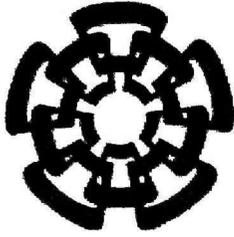




xx(93345.1)



# CINVESTAV

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN  
Unidad Guadalajara

---

**MODELOS DE ONDAS VIAJERAS PARA EL ANÁLISIS  
DE TRANSITORIOS ELECTROMAGNÉTICOS EN LÍNEAS  
DE TRANSMISIÓN.**



Tesis que presenta

**CAMILO NARVAEZ PÉREZ**

Para obtener el grado de  
**Maestro en Ciencias**

En la especialidad de  
**Ingeniería Eléctrica**

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Febrero de 2001

**CINVESTAV I.P.N.  
SECCION DE INFORMACION  
Y DOCUMENTACION**

CLASIF.:	
ADQUIS.:	tesis - 2001
FECHA:	19-sep-01
PROCED.:	Serv. Bibliotec
	\$

**MODELOS DE ONDAS VIAJERAS PARA EL ANÁLISIS  
DE TRANSITORIOS ELECTROMAGNÉTICOS EN LÍNEAS  
DE TRANSMISIÓN.**

**Tesis de Maestría en Ciencias  
Ingeniería Eléctrica**

Por:

**Camilo Narvaez Pérez**

Ingeniero Mecánico Electricista  
Universidad de Guadalajara 1992-1997

Becario de CONACyT, expediente No. **129306**

Directores de tesis:

**Dr. José Luis Naredo Villagrán**

**Dr. Pablo Moreno Villalobos**

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Febrero de 2001

## **AGRADECIMIENTOS.**

Al final de esta etapa deseo agradecer a Dios por permitirme escalar un peldaño más de mi vida.

La preparación que hasta ahora he tenido ha sido posible gracias a toda la gente que me rodea, desde mi esposa (Paty) que me aconseja y comparte todos mis logros y proyectos con paciencia y amor, mis padres (José Luis e Irma†) quienes siempre me apoyan y estimulan con su ejemplo, consejos y acciones, mis hermanos y hermanas (Florina†, Mario, Javier, José Luis, Olga Lidia, Claudia y Enrique) a los cuales les admiro y quiero, así como a la familia de mi esposa.

Deseo agradecer a mis profesores, especialmente a los doctores: José Luis Naredo Villagrán del cual he recibido conocimientos y sobre todo su amistad, sin su apoyo yo no estaría concluyendo esta etapa de preparación, Pablo Moreno Villalobos que tanto me apoyó en mis estudios y con paciencia aguantó mis bromas y errores; así también quiero agradecer a Claudio Fuerte, Juan Manuel Ramírez, Arturo Messina y José Manuel Cañedo.

Agradezco a mis compañeros de generación tanto a los de mi especialidad, particularmente a: César E. Blanco, Sergio Coreño, Marco A. Pérez, J. Carlos Gutiérrez, Abel Delino y Ricardo Méndez, con quienes compartí de manera abierta mis ideas, recibiendo apoyo y consejos que ayudaron a complementar mi punto de vista, así como a los compañeros de otras generaciones y especialidades que ofrece el CINVESTAV, particularmente a los integrantes de las generaciones 1998 y 1999 de Diseño Electrónico y a los muchachos de la generación de 1999 de Sistemas Eléctricos de Potencia. Además quiero agradecer el apoyo de: Larry, Abner, Beto y Orlando.

Fue fundamental el apoyo que recibí por parte del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (CINVESTAV) así como del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) para el sustento económico y pedagógico, con lo cual se concluyó este trabajo y etapa de mi desarrollo profesional.

## RESUMEN.

En esta tesis se desarrolla un modelo de ondas viajeras en el dominio del tiempo para líneas de transmisión polifásicas con parámetros independientes de la frecuencia. El modelo desarrollado puede ser incorporado a programas de propósito general para el análisis de transitorios electromagnéticos en sistemas eléctricos de potencia.

Inicialmente se analizan líneas de transmisión monofásicas y polifásicas en el dominio de la frecuencia, mediante la técnica de la Transformada Numérica de Laplace, se simulan transitorios electromagnéticos en la línea de transmisión monofásica para los casos de: línea ideal, parámetros constantes y parámetros dependientes de la frecuencia. Este método se utiliza como referencia para los resultados obtenidos por medio del método en el dominio del tiempo.

Posteriormente, se describen los elementos que se acoplan a las líneas de transmisión mediante esquemas del *Electromagnetic Transients Program* (EMTP). Para el caso de líneas ideales, con distinto tipo de cargas e impedancia de fuente, se obtienen resultados prácticamente idénticos a los resultados del método del dominio de la frecuencia, para el caso de que el incremento del tiempo sea un submúltiplo del tiempo de viaje de la onda. Pero, cuando el incremento del tiempo no cumpla esta característica, se tiene la necesidad de interpolar entre las historias de los nodos de la red analizada, obteniéndose dispersión u oscilación numérica, según el esquema de interpolación utilizado.

Finalmente se realiza la extensión del modelo de ondas viajeras monofásico al caso polifásico en el dominio del tiempo apoyándose en la teoría de las matrices idempotentes, describiéndose detalladamente las ecuaciones pertinentes. Se dan recomendaciones prácticas en cuanto a la formación de las memorias de las ondas viajeras de historia, de la representación de la admitancia característica, de las velocidades modales de las ondas y de la matriz de las funciones de propagación. Se simulan varios casos para obtener criterios adecuados para la representación de dichos parámetros, obteniéndose buenos resultados con respecto al método en el dominio de la frecuencia.

# ÍNDICE.

	Página
Agradecimientos.....	I
Resumen.....	II
Índice.....	III
Lista de figuras.....	VI
Notación general.....	VIII
Lista de tablas.....	XII

## CAPÍTULO 1.- INTRODUCCIÓN.

1.1 Antecedentes.....	1
1.2 Definición del problema y motivación.....	4
1.3 Objetivo general.....	4
1.4 Metodología.....	5

## CAPÍTULO 2.- LÍNEAS DE TRANSMISIÓN Y ANÁLISIS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA.

2.1 Análisis de redes eléctricas en el dominio de la frecuencia.....	6
2.2 Solución general de las ecuaciones de la línea de transmisión en el dominio de la frecuencia.....	7
2.3 Modelo de la línea en Dos Puertos.....	16
2.4 Modelo en Dos Puertos de Admitancias de la línea.....	17
2.5 Transformada Numérica de Laplace.....	18

### **CAPÍTULO 3.- ANÁLISIS TRANSITORIO EN EL DOMINIO DEL TIEMPO.**

<b>3.1 Modelos tipo EMTP.....</b>	<b>22</b>
<b>3.1.1 Antecedentes.....</b>	<b>22</b>
<b>3.1.2 Modelos de parámetros concentrados.....</b>	<b>23</b>
<b>3.1.3 Modelo de la línea ideal monofásica.....</b>	<b>26</b>
<b>3.1.4 Modelo de la línea monofásica con parámetros dependientes de la             frecuencia.....</b>	<b>28</b>
<b>3.2 Método nodal.....</b>	<b>32</b>

### **CAPÍTULO 4.- MODELADO DE LA LÍNEA MONOFÁSICA EN EL DOMINIO DEL TIEMPO.**

<b>4.1 Implementación algorítmica de la solución de la línea monofásica ideal.....</b>	<b>34</b>
<b>4.2 Almacenamiento de las historias.....</b>	<b>36</b>
<b>4.3 Interpolación entre los elementos con historia.....</b>	<b>38</b>
<b>4.4 Ejemplo numérico de un transitorio.....</b>	<b>39</b>

### **CAPÍTULO 5.-MODELADO DE LA LÍNEA POLIFÁSICA.**

<b>5.1 Solución de las ecuaciones polifásicas en el dominio de la frecuencia.....</b>	<b>47</b>
<b>5.2 Obtención de las ecuaciones polifásicas en el dominio del tiempo.....</b>	<b>51</b>
<b>5.3 Aplicación de la teoría de las matrices idempotentes para el desarrollo de un             modelo de la línea en el dominio del tiempo.....</b>	<b>53</b>
<b>5.4 Ejemplo de aplicación a las líneas polifásicas con parámetros constantes en el             dominio del tiempo.....</b>	<b>59</b>

### **CAPÍTULO 6.- CONCLUSIONES.**

<b>6.1 Conclusiones generales de la tesis.....</b>	<b>64</b>
<b>6.2 Aportaciones de la tesis.....</b>	<b>65</b>
<b>6.3 Trabajos futuros.....</b>	<b>66</b>

<b>APÉNDICE A. Parámetros geométricos y eléctricos de línea monofásica.....</b>	<b>67</b>
<b>APÉNDICE B. Líneas de transmisión con parámetros dependientes de la frecuencia.....</b>	<b>70</b>
<b>B.1 Síntesis de <math>Y_c</math> y de <math>A = -\exp(-\gamma\ell)</math>.....</b>	<b>70</b>
<b>B.2 Convolución recursiva.....</b>	<b>78</b>
<b>REFERENCIAS.....</b>	<b>81</b>

## LISTA DE FIGURAS.

	Página
<b>Figura 2.1.</b> Línea de transmisión.....	15
<b>Figura 2.2.</b> Línea monofásica de transmisión para el ejemplo numérico del uso de la TNL.	
a) Vista transversal, b) Vista longitudinal, de conexión.....	20
<b>Figura 2.3.</b> Voltaje en el extremo receptor de la línea.....	21
<b>Figura 3.1.</b> Esquema con elementos comunes de las redes eléctricas.....	23
<b>Figura 3.2.</b> Variación de la corriente en un inductor en el tiempo.....	24
<b>Figura 3.3.</b> Elemento inductivo y su circuito equivalente EMTP.....	25
<b>Figura 3.4.</b> Elemento capacitivo y su circuito equivalente EMTP.....	26
<b>Figura 3.5.</b> Circuito equivalente tipo EMTP de la línea de transmisión monofásica ideal.....	28
<b>Figura 4.1.</b> Línea monofásica con carga $Z_L$ .....	34
<b>Figura 4.2.</b> Buffers circulares de los elementos con retardo (historias) de las corrientes.....	37
<b>Figura 4.3.</b> Interpolación entre elementos de historia.....	38
<b>Figura 4.4.</b> Voltaje en el extremo final, nodo m, de una línea ideal con carga resistiva.....	40
<b>Figura 4.5.</b> Voltaje en el extremo final, nodo m, con $\Delta t = \tau/5$ , línea ideal con carga resistiva.....	40
<b>Figura 4.6.</b> Voltaje en el extremo final, nodo m, de una línea ideal con carga inductiva. a) Sin interpolación $\Delta t = \tau/20$ , b) Con interpolación, líneal, $\Delta t = \tau/20.3$ .....	41
<b>Figura 4.7.</b> Voltaje en el extremo final, nodo m, de una línea ideal con carga inductiva utilizando interpolación cuadrática.....	42
<b>Figura 4.8.</b> Voltaje en el extremo final, nodo m, de una línea ideal con carga inductiva utilizando interpolación por splines cúbicas.....	43
<b>Figura 4.9.</b> Comparación para diferentes valores de la resistencia de la fuente. a) 10 ohms, b) 100 ohms.....	44
<b>Figura 4.10.</b> Transitorio para impedancia de la fuente inductiva, con una carga de 20 K $\Omega$ .....	45
<b>Figura 4.11.</b> Transitorio para impedancia de la fuente inductiva, con una carga de 10 milihenrios. ....	45
<b>Figura 4.12.</b> Transitorio para impedancia de la fuente inductiva, con una carga de 0.1 $\mu$ F.....	46
<b>Figura 5.1.</b> Línea de transmisión multiconductora. a) Esquema de conexión, b) Modelo equivalente en dos puertos.....	48
<b>Figura 5.2.</b> Línea de transmisión polifásica. a) Vista transversal, b) Vista longitudinal, de conexión.....	50
<b>Figura 5.3.</b> Voltajes transitorios de línea polifásica con parámetros constantes de la figura 5.2.....	50
<b>Figura 5.4.</b> Voltajes transitorios de línea polifásica con parámetros dependientes de la frecuencia de la figura 5.2.....	51

<b>Figura 5.5.</b> Voltajes transitorios en los nodos receptores de línea polifásica de la figura 5.2, utilizando la ecuación $Y_c = \Re e\{y_c\}$ .....	60
<b>Figura 5.6.</b> Voltajes transitorios en los nodos receptores de línea polifásica de la figura 5.2, utilizando la ecuación $Y_c =  y_c $ .....	61
<b>Figura 5.7.</b> Voltajes transitorios en los nodos receptores de línea polifásica de la figura 5.2, utilizando la ecuación $Y_c = \sqrt{C_g L_g^{-1}}$ .....	62
<b>Figura 5.8.</b> Voltajes transitorios en los nodos receptores de línea polifásica de la figura 5.2, a) Utilizando la ecuación $Y_c = \Re e\{y_c\}$ , b) Utilizando la ecuación $Y_c =  y_c $ c) Utilizando la ecuación $Y_c = \sqrt{C_g L_g^{-1}}$ .....	63
<b>Figura B1.</b> Aproximación de la admitancia característica, $Y_c$ , para $m=n$ .....	74
<b>Figura B2.</b> Error relativo porcentual de la aproximación de la admitancia característica, $Y_c$ .....	74
<b>Figura B3.</b> Parte real de $Y_c$ y de $Y_{ca}$ .....	75
<b>Figura B4.</b> Parte imaginaria de $Y_c$ y de $Y_{ca}$ .....	75
<b>Figura B5.</b> Aproximación de la función de peso, $A$ .....	76
<b>Figura B6.</b> Parte real de $A$ y de $A_a$ .....	76
<b>Figura B7.</b> Parte imaginaria de $A$ y de $A$ aproximada.....	77
<b>Figura B8.</b> Diferencia de fase entre $A$ y $A$ aproximada.....	77
<b>Figura B9.</b> Voltaje en el extremo receptor de la línea con parámetros dependientes de la frecuencia.....	80

# NOTACIÓN GENERAL.

Página donde se utiliza por primera vez

<b>q</b> número de nodos.....	6
<b>Y<sub>ij</sub></b> admitancias nodales.....	6
<b>i</b> subíndice del renglón de <b>YZ</b> .....	6
<b>j</b> subíndice de la columna de <b>YZ</b> ó unidad imaginaria.....	6,8
<b>Y</b> matriz de admitancias nodales ó matriz de admittancias paralelo de la línea.....	6,8
<b>I<sub>i</sub></b> fuentes de inyección ó corrientes de malla.....	6,7
<b>V<sub>i</sub></b> voltajes nodales ó fuentes de inyección.....	6,7
<b>Z<sub>bus</sub></b> matriz de impedancias.....	6
<b>m</b> frecuencias componentes de un transitorio ó subíndice del dominio modal.....	6,9
<b>Z<sub>ij</sub></b> impedancias de malla.....	7
<b>r</b> número de mallas de una red.....	7
$\frac{\partial}{\partial x}$ derivada parcial con respecto a la distancia, <b>x</b> .....	7
$\frac{\partial}{\partial t}$ derivada parcial con respecto al tiempo, <b>t</b> .....	7
<b>v</b> vector de voltajes nodales en el dominio del tiempo.....	7
<b>i</b> vector de corrientes nodales en el dominio del tiempo.....	7
<b>r</b> matriz de resistencias longitudinales en el dominio del tiempo.....	7
<b>l</b> matriz de inductancias longitudinales en el dominio del tiempo.....	7
<b>g</b> matriz de conductancias transversales en el dominio del tiempo.....	7
<b>c</b> matriz de capacitancias transversales en el dominio del tiempo.....	7
<b>s</b> variable de frecuencia compleja.....	8
$\frac{d}{dx}$ derivada total con respecto a la distancia, <b>x</b> .....	8
<b>V</b> vector de voltajes nodales en el dominio de la frecuencia.....	8
<b>I</b> vector de corrientes nodales en el dominio de la frecuencia.....	8
<b>R</b> matriz de resistencias longitudinales en el dominio de la frecuencia.....	8
<b>L</b> matriz de inductancias longitudinales en el dominio de la frecuencia.....	8
<b>G</b> matriz de conductancias transversales en el dominio de la frecuencia.....	8

<b>C</b> matriz de capacitancias transversales en el dominio de la frecuencia.....	8
<b>Z</b> matriz de impedancias serie de la línea.....	8
$\sigma$ constante de amortiguamiento ó conductividad del aire.....	8,67
$\omega$ frecuencia angular.....	8
<b>w</b> variable auxiliar.....	9
<b>a</b> variable auxiliar ó superíndice de nodos con voltajes conocidos.....	9,33
<b>n</b> número de fases de la línea.....	9
<b>M, N</b> matrices de transformación modal para los voltajes y corrientes, respectivamente.....	9
<b>V<sub>m</sub></b> vector de voltajes modales.....	9
<b>I<sub>m</sub></b> vector de corrientes modales.....	9
<b>M<sub>i</sub></b> modo de propagación para los voltajes.....	9
<b>N<sub>i</sub></b> modo de propagación para las corrientes.....	10
<b>A</b> producto <b>ZY</b> .....	10
<b><math>\Lambda</math></b> matriz de eigenvalores de <b>ZY</b> y de <b>YZ</b> .....	10
<b>T</b> transpuesta de una matriz ó período de observación en el tiempo.....	10,19
<b>exp, e</b> funciones exponencial.....	10,30
$\gamma_i$ constante de propagación modal $\gamma_i = \sqrt{\lambda_i} = \alpha_i + j\beta_i$ .....	11
$\alpha_i$ constante de atenuación.....	11
$\beta_i$ constante de fase.....	11
<b><math>\Gamma</math></b> matriz de constantes de propagación modales.....	11
<b>C<sub>i</sub></b> velocidad de propagación modal.....	11
<b>C<sub>m1</sub>, C<sub>m2</sub></b> vectores de constantes de integración.....	11
<b><math>\Psi_v</math></b> matriz de propagación de los voltajes modales.....	11
<b>Y<sub>c</sub></b> matriz de admitancias características.....	12
<b>Z<sub>c</sub></b> matriz de impedancias características.....	12
<b>Y<sub>m</sub></b> matriz de admitancias modales.....	13
<b>Z<sub>m</sub></b> matriz de impedancias modales.....	13
<b>k, m</b> nodos emisores y receptores de una línea de transmisión, respectivamente.....	14,15
<b>I<sup>k</sup>, V<sup>k</sup></b> vectores de corrientes y de voltajes en $x=0$ , nodo <b>k</b> , en el dominio de la frecuencia.....	14
$\ell$ longitud de la línea de transmisión.....	15

$C_1, C_2$ componentes espectrales de onda viajera de ida y de regreso, respectivamente.....	15
$I^m, V^m$ vectores de corrientes y de voltajes en $x=l$ , nodo $m$ , en el dominio de la frecuencia.....	15
cosh, sinh funciones coseno y seno hiperbólicos.....	16
<b>A, B</b> matrices de funciones de propagación ó de admitancias.....	16,17
<b>C, D</b> matrices de funciones de propagación.....	16
coth, cosech funciones cotangente y cosecante hiperbólicos.....	17
$F(j\omega), F(s)$ transformada de Fourier y Laplace.....	18
$f(t)$ transformada inversa de Fourier ó de Laplace.....	18,19
$\sigma_\omega$ ventana de datos discretizada.....	19
<b>M</b> número de incrementos del tiempo.....	19
$\Delta$ incremento.....	19
<b>N</b> número de incrementos de la frecuencia ó longitud del búffer de historias.....	19,36
<b>C</b> constante de amortiguamiento.....	19
$\varepsilon$ error relativo porcentual.....	19
$\Omega$ frecuencia máxima.....	19
<b>k</b> constante auxiliar.....	19
<b>k, m, o, p, q</b> nodos de una red eléctrica.....	23
<b>G</b> conductancia entre un par de nodos.....	23
$\tau$ tiempo de viaje de la onda en una línea de transmisión.....	27
hist superíndice de ondas viajeras de historia de las líneas de transmisión.....	27
$b(x - c_o t), F(x - c_o t), f(x - c_o t)$ ondas viajeras de regreso e ida de las líneas de transmisión...	29
<b>F, B</b> ondas viajeras de ida y regreso de las líneas de transmisión en el dominio de la frecuencia.	30
<b>A, a</b> función de peso o de propagación en el dominio de la frecuencia y del tiempo.....	30,31
<b>Y<sub>f</sub></b> matriz de admitancias de las fuentes.....	47
<b>V<sub>f</sub></b> vector de fuentes.....	47
<b>H, h</b> matriz de funciones de propagación en el dominio de la frecuencia y del tiempo.....	52,53
<b>U</b> matriz identidad.....	54
<b>C, R</b> modos de corriente y de voltaje de las matrices de transformación <b>N</b> y <b>N<sup>-1</sup></b> .....	54
<b>D<sub>r</sub></b> matriz idempotente.....	55
$I_m^{k-far}, I_m^{m-far}$ vectores de ondas viajeras de corriente opuesta al nodo $k$ y $m$ , respectivamente.....	56,58

$r$ subíndice de componentes modales.....	57
$i_{m,r}^{k\text{-far}}, i_{m,r}^{m\text{-far}}$ componentes de los vectores de ondas viajeras de corriente opuesta al nodo $k$ y $m$ , respectivamente, en el dominio del tiempo.....	58
$Y_c = \Re e\{y_c\}$ matriz de componentes reales de la matriz admitancia característica.....	59
$Y_c =  y_c $ matriz de módulos de la matriz admitancia característica.....	59
$Y_c = \sqrt{C_g L_g^{-1}}$ matriz admitancias transitorias de la línea de transmisión.....	59
$C_g$ matriz capacitancias geométricas de la línea de transmisión.....	59
$L_g$ matriz inductancias geométricas de la línea de transmisión.....	59
$\mu$ permeabilidad del aire.....	67
$\epsilon_0$ permitividad del aire.....	67
$h$ altura del conductor al plano de tierra.....	67
$r$ radio del conductor.....	67
$\rho_c$ resistividad del conductor.....	67
$\rho_t$ resistividad del terreno.....	67
$f$ frecuencia.....	67
$L_g, L_T$ inductancia geométrica y de tierra de la línea de transmisión.....	68
$Z_{cnd}$ impedancia del conductor de la línea de transmisión.....	68
$Z_{af}$ impedancia de alta frecuencia del conductor de la línea de transmisión.....	68
$R_{cd}$ resistencia de corriente directa del conductor de la línea de transmisión.....	68
$P_t, P_c$ profundidad compleja de penetración en la tierra y en el conductor, respectivamente.....	68
$\ln$ logaritmo natural.....	68
$F(s), F_a(s)$ funciones original y de aproximación en el dominio de la frecuencia.....	70
$a, b, c, d$ coeficientes auxiliares para la función de aproximación.....	70,72
$p, z$ polos y ceros de la función de aproximación.....	70,71
$k_\infty, k_1, k_2, \dots, k_n$ residuos de la función de aproximación.....	70
$f_a(t)$ funciones de aproximación en el dominio del tiempo.....	70
$\delta$ función delta de Dirac.....	70
$y_{ca}(t), a_a(t)$ funciones admitancia característica y de peso aproximadas.....	70
$C_r, i_{hc}, g_r, i_{far}, w_j, e_j$ coeficientes auxiliares, utilizados en las convoluciones recursivas.....	78,79

## LISTA DE TABLAS.

	Página
<b>Tabla I.</b> Modelos discretizados de los componentes de una red eléctrica.....	28
<b>Tabla II.</b> Tiempos de computo para algunos esquemas de interpolación entre las ondas viajeras..	42
<b>Tabla III.</b> Velocidades, constantes de atenuación y de fase de los modos de la línea.....	59
<b>Tabla IV.</b> Residuos y polos de la aproximación de la admitancia característica, $Y_c$ .....	74
<b>Tabla V.</b> Residuos y polos de la aproximación de la función de peso, $A$ .....	76

---

---

# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN.

---

---

### 1.1 Antecedentes.

En la actualidad, los sistemas de energía eléctrica juegan un papel muy importante en un gran número de actividades del ser humano. Un elemento importante de estos sistemas es la línea de transmisión; este elemento transporta la potencia eléctrica entre los demás componentes de los sistemas eléctricos de potencia. Al inicio, la transmisión fue en corriente directa pero en la actualidad predominan los sistemas de transmisión en corriente alterna trifásicos [1]. Los sistemas de transmisión están sometidos a diferentes perturbaciones debidas a varios fenómenos tales como: descargas atmosféricas, cierres y aperturas de los interruptores, fallas, etcétera. El estudio de los transitorios electromagnéticos en los sistemas de transmisión de energía eléctrica es importante para el diseño de las torres, conductores, aisladores y demás componentes de un sistema de transmisión eficiente [2].

Los primeros antecedentes para la solución analítica de las ecuaciones implicadas en el transporte de energía eléctrica se remonta hacia 1860 cuando Lord Kelvin plantea la ecuación que modela los cables del telégrafo transcontinental. Posteriormente, Oliver Heaviside, padre del cálculo operacional, propone las **Ecuaciones del Telegrafista** para modelar dicho sistema [3]; Estas ecuaciones están en términos de derivadas parciales respecto al tiempo y al espacio [4]. La solución de este tipo de ecuaciones ya había sido realizada por D'Alembert alrededor del año de 1780, aunque esta solución es aplicable sólo al caso de la línea de transmisión monofásica con parámetros ideales [5].

Las Ecuaciones del Telegrafista son una aproximación simplificada de la propagación de ondas en líneas ya que en la realidad los parámetros de la línea varían con la frecuencia. La expresión de las ecuaciones en el **dominio de la frecuencia** proporcionan un modelo matemático muy preciso, siempre y cuando las líneas operen en su región lineal.

El análisis de transitorios utilizando computadoras analógicas inicio en los años cincuenta, mediante los **TNA**s (Transient Network Analyzer) los cuales son simuladores de propósito específico [6]. Sin embargo, las tendencias actuales están orientándose hacia la simulación digital. Por otro lado, también se han utilizado métodos que se basan en las **Ecuaciones de Onda de D'Alembert** a los cuales se les conoce como **Métodos de Onda Viajera** y están formulados en el **dominio del tiempo**. Entre estos métodos está el diagrama reticular ó de rebote de **Bewley** (Lattice) utilizado en 1933 [2,7] que es un método gráfico. Su implementación computacional fue llevada a cabo por **Carlsson** en 1970 [8]. En este método son necesarios los coeficientes de reflexión y transmisión de las ondas.

El **Método de Bergeron** (1935) [2,9,10] es otro método que se basa en las Ondas Viajeras que inicialmente se aplicó a problemas del golpe de ariete en sistemas hidráulicos. También se implementó de manera inmediata a las líneas de transmisión por el mismo Bergeron. Posteriormente, **Hermann W. Dommel** en 1969 [10,11] tomó como base este método para el modelado de elementos con parámetros distribuidos en el programa **EMTP**, también se utiliza en el programa **SPICE**. Los modelos de tipo Bergeron de Ondas Viajeras con algunas variaciones, las cuales se verán más adelante, son los que se utilizan en el presente trabajo. Los métodos de Ondas Viajeras son altamente eficientes computacionalmente hablando. En éstos métodos no es necesario discretizar la línea en el espacio, solo en tiempo; esto es, solamente se definen las condiciones de frontera para el voltaje y la corriente al inicio ( $x = 0$ ) y al final de la misma ( $x = \ell$ ); esto a diferencia de otros métodos en el dominio del tiempo basados en esquemas de **diferencias finitas**, en los cuales si es necesario la discretización de la línea en el espacio. Entre estos últimos están el **Método de las Características** [12] en el cual, además de discretizar el tiempo, también se discretiza el espacio de forma que se pueden incluir elementos no lineales distribuidos, como los capacitores para simular el efecto corona, líneas no uniformes y líneas iluminadas por campos electromagnéticos. Además, los métodos en el dominio del tiempo permiten llevar a cabo simulaciones en tiempo real.

Los métodos de Onda Viajera y de Diferencias Finitas son métodos en el dominio del tiempo. Estos han evolucionado, a modo de poder incorporar los efectos de la frecuencia en los parámetros de las líneas bajo análisis. Otro problema de los métodos del dominio del tiempo es que las líneas de transmisión de energía eléctrica usualmente son multiconductoras. Por esta razón, la extensión de estos métodos a estos casos se ha venido realizando en forma pragmática, y varios métodos utilizados carecen de una base matemática sólida.

La alternativa a los métodos del dominio del tiempo son los métodos del **dominio de la frecuencia**. Entre éstos, los más prominentes son la **Transformada Numérica de Laplace** y la **Transformada Z [13,14]**. El más desarrollado es la Transformada Numérica de Laplace con base en los algoritmos de la **Transformada Rápida de Fourier**. Este método permite considerar la dependencia de la frecuencia de los parámetros de línea, además de que los sistemas polifásicos se resuelven de manera aceptable, mediante técnicas basadas sólidamente en la matemática. En esta investigación se adopta el método de la Transformada Numérica de Laplace como referencia para la comparación de resultados del método en el dominio del tiempo aquí presentado. **Day, Mullineux y Reed** de 1965 a 1969 **[15, 16]** obtuvieron los primeros resultados de la solución numérica de estas ecuaciones, en base a las Transformadas Numéricas de Fourier. Después, **Wedepohl y Hedman** en 1965 **[17,18]** aplicaron la Teoría Modal, desarrollada originalmente por Wedepohl en 1963 **[19]**, para el caso de líneas multiconductoras. De la teoría de los modos naturales conjuntamente con las técnicas numéricas de las integrales de **Fourier**, se obtiene la solución a las Ecuaciones del Telegrafista en el dominio de la frecuencia en las simulación de transitorios electromagnéticos en líneas multiconductoras. Aunque los métodos en el dominio de la frecuencia se han establecido sólidamente desde los setentas, éstos no pueden reemplazar a los en el dominio del tiempo; por las razones siguientes:

- a) No son métodos secuenciales y por lo tanto no se pueden aplicar a simulaciones en tiempo real.
- b) Requieren recursos excesivos de computo.
- c) Se tiene dificultad en representar las no linealidades distribuidas o concentradas así como las no uniformidades.

La representación de los parámetros con dependencia de la frecuencia en los métodos en el dominio del tiempo ha requerido años de trabajo de varios grupos de investigación **[12,20,21,22,23]**. Recientemente se han desarrollado soluciones viables, pero la forma de abordar este problema sigue diferentes métodos y técnicas **[10,11,12,20,21,22,23]**.

El problema de la representación polifásica en el dominio del tiempo, sobre una base sólida matemática, es posible efectuarla mediante la teoría de matrices idempotentes, ya que permite considerar acoplamiento de fases mediante el análisis modal, integrando el defasamiento y pérdidas de cada fase mediante sus modos de propagación; la aplicación de esta teoría fue propuesta por Castellanos **[24,25]**. En esta investigación se aborda la aplicación de la teoría de matrices idempotentes para el análisis de la línea.

## 1.2 Definición del problema y motivación.

El problema a analizar en este trabajo es la **simulación de transitorios electromagnéticos en las líneas de transmisión polifásicas con parámetros constantes en el dominio del tiempo**. Para el caso de las líneas tanto monofásicas como polifásicas se han seleccionado modelos que se basan en el **Método de Bergeron de Ondas Viajeras**, ya que dicho método ofrece una gran simplicidad en varios aspectos, pero en resumen se puede concluir sobre las siguientes ventajas [2,9,10,11]:

- 1) No es necesario discretizar la línea en el espacio, sólo en el tiempo; ya que se definen el voltaje y corriente al inicio ( $x = 0$ ) y al final de la misma ( $x = \ell$ ).
- 2) Este método en el dominio del tiempo permite llevar a cabo simulaciones secuenciales.

La desventaja de éste método podría ser la incorporación de la dependencia de la frecuencia en los parámetros R, L y C [20,21]; se incluye un apéndice en el cual se esboza la implementación para el caso monofásico de la inclusión de la dependencia de la frecuencia en los parámetros de la línea, [20,21,22]. En este trabajo se utilizan líneas con parámetros ideales y líneas con parámetros constantes, ya que para usos prácticos es aceptable el uso de éstos [24,25]. La importancia de analizar los fenómenos transitorios en las líneas de transmisión, tiene como fin, el diseño óptimo de las dimensiones de aislamientos, conductores, torres, etcétera, para disminuir los efectos de las perturbaciones por dichos transitorios. Pero, como estos fenómenos no se pueden eliminar, sus efectos deben contrarrestarse en la medida de lo posible; esto se logra con un buen análisis y diseño mediante métodos de simulación confiables, uno de los cuales se aborda en esta investigación.

## 1.3 Objetivo general.

**Objetivo general:** Desarrollar un modelo de línea y cable polifásicos con parámetros ideales y constantes en el dominio del tiempo, planteando la metodología a seguir en la elaboración de un programa simulador de transitorios electromagnéticos mediante un método basado en **Modelos tipo Bergeron de Ondas Viajeras**, utilizando la teoría de idempotentes. Este modelo debe garantizar la aplicación de una base matemática sólida; además el modelo resultante de la línea o cable debe de ser de fácil acoplamiento a una red "grande"

## 1.4 Metodología.

La metodología empleada en esta investigación se puede resumir en los puntos siguientes:

- 1) Desarrollar un método de análisis basado en técnicas en el dominio de la frecuencia, a fin de utilizarlo como referencia para evaluar los métodos en el dominio del tiempo.
- 2) Desarrollar un método para simular transitorios electromagnéticos en líneas de transmisión monofásicas basado en Ondas Viajeras y validarlo con el método en el dominio de la frecuencia del punto anterior.
- 3) Extender el método del caso monofásico del punto (2) al caso polifásico. La extensión debe tener fundamentos matemáticos sólidos. El método polifásico se valida mediante el método en el dominio de la frecuencia del punto (1).
- 4) Obtener recomendaciones prácticas para la representación de líneas polifásicas de transmisión con parámetros constantes en estudios transitorios.

---



---

## CAPÍTULO 2.

# LÍNEAS DE TRANSMISIÓN Y ANÁLISIS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA.

---



---

### 2.1 Análisis de redes eléctricas en el dominio de la frecuencia.

Para el análisis de una red eléctrica en el dominio de la frecuencia existen varias opciones en cuanto a su representación matricial. Como ejemplo, están el **método nodal**, el **método de mallas**, el **método de tableau**, etc. En esta sección se esbozan los dos primeros métodos.

En el **método nodal** las variables a determinar son los voltajes de cada uno de los nodos, que forman la red, tomando a uno de ellos como referencia. Se aplica la Ley de Corrientes de Kirchhoff a todos los nodos excepto al de referencia para obtener las  $q$  ecuaciones de una red con  $q+1$  nodos. Se obtiene el siguiente sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1q} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_{q1} & Y_{q2} & \cdots & Y_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_q \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

donde las  $Y_{ij}$  representan las admitancias de los elementos que se encuentran entre los nodos  $j$  e  $i$ ,  $V_i$  son los voltajes de los  $q$  nodos de la red e  $I_i$  son las fuentes de corrientes inyectadas a los nodos de la red. Con la inversión de la matriz de admitancias se pueden obtener los voltajes de los nodos de la red a partir de las corrientes inyectadas. Para el caso de la formulación nodal en el dominio de la frecuencia, la inversión de  $Y$ , representa la  $Z_{\text{bus}}$  de la red, debe de llevarse a cabo para distintas  $Y_{ij}$  calculadas a las frecuencias representativas de la red o frecuencias que componen al transitorio que se este analizando; es decir, se resolverá el sistema para  $m$  estados estables. Cada uno de ellos corresponde a una de las  $m$  frecuencias en particular que componen al transitorio.

En el **método de mallas**, las variables a determinar son las corrientes de cada lazo cerrado fundamental (independiente) que forman la red. Se aplica la Ley de Voltajes de Kirchhoff a cada malla, tomando de preferencia un mismo sentido para todas y cada una de las corrientes de malla. Se obtiene un sistema matricial de la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1r} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{r1} & Z_{r2} & \dots & Z_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_r \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

donde las  $Z_{ij}$  son las sumas de las impedancias entre las mallas  $j$  e  $i$ ,  $I_i$  representan a las corrientes de las  $r$  mallas de la red y los  $V_i$  representan a las fuentes de voltaje que son aplicadas a cada malla de la red. Con la inversión de la matriz de impedancias se pueden obtener las corrientes de las mallas de la red a partir de los voltajes  $V_i$ . Para el caso de la formulación por mallas en el dominio de la frecuencia, la inversión de dicha matriz debe de llevarse a cabo para cada una de las frecuencias representativas que componen el fenómeno que se este analizando.

## 2.2 Solución general de las ecuaciones de la línea de transmisión en el dominio de la frecuencia.

Los métodos de análisis en el dominio de la frecuencia que aquí se adoptan, esencialmente se basan en las Transformadas de Laplace y en el algoritmo de las Transformada Rápida de Fourier (FFT). Éstos permiten considerar la dependencia de la frecuencia en los parámetros de línea de manera sencilla y eficaz, obteniendo la solución de las Ecuaciones del Telegrafista en el dominio de la frecuencia para la simulación de transitorios en líneas polifásicas multiconductoras. En la presente sección se resume la solución de las ecuaciones de línea en el dominio de la frecuencia. Este método se utiliza para la verificación de los resultados obtenidos por el método en el dominio del tiempo que se desarrolla en la presente investigación.

Para una línea polifásica con pérdidas y parámetros dependientes de la frecuencia, sus ecuaciones son [4,21,22]:

$$-\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = \mathbf{r} * \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{l} * \mathbf{i}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$-\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x} = \mathbf{g} * \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{c} * \mathbf{v}}{\partial t} \quad (2.4)$$

donde el símbolo "\*" representa la operación convolución,  $\mathbf{v}$  al vector de voltajes,  $\mathbf{i}$  al vector de corrientes,  $\mathbf{r}$  la matriz de resistencias longitudinales,  $\mathbf{l}$  la matriz de inductancias longitudinales,  $\mathbf{g}$  la matriz de conductancias transversales y  $\mathbf{c}$  la matriz de capacitancias transversales, cada uno de los elementos de las matrices  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{g}$  y  $\mathbf{c}$  son funciones del tiempo y en por unidad de longitud.

Para una sección elemental de línea de transmisión se tiene que los voltajes y las corrientes son función del tiempo y de la distancia. Es por ello que (2.3) y (2.4) son ecuaciones diferenciales parciales y además por contener operaciones de convolución se complica la solución de las mismas cuando se les manipula en el dominio del tiempo. De ahí la utilidad de aplicar la Transformada de Laplace; ya que ésta elimina la variable tiempo, las convoluciones pasan a ser multiplicaciones y las diferenciales parciales con respecto a la distancia pasan a ser diferenciales ordinarias:

$$-\frac{d\mathbf{V}}{dx} = (\mathbf{R} + s\mathbf{L})\mathbf{i} - s\mathbf{l}(x,0)\mathbf{i}(x,0) \quad (2.5)$$

$$-\frac{d\mathbf{l}}{dx} = (\mathbf{G} + s\mathbf{C})\mathbf{V} - s\mathbf{c}(x,0)\mathbf{v}(x,0), \quad (2.6)$$

Suponiendo que la línea de transmisión se encontraba desconectada antes de un tiempo  $t = 0$ , el valor inicial para  $\mathbf{i}(x,0)$  y  $\mathbf{v}(x,0)$  es cero; entonces:

$$-\frac{d\mathbf{V}}{dx} = \mathbf{Z}\mathbf{i} \quad (2.7)$$

$$-\frac{d\mathbf{l}}{dx} = \mathbf{Y}\mathbf{V} \quad (2.8)$$

donde:

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{R} + s\mathbf{L}) \quad (2.9)$$

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{G} + s\mathbf{C}) \quad (2.10)$$

$\mathbf{Z}$  es la matriz de impedancias serie por unidad de longitud e  $\mathbf{Y}$  es la matriz de admitancias paralelo de la línea de transmisión también en unidad por longitud; las ecuaciones (2.7) y (2.8) están en función de la distancia,  $x$ , y de la frecuencia compleja "s", donde  $s = \sigma + j\omega$ ,  $\sigma$  es una constante de amortiguamiento y  $\omega$  es la variable de frecuencia angular.

Si se derivan a (2.7) y (2.8) con respecto a la distancia, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$-\frac{d^2\mathbf{V}}{dx^2} = \mathbf{Z} \frac{d\mathbf{l}}{dx} \quad (2.11)$$

y

$$-\frac{d^2 I}{dx^2} = Y \frac{dV}{dx} \quad (2.12)$$

Sustituyendo (2.8) y (2.7) en (2.11) y (2.12) respectivamente, se tienen las expresiones:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = ZYV \quad (2.13)$$

y

$$\frac{d^2 I}{dx^2} = YZI, \quad (2.14)$$

las ecuaciones (2.13) y (2.14) tienen la forma matricial siguiente:

$$\frac{d^2}{dx^2} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

donde  $n$  es el número de fases de la línea. Nótese que las variables dependientes están acopladas a través de los elementos fuera de la diagonal principal de la matriz, (2.15) es entonces un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas. La solución de este sistema se facilita al desacoplar las variables de las ecuaciones que componen al sistema. Se hacen transformaciones matriciales para pasar del **dominio de fases** al **dominio modal**, con el fin de facilitar la solución de (2.13) y (2.14). De acuerdo con las referencias [17,18,19] existen operadores lineales tales que se puede definir:

$$MV_m = V \quad (2.16)$$

$$NI_m = I \quad (2.17)$$

donde  $M$  es la **matriz de transformación modal para los voltajes**, cuyas columnas son los eigenvectores de  $ZY$ ;  $V_m$  es el **vector de voltajes modales** de la línea;  $N$  es la **matriz de transformación modal para las corrientes** cuyas columnas son los eigenvectores de  $YZ$ ; e  $I_m$  es el **vector de corrientes modales** de la línea; el subíndice  $m$  indica que los voltajes y las corrientes están en el dominio modal. Aquí se asume que los productos  $ZY$  e  $YZ$  son diagonalizables [23]. Además,

$$V = M_1 V_{m1} + M_2 V_{m2} + \cdots + M_n V_{mn} \quad (2.18)$$

donde  $M_i$  representa la  $i$ -ésima columna de  $M$  y corresponde al  $i$ -ésimo modo de propagación de voltajes. Para la corriente:

$$I = N_1 I_{m1} + N_2 I_{m2} + \dots + N_n I_{mn} \quad (2.19)$$

donde  $N_i$  representa la  $i$ -ésima columna de  $N$  y corresponde al  $i$ -ésimo modo de propagación de corrientes.  $M$  y  $N$  diagonalizan a  $ZY$  y  $YZ$ , respectivamente. Si se define al producto:

$$A = ZY \quad (2.20)$$

su transpuesta está dada por:

$$A^T = YZ. \quad (2.21)$$

Substituyendo (2.16) y (2.20) en (2.13), (2.17) y (2.21) en (2.14) se obtienen las ecuaciones siguientes:

$$\frac{d^2 V_m}{dx^2} = M^{-1} A M V_m \quad (2.22)$$

$$\frac{d^2 I_m}{dx^2} = N^{-1} A^T N I_m. \quad (2.23)$$

En suma:

$$\Lambda = M^{-1} A M \quad (2.24)$$

$$\Lambda = N^{-1} A^T N, \quad (2.25)$$

siendo:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

donde  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  son los eigenvalores tanto de  $ZY$  como de  $YZ$ . Las expresiones (2.22) y (2.23) son sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias desacopladas cuya solución, por ejemplo, para el sistema (2.22), es:

$$V_{mi} = \exp(-\gamma_i x) C_{m1i} + \exp(\gamma_i x) C_{m2i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.27)$$

donde:

$$\gamma_i = \sqrt{\lambda_i} = \alpha_i + j\beta_i. \quad (2.28)$$

Definiendo a:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_n \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

como la matriz de constantes de propagación modales. En la ecuación (2.29) se hace notar que cada elemento de la diagonal de la matriz, corresponde a una de las  $n$  constantes de propagación modal de la línea de transmisión, y consta de una parte real y una imaginaria. Donde  $\alpha_i$  es la  $i$ -ésima constante de atenuación en nepers/segundo y  $\beta_i$  es la  $i$ -ésima constante de fase en radianes/segundo. Además se tiene la siguiente relación para la constante de fase:

$$\beta_i = \frac{\omega}{c_i} \quad (2.30)$$

donde  $c_i$  es la  $i$ -ésima velocidad de propagación modal, ya sea de voltaje o de corriente. Si se definen a:

$$\mathbf{C}_{m1} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_1 \quad (2.31)$$

$$\mathbf{C}_{m2} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_2 \quad (2.32)$$

donde las matrices  $\mathbf{C}_{m1}$ , y  $\mathbf{C}_{m2}$  contienen constantes de integración que dependen de las condiciones de frontera del sistema. Para pasar las soluciones modales (2.27) al dominio de fases, se aplica inversamente la relación (2.16) y considerando a (2.29), (2.31) y (2.32). Además, todas las  $n$  ecuaciones de la forma (2.27) se pueden agrupar en la siguiente expresión matricial:

$$\mathbf{V} = \mathbf{M} \exp(-\Gamma x) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}_1 + \mathbf{M} \exp(\Gamma x) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}_2. \quad (2.33)$$

Ahora se introduce la siguiente definición:

$$\Psi_v = \mathbf{M} \Gamma \mathbf{M}^{-1}; \quad (2.34)$$

donde  $\Psi_v$  es la matriz de propagación de los voltajes. Sustituyendo la ecuación (2.34) en la ecuación (2.33) se tiene:

$$\mathbf{V} = \exp(-\Psi_v x)\mathbf{C}_1 + \exp(\Psi_v x)\mathbf{C}_2. \quad (2.35)$$

La expresión (2.35) es la solución para los voltajes de línea en el dominio de fases. Es importante señalar que:

$$\Psi_v = +\sqrt{\mathbf{ZY}} \quad (2.36)$$

para la comprobación de (2.36) se considera de (2.34) a la expresión:

$$\Psi_v^2 = \mathbf{M}\Gamma \mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}\Gamma \mathbf{M}^{-1}$$

$$\Psi_v^2 = \mathbf{M}\Gamma^2\mathbf{M}^{-1}$$

$$\Psi_v^2 = \mathbf{M}\Lambda \mathbf{M}^{-1}$$

$$\Psi_v^2 = \mathbf{ZY}$$

Para la solución de las corrientes de la línea se sigue un desarrollo similar al anterior. Pero, es más conveniente derivar a (2.35) respecto a  $x$  y sustituir el resultado en la ecuación que resulta al despejar  $I$  de (2.7):

$$\mathbf{I} = -\mathbf{Z}^{-1}\Psi_v [-\exp(-\Psi_v x)\mathbf{C}_1 + \exp(\Psi_v x)\mathbf{C}_2]. \quad (2.37)$$

Las ecuaciones (2.35) y (2.37) están dadas en base a los modos de propagación de los voltajes. También se pueden obtener soluciones equivalentes para los modos de las corrientes. Si se definen ahora a las siguientes expresiones:

$$\mathbf{Y}_c = \mathbf{Z}^{-1}\Psi_v \quad (2.38)$$

$$\mathbf{Z}_c = \Psi_v^{-1}\mathbf{Z} \quad (2.39)$$

como las matrices de las admitancias características y de impedancias características, respectivamente, (2.37) toma la forma siguiente:

$$\mathbf{I} = -\mathbf{Y}_c [-\exp(-\Psi_v x)\mathbf{C}_1 + \exp(\Psi_v x)\mathbf{C}_2]. \quad (2.40)$$

Si se desean las soluciones de las ecuaciones de la línea basadas en los modos de propagación de corrientes, se procede a manipular (2.14) de manera similar a como se hizo con (2.13). Transponiendo a la expresión (2.25) e igualándola con (2.24) se tiene:

$$\mathbf{N}^T \mathbf{A} \mathbf{N}^{-T} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{M}. \quad (2.41)$$

De ésta se sigue que se pueden seleccionar a  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{N}$  de modo que:

$$\mathbf{N}^T = \mathbf{M}^{-1} \quad (2.42)$$

De esto último puede concluirse lo siguientes:

- Las columnas de la matriz  $\mathbf{M}$  contienen a los modos de propagación de los voltajes.
- Los renglones de la matriz  $\mathbf{M}^{-1}$  contienen a los modos de propagación de las corrientes.
- $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{N}$  son mutuamente ortogonales.

Las transformaciones modales  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{N}$  pueden aplicarse a las ecuaciones (2.7) y (2.8), y se tienen las siguientes ecuaciones:

$$-\frac{d\mathbf{V}_m}{dx} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Z} \mathbf{N} \mathbf{I}_m \quad (2.43)$$

y

$$-\frac{d\mathbf{I}_m}{dx} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{Y} \mathbf{M} \mathbf{I}_m. \quad (2.44)$$

Se definen ahora a:

$$\mathbf{Z}_m = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Z} \mathbf{N} \quad (2.45)$$

y

$$\mathbf{Y}_m = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{Y} \mathbf{M} \quad (2.46)$$

como las matrices de impedancias serie y de admitancias paralelo modales, respectivamente. Estas dos matrices son diagonales [23,26]. De las ecuaciones (2.34) y (2.45) se obtiene:

$$\mathbf{Z}^{-1}\Psi_v = \mathbf{N}\mathbf{Z}_m^{-1}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{\Gamma}\mathbf{M}^{-1} \quad (2.47)$$

esta expresión puede representarse a su vez por:

$$\mathbf{Z}^{-1}\Psi_v = \mathbf{N}\mathbf{Z}_m^{-1}\mathbf{\Gamma}\mathbf{M}^{-1} \quad (2.48)$$

Como  $\mathbf{Z}_m$  y  $\mathbf{\Gamma}$  son diagonales, pueden permutar, dando como resultado:

$$\mathbf{Z}^{-1}\Psi_v = \mathbf{N}\mathbf{\Gamma}\mathbf{Z}_m^{-1}\mathbf{M}^{-1} \quad (2.49)$$

o bien:

$$\mathbf{Z}^{-1}\Psi_v = \mathbf{N}\mathbf{\Gamma}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{Z}_m^{-1}\mathbf{M}^{-1} \quad (2.50)$$

la ecuación (2.50) considerando a (2.42) puede representarse por la siguiente expresión:

$$\mathbf{Z}^{-1}\Psi_v = \mathbf{M}^{-\text{T}}\mathbf{\Gamma}\mathbf{M}^{\text{T}}\mathbf{N}\mathbf{Z}_m^{-1}\mathbf{M}^{-1} \quad (2.51)$$

finalmente,

$$\mathbf{Z}^{-1}\Psi_v = \Psi_v^{\text{T}}\mathbf{Z}^{-1} \quad (2.52)$$

La ecuación (2.52) se utilizará para obtener el Modelo en Dos Puertos de la línea de transmisión en el dominio de la frecuencia; así mismo, para obtener las ecuaciones polifásicas de la línea en el dominio del tiempo.

Para determinar los valores de  $\mathbf{C}_1$  y  $\mathbf{C}_2$  en (2.35) y (2.40) es necesario conocer los voltajes y las corrientes en los extremos de la línea, es decir, se deben conocer los valores de frontera de las ecuaciones de la línea de transmisión. Supóngase que  $\mathbf{I}^k$  y  $\mathbf{V}^k$  son vectores de corrientes y voltajes conocidos en el punto  $x = 0$ , de las ecuaciones (2.35) y (2.40):

$$\mathbf{V}^k = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 \quad (2.53)$$

y

$$\mathbf{I}^k = \mathbf{Y}_c\mathbf{C}_1 - \mathbf{Y}_c\mathbf{C}_2. \quad (2.54)$$

Se consideran como positivas las corrientes que entran a los nodos terminales de la línea, tal y como se puede apreciar en la figura 2.1, de ahí que  $I^m = -I(\ell)$ .

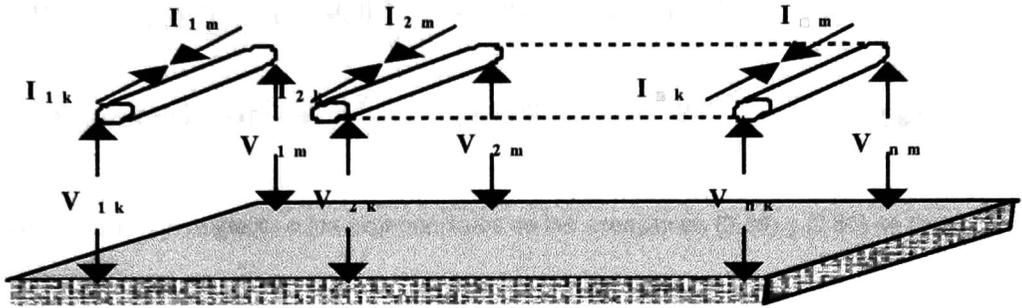


Figura No. 2.1 Línea de transmisión.

$V^k$  e  $I^k$  son los voltajes y las corrientes en el nodo emisor de la línea, respectivamente. Entonces, de (2.53) y (2.54) se sigue que:

$$C_1 = \frac{1}{2} [V^k + Z_c I^k]. \quad (2.55)$$

y

$$C_2 = \frac{1}{2} [V^k - Z_c I^k]. \quad (2.56)$$

Puede observarse que  $C_1$  representa una componente espectral de una onda viajera de ida (sentido positivo de  $x$ ), desde el nodo  $k$ ; así mismo,  $C_2$  representa una componente espectral de una onda viajera de regreso (sentido negativo de  $x$ ) viajando hacia el nodo  $k$ . Considérese el otro extremo de la línea en el nodo  $m$ , en el punto  $x = \ell$ , y si ahora se sustituyen los valores de  $C_1$  y  $C_2$  de (2.55) y (2.56) en las ecuaciones (2.35) y (2.40):

$$V^m = \exp(\Psi \ell) \frac{1}{2} [V^k - Z_c I^k] + \exp(-\Psi \ell) \frac{1}{2} [V^k + Z_c I^k]; \quad (2.57)$$

y

$$I^m = Y_c \exp(\Psi \ell) \frac{1}{2} [V^k - Z_c I^k] - Y_c \exp(-\Psi \ell) \frac{1}{2} [V^k + Z_c I^k], \quad (2.58)$$

donde  $\mathbf{V}^m$  son los voltajes e  $\mathbf{I}^m$  las corrientes, en el nodo receptor de la línea. Las ecuaciones (2.57) y (2.58) pueden adoptar la forma,

$$\mathbf{V}^m = [\exp(\Psi\ell) + \exp(-\Psi\ell)] \frac{\mathbf{V}^k}{2} - [\exp(\Psi\ell) - \exp(-\Psi\ell)] \frac{\mathbf{Z}_c}{2} \mathbf{I}^k \quad (2.59)$$

$$\mathbf{I}^m = \mathbf{Y}_c [\exp(\Psi\ell) - \exp(-\Psi\ell)] \frac{\mathbf{V}^k}{2} - \mathbf{Y}_c [\exp(\Psi\ell) + \exp(-\Psi\ell)] \frac{\mathbf{Z}_c}{2} \mathbf{I}^k \quad (2.60)$$

de la igualdad de Euler con respecto a los exponenciales de las ecuaciones (2.59) y (2.60) se tienen a:

$$\mathbf{V}^m = \cosh(\Psi\ell) \mathbf{V}^k - \sinh(\Psi\ell) \mathbf{Z}_c \mathbf{I}^k \quad (2.61)$$

$$\mathbf{I}^m = \mathbf{Y}_c \sinh(\Psi\ell) \mathbf{V}^k - \mathbf{Y}_c \cosh(\Psi\ell) \mathbf{Z}_c \mathbf{I}^k \quad (2.62)$$

considerando la ecuación (2.52) en (2.62) se tiene que:

$$\mathbf{I}^m = \mathbf{Y}_c \sinh(\Psi\ell) \mathbf{V}^k - \cosh^T(\Psi\ell) \mathbf{I}^k \quad (2.63)$$

Las ecuaciones (2.61) y (2.63) constituyen el **Modelo en Dos Puertos de Impedancias** para la línea de transmisión.

### 2.3 Modelo de la línea en Dos Puertos.

Con las ecuaciones (2.61) y (2.63) se forma el **Modelo en Dos Puertos de línea de transmisión**; con éste se pueden obtener los voltajes y corrientes en uno de los extremos terminales de la línea de transmisión, siempre y cuando se hayan especificado los voltajes y corrientes en el otro extremo de la línea:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}^m \\ \mathbf{I}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}^k \\ \mathbf{I}^k \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

donde:  $\mathbf{A} = \cosh(\Psi\ell) \quad (2.65)$

$$\mathbf{B} = -\sinh(\Psi\ell) \mathbf{Z}_c \quad (2.66)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{Y}_c \sinh(\Psi\ell) \quad (2.67)$$

$$\mathbf{D} = -\cosh^T(\Psi\ell) \quad (2.68)$$

## 2.4 Modelo en Dos Puertos de Admitancias de la línea.

Para formar el sistema matricial llamado **Modelo en Dos Puertos de Admitancias de la línea de transmisión**, con el cual se pueden obtener los voltajes de ambos de los extremos de la línea de transmisión, una vez que se hayan especificado las corrientes de ambos extremos de la línea o viceversa. Se procede de la manera siguiente, de (2.61) se obtiene a la ecuación:

$$\sinh(\Psi\ell)Z_c I^k = \cosh(\Psi\ell)V^k - V^m \quad (2.69)$$

despejando  $I^k$  de (2.69) se llega a la expresión:

$$I^k = Y_c \coth(\Psi\ell)V^k - Y_c \operatorname{cosech}(\Psi\ell)V^m \quad (2.70)$$

sustituyendo (2.70) en (2.63) se obtiene la ecuación:

$$I^m = Y_c \sinh(\Psi\ell)V^k - \cosh^T(\Psi\ell)[Y_c \coth(\Psi\ell)V^k - Y_c \operatorname{cosech}(\Psi\ell)V^m] \quad (2.71)$$

de la ecuación (2.71) se tiene:

$$I^m = [Y_c \sinh(\Psi\ell) - Y_c \cosh(\Psi\ell)\coth(\Psi\ell)]V^k - Y_c \cosh(\Psi\ell)\operatorname{cosech}(\Psi\ell)V^m \quad (2.72)$$

y por medio de identidades trigonométricas hiperbólicas se reduce a (2.72):

$$I^m = -Y_c \operatorname{cosech}(\Psi\ell)V^k + Y_c \coth(\Psi\ell)V^m \quad (2.73)$$

las ecuaciones (2.70) y (2.73) forman el Modelo de Admitancias de la línea de transmisión en Dos Puertos:

$$\begin{bmatrix} I^k \\ I^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ -\mathbf{B} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^k \\ V^m \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

donde:  $\mathbf{A} = Y_c \coth(\Psi\ell) \quad (2.75)$

$$\mathbf{B} = Y_c \operatorname{cosech}(\Psi\ell) \quad (2.76)$$

Como se puede observar, la formulación anterior es del tipo matricial, ya que se abordan líneas de transmisión de varias fases. La línea monofásica es un caso particular.

## 2.5 Transformada Numérica de Laplace.

Los sistemas (2.64) y (2.74) modelan las ecuaciones de línea de transmisión en el dominio de la frecuencia. Para obtener la simulación de un transitorio electromagnético en el dominio del tiempo, es necesario transformar las funciones al dominio del tiempo. Esto se hace mediante la técnica de la **Transformada Numérica de Laplace [13,27]**; la cual se basa en el algoritmo de la **Transformada Rápida de Fourier, FFT**. El algoritmo, para evaluación de transitorios utilizando la Transformada Numérica de Laplace tiene un error numérico de aproximadamente 0.0001% dentro del 98% del rango del tiempo de observación del transitorio [27]. Debido a los errores de truncamiento se genera el fenómeno de Gibbs, es por ello que también se debe utilizar una ventana para la disminución del error. Además, por la discretización se generan errores por solapamiento o encimamiento (aliasing). Las Transformadas de Fourier y Laplace de funciones en una variable, se definen por las siguientes integrales:

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2.77)$$

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (2.78)$$

donde  $s$  es la variable de frecuencia compleja, anteriormente definida. Las fórmulas anteriores transforman a una función del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia. De igual manera, las transformadas inversas de Fourier y de Laplace, transforman una función en el dominio de la frecuencia al dominio del tiempo.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (2.79)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{st} ds. \quad (2.80)$$

Con el fin de incorporarlas a un programa de computo, las ecuaciones (2.77) a (2.80) se discretizan, obteniéndose las fórmulas respectivas siguientes:

$$F(jn\Delta\omega) = \Delta t \sum_{m=0}^{M-1} f(m\Delta t) e^{-j2\pi mn/M} \quad (2.81)$$

$$F(c + jn\Delta\omega) = \Delta t \sum_{m=0}^{M-1} f(m\Delta t) e^{-cm\Delta t} e^{-j2\pi mn/M} \quad (2.82)$$

$$f(m\Delta t) = \frac{1}{\Delta t} \left[ \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} F(jn\Delta\omega) e^{-j2\pi mn/M} \right] \quad (2.83)$$

$$f(m\Delta t) = \frac{e^{cm\Delta t}}{\Delta t} \left[ \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} F(jn\Delta\omega) \sigma_{\omega} e^{-j2\pi mn/M} \right], \quad (2.84)$$

donde  $\sigma_{\omega}$  es una ventana de datos discretizada, (de Lanczos, Hamming, Blackman, etc.). El tiempo  $t$  se discretiza mediante  $m\Delta t$ , donde  $m=0,1,2,\dots,M$ ,  $M$  es el número de incrementos del tiempo, la frecuencia angular,  $\omega$  se representa por  $n\Delta\omega$ , donde  $n=0,1,2,\dots,N$ ,  $N$  es el número de incrementos de la frecuencia. Además, la constante de amortiguamiento se propone como [28]:

$$c = -\frac{\ln(\varepsilon)}{T} \quad (2.85)$$

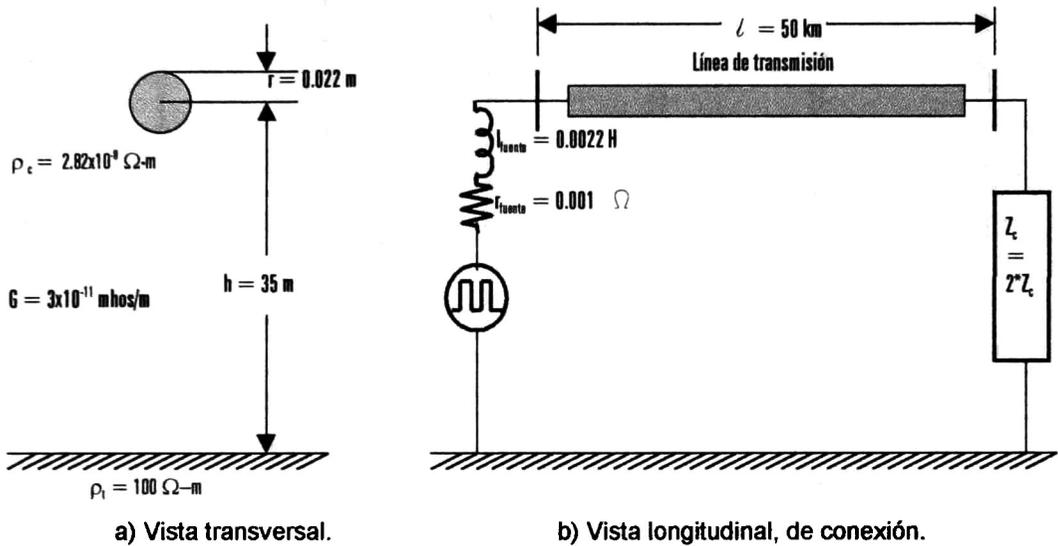
donde  $\varepsilon$  es el error relativo porcentual; con el fin de minimizar el error de solapamiento,  $\varepsilon = 0.0001\%$  para los cálculos de esta tesis [27].  $T$  es el período de observación definido por  $2\pi/\Delta\omega$ ; la frecuencia máxima  $\Omega$  es igual a  $\pi/\Delta t$  de acuerdo con el Criterio de muestreo de Nyquist [29]. Las sumatorias son Transformadas Discretas de Fourier, **DTF**, entonces para reducir el tiempo de computo se utiliza el algoritmo de la Transformada Rápida de Fourier, **FFT**, en este algoritmo se recomienda que  $M$  sea un número entero, de la forma  $2^k$  siendo  $k$  un entero positivo, ya que esto hace eficiente a la Transformada Inversa Rápida de Fourier, **IFFT**. Además se tienen la siguiente igualdad:

$$\Delta t \Delta \omega = \frac{2\pi}{M} \quad (2.86)$$

Las ecuaciones (2.82), (2.84), (2.85) y (2.86) se utilizan con el fin de simular transitorios en líneas de transmisión y obtener resultados a partir de las solución de las Ecuaciones del Telegrafista modificadas (2.3) y (2.4). A continuación se presenta un ejemplo de aplicación de esta técnica.

Se simula un transitorio en la línea monofásica, la cual se ilustra en las figuras 2.2 a) y 2.2 b). Nótese que la tierra es un conductor imperfecto. Con el fin de ilustrar la aplicabilidad de la técnica de la Transformada Numérica de Laplace, se procede a considerar los siguientes tres casos:

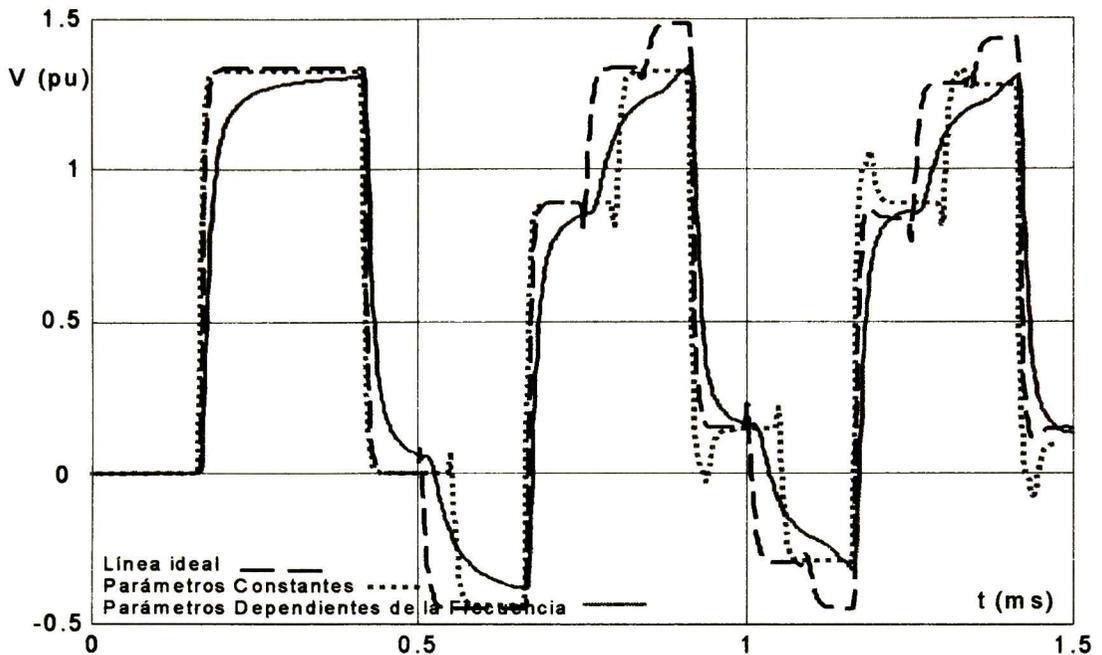
- Línea sin pérdidas o ideal.
- Línea con parámetros constantes (ver apéndice A).
- Línea con parámetros dependientes de la frecuencia (ver apéndice A).



**Figura No.2.2** Línea monofásica de transmisión para ejemplo numérico del uso de la TNL.

En el caso de la línea con parámetros dependientes de la frecuencia, se considera el efecto piel del conductor y de la tierra, así como la resistividad del terreno y la conductancia del aire; las fórmulas que modelan los parámetros se presentan en el apéndice A.

Se aplica a la línea un tren de pulsos rectangulares con un retraso. La Transformada de Laplace de esta forma de onda es representada por:  $(1 - e^{-sT/6}) / (s(1 - e^{-sT/3}))$ . La magnitud de cada pulso es igual a la unidad. Los resultados de simulación, en MATLAB, se muestran en la figura 2.3, en la cual se puede observar el voltaje en el extremo receptor de la línea.



**Figura No.2.3** Voltaje en el extremo receptor de la línea.

De los resultados anteriores se puede observar que la línea ideal no amortigua los rebotes de las ondas viajeras, en tanto que la línea con parámetros constantes los amortigua de manera deficiente, ya que introduce picos en los cambios abruptos de las ondas y, en la línea con parámetros dependientes de la frecuencia los cambios en las ondas son más suaves y se produce el retardo debido a las características propias de la línea.

---

---

## CAPÍTULO 3.

# ANÁLISIS TRANSITORIO EN EL DOMINIO DEL TIEMPO.

---

---

### 3.1 Modelos tipo EMTP.

Si se desea la incorporación del Método de Bergeron a un programa de computo para la simulación de transitorios electromagnéticos, se deben considerar a los elementos más comunes que se conectan a las líneas de transmisión. Los modelos que a continuación se exponen se utilizan en el Programa para Transitorios Electromagnéticos (**EMTP** de sus siglas en inglés). Estos modelos son muy simples pero efectivos; de ahí la incorporación de estos en el presente trabajo. A continuación se hace una pequeña descripción del programa EMTP, así como la descripción de los modelos de los elementos utilizados en redes que contengan líneas de transmisión.

#### 3.1.1 Antecedentes.

El Programa **EMTP** es uno de los más utilizados por la industria eléctrica en todo el mundo. El **EMTP** fue originado por **Dommel [10,11]** en la década de los sesentas, antes de las modernas técnicas de la programación estructurada, y posteriormente fue expandido por el mismo **Dommel y Meyer** así como por otros especialistas. En este programa pueden simularse grandes sistemas con una gran variedad de componentes, incluyendo elementos no lineales.

El **EMTP**, basa su funcionamiento en el uso de la regla trapezoidal de integración para encontrar una aproximación numérica de la solución de las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento en el tiempo de los elementos de un circuito o red eléctrica. Para la inclusión de líneas de transmisión se adoptó el **Método de Bergeron de Ondas Viajeras** que es aplicable al análisis de líneas ideales de transmisión (sección 3.1.3). Posteriormente se aplica la técnica de Bergeron para un modelo de líneas con parámetros dependientes de la frecuencia (sección 3.1.4).

Las ecuaciones diferenciales de las redes se obtienen aplicando el **método nodal**. De esta forma las variables de estado del circuito son los voltajes nodales. En la figura 3.1 se muestra un esquema que ilustra una red eléctrica conectada al nodo k (nodo general), en este esquema se incluye los elementos más comunes conectados en las redes eléctricas.

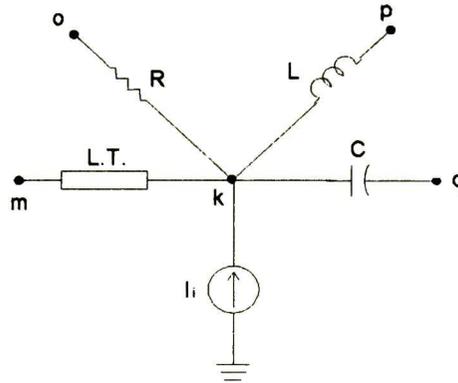


Figura No. 3.1 Esquema con elementos comunes de las redes eléctricas.

### 3.1.2 Modelos de parámetros concentrados.

Las expresiones equivalentes para cada uno de los elementos concentrados de rama de una red eléctrica se proporcionan a continuación.

**Elemento Resistivo.** Este elemento es el más sencillo, su modelo equivalente tipo EMTP está representado por la ecuación:

$$G^{ko} (v^k - v^o) = i^{ko} \quad (3.1)$$

donde:

$$G^{ko} = \frac{1}{R^{ko}} \quad (3.2)$$

es la conductancia.



$$i_{kphist} = \frac{\Delta t}{2L} \left[ v^k(t - \Delta t) - v^p(t - \Delta t) \right] + i^{kp}(t - \Delta t). \quad (3.7)$$

El análisis de la ecuación (3.7) permite verificar que la rama inductiva que une los nodos  $k$  y  $p$  se puede representar, en forma discretizada, por la rama mostrada en la figura 3.3b, en donde:

$$G^{kp} = \frac{\Delta t}{2L}, \quad (3.8)$$

es una conductancia equivalente del inductor en cuestión. En la figura 3.3a se ilustra un inductor, así como su modelo equivalente tipo EMTP, figura 3.3b.

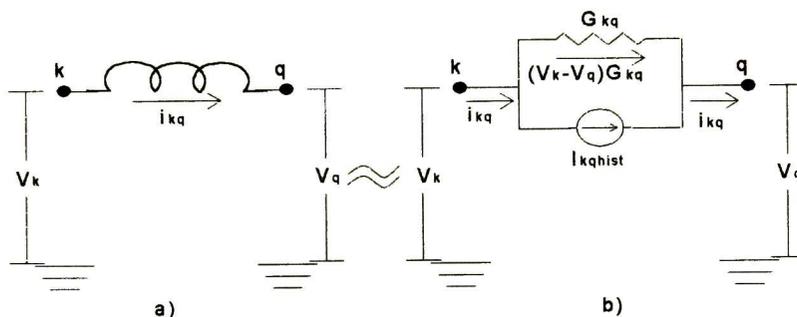


Figura No. 3.3 Elemento inductivo y su circuito equivalente EMTP.

**Elemento Capacitivo.** De forma similar, se puede encontrar una expresión discretizada para la rama capacitiva, así como su representación circuital, la expresión está dada en la ecuación (3.9),

$$i^{kq}(t) = \frac{2C}{\Delta t} \left[ v^k(t) - v^q(t) \right] + i^{kqhist} \quad (3.9)$$

donde:

$$i^{kqhist} = -\frac{2C}{\Delta t} \left[ v^k(t - \Delta t) - v^q(t - \Delta t) \right] - i^{kq}(t - \Delta t) \quad (3.10)$$

y

$$G^{kq} = \frac{2C}{\Delta t} \quad (3.11)$$

es la conductancia equivalente para el capacitor. En la figura 3.4b se puede apreciar el modelo del circuito del capacitor.

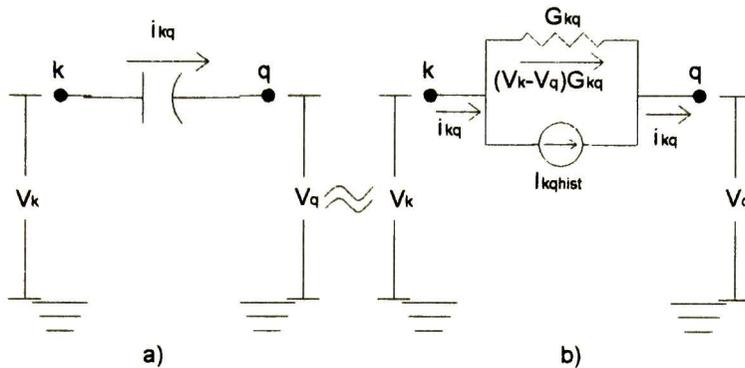


Figura No. 3.4 Elemento capacitivo y su circuito equivalente EMTP.

### 3.1.3 Modelo de la línea ideal monofásica.

Para el *Elemento de retardo o Línea de Transmisión* monofásica ideal, en las ecuaciones del Telegrafista, (2.3) y (2.4), los parámetros  $r$  y  $g$  se consideran igual cero, y la inductancia  $l$  y capacitancia  $c$  como constantes, entonces, las ecuaciones se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\frac{-\partial v}{\partial x} = l \frac{\partial i}{\partial t} \tag{3.12}$$

$$\frac{-\partial i}{\partial x} = c \frac{\partial v}{\partial t} \tag{3.13}$$

La solución de estas ecuaciones fue propuesta por D'Alembert [5]:

$$i = F(x - c_0 t) - f(x + c_0 t) \tag{3.14}$$

$$v = z_c F(x - c_0 t) + z_c f(x + c_0 t) \tag{3.15}$$

donde:

$F(x - c_0 t)$  y  $f(x + c_0 t)$  son funciones arbitrarias.

$z_c$  = impedancia característica de la línea.

$c_0$  = velocidad de propagación de la onda en la línea.

Si se multiplica la ecuación (3.14) por  $z_c$  y se suma con la ecuación (3.15) se tiene:

$$v + z_c i = 2 z_c F(x - c_0 t). \quad (3.16)$$

Se puede notar que la expresión  $(v+z_c i)$  es constante si  $(x-c_0 t)$  se mantiene constante. De aquí se puede afirmar que si un observador viaja a lo largo de la línea a una velocidad igual a  $c_0$ , entonces éste observará un valor de  $(v+z_c i)$  constante, esto sugiere que la onda  $(v+z_c i)$  recorre la línea de un extremo a otro en un tiempo  $\tau$ , dado por:

$$\tau = \frac{\ell}{c_0} \quad (3.17)$$

donde  $\ell$  = longitud de la línea.

Esto significa que si un observador en el instante  $t-\tau$  ve el valor de la onda de voltaje,  $v^k(t-\tau) + z_c i^k(t-\tau)$  en un extremo de la línea, en el instante  $t$  observará el valor de la onda como  $v^m(t) - z_c i^m(t)$  (el signo negativo se debe a que  $i^m$  tiene signo contrario a  $i^k$ ) en el otro extremo de la línea, es decir, el valor es igual pero visto  $\tau$  segundos antes en el extremo de inicio. Lo anterior se puede expresar con la ecuación:

$$v^k(t-\tau) + z_c i^k(t-\tau) = v^m(t) - z_c i^m(t). \quad (3.18)$$

De la ecuación (3.18) se puede encontrar una expresión para calcular la corriente en un extremo de la línea en el instante  $t$ , esta expresión esta dada por la ecuación (3.19) como:

$$i^m(t) = \frac{1}{z_c} v^m(t) + i^{m\text{hist}} \quad (3.19)$$

donde: 
$$i^{m\text{hist}} = -\frac{1}{z_c} v^k(t-\tau) - i^k(t-\tau) \quad (3.20)$$

y

$$G^k = G^m = \frac{1}{z_c} \quad (3.21)$$

La ecuación (3.19) es una expresión en función del tiempo de viaje de la onda ( $\tau$ ) que es aplicable a ambos extremos de la línea. Al igual que para el caso de las ramas inductiva y capacitiva, la ecuación (3.19) es la representación de la línea de transmisión. El circuito equivalente se muestra en la figura 3.5.

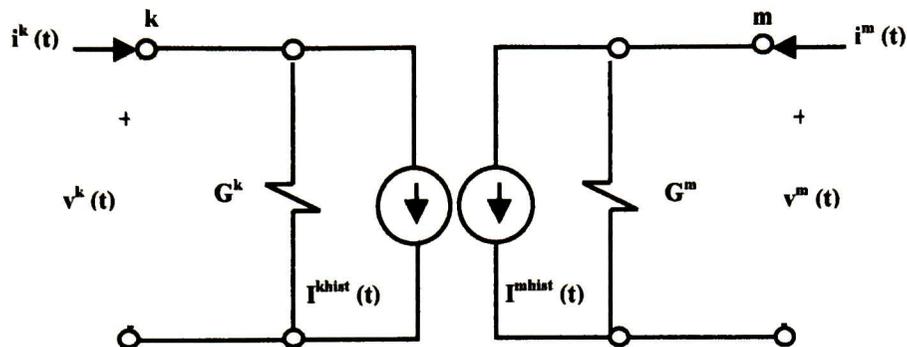


Figura No. 3.5 Circuito equivalente tipo EMTP de la línea de transmisión monofásica ideal.

En la tabla I se resumen los modelos tipo EMTP que se utilizan en el presente trabajo, para el análisis de circuitos que contengan líneas de transmisión monofásicas ideales.

Tabla I		
Modelos discretizados de los componentes de una red eléctrica		
Tipo de rama	Conductancia (G)	Corriente de historia (I <sub>hist</sub> )
Resistiva (parámetros concentrados)	$\frac{1}{R^{ko}}$	0
Inductiva (parámetros concentrados)	$\frac{\Delta t}{2L}$	$\frac{\Delta t}{2L} [v^k(t - \Delta t) - v^p(t - \Delta t)] + i^{kp}(t - \Delta t)$
Capacitiva (parámetros concentrados)	$\frac{2C}{\Delta t}$	$-\frac{2C}{\Delta t} [v^k(t - \Delta t) - v^q(t - \Delta t)] - i^{kq}(t - \Delta t)$
Línea de transmisión monofásica ideal (parámetros distribuidos)	$\frac{1}{Z_c}$	$-G \cdot v^*(t - \tau) - i^*(t - \tau)$

• según sea el nodo emisor, k, o el nodo receptor m.

### 3.1.4 Modelo de la línea monofásica con parámetros dependientes de la frecuencia.

Uno de los primeros modelos de la línea de transmisión en el dominio del tiempo con parámetros dependientes de la frecuencia fue el de Budner [30]. Él utilizó el concepto de función de peso en un modelo de admitancias, la simulación utilizando este método es muy oscilatoria e imprecisa; además incluía convoluciones para varios términos. El método además es lento en cuanto a tiempo de computo se refiere [20,21].

Después, J. K. Snelson [31] retoma el trabajo de Budner con un cambio de variables en los voltajes y corrientes en el dominio del tiempo. De las ecuaciones (3.14) y (3.15) considerando la dependencia de la frecuencia en los parámetros de la línea, se tienen las expresiones:

$$v = z_c * F(x - c_o t) + z_c * f(x + c_o t) \quad (3.22)$$

$$i = F(x - c_o t) - f(x + c_o t). \quad (3.23)$$

Si se define a:

$$b(x - c_o t) = F(x - c_o t) \quad (3.24)$$

y se toma la convención de que  $b(x-c_o t)$  es la onda de regreso, y la onda de ida es,  $f(x+c_o t)$ , entonces sumando (3.22) y (3.23) previamente convolucionada por  $y_c$ , y considerando (3.24) se obtiene la ecuación:

$$y_c * v + i = 2b(x - c_o t) \quad (3.25)$$

ahora, si se resta (3.23) a (3.22) previamente convolucionada por  $y_c$  se obtiene:

$$y_c * v - i = 2f(x - c_o t). \quad (3.26)$$

De las ecuaciones (3.25) y (3.26) se puede llegar a las **Ecuaciones de Onda Viajeras** para los nodos emisor, k, y receptor, m, de la línea de transmisión:

$$f^k = y_c * v^k + i^k \quad (3.27)$$

$$f^m = y_c * v^m + i^m \quad (3.28)$$

$$b^k = y_c * v^k - i^k \quad (3.29)$$

$$b^m = y_c * v^m - i^m \quad (3.30)$$

Del sistema (2.64) se pueden obtener para una línea monofásica:

$$V^k = \cosh^T(\Psi \ell) V^m - \sinh(\Psi \ell) Z_c I^m \quad (3.31)$$

$$I^k = Y_c \sinh(\Psi \ell) V^m - \cosh(\Psi \ell) I^m \quad (3.32)$$

si ahora se resta (3.31) a (3.32) previamente multiplicada por  $-Z_c$ :

$$V^k - Z_c I^k = [\cosh^T(\Psi\ell) - \sinh(\Psi\ell)]V^m + [Z_c \cosh(\Psi\ell) - \sinh(\Psi\ell)Z_c] \cdot I^m \quad (3.33)$$

la ecuación (3.33) puede simplificarse mediante las definiciones de las funciones hiperbólicas:

$$Z_c I^k - V^k = -e^{-(\Psi\ell)}V^m - Z_c e^{-(\Psi\ell)}I^m \quad (3.34)$$

donde:

$$A = -e^{-(\Psi\ell)}; \quad (3.35)$$

la función A es llamada función de peso o de propagación y contiene el tiempo de retardo así como la atenuación debido a las pérdidas de la onda viajera de voltaje y corriente. Multiplicando por  $Y_c$  a la ecuación (3.34) se tiene:

$$I^k - Y_c V^k = -e^{-(\Psi\ell)} [Y_c V^m + I^m] \quad (3.36)$$

pasando al dominio de la frecuencia las ecuaciones (3.27)-(3.30):

$$F^k = Y_c V^k + I^k \quad (3.37)$$

$$F^m = Y_c V^m + I^m \quad (3.38)$$

$$B^k = Y_c V^k - I^k \quad (3.39)$$

$$B^m = Y_c V^m - I^m \quad (3.40)$$

de las ecuaciones (3.36) a (3.40) considerando a (3.35) se puede escribir:

$$-B^k = AF^m \quad (3.41)$$

y

$$-B^m = AF^k \quad (3.42)$$

de (3.41) y (3.42) se puede observar que las ondas de regreso poseen un retraso implícito con respecto a las ondas de ida. Si ahora se despejan la corriente  $I^k$  de (3.39) e  $I^m$  de (3.40) respectivamente, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$I^k = Y_c V^k - B^k \quad (3.43)$$

$$I^m = Y_c V^m - B^m \quad (3.44)$$

o bien

$$I^k = Y_c V^k + AF^m \quad (3.45)$$

$$I^m = Y_c V^m + AF^k \quad (3.46)$$

estas dos últimas se pueden representar sustituyendo (3.38) en (3.45), y (3.37) en (3.46) de la siguiente forma:

$$I^k = Y_c V^k + A[Y_c V^m + I^m] \quad (3.47)$$

$$I^m = Y_c V^m + A[Y_c V^k + I^k] \quad (3.48)$$

pasando las ecuaciones (4.47) y (4.48) al dominio del tiempo se llega a las expresiones:

$$i^k = y_c * v^k + i^k(t - \tau) \quad (3.49)$$

$$i^m = y_c * v^m + i^m(t - \tau) \quad (3.50)$$

donde:

$$i^k(t - \tau) = a * [y_c * v^m + i^m] \quad (3.51)$$

$$i^m(t - \tau) = a * [y_c * v^k + i^k] \quad (3.52)$$

Las (3.51) y (3.52) son las corrientes de historia del nodo emisor y el nodo receptor respectivamente. En las ecuaciones (3.49) y (3.50), que son las solución a las ecuaciones de la línea en el dominio del tiempo, se tienen convoluciones sencillas entre la función de propagación y la corriente y dobles entre la función de propagación, la admitancia característica y el voltaje. Esto conlleva un gran esfuerzo para obtener las corrientes de historia de los nodos extremos de una línea de transmisión. De ahí la importancia de aproximar las funciones de peso y la admitancia característica por medio de otras funciones equivalentes más sencillas. Dichas aproximaciones se pueden llevar a cabo por síntesis de funciones racionales, las cuales se realizan en el dominio de la frecuencia. En el apéndice B se describe la metodología a seguir, para el caso de la línea de transmisión monofásica con parámetros dependientes de la frecuencia.

### 3.2 Método nodal.

Una red eléctrica incluye componentes con diversas características particulares, de ahí la importancia de la selección del método a utilizar para la representación de la interconexión de estos elementos de acuerdo al tipo de análisis que se lleve a cabo. Al tener las conductancias de los elementos (ver sección anterior), el análisis con variables de nodos representa una buena opción para la simulación de transitorios en redes, ya que se puede formar la **matriz nodal** que permite la obtención de los voltajes de los nodos que se estén analizando. Dicha matriz de conductancias describe las características eléctricas de los componentes de la red. Con la matriz de conductancias es posible obtener para un estado o tiempo dado el comportamiento de los elementos que conforman al sistema.

Para simplificar el método se convierten todas las fuentes de voltaje en fuentes equivalentes de corriente (fuentes equivalentes de Norton). Se considera que no hay acoplamiento mutuo entre las inductancias y que las fuentes no son controladas por algún otro elemento, y solo se consideran elementos pasivos como las resistores, los inductores, las capacitores y líneas de transmisión.

Para una red eléctrica, al aplicar el método nodal, se asume que las corrientes positivas salen de el nodo analizado [32]. Se cuenta con  $n+1$  nodos en la red, considerando al de referencia. Si se aplica la Ley de Corrientes de Kirchoff al  $k$ -ésimo nodo de una red cualquiera, se obtiene la siguiente expresión:

$$i^{k1} + i^{k1} + \dots + i^{kn} = 0 \quad (3.53)$$

o bien:

$$(G^1 + G^2 + \dots + G^n)v^k - (G^1v^1 + G^2v^2 + \dots + G^nv^n) = i_{f1} + \dots + i_{fn} - (i^{1hist} + \dots + i^{nhist}). \quad (3.54)$$

Entonces, al agrupar las  $n$  ecuaciones se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$Gv = i - i^{hist} \quad (3.55)$$

donde:

$G$  es la matriz de conductancias nodales,  $v$  es el vector de voltajes nodales en el instante  $t$ ,

$i$  es el vector de inyecciones de corriente debidas a fuentes explícitas

$i^{hist}$  es el vector de inyecciones de corriente debidas a términos de historia de los elementos.

Si el sistema cuenta con fuentes de voltaje, entonces, los voltajes de algunos de los nodos del sistema son conocidos, de tal manera que no es necesario calcular su valor. La ecuación (3.55) puede entonces expresarse en la forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}^a & \mathbf{G}^{ab} \\ \mathbf{G}^{ba} & \mathbf{G}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}^a \\ \mathbf{v}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}^a \\ \mathbf{i}^b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{i}^{ahist} \\ \mathbf{i}^{bhist} \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

los superíndices **a** denotan a los nodos de la red, cuyos voltaje son desconocidos, y los superíndices **b** a los nodos cuyos voltajes están determinados por fuentes de tensión conectados a ellos. De la ecuación (3.56) y los equivalentes de Norton para las fuentes de voltaje, se llega a la siguiente expresión:

$$\mathbf{G}^a \mathbf{v}^a = \mathbf{i}^a - \mathbf{i}^{ahist} - \mathbf{G}^{ab} \mathbf{v}^b. \quad (3.57)$$

Así, los términos del miembro derecho de la ecuación (3.57) son conocidos y solo resta resolver el sistema de ecuaciones para el vector  $\mathbf{v}^a$ . Esto puede realizarse con distintos métodos, tales como la factorización LU, la eliminación gaussiana, etc. Por medio de la solución mediante integraciones secuenciales de (3.57) se pueden simular transitorios electromagnéticos en redes, mediante algoritmos de computo adecuados.

Es importante señalar que una matriz de conductancias nodales tiene las siguientes características:

- a) Cada elemento de la diagonal principal es la suma de todas y cada una de las conductancias conectadas a un nodo específico.
- b) Cada elemento fuera de la diagonal principal es de signo negativo, y representa al o a los elementos que se interconectan entre un par de nodos.
- c) La matriz de conductancias resultante es simétrica.

Cuando una red tiene un gran número de elementos, su matriz nodal puede ser dispersa y conviene tratarla mediante técnicas apropiadas, o bien formar la matriz nodal de tal manera que se conforme por bloques o submatrices, esto con el fin de facilitar su manipulación por medio de técnicas matriciales apropiadas que permitan la solución del sistema en un tiempo computo determinado y obtener programas más eficientes.

## CAPÍTULO 4.

# MODELADO DE LA LÍNEA MONOFÁSICA EN EL DOMINIO DEL TIEMPO.

### 4.1 Implementación algorítmica de la solución de la línea monofásica ideal.

En la sección 3.1.3 se planteó la solución transitoria de la línea monofásica ideal. A continuación se describe el algoritmo para la solución. Esto se hace utilizando como ejemplo la red de la figura 4.1. Se asume que todos los parámetros, incluyendo la impedancia de Thevenin de la fuente y la carga son conocidos.

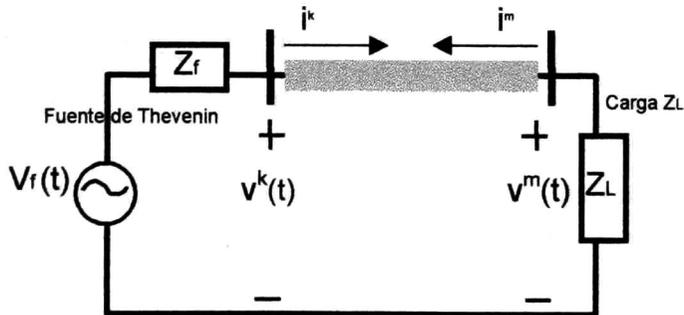


Figura No. 4.1 Línea monofásica con carga  $Z_L$ .

El voltaje y la corriente son funciones del tiempo y de la distancia. Para esta red, de acuerdo con los resultados de la sección 3.2, el sistema resultante al aplicar el método nodal es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} v^k(t_n) \\ v^m(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_f + G_c & 0 \\ 0 & G_c + G_L \end{bmatrix}^{-1} \left[ \begin{bmatrix} i^k(t_n) \\ i^m(t_n) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -G_f \\ 0 \end{bmatrix} [v_f(t_n)] - \begin{bmatrix} i^{khist}(t_n) \\ i^{mhist}(t_n) \end{bmatrix} \right] \quad (4.1)$$

en el sistema (4.1) se tienen a  $i_f(t_n)$ ,  $v_f(t_n)$ ,  $G_f$ ,  $G_c$ ,  $G_L$  e  $i^{fhist}(t_n)$  como valores conocidos, donde:

$i_f(t_n)$  = corriente de la fuente,  $v_f(t_n)$  = voltaje de la fuente,  $G_f$  = conductancia de la fuente,

$G_c$  = conductancia característica de la línea,  $G_L$  = conductancia de la carga,

$i^k(t_n)$  = corriente inyectada al nodo k,  $i^m(t_n)$  = corriente inyectada al nodo m,

$i^{khist}(t_n)$  = corriente de historia del nodo k,  $i^{mhist}(t_n)$  = corriente de historia del nodo m;

como  $i^{khist}(t_n)$  e  $i^{mhist}(t_n)$  son conocidas para  $t = 0$ , ya que son las condiciones iniciales de las corrientes de la línea, entonces el sistema (4.1) se puede reducir a otro sistema equivalente, (4.2); ya que  $i^k(t_n)$  e  $i^m(t_n)$  son cero para todo tiempo, debido a que no existen fuentes de corriente conectadas a los nodos k y m,

$$\begin{bmatrix} v^k(t_n) \\ v^m(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_f + G_c & 0 \\ 0 & G_c + G_L \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G_f \\ 0 \end{bmatrix} [v_f(t_n)] - \begin{bmatrix} i^{khist}(t_n) \\ i^{mhist}(t_n) \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

De (4.2) se pueden obtener los voltajes de los nodos k y m para todo  $t_n = n\Delta t$ , y de acuerdo a los resultados obtenidos en la sección (3.1.3):

$$i^{khist}(t_n) = i^{khistlinea}(t_n) + i_{histZf}(t_n) \quad (4.3)$$

$$i^{mhist}(t_n) = i^{mhistlinea}(t_n) + i_{histZl}(t_n), \quad (4.4)$$

son las corrientes de historia de los nodos k y m respectivamente, para las cuales:

$$i^{khistlinea}(t_n) = -G_c v^m(t_n - \tau) - i^m(t_n - \tau) \quad (4.5)$$

$$i^{mhistlinea}(t_n) = -G_c v^k(t_n - \tau) - i^k(t_n - \tau), \quad (4.6)$$

son las corrientes de historia de la línea en los nodos k y m. Pero en estos nodos están presentes también las corrientes de historia de la impedancia de la fuente y de la carga, respectivamente, las cuales se definen por:

$$i_{histZf}(t_n) = \pm G_f [v_f(t_{n-1}) - v^k(t_{n-1})] \pm i_{histZf}(t_{n-1}) \quad (4.7)$$

$$i_{histZl}(t_n) = \pm G_L v^m(t_{n-1}) \pm i_{histZl}(t_{n-1}) \quad (4.8)$$

el signo "+" de (4.7) y (4.8) corresponde a elementos inductivos, mientras que el signo "-" corresponde a elementos capacitivos.

## 4.2 Almacenamiento de las historias.

Usualmente para las historias de los extremos de una línea, en un tiempo  $t_n$ , se requiere conservar los valores del tiempo anterior,  $t_{n-1}$ , para los condensadores e inductores, y  $t_n - \tau$  para las líneas de transmisión. En el caso de una línea de transmisión con  $\ell$  metros de longitud, el tiempo de viaje de las ondas de extremo a extremo viene dado por (3.17) o bien por

$$\tau = \ell \sqrt{LC} \quad (4.9)$$

donde  $L$  y  $C$  son la inductancia serie y la capacitancia paralelo por unidad de longitud, respectivamente. El valor de  $\Delta t$  lo fija la rapidez del transitorio que se desea observar, de acuerdo con el criterio del muestreo de Nyquist [29];

$$\Delta t \leq \frac{\pi}{f_{\max}} \quad (4.10)$$

donde  $f_{\max}$  es la máxima frecuencia del muestreo. Dado  $\Delta t$ , entonces para el retardo  $\tau$ , provocado por los elementos capacitivos e inductivos de la línea, éste es utilizado en un buffer circular. Evidentemente el cociente  $\tau/\Delta t$  no será entero, en los casos donde la red analizada contenga más de una línea. La longitud requerida del buffer,  $N$ , es el próximo entero superior de la razón del retardo  $\tau$  respecto al incremento de tiempo. Es decir, qué tantos pasos de tiempo hay que retroceder para recobrar los voltajes y corrientes de historia, de acuerdo a (4.5) y (4.6),

$$N = \sup \left( \frac{\tau}{\Delta t} \right). \quad (4.11)$$

Dos buffers de retardo [34], según se aprecian en la figura 4.2, serán necesarios: uno para la onda viajera de corriente de ida y el restante para la onda viajera de corriente de regreso, respecto a un nodo determinado. Se necesita un apuntador común de los elementos de estos buffers. El apuntador tomará  $\tau$  segundos para cada ciclo a través de los buffers, si  $N = \sup(\tau/\Delta t)$ . Los nuevos valores de  $i_{k\text{hist}}$  e  $i_{m\text{hist}}$  obtenidos de (4.14) y (4.15) se almacenan en matrices en cierto tiempo y se recobrarán cuando el apuntador está a la misma posición en el siguiente ciclo, es decir  $\tau$  segundos después. *Se recomienda que  $N$  sea mayor o igual a 15, ya que esto ayuda a la precisión numérica de los esquemas basados en Bergeron.* En el inicio del programa, los buffers deben llenarse con los datos de un programa de flujos, del cual se obtienen los datos del estado estable de la línea para sus nodos terminales.

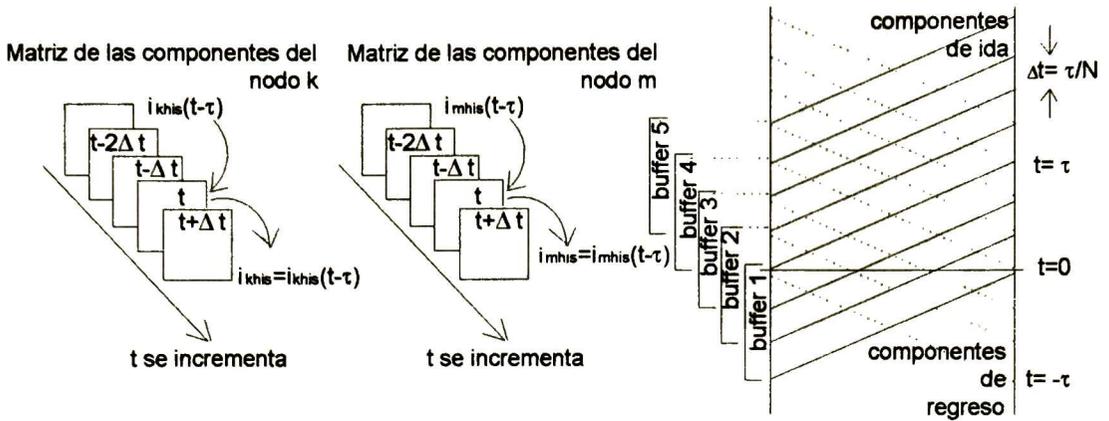


Figura No. 4.2 Buffers circulares de los elementos con retardo (historias) de las corrientes.

De la ecuación (3.19) se puede obtener la siguiente ecuación, para los nodos m y k:

$$i^m(t_n - \tau) = G_c v^m(t_n - \tau) + i^{mhist}(t_n - \tau) \tag{4.12}$$

$$i^k(t_n - \tau) = G_c v^k(t_n - \tau) + i^{khist}(t_n - \tau), \tag{4.13}$$

si se sustituye  $i^m(t_n - \tau)$  de la ecuación (4.5) por la expresión (4.12) al igual que  $i^k(t_n - \tau)$  de la ecuación (4.6) por la expresión (4.13) se llega a las expresiones:

$$i^{khist}(t_n) = -2G_c v^m(t_n - \tau) - i^{mhist}(t_n - \tau) \tag{4.14}$$

$$i^{mhist}(t_n) = -2G_c v^k(t_n - \tau) - i^{khist}(t_n - \tau). \tag{4.15}$$

Además de que a partir de la ecuación (3.19) se puede obtener la corriente para los nodos m y k:

$$i^m(t_n) = G_c v^m(t_n) + i^{mhist}(t_n) \tag{4.16}$$

$$i^k(t_n) = G_c v^k(t_n) + i^{khist}(t_n). \tag{4.17}$$

Las ecuaciones (4.2), (4.3)-(4.8), (4.14)-(4.17) se pueden utilizar para generar un algoritmo de computo para la solución de los voltajes en los extremos de la línea con una fuente no ideal (Fuente de Thevenin) y una carga R, L, C o bien una combinación de estas.

### 4.3 Interpolación entre los elementos con historia.

Los elementos que poseen historias no presentan problemas para el computo de transitorios a excepción de las líneas de transmisión. Es muy importante tomar en cuenta que cuando el incremento del tiempo,  $\Delta t$ , no es un submúltiplo entero del tiempo de viaje de la onda,  $\tau$ , entonces se deben realizar interpolaciones entre los elementos guardados en los buffers. Se recomienda el uso de la interpolación lineal, ya que las interpolaciones de grado mayor originan oscilaciones numéricas, además de otros problemas que serán discutidos en breve.

La figura 4.3 muestra la necesidad de interpolar entre los elementos de historia que se guardan en los buffers.

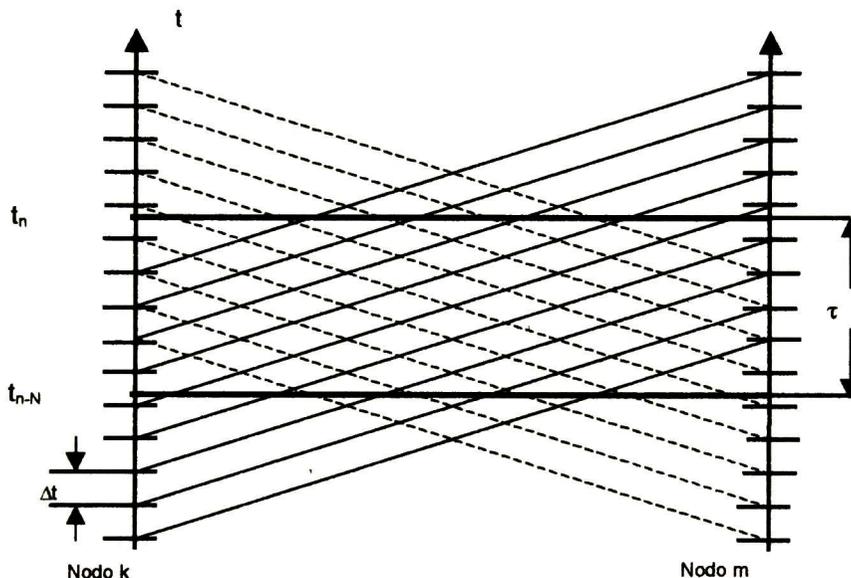


Figura No. 4.3 Interpolación entre elementos de historia.

De acuerdo a lo expuesto en los puntos 4.2 y 4.3 se puede implementar un algoritmo de computo para la simulación de transitorios electromagnéticos en líneas de transmisión monofásicas con parámetros ideales. A continuación se enumeran los pasos del algoritmo para la simulación de transitorios electromagnéticos en el caso de línea ideal:

- 1) Entrada de datos: tiempos de inicio y final de la observación, incremento del tiempo, longitud de la línea, radio del conductor, altura del conductor respecto al plano de tierra, admitancias de la fuente y de la carga, condiciones iniciales de la línea y de las admitancias de la fuente y de la carga, valor de la fuente de voltaje o corriente a aplicar.
- 2) Cálculo de los parámetros geométricos y eléctricos de la línea: inductancia y capacitancia geométricas, admitancia característica y tiempo de viaje de la onda.
- 3) Formación de la matriz nodal de la red.
- 4) Cálculo del número de iteraciones y longitudes de los buffers de historia de la línea.
- 5) Crear los buffers de historia de la línea.
- 6) Ciclo de cálculos de los voltajes y corrientes de los elementos de la red:
  - a) Obtención de las corrientes de historia de los elementos (interpolar si es necesario).
  - b) Cálculo de los voltajes actuales (utilizar la ecuación 4.2).
  - c) Cálculo de las corrientes actuales (utilizar las ecuaciones 4.14 y 4.15).
  - d) Almacenamiento de resultados deseados.
- 7) Impresión de resultados numérica y/o gráficamente.

#### 4.4 Ejemplo numérico de un transitorio.

En esta sección se analizan los transitorios provocados por la energización de una línea monofásica ideal. En primer caso se muestra una línea alimentada con una fuente no ideal con impedancia resistiva y posteriormente se aplica una fuente con impedancia resistiva-inductiva, en ambos casos se conectan cargas de diferentes características en el extremo receptor de la línea bajo análisis. En la figura 4.4 se muestran los resultados obtenidos en MATLAB basado en Bergeron, de acuerdo a los pasos del algoritmo anterior, para una línea con las siguientes características:

$$r = 0.0159 \text{ m (radio del conductor)}$$

$$h = 19.0000 \text{ m (altura del conductor, respecto al plano de tierra)}$$

$$d = 75000 \text{ m (longitud del conductor)}$$

la carga es de tipo resistiva con un valor de  $20 \text{ k}\Omega$ , y la fuente es un escalón sin retraso con un valor de  $1 \text{ V}$ , además su resistencia interna tiene un valor de  $0.001 \text{ ohms}$ .

Para los resultados mostrados en la figura 4.4 corresponden a un incremento de tiempo,  $\Delta t$ , igual a  $\tau/20$ . Se comparan los resultados con la solución en el dominio de la frecuencia obtenidos mediante el Método de Laplace al cual se hará referencia continuamente, para la corroboración de resultados.

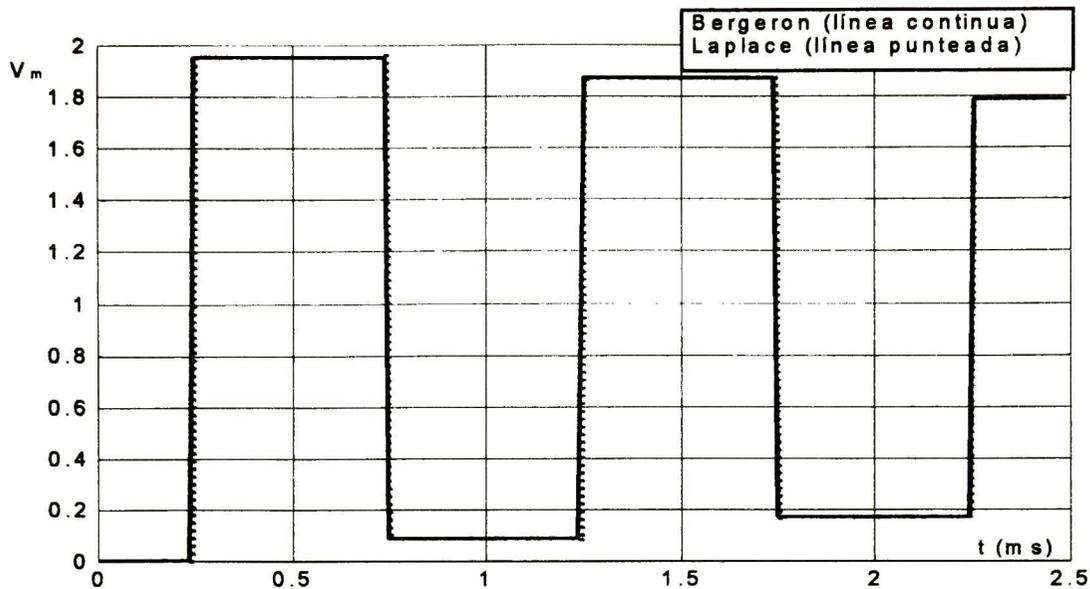


Figura No. 4.4 Voltaje en el extremo final, nodo m, de una línea ideal con carga resistiva.

Para acelerar la rapidez de computo, se puede emplear un incremento de tiempo mayor, por ejemplo  $\Delta t = \tau/5$ , pero como se puede apreciar en la figura 4.5, los resultados empeoran en cuanto a la precisión numérica, debido a que la discontinuidad de la onda tipo escalón de excitación así como de sus rebotes en los extremos de la línea se toma para un valor cada vez más próximo a  $\tau$ , de ahí que se puede observar la discontinuidad como una pendiente casi infinita.

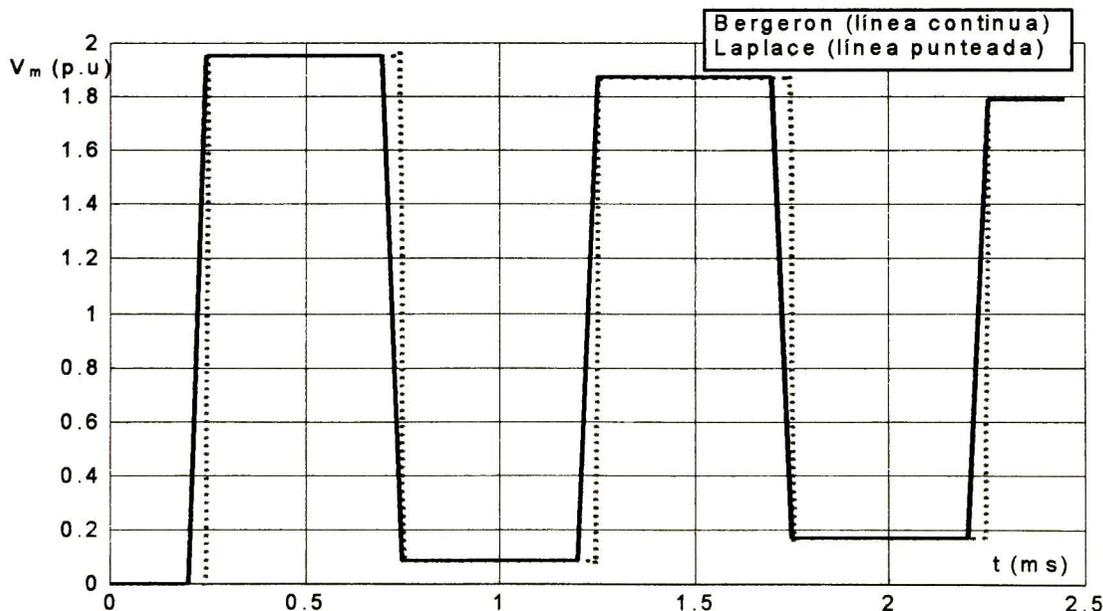


Figura No. 4.5 Voltaje en el extremo final, nodo m, con  $\Delta t = \tau/5$ , línea ideal con carga resistiva.

Si se simula la misma línea con una carga puramente inductiva de 10 mH, con la misma fuente. Para este caso, es útil observar las consecuencias de interpolar entre las historias guardadas en los buffers. La figura 4.6b denota un error numérico, debido a la interpolación lineal, ya que se tiene un redondeo en los picos de la onda del voltaje, además de un tiempo de computo superior debido a que se requieren de cuatro operaciones adicionales en cada incremento de tiempo, en el caso de utilizar un algoritmo de interpolación lineal de Newton [33].

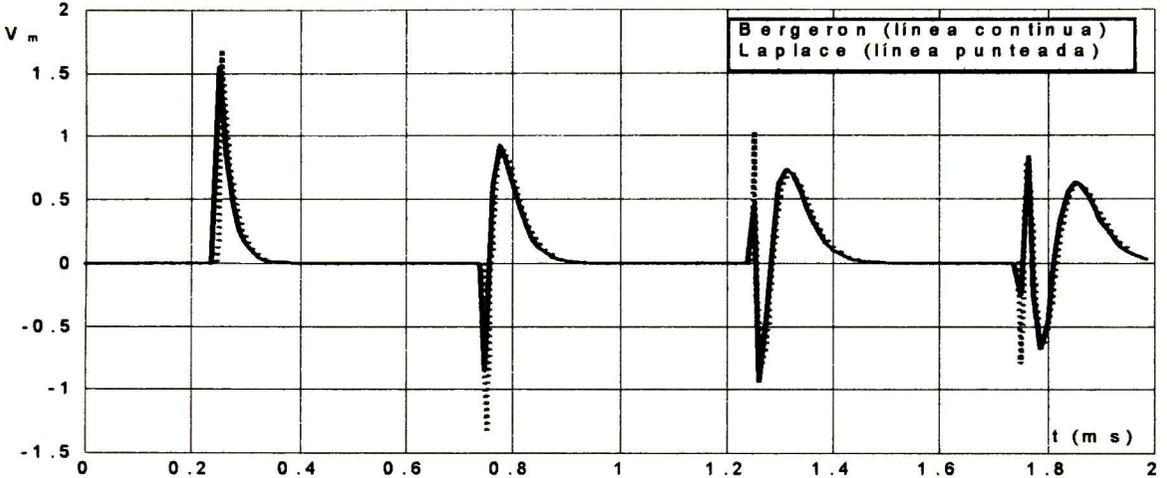
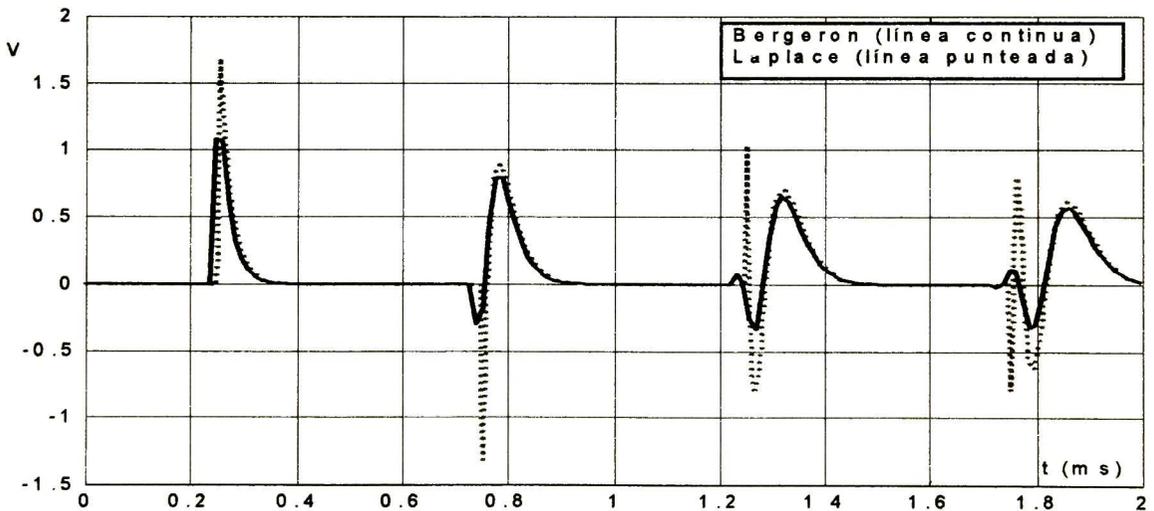
a) Sin interpolación,  $\Delta t = \tau/20$ .b) Con interpolación, lineal,  $\Delta t = \tau/20.3$ .

Figura No. 4.6 Voltaje en el extremo final, nodo m, de una línea ideal con carga inductiva.

Cuando se introducen algoritmos de interpolación de un grado mayor a uno, se presentan las siguientes características:

- Los picos de las ondas se aproximan más a la onda real (la obtenida por Laplace).
- Las oscilaciones numéricas se incrementan.
- El tiempo de computo requerido aumenta.

Una corroboración de los incisos anteriores son los resultados que se pueden observar en las siguientes figuras en donde se comparan los esquemas de interpolación cuadrática y de interpolación por segmentarias de tercer grado (splines cúbica) contra el esquema de la interpolación lineal. En la tabla II se comparan los tiempos de computo para los esquemas utilizados.

Tabla II	
Tiempos de computo para algunos esquemas de interpolación entre las Ondas Viajeras:	
Tipo de interpolación	% de tiempo utilizado
Lineal	100
Cuadrática (de Newton)	117
Cúbica (splines)	124.6

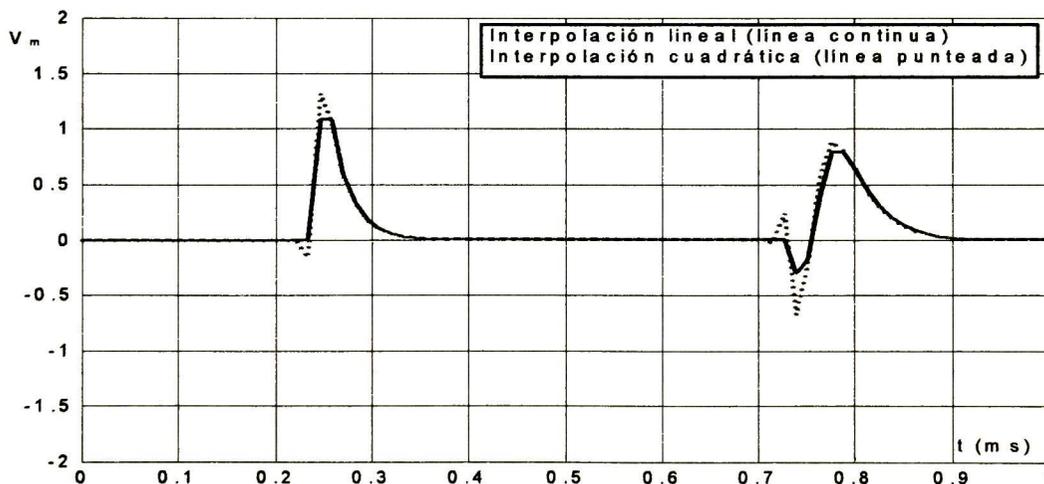
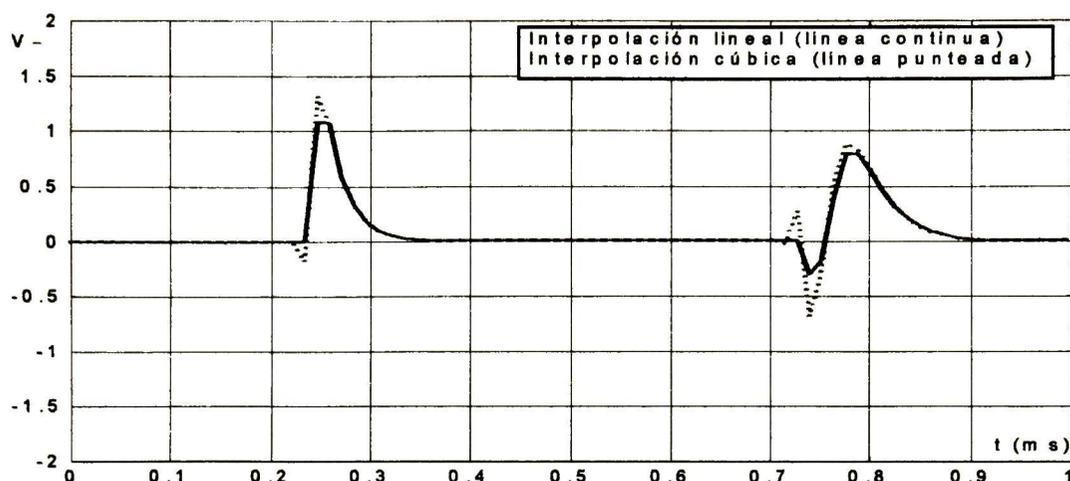


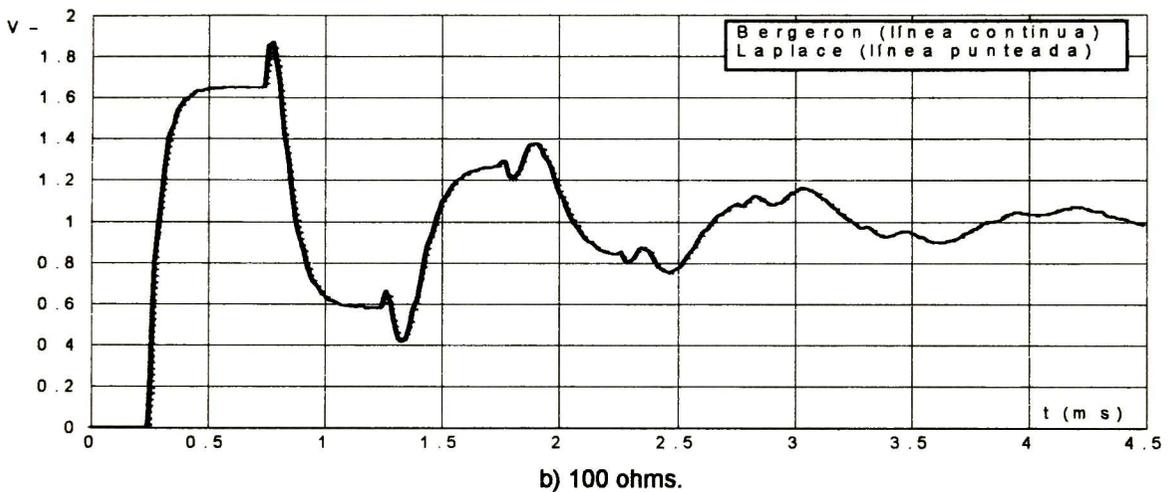
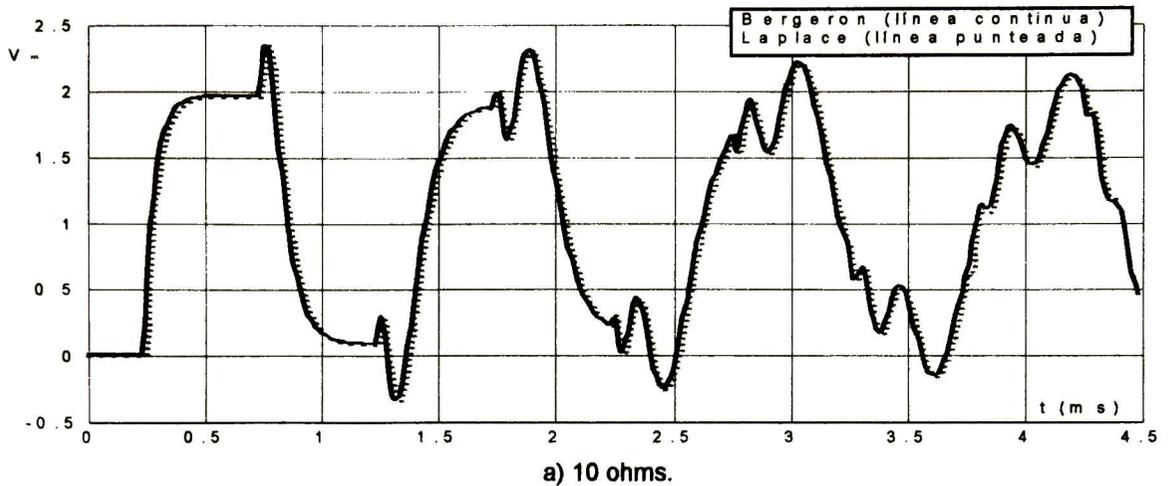
Figura No. 4.7 Voltaje en el extremo final, nodo m, de una línea ideal con carga inductiva utilizando interpolación cuadrática.



**Figura No. 4.8** Voltaje en el extremo final, nodo m, de una línea ideal con carga inductiva utilizando interpolación por splines cúbicas.

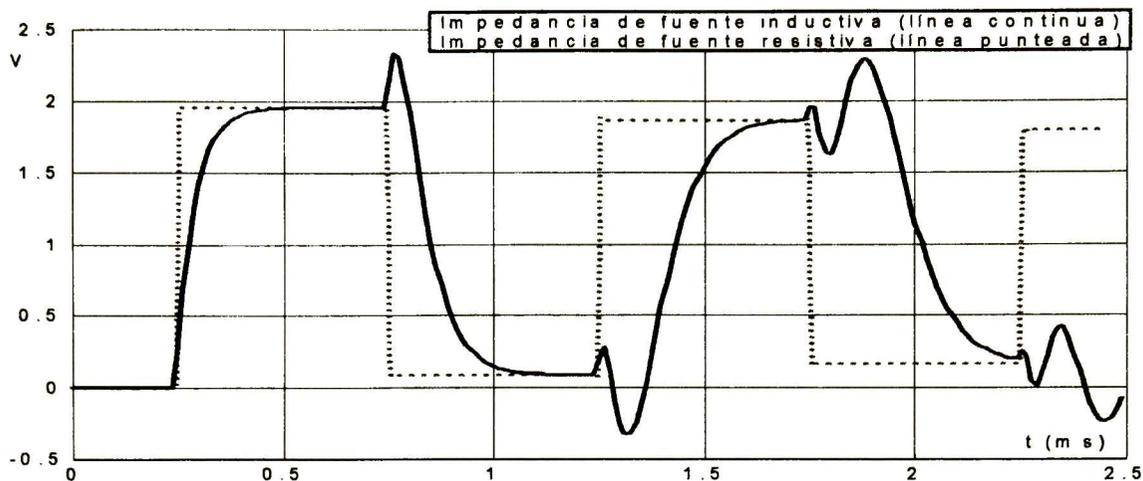
Para la interpolación lineal se requieren dos valores como mínimo en el buffer de historias ya que entre los valores correspondientes a los pasos de integración anterior y posterior alrededor del tiempo actual menos el tiempo de viaje de la onda ( $t-\tau$ ) se lleva a cabo la interpolación. Y para la interpolación cuadrática se necesitan tres valores como mínimo y así sucesivamente para una interpolación de grado mayor a uno.

El último caso de simulación de transitorios, es con cargas puramente capacitivas, se simuló la misma línea con una carga de 100 nF, con la misma fuente utilizada anteriormente. En este ejemplo es importante visualizar la importancia que tiene el valor de la resistencia interna de la fuente en los picos provocados por los rebotes de las ondas, ya que para valores pequeños de la resistencia, se tienen picos bastante pronunciados, y para valores grandes de la resistencia se disminuyen los picos. Este comportamiento se debe a que la resistencia amortigua las ondas dependiendo su valor. Lo anterior se puede visualizar en las figuras 4.9a y 4.9b para diferentes valores de la resistencia interna de la fuente. Se escogieron valores grandes para la resistencia interna de la fuente, para fines de una buena visualización del efecto de la misma sobre la onda de voltaje de la línea.



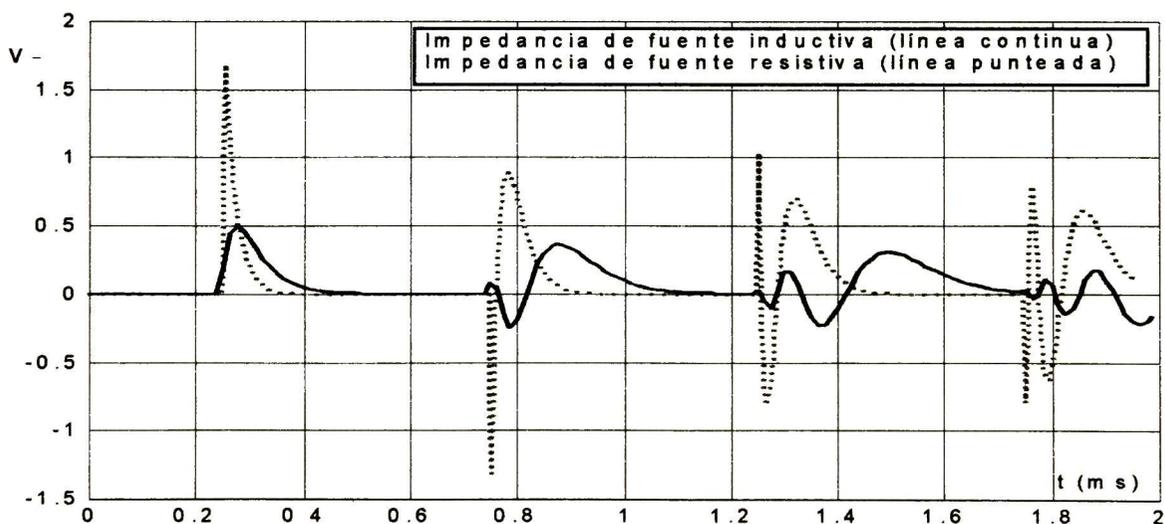
**Figura No. 4.9** Comparación para diferentes valores de la resistencia de la fuente.

Es importante señalar que cuando se tiene un transitorio en una línea, la impedancia interna de la fuente se comporta como una inductancia, de ahí la necesidad de visualizar los efectos de esta sobre las ondas que se propagan por las líneas. Para observar lo anterior, se presentan a continuación los resultados de las simulaciones de un transitorio en una línea de transmisión igual a la que se utilizó en los ejemplos anteriores, con la misma onda de voltaje de inyección. La impedancia de fuente es de  $1 \mu\Omega$  de resistencia y una inductancia de 20 mH. Para la carga se escogen los casos de: resistencia, inductancia y capacitancia puras, esto con el fin de comparar los resultados con los presentados en las figuras 4.4, 4.6a y 4.9a, respectivamente.

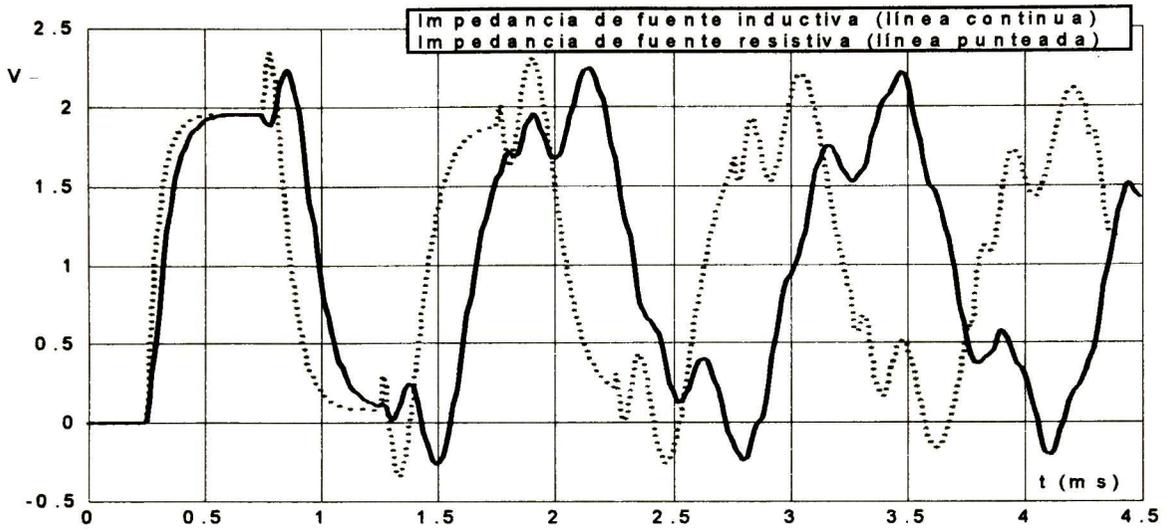


**Figura No. 4.10** Transitorio para impedancia de la fuente inductiva, con una carga de  $20\text{ k}\Omega$ .

De la figura anterior se puede apreciar el efecto de rebotes de la onda de voltaje con picos muy pronunciados y atrasados respecto a la onda de voltaje con fuente resistiva, como suelen darse con las inductancias, en los momentos en que la onda llega a uno de los extremos de la línea, para  $t_n = k\tau$ , con  $k$  igual a  $1, 2, \dots$ , ect. De la figura 4.11 se observa el efecto del achatamiento y defasamiento de la onda de voltaje en el extremo final de la línea debido a la inductancia de la fuente. La impedancia de la fuente tiene una constante de tiempo muy grande, de 10000 segundos, lo cual significa, que la impedancia es muy lenta en el reaccionar de los rebotes de las ondas de voltaje, presentándose sobrevoltajes menores al caso de fuente con impedancia puramente resistiva, y con ello, menores daños a los elementos conectados en el extremo final de la línea.



**Figura No. 4.11** Transitorio para impedancia de la fuente inductiva, con una carga de 10 milihenrios.



**Figura No. 4.12** Transitorio para impedancia de la fuente inductiva, con una carga de 0.1 microfaradios.

En la figura 4.12 se puede apreciar el efecto de defasamiento de la onda de voltaje, debido al efecto inductivo de la impedancia de la fuente.

---



---

## CAPÍTULO 5.

### MODELADO DE LA LÍNEA POLIFÁSICA.

---



---

#### 5.1 Solución de las ecuaciones polifásicas en el dominio de la frecuencia.

En la sección 2.4 se obtuvo el modelo en dos puertos de admitancias para una línea de transmisión multiconductora en el dominio de la frecuencia, el cual se describe por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}^k \\ \mathbf{I}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}^k \\ \mathbf{V}^m \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

donde:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Y}_c \coth(\Psi \ell) \quad (5.2)$$

$$\mathbf{B} = -\mathbf{Y}_c \operatorname{cosech}(\Psi \ell). \quad (5.3)$$

La figura 5.1a muestra un esquema de conexión típica de línea de transmisión polifásica. La figura 5.1b muestra su esquema nodal, de ésta se puede formular la siguiente ecuación de corrientes para el nodo k:

$$\mathbf{Y}_f \mathbf{V}_f = \mathbf{I}^k + \mathbf{Y}_f \mathbf{V}^k; \quad (5.4)$$

sustituyendo  $\mathbf{I}^k$  por su expresión dada por (5.1), se llega a la siguiente ecuación:

$$\mathbf{Y}_f \mathbf{V}_f = (\mathbf{A} + \mathbf{Y}_f) \mathbf{V}^k + \mathbf{B} \mathbf{V}^m \quad (5.5)$$

Para el extremo receptor se tiene la relación:

$$Y_L V^m = -I^m \tag{5.6}$$

sustituyendo aquí  $I^m$  por su valor obtenido de (5.1) se llega a la siguiente ecuación:

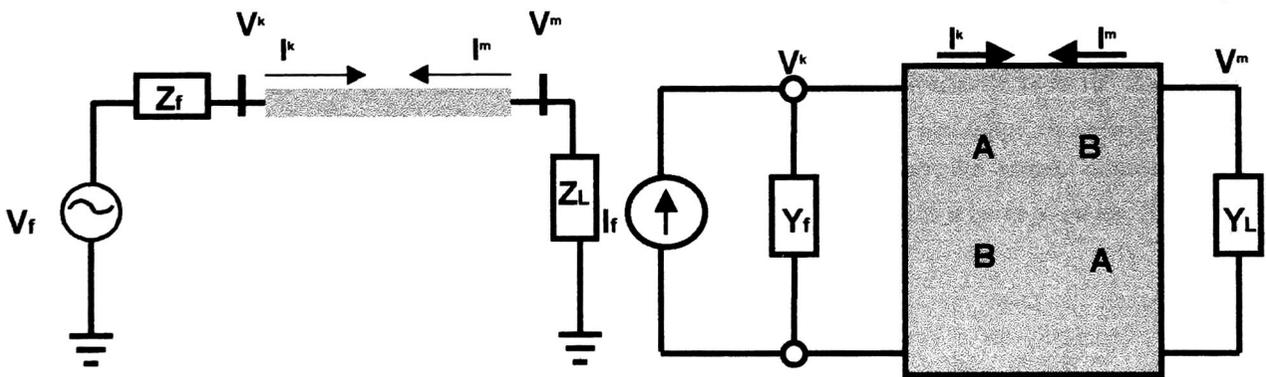
$$Y_L V^m = -B V^k - A V^m; \tag{5.7}$$

de esta última se puede obtener  $V^k$ :

$$V^k = -B^{-1}(A + Y_L)V^m; \tag{5.8}$$

si ahora se sustituye (5.8) en (5.5) se obtiene:

$$Y_f V_f = [B - (A + Y_f)B^{-1}(A + Y_L)]V^m. \tag{5.9}$$



a) Esquema de conexión.

b) Modelo equivalente en dos puertos.

Figura 5.1 Línea de transmisión multiconductora:

De esta última expresión se obtiene la función transferencia del circuito de la figura 5.1b:

$$V^m = [B - (A + Y_f)B^{-1}(A + Y_L)]^{-1} Y_f V_f, \tag{5.10}$$

cuando  $\mathbf{Z}_f = \mathbf{0}$  entonces:

$$\mathbf{V}^k = \mathbf{V}_f \quad (5.11)$$

y (5.10) toma la forma siguiente:

$$\mathbf{V}^m = -(\mathbf{A} + \mathbf{Y}_L)^{-1} \mathbf{B} \mathbf{V}^k \quad (5.12)$$

La expresión (5.12) puede obtenerse directamente de (5.8) y (5.11). La expresión (5.10) se utiliza junto con la transformada inversa numérica de Laplace para simular transitorios en una línea polifásica; esto como comparación para el método del dominio del tiempo que se desarrolla en la siguiente sección.

La figura 5.2a muestra un corte transversal de la línea, mientras que la figura 5.2b muestra su esquema de conexión. La línea es polifásica con dos circuitos trifásicos paralelos y un hilo de guarda para cada circuito. Los conductores de fase son de aluminio, con una resistividad de  $2.826 \times 10^{-8} \Omega\text{-m}$  y un radio de 1.6 cm; los hilos de guarda son de acero inoxidable, con una resistividad de  $13.8 \times 10^{-8} \Omega\text{-m}$  y un radio de 0.5 cm. Se considera la resistividad del terreno igual a 100  $\Omega\text{-m}$ . Los datos se tomaron de la referencia [35]. Las terminales en los nodos receptores se encuentran en circuito abierto, mientras que las terminales del extremo emisor están cortocircuitadas entre sí y conectadas a tierra a excepción de la fase A.

La energización se aplica a la fase A del primer circuito y consiste de un escalón de magnitud unitario, tal como se observa en la figura 5.2b. Los resultados para el caso de línea con parámetros constantes se pueden apreciar en la figura 5.3 y los resultados para línea con parámetros dependientes de la frecuencia se ilustran en la figura 5.4. Los resultados con parámetros constantes se utilizarán como referencia para el método en el dominio del tiempo que se desarrollará más adelante.

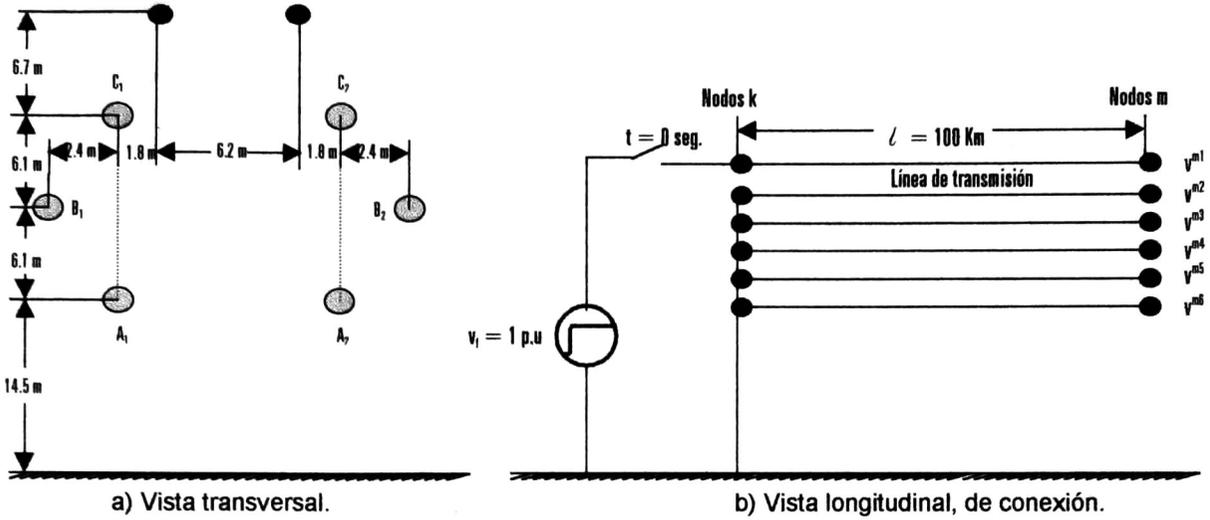


Figura No.5.2 Línea polifásica de transmisión.

Los resultados para la línea con parámetros constantes y con parámetros dependientes de la frecuencia muestran el transitorio en los nodos de los extremos receptores de las fases A del primer circuito y C del segundo circuito; esta última es la fase más distante de la fase que se energiza, la onda inyectada por la fuente induce voltajes al resto de las fases.

En el caso de la línea con parámetros dependientes de la frecuencia, se considera el efecto piel de los conductores de fase, guarda y de la tierra, así como la resistividad del terreno y la conductancia del aire; las fórmulas que modelan los parámetros se presentan en el apéndice A.

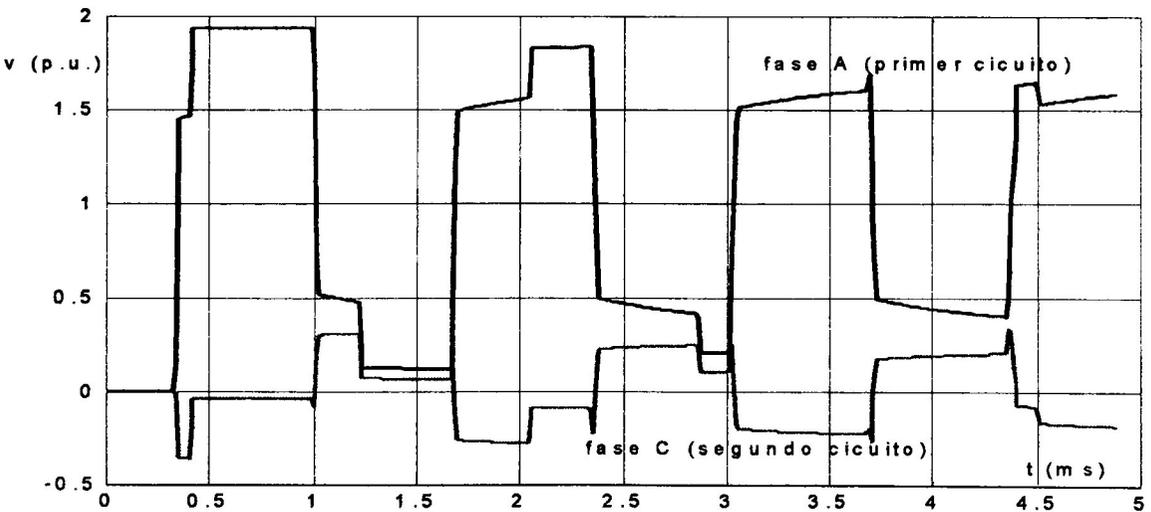
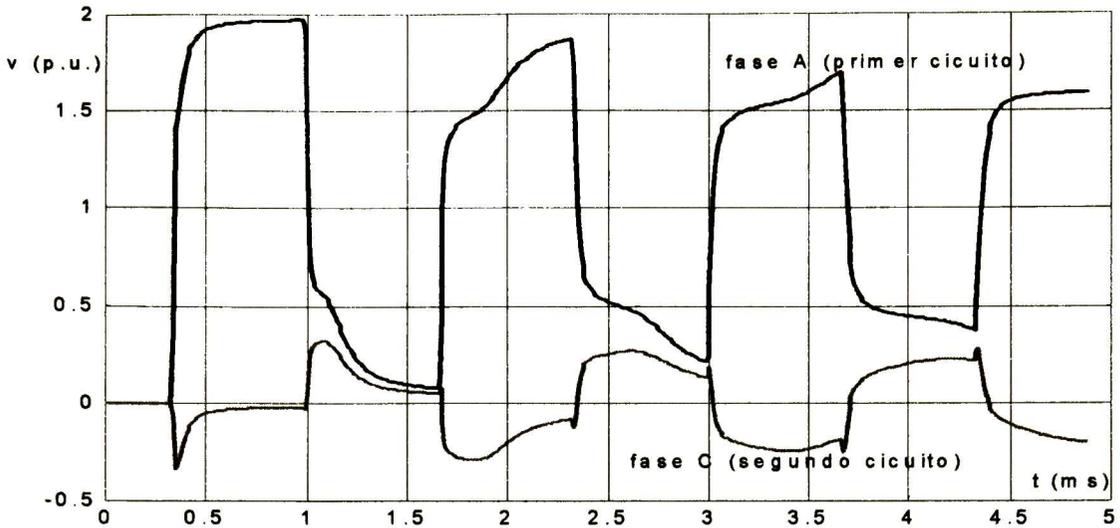


Figura No.5.3 Voltajes transitorios de línea polifásica con parámetros constantes de la figura 5.2.



**Figura No.5.4** Voltajes transitorios de línea polifásica con parámetros dependientes de la frecuencia de la figura 5.2.

## 5.2 Obtención de las ecuaciones polifásicas en el dominio del tiempo.

Las ecuaciones de Onda Viajera se obtuvieron en la sección 3.1 para el caso de líneas monofásicas. A continuación se obtienen las ecuaciones para el caso polifásico. De las ecuaciones (2.35) y (2.40) se tiene que:

$$\mathbf{Y}_c \mathbf{V} = \mathbf{Y}_c \exp(-\Psi_v x) \mathbf{C}_1 + \mathbf{Y}_c \exp(\Psi_v x) \mathbf{C}_2 \quad (5.13)$$

e

$$\mathbf{I} = -\mathbf{Y}_c [-\exp(-\Psi_v x) \mathbf{C}_1 + \exp(\Psi_v x) \mathbf{C}_2]. \quad (5.14)$$

En el inicio de la línea, en  $x = 0$ , de estas dos ecuaciones se obtienen:

$$\mathbf{Y}_c \mathbf{V}^k = \mathbf{Y}_c \mathbf{C}_1 + \mathbf{Y}_c \mathbf{C}_2 \quad (5.15)$$

e

$$\mathbf{I}^k = \mathbf{Y}_c \mathbf{C}_1 - \mathbf{Y}_c \mathbf{C}_2. \quad (5.16)$$

De la suma de (5.16) y (5.15) se obtiene la expresión:

$$\mathbf{I}^k + \mathbf{Y}_c \mathbf{V}^k = 2\mathbf{Y}_c \mathbf{C}_1. \quad (5.17)$$

Ahora las ecuaciones (5.13) y (5.14) se evalúan en el extremo remoto de la línea,  $x = \ell$ :

$$\mathbf{Y}_c \mathbf{V}^m = \mathbf{Y}_c \exp(-\boldsymbol{\Psi}_v \ell) \mathbf{C}_1 + \mathbf{Y}_c \exp(\boldsymbol{\Psi}_v \ell) \mathbf{C}_2 \quad (5.18)$$

e

$$\mathbf{I}^m = -\mathbf{Y}_c [-\exp(-\boldsymbol{\Psi}_v \ell) \mathbf{C}_1 + \exp(\boldsymbol{\Psi}_v \ell) \mathbf{C}_2]. \quad (5.19)$$

De la resta de (5.18) y (5.19):

$$\mathbf{I}^m - \mathbf{Y}_c \mathbf{V}^m = -2\mathbf{Y}_c \exp(-\boldsymbol{\Psi}_v \ell) \mathbf{C}_1. \quad (5.20)$$

En esta última expresión se puede substituir a  $\mathbf{C}_1$  por su valor en (5.17); de esta forma se obtiene:

$$\mathbf{I}^m - \mathbf{Y}_c \mathbf{V}^m = -2\mathbf{Y}_c \exp(-\boldsymbol{\Psi}_v \ell) \frac{\mathbf{Y}_c^{-1}}{2} [\mathbf{I}^k + \mathbf{Y}_c \mathbf{V}^k]. \quad (5.21)$$

De (5.21) se tiene la siguiente identidad:

$$\mathbf{Y}_c \boldsymbol{\Psi}_v = \boldsymbol{\Psi}_v^T \mathbf{Y}_c. \quad (5.22)$$

Al substituir (5.22) en (5.21), se llega a la forma de Onda Viajera para el nodo  $m$  de la línea de la Figura 5.1 a):

$$\mathbf{I}^m - \mathbf{Y}_c \mathbf{V}^m = \mathbf{H} [\mathbf{I}^k + \mathbf{Y}_c \mathbf{V}^k] \quad (5.23)$$

siendo:

$$\mathbf{H} = -\exp^T(-\boldsymbol{\Psi}_v \ell), \quad (5.24)$$

donde el superíndice T significa la transpuesta del exponencial de la matriz  $-\boldsymbol{\Psi}_v \ell$ . El modelo de Onda Viajera del nodo  $k$  se obtiene a partir de la simetría de la línea; mediante esta propiedad solo hay que intercambiar los subíndices  $m$  y  $k$ :

$$\mathbf{I}^k - \mathbf{Y}_c \mathbf{V}^k = \mathbf{H} [\mathbf{I}^m + \mathbf{Y}_c \mathbf{V}^m]. \quad (5.25)$$

Las ecuaciones (5.23) y (5.25) se llevan al dominio del tiempo, quedando de la siguiente forma:

$$I^m - Y_c * V^m = h * [I^k + Y_c * V^k] \quad (5.26)$$

e

$$I^k - Y_c * V^k = h * [I^m + Y_c * V^m]. \quad (5.27)$$

En principio, estas expresiones se pueden incorporar a un programa en el dominio del tiempo. En la práctica la dificultad consiste en que cada elemento de la matriz  $h$  de funciones del tiempo involucra varios retardos; tantos como modos tenga la línea. A continuación se presenta un enfoque que proporciona una solución más satisfactoria.

### 5.3 Aplicación de la teoría de las matrices idempotentes para el desarrollo de un modelo de la línea en el dominio del tiempo.

Utilizando las ecuaciones (5.23) y (5.25) se podrían simular transitorios en líneas polifásicas, en el dominio de la frecuencia, pero  $H$  es una matriz que contiene funciones de propagación que son muy oscilatorias, como puede observarse en las figuras del apéndice B. Estas oscilaciones se deben a los tiempos de retardo de la línea [36]. Adicionalmente se tiene acoplamiento entre las fases lo que complica la solución en el dominio de fases aún más. De ahí la necesidad buscar una alternativa más viable. Para eliminar el acoplamiento entre fases se utiliza una transformación modal. Considerando la ecuación (5.25):

$$I^k - Y_c V^k = H [I^m + Y_c V^m]; \quad (5.28)$$

de la ecuación (5.24) y (2.34) se llega a la expresión:

$$H = -\exp^T(-M\Gamma M^{-1}l). \quad (5.29)$$

Esta ecuación a su vez se puede representar de la siguiente forma:

$$H = -M^{-T} \exp^T(-\Gamma l) M^T \quad (5.30)$$

recordando que  $\mathbf{M}$  es la matriz de modos columna de voltajes. Considerando a (2.42) al sustituirle en (5.30) se tiene :

$$\mathbf{H} = -\mathbf{N} \exp^T(-\Gamma \ell) \mathbf{N}^{-1} \quad (5.31)$$

Se recuerda que  $\mathbf{N}$  es la matriz de modos columna de corrientes. Apelando a la ecuación (2.29) se puede expresar el exponencial de la matriz  $-\Gamma \ell$  de la siguiente forma:

$$\exp(-\Gamma \ell) = \begin{bmatrix} e^{-\gamma_1 \ell} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-\gamma_2 \ell} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{-\gamma_n \ell} \end{bmatrix}. \quad (5.32)$$

Según la *teoría de idempotentes*, si  $\mathbf{H}$  es diagonalizable entonces se puede representar como una expansión de sus idempotentes multiplicados por sus valores característicos correspondientes [24,25]. Considérese ahora que  $\mathbf{N}$  se particiona en matrices columna o vectores de modos de corriente:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2 \quad \dots \quad \mathbf{C}_n]. \quad (5.33)$$

Considérese que también  $\mathbf{N}^{-1}$  se particiona en matrices renglón o vectores transpuestos de modos de voltaje:

$$\mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_n \end{bmatrix}. \quad (5.34)$$

A partir de la identidad:

$$\mathbf{N}^{-1} \mathbf{N} = \mathbf{U} \quad (5.35)$$

donde  $\mathbf{U}$  es la matriz identidad. El producto anterior da como resultado un escalar, dado que se multiplica un renglón por una columna:

$$\mathbf{R}_r \mathbf{C}_j = \begin{cases} 0 & r \neq j \\ 1 & r = j \end{cases} \quad (5.36)$$

Ahora se efectúa el producto anterior intercambiando el orden de  $\mathbf{N}$  y  $\mathbf{N}^{-1}$ , el cual obviamente también es la matriz identidad:

$$\mathbf{N}\mathbf{N}^{-1} = \mathbf{U}, \quad (5.37)$$

El producto  $\mathbf{N}\mathbf{N}^{-1}$  se puede representar en forma particionada:

$$\mathbf{N}\mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 & \cdots & \mathbf{C}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_n \end{bmatrix}, \quad (5.38)$$

o bien, efectuando los productos de las particiones:

$$\mathbf{N}\mathbf{N}^{-1} = \mathbf{C}_1\mathbf{R}_1 + \mathbf{C}_2\mathbf{R}_2 + \cdots + \mathbf{C}_n\mathbf{R}_n = \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2 + \cdots + \mathbf{D}_m = \mathbf{U} \quad (5.39)$$

Nótese que en (5.39) se ha introducido la siguiente notación:

$$\mathbf{D}_r = \mathbf{C}_r\mathbf{R}_r \quad (5.40)$$

Las matrices de la forma  $\mathbf{C}_r\mathbf{R}_r$  son singulares y tienen la propiedad de que al multiplicarse por sí mismas o a elevarse a una potencia entera igual o mayor a dos, se obtiene la matriz misma  $\mathbf{C}_r\mathbf{R}_r$ . Las matrices con esta última propiedad se denominan idempotentes; entonces,  $\mathbf{D}_r$  es el  $r$ -ésimo idempotente del producto  $\mathbf{N}\mathbf{N}^{-1}$ . A continuación se demuestra que efectivamente las matrices  $\mathbf{C}_r\mathbf{R}_r$  son idempotentes:

$$\mathbf{D}_r\mathbf{D}_r = (\mathbf{C}_r\mathbf{R}_r)(\mathbf{C}_r\mathbf{R}_r) = \mathbf{C}_r(\mathbf{R}_r\mathbf{C}_r)\mathbf{R}_r, \quad (5.41)$$

según (5.36)  $\mathbf{R}_r\mathbf{C}_r = 1$ , entonces:

$$(\mathbf{C}_r\mathbf{R}_r)(\mathbf{C}_r\mathbf{R}_r) = \mathbf{C}_r\mathbf{R}_r = \mathbf{D}_r \quad (5.42)$$

Es conveniente también analizar las propiedades de las matrices de tipo  $\mathbf{C}_j\mathbf{R}_r$  con  $j \neq r$ , este tipo de matrices también son singulares. Si ahora, multiplicamos a  $\mathbf{C}_r\mathbf{R}_j$  por sí misma, se tiene:

$$(\mathbf{C}_j \mathbf{R}_r)(\mathbf{C}_j \mathbf{R}_r) = \mathbf{C}_j (\mathbf{R}_r \mathbf{C}_j) \mathbf{R}_r, \quad (5.43)$$

según (5.36)  $\mathbf{R}_r \mathbf{C}_j = 0$ , entonces:

$$(\mathbf{C}_j \mathbf{R}_r)(\mathbf{C}_j \mathbf{R}_r) = 0 \quad (5.44)$$

(5.44) es un nilpotente de orden dos, es decir, tiene la propiedad  $(\mathbf{C}_j \mathbf{R}_j)^m = 0$ , donde  $m$  es un entero mayor o igual a dos. De (5.39) se sigue que una matriz diagonalizable de orden  $n \times n$  tiene  $n$  idempotentes; se sigue también que la suma de todos los idempotentes es la matriz identidad.

El **teorema espectral de matrices diagonalizables** [24,25] afirma que toda matriz diagonalizable se compone de la suma de sus idempotentes multiplicados por los eigenvalores correspondientes. Sea la matriz  $\mathbf{H}$  diagonalizable, entonces, de acuerdo a lo anterior:

$$\mathbf{H} = -\mathbf{N} \exp^T(-\Gamma \ell) \mathbf{N}^{-1} = -[\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2 \quad \dots \quad \mathbf{C}_n] \begin{bmatrix} e^{-\gamma_1 \ell} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-\gamma_2 \ell} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{-\gamma_n \ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_n \end{bmatrix}, \quad (5.45)$$

$$\mathbf{H} = - \begin{bmatrix} e^{-\gamma_1 \ell} \mathbf{C}_1 & e^{-\gamma_2 \ell} \mathbf{C}_2 & \dots & e^{-\gamma_n \ell} \mathbf{C}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_n \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

$$\mathbf{H} = -e^{-\gamma_1 \ell} \mathbf{C}_1 \mathbf{R}_1 - e^{-\gamma_2 \ell} \mathbf{C}_2 \mathbf{R}_2 - \dots - e^{-\gamma_n \ell} \mathbf{C}_n \mathbf{R}_n, \quad (5.47)$$

$$\mathbf{H} = -e^{-\gamma_1 \ell} \mathbf{D}_1 - e^{-\gamma_2 \ell} \mathbf{D}_2 - \dots - e^{-\gamma_n \ell} \mathbf{D}_n. \quad (5.48)$$

De lo anterior, se tienen que (5.31) puede representarse por medio de:

$$\mathbf{H} = -\sum_{r=1}^n e^{-\gamma_r \ell} \cdot \mathbf{D}_r. \quad (5.49)$$

donde  $n$  es el número de modos del sistema y  $D_r$  es el  $r$ -ésimo idempotente de  $H$ , definido por:

$$D_r = N_r N_r^{-1} \quad (5.50)$$

Nótese que por conveniencia de notación se han introducido a  $N_r$  y  $N_r^{-1}$ , que corresponden a la  $r$ -ésima columna y el  $r$ -ésimo renglón de  $N$  y  $N^{-1}$ , respectivamente; donde  $N_r = C_r$  y  $N_r^{-1} = D_r$ . Si se sustituye en (5.49) a  $\gamma_i$  por su valor dado en (2.28) y a  $D_r$  por su valor dado por (5.50), se tiene la siguiente expresión:

$$H = -\sum_{r=1}^n e^{-\alpha_r \ell} e^{-j\beta_r \ell} N_r N_r^{-1} \quad (5.51)$$

Definiendo a:

$$I_m^{k\text{-far}} = \left[ I_m^m + Y_c V^m \right]_m, \quad (5.52)$$

como la onda de corriente que viaja del extremo opuesto al nodo  $k$ , en el dominio modal indicado por el subíndice "m". De la ecuación (5.52) se tiene:

$$I_m^m + Y_c V^m = N I_m^{k\text{-far}}; \quad (5.53)$$

el segundo subíndice  $m$  significa que es un vector en el dominio modal. La anterior ecuación tiene una representación alternativa, la cual es más conveniente para el propósito del desarrollo por idempotentes:

$$I_m^m + Y_c V^m = \sum_{r=1}^n N_r I_{m,r}^{k\text{-far}} \quad (5.54)$$

denotando por  $I_{m,r}^{k\text{-far}}$  al  $r$ -ésimo elemento de  $I_m^{k\text{-far}}$ ; ahora bien, sustituyendo (2.30) y (3.17) en (5.51) se tiene la siguiente expresión:

$$H = -\sum_{r=1}^n e^{-\alpha_r \ell} e^{-s\tau_r} N_r N_r^{-1} \quad (5.55)$$

Sustituyendo (5.51) y (5.53) en (5.28) se llega a la siguiente ecuación:

$$\mathbf{I}^k - \mathbf{Y}_c \mathbf{V}^k = -\sum_{r=1}^n \mathbf{N}_r e^{-\alpha_r \ell} e^{-s\tau_r} \mathbf{I}_{m,r}^{k-far}; \quad (5.56)$$

esta última ecuación tiene un significado físico muy importante, ya que se puede observar en la misma, que cada uno de los modos de transmisión es independiente de los otros y posee una velocidad, atenuación y retraso particular. Al transformársele a ésta ecuación al dominio del tiempo considerando que la admitancia característica  $\mathbf{Y}_c$  es constante así como los exponentiales y la matriz que contiene a los modos de propagación de las corrientes,  $\mathbf{N}$ , los cuales son calculados a una frecuencia particular, para el caso de las líneas se utiliza la frecuencia natural de la onda de propagación, los cuales se utilizan en la línea con parámetros constantes, entonces se obtiene la solución en términos de la descomposición en modos de propagación y del vector de corrientes de onda viajera de ida del extremo opuesto al nodo  $k$ .

$$\mathbf{i}^k - \mathbf{Y}_c \mathbf{v}^k = -\sum_{r=1}^n e^{-\alpha_r \ell} \mathbf{I}_{m,r}^{k-far} (t - \tau_r) \mathbf{N}_r \quad (5.57)$$

Por simetría, se tiene para el nodo  $m$  la ecuación:

$$\mathbf{i}^m - \mathbf{Y}_c \mathbf{v}^m = -\sum_{r=1}^n e^{-\alpha_r \ell} \mathbf{I}_{m,r}^{m-far} (t - \tau_r) \mathbf{N}_r \quad (5.58)$$

Cabe hacer mención que en las ecuaciones (5.57) y (5.58) no hay convoluciones, por las razones anteriormente expuestas.

Las ecuaciones (5.57) y (5.58) pueden incorporarse a un algoritmo de simulación de transitorios para el caso de línea polifásica con parámetros constantes en el dominio del tiempo. Se requiere de  $n$  buffers cada uno de los modos con una longitud propia, ya que cada modo viaja a una velocidad particular; es decir, para cada fase se tiene la intervención de las  $n$  componentes modales de la línea. Los exponentiales atenuarán a dichas ondas, incorporando las pérdidas de la línea, mientras que las  $r$ -ésimas columnas de  $\mathbf{N}$  pasarán a las componentes del dominio modal al dominio de fases.

## 5.4 Ejemplo de aplicación a las líneas polifásicas con parámetros constantes en el dominio del tiempo.

El problema principal en la simulación de transitorios que se llevan a cabo en la línea polifásica con parámetros constantes, consiste en escoger una admitancia característica adecuada, que sea real y constante con la cual se obtenga la mejor representación del transitorio. Para esto se contemplan tres opciones; considerar a la admitancia característica como la parte real de la misma, como el módulo de la misma o bien, considerar que  $Y_c$  es la admitancia transitoria de la línea o  $Y_c$  de línea ideal. La comparación de resultados en la línea utilizada con distintos valores de la admitancia característica se aprecia al simular un transitorio en la misma línea de dos circuitos trifásicos paralelos, utilizada anteriormente en la sección 5.1 Los resultados se comparan con los obtenidos con el método del dominio de la frecuencia.

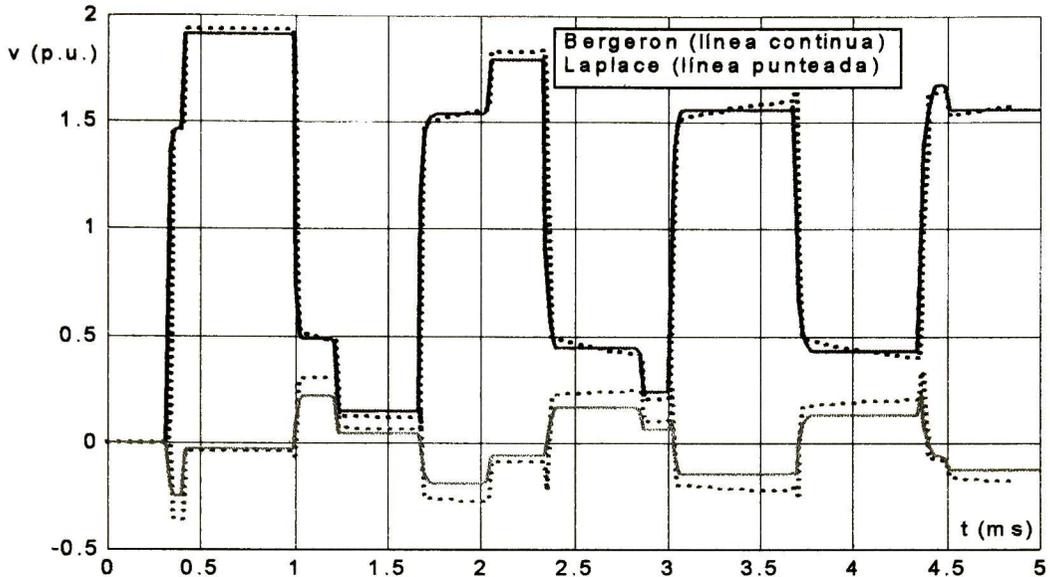
$$Y_c = \Re e\{y_c\} \quad (5.59)$$

$$Y_c = |y_c| \quad (5.60)$$

$$Y_c = \sqrt{C_g L_g^{-1}} \quad (5.61)$$

donde  $C_g$  y  $L_g$  son las matrices de capacitancias e inductancias, respectivamente. En las figuras 5.5 a 5.7 se muestran los resultados de los voltajes transitorios en los extremos receptores, en la fase A del primer circuito y en la fase C del segundo circuito, debidos a la energización de la fase A del primer circuito para los casos de utilizar la admitancia característica de acuerdo a las ecuaciones (5.59)-(5.61) respectivamente. Cada  $Y_c$  es calculada a una frecuencia particular, para esta línea se utiliza la frecuencia natural de la misma, 750 Hz.

En los resultados de la figura 5.5 revela una buena precisión del Método de Bergeron con respecto al Método de Laplace. En este último, en el cual se toma la admitancia característica como compleja pero constante, mientras que en el Método de Bergeron, los resultados se obtuvieron considerando la admitancia característica de la forma indicada en la ecuación  $Y_c = \Re e\{y_c\}$ .

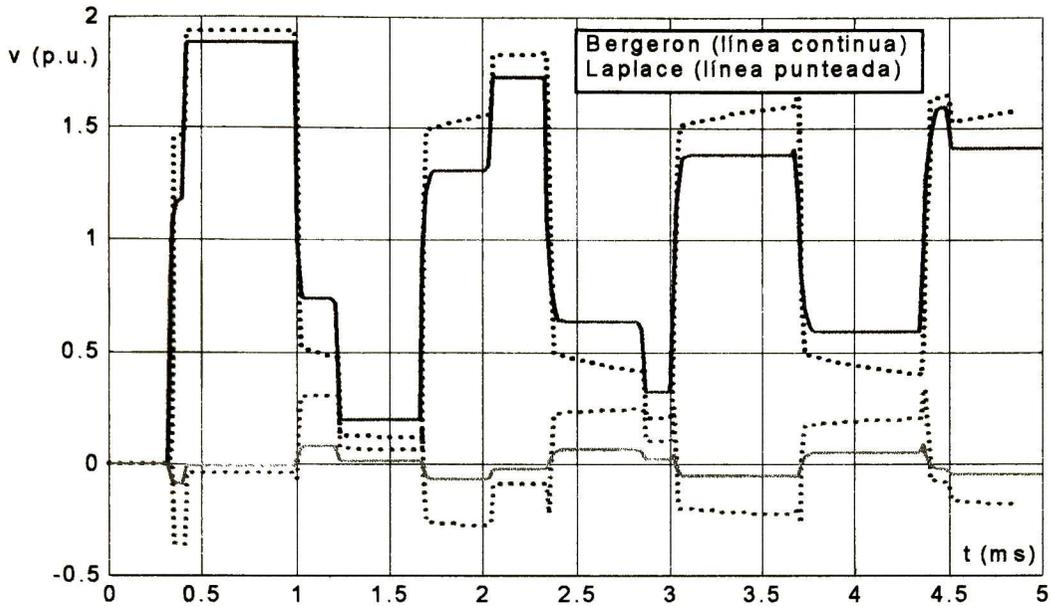


**Figura No.5.5** Voltajes transitorios en los nodos receptores de línea polifásica de la figura 5.2, utilizando la ecuación  $Y_c = \Re e\{y_c\}$ .

Las velocidades, constantes de atenuación y de fase para los modos de la línea a la frecuencia de 750 Hz se enlistan en la Tabla III:

Tabla III Velocidades, constantes de atenuación y de fase de los modos de línea.			
Modo i	$v_i$ (m/s)	$\alpha_i$ (nepers/m)	$\beta_i$ (radianes/m)
1	2.4394 e+8	0.1345e-5	0.1932e-4
2	2.9573e+8	0.0109e-5	0.1593e-4
3	2.9680e+8	0.0185e-5	0.1588e-4
4	2.9769 e+8	0.0129e-5	0.1583e-4
5	2.9753e+8	0.0136e-5	0.1584e-4
6	2.9756e+8	0.0137e-5	0.1584e-4

La matriz de admitancias resultante es diagonal con un valor de 0.0024 siemens para cada uno de los elementos de la misma. En tanto que al utilizar la ecuación  $Y_c = |y_c|$  se tiene una mayor atenuación, respecto a los resultados de la figura 5.5 y el Método de Laplace, los resultados se visualizan en la figura 5.6.

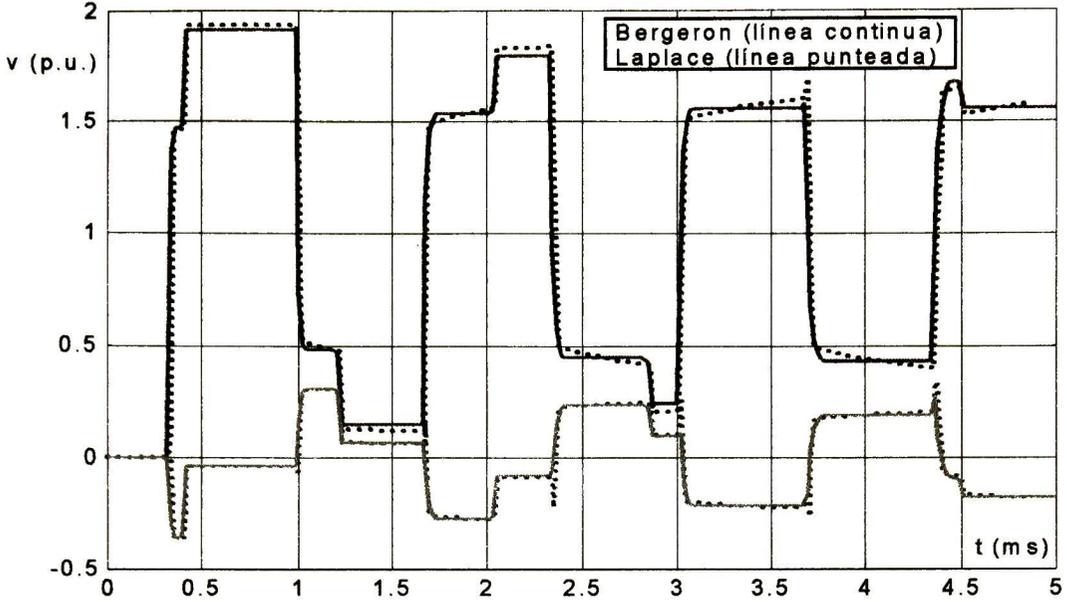


**Figura No.5.6** Voltajes transitorios en los nodos receptores de línea polifásica de la figura 5.2, utilizando la ecuación  $Y_c = |y_c|$ .

Al utilizar las ecuaciones  $Y_c = |y_c|$  o  $Y_c = \sqrt{C_g L_g^{-1}}$  se obtiene los mismos valores de las velocidades, constantes de atenuación y de fase para los modos de la línea que los presentados en la Tabla III, pero la admitancia característica tiene un valor diferente, ya que para el caso de utilizar la ecuación  $Y_c = |y_c|$ ,  $Y_c$  es una matriz llena con elementos reales como se puede apreciar en la expresión siguiente:

$$Y_c = \begin{bmatrix} 0.0024 & 0.0014 & 0.0008 & 0.0011 & 0.0007 & 0.0006 \\ 0.0014 & 0.0024 & 0.0014 & 0.0007 & 0.0006 & 0.0007 \\ 0.0008 & 0.0014 & 0.0024 & 0.0006 & 0.0007 & 0.0011 \\ 0.0011 & 0.0007 & 0.0006 & 0.0024 & 0.0014 & 0.0008 \\ 0.0007 & 0.0006 & 0.0007 & 0.0014 & 0.0024 & 0.0014 \\ 0.0006 & 0.0007 & 0.0011 & 0.0008 & 0.0014 & 0.0024 \end{bmatrix},$$

Por medio de la ecuación  $Y_c = \sqrt{C_g L_g^{-1}}$  se obtienen buenos resultados en la simulación del transitorio respecto al Método de Laplace, los resultados se visualizan en la figura 5.7.



**Figura No.5.7** Voltajes transitorios en los nodos receptores de línea polifásica

de la figura 5.2, utilizando la ecuación  $Y_c = \sqrt{C_g L_g^{-1}}$

La admitancia característica tiene un valor de la forma siguiente:

$$Y_c = \begin{bmatrix} 0.0024 & -0.0004 & -0.0002 & -0.0002 & -0.0001 & -0.0001 \\ -0.0004 & 0.0024 & -0.0004 & -0.0001 & -0.0001 & -0.0001 \\ -0.0002 & -0.0004 & 0.0024 & -0.0001 & -0.0001 & -0.0002 \\ -0.0002 & -0.0001 & -0.0001 & 0.0024 & -0.0004 & -0.0002 \\ -0.0001 & -0.0001 & -0.0001 & -0.0004 & 0.0024 & -0.0004 \\ -0.0001 & -0.0001 & -0.0002 & -0.0002 & -0.0004 & 0.0024 \end{bmatrix}$$

Se utilizaron seis buffers de historia de las ondas viajeras con una longitud de 22 historias almacenadas para el primer modo y 19 historias para el resto de los modos tanto para los resultados de la figura 5.5 como los de las figuras 5.6 y 5.7. El modo más lento es el primero esto se debe al efecto del retorno por tierra que si es considerado para el cálculo de las constantes de propagación, y por ende de las constantes de atenuación y de fase, de la matriz de transformación N. Es importante señalar que para mejores resultados en cuanto la atenuación de las ondas de voltajes obtenidas por Bergeron, se puede utilizar una velocidad promedio para todos los modos, considerando que la misma es resultado de sumar velocidad del modo más rápido al modo más lento y dividirlo entre dos. De ahí la necesidad de interpolar entre las historias. Se utilizaron diferentes métodos para obtener velocidades promedio con el fin de optimizar el tiempo de computo; utilizando el promedio de los cinco modos más rápidos y aplicarlo cada uno de estos modos.

Con el fin de optar por la ecuación  $Y_c = \Re\{y_c\}$  o  $Y_c = \sqrt{C_g L_g^{-1}}$  para su utilización en la simulación de transitorios, se realiza una nueva simulación para ver el comportamiento de las mismas, se usa la misma línea de la figura 5.2 pero su longitud ahora es de 1000km en lugar de los 100km; los resultados de esta simulación se observan en las figuras 5.8a, b y c.

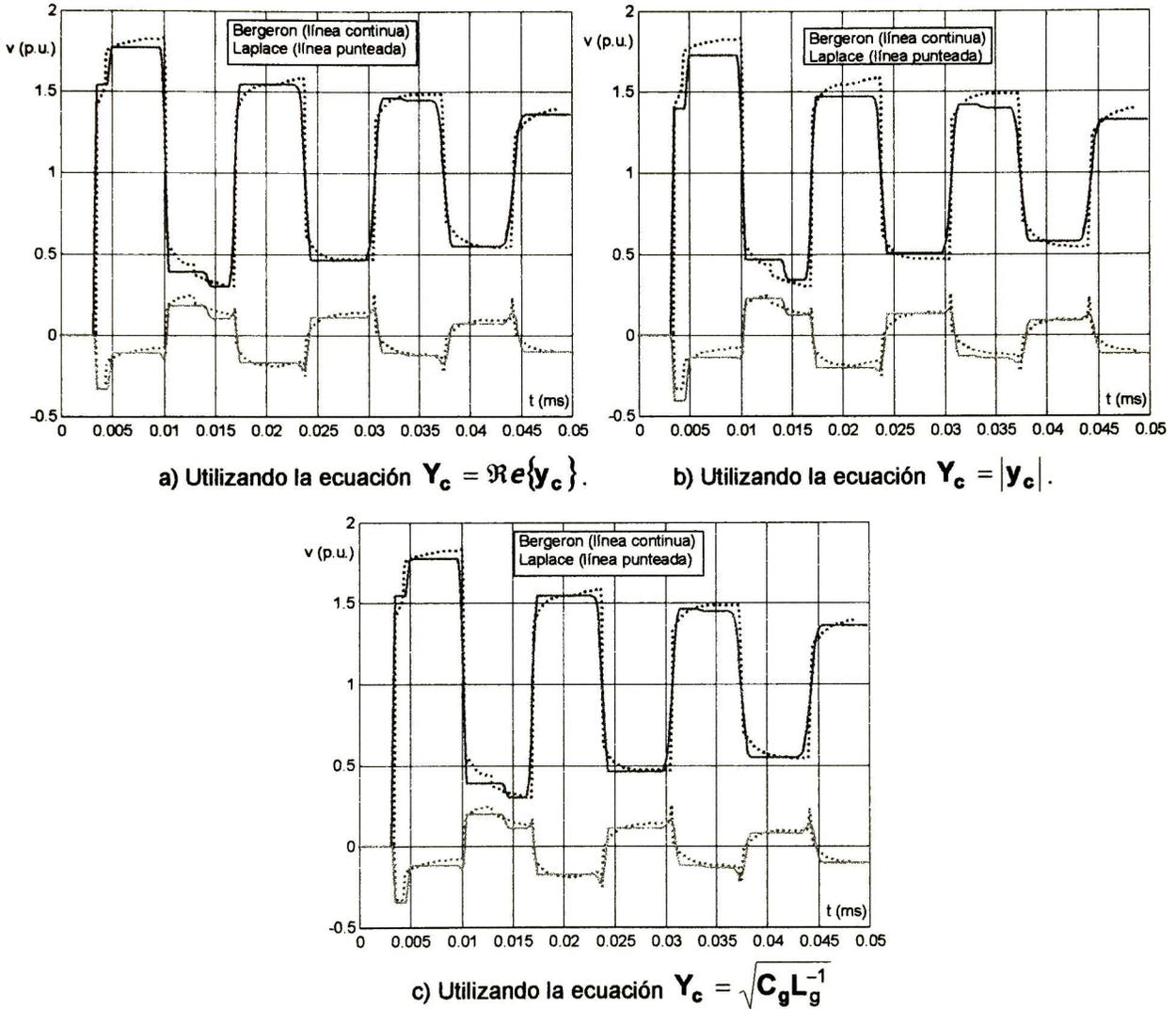


Figura No.5.8 Voltajes transitorios en los nodos receptores de línea polifásica de la figura 5.2.

Las figuras 5.8a y c revelan que la precisión es similar con respecto a la utilización de (5.59) y (5.61) en el cálculo de la admitancia característica para la simulación de transitorios en las líneas polifásicas; en tanto que la figura 5.8b corrobora que la ecuación (5.60) no es una buena opción para el cálculo de  $Y_c$ .

---

---

## CAPÍTULO 6.

# CONCLUSIONES.

---

---

### 6.1 Conclusiones generales.

Se ha desarrollado un método para simular y analizar transitorios electromagnéticos en líneas de transmisión polifásicas con parámetros constantes modeladas por esquemas basados en el Método de Bergeron; de forma que se pone de relieve mediante los resultados obtenidos, la importancia de dichos esquemas en lo que respecta a la precisión y rapidez de computo. Se optó por parámetros sin dependencia de la frecuencia ya que las líneas con parámetros constantes para fines prácticos son ampliamente utilizadas obteniéndose resultados con una precisión aceptable [25]. Este método ha sido basado en la teoría de idempotentes, con lo cual la extensión del caso monofásico al polifásico es mucho más satisfactoria; esto desde el punto de vista matemático y en comparación con los planteamientos tradicionales.

Se desarrolló e implementó del Método de la Transformada Numérica de Laplace con el fin de validar los resultados obtenidos en los métodos en el dominio del tiempo. Aunque esta tesis se aboca a la representación de la línea con parámetros independientes de la frecuencia, la extensión al caso más general puede realizarse y, de hecho, éste ya ha sido empleado con ese fin en las referencias 24, 25, 35 y 36. Finalmente, se han generado recomendaciones para la representación de la línea polifásica para estudios transitorios considerando parámetros independientes de la frecuencia. Específicamente la matriz de admitancias, que por lo general es compleja, requiere representarse en forma real para el análisis en el dominio del tiempo. De las tres posibilidades, desechar la componente imaginaria, obtener valor absoluto de sus elementos y utilizar la admitancia transitoria, se ha recomendado la última opción.

La teoría de las matrices idempotentes se auxilió de las transformaciones modales con la finalidad de facilitar el desacoplo de las ondas viajeras, ya que al tener cada modo de onda viajera una velocidad constante se facilita el almacenamiento específico de las historias, contrariamente al dominio de fases, en donde todas las fases interactúan; de ahí la importancia de buscar la manera más sencilla de modelar los efectos de dichos acoplamientos.

## 6.2 Aportaciones.

A continuación se hace un recuento de la principales aportaciones de esta tesis:

- 1) Se desarrollaron algoritmos para simular transitorios electromagnéticos en el dominio del tiempo en líneas de transmisión polifásicas; éstos basados en modelos de ondas viajeras por medio del Método de Bergeron y apoyándose en la teoría de idempotentes.
- 2) Se dan recomendaciones para representar las líneas polifásicas mediante modelos con parámetros independientes de la frecuencia, específicamente en lo que respecta a  $Y_c$ ,  $\Delta t$ , formación de las historias nodales, memorias de historia y algoritmos de interpolación entre las historias.
- 3) Se desarrollaron modelos para línea polifásica en el dominio del tiempo más claros y con un sustento matemático más formal que el enfoque tradicional, el cual se basa en las matrices de transformación modal para líneas ideales y utiliza resistencias concentradas para incluir las pérdidas.
- 4) Se aplicaron memorias circulares matriciales para el almacenamiento de las historias de la línea polifásica, explicándose las propiedades de estas memorias en cuanto a su longitud y a los procesos de interpolación entre sus elementos.

### 6.3 Trabajos futuros.

En el presente trabajo se consideró la línea de transmisión como un elemento con parámetros distribuidos, homogéneos y constantes a lo largo de toda su longitud; pero, para la simulación de algunos fenómenos es deseable considerar a los parámetros con dependencia de la frecuencia y para ello es deseable extender la aplicación de la teoría de las matrices idempotentes para este caso. En el apéndice A se exponen las ecuaciones que modelan los parámetros geométricos y eléctricos de la línea así como la función de propagación o función de peso, considerando al conductor y a la tierra como medios conductores no ideales y se toma en cuenta la dependencia de la frecuencia en éstos. En el apéndice B se esboza la forma de como sintetizar dichos parámetros presentándose algunos métodos, ecuaciones y gráficas, con el fin de sugerir un camino posible en la implementación algorítmica de la simulación de transitorios electromagnéticos en las líneas monofásicas con parámetros dependientes de la frecuencia. Para la implementación de la dependencia de la frecuencia en las líneas polifásicas solo se prosigue a sintetizar cada uno de los elementos de las matrices  $Y_c$  y de  $A$  y aplicar los algoritmos de convolución recursiva a los esquemas resultantes de forma similar a como se explica en el apéndice B. Así también es recomendable extender el método desarrollado en esta tesis a los análisis de cables subterráneos y submarinos, a los sistemas de transmisión mixtos con líneas de transmisión con parte de su longitud aérea y parte subterránea. Otro aspecto interesante es explorar la aplicabilidad de los modelos de onda viajera para líneas no uniformes; ya que para algunos fenómenos como el flameo inverso se tiene que las torres de transmisión se pueden modelar como líneas no homogéneas, y sus parámetros varían con la longitud. Para esto el Método de Bergeron puede utilizarse con la consideración de que cada tramo de la torre puede ser modelado como una gran cantidad de líneas pequeñas con parámetros diferentes en cada una de ellas. Así se obtiene una torre modelada por medio de líneas de transmisión acopladas; cada una de las cuales tiene sus propias características, acordes con lo utilizado por diversos métodos en el tratamiento de dicho problema. De esta manera se obtiene la variación de los parámetros a lo largo de la longitud de la torre. Es importante señalar que si se modela la línea por el Método de Bergeron con discretización a lo largo de la longitud, se tiene oportunidad de incluir elementos no lineales en la misma, tales como los capacitores, con los cuales se puede incluir el efecto corona en las líneas de transmisión.

# APÉNDICE A.

## PÁRAMETROS GEOMÉTRICOS Y ELÉCTRICOS DE LÍNEA MONOFÁSICA.

El presente apéndice tiene la finalidad de presentar las ecuaciones de los parámetros geométricos y eléctricos de la línea de transmisión monofásica, para una rápida referencia de la dependencia de la frecuencia de los mismos, y poner de relieve lo explicado en la sección 3.1.4.

Glosario de términos:

- $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7}$  (H/m), permeabilidad del aire (H/m),
- $\epsilon_0 = 1 \cdot 10^{-9}/(36\pi)$ , permitividad del aire (F/m),
- $h$  = altura del conductor al plano de tierra (m),
- $r$  = radio del conductor (m)
- $\rho_c$  = resistividad del conductor ( $\Omega$ -m),
- $\rho_t$  = resistividad del terreno ( $\Omega$ -m),
- $\sigma$  = conductividad del aire ( $1/(\Omega$ -m)),
- $\omega = 2\pi f$ , frecuencia angular (rad/seg)
- $f$  = frecuencia (Hz),
- $l$  = longitud de la línea de transmisión (m).

De la definición de la admitancia característica y de la función de peso, las cuales se representan por [38]:

$$Y_c(\omega) = \sqrt{\frac{Y(\omega)}{Z(\omega)}} \quad (\text{A-1})$$

$$A(\omega) = -e^{-\gamma(\omega)l} \quad (\text{A-2})$$

donde:

$$\gamma(\omega) = \sqrt{Z(\omega)Y(\omega)}, \quad (\text{A-3})$$

es la constante de propagación de la línea y

$$Z(\omega) = R(\omega) + j\omega L(\omega); \quad (\text{A-4})$$

es la impedancia serie de la línea por unidad de longitud. Si se define  $S = j\omega$ , entonces la resistencia y la inductancia de (A-4) están conformadas por [37,38]:

$$Z = sL + R, \quad (\text{A-5})$$

$$Z = sL_g + sL_t + Z_{\text{cnd}}, \quad (\text{A-6})$$

$$Z = Z_g + Z_t + Z_{\text{cnd}}, \quad (\text{A-7})$$

$$L_g = \frac{\mu}{2\pi} \text{Ln}\left(\frac{h-r}{r}\right), \quad (\text{A-8})$$

$$L_t = \frac{\mu}{2\pi} \text{Ln}\left(1 + \frac{p_t}{h}\right), \quad (\text{A-9})$$

$$Z_{\text{cnd}} = \sqrt{R_{\text{cd}}^2 + Z_{\text{af}}^2} \quad (\text{A-10})$$

$$R_{\text{cd}} = \frac{\rho_c}{\pi r^2} \quad (\text{A-11})$$

$$Z_{\text{af}} = \frac{\rho_c}{2\pi r p_c} \quad (\text{A-12})$$

$$p_t = \sqrt{\frac{\rho_t}{s\mu}} \quad (\text{A-13})$$

$$p_c = \sqrt{\frac{\rho_c}{s\mu}} \quad (\text{A-14})$$

En forma similar:

$$Y(\omega) = G(\omega) + j\omega C(\omega) \quad (\text{A-15})$$

es la admitancia paralelo de la línea por unidad de longitud, pero como  $S = j\omega$ , entonces la conductancia y la capacitancia de (A-15) están conformadas por:

$$Y = G + sC \quad (\text{A-16})$$

$$Y = G + Y_g \quad (\text{A-17})$$

donde C es la capacitancia y G es la conductancia:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\text{Ln}\left(\frac{2h-r}{r}\right)} \quad (\text{A-18})$$

y como la conductancia del medio dieléctrico que separa a los conductores se puede representar por:

$$G = \frac{\sigma C}{\epsilon_0} \quad (\text{A-19})$$

La conductancia se puede obtener de la capacitancia mediante la relación [37]:

$$G = \frac{2\pi\sigma}{\text{Ln}\left(\frac{2h-r}{r}\right)} \quad (\text{A-20})$$

las ecuaciones (A-1) a (A-20) ayudan a visualizar la naturaleza de los parámetros de la línea de transmisión monofásica con parámetros dependientes de la frecuencia. Mediante una pequeña inspección se pone de relieve que es "más sencillo" el modelar a (A-1) y (A-2) a través de funciones racionales, en el caso de que estas funciones se utilicen en algoritmos de convolución en el dominio del tiempo, con los datos de la línea específica que se este analizando.

## APÉNDICE B.

### LÍNEAS DE TRANSMISIÓN CON PARÁMETROS DEPENDIENTES DE LA FRECUENCIA.

En este apéndice se esboza la inclusión de la dependencia de la frecuencia a los parámetros de la línea monofásica con el fin de sugerir una manera de extender los algoritmos desarrollados en la tesis.

#### B.1 Síntesis de $Y_c$ y de $A = -\exp(-\gamma\ell)$ .

La síntesis de la admitancia característica y la función de peso se hace por medio funciones racionales: Estas funciones son más rápidas en el proceso de convolución ya que se obtienen exponenciales en el dominio del tiempo y con ello se puede aplicar las técnicas de la convolución recursiva, las cuales se verán en la sección B.2. La aproximación racional de una función  $F(s)$  sobre una pequeña porción de su dominio  $[a,b]$ , es el cociente de dos polinomios  $N(s)$  y  $D(s)$  de grados  $m$  y  $n$ , respectivamente.  $F(s)$  se denota por:

$$F(s) \approx F_a(s) = \frac{N(s)}{D(s)}, \quad (\text{B.1})$$

donde  $F_a(s)$  es la función aproximada. El objetivo principal de la aproximación es hacer lo más pequeño posible el error máximo entre la función original  $F(s)$  y la función aproximada,  $F_a(s)$ . Además  $n$  debe ser mayor o igual a  $m$ , esto con el fin de que la fracción sea propia:

$$F_a(s) = \frac{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ms^m}{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ns^n} \quad (\text{B.2})$$

o bien

$$F_a(s) = k_\infty + \frac{k_1}{s+p_1} + \frac{k_2}{s+p_2} + \dots + \frac{k_n}{s+p_n} \quad (\text{B.3})$$

la cual al ser llevada al dominio del tiempo se representa por:

$$f_a(t) = k_\infty \delta + k_1 e^{-p_1 t} + k_2 e^{-p_2 t} + \dots + k_n e^{-p_n t}; \quad (\text{B.4})$$

donde las  $k_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) son los residuos y las  $p_i$  son los polos de la función aproximada; de (B.4) se observa la conveniencia de aproximar a una función irracional por otra racional, acelerando el proceso de computo en la solución de transitorios en líneas. Se pueden utilizar varios métodos por ejemplo: Bode, Padé, Mínimos cuadrados, Taylor, Chebyshev, etc. [20].

Las gráficas de Bode o diagramas logarítmicos de una función  $F(s)$ , se construyen mediante líneas rectas que son asintóticas a la gráfica real. Sus características principales son:

- 1.- La magnitud de  $F(s)$  se expresa en decibeles, dB, y debido a esto los factores de producto y división se vuelven adiciones y sustracciones, respectivamente.
- 2.- Las gráficas de magnitud se aproximan mediante segmentos de líneas rectas, lo cual permite el simple bosquejo de los diagramas sin cálculos complejos.

Considérese la representación alternativa de la ecuación (B.2) como:

$$F_a(s) = k_\infty \frac{(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} e^{-s\tau_a} \quad (\text{B.5})$$

donde  $k_\infty$  y  $\tau_a$  son reales, las  $p_i$  y  $z_i$  son los polos y ceros, respectivamente y pueden ser números complejos. Para cálculos de computo se prefiere la representación de (B.5) de la siguiente manera:

$$F_a(s) = k_\infty \frac{(1 + sT_1)(1 + sT_2) \cdots (1 + sT_m)}{(1 + sT_{a1})(1 + sT_{a2}) \cdots (1 + sT_{an})} e^{-s\tau_a} \quad (\text{B.6})$$

Para la aproximación de  $Y_c$  conviene tomar  $\tau_a$  como cero, ya que esta función no contiene retraso alguno, y para la función de peso si se hace necesario un valor positivo. Estos diagramas pueden contener solo cinco tipos de factores simples:

- 1.- Factor constante  $k_\infty$ .
- 2.- Polos o ceros en el origen.
- 3.- Polos o ceros en  $s = -1/T$  de orden  $q$ :  $(1+sT)^{+/-q}$ .
- 4.- Polos y ceros complejos de orden  $r$ :  $(1+2s\zeta/T-s^2/T^2)^{+/-r}$
- 5.- El retardo puro  $e^{-s\tau_a}$ , donde  $\tau_a$ ,  $p$ ,  $q$  y  $r$  son positivos.

En el caso de  $Y_c$ ,  $\tau_a$  es igual a 0, es decir no hay retardo y  $n \geq m$ , y para la función de peso  $A$ ,  $\tau_a$  es diferente de cero y  $n > m$  [20].

El método de Padé es una aproximación polinomial por funciones racionales. De hecho, cuando  $n = 0$  y  $m = r$ , la aproximación de Padé es simplemente el  $r$ -ésimo polinomio de Maclaurin [39,40]. Se requiere que  $F(s)$  y sus derivadas sean continuas en  $s = 0$ . Hay dos razones para la elección arbitraria de  $s = 0$ . Primero, esto hace fáciles las manipulaciones algebraicas. Segundo, un cambio de variable puede utilizarse para cambiar los cálculos sobre un intervalo que contiene al cero. Los polinomios del numerador y denominador son:

$$N(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ms^m \quad (\text{B.7})$$

$$D(s) = b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ns^n \quad (\text{B.8})$$

Y se construyen de tal forma que  $F(s)$  y  $F_a(s)$  dadas en  $s = 0$  y sus derivadas sobre el grado  $r = m+n$  acordado sean continuas. Para que  $F(s)$  este definida en  $s = 0$  se requiere que  $b_0 \neq 0$ . En el caso de que se normalice (B.2) con respecto a  $b_0$ , la aproximación toma la forma siguiente:

$$F_a(s) = \frac{c_0 + c_1s + c_2s^2 + \dots + c_ms^m}{1 + d_1s + d_2s^2 + \dots + d_ns^n} \quad (\text{B.9})$$

donde  $c_i = a_i/b_0$  y  $d_j = b_j/b_0$ . En consecuencia se tienen  $r+1$  constantes a determinar. Despejando del lado derecho de la ecuación (B.9) al numerador del cociente y sustituyendo a  $F(s)$  por  $F_a(s)$  se llega a:

$$\left[1 + d_1s + d_2s^2 + \dots + d_ns^n\right] \cdot F(s) = c_0 + c_1s + c_2s^2 + \dots + c_ms^m; \quad (\text{B.10})$$

o bien,

$$F(s) = c_0 + c_1s + c_2s^2 + \dots + c_ms^m - d_1sF(s) - d_2s^2F(s) - \dots - d_ns^nF(s). \quad (\text{B.11})$$

Si la variable  $s$  toma un valor en particular, se tendrá una ecuación lineal con  $r+1$  incógnitas:  $d_1, d_2, \dots, d_n, c_0, c_1, \dots, c_m$ . Es obvio que para encontrar el valor de las constantes, únicamente se requiere de evaluar (B.11) en  $r+1$  frecuencias; es decir, para  $r+1$  valores de  $s$ ; obteniéndose el sistema de ecuaciones lineales simultáneas:

$$\begin{bmatrix} 1 & s_1 & \cdots & s_1^m & -F(s_1)s_1 & \cdots & -F(s_1)s_1^n \\ 1 & s_2 & \cdots & s_2^m & -F(s_2)s_2 & \cdots & -F(s_2)s_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & s_r & \cdots & s_r^m & -F(s_r)s_r & \cdots & -F(s_r)s_r^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \\ d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(s_1) \\ F(s_2) \\ \vdots \\ F(s_m) \\ F(s_{m+1}) \\ \vdots \\ F(s_r) \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

El sistema (B.12) es de la forma,  $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{w}$ ; si  $m = n$ , y su solución es:

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{w} \quad (\text{B.13})$$

pero, si  $m$  es diferente a  $n$  se tiene un sistema sobredimensionado el cual se resuelve por:

$$\mathbf{x} = [\mathbf{B}^T\mathbf{B}]^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{w} \quad (\text{B.14})$$

Las figuras B.1 a B.4 muestran las aproximaciones de  $Y_c$  y las figuras B.5 a B.8 muestran las aproximaciones de  $A$  y sus errores relativos porcentuales. Estas corresponden a la línea descrita en la sección 4.4. Todos los polos presentan parte real negativa, y por consecuencia la función aproximada es estable. Esto se logra aplicando el criterio de que el polinomio del denominador de la función aproximada sea un **Polinomio de Hurwitz** [41]. Si se obtuvieran polos conjugados con parte real positiva, la función aproximada es oscilatoria o marginalmente estable [42]; pero esto no es tan grave, ya se trata de una función senoidal. Se observaron las siguientes características para el mejoramiento de los métodos analizados:

- Tomar más frecuencias en el muestreo.
- Sobredimensionar la matriz  $\mathbf{B}$ , renglones  $\gg$  columnas.
- Obtener frecuencias de muestreo "idóneas".
- Obtener funciones que ponderen las funciones aproximadas.

Lo anterior es recomendable para cualquier método de aproximación, pero en los casos de los incisos a) y b) conllevan a un aumento en el tiempo de computo requerido; así que, sólo con los dos restantes incisos se debe desarrollar el algoritmo deseado. Para obtener frecuencias de muestreo "idóneas", se escogieron éstas espaciadas de forma logarítmica (de base 10) por medio del comando de MATLAB, *logspace*. Para la obtención de funciones que ponderen las funciones aproximadas se observaron las condiciones iniciales y finales de las funciones a aproximar para obtener dichas funciones.

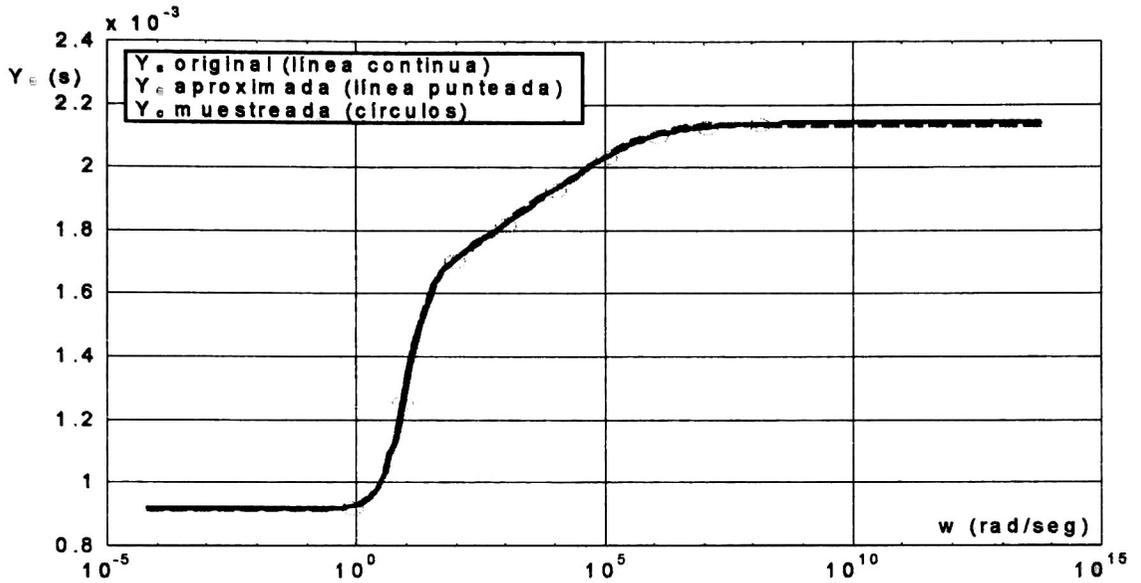


Figura No. B.1 Aproximación de la admitancia característica,  $Y_c$ , para  $m = n$ .

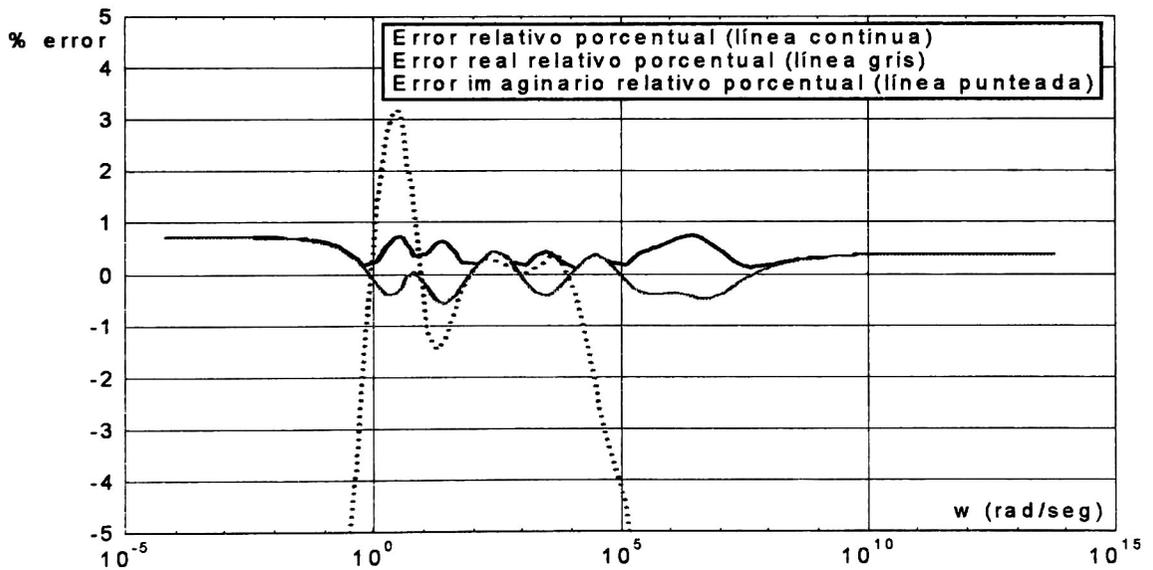


Figura No. B.2 Error relativo porcentual de la aproximación de la admitancia característica,  $Y_c$ .

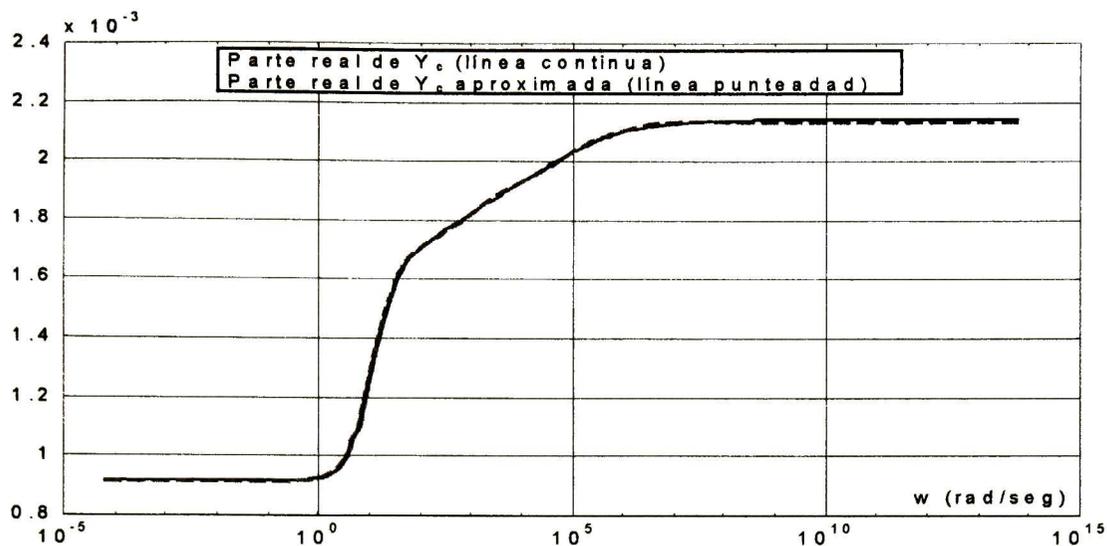


Figura No. B.3 Parte real de  $Y_c$  y de  $Y_{ca}$ .

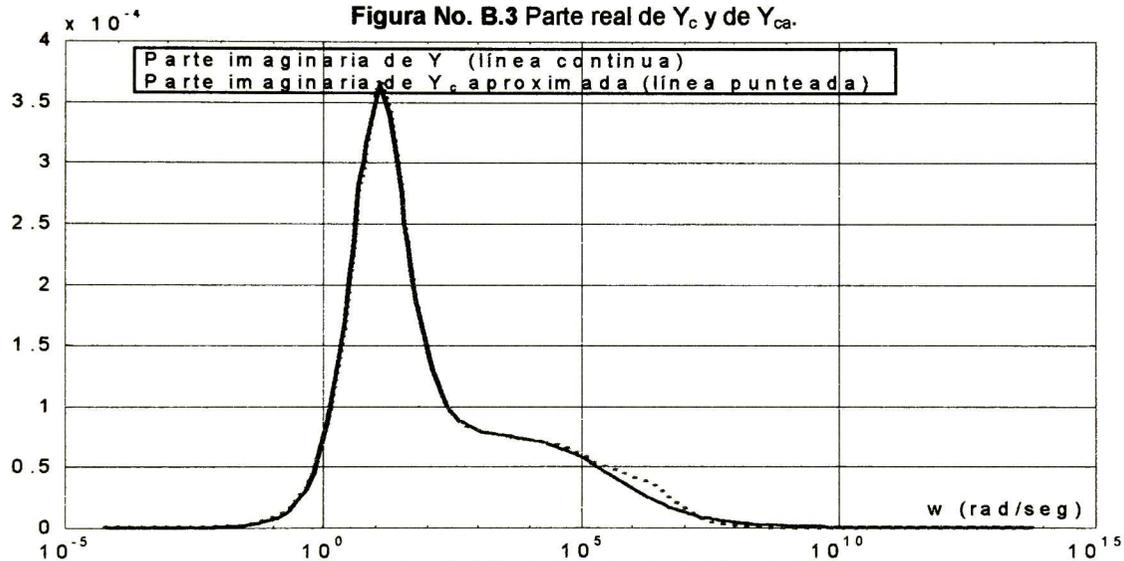


Figura No. B.4 Parte imaginaria de  $Y_c$  y de  $Y_{ca}$ .

Para esta aproximación se obtienen los residuos y polos que se presentan en la Tabla IV:

Tabla IV			
Residuos y polos de la aproximación de $Y_c$			
i	$k_{\infty}$	$k_i$ (residuos)	$p_i$ (polos)
1	0.0021	-1.8062e+2 -1.1635e+2i	-4.2147e+6 +2.0478e+6i
2		-4.5984 +13.5003i	-1.1437e+4 +7.6957e+4i
3		-0.0103 + 0.2233i	-1.0383e+2 +1.0560e+3i
4		-0.0087 + 0.0023i	-10.9453 + 2.0056i
5		1.3156e-22 +8.0862e-23i	-2.1690e-17 -8.8644e-18i

El error relativo porcentual máximo es de 0.7368% y el grado de la aproximación es igual a 10; en la tabla anterior se aprecia que los polos de la función aproximada poseen parte real negativa, garantizándose con ello que la función se estable.

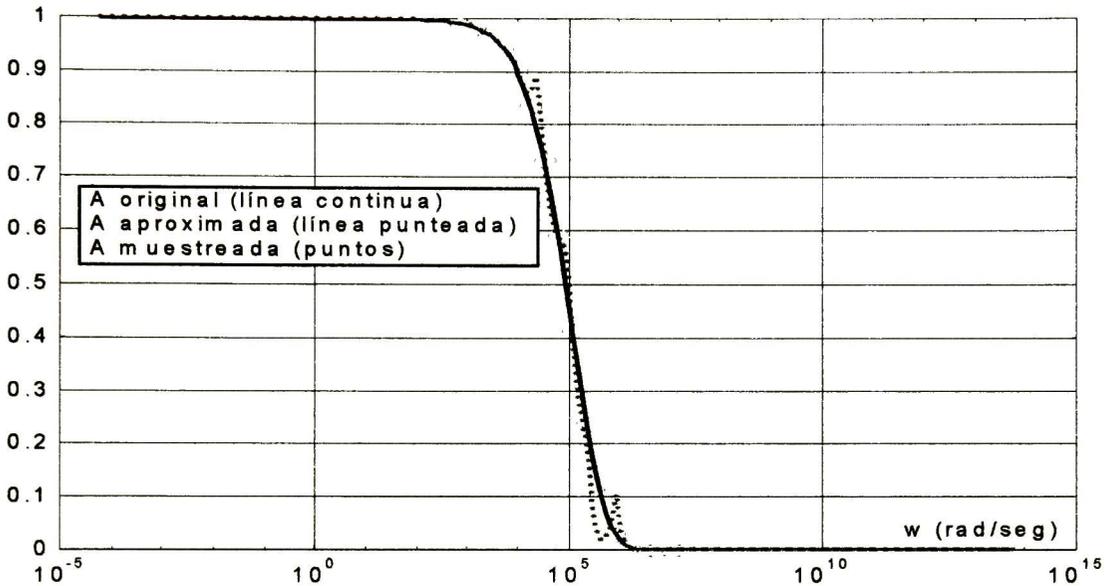


Figura No. B.5 Aproximación de la función de peso, A.

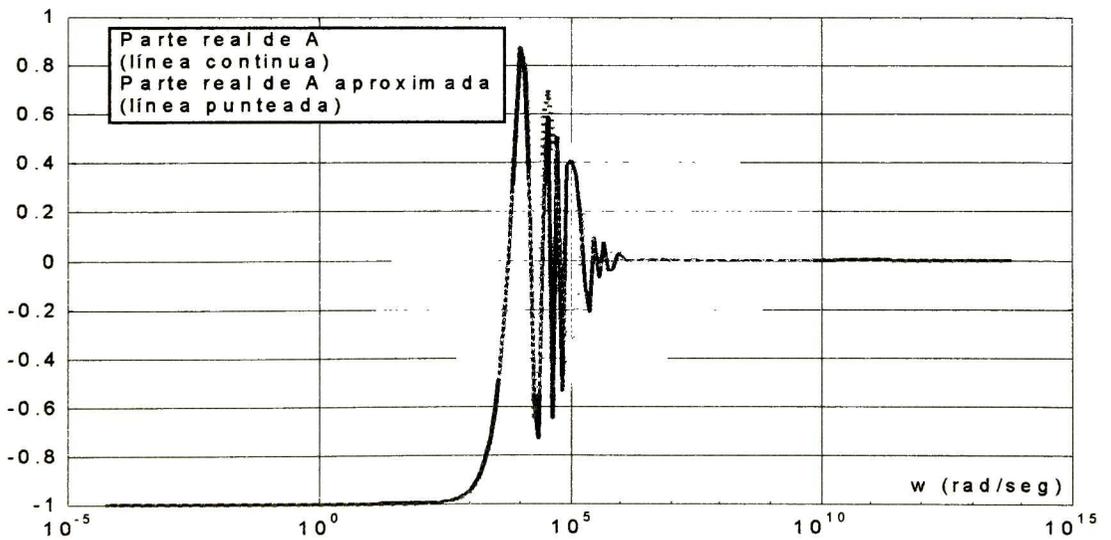


Figura No. B.6 Parte real de A y de A<sub>a</sub>.

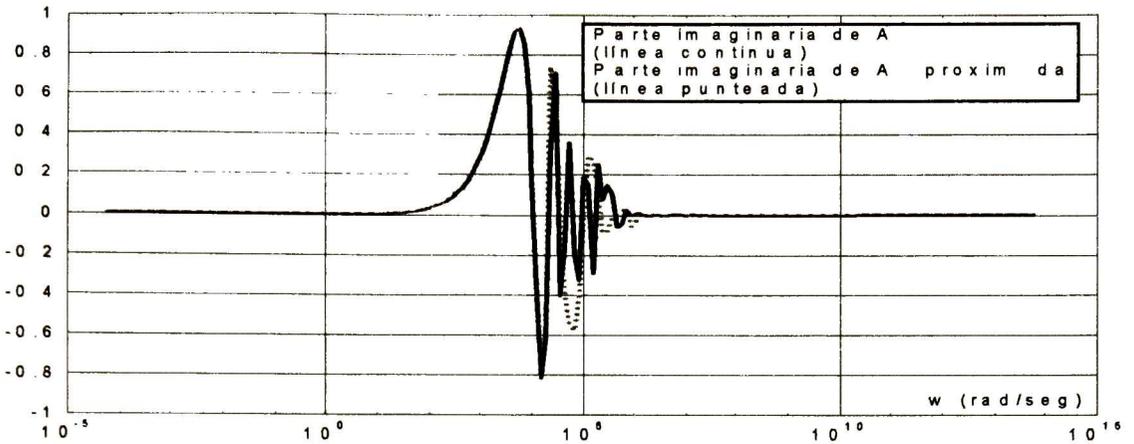


Figura No. B.7 Parte imaginaria de A y de A aproximada.

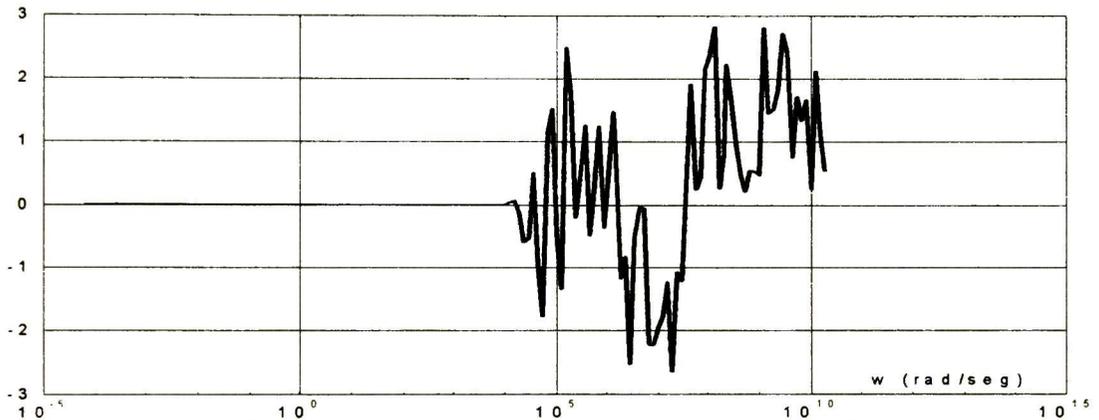


Figura No. B.8 Diferencia de fase entre A y A aproximada.

Para esta aproximación se obtienen los residuos y polos que se presentan en la Tabla V:

Tabla V			
Residuos y polos de la aproximación de A			
i	$k_{\infty}$	$k_i$ (residuos)	$p_i$ (polos)
1	0	$2.9450e+3 - 4.8230e+4i$	$-5.6758e+4 + 1.8691e+5i$
2		$2.9450e+3 + 4.8230e+4i$	$-5.6758e+4 - 1.8691e+5i$
3		$1.1132e+3 - 2.3097e+4i$	$-8.6775e+3 + 1.5652e+4i$
4		$1.1132e+3 + 2.3097e+4i$	$-8.6775e+3 + 1.5652e+4i$
5		$-3.6763e+4 + 2.3788e-8i$	$-9.5404e+003$
6		$9.0427e-24 - 1.1442e-35i$	$-8.5767e-024$

En la tabla anterior se aprecia que los polos de la función aproximada poseen parte real negativa, garantizándose con ello que la función se estable.

## B.2 Convolución recursiva.

Cuando la síntesis de una función en el dominio del tiempo es una función racional propia con polos con parte real negativa, entonces su expresión en el dominio del tiempo es una suma de funciones exponenciales estables que contienen constantes; por ejemplo para el caso de  $y_{ca}(t)$  y  $a_a(t)$  son de la forma (B.14):

$$y_{ca}(t) = k_{\infty} \delta(t) + \sum_{r=1}^n k_r e^{-p_r t} \quad (\text{B.15})$$

y

$$a_a(t) = \sum_{j=1}^m k_j e^{-q_j(t-\tau_a)} \quad (\text{B.16})$$

Entonces la convolución de  $y_c(t)$  con el voltaje  $v(t)$  puede realizarse de forma recursiva [21,22] y se representa por medio de:

$$y_c(t) * v(t) \approx c(t) = y_{ca} v(t) + i_{hc}(t) \quad (\text{B.17})$$

donde  $i_{hc}(t)$  es la corriente de historia evaluada con  $c(t-\Delta t)$ ,  $v(t-\Delta t)$  e  $y_{ca}$  es real y constante; al aplicarse la regla trapezoidal para la ecuación (B.17) se llega a:

$$y_{ca} = k_{\infty} + \sum_{r=1}^n g_r ; \quad (\text{B.18})$$

similarmente para  $i_{hc}(t)$  se tiene:

$$i_{hc} = \sum_{r=1}^n [h_r c_r(t - \Delta t) + g_r v(t - \Delta t)], \quad (\text{B.19})$$

donde:

$$h_r = \frac{2 - p_r \Delta t}{2 + p_r \Delta t} \quad (\text{B.20})$$

y

$$g_r = \frac{k_r \Delta t}{2 + p_r \Delta t} \quad (\text{B.21})$$

De manera similar,  $a(t)$  al ser sintetizada puede convolucionarse con la onda viajera de corriente del nodo opuesto  $i_{far}(t)$ , dando como resultado:

$$a(t) * i_{far}(t) \approx d(t) = a_a i_{far}(t) + i_{hd}(t) \quad (\text{B.22})$$

donde  $i_{hd}(t)$  es la corriente de historia evaluada con  $d(t-\Delta t)$ ,  $i_{far}(t-\tau_a-\Delta t)$  y  $a_a$  es real y constante,  $\tau_a$  es el tiempo aproximado de viaje de la onda entre los extremos de la línea. Al aplicarse la regla trapezoidal para la ecuación (B.22) se llega a:

$$a_a = \sum_{j=1}^m w_j ; \quad (\text{B.23})$$

similamente para  $i_{hd}(t)$  se tiene:

$$i_{hd} = \sum_{j=1}^m [e_j d_j(t - \Delta t) + w_j i_{far}(t - \tau_a - \Delta t)] \quad (\text{B.24})$$

donde:

$$e_j = \frac{2 - q_j \Delta t}{2 + q_j \Delta t} \quad (\text{B.25})$$

y

$$w_j = \frac{k_j \Delta t}{2 + q_j \Delta t} \quad (\text{B.26})$$

Si se agrega una función que aproxime a la admitancia característica y la función de peso así como las ecuaciones (B.15) a (B.26) al algoritmo de simulación de transitorios sugerido en el punto 4.3 se puede incluir la dependencia de la frecuencia a los parámetros de la línea monofásica. Por ejemplo, para el caso de la línea con carga resistiva simulada en el punto 4.4 al inyectarle una fuente de un escalón de un voltio, con impedancia interna puramente resistiva de  $1 \text{ m}\Omega$ , se obtiene un voltaje transitorio en el extremo receptor de la línea el cual se visualiza en la figura B.9. Estos resultados representan una primera aproximación, la cual es susceptible de mejoras. Estas se proponen para un trabajo de investigación posterior, en el cual se extienda el trabajo presente.

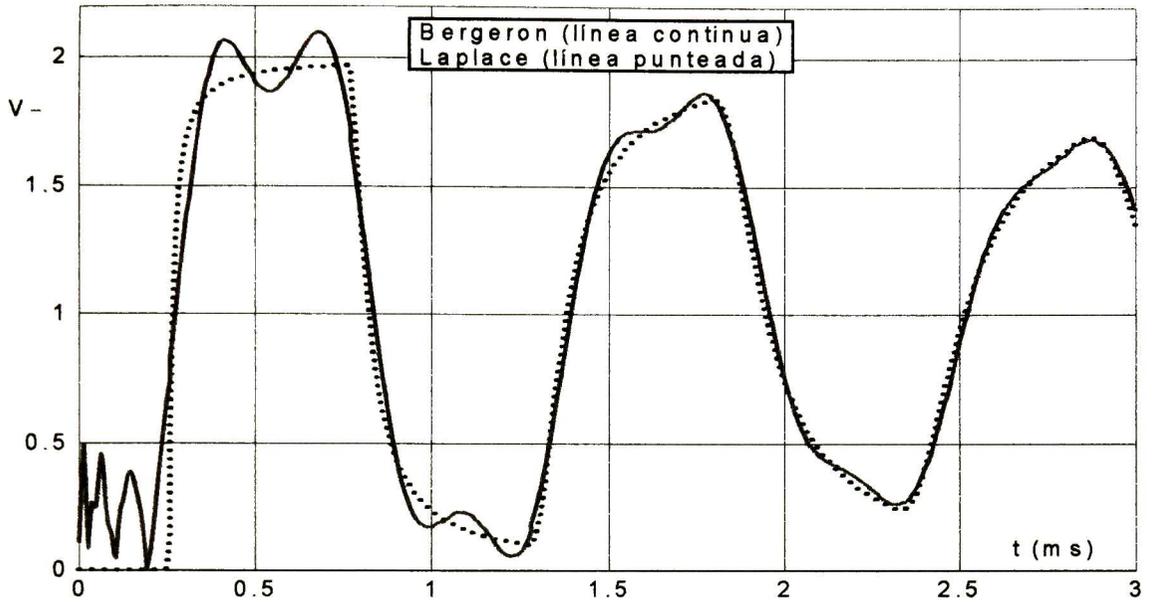


Figura No. B.9 Voltaje en el extremo receptor de la línea con parámetros dependientes de la frecuencia.

## REFERENCIAS.

- [1] Viqueira Landa Jacinto, "Redes Eléctricas", (Tomo I), Representaciones y Servicios de Ingeniería, Segunda Edición, México 1977, páginas 1-4.
- [2] Luis A. Siegert, "Alta Tensión y Sistemas de Transmisión", Editorial Limusa, Noriega Editores, México 1996, páginas 385-397, 255-275.
- [3] Weedy B. M., "Líneas de Transmisión Subterráneas", Editorial Limusa, Noriega Editores, 5a. Edición, México 1988, páginas 1-15.
- [4] Richard Becker, "Electromagnetic Fields and Interactions", Volume I, Dover Publications Inc., New York 1964, pages 228-266.
- [5] Daniel A. Marcus, "Ecuaciones Diferenciales", Compañía Editorial Continental S. A. De C. V., México 1993, páginas 590-591.
- [6] William D. Stevenson "Análisis de Sistemas Eléctricos de Potencia", Editorial McGraw Hill, 2a. Edición, México 1991, páginas 5-6.
- [7] Bewley, L. V. "Traveling Waves on Transmission Systems". Dover Publications Inc. New York 1963 (1933 first published).
- [8] H. Bertil Thorén and K. Lennart Carlsson, "A Digital Computer Program for the Calculation of Switching and Lightning Surges on Power Systems", IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, vol PAS-89, pp 212-218, February 1970.
- [9] L. Bergeron, "Du Coup de Belier en Hydraulique au Coup de Froude en Electricité". Paris: Donod, 1949. Transl. "Water Hammer in Hydraulics and Wave Surges in Electricity" (Translating Committee Sponsored by ASME). New York: Wiley, 1961.
- [10] Hermann W. Dommel, "Digital Computer Solution of Electromagnetic Transients in Single and Multiphase Networks", IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, vol PAS-88, pp 388-399, April 1969.
- [11] Hermann W. Dommel, "Electromagnetic Transients Program Reference Manual (EMTP Theory Book)", Bonneville Power Administration, Portland Oregon, U.S.A. August 1986.

- [12] José Luis Naredo, Avrum C. Soudack and José R. Martí, "Simulation of Transients on Transmission Lines with Corona via the Method of Characteristics", IEE Proc. Gener. Transm. Distrib., Vol.142, No.1, pp 81-87, January 1995.
- [13] D. J. Wilcox, "Numerical Laplace Transformation and Inversion", Int. J. Elec. Enging. Educ., Vol. 15, pp 247-265, 1978.
- [14] W. Derek Humpage and Kit-Po Wong, "Electromagnetic Transient Analisis in EHV Power Networks", Proceedings of the IEEE, Vol 70, No. 4, pp 379-403, April 1982.
- [15] S. J. Day, N. Mullineux, K. C. and J. R. Reed, "Developments in Obtaining Transient Response using Fourier Transforms. Pt I: Gibbs Phenomena and Fourier Integrals", Int. J. Elec. Engng. Educ., vol 3, pp 501-506, 1965.
- [16] S. J. Day, N. Mullineux, K. C. and J. R. Reed, "Developments in Obtaining Transient Response using Fourier Transforms. Pt II: Use of Modified Fourier Transform", Int. J. Elec. Engng. Educ., vol 4, pp 31-40, 1969.
- [17] L. Martin Wedepohl and S. E. T. Mohamed, "Multiconductor Transmission Lines Theory of Natural Modes and Fourier Integral applied on Transient Analysis", PROC. IEE, Vol. 116 No.9, pp 1553-1563, September 1969.
- [18] Hedman, D. E., "Propagation on Overhead Transmission Lines, I-Theory of Modal Analysis", IEEE Trans. PAS, pp. 200-205, March 1965.
- [19] L. Martin Wedepohl, "Application of Matrix Methods to the Solution of Travelling-Wave Phenomena in Polyphase Systems", Proceedings IEE, Vol. 110, No.12, pp 2200-2212, December 1963.
- [20] José R. Martí, "Accurate Modelling of Frequency-Dependent Transmission Lines in Electromagnetic Transient Simulations", IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, vol PAS-101, No.1, pp 147-157, January 1982.
- [21] José R. Martí, "The Problem Frequency Dependence in Transmission Lines Modelling", Doctoral Dissertation, The University of British Columbia, Canada, pp 75-92, April 1981.

- [22] Huyen V. Nguyen, "Simulation of Lightning Surges on Transmission Lines", Doctoral Dissertation, The University of British Columbia, Canada, pp 118-120, February 1996.
- [23] J. A. Brandão Faria, "Overhead Three-phase Transmission Lines: Nondiagonalizable Situations", IEEE Transactions on PWRD, Vol. 3, No.4, October 1988, pp. 1348-1355.
- [24] Fernando Castellanos and José R. Martí, "Phase-Domain Multiphase Transmission Line Modelling", IPST'95, Lisbon, September 3-7, 1995, pp. 17-22.
- [25] Fernando Castellanos and José R. Martí, "Full Frequency Dependent Phase-Domain Transmission Line Model", paper 96 SM 116 PWRD, presented at the IEEE/PES Summer Meeting, Denver, Colorado, 1996.
- [26] C. Gary, "Approche Complete de la Propagation Multifilaire en Haute Frequence par Utilisation des Matrices Complexes", E. D. F. Bull. de la Direction des Etudes et Recherches serie B, No.3/4, pp 5-20, 1976.
- [27] José Luis Naredo, Pablo Moreno Villalobos, Leonardo Guardado Z. Y José Alberto Gutiérrez R., "La Transformada Numérica de Laplace como una Herramienta de Investigación y Desarrollo en Ingeniería Eléctrica", CIIE, 1998, Aguascalientes México.
- [28] L. M. Wedepohl, "Power Systems Transients: Errors Incurred in the Numerical Inversion of the Laplace Transform", Proceedings of the Twenty-Sixth Midwest Symposium on Circuits and Systems, pp 174-178, August 1983.
- [29] John G. Proakis y Dimitri G. Manolakis, "Tratamiento Digital de Señales"; Prentice Hall, España 1998, páginas 21-38.
- [30] A. Budner, "Introduction of Frequency-Dependence Line Parameters into an Electromagnetic Transients Program", IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, vol PAS-89, pp 88-97, January 1970.
- [31] J. K. Snelson "Propagation of Travelling Waves on Transmission Lines Frequency Dependence Parameters", IEEE Trans., PAS-91, pp 85-91, January/February 1972.
- [32] M. E. Van Valkenburg, "Análisis de Redes", Editorial Limusa, México 1986, páginas 92-95.

- [33] Steven C. Chapra y Raymond P. Canale, "Métodos Numéricos para Ingenieros", McGraw Hill, México, 1999, tercera edición, pages 503-515.
- [34] Chee Mun Ong, "Dynamic Simulation of Electric Machinery Using Matlab/Simulink", Prentice Hall, USA, pages 74-76.
- [35] Bjørn Gustaven and Adam Semlyen, "Combined Phase and Modal Domain Calculation of Transmission Lines Transients Based on Vector Fitting", IEEE Transactions on Power Delivery, Vol.13, No.2, pp 596-604, April 1998.
- [36] Bjørn Gustaven and Adam Semlyen, "Simulation of Transmission Line Transients Using Vector Fitting Modal Decomposition", paper PE-347-PWRD-0-01-1997, presented at the IEEE/PES Winter Meeting, New York, 1997.
- [37] Matthew N. O. Sadiku, "Elementos de Electromagnetismo", Editorial C.E.C.S.A., México 1998, páginas 518-592.
- [38] Adam Semlyen and A. Deri, "Time Domain Modelling of Frequency Dependent Three-Phase Transmission Line Impedance" IEEE Transaction on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS 104, No. 6. pp. 1549-1555, June 1985.
- [39] John H. Mathews, "Numerical Methods for Mathematics, Science, and Engineering", Prentice Hall, USA, pages 249-256.
- [40] Richard L. Burden y J. Douglas Faires, "Análisis Numérico", International Thomson Editores, México 1998, páginas 507-514.
- [41] Franklin F. Kuo, "Network Analysis and Synthesis", John Wiley and Sons, Second Edition, Japan, 1966, pages 290-312.
- [42] Franklin F. Kuo, "Sistemas de Control Automático", Prentice Hall Panamericana, Séptima Edición, México 1996, páginas 327-353.



**CENTRO DE INVESTIGACION Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL IPN  
UNIDAD GUADALAJARA**

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, aprobó la tesis: **“Modelos de Ondas Viajeras para Análisis de Transitorios Electromagnéticos en Líneas de Transmisión”** que presenta el C. Camilo Narvaez Pérez el día 30 de Marzo de 2001.

---

Dr. José Luis Naredo Villagrán  
Investigador Cinvestav 3 B  
CINVESTAV DEL IPN  
Guadalajara

---

Dr. Pablo Moreno Villalobos  
Investigador Cinvestav 3 A  
CINVESTAV DEL IPN  
Guadalajara

---

Dr. José Manuel Cañedo Castañeda  
Investigador Cinvestav 2 C  
CINVESTAV DEL IPN  
Guadalajara

---

Dr. Federico Sandoval Ibarra  
Investigador Cinvestav 2 C  
CINVESTAV DEL IPN  
Guadalajara



CINVESTAV  
BIBLIOTECA CENTRAL



SSIT000003910