mathbf{C}^{-1} & \mathbf{Z}_w \mathbf{T}_I^{-1} \mathbf{L}^{-1} \\ \mathbf{T}_V^{-1} \mathbf{C}^{-1} & -\mathbf{Z}_w \mathbf{T}_I^{-1} \mathbf{L}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f1 \\ f2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.17)$$

Desarrollando los productos particionando la ecuación (5.17)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}_m + \mathbf{Z}_w \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{I}_m + \mathbf{Z}_w \mathbf{L}'^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{V}_m + \mathbf{C}'^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{I}_m + \\ \mathbf{Z}_w \mathbf{L}'^{-1} \mathbf{T}_v^{-1} \mathbf{R} \mathbf{I} - \mathbf{C}'^{-1} \mathbf{f}1_m - \mathbf{Z}_w \mathbf{L}'^{-1} \mathbf{f}2_m = 0 \end{aligned} \quad (5.18a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}_m - \mathbf{Z}_w \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{I}_m - \mathbf{Z}_w \mathbf{L}'^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{V}_m + \mathbf{C}'^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{I}_m - \\ \mathbf{Z}_w \mathbf{L}'^{-1} \mathbf{T}_v^{-1} \mathbf{R} \mathbf{I} - \mathbf{C}'^{-1} \mathbf{f}1_m + \mathbf{Z}_w \mathbf{L}'^{-1} \mathbf{f}2_m = 0 \end{aligned} \quad (5.18b)$$

donde las relaciones entre vectores de cantidades de fase y vectores de cantidades modales es la siguiente

$$\mathbf{V}_m = \mathbf{T}_v^{-1} \mathbf{V} \quad (5.19a)$$

$$\mathbf{I}_m = \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{I} \quad (5.19b)$$

Agrupando términos comunes con  $\mathbf{V}_m$  e  $\mathbf{I}_m$ , se obtiene

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \Gamma \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{V}_m + \mathbf{Z}_w \left( \frac{\partial}{\partial t} + \Gamma \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{I}_m + \Gamma \mathbf{R}'' \mathbf{I}_m - \mathbf{Z}_w \Gamma \mathbf{f}1_m - \Gamma \mathbf{f}2_m = 0 \quad (5.20a)$$

y

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \Gamma \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{V}_m - \mathbf{Z}_w \left( \frac{\partial}{\partial t} - \Gamma \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{I}_m - \Gamma \mathbf{R}'' \mathbf{I}_m - \mathbf{Z}_w \Gamma \mathbf{f}1_m + \Gamma \mathbf{f}2_m = 0 \quad (5.20b)$$

donde

$$\Gamma = (\Gamma_1)^{-1} = \sqrt{\mathbf{L}'^{-1} \mathbf{C}'^{-1}} \quad (5.20c)$$

$$\mathbf{R}'' = \mathbf{T}_v^{-1} \mathbf{R} \mathbf{T}_i \quad (5.20d)$$

Obsérvese que  $\mathbf{V}_m$ ,  $\mathbf{I}_m$ ,  $\mathbf{f}1_m$  y  $\mathbf{f}2_m$  corresponden a los vectores de voltaje, corriente, fuente de corriente inducida y fuente de voltaje inducido respectivamente en el dominio modal. Nótese que esto difiere de la teoría modal convencional, pues el análisis presentado aquí está basado en la matriz real  $\mathbf{LC}$  en vez de la matriz compleja  $\mathbf{ZY}$ . Note también que  $\gamma_j$ , es el  $j$ -ésimo elemento diagonal de  $\Gamma$ , que es la velocidad del  $j$ -ésimo modo.

La ecuación (5.18a) comprende  $n$  ecuaciones de la siguiente forma

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \gamma_{1j} \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{V}_{mj} + \mathbf{Z}_{wj} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \gamma_{1j} \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{I}_{mj} + \gamma_{1j} \sum_{k=1}^n \mathbf{R}_{jk} \mathbf{I}_{mk} - \mathbf{Z}_{wj} \gamma_{1j} \mathbf{f}1_{mj} - \gamma_{1j} \mathbf{f}2_{mj} = 0 \quad (5.21a)$$

donde el subíndice  $j$  denota al  $j$ -ésimo elemento en el caso de los vectores columna  $\mathbf{V}_m$ ,  $\mathbf{I}_m$ ,  $f1_m$  y  $f2_m$ , y al  $j$ -ésimo elemento de la diagonal principal en el caso de las matrices diagonales  $\Gamma$  y  $\mathbf{Z}_w$ .  $\mathbf{R}''_{jk}$  es el elemento del  $j$ -ésimo renglón y  $k$ -ésima columna de  $\mathbf{R}''$ . A su vez la ecuación (5.18b) contiene otras  $n$  ecuaciones de la forma

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \gamma_{2j} \frac{\partial}{\partial z} \right) V_{mj} - Z_{wj} \left( \frac{\partial}{\partial t} - \gamma_{2j} \frac{\partial}{\partial z} \right) I_{mj} - \gamma_{2j} \sum_{k=1}^n R''_{jk} I_{mk} - Z_{wj} \gamma_{2j} f1_{mj} + \gamma_{2j} f2_{mj} = 0 \quad (5.21b)$$

Considérese ahora las siguientes relaciones

$$\gamma_{1j} = \frac{dz}{dt} \quad (5.22a)$$

$$\gamma_{2j} = -\frac{dz}{dt} \quad (5.22a)$$

de las ecuaciones (5.22) se puede ver que las expresiones entre paréntesis de las ecuaciones (5.21) representan derivadas totales con respecto a  $z$ , por lo tanto, se tiene que

$$dV_{mj} + Z_{wj} dI_{mj} + dz \sum_{k=1}^n R''_{jk} I_{mk} - Z_{wj} dz f1_{mj} - dz f2_{mj} = 0 \quad (5.23a)$$

$$dV_{mj} - Z_{wj} dI_{mj} - dz \sum_{k=1}^n R''_{jk} I_{mk} - Z_{wj} dz f1_{mj} + dz f2_{mj} = 0 \quad (5.23b)$$

Resumiendo se puede decir que la transformación lineal definida por  $\mathbf{E}_L$  convierte el sistema de ecuaciones diferenciales parciales de LTM en un sistema de  $2n$  ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden (EDO's), cuando la solución se restringe a aquellas funciones que son solo válidas a lo largo de las curvas características.

## 5.2 SOLUCION NUMERICA DE LAS ECUACIONES DE LAS LTM CON CAMPOS ELECTROMAGNETICOS INCIDENTES.

Considérese dos líneas paralelas al eje  $z$ , correspondientes a dos instantes de tiempo diferentes, separados un  $\Delta T$  uno de otro de la siguiente forma  $t=T$  y  $t=T+\Delta T$ , como se muestra en la figura 5.2-1. Considérese también que la solución de la ecuación de la LTM es conocida a lo largo de toda la línea en  $t=T$  y que esta solución se desea extender al punto

G sobre la línea  $t=T+\Delta T$ . De acuerdo con los resultados de la sección anterior, existen  $2n$  curvas características que pasan por el punto G. Estas proveen un número igual de expresiones de la forma (5.23). En el caso de que dos o más eigenvalores sean iguales, lo cual implica que tengan la misma característica, la ecuación asociada va a ser diferente si los eigenvectores correspondientes son linealmente independientes. La solución a lo largo de  $t=T$ , conocida en forma numérica, solo se conoce en un número finito de puntos. Es claro que estos puntos podrían no coincidir con los puntos de intersección de todas las características. También pudiera no ser posible coordinar las diferentes características en la malla para producir una distribución útil en los puntos de solución en la región del plano  $z-t$ , delimitado por las condiciones de frontera de la línea. Una solución a tal problema consiste en llevar a cabo interpolaciones entre los puntos conocidos para aproximar los puntos de cruce no conocidos.

Sea  $\gamma_{+j}$  el  $j$ -ésimo eigenvalor positivo de  $A$  y  $\gamma_{-j}$  el  $j$ -ésimo eigenvalor negativo, con  $j=1,\dots,n$ . Supóngase que los eigenvalores positivos son ordenados de menor a mayor:

$$0 < \gamma_n \leq \gamma_{n-1} \leq \dots \leq \gamma_1 \quad (5.24a)$$

Asúmase también que los puntos de solución están espaciados equidistantemente a lo largo de la línea, siendo  $\Delta z$  el espacio entre dos puntos sucesivos. De la misma manera considérese que el espaciamiento de los puntos de solución en el tiempo es uniforme con un  $\Delta T$  determinado por

$$\Delta T = \frac{\Delta z}{\gamma_1} \quad (5.24b)$$

En la figura 5.2-1 se muestran tres puntos de intersección denotados por D, E y F. En esta figura  $\Gamma_{+j}$  representa la característica con pendiente  $+\gamma_j$  y  $\Gamma_{-j}$  la característica con pendiente  $-\gamma_j$ . Note que el punto G en  $t=T+\Delta T$  se escoge como la intersección para la característica  $\Gamma_{+1}$  que pasa por el punto D en  $t=T$ , y la característica  $\Gamma_{-1}$  que pasa a través del punto F en  $t=T$ . Las ecuaciones (5.23) se pueden aproximar a lo largo de  $\Gamma_{+j}$  y  $\Gamma_{-j}$  como a continuación se describe

$$V_{mj}^G - V_{mj}^{Dj} + Z_{wj} (I_{mj}^G - I_{mj}^{Dj}) + \frac{\Delta z_j}{2} \sum_{k=1}^n R_{jk}'' (I_{mk}^G + I_{mk}^{Dj}) - \frac{\Delta z_j}{2} Z_{wj} (f1_{mj}^G + f1_{mj}^{Dj}) - \frac{\Delta z_j}{2} (f2_{mj}^G + f2_{mj}^{Dj}) f2_{mj} = 0 \quad (5.25a)$$

y

$$V_{mj}^G - V_{mj}^{Fj} - Z_{wj} (I_{mj}^G - I_{mj}^{Fj}) - \frac{\Delta z_j}{2} \sum_{k=1}^n R_{jk}'' (I_{mk}^G + I_{mk}^{Fj}) - \frac{\Delta z_j}{2} Z_{wj} (f1_{mj}^G + f1_{mj}^{Fj}) + \frac{\Delta z_j}{2} (f2_{mj}^G + f2_{mj}^{Fj}) f2_{mj} = 0 \quad (5.25b)$$

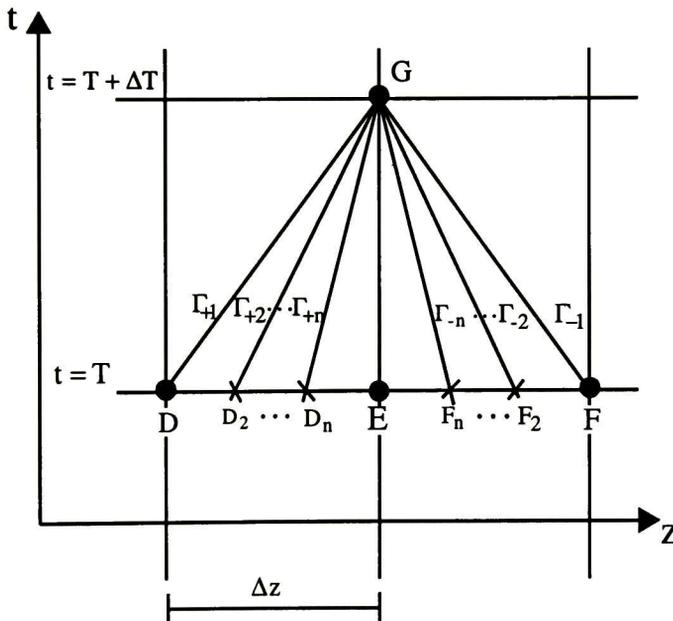


Figura 5.2-1 Características de una LTM pasando a través de un punto G en el plano z-t.

Donde  $V_{mj}^{Dj}$ ,  $V_{mj}^{Ej}$ ,  $V_{mj}^{Fj}$  y  $V_{mj}^G$ ,  $j=1, 2, \dots, n$ ; representan el valor del j-ésimo componente del vector de voltaje modal en el punto D, E, F y G respectivamente,  $I_{mj}^{Dj}$ ,  $I_{mj}^{Ej}$ ,  $I_{mj}^{Fj}$  y  $I_{mj}^G$  representan el valor del j-ésimo componente del vector de corriente modal en el punto D, E, F y G;  $R_{jk}''$  representa el elemento del j-ésimo renglón y la k-ésima columna de la matriz  $R''$ .  $\Delta z_j$  es la distancia dada por  $\Delta z_j = \gamma_j \Delta T$ , desde el punto E hasta el punto de cruce de la

característica  $\Gamma_{+j}$  y  $\Gamma_{-j}$  en  $D_j$  y  $F_j$ , respectivamente, en la recta  $t=T$ . La estimación de las variables dependientes en los puntos  $D_j$  y  $F_j$  se lleva a cabo a través de las fórmulas de la interpolación cuadrática de Lagrange <sup>[33]</sup>, quedando las expresiones para evaluar  $V_{mj}^{Dj}$  y  $V_{mj}^{Fj}$  de la siguiente forma

$$V_{mj}^{Dj} = a_{1j} V_{mj}^D + a_{2j} V_{mj}^E + a_{3j} V_{mj}^F \quad (5.26a)$$

y

$$V_{mj}^{Fj} = a_{3j} V_{mj}^D + a_{2j} V_{mj}^E + a_{1j} V_{mj}^F \quad (5.26a)$$

donde

$$a_{1j} = r_j + \frac{1}{2} (r_j)^2 \quad (5.27a)$$

$$a_{2j} = 1 - (r_j)^2 \quad (5.27b)$$

$$a_{3j} = \frac{1}{2} (r_j)^2 - r_j \quad (5.27c)$$

y

$$r_j = \frac{\Delta z_j}{\Delta z} = \frac{\gamma_j}{\gamma_1} \quad (5.27d)$$

De la misma manera se pueden aplicar las fórmulas de interpolación para estimar las variables dependientes  $I_{mj}^{Dj}$  y  $I_{mj}^{Fj}$ . Incorporando éstas a la ecuación (5.25a) se obtiene una ecuación matricial que relaciona el voltaje y la corriente en el punto G:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_m^G + \mathbf{Z}_{w1} \mathbf{I}_m^G &= \frac{\Delta \mathbf{z}}{2} \mathbf{Z}_w \mathbf{f} 1_m^G + \frac{\Delta \mathbf{z}}{2} \mathbf{f} 2_m^G + \\ &\mathbf{a}_1 \left[ \mathbf{V}_m^D + \mathbf{Z}_{w2} \mathbf{I}_m^D + \frac{\Delta \mathbf{z}}{2} \mathbf{Z}_w \mathbf{f} 1_m^D + \frac{\Delta \mathbf{z}}{2} \mathbf{f} 2_m^D \right] \\ &\mathbf{a}_2 \left[ \mathbf{V}_m^E + \mathbf{Z}_{w2} \mathbf{I}_m^E + \frac{\Delta \mathbf{z}}{2} \mathbf{Z}_w \mathbf{f} 1_m^E + \frac{\Delta \mathbf{z}}{2} \mathbf{f} 2_m^E \right] \\ &\mathbf{a}_3 \left[ \mathbf{V}_m^F + \mathbf{Z}_{w2} \mathbf{I}_m^F + \frac{\Delta \mathbf{z}}{2} \mathbf{Z}_w \mathbf{f} 1_m^F + \frac{\Delta \mathbf{z}}{2} \mathbf{f} 2_m^F \right] \end{aligned} \quad (5.28)$$

donde

$$\mathbf{Z}_{w1} = \left( \mathbf{Z}_w + \frac{\Delta \mathbf{z}}{2} \mathbf{R}'' \right) \quad (5.29a)$$

$$\mathbf{Z}_{w2} = \left( \mathbf{Z}_w - \frac{\Delta \mathbf{z}}{2} \mathbf{R}'' \right) \quad (5.29b)$$

$$\mathbf{a}_1 = \text{diag}(1, a_{12}, \dots, a_{1n}) \quad (5.29c)$$

$$\mathbf{a}_2 = \text{diag}(0, a_{22}, \dots, a_{2n}) \quad (5.29d)$$

$$\mathbf{a}_3 = \text{diag}(0, a_{32}, \dots, a_{3n}) \quad (5.29e)$$

$$\Delta \mathbf{z} = \text{diag}(\Delta z, \Delta z_2, \dots, \Delta z_n) \quad (5.29f)$$

De manera similar, se puede aplicar a la ecuación (5.25b) las fórmulas de interpolación para estimar las variables dependientes  $I_{mj}^{Dj}$  y  $I_{mj}^{Fj}$ . Incorporando las fórmulas de interpolación se encuentra una segunda ecuación matricial para el voltaje y la corriente en el punto G:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_m^G - \mathbf{Z}_{w1} \mathbf{I}_m^G &= \frac{\Delta \mathbf{z}}{2} \mathbf{Z}_w \mathbf{f} \mathbf{1}_m^G - \frac{\Delta \mathbf{z}}{2} \mathbf{f} \mathbf{2}_m^G + \\ &\mathbf{a}_3 \left[ \mathbf{V}_m^D - \mathbf{Z}_{w2} \mathbf{I}_m^D + \frac{\Delta \mathbf{z}}{2} \mathbf{Z}_w \mathbf{f} \mathbf{1}_m^D - \frac{\Delta \mathbf{z}}{2} \mathbf{f} \mathbf{2}_m^D \right] \\ &\mathbf{a}_2 \left[ \mathbf{V}_m^E - \mathbf{Z}_{w2} \mathbf{I}_m^E + \frac{\Delta \mathbf{z}}{2} \mathbf{Z}_w \mathbf{f} \mathbf{1}_m^E - \frac{\Delta \mathbf{z}}{2} \mathbf{f} \mathbf{2}_m^E \right] \\ &\mathbf{a}_1 \left[ \mathbf{V}_m^F - \mathbf{Z}_{w2} \mathbf{I}_m^F + \frac{\Delta \mathbf{z}}{2} \mathbf{Z}_w \mathbf{f} \mathbf{1}_m^F - \frac{\Delta \mathbf{z}}{2} \mathbf{f} \mathbf{2}_m^F \right] \end{aligned} \quad (5.30)$$

Las ecuaciones (5.28) y (5.30) representan un sistemas de ecuaciones matriciales para encontrar la solución de voltajes y corrientes en el punto G, en términos de los valores conocidos de las variables en los puntos D, E y F. Obsérvese que la suma de estas dos ecuaciones da como resultado la solución para el voltaje, mientras que con la resta se puede obtener la solución de las corrientes.

Una vez que se conoce la solución para todos los puntos interiores de la línea de transmisión en  $t=T+\Delta T$ , se procede a calcular el voltaje y corriente en las fronteras. Para la

frontera en  $z=0$  se utilizan las características  $\Gamma_j$  con pendiente negativa, como se muestra en la figura 5.2-2. La estimación de las variables dependientes en los puntos  $F_j$  se hace empleando fórmulas de interpolación cuadrática de Lagrange <sup>[33]</sup>. Por ejemplo la expresión para evaluar  $V_{mj}^{Fj}$  queda de la siguiente forma

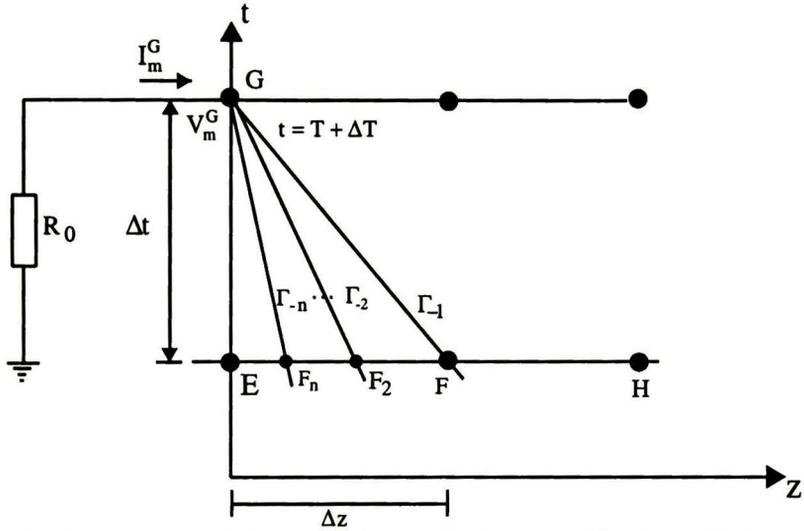


Figura 5.2-2 Pendiente de la característica negativa en la intersección de la línea en  $t=T$  para la frontera  $z=0$ .

$$V_{mj}^{Fj} = a_{1j} V_{mj}^E + a_{2j} V_{mj}^F + a_{3j} V_{mj}^H \quad (5.31)$$

donde

$$a_{1j} = \frac{1}{2} [2 - 3r_j + (r_j)^2] \quad (5.32a)$$

$$a_{2j} = [2r_j - (r_j)^2] \quad (5.32b)$$

$$a_{3j} = \frac{1}{2} [(r_j)^2 - r_j] \quad (5.32c)$$

De la misma manera se aplican fórmulas de interpolación para estimar los valores de las  $I_{mj}^{Fj}$ . Incorporando las fórmulas de interpolación a la ecuación (5.25b) se obtiene para el punto G:

$$\begin{aligned}
 V_m^G - Z_{w1} I_m^G &= \frac{\Delta z}{2} Z_w f 1_m^G - \frac{\Delta z}{2} f 2_m^G + \\
 & a_1 \left[ V_m^E - Z_{w2} I_m^E + \frac{\Delta z}{2} Z_w f 1_m^E - \frac{\Delta z}{2} f 2_m^E \right] \\
 & a_2 \left[ V_m^F - Z_{w2} I_m^F + \frac{\Delta z}{2} Z_w f 1_m^F - \frac{\Delta z}{2} f 2_m^F \right] \\
 & a_3 \left[ V_m^H - Z_{w2} I_m^H + \frac{\Delta z}{2} Z_w f 1_m^H - \frac{\Delta z}{2} f 2_m^H \right] \quad (5.33)
 \end{aligned}$$

De acuerdo a la figura 5.2-2 se tiene que

$$R_0 I^G + V^G = 0 \quad (5.34)$$

donde

$$R_0 = \text{diag}(R_{01}, R_{02}, \dots, R_{0n}) \quad (5.35)$$

Las ecuaciones (5.33) y (5.34) proporcionan la solución de voltajes y corrientes en el punto inicial de la línea de transmisión en términos de los valores conocidos en los puntos E, F y H. Observe que la suma de estas dos ecuaciones da como resultado la solución para el voltaje. Una vez conocido el voltaje se puede calcular la corriente empleando (5.33) o (5.34).

Considérese ahora la frontera en  $z=L$ , siendo  $L$  la longitud total de la línea. Utilizando la característica  $\Gamma_{+j}$  que cruza en  $D_j$  en la recta  $t=T$ , como se muestra en la figura 5.2-3, y aplicando interpolación cuadrática de Lagrange <sup>[33]</sup> las expresiones para evaluar  $V_{mj}^{Dj}$  quedan de la siguiente forma

$$V_{mj}^{Dj} = a_{3j} V_{mj}^H + a_{2j} V_{mj}^D + a_{1j} V_{mj}^E \quad (5.36)$$

donde

$$a_{1j} = \frac{1}{2} [2 - 3r_j + (r_j)^2] \quad (5.37a)$$

$$a_{2j} = [2r_j - (r_j)^2] \quad (5.37b)$$

$$a_{3j} = \frac{1}{2} [(r_j)^2 - r_j] \quad (5.37c)$$

Incorporando las fórmulas de interpolación a la ecuación (5.25a) se obtiene la expresión que relaciona el voltaje y la corriente en la frontera:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_m^G + \mathbf{Z}_{w1} \mathbf{I}_m^G &= \frac{\Delta z}{2} \mathbf{Z}_w f 1_m^G + \frac{\Delta z}{2} f 2_m^G + \\ &\mathbf{a}_1 \left[ \mathbf{V}_m^E + \mathbf{Z}_{w2} \mathbf{I}_m^E + \frac{\Delta z}{2} \mathbf{Z}_w f 1_m^E + \frac{\Delta z}{2} f 2_m^E \right] \\ &\mathbf{a}_2 \left[ \mathbf{V}_m^D + \mathbf{Z}_{w2} \mathbf{I}_m^D + \frac{\Delta z}{2} \mathbf{Z}_w f 1_m^D + \frac{\Delta z}{2} f 2_m^D \right] \\ &\mathbf{a}_3 \left[ \mathbf{V}_m^H + \mathbf{Z}_{w2} \mathbf{I}_m^H + \frac{\Delta z}{2} \mathbf{Z}_w f 1_m^H + \frac{\Delta z}{2} f 2_m^H \right] \end{aligned} \quad (5.38)$$

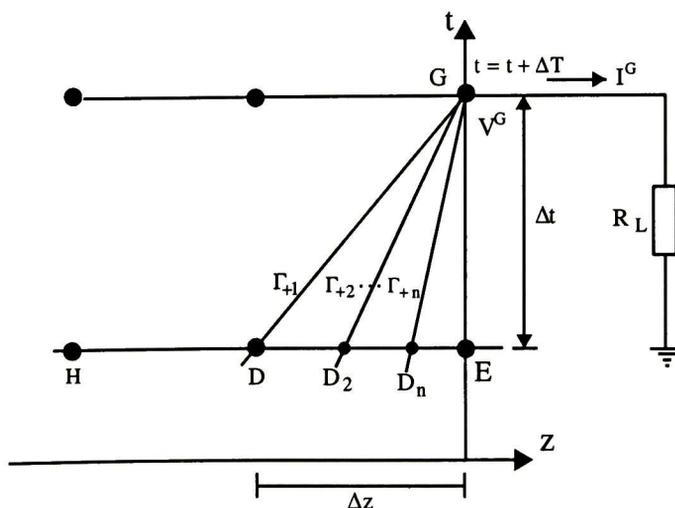


Figura 5.2-3 Pendiente de la característica positiva en la intersección de la línea en  $t=T$  para la frontera  $z=L$ .

De acuerdo a la figura 5.2-3 el voltaje en la frontera en el dominio de fase es igual a

$$\mathbf{R}_L \mathbf{I}^G = \mathbf{V}^G \quad (5.39)$$

donde

$$\mathbf{R}_L = \text{diag}(R_{L1}, R_{L2}, \dots, R_{Ln}) \quad (5.40)$$

Las ecuaciones (5.38) y (5.39) proporcionan la solución de voltajes y corrientes en el punto G en términos de los valores conocidos de las variables en el punto E, D y H.

### 5.3 CASO DE ESTUDIO PARA UNA LINEA DE TRANSMISION MULTICONDUCTORA ILUMINADA POR UN CAMPO ELECTROMAGNETICO.

Para este caso de estudio se simuló una línea de transmisión trifásica, cuya configuración se muestra en la figura 5.3-1. La simulación se llevó a cabo empleando el método de las características y con fines de comparación con el EMTP.

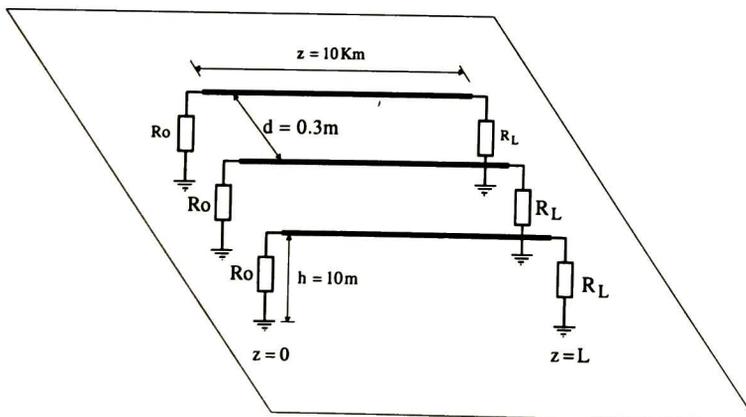


Figura 5.3-1. Configuración considerada para la línea de transmisión trifásica con incidencia de campos electromagnéticos.

La línea está compuesta con un solo conductor por fase, con diámetro de 1.5cm. Al igual que el caso monofásico solo se considera el campo eléctrico el cual está solo en función del tiempo y su forma de onda es la mostrada en la figura 3.4.

Para llevar a cabo la simulación en el EMTP de la línea de transmisión multiconductora se sigue un procedimiento similar al empleado para el caso de la línea monofásica del capítulo tres. Como ahora se está analizando un sistema trifásico, todo el proceso requiere de mucho tiempo y precaución al momento de llevar a cabo la edición del archivo de datos.

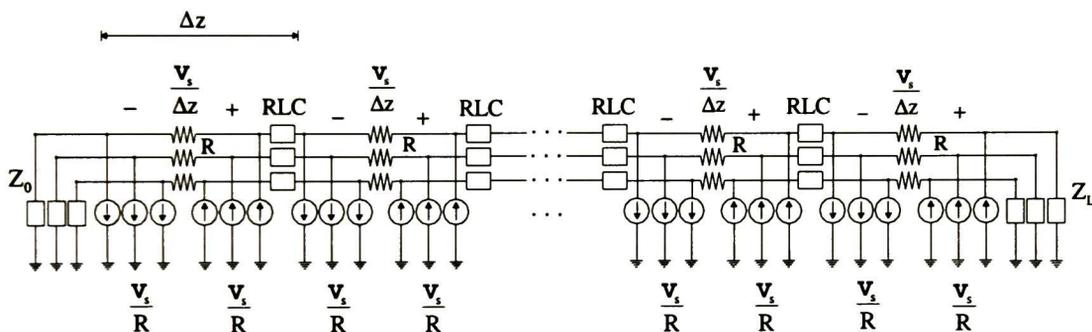


Figura 5.3-2. Esquema utilizado para llevar a cabo la simulación en EMTP para una línea de transmisión multiconductora con incidencia de campos electromagnéticos.

De inicio se deben de calcular los parámetros independientes de la frecuencia de la línea de transmisión trifásica por medio de la rutina de parámetros eléctricos. Para este cálculo se utilizó la configuración de la línea de transmisión mostrada en la figura 5.3-1. Parte de la información obtenida de la rutina de cálculo de parámetros es la matriz de transformación modal, así como los parámetros eléctricos modales.

La simulación de la línea de transmisión con fuentes distribuidas de voltaje inducido se llevó a cabo dividiendo la longitud total de la línea en secciones ( $\Delta z$ ), las cuales se consideran como líneas independientes tal y como se muestran en la figura 5.3-2. Note que

cada sección cuenta con fuentes independientes de corriente que toman en cuenta los efectos del campo magnético incidente

Las fuentes de corriente utilizadas tienen la forma de onda que se muestra en la figura 3.4, por razones ya planteadas en el capítulo tres para el caso monofásico. La diferencia en este caso es que en cada punto existen tres fuentes de corriente, una para cada fase.

En los extremos de la línea se conectó la matriz de impedancia característica, la cual se obtuvo también por medio de la rutina de parámetros eléctricos del EMTP.

En la figura 5.3-3 se presentan las formas de onda obtenidas en la fase *a* con el método de las características y con el EMTP.

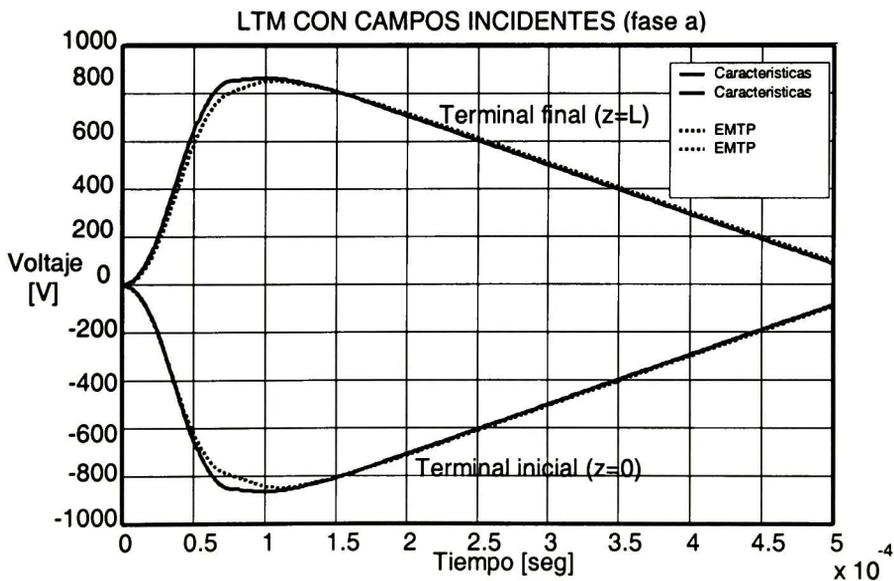


Figura 5.3-3 Comparación de los voltajes en la fase *a* en los extremos de la línea de transmisión calculados con el método de las características y el EMTP.

En la figura 5.3-3 se observa que prácticamente se obtienen los mismos resultados con ambos métodos. Tomando como referencia los resultados obtenidos por medio del EMTP,

se observa que para el método de las características existe una mínima discrepancia en un pequeño intervalo de tiempo donde toma su amplitud máxima el campo incidente para ambas terminales de la línea de transmisión.

Es importante notar que las simulaciones con el EMTP requieren de una gran cantidad de tiempo y esfuerzo por parte del usuario. Esto se debe que en el EMTP cada sección de línea de longitud  $\Delta z$  se debe introducir como una línea independiente con su fuente de excitación correspondiente.

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En esta tesis se ha realizado una revisión de los diferentes modelos de acoplamiento para la evaluación de voltajes inducidos debido a campos electromagnéticos incidentes en líneas de transmisión monofásicas y multiconductoras.

Dentro de los límites de validez de la aproximación del modelo de línea de transmisión, el modelo propuesto por Agrawal et al <sup>[10]</sup> es el más riguroso. Otros modelos que se han empleado con anterioridad generan resultados satisfactorios solo para algunos casos particulares. Por ejemplo, para descargas atmosféricas perpendiculares al plano de tierra, el modelo propuesto por Rusck es equivalente al modelo de Agrawal, pero solo en este caso particular. Por otro lado, el modelo de Agrawal es completamente equivalente a otros modelos utilizados en la literatura, como son el modelo de Taylor y el de Chowdhuri. De hecho estos tres modelos difieren en los términos de voltajes y corrientes manejados, pero las formulaciones de las ecuaciones resultantes son equivalentes.

Se han utilizado dos métodos para la solución de las ecuaciones de la línea de transmisión con incidencia de campos electromagnéticos, el método de las características y el EMTP, los cuales se han aplicado para el caso monofásico y polifásico. De la comparación de los resultados obtenidos por cada método se encontró que ambos proporcionan resultados similares y que ambos poseen ventajas y desventajas.

Para simular en el EMTP líneas con voltajes inducidos por campos electromagnéticos externos es necesario dividir la línea en secciones y considerar cada sección como una línea independiente. Entre cada sección de línea es necesario colocar fuentes independientes de corriente que tomen en cuenta los efectos del campo incidente. Todo este proceso requiere de mucho tiempo por parte del usuario y los resultados dependen de la experiencia que éste tenga. Esto se debe a que dependiendo del tiempo de observación y el número de puntos en el tiempo requeridos, el número de secciones más adecuado para dividir las líneas varía. Sin

embargo, una vez que se ha realizado todo este procedimiento se pueden emplear todas las facilidades de simulación de elementos de sistemas eléctricos que posee el EMTP.

Por otro lado, el método de las características proporciona en forma natural la mejor manera de discretizar en distancia las líneas de transmisión para cada caso de simulación. Esto se hace en una forma casi transparente para el usuario al aplicar el criterio de Courant y calcular el  $\Delta z$  necesario en términos del  $\Delta t$  y la velocidad de propagación del modo más veloz. A esto hay que agregar que el método de las características ya ha probado ser libre de oscilaciones numéricas para los casos de líneas no uniformes y/o con parámetros eléctricos no lineales. La desventaja que actualmente presenta el método de las características es que aún no existe un programa de computadora que tenga la riqueza de modelos que poseen el EMTP o el SPICE.

Como trabajo futuro se recomienda desarrollar modelos circuitales que permitan llevar al método de las características a un estado de utilidad práctica, esto es, que permitan que este método pueda ser empleado en programas de solución de transitorios en redes como el EMTP y el SPICE.

También se recomienda extender el método de las características a otros fenómenos que aparecen en las líneas de transmisión multiconductoras como son la no uniformidad de los parámetros eléctricos y la aparición de condiciones no lineales como el efecto corona.

## REFERENCIAS

- [1].- S. Rusk, "Induced lightning overvoltages on power transmission lines with special reference to the overvoltage protection of low voltage networks", Trans. Of the Royal institute of Technology, Stockholm, No. 120, 1958.
- [2].- S. Yokoyama, K. Miyake, S. Fukui, "Advanced observations of lightning induced voltages on power distribution lines (II)", IEEE Trans. on PWDR, Vol. 4, No. 4, pp 2196-2203, October 1989.
- [3].- S. Yokoyama, "Calculation of lightning induced voltages on overhead multiconductor systems", IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, Vol. Pas-103, No. 1, pp. 100-108, January 1984.
- [4].- A. J. Eriksson, M. F. Stringfellow, D. V. Meal, "Lightning induced overvoltages on overhead distribution lines", IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, Vol. Pas-101, No. 1, pp. 960-968, April 1982.
- [5].- P. Chowdhuri, E.T.B Gross, "Voltage surges induced on overhead lines by lightning strokes", Proc. IEE, Vol. 114, No. 12, pp. 1899-1907, December 1967.
- [6].- P. Chowdhuri, "Analysis of lightning induced voltages on overhead lines", IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 4, No. 1, pp. 479-492, January 1989.
- [7].- P. Chowdhuri, "Response of overhead lines of finite length to nearby lightning strokes", IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 6, No. 1, pp. 479-492, January 1991.
- [8].- E. Cinieri, A. Fumi, " Sulle sovratensioni indotte dal fulmine nelle linee elettriche d'energia" (In Italian), L'Energia elettrica, No. 9, 1978.

- [9].- A. C. Liew, S. C. Mar, "Extension of the Chowdhuri-Gross model for lightning induced voltage on overhead lines", IEEE Trans. on Power Systems, Vol. PWDR-1, No. 2, pp. 240-247, April 1986.
- [10].- A. K. Agrawal, H. J. Price, S. H. Gurbaxani, "Transient response of a multiconductor transmission line excited by a non-uniform electromagnetic field", IEEE Trans. on Electromagnetic compatibility, Vol. EMC-22, No. 2, pp. 119-129, May 1980.
- [11].- M. J. Master, M. A. Uman, W.H. Beasley, and M. Darveniza, "Lightning induced voltages on power lines: Experiment", IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, Vol. Pas-103, No. 9, pp. 2519-2529, September 1984.
- [12].- V. Cooray, F. De la Rosa, "Shapes and amplitudes of the initial peaks of lightning-induced voltage in power lines over finitely conducting earth: theory and comparison with experiment". IEEE Trans. on Antennas and Propagation, Vol. AP-34, No. 1, January 1986.
- [13].- M. Rubinstein, A. Y. Tzeng, M. A. Uman, P. J. Medelius, E. M. Thomson, "An experimental test of a theory of lightning-induced voltages on an overhead wire", IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility, Vol. 31, No. 4, pp. 376-383, November 1989.
- [14].- G. Diendorfer, "Induced voltage on an overhead line to nearby lightning", IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility, Vol. EMC-32, No. 4, pp. 292-299, November 1990.
- [15].- C. A. Nucci, F. Rachidi, M. Ianoz, C. Mazzetti, "lightning-induced overvoltages on overhead lines", IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility, Vol. 35, No. 1, pp. 75-86, February 1993.
- [16].- M. J. Master, M. A. Uman, "Lightning induced voltages on power lines: theory", IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, Vol. Pas-103, No. 9, pp. 2502-2518, September 1984.

- [17].- N. Georgiadis, M. Rubinstein, M. A. Uman, P. J. Medelius, E. M. Thomson, "Lightning-induced voltages at both ends of a 448-m power distribution line", *IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility*, Vol. 34, No. 4, November 1992.
- [18].- C. A. Nucci, F. Rachidi, M. Ianoz, C. Mazzetti, "Comparison of two coupling models for lightning-induced overvoltage calculation", *IEEE/PES 1993 summer Meeting, Vancouver, B. C. Canada July 18-22, 1993. Trans. on Power Delivery*, Vol. 10, No. 1, pp. 330-338, January 1995.
- [19].- S. Guerrieri, F. Rachidi, M. Ianoz, C. Mazzetti, P. Zwiackner, C. A. Nucci, "A time-domain approach to evaluate induced voltages on tree-shaped electrical networks by external electromagnetic field", *Proc. 11<sup>th</sup> Int. Symp. on electromagnetic Compatibility, Zurich, March 1995*.
- [20].- A. J. Eriksson, D.V. Meal, "Lightning performance in rural distribution line: preliminary results", *Trans. SAIEE*, Vol. 71, pp. 158-163, 1980.
- [21].- F. De la Rosa, H. Perez R., A. Galvan D., "Lightning-induced voltage measurements in an experimental power distribution line in Mexico", *Proc. 22<sup>nd</sup> Int. Conf. on Lightning Protection, Budapest, 19-23 September, 1994*.
- [22].- C. D. Taylor, R. S. Satterwhite, C. W. Harrison, "The response of a terminated two-wire transmission line excited by a non-uniform electromagnetic field", *IEEE Trans. on Antennas Propagations*, Vol. AP-13, 1965.
- [23].- M. Ianoz, C. A. Nucci, F. M. Tesche, "Transmission line theory for field-to-transmission line coupling calculations", *Electromagnetics*, Vol. 8, No. 2-4, pp. 171-211, 1988.

[24].- S. Yokoyama, K. Miyake, H. Mitani, A. Takanishi, "Simultaneous measurement of lightning induced voltages with associated stroke currents", IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-102, No. 8, pp 2420-2429, August 1983.

[25].- R. Paul Clayton, "Introduction to electromagnetic compatibility", John Wiley and Sons Inc, New York, 1992.

[26].- M. Ishii, K. Michishita, Y. Hongo, S. Ogume, "Lightning-induced voltage on an overhead wire dependent on ground conductivity", IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 9, No. 1, pp 109-118, January 1994.

[27].- Tyn Myint-U, "Partial differential equations for scientists and engineers", Third ed., pp 31-98, North Holland Eds, U.S.A. 1987.

[28].- R. Radulet, A. Timotin. A. Tugulea, A. Nica, "The transient response of the electric lines based on the equations with transient line-parameters" Rev. Roum. Sci. Techn., Vol, 23, No. 1, pp. 3-19, 1978.

[29].- R. Courant, K. Friederichs, H. Lewy, "On partial difference equations of mathematical physics", IBM Journal 11, pp. 215-234, 1967.

[30].- A. J. Eriksson, D.V. Meal, "Lightning performance and over-voltage surge studies on a rural distribution line", Proc. IEE, 129C, pp. 59-69, 1982.

[31].- L. V. Bewley, "Travelling wave on transmission systems", Second edition, Dover publications Inc., 1963.

[32].- L. A. Pipes, "Matrix methods for engineering", Englewood Cliffs, N. J. Prentice-Hall, 1963.

[33].-Donald Greenspan, Vincenzo Casulli, "Numerical analysis for applied mathematics, science and engineering", Addison-Wesley publishing company, Inc., 1988.

[34].- G. Strang, "Linear algebra and its applications", Third Edition, Harcourt Brace Javanovich Inc., pp. 279-304, 1988.

[35].- T. Taniuti, K. Nishihara, "Nonlinear waves", Boston: Pitman Advanced publishing program, 1983.

[36].- J. L. Naredo, "The effect of corona on wave propagation on transmission lines", Ph. D. Thesis, Department of electrical engineering faculty of applied science the University of British Columbia, 1992.

[37].- L. M. Wedepohl, "Application of matrix methods to the solution of travelling wave phenomena in polyphase systems", Proc. IEE, Vol. 110, No. 12, pp. 2200-2212, December 1963.

[38].- J. H. Wilkinson, "The algebraic eigenvalue problem", First Edition, Oxford University Press, pp. 35-37, 1965.

[39].- F. De la Rosa, R. Valdiviva, H. Pérez, J. Loza, "Discussion about the inducing effects of lightning in an experimental power distribution line in México", IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 3, No. 3, pp. 1080-1089, July 1988.

[40].- W. Dommel, "EMTP Theory Book", University of British Columbia, August 1986.

[41].- J. L. Naredo, A. C. Soudack, J. R. Martí, "Simulation of transient on transmission line with corona via the method of characteristic", IEE Proc. Gener. Trans. Distrib., Vol 142, No. 1 pp. 81-87, January 1995.



**CENTRO DE INVESTIGACION Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL IPN  
UNIDAD GUADALAJARA**

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, aprobó la tesis: "Voltajes inducidos en líneas de transmisión debido a campos electromagnéticos incidentes" que presenta el C. Armando Ambrosio López el día 19 de Noviembre del 2001.

---

Dr. José Luis Naredo Villagrán  
Investigador CINVESTAV 3B  
CINVESTAV DEL IPN  
Guadalajara

---

Dr. Pablo Moreno Villalobos  
Investigador CINVESTAV 3A  
CINVESTAV DEL IPN  
Guadalajara

---

Dr. Juan Manuel Ramírez Arredondo  
Investigador CINVESTAV 3A  
CINVESTAV DEL IPN  
Guadalajara

---

Dr. Juan Marcos García Martínez  
Profesor Titular B  
Centro Universitario de Ciencias Exactas e  
Ingeniería  
Universidad de Guadalajara



CINVESTAV  
BIBLIOTECA CENTRAL



SSIT000003893