Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

Departamento de Matemática Educativa

DE LAS REPRESENTACIONES INTUITIVAS DE LA NEGATIVIDAD A LA INTERPRETACIÓN FORMAL DEL CONCEPTO DE ENTERO

Tesis que presenta

Mario Hernández Pérez

Para obtener el Grado de Maestro en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa

Directora de Tesis: Dra. Aurora Gallardo Cabello

México, Distrito Federal **Julio, 2014**

Agradezco al CONACYT por su apoyo para mis estudios de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa

Becario No. 373649

Agradecimientos

A mi familia que
con su apoyo
han hecho posibles
mis Estudios

A los Doctores
del CINVESTAV
por los aprendizajes
en sus clases
que son muy valiosos
en mi profesión

A la *Doctora Aurora Gallardo Cabello* por guiarme en este camino de la Investigación en Matemática Educativa y por el apoyo en la conclusión de la Tesis

A mis compañeros de la
Maestría y a mis
amigos que estuvieron
siempre en la disposición
de escucharme y apoyarme

A los trabajadores de apoyo
de Matemática Educativa
por las atenciones al solicitar
los documentos que se requirieron

A la Dra. Teresa Rojano Ceballos
y a la Dra. Marta E. Valdemoros Álvarez
por sus sugerencias en la revisión de
este Trabajo

ÍNDICE

Resumen

En este documento se muestra el desempeño de 35 estudiantes de tercero de secundaria en la aplicación de un cuestionario conformado esencialmente por problemas aditivos que retoma cinco de las once categorías de Bruno y Martinón (1997). Los sujetos pertenecen a una escuela pública de la Ciudad de México. La investigación se realiza como alternativa a una problemática documentada en estudios previos, Gallardo (2002), donde se expresa que los estudiantes usan positivos en problemas de negativos, es decir, no ven la necesidad del uso de la negatividad. Nuestra investigación incluye un Estudio de Caso donde la alumna explica al entrevistador los procesos de resolución e invención de problemas aditivos y situaciones en contexto vía la forma dialógica.

Los estudiantes usan distintos Sistemas Matemáticos de Signos, Filloy (1999) que van desde los intuitivos hasta los formales: lenguaje verbal, recursos gráficos, procedimientos propios, aritmética y álgebra. La categorización de los distintos Sistemas Matemáticos de Signos, permiten llegar a una resolución formal con negativos y por el contrario, señalar las resoluciones que obstaculizaron el arribo al uso preciso de negativos. Se muestra que las equivalencias semánticas contribuyen a darle sentido al uso de negativos en problemas aditivos. Asimismo consideramos la importancia de las expresiones sintácticas aunque también se puso de manifiesto la ambigüedad que causaban algunos enunciados de los problemas.

Summary

In this document, we tested the performance of 35 8th grade students in completing a questionnaire composed primarily of addition and subtraction problems, utilizing five of the eleven categories employed by Bruno and Martinón (1997). Our study subjects are taken from a public school in Mexico City. Our research is realized in order to find alternatives to a problematic which has been detected in previous studies, Gallardo (2002), where it is shown that students use positives in negative problems, which is to say they avoid using negativity. Our research includes a Case Study where student explains to the interviewer the process by which they resolve and execute additive problems and their situations in context through the form of dialogue.

Students use distinct Mathematical Systems of Signs, Filloy (1999) which span from the concrete to the formal: verbal language, graphical knowledge, personal processes, arithmetic and algebra. The categorization of the different Mathematical Systems of Signs, allow us to reach the formal resolution with negatives, as well as its contrary, the exposing of resolutions which stood as obstacles against the precise use of negatives in the first place. We have shown that semantic equivalencies contribute towards making sense of the use of negatives in additive problems. Thus, we considered the importance of syntactic expressions, although we also discovered the ambiguity surrounding the enunciation of certain problems.

INTRODUCCIÓN

En nuestra práctica docente hemos observado que los alumnos en muchos casos no aceptan soluciones negativas en problemas de enunciado verbal, aunque llegan a respuestas equivalentes utilizando el lenguaje natural. Comenzamos el trabajo de investigación buscando referencias respecto a nuestro tema como las siguientes: Vergnaud (1982), Carpenter y Moser (1984), Peled (1991), Janvier (1983), Bruno y Martinón (1997, 1999), Thompson y Dreyfus (1998), Liebeck (1990), Gallardo (1995), Streefland (1996), Vlassis (2004), Gallardo y Basurto (2009), Mejía (2009), Alcántara (2010), Bofferding y Richardson (2013). De todas estas investigaciones elegimos solamente las que fundamentan nuestro estudio, ver páginas 12 y 13 del presenta documento.

En la propuesta Institucional SEP (2006) se describen situaciones de temperatura, deportes, ganancias, pérdidas, elevador, recta numérica, plano cartesiano y localización de fechas para darle sentido a los negativos. Posteriormente se introducen algoritmos, pero existe una ausencia de problemas aditivos de enunciado verbal. Debido a este vacío conceptual, nos hemos interesado en la clasificación de Bruno y Martinón (1997) como alternativa para que los alumnos adviertan la presencia y uso de los negativos en la vida real.

Nuestra investigación se sustenta fundamentalmente en el estudio realizado por Gallardo y Basurto (2009) quienes han retomado la clasificación de once categorías de problemas aditivos propuesta por Bruno y Martinón (1997). El resultado principal en Gallardo y Basurto (2009) es la aparición de formas semánticas equivalentes en la resolución de problemas.

Nuestro interés por los problemas aditivos es debido a que el enunciado verbal de los mismos, permite que los alumnos le den sentido a conceptos opuestos y los puedan simbolizar con positivos y negativos de una manera natural e ir avanzando cada vez más hacia representaciones formales. Pretendemos en esta investigación validar una enseñanza que advierta la inevitable extensión del dominio numérico en la resolución de este tipo de problemas.

Las dificultades mayores encontradas en el Estudio se refieren a la tendencia de los estudiantes por el uso de números positivos exclusivamente en la resolución de problemas aditivos.

CAPÍTULO 1. EL ESTUDIO

1.1 Número entero

Vargas et al. (1990) señalan la existencia de distintas vías de acceso a los enteros (Z). Sintetizamos la información del texto anterior relativo al concepto de número entero y la concepción de las operaciones de suma y resta en Z. Uno de los primeros pasos en la enseñanza del concepto de número entero es la presentación de situaciones concretas en las que se encuentran estos números. La constitución de este conjunto de números implica mucho más que situaciones concretas. No todas las operaciones con enteros tienen en cada contexto una representación concreta e intuitiva. Así, por ejemplo, multiplicar temperaturas no tiene sentido. Tampoco es fácil encontrar una representación intuitiva en la reducción de deudas, es aún más difícil representar la multiplicación de enteros. Los enteros son un contenido de enseñanza, donde se debe mostrar a través del planteamiento de situaciones problemáticas que los números naturales (N) resultan insuficientes y a partir de esta necesidad constituir los números enteros. Una de las dificultades para aceptar a estos números es la ausencia de significados concretos. Dentro de cada marco conceptual (aritmética, álgebra y geometría) existen distintas vías de acceso a N. En este apartado de tesis sólo explicaremos algunas vías. En aritmética la insuficiencia en N para hacer válidas expresiones como 0-1, 3-4, nos conduce a la necesidad de usar otro tipo de números. Es posible partir de situaciones concretas, establecer los enteros y definir las operaciones directamente, pero expresiones como 8 –(-3) ó (-2)·(-4) no tienen una representación concreta fácil de encontrar, por lo que una alternativa es que después de haber trabajado con las representaciones, es necesario dejarlas a un lado, definir la resta a partir de la suma y considerar a la multiplicación de dos números negativos como una resta reiterada. En álgebra existen expresiones en que se hace necesario el uso de enteros:

> La ecuación x+ a= b tiene solución en el conjunto de los números naturales siempre que <<a>> sea menor o igual que <<b>>. Estas ecuaciones de primer grado se pueden reducir a los tipos x + a = 0 o x – a = 0, donde <<a>> es un número natural. Las ecuaciones del tipo <<x – a = 0>> tienen por solución a <<a>>, que es un número natural. Sin embargo las ecuaciones <<x + a = 0>> no tienen solución en el conjunto de los números naturales, por lo que es necesario definir una serie de nuevos números que sean las soluciones de estas ecuaciones, a tales números se les denomina números negativos y se suelen denotar por: <<-1>> la solución de x + 1 = 0, <<-2>> la solución de x + 2 = 0, etc.

> En otros términos <<-1>> es el número que sumado a <<1>> da cero, <<-2>> el que sumado a <<2>> da cero, etc. Por tanto para cualquier valor numérico de <<a>> se verifica que <<(-a) + a = 0>>, denominándose a <<a>> t <<-a>> números opuestos.
>
> Hemos establecido así a un nuevo conjunto numérico que incluye a los números naturales (números positivos), que se denomina conjunto de los números enteros y se simboliza por Z. Una vez establecido este conjunto deberá definirse una suma, un producto y una relación de orden, que sean coherentes con las definiciones de N y conserven los resultados y propiedades anteriores. (Vargas, et al. 1990, p. 92).

En la recta numérica la suma se representa con una traslación a la derecha de acuerdo al número de unidades que indique la expresión; si es positivo a la derecha y si es negativo a la izquierda. Sumar cero significa la falta de movimiento. La resta se define de forma análoga a la suma, traslación a la izquierda si es un número positivo y a la derecha si se resta un número negativo.

1.2 Revisión de libros de la SEP sobre el tema de números con signo

Examinamos el libro para el maestro de la propuesta SEP (1994), reproducimos la información referente a la introducción del tema con los alumnos y la posterior aplicación de ejercicios con sumas y restas de negativos. Se advierte que la localización de valores con respecto a otros no es difícil para los alumnos, pero realizar operaciones con enteros y en especial con negativos resulta menos accesible. Es posible explicar algunos aspectos relacionados con los enteros a partir de situaciones concretas pero no existe un modelo intuitivo con el que se puedan representar las distintas situaciones que surge al operar con ellos. La búsqueda de modelos intuitivos a veces conduce a presentar en el salón de clases modelos artificiales y con escaso valor para el aprendizaje. Se recomienda dar tiempo para que los estudiantes maduren las ideas y después vean la necesidad del uso de enteros, al operar con ellos en distintas situaciones sobre todo en álgebra. En los primeros acercamientos puede proponerse la localización de números con signos en la recta numérica, en la representación de pérdidas y ganancias, temperaturas bajo cero y sobre cero y otros ejemplos similares. Desde el principio deben proponerse actividades en las que localicen números con signo en la recta numérica y en los cuatro cuadrantes del plano cartesiano. Los alumnos no deben perder de vista que los números con signo pueden ser enteros, decimales o fraccionarios. Deberán aprender que la suma y comparar con los positivos es diferente a la suma y comprar con los enteros. No debe causar desconcierto el hecho, que por ejemplo, el -9 es menor que el -2 o que la operación 5 +(-2) sea una suma y no una resta. La representación de pérdidas y ganancias en un termómetro y el desplazamiento en la recta numérica le darán sentido a la comparación y suma de números con signo.

Por consiguiente, si nos situamos en el cero y nos desplazamos cinco unidades hacia la derecha y luego dos a la izquierda, llegaremos al positivo 3. Estos desplazamientos corresponden a la expresión 5+(-2)=3. La resta de números con signos se facilitará si los alumnos comprenden que la suma es la operación inversa a la resta. La búsqueda de patrones como los que a continuación se presentan, harán ver a los negativos como una extensión natural de los positivos. Se recomienda la localización de los resultados en la recta numérica.

a)	b)
2+2=4	3-6=-3
2+1=3	3-5=-2
2+0=2	3-4=
2+(-1)=	3-3=
2+(-2)=	3-2=
2+(-4)=	3-1=
2+(-5)=	3-0=
2+(-6)=	3- (-1)=
2+(-7)=	3-(-2)=

En la propuesta Institucional SEP (2006) hemos encontrado que se presentan situaciones de temperatura, ganancias, pérdidas, deportes, elevador, plano cartesiano, recta numérica y localización de fechas para darle sentido a los negativos. Posteriormente se introducen algoritmos, pero existe una ausencia de problemas aditivos de enunciado verbal.

1.3 Algunos reportes de investigación que fundamentan el Estudio

En los siguientes párrafos, se mencionan los trabajos que se revisaron sobre el tema.

Alcántara (2010) en un Estudio de Caso de un grupo de segundo grado de educación secundaria, observó que el sujeto evitó el uso de negativos recurriendo a equivalencias sintácticas con positivos en la resolución de problemas aditivos de la clasificación de Bruno y Martinón (1997). Posteriormente este profesor enseñó al alumno cuatro modelos de enseñanza: recta numérica, modelo chino, modelo híbrido y reglas matemáticas. El estudiante dominó los cuatro modelos, los problemas más fáciles fueron los de las categorías: variación de un estado, comparación de estados, variación de variaciones, combinación de comparaciones adyacentes, combinación de comparaciones. Asimismo los problemas más difíciles no resueltos por el alumno fueron los relacionados a las categorías: variación de un estado, comparación de estados, variación de una comparación y comparación de comparaciones.

Mejía (2009) reportó en una investigación de números negativos con un grupo de tercer grado de educación secundaria lo siguiente: son pocos los estudiantes que resuelven de manera formal sustracciones de enteros. En problemas de enunciado verbal recurren a números naturales, existiendo un predominio de la sintaxis sobre la semántica. No usan algún modelo en la resolución de adiciones y sustracciones con negativos ni al resolver problemas de enunciado verbal.

Bruno (1997) explica que en la enseñanza de los números negativos con la recta numérica son necesarias tres dimensiones: el modelo, el contexto y la parte abstracta, la recta numérica contribuye a que no se pierda el contexto en las representaciones abstractas de los negativos. En la enseñanza de los positivos se da énfasis al paso de lo concreto a lo abstracto pero se ha descuidado el paso de lo abstracto a lo concreto, esto ha provocado dificultades en la enseñanza de los negativos.

Gallardo y Basurto (2009) en su estudio con alumnos de Educación Secundaria de edades entre 12 y 13 años aplicaron la Clasificación Funcional y Semántica de Problemas Aditivos de Bruno y Martinón (1997), hallaron lo siguiente: los alumnos se dan cuenta de que la adición y sustracción se convierten en operaciones sintácticas equivalentes al trabajar con enteros, accediendo, a través de equivalencias semánticas. Los estudiantes muestran los diferentes sentidos de la negatividad (número sustractivo, signado, relativo y aislado) haciendo un uso constante del lenguaje verbal. Las equivalencias semánticas permiten acceder al álgebra abstracta que da cabida a los números enteros. Existe un avance desigual en el concepto de número en un mismo alumno dependiendo de la complejidad de la semántica del problema a resolver. Los autores recomiendan posponer la enseñanza de la regla de los signos de la multiplicación hasta que los estudiantes hayan comprendido las adiciones y sustracciones con enteros, también sugieren mostrar variedad de contextos en problemas aditivos lo que contribuiría la extensión de los naturales a los enteros.

Peled (1991) propone una clasificación con cuatro categorías conforme el nivel de conocimiento de números negativos asociado a dos dimensiones; la recta numérica y la cantidad, la categorización no surge de un estudio empírico, sino de la literatura, posteriormente la categorización constituye la base para indicar en investigaciones posteriores el nivel que tienen los alumnos en el conocimiento de los negativos.

Vergnaud (1982) observó que de dos problemas resueltos con una misma operación, uno de éstos resultó más difícil que el otro. Se dio cuenta entonces que los problemas tenían distintas estructuras. En la aritmética distinguió el cálculo numérico y el cálculo relacional. Éste último se refiere a las operaciones de pensamiento surgidas en situaciones aditivas. Para este autor, las categorías fundamentales de las relaciones aditivas son: composición de medidas, una transformación que une dos medidas, una relación que une dos medidas, la composición de dos transformaciones, una transformación al unir dos relaciones estáticas y composición de dos relaciones estáticas. Estas relaciones presentan dos conceptos claves; los conceptos de tiempo y dimensión que son manifestados por los niños y que son indispensables para entender las acciones al resolver problemas aditivos.

1. 4 Preguntas de investigación

Los hechos señalados anteriormente nos condujeron a nuestras preguntas de investigación:

¿Qué dominio numérico consideran los estudiantes de secundaria al resolver problemas aditivos?

¿Qué tipo de Sistemas Matemáticos de Signos utilizan en el planteamiento y resolución de problemas aditivos?

Al pedirle la invención de problemas que involucren números negativos. ¿Cuáles son los contextos a los que la entrevistada más recurre?

En el capítulo 1 nos referimos al concepto formal de número entero. Hemos revisado los libros de la SEP sobre el tema, descrito reportes de investigación que fundamentan el proyecto.

Estos hechos nos permitieron plantear las preguntas de investigación. En el capítulo 2 fundamentaremos el Estudio a partir de una perspectiva semiótica y abordaremos vía una clasificación de problemas aditivos nuestro estudio empírico.

CAPÍTULO 2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

2.1 Perspectiva semiótica

Parafraseando a Rojano (2011) quien explica que el análisis de la lectura e interpretación de lenguaje matemático y algebraico, fue el centro de atención de muchas investigaciones en la década de los ochentas. Debido a las dificultades de los alumnos en estas tareas, se hacía un análisis comparativo del lenguaje natural, aritmético y algebraico, el marco analítico era generalmente de corte piagetiano y fenomenológico. Filloy (1999) concibe una forma propia de abordar esta problemática. A través de un análisis histórico crítico, logra hacer conjeturas sobre el pensamiento algebraico de estudiantes que están en la etapa inicial del aprendizaje del álgebra. Conforma un método propio con aportaciones a la investigación en Matemática Educativa: El diseño del método en donde se cambia el protocolo ortodoxo de la entrevista sin intervención (enseñanza) por una entrevista con intervención en momentos críticos, donde el estudiante ha puesto al límite sus conocimientos y es necesario producir nuevo conocimiento.

La producción de textos era un elemento ausente en otras metodologías, en ésta se da énfasis a estas producciones. Filloy advierte la necesidad de tomar prestados términos de otras ramas como la semiótica ya que del análisis de entrevistas surge un fenómeno que él ha denominado "la polisemia de la x". En la expresión $x+x/4=6+x/4$ los alumnos interpretan que la primera x tiene un valor de 6 y la segunda y tercera x pueden tener cualquier valor y tienen que ser iguales. Hay dos nociones, una tan algebraica como la otra pero que están coexistiendo en una misma lectura. Otro elemento que es introducido es el concepto de Sistema Matemático de Signos (SMS) definido como la secuencia de textos en donde el carácter matemático está en el sistema y no en los signos matemáticos aislados ya que los SMS dan cabida a lenguajes verbales y corporales incluso, los SMS pueden ser del entrevistador. En el desarrollo de la entrevista el alumno produce nuevos textos a partir de los que se le presentaron e introduciendo los suyos que pueden ser procedimientos propios, representaciones intuitivas y lenguaje formal para darle sentido a los símbolos. El término Modelo de Enseñanza es introducido y se define como la secuencia de textos. Del análisis de textos producidos por los estudiantes Filloy es capaz de identificar tendencias cognitivas, ya que ante una situación los estudiantes presentan formas de proceder a veces polarizadas. En consecuencia, la investigación presentada en esta tesis toma como Marco Teórico Metodológico, la perspectiva semiótica de Filloy y colaboradores: Rojano

T., y Puig L. Rubio G. (1999). Además nos basamos en los trabajos de Gallardo, A. (1994, 2002) que advierten de la existencia en estudiantes de sentidos de uso de los números negativos antes de llegar a comprenderlos como números enteros.

Estos son los siguientes:

> Número sustractivo. Donde la noción de número está subordinada a la magnitud. En la resta de dos cantidades a-b, siempre que b será menor que a, donde, a, b son números naturales, es decir, el signo menos tiene el carácter binario a nivel de operación sustracción.
>
> Número signado. Es el número natural al que se le asigna un signo más o un signo menos. Surge la dualidad del signo: binario signo de la operación de adición o sustracción) y unario (signo asociado al número natural).
>
> Número relativo. Se hace presente cuando se puede concebir la idea opuesta en situaciones discretas, así como la idea de simetría en situaciones continuas.
>
> Número aislado. Surge al aceptar un número negativo como solución de una operación o ecuación. (Gallardo, 2002, p. 179).

En este trabajo el entrevistador presenta al estudiante textos escritos pertenecientes a ítems del diseño experimental del cuestionario y la entrevista. El estudiante produce entonces un nuevo texto escrito. Además existe intercambio de lenguajes verbales donde el entrevistador recurre a modelos de enseñanza para provocar fenómenos de abstracción que el estudiante exhibe vía sus producciones verbales y escritas. Durante el intercambio de mensajes, estos modelos de enseñanza así como el proceso de verificación de las tareas planteadas, surgen en ocasiones espontáneamente en el estudiante y otras veces son sugeridas ex profeso por el entrevistador.

2.2 Clasificación funcional y semántica de problemas aditivos[1]

Analizamos cinco de las 11 categorías (Variación de un estado, Combinación de estados, Comparación de un estado, Variación de variaciones, Combinación de comparaciones adyacentes) de Bruno y Martinón (1997). Los autores definen entre otros los conceptos siguientes:

Estado

Un estado tiene un sujeto, una magnitud (algo que puede ser medido) y una unidad de medida en un instante determinado. Por ejemplo: en la Ciudad de México la temperatura en este instante es de 20° C. El sujeto es la Ciudad de México la magnitud es la temperatura y la unidad de medida es 1° C.

Comparación

Diferencia que hay entre dos estados; aquí el tiempo carece de importancia. Por ejemplo: Juan tiene cinco pesos más que Luis.

Variación de un estado

Comparación de un estado en dos momentos diferentes, por ejemplo, en el transcurso del día (un periodo constante de tiempo). Ejemplificando: Daniel tiene seis pesos más en la tarde que por la mañana.

Variación de variaciones

En una variación de variaciones hay cuatro instantes: Se habla de dos periodos constantes de tiempo, (por ejemplo, la variación de un estado en un día, luego se hace referencia a una variación de un estado del día posterior que parte de lo que pasó en la variación del día anterior). Al final un dato se puede obtener a partir de comparar las dos variaciones. Ejemplificando: Ayer en el recreo José perdió tres pesos, hoy perdió un peso menos que ayer, es decir, si se habla de lo que pasó en los dos días quiere decir que ha perdido dos pesos. Para llegar a la conclusión de lo que pasó en los dos días se podría utilizar una equivalencia semántica ya que perdió un peso menos que ayer equivale a decir hoy ganó un peso.

[1] (Bruno, 1997) El texto original se presenta en el anexo número cuatro.

La estructura funcional y la forma semántica

La estructura funcional se refiere al tipo de situaciones numéricas (estados, variaciones y comparaciones) y la forma semántica al modo de expresar dichas situaciones numéricas. Las formas semánticas equivalentes son formas verbales que tienen el mismo significado.

Combinación de estados

En esta categoría hay tres funcione estado. Hay dos estados parciales y resulta un estado total. Por ejemplo Miguel tiene un saldo en el banco (debe o tiene), en casa tiene otro saldo, la suma de estos dos saldos es el saldo total.

Combinación de comparaciones adyacentes

En el ejemplo: Pedro tiene cuatro pesos menos que Francisco y José tiene seis pesos más que Pedro, los estados son independientes, los podemos comparar y así indicar cuantos pesos tiene José en comparación a Francisco.

Dos funciones estado

Supongamos que Juan tiene un saldo y Raúl tiene otro saldo en cierto tiempo.

Comparación de estados

La comparación puede estar expresada en forma de diferencia, si es así se le nombra comparación y una relación estática que une dos medidas. Y si está expresada en forma de cambio, se le nombra igualación añadiendo o igualación quitando.

Ejemplo:
Juan debe 2 pesos.
Si Juan gana 5 pesos, entonces iguala a Raúl.
Raúl tiene 3 pesos.

2.3 Instrumentos metodológicos del Estudio

El Estudio es descriptivo, pues se recurre al análisis de las producciones de los alumnos en el cuestionario final y en la entrevista. La investigación es cualitativa; se recaban evidencias empíricas que nos permitan interpretar lo que está pasando en el proceso de resolución de los problemas verbales que se aplican en el cuestionario y la entrevista. La investigación se realiza con 104 estudiantes de tres grupos de tercer grado en una secundaria pública, finalmente se retoman a 35 estudiantes. A partir del pilotaje, se conformó el cuestionario final, de un banco de reactivos, se obtuvieron preguntas para cinco entrevistas individuales video grabadas, los alumnos fueron seleccionados a partir de su desempeño en los cuestionarios; tres de estrato alto y dos de estrato medio. Para la validación de los instrumentos se utilizará el método de triangulación Cohen, L. y Manión, L. (1990). Con la triangulación de métodos de recogida de datos se explica la riqueza y complejidad del sujeto estudiándolo desde más de un punto de vista por lo que se utilizan datos cualitativos y cuantitativos. Esto con el fin de conocer a profundidad lo que pasa en la resolución de problemas y así tener confianza en los resultados del estudio.

2. 3. 1 Pilotaje

Se conformó un cuestionario de 29 preguntas compuesto esencialmente ejercicios de sintaxis aritmética y problemas aditivos similares a los de las categoría de Bruno y Martinón (1997), y se consideraron otros tomados de la propuesta SEP plan 1993 y 2006. Las situaciones presentadas fueron: localización en la recta numérica de acontecimientos históricos, situaciones cotidianas y uso del termómetro. Se aplicó este instrumento en un grupo de 35 alumnos de tercer grado de secundaria, se hizo una revisión de las respuestas y nos dimos cuenta que los estudiantes mostraban procedimientos de resolución que nos ayudarían a contestar las preguntas de investigación.

2. 3. 2 Cuestionario final

Debido a que en la resolución del cuestionario piloto la mayoría de alumnos fueron explícitos en sus respuestas, escogimos 20 preguntas del cuestionario piloto y con éstas quedó conformado el cuestionario final. Nueve de las 20 preguntas abordaron cinco categorías de Bruno y Martinón (1997): dos estados, variación de un estado (dos problemas), combinación de estados, comparación de un estado, variación de un estado (dos problemas), variación de variaciones, combinación de comparaciones adyacentes, tres preguntas se relacionaron con situaciones cotidianas por medio de diagramas, tres problemas eran ajenos a las categorías (problemas de descenso, problema de edades y problema de igualación de puntaje en un record) y se incluyeron cinco ejercicios de adición y sustracción de enteros (tres adiciones y dos sustracciones). Se aplicó el instrumento a 104 alumnos de tercer grado de secundaria de la misma escuela en la que se aplicó el cuestionario piloto, se dispuso de dos sesiones de 50 minutos para la resolución.

Este capítulo comienza mostrando la perspectiva semiótica de Filloy (1999) destacando los sentidos de uso de los números negativos descritos por Gallardo (2002). A continuación se presenta la clasificación funcional y semántica de problemas aditivos de Bruno y Martinón (1997). Se finaliza explicando los instrumentos metodológicos del Estudio.

CAPÍTULO 3. RESULTADOS DEL CUESTIONARIO

3.1 Producciones escritas de los estudiantes. Identificación de formas semánticas equivalentes y sentidos de uso de los negativos

Los problemas de variación de variaciones (problema 13) y de combinación de comparaciones adyacentes (problema 14) tuvieron el mayor número respuestas diferentes. Se presentan las producciones más explícitas de 16 estudiantes.

Los alumnos se denotarán como E y el número de lista.

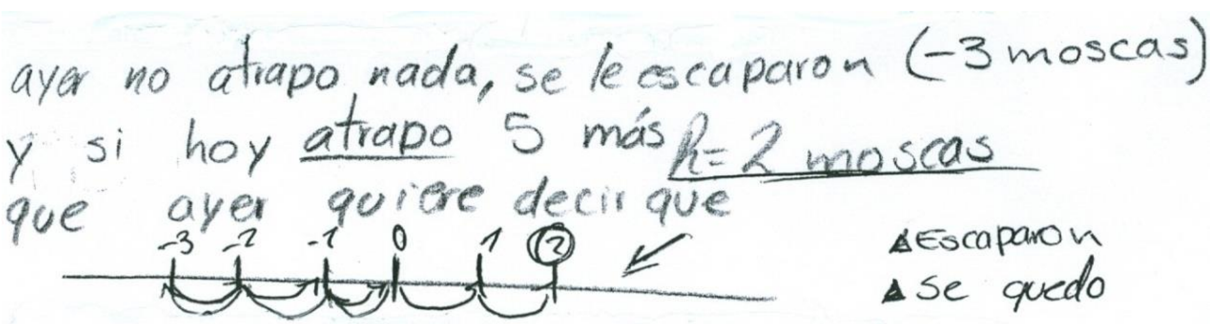
Categoría: Variación de variaciones

El día de ayer a una araña se le escaparon 3 moscas que habían caído en su red, hoy se le escaparon 5 moscas menos que ayer. ¿Cuántas moscas atrapó?

La respuesta es **(-3)-(-5)=(+2)**

A continuación se reportan seis producciones de estudiantes que llegaron a la respuesta correcta, tres casos con solución incorrecta.

Estudiante E 1



Se advierte la presencia del cero al escribir, ayer no atrapó nada, utiliza el número signado (-3), sustituye la frase, se le escaparon 5 moscas menos que ayer, por la equivalente semánticamente, atrapó 5. En la recta numérica reconoció el número relativo.

Estudiante E 15

Atrapo 2 moscas
Porque tenia -3 y luego 5 son 2 moscas
porque tenia 0 luego se escaparon 3 osea tiene
-3 pero se le escaparon 5 moscas luego ya
tenia $-3+5=2$

Muestra la necesidad de nombrar un estado inicial: tenía… Surge el cero, pasa del lenguaje natural, se escaparon 3, a lo sintáctico -3. Sin embargo la frase: se le escaparon 5, la representa como positivo 5. Nótese que debió haber escrito se le escaparon 5 moscas menos, lo cual puede escribirse como –(-5) o (+5). Reconoce el número signado.

Estudiante E 9

$x-3$
$x-3-(-5)=x+2$

R=2 moscas mas que ayer

Tiene la necesidad de establecer una cantidad x como un estado inicial. Utiliza sintaxis algebraica. La introducción de una cantidad inicial desconocida lo conduce a una equivalencia sintáctica de expresiones: x-3 – (-5)=x+2. Surgen los números signados -3 y (-5) y el número sustractivo ya que se indica una resta en la expresión x-3 – (-5).

Estudiante E 3

Atrapó 2 moscas

ayer= -3
hoy = -3 − (-5) = 2
hoy = 2

Justificacion

Responde con la expresión numérica propuesta por Bruno y Martinón (1997), reconociendo los números signados.

Estudiante E 20

2 moscas

Justificación: Dice que el primer día se le escaparon 3, es decir = x-3. Luego dice que el segundo día se le escaparon cinco moscas menos al día anterior, es decir, (x-3)-(-5)) = (x-3)+5 = x+2

Necesita el estado inicial manifestándose al utilizar x. Resuelve el problema de manera sintáctica vía los números sustractivo y signado. Utiliza el lenguaje natural, se le escaparon 5 moscas menos que ayer, para justificar el paso de –(-5) a la expresión sintáctica equivalente +5. Reconoce los números signados.

Estudiante E 19

$-3+5=2$

2 (restas las moscas que se escaparon y le sumas las 5 moscas (que no se le escaparon menos) y el resultado sale.

Escribe una expresión sintáctica y el -3 indica una resta, el +5 lo obtiene a partir de la equivalencia semántica: sumas 5 moscas, con la frase, que no se le escaparon menos. Reconoce los números sustractivo y signado.

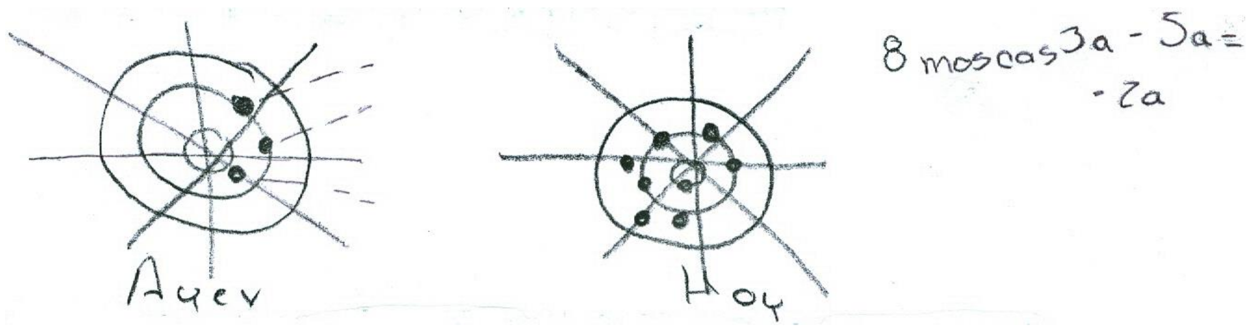
Estudiante E 26

R = 8 moscas considerando que son las que se escaparon, porque dado que no tenemos mayor información, tomaremos estas como las moscas que atrapo.

Nota: Considero que en la pregunta deben espicificar que día o si los 2 días.
Y no dice cuantas moscas atrapó y si se comió.
Me parece mal redactado.

Escribe en lenguaje natural tratando de dar significado al problema. La respuesta de 8 hace referencia a las moscas que atrapó en los dos días. No considera los opuestos atrapar-escapar tampoco compara lo que pasó en los dos eventos.

Estudiante E 27



Utiliza una representación gráfica. Al escribir 8 moscas se refiere a lo que atrapó durante los dos días independientemente si se le escaparon o no. Compara dos cantidades ya que escribe el signo menos entre 3a y 5a. Reconoce los números sustractivo y signado.

Estudiante E 34

R= 8 moscas

Porque si dice que se le escaparon 5 menos que ayer y ayer la cantidad solo fueron 3, decieron haberse ido más, y ayer fueron 3, más los 5 de hoy = 8.

Recurre al lenguaje natural omitiendo el signo menos en el segundo evento que conduce a sumar el 3 más el 5.

Estudiante E 2

R= Hoy atapo 11 moscas; ayer atrapo 6 moscas, es decir, hoy atrapo 5 moscas más que ayer, o dicho de otra manera; se le escaparon 5 menos que ayer.

Ayer: 6 moscas − 3(escapadas) = 3

Hoy: 11 moscas − 3(escapadas) = 8

Necesita establecer un estado de 6 moscas para el día de ayer e indica que se le escaparon 3; quedando 3 moscas. Establece una equivalencia semántica de las frases, atrapó 5 moscas y, se le escaparon 5 menos, por lo que suma 6 más cinco 5 resultando 11, resta las 3 que se escaparon y el resultado es 8. La respuesta se centra en las que atrapó los dos días es decir, 11.

Estudiante E 8

5 moscus
Por que el problema dice que se le fueron 3moscas
pero el dia de hoy fueron 5 menos que ayer
o sea que atrapo 5moscas

Escribe en lenguaje natural la equivalencia semántica; fueron 5 menos es lo mismo que atrapó 5 moscas.

Estudiante E 23

O sea
que 5 no
se escaparon
porque si me dice
que ayer se le escaparon
3 moscas pero hoy
se le escaparon 5 menos
que ayer entonces
no se escaparon 5

5
porque ayer solo
escaparon y hoy
tiene 5 por eso

Recurre al lenguaje natural. Se apoya en la palabra escapar y establece formas semánticas equivalentes: se le escaparon menos, no se escaparon. La comparación que llevó a cabo en el proceso de resolución, no la considera en la parte final y escribe 5 que es lo que se atrapó en el segundo evento.

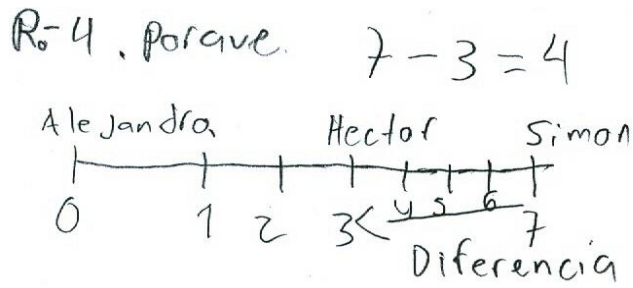
Categoría: Combinación de comparaciones adyacentes

"Alejandro Tiene 3 canicas menos que Héctor, Simón tiene 7 canicas más que Alejandro. ¿Cuántas canicas más tiene Simón que Héctor?", tomado de Alcántara (2010).

La respuesta es **(-3)+(+7)=(+4)**

Se reportan ocho producciones correctas y una incorrecta.

Estudiante E 22

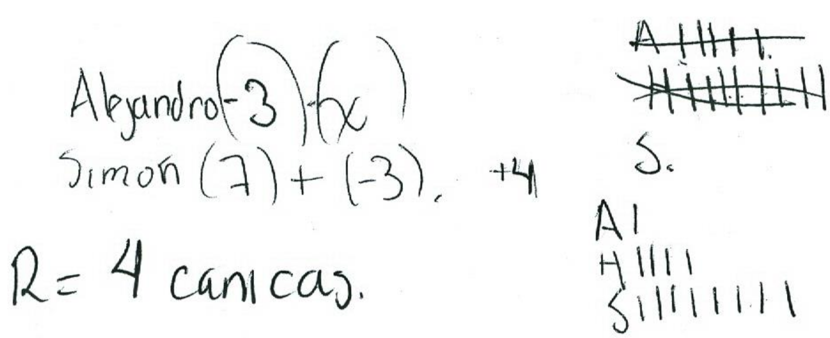


Justifica con una sustracción y con la recta numérica en la que el cero corresponde a lo que tiene Alejandro. También indica lo que tiene Héctor y Simón. El signo menos y la palabra diferencia le dan un sentido sustractivo a la negatividad.

Estudiante E 32

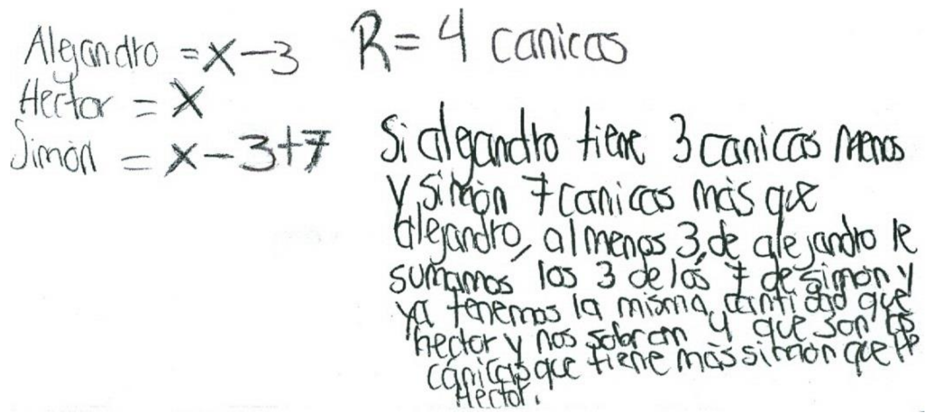
Utiliza números positivos y una sustracción. Recurre a suponer un valor inicial. Existe una interpretación no algebraica de las letras H, A, S, ya que representan las iniciales de los nombres que aparecen en el problema.

Estudiante E 25



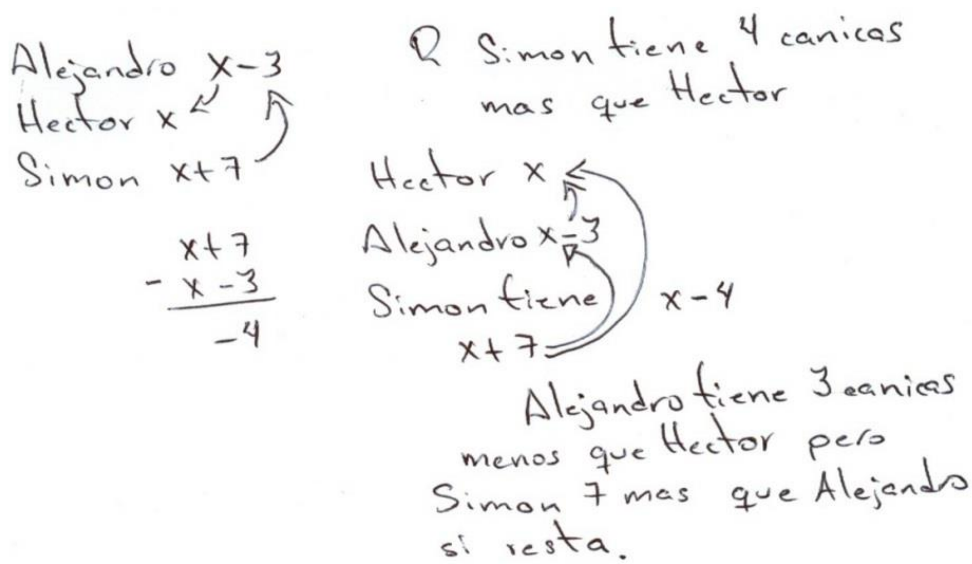
En la representación intuitivas (marcas) le asigna un número arbitrario de canicas a cada uno de las tres personas. Posteriormente, esa misma idea la registra pero con un menor número de marcas. Surge el número signado.

Estudiante E 34



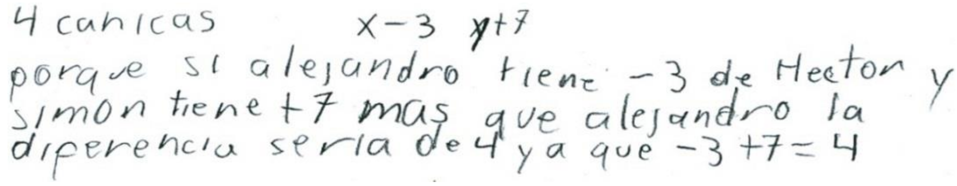
Resuelve el problema con sintaxis algebraica suponiendo un estado inicial designado como x-3. Da una explicación en la que, al menos tres de Alejandro, le suma, los 3 de los siete de Simón. Ha igualado con esto lo que tienen Alejandro y Héctor y sobran 4, que es lo que tiene de más Simón que Héctor. El número relativo se presenta al sumar el menos 3 de Alejandro con los 3 de los 7 que tiene Simón. También aparece el número sustractivo en la expresión: x-3.

Estudiante E 23



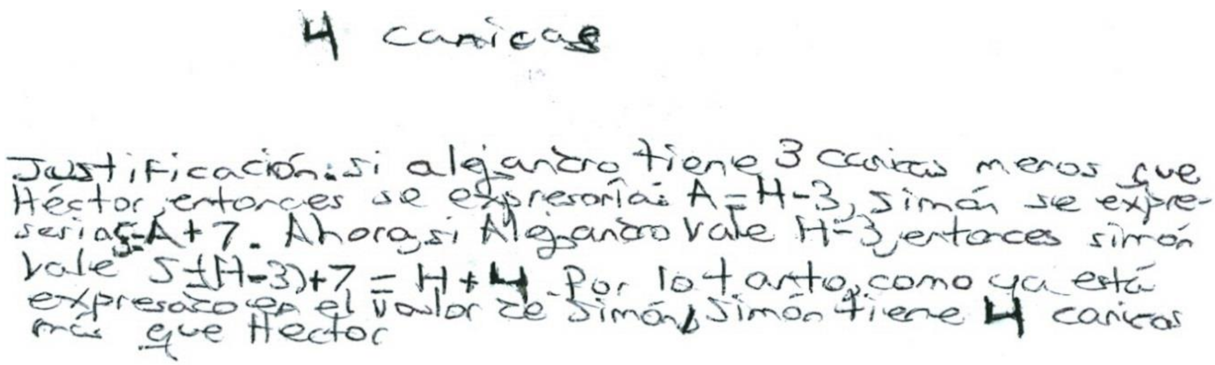
Las expresiones algebraicas incluyen la suposición de un valor inicial (Alejandro x-3, Héctor x, Simón x+7). Obtiene la diferencia entre x+7 y x-3 restando de manera vertical. La respuesta sería 11 pero él indica que es -4 en la diferencia, también dice “Simón tiene 4 canicas más que Héctor”. Surgen el número sustractivo y el número signado.

Estudiante E 15


4 canicas x-3 y+7
porque si alejandro tiene -3 de Hector y simon tiene +7 mas que alejandro la diperencia seria de 4 ya que -3+7=4

Aparece el número signado -3. Hace referencia al número sustractivo al escribir: la diferencia sería.

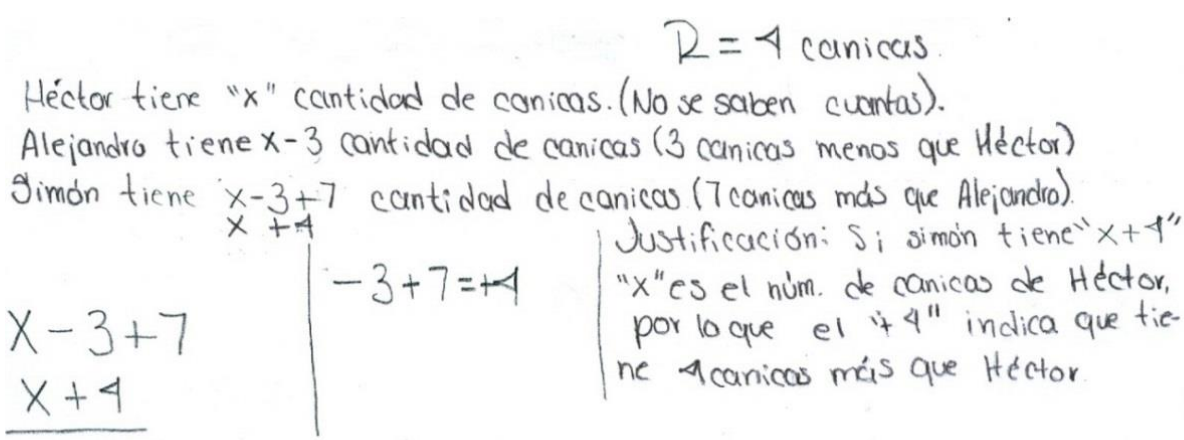
Estudiante E 20


4 canicas

Justificación: si alejandro tiene 3 canicas menos que Héctor, entonces se expresaría: A=H-3, simón se expresaría S=A+7. Ahora, si Alejandro vale H-3, entonces simón vale S=(H-3)+7 = H+4. Por lo tanto, como ya está expresado en el valor de simón, Simón tiene 4 canicas más que Héctor

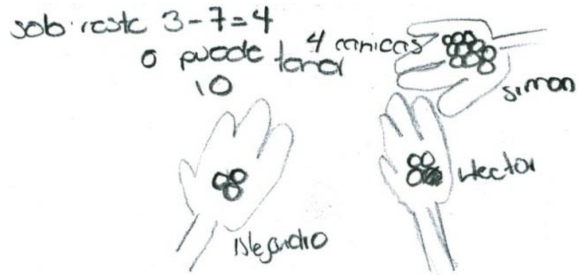
Utiliza lenguaje natural y sintaxis algebraica. Su respuesta es equivalente a la correcta.

Estudiante E 26


R = 4 canicas.
Héctor tiene "x" cantidad de canicas. (No se saben cuantas).
Alejandro tiene x-3 cantidad de canicas (3 canicas menos que Héctor)
Simón tiene x-3+7 cantidad de canicas (7 canicas más que Alejandro).
x +4
X-3+7
X+4
-3+7=+4
Justificación: Si simón tiene "x+4" "x" es el núm. de canicas de Héctor, por lo que el "+4" indica que tiene 4 canicas más que Héctor

Necesita la suposición de un estado inicial indicado por x que es lo que tiene Héctor, luego resta 3 de lo que tiene Héctor correspondiéndole a Alejandro x-3. Simón tiene lo mismo que Alejandro más 7; x-3+7, resulta x+4. No explica cómo ha eliminado x en la parte final, escribe -3+7=+4 lo que coincide con la respuesta sintáctica.

Estudiante E 28



Propone dos respuestas recurriendo a un estado inicial expresado aritméticamente con una sustracción errónea. Utiliza además, una representación concreta donde Alejandro tiene 3 canicas y Simón 10, entonces Héctor debería tener 6 para que se cumpla lo que indica el problema.

Del análisis de las producciones de 16 estudiantes en los problemas de variación de variaciones (problema 13) y de combinación de comparaciones adyacentes (problema 14) podemos afirmar lo siguiente:

Hemos observado la interpretación de los textos en forma distinta a la esperada, es decir, existe una comprensión parcial del problema (E 8 y E 9, problema 13, variación de variaciones).

Concluimos además, que las representaciones intuitivas realizadas en el proceso de resolución, aún las correctas, por sí mismas no permiten arribar a la expresión sintáctica. Es necesario proporcionar enseñanza a los estudiantes para lograr la transición a la sintaxis. De hecho sólo tres estudiantes finalizan con la expresión sintáctica correcta del problema (E 3, problema 13, variación de variaciones, E 15 y E 26, problema 14, combinación de comparaciones adyacentes).

Observamos que la suposición de un valor arbitrario para el estado inicial en el enunciado del problema reduce la negatividad a ser representada solamente como un número sustractivo (E 22 y E 32, problema 14, combinación de comparaciones adyacentes). Un estudiante reconoce la negatividad por medio de números signado y relativo (E 1, problema 13, variación de variaciones). Otros estudiantes también reconocen la negatividad por medio del número signado (E 3, E 9, E 15, E 19 y E 20, problema 13, variación de variaciones, E15 y E 26, problema comparación de comparaciones adyacentes).

3.2 Tablas sobre el desempeño de los estudiantes en el cuestionario final

En seguida se presentan ocho tablas que muestran los nexos entre los resultados obtenidos por los estudiantes en los problemas 5, 6, 8, 9, 10, 11, 13 y 14.

Las columnas en las tablas se describen a continuación.

Columna 1. Indica el número de alumnos que contestan del mismo modo, aunque también puede ser un único alumno.

Columna 2. Estudiantes

Columna 3. Resultado dado por el estudiante.

Columna 4. Proceso de resolución.

En el inicio de la tabla se presenta el texto del problema y la posible respuesta.

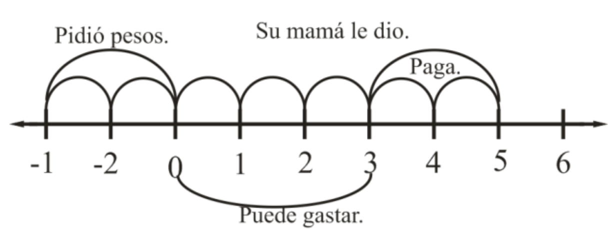
Lee con atención los ejercicios y problemas, contesta y resuelve, justifica tus respuestas.

Tabla 5. Variación de un estado

5. Andrés pidió prestado 2 pesos durante el recreo y en la salida su mamá le dio 5 pesos, ¿cuál es la cantidad que puede él gastar sin endrogarse nuevamente? Justifica tu respuesta con una operación.

Resultado
(-2)+(5)=(+3)

Cantidad de alumnos	Estudiantes	Resultado	Proceso de resolución
2	1°, 2°	3	Resta aritmética vertical. 5 - 2 = 3
1	3°	3	Resta aritmética vertical. 5 - 2 = 3 Lenguaje verbal. Es una resta si, Andrés le regresa lo pedido prestado al compañero se queda con 3 pesos lo cual ya son de él.
1	4°	3	Resta aritmética vertical. Andrés= pide \$2 Su mamá le da \$5 5 - 2 = 3 Lenguaje verbal. Justificación: Puede gastar 3 pesos de los 5 que le dio su mamá ya que debe 2 pesos.

Cantidad de alumnos	Estudiantes	Resultado	Proceso de resolución
1	5°	3	Resta aritmética horizontal. dinero que se tiene) 5 (deuda) -2 = (sobrante) 3 Lenguaje verbal. Si tiene $ 5.00 y debe $ 2.00, se resta 5-2 y se obtiene 3, que es la cantidad que puede gastar, una vez pagada su deuda.
1	6°	3	Expresión algebraica. x - 2 -2 + 5 = 3
1	7°, 8°, 9°	3 pesos	Resta aritmética vertical. 5 - 2 = 3
1	10°	3 pesos	Resta aritmética horizontal. Justificación: 5 - 2 = 3
1	11°	3 pesos	Resta aritmética horizontal. 5 - 2 = 3 Lenguaje verbal. Con los cinco pesos que le dio su mamá paga los dos y se queda con 3 pesos los cuales puede gastar.
1	12°	3 pesos	Resta aritmética horizontal. 5 - 2 = 3 Lenguaje verbal. 3 pesos ya que debe regresar 2 pesos y le dieron 5
1	13°	3 pesos	Suma aritmética igualada a restas. 2 = Prestados 5 = de Andrés 2 + 5 = 7 - 2 = 5 - 2 = 3
1	14°	3 pesos	Lenguaje verbal. Pidió 2 pesos y después le dieron 5 pero debe pagar los 2 pesos que había pedido prestados. Resta con sustraendo negativo y procedimiento incorrecto. Entonces restas 2 - 5 y queda 3 pesos. 2-5=3
1	15°	3 pesos	Recta numérica con explicación. 

Cantidad de alumnos	Estudiantes	Resultado	Proceso de resolución
1	16°	3 pesos	Expresión sintáctica. -2+5=3 Lenguaje verbal. Puede pagar los $ 2 y gastar los otros 3 pesos.
1	17°	3 pesos	Expresión sintáctica. - 2 + 5 = 3
1	18°	$ 3 pesos	Expresión sintáctica. - 2 + 5 = 3
1	19°	$ 3.00 (pesos)	Lenguaje verbal. Pues pidió prestado 2 y los tiene que pagar; y para no endrogarse de nuevo, para pagar esta deuda solo goza de 3 pesos para gastar; y los otros dos pesos, para pagar. Resta aritmética vertical. 5-2 = 3
1	20°	$ 3.00 (pesos)	Expresión sintáctica. Justificación: -2 + 5 = +3 Lenguaje verbal. Sólo puede gastar $ 3.00, para emplear los otros dos en pagar lo que debía y así no tener deudas. Justificación: -2+5=+3
1	21°	$ 3.00	Resta aritmética horizontal. 5 - 2 que debe = 3 solo puede gastar $ 3.00 ya que debe $ 2.00
1	22°	$ 3	Resta aritmética vertical. $ 5 - $ 2 = $ 3
1	23°	$ 3	Resta aritmética vertical. -5 Positivos. 2 Deuda. 3 Al pagar la deuda.
1	24°	$ 3	Resta aritmética vertical con comprobación. 5 - 2 = 3 2 + 3 = 5 Lenguaje verbal. Andrés se puede gastar solamente $ 3 ya que si no seguiría debiendo.
1	25°	$ 3	Resta aritmética horizontal. $ 5 - $2 = $ 3 Lenguaje verbal. Paga lo que pidió y le sobran 3.
1	26°	$ 3	Resta aritmética horizontal 5-2=3
1	27°	$ 3	Expresión sintáctica. (-2) + (+5) = 3
1	28°	Puede gastar 3 pesos	Resta aritmética vertical. 5 - 2 = 3

Cantidad de alumnos	Estudiantes	Resultado	Proceso de resolución
1	29°	Puede gastar 3 pesos	Resta aritmética vertical. Número sustractivo. 5 - 2 = 3 Expresión sintáctica. Número signado. (-2) + 5 = 3
1	30°	Puede gastar 3 pesos.	Lenguaje verbal y expresión sintáctica en la que parte del cero. Puede gastar 3 pesos porque: 0 - 2 = -2 y -2 + 5 = 3
1	31°	$ 3 puede gastar Juan	Tabla. $ 2 $ 5 $2 Gastado Gastado Sobran $ 3
1	32°	$ 3.00 para pagarle a quién le prestó.	Lenguaje verbal. Es confuso ya que podría ser que su mamá le dio dinero antes pero no le alcanzó.
1	33°	5 pesos	Suma y resta aritmética. 5 + 2 - 2 = 5
1	34°	0 ó 7	Lenguaje verbal. Porque tiene 2 opciones si su mamá le regalo el $ o no. Si le tuviera que pagar a su mamá no podría gastar nada. Ya que tiene $ 7 pesos y debe pagar $ 5 a mamá y $ 2 a su amigo. Si no le tuviera que pagar a su mamá podría gastar $ 5 pesos y solo le pagaría $ 2 a su amigo total $7.
1	35°	7	Suma aritmética vertical. 2 + 5 = 7

Análisis de la Tabla 5, Variación de un estado

5. Andrés pidió prestado 2 pesos durante el recreo y en la salida su mamá le dio 5 pesos, ¿cuál es la cantidad que puede él gastar sin endrogarse nuevamente? Justifica tu respuesta con una operación.

Resultado
(-2)+(5)=(+3)

Del primero al sexto estudiante escriben como respuesta 3, el primero y el segundo usan una resta aritmética vertical 5-2=3. El tercero y el cuarto usan una resta aritmética vertical 5-2=3 y el lenguaje verbal explicando el contexto del problema. El quinto resuelve de forma similar al tercero y cuarto sólo que la resta aritmética 5-2=3 es horizontal. El sexto escribe la expresión algebraica x-2, -2+5=3. Del séptimo al 17° escriben como respuesta 3 pesos. El séptimo, octavo y noveno usan la resta aritmética vertical 5-2=3. El décimo resuelve con una resta aritmética horizontal 5-2=3. El 11° y 12° usan una resta aritmética horizontal 5-2=3 y lenguaje verbal explicando el contexto del problema. El 13° usa una suma aritmética igualada a restas. El 14° escribe el resultado correcto pero el procedimiento en la resta con sustraendo negativo no es correcto. Explica el contexto del problema con lenguaje verbal, introduce la expresión “2-5 y queda 3 pesos”.

El 15° resuelve con una recta numérica anulando 2 negativos con 2 positivos, marcando los 3 positivos sobrantes como los que puede gastar. El 16° llega a la sintaxis -2+5=3 y usa el lenguaje verbal explicando el resultado. El 17° escribe la expresión sintáctica -2+5=3. El 18° escribe como respuesta $3 pesos y resuelve con la expresión sintáctica -2+5=3. El 19° escribe $ 3.00 (pesos), usa el lenguaje verbal y una resta aritmética vertical. El 20° y 21° escriben $3.00, el 20° llega a la expresión sintáctica -2+5=+3 y usa el lenguaje verbal explicando el contexto del problema. El 21° usa la resta aritmética horizontal: 5-2=3. Del 22° al 27° escriben como respuesta $ 3. El 22° usa una resta aritmética vertical con los signos de pesos: $5-$2=$3. El 23° usa una resta aritmética vertical 5-2=3. El 24° usa una resta aritmética vertical con comprobación 5-2=3, 2+3=5.

El 25° usa una resta aritmética horizontal 5-2=3. El 26° resuelve de forma similar al 25° pero introduce signos de pesos $ 5 - $ 2= $ 3 y el lenguaje verbal. El 27° llega a la expresión sintáctica (-2)+(+5)=3. El 28°, 29° y 30° proponen como respuesta: Pueden gastar 3 pesos. El 28° usa una resta aritmética vertical 5-2=3. El 29° resuelve con una resta aritmética vertical: 5-2=3 (número sustractivo) y con la expresión sintáctica (-2)+5=3 (número signado). El 30° parte del cero y llega a la expresión sintáctica 0-2=-2, -2+5=3, usa también el lenguaje verbal. El 31° contesta: $ 3 puede gastar Juan. La tabla que propone resultó difícil de interpretar. El 32 contesta $ 3.00 para pagarle a quien le prestó, explica con lenguaje verbal: “Es confuso ya que podría ser que su mamá le dio dinero antes pero no le alcanzó”. El 33° escribe 5 como respuesta, justifica con la suma aritmética: 5+2-2=5, la cual es correcta pero no resuelve el problema. El 35° contesta con el número 7 usando la suma aritmética vertical: 2+5=7.

En síntesis: Considerando (-2)+(+5)=(+3) como la respuesta correcta, 8 alumnos resuelven el problema.

Tabla 6. Combinación de estados

6. Delia nación en el año 4 antes de Cristo y vivió 12 años. ¿Cuándo murió?

Resultado
(-4) + (+12) = 8

Cantidad de alumnos	Estudiantes	Resultado	Proceso de resolución
18	Del 1° al 18°	8	Recta numérica con positivos y negativos, partiendo del -4 y después yendo hacia la derecha.
2	19° y 20°	8	Recta numérica con positivos y negativos partiendo del 4 y después yendo hacia la derecha. Expresión sintáctica. Adición con un sumando negativos -4 + 12 = 8
1	21°	8	Expresión sintáctica. Sustracción con positivos. 12-4 = 8
1	22°	8	Expresión sintáctica. Sustracción con positivos. 12 - 4 = 8 Lenguaje verbal explicando que a los años después de Cristo se le restan los años antes de Cristo.
3	23°, 24° y 25°	8	Expresión sintáctica. Adición con un sumando negativo -4 + 12 = 8
3	26°, 27 y 28°	8	No justifica respuesta.
1	29°	16	Recta numérica con positivos partiendo del 4 y después yendo hacia la derecha.
1	30°	16	Expresión sintáctica. Adición con dos sumandos positivos. 4 + 12 = 16
1	31°	16	Expresión sintáctica. Adición con dos sumandos positivos. 4 + 12 = 16 Recta numérica con positivos partiendo del 4 y después yendo a la derecha.
1	32°	16	Tabla con positivos comenzando con el 5 y finalizando en el 6
3	33°, 34° y 35°	16	No justifica respuesta.

Análisis de la Tabla 6, Combinación de estados

6. Delia nación en el año 4 antes de Cristo y vivió 12 años. ¿Cuándo murió?

Resultado.
(-4) + (+12) = 8

Veintiocho estudiantes escribieron el 8 como respuesta, del 1° al 18° utilizaron la recta numérica con negativos y positivos, partiendo del -4 y yendo a la derecha hasta llegar al +8. Los alumnos 19° y 20° además de la recta numérica resolvieron con la expresión sintáctica -4+12=8 usando un sumando negativo. El sujeto 21° utilizó la expresión sintáctica de sustracción con positivos 12 - 4 = 8. El 22° utilizó la expresión sintáctica con positivos 12 - 4 = 8 y lenguaje verbal. La expresión sintáctica con un sumando negativo -4 + 12 = 8 como única justificación apareció en 3 casos (23° a 25°). Aparecen otros tres casos que no justifican su respuesta (26° a 28°).

Siete estudiantes (del 29° al 35°) escribieron 16 como resultado. El 29° utilizó la recta numérica con negativos y positivos, el 30° resolvió con la sintaxis de adición con positivos 4+12=16. El 31° además de una expresión sintáctica con positivos 4 + 12 = 16 resolvió en la recta con positivos. El 32° resolvió con una tabla de números positivos. Tres sujetos (33°a 35°) no justifican su respuesta.

En síntesis:

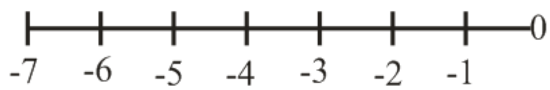
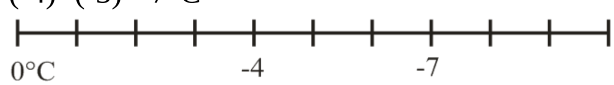
Cinco alumnos contestaron correctamente.

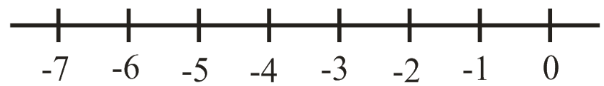
Treinta alumnos no contestaron correctamente.

Tabla 8. Variación de un estado

8. En la Ciudad de Chihuahua la temperatura por la noche era de 4 grados centígrados bajo cero y horas después por la mañana la temperatura descendió 3 grados centígrados, ¿cuánto marca el termómetro por la mañana?

Resultado
(-4)-(+3)=(-7)

Cantidad de alumnos	Estudiantes	Resultado	Proceso de resolución
1	1°	-7°C	Operación con negativos no convencional y vertical. -4C -3C -7C
1	2°	-7°C	Recta numérica horizontal con el cero y negativos.  0 -4 -3 -7 Operación con negativos no convencional y vertical.
1	3°	-7°C	Expresión sintáctica con suma de negativos. (-4)+(-3)=-7°C  Recta numérica horizontal con el cero y los negativos a la derecha.
1	4°	-7°C	Lenguaje verbal. Si tenemos -4 y le aumentamos otro -3, da -7
1	5°	-7°C	Representaciones alternativas. Lenguaje verbal. Noche -4, descendió -3°C, mañana -7°C. Expresión sintáctica sin paréntesis -4-3=-7 Serie numérica.
1	6°	-7°C	Lenguaje verbal. Sumamos los 4 grados que había por la noche más los 3 grados más que descendió por lo cual da 7 pero como la temperatura era bajo 0 pues es negativo y pasa a -7°C.

Cantidad de alumnos	**Estudiantes**	**Resultado**	**Proceso de resolución**
2	7° y 8°	-7°C	Expresión sintáctica sin paréntesis. -4-3=-7
1	9°	-7°C	Expresión sintáctica no convencional con negativos y horizontal, incluye °C. -4°C-3°C=-7°C
2	10° y 11°	-7°C	Expresión sintáctica con suma de negativos. (-4)+(-3)=-7
2	12° y 13°	-7°C	No justifica.
1	14°	Marca -7°C	Recta numérica horizontal con negativos hasta el -7 y el cero.  Lenguaje verbal. De -4° C, bajó 3 grados más. Operación no convencional con negativos y vertical. $\begin{array}{r} -4 \\ -3 \\ \hline -7 \end{array}$
1	15°	Marca -7°C	Lenguaje verbal. Marca -7 ° C porque era -4 y bajó 3°C o sea -3 sumados es -7° C. Expresión sintáctica con resta incorrecta. (-3)-(-4)=-7
1	16°	El termómetro marca -7°C.	Expresión sintáctica sin paréntesis. -4-3=-7 Recta numérica vertical con positivos y negativos descrita correctamente.
1	17°	-7 grados centígrados.	Termómetro vertical con positivos y negativos.
1	18°	-7 grados centígrados.	Lenguaje verbal con signo igual. Porque -4 grados -3 grados=-7 grados.
2	19° y 20°	-7 grados centígrados.	No justifica.
1	21°	7 grados centígra-dos bajo cero.	Suma aritmética vertical. 4+3=7. Respuesta correcta que no coincide con la operación realizada.

Cantidad de alumnos	**Estudiantes**	**Resultado**	**Proceso de resolución**
1	22°	7 grados centígrados bajo cero.	Recta numérica horizontal con positivos y negativos descrita correctamente.
2	23° y 24°	7 grados centígrados bajo cero.	No justifica.
1	25°	7° C bajo 0	Dos formas de representación numérica de la solución. 7° C bajo 0 ó 7 grados centígrados bajo cero, de igual manera -7°C.
1	26°	7g bajo cero.	Operación no convencional con negativos y en forma vertical. $\begin{array}{r} -4g \\ -3g \\ \hline -7g \end{array}$
1	27°	-7°C bajo cero o -7°C.	Expresión sintáctica con negativos y sin paréntesis, -4-3=-7, aunada a la representación híbrida: -4()-3()=-7() Recta numérica vertical con el cero y negativos.
1	28°	-7	Recta numérica vertical con el cero y negativos hasta el -7.
1	29°	Respuesta indicada en un dibujo del termómetro. (-7)	Dibujos de dos termómetros indicando dos momentos.
1	30°	No hay respuesta.	Dibujo de un termómetro con el cero, positivo 4 hasta el negativo 4.
1	31°	-1° C	Termómetro vertical con positivos y negativos.
1	32°	-1°C	Lenguaje verbal. -1°C, se restan los grados sigue siendo recta numérica. Recta numérica horizontal en la que marca el cero, el -1 y el -4.

Cantidad de alumnos	Estudiantes	Resultado	Proceso de resolución
1	33°	-1°C	Recta numérica vertical con positivos y negativos. Expresión sintáctica con suma de negativos y positivos, incluye °C. -4°C+3°C=-1°C
1	34°	1°	Termómetro en forma vertical con el cero en medio.
1	35°	1 grado.	Lenguaje verbal. Porque la resta de 4-3 da 1 grado centígrado.

Análisis de la tabla 8, Variación de un estado

8. En la Ciudad de Chihuahua la temperatura por la noche era de 4 grados centígrados bajo cero y horas después por la mañana la temperatura descendió 3 grados centígrados, ¿cuánto marca el termómetro por la mañana?

Resultado
(-4)-(+3)=(-7)

Trece alumnos escriben -7°C como respuesta. El alumno uno justifica con una operación de negativos no convencional y vertical $\begin{array}{c}-4C\\-3C\\\hline -7C\end{array}$. El alumno dos, usa una recta descrita correctamente y una operación con negativos no convencional y vertical en la que escribe el cero en la parte superior $\begin{array}{c}0\\\hline -4\\-3\\\hline -7\end{array}$. El tres escribe una expresión sintáctica con suma de negativos (-4)+(-3)=-7 y usa una recta numérica horizontal con el cero y los negativos a la derecha. El cuarto usa el lenguaje verbal correctamente indicando la adición de negativos. El quinto indica representaciones alternativas: lenguaje verbal en el que muestra los tres momentos correctamente. Usa la expresión sintáctica sin paréntesis -4-3=-7, escribe una serie numérica en la que parte del 10, pasa por el cero y llega al -7. El sexto usa el lenguaje verbal indicando una adición de positivos y finalmente señala, como la temperatura era bajo 0 pues es negativo y pasa a -7°C.

El siete y el ocho usan exclusivamente la expresión sintáctica sin paréntesis -4-3=-7. El nueve justifica con la expresión sintáctica no convencional con negativos y horizontal

-4°C-3°C=-7°C. El diez y el 11 usan exclusivamente la expresión sintáctica con suma de negativos (-4)+(-3)=-7. El 12 y 13 no justifican. El 14 y 15 escriben como respuesta: Marca -7°C. El 14 usa una recta numérica desde el -7 hasta el 0, usa lenguaje verbal, de -4°C, bajó tres grados más, indica dos momentos y omite el tercer momento. También escribe una operación no convencional con negativos y vertical $\begin{array}{r}-4\\-3\\\hline -7\end{array}$. El 15 explica con lenguaje verbal correctamente, hace una suma de negativos, pasa de los positivos, bajó 3°C, a negativos, o sea -3, la expresión sintáctica (-3)-(-4)=-7 no es correcta. El 16 escribe: El termómetro marca -7°C, justifica con una expresión sintáctica sin paréntesis -4-3=-7. Además usa una recta numérica descrita correctamente.

Del 17 al 20 escriben -7 grados centígrados como respuesta. El 17 justifica con un termómetro vertical con positivos y negativos. El 18 con lenguaje verbal se refiere a un sustraendo positivo: Porque -4 grados -3 grados =-7 grados. Si se da la interpretación de que quitar 3 positivos es igual a -3 para que resulte -7. Usa el signo igual =. El 19 y 20 no justifican su respuesta. Del 21 al 24 escriben 7 grados centígrados bajo cero como respuesta. El 21 recurre a una suma aritmética vertical 4+3=7 pasa del 7, a la negatividad en lenguaje verbal, 7 grados centígrados bajo cero. El 22 justifica con una recta numérica horizontal con positivos y negativos descrita correctamente. El 23 y 24 no justifican. El 25 escribe 7°C bajo 0 con lenguaje verbal. Propone dos formas de representación de la solución: 7°C bajo 0 equivale a -7°C.

El 26 escribe como respuesta 7g bajo cero. Usa una operación no convencional con negativos y en forma vertical $\begin{array}{r}-4g\\-3g\\\hline -7g\end{array}$. El 27 escribe -7°C bajo cero ó -7°C. La primera respuesta resulta redundante (-7°C bajo cero). Propone una expresión sintáctica con negativos y sin paréntesis -4-3=-7, aunada a la representación híbrida: -4(− − − −)-3(− − −)=-7(− − − − − − −). También emplea una recta numérica vertical con el cero y negativos. El 28 escribe -7 y usa una recta aritmética vertical con el cero y negativos hasta el -7. El 29 indica su respuesta en un dibujo de un termómetro (-7), justifica con dibujos de termómetros indicando dos momentos. El 30 no da respuesta. Dibuja un termómetro con el cero, positivo 4 hasta el negativo 4. El 31, 32 y 33 escriben -1°C como respuesta. El 31 usa un termómetro vertical con positivos y negativos. El 32 justifica con lenguaje verbal indicando que se restan los grados y la recta numérica en la que marca el cero, el -1 y el -4. El 33 usa una recta numérica vertical con positivos y negativos. También justifica con la expresión sintáctica de suma con negativos y positivos en la que incluye °C: -4°C+3°C=-1°C. El 34 escribe 1° como respuesta, justifica con un termómetro en forma vertical con el cero en el punto medio. El 35 escribe 1 grado, usa el lenguaje verbal "porque la resta de 4-3, da 1 grado centígrado".

En síntesis, si consideramos correcta la respuesta (-4)-(+3)=(-7) y su equivalente (-4)+(-3)=(-7), tres alumnos resuelven el problema.

Tabla 9. Comparación de un estado

9. En la Ciudad de México la temperatura mínima fue de 3 grados centígrados bajo cero y la máxima fue de 26 grados centígrados, ¿cuál es la diferencia entre las dos temperaturas?

Resultado
(26)-(-3)=(+29)

Cantidad de alumnos	Estudiantes	Resultado	Proceso de resolución
2	1° y 2°	29° C	Recta numérica con positivos y negativos.
2	3° y 4°	29 ° C	Recta numérica con positivos y negativos. Suma aritmética vertical 26+3=29
3	5°, 6° y 7°	29° C	Recta numérica con positivos y negativos. Suma aritmética horizontal 26+3=29
1	8°	29 g	Recta numérica con positivos y negativos. Suma aritmética horizontal 26+3=29
1	9°	29° C	Recta numérica con positivos y negativos. Lenguaje verbal: Simplemente se ve cuánto hace falta del -3 para el 26°C. Completación por conteo.
1	10°	29° C	Recta numérica con positivos y negativos. Lenguaje verbal: Estaba -3 y 26, lo único que hago es contar de -3 a 26 en la tabla y sale el resultado. Completación por conteo.
1	11°	29 grados	Lenguaje verbal: Porque 3 grados para 26 grados da 29° centígrados. Completación por conteo.
1	12°	29 grados	Lenguaje verbal: Porque son tres ° en lo que llega al 0° y más los 26° que faltan. Completación por conteo en dos pasos.

Cantidad de alumnos	Estudiantes	Resultado	Proceso de resolución
1	13°	29° C	Lenguaje verbal: Porque son los 26° que tiene para el cero y luego los -3 grados que suman 29° C. Completación por conteo en dos pasos.
1	14°	29° C	Lenguaje verbal: Porque como son los -3 ° C son negativos, entonces a los positivos se le aumentan. Completación por conteo en dos pasos.
1	15°	29° C	Lenguaje Verbal: Debido a que como es un número negativo el 3, en lugar de restar se suma al 26.
2	16° y 17°	26 grados	Representaciones intuitivas. Dibuja dos termómetros de las situaciones.
1	18°	23	Sustracción aritmética vertical 26-3=23
1	19°	29° C	Suma aritmética vertical 26+3=29
1	20°	29° C	Expresión sintáctica con el significado de grado, sustracción horizontal con el sustraendo negativo. 26°C-(-3°C)=29°C
1	21°	29° C	Expresión sintáctica, sustracción horizontal con el sustraendo negativo. 26-(-3)=29
2	22° y 23°	29° C	No justifica
1	24°	29° centígrados	No justifica.
1	25°	29 grados	No justifica.
1	26°	+29	Recta numérica con positivos y negativos. Completación por conteo.
1	27°	23° C	Expresión sintáctica, con el significado grados, adición con un sumando negativo -3°C+26°C=23° C
1	28°	23 grados centígrados	Recta numérica con positivos y negativos. Código personal. $\begin{matrix}-3\\26\end{matrix}$
1	29°	23 grados centígrados	No justifica.

Cantidad de alumnos	Estudiantes	Resultado	Proceso de resolución
1	30°	23 grados	Sustracción aritmética. 26-3=23 Lenguaje verbal: Puesto que a la mínima fue de -3 grados y la máxima 26. La diferencia nada más la sacamos restando. Asociación de la palabra diferencia con la sustracción.
1	31°	23° C	Representación concreta. Dibujo del termómetro. Sustracción aritmética vertical: 26-3=23.
1	32°	22 grados centígrados.	Suma no correcta con un sumando negativo -3+26=22
1	33°	30	Recta numérica con positivos y negativos. Error aritmético.
1	34°	30° C	Recta numérica con positivos y negativos. Error aritmético.
1	35°	No la registra	Lenguaje verbal: Que al principio era una temperatura bajo cero y después va ascendiendo. Representación concreta. Dibujo de un termómetro. Sentido de la diferencia.

Análisis de la tabla 9, Comparación de un estado

9. En la Ciudad de México la temperatura mínima fue de 3 grados centígrados bajo cero y la máxima fue de 26 grados centígrados, ¿cuál es la diferencia entre las dos temperaturas?

Resultado
(26)-(-3)=(+29)

El primero y segundo escriben la respuesta 29° C, usan la recta numérica con positivos y negativos. El tercero y cuarto alumno también escriben 29° C, usan la recta y hacen una suma aritmética vertical 26+3=29. El quinto, sexto, y séptimo siguen el mismo procedimiento que el tercero y el cuarto, la diferencia es que la suma aritmética es en forma horizontal. El octavo escribe 29° g, usa la recta y una suma aritmética horizontal 26+3=29. El noveno hace una completación por conteo, escribe 29° C, usa el lenguaje verbal: simplemente se ve cuánto hace falta del -3 para el 26°C y la recta numérica con positivos y negativos. El décimo hace una completación por conteo, escribe 29° C, usa la recta numérica y el lenguaje verbal: estaba -3 y 26, lo único que hago es contar de -3 a 26 en la tabla y sale el resultado.

Del onceavo al quinceavo usan exclusivamente el lenguaje verbal, el onceavo hace una completación por conteo escribió 29 grados y la frase: porque 3 grados para 26 grados da 29° centígrados. La completación por conteo del doceavo es en dos pasos, escribe 29 grados, justifica escribiendo: porque son tres ° en lo que llega al 0° y más los 26° que faltan. El treceavo también hace una completación por conteo en dos pasos, escribe 29° C y registra la frase: porque son los 26° que tiene para el cero y luego los -3 grados que suman 29°C. El catorceavo hace una completación por conteo en dos pasos, propone la respuesta 29° C y también escribe: porque como son los -3° C son negativos, entonces a los positivos se le aumentan. El quinceavo registra 29° C en su respuesta y escribe: debido a que como es un número negativo el 3, en lugar de restar se suma al 26.

El dieciseisavo y diecisieteavo escriben 26 grados, dibujan dos termómetros con las situaciones que plantea el problema. El dieciochoavo escribe 23, hace una sustracción aritmética vertical 26-3=23. El diecinueveavo escribe 29°C usa una suma aritmética vertical 26+3=29. El veinteavo escribe 29° C usa la expresión sintáctica con significado de grados y una sustracción horizontal con sustraendo negativo 26°C-(-3°C)=29°C. El veintiunavo escribe 29° C usa la expresión sintáctica sustracción horizontal con el sustraendo negativo 26-(-3)=29. El veintidosavo y veintitresavo escriben 29° C y no justifican. El veinticuatroavo escribe 29° centígrados y no justifica. El veinticincoavo escribe 29 grados y tampoco justifica. El veintiseisavo escribe +29, usa la recta numérica con positivos y negativos. El veintisieteavo escribe 23° C justifica con la expresión sintáctica con el significado de grados, usa una adición con un sumando negativo -3°C+26°C=23°C.

El veintiochoavo escribe 23 grados centígrados usa la recta numérica con positivos y negativos además una expresión con un código personal $\begin{matrix}-3\\26\end{matrix}$. El veintinueveavo escribe 23 grados centígrados y no justifica. El treintavo escribe 23 grados justifica con una sustracción aritmética 26-3=23 con la expresión: puesto que a la mínima fue de -3 grados y la máxima 26, la diferencia nada más la sacamos restando, asoció la palabra diferencia con la sustracción.

El treintaiunavo escribe 23° C justifica con una representación concreta: dibujo del termómetro y una sustracción aritmética vertical; 26-3=23. El treintaidosavo responde 22 grados centígrados, usa una suma no correcta con un sumando negativo -3+26=22. El treintaitresavo escribe 30 usa una recta numérica con positivos y negativos se presenta un error aritmético. El treintaicuatroavo escribe 30° C usa una recta numérica con positivos y negativos tiene un error aritmético. El treintaicincoavo no registra la respuesta, sólo justifica con el dibujo de un termómetro y lenguaje verbal: que al principio era una temperatura bajo cero y después va ascendiendo, le da sentido a la palabra diferencia.

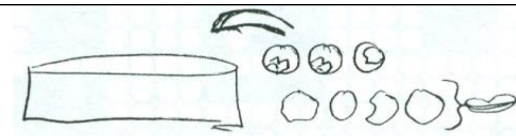
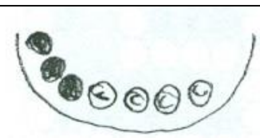
En síntesis y considerando (26)-(-3)=(+29) como respuesta correcta, dos estudiantes resuelven el problema.

Tabla 10. Variación de un estado

10. La mamá de Gabriel compró ciruelas, las cuales fueron colocadas en un recipiente, pasaron dos días y se pudrieron 3 ciruelas. Y Gabriel se comió 4. ¿Cómo se expresa la cantidad de ciruelas que ya no forman parte de las que se podían comer al estar recién compradas? Justifica tu respuesta con una operación.

Resultado
(-3)+(-4)=(-7)

Cantidad de alumnos	Estudiantes	Resultado	Proceso de resolución
1	1°	7 es igual al número de ciruelas que ya no se pueden comer.	4 que ya fueron comidas y 3 podridas (las que se comen y las que no se comen). 4+3=7 Suma aritmética horizontal con explicación en lenguaje verbal.
1	2°	Ya no se pueden comer 7 ciruelas.	T=Total de ciruelas. T-3-7=ciruelas que se pueden comer. 3+4=Ciruelas que no se pueden comer. Asigna a T el significado de total, usa negativos -3 y -7. Suma aritmética horizontal sin indicar el resultado en la operación sino el significado de estos números en el contexto del problema en lenguaje verbal.
1	3°	-7x ciruelas	x cantidad de ciruelas. x(-3-4)=-7 ciruelas. -7x ciruelas. Expresión algebraica no convencional.

Cantidad de alumnos	**Estudiantes**	**Resultado**	**Proceso de resolución**
1	4°	7	 3 se pudrieron, 4 se comió, al sumarlos dan 7 y no queda ni una. Lenguaje verbal. Dibujos.
1	5°	7	3+4=7 Suma aritmética vertical.
1	6°	x-7	 (x-3)+(x-4)=x-7 Dibujos. Expresión algebraica.
1	7°	x-7	7 ciruelas no se pueden comer ya que se pudrieron 3 y se comieron 4. Se pudrieron 3. x-3 Se comió 4. x-4 x-7 Lenguaje verbal. Operación no convencional de expresiones algebraicas en forma vertical.
1	8°	x-7	Día 1 Día 3 x x-3 x=Cantidad de ciruelas recién compradas. Expresión algebraica. Lenguaje verbal. Introduce el tiempo.
2	9° y 10°	x-7	x-3-4=x-7 Expresión algebraica no convencional.
1	11°	-7	Recta numérica descrita correctamente. Operación no convencional con negativos y vertical. - 3 -4 -7 Reminiscencia de las operaciones aritméticas.

Cantidad de alumnos	Estudiantes	Resultado	Proceso de resolución
1	12°	-7	(-3)+(-4)=-7 x-7 Expresión sintáctica correcta. Expresión algebraica.
3	13°, 14° y 15°	Respuesta no indicada.	Dibujo de 4 manzanas y 3 podridas.
1	16°	Respuesta no indicada.	xÓ-7 ÓÓÓÓÓÓÓ Representación híbrida.
1	17°	Respuesta no indicada.	Suma aritmética vertical 3+4=7 Resta aritmética vertical 7-3=4
1	18°	Respuesta no indicada.	(x-3)-4= Expresión algebraica no convencional.
1	19°	Respuesta no indicada.	P3 GC4 Letras y números que corresponden al contexto del problema.
1	20°	x-3	Pasaron 2 días, ya no estaban recién compradas, así que son 3 ciruelas menos, x-3. Lenguaje verbal. Expresión algebraica.
1	21°	x-3	Compró x pasaron 2 días pudrieron 3 comió 4 x-3 Lenguaje verbal. Expresión algebraica.
1	22°	x-3	2d=-3c g=4 Expresiones propias con letras y números. Expresión algebraica.
2	23° y 24°	x-3	No muestra procedimiento.
1	25°	c-3	Si se compró "c" cantidad de ciruelas, ese sería nuestro total y al pudrirse 3, se tendría que expresar como "-3" por lo que da c-3. Lenguaje verbal. Expresión algebraica.

Cantidad de alumnos	Estudiantes	Resultado	Proceso de resolución
1	26°	3 ciruelas ya no se pueden comer porque se pudrieron.	Comidas por Gabriel. → 4 - 3 ← Podridas. 1 ← Posiblemente quedan. Resta aritmética vertical. Lenguaje verbal.
1	27°	3	7-4=3 Sólo sumé la cantidad de ciruelas podridas con las que se comieron y luego resté otra vez las 3 que estaban mal. Resta aritmética vertical. Lenguaje verbal.
1	28°	x-3=4	x-3=4 x=la cantidad de ciruelas en un principio. 3=ciruelas podridas. 4=ciruelas comidas por Gabriel. Expresión algebraica. Lenguaje verbal.
1	29°	x-4	n=número de ciruelas podridas. n+4=x n=x-4 n=3 x-4=3 x=3+4 x=7 Expresiones algebraicas.
1	30°	x-2	Recién compradas todas se podían comer, después de 2 días quedó= x-4-2=y que no se pueden comer, es x-2 la cantidad de ciruelas. Lenguaje verbal con expresión algebraica.
1	31°	x	c-3-4=x donde c= ciruelas -3=ciruelas podridas -4=ciruelas comidas x=resultado Expresión algebraica. Lenguaje verbal.
4	32°, 33°, 34° y 35°	12, 14, 25 y 31	No contestó.

Análisis de la tabla 10, Variación de un estado

10. La mamá de Gabriel compró ciruelas, las cuales fueron colocadas en un recipiente, pasaron dos días y se pudrieron 3 ciruelas. Y Gabriel se comió 4. ¿Cómo se expresa la cantidad de ciruelas que ya no forman parte de las que se podían comer al estar recién compradas? Justifica tu respuesta con una operación.

Resultado
(-3)+(-4)=(-7)

El primer alumno escribe la respuesta: 7 es igual al número de ciruelas que ya no se pueden comer, usa la suma aritmética horizontal 4+3=7, explica el contexto del problema con lenguaje verbal. El segundo escribe como respuesta: Ya no se pueden comer 7 ciruelas. Justifica con negativos, asigna un valor a T, también usa una suma aritmética horizontal 3+4=. En lugar de escribir el resultado, explica con lenguaje verbal que la suma de esos números es la respuesta del problema. El tercero escribe -7x ciruelas, usa una expresión algebraica no convencional, x es la cantidad de ciruelas, luego suma -3 con -7, escribe: x(-3-4)=-7. Al final agrega x a -7, resulta 7x ciruelas. El cuarto y quinto alumnos escriben 7 como respuesta. El cuarto dibuja 4 ciruelas y 3 ciruelas podridas, explica el significado en lenguaje verbal. El quinto alumno justifica con la suma aritmética vertical 3+4=7.

Del sexto al décimo escriben la respuesta x-7. El sexto dibuja 3 manzanas obscuras y 4 claras, escribe la expresión algebraica (x-3)-(x-4)=x-7 que no es correcta porque el resultado debe ser 2x-7. El séptimo escribe la operación no convencional de expresiones algebraicas en forma vertical $\begin{array}{r r} \text{Se pudrieron 3.} & x-3 \\ \text{Se comió 4.} & \underline{x-4} \\ & x-7 \end{array}$, explica con lenguaje verbal el significado de las expresiones. El octavo explica que hay dos momentos, el día 1 que le corresponde x que es la cantidad de ciruelas recién compradas y el día 3 x-3. Sin embargo registra la respuesta x-7. El noveno y décimo justifican con la expresión algebraica no convencional x-3-4=x-7. El 11° y 12° registran la respuesta -7. El 11° usa una recta descrita correctamente además la operación no convencional con negativos y vertical $\begin{array}{r} -3 \\ \underline{-4} \\ -7 \end{array}$. El 12° resuelve correctamente, con la expresión sintáctica (-3)+(-4)=-7, también escribe x-7.

Del 13°al 19° no indican la respuesta. El 13°, 14° y 15° resuelven de manera similar, justifican con dibujos de 4 manzanas y 3 manzanas podridas. El 16° registra la representación híbrida: x-7 . El 17° justifica con la suma aritmética vertical 3+4=7 y la resta aritmética vertical 7-3=4. El 18° usa la expresión algebraica no convencional (x-3)-4= en la que no indica el resultado. El 19° usa el lenguaje verbal y números que corresponde al contexto del problema: pudrieron P3, Gabriel comió GC4. Del 20° al 24° escriben como respuesta x-3. El 20° usa el lenguaje verbal y expresiones algebraicas, explica “al pasar dos días ya no están recién compradas las ciruelas por lo que su respuesta es x-3”. El 21° justifica con expresiones algebraicas explica que pasaron dos días y se pudrieron 3 manzanas. También indica que Gabriel se comió 4, sin embargo su respuesta es x-3.

El 22° usa expresiones propias con letras y números 2d=-3c g=4. Da como respuesta la expresión algebraica x-3. El 23° y 24° no registran algún procedimiento. El 25° escribe la respuesta c-3, usa el lenguaje verbal y expresiones algebraicas. Indica que “c” es el total de ciruelas y como se pudrieron tres se expresa “-3” por lo que resulta c-3. El 26° escribe como respuesta 3 ciruelas ya no se pueden comer porque se pudrieron. Usa una resta aritmética vertical con lenguaje verbal. El 27° escribe el 3 como respuesta, justifica con la resta aritmética horizontal 7-4=3, usa el lenguaje verbal, su explicación “Sólo sumé la cantidad de ciruelas podridas con las que se comieron y luego resté otra vez las 3 que estaban mal” no corresponde con la resta. El 28° registra la respuesta x-3=4, usa el lenguaje verbal y expresiones algebraicas x-3=4 explica los datos del problema: x=la cantidad de ciruelas en un principio, 3=ciruelas podridas, 4=ciruelas comidas por Gabriel. Sin embargo la respuesta no es correcta. El 29° escribe como respuesta x-4, usa expresiones algebraicas que son lógicas: n=número de ciruelas podridas, n+4=x, n=x-4, n=3, x-4=3, x=3+4, x=7 pero no logra relacionarlas para dar una correcta justificación.

El 30° registra la respuesta x-2, usa lenguaje verbal con expresiones algebraicas, “Recién compradas todas se podían comer, después de 2 días quedó= x-4-2=y que no se pueden comer, es x-2 la cantidad de ciruelas”. El 2 de la expresión x-4-2 no corresponde con los datos del problema, esto lo lleva a la expresión x-2 tampoco es correcta. El 31° propone como respuesta x, usa expresiones algebraicas y lenguaje verbal. Estas expresiones: c-3-4=x donde c= ciruelas, -3=ciruelas podridas, -4=ciruelas comidas, x=resultado, son lógicas pero no llega a establecer una relación que lo lleve a la respuesta correcta.

En síntesis y considerando la expresión (-3)+(-4)=(-7) como correcta. Solamente un alumno resuelve el problema.

Tabla 11. Variación de un estado

11. Elvira tiene una deuda de 14 pesos y decide disminuir su deuda para deber 6 pesos menos, ¿Cuál será la deuda actual?

Resultado

(-14) -(-6) = (-8)

Cantidad de alumnos	**Estudiantes**	**Resultado**	**Proceso de resolución**
19	Del 1° al 19°	8	Expresión sintáctica. Sustracción con positivos: 14 - 6 = 8
1	20°	8	Expresión sintáctica. Sustracción con positivos: 14 - 6 = 8 Lenguaje verbal, equivalencia semántica disminuir la deuda con pagar.
1	21°	8	Expresión sintáctica. Sustracción con positivos: 14 - 6 = 8 Lenguaje verbal. Palabra deuda. Uso de tabla.
1	22°	8	Ecuación de primer grado de la forma a + x = b
3	23°, 24° y 25°	8	No justifica
1	26°	-8	Expresión sintáctica. Adición con un sumando negativo. -14 + 6 = -8 16 - 6 = 8 Expresión sintáctica. Sustracción con positivos. Lenguaje verbal, contrarios, deber 8, tener -8.
2	27° y 28°	-8	Expresión sintáctica. Adición con un sumando negativo. -14 + 6 = -8 Lenguaje verbal: deber 8 es igual a -8 (alumno 27°). El alumno 28° escribió: Es una suma porque como es deuda se tiene que agregar dinero.
2	29° y 30°	-8	Expresión sintáctica. Adición con sumando negativo. -14 + 6 = -8

Cantidad de alumnos	Estudiantes	Resultado	Proceso de resolución
1	31°	6	Sustracción con positivos 14 - 8 = 6 Representaciones intuitivas; billetes y monedas, representa las tres partes de la sustracción.
1	32°	6	Lenguaje verbal; equivalencia entre disminuir su deuda con pagando. Sustracción vertical con positivos $\begin{array}{r} -14 \\ 6 \\ \hline 8 \end{array}$, señala que es igual a $\begin{array}{r} -14 \\ 8 \\ \hline 6 \end{array}$.
1	33°	6	Lenguaje verbal: si quiere disminuir a 6 pesos, tiene que pagar primero 8.
1	34°	6	No justifica
1	35°	-6	Recta numérica con negativos, parte del -14 y llega al -6.

Análisis de la tabla 11, Variación de un estado

11. Elvira tiene una deuda de 14 pesos y decide disminuir su deuda para deber 6 pesos menos, ¿Cuál será la deuda actual?

Resultado
(-14) -(-6) = (-8)

Veintiséis alumnos (1° a 25°) escriben 8 como respuesta, de los cuales 19 (1° a 19°) registran una expresión sintáctica de sustracción con positivos $\begin{array}{r} -14 \\ 6 \\ \hline 8 \end{array}$. El 20° estudiante además de la sustracción con positivos utilizan el lenguaje verbal, un alumno (21°) recurre a la expresión sintáctica de sustracción con positivos, lenguaje verbal y uso de tabla. Un alumno (22°) justifica con una ecuación de primer grado. Tres estudiantes (23° a 25°) no justifican su respuesta.

Cinco estudiantes (26° a 30°) señalan que la respuesta es -8, uno de ellos (26°) registra una expresión sintáctica de adición con un sumando negativo $-14+6=-8$, recurre a los positivos en una expresión sintáctica de sustracción $14-6=8$ y también se apoya del lenguaje verbal señalando la equivalencia de deber 8 con tener -8. Otros dos sujetos (27° y 28°) utilizan una expresión sintáctica de adición con un sumando negativo también el lenguaje verbal: deber 8 es igual a -8 y como es deuda se tiene que agregar dinero. Dos estudiantes (29° y 30°) utilizan exclusivamente la expresión sintáctica de adición con un sumando negativo.

De los 4 alumnos que escriben el 6 como respuesta el 31° hace uso de los positivos con una sustracción 14-8=6 y representaciones intuitivas, el 32° recurre al lenguaje verbal: disminuir su deuda es lo mismo que pagar, el 33° recurre al lenguaje verbal, interpreta que Elvira quiere disminuir su deuda a 6 pesos. El 34° no justifica.

El 35° propone la respuesta -6 apoyándose de la recta numérica. Hizo un conteo equivocado en la recta.

En síntesis:

Cinco alumnos contestaron correctamente.

Treinta alumnos contestaron de una forma incorrecta.

Tabla 13. Variación de variaciones

13. El día de ayer a una araña se le escaparon 3 moscas que habían caído en su red, hoy se le escaparon 5 menos que ayer. ¿Cuántas moscas atrapó?

Resultado

(-3)-(-5) = (+2)

Cantidad de alumnos	Estudiantes	Resultado	Proceso de resolución
2	1° y 2°	2	Expresión sintáctica. Sustracción con negativos. (-3)-(-5) = 2
1	3°	2	Expresión sintáctica. Sustracción con negativos y positivos. (-3)-(+5) = 2
1	4°	2	Expresión sintáctica. Sustracción con positivos. $\begin{array}{r} - \; 3 \\ \underline{5} \\ 2 \end{array}$

Cantidad de alumnos	Estudiantes	Resultado	Proceso de resolución
1	5°	2	Expresión sintáctica. Sustracción con positivos. 5 - 3 = -2 Representación intuitiva: telarañas y moscas.
1	6°	2	Expresión sintáctica. Adición con negativos y positivos. -3 + 5 = 2
1	7°	2	Expresión sintáctica. Adición con negativos positivos. -3 + 5 = 2 Lenguaje verbal, equivalencia de las palabras escapar con resta y sumar con frase: las que no se escaparon menos.
1	8°	2	Expresión sintáctica. Adición con negativos y positivos. - 3 + 5 = 2 Lenguaje verbal, equivalencia de escapar 3 con tener -3, partiendo del cero.
1	9°	2	Expresión algebraica de sustracción con negativos. x-3-(-5) = 2
1	10°	2	Recta numérica partiendo del cero, yendo a la izquierda y desde ahí hacia la derecha. Lenguaje verbal, equivalencia de los números 0, -3 + 5 con las frases; no atrapó nada, se le escaparon y hoy atrapó 5 más que ayer respectivamente.
1	11°	2	Recta numérica partiendo del cero, yendo a la izquierda y desde ahí hacia la derecha.
1	12°	2	Repetición de las frases del enunciado del problema.
1	13°	+2	Expresión sintáctica, sustracción con negativos y positivos. (-3)-(+5) = +2
1	14°	x + 2	Expresión algebraica con positivos y negativos. (x-3) - (-5) = (x-3) + 5 = x +2 Lenguaje verbal equivalencia de las expresiones x - 3 y -(-5) con las frases: se le escaparon 3 y se le escaparon cinco menos al día anterior, respectivamente.
1	15°	x +2	Expresión algebraica: x - 3 x + 5 x + 2
1	16°	(x - 3) +2	Expresión algebraica: (x - 3), (x - 3) + 2
1	17°	5	Lenguaje verbal, equivalencia de se le escaparon cinco menos con atrapó.
1	18°	5	Lenguaje verbal, equivalencia de: se le escaparon 5 menos con, no se escaparon 5.

Cantidad de alumnos	Estudiantes	Resultado	Proceso de resolución
1	19°	5	Expresión sintáctica. Sustracción con positivos. 10 -(-5) = 5
1	20°	8	Expresión algebraica. Sustracción con positivos y negativos. 3a - 5a = 2a Representaciones intuitivas, dibujo de telarañas y moscas.
1	21°	8	Expresión sintáctica. Adición con positivos. 3 + 5
1	22°	8	Ecuación de primer grado: x + a = b (incorrecta) 3 - 5 = x x = 5 + 3 x = 8
1	23°	8	Lenguaje verbal explicando la dificultad de interpretar el problema.
1	24°	8	Lenguaje verbal, explica que se suman las 3 que se le escaparon ayer, más las 5 de hoy.
1	25°	-8	Expresión sintáctica. Sustracción con positivos y negativos. 3 - 5 = -8 Representación intuitiva, dibujo de telaraña y moscas.
1	26°	Las que no escaparon	Lenguaje verbal, explica que no se señala el número de moscas que atrapó.
1	27°	8 ó 10	Lenguaje verbal, señala que, el día anterior se le escaparon 3 pero tenía 5. Representaciones intuitivas, dibujos de telaraña y moscas.
1	28°	11	Expresión sintáctica. Adición con negativos, adición con positivos. -3-5 = -8 (vertical) 5 + 3 = 8 8 + 3 = 11
1	29°	11	Lenguaje verbal, 6 que atrapó ayer, hoy atrapó 5 moscas más que ayer, en otras palabras se le escaparon 5 menos, por lo que al parecer escribe 11 como respuesta.
1	30°	7	No justifica.
1	31°	y	Expresión algebraica. x - 3 - 5 = y
1	32°	x	Expresión algebraica. Ayer x - 3 Hoy x Lenguaje verbal en el que afirma que hoy no se le escaparon moscas.
1	33°	Ninguna	Representación intuitiva, dibujó 8 moscas y señala que ninguna se escapó.
1	34°	Ninguna	Lenguaje verbal, repite por escrito el problema.
1	35°	Ninguna	Lenguaje verbal, señala que no es posible que hoy se escapen 5 menos que ayer porque ayer sólo se le escaparon 3.

Análisis de la tabla 13, Variación de variaciones

13. El día de ayer a una araña se le escaparon 3 moscas que habían caído en su red, hoy se le escaparon 5 menos que ayer. ¿Cuántas moscas atrapó?

Resultado

(-3)-(-5) = (+2)

Doce estudiantes escribieron como respuesta 2; el 1° y 2° primero utilizan la sintaxis en una sustracción de negativos: (-3)-(-5)=2, omitiendo el + en el 2, el tercero responde con el número dos pero la expresión (-3)-(+5)=2 no es correcta. La expresión sintáctica con positivos del cuarto $\begin{array}{r} -3 \\ 5 \\ \hline 2 \end{array}$ no es correcta. El quinto escribe una sustracción con positivos 5-3=2 y dibuja la telaraña y las moscas. El sexto utiliza la sintaxis con una adición de negativos y positivos -3+5=2 la cual consideramos correcta aunque omitió el + en el 2. El séptimo y el octavo utilizan la misma expresión que el sexto. Se apoyan en el lenguaje verbal. El octavo escribe una equivalencia semántica: escapar 3 con -3, partiendo del cero. El noveno sujeto utiliza la expresión algebraica x-3-(-5) = 2. El 10° estudiante usa dos recursos que incluyen a negativos; recta numérica y lenguaje verbal. El 11° sólo utiliza la recta numérica. El 12° repite por escrito el enunciado del problema. El 13° propone una expresión sintáctica de sustracción con negativos y positivos no correcta: (-3)-(+5) = +2

El 14° estudiante, escribe (x -3)-(-5)=(x+2) pasa del lenguaje verbal a expresiones con negativos. En la respuesta x+2 del 15° estudiante aparece el sentido sustractivo de la negatividad porque resta 5-3 de las expresiones x-3, x+5 que inventa para resolver el problema.

El 16° alumno escribe expresiones algebraicas.

El 17° y 18° utilizan expresiones semánticas equivalente, no resuelven correctamente el problema.

Seis alumnos (del 19° al 24°) escribieron como respuesta el 8. Se observa que operaron con los números 3 y 5 y realizaron distintos procedimientos que no los llevó a contestar correctamente.

El 25° contesta -8 con una sintaxis incorrecta y sus dibujos no muestran una representación clara de la situación del problema.

El 26° no realizó una comprensión correcta del problema. El 27° tampoco interpretó correctamente el problema.

Los alumno 28° y 29° escriben como respuesta el 11, sólo en el caso del 29° se encontró una explicación que nos permitió interpretar el porqué de su respuesta, indica que son 6 moscas de ayer y luego con una expresión semántica equivalente señala que a las 6 se le suman las 5. El procedimiento del 28° no es claro para nosotros.

El 30° no justifica. El 31° escribe una expresión algebraica. El 32° además de usar literales señala una equivalencia semántica de una parte del problema.

La representación concreta del 33° no representa claramente la información del enunciado y no lleva al alumno a resolver el problema correctamente.

La explicación escrita del alumno 34° es una copia del problema.

La justificación del 35° sugiere que este problema es difícil de interpretar para algunos estudiantes.

Consideramos el 2 y no sólo al +2 como respuesta correcta, a pesar de estar trabajando con enteros, ya que desde la enseñanza se omite el +.

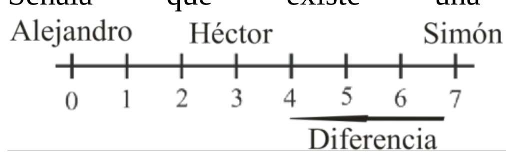
8 alumnos resolvieron correctamente el problema.

Tabla 14. Combinación de comparaciones adyacentes

14. Alejandro tiene 3 canicas menos que Héctor, Simón tiene 7 canicas más que Alejandro. ¿Cuántas canicas más tiene Simón que Héctor?

Resultado
(-3)+(+7)=(+4)

Cantidad de alumnos	**Estudiantes**	**Resultado**	**Proceso de resolución**
1	1°	4 canicas.	Expresiones algebraicas y lenguaje verbal explicando la relación entre las tres cantidades dadas. Alejandro = x-3 Héctor = x Simón= x-3+7
1	2°	4 canicas.	Expresiones algebraicas y uso del lenguaje verbal. x x-3 x-3+7 x+4 -3+7=+4
1	3°	4 canicas.	Expresiones algebraicas. Alejandro Simón Héctor (x-3) (x-3)+7 (x+3)

Cantidad de alumnos	Estudiantes	Resultado	Proceso de resolución
1	4°	4 canicas.	Sustracción de expresiones algebraicas. Alejandro=x Héctor=x+3 Simón=x+7 (x+7)-(x+3)=4
1	5°	4 canicas.	Asigna a Alejandro y Simón valores enteros. Ningún número asocia con Héctor. Agrega una sustracción de naturales. Héctor ? Alejandro -3 Simón +7 7-3=4
1	6°	4 canicas.	Lenguaje verbal y expresión sintáctica con un sumando negativo. -3+7=4
1	7°	4 canicas.	Expresiones algebraicas, sustitución de A en S. A=H-3 S=A+7 S=(H-3)+7 S=H+4
1	8°	4 canicas.	Expresiones algebraicas, igualación de los valores de A. A=H-3 A=S+7 S+7=H-3 S-H=7-3 S-H=4
1	9°	4 canicas.	Recta numérica con el cero y positivos. Señala que existe una diferencia.  7-3=4
1	10°	4 canicas.	Expresiones algebraicas y representaciones intuitivas: palitos. A I H IIII S IIIIIII Alejandro (-3)-(x) Simón (7)+(-3) +4
1	11°	4 canicas.	Asignación de un número de canicas a cada persona. A=10 H=13 S=17
1	12°	4 canicas.	Asignación de un número de canicas a cada persona. Héctor 11 canicas. Simón 15 canicas. Alejandro 8 canicas.

Cantidad de alumnos	Estudiantes	Resultado	Proceso de resolución
1	13°	4 canicas.	Ecuación de primer grado: x+a=b incorrecta. Asignación de un número de canicas a cada persona. A=10, H=13, S=17
1	14°	4 canicas.	Expresiones algebraicas distintas para el valor de A. A=3x A=7x
1	15°	4 canicas.	Explica los datos del problema y concluye: se hace una resta 7 canicas (Simón) menos 3 canicas (Alejandro) es igual a 4.
1	16°	Simón tiene 4 canicas más que Héctor.	Expresión algebraica, con un sumando negativo. Héctor x Alejandro x-3 Simón x-3+7 x-3+7=x+4
1	17°	Tiene 4 canicas más.	Códigos personales, adición con positivos y negativos introduciendo x. A-3 Héctor S+7 Alejandro Héctor x-3=x-3+7=x-4
1	18°	Simón tiene 4 canicas más que Héctor.	Expresiones algebraicas. Sustracción en forma vertical. Héctor x Alejandro x-3 Simón x+7 x-3 - x+7 -4
1	19°	Simón tiene 4 canicas más que Héctor.	Expresiones algebraicas, lenguaje verbal explicando sus significados. Asignación de un número de canicas a cada persona. A S Ale Hec Sim H-3 7+A 7 10 14 Si Alejandro tiene 3-H (7), Simón 7+A (14), y Héctor 3+H (10), se toma como referencia a Héctor con un número x y se da valor a los demás.

Cantidad de alumnos	Estudiantes	Resultado	Proceso de resolución
1	20°	4 canicas tiene Simón más que Héctor.	Asignación de un número de canicas a cada persona. Héctor Alejandro Simón 8 5 12
1	21°	Simón tiene 4 canicas más que Héctor.	H=10 - 3 A= 7 Sustracción con positivos. S=14 Alejandro tiene 7. Simón tiene 14 porque tiene 7 más que Héctor.
1	22°	4 canicas más que Héctor.	No justifica.
1	23°	4	Asignación de dos números y una incógnita ?=x. Expresiones algebraicas. A H S -3 ? +7 x-3 x-3+7
1	24°	x=4	Expresiones algebraicas, adición con positivos y negativos. Lenguaje verbal. Concluye: es como si a 7 le restas 3 y da 4 que son las canicas que tiene de más Simón que Héctor. Héctor x Alejandro x-3 Simón x-3+(+7)
1	25°	4	Sustracción con sustraendo negativo y representaciones concretas: canicas. 3-7=4

Cantidad de alumnos	Estudiantes	Resultado	Proceso de resolución
1	26°	No lo indica.	Asignación de un número de canicas a cada persona. Introduce x. No. De canicas. Héctor Alejandro Simón x x-3 (x-3)+7
1	27°	No lo indica.	Asignación de un número de canicas a cada persona. Representación no usual de una recta numérica. A H S -3 1 4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4
1	28°	Héctor 3-x Alejandro 7+x	Expresiones algebraicas. Dibujos de canicas donde aparece x. Alejandro Héctor Simón - ooo x +ooooooo
1	29°	10 canicas más.	Expresiones algebraicas y lenguaje verbal estableciendo, relación entre dos cantidades. x-3 x+7 10 canicas más, esto como resultado de que tomamos como base a Alejandro y observamos que tiene 3 menos, + los 7 que tiene Simón de más, dan 10 canicas.
1	30°	10 canicas más.	Adición con positivos. $\begin{array}{r} +7 \\ 3 \\ \hline 10 \end{array}$
1	31°	10	Escribe: sólo se suma las canicas que Héctor tiene más que Alejandro y Simón, 10 canicas.
1	32°	$x^2 = 10$	Ecuación de primer grado, escribe una variable al cuadrado. A=3-q' H S=7+q'A 3-x=7+x x-x=7+3 $x^2 = 10$

Cantidad de alumnos	Estudiantes	Resultado	Proceso de resolución
1	33°	21 canicas.	Lenguaje verbal. a=-3h s=+7a y $h=\frac{a}{3}$
1	34°	3 canicas.	Resolución de una ecuación de primer grado. 4+3=7+x +4-3=7+x 1=7+x -6=x +4-3=7-6 +1=+1
1	35°	x-3+7	Asignación de expresiones algebraicas a cada persona. Alejandro Héctor Simón x-3 x x-3+7

Análisis de la tabla 14, Combinación de comparaciones adyacentes

14. Alejandro tiene 3 canicas menos que Héctor, Simón tiene 7 canicas más que Alejandro. ¿Cuántas canicas más tiene Simón que Héctor?

Resultado
(-3)+(+7)=(+4)

Quince alumnos escriben como respuesta 4 canicas. El primero de ellos le asigna la incógnita a Héctor, de ahí resta para destinarle a Alejandro x-3. Finalmente escribe: Simón x-3+7, que es lo que le corresponde a Alejandro (x-3) más 7 de Simón. El segundo alumno escribe el mismo procedimiento que el primero. Explica con lenguaje verbal llegando a la expresión -3+7=4 en la que ya no escribe x. El tercero también utiliza expresiones algebraicas. Aparecen los números relativos x-3 que le corresponde a Alejandro y x+3 a Héctor. La expresión (x-3)+7 es equivalente a x-3+7 aparecida en el primer y segundo caso. El alumno no opera esta expresión. El cuarto alumno parte del valores de Alejandro (x) es por eso que a Héctor le asigna x+3, luego saca la diferencia de (x+3) de Héctor con (x+7) de Alejandro y llega a 4. La expresión del quinto alumno contiene una idea parecida a la de los alumnos primero a tercero, sólo que este alumno no utiliza x y a Héctor no le asigna un número.

Él resuelve correctamente el problema considerando a la expresión sintáctica (-3)+(+7)=(+4) como la correcta.

El sexto estudiante expresa con sus propias palabras la misma información del enunciado y llega a la sintaxis correcta -3+7=A. El séptimo alumno sustituye A en S. El octavo iguala los valores de A, se equivoca en el proceso de resolución del problema dos veces conduciéndolo al resultado correcto. El noveno utiliza la recta numérica y señala la diferencia con una flecha hacia la izquierda. El décimo alumno se apoya del álgebra y de las representaciones concretas para justificar. Los alumnos 11° y 12° asignan un número a cada persona, no utilizan los mismos números para cada una. El 13° también asigna un número a cada persona y justifica con una ecuación que no lo lleva a la respuesta. El 14° utiliza expresiones algebraicas pero no resuelve el problema. La respuesta del 15° no muestra los datos suficientes para hacer una interpretación de cómo comprendió el problema.

Siete alumnos escriben como respuesta que Simón tiene 4 canicas más que Héctor. La respuesta del alumno 16° contiene un procedimiento similar a la de los alumnos 1°, 2°, 17°, 23° y 24°. La expresión que registra el 17° estudiante es similar a la de los alumnos primero a tercero y a la del 16° pero los pasos muestran un camino diferente. El 18° trata de resolver el problema con una sustracción, no la resuelve ya que escribe -4 como resultado de la operación. Debió ser 10. Nótese que el cuarto alumno utiliza una sustracción con las mismas expresiones, pero el 18° alumno coloca a x-3 en el minuendo. Como se indicó anteriormente la respuesta debió ser 10, él escribe 4, no llega a la respuesta con un procedimiento correcto. El alumno 19 combina el lenguaje verbal con expresiones algebraicas, explica que a cada persona le corresponde un número y que también puede expresarse estableciendo relaciones con abreviaturas. El 20° alumno sigue un camino parecido al 11° y 12°. El 21° resuelve con una sustracción de positivos, e1 22° no justifica.

El 23° asigna x a Héctor, señala que Alejandro tiene -3 y Simón +7. Esto lo interpretamos como: tiene 7 más que Alejandro, además utiliza la expresión x-3+7 como los alumnos 1°, 2°, 16°, 17°, 23°, 24° y 35°.

El 24° alumno utiliza la expresión x-3+(+7) que es equivalente a la usada por los alumnos, 1°, 2°, 16°, 17°, 23° y 35° (x-3+7). La sustracción que resuelve el alumno 25 no es correcta, debió resultar -4 en lugar de 4. El procedimiento del 26° alumno es parecido al de los alumnos 1° y 16°. El 27° alumno asigna un número a cada persona aunque se equivoca al contar por lo que sus representaciones en la recta no coinciden con los datos del problema. Las representaciones concretas del alumno 28 no lo llevan a establecer expresiones algebraicas correctas. El alumno 29 utiliza expresiones algebraicas pero éstas son incorrectas. Los alumnos 30 y 31 operan con los números del enunciado pero no establecen una relación correcta de estos. El alumno 32 establece una ecuación errónea. El alumno 33 señala que hay que sacar la diferencia entre la segunda y tercera expresión (s=+7a y h=a/3). El planteamiento y resolución de la ecuación propuesta por el alumno 34 no son correctos. La respuesta que registra el alumno 35 (x-3+7) es similar a las expresiones en los procedimientos de los alumnos 1°, 2°, 16°, 17°, 23° y 24°.

En síntesis:

Dos estudiantes resuelven correctamente el problema.

Treinta y tres estudiantes no lo resuelven.

3. 2. 1 Análisis de resultados de las Tablas

En este apartado se muestra el número de respuestas correctas aparecidas en las tablas 5, 6, 8, 9, 10, 11, 13 y 14 del cuestionario. Se indica a qué categoría pertenecen.

Núm. de la tabla.	Problema o ejercicio. Respuesta. Categoría.	Respuestas correctas
Núm. de la tabla.	**Problema o ejercicio. Respuesta. Categoría.**	**Respuestas correctas**
Tabla 5	Andrés pidió prestado 2 pesos durante el recreo y en la salida su mamá le dio 5 pesos, ¿cuál es la cantidad que puede él gastar sin endrogarse nuevamente? Justifica tu respuesta con una operación. Resultado. (-2)+(5)=(+3) CATEGORÍA: VARIACIÓN DE UN ESTADO	8 respuestas correctas
Tabla 6	Delia nación en el año 4 antes de Cristo y vivió 12 años. ¿Cuándo murió? Resultado. (-4) + (+12) = 8 CATEGORÍA: COMBINACIÓN DE ESTADOS	5 respuestas correctas
Tabla 8	En la Ciudad de Chihuahua la temperatura por la noche era de 4 grados centígrados bajo cero y horas después por la mañana la temperatura descendió 3 grados centígrados, ¿cuánto marca el termómetro por la mañana? Resultado. (-4)-(+3)=(-7) CATEGORÍA: VARIACIÓN DE UN ESTADO	3 respuestas correctas
Tabla 9	En la Ciudad de México la temperatura mínima fue de 3 grados centígrados bajo cero y la máxima fue de 26 grados centígrados, ¿cuál es la diferencia entre las dos temperaturas? Resultado. (26)-(-3)=(+29) CATEGORÍA: COMPARACIÓN DE UN ESTADO	2 respuestas correctas
Tabla 10	La mamá de Gabriel compró ciruelas, las cuales fueron colocadas en un recipiente, pasaron dos días y se pudrieron 3 ciruelas. Y Gabriel se comió 4. ¿Cómo se expresa la cantidad de ciruelas que ya no forman parte de las que se podían comer al estar recién compradas? Justifica tu respuesta con una operación. Resultado. (-3)+(-4)=(-7) CATEGORÍA: VARIACIÓN DE UN ESTADO	1 respuesta correcta

Tabla 11	Elvira tiene una deuda de 14 pesos y decide disminuir su deuda para deber 6 pesos menos, ¿Cuál será la deuda actual? Resultado. (-14) -(-6) = (-8) CATEGORÍA: VARIACIÓN DE UN ESTADO	5 respuestas correctas
Tabla 13.	El día de ayer a una araña se le escaparon 3 moscas que habían caído en su red, hoy se le escaparon 5 moscas menos que ayer. ¿Cuántas moscas atrapó? Resultado. (-3)-(-5)=(+2) CATEGORÍA: VARIACIÓN DE VARIACIONES	8 respuestas correctas
Tabla 14	Alejandro tiene 3 canicas menos que Héctor, Simón tiene 7 canicas más que Alejandro. ¿Cuántas canicas más tiene Simón que Héctor? Resultado. (-3)+(+7)=(+4) CATEGORÍA: COMBINACIÓN DE COMPARACIONES ADYACENTES	2 respuestas correctas

3.3 El método clínico. Estudio de Caso

> Lo que define al método clínico en una primera aproximación, es el estudio en profundidad y en extensión de un caso. El “caso clínico” en todas sus variables evoca la situación inversa de la del método experimental donde se intenta explorar las modificaciones de una sola variable en multitud de casos que constituyen ya sea la totalidad de un inverso o una muestra representativa del mismo. El método clínico en cambio, trata de registrar la observación del mayor número posible de variables en un solo individuo. Se caracteriza entonces por centrar la investigación sobre comportamientos relatados por el sujeto, reacciones observables en el curso de la relación establecida con él y otras específicamente provocadas en condiciones sistemáticas constantes con el fin de comprenderlas y explicarlas en sus particularidades. Psicología: ideología y ciencia. Pasternac (como se citó en Gallardo, 1994).
>
> Por lo que respecta al experimentador se puede afirmar lo siguiente: el arte del clínico consiste, no en hacer contestar, sino en hacer hablar libremente y en descubrir las tendencias espontáneas, en vez de canalizarlas y ponerles diques.
>
> Consiste en situar todo síntoma en un contexto mental, en lugar de hacer abstracción de ese contexto. Así el buen experimentador debe, en efecto, reunir dos cualidades con frecuencia incompatibles: saber observar, es decir, dejar hablar al niño, no agotar nada, no desviar nada y, al mismo tiempo saber buscar algo preciso, tener en todo instante alguna hipótesis de trabajo, alguna teoría justa o falsa que comprobar. Piaget J. Lecturas de psicología del niño (como se citó en Gallardo, 1994).

Una estudiante de mediano desempeño, capaz de explicar detalladamente los procesos en la resolución de problemas. Utiliza en forma correcta el lenguaje verbal para explicar los sentidos opuestos del número en los problemas aditivos. Establece un equilibrio entre el uso de semántica y la sintaxis en sus diálogos. Representa gráficamente la situación del problema, mostrando gran intuición de la situación real que éste describe. Transita adecuadamente entre diversos SMS. Por todo lo anterior podemos afirmar que es un caso único de la situación elegida.

3.3.1 Conclusiones del Estudio de Caso

En este apartado exponemos las conclusiones de la entrevista de C, problema a problema.

1. Representa con un diagrama que alguien debe 8 pesos.

Se observa el surgimiento de los sentidos de uso de los números sustractivo y relativo**.** Para justificar el problema se apoya además, en una representación tabular. La respuesta es correcta. La estudiante describe un enunciado donde parte de una cantidad (dinero que le pidió a su mamá), es decir, recurre a un estado.

5. Andrés pidió prestado dos pesos durante el recreo y en la salida su mamá le dio cinco pesos, ¿cuál es la cantidad que puede, que él puede gastar sin endrogarse nuevamente? Justifica tu respuesta con una operación.

Resultado.

(-2)+(+5)=(+3)

El enunciado del problema corresponde a la categoría Variación de un estado.

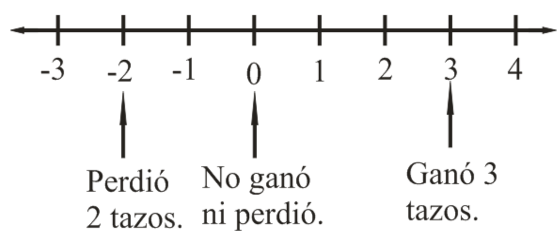
Plantea una sustracción (2-5=3) cuyo resultado debiera haber sido un número negativo, lo que consideramos como un retroceso a la positividad. Se le sugiere una respuesta concreta y cambia al contexto pájaros. Utiliza valores opuestos: semilla y semilla tachada. Surgen los números relativos en contexto y llega a la respuesta correcta.

4. Representa con un solo esquema las siguientes situaciones:

a) Juan no ganó ni perdió tazos.

b) Juan perdió dos tazos.

c) Juan ganó tres tazos.



b)	a)	c)
Perdió 2	No ganó ni perdió	Ganó 3
-2	0	+3

Posible respuesta representada en la recta numérica y en una tabla.

Utiliza tres representaciones; tabular, recta numérica y una ilustración del contexto del problema. En la situación a) interpreta el cero como punto muerto o como la nada, introduce el negativo en una tabla. Resuelve correctamente el problema. En las situaciones 2 y 3 utiliza números signados.

7. Una gaviota vuela a 13 metros de altura sobre el nivel del mar, en su pico lleva una tortuga pequeña como presa, la cual cae y se sumerge 1 metro debajo del mar. ¿Cuál es la distancia recorrida por la presa? Justifica tu respuesta.

Resultado.

(-13)+(-1)=(-14)

El enunciado del problema no pertenece a las categorías de Bruno y Martinón (1997).

Utiliza una representación gráfica de la situación en contexto (gaviota y tortuga). En el dibujo están presentes los opuestos por medio de flechas correspondientes a los sentidos de uso de los números signado y relativo. Sin embargo arriba a un lenguaje redundante: "menos 14 metros cayó". No llega a la expresión correcta, hubiera bastado decir 14 metros cayó o bien decir, menos 14. No resuelve correctamente.

8. En la Ciudad de Chihuahua la temperatura por la noche era de 4 grados centígrados bajo cero y horas después por la mañana la temperatura descendió 3 grados centígrados, ¿cuánto marca el termómetro por la mañana?

Resultado.
(-4)-(+3)=(-7)

El enunciado del problema corresponde a la categoría Variación de un estado.

Respuesta correcta: descendió menos 3 o sea tres grados más abajo. Se le sugirió la recta numérica y la hizo propia. Le asoció un contexto al considerar el valor -4 con la luna noche y el día con los positivos, es decir mostró, el sentido de uso de los relativos.

9. En la Ciudad de México la temperatura mínima fue de 3 grados centígrados bajo cero y la máxima fue de 26 grados centígrados, ¿cuál es la diferencia entre las dos temperaturas?

Resultado.
(26)-(-3)=(+29)

El enunciado del problema corresponde a la categoría Comparación de un estado.

La respuesta es incorrecta por la vía de la representación sintáctica y correcta en la recta numérica. Considera el elemento neutro, es decir el cero como positivo, identifica en la recta la posición hacia la izquierda con el sentido de número relativo.

11. Elvira tiene una deuda de 14 pesos y decide disminuir su deuda para deber 6 pesos menos, ¿Cuál será la deuda actual?

Resultado.

(-14) -(-6) = (-8)

El enunciado del problema corresponde a la categoría Variación de un estado.

Utiliza el lado positivo de la recta porque la palabra deuda absorbe el signo menos: (deuda de 14). Utiliza los números relativos 8- y 8. No registra la respuesta sintáctica, pero da el resultado correcto verbalmente.

13. El día de ayer a una araña se le escaparon 3 moscas que habían caído en su red, hoy se le escaparon 5 menos que ayer. ¿Cuántas moscas atrapó?

Resultado.

(-3)-(-5) = (+2)

El enunciado del problema corresponde a la categoría Variación de variaciones.

Lo resuelve con la recta y apoyándose en el lenguaje natural. Hace una interpretación correcta del problema. Utiliza números signados.

14. Alejandro tiene 3 canicas menos que Héctor, Simón tiene 7 canicas más que Alejandro. ¿Cuántas canicas más tiene Simón que Héctor?

Resultado.

(-3)+(+7)=(+4)

El enunciado del problema corresponde a la categoría de Combinación de comparaciones adyacentes.

La utilización de representaciones concretas resultó ambigua. Resolvió correctamente el problema de forma algebraica considerando números signados y relativos.

I. En un partido el Cruz Azul anotó 5 goles y le anotaron 3, ¿cuántos goles a favor obtuvo en este partido?

Resultado.

(+5)+(-3)=(+2)

El enunciado del problema corresponde a la categoría de Combinación de estados.

Resuelve correctamente el problema en la recta numérica. No registra una respuesta sintáctica. Aparece el sentido de número sustractivo.

II. Enrique perdió en un juego 4 tazos, si gana 15 tazos, iguala a Daniel, ¿cuántos tazos tiene Daniel?

Resultado.

(-4)+(15)=(+11)

El enunciado del problema corresponde a la categoría Comparación de estados.

Primero resuelve el problema en la recta. Partir del cero hacia los negativos favoreció que la alumna lo hiciera correctamente de forma sintáctica. Están presentes los números relativos.

III. Por la mañana una persona perdió 3 pesos y durante la tarde esta persona ganó 9 pesos. ¿Durante el día cuánto ha ganado?

Resultado.
(-3)+(+9)=(+6)

El enunciado del problema corresponde a la categoría Variación de un estado.

El comenzar del cero hacia los negativos en la recta numérica, le permitió a la alumna llegar a la respuesta sintáctica correcta.

IV. En un día muy frío (lunes) el señor de las nieves de la cooperativa perdió 5 pesos por las ventas, el día martes perdió 8 pesos menos que el lunes.
¿Cuánto ganó o perdió?

Resultado.
(-5)-(-8)=(+3)

El enunciado del problema corresponde a la categoría Variación de variaciones.

Primero utiliza una representación tabular. Luego en una recta numérica, lleva a cabo la operación -5+8=3. Después la cambia a forma vertical: $\begin{array}{r} 8 \\ -5 \\ \hline 3 \end{array}$. Luego transforma esta sustracción en forma horizontal: 8-5=3. Decide convertirla a la expresión: -5-8=. A continuación la escribe como -5+8= y finalmente llega a la respuesta correcta: (-5)-(-8)=+3.

Invención de problemas

Problema V. Enunciado: Puedes inventar un problema que se resuelva con esta operación.

(+6)+(-4)=(+2)

Le atribuye al -4 una expresión verbal equivalente “menos lo que cuesta el refresco”. Respuesta correcta.

Problema VI. Enunciado: Un problema que se resuelva esta expresión.

(-5)+(+12)=(+7)

Propone un contexto de llantas, la expresión verbal no corresponde a la sintaxis solicitada.

Problema VII. Enunciado: Uno que se resuelva con esta.

(-20)+(+15)=(-5)

Su respuesta es incompleta ya que: interpreta al -20 como menos veinte grados centígrados y luego dice aumentaron, aumentó… es aquí donde se detiene, por lo que pasamos a otro problema. Respuesta incorrecta.

Problema VIII. Enunciado: Un problema que tenga como respuesta este número.

(-3)

La expresión, ¿cuánto se quedó debiéndoles?, es adecuada para dar sentido -3 en el problema. Respuesta correcta.

Problema IX. Enunciado. Uno que se resuelva con este número.

(-5)

La expresión ¿cuánto le falta? equivale a -5 en el contexto del enunciado. Escribe lo siguiente: Unas papas costaban diez pesos y Roberto llevaba cinco pesos y hace la pregunta ¿cuánto le falta? Respuesta correcta.

Resuelve correctamente 14 de 18 problemas.

En este capítulo, una vez presentadas las producciones escritas identificando las formas semánticas equivalentes y el sentido de uso de los negativos continuamos con tablas sobre el desempeño de los estudiantes en el cuestionario final y concluimos con un análisis sobre los resultados correctos. En el capítulo 3 también analizamos un estudio de Caso a fin de describir los procesos a mayor profundidad.

CAPÍTULO 4. CONCLUSIONES

4.1 Conclusiones Finales

En general la estudiante representa los problemas en lenguaje verbal, tabla, dibujos en contexto, álgebra, recta numérica, números positivos, números enteros con una sintaxis errónea en un principio, la cual cambia por la recta conforme avanza en la entrevista, arribando a respuestas correctas. En los problemas considera los sentidos de uso de negatividad; número sustractivo, número signado, número relativo, número aislado. Sin embargo en la invención, que implica lo contrario, partir de la sintaxis y llegar a un contexto, no utilizó distintos modelos en un mismo problema.

Los estudiantes al resolver problemas aditivos usan distintos Sistemas Matemáticos de Signos, Filloy (1999) que van desde los intuitivos hasta los formales: lenguaje verbal, recursos gráficos, procedimientos propios, aritmética y álgebra. Utilizan los distintos sentidos de la negatividad, reconociendo el número sustractivo, signado, relativo y aislado. En ocasiones están presentes los cuatros sentidos en un mismo problema.

El análisis de los distintos Sistemas Matemáticos de Signos, permite identificar los adecuados para acceder a una resolución formal con negativos y por el contrario, señalar las resoluciones que obstaculizaron el arribo al uso de negativos. Es necesaria la enseñanza para ayudarles a que lleguen a la sintaxis correcta.

Se muestra que las equivalencias semánticas contribuyen a darle sentido al uso de negativos en problemas aditivos. En ocasiones estas equivalencias las usaron para llegar a una resolución formal. En otros casos las equivalencias se usaron en sentido correcto pero no arribaron a la respuesta. Asimismo consideramos la importancia de las expresiones sintácticas aunque también se puso de manifiesto la ambigüedad que causaban algunos enunciados de los problemas. Como los alumnos lo muestran, estos problemas pueden abordarse desde la aritmética o el álgebra. Consideramos que se les debe dar un enfoque en el que esté presente la idea de que los negativos permiten la resolución correcta. Es necesario reforzar la comprensión lectora con algunos estudiantes ya que ellos trataron de resolver los problemas pero no hicieron una interpretación que los llevara a la respuesta final.

En la resolución de problemas de variación de variaciones surgieron formas semánticas equivalentes. En el problema de combinación de comparaciones adyacentes surgieron resoluciones que obstaculizaron el arribo a la sintaxis porque partieron de un estado.

4.2 Respuesta a las preguntas de investigación

¿Qué dominio numérico consideran los estudiantes de secundaria al resolver problemas aditivos?

La mayoría[2] de los alumnos no contestan de manera formal los problemas de las categorías de Bruno y Martinón (1997). Recurren a los positivos.

Los alumnos tuvieron un mejor desempeño en los problemas 5 y 13 (Variación de un estado y Variación de variaciones) de las categorías de Bruno y Martinón (1997).

El problema de las categorías de Bruno y Martinón (1997) que resultó más difícil fue el reactivo 10 (Variación de un estado) lo que sugiere que la redacción influyó en el resultado ya que los reactivos 5, 8 y 11 de la misma categoría tuvieron 8, 3 y 5 respuestas correctas respectivamente.

¿Qué tipo de Sistemas Matemáticos de Signos utilizan en el planteamiento y resolución de problemas aditivos?

Los SMS que usan en la resolución de negativos son: sumas y restas con positivos, expresiones algebraicas, recta numérica, ilustraciones, lenguaje verbal, equivalencias semánticas, procedimientos propios, tablas, series numéricas, representaciones híbridas, dibujos y expresiones numéricas recurriendo a estados.

[2] El término "mayoría" no se puede precisar porque varía según el problema.

En ocasiones las respuestas eran correctas pero las justificaciones no. De ahí la importancia de conocer sus procesos.

Surgieron expresiones semánticas equivalentes al justificar algunas respuestas, aunque no siempre las expresiones semánticas equivalentes llevaron a los alumnos a resolver los problemas. Aparecieron expresiones semánticas equivalentes al justificar la sintaxis correcta.

Un estudiante reconoció el número sustractivo, signado, relativo y aislado en el problema 11 (Variación de un estado). Es notable que sea el único alumno que utiliza los cuatro sentidos de uso definidos por Gallardo (2002).

Al pedirle la invención de problemas que involucren números negativos. ¿Cuáles son los contextos a los que la entrevistada más recurre?

La alumna entrevistada recurrió a los contextos: compra-venta, temperatura, recorrido de un móvil y pérdida-ganancia.

Al concluir el Estudio, surge una interrogante, ¿cómo hacer que la información recabada tenga impacto en las aulas? Hemos dado los primeros pasos al exponer nuestras ideas con profesores de Matemáticas de Secundaria. Nos planteamos continuar la difusión de estas ideas con los profesores de otras asignaturas del Nivel Básico como Español, Educación Artística y Educación Física. En estas asignaturas se presentaría el contenido de mi proyecto a la manera de obras de teatro. Los estudiantes analizan los enunciados de los problemas y sugieren diversas modificaciones al llevar a cabo las representaciones teatrales en el aula. El autor de esta Tesis actúa como director.

Referencias bibliográficas

Alcántara, M. J. (2010). *Uso de modelos de enseñanza en la resolución de problemas aditivos.* Tesis de maestría. DME, Cinvestav del IPN. México.

Bruno, A. (1997). La enseñanza de los números negativos: aportes de una investigación. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas, No. 29,* 5-18.

Bruno, A. y Martinón, A. (1997). Clasificación funcional y semántica de problemas aditivos. *Educación Matemática, Vol. 9 No. 1,* 33-46.

Cohen, L. (1990). Triangulación. En Cohen, L. y Manion, L., *Métodos de investigación educativa* 331-351. Madrid: La Muralla, S.A.

Filloy, E., Rojano T., Puig L. y Rubio G. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Gallardo, A. (1994). *El estatus de los números negativos en la resolución de ecuaciones algebraicas,* Tesis Doctoral. DME, Cinvestav del IPN, México.

Gallardo, A. (2002). The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, Vol. 49, pp. 171-192.

Gallardo, A. y Basurto, E. (2009). Formas semánticas equivalentes en problemas del pasado y el presente. *Educación Matemática* Vol. 2 Núm. 3, pp. 67-93.

Mejía, J. L. (2009). *Enseñanza y aprendizaje de los números negativos: un estudio comparativo entre los actores fundamentales del proceso didáctico en educación secundaria.* Tesis de Maestría. DME, Cinvestav del IPN, México.

Peled, I. (1991). Levels of knowledge about signed numbers: effects of age and ability. *Proceedings of the XV International Conference of the Psychology Mathematics Education.* (pp. 145-152). University of Hafia.

Rojano, T. (2011, Octubre). *Homenaje al Dr. Eugenio Filloy Yagüe. Por su trayectoria académica y su contribución a la Matemática Educativa* . En el marco de los festejos del 50 Aniversario del Cinvestav, México, D.F.

SEP, 1994: *Plan y programas de estudio 1993*. Educación Secundaria. Subsecretaría de Educación Básica y Normal. Dirección General de Materiales y Métodos Educativos. México. SEP.

SEP, 2006: *Educación Básica Secundaria. Matemáticas. Programas de estudio 2006.* Dirección General de Desarrollo Curricular. Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública.

Vergnaud, G. (1982). A Classification of Cognitive Tasks and Operations of Thought Involved in Addition and Subtraction Problems. En T. Carpenter, J. Moser & T. Romberg (Eds.). *Additions and Subtraction: A cognitive Perspective.* (35-59). New Jersey: Lawrance Erlbaum Associates.

Apéndices

1. Ponencia del XXIV Congreso Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas, A. C., Universidad de Colima, Facultad de Ciencias de la Educación (2011)

Título. Resolución de problemas aditivos por profesores de secundaria.

Eje temático. Reportes y proyectos de investigación en la enseñanza de las matemáticas.

Modalidad. Comunicación breve.

Introducción.

Este trabajo es un reporte de resultados preliminares de la primera etapa de una investigación más amplia sobre "Resolución e invención de problemas aditivos por estudiantes de secundaria". En esta primera etapa se trabajó con profesores de educación básica que resolvieron problemas aditivos con el propósito de indagar la pertinencia del planteamiento de estos problemas a los alumnos de secundaria. Otro objetivo a perseguir es constatar el nivel de dificultad que conllevan los problemas aditivos que involucran números con signo. Los profesores resolvieron los problemas por escrito y posteriormente se les entrevistó en forma individual. A continuación se describe la investigación completa, aunque únicamente reportamos resultados de la primera etapa.

Justificación del problema.

El lenguaje verbal es la parte esencial de un *problema aditivo,* aunque no se le ha dado el énfasis suficiente. Retomamos como *problemas aditivos* los definidos por Bruno, A. & Martinón, A. (1997) descritos en el marco teórico de este documento. Los libros de texto tienen muchos ejercicios sobre *algoritmos*, inclusive se presentan situaciones en contexto de temperatura, ganancias, pérdidas, deportes, caída libre, localización de puntos en el plano cartesiano y ubicación de fechas, con el fin de darle sentido a los *números signados* pero no surgen problemas en que sea necesario involucrar estos números para su planteamiento y aún menos problemas que conduzcan a *soluciones negativas.*

La primera etapa de este estudio propone a profesores la resolución de problemas aditivos para analizar sus registros y conocer cómo interpretan los *números signados* y al mismo tiempo conocer su opinión acerca de la aplicación de estos problemas con alumnos.

Con el desarrollo de la investigación se quiere contribuir a superar algunas dificultades que se presentan en la enseñanza de los *números con signo,* se busca que el reporte tenga un impacto en las aulas; es decir que la propuesta de Bruno A. & Martinón, A. (1997) sea incluida en el currículo de secundaria SEP (2006).

Fundamentación Teórica.

Esta investigación toma como *Marco Teórico Metodológico,* el llamado *Modelo Teórico Local* (MTL) creado por Filloy y colaboradores: Rojano T., y Puig L. Rubio G. (1999) que constituye una herramienta para describir observaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje en *Matemática Educativa.* El investigador hace precisiones en cuanto a la utilización del MTL indicando que tiene un *carácter local* ya que se utiliza en la investigación de un tema en particular con sujetos específicos y sólo es adecuado para el fenómeno observado. En consecuencia el MTL no es una teoría general. Se reconoce la posibilidad de describir este mismo fenómeno desde otro *marco teórico* lo cual podría llevar a resultados distintos. Filloy introduce el concepto de *Sistema Matemático de Signos* (SMS) para interpretar las producciones de los alumnos durante la enseñanza y aprendizaje. Las producciones de los alumnos y de los textos matemáticos históricos pueden expresarse vía distintos estratos de SMS. Los *sistemas matemáticos de signos* creados por los alumnos son importantes ya que dan sentido a lo que se les muestra en la enseñanza incluso cuando estos SMS no están socialmente establecidos sino que constituyen solamente parte de las ideas de cada alumno.

El MTL está constituido por los cuatro siguientes *componentes:*

Componente de Competencia Formal: Considera la existencia de un sujeto ideal que domina el conocimiento de su tiempo, aquel establecido socialmente. Ahora bien, los conocimientos que tiene el profesor son suficientes para explicar cómo son las producciones de los alumnos. Para el investigador es conveniente poseer un sistema formal abstracto desde el cual interpretar las distintas producciones que realizan los alumnos.

Componente de los Procesos Cognitivos: Existen tendencias cognitivas de los estudiantes que se manifiestan en las distintas maneras de afrontar los problemas, codificar y descodificar los Sistemas Matemáticos de Signos (SMS) al pasar de lo concreto a lo abstracto.

Componente de enseñanza: Un *modelo de enseñanza* en esta perspectiva se define como una secuencia de textos. El elaborarla y descodificarla le permite al alumno interpretar estos textos en un SMS abstracto. Existe una etapa en la que los estudiantes utilizan distintos signos que provienen del lenguaje natural y de sistemas de signos personales que desaparecerán al hacer abstracciones que los llevan a un SMS socialmente establecido.

Componente de comunicación. Se refiere a la interacción a través de mensajes de alumnos con el profesor. En este proyecto la comunicación se realiza durante entrevistas realizadas a los alumnos. El entrevistador respeta el desempeño del estudiante pero en ocasiones puede mostrar un *modelo de enseñanza* para provocar en el alumno una abstracción y así realizar una producción tanto verbal como escrita. Los modelos a veces surgen espontáneamente en los alumnos y otras veces son mostradas por el entrevistador.

Dos son las investigaciones tomadas como antecedente de esta propuesta. Una de éstas es el trabajo de Gallardo, A. y Basurto, E. (2009) en el que se reporta que los estudiantes de secundaria que han recibido una enseñanza en el tema de los *números con signo* al proponerle la resolución de *problemas aditivos* cuyas respuestas se espera que estén en el campo de los *números signados,* no lo hacen así, sino que recurren a una *equivalencia sintáctica* en la que utilizan los *números naturales* dando respuestas correctas.

El presente estudio retoma los *problemas aditivos* clasificados en 11 categorías en un trabajo de Bruno, A. y Martinón A. (1997) los cuales pueden ser aplicados y posibilitar así que los alumnos encuentren contextos en los que se haga necesario el uso de los *números signados* en la resolución de *problemas aditivos.*

Preguntas de investigación.

- ¿Los estudiantes de tercer grado de secundaria recurren al dominio de los *números signados* al resolver *problemas aditivos*? Si es así ¿cómo los interpretan?
- Al pedirles la invención de problemas que se planteen con *números signados.* ¿Cuáles son los contextos a los que ellos más recurren?
- ¿Qué *métodos intuitivos* utilizan los alumnos de tercer grado de secundaria al resolver *problemas aditivos*?

Método.

El estudio es *descriptivo,* para comprender el problema de investigación se recurre al análisis de las respuestas de los alumnos en el *cuestionario* y en las *entrevistas.*

La investigación es *cualitativa*; se van a recabar *evidencias empíricas* que nos permitan interpretar lo que está pasando en el proceso de *resolución de los problemas verbales* que se apliquen en el *cuestionario* y las *entrevistas.*

La investigación se realizará con estudiantes de un grupo de tercer grado en una secundaria pública y se fundamentará en la perspectiva semiótica de los MTL descrita anteriormente.

Instrumentos Metodológicos. (Métodos de recuperación de datos).

Inicialmente se aplicará un *cuestionario piloto* de 12 preguntas. En base a su análisis se aplicará un *cuestionario definitivo* en el tercer semestre.
Se cuenta con un *banco de reactivos* de 40 preguntas, de donde se obtendrán las preguntas para *entrevistas* individuales *videograbadas* a los alumnos seleccionados a partir de su desempeño en los cuestionarios. Para la validación de los instrumentos se utilizará el método de triangulación Cohen, L. y Manión, L. (1990).

Resultados preliminares de la primera etapa de investigación.

Los profesores no recurren a los números con signo al resolver problemas aditivos, llegan a plantear la resolución con negativos sólo si se les solicita que busquen otras alternativas. En este caso ellos agotan distintos recursos como son el uso de: tablas, diagramas de conjuntos, expresiones algebraicas, dibujos, la recta numérica, combinación de ilustraciones con expresiones aritméticas o algebraicas. Estos caminos seguidos por los profesores al resolver los problemas pone de manifiesto según sus opiniones, que hay distintas situaciones con las que se puede abordar un mismo problema y que hay algunas que son idóneas para explicar estos temas de negativos, por ejemplo, introduciendo el uso de tablas o conjuntos.

Se presenta un problema aditivo retomado de Bruno, A. & Martinón A. (1997) donde los profesores acuden a sus representaciones personales:

Problema.

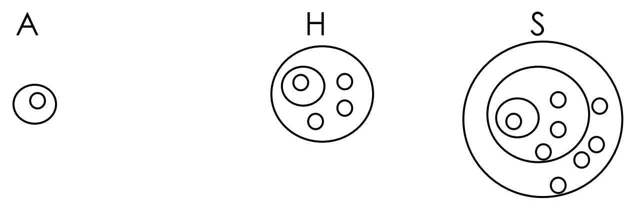
Alejandro Tiene 3 canicas menos que Héctor, Simón tiene 7 canicas más que Alejandro. ¿Cuántas canicas más tiene Simón que Héctor?

Primera resolución de un profesor.

A	H	S
-7	-4	0
-1	2	6
0	3	7
2	5	9
3	6	10
x	x+3	x+7
x-3	x	x+4

Respuesta. Simón tiene 4 canicas más que Héctor.

Segunda resolución de este mismo profesor.



Respuesta. Simón tiene 4 canicas más que Héctor.

Respuesta de otro profesor.

Hay 3 cajas.

Héctor

Alejandro

Simón

"La caja de Héctor y la de Alejandro tienen una misma cantidad de canicas (no se sabe cuántas), le quitas 3 canicas a la caja de Alejandro y como el problema dice que Simón tiene 7 canicas más que Alejandro echas las 7 canicas de Simón a la caja de Alejandro y ahora puedes comparar y decir que ***Simón tiene 4 canicas más que Héctor.***"

Otros profesores indicaron que este problema es adecuado para la clase de álgebra y dieron una respuesta correcta.

La respuesta con números negativos que proponen Bruno, A. & Martinón A. (1997) es la siguiente: **(- 3) + (+ 7) = (+ 4)**

Bibliografía.

Bruno, A. y Martinón, A. (1997) Clasificación funcional y semántica de problemas aditivos. *Educación Matemática* Vol. 9 No. 1, pp. 33-46.

Cohen, L. y Manion, L. (1990) Triangulación. *Métodos de investigación Educativa.* Madrid. La Muralla.

Filloy, E. y colaboradores: Rojano T., y Puig L. Rubio G. (1999) Aspectos teóricos del álgebra educativa. México. Grupo Editorial Iberoamérica.

Gallardo, A. y Basurto, E. (2009) Formas semánticas equivalentes en problemas del pasado y el presente. *Educación Matemática* Vol. 2 Núm. 3, pp. 67-93.

SEP: 2006, *Plan y programas de estudio. Educación Secundaria.* SEP.

2. Reporte de investigación. Vigésima Séptima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 27) en la Ciudad de Buenos Aires Argentina (2013)

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ADITIVOS POR ESTUDIANTES DE SECUNDARIA.

Hernández, M., Gallardo, A.

Cinvestav, México.

mhernandezp@cinvestav.mx agallardo@cinvestav.mx

Lenguaje matemático. Medio básico. Empírico.

MARCO TEÓRICO.

Hemos observado que los alumnos de secundaria en muchos casos no aceptan soluciones *negativas* en *problemas de enunciado verbal* aunque llegan a respuestas equivalentes utilizando *positivos.* En la propuesta Institucional SEP (2006) se presentan situaciones de temperatura, deportes, ganancias, pérdidas, elevador, recta numérica, plano cartesiano y localización de fechas para darle sentido a los *negativos.*

De estas últimas aseveraciones, intentamos responder las siguientes interrogantes:

¿Qué *niveles conceptuales de la negatividad* consideran los estudiantes de secundaria al resolver *problemas aditivos*?

¿Qué tipo de estructura funcional y forma semántica de enunciados verbales son más difíciles para los alumnos?

Recurrimos a Bruno y Martinón (1997) quienes hacen una clasificación de *problemas aditivos* distinguiendo entre la *estructura funcional* como el tipo de situaciones numéricas (*estados, variaciones y comparaciones*) y la *forma semántica* definida como la expresión en *lenguaje verbal* de dichas situaciones numéricas. Bruno y Martinón (1994) definen *problemas aditivos simples de enunciado verbal* como los traducidos en sumas y restas de dos números enteros. Y advierten la existencia de *formas semánticas equivalentes* para representar una misma situación numérica. Por ejemplo, en el caso de las *variaciones* Bruno y Martinón (1997) plantean que las expresiones: "*Ernesto tiene 3 pesos menos por la mañana que por la noche*, *Ernesto tiene 3 pesos más por la noche que por la mañana"* (p. 34.) son equivalentes.

Además de la clasificación de Bruno y Martinón (1997) nos basamos, en Gallardo (1994) que advierte de la existencia de los siguientes *niveles conceptuales de negatividad*:

"*Número sustractivo.* Donde la noción de número está subordinada a la magnitud. En la resta de dos cantidades **a-b**, siempre que **b** será menor que **a**, donde, **a**, **b** son números naturales.

Número signado. Es el número natural al que se le asigna un signo más o un signo menos.

Número relativo. Se hace presente cuando se puede concebir la idea de opuestos en situaciones discretas, así como la idea de simetría en situaciones continuas.

Número aislado. Surge al aceptar un número negativo como solución de una operación o ecuación" (Gallardo, 2002, p. 179).

MÉTODO.

La población estudiantil fue de 35 alumnos de un grupo de tercero de secundaria de edades de 14 a 16 años de una escuela pública urbana de la Ciudad de México.

Los instrumentos metodológicos fueron un cuestionario diagnóstico, un cuestionario exploratorio y entrevistas individuales video grabadas en situación de aula, que permitieron el análisis de 5 de las 11 categorías de la clasificación de problemas de Bruno y Martinón (1997). Estas son las siguientes: *Variación de un estado, Variación de variaciones, Comparación de estados, Combinación de estados, Combinación de comparaciones adyacentes.*

En este artículo se definen y ejemplifican tres de las 5 categorías anteriores donde se introducen los conceptos previos siguientes: *estado y comparación.*

Estado. Tiene un sujeto, una magnitud y una unidad de medida en un instante determinado. Por ejemplo: en la Ciudad de México la temperatura en este instante es de 20º C.

Comparación. Es la diferencia entre dos estados; aquí el tiempo no está involucrado. Por ejemplo: Juan tiene cinco pesos menos que Luis.

Variación de un estado. Comparación de un estado en dos momentos diferentes. Por ejemplo, Daniel tiene seis pesos más en la tarde que por la mañana.

Variación de variaciones. Hay cuatro instantes, se habla de dos periodos constantes de tiempo. Ejemplificando; ayer en el recreo José perdió tres pesos, hoy perdió un peso menos que ayer.

Combinación de comparaciones adyacentes. Existen tres funciones estado independientes. Ejemplo: Pedro tiene cuatro pesos menos que Francisco y, José tiene seis pesos más que Pedro. Podemos comparar los estados y así indicar cuántos pesos tiene José en comparación a Francisco.

Los autores advierten: "el esbozo que presentamos aquí exigiría, para su plena utilidad, una investigación didáctica que por nuestra parte sólo está recientemente iniciada y cuya conclusión no es inmediata" (Bruno y Martinón 1997 p. 34).

REFLEXIONES FINALES.

Del análisis de los *problemas aditivos* podemos afirmar lo siguiente:

*El estudiante expresa vía el *lenguaje natural respuestas con formas semánticas equivalentes.*

*El nivel de *negatividad* alcanzado depende de la categoría del *problema aditivo.*

*Existe una relación entre el contenido de los problemas, su forma semántica y los niveles conceptuales de negatividad.

*La suposición de un *valor arbitrario* para el *estado inicial* en el enunciado del problema, reduce la *negatividad* a ser representada solamente como un *número sustractivo.* Otros estudiantes reconocen la *negatividad* por medio de *números signados, relativos y aislados*. Utilizan espontáneamente el lenguaje algebraico y la recta numérica para la resolución de problemas.

*La mayoría de los sujetos logra comparar correctamente los tiempos descritos en el enunciado.

*Los problemas correspondientes a las categorías *Variación de variaciones y Combinación de comparaciones adyacentes* resultaron ser las más difíciles para los estudiantes.

REFERENCIAS.

Bruno, A. y Martinón, A. (1994). La recta en el aprendizaje de los números negativos. *Suma*, 18, pp. 39-48.

Bruno, A. y Martinón, A. (1997). Clasificación funcional y semántica de problemas aditivos. *Educación Matemática* Vol. 9 No. 1, pp. 33-46.

Gallardo, A. (1994), *El estatus de los números negativos en la resolución de ecuaciones algebraicas*, Tesis Doctoral, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Gallardo, A. (2002) The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, Vol. 49, pp. 171-192.

SEP: 2006, *Plan y programas de estudio. Educación Secundaria.* SEP.

3. Cuestionario final

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

Departamento de Matemática Educativa

Cuestionario final

Lee con atención los ejercicios y problemas, contesta y resuelve, justifica tus respuestas.

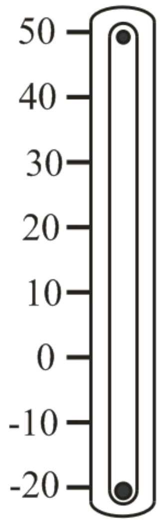
1. Representa con un diagrama que alguien debe 8 pesos.

2. En una canasta se han podrido 2 manzanas, representa con un diagrama esta situación.

3. El termómetro marca 5 grados centígrados bajo cero.

   Ahora el termómetro marca 10 grados centígrados.

   Registra ambas temperatura en el termómetro.



4. Representa con un solo esquema las siguientes situaciones:

a) Juan no ganó ni perdió tazos.

b) Juan perdió dos tazos.

c) Juan gano tres tazos.

5. Andrés pidió prestado 2 pesos durante el recreo y en la salida su mamá le dio 5 pesos, ¿cuál es la cantidad que puede él gastar sin endrogarse nuevamente? Justifica tu respuesta con una operación.

6. Delia nació en el año 4 antes de Cristo y vivió 12 años. ¿Cuándo murió?

7. Un gaviota vuela a 13 metros de altura sobre el nivel del mar, en su pico lleva una tortuga pequeña como presa la cual cae y se sumerge 1 metro debajo del mar. ¿Cuál es la distancia recorrida por la presa? Justifica tu respuesta.

8. En la ciudad de Chihuahua la temperatura por la noche era de 4 grados centígrados bajo cero y horas después por la mañana la temperatura descendió 3 grados centígrados, ¿cuánto marca el termómetro por la mañana?

9. En la Ciudad de México la temperatura mínima fue de 3 grados centígrados bajo cero y la máxima fue de 26 grados centígrados, ¿cuál es la diferencia entre las dos temperaturas?

10. La mamá de Gabriel compró ciruelas las cuales fueron colocadas en un recipiente, pasaron 2 días y se pudrieron 3 ciruelas. Y Gabriel se comió 4. ¿Cómo se expresa la cantidad de ciruelas que ya no forman parte de las que se podían comer al estar recién compradas? Justifica tu respuesta con una operación.

11. Elvira tiene una deuda de 14 pesos y decide disminuir su deuda para deber 6 pesos menos, ¿cuál será la deuda actual?

12. Luis tiene 22 años y su papá 40, ¿cuántos años tienen que transcurrir para que el papá tenga el doble de años que su hijo?

13. El día de ayer a una araña se le escaparon 3 moscas que habían caído en su red, hoy se le escaparon 5 moscas menos que ayer. ¿Cuántas moscas atrapó?

14. Alejandro Tiene 3 canicas menos que Héctor, Simón tiene 7 canicas más que Alejandro. ¿Cuántas canicas más tiene Simón que Héctor?

15. El record mundial de natación en los 50 metros libres varonil es de 20 segundos con 91 centésimas de segundo (20”91) y fue implantado por el nadador Cesar Cielo (Brasil) en Roma Italia el 18 de diciembre de 2009. En la final de esta competencia en Beijing China 2008 este nadador hizo un tiempo de 21 segundos con 30 centésimas de segundo (21” 30). ¿Cuántas centésimas de segundo le hicieron falta en China 2008 para tener un puntaje igual al del record mundial?

16. $\boxed{} + 6 = 2$

17. $\boxed{} + (-4) = -7$

18.- $(+9) – (-4) =$

19. $(-6) – (+8) =$

20. $(-17)-(-4)=$

4. Clasificación funcional y semántica de problemas aditivos de Bruno y Martinón (1997)

Resumen

En este trabajo se presenta una clasificación de problemas aditivos simples. El fundamento de esta clasificación es la distinción entre la estructura funcional y la forma semántica. La estructura funcional se refiere al tipo de situaciones numéricas (estados, variaciones y comparaciones) y la forma semántica al modo de expresar dichas situaciones numéricas.

1. Introducción

La resolución de problemas aditivos ocupa un lugar destacado en la investigación en educación matemática. Esta relevancia está justificada por el importante papel que los problemas aditivos pueden desempeñar en el logro de los aprendizaje numérico lleno de significados. Los distintos autores que se han ocupado de estos problemas han dado varias clasificaciones. En los trabajos de Nesher y otros (1983), Castro y otros (1992) y Fuson (1992) se da una panorámica de las distintas clasificaciones que han surgido.

En este trabajo ofrecemos una clasificación de problemas aditivos simples de enunciado verbal con números reales, aunque habitualmente se les proponen a los alumnos con números enteros, a lo sumo racionales, dados los niveles en los que estos problemas se trabajan en el aula. Con la expresión “aditivo simple” nos referimos a problemas de “suma” o “resta” de dos números. En el estudio de este tipo de problemas los investigadores han tenido en cuenta, entre otros, los aspectos que ahora comentamos brevemente. Con el fin de ilustrar las ideas que expondremos consideramos el siguiente ejemplo de situación numérica: “Ernesto debía 2 dólares y le dan 3, luego tiene 1 dólar”.

(1) **estructura:** en la situación numérica del ejemplo se produce una “variación” v = 3 en el número de dólares que tiene Ernesto, pasando de un “estado inicial” e(i)=-2 a un “estado final” e(f) = 1. La situación puede esquematizarse con la fórmula e(i) + v = e(f).

(2) **posición de la incógnita:** cabe plantear tres problemas en relación con la situación numérica del ejemplo, según cuáles sean los datos conocidos y la incógnita. Así, por ejemplo, un tipo de problema se corresponde con los datos e(i) y v, siendo la incógnita e(f): “Ernesto debía 2 dólares y le dan tres. ¿Cuántos dólares tiene ahora?”.

(3) **tipos de números:** los valores concretos que toman e(i), e(f) y v tienen influencia en la resolución de los correspondientes problemas. La situación descrita en el ejemplo (e(i) = -2, v = 3, e(f) = 1), es más difícil que la que se corresponde con el ejemplo <<Ernesto tenía 2 dólares y le dan 3, luego tiene 5 dólares>>, en el que es e(i) = 2, v = 3, e(f) = 5.

(4) **contexto:** el problema “Ernesto debía 2 dólares y le dan 3. ¿Cuántos dólares tiene ahora?” es más sencillo que “Ernesto nació el año 2 antes de Cristo y vivió 3 años. ¿Cuándo murió?”. Ambos tienen la misma estructura, la misma posición de la incógnita y los mismos números, pero el primero se plantea en el contexto deber-tener, mientras que el segundo se formula en el contexto tiempo, el cual suele presentar más dificultades que el primero.

(5) **forma semántica:** hay diversas formas, equivalentes desde el punto de vista semántico, para expresar una variación: “le dan 3 dólares a Ernesto”, “Ernesto tenía 3 dólares menos por la mañana que por la noche”, “Ernesto tiene 3 dólares más por la noche que por la mañana”.

Nuestra clasificación atiende a los aspectos de la **estructura** y la **forma semántica.** No tendremos en cuenta la **posición de la incógnita,** ni el tipo de números, ni el contexto, aunque como ya hemos dicho juegan un papel importante desde el punto de vista didáctico. Con el fin de enfatizar los dos aspectos a los que prestamos atención, todas las situaciones numéricas se refieren al contexto deber-tener y se corresponden con la suma -2 + 5 = 3. Sin duda, otros contextos exigirán expresiones verbales diferentes de las que usamos para el contexto deber-tener, pero tampoco prestamos atención en este trabajo a esas variantes.

En este artículo describimos once clases de problemas atendiendo a la estructura funcional. Algunas de estas clases no las hemos encontrado descritas en la literatura sobre el tema: **variación de variaciones, variación de una comparación, combinación de variaciones, comparación de comparaciones y combinación de comparaciones.**

Por otro lado, resaltamos la conveniencia de distinguir con nitidez entre estructura funcional y forma semántica, diferencia que tampoco hemos hallado en los trabajos de otros autores y en ocasiones aparecen confundidas.

Finalmente, debemos mencionar que el esbozo que presentamos aquí exigirá, para su plena utilidad una investigación didáctica que por nuestra parte sólo está recientemente iniciada y cuya conclusión no es inmediata.

2. Estados, comparaciones y variaciones

En esta sección precisamos las ideas de estado, comparación y variación, las cuales resultan básicas en la clasificación que proponemos en los problemas aditivos.

2.1 Estados

Los números se usan para expresar **estados** (Ernesto tiene 2 dólares; la temperatura en Madrid es de 10.3°C, …). Resulta conveniente para la clasificación funcional que discutimos en este trabajo formalizar un poco esta idea. En los ejemplos de estado siempre hay un sujeto (Ernesto, Madrid, …), una magnitud (saldo dinerario, temperatura, …) y una unidad de medida (1 dólar, 1° C, …). También está presente el tiempo, aunque a veces sea de manera imprecisa. Hemos de suponer que Ernesto tiene 2 dólares, o que la temperatura de Madrid es de 10.3°C, en este momento en el que escribimos.

Hablaremos de **función estado** o simplemente **estado,** y escribiremos e(t) para referirnos al estado en el momento t. Precisemos algo más el significado de este símbolo: e es la función estado y está asociada, como ya hemos dicho, a un sujeto, a una magnitud y una unidad de medida; e(t) es el estado en el instante t. Hay situaciones en la que la función estado se considera constante, independiente del tiempo (altura de El Teide es de 3, 717 metros sobre el nivel del mar).

2.2 Comparaciones

Los números también se usan para comparar estados. La **comparación absoluta** entre los estados e(t) y d(s), en este orden, es la diferencia

$$\mathbf{c_{ed}\,(t,s)\ d(s) - e(t).}$$

Claramente, las dos funciones estado **e** y **d** deben referirse a una misma magnitud para que la diferencia tenga sentido. Ejemplos: Ernesto tiene hoy 2 dólares más de los que Francisco tenía ayer; la temperatura de Madrid es de 10.3°C más que en Londres.

Aunque en este trabajo sólo nos fijaremos en las comparaciones absolutas, que son las que aparecen en los dos problemas aditivos, mencionamos que la **comparación relativa** entre los estados **e**(**t**) y **d**(**s**), en este orden, es el cociente.

$$\mathbf{r_{ed}\ (t,s) = d(s)/e(t).}$$

Ejemplos: Ernesto tiene doble número de dólares que Andrés; la velocidad media del automóvil ha sido 50.40 kilómetros por hora.

Establecemos dos tipos de comparaciones absolutas, las cuáles denominamos **comparaciones** y **variaciones.**

Llamaremos **comparación** a la comparación absoluta de dos funciones estado **diferentes e** y **d.** Usaremos la siguiente notación para la comparación entre los estados **e**(**t**) y **d**(**s**):

$$\mathbf{c = c_{ed} = c_{ed}(t,s) = d(s) - e(t).}$$

Escribiremos solo **c** si se sobreentienden las funciones **e** y **d**, y $\mathbf{c_{ed}}$ si el tiempo no tiene un papel relevante, como es muy frecuente que ocurra en los problemas en los que aparece una comparación. En general, las comparaciones se refieren a una situación estática, incluso en el caso de ser **t** y **s** diferentes. Si **t** = **s,** entonces hablaremos de **comparación simultánea.** Ejemplo: Ernesto tiene 2 dólares más que Andrés.

2.3 Variaciones

Llamaremos **variación** a la comparación absoluta de dos estados de **una misma función** estado **e,** en los dos momentos diferentes. Escribiremos

$$\mathbf{v = v_e = v(t,s) = v_e(t,s) = e\ (s) - e\ (t),}$$

según el énfasis que deseemos poner en los instantes **t** y **s** o en la función **e.** Las variaciones necesariamente se refieren a una situación dinámica; es decir, transcurre el tiempo. **Ejemplo:** Ernesto tiene por la noche 2 dólares más que en la mañana.

Insistimos en que en las comparaciones hay dos funciones estado y el tiempo carece de importancia, mientras que en las variaciones hay una única función estado y en el transcurso del tiempo juegan un papel fundamental.

2.4 Otras variaciones y comparaciones:

Podemos considerar, y así lo haremos más adelante, variación de comparaciones, comparación de variaciones, … Ya que las ideas básicas son las ya expuestas, no entramos en más detalles ahora.

3. Formas semánticas equivalentes

Hay diferentes formas de expresar un estado, una comparación una variación. Nos referimos a formas que resultan ser equivalentes desde un punto de vista semántico; es decir, son formas verbales que tienen el mismo significado. Desde luego, no todas tienen el mismo uso en el lenguaje ordinario, ya que algunas de ellas son muy artificiales y sólo tienen interés desde una perspectiva teórica, aunque las exponemos aquí para presentar una panorámica completa.

Estas distintas maneras de expresión tienen gran importancia didáctica pues no resultan indiferentes a la hora de la resolución de problemas por parte de los alumnos, y pueden utilizarse para justificar la identificación de la suma y de la resta en el aprendizaje de los números negativos. (Bruno y Martinón, 1994, 1996).

En los apartados de esta sección analizamos las diferentes maneras de expresar un estado, una variación y una comparación. Los ejemplos con los que ilustramos nuestras ideas se sitúan todos en el contextos deber-tener. Todas las cantidades se refieren a dólares; por ejemplo; si decimos "Ernesto tiene 2 dólares", se entenderá "Ernesto tiene 2 dólares".

3.1 Formas de expresar un estado

Hay una única forma de expresar un estado. Por ejemplo,

Ernesto **tiene** 2,

o bien

Ernesto **debe** 2.

Haciendo uso de los números negativos, los estados pueden expresarse de otra forma diferente, equivalente a la anterior desde el punto de vista semántico. Por ejemplo,

"Ernesto **tiene** 2" es equivalente a "Ernesto **debe** -2",
"Ernesto **debe** 2" es equivalente a "Ernesto **tiene** -2".

En el lenguaje ordinario, lo natural es expresar un estado de números positivos y no con números negativos. No obstante, este lenguaje doble tiene utilidad didáctica (Bruno y Martinón, 1996).

3.2 Formas de expresar variación

Consideremos el ejemplo: Ernesto (e) **debe** 2 por la mañana (estado inicial) y **tiene** 3 por la noche (estado final). La variación que produce puede expresarse de diversas formas, semánticamente equivalentes, que podemos agrupar en dos básicas. Las denominaremos **cambio** y **diferencia.**

3.2.1 Cambio

Se trata es decir lo que **gana** o **pierde** a lo largo del día, teniendo en cuenta
"**ganar**" es equivalente a "**aumentar** lo que **tiene**",
"**ganar**" es equivalente a "**disminuir** lo que **debe**",
"**perder**" es equivalente a "**aumentar** lo que **debe**".
"**perder**" es equivalente a "**disminuir** lo que **tiene**".

Cambio simple. Se expresa directamente lo que se **gana** o **pierde:**

En el transcurso del día E **ganó** 5.

Cambio aumento. Se dice que **aumenta** (lo que **tiene** o lo que **debe**):

En el transcurso del día E **aumentó** lo que **tiene** en 5.

Cambio disminución: Se dice que lo **disminuye** (lo que **tiene** o lo que **debe**):
En el transcurso del día E **disminuyó** lo que **debe** en 5.

3.2.2 Diferencia

Se expresa la diferencia entre lo que tiene o debe por la noche y por la mañana.

Diferencia directa. Se emplean en la expresión **más que:**

Por la noche E tiene 5 **más que** por la mañana,
Por la mañana E debe 5 **más que** por la noche.

Diferencia directa. Se usa la expresión **menos que.**
Por la noche E debe 5 **menos que** por la mañana.
Por la mañana E tiene 5 **menos que** por la noche.

3.2.3 Lenguaje natural

La expresión natural de una variación depende de la forma en la que se expresan los estados. Por ejemplo, en lugar de decir "E **tiene** 2 por la mañana y **disminuyó** lo que **debe** en 5", parece preferible decir "E **tiene** 2 por la mañana y **aumentó** lo que **tiene** en 5"; en lugar de decir "E **debe** dos por la mañana y **aumentó** lo que **tiene** en 5", resulta más claro decir "E **debe** 2 por la mañana y **disminuyó** lo que **debe** en 5".

3.2.4 Con números negativos

Si se usan números negativos hay otras tantas formas de expresar variación "En el transcurso del día E **ganó** 5":
En el transcurso del día E **perdió** -5,
En el transcurso del día E **aumentó** lo que **debe** en -5,
En el transcurso del día E **disminuyó** lo que **tiene** en -5,
Por la noche E **debe** -5 **más que** por la mañana,
Por la noche E **tiene** -5 **menos que** por la mañana,
Por la mañana E **tiene** 5 **más que** por la noche,
Por la mañana E **debe** -5 **menos que** por la noche.
Ninguna de ellas se usa en el lenguaje ordinario.

3.3 Formas de expresar una comparación

Distinguimos básicamente dos formas, semánticamente equivalentes, de expresar la comparación, a las cuales llamaremos **diferencia** y **cambio.** Consideremos el siguiente ejemplo: Ernesto (E) **debe** 2 y Daniel (D) **tiene** 3.

3.3.1 Diferencia

Se expresa cuánto **tiene** o (**debe**) uno **más que** (o **menos que**) el otro.
Diferencia directa. Se utiliza la expresión **más que:**
D **tiene** 5 **más que** E,
E **debe** 5 **más que** D.
Diferencia indirecta: Se emplea la expresión **menos que:**
D **debe** 5 **menos que** E,
E **tiene** 5 **menos que** D.

3.3.2 Cambio

Se expresa, en forma de cambio, la variación que debe experimentar uno (**ganar** o **perder**) para igualar al otro. Según la forma de cambio de expresar esa variación se obtienen diferentes formas de expresar la comparación:

Cambio progresivo:
Si E **gana** 5 iguala a D,
Si E **aumenta** lo que **tiene** en 5, iguala a D,
Si D **aumenta** lo que **debe** en 5 igualará a E.

Cambio regresivo:
Si D **pierde** 5, iguala a E.
Si D **disminuye** lo que **tiene** en 5, igualará a E.
Si E **disminuye** lo que **debe** en 5, iguala a D.

3.3.3 Lenguaje natural

La forma de expresión natural de una comparación depende de la forma en la que se expresen los estados. Por ejemplo, en vez de decir "E **debe** 2 y D **tiene 5 más que** E", es preferible decir "E **debe** 2 y D **debe** 5 **menos que** E".

3.3.4 Con números negativos

Usando números negativos hay otras tantas formas de expresar "D **tiene** 5 **más que** E":
D **debe** -5 **más que** E,
E **tiene** -5 **más que** D,
D **tiene** -5 **menos que** E,
E **debe** -5 **menos que** D,
Si E **pierde** -5, iguala a D,
Si D **gana** -5, iguala a E,
Si E **disminuye** lo que **tiene** en -5, iguala a D,
Si D **disminuye** lo que **debe** en -5 iguala a E,
Si E **aumenta** lo que **debe** en -5, iguala a D.
Si D **aumenta** lo que **tiene** en -5, iguala a E.

Como ya hemos señalado para los estados y las variaciones, no usan las expresiones con números negativos en el lenguaje ordinario, aunque si tienen utilidad en ciertas situaciones didácticas durante el aprendizaje de dichos números.

4. Clasificación funcional y semántica de problemas aditivos

En esta sección analizamos los distintos tipos de problemas aditivos simples, que son aquellos que corresponden con igualdades aritméticas de tipo $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{z}$.

Consideraremos 11 **clases de problemas,** cada una de las cuales se corresponde con una **estructura funcional.** Los problemas de **estado** se corresponden con las siguientes 3 clases:
Combinación de estados: $\mathbf{a(t) + b(t) = e(t)}$
Variación de un estado: $\mathbf{e(i) + v = e(f)}$
Comparación de estados: $\mathbf{e + c = d}$

Los problemas de **variaciones** son las siguientes 4 clases:
Combinación de variaciones sucesivas: $\mathbf{v\,(i,m) + v(m,f) = v(i,f)}$
Combinación de variaciones: $\mathbf{v_a\,(i,f) + v_b(i,f) = v_e(i,f)}$
Comparación de variaciones: $\mathbf{v_e\,(i,f) + c = v_a(i',f')}$
Variación de variaciones: $\mathbf{v\,(i,f) + v = v_e\,(i',f')}$

Los **problemas de comparaciones** agrupan las siguientes 4 clases:
Combinación de comparaciones adyacentes: $\mathbf{c_{ed} = c_{dg} = c_{eg}}$
Combinación de comparaciones: $\mathbf{c_{ag} + c_{bh} = c_{ed}}$
Variación de una comparación: $\mathbf{c(i) + v = c(f)}$
Comparación de comparaciones: $\mathbf{c_{ed} + c = c_{gh}}$

Según la forma de expresar las variaciones y las comparaciones de un problema, hablamos de **formas semánticas.** Teniendo en cuenta la **estructura funcional** y la **forma semántica** obtenemos el **tipo funcional-semántico** de un problema.

Iniciamos el estudio con los problemas en los que aparece una única función estado, luego continuamos con aquellos en los que hay dos, y así sucesivamente.

4.1 Problemas con una función estado

Consideramos ahora las distintas clases de problemas en los que aparece una única función estado **e.** En los ejemplos que ponemos, **e(t)** significa el saldo (lo que **tienen** o lo que **debe**) Ernesto (E), medido en dólares, en el instante **t.**

4.1.1 Variación de un estado

Consideremos dos instantes distintos **i** (inicial) y **f** (final), siendo **i** < **f.** Asociados a esos instantes se tienen el estado inicial **e(i)** y el estado final **e(f),** además de la variación **v = e(f) - e(i).** En esta clase de problemas se tiene la siguiente estructura funcional

$$\mathbf{e(i) + v = e(f).}$$

Ejemplo: e(i): Por la mañana E **debía** 2.
v: En el transcurso del día E **ganó** 5.
e(f): Por la noche E **tenía** 3.

Estos problemas, expresados en su forma semántica de **cambio** han sido denominados problemas de **cambio** (Riley y otros, 1983), **unión y separación** (Carpenter y Moser, 1982), **una transformación que une dos medidas** (Vernaud, 1982) y **dinámico** (Nesher, 1982).

4.1.2 Combinación de variaciones sucesivas

Ahora hay tres instantes diferentes: inicial **i** (inicial), **m** (medio), **f (**final).
En estos instantes el estado toma otros tantos valores: inicial **e(i),** medio **e(m)** y final **e(f).** Aparecen así diferentes variaciones:

$$\mathbf{v(i,m) = e(m) - e(i), \qquad v(m,f) = e(f) - e(m), \qquad v(i,f) = e(f) - e(i).}$$

Los problemas de esta clase tienen la estructura funcional:

$$\mathbf{v(i,m) + v(m,f) = v(i,f).}$$

Ejemplo: **v(i,m):** En el transcurso de la mañana E **perdió** 2.
v(m,f): En el transcurso de la tarde E **ganó** 5.
v(i,f): En el transcurso del día E **ganó** 3
Esta clase de problemas ha sido considerada por Vergnaud (1982) en su forma semántica de cambio y la llamó **composición de dos transformaciones.**

4.1.3 Variación de variaciones

En esta clase se problemas hay cuatro instantes: i < f 7 i´ < f´. Podemos entonces considerar las variaciones del estado e:

$$\mathbf{v(i,f) = e(f) - e(i), \qquad v(i´f´) = e(f´) - e(i´).}$$

Lo habitual es que esas variaciones se refieran a periodos constantes de tiempo; es decir, **f – i = f´ - i´.** Por ejemplo, esas variaciones pueden representar las ganancias o pérdidas que se producen en un día. Aparece así una nueva función estado **v(i,f)** que se define en intervalos temporales **(i,f).** En la expresión de la estructura funcional de esta clase de problemas, **v** representa la variación de la función **v(i,f)** y no de la función **e:**

$$v(i,f) + v = v(i´,f´)$$

Ejemplo: v(i,f): Ayer E **perdió** 2.
v: Hoy E **perdió 5 menos que** ayer.
v(i,f´): Hoy E **ganó** 3.

Esta estructura funcional tiene gran similitud con la comparación de variaciones, con la diferencia en esta última se consideran dos funciones estados:
$v_e(i,f) + c = v_{id}(i´,f´)$.

4.2 Dos funciones estado

Las dos funciones serán denotadas por **e** y **d**. Supondremos que **e(t)** es el saldo de Ernesto (E) y **f (t)** el saldo de Daniel (D) en un cierto momento **t.**

4.2.1 Comparación de estados:

La estructura funcional es:

$$e + c = d$$

Ejemplo: e: E **desde** 2.
c: Si E **gana** 5, entonces iguala a D.
d: D **tiene** 3.

Esta clase de problemas, cuando la comparación se expresa en forma de diferencia, ha sido denominada en la literatura de las siguientes formar: **comparación** (Riley y otros, 1983; Carpenter y Moser, 1982, Nesher, 1982) y **una relación estática que une dos medidas** (Vergnaud, 1982). Si la comparación se expresa en forma de cambio se han denominado **igualación-añadiendo** o **igualación-quitando** (Carpenter y Moser, 1982).

4.2.2 Comparación de variaciones

Consideramos la variación $v_e(i,f)$ entre los dos instantes **i < f** y también la variación $v_d(i´,f´)$ entre los instantes **i´< f´**de la función estado **d,** aunque lo habitual es que sea **i = i’** y **f = f´.** En esta clase de problemas se comparan ambas variaciones y tienen la siguiente estructura funcional:

$$v_e(i,f) + c = v_d(i´,f´).$$

Ejemplo: $v_e(i,f)$**:** En el transcurso del día E **perdió** 2.
C: D **perdió 5 menos que** E.
$v_d(i´,f´)$**:** En el transcurso del día D **ganó** 3.

4.2.3 Variación de una comparación

Al variar con el tiempo los dos estados **e** y **d,** también varía la comparación entre ellos.

$$c(t) = d(t) - e(t)$$

Entre los dos instantes i < f se produce una variación **v** de la función comparación **c(t).** La estructura funcional de esta clase de problemas es la siguiente:

$$c (i) + v = c(f).$$

Ejemplo: c(i): Ayer D **tenía** 2 **más que** E.
v: Hoy E **ganó** 5 **más que** D.
c(f): Hoy E **tiene** 3 **más que** D.
Esta estructura es muy similar a la anterior cuando **i = i´y f = f´:**

$$V = c(f) - c(i) = d(f) - e(f) - d(i) + e(i) = v_d(i,f) - v_e(i,f) = c$$

4.3 Tres funciones estado

Consideramos en este apartado problemas en los que aparecen tres funciones estado.

4.3.1 Combinación de estado

En ciertas situaciones una función estado **e** es suma de dos **estados parciales a** y **b** y diremos que **e** es el **estado total.** Por ejemplo, **a** representa el saldo de Ernesto (E) (lo que tiene o debe) en el banco, **b** el saldo en casa y **e** el saldo total, suma de **a** y **b.** La estructura funcional de esta clase de problemas es:

$$\mathbf{a(t) + b(t) = e(t)}$$

Ejemplo: a(t): En el banco E **debe** 2.
b(t): En casa E **tiene** 5.
e(t): En total E **tiene** 3.

Esta clase de problemas ha recibido diferentes denominaciones en la literatura: **combinación** (Ryley y otros, 1983) **parte-parte-todo** (Carpenter y Moser, 1982), **una transformación que une dos medidas** (Vergnaud, 1982) y **estático** (Nesher, 1982).

4.3.2 Combinación de variaciones

Suponemos que **a** y **b** son estados principales del estado total **e:**

$$\mathbf{e(t) = a(t) + b(t).}$$

Con el transcurso del tiempo los tres estados varían:

$$\mathbf{v_a(i,f) = a(f) - (i) \qquad v_b(i,f) = b(f) - b(i) \qquad v_e(i,f) = e(f) - e(i)}$$

De igual forma que en 4.3.1, podemos suponer que **a** y **b** representan los saldos de Ernesto (E) en el banco y en su casa y **e** es el saldo total. La estructura funcional es:

$$\mathbf{v_a(i,f) + v_b(i,f) = v_e(i,f)}$$

Ejemplo: **v_a(i,f):** En el transcurso del día E **perdió** 2 en el banco.
v_b(i,f): En el transcurso del día E **ganó** 5 en su casa.
v_e(i,f): En el transcurso del día E **ganó** 3 en total.

4.3.3 Combinación de comparaciones adyacentes

A diferencia de las dos clases de problemas anteriores (4.3.1 y 4.3.2) ahora las tres funciones estados son "independiente". Por ejemplo, **e** representa el saldo de Ernesto (E) **d** el de Daniel (D) y **g** el de Gabriel (G). Podemos considerar las tres comparaciones

$$\mathbf{c_{ed} = d - e, \qquad c_{dg} = g - d, \qquad c_{eg} = g - e.}$$

Decimos que las comparaciones **c_{ed}** y **c_{dg}** son adyacentes y que c_{eg} es la combinación de ambas. La estructura funcional de esta clase de problemas es la siguiente:

$$\mathbf{c_{ed} + c_{dg} = c_{eg}}$$

Ejemplo: **c_{ed}:** D **tiene** 2 **menos que** E.
c_{dg}:G **tiene** 5 **más que** D.
c_{eg}:G **tiene** 3 **más que** E.

Estos problemas en su forma de expresión de diferencia han sido denominados **composición de dos relaciones estáticas** por Vergnaud (1982).

4.4 Problemas de cuatro funciones estado

4.4.1 Comparación de comparaciones

Supongamos que tenemos cuatro funciones estado **e, d, g** y **h.** Por ejemplo, representan los saldos de Ernesto (E), Daniel (D), Gabriel (G) y Héctor (H), respectivamente. Si consideramos las comparaciones

$$c_{ed} = d - e, \qquad c_{gh} = h - g,$$

obtenemos la comparación de comparaciones, cuya estructura funcional es la siguiente:

$$c_{ed} + c = c_{gh}.$$

Ejemplo: c_{ed}**:** D **tiene** 2 **menos que** E.
c: Lo que **H tiene más que** G es 5 **más** de lo que E **tiene más que** D.
c_{gh}**:** H **tiene** 3 **más que** G.

4.5 Problemas con seis funciones estado

4.5.1 Combinación de comparaciones

Consideramos el estado **e** que es combinación de los estados parciales **a** y **b: e = a + b.** Por ejemplo, **e** es el salto total de Ernesto (E), mientras que **a** y **b** representan los saldos en el banco y en su casa, respectivamente. Consideramos también el estado **d = g+h,** combinación de los estados parciales **g y h:** saldo total de Daniel (D), saldos en el banco y en su casa, respectivamente. Las comparaciones de los estados parciales y totales son:

$c_{ag} = g - a$ (comparación de los saldos en el banco)
$c_{bh} = h - b$ (comparación de saldos en su casa)
$c_{ed} = d - e$ (comparación de saldos totales)

Entonces resulta que c_{ed} es combinación de c_{ag} y c_{bh} siendo la estructura funcional de esta clase de problemas la siguiente:

$$c_{ag} + c_{bh} = c_{ed}$$

Ejemplo: c_{ag}**:** En el banco, D **tiene** 2 **menos que** E.
c_{bh}**:** En casa, D **tiene** 5 **más que** E.
ced: En total, D **tiene** 3 **más que** E.

Consideraciones finales

Hemos presentado una clasificación general de los problemas aditivos verbales que permite considerar nuevas situaciones no contempladas en las investigaciones sobre este tema. Esta clasificación puede ser utilizada con todo tipo de números (positivos y negativos, enteros y no enteros).

No pensamos que todos estos tipos de problemas deban ser tratados en la educación primaria o secundaria, lo cual no sólo sería imposible sino innecesario. Aunque algunos de los problemas que citamos pueden introducirse, no tienen por qué ser tratados de forma sistemática. La clasificación que damos y la distinción entre los aspectos funcionales y semánticos pueden servir de reflexión a parte del profesorado de estos niveles sobre el tipo de situaciones que pueden surgir en los problemas aditivos y los conceptos que están en juego (estados, comparaciones, variaciones y las relaciones entre ellos).

Por otro lado, la clasificación puede ser parte del soporte teórico en investigaciones sobre el tema, ya que a partir de ella surgen interesantes preguntas de investigación: ¿cuáles son los problemas que presentan mayor dificultad?, influye la forma semántica de expresar las distintas situaciones?, ¿los alumnos comprenden de la misma forma las variaciones expresadas como diferencias, que las comparaciones expresadas como diferencias?, por lo tanto. ¿Es relevante el tiempo? Otro tipo de cuestiones que cabe plantearse tiene que ver con las representaciones en distintos modelos, como puede ser la recta, de estas situaciones.
En la medida en que las respuestas a estas preguntas ayuden a conocer mejor la comprensión de los alumnos en este tema, la clasificación que presentamos cobrará más o menos utilidad.