

xx (104952.1)



CINVESTAV

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Unidad Guadalajara

**CINVESTAV I. P. N.
SECCION DE INFORMACION
Y DOCUMENTACION**

CÁLCULO DEL PAR EN EL MOTOR DE INDUCCIÓN CON EL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO

Tesis que presenta

RAMÓN CASTILLO DÍAZ

Para obtener el grado de
Maestro en Ciencias

En la especialidad de
Ingeniería Eléctrica

CINVESTAV
ADQUISICION
DE LIBROS

Guadalajara, Jal., Junio de 2002

CLASIF.:
ADQUIS. SSI-212
FECHA: 27 NOV-2002
PROCED.: TESIS-02

CÁLCULO DEL PAR EN EL MOTOR DE INDUCCIÓN CON EL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO

Tesis de Maestría en Ciencias
Ingeniería Eléctrica

Por:

Ramón Castillo Díaz

Ingeniero Mecánico Electricista

Universidad de Guadalajara, 1992-1997

Becario del CONACyT, expediente no. 160172

Directores de Tesis:

Dr. José Manuel Cañedo Castañeda
Dr. Pablo Moreno Villalobos

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Junio de 2002

DEDICATORIA

Toda la frustración, toda la aflicción, todo el trabajo, todo el gozo, toda la alegría, toda la satisfacción que me causo realizar esta tesis los dedico con humildad y con profundo respeto al Señor Dios Creador del cielo y de la tierra.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios por que Él es quien finalmente dirige todas las cosas.

A mis padres Elías y Eduwiges y a mis hermanos Agustín, Dalila y Samuel; por que en todo momento he tenido su confianza y su apoyo incondicional.

A mis compañeros potentes James, Alejandro, Ixtla, Iván, Lalo, Enrique, Héctor, Francois, Guillermo, Pável, Marisol, Nacho, el Güero y el Teco; por su amistad, su valiosa ayuda y por hacer grata mi estancia en el CINVESTAV unidad Guadalajara.

A mis amigos de UBF por sus oraciones al inicio de esta empresa.

Al Dr. J. Manuel Cañedo, quien fue mi profesor al principio de mi maestría y ahora, a más de ser mi profesor, lo considero mi amigo. Por el tiempo que invirtió asesorándome en este trabajo y por haberme dado a conocer la fuente inagotable de felicidad que es el análisis de máquinas eléctricas con el método del elemento finito.

Al Dr. Pablo Moreno, porque sonriendo tranquila y plácidamente mientras nos explicaba los fenómenos electromagnéticos más complejos e intrincados, me enseñó que llegar a la comprensión de tales fenómenos no es tarea imposible.

Al Dr. J. Manuel Ramírez, de quien aprendí a ser perseverante, a amar y a tomar muy en serio mi carrera por su carácter firme para el trabajo y por su manera apasionada de llevar a cabo la docencia.

Al Dr. J. Luis Naredo, quien con su manera certera y profunda de conocer y enseñar me motivó a llegar a la comprensión total de las ecuaciones y los conceptos de Ingeniería eléctrica.

Al Dr. Arturo R. Messina, quien con su manera organizada y ecuánime de efectuar la docencia, me enseñó el valor del orden y el autocontrol.

Finalmente, deseo agradecer al CONACYT por el apoyo económico que me brindo. Sin este apoyo el presente trabajo no hubiese sido posible.

RESUMEN

En este trabajo se aplica el método del elemento finito al análisis bidimensional del motor de inducción en operación en estado estable, excitado por fuentes de corriente laminar senoidales y fuentes de voltaje senoidales. El análisis se enfoca principalmente en el cálculo del par electromagnético.

Se tratan los tópicos de teoría electromagnética involucrados y en un modelo idealizado del motor de inducción, se calculan analítica y numéricamente con el método del elemento finito, en la variante método de Galerkin, el potencial vectorial y el par. Se comparan resultados obtenidos con los métodos analíticos y numéricos.

Se desarrollan tres formulaciones para calcular el par con el método del elemento finito, utilizando elementos triangulares de primer orden, basadas en la ecuación de fuerza de Lorentz, el tensor de Maxwell y el principio del trabajo virtual.

Finalmente, se simula un motor de inducción de características reales, asumiendo que se conecta a una fuente de voltaje trifásica. En este motor se analiza la convergencia y la evolución en los resultados del par obtenidos con diferentes discretizaciones, y se calcula la curva de desempeño par-velocidad.

ÍNDICE

DEDICATORIA.....	III
AGRADECIMIENTOS.....	IV
RESUMEN.....	V
ÍNDICE DE FIGURAS.....	VIII
ÍNDICE DE TABLAS.....	IX
LISTA DE SÍMBOLOS.....	X

INTRODUCCIÓN

ANTECEDENTES Y REVISIÓN DEL TRABAJO PREVIO.....	XII
MOTIVACIÓN Y JUSTIFICACIÓN DE LA TESIS.....	XII
OBJETIVO DE LA TESIS.....	XII
ORGANIZACIÓN DE LA TESIS.....	XIII

1 TÓPICOS DE TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA

1.1 ECUACIONES DE MAXWELL.....	1
1.2 ECUACIONES DE ONDA PARA CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS.....	3
1.3 DISCONTINUIDAD DE LOS CAMPOS EN INTERFACES.....	4
1.4 POTENCIALES.....	6
1.4.1 ECUACIONES DE ONDA PARA POTENCIALES.....	6
1.4.2 COMPORTAMIENTO DE LOS POTENCIALES EN LAS INTERFACES.....	8
1.4.3 REDUCCIÓN DE PROBLEMAS A DOS DIMENSIONES CON POTENCIALES.....	9

2 MODELO IDEALIZADO DEL MOTOR DE INDUCCIÓN

2.1 EL MOTOR DE INDUCCIÓN.....	10
2.2 MOTOR DE INDUCCIÓN IDEALIZADO.....	11
2.3 CÁLCULO DEL POTENCIAL VECTORIAL.....	12
2.4 CÁLCULO DEL PAR ELECTROMAGNÉTICO.....	19
2.5 CÁLCULO DE LA ENERGÍA ALMACENADA EN FORMA DE CAMPO MAGNÉTICO.....	23
2.6 CONDICIÓN DE OPERACIÓN CON ROTOR LIBRE EN ESTADO ESTABLE.....	23

3 EL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO

3.1 FUNDAMENTOS DEL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO.....	25
3.1.1 DIVISIÓN DEL DOMINIO EN ELEMENTOS.....	26
3.1.2 POSTULACIÓN DE LAS FUNCIONES DE PRUEBA	27
3.1.3 APLICACIÓN DE UN CRITERIO DE OPTIMIZACIÓN.....	29
3.1.3.1 FORMULACIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES MEDIANTE EL MÉTODO DE GALERKIN.....	29
3.1.3.2 IMPOSICIÓN DE CONDICIONES DE FRONTERA.....	34
3.1.3.3 INCLUSIÓN DE LA FUENTE DE CORRIENTE LAMINAR AL SISTEMA DE ECUACIONES	35

3.1.4	SOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES.....	40
3.1.4.1	CONVERGENCIA DE LA SOLUCIÓN.....	40
4	CÁLCULO DEL PAR EN EL MOTOR DE INDUCCIÓN	
4.1	ECUACIÓN DE FUERZA DE LORENTZ.....	42
4.2	MÉTODO DEL TENSOR DE MAXWELL.....	43
4.3	MÉTODO DEL TRABAJO VIRTUAL.....	45
4.4	RESULTADOS.....	48
5	SIMULACIÓN DE UN MOTOR CON CARACTERÍSTICAS REALES	
5.1	MODELO DEL MOTOR DE INDUCCIÓN.....	51
5.2	INCLUSIÓN DE FUENTES DE VOLTAJE EN EL SISTEMA DE ECUACIONES....	52
5.3	RESULTADOS.....	56
5.3.1	POTENCIAL VECTORIAL Y LÍNEAS DE FLUJO MAGNÉTICO.....	56
5.3.2	CONVERGENCIA EN LOS RESULTADOS DEL CÁLCULO DEL PAR.....	58
5.3.3	OPERACIÓN A ROTOR LIBRE EN ESTADO ESTABLE.....	60
	CONCLUSIONES.....	63
	APORTACIONES.....	63
	TRABAJOS FUTUROS.....	63
	BIBLIOGRAFÍA.....	65

ÍNDICE DE FIGURAS

Fig. 1.1	<i>H</i> y <i>B</i> en la interfaz de dos medios magnéticos.....	4
Fig. 2.1	Estator y rotor tipo jaula de ardilla.....	10
Fig. 2.2	Sección transversal del motor de inducción idealizado.....	11
Fig. 2.3	Componente <i>z</i> del potencial vectorial en el motor de inducción idealizado.....	18
Fig. 2.4	Líneas de flujo magnético en el motor de inducción idealizado.....	19
Fig. 2.5	Gráfica par-velocidad del motor de inducción idealizado.....	23
Fig. 2.6	Líneas de flujo magnético en el motor de inducción idealizado para una velocidad del rotor cercana a la velocidad síncrona	24
Fig. 3.1	División del dominio en elementos triangulares.....	26
Fig. 3.2	Discretización del motor de inducción idealizado.....	27
Fig. 3.3	Subdominio Ω_n	31
Fig. 3.4	subdominio Ω_n en la interfaz estator-entrehierro.....	35
Fig. 3.5	Componente <i>z</i> del potencial vectorial en el motor de inducción idealizado.....	38
Fig. 3.6	Líneas de flujo magnético en el motor de inducción idealizado.....	39
Fig. 3.7	Dispersidad de la matriz de rigidez.....	39
Fig. 3.8	Proceso de convergencia de la solución de las líneas de flujo magnético en el motor de inducción idealizado.....	41
Fig. 4.1	Superficie de integración en el método del tensor de Maxwell.....	44
Fig. 4.2	Vista detallada de la superficie de integración intersectando los elementos a diferentes alturas.....	45
Fig. 4.3	Discretizaciones utilizadas para calcular el par en el motor de inducción Idealizado.....	50
Fig. 5.1	Geometría y dimensiones del motor de inducción con características reale.....	51
Fig. 5.2	Detalle de la conexión de las bobinas.....	52
Fig. 5.3	Conexión de una fuente de voltaje a los devanados del estator.....	53
Fig. 5.4	Dispersidad de la matriz de rigidez aumentada.....	56
Fig. 5.5	Componente <i>z</i> del potencial vectorial en el motor con características reales....	57
Fig. 5.6	Líneas de flujo magnético en el motor con características reales.....	57
Fig. 5.7	Discretizaciones utilizadas en los resultados mostrados en las tablas 5.2 y 5.3.	59
Fig. 5.8	Gráfica par-velocidad del motor de características reales.....	60
Fig. 5.9	Gráfica par-velocidad con baja resistencia en el rotor.....	61
Fig. 5.10	Penetración de los campos magnéticos en el rotor.....	61

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 4.1	Errores porcentuales en el cálculo del par en el motor de inducción ideal.....	48
Tabla 4.2	Errores porcentuales en el cálculo de la energía magnética en el motor de inducción ideal.....	49
Tabla 5.1	Datos del motor de características reales.....	52
Tabla 5.2	Convergencia en el cálculo del par en el motor de características reales.....	58
Tabla 5.3	Convergencia en el cálculo del par sin conductividad en las barras del rotor..	59
Tabla 5.4	Resultados en el cálculo del par para distintos valores del deslizamiento.....	60

LISTA DE SÍMBOLOS

a_x, a_y, a_z	Vectores unitarios de la base canónica en coordenadas rectangulares
$\bar{a}_\rho, \bar{a}_\phi, \bar{a}_z$	Vectores unitarios de la base canónica en coordenadas cilíndricas
\bar{a}_n	Vector unitario normal a una superficie
\bar{a}_t	Vector unitario tangencial a una superficie
\bar{A}	Potencial vectorial magnético
A	Componente z del potencial vectorial magnético
\hat{A}	Fasor de la componente z del potencial vectorial magnético ($\bar{A} = \text{Re}[\hat{A}e^{j(\omega t - \beta\phi)}]\bar{a}_z$)
\hat{A}	Fasor de la componente z del potencial vectorial magnético ($\bar{A} = \text{Re}[\hat{A}e^{j\omega t}]\bar{a}_z$)
\tilde{A}	Aproximación del Fasor de la componente z del potencial vectorial magnético
\bar{B}	Densidad de flujo magnético
B_x	Componente x de la densidad de flujo magnético
$d\bar{F}$	Diferencial de fuerza
$d\bar{l}$	Diferencial de línea
$d\bar{P}$	Diferencial de par
dP	Componente z de la diferencial de par
$d\bar{s}$	Diferencial de superficie
$d\bar{v}$	Diferencial de volumen
\bar{D}	Densidad de flujo eléctrico
E	Intensidad de campo eléctrico
\bar{F}	Notación para el vector $\bar{F} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \hat{A}}{\partial x} \bar{a}_x + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \hat{A}}{\partial y} \bar{a}_y$
\bar{H}	Intensidad de campo magnético
i	Corriente eléctrica
I	Densidad de corriente superficial o laminar
I	Componente normal a un plano determinado de la densidad de corriente laminar
\hat{I}	Fasor de la densidad de corriente laminar ($I = \text{Re}[\hat{I}e^{j(\omega t - \beta\phi)}]$)
J	Densidad de corriente volumétrica
J	Componente z de la densidad de corriente volumétrica
J	Fasor de la componente z de la densidad de corriente volumétrica $J = \text{Re}[J e^{j\omega t}]\bar{a}_z$
$\{J\}, J$	Notación para vector fila o vector columna
$[K], K$	Notación para matriz
$[K]_{ij}, k_{ij}$	Entrada correspondiente al i-ésimo renglón y la j-ésima columna de la matriz $[K]$
\bar{l}	Línea o trayectoria
\bar{P}	Par
P	Componente z del par
\mathcal{P}	Valor efectivo de la componente z del par
s	Superficie
t	Tiempo
T	Indica transpuesta como superíndice en una matriz o vector
v	Volumen

V	Voltaje
W_1, W_2, W_3	Funciones de forma
W_m	Energía almacenada en forma de campo magnético
\mathcal{W}_m	Valor efectivo de la energía almacenada en forma de campo magnético
x, y, z	Terna de coordenadas rectangulares
β	Número de pares de polos en el motor de inducción ideal
Γ	Frontera o contorno de una región o dominio
Δ	Área del elemento triangular
ϵ	Permitividad eléctrica
θ	Desplazamiento angular del rotor
μ	Permeabilidad magnética
ρ, ϕ, z	Terna de coordenadas cilíndricas
ρ_s	Densidad superficial de carga eléctrica
ρ_v	Densidad volumétrica de carga eléctrica
σ	Conductividad eléctrica
Ψ	Flujo magnético
ω	Velocidad angular síncrona
Ω	Región o dominio

INTRODUCCIÓN

ANTECEDENTES Y REVISIÓN DEL TRABAJO PREVIO

La complicada geometría del motor de inducción, y de las máquinas eléctricas en general, obliga a la utilización de métodos numéricos para calcular los campos electromagnéticos en su interior.

El método del elemento finito fue introducido a la ingeniería eléctrica por Winslow y Zienkiewicz en la segunda mitad de la década de los años 1960 y rápidamente fue reconocida su efectividad. Desde entonces ha sido publicada una gran cantidad de trabajos relativos al tema. Estos trabajos se pueden dividir en dos grupos o categorías. El primer grupo corresponde a aquellos trabajos que aplican el método al estudio de una parte específica de la máquina, con el propósito de determinar un parámetro o un coeficiente del circuito equivalente de la máquina. En el segundo grupo se clasifican los trabajos que modelan la máquina eléctrica como un todo, con el objetivo de determinar el desempeño de la máquina bajo una específica condición de operación. La presente tesis se clasifica en este último grupo.

MOTIVACIÓN Y JUSTIFICACIÓN DE LA TESIS

Es de gran utilidad, sin lugar a duda, contar con una herramienta que requiera únicamente de los datos de diseño para predecir el desempeño de una máquina o dispositivo. Con el creciente avance en las técnicas de métodos numéricos y de la capacidad de los sistemas de cómputo, hoy en día esto es una realidad en el campo de la ingeniería eléctrica. En la actualidad los esfuerzos de la investigación se encausan hacia el objetivo de considerar con el mayor detalle posible los fenómenos y las variables que intervienen en el funcionamiento de las máquinas eléctricas, de tal manera que los modelos matemáticos de las máquinas eléctricas consideren más aspectos, y las características de interés para predecir su desempeño se reproduzcan de manera más precisa y más cercana a la realidad. Naturalmente, se debe tener cuidado en no considerar o modelar aspectos que tienen muy poca contribución al mejoramiento de los resultados y que incrementan en gran medida la complejidad de los cálculos.

Es ampliamente reconocido que el método del elemento finito es una técnica numérica poderosa, versátil y muy apropiada para el análisis de motores de inducción y de máquinas eléctricas en general [1-5]. Hay diferentes líneas de investigación que continúan abiertas en el análisis de máquinas eléctricas con el método del elemento finito, una de ellas es el cálculo de fuerzas y pares. No se ha encontrado aun, o no se ha dado a conocer públicamente, un método que no presente problemas en la convergencia de los resultados o alta dependencia de éstos en la discretización [6, 7].

OBJETIVO DE LA TESIS

El objetivo principal de esta tesis es estudiar el desempeño de la característica más importante del motor de inducción en operación en estado estable, el par electromagnético, considerando

con el mayor detalle posible los aspectos y variables que afectan esta característica en situaciones reales.

En esta tesis se presenta de manera ordenada y abreviada la metodología y el procedimiento realizados para la consecución de este objetivo.

ORGANIZACIÓN DE LA TESIS

La tesis consta de cinco capítulos y su organización y contenido se explican a continuación.

En el primer capítulo se abordan los conceptos de teoría electromagnética que se involucran en los siguientes capítulos. El orden en que se introducen estos conceptos es un bosquejo de la evolución del problema del cálculo de los campos electromagnéticos en regiones con geometrías complicadas.

En el capítulo dos, se describen aspectos generales del motor de inducción y posteriormente se presenta un modelo idealizado de este motor. En el resto del capítulo se calculan analíticamente el potencial vectorial, el par y la energía magnética almacenada en el modelo idealizado del motor de inducción.

En el capítulo tres, se presenta el método del elemento finito en la variante método de Galerkin y en forma paralela se utiliza para calcular el potencial vectorial en el motor de inducción idealizado.

En el capítulo cuatro, se desarrollan tres formulaciones para calcular el par basadas en la ecuación de fuerza de Lorentz, el tensor de Maxwell y el principio del trabajo virtual. Posteriormente, las tres formulaciones se aplican al modelo idealizado del motor de inducción y se realiza un análisis y una comparación, respecto a los resultados analíticos, de los resultados obtenidos.

Finalmente, en el capítulo cinco, se calcula el potencial vectorial en un motor de inducción con características reales, con el método del elemento finito, se calcula el par y se analizan los resultados para diferentes discretizaciones. Al término del capítulo se obtiene la curva par-velocidad del motor en estado estable.

1 TÓPICOS DE TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA

En este capítulo se describen los conceptos de la teoría electromagnética tales como las ecuaciones de Maxwell, ecuaciones de onda, condiciones de frontera, potenciales etc. que sirven de base para los capítulos posteriores.

1.1 ECUACIONES DE MAXWELL

El electromagnetismo ocupa una posición favorable en física e ingeniería, ya que las leyes que lo gobiernan pueden ser expresadas de manera muy concisa por un simple grupo de cuatro ecuaciones, las ecuaciones de Maxwell. Estas ecuaciones evolucionaron a través del esfuerzo de talentosos científicos, principalmente durante el siglo diecinueve [8], y forman en conjunto con las relaciones constitutivas el grupo de ecuaciones fundamentales del electromagnetismo.

Las ecuaciones de Maxwell se desarrollan a partir de leyes experimentales. La ley de Gauss para campos eléctricos establece que el flujo eléctrico total que pasa a través de una superficie cerrada es igual a la carga que encierra la superficie

$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_v \rho_v \, dv, \quad (1.1)$$

donde la superficie s es la frontera del volumen v , \vec{D} es la densidad de flujo eléctrico y ρ_v es la densidad volumétrica de carga.

A diferencia de las líneas de flujo eléctrico, las líneas de flujo magnético describen trayectorias cerradas. Esto se debe al hecho de que no es posible tener polos magnéticos aislados. Por lo tanto, el flujo magnético total que pasa a través de una superficie cerrada debe ser cero

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0, \quad (1.2)$$

donde \vec{B} es la densidad de flujo magnético.

La ley de Ampere establece que la integral de línea de la intensidad de campo magnético sobre una trayectoria cerrada es igual a la corriente encerrada por la trayectoria. De la ley de Ampere y del principio de conservación de la carga se tiene la ecuación

$$\oint_s \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s}, \quad (1.3)$$

donde la integral de línea se efectúa sobre el contorno de la superficie s , \vec{H} es la intensidad de campo magnético, \vec{J} la densidad de corriente volumétrica, o simplemente densidad de corriente, y t el tiempo.

Investigaciones realizadas por Oersted, Faraday y Henry llevaron al descubrimiento de que un campo magnético podía inducir un voltaje. Más tarde se le llamaría a este descubrimiento ley de Faraday, descrita por la siguiente ecuación

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}, \quad (1.4)$$

donde la integral de línea se realiza sobre el contorno de la superficie s y \vec{E} es la intensidad de campo eléctrico. Las ecuaciones (1.1), (1.2), (1.3) y (1.4) conforman el grupo de ecuaciones de Maxwell en forma integral. De (1.1) y del teorema de la divergencia se llega a la siguiente ecuación

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho. \quad (1.5)$$

De la misma manera, al aplicar el teorema de la divergencia a (1.2)

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (1.6)$$

Si en (1.3) se aplica el teorema del rotacional

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (1.7)$$

Al combinar (1.4) y el teorema del rotacional en la misma forma que se hizo para (1.7)

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (1.8)$$

Las ecuaciones (1.5), (1.6), (1.7) y (1.8) forman el conjunto de las ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial.

Las relaciones constitutivas son aquellas que describen las propiedades eléctricas y magnéticas de un medio y van de la mano con las ecuaciones de Maxwell.

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (1.9)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (1.10)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}. \quad (1.11)$$

Las relaciones constitutivas describen las propiedades macroscópicas del medio donde están presentes los campos electromagnéticos en términos de su permitividad (ϵ), permeabilidad (μ) y conductividad (σ). En materiales ferromagnéticos μ puede tener características altamente no lineales y en materiales anisotrópicos ϵ y μ deben ser escritas como tensores. En este trabajo se considera que las propiedades eléctricas y magnéticas de los materiales pueden ser descritas por escalares.

1.2 ECUACIONES DE ONDA PARA CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS

La solución de un sistema de múltiples ecuaciones diferenciales con múltiples variables dependientes puede ser muy difícil. A menudo es preferible sintetizar el sistema en una sola ecuación con una sola variable dependiente; aunque la nueva ecuación tenga una forma más complicada.

Las ecuaciones de onda pueden ser derivadas de las ecuaciones de Maxwell y tienen la ventaja de tratar con una sola variable electromagnética.

Si se aplica el rotacional a ambos lados de (1.7)

$$\nabla \times \nabla \times H = \nabla \times J + \nabla \times \frac{\partial D}{\partial t}. \quad (1.12)$$

Empleando $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ y $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ y asumiendo constantes la conductividad y la permitividad del medio

$$\nabla \times \nabla \times H = \sigma \nabla \times E + \epsilon \nabla \times \frac{\partial E}{\partial t}. \quad (1.13)$$

Observando que $\nabla \times E$ aparece en (1.8)

$$\nabla \times \nabla \times H = -\sigma \frac{\partial B}{\partial t} - \epsilon \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \quad (1.14)$$

Al aplicar (1.10) se llega finalmente a la ecuación de onda para el campo magnético

$$\nabla \times \nabla \times H = -\mu \sigma \frac{\partial H}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}. \quad (1.15)$$

Con un procedimiento similar se puede obtener la ecuación de onda para el campo eléctrico

$$\nabla \times \nabla \times E = -\mu \sigma \frac{\partial E}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}. \quad (1.16)$$

De la identidad vectorial $\nabla \times \nabla \times X \equiv \nabla \nabla \cdot X - \nabla^2 X$ válida para un vector X suficientemente diferenciable, las relaciones constitutivas y las ecuaciones (1.5) y (1.6), se llega a la siguiente forma alternativa para las ecuaciones de onda:

$$\nabla^2 H - \mu \sigma \frac{\partial H}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0 \quad (1.17)$$

$$\nabla^2 E - \mu \sigma \frac{\partial E}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\nabla \left(\frac{\rho_v}{\epsilon} \right). \quad (1.18)$$

Las ecuaciones (1.17) y (1.18) representan un enorme grado de simplificación matemática, comparadas con las ecuaciones de Maxwell; sin embargo, en muchas situaciones el problema es aun de gran complejidad debido principalmente a dos factores: la naturaleza vectorial de los campos electromagnéticos que obliga a resolver las ecuaciones para tres componentes en el caso más general y la discontinuidad que los campos magnéticos presentan en las interfaces. Esto se demostrará en el siguiente apartado.

1.3 DISCONTINUIDAD DE LOS CAMPOS EN LAS INTERFACES

Considere una región formada por dos medios con diferente permeabilidad como se muestra en la Fig. 1.1 (a). (1.7) en forma integral queda de la siguiente manera

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s} . \quad (1.19)$$

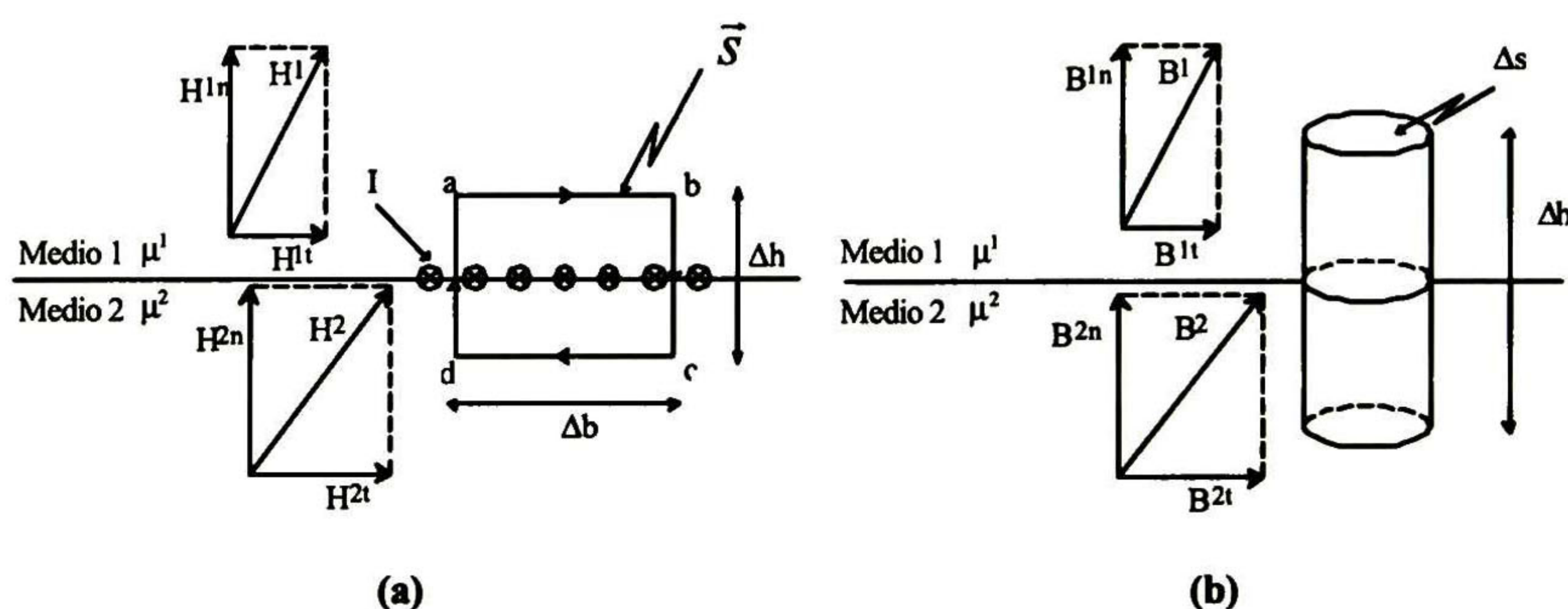


Fig. 1.1 \vec{H} y \vec{B} en la interfaz de dos medios magnéticos

Si la trayectoria cerrada $abcd$ de la Fig. 1.1 a) es suficientemente pequeña de tal manera que H , \vec{D} y la corriente superficial I pueden considerarse constantes se obtiene:

$$H_{1t} \Delta b + H_{1n} \frac{\Delta h}{2} + H_{2n} \frac{\Delta h}{2} - H_{2t} \Delta b - H_{2n} \frac{\Delta h}{2} - H_{1n} \frac{\Delta h}{2} = I \Delta b + \Delta b \Delta h |\vec{D}| \cos \theta , \quad (1.20)$$

donde se ha contemplado la posibilidad de que el campo magnético tome valores distintos en cada material. θ es el ángulo formado entre \vec{D} y \vec{s} , H_{1t} es la magnitud de la componente tangencial del campo magnético en el medio 1, H_{1n} es la magnitud de la componente normal del campo magnético en el medio 1, etc. Conforme $\Delta h \rightarrow 0$ se tiene

$$H_{1t} - H_{2t} = I , \quad (1.21)$$

(1.21) es equivalente a

$$(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \times \vec{a}_n = I \quad (1.22)$$

donde \vec{a}_n es un vector unitario normal a la superficie que separa a los dos medios y está dirigido del medio 1 al medio 2. Esto indica que la componente tangencial de \vec{H} es discontinua cuando existe corriente superficial entre los dos medios. De las relaciones constitutivas y de (1.21) encontramos que

$$\frac{B_{1t}}{\mu_1} - \frac{B_{2t}}{\mu_2} = I. \quad (1.23)$$

Ahora obsérvese la Fig. 1.1 (b), si la superficie cerrada de forma cilíndrica es suficientemente pequeña de tal manera que \vec{B} puede considerarse constante, de la ley de Gauss para campos magnéticos y, tomando en cuenta la posibilidad de que la componente normal de la densidad de flujo magnético tome valores diferentes en cada medio, puede encontrarse que

$$B_{1n}\Delta s - B_{2n}\Delta s = 0, \quad (1.24)$$

en consecuencia

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad (1.25)$$

o bien

$$\vec{a}_n \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0. \quad (1.26)$$

Es decir, la componente normal de \vec{B} es continua en la superficie que separa a los dos medios. De (1.10) y (1.25) se tiene que

$$\frac{H_{1n}}{\mu_2} = \frac{H_{2n}}{\mu_1}. \quad (1.27)$$

Lo cual indica que la componente normal de \vec{H} es discontinua en la superficie que separa a los dos medios.

Procediendo de manera similar para la intensidad de campo eléctrico y la densidad de flujo eléctrico, se obtiene

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (1.28)$$

$$\epsilon_2 D_{1t} = \epsilon_1 D_{2t}. \quad (1.29)$$

Así mismo, para las componentes normales de la intensidad de campo eléctrico y de la densidad de flujo eléctrico

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \quad (1.30)$$

$$\epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_2 E_{2n} = \rho_s, \quad (1.31)$$

donde ρ_s es densidad de carga superficial presente en la superficie que separa a los dos medios.

Para la solución de las ecuaciones de Maxwell, y en general para la solución de ecuaciones diferenciales parciales, es necesario que se especifiquen condiciones de frontera. Las ecuaciones (1.21), (1.23), (1.25), (1.27) y (1.28) a (1.31) son de gran utilidad para especificar condiciones de frontera.

1.4 POTENCIALES

Las ecuaciones de onda en términos de potenciales pueden evitar las principales desventajas que presentan las ecuaciones expresadas en función de los campos electromagnéticos, como son las discontinuidades que los campos presentan en las interfaces y el tener que resolver para varias componentes.

La densidad de flujo magnético puede ser expresada de la siguiente manera:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (1.32)$$

donde \mathbf{A} es el potencial vectorial magnético o en forma más abreviada potencial vectorial. Para un \mathbf{B} dado se puede demostrar que existe una función \mathbf{A} que satisface (1.32) ya que la densidad de flujo magnético tiene divergencia cero. Además \mathbf{A} no es única, para un \mathbf{B} dado existe un número infinito de posibles \mathbf{A} que satisfacen (1.32).

Al sustituir (1.32) en (1.8) se tiene

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (1.33)$$

El rotacional del gradiente de un escalar es idénticamente cero ($\nabla \times \nabla \phi = 0$) y la expresión que aparece entre paréntesis en (1.33) puede ser igualada al gradiente de un escalar $-\phi$. De esta manera

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi, \quad (1.34)$$

donde ϕ es llamado potencial escalar eléctrico o simplemente potencial escalar.

1.4.1 ECUACIONES DE ONDA PARA POTENCIALES

De la misma manera que los campos, los potenciales satisfacen las ecuaciones de onda. El desarrollo de estas ecuaciones se inicia a partir de la definición de potencial vectorial, ecuación (1.32). Suponga por el momento que las propiedades magnéticas de los materiales, no necesariamente lineales, pueden ser descritas por un escalar. Entonces

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{H}. \quad (1.35)$$

Aplicando el rotacional

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \right) = \nabla \times \vec{H}, \quad (1.36)$$

de las relaciones constitutivas y de (1.7)

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \right) = \sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.37)$$

Expresando el campo eléctrico en función de potenciales (ecuación (1.34))

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\sigma \nabla \phi - \epsilon \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (1.38)$$

al aplicar a (1.38) primeramente $\nabla \times (y\vec{X}) \equiv \nabla y \times \vec{X} + y(\nabla \times \vec{X})$ y posteriormente $\nabla \times \nabla \times \vec{X} \equiv \nabla \nabla \cdot \vec{X} - \nabla^2 \vec{X}$ válidas para un escalar y , y un vector \vec{X} suficientemente diferenciables se obtiene

$$\frac{1}{\mu} \nabla^2 \vec{A} - \nabla \frac{1}{\mu} \times \nabla \times \vec{A} - \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu} \nabla \nabla \cdot \vec{A} + \sigma \nabla \phi + \epsilon \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (1.39)$$

En regiones donde las propiedades electromagnéticas no dependen de la posición (1.39) se escribe

$$\frac{1}{\mu} \nabla^2 \vec{A} - \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \nabla \left(\frac{1}{\mu} \nabla \cdot \vec{A} + \sigma \phi + \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} \right), \quad (1.40)$$

obsérvese que el lado izquierdo de (1.40) toma la forma de la ecuación de onda.

De acuerdo con el teorema de Helmholtz, para que un campo vectorial esté completamente determinado, salvo por una constante, es necesario definir su divergencia y su rotacional; la divergencia de \vec{A} no se ha declarado aun y en este punto es conveniente declararla de tal manera que facilite la solución de (1.40).

El valor más simple dado a la divergencia de \vec{A} es

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0. \quad (1.41)$$

También se utiliza con frecuencia

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\mu \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (1.42)$$

esta elección tiene la ventaja de eliminar la derivada parcial respecto al tiempo que aparece en el lado derecho de (1.40). Otra posible elección es

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\mu\sigma\phi - \mu\epsilon \frac{\partial\phi}{\partial t} \quad (1.43)$$

permitiendo el desacoplamiento de (1.40) en las siguientes dos ecuaciones [8]

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.44)$$

$$\nabla^2 \phi - \mu\sigma \frac{\partial \phi}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (1.45)$$

La elección del valor de la divergencia del potencial vectorial depende del problema específico, en este estudio se le da el valor de cero simplificando considerablemente el problema como se verá en los capítulos posteriores.

1.4.2 COMPORTAMIENTO DE LOS POTENCIALES EN LAS INTERFACES

Ahora que los potenciales se han definido es conveniente analizar cómo se comportan en las interfaces. Observe la ecuación (1.34), el campo eléctrico depende del gradiente del potencial escalar, por lo tanto, el potencial escalar debe ser continuo a través de la frontera entre dos medios; de otra manera la magnitud de \vec{E} tomaría valores infinitos, lo cual es físicamente imposible.

Para analizar el comportamiento de \vec{A} en las interfaces imagine una trayectoria cerrada en la superficie de separación de dos medios, como la trayectoria $abcd$ que se muestra en la Fig. 1 (a). El flujo magnético que enlaza esta trayectoria se calcula mediante

$$\Psi = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (1.46)$$

utilizando (1.32)

$$\Psi = \int_s \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{s} \quad (1.47)$$

aplicando el teorema del rotacional

$$\Psi = \oint_{abcd} \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (1.48)$$

donde s es la superficie cuyo contorno es $abcd$. La superficie s se puede hacer tan pequeña como se desee mediante la reducción de los lados bc y da . Por lo tanto, el flujo que pasa a través de s puede hacerse arbitrariamente pequeño

$$\oint_{abcd} \vec{A} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (1.49)$$

la ecuación (1.49) se cumple sólo si la componente tangencial de \vec{A} es continua en la superficie de separación de los medios. Por lo tanto

$$(\vec{A}_1 - \vec{A}_2) \times \vec{a}_n = 0. \quad (1.50)$$

Cuando se elige $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, se puede demostrar que la componente normal de \vec{A} es continua en las interfaces. En [8] se demuestra que aún eligiendo la divergencia de \vec{A} como en (1.42) o en (1.43) la componente normal de \vec{A} sigue siendo continua. De esta manera a quedado garantizada la continuidad de los potenciales \vec{A} y ϕ en las interfaces.

1.4.3 REDUCCIÓN DE PROBLEMAS A DOS DIMENSIONES CON EL USO DE POTENCIALES

La representación de las ecuaciones en términos de los potenciales elimina el problema de las discontinuidades en las superficies de separación entre dos medios de propiedades electromagnéticas diferentes. Una ventaja adicional de utilizar potenciales, en lugar de campos, se logra en problemas donde no ocurren cambios en una dirección. Por ejemplo, en la dirección z . En este caso, el flujo magnético dependerá sólo de x y de y , y el potencial vectorial tendrá componente z únicamente [9]. En configuraciones simétricas alrededor de un eje, se presenta así mismo, la posibilidad de reducir el problema a dos dimensiones [9].

2 MODELO IDEALIZADO DEL MOTOR DE INDUCCIÓN

En este capítulo se describe el motor de inducción así como sus características principales. A continuación se presenta un modelo idealizado del motor de inducción, donde se calcula analíticamente el potencial vectorial y el par. El modelo idealizado se utilizará en capítulos posteriores para analizar, comparar y validar los resultados de formulaciones desarrolladas para calcular el par con el método del elemento finito. Al final del capítulo se calcula la energía magnética almacenada. La energía magnética almacenada es un índice muy utilizado para evaluar la exactitud en la solución de los campos electromagnéticos que se obtiene con el método del elemento finito. Por lo que será utilizada para el análisis de los resultados en los capítulos subsiguientes.

2.1 EL MOTOR DE INDUCCIÓN

El motor de inducción convierte energía eléctrica a energía mecánica y es usado en una amplia variedad de aplicaciones en la industria. La mayoría de las máquinas herramientas de un taller o fabrica son accionadas por motores de inducción, así mismo, bombas, herramientas de mano herramientas de banco (sólo por mencionar algunos ejemplos) requieren de motores de inducción para su accionamiento. Al motor de inducción se le considera como el caballo de batalla en la industria, y es el más utilizado debido a su confiabilidad y bajo costo. Estas características se combinan con buena eficiencia, aceptable capacidad para sobrecarga y un requerimiento mínimo o nulo de mantenimiento. En este estudio se trata el motor simétrico de inducción trifásico. En lo sucesivo motor de inducción se refiere al motor de inducción simétrico trifásico.

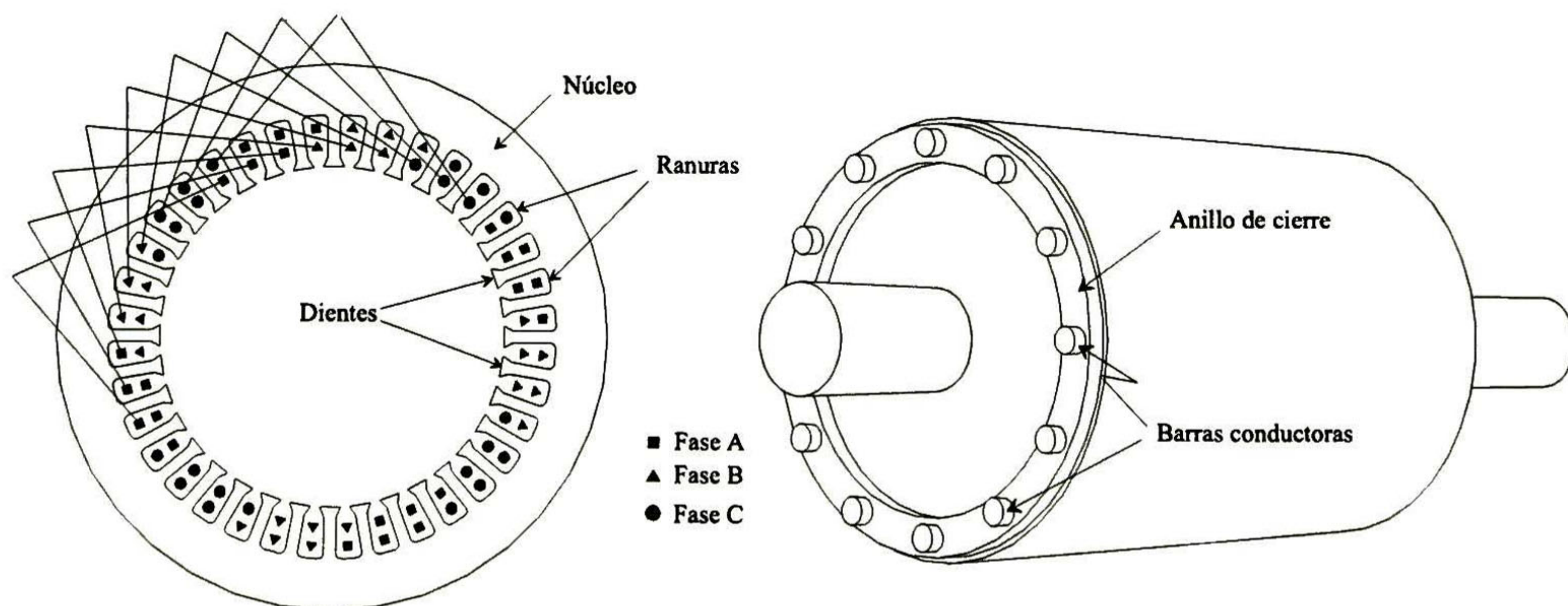


Fig. 2.1 Estator y rotor tipo jaula de ardilla

El motor de inducción consta de un estator y de un rotor el cual está montado sobre cojinetes y separado del estator por un entrehierro. Electromagnéticamente, el estator consta de un núcleo hecho de troquelados o laminaciones aisladas entre si por un barniz dieléctrico. Las laminaciones tienen ranuras en las que se empotran conductores. Estos conductores están interconectados de modo predeterminado y constituyen los devanados de la armadura. En la figura 2.1 se observa un arreglo de un devanado trifásico en el estator. Las tres fases están desplazadas 120° eléctricos entre si. Cada ranura contiene dos capas o costados de bobina. A este

devanado se le conoce como de doble capa. Además, es un devanado de cuatro polos y 36 ranuras, por lo que se tienen 3 ranuras por polo y por fase. Cada bobina tiene una separación o paso de un cuarto de circunferencia. En la práctica, el paso no es completo, dando lugar a pasos fraccionarios. El paso que se muestra en la figura 2.1 es de 8/9.

El rotor es cilíndrico y contiene, ya sea barras conductoras cortocircuitadas en los dos extremos formando lo que se conoce como jaula de ardilla (figura 2.1) o un devanado trifásico con terminales conectadas a anillos rozantes para su conexión externa como en el tipo de rotor devanado.

El devanado del estator se diseña de tal manera que al ser conectado a una fuente de voltaje trifásica produce un campo magnético rotatorio. Los detalles de la producción del campo magnético rotatorio pueden consultarse en [10, 11]. Al girar el campo magnético induce un voltaje en el rotor. El voltaje inducido hace circular corrientes en el rotor, las cuales interactúan con el campo magnético para producir un par.

2.2 MOTOR DE INDUCCIÓN IDEALIZADO

En la Figura 2.2 se muestra la sección transversal de un motor de inducción idealizado. Este modelo y un método para la solución analítica del potencial vectorial y del par se reportan en [12]. En este trabajo se sigue un procedimiento diferente para el cálculo analítico del potencial vectorial y del par. Este procedimiento, especialmente el que se desarrolla para el cálculo del par, presenta ventajas cuando los cálculos y la visualización de los resultados se realizan utilizando herramientas numéricas y de visualización como la de MATLAB.

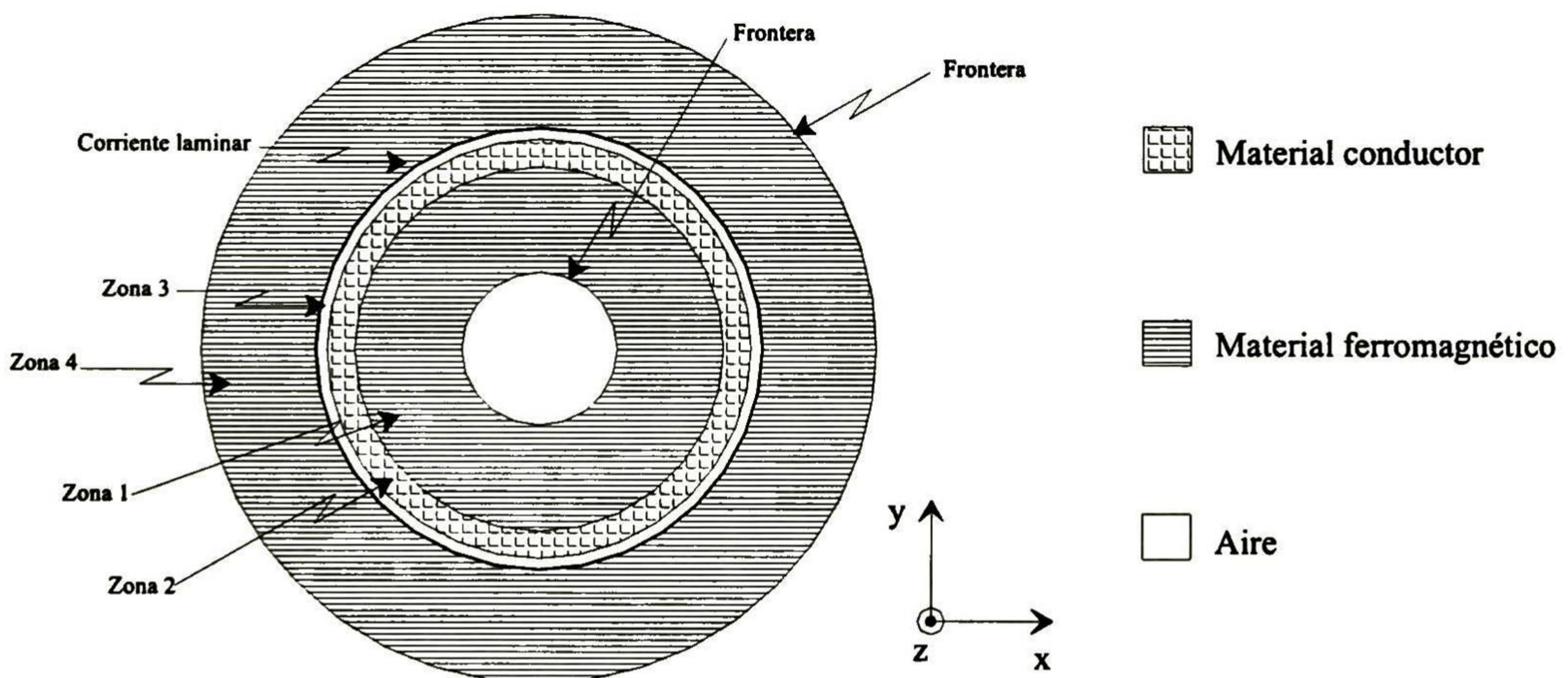


Fig. 2.2 Sección transversal del motor de inducción idealizado

Las características del motor ideal son las siguientes:

- El motor se divide en 4 zonas con materiales isotrópicos, homogéneos y lineales, la permeabilidad y conductividad se describen por escalares constantes. Las superficies son lisas eliminando el efecto de ranuras y dientes.

Para representar la fuente en el devanado del estator de un motor de inducción se utiliza una onda viajera sinusoidal de corriente laminar en la frontera estator-entrehierro.

No existen variaciones de la geometría en la dirección axial (eje z) y se desprecian los efectos de borde. Por lo tanto, es posible realizar el análisis en dos dimensiones.

- Se asume operación en estado estable.

Las zonas 1 y 4 representan el material ferromagnético laminado del rotor y estator, respectivamente. Las laminaciones de estas zonas impiden la conductividad en dirección axial. La zona 2 corresponde al anillo donde se ubica la jaula de ardilla y la zona 3 al entrehierro.

2.3 CÁLCULO DEL POTENCIAL VECTORIAL

Las características señaladas en la sección anterior permiten que los campos electromagnéticos se puedan obtener analíticamente en función de los potenciales. La ecuación que debe satisfacer el potencial vectorial en el motor de inducción idealizado es la siguiente:

$$\frac{1}{\mu} \nabla^2 \vec{A} = -J \quad (2.1)$$

La ecuación (2.1) es un caso simplificado de la ecuación de onda para el potencial vectorial estudiada en la sección 1.4.1. Se considera que la frecuencia de operación es baja, lo que permite despreciar la corriente de desplazamiento, y para la divergencia del potencial vectorial se elige $\nabla \cdot \vec{A} = 0$.

Los ejes de coordenadas se pueden ubicar de tal manera que la dirección en que fluye la corriente sea paralela al eje z (Fig. 2.2) y el potencial vectorial tendrá componente solo en z ($\vec{A} = A\vec{a}_z$) [9]. Así, (2.1) se reduce a la siguiente ecuación escalar

$$\frac{1}{\mu} \nabla^2 A = -J. \quad (2.2)$$

La densidad de corriente volumétrica se separa en dos componentes [7], densidad de corriente de la fuente (J_0) y densidad de corriente inducida (J_s); es decir

$$J = (J_s + J_0)\vec{a}_z, \quad (2.3)$$

donde $J_s = -\sigma \frac{\partial A}{\partial t}$ [7]. La corriente producida por fuentes se representa de manera laminar y se introduce como una condición de frontera, de esta manera no se tiene densidad de corriente volumétrica producida por fuentes y $J_0 = 0$. Para facilitar los cálculos se utilizan coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) y (2.2) toma la forma

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \phi^2} - \sigma \mu \frac{\partial A}{\partial t} = 0. \quad (2.4)$$

En los perímetros con el menor y el mayor radio del motor de inducción ideal (figura 2.2) se especifica la condición de frontera $A=0$. Esta condición de frontera es válida en motores de

inducción reales [6, 8]. La onda senoidal viajera de corriente laminar en la interfaz estator-entrehierro que se tiene como fuente se describe mediante $I = I a_z$, donde

$$I = \text{Re} \left[\hat{I} e^{j(\omega t - \beta \phi)} \right] \quad (2.5)$$

siendo ω la frecuencia angular, β el número de pares de polos, por lo que debe ser entero, t el tiempo e \hat{I} un número complejo.

Empleando la técnica de separación de variables se demuestra que la componente z del potencial vectorial se comporta como

$$\bar{A} = \text{Re} \left[\hat{A}(\rho) e^{j(\omega t - \beta \phi)} \right] \hat{a}_z. \quad (2.6)$$

Cabe enfatizar que \hat{A} depende solo de la distancia radial ρ . Considerando lo anterior de (2.4) se tiene

$$\rho^2 \frac{d^2 \hat{A}}{d\rho^2} + \rho \frac{d\hat{A}}{d\rho} - (j\omega\sigma\mu\rho + \beta^2) \hat{A} = 0 \quad (2.7)$$

y en zonas no conductoras (2.7) se reduce a

$$\rho^2 \frac{d^2 \hat{A}}{d\rho^2} + \rho \frac{d\hat{A}}{d\rho} - \beta^2 \hat{A} = 0, \quad (2.8)$$

(2.7) es una ecuación de Bessel y (2.8) es una ecuación de Euler. Las dos son ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden y su solución general se obtiene como la combinación lineal de dos soluciones \hat{A}_1 y \hat{A}_2 linealmente independientes

$$\hat{A} = k_a \hat{A}_1 + k_b \hat{A}_2, \quad (2.9)$$

k_a y k_b son constantes que se determinan aplicando las condiciones de frontera. En primer lugar se aborda la solución para la ecuación de Euler, ecuación (2.8). Como primera solución para esta ecuación se propone [13]

$$\hat{A}_1 = \rho^r \quad (2.10)$$

Para determinar el valor de r se sustituye (2.10) en (2.8)

$$r(r-1) + r - \beta^2 = 0. \quad (2.11)$$

Los valores de r que satisfacen (2.11) son $r_1 = \beta$ y $r_2 = -\beta$. Con estos valores de r se obtienen dos soluciones linealmente independientes. Por lo tanto, la solución general de (2.8) es

$$\hat{A} = k_a \rho^\beta + k_b \rho^{-\beta} \quad (2.12)$$

El procedimiento para la solución de (2.7) es más complejo que en el caso (2.8). En primer lugar se proponen como soluciones linealmente independientes [13]

$$\hat{A}_1 = \rho^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n \quad (2.13)$$

$$\hat{A}_2 = a \hat{A}_1 \ln \rho + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \rho^{n-2} \quad (2.14)$$

Adviértase que las soluciones particulares de (2.7) también se denotan como \tilde{A}_1 y \tilde{A}_2 . Esto se hace porque se considera menos confuso emplear la misma notación para la solución de (2.7) y (2.8) que utilizar notación distinta para las soluciones de cada ecuación.

En (2.13) y (2.14) se deben determinar x , a , a_n y c_n . Al sustituir (2.13) en (2.7) y agrupar términos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n [(n+x)^2 - \beta^2] \rho^{n+x} - j\omega\sigma\mu \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^{n+x+2} = 0 \quad (2.15)$$

desarrollando los dos primeros términos de la primera serie

$$a_0(x^2 - \beta^2)\rho^x + a_1[(x+1)^2 - \beta^2]\rho^{x+1} + \sum_{n=2}^{\infty} a_n [(n+x)^2 - \beta^2] \rho^{n+x} - j\omega\sigma\mu \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^{n+x+2} = 0. \quad (2.16)$$

La forma en que se resolverá (2.16) es la siguiente: en primer lugar se le asignan valores a x y a a_1 que nulifiquen los dos primeros términos y posteriormente se establece una relación de recurrencia para las dos sumatorias restantes tal que cada término en una sumatoria tenga su simétrico en la otra sumatoria. Con el fin de nulificar los dos primeros términos a x y a a_1 se les asignan los siguientes valores

$$\begin{aligned} x &= \beta \\ a_1 &= 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

y (2.16) se reduce a

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n [n^2 + 2n\beta] \rho^{n+\beta} - j\omega\sigma\mu \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} \rho^{n+\beta} = 0. \quad (2.18)$$

Para que se satisfaga (2.18) se debe cumplir la siguiente relación de recurrencia

$$a_n = \frac{j\omega\sigma\mu a_{n-2}}{n^2 + 2n\beta} \quad (2.19)$$

Al sustituir (2.17) en (2.19) se observa que $a_n=0$, para $n=3, 5, 7, \dots$. Haciendo $n=2m$ para $m=0, 1, 2, 3, \dots$

$$a_{2m} = \frac{j\omega\sigma\mu a_{2m-2}}{4m^2 + 4m\beta} \quad (2.20)$$

Nótese que para eliminar los primeros dos términos de (2.16) es posible hacer $x = -\beta$ en (2.17); sin embargo, (2.20) no lo permite porque el denominador de esta ecuación se hace cero. El valor de a_0 puede ser designado arbitrariamente. Al sustituir n por $2m$ y x por β en (2.13), se tendrá

$$\hat{A}_1 = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} \rho^{2m+\beta} \quad (2.21)$$

La segunda solución particular de (2.7) requiere un procedimiento distinto para cada valor de β . Por brevedad se muestra sólo el procedimiento para $\beta = 2$. El procedimiento para otros valores de β es muy similar al que se sigue para $\beta = 2$.

Sustituyendo (2.14) en (2.7), desarrollando y agrupando términos

$$2a\rho \frac{d\hat{A}_1}{d\rho} + a \ln \rho \left[\rho^2 \frac{d^2 \hat{A}_1}{d\rho^2} + \rho \frac{d\hat{A}_1}{d\rho} - (j\omega\sigma\mu\rho^2 - 4)\hat{A}_1 \right] + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n^2 - 4n)\rho^{n-2} - j\omega\sigma\mu \sum_{n=0}^{\infty} c_n \rho^n = 0. \quad (2.22)$$

En (2.22) la expresión entre corchetes del segundo término se hace cero, debido a que \hat{A}_1 es solución de (2.7). Al sustituir (2.21) en (2.22)

$$2a \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} (2m+2)\rho^{2m+2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n^2 - 4n)\rho^{n-2} - j\omega\sigma\mu \sum_{n=0}^{\infty} c_n \rho^n = 0. \quad (2.23)$$

A fin de encontrar una relación de recurrencia para los términos de las tres series que lleve a la solución de (2.23) se desarrollan los primeros términos de las dos últimas series del lado izquierdo de (2.23) y agrupan las dos últimas series.

$$2a \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} (2m+2)\rho^{2m+2} - 3c_1 \rho^{-1} - 4c_2 - j\omega\sigma\mu c_0 - (3c_3 \rho + j\omega\sigma\mu c_1)\rho + \sum_{n=4}^{\infty} [c_n (n^2 - 4n)\rho^{n-2} - j\omega\sigma\mu c_{n-2}] \rho^{n-2} = 0 \quad (2.24)$$

En (2.24) se puede asignar un valor arbitrario a la constante c_0 , por considerarlo más sencillo se elige

$$c_0 = 1 \quad (2.25)$$

de esta manera

$$c_2 = \frac{-j\omega\sigma\mu}{4}. \quad (2.26)$$

La primera serie de (2.24) no tiene potencias impares de ρ , consecuentemente, la segunda serie de (2.24) tampoco debe tenerlas. Así, $c_i = 0$, $i = 1, 3, 5, \dots$ y (2.24) se reduce a

$$2a \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} (2m+2)\rho^{2m+2} + \sum_{m=2}^{\infty} [c_{2m} (4m^2 - 4m) - j\omega\sigma\mu c_{2m-2}] \rho^{2m-2} = 0. \quad (2.27)$$

donde $m=2n$. Reagrupando series

$$\sum_{m=2}^{\infty} [c_{2m}(4m^2 - 4m) - j\omega\sigma\mu c_{2m-2} + 2aa_{2m-4}(2m-2)]\rho^{2m-2} = 0, \quad (2.28)$$

para que se satisfaga (2.28) se debe cumplir la siguiente relación de recurrencia

$$c_{2m} = \frac{-2a(2m-2)a_{2m-4} + j\omega\sigma\mu c_{2m-2}}{4m^2 - 8m}, \quad (2.29)$$

donde $m=3, 4, 5, \dots$. A c_4 se le puede asignar un valor arbitrario

$$c_4 = 1. \quad (2.30)$$

Al hacer $m=2$ en (2.28) se obtiene

$$a = \frac{\omega^2 \sigma^2 \mu^2}{16} \quad (2.31)$$

De esta manera se concluye la solución general de (2.7).

En las zonas 1, 3 y 4 la conductividad es cero. Por lo tanto, el valor fasorial de la componente z del potencial vectorial es de la forma

$$\hat{A} = k_a \rho^2 + k_b \rho^{-2} \quad (2.32)$$

Mientras que en la zona 2 se tiene

$$\hat{A} = k_a \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} \rho^{2m+2} + k_b \left[a \ln \rho \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} \rho^{2m+2} + \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m} \rho^{2m+2} \right] \quad (2.33)$$

Las constantes k_a y k_b de las diferentes zonas se determinan empleando en las interfaces las condiciones de frontera para campos magnéticos (ecuaciones (1.21) y (1.25)) y las condiciones de frontera para el potencial vectorial.

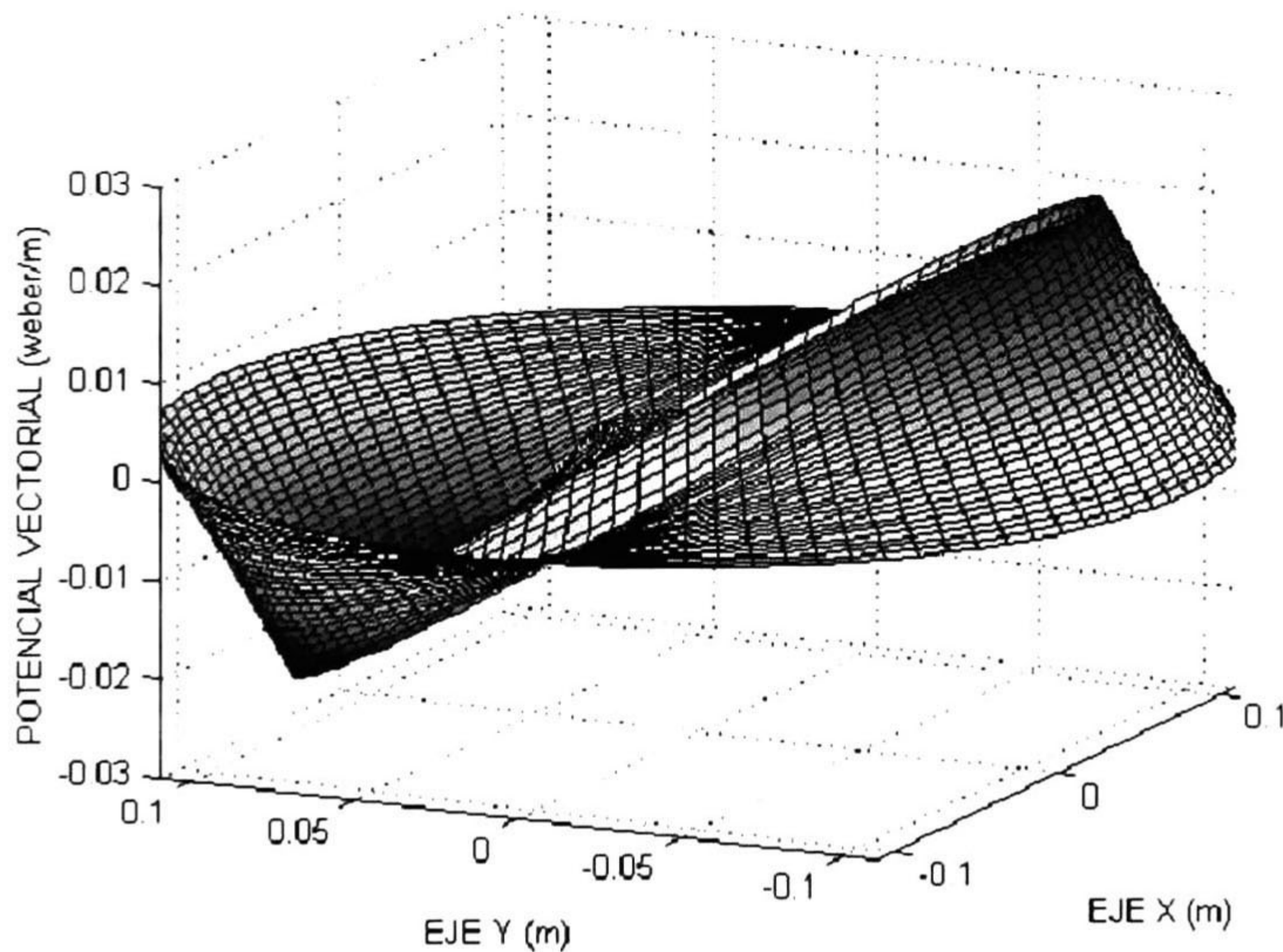
La solución para el fasor del potencial vectorial en la zona conductora del modelo idealizado del motor de inducción se da en términos de funciones de Bessel en [12]. La solución del potencial vectorial dada por (2.33) es más explícita y presenta menor dificultad para su procesamiento.

Una vez que se aplican las condiciones de frontera se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones para $k_{1a}, k_{1b}, \dots, k_{4b}$ donde el segundo subíndice indica el número de zona:

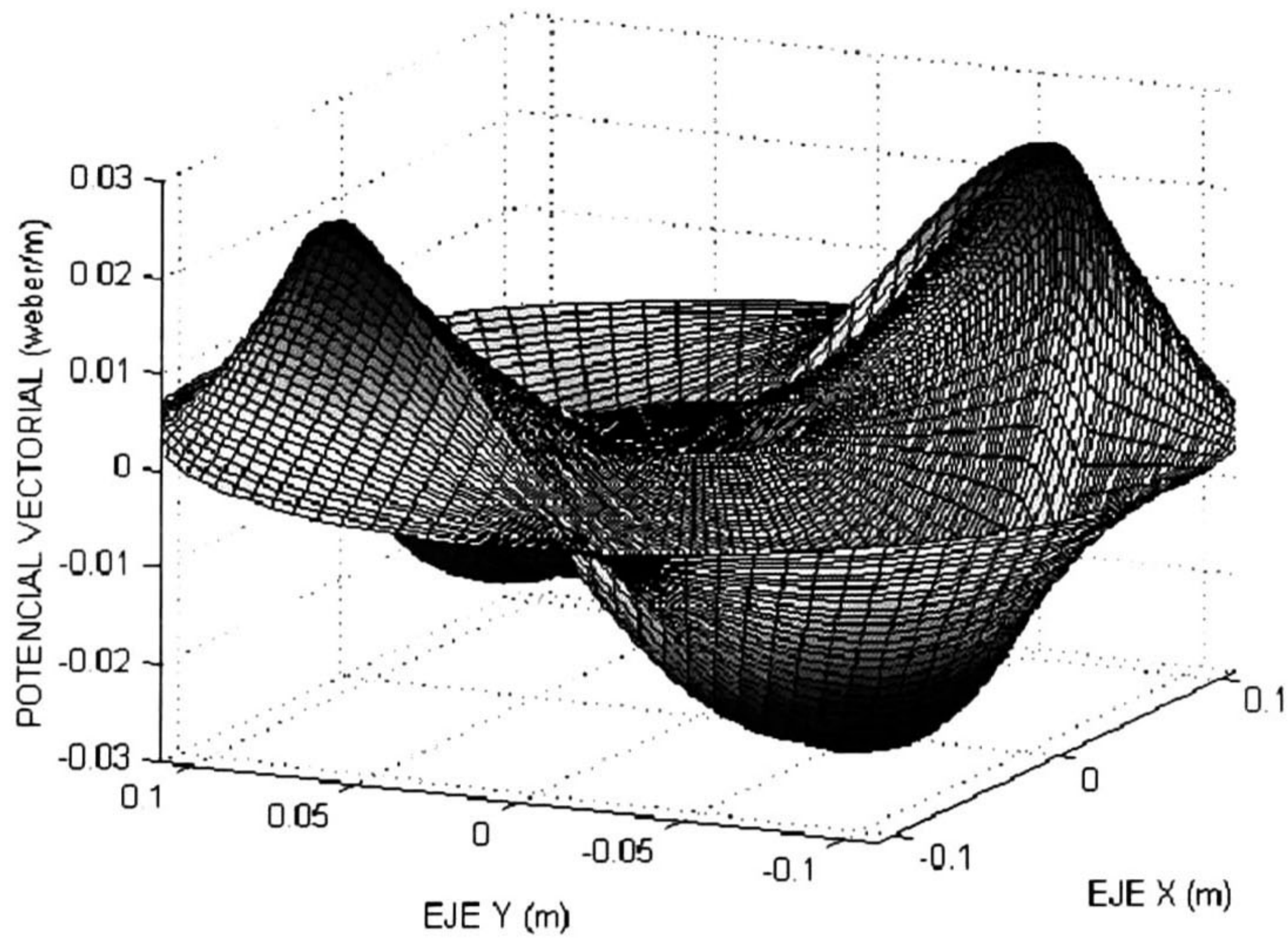
$$\begin{aligned} k_{1a} \rho_1^2 + k_{1b} \rho_1^{-2} &= 0 \\ k_{1a} \rho_2^2 + k_{1b} \rho_2^{-2} &= k_{2a} \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} \rho_2^{2m+2} + k_{2b} \left[a \ln \rho_2 \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} \rho_2^{2m+2} + \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m} \rho_2^{2m+2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mu_2[2k_{1a}\rho_2 - 2k_{1b}\rho_2^{-3}] &= \mu_1 \left\{ k_{2a} \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m}(2m+2)\rho_2^{2m+1} \right. \\
 &\quad \left. + k_{2b} \left[a \ln \rho_2 \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m}(2m+2)\rho_2^{2m+1} + a \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m}\rho_2^{2m+1} + \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m}(2m-2)\rho_2^{2m-3} \right] \right\} \\
 k_{2a} \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m}\rho_3^{2m+2} + k_{2b} \left[a \ln \rho_3 \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m}\rho_3^{2m+2} + \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m}\rho_3^{2m-2} \right] &= k_{3a}\rho_3^2 + k_{3b}\rho_3^{-2} \\
 \mu_3 \left\{ k_{2a} \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m}(2m+2)\rho_3^{2m+1} + k_{2b} \left[a \ln \rho_3 \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m}(2m+2)\rho_3^{2m+1} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + a \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m}\rho_3^{2m+1} + \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m}(2m-2)\rho_3^{2m-3} \right] \right\} = \mu_2[2k_{3a}\rho_3 - 2k_{3b}\rho_3^{-3}] \\
 k_{3a}\rho_4^2 + k_{3b}\rho_4^{-2} &= k_{4a}\rho_4^2 + k_{4b}\rho_4^{-2} \\
 \mu_3[2k_{4a}\rho_4 - 2k_{4b}\rho_4^{-3}] - \mu_4[2k_{3a}\rho_4 - 2k_{3b}\rho_4^{-3}] &= \mu_3\mu_4\hat{J} \\
 k_{4a}\rho_5^2 + k_{4b}\rho_5^{-2} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

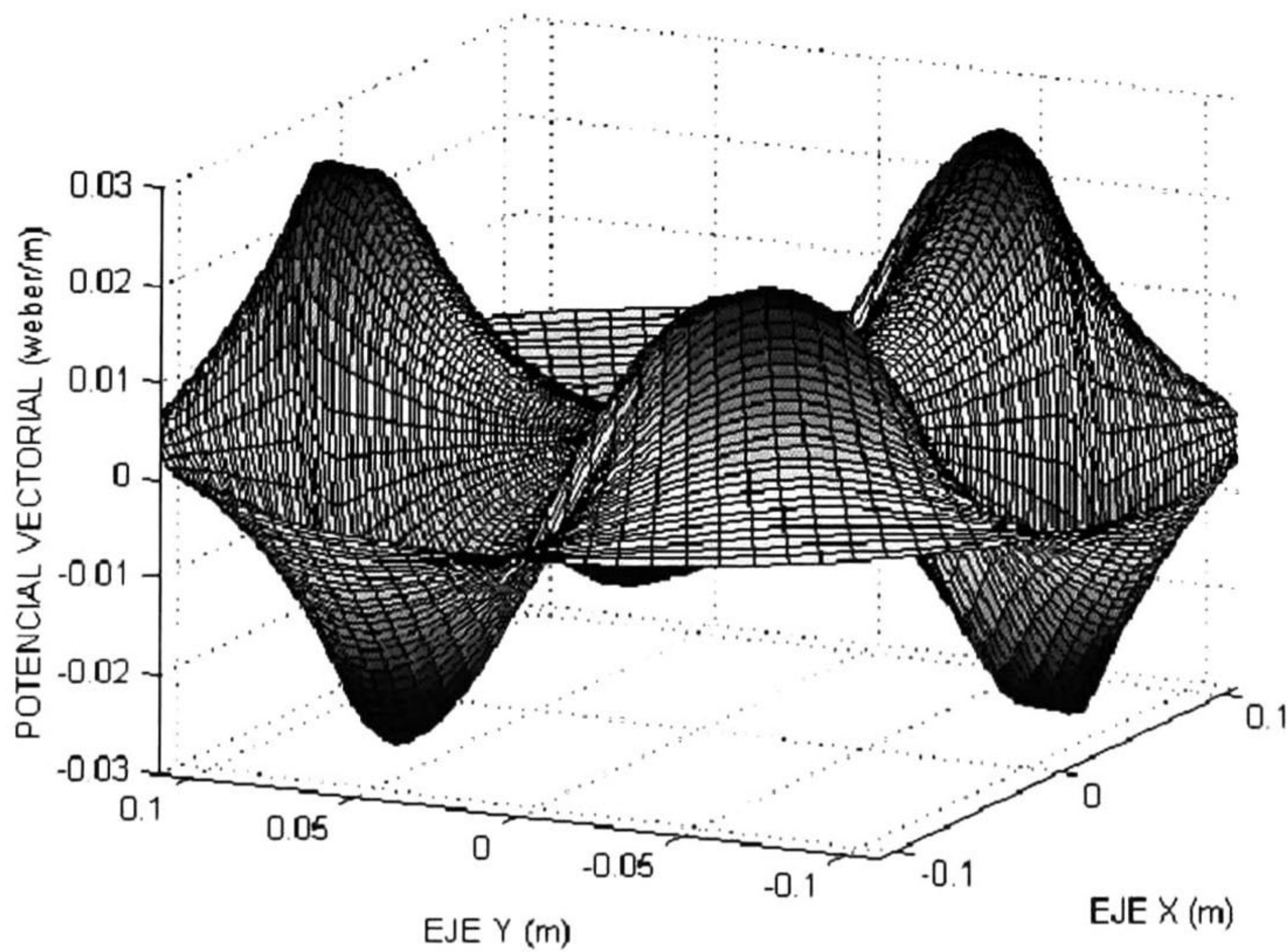
En las ecuaciones (2.34) ρ_1 es el valor del radio en la frontera interior, ρ_2 es el radio en la interfaz entre las zonas 1 y 2, etc. La condición de continuidad del potencial vectorial en interfaces y (1.25) dan lugar a las mismas ecuaciones.



a) Un par de polos



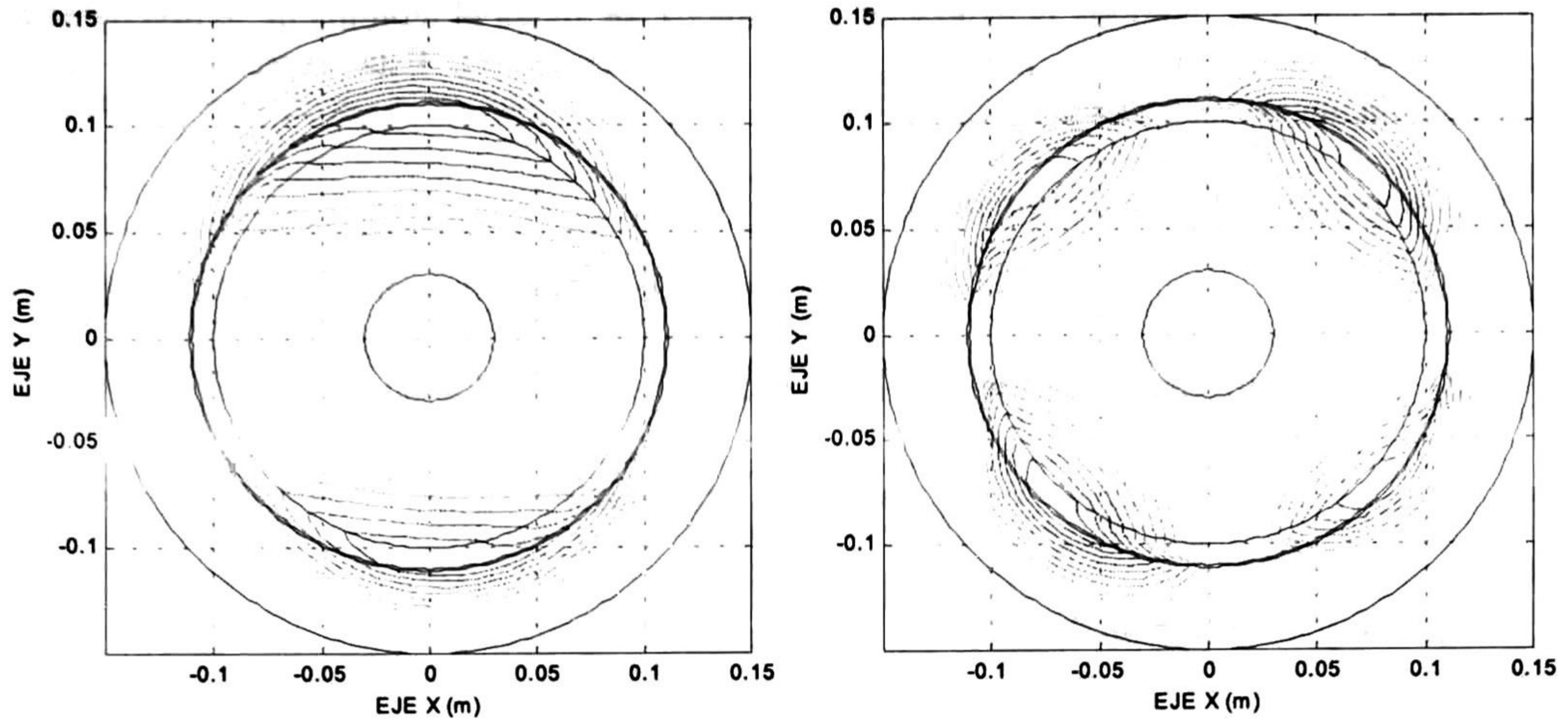
b) Dos pares de polos



c) Tres pares de polos

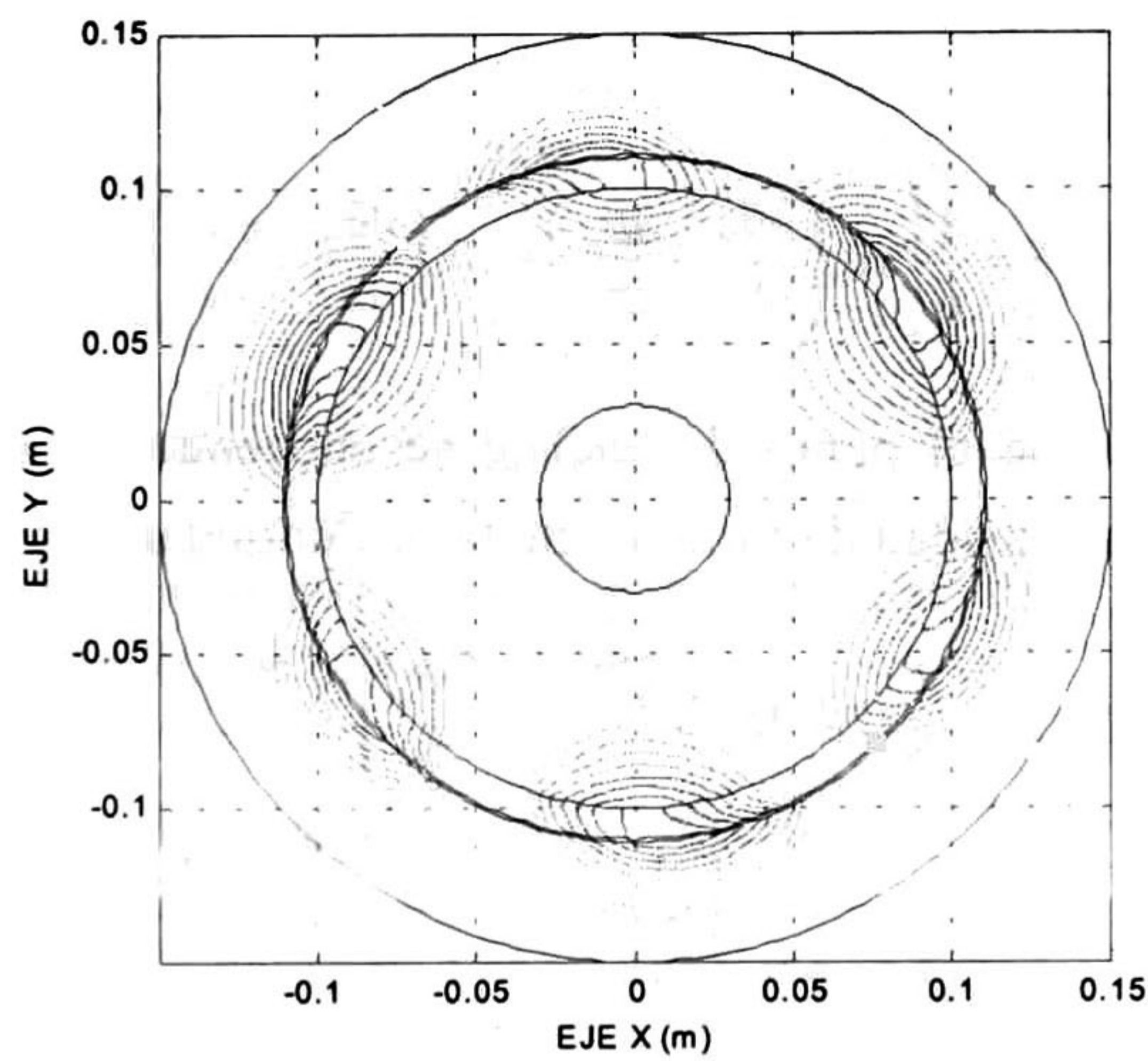
Fig. 2.3 Componente z del potencial vectorial en el motor de inducción idealizado

Existe sólo un conjunto de campos electromagnéticos que satisface las ecuaciones de Maxwell y las condiciones de frontera [14]. El conjunto de campos electromagnéticos que se obtienen de la solución para el potencial vectorial en las cuatro zonas del motor ideal mediante (1.32) y (1.34) satisface las ecuaciones de Maxwell y las condiciones de frontera, y constituye el conjunto único de campos electromagnéticos en el motor de inducción ideal.



a) Un par de polos

b) Dos pares de polos



c) Tres pares de polos

Fig. 2.4 Líneas de flujo magnético en el motor de inducción idealizado

En la figuras 2.3 a), b), y c) se muestran las gráficas del potencial vectorial para $\beta=1$, $\beta=2$ y $\beta=3$. Las líneas de flujo magnético coinciden con las curvas de nivel de la componente z del potencial vectorial. En la figura 2.4 se ilustran las líneas de flujo magnético.

2.4 CÁLCULO DEL PAR ELECTROMAGNÉTICO

Dado que el potencial vectorial adquiere una forma más sencilla en zonas no conductoras el método del tensor de Maxwell es apropiado para el cálculo del par. En este método se determina

una expresión matemática en donde la divergencia de ésta proporcione el par por unidad de volumen. Una vez obtenida la expresión matemática, se aplica el teorema de la divergencia y se calcula el par a través de una integral de superficie [6, 7]. Esta expresión se determina primeramente en coordenadas rectangulares.

De la ecuación de fuerza de Lorentz se tiene

$$d\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} dv \quad (2.35)$$

donde $d\mathbf{F}$ es el diferencial de fuerza y dv es el diferencial de volumen. Aplicando (1.7) y (1.10)

$$d\mathbf{F} = \left(\nabla \times \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \right) \times \mathbf{B} dv \quad (2.36)$$

y de (2.36) y la definición de par

$$d\mathbf{P} = \mathbf{r} \times \left[\left(\nabla \times \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \right) \times \mathbf{B} \right] dv, \quad (2.37)$$

donde \mathbf{r} es un vector dirigido del punto que sirve como eje de rotación (punto de anclaje) al punto donde se calcula el diferencial de fuerza. Desarrollando (2.37)

$$d\mathbf{P} = \frac{1}{\mu} \left[xB_x \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) + yB_y \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \right] dv \mathbf{a}_z, \quad (2.38)$$

en (2.38) se considera que el punto de anclaje se encuentra en el origen, B_x y B_y son las componentes x y y de la densidad de flujo magnético. Continuando el desarrollo de (2.38)

$$d\mathbf{P} = \frac{1}{\mu} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} (xB_x B_y) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (xB_x^2) - B_x B_y - xB_y \frac{\partial B_x}{\partial x} \right] + \left[\frac{\partial}{\partial y} (-yB_x B_y) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (yB_y^2) + B_x B_y + yB_y \frac{\partial B_y}{\partial y} \right] \right\} dv \mathbf{a}_z, \quad (2.39)$$

(2.39) es equivalente a

$$d\mathbf{P} = \frac{1}{\mu} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} (xB_x B_y) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (xB_y^2 - xB_x^2) - B_x B_y - xB_y (\nabla \cdot \mathbf{B}) \right] + \left[\frac{\partial}{\partial y} (-yB_x B_y) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (yB_y^2 - yB_x^2) + B_x B_y + yB_x (\nabla \cdot \mathbf{B}) \right] \right\} dv \mathbf{a}_z, \quad (2.40)$$

Como la divergencia de la densidad de flujo magnético es cero

$$d\mathbf{P} = \frac{1}{\mu} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[xB_x B_y + \frac{1}{2} yB_y^2 - \frac{1}{2} yB_x^2 \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[-yB_x B_y + \frac{1}{2} xB_y^2 - \frac{1}{2} xB_x^2 \right] \right\} dv \mathbf{a}_z, \quad (2.41)$$

definiendo

$$\mathcal{T} = \frac{1}{\mu} \left[xB_x B_y + \frac{1}{2} yB_y^2 - \frac{1}{2} yB_x^2 \right] \mathbf{a}_x + \frac{1}{\mu} \left[-yB_x B_y + \frac{1}{2} xB_y^2 - \frac{1}{2} xB_x^2 \right] \mathbf{a}_y \quad (2.42)$$

se puede escribir

$$dP = \nabla \cdot \mathcal{T} \, dv, \quad (2.43)$$

donde dP es la componente z del vector $d\mathcal{P}$. Integrando sobre el volumen v

$$P = \int_v \nabla \cdot \mathcal{T} \, dv. \quad (2.44)$$

Empleando el teorema de la divergencia

$$P = \oint_s \mathcal{T} \cdot d\mathbf{s}, \quad (2.45)$$

donde s es la superficie frontera de v . El par se calcula en el rotor, por lo tanto, v se refiere al volumen del rotor y s es una superficie cilíndrica que encierra al rotor pasando por el entrehierro.

En coordenadas cilíndricas se tiene para \mathcal{T} y $d\mathbf{s}$

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= T_\rho \mathbf{a}_\rho + T_\phi \mathbf{a}_\phi \\ d\mathbf{s} &= \mathbf{a}_\rho \rho d\phi \end{aligned} \quad (2.46)$$

y de (2.45)

$$P = \int_0^{2\pi} T_\rho \rho d\phi. \quad (2.47)$$

El parámetro que se desea calcular es el valor efectivo del par. Para esto se determina el valor efectivo del integrando de (2.47). De (2.42) y (2.46)

$$\begin{aligned} T_\rho \rho &= \frac{1}{\mu} \left\{ \rho^2 \cos \phi (B_\rho^2 \cos \phi \sin \phi + B_\rho B_\phi (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) - B_\phi^2 \sin \phi \cos \phi) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \rho^2 \sin \phi (B_\rho^2 \sin^2 \phi + 2B_\rho B_\phi \sin \phi \cos \phi) - \frac{1}{2} \rho^2 \sin \phi (B_\rho^2 \cos^2 \phi - 2B_\rho B_\phi \cos \phi \sin \phi + B_\phi^2 \sin^2 \phi) \right\} \cos \phi \\ &\quad + \left\{ \left[\frac{1}{2} \rho^2 \cos \phi (B_\rho^2 \sin^2 \phi + 2B_\rho B_\phi \cos \phi \sin \phi + B_\phi^2 \cos^2 \phi) - \frac{1}{2} \rho^2 \cos \phi (B_\rho^2 \cos^2 \phi - 2B_\rho B_\phi \cos \phi \sin \phi \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + B_\phi^2 \sin^2 \phi - \rho^2 \sin \phi (B_\rho^2 \sin \phi \cos \phi + B_\rho B_\phi (\cos^2 \phi \sin^2 \phi) + B_\rho B_\phi \cos^2 \phi) \right] \sin \phi \right\} \frac{1}{\mu} \end{aligned} \quad (2.48)$$

cada término en (2.48) tiene la representación general

$$G = \text{Re}[\hat{B}_1 e^{j(\omega t - 2\phi)}] \text{Re}[\hat{B}_2 e^{j(\omega t - 2\phi)}] f(\rho, \phi) \quad (2.49)$$

donde \hat{B}_1 y \hat{B}_2 son números complejos y $f(\rho, \phi)$ es una función real que depende de la distancia radial ρ y del ángulo ϕ . A continuación se procede a obtener el valor efectivo del término general de (2.48) dado por (2.49)

$$G = \frac{1}{4} f(\rho, \phi) [\hat{B}_1 \hat{B}_2^* + \hat{B}_1^* \hat{B}_2] + \frac{1}{4} f(\rho, \phi) [\hat{B}_1 \hat{B}_2 e^{2j(\omega t - 2\phi)} + \hat{B}_1^* \hat{B}_2^* e^{2j(2\phi - \omega t)}], \quad (2.50)$$

donde * significa conjugado. Al integrar (2.50) respecto al tiempo sobre periodos completos, la contribución del segundo término es nula y el valor efectivo es

$$\mathcal{G} = \frac{1}{4} f(\rho, \phi) [\hat{B}_1 \hat{B}_2^* + \hat{B}_1^* \hat{B}_2], \quad (2.51)$$

o bien

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2} f(\rho, \phi) \operatorname{Re}(\hat{B}_1 \hat{B}_2^*). \quad (2.52)$$

Por lo tanto, (2.4) en valor efectivo toma la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_p \rho = \frac{1}{\mu} \left\{ \left[\rho^2 \cos \phi \left(\frac{1}{2} \operatorname{Re}[\hat{B}_\rho \hat{B}_\rho^*] \cos \phi \operatorname{sen} \phi + \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\hat{B}_\rho \hat{B}_\phi^*] (\cos^2 \phi - \operatorname{sen}^2 \phi) - \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\hat{B}_\phi \hat{B}_\phi^*] \operatorname{sen} \phi \cos \phi \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \rho^2 \operatorname{sen} \phi \left(\frac{1}{2} \operatorname{Re}[\hat{B}_\rho \hat{B}_\rho^*] \operatorname{sen}^2 \phi + \operatorname{Re}[\hat{B}_\rho \hat{B}_\phi^*] \operatorname{sen} \phi \cos \phi \right) - \frac{1}{2} \rho^2 \operatorname{sen} \phi \left(\frac{1}{2} \operatorname{Re}[\hat{B}_\rho \hat{B}_\rho^*] \cos^2 \phi \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \operatorname{Re}[\hat{B}_\rho \hat{B}_\phi^*] \cos \phi \operatorname{sen} \phi + \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\hat{B}_\phi \hat{B}_\phi^*] \operatorname{sen}^2 \phi \right) \right] \cos \phi \left\} + \frac{1}{\mu} \left\{ \left[\frac{1}{2} \rho^2 \cos \phi \left(\frac{1}{2} \operatorname{Re}[\hat{B}_\rho \hat{B}_\rho^*] \operatorname{sen}^2 \phi \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \operatorname{Re}[\hat{B}_\rho \hat{B}_\phi^*] \cos \phi \operatorname{sen} \phi + \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\hat{B}_\phi \hat{B}_\phi^*] \cos^2 \phi \right) - \frac{1}{2} \rho^2 \cos \phi \left(\frac{1}{2} \operatorname{Re}[\hat{B}_\rho \hat{B}_\rho^*] \cos^2 \phi - \operatorname{Re}[\hat{B}_\rho \hat{B}_\phi^*] \cos \phi \operatorname{sen} \phi \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\hat{B}_\phi \hat{B}_\phi^*] \operatorname{sen}^2 \phi \right) - \rho^2 \operatorname{sen} \phi \left(\frac{1}{2} \operatorname{Re}[\hat{B}_\rho \hat{B}_\rho^*] \operatorname{sen} \phi \cos \phi + \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\hat{B}_\rho \hat{B}_\phi^*] (\cos^2 \phi \operatorname{sen}^2 \phi) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\hat{B}_\phi \hat{B}_\phi^*] \cos^2 \phi \right) \right] \operatorname{sen} \phi \left\} \right\} \quad (2.53) \end{aligned}$$

Aplicando (2.47) se concluye que el valor efectivo del par es:

$$\mathcal{P} = \operatorname{Re} \left[\frac{\pi \rho^2 \hat{B}_\rho \hat{B}_\phi^*}{\mu} \right] \quad (2.54)$$

La ecuación (2.54) pone de manifiesto el grado de simplificación en el cálculo del par con el método del tensor de Maxwell. Un método alternativo para calcular el par es mediante la ecuación de fuerza de Lorentz. Sin embargo, el cálculo del par con la ecuación de fuerza de Lorentz, implica integraciones de productos de series infinitas si se utiliza la solución del fador del potencial vectorial en la región conductora del modelo idealizado del motor de inducción dada por (2.33), o más complicado aún, la integración de productos de funciones de Bessel si se emplea la solución obtenida en [12].

Con los parámetros que se especifican a continuación se obtiene un valor para el par electromagnético de 1.6846×10^4 n-m: $\beta = 2$, $\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma_4 = 0$, $\sigma_2 = 1.16 \times 10^7$, $\mu_1 = \mu_4 = \mu_0 \times 10^4$, $\mu_2 = \mu_3 = \mu_0$; a los radios se les asignaron los valores de 0.030, 0.100, 0.110, 0.111, 0.150. Todas las cantidades están en unidades del sistema internacional. Los subíndices se refieren al número

de zona. A la fuente se le dio un valor pico de 10^6 amperes por metro y una frecuencia de 60 hertz.

2.5 CÁLCULO DE LA ENERGÍA ALMACENADA EN FORMA DE CAMPO MAGNÉTICO

La energía almacenada en el campo magnético se calcula como [15, 16, 17]

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \, dv, \quad (2.55)$$

sustituyendo (1.32) y la expresión para el potencial vectorial dada por (2.6) en (2.55)

$$W_m = \frac{\pi}{2\mu} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \text{Re} \left[\frac{\beta}{\rho^2} \hat{A} \hat{A}^* + \frac{d\hat{A}}{d\rho} \frac{d\hat{A}^*}{d\rho} \right] \rho \, d\rho. \quad (2.56)$$

El valor fasorial de la componente z del potencial vectorial, es dado por (2.32) y (2.33) en zonas conductoras y no conductoras, respectivamente.

Con los parámetros especificados en la sección anterior se obtienen los siguientes valores de la energía magnética almacenada: zona No. 1: 0.145; zona No. 2: 1,006.96; zona No. 3: 248.06; y zona No. 4: 0.294. Las unidades son Joules.

2.6 CONDICIÓN DE OPERACIÓN CON ROTOR LIBRE EN ESTADO ESTABLE

Cuando se considera el caso de rotor bloqueado la frecuencia de los campos electromagnéticos es la misma en el rotor y en el estator. En operación en estado estable la frecuencia de los campos en el rotor debe ser multiplicada por el factor de deslizamiento [6, 10, 11]:

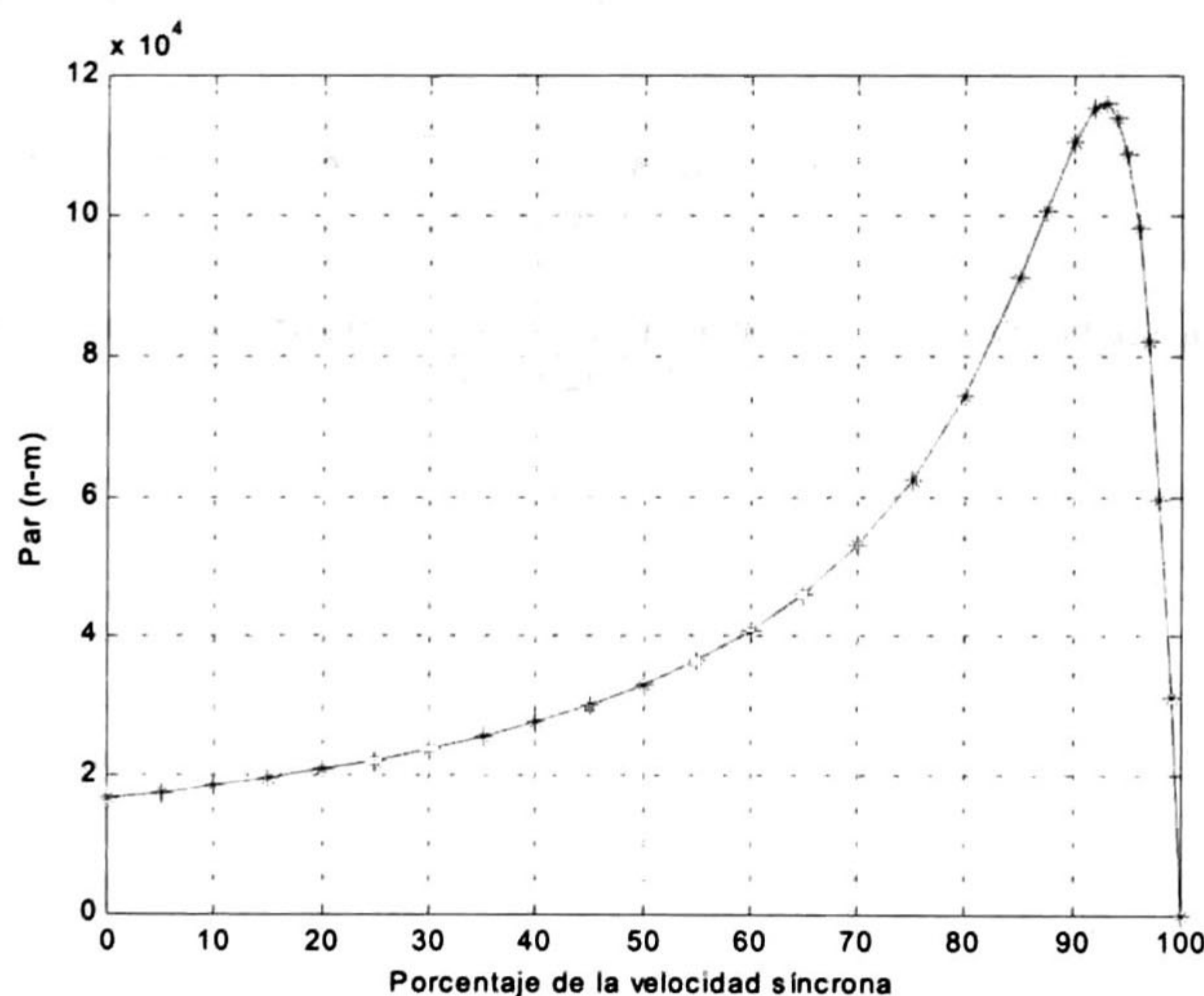


Fig. 2.5 Gráfica del par-velocidad en el motor de inducción idealizado

$$s = \frac{\omega/\beta - \omega_r}{\omega/\beta}, \quad (2.57)$$

donde ω_r es la velocidad del rotor y la cantidad ω/β es la velocidad síncrona.

En la figura 2.5 se muestra la curva par-velocidad en el motor de inducción ideal calculada con los parámetros dados en la sección 2.3. Como se puede observar es una curva típica par-velocidad para un motor de inducción de baja resistencia en la jaula o en el devanado del rotor.

Cuando el rotor gira se reduce la frecuencia del campo magnético en éste. En la figura 2.6 se muestran las líneas de flujo magnético para una velocidad del rotor próxima a la velocidad síncrona. Al comparar con la figura 2.3 b) se puede observar que se disminuye el efecto piel (por la forma de las líneas de flujo en la región conductora) debido a la baja frecuencia del campo magnético en el rotor.

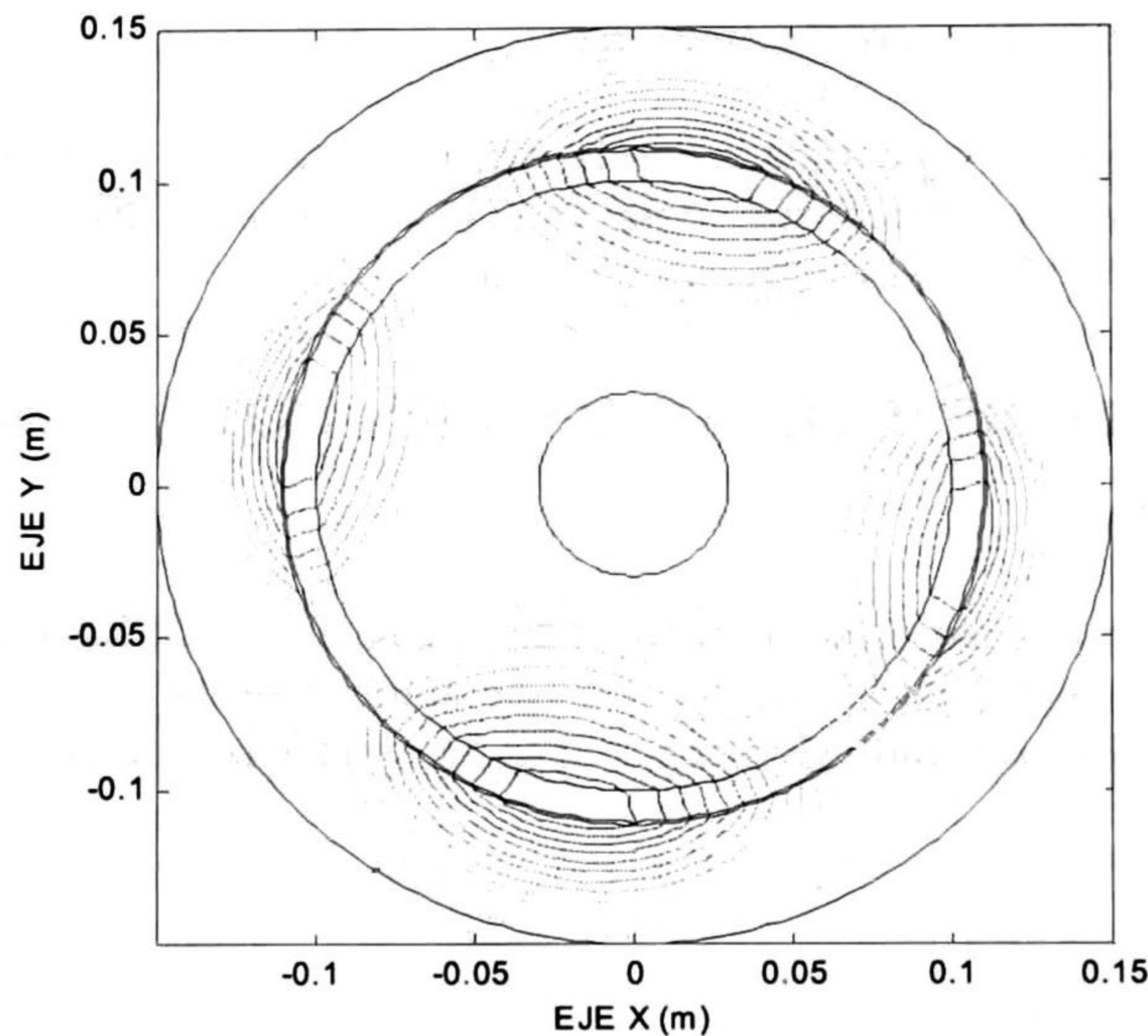


Fig. 2.6 Líneas de flujo magnético en el motor de inducción idealizado para una velocidad del rotor cercana a la velocidad síncrona

3 EL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO

El método del elemento finito es una técnica numérica utilizada para resolver ecuaciones diferenciales parciales y ordinarias. Fue propuesto por primera vez en la década de los años 1940. En la actualidad se le utiliza en muchas ramas de la ingeniería, ciencia y matemáticas aplicadas; tales como mecánica de sólidos, transferencia de calor, mecánica de fluidos, acústica, física de estado sólido y mecánica cuántica; por supuesto se aplica también en electromagnetismo e ingeniería eléctrica.

En este capítulo se describe el método del elemento finito en una de las variantes de más amplia utilización en la actualidad, el método de Galerkin. Simultáneamente se aplica para calcular el potencial vectorial en el motor de inducción idealizado.

3.1 FUNDAMENTOS DEL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO

El problema consiste en determinar la solución de la ecuación diferencial parcial que gobierna en el motor de inducción ideal, ecuación (2.2), que en coordenadas rectangulares resulta

$$-\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial A}{\partial t} = J_0. \quad (3.1)$$

Aunque $J_0 = 0$ en el motor de inducción ideal, se contempla el caso mas general $J_0 \neq 0$, dado que en el último capítulo de este trabajo se analizará con un motor de inducción de características reales. A la región o dominio de interés se le denota como Ω y al contorno o frontera de Ω se le denota como Γ

De la ecuación (2.6) se concluye que la componente z del potencial vectorial en el motor de inducción ideal se describe por

$$A = \text{Re}[\hat{A}(x, y)e^{j\omega t}]. \quad (3.2)$$

La ecuación (3.2) es válida para describir el potencial vectorial en motores de inducción reales excitados por fuentes senoidales, operando en estado estable [6, 7]. Al combinar (3.1) y (3.2)

$$-\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \hat{A}}{\partial x^2} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \hat{A}}{\partial y^2} + j\omega\sigma\hat{A} = J_0. \quad (3.3)$$

En (3.3) la condición de frontera es de Dirichlet con $\hat{A} = 0$ [6, 8].

El objetivo del método del elemento finito es determinar de manera aproximada una función que satisfaga (3.3) y las condiciones de frontera. Esto se realiza dividiendo o discretizando el dominio Ω en subdominios o elementos $\Omega_{(e)}$. En cada uno de ellos se propone como solución una función sencilla, con coeficientes no especificados. Estos coeficientes dan origen a un número finito de grados de libertad en Ω . Posteriormente, se genera un sistema de ecuaciones algebraicas, vía método de Ritz o método de Galerkin, cuyas incógnitas son los

coeficientes no especificados de las soluciones de prueba elementales. La solución del sistema de ecuaciones algebraicas finaliza la aproximación de $\lambda(x,y)$. Este procedimiento puede ser dividido en los siguientes pasos.

1. División del dominio en elementos
2. Postulación de la función tentativa con coeficientes indeterminados o libres
3. Aplicación de un criterio de optimización para formular el sistema de ecuaciones
4. Solución del sistema de ecuaciones

A continuación se aborda en detalle cada uno de estos pasos.

3.1.1 DIVISIÓN DEL DOMINIO EN ELEMENTOS

La división o discretización del dominio es el primero y tal vez el paso más importante ya que los requerimientos en memoria y tiempo de cómputo así como la exactitud de la solución, dependen de la manera en que esta se lleve a cabo [18].

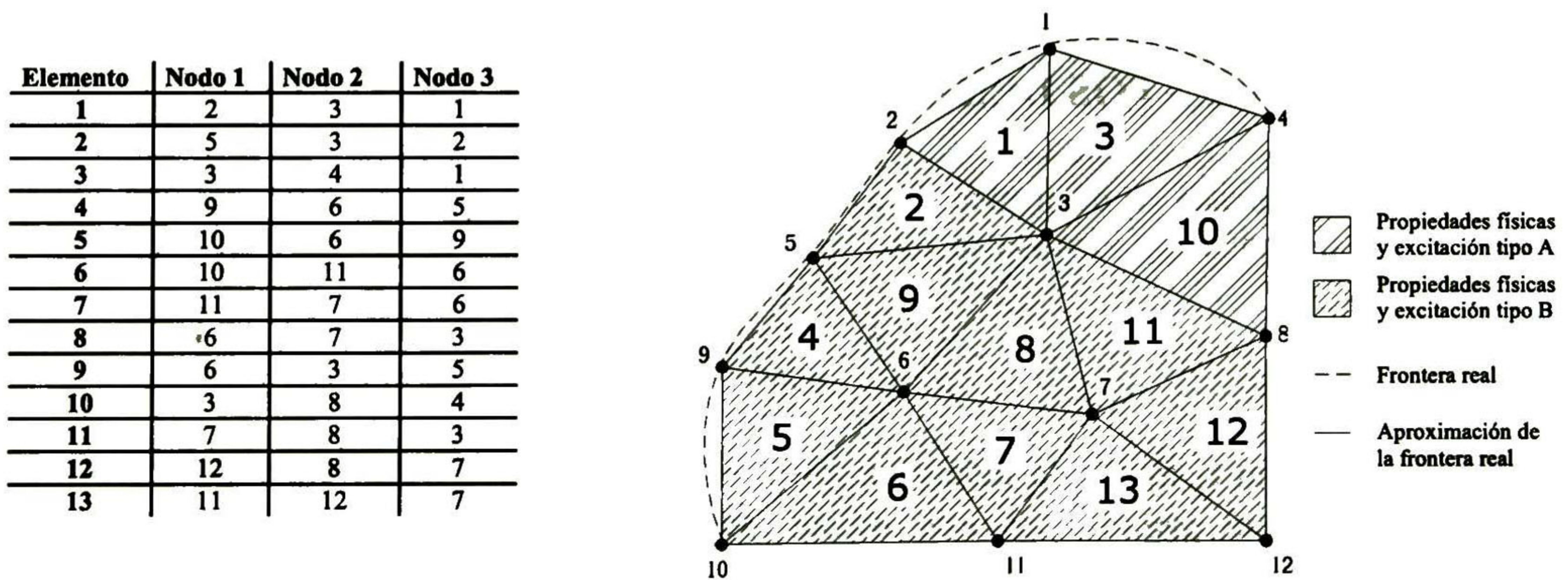


Fig. 3.1 División del dominio en elementos triangulares

Los elementos en que se divide el dominio pueden tomar diferentes formas geométricas [19, 20]. Generalmente se elige la forma triangular, entre otras razones, porque el triángulo es la figura geométrica bidimensional más simple. La subdivisión se realiza de manera tal que no exista traslape de elementos ni huecos en el dominio Ω . Si en Ω existen regiones con excitación o propiedades físicas distintas, un elemento no puede ser colocado tomando parte de dos regiones diferentes, ya que posteriormente se asumirán mismas propiedades físicas y excitación en la función de prueba asociada a éste elemento. A manera de ejemplo, un triángulo estará mal colocado si toma parte del entrehierro y parte del material ferromagnético del estator. Para mejorar la exactitud en la solución es aconsejable evitar, en la medida que sea posible, triángulos con ángulos internos muy agudos; procurando que se aproximen a triángulos equiláteros [9, 18]. Las fronteras curvas se aproximan mediante pequeños segmentos rectos, en los que se colocan los lados de los elementos. Esta aproximación puede no ser necesaria si se usan elementos isoparamétricos de mayor orden [19].

No es un requerimiento que el mallado sea uniforme. Así, donde se prevé dificultad para que la función de prueba aproxime adecuadamente la solución, pueden utilizarse elementos más pequeños.

Los elementos y los nodos se enumeran a fin de identificarlos. A cada nodo se le asignan dos números, uno referente al número local dentro del elemento (de 1 a 3) y el otro referente al número global de nodo en el dominio Ω (de 1 a N , siendo N el número total de nodos en Ω). En [7] se proponen estrategias para la generación del mallado en motores de inducción. A cada elemento se le asigna sólo un número de 1 a M si M es el número total de elementos triangulares en Ω .

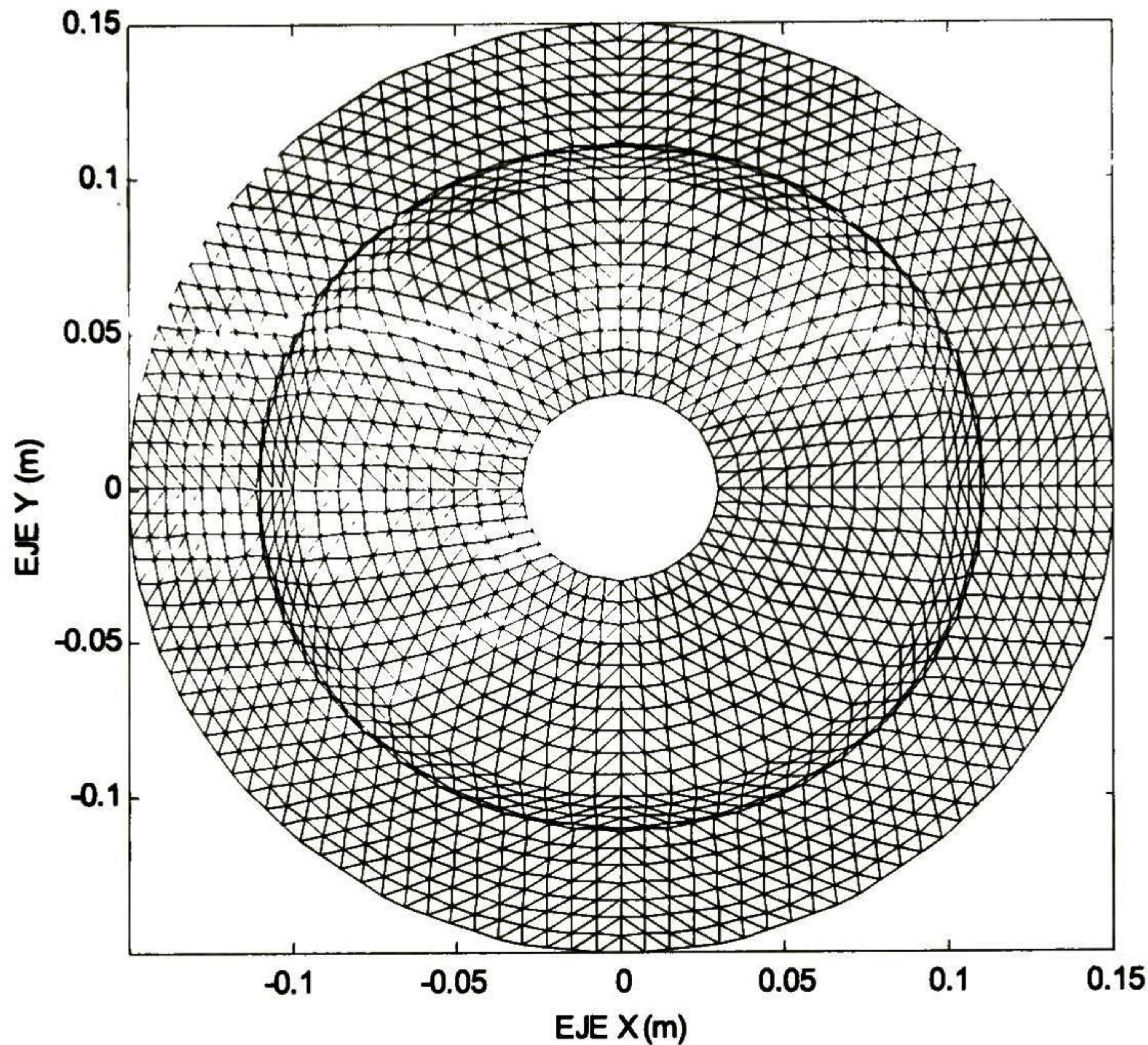


Fig. 3.2 Discretización del motor de inducción idealizado (3444 elementos triangulares)

La calidad de la discretización del dominio es limitada por los recursos de cómputo disponibles y la geometría del problema en cuestión. Discretizaciones finas generan soluciones más exactas; sin embargo, como se pondrá de manifiesto en secciones posteriores, una discretización fina implica la solución de un sistema de ecuaciones grande que quizá no pueda ser procesado por el equipo de cómputo en un tiempo razonable. En el motor de inducción la región del entrehierro es particularmente problemática (Figura (3.2)), ya que su estrechez obliga a utilizar elementos pequeños. El número de elementos para discretizar la región puede reducirse si se emplean elementos con ángulos internos agudos ahorrando así recursos de cómputo; no obstante, se pierde exactitud en la solución. En la discretización de la solución se debe buscar un equilibrio entre los recursos de cómputo disponibles y la exactitud en la solución.

3.1.2 POSTULACIÓN DE LAS FUNCIONES DE PRUEBA

El segundo paso del método del elemento finito, es la selección de la función $\tilde{A}(x,y)$, como aproximación de la solución desconocida $\hat{A}(x,y)$. La función $\tilde{A}(x,y)$ se compone de una suma de funciones elementales $\tilde{A}_e(x,y)$

$$\tilde{A}_e(x, y; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \begin{cases} 0 & \text{fuera del } e\text{-ésimo elemento} \\ \alpha_1 W_1(x, y) + \alpha_2 W_2(x, y) + \dots + \alpha_m W_m(x, y) & \text{en el } e\text{-ésimo elemento} \end{cases} \quad (3.4)$$

donde W_1, W_2, \dots, W_m son conocidas y se les llama *funciones tentativas, de prueba o de forma* [20]. Los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ no se especifican y serán las incógnitas al formular el sistema de ecuaciones algebraicas mediante el método de Ritz o el método de Galerkin. En lo sucesivo, por brevedad, se omitirá señalar que fuera del dominio del e -ésimo elemento la función \tilde{A}_e es cero.

Sobre las funciones tentativas se realizan gran número de operaciones. Por lo que es importante que sean funciones sencillas, como polinomios de primero o segundo grado o de un orden mayor. Los polinomios de mayor orden permiten la obtención de soluciones más precisas; sin embargo, dan lugar a formulaciones más complicadas. Por este hecho, el polinomio lineal o de primer grado es el más popular y es el que se adopta en este trabajo. Ahora que las funciones tentativas W_1, W_2, \dots, W_m se han elegido como polinomios de primer grado

$$\tilde{A}_e(x, y; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i (a_i x + b_i y + c_i), \quad (3.5)$$

donde $W_i = a_i x + b_i y + c_i$. La razón por la que se eligen tres funciones tentativas con sus respectivos tres coeficientes indeterminados es obvia, en un polinomio o suma de polinomios de primer grado en x y en y existen sólo tres grados de libertad.

Al elemento triangular y al polinomio de primer grado propuesto como solución aproximada se les llama en conjunto *elemento triangular de primer orden*.

El método del elemento finito requiere que los polinomios en el lado derecho de (3.5) sean escritos en forma de *polinomios de interpolación o polinomios de Lagrange* [19]. Esto es, que cada coeficiente α_i $i=1, 2, 3$, debe tomar el valor de \hat{A} en un punto específico del elemento. A estos puntos se les llama *nodos*. En el elemento triangular de primer orden se eligen los vértices como nodos. Si (x_j, y_j) son las coordenadas del j -ésimo nodo la condición de interpolación requiere

$$W_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (3.6)$$

De (3.5) y la condición (3.6)

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.7)$$

De (3.7) y (3.5)

$$W_i = \frac{1}{2\Delta} (a_i x + b_i y + c_i), \quad (3.8)$$

donde $a_i = y_j - y_k$, $b_i = x_k - x_j$ y $c_i = x_j y_k - x_k y_j$. i, j y k toman respectivamente los valores de 1, 2 y 3 de manera cíclica. Δ es el área del elemento: $\Delta = \frac{1}{2}(a_1 b_2 - a_2 b_1)$. Una característica importante que cabe señalar, es que el i -ésimo polinomio de interpolación se hace cero evaluado en los puntos del lado opuesto al i -ésimo nodo.

3.1.3 APLICACIÓN DE UN CRITERIO DE OPTIMIZACIÓN

El siguiente paso es la formulación del sistema de ecuaciones. Para ello, existen muchos métodos [19, 20]; los de más amplia utilización en la actualidad son el método variacional de Ritz y el método de Galerkin. Los dos métodos son igualmente efectivos, dado que en las situaciones donde es posible utilizar el método de Ritz, ambos dan origen al mismo sistema de ecuaciones [19, 20]; no obstante, con el método de Galerkin es más evidente la manera como deben incluirse al modelo matemático las fuentes de corriente laminar y se considerará éste último para la formulación del sistema de ecuaciones.

3.1.3.1 FORMULACIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES MEDIANTE EL MÉTODO DE GALERKIN

El método de Galerkin pertenece al grupo de métodos de residuales ponderados [19] y utiliza directamente la ecuación diferencial que rige en el dominio Ω , a diferencia del método variacional de Ritz donde el problema se transforma y es formulado en términos de una expresión variacional equivalente a la ecuación diferencial que rige en el dominio Ω [18, 20].

\tilde{A} no es la solución exacta de (3.3). Entonces

$$R = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial x^2} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial y^2} + j\omega\sigma\tilde{A} - J_0 \neq 0, \quad (3.9)$$

donde R es llamado *residual*. En el mejor de los casos $\tilde{A} = \hat{A}$ y $R = 0$. Con el propósito de obligar al residual a tomar el valor de cero, se hace

$$\int_{\Omega} WR \, d\Omega = 0, \quad (3.10)$$

donde W es una función elegida de antemano para ponderar el residual R . Obsérvese que si $W \neq 0$ en Ω , (3.10) se puede satisfacer si $R = 0$ en todo el dominio Ω . La medida con que el residual R se aproxima a cero depende de la función W elegida y del sistema de ponderación aplicado. En el método de Galerkin se toman las funciones de forma W_i como funciones de ponderación [18, 19, 20]. Aunque los \hat{A}_i en los nodos de la frontera están determinados por las condiciones de frontera, considere por el momento que todos los \hat{A}_i $i = 1, 2, \dots, N$ son parámetros libres. Deben formularse N ecuaciones que tienen como incógnitas los \tilde{A}_i $i = 1, 2, \dots, N$. En primer lugar se efectúa una agrupación de elementos triangulares para formar N subdominios Ω_n $n = 1, 2, \dots, N$ en el dominio Ω , cada uno de estos subdominios estará formado por los L elementos que comparten el n -ésimo nodo (figura 3.3). Adviértase que habrá superposición de subdominios, que el número de nodos será igual al de subdominios y que cada elemento pertenecerá a tres subdominios. Sea W_{en} la función tentativa del e -ésimo elemento perteneciente al n -ésimo subdominio, tal que para esta función se tiene $W_{en}(x_n, y_n) = 1$, donde (x_n, y_n) son las

coordenadas del n -ésimo nodo. El sistema de N ecuaciones con incógnitas \hat{A}_i , $i=1,2,\dots,N$ se obtiene de la ponderación de residuales

$$\int_{\Omega} \sum_{e=1}^L W_{en} R_e d\Omega = \sum_{e=1}^L \int_{\Omega_e} W_{en} R_e d\Omega = 0 \quad n=1,2,\dots,N. \quad (3.11)$$

Designando como \mathbf{R}_e al e -ésimo término de la sumatoria en la igualdad central de (3.11), para el n -ésimo nodo

$$\mathbf{R}_e = \int_{\Omega_e} W_{en} R_e d\Omega. \quad (3.12)$$

Sustituyendo (3.9) en (3.12)

$$\mathbf{R}_e = \iint_{\Omega_e} W_{en} \left[-\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{A}_e}{\partial x^2} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{A}_e}{\partial y^2} + j\omega\sigma\tilde{A}_e - \hat{J}_0 \right] dx dy. \quad (3.13)$$

De acuerdo a la regla de derivación para el producto de dos funciones f_1 y f_2 : $\frac{\partial}{\partial t}(f_1 f_2) = f_1 \frac{\partial f_2}{\partial t} + f_2 \frac{\partial f_1}{\partial t}$ Haciendo primeramente $t=x$, $f_1 = W_{en}$ y $f_2 = \frac{\partial \tilde{A}_e}{\partial x}$ y posteriormente $t=y$, $f_1 = W_{en}$ y $f_2 = \frac{\partial \tilde{A}_e}{\partial y}$, se tiene de (3.13)

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_e = & \iint_{\Omega_e} \left[\frac{1}{\mu} \frac{\partial \tilde{A}_e}{\partial x} \frac{\partial W_{en}}{\partial x} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \tilde{A}_e}{\partial y} \frac{\partial W_{en}}{\partial y} \right] dx dy - \iint_{\Omega_e} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(W_{en} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \tilde{A}_e}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(W_{en} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \tilde{A}_e}{\partial y} \right) \right] dx dy \\ & + \iint_{\Omega_e} W_{en} j\omega\sigma \tilde{A}_e dx dy - \iint_{\Omega_e} W_{en} \hat{J}_0 dx dy. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Del teorema de la divergencia

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_e = & \iint_{\Omega_e} \left[\frac{1}{\mu} \frac{\partial \tilde{A}_e}{\partial x} \frac{\partial W_{en}}{\partial x} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \tilde{A}_e}{\partial y} \frac{\partial W_{en}}{\partial y} \right] dx dy - \int_{\Gamma_e} W_{en} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \tilde{A}_e}{\partial x} \bar{a}_x + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \tilde{A}_e}{\partial y} \bar{a}_y \right) \cdot \bar{a}_n d\Gamma \\ & + \iint_{\Omega_e} W_{en} j\omega\sigma \tilde{A}_e dx dy - \iint_{\Omega_e} W_{en} \hat{J}_0 dx dy. \end{aligned} \quad (3.15)$$

De (3.11)

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^L \left\{ \iint_{\Omega_e} \left[\frac{1}{\mu} \frac{\partial \tilde{A}_e}{\partial x} \frac{\partial W_{en}}{\partial x} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \tilde{A}_e}{\partial y} \frac{\partial W_{en}}{\partial y} \right] dx dy + \iint_{\Omega_e} W_{en} j\omega\sigma \tilde{A}_e dx dy \right\} = \\ \sum_{e=1}^L \left\{ \iint_{\Omega_e} W_{en} \hat{J}_0 dx dy + \int_{\Gamma_e} W_{en} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \tilde{A}_e}{\partial x} \bar{a}_x + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \tilde{A}_e}{\partial y} \bar{a}_y \right) \cdot \bar{a}_n d\Gamma \right\} \quad n=1,2,\dots,N \end{aligned} \quad (3.16)$$

El término donde aparece la integral de frontera se analiza por separado. En la figura 3.3 se dibuja un subdominio Ω_n , donde el nodo común a todos los elementos que componen el subdominio no es de la frontera. Se observa que

$$\sum_{e=1}^L \int_{\Gamma_e} W_{en} \vec{F}_e \cdot \vec{a}_n d\Gamma = \int_{\Gamma_{n \leftrightarrow 1}} W_{1n} \vec{F}_1 \cdot \vec{a}_{n1, n \leftrightarrow 1} d\Gamma + \int_{\Gamma_{1 \leftrightarrow 2}} W_{1n} \vec{F}_1 \cdot \vec{a}_{n1, 1 \leftrightarrow 2} d\Gamma + \int_{\Gamma_{n \leftrightarrow 2}} W_{1n} \vec{F}_1 \cdot \vec{a}_{n1, n \leftrightarrow 2} d\Gamma \quad (3.17)$$

$$+ \dots + \int_{\Gamma_{n \leftrightarrow L}} W_{Ln} \vec{F}_L \cdot \vec{a}_{nL, n \leftrightarrow L} d\Gamma$$

donde $F_e = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \tilde{A}_e}{\partial x} a_x + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \tilde{A}_e}{\partial y} a_y$. Ahora bien, W_{en} $e=1, 2, \dots, L$ es cero en el lado opuesto al e -ésimo elemento opuesto al nodo n , por lo que

$$\int_{\Gamma_{1 \leftrightarrow 2}} W_{1n} \vec{F}_1 \cdot \vec{a}_{n1, 1 \leftrightarrow 2} d\Gamma = 0$$

$$\int_{\Gamma_{2 \leftrightarrow 3}} W_{2n} \vec{F}_2 \cdot \vec{a}_{n2, 2 \leftrightarrow 3} d\Gamma = 0$$

•

$$\int_{\Gamma_{L-1 \leftrightarrow L}} W_{Ln} \vec{F}_L \cdot \vec{a}_{nL, L-1 \leftrightarrow L} d\Gamma = 0 \quad (3.18)$$

Adviértase que las integrales restantes de (3.17) pueden ser ordenadas en pares, cada par formado por las dos integrales sobre la línea que separa a dos elementos contiguos

$$\sum_{e=1}^L \int_{\Gamma_e} W_{en} \vec{F}_e \cdot \vec{a}_n d\Gamma = \int_{\Gamma_{n \leftrightarrow 1}} W_{Ln} \vec{F}_L \cdot \vec{a}_{nL, n \leftrightarrow 1} d\Gamma + \int_{\Gamma_{n \leftrightarrow 1}} W_{1n} \vec{F}_1 \cdot \vec{a}_{n1, n \leftrightarrow 1} d\Gamma + \dots \quad (3.19)$$

$$+ \int_{\Gamma_{n \leftrightarrow L}} W_{L-1, n} \vec{F}_{L-1} \cdot \vec{a}_{nL-1, n \leftrightarrow L} d\Gamma + \int_{\Gamma_{n \leftrightarrow L}} W_{Ln} \vec{F}_L \cdot \vec{a}_{nL, n \leftrightarrow L} d\Gamma$$

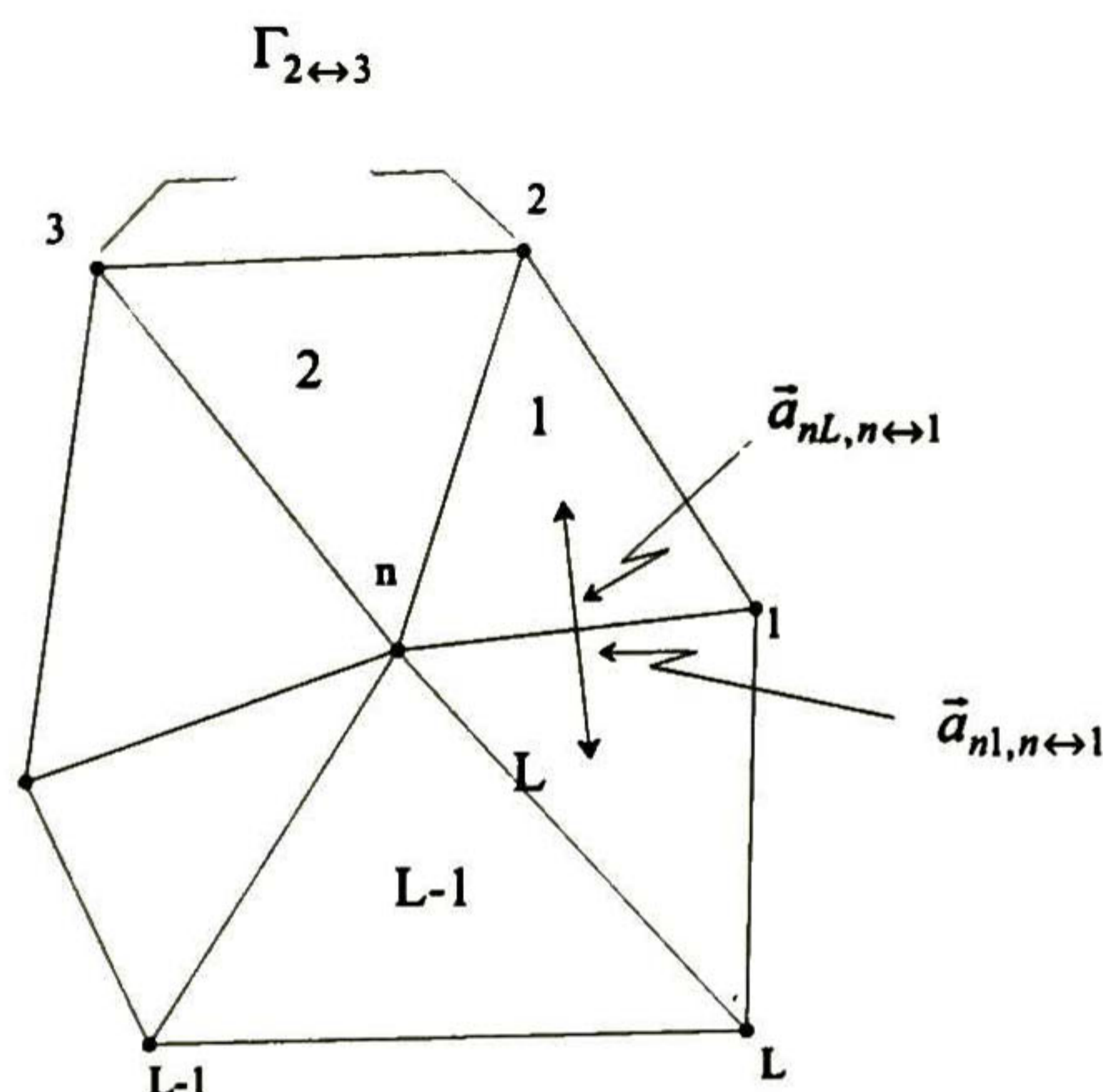


Fig. 3.3 Subdominio Ω_n

Sobre la frontera entre los elementos 1 y L ($\Gamma_{n \leftrightarrow 1}$) se tiene $W_{1n} = W_{Ln}$, $\vec{a}_{n1, n \leftrightarrow 1} = -\vec{a}_{nL, n \leftrightarrow 1}$; y si el vector F es continuo $F_1 = F_L$:

$$\int_{\Gamma_{n \leftrightarrow 1}} W_{Ln} \vec{F}_L \cdot \vec{a}_{nL, n \leftrightarrow 1} d\Gamma = - \int_{\Gamma_{n \leftrightarrow 1}} W_{1n} \vec{F}_1 \cdot \vec{a}_{n1, n \leftrightarrow 1} d\Gamma \quad (3.20)$$

consecuentemente, todos los pares de integrales en (3.19) desaparecen, obteniéndose finalmente

$$\sum_{e=1}^L \oint_{\Gamma_e} W_{en} F_e \cdot a_n d\Gamma = 0. \quad (3.21)$$

Así mismo, puede concluirse que (3.21) es válida si el nodo común a los elementos que componen el subdominio Ω_n , se ubica en una región de la frontera donde se especifican condiciones de frontera de Dirichlet con $\hat{A} = 0$.

En el motor de inducción, el vector F presenta discontinuidad en la interfaz estator-entrehierro, donde se coloca la fuente de corriente laminar. Este caso se analizará más adelante.

Al considerar (3.21), (3.16) se reduce a

$$\sum_{e=1}^L \left\{ \iint_{\Omega_e} \left[\frac{1}{\mu} \frac{\partial \tilde{A}_e}{\partial x} \frac{\partial W_{en}}{\partial x} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \tilde{A}_e}{\partial y} \frac{\partial W_{en}}{\partial y} \right] dx dy + \iint_{\Omega_e} W_{en} j \omega \sigma \tilde{A}_e dx dy \right\} = \sum_{e=1}^L \iint_{\Omega_e} W_{en} \hat{J}_0 dx dy \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (3.22)$$

De acuerdo a lo anterior, en subregiones donde el vector F es continuo la segunda integral del lado derecho de (3.15) puede no ser tomada en cuenta, reduciéndose esta ecuación a

$$\mathbf{R}_e = \iint_{\Omega_e} \left[\frac{1}{\mu} \frac{\partial \tilde{A}_e}{\partial x} \frac{\partial W_{en}}{\partial x} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \tilde{A}_e}{\partial y} \frac{\partial W_{en}}{\partial y} \right] dx dy + \iint_{\Omega_e} W_{en} j \omega \sigma \tilde{A}_e dx dy - \iint_{\Omega_e} W_{en} \hat{J}_0 dx dy. \quad (3.23)$$

Conforme a lo visto en la sección 3.1.2 el potencial vectorial en el e -ésimo elemento se aproxima como

$$\tilde{A}_e = \sum_{i=1}^3 \hat{A}_i W_i \quad (3.24)$$

Aplicando (3.8) y (3.24) a (3.23)

$$\mathbf{R}_e = \iint_{\Omega_e} \left[\frac{1}{4\mu\Delta^2} \left(\sum_{i=1}^3 \hat{A}_i a_i \right) a_{en} + \frac{1}{4\mu\Delta^2} \left(\sum_{i=1}^3 \hat{A}_i b_i \right) b_{en} + j\omega\sigma \left(\sum_{i=1}^3 \hat{A}_i W_i \right) W_{en} \right] dx dy - \iint_{\Omega_e} \hat{J}_0 W_{en} dx dy. \quad (3.25)$$

Desarrollando (3.25)

$$\mathbf{R}_e = \frac{1}{4\mu\Delta} \left(\sum_{i=1}^3 \hat{A}_i a_i \right) a_{en} + \frac{1}{4\mu\Delta} \left(\sum_{i=1}^3 \hat{A}_i b_i \right) b_{en} + j\omega\sigma \sum_{i=1}^3 \left(\hat{A}_i + \frac{\Delta}{12} \delta \right) - \frac{\hat{J}_0 \Delta}{3}. \quad (3.26)$$

donde

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{si los subíndices } n \text{ e } i \text{ se refieren a nodos diferentes} \\ 2 & \text{si los subíndices } n \text{ e } i \text{ se refieren al mismo nodo} \end{cases} \quad (3.27)$$

y se ha utilizado además [19, 20]

$$\iint_{\Omega_e} (W_1)^p (W_2)^q (W_3)^r dx dy = \frac{p!q!r!}{(p+q+r+2)!} 2\Delta. \quad (3.28)$$

Para aclarar la notación utilizada en (3.26) y (3.27) es necesario señalar que el subíndice i se asocia al número interno de nodo del e -ésimo elemento y el subíndice n se asocia al número global de nodo que comparten todos los elementos del n -ésimo subdominio.

De (3.22) y (3.26) es evidente que se tendrá un sistema de N ecuaciones cuyas N incógnitas son los valores del potencial vectorial en los nodos de los elementos. Dicho sistema en forma compacta puede expresarse como

$$[K]\{A\} = \{J_0\}, \quad (3.29)$$

donde el vector $\{A\}$ contiene las incógnitas.

Por el hecho de pertenecer a tres subdominios, cada elemento toma parte en tres ecuaciones del sistema (3.29). Si se definen matrices elementales $[K_e]$ de orden 3×3 y $\{J_{0e}\}$ de orden 3×1 tal que

$$[K_e]_{ij} = \frac{1}{4\Delta\mu} (a_i a_j + b_i b_j) + \begin{cases} \frac{j\omega\sigma\Delta}{6} & \text{si } i=j \\ \frac{j\omega\sigma\Delta}{12} & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad \begin{matrix} i=1,2,3 \\ j=1,2,3 \end{matrix} \quad (3.30)$$

$$\{J_{0e}\} = \left[\frac{\Delta J_0}{3}, \frac{\Delta J_0}{3}, \frac{\Delta J_0}{3} \right]^T$$

entonces $[K]$ y $\{J_0\}$ se obtienen por un proceso de “ensamble” o sumatoria de las matrices elementales. Para efectuar este proceso, primero se expanden las matrices elementales $[K_e]$ a orden $N \times N$ y $\{J_{0e}\}$ a orden $N \times 1$. Para las matrices expandidas se tendrá

$$[K_e]_{kl}^{Expandida} = [K_e]_{ij} \quad \{J_{0e}\}_k^{Expandida} = \{J_{0e}\}_i, \quad (3.31)$$

donde k es el número global de nodo cuyo número interno en el e -ésimo elemento es i . De manera similar, l es número global de nodo al que hace referencia el número interno j . A la otras entradas de las matrices elementales expandidas se les da el valor de cero. $[K]$ y $\{J_0\}$ se obtienen como

$$[K] = \sum_{e=1}^M [K_e]^{Expandida} \quad \{J_0\} = \sum_{e=1}^M \{J_{0e}\}^{Expandida} \quad (3.32)$$

A la matriz $[K]$ se le llama *matriz de rigidez*. El proceso para formar la matriz de rigidez aparenta ser muy complicado; sin embargo, es un proceso sencillo que se logra con pocas líneas de código. A continuación se muestra la elaboración de esta matriz en el motor de inducción idealizado en código MATLAB. Existen algoritmos más eficientes aún que el mostrado a continuación; el propósito de este es simplemente ilustrar el proceso de formación de la matriz de rigidez.


```
%ELABORACIÓN DE LA MATRIZ [K]
K=sparse(N,N);
for r=1:length(M)
    miu=MIU(M(r,14));
    sig=SIG(M(r,14));
    P=[M1(r,2) M1(r,3) 1; M1(r,4) M1(r,5) 1; M1(r,6) M1(r,7) 1];
    DELTA=det(P)/2;
    C=inv(P);
    for s=1:3
        for t=1:3
            if s==t
                z=i*sig*w*DELTA/6;
            else
                z=i*sig*w*DELTA/12;
            end
            K(M(r,s+4),M(r,t+4))=K(M(r,s+4),M(r,t+4))
            - (C(1,s)*C(1,t)*DELTA)/miu- (C(2,s)*C(2,t)*DELTA)/miu-z;
        end
    end
end
end
```

```
%N=Número total de nodos
%M(:,5)=Números con que se etiqueta el 1er nodo del elemento
%M(:,6)= " " 2do
%M(:,7)= " " 3er
%M(:,14)=Identifica la región a la que pertenece cada elemento:
%1 corresponde a la región 1, 2 a la región 2 etc.
%M1(:,2)=Coordenadas x de los primeros nodos de los elementos
%M1(:,3)= y primeros
%M1(:,4)= x segundos
%M1(:,5)= y segundos
%M1(:,6)= x terceros
%M1(:,7)= y terceros
%MIU=Vector de permeabilidades magnéticas:
%MIU(1)=Permeabilidad magnética en la región 1
%MIU(2)=Permeabilidad magnética en la región 2, etc.
%SIG=Vector de conductividades:
%SIG(1)=Conductividad en la región 1, etc.
```

3.1.3.2 IMPOSICIÓN DE CONDICIONES DE FRONTERA

Supóngase que en el i -ésimo nodo se tienen condiciones de frontera de Dirichlet. Entonces la i -ésima entrada del vector $\{A\}$ en (3.29) tiene un valor prescrito; es decir $\{A\}_i = b$, donde el valor b se le debe imponer a $\{A\}_i$. Esto se lleva a cabo haciendo $\{J_0\}_i = b$, $[K]_{ii} = 1$ y $[K]_{ij} = 0$, $i \neq j$ y el sistema (3.29) se observa

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1i} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2i} & \dots & k_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & & \cdot \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{ni} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_1 \\ \hat{A}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{A}_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{A}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{01} \\ J_{02} \\ \cdot \\ \cdot \\ b \\ \cdot \\ \cdot \\ J_{0n} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

El sistema (3.29) generalmente es grande y para efectos de su solución es deseable que la matriz de rigidez no pierda simetría. Con este propósito se efectúa una segunda maniobra sobre (3.33), haciendo $\{J_0\}_j \leftarrow \{J_0\}_j - k_{ji}b$ y $k_{ji} = 0, i \neq j$, y el sistema resulta

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & 0 & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & 0 & \dots & k_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & 0 & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_1 \\ \hat{\lambda}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{\lambda}_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{\lambda}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{01} - k_{1i}b \\ J_{02} - k_{2i}b \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ J_{0n} - k_{ni}b \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

El sistema (3.34) es equivalente a (3.33) y en (3.34) se ha logrado restablecer la simetría de la matriz de rigidez.

Los dos pasos que se han descrito deben realizarse para cada uno de los nodos ubicados en puntos donde se tengan condiciones de frontera de Dirichlet.

3.1.3.3 INCLUSIÓN DE LA FUENTE DE CORRIENTE LAMINAR AL SISTEMA DE ECUACIONES ALGEBRAICAS

La ecuación gobernante en el motor de inducción ideal es descrita por (3.3). El proceso para formular el sistema de ecuaciones algebraicas que dan origen a la función que aproxima a la solución de esta ecuación es el que se explica en la sección 3.1.3.1; no obstante, no se han considerado aun cuestiones como el modelado de la fuente de corriente laminar y las discontinuidades del vector \vec{F}

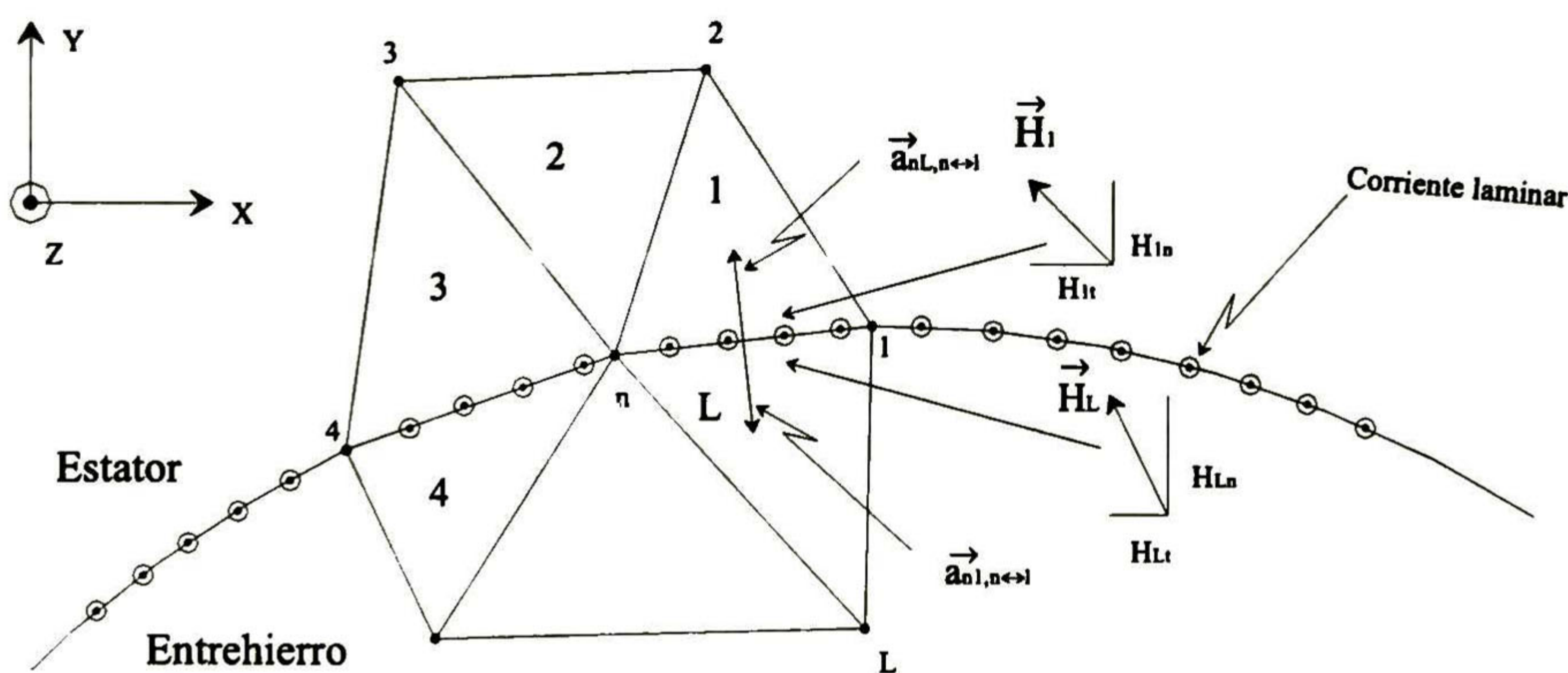


Fig. 3.4 Subdominio Ω_n en la interfaz estator-entrehierro

Para la ecuación (3.3) el vector \vec{F} toma la forma

$$\vec{F} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial x} \vec{a}_x + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial y} \vec{a}_y \quad (3.35)$$

En la Figura 3.4 se muestra un subdominio Ω_n en la interfaz estator-entrehierro. Obsérvese que la manera en que se debe realizar la discretización es haciendo coincidir los lados o fronteras de los elementos con la interfaz. La componente tangencial a la interfaz de la intensidad del campo magnético en el elemento 1 a una distancia infinitesimal de la interfaz es H_{1t} . Definiciones similares se aplican a H_{1n} , H_{Lt} y H_{Ln} .

De acuerdo a (1.21) H_t no es continuo en la interfaz estator-entrehierro. De (1.10) y (1.32) se tiene para la intensidad de campo magnético

$$H = \frac{1}{\mu} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \hat{A}}{\partial y} e^{j\omega t} \right) \hat{a}_x - \frac{1}{\mu} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \hat{A}}{\partial x} e^{j\omega t} \right) \hat{a}_y \quad (3.36)$$

y H_{1t} estará dado por

$$H_{1t} = \operatorname{Re}(\hat{H}_{1t} e^{j\omega t}), \quad (3.37)$$

donde

$$\hat{H}_{1t} = \vec{\hat{F}}_1 \cdot \vec{a}_{n1, n \leftrightarrow 1}. \quad (3.38)$$

Ahora bien, de la ecuación (2.5) se tiene

$$I = \operatorname{Re}[\hat{I}(x, y) e^{j\omega t}] \quad (3.39)$$

donde $\hat{I}(x, y) = \hat{I} e^{-2j\phi}$. De (1.21) (3.37) y (3.38)

$$\vec{\hat{F}}_1 \cdot \vec{a}_{n1, n \leftrightarrow 1} + \vec{\hat{F}}_L \cdot \vec{a}_{nL, n \leftrightarrow 1} = \hat{I} \quad (3.40)$$

y es fácil advertir que para un subdominio $\Omega_{(n)}$ como el que se muestra en la Figura 3.4 no se satisface la ecuación (3.21) sino que

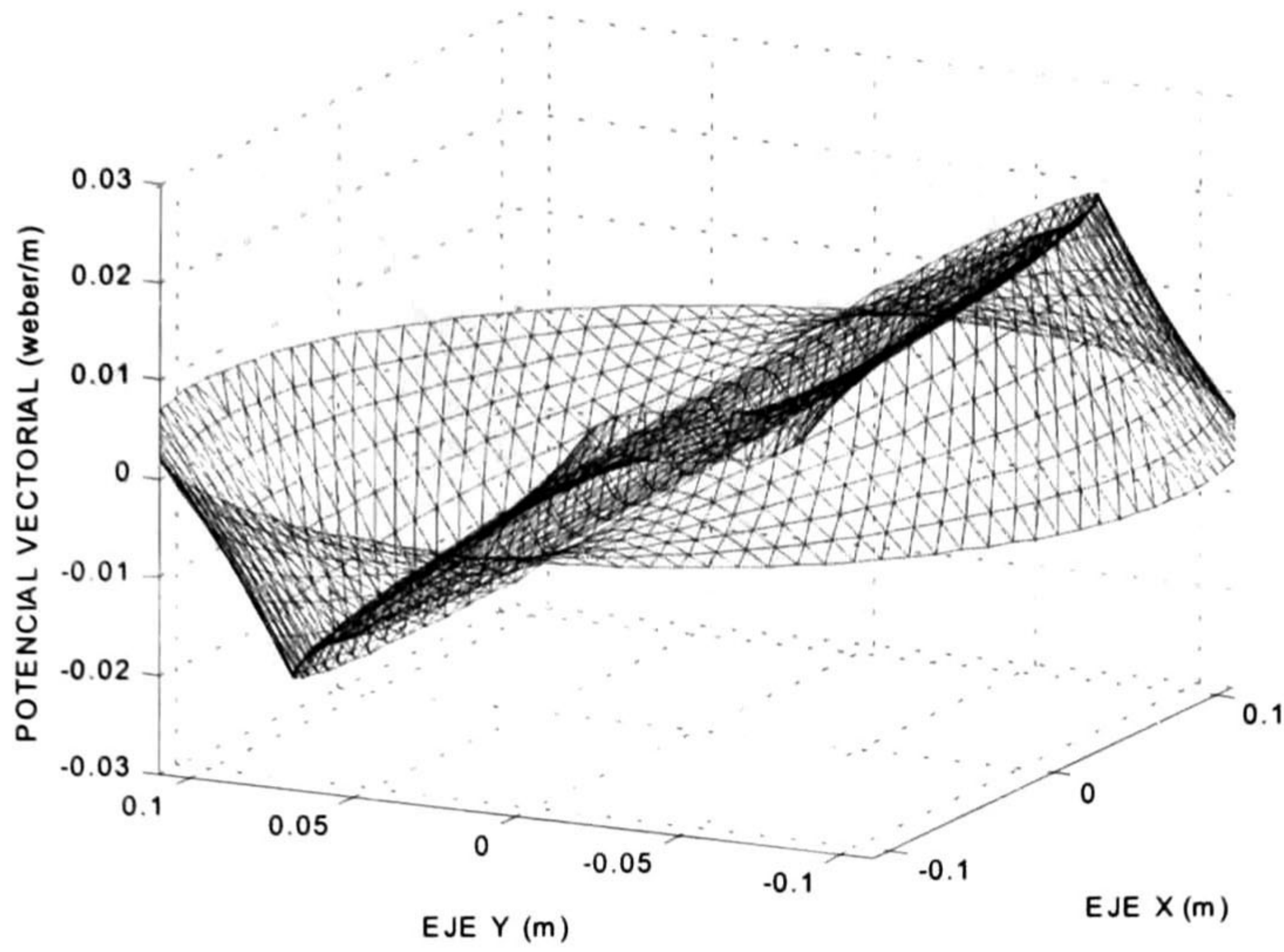
$$\sum_{e=1}^L \int_{\Gamma_e} W_{en} \vec{\hat{F}}_e \cdot \vec{a}_n d\Gamma = \int_{\Gamma_{n \leftrightarrow 1}} W_{1n} \hat{I} d\Gamma + \int_{\Gamma_{n \leftrightarrow 4}} W_{4n} \hat{I} d\Gamma \quad (3.41)$$

o bien

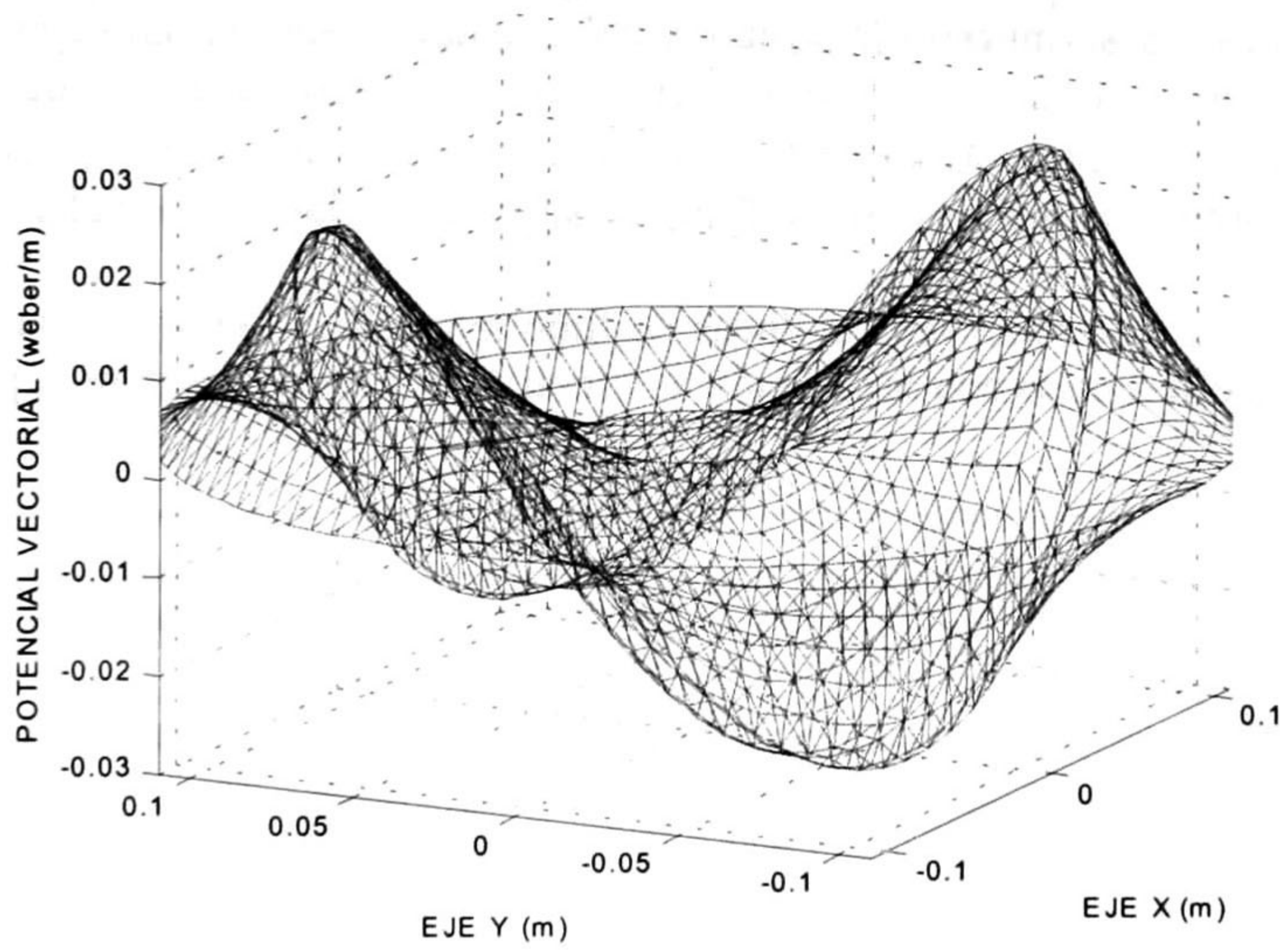
$$\sum_{e=1}^L \int_{\Gamma_e} W_{en} \vec{\hat{F}}_e \cdot \vec{a}_n d\Gamma = \int_{\Gamma_{n \leftrightarrow 1}} W_{Ln} \hat{I} d\Gamma + \int_{\Gamma_{n \leftrightarrow 4}} W_{5n} \hat{I} d\Gamma \quad (3.42)$$

ya que $W_{1n} = W_{Ln}$ en $\Gamma_{n \leftrightarrow 1}$ y $W_{4n} = W_{5n}$ en $\Gamma_{n \leftrightarrow 4}$

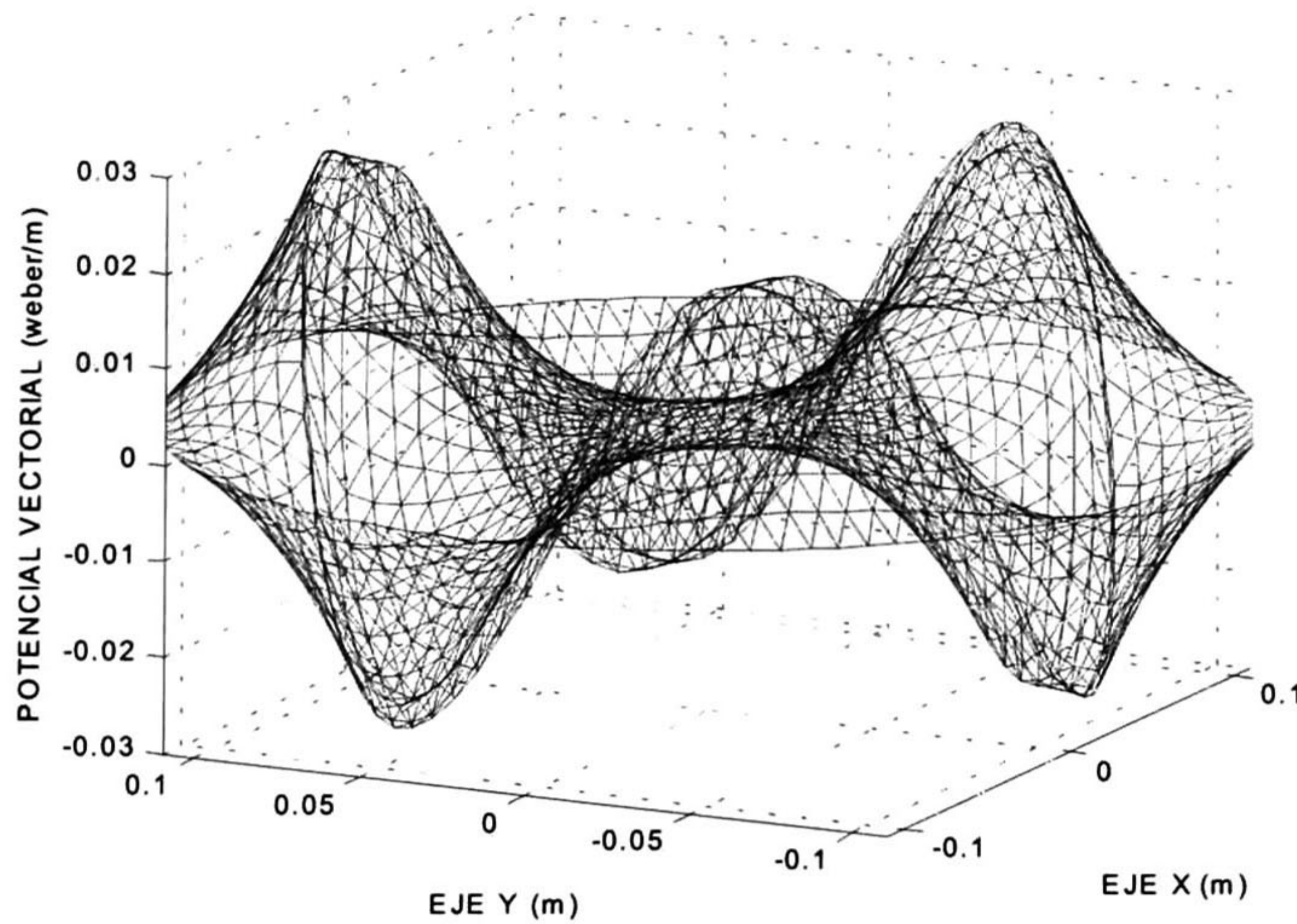
El siguiente paso es sustituir (3.42) o (3.41) en (3.16) y se continua con el proceso para la formulación del sistema de ecuaciones como se indica en la sección 3.2.2.5. Cuando se tiene corriente laminar como fuente, las entradas no nulas del vector $\{J_0\}$ en (3.29), se obtienen de (3.41) o de (3.42) en su defecto.



a) Un par de polos



c) Dos pares de polos

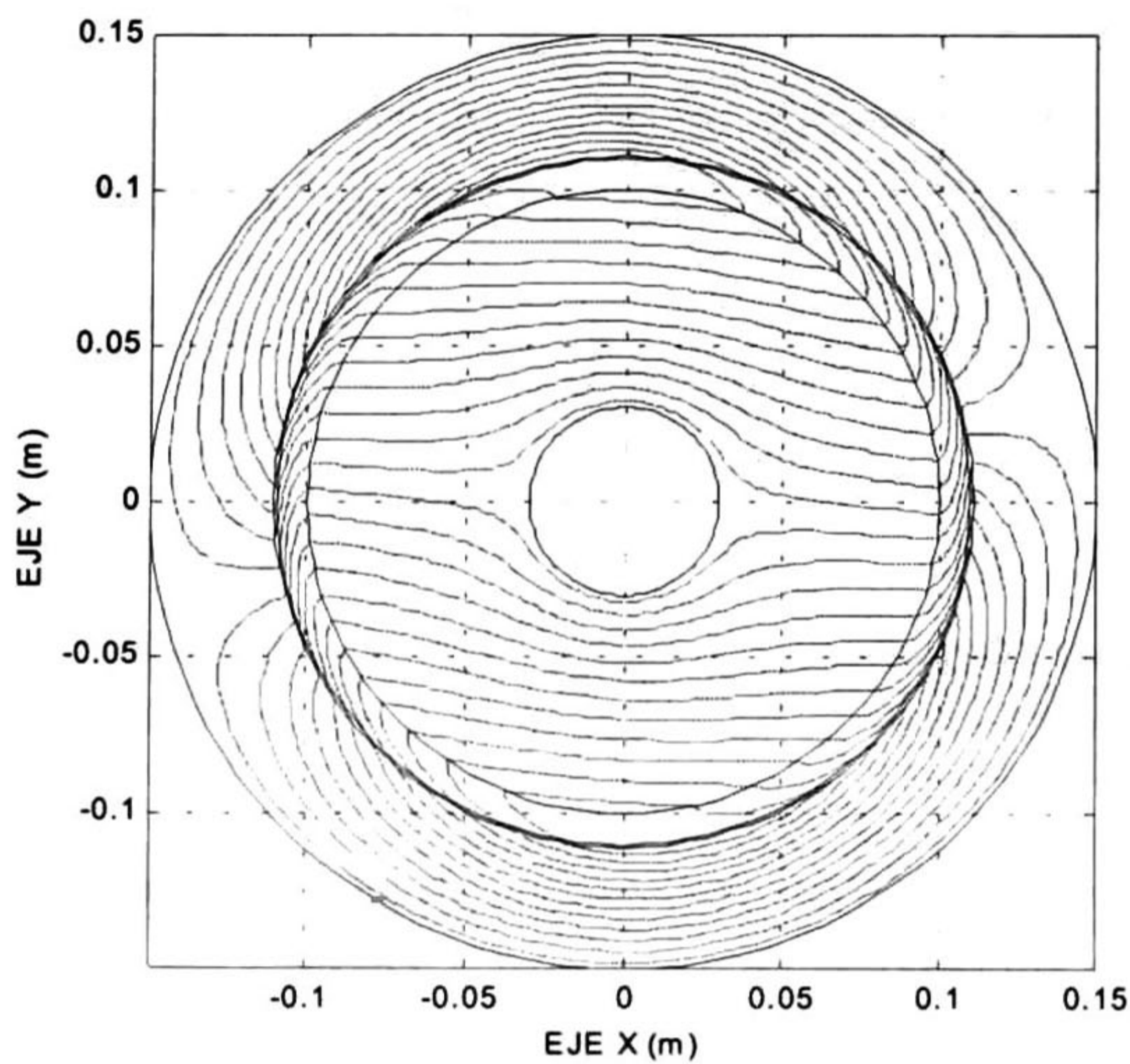


c) Tres pares de polos

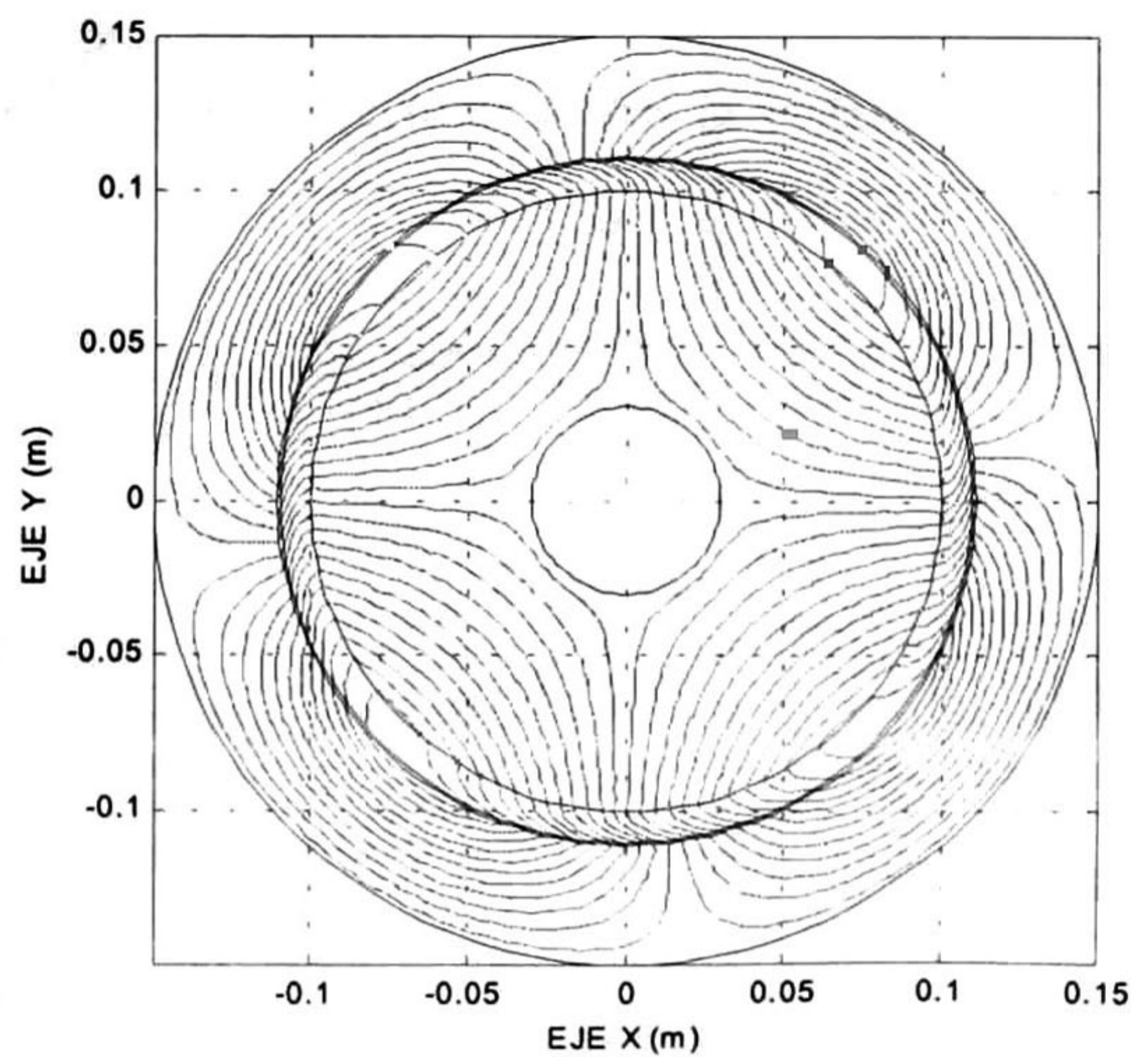
Fig. 3.5 Componente z del potencial vectorial en el motor de inducción idealizado (método del elemento finito)

En la figura 3.5 se muestra la solución del potencial vectorial en el motor de inducción ideal para $\beta = 1$, $\beta = 2$ y $\beta = 3$. Las diferencias con la solución analítica de la figura 2.3 son prácticamente inapreciables. Adviértase cómo se aproxima una superficie suave por medio de una superficie compuesta por un número finito de segmentos planos triangulares.

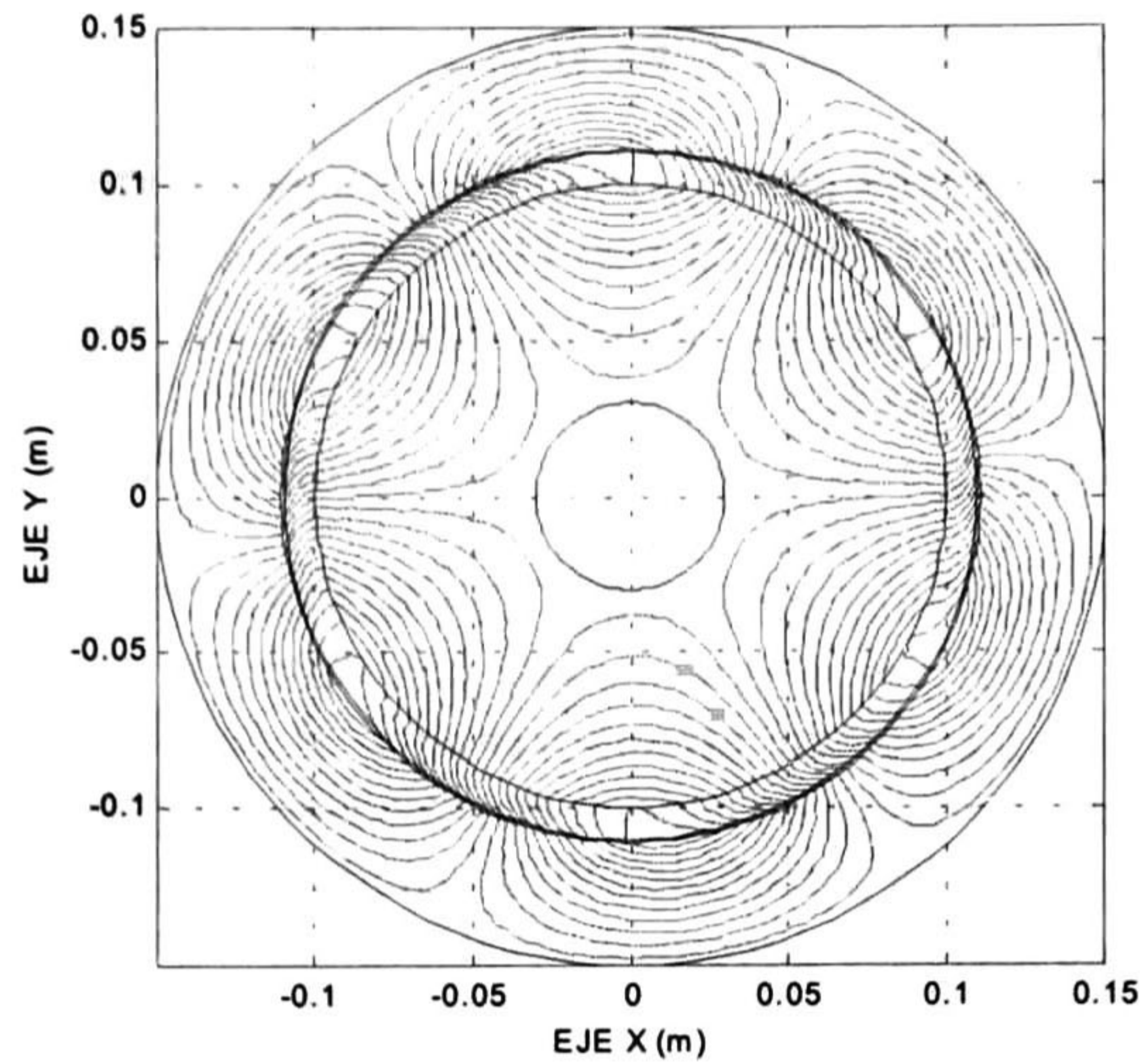
En la figura 3.6 se observan las líneas de flujo magnético. De la misma manera que en el caso anterior, las diferencias con la solución analítica de la figura 2.3 son muy pequeñas.



a) Un par de polos



b) Dos pares de polos



c) Tres pares de polos

Fig. 3.6 Líneas de flujo magnético en el motor de inducción idealizado (método del elemento finito)

Para el motor de inducción ideal siguiendo los pasos indicados en la sección 3.1.3.2 se obtuvo la matriz de rigidez. El gran tamaño de esta matriz impide que se muestren los valores de sus entradas; sin embargo, adviértase la disposición simétrica de las entradas diferentes de cero en la figura 3.7.

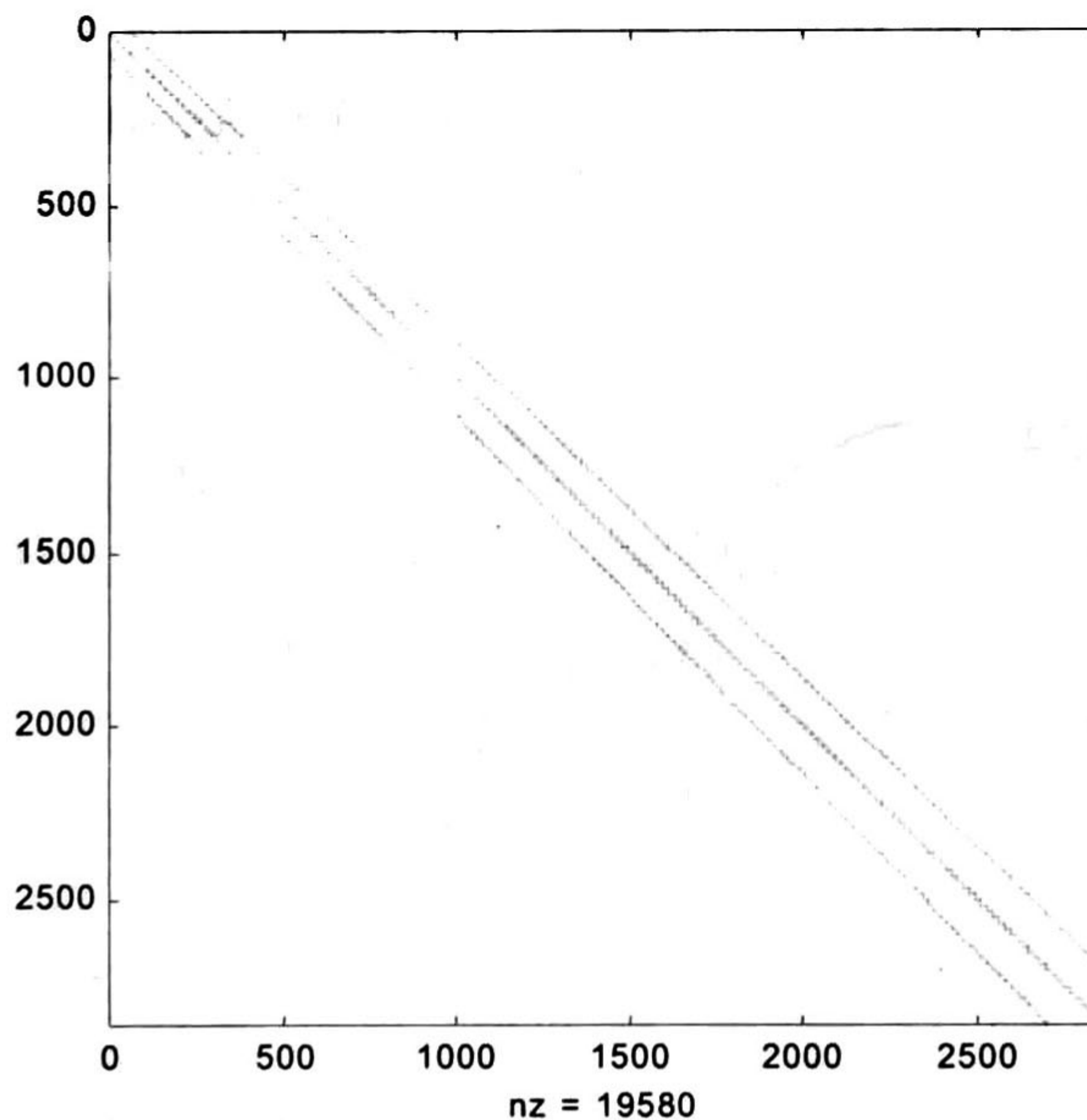


Fig. 3.7 Dispersidad de la matriz de rigidez

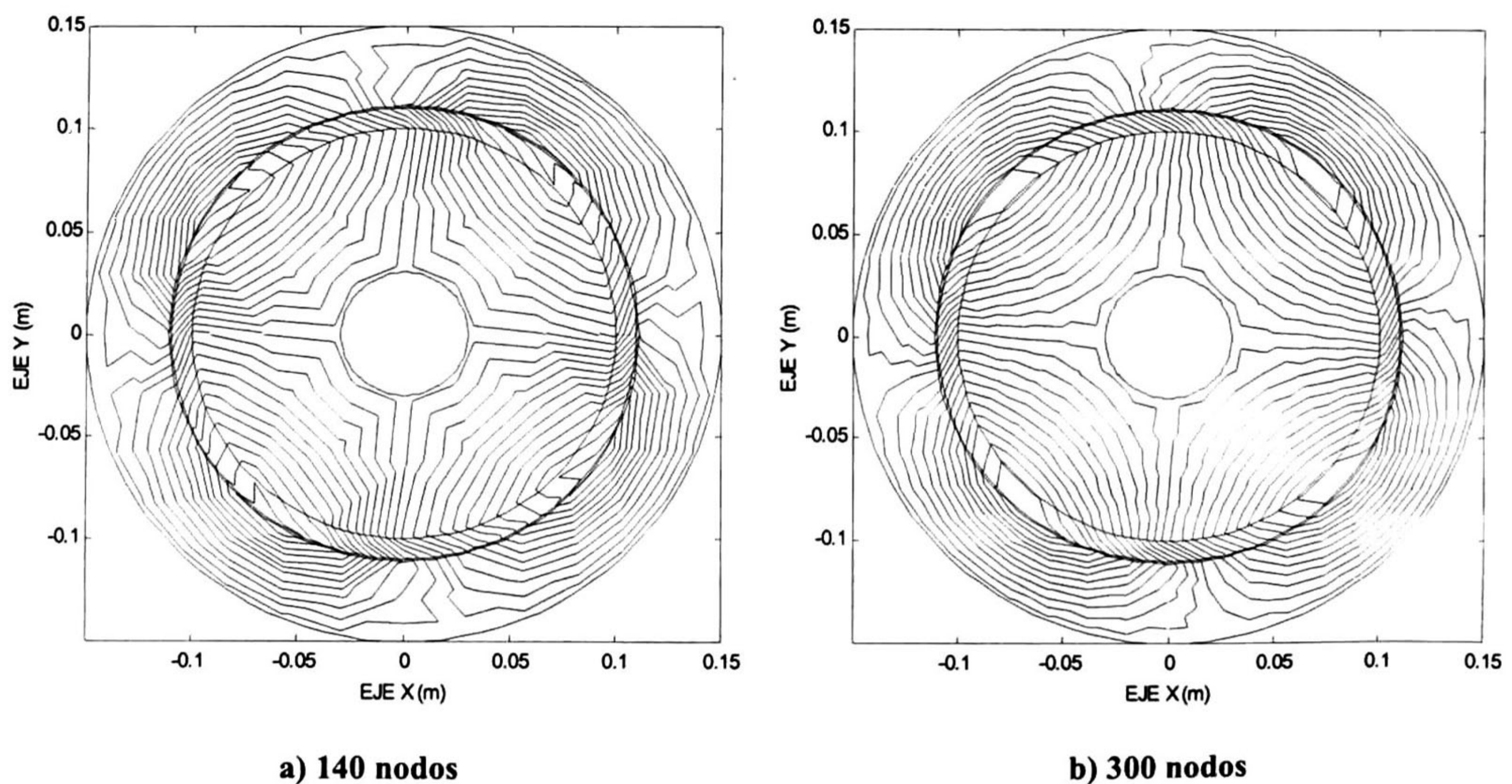
3.1.4 SOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES

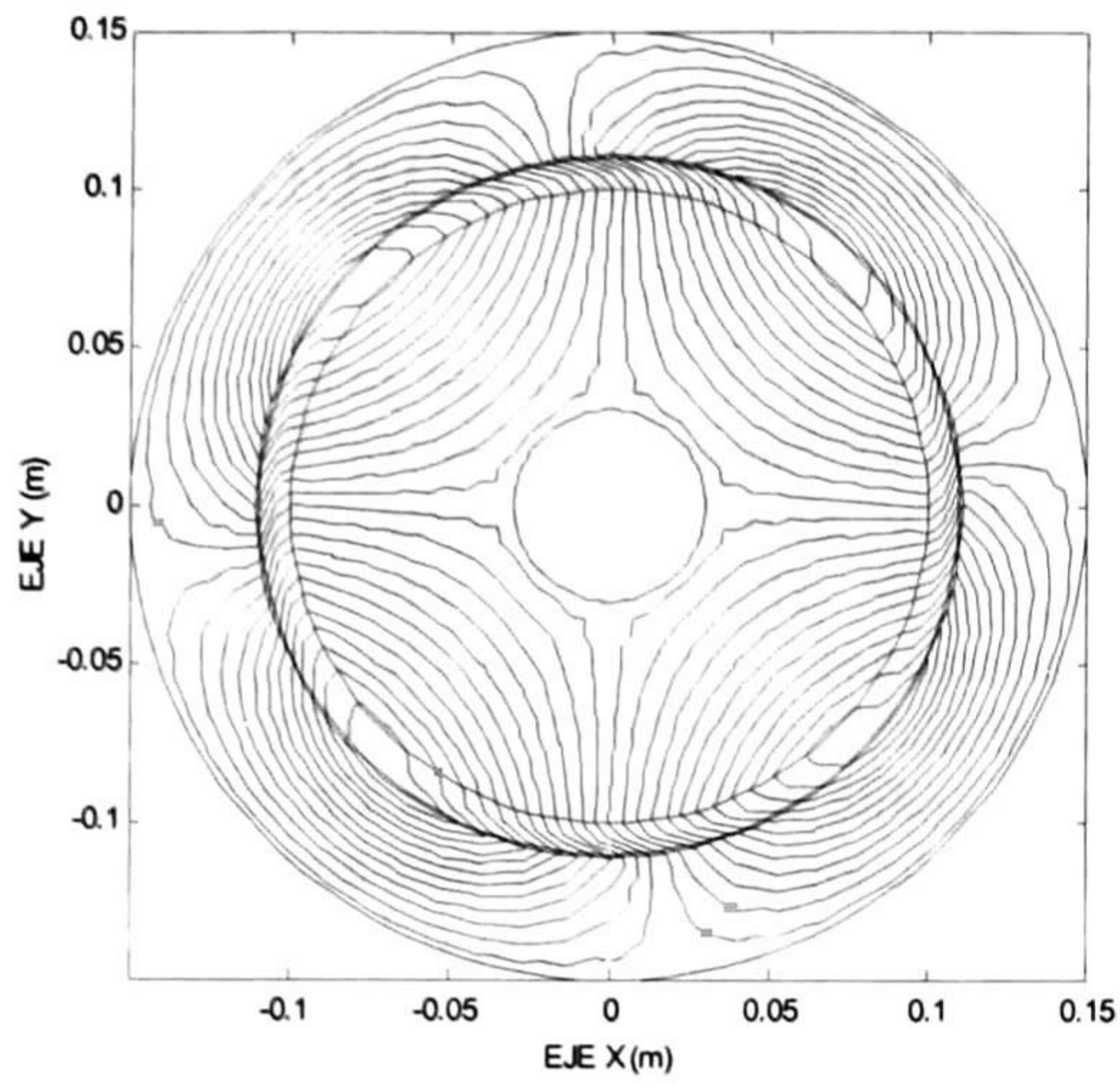
Una vez que el sistema de ecuaciones es formulado o ensamblado se resuelve para las incógnitas U_i , $i=1,2,\dots,N$. Existe gran variedad de métodos para resolver el sistema. No obstante, todos pueden ser catalogados en dos grupos: Métodos directos y métodos iterativos [18]. Los métodos directos están basados en la eliminación gaussiana y en teoría dan lugar a una solución exacta del sistema. En cambio, en los métodos iterativos debe proporcionarse una solución de arranque y posteriormente minimizar el error a través de iteraciones. Usualmente, mediante los métodos iterativos se obtiene una solución aproximada con una exactitud prescrita de antemano, si bien algunos métodos semi iterativos proporcionan una solución exacta en un número finito de iteraciones. Ambos métodos tienen ciertas ventajas y desventajas. La elección del método depende del problema. Si la matriz de rigidez es simétrica, dispersa y bandada con una adecuada numeración de los nodos[19], es preferible utilizar métodos que exploten estas características. En [18] se presentan algunos métodos directos e iterativos, así mismo, puede consultarse [21].

3.1.4.1 CONVERGENCIA DE LA SOLUCIÓN

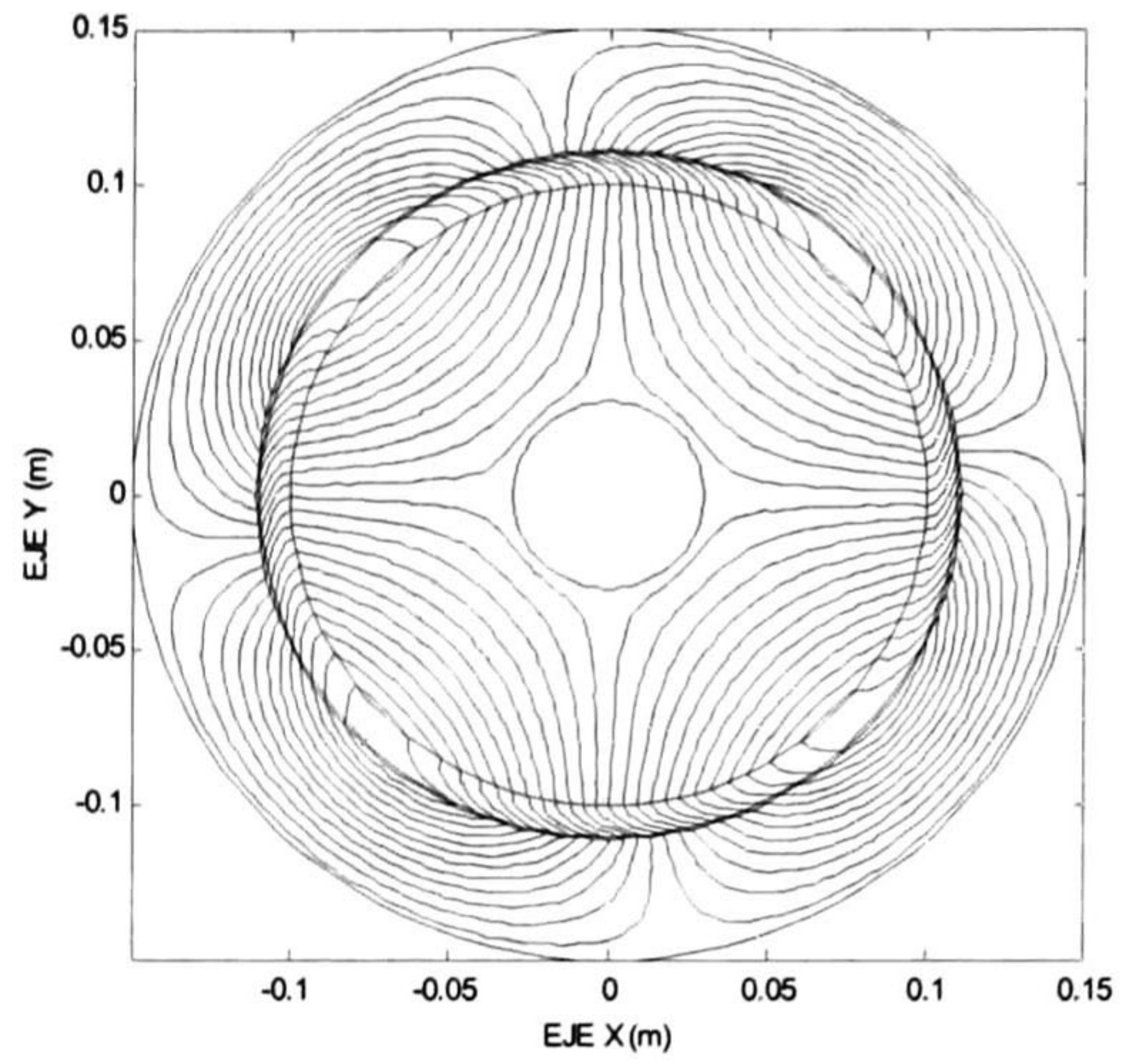
A medida que se incrementa el número de nodos en la discretización, y en consecuencia los grados de libertad en el sistema de ecuaciones, la solución aproximada se acerca a la solución exacta. Naturalmente, con el objeto de hacer más eficiente la convergencia a la solución exacta, debe tenerse una estrategia o algún criterio para seleccionar los puntos donde deben irse agregando los nodos. Un método que es de amplia utilización, consiste en calcular la energía magnética almacenada para dos soluciones, n y $n+1$, donde la discretización de la solución $n+1$ es más refinada que la discretización de la solución n . Posteriormente, se identifican las zonas o los elementos donde es mayor la diferencia en la energía magnética almacenada y para la solución $n+2$ se incluyen más nodos en estas zonas.

En la figura 3.8 se muestra la evolución de las líneas de flujo magnético en el motor de inducción ideal ante el incremento gradual de nodos en la discretización.





c) 588 nodos



d) 1804 nodos

Fig. 3.8 Proceso de convergencia de la solución de las líneas de flujo magnético en el motor de inducción idealizado

4 CÁLCULO DEL PAR EN EL MOTOR DE INDUCCIÓN

Una de las tareas de mayor dificultad e incertidumbre en el análisis de máquinas eléctricas utilizando el método del elemento finito es el cálculo de fuerzas y pares [6]. Estas cantidades presentan dificultad en la convergencia de la solución y, entre otros factores, dependen en gran medida de la manera en que se discretiza la región de estudio [22]. Consecuentemente, aun cuando se tengan buenas aproximaciones en los campos, se observan errores grandes en el cálculo de fuerzas y pares. La necesidad de continuar con la investigación y desarrollo de métodos que permitan mejorar los resultados está vigente en la actualidad. En este capítulo se presenta un estudio del cálculo del par utilizando tres de los métodos de más amplio uso [6, 23]: la ecuación de fuerza de Lorentz, el tensor de Maxwell y el principio del trabajo virtual. Se desarrollan formulaciones para calcular el par con los tres métodos y se aplican al modelo idealizado del motor de inducción. El desarrollo de tres formulaciones diferentes para el cálculo el par es indispensable dada la incertidumbre y la dificultad en la convergencia que se reporta en la literatura [6, 7, 22, 23]. En este capítulo, se calcula además la energía magnética almacenada. Los resultados obtenidos para el par y la energía magnética almacenada se comparan con los resultados analíticos obtenidos en el capítulo 2.

4.1 ECUACIÓN DE FUERZA DE LORENTZ

En el desarrollo de las formulaciones para calcular el par se considera que el potencial vectorial se puede representar por

$$A = \text{Re}[\hat{\lambda}e^{j\omega t}]a_z \quad (4.1)$$

Ahora bien, de la diferencial de fuerza dada por la ecuación (2.35) y de la definición de par o momento de torsión $d\vec{P} = \vec{r} \times d\vec{f}$ se encuentra que la densidad de par viene dada por

$$d\vec{P} = \vec{r} \times (\vec{J} \times \vec{B}) dv, \quad (4.2)$$

donde \vec{r} es un vector dirigido del punto de anclaje al punto donde se está calculando la densidad de fuerza. De la relación constitutiva (1.11), la definición de potencial vectorial ecuación (1.32), (1.34), (4.1) y (4.2) se tiene

$$d\vec{P} = \left\{ x \text{Re}[-j\omega\sigma\hat{\lambda}e^{j\omega t}] \text{Re}\left[\frac{\partial\hat{A}}{\partial y}e^{j\omega t}\right] + y \text{Re}[j\omega\sigma\hat{\lambda}e^{j\omega t}] \text{Re}\left[\frac{\partial\hat{A}}{\partial x}e^{j\omega t}\right] \right\} a_z dv, \quad (4.3)$$

donde se ha considerado que el punto de anclaje coincide con el origen de coordenadas y se toma en cuenta que en el rotor el campo eléctrico es causado únicamente por inducción magnética y sólo interviene el primer término del lado derecho de (1.34). Ahora bien, en (4.3) el valor efectivo de la componente z de la diferencial de par es

$$d\mathcal{P} = \text{Re}\left\{ \frac{-j\omega\sigma x}{2} \hat{A} \frac{\partial\hat{A}^*}{\partial y} + \frac{j\omega\sigma y}{2} \hat{A} \frac{\partial\hat{A}^*}{\partial x} \right\} dv. \quad (4.4)$$

Tomando en cuenta que la componente z del fasor del potencial vectorial fue calculado utilizando elementos triangulares de primer orden, y en cada elemento es de la forma

$$\lambda_e = \sum_{i=1}^3 \lambda_i w_i. \quad (4.5)$$

Las ecuaciones (3.24) y (4.5) son idénticas, sólo que en (4.5) por brevedad, se intercambia $\tilde{\lambda}$ por λ , lo que se continuará haciendo en el resto de este trabajo. Al sustituir (4.5) en (4.4)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{P}_e}{dv} = \text{Re} \left\{ -\frac{j\omega\sigma x}{8\Delta^2} \hat{\mathbf{A}}_e \left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \right) [b_1 \ b_2 \ b_3] \hat{\mathbf{A}}_e^* \right. \\ \left. + \frac{j\omega\sigma y}{8\Delta^2} \hat{\mathbf{A}}_e \left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \right) [a_1 \ a_2 \ a_3] \hat{\mathbf{A}}_e^* \right\}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde $\hat{\mathbf{A}}_e = [\hat{\lambda}_1 \ \hat{\lambda}_2 \ \hat{\lambda}_3]$ y * significa transpuesta conjugada. La contribución de cada elemento al par se determina integrando (4.6) en Ω_e . Nótese que cada término está multiplicado por la conductividad y sólo intervendrán los elementos de las regiones conductoras del rotor. El cálculo del par por medio de la ecuación de fuerza de Lorentz tiene la ventaja de no requerir mucho esfuerzo de cómputo.

4.2 MÉTODO DEL TENSOR DE MAXWELL

De acuerdo con (1.32) y (4.1) las componentes en x y en y de la densidad de flujo magnético, estarán descritas respectivamente por

$$\begin{aligned} B_x &= \text{Re}[\hat{B}_x(x, y)e^{j\omega t}] \\ B_y &= \text{Re}[\hat{B}_y(x, y)e^{j\omega t}]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

De las ecuaciones (1.32) y (4.5), la densidad de flujo magnético en cada elemento triangular es

$$\begin{aligned} \hat{B}_{xe} &= \frac{1}{2\Delta} \sum_{i=1}^3 \lambda_i b_i \\ \hat{B}_{ye} &= \frac{1}{2\Delta} \sum_{i=1}^3 \lambda_i a_i \end{aligned} \quad (4.8)$$

y el valor efectivo del par se determina por

$$\mathcal{P} = [\int_s \mathcal{T} \cdot d\mathbf{s}] a_z, \quad (4.9)$$

donde

$$\mathcal{T} = \text{Re} \left[\frac{1}{2\mu} (x\hat{B}_x\hat{B}_y^* + \frac{y\hat{B}_y\hat{B}_y^* - y\hat{B}_x\hat{B}_x^*}{2}) \right] a_x + \text{Re} \left[\frac{1}{2\mu} (\frac{x\hat{B}_y\hat{B}_y^* - x\hat{B}_x\hat{B}_x^*}{2} - y\hat{B}_x\hat{B}_y^*) \right] a_y, \quad (4.10)$$

Las ecuaciones (4.9) y (4.10) se obtienen de (2.45) y de (2.42) respectivamente. Como se explicó anteriormente, s es una superficie que encierra el rotor, pasando a través del entrehierro (Fig. 4.1). Para ds_e se tiene

$$ds_e = \frac{[(y_2 - y_1)a_x + (x_2 - x_1)a_y] dl_e}{\sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}} \quad (4.11)$$

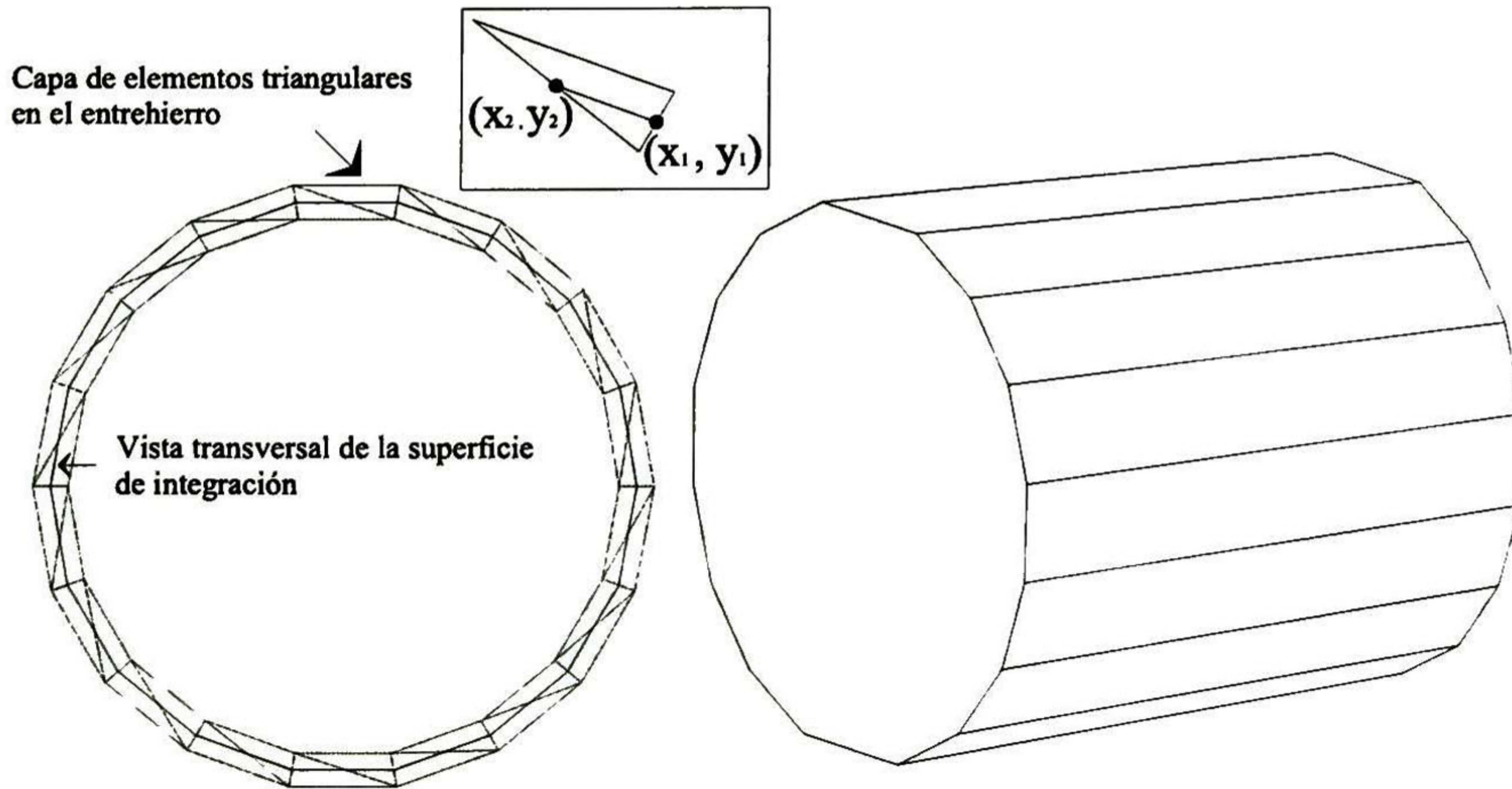
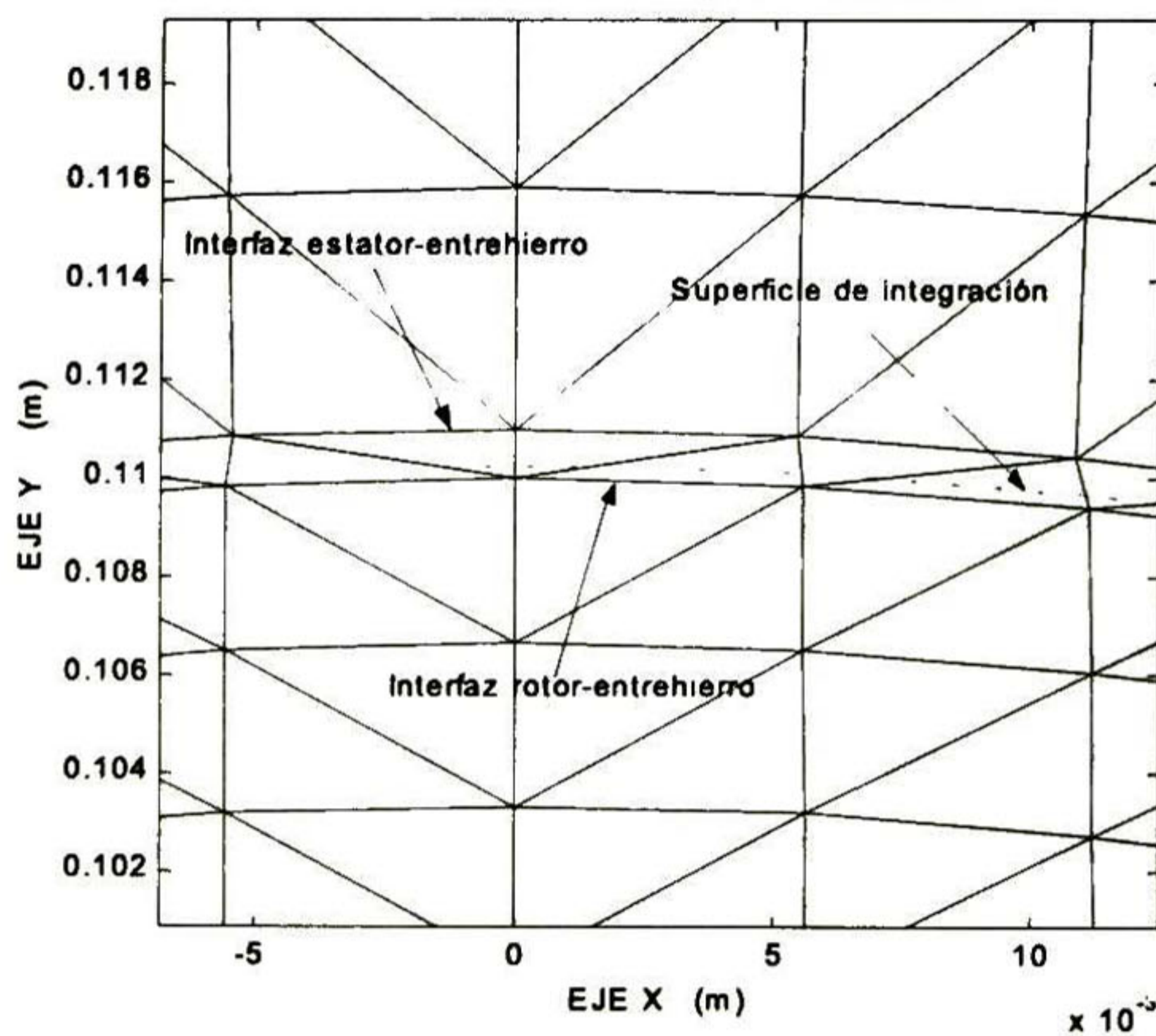
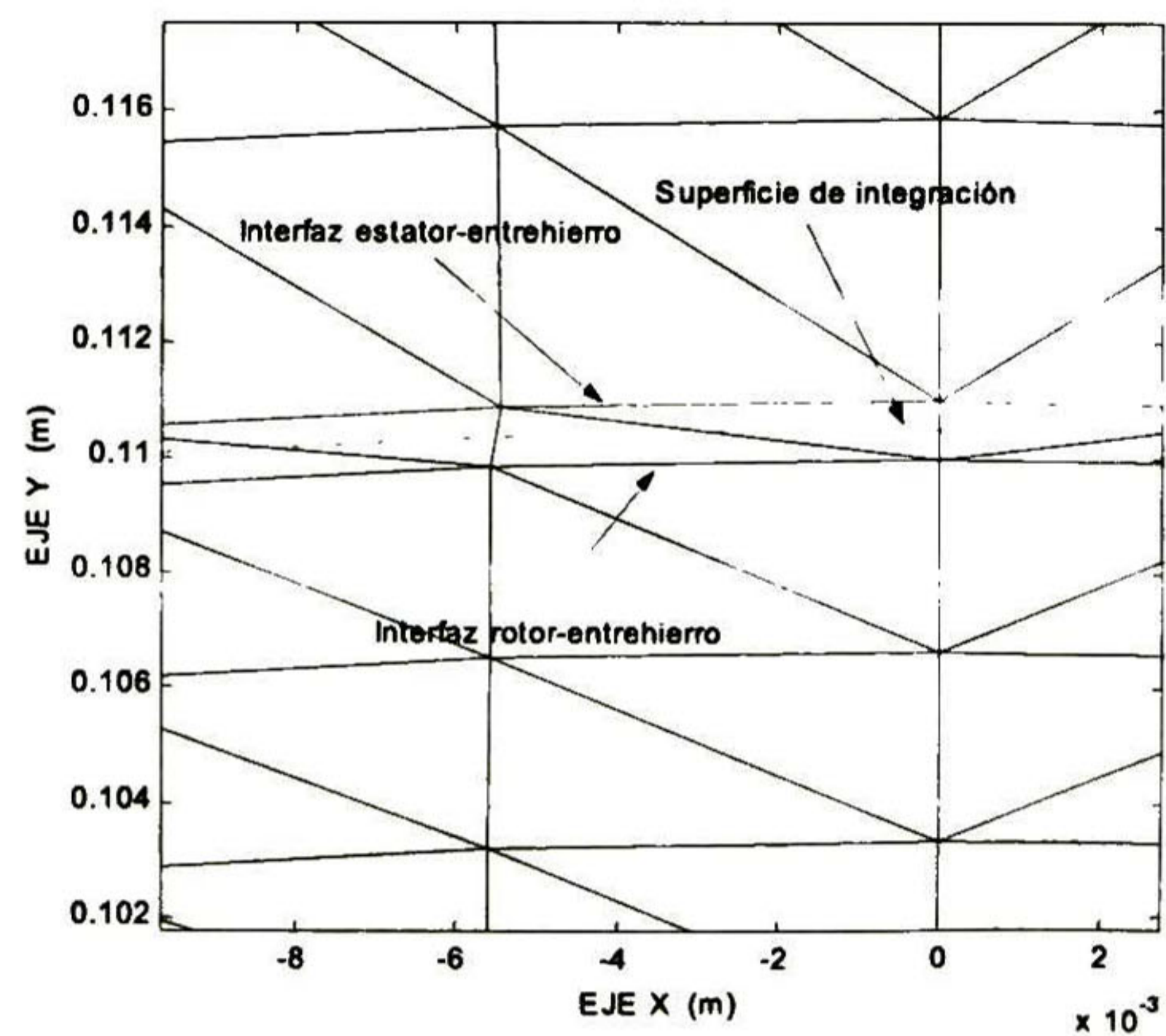


Fig. 4.1 Superficie de integración en el método del tensor de Maxwell

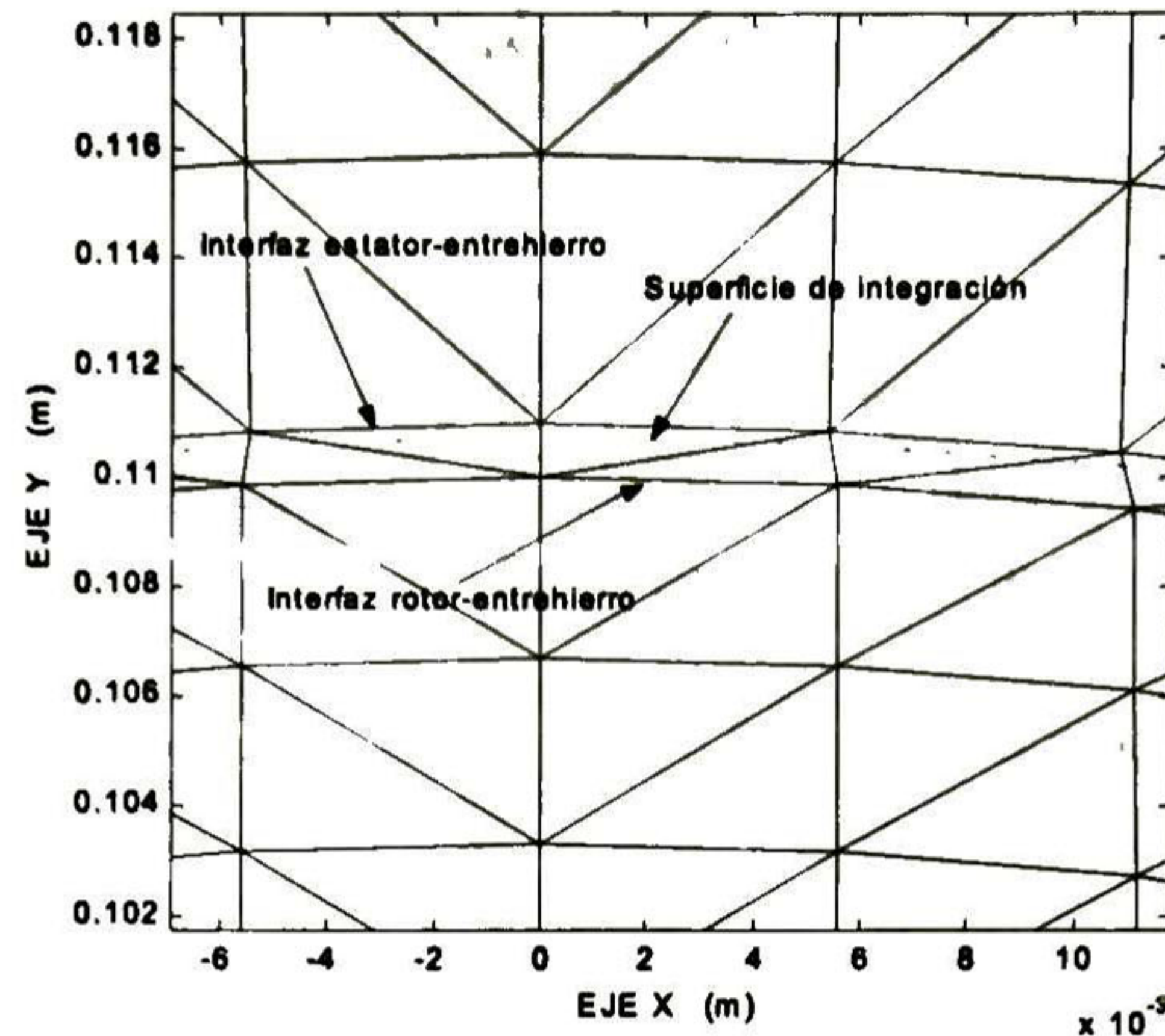
donde x_1, y_1, x_2 y y_2 son las coordenadas de los puntos de intersección entre la superficie s y los lados de los triángulos, se define una variable l_e como la longitud de un punto cualquiera del segmento de recta que une los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) al punto (x_1, y_1) , y $l_e dl_e$ es el diferencial de la variable l_e . Las variables x y y que aparecen en (4.10) se pueden expresar en función de la variable l_e .



a).- Intersección en la parte inferior



b).- Intersección en el centro



c).-Intersección en la parte superior

Fig. 4.2 Vista detallada de la superficie de integración intersectando los elementos triangulares a diferentes alturas

El método del elemento finito proporciona una solución aproximada de los campos electromagnéticos. Por lo tanto, el par dependerá en cierta medida de la superficie de integración empleada. En la figura 4.2 se muestran tres superficies de integración intersectando los lados de los triángulos a diferentes alturas. Con la misma discretización y los parámetros que se indican al final del capítulo 2 se obtuvo un valor del par de 16 591 N-m para la superficie de la figura 4.2 a), 16 824 N-m para la superficie de la figura 4.2 b) y 17 050 N-m para la superficie de la figura 4.2 c). Al comparar con el resultado analítico se observa que la mejor aproximación se obtiene cuando la superficie de integración intersecta los triángulos a la mitad de los lados (Fig. 4.2 b)). Esto concuerda con lo que se dice en [24] y [25].

4.3 MÉTODO DEL TRABAJO VIRTUAL

El principio del trabajo virtual establece que en un sistema electromecánico, el par sobre un elemento está determinado por la derivada parcial de la energía magnética almacenada con respecto al desplazamiento angular del elemento [26].

Con la solución del potencial vectorial dada por el método del elemento finito es posible expresar la energía magnética almacenada en términos de los valores nodales del potencial vectorial y de las coordenadas de los nodos. Posteriormente, se hacen desarrollos adicionales para obtener la derivada de la energía magnética almacenada con respecto al desplazamiento angular del elemento sobre el cual se desea calcular el par. La energía magnética almacenada se calcula como [15, 16, 17]

$$W_m = \frac{1}{2} \iint \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \, dx dy. \quad (4.12)$$

De la relación constitutiva (1.10), la definición de potencial vectorial ecuación (1.32), (3.8) y (4.5) se obtiene que el valor efectivo de la energía magnética almacenada en cada elemento está dado por

$$\mathcal{W}_{me} = \text{Re} \left(\frac{1}{16\mu\Delta} \hat{\mathbf{A}}_e \mathbf{S}_e \hat{\mathbf{A}}_e^* \right), \quad (4.13)$$

donde

$$\mathbf{S}_e = \begin{bmatrix} a_1^2 + b_1^2 & a_1 a_2 + b_1 b_2 & a_1 a_3 + b_1 b_3 \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 & a_2^2 + b_2^2 & a_2 a_3 + b_2 b_3 \\ a_1 a_3 + b_1 b_3 & a_2 a_3 + b_2 b_3 & a_3^2 + b_3^2 \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

El par se determinará mediante la ecuación

$$\mathcal{P} = -\frac{\partial \mathcal{W}_m}{\partial \theta}. \quad (4.15)$$

donde θ es el desplazamiento angular del rotor. En (4.13) se observa que la energía magnética almacenada depende de las coordenadas de los nodos y de los valores nodales del potencial vectorial. Aplicando la regla de la cadena a (4.15)

$$\mathcal{P} = -\frac{\partial \mathcal{W}_m}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \theta} - \frac{\partial \mathcal{W}_m}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial \theta} - \frac{\partial \mathcal{W}_m}{\partial \hat{\lambda}_i} \frac{\partial \hat{\lambda}_i}{\partial \theta} \quad (4.16)$$

Como $\frac{\partial \mathcal{W}_m}{\partial \hat{\lambda}_i} = 0$ al ser evaluada en los valores obtenidos para los $\hat{\lambda}_i$, $i=1, 2, 3, N$ con el método de Galerkin, (4.16) puede ser reducida a [6, 27],

$$\mathcal{P} = -\frac{\partial \mathcal{W}_m}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \theta} - \frac{\partial \mathcal{W}_m}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial \theta}. \quad (4.17)$$

Las coordenadas (x_i, y_i) de los elementos ubicados en el estator permanecen constantes ante desplazamientos angulares del rotor. De esta manera, un elemento que tenga todos sus nodos en el estator no contribuye al par ya que $\frac{\partial x_i}{\partial \theta} = 0$ y $\frac{\partial y_i}{\partial \theta} = 0$. Así mismo, los elementos cuya totalidad de nodos se encuentra en el rotor sólo se desplazan angularmente al variar θ , pero su energía magnética permanece constante ya que no sufren deformación. Por lo tanto, los únicos elementos que pueden contribuir al par son los que se localizan en el entrehierro. De (4.13) y de (4.15)

$$\mathcal{P}_e = \text{Re} \left(\frac{1}{16\mu\Delta^2} \hat{\mathbf{A}}_e \mathbf{S}_e \hat{\mathbf{A}}_e^* \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} - \frac{1}{16\mu\Delta} \hat{\mathbf{A}}_e \frac{\partial \mathbf{S}_e}{\partial \theta} \hat{\mathbf{A}}_e^* \right). \quad (4.18)$$

\mathbf{S}_e y Δ no son funciones explícitas de θ , por lo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{S}_e}{\partial \theta} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{S}_e}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathbf{S}_e}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Delta}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \theta} + \frac{\partial \Delta}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Con el propósito de encontrar la relación entre las coordenadas de los nodos (x_i, y_i) y el desplazamiento angular del rotor, se expresan las coordenadas rectangulares en términos de las coordenadas cilíndricas (ρ_i, ϕ_i)

$$\begin{aligned} x_i &= \rho_i \cos \phi_i \\ y_i &= \rho_i \text{sen} \phi_i. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Cuando θ adquiere un valor diferente al inicial, las coordenadas rectangulares del i -ésimo nodo en el rotor (x_i, y_i) cambian a (x_i', y_i') :

$$\begin{aligned} x_i' &= r_i \cos(\phi_i + \theta) \\ y_i' &= r_i \text{sen}(\phi_i + \theta). \end{aligned} \quad (4.21)$$

De esta manera las coordenadas de los nodos en el rotor quedan expresadas en función de θ . De (4.18) y (4.19) evaluando en $\theta = 0$ se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_e = \text{Re} \left[\frac{-1}{16\mu\Delta} \hat{A}_e \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial S_e}{\partial x_i} r_i (-\text{sen} \phi_i) + \frac{\partial S_e}{\partial y_i} r_i (\cos \phi_i) \right] \hat{A}_e^* \right. \\ \left. + \frac{1}{16\mu\Delta^2} \hat{A}_e S_e \hat{A}_e^* \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial \Delta}{\partial x_i} r_i (-\text{sen} \phi_i) + \frac{\partial \Delta}{\partial y_i} r_i (\cos \phi_i) \right] \right] \end{aligned} \quad (4.22)$$

donde, por brevedad, se omitió el apostrofe sobre x_i y y_i . Derivando el elemento ubicado en la l -ésima fila y en la m -ésima columna de S_e :

$$\frac{\partial [S_e]_{lm}}{\partial x_i} = b_l \frac{\partial b_m}{\partial x_i} + b_m \frac{\partial b_l}{\partial x_i} \quad \frac{\partial [S_e]_{lm}}{\partial y_i} = a_l \frac{\partial a_m}{\partial y_i} + a_m \frac{\partial a_l}{\partial y_i} \quad (4.23)$$

y para las derivadas de Δ

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \left(a_1 \frac{\partial b_2}{\partial x_i} - a_2 \frac{\partial b_1}{\partial x_i} \right) \quad \frac{\partial \Delta}{\partial y_i} = \frac{1}{2} \left(b_2 \frac{\partial a_1}{\partial y_i} - b_1 \frac{\partial a_2}{\partial y_i} \right) \quad (4.24)$$

Para las derivadas de a_i y b_i

$$\frac{\partial a_k}{\partial y_i} = \frac{\partial y_l}{\partial y_i} - \frac{\partial y_m}{\partial y_i} \quad \frac{\partial b_k}{\partial x_i} = \frac{\partial x_m}{\partial x_i} - \frac{\partial x_l}{\partial x_i}, \quad (4.25)$$

donde $i=1, 2, 3$ y k, l y m toman respectivamente los valores de 1, 2 y 3 de manera cíclica.

Finalmente para las derivadas $\frac{\partial x_k}{\partial x_i}$ y $\frac{\partial y_k}{\partial y_i}$

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_i}, \frac{\partial y_j}{\partial y_i} = \begin{cases} 1 & \text{si el nodo } j \text{ se encuentra en el rotor y si } j = i \\ 0 & \text{si el nodo } j \text{ no se encuentra en el rotor o si } j \neq i \end{cases} \quad (4.26)$$

4.4 RESULTADOS

Los errores porcentuales, respecto de los resultados analíticos, en el cálculo del par en el motor de inducción ideal con los tres métodos expuestos en las secciones anteriores se muestran en la tabla 4.1 para siete discretizaciones. La discretización menos refinada corresponde a la fila No. 1 y paulatinamente se incrementa el nivel de refinamiento en la discretización hasta la fila No. 7 (Fig. 4.3). El error se define como

$$Error\ porcentual = \frac{resultado\ n\acute{u}merico - resultado\ anal\acute{it}ico}{resultado\ anal\acute{it}ico} \times 100. \quad (4.27)$$

La energía magnética almacenada es un parámetro de amplia utilización para evaluar la exactitud en la solución del potencial vectorial. En la tabla 4.2 se muestran los errores porcentuales en la energía magnética almacenada. En las primeras cuatro columnas aparecen los errores para las zonas 1, 2, 3 y 4 del motor de inducción ideal y en la última columna aparece el error correspondiente a la energía magnética total. En las dos tablas se utilizaron las mismas discretizaciones.

Tabla 4.1 Errores porcentuales en el cálculo del par en el motor de inducción ideal

	Ecuación de Lorentz	Tensor de Maxwell	Trabajo virtual
Discretización No. 1 300 nodos, 540 elementos	-1.71	7.70	-1.93
Discretización No. 2 572 nodos, 1056 elementos	-0.94	1.44	-0.94
Discretización No. 3 928 nodos, 1740 elementos	-0.53	0.28	-0.53
Discretización No. 4 1560 nodos, 2964 elementos	-0.34	-0.12	-0.34
Discretización No. 5 2208 nodos, 4224 elementos	-0.22	-0.12	-0.22
Discretización No. 6 2860 nodos, 5500 elementos	-0.19	-0.13	-0.19
Discretización No. 7 3900 nodos, 7540 elementos	-0.14	-0.11	-0.14

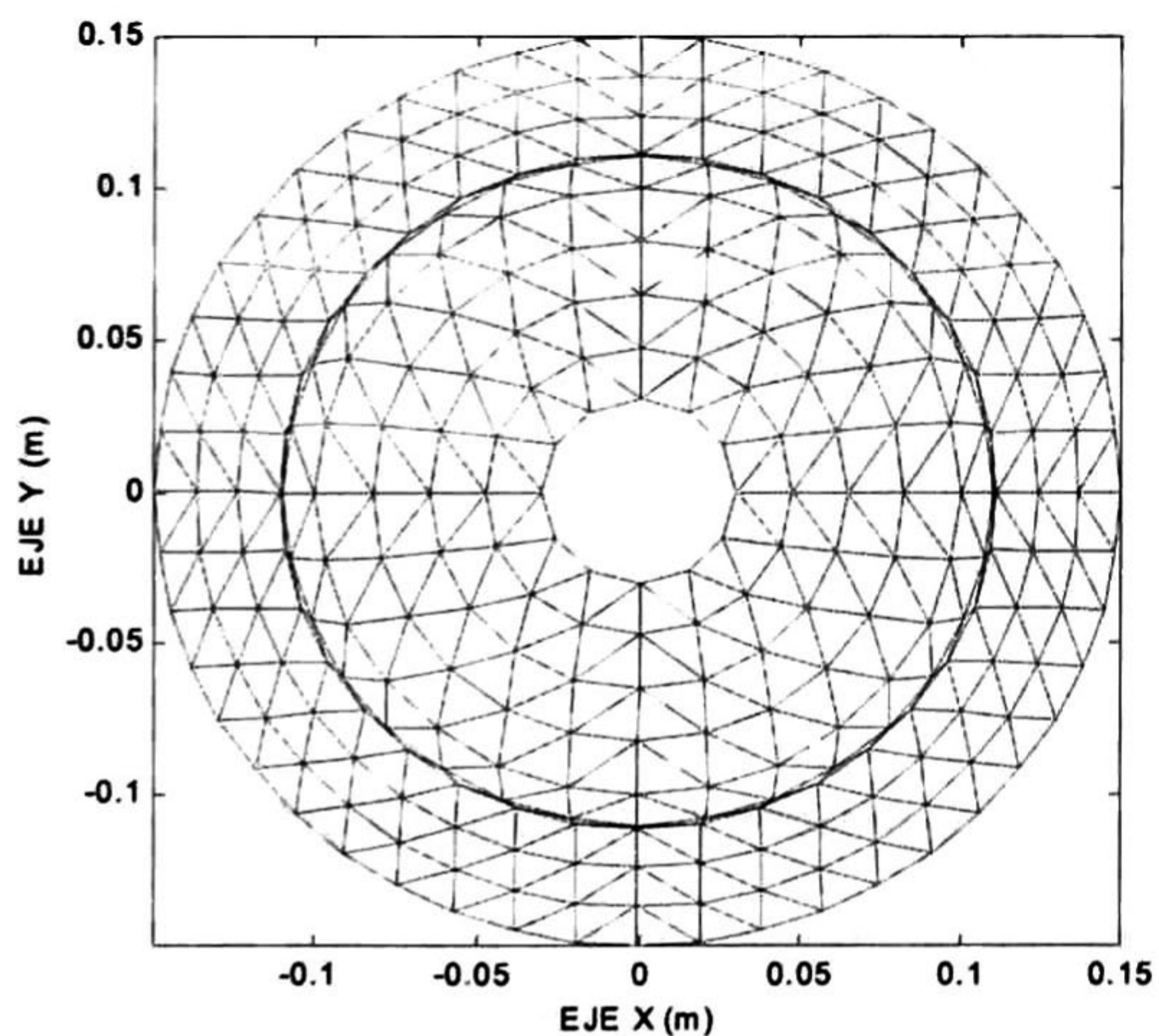
De la tabla 4.1 se observa que los errores en el cálculo del par son aproximadamente de la misma magnitud y muy pequeños; excepto para el método del tensor de Maxwell en el primer mallado. Este método presentó mayor sensibilidad al refinamiento del mallado, con la primera discretización el error es relativamente grande; sin embargo, disminuye rápidamente conforme el nivel de refinamiento aumenta y finalmente el resultado más preciso se obtiene con este método; aunque por un margen muy reducido. Con la ecuación de fuerza de Lorentz y el método del trabajo virtual se obtuvieron resultados muy similares, no obstante intervenir distintos elementos triangulares en el cálculo del par con estos dos métodos. Los métodos del trabajo virtual y del tensor de Maxwell utilizan elementos del entrehierro, zona 3; al comparar las columnas correspondientes a estos métodos en la tabla 4.1 con la columna de la zona No. 3 en la tabla 4.2, se observa que los errores en las tres columnas son aproximadamente de la misma magnitud; excepto en el método del tensor de Maxwell para la primera discretización. El método de la ecuación de fuerza de Lorentz utiliza elementos de las regiones conductoras del rotor, zona No. 2; la exactitud alcanzada con este método superó la exactitud en el cálculo de la energía

magnética en la zona No. 2. Como puede apreciarse en la tabla 4.1, no existe problema de convergencia, y a medida que las discretizaciones son más finas los resultados son más precisos.

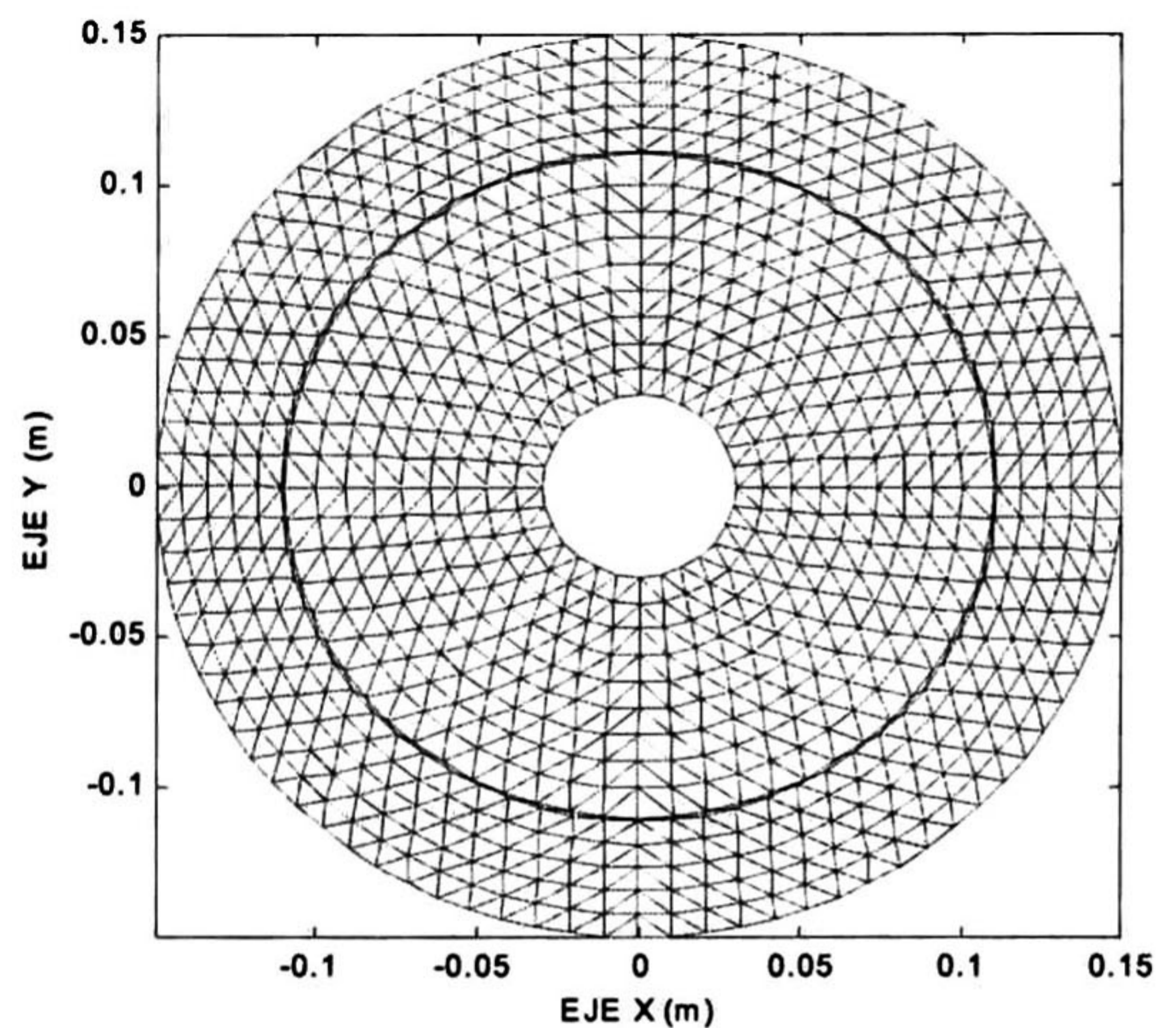
Tabla 4.2 Errores porcentuales en el cálculo de la energía magnética en el motor de inducción idealizado

	Zona No. 1	Zona No. 2	Zona No. 3	Zona No. 4	Total
Discretización No. 1 300 nodos, 540 elementos	-0.90	-16.82	-0.77	-1.08	-13.64
Discretización No. 2 572 nodos, 1056 elementos	-0.14	-17.41	-0.45	-1.53	-14.06
Discretización No. 3 928 nodos, 1740 elementos	0.07	-17.51	-0.41	-1.70	-14.13
Discretización No. 4 1560 nodos, 2964 elementos	-0.14	-4.50	-0.25	-0.37	-3.65
Discretización No. 5 2208 nodos, 4224 elementos	-0.07	-4.47	-0.21	-0.37	-3.63
Discretización No. 6 2860 nodos, 5500 elementos	-0.07	-2.02	-0.16	-0.17	-1.65
Discretización No. 7 3900 nodos, 7540 elementos	-0.07	-2.01	-0.14	-0.17	-1.64

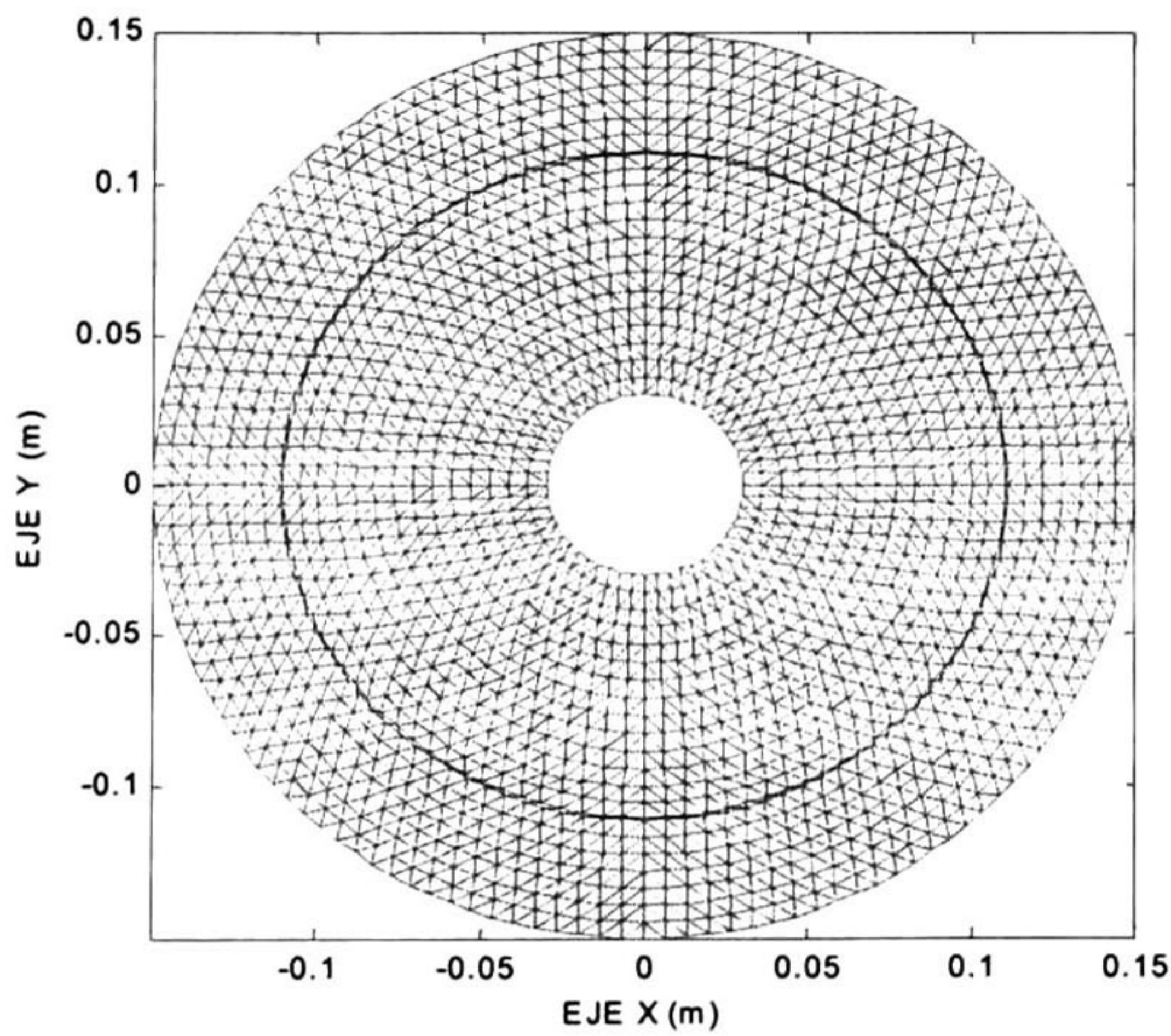
Una conclusión muy importante, que se concluye de la Tabla No. 2, es que de acuerdo al resultado en la energía magnética, el error en el potencial vectorial es mayor en regiones conductoras (zona No. 2). Pese a que en el motor de inducción ideal los resultados con los tres métodos sean muy similares, en otros tipos o modelos de motores, en caso de existir discrepancia en los resultados, los métodos tensor de Maxwell y trabajo virtual que utilizan elementos del entrehierro se consideran más confiables que el método basado en la ecuación de fuerza de Lorentz, ya que en éste último se emplean elementos triangulares de las regiones conductoras del rotor.



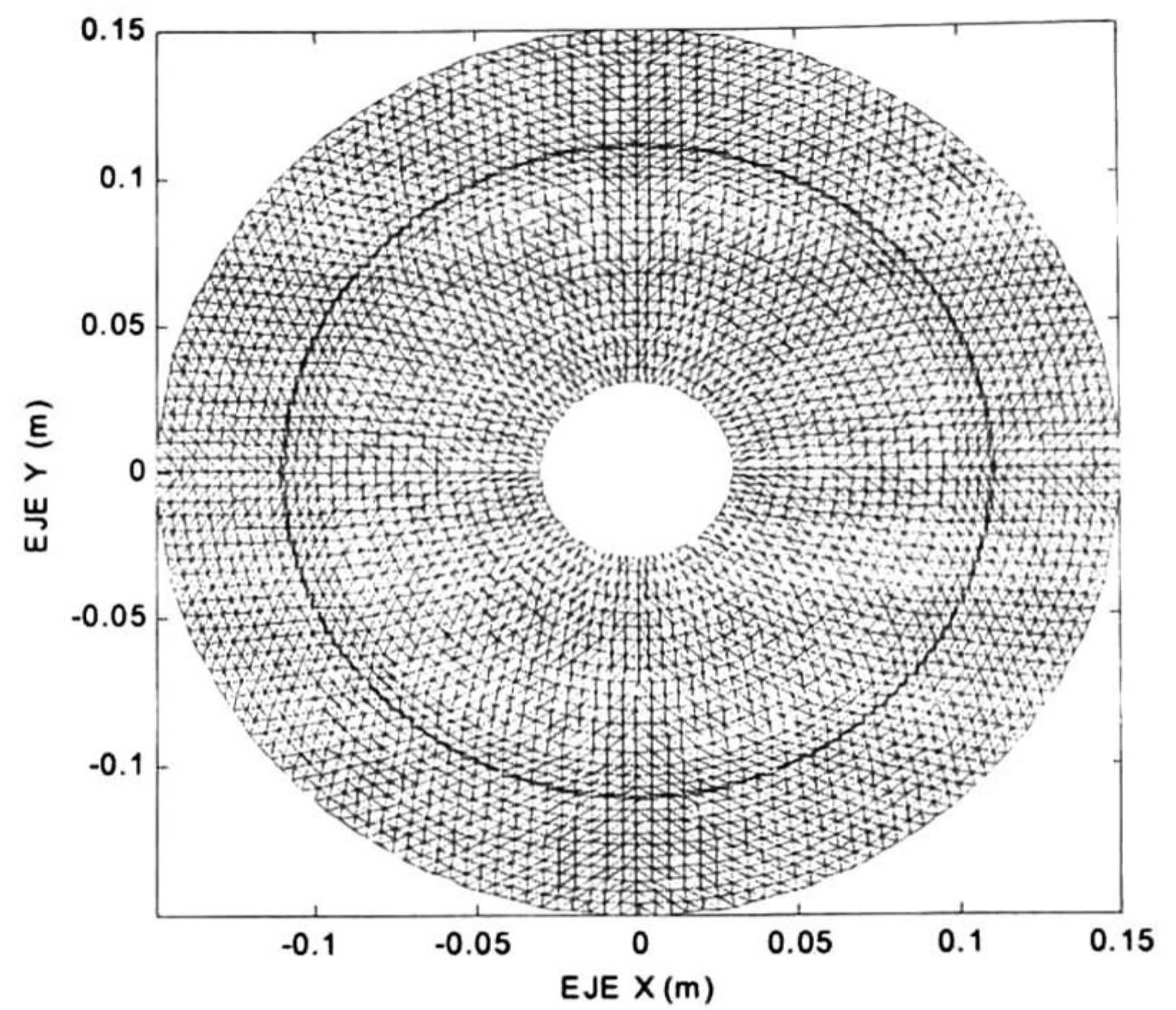
a) Discretización No. 1



b) Discretización No. 3



c) Discretización No 5



d) Discretización No. 7

Fig. 4.3 Discretizaciones utilizadas para calcular el par en el motor de inducción idealizado

Los resultados obtenidos en el cálculo del par con los tres métodos pueden ser catalogados como excelentes (compárense con resultados en el cálculo de fuerzas y pares publicados en [1, 6, 22, 23, 25, 27]), dado que en general los errores fueron muy pequeños y la exactitud en el cálculo del par fue igual o superior a la exactitud en el cálculo de la energía magnética almacenada. Los resultados obtenidos demuestran que las formulaciones que se desarrollaron son correctas, así como los programas en que éstas se implementaron.

5 SIMULACIÓN DE UN MOTOR DE INDUCCIÓN CON CARACTERÍSTICAS REALES

En este capítulo se calculan los campos electromagnéticos y el par en un motor de inducción de características reales operando en estado estable. Las formulaciones utilizadas son las presentadas en los capítulos 3 y 4. Se parte de datos de diseño como dimensiones geométricas y propiedades de los materiales. Se considera que el motor está conectado a una fuente de voltaje trifásica y se describe en detalle la inclusión de la fuente en el modelo matemático del elemento finito. Finalmente se analiza la convergencia del par y el desempeño par-velocidad del motor.

5.1 MODELO DEL MOTOR DE INDUCCIÓN

La geometría de la sección transversal y las dimensiones del motor de inducción que se emplea en este capítulo se muestra en la Figura 5.1. Consta de 36 ranuras en el estator y 18 barras en el rotor. Gran parte de los factores que tienen que ver con la geometría y las dimensiones del motor pueden ser manipulados con relativa facilidad en el modelo matemático del elemento finito. Así mismo, con relativa facilidad pueden efectuarse cambios en las características tales como tipo de conexión, ya sea delta o estrella, paso y vueltas por bobina, conexión entre bobinas, número de pares de polos etc.

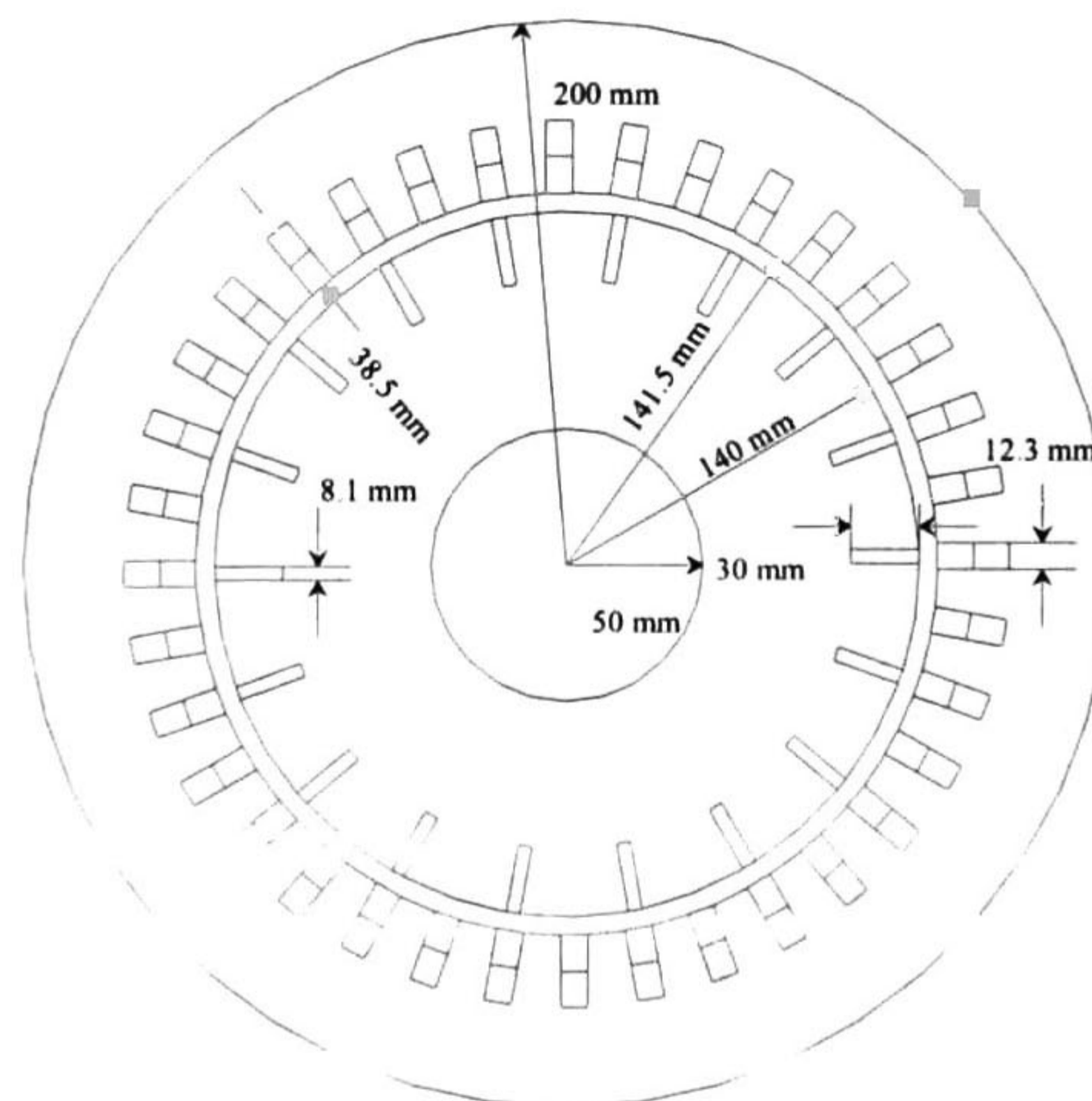


Fig. 5.1 Geometría y dimensiones del motor de inducción con características reales

En la Figura 5.2 se muestran las conexiones de las bobinas en el estator. La notación utilizada es como se indica a continuación: en la capa superior de la ranura 1 se tiene el primer costado de la bobina y se etiqueta con $a_{1,1}^+$. El segundo costado se localiza en la capa inferior y se etiqueta con $a_{1,1}^-$ (ranura 9). Observe que el único cambio en la etiqueta del segundo costado es la marca de la polaridad, esto se debe a que en el primer costado de la bobina la dirección de la corriente es entrante y en el otro saliente. Dado que se tienen diez vueltas por bobina, y que no hay grupos de bobinas conectados en serie, el conductor de la bobina del ejemplo da diez vueltas pasando sucesivamente por la capa superior de la ranura 1 y por la capa inferior de ranura nueve,

como el tipo de conexión es estrella, una de las terminales del conductor se conecta a la fase a y la otra al neutro.

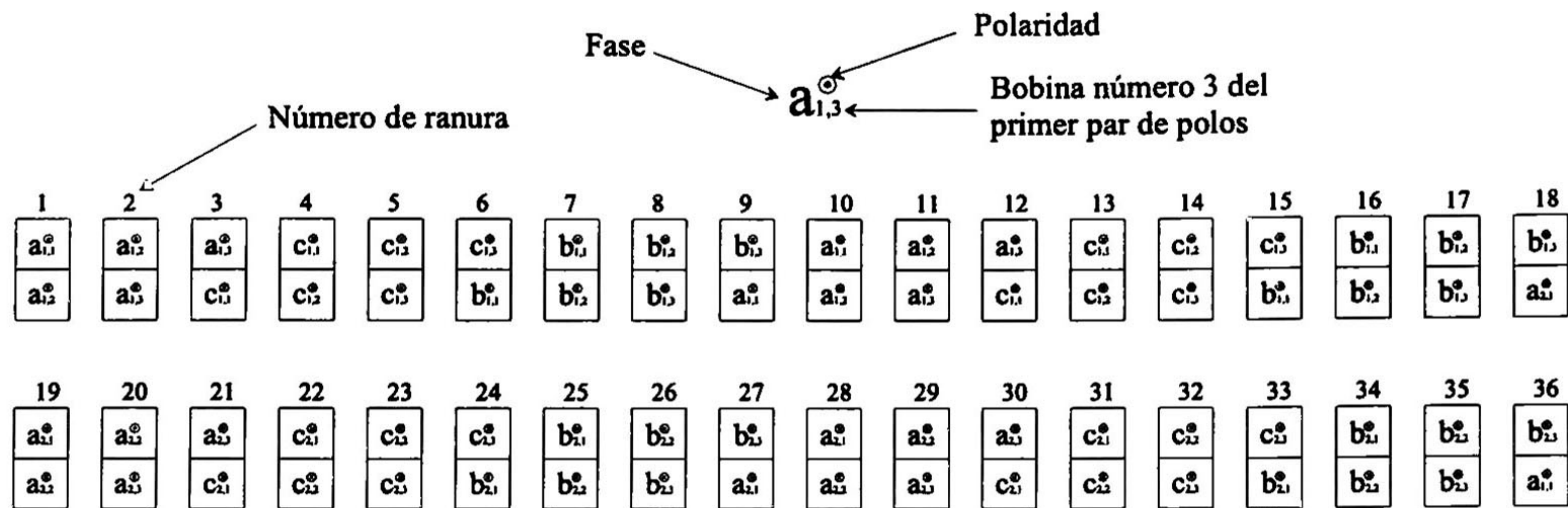


Fig. 5.2 Detalle de la conexión de las bobinas

Tabla 5.1 Datos del motor de características reales

Devanado	Doble capa
Bobinas en serie	1
Vueltas por bobina	10
Valor efectivo de la fuente de voltaje	127 V
Tipo de conexión	Estrella
Pares de polos	2
Frecuencia	60 Hz
Permeabilidad relativa del laminado en el rotor	10 000
Permeabilidad relativa del laminado en el estator	10 000
Material de las barras	Cobre
Material de las bobinas	Cobre

Los resultados obtenidos en las secciones siguientes se calcularon con los datos que se muestran en la tabla 5.1, conectando las bobinas como se indica en la Figura 5.2 y con la geometría y dimensiones que se observan en la Figura 5.1.

5.2 INCLUSIÓN DE FUENTES DE VOLTAJE EN EL SISTEMA DE ECUACIONES ALGEBRAICAS

Cuando se especifican fuentes de excitación del motor como densidades de corriente, la ecuación gobernante en estado estable y con excitación senoidal corresponde a la ecuación (3.3) que se repite aquí por conveniencia

$$-\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} + j\omega\sigma\lambda = J_0, \tag{5.1}$$

donde J_0 es conocida. (5.1) difiere de la ecuación gobernante para el motor de inducción ideal en que $J_0 \neq 0$. En situaciones reales, el motor de inducción se conecta a una fuente de voltaje y J_0 es desconocida. A continuación se aborda el problema de la inclusión de las fuentes de voltaje en la formulación del sistema de ecuaciones.

Considere la Figura 5.3 donde se muestra una sección del estator del motor de inducción excitado por una fuente de voltaje, V_f , de valor conocido. Se asume que no hay cambios en la geometría en dirección del eje z y se desprecian los efectos de borde. Empleando la relación constitutiva (1.11) en (5.1)

$$-\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} + j\omega\sigma\lambda = \sigma \hat{E}_0, \quad (5.2)$$

donde \hat{E}_0 es el fasor de la componente z del campo eléctrico producido por la fuente de voltaje ($E_0 = E_0 \hat{a}_z$, $E_0 = \text{Re}(\hat{E}_0 e^{j\omega t})$). El campo eléctrico E_0 y el voltaje de la fuente se relacionan por medio de [7]

$$V_f = -\int E_0 \cdot d\ell \quad (5.3)$$

y el campo eléctrico total es dado por

$$E = E_0 + E_s, \quad (5.4)$$

donde E_s es la componente del campo eléctrico producido por inducción magnética.

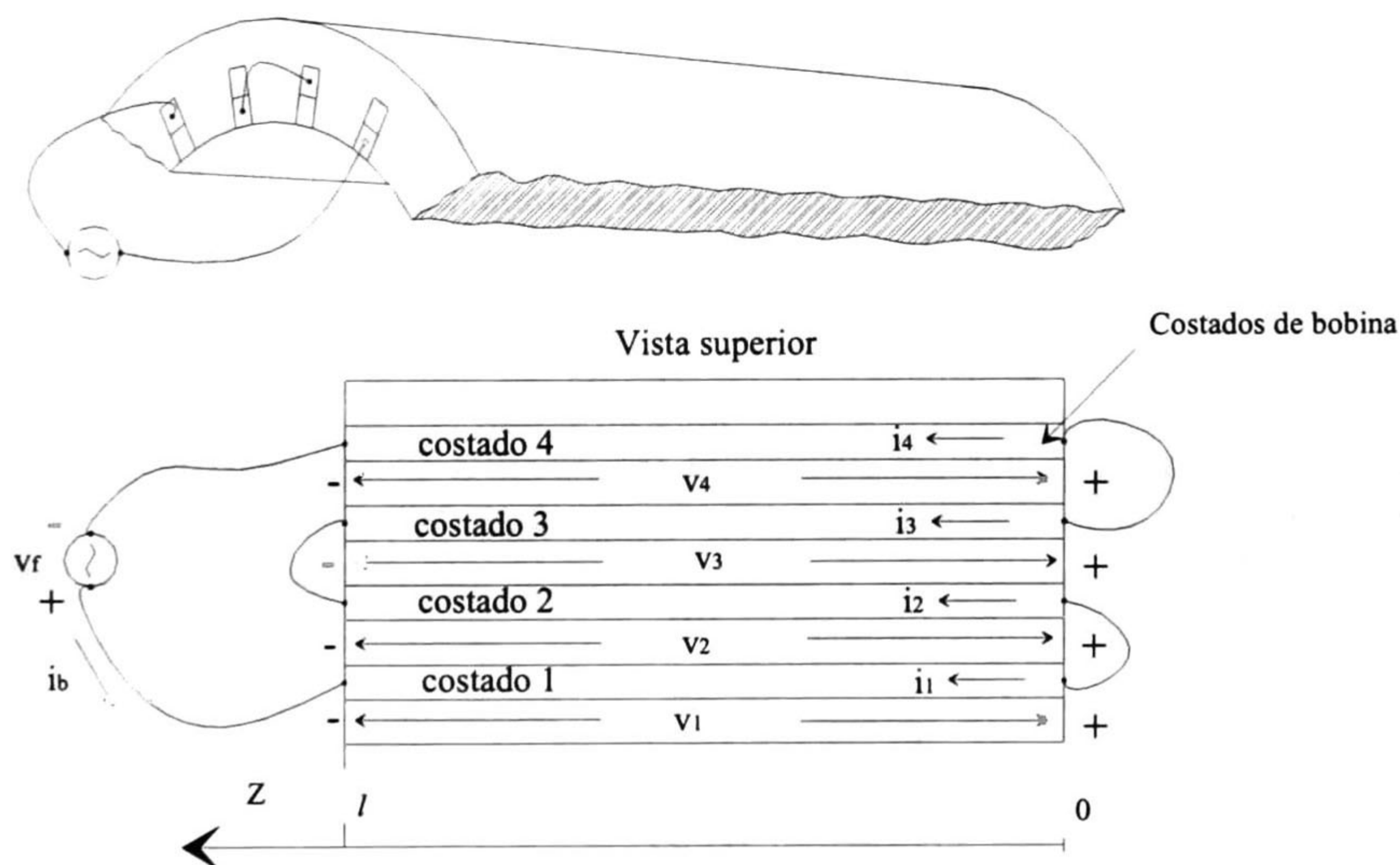


Fig. 5.3 Conexión de una fuente de voltaje a los devanados del estator

La componente del campo eléctrico producido por la fuente E_0 es constante en dirección del eje z . Ahora bien, si E_0 es positivo en los cuatro costados de bobina, el potencial eléctrico en $z=0$ es mayor que en $z=l$ y V_1, V_2, V_3 y V_4 son positivos (Figura 5.3) de acuerdo a la elección de las polaridades. Por lo tanto, de (5.3)

$$V_1 = E_{01}l \quad V_2 = E_{02}l \quad V_3 = E_{03}l \quad V_4 = E_{04}l. \quad (5.5)$$

donde l es la longitud axial del motor, además

$$V_f = -V_1 + V_2 - V_3 + V_4, \quad (5.6)$$

y combinando (5.5) y (5.6)

$$\frac{V_f}{l} = -E_{01} + E_{02} - E_{03} + E_{04} \quad (5.7)$$

donde E_{01}, \dots, E_{04} denotan el campo eléctrico en los costados de bobina 1, . . . ,4 respectivamente y sus valores se desconocen. En lo que respecta a las ecuaciones de corriente, los cuatro costados de bobina de la Figura 5.3 están conectadas en serie y en la forma que se han elegido las direcciones positivas para las corrientes resulta

$$-i_1 = i_b \quad i_2 = i_b \quad -i_3 = i_b \quad i_4 = i_b \quad (5.8)$$

De la definición de densidad de corriente [15, 16, 17] se tiene

$$i_i = \int_{\Omega_{bi}} J_i d\Omega \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (5.9)$$

donde J_i es la densidad de corriente volumétrica en el i -ésimo costado de bobina y Ω_{bi} es el área de la sección transversal del i -ésimo costado de bobina. Aunque se sabe que el valor absoluto de las i_i es el mismo, éste se desconoce.

Del planteamiento anterior se encuentra que por cada costado de bobina en el motor de inducción se tiene una nueva incógnita, a saber, el valor del campo eléctrico producido por la fuente. Además, por cada grupo de costados de bobina conectados en serie aparecerá como incógnita la corriente que circula a través del grupo. Así mismo, de cada grupo de barras conectadas en serie surge una ecuación como (5.7) y en cada costado de bobina se puede plantear una nueva ecuación como alguna de las (5.8).

En el procedimiento para la formación del sistema (3.29) descrito en el capítulo 3 se considero que J_0 era conocida; en el caso que se trata en éste capítulo, no es así, por lo que el sistema (3.29) debe ser modificado y ampliado con la introducción de las ecuaciones (5.7) y (5.8). De acuerdo a lo anterior se tiene de (3.30)

$$[K_e]_{ij} = \frac{1}{4\Omega_e\mu} (a_i a_j + b_i b_j) + \begin{cases} \frac{j\omega\sigma\Omega_e}{6} & \text{si } i = j \\ \frac{j\omega\sigma\Omega_e}{12} & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad \{J_{0e}\} = \left[\frac{\Omega_e\sigma\hat{E}_0}{3} \quad \frac{\Omega_e\sigma\hat{E}_0}{3} \quad \frac{\Omega_e\sigma\hat{E}_0}{3} \right]^T \quad (5.10)$$

Al efectuar los pasos de ensamble que se explican en el capítulo 3, con las matrices elementales (5.10) se forma el sistema de ecuaciones

$$[K]\{A\} = \{J_0\}, \quad (5.11)$$

donde $\{A\}$ contiene los valores desconocidos del potencial vectorial en los nodos y, a diferencia del sistema de ecuaciones (3.29), en (5.11) también aparecen incógnitas en $\{J_0\}$. Ahora bien, empleando (5.9), la relación constitutiva (1.11) y expresando la densidad de corriente volumétrica en términos de densidad de corriente inducida y densidad de corriente producida por fuentes, ecuación (2.3), la corriente en el i -ésimo costado de bobina se calcula

$$\begin{aligned} i_{bi} &= \sigma E_{0i} \Omega_{bi} - j\omega\sigma \sum_{e=1}^m \sum_{j=1}^3 \iint_{\Omega_e} \lambda_{ej} W_{ej} dx dy \\ &= \sigma E_{0i} \Omega_{bi} - j\omega\sigma \sum_{e=1}^m \sum_{j=1}^3 \lambda_{ej} \frac{\Omega_e}{3} \\ &= \sigma E_{0i} \Omega_{bi} - j\omega\sigma \sum_{e=1}^m \left[\frac{\Omega_e}{3} \quad \frac{\Omega_e}{3} \quad \frac{\Omega_e}{3} \right] \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.12)$$

donde se ha considerado que la conductividad es constante en la barra y m es el número total de elementos en Ω_{bi} . λ_{ej} se refiere al fasor del potencial vectorial del nodo del e -ésimo elemento etiquetado con el número interno j . W_{ej} debe interpretarse de una manera semejante.

Al agrupar en un mismo sistema las ecuaciones (5.7), (5.8), (5.11) y (5.12)

$$\begin{bmatrix} [K] & -j\omega\sigma[C] & [0] \\ -j\omega\sigma[C]^T & j\omega\sigma[\Omega_b] & j\omega[D] \\ [0] & j\omega[D]^T & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{A\} \\ \frac{1}{j\omega} \{E_0\} \\ \frac{1}{j\omega} \{I_{bi}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ \frac{1}{l} \{V_f\} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

o en forma compacta

$$[K]\{u\} = \{f\}. \quad (5.14)$$

La matriz $[K]$ será llamada *matriz de rigidez aumentada*. Si N es el número de nodos que intervienen en la discretización del motor de inducción, p el número de costados de bobina y q el número de grupos de costados de bobina conectados en serie, la matriz $[C]$ será de orden $N \times p$, y los elementos de la columna i de ésta matriz serán el resultado de sumas de las áreas de los elementos triangulares del i -ésimo costado de bobina divididas por tres. $[\Omega_b]$ es una matriz diagonal de orden $p \times p$ y $[\Omega_b]_{ii} = \Omega_{bi}$. $[D]$ es una matriz de orden $p \times q$ y los valores de sus entradas diferentes de cero pueden ser 1 o -1 de acuerdo a la polaridad de los costados de bobina. El vector $\{A\}$ contiene los valores nodales del potencial vectorial (incógnitas), $\{I_{bi}\}$ los valores de la corriente que circula en cada grupo de costados de bobina conectados en serie (incógnitas), $\{E_0\}$ los valores del campo eléctrico producido por la fuente de voltaje en cada barra y $\{V_f\}$ los voltajes de las fuentes. $\{I_{bi}\}$ y $\{E_0\}$ se dividen por $j\omega$ para establecer simetría en la matriz de rigidez aumentada.

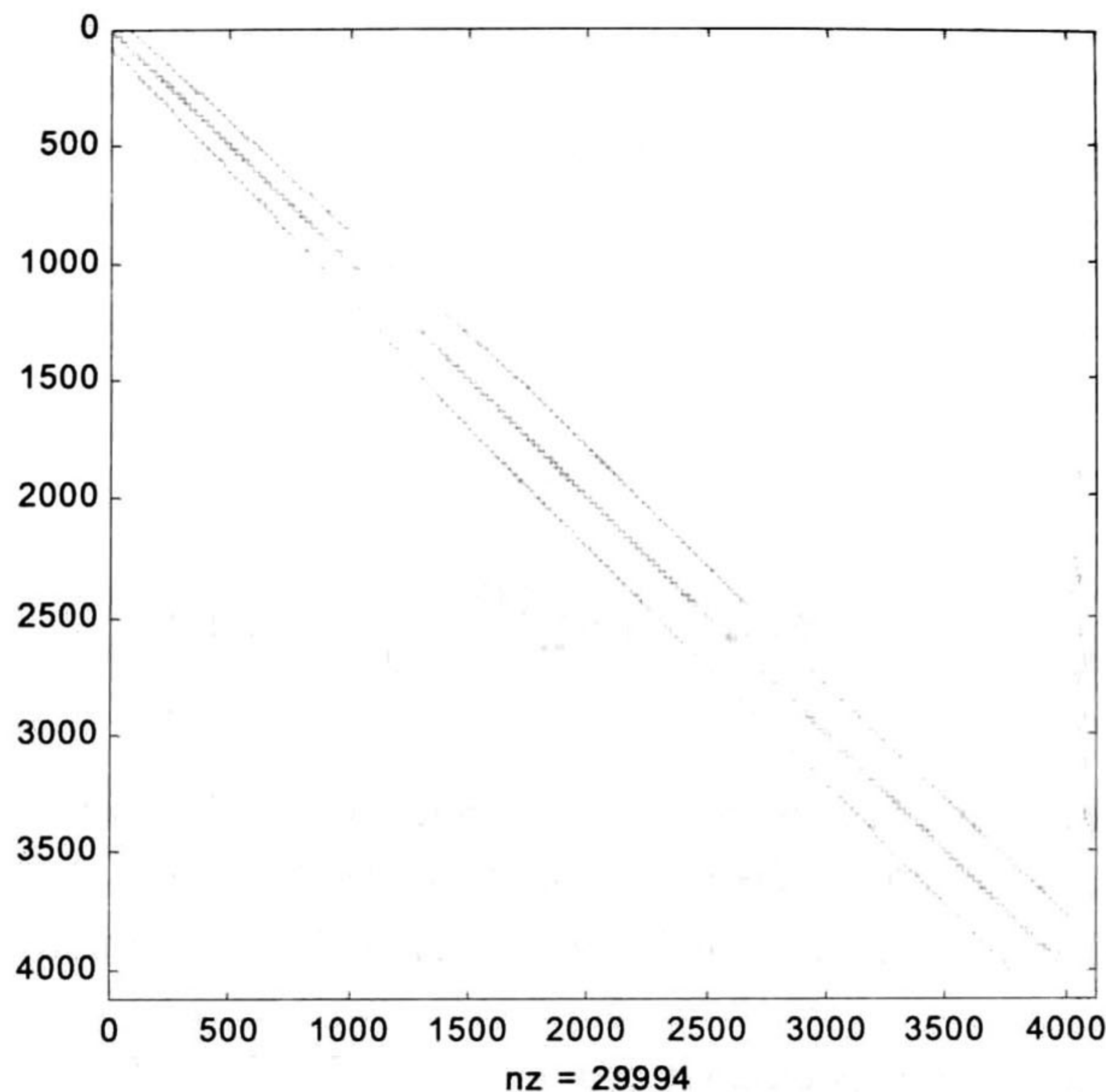


Fig. 5.4 Dispersidad de la matriz de rigidez aumentada

En la Figura 5.4 se muestra la disposición simétrica de las entradas diferentes de cero en la matriz de rigidez aumentada correspondiente al modelo del motor cuyos datos se especifican en la sección 5.1.

Aunque la estrategia para enumerar los nodos y efectuar la discretización fue similar a la utilizada en el motor de inducción ideal, en la parte inferior derecha existen diferencias entre las Figuras 3.7 y 5.4 debido a la inclusión de las nuevas ecuaciones en la matriz de la Figura 5.4.

Los valores de las corrientes y los voltajes terminales en las bobinas del estator se pueden obtener de los vectores $\{E_0\}$ e $\{I_{bi}\}$ ubicados en la parte inferior de $\{U\}$ (ver ecuaciones (5.13) y (5.14)). Por éste hecho, resulta muy sencillo acoplar circuitos eléctricos externos al modelo matemático del elemento finito [6].

5.3 RESULTADOS

5.3.1 POTENCIAL VECTORIAL Y LÍNEAS DE FLUJO MAGNÉTICO

En la Figura 5.5 se observa la componente z del potencial vectorial. La condición de frontera es $A=0$ como se aprecia en la gráfica. El potencial vectorial, por sí mismo, no aporta información práctica directa acerca del comportamiento o desempeño del motor. Sin embargo, a éste se le puede considerar como “la materia prima principal” debido a que otras cantidades de interés práctico para el analista como corrientes, voltajes, el par, etc., se calculan a partir del potencial vectorial. El motor de inducción tiene 2 pares de polos y las líneas de flujo magnético están dispuestas en cuatro grupos correspondientes a los cuatro polos (Figura 5.6).

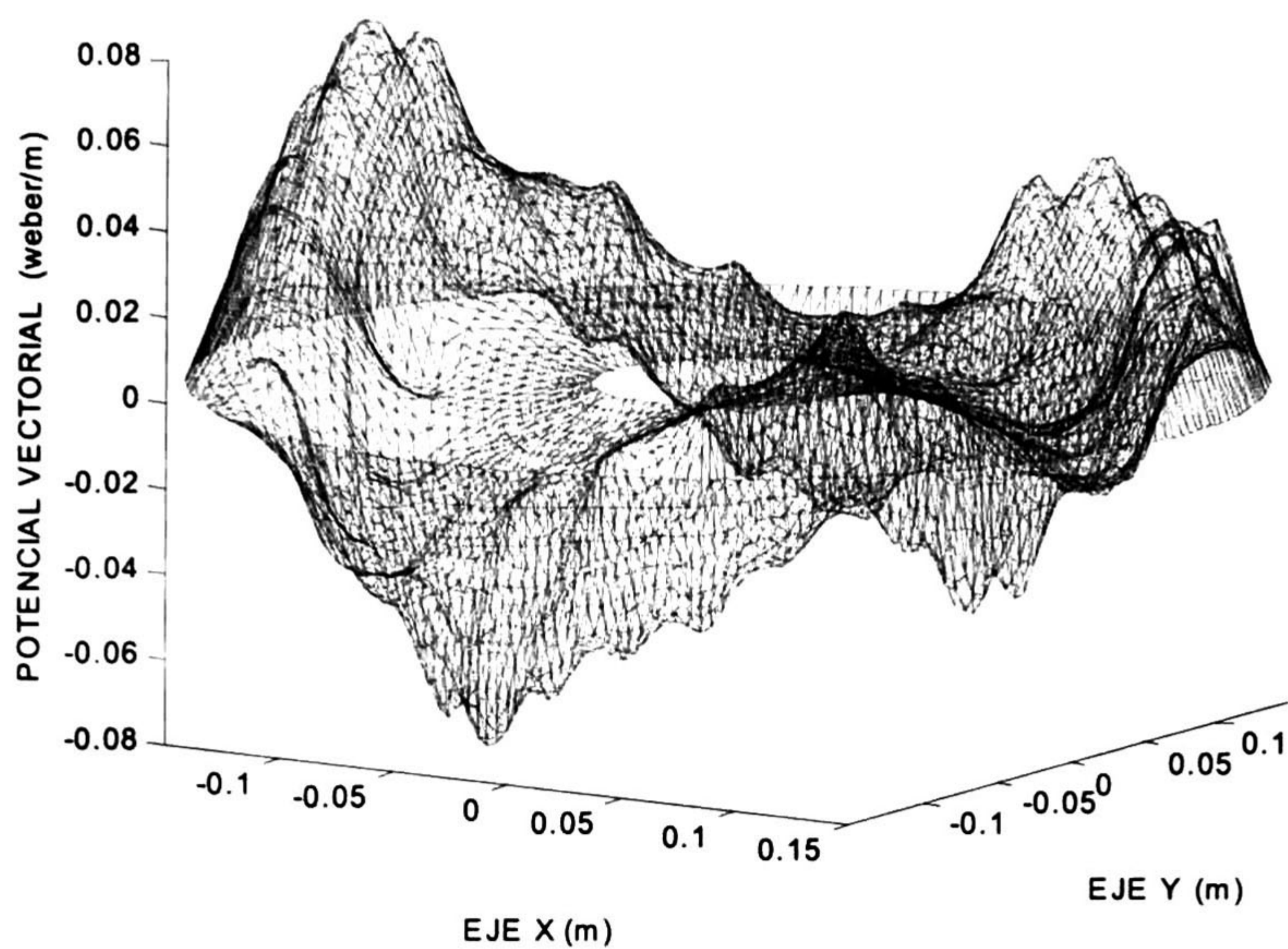


Fig. 5.5 Componente z del potencial vectorial en el motor con características reales

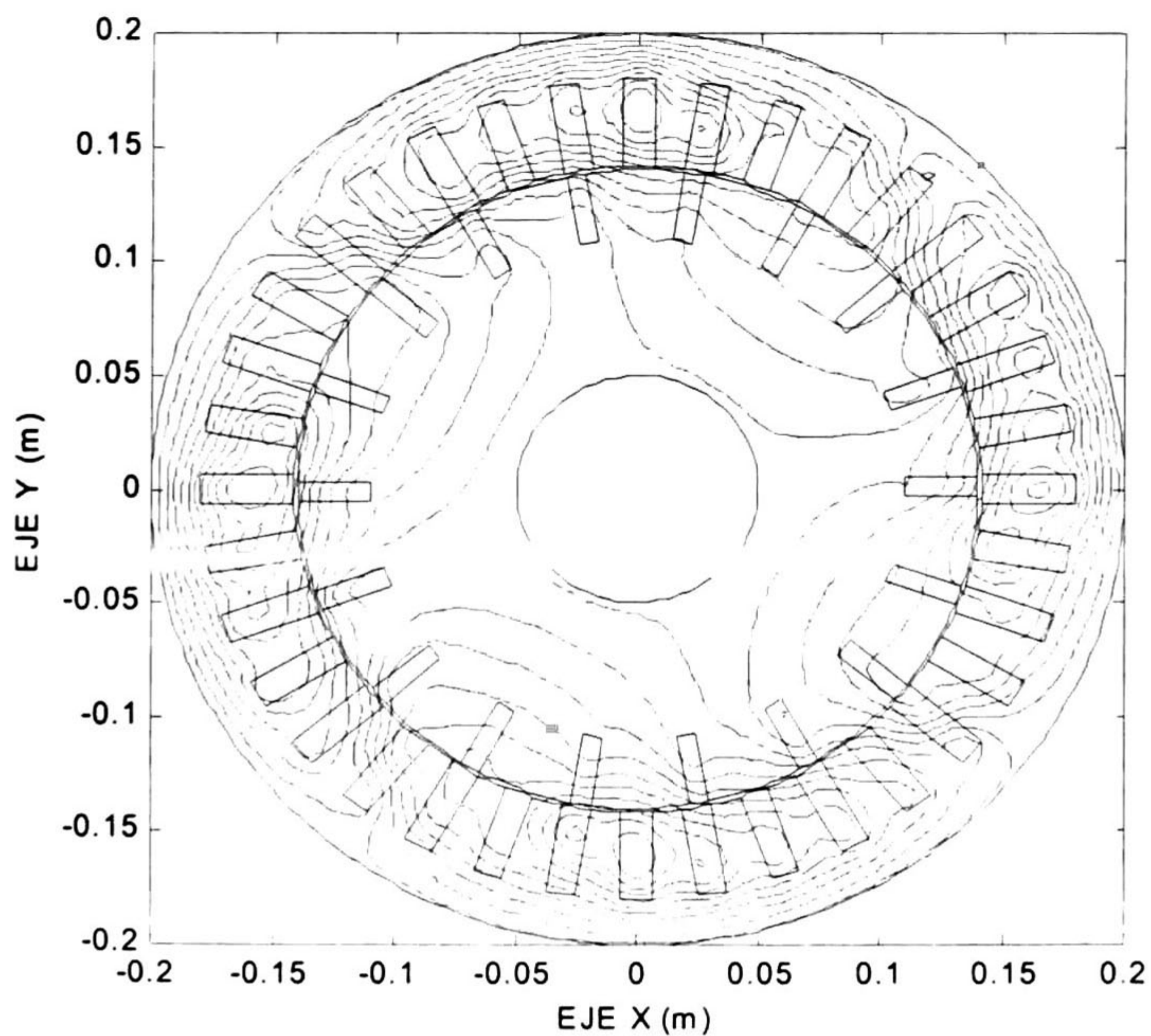


Fig. 5.6 Líneas de flujo magnético en el motor con características reales

5.3.2 CONVERGENCIA EN LOS RESULTADOS DEL PAR

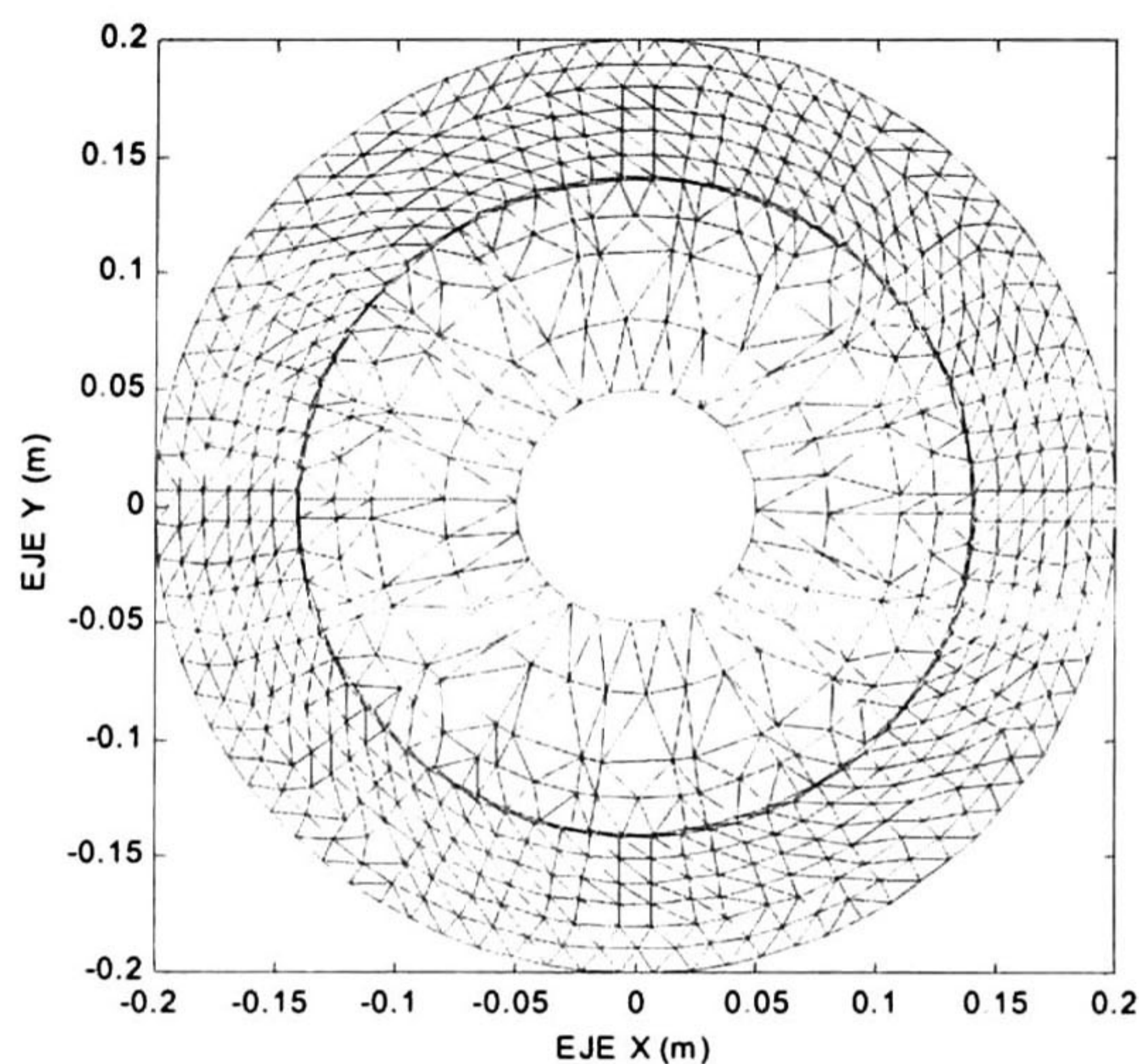
En el Capítulo 4 se desarrollaron y analizaron tres métodos para calcular el par: el primero basado en la ecuación de fuerza de Lorentz, el segundo en el tensor de Maxwell y el tercero en el principio del trabajo virtual. Con éstos métodos se hicieron pruebas en el modelo del motor real utilizado en este capítulo y en otros modelos semejantes. Con las formulaciones basadas en los métodos del tensor de Maxwell y del trabajo virtual se lograron resultados satisfactorios; no obstante, con la ecuación de fuerza de Lorentz no ocurrió así. La posibilidad de un error en el programa donde se implementó esta última formulación queda descartada debido a que el programa utilizado en este caso es el mismo que el utilizado en el motor de inducción idealizado.

Los resultados del par electromagnético, obtenidos con el método del trabajo virtual y el tensor de Maxwell, con los datos de la sección 5.1 para una unidad de longitud en dirección axial del motor se muestran en la Tabla 5.2

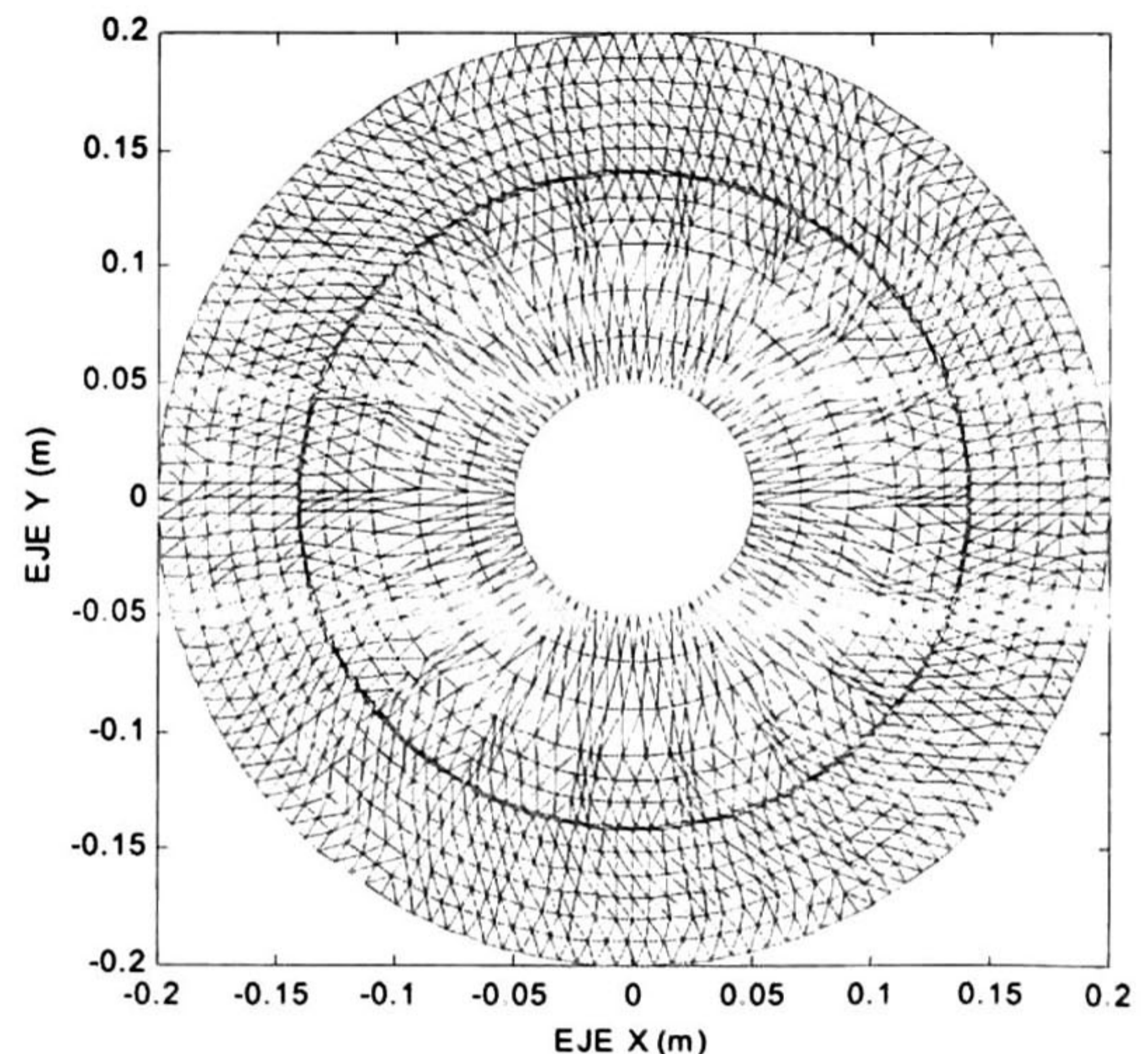
Tabla 5.2 Convergencia en el cálculo del par en el motor de características reales

	Trabajo virtual (N-m)	Tensor de Maxwell (N-m)
Discretización 1 (738 nodos, 1368 elementos)	27 036	27 121
Discretización 2 (1008 nodos, 1920 elementos)	29 305	29 469
Discretización 3 (1728 nodos, 3228 elementos)	24 818	24 712
Discretización 4 (2352 nodos, 4512 elementos)	26 269	25 667
Discretización 5 (3006 nodos, 5652 elementos)	22 500	22 499
Discretización 6 (3504 nodos, 6672 elementos)	25 660	25 612
Discretización 7 (4326 nodos, 8340 elementos)	28 266	28 221

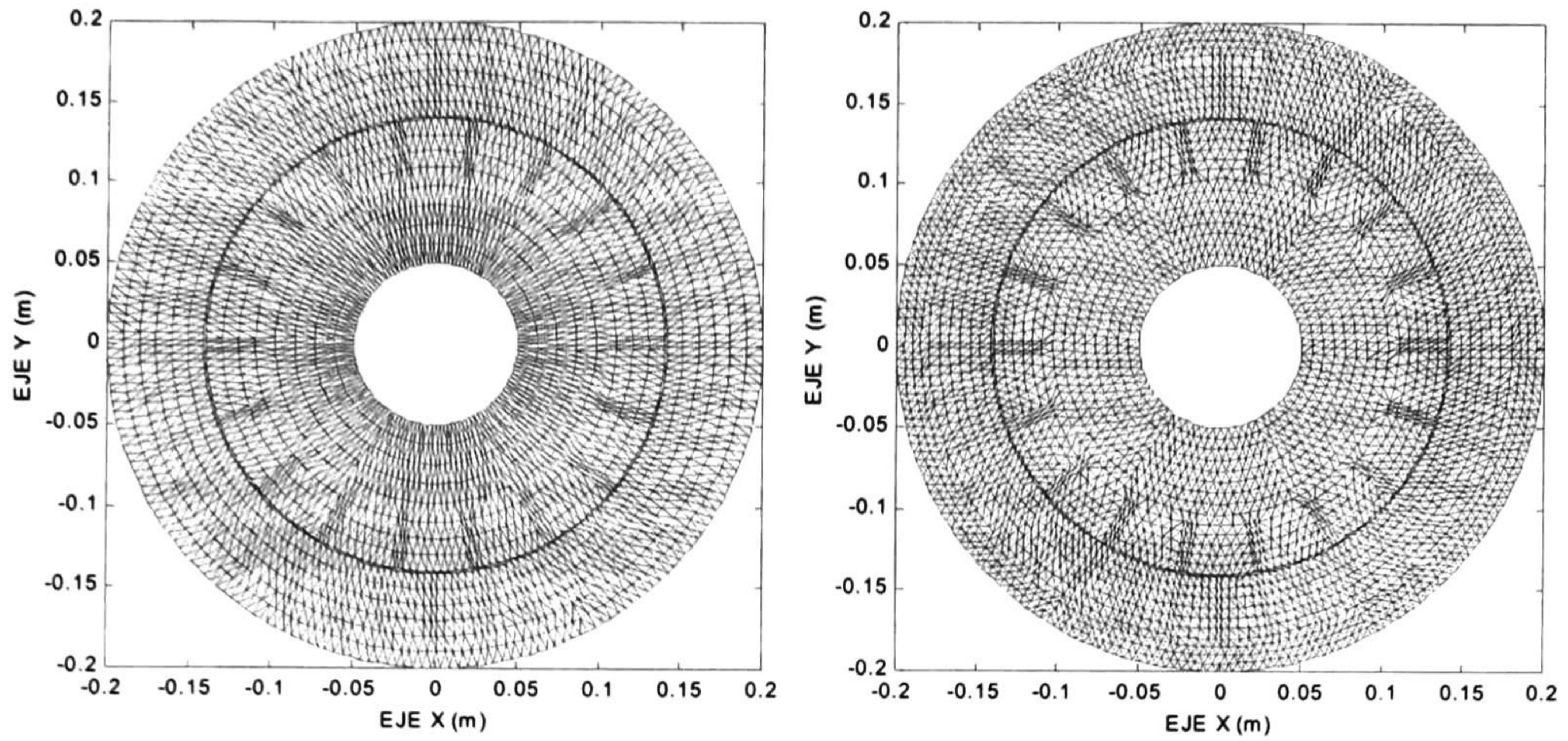
La discretización menos refinada corresponde a la primer fila y paulatinamente se incrementa el nivel de refinamiento, hasta la discretización No. 7 (Figura 5.7)



a) Discretización No. 1



b) Discretización No. 3



c) Discretización No. 5

d) Discretización No. 7

Fig. 5.7 Discretizaciones utilizadas en los resultados mostrados en las tablas 5.2 y 5.3

Los resultados obtenidos con los dos métodos son muy similares y se observa dependencia en la discretización. En el motor de inducción ideal se obtuvo convergencia en los resultados a medida que la discretización era más fina. Sin embargo, en la Tabla 5.2, para las primeras discretizaciones, no se ve claramente si el valor del par tiende a disminuir o a incrementar a medida que la discretización es más fina, hasta las últimas tres discretizaciones se observa un incremento en los resultados a medida que éstas son más finas.

En la Tabla 5.3 se muestran los resultados para un valor de cero conductividad en las barras del rotor. En este caso se sabe que el valor del par debe ser cero. La diferencia entre los resultados obtenidos con los dos métodos es un poco mayor que en el caso anterior. No obstante, los resultados son satisfactorios y en algunos casos, el valor del par es apenas del orden de un 0.2 % del valor obtenido considerando la conductividad del cobre en las barras del rotor. En las tres últimas discretizaciones se observa convergencia hacia el valor de cero; desafortunadamente la potencia del equipo de cómputo ya no fue suficiente para calcular resultados con discretizaciones más finas que la No. 7.

Tabla 5.3 Convergencia en el cálculo del par sin conductividad en las barras del rotor

	Trabajo virtual (n-m)	Tensor de Maxwell (n-m)
Discretización 1 (738 nodos, 1368 elementos)	-626	-519
Discretización 2 (1008 nodos, 1920 elementos)	-452	-262
Discretización 3 (1728 nodos, 3228 elementos)	43	47
Discretización 4 (2352 nodos, 4512 elementos)	-504	-1133
Discretización 5 (3006 nodos, 5652 elementos)	320	433
Discretización 6 (3504 nodos, 6672 elementos)	243	322
Discretización 7 (4326 nodos, 8340 elementos)	131	213

5.3.3 OPERACIÓN A ROTOR LIBRE EN ESTADO ESTABLE

La manera en que se simula la condición de operación a rotor libre en estado estable, es la misma que para el caso del motor de inducción ideal, sección 2.6.

En la Tabla 5.4 aparecen los valores del par obtenidos con los métodos del trabajo virtual y tensor de Maxwell para distintos valores del deslizamiento. Los datos de la Tabla 5.4 se grafican en la Figura 5.8. La curva resultante es típica del desempeño de un motor con alta resistencia en el rotor. Adviértase que las curvas correspondientes a los dos métodos se empalman prácticamente por la similitud en los resultados.

Tabla 5.4 Resultados en el cálculo del par para distintos valores del deslizamiento

s	Trabajo virtual (n-m)	Tensor de Maxwell (n-m)
1.00	24 818	24 712
0.90	24 267	24 167
0.80	23 443	23 351
0.70	22 284	22 201
0.60	20 719	20 646
0.50	18 677	18 615
0.40	16 094	16 044
0.30	12 925	12 888
0.25	11 115	11 085
0.20	9 158	9 135
0.15	7 060	7 044
0.10	4 832	4 823
0.00	43	47

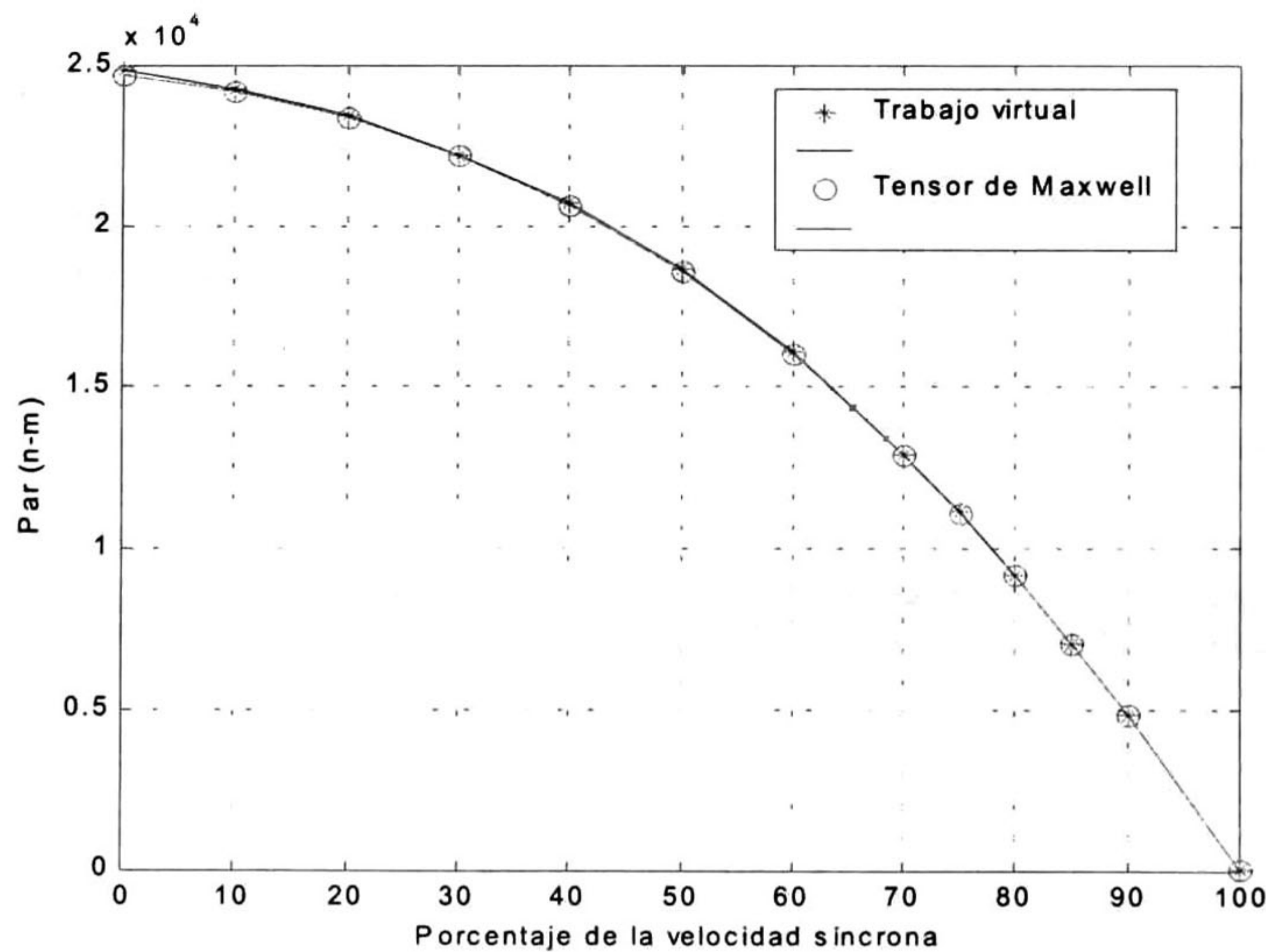


Fig. 5.8 Gráfica par-velocidad del motor de características reales

Diversos cambios en las características del modelo se pueden simular con relativa facilidad. Por ejemplo, si se disminuye la resistencia en el rotor la curva par-velocidad resultante es la que se ve en la Figura 5.9. La resistencia en el rotor puede ser reducida incrementando el número de

barras, la sección transversal de estas o su conductividad. Se optó por incrementar la conductividad para que los resultados no fueran alterados respecto al caso anterior por efecto del cambio en la discretización si se eligiese aumentar el número de barras o la sección transversal de éstas. La Figura 5.9 muestra resultados de la simulación de una situación hipotética, ya que la conductividad de las barras del rotor es muy superior a la del cobre. En la Figura 5.8 el motor proporciona el valor máximo de par a rotor bloqueado (0 % de la velocidad síncrona). En cambio, en la Figura 5.9 el par máximo es aproximadamente al 87 % de la velocidad síncrona. Esto se justifica ya que la penetración de los campos en el rotor es mayor y cubre más área de las barras (Fig. 5.10) a 87% de la velocidad síncrona que a rotor bloqueado.

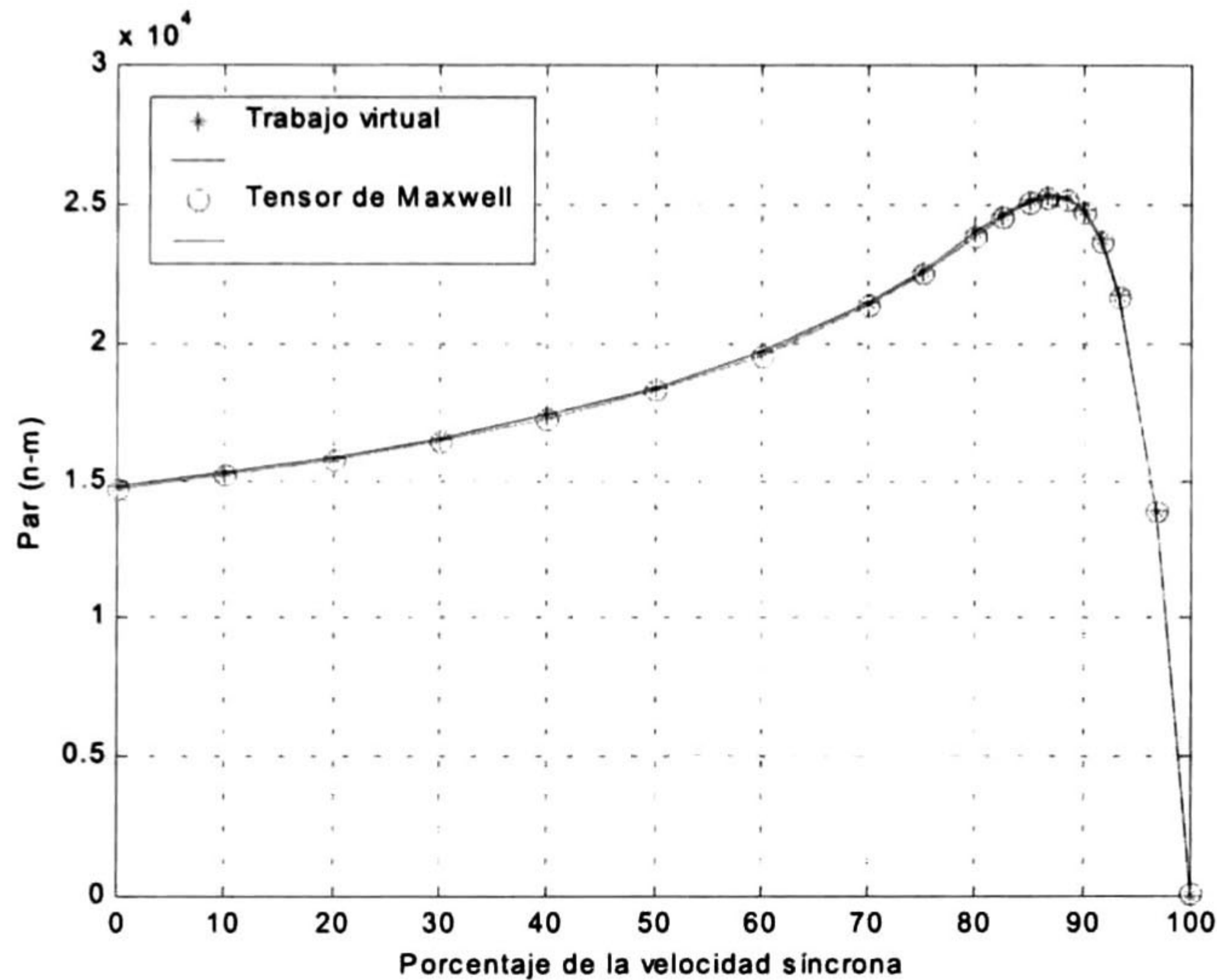


Fig. 5.9 Gráfica par-velocidad con baja resistencia en el rotor

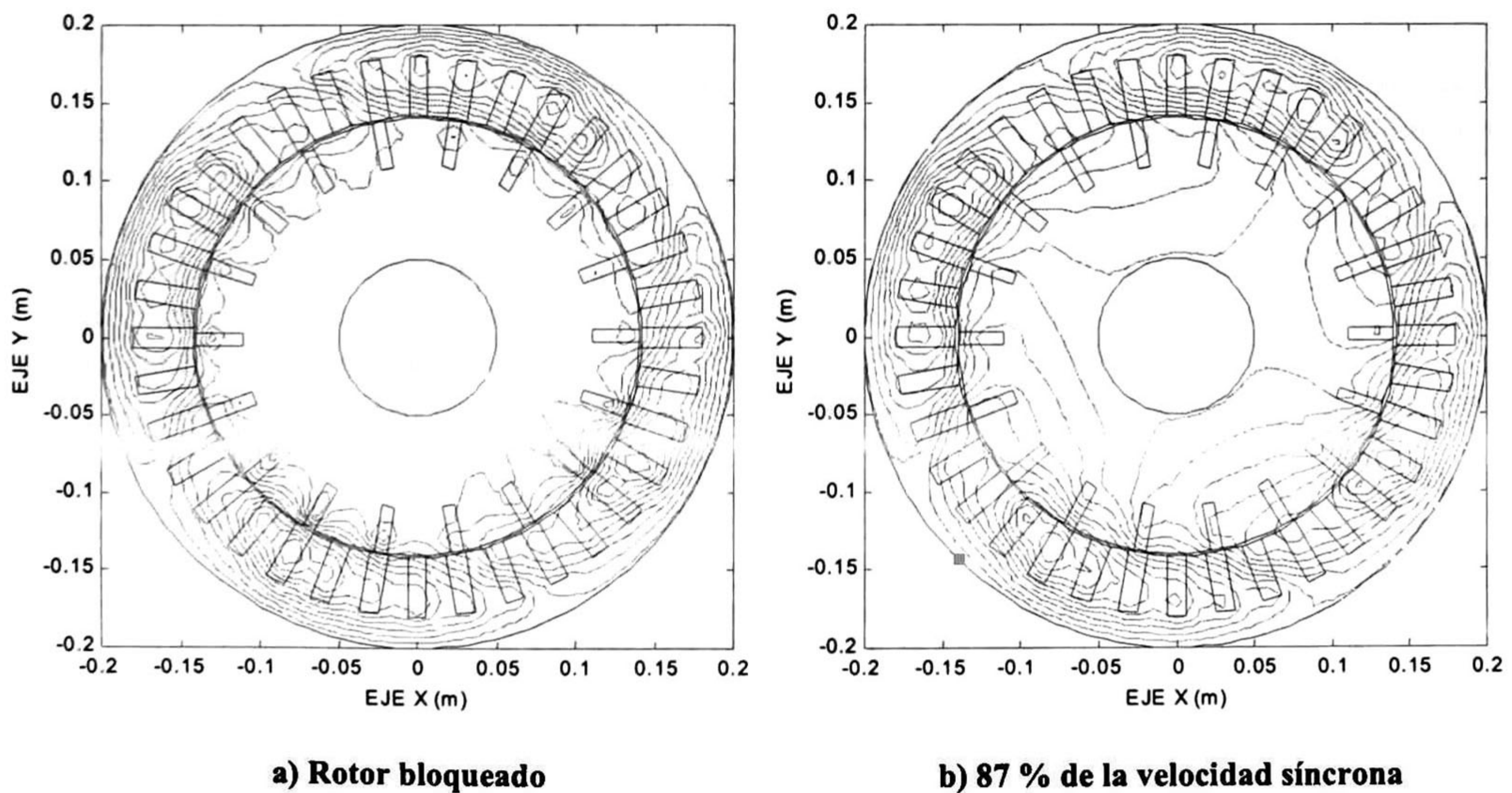


Fig. 5.10 Penetración de los campos magnéticos en el rotor

Pueden ser simuladas innumerables situaciones hipotéticas o reales. De hecho, la única limitante sería la imaginación del analista de no existir la limitante de tiempo. Las gráficas que se obtienen por medio de un análisis en estado estable de circuito equivalente pueden ser obtenidas también por el método del elemento finito, inclusive con menor dificultad que las gráficas del tipo de las Figuras 5.8 y 5.9. Puede ser calculada la corriente en las barras del rotor, en los devanados del estator, pérdidas por efecto Joule, operación en situaciones anormales, etc., presumiblemente con un grado mayor de detalle, con la ventaja invaluable, además, de que no es necesario contar con un prototipo construido para obtener parámetros por medio de pruebas, ya que se parte de los datos de diseño, logrando de este modo reducir costos y tiempo.

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha realizado un análisis, aplicando el método del elemento finito, del motor de inducción en operación en estado estable excitado por fuentes senoidales. El análisis se dirigió principalmente al cálculo del potencial vectorial magnético y del par electromagnético.

Se implementaron tres formulaciones para calcular el par, fundamentadas en la ecuación de fuerza de Lorentz, el método del tensor de Maxwell y el principio del trabajo virtual. Estas formulaciones se aplicaron en un modelo idealizado del motor de inducción. Con las tres formulaciones se lograron buenos resultados en el modelo idealizado del motor de inducción, no se presentó problema de convergencia y los errores fueron pequeños, inclusive con discretizaciones de mala calidad. La formulación fundamentada en la ecuación de fuerza de Lorentz requiere menor esfuerzo de cómputo y la más costosa es la que se basa en el método del tensor de Maxwell.

Se simuló un motor de inducción de características reales, donde se calculó el potencial vectorial y la curva de desempeño par-velocidad. En este modelo no fue posible obtener resultados aceptables con la formulación para calcular el par por medio de la ecuación de fuerza de Lorentz. Con las formulaciones basadas en el método del tensor de Maxwell y el principio del trabajo virtual se obtuvieron resultados similares, satisfactorios en ambos casos, aunque se presentaron pequeños problemas de convergencia y dependencia de los mismos en la discretización.

APORTACIONES

Las principales aportaciones de esta tesis son:

- La obtención de una solución analítica del potencial vectorial y del par en un modelo idealizado del motor de inducción que presenta ventajas para el cálculo y visualización de los resultados en MATLAB o en lenguajes de programación similares.
- Un desarrollo detallado de la inclusión de fuentes de corrientes laminares en la formulación del sistema de ecuaciones algebraicas realizado con el método del Galerkin.
- Implementación de formulaciones para calcular el par con la ecuación de fuerza de Lorentz, el método del tensor de Maxwell y el principio del trabajo virtual.
- Análisis comparativo de tres de los métodos más utilizados en el cálculo de fuerzas y pares indicando ventajas y desventajas de cada uno de ellos.

TRABAJOS FUTUROS

El tema que aborda esta tesis es complejo y muy vasto y puede ser extendido en multitud de direcciones. Los resultados obtenidos con el método del tensor de Maxwell y el principio del trabajo virtual en el cálculo del par fueron satisfactorios. No obstante, cuando se aplicaron al

motor de inducción de características reales, mostraron algunos problemas de convergencia y dependencia en la discretización. Por este hecho, se estima que es necesario continuar con el mejoramiento de estos métodos, o desarrollar otros que superen los resultados mostrados en esta tesis. Además, como trabajos futuros se recomiendan los siguientes:

Consideración de la saturación, anisotropía y ciclo de histéresis en los materiales ferromagnéticos.

Análisis en estado transitorio.

Consideración de los efectos de la temperatura.

- Extensión del análisis al caso tridimensional

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] S. Williamson y J. W. Ralph, *Finite-element analysis of an induction motor fed from a constant voltage source*. IEE Proc., Vol. 130, Pt. B., No. 1, P.P. 18-24, January 1983
- [2] S. Williamson, L. H. Lim y M. J. Robinson, *Finite-element models for cage induction motor analysis*. IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 26, No. 6, P. P. 1007-1017 November/December 1990
- [3] C. Delforge, B. Lemaire-semail, *induction machine modeling using finite element and permeance network methods*. IEEE Transactions on magnetics, Vol. 31, No. 3, p.p. 2092-2095, May 1995
- [4] I. Yatchev, A. Arkkio y A. Niemenmaa, *Eddy-current losses in the stator winding of cage induction motors*. Helsinki University of Technology, Laboratory of Electro Mechanics, Report 47, Espoo, Finland, 1995
- [5] D. Dolinar, R. DeWeerd, R. Belmans y E. M. Freeman, *calculation of two-axis induction motor model parameters using finite elements*. IEEE Transactions on energy conversion, Vol. 12, No. 2, p. p. 133-142, June 1997
- [6] S. J. Salon, *Finite element analysis of electrical machines*. Kluwer academic publishers, 1995, Boston/London/Dordrecht
- [7] S. Ratnajeevan y H. Hoole, *Finite elements electromagnetics and design*. Elsevier 1995, Amsterdam/Lausanne/New York/Oxford/Shannon/Tokio
- [8] P. P. Silvester y L. R. Ferrari, *Finite elements for electrical engineers*. Third edition, Cambridge University Press, 1996
- [9] E. Bernal y F. De León, *Análisis del campo electromagnético en el interior de un motor de inducción*. RVP. 1994, Gen-12, 1994
- [10] P. C. Krause, O. Wasynczuk y S. D. Sudhoff, *Analysis of electrical machinery*. IEEE press, 1995, New York
- [11] S. A. Nasar, *Máquinas eléctricas operación en estado estacionario*. CECSA, 1993
- [12] S. Ratnajeevan y H. Hoole, *Computer-aided analysis and design of electromagnetic devices*. Elsevier, 1989.
- [13] W. E. Boyce, R. C. DiPrima, *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. 3ra edición, Noriega-Limusa, 1978
- [14] C. A. Balanis, *Advanced engineering electromagnetics*. Wiley, 1989
- [15] M. N. O. Sadiku, *Elementos de electromagnetismo*. Segunda edición, CECSA, 1998
- [16] D. K. Cheng, *Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería*. Addison Wesley Longman, 1997
- [17] P. Lorrain, R. Corson y L. Lorrain, *Electromagnetics fields and waves*. W. H. Freeman and company, 1998
- [18] J. Jin, *The finite element method in electromagnetics*. John Wiley & Sons, 1993
- [19] D. S. Burnett, *Finite element analysis*. Addison Wesley Publishing, 1998
- [20] O. C. Zienkiewics y R. L. Taylor, *El método de los elementos finitos*. Cuarta edición, Mc Graw-Hill, 1994
- [21] G. H. Golub y C. F. Van Loan, *Matrix computations*. Third edition, The Johns Hopkins University Press, 1996
- [22] D. W. Burow, S. J. Salon, *Dependence of torque calculation on mesh in induction machines*. IEEE transactions on magnetics, Vol. 31, No. 6, p. p. 3593-3595, November 1995

- [23] G. Henneberger, K. Sattler, D. Shen, *Force calculation with analytical accuracy in the finite element based computational magnetostatics*. IEEE transactions on magnetics, Vol. 27, No. 5, p. p. 4254-4257, September 1991
- [24] J. L. Coulomb, *A methodology for the determination of global electromechanical quantities from a finite element analysis and its application to the evaluation of magnetic forces, torques and stiffness*. IEEE transactions on magnetics, Vol. Mag-19, No. 6, p. p. 2514-2519, November 1983
- [25] G. Henneberger, K. Sattler y D. Shen, *Nature of the equivalent magnetizing current for the force calculation*. IEEE transactions on magnetics, Vo. 28, No. 2, p. p. 1068-1071, March 1992
- [26] J. Meisel, *Principios de conversión de energía electromecánica*. Mc. Graw-Hill, 1969
- [27] J. L. Coulomb y G. Meunier, *Finite element implementation of virtual work principle for magnetic or electric force and torque computation*. IEEE Transactions on magnetics, Vol. Mag-20, No. 5, p. p. 1894-1896, September 1984



ANIVERSARIO
Cinvestav

**Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del IPN**

Unidad Guadalajara

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, aprobó la tesis: CÁLCULO DEL PAR EN EL MOTOR DE INDUCCIÓN CON EL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO del(a) C. Ramón CASTILLO DÍAZ el día 14 de Junio de 2002 .

Dr. Pablo MORENO
VILLALOBOS
Investigador Cinvestav 3A
CINVESTAV GDL
Guadalajara

Dr. Juan Manuel RAMÍREZ
ARREDONDO
Investigador Cinvestav 3A
CINVESTAV GDL
Guadalajara

Dr. José Manuel CAÑEDO
CASTAÑEDA
Investigador Cinvestav 2C
CINVESTAV GDL
Guadalajara

Dr. Enrique MELGOZA
VÁZQUEZ
Profesor Investigador Dpto
de Ingeniería Eléctrica
Instituto Tecnológico de
Morelia
Morelia, Michoacán



CINVESTAV
BIBLIOTECA CENTRAL



SSIT000004422