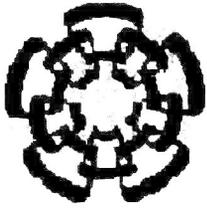




xx(104951.1)



# CINVESTAV

*Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN  
Unidad Guadalajara*

**Cinvestav**

---

**CINVESTAV I.P.N.  
SECCION DE INFORMACION  
Y DOCUMENTACION**

## **ANÁLISIS DE TRANSITORIOS ELECTROMAGNÉTICOS EN LÍNEAS DE TRANSMISIÓN CONSIDERANDO DEPENDENCIA FRECUENCIAL Y NO UNIFORMIDADES.**

**TESIS PRESENTADA POR:  
ING. MARISOL DÁVILA CALDERÓN**

**PARA OBTENER EL GRADO DE: MAESTRO EN CIENCIAS**

**CINVESTAV  
I.P.N.  
ADQUISICION  
DE LIBROS**

**EN LA ESPECIALIDAD DE:  
INGENIERÍA ELÉCTRICA**

**GUADALAJARA, JAL. AGOSTO 2002.**

CLASIF.:	SSI-213
ADQUIS.:	27 NSU-2002
FECHA:	27 NSU-2002
PROCED.:	TESS-092
	\$.....

**ANÁLISIS DE TRANSITORIOS ELECTROMAGNÉTICOS  
EN LÍNEAS DE TRANSMISIÓN CONSIDERANDO  
DEPENDENCIA FRECUENCIAL Y NO UNIFORMIDADES.**

**Tesis de Maestría en Ciencias  
Ingeniería Eléctrica**

Por:

**Marisol Dávila Calderón**

Ingeniero Electricista  
Universidad de Los Andes, Mérida – Venezuela  
1987-1993

Director de Tesis:

**Dr. José Luis Alejandro Naredo Villagrán**

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Agosto 2002.

## RESUMEN

En esta tesis se ha propuesto un modelo para analizar líneas de transmisión monofásicas incorporando efectos de no uniformidad y de dependencia frecuencial de sus parámetros eléctricos. En primer lugar se aplica la regla de Leibnitz a las Ecuaciones del Telegrafista desarrolladas por Radulet et.al [7], con el fin de evitar el cálculo numérico de la derivada con respecto al tiempo del término de convolución. Luego, se presenta el desarrollo del método de análisis de transitorios en líneas de transmisión aplicando el método de las características. El método aquí propuesto es aplicado a varios ejemplos prácticos. Uno de ellos es una línea horizontal conformada por tres tramos, otro es un experimento de campo reportado en la referencia [1]. El último es un caso de análisis tomado de la referencia [38]. Adicionalmente, los resultados obtenidos con el método aquí propuesto son comparados con los obtenidos usando la Transformada Numérica de Laplace (TNL) y el programa EMTP/ATP, encontrándose gran similitud entre los resultados obtenidos.

## DEDICATORIA

*Con todo mi corazón a mi Madre y Hermanos  
a la memoria de mi Padre y de mi hermano Ymar*

## AGRADECIMIENTO

*A Dios Todopoderoso por iluminar cada paso de mi vida.*

*A mi madre por todo su gran amor, apoyo, ejemplo de dignidad y trabajo, te amo mucho y que Dios te bendiga siempre.*

*A mi padre que desde donde esté disfruta y comparte cada uno de mis logros, te extraño y siempre estarás en mi corazón.*

*A mi hermano Ymar que con su pronta y repentina partida deja un vacío inmenso en mi corazón y ahora desde el cielo me acompaña y me da una gran fortaleza para seguir adelante, te extraño.*

*A mis hermanos Alfonso, César, Golfredo, Magaly, Mireya, Bulman, Javier y Nelson por su gran amor, apoyo y compañía, los amo.*

*A todos mis Sobrinos por ser mi fuente de inspiración, mis tesoros, los quiero mucho.*

*A mis Tíos y primos por estar a mi lado siempre en los buenos y en los malos momentos.*

*A la Doña Dora por abrirme las puertas de su casa y de su corazón haciéndome sentir como en mi propia casa, que Dios la bendiga.*

*A Cony, Andrés y Luis Felipe por acogerme en su casa, aceptándome como un miembro más de su familia, brindándome su amistad y gran apoyo, los quiero mucho.*

*A Cecy, Pina y Jenny por su gran amistad.*

*Al Dr. José Luis Naredo por su enorme paciencia, sabiduría y grandes orientaciones en el desarrollo de mi trabajo.*

*Al Dr. Pablo Moreno por sus acertados consejos y enseñanzas.*

*A los Doctores Juan Manuel Ramírez, José Manuel Cañedo y Arturo Román Messina por sus enseñanzas.*

*A mis amigos y compañeros de camino: Eduardo, Francisco, Ixtlahuatl, Enrique A, Ramón, Ivan, Fabby, Brenda, Alberto, Manuel, Pablo Lupita, Saida, Enrique M., Rosalino y Carlos, con quienes he pasado momentos fabulosos y han hecho mi estancia aquí más agradable.*

*Al CINVESTAV por abrirme sus puertas y permitirme realizar mis estudios.*

*A la Universidad de Los Andes por el apoyo económico brindado para la realización de mi postgrado.*

*A todas aquellas personas que no he nombrado pero que de una u otra forma han estado conmigo*

*Mil Gracias a todos.*

# INDICE

	Página
Resumen.....	i
Dedicatoria.....	ii
Agradecimientos.....	iii
Índice.....	iv
Lista de Figuras.....	vi
Lista de Tablas.....	viii
I Introducción.....	1
II Líneas Uniformes y No Uniformes Con Parámetros Independientes de la Frecuencia.	
2.1 Ecuaciones para la línea uniforme.....	5
2.2 Solución numérica de las ecuaciones de línea uniforme.....	7
2.3 Extensión al caso de línea no uniforme.....	11
2.4 Ejemplos de aplicación.....	15
III Línea Dispersiva Uniforme.	
3.1 Ecuaciones de línea dispersiva.....	19
3.2 Resistencia transitoria.....	20
3.3 Tratamiento numérico de la convolución recursiva	23
3.4 Aplicación del Método de las Características al Modelo de Línea Dispersiva.....	24
3.4.1 Cálculo de voltaje y corriente en los puntos interiores de la malla.....	25

3.4.2	Cálculo de voltajes y corrientes en las fronteras.....	27
3.5	Ejemplo de aplicación.....	29
IV	Línea Dispersiva No Uniforme .	
4.1	Línea Dispersiva No Uniforme aplicando Diferenciación Numérica.....	31
4.2	Línea Dispersiva No Uniforme aplicando la regla de Leibnitz.....	35
4.3	Ejemplos de Aplicación.....	37
4.3.1	Línea Horizontal.....	37
4.3.2	Simulación de un experimento de campo.....	38
4.3.3	Sección de Línea en el Cruce de un Río.....	42
4.4	Observaciones finales.....	44
V	Conclusiones .....	45
VI	Referencias.....	48
VII	Apéndices.	
	Apéndice A.....	52
	A-1 Diferencias Finitas.....	52
	A-2 Clasificación de las Ecuaciones Diferenciales Parciales.....	56
	Apéndice B.....	62
	Apéndice C.....	67
	Apéndice D.....	68

## LISTA DE FIGURAS

	Página
<b>Figura 2.1</b> Curvas Características.....	7
<b>Figura 2.2</b> Malla de discretización en los puntos intermedios de la Línea.....	9
<b>Figura 2.3</b> Malla de discretización en los puntos de la frontera.....	10
<b>Figura 2.4</b> Malla de irregular de curvas características.....	13
<b>Figura 2.5</b> Malla de discretización en características curvas.....	13
<b>Figura 2.6</b> Voltajes a lo largo de la línea uniforme.....	16
<b>Figura 2.7</b> Catenaria de la línea en estudio.....	16
<b>Figura 2.8</b> Voltajes en la línea no uniforme.....	17
<b>Figura 2.9</b> Comparación de resultados de la línea uniforme y no uniforme.....	17
<b>Figura 3.1</b> Comparación de resultados obtenidos en [33] y el Método aquí propuesto.....	30 30
<b>Figura 3.2</b> Comparación de resultados obtenidos en [33], con el Método propuesto, con el EMTP/ATP y con la TNL.....	30 30
<b>Figura 4.1</b> Malla de discretización en características curvas para los puntos intermedios.....	32
<b>Figura 4.2</b> Malla de discretización para los puntos de la frontera.....	36
<b>Figura 4.3</b> Catenarias de la línea simulada.....	38
<b>Figura 4.4</b> Resultados obtenidos para una línea de 600 m.....	38
<b>Figura 4.5</b> Perfil de alturas de una línea de 2185,4 m.....	39
<b>Figura 4.6</b> Formas de ondas experimentales de [1].....	39
<b>Figura 4.7</b> Curvas calculadas y experimentales.....	41
<b>Figura 4.8</b> Ampliación del rizo de la figura 4.7.....	41
<b>Figura 4.9</b> Catenaria de la línea que cruza un río.....	42
<b>Figura 4.10</b> Resultados para la línea en el cruce de un río obtenidos usando el método propuesto y la TNL.....	43 43
<b>Figura 4.11</b> Comparación de resultados obtenidos usando el método propuesto, la TNL y el EMTP/ATP.....	43 43
<b>Figura A-1</b> Malla de diferencias finitas y región solución $D(x,t)$ .....	53

<b>Figura B-1</b> Catenaria de una línea entre dos apoyos.....	65
<b>Figura B-2</b> Red equivalente de una línea seccionada.....	65

# LISTA DE TABLAS

<b>Tabla A-1</b> Clasificación de las EDPs.....	<b>57</b>
<b>Tabla A-2</b> Tipos de curvas generadas por las EDPs.....	<b>58</b>

# I INTRODUCCIÓN

En el análisis tradicional de transitorios electromagnéticos en líneas de transmisión se suele suponer que éstas son uniformes; ya sea en toda su longitud o por secciones. Debido a esta suposición, los parámetros de línea (L, R, C y G) no varían con la distancia. En la realidad, sin embargo, sí la geometría transversal de la línea varía a lo largo de ella, sus características de propagación dependerán de la distancia y se dice que la línea es no uniforme. Como un ejemplo de estas líneas están las aéreas cuyos conductores forman curvas catenarias entre torres. También están las líneas donde el radio del conductor varía. Otro ejemplo son los devanados de transformadores y de máquinas eléctricas. Las torres de transmisión también pueden considerarse como líneas verticales no uniformes cuando son excitadas por una descarga atmosférica [19]

Usualmente, para el análisis transitorios por maniobra, es adecuado suponer que las líneas aéreas son uniformes. En cambio, en el estudio de transitorios por descargas atmosféricas, las no uniformidades pueden ocasionar efectos importantes; razón por la cual, en fechas recientes, el tema de modelado de línea no uniforme ha cobrado bastante importancia. Las referencias [10], [17], [19], [22], [34], [36], [38], [39] y [40] son algunos de los ejemplos de estudios más recientes sobre este tema.

En 1982 Menemelis y Chun [10] propusieron un modelo basado en diagramas de rebote para línea monofásica y sin pérdidas. En 1994 Oufi, *et.al.* [19], desarrollaron un modelo en el dominio de la frecuencia en el cual se modela la línea monofásica no uniforme utilizando aproximaciones exponenciales. En 1996 Correia de Barros y Almeida [22], desarrollaron un modelo basado en la discretización directa mediante diferencias finitas de las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDPs) de la línea. En 1999 A. Gutierrez y J.L. Naredo [34], presentaron un modelo alternativo para el análisis de línea no uniforme con parámetros independientes de la frecuencia el cual estaba basado en diferencias finitas y en el método de las características de la EDPs. En 2000 J.C. Gutierrez [36] incorporó a los desarrollos de [34] un modelo para incluir condiciones

generales en los extremos de las líneas, que es similar al método usado en el EMTP. En 2001 A. Chávez [40], extendió el modelo planteado en [34] al caso de línea polifásica con fuentes distribuidas.

Por otra parte, si las características de propagación de las ondas electromagnéticas a través de una línea de transmisión son funciones de la frecuencia, se dice que la línea es dispersiva. Es usual suponer que la variación frecuencial de los parámetros sólo es importante para el análisis de transitorios por maniobra; mientras que para transitorios por descargas atmosféricas se suelen utilizar modelos de línea con parámetros independientes de la frecuencia. Hasta ahora se han desarrollado numerosos métodos para el análisis de línea dispersiva uniforme.

En 1978 Wilcox [8] desarrolló la técnica de la Transformada Numérica de Laplace (TNL). Esta Técnica presenta la gran ventaja de permitir determinar su nivel de error. También permite incorporar la dependencia frecuencial de los parámetros de línea de manera directa.

En 1982 J. Martí [9] desarrolló un modelo de línea dispersiva para análisis transitorio en el dominio del tiempo. En éste la línea se representa por su impedancia característica, la cual se determina para un extenso rango de frecuencias, así como por una función de propagación. Tanto la impedancia característica como la función de propagación se sintetizan mediante funciones racionales utilizando una técnica basada en diagramas de Bode. En este modelo se considera que la matriz de transformación modal es real y constante. Además, aquí se incluye el uso de la técnica de la convolución recursiva previamente propuesta por Semlyen y Dabuleanu [5]. Posteriormente, en 1988 L. Martí [13] propuso una técnica para tomar en cuenta la dependencia frecuencial de las matrices de transformación modal. El modelo resultante de línea de L. Martí pudo aplicarse con éxito a cables de transmisión subterráneas, mas no a líneas aéreas.

En 1997 H. Nguyen y J. Martí [23] desarrollaron un modelo en el dominio de fase, en el cual tanto la matriz de admitancia características como la matriz de la función de

propagación se sintetizan en el dominio de fases. Además, se considera sólo un retardo modal en la matriz de propagación.

En 1997 F. Marcano y J. Martí [24] desarrollaron un modelo de dependencia frecuencial para líneas y cables basado en matrices idempotentes. Este método permite representar la función de propagación de la línea como una matriz en coordenadas de fase en términos de los modos de propagación naturales de la línea. En 1999 Morched, *et.al.* [33], desarrollan el Modelo Universal de la Línea para el cual se basaron en la técnica de idempotentes desarrollada en [24] y en la técnica del "Vector Fitting" desarrollada por Gustavsen y Semlyen en 1998 [27]. Éste modelo resuelve el problema del modelado en el dominio del tiempo en líneas multiconductoras homogéneas tanto aéreas como subterráneas, excitadas por fuentes concentradas. Al tiempo de escritura de esta tesis, el Modelo Universal, sólo había sido implementado en la versión EMTDC del EMTP bajo el nombre de "Phase Domain Model"

Recientemente, Ramírez [37] desarrolló un modelo para el análisis de línea dispersiva uniforme, el cual está basado en diferencias finitas y en el método de las características.

En la práctica es frecuente analizar transitorios rápidos considerando no uniformidades y despreciando la dependencia frecuencial [34]. En la referencia [38] se muestra que existen casos en que es necesario considerar ambos efectos. En esta referencia se presenta además un método de análisis de líneas no uniformes con parámetros dependientes de la frecuencia. Para este método el modelo de línea primero se sintetiza en el dominio de la frecuencia y luego se realiza en el dominio del tiempo. Cabe decir que en él, tanto la síntesis como la realización son procesos bastante complicados que no han podido ser completamente automatizados.

El objetivo principal de esta tesis es desarrollar un método complementario al de la referencia [38] que sea mucho más fácil de sintetizar y realizar. Como motivación adicional para esta tesis es el tratar de obtener simulaciones más precisas de los

experimentos de campo reportados en la literatura especializada que las que se habían reportado previamente en [34] y [37].

El método aquí propuesto se basa en diferencias finitas y en coordenadas características. Éste está construido sobre la base de los modelos previamente desarrollados por Ramírez para línea dispersiva [37] y por Gutierrez para línea no uniforme con parámetros independientes de la frecuencia [34]. Este método resulta mucho más simple de implementar y, por el hecho de utilizar discretización espacial de la línea, facilita futuras extensiones a casos de líneas con corona así como de líneas excitadas con fuentes distribuidas.

En el modelo de línea uniforme dispersiva de Ramírez [37] se parte de las ecuaciones de Radulet, *et.al* [7], a la que se les aplica directamente una discretización basada en las coordenadas características de las EDPs de la línea. En el método aquí desarrollado, también se adoptan las ecuaciones de Radulet, *et.al* [7]; pero, antes de introducir las coordenadas características, se aplica la regla de Leibnitz [7]. De este modo, al introducir tales coordenadas, se logra eliminar totalmente los términos en derivadas parciales. El método resultante se aplica al caso de línea no uniforme monofásico.

El modelo de línea aquí desarrollado se aplica a varios casos en los que se compara con otros métodos y enfoques, e incluso con resultados experimentales. En el capítulo 2 se hace una revisión de la teoría de características aplicada a líneas uniformes y no uniformes con parámetros independientes de la frecuencia. En el capítulo 3 se incorpora la dependencia frecuencial al análisis de líneas uniformes partiendo de las ecuaciones de línea propuestas por Radulet, *et.al* [7] y aplicando la regla de Leibnitz. Se compara este modelo con el previamente desarrollado por Ramírez [37]. En el capítulo 4, el método desarrollado se extiende al caso de línea no uniforme y se proporcionan casos de aplicación. Finalmente, se presenta en el capítulo 5 las conclusiones de la tesis.

## II LÍNEAS UNIFORMES Y NO UNIFORMES CON PARÁMETROS INDEPENDIENTES DE LA FRECUENCIA

### 2.1 Ecuaciones para línea uniforme

En una línea de transmisión con parámetros constantes, las relaciones entre voltajes y corrientes están dadas por las Ecuaciones Modificadas del Telegrafista, las cuales se pueden agrupar matricialmente de la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & L \\ C & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & R \\ G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

donde  $v$  e  $i$  son los voltajes y corriente a lo largo de la línea y  $L$ ,  $C$ ,  $R$  y  $G$  son los parámetros eléctricos de ésta. El parámetro  $G$  está en función de la conductividad del dieléctrico de la línea; sin embargo, como generalmente se procura que éste sea muy buen aislante, usualmente  $G$  puede despreciarse. De aquí en adelante se supondrá que  $G=0$ .

La ecuación 2.1 se puede representar de la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{U} + \mathbf{A} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \mathbf{B} \mathbf{U} = 0 \quad (2.2)$$

donde:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & L \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & R \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La expresión (2.1) y su equivalente (2.2) representan un sistema de ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) de primer orden. Los eigenvalores de la matriz  $\mathbf{A}$  en (2.2) son:

$$\lambda_1 = +\sqrt{LC} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -\sqrt{LC} \quad (2.3 \text{ a,b})$$

Las correspondientes matrices de eigenvectores izquierdos y derechos de  $\mathbf{A}$  son:

$$\mathbf{E}_L = \begin{bmatrix} 1 & Z_w \\ 1 & -Z_w \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{E}_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ Y_w & -Y_w \end{bmatrix} \quad (2.4 \text{ a,b})$$

donde:

$$Z_w = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{y} \quad Y_w = \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (2.4 \text{ c,d})$$

Debido a que  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son reales, y sobretodo a que  $\mathbf{A}$  tiene un conjunto completo de eigenvectores, el sistema (2.1) es hiperbólico [18]. Por lo tanto, las llamadas curvas características de (2.1) proporcionan un sistema de coordenadas alternativo al cartesiano  $x-t$  [30]. De hecho, las dos familias de curvas características de (2.1) están definidas respectivamente por las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs):

$$\frac{dt}{dx} = \lambda_1 \quad \text{y} \quad \frac{dt}{dx} = \lambda_2 \quad (2.5 \text{ a,b})$$

La figura 2.1 ilustra las dos familias de características obtenidas como soluciones de (2.5a) y (2.5b) para una línea con parámetros  $L$  y  $C$  constantes. Nótese que las pendientes de cada familia corresponden al inverso de las velocidades de propagación en la línea; una en sentido positivo ( $\lambda_1 = +\sqrt{LC}$ ) y la otra en sentido negativo ( $\lambda_2 = -\sqrt{LC}$ ).

Ahora se premultiplica a (2.1) por  $\mathbf{E}_L$  definida en (2.4a) obteniéndose:

$$\begin{bmatrix} \left( \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) v + Z_w \left( \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) i + Ri \\ \left( \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) v - Z_w \left( \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) i + Ri \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

A lo largo de cualquiera de las curvas características definidas por (2.5a) se tiene:

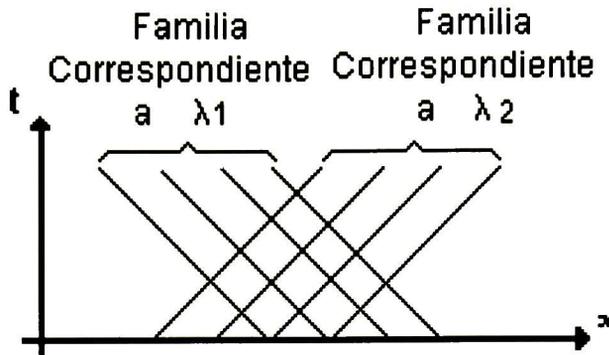


Fig. 2.1. Curvas características

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \quad (2.7)$$

De igual modo, a lo largo de las curvas características definidas por (2.5b).

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \quad (2.8)$$

Aplicando (2.7) y (2.8) en (2.6) se tiene:

$$\begin{bmatrix} dv + Z_w di + Ridx \\ dv - Z_w di + Ridx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

## 2.2 Solución numérica de las ecuaciones de línea uniforme.

La expresión (2.9) representa un sistema de dos EDOs en el sistema de coordenadas definidas por (2.5a) y (2.5b). Este nuevo sistema equivale al de EDPs de la expresión (2.1). Para la solución numérica de (2.9) considérese la malla de diferencias finitas definida por las siguientes aproximaciones discretas de (2.5a) y (2.5b):

$$\Delta t / \Delta x = \lambda_1 \quad \text{y} \quad \Delta t / \Delta x = \lambda_2 \quad (2.10 \text{ a,b})$$

En la práctica, según el tipo de transitorios a analizar, se conoce la frecuencia máxima significativa del fenómeno [21]. Con ésta y con el Teorema del Muestreo [26] se determina un  $\Delta t$  adecuado. Con éste y de (2.10a) y (2.10b) se determina el valor para el  $\Delta x$  correspondiente. Nótese que (2.10a) y (2.10b) cumplen con el criterio de Courant, Friedrichs y Lewi (CFL) [18].

La figura 2.2 ilustra la malla de diferencias finitas basado en coordenadas características para la solución de (2.9). En esta malla, la versión discreta de (2.9) es:

$$\begin{bmatrix} \Delta v + Z_w \Delta i + Ri \Delta x \\ \Delta v - Z_w \Delta i + Ri \Delta x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Ahora supóngase que en la figura 2.2 los valores de “v” y de “i” son conocidos en los puntos “Q” y “G” Mediante la expresión (2.11) se pueden extender estas soluciones al punto “L” de la siguiente forma:

$$(v_L - v_Q) + Z_w (i_L - i_Q) + \frac{R}{2} (i_Q + i_L) \Delta x = 0 \quad (2.12a)$$

$$(v_L - v_G) - Z_w (i_L - i_G) - \frac{R}{2} (i_G + i_L) \Delta x = 0 \quad (2.12b)$$

En estas expresiones, los subíndices L, Q y G denotan los valores específicos de las variables dependientes  $v$  e  $i$  en los puntos correspondientes de la figura 2.2. Las expresiones del tipo (2.12a) y (2.12b) permiten extender las soluciones conocidas en una serie de puntos equidistantes a lo largo de la línea  $t=T$  del plano  $x-t$  a puntos correspondientes en la siguiente línea  $t=T+\Delta t$ , y así sucesivamente.

Reordenando términos en las ecuaciones (2.12a) y (2.12b) se tiene:

$$v_L + \left[ Z_w + \frac{R\Delta x}{2} \right] i_L - v_Q - \left[ Z_w - \frac{R\Delta x}{2} \right] i_Q = 0 \quad (2.13a)$$

$$v_L - \left[ Z_w + \frac{R\Delta x}{2} \right] i_L - v_G + \left[ Z_w - \frac{R\Delta x}{2} \right] i_G = 0 \quad (2.13b)$$

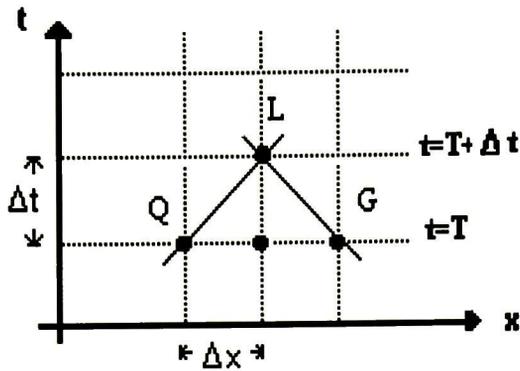


Fig. 2.2. Malla de discretización en los puntos intermedios de la línea.

Si se introducen las siguientes definiciones:

$$Z_{W1} = Z_W + R\Delta x/2 \quad (2.14a)$$

y

$$Z_{W2} = Z_W - R\Delta x/2, \quad (2.14b)$$

las expresiones (2.13a) y (2.13b) resultan en:

$$v_L + Z_{W1}i_L - v_Q - Z_{W2}i_Q = 0 \quad (2.15a)$$

y

$$v_L - Z_{W1}i_L - v_G + Z_{W2}i_G = 0 \quad (2.15b)$$

Finalmente, se despejan los valores de "v" e "i" en el punto "L" de la línea obteniéndose:

$$i_L = \frac{1}{2Z_{W1}} [v_Q - v_G + Z_{W2}(i_Q + i_G)] \quad (2.16)$$

y

$$v_L = \frac{1}{2} [v_Q + v_G + Z_{W2}(i_Q - i_G)] \quad (2.17)$$

En los extremos, tanto inicial como final de la línea, se tiene sólo a una expresión del tipo (2.15a) o (2.15b) pues en los puntos correspondientes sólo incide una

curva característica. La otra ecuación necesaria para extender la solución, debe ser proporcionada por las condiciones de frontera. La figura 2.3 ilustra la malla de discretización para estos puntos.

A manera de ilustración, supóngase que en el extremo inicial de la línea se tiene una fuente ideal de voltaje. El valor del voltaje en el punto "H" de la figura 2.3 corresponde a la condición de frontera y es el voltaje de alimentación  $v_H = f(t)$ . Se adapta pues la ecuación 2.15b como sigue:

$$v_H - Z_{W1}i_H - v_Q - Z_{W2}i_Q = 0; \quad (2.18)$$

de aquí se despeja  $i_H$ :

$$i_H = \frac{1}{Z_{W1}} [f(t) - v_Q + Z_{W2}i_Q] \quad (2.19)$$

Para el extremo o frontera final, en  $x=L$  se supone como ejemplo una carga resistiva pura cuya relación entre voltaje y corriente es:

$$i_M = \frac{v_M}{R_L}; \quad (2.20)$$

ahora se adapta la ecuación (2.15a) como sigue:

$$v_M + Z_{W1}i_M - v_P - Z_{W2}i_P = 0, \quad (2.21)$$

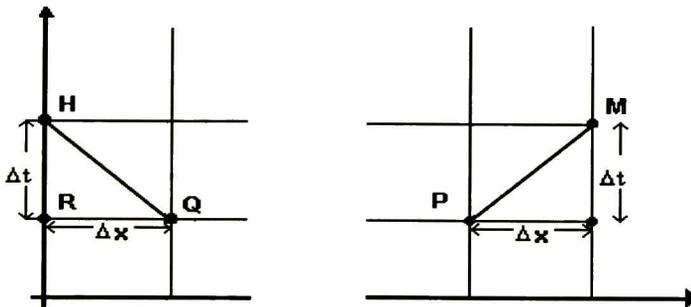


Fig. 2.3. Malla de discretización en los puntos de la frontera

a partir de (2.20) y (2.21) se pueden obtener los valores de voltaje en la frontera final:

$$v_M = \frac{R_L}{R_L + Z_{W1}} (v_P + Z_{W2} i_P) \quad (2.22)$$

### 2.3 Extensión al caso de líneas no uniformes.

Para incorporar no uniformidades al análisis de líneas de transmisión aquí se considera que los parámetros de éstas varían con la longitud. En el caso de una línea aérea  $L$ ,  $C$  y  $R$  estarán dados como funciones de la distancia:

$$L=L(x)=L_G(x)+L_T(x)+L_C, \quad (2.25 a)$$

$$R=R(x)=R_T(x)+R_C, \quad (2.25 b)$$

y

$$C=C(x)=C_G(x), \quad (2.25 c)$$

donde  $L_G$  es la inductancia geométrica de la línea,  $L_T$  y  $R_T$  son la inductancia y la resistencia de tierra, respectivamente,  $L_C$  y  $R_C$  son la inductancia y resistencia interna del conductor, respectivamente.  $L_C$  y  $R_C$  podrían también ser funciones de  $x$ ; aunque para aplicaciones de potencia éste usualmente no es el caso. En cuanto a la capacitancia de una línea aérea, ésta queda representada por su parte geométrica  $C_G(x)$  [11].

En esta tesis se considera el caso de una línea aérea donde la no uniformidad es producida por la catenaria que forman sus conductores; por tanto [11]:

$$L_G(x) = \frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{2h(x)}{r}\right) \quad (2.26 a)$$

$$C_G(x) = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(2h(x)/r)}. \quad (2.26 b)$$

$$Z_T = R_T(x) + j\omega L_T(x) = \frac{j\omega\mu}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{1}{h(x)\sqrt{j\omega\mu\sigma}} \right) \quad (2.27c)$$

y

$$Z_C = R_C + j\omega L_C = \sqrt{\left( \frac{\rho_c}{\pi r^2} \right)^2 + \frac{j\omega\mu\rho_c}{4\pi^2 r^2}}. \quad (2.28 d)$$

En estas expresiones  $h(x)$  es la altura del conductor,  $r$  es su radio,  $\rho_c$  la resistividad,  $\sigma$  es la conductividad del terreno y  $\omega$  es una frecuencia angular específica. Cabe mencionar que, en la representación de líneas con parámetros independientes de la frecuencia, se asume un valor constante de frecuencia que sea representativo del fenómeno transitorio que se analiza. En este caso las velocidades e impedancias de la onda vienen dados por:

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{L(x)C(x)} = \pm\sqrt{\mu\varepsilon + (L_T + L_C)C_G} \quad (2.29 a,b)$$

y

$$Z_w = \sqrt{L(x)/C_G(x)}. \quad (2.30)$$

De acuerdo con (2.29), ahora las características positivas y negativas están dadas por las expresiones siguientes:

$$\frac{dt}{dx} = \lambda_1(x) \quad y \quad \frac{dt}{dx} = \lambda_2(x), \quad (2.31 a,b)$$

notándose que para una línea no uniforme las características ya no son rectas y por tanto proporcionan una malla de coordenadas distorsionada como se ilustra en figura 2.4. Es posible, sin embargo, aplicar el método de las características a una malla regular como la que se ilustra en la figura 2.5. Para esta malla, el valor de  $\Delta t$  se determina de modo similar que en el caso de la línea uniforme. El valor de  $\Delta x$  se determina mediante la siguiente expresión:

$$\Delta x > \Delta t / \lambda_{\min}, \quad (2.31)$$

donde  $\lambda_{min}$  representa la magnitud del menor valor posible de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ . Usualmente éste corresponderá al inverso de la máxima velocidad de la luz.

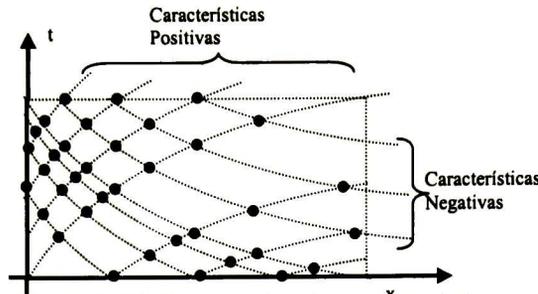


Fig. 2.4. Malla irregular de características curvas

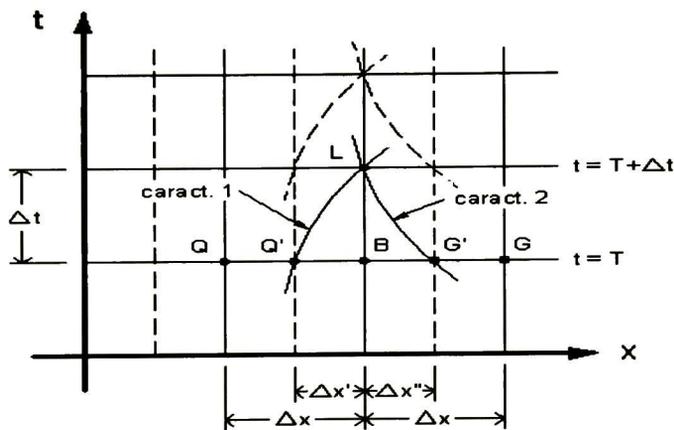


Fig. 2.5. Malla de discretización con características curvas

Considérese ahora el punto "L" sobre la malla regular de la figura 2.5 y que los valores de "v" e "i" son conocidos en los puntos Q, B, G y quizá en otros más uniformemente espaciados a lo largo de la recta  $t=T$ . Por el punto "L" pasan dos características, una de la familia de las positivas y otra de la familia de las negativas. La ecuación de la línea de transmisión a lo largo de la característica 1 es:

$$dv + Z_w di + R i dx = 0 \quad (2.32)$$

La aproximación discreta de esta expresión en el segmento Q'-L es:

$$v_L - v_Q + (Z_{W,L} + Z_{W,Q})(i_L - i_Q)/2 + (R_L + R_Q)(i_L + i_Q)\Delta x'/4 = 0 \quad (2.33)$$

Para poder implementar esta expresión, nótese que es necesario determinar la abscisa del punto Q' donde la característica 1 cruza la recta  $t=T$ . Siendo  $\Delta x'$  la distancia entre los puntos B y Q', de ésta se determinan los valores de  $v_Q, i_Q, Z_{WQ}$  y  $R_Q$ , mediante interpolaciones.

Para obtener la abscisa "x" del punto Q' se resuelve iterativamente la siguiente ecuación, tomando en cuenta que  $\lambda_Q$  es función de  $x_Q$ :

$$x_{Q'} = x_B - 2\Delta t / (\lambda_L + \lambda_{Q'}) \quad (2.34)$$

Nótese que (2.34) es la versión discreta de (2.5a) para el caso de línea no uniforme. Nótese también que  $\lambda_L = \lambda_B$ .

Para la característica 2, se tiene:

$$dv - Z_w di + R dx = 0 \quad (2.35)$$

Esta expresión se discretiza dentro del segmento L-G' del mismo modo que en el caso anterior, resultando:

$$v_L - v_G - (Z_{W,L} + Z_{W,G})(i_L - i_G)/2 - (R_L + R_G)(i_L + i_G)\Delta x''/4 = 0 \quad (2.36)$$

donde  $\Delta x''$  es la distancia entre el punto G' y el punto B obtenida resolviendo iterativamente la siguiente expresión que es la versión discreta de (2.5b):

$$x_{G'} = x_B + 2\Delta t / (\lambda_L + \lambda_{G'}) \quad (2.37)$$

Las expresiones del tipo (2.33) y (2.36) permiten extender los valores de "v" é "i", conocidos en los puntos equidistantes de la línea  $t=T$ , a puntos con las mismas ordenadas sobre la recta  $t=T+\Delta t$ . Subsecuentes extensiones a puntos sobre

$t=T+k\Delta t$  con  $k=2,3,\dots,etc.$ , se efectúan de la misma forma. Nótese que debido a que los parámetros sólo tienen dependencia de la distancia y no del tiempo las características se desplazan de forma paralela en  $t$ , por tanto, los parámetros y las intersecciones de las características sólo se calculan en  $t=T$ . Por este motivo no es necesario recalcular valores tales como  $\Delta x'$ ,  $\Delta x''$ ,  $Z_{WQ}$ ,  $Z_{WG}$ ,  $R_Q$ , y  $R_G$  en subsiguientes extensiones a  $t= T+2\Delta t$ , a  $t= T+3\Delta t, etc.$

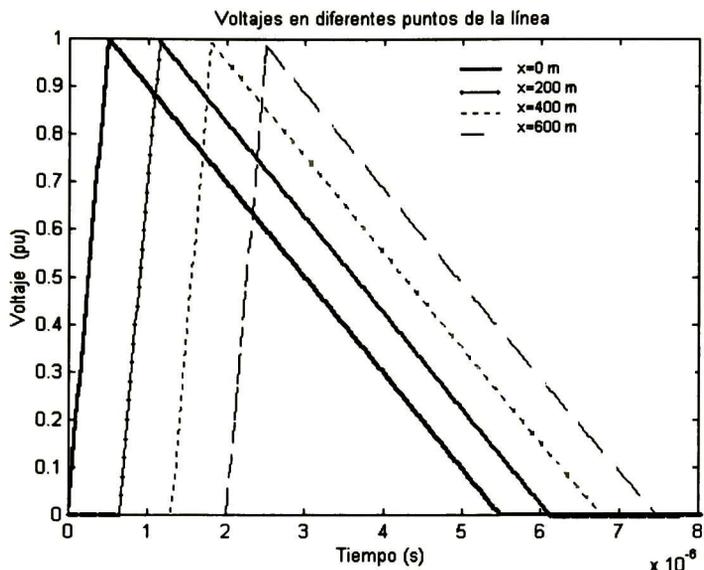
## 2.4 Ejemplos de aplicación

### 2.4.1 Línea horizontal uniforme

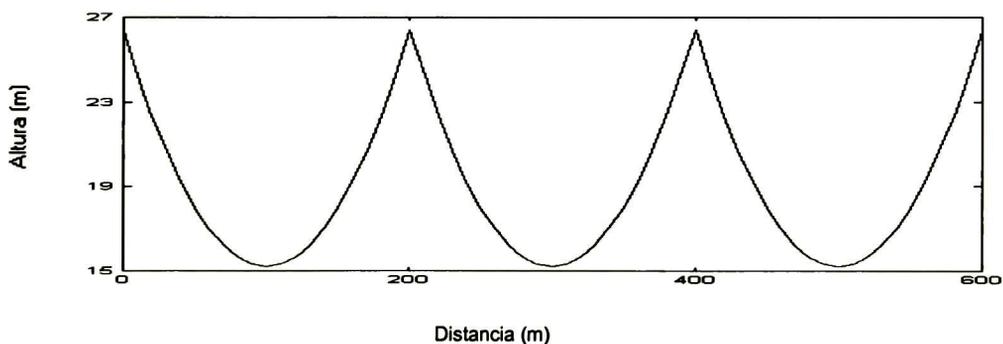
Considérese una línea horizontal de 600 m. Al inicio de ésta se inyecta un impulso doble rampa lineal de amplitud máxima de 1 p.u., con un tiempo de subida de  $0.5\mu s$  y tiempo de caída al 50% del valor máximo de  $3\mu s$ . Para calcular los parámetros de la línea uniforme los datos usados son: altura promedio  $h=20.8$  m, resistividad del terreno  $\rho_t=100 \Omega\cdot m$ , conductor de ACSR con radio  $r=2.54$  cm. De estos parámetros se obtienen los siguientes valores:  $L_G=1.4831\mu H/m$ ,  $C_G=7.4988pF/m$ ,  $R_{CD}=14.347e-5\mu\Omega/m$  y  $R_L=450 \Omega$ . La figura 2.6 muestra la simulación de la propagación de la doble rampa a lo largo de la línea. Ésta se obtuvo mediante el método de las características, según se describe en la sección 2.2.

Considérese ahora que la línea del ejemplo anterior en realidad no es uniforme, sino que está compuesta por tres tramos cuyas torres están ubicadas en los puntos  $x = 0, 200, 400$  y  $600$  m. En el caso de la línea uniforme, se había asumido una altura promedio; ahora los conductores forman curvas catenarias entre torre y torres con altura máxima de  $26.4$  m, y mínima de  $15.2$  m. Esto se ilustra en la figura 2.7. En el extremo emisor, la línea es alimentada con la misma doble rampa lineal que en el ejemplo previo, mientras que en el extremo receptor la línea está terminada en su impedancia característica promedio. La figura 2.8 muestra los resultados de la simulación de la onda doble rampa lineal

propagándose a lo largo de la línea no uniforme. Nótese aquí la aparición de ondulaciones (rizo) en la cresta de la onda viajera.

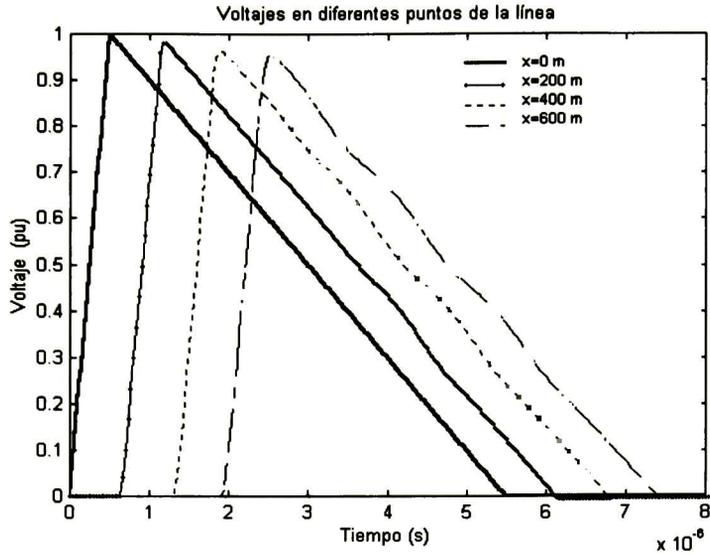


**Fig. 2.6.** Voltajes a lo largo de la línea uniforme.

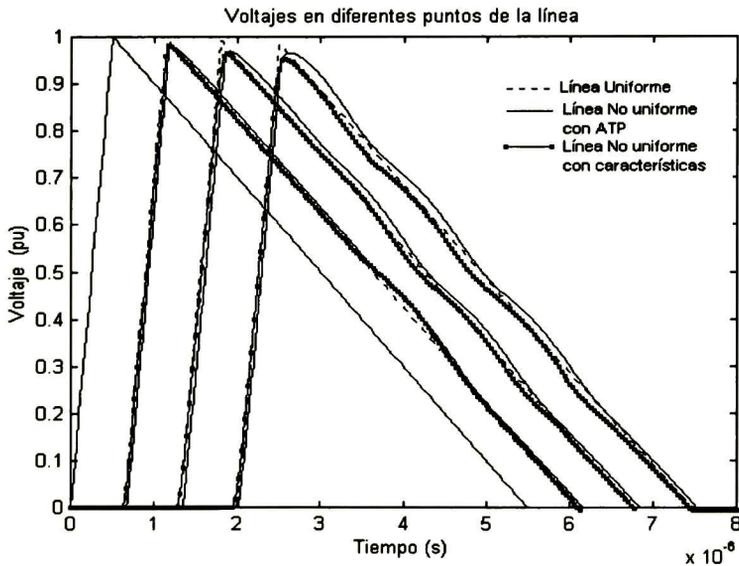


**Fig. 2.7.** Catenaria de la Línea en estudio.

Finalmente, en la figura 2.9 se superponen los resultados de la simulación obtenidos con el modelo de línea uniforme con los de la no uniforme. Para estos últimos, se incluyen simulaciones con el método de las características y con el programa EMTP/ATP. Puede observarse una buena concordancia entre el EMTP/ATP y el método de las características.



**Fig. 2.8.** Voltajes en la línea no uniforme



**Fig. 2.9.** Comparación de los resultados para la línea uniforme y no uniforme.

Es importante mencionar que en este ejemplo en particular, el EMTF presenta algunos inconvenientes. Primeramente hay que subdividir la línea y representar cada segmento como tramo de línea uniforme; aquí la determinación de  $\Delta x$  se

hace a prueba y error; aunque también puede tomarse como base el valor prescrito por el método de las características. En segundo lugar, la introducción de los datos de cada segmento tiene que hacerse manualmente. En tercer lugar, el EMTP pudiera requerir mayor número de subdivisiones que el método de las características para alcanzar la misma precisión. Por ejemplo en la figura 2.8 se usó el mismo  $\Delta x$  para ambos métodos. Si se reduce el  $\Delta x$  para el ATP, los resultados obtenidos se aproximan más a los del método de las características.

### III LÍNEA DISPERSIVA UNIFORME

#### 3.1 Ecuaciones de línea dispersiva

Para analizar líneas de transmisión con parámetros dependientes de la frecuencia, aquí se adoptan las siguientes extensiones de las ecuaciones del telegrafista, que han sido propuestas por Radulet, *et.al.*, [7] :

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = L_G \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t r'(t-\tau) i(\tau) d\tau \quad (3.1a)$$

y

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C_G \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t g'(t-\tau) v(\tau) d\tau \quad (3.1b)$$

donde  $r'(t)$  es una función del tiempo denominada resistencia transitoria y  $g'(t)$  es otra función denominada conductancia transitoria. Dichos parámetros transitorios incluyen las dependencias frecuenciales de la línea. En el caso de líneas aéreas el parámetro  $g'(t)$  puede y suele despreciarse [16].

La resistencia transitoria de la línea  $r'(t)$  se define como la caída de tensión por unidad de longitud que aparece en los conductores cuando se inyecta un escalón unitario de corriente  $u(t)$  [37]:

$$r'(t) = - \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{i=u(t)} \quad t > 0$$

De esta definición es claro que  $r'(t)$  debe cumplir con las siguientes propiedades [5]:

$$\lim_{t \rightarrow 0} (r'(t)) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (r'(t)) = R_{CD} \quad (3.2a,b)$$

siendo  $R_{CD}$  la resistencia de la línea en corriente directa.

### 3.2 Resistencia transitoria.

En el dominio de Laplace la primera ecuación del telegrafista tiene la siguiente forma [5]:

$$-\frac{dV(s)}{dx} = [sL_G + Z_T(s) + Z_C(s)]I(s), \quad (3.3)$$

donde  $L_G$  es la inductancia geométrica o de línea ideal,  $Z_T(s)$  es la impedancia debida al retorno por tierra, y  $Z_C(s)$  es la impedancia del conductor.  $Z_T(s)$  y  $Z_C(s)$  están dadas en el capítulo 2 como funciones de  $j\omega$ . Aquí se sustituye a " $j\omega$ " por " $s$ ". Los parámetros de la ecuación (3.3) pueden ser determinados para diferentes frecuencias utilizando procedimientos como los proporcionados en las referencias [6] y [2].

La transformada de Laplace de (2a) es:

$$-\frac{dV}{dx} = [sL_G + sR'(s)]I(s) \quad (3.4)$$

De la comparación entre (3.3) y (3.4) se obtiene:

$$R'(s) = \frac{[Z_T(s) + Z_C(s)]}{s} \quad (3.5)$$

Se sigue pues que  $R'(s)$  es una función irracional, difícil de convertir al dominio del tiempo. Sin embargo, ésta se puede aproximar mediante una función racional como sigue:

$$R'(s) = \frac{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ns^{N+1}}{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ns^{N+1}} \quad (3.6)$$

Nótese que la aproximación es no estrictamente propia, debido a que se debe cumplir con la propiedad (3.2a). Considerando que  $R'(s)$  tiene polos simples se obtiene la siguiente expansión en fracciones parciales :

$$R'(s) = \frac{k_0}{s} + \sum_{i=1}^N \frac{k_i}{s + p_i} + k_\infty \quad (3.7)$$

donde  $N+1$  es el orden del ajuste racional.

Del teorema del valor final y de (3.2b) y (3.8) se sigue que  $k_0 = R_{CD}$ .

Al extraer el término que contiene a  $R_{CD}$  se tiene que la nueva función a ajustar es:

$$H(s) = R'(s) - \frac{R_{CD}}{s} \quad (3.8)$$

Existen varios métodos para obtener los parámetros  $k_1, k_2, \dots, k_N, k_\infty, p_1, p_2, \dots, p_N$ , del ajuste racional [11]. En esta tesis se utiliza el método conocido como "Vector Fitting" el cual fue desarrollado por Semlyen y Gustavsen [32]. Este método permite ajustar respuestas medidas o calculadas en el dominio de la frecuencia usando aproximaciones racionales. Al aplicar este método es necesario realizar un proceso iterativo en el cual, al inicio, se proporcionan polos de arranque; luego en cada iteración, éstos van siendo desplazados hasta su posición final en la que el error del ajuste cae dentro de una tolerancia previamente establecida. En el caso del modelado de líneas de transmisión, generalmente los polos finales son reales y logarítmicamente espaciados, lo cual permite una convergencia rápida del algoritmo "Vector Fitting"

La transformada inversa de Laplace de (3.7) es:

$$r'(t) = R_{CD}u(t) + k_\infty \delta(t) + h(t) \quad (3.9a)$$

donde  $\delta(t)$  es la función delta de Dirac,  $u(t)$  es la función escalón y

$$h(t) = \sum_{i=1}^N k_i e^{-p_i t} \quad (3.9b)$$

Considérese ahora el término de convolución en la ecuación (3.1a). Al sustituir en éste la expresión (3.9a) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t r'(t-\tau)j(\tau)d\tau &= k_{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \delta(t-\tau)j(\tau)d\tau + R_{CD} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t u(t-\tau)j(\tau)d\tau + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t h(t-\tau)j(\tau)d\tau \\ &= k_{\infty} \frac{\partial i(t)}{\partial t} + R_{CD}i(t) + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t h(t-\tau)j(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (3.10)$$

Si se sustituye (3.13) en (3.1a) resulta:

$$\frac{\partial V}{\partial X} + D \frac{\partial i}{\partial t} + R_{cd}i + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t h(t-\tau)j(\tau)d\tau = 0, \quad (3.11)$$

donde :

$$D = k_{\infty} + L_G \quad (3.12)$$

Las ecuaciones (3.11) y (3.1b) constituyen el sistema de EDPs previamente utilizado por A. Ramírez en [37].

Con el fin de eliminar la derivada parcial del término de convolución en (3.11), ahora se aplica la regla de Leibnitz para la diferenciación de una integral [7]. La justificación de esta regla se incluye en el Apéndice C. Se aplica entonces dicha regla:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t h(t-\tau)j(\tau)d\tau = h(0)j(t) + \int_0^t h'(t-\tau)j(\tau)d\tau \quad (3.13)$$

donde  $h'(t) = \partial h(t)/\partial t$

Sustituyendo ahora (3.13) en (3.11) se tiene

$$\frac{\partial V}{\partial X} + D \frac{\partial i}{\partial t} + R_x i + \psi = 0, \quad (3.14)$$

donde:

$$\psi = \int_0^t h'(t-\tau)j(\tau)d\tau = -\sum_{i=1}^N k_i p_i \int_0^t e^{-p_i(t-\tau)} j(\tau)d\tau \quad (3.15)$$

$$h(0) = \sum_{k=1}^N k_i \quad (3.16)$$

y

$$R_x = R_{CD} + h(0) \quad (3.17)$$

Las ecuaciones (3.14) y (3.1b) constituyen un sistema de EDPs que representan a una línea de transmisión dispersiva. Estas ecuaciones se utilizan como base del modelo propuesto en esta tesis.

Cabe mencionar que, dado que  $h'(t)$  es una suma de exponenciales, su convolución con  $i(t)$  puede resolverse de manera recursiva [5].

### 3.3 Tratamiento numérico de la Convolución Recursiva

Para el modelo de línea aquí propuesto  $\psi$  contiene los términos exponenciales de la resistencia transitoria y su imagen en el dominio de Laplace es:

$$\Psi(s) = \mathcal{L}(\psi(t))$$

donde:

$$\Psi(s) = - \left[ \frac{k_1 p_1}{s + p_1} + \frac{k_2 p_2}{s + p_2} + \dots + \frac{k_N p_N}{s + p_N} \right] I(s) \quad (3.18)$$

Conviene ahora introducir  $N$  variables auxiliares  $\Psi_i$ , tales que:

$$\Psi(s) = - \sum_{i=1}^N \Psi_i = \sum_{i=1}^N \frac{k_i p_i}{s + p_i} I(s); \quad (3.19)$$

es decir:

$$\Psi_i = \frac{k_i p_i}{s + p_i} I(s) \quad i=1,2,3,\dots, N \quad (3.20)$$

La ecuación (3.20) se puede reescribir como:

$$s\Psi_i + p_i\Psi_i = k_i p_i I(s) \quad (3.21)$$

La imagen en el dominio del tiempo de esta última expresión es:

$$\frac{d\psi_i}{dt} + p_i\psi_i = k_i p_i i(t) \quad (3.22)$$

donde  $\psi_i$  representa la imagen en el dominio del tiempo de  $\Psi_i$ , para  $i=1,2,\dots,N$ .

Al aplicar la regla de Euler hacia atrás se tiene:

$$\psi_{i,n+1} = \frac{\Delta t}{1 + p_i \Delta t} \left[ \frac{\psi_{i,n}}{\Delta t} + k_i p_i i_{n+1} \right] \quad (3.23)$$

con  $\psi_{i,n}$  denotando a  $\psi_{i(n\Delta t)}$ .

La convolución total puede expresarse así:

$$\begin{aligned} \psi[(n+1)\Delta t] &\triangleq \psi_{n+1} \\ &= \sum_{i=1}^N \psi_{i,n+1} = - \sum_{i=1}^N \frac{\Delta t}{1 + p_i \Delta t} \left[ \frac{\psi_{i,n}}{\Delta t} + k_i p_i i_{n+1} \right] \end{aligned} \quad (3.24)$$

Esta última expresión es una convolución numérica de orden  $O(\Delta t)$ . Cabe mencionar que a partir de la expresión (3.22) es posible desarrollar convoluciones recursivas de ordenes superiores.

### 3.4 Aplicación del Método de las Características al Modelo de Línea Dispersiva.

El Método de las características aplicado a una línea uniforme como se describe en el capítulo 2 puede ser extendido al caso de línea dispersiva. Retomando la ecuación (3.14) y haciendo las siguientes consideraciones:

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{DC_G} \quad (3.25 \text{ a,b})$$

$$\frac{dt}{dx} = \lambda_1, \quad (3.25 \text{ c})$$

$$\frac{dt}{dx} = \lambda_2, \quad (3.25 \text{ d})$$

y

$$Z_w = \sqrt{D/C_G} \quad (3.26)$$

se puede efectuar la extensión de la siguiente forma:

$$dv + Z_w di + R_{cd} i dx + \psi dx = 0 \quad (3.27a)$$

$$dv - Z_w di + R_{cd} i dx + \psi dx = 0 \quad (3.27b)$$

Las ecuaciones (3.25c) y (3.25d) proporcionan las curvas características en el plano  $x-t$  sobre las cuales se desarrolla la malla de discretización que permite dar solución numérica a (3.27a) y (3.27b). Nótese que aquí es necesario incluir en el método de las características el proceso descrito en la sección anterior para la actualización de los términos de las convoluciones  $\psi$ .

### 3.4.1 Cálculo de voltaje y corriente en los puntos interiores de la malla.

Al aplicar el procedimiento de discretización utilizado en la sección 2.3 a las ecuaciones (3.27a) y (3.27b) se obtiene:

$$(v_L - v_Q) + Z_w (i_L - i_Q) + \frac{1}{2}(\psi_L + \psi_Q)\Delta x + \frac{R_x}{2}(i_L + i_Q)\Delta x = 0 \quad (3.28a)$$

$$(v_L - v_G) - Z_w (i_L - i_G) - \frac{1}{2}(\psi_L + \psi_G)\Delta x - \frac{R_x}{2}(i_L + i_G)\Delta x = 0 \quad (3.28b)$$

Agrupando términos de voltajes y de corrientes se tiene:

$$v_L + Z_w i_L - v_Q - Z_w i_Q + \frac{1}{2}(\psi_Q + \psi_L)\Delta x = 0 \quad (3.29a)$$

y

$$v_L - Z_1 i_L - v_G + Z_2 i_G - \frac{1}{2}(\psi_L + \psi_G)\Delta x = 0 ; \quad (3.29b)$$

de igual forma que en la sección (2.3) se define:

$$Z_1 = Z_W + (R_x/2)\Delta x \quad (3.30a)$$

y

$$Z_2 = Z_W - (R_x/2)\Delta x \quad (3.30b)$$

Nótese que  $\psi_Q$  y  $\psi_G$  representan las convoluciones en los puntos "Q" y "G" respectivamente.

Sumando (3.29a) y (3.29b) se puede determinar el valor de  $v_L$ :

$$v_L = \frac{1}{2} \left[ (v_Q + v_G) + Z_2(i_Q - i_G) - \frac{\Delta x}{2}(\psi_Q - \psi_G) \right], \quad (3.31)$$

Por otra parte restando (3.29a) de (3.29b) se obtiene:

$$-v_Q + v_G + 2Z_1 i_L - Z_2(i_Q + i_G) + \frac{\Delta x}{2}(2\psi_L + \psi_G + \psi_Q) = 0; \quad (3.32)$$

dado que la convolución en el punto "L" para un tiempo dado está en función de la corriente en ese mismo instante, la convolución en ese punto se puede expresar de la siguiente forma:

$$\psi_L = -\sum_{i=1}^N \frac{\Delta t}{1 + p_i \Delta t} \left[ \frac{1}{\Delta t} \psi_{i,B} + k_i p_i i_L \right] \quad (3.33)$$

Sustituyendo la expresión (3.33) en la ecuación (3.32) se tiene:

$$-v_Q + v_G + 2Z_1 i_L - Z_2(i_Q + i_G) + \frac{\Delta x}{2}(\psi_Q + \psi_G + 2\psi'_L) = 0 \quad (3.34)$$

donde:

$$\psi'_L = \sum_{i=1}^N \frac{1}{1 + p_i \Delta t} \psi_{i,b} \quad (3.35)$$

y

$$Z'_1 = Z_1 + \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^N \frac{k_i p_i}{1 + p_i \Delta t} \quad (3.36)$$

Despejando  $i_L$  de la expresión (3.34) se tiene:

$$i_L = \frac{1}{2Z'_1} \left[ (v_Q - v_G) + Z_2(i_Q + i_G) - \frac{\Delta x}{2} (\psi_Q + \psi_G + 2\psi'_L) \right] \quad (3.37)$$

Finalmente, las expresiones (3.31) y (3.37) extienden la solución de la línea de los puntos Q y G al punto L.

### 3.4.2 Cálculo de voltajes y corrientes en las fronteras.

Aplicando un procedimiento similar al que se describió en la sección anterior para los puntos intermedios de la línea, se obtienen las ecuaciones correspondientes a las fronteras; es decir, para  $x=0$  y  $x=L$ . Para la frontera izquierda, en  $x=0$ , a manera de ejemplo se considera la aplicación de una fuente ideal de voltaje  $v_H = f(t)$ , luego se utiliza la ecuación (3.27b) y finalmente se aplica el proceso de discretización, obteniéndose:

$$(v_H - v_Q) - Z_W(i_H - i_Q) - \frac{1}{2}(\psi_H + \psi_Q)\Delta x - \frac{R_x}{2}(i_H + i_Q)\Delta x = 0 \quad (3.38)$$

Ahora se agrupan los términos de voltaje y corriente y se sustituyen las expresiones para  $Z_1$  y  $Z_2$  dadas por (3.30a) y (3.30b):

$$v_H - Z_1 i_H - v_Q + Z_2 i_Q - \frac{1}{2}(\psi_H + \psi_Q)\Delta x = 0 \quad (3.39)$$

En este caso, la convolución en el punto "H" está en función del valor de la corriente en ese mismo punto:

$$v_- = -\sum_{n=1}^N \frac{\Delta x}{1 - \rho \Delta x} \left[ \frac{1}{\Delta x} v_R - k \rho i_- \right] \quad (3.40)$$

La expresión (3.39) queda entonces de la siguiente forma:

$$v_- - Z' i_- - v_+ - Z_+ j_+ - \frac{\Delta x}{2} (v'_+ - v_+) = 0 \quad (3.41)$$

donde  $Z_+$  está dado en la ecuación (3.36) y

$$v'_+ = \sum_{n=1}^N \frac{1}{1 - \rho \Delta x} v_{n+} \quad (3.42)$$

Finalmente, despejando el valor de la corriente en el punto  $H'$  se tiene:

$$= \frac{1}{Z'} \left( v_- - v_+ - Z_+ j_+ - \frac{\Delta x}{2} (v'_+ - v_+) \right) \quad (3.43)$$

Para la frontera derecha, en  $x=L$ , considérese el caso de que se conecta en ese extremo una carga resistiva. Se sigue un procedimiento similar al anterior. De la discretización de (3.27a) se tiene:

$$(v_w - v_+) - Z_w (i_w - i_+) - \frac{1}{2} (v_w - v_+) \Delta x - \frac{R_L}{2} (i_w - i_+) \Delta x = 0, \quad (3.44)$$

agrupando términos

$$v_w - Z_w i_w - v_+ - Z_+ j_+ - \frac{1}{2} (v_w - v_+) \Delta x = 0, \quad (3.45)$$

introduciendo la relación de carga:

$$i_w = v_w / R_L \quad (3.46)$$

se obtiene:

$$v_w = \frac{R_L}{R_L - Z_w} \left\{ v_+ - Z_+ j_+ - \frac{\Delta x}{2} (v'_w - v_+) \right\}, \quad (3.47)$$

donde:

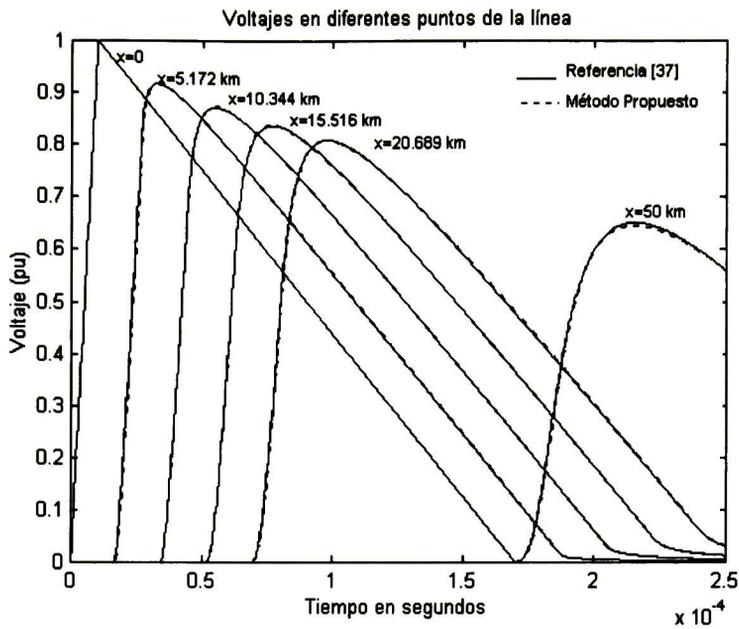
$$\psi'_M = \sum_{i=1}^q \frac{1}{1 + p_i \Delta t} \psi_{i,N} \quad (3.48)$$

### 3.5 Ejemplo de aplicación

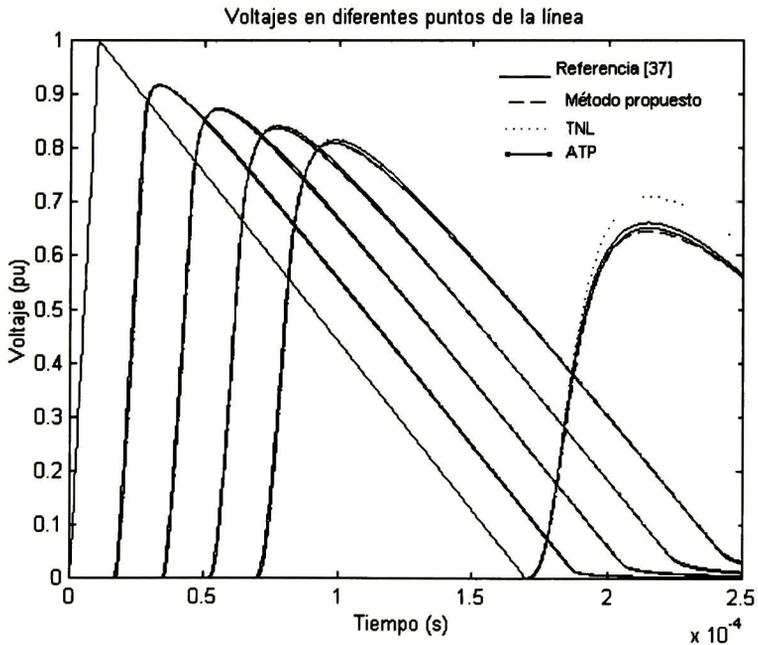
Considérese una línea de 50 km de longitud, la cual es alimentada con un impulso doble rampa lineal con tiempo de subida al valor máximo de  $10\mu\text{s}$ , y tiempo de caída al 50% de dicho valor máximo de  $90\mu\text{s}$ . La línea además se considera terminada con una carga igual a su impedancia transitoria,  $R=400\ \Omega$ . Para los parámetros de la línea se consideraron los siguientes datos: altura promedio  $h=10\ \text{m}$ , resistividad del terreno  $\rho_t=100\ \Omega\text{-m}$ , conductor ASCR con radio  $r=2.54\ \text{cm}$ , con los cuales se obtuvo los siguientes parámetros eléctricos de la línea:  $L_G=1.3369\ \mu\text{H/m}$ ,  $C_G=8.3421\ \text{pF}$  y  $R_{CD}=7.8941\ \mu\Omega/\text{m}$ . La línea se considera uniforme con parámetros dependientes de la frecuencia.

La figura 3.1 muestra las formas de onda del voltaje en los siguientes puntos  $x=0, 5.172, 10.344, 15.516, 20.689$  y  $50\ \text{km}$ , los cuales son obtenidos aplicando el método de las características incluyendo dependencia frecuencial mediante la regla de Leibnitz. Dicha figura incluye también los resultados obtenidos en [37]. Se observa que los resultados de ambos métodos son prácticamente idénticos.

Por otro lado, la figura 3.2 muestra la comparación de los resultados anteriores con los obtenidos mediante la Transformada Numérica de Laplace (TNL), así como con el programa EMTP/ATP. Se puede observar en esta figura que los cuatro métodos proporcionan resultados prácticamente iguales, excepto por la forma de onda en el extremo final de la línea en donde se observa una pequeña discrepancia de los tres métodos del dominio del tiempo con la TNL.



**Fig. 3.1.** Comparación de resultados obtenidos en [37] y el Método propuesto.



**Fig. 3.2.** Comparación de resultados obtenidos en [37], con el método aquí propuesto, con el EMTP/ATP y con la TNL.

## IV LÍNEA DISPERSIVA NO UNIFORME

### 4.1 Línea dispersiva no uniforme aplicando diferenciación numérica.

El modelo de línea dispersiva uniforme desarrollado por Ramírez [37] parte del sistema de EDPs conformado por las ecuaciones (3.11) y (3.1a). Al aplicar a éste el método de las características se obtiene el siguiente sistema equivalente de EDOs:

$$\frac{dt}{dx} = \lambda_1 = +\sqrt{DC_G} \quad (4.1 a)$$

$$\frac{dt}{dx} = \lambda_2 = -\sqrt{DC_G} \quad (4.1 b)$$

$$dv + Z_w di + R_{CD} dx + \varphi dx = 0 \quad (4.1 c)$$

y

$$dv - Z_w di + R_{CD} dx + \varphi dx = 0. \quad (4.1 d)$$

En las expresiones (4.1 c) y (4.1 d)  $\varphi$  representa la derivada parcial respecto al tiempo de la convolución  $\psi$ . A continuación, el modelo de línea dispersiva descrito por (4.1 a), (4.1 b), (4.1 c) y (4.1 d) se extiende al caso de línea no uniforme monofásica. En esta extensión varios de los parámetros resultan ser funciones de la distancia. Por ejemplo,  $D$  y  $C_G$  dependerán de "x" así como también  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  y  $Z_w$ . El parámetro  $R_{CD}$  podría también depender de "x" por ejemplo si el radio del conductor variase con la distancia. Aquí, sin embargo, no se considera esta posibilidad.

El término de la convolución " $\psi$ ", utilizado en dicho modelo, es también función de "x"; lo cual implica que los parámetros  $k_1, k_2, \dots, k_N, k_\infty, p_1, p_2, \dots, p_N$ , dependen de la distancia. Sin embargo, en el ajuste racional de  $\Psi(s, x)$  es posible utilizar los mismos polos  $s=p_i$  ( $i=1, 2, 3, \dots, N$ ) para los distintos valores de  $x$  y sólo se varían los residuos  $k_1, k_2, \dots, k_N$  [9]. En el dominio de Laplace, la imagen del término de la convolución del modelo de Ramírez [37], con no uniformidad incluida, resulta de la siguiente forma:

$$\Psi(s, x) = \sum_{i=1}^N \frac{k_i(x)}{s + p_i} f(s). \quad (4.2)$$

Ahora, discretizando las ecuaciones del modelo descrito anteriormente y tomando como base al esquema de la figura 4.1 se tiene:

$$\begin{aligned} (v_L - v_{Q'}) + (Z_L + Z_{Q'}) (i_L - i_{Q'}) / 2 \\ + (\varphi_{Q'} + \varphi_L) \Delta x' / 2 + (R_L + R_{G'}) (i_{Q'} + i_L) \Delta x' / 4 = 0 \end{aligned} \quad (4.3 a)$$

y

$$\begin{aligned} (v_L - v_{G'}) - (Z_L + Z_{G'}) (i_L - i_{G'}) / 2 \\ - (\varphi_{G'} + \varphi_L) \Delta x' / 2 + (R_L + R_{G'}) (i_{G'} + i_L) \Delta x' / 4 = 0 \end{aligned} \quad (4.3 b)$$

Ahora se define:

$$Z_{w1} = \frac{Z_{Q'} + Z_L}{2} \quad (4.4 a)$$

$$Z_{w2} = \frac{Z_{G'} + Z_L}{2}. \quad (4.4 d)$$

$$R_1 = \frac{R_{Q'} + R_L}{2} \quad (4.4 c)$$

y

$$R_2 = \frac{R_{G'} + R_L}{2}. \quad (4.4d)$$

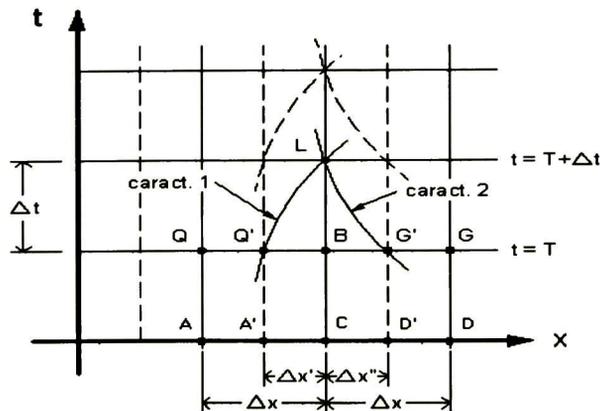


Fig. 4.1. Malla de discretización con características curvas

Las ecuaciones (4.3 a) y (4.3 b) quedan:

$$(v_L - v_{Q'}) + (Z_{W1})(i_L - i_{Q'}) + (\varphi_{Q'} + \varphi_L)\Delta x'/2 + (R_1)(i_{Q'} + i_L)\Delta x'/2 = 0 \quad (4.5 a)$$

y

$$(v_L - v_{G'}) - (Z_{W2})(i_L - i_{G'}) - (\varphi_{G'} + \varphi_L)\Delta x'/2 + (R_2)(i_{G'} + i_L)\Delta x''/2 = 0. \quad (4.5 b)$$

Restando ahora (4.5 b) de (4.5 a):

$$(v_{G'} - v_{Q'}) + I_L(Z_{11} + Z_{22}) - Z_{12}I_{Q'} - Z_{21}I_{G'} + (\varphi_{Q'} + \varphi_L)\Delta x'/2 + (\varphi_{G'} + \varphi_L)\Delta x''/2 = 0 \quad (4.6)$$

La derivada parcial  $\varphi$  se aproxima utilizando diferencias finitas hacia atrás y de acuerdo con el esquema de discretización de la figura 4.1, la expresión resultante es:

$$(v_{G'} - v_{Q'}) + I_L(Z_{11} + Z_{22}) - Z_{12}I_{Q'} - Z_{21}I_{G'} + (\psi_L - \psi_B + \psi_{Q'} - \psi_{A'})\Delta x'/(2\Delta t) + (\psi_L - \psi_B + \psi_{G'} - \psi_{D'})\Delta x''/(2\Delta t) = 0 \quad (4.7)$$

donde:

$$Z_{11} = Z_{W1} + \frac{R_1\Delta x_1}{2}. \quad (4.8 a)$$

$$Z_{22} = Z_{W2} + \frac{R_2\Delta x_2}{2}. \quad (4.8 b)$$

$$Z_{12} = Z_{W1} - \frac{R_1\Delta x_1}{2} \quad (4.8 c)$$

y

$$Z_{21} = Z_{W2} - \frac{R_2\Delta x_2}{2}. \quad (4.8 d)$$

Aquí  $\psi_{A'}$  representa la convolución en el punto  $A'$ , la cual es obtenida por medio de interpolaciones. De igual manera se determinan las convoluciones en los puntos  $Q'$ ,  $G'$  y  $D'$ .

La convolución en el punto L está dada por la siguiente expresión:

$$\psi_L = \sum_{i=1}^N \frac{\Delta t}{1 + \rho_i \Delta t} \left( \frac{1}{\Delta t} \psi_{i,B} + k_i i_L \right). \quad (4.9)$$

Sustituyendo la expresión (4.9) en (4.7) y despejando la corriente en el punto L se obtiene:

$$i_L = \frac{1}{Z_{1p} + Z_{2p}} [v_{Q'} - v_{G'} + Z_{12} i_{Q'} + Z_{21} i_{G'} - \frac{\Delta_{x1}}{2\Delta t} (\psi'_{L'} + \psi_{Q'} - \psi_B - \psi_{A'}) - \frac{\Delta_{x2}}{2\Delta t} (\psi'_{L'} + \psi_{G'} - \psi_B - \beta \psi_{D'})] \quad (4.10)$$

donde :

$$Z_{1p} = Z_{11} + \frac{\Delta_{x1}}{2} \sum_{i=1}^N \frac{k_i}{1 + \rho_i \Delta t}. \quad (4.11 a)$$

$$Z_{2p} = Z_{22} + \frac{\Delta_{x2}}{2} \sum_{i=1}^N \frac{k_i}{1 + \rho_i \Delta t} \quad (4.11 b)$$

y

$$\psi'_{L'} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{1 + \rho_i \Delta t} \psi_{i,B} \quad (4.11 c)$$

Ahora se sustituye (4.10) en (4.5 a) y se determina el valor de voltaje en L.

$$v_L = \frac{1}{Z_{1p} + Z_{2p}} [v_{Q'} Z_{2p} + Z_{1p} v_{G'} - Z_{1p} Z_{21} i_{G'} + Z_{2p} Z_{12} i_{Q'} + \frac{Z_{1p} \Delta_{x2}}{2\Delta t} (\psi'_{L'} + \psi_{G'} - \psi_B - \psi_{D'}) - \frac{Z_{2p} \Delta_{x1}}{2\Delta t} (\psi'_{L'} + \psi_{Q'} - \psi_B - \psi_{A'})] \quad (4.12)$$

Para los puntos en las fronteras se sigue un procedimiento similar al aplicado para los puntos intermedios. En la frontera inicial en  $x=0$ , considerando por ejemplo que se aplica una fuente ideal de voltaje y refiriéndose al esquema mostrado en la figura 4.2 se tiene:

$$v_H - v_{R'} - Z_{W2}(i_H - i_{R'}) - \frac{R_2 \Delta_{x2}}{2}(i_H + i_{R'}) - \frac{(\varphi_H + \varphi_{R'}) \Delta_{x2}}{2} = 0, \quad (4.13)$$

reordenando términos y despejando  $i_H$ :

$$i_H = \left( \frac{1}{Z_{2p}} \right) \left( v_H - v_{R'} + i_{R'} Z_{12} - \frac{\Delta_{x2}}{2 \Delta t} (\psi'_{H'} + \psi_{R'} - \psi_R - \psi_{N'}) \right). \quad (4.14)$$

En la frontera final  $x=L$ , tras suponer una carga resistiva se tiene:

$$v_P - v_{M'} + Z_{W1}(i_P - i_{M'}) + \frac{R_1 \Delta_{x1}}{2}(i_P + i_{M'}) + \frac{(\varphi_P + \varphi_{M'}) \Delta_{x1}}{2} = 0, \quad (4.15)$$

aplicando la relación de carga

$$v_P = i_P R_L$$

y despejando  $v_P$ :

$$v_P = \left( \frac{R_L}{R_L + Z_{1p}} \right) \left( v_{M'} + i_{M'} Z_{12} - \frac{\Delta_{x1}}{2 \Delta t} (\psi'_{P'} + \psi_{M'} - \psi_M - \psi_O) \right). \quad (4.16)$$

## 4.2 Línea dispersiva no uniforme aplicando la regla de Leibnitz.

Al extender el modelo de línea dispersiva propuesto en el capítulo 3 al análisis de una línea no uniforme se debe considerar que la línea queda representada también por las ecuaciones (3.25 a), (3.25 b), (3.25 c), (3.25 d), (3.26), (3.27 a) y (3.27 b); sólo que ahora sus términos son dependientes de la distancia. En este caso la función racional a ajustar es la siguiente:

$$\Psi(s, x) = - \sum_{i=1}^N \frac{k_i(x) p_i}{s + p_i} I(s) \quad (4.17)$$

Se Incluye entonces el efecto de la no uniformidad en las ecuaciones (3.27a) y (3.27b).

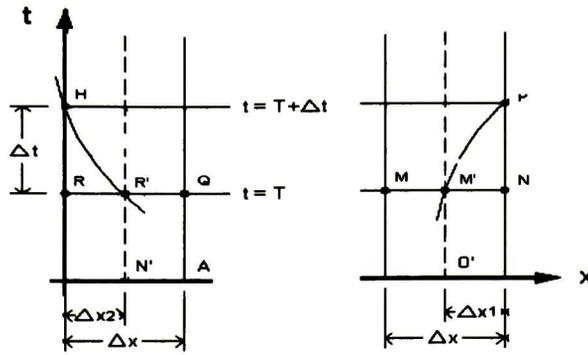


Fig. 4.2. Malla de discretización para los puntos en la frontera

De éstas y de la figura 4.1 se tiene:

$$(v_L - v_{Q'}) + (Z_{W,L} + Z_{W,Q'}) (i_L - i_{Q'}) / 2 + (\psi_{Q'} + \psi_L) \Delta x' / 2 + (R_L + R_{G'}) (i_{Q'} + i_L) \Delta x' / 4 = 0 \quad (4.18 a)$$

y

$$(v_L - v_{G'}) - (Z_{W,L} + Z_{W,G'}) (i_L - i_{G'}) / 2 - (\psi_{G'} + \psi_L) \Delta x'' / 2 + (R_L + R_{G'}) (i_{G'} + i_L) \Delta x'' / 4 = 0 \quad (4.18 b)$$

De la resta de (4.18 b) de (4.18 a) y tras despejar  $i_L$ :

$$i_L = \left( \frac{1}{Z_{1p} + Z_{2p}} \right) \left( v_{Q'} - v_{G'} + Z_{12} i_{Q'} + Z_{21} i_{G'} - \frac{\Delta x_1}{2} (\psi'_{L'} + \psi_{Q'}) - \frac{\Delta x_2}{2} (\psi'_{L'} + \psi_{G'}) \right) \quad (4.19)$$

donde :

$$Z_{1p} = Z_{11} + \frac{\Delta x_1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{k_i p_i}{1 + p_i \Delta t} \quad (4.20 a)$$

$$Z_{2p} = Z_{22} + \frac{\Delta x_2}{2} \sum_{i=1}^N \frac{k_i p_i}{1 + p_i \Delta t} \quad (4.20 b)$$

y

$$\psi'_{L'} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{1 + p_i \Delta t} \psi_{i,b} \quad (4.20 c)$$

Ahora se sustituye  $i_L$  de (4.19) en (4.18 a) y se determina el valor de  $v_L$ .

$$v_L = \frac{1}{Z_{1p} + Z_{2p}} [v_{Q'} Z_{2p} + Z_{1p} v_{G'} - Z_{1p} Z_{21} i_{G'} + Z_{2p} Z_{12} i_{Q'} + \frac{Z_{1p} \Delta_{x2}}{2} (\psi'_{L'} + \psi_{G'}) - \frac{Z_{2p} \Delta_{x1}}{2} (\psi'_{L'} + \psi_{Q'})] \quad (4.21)$$

Para los puntos en las fronteras se sigue un procedimiento semejante al utilizado para los puntos intermedios, obteniéndose para la frontera inicial en  $x=0$ :

$$i_H = \frac{1}{Z_{2p}} \left( v_H - v_{R'} + i_{R'} Z_{12} - \frac{\Delta_{x2}}{2} (\psi'_{H'} + \psi_{R'}) \right) \quad (4.22)$$

En la frontera final  $x=L$  :

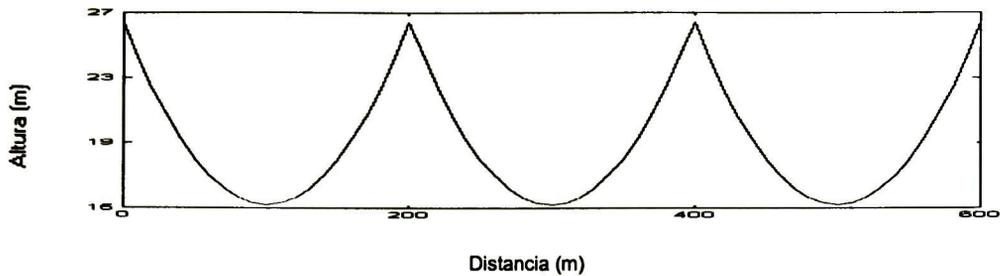
$$v_P = \left( \frac{R_L}{R_L + Z_{1p}} \right) \left( v_{M'} + i_{M'} Z_{12} - \frac{\Delta_{x1}}{2} (\psi'_{P'} + \psi_{M'}) \right) \quad (4.22)$$

## 4.3 Ejemplos de aplicación

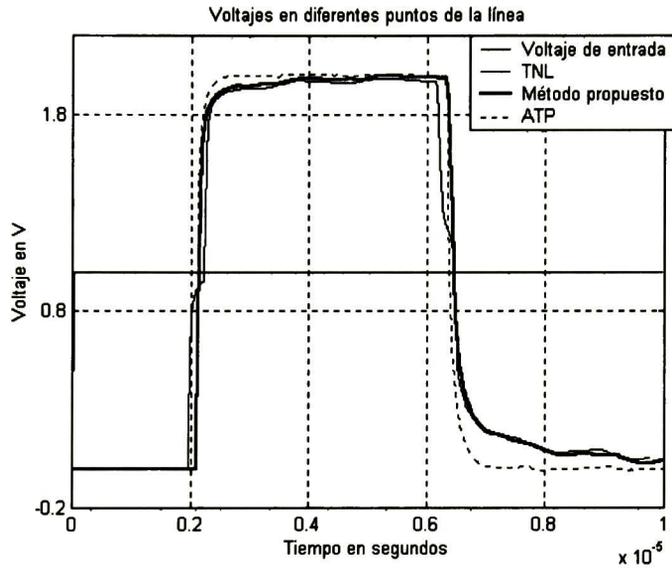
### 4.3.1 Línea horizontal

Considérese una línea monofásica no uniforme de 600 metros de longitud, y conformada por tres tramos sostenidos por cuatro torres. Las catenarias de esta línea se muestran en la figura 4.3. Se considera aquí que la distancia entre torres es de 200 m. El conductor es sencillo de ACSR y con 2.54 cm de radio. La altura máxima de la catenaria es de 26.4 m, y la mínima es de 15.2 m.

La línea se supone alimentada en su extremo emisor con un escalón unitario de voltaje, y su extremo receptor se deja abierto. La figura 4.4 muestra los resultados obtenidos utilizando el método de características aquí propuesto. También se incluyen en esta figura los resultados obtenidos con la TNL y con el programa EMTP/ATP. En la figura 4.4 se observa una concordancia general entre los tres métodos usados. La mayor coincidencia ocurre entre el método aquí propuesto y el de TNL. En éste último se observa un pequeño doblez en la transición, el cual se debe a la longitud del paso de discretización  $\Delta x$ .



**Fig. 4.3. Catenaria de la línea simulada**



**Fig. 4.4. Resultados obtenidos para una línea de 600m.**

### 4.3.2 Simulación de un Experimento de Campo

Ahora se considera el experimento de campo de Wagner, Gross, y Loyd reportado en [1]. La línea experimental consiste de 8 torres localizadas en  $x = 0, 329.2, 658.4, 978.4, 1615.4, 1900.4$  y  $2185.4$  m. La línea es trifásica horizontal, los conductores son sencillos de ACSR y con 2.54 cm de radio. La resistividad del terreno aquí se supone de  $100 \Omega\text{-m}$ . La altura máxima de la catenaria es de 26.2 m, y la mínima es de 15.2 m. La figura 4.5 ilustra el perfil de alturas de la línea. En el extremo emisor ( $x=0$ ) los tres conductores se conectan sólidamente y en el extremo receptor la línea está completamente abierta. El extremo emisor de la línea se alimenta con una doble rampa exponencial.

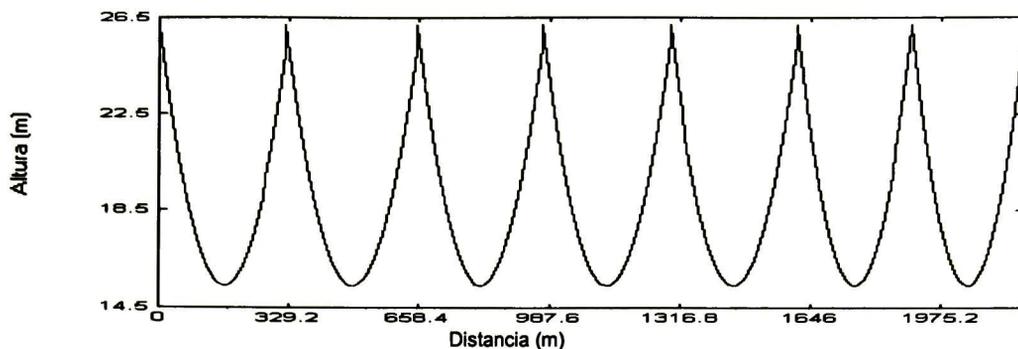


Fig. 4.5. Perfil de alturas de la línea de 2185,4 m..

La figura 4.6, tomada de la referencia [1], muestra las formas de onda medidas experimentalmente; tanto la onda inyectada como la del extremo receptor. Para esta última se ha aplicado un factor de escala de 0.5.

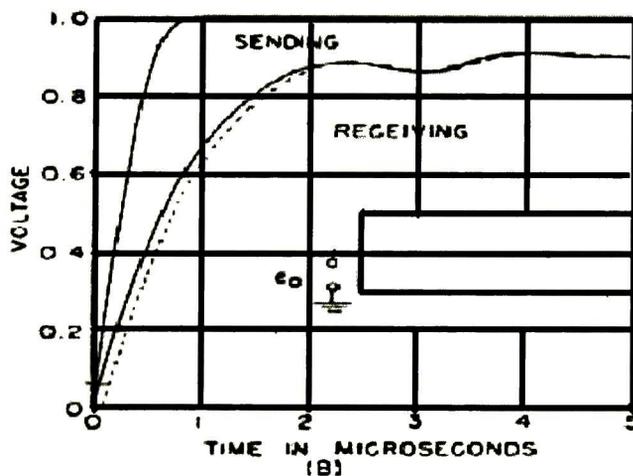


Fig. 4.6. Resultados obtenidos por Wagner, Gross y Lloyd.

Debido a la conexión de los conductores en el extremo emisor, la línea puede ser considerada monofásica. De hecho, las simulaciones aquí realizadas se efectúan bajo esta consideración.

El método de las características se aplica bajo las siguientes consideraciones:

- 1) línea uniforme sin dependencia frecuencial
- 2) línea no uniforme con parámetros independientes de la frecuencia

- 3) línea uniforme con parámetros dependientes de la frecuencia y,
- 4) línea no uniforme con parámetros dependientes de la frecuencia.

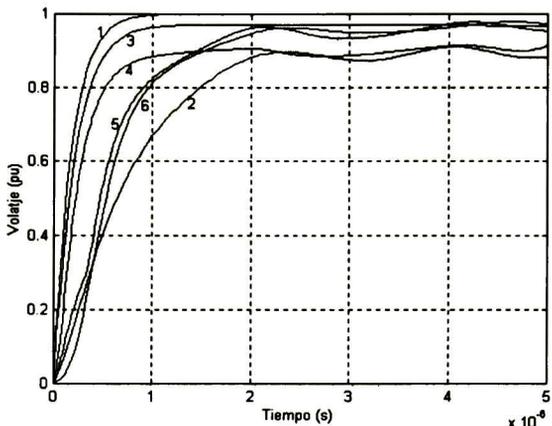
Adicionalmente, la línea no uniforme con parámetros dependientes de la frecuencia también se analiza con la Transformada Numérica de Laplace, modelándola a través de pequeños segmentos de línea uniforme. Este ejemplo no fue modelado usando el EMTP/ATP debido a que hubo problemas de agotamiento de la memoria de la computadora utilizada, a pesar que ésta tenía 256 MB de memoria RAM.

La figura 4.7 muestran los resultados obtenidos a través de las simulaciones. Ahí se incluyen también las ondas experimentales de entrada y de salida. La figura 4.8 muestra una ampliación del rizo de la figura 4.7. En esas dos figuras, la curva 1 corresponde a la forma de onda de la entrada, la curva 2 a la forma de onda del voltaje en el nodo de salida, la curva 3 al voltaje en el nodo final obtenido para el modelo de línea uniforme independiente de la frecuencia, la curva 4 al voltaje en el nodo final para el modelo de línea no uniforme independiente de la frecuencia, la curva 5 al voltaje en el nodo final para el modelo de línea no uniforme con parámetros dependientes de la frecuencia usando el método de la TNL y, finalmente, la curva 6 al voltaje en el nodo final para el modelo de línea no uniforme con dependencia frecuencial. Cabe decir que en ésta última se empleó el modelo basado en la regla de Leibnitz.

A partir de las comparaciones entre las formas de onda experimentales y las simuladas, en estas dos figuras se puede decir que, ambos efectos, no uniformidad y dependencia frecuencial deben ser tomados en cuenta. También se puede decir que la aparición del rizo en la forma de onda del voltaje en el extremo receptor es causado por la no uniformidad de la línea. Estas observaciones habían sido previamente realizadas en [34]. De las figuras 4.7 y 4.8 , además, se puede decir lo siguiente:

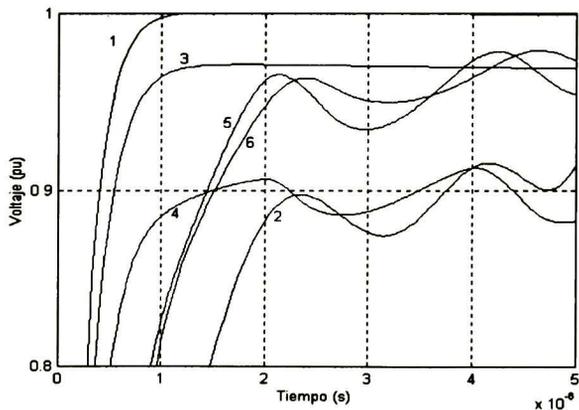
1. El modelo de línea no uniforme con parámetros independientes de la frecuencia reproduce bastante bien tanto el rizo como la amplitud de la onda de voltaje; sin embargo, el tiempo de elevación de la onda no es descrito correctamente por este modelo.

2. Al agregar la dependencia frecuencial de los parámetros al modelo de línea no uniforme, el tiempo de elevación se aproxima mejor al de la onda experimental; sin embargo, la magnitud de la onda simulada es mayor aproximadamente en un 7% a la de la experimental.



**Fig. 4.7.** Curvas calculadas y experimentales. La numeración es explicada en el texto

3. El método propuesto aquí y la técnica de TNL obtienen resultados bastante aproximados entre si para el caso de línea no uniforme con dependencia frecuencial (curvas 5 y 6 de las figuras 4.7 y 4.8).



**Fig. 4.8.** Ampliación del rizo de la figura 4.5 La numeración es explicada en el texto.

### 4.3.5 Sección de línea en el cruce de un río

Se considera ahora una sección de línea en el cruzamiento de un río. Este ejemplo fue obtenido de las referencias [38] y [39]. La línea es de 600m de longitud, y su catenaria se muestra en la figura 4.9. La línea es trifásica formada por conductores paralelos de 2.54 cm de radio y 10m de separación horizontal. La resistividad del agua es asumida en  $10 \Omega\text{-m}$ . El nodo de envío está a 28 m sobre el nivel del piso y el nodo receptor está a 230.4 m.

La línea es alimentada con un escalón unitario y el extremo receptor está abierto. La figura 4.10 muestra las formas de onda en los nodos emisor y receptor usando el método basado en la regla de Leibnitz, así como el de la Transformada Numérica de Laplace. En este último método se emplearon pequeños segmentos de línea de 30 m de longitud. Allí se observa una muy buena aproximación de las formas de onda obtenidas utilizando ambos métodos. En la figura 4.11 se adiciona la simulación hecha usando el programa EMTP/ATP, la cual presenta algunas discrepancias con las obtenidas mediante los dos métodos antes mencionados. Cabe señalar que las formas de onda mostradas en la figura 4.10 son bastante aproximados a los reportados en la referencia [38].

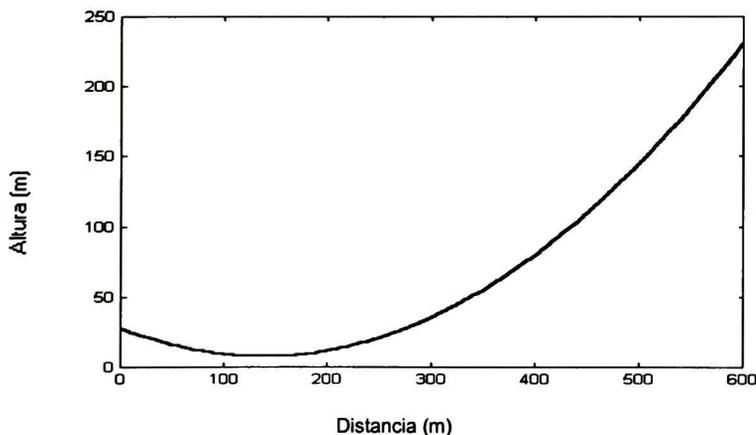


Fig. 4.9. Catenaria de Línea que cruza un río.

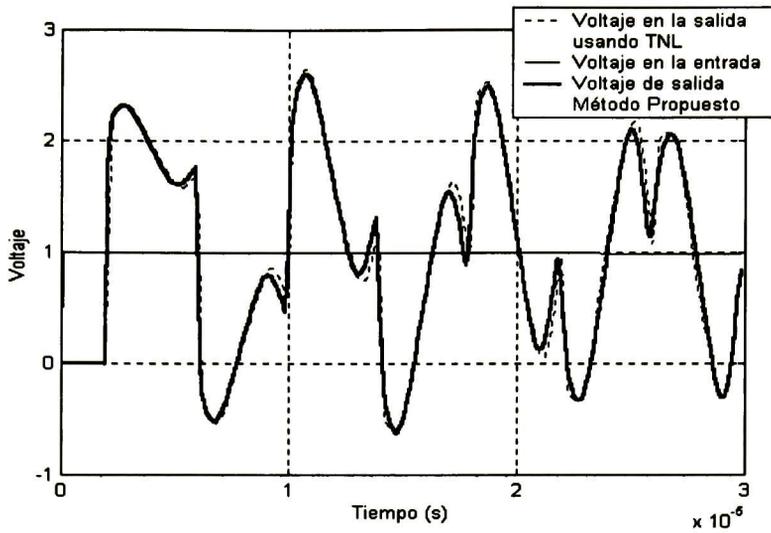


Fig. 4.10. Resultados para la línea de cruce en un río, obtenidos usando el método propuesto y la TNL.

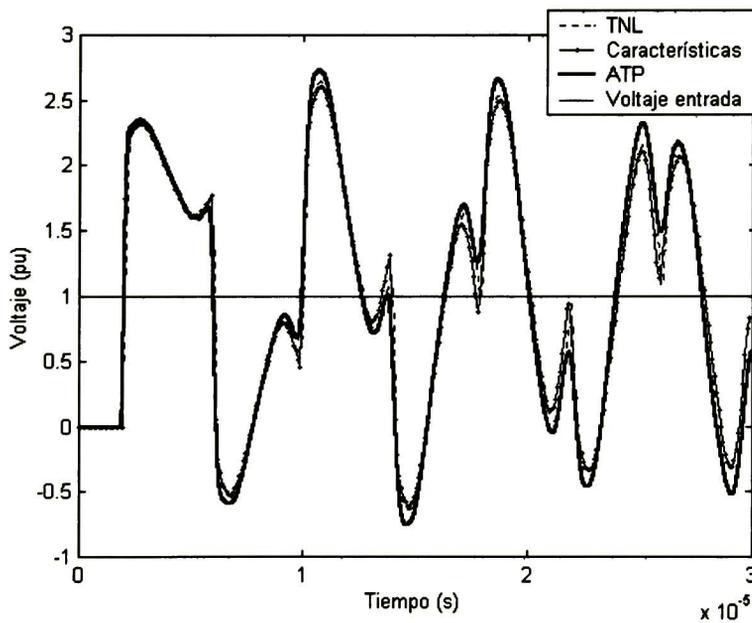


Fig. 4.11. Comparación de resultados obtenidos usando el método propuesto, la TNL y el EMTP/ATP

#### **4.4 Observaciones finales.**

En este capítulo se ha planteado un modelo que permite incorporar el efecto de la no uniformidad al análisis de una línea dispersiva uniforme. Éste se basa en diferencias finitas y en el Método de las Características. Este método es aplicado a tres casos de líneas no uniformes, los resultados aquí obtenidos se comparan con los de la técnica de la TNL, con los del programa EMTP/ATP. En estos tres ejemplos se observa que existe una mayor concordancia entre los resultados obtenidos con el modelo aquí propuesto y con la TNL que con los del EMTP/ATP. Es importante señalar que en el último ejemplo existe muy buena aproximación de los resultados aquí obtenidos con los reportados en [37].

# V CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

## 5.1 CONCLUSIONES GENERALES

En esta tesis se ha propuesto un modelo para analizar líneas monofásicas de transmisión, en el cual se incorporan tanto los efectos de no uniformidad como los de dependencia frecuencial. En trabajos que anteceden al presente se había aplicado el método de características para el análisis de transitorios electromagnéticos en líneas de transmisión; pero se consideraban de manera separada ambos efectos [34] y [37]. En este trabajo se ha presentado una extensión de dichas metodologías, la cual permite analizar una línea uniforme con parámetros dependientes de la frecuencia. Además, para la implementación de esta extensión se ha incorporado la regla de Leibnitz para la derivación de una integral; esto con el fin de eliminar un paso de diferenciación parcial numérica que se requiere en el método planteado en [37].

El método que aquí se ha presentado es un complemento al de la referencia [38], para aquellos casos en los cuales se requiere determinar las formas de onda en los puntos intermedios a lo largo de la línea en estudio. Éste método ha sido aplicado a varios casos de línea no uniforme, uno de ellos consiste en una línea horizontal con catenarias a lo largo de su longitud. Otro caso consiste en un segmento de línea en el cruce de un río. En esos dos ejemplos, se han hecho comparaciones con un método de fuerza bruta que aplica la técnica de la TNL a pequeños segmentos de línea uniforme. También se han hecho comparaciones con el programa EMTP/ATP.

Un tercer caso de aplicación ha consistido en la simulación de una línea experimental reportada por Wagner, Gross y Lloyd [1]. En los resultados obtenidos se observa al agregar no uniformidad a la línea dispersiva se logra una buena aproximación del rizo de la onda de salida reportada en [1]; pero no se logra reproducir con mayor fidelidad el tiempo de elevación de la onda experimental. Para este ejemplo en particular,

además, se comparan los resultados obtenidos con el método propuesto y con los de la TNL. Ambos resultados son bastante aproximados entre sí. Aquí no se pudo simular el caso con el EMTP/ATP debido al agotamiento de la memoria RAM de la computadora utilizada. Para el caso del segmento de línea en un cruce de río, la similitud entre los resultados obtenidos mediante los tres métodos ( el propuesto, la TNL y el EMTP/ATP) es bastante buena; además, estos resultados son bastante aproximados a los reportados en [38].

A partir de los resultados arriba mencionados se puede decir que, en el análisis de transitorios electromagnéticos en líneas de transmisión es importante incluir ambos efectos, no uniformidad y dependencia frecuencial de los parámetros de la línea. Es importante mencionar también que al realizar las simulaciones de una línea dispersiva no uniforme usando el EMTP/ATP ó la TNL, se presentan varios inconvenientes. Primeramente, hay que subdividir la línea en varias secciones y representar cada segmento como tramo de línea uniforme. Se presenta en el EMTP/ATP la dificultad de la selección del paso de discretización  $\Delta x$  adecuado. En la mayoría de los casos esto se hace por prueba y error. Aquí se recomienda tomar como base el valor prescrito por el método de las características. En segundo lugar, en el caso de la utilización del EMTP/ATP la introducción de los datos de cada segmento tiene que hacerse manualmente. Finalmente, tanto el EMTP/ATP como la TNL suelen requerir mayor número de subdivisiones que el método de las características para alcanzar la misma precisión. Esto implica la menor eficiencia computacional de estos métodos respecto al que aquí se ha propuesto.

## **5.2 TRABAJOS FUTUROS**

Dada la importancia que representa incorporar los diferentes efectos en el análisis de transitorios electromagnéticos en las líneas de transmisión, se recomiendan los siguientes trabajos futuros:

- Incorporar el efecto de Corona al modelo de línea monofásica no uniforme y con dispersión.
- Extender el modelo de línea dispersiva con regla de Leibnitz al caso no uniforme y polifásico.

## VI REFERENCIAS

- [1] C. F. Wagner, I. W. Gross, and B.L. Lloyd, "High- voltage Impulse Test on Transmission Lines", *AIEE Trans.*, vol.73, pt III-A, April 1954, pp.196-210.
- [2] R. H. Galloway, W. B. Shorrocks, L. M. Wedephol, "Calculation of Electrical Parameters for short and long Polyphase Transmission Lines". *Proc. IEEE*, vol. 111, December 1964, pp.2051 – 2059.
- [3] H. W. Dommel, "*Digital Computer Solution of Electromagnetic Transients in Single and Multiphase Networks*", *IEEE Transaction on Power Apparatus and Syntems*, pp. 388-398, April 1969.
- [4] D. K. Cheng, "Analysis of Linear Systems", Third Edition, Addison-Wesley Publishing Company Inc., USA 1972.
- [5] A. Samlyen, A. Dabuleanu, "Fast and Accurate Switching Transient Calculations on Transmission Lines with ground return using recursive convolutions" *IEEE Trans. Power Apparatus and Systems*, Vol. PAS-94, pp. 561-571, March/April 1975.
- [6] C. Gary, "Approache complete de la Propagation Multifilaire en Haute Frequence par Utilisation des Matrices Complexes " *E.D.F Bull. de la Direction des Etudes et Recherches serie B*, No. 3/4, pp. 5-20, 1976.
- [7] R. Radulet, Al. Timotin, A. Tugulea, A. Nica, "The Transient Response of the Electric lines Based on the Equations with Transient Line-Parameters",*Rev. Roum.Sci.Techn.-Vol.23*, No.1, pp. 3-19,1978.
- [8] D. J. Wilcox, "Numerical Laplace Transformation and Inversion" *Int.J. Elect.Enging.Educ.*, Vol.15,pp.247-265,1978.
- [9] J. R. Martí, "Accurate modelling of Frecuency-Dependent Transmission Lines in Electromagnetics Transiente Simulations" *IEEE Transactions on Power Aparatus and Systems*, Vol. PAS-101, No. 1, pp.147-155, January 1982.
- [10] C. Menemelis, Z. T. Chun, "Wave Propagtion on Nonuniform Lines", *IEEE Trnasactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-101, No.4, April 1982, pp. 833-839.

- [11] A. Semlyen, A. Deri, "Time Domain Modelling of Frequency Dependent Three-Phase Transmission Line Impedance". *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. PAS-104, No. 6, pp. 1549-1555, June 1985.
- [12] H. W. Dommel, "Electromagnetic Transients Program Reference Manual (EMTP Theory Book)", Prepared for Bonneville Power Administration, P.O. Box 3621, Portland, Oregon 97208, U.S.A., 1986.
- [13] L. Martí, "Simulation of Transients in underground cables with Frequency-Dependent Model Transformation Matrices"; *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 3, No. 3, July 1988, pp. 1099-1110.
- [14] Erich Zauderer, "Partial Differential Equations of applied mathematics" John Wiley & Sons, New York, 1989.
- [15] John C. Strkwerda, "Finite Difference schemes and partial differential equations" Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, California 1989.
- [16] C. Gary, D. Cristescu, G. Dragan, "Distorsion and Attenuation of Travelling Waves Caused by Transient Corona", CIGRE report, Study committee 33: Overvoltages and Insulation Coordination, 1989.
- [17] M. M. Saied, A. S. Alfuhaid, M.E. Elshandwily, "S-domain Analysis of Electromagnetic Transients on nonuniform lines", *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. PWRD-5, Oct. 1990, pp. 2072-2083.
- [18] J. D. Hoffman. "Numerical Methods for Engineers and Scientists" McGraw-Hill, 1992.
- [19] E. A. Oufi, A.S. Alfuhaid, M.M. Saied. "Transient Analysis of Lossless Single-Phase Nonuniform Transmission Lines". *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 9, No. 3, July 1994.
- [20] J. L. Naredo, A.C. Soudack, J.R. Martí, "Simulation of Transients on Transmission Lines with Corona via the Method of Characteristics" *IEE Proc. Gener. Transm. Distrib.*, Vol. 142, No.1, pp. 81-87. January 1995.
- [21] Report Prepared by the Fast Front Transients Task Force of IEEE Modeling and Analysis of System Transients Working Group, "Modeling guidelines for Fast Front Transients" *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 11, No. 1, January 1996, pp. 493-501.

- [22] M.T. Correia de Barros, M.E. Almeida. "Computation of Electromagnetic Transients on Nonuniform Transmission Lines". IEEE Transaction on Power Delivery, Vol. 11, No. 2, April 1996.
- [23] H. V. Nguyen, H. W. Dommel, J. R. Martí, "Direct Phase-domain Modelling of Frequency-Dependent Overhead Transmission Lines", IEEE Transactions on Power Delivery vol. 12, No. 3, pp. 1335-1342, July 1997.
- [24] F.J. Marcano, J. R. Martí, "Idempotent Line Model, Case Studies", Proc. Of the International Conference on Power System Transients, Seattle, Washington, June, 1997.
- [25] F Castellanos, J. Martí, "Full Frequency-Dependent Phase-Domain Transmission line Model" IEEE Transactions on Power Delivery, vol.12, No.3, August, 1997, pp. 1331-1339.
- [26] J. G. Proakis, D.G. Manolakis, "Tratamiento digital de señales" *Prentice Hall*, 1998.
- [27] B. Gustavsen, A. Semlyen, "Combined Phase Domain and Modal Domain Calculation of Transmission Line Transients based on Vector Fitting" IEEE Transactions on Power Delivery - vol. 13, No. 2, pp. 596-604, April 1998.
- [28] A. Ramírez, J.L. Naredo, "Comparación de Métodos de Diferencias Finitas para el Análisis de Líneas de Transmisión", CIECE, Marzo 1998.
- [29] Ramírez Vazquez Amner Israel "Transitorios Electromagnéticos en Líneas de Transmisión considerando parámetros dependientes de la frecuencia y efecto Corona", Tesis de Maestría, Universidad de Guadalajara, CUCEI, Agosto 1998.
- [30] Richard Haberman, "Elementary Applied Partial Differential Equations" Prentice-Hall, Inc. 1998.
- [31] J. L. Naredo, P. Moreno, L. Guardado, J. Gutiérrez, "La Transformada Numérica de Laplace como una Herramienta de Investigación y Desarrollo en Ingeniería Eléctrica", Proceedings of International Congress in Electrical and Electronics Engineering, Aguascalientes, Ags., México, 1998.
- [32] B. Gustavsen, A. Semlyen, "Rational Approximation of Frequency Domain Responses by Vector Fitting", *IEEE Trans. On Power Delivery*, Vol. 14, No.3, pp. 1052-1061, July 1999.

- [33] A. Morched, B. Gustavsen, M Tartibi, "A Universal Model for Accurate Calculation of Electromagnetic Transients on Overhead Lines and Underground Cables" IEEE Transaction on Power Delivery, vol. 14, No. 3, July 1999, pp. 1032-1038.
- [34] J. A. Gutierrez, J. L. Naredo, L. Guardado, and P. Moreno, "Transients Analysis of Nonuniform Transmission Lines through the Method of Characteristics", *Proceedings of the 11<sup>th</sup> ISH-99* Vol. 2, topic B, London, U. K., August 23-27, 1999.
- [35] A. Semlyen, B. Gustavsen, "Vector Fitting by pole relocation for the State Equation Approximation of Nonrational Transfer Matrices", IEEE Circuits Systems Signal Process, Vol. 19. No. 6, pp. 549-566, May 2000.
- [36] Gutierrez Villegas Juan Carlos, "Modelado de líneas de transmisión monofásicas con parámetros dependientes de la distancia y condiciones arbitrarias en los extremos para el análisis de transitorios electromagnéticos" Tesis de Maestría, CINVESTAV-IPN, Unidad Guadalajara, Octubre 2000.
- [37] Ramírez Vázquez Amner Israel "Advanced Models for Electromagnetic Transient Simulation on Power Transmission Lines" Doctoral dissertation, CINVESTAV-IPN, Unidad Guadalajara, Octubre 2001.
- [38] A. I. Ramírez, A. Semlyen, R. Iravani, "Modeling Non-Uniform Transmission Lines for Time Domain Simulation of Electromagnetic Transients" *Aceptado para publicar en IEEE-PES Transactions*, November 2001.
- [39] A. Semlyen, "Some Frequency domain aspects of wave propagation on nonuniform lines", Submitted to IEEE Transaction on Power Delivery.
- [40] Alejandro Rafael Chávez Bustos, "Análisis de Transitorios Electromagnéticos en Líneas de Transmisión Multiconductoras No Uniformes" Tesis de Maestría, CINVESTAV-IPN, Unidad Guadalajara, Febrero 2002.

# APENDICE A

## A.1 DIFERENCIAS FINITAS

La solución en diferencia finitas de una ecuación diferencial parcial se obtiene reemplazando la derivada parcial individual exacta en la ecuación diferencial parcial por aproximaciones en diferencias finitas [15].

El objetivo del método de diferencias finitas para resolver ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) es transformar un problema de cálculo en un problema de algebra aplicando los siguientes pasos [18]:

- Discretización de la región solución.
- Aproximación de las derivadas exactas de las ecuaciones diferenciales parciales por Aproximaciones algebraicas en Diferencias Finitas (ADFs)
- Sustituir las ADFs en las EDPs para obtener una ecuación algebraica de diferencias finitas.

La región solución debe ser cubierta por una malla de líneas en dos dimensiones, llamada malla de diferencias finitas, los puntos de la malla son las intersecciones de las líneas de dicha malla, en estos puntos se obtiene la solución de la ecuación diferencial parcial por medio de diferencias finitas. Para obtener dicha malla el plano  $x-t$  se divide en rectángulos con lados  $\Delta x$  y  $\Delta t$ , como se muestra en la figura A-1. En la malla el subíndice  $i$  es usado para denotar la línea de distancia en la malla ( $x_i=(i-1)\Delta x$ ) y el superíndice  $n$  denota la línea de tiempo ( $t^n=n\Delta t$ ). Por tanto, el punto de malla  $(i,n)$  corresponde a la localización  $(x,t^n)$  en la región solución  $D(x,t)$ . El número total de líneas de la malla en  $x$  es denotado por  $i_{\max}$  y en  $t$  por  $n_{\max}$  [15].

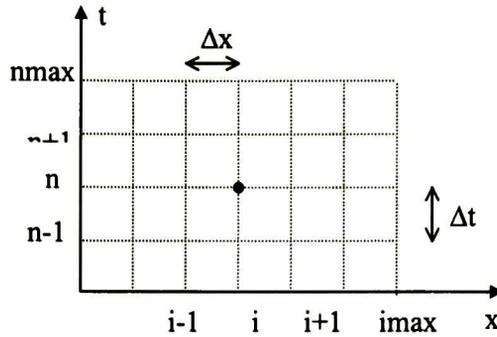


Fig. A-1. Malla de diferencias finitas y Región Solución  $D(x,t)$ .

Una vez especificada la malla de diferencias finitas, se procede a resolver la aproximación en diferencias finitas de la ecuación diferencial. En este caso se usarán expansiones de la serie de Taylor de la variable dependiente, para todos los puntos de la malla.

Es necesario que en las aproximaciones de diferencias finitas se haga una distinción entre la solución exacta de la ecuación diferencial parcial ( $f^*(x,t)$ ) y la solución de la ecuación en diferencias finitas ( $f(x,t)$ ), la cual es una aproximación de la ecuación diferencial parcial.

Las derivadas parciales exactas  $f^*_t$ ,  $f^*_x$ , y  $f^*_{xx}$  pueden ser aproximadas de diferentes formas, en un punto de la malla en términos de los valores de  $f^*$  en ese punto y en los puntos adyacentes. Por ejemplo si se considera la derivada parcial  $f^*_t$ , escribiendo su serie de Taylor en el punto de la malla  $(i,n)$  como punto base dado se tiene:

$$f^{*n+1}_i = f^{*n}_i + f^{*n}_t \Delta t + \frac{1}{2} f^{*n}_{tt} \Delta t^2 + \dots \quad (A-1)$$

Esta ecuación también puede ser expresada con la fórmula de Taylor con residuo tal como se muestra a continuación:

$$f_i^{*n+1} = f_i^{*n} + f_i^{*n} \Delta t + \frac{1}{2} f_{ii}^{*n} \Delta t^2 + \dots + \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m f^*}{\partial t^m} \right|_i \Delta t^m + R^{m+1} \quad (\text{A-2})$$

donde el residuo  $R^{m+1}$  está dado por:

$$R^{m+1} = \frac{1}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+1} f^*(\tau)}{\partial t^{m+1}} \Delta t^{m+1} \quad (\text{A-3})$$

donde  $t \leq \tau \leq t + \Delta t$ .

Si la serie infinita de Taylor es truncada después del  $m$ th término de la derivada para obtener la aproximación de  $f_i^{*n+1}$  entonces aparece el término de error de truncamiento de la serie  $R^{m+1}$ . El orden del error es la velocidad con la cual el error tiende a cero. El término  $R^{m+1}$  depende de  $\Delta t^{m+1}$  por tanto, si  $\Delta t \rightarrow 0$  el error tiende a cero también en  $\Delta t^{m+1}$  así la aproximación de la serie de Taylor truncada  $f_i^{*n+1}$  es  $m+1$ , denotada por el símbolo  $O(\Delta t^{m+1})$ .

Despejando de la ecuación anterior el término  $f_i^{*n}$  se tiene:

$$f_i^{*n} = \frac{f_i^{*n+1} - f_i^{*n}}{\Delta t} - \frac{1}{2} f_{yy}^{*n} \Delta t - \dots \quad (\text{A-4})$$

De forma equivalente:

$$f_i^{*n} = \frac{f_i^{*n+1} - f_i^{*n}}{\Delta t} - \frac{1}{2} f_{tt}^{*n} \Delta t - \dots - \frac{R^{m+1}}{\Delta t} \quad (\text{A-5})$$

lo cual puede ser escrito así:

$$f_i^{*n} = \frac{f_i^{*n+1} - f_i^{*n}}{\Delta t} - \frac{1}{2} f_{yy}^{*n} \Delta t - \dots - O(\Delta t^m) \quad (\text{A-6})$$

donde:

$$\frac{R^{m+1}}{\Delta t} = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^{m+1} f(\tau)^*}{\partial t^{m+1}} \right|_i \frac{\Delta t^{m+1}}{\Delta t} = 0 \Delta t^m \quad (\text{A-7})$$

Si la serie de Taylor es truncada después del término de la primera derivada ( $m=1$ ) se tiene:

$$f_t^*|_i^n = \frac{f^*|_i^{n+1} - f^*|_i^n}{\Delta t} - \frac{1}{2} f_{tt}^*|_i^n \Delta t \quad (\text{A-8})$$

la cual puede ser escrita de la siguiente forma:

$$f_t^*|_i^n = \frac{f^*|_i^{n+1} - f^*|_i^n}{\Delta t} + 0 \Delta t \quad (\text{A-9})$$

Si se desprecia el término del error, la aproximación en diferencias finitas de  $f_t^*|_i^n$  denotada por  $f_{ti}^n$  es:

$$f_{ti}^n = \frac{f|_i^{n+1} - f|_i^n}{\Delta t} \quad (\text{A-10})$$

Esta última ecuación es una aproximación de diferencias finitas hacia adelante de primer orden.

De manera similar al procedimiento anterior se pueden encontrar los esquemas para diferencias finitas hacia atrás, diferencias finitas centrales, al igual que aproximaciones de mayor orden para la serie de Taylor.

La aproximación de diferencias finitas hacia atrás viene dada por:

$$f_{ti}^{n+1} = \frac{f|_i^{n+1} - f|_i^n}{\Delta t}. \quad (\text{A-11})$$

y la de diferencia centrales es:

$$f_t|_i^{n+1/2} = \frac{f|_i^{n+1} - f|_i^n}{\Delta t} \quad (\text{A-12})$$

Para obtener un sistema de ecuaciones algebraicas que permitan calcular las variables dependientes en puntos donde no se conoce la solución a partir de los valores conocidos, se sustituyen las aproximaciones, obtenidas mediante la serie de Taylor truncada, en las derivadas parciales que aparecen en la ecuación diferencial que se quiere resolver.

## A.2 CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

Una ecuación diferencial parcial, cuasi lineal, no homogénea de segundo orden de dos variables independientes está dada por [14]:

$$Af_{xx} + 2Bf_{xy} + Cf_{yy} + Df_x + Ef_y + Ff = G \quad (\text{A-13})$$

donde los términos A, B y C son funciones de x e t.

Sin perder la generalidad, se puede asumir que  $A(x,t) \neq 0$  en algunas regiones de R y al dividir entre A, y con  $\partial_x = \partial/\partial x$  y  $\partial_t = \partial/\partial t$  se puede expresar la parte principal del operador diferencial de (A-13) como se muestra a continuación:

$$\partial_x^2 + \left(\frac{2B}{A}\right)\partial_x\partial_y + \left(\frac{C}{A}\right)\partial_y^2 = (\partial_x - \omega^+\partial_t)(\partial_x - \omega^-\partial_t) + \left(\frac{\partial\omega^-}{\partial x} - \omega^+\frac{\partial\omega^-}{\partial t}\right)\partial_t \quad (\text{A-14})$$

donde  $\omega^+$  y  $\omega^-$  son definidas como:

$$\omega^+ + \omega^- = -\frac{2B}{A}, \quad \omega^+\omega^- = \frac{C}{A} \quad (\text{A-15})$$

resolviendo el sistema anterior para  $\omega^+$  y  $\omega^-$  resulta:

$$\omega^\pm(x,t) = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{A} \quad (\text{A-16})$$

así que  $\omega^\pm$  son las raíces de la ecuación cuadrática

$$A\omega^2 + 2B\omega + C = 0 \quad (\text{A-17})$$

Dado que los coeficientes A, B y C dependen de x e y, se tiene un término adicional que involucra a  $\partial_t$  en (A-14). En vez de usar (A-14) para expresar (A-13) como un sistema de dos ecuaciones de primer orden se usa (A-14) para simplificar la ecuación (A-13).

Dado que el interés general es obtener los valores reales de la solución de (A-13), la posibilidad de usar la factorización de (A-14) para simplificar (A-13) depende de si los valores de  $\omega^\pm(x,t)$  si son reales o complejos. Esto es determinado por el signo del discriminante  $B^2 - 4AC$ .

Considerando esto la ecuaciones diferenciales parciales se clasifican así:

Tabla A-1 Clasificación de las EDPs.

$B^2 - 4AC$	Clasificación
Negativo	Elíptica
Cero	Parabólica
Positivo	Hiperbólica

La terminología elíptica, parabólica e hiperbólica relaciona la forma que tiene el discriminante para una ecuación parcial diferencial y la forma del discriminante de las secciones cónicas, las cuales son descritas de manera general por una ecuación algebraica de segundo orden del tipo:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (\text{A-18})$$

El tipo de curva que representa esta ecuación también depende del signo del discriminante  $B^2-4AC$ , como se muestra a continuación:

Tabla A-2 Tipos de curvas generadas por las EDPs.

$B^2-4AC$	Tipo de Curva
Negativo	Elíptica
Cero	Parabólica
Positivo	Hiperbólica

### Ecuaciones del tipo hiperbólico.

Cuando  $B^2-4AC > 0$  en una región  $R$ , la función  $\omega^\pm(x,t)$  son valores reales y distintos en la región. Entonces se puede expresar los operadores  $\partial_x - \omega^\pm \partial_t$  como derivadas direccionales, a lo largo de la familia de curvas dadas por [14]:

$$\frac{dt}{dx} = -\omega^\pm(x,t), \quad (\text{A-19})$$

si se tiene una función diferencial cualquiera  $v=v(x,t)$ , usando la definición anterior se tiene lo siguiente:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{dt}{dx} \frac{\partial v}{\partial t} = (\partial_x - \omega^\pm \partial_t)v \quad (\text{A-20})$$

La familia de curvas determinada por las soluciones de (A-19) son llamadas curvas características de (A-13). Ellas forman dos familias de curvas independientes en el

plano negativo (x,t), dado que  $dt/dx=-\omega^\pm$  con  $\omega^+ \neq \omega^-$  implica que ellas no se intersectan tangencialmente.

En el plano bidimensional (x-t) las características son líneas en la región solución D(x,t) a lo largo de las cuales se propaga la información.

Esas curvas se pueden expresar como:

$$\xi = \xi(x,t), \quad \eta = \eta(x,t) \quad (\text{A-21a,b})$$

donde  $\xi$  es una constante correspondiente a la curva  $t'+\omega^+=0$  mientras que  $\eta$  es una constante correspondiente a la curva  $t'+\omega^-=0$ .

Al introducir las nuevas coordenadas  $\xi$  y  $\eta$  a la ecuación (A-13) se puede hacer referencia al sistema de coordenadas características, sobre las curvas características  $\xi$  y  $\eta$  constantes.

$$0 = \xi_x + t'(x)\xi_t = \xi_x - \omega^+ \xi_t \quad (\text{A-22})$$

$$0 = \eta_x + t'(x)\eta_t = \eta_x - \omega^- \eta_t \quad (\text{A-23})$$

Esto se hace debido a que se asumió que  $\xi_t \neq 0$  y  $\eta_t \neq 0$ . Dado que  $\omega^+$  y  $\omega^-$  son soluciones de la ecuación cuadrática antes mostrada  $A\omega^2 + 2B\omega + C = 0$ , se concluye que  $\varphi = \xi(x,t)$  y  $\varphi = \eta(x,t)$  satisfacen la ecuación característica de (A-13).

$$A\varphi_x^2 + 2B\varphi_x\varphi_t + C\varphi_t^2 = 0 \quad (\text{A-24})$$

Además, si  $u = u(\xi, \eta) = u[\xi(x,t), \eta(x,t)]$  se puede tener que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = u_\xi \xi_t + u_\eta \eta_t,$$

de modo que :

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \omega^+ \frac{\partial u}{\partial t} = [(\eta_x - \omega^+ \eta_t) \partial_\eta] u, \quad (\text{A-25})$$

partiendo de (A-22). De manera similar (A-23) implica que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \omega^- \frac{\partial u}{\partial t} = [(\xi_x - \omega^- \xi_t) \partial_\xi] u \quad (\text{A-26})$$

Usando (A-22) y (A-23) para expresar  $\xi_x$  y  $\eta_x$  en términos de  $\xi_y$  y  $\eta_y$  se tiene:

$$\partial x - \omega^+ \partial t = -\eta_t (\omega^+ - \omega^-) \partial_\eta \quad (\text{A-27})$$

y

$$\partial x - \omega^- \partial t = -\xi_t (\omega^+ - \omega^-) \partial_\xi, \quad (\text{A-28})$$

en las cuales ambos operadores  $\omega^-$  y  $\omega^+$  son diferentes entre sí y diferentes de cero. Por tanto:

$$(\partial x - \omega^+ \partial t)(\partial x - \omega^- \partial t) = -\xi_t \eta_t (\omega^+ - \omega^-)^2 \partial_{\xi\eta}^2 - \eta_t (\omega^+ - \omega^-) \partial_\eta [\xi_t (\omega^+ - \omega^-)] \partial_\xi \quad (\text{A-29})$$

Sustituyendo estos resultados en A-13, así como A-14, y expresando todo en términos de  $\xi$  y  $\eta$ , se obtiene:

$$u_{\xi\eta} + au_\xi + bu_\eta + cu = d \quad (\text{A-30})$$

donde a, b, c y d son funciones específicas de  $\xi$  y  $\eta$ . La ecuación (A-30) representa una de las formas canónicas de la ecuación (A-13) cuando ésta es del tipo hiperbólico.

Si se usa la siguiente transformación:

$$\xi = \alpha + \beta, \quad \eta = \alpha - \beta \quad (\text{A-31})$$

en (A-30) se puede alterar la forma canónica para el caso hiperbólico,

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} + a u_{\alpha} + \tilde{b} u_{\beta} + \tilde{c} u = \dot{d}, \quad (\text{A-32})$$

con funciones específicas de  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{b}$  y  $\tilde{c}$  de  $\alpha$  y  $\beta$ . Si A, B y C en (A-13) son constantes, las variables  $\alpha$  y  $\beta$  están dadas por:

$$\alpha = t - (B/A)x \quad \text{y} \quad \beta = (1/A) \left( \sqrt{(B^2 - AC)} \right) x \quad (\text{A-33})$$

Se puede ver tanto en (A-30) como en (A-32) que las partes principales de las formas canónicas tienen coeficientes constantes. Las ecuaciones del telegrafista y las ecuaciones de onda tienen la forma de (A-32).

### LA TRANSFORMADA NUMÉRICA DE LAPLACE.

La Transformada Numérica de Laplace es un algoritmo basado en la Transformada Rápida de Fourier (FFT). Este algoritmo aplicado al análisis de transitorios tiene un error numérico aproximado de 0.1% dentro del 90% del rango de tiempo [4].

Una función  $f(t)$  tiene a  $F(s)$  como su imagen en el dominio de Laplace. Sus transformadas directa e inversa de Laplace vienen dadas por:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (\text{B-1})$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (\text{B-2})$$

donde  $s=c+j\omega$ ;  $\omega$  es la frecuencia angular y  $c$  es una constante finita con valor mayo o igual a cero.

Sustituyendo  $s$  en las ecuaciones anteriores y asumiendo que  $c=0$  resulta:

$$F(j\omega) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (\text{B-3})$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (\text{B-4})$$

Las ecuaciones (B-3) y (b-4) corresponden a la Transformadas directa e inversa de Fourier

Para el tratamiento numérico de la Transformada de Fourier es necesario fijar los límites de integración finitos, por tanto el rango de  $t$  es truncado en un intervalo

**[0, T]** Además las funciones anteriores deben ser discretizadas de la siguiente forma:

$$F(jn\Delta\omega) \cong \Delta t \sum_{m=0}^{M-1} f(m\Delta t) e^{-jmn\Delta t\Delta\omega} \quad (\text{B-5})$$

$$f(m\Delta t) \cong \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N-1} F(jn\Delta\omega) e^{jmn\Delta t\Delta\omega} \quad (\text{B-6})$$

donde el tiempo se discretiza mediante  $m\Delta t$ , con  $m=0,1,2,\dots,M$ , la frecuencia angular  $\omega$  se representa por  $n\Delta\omega$ , con  $n=0,1,2,\dots,N$ .

El tratamiento numérico de la transformada de Laplace y el proceso de discretización se generan algunos errores como son, el error por truncamiento que genera el fenómeno de Gibbs y el error por la discretización que produce el efecto de aliasing. El efecto de Gibbs se disminuye evitando truncamientos abruptos, y para ello se puede multiplicar la ecuación (B-6) por una ventana que permita un truncamiento suavizado, por ejemplo, las ventanas de Hamming, Hanning, Lanczos, etc. Para disminuir el error por la discretización conviene amortiguar artificialmente la función multiplicándola por una exponencial decreciente del tipo  $e^{-ct}$  esto convierte a las ecuaciones (B-7) y (B-8) en las Transformadas Numéricas de Laplace [31].

$$F(c + jn\Delta\omega) = \Delta t \sum_{m=0}^{M-1} f(m\Delta t) e^{-cm\Delta t} e^{-j2\pi mn/M} \quad (\text{B-7})$$

$$f(m\Delta t) = \frac{e^{cm\Delta t}}{\Delta t} \left[ \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} F(jn\Delta\omega) \sigma_{\omega} e^{j2\pi mn/M} \right] \quad (\text{B-8})$$

Aquí  $M\Delta t=2\pi/\Delta\omega$ , el rango de la frecuencia es seleccionado siguiendo el criterio de Nyquist [26]  $-\Omega \leq \omega \leq \Omega$  y  $\Omega=\pi/\Delta t$ , la constante de amortiguamiento se asume [31] como:

$$c = \frac{\text{Ln}(\text{error})}{T} \quad (\text{B-9})$$

donde T es el periodo de observación definido por  $2\pi/\Delta\omega$ .

## Aplicación de la TNL en el análisis de una línea de transmisión dispersiva y no uniforme.

Aplicando la técnica de la TNL al análisis de transitorios electromagnéticos en una línea de transmisión se puede determinar los voltajes y corrientes en la línea en el dominio del tiempo a partir de las funciones en el dominio de la frecuencia, en este caso ésta técnica se aplicó análisis de una línea dispersiva no uniforme.

Para la simulación de la línea no uniforme considerando la dependencia frecuencial de sus parámetros se secciona la línea como se muestra en la figura B-1, y se considera cada tramo como una línea uniforme con parámetros dependientes de la frecuencia.

En cada uno de esos tramos de línea se determinan los parámetros A y B del circuito PI equivalente [6] de la siguiente forma:

$$A = Y_c \coth(\gamma l) \quad (B-10)$$

$$B = Y_c \operatorname{cosech}(\gamma l) \quad (B-11)$$

donde  $Y_c = \sqrt{Y/Z}$  es definida como la admitancia característica de la línea y  $\gamma = \sqrt{ZY}$  como la constante de propagación de la línea, aquí  $Z = j\omega L_G$  y  $Y = j\omega C_G$ ,  $L_G$  y  $C_G$  ya fueron definidos en el capítulo 2. La figura B-2 ilustra la red equivalente de una línea de transmisión seccionada.

Una vez conocidos los parámetros de cada tramo se construye la matriz  $Y_{BUS}$  de la línea uniforme completa, resultando una matriz tridiagonal como se muestra a continuación:

$$Y_{BUS} = \begin{bmatrix} A_1 + G & -B_1 & 0 & 0 & 0 \\ -B_1 & A_1 + A_2 & -B_2 & 0 & 0 \\ 0 & -B_2 & A_2 + A_3 & & 0 \\ 0 & 0 & & & -B_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & -B_{N-1} & A_{N-1} + Y_c \end{bmatrix}; \quad (B-12)$$

donde  $G$  es la conductancia interna de la fuente de alimentación,  $Y_L$  es la admitancia de carga y  $N$  de nodos presentes en el sistema.

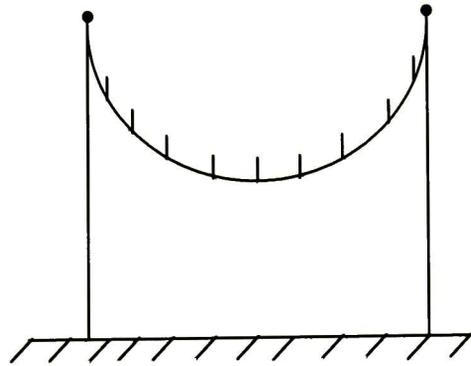


Fig. B-1. Catenaria de una línea entre dos apoyos

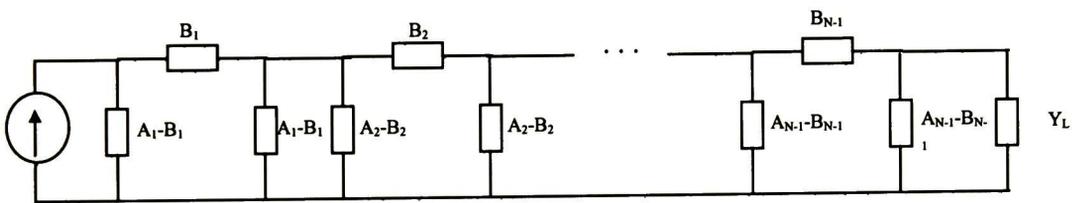


Fig. B-2 Red equivalente de la línea seccionada

Conocida la  $Y_{bus}$ , con la fuente de corriente inyectada en el extremo emisor y asumiendo que las corrientes inyectadas en cada nodo son cero, se determina el voltaje en los diferentes puntos de la línea para diferentes condiciones de carga, aplicando la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} = [Y_{BUS}]^{-1} \begin{bmatrix} I_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (B-13)$$

Para realizar la simulación en primer lugar se seleccionó el tiempo de observación en base a la longitud de la línea, y la cantidad de muestras a analizar, con estos datos se determinó el incremento de tiempo a utilizar  $\Delta t$ . Para el incremento de distancia  $\Delta x$  se utilizó el mismo que en el método de las características. Es importante señalar que con el fin de obtener mejor aproximación a la línea no uniforme simulada se debe considerar un  $\Delta x$  muy pequeño lo que implica un tiempo y espacio computacional muy elevado.

**Aplicación de la Regla de Leibnitz en la diferenciación de una integral.**

Si a la expresión  $\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t h(t-\tau)v(\tau)d\tau$  se aplica la definición de derivada se tiene:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[ \int_0^{t+\Delta t} h(t+\Delta t-\tau)i(\tau)d\tau - \int_0^t h(t-\tau)i(\tau)d\tau \right] = \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[ \int_t^{t+\Delta t} h(t+\Delta t-\tau)i(\tau)d\tau + \int_0^t (h(t+\Delta t-\tau) - h(t-\tau))i(\tau)d\tau \right] \end{aligned} \quad (C1)$$

Al aplicar la regla trapezoidal de integración al primer término de la ecuación anterior se tiene:

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{(h(\Delta t)i(t) + h(0)i(t+\Delta t))}{2} + \frac{1}{\Delta t} \left( \int_0^t (h(t+\Delta t-\tau) - h(t-\tau))i(\tau)d\tau \right) \right] \quad (C2)$$

Se evalúa el  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0}$  en la primera parte de la expresión anterior obteniéndose:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{(h(0)i(t) + h(0)i(t))}{2} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left( \int_0^t (h(t+\Delta t-\tau) - h(t-\tau))i(\tau)d\tau \right) \right] = \\ \left[ h(0)i(t) + \int_0^t h'(t-\tau)i(\tau)d\tau \right] \end{aligned} \quad (C3)$$

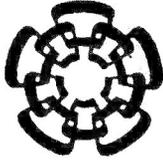
De lo anterior se tiene que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t h(t-\tau)i(\tau)d\tau = h(0)i(t) + \int_0^t h'(t-\tau)i(\tau)d\tau \quad (C4)$$

donde  $h'(t)$  representa la derivada parcial de  $h(t)$  respecto al tiempo.

### Artículos generados de esta tesis.

- M. Dávila, J. L. Naredo, P. Moreno, “*Análisis de Transitorios Electromagnéticos en Líneas de Transmisión Considerando Dependencia Frecuencial y No Uniformidades*”, Aceptado para presentarse en el III Congreso Venezolano de Ingeniería Eléctrica, CVIE2002, Caracas Venezuela del 25 al 29 de Noviembre de 2002.
- M. Dávila, J. L. Naredo, P. Moreno, “*Transient Analysis of Power Lines Including Non Uniform And Frequency Dependent Effects*” Aceptado para presentarse en el NAPS 2002, Arizona – U.S.A del 14 AL 15 DE Octubre de 2002.



**Cinvestav**

**Centro de Investigación y de Estudios Avanzados  
del IPN**

**Unidad Guadalajara**

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, aprobó la tesis: ANALISIS DE TRANSITORIOS ELECTROMAGNÉTICOS EN LÍNEAS DE TRANSMISIÓN CONSIDERANDO DEPENDENCIA FRECUENCIAL Y NO UNIFORMIDADES del(a) C. Marisol DÁVILA CALDERÓN el día 6 de Agosto de 2002

Dr. José Luis Alejandro  
NAREDO VILLAGRÁN  
Investigador Cinvestav 3B  
CINVESTAV GDL  
Guadalajara

Dr. Pablo MORENO  
VILLALOBOS  
Investigador Cinvestav 3A  
CINVESTAV GDL  
Guadalajara

Dr. Arturo GALVÁN DIEGO  
Investigador J  
Instituto de Investigaciones  
Eléctricas  
Cuernavaca Morelos



CINVESTAV  
BIBLIOTECA CENTRAL



SSIT000004426