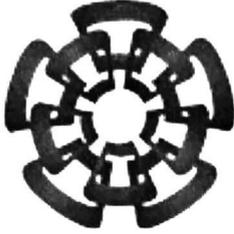




xx(86701.1)



# CINVESTAV

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN  
Unidad Guadalajara

---

## MÉTODO BCU MODIFICADO PARA LA ESTIMACIÓN DE ESTABILIDAD TRANSITORIA EN SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA

Tesis que presenta

**IGNACIO LUNA LÓPEZ**

Para obtener el grado de  
**Maestro en Ciencias**

En la especialidad de  
**Ingeniería Eléctrica**



Guadalajara, Jal., Noviembre del 2000

CLASIF.:  
ADQUIS.: 1 esis.-2001  
FECHA: 29-III-01  
PROCED.: Depto. Servicios

Bibliograficos

# MÉTODO BCU MODIFICADO PARA LA ESTIMACIÓN DE ESTABILIDAD TRANSITORIA EN SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA

Tesis de Maestría en Ciencias  
Ingeniería Eléctrica

Por:

**Ignacio Luna López**

Ingeniero Mecánico Electricista

Universidad de Guadalajara, 1993-1997

Becario del CONACyT, expediente no. 129231

Directores de Tesis:

**Dr. José Manuel Cañedo Castañeda**  
**Dr. Alexander Loukianov**

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Noviembre del 2000

## **Agradecimientos**

Deseo agradecer a todas las personas que hicieron posible la realización de este trabajo. En primer lugar a mi familia, pues sin su apoyo y comprensión no hubiera sido capaz de cumplir con esta meta. A mis compañeros y amigos, pues con su amistad la estancia en esta institución fue algo inolvidable. Especialmente quiero agradecer su amistad y apoyo a: Ricardo J. Dávalos M., Emilio Barocio E., Abraham Valenzuela V., Juan C. Gutiérrez V., Moisés G. Ochoa M., J. Alberto Gutiérrez R.

Agradezco a mis directores de tesis: Dr. J. Manuel Cañedo C. y Dr. Alexander Loukianov por sus consejos a lo largo de esta investigación. Asimismo, a todos los profesores que me guiaron durante esta etapa: Drs. Arturo Román Messina, Pablo Moreno Villalobos, José Luis Naredo V., Juan Manuel Ramírez A.

Un agradecimiento especial a E. Alejandra Acosta D., pues su apoyo ha sido fundamental para la consecución de este objetivo.

Finalmente, al CONACYT que proporcionó los medios económicos con los que se logró este trabajo.

---

# Índice general

<b>Lista de figuras</b>	<b>viii</b>
<b>Lista de tablas</b>	<b>xii</b>
<b>Resumen</b>	<b>xiv</b>
<b>Capítulo 1</b>	<b>1</b>
1.1    Introducción.....	1
1.2    Objetivos de la tesis.....	3
1.3    Estructura de la tesis.....	3
<b>Capítulo 2    Métodos directos tipo Lyapunov</b>	<b>5</b>
2.1    Introducción.....	5
2.2    Teoremas de estabilidad y funciones de Lyapunov.....	7
2.3    Estudio de estabilidad transitoria utilizando el método de Lyapunov .....	9
2.3.1    Revisión del problema de estabilidad transitoria convencional.....	9
2.3.2    Criterio de Lyapunov aplicado al análisis de estabilidad transitoria .....	9
2.4    La frontera de estabilidad.....	12
2.4.1    Frontera de estabilidad de un sistema máquina síncrona – bus infinito .....	14
2.5    La frontera de estabilidad y la función de energía .....	20
2.6    Aproximación de la región de estabilidad.....	22
2.6.1    El Punto de Equilibrio Inestable (PEI) Más Cercano .....	23
2.6.2    El Punto de equilibrio Inestable (PEI) Controlador.....	24
<b>Capítulo 3    Modelado del sistema eléctrico de potencia</b>	<b>29</b>
3.1    Modelo clásico de la máquina síncrona .....	29
3.2    Modelo clásico de un sistema multi-máquinas.....	32
3.2.1    Modelo clásico en el marco de referencia de una máquina síncrona.....	34
3.2.2    Modelo clásico en el marco de referencia del centro de inercia (COI) .....	35
3.3    Función de energía de un sistema eléctrico de potencia .....	37
3.3.1    Aproximación del término dependiente de la trayectoria $E_{p3}$ .....	40
3.3.2    Una función de Lyapunov para el SEP .....	40
3.3.3    La función de energía del SEP en el marco de referencia de una máquina síncrona .....	41
3.4    Conclusiones .....	42
<b>Capítulo 4    El método BCU</b>	<b>45</b>
4.1    Introducción.....	45
4.2    El método BCU .....	46
4.3    El modelo reducido del sistema de potencia .....	47
4.3.1    Modelo reducido en el marco de referencia de una máquina síncrona.....	49

4.4	Algoritmo computacional del método BCU.....	50
4.4.1	Algoritmo del método BCU.....	56
4.5	Problemática presentada por el método BCU.....	56
4.5.1	No existe un mínimo en la función gradiente para una trayectoria de falla dada..	56
4.5.2	Localización incorrecta del PEIC del sistema reducido.....	56
4.6	Una solución a la problemática presentada por el método BCU.....	61
4.6.1	Comparación entre el método de Newton-Raphson y el <i>Método Dinámico</i> .....	65
4.6.2	Aplicación del <i>Método Dinámico</i> al método BCU.....	67
4.7	Modificaciones al método BCU.....	69
4.7.1	Criterios para determinar si un punto de equilibrio calculado es el PEIC.....	69
4.7.1.1	Localización de un mínimo local de la función gradiente.....	69
4.7.1.2	Tipo de punto de equilibrio localizado.....	69
4.7.1.3	Nivel de energía del PEIC respecto del PEE.....	69
4.7.1.4	El punto localizado es un punto de equilibrio.....	69
4.7.2	El Método BCU Modificado.....	70
4.7.2.1	Algoritmo computacional del Método BCU Modificado.....	70
4.8	Herramienta computacional desarrollada.....	73
<b>Capítulo 5 Sistemas de estudio</b>		<b>75</b>
5.1	Sistema de estudio 1.....	75
5.2	Sistema de estudio 2.....	77
5.3	Sistema de estudio 3.....	80
5.4	Sistema de estudio 4.....	82
<b>Capítulo 6 Aplicaciones</b>		<b>85</b>
6.1	Resultados obtenidos en el sistema de estudio 1.....	85
6.1.1	Validación de los resultados obtenidos con el Método BCU Modificado.....	86
6.1.1.1	Validación del Método del PEIC.....	86
6.1.1.2	Validación del Método BCU Modificado.....	87
6.1.2	Análisis de los casos problemáticos en la aplicación del Método BCU convencional y que fue resuelto con el BCU modificado.....	88
6.1.2.1	Análisis del caso S1-11.....	88
6.1.2.2	Análisis del caso S1-9.....	90
6.1.3	Influencia del paso de integración en el cálculo de la trayectoria de falla, de los métodos BCU convencional y BCU modificado.....	93
6.2	Resultados obtenidos en el sistema de estudio 2.....	95
6.2.1	Validación del Método BCU Modificado.....	95
6.2.2	Márgenes de estabilidad en el sistema de estudio 2.....	96
6.3	Condiciones de operación en estado estable y la región de estabilidad.....	98
6.3.1	La magnitud de la región de estabilidad del sistema máquina bus infinito.....	99
6.3.2	Determinación de la magnitud de la frontera de estabilidad en sistemas multi-máquinas.....	101
6.3.2.1	Fortaleza del sistema ante cambios en la condición de operación.....	104

6.4	Resultados obtenidos en el sistema de estudio 4.....	106
6.4.1	Validación de resultados en el sistema de estudio 4.....	106
6.4.2	Magnitud de la región de estabilidad.....	107
6.4.2.1	Grado de estrés en el sistema de posfalla.....	108
6.4.2.2	Verificación del nivel de estrés del sistema de posfalla.....	109
6.4.2.2.1	Análisis del caso S4-2.....	110
6.4.2.2.2	Análisis del caso S4-11.....	110
6.4.2.2.3	Análisis del caso S4-11 modificado.....	111
<b>Capítulo 7</b>		<b>113</b>
7.1	Conclusiones.....	113
7.2	Aportaciones.....	114
7.3	Trabajos futuros.....	114
<b>Bibliografía</b>		<b>117</b>

---

# Lista de figuras

Figura 2.1	Pasos fundamentales de un estudio de estabilidad.....	9
Figura 2.2	Aplicación del criterio de Lyapunov.....	11
Figura 2.3	Sistema máquina síncrona – bus infinito.....	15
Figura 2.4	Puntos de equilibrio del sistema máquina síncrona – bus infinito.....	15
Figura 2.5	Variedades inestables de los puntos de equilibrio inestables del sistema máquina síncrona – bus infinito (condición de operación 1)..	17
Figura 2.6	Variedades estables de los puntos de equilibrio inestables del sistema máquina síncrona– bus infinito (condición de operación 1)...	17
Figura 2.7	Trayectorias estables e inestables del sistema máquina síncrona – bus infinito (condición de operación 1) .....	18
Figura 2.8	Variedades inestables de los puntos de equilibrio inestables del sistema máquina síncrona – bus infinito (condición de operación 2)..	19
Figura 2.9	Variedades estables de los puntos de equilibrio inestables del sistema máquina síncrona– bus infinito (condición de operación 2)...	19
Figura 2.10	Trayectorias estables e inestables del sistema máquina síncrona – bus infinito (condición de operación 2) .....	19
Figura 2.11	Comportamiento de la función de energía en la vecindad de un PEE (sist. máquina síncrona – bus infinito).....	21
Figura 2.12	Comportamiento de la función de energía potencial (sistema máquina síncrona – bus infinito).....	22
Figura 2.13	Estimación de la región de estabilidad utilizando el método del PEI más cercano (sistema máquina síncrona – bus infinito) .....	23
Figura 2.14	PEIC para diferentes trayectorias de sistema perturbado (sistema máquina síncrona – bus infinito).....	24
Figura 2.15	Estimación de la región de estabilidad al utilizar un PEI diferente al PEI más cercano (sistema máquina síncrona – bus infinito) .....	25
Figura 2.16	Uso de diferentes PEI como PEIC (sistema máquina síncrona – bus infinito).....	26
Figura 3.1	Red aumentada de un sistema de potencia .....	33
Figura 4.1	Comportamiento de las trayectorias del sistema reducido en las cercanías de la frontera de estabilidad.....	51
Figura 4.2	Función gradiente de las trayectorias 2 y 3 de la figura 4.1 .....	52
Figura 4.3	Frontera de estabilidad de un PEE del sistema reducido de un SEP de tres máquinas.....	53

Figura 4.4	Función de energía y PEBS del sistema reducido de un SEP de tres máquinas .....	54
Figura 4.5	Superficies de energía constante del sistema reducido de un SEP de tres máquinas .....	55
Figura 4.6	Aproximación del PEBS del sistema reducido de un SEP de tres máquinas .....	55
Figura 4.7	Trayectorias de posfalla con tres condiciones iniciales diferentes en el sistema reducido correspondiente al sistema de 3 máquinas, 9 nodos [25] .....	57
Figura 4.8	Función gradiente para tres trayectorias de posfalla en el sistema reducido correspondiente al sistema de 3 máquinas, 9 nodos .....	57
Figura 4.9	Región de convergencia del punto de equilibrio (2.7057,0.4349), utilizando el método de Newton-Raphson.....	58
Figura 4.10	Región de convergencia del punto de equilibrio (2.7057,0.4349), utilizando el método Nelder-Mead simplex .....	58
Figura 4.11	Regiones de convergencia de cuatro puntos de equilibrio diferentes..	59
Figura 4.12	Comportamiento del método de Newton-Raphson ante dos condiciones iniciales dadas .....	60
Figura 4.13	Comparación de la región de convergencia (Newton-Raphson) y la región de atracción (Método Dinámico) .....	65
Figura 4.14	Comportamiento del método de Newton-Raphson ante dos condiciones iniciales muy cercanas entre sí .....	66
Figura 4.15	Comportamiento del <i>Método Dinámico</i> ante dos condiciones iniciales muy cercanas entre sí.....	67
Figura 4.16	Aplicación del <i>Método Dinámico</i> , PEI (2.7057,0.4349) .....	68
Figura 4.17	Aplicación del <i>Método Dinámico</i> , PEI (0.4451,2.8354) .....	68
Figura 4.18	Diagrama de bloques del algoritmo computacional del <i>Método BCU Modificado</i> .....	71
Figura 4.19	Diagrama de bloques del algoritmo computacional del <i>Método BCU Modificado</i> (continuación).....	72
Figura 5.1	Diagrama unifilar del sistema de estudio 1.....	75
Figura 5.2	Diagrama unifilar del sistema de estudio 2.....	77
Figura 5.3	Diagrama unifilar del sistema de estudio 3.....	81
Figura 6.1	Trayectorias de falla y posfalla utilizadas por el método BCU (caso S1-11) .....	89
Figura 6.2	Función de energía potencial a lo largo de la trayectoria de falla (caso S1-11).....	89
Figura 6.3	Función gradiente evaluada a lo largo de las trayectorias del sistema reducido de posfalla originadas en los puntos $\delta^*$ y $\delta^+$ .....	90

Figura 6.4	Trayectorias resultantes de la aplicación del <i>Método Dinámico</i> a partir de los puntos $\delta^*$ y $\delta^+$ .....	90
Figura 6.5	Aplicación del <i>Método Dinámico</i> en el caso S1-10.....	90
Figura 6.6	Aplicación del método BCU modificado (caso S1-9).....	92
Figura 6.7	Región de estabilidad del PEIC (en el sistema modificado) para el caso S1-9.....	93
Figura 6.8	Ángulos relativos del sistema de estudio 2, cuando se aplica la falla S2-6 y se libera en 0.15 segundos.....	97
Figura 6.9	Ángulos relativos del sistema de estudio 2, cuando se aplica la falla S2-6 y se libera en 0.115 segundos.....	98
Figura 6.10	Región de estabilidad sistema máquina síncrona – bus infinito (caso BI-1) .....	100
Figura 6.11	Región de estabilidad sistema máquina síncrona – bus infinito (caso BI-2) .....	100
Figura 6.12	Región de estabilidad sistema máquina síncrona – bus infinito (caso BI-3) .....	100
Figura 6.13	Región de estabilidad sistema máquina síncrona – bus infinito (caso BI-4) .....	100
Figura 6.14	Región de estabilidad sistema máquina síncrona – bus infinito (caso BI-5) .....	100
Figura 6.15	Variación de $\Delta E$ (sistema de estudio 3).....	102
Figura 6.16	Variación de $d$ .(sistema de estudio 3) .....	102
Figura 6.17	Variación de $\Delta E$ .(sistema de estudio 3).....	102
Figura 6.18	Variación de $d$ .(sistema de estudio 3) .....	102
Figura 6.19	Variación de $\Delta E$ .(sistema de estudio 3).....	102
Figura 6.20	Variación de $d$ .(sistema de estudio 3) .....	102
Figura 6.21	Variación de $\Delta E$ (sistema de estudio 3).....	103
Figura 6.22	Variación de $d$ .(sistema de estudio 3) .....	103
Figura 6.23	Variación de $\Delta E$ .(sistema de estudio 3).....	103
Figura 6.24	Variación de $d$ .(sistema de estudio 3) .....	103
Figura 6.25	Variación de $\Delta E$ .(sistema de estudio 3).....	103
Figura 6.26	Variación de $d$ .(sistema de estudio 3) .....	103
Figura 6.27	Índice de robustez 1, IR1 (sistema de estudio 3).....	105
Figura 6.28	Índice de robustez 2,IR2 (sistema de estudio 3).....	105
Figura 6.29	Sección del sistema de estudio 4 .....	109
Figura 6.30	Variación de $\Delta E$ caso S4-2 .....	110
Figura 6.31	Variación de $d$ caso S4-2.....	110

Figura 6.32	Variación de $\Delta E$ caso S4-11.....	111
Figura 6.33	Variación de $d$ caso S4-11 .....	111
Figura 6.34	Variación de $\Delta E$ , falla nodo 138, se abre la línea 135-138.....	111
Figura 6.35	Variación de $d$ , falla nodo 138, se abre la línea 135-138 .....	111

---

# Lista de tablas

Tabla 2.1	Parámetros del sistema máquina síncrona – bus infinito .....	17
Tabla 4.1	Distancias de las 2 condiciones iniciales respecto a los 4 puntos de equilibrio más cercanos.....	66
Tabla 5.1	Perturbaciones aplicadas al sistema de estudio 1 .....	76
Tabla 5.2	Parámetros de líneas de transmisión y transformadores del sistema de estudio 1 .....	76
Tabla 5.3	Parámetros de máquinas síncronas del sistema de estudio 1 .....	76
Tabla 5.4	Condiciones de estado estable en el caso base de operación del sistema de estudio 1 (máquinas síncronas) .....	76
Tabla 5.5	Condiciones de estado estable en el caso de base de operación del sistema de estudio 1 (red eléctrica).....	77
Tabla 5.6	Perturbaciones aplicadas al sistema de estudio 2 .....	78
Tabla 5.7	Parámetros de máquinas síncronas del sistema de estudio 2.....	78
Tabla 5.8	Condiciones de estado estable en el caso base de operación del sistema de estudio 2 (máquinas síncronas) .....	78
Tabla 5.9	Condiciones de estado estable en el caso base de operación del sistema de estudio 2 (red eléctrica) .....	79
Tabla 5.10	Perturbaciones aplicadas al sistema de estudio 3 .....	80
Tabla 5.11	Parámetros de máquinas síncronas del sistema de estudio 3 .....	81
Tabla 5.12	Parámetros de líneas de transmisión y transformadores del sistema de estudio 3 .....	81
Tabla 5.13	Condiciones de estado estable en el caso base de operación del sistema de estudio 3 (máquinas síncronas) .....	82
Tabla 5.14	Condiciones de estado estable en el caso base de operación del sistema de estudio 3 (red eléctrica) .....	82
Tabla 5.15	Perturbaciones aplicadas al sistema de estudio 4 .....	82
Tabla 5.16	Condiciones de estado estable en el caso base de operación del sistema de estudio 4 (máquinas síncronas) .....	83
Tabla 6.1	Tiempos críticos de liberación encontrados con el programa ESTABI (sistema de estudio 1) .....	86
Tabla 6.2	PEIC encontrados con el programa CUEP_EX (sistema de estudio 1).	87
Tabla 6.3	Puntos de equilibrio localizados por el método BCU (sistema de estudio 1) .....	87

Tabla 6.4	Puntos de equilibrio localizados por el método BCU modificado (sistema de estudio 1) .....	88
Tabla 6.5	Pasos de integración utilizados para el cálculo de la trayectoria de falla (sistema de estudio 1).....	93
Tabla 6.6	Resultados encontrados al aplicar el método BCU con diferentes pasos de integración al calcular la trayectoria de falla (sistema de estudio 1) .....	94
Tabla 6.7	Resultados encontrados al aplicar el método BCU modificado con diferentes pasos de integración al calcular la trayectoria de falla (sistema de estudio 1) .....	94
Tabla 6.8	Tiempos críticos de liberación encontrados para el sistema de estudio 2.....	95
Tabla 6.9	Margen de energía e índice de estabilidad para el sistema de estudio 2. Tiempo de liberación de falla: 0.15 segundos .....	97
Tabla 6.10	Parámetros constantes del sistema máquina síncrona bus infinito.....	99
Tabla 6.11	Potencia mecánica suministrada a la máquina síncrona en diferentes condiciones de operación .....	99
Tabla 6.12	Distancias y diferencias de energía entre los PEI en la frontera de estabilidad y el PEE bajo diferentes condiciones de operación (sistema máquina síncrona bus infinito).....	101
Tabla 6.13	Tiempos críticos de liberación para el sistema de estudio 4.....	106
Tabla 6.14	Diferencia entre la función de energía en el PEIC y el PEE ( $\Delta E$ ) y distancia entre el PEIC y el PEE en el sistema de estudio 4.....	107

---

# Resumen

En esta tesis se analizan en detalle los conceptos teóricos así como la aplicación de los *métodos directos tipo Lyapunov* para la estimación de la estabilidad transitoria en sistemas eléctricos de potencia (SEP). De manera especial se analiza el método que actualmente se considera el más viable que se conoce como *Método BCU*. Se determinan sus bondades y los posibles problemas en su implementación en sistemas reales.

Se explican las causas de la problemática del BCU tradicional y se propone como solución a estos una modificación del método BCU. Este método tiene mejores características de convergencia y es más seguro que el método BCU original.

Se hace un desarrollo teórico de los métodos directos, específicamente los que basan su funcionamiento en la localización de puntos de equilibrio del sistema de posfalla. Este desarrollo se basa en un análisis del sistema máquina síncrona – bus infinito.

Se desarrolla e implementa un método denominado *Método BCU modificado*. Se demuestran sus ventajas y se explican los detalles teóricos del método propuesto y se verifica su utilidad en el estudio de estabilidad de sistemas de gran tamaño. Se propone como un complemento valioso a los programas de estabilidad tradicional que emplean integración numérica.

Se proponen índices así como un algoritmo para determinar la fortaleza de un sistema (robustez) utilizando la información obtenida por el método directo propuesto. Se implementa el algoritmo y se demuestra su utilidad en el sistema de 50 generadores de la IEEE. Se definen dos índices para determinar el grado de estrés en sistemas eléctricos.

Se presentan resultados de la aplicación del método modificado en sistemas eléctricos de estructura diferente y ante gran diversidad de perturbaciones. Se dan resultados y se analizan sus implicaciones. Los sistemas utilizados son: sistema máquina-bus infinito, WSCC 9 nodos, WSCC 11 nodos, sistema de Nueva Inglaterra 16 generadores, Sistema de prueba de la IEEE 50 generadores.

---

# Capítulo 1

## 1.1 Introducción

Los problemas de estabilidad siempre han sido importantes en la operación de los sistemas eléctricos de potencia. Aparecieron desde el nacimiento de los sistemas eléctricos y han ido creciendo en complejidad a la par con el crecimiento y la evolución de los sistemas eléctricos de potencia. Los primeros problemas importantes se presentaron con la necesidad de transmitir grandes bloques de energía a consumidores retirados de los centros de generación. La utilización de sistemas de excitación con acción continua ayudaron resolver o mitigar estos problemas. Para el cálculo de la estabilidad se usaron el Analizador de Transitorios (Transient Analyzer) en conjunción con métodos elementales de integración paso a paso de la ecuación de oscilación de cada generador.

Con el desarrollo vertiginoso de las computadoras digitales y de los métodos numéricos, la computadora rápidamente desplazó a las técnicas analógicas y/o híbridas. Las ventajas son claras, precio, disponibilidad, gran capacidad de almacenamiento, rapidez de cálculos. El desarrollo tecnológico actual de la ciencia y tecnología de computación auguran mayor uso de ésta en el futuro. La computadora permite resolver sistemas de gran tamaño, como los sistemas eléctricos de potencia, con resultados confiables y rápidos. Permite usar formulaciones matemáticas con el detalle deseado por el usuario. En general el grado de detalle, la seguridad y rapidez de los resultados depende de la metodología usada, técnica de solución y de los resultados, esto claro depende de las características del fenómeno físico a estudiar.

El interés de este trabajo está relacionado con la dinámica de los sistemas eléctricos de potencia, en particular con el análisis de estabilidad síncrona utilizando métodos directos. Hoy en día, es práctica generalizada la utilización de métodos de integración numérica para resolver el sistema de ecuaciones no lineales de los sistemas eléctricos. La ventaja de los métodos que utilizan integración numérica es que pueden utilizar formulaciones matemáticas con el grado de detalle deseado, pueden representar prácticamente cualquier tipo de elemento que interviene en la dinámica del proceso, los resultados son confiables (se pueden hacer seguros a costa de mayor tiempo de cómputo) y la más importante es que los resultados obtenidos con estas técnicas han sido verificados con éxito en sistemas eléctricos de gran tamaño. Sus grandes desventajas son los tiempos de cómputo para el análisis global de la estabilidad de los sistemas eléctricos de potencia de dimensiones reales. En estos se deberán establecer los límites de operación (de generación, flujos entre líneas, consumidores) que satisfagan los índices de calidad de voltaje y de frecuencia con adecuados márgenes de estabilidad. Para esto deberán realizar gran cantidad de cálculos que consideren la gran variedad de condiciones de operación normales (conexión y desconexión programada de líneas, generadores, consumidores) y de condiciones de tipo aleatorio (salida de generadores, fallas, cortos circuitos, etc.). La cantidad de variables a monitorear, para cada uno de los estudios es formidablemente grande. Se debe tener presente que la pérdida de sincronismo aperiódica ocurre en menos de un segundo. Las acciones que puede tomar un operador de la red eléctrica, durante este primer segundo son nulas. Por esta razón los estudios se realizan con anterioridad para las condiciones de contingencia más probables y de esta manera prever una situación de riesgo. Estudios en línea a partir de mediciones de las variables reales del sistema

que determinen con rapidez y precisión márgenes de estabilidad pueden ser vitales para que las acciones del operador o las acciones de controles puedan prever acciones de alto riesgo.

Los métodos directos se basan en la utilización de las técnicas de Lyapunov para estimar la estabilidad de los sistemas dinámicos. Consideran las no linealidades inherentes de los sistemas eléctricos. Tienen como ventaja (teóricamente) no tener la necesidad de integrar las ecuaciones diferenciales más allá de la condición de posfalla (el instante en que se libera la falla), reduciendo el tiempo cómputo. En su proceso de evaluación de la estabilidad implícitamente contienen información sobre la calidad del proceso dinámico permitiendo determinar índices o márgenes de estabilidad, así como fortaleza o estrés de la red ante cambios paramétricos involucrados.

Los métodos directos aplicados a los SEP se inician en los años 30 en la ex-URSS, con los trabajos de Gorev [18,13]. El impulso se inicia en la década entre los años 60-70 y continuó hasta los años de los 80, las investigaciones fueron orientadas principalmente en el desarrollo teórico, con la idea de encontrar funciones de Lyapunov aplicadas a los sistemas eléctricos. Entre lo más sobresaliente del punto de vista de aplicación, se definió como criterio de estabilidad el valor crítico de la función de energía determinado por el punto de equilibrio inestable más cercano (PEIMC), se reportaron trabajos que demostraron el carácter conservativo de las funciones de energía obtenidos con el punto de equilibrio más cercano. Se demostró la imposibilidad de obtener una función de Lyapunov (primera integral) que incluya las conductancias de la red. Se encontró la importancia de obtener una función de energía que aproxime mejor la frontera de estabilidad y la dependencia de la función de energía con la trayectoria de falla. Al final de los años 70 aparecieron dos de los métodos que hicieron posible la aplicación de los métodos directos a sistemas de gran tamaño que dieron origen al de equilibrio controlador (PEIC) y al PEBS. La década de los años 80-90 se caracterizó por el desarrollo de técnicas aplicables a sistemas de gran tamaño, desde entonces se tiene un gran desarrollo tanto en lo teórico como en lo práctico. Se dieron las demostraciones teóricas a las conjeturas prácticas sobre los métodos del PEIC, BCU y el PEBS, se propusieron diferentes variantes para mejorar estas técnicas. En los últimos 10 años se continúa con la tendencia de mejorar a las técnicas y hacerlas más eficientes. A partir de numerosos análisis en sistemas reales aparecen las aplicaciones para seguridad dinámica (estudios en línea), utilización de técnicas de redes neuronales en conjunción con métodos directos. Existe una tendencia de que los métodos directos y los de integración numérica son complementarios y no excluyentes. Se continúa en la búsqueda de los elementos o factores que más influyen en la pérdida de estabilidad, la manera de obtener equivalentes dinámicos apropiados. En fin, existe una gran efervescencia en la aplicación de los métodos directos. Se espera que en los próximos años aparezcan implementaciones en sistemas reales de estudios de seguridad dinámica que apliquen métodos directos en conjunción con las técnicas tradicionales.

Este trabajo aborda el problema de análisis y utilización de los métodos directos que ayuden a la determinación segura del punto de equilibrio inestable controlador. En primer instancia se enfoca en el estudio de primera oscilación en sistemas de tamaño real y propone una modificación al método del BCU que en combinación con el PEBS mejora significativamente la confiabilidad del cálculo del punto de equilibrio controlador.

## **1.2 Objetivos de la tesis**

Uno de los objetivos que se persiguen con esta tesis es la clarificación de los conceptos teóricos y prácticos en que se basan los métodos directos tipo Lyapunov que se aplican en los sistemas eléctricos de potencia. Para esto se analizan en detalle los métodos y se señalan ventajas y desventajas.

Investigar y desarrollar métodos que contribuyan a mejorar la estimación de la estabilidad vía cálculo confiable de la mayor región de atracción por la determinación del punto inestable controlador.

Obtener índices o márgenes de estabilidad, así como indicativos sobre la fortaleza para soportar cambios en la topología o condiciones de carga sin pérdida de estabilidad. Además, medir el nivel de estrés de los sistemas eléctricos de potencia.

## **1.3 Estructura de la tesis**

La estructura general de esta tesis es la siguiente: en el capítulo 2 se estudian los conceptos fundamentales sobre los que se basan los métodos directos tipo Lyapunov. Se estudian de manera particular los métodos que utilizan los puntos de equilibrio para aproximar la región de estabilidad.

En el capítulo 3 se desarrollan los modelos matemáticos de los sistemas de potencia multi-máquinas, se formulan en diferentes marcos de referencia, y se señalan sus ventajas. Se analizan las funciones de energía transitoria del sistema de potencia cuando se utiliza el modelo clásico de la máquina síncrona y la red de transmisión reducida a los nodos internos de las máquinas. Se desarrollan funciones de energía cuando se consideran y cuando se desprecian las conductancias de transferencia.

En el capítulo 4 se estudian los métodos que utilizan el punto de equilibrio inestable controlador para estimar la frontera de estabilidad relevante. De manera especial se analizan los métodos BCU y el método PEBS. Se analizan las bases sobre las que se sustentan los métodos. Se identifican problemas en la aplicación del método BCU que combina las ventajas del PEBS, como son la ausencia de un mínimo local en la función gradiente y la naturaleza fractal de los métodos de solución de las ecuaciones algebraicas. Se propone una solución a los problemas del método BCU. Para esto se transforma el sistema de ecuaciones del sistema reducido en un nuevo sistema de ecuaciones. El cálculo del punto de equilibrio controlador se obtiene por integración numérica. Con este método se mejora significativamente el cálculo del punto de equilibrio controlador. A este método se le denominó Método Dinámico.

En el capítulo 5 se describen las características de los sistemas eléctricos de potencia que se utilizan en esta tesis. Se dan los parámetros, las condiciones de operación base y las diferentes perturbaciones que se utilizan para el análisis y la validación de los métodos directos. Se describen cuatro sistemas con características diversas y tamaño diferente.

En el capítulo 6 se presentan los resultados y el análisis de los mismos obtenidos con la aplicación del método BCU y con los de la modificación propuesta. Se utiliza un sistema compuesto por 3 máquinas síncronas para validar los resultados que se obtienen con el método. Se detectan casos en los que el método BCU convencional tiene problemas para encontrar el PEIC y se analizan las causas de estos problemas. Se aplica el método modificado en los casos en que el método convencional presenta problemas. Un sistema de 16 máquinas se utiliza para

verificar la aplicación del método BCU es un sistema pequeño con comportamiento real, se analiza la estabilidad del sistema ante diferentes disturbios y se calculan los márgenes de estabilidad. Se utiliza un sistema máquina síncrona bus infinito para establecer la relación entre las condiciones de operación en estado estable del sistema y la magnitud de la región de atracción del sistema de posfalla. Se calculan y analizan los índices que indican la capacidad del sistema para soportar cambios en las condiciones de operación de estado estable en el sistema con 4 máquinas síncronas. Finalmente, en un sistema formado por 50 máquinas síncronas se valida definitivamente el método propuesto, los resultados se comparan con los obtenidos con las técnicas de integración numérica y con el método PEBS. En este sistema de 50 máquinas se estudia el nivel de estrés bajo el que opera el sistema de posfalla y se ofrece una forma de establecer este nivel utilizando el método BCU modificado.

Finalmente, en el capítulo 7 se dan las aportaciones de esta tesis así como las conclusiones más importantes, además se proponen trabajos de investigación futuros.

---

# Capítulo 2

## Métodos directos tipo Lyapunov.

### 2.1 Introducción

En la teoría de los sistemas dinámicos, la estabilidad es una propiedad cualitativa de un conjunto de ecuaciones diferenciales que describen la física de un fenómeno dinámico. Las ecuaciones diferenciales pueden ser lineales o no lineales. Las ecuaciones lineales describen procesos lineales o el resultado de la linealización de un modelo no lineal, esto es justificable solo en el caso en que las variaciones en el sistema son *suficientemente pequeñas*. En el caso del estudio de la estabilidad transitoria en sistemas eléctricos de potencia, donde el interés principal son los *grandes disturbios*, las ecuaciones diferenciales que describen la dinámica son inminentemente no lineales. Excepto en algunos casos específicos, haciendo simplificaciones, en general no existen soluciones de forma cerrada para el conjunto de ecuaciones no lineales. No así en el caso de sistemas lineales donde se pueden aplicar técnicas clásicas basadas en condiciones de suficiencia y necesidad para conseguir soluciones completas. Esto hace necesario el uso de métodos numéricos para obtener soluciones abiertas de las ecuaciones no lineales.

La simulación digital de la dinámica de un sistema eléctrico de potencia multi-máquinas, es una herramienta ampliamente utilizada para el análisis de sistemas eléctricos con la que se obtienen resultados suficientemente cercanos a los fenómenos reales. La técnica de solución comúnmente utilizada consiste en integración numérica de las ecuaciones diferenciales no lineales. La técnica de integración numérica permite modelar cualquier elemento del sistema con el detalle matemático deseado. La confiabilidad de los resultados obtenidos puede ser alcanzada prácticamente a deseo del usuario pero siempre a costo de mayor esfuerzo computacional. La determinación de la estabilidad del sistema ante un disturbio requiere de la observación (integración) de las trayectorias del movimiento durante un intervalo de tiempo considerable (dos, tres o cuatro oscilaciones electromecánicas) para concluir sobre la estabilidad (inestabilidad). El cálculo de los parámetros que caracterizan la calidad del proceso transitorio, amortiguamiento y frecuencia de oscilación, así como el cálculo de índices de estabilidad no es directo y requiere de cálculos numéricos adicionales.

Además se debe tomar en cuenta que para establecer los regímenes de operación de las redes se deben hacer estudios de estabilidad no solo para un disturbio sino que se deben considerar los de mayor índice de ocurrencia y ante diferentes condiciones de operación de la red que incluyen cambios estructurales y conexiones y desconexiones normales de usuarios. La pérdida de sincronismo es, en la actualidad, la inestabilidad que trae consigo los daños más grandes y severos en las redes eléctricas de ahí la gran importancia al estudio de la estabilidad.

Existen diferentes enfoques en el estudio de la estabilidad. Uno es la búsqueda de métodos más rápidos y confiables reduciendo la red mediante equivalentes dinámicos y/o empleo de técnicas de solución eficientes, como paralelismo. Otra corriente es el empleo de métodos directos tipo Lyapunov o de métodos Mixtos (Lyapunov e integración numérica).

En este trabajo se aborda el problema de estabilidad siguiendo la segunda corriente y se estudian los *Métodos Directos Tipo Lyapunov en Sistemas Eléctricos Multi-máquinas*. Una ventaja de los métodos directos tipo Lyapunov es que la integración del sistema de ecuaciones dinámicas del sistema se limita únicamente al periodo de falla, reduciendo significativamente el tiempo de cómputo. Permite, además, obtener directamente índices o márgenes de estabilidad.

El método directo de Lyapunov ha llamado la atención de numerosos investigadores durante las últimas tres décadas. A. M. Lyapunov en 1892 estableció los fundamentos para determinar la estabilidad de sistemas de ecuaciones diferenciales sin necesidad de soluciones explícitas [1]. Este es conocido como el segundo método de Lyapunov o simplemente método directo de Lyapunov.

El método directo de Lyapunov representa una filosofía de análisis y solución al problema de estabilidad; la idea principal del método está contenida en el siguiente razonamiento: *Si la tasa de cambio  $dE/dt$  de la energía  $E(\mathbf{X})$  de un sistema físico aislado es negativa para cada estado posible del sistema  $\mathbf{X}$  excepto para un estado de equilibrio  $\mathbf{X}_e$ , entonces la energía continuará decreciendo hasta que finalmente alcanza su valor mínimo  $E(\mathbf{X}_e)$* . Cuando la descripción del sistema se formula en forma matemática, no siempre en general, se puede encontrar una función  $E(\mathbf{X})$ . En este caso, la función  $E(\mathbf{X})$  se substituye por una función escalar  $V(\mathbf{X})$ , y el problema se plantea de la siguiente manera: si para un sistema dado se puede encontrar una función  $V(\mathbf{X})$  tal que ésta siempre es positiva, excepto en  $\mathbf{X} = \mathbf{X}_e$  donde es igual a cero y su derivada respecto al tiempo  $\dot{V}(\mathbf{X})$  es menor que cero excepto en  $\mathbf{X} = \mathbf{X}_e$  donde también es igual a cero, entonces se dice que si el sistema es perturbado en una vecindad de  $\mathbf{X}_e$ , éste regresa a su punto de equilibrio  $\mathbf{X}_e$  cuando el tiempo tiende a infinito. La función  $V(\mathbf{X})$  se conoce como *función de Lyapunov*.

Una vez conocida la función de Lyapunov del sistema (en algunos casos la función de energía del sistema puede tomar el lugar de la función de Lyapunov) queda definida la región de validez. La región de validez de la función de Lyapunov para los puntos de equilibrio estable se le conoce como *región de estabilidad* y está formada por la unión de los puntos en el espacio de estados del sistema tales que cumplen la relación  $V(\mathbf{X}) < V_{cr}$ . En esta región de estabilidad toda trayectoria que inicia (condición inicial) en un punto que se encuentra en el interior de esta región tiende al punto de equilibrio estable. Cuando la región de estabilidad se extiende al infinito la estabilidad se denomina global y local en el caso contrario. En los sistemas eléctricos existen infinidad de puntos de equilibrio por lo que tenemos el caso de estabilidad local. En cada punto interior de la región de estabilidad la función de energía toma un valor, el valor mínimo ocurre para el punto de equilibrio de estado estable y los máximos en los puntos de equilibrio inestables, pueden existir además puntos de inflexión. El problema de estabilidad (conocida la función de Lyapunov) se puede plantear como la búsqueda o construcción de la región de atracción. La determinación de la región de atracción en sistemas dinámicos  $n$ -dimensionales, como en los sistemas eléctricos, es muy compleja y prácticamente imposible de obtener. Se emplean diferentes técnicas, métodos o procedimientos de aproximación. La tendencia actual es aprovechar la relación entre la región de atracción con la función de energía y encontrar el valor máximo de esta, denominada función de energía crítica  $V_{cr}$ , tal que por comparación de los valores de energía nos permita resolver si el sistema es estable o inestable. Existen diferentes técnicas de encontrar el valor crítico  $V_{cr}$  y cada una aproxima en mayor o menor grado a la verdadera región de estabilidad del sistema. Las diferencias en la determinación de la energía

crítica  $V_{cr}$  ha dado origen a las diferentes técnicas conocidas bajo el concepto de métodos directos.

En los sistemas eléctricos de potencia, el valor de energía crítico  $V_{cr}$  se puede interpretar como la energía máxima que el sistema puede absorber después de liberar una falla sin pérdida de estabilidad. Esto es, si la energía del sistema en el instante de liberación de la falla es menor a la crítica  $V_{cr}$  éste será estable, mientras que si la energía adquirida por el sistema es mayor que  $V_{cr}$  será inestable. La energía crítica se puede relacionar directamente con un tiempo crítico  $t_{cr}$ , que es el tiempo en que la trayectoria de movimiento alcanza el valor de energía crítica  $V_{cr} = V(\mathbf{X}(t_{cr}))$ . Este tiempo corresponde al tiempo máximo de liberación de la perturbación (del sistema perturbado), sin que el sistema pierda estabilidad. De esta manera, la estabilidad puede determinarse en términos de la energía crítica o del tiempo de liberación crítico.

## 2.2 Teoremas de estabilidad y funciones de Lyapunov

Consideremos un sistema dinámico autónomo descrito por la ecuación

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}) \quad (2.1)$$

donde

$\mathbf{X}$  es un vector de variables de estado donde  $\mathbf{X}(t)$  define completamente el estado del sistema en cualquier instante de tiempo. En un espacio de estados  $n$ -dimensional este vector es de dimensión  $n$ .

$\mathbf{f}(\cdot)$  Es un vector de funciones que dependen del vector de estados  $\mathbf{X}$ .

Sin pérdida de generalidad, se asume que la ecuación (2.1) tiene al origen como un punto de equilibrio, esto es

$$\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad (2.2)$$

**Estabilidad en el sentido de Lyapunov.** El punto de equilibrio  $\mathbf{X} = \mathbf{0}$  del sistema (2.1) es:

estable sí, para cada  $\epsilon > 0$ , existe un valor  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  tal que

$$\|\mathbf{X}(0)\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{X}(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0$$

inestable si no es estable.

asintóticamente estable si es estable y  $\delta$  puede ser elegido de tal manera que

$$\|\mathbf{X}(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{X}(t) = \mathbf{0}$$

Demostrar que un punto de equilibrio es estable para un sistema dinámico en general resulta un gran reto si se utiliza el concepto de estabilidad en el sentido de Lyapunov. Sin embargo, en 1892, Lyapunov demostró que existe una manera más simple de establecer las características de estabilidad o inestabilidad de un punto de equilibrio. Esta metodología se basa en los dos teoremas siguientes.

**Teorema de estabilidad de Lyapunov 1.** Si en una vecindad  $\Omega$  del origen, en el espacio de estados del sistema, existe una función escalar real valuada,  $V(\cdot)$ , que depende de  $\mathbf{X}$  tal que

$$(i) \quad V(0) = 0 \text{ y } V(\mathbf{X}) > 0 \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega - \{0\}$$

$$(ii) \quad \dot{V}(\mathbf{X}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega$$

entonces el origen es *estable*.

**Teorema de estabilidad de Lyapunov 2.** Si en una vecindad  $\Omega$  del origen, del espacio de estados del sistema existe una función escalar real valuada,  $V(\cdot)$ , que depende de  $\mathbf{X}$  tal que

$$(i) \quad V(0) = 0 \text{ y } V(\mathbf{X}) > 0 \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega - \{0\}$$

$$(ii) \quad \dot{V}(\mathbf{X}) < 0 \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega$$

Entonces el origen es *asintóticamente estable*.

Las funciones  $V(\mathbf{X})$  en los teoremas anteriores son llamadas *funciones de Lyapunov* de (2.1), (2.2).

De acuerdo con el método directo de Lyapunov, el estudio de la estabilidad de un sistema físico se puede interpretar como el problema de construir una función de Lyapunov para las ecuaciones de movimiento del sistema.

No existe actualmente un método efectivo general para la construcción de funciones de Lyapunov en forma cerrada para todos los sistemas dinámicos. Para una clase de sistemas no lineales existen procedimientos sistemáticos para construir funciones de Lyapunov tipo Lur'e, con las propiedades de signo requeridas [2,3].

Para sistemas lineales, que tienen un punto de equilibrio estable (PEE), la trayectoria de movimiento alrededor del equilibrio se cumple de manera global. Por otro lado, en sistemas de potencia en general no se tiene solo un punto de equilibrio, de tal manera que no es posible hablar de estabilidad global de la trayectoria de movimiento de un PEE.

En la práctica, se desea determinar el subconjunto más grande  $E$  de  $\Omega$  (región de atracción) con la propiedad de que para cada punto  $\mathbf{X}_0 \in E$  se garantice que  $\mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0) \in E \quad \forall t \geq 0$ . Si la función  $V$  satisface el teorema 1, entonces el conjunto  $E$  es llamado "*estimación del dominio de estabilidad*" (EDE) del PEE. Si la función  $V$  satisface el teorema 2, entonces el conjunto  $E$  es conocido como un "*EDE asintótico*" del PEE.

Para sistemas no lineales que pueden tener varios puntos de equilibrio, la magnitud del conjunto  $E$  depende de la función de Lyapunov construida, así como del fenómeno físico específico. Esta magnitud está íntimamente relacionada con el valor de la energía crítica  $V_{cr}$ . En general  $V_{cr}$  corresponde al valor mínimo que toma la función de energía cuando se evalúa en el conjunto de puntos que pertenecen a la frontera de  $E$ , esto es

$$V_{cr} = \min(V(\mathbf{x}): \mathbf{x} \in \partial E) \quad (2.3)$$

donde  $\partial E$  es la frontera del conjunto  $E$  (frontera de estabilidad). Esto significa que la aproximación de la región de atracción es un subconjunto de la EDE. Si se utiliza como valor crítico una cantidad mayor no se puede garantizar que la aproximación este contenida en la EDE. Sin embargo, dependiendo del sistema y de la función de Lyapunov, es posible determinar valores de  $V_{cr}$  mayores.

## 2.3 Estudio de estabilidad transitoria utilizando el método de Lyapunov.

### 2.3.1 Revisión del problema de estabilidad transitoria convencional

En los estudios de estabilidad transitoria convencionales, la practica normal es la integración numérica, simulación en el dominio del tiempo del disturbio. El análisis de estabilidad convencional se puede formular de la siguiente manera. Dado un sistema de potencia, inicialmente en estado estable y asumiendo que un disturbio ocurre en un instante  $t_0$ :

- ¿Converge el sistema a una posición de equilibrio en estado estable, después de haber liberado el disturbio en  $t_l$ ?, sí éste es el caso, el sistema es estable e inestable en el caso contrario.

De esta manera, el estudio de estabilidad transitoria está constituido por dos pasos generales.

- paso A que incluye la evolución del sistema (de falla) desde  $t_0$  hasta el tiempo de liberación  $t_l$ ;
- paso B que estudia la evolución del sistema en su estado de posfalla, esto es de  $t_l$  en adelante.

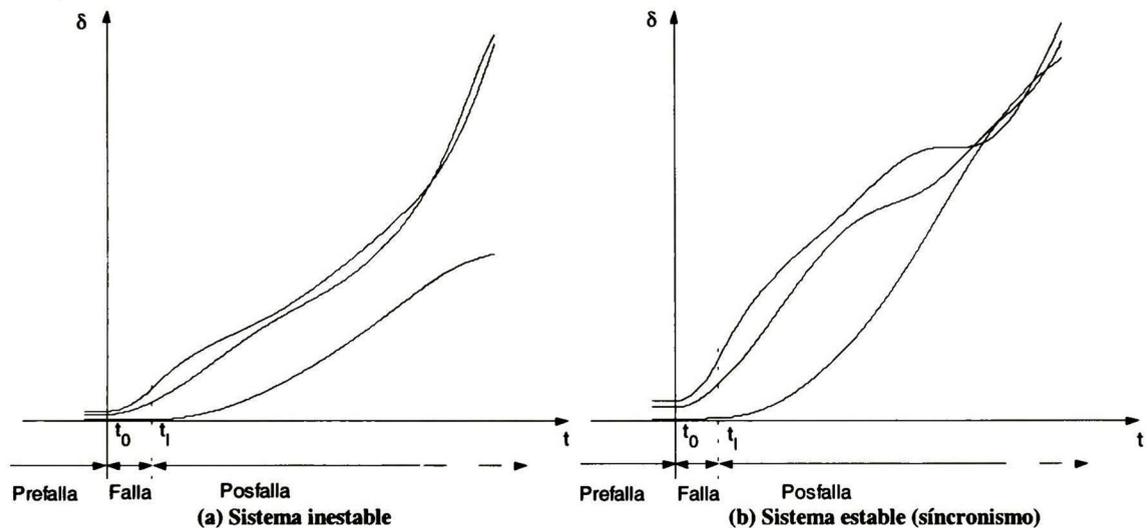


Fig. 2.1. Pasos fundamentales de un estudio de estabilidad

Si el sistema es inestable (como es el caso de Fig. 2.1(a)),  $t_l$  es mayor que  $t_{cr}$  y si es estable,  $t_l < t_{cr}$  (Fig. 2.1(b)).

La secuencia se realiza empleando el procedimiento estándar por integración numérica paso a paso de las ecuaciones (2.1): para un tiempo de liberación (establecido por el tiempo de apertura de los interruptores), se integra  $t_0$  hasta  $t_l$  (paso A). Se simulan los cambios en la estructura de la red, provocados por la conexión o desconexión de elementos (acción de los interruptores). Se continúa con la integración de  $t_l$  en adelante (paso B), hasta tener elementos de decisión sobre la tendencia hacia la estabilización o no.

### 2.3.2 Criterio de Lyapunov aplicado al análisis de estabilidad transitoria

Cuando se analiza el método de Lyapunov en el análisis de la estabilidad transitoria, el paso B se sustituye por un criterio de estabilidad basado en las características de la función de Lyapunov.

El principio de la aplicación de los métodos directos al estudio de estabilidad transitoria se basa en la evaluación de una función de Lyapunov y después hacer un estimado del dominio de estabilidad (EDE),  $\{\mathbf{x} : V(\mathbf{x}) < V_{cr}\}$ , del punto de equilibrio estable (PEE) del sistema de posfalla. Planteado de otra forma, el criterio de Lyapunov consiste en definir en el espacio de estados una región de estabilidad (asintótica) para el PEE del sistema de posfalla y determinar la intersección de la trayectoria del sistema (de falla sostenida) con la frontera de esta región.

Esta idea se ilustrará con el siguiente ejemplo. Consideremos un sistema eléctrico de potencia descrito por la ecuación de estados de posfalla (2.1), y sea el vector de estados  $\mathbf{x}$  que tiene como componentes a los subvectores de los ángulos  $\delta$  y de las velocidades  $\omega$  de los rotores respectivamente.

$$\mathbf{x} = [\delta^T, \omega^T]^T \quad (2.4)$$

Sea  $V$  una función de Lyapunov que asegura la estabilidad del sistema en cierta región alrededor del PEE de posfalla y  $V_{cr}$  su valor mínimo en la frontera de la región. La evaluación del valor crítico se puede obtener por integración numérica del sistema de ecuaciones (2.1) con el sistema perturbado y calculando la función de energía en cada instante de integración. Al valor de la energía cuando la trayectoria de falla cruza la frontera de la región de atracción se le asignará el valor crítico  $V_{cr}$ . El tiempo crítico de liberación será el instante de tiempo correspondiente al valor crítico de energía. La estabilidad del sistema, ante una perturbación específica, se determinará calculando la función de energía en el instante de liberación de la falla. Se compara la función de energía (tiempo de liberación) con la energía crítica (tiempo de liberación crítico) si la función de energía es menor a la crítica (tiempo de liberación menor al crítico) el sistema será estable. En la figura 2.2 se muestra en forma gráfica el procedimiento descrito. Se observa que cuando la perturbación se libera en los instantes de tiempo  $t_{11}$ ,  $t_{12}$  el sistema será estable. El tiempo crítico de liberación es  $t_{13}$ . Para un tiempo de liberación  $t_{14}$  el criterio de Lyapunov no garantiza estabilidad del sistema, pero no se puede afirmar que el sistema es inestable. Esto da un carácter conservativo al criterio de Lyapunov. Una de las principales razones del carácter conservativo es que los teoremas de estabilidad de Lyapunov proporcionan condiciones de suficiencia mas no de necesidad para la estabilidad de un sistema.

En el procedimiento anteriormente descrito, el problema principal consiste en el conocimiento (determinación) del cruce de la trayectoria de falla (sostenida) con la frontera de la región de atracción. Una forma segura pero ineficiente computacionalmente de obtener el tiempo crítico de liberación es emplear un programa tradicional de estabilidad y por cálculos en tiempos sucesivos calcular el tiempo donde el sistema es inestable. Este procedimiento se utiliza en este trabajo solo como base de comparación. Los métodos directos que se analizan en este trabajo no emplean la integración numérica en instantes de tiempo mayores al tiempo de liberación de la perturbación.

El procedimiento descrito para estimar la estabilidad se puede resumir en los tres pasos siguientes. Conocida una función de Lyapunov  $V$  y un disturbio que inicia en  $t_0$  y se libera en el tiempo  $t_l$ :

- (i) Se calcula el valor  $V_{cr}$ , que depende de las condiciones de operación de prefalla y posfalla.
- (ii) Se calculan los valores de la función de energía para el instante de liberación de la falla  $V(\delta(t_l), \omega(t_l)) = V_l$ ,

(iii) Si  $V(\delta(t_i), \omega(t_i)) < V_{cr}$  el sistema es estable e inestable en caso contrario.

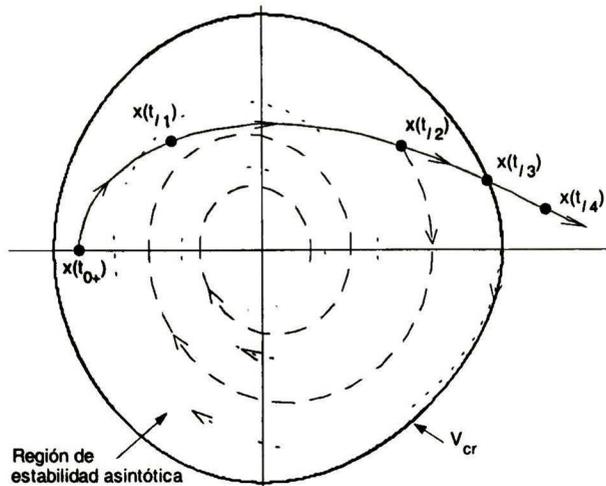


Fig. 2.2. Aplicación del criterio de Lyapunov

Es claro que el procedimiento descrito no requiere de la integración de las ecuaciones diferenciales durante el periodo de posfalla.

Para establecer el *margen de estabilidad* del sistema cuando el disturbio se libera en  $t_{li}$  se sigue el procedimiento dado por:

1. Se calcula el valor  $V_{cr}$ , y el tiempo crítico de liberación; este es el valor que toma  $V$  en la frontera de la región de estabilidad del PEE de posfalla.
2. Se calcula el valor de la función  $V$  en  $t = t_{li}$ , sea  $V_{li}$ . Por integración numérica de (2.1).
3. Se calcula el margen de estabilidad  $\eta_{li} = V_{cr} - V_{li}$ .

El éxito del procedimiento descrito depende esencialmente de los siguientes factores:

- a) la *calidad* de la función de Lyapunov encontrada, esto es que incluya en lo posible el mayor refinamiento en el modelo del sistema;
- b) la calidad de la estimación del dominio de estabilidad (región de atracción). Es importante hacer que ésta sea lo más grande posible, verificando que esté completamente contenida por la verdadera región de atracción del sistema;
- c) la rapidez de los cálculos numéricos. Esencialmente se refiere al cálculo de la EDE, es decir al cálculo del valor crítico  $V_{cr}$ . La evaluación de la función de energía  $V$ , en general no demanda muchos recursos y/o tiempo de cómputo.

En secciones posteriores nos ocuparemos de los detalles de cada uno de los factores antes mencionados. La calidad de la función de Lyapunov para los sistemas eléctricos de potencia (SEP) se estudiará en el capítulo 3. Antes se formularán los modelos que se utilizará en este trabajo. La calidad de la EDE para una clase de sistemas dinámicos tales como los SEP se estudiará en este mismo capítulo. La rapidez de los cálculos numéricos se estudiará en el capítulo 4 donde se analizan los métodos utilizados en esta tesis.

## 2.4 La frontera de estabilidad

A fin de poder estudiar la calidad de la estimación del dominio de estabilidad EDE es necesario conocer la *verdadera región de estabilidad* del PEE del sistema de posfalla. La región de estabilidad asintótica de un PEE  $\mathbf{X}_e$  se define como el conjunto de puntos expresado por

$$A(\mathbf{X}_e) = \left\{ \mathbf{X} \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X}_e \right\} \quad (2.5)$$

esto es, todos los puntos en el espacio de estados tales que la trayectoria de solución del sistema de posfalla  $\phi(\mathbf{X}, t)$  converge al PEE. La frontera del conjunto de puntos que define la región de estabilidad se conoce como la *frontera de estabilidad* del PEE del sistema de posfalla  $\partial A(\mathbf{X}_e)$ .

Para fines prácticos, en el estudio de la estabilidad de un sistema dinámico, es suficiente conocer la frontera de estabilidad y no el conjunto de puntos que definen la totalidad de la región de estabilidad. La afirmación anterior se puede hacer desde que es posible determinar si un sistema es estable o no verificando si la trayectoria del sistema (de falla) cruza o no la frontera de estabilidad. De esta manera, la frontera de estabilidad puede ser usada en el criterio de Lyapunov.

A fin de utilizar la frontera de estabilidad en el criterio de Lyapunov, o de obtener alguna aproximación de ésta, es conveniente hacer una caracterización de ésta. Para esto introduciremos algunos conceptos teóricos.

**Punto de equilibrio.** Se dice que un punto de equilibrio del sistema (2.1) es aquel  $\mathbf{X}_e$  tal que para todo  $t > 0$  se cumple la igualdad

$$0 = \mathbf{f}(\mathbf{X}_e)$$

**Punto de equilibrio hiperbólico.** Se dice que un punto de equilibrio  $\mathbf{X}_e$  es de tipo hiperbólico cuando la matriz Jacobiana, que resulta del proceso de linealizar el sistema (2.1), evaluada en el punto de equilibrio  $\mathbf{X}_e$  tiene valores propios todos con parte real diferente de cero.

**Punto de equilibrio tipo  $k$ .** Cuando la matriz Jacobiana, evaluada en un punto de equilibrio hiperbólico, tiene  $k$  valores propios con parte real mayor que cero, se dice que es un punto de equilibrio de tipo  $k$ .

**Variedad estable.** La variedad estable  $W^s$  de un punto de equilibrio hiperbólico  $\mathbf{X}_i$  se define como

$$W^s(\mathbf{X}_i) = \left\{ \mathbf{X} \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X}_i \right\} \quad (2.6)$$

es decir, todos los puntos en el espacio de estados tales que al ser perturbados de su condición de equilibrio, su trayectoria de solución converge al punto de equilibrio  $\mathbf{X}_i$ . Así, para un PEE  $\mathbf{X}_e$ , se tiene que  $W^s(\mathbf{X}_e) = A(\mathbf{X}_e)$ . La variedad estable de un punto de equilibrio tipo  $k$  es un subespacio  $n-k$  dimensional, para un espacio de estados de  $n$  dimensiones.

**Variedad inestable.** La variedad inestable  $W^u$  de un punto de equilibrio hiperbólico  $\mathbf{X}_i$  se define como

$$W^u(\mathbf{X}_i) = \left\{ \mathbf{X} \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X}_i \right\} \quad (2.7)$$

es decir, los puntos en el espacio de estados tales que al ser perturbados de su condición de equilibrio, la trayectoria de solución converge al punto de equilibrio  $\mathbf{X}_i$  cuando  $t \rightarrow -\infty$ . La variedad inestable de un punto de equilibrio tipo  $k$  es un subespacio  $k$  dimensional.

Las variedades estables e inestables son conjuntos invariantes, en el sentido que si el estado del sistema inicia en una de ellas, éste permanecerá en ella para todo tiempo futuro.

**Condición de transversalidad.** Si se consideran dos variedades  $A$  y  $B$  en  $\mathfrak{R}^n$  se dice que la intersección de las variedades satisfacen la *condición de transversalidad* si:

- (i) La intersección de  $A$  con  $B$  es nula,  $A \cap B = 0$ .
- (ii) En cada punto de la intersección  $\mathbf{X} \in (A \cap B)$ , los espacios tangentes de  $A$  y  $B$  en el punto  $\mathbf{X}$  generan (son una base de) el espacio tangente de  $\mathfrak{R}^n$  en  $\mathbf{X}$ .

Uno de los objetivos que se persiguen en este trabajo es el análisis de la frontera de estabilidad de un PEE del sistema (2.1). Para esto se hacen las siguientes consideraciones. La primera y fundamental es que el punto de equilibrio estable existe. Las otras suposiciones son las siguientes:

- (S1) Todos los puntos de equilibrio en la frontera de estabilidad del PEE del sistema (2.1) son hiperbólicos.
- (S2) La intersección de las variedades estable e inestable de cada punto de equilibrio en la frontera de estabilidad cumplen con la condición de transversalidad.
- (S3) Existe una función  $V : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R} \perp V \in C^1$  tal que:
  - (i)  $\dot{V}(\mathbf{X}) \leq 0$  en cada punto  $\mathbf{X} \notin E_x$ .
  - (ii) Si  $\mathbf{X} \notin E_x$ , entonces el conjunto  $\{t \in \mathfrak{R} : \dot{V}(\phi(\mathbf{X}, t)) = 0\}$  tiene medida 0 en  $\mathfrak{R}$ .
  - (iii) El mapeo  $V : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  es propio. Es decir, para cada  $\mathbf{X} \in \mathfrak{R}^n$  si  $\{V(\phi(\mathbf{X}, t))\}_{t \geq 0}$  es acotado, entonces  $\{\phi(\mathbf{X}, t)\}_{t \geq 0}$  también es acotado.

La función  $V : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  de la suposición (S3) se conoce como *función de energía*; mientras que el conjunto  $E_x$  es el conjunto formado por los puntos de equilibrio del sistema (2.1).

Las suposiciones (S1) a (S3) tienen las siguientes implicaciones.

- 1) Dado que las suposiciones (S1) y (S2) son propiedades genéricas de los sistemas dinámicos [4], éstas son verdaderas para casi todos los sistemas dinámicos, incluyendo los sistemas eléctricos de potencia.
- 2) Bajo una pequeña perturbación del campo vectorial  $f(\mathbf{X})$ , un punto de equilibrio hiperbólico seguirá siendo hiperbólico. Un punto de equilibrio no hiperbólico se bifurcará en puntos de equilibrio hiperbólicos, lo que ocasionaría un cambio en el comportamiento cualitativo de éste.
- 3) La suposición (S3) implica que cada trayectoria en la frontera de estabilidad se aproxima a algún punto de equilibrio conforme  $t \rightarrow \infty$ . Esto además garantiza que trayectorias oscilatorias acotadas tales como ciclos límite o movimiento caótico no existen para el sistema (2.1).

4) Si los puntos de equilibrio son hiperbólicos, entonces son aislados [5].

A continuación se presentan dos teoremas, la demostración se encuentra en las referencias [6,7,8]. Estos teoremas se utilizan para caracterizar la frontera de estabilidad de un PEE.

**Teorema 1.** (Condición necesaria y suficiente para que un punto de equilibrio pertenezca a la frontera de estabilidad). Para el sistema dinámico (2.1) que satisface las suposiciones (S1) a (S3),  $\mathbf{X}_i$  es un punto de equilibrio en la frontera de estabilidad  $\partial A(\mathbf{X}_e)$  de un PEE  $\mathbf{X}_e$  si y solo si  $W^u(\mathbf{X}_i) \cap A(\mathbf{X}_e) \neq \emptyset$ .

**Teorema 2.** (Caracterización de la frontera de estabilidad). Para el sistema dinámico (2.1) que satisface las suposiciones (S1) a (S3), sean  $\mathbf{X}_i, i = 1, 2, \dots, n$  los puntos de equilibrio en la frontera de estabilidad  $\partial A(\mathbf{X}_e)$  de un punto de equilibrio estable  $\mathbf{X}_e$ ; la frontera de estabilidad es igual a la unión de las variedades estables de los  $\mathbf{X}_i, i = 1, 2, \dots$ , puntos de equilibrio en  $\partial A(\mathbf{X}_e)$ , esto es

$$\partial A(\mathbf{X}_e) = \bigcup_{\mathbf{X}_i \in (E \cap \partial A(\mathbf{X}_e))} W^s(\mathbf{X}_i) \quad (2.8)$$

De los teoremas anteriores se puede concluir que en la frontera de estabilidad de un PEE de un sistema dinámico (2.1) que cumple con las suposiciones (S1) a (S3), únicamente existen puntos de equilibrio inestables. Esto se concluye desde que la variedad inestable de un PEE es de dimensión cero, lo que implica que su intersección con la región de estabilidad de otro PEE es nula.

### 2.4.1 Frontera de estabilidad de un sistema máquina síncrona – bus infinito.

En esta sección se muestra, con la ayuda de dos ejemplos, la aplicación y validez de los dos teoremas con los que se caracteriza la frontera de estabilidad de un punto de equilibrio estable en un sistema dinámico autónomo. En estos ejemplos se hace uso de un sistema máquina síncrona – bus infinito. Se emplea el modelo clásico del generador. El diagrama esquemático se muestra en la figura 2.3. Las ecuaciones dinámicas que gobiernan el comportamiento de este sistema son

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= \omega \\ M\dot{\omega} &= -D\omega - P_0 \sin \delta + P_m \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde:

- $\delta$  Posición angular del rotor de la máquina síncrona.
- $\omega$  Velocidad angular del rotor de la máquina síncrona.
- $M$  Momento de inercia de la máquina síncrona. Constante real mayor que cero.
- $D$  Coeficiente de amortiguamiento de la máquina síncrona. Constante real mayor que cero.
- $P_m$  Potencia mecánica suministrada a la máquina síncrona. Constante real mayor que cero.
- $P_c$  Potencia eléctrica máxima que puede suministrar la máquina a la red, es un valor constante que depende de la configuración de la red entre la máquina síncrona y el

bus infinito.  $P_m$  es menor que  $P_0$ .

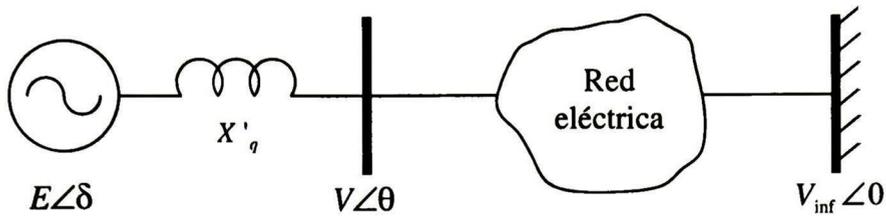


Fig. 2.3. Sistema máquina síncrona – bus infinito.

El sistema máquina síncrona–bus infinito tiene tres puntos de equilibrio en el intervalo  $(-\pi, \pi)$  (cuando el punto de equilibrio estable  $\delta_0$  es desplazado al origen). Los puntos de equilibrio están dados por las expresiones

$$(\delta_1, \omega_1) = (\delta_0, 0)$$

$$(\delta_2, \omega_2) = (\pi - \delta_0, 0)$$

$$(\delta_3, \omega_3) = (-\pi - \delta_0, 0)$$

donde

$$\delta_0 = \arcsen\left(\frac{P_m}{P_0}\right)$$

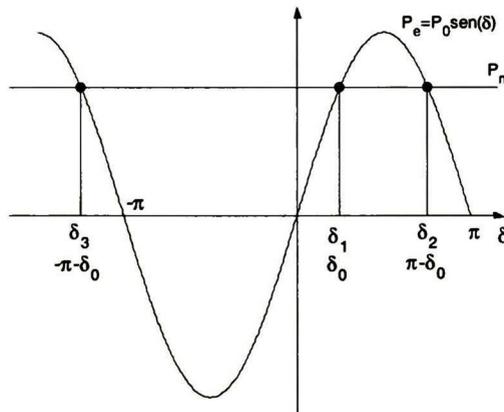


Fig. 2.4. Puntos de equilibrio del sistema máquina síncrona – bus infinito.

En la figura 2.4 se muestran las componentes angulares de los puntos de equilibrio del sistema. En esta figura se aprecia que los puntos de equilibrio son aquellos en los que se cumple la igualdad entre la potencia mecánica suministrada a la máquina y la potencia eléctrica que ésta suministra a la red. Evidentemente el número de puntos de equilibrio de este sistema es infinito debido a la naturaleza senoidal del modelo. Debido a que los puntos de equilibrio  $(\delta_1, \omega_1)$ ,  $(\delta_2, \omega_2)$  y  $(\delta_3, \omega_3)$  representan un ciclo completo del comportamiento del sistema, es suficiente restringir el análisis a un ciclo para tener un conocimiento general del sistema.

El primer paso consiste en determinar las características de estabilidad o inestabilidad de los puntos de equilibrio. Se utilizará el criterio de Lyapunov para sistemas lineales aplicado al sistema linealizado alrededor de cada uno de estos puntos. El sistema resultante de la linealización del sistema máquina–bus infinito está dado por la ecuación (2.10)

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\delta} \\ \Delta \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{P_0 \cos \delta}{M} & -\frac{D}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta \omega \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

La estabilidad o inestabilidad de un sistema lineal se determina del conocimiento de los valores propios de la matriz de la planta. La expresión (2.10) evaluada en el punto de equilibrio  $(\delta_1, \omega_1)$  es:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\delta} \\ \Delta \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{P_0^2 - P_m^2}}{M} & -\frac{D}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta \omega \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Los valores propios de la matriz jacobiana evaluada en el punto  $(\delta_1, \omega_1)$  son

$$\lambda_1 = \frac{1}{2M} \left[ -D \pm \sqrt{D^2 - 4M \sqrt{P_0^2 - P_m^2}} \right] \quad (2.12)$$

Como las constantes  $D$ ,  $M$ ,  $P_0$  y  $P_m$  son todas positivas, y además  $P_0 > P_m$  se puede establecer que la parte real de los valores propios (2.12) es negativa, esto implica que el punto de equilibrio  $(\delta_1, \omega_1)$  es estable e hiperbólico.

El sistema linealizado alrededor de los puntos de equilibrio  $(\delta_2, \omega_2)$  y  $(\delta_3, \omega_3)$  se expresa por la ec. (2.13)

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\delta} \\ \Delta \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{P_0^2 - P_m^2}}{M} & -\frac{D}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta \omega \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

los valores propios están dados por

$$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2M} \left[ -D \pm \sqrt{D^2 + 4M \sqrt{P_0^2 - P_m^2}} \right] \quad (2.14)$$

Los valores propios son números reales y diferentes de cero, esto significa que los dos puntos de equilibrio son hiperbólicos. Por otro lado, uno de los valores propios es negativo y el otro es positivo, de tal manera que los puntos de equilibrio son inestables y tipo 1.

Hasta aquí se ha demostrado que el sistema máquina–bus infinito satisface la suposición (S1). Asumiremos que también cumple la suposición (S2) al aprovechar el carácter genérico de ésta. La suposición (S3) también se satisface ya que existe una función de energía para este sistema. La función de energía está dada por

$$E(\delta, \omega) = \frac{1}{2} M \omega^2 - P_m \delta - P_0 \cos \delta \quad (2.15)$$

la derivada respecto del tiempo es

$$\dot{E}(\delta, \omega) = \frac{\partial E(\delta, \omega)}{\partial \delta} \dot{\delta} + \frac{\partial E(\delta, \omega)}{\partial \omega} \dot{\omega} = -D\omega^2 \quad (2.16)$$

Entonces, como el sistema máquina-bus infinito satisface las suposiciones (S1), (S2) y (S3), se pueden aplicar los teoremas 1 y 2. Lo anterior implica que los puntos de equilibrio inestables cuyas variedades estables convergen al punto de equilibrio estable  $(\delta_1, \omega_1)$  están en la frontera de estabilidad  $\partial A(\delta_1, \omega_1)$ , y que además esta frontera de estabilidad es igual a la unión de las variedades estables de los puntos de equilibrio inestables.

A continuación se dan dos ejemplos numéricos (para dos diferentes condiciones de operación del sistema máquina-bus infinito). En donde se obtiene las variedades estables e inestables de los puntos de equilibrio  $(\delta_2, \omega_2)$  y  $(\delta_3, \omega_3)$ . Los parámetros del sistema para las dos condiciones de operación se muestran en la tabla 2.1.

Tabla 2.1. Parámetros del sistema máquina síncrona-bus infinito.

Caso	M	D	$P_0$	$P_m$
1	1.5	0.5	5.0	1.0
2	1.5	0.5	5.0	3.5

Las variedades inestables de los puntos de equilibrio  $(\delta_2, \omega_2) = (2.9402, 0.0)$  y  $(\delta_3, \omega_3) = (-3.3430, 0.0)$  correspondientes a la condición de operación 1, se muestran en la figura 2.5. En esta figura se aprecia que las variedades inestables de los puntos de equilibrio inestable convergen al punto de equilibrio estable  $(\delta_1, \omega_1) = (0.2014, 0.0)$ . Esto implica que de acuerdo con el teorema 1 los dos puntos de equilibrio inestables están en la frontera de estabilidad del punto de equilibrio estable  $(\delta_1, \omega_1)$  y que esta frontera está formada por la unión de las variedades estables de estos puntos de equilibrio.

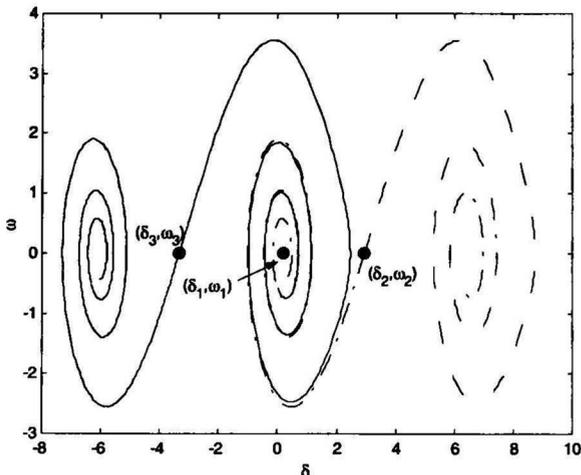


Fig. 2.5. Variedades inestables de los puntos de equilibrio inestables del sistema máquina síncrona – bus infinito (condición de operación 1)

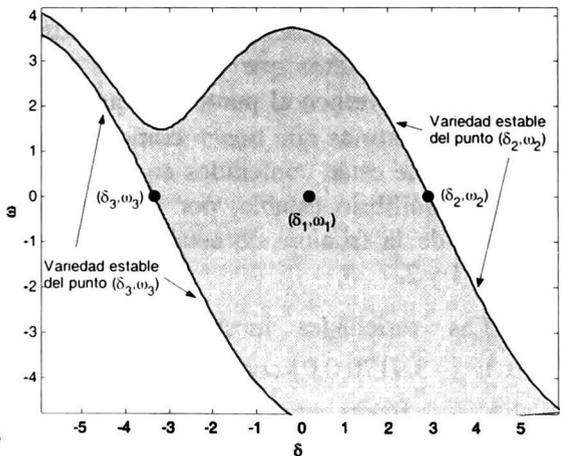


Fig. 2.6. Variedades estables de los puntos de equilibrio inestables del sistema máquina síncrona– bus infinito (condición de operación 1)

Las variedades estables de los puntos de equilibrio inestables se muestran en la figura 2.6. En esta figura se aprecia que el punto de equilibrio estable  $(\delta_1, \omega_1)$  está rodeado de las variedades estables. Si se asume que la unión de estas variedades estables conforman la frontera de estabilidad de  $(\delta_1, \omega_1)$  entonces se verifica la afirmación del teorema 1, de que los puntos de equilibrio  $(\delta_2, \omega_2)$  y  $(\delta_3, \omega_3)$  pertenecen a la frontera de estabilidad. De acuerdo con lo anterior el área sombreada del espacio de estados es la región de atracción o de estabilidad  $A(\delta_1, \omega_1)$ .

Para mostrar numéricamente que la unión de las variedades estables definen la frontera de estabilidad del punto de equilibrio  $(\delta_1, \omega_1)$  se calculan las trayectorias del movimiento de un conjunto de puntos contenidos en el interior de la región comprendida entre las variedad estables, área sombreada, y se demuestra que convergen al punto de equilibrio estable  $(\delta_1, \omega_1)$ . Además, se toman puntos fuera de la región sombreada (fuera de la región de atracción) y se demuestra que sus trayectorias no convergen al punto de equilibrio. Las trayectorias resultantes de 7 condiciones iniciales, 3 contenidas en la región de atracción, se muestran en la figura 2.7.

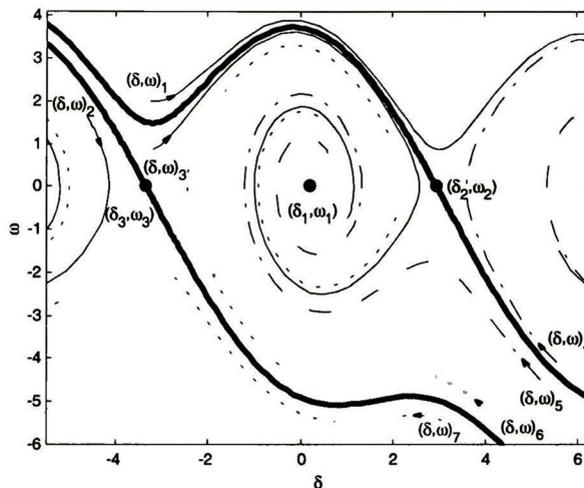


Fig. 2.7. Trayectorias estables e inestables del sistema máquina síncrona – bus infinito (condición de operación 1).

Como puede observarse, las trayectorias que inician en los puntos  $(\delta, \omega)_1, (\delta, \omega)_2, (\delta, \omega)_4$  y  $(\delta, \omega)_7$  (que son puntos que están fuera de la región limitada por la unión de las variedades estables) no convergen al punto de equilibrio estable. Estas trayectorias son inestables. Por otro lado, las trayectorias que tienen como condición inicial a los puntos  $(\delta, \omega)_3, (\delta, \omega)_5$  y  $(\delta, \omega)_6$  (que son puntos que están contenidos en la región limitada por las variedades estables) convergen al punto de equilibrio estable, por lo que son estables. Con estos resultados se ejemplifica la definición de la frontera de estabilidad como la unión de las variedades estables dada en los teoremas 1 y 2.

Las variedades inestables de los puntos de equilibrio  $(\delta_2, \omega_2) = (2.3662, 0.0)$  y  $(\delta_3, \omega_3) = (-3.9170, 0.0)$  correspondientes a la condición de operación 2, se muestran en la figura 2.8. En esta figura se aprecia que únicamente la variedad inestable del punto de equilibrio  $(\delta_2, \omega_2)$  converge al punto de equilibrio estable  $(\delta_1, \omega_1) = (0.7754, 0.0)$ , esto implica, de acuerdo con los teoremas 1 y 2, que para esta nueva condición de operación la frontera de estabilidad del punto  $(\delta_1, \omega_1)$  está formada únicamente por una variedad estable.

Las variedades estables de los puntos de equilibrio inestables  $(\delta_2, \omega_2)$  y  $(\delta_3, \omega_3)$  se muestran en la figura 2.9. Aquí se aprecia claramente que el punto de equilibrio estable está contenido únicamente por la variedad estable del punto de equilibrio inestable  $(\delta_2, \omega_2)$ . La región sombreada del espacio de estados representa la región de atracción para esta condición de operación.

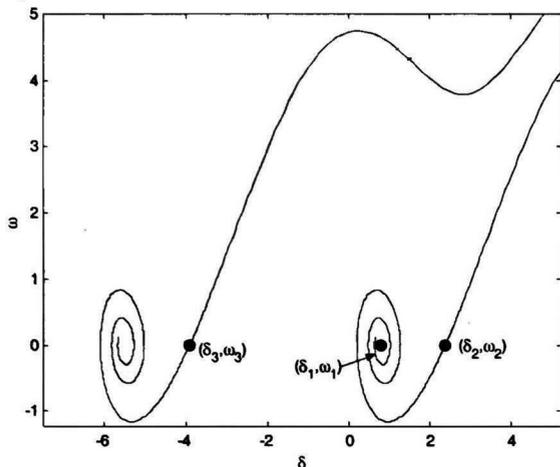


Fig. 2.8. Variedades inestables de los puntos de equilibrio inestables del sistema máquina síncrona – bus infinito (condición de operación 2)

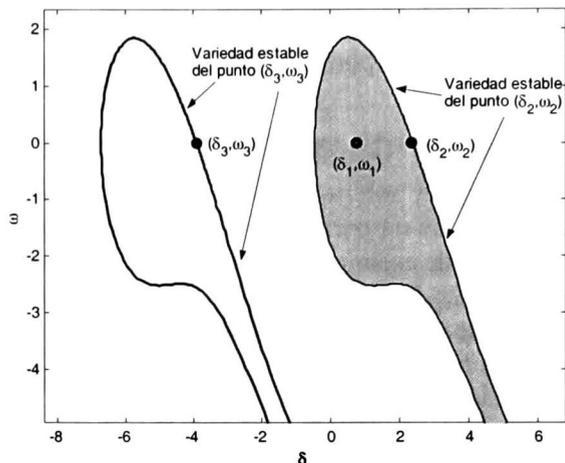


Fig. 2.9. Variedades estables de los puntos de equilibrio inestables del sistema máquina síncrona– bus infinito (condición de operación 2)

Finalmente, en la figura 2.10 se muestran las trayectorias de movimiento para puntos (condición inicial perturbada) que se encuentran en el interior y fuera de la región sombreada (región de atracción). Estas trayectorias, al igual que en la condición de operación anterior confirman la validez de la definición de la frontera de estabilidad dada por el teorema 2. En este caso, las trayectorias que tienen como condición inicial a los puntos  $(\delta, \omega)_1$ ,  $(\delta, \omega)_3$  y  $(\delta, \omega)_6$  (que son puntos que no están contenidos por la región limitada por la variedad estable del punto  $(\delta_2, \omega_2)$ ) no convergen al punto de equilibrio estable. Mientras que las trayectorias que tienen como condición inicial a los puntos  $(\delta, \omega)_2$ ,  $(\delta, \omega)_4$  y  $(\delta, \omega)_5$  (contenidos en la región limitada por la variedad estable del punto  $(\delta_2, \omega_2)$ ) convergen al punto de equilibrio estable.

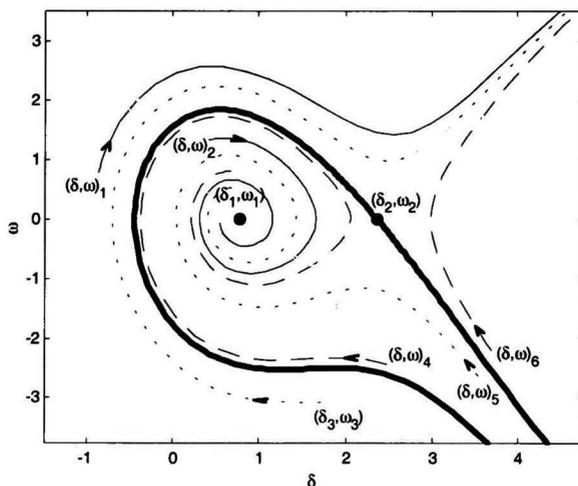


Fig. 2.10. Trayectorias estables e inestables del sistema máquina síncrona – bus infinito (condición de operación 2).

Los dos ejemplos anteriores muestran claramente la aplicación de los teoremas 1 y 2 así como la validez de los teoremas. En sistemas con espacio de estados donde la dimensión es mayor de 2 resulta sumamente complicado construir las variedades estables e inestables. Esto es un gran inconveniente para determinar la región de atracción de un punto de equilibrio. Para la determinación de los puntos de equilibrio inestables que pertenecen a la frontera de estabilidad, la dificultad se reduce ya que no es necesario la determinación completa de las variedades inestables, es suficiente con encontrar una trayectoria que esté contenida en la variedad inestable y que converja al punto de equilibrio estable.

## 2.5 La frontera de estabilidad y la función de energía

En la sección anterior se señalaron las características principales que definen a la frontera de estabilidad de un punto de equilibrio estable de un sistema dinámico autónomo. Se demostró que la frontera de estabilidad está formada por trayectorias de solución del propio sistema (variedades estables). La primera consideración es la existencia de una función de energía del sistema. La función de energía es un escalar real decreciente a lo largo de cualquier trayectoria de solución. Como la frontera es una variedad invariante, la función de energía evaluada sobre los puntos que pertenecen a la frontera de estabilidad tiene valores mínimos locales relativos en cada punto de equilibrio inestable. La afirmación anterior obedece al hecho de que las trayectorias de movimiento sobre puntos que pertenecen a la frontera de estabilidad convergen a algún punto de equilibrio inestable y al carácter decreciente de la función de energía. Lo anterior se cumple para todos los puntos de equilibrio inestables pertenecientes a la frontera de estabilidad excepto a los puntos hiperbólicos tipo  $n$  o *fuentes*. Esta excepción se debe a que estos puntos de equilibrio carecen de variedad estable, esto implica que no existen trayectorias que convergen a éstos puntos. Así, en las fuentes localizadas sobre la frontera de estabilidad se tienen máximos locales de la función de energía.

Este comportamiento de la función de energía en la frontera de estabilidad nos lleva a establecer una condición de suficiencia para determinar si la región de estabilidad de un punto de equilibrio es acotada o no. El siguiente teorema establece esta condición.

**Teorema 3.** (*Condición suficiente para que la frontera de estabilidad de un punto de equilibrio estable sea acotada*). Sea el sistema dinámico (2.1) que satisface las condiciones (S1) a (S3), si en la frontera de estabilidad de un punto de equilibrio estable  $\partial A(\mathbf{X}_e)$  existe un punto de equilibrio tipo  $n$  (fuente), entonces la región de estabilidad del punto de equilibrio estable  $\mathbf{X}_e$  es acotada.

Por otro lado, la función de energía alcanza un mínimo en un punto de equilibrio estable (PEE), ya que las trayectorias que inician en cualquier punto en el interior la región de estabilidad del PEE converge a éste, así como al carácter decreciente de la función de energía. Esto significa que en cualquier punto localizado en el interior de la región de estabilidad la función de energía es mayor respecto de la energía en punto de equilibrio estable PEE.

Así, el comportamiento de la función de energía en la vecindad de un PEE es similar al comportamiento de la función de Lyapunov. Es ésta la razón por la que se puede utilizar una función de energía para estimar la estabilidad de un sistema dinámico y es lo que ha dado origen a la aplicación de los *métodos directos tipo Lyapunov* en los sistemas eléctricos de potencia.

Los métodos directos tipo Lyapunov, tienen características de comportamiento similares a las del método de Lyapunov (función de Lyapunov) descrito en secciones anteriores. La diferencia consiste en la función escalar que utilizan, así como el valor crítico de la función utilizado para aproximar la región de estabilidad.

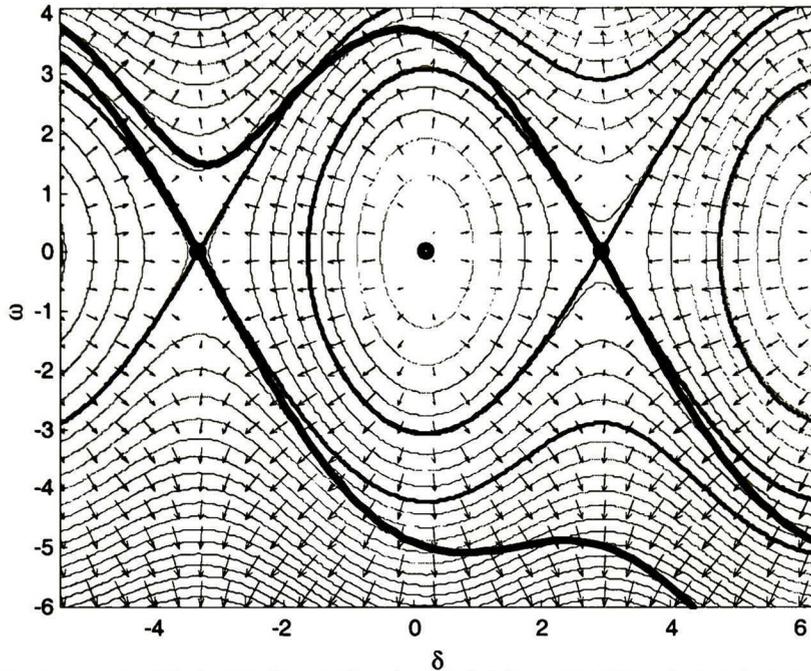


Fig. 2.11. Comportamiento de la función de energía en la vecindad de un PEE (sist. máquina síncrona – bus infinito)

Para ilustrar los conceptos anteriores, se utilizará de nuevo el sistema máquina síncrona – bus infinito, figura 2.3. En la figura 2.11 se muestran la frontera de estabilidad del PEE  $(\delta_1, \omega_1)$  en la condición de operación uno dado en la tabla 2.1. Además, se muestran las curvas de nivel de la función de energía (puntos de energía constante) del sistema (2.15) en el espacio de estados.

En esta misma figura se grafican vectores de la función gradiente de la función de energía. De la observación de esta figura se aprecia lo siguiente:

- La función de energía alcanza un mínimo en el punto  $(\delta_1, \omega_1)$ .
- El gradiente es cero en los puntos de equilibrio, estables e inestables.
- Los vectores gradiente cortan ortogonalmente a las curvas de nivel.
- Existe una curva de nivel totalmente contenida en la región de atracción, esta pasa por uno de los puntos de equilibrio inestables  $(\delta_2, \omega_2)$ . Esta curva de nivel aproxima una parte de la región de atracción verdadera.
- La curva de nivel que pasa por el punto de equilibrio inestable  $(\delta_3, \omega_3)$  no esta totalmente contenida en la región de atracción. Esta curva aproxima otra parte (no incluida por la curva de nivel que pasa por  $(\delta_2, \omega_2)$ ) de la región de atracción.
- Las curvas de nivel que pasan por los puntos de equilibrio inestables se indican con líneas más gruesas.

La función de energía (2.15) del sistema máquina síncrona – bus infinito se puede descomponer como se indica

$$E(\delta, \omega) = E_p(\delta) + E_c(\omega) \tag{2.17}$$

con

$$E_p(\delta) = -P_m \delta - P_0 \cos(\delta) \tag{2.18}$$

$$E_c(\omega) = \frac{1}{2} M \omega^2 \tag{2.19}$$

$E_p(\delta)$  es conocida como función de energía potencial, depende únicamente de la posición angular la máquina.  $E_c(\omega)$  es la energía cinética, depende únicamente de la velocidad angular de la máquina.

La energía cinética siempre es positiva. Por esta razón nos concentraremos en el análisis de la función potencial  $E_p(\delta)$ , es decir el semiespacio de estados correspondiente a la posición angular. Se puede demostrar que esta función posee extremos locales en los puntos  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ , esto es, en las proyecciones angulares de los puntos de equilibrio del sistema. En secciones posteriores se demostrará que la función de energía potencial tiene un comportamiento similar en sistemas multi-máquinas. En la figura 2.12 se muestra la función de energía potencial contra la posición angular  $\delta$ . En esta, se aprecia que los puntos  $\delta_1, \delta_2$  y  $\delta_3$  son los puntos en donde  $E_p(\delta)$  tiene extremos locales. Este hecho es importante para el análisis y el desarrollo de los diferentes métodos directos tipo Lyapunov que se utilizan para estimar la estabilidad en sistemas eléctricos de potencia.

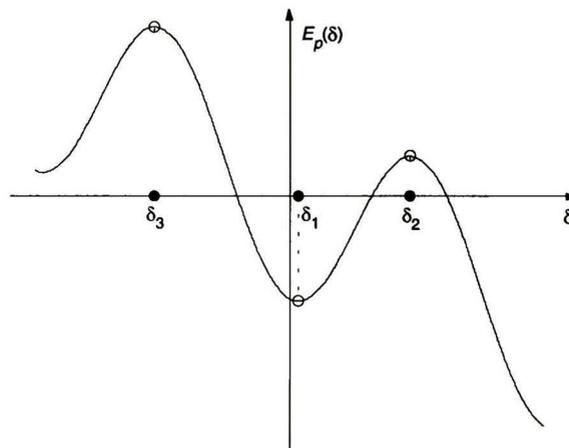


Fig. 2.12. Comportamiento de la función de energía potencial (sistema máquina síncrona – bus infinito)

## 2.6 Aproximación de la región de estabilidad.

Los métodos directos tipo Lyapunov se basan en la aproximación de la región de atracción o de estabilidad del PEE. Aunque de diferente forma, cada uno de los métodos directos aproxima una superficie equipotencial estimando un valor crítico. Todos los métodos aprovechan que la función de energía en la frontera de estabilidad toma valores que corresponden a los valores de la función de energía evaluada en los puntos de equilibrio inestables.

### 2.6.1 El Punto de Equilibrio Inestable (PEI) Más Cercano.

La función de energía evaluada en puntos contenidos en la frontera de estabilidad de un PEE  $\partial A(\mathbf{X}_e)$  alcanza valores mínimos relativos en los puntos de equilibrio localizados sobre la frontera. Esto indica que la función de energía evaluada sobre puntos de la frontera diferentes a los de equilibrio tienen mayor valor que los valores correspondientes en los puntos de equilibrio. Esto implica que una superficie equipotencial con un valor igual al de la función de energía en un PEI (que no sea de tipo  $n$ ) contenido en  $\partial A(\mathbf{X}_e)$  al menos una sección de esta superficie estará contenida por la región de estabilidad  $A(\mathbf{X}_e)$  del PEE. Más aún, si se construye esta superficie con un valor  $E_{cr}$  tal que

$$E_{cr} = \min_{\mathbf{X}_i \in (E_x \cap \partial A(\mathbf{X}_e))} \{E(\mathbf{X}_i)\} \quad (2.20)$$

donde  $E_x$  es el conjunto de los puntos de equilibrio del sistema. Esto es,  $E_{cr}$  es el valor mínimo de la función de energía evaluada en el conjunto de los PEI que pertenecen a la frontera  $\partial A(\mathbf{X}_e)$ . Equivalentemente,  $E_{cr}$  es el valor mínimo de la función de energía evaluada en el conjunto de puntos que pertenecen a la frontera  $\partial A(\mathbf{X}_e)$ . Entonces la superficie equipotencial construida con el valor de  $E_{cr}$  dado por (2.20) estará completamente contenida por la región de estabilidad. De hecho, ésta es la única superficie equipotencial que está completamente contenida en la región de estabilidad.

La aproximación de la región de estabilidad construida con el valor  $E_{cr}$  dado por (2.20) es la región de mayor magnitud que se puede construir sin que se sobrestime la estabilidad del sistema. El punto de equilibrio inestable donde se cumple (2.20) es conocido como el *Punto de Equilibrio Inestable (PEI) Más Cercano (Closest Unstable Equilibrium Point)*.

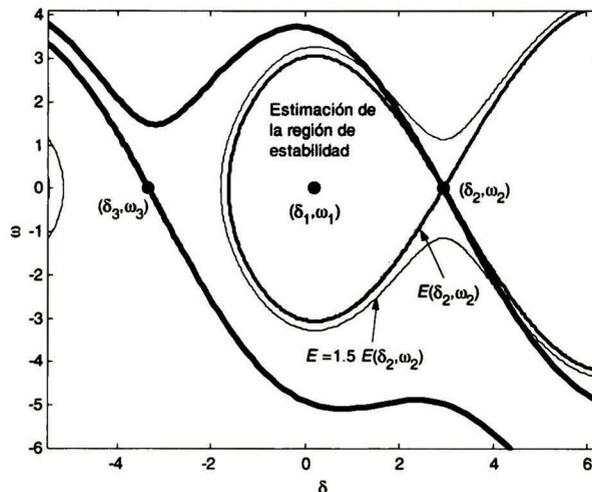


Fig. 2.13. Estimación de la región de estabilidad utilizando el método del PEI más cercano (sistema máquina síncrona – bus infinito)

Retomando el ejemplo del sistema máquina síncrona – bus infinito (2.9), se ejemplifica la estimación de la región de estabilidad dada por el PEI más cercano. En la figura 2.13 se aprecia que la región definida por la superficie equipotencial que pasa por el punto  $(\delta_2, \omega_2)$  está completamente contenida en la región de estabilidad del PEE  $(\delta_1, \omega_1)$ .

Para verificar que la superficie equipotencial construida con el valor  $E_{cr}$  dado por el PEI más cercano es la única que esta completamente contenida en la región de estabilidad se grafica una superficie equipotencial con valor de energía 1.5 veces mayor al correspondiente al PEI más cercano. En la figura 2.13 se observa que esta superficie no esta totalmente contenida en la región de estabilidad y cruza la variedad estable del PEI más cercano (punto  $(\delta_2, \omega_2)$ ).

En este ejemplo se puede apreciar que aunque la función de energía que pasa el PEI más cercano constituye la mayor superficie equipotencial que está totalmente contenida en la región de estabilidad, la estimación de la estabilidad del sistema puede ser conservadora. Ya que una amplia sección de la región de estabilidad al no estar contenida en la región limitada por la superficie equipotencial se califica como inestable. Este carácter conservador del método del PEI más cercano ha dado origen a otras metodologías que intentan disminuir el carácter conservador de los métodos directos tipo Lyapunov que emplean el PEI mas cercano (PEIMC).

### 2.6.2 El Punto de Equilibrio Inestable (PEI) Controlador.

La estimación de la estabilidad de un sistema dinámico ante una perturbación dada consiste en determinar si la trayectoria del sistema perturbado ha abandonado o no la región de estabilidad del PEE en el instante  $t_l$  en que se elimina la perturbación. Si la perturbación no se libera, la trayectoria del sistema sale de la región de estabilidad cruzando la frontera en un punto específico. Este punto es conocido como *punto de salida*. De acuerdo con la caracterización de la frontera de estabilidad, el punto de salida pertenece a la variedad estable de un PEI. Evidentemente, para diferentes perturbaciones se tienen diferentes trayectorias del sistema perturbado y como consecuencia puntos de salida diferentes. Cada uno puede pertenecer a variedades estables de diferentes PEI.

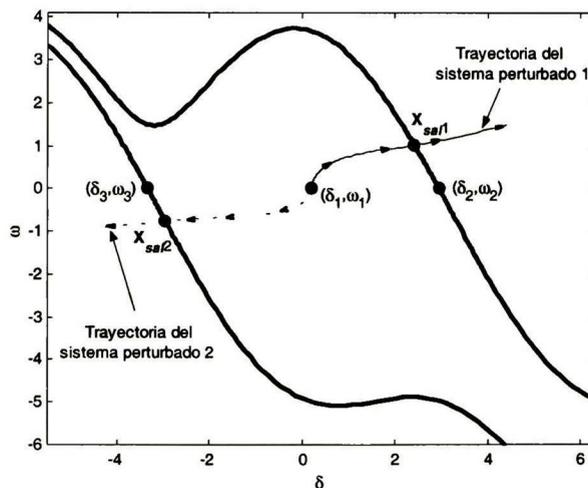


Fig. 2.14. PEIC para diferentes trayectorias de sistema perturbado (sistema máquina síncrona – bus infinito).

El PEI al que corresponde la variedad estable en la que está contenido el punto de salida de la trayectoria del sistema perturbado es conocido en la literatura como el *Punto de Equilibrio Controlador*, PEIC, (*Controlling Unstable Equilibrium Point*). Para ilustrar el concepto del PEIC se utiliza el sistema máquina síncrona – bus infinito con la condición de operación uno dada en la tabla 2.1. Se consideran dos perturbaciones al sistema y se obtienen las trayectorias correspondientes. El sistema de posdisturbio (perturbación eliminada) tiene la misma estructura que el sistema de predisturbio. El objetivo de este ejemplo es calcular el punto de salida de cada

una de las trayectorias del sistema perturbado y de esta forma determinar el PEIC y la variedad estable por donde cruza el punto de salida.

La frontera de estabilidad del sistema para la condición de operación uno se muestra en la figura 2.14. En esta, se indican las trayectorias del sistema perturbado (perturbación 1 y 2). Se aprecia que la trayectoria correspondiente a la perturbación 1 abandona la región de estabilidad del PEE cruzando la variedad estable del PEI  $(\delta_2, \omega_2)$  en el punto  $X_{sal1}$ . De esta forma, el PEI  $(\delta_2, \omega_2)$  es el PEIC correspondiente a la perturbación 1. En forma similar, el PEI  $(\delta_3, \omega_3)$  es el PEIC correspondiente para la perturbación 2.

La determinación del PEIC para una perturbación dada permite hacer una mejor aproximación de la región de estabilidad verdadera del PEE, extendiendo la región de estabilidad a la obtenida por el PEI más cercano.

Si nos concentramos en la sección de la frontera de estabilidad definida por la variedad estable de un PEI específico  $(PEI_i)$ , entonces la función de energía alcanza su valor mínimo en el  $PEI_i$ . Esto significa que la superficie equipotencial que pasa por el  $PEI_i$  está contenida en la cerradura del conjunto de puntos del espacio de estados cuya frontera es la superficie equipotencial que pasa por alguno de los puntos de la variedad estable del  $PEI_i$ . Esto se aprecia en la figura 2.11, donde se observa que las superficies equipotenciales que pasan por los PEI están rodeadas por otras superficies equipotenciales que pasan a través de la variedad estable de cada PEI.

Lo anterior implica que cualquier trayectoria de un sistema perturbado, con condición inicial que se encuentre en el interior de la región de estabilidad de un PEE siempre cruza la superficie equipotencial que pasa por el  $PEI_i$  antes de cruzar la variedad estable de éste.

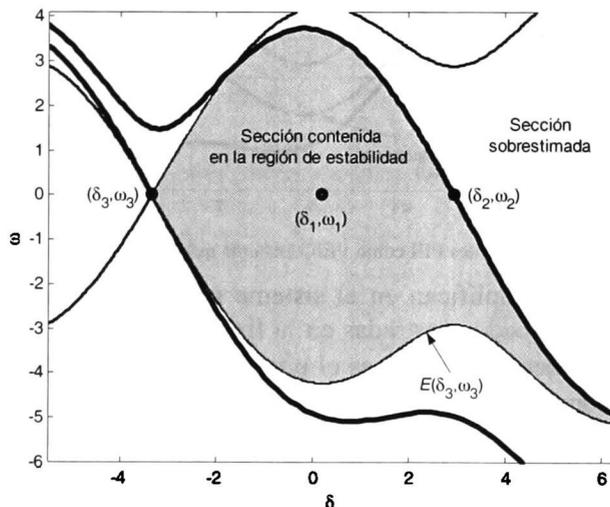


Fig. 2.15. Estimación de la región de estabilidad al utilizar un PEI diferente al PEI más cercano (sistema máquina síncrona – bus infinito).

Entonces, de acuerdo con la definición del PEIC, la trayectoria del sistema perturbado cruzará la superficie equipotencial que pasa por el PEIC antes de cruzar la frontera de estabilidad. De esta manera, es posible utilizar esta superficie equipotencial para estimar la estabilidad de un sistema aún cuando no esté contenida por completo en la región de estabilidad (fig. 2.15). Esto da origen al método directo tipo Lyapunov conocido en general como el *Método del Punto de Equilibrio Controlador o Relevante*.

La utilización del PEIC para estimar la estabilidad de un sistema proporciona resultados menos conservadores que los obtenidos con el del PEI más cercano. Esta estimación es menos conservadora debido a que la superficie equipotencial que pasa por el PEIC aproxima la sección de la frontera de estabilidad que es relevante de acuerdo a la trayectoria del sistema perturbado.

Al aplicar este método se debe tener el cuidado de determinar correctamente el PEIC. Cuando no se determina adecuadamente el PEIC se pueden presentar los siguientes problemas:

1. Si el PEI designado como PEIC ( $PEI^*$ ) tiene una función de energía menor que el PEIC verdadero, entonces la estimación de la estabilidad del sistema es más conservadora que la que se obtendría con el PEIC verdadero. Esto se debe a que la superficie equipotencial construida con el  $PEI^*$  está contenida en la cerradura del conjunto de puntos cuya frontera es la superficie equipotencial que pasa por el PEIC verdadero.
2. Si el PEI designado como PEIC ( $PEI^*$ ) tiene un valor de la función de energía mayor que el PEIC verdadero, entonces la estimación de la estabilidad del sistema es sobrestimada. Esto se debe a que la trayectoria del sistema perturbado cruzará la variedad estable del PEIC verdadero antes de cruzar la superficie equipotencial que pasa por el  $PEI^*$ .

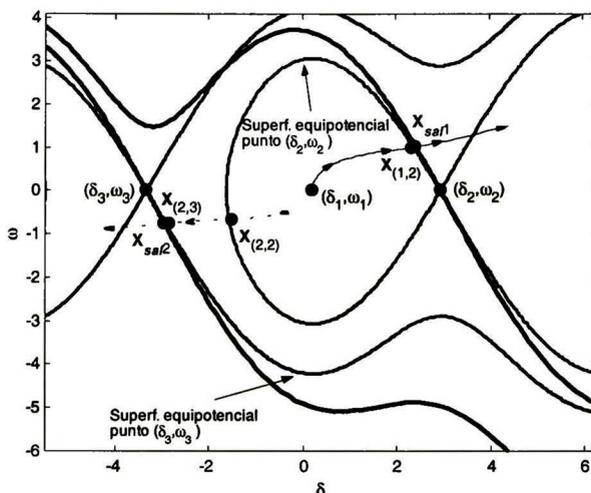


Fig. 2.16. Uso de diferentes PEI como PEIC (sistema máquina síncrona – bus infinito)

Estos problemas se ejemplifican en el sistema máquina síncrona – bus infinito con las trayectorias del sistema perturbado mostradas en la figura 2.14. En el caso de la perturbación 1, como ya se indicó anteriormente, el PEIC es el punto  $(\delta_2, \omega_2)$ . Si se elige erróneamente al PEIC con el punto  $(\delta_3, \omega_3)$ , entonces la trayectoria de falla nunca cruza la superficie equipotencial que pasa por el punto  $(\delta_3, \omega_3)$ . Esto indica que de acuerdo con este PEI el sistema es estable para todo  $t_i$ . Evidentemente esto es falso pues la trayectoria del sistema perturbado si cruza la frontera de estabilidad del PEE  $(\delta_1, \omega_1)$  en el punto  $X_{sal1}$ . En la figura 2.16 se aprecia que la trayectoria del sistema perturbado 1 cruza la superficie equipotencial de su PEIC en el punto  $X_{(1,2)}$  que es un punto muy cercano al punto  $X_{sal1}$ .

En el caso de la perturbación 2, el PEIC es el punto  $(\delta_3, \omega_3)$ . Si se elige al punto  $(\delta_2, \omega_2)$  como el PEIC, entonces la trayectoria del sistema perturbado cruza la superficie equipotencial que pasa por el punto  $(\delta_2, \omega_2)$  antes de cruzar la superficie equipotencial definida por el punto  $(\delta_3, \omega_3)$ . De esta manera, si la perturbación es liberada en algún instante tal que la trayectoria del

sistema se encuentra entre los puntos  $\mathbf{X}_{(2,2)}$  y  $\mathbf{X}_{(2,3)}$  esto es, los puntos en los que la trayectoria cruza las superficies equipotenciales que pasan por los puntos  $(\delta_2, \omega_2)$  y  $(\delta_3, \omega_3)$  respectivamente, el método del PEIC daría como resultado un sistema inestable. Cuando en realidad todos los puntos contenidos en este intervalo dan como resultado un sistema estable al elegir el verdadero PEIC. Finalmente, en la misma figura 2.16 se aprecia que el punto  $\mathbf{X}_{(2,3)}$  que es el punto donde la trayectoria del sistema perturbado 2 cruza la superficie equipotencial es un punto muy cercano al punto  $\mathbf{X}_{sal2}$  por donde abandona la región de estabilidad.

---

# Capítulo 3

## Modelado del sistema eléctrico de potencia

### 3.1 Modelo clásico de la máquina síncrona

La ecuación que gobierna el movimiento del rotor de una máquina síncrona se basa en un principio elemental de la dinámica que establece que el par de aceleración es el producto del momento de inercia del rotor por su aceleración angular. En el sistema de unidades MKS se puede escribir esta ecuación para el generador síncrono en la forma

$$J \frac{d^2\theta_m}{dt^2} = T_e - T_d = T_m - T_e - T_d \quad \text{N.m} \quad (3.1)$$

donde los símbolos tienen el siguiente significado:

$J$	Momento total de inercia de la masa del rotor, en $\text{kgs-m}^2$
$\theta_m$	Desplazamiento angular del rotor con respecto al eje estacionario, en radianes (rad)
$T$	Tiempo, en segundos (s)
$T_m$	Par de la flecha o mecánico suministrado por la fuente de energía mecánica, en N-m
$T_e$	Par electromagnético o eléctrico, en N-m
$T_a$	Par de aceleración total, en N-m
$T_d$	Par asíncrono (amortiguamiento equivalente), $T_d = 0$ si el rotor gira a la velocidad síncrona

Se considera que el par mecánico  $T_m$  es positivo para un generador síncrono. Esto significa que  $T_m$  es el par resultante de la flecha que tiende a acelerar el rotor en la dirección positiva de rotación. En la operación en estado estable del generador,  $T_m$  y  $T_e$  son iguales y positivos y el par de aceleración  $T_a$  es cero. En este caso no hay aceleración de la masa del rotor y la velocidad es constante e igual a la *velocidad síncrona*. La masa rotatoria que incluye la del rotor del generador y de la fuente de energía mecánica está en *sincronismo* con las otras máquinas del sistema de potencia. En este trabajo se considera que  $T_m$  es constante para cualquier condición de operación. El par eléctrico corresponde a la potencia neta en el entrehierro de la máquina, toma en cuenta la potencia de salida total del generador más las pérdidas  $|I|^2 R$  en el devanado del estator.

Como  $\theta_m$  se mide con respecto al eje de referencia estacionario del estator, se considera un valor absoluto del ángulo del rotor. En consecuencia, continuamente se incrementa con el tiempo aún a la velocidad síncrona constante. Como el interés principal es la velocidad del rotor relativa a la síncrona, es más conveniente medir la posición angular del rotor con respecto al eje de referencia que gira a la velocidad síncrona. Por lo tanto, se define.

$$\theta_m = \omega_{sm} t + \delta_m + \frac{\pi}{2} \quad (3.2)$$

donde  $\omega_{sm}$  es la velocidad síncrona de la máquina (radianes/segundo) y  $\delta_m$  es el desplazamiento angular del rotor (radianes), medido respecto del eje de referencia que gira a la velocidad síncrona. Las derivadas de la ecuación (3.2) con respecto al tiempo son

$$\frac{d\theta_m}{dt} = \omega_{sm} + \frac{d\delta_m}{dt} \quad (3.3)$$

y

$$\frac{d^2\theta_m}{dt^2} = \frac{d^2\delta_m}{dt^2} \quad (3.4)$$

De la ecuación (3.3) observamos que la velocidad angular del rotor  $\omega_m = d\theta_m/dt$ , es constante e igual a la velocidad síncrona sólo cuando  $d\delta_m/dt$  es cero. Por lo tanto,  $d\delta_m/dt$  representa la desviación de la velocidad del rotor con respecto de la velocidad síncrona.

Al sustituir la ecuación (3.4) en la ecuación (3.1), se obtiene

$$J \frac{d^2\delta_m}{dt^2} = T_a - T_d = T_m - T_e - T_d \quad \text{N.m} \quad (3.5)$$

De la dinámica elemental, la potencia es igual al producto del par por la velocidad angular, así, al multiplicar (3.5) por  $\omega_m$  se obtiene

$$J\omega_m \frac{d^2\delta_m}{dt^2} = P_a - P_d = P_m - P_e - P_d \quad \text{W} \quad (3.6)$$

donde

$P_m$	Potencia mecánica de entrada en la flecha
$P_e$	Potencia eléctrica en el entrehierro (potencia transformada)
$P_a$	Potencia de aceleración (potencia de desbalance)
$P_d$	Potencia de amortiguamiento equivalente, $P_d = 0$ si el rotor gira a la velocidad síncrona

Por lo general se desprecian las pérdidas viscosas y las pérdidas  $|I|^2 R$  del estator. El coeficiente  $J\omega_m$  es el momento angular del rotor, a la velocidad síncrona  $\omega_{sm}$  este coeficiente se denomina con  $M$  y se le llama *momento de inercia* de la máquina. Por seguridad, la velocidad de la máquina síncrona se mantiene cercana a la velocidad síncrona, por lo que con buena aproximación se puede escribir la ecuación (3.6) como

$$M \frac{d^2\delta_m}{dt^2} = P_a - P_d = P_m - P_e - P_d \quad \text{W} \quad (3.7)$$

Frecuentemente, en los datos de las máquinas suministrados por el fabricante, se especifica otra constante que se relaciona con la inercia. Ésta es llamada *constante de inercia H* y se define por

$$H = \frac{\text{energía cinética almacenada en megajoules a la velocidad síncrona}}{\text{potencia de la máquina en MVA}}$$

esto es,

$$H = \frac{\frac{1}{2} J \omega_{sm}^2}{S_{máq}} = \frac{\frac{1}{2} M \omega_{sm}}{S_{máq}} \quad (3.8)$$

donde  $S_{m\acute{a}q}$  es la potencia nominal de la máquina en megavoltamperes. Al despejar  $M$  en la ecuación (3.8) se obtiene

$$M = \frac{2H}{\omega_{sm}} S_{m\acute{a}q} \quad \text{MJ/radianes mecánicos} \quad (3.9)$$

y si se sustituye  $M$  en la ecuación (3.7), se encuentra

$$\frac{2H}{\omega_{sm}} \frac{d^2\delta_m}{dt^2} = \frac{P_a - P_d}{S_{m\acute{a}q}} = \frac{P_m - P_e - P_d}{S_{m\acute{a}q}} \quad (3.10)$$

debido a que  $\delta_m$  se expresa en radianes mecánicos y  $\omega_{sm}$  en radianes mecánicos por segundo, es posible escribir la ecuación (3.10) como

$$\frac{2H}{\omega_s} \frac{d^2\delta}{dt^2} = \hat{P}_a - \hat{P}_d = \hat{P}_m - \hat{P}_e - \hat{P}_d \quad \text{por unidad} \quad (3.11)$$

$\delta$  y  $\omega_s$  se pueden especificar en grados o radianes.  $\hat{P}_a$ ,  $\hat{P}_m$ ,  $\hat{P}_e$  y  $\hat{P}_d$  están en por unidad.

La potencia asíncrona o de amortiguamiento  $\hat{P}_d$  está dada por

$$\hat{P}_d = \frac{D'\omega_s}{S_{m\acute{a}q}} (\omega - \omega_s) \quad (3.12)$$

donde  $D'$  es el coeficiente de amortiguamiento asíncrono. Entonces, la ecuación de oscilación de la máquina síncrona es

$$\frac{2H}{\omega_s} \frac{d^2\delta}{dt^2} = \hat{P}_m - \hat{P}_e - \frac{D'\omega_s}{S_{m\acute{a}q}} (\omega - \omega_s) \quad \text{por unidad} \quad (3.13)$$

siendo  $\omega = d\delta/dt$ , se puede escribir la ecuación diferencial de segundo orden (3.13) por dos ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma

$$\frac{2H}{\omega_s} \frac{d\omega}{dt} = \hat{P}_m - \hat{P}_e - \frac{D'\omega_s}{S_{m\acute{a}q}} (\omega - \omega_s) \quad (3.14)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \omega - \omega_s \quad (3.15)$$

Es costumbre el uso de cantidades en por unidad para la velocidad de la máquina síncrona. Para esto se toma como velocidad base a la velocidad síncrona  $\omega_s$ . Entonces las ecuaciones (3.14) y (3.15) se transforman en

$$2H \frac{d\hat{\omega}}{dt} = \hat{P}_m - \hat{P}_e - D(\hat{\omega} - 1) \quad (3.16)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = (\hat{\omega} - 1)\omega_s \quad (3.17)$$

donde  $\hat{\omega} = \omega/\omega_s$  es la velocidad del rotor en por unidad y  $D = \omega_s^2 D' / S_{\text{máq}}$  es el coeficiente de amortiguamiento asíncrono equivalente.

El sistema de ecuaciones (3.16), (3.17) representa el modelo clásico del comportamiento electromecánico de una máquina síncrona conectada a un bus infinito. El término  $\hat{P}_e$  es la potencia eléctrica que entrega a la carga en el bus infinito a través de la red eléctrica que los une.

### 3.2 Modelo clásico de un sistema multi-máquinas.

En esta tesis el generador se representa por el modelo clásico. En donde se asumen las siguientes consideraciones:

1. La potencia mecánica de entrada en cada máquina permanece constante durante todo el periodo de cálculo  $P_m(t) = \text{constante}$ .
2. Cada máquina se representa por una reactancia transitoria en serie con un voltaje transitorio constante (voltaje interno  $E'(t) = E'_q(t) = \text{constante}$ ).
3. El ángulo mecánico del rotor de cada una de las máquinas coincide con el ángulo de fase del voltaje interno transitorio.
4. Se desprecian las saliencias  $X_d = X_q = X'$
5. Se desprecia la resistencia en el estator  $R_s = 0$ .

El modelo completo de un generador es el siguiente:

#### Equilibrio eléctrico

$$\mathbf{E}_i = E'_i \angle \delta_i = \mathbf{V}_i + jX'_d \mathbf{I}_i \quad (3.18)$$

$\mathbf{V}_i$  es el voltaje nodal complejo en las terminales de la máquina, medido respecto de la referencia del estudio de flujos de cargas.  $\mathbf{I}$  es la corriente neta que aporta la máquina al sistema.

#### Equilibrio mecánico (dinámica del generador)

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_i &= (\hat{\omega}_i - 1)\omega_s \\ 2H_i \dot{\hat{\omega}}_m &= \hat{P}_{m_i} - \hat{P}_{e_i} - D_i(\hat{\omega}_i - 1) \end{aligned}$$

La potencia eléctrica es dada por

$$P_{ei} = \text{Re}\{\mathbf{E}'_i \mathbf{I}_i^*\}$$

para el caso de máquina – bus infinito, la potencia es

$$P_{ei} = \frac{E'_i V_i}{X'} \text{sen } \delta$$

La red eléctrica se representa con impedancias constantes a la frecuencia fundamental. En forma general se modela por la matriz de admitancias nodal.

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & \cdots & Y_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ Y_{N1} & & Y_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix}$$

N es el número de buses del sistema eléctrico

Las cargas se representan como impedancias constantes: la admitancia equivalente se determina de las condiciones de prefalla.

$$Y_L = \frac{P_L - jQ_L}{|V_L|^2} \quad (3.19)$$

donde  $P_L + jQ_L$  es la carga y  $|V_L|$  es la magnitud del voltaje nodal en el nodo de carga.

El modelo general del sistema de potencia se formula como se indica a continuación:

Las admitancias equivalentes de las cargas se incorporan a la admitancia nodal, sumando la admitancia equivalente al valor propio de la admitancia nodal en donde esta conectada la carga. Se agrega cada una de las maquinas síncronas a la red eléctrica. Esto es, se tiene una red aumentada con n nodos adicionales, siendo n el número de máquinas síncronas en el sistema. En la figura 3.1 se muestra el diagrama esquemático utilizado del sistema eléctrico

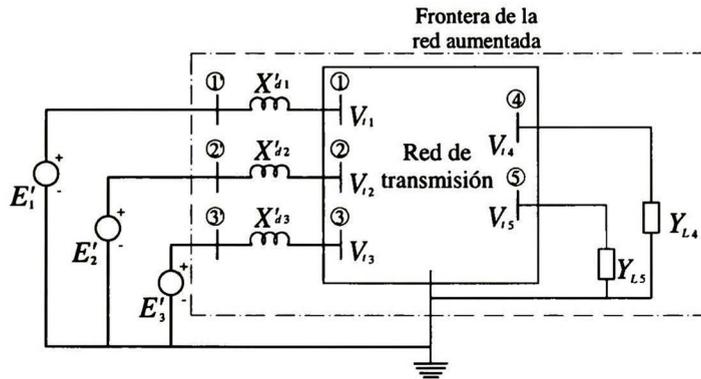


Fig. 3.1. Red aumentada de un sistema de potencia

El modelo completo del sistema es de dimensión  $(n + N) \times (n + N)$  se reduce eliminando todos los nodos diferentes a los nodos de generación, con la reducción de Kron [9]. El sistema equivalente es de dimensión  $n \times n$  y se le conoce como red equivalente reducida a los nodos internos. De esta forma se evita la solución del sistema de ecuaciones algebraicas de la red y la potencia eléctrica de la máquina  $i$ -ésima está dada por

$$\hat{P}_{ei} = (E_i')^2 G_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n E_i' E_j' |Y_{ij}| \cos(\theta_{ij} - \delta_i + \delta_j) \quad (3.20)$$

donde  $G_{ii}$  es la componente real del elemento  $Y_{ii}$  de la matriz de admitancias de la red equivalente,  $|Y_{ij}|$  y  $\theta_{ij}$  son el valor absoluto y el ángulo de fase del elemento  $Y_{ij}$  de la matriz de admitancias correspondiente.

Lo que da como resultado un sistema de ecuaciones diferenciales no lineal representado por

$$\dot{\delta}_i = (\hat{\omega}_i - 1)\omega_s \quad i = 1 \dots n \quad (3.21)$$

$$2H_i \dot{\hat{\omega}}_{in} = \hat{P}_{mi} - \hat{P}_{ei} - D_i(\hat{\omega}_i - 1) \quad i = 1 \dots n \quad (3.22)$$

El sistema de ecuaciones (3.21), (3.22) representa la dinámica de las oscilaciones electromecánicas entre los generadores síncronos del sistema. Las posiciones y velocidades angulares de cada máquina  $\delta_i$  y  $\omega_i$  están medidas respecto a una referencia que gira a velocidad síncrona.

### 3.2.1 Modelo clásico en el marco de referencia de una máquina síncrona

En el estudio de la estabilidad transitoria de un sistema eléctrico de potencia es útil utilizar como referencia a una de las máquinas síncronas del sistema. Esto se debe a que las posiciones y velocidades angulares de cada máquina síncrona no son linealmente independientes entre sí. Para obtener las expresiones que definen el comportamiento de las máquinas cuando se utiliza una máquina síncrona como referencia se parte del sistema de ecuaciones (3.21), (3.22). Se definen nuevas coordenadas para la posición y velocidad angular respecto de la máquina  $n$ -ésima.

$$\delta_{in} = \delta_i - \delta_n \quad (3.23)$$

$$\hat{\omega}_{in} = \hat{\omega}_i - \hat{\omega}_n \quad (3.24)$$

además

$$\dot{\delta}_{in} = \dot{\delta}_i - \dot{\delta}_n \quad (3.25)$$

$$\dot{\hat{\omega}}_{in} = \dot{\hat{\omega}}_i - \dot{\hat{\omega}}_n \quad (3.26)$$

Substituyendo las ecuaciones (3.21) y (3.22) en las ecuaciones (3.25) y (3.26) se obtienen las ecuaciones que rigen el comportamiento dinámico del sistema en términos de las nuevas variables de estado. Para los ángulos relativos se tiene

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_{in} &= (\hat{\omega}_i - 1)\omega_s - (\hat{\omega}_n - 1)\omega_s = (\hat{\omega}_i - \hat{\omega}_n)\omega_s \\ \dot{\delta}_{in} &= \hat{\omega}_{in}\omega_s \quad i = 1 \dots n-1 \end{aligned} \quad (3.27)$$

La ecuación (3.27) establece la dinámica de los ángulos relativos en función de las nuevas variables de estado. Las velocidades angulares relativas se obtienen al sustituir la ecuación (3.22) en la (3.26)

$$\dot{\hat{\omega}}_{in} = \frac{1}{2H_i} [\hat{P}_{mi} - \hat{P}_{ei} - D_i(\hat{\omega}_i - 1)] - \frac{1}{2H_n} [\hat{P}_{mn} - \hat{P}_{en} - D_n(\hat{\omega}_n - 1)]$$

Si asumimos que el sistema tiene amortiguamiento uniforme, esto es  $D_i/2H_i = \lambda$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ , resulta

$$\dot{\hat{\omega}}_{in} = \frac{1}{2H_i} [\hat{P}_{mi} - \hat{P}_{ei}] - \frac{1}{2H_n} [\hat{P}_{mn} - \hat{P}_{en}] - \lambda \hat{\omega}_{in} \quad i = 1 \dots n-1 \quad (3.28)$$

El conjunto de ecuaciones (3.27), (3.28) modelan el comportamiento del sistema multi-máquinas tomando una máquina síncrona como referencia. La dimensión de este sistema es 2 unidades menor que la del sistema (3.21), (3.22). Las ecuaciones correspondientes a la máquina de referencia son idénticas a cero.

La potencia eléctrica en términos de las nuevas variables es

$$\hat{P}_{ei} = (E'_i)^2 G_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n E'_i E'_j |Y_{ij}| \cos(\theta_{ij} - (\delta_m + \delta_n) + (\delta_{jn} + \delta_n))$$

o

$$\hat{P}_{ei} = (E'_i)^2 G_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n E'_i E'_j |Y_{ij}| \cos(\theta_{ij} - \delta_m + \delta_{jn}) \quad (3.29)$$

### 3.2.2 Modelo clásico en el marco de referencia del centro de inercia (COI)

El conjunto de ecuaciones (3.27), (3.28) está expresado en términos de los ángulos de los rotores y las desviaciones de la velocidad con respecto al rotor de una de las máquinas síncronas del sistema. Con la formulación de las ecuaciones de estado con respecto al centro de inercia (COI), propuesto primero por Tavora y Smith [10], se obtiene expresiones más sencillas, compactas y simétricas.

El centro de inercia se interpreta como el movimiento promedio del sistema total respecto de su centro de oscilación equivalente. El COI está definido como

$$\delta_0 = \frac{1}{H_T} \sum_{i=1}^n H_i \delta_i \quad (3.30)$$

donde

$$H_T = \sum_{i=1}^n H_i \quad (3.31)$$

Las derivadas primera y segunda respecto del tiempo del COI son

$$\dot{\delta}_0 = \frac{1}{H_T} \sum_{i=1}^n H_i \dot{\delta}_i \quad (3.32)$$

$$\ddot{\delta}_0 = \frac{1}{H_T} \sum_{i=1}^n H_i \ddot{\delta}_i \quad (3.33)$$

Si se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden a partir de las ecuaciones (3.21) y (3.22) y se substituye en la ecuación (3.33) se obtiene

$$\ddot{\delta}_0 = \frac{\omega_s}{2H_T} \sum_{i=1}^n (\hat{P}_{mi} - \hat{P}_{ei} - D_i (\omega_i - 1)) \quad (3.34)$$

esta ecuación se puede escribir por dos ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma

$$\dot{\delta}_0 = (\hat{\omega}_0 - 1) \omega_s \quad (3.35)$$

$$2H_T \dot{\omega}_0 = P_{COI} + D_T - \sum_{i=1}^n D_i \hat{\omega}_i \quad (3.36)$$

donde

$$P_{COI} = \sum_{i=1}^n (\hat{P}_{mi} - \hat{P}_{ei}) \quad (3.37)$$

y

$$D_T = \sum_{i=1}^n D_i \quad (3.38)$$

Definiendo nuevas coordenadas para las velocidades y los ángulos de los rotores respecto del COI se tiene

$$\phi_i = \delta_i - \delta_0 \quad i = 1 \dots n \quad (3.39)$$

$$\tilde{\omega}_i = \hat{\omega}_i - \omega_0 \quad i = 1 \dots n \quad (3.40)$$

$$\dot{\phi}_i = \dot{\delta}_i - \dot{\delta}_0 \quad i = 1 \dots n \quad (3.41)$$

$$\dot{\tilde{\omega}}_i = \dot{\hat{\omega}}_i - \dot{\omega}_0 \quad i = 1 \dots n \quad (3.42)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.21), (3.22), (3.39) y (3.40) en las ecuaciones (3.41) y (3.42) se obtiene el sistema de ecuaciones que define el comportamiento del sistema en el marco de referencia del COI, este sistema de ecuaciones está dado por

$$\dot{\phi}_i = \tilde{\omega}_i \omega_s \quad i = 1 \dots n \quad (3.43)$$

$$2H_i \dot{\tilde{\omega}}_i = \hat{P}_{mi} - \hat{P}_{ei} - D_i (\tilde{\omega}_i + \omega_0 - 1) - \frac{H_i}{H_T} \left[ P_{COI} - D_T (\omega_0 - 1) - \sum_{j=1}^n D_j \tilde{\omega}_j \right] \quad i = 1 \dots n \quad (3.44)$$

donde

$$\hat{P}_{ei} = (E'_i)^2 G_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n E'_i E'_j |Y_{ij}| \cos(\theta_{ij} - \phi_i + \phi_j) \quad (3.45)$$

Las nuevas coordenadas medidas respecto del COI cumplen con las siguientes restricciones

$$\sum_{i=1}^n H_i \phi_i = 0 \quad (3.46)$$

$$\sum_{i=1}^n H_i \tilde{\omega}_i = 0 \quad (3.47)$$

Se hace notar que las  $2n$  ecuaciones (3.43), (3.44) no son linealmente independientes, como se observa de las ecuaciones (3.46) y (3.47). Sin embargo, es posible plantear un sistema de  $2(n-1)$  ecuaciones independientes ya que las variables de estado de la máquina  $n$  están dadas por

$$\phi_n = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{H_i}{H_n} \phi_i \quad (3.48)$$

$$\tilde{\omega}_n = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{H_i}{H_n} \tilde{\omega}_i \quad (3.49)$$

Es claro que los sistemas de ecuaciones (3.21), (3.22), (3.27), (3.28) y (3.43), (3.44) corresponden a tres descripciones equivalentes de la dinámica de un sistema de potencia. La única diferencia formal entre estos consiste en la referencia seleccionada para medir las variables de estado en cada uno de ellos.

### 3.3 Función de energía de un sistema eléctrico de potencia

En esta sección se desarrolla una función de energía para un sistema eléctrico de potencia multi-máquinas. Esta función se desarrolla utilizando la formulación del sistema en el marco del centro de inercia, ecuaciones (3.43), (3.45). Se utiliza esta formulación debido a que presenta ventajas en el análisis de estabilidad transitoria y porque además la estructura de las ecuaciones simplifica el desarrollo de la función de energía. Una vez obtenida esta función de energía se obtendrá una función equivalente expresada en términos de las variables de estado del sistema respecto de una máquina síncrona arbitraria.

La primera integral o integral de energía de los sistemas de potencia fue inicialmente considerada por Magnusson [11] y después por Aylett [12] y Gorev [13] para la estimación de la estabilidad transitoria. Para explicar el término de primera integral, en general, considere el sistema autónomo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (3.50)$$

Una primera integral del sistema (3.50) es una función diferenciable  $E(\mathbf{x})$  definida en un dominio  $\Omega$  del espacio de estados tal que cuando  $\mathbf{x}(t)$  es una solución de (3.50), si se substituye ésta solución en la función  $E(\mathbf{x})$  entonces ésta es constante para sistemas conservativos. De tal manera que su derivada respecto del tiempo a lo largo de la solución, dada por

$$\frac{dE(\mathbf{x})}{dt} = \left[ \frac{\partial E}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \cdot \dot{\mathbf{x}} \quad (3.51)$$

es idéntica a cero. Para sistemas conservativos la existencia de una primera integral está asegurada. Más aún, una condición suficiente y necesaria para que exista una primera integral para el sistema (3.50) es

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_i} = 0 \quad (3.52)$$

La restricción en (3.52) tiene como consecuencia la necesidad de despreciar los términos de amortiguamiento en las ecuaciones que definen el comportamiento del sistema, esto es, consideraremos que el sistema de potencia es conservativo. De esta manera, el sistema para el que se obtendrá la función de energía está dado por

$$\dot{\phi}_i = \tilde{\omega}_i \omega_s \quad i = 1 \dots n \quad (3.53)$$

$$2H_i \dot{\tilde{\omega}}_i = \hat{P}_{mi} - \hat{P}_{ei} - \frac{H_i}{H_T} P_{COI} \quad i = 1 \dots n \quad (3.54)$$

donde la potencia eléctrica de cada máquina está dada por (3.45). Este sistema evidentemente cumple con la restricción (3.52) lo que asegura la existencia de la primera integral del sistema.

A fin de obtener la primera integral del sistema de potencia en el marco de referencia del COI se considerará al sistema como un conjunto de  $n$  sistemas de segundo orden acoplados [3], para esto dividimos la ecuación (3.53) entre la (3.54), lo que resulta en:

$$\frac{d\phi_i}{d\tilde{\omega}_i} = \frac{2H_i \tilde{\omega}_i \omega_s}{\hat{P}_{mi} - \hat{P}_{ei} - \frac{H_i}{H_T} P_{COI}} \quad (3.55)$$

o, equivalentemente

$$2H_i \tilde{\omega}_i \omega_s d\tilde{\omega}_i = \left( \hat{P}_{mi} - \hat{P}_{ei} - \frac{H_i}{H_T} P_{COI} \right) d\phi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.56)$$

Integrando (3.56) entre el punto de equilibrio estable del sistema de posfalla  $(\phi_i^s, 0)$  y  $(\phi_i, \tilde{\omega}_i)$  se obtiene la primera integral para cada máquina:

$$E_i(\phi, \tilde{\omega}) = \int_0^{\tilde{\omega}_i} 2H_i \tilde{\omega}_i \omega_s d\tilde{\omega}_i - \int_{\phi_i^s}^{\phi_i} \left( \hat{P}_{mi} - \hat{P}_{ei} - \frac{H_i}{H_T} P_{COI} \right) d\phi_i \quad (3.57)$$

$$E_i(\phi, \tilde{\omega}) = H_i \omega_s \tilde{\omega}_i^2 - \int_{\phi_i^s}^{\phi_i} \left( \hat{P}_{mi} - (E_i')^2 G_{ii} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n E_i' E_j' |Y_{ij}| \cos(\theta_{ij} + \phi_i + \phi_j) - \frac{H_i}{H_T} P_{COI} \right) d\phi_i \quad (3.58)$$

$$E_i(\phi, \tilde{\omega}) = H_i \omega_s \tilde{\omega}_i^2 - P_i(\phi_i - \phi_i^s) + \int_{\phi_i^s}^{\phi_i} \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n E_i' E_j' |Y_{ij}| \cos(\theta_{ij} + \phi_i + \phi_j) \right) d\phi_i + \frac{H_i}{H_T} \int_{\phi_i^s}^{\phi_i} P_{COI} d\phi_i \quad (3.59)$$

donde  $P_i = \hat{P}_{mi} - (E_i')^2 G_{ii}$ .

La sumatoria involucrada en la expresión anterior se puede escribir como:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n E_i' E_j' |Y_{ij}| \cos(\theta_{ij} - \phi_i + \phi_j) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n C_{ij} \text{sen}(\phi_i - \phi_j) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n D_{ij} \cos(\phi_i - \phi_j) \quad (3.60)$$

siendo  $C_{ij} = E_i' E_j' \text{Im}(Y_{ij})$  y  $D_{ij} = E_i' E_j' \text{Re}(Y_{ij})$ .

Sustituyendo (3.60) en (3.59) se tiene

$$E_i(\phi, \tilde{\omega}) = H_i \omega_s \tilde{\omega}_i^2 - P_i(\phi_i - \phi_i^s) + \int_{\phi_i^s}^{\phi_i} \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n C_{ij} \sin(\phi_i - \phi_j) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n D_{ij} \cos(\phi_i - \phi_j) \right) d\phi_i + \frac{H_i}{H_T} \int_{\phi_i^s}^{\phi_i} P_{COI} d\phi_i \quad (3.61)$$

La expresión (61) fue llamada por Michel et. al. [14] como *la función de energía individual de cada máquina*. Para encontrar la primera integral del sistema multi-máquinas se debe sumar cada una de las funciones individuales de éste. Esto es

$$E(\phi, \tilde{\omega}) = \sum_{i=1}^n E_i(\phi, \tilde{\omega})$$

$$E(\phi, \tilde{\omega}) = \sum_{i=1}^n H_i \omega_s \tilde{\omega}_i^2 - \sum_{i=1}^n P_i(\phi_i - \phi_i^s) + \sum_{i=1}^n \int_{\phi_i^s}^{\phi_i} \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n C_{ij} \sin(\phi_i - \phi_j) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n D_{ij} \cos(\phi_i - \phi_j) \right) d\phi_i$$

$$+ \sum_{i=1}^n \frac{H_i}{H_T} \int_{\phi_i^s}^{\phi_i} P_{COI} d\phi_i \quad (3.62)$$

En virtud de la restricción dada por la ecuación (3.46) el término que incluye  $P_{COI}$  es idéntico a cero. Aprovechando el hecho de que  $C_{ij} = C_{ji}$  y  $D_{ij} = D_{ji}$  la expresión (3.62) resulta en

$$E(\phi, \tilde{\omega}) = E_c(\tilde{\omega}) + E_{p1}(\phi) + E_{p2}(\phi) + E_{p3}(\phi) \quad (3.63)$$

donde

$$E_c(\tilde{\omega}) \quad \text{Función de energía cinética}$$

$$E_{p1}(\phi), E_{p2}(\phi), E_{p3}(\phi) \quad \text{Funciones de energía potencial}$$

$$E_c(\tilde{\omega}) = \omega_s \sum_{i=1}^n H_i \tilde{\omega}_i^2 \quad (3.64)$$

$$E_{p1}(\phi) = - \sum_{i=1}^n P_i(\phi_i - \phi_i^s) \quad (3.65)$$

$$E_{p2}(\phi) = - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n C_{ij} (\cos(\phi_i - \phi_j) - \cos(\phi_i^s - \phi_j^s)) \quad (3.66)$$

$$E_{p3}(\phi) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \int_{\phi_i^s + \phi_j^s}^{\phi_i + \phi_j} D_{ij} \cos(\phi_i - \phi_j) d(\phi_i + \phi_j) \quad (3.67)$$

La ecuación (3.63) es conocida en la literatura como la *función de energía transitoria (TEF)*. Las funciones  $E_{c1}$ ,  $E_{p1}$ ,  $E_{p2}$  y  $E_{p3}$  se han asociado con el cambio de energía cinética y de posición de los rotores de todos los generadores respecto al COI, al cambio de energía magnética almacenada en las ramas  $ij$ , y al cambio de energía disipada en las ramas  $ij$ , respectivamente [15,16].

### 3.3.1 Aproximación del término dependiente de la trayectoria $E_{p3}$

Claramente, el término  $E_{p3}$  es un término que depende de la trayectoria de movimiento del sistema entre los puntos  $(\phi^s, 0)$  y  $(\phi, \omega)$ . Uyemura et. al. [17] desarrollaron una aproximación de este término asumiendo una trayectoria lineal. Debido a la experiencia ganada por numerosas simulaciones hechas por diversos investigadores se ha llegado a la conclusión de que para el análisis de la estabilidad de primera oscilación esta aproximación resulta suficientemente precisa. Lo anterior permite la inclusión de las conductancias de transferencia en el análisis de estabilidad transitoria en los métodos directos tipo Lyapunov.

Si se supone una trayectoria lineal entre los puntos  $(\phi^s, 0)$  y  $(\phi^*, \omega^*)$ , cada una de las coordenadas  $(\phi_i)$  se puede expresar en forma paramétrica como

$$\phi_i = \phi_i^s + (\phi_i^* - \phi_i^s)t \quad 0 \leq t \leq 1 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.68)$$

A partir de la ecuación (3.68) se puede obtener una expresión para las diferenciales  $d\phi_i$  y  $d\phi_j$  y entonces se encuentra que

$$d(\phi_i + \phi_j) = [(\phi_i^* + \phi_j^*) - (\phi_i^s + \phi_j^s)] dt \quad (3.69)$$

$$d(\phi_i - \phi_j) = [(\phi_i^* - \phi_j^*) - (\phi_i^s - \phi_j^s)] dt \quad (3.70)$$

de donde se puede finalmente obtener una expresión para  $d(\phi_i + \phi_j)$  en términos de  $d(\phi_i - \phi_j)$  que puede ser sustituida en (3.67) para de esta manera obtener la integral

$$E_{p3}(\phi) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \int_{(\phi_i^s - \phi_j^s)}^{(\phi_i - \phi_j)} D_{ij} \cos(\phi_i - \phi_j) \frac{(\phi_i^* + \phi_j^*) - (\phi_i^s + \phi_j^s)}{(\phi_i^* - \phi_j^*) - (\phi_i^s - \phi_j^s)} d(\phi_i - \phi_j) \quad (3.71)$$

que tiene como solución

$$E_{p3}(\phi) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n D_{ij} \frac{(\phi_i + \phi_j) - (\phi_i^s + \phi_j^s)}{(\phi_i - \phi_j) - (\phi_i^s - \phi_j^s)} (\text{sen}(\phi_i - \phi_j) - \text{sen}(\phi_i^s - \phi_j^s)) \quad (3.72)$$

donde se han sustituido los términos  $\phi^*$  por  $\phi$ . Estos son los puntos hasta donde se desea integrar.

### 3.3.2 Una función de Lyapunov para el SEP

Se ha demostrado [18] que cuando se desprecian las conductancias de transferencia  $G_{ij}$ , esto es, cuando  $E_{p3} = 0$ , la función de energía (3.63) es una función de Lyapunov. Pavella et. al. han mostrado que la función es dada por

$$V(\phi, \tilde{\omega}) = E_c(\tilde{\omega}) + E_{p1}(\phi) + E_{p2}(\phi) \quad (3.73)$$

donde  $E_c$ ,  $E_{p1}$  y  $E_{p2}$  están dadas por (3.64), (3.65) y (3.66) respectivamente, y tiene las propiedades:

- (i)  $V(\delta^s, 0) = 0$
- (ii)  $V(\delta, \tilde{\omega})$  es definida positiva
- (iii)  $\dot{V} \equiv 0$  en cualquier punto diferente a un punto de equilibrio

cuando se evalúa en el sistema de ecuaciones (3.53), (3.54) la potencia eléctrica está dada por

$$\hat{P}_{ei} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n C_{ij} \sin(\phi_i - \phi_j) \quad (3.74)$$

Más aún, si se considera que el sistema de ecuaciones (3.43), (3.44) tiene amortiguamiento uniforme, entonces la función (3.73) sigue siendo una función de Lyapunov pues la condición (iii) es sustituida por

$$(iv) \quad \dot{V} = -\lambda \sum_{i=1}^n \tilde{\omega}_i^2$$

La forma semidefinida negativa de la derivada de  $V$  garantiza que el PEE del sistema de potencia sea asintóticamente estable.

### 3.3.3 La función de energía del SEP en el marco de referencia de una máquina síncrona

La formulación del sistema eléctrico de potencia (SEP) en el marco de referencia de una máquina síncrona (3.27), (3.28) no resulta muy apropiada para obtener la primera integral del mismo. Esto es debido básicamente a la aparición de algunos términos dependientes de la trayectoria del sistema (términos que dependen de las conductancias de transferencia). Sin embargo, es posible obtener una expresión derivada de la función de energía encontrada cuando se formulan las ecuaciones del sistema respecto del COI (3.63).

Cuando se desprecian las conductancias de transferencia, la función de energía es una función de Lyapunov [16,18]. La expresión está dada por

$$V(\delta_n, \hat{\omega}_n) = E_c(\hat{\omega}_n) + E_{p1}(\delta_n) + E_{p2}(\delta_n) \quad (3.75)$$

donde

$$E_c(\hat{\omega}_n) = \frac{\omega_s}{H_T} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n H_i H_j (\hat{\omega}_{in} - \hat{\omega}_{jn})^2 \quad (3.76)$$

$$E_{p1}(\delta_n) = -\frac{1}{H_T} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n [(\delta_{in} - \delta_{jn}) - (\delta_{in}^s - \delta_{jn}^s)] [P_i H_j - P_j H_i] \quad (3.77)$$

$$E_{p2}(\delta_n) = -\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n C_{ij} [\cos(\delta_{in} - \delta_{jn}) - \cos(\delta_{in}^s - \delta_{jn}^s)] \quad (3.78)$$

Se puede demostrar que la función (3.75) es una función de Lyapunov del sistema (3.27), (3.28) cuando se desprecia el amortiguamiento o para amortiguamiento uniforme, siempre que se desprecien las conductancias de transferencia  $G_{ij}$  en la expresión (3.29) en la expresión de potencia eléctrica. Todos los términos de (3.75) se pueden obtener en una forma relativamente sencilla al sustituir las relaciones (3.39) y (3.40) en las ecuaciones (3.64) a (3.66)

Chiang et. al. han propuesto una aproximación numérica del término dependiente de las conductancias de transferencia [19]. Esta aproximación está basada en la aproximación lineal antes utilizada. Sin embargo, la expresión descrita en términos de coordenadas relativas a una

máquina síncrona no es equivalente al término correspondiente expresado en las coordenadas respecto del COI dado por la ecuación (3.72).

A continuación, se obtendrá una expresión en términos de las coordenadas relativas a una máquina síncrona a partir de la ecuación (3.72). El primer paso consiste en sustituir la relación (3.39) en la ecuación (3.72), para obtener una expresión en términos de las coordenadas relativas a un marco de referencia síncrono

$$E_{p3}(\delta) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n D_{ij} \frac{(\delta_i + \delta_j - 2\delta_0) - (\delta_i^s + \delta_j^s - 2\delta_0^s)}{(\delta_i - \delta_j) - (\delta_i^s - \delta_j^s)} (\text{sen}(\delta_i - \delta_j) - \text{sen}(\delta_i^s - \delta_j^s)) \quad (3.79)$$

donde  $\delta_i$  y  $\delta_0^s$  son los ángulos del centro de inercia en un instante determinado y en la condición de equilibrio estable, respectivamente y están dadas por la ecuación (3.30). Ahora, sustituyendo la ecuación (3.23), en la que se definen las coordenadas respecto de una máquina síncrona, se tiene

$$E_{p3}(\delta_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n D_{ij} \frac{(\delta_{in} + \delta_{jn} - 2(\delta_n - \delta_0)) - (\delta_{in}^s + \delta_{jn}^s - 2(\delta_n^s - \delta_0^s))}{(\delta_{in} - \delta_{jn}) - (\delta_{in}^s - \delta_{jn}^s)} (\text{sen}(\delta_{in} - \delta_{jn}) - \text{sen}(\delta_{in}^s - \delta_{jn}^s)) \quad (3.80)$$

Se puede demostrar que el ángulo de la máquina de referencia respecto del COI  $\phi_n$  es igual a

$$\phi_n = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{H_i}{H_T} \phi_{in} = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{H_i}{H_T} \delta_{in} \quad (3.81)$$

esto es

$$\phi_n = \delta_n - \delta_0 = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{H_i}{H_T} \delta_{in} \quad (3.82)$$

Si se sustituye la ecuación (3.82) en la ecuación (3.80) se tiene

$$E_{p3}(\delta_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n D_{ij} \frac{(\delta_{in} + \delta_{jn} - 2\phi_n) - (\delta_{in}^s + \delta_{jn}^s - 2\phi_n^s)}{(\delta_{in} - \delta_{jn}) - (\delta_{in}^s - \delta_{jn}^s)} (\text{sen}(\delta_{in} - \delta_{jn}) - \text{sen}(\delta_{in}^s - \delta_{jn}^s)) \quad (3.83)$$

Finalmente, la función de energía en el marco de referencia de una máquina síncrona está dada por

$$E(\delta_n, \hat{\omega}_n) = E_c(\hat{\omega}_n) + E_{p1}(\delta_n) + E_{p2}(\delta_n) + E_{p3}(\delta_n) \quad (3.84)$$

con  $E_c(\hat{\omega}_n)$ ,  $E_{p1}(\delta_n)$ ,  $E_{p2}(\delta_n)$  y  $E_{p3}(\delta_n)$  dadas por las ecuaciones (76), (77), (78) y (83) respectivamente.

### 3.4 Conclusiones

En este capítulo se han desarrollado los modelos de sistemas eléctricos de potencia utilizando tres sistemas de referencia diferentes: una referencia que gira a velocidad síncrona; una máquina síncrona del sistema; y el centro de inercia (COI) del sistema. Los dos últimos sistemas de

referencia son más apropiados para el estudio de estabilidad transitoria. El sistema de coordenadas utilizando el COI como referencia permite encontrar con relativa facilidad una función de energía y/o Lyapunov del sistema multi-máquinas. A partir de la función de energía obtenida en el marco de referencia del COI se ha desarrollado una función de energía en el marco de referencia de una máquina síncrona que incluye apropiadamente la aproximación del término dependiente de la trayectoria del sistema que se ha aproximado asumiendo una trayectoria de movimiento lineal.

Los modelos y funciones de energía desarrollados se utilizarán en capítulos posteriores para implementar diferentes métodos directos tipo Lyapunov con los que se estudiará la estabilidad transitoria de sistemas eléctricos de potencia multi-máquinas.

---

# Capítulo 4

## El método BCU

### 4.1 Introducción

Desde un punto de vista analítico, la aplicación de los métodos directos, en el análisis de estabilidad transitoria consiste esencialmente en determinar si la trayectoria de falla en el instante de liberación de la falla está o no dentro de la región de estabilidad del punto de equilibrio estable (PEE) del sistema de posfalla. De aquí que, en el análisis de estabilidad transitoria la importancia radica no en la estimación de toda la frontera de estabilidad del sistema de posfalla. El interés principal es la estimación de la parte relevante de la frontera de estabilidad hacia donde se dirige la trayectoria de falla.

Cuando se aplica el método del punto de equilibrio inestable más cercano (PEIMC) al análisis de estabilidad transitoria en sistemas eléctricos de potencia, se ha encontrado que este método ofrece resultados conservadores. De hecho, en el contexto del análisis de estabilidad transitoria, el método del PEIMC estima una frontera de estabilidad del sistema de posfalla que es independiente de la trayectoria de falla y está contenida totalmente en la región de estabilidad verdadera. Sin embargo esta característica ofrece resultados conservativos para una buena parte de las trayectorias de falla.

Una característica deseable de un método directo para al análisis de estabilidad transitoria es que pueda proporcionar la aproximación más exacta de la parte de la frontera de estabilidad hacia la que la trayectoria de falla se dirige, aún cuando pudiera hacer una mala estimación de las otras regiones de la frontera de estabilidad. Con este fin, el método del punto de equilibrio inestable controlador (PEIC) utiliza la superficie de energía constante que pasa por el PEIC para aproximar la región de la frontera de estabilidad hacia la que se dirige la trayectoria de falla. Si, cuando se libera la falla, la trayectoria no cruza la superficie de energía constante que pasa por el PEIC, entonces el sistema de posfalla será estable (esto es, la trayectoria de posfalla convergerá al PEE); en caso contrario, el sistema se considera inestable. Esta es la esencia del método del PEIC.

Desafortunadamente la determinación del PEIC en grandes sistemas eléctricos de potencia no es fácil. La dificultad se deriva en parte de las siguientes complejidades:

- El PEIC es un PEI particular que pertenece a un espacio de estados de gran dimensión.
- El PEIC es el primer PEI encontrado cuya variedad estable contiene al punto de salida de la trayectoria de falla.
- El cálculo del punto de salida verdadero es prácticamente imposible de obtener y lo que se obtiene es una aproximación que puede ser computacionalmente costosa.

Existe un consenso generalizado en el sentido de que el método directo más viable para el análisis de estabilidad transitoria en sistemas de potencia prácticos es el que usa el PEIC [3,6,16,20]. El éxito de este método depende fuertemente de la determinación del PEIC correcto, así como de la eficiencia computacional para encontrarlo. De ahí el gran interés actual en la

investigación de métodos confiables y eficientes computacionalmente para encontrar el PEIC en sistemas eléctricos de potencia.

## 4.2 El método BCU

Recientemente se ha desarrollado un método para calcular el PEIC [19,21,22]. Este método ha sido llamado BCU (boundary of stability region based controlling unstable equilibrium point method). También es conocido con otros nombres tales como el *método del punto de salida*, y el *método híbrido*.

La idea fundamental del método BCU se puede explicar con la siguiente descripción. Dado un modelo del sistema de potencia, el cual admite una función de energía: se obtiene un nuevo modelo de orden reducido. El modelo reducido se obtiene aprovechando la propiedad de los SEP en donde en los puntos de equilibrio la velocidad angular relativa es cero  $\omega = 0$  y entonces se obtiene un modelo reducido expresado solo en término de los desplazamientos angulares. En el modelo reducido se deben cumplir las siguientes condiciones:

### Condiciones estáticas:

- La posición de los puntos de equilibrio del sistema de orden reducido (sistema reducido) conservan la misma posición de los puntos de equilibrio del sistema original. Es decir,  $\hat{x}$  es un punto de equilibrio del sistema reducido si y solo si  $(\hat{x}, 0)$  es un punto de equilibrio del sistema original, donde  $0 \in R^m$ ,  $m$  es un entero positivo apropiado.
- Los puntos de equilibrio de cualquier tipo del sistema reducido son del mismo tipo que los del sistema original. Por ejemplo,  $x_s$  es un punto de equilibrio estable del sistema reducido si y solo si  $(x_s, 0)$  es un punto de equilibrio estable en el sistema original.

### Condiciones dinámicas:

- Existe una función de energía para el sistema reducido.
- Un punto de equilibrio  $x_i$ , pertenece a la frontera de estabilidad  $\partial A(x_s)$  del punto de equilibrio estable  $x_s$  del sistema reducido sí y solo si el punto de equilibrio  $(x_i, 0)$  pertenece a la frontera de estabilidad  $\partial A(x_s, 0)$  del sistema original.
- Es más fácil identificar la frontera de estabilidad  $\partial A(x_s)$  del sistema reducido que identificar la frontera de estabilidad  $\partial A(x_s, 0)$  del sistema original.

Entonces, el método BCU encuentra el PEIC del sistema reducido aprovechando la estructura de la frontera de estabilidad y de la función de energía del sistema reducido. Finalmente, relaciona el PEIC del sistema reducido con el PEIC del sistema original, esto es, si  $x_c$  es el PEIC del sistema reducido entonces el punto  $(x_c, 0)$  es el PEIC del sistema original.

Es decir, dado un modelo de un sistema de potencia que admite una función de energía, la idea fundamental del método BCU se puede describir a grandes rasgos como se indica: (i) el método aprovecha la estructura especial del modelo del sistema de potencia y genera un modelo de orden reducido que corresponde ( en valor y posición) a cada uno de los puntos de equilibrio en la frontera de estabilidad del sistema original, y (ii) el método encuentra el PEIC del sistema original calculando el PEIC del sistema reducido.

### 4.3 El modelo reducido del sistema de potencia

Con el fin de utilizar el método BCU para estimar la estabilidad de un sistema eléctrico de potencia (SEP) es necesario que el modelo del SEP admita una función de energía. Este modelo y la función de energía se presentaron en secciones anteriores. Otro requisito es que el modelo reducido conserve las características de interés del modelo original del SEP. En esta sección se desarrolla un modelo reducido para el SEP expresado en el marco de referencia del centro de inercia (COI).

El modelo del SEP en el marco de referencia del COI, cuando se desprecian las conductancias de transferencia de la matriz de admitancias reducida y con amortiguamiento uniforme, está dado por

$$\dot{\phi}_i = \tilde{\omega}_i \omega_s \quad i = 1 \dots n \quad (4.1)$$

$$2H_i \dot{\tilde{\omega}}_i = \hat{P}_{mi} - \hat{P}_{ei} - \frac{H_i}{H_T} P_{COI} - \lambda \tilde{\omega}_i \quad i = 1 \dots n \quad (4.2)$$

donde:

$$\hat{P}_{ei} = (E_i')^2 G_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n C_{ij} \text{sen}(\phi_i - \phi_j) \quad (4.3)$$

siendo  $C_{ij} = E_i' E_j' \text{Im}(Y_{ij})$

Este sistema tiene la función de energía:

$$E(\phi, \tilde{\omega}) = E_c(\tilde{\omega}) + E_p(\phi) \quad (4.4)$$

donde

$$E_c(\tilde{\omega}) = \omega_s \sum_{i=1}^n H_i \tilde{\omega}_i^2 \quad (4.5)$$

$$E_p(\phi) = - \sum_{i=1}^n \left( \hat{P}_{mi} - (E_i')^2 G_{ii} \right) (\phi_i - \phi_i^s) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n C_{ij} (\cos(\phi_i - \phi_j) - \cos(\phi_i^s - \phi_j^s)) \quad (4.6)$$

Los puntos de equilibrio de este sistema son de la forma  $(\phi, 0)$  donde  $\phi$  cumple la relación

$$0 = \hat{P}_{mi} - \hat{P}_{ei} - \frac{H_i}{H_T} P_{COI} \quad i = 1 \dots n \quad (4.7)$$

En el modelo reducido del SEP el espacio de estados es el subespacio formado por las posiciones angulares medidas respecto al COI. Cada punto de equilibrio del modelo original  $(\phi, 0)$  corresponde a un punto de equilibrio en el modelo reducido  $(\phi)$ . La función de energía potencial  $E_p(\phi)$  es la función de energía del sistema reducido.

Un modelo que cumple con estas características está dado por

$$\dot{\phi}_i = \frac{\omega_s}{2H_i} \left( \hat{P}_{mi} - \hat{P}_{ei} - \frac{H_i}{H_T} P_{COI} \right) \quad i=1 \dots n \quad (4.8)$$

Es claro que el modelo de orden reducido (4.8) tiene puntos de equilibrio  $\phi$  tales que los puntos  $(\phi, 0)$  son puntos de equilibrio del modelo original (4.1),(4.2). Se debe demostrar que el modelo (4.8) admite una función de energía y además que es la función de energía potencial (4.6).

Para demostrar que la función de energía potencial (4.6) es la función de energía del sistema (4.8) su derivada respecto al tiempo debe ser definida o semidefinida negativa. La derivada respecto al tiempo de  $E_p(\phi)$  está dada por

$$\frac{dE_p(\phi)}{dt} = \left[ \frac{\partial E_p(\phi)}{\partial \phi} \right]^T \left[ \frac{d\phi}{dt} \right] \quad (4.9)$$

donde

$$\frac{\partial E_p(\phi)}{\partial \phi_i} = -\left( \hat{P}_{mi} - (E'_i)^2 G_{ii} \right) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n C_{ij} \text{sen}(\phi_i - \phi_j) = -\left( \hat{P}_{mi} - \hat{P}_{ei} \right) \quad (4.10)$$

la derivada de  $E_p(\phi)$  está dada por

$$\frac{dE_p(\phi)}{dt} = -\sum_{i=1}^n \frac{\omega_s}{2H_i} \left( \hat{P}_{mi} - \hat{P}_{ei} \right)^2 + \frac{\omega_s}{2H_T} P_{COI}^2 \quad (4.11)$$

en esta expresión el único término que impide asegurar que la derivada de  $E_p(\phi)$  es definida negativa es el que esta multiplicado por la potencia del COI  $P_{COI}$ . Debido a que  $P_{COI} = \sum_{i=1}^n \hat{P}_{mi} - \hat{P}_{ei}$  y como se han despreciado las conductancias de transferencia se puede demostrar que  $P_{COI}$  tiene un valor constante expresado por

$$P_{COI} = \sum_{i=1}^n \hat{P}_{mi} - (E'_i)^2 G_{ii} \quad (4.12)$$

además,  $P_{COI}$  es igual a cero en cada punto de equilibrio. Esto implica que cuando se desprecian las conductancias de transferencia, la potencia del COI es idéntica a cero, esto es

$$P_{COI} \equiv 0 \quad (4.13)$$

por lo tanto, la derivada respecto al tiempo de la función de energía potencial está dada por

$$\frac{dE_p(\phi)}{dt} = -\sum_{i=1}^n \frac{\omega_s}{2H_i} \left( \hat{P}_{mi} - \hat{P}_{ei} \right)^2 \quad (4.14)$$

que es una función semidefinida negativa con valor igual a cero en los puntos de equilibrio del modelo (4.8). Esto implica que  $E_p(\phi)$  es decreciente a lo largo de las trayectorias de solución del

modelo reducido del SEP (4.8). Con esto se demuestra que la función de energía potencial es la función de energía del modelo reducido del SEP.

De esta manera se demuestra que el modelo (4.8) es un modelo apropiado para el método BCU en un sistema de potencia cuando se han despreciado las conductancias de transferencia. En el caso en que las conductancias de transferencia no se desprecian, se incluye en la función de energía potencial el término dependiente de la trayectoria

$$E_{path}(\Phi) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \int_{(\phi_i^s + \phi_j^s)}^{(\phi_i + \phi_j)} D_{ij} \cos(\phi_i - \phi_j) d(\phi_i + \phi_j) \quad (4.15)$$

este término se aproxima asumiendo una trayectoria de movimiento lineal y se expresa por

$$E_{path}(\Phi) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n D_{ij} \frac{(\phi_i + \phi_j) - (\phi_i^s + \phi_j^s)}{(\phi_i - \phi_i) - (\phi_i^s - \phi_j^s)} (\sin(\phi_i - \phi_j) - \sin(\phi_i^s - \phi_j^s)) \quad (4.16)$$

resultando la función de energía potencial como

$$E_{pot}(\Phi) = E_p(\Phi) + E_{path}(\Phi) \quad (4.17)$$

De esta manera, el modelo reducido del SEP es

$$\dot{\phi}_i = \frac{\omega_s}{2H_i} \left( \hat{P}_{mi} - \hat{P}_{ei} - \frac{H_i}{H_T} P_{COI} \right) \quad i = 1 \dots n \quad (4.18)$$

donde:

$$\hat{P}_{ei} = (E_i')^2 G_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n C_{ij} \sin(\phi_i - \phi_j) + D_{ij} \cos(\phi_i - \phi_j) \quad (4.19)$$

siendo  $C_{ij} = E_i' E_j' \text{Im}(Y_{ij})$  y  $D_{ij} = E_i' E_j' \text{Re}(Y_{ij})$

### 4.3.1 Modelo reducido en el marco de referencia de una máquina síncrona

Del modelo reducido del SEP en el marco de referencia del COI (4.18) se puede obtener un modelo reducido en el marco de referencia de una máquina síncrona. Sustituyendo la expresión (4.18) en la relación

$$\dot{\delta}_{in} = \dot{\delta}_i - \dot{\delta}_n = \dot{\phi}_i - \dot{\phi}_n \quad i = 1 \dots n \quad (4.20)$$

se tiene

$$\dot{\delta}_{in} = \left[ \frac{\omega_s}{2H_i} \left( \hat{P}_{mi} - \hat{P}_{ei} - \frac{H_i}{H_T} P_{COI} \right) \right] - \left[ \frac{\omega_s}{2H_n} \left( \hat{P}_{mn} - \hat{P}_{en} - \frac{H_n}{H_T} P_{COI} \right) \right] \quad i = 1 \dots n-1 \quad (4.21)$$

$$\dot{\delta}_{in} = \left[ \frac{\omega_s}{2H_i} (\hat{P}_{mi} - \hat{P}_{ei}) \right] - \left[ \frac{\omega_s}{2H_n} (\hat{P}_{mn} - \hat{P}_{en}) \right] \quad i = 1 \dots n-1 \quad (4.22)$$

donde

$$\hat{P}_{ei} = (E'_i)^2 G_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n C_{ij} \sin(\delta_{in} - \delta_{jn}) + D_{ij} \cos(\delta_{in} - \delta_{jn}) \quad (4.23)$$

La expresión (4.22) representa el modelo reducido del SEP en el marco de referencia de una máquina síncrona. La función de energía corresponde a la función de energía potencial expresada en coordenadas relativas a una máquina síncrona dada por

$$E_{pot}(\delta_n) = E_p(\delta_n) + E_{path}(\delta_n) \quad (4.24)$$

donde

$$E_{p1}(\delta_n) = -\frac{1}{H_T} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n [(\delta_{in} - \delta_{jn}) - (\delta_{in}^s - \delta_{jn}^s)] [P_i H_j - P_j H_i] \quad (4.25)$$

$$E_{p2}(\delta_n) = -\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n C_{ij} [\cos(\delta_{in} - \delta_{jn}) - \cos(\delta_{in}^s - \delta_{jn}^s)] \quad (4.26)$$

$$E_{path}(\delta_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n D_{ij} \frac{(\delta_{in} + \delta_{jn} - 2\phi_n) - (\delta_{in}^s + \delta_{jn}^s - 2\phi_n^s)}{(\delta_{in} - \delta_{jn}) - (\delta_{in}^s - \delta_{jn}^s)} (\sin(\delta_{in} - \delta_{jn}) - \sin(\delta_{in}^s - \delta_{jn}^s)) \quad (4.27)$$

$$\phi_n = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{H_i}{H_T} \delta_{in} \quad (4.28)$$

## 4.4 Algoritmo computacional del método BCU

La localización del punto de equilibrio inestable controlador (PEIC) en un sistema eléctrico de potencia (SEP), cuando se utiliza el método BCU, se basa en la localización del PEIC del sistema reducido del SEP. De tal manera que la tarea fundamental del método BCU es la localización del PEIC del sistema reducido de posfalla (4.18) o (4.22). Ya se ha definido al PEIC como el punto de equilibrio inestable con la variedad estable que contiene al punto de salida de la trayectoria de falla. Esta definición es válida para todo sistema dinámico autónomo, de tal manera que tiene validez también en el sistema reducido.

La localización del PEIC del sistema reducido se basa en la definición anterior. Es decir, se localiza el punto de salida de la proyección de la trayectoria de falla del sistema original sobre el subespacio de estados del sistema reducido. Este punto de salida está contenido en la variedad estable del PEIC del sistema reducido (digamos  $x_c$ ) de tal manera que el PEIC del sistema original es el punto  $(x_c, 0)$ . Una vez que se ha localizado el punto de salida  $(x_s)$  y por la propiedad de invariancia de la variedad estable, la trayectoria de solución de cualquier punto sobre esta variedad converge al PEIC.

El procedimiento descrito sería funcional si fuese posible localizar en forma exacta el punto de salida. Sin embargo, numéricamente resulta imposible la localización exacta del punto de salida. Lo que se tiene es una aproximación del punto de salida, es decir un punto localizado en una vecindad del punto de salida exacto  $(x_s^*)$ . Si el punto se localiza en el interior de la región de atracción la trayectoria de solución convergerá al punto de equilibrio estable. Si el punto de aproximación se localiza fuera de la región de atracción la trayectoria de solución diverge (se

dirige a otro punto de equilibrio estable de otra región de atracción del sistema reducido). Es decir la trayectoria del sistema reducido de posfalla que tiene como condición inicial el punto aproximado de salida  $x_s^*$  no convergerá al PEIC. Si el punto  $x_s^*$  es lo suficientemente cercano a  $x_s$ , la trayectoria se moverá inicialmente en las proximidades de la variedad estable del PEIC durante algunos instantes hasta que se separa de la variedad. En la figura 4.1 se ilustra este comportamiento, para esto se utilizó un sistema de 3 máquinas síncronas [25], modelado en el marco de referencia de la máquina número 3. El espacio de estados del sistema reducido es de dimensión 2 y se pueden mostrar gráficamente, en un plano bidimensional, la localización de los puntos de equilibrio y las trayectorias de solución. Una sección del espacio de estados del sistema reducido se muestra en la figura 4.1. En esta, se indican el punto de equilibrio estable y otro inestable que pertenecen al dominio de interés. Además se indica la variedad estable. Se muestran además, tres puntos de equilibrio estables fuera de la región de interés.

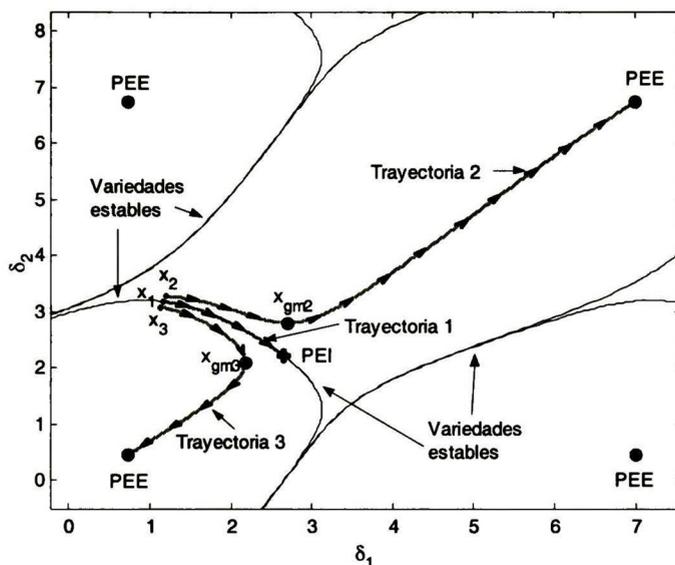


Fig. 4.1. Comportamiento de las trayectorias del sistema reducido en las cercanías de la frontera de estabilidad.

Se muestran tres trayectorias de solución de posfalla del sistema reducido que inician en tres puntos  $x_1, x_2, x_3$ , considerados de salida. Los tres puntos se encuentran muy próximos entre sí. El punto  $x_1 = (1.1608, 3.1819)$  está contenido en la variedad estable del PEI  $(2.6475, 2.2304)$ , y es el verdadero punto de salida. La trayectoria que tiene como condición inicial a  $x_1$  (trayectoria 1) converge al PEIC  $(2.6475, 2.2304)$  debido a que  $x_1$  está contenido en la variedad estable del PEIC. La distancia entre el punto  $x_1$  y  $x_2 = (1.1951, 3.2758)$  y  $x_3 = (1.1266, 3.0879)$  es de 0.1 unidades. Las trayectorias que tienen como condición inicial a los puntos  $x_2$  y  $x_3$  no convergen al PEI, el punto  $x_3$  converge al punto de equilibrio estable (PEE),  $(0.7291, 0.4641)$ . El punto  $x_2$  diverge (converge a un punto estable de otra región  $(7.0107, 6.7458)$ ). Se puede apreciar que ambas trayectorias se mueven en forma relativamente cercana a la variedad estable del PEIC y tienden al PEIC antes de separarse. Los puntos de separación son  $x_{gm2}$  y  $x_{gm3}$  respectivamente.

La *función gradiente* de las trayectorias 2 y 3 se muestra en la figura 4.2. La *función gradiente* se define como la norma de las derivadas de las variables de estado respecto del tiempo. En esta figura se aprecia que las funciones alcanzan un mínimo local antes de que las trayectorias se separen del PEI. El punto  $(\delta_1(t), \delta_2(t))$  correspondiente al instante en que la

función gradiente alcanza un primer mínimo local y ha sido señalado con un punto grueso, estos puntos son  $x_{gm2}$  y  $x_{gm3}$  para las trayectorias 2 y 3 respectivamente.

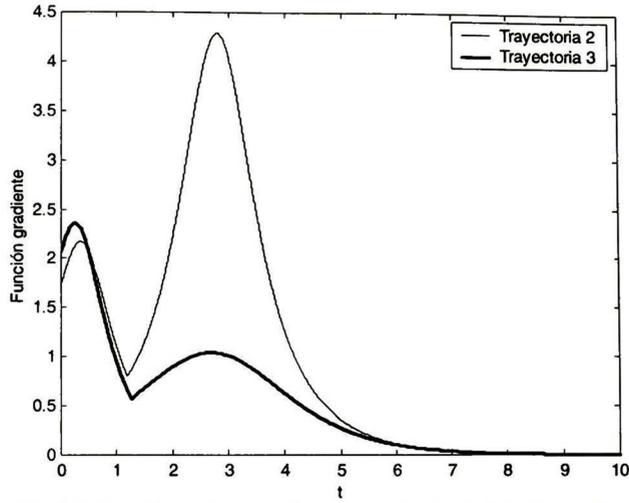


Fig. 4.2. Función gradiente de las trayectorias 2 y 3 de la figura 4.1.

Los puntos de salida que se encuentran en la vecindad del punto de salida verdadero, tienen una trayectoria de solución que sigue con mucha aproximación a la variedad estable del PEIC y cuando alcanzan el gradiente mínimo se separan de la variedad estable. El punto de gradiente mínimo puede usarse como punto de arranque para la solución del sistema de ecuaciones algebraicas no lineales que teóricamente deben tener como solución al punto de equilibrio mas cercano. En este caso el PEIC. Este procedimiento, que acerca el punto de arranque al punto de solución (PEIC verdadero), contribuye a reducir tiempos de cómputo, y sobre todo a que la solución de convergencia nos conduzca al PEI de la variedad estable hacia donde se dirige la trayectoria de falla.

El algoritmo del método BCU descrito se resume en los siguientes pasos, cuando se utiliza el marco de referencia de la máquina  $n$ -ésima:

1. Se calcula la mejor aproximación del punto de salida  $\delta^*$  de la proyección de la trayectoria de falla en el espacio de estados del sistema reducido  $\delta(t)$ . Por integración numérica de las ecuaciones diferenciales para falla sostenida.
2. Se integra el sistema de ecuaciones reducido de posfalla (4.22), hasta encontrar el primer mínimo local de la función gradiente,  $\delta_0^*$ . Se usa el punto de salida  $\delta^*$  como condición inicial. La función gradiente es igual a la norma uno de las ecuaciones (4.22), esto es

$$G(\delta) = \sum_{i=1}^{n-1} \left\| \left[ \frac{\omega_s}{2H_i} (\hat{p}_{mi} - \hat{p}_{ei}) \right] - \left[ \frac{\omega_s}{2H_n} (\hat{p}_{mn} - \hat{p}_{en}) \right] \right\| \quad (4.29)$$

3. Se resuelve el sistema de ecuaciones algebraicas no lineales de posfalla (4.30). Se usa el punto  $\delta_0^*$  como condición de arranque del proceso iterativo

$$0 = \left[ \frac{\omega_s}{2H_i} (\hat{p}_{mi} - \hat{p}_{ei}) \right] - \left[ \frac{\omega_s}{2H_n} (\hat{p}_{mn} - \hat{p}_{en}) \right] \quad i = 1 \dots n-1 \quad (4.30)$$

La solución es el punto de equilibrio inestable controlador del sistema reducido (22), para la trayectoria de falla  $\delta(t)$ , digamos  $\delta_{co}$ .

4. El PEIC del sistema de potencia para la trayectoria de falla ( $\delta(t), \omega(t)$ ) es el punto  $(\delta_{co}, 0)$ .

Los pasos 2 y 3 de este algoritmo resuelven el problema que se presenta al no encontrar el punto de salida exacto. Así, aún cuando la trayectoria de sistema reducido de posfalla no converge al PEIC se aproxima lo suficiente para que un método de solución de ecuaciones algebraicas encuentre al PEIC.

La localización del punto de salida (paso 1 del algoritmo anterior) es un paso importante y representa un reto. La trayectoria de falla se puede conocer por la integración numérica de las ecuaciones diferenciales del sistema de falla. Esto da como resultado puntos o muestras ( $\delta_i^*$ ) que aproximan al punto de salida. El punto de salida verdadero se encontrará en un punto intermedio entre dos de estas muestras, digamos  $\delta_i^*$  y  $\delta_j^*$ . El punto  $\delta_i^*$  corresponde al último punto tal que la trayectoria de posfalla del sistema reducido es estable; mientras que el punto  $\delta_j^*$  es el primer punto tal que la trayectoria de posfalla es inestable. En tanto que el propósito de este algoritmo es estimar la estabilidad del SEP de forma rápida, resulta poco práctico tratar de encontrar el punto de salida exacto reduciendo el paso de integración. Es preferible utilizar los puntos  $\delta_i^*$  y  $\delta_j^*$  en lugar del punto de salida exacto en el paso 1 del algoritmo del método BCU.

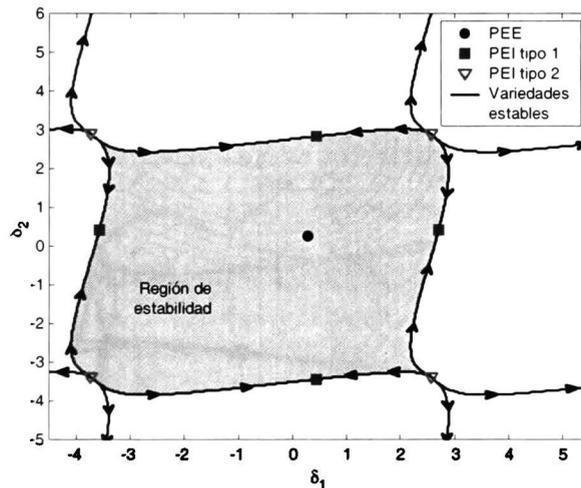


Fig. 4.3. Frontera de estabilidad de un PEE del sistema reducido de un SEP de tres máquinas.

La localización de los puntos  $\delta_i^*$  y  $\delta_j^*$  por integración numérica (en forma repetitiva) de las ecuaciones diferenciales del sistema reducido de posfalla, es inadecuada debido a que requiere de un gran esfuerzo computacional. Otra forma de localizar los puntos  $\delta_i^*$  y  $\delta_j^*$  es con la función de energía del sistema reducido de posfalla. Ya se ha mostrado que la función de energía puede ser utilizada para aproximar la frontera de estabilidad de un sistema dinámico. En la figura 4.3 se muestra la frontera de estabilidad del sistema reducido de un SEP de tres máquinas. Sabemos que la frontera de estabilidad está formada por la unión de las variedades estables de los PEI contenidos en ésta. Para este sistema es fácil determinar que la región de estabilidad del PEE es una superficie cerrada, determinada por las trayectorias señaladas en esta figura. Como el sistema

es de dimensión 2, los PEI tipo 2 no tienen variedad estable y además, las variedades estables de los PEI tipo 1 tienen origen en los PEI tipo 2. Esta es la razón por la que la región de estabilidad es una superficie cerrada o acotada, esto concuerda con lo que establece el Teorema 3 de la sección 2.5 de esta tesis.

En la figura 4.4 se muestra la función de energía del sistema reducido. Las curvas de nivel y los vectores de gradiente indican la presencia de mínimos, máximos y puntos de inflexión (mini-max [2]) que corresponden con los puntos de equilibrio del sistema. En la figura 4.5 se han extraído las curvas de nivel (superficies de energía constante) que pasan por los PEI en la frontera de estabilidad. Como ya se ha dicho, estas superficies se pueden utilizar para aproximar una sección de la frontera de estabilidad. En la figura 4.5 se muestran las superficies de energía constante que pasan por los PEI de tipo 1. Como en los puntos de equilibrio inestables de tipo 2 la función de energía alcanza un máximo local no existen superficies de energía constante que pasen por estos puntos. Esto implica que (para el caso de un sistema de tres máquinas) no es posible utilizar el valor de la función de energía en un PEI de tipo 2 como valor de energía crítico en un método tipo Lyapunov.

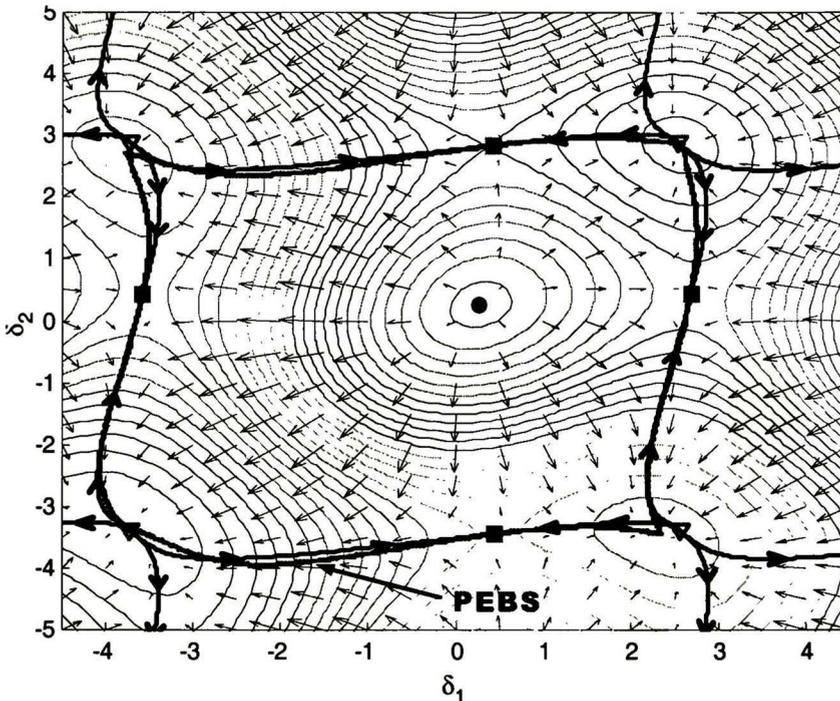


Fig. 4.4. Función de energía y PEBS del sistema reducido de un SEP de tres máquinas.

Se ha demostrado [7,8,23] que, en general, el punto de equilibrio inestable controlador es un punto de equilibrio de tipo 1. La figura 4.5 sirve para justificar esta aseveración en el caso particular de un sistema eléctrico de potencia constituido por tres máquinas síncronas.

En la figura 4.4 también se ha representado lo que en la literatura es conocido como PEBS (*Potential Energy Boundary Surface*). El PEBS es un conjunto de puntos unidos por trayectorias ortogonales a las curvas equipotenciales de la función de energía que pasan a través de los PEI en la frontera de estabilidad [18]. El PEBS se puede encontrar utilizando el gradiente de la función de energía. Claramente se puede apreciar que el PEBS aproxima de forma muy cercana a la frontera de estabilidad del SEP. Desgraciadamente, la construcción del PEBS en forma exacta no

es una tarea sencilla en términos de cómputo. Esto nos obliga a buscar otras formas de encontrar el punto de salida de la trayectoria de falla en el sistema reducido (o en su defecto una aproximación de éste).

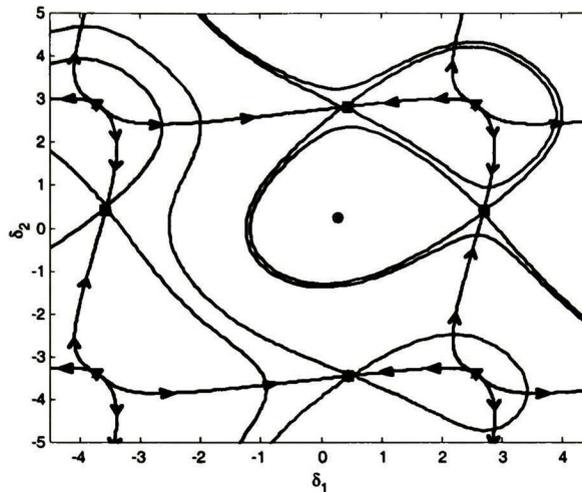


Fig. 4.5. Superficies de energía constante del sistema reducido de un SEP de tres máquinas.

En la figura 4.6 se muestra un conjunto de puntos en donde la función de energía (evaluada sobre trayectorias lineales que cruzan la frontera de estabilidad) alcanza un primer máximo local. Este conjunto de puntos constituye una aproximación del PEBS y es en la práctica una forma en la que algunos autores proponen la construcción de éste [2, 24]. Al comparar las curvas mostradas en las figuras 4.4 y 4.6 se aprecia que son muy similares en algunas secciones.

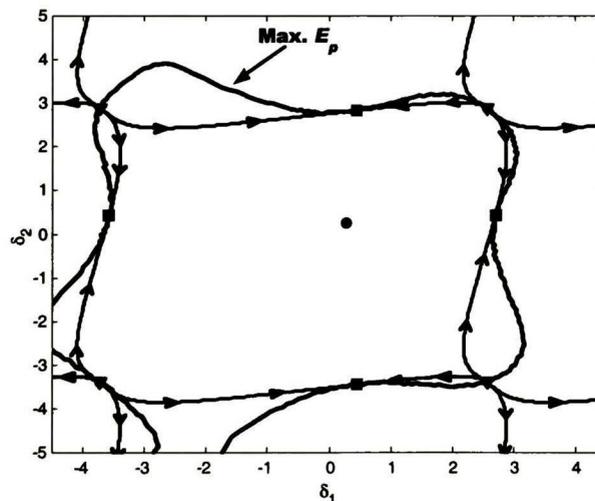


Fig. 4.6. Aproximación del PEBS del sistema reducido de un SEP de tres máquinas.

Debido a que el PEBS aproxima la frontera de estabilidad es posible utilizar la aproximación de éste para encontrar los puntos  $\delta_i^*$  y  $\delta_j^*$ . Esto es, el punto  $\delta_j^*$  es el punto en el que la función de energía del sistema reducido (función de energía potencial (4.24)) evaluada a lo largo de la trayectoria de falla alcanza un primer máximo local. Mientras que el punto  $\delta_i^*$  es el

punto inmediato anterior a  $\delta_j^*$ . De esta manera, el método BCU se puede describir por el siguiente algoritmo.

#### 4.4.1 Algoritmo del método BCU.

1. A partir de la trayectoria de falla  $(\delta(t), \omega(t))$ , se detecta el punto  $\delta^*$  donde la función de energía potencial (4.24) alcanza un primer máximo local. Además, se calcula el punto  $\delta^+$  correspondiente al paso de integración inmediato anterior a  $\delta^*$
2. Se usa el punto  $\delta^*$  como condición inicial e integrar el sistema reducido de posfalla (4.22), hasta encontrar el primer mínimo local de la *función gradiente*, digamos  $\delta_0^*$ . La función gradiente es definida por la ecuación (4.29).
3. Se usa el punto  $\delta^+$  como condición inicial y se repite el paso 2 para encontrar el punto correspondiente, digamos  $\delta_0^+$ .
4. Se comparan los valores de la función gradiente en  $\delta_0^*$  y  $\delta_0^+$ . Se usa el punto con menor valor como condición inicial para resolver el sistema de ecuaciones no lineales (4.30) para encontrar un punto de equilibrio del sistema reducido (4.22), este punto es el PEIC del sistema reducido para la trayectoria de falla  $\delta(t)$ , digamos  $\delta_{co}$ .
5. El PEIC del sistema de potencia para la trayectoria de falla  $(\delta(t), \omega(t))$  es el punto  $(\delta_{co}, 0)$ .

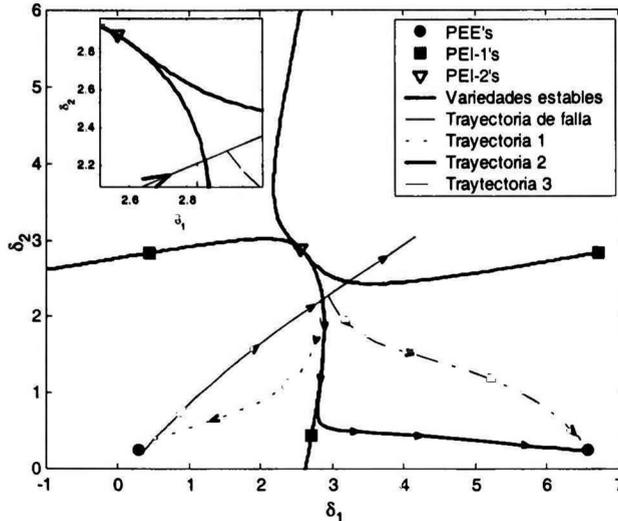
Una vez que se conoce el PEIC del SEP para una falla específica, se puede determinar si el sistema es o no estable comparando los valores de la función de energía evaluada en el PEIC ( $V_{peic}$ ) y en el punto  $(\delta(t_c), \omega(t_c))$  ( $V_{tc}$ ), donde  $t_c$  es el tiempo en el que se libera la falla. Si  $V_{peic}$  es mayor que  $V_{tc}$  el sistema será estable, en otro caso el sistema es inestable (bajo el criterio del PEIC).

## 4.5 Problemática presentada por el método BCU.

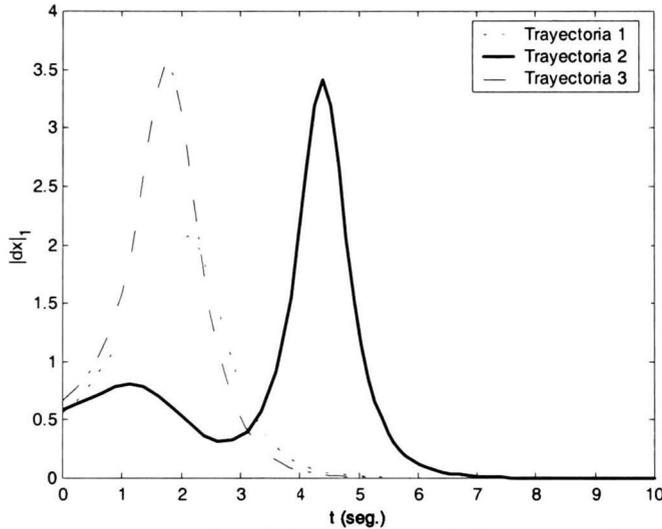
El algoritmo presentado para localizar el PEI controlador puede, bajo ciertas condiciones, determinar el PEI controlador incorrectamente. Se ha detectado que en los pasos 2, 3 y 4 se pueden presentar situaciones de riesgo que ocasionan resultados erróneos.

### 4.5.1 No existe un mínimo en la función gradiente para una trayectoria de falla dada.

Los pasos número 2 y 3 del algoritmo pueden fallar al no encontrar un mínimo local de la función gradiente (4.29), esto ocurre si la condición inicial para integrar el sistema reducido de posfalla (4.22) no está lo suficientemente cerca de la variedad estable en la que se encuentra el punto de salida. En las figuras 4.7 y 4.8 se ilustra este hecho con las trayectorias de fallas correspondientes a tres condiciones iniciales en un sistema de 3 maquinas [25].



**Fig. 4.7.** Trayectorias de posfalla con tres condiciones iniciales diferentes en el sistema reducido correspondiente al sistema de 3 máquinas, 9 nodos [25].



**Fig. 4.8.** Función gradiente para tres trayectorias de posfalla en el sistema reducido correspondiente al sistema de 3 máquinas, 9 nodos.

En la figura 4.7 se presenta una sección del espacio de estados del sistema reducido de posfalla, se muestra la trayectoria de la falla que se inicia en el PEE de prefalla. Se indican además algunas secciones de las variedades estables que definen la frontera de estabilidad de los PEE de posfalla. En esta figura se puede apreciar que las trayectorias del sistema reducido de posfalla que inician en una condición inicial “alejada” de la variedad estable no presentan un mínimo local de la función gradiente (Fig. 4.8). Y que la trayectoria que arranca con condición inicial próxima a la variedad estable presenta un mínimo local antes de converger a un PEE. Los términos “cerca” y “alejada” utilizados referente a la condición inicial de la trayectoria de posfalla son relativos y dependen del sistema y de la falla específica. En el ejemplo mostrado se puede advertir que la trayectoria de posfalla 1 tiene una condición inicial relativamente cerca de la variedad estable y sin embargo la función gradiente de la trayectoria no tiene un mínimo local.

Para otros casos en este mismo sistema con distancias similares si fue posible encontrar un mínimo en la función.

Este problema está determinado principalmente por dos factores: a) el paso de integración que se usa en solución de la trayectoria de falla; y b) la exactitud con la que el PEBS aproxima la frontera de estabilidad.

Cuando no existe un mínimo local en la función gradiente no es posible completar los pasos 2 y 3 del algoritmo del método BCU. Esto implica que no es posible encontrar una condición inicial apropiada para la solución del sistema de ecuaciones (4.30). En estos casos se puede utilizar como condición inicial los puntos  $\delta^*$  y  $\delta^+$ . Estas condiciones iniciales pueden dar buenos resultados bajo determinadas condiciones, sin embargo podría encontrar un punto de equilibrio equivocado lo que implica un error en el valor crítico de la función de energía utilizado en los métodos tipo Lyapunov.

#### 4.5.2 Localización incorrecta del PEIC del sistema reducido.

El paso número 4 del algoritmo puede presentar problemas que dependen de las características del método de solución usado para resolver el sistema de ecuaciones algebraicas no lineales (con la finalidad de encontrar el/los punto(s) de equilibrio). En este trabajo se analizaron el método de Newton-Raphson en sus diferentes variantes y un método de optimización. Todos presentan algún grado de sensibilidad ante las condiciones iniciales. Así por ejemplo, se han reportado casos en los que, aún con un punto de arranque cercano al punto de equilibrio buscado, el método de Newton-Raphson puede no converger o alcanzar una solución muy retirada al punto de arranque [26].

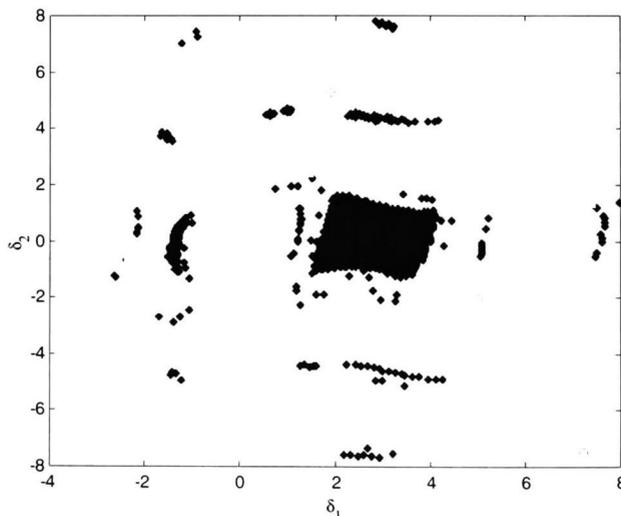


Fig. 4.9. Región de convergencia del punto de equilibrio (2.7057,0.4349), utilizando el método de Newton-Raphson.

Para ejemplificar la sensibilidad a la condición inicial de los métodos de solución algebraicos en la figura 4.9 se muestra una región en el espacio de estados del sistema reducido del sistema de 3 máquinas. Cuando los cálculos se inician en los puntos indicados en la región en negro, el método de Newton-Raphson formal converge al punto de equilibrio inestable de tipo 1 (2.7057,0.4349). Cuando se parte de una condición inicial localizada en las regiones en blanco, el método de Newton-Raphson, converge a otro punto de equilibrio, que puede pertenecen a la

misma o a una diferente región de atracción. En el peor de los casos el método no encuentra una solución. Las diferentes variantes del método pueden presentar algunas mejoras para algunos sistemas pero, en general tienen los mismos problemas.

Cuando se utilizan métodos de optimización para encontrar el PEIC del sistema reducido la problemática es semejante a la descrita para el método de Newton-Raphson. Así, por ejemplo cuando se utiliza el método de optimización Nelder-Mead simplex (búsqueda directa), los puntos con condición inicial en la región indicado en negro convergen al PEI adecuado (2.7057,0.4349), figura 4.10.

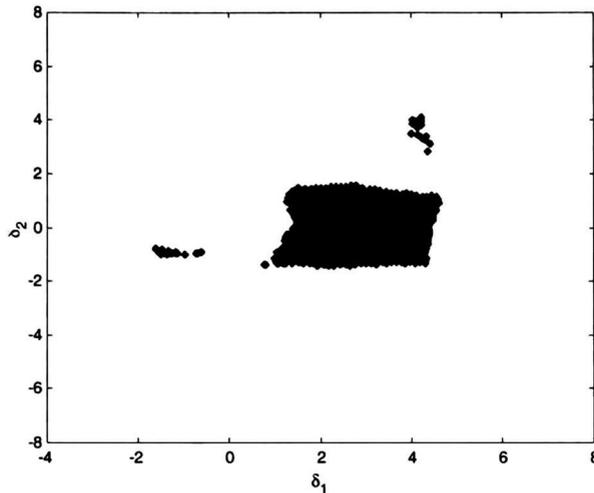


Fig. 4.10. Región de convergencia del punto de equilibrio (2.7057,0.4349), utilizando el método Nelder-Mead simplex.

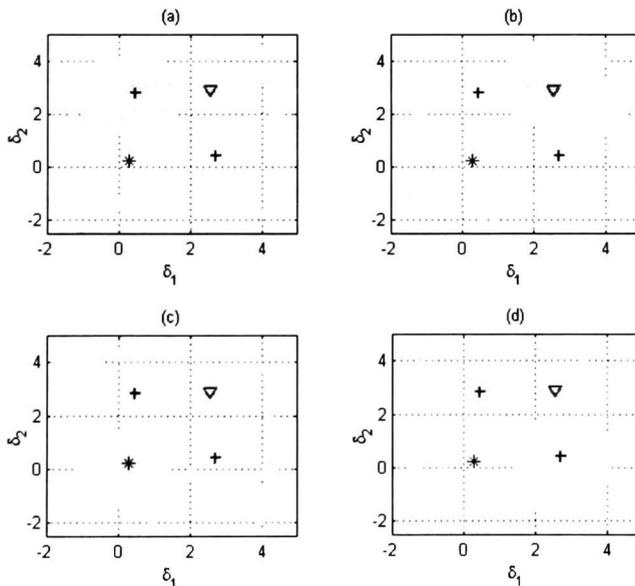


Fig. 4.11. Regiones de convergencia de cuatro puntos de equilibrio diferentes.

Para precisar la influencia e importancia de la condición inicial de los métodos de solución de ecuaciones algebraicas para la determinación del punto de equilibrio controlador, en la figura 4.11 se muestran las regiones de convergencia de los cuatro puntos de equilibrio localizados en la región del espacio de estados delimitada por  $(-2 < \delta_1 < 5, -2.5 < \delta_2 < 5)$ . Un punto de

equilibrio es estable (\*), dos tipo 1 (+) y otro es tipo 2 (v). En cada una de las cuatro gráficas se muestra la región de convergencia de cada punto de equilibrio específico. Las áreas sombreadas en la grafica 4.11a) corresponden a la región de convergencia del punto de equilibrio inestable tipo 1 encerrado por el área de mayor tamaño. Las figuras b, c, d corresponden a las regiones de convergencia para los puntos de equilibrio encerrados por el área sombreada de mayor tamaño.

De estos ejemplos se observa que los métodos de solución de ecuaciones algebraicas pueden dar como solución un punto de equilibrio que está alejado de la condición inicial, aún cuando existan puntos de equilibrio más próximos a la condición inicial. Esto representa un problema serio en la implementación del algoritmo del método BCU: Ya que se asume que la condición inicial para la solución de las ecuaciones (4.30) es cercana al PEIC.

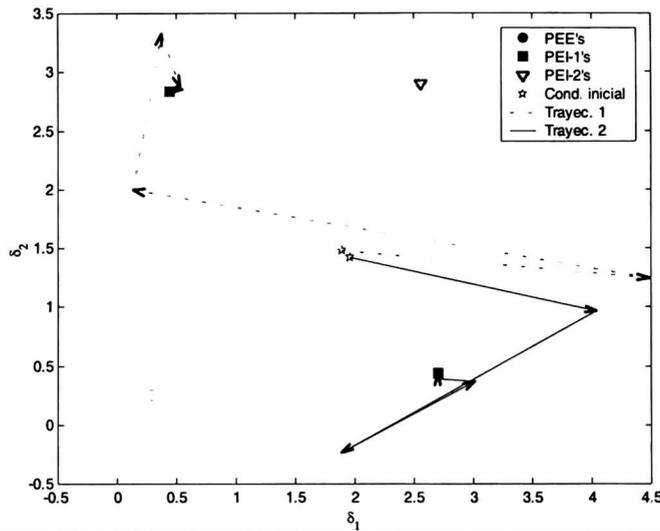


Fig. 4.12. Comportamiento del método de Newton-Raphson ante dos condiciones iniciales dadas.

En la figura 4.12 se ejemplifica este problema. Se han dado dos condiciones iniciales para el método de Newton-Raphson a fin de encontrar la solución del sistema de ecuaciones (4.30). Las condiciones iniciales son los puntos (1.8912, 1.4776) y (1.9580, 1.4214). Aún cuando la distancia entre ambos puntos es pequeña la solución obtenida en ambos casos es muy diferente.

Cuando se utilizó la condición inicial (1.8912,1.4776) el método de Newton-Raphson convergió al punto de equilibrio inestable de tipo 1 (0.4451,2.8354). Para la condición inicial (1.9580,1.4214) se encontró el punto de equilibrio inestable tipo 1 (2.7057,0.4349). Las dos están muy lejanos entre sí.

La problemática de los métodos de solución de ecuaciones no lineales en cuanto a la sensibilidad ante las condiciones iniciales puede tener gran repercusión en la valoración de la estabilidad transitoria utilizando métodos directos, ya que esta valoración se sustenta fuertemente en la correcta localización de un punto de equilibrio específico. De ahí la gran importancia de desarrollar métodos que permitan la localización segura del punto de equilibrio inestable controlador.

## 4.6 Una solución a la problemática presentada por el método BCU

En la sección anterior se dió una descripción de dos problemas que se pueden presentar en la aplicación del método BCU para estimar la estabilidad de un sistema eléctrico de potencia. Estos problemas tienen como consecuencia la identificación incorrecta del punto de equilibrio inestable controlador (PEIC) y por lo tanto la estimación inadecuada de la estabilidad, que puede ser conservadora o sobrestimada.

Los dos problemas involucran el cálculo de un punto que se utiliza como condición inicial para la determinación del punto de equilibrio de interés del sistema reducido. En el primer caso, la ausencia de un mínimo en la función gradiente imposibilita acercarse al punto de condición inicial al PEIC. Cuando este problema es causado por la magnitud del paso de integración usado en el cálculo de la trayectoria de falla, una solución factible sería la reducción de este paso de tal forma que el punto de salida esté más cercano a los puntos  $\delta^*$  y  $\delta^+$  del paso 1 del algoritmo antes descrito. Sin embargo la magnitud del paso de integración no es el único factor que determina este problema. Cuando el primer máximo de la función de energía potencial corresponde a un punto que está muy alejado de la frontera de estabilidad la trayectoria del sistema reducido de posfalla no presentará un mínimo en su función gradiente.

La ausencia de un gradiente mínimo obliga a usar como condición inicial al punto donde se encuentra el primer máximo local de la función de energía en la trayectoria de falla. El uso de esta condición inicial resulta lógico desde el hecho que en teoría este punto se encuentra en una vecindad de la variedad estable del punto de equilibrio inestable controlador. Aun así, en general no es posible asegurar que con ésta condición inicial algún método de solución de ecuaciones algebraicas encuentre el punto de equilibrio adecuado (segundo problema).

La naturaleza fractal de la región de convergencia de los métodos de solución de ecuaciones algebraicas en algunas regiones del espacio de estados puede ocasionar que, incluso cuando se ha encontrado un mínimo en la función gradiente, los métodos de solución converjan a un punto de equilibrio diferente al PEIC.

Los efectos de estos problemas se resolverían o minimizarían con métodos de solución que posean una región de solución más grande y segura que los métodos normalmente usados.

En esta sección se propone un método con el que se mejoran significativamente los problemas descritos en la implementación del método BCU. Este método está basado en la integración (numérica) de un nuevo sistema de ecuaciones diferenciales para encontrar el PEIC. Por este motivo le hemos llamado el *Método Dinámico*. Este método consiste básicamente en la solución de las ecuaciones diferenciales de un nuevo sistema de ecuaciones con una trayectoria de movimiento que converge a un punto de equilibrio estable. Evidentemente, el nuevo sistema de ecuaciones debe ser tal que el punto de equilibrio estable del nuevo sistema al que converge la trayectoria, corresponda en posición con el punto de equilibrio inestable controlador del sistema original (obviamente también del sistema reducido). Una ventaja de este método respecto a los métodos convencionales (solución de ecuaciones algebraicas del sistema reducido) es que la región de atracción de un PEE de un sistema dinámico es una región uniforme.

Se ha demostrado [7,8,23] que el punto de equilibrio inestable controlador es de tipo 1. Por esta razón el PEE del nuevo sistema de ecuaciones debe corresponder a un punto de equilibrio inestable tipo 1 del sistema original. Con esta consideración en mente se obtiene un

nuevo sistema de ecuaciones tal que cada punto de equilibrio estable de este nuevo sistema corresponda con un punto de equilibrio inestable de tipo 1 en el sistema original. Entonces al integrar este nuevo sistema se tiene la seguridad de que el punto de equilibrio localizado es de tipo 1 (en el sistema original). Esta es otra ventaja respecto de los métodos convencionales de solución de ecuaciones algebraicas en los que no se puede discriminar de qué tipo es el punto de equilibrio calculado.

El nuevo sistema de ecuaciones del método propuesto, se obtiene por transformación a partir del modelo del sistema reducido (4.22). En notación vectorial compacta se puede escribir por:

$$\dot{\bar{\delta}} = \mathbf{F}(\bar{\delta}) \quad (4.31)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{\delta} &= [\delta_{1n} \quad \delta_{2n} \quad \dots \quad \delta_{n-1,n}]^T \\ \mathbf{F}(\bar{\delta}) &= [f_1(\bar{\delta}) \quad f_2(\bar{\delta}) \quad \dots \quad f_{n-1}(\bar{\delta})] \\ f_i(\bar{\delta}) &= \left[ \frac{\omega_s}{2H_i} (\hat{P}_{mi} - \hat{P}_{ei}) \right] - \left[ \frac{\omega_s}{2H_n} (\hat{P}_{mn} - \hat{P}_{en}) \right] \quad i=1 \dots n-1 \end{aligned}$$

la potencia eléctrica de cada máquina está dada por la ecuación (4.23).

La matriz jacobiana de este sistema está dada por

$$\mathbf{J}(\bar{\delta}) = \frac{\partial \mathbf{F}(\bar{\delta})}{\partial \bar{\delta}} \quad (4.32)$$

es una matriz real. Cuando se desprecian las conductancias de transferencia de la matriz de admitancias reducida la matriz jacobiana del sistema reducido (4.32) es una matriz real y simétrica. En este caso, esta matriz posee  $(n-1)$  valores propios reales y un conjunto de  $(n-1)$  vectores propios linealmente independientes que forman una base del espacio  $\mathfrak{R}^{n-1}$ . Se puede demostrar que en general, aún cuando no se desprecien las conductancias de transferencia los  $(n-1)$  vectores propios de la matriz jacobiana (4.32) del sistema reducido (4.31) forman una base del espacio  $\mathfrak{R}^{n-1}$  [26]. De esta manera, la matriz jacobiana del sistema reducido se puede expresar como

$$\mathbf{J}(\bar{\delta}) = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j(\bar{\delta}) \mathbf{P}_j(\bar{\delta}) \quad (4.33)$$

donde

$\lambda_j(\bar{\delta})$  es el valor propio  $j$ -ésimo de la matriz jacobiana.

$\mathbf{P}_j(\bar{\delta}) = \mathbf{u}_j(\bar{\delta}) \mathbf{v}_j(\bar{\delta})^T$  es la matriz que representa la proyección ortogonal de un vector en el espacio generado por  $\mathbf{u}_j(\bar{\delta})$ .

$\mathbf{u}_j(\bar{\delta})$  y  $\mathbf{v}_j(\bar{\delta})$  son los vectores propios derecho e izquierdo de la matriz jacobiana asociados al valor propio  $\lambda_j(\bar{\delta})$ .

Las matrices  $\mathbf{P}_i(\bar{\delta})$  tienen las siguientes propiedades de ortogonalidad

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_i(\bar{\delta})\mathbf{P}_i(\bar{\delta}) &= \mathbf{P}_i(\bar{\delta}) \\ \mathbf{P}_i(\bar{\delta})\mathbf{P}_j(\bar{\delta}) &= 0, \quad i \neq j\end{aligned}\tag{4.34}$$

Sea  $\mathbf{U}$  la matriz cuyas columnas son los vectores propios derechos de  $\mathbf{J}(\bar{\delta})$ , esto es

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1(\bar{\delta}) \quad \mathbf{u}_2(\bar{\delta}) \quad \dots \quad \mathbf{u}_{n-1}(\bar{\delta})]$$

su inversa  $\mathbf{V}$  es una matriz cuyas filas son los vectores propios izquierdos transpuestos de  $\mathbf{J}(\bar{\delta})$ , es decir

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1(\bar{\delta})^T \\ \mathbf{v}_2(\bar{\delta})^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{n-1}(\bar{\delta})^T \end{bmatrix}$$

En general, el producto de dos matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  se puede definir como la sumatoria de los productos  $a_i b_i$  para  $i = 1, 2, \dots, k$ , donde  $k$  es el número de columnas de la matriz  $\mathbf{A}$  y de las filas de la matriz  $\mathbf{B}$ . De aquí, el producto de las matrices  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{V}$  se puede expresar como

$$\mathbf{UV} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{u}_i(\bar{\delta}) \mathbf{v}_j(\bar{\delta})^T = \mathbf{I}$$

como los vectores propios son ortogonales, el producto  $\mathbf{u}_i(\bar{\delta}) \mathbf{v}_j(\bar{\delta})^T = 0$  cuando  $i \neq j$ , entonces se tiene

$$\mathbf{UV} = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{u}_i(\bar{\delta}) \mathbf{v}_i(\bar{\delta})^T = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{P}_i(\bar{\delta}) = \mathbf{I}\tag{4.35}$$

Si se ordenan los valores propios de la matriz jacobiana (4.33) de tal manera que  $\lambda_1(\bar{\delta}) \leq \lambda_2(\bar{\delta}) \leq \dots \leq \lambda_{n-1}(\bar{\delta})$  y se forma una matriz  $\mathbf{A}(\bar{\delta})$  tal que

$$\mathbf{A}(\bar{\delta}) = [\mathbf{P}_1(\bar{\delta}) + \mathbf{P}_2(\bar{\delta}) + \dots + \mathbf{P}_{n-2}(\bar{\delta}) - \mathbf{P}_{n-1}(\bar{\delta})]\tag{4.36}$$

se puede construir un nuevo sistema de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\dot{\bar{\delta}} = \mathbf{A}(\bar{\delta})\mathbf{F}(\bar{\delta})\tag{4.37}$$

se puede demostrar que el sistema dinámico resultante (4.37) es apropiado para la implementación el método dinámico.

En primer lugar, es fácil verificar que cada punto de equilibrio (estable e inestable) del sistema reducido (4.31) corresponde en posición a cada uno de los puntos de equilibrio en el nuevo sistema (4.37). Esto se puede afirmar desde que un punto de equilibrio del sistema

reducido (4.31) se encuentra cuando el vector  $\mathbf{F}$  es igual a cero; sí  $\mathbf{F}$  es igual a cero en el nuevo sistema (4.37) entonces también se cumple que  $\bar{\delta}$  es igual a cero, esto es, se tiene un punto de equilibrio del nuevo sistema.

El nuevo sistema (4.37) tendría otros puntos de equilibrio cuando la matriz  $\mathbf{A}$  sea igual a cero. Sin embargo, de acuerdo con las ecuaciones (4.35) y (4.36) la matriz  $\mathbf{A}$  puede expresarse como

$$\mathbf{A}(\bar{\delta}) = \mathbf{I} - 2\mathbf{P}_{n-1}(\bar{\delta}) \quad (4.38)$$

por otro lado, debido a que la matriz  $\mathbf{P}_{n-1}$  es igual al producto de un vector columna por un vector renglón ésta no puede ser una matriz diagonal. Esto implica que la matriz  $\mathbf{A}$  nunca será igual a cero.

Hasta aquí se ha demostrado que todos los puntos de equilibrio del sistema reducido (4.31) corresponden con los puntos de equilibrio del nuevo sistema (4.37). Para verificar que este sistema es apropiado para el método dinámico, se debe comprobar que cada punto de equilibrio inestable de tipo 1 en el sistema reducido (4.31) corresponde en posición a cada punto de equilibrio estable en el nuevo sistema (4.37).

Para hacer esto es necesario conocer la matriz jacobiana del nuevo sistema (4.37), esto es

$$\mathbf{J}_n(\bar{\delta}) = \frac{\partial}{\partial \bar{\delta}} [\mathbf{A}(\bar{\delta})\mathbf{F}(\bar{\delta})] \quad (4.39)$$

se puede demostrar que la matriz jacobiana del nuevo sistema (4.39) se puede expresar como

$$\mathbf{J}_n(\bar{\delta}) = \left[ \frac{\partial \mathbf{A}(\bar{\delta})}{\partial \delta_1} \mathbf{F}(\bar{\delta}) \quad \frac{\partial \mathbf{A}(\bar{\delta})}{\partial \delta_2} \mathbf{F}(\bar{\delta}) \quad \dots \quad \frac{\partial \mathbf{A}(\bar{\delta})}{\partial \delta_{n-1}} \mathbf{F}(\bar{\delta}) \right] + \left[ \mathbf{A}(\bar{\delta}) \frac{\partial \mathbf{F}(\bar{\delta})}{\partial \bar{\delta}} \right] \quad (4.40)$$

Nuestro interés es conocer los valores propios de esta matriz evaluada en los puntos de equilibrio. Ya hemos visto que el sistema (4.37) tiene puntos de equilibrio cuando el vector  $\mathbf{F}$  es igual a cero. De aquí que sí  $\bar{\delta}^e$  es un punto de equilibrio del sistema (4.37), entonces la matriz jacobiana (4.40) evaluada en  $\bar{\delta}^e$  se reduce a

$$\mathbf{J}_n(\bar{\delta}^e) = \left[ \mathbf{A}(\bar{\delta}^e) \frac{\partial \mathbf{F}(\bar{\delta}^e)}{\partial \bar{\delta}} \right]_{\bar{\delta}^e} = \mathbf{A}(\bar{\delta}^e) \mathbf{J}(\bar{\delta}^e) \quad (4.41)$$

esto es, la matriz jacobiana del nuevo sistema (4.37) es igual al producto de la matriz  $\mathbf{A}$  evaluada en  $\bar{\delta}^e$  multiplicada por la matriz jacobiana del sistema reducido (4.32) evaluada en  $\bar{\delta}^e$ . Sustituyendo la ecuación (4.33) en (4.41) se tiene

$$\mathbf{J}_n(\bar{\delta}^e) = \mathbf{A}(\bar{\delta}^e) \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j(\bar{\delta}^e) \mathbf{P}_j(\bar{\delta}^e) \quad (4.42)$$

recurriendo a la definición de la matriz  $\mathbf{A}$  (4.36) y a las propiedades de ortogonalidad de las matrices  $\mathbf{P}_i$  (4.34), la ecuación (4.42) se puede escribir como

$$\mathbf{J}_n(\bar{\delta}^e) = \left( \sum_{j=1}^{n-2} \lambda_j(\bar{\delta}^e) \mathbf{P}_j(\bar{\delta}^e) \right) - \lambda_{n-1}(\bar{\delta}^e) \mathbf{P}_{n-1}(\bar{\delta}^e) \quad (4.43)$$

Comparando las expresiones (4.33) y (4.43) se puede determinar que los valores propios de la matriz jacobiana del nuevo sistema (4.37) son

$$\lambda_1(\bar{\delta}^e), \lambda_2(\bar{\delta}^e), \dots, \lambda_{n-2}(\bar{\delta}^e), (-\lambda_{n-1}(\bar{\delta}^e))$$

es decir, los valores propios de las matrices jacobianas de los sistemas (4.31) y (4.37) evaluadas en los puntos de equilibrio son iguales excepto por el valor propio  $n-1$ . El valor propio  $n-1$  del nuevo sistema (4.37) es igual al negativo del valor propio  $n-1$  del sistema reducido (4.31). Recuérdese que los valores propios se han ordenado de tal forma que el valor propio  $n-1$  es el mayor.

De acuerdo con lo anterior, sí un punto de equilibrio es de tipo 1 en el sistema reducido es decir, sí la matriz jacobiana tiene solo un valor propio mayor que cero, este valor propio es el  $n-1$ , entonces la matriz jacobiana del nuevo sistema (4.37) evaluada en ese punto de equilibrio tiene únicamente valores propios menores que cero. Con esto se comprueba que cada punto de equilibrio de tipo 1 en el sistema reducido (4.31) corresponde a un punto de equilibrio estable en el nuevo sistema (4.37). De esta manera se puede concluir que el sistema de ecuaciones (4.37) es un sistema apropiado para implementar el método dinámico con el objetivo de localizar puntos de equilibrio de tipo 1 en el sistema reducido del SEP (4.31).

#### 4.6.1 Comparación entre el método de Newton-Raphson y el Método Dinámico.

En esta sección se comparan los resultados obtenidos empleando los métodos de Newton-Raphson y el Método Dinámico. Para esto se selecciona el sistema de 3 máquinas síncronas utilizado en ejemplos anteriores.

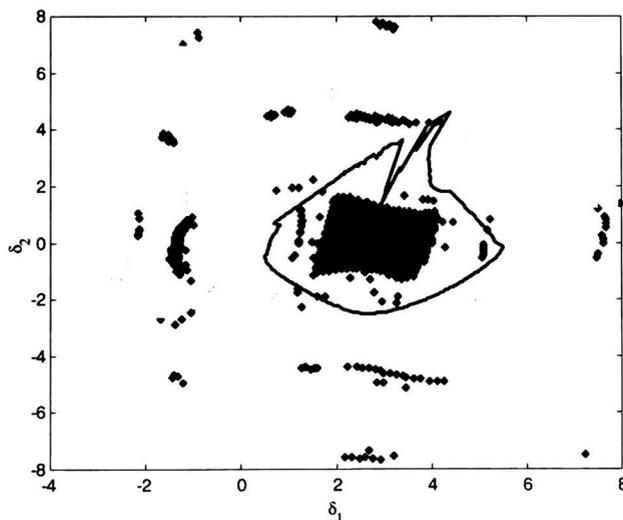


Fig. 4.13. Comparación de la región de convergencia (Newton-Raphson) y la región de atracción (Método Dinámico).

En la figura 4.13 se muestra la región de convergencia (puntos gruesos) del punto de equilibrio de tipo 1 (2.7057,0.4349) del sistema reducido (4.31) obtenida con el método de Newton-Raphson. Se muestra también la región de atracción del punto de equilibrio estable del sistema transformado ecuación (4.37), región encerrada con línea continua.

En la figura 4.13 se aprecia que la mayor parte de los puntos de la región de convergencia del Método de Newton están contenidos en la región de atracción del método dinámico. Los puntos de la región de convergencia que no se encuentran dentro de la región de atracción son puntos que pertenecen a otras regiones de atracción (fuera de nuestro interés). Se observa que en la zona de interés, la región de atracción es uniforme y de mayor tamaño. Los resultados muestran claramente la ventaja del método dinámico para localizar un punto de equilibrio inestable de tipo 1.

En la figura 4.12 se mostró el resultado obtenido con el método de Newton-Raphson para dos condiciones iniciales muy próximas entre sí. Esta figura se repite de la figura 4.14 para mayor claridad en la comparación. En la figura 4.15 se muestra el resultado obtenido con el dinámico para las mismas condiciones iniciales.

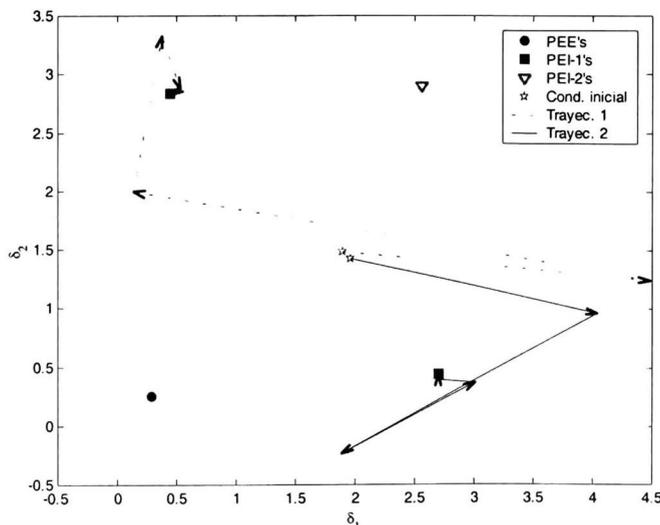
En la tabla 4.1 se indican las distancias entre las condiciones iniciales respecto de los cuatro puntos de equilibrio más próximos a las condiciones iniciales de las figuras 4.14 y 4.15.

**Tabla 4.1.** Distancias de las 2 condiciones iniciales respecto a los 4 puntos de equilibrio más cercanos.

Número	Punto de equilibrio		Distancia de la condición inicial	
	Coordenadas	Tipo	(1.9580,1.4214)	(1.8912,1.4776)
1	(0.2881,0.2551)	PEE	2.0369	2.0160
2	(2.7057,0.4349)	PEI tipo 1	1.2379	1.3231
3	(0.4451,2.8354)	PEI tipo 1	2.0709	1.9837
4	(2.5567,2.8934)	PEI tipo 2	1.5891	1.5644

En la tabla 4.1 se observa que el punto de equilibrio número 2 es el más cercano a las condiciones iniciales. Esto hace suponer que la solución para estas condiciones iniciales nos conducirían al punto de equilibrio numero 2. En la figura 4.15 se aprecia que el método dinámico encontró, para las dos condiciones iniciales, el punto de equilibrio número 2. En cambio el método de Newton-Raphson encuentra puntos de equilibrio diferentes para cada condición inicial, como se muestra en la figura 4.14.

Los resultados muestran la confiabilidad del método para encontrar el punto de equilibrio controlador y la insensibilidad ante condiciones iniciales



**Fig. 4.14.** Comportamiento del método de Newton-Raphson ante dos condiciones iniciales muy cercanas entre sí.

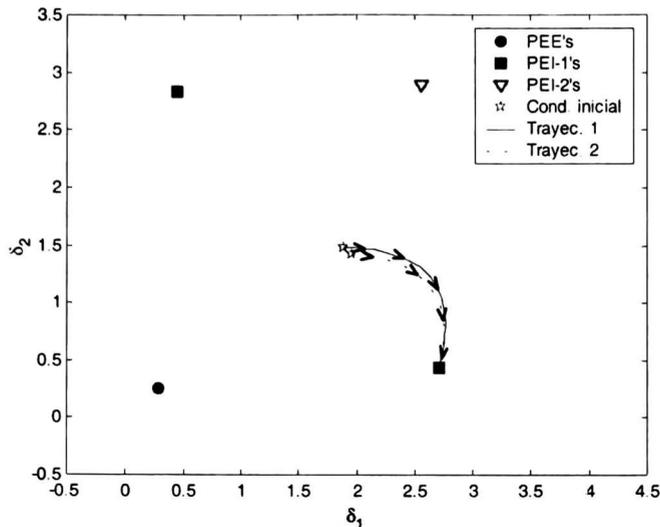


Fig. 4.15. Comportamiento del Método Dinámico ante dos condiciones iniciales muy cercanas entre sí.

Una desventaja del método dinámico sobre los métodos convencionales es que requiere de mayor esfuerzo computacional. Esta desventaja se debe a que en general la integración numérica de ecuaciones diferenciales requiere mayor esfuerzo computacional que los métodos de solución de ecuaciones algebraicas; otro factor que aumenta el esfuerzo computacional del método dinámico es la necesidad del cálculo de los valores y vectores propios del jacobiano del sistema reducido en cada paso de integración. Para el caso del ejemplo del sistema de 3 máquinas se observó lo siguiente:

- En el caso de la condición inicial (1.9580, 1.4214), con la que ambos métodos convergieron al PEI tipo 1 (2.7057, 0.4349), el método dinámico requirió 4.5 veces más tiempo para encontrar el punto de equilibrio que el método de Newton-Raphson.
- En el caso de la condición inicial (1.8912, 1.4776), con la que el método de Newton-Raphson erróneamente encontró el PEI tipo 1 (0.4451, 2.8354) y el método dinámico encontró el PEI tipo 1 (2.7057, 0.4349), el método dinámico requirió 6.5 veces más tiempo para encontrar el punto de equilibrio que el método de Newton-Raphson.

Claramente se aprecia un consumo de tiempo de cómputo mayor del método dinámico, sin embargo, a cambio de esto, el método dinámico en ambos casos encontró el punto de equilibrio más cercano a la condición inicial.

La consideración de mayor tiempo de cómputo del método dinámico nos lleva a la conclusión de que mientras no se desarrollen métodos que lo hagan competitivo en tiempo cómputo se recomienda su uso como un respaldo a los métodos convencionales y no como un sustituto de estos.

#### 4.6.2 Aplicación del Método Dinámico al método BCU

El objetivo del método dinámico es mejorar la seguridad para localizar el punto de equilibrio inestable controlador. Ya se ha visto que la región de atracción del método dinámico es más amplia que la región de convergencia del método de Newton-Raphson. Las dos regiones contienen puntos que están en una vecindad del punto de equilibrio inestable (PEI), esto implica que las dos regiones contienen algunos puntos que pertenecen a la variedad estable del PEI. Es

decir sus regiones contienen algunos puntos que pertenecen a la frontera de estabilidad de un PEE. De la misma manera, en las dos regiones existen puntos que pertenecen al PEBS (Fig. 4.4) y/o la aproximación del PEBS (Fig. 4.6).

En las figuras 4.16 y 4.17 se muestran las regiones de convergencia y de atracción de los puntos de equilibrio número 2 y 3 (tabla 4.1); también se muestran las variedades estables de estos puntos de equilibrio. En los dos casos la región de atracción contiene prácticamente a la variedad estable del punto de equilibrio correspondiente, e incluye una amplia sección de la aproximación del PEBS. Por otra parte, la región de convergencia, (de las ecuaciones algebraicas) contiene únicamente una pequeña parte de las variedades estables y de la aproximación del PEBS

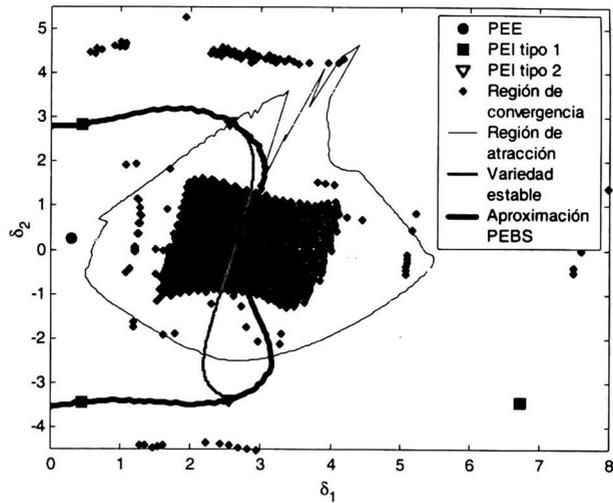


Fig. 4.16. Aplicación del Método Dinámico, PEI (2.7057,0.4349).

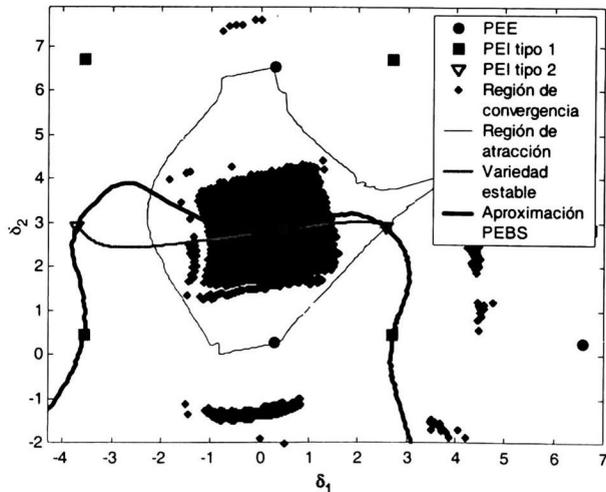


Fig. 4.17. Aplicación del Método Dinámico, PEI (0.4451,2.8354)

Debido a que la región de convergencia de los métodos de solución de ecuaciones algebraicas incluye secciones pequeñas de la aproximación del PEBS, el método BCU calcula un mínimo local en la función gradiente de la trayectoria del sistema de posfalla, para aumentar la

probabilidad de que la condición inicial para el método de solución de ecuaciones algebraicas sea parte de la región de convergencia del PEIC.

Cuando se utiliza el método dinámico no es estrictamente necesario encontrar este mínimo. Esto es, en muchos casos es posible utilizar el punto donde se encuentra el primer máximo de energía potencial como condición inicial del método dinámico. Los puntos en los que es posible utilizar este punto como condición inicial son aquellos que están contenidos en la región de atracción.

## **4.7 Modificaciones al método BCU**

Después de desarrollar un sistema de ecuaciones diferenciales apropiado para implementar el método dinámico se propone una modificación al algoritmo del método BCU convencional, agregando una rutina adicional. El objetivo de esto es asegurar la correcta localización del punto de equilibrio inestable controlador (PEIC). Antes de establecer el algoritmo propuesto mencionaremos las consideraciones asumidas.

### **4.7.1 Criterios para determinar si un punto de equilibrio calculado es el PEIC.**

#### ***4.7.1.1 Localización de un mínimo local de la función gradiente.***

Cuando se obtiene un mínimo local en la función gradiente del sistema reducido de posfalla la probabilidad de que un método convencional de solución de ecuaciones algebraicas localice en forma apropiada el PEIC es muy grande. Esto siempre y cuando el mínimo local encontrado no esté muy próximo a un punto de equilibrio estable (PEE) o a otro punto de equilibrio inestable.

#### ***4.7.1.2 Tipo de punto de equilibrio localizado.***

Como se ha demostrado el PEIC es un punto de equilibrio de tipo 1. Con este hecho, un criterio útil para determinar si se ha localizado en forma apropiada el PEIC es el análisis de valores propios en el punto de equilibrio localizado. Sí el punto encontrado no es de tipo 1, no corresponde al PEIC.

#### ***4.7.1.3 Nivel de energía del PEIC respecto del PEE.***

Sí el valor de la función de energía de un PEI es menor que la del PEE de interés entonces este punto de equilibrio no está en la frontera de estabilidad del PEE. De aquí que otro criterio para la verificación de la localización correcta del PEIC es que la función de energía evaluada en éste sea mayor que la función de energía evaluada en el PEE de interés.

#### ***4.7.1.4 El punto localizado es un punto de equilibrio.***

Este es un criterio que está relacionado con la propiedad de los métodos de solución de ecuaciones algebraicas de encontrar soluciones a las mismas. Ya se ha mencionado que bajo determinadas condiciones un método de solución podría no encontrar una solución al sistema de ecuaciones. De ahí que se deba verificar que los puntos arrojados como resultado de la aplicación de un método de solución corresponda a un punto de equilibrio.

## 4.7.2 El Método BCU Modificado

Los criterios descritos en la sección anterior y la utilización del *Método Dinámico* se han combinado para establecer algunas modificaciones al algoritmo del método BCU, sin que se pierda la esencia del mismo. Estas modificaciones se explican en esta sección. El algoritmo propuesto se implementó y se utilizó en diferentes sistemas y bajo diferentes perturbaciones. Los resultados obtenidos se presentan en el capítulo 6 de esta tesis.

### 4.7.2.1 Algoritmo computacional del Método BCU Modificado

A continuación se describe el algoritmo propuesto denominado *Método BCU Modificado*, en donde se incluyen los conceptos y consideraciones indicadas en las secciones anteriores. Se presenta por un diagrama a bloques contenidos en las figura 4.18 y 4.19. Se asume que se conoce el punto de equilibrio estable (PEE) del sistema de posfalla.

Se observa que en la primera parte del algoritmo (Fig. 4.18) éste sigue la secuencia del BCU convencional, es decir, integra las ecuaciones del sistema en la condición de falla hasta encontrar el valor máximo de la función de energía potencial. Almacena en memoria el vector de posición angular para el instante de valor máximo y el correspondiente para el instante inmediato anterior.

Con la idea de acercarse al punto de equilibrio inestable controlador, integra el sistema de ecuaciones del sistema reducido en condición de posfalla hasta encontrar un mínimo de la función gradiente. Hace el intento para la condición inicial correspondiente al máximo de la energía potencial y para la inmediatamente anterior.

Sí encuentra un mínimo local. Resuelve el sistema de ecuaciones algebraicas y verifica que corresponda a un punto de equilibrio tipo 1.

Sí no encuentra un mínimo local. Integra las ecuaciones del nuevo sistema de ecuaciones diferenciales (método dinámico). Verifica que sea un punto de equilibrio tipo 1 (Fig. 4.19).

Una vez que se conoce el PEIC del SEP para una falla específica, se puede determinar si el sistema es o no estable, comparando los valores de la función de energía evaluada en el PEIC  $V_{peic}$  y en el punto  $(\delta(t_c), \omega(t_c))$   $V_{tc}$ , donde  $t_c$  es el tiempo en el que se libera la falla. Si  $V_{peic}$  es mayor que  $V_{tc}$  el sistema será estable, en caso contrario el sistema es inestable (bajo el criterio del PEIC).

Después pueden calcularse índices o márgenes de estabilidad, fortaleza o nivel de estrés del sistema de potencia.

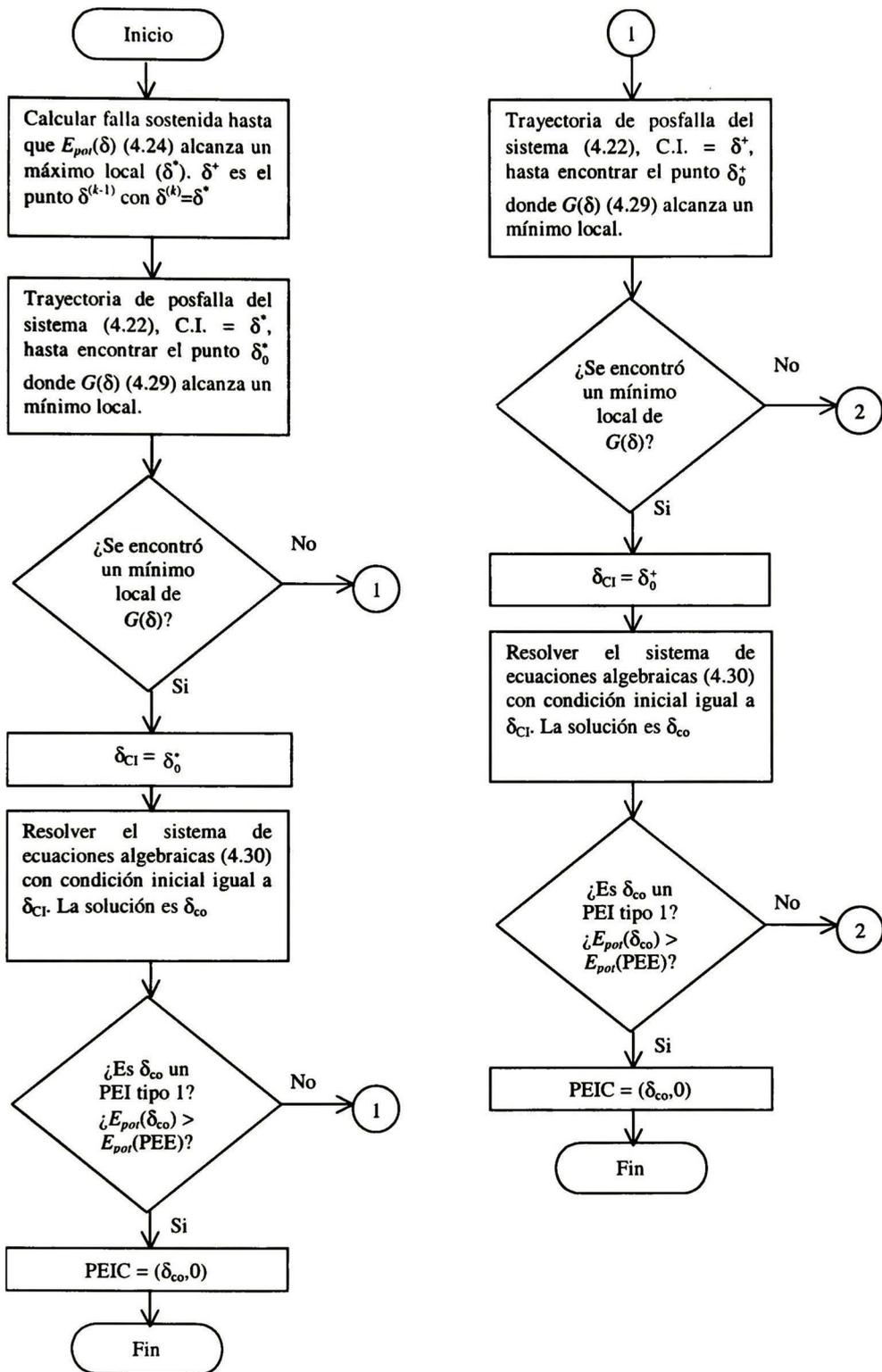


Fig. 4.18. Diagrama de bloques del algoritmo computacional del Método BCU Modificado.



## 4.8 Herramienta computacional desarrollada

En la realización de este trabajo se desarrollaron diversos programas de cómputo en los que se implementan las diferentes metodologías estudiadas en esta tesis. Las más importantes son:

- Un programa de estabilidad transitoria convencional (ESTCONV). Utiliza el modelo clásico de la máquina síncrona; tiene opción para reducir la red eléctrica a los nodos internos o conservar la estructura de la red; utiliza la regla trapezoidal para la integración de las ecuaciones dinámicas; permite la simulación de diferentes tipos de fallas; la simulación de secuencias diferentes de eventos (corto circuito, apertura de líneas, recierre de líneas).
- Un programa de análisis lineal de estabilidad (ESTLIN). Utiliza el modelo clásico de la máquina síncrona; calcula los valores y vectores propios del sistema de posfalla que resulta de alguna secuencia de eventos (corto circuito, apertura de líneas, recierre de líneas).
- Un programa para calcular el punto de equilibrio inestable controlador (PEIC) utilizando el punto de salida (CUEP\_EX); el punto de salida se calcula por medio de un proceso iterativo en el que se integran las ecuaciones del sistema de posfalla para determinar si este es estable o no; para aumentar la confiabilidad del programa se utiliza el método de Runge-Kutta-Felberg de paso variable para integrar las ecuaciones diferenciales del sistema de posfalla; permite calcular el PEIC del sistema de posfalla que resulta de alguna secuencia de eventos.
- Un programa para calcular el PEIC utilizando el método BCU convencional (CUEP\_BCU). Permite la simulación de diversos eventos así como diferentes secuencias de estos; utiliza la regla trapezoidal y el método de Runge-Kutta-Felberg para la integración de las ecuaciones diferenciales del sistema de falla, y del sistema reducido de posfalla.
- Un programa en el que se implemento el *Método BCU Modificado* para calcular el PEIC (BCUM). Utiliza el modelo clásico de la máquina síncrona; permite la simulación de diferentes eventos y secuencias de éstos; utiliza la regla trapezoidal y el método de Runge-Kutta-Felberg para la integración de las ecuaciones diferenciales; del sistema de falla, de los sistemas reducido y los modificado de posfalla.
- Un programa con el que se calculan puntos sobre la frontera de estabilidad de sistemas eléctricos de potencia (SEP) (FRONT\_SEP). Utiliza el modelo completo del SEP; encuentra la intersección de la frontera de estabilidad con un hiperplano en el que las velocidades de las máquinas toman un valor constante (definido por el usuario); es capaz de encontrar esta intersección completa cuando se tienen sistemas de orden 4 o 6 (cuando se tiene una máquina de referencia); para aumentar la eficiencia computacional, el programa cuenta con un algoritmo que define automáticamente la necesidad o no de un paso variable para la integración de las ecuaciones diferenciales.
- Un programa que calcula el punto de equilibrio inestable más cercano (PEIMC) (PEIMC\_LIU). Utiliza el modelo clásico de la máquina síncrona; calcula el PEIMC para diferentes configuraciones del sistema de posfalla, estas configuraciones se derivan de diferentes secuencias de eventos. Para calcular el PEIMC se utiliza el algoritmo propuesto por Liu et. al. en [26].

Estos programas se desarrollaron en el lenguaje Fortran 90, utilizan técnicas de matrices dispersas, memoria dinámica y listas enlazadas que permiten la simulación de sistemas multi-máquinas sin limitaciones en su dimensión (excepto la capacidad de la computadora utilizada).

Además se desarrollaron algunos programas en el lenguaje Matlab, principalmente para la visualización de resultados. Los estudios realizados en el sistema máquina – bus infinito se implementaron en Matlab.

---

# Capítulo 5

## Sistemas de estudio

En este capítulo se hace una descripción de los sistemas eléctricos de potencia que se utilizan en esta tesis. Se proporcionan los parámetros de los sistemas y una relación de los disturbios aplicados a cada uno de los sistemas.

En esta tesis se utilizan cuatro sistemas de estudio (además del sistema máquina síncrona bus infinito que se utiliza en el capítulo 2). En todos los casos y para todos los sistemas se utiliza el modelo clásico de la máquina síncrona y cargas con impedancia constante con red reducida a los nodos internos de los generadores.

### 5.1 Sistema de estudio 1

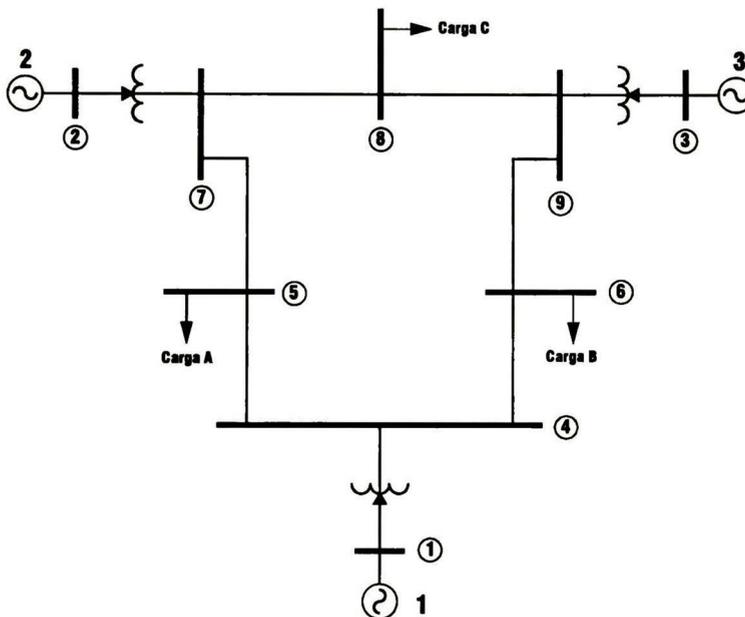


Fig. 5.1. Diagrama unifilar del sistema de estudio 1.

Este sistema, mostrado en la figura 5.1, es ampliamente utilizado en la literatura y comúnmente es conocido como el sistema reducido de la WSCC [25,27]. Está formado por 9 nodos, 3 máquinas síncronas, 3 cargas y 9 líneas de transmisión y transformadores. Este sistema, aunque pequeño, tiene una dinámica interesante y por su tamaño permite con relativa facilidad la verificación de modelos y/o algoritmos. Otra ventaja es que se pueden dar resultados gráficos que ilustran conceptos teóricos y resultados sobre estabilidad [25].

Este sistema permite la visualización gráfica de algunos conceptos teóricos que se utilizan en esta tesis, por ejemplo, el espacio de estados del sistema reducido (sección 4.3) es un espacio bidimensional. Esto permite visualizar la localización de puntos de equilibrio; la forma de las

variedades estables e inestables de los diferentes puntos de equilibrio; así como la representación de los valores de las funciones de energía en cada punto del espacio de estados.

En la tabla 5.1 se dan las diferentes perturbaciones que se aplican al sistema de estudio 1. Cada una de estas perturbaciones es una falla trifásica en el nodo indicado, que se libera desconectando los dos extremos de la línea de transmisión involucrada.

**Tabla 5.1.** Perturbaciones aplicadas al sistema de estudio 1.

Caso	Falla en el nodo	Línea desconectada	
		Nodo 1	Nodo 2
S1-1	4	4	6
S1-2	4	4	5
S1-3	5	4	5
S1-4	5	5	7
S1-5	7	5	7
S1-6	7	7	8
S1-7	6	4	6
S1-8	6	6	9
S1-9	9	6	9
S1-10	9	8	9
S1-11	8	8	9
S1-12	8	7	8

**Tabla 5.2.** Parámetros de líneas de transmisión y transformadores del sistema de estudio 1.

Nodo 1	Nodo 2	R (p.u.)	X (p.u.)	B/2 (p.u.)
1	4	0.0000	0.0576	0.0000
4	5	0.0100	0.0850	0.0880
4	6	0.0170	0.0920	0.0790
2	7	0.0000	0.0625	0.0000
7	5	0.0320	0.1610	0.1530
7	8	0.0085	0.0720	0.0745
3	9	0.0000	0.0586	0.0000
9	6	0.0390	0.1700	0.1790
9	8	0.0119	0.1008	0.1045

En la tabla 5.2 se dan los parámetros de las líneas de transmisión y de los transformadores del sistema de estudio 1. Los parámetros de las máquinas síncronas se muestran en la tabla 5.3. Se consideran coeficientes de amortiguamiento uniforme tal que  $D_i/2H_i = 0.5$ . Finalmente, en las tablas 5.4 y 5.5 se indican las condiciones de operación en estado estable del sistema, correspondiente al caso base de operación que se utiliza en esta tesis.

**Tabla 5.3.** Parámetros de máquinas síncronas del sistema de estudio 1.

Máquina	Nodo	$X'_d$ (p.u.)	H (seg.)	D
1	1	0.0608	23.64	23.64
2	2	0.1198	6.40	6.40
3	3	0.1813	3.01	3.01

**Tabla 5.4.** Condiciones de estado estable en el caso base de operación del sistema de estudio 1 (máquinas síncronas).

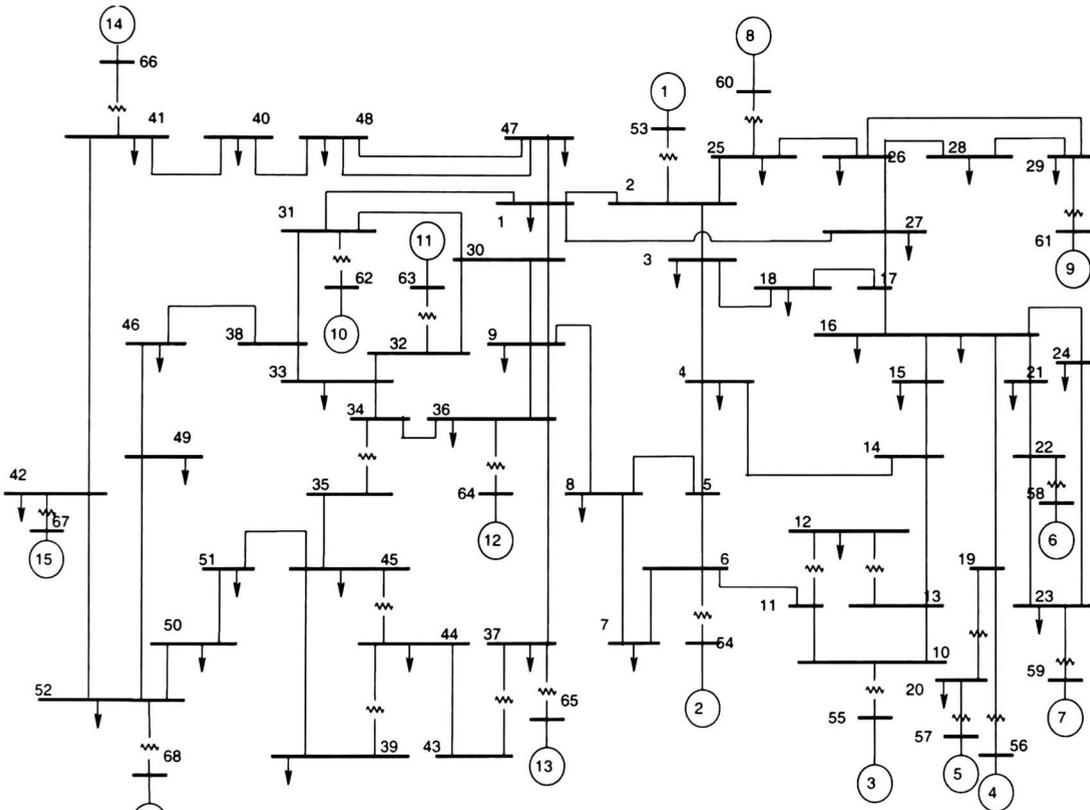
Máquina	$T_m$ (p.u.)	$E'_q$ (p.u.)	$\delta$ (rad)
1	0.71641	1.05660	0.39648
2	1.63000	1.05020	0.34438
3	0.85000	1.01700	0.22980

**Tabla 5.5.** Condiciones de estado estable en el caso base de operación del sistema de estudio 1 (red eléctrica).

Nodo	$ V $ (p.u.)	$\phi$ (p.u.)	$P_G$ (MW)	$Q_G$ (MW)	$P_L$ (MW)	$Q_L$ (MW)
1	1.04000	0.00000	71.6410	27.04598	0.000	0.000
2	1.02500	9.28001	163.000	6.65366	0.000	0.000
3	1.02500	4.66475	85.000	-10.85967	0.000	0.000
4	1.02579	-2.21679	0.000	0.000	0.000	0.000
5	0.99563	-3.98881	0.000	0.000	125.00	50.000
6	1.01265	-3.68740	0.000	0.000	90.000	30.000
7	1.02577	3.71970	0.000	0.000	0.000	0.000
8	1.01588	0.72754	0.000	0.000	100.00	35.000
9	1.03235	1.96672	0.000	0.000	0.000	0.000

## 5.2 Sistema de estudio 2

Es un sistema de 16 generadores y 68 nodos, su representación esquemática de muestra en la figura 5.2. Es un modelo de orden reducido del sistema interconectado de Nueva Inglaterra y Nueva York. Este sistema presenta un comportamiento con características físicas reales [28].



**Fig. 5.2.** Diagrama unifilar del sistema de estudio 2.

Este sistema se utiliza principalmente para validar los resultados que se obtienen cuando se utiliza el método BCU modificado (implementado en un programa de computadora digital, llamado BCUM) para estimar la estabilidad de un sistema de potencia. Esta validación se realiza comparando los tiempos críticos de liberación de falla obtenidos con el programa BCUM con los obtenidos con un programa convencional de estabilidad transitoria (ESTCONV).

En la tabla 5.6 se indican las perturbaciones que se aplican al sistema de estudio 2. Cada una de estas perturbaciones es una falla trifásica que se libera desconectando los dos extremos de una línea de transmisión.

**Tabla 5.6.** Perturbaciones aplicadas al sistema de estudio 2.

Caso	Falla en el nodo	Línea desconectada	
		Nodo 1	Nodo 2
S2-1	4	4	5
S2-2	15	15	16
S2-3	9	9	30
S2-4	1	1	47
S2-5	33	33	38
S2-6	16	16	17
S2-7	10	10	13
S2-8	5	5	8

En la tabla 5.7 se dan los parámetros de las máquinas síncronas. Se incluyen coeficientes de amortiguamiento uniforme de tal manera que  $D_i/2H_i = 0.15$ . Finalmente, en las tablas 5.8 y 5.9 se indican las condiciones de estado estable del sistema de estudio 2 en el caso base de operación que se utiliza en esta tesis.

**Tabla 5.7.** Parámetros de máquinas síncronas del sistema de estudio 2.

Máquina	Nodo	$X'_d$ (p.u.)	H (seg.)	D
1	53	0.03100	42.000	12.600
2	54	0.06970	30.200	9.060
3	55	0.05310	35.800	10.740
4	56	0.04360	28.600	8.580
5	57	0.06600	26.000	7.800
6	58	0.05000	34.800	10.440
7	59	0.04900	26.400	7.920
8	60	0.05700	24.300	7.290
9	61	0.05700	34.500	10.350
10	62	0.04570	31.000	9.300
11	63	0.01800	28.200	8.460
12	64	0.03100	92.300	27.690
13	65	0.00550	248.000	74.400
14	66	0.00285	300.000	90.000
15	67	0.00285	300.000	90.000
16	68	0.00710	225.000	67.500

**Tabla 5.8.** Condiciones de estado estable en el caso base de operación del sistema de estudio 2 (máquinas síncronas).

Máquina	$T_m$ (p.u.)	$E'_q$ (p.u.)	$\delta$ (rad)
1	2.5000	1.0818	0.2580
2	5.4500	1.1767	0.5872
3	6.5000	1.1455	0.5985
4	6.3200	1.0798	0.5641
5	5.0520	1.1646	0.5666
6	7.0000	1.2018	0.6360
7	5.6000	1.1381	0.6226
8	5.4000	1.0726	0.5695
9	8.0000	1.1199	0.7713

Máquina	Tm (p.u.)	E' <sub>q</sub> (p.u.)	δ (rad)
10	5.0000	1.0377	0.4974
11	10.0000	1.0130	0.4989
12	13.5000	1.1668	0.4458
13	35.9140	1.0765	0.1825
14	17.8500	1.0031	0.8540
15	10.0000	1.0023	0.7228
16	40.0000	1.0710	1.0630

Tabla 5.9. Condiciones de estado estable en el caso base de operación del sistema de estudio 2 (red eléctrica).

Nodo	V  (p.u.)	φ (p.u.)	P <sub>G</sub> (MW)	Q <sub>G</sub> (MW)	P <sub>L</sub> (MW)	Q <sub>L</sub> (MW)
1	1.05905	6.61504	0.000	0.000	252.700	118.560
2	1.05156	8.43377	0.000	0.000	0.000	0.000
3	1.03275	5.43174	0.000	0.000	322.000	2.000
4	1.00587	4.31406	0.000	0.000	500.000	184.000
5	1.00722	5.25379	0.000	0.000	0.000	0.000
6	1.00932	5.93506	0.000	0.000	0.000	0.000
7	.99955	3.66438	0.000	0.000	234.000	84.000
8	.99903	3.12211	0.000	0.000	522.000	177.000
9	1.03910	2.57916	0.000	0.000	104.000	125.000
10	1.01842	8.45339	0.000	0.000	0.000	0.000
11	1.01410	7.59635	0.000	0.000	0.000	0.000
12	1.05534	7.61988	0.000	0.000	9.000	88.000
13	1.01570	7.78542	0.000	0.000	0.000	0.000
14	1.01342	6.23814	0.000	0.000	0.000	0.000
15	1.01708	6.14229	0.000	0.000	320.000	153.000
16	1.03343	7.67887	0.000	0.000	329.000	32.000
17	1.03650	6.58528	0.000	0.000	0.000	0.000
18	1.03376	5.71984	0.000	0.000	158.000	30.000
19	1.05008	12.27382	0.000	0.000	0.000	0.000
20	.99043	10.84105	0.000	0.000	680.000	103.000
21	1.03252	10.31368	0.000	0.000	274.000	115.000
22	1.05013	14.99651	0.000	0.000	0.000	0.000
23	1.04497	14.70845	0.000	0.000	248.000	85.000
24	1.03863	7.85214	0.000	0.000	309.000	-92.000
25	1.05981	9.69768	0.000	0.000	224.000	47.000
26	1.05608	8.19879	0.000	0.000	139.000	17.000
27	1.04340	6.31424	0.000	0.000	281.000	76.000
28	1.05196	11.33284	0.000	0.000	206.000	28.000
29	1.05089	13.97004	0.000	0.000	284.000	27.000
30	1.05357	6.06860	0.000	0.000	0.000	0.000
31	1.05729	8.63027	0.000	0.000	0.000	0.000
32	1.05107	10.95643	0.000	0.000	0.000	0.000
33	1.05625	7.47275	0.000	0.000	112.000	0.000
34	1.06524	2.53716	0.000	0.000	0.000	0.000
35	1.01388	2.53287	0.000	0.000	0.000	0.000
36	1.04226	-.84750	0.000	0.000	102.000	-19.460
37	1.02897	-6.80461	0.000	0.000	6000.000	300.000
38	1.05583	8.67706	0.000	0.000	0.000	0.000
39	1.00566	-8.44233	0.000	0.000	267.000	12.600
40	1.06774	15.21642	0.000	0.000	65.630	23.530
41	.99943	44.48918	0.000	0.000	1000.000	250.000
42	.99910	38.92452	0.000	0.000	1150.000	250.000

Nodo	V  (p.u.)	$\phi$ (p.u.)	P <sub>G</sub> (MW)	Q <sub>G</sub> (MW)	P <sub>L</sub> (MW)	Q <sub>L</sub> (MW)
43	1.01466	-7.60649	0.000	0.000	0.000	0.000
44	1.01405	-7.63663	0.000	0.000	267.550	4.840
45	1.01784	2.52513	0.000	0.000	208.000	21.000
46	1.03244	9.64618	0.000	0.000	150.700	28.500
47	1.07379	7.36279	0.000	0.000	203.120	32.590
48	1.07647	9.27916	0.000	0.000	241.200	2.200
49	1.01174	12.88146	0.000	0.000	164.000	29.000
50	1.01193	19.33134	0.000	0.000	100.000	-147.000
51	1.02207	6.52260	0.000	0.000	337.000	-122.000
52	.99347	38.59213	0.000	0.000	2470.000	123.000
53	1.04500	10.85281	249.99998	115.47631	0.000	0.000
54	.98000	14.41068	545.00000	184.27623	0.000	0.000
55	.98300	16.44026	650.00000	198.74695	0.000	0.000
56	.99700	17.49242	631.99994	107.08569	0.000	0.000
57	1.01100	16.01390	505.20001	162.33504	0.000	0.000
58	1.05000	20.33572	700.00000	219.75182	0.000	0.000
59	1.06300	22.56440	560.00000	98.51274	0.000	0.000
60	1.03000	16.45325	539.99999	.30205	0.000	0.000
61	1.02500	20.78822	800.00004	4.91586	0.000	0.000
62	1.01000	15.90391	499.99995	6.05287	0.000	0.000
63	1.00000	18.34693	999.99990	-17.27762	0.000	0.000
64	1.01560	4.86165	1350.0001	249.14254	0.000	0.000
65	1.01100	.00000	3591.4191	875.42934	0.000	0.000
66	1.00000	46.02434	1785.0000	62.17800	0.000	0.000
67	1.00000	39.78476	1000.0000	67.18202	0.000	0.000
68	1.00000	45.52974	4000.0000	460.02742	0.000	0.000

### 5.3 Sistema de estudio 3

Este sistema, mostrado en la figura 5.3, es una versión modificada del sistema de estudio 1 [27]. Las modificaciones adoptadas son:

- Cambio en el nivel de voltaje de la red de transmisión de 230 kV a 161 kV para evitar problemas de potencia reactiva; los valores de R y X de las líneas de transmisión en por unidad son iguales.
- Se agrega un cuarto generador, conectado al sistema original a través de un transformador elevador y dos líneas de transmisión en paralelo.
- Modificación en los niveles de generación y en las potencias de las cargas (ver tabla 5.14).

En la tabla 5.10 se proporcionan las perturbaciones que se aplican al sistema de estudio 3. Cada una de estas perturbaciones es una falla trifásica que se libera desconectando los dos extremos de una línea de transmisión.

Tabla 5.10. Perturbaciones aplicadas al sistema de estudio 3.

Caso	Falla en el nodo	Línea desconectada	
		Nodo 1	Nodo 2
S3-1	7	7	5
S3-2	4	4	5

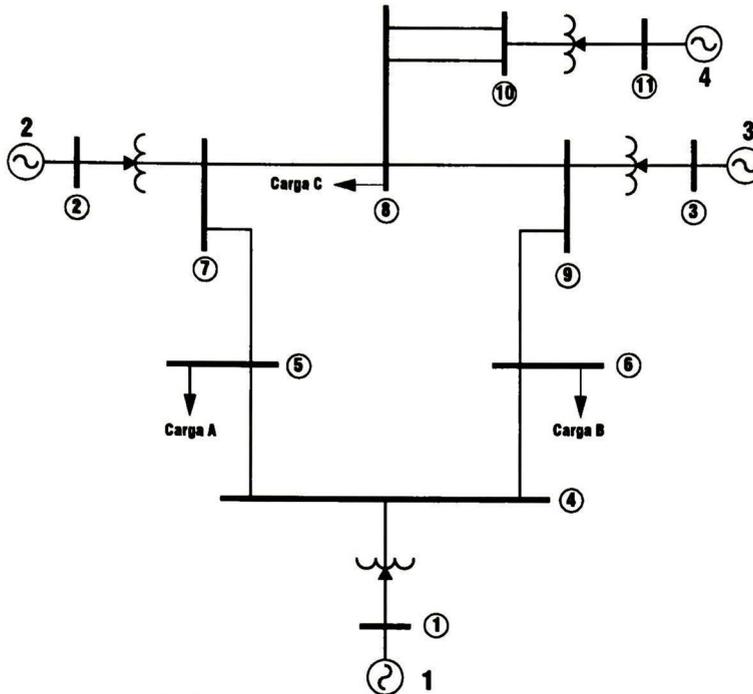


Fig. 5.3. Diagrama unifilar del sistema de estudio 3.

La tabla 5.11 muestra los parámetros de las máquinas síncronas. Se han introducido coeficientes de amortiguamiento uniforme de tal manera que  $D_i/2H_i = 0.5$ .

Tabla 5.11. Parámetros de máquinas síncronas del sistema de estudio 3.

Máquina	Nodo	$X'_d$ (p.u.)	H (seg.)	D
1	1	0.0608	23.64	23.64
2	2	0.1198	6.40	6.40
3	3	0.1813	3.01	3.01
4	11	0.1198	6.40	6.40

La tabla 5.12 muestra los parámetros de las líneas de transmisión y de transformadores del sistema de estudio 1.

Tabla 5.12. Parámetros de líneas de transmisión y transformadores del sistema de estudio 3.

Nodo 1	Nodo 2	R (p.u.)	X (p.u.)	B/2 (p.u.)
1	4	0.00000	0.05760	0.00000
4	6	0.01700	0.09200	0.01900
6	9	0.03900	0.17000	0.04300
3	9	0.00000	0.05860	0.00000
8	9	0.01190	0.10080	0.02510
7	8	0.00850	0.07200	0.01790
2	7	0.00000	0.06250	0.00000
5	7	0.03200	0.16100	0.03670
4	5	0.01000	0.08500	0.02110
8	10	0.03570	0.03024	0.07530
8	10	0.03570	0.03024	0.07530
11	10	0.00000	0.06000	0.00000

Finalmente, las tablas 5.13 y 5.14 da las condiciones de estado estable del sistema en el caso base de operación que se utiliza en esta tesis.

**Tabla 5.13.** Condiciones de estado estable en el caso base de operación del sistema de estudio 3 (máquinas síncronas).

Máquina	$T_m$ (p.u.)	$E'_q$ (p.u.)	$\delta$ (rad)
1	2.27180	1.10560	0.12042
2	1.60000	1.09410	0.23179
3	1.00000	1.11120	0.13987
4	1.60000	1.05380	0.22053

**Tabla 5.14.** Condiciones de estado estable en el caso base de operación del sistema de estudio 3 (red eléctrica).

Nodo	$ V $ (p.u.)	$\phi$ (p.u.)	$P_G$ (MW)	$Q_G$ (MW)	$P_L$ (MW)	$Q_L$ (MW)
1	1.04000	.00000	227.1841	98.50615	.0000	.00000
2	1.03500	3.53541	160.0000	37.41890	.0000	.00000
3	1.03500	-1.05531	100.0000	35.59667	.0000	.00000
4	.99344	-7.27637	.0000	.00000	.0000	.00000
5	.96120	-11.93453	.0000	.00000	200.0000	30.00000
6	.94130	-14.34501	.0000	.00000	230.0000	37.00000
7	1.01700	-1.91607	.0000	.00000	.0000	.00000
8	1.01012	-3.89714	.0000	.00000	200.0000	30.00000
9	1.01642	-4.24853	.0000	.00000	.0000	.00000
10	1.03795	-2.61354	.0000	.00000	.0000	.00000
11	1.03500	2.51336	160.0000	2.06803	.0000	.00000

## 5.4 Sistema de estudio 4

Este es un sistema de prueba propuesto por el Subcomité de Desempeño de Sistemas Dinámicos de la IEEE para realizar pruebas de estabilidad transitoria [29]. Consta de 50 generadores, 145 nodos, 453 líneas de transmisión y transformadores. Este sistema es una versión reducida de un sistema localizado en Norte América, esta versión reducida conserva un comportamiento con características reales [16].

En la tabla 5.15 se muestran las perturbaciones que se aplican al sistema de estudio 4. Cada una de estas perturbaciones es una falla trifásica que se libera desconectando los dos extremos de una línea de transmisión.

**Tabla 5.15.** Perturbaciones aplicadas al sistema de estudio 4.

Caso	Falla en el nodo	Línea desconectada	
		Nodo 1	Nodo2
S4-1	7	7	6
S4-2	95	95	138
S4-3	112	112	69
S4-4	115	115	116
S4-5	100	100	72
S4-6	101	101	73
S4-7	96	96	73
S4-8	108	108	75
S4-9	91	91	74
S4-10	103	103	59
S4-11	135	135	138
S4-12	90	90	92
S4-13	109	109	73

Caso	Falla en el nodo	Línea desconectada	
		Nodo 1	Nodo2
S4-14	33	33	39
S4-15	33	33	49
S4-16	59	59	72
S4-17	6	6	1
S4-18	6	6	10
S4-19	67	67	66
S4-20	73	73	74

La tabla 5.16 presenta las condiciones de estado estable de cada generador del sistema en el caso base de operación que se utiliza en esta tesis.

**Tabla 5.16.** Condiciones de estado estable en el caso base de operación del sistema de estudio 4 (máquinas síncronas).

Máquina	$T_m$ (p.u.)	$E'_q$ (p.u.)	$\delta$ (rad)
1	7.000	1.103	0.032
2	20.000	1.094	0.375
3	16.200	1.138	0.162
4	10.800	1.121	0.168
5	7.000	1.137	0.038
6	20.000	1.096	0.276
7	0.510	1.293	-0.033
8	14.860	1.182	0.062
9	2.502	1.077	0.036
10	0.470	1.018	0.060
11	0.700	1.134	-0.072
12	6.730	1.199	0.290
13	0.220	0.959	0.181
14	0.640	1.022	-0.015
15	3.000	1.065	0.133
16	1.310	0.966	0.483
17	0.600	1.139	0.013
18	1.400	1.111	0.117
19	4.260	1.006	0.357
20	2.000	1.017	0.159
21	1.700	1.119	0.134
22	3.109	1.203	0.038
23	20.400	1.117	0.074
24	1.350	1.016	0.081
25	8.000	1.051	-0.145
26	0.520	0.888	-0.280
27	3.000	1.192	0.029
28	24.930	1.054	-0.306
29	27.130	1.058	-0.328
30	26.270	1.035	-0.313
31	42.200	1.021	-0.341
32	89.540	1.023	-1.107
33	29.970	1.045	-0.393
34	10.090	1.020	-0.048
35	30.050	1.011	-0.070
36	129.630	1.028	-0.768

<b>Máquina</b>	<b>Tm (p.u.)</b>	<b>E<sub>q</sub>' (p.u.)</b>	<b>δ (rad)</b>
37	59.370	1.076	-0.941
38	283.000	1.050	-0.486
39	30.950	1.053	-0.169
40	206.260	1.067	-0.221
41	59.820	1.119	0.458
42	519.500	1.097	0.033
43	120.680	1.078	-1.315
44	568.340	1.057	-0.220
45	231.230	1.071	-0.483
46	379.110	1.065	-0.213
47	244.490	1.171	-0.221
48	52.540	1.086	-0.218
49	113.970	1.009	-0.192
50	141.190	1.129	0.216

---

# Capítulo 6

## Aplicaciones

En este capítulo se presentan los resultados de la aplicación del Método BCU Modificado en el estudio de estabilidad transitoria en sistemas eléctricos de potencia. Para esto se hacen estudios en cuatro sistemas eléctricos de diferentes características, descritos en el capítulo 5 de esta tesis.

En la sección 6.1 se analizan los resultados obtenidos en la aplicación del Método BCU Modificado en el sistema de estudio 1. Primero se validan los modelos y el algoritmo desarrollado, para esto se comparan los tiempos críticos de liberación que se obtienen al aplicar el Método BCU Modificado con los que se obtienen al utilizar un programa de estabilidad transitoria convencional. Después se presentan los resultados obtenidos aplicando el Método BCU convencional [19,22,30], se analizan en detalle los resultados de los casos problemáticos o difíciles y se demuestra que el Método BCU Modificado propuesto en esta tesis los resuelve adecuadamente.

En la sección 6.2 se aplica el Método BCU Modificado al sistema de estudio 2. De nuevo primero se validan los algoritmos desarrollados en un sistema de dimensión mayor dimensiones. Se comparan los resultados obtenidos con el Método BCU Modificado con los obtenidos con el Método PEBS [31,32,33]. Además se ofrece un ejemplo de aplicación del Método BCU Modificado, en un caso real, para estimar la estabilidad del sistema ante diferentes perturbaciones. Se determinan márgenes de estabilidad del sistema ante estas perturbaciones [16].

En la sección 6.3 se hace un análisis de la magnitud de la región de estabilidad ante diferentes condiciones de operación. Se proponen índices que ayudan a determinar el nivel de estrés de operación del sistema eléctrico y su relación con la dinámica del sistema. En este análisis se utilizan el sistema máquina síncrona bus infinito utilizado en el capítulo 2 de esta tesis y el sistema de estudio 3.

En la sección 6.4 se aplica el Método BCU Modificado en el sistema de estudio 4. Este sistema está formado por 50 máquinas síncronas y tiene características reales. Primero se valida el Método BCU Modificado. Se analiza el desempeño del método ante un sistema de dimensiones relativamente grande, se dan índices de estabilidad y se establecen relaciones de estos con la magnitud de la región de estabilidad ante variaciones en la condición de operación del sistema.

### **6.1 Resultados obtenidos en el sistema de estudio 1**

En esta sección se utiliza el sistema de estudio 1, descrito en la sección 5.1, para analizar en forma detallada el algoritmo propuesto como una modificación del Método BCU, sección 4.7.2. El tamaño de este sistema (3 generadores) corresponde a un sistema reducido (4.22) de dimensión dos, es apropiado para un análisis en detalle en el dominio del tiempo y en el espacio de estados. La formulación del sistema reducido, permite la visualización gráfica de la frontera de

estabilidad, de las trayectorias del sistema, de la función de energía, de la función gradiente y del PEBS.

### 6.1.1 Validación de los resultados obtenidos con el Método BCU Modificado

Se analiza la estabilidad del sistema 1, aplicando cortos circuitos trifásicos en cada nodo. Para validar los resultados obtenidos al aplicar el algoritmo del Método BCU Modificado se utilizó un programa convencional de estabilidad transitoria en el dominio del tiempo (ESTCONV). Con este programa se calcularon los tiempos críticos de liberación (TCL) para cada una de las perturbaciones indicadas. Estos TCL se utilizan como referencia de comparación para establecer la precisión con la que se estima la estabilidad del sistema al utilizar un método directo tipo Lyapunov. En la tabla 6.1 se presentan los TCL obtenidos con el programa ESTCONV. Para los 12 casos de estudio.

**Tabla 6.1.** Tiempos críticos de liberación encontrados con el programa ESTCONV (sistema de estudio 1).

Caso	TCL (seg.)
S1-1	0.329
S1-2	0.338
S1-3	0.441
S1-4	0.354
S1-5	0.179
S1-6	0.194
S1-7	0.493
S1-8	0.430
S1-9	0.231
S1-10	0.249
S1-11	0.325
S1-12	0.295

#### 6.1.1.1 Validación del Método del PEIC

Para apreciar las bondades de las modificaciones propuestas al Método BCU, primero se analizarán los resultados obtenidos con el Método PEIC (sección 2.6.2). Para esto se desarrolló e implementó un programa de computo que encuentra el PEIC verdadero. Este programa al que se le llamó CUEP\_EX, obtiene el punto de salida exacto de la trayectoria de falla del sistema reducido [22] y a partir de este determina el PEIC. Además, calcula el tiempo crítico de liberación correspondiente al método del PEIC. Este TCL es el tiempo en el que la función de energía del sistema (3.83) evaluada sobre la trayectoria de falla alcanza un valor mayor o igual a esta función evaluada en el PEIC. Los resultados obtenidos con el método PEIC (programa CUEP\_EX) y los tiempos de liberación obtenidos por el programa de estabilidad convencional (programa ESTCONV) se muestran en la tabla 6.2. En donde se indican el caso en estudio, coordenadas de los PEIC, la función de energía evaluada en el PEIC, el TCL calculado con el PEIC y el TCL encontrado con el programa ESTCONV.

Se observa, de la tabla 6.2, que la diferencia entre los tiempos críticos calculados es muy cercana, la diferencia máxima es de 0.083 seg. (S1-12) y la mínima de 0.001 seg. (S1-3). En todos los casos, con excepción del S1-3 los resultados obtenidos por el PEIC son conservativos. La sobreestimación del caso S1-3 es de 0.001 seg. y es atribuida a que la función de energía no es exacta. Recuérdese que el término dependiente de la trayectoria se ha aproximado utilizando una trayectoria lineal (sección 3.3.1). La conclusión es que el algoritmo y programa del PEIC en la estimación de la estabilidad del sistema de estudio 1 es suficientemente precisa.

**Tabla 6.2.** PEIC encontrados con el programa CUEP\_EX (sistema de estudio 1).

Caso	PEIC				ESTCONV
	$\delta_1$ (rad)	$\delta_2$ (rad)	$E(\delta_n, \hat{\omega}_n)$	TCL (seg.)	TCL (seg.)
S1-1	2.8169	2.6075	2.3878	0.323	0.329
S1-2	2.9461	2.7139	2.4097	0.325	0.338
S1-3	2.9461	2.7139	2.4097	0.444	0.441
S1-4	2.6476	2.2305	0.8956	0.346	0.354
S1-5	2.6476	2.2305	0.8956	0.174	0.179
S1-6	2.4783	0.1374	1.1279	0.171	0.194
S1-7	2.8169	2.6075	2.3877	0.478	0.493
S1-8	2.4818	2.4661	1.2180	0.419	0.430
S1-9	2.4818	2.4661	1.2180	0.209	0.231
S1-10	0.4450	2.8361	2.0404	0.225	0.249
S1-11	2.7052	0.4349	1.8716	0.271	0.325
S1-12	2.4783	0.1374	1.1279	0.212	0.295

### 6.1.1.2 Validación del Método BCU Modificado

A continuación se analizan los métodos BCU convencional (sección 4.2) y el método BCU modificado (sección 4.7.2). Los resultados obtenidos por el método BCU se muestran en la tabla 6.3. Se observa que en los primeros 8 casos el método BCU convencional coincide con los obtenidos por el método del PEIC. Sin embargo en los últimos cuatro casos los resultados son incorrectos. En los casos S1-9, S1-11 y S1-12 no se encontró un mínimo local de la función gradiente evaluada a lo largo de la trayectoria del sistema reducido de posfalla, esto hace que el sistema de ecuaciones algebraicas converge a un punto de equilibrio fuera de la región de atracción de interés. En el caso S1-10 si se encontró un mínimo local en la función gradiente pero la solución del sistema de ecuaciones algebraicas convergió a un punto de equilibrio inestable de tipo 2.

La trayectoria de falla del sistema se obtiene empleando integración numérica al sistema de ecuaciones (3.27), (3.28), con las modificaciones apropiadas en la red eléctrica. Para la integración de estas ecuaciones se utilizó la regla trapezoidal con un paso de integración fijo de un milisegundo.

**Tabla 6.3.** Puntos de equilibrio localizados por el método BCU (sistema de estudio 1).

Caso	Punto de equilibrio		Tipo	$E(\delta_n, \hat{\omega}_n)$	TCL (seg.)
	$\delta_1$ (rad)	$\delta_2$ (rad)			
S1-1	2.8169	2.6075	1	2.3878	0.323
S1-2	2.9461	2.7139	1	2.4097	0.325
S1-3	2.9461	2.7139	1	2.4097	0.444
S1-4	2.6476	2.2305	1	0.8956	0.346
S1-5	2.6476	2.2305	1	0.8956	0.174
S1-6	2.4783	0.1374	1	1.1279	0.171
S1-7	2.8169	2.6075	1	2.3877	0.478
S1-8	2.4818	2.4661	1	1.2180	0.419
S1-9	6.7736	6.7666	PEE	-7.0316	< 0.00
S1-10	2.5569	2.8937	2	3.1112	0.270
S1-11	6.5711	0.2550	PEE	-4.4343	< 0.00
S1-12	6.7928	0.0434	PEE	-7.0485	< 0.00

Los resultados obtenidos con el método BCU modificado coinciden con los del método BCU convencional para los primeros 8 casos. Esto se explica por que el BCU convencional esta contenido en el BCU modificado. Cuando el método convencional da resultados satisfactorios también lo hace el BCU modificado. Los resultados para los últimos cuatro casos cuando se aplica el BCU modificado se muestran en la tabla 6.4. Se observa que el método BCU modificado obtuvo los puntos de equilibrio inestables tipo 1 en los cuatro casos. Sin embargo, en el caso S1-9 el punto de equilibrio localizado no es el PEIC. De acuerdo con el valor de la función de energía este punto de equilibrio no está contenido en la frontera de estabilidad del PEE del sistema reducido de posfalla. En los otros tres casos S1-10 al S1-12 el método BCU modificado localizó exitosamente el PEIC.

**Tabla 6.4.** Puntos de equilibrio localizados por el método BCU modificado (sistema de estudio 1).

Caso	Punto de equilibrio		Tipo	$E(\delta_n, \hat{\omega}_n)$	TCL (seg.)
	$\delta_1$ (rad)	$\delta_2$ (rad)			
S1-9	2.4818	8.7493	1	-2.3973	< 0.00
S1-10	0.4450	2.8361	1	2.0404	0.225
S1-11	2.7052	0.4349	1	1.8716	0.271
S1-12	2.4783	0.1374	1	1.1279	0.212

En las siguientes secciones se analizan detalladamente dos casos, uno corresponde al caso exitoso en la aplicación de BCU modificado, caso S1-11 y otro donde se presentaron problemas con el método, caso S1-9. Los casos S1-10 y S1-12 corresponden a situaciones similares al caso S1-11.

## 6.1.2 Análisis de los casos problemáticos en la aplicación del Método BCU convencional y que fue resuelto con el BCU modificado.

### 6.1.2.1 Análisis del caso S1-11

El caso S1-11 corresponde a una falla aplicada en el nodo 8 y que se libera abriendo la línea conectada entre los nodos 8-9 después de 0.15 seg. En la figura 6.1 se muestra una sección de la frontera de estabilidad del PEE de interés del sistema reducido de posfalla en el caso S1-11, este punto de equilibrio tienen las coordenadas (0.2881,0.2550). También se muestra la proyección de la trayectoria de falla (obtenida con el modelo completo) sobre el subespacio de estados  $(\delta_1, \delta_2)$ . Claramente se observa que la trayectoria de falla sostenida cruza la frontera de estabilidad del PEE de posfalla por un punto contenido en la variedad estable del punto de equilibrio inestable de tipo 1 (2.7052, 0.4349). Así, de acuerdo con la definición del PEIC, el punto de equilibrio (2.7052, 0.4349) es el PEIC para la falla correspondiente al caso S1-11. Esto coincide con los resultados obtenidos con el programa CUEP\_EX, mostrados en la tabla 6.2.

La función de energía potencial evaluada a lo largo de la trayectoria de falla sostenida se muestra en la figura 6.2. En esta figura se han indicado los puntos donde se alcanza el primer máximo de la función de energía potencial ( $\delta^*$ ) y el punto correspondiente al tiempo de un paso de integración inmediatamente anterior a  $\delta^*$  ( $\delta^+$ ). Los puntos  $\delta^*$  y  $\delta^+$  se utilizan como condición inicial del sistema reducido de posfalla y se han señalado en la figura 6.1.

Se observa que los puntos  $\delta^*$  y  $\delta^+$  están muy próximos a la frontera de estabilidad del PEE. Las trayectorias de posfalla se muestran en la figura 6.1. La función gradiente (4.29) de las trayectorias del sistema reducido de posfalla que se originan en los puntos  $\delta^*$  y  $\delta^+$  se muestran en

la figura 6.3. De estas se observa que aunque las trayectorias de posfalla inician en un punto cercano a la frontera de estabilidad la función gradiente de las trayectorias no tiene un mínimo local

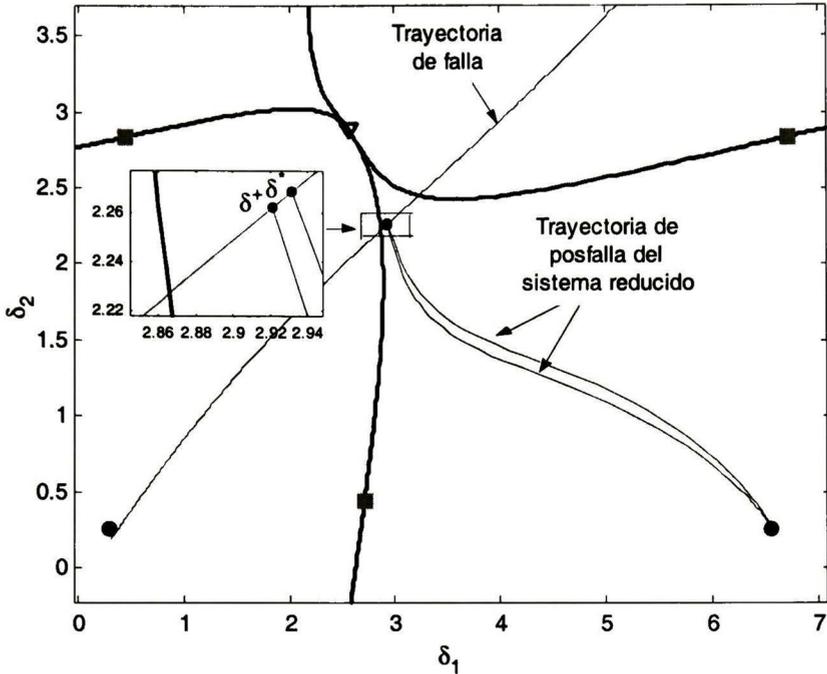


Fig. 6.1. Trayectorias de falla y posfalla utilizadas por el método BCU (caso S1-11).

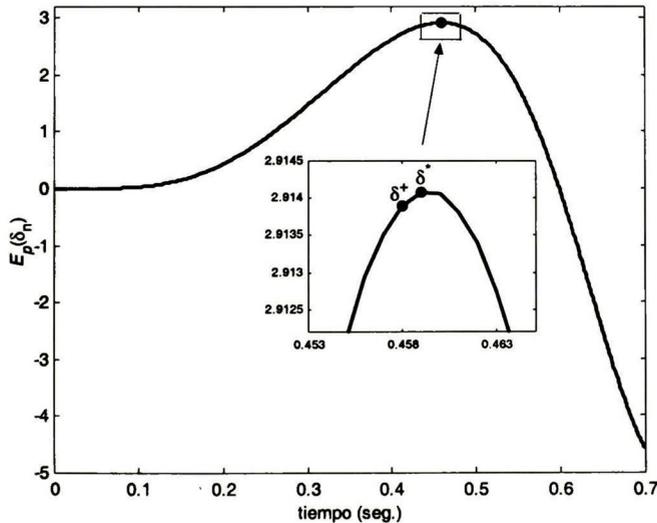


Fig. 6.2. Función de energía potencial a lo largo de la trayectoria de falla (caso S1-11).

La ausencia de un mínimo local se puede explicar por la presencia de un punto de equilibrio (de tipo 2) en la vecindad de los puntos  $\delta^*$  y  $\delta^+$ . Esta es la causa de que aunque estas trayectorias tienden durante algunos instantes al punto de equilibrio de tipo 1 (2.7052, 0.4349) la función gradiente es creciente (las trayectorias se alejan de un punto de equilibrio). La función gradiente decrece hasta que la trayectoria se aproxima a un PEE (fuera de la región de interés).

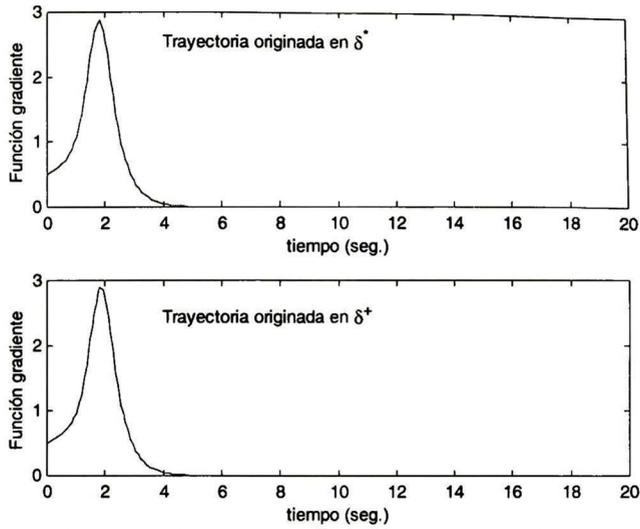


Fig. 6.3. Función gradiente evaluada a lo largo de las trayectorias del sistema reducido de posfalla originadas en los puntos  $\delta^*$  y  $\delta^+$ .

La ausencia de un mínimo local en la función gradiente de ambas trayectorias ocasiona que el método BCU tradicional no pueda determinar en forma adecuada el PEIC. Cuando se usa como condición inicial a cualquiera de los puntos  $\delta^*$ ,  $\delta^+$  para resolver el sistema de ecuaciones algebraicas (4.30) la solución converge al punto de equilibrio de tipo 2. Si se toma como condición inicial al punto de donde la función gradiente es mínima (mínimo absoluto en este caso) se obtiene un PEE fuera de la región de atracción de interés. En ambos casos la solución encontrada es incorrecta.

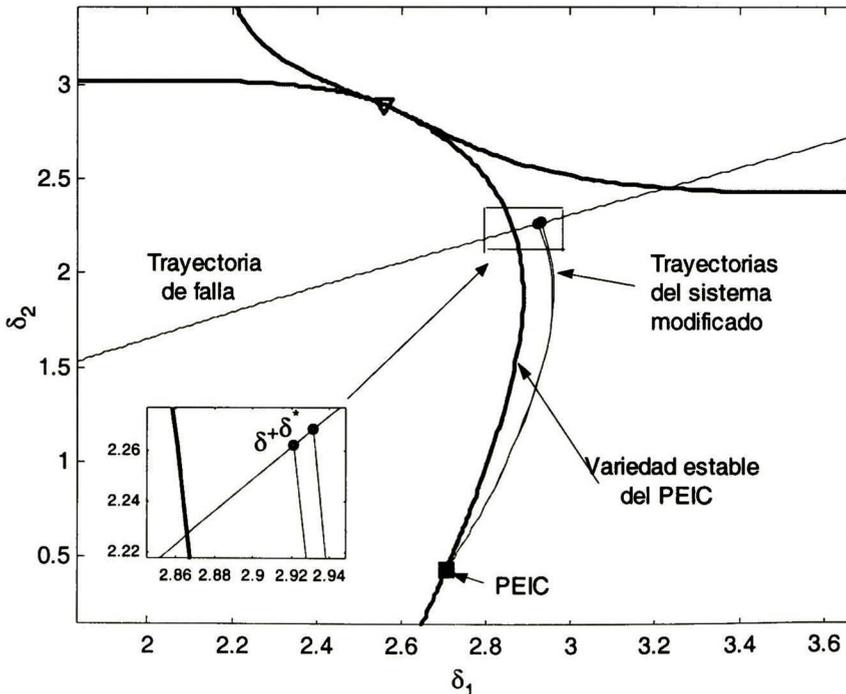


Fig. 6.4. Trayectorias resultantes de la aplicación del Método Dinámico a partir de los puntos  $\delta^*$  y  $\delta^+$ .

Cuando se aplica el *Método Dinámico* y se utiliza como condición inicial a los puntos  $\delta^*$  y  $\delta^+$  se encuentra que en ambos casos el punto de equilibrio calculado es el punto de equilibrio inestable (2.7052,0.4349), es decir el PEIC verdadero correspondiente a esta falla. En la figura 6.4 se muestran las trayectorias del sistema modificado (4.37).

Los resultados muestran que con el método BCU modificado se calculó el verdadero punto de equilibrio inestable controlador para el caso S1-11. Esto se logró aun cuando los puntos  $\delta^*$  y  $\delta^+$  usados como condición inicial del *Método Dinámico* están muy retirados de la variedad estable del PEIC, que hace que no exista un mínimo local en la trayectoria de posfalla del sistema reducido (4.22).

Cuando se aplica el método dinámico al caso S1-12 presenta un comportamiento similar al caso S1-11. En el caso S1-10 si existe un mínimo local de la función gradiente, por lo que se utilizó como condición inicial a cualquiera de los puntos  $\delta^*$  y  $\delta^+$  y el método dinámico si obtuvo el PEIC verdadero.

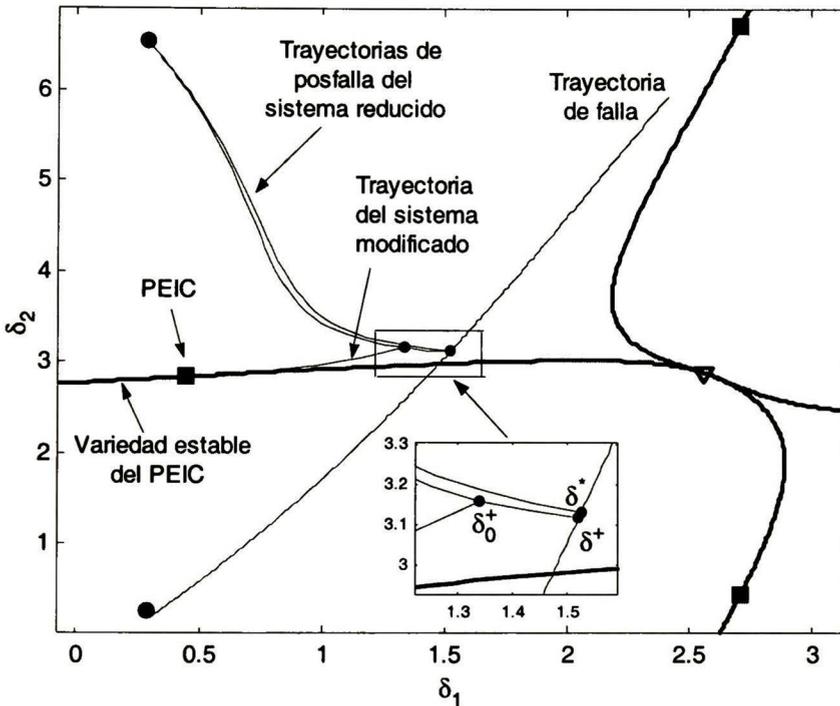


Fig. 6.5. Aplicación del *Método Dinámico* en el caso S1-10.

En la figura 6.5 se muestra la trayectoria utilizando el *Método Dinámico* y se observa que encuentra el PEIC verdadero (0.4450,2.8361), cuando inicia en el punto inicial  $\delta_0^+$ , aun cuando este punto está a una distancia similar de otro punto de equilibrio (2.5569,2.8937) de tipo 2.

### 6.1.2.2 Análisis del caso S1-9

Este caso corresponde a una falla aplicada en el nodo 9 y se libera abriendo la línea conectada entre los nodos 6-9. Este es el único caso en que el método dinámico del BCU modificado no tubo éxito en el cálculo del PEIC. En esta sección se analizan las causas que impidieron la localización del PEIC.

En la figura 6.6 se muestra una sección de la frontera de estabilidad del PEE (0.4907,0.4838) correspondiente a la falla del caso S1-9. Se muestra la proyección de la trayectoria de falla sostenida. Se aprecia que la trayectoria cruza la frontera de estabilidad del PEE por un punto contenido en la variedad estable del punto de equilibrio de tipo 1 (2.4818,2.4661), por lo tanto este punto de equilibrio es por definición el PEIC. El primer máximo de la función de energía potencial sobre la trayectoria de falla,  $\delta^*$ , es un punto que está relativamente lejos de la variedad estable del PEIC. Esto ocasiona que la función gradiente evaluada a lo largo de las trayectorias de posfalla del sistema reducido, que tienen como condición inicial a los puntos  $\delta^*$  y  $\delta^+$  no tenga un mínimo local.

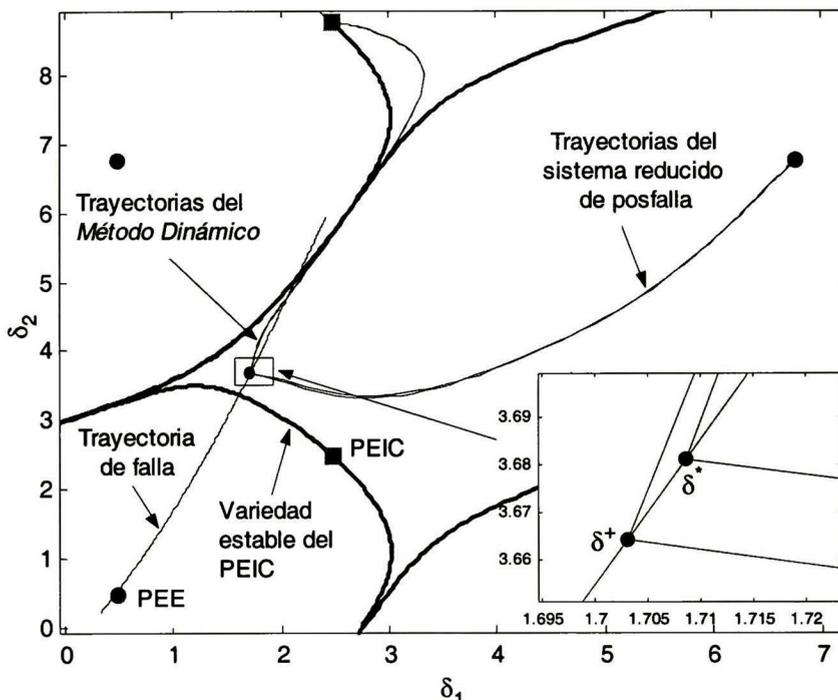


Fig. 6.6. Aplicación del método BCU modificado (caso S1-9).

Como no existe un mínimo local de la función gradiente la opción es utilizar el *Método Dinámico* con los puntos  $\delta^*$  y  $\delta^+$ . Como se puede apreciar en la figura 6.6, las dos trayectorias obtenidas con la aplicación del *Método dinámico* convergen al punto de equilibrio (erróneo) tipo 1 (2.4818,8.7493). Esto se debe a que los puntos  $\delta^*$  y  $\delta^+$  están fuera de la región de estabilidad del PEIC (del sistema modificado). En la figura 6.7 se muestra le región de estabilidad del PEIC y la trayectoria de falla del sistema reducido de posfalla.

De la figura 6.7 se observa, que si se toma como condición inicial un punto de la trayectoria de falla, correspondiente a un instante  $t_k$  menor al tiempo de salida  $t_{ex}$  el *Método Dinámico* encontrara al PEIC. Una opción para lograr esto es utilizar un paso de integración mayor en el cálculo de la trayectoria de falla sostenida. En la siguiente sección se analiza el efecto de la variación en el paso de integración en el cálculo de la trayectoria de falla.

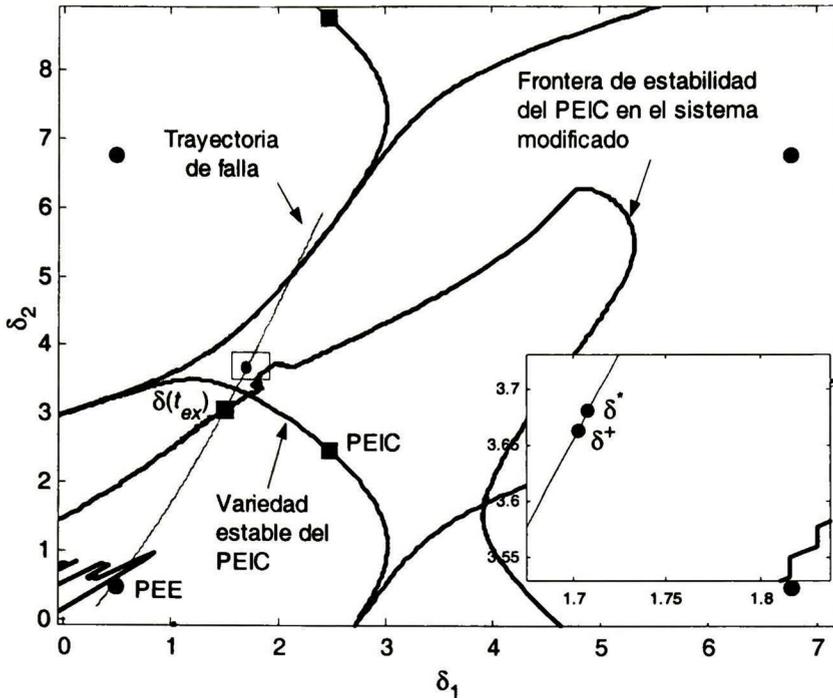


Fig. 6.7. Región de estabilidad del PEIC (en el sistema modificado) para el caso S1-9.

### 6.1.3 Influencia del paso de integración en el cálculo de la trayectoria de falla, de los métodos BCU convencional y BCU modificado.

En esta sección se analiza la influencia de la magnitud del paso de integración utilizado para calcular la trayectoria de falla. Se toma como referencia los resultados obtenidos por el programa CUEP\_EX (tabla 6.2). Los pasos de integración usados se indican en la tabla 6.5. En esta tabla se indica una medida de la variación, entre el cálculo de la trayectoria de falla obtenida por el paso de integración específico respecto del paso de integración de 0.001 seg. Esta medida corresponde a los valores de las variables de estado al final de la simulación de acuerdo a la expresión

$$\% \text{ de variación} = \frac{\|X(t) - X_{ref}(t)\|}{\|X_{ref}(t)\|} 100 \quad (6.1)$$

Tabla 6.5. Pasos de integración utilizados para el cálculo de la trayectoria de falla (sistema de estudio 1).

$\Delta t$ (seg.)	% de variación respecto de $\Delta t = 0.001$ seg.
0.001	0.0000
0.005	0.0016
0.010	0.0068
0.050	0.1695

Los resultados mostrados en la tabla 6.5 indican que la simulación de la trayectoria de falla en los casos mostrados es lo suficientemente cercana tal que se puede considerar que los PEIC correspondientes a cada falla son los mismos independientemente del paso de integración usado.

El resumen de los resultados obtenidos de la aplicación de los métodos BCU y BCU modificado se indican en las tablas 6.6 y 6.7 respectivamente. Estas tablas indican si el método fue capaz o no de encontrar el PEIC para cada una de las fallas. Además se ha reproducido parte de la información mostrada en la tabla 6.2, en particular las coordenadas de los PEIC y los valores de la función de energía calculada en esos puntos.

De la tabla 6.6, se observa que el método BCU es muy sensible a los cambios en el paso de integración. Para el paso de integración de a 0.010 segundos se obtuvieron los mejores resultados del método BCU convencional. Con este paso de integración el método fue capaz de localizar el PEIC para todas las fallas con excepción del caso S1-11. Para el paso de integración igual a 0.050 segundos el método BCU obtuvo resultados solo en el 50% de los casos.

**Tabla 6.6.** Resultados encontrados al aplicar el método BCU con diferentes pasos de integración al calcular la trayectoria de falla (sistema de estudio 1).

Caso	PEIC		$E(\delta_n, \hat{\omega}_n)$	$\Delta t$ (seg.)			
	$\delta_1$ (rad)	$\delta_2$ (rad)		0.001	0.005	0.010	0.050
S1-1	2.8169	2.6075	2.3878	Si	Si	Si	Si
S1-2	2.9461	2.7139	2.4097	Si	Si	Si	No
S1-3	2.9461	2.7139	2.4097	Si	Si	Si	No
S1-4	2.6476	2.2305	0.8956	Si	Si	Si	Si
S1-5	2.6476	2.2305	0.8956	Si	Si	Si	Si
S1-6	2.4783	0.1374	1.1279	Si	Si	Si	No
S1-7	2.8169	2.6075	2.3877	Si	Si	Si	Si
S1-8	2.4818	2.4661	1.2180	Si	Si	Si	Si
S1-9	2.4818	2.4661	1.2180	No	Si	Si	Si
S1-10	0.4450	2.8361	2.0404	No	No	Si	No
S1-11	2.7052	0.4349	1.8716	No	No	No	No
S1-12	2.4783	0.1374	1.1279	No	No	Si	No

En la tabla 6.7 se observa que para el sistema de estudio 1, el Método BCU Modificado es prácticamente insensible a los cambios en el paso de integración. Con el BCU Modificado se encontró el PEIC prácticamente en el 100% de las fallas aplicadas. La excepción es el caso S1-9 cuando el paso de integración es igual a 0.001 segundos.

**Tabla 6.7.** Resultados encontrados al aplicar el método BCU modificado con diferentes pasos de integración al calcular la trayectoria de falla (sistema de estudio 1).

Caso	PEIC		$E(\delta_n, \hat{\omega}_n)$	$\Delta t$ (seg.)			
	$\delta_1$ (rad)	$\delta_2$ (rad)		0.001	0.005	0.010	0.050
S1-1	2.8169	2.6075	2.3878	Si	Si	Si	Si
S1-2	2.9461	2.7139	2.4097	Si	Si	Si	Si
S1-3	2.9461	2.7139	2.4097	Si	Si	Si	Si
S1-4	2.6476	2.2305	0.8956	Si	Si	Si	Si
S1-5	2.6476	2.2305	0.8956	Si	Si	Si	Si
S1-6	2.4783	0.1374	1.1279	Si	Si	Si	Si
S1-7	2.8169	2.6075	2.3877	Si	Si	Si	Si
S1-8	2.4818	2.4661	1.2180	Si	Si	Si	Si
S1-9	2.4818	2.4661	1.2180	No	Si	Si	Si
S1-10	0.4450	2.8361	2.0404	Si	Si	Si	Si
S1-11	2.7052	0.4349	1.8716	Si	Si	Si	Si
S1-12	2.4783	0.1374	1.1279	Si	Si	Si	Si

Los resultados obtenidos en esta sección con la aplicación de los Métodos BCU y BCU Modificado, en el sistema de estudio 1 ante diferentes perturbaciones, validan el algoritmo y programa desarrollado. Los resultados muestran que el *Método Dinámico* es más seguro que el método del BCU convencional en la localización del PEIC adecuado.

En secciones posteriores se aplicará el método BCU modificado a sistemas de estudio de mayor tamaño con el objeto de validar los resultados en sistemas eléctricos más complejos.

## 6.2 Resultados obtenidos en el sistema de estudio 2

### 6.2.1 Validación del Método BCU Modificado

En esta sección se presentan resultados obtenidos al aplicar el método BCU modificado en un sistema eléctrico de potencia formado por 16 máquinas síncronas. Se desarrolló e implementó un programa de computadora digital al que se le ha llamado BCUM. Para validar los resultados se comparan los tiempos críticos de liberación obtenidos con el programa BCUM con los obtenidos con el programa de estabilidad transitoria convencional (ESTCONV). Se comparan también con los resultados obtenidos con el método del PEBS [31,32,33]. Se comprueba que el método BCU modificado resuelve satisfactoriamente los problemas de sobrestimación y/o subestimación que presenta el método PEBS.

Se analiza el sistema para cada una de las perturbaciones indicadas en la tabla 5.6 (sección 5.2). Los tiempos de liberación y los valores de la función de energía críticos calculados con el programa BCUM, con el método PEBS y con el programa ESTCONV, se muestran en la tabla 6.8.

Tabla 6.8. Tiempos críticos de liberación encontrados para el sistema de estudio 2.

Caso	BCUM		PEBS		ESTCONV
	$E_{cr}$	TCL (seg.)	$E_{cr}$	TCL (seg.)	TCL (seg.)
S2-1	6.2063	0.1710	9.5874	0.2130	0.1960
S2-2	6.2990	0.1670	7.6498	0.1850	0.1730
S2-3	18.7192	0.2920	41.4114	0.4630	0.3920
S2-4	11.6874	0.2880	19.8652	0.3870	0.3820
S2-5	17.8436	0.2370	17.0847	0.2320	0.2500
S2-6	4.6765	0.1120	4.2606	0.1060	0.1290
S2-7	6.8267	0.1830	6.8340	0.1830	0.2140
S2-8	10.4296	0.2170	8.0867	0.1920	0.2090

Se observa que los resultados obtenidos con el programa BCUM (implementación del método dinámico) son apropiados, los tiempos críticos son menores que los obtenidos con el programa ESTCONV. Esto significa que la estimación de la estabilidad del sistema bajo estas perturbaciones es apropiada. Solo en el caso S2-8 se obtuvo una sobrestimación de la estabilidad del sistema.

En cambio los resultados obtenidos con el método PEBS solo en el 50% de los casos son apropiados. En los primeros cuatro (S2-1 al S2-4) los tiempos críticos de liberación son sobrestimados. Los resultados obtenidos también validan el método BCU modificado para estimar la estabilidad en el sistema 2.

## 6.2.2 Márgenes de estabilidad en el sistema de estudio 2.

En un estudio de estabilidad transitoria no es de interés conocer el tiempo crítico de liberación de una(s) falla(s). El interés principal en primer lugar es determinar si el sistema será o no estable ante la ocurrencia de una falla y su posterior liberación  $t_{cl}$  segundos después de iniciada. Otro dato útil es conocer que tan lejos o cerca está el sistema de ser inestable ante una falla específica.

Para determinar si el sistema será o no estable después de liberada la falla se compara el valor de la función de energía en el momento de liberar la falla ( $E_{cl}$ ) con el valor crítico de la función de energía en el PEIC ( $E_{cr}$ ). Si  $E_{cl} \leq E_{cr}$ , el sistema de posfalla será estable. Si  $E_{cl} > E_{cr}$  estrictamente no es posible asegurar que el sistema es estable o inestable. Esto significa que cuando  $E_{cl} > E_{cr}$  es necesario verificar la inestabilidad con un programa de estabilidad transitoria convencional. Esto significa, que al menos los resultados obtenidos con el programa BCUM permite discriminar los casos donde  $E_{cl} \leq E_{cr}$  en donde no es necesario verificar los resultados con un programa de estabilidad transitoria convencional.

Los métodos directos permiten, además, calcular un índice que indica que tan estable (inestable) es el sistema. Un índice de estabilidad se obtiene de la diferencia de los valores de la función de energía en el instante de liberar la falla ( $E_{cl}$ ) y la función de energía crítica en el PEIC ( $E_{cr}$ ). El margen de energía ( $\Delta E$ ) [16] se define como la diferencia entre  $E_{cr}$  y  $E_{cl}$ , esto es

$$\Delta E = E_{cr} - E_{cl} \quad (6.2)$$

este margen indica que el sistema es estable si  $\Delta E \geq 0$  o es inestable si  $\Delta E < 0$ . El margen de energía (6.2) no indica con precisión el grado de estabilidad o inestabilidad del sistema. Basándose en el margen de energía se puede obtener un índice de estabilidad que nos indica que tan lejano se encuentra el sistema de ser inestable. Este índice de estabilidad se define como

$$\eta = \frac{E_{cr} - E_{cl}}{E_{cr}} \quad (6.3)$$

$\eta$  es igual a 1 cuando  $E_{cl} = 0$ , es decir cuando la falla se libera justo al pasar por el PEE del sistema de posfalla. Este es el instante de liberación de la falla en el que el sistema es más estable. Si  $E_{cl} < E_{cr}$  entonces  $0 < \eta < 1$ , en este caso el sistema será estable y estará más cerca de ser inestable conforme  $\eta$  tienda a cero. Si  $E_{cl} = E_{cr}$ , entonces  $\eta = 0$  esto significa que el sistema está al borde de la inestabilidad (de acuerdo con la aproximación de la región de estabilidad del sistema). Finalmente, si  $E_{cl} > E_{cr}$  entonces  $\eta < 0$ , en este caso el sistema será inestable.

En la tabla 6.9 se muestran el margen de energía ( $\Delta E$ ) y el índice de estabilidad ( $\eta$ ), cuando se aplican las fallas S2-1 a S2-8 en el sistema 2. Las fallas son cortos circuitos aplicados a los nodos indicados en la tabla 5.6. Los interruptores liberan cada falla después de 0.15 segundos.

Se observa que el sistema de estudio 2 es estable en prácticamente todos los casos analizados. Solo en el caso S2-6 se encontró que de acuerdo con la estimación de la región de estabilidad del sistema de posfalla éste es inestable. Los tiempos críticos de liberación para cada una de las fallas, con excepción del caso S2-6, tabla 6.8, son todos mayores que el tiempo de liberación de falla (0.15 segundos). Esto significa que en los casos en que el margen de energía y el índice de estabilidad son mayores que cero, la estimación de la estabilidad del sistema es

buena. En estos casos no es necesario utilizar un programa de estabilidad transitoria para verificar si el sistema será estable o inestable.

Tabla 6.9. Margen de energía e índice de estabilidad para el sistema de estudio 2. Tiempo de liberación de falla: 0.15 segundos.

Caso	¿Estable ó inestable?	$\Delta E$	$\eta$
S2-1	Estable	1.4893	0.2399
S2-2	Estable	1.2690	0.2014
S2-3	Estable	13.7807	0.7361
S2-4	Estable	8.5969	0.7355
S2-5	Estable	11.5661	0.6481
S2-6	Inestable	-3.6733	-0.7854
S2-7	Estable	2.3568	0.3452
S2-8	Estable	5.6133	0.5382

En el caso S2-6, en donde el margen de energía y el índice de estabilidad son menores que cero, el método directo indica que el sistema es inestable. Para verificar esto se utiliza un programa de estabilidad transitoria convencional para determinar si el sistema es o no estable. Esto es necesario debido al carácter conservador de los métodos directos tipo Lyapunov.

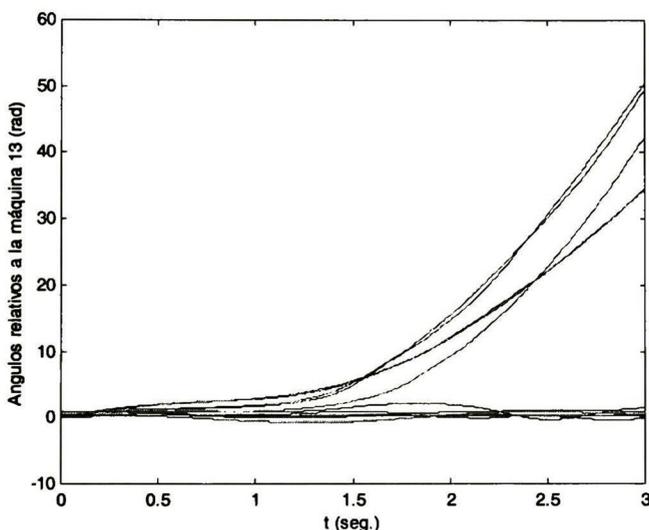
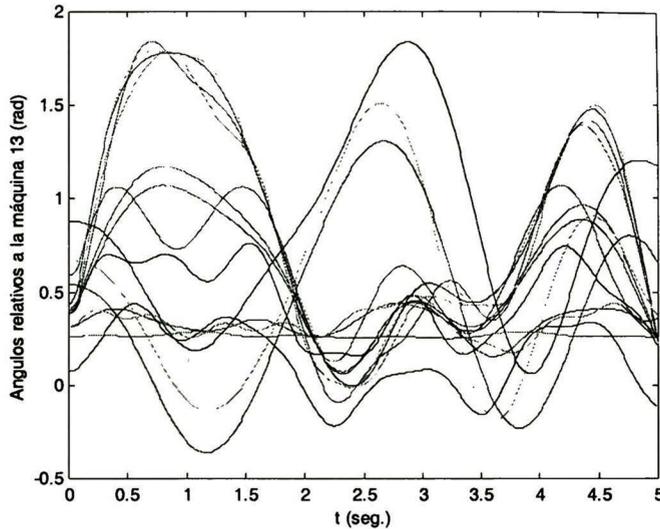


Fig. 6.8. Ángulos relativos del sistema de estudio 2, cuando se aplica la falla S2-6 y se libera en 0.15 segundos.

El uso de un método directo (en este caso el método del PEIC) ha reducido el número de simulaciones de 8 a 1 para realizar un estudio de estabilidad transitoria ante diversas contingencias en el sistema de estudio 2, es decir, se han filtrado 7 casos.

En la figura 6.8 se muestran los ángulos relativos de los rotores de las máquinas del sistema (medidos respecto de la máquina 13) cuando se aplica la falla S2-6 y se libera en 0.15 segundos. En esta figura se aprecia claramente que el sistema es inestable tal y como se estimó con el método del PEIC. El valor del índice de estabilidad para este caso ( $\eta = -0.7854$ ) tiene una magnitud suficientemente grande como para asumir que la estimación es correcta aun sin realizar el estudio con ESTCONV. Cuando el valor absoluto del índice es muy cercano a cero la probabilidad de que el sistema en realidad sea estable es mayor. Esto se ejemplifica aplicando la falla S2-6 con un tiempo de liberación de 0.115 segundos. En estas condiciones el índice de

estabilidad es:  $\eta = -0.05262$ . Este valor de  $\eta$  indica que el sistema es inestable, pero como es una magnitud muy pequeña es necesario verificar si el sistema en realidad es inestable. Para esto se utiliza una vez más el programa ESTCONV, en la figura 6.9 se muestran los ángulos relativos de los rotores de las máquinas tomando como referencia a la máquina 13. En esta figura se aprecia que el sistema es estable.



**Fig. 6.9.** Ángulos relativos del sistema de estudio 2, cuando se aplica la falla S2-6 y se libera en 0.115 segundos.

Los resultados mostrados en la tabla 6.9 muestran que la información cualitativa del margen de energía ( $\Delta E$ ) y el índice de estabilidad ( $\eta$ ) en cuanto a determinar si el sistema es estable (inestable) es igual. Por otro lado, la información cuantitativa que ofrece el margen de energía ( $\Delta E$ ) no es suficientemente precisa. Por ejemplo, en el caso S2-4, el margen de energía  $\Delta E$  es mayor que en el caso S2-5, sin embargo el sistema está más cerca de la inestabilidad en el caso S2-4 que en el caso S2-5 (se puede verificar al comparar la diferencia entre 0.15 segundos y los TCL correspondientes). El índice de estabilidad, por otra parte, sí ofrece una información cuantitativa apropiada para establecer que en el caso S2-4 el sistema está más cerca de la inestabilidad que en el caso S2-5.

### 6.3 Condiciones de operación en estado estable y la región de estabilidad.

En esta sección se analiza la relación entre las condiciones de operación en estado estable del sistema de prefalla y la magnitud de la región de estabilidad del sistema de posfalla. Para esto se utiliza el Método BCU Modificado (con el programa BCUM).

El conocimiento de la magnitud de la región de estabilidad del sistema de posfalla es útil para determinar que tan cerca se encuentra el sistema de su límite de estabilidad. Otro dato de interés es determinar índices que nos permitan conocer el nivel de estrés bajo el que opera el sistema.

### 6.3.1 La magnitud de la región de estabilidad del sistema máquina bus infinito.

Primero se analiza el sistema máquina síncrona bus infinito estudiado en el capítulo 2 de esta tesis. Las ecuaciones diferenciales que definen el comportamiento de este sistema son

$$\begin{aligned}\dot{\delta} &= \omega \\ M\dot{\omega} &= -D\omega - P_0 \text{sen } \delta + P_m\end{aligned}\tag{6.4}$$

donde  $P_m$ ,  $P_0$ ,  $D$  y  $M$  son todas constantes positivas.  $P_0$  es función de los voltajes en el bus infinito y transitorio de la máquina síncrona, así como de la reactancia equivalente de la máquina síncrona conectada al bus infinito.

En este trabajo se utiliza el modelo clásico de la máquina síncrona. Esto implica que ante un disturbio en el sistema el único parámetro que se modifica es  $P_0$ , que es la potencia máxima que puede transmitirse por la red y es de la forma

$$P_0 = \frac{E' E_\infty}{X_{eq}}\tag{6.5}$$

$E'$  es el voltaje transitorio de la máquina síncrona.

$E_\infty$  es el voltaje en el bus infinito.

$X_{eq} = X' + X_{red}$  es la reactancia equivalente de la máquina síncrona con el bus infinito.

De esta manera,  $P_0$  depende de dos parámetros constantes (para una condición de operación) y un parámetro que puede cambiar durante y después del disturbio ( $X_{eq}$ ). De aquí que un cambio en la estructura de la red se vea reflejado en el parámetro  $P_0$ .

Se analiza el sistema ante cinco condiciones de operación. Estas condiciones están determinadas por el valor que toma la potencia mecánica suministrada a la máquina síncrona. Los parámetros que permanecen constantes se muestran en la tabla 6.10. En la tabla 6.11 se presentan los valores que toma  $P_m$  para cada condición de operación.

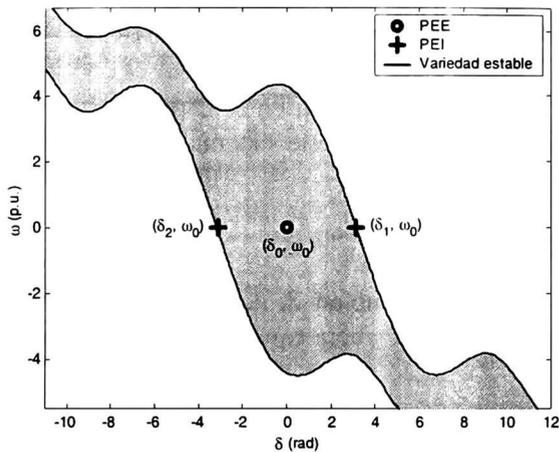
Tabla 6.10. Parámetros constantes del sistema máquina síncrona bus infinito.

Parámetro	$P_0$	$M$	$D$
Valor	5.0	1.5	0.5

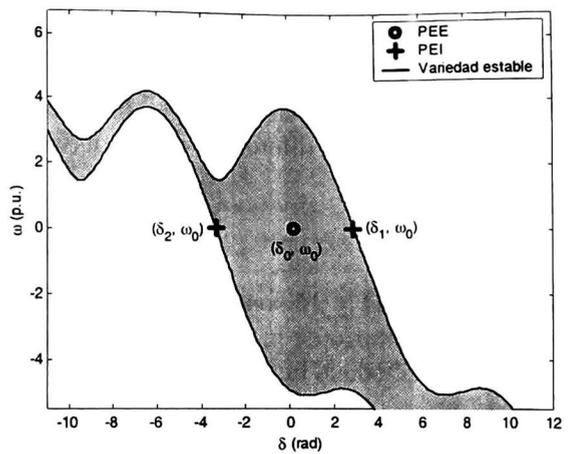
Tabla 6.11. Potencia mecánica suministrada a la máquina síncrona en diferentes condiciones de operación.

Caso	BI-1	BI-2	BI-3	BI-4	BI-5
$P_m$	0.1	1.0	1.5	3.5	4.9

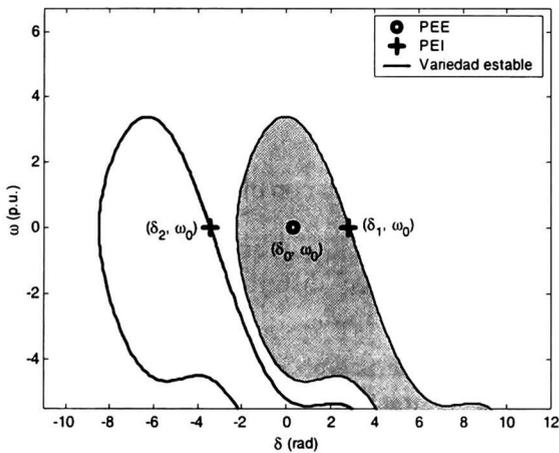
Las regiones de estabilidad del PEE correspondiente del sistema de posfalla se muestran en las figuras 6.10 – 6.14. En estas se aprecia que la magnitud de la región de estabilidad del PEE decrece conforme aumenta el valor de  $P_m$ . Esto es, la región de estabilidad tiende al punto del PEE conforme  $P_m$  tiende al valor de  $P_0$ . Como se observa en la región de atracción correspondiente a  $P_m = 4.9$ , figura 6.14, en este caso la región de estabilidad es muy pequeña comparada con las otras regiones.



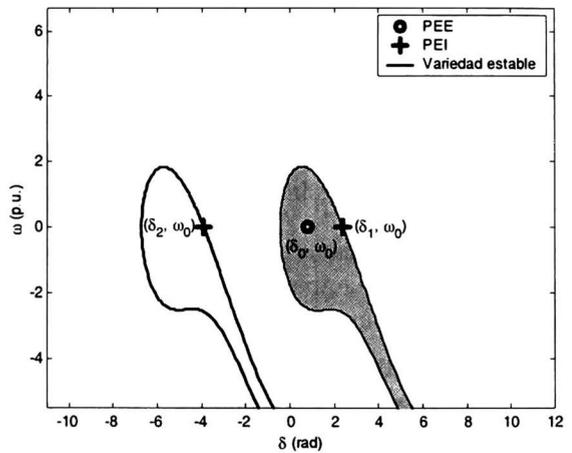
**Fig. 6.10.** Región de estabilidad sistema máquina síncrona – bus infinito (caso BI-1).



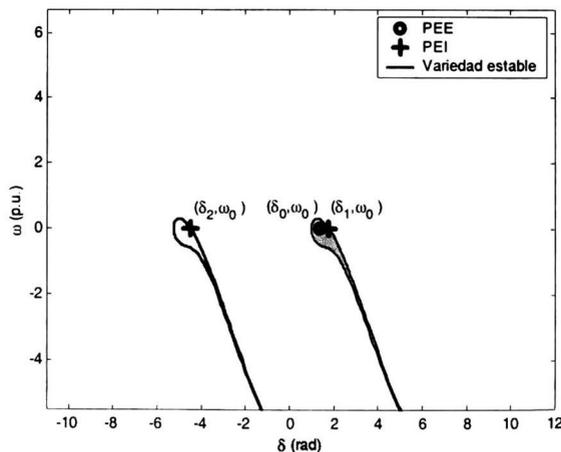
**Fig. 6.11.** Región de estabilidad sistema máquina síncrona – bus infinito (caso BI-2).



**Fig. 6.12.** Región de estabilidad sistema máquina síncrona – bus infinito (caso BI-3).



**Fig. 6.13.** Región de estabilidad sistema máquina síncrona – bus infinito (caso BI-4).



**Fig. 6.14.** Región de estabilidad sistema máquina síncrona – bus infinito (caso BI-5).

A continuación se intenta establecer algunos indicativos que relacionan la magnitud de la región de estabilidad con el valor de la función de energía y con la posición relativa (distancias)

entre los puntos de equilibrio estables y los inestables pertenecientes a la frontera de estabilidad. En la tabla 6.12 se muestra la distancia o norma que hay entre los PEI en la frontera de estabilidad y el PEE ( $d$ ). También se indican la diferencia entre los valores de la función de energía en los PEI y el PEE ( $\Delta E$ ).

**Tabla 6.12.** Distancias y diferencias de energía entre los PEI en la frontera de estabilidad y el PEE bajo diferentes condiciones de operación (sistema máquina síncrona bus infinito).

Caso	$(\delta_1, \omega_0)$		$(\delta_2, \omega_0)$	
	$d = \ \text{PEI} - \text{PEE}\ $	$\Delta E = E(\text{PEI}) - E(\text{PEE})$	$d = \ \text{PEI} - \text{PEE}\ $	$\Delta E = E(\text{PEI}) - E(\text{PEE})$
BI-1	3.1016	9.6878	3.1816	10.3162
BI-2	2.7389	7.0591	3.5443	13.3423
BI-3	2.5322	5.7411	-----	-----
BI-4	1.5908	1.5736	-----	-----
BI-5	0.4007	0.0267	-----	-----

De la tabla 6.12 se observa que conforme el valor de  $P_m$  aumenta la distancia  $d$  y el incremento de energía  $\Delta E$  para el punto  $(\delta_1, \omega_0)$  disminuye, mientras que para  $(\delta_2, \omega_0)$  aumentan. Para potencias mecánicas mayores, correspondientes a los últimos tres casos (BI-3, BI-4 y BI-5) la frontera de estabilidad esta determinada solo por la variedad estable del punto  $(\delta_1, \omega_0)$ . En estos casos es posible relacionar en forma directa la disminución de los valores de  $d$  y  $\Delta E$  con la disminución de la magnitud de la región de atracción.

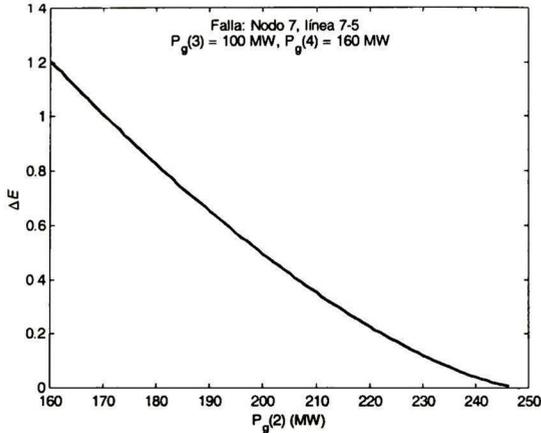
Para los casos de carga ligera, casos BI-1 y BI-2 los valores de  $d$  y  $\Delta E$  para el punto  $(\delta_1, \omega_0)$  disminuyen conforme aumenta el valor de  $P_m$ ; mientras que para el punto de equilibrio  $(\delta_2, \omega_0)$  estos valores aumentan. Esto significa que la definición de los incrementos de energía y las distancias entre los puntos de equilibrio sigue un comportamiento complejo, sobre todo en sistemas de mayor dimensión. Si tomamos como indicativo, por ejemplo, la norma del PEIC. Podemos decir en general, si el valor de  $d$  y  $\Delta E$  para el PEIC es pequeño esto implica que la magnitud de la región de atracción es pequeña y viceversa. En la siguiente sección se aplica esta deducción a un sistema multi-máquinas para explorar la relación entre las condiciones de operación en estado estable y la magnitud de la región de estabilidad.

### 6.3.2 Determinación de la magnitud de la frontera de estabilidad en sistemas multi-máquinas.

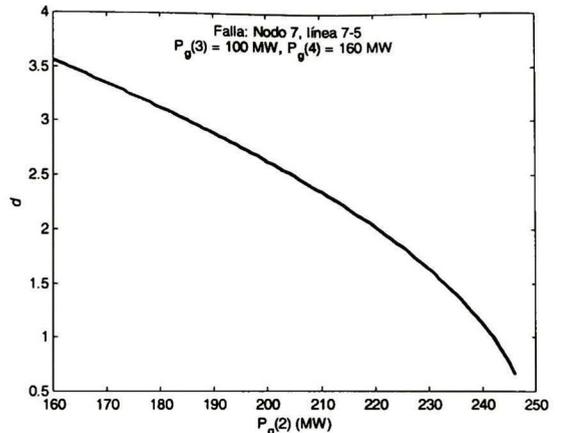
Tomando como base lo establecido para el sistema máquina – bus infinito. Es posible inferir sobre la magnitud de la frontera de estabilidad del sistema de posfalla si: se conoce la diferencia entre la función de energía evaluada en el PEIC y en el PEE; ó si se conoce la distancia entre el PEIC y el PEE para sistemas de mayor dimensión.

Consideremos ahora el sistema de estudio 3, descrito en el capítulo 5. Se calcula el PEIC, la energía crítica asociada así como la distancia entre éste y el punto de equilibrio estable de posfalla. Se consideran diferentes condiciones de operación en estado estable del sistema de prefalla (los datos de operación del caso base se proporcionaron en la sección 5.3). Estas diferentes condiciones de operación consisten en incrementar la potencia real generada por las máquinas 2, 3 y 4 desde su caso base hasta un porcentaje de la misma. Las variaciones se hacen en una máquina manteniendo las otras en su condición base. Para la localización del PEIC se utiliza el programa BCUM.

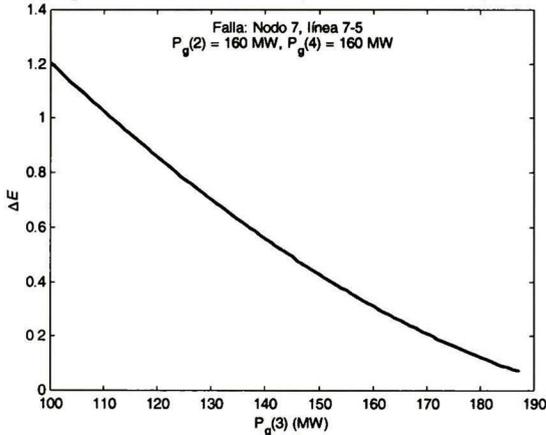
Los resultados gráficos se muestran en las figuras 6.15 a 6.20. Corresponden al sistema de estudio 3 cuando se aplica una falla trifásica en el nodo 7 y se libera abriendo la línea 7-5 (caso S3-1, tabla 5.10).



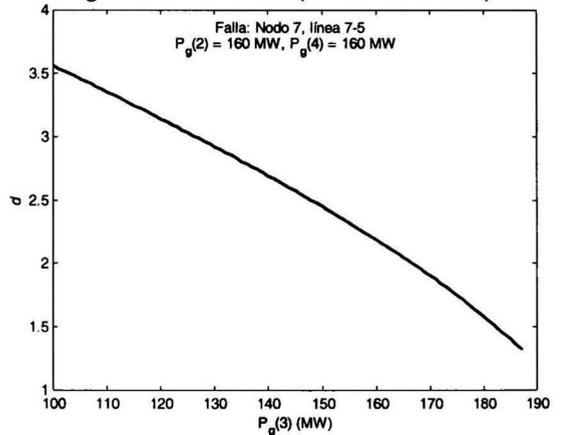
**Fig. 6.15.** Variación de  $\Delta E$  (sistema de estudio 3).



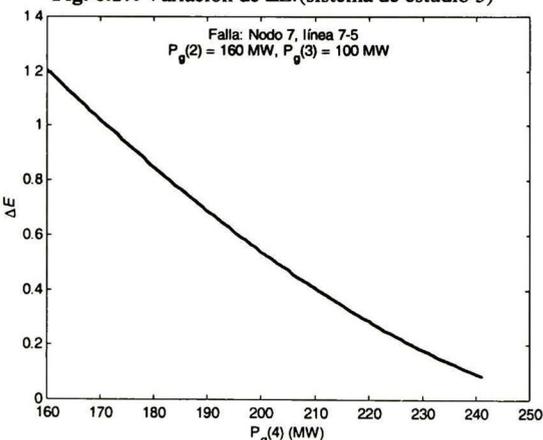
**Fig. 6.16.** Variación de  $d$ . (sistema de estudio 3)



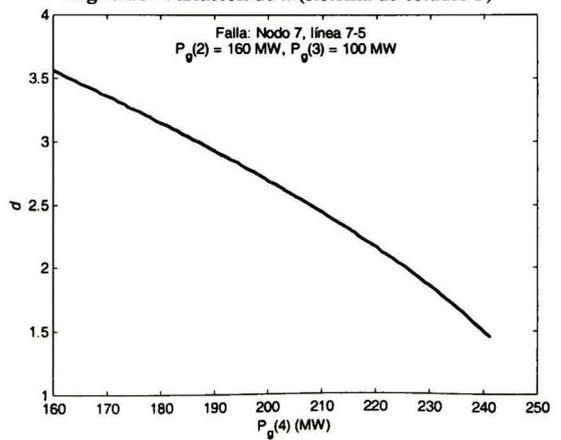
**Fig. 6.17.** Variación de  $\Delta E$ . (sistema de estudio 3)



**Fig. 6.18.** Variación de  $d$ . (sistema de estudio 3)



**Fig. 6.19.** Variación de  $\Delta E$ . (sistema de estudio 3)



**Fig. 6.20.** Variación de  $d$ . (sistema de estudio 3)

La variación de  $\Delta E$  conforme aumenta la potencia generada por las máquinas 2, 3 y 4 sugiere que la región de estabilidad se reduce prácticamente a cero cuando estas máquinas

generan 246, 187 y 241 MW respectivamente. La variación de  $d$  sugiere un comportamiento similar de la región de estabilidad, aunque la disminución parece menos crítica (la distancia o norma no es cercana a cero).

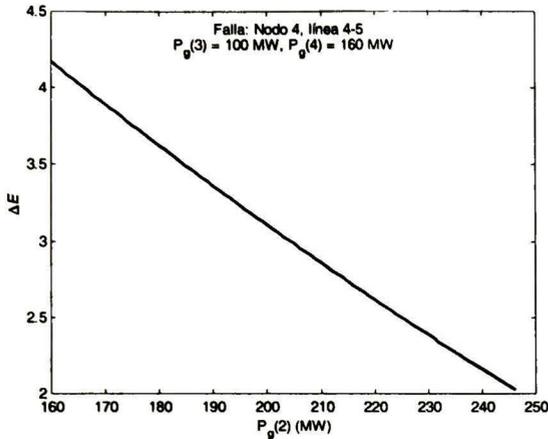


Fig. 6.21. Variación de  $\Delta E$ . (sistema de estudio3)

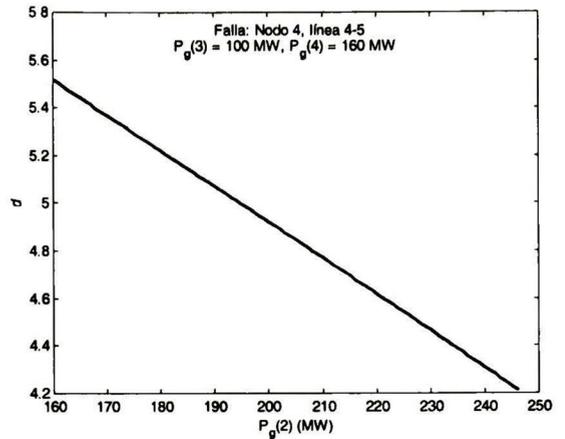


Fig. 6.22. Variación de  $d$ . (sistema de estudio3)

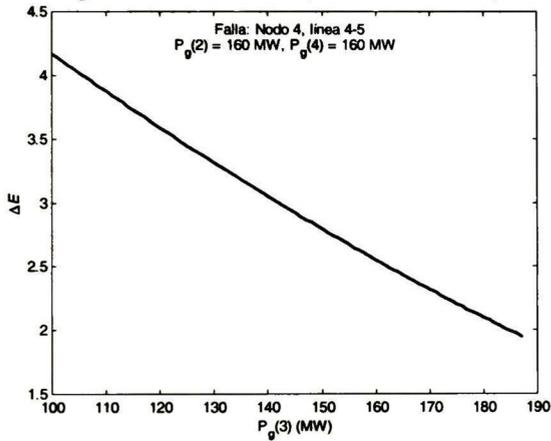


Fig. 6.23. Variación de  $\Delta E$ . (sistema de estudio3)

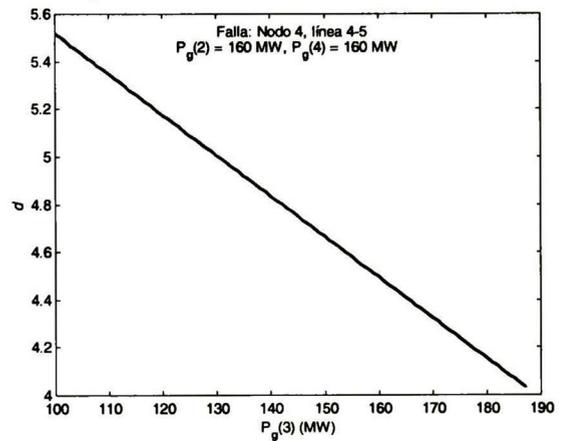


Fig. 6.24. Variación de  $d$ . (sistema de estudio3)

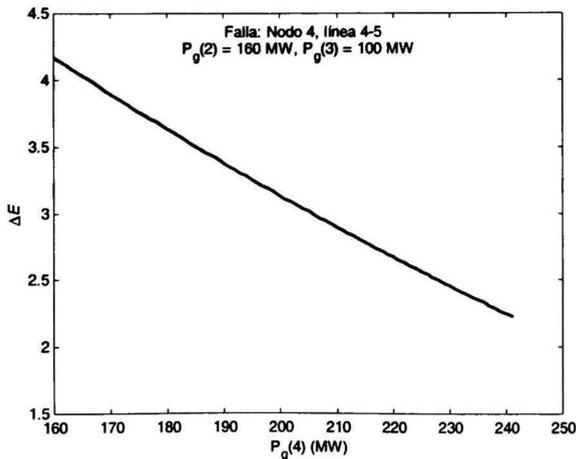


Fig. 6.25. Variación de  $\Delta E$ . (sistema de estudio3)

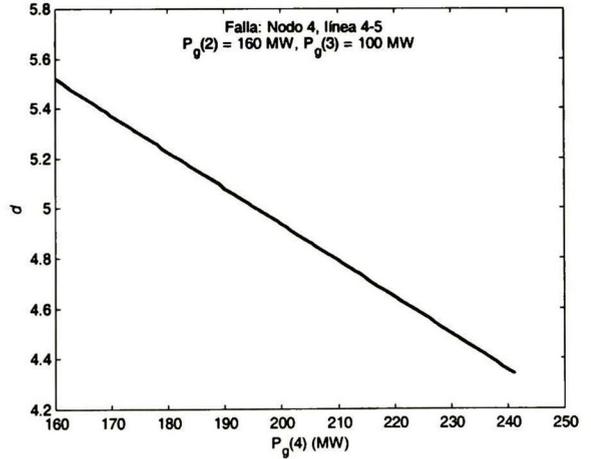


Fig. 6.26. Variación de  $d$ . (sistema de estudio3)

Las figuras 6.21 a 6.26 resumen las pruebas realizadas en el sistema de estudio 3 cuando se aplica una falla trifásica en el nodo 4 y se libera abriendo la línea 4-5 (caso S3-2).

Los resultados muestran un comportamiento similar a los correspondientes para el caso S3-1. Comparando la variación de la región de estabilidad y los valores de  $d$  y  $\Delta E$ , para S3-2 observamos que son menores que los correspondientes el caso S3-1, para variaciones en las potencias generadas iguales. Esto sugiere que el sistema es más estable (robusto) en la condición de posfalla al eliminar la línea 4-5 que cuando se elimina la línea 7-5 bajo las mismas condiciones de operación.

### 6.3.2.1 Fortaleza del sistema ante cambios en la condición de operación

La mayor fortaleza observada por el sistema de posfalla correspondiente a la apertura de la línea 4-5 se debe a la configuración de la red resultante y a la capacidad del sistema de redistribuir la potencia generada a través de las líneas de transmisión. Una mayor fortaleza de un sistema de posfalla indica que es posible elevar los niveles de generación con menor riesgo de perder la estabilidad del sistema ante una falla que dé origen a este sistema de posfalla.

La fortaleza del sistema vista desde esta perspectiva se puede medir en función de un índice que dependa de la variación de  $d$  o  $\Delta E$  y de la variación en la potencia generada. Cuando la variación de la potencia generada se hace en una máquina, el índice tiene la expresión

$$IR1 = \frac{\% \text{ de variación de } P_g}{\% \text{ de variación de } \Delta E} = \frac{(P_g - P_{g \text{ base}}) / P_{g \text{ base}}}{(\Delta E_{\text{base}} - \Delta E) / \Delta E_{\text{base}}} \quad (6.6)$$

o

$$IR2 = \frac{\% \text{ de variación de } P_g}{\% \text{ de variación de } d} = \frac{(P_g - P_{g \text{ base}}) / P_{g \text{ base}}}{(d_{\text{base}} - d) / d_{\text{base}}} \quad (6.7)$$

donde:

$\Delta E_{\text{base}}$  es el valor de  $\Delta E$  en el caso base de operación

$d_{\text{base}}$  es el valor de  $d$  en el caso base de operación

Si  $IR1 \approx 1$  o  $IR2 \approx 1$  entonces la magnitud de la región de atracción se comporta en forma similar a la variación de la potencia. Si este valor es menor que uno, entonces el sistema no es robusto, la variación en la magnitud de la región de estabilidad es mayor en proporción a la variación de la potencia generada. Por el contrario, si el valor de  $IR1$  o  $IR2$  es mayor que 1.0 el sistema es robusto. Este índice se refiere a la capacidad que tiene el sistema de aceptar cambios en la potencia generada por una máquina.

El comportamiento del índice  $IR1$  se muestra en la figura 6.27. Corresponde al sistema de estudio 3 ante falla trifásica en el nodo 7 y se libera abriendo la línea 7-5 (caso S3-1). Se observa que el  $IR1$  corresponde al caso en que se aumenta la potencia generada por la máquina 2 y permanecen en su valor nominal las máquinas 3 y 4. El  $IR2$  bajo las mismas condiciones, se muestra en la figura 6.28.

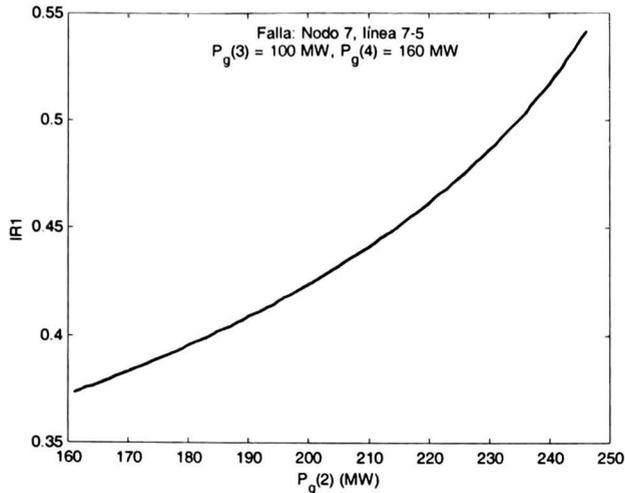


Fig. 6.27. Índice de robustez 1, IR1 (sistema de estudio 3).

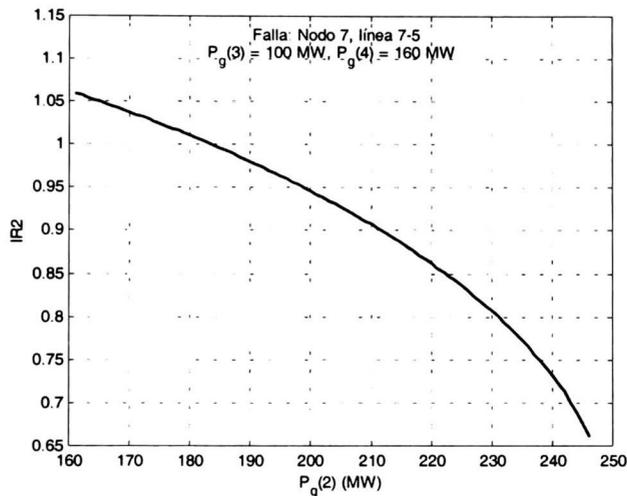


Fig. 6.28. Índice de robustez 2, IR2 (sistema de estudio 3).

Los índices IR1 e IR2 presentan un comportamiento muy diferente. En primer lugar IR1 crece conforme el incremento en la potencia generada ( $\Delta P$ ) aumenta. Esto significa que disminuye la tasa de decremento del valor de  $\Delta E$  conforme  $\Delta P$  aumenta. Por otro lado, IR2 decrece conforme  $\Delta P$  aumenta, indicando que la tasa de decremento de  $d$  no disminuye al aumentar  $\Delta P$ . Esto se puede verificar de la observación de las figuras 6.15 y 6.16.

Se aprecian grandes diferencias en la magnitud entre los índices IR1, IR2 conforme aumenta  $\Delta P$ . Así tenemos que, IR1 indica que el sistema no es robusto ante cambios en la potencia generada por la máquina 2, cuando esta potencia cambia en el intervalo comprendido desde la condición base (160 MW) hasta un 153.75 % de esta condición (246 MW). Por otra parte, IR2 indica que el sistema es robusto (aunque el índice es pequeño) en el intervalo 160 MW – 182 MW; mientras que en el intervalo 182 – 246 MW el sistema no es robusto.

## 6.4 Resultados obtenidos en el sistema de estudio 4

En esta sección se presentan los resultados obtenidos al aplicar el Método BCU Modificado (utilizando el programa BCUM) en un sistema de dimensiones y comportamiento reales, sistema de estudio 5, descrito en la sección 5.4. Este, es un sistema muy utilizado en la literatura para validar y comparar los resultados de los métodos directos tipo Lyapunov [19,22]. En la sección 6.4.1 se analizan los métodos: BCU convencional, BCU Modificado y el PEBS ante las fallas indicadas en la sección 5.4. En la sección 6.4.2 se calcula la magnitud de la región de estabilidad del PEE de posfalla y se relaciona con la fortaleza del sistema ante cambios en las condiciones de operación.

### 6.4.1 Validación de resultados en el sistema de estudio 4

Para validar el Método BCU Modificado (implementado en el programa BCUM) de nuevo, se calculan los tiempos críticos de liberación (TCL) para cada falla y se comparan con los TCL calculados con los Método BCU convencional y el Método PEBS. Se incluye también el tiempo crítico de liberación calculado a partir del PEIC cuando se utiliza el algoritmo del punto de salida [30]. Este algoritmo se implementó en el programa CUEP\_EX. Además se calculan los TCL “exactos” con simulaciones en el dominio del tiempo, utilizando el programa ESTCONV.

Los tiempos críticos de liberación TCL obtenidos con los diferentes métodos se muestran en la tabla 6.13. Los TCL mostrados en esta tabla se calcularon con programas desarrollados por el autor de esta tesis, esto elimina errores de comparación debidos a bases de datos diferentes y/o a la precisión de los programas utilizados para su cálculo.

Tabla 6.13. Tiempos críticos de liberación para el sistema de estudio 4.

Caso	Tiempos críticos de liberación mediante diferentes métodos (en segundos)				
	BCU	BCUM	PEBS	CUEP_EX	ESTCONV
S4-1	0.1030	0.1030	0.0920	0.1030	0.1290
S4-2	0.1230	0.1230	0.1210	0.1230	0.1430
S4-3	0.2430	0.2430	0.2350	0.2430	0.2600
S4-4	0.3000	0.3000	0.2980	0.3000	0.3040
S4-5	0.2590	0.2590	0.2550	0.2590	0.2720
S4-6	0.2420	0.2420	0.2340	0.2420	0.2570
S4-7	0.1120	0.1120	0.1110	0.1120	0.1220
S4-8	0.2240	0.2240	0.2220	0.2240	0.2280
S4-9	0.1910	0.1910	0.1910	0.1910	0.1950
S4-10	0.2590	0.2590	0.2590	0.2590	0.2780
S4-11	0.1340	0.1340	0.1350	0.1340	0.1370
S4-12	0.1850	0.1850	0.1900	0.1850	0.2050
S4-13	0.3210	0.3210	0.3240	0.3210	0.3330
S4-14	****	0.1820	0.3520	0.1820	0.4600
S4-15	****	0.1820	0.3540	0.1820	0.4600
S4-16	****	0.1540	0.2140	0.1540	0.2410
S4-17	****	0.0400	0.1550	0.1940	0.2010
S4-18	****	0.0410	0.1610	0.2020	0.2070
S4-19	****	0.0730	0.2430	****	0.2680
S4-20	****	0.0460	0.1750	****	0.2470

\*\*\*\* No converge el método.

El resumen de los resultados para este sistema ante las fallas indicadas se muestra en la tabla 6.13. El método BCU convencional no obtuvo resultados satisfactorios en los últimos 7

casos. El programa CUEP\_EX no obtuvo resultados en los dos últimos casos, se presentaron problemas de convergencia numérica. El método del PEBS y el BCU modificado (con el programa BCUM) obtuvieron resultados en todos los casos sin excepción. Los resultados exitosos de todos los métodos fueron conservativos. El método PEBS, en este sistema y para los casos analizados no sobrestimó la estabilidad del sistema. El caso de subestimación más significativo es el caso S4-1. En general la estimación del método PEBS es aceptable y tiene el mejor comportamiento. Sin embargo debido a la tendencia a la sobrestimación de la estabilidad, en general se deben tomar con precaución los resultados.

El método BCU Modificado estimó cuatro casos con notoria subestimación, S4-17 al S4-20. En estos casos se puede optar por la utilización de un programa de estabilidad transitoria para verificar la estabilidad del sistema o en su defecto utilizar la estimación del Método PEBS.

Una característica adicional del Método BCU Modificado es que su algoritmo contiene al BCU convencional y al PEBS. Esto le permite disponer de un parámetro de comparación para determinar si el PEI localizado es el PEIC correcto. El parámetro son las energías críticas correspondientes al PEBS y al PEIC. Si estos valores son muy lejanos entre sí la probabilidad de que el PEIC localizado no sea el correcto es mucho mayor que cuando son cercanos. Cuando los valores de la energía crítica correspondientes al PEBS y el PEIC son muy diferentes puede ser conveniente modificar el paso de integración utilizado en el calculado de la trayectoria de falla.

### 6.4.2 Magnitud de la región de estabilidad

En esta sección se analizan los resultados obtenidos sobre la relación entre la magnitud de la región de estabilidad y los valores de  $\Delta E$  y de la distancia  $d$  entre el PEIC y el PEE (sección 6.3) para cada una de las 20 perturbaciones consideradas en el sistema 4. En la tabla 6.14 se muestran el resumen de los resultados para las diferentes perturbaciones aplicadas al sistema de estudio en su caso base.

**Tabla 6.14.** Diferencia entre la función de energía en el PEIC y el PEE ( $\Delta E$ ) y distancia entre el PEIC y el PEE en el sistema de estudio 4.

Caso	$\Delta E$	$d$
S4-1	7.6584	7.2388
S4-2	0.4462	1.8640
S4-3	8.7928	3.7444
S4-4	178.9284	3.2314
S4-5	4.9393	3.1208
S4-6	9.6143	3.8489
S4-7	0.1979	1.6877
S4-8	18.2923	3.5198
S4-9	1.7260	2.4725
S4-10	1.7499	2.4503
S4-11	28.2711	2.4173
S4-12	0.3612	2.3108
S4-13	3.1394	3.0752
S4-14	6.5621	2.8869
S4-15	6.5682	2.8828
S4-16	4.2771	3.1762
S4-17	35.2284	11.6553
S4-18	38.5377	11.7379
S4-19	****	****
S4-20	****	****

\*\*\*\* No se obtuvo el PEIC

Del análisis de la tabla 6.14 se pueden extraer las siguientes conclusiones:

El incremento de energía  $\Delta E$  más pequeño coincide con el valor más pequeño de  $d$  (caso S4-7).

Los valores de  $\Delta E$  menores a 1.0 corresponden con distancias ( $d$ ) todas menores a 2.3108 (casos S4-2, S4-7, S4-12).

En los casos en los que la distancia ( $d$ ) es mayor a 2.3108 no se encuentra un patrón definido de comportamiento de los valores de  $\Delta E$ .

El mayor valor de  $\Delta E$  corresponde al caso S4-4, pero la distancia ( $d$ ) en este caso no es la mayor.

Los distancias mayores corresponden a los casos en los que el Método BCU Modificado no calculo satisfactoriamente el PEIC (S4-17) y (S4-18). En estos casos los valores de  $\Delta E$  son los más grandes con excepción del S4-4.

Los casos S4-3 al S4-6, S4-8, S4-13 al S4-16 tienen como característica común que el valor de  $d$  es aproximadamente igual a  $\pi$ .

#### **6.4.2.1 Grado de estrés en el sistema de posfalla**

El objetivo de esta sección es señalar elementos de apoyo para determinar el grado de estrés bajo el cuál operará el sistema de posfalla que resulta después de liberar una falla determinada. Para encontrar estos elementos de apoyo partimos de dos suposiciones.

1. Un valor pequeño en  $\Delta E$  y en  $d$  se puede considerar como un indicativo de una región de estabilidad del sistema de posfalla de magnitud pequeña. Si la magnitud de la región de estabilidad es pequeña el nivel de estrés del sistema es grande.
2. Valores grandes en  $\Delta E$  y  $d$  pueden ser considerados como indicativos de una magnitud grande de la región de estabilidad. Si la magnitud de la región de estabilidad es grande, entonces el nivel de estrés del sistema es pequeño.

La determinación grande o pequeño de los valores de  $\Delta E$  y/o de  $d$  no es sencilla. Para el sistema de estudio 4, a partir del análisis de los datos mostrados en la tabla 6.14 se puede considerar que un valor pequeño de  $d$  es menor o igual a  $0.75\pi$  (2.35 aproximadamente). Este se infiere ya que en todos los casos en que  $d$  es menor que  $0.75\pi$  los valores de  $\Delta E$  son menores que 1.0 (excepto los casos S4-9 y S4-10). En cuanto a valores pequeños de  $\Delta E$  se puede considerar que un valor menor a 1.0 es pequeño.

Si las consideraciones anteriores son correctas, entonces de acuerdo con la tabla 6.14 los casos S4-2, S4-7 y S4-12 corresponden a casos en los que el sistema de posfalla tiene un nivel de estrés elevado. De la misma manera, los casos S4-1, S4-3 al S4-6, S4-8 y S4-13 al S4-18 pueden considerarse como casos en los que el nivel de estrés en el sistema de posfalla es pequeño. Finalmente, los casos S4-9, S4-10 y S4-11 tienen valores de  $d$  que son aproximadamente igual a  $0.75\pi$  (son mayores a  $0.75\pi$ ) pero tienen valores de  $\Delta E$  mayores a 1.0, esto se puede interpretar como un nivel medio de estrés.

### 6.4.2.2 Verificación del nivel de estrés del sistema de posfalla

Se observó (sección 6.3) que la magnitud de la región de estabilidad tiende a disminuir cuando aumenta la potencia generada en el sistema. Este hecho puede ser considerado para verificar si el criterio de clasificación propuesto sobre el nivel de estrés de los diferentes sistemas de posfalla es apropiado.

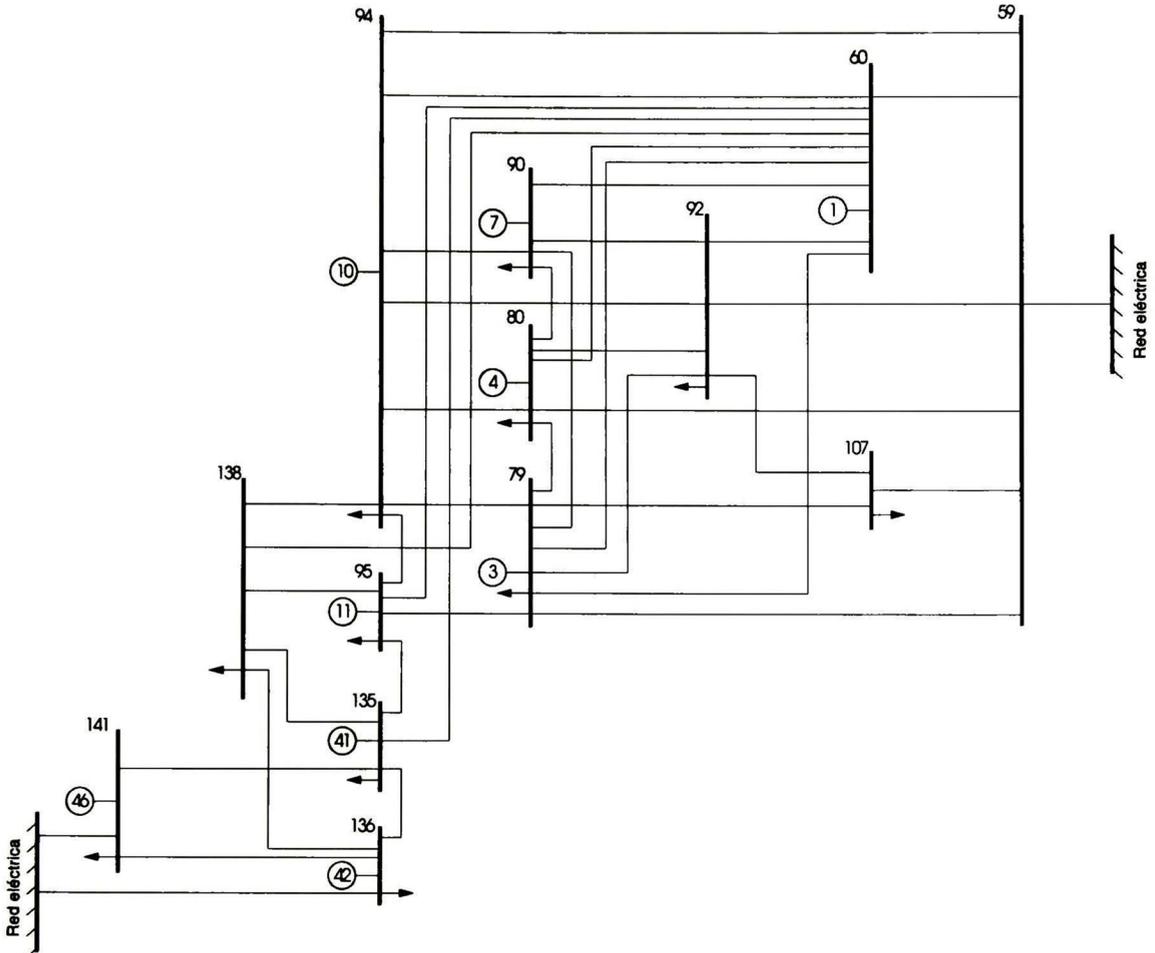


Fig. 6.29. Sección del sistema de estudio 4.

En la figura 6.29 se muestra una parte del sistema de estudio 4. En esta sección se aplican tres perturbaciones (casos S4-2, S4-11 y S4-12). Estos casos se han clasificado como sistemas de posfalla con alto nivel de estrés (S4-2 y S4-12) y como sistema con nivel medio de estrés (S4-11). Para confirmar esta clasificación se aumenta la potencia generada en 6 de las 9 máquinas contenidas en la parte mostrada en la figura 6.29. Las máquinas 41, 42 y 46 (conectadas en los nodos 135, 136 y 141 respectivamente) mantienen constante su potencia. El aumento en la potencia generada se hace simultáneamente en las 6 máquinas. Tomando como valor inicial la potencia generada en el caso base (sección 5.4), la potencia generada se aumenta con incrementos porcentuales constantes iguales, a partir del valor inicial en cada máquina.

Los casos analizados corresponden al S4-2 y el S4-11, de acuerdo con la tabla 5.15. El caso S4-2 involucra una falla trifásica en el nodo 95 que se libera abriendo la línea 95-135, el

caso S4-11 involucra una falla trifásica en el nodo 135 que se libera abriendo la línea 135-138. A continuación se analiza la influencia de la magnitud de la región de estabilidad para cada una las condiciones de posfalla provocadas por el cambio en los niveles de generación del sistema.

#### 6.4.2.2.1 Análisis del caso S4-2

En las figuras 6.30 y 6.31 se muestran los valores de  $\Delta E$  y  $d$  para el caso S4-2 cuando se elevaron los niveles de generación desde el caso base de operación hasta un porcentaje igual al 130 % de la potencia generada de este caso base.

De las figuras 6.30 y 6.31 se observa que la magnitud de la región de estabilidad del sistema de posfalla en el caso S4-2 disminuye rápidamente conforme se elevan los niveles de generación en las máquinas 1, 3, 4, 7, 10 y 11. Cuando el nivel de generación en estas máquinas es igual al 130% del nivel de generación en el caso base, los valores de  $\Delta E$  y  $d$  se redujeron en 95.36% y 51.59% respectivamente. Esto verifica que el sistema de posfalla en el caso S4-2 tiene un grado de estrés elevado como se concluyó en párrafos anteriores.

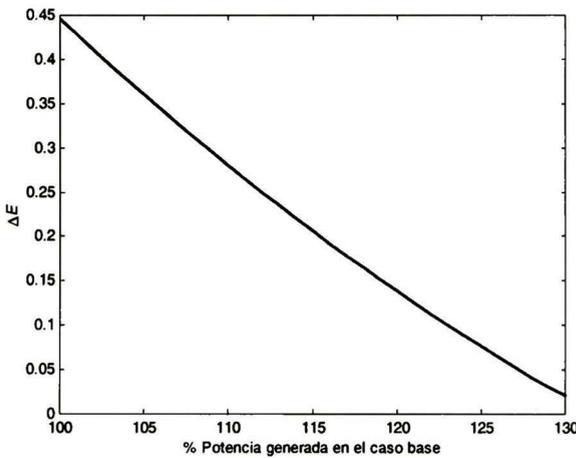


Fig. 6.30. Variación de  $\Delta E$  caso S4-2.

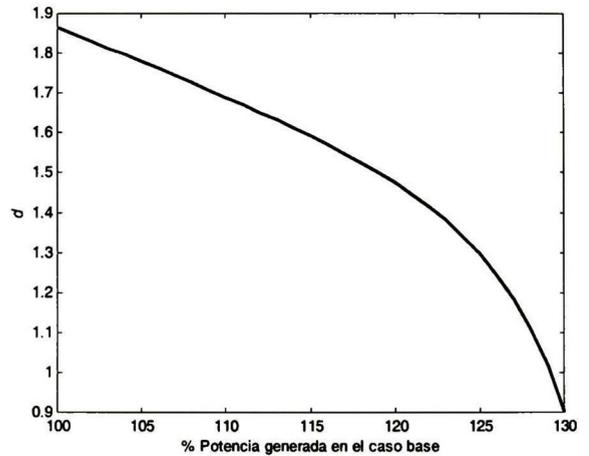


Fig. 6.31. Variación de  $d$  caso S4-2.

#### 6.4.2.2.2 Análisis del caso S4-11

En las figuras 6.32 y 6.33 se muestran los valores de  $\Delta E$  y  $d$  para el caso S4-11 cuando se elevaron los niveles de generación desde el caso base de operación hasta un porcentaje igual al 160 % de la potencia generada en este caso base.

En este caso se observa que los valores de  $\Delta E$  y  $d$  presentan un cambio repentino cuando la potencia generada es igual al 140.3% de la potencia generada en el caso base. Este cambio repentino se debe a que en estas condiciones de operación disminuye el número de puntos de equilibrio inestable que se encuentran sobre la frontera de estabilidad (ver sección 6.3.1). Por otro lado, al comparar los valores de  $\Delta E$  y  $d$  correspondiente al caso base (100%) y cuando la potencia generada es igual a 130% de la generada en el caso base se tiene que: el valor de  $\Delta E$  ha cambiado en 0.1016% y el valor de  $d$  ha cambiado en 1.3620%. Esto significa que el efecto de un cambio de 30% en la potencia generada en la magnitud de la región de estabilidad del sistema de posfalla en el caso S4-11 es mucho menor que en el caso S4-2, esto sugiere que el nivel de estrés es mucho mayor en el caso S4-2 que en el caso S4-11.

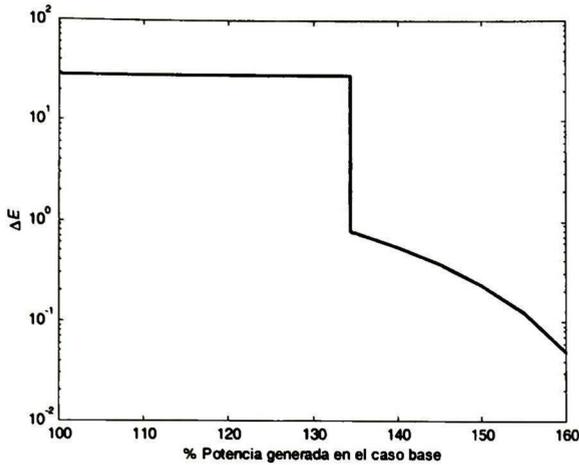


Fig. 6.32. Variación de  $\Delta E$  caso S4-11.

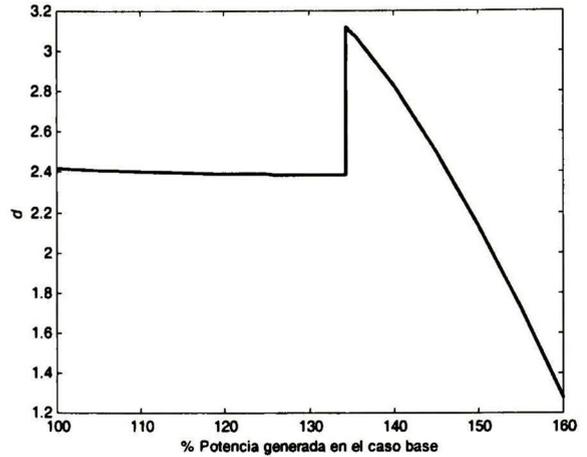


Fig. 6.33. Variación de  $d$  caso S4-11.

Es claro que cuando la potencia generada es mayor o igual a 140.3% el nivel de estrés en el sistema de posfalla del caso S4-11 es mayor.

#### 6.4.2.2.3 Análisis del caso S4-11 modificado

El nivel de estrés de un sistema para la condición de posfalla es independiente de la trayectoria de falla. Para confirmar esto se utiliza el sistema de posfalla del caso S4-11, con falla en el nodo 138 (se libera abriendo la línea 135-138). Los valores de  $\Delta E$  y  $d$  se muestran en las figuras 6.34 y 6.35, respectivamente.

En las figuras 6.34 y 6.35 se observa que los valores de  $\Delta E$  y  $d$  en la condición de operación base para este caso son tales que se considera que el sistema tiene un nivel medio o bajo de estrés, esto coincide con lo establecido cuando la falla se localizó en el nodo 135. La diferencia entre los valores de  $\Delta E$  y  $d$  cuando la falla se localiza en el nodo 135 y en el 138 se debe a que cada trayectoria de falla resultante tiene su propio PEIC. Aun así, el grado de estrés del sistema de posfalla es similar.

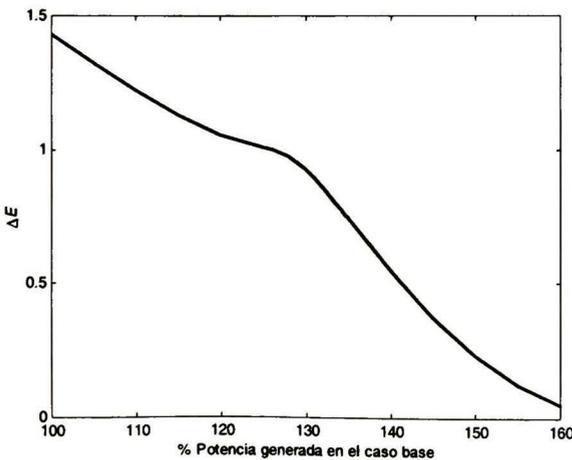


Fig. 6.34. Variación de  $\Delta E$ , falla nodo 138, se abre la línea 135-138.

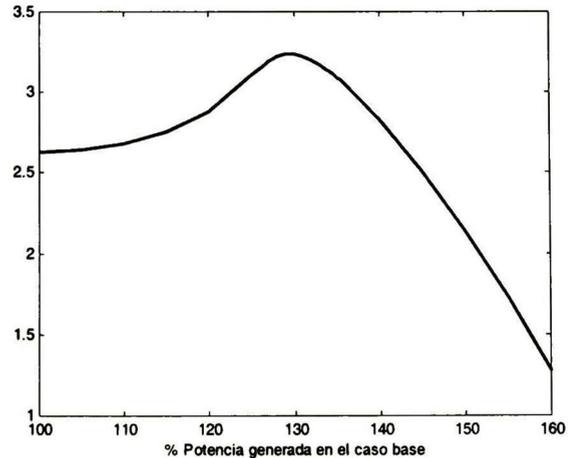


Fig. 6.35. Variación de  $d$ , falla nodo 138, se abre la línea 135-138.

Cuando la potencia generada es igual al 140.3% de la generada en el caso base se puede observar que los valores de  $\Delta E$  en las figuras 6.32 y 6.34 así como los valores de  $d$  en las figuras 6.33 y 6.35 tienen valores iguales esto es, en esta condición de operación las dos trayectorias tienen el mismo PEIC. El cambio en los valores de  $\Delta E$  y  $d$  mostrados en las figuras 6.34 y 6.35 sugiere que el nivel de estrés en el sistema de posfalla es mayor, cuando la potencia generada es mayor que 140.3%, esto también concuerda con lo establecido cuando la falla se localizó en el nodo 135.

Con estos ejemplos se concluye que el criterio e índices propuestos para estimar el grado de estrés son apropiados, al menos en el caso del sistema de estudio 4.

---

# Capítulo 7

## 7-1 Conclusiones

Las conclusiones más importantes de esta tesis son las siguientes:

Se verifica la utilidad de los métodos directos tipo Lyapunov en el análisis de la estabilidad transitoria en sistemas eléctricos. Se demuestra además, que pueden ser un complemento valioso para los programas convencionales de estabilidad transitoria.

Los métodos directos permiten grandes ahorros de tiempo y esfuerzo computacional y proporcionan información valiosa para la toma de decisiones en aplicaciones en línea.

La función de energía evaluada en puntos de equilibrio inestables de tipo I para aproximar la región de estabilidad se justifica al saber que estos puntos de equilibrio determinan la estructura de la frontera de estabilidad.

En la estimación de la frontera de estabilidad en sistemas reales es determinante el cálculo del punto de equilibrio inestable controlador (PEIC). Que, además de ofrecer resultados menos conservadores que el punto de equilibrio más cercano (PEIMC), presenta ventajas desde el punto de vista computacional sobre el PEIMC.

Se confirma la dificultad para determinar los puntos de equilibrio que pertenecen a la frontera de estabilidad. Y que la localización del PEIC depende de la trayectoria de falla. La trayectoria de falla depende de las condiciones de operación de prefalla, de falla y posfalla.

El método BCU convencional es un método con una fuerte base teórica para localizar el PEIC. A pesar de esta base teórica, el método BCU puede presentar problemas para localizar el PEIC. Estos problemas dependen de la función de energía utilizada, la magnitud del paso de integración utilizado para conocer la trayectoria de falla y de la sensibilidad ante la condición inicial de los métodos de solución de ecuaciones algebraicas.

Los problemas que presenta el método BCU convencional pueden reducirse significativamente con el método propuesto. Este método sustituye la solución de las ecuaciones algebraicas por la integración de un nuevo sistema de ecuaciones diferenciales.

El método propuesto (BCU modificado) es más confiable que el tradicional pero requiere de mayor esfuerzo computacional.

Se proponen índices para determinar margen de estabilidad y/o de estrés de los sistemas eléctricos. Se verifican los índices propuestos así como los algoritmos.

El PEIC se puede utilizar no solo para estimar la estabilidad del sistema ante la ocurrencia de un disturbio, también se puede utilizar para determinar o estimar la fortaleza que tiene el sistema para soportar cambios en su condición de operación sin pérdida de estabilidad. Se utilizó también se para estimar el nivel de estrés bajo el cuál opera el sistema.

## 7.2 Aportaciones

Las principales aportaciones de este trabajo son las siguientes.

- En este trabajo se clarifican los conceptos teóricos y aplicabilidad de los métodos directos tipo Lyapunov más utilizados en el estudio de la estabilidad en sistemas eléctricos.
- Se analiza en detalle el método BCU, se explican sus fortalezas y debilidades y las causas por las que este método puede fallar en la localización del PEIC.
- Se propone una solución a los problemas que presenta el método BCU.
- Como resultado de la solución propuesta se desarrolla una versión modificada del método BCU, esta versión resuelve con éxito la mayor parte de los problemas del BCU convencional sin perder la esencia del método BCU convencional.
- El algoritmo propuesto se aplica para la estimación de la estabilidad y el cálculo del margen de estabilidad en diferentes sistemas eléctricos de potencia.
- Este algoritmo se aplicó también en la determinación de la capacidad que tiene el sistema para soportar cambios en su condición de operación sin perder estabilidad y para estimar el grado de estrés bajo el que opera el sistema.
- Los resultados obtenidos verifican la validez de la modificación al BCU convencional y de los índices y/o margen de estabilidad y del grado de estrés de los sistemas eléctricos.
- Se desarrolló herramienta computacional en la que se implementan las metodologías estudiadas en este trabajo.

## 7.3 Trabajos futuros

Se proponen como trabajos futuros lo siguiente.

- La exactitud de la función de energía que se utiliza en los métodos directos es muy importante. La búsqueda de funciones de energía que aproximen la frontera de estabilidad con mayor precisión. Estos procedimientos deberán incluir índices del grado de aproximación, deberán también poder separar efectos de los parámetros que la conforman para así cuantificar su influencia en la estabilidad.
- Utilizar funciones vectoriales de Lyapunov con formulaciones que preserven la estructura de la red. Estas formulaciones deberán de permitir incluir modelos de cargas dependientes del voltaje y de la frecuencia. La inclusión de dispositivos de control en la red es una tarea actual y deberán incluirse en las formulaciones de los métodos directos.
- Continuar con la investigación de métodos directos para estudios de estabilidad no lineal que vayan mas allá de la primera oscilación. Se deberá incluir modelos de mayor orden en los generadores e incluir sus controles automáticos.
- Continuar con la investigación de métodos confiables y eficientes computacionalmente para la determinación de la frontera de estabilidad por la que cruza la trayectoria de falla sostenida. Esto incluye la investigación de métodos de solución confiables y eficientes de ecuaciones algebraicas, métodos que aproximen la condición inicial, métodos que aprovechen la estructura topológica específica de cada red, etc.

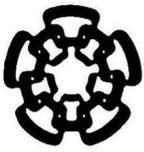
- Investigación de métodos que incluyan técnicas de inteligencia artificial para que con patrones de comportamiento de un sistema de potencia específico, ayuden a determinar la(s) trayectorias de falla para la determinación rápida del PEIC.
- Investigación de procedimientos que combinen técnicas de métodos directos con métodos de integración numérica eficientes que incluyan paralelismo, reducción de dimensión de la red e inteligencia artificial. Estos procedimientos además de ser eficientes computacionalmente deberán ser seguros en la determinación de la estabilidad de los sistemas eléctricos.
- Procedimientos para determinar índices o márgenes de estabilidad, para el sistema en su conjunto (globales) así como para elementos o regiones del sistema (locales).

---

# Bibliografía

- [1] Lyapunov A. M. (1907) *Problème général de la stabilité du mouvement*, traducción al francés en 1907 de la edición rusa, *Commun. Soc. Math. Kharkow*, 1893. Reimpresión en *Annals of Mathematical Studies*, No. 17, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1949.
- [2] Pai M. A. (1981) *Power System analysis by the Direct Method of Lyapunov*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- [3] Pai M. A. (1989) *Energy Function Analysis for Power System stability*. Kluwer Academic Publishers, Boston.
- [4] S. Smale, *Differentiable dynamical systems*, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 747.
- [5] M. Vidyasagar, *Nonlinear Systems analysis*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1978.
- [6] H. D. Chiang, F. F. Wu and P. P. Varaiya. *Foundation of Direct Methods for Power Systems Transient Stability Analysis*. IEEE Trans. on Circuits and Systems vol. CAS-34, Feb. 1987, pp. 712–728.
- [7] H. D. Chiang, M. W. Hirsh and F. F. Wu. *Stability Regions of Nonlinear Autonomous Dynamical Systems*. IEEE Trans. on Automatic Control CAS-33, No. 1, Jan. 1988, pp. 16-27.
- [8] J. Zaborsky, G. Huang, B. Zheng and T. Leung. *On the Phase Portrait of a Class of Large Nonlinear Dynamical Systems Such as the Power System*. IEEE Trans. on Automatic Control CAS-33, No. 1, Jan. 1988, pp. 4-15.
- [9] Aboytes, Florencio. *Análisis de sistemas de potencia*. Centro Nacional de Control de Energía, Comisión Federal de Electricidad, México, 1990.
- [10] Tavora C. J. And O. J. M. Smith (1970) *Stability analysis of power systems*. ERL Report No. 70-5, Univ. Of California, Berkeley.
- [11] Magnuson A. M. (1947) *Transient energy method of calculating stability*. AIEE Trans. 66: 747-755.
- [12] Aylett P. D. (1958) *The energy-integral criterion of transient stability limits of power systems*, Proc. IEE (London), 105C: 527-536.
- [13] Gorev A. A. (1960) *A collection of works on transient stability of power systems*, Gosenergoirdat Eds. In *Second Lyapunov's Method and its Application to Energy Systems*, Naouka Eds. (1966).
- [14] Michel A. N., A. A. Fouad and V. Vittal (1983) *Power system transient stability using individual machine energy functions*. IEEE Trans. CAS-30: 366-276.
- [15] Attay T., V. R. Sherkat, R. Podmore, S. Virmani and C. Puech (1979) *Transient energy stability analysis*. System Engineering for Power: Emergency Operating state Control – Section IV. U.S. Department of Energy Publications, No. CONF-790904-PI.
- [16] A. A. Fouad, V. Vittal. *Power System Transient Stability Analysis Using the Transient Energy Function Method*. New Jersey, Prentice Hall, 1992.
- [17] Uyemura, K., J. Matsuki, I. Yamada, and T. Tsuji. (1972) *Approximation of an Energy Function in Transient Stability Analysis of Power Systems*. Electrical Engineering in Japan 92, no. 4: 96-100.
- [18] M. Pavella, P. G. Murthy. *Transient Stability of Power Systems, Theory and practice*. John Wiley & Sons, Chichester, England (1994).
- [19] H. D. Chiang, F. W. Wu and P. P. Varaiya. *A BCU Method for Direct Analysis of Power System Transient Stability*. IEEE Trans. on Power Systems, vol. 9, No. 3, August 1994, pp. 1194–1208.

- [20] H. D. Chiang, *Analytical results on direct methods for power system transient stability analysis*, Advances in Control and Dynamic Systems, XL Theme: Advances in Electric Power and Energy Conversion Systems Dynamics and Control, Academic Press, 43, Part 3 1991, pp. 275-334
- [21] H. D. Chiang, *A theory-based controlling u.e.p. method for direct analysis of transient stability*, IEEE 1989 International Symposium of Circuits and Systems, May. 1989.
- [22] H. D. Chiang. *The BCU Method for Direct Stability Analysis of Electric Power Systems: Theory and Applications in Systems and Control Theory for Power Systems IMA Vol 64 in Mathematics and its Applications*, Springer-Verlag, 1995.
- [23] H. D. Chiang and L. Fekih-Ahmed. *Quasi-Stability Regions of Nonlinear Dynamical Systems: Theory*. IEEE Trans. on Circuits and Systems – I Fundamental Theory and Applications, CAS-43, No. 8, Aug. 1996, pp. 627-635.
- [24] T. Athay, V. R. Sherkat, R. Podmore, S. Virmani and C. Puech (1979) Transient energy stability analysis. *System Engineering for Power: Emergency Operating State Control – Section IV*. U.S. Department of Energy Publication, No. CONF-790904-P1.
- [25] P. M. Anderson. *Power System Control and Stability*. 1994, IEEE Press, USA.
- [26] Chih-Wen Liu and J. S. Thorp. *A Novel Method to Compute the Closest Unstable Equilibrium Point for Transient Stability Region Estimate in Power Systems*. IEEE Trans. on Circuits and Systems – I Fundamental Theory and Applications, CAS-44, No. 7, Jul. 1997, pp. 630-635.
- [27] A. A. Fouad, et al, *Transient Stability Margin as a Tool for Dynamic Security Assessment*, Report EL-1755. Palo Alto, CA.: EPRI, March 1981.
- [28] Graham Rogers. *Power System Structure and Oscillations*. IEEE Computer Applications in Power, April 1999, pp. 14-21.
- [29] IEEE committee report, Task Force of The Dynamic System Performance Subcommittee. *Transient Stability Test Systems for Direct Stability Methods*. IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 7, No. 1, Feb. 1992, pp. 37-44.
- [30] H. D. Chiang, C. C. Chu. *Theoretical Foundation of the BCU Method for Direct Stability Analysis of Network-Reduction Power System Models with Small Transfer Conductances*. IEEE Trans. on Circuits and Systems – I Fundamental Theory and Applications, CAS-42, No. 5, May. 1995, pp. 252-265.
- [31] Kakimoto N., Y. Ohsawa and M. Hayashi (1978) *Transient stability analysis of electric power system via Luré type Lyapunov function – Parts I and II*. Trans. IEE of Japan 98: 63-79.
- [32] Kakimoto N., Y. Ohsawa and M. Hayashi (1980) *Transient stability analysis of multimachine power systems with field flux decays via Lyapunov's direct method*. IEEE Trans. Pas-99: 1819-1827.
- [33] Kakimoto N. and M. Hayashi (1981) *Transient stability analysis of multimachine power system by Lyapunov's direct method*. Proc. Of the 20<sup>th</sup> IEEE Conf. On Decision and Control, San Diego, December, 1:464-470.



**CENTRO DE INVESTIGACION Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL IPN  
UNIDAD GUADALAJARA**

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, aprobó la tesis: "Método BCU modificado para la estimación de estabilidad transitoria en sistemas eléctricos de potencia" que presenta el C. Ignacio Luna López el día 1 de Diciembre de 2000.

Dr. Bernardino Castillo Toledo  
Investigador Cinvestav 3 A  
CINVESTAV DEL IPN  
Guadalajara

Dr. Arturo Román Messina  
Investigador Cinvestav 3A  
CINVESTAV DEL IPN  
Guadalajara

Dr. Alexander Loukianov  
Investigador Cinvestav 3 A  
CINVESTAV DEL IPN  
Guadalajara

Dr. Juan Manuel Ramírez Arredondo  
Investigador Cinvestav 3A  
CINVESTAV DEL IPN  
Guadalajara

Dr. José Manuel Cañedo Castañeda  
Investigador Cinvestav 2 C  
CINVESTAV DEL IPN  
Guadalajara.



CINVESTAV  
BIBLIOTECA CENTRAL



SSIT000003872