

xx(86647.1)



CINVESTAV-IPN

**CENTRO DE INVESTIGACION Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL IPN
UNIDAD GUADALAJARA**

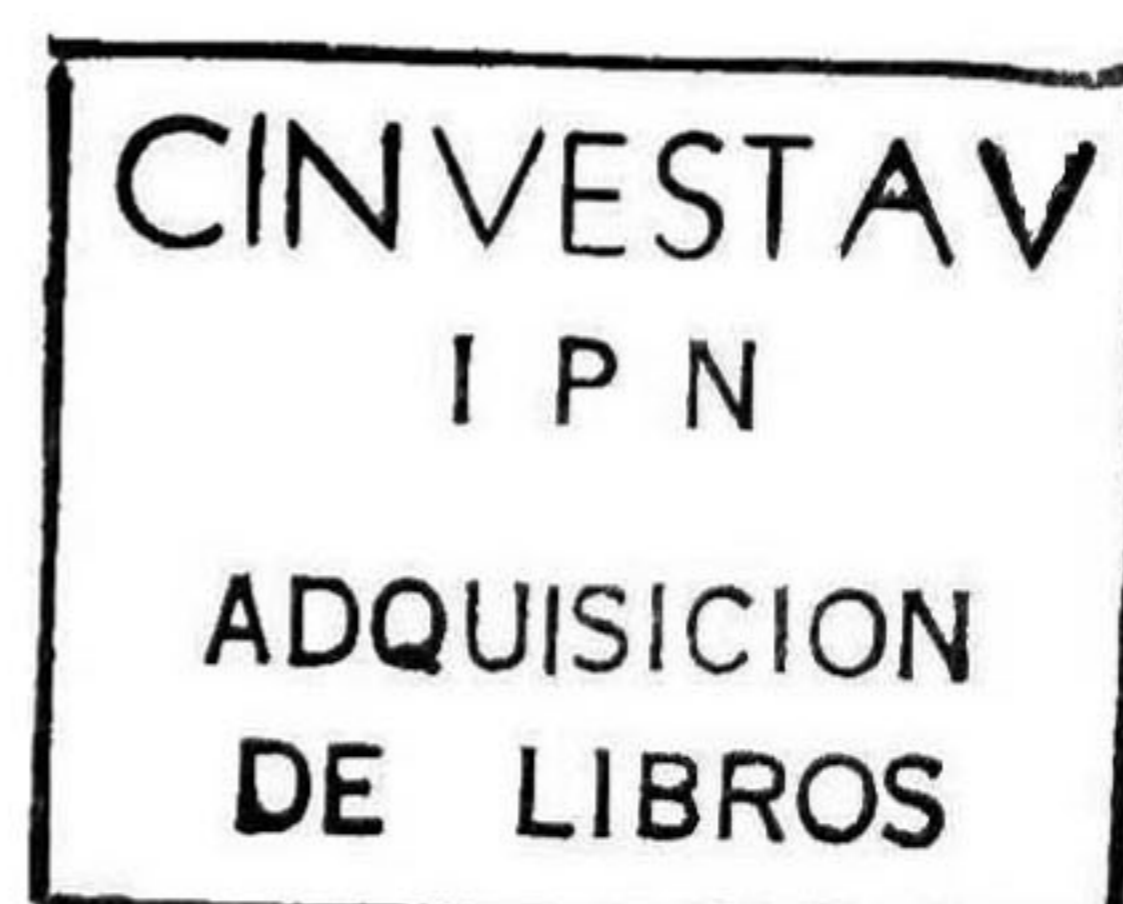
**CINVESTAV I.P.N.
SECCION DE INFORMACION
Y DOCUMENTACION**

MODELADO DE LÍNEAS DE TRANSMISIÓN MONOFÁSICAS CON PARÁMETROS DEPENDIENTES DE LA DISTANCIA Y CONDICIONES ARBITRARIAS EN LOS EXTREMOS PARA EL ANÁLISIS DE TRANSITORIOS ELECTROMAGNÉTICOS

**TESIS QUE PRESENTA:
ING. JUAN CARLOS GUTIÉRREZ VILLEGAS**

**PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS**

**EN LA ESPECIALIDAD DE:
INGENIERIA ELÉCTRICA**



GUADALAJARA, JAL. OCTUBRE DE 2000

CLASIF.
 ADQUIS.: 1950-2001
 FECHA: 29-III-01
 PROCED. Depto. Sermons

Bibliografía

**MODELADO DE LÍNEAS DE TRANSMISIÓN MONOFÁSICAS
CON PARÁMETROS DEPENDIENTES DE LA DISTANCIA Y
CONDICIONES ARBITRARIAS EN LOS EXTREMOS PARA EL
ANÁLISIS DE TRANSITORIOS ELECTROMAGNÉTICOS**

**Tesis de Maestría en Ciencias
Ingeniería Eléctrica**

**Por:
Juan Carlos Gutiérrez Villegas**

**Ingeniero Electromecánico
Instituto Tecnológico Superior Zacatecas Sur
1993-1998**

Becario de CONACyT, expediente No. 129309

**Directores de tesis:
Dr. Pablo Moreno Villalobos
Dr. José Luis Naredo Villagran**

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Octubre de 2000

RESUMEN.

En esta tesis se desarrolla un modelo para líneas de transmisión monofásicas con no uniformidades causadas por la variación de los parámetros con la distancia. El modelo desarrollado puede fácilmente ser incorporado a programas de propósito general para el análisis de transitorios electromagnéticos en sistemas de potencia.

Primeramente se analizan líneas de transmisión uniformes y no uniformes empleando el método de las Características y el algoritmo de Yee. Los resultados obtenidos son comparados con los del Electromagnetic Transients Program (EMTP). Para el caso de líneas con parámetros constantes se obtienen resultados prácticamente idénticos; en cambio, cuando los parámetros dependen de la distancia el Algoritmo de Yee presenta oscilaciones numéricas.

Posteriormente, se desarrolla un modelo para incluir condiciones generales en los extremos de las líneas. Se toma como punto de partida las ecuaciones diferenciales ordinarias que se obtienen con el método de las Características. Empleando dichas ecuaciones se desarrolla un modelo de circuito similar al del método de Bergeron, donde se tiene una resistencia en serie con una fuente de voltaje que depende de los estados un Δt anterior y un Δx en el interior de la línea, tanto para el extremo de envío como para el de recepción. Por la estructura del nuevo modelo es sencillo incluir modelos de líneas que presenten no uniformidades o no linealidades en los puntos internos de la línea a programas de propósito general.

Se presentan estudios en diferentes configuraciones de redes eléctricas para mostrar la versatilidad del modelo propuesto; realizando comparaciones con el EMTP se encontró que solo se tienen resultados idénticos para el caso de líneas ideales.

AGRADECIMIENTOS.

Al final de cada etapa de la vida se tiene la necesidad de agradecerle a Dios por todo lo que nos ha brindado, pero especialmente por haberme dado la familia que siempre a estado conmigo en todo lo que he emprendido. A mis padres (Bertha y Pedro), que con todas las carencias que se tienen siempre nos han sabido llevar adelante; de igual forma a mis hermanas (Norma, Ana y Bertha) que siempre me han estado dando ánimo.

A todas las personas que hicieron posible este trabajo: Dr. Naredo, Dr. Ramírez, Dr. Messina, Dr. Cañedo, Dr. Dueñas y especialmente al Dr. Pablo Moreno Villalobos a quien le doy gracias por su paciencia y amistad.

También quiero agradecer a todos los compañeros que iniciamos esta etapa de preparación pero especialmente a: Ignacio Luna, Moisés Ochoa, Ricardo Davalos, Abel Delino, Marco Pérez, Jorge González y Ricardo Laguna.

Agradezco a Consejo Nacional de Ciencia Y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico para el desarrollo de este trabajo.

CONTENIDO

	Página
Resumen.....	i
Agradecimientos.....	ii
Contenido.....	iii
Lista de figuras.....	v
Lista de tablas.....	vii
1. Introducción.	
1.1 Antecedentes.....	1
1.2 Motivación y enunciado del problema.....	3
1.3 Metodología utilizada.....	3
2. Modelo de líneas de transmisión para el estudio de transitorios.	
2.1 Fundamentos de modelado de líneas de transmisión.....	5
2.2 Análisis de líneas uniformes en el dominio del tiempo.....	11
2.3 Análisis de líneas uniformes en el dominio de la frecuencia.....	14
2.4 Observaciones finales.....	16
3. Método de las características.	
3.1 Teoría de las características.....	17
3.2 Transformación de las ecuaciones de la línea de transmisión a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.....	19
3.3 Aproximación numérica de las características.....	22
3.4 Ejemplo de estudio 1.....	25
3.5 Observaciones finales.....	26
4. Análisis de líneas de transmisión empleando el Algoritmo de Yee.	
4.1 Diferencias finitas.....	27
4.2 Aproximación de las ecuaciones de la línea utilizando el Algoritmo de Yee.....	29
4.3 Observaciones finales.....	33

5. Línea de transmisión no uniforme.	
5.1 Parámetros de líneas no uniformes.....	34
5.2 Modelo de línea no uniforme por el método de las características.....	37
5.3 Ejemplo de estudio 2.....	40
5.4 Modelo de línea no uniforme por el Algoritmo de Yee.....	42
5.5 Línea no uniforme en el EMTP.....	43
5.6 Observaciones finales.....	46
6. Modelado circuital de condiciones en fronteras.	
6.1 Deducción de las ecuaciones del modelo de circuito.....	47
6.2 Ejemplos de aplicación.....	52
6.2.1 Ejemplo de estudio 3.....	52
6.2.2 Ejemplo de estudio 4.....	56
6.3 Línea monofásica no uniforme.....	58
6.4 Observaciones finales.....	60
7. Conclusiones y recomendaciones.	
7.1 Conclusiones.....	62
7.2 Trabajos futuros.....	64
Referencias.....	65
Apéndices.	
Apéndice A.....	68
A.1. – Inductor.....	68
A.2. – Capacitor.....	69
Apéndice B.....	71

LISTA DE FIGURAS.

	Página
Figura 2.1. Primera Ecuación del Telegrafista (definición de voltaje entre dos conductores).....	6
Figura 2.2. Segunda Ecuación del Telegrafista.....	8
Figura 2.3. a) Sección de línea ideal y b) Circuito equivalente para una línea ideal.....	13
Figura 3.1. Representación general de propagación.....	19
Figura 3.2. Discretización en los puntos interiores de la línea.....	22
Figura 3.3. Condiciones en la frontera, a) línea uniforme y b) características incidentes.....	24
Figura 3.4. Propagación de una doble rampa (Método de las Características).....	25
Figura 4.1. Región de solución.....	28
Figura 4.2. Discretización en FDTD.....	30
Figura 4.3. Método de Yee en los extremos. a) Línea uniforme y b) Condiciones en los extremos...	32
Figura 4.5. Propagación de una doble rampa (Método de Yee).....	33
Figura 5.1. Curva catenaria entre dos torres adyacentes.....	36
Figura 5.2. Puntos de cruce de las características.....	38
Figura 5.3. Propagación de una doble rampa en una línea no uniforme.....	41
Figura 5.4. Propagación en una sección de línea uniforme.....	41
Figura 5.5. Propagación de una doble rampa en una línea no uniforme. Método de Yee.....	43
Figura 5.6. Representación de línea con parámetros distribuidos.....	44
Figura 5.7. Propagación de una doble rampa en una línea no uniforme. Con EMTP.....	45
Figura 6.1. a) Línea de transmisión, b) Características en las Fronteras de la línea y c) Representación circuital de las características en las fronteras.....	48
Figura 6.2. Norton equivalente del circuito de la línea de la figura 1 c).....	51
Figura 6.3. Configuración de red de líneas uniformes.....	52
Figura 6.4. Modelo circuital para las fronteras de la red de la figura 6.3.....	54
Figura 6.5. Voltajes en los nodos para la red de la figura 6.3 para líneas de igual longitud.....	54

Figura 6.6. Voltajes en nodos para la red de la figura 6.3 para líneas de diferente longitud.....	55
Figura 6.7. Configuración de red del ejemplo 4.....	56
Figura 6.8. Representación circuital de la red del ejemplo 4.....	56
Figura 6.9. Voltaje en los nodos de la red de la figura 6.9.....	57
Figura 6.10. Características y Bergeron, para una línea ideal.....	58
Figura 6.11. Voltaje en el nodo de envío y recepción para la línea Tidd 2.....	59
Figura 6.12. Voltaje en el nodo de envío y recepción para la línea Tidd 2. Referencia 7.....	60
Figura A1. a) Inductancia y b) Circuito equivalente.....	69
Figura A2. a) Capacitancia y b) Circuito equivalente.....	70

LISTA DE TABLAS.

	Página
Tabla 3.1. Clasificación de EDP's.....	19

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN.

1.1. - ANTECEDENTES.

Las líneas de transmisión pueden ser clasificadas como líneas uniformes y líneas no uniformes; en una línea uniforme los parámetros eléctricos por unidad de longitud (resistencia, inductancia y capacitancia) son constantes en toda la longitud de la línea. Mientras que en una línea no uniforme estos parámetros varían con la distancia, por ejemplo la variación de la altura [2,4,6] y la variación del radio [1] de los conductores.

En el estudio de transitorios electromagnéticos la mayoría de las configuraciones de sistemas reales presentan conexiones de elementos cuyos parámetros eléctricos no son uniformes. Tales elementos pueden ser por ejemplo porciones de líneas donde los conductores no son paralelos, como en la conexión entre líneas aéreas y cables subterráneos, conductores cuyo radio varía o cuando la presencia de la catenaria es significativa. Estos elementos no uniformes pueden ser también torres de transmisión o incluso devanados de transformadores y máquinas eléctricas. Cuando los parámetros cambian con la posición los modelos de líneas uniformes no proporcionan resultados precisos [1-5]. El comportamiento de una línea no uniforme difiere del comportamiento de una línea uniforme en que la amplitud de la onda de voltaje que se propaga a lo largo de ella está continuamente modificándose. De hecho, resultados experimentales muestran claramente que la variación de la impedancia a lo largo de la línea es de gran importancia en la predicción de la forma de onda de voltajes y corrientes transitorias [7-9].

Los modelos de líneas no uniformes deben de proporcionar una mejor descripción de los fenómenos transitorios, de tal manera que en la técnica de solución se introduzcan de manera sencilla

y eficaz las no uniformidades que se puedan presentar. En este tipo de problemas se requiere de la solución de los voltajes y corrientes transitorios a lo largo de toda la línea considerando parámetros dependientes de la distancia [5].

En la literatura se han presentado técnicas basadas en el dominio del tiempo [4,12] y algunas otras se basan en el dominio de la frecuencia [5,6,13]. En [12] se emplea un modelo de línea exponencial para la representación de líneas no uniformes en el dominio del tiempo. Se obtiene un modelo similar al de Bergeron que puede ser fácilmente incorporado a programas de propósito general como el EMTP. En este modelo se involucran operaciones de convolución para transformar del dominio de la frecuencia al dominio del tiempo. Este modelo trabaja con parámetros concentrados por lo que no se puede hacer análisis de dispersión lineal, o de no linealidades distribuidas, como es el caso cuando ocurre efecto corona. Un modelo aproximado para líneas no uniformes se puede realizar conectando en cascada una serie de líneas uniformes donde los valores de la resistencia, inductancia y capacitancia son diferentes en cada sección. El número de secciones necesarias en este tipo de modelos dependerá de la variación en el espacio de los parámetros. Para elegir el número de secciones es necesario considerar primero, la disminución de oscilaciones numéricas causadas por el seccionamiento de la línea y, segundo, el número de secciones elegido debe ser capaz de reproducir de manera adecuada el efecto de las no uniformidades [11].

Otra de las técnicas que se han propuesto para el análisis de transitorios en líneas de transmisión no uniformes es la presentada en la referencia [4], donde se presenta una metodología basada en los conceptos de los coeficientes de reflexión y refracción además del diagrama de Bewley [10]. Como en una línea no uniforme los parámetros están en función de la posición, se le divide en secciones donde cada punto de la línea representa una discontinuidad para una onda que viaja a lo largo de ella, y por tanto, se puede tratar con la técnica convencional de ondas viajeras. Esta técnica solo es aplicable a situaciones donde los coeficientes de reflexión y refracción son reales y las líneas son ideales; además, en las terminaciones de la línea se pueden tener solo fuentes y cargas puramente resistivas.

El método del dominio de la frecuencia se restringe a los casos en que se tienen ciertas variaciones particulares de los parámetros en la línea [5,6]. Esta técnica se basa en derivar analíticamente expresiones en el dominio de la frecuencia para voltaje y corriente en el punto requerido, lo que se hace a partir de expresiones de líneas que tienen la forma $Z_0 e^{kx}$ o $Z_0 x^n$. En la referencia 6 se modela una línea uniforme de forma exponencial, luego se propone modelar a cualquier línea no uniforme como líneas exponenciales en cascada cuyas impedancias características se determinan usando $Z_c(x)$ de la línea original. Los métodos en el dominio de la frecuencia permiten modelar fácilmente líneas con parámetros dependientes de la frecuencia, sin embargo, se dificulta el modelado

de no linealidades distribuidas; además se requieren cantidades excesivas de cálculos computacionales y no se pueden incorporar a programas de propósito general como el EMTP.

1.2. - MOTIVACIÓN Y ENUNCIADO DE TESIS.

En la mayoría de los programas para el análisis de propagación de transitorios en líneas de transmisión, se considera que las líneas se encuentran a una altura constante sobre un plano de tierra homogéneo, sin embargo en la práctica esto es imposible de conseguir. Por otro lado, a partir de datos experimentales, se ha podido observar que para transitorios ultrarrápidos (como en descargas atmosféricas) el efecto de las no uniformidades, como la presencia de la catenaria, puede ser de gran importancia. Debido a esto, el objetivo de este trabajo es desarrollar un modelo para el análisis de transitorios electromagnéticos en líneas monofásicas con parámetros dependientes de la distancia.

El modelo debe tener la capacidad de tomar en cuenta condiciones generales de conexión en las fronteras de la línea y también debe poder ser incluido en programas de propósitos generales. Además, el método de solución debe ser sencillo para extenderse al caso polifásico y debe incluir cualquier configuración geométrica de líneas de transmisión.

1.3. – METODOLOGÍA UTILIZADA

En esta tesis se presentan dos técnicas numéricas para analizar, en el dominio del tiempo, transitorios electromagnéticos en líneas de transmisión con parámetros dependientes de la distancia, así como el desarrollo de un modelo para incluir condiciones generales en los extremos de las líneas. Uno de los métodos empleados en la solución de las ecuaciones de línea es el método de las características; que ha sido empleado con éxito en líneas uniformes y en líneas con parámetros dependientes de la frecuencia [14-16]. El método de las características consiste en transformar las ecuaciones en derivadas parciales de las líneas en ecuaciones diferenciales ordinarias; siendo estas últimas válidas solamente sobre ciertas curvas llamadas características. Otro método que se presenta para fines de comparación, es el método de diferencias finitas en el dominio del tiempo, FDTD, (método de Yee), el cual ha sido utilizado con mucho éxito en la solución de propagación de campos electromagnéticos en una, dos y tres dimensiones espaciales [17]. Este último tiene su base en la utilización de diferencias centrales para la aproximación de las derivadas de las ecuaciones de línea, tanto en el tiempo como en el espacio.

En los capítulos 3 y 4 se presenta el análisis para una línea con pérdidas y parámetros constantes por el método de las características y el método de Yee, respectivamente.

En el capítulo 5 se trata el problema de la no uniformidad en líneas aéreas debida a la catenaria entre torres adyacentes. Aquí se adopta un modelo parabólico de la catenaria. Se presentan las técnicas de solución empleando el método de las características y el método de Yee. Los dos modelos resultantes se comparan con resultados obtenidos con el EMTP.

En el capítulo 6 se presenta el modelo desarrollado para la solución de condiciones generales en los extremos de las líneas. El modelo se obtiene de la ecuación de la característica que incide en cada uno de los extremos, obteniendo así un modelo de circuito. Con este circuito es sencillo aplicar el método nodal para encontrar la solución para voltajes y corrientes en los extremos de la línea, independientemente de los puntos internos de la misma

De lo anterior, a manera de resumen, se presentan los alcances de esta tesis:

- Desarrollo de modelos para líneas uniformes monofásicas basados en el método de las características y en el método de Yee.
- Aplicación de los métodos de las Características y de Yee a líneas monofásicas aéreas no uniformes.
- Desarrollo de un nuevo modelo para solución de condiciones de conexión generales en los extremos de las líneas.
- Comparación con el EMTP para obtener las diferencias entre los métodos propuestos y los de programas de propósito general.

CAPÍTULO 2

MODELO DE LÍNEAS DE TRANSMISIÓN PARA EL ESTUDIO DE TRANSITORIOS.

En este capítulo se presentan los conceptos básicos de la teoría de líneas de transmisión, así como las técnicas actuales para su análisis. En la primera parte se desarrollan las Ecuaciones del Telegrafista para una línea monofásica con pérdidas a partir de las leyes de Faraday y de Ampere y se describen las técnicas de solución más comunes. En cuanto a las técnicas de solución en el dominio del tiempo se presenta una revisión del modelo de Bergeron para una línea ideal, mientras que para una línea con pérdidas se presenta el análisis en el dominio de la frecuencia [20,19].

2.1. - FUNDAMENTOS DE MODELADO DE LÍNEAS DE TRANSMISIÓN.

Una línea de transmisión es un sistema de dos o más conductores que corren paralelamente entre sí. En este capítulo se presenta la teoría de líneas de transmisión que consiste de dos conductores, así como su análisis en el dominio del tiempo y en el de la frecuencia. El problema básico en el análisis de líneas de transmisión es la determinación de las corrientes en los conductores y el voltaje en todos los puntos a lo largo de la línea; sin embargo, muchas veces sólo es de interés el conocer los voltajes y corrientes en las fronteras de éstas. Las ecuaciones de la línea de transmisión son usualmente derivadas de una representación de elementos de circuitos concentrados a lo largo de la línea. En esta sección se obtienen las ecuaciones para una línea de transmisión resolviendo las ecuaciones de Maxwell, sujetas a condiciones de frontera.

Considérese una línea de transmisión constituida por dos conductores como se muestran en la figura 2.1, con las siguientes consideraciones:

- Los segmentos de conductores corren paralelamente al eje x .

- La sección transversal de los conductores es constante en cada segmento de longitud Δx .
- Se desprecian los efectos de terminación.

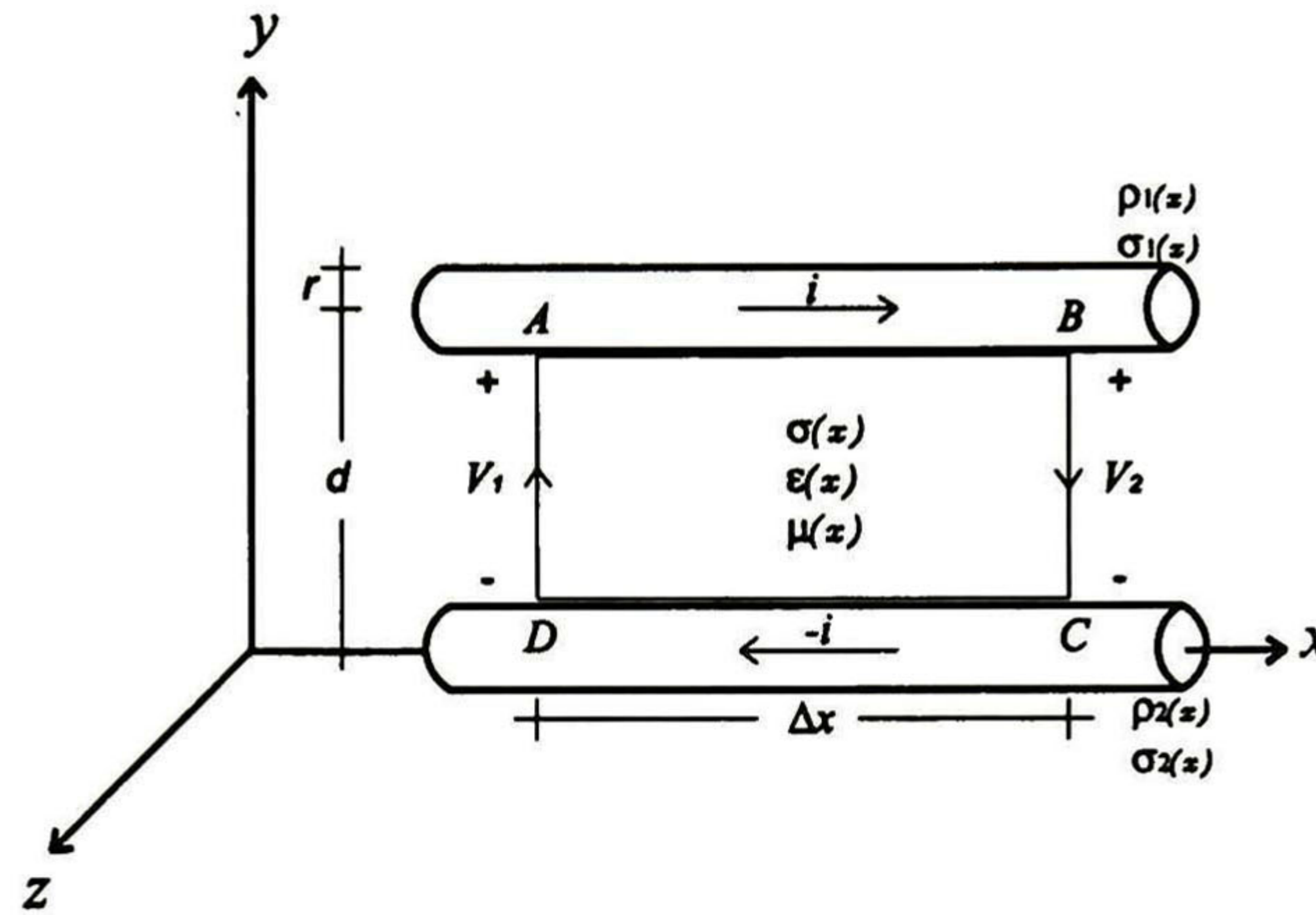


Fig. 2.1. Primera Ecuación del Telegrafista (definición de voltaje entre dos conductores).

Primeramente aplicando la ley de Faraday [20] para la trayectoria cerrada $ABCD$, que se muestra en la figura 2.1:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} \quad (2.1)$$

Realizando la integral (2.1) se tiene:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_B^C \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_D^A \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2.2)$$

Las integrales de los segmentos $B-C$ y $D-A$ definen diferencias de potencial, entonces (2.2) se transforma en:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_2 - V_1 + \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2.3)$$

Empleando la ley de Ohm ($\vec{J} = \sigma \vec{E}$) para los segmentos $A-B$ y $C-D$, el campo eléctrico se puede expresar en términos de la densidad de corriente dentro de los conductores como:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \Delta v + \int_A^B \frac{J_1(x,t)}{\sigma_1(x)} \cdot d\vec{l} + \int_C^D \frac{J_2(x,t)}{\sigma_2(x)} \cdot d\vec{l} \quad (2.4)$$

donde $\Delta v = V_2 - V_1$

Al realizar la integración en un Δx , lo suficientemente pequeño de tal manera que la densidad de corriente y la conductividad pueden considerarse como constantes, se tiene que:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \Delta v + \left(\frac{J_1(x,t)}{\sigma_1(x)} + \frac{J_2(x,t)}{\sigma_2(x)} \right) \Delta x \quad (2.5)$$

Ahora analizando el lado derecho de (2.1) y suponiendo nuevamente que Δx es suficientemente pequeño se puede considerar que \bar{B} es constante con respecto a x , entonces el flujo magnético que cruza el área definida por la trayectoria $ABCD$ esta dado por:

$$\phi(x,t) = \int \bar{B} \cdot d\bar{A} = \Delta x \int_{y_A}^{y_D} B \cdot dy \quad (2.6)$$

El flujo magnético por unidad de longitud es proporcional a la corriente, y se puede escribir

$$\frac{\phi(x,t)}{\Delta x} = L(x)i(x,t) \quad (2.7)$$

Despejando el flujo magnético de la ecuación anterior y derivando parcialmente con respecto al tiempo resulta

$$-\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} = -\Delta x L(x) \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \quad (2.8)$$

Igualando (2.5) y (2.8), y dividiendo entre Δx se obtiene la ecuación:

$$-\frac{\Delta v}{\Delta x} = \left(\frac{J_1(x,t)}{\sigma_1(x)} + \frac{J_2(x,t)}{\sigma_2(x)} \right) + L(x) \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \quad (2.9)$$

Si la corriente esta variando muy lentamente se puede asumir que dentro de los conductores existe una distribución uniforme, entonces la densidad de corriente puede expresarse:

$$J_1(x,t) = \frac{i(x,t)}{A_1} \quad (2.10a)$$

$$J_2(x,t) = \frac{i(x,t)}{A_2} \quad (2.10b)$$

Sustituyendo (2.10a) y (2.10b) en (2.9) y recordando que la conductividad de un conductor esta dada por, $\sigma = 1/RA$, se obtiene:

$$-\frac{\Delta v}{\Delta x} = L(x) \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + R(x) i(x,t) \quad (2.11)$$

Tomando el limite cuando $\Delta x \rightarrow 0$ en la ecuación anterior, se obtiene la primera Ecuación del Telegrafista para una línea con pérdidas y parámetros variantes con la distancia:

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} + L(x) \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + R(x) i(x,t) = 0 \quad (2.12)$$

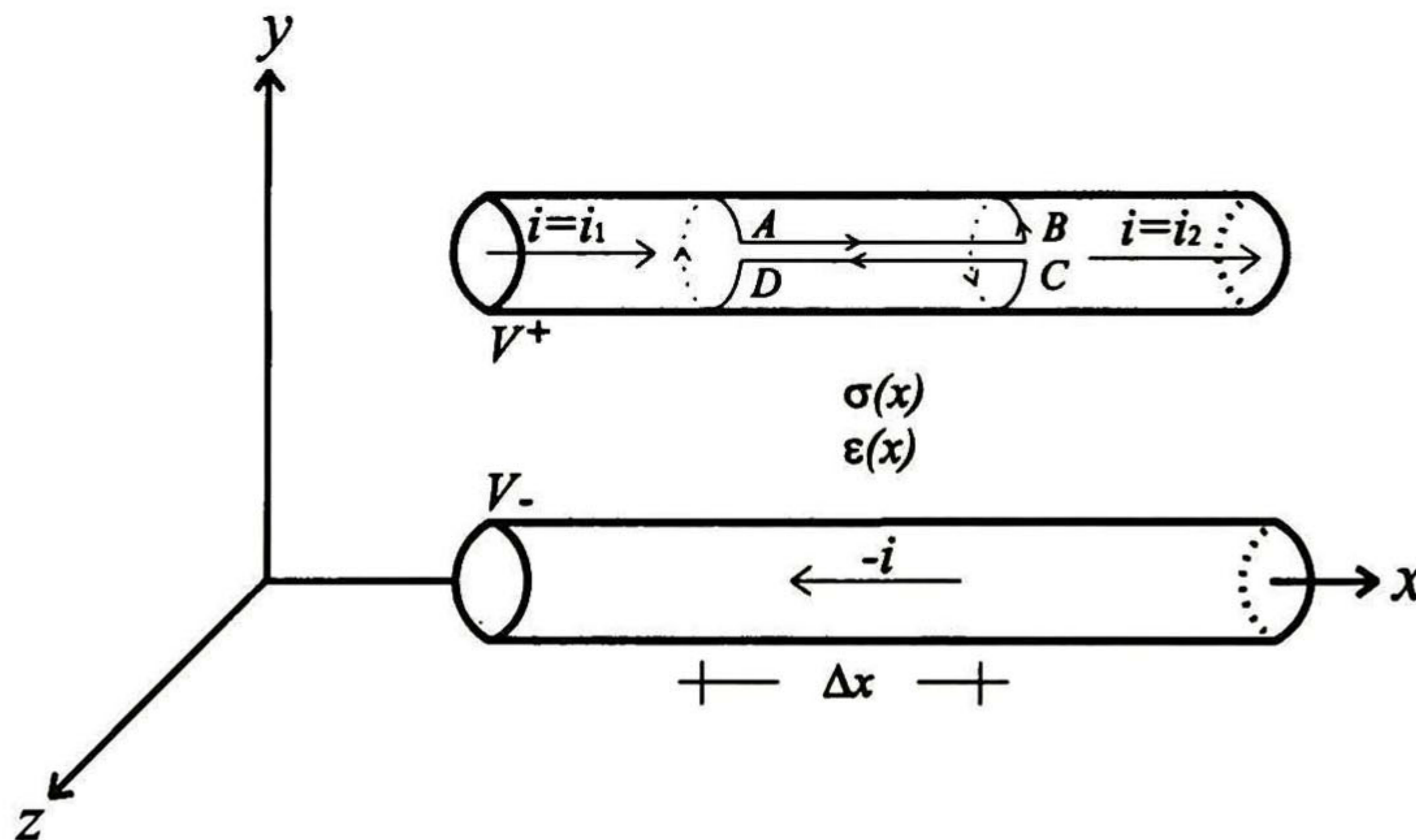


Fig. 2.2. Segunda Ecuación del Telegrafista.

Para obtener la segunda ecuación del Telegrafista se aplica la ley Ampere [20] al conductor superior como se muestra en la figura 2.2

$$\oint H \cdot d\vec{l} = \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{D} \cdot d\vec{s} + \int \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (2.13)$$

Realizando la integral del campo magnético a lo largo de la trayectoria $ABCD$

$$\oint_{ABCD} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_B^C \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_D^A \vec{H} \cdot d\vec{l} \quad (2.14)$$

Si las trayectorias de los segmentos $A-B$ y $C-D$ se hacen coincidir, entonces se tiene:

$$\int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (2.15)$$

y

$$\int_B^C \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_D^A \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_1 - I_2 = -\Delta i \quad (2.16)$$

donde I_1 , I_2 son las corrientes totales que cruzan por las trayectorias cerradas $D-A$ y $B-C$, respectivamente.

El campo eléctrico debido a una línea de carga infinita es radial, siendo el flujo eléctrico longitudinal casi cero, esto es, el flujo que cruza por las tapas del cilindro formado por la superficie $ABCD$ se suma de cero, de esta manera la integral del lado derecho de (2.13) se puede efectuar en una superficie cerrada; empleando además $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ y la ley de ohm se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \oint \vec{D} \cdot d\vec{s} + \oint \vec{J} \cdot d\vec{s} = \frac{\partial}{\partial t} \oint \vec{D} \cdot d\vec{s} + \frac{\sigma(x)}{\epsilon(x)} \oint \vec{D} \cdot d\vec{s} \quad (2.17)$$

Si en el tramo Δx la densidad de carga ρ_l se distribuye de manera uniforme, la carga total encerrada estará dada por:

$$q_{enc}(x, t) = \Delta x \rho_l \quad (2.18)$$

Aplicando la ley de Gauss:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = \rho_l \Delta x \quad (2.19)$$

Por otro lado la carga total es proporcional a la diferencia de potencial entre los dos conductores, esto es:

$$\rho_l \Delta x = C_x(x) v(x, t) \quad (2.20)$$

Donde $C_x(x)$ es la capacitancia del tramo Δx ; dividiendo entre Δx se tiene que:

$$\rho_l = C(x) v(x, t) \quad (2.21)$$

De (2.19) y (2.21) se puede obtener:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = \Delta x C(x) v(x, t) \quad (2.22)$$

Sustituyendo (2.19) y (2.22) en (2.17)

$$\frac{\partial}{\partial t} \oint \vec{D} \cdot d\vec{s} + \frac{\varepsilon(x)}{\sigma(x)} \oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = \Delta x \frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \Delta x \frac{\sigma(x)}{\varepsilon(x)} C(x) v(x, t) \quad (2.23)$$

Igualando (2.16) con (2.23) y dividiendo entre Δx

$$-\frac{\Delta i(x, t)}{\Delta x} = C(x) \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + \frac{\sigma(x)}{\varepsilon(x)} C(x) v(x, t) \quad (2.24)$$

Tomando el limite cuando $\Delta x \rightarrow 0$ y definiendo la conductancia $G(x) = C(x)\sigma(x)/\varepsilon(x)$, se obtiene la segunda ecuación del telegrafista para una línea en un medio con pérdidas:

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} + C(x) \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + G(x) v(x, t) = 0 \quad (2.25)$$

De esta manera se obtiene el sistema de Ecuaciones Diferenciales Parciales que describen el comportamiento electromagnético de la línea de transmisión con pérdidas. En resumen estas ecuaciones son conocidas como Ecuaciones del Telegrafista y son:

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} + L(x) \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} + R(x) i(x, t) = 0 \quad (2.26a)$$

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} + C(x) \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + G(x) v(x, t) = 0 \quad (2.26b)$$

donde $L(x)$ es la inductancia de la línea, $C(x)$ la capacitancia de la línea, $R(x)$ es la resistencia serie que toma en cuenta las pérdidas de un conductor imperfecto y $G(x)$ es la conductancia paralelo que considera las pérdidas en el dieléctrico, todos los parámetros están en por unidad de longitud. Es común en muchos estudios considerar que los parámetros R , L , C y G son constantes; sin embargo, cuando se requiere un análisis más preciso se tiene que considerar muchas veces que estos parámetros son función de la frecuencia y de la distancia.

Empleando los modelos presentados, en la siguiente sección se describen dos de los métodos más utilizados para el análisis de transitorios en líneas de transmisión, el primero en el dominio del tiempo (Método de Bergeron) y después un método en el dominio de la frecuencia.

2.2. - ANÁLISIS DE LÍNEAS UNIFORMES EN EL DOMINIO DEL TIEMPO.

Varios métodos han sido propuestos para el análisis de transitorios en líneas de transmisión en el dominio del tiempo. Entre estos, se tiene al método de Bergeron que tal vez sea el más utilizado. Una de las aplicaciones más conocidas que emplean este modelo es el Programa de Transitorios Electromagnéticos, el EMTP [19].

Tomando (2.26a) y (2.26b), y despreciando las pérdidas debidas a la resistencia del conductor y a la conductancia del medio se tienen las Ecuaciones del Telegrafista para una línea ideal con parámetros eléctricos constantes:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -L \frac{\partial i}{\partial t} \quad (2.27a)$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -C \frac{\partial v}{\partial t} \quad (2.27b)$$

Derivando (2.27a) con respecto a x y (2.27b) con respecto a t y sustituyendo las derivadas de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.28a)$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = CL \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \quad (2.28b)$$

La solución de (2.28a) y (2.28b) está dada por [20]:

$$v = f(t - x/v) + g(t + x/v) \quad (2.29a)$$

$$Z_c i = f(t - x/v) - g(t + x/v) \quad (2.29b)$$

La interpretación física de $f(t - x/v)$ es una onda viajando a una velocidad " v " en el sentido positivo de x y $g(t + x/v)$ es la onda viajando en el sentido negativo a la misma velocidad. Donde Z_c , la impedancia característica, y " v " es la velocidad de propagación, que están dadas por:

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (2.30)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (2.31)$$

Evaluando en (2.29a) y (2.29b) para $x = 0$ y mediante manipulaciones matemáticas se llega a las siguientes ecuaciones:

$$V(0, t) + Z_c I(0, t) = 2f(t) \quad (2.32a)$$

$$V(0, t) - Z_c I(0, t) = 2g(t) \quad (2.32b)$$

evaluando ahora (2.29) en $x = l$ se obtiene:

$$V(l, t) + Z_c I(l, t) = 2f(t - T) \quad (2.32c)$$

$$V(l, t) - Z_c I(l, t) = 2g(t + T) \quad (2.32d)$$

donde T es el tiempo de viaje de la onda en la línea de longitud l , dado como $T = l/v$. En (2.32a) y (2.32d) se sustituye t por $t - T$, acomodando las ecuaciones dadas en (2.32) se obtiene:

$$V(0, t) = Z_c I(0, t) + 2g(t) \quad (2.33a)$$

$$V(l, t) = -Z_c I(l, t) + 2f(t - T) \quad (2.33b)$$

$$V(0, t - T) + Z_c I(0, t - T) = 2f(t - T) \quad (2.33c)$$

$$V(l, t - T) - Z_c I(l, t - T) = 2g(t) \quad (2.33d)$$

Al sustituir (2.33d) en (2.33a) se obtiene:

$$V(0, t) = Z_c I(0, t) + V_{histk} \quad (2.34a)$$

donde:

$$V_{histk} = V(l, t - T) - Z_c I(l, t - T) \quad (2.34b)$$

De manera similar para las ecuaciones dadas (2.33c) y (2.33b):

$$V(l, t) = -Z_c I(l, t) + V_{histm} \quad (2.35a)$$

donde:

$$V_{histm} = V(0, t - T) + Z_c I(0, t - T) \quad (2.35b)$$

De (2.34) y (2.35) se obtiene un circuito equivalente para la línea sin pérdidas como se muestra en la figura 2.3. Las fuentes de voltaje V_{histk} y V_{histm} dependen de los voltajes y corrientes en las fronteras de la línea existentes un tiempo anterior igual al tiempo de viaje por lo que se les conoce como voltajes de historia. Las ecuaciones (2.34) y (2.35) representan la solución exacta para los voltajes para el caso de línea ideal.

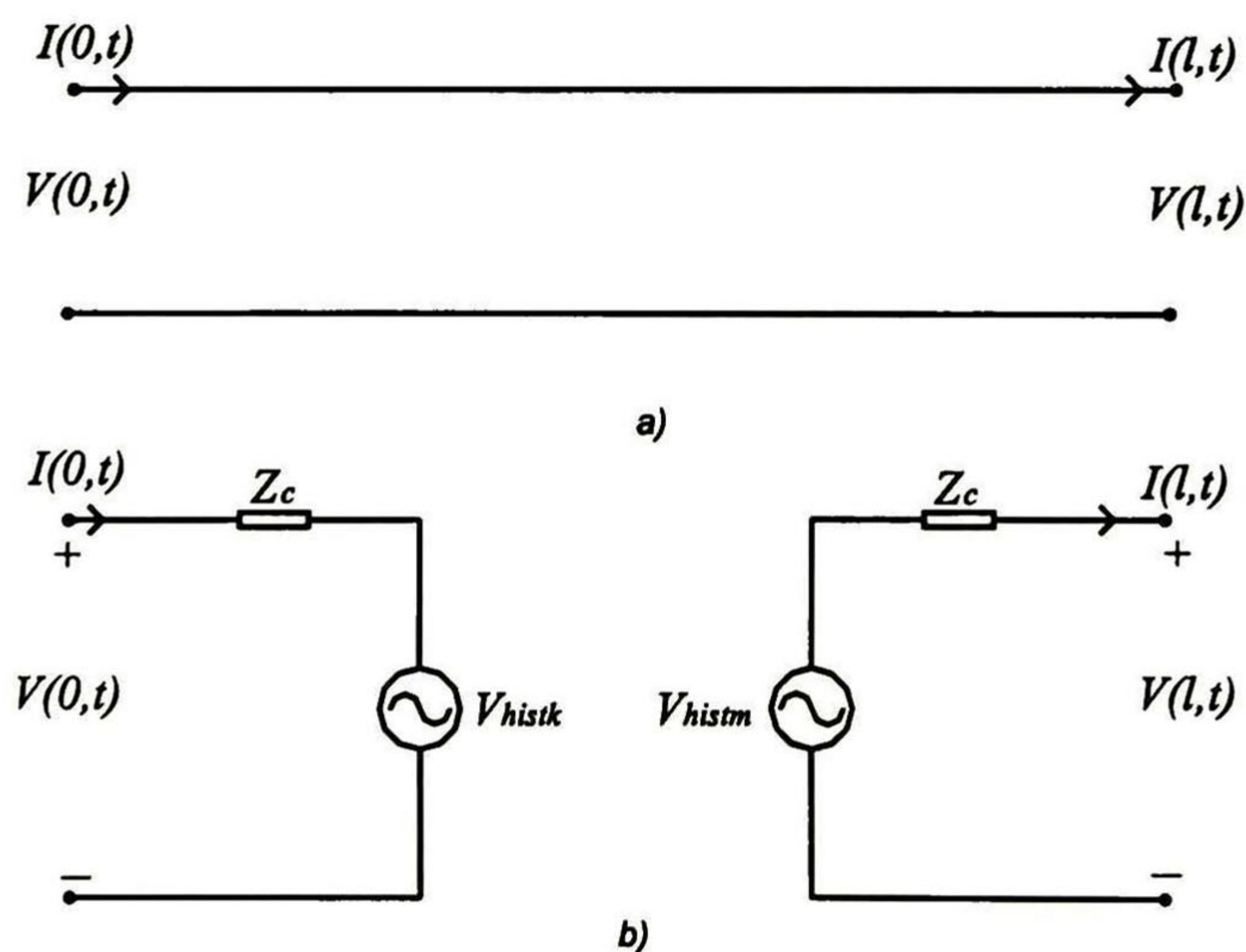


Fig. 2.3. a) Sección de línea ideal y b) Circuito equivalente para una línea ideal.

La inclusión de pérdidas resistivas son agregadas al modelo de Bergeron incluyendo resistencias concentradas en los extremos de la línea de transmisión [11,19].

2.3. - ANÁLISIS DE LÍNEAS UNIFORMES EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA.

Aplicando la Transformada de Fourier a la ecuación (2.26) se puede escribir [21]:

$$\frac{dV}{dx} + ZI = 0 \quad (2.36a)$$

$$\frac{dI}{dx} + YV = 0 \quad (2.36b)$$

donde $Z = R(\omega) + j\omega L(\omega)$, $Y = G(\omega) + j\omega C(\omega)$ y “V” e “I” representan los voltajes y corrientes en forma fasorial. Este es el caso donde se incluyen todos los términos con dependencia de la frecuencia.

Derivando con respecto a “x” y combinando estas ecuaciones se tiene las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

$$\frac{d^2V}{dx^2} = ZY \cdot V \quad (2.37a)$$

$$\frac{d^2I}{dx^2} = YZ \cdot I \quad (2.37b)$$

Para estas ecuaciones y con (2.36a) y (2.36b), la solución general para el voltaje y corriente están dadas por:

$$V = C_1 e^{-\gamma x} + C_2 e^{\gamma x} \quad (2.38a)$$

$$I = \frac{1}{Z_c} (C_1 e^{-\gamma x} - C_2 e^{\gamma x}) \quad (2.38b)$$

donde γ se conoce como constante de propagación y esta dada por $\gamma = \sqrt{ZY}$ que tendrá dos componentes una real y la otra imaginaria; la parte real corresponde a la atenuación en la línea y la parte imaginaria a la constante de fase. La impedancia característica esta dada como $Z_c = \sqrt{Z/Y}$, y la admitancia característica $Y_c = Z_c^{-1}$

Las constantes de integración C_1 y C_2 en (2.38a) y (2.38b) las determinan de las condiciones de frontera; para $x = 0$ estas constantes quedan definidas de (2.38) como:

$$C_1 = \frac{1}{2}(V_0 + Z_c I_0) \quad (2.39a)$$

$$C_2 = \frac{1}{2}(V_0 - Z_c I_0) \quad (2.39b)$$

Sustituyendo la condición de frontera para el nodo de recepción ($x = l$) y el valor de las constantes obtenidas en (2.39) en (2.38):

$$V_l = \frac{1}{2}(V_0 + Z_c I_0)e^{-\gamma l} + \frac{1}{2}(V_0 - Z_c I_0)e^{\gamma l} \quad (2.40a)$$

$$I_l = -\frac{Y_c}{2}(V_0 + Z_c I_0)e^{-\gamma l} + \frac{Y_c}{2}(V_0 - Z_c I_0)e^{\gamma l} \quad (2.40b)$$

Agrupando los términos de voltaje y corriente, y aplicando las propiedades de las funciones hiperbólicas se obtienen las ecuaciones que representan la solución clásica de las ecuaciones de la línea de transmisión en el dominio de la frecuencia:

$$V_l = \cosh(\gamma l)V_0 - Z_c \sinh(\gamma l)I_0 \quad (2.41a)$$

$$I_l = Y_c \sinh(\gamma l)V_0 - \cosh(\gamma l)I_0 \quad (2.41b)$$

A partir de estas ecuaciones se obtiene el modelo nodal o modelo de admitancias de dos puertos:

$$\begin{bmatrix} I_l \\ I_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_l \\ V_o \end{bmatrix} \quad (2.42a)$$

donde

$$A = Y_c \coth(\gamma l) \quad (2.42b)$$

$$B = -Y_c \operatorname{coseh}(\gamma l) \quad (2.42c)$$

2.4. - OBSERVACIONES FINALES.

A partir del modelo de la línea de transmisión presentado por las Ecuaciones del Telegrafista, se revisó en este capítulo los métodos clásicos de análisis, el del dominio del tiempo (Método de Bergeron) y el del dominio de la frecuencia. En el método de Bergeron se presenta el desarrollo solo para líneas ideales donde la inclusión de las pérdidas en este modelo se realiza seccionando la línea y concentrando las pérdidas en las fronteras de las secciones. El análisis en el dominio de la frecuencia es más apropiado cuando se consideran las pérdidas; y se realiza suponiendo que V e I son senoides representadas en forma fasorial, llegando a un modelo de dos puertos que relaciona las corrientes con los voltajes en las fronteras.

CAPÍTULO 3

MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS.

3.0. - INTRODUCCIÓN.

Como se mostró en el capítulo 2, la solución de las ecuaciones de la línea de transmisión con pérdidas puede fácilmente ser encontrada en el dominio de la frecuencia, mientras que en el dominio tiempo se requiere realizar algunas simplificaciones. Sin embargo, a pesar de las ventajas del modelo de líneas de transmisión en el dominio de la frecuencia, la solución de líneas en donde se tiene una gran variedad de condiciones de operación es más sencillo de modelar en el dominio del tiempo; por ejemplo, los casos en que se tienen líneas con parámetros no lineales o no uniformes.

Entre los métodos en el dominio del tiempo el más conocido es el de Bergeron [19], que solo realiza discretización en el tiempo y es el más adecuado cuando solo es necesario conocer los voltajes en las terminales de la línea de transmisión. En líneas con parámetros no lineales o no uniformes es necesario determinar los estados en los puntos intermedios, lo que requiere discretizar también en el espacio. Aquí quizá sea más apropiado utilizar métodos de diferencias finitas.

En este capítulo primeramente se presenta la teoría básica del método de las características de las ecuaciones diferenciales parciales (EDPs). Empleando este método, las Ecuaciones del Telegrafista se transforman en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) las cuales se resuelven empleado diferencias finitas.

3.1. - TEORÍA DE LAS CARACTERÍSTICAS.

El método de las características se utiliza para resolver de manera exacta las EDPs de tipo hiperbólico cuando su solución se desplaza sobre sus curvas características. Matemáticamente, las características de un sistema de EDPs son curvas en el plano $x-t$ a lo largo de las cuales las

ecuaciones se transforman en EDOs; físicamente una característica es una trayectoria en el plano $x-t$ trazada por un frente puntual de onda que se propaga. En esta sección se utiliza este concepto de característica para dar una clasificación de las EDPs.

Considere la ecuación diferencial parcial de segundo orden, cuasilineal, de la forma [22]:

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = f \quad (3.1)$$

donde a , b , c y f son funciones de x , y , u , u_x y u_y pero no de las derivadas de orden superior de u , u_{xx} , u_{xy} , u_{yy} , etc. La clasificación de (3.1) puede ser examinada a través de la reducción a un sistema de ecuaciones de primer orden. Si, u_x y u_y se definen sobre una curva inicial, Γ , como se muestra en la figura 3.1; entonces u_{xx} , u_{xy} y u_{yy} están determinadas solo si las siguientes diferenciales existen [22]:

$$du_x = u_{xx}dx + u_{xy}dy \quad (3.2a)$$

$$du_y = u_{xy}dx + u_{yy}dy \quad (3.2b)$$

Agrupando en forma de matricial las ecuaciones dadas por (3.1) y (3.2), se tiene:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{xx} \\ u_{xy} \\ u_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ du_x \\ du_y \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

De esta manera, las soluciones para, u_{xy} y u_{yy} , existen, y son únicas si y sólo si la matriz de coeficientes tiene determinante diferente de cero:

$$a(dy)^2 - bdx dy + c(dx)^2 = 0 \quad (3.4)$$

La solución de (3.4) está dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (3.5)$$

Las soluciones de la ecuación diferencial ordinaria dada en (3.5) son llamadas direcciones características y representan familias de curvas en el plano $x-t$. De acuerdo al valor que puede tomar el discriminante $b^2 - 4ac$ se clasifica la ecuación de la forma dada por (3.1) de acuerdo con la tabla 1.

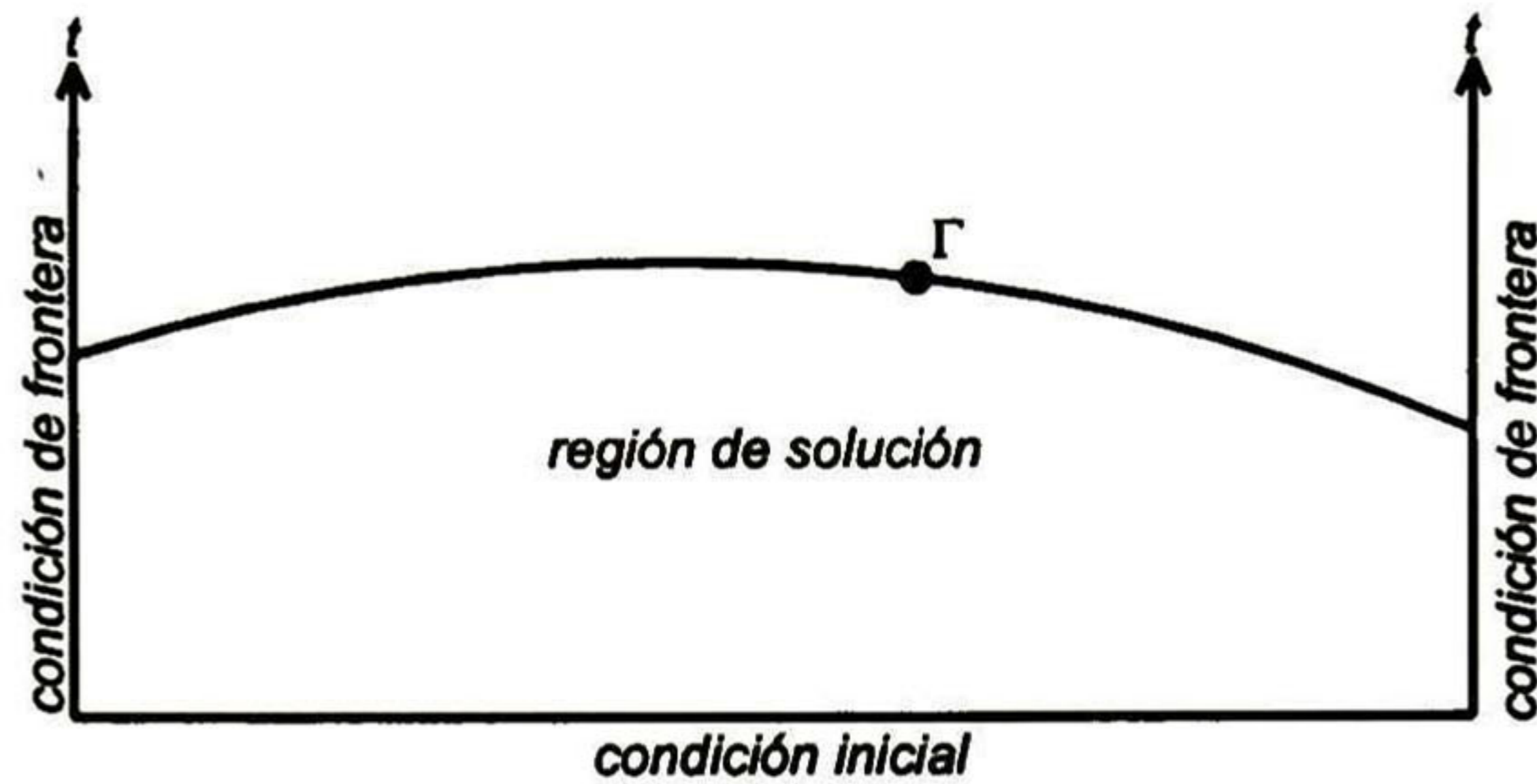


Fig. 3.1. Representación general de propagación.

Discriminante	Características	Tipo de ecuación
Negativo	Complejas	Elíptica
Cero	Reales y repetidas	Parabólica
Positivo	Reales y distintas	Hiperbólica

Tabla 3.1. Clasificación de EDP,s

Como a , b y c son funciones de x , y , u , u_x y u_y , una ecuación puede cambiar su tipo de región en región, conforme se desplaza la solución.

3.2. - TRANSFORMACION DE LAS ECUACIONES DE LA LÍNEA DE TRANSMISIÓN A UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.

El comportamiento electromagnético de una línea de transmisión aérea es descrito por las Ecuaciones Generales del Telegrafista dadas por (2.26); cuando se desprecian las pérdidas debidas a la conductancia del medio, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} v + L \frac{\partial}{\partial t} i + Ri = 0 \quad (3.6a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} i + C \frac{\partial}{\partial t} v = 0 \quad (3.6b)$$

Agrupando en forma matricial el sistema de ecuaciones (3.6):

$$\frac{\partial}{\partial x}U + A\frac{\partial}{\partial t}U + BU = 0 \quad (3.7)$$

donde:

$$U = \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} \quad (3.8a)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & L \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad (3.8b)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & R \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.8c)$$

Las características del sistema de ecuaciones (3.7) están dadas por los eigenvalores de la matriz A :

$$\lambda_1 = \sqrt{LC} \quad (3.9a)$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{LC} \quad (3.9b)$$

Nótese que λ_1 y λ_2 son reales y distintos, por lo tanto, el sistema (3.7) es un sistema de EDPs de tipo hiperbólico de acuerdo a la clasificación de la tabla 3.1. Asociada con estos eigenvalores se encuentra la matriz de eigenvectores izquierdos:

$$E_{izq} = \begin{bmatrix} 1 & Z_w \\ 1 & -Z_w \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

donde $Z_w = \sqrt{L/C}$ se le conoce como impedancia de onda [15,31].

Si se premultiplica el sistema (3.7) por el primer renglón de la matriz de eigenvectores izquierdos:

$$\frac{\partial}{\partial x}(v + Z_w i) + \frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{LC}v + Li) + Ri = 0 \quad (3.11)$$

Agrupando términos en “ v ” e “ i ” en la ecuación (3.11) se obtiene:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right)v + Z_w \left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right)i + Ri = 0 \quad (3.12)$$

Restringiendo la ecuación anterior a una curva sobre el plano $x-t$, definida por:

$$\frac{dt}{dx} = \lambda_1 \quad (3.13a)$$

$$\frac{dt}{dx} = \lambda_2 \quad (3.13b)$$

Sustituyendo el valor de λ_1 dado por la ecuación (3.13a) en (3.12), se puede ver que las derivadas parciales que se convierten en derivadas totales de las variables dependientes “ v ” e “ i ” con respecto a x , resultando la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{dv}{dx} + Z_w \frac{di}{dx} + Ri = 0 \quad (3.14a)$$

De forma similar, la segunda fila de E_{izq} premultiplica al sistema (3.7) y ahora se sustituye el valor de λ_2 dado por la ecuación (3.13b) se obtiene una segunda ecuación diferencial ordinaria, dada como:

$$\frac{dv}{dx} - Z_w \frac{di}{dx} + Ri = 0 \quad (3.14b)$$

Las dos familias de curvas definidas por (3.13) son las curvas características de (3.7). Como es un sistema hiperbólico, se garantiza que dos rectas características pasan a través de cada punto en el plano $x-t$. Estas curvas son tomadas como el nuevo sistema de coordenadas, donde (3.14a) y (3.14b) junto con las ecuaciones de sus características correspondientes (3.13a) y (3.13b) forman un sistema equivalente a (3.7). La ventaja principal de esta nueva formulación radica en la superioridad de los métodos computacionales para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias con respecto a los de las ecuaciones diferenciales parciales.

3.3. - APROXIMACION NUMÉRICA DE LAS CARACTERÍSTICAS.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias (3.14), que son equivalentes al sistema de ecuaciones diferenciales parciales de tipo hiperbólico (3.6), se aproximan numéricamente utilizando valores promedio para las variables que no están bajo el signo de diferenciación y las diferencias por diferencias centrales [29]. Para realizar la discretización primero se define el dominio de solución a través de una malla tal como se muestra en la figura 3.2. Aquí se muestra la discretización para los puntos interiores de la línea que corresponden a valores constantes de λ_1 y λ_2 , lo cual implica que las curvas características sean rectas. Utilizando el criterio de discretización ilustrado por la figura 3.2, las ecuaciones (3.14a) y (3.14b) se transforman en ecuaciones de diferencias de la forma:

$$\left(V_k^{n+1} - V_{k-1}^n\right) + Z_w \left(I_k^{n+1} - I_{k-1}^n\right) + R\Delta x \frac{\left(I_k^{n+1} + I_{k-1}^n\right)}{2} = 0 \quad (3.15a)$$

$$\left(V_{k+1}^n - V_k^{n+1}\right) - Z_w \left(I_{k+1}^n - I_k^{n+1}\right) + R\Delta x \frac{\left(I_{k+1}^n + I_k^{n+1}\right)}{2} = 0 \quad (3.15b)$$

En las ecuaciones anteriores se agrupan los términos que se conocen en el tiempo $t=T$, luego los términos desconocidos en $t=T+\Delta t$ obteniéndose el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas,

$$V_k^{n+1} + \left(Z_w + \frac{R\Delta x}{2}\right) I_k^{n+1} = V_k^n + \left(Z_w - \frac{R\Delta x}{2}\right) I_{k-1}^n \quad (3.16a)$$

$$V_k^{n+1} - \left(Z_w + \frac{R\Delta x}{2}\right) I_k^{n+1} = V_{k+1}^n - \left(Z_w - \frac{R\Delta x}{2}\right) I_{k+1}^n \quad (3.16b)$$

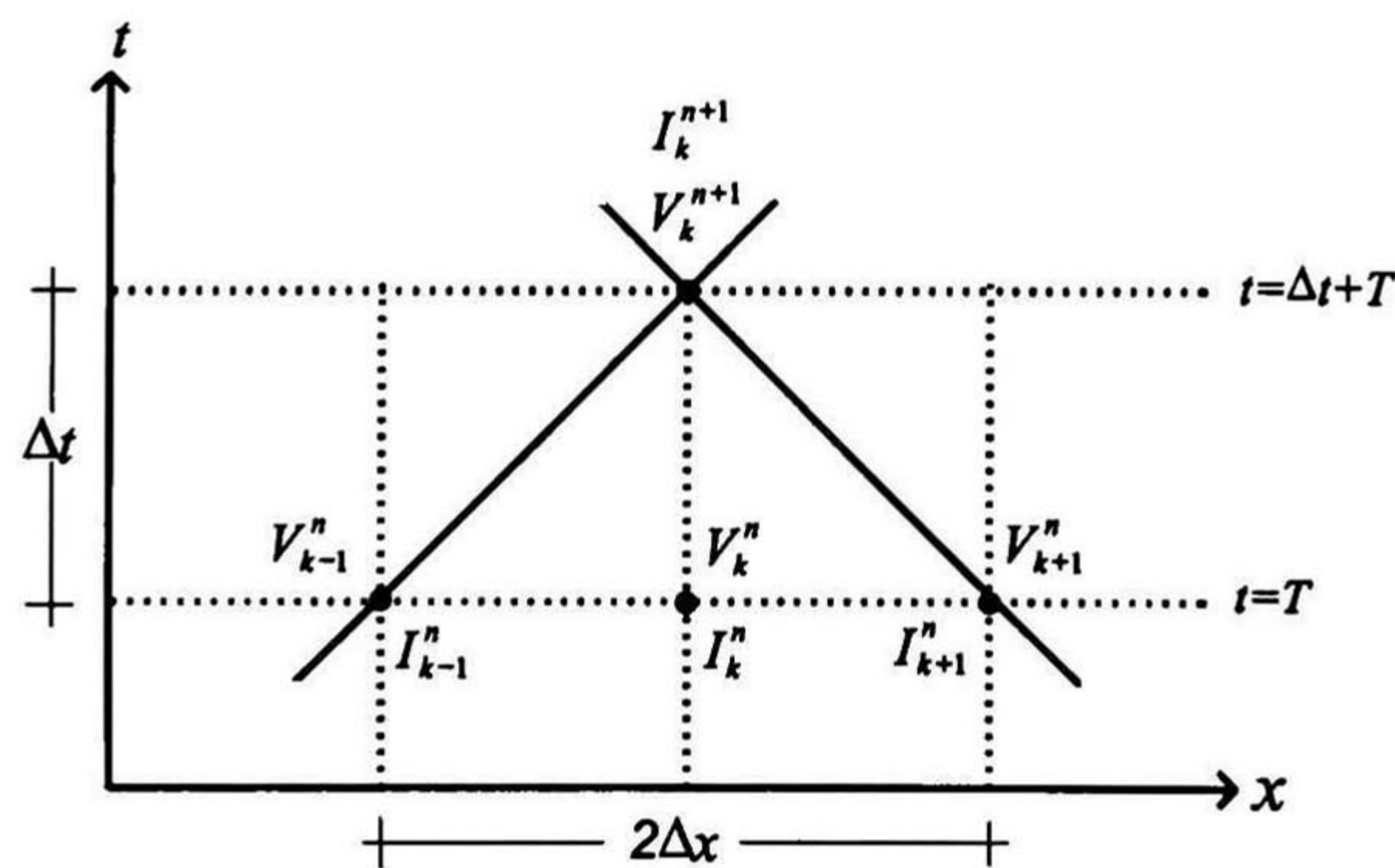


Fig. 3.2. Discretización en los puntos interiores de la línea.

En los puntos situados al inicio y al final de la línea se tiene incidiendo sólo una curva característica que está representada ya sea por la ecuación (3.14a) o por (3.14b). La otra ecuación necesaria para resolver las incógnitas de corriente y voltaje se debe obtener de las condiciones de frontera. A continuación se tomará como ejemplo una línea donde se conecta en el extremo emisor una fuente de voltaje y en el extremo receptor se tiene conectada una carga resistiva, como se muestra en la figura 3.3.

Para la frontera en $x = 0$, donde se tiene la fuente de voltaje, la corriente esta dada:

$$I_1^{n+1} = \frac{V_s^{n+1} - V_1^{n+1}}{R_s} \quad (3.17)$$

donde V_s representa la forma de onda de voltaje de la fuente, y V_s^{n+1} a su valor en $t = (n+1)\Delta t$. La discretización de la ecuación (3.14b) en $x = 0$, de acuerdo a la figura 3.3b), tiene la siguiente forma:

$$(V_2^n - V_1^{n+1}) - Z_w(I_2^n - I_1^{n+1}) + R\Delta x \frac{(I_2^n + I_1^{n+1})}{2} = 0 \quad (3.18)$$

sustituyendo (3.17) en (3.18) se obtiene:

$$V_1^{n+1} = \frac{1}{Z_1} (R_s V_s^n + Z_2 V_s^{n+1} - Z_3 I_2^n) \quad (3.19)$$

donde:

$$Z_1 = R_s + Z_w + \frac{R\Delta x}{2} \quad (3.20a)$$

$$Z_2 = Z_w + \frac{R\Delta x}{2} \quad (3.20b)$$

$$Z_3 = R_s \left(Z_w - \frac{R\Delta x}{2} \right) \quad (3.20c)$$

En la frontera, donde $x = l$ se tiene una carga resistiva, la condición de frontera esta dada por:

$$I_l^{n+1} = \frac{V_l^{n+1}}{R_L} \quad (3.21)$$

Discretizando la ecuación (3.14a) se tiene:

$$(V_l^{s+1} - V_{N-1}^s) + Z_w (I_l^{s+1} - I_{N-1}^s) + R\Delta x \frac{(I_l^{s+1} + I_{N-1}^s)}{2} = 0 \quad (3.22)$$

sustituyendo la condición de frontera dada por (3.21) se obtiene finalmente:

$$V_l^{s+1} = \frac{R_L}{R_L + Z_{w1}} (V_{N-1}^s + Z_{w2} I_{N-1}^s) \quad (3.23)$$

donde:

$$Z_{w1} = Z_w + \frac{R}{2} \Delta x \quad (3.24a)$$

$$Z_{w2} = Z_w - \frac{R}{2} \Delta x \quad (3.24b)$$

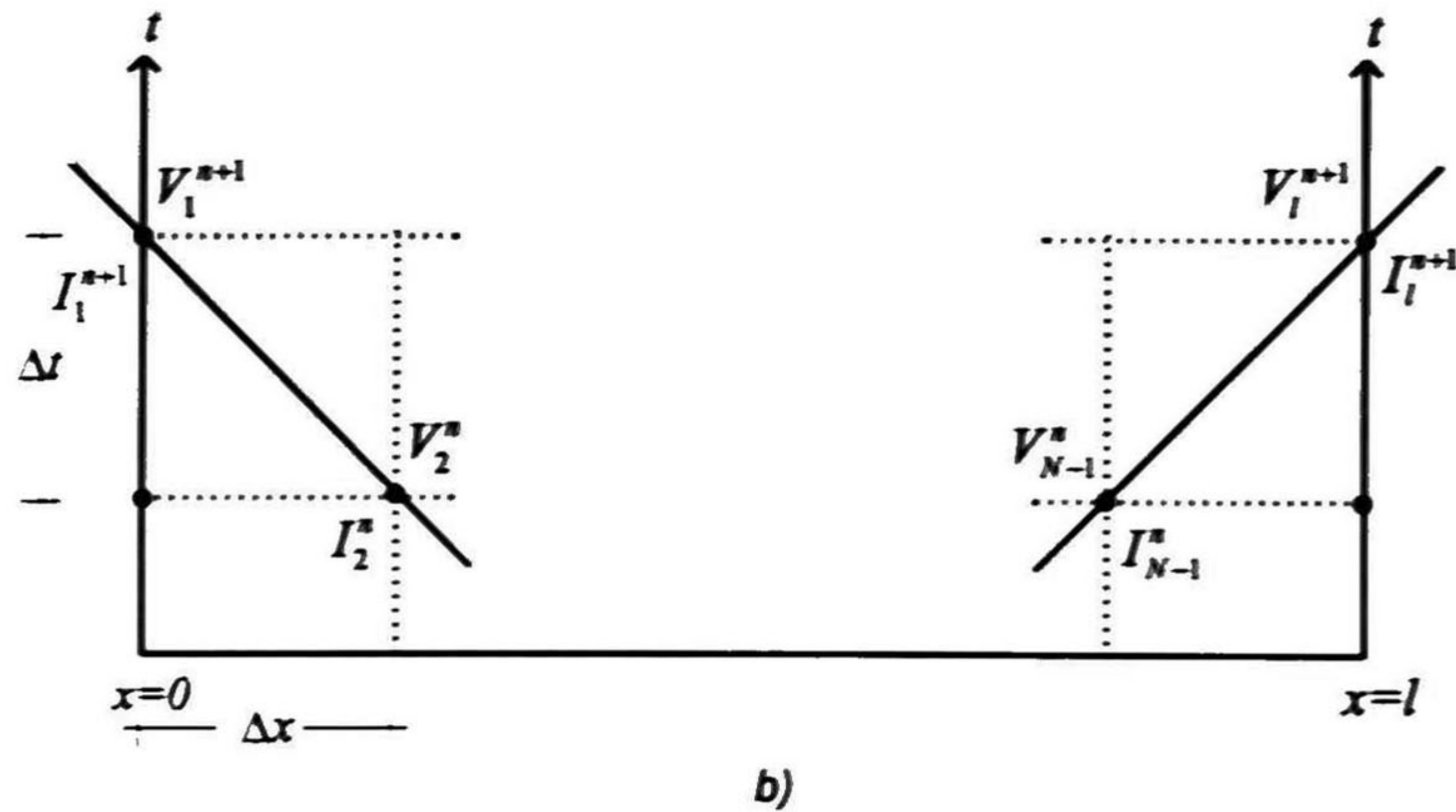
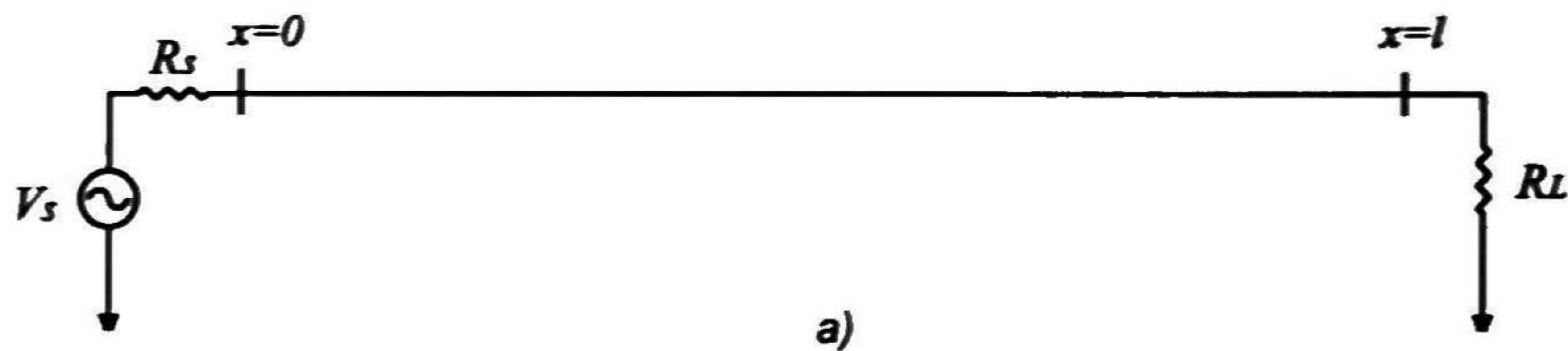


Fig. 3.3. Condiciones en las fronteras, a) línea uniforme y b) características incidentes.

3.4. - EJEMPLO DE ESTUDIO 1.

El modelo constituido por (3.15), (3.19) y (3.23) se aplica al análisis del fenómeno de propagación en una línea semi-infinita que consiste de un conductor de radio $r = 2.54\text{cm}$ a una altura constante $h = 20\text{ m}$ de un plano de tierra que tiene una resistividad $\rho_{\text{ter}} = 100\ \Omega\text{m}$. Se aplica una doble rampa lineal como excitación de la línea con un valor máximo de 1.0 pu [$21/115\mu\text{s}$]; es decir que alcanza su valor máximo en $21\ \mu\text{s}$ y decrece linealmente hasta el valor del 50% en $115\ \mu\text{s}$. Los parámetros eléctricos se calculan a una frecuencia $f = 1/4T$ donde T es el tiempo de viaje de la onda en la línea. Se ha utilizado un $\Delta x = 250\text{m}$ y un $\Delta t = 0.8689\mu\text{s}$. En la figura 3.4 se muestran las forma de onda de los voltajes que se presentan a los $0, 10, 20, 30, 40$ y 50 km del punto de inyección de la onda.

Se elige como excitación de prueba a la doble rampa lineal, debido a que esta suele provocar oscilaciones numéricas en los diferentes algoritmos que simulan propagación.

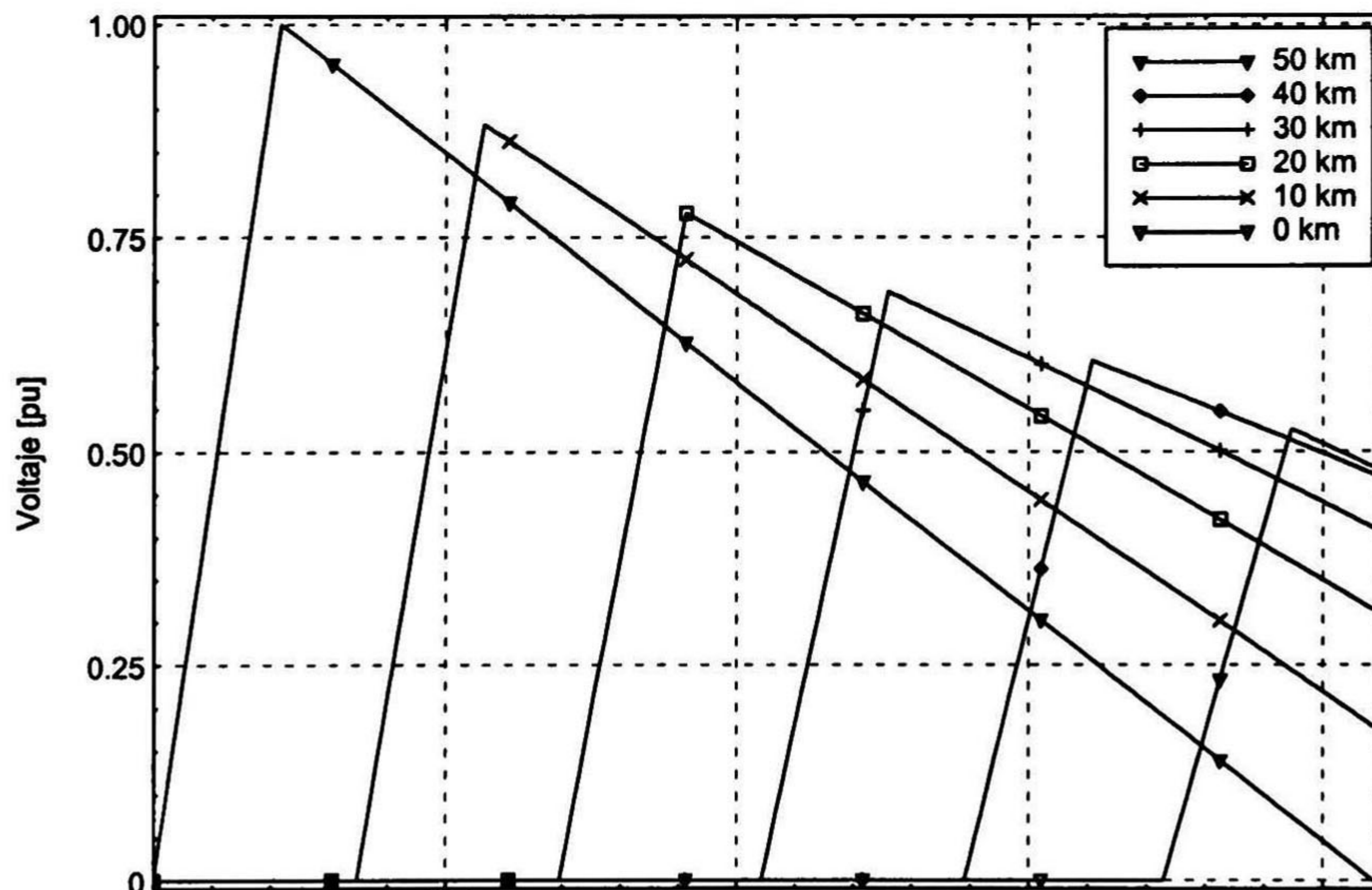


Fig. 3.4 Propagación de una doble rampa. (Método de las Características).

Los resultados obtenidos muestran la eficiencia del método para reproducir la propagación de transitorios electromagnéticos en líneas monofásicas uniformes con parámetros constantes.

3.5. - OBSERVACIONES FINALES.

Se muestra que las ecuaciones que describen el comportamiento electromagnético de una línea uniforme monofásica conforman un sistema hiperbólico, el cual se convierte a un sistema equivalente de ecuaciones diferenciales ordinarias mediante el método de las características. Se observó que el método de las características proporciona una buena solución para la propagación de transitorios en líneas uniformes, incluso no se presenta ningún problema en las discontinuidades de las formas de ondas ni con la inclusión de fuentes no ideales.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE LÍNEAS DE TRANSMISIÓN EMPLEANDO EL ALGORITMO DE YEE.

En 1966, Kane Yee presentó una serie de expresiones en diferencias finitas para las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial para el caso de materiales sin pérdidas [17]. En esta sección se emplea el algoritmo de Yee para encontrar los voltajes y corrientes de una línea de transmisión discretizando las Ecuaciones del Telegrafista en distancia como en tiempo. Las expresiones en diferencias finitas resultantes para las derivadas con respecto a la distancia se basan en diferencias centrales y, por lo tanto, se tiene una exactitud de segundo orden. Las expresiones en diferencias finitas para las derivadas con respecto al tiempo son también de diferencias centrales y dan lugar a un arreglo comúnmente conocido como "salto de rana" (leap-frog).

4.1. - DIFERENCIAS FINITAS.

Una forma común de aproximar la respuesta en el dominio del tiempo de las ecuaciones de la línea de transmisión es usando métodos de diferencias finitas [24-27]. La idea básica de los esquemas de diferencias finitas es reemplazar a las diferenciales por diferencias [23]. En estos métodos la posición " x " es discretizada en secciones de longitud Δx y la variable " t " en secciones de longitud Δt .

En la aproximación de la solución de ecuaciones diferenciales empleado diferencias finitas, la región de solución en el plano $x-t$, se divide en secciones de Δx y Δt de longitud, como se ilustra en la figura 4.1. Los puntos de intersección de la malla son los puntos donde se va a encontrar la solución aproximada. A continuación se presenta el procedimiento para realizar la aproximación de las derivadas

por diferencias finitas. Considere una función real de una sola variable, $f(t)$; expandiendo la función en series de Taylor alrededor de un punto t hasta el punto $t = t + \Delta t$

$$f(t + \Delta t) = f(t) + \Delta t f'(t) + \frac{\Delta t^2}{2!} f''(t) + \frac{\Delta t^3}{3!} f'''(t) + \dots \quad (4.1)$$

Truncando (4.1) y despejando para la primera derivada se tiene:

$$f'(t) = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (4.2)$$

donde $O(\Delta t)$ denota que esta aproximación es valida con un error de orden Δt . Por lo tanto, la siguiente expresión es una aproximación de primer orden para la primera derivada mediante diferencias hacia delante:

$$f'(t) \cong \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \quad (4.3)$$

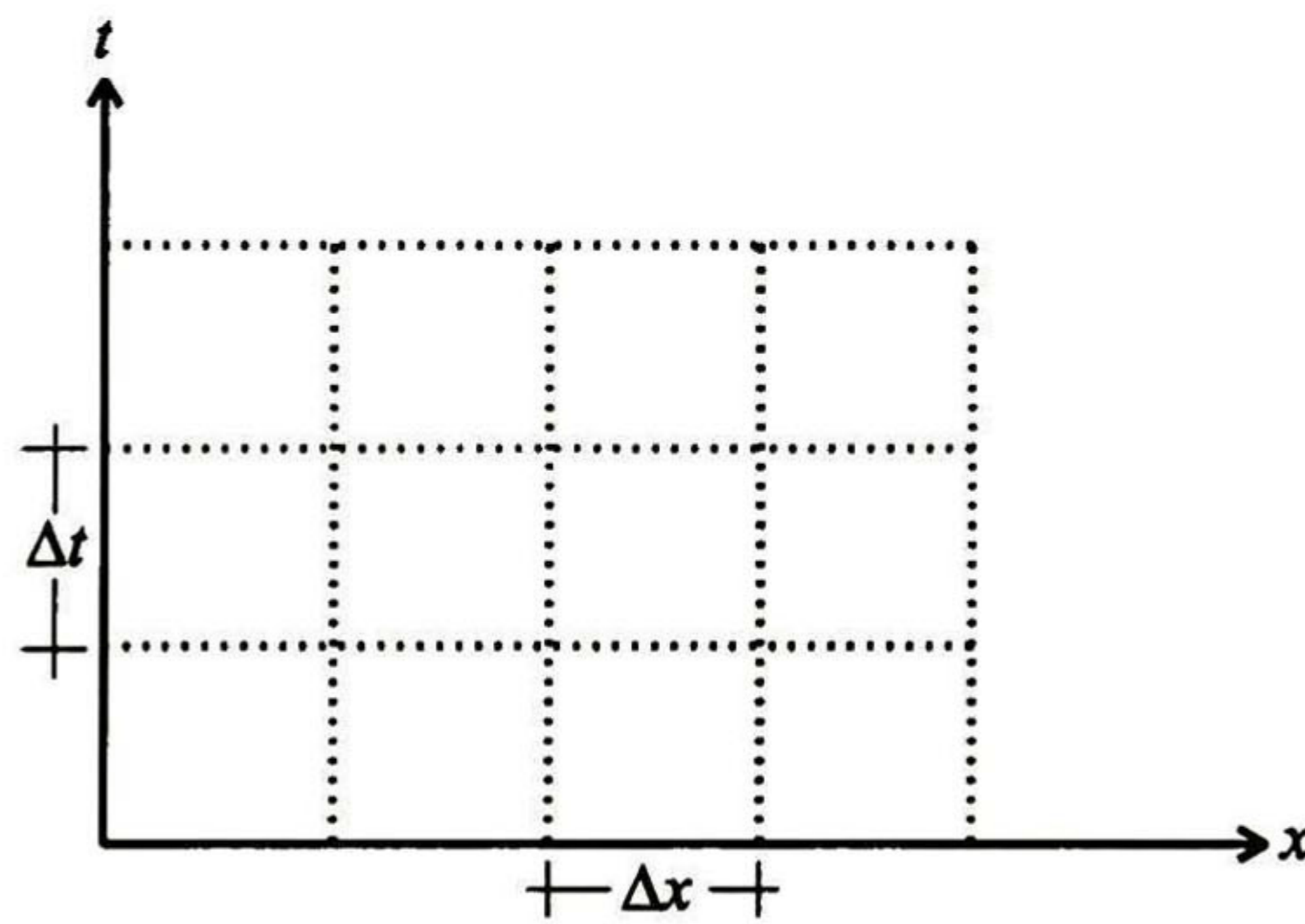


Fig. 4.1 Región de solución

De manera similar a la expresión (4.1) la derivada puede aproximarse cerca de un punto deseado expandiendo la función alrededor de t hasta el punto $t = t - \Delta t$:

$$f(t - \Delta t) = f(t) - \Delta t f'(t) + \frac{\Delta t^2}{2!} f''(t) - \frac{\Delta t^3}{3!} f'''(t) + \dots \quad (4.4)$$

Truncando nuevamente se obtiene una aproximación para la derivada con diferencias hacia atrás de primer orden:

$$f'(t) \cong \frac{f(t) - f(t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (4.5)$$

Para tener mejor precisión en la aproximación se pueden utilizar *diferencias centrales*. Expandiendo $f(t + \Delta t)$ y $f(t - \Delta t)$ según las ecuaciones (4.1) y (4.4); sustrayendo estas dos ecuaciones y solucionando para la primera derivada se obtiene la aproximación por *diferencias centrales de segundo orden*:

$$f'(t) = \frac{f(t + \Delta t) - f(t - \Delta t)}{2 \Delta t} + O(\Delta t^2) \quad (4.6)$$

Las derivadas parciales que aparecen en la ecuación diferencial parcial a resolver, son sustituidas por sus aproximaciones en diferencias finitas. De aquí se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas que permite calcular las variables dependientes en puntos donde no se conoce su solución a partir de valores conocidos con anterioridad.

4.2. APROXIMACION DE LAS ECUACIONES DE LA LÍNEA UTILIZANDO EL ALGORITMO DE YEE.

Las ecuaciones para una línea de transmisión aérea despreciando las pérdidas por la conductancia del medio, son:

$$\frac{\partial}{\partial x} v + L \frac{\partial}{\partial t} i + Ri = 0 \quad (4.7a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} i + C \frac{\partial}{\partial t} v = 0 \quad (4.7b)$$

Para aplicar el método de Yee a las ecuaciones de la línea de transmisión, la región de solución se divide en N secciones de longitud Δx y el tiempo total de observación se divide en segmentos de longitud Δt . De acuerdo a la malla de discretización mostrada en la figura 4.2, los puntos de solución de voltaje y corriente quedan alternados en espacio y tiempo, separados en distancia por $\Delta x/2$ y en tiempo

por $\Delta t/2$ [26]. Sustituyendo las expresiones de diferencias centrales en las derivadas parciales de las ecuaciones (4.7a) y (4.7b) se obtiene:

$$\frac{V_{k+1}^{n+1} - V_k^{n+1}}{\Delta x} + L \frac{I_{k+1/2}^{n+3/2} - I_{k+1/2}^{n+1/2}}{\Delta t} + R \frac{I_{k+1/2}^{n+3/2} + I_{k+1/2}^{n+1/2}}{2} = 0 \quad (4.8a)$$

$$\frac{I_{k+1/2}^{n+1/2} - I_{k-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} + C \frac{V_k^{n+1} - V_k^n}{\Delta t} = 0 \quad (4.8b)$$

Solucionando la ecuación (4.8a) para el voltaje en el punto $(k, n+1)$ y la ecuación (4.8b) para la corriente en el punto $(k+1/2, n+3/2)$, se tiene la solución de corriente y voltaje para los puntos internos de la línea:

$$V_k^{n+1} = V_k^n - \frac{\Delta t}{C\Delta x} (I_{k+1/2}^{n+1/2} - I_{k-1/2}^{n+1/2}) \quad (4.9a)$$

$$I_{k+1/2}^{n+3/2} = \frac{2L - R\Delta t}{2L + R\Delta t} I_{k+1/2}^{n+1/2} - \frac{2\Delta t}{\Delta x(2L + R\Delta t)} (V_{k+1}^{n+1} - V_k^{n+1}) \quad (4.9b)$$

En el procedimiento de marcha en tiempo se resuelve primero para los voltajes a lo largo de la línea para un tiempo fijo con (4.9a), en términos de las soluciones previas de corriente en un tiempo $\Delta t/2$ y de voltajes en un Δt atrás. Posteriormente se calculan las corrientes un $\Delta t/2$ adelante con (4.9a), empleando los voltajes calculados y las corrientes una $\Delta t/2$ atrás.

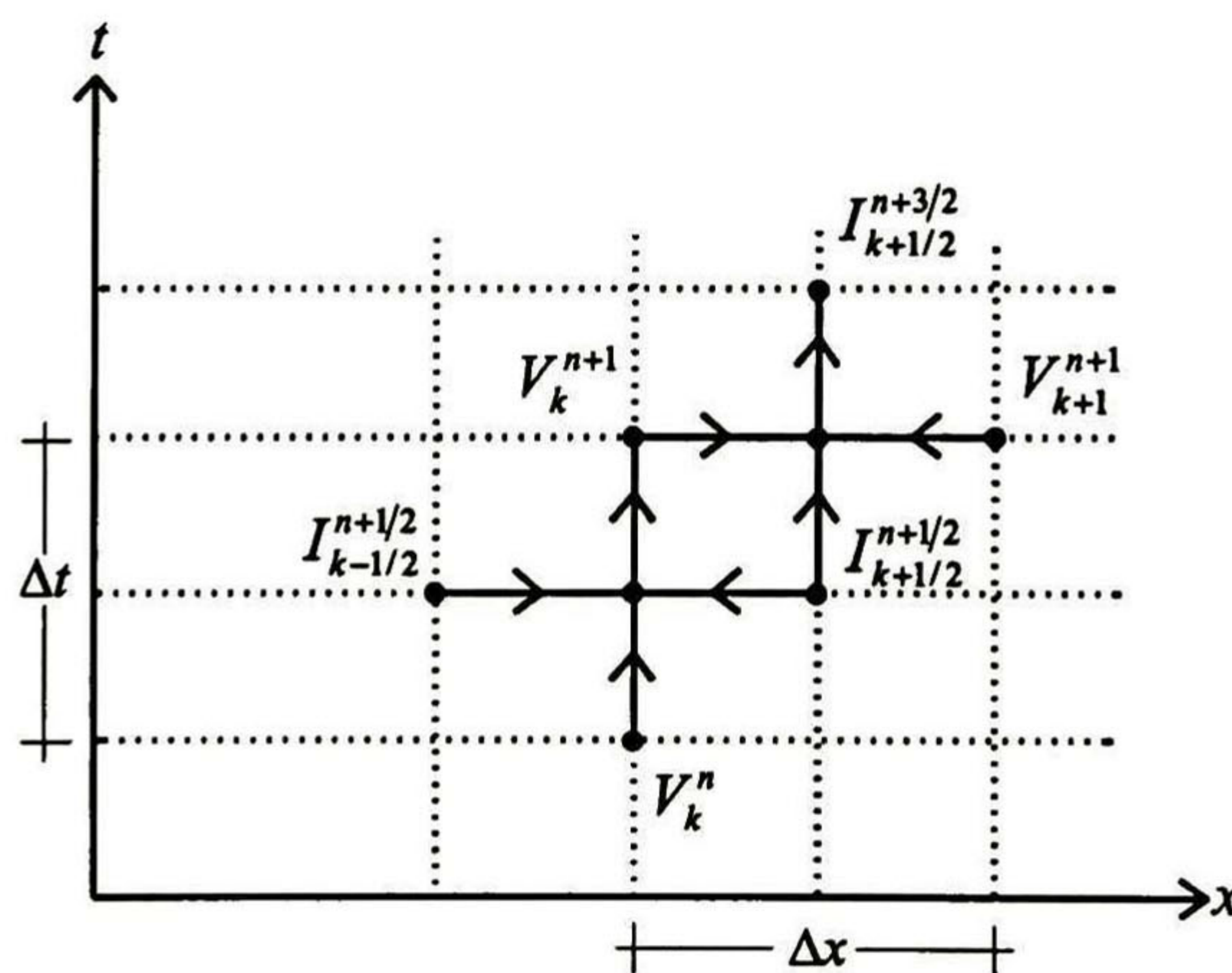


Fig.4.2. Discretización en FDTD

La incorporación de las condiciones de frontera es más complicado que en el caso del método de las características, ya que en el método de Yee los voltajes y corrientes no se conocen en los mismos puntos, como se muestra en la figura 4.2. Para mostrar la forma de incluir las condiciones de frontera considere una línea de transmisión alimentada por una fuente de voltaje $V_s(t)$ con resistencia interna R_s , y con una resistencia de carga R_L conectada en el extremo receptor, como se muestra en la figura 4.3a. Empleando diferencias hacia delante para la derivada con respecto a la distancia y diferencias centrales para la derivada con respecto al tiempo en la ecuación (4.7a)

$$\frac{I_1^{n+1/2} - I_0^{n+1/2}}{\Delta x/2} + C \frac{V_1^{n+1} - V_1^n}{\Delta t} = 0 \quad (4.10)$$

El valor de $I_0^{n+1/2}$ no se conoce por lo que se emplea el promedio de las corrientes I_0^{n+1} e I_0^n , esto es:

$$I_0^{n+1/2} = \frac{1}{2} (I_0^{n+1} + I_0^n) \quad (4.11)$$

Por otro lado, la corriente en el punto $x = 0$ y $t = \Delta t(n+1)$, I_0^{n+1} , se relaciona con el voltaje en ese mismo punto, V_1^{n+1} , por medio de la siguiente expresión

$$I_0^{n+1} = \frac{V_s^{n+1} - V_1^{n+1}}{R_s} \quad (4.12a)$$

donde V_s^{n+1} es el valor de la fuente en el tiempo $t = \Delta t(n+1)$. Sustituyendo (4.11) y (4.12a) en (4.10) y resolviendo para V_1^{n+1} , se tiene que:

$$V_1^{n+1} = \left(\frac{2\Delta t R_s}{R_s \Delta x C + \Delta t} \right) \left(\frac{\Delta x C}{2\Delta t} V_1^n + \frac{1}{2} I_0^n - I_1^{n+1/2} \right) + \frac{\Delta t}{R_s \Delta x C + \Delta t} V_s^{n+1} \quad (4.12b)$$

Nótese que cuando $R_s = 0$, (4.12b) se reduce a:

$$V_1^{n+1} = V_s[(n+1)\Delta t] \quad (4.12c)$$

En la frontera en $x = l$ se tiene conectada una resistencia de carga R_L entonces la corriente en esta frontera está dada por:

$$I_l^{n+1} = \frac{V_l^{n+1}}{R_L} \quad (4.13)$$

Empleando un procedimiento similar al del extremo emisor, la ecuación (4.7b) se puede expresar en $x = l$ como:

$$\frac{1}{\Delta t/2} \left[\frac{I_l^{n+1} + I_l^n}{2} - I_N^{n+1/2} \right] + \frac{1}{\Delta t} C [V_l^{n+1} - V_l^n] = 0 \quad (4.14)$$

Sustituyendo en (4.14) la condición de frontera dada en (4.13) y resolviendo para el voltaje en el punto $(l, n+1)$ se tiene:

$$V_l^{n+1} = \frac{C\Delta x R_L - \Delta t}{C\Delta x R_L + \Delta t} V_l^n + \frac{2\Delta t R_L}{C\Delta x R_L + \Delta t} I_N^{n+1/2} \quad (4.15)$$

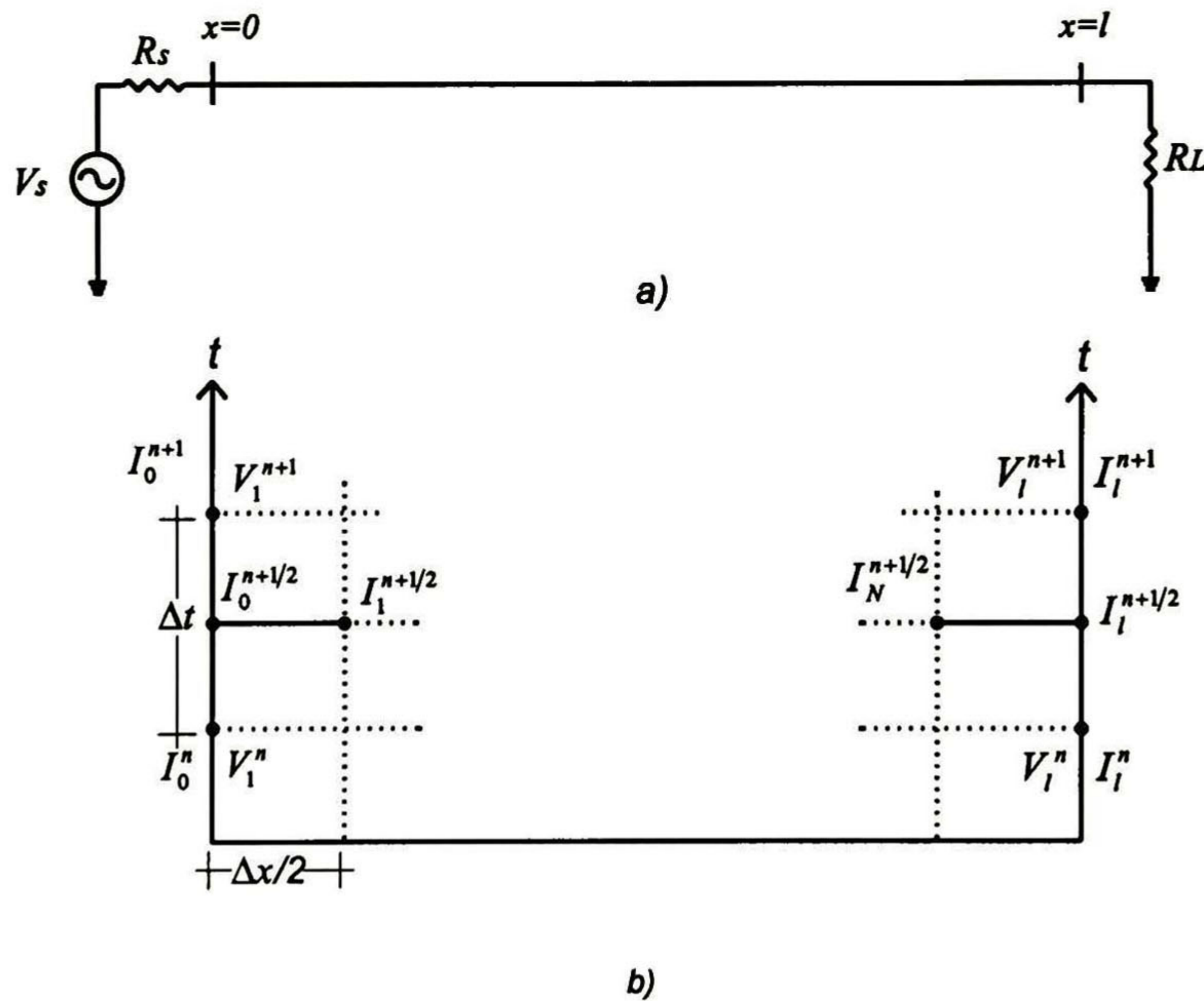


Fig. 4.3 Método de Yee en los extremos. a) Línea uniforme y b) Condiciones en los extremos.

Con las ecuaciones (4.9), (4.12) y (4.15) se tiene la solución de los voltajes y corrientes en cualquier punto de la línea. Como ejemplo de aplicación se tomó el mismo problema simulado en la sección 3.4. En la figura 4.5 se muestran los voltajes en los mismos puntos a lo largo de la línea mostrados en la figura 3.4.

Los resultados que se presentan en la figura 4.5 muestran que el método de Yee aproxima de buena forma la propagación de transitorios electromagnéticos en líneas de transmisión uniformes con pérdidas. Además comparando con los resultados obtenidos con el método de las Características de la figura 3.4 se observa que el método de Yee proporciona resultados idénticos.

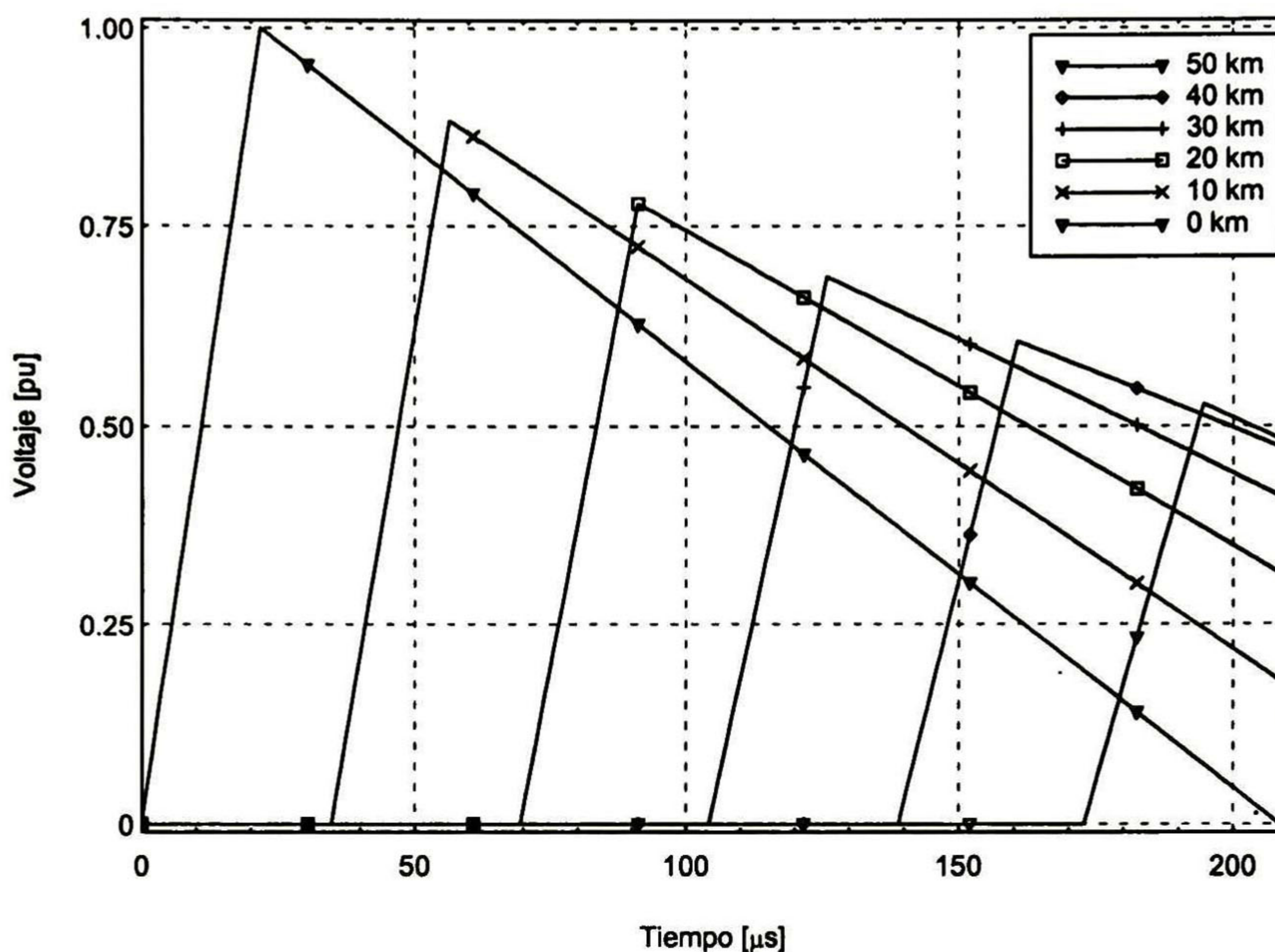


Fig. 4.5. Propagación de una doble rampa (Método de Yee).

4.3 OBSERVACIONES FINALES.

Se ha utilizado el método de Yee para el análisis de líneas de transmisión uniformes, tanto para la solución de los puntos interiores así como una formulación para solución de condiciones de frontera. Esta formulación en diferencias finitas tiene una precisión de segundo orden, por utilizar diferencias centrales en la aproximación de las derivadas de las ecuaciones de la línea.

Se observó que el método de Yee proporciona buenos resultados en la simulación de transitorios electromagnéticos en líneas uniformes. Siendo prácticamente iguales a los proporcionados por el método de las características. Sin embargo, la solución de las fronteras es un poco más compleja que con el método de las características. Esto se debe a que el esquema de discretización no coloca el voltaje y la corriente en el mismo punto de la malla; en consecuencia, es necesario utilizar diferencias finitas de primer orden.

CAPÍTULO 5

LÍNEA DE TRANSMISIÓN NO UNIFORME.

Para el análisis de Transitorios Electromagnéticos en líneas de transmisión es común suponer que estas son uniformes, si no en toda su extensión, cuando menos por secciones. En la práctica generalmente se presentan variaciones graduales a lo largo de toda su extensión. Un ejemplo es el de líneas aéreas para las que es común suponer que los conductores están a una altura constante sobre el nivel del piso. En realidad los conductores forman curvas catenarias donde las alturas máximas se presentan en los puntos donde se localizan las torres de transmisión, mientras que las alturas mínimas ocurren en los puntos centrales entre pares de torres adyacentes.

Las técnicas del dominio del tiempo que se conocen para el análisis de líneas no uniformes en general se basan en aplicaciones de los métodos de Bergeron (EMTP) [19] y de diferencias finitas [20]. Un problema común en todos estos es el de oscilaciones numéricas causadas por la discretización de la línea [2]. La manera de reducir las oscilaciones consiste en utilizar pasos de discretización muy pequeños provocando que se incrementen considerablemente los tiempos de cómputo.

En este capítulo se desarrolla el análisis de línea de transmisión no uniforme por el método de las Características y por el algoritmo de Yee. Finalmente se presenta una comparación con el EMTP que utiliza el método de Bergeron.

5.1. - PARÁMETROS DE LÍNEAS NO UNIFORMES.

Los parámetros eléctricos de una línea de transmisión aérea varían a lo largo de toda su longitud, en forma general los parámetros están dados en función de la coordenada de desplazamiento en el espacio como:

$$R = R(x), \quad (5.1a)$$

$$L = L(x) \quad (5.1b)$$

y

$$C = C(x) \quad (5.1c)$$

Para el caso de líneas de transmisión los parámetros dados por (5.1) se pueden expresar como:

$$L(x) = L(x)_C + L(x)_T + L(x)_G \quad (5.2)$$

$$R(x) = R(x)_C + R(x)_T \quad (5.3)$$

$$C(x) = C(x)_G \quad (5.4)$$

Donde los subíndices "C", "T" y "G" indican las aportaciones del conductor, del retorno por tierra y de la parte geométrica, respectivamente. Para el caso de líneas aéreas los diversos componentes de las ecuaciones (5.2) a (5.4) están dados [28], por:

$$L_G = \frac{\mu_o}{2\pi} \ln\left(\frac{2h}{r}\right), \quad (5.5a)$$

$$L_T = \text{Re}\left\{\frac{\mu_o}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{P_T}{h}\right)\right\}, \quad (5.5b)$$

$$L_C = \frac{1}{\omega} \text{Im}\left\{\frac{\rho_C}{2\pi p_C r}\right\}, \quad (5.5c)$$

$$R_T = \text{Re}\left\{j\omega \frac{\mu_o}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{P_T}{h}\right)\right\}, \quad (5.6a)$$

$$R_C = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\rho_C}{2\pi p_C r} \right\}, \quad (5.6b)$$

y

$$C_G = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{2h}{r}\right)} \quad (5.7)$$

donde h es la altura de la línea de transmisión, r es el radio del conductor, μ_0 y ϵ_0 son la permeabilidad y permitividad del aire respectivamente, ω es la frecuencia, ρ_C es la resistividad del material de los conductores, p_C es la profundidad de penetración por efecto skin en los conductores y p_T es la profundidad de penetración en el terreno. Donde la profundidad compleja de penetración esta dada por

$$p = \frac{1}{\sqrt{j\omega\mu\sigma}}.$$

En el caso de líneas de transmisión aéreas la no uniformidad puede ser el resultado de variaciones en la altura h , el radio r o las constantes eléctricas de los materiales, permitividad, permeabilidad o conductividad. En esta sección sólo se analiza el caso de la no uniformidad debida a la variación de la altura. Como ejemplo de este tipo de problema considere la variación en la altura de una línea debido a la catenaria, como se muestra en la figura 5.1. La altura del conductor como función de la distancia x está dada por:

$$h(x) = h_{min} + \left(x - \frac{x_{max}}{2} \right)^2 \frac{h_{max} - h_{min}}{\left(\frac{x_{max}}{2} \right)^2} \quad (5.8)$$

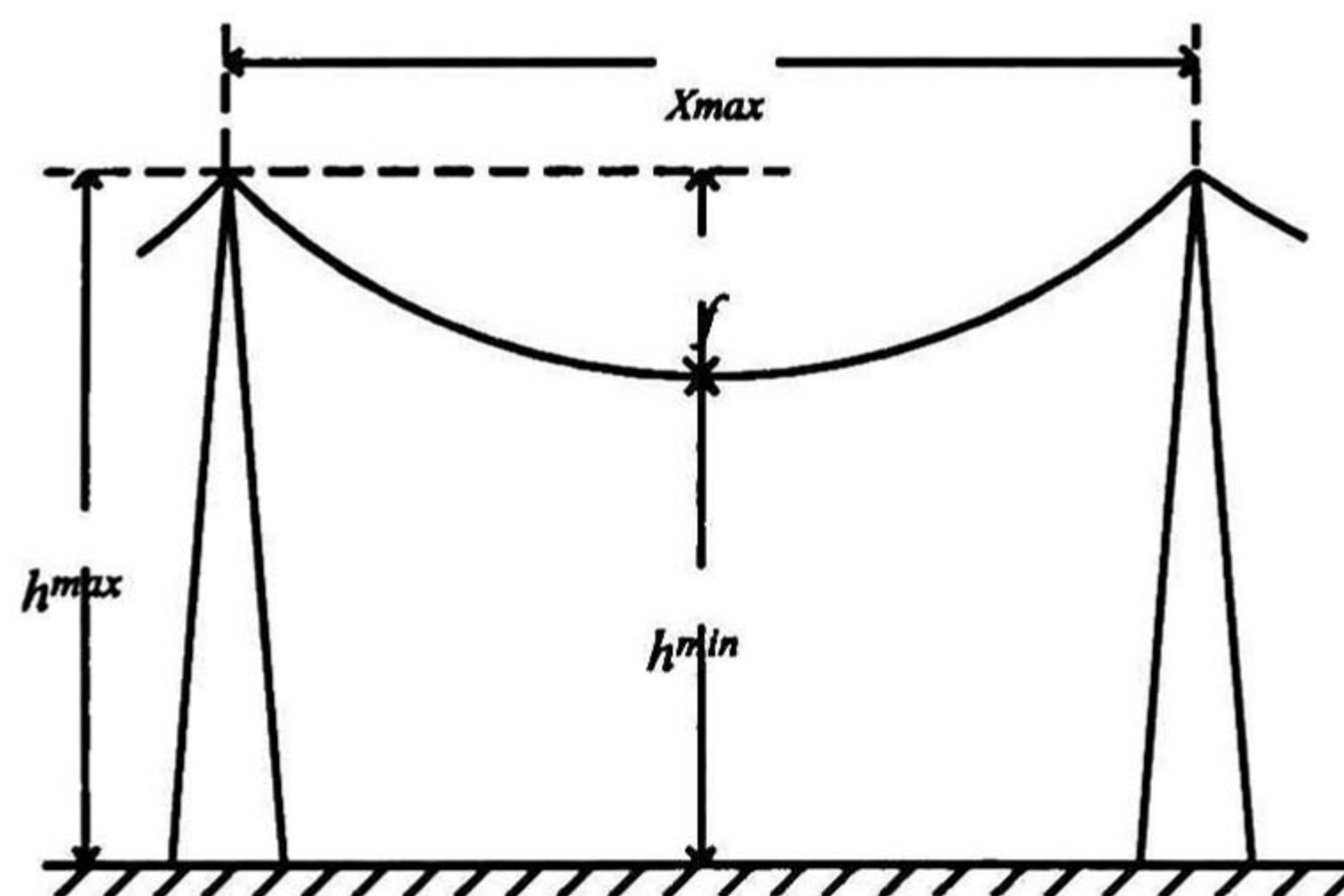


Fig. 5.1 Curva catenaria entre dos torres adyacentes.

La diferencia entre la altura máxima y mínima f , existente en una catenaria de una línea de transmisión por lo general es mayor que la altura mínima ocasionando que la variación en la altura sea de gran importancia en la determinación de las formas de onda en el caso de transitorios ultrarrápidos.

5.2. - MODELO DE LÍNEA NO UNIFORME POR EL MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS.

Como ya se mencionó en la sección anterior, el caso específico de análisis en este trabajo es la dependencia de los parámetros en la línea de transmisión con respecto a la distancia. En este caso las ecuaciones que describen las características ya no representan líneas rectas sino que ahora describen líneas curvas en el plano $x-t$, como se muestra en la figura 5.2. Cuando las características tienen este comportamiento, se forman mallas irregulares para los puntos de solución. Una forma de solucionar el problema es implementar un procedimiento que, con base en las velocidades en cada punto, genere una discretización en la distancia con incrementos Δx variable. Un segundo procedimiento es definir una malla uniforme con Δx constante y forzar que los puntos de solución coincidan con esta malla por medio de interpolaciones. El segundo procedimiento es el que se ha elegido en este trabajo debido a la facilidad de programación, aunque es necesario inicialmente determinar las constantes de interpolación en cada segmento Δx .

Considérese una malla regular como se muestra en la figura 5.2. Se asume que se conoce el estado de la línea para un tiempo $t = T$. Se conocen el voltaje y la corriente en los puntos de cruce de la malla regular y con estos se busca determinar la solución en el punto $(k, n+1)$; sin embargo, las características cruzan por puntos que no coinciden con los puntos de la malla regular. Para resolver este problema se emplea un proceso iterativo solamente en $t = T_0$ para encontrar los puntos de partida de las características y posteriormente, para $t > T_0$ se emplean interpolaciones.

Tomando las ecuaciones diferenciales ordinarias (3.14a) y (3.14b) junto con las ecuaciones de sus características correspondientes, (3.13a) y (3.13b), se pueden obtener los voltajes y las corrientes en $t = T + \Delta t$ en el punto $(k, n+1)$. De acuerdo con la discretización de la figura 5.2 se obtienen las ecuaciones:

$$V_k^{n+1} + \left(Z_{w1} + \frac{R_1 \Delta x_1}{2} \right) I_k^{n+1} = V_{k-1}^n + \left(Z_{w1} - \frac{R_1 \Delta x_1}{2} \right) I_{k-1}^n \quad (5.9a)$$

$$V_k^{n+1} - \left(Z_{w2} + \frac{R_2 \Delta x_2}{2} \right) I_k^{n+1} = V_{k+1}^n - \left(Z_{w2} - \frac{R_2 \Delta x_2}{2} \right) I_{k+1}^n \quad (5.9b)$$

donde:

$$Z_{w1} = \frac{Z_{k-1} + Z_k}{2} \quad (5.10a)$$

$$R_1 = \frac{R_{k-1} + R_k}{2} \quad (5.10b)$$

$$Z_{w2} = \frac{Z_{k+1} + Z_k}{2} \quad (5.10c)$$

$$R_2 = \frac{R_{k+1} + R_k}{2} \quad (5.10d)$$

Debido a que los parámetros sólo tienen dependencia de la distancia y no del tiempo, las características se desplazan de forma paralela en t ; por lo tanto, los parámetros y las intersecciones de las características sólo se calculan para $t = T$; es decir los coeficientes de interpolación solo tienen que ser calculados una sola vez.

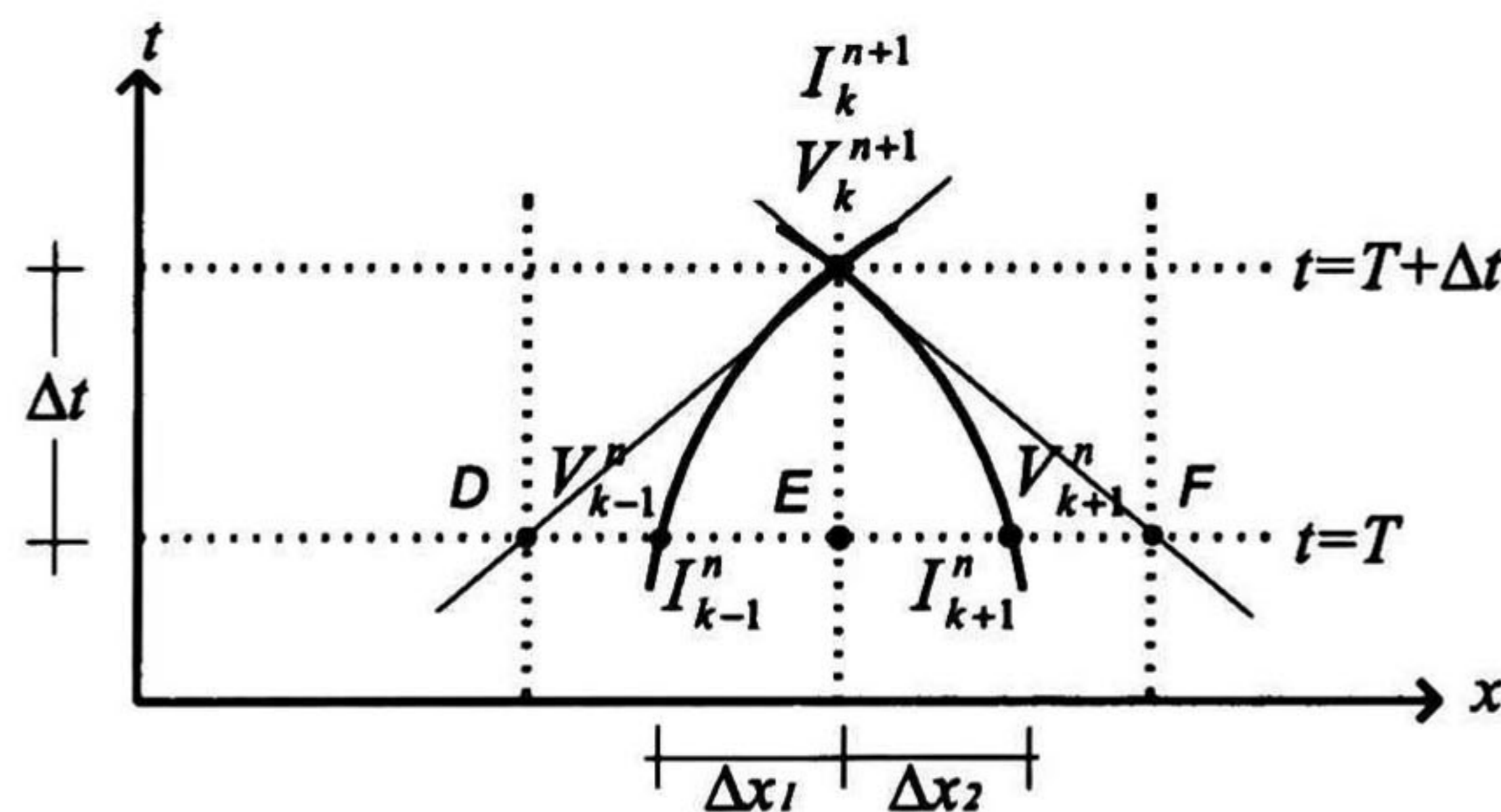


Fig. 5.2 Puntos de cruce de las características.

Para conocer los coeficientes de interpolación que se utilizarán para el cálculo de los voltajes y las corrientes en los puntos de cruce de las características, se aplica el siguiente procedimiento [29] (se utiliza el subíndice de distancia por sólo tener dependencia de esta):

1. Con la velocidad v_k correspondiente a la posición (k) , se calcula la distancia Δx_1 que es la distancia del punto (k) al punto $(k-1)$ donde cruza la curva característica positiva en la recta $t = T$, y

Δx_2 que es la distancia de $(k+1)$ al punto (k) donde cruza la curva característica negativa en la recta $t = T$. Sus valores son calculados de la siguiente forma:

$$\Delta x_1 = v_k \Delta t \quad (5.11a)$$

$$\Delta x_2 = \Delta x_1 \quad (5.11b)$$

2. Con la posición de los puntos de cruce se calculan las velocidades de propagación en los puntos $(k-1)$ y $(k+1)$:

$$v_{k-1} = \frac{1}{\sqrt{L_{k-1} C_{k-1}}} \quad (5.12a)$$

$$v_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{L_{k+1} C_{k+1}}} \quad (5.12b)$$

3. Se realiza una estimación en las velocidades, calculando un promedio entre la velocidad en los puntos calculados y el punto (k) :

$$v_1 = \frac{v_k + v_{k-1}}{2} \quad (5.13a)$$

$$v_2 = \frac{v_k + v_{k+1}}{2} \quad (5.13b)$$

4. Se calcula nuevamente las distancias Δx_1 y Δx_2 para las velocidades estimadas en el punto anterior:

$$\Delta x_1 = v_1 \Delta t \quad (5.14a)$$

$$\Delta x_2 = v_2 \Delta t \quad (5.14b)$$

5. Se repiten los puntos 2, 3 y 4 hasta que la diferencia entre los valores consecutivos de las distancias Δx_1 y Δx_2 sean menores a una tolerancia previamente establecida.

La extensión de la solución a los puntos en las fronteras se realiza de forma similar al procedimiento descrito en la sección (3.3), con la diferencia que solo se utiliza la interpolación para la característica que incide en cada frontera.

5.3. - EJEMPLO DE ESTUDIO 2.

Como ejemplo, se aplica el método de las características para líneas no uniformes a una sección de línea de transmisión como se muestra en la figura 5.1. El tramo tiene una longitud $x_{max} = 325$ m, altura en las torres $h_{max} = 30$ m y altura en el centro de la catenaria $h_{min} = 15$ m, el conductor tiene un radio de $r = 2.54$ cm y el plano de tierra tiene una resistividad de $\rho_{ter} = 100 \Omega m$. Los parámetros eléctricos se calculan a una frecuencia $f = 1/4T$ donde T es el tiempo de viaje de la onda de la línea. Se ha utilizado un $\Delta x = 14.8$ m y un $\Delta t = 0.05 \mu s$ En la figura 5.3 se muestran las formas de onda a 0, 74, 162, 251 y 325 metros de distancia del extremo transmisor de la línea. De la misma manera que en el ejemplo de estudio 1 se eligió una doble-rampa como excitación de la línea. En el extremo receptor se conecta una carga con valor igual a la impedancia característica de la línea.

La sección de línea uniforme es una aproximación del tramo de línea no uniforme del ejemplo de estudio 2; esta aproximación es la que utiliza el EMTP para modelar catenarias en líneas no uniformes [11], considerando una altura constante:

$$h = h_{min} + \frac{1}{3} f$$

Comparando las curvas de la figura 5.3 con las correspondientes a una línea uniforme (figura 5.4) se puede observar las ondulaciones atribuidas a la variación de los parámetros eléctricos con respecto a la distancia. Como se puede ver, estas no uniformidades cobran una gran importancia en la simulación de propagación de transitorios electromagnéticos, es por eso de la importancia de mejorar los modelos para líneas con problemas de no uniformidades.

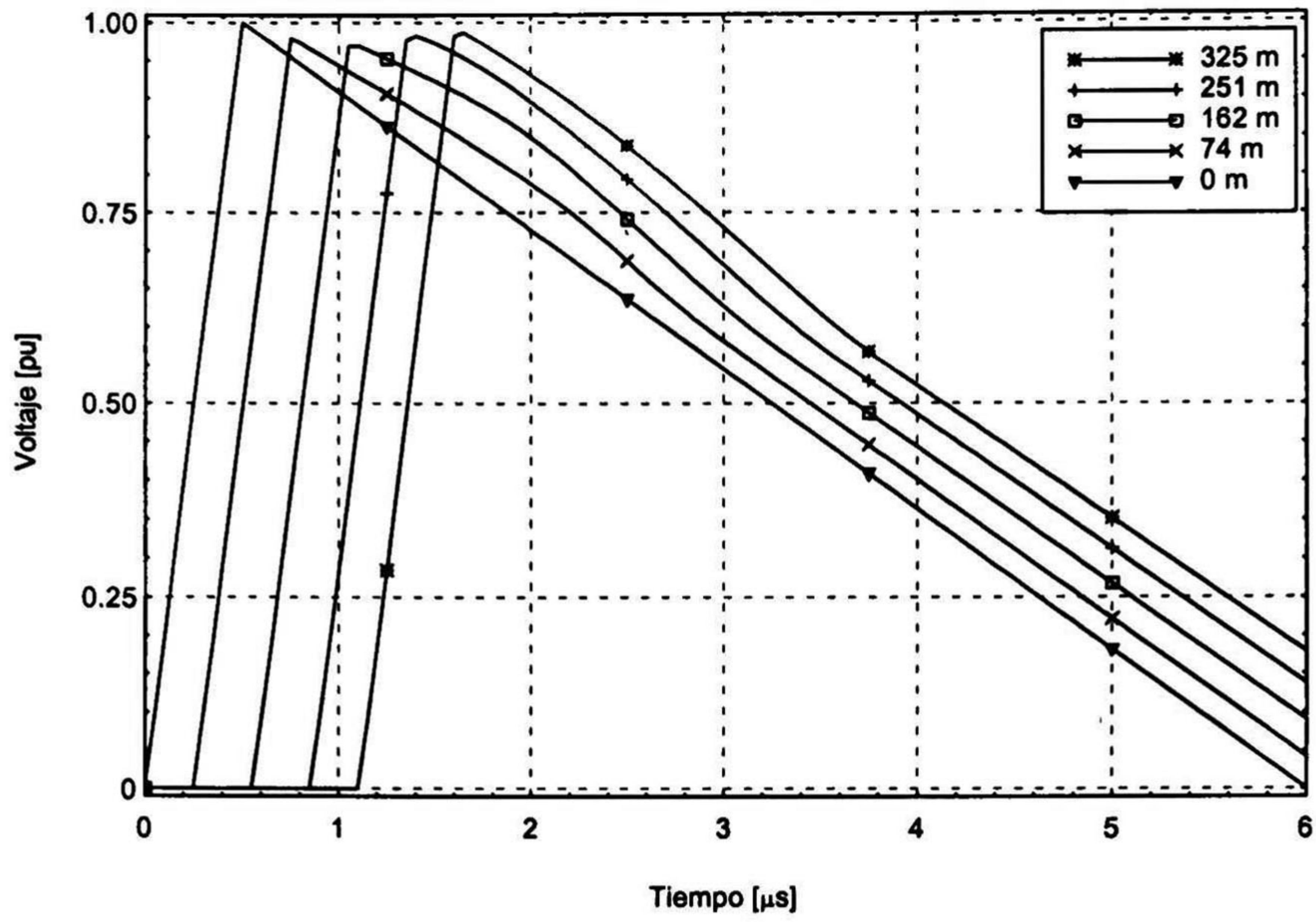


Fig. 5.3 Propagación de una doble rampa en una línea no uniforme.

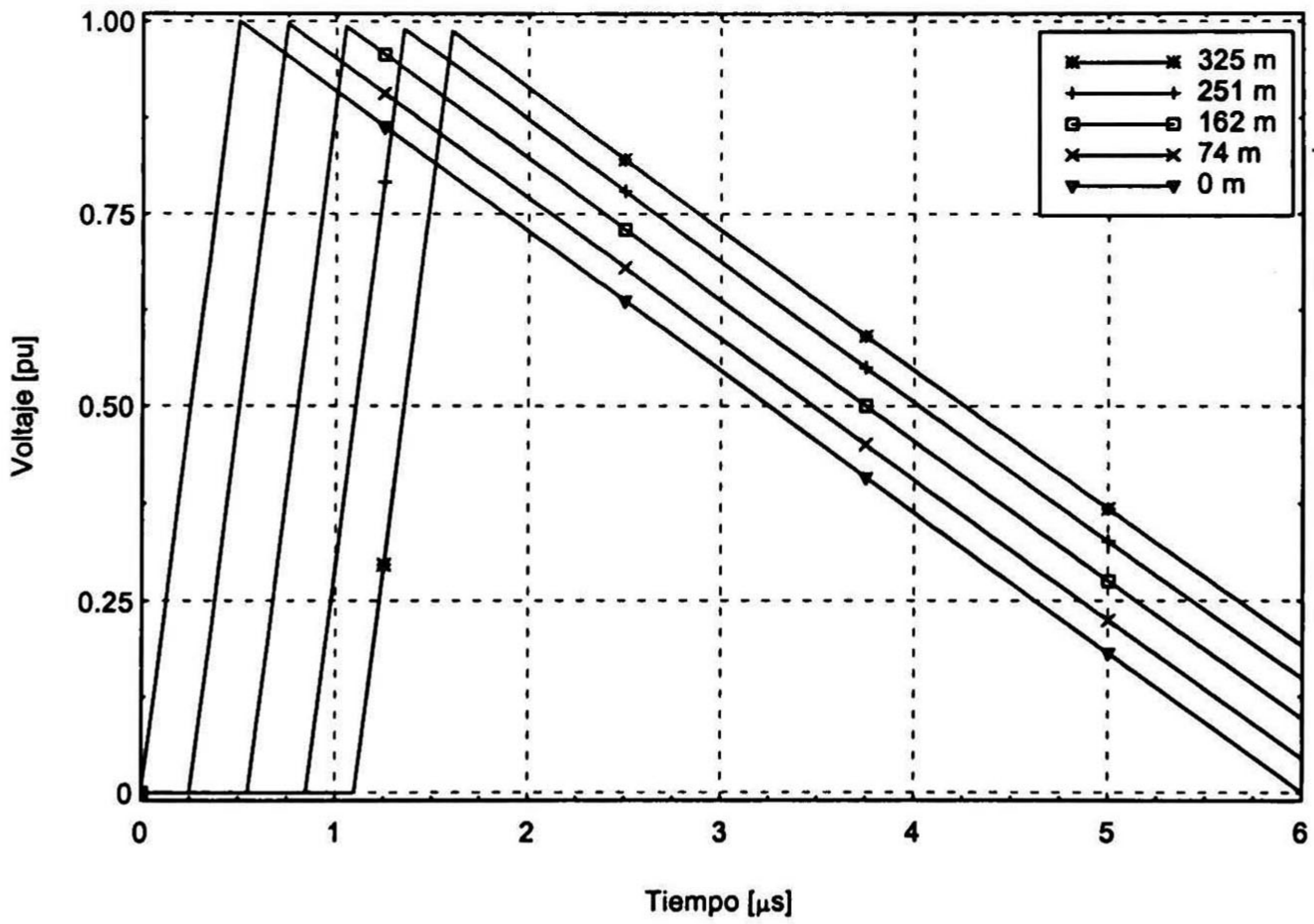


Fig. 5.4 Propagación en una sección de línea uniforme.

5.4. - MODELO DE LÍNEA NO UNIFORME POR EL ALGORITMO DE YEE.

El modelo de diferencias finitas en el dominio del tiempo (FD-TD) para el análisis de líneas de transmisión desarrollado para líneas uniformes, puede ser extendido fácilmente para el caso de líneas que presentan no uniformidades, como el mostrado en la figura 5.1. Para agregar éstas consideraciones al método de Yee, se realiza el siguiente procedimiento:

1. Se calculan los parámetros eléctricos $L(x)$, $C(x)$ y $R(x)$, en los puntos de discretización del espacio, y se determina la velocidad de acuerdo con:

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{L(x)C(x)}} \quad (5.15)$$

2. Se calcula el incremento Δx tomando en cuenta la condición de Courant para garantizar la estabilidad en el sistema [17], dada por:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \leq \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (5.16)$$

como v se encuentra variando en el espacio, se tomó la velocidad máxima en la condición de Courant [18]. De esta forma, para las velocidades menores se sigue cumpliendo esta condición y la malla de discretización de la figura 4.2 sigue siendo válida.

3. Se emplea el modelo de FD-TD para una línea de transmisión no uniforme dado por las ecuaciones (4.9), solo que ahora los coeficientes son calculados en cada uno de los puntos de discretización en el espacio.

$$V_k^{n+1} = V_k^n - \frac{\Delta t}{C_k \Delta x} (I_{k+1/2}^{n+1/2} - I_{k-1/2}^{n+1/2}) \quad (5.17a)$$

$$I_{k+1/2}^{n+3/2} = \frac{2L_{(k+1/2)} - \Delta t R_{(k+1/2)}}{2L_{(k+1/2)} + \Delta t R_{(k+1/2)}} I_{k+1/2}^{n+1/2} - \frac{2\Delta t}{\Delta x (2L_{(k+1/2)} + \Delta t R_{(k+1/2)})} (V_{k+1}^{n+1} - V_k^{n+1}) \quad (5.17b)$$

La extensión de la solución a los puntos en las fronteras se realiza de forma similar al procedimiento previamente descrito utilizando las ecuaciones (4.13).

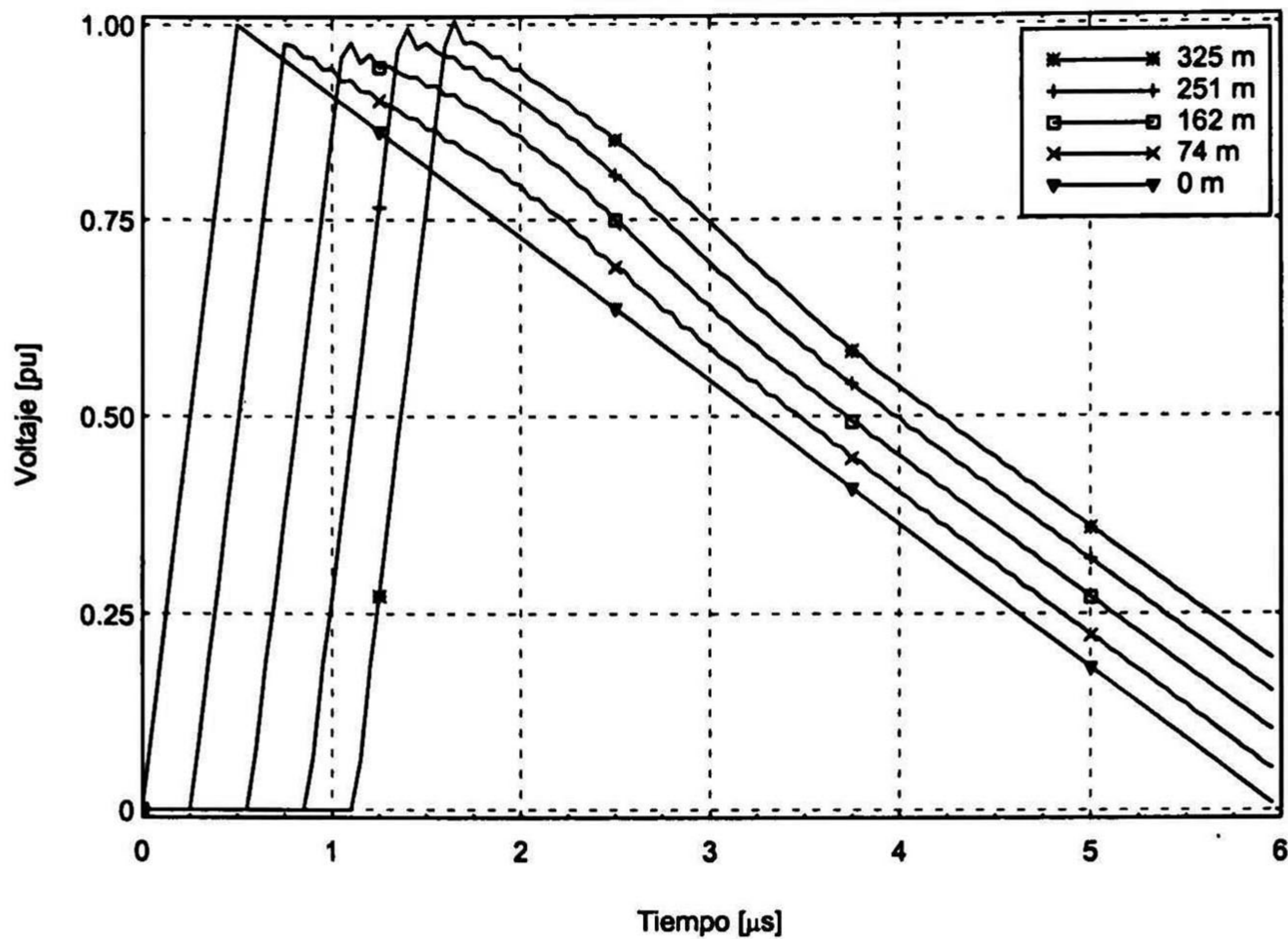


Fig. 5.5 Propagación de una doble rampa en una línea no uniforme. Método de Yee.

En la figura 5.5 se muestran los resultados que se obtuvieron con el método de Yee para el ejemplo de estudio 2. Se puede observar que con este método se presentan oscilaciones numéricas en el pico de la forma de onda. Se hicieron simulaciones aumentando la cantidad de pasos de integración, observándose que la amplitud de las oscilaciones disminuye pero el tiempo de cómputo aumenta de manera considerable.

5.5. - LÍNEA NO UNIFORME EN EL EMTP.

Para efectos de comparación se realizaron simulaciones en el EMTP, donde, la solución de transitorios de líneas con parámetros distribuidos y líneas no uniformes puede llegar a ser complicado. Aquí este tipo de líneas se modelan con aceptable precisión con una o más secciones de líneas ideales, así como con resistencias concentradas entre sección y sección. La forma más simple de realizar la aproximación es incluirle a la línea ideal dos resistencias de valor $R/2$ concentradas en sus extremos [11]. Las ecuaciones son fácilmente derivadas y se obtiene una forma idéntica a las ecuaciones (2.34a) y (2.34b):

$$V(0, t) = Z_{\text{mod}} I(0, t) + V_{\text{histk}} \quad (5.18a)$$

$$V_{\text{histk}} = V(l, t - T) - \left(Z_c - \frac{R}{2} \right) I(l, t - T) \quad (5.18b)$$

donde:

$$Z_{\text{mod}} = Z_c + \frac{R}{2} \quad (5.18c)$$

En realidad en el EMTP la línea se divide en dos secciones y las pérdidas resistivas en tres partes, en los extremos se colocan resistencias concentradas de $R/4$ y en medio de la línea se coloca $R/2$. Esto se muestra en la figura 5.6. La ecuación (5.18a) queda de la misma forma, con excepción de la impedancia modificada:

$$Z_{\text{mod}} = Z_c + \frac{R}{4} \quad (5.19a)$$

En este ultimo modelo los voltajes de historia quedan en función de las condiciones en los extremos en el tiempo $(t - T)$:

$$V_{\text{histk}} = \frac{Z_c}{Z_{\text{mod}}} \left[V(l, t - T) - \left(Z_c + \frac{R}{4} \right) I(l, t - T) \right] + \frac{R/4}{Z_{\text{mod}}} \left[V(0, t - T) - \left(Z_c - \frac{R}{4} \right) I(0, t - T) \right] \quad (5.19b)$$

Si se quiere concentrar las pérdidas en mas de tres lugares se pueden construir modelos de tres resistencias en cascada, dividiendo la línea en varios segmentos en los datos de entrada. Los resultados no presentan cambios significativos aumentando la cantidad de secciones de líneas a manera que se cumpla la relación $R \ll Z_c$ [11].

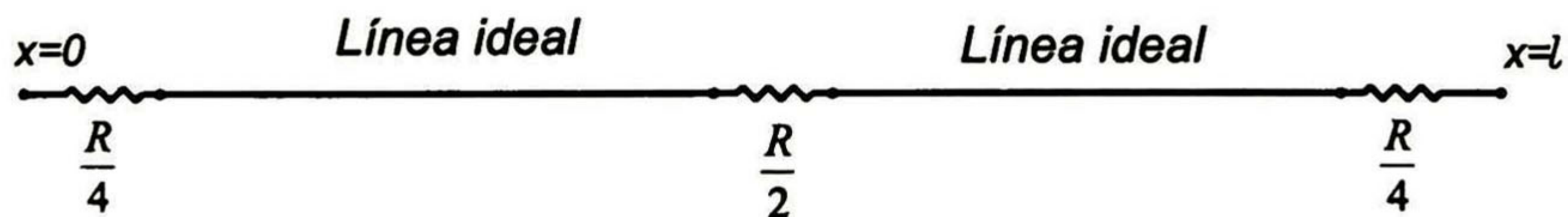


Fig. 5.6 Representación de línea con parámetros distribuidos.

Para la simulación de la línea del ejemplo 2 fue necesario seccionar la línea y considerar a cada tramo como una línea uniforme. Es importante notar la dificultad práctica que representa este tipo de estudios. Si bien la fórmula de la catenaria es sencilla de incluir en los simuladores basados en diferencias finitas, en el caso del EMPT es necesario decidir primero el número de secciones de línea a considerar y posteriormente calcular los parámetros eléctricos para cada sección de línea. Esto implica emplear mucho tiempo por parte del usuario para determinar el número adecuado de secciones. Para probar los resultados que se obtienen empleando el EMTP, es necesario realizar otra simulación con un número mayor de secciones, si las forma de onda no cambian bajo cierto criterio de error, entonces se tendrá un resultado correcto. En caso contrario, es necesario realizar una nueva simulación con mayor número de secciones. El criterio para elegir el número de secciones a tomar, prácticamente se tiene que decidir a prueba y error o dependiendo en su totalidad de la experiencia del usuario. En la figura 5.7 se muestran los resultados que se obtuvieron con el EMTP para el caso de estudio 2, dividiendo la línea en el mismo número de secciones en que se divide la línea para el método de las características.

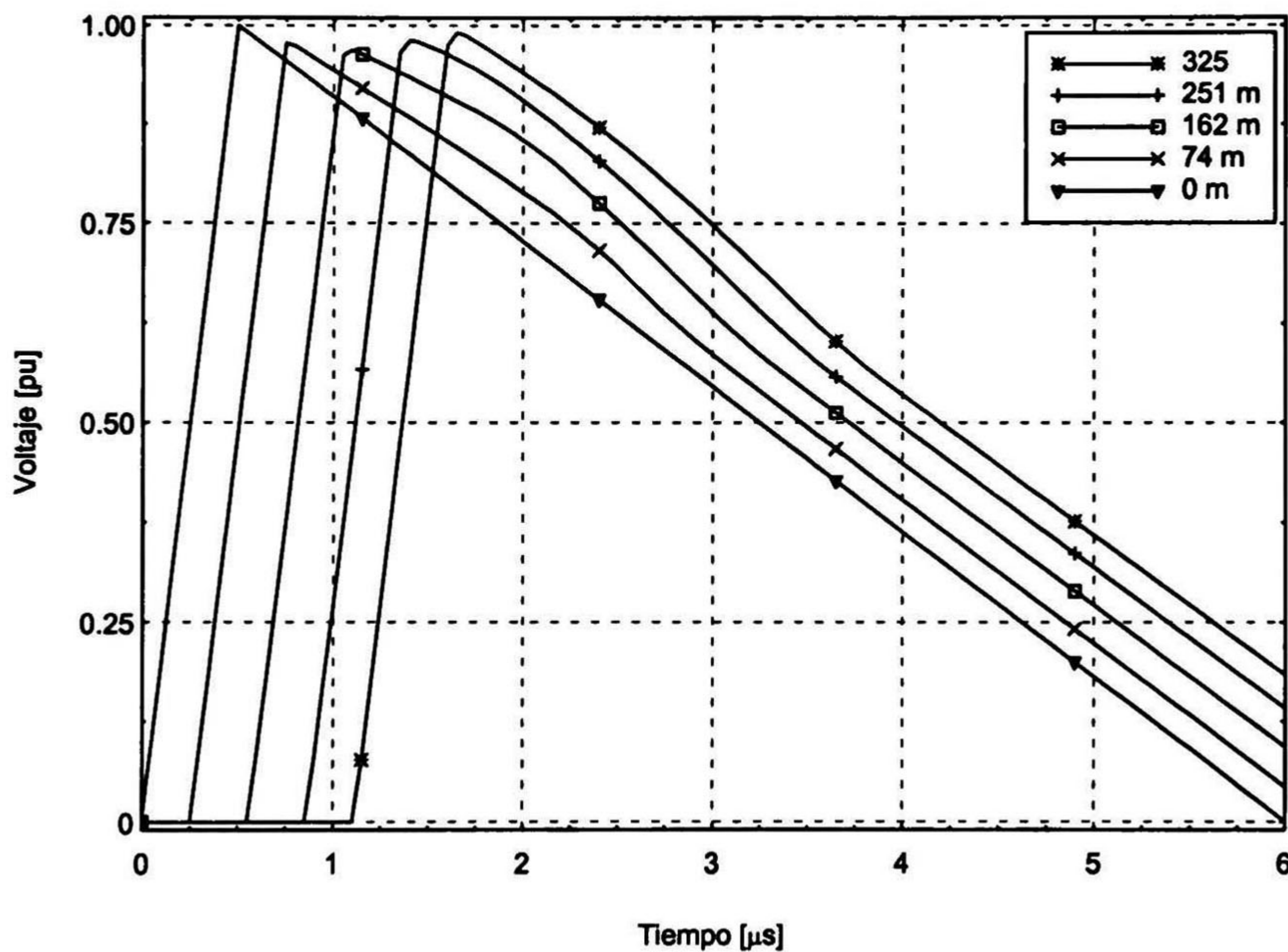


Fig. 5.7 Propagación de una doble rampa en una línea no uniforme. Con EMTP.

Los resultados al simular en el EMTP reproducen de manera satisfactoria la no uniformidad de la línea debido a la variación de la altura en ésta. Como se puede ver se tienen resultados muy parecidos con los obtenidos con el método de las características, teniendo una gran diferencia con el algoritmo de Yee. Se hicieron simulaciones con un número menor de secciones de línea observando que no reproduce de manera eficaz la no uniformidad, presentándose como desventaja la elección del número de secciones por no tener un criterio para hacer la selección. En el método de las

características se tiene el criterio de Courant para la elección del número de secciones de línea a tomar, mientras que en el EMTP se tiene que depender en su totalidad de la experiencia del usuario.

5.6. - OBSERVACIONES FINALES.

En este capítulo se ha presentado el modelo de línea no uniforme por el método de las Características y el algoritmo de Yee, además se presenta una comparación con el EMTP.

Se observó que el algoritmo de Yee presenta oscilaciones en el pico de la forma de onda de voltaje aunque estas oscilaciones se pueden disminuir reduciendo el paso de integración lo que nos lleva a aumentar de manera considerable los tiempos de cómputo. En cambio el método de las Características coincide prácticamente con los resultados obtenidos con el EMTP. La desventaja que se presenta en el EMTP para simular líneas de transmisión no uniformes es que se depende de la experiencia del usuario para elegir de manera satisfactoria el número de secciones en que se dividirá la línea.

CAPÍTULO 6

MODELADO CIRCUITAL DE CONDICIONES EN FRONTERAS.

Hasta ahora sólo se ha considerado el análisis de líneas de transmisión con una importante restricción; en las fronteras de las líneas solo se conectan elementos sencillos como fuentes de excitación y cargas resistivas. Sin embargo, las redes eléctricas reales consisten de interconexiones de diferentes tipos de líneas y elementos, como transformadores, capacitores y reactores. Para analizar el comportamiento que resulta de la interconexión de los diversos elementos que forman una red eléctrica, es necesario contar con modelos compatibles para todos ellos. El propósito de esta sección es el desarrollo de un modelo circuital en forma de equivalente de Thevenin o Norton para el método de las características, de tal manera que este método pueda aplicarse al análisis de transitorios electromagnéticos en redes eléctricas con cualquier configuración topológica y cualquier número y tipo de elementos.

6.1. - DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES DEL MODELO DE CIRCUITO.

Considere nuevamente las ecuaciones de la línea de transmisión en el dominio del tiempo (3.6):

$$\frac{\partial v}{\partial x} + L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri = 0 \quad (6.1a)$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} + C \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (6.1b)$$

Como se presentó en el capítulo 3, empleando el método de las características se puede mostrar que las ecuaciones (6.1) son equivalentes a dos EDOs, válidas cada una de ellas sobre su respectiva característica:

$$\frac{dv}{dx} + Z_w \frac{di}{dx} + Ri = 0 \quad (6.2a)$$

$$\frac{dv}{dx} - Z_w \frac{di}{dx} + Ri = 0 \quad (6.2b)$$

donde Z_w es la impedancia característica de la línea de transmisión dada por $Z_w = \sqrt{L/C}$. Las ecuaciones (6.2a) y (6.2b) se satisfacen a lo largo de la curva característica que incide en el nodo de recepción y en el nodo de envío, respectivamente, [30]. En cada uno de los extremos de la línea se tiene solamente una curva característica, por lo que para encontrar la solución para el voltaje y la corriente en estos puntos es necesario tomar en cuenta las condiciones de frontera, las cuales deben proporcionar una ecuación más para cada extremo de la línea. En una red eléctrica las condiciones de frontera para las líneas de transmisión dependen de los elementos conectados a ellas, los cuales pueden ser de diversos tipos y por lo tanto poseen diferentes características. Esto hace necesario el desarrollo de un modelo para los extremos de las líneas que permita realizar la conexión de elementos arbitrarios.

Aproximando las diferenciales de (6.2) por diferencias finitas sobre las curvas características correspondientes, como se muestra en la figura 6.1b, se tiene:

$$V_2^n - V_1^{n+1} - Z_w (I_2^n - I_1^{n+1}) + \frac{R\Delta x}{2} (I_1^{n+1} + I_2^n) = 0 \quad (6.3a)$$

$$V_N^{n+1} - V_{N-1}^n + Z_w (I_N^{n+1} - I_{N-1}^n) + \frac{R\Delta x}{2} (I_N^{n+1} + I_{N-1}^n) = 0 \quad (6.3b)$$

agrupando términos de voltaje y de corriente se tiene:

$$V_1^{n+1} - I_1^{n+1} Z_1 = V_2^n - I_2^n Z_2 \quad (6.4a)$$

$$V_N^{n+1} + I_N^{n+1} Z_1 = V_{N-1}^n + I_{N-1}^n Z_2 \quad (6.4b)$$

donde Z_1 y Z_2 están dados por:

$$Z_1 = Z_w + \frac{R\Delta x}{2} \quad (6.5a)$$

$$Z_2 = Z_w - \frac{R\Delta x}{2} \quad (6.5b)$$

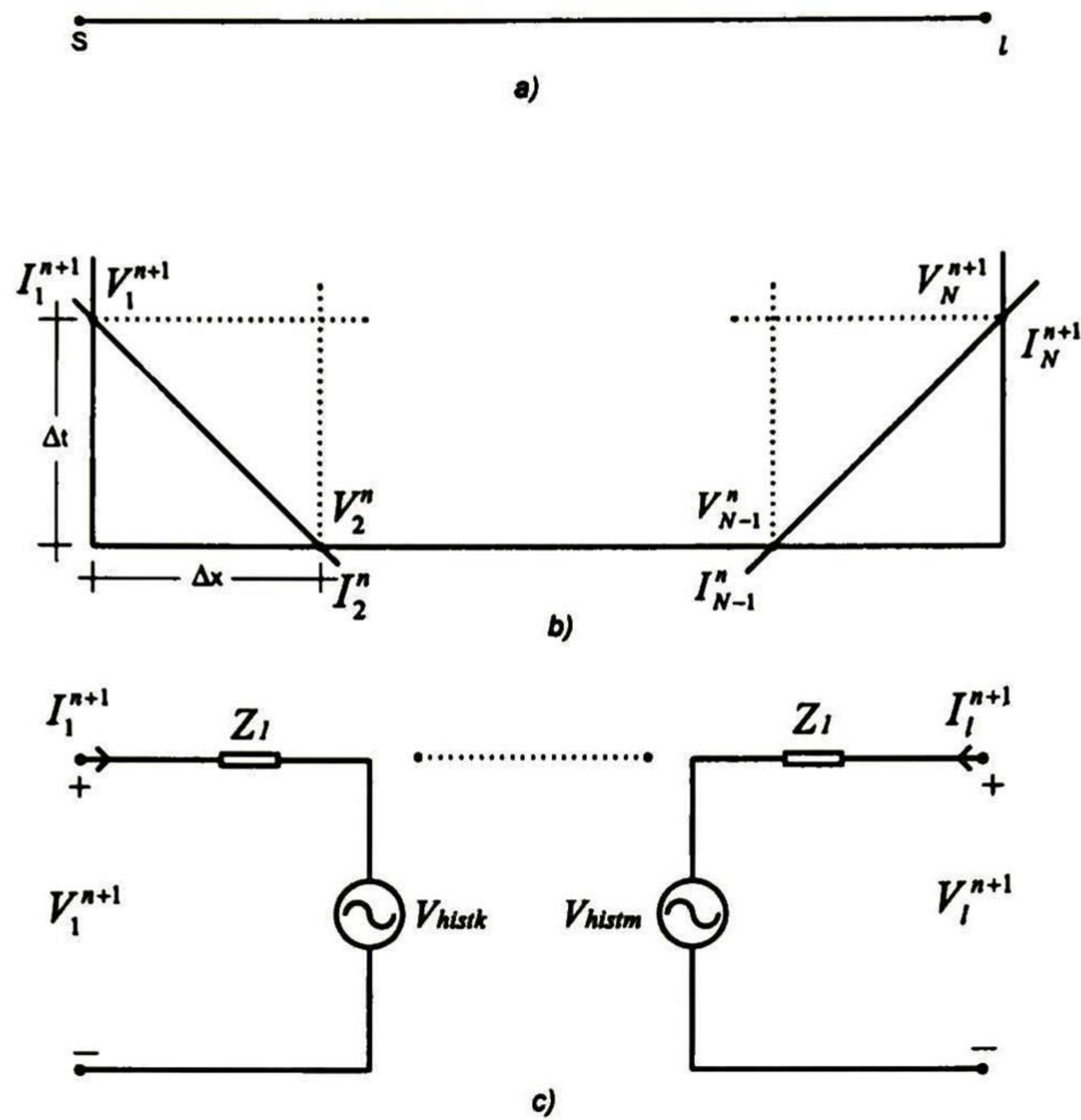


Fig. 6.1 a) Línea de transmisión, b) Características en las fronteras de la línea y c) Representación circuital de las características en las fronteras.

Los términos del lado derecho de la igualdad en las ecuaciones dadas por (6.4a) y (6.4b) representan las corrientes y voltajes conocidos en el paso de integración anterior, por lo que se pueden considerar como voltajes de historia con las siguientes definiciones:

$$V_{histk} = V_2^n - I_2^n Z_2 \quad (6.6a)$$

$$V_{histm} = V_{N-1}^n + I_{N-1}^n Z_2 \quad (6.6b)$$

Nótese que I_1^{n+1} entra al nodo emisor de la línea de transmisión, mientras que I_N^{n+1} sale del nodo receptor. Para tener la misma convención de polaridad de voltajes y corrientes en ambos nodos de frontera de la línea se hace la siguiente definición:

$$I_l^{n+1} = -I_N^{n+1} \quad (6.7a)$$

$$V_l^{n+1} = V_N^{n+1} \quad (6.7b)$$

De acuerdo con (6.6) y (6.7), (6.4) se puede escribir como:

$$V_1^{n+1} = Z_1 I_1^{n+1} + V_{histk} \quad (6.8a)$$

$$V_l^{n+1} = Z_1 I_l^{n+1} + V_{histm} \quad (6.8b)$$

La figura (6.1c) corresponde al circuito equivalente dado por las ecuaciones (6.8) y proporciona un modelo para las fronteras de la línea independientemente de los puntos internos correspondientes al mismo instante de tiempo. Topológicamente las terminales no están conectadas; las condiciones en los extremos dependen únicamente de las condiciones de frontera y de los valores de voltaje dados por los términos de historia (6.6). El modelo mostrado en la figura 6.1c) comprende los equivalentes de Thevenin hacia dentro de la línea de transmisión en cada extremo; esto es, representa el comportamiento de la línea de transmisión que afecta a la red de elementos conectados a la línea.

Reacomodando las ecuaciones (6.8) se obtiene:

$$I_1^{n+1} = Y_c V_1^{n+1} - I_{histk} \quad (6.9a)$$

$$I_l^{n+1} = Y_c V_l^{n+1} - I_{histm} \quad (6.9b)$$

donde:

$$Y_c = \frac{1}{Z_1} \quad (6.9c)$$

$$I_{histk} = \frac{V_{histk}}{Z_1} \quad (6.9d)$$

y

$$I_{histm} = \frac{V_{histm}}{Z_1} \quad (6.9e)$$

Las ecuaciones (6.9) representan el modelo de Norton de la línea de transmisión, el cual se muestra esquemáticamente en la figura 6.2.

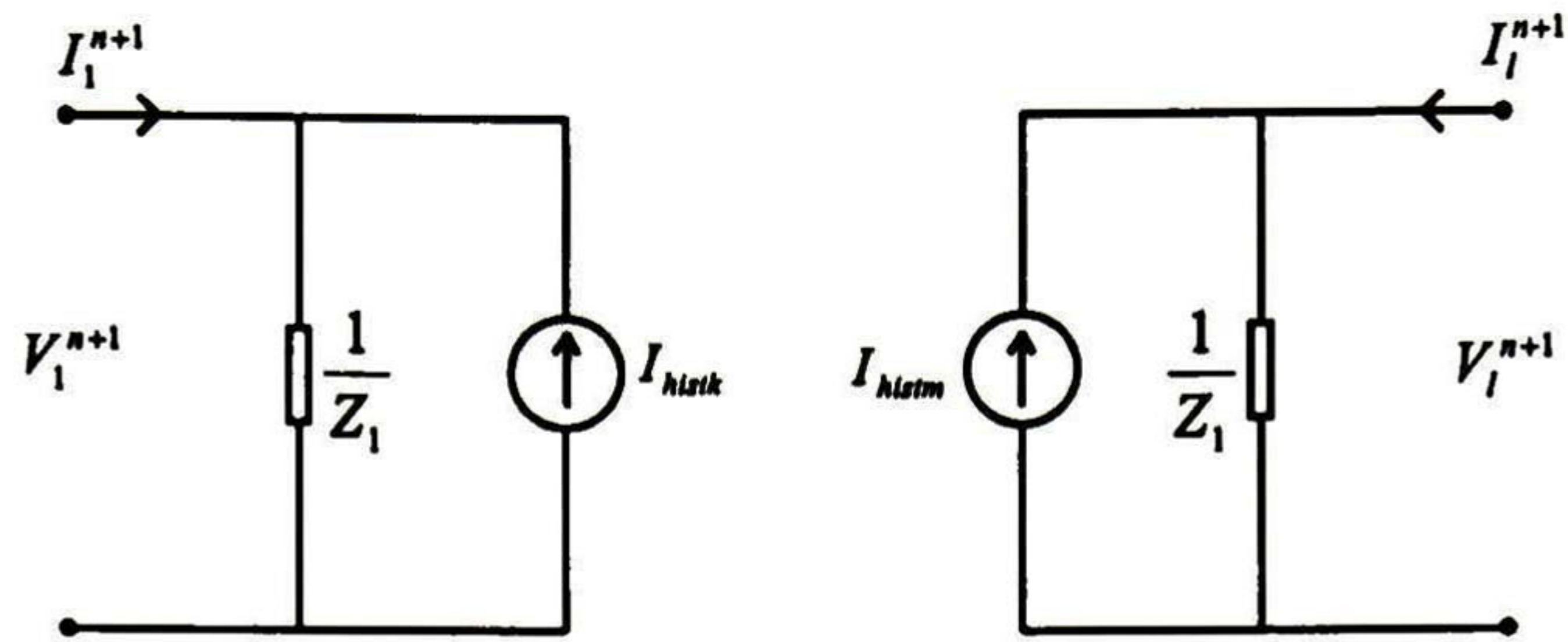


Fig. 6.2 Norton equivalente del circuito de la línea de la figura 1 c).

Los modelos dados por las ecuaciones (6.8) y (6.9) representan circuitos que pueden incluirse en cualquier programa de análisis de transitorios en redes eléctricas o electrónicas, como son los programas SPICE y EMTP.

Para realizar estudios de transitorios electromagnéticos en una red eléctrica y validar el modelo de línea de transmisión desarrollado es necesario contar con los modelos de otros elementos. Los elementos pasivos de una red eléctrica se modelan como una conexión de resistencias, inductancias y capacitancias. En cuanto al estudio de transitorios en el dominio del tiempo se refiere, el comportamiento de inductores y capacitores se caracteriza por medio de ecuaciones diferenciales. Tales ecuaciones diferenciales se pueden aproximar por modelos resistivos discretos activos, ya sean de Thevenin o de Norton, los cuales se obtienen aplicando cualquier método de integración numérica implícita. En este trabajo se empleó la regla trapezoidal de integración [19], (ver apéndice A), ya que es la fórmula de integración que emplea el EMTP.

Una vez que se tienen los modelos discretos de todos los elementos de una red, es muy sencillo plantear por ejemplo las ecuaciones nodales para cualquier configuración topológica. Como resultado de este planteamiento se tiene un sistema lineal algebraico de ecuaciones que describe el estado del sistema en un tiempo t , que es representado en forma matricial como [19]:

$$[G][V(n\Delta t)] = [I_s(n\Delta t)] + [I_h(n\Delta t)] \quad (6.10)$$

donde $[G]$ Matriz de conductancias nodales.

$[V(n\Delta t)]$ Vector de voltajes nodales.

$[I_s(n\Delta t)]$ Vector de corrientes inyectadas en los nodos.

$[I_h(n\Delta t)]$ Vector de corrientes de las fuentes de los circuitos equivalentes.

Donde la matriz de conductancias $[G]$ es simétrica debido a la topología que tendrán la configuración de los circuitos, además todos sus elementos son reales.

Con este modelo se calculan los estados en los extremos de la línea independientemente de los puntos en el interior. Siendo sencillo de esta forma incluir modelos de líneas donde se presenten no uniformidades o no linealidades en su interior. El procedimiento para la solución de una red es el siguiente:

1. Proporcionar los valores iniciales en $t=T$ para I_s e I_h .
2. Encontrar la solución para los voltajes en todos los nodos de la red para el siguiente instante de tiempo.
3. Calcular voltajes y corrientes en los puntos interiores de las líneas de transmisión cuya solución emplee el método de las características.
4. Calcular las corrientes de historia de los circuitos equivalentes de todos los elementos de la red.
5. Repetir los puntos 2, 3 y 4 hasta alcanzar el tiempo de observación requerido.

6.2. - EJEMPLOS DE APLICACIÓN.

6.2.1. - Ejemplo de estudio 3.

Para ilustrar la versatilidad del método aquí desarrollado, considérese tres líneas uniformes que tienen la configuración que se muestra en la figura 6.3. Las tres líneas tienen la misma estructura geométrica transversal y tienen las siguientes características: radio de conductor de $r = 2.54$ cm, altura sobre el plano de tierra $h = 20$ m y resistividad de tierra $\rho_{ter} = 100 \Omega m$. Se presentan dos casos de estudio, en el primero de ellos las líneas tienen una misma longitud de 30 km y en el segundo caso las longitudes son de 50, 30 y 10 km para la línea 1, 2 y 3, respectivamente. Como excitación de la red se conecta una fuente doble-rampa $[20/115\mu s]$ de voltaje en el nodo 1 con un valor máximo de 1 pu; en el nodo 2 se tiene una carga resistiva de 460Ω y en el nodo 3 solo se conectan las líneas 2 y 3.

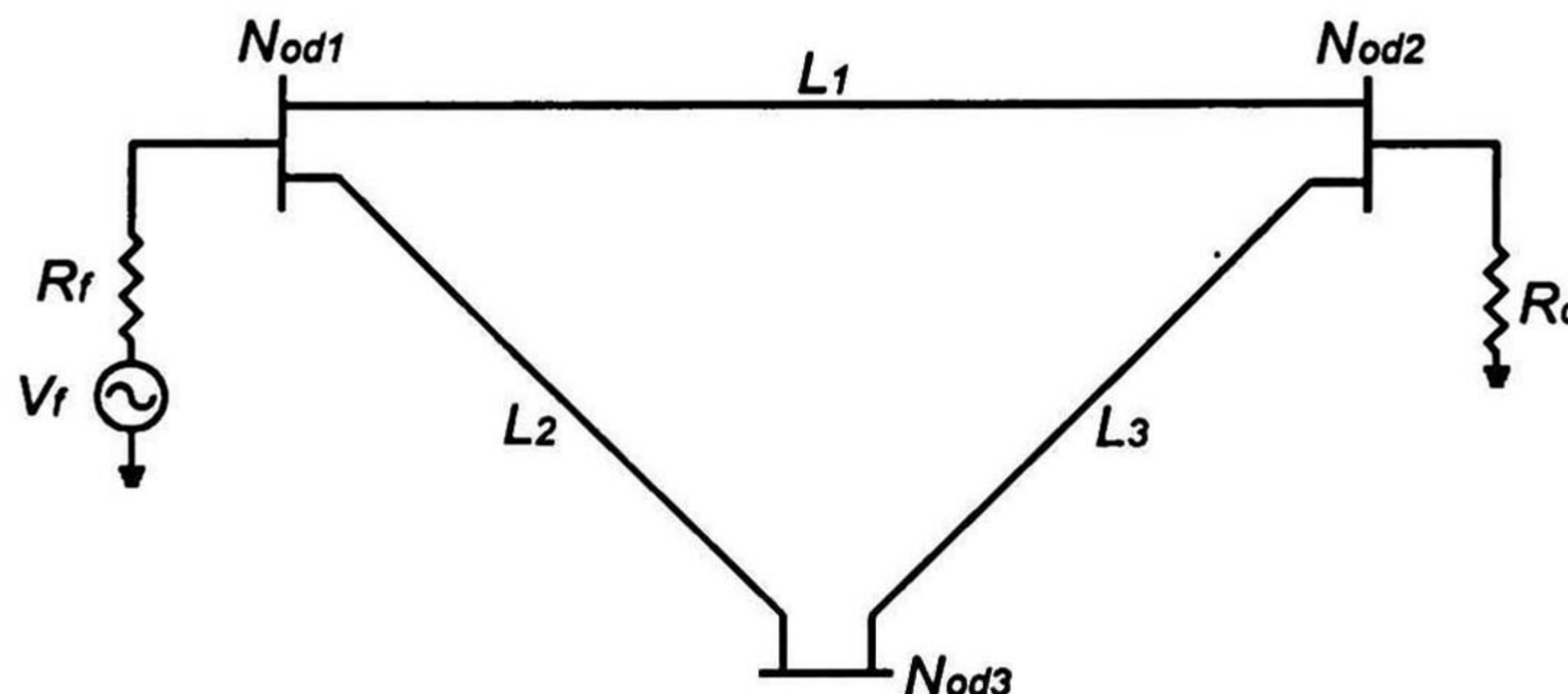


Fig. 6.3 Configuración red de líneas uniformes.

Empleando el modelo desarrollado para las líneas de transmisión, la red de la figura 6.3 se puede representar por el circuito mostrado en la figura 6.4 para el cálculo de voltajes en los nodos. Nótese en la figura 6.4 la desconexión topológica que existe entre los extremos de cada línea de transmisión. De acuerdo con dicho circuito se tiene que:

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_f} + G_{c1} + G_{c2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_c} + G_{c1} + G_{c3} & 0 \\ 0 & 0 & G_{c2} + G_{c3} \end{bmatrix} \quad (6.11a)$$

$$\bar{I}_s(n\Delta t) = \begin{bmatrix} \frac{V_f(n\Delta t)}{R_f} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.11b)$$

$$\bar{I}_h(n\Delta t) = \begin{bmatrix} I_{histk1} + I_{histk2} \\ I_{histm1} + I_{histm3} \\ I_{histm2} + I_{histk3} \end{bmatrix} \quad (6.11c)$$

$$\bar{V}(n\Delta t) = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad (6.11d)$$

Dados los valores de las fuentes de corriente independientes $\bar{I}_s(n\Delta t)$, de las fuentes de corriente de historia en las líneas de transmisión y de los elementos de la red $\bar{I}_h(n\Delta t)$ se resuelve el sistema (6.10) para encontrar los voltajes en los nodos. Las corrientes de historia en las fronteras de las líneas de transmisión están dadas en términos de los voltajes y corrientes un Δt atrás y un Δx dentro de la línea, como lo indican las ecuaciones (6.6), (6.9d) y (6.9e). Por lo tanto, una vez resuelta la red para un tiempo t , para poder encontrar la solución en el tiempo $t + \Delta t$, es necesario calcular los voltajes y

corrientes en toda la longitud de todas las líneas de transmisión, empleando el método de las características.

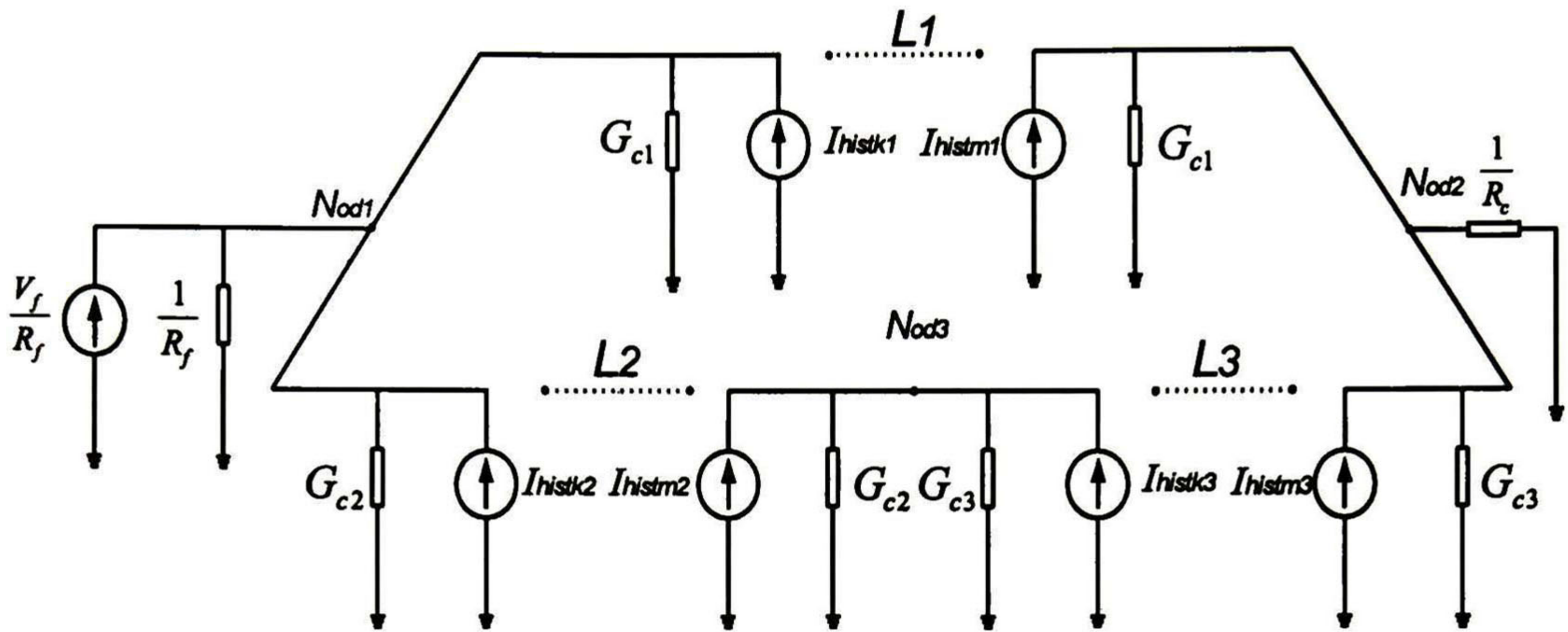


Fig. 6.4 Modelo circuital para las fronteras de la red de la figura 6.3.

Nótese que al encontrar los voltajes en los nodos independientemente de los puntos en el interior de las líneas, se obtiene un procedimiento muy versátil, ya que se puede fácilmente considerar alguna no uniformidad o ciertos fenómenos no lineales dentro de las líneas. Estos fenómenos interiores en las líneas presentan grandes problemas prácticos para poder ser simulados en los programas comerciales que existen actualmente.

En la figura 6.5 se muestran los voltajes en los nodos de la red de la figura 6.3 para el caso en que las tres líneas poseen la misma longitud; se muestran con línea continua los resultados obtenidos con el método de las características y con línea punteada los obtenidos con el EMTP. Se puede ver que el modelo desarrollado reproduce satisfactoriamente la propagación de transitorios electromagnéticos y el modelo para las fronteras parece ser muy eficiente para acoplar diversas líneas.

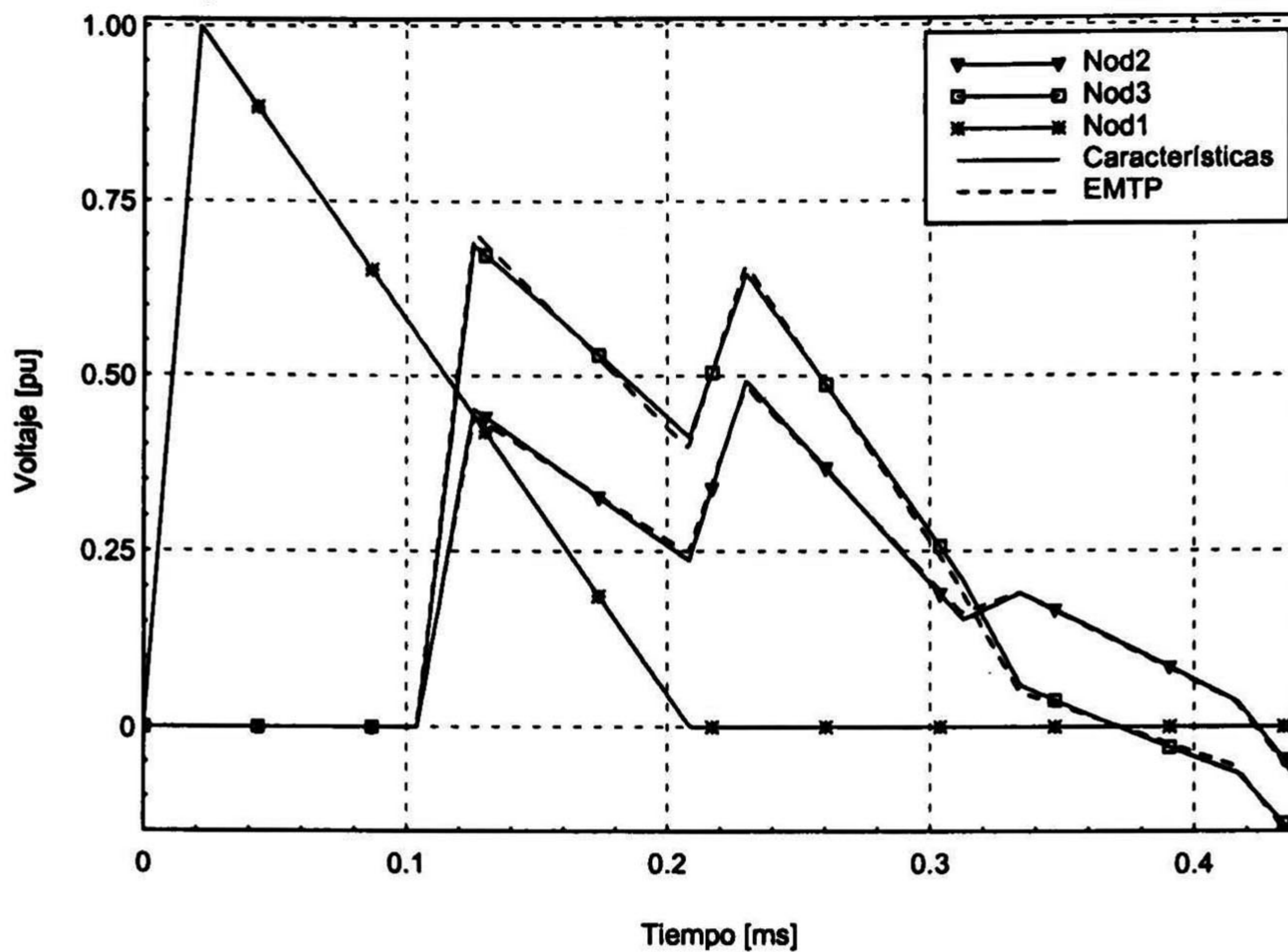


Fig. 6.5 Voltajes en nodos para la red de la figura 6.3 para líneas de igual longitud.

En la figura 6.6 se muestran los voltajes en los nodos de la red de la figura 6.3 para el caso en que las tres líneas poseen diferente longitud. Se puede observar fácilmente que debido a que se tienen tiempos de viaje diferentes para cada línea, los rebotes se presentan en este caso en diferentes tiempos. De la comparación con los resultados obtenidos con el EMTP, se puede apreciar que en los tiempos donde se presentan los rebotes las diferencias aumentan de manera considerable. Esto resulta por la forma en que el EMTP incorpora las pérdidas distribuidas de la línea (por medio de resistencias concentradas en las fronteras), ocasionando que cambien las condiciones en los nodos de la línea lo que produce una reflexión en los puntos de discontinuidad.

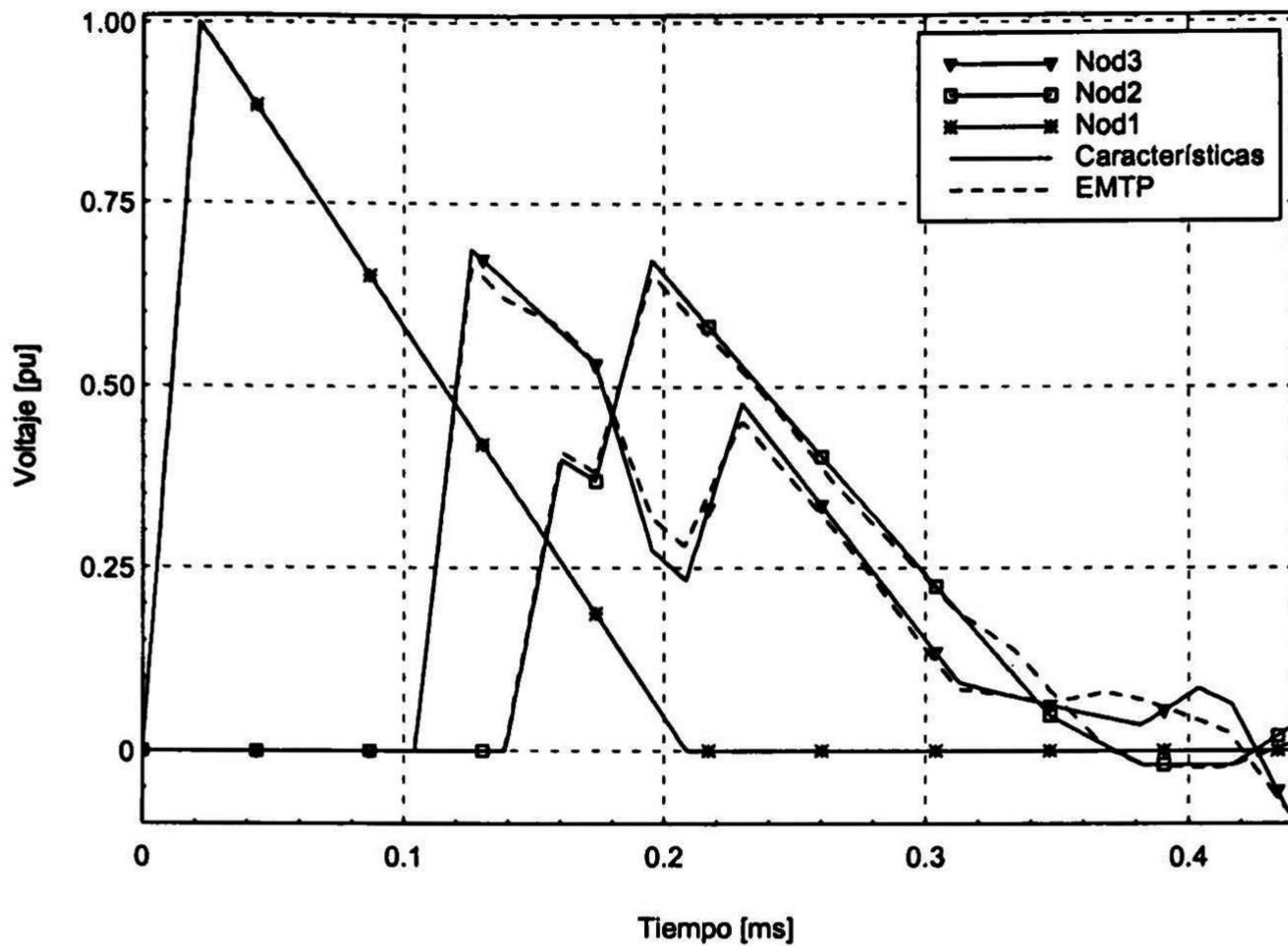


Fig. 6.6 Voltajes en nodos para la red de la figura 6.3 para líneas de diferente longitud.

6.2.2. - Ejemplo de estudio 4.

Considere ahora la configuración de la red que se muestra en la figura 6.7, donde se tienen tres líneas homogéneas con longitud de 50, 10 y 30 km para la línea 1, 2 y 3, respectivamente. Las tres líneas consisten de un conductor con radio $r = 2.54$ cm que se localiza a una altura constante $h = 20$ m del plano de tierra con resistividad $\rho_{\text{ter}} = 100 \Omega\text{m}$. La excitación del sistema se realiza con una fuente ideal de voltaje que suministra una doble rampa; en el nodo 4 se conecta una carga resistiva de 460Ω . El objetivo de presentar la solución de transitorios en esta configuración de líneas, es para tener una mejor apreciación del comportamiento de formas de onda en los nodos de las líneas y poder verificar que las diferencias que se tiene en las figuras 6.5 y 6.6 se deben a las pérdidas de las líneas y no a los rebotes que se pueden originar por la configuración de la red.

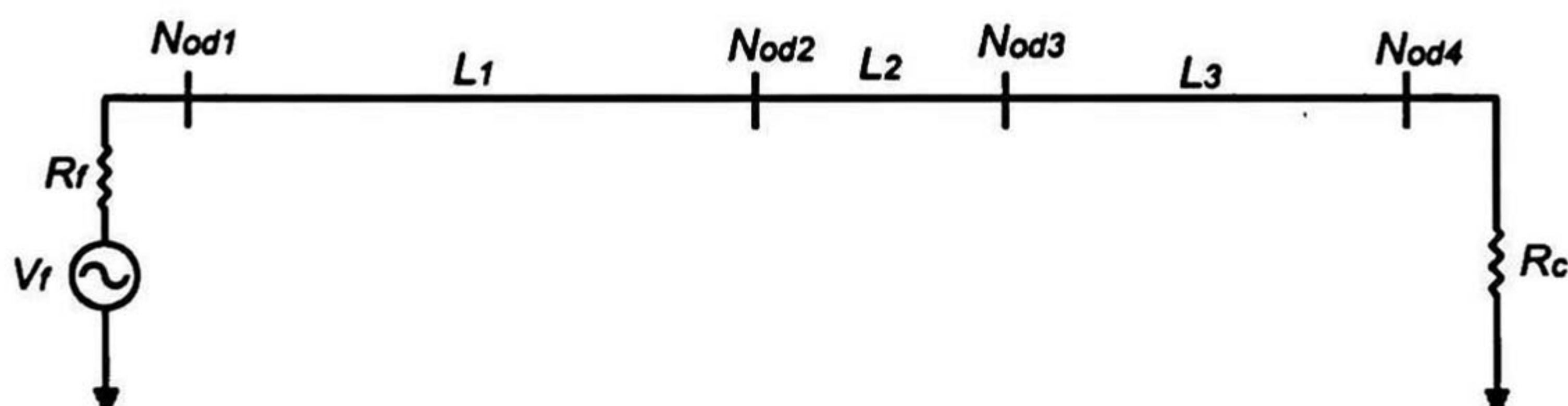


Fig. 6.7 Configuración de la red del ejemplo 4.

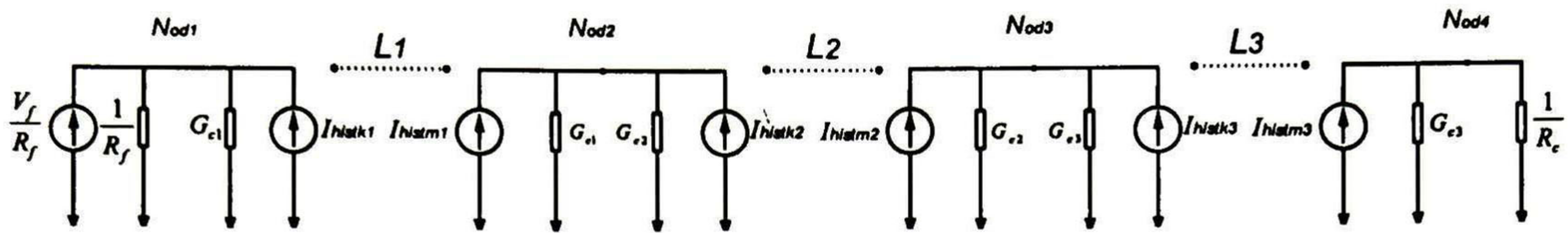


Fig. 6.8 Representación circuital de la red del ejemplo 4.

En la figura 6.9 se muestran los voltajes en los nodos de la línea; como puede observarse no se presenta ningún rebote en las formas de onda con el método de las características. Estos resultados son de esperarse ya que las líneas de la red tienen los mismo parámetros por lo que se puede considerar que es una sola línea de transmisión, y el seccionamiento no debe de generar ninguna deformación en las formas de onda. En la misma figura se presenta la comparación entre el método desarrollado en esta tesis con los obtenidos en el EMTP. Como es fácil observar en esta configuración se acentúa más el problema que representa en el EMTP la concentración de las pérdidas de la línea en las fronteras.

Considerando la línea como ideal para el ejemplo mostrado en la figura 6.7, considérese la propagación de una doble rampa lineal; nuevamente se compararan los resultados con el método de Bergeron y con el de las características. Como se puede apreciar en la figura 6.10 el método de las características con el modelo de fronteras proporciona resultados idénticos a los del EMTP. De aquí se puede decir que el modelo desarrollado es suficientemente robusto para el análisis de propagación de transitorios en redes eléctricas. Las diferencias que se tienen en los resultados obtenidos para las redes de las figuras 6.3 y 6.7; efectivamente, se deben a los modelos que se utilizan para describir las líneas con pérdidas en el EMTP.

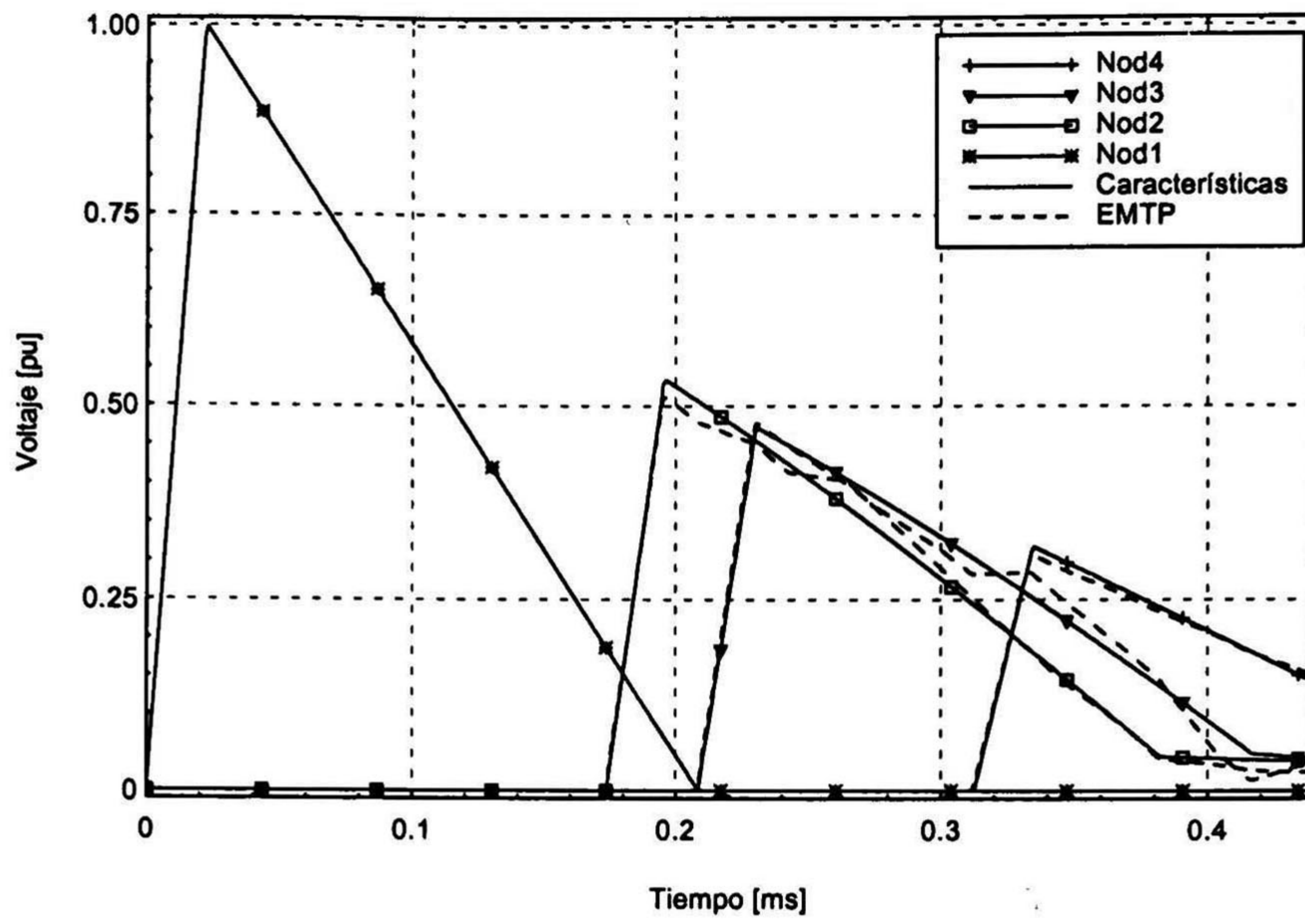


Fig. 6.9 Voltaje en los nodos de la red de la figura 6.9.

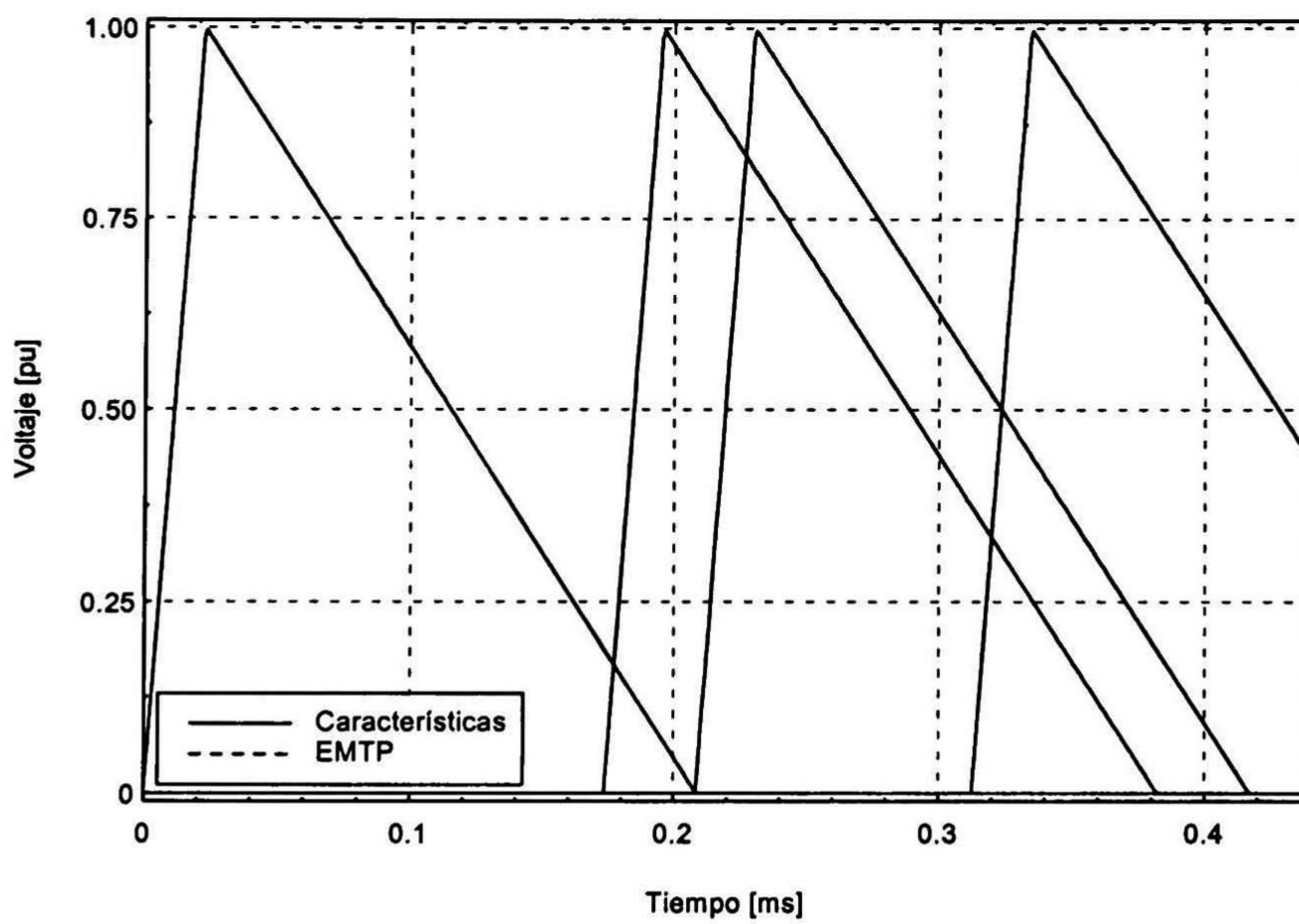


Fig. 6.10 Características y Bergeron, para una línea ideal.

6.5. - LÍNEA MONOFASICA NO UNIFORME.

La existencia de no uniformidades en líneas de transmisión, como la mostrada en el capítulo 5, no es sencillo incluirla en programas de propósito general. Con el modelo propuesto en esta tesis, para la solución de las fronteras resulta sencillo de incluirla. Con el fin de mostrar la facilidad para incluir la no uniformidad causada por la catenaria, se tomó el experimento reportado por Wagner, Gross y Lloyd en 1955 [7].

Por tener un modelo de línea monofásica se seleccionó el experimento realizado sobre la línea Tidd 2 para las formas de onda que corresponden a la figura 12. Esta línea consta de siete secciones de línea no uniformes o catenarias, con longitud de 329.2, 329.2, 320, 320, 317, 285 y 285 m para las secciones del extremo emisor al receptor respectivamente. Los conductores son ASCR de 2" localizados una altura máxima de 26.14 m y una altura mínima de 15.2 m.

El experimento consistió en conectar una doble exponencial como fuente de excitación a las tres fases y el extremo receptor se tiene sin carga, permitiendo de esta manera que se pueda analizar como una línea monofásica. Para calcular los parámetros, aparte de los datos proporcionados anteriormente, es necesario conocer la resistividad y permitividad del terreno que se asumen aquí como de $100 \Omega\text{m}$ para la resistividad y la permitividad igual a la del aire. Para cada uno de los tramos existentes entre torres adyacentes se aplica el modelo de circuito desarrollado en esta sección y en los puntos internos se utiliza el método de las características para describir la no uniformidad existente. En la figura 6.11 se muestran solo los voltajes en los extremos de la línea, pero con el empleo del modelo de circuito se obtienen los voltajes en cada uno de los puntos máximos de los tramos de las líneas; además, con la aplicación del método de las características se puede observar el voltaje en cada uno de los puntos internos de la línea, lo cual es una ventaja.

En la figura 6.11 se muestran los resultados obtenidos en los nodos de envío y recepción, la forma de onda en la recepción se muestra al cincuenta por ciento de su valor original y desplazada en tiempo hacia el origen. De la comparación con las mediciones reportadas [7] (figura 6.12), se puede apreciar que la reproducción de las ondulaciones se tienen de manera satisfactoria pero el tiempo de elevación de la onda en la recepción se tiene una considerable diferencia; esto posiblemente se debe a que no se considera la dependencia frecuencial de los parámetros. Otra posible causa de las diferencias es que se tomó la permitividad del terreno igual a la del aire, siendo que se reporta que se tiene una permitividad relativa entre 4 a 6 veces mayor a la del aire.

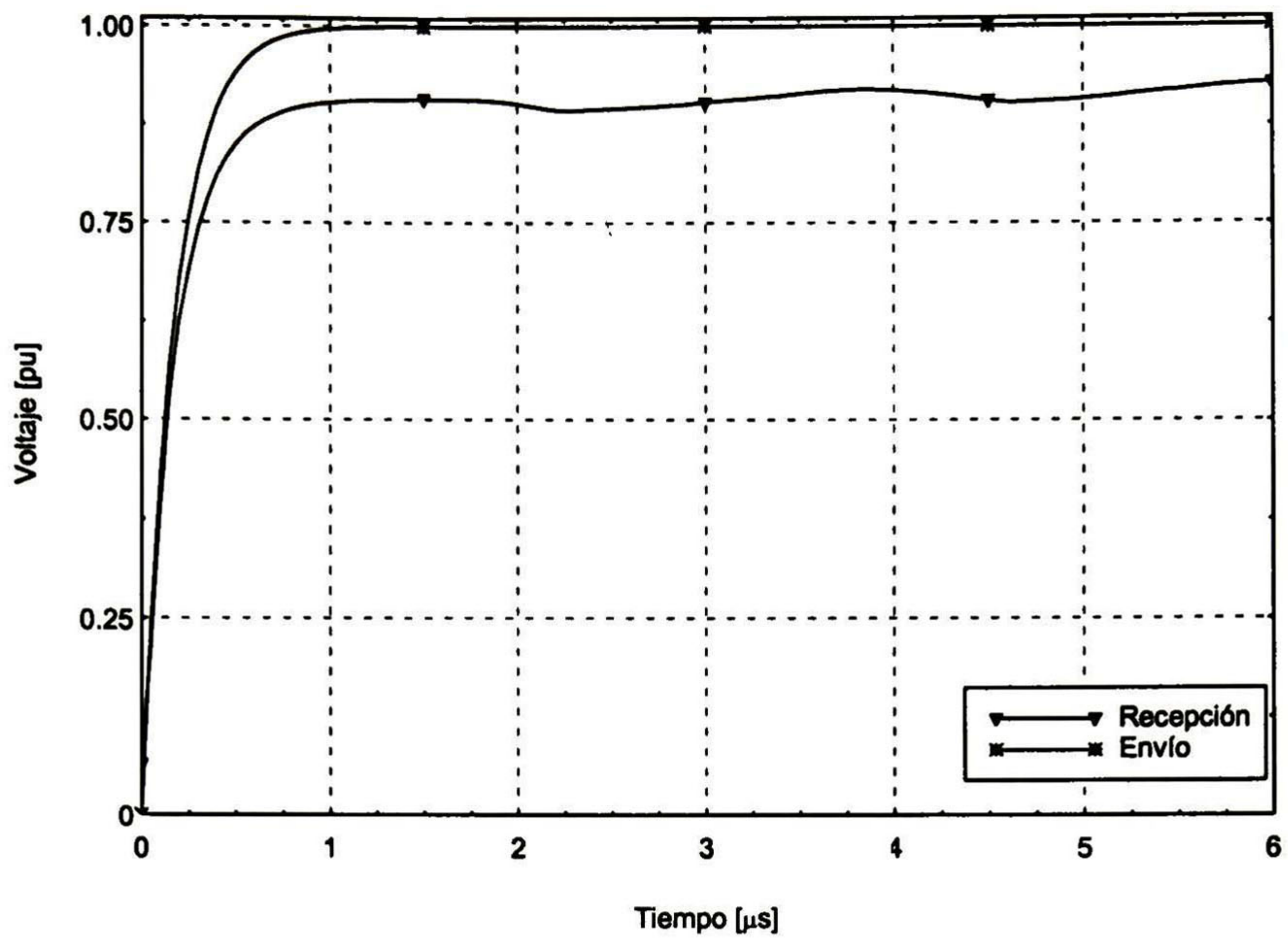


Fig. 6.11 Voltaje en el nodo de envío y recepción para la línea Tidd 2.

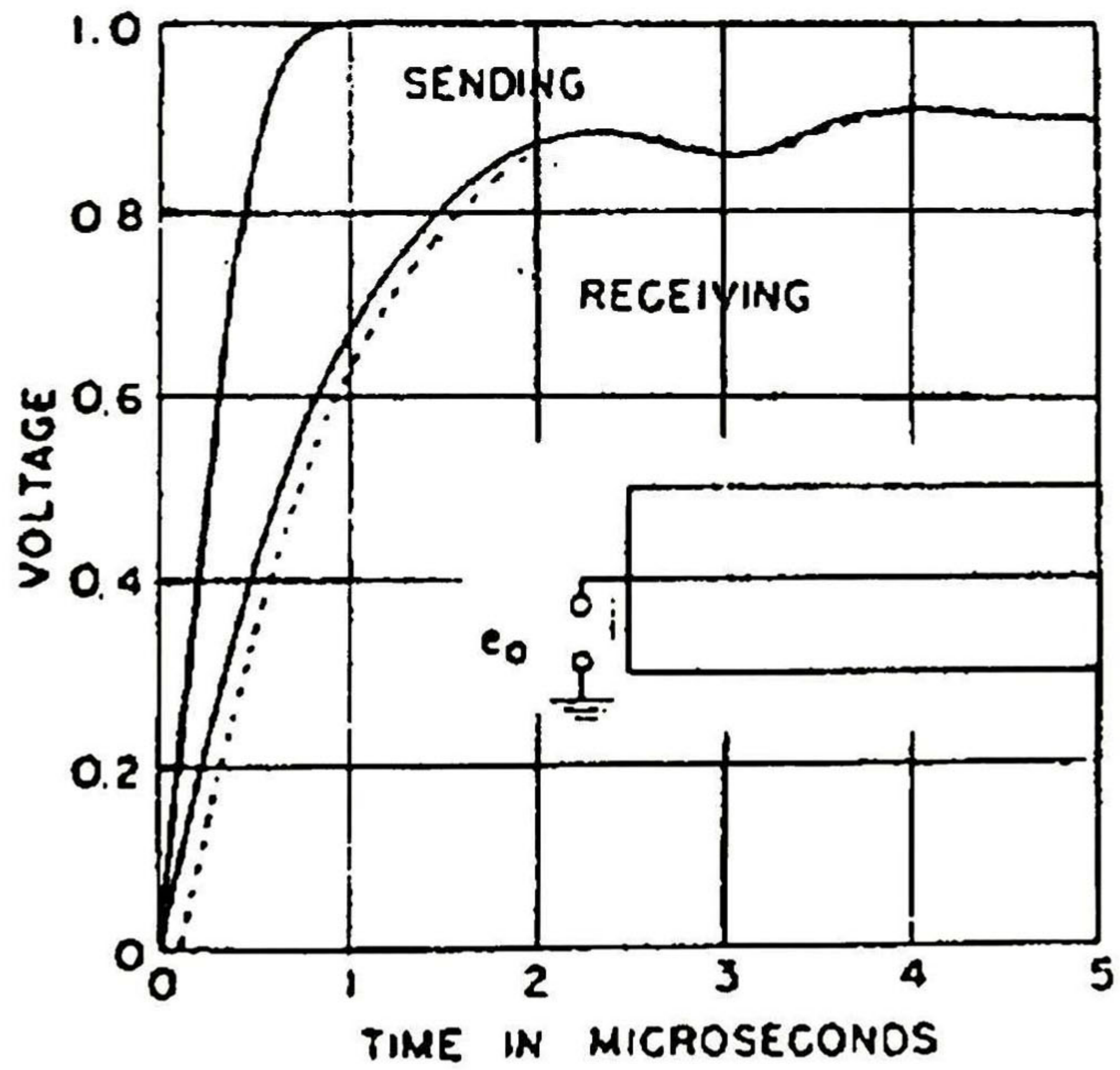


Fig. 6.12 Voltaje en el nodo de envío y recepción para la línea Tidd 2. Referencia 7.

6.4. - OBSERVACIONES FINALES.

En este capítulo se desarrolló un modelo que permite incluir el algoritmo del método de las características para líneas de transmisión con parámetros no uniformes a procedimientos generales de solución de redes eléctricas o electrónicas, tales como los empleados por los programas EMTP o SPICE.

Se ha mostrado que el modelo es lo suficientemente robusto para realizar análisis en configuraciones arbitrarias de redes tanto con de líneas uniformes, como con líneas no uniformes. En las pruebas de validación se obtuvieron algunas diferencias con las simulaciones en el EMTP para el caso de líneas con pérdidas; esto es debido a que en el EMTP se tiene un modelo de línea ideal y las pérdidas se incorporan en los extremos en forma concentrada, y no en forma distribuida a lo largo de toda la línea. Esta forma de introducir las pérdidas produce un cambio en las características del medio en el que se propagan las ondas por lo que se generan reflexiones que no existen en realidad en el problema.

El método obtenido para una línea no uniforme ha sido comparado con el experimento de campo de Wagner, *et al.* Las diferencias de los resultados de la simulación con respecto a las mediciones reportadas en la referencia 7, son principalmente el tiempo de elevación de la forma de onda. Una de las posibles causas para tal diferencia pudiera ser que en el modelo no se incluye la dependencia de los parámetros con respecto a la frecuencia. Otra posible causa es que en la simulación la permitividad relativa del terreno se tomó igual a la del aire y en la referencia se menciona que es de 4 a 6.

CAPÍTULO 7

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

7.1. – CONCLUSIONES.

En esta tesis se ha presentado el desarrollo de modelos de propagación para líneas monofásicas uniformes y no uniformes empleando dos métodos diferentes: el método de las Características y el método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (o método de Yee). Los resultados obtenidos con ambos métodos fueron comparados con resultados del EMTP.

Los estudios numéricos realizados, mostraron que en la simulación de líneas de transmisión uniformes tanto el método de las características como el de Yee proporcionan resultados prácticamente idénticos a los del EMTP. Hay que notar que el método de Yee es más eficiente computacionalmente que el de características, sin embargo una comparación similar con el EMTP no fue posible debido a que los dos primeros procedimientos están programados en Matlab mientras que el EMTP es un programa ejecutable.

Si bien las no uniformidades en una línea de transmisión pueden ocurrir por diversas razones, se eligió en este trabajo analizar las causadas por la catenaria de los conductores en claros entre torres. Los modelos desarrollados para este problema incluyen la variación de la velocidad de propagación con respecto a la distancia, siendo esta una característica que hasta ahora no había sido incluida en los modelos reportados en la literatura. En este caso los resultados obtenidos con el método de Yee presentaron oscilaciones numéricas, mientras que esto no ocurrió al emplear el método de las características. Adicionalmente se realizaron nuevamente simulaciones con el EMTP, mostrándose que se obtienen prácticamente los mismos resultados que con el método de las características.

Con respecto a las simulaciones en el EMTP es importante notar la dificultad que representa realizar estudios en líneas no uniformes con este programa. Para reproducir las variaciones debido a la

catenaria fue necesario dividir la línea en varias secciones y calcular los parámetros eléctricos para todas y cada una de las secciones considerándolas como líneas uniformes. Después de esto es necesario generar el archivo de datos para una red con un número grande de líneas de transmisión conectadas en cascada. Además se presentó el problema de la falta de un criterio establecido para determinar el número más adecuado de secciones. A falta de este criterio la decisión la debe tomar el usuario, generalmente a prueba y error realizando pruebas numéricas con diferente número de secciones. En este trabajo se determinó que la forma mas adecuada de dividir la línea es tomar el mismo número de tramos que el calculado en el método de las características que toma como base al criterio de Courant. Se observó que al tomar un menor número de secciones el efecto de la no uniformidad no fue reproducido de manera satisfactoria por el EMTP, mientras que con una cantidad mayor de secciones, no se presentaron cambios apreciables en los resultados.

Una vez comprobada la factibilidad de simular transitorios electromagnéticos en líneas no uniformes empleando el método de las características, se desarrolló lo que constituye la aportación principal de este trabajo: un modelo para considerar condiciones de frontera arbitrarias en las terminaciones de la línea. El modelo desarrollado es un equivalente de Thévenin (o Norton) para cada extremo de la línea. Estos circuitos equivalentes para los puntos inicial y final de la línea están en función de voltajes y corrientes existentes en puntos situados un Δx en el interior de línea y un Δt atrás en tiempo. Esta característica con respecto al tiempo permite desacoplar el cálculo de voltajes y corrientes de un extremo de la línea con respecto al otro extremo en un instante de tiempo determinado.

Al estar desacoplados topológicamente los circuitos equivalentes de los extremos de la línea de transmisión en un instante de tiempo dado, la solución de la red completa es independiente del comportamiento interno de la línea. Por lo tanto esto hace posible la inclusión de otros tipos de no uniformidades y de fenómenos no lineales sin tener que modificar el algoritmo general de solución de la red. Para efectuar esto solo es necesario implementar las funciones que realicen el cálculo interno del comportamiento de la línea de transmisión.

A manera de resumen, a continuación se mencionan los desarrollos presentados en esta tesis:

1. Se desarrolló el modelo de línea basado en el método de Yee tanto para líneas monofásicas uniformes como no uniformes.
2. Aplicación del método de las características para el análisis de líneas aéreas no uniformes con parámetros dependientes de la distancia.

3. Propuesta de un modelo para resolver condiciones generales en los extremos de redes de líneas basado en el método de las características.
4. Evaluación de modelos para líneas con pérdidas (modelo de Bergeron y Características).

7.2. – TRABAJOS FUTUROS.

Finalmente, con el empleo de modelo propuesto para el análisis de propagación de ondas electromagnéticas en líneas de transmisión uniformes y no uniformes, se tienen un gran número de posibilidades para desarrollos futuros.

Como un trabajo a futuro, se recomienda llevar a cabo el desarrollo del modelo de solución de condiciones en los extremos de las líneas al caso polifásico. Una vez que se cuenta con el modelo polifásico de fronteras, se pueden incluir modelos de líneas donde se pueden considerar algunas otras no uniformidades o no linealidades así como diversas condiciones de operación (como por ejemplo líneas iluminadas por campos incidentes).

Las redes eléctricas no solo se componen de líneas de transmisión sino que se cuenta con algunos otros dispositivos, (transformadores, torres, enlaces con cables entre otros), que en transitorios ultrarrápidos pueden afectar de manera considerable los resultados; se propone por lo tanto el desarrollo de modelos de circuito de estos dispositivos que incluya efectos de propagación de ondas dentro de ellos. Esto con el fin de analizar en que grado estos contribuyen o son afectados por la propagación de transitorios.

Por ser el método de las características un proceso secuencial de marcha en tiempo, este puede ser acoplado con relativa facilidad al EMTP, por lo que se recomienda incluir estos modelos en los programas de propósito general de tal manera que se abra la posibilidad de realizar estudios de los efectos de elementos no uniformes sobre el comportamiento transitorio de una red eléctrica compleja.

REFERENCIAS.

- [1] R. Velazquez, D. Mukhedkar, "Analytical Modelling of Grounding Electrodes Transient Behavior", IEEE Transactions on Power System Instrumentation and Measurements, vol. PAS-103, No. 6, June 1984, pp. 1314-1322.
- [2] M. T. Correia de Barros, M. E. Almeida, "Computation of Electromagnetic Transients on Nonuniform Transmission Lines", IEEE Transactions on Power Delivery, vol. 11, No. 2, April 1996, pp. 1082-1091.
- [3] J. Wills, N. K. Sinha, "Non-Uniform Transmission Lines as Impedance Transformer", Proc. IEE Vol. 103B, March 1956, pp. 166-172.
- [4] C. Menemenlis, Z. T. Chun, "Wave Propagation on Nonuniform Lines", IEEE Trans. on Power Apparatus and System, vol. PAS-101, No. 4, April 1982, pp. 833-839.
- [5] M. M. Said, A. S. Al-Fuhad, M. E. Elshandwily, "S-domain Analysis of Electromagnetic Transients on nonuniform lines", IEEE Transactions on Power Delivery, vol. PWRD-5, Oct. 1990, pp. 2072-2083.
- [6] E. A. Oufi, A. S. AlFuhaid, M. M. Saied, "Transient Analysis of Lossless Single-Phase Nonuniform Transmission Lines", IEEE Transactions on Power Delivery, vol. 9, No. 3, July 1994, pp. 1694-1700.
- [7] C. F. Wagner, I. W. Gross, B. L. Lloyd, "High-Voltage Impulse Test on Transmission Lines", AIEE Transmission and Distribution and Protective Devices, vol. 73, pp. 196-210, 1954.
- [8] M. Ishii, T. Kawamura, T. Kouno, E. Ohsaki, K. Shiokawa, K. Murotani, T. Higuchi, "Multistory Transmission Tower Model for Lightning Surge Analysis", IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 6, No. 3, pp. 1327-1335, July 1991.
- [9] T. Yamada, A. Mochizuki, J. Sawada, E. Zaima, T. Kawamura, A. Ametani, M. Ishii, S. Kako, "Experimental Evaluation of a UHV Tower Model for Lightning surge Analysis", IEEE PES Winter Meeting Paper, No. 044-8PWRD, 1994.

- [10] L. V. Bewley, "Travelling Waves on Transmission Systems", Dover Publications, Inc. New York, second Edition, 1963.
- [11] H. W. Dommel, "Electromagnetic Transients Program Reference Manual, EMTP Theory Book", Prepared for Bonneville Power Administration, Portland, Oregon, USA 1986.
- [12] H. V. Nguyen, H. W. Dommel, J. R. Martí, "Modelling of single-Phase Nonuniform Transmission Lines in Electromagnetic Transients Simulation", IEEE PES Paper 96 SM 458-0-PWR, Summer Power Meeting, Denver Col., July 28-August 1, 1996.
- [13] A. Ametani, Y. Kasai, J. Sawada, A. Mochizuki, T. Yamada, "Frequency-dependent Impedance of Vertical Conductors and a Multiconductor Tower Model", IEE Proc. Gener. Transm. Distrib., vol. 141, No. 4, July 1994.
- [14] A. Ramírez, J. L. Naredo, "Comparación de Métodos de Diferencias Finitas para el Análisis de Líneas de Transmisión", CIECE, Marzo 1998.
- [15] J. L. Naredo, A. C. Soudack, J. R. Martí, "Simulation of Transients on Transmission Lines with Corona via the Method of Characteristics", IEE Proc. Gener. Transm. Distrib., vol. 142, No. 1, January 1995.
- [16] Amner Israel Ramírez Vázquez, "Transitorios Electromagnéticos en Líneas de Transmisión Considerando Parámetros Dependientes de la Frecuencia y Efecto Corona", M. Sc. Thesis, CUCEI, Universidad de Guadalajara, Agosto 1998.
- [17] K. S. Yee, "Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Medio", IEEE trans. Antennas and Propagation, vol. 14, 1966, pp. 302-307.
- [18] Callen Taflove, "Computational Electromagnetics, the Finite-Difference Time-Domain Method", Artech House, Inc. 1995.
- [19] H. W. Dommel, "Digital Computer Solution of Electromagnetic Transients in Single and Multiphase Networks", IEEE 68 TP 657-PWR, Presentado en Summer Power Meeting, Chicago, 1968.
- [20] Clayton R. Paul. "Analysis of Multiconductor Transmission Lines", Department of Electrical Engineering, University of Kentucky, A Wiley-Interscience Publication, 1994.

- [21] J. P. Bickford, N. Mullieur, J. R. Reed, "Computation of Power System Transients", Published by Peregrinus, Ltd. Southgate House, Stevenage, Herts, SGI LHG England, 1976.
- [22] William F. Ames, "Numerical methods for partial differential equations", Third edition, Academic Press Inc., 1992.
- [23] John C. Strikwerda, "Finite Difference Schemes an Partial Differential Equations", Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series, 1989.
- [24] A. K. Agrawal, H. J. Price and S. H. Gurbaxani, "Transient Response of Multiconductor Transmission Lines Exited by a Nouniform Electromagnetic Field", IEEE, Trans. On Electromag. Compat., EMC-22, 119-129 (1980).
- [25] A. R Djordjevic, T. S. Sarkar and R. F. Harrington, "Time Domain Response of Multiconductor Transmission Line", Proc. IEEE, 75, 743-764 (1987).
- [26] C. R. Paul, "Incorporation of Terminal Constraints in the FDTD Analysis of Transmission Lines", IEEE Trans. Electromag. Compat., vol. 36, pp. 85-91, May 1994.
- [27] A. Orlandi and Clayton R. Paul, "FDTD Analysis of Lossy, Multiconductor Transmission Lines Terminated in Arbitrary Loads,", IEEE Trans. on Electromg. Compat., vol. 38, No. 3, agust 1996.
- [28] R. H. Galloway, W. B. Shorrocks and L. M. Wedepohl, "Calculation of Electrical Parameters for Short and Long Poliphase Transmission Lines", Proc. IEE, vol. III, No. 12, December 1964.
- [29] José Alberto Gutiérrez Robles, "Desarrollo de un Método para el Análisis de Líneas de Transmisión no Uniformes y su Aplicación al Estudio del Problema del Flameo Inverso", Tesis de Maestría, CUCEI, Universidad de Guadalajara, junio de 1998.
- [30] F. H. Branin, Jr., "Transient Analysis of Lossless Transmission Lines", Proc. IEEE Lett., Vol. 55, pp 2012-2013, Nov. 1967.
- [31] J. L. Naredo, "The Effect of Corona on Wave Propagation on Transmission Lines", Thesis of Doctor Philosophy, Departament of Electrical Engineering, The University of British Columbia, June 1992.

APÉNDICE A.

La inclusión de parámetros concentrados como los inductores y capacitores, en el análisis de transitorios electromagnéticos se realiza aplicando la regla trapezoidal de integración a las ecuaciones en cada elemento. De esta forma, tales elementos se pueden representar por simples redes resistivas y fuentes de historia equivalentes [19].

A.1. – INDUCTOR.

Para la el caso de la inductancia (L) de la figura A1 a), el voltaje esta dado por:

$$V_{km} = L \frac{di_{km}}{dt} \quad (\text{A.1})$$

$$L di_{km} = (V_k - V_m) dt \quad (\text{A.2})$$

integrando del tiempo $t - \Delta t$ al tiempo en t .

$$L(i_{km}(t) - i_{km}(t - \Delta t)) = \int_{t-\Delta t}^t (V_k - V_m) dt \quad (\text{A.3})$$

Aplicando la regla trapezoidal de integración a (A.3):

$$i_{km}(t) = i_{km}(t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{2L} (V_k(t - \Delta t) - V_m(t - \Delta t) + V_k(t) - V_m(t)) \quad (\text{A.4})$$

Agrupando los términos que se conocen en el tiempo $t - \Delta t$

$$i_{km}(t) = \frac{\Delta t}{2L} (V_k(t) - V_m(t)) + I_{histL} \quad (\text{A.5a})$$

$$I_{histL} = i_{km}(t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{2L} (V_k(t - \Delta t) - V_m(t - \Delta t)) \quad (\text{A.5b})$$

En la figura A1 b) se muestra el circuito equivalente de las ecuaciones (A.5), donde el término R esta dado por:

$$R = \frac{2L}{\Delta t} \quad (A.5c)$$

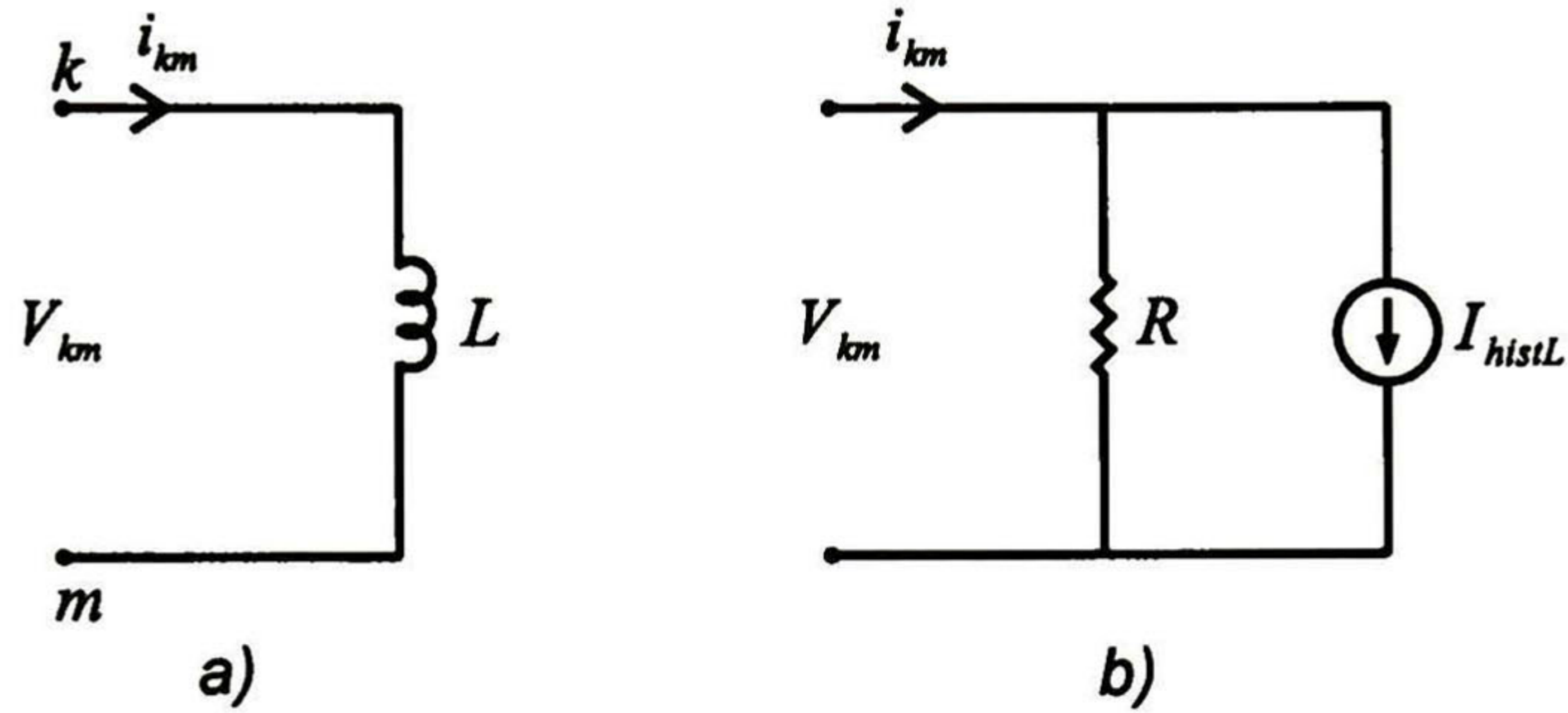


Fig. A1 a) Inductancia y b) Circuito equivalente.

A.2. – CAPACITOR.

Ahora para el capacitor (C) de la figura A2 a) el voltaje esta dado por:

$$V_{km} = \frac{1}{C} \int i_{km} dt \quad (A.6)$$

$$V_k - V_m = \frac{1}{C} \int i_{km} dt \quad (A.7)$$

integrando del tiempo $t - \Delta t$ al tiempo en t .

$$V_k(t) - V_m(t) - V_k(t - \Delta t) + V_m(t - \Delta t) = \frac{1}{C} \int_{t-\Delta t}^t i_{km} dt \quad (A.8)$$

Aplicando la regla trapezoidal de integración a (A.8):

$$i_{km}(t) = \frac{2C}{\Delta t} (V_k(t) - V_m(t) - V_k(t - \Delta t) + V_m(t - \Delta t)) - i_{km}(t - \Delta t) \quad (A.9)$$

Agrupando los términos que se conocen en el tiempo $t - \Delta t$

$$i_{km}(t) = \frac{2C}{\Delta t} (V_k(t) - V_m(t)) + I_{histL} \quad (\text{A.10a})$$

$$I_{histC} = \frac{2C}{\Delta t} (V_m(t - \Delta t) - V_k(t - \Delta t)) - i_{km}(t - \Delta t) \quad (\text{A.10b})$$

En la figura A2 b) se muestra el circuito equivalente de las ecuaciones (A.10), donde el término R está dado por:

$$R = \frac{\Delta t}{2C} \quad (\text{A.10c})$$

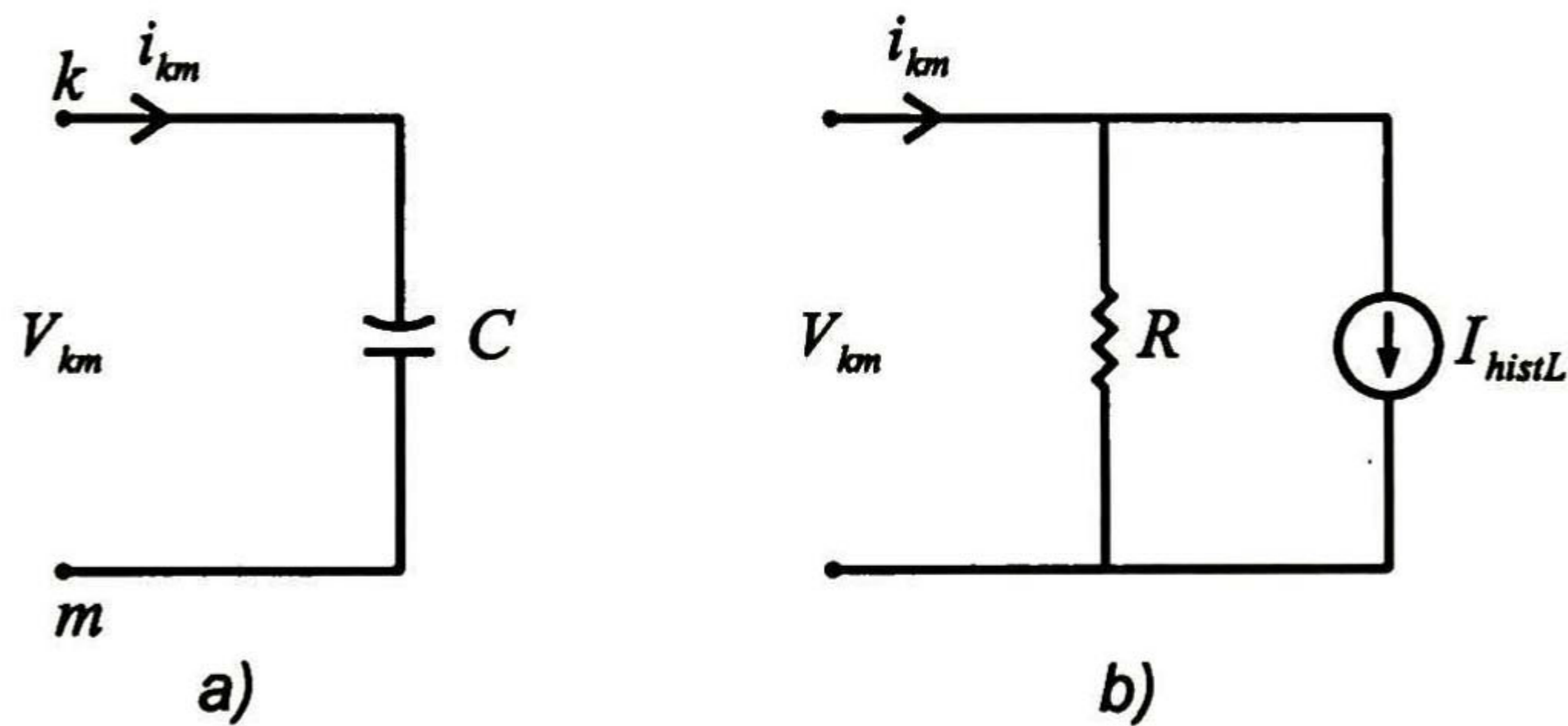


Fig. A2 a) Capacitancia y b) Circuito equivalente.

APÉNDICE B.

Artículos publicados de esta tesis.

1. J. Carlos Gutiérrez V., Pablo Moreno V., J. Alberto Gutiérrez R., J. Luis Naredo V., "Propagación de Transitorios Electromagnéticos en Líneas de Transmisión Monofásicas No Uniformes", Reunión de Verano de Potencia y Aplicaciones Industriales RVP-AI/2000, Acapulco, Guerrero, Julio de 2000.
2. Abner Ramírez, J. Carlos Gutiérrez V., J. Luis Naredo V., Pablo Moreno, "Incident Fields in Transmission Lines via Method of Characteristics", International Conference on Power System Transients, Universidad Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro Brasil, Junio 24-26 2001. (Sometido para su publicación y presentación).



El Jurado designado por el Departamento de Ingeniería Eléctrica y Ciencias de la Computación del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, aprobó la tesis: "Modelado de líneas de transmisión monofásicas con parámetros dependientes de la distancia y condiciones arbitrarias en los extremos para el análisis de transitorios electromagnéticos" el día 27 de octubre de 2000.

Dr. José Luis Naredo Villagrán
Investigador Cinvestav 3 B
CINVESTAV DEL IPN
Guadalajara

Dr. Pablo Moreno Villalobos
Investigador Cinvestav 3 A
CINVESTAV DEL IPN
Guadalajara

Dr. Juan Manuel Ramírez Arredondo
Investigador Cinvestav 3 A
CINVESTAV DEL IPN
Guadalajara

Dr. Alejandro Dueñas Jiménez
Investigador titular B
Centro de Investigación Científica
y de Educación Superior de Ensenada
Ensenada



CINVESTAV
BIBLIOTECA CENTRAL



SSIT000003863