CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL IPN

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

EL RAZONAMIENTO DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO EN ACTIVIDADES DE PROBABILIDAD BINOMIAL CON APOYO DE SIMULACIÓN COMPUTACIONAL.

Tesis que presenta:
MARIANA DEL ÁNGEL HERRERA HERNÁNDEZ

Para obtener el grado de:
MAESTRA EN CIENCIAS

En la Especialidad de
MATEMÁTICA EDUCATIVA

Directores de la Tesis:
Dr. Ernesto A. Sánchez Sánchez
Dra. Guadalupe Carrasco Licea

Ciudad de México Noviembre de 2017

Agradezco al CONACYT por el apoyo económico brindado para realizar mis estudios de Maestría. Número de Becaría: 591885

AGRADECIMIENTOS

¡A Dios por sobre todas las cosas!

A mis directores de tesis el Dr. Ernesto Sánchez Sánchez y a la Dra. Guadalupe Carrasco Licea, por su disposición, trabajo y compromiso; por todo lo que me enseñaron como investigadores y por su calidad humana.

A mis sinodales Dr. François Pluvinage y Dr. Jaime García, por el tiempo dedicado a leer y revisar este trabajo.

A cada uno de mis profesores por todas sus lecciones, en especial a la Dra. Olimpia Figueras Mourut de Montppellier, Dr. Antonio Rivera y el Dr. Gonzalo Zubieta.

Al personal administrativo del Departamento de Matemática Educativa, sobre todo a Adriana Parra, Norma Cruz y Gabriela Rodríguez, por su entera disposición y excelente trato.

A mis compañeros de generación pues su apoyo fue fundamental.

DEDICATORIAS.

A mi hermosa hija Ana Regina, mi pequeña guerrera, eres lo más importante de mi vida.

A Rey, mi esposo y principal motivador, gracias por siempre estar mi lado y alentarme a continuar no importando las circunstancias.

A mi mamá, la mujer que me enseño que en este mundo todos los caminos se abren con esfuerzo y lucha.

¡¡¡Los amo!!!

ÍNDICE

RESUMEN

El objetivo de la investigación que aquí se presenta es observar y describir la manera en que los estudiantes de bachillerato aplican y relacionan diferentes ideas probabilísticas en la construcción de las distribuciones binomiales b(x, 3, ½) y b(x, 3, ⅓). Para alcanzarlo, se diseñaron secuencias de actividades que propiciaban que los estudiantes recuperaran o elaboraran en el contexto concreto de una situación binomial, sus ideas de espacio muestral, combinatoria, variable aleatoria, enfoques clásico y frecuencial de probabilidad, distribución de probabilidad y variabilidad. Para hacer emerger la noción de variabilidad actividades de simulación con el software Fathom fueron realizadas. Tres grupos de 6º semestre de bachillerato realizaron las actividades durante 4 sesiones de 1:30 hs. cada una. Los datos lo constituyen el conjunto de respuesta a cuestionarios que los estudiantes fueron llenando durante las actividades; éstas fueron transcritas y analizadas. Los resultados muestran diferentes niveles de manejo de las ideas fundamentales, dificultades con algunas de ellas y sobre todo la ausencia de algunas inferencias que se esperaba de los estudiantes. Como conclusión se considera que el diseño de actividades para la construcción de la distribución binomial, como el que aquí se propone, propicia que los estudiantes pongan en juego y fortalezcan su razonamiento con las ideas fundamentales de probabilidad.

ABSTRACT

The aim of this research is to observe and describe how different fundamental probabilistic ideas are applied and connected among them by high school students in activities related to the construction of the binomial distributions b(x, 3, ½) and b(x, 3, ⅓). In order to achieve this aim, sequences of activities were designed with the purpose of enabling, in a specific context of a binomial situation, that the ideas of sample space, combinatorics, random variable, classical and frequency approaches of probability, distribution, and variability are recovered or elaborated by the students. In order to emerge the notions of the frequency approach of probability and variability, simulation activities with manipulatives and with Fathom software were performed. Thirty-four students in 6th semester of high school, divided in three groups, carried out the activities during 4 sessions of 1:30 hrs each one. The data are the set of student responses to questionnaires completed during activities; these were transcribed and analyzed. The results show different levels of reasoning with fundamental ideas, difficulties with some of them and especially the absence of some inferences expected from students. In conclusion, it could be stated that the design of activities for the construction of the binomial distribution, such as the one proposed here, encourages students to practice and strengthen their reasoning with fundamental ideas of probability.

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En la sociedad actual, y a lo largo de la historia, las personas se enfrentan, y se han enfrentado, a muchas situaciones con fuertes componentes de incertidumbre, por lo que han construido esquemas que les permiten asimilar o enfrentarse a tales situaciones. No obstante, tales esquemas (o heurísticas, en la terminología de Kahneman y Tversky, 1982) aunque útiles suelen tener muy poco alcance en ciertos ámbitos y conducen a las personas a equivocarse frecuentemente (es decir, a caer en sesgos, en los términos de los autores mencionados). Es importante entonces que las personas entiendan mejor tales situaciones y desarrollen su razonamiento para tomar decisiones racionales frente a ellas. En el ámbito escolar, la manera en que la educación puede propiciar el desarrollo del razonamiento de los estudiantes frente a situaciones de incertidumbre es mediante la enseñanza de la probabilidad y la estadística. Por esta razón, desde hace casi tres décadas se han introducido temas de dichas materias en los currículos de matemáticas desde los niveles básicos (NCTM, 2000; MECD, 2000). Un ejemplo claro se encuentra en los "Principios y Estándares" (NCTM, 2000) donde se plantea la introducción a temas de Probabilidad y Estadística desde los primeros años de educación escolar sin demorar su enseñanza hasta los niveles medio o superior.

En particular, en México, se abordan algunos conceptos de estadística descriptiva en primaria y las ideas básicas de la probabilidad se comienzan a estudiar a partir de la secundaria (SEP, 2017). En la mayoría de los diversos sistemas de bachillerato se incluye el primer curso de probabilidad y estadística (en el sistema CCH de la UNAM es optativa) pues en los niveles anteriores sólo se incluye el estudio de algunos temas básicos. Tales cursos se dividen en Estadística descriptiva, Probabilidad e Introducción a la inferencia estadística. De probabilidad se proponen los siguientes temas: Álgebra de eventos, Definiciones de probabilidad (clásica y frecuencia), Probabilidad condicional e independencia, Variables aleatorias y distribuciones; de éstas se sugieren, principalmente, las distribuciones binomial y normal. Como se puede ver, el tema de distribuciones es el último tema de probabilidad del curso antes de pasar a la inferencia estadística.

La noción de distribución es una meta importante en el estudio de la probabilidad y, en los cursos, esta noción no se estudia en general sino de manera concreta a través del estudio de las distribuciones binomial y normal. Es conveniente enfatizar, que el tema de variable aleatoria y distribución de probabilidades engloba y sintetiza todos los conceptos básicos de probabilidad, además, constituye el tránsito hacia una matemática más avanzada, en particular, involucrando al concepto de función. No se sabe, sin embargo, en qué medida los estudiantes se apropian de estos conceptos y sus propiedades y, el tipo de razonamientos que despliegan durante su aprendizaje.

Por tales razones, es importante explorar la manera en que razonan acerca de y con las distribuciones teóricas de probabilidad. Para cubrir un aspecto de esta problemática, en este estudio nos enfocamos sólo en el razonamiento acerca de y con en la distribución binomial.

En las revisiones bibliográficas sobre el tema realizada en otras tesis, se han encontrado pocos y dispersos estudios sobre el aprendizaje y/o enseñanza de la distribución binomial (Landín, 2014, García, 2016), sin embargo, debido al papel central y sintetizador de la noción de distribución (teórica) en la teoría de la probabilidad, una gran cantidad de resultados de la investigación sobre el pensamiento y razonamiento probabilísticos (Shaughnessy, 1992, Jones, Langrall, y Mooney, 2007) se relacionan con la distribución binomial. En efecto, los resultados de la investigación sobre razonamiento con conceptos como espacio muestral, definiciones clásica y frecuencial de probabilidad y probabilidad condicional e independencia, muy probablemente explican, o tienen algo qué decir, sobre la manera en que los estudiantes resuelven, y razonan con, problemas binomiales.

Jones, et. al. (2007) comentan que el cálculo de probabilidades desde diferentes enfoques, proporciona un marco para investigar las concepciones de los estudiantes acerca de ideas clave como: probabilidad, fenómenos aleatorios, independencia, ley de grandes números y distribuciones de probabilidad, por lo que abre caminos para contenidos que de otra manera solo podrían ser vistos en grados superiores.

Al respecto, Batanero, Chernoff, Engel, Lee, y Sánchez (2016) señalan que es fundamental brindar herramientas para la construcción del razonamiento probabilistico de los estudiantes, pues además de ser un tema vigente en las líneas de investigación, es parte de la vida real y tiene aplicaciones en la identificación de eventos aleatorios en la naturaleza, la tecnología y la sociedad, en el análisis de las condiciones de estos eventos y en la construcción y aplicación de modelos matemáticos en diversos escenarios.

Además de lo anterior, la importancia de estudios sobre la distribución binomial, también radica en que proporciona medios para estructurar la realidad, constituyéndose como herramientas para resolver problemas y como medio para conocer y estudiar conceptos fundamentales usados en la materia.

Por otro lado, entre las lineas de investigación señaladas por Shaughnessy (1992) y por Jones, et. al. (2007) se mencionan las repercusiones del uso de softwares en las escuelas, pues estos proporcionan la oportunidad de crear ambientes de aprendizaje completamente nuevos donde la simulación y las formas de representación de la información pueden dar lugar a nuevos alcances en la enseñanza de los contenidos del área.

Considerando los aspectos anteriores, este trabajo busca responder a las siguientes preguntas de investigación, desde las cuáles se plantea el objetivo del presente trabajo.

1.1 Preguntas de Investigación

"¿Qué ***patrones de razonamiento*** se pueden identificar en las respuestas de los estudiantes a tareas de la distribución binomial?

¿Qué ***elementos del razonamiento*** de los estudiantes de bachillerato pueden ***extraerse*** de problemas de Distribución Binomial cuando se llevan a cabo actividades de simulación física y computacional?

1.2 Objetivo

Al comienzo de esta investigación el objetivo principal era observar y describir los posibles cambios ocurridos en el razonamiento de los estudiantes con relación a la percepción de la variabilidad como consecuencia de su participación en actividades de simulación física y computacional de situaciones binomiales. En consecuencia, para llevar a cabo dicho objetivo se propuso hacer una evaluación antes y después de las actividades de simulación para percibir los avances alcanzados. Esta evaluación no sólo abarcaba preguntas acerca de la variabilidad, sino que incluía preguntas para explorar y también para propiciar la reflexión del estudiante, sobre los fundamentos de la distribución binomial, es decir, conceptos que era necesario manejar para darle sentido a las actividades de simulación.

El objetivo se transformó debido a que el análisis de los cuestionarios (previo y posterior) así como las respuestas a las hojas de trabajo iban revelando momentos en el razonamiento de los estudiantes en los que realizar o no la inferencia adecuada los aproximaba u alejaba de la solución final, que consistía en construir e interpretar las dos distribuciones binomiales b (x, 3, ½) y b (x, 3, ⅓). En consecuencia, un objetivo queda en los siguientes términos:

- Identificar y describir patrones en el razonamiento de un grupo de estudiantes de bachillerato cuando llevan a cabo actividades de cálculo de probabilidades de distribución binomial incluyendo simulación computacional.

1.3 Justificación

El presente trabajo se enfoca en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de bachillerato acerca de y con las nociones de variable aleatoria y distribución binomial, la relación entre los enfoques clásico y frecuencial de probabilidades y la simulación de distribuciones binomiales con ayuda de la tecnología. En lo que sigue desarrollaremos un poco más estas ideas para mostrar que está justificado llevar a cabo una investigación como la que en este trabajo se formula.

Investigar el pensamiento sobre probabilidad de estudiantes de bachillerato. Shaughnessy (1992) hizo notar que la mayoría de investigaciones sobre pensamiento probabilístico que se habían hecho hasta la fecha que cubre su reseña se centraban en estudiantes de nivel primaria o estudiantes universitarios, habiendo una ausencia de investigaciones en los niveles medios. Por esta razón, hizo un llamado a los investigadores para realizar estudios sobre el pensamiento de los estudiantes de nivel bachillerato acerca de las nociones de azar, probabilidad y toma de decisiones bajo incertidumbre. Subrayó la necesidad de entender cómo diseñar la enseñanza para que pueda influir de manera significativa en el desarrollo del pensamiento estocástico de los estudiantes.

Las nociones de variable aleatoria y distribución binomial. Pfannkuch y Reading (2006, p. 5) mencionan que las distribuciones son estructuras complejas y sutiles cuya comprensión requiere de procesos largos y pausados de actividades y reflexión. Dada su importancia clave para el desarrollo de conceptos y métodos estadísticos y probabilísticos más avanzados, la noción de distribución juega un papel importante en los currículos de probabilidad y estadística. Dichas autoras señalan, además, que surgen múltiples preguntas relacionadas con la investigación didáctica de esta noción que requieren de la atención de los investigadores. Entre once preguntas que formulan con relación a la noción de distribución, reproducimos una, no por destacarse especialmente por sobre las otras, sino porque se relaciona en algunos aspectos con nuestro estudio: "¿Cómo se desarrolla el razonamiento sobre distribución desde sus aspectos más simples hasta sus formas más complejas?" (p. 5). Sin embargo, cabe aclarar la diferencia entre *distribuciones empíricas* y *distribuciones teóricas* y que dicha diferencia es la que existe entre "la variación que vemos en los datos y un modelo potencial para el proceso que da origen a esa variación" (Wild, 2006, p. 11). Al respecto, se debe mencionar que la binomial es la distribución teórica discreta más importante en probabilidad, no obstante, es escasa la investigación acerca de su aprendizaje y enseñanza.

La relación entre los enfoques, clásico y frecuencial, de probabilidades es una de las líneas de investigación de la lista deseable de problemas para la investigación presente y futura que sugiere Jones et al. (2007), ellos sostienen que:

> A pesar de la aparente solidez de la investigación sobre el razonamiento probabilístico de los niños de escuela primaria, es evidente que hay un vacío en la investigación asociado con el enfoque frecuencial de la probabilidad; es decir, una investigación dirigida a explorar los conocimientos de los niños sobre la probabilidad frecuencial. De hecho, casi no hay investigación sobre si los niños pueden establecer las conexiones entre el enfoque clásico y el enfoque frecuencial a la probabilidad. […] Dicha investigación necesita documentar prácticas efectivas en el aula, incluidas las que utilizan la tecnología y el software que están disponibles para los niños pequeños". (P.368)

En el estudio de las distribuciones, el problema de la relación entre tales enfoques se traduce en las conexiones entre la distribución teórica y las distribuciones empíricas que provienen de fenómenos gobernados por dicha distribución. Conocer esta relación es crucial para llevar a cabo aplicaciones fructíferas, pues se refiere el dúo Modelo-Datos. En el pasado, no era posible tener y manejar datos en el aula que pudieran ser modelados por una distribución binomial por lo que su estudio en los niveles pre-universitarios era imposible. Hoy con los recursos computacionales y de simulación se pueden generar datos que emulan datos empíricos, por lo que parece viable plantearse el problema en las aulas.

Desde estos puntos de vista este trabajo se ajusta totalmente a la temática contemplada en la agenda de investigación en matemática educativa en lo que se refiere a probablidad, su importancia radica en que contempla el papel del razonamiento probabilistico, lo que permite recabar información sobre la construcción y comprensión que hacen los alumnos de la distribución binomial en dos casos muy sencillos, además de la posibilidad que brinda de usar un software especialmente diseñado para la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad.

CAPÍTULO 2. ANTECEDENTES

El presente capítulo se organiza en torno a cinco aspectos que se han considerado como los antecedentes más significativos y relevantes para el presente trabajo. El primero se refiere a algunos estudios sobre combinatoria y sobre su relevancia en el tema de la distribución binomial. El segundo aborda el tema de la importancia sobre el uso de tecnología en la enseñanza de la probabilidad con señalamientos específicos sobre el software Fathom. El tercer y cuarto aspectos hacen referencia a estudios sobre distribución binomial y la manera en cómo se presenta en el plan y programa de estudios del Colegio de Ciencias y Humanidades (escenario del presente estudio), y finalmente, se revisan algunas tesis que estudian un tema similar al del presente trabajo de investigación.

2.1 Combinatoria

De acuerdo con Piaget, la secuencia del desarrollo se divide en estadios y períodos, mismos que se establecen con base en criterios cronológicos. Estas edades sólo son guías y aproximaciones calculadas en término medio con relación al desarrollo de los niños, dado que es posible observar que hay niños que alcanzan estadios superiores a edades más tempranas o algunos que por el contrario retrasan su entrada a uno específico, del mismo modo es posible encontrar formas de razonamiento de la etapa anterior o posterior a la que un sujeto está cursando (Richmond, 2000).

Aproximadamente a los once años y hasta la adolescencia, se encuentran la aparición y desarrollo de las operaciones formales, en el que el sujeto tiene la capacidad de organizar acciones mentales que forman sistemas combinatorios que le permiten la resolución de problemas a partir de la hipótesis, el experimento y la deducción. Este sistema combinatorio se forma de situaciones particulares insertas en una gama de posibilidades (Richmond, 2000).

Roa, Batanero, Godiño y Cañizares (1997) señalan que la capacidad combinatoria es un componente fundamental del pensamiento formal, y representa un esquema tan general como la proporcionalidad y la correlación; del mismo modo señalan que las combinaciones suponen la coordinación de la seriación y la correspondencia, representan operaciones sobre operaciones, lo que da la característica fundamental del nivel de pensamiento formal.

Ahora bien, Roa et al. (1997) citan a Fischbein (1975) para señalar que la capacidad de resolver problemas combinatorios no siempre se alcanza si no hay enseñanza específica, es decir, aunque pudiera pensarse que por estar en la edad correspondiente, los sujetos tendrían desarrollada esta forma de razonamiento, esto no será así a no ser que haya una instrucción específica para ello, pues como apuntan los mismos autores *"los esquemas combinatorios sufren un proceso de "compresión", reduciéndose a una estructura mínima, para apoyar las intuiciones erróneas de los sujetos"* (Roa et al., 1997:2).

Como consecuencia de lo anterior Piaget en 1972 admitió que la edad del pensamiento formal se extiende hacia los 15 a 20 años, señalando además que para su desarrollo es indispensable considerar el estímulo del contexto, las capacidades de cada sujeto y su especialización profesional (Roa, et al., 1997).

Lo anterior apunta a la importancia del desarrollo combinatorio en los individuos, pero también en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, por ejemplo, Kapur (1970) señala que la combinatoria es esencial en la matemática de lo discreto y sus aplicaciones se extienden a las ciencias físicas e ingenierías, las ciencias biológicas, las sociales y administrativas, y por supesto a la informática.

Kapur (1970) menciona que la combinatoria puede ser introducida desde edades tempranas, además, los estudiantes pueden ser entrenados en los conceptos de enumeración, optimización, existencia, pensamiento sistemático, etc. Para esto, se pueden utilizar un gran número de problemas desafiantes que permitirían que los estudiantes generen un pensamiento más abstracto. Jones, et. al. (2007) indicaron que parte de las dificultades que los estudiantes tenian para resolver problemas de probabildad, por ejemplo para determinar el espacio muestral en situaciones aleatorias compuestas, se debe a la falta de razonamiento combinatorio. Kapur (1970) se plantea ¿cómo pueden introducirse los problemas de combinatoria en el currículo escolar? Y ¿cuál es la importancia de los problemas combinatorios en la construcción y aplicación de las matemáticas? Aunque estas preguntas las plantea para niveles básicos, también son pertinentes para nivel Bachillerato.

Por otra parte, Hadar y Hadass (1981) señalaron siete puntos clave que a su vez se convierten en las dificultades que los estudiantes tiene que enfrentar en la resolución de problemas combinatorios, estos son los siguientes:

- Identificación del conjunto de eventos en cuestión. Se refiere especificamente a lo que se pide en el problema, reconociendo con claridad cuál es el evento a evaluar.
- Eligir una notación apropiada. Se refiere a escoger la símbología que permita llegar a la solución de la forma menos confusa o más eficiente
- Percibir el problema general como un conjunto de problemas particulares. Esto pemite separar el problema en problemas más sencillos.
- Construir un método sistemático. Se trata de encontrar una manera de enumerar eficientemente los problemas más sencillos que componen el problema complejo.
- Fijar de una (o más) de las variables. Se refiere a ir fijando las variables a fin de hacer una enumeración coherente.
- Realizar el plan de conteo. Llevar a cabo un plan de conteo diseñado para que contar resulte lo más eficiente posible.
- Generalizar. Una vez que el estudiante entiende cómo está resolviendo un problema formado por otros problemas particulares, la tarea es buscar las soluciones particulares, y usarlas para enontrar la solución que corresponde al problema general. Esto no es sencillo pues en ocasiones no es claro como se puede llevar una solución de un caso específico al problema planteado.

Los estudiantes de bachillerato también siguen teniendo varias de estas dificultades en las actividades para construir la distribución binomial.

English (2007) aplicó un estudio con niños entre los 7 y los 12 años, en el que debían resolver problemas combinatorios bidimensionales y tridimensionales, y en donde se buscaban identificar las estrategias que aplicaban durante la solución de los problemas. Otro objetivo de este estudio era saber si la experiencia con problemas bidimensionales ayudaba en la resolción y aplicación de estrategias para los tridimensionales. En el estudio de las binomiales b(x; 3, ½) y b(x; 3, ⅓) que estudiamos en este trabajo se requiere contar arreglos tridimensionales.

Shaughnessy (1992) señala que el aprendizaje exitoso de la probabilidad depende basicamene de las representaciones y de las actividades que usan los docentes, por ejemplo sugieren el uso de diagramas de árbol, diagramas de Venn y de tablas como una forma para conectar contenido y tareas asignadas a los estudiantes. En este trabajo sólo se requería que los estudiantes utilizaran diagramas de árbol.

En conclusión el tema de combinatoria, resulta ser poderoso y fundamental para el aprendizaje y la enseñanza de la estadística desde dos puntos de vista, el primero por su relevancia en el desarrollo cognitivo de los sujetos en la etapa del pensamiento formal, como es el caso de los estudiantes de bachillerato, y en segunda instancia, por su valor en el área de las matemáticas discretas y en el desarrollo de estrategias de resolución de problemas desde edades tempranas hasta los niveles de educación superior. Con el advenimiento de la tecnología parece posible que los estudiantes eviten dificultades técnicas de la combinatoria, pero es necesario conservar su conceptualización. Además hay otros aspectos en los que la tecnología también puede ser útil.

2.2 El uso de la tecnología

El uso de la tecnología es fundamental en el desarrollo de la sociedad en todos los ámbitos. En este apartado se hace referencia al uso que tiene en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la probabilidad, y al final de la sección se habla en concreto del software Fathom, utilizado en este trabajo.

Shaughnessy (1992) señalaba que había pocos estudios sobre los efectos que tiene el uso de computadoras en el aprendizaje y la comprensión de la probabilidad, por lo que propuso dentro de su agenda de investigación, que se realizaran diversos estudios para clarificar dichos efectos. Al respecto señaló que el desarrollo de la investigación en el uso de software de computadora era trascendental dado que cambiaría las ideas probabilísticas de los estudiantes aprovechando la velocidad, los gráficos, y el potencial de la simulación de las computadoras.

En 2007, 15 años después Jones, et. al. afirmaron que las ventajas del uso de software en la enseñanza de la probabilidad se encuentra sobre todo en la posibilidad de la simulación, pues permite la retroalimentación en condiciones no alcanzables mediante simulaciones físicas, pues su realización sería muy tardada. Las simulaciones generalmente estan asociadas a temas como: variabilidad, probabilidad condicional y ley de los grandes números, además, permite hacer conexiones entre el enfoque frecuencial del cálculo de probabilidades y el enfoque clásico.

Esta idea la refuerzan Ireland y Watson (2009) quienes señalan que en sus investigaciones la simulación con apoyo de software permite mejorar la comprensión de la variación, la distribución y los vínculos entre datos y azar. Además, propicia la formación de conexiones conceptuales; pues el uso de ambientes computacionales sirve como mediador para transitar de un razonamiento concreto a uno formal.

Por su parte Konold, y otros (2011) señalan que una de las limitaciones de las simulaciones con objetos físicos es que no es posible recolectar suficientes datos en el aula para observar el hecho de que las estimaciones de probabilidad de muestras más grandes son menos variables que las de muestras más pequeñas, en consecuencia sugieren que después de una actividad de simulación con objetos físicos se debe llevar al estudiante a la simulación por computadora, lo que permitirá la visualización de grandes cantidades de datos.

En su estudio Stohl, Angotti, y Tarr (2010) examinaron cómo estudiantes de bachillerato hacen conexiones entre el enfoque frecuencial y teórico cuando se utilizan herramientas tecnológicas, incluyendo varias representaciones de los datos. Lo que deseaban analizar era el razonamiento de los estudiantes sobre la relación entre el enfoque frecuencial y la probabilidad teórica, sobre el efecto del tamaño de la muestra y sobre la variabilidad dentro y entre muestras de datos obtenidos de las simulaciones, así como la forma en que afecta el uso de la herramienta tecnológica a las representaciones de los estudiantes.

Dentro de sus conclusiones señalan que dar acceso a recursos externos físicos y tecnológicos puede ayudar a los estudiantes a establecer vínculos significativos entre las ideas previas y su posterior desarrollo en conceptos como variabilidad, independencia y tamaño de la muestra, dado que una sólida comprensión de estos tres conceptos puede ayudarles a desarrollar una relación bidireccional entre la probabilidad teórica y el enfoque frecuencial (Stohl, et al., 2004).

Dentro de los múltiples estudios que hablan sobre los beneficios del uso de tecnología, para este trabajo es de especial interés el reportado por Hoffman, Maxara, Meyfarth y

Prömmel (2014), quienes trabajaron con Fathom y evaluaron su utilidad y funcionalidad en simulaciones. A continuación se hace detalla un poco más esta información.

2.2.1 Utilización del software FATHOM (Hoffman, et al., 2014)

Hoffman et al. (2014) describen la investigación del grupo de trabajo de Rolf Biehler sobre actividades de simulaciones con el software Fathom. Este equipo considera que Fathom es un software que cumple con característica que lo hacen una potente herramienta educativa. Biehler y Maxara (2007, citado en Hoffman et al. 2014) caracterizaron tres aspectos diferentes del uso de la simulación, estos son: la simulación como herramienta de representación de experimentos aleatorios, la simulación como herramienta de interacción entre cálculos teóricos y métodos empíricos y la simulación como herramienta *sui generis*. En estas investigaciones el desafío fue el desarrollo simultáneo de tres niveles de competencias de los estudiantes: la competencia en probabilidad y estadística, la competencia de idear las simulaciones (competencias teóricas) y la competencia de implementarlas en Fathom (competencias prácticas).

La realización, utilización y modificación de un *plan de simulación* resultó con fuertes implicaciones pedagógicas pues es a través de este que los estudiantes pueden estructurar, reflexionar y documentar sus simulaciones, por lo que establecieron la hipótesis de que el plan de simulación podría ser una herramienta meta-cognitiva para los estudiantes.

Dentro de los resultados que señala este artículo están los de los estudios de Maxara y Meyfarth que evidencian que Fathom puede apoyar muy bien el proceso de aprendizaje y una comprensión más profunda de la probabilidad y la estadística. Sin embargo, es primero indispensable que el software sea comprendido y entendido por parte de los estudiantes para poder trabajar problemas específicos. De esta manera la herramienta puede ser útil para llevar a cabo un aprendizaje autodirigido.

2.3 Estudios sobre Distribución Binomial

Según Batanero, et al. (2016), un paso importante en cualquier aplicación de la probabilidad a los fenómenos del mundo real es el modelado de situaciones aleatorias. De manera que una manera de modelar y estructurar la realidad es a través de las herramientas matemáticas, en este caso los modelos de probabilidad, como la distribución binomial, que permite la modelación de situaciones de la vida real. Esta modelación incluye conceptos tales como probabilidades, variables aleatorias, distribución y variabilidad.

Landín (2013) realizó una revisión de la literatura sobre investigaciones en las que el tema central es la distribución binomial y logró encontrar 15 referencias que recurrían a este tema, las cuales organizó en tres secciones: *propuestas de enseñanza* (se incluyen cinco referencias), *investigaciones de aprendizaje* (se incluyen seis referencias) y estudios sobre *creencias, falsas concepciones y dificultades* (cuatro referencias). A continuación, se mencionan algunos de estos estudios.

Chalikias (2009) hizo una propuesta de enseñanza sobre la distribución binomial. Formuló un problema en un marco deportivo consistente en predecir al ganador del 49° Campeonato Mundial de Federación Internacional de Tiro Deportivo realizado en 2006 en Zagreb, Croacia. Los estudiantes modelaron y estimaron las probabilidades.

Dentro de las investigaciones sobre aprendizaje se encuentra la de Maxara y Biehler (2010), quienes llevaron a cabo un estudio con futuros profesores de matemáticas. Diseñaron e implementaron un curso en el que se utilizó el software Fathom, en este estudio centrado básicamente en dos aspectos la Ley de los Grandes Números y los tamaños de las muestras. Encontraron que un buen razonamiento para resolver las tareas dependía en gran medida del contexto de la misma, que los estudiantes que resuelven bien una tarea no necesariamente lo logran con otra con la misma estructura y en general, usan argumentos similares en las tareas que resuelven; también confirmaron la existencia de falsas concepciones.

Sobre investigaciones de aprendizaje se encuentra también el trabajo de Alvarado y Batanero (2007), quienes trabajaron en la comprensión de la aproximación a la binomial por medio de distribución normal. Realizaron actividades con un grupo de estudiantes de ingeniería y con apoyo de Excel. Sus principales resultados arrojaron que una alta proporción de los estudiantes con los que trabajaron reconocen a la variable aleatoria binomial como la suma de variables de Bernoulli, comprenden los efectos que tienen los parámetros sobre la aproximación y son capaces de calcular y comparar probabilidades aproximadas y exactas, pero recurren con frecuencia a la heurística de la representatividad.

Dada la importancia de la Distribución Binomial como distribución discreta y su aplicación para modelar diferentes situaciones en el ámbito social, se incluye en los documentos oficiales para bachillerato, particularmente en el plan y programa de estudios del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH), mismo que se revisará en la siguiente sección.

2.4 La Distribución Binomial en el Currículum del CCH

Las asignaturas de Estadística y Probabilidad I y II pertenecen al quinto y sexto semestre del plan de estudios del CCH, con carácter optativo correspondiente al Área de Matemáticas. Las unidades que conforman los programas de estudio constan de tres columnas: Aprendizaje, Temáticas y Estrategias Sugeridas, la primera contempla lo que el alumno debe ser capaz de hacer o de saber, la segunda considera los temas y subtemas que deberán cubrirse y la última se refiere a las sugerencias que favorecen la adquisición de los aprendizajes.

La organización de los contenidos contempla crear situaciones que permitan establecer reflexiones, relaciones y conjeturas que contribuyan en la resolución de problemas como medio para el desarrollo temático.

Este programa pretende ser una guía para formar en el alumnado una visión no determinista de los fenómenos aleatorios y que sea un medio para la comprensión y aplicación de la Inferencia Estadística. El enfoque disciplinario contempla la posibilidad de interpretar diversos tipos de información que permita la toma de decisiones mediante el uso de conceptos, técnicas y métodos; además de considerar las aplicaciones de la estadística y la probabilidad como el medio para realizar predicciones sustentadas en modelos matemáticos a través del estudio de dichos fenómenos.

En cuanto a la cuestión temática, en concreto, nos ocupa el aprendizaje, la aplicación y comprensión de conceptos como variabilidad, azar, frecuencias relativas, cálculo de probabilidades desde el enfoque clásico y frecuencial y por supuesto distribución binomial; todos incluidos en el programa de estudios de referencia.

Los contenidos temáticos para la materia de Estadística y Probabilidad I se encuentran organizados en tres unidades: Obtención, descripción e interpretación de información estadística, obtención e interpretación de información estadística con datos bivariados y Azar: modelación y toma de decisiones. Para este trabajo, sobre todo, es de interés la unidad uno y tres.

Dentro de la unidad uno, Obtención, descripción e interpretación de información estadística, se considera que el alumno debe ser capaz de explicar la noción de variabilidad en estadística, a través de la resolución de problemas que den oportunidad de observar la homogeneidad y heterogeneidad de los valores de una variable, lo que posteriormente permita la inferencia de características de la población, también deberá ser capaz de concluir que el azar es causa de la variabilidad en los datos estadísticos. En esta unidad también se considera la incorporación de la tecnología, sobre todo como medio para que los estudiantes representen de diversas formas la información por ejemplo a través de gráficas de barras, circulares, de caja, histograma de frecuencias, polígono de frecuencias y ojivas.

Dentro de la Unidad tres, Azar: modelación y toma de decisiones, la temática central es la comparación de fenómenos deterministas con fenómenos aleatorios y la reflexión sobre el concepto de azar. Se hace una revisión de los enfoques, clásico frecuencial de probabilidad, usando como estrategia la simulación física y la construcción de tablas de frecuencias, para posteriormente introducir la simulación por computadora. También se sugiere el diseño de actividades donde los alumnos puedan percatarse de que la probabilidad obtenida con el enfoque frecuencial se aproxima cada vez más al valor teórico conforme el número de ejecuciones de un experimento aumentan. En esta unidad también se introduce la noción de espacio muestral y se calculan probabilidades de eventos simples y compuestos.

Es importante hacer notar que dentro de todo el programa de estudios se sugiere el uso de sistemas computaciones o herramientas tecnológicas que permitan las simulaciones, inicialmente como una forma de facilitar las simulaciones físicas y posteriormente como un medio para permitir la abstracción de conceptos.

En cuanto a la materia de Estadística y Probabilidad II, misma que pertenece al 6º. Semestre del plan de estudios del CCH, la unidad uno (Modelos de probabilidad y sus aplicaciones) su propósito es que el alumnado continúe desarrollando su pensamiento estadístico, apropiándose del concepto de variable aleatoria, y construyendo modelos de probabilidad en términos de su tendencia, variabilidad y distribución, específicamente se centra en el estudio de las distribuciones binomial y normal.

Dentro de lo que el alumnado debe aprender se encuentra en primer término que los estudiantes distingan entre una variable aleatoria discreta y una continua, se propone que se lleven a cabo simulaciones físicas o por computadora de la distribución binomial y que se identifiquen las condiciones que satisfacen los experimentos binomiales, a través de situaciones contextualizadas. Posteriormente se hace lo mismo para el caso de la distribución normal.

2.5 Otros Estudios

Dentro de los trabajos que han servido como antecedente para este trabajo, se encuentran las tesis de obtención de grado (doctorado) de Pedro Rubén Landín Vargas del 2013 y de Jaime Israel García García del 2017.

En lo que se refiere al trabajo de Landín, propone la construcción de una jerarquía para construir el razonamiento de estudiantes de bachillerato con respecto a tareas que involucran probabilidades binomiales, por lo que divide su investigación en dos partes, por un lado, sobre la elaboración de jerarquías de razonamiento probabilístico y por otro acerca del aprendizaje del cálculo de probabilidades binomiales. Su trabajo partió de un estudio preliminar donde se analizaron los niveles de razonamiento de los estudiantes respecto a la idea de distribución de probabilidad binomial. Posteriormente 26 estudiantes participaron en un curso de probabilidad en una escuela pública. Estos estudiantes no habían estudiado previamente ningún curso de probabilidad. Se usaron dos cuestionarios con dos ítems comunes sobre distribución binomial. Finalmente, Landín (2013) propone una jerarquía de razonamiento probabilístico para los componentes de construcción de la distribución binomial, misma que puede ser usada como una herramienta para describir el desempeño de estudiantes de bachillerato ante tareas sobre esta distribución.

Dentro de sus conclusiones señala que el contexto y redacción de las preguntas que se plantean están estrechamente relacionadas con la comprensión de los estudiantes con respecto al ítem y por supuesto con su posterior razonamiento, encuentra la recurrencia al uso de heurísticas y sesgos, además de señalar que el uso del diagrama de árbol es una útil herramienta para trabajar conceptos relacionados con la distribución binomial (Landín, 2013).

Por su parte García hizo una investigación cualitativa en la que lleva a cabo un análisis comparativo con la taxonomía SOLO; construyendo jerarquías para organizar los patrones de respuesta detectados entre los estudiantes. Se trabajó con dos grupos de alumnos. El primer grupo, estaba formado por 54 estudiantes de sexto semestre de bachillerato, mismos no habían recibido ningún tipo de enseñanza formal de probabilidad y estadística. Mientras que el segundo grupo, estaba formado por 30 estudiantes de sexto semestre de bachillerato, quienes ya habían llevado un curso de probabilidad y estadística. Las edades de los participantes oscilaban entre los diecisiete y dieciocho años. El profesor titular de cada grupo colaboró en la investigación aplicando los cuestionarios y conduciendo las actividades de simulación.

En esta tesis se trabajaron dos situaciones, ambas modeladas por la distribución binomial, en la primera con $n = 2$ y $p = (1/2)$, mientras que la segunda con $n = 3$ y $p = (1/2)$. El trabajo se llevó a cabo en tres etapas, en la primera se aplicó un cuestionario inicial con 4 preguntas, en la segunda se llevó a cabo una simulación con monedas y en la última una simulación con el software Fathom.

García (2017) analizó cuatro tareas de las que se desprende los temas analizados: espacio muestral, variable aleatoria, predicción y distribución. Encontró que antes de las actividades de simulación los estudiantes tienen limitaciones para poner en juego los aspectos pertinentes que los llevarían a resolver los problemas por lo que sus respuestas se clasificaron en los niveles Pre y Uniestructural de la jerarquía SOLO, no obstante, depués de las actividades, mejoraron, de tal manera que sus respuestas fueron clasificadas en los niveles Multiestructural y Relacional de la jerarquía SOLO.

Encontró también que la mayoría de los estudiantes no cuentan con un lenguaje suficientemente desarrollado para expresar la variabilidad en las respuestas. Se percató de que antes de las actividades de simulación, los estudiantes que construían la distribución teórica eran propensos a predecir las frecuencias esperadas (determinismo), mientras que los que no saben o no podía construirla utilizan sólo el enfoque frecuencial (compromiso empírico).

García señala que los estudiantes que no habían tomado un curso de probabilidad y estadística adoptaron el enfoque frecuencial; mientras que los que ya lo habían tomado muestran la tendencia a priorizar los cálculos teóricos, pero sin considerar el concepto de la aleatoriedad, pues la enseñanza de la probabilidad enfatiza el enfoque clásico, dejando de lado la incertidumbre de los fenómenos aleatorios.

También señala que el software Fathom, es una herramienta que permite obtener varios resultados de una experiencia aleatoria, proporcionando una nueva forma de representación de objetos probabilísticos, de tal manera que permite a los estudiantes obtener resultados que serían prácticamente inaccesibles sino se contara con una herramienta de este tipo.

CAPÍTULO 3. MARCO CONCEPTUAL

Para el desarrollo de este capítulo, se acudió a la noción de marco conceptual planteada por Miles y Huberman (1994): "Un marco conceptual explica ya sea en forma gráfica o a través de una narración, las principales cosas que van a ser estudiadas, los factores clave, constructos o variables y las supuestas relaciones entre ellas. Los marcos conceptuales pueden ser rudimentarios o elaborados, dirigidos por una teoría o por el sentido común, descriptivos o causales". (Miles y Huberman, 1994, p. 18).

Con base en lo anterior, el marco conceptual del presente trabajo está dividido en tres partes. En la primera se habla sobre el contenido que se trabaja en esta tesis: "la distribución binomial" y su importancia en las ideas fundamentales en estadística y probabilidad abordadas por Batanero, et. al., (2016). La segunda parte considera el Razonamiento Probabilístico que es el objeto de estudio de esta tesis. En la última parte se hace una breve descripción de la forma en que los involucrados en esta investigación conciben la enseñanza de la probabilidad.

3.1 Ideas Fundamentales

Shaughnessy (1992) señalaba que parte de la importancia de enseñar estadística y probabilidad, es que en algun momento todo estudiante se convertirá en un ciudadano que vive y convive en una sociedad de masas, en las que muchos procesos tienen componentes importantes de incertidumbre, como la marcha de la economía, la disponibilidad de empleos, las eficacia de las políticas públicas, el flagelo de las enfermedades, los siniestros naturales, los accidentes de tránsito, el tráfico, etc., por ende, deben tener herramientas para ser ciudadanos responsables, capaces de entender, procesar, comunicar e interpretar información relacionada con las situaciones de incertidumbre.

La NCTM en el año 2000, mencionaba que los programas de bachillerato (señalandolo como la etapa entre 9º y 12º grado) debian garantizar que los estudiantes pudieran comprender y aplicar conceptos básicos de probabilidad, lo que implica que deberían comprender los conceptos de espacio muestral y distribución de probabilidad, así como construir espacios muestrales y distribuciones en casos sencillos; utilizar simulaciones para construir distribuciones de probabilidad empíricas, calcular e interpretar el valor esperado de variables aleatorias en casos sencillos, así como comprender los conceptos de probabilidad condicionada y sucesos independientes, y calcular la probabilidad de sucesos compuestos.

Por su parte Batanero, et al., (2016) señalan que un punto clave en la enseñanza de la probabilidad es reflexionar sobre el contenido principal que debe incluirse en los diferentes niveles educativos; en dicho artículo, ellos propusieron una lista de las ideas fundamentales para la probabilidad (basada en la lista dada por Heitele desde 1975), que incluye los conceptos de experimento aleatorio y espacio muestral, la regla de adición y multiplicación, independencia y probabilidad condicional, variables aleatorias y distribución, combinaciones y permutaciones, convergencia, muestreo y simulación.

El concepto de distribución también es una de las ideas fundamentales de la Estadística por lo que es clave en el desarrollo del razonamiento estocástico de los estudiantes. En particular, en probabilidad se estudian las distribuciones teóricas, y dentro de éstas las más importantes están la distribución binomial y la distribución normal. La presente investigación se enfoca en la distribución binomial, y al hacerlo, se implican otros conceptos importantes de la probabilidad, como son espacio muestral, nociones básicas de combinatoria, probabilidad y variable aleatoria.

Batanero, et al. (2016) mencionan como primera idea fundamental la *aleatoriedad* ya que es un concepto fundamental de la probabilidad, pero su comprensión es difícil. Las investigaciones han mostrado que coexisten diferentes interpretaciones y concepciones erróneas sobre la aleatoriedad. En este trabajo sólo interviene de manera general e implícita, en el experimento aleatorio planteado a los estudiantes, y de manera indirecta, en las preguntas sobre la simulación pues las respuestas requieren consideraciones que incluyen la aleatoriedad; las preguntas sobre variabilidad también se relacionan con dicho concepto.

Los conceptos de *Eventos y espacio muestral*, como segunda idea, son importante dado que en el cálculo de probabilidades es indispensable tener en cuenta todos los diferentes resultados posibles en un experimento. En este caso los estudiantes deben identificar correctamente los posibles resultados individuales del experimento, y saber que estos constituyen el espacio muestral. Sólo de esta manera podrán calcular las probabilidades de la distribución.

La tercera idea fundamental es *la combinatoria y el conteo*, pues es lo que permite enlistar todos los posibles resultados y determinar el espacio muestral. Se ha documentado que incluso los problemas más simples de combinatoria encierran verdaderas dificultades para los estudiantes, por lo que es importante que se apropien de herramientas y estrategias que les permitan resolverlos y, con esto, apoyar las ideas de probabilidad. Los diagramas de árbol se encuentran entre las primeras herramientas de la combinatoria y su uso es necesario en la iniciación en la probabilidad. En este trabajo se pide expresamente el uso del diagrama de árbol como medio para encontrar los elementos del espacio muestral.

La cuarta idea fundamental es *independencia y probabilidad condicional*. En la construcción de la distribución binomial se supone independencia en las repeticiones de las distribuciones de Bernoulli. Así mismo, en el proceso de simulación en los que se generan valores binomiales, las sucesivas repeticiones del experimento binomial son independientes. No obstante, en las actividades realizadas no surgen problemas relacionados con la independencia, pues los estudiantes actúan y razonan asumiendo, inconscientemente, la independencia. Las situaciones planteadas a los estudiantes tampoco exigen la aplicación del concepto de probabilidad condicional, por lo que está idea fundamental no es objeto de análisis en el presente estudio

Los mismos autores también señalan como quinta idea fundamental los conceptos de *distribución de probabilidad y esperanza matemática*”. Un concepto asociado al de distribución es el de *variable aleatoria*, el cual es necesario tener en cuenta para la construcción de una distribución. Los conceptos de variable aleatoria y distribución son el puente para transitar de una probabilidad elemental basada en la aritmética de situaciones concretas (dados, urnas, etc.) a una probabilidad matemática sustentada en conceptos más abstractos, como el de función. Por las anteriores razones y teniendo en cuenta que la distribución binomial es una de las distribuciones más sencillas y, a su vez, conceptualmente rica, y de amplia aplicabilidad, resulta importante que sea objeto de más investigación didáctica. La presente se enfoca en el razonamiento que los estudiantes ponen en juego frente a situaciones binomiales sencillas.

La sexta idea fundamental es *la convergencia y ley de los grandes números*. Esta ley es uno de los teoremas que junto con Teorema Central del Límite forman el objeto de muchas investigaciones probabilísticas. Tradicionalmente se han estudiado en los cursos avanzados de probabilidad, pero con la disponibilidad de computadoras y programas educativos de estadística, las ideas que subyacen en ellos se pueden introducir desde el nivel secundaria (Lee y Lee, 2009; Lee y Hollebrands, 2011)

En este caso, esta idea fundamental se encuentra de forma implícita en las reflexiones de los estudiantes acerca de las simulaciones y acerca de la relación entre el enfoque frecuencial y el clásico para el cálculo de probabilidades.

Dado que es muy difícil estudiar poblaciones completas, el conocimiento de una población se basa en muestras, por lo que los estudiantes deben comprender las ideas de la *"representatividad de la muestra y la variabilidad".* Dentro de las actividades de simulación de este trabajo se esperaba encontrar nociones en los estudiantes sobre estas ideas, y también en una pregunta predictiva del cuestionario que sirvió como pre y post-test.

Finalmente, Batanero, et al., (2016) señalan el "*modelado y la simulación"* e indican que la simulación permite la exploración de conceptos y propiedades pues actúa como un paso intermedio entre la realidad y el modelo matemático. El estudio de la binomial es una gran oportunidad para desarrollar esta idea, pues sirve para modelar gran cantidad de situaciones problemáticas, por ejemplo, es el modelo de la situación de dar respuestas al azar en un examen de opción múltiple. En general, muchas situaciones son repeticiones de experiencias aleatorias simples con dos posibles resultados. Con la ayuda de la tecnología, ahora es posible hacer simulaciones de cualquier distribución binomial abriendo la posibilidad para investigar su comportamiento sin necesidad de poner en operación técnicas complejas de lápiz y papel. En este trabajo se modela la situación de un examen de opción múltiple y se llevan a cabo dos simulaciones, una con objetos físicos y otra con apoyo computacional del software Fathom.

Para el desarrollo de las ideas fundamentales señaladas, se consideran los siguientes conceptos como base:

- Experimento Aleatorio
- Espacio Muestral
- Evento

- Definición Clásica de Probabilidad
- Variable Aleatoria.
- Distribución Binomial

Para Walpole, Myers, Myers, y Ye (2007) un **Experimento Aleatorio** es cualquier proceso que genere un conjunto de datos, en el que los resultados dependen del azar y, por lo tanto no se predicen con certeza, por lo que el experimento estará sujeto a la incertidumbre. Triola (2009) por su parte lo llama procedimiento, pero no lo define propiamente. Mientras que de manera más profunda Sánchez, Inzunza, y Ávila (2015) lo consideran como una experiencia cuyo resultado es impredecible, pero en la que se puede determinar el conjunto de todos los posibles resultados y que además puede ser repetido en condiciones similares.

De esta última defínción Sánchez et al. (2015), desprenden su conceptualización de **Espacio Muestral**, que es el conjunto de posibles resultados de un experimento aleatorio. Johnson y Kuby (2012) agregan que se denota en general por la letra S y que se conforma de puntos muestrales igualmente probables. Walpole, Myers, Myers, y Ye (2007) mencionan que se puede describir más de un espacio muestral para describir los resultados de un experimento aleatorio, y esto dependera de la situación específica que se desee analizar, por ejemplo, en el lanzamiento de un dado el espacio muestral puede ser $S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\ o\ S_2 = \{par, impar\}$.

Triola (2009) considera que el espacio muestral se compone de todos los "sucesos simples" posibles de un procedimiento, y define los suceso simples como los resultados que en el experimento no pueden desglosarse en componentes más simples.. De tal manera que un suceso es un subconjunto de el espacio muestral. Johnson y Kuby (2012), Walpole, et al. (2007) y Sánchez, et al. (2015) a estos subcojnutos los denominan **Eventos**.

De estas definiciones básicas es posible desprender la **Definición Clásica de Probabilidad**. Para Johnson y Kuby (2012) la probabiliadad del evento A, denotada por P(A), es la razon del número de puntos que satisfacen la definición del evento A y el número de puntos muestrales en todo el espacio, con lo que la P(A) resultaría ser:

$$Probabilidad\ Teorica\ de\ A = \frac{Número\ de\ veces\ que\ ocurre\ A\ en\ el\ espacio\ muestral}{Número\ de\ elementos\ en\ el\ espacio\ muestral}$$

A esta definición Spiegel (1991) y Triola (2009) le agregan la necesidad de que cada uno de los elementos del espacio muestral tenga la misma probabilidad de ocurrir que los otros.

En lo que respecta a la definición de **Variable Aleatoria**, Johnson y Kuby (2012) apuntan que es una función del espacio muestral a los reales, tal que cada valor en su imagen proviene de un evento. Al respecto Triola (2009) sólo dice que tiene un solo valor numérico determinado por el azar para cada resultado del experimento sin ser lo suficientemente claro.

En cuanto a la **distribución de probabilidad binomial,** Johnson y Kuby (2012) señalan que resulta de un experimento que se constituye de *n* ensayos independientes idénticos repetidos, en el que hay dos posibles resultados generalmente llamados éxito y fracaso, en donde si se denota a *p* como la probabilida de éxito y a *q* como la de fracaso, entonces $p + q = 1$. La variable aletaoria binomial X es el conteo de números de ensayos exitosos que ocurren, en donde X puede tomar cuaquier valor entero desde cero hasta *n* A cada uno de esos *n* ensayos se les llama ensayo de Bernoulli.

Asi la probabilidad de que el éxito ocurra exactamente *x* veces en *n* intentos, es decir, de que X = x, viene dada por:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x q^{n-x}, donde\ x = 0, 1, 2, \dots, n$$

$y\ se\ denota\ b(x, n, p).$

3.2 Razonamiento Probabilístico

La real academia española define el razonamiento como la acción y efecto de razonar, lo que a su vez significa usar una serie de conceptos encaminados a demostrar algo o a persuadir o mover a oyentes o lectores. Así, el descubrimiento y formulación de juicios o aseveraciones también encierra razonamientos.

Para comprender el razonamiento, en este trabajo se acude al concepto piagetiano de "*esquema*". Los esquemas son subestructuras dinámicamente organizadas, que se originan a través de la asimilación y el acomodamiento de conductas, y son considerados instrumentos para la adaptación de situaciones que van cambiando constantemente por lo que su abstracción es susceptible al progreso (Richmond, 2000).

De lo anterior se desprende que la actividad de la inteligencia es producto de procesos constructivos que se llevan a cabo a través de la interacción con el medio exterior y de acuerdo con la organización interior que se hace y rehace en los esquemas (Richmond, 2000).

Así, comprender como razonan las personas está relacionado con comprender como establecen y vinculan sus ideas, y como hacen asociaciones que les permiten hacer juicios cada vez más elaborados.

En esta investigación se requiere abordar específicamente el razonamiento probabilístico. Batanero, et al. (2016) definen el razonamiento probabilistico como un modo de razonamiento que se refiere a los juicios y a la toma de decisiones bajo incertidumbre por lo que es relevante para la vida real. Estos autores señalan que tal razonamiento incluye la capacidad de:

- Identificar eventos aleatorios en la naturaleza, la tecnología y la sociedad;
- Analizar las condiciones de tales eventos y derivar los supuestos para hacer un modelado apropiado;
- Construir modelos matemáticos y explorar diversos escenarios y resultados, y
- Aplicar métodos matemáticos y procedimientos de probabilidad y estadística.

Batanero, et al. (2016) señalan que el razonamiento probabilístico es diferente del razonamiento en la lógica clásica y tiene reglas diferentes. El campo de la probabilidad presenta abundantes desafíos intuitivos, paradojas y conceptos erróneos desde su nivel básico, no solo en niveles avanzados como sucede en otras áreas. A pesar de ello, el conocimiento de la probabilidad es relevante para comprender situaciones de la vida real, mismas que cada vez incluyen más condiciones de riesgo. (Batanero et al., 2016, p. 9).

En cuanto a las ideas falsas, Jones, et. al. (2007) señalan que es indiscutible el consenso de que la enseñanza de la probabilidad debe comenzar desde edades muy tempranas con el fin de construir intuiciones basadas en la experiencia, pero es fundamental ir más allá del proceso intuitivo pues este siempre estará lleno de errores.

Muchos conceptos erróneos asociados con el razonamiento probabilístico se pueden atribuir a modos causales deterministas de razonamiento; es decir, asumir que cada estado de cosas tiene una causa y que nada se puede atribuir a la casualidad. Konold (1989, citado en Jones et al. 2007) apunta que existe un sesgo cultural hacia el pensamiento determinista, mismo que con frecuencia se alimenta en la escuela al fortalecer las explicaciones causales y las intuiciones basadas en los modos deterministas de pensar.

Shaughnessy (1992) enlistó los principales sesgos encontrados en el razonamiento probabilístico, entre los que menciona la *representatividad*, que se refiere a que las personas estiman las probabilidades de los eventos con base en ciertos aspectos que consideran característicos, por ejemplo, se calcula la probabilidad de cierto evento por la semejanza con otro ya conocido con la o las mismas características, se cree que una muestra refleja la distribución de la población original, por lo que el efecto del tamaño de la muestra sobre la probabilidad y la variabilidad no son factores importantes. También incluye la *disponibilidad*, que se refiere al cálculo de probabilidades con base en la facilidad de recordar algunos aspectos particulares de un evento, es decir, hay influencia de las impresiones egocéntricas en torno a un evento.

Con el fin de disminuir las conceptualizaciones erróneas de los estudiantes, se han generado documentos para ayudar a guiar el proceso de aprendizaje. Un trabajo en esta dirección es el texto titulado “Focus in High School Mathematics, Reasoning and Sense Making”, publicado por la NCTM en 2009, en el que se propone que, en la elaboración y aplicación de los programas de la educación media, se le dé un lugar preponderante al desarrollo de hábitos de razonamiento matemático entre los estudiantes, planteando ejemplos y sugerencias para ello. Para el caso de probabilidad y estadística, en el mismo año se publicó el texto “Focus in High School Mathematics, Reasoning and Sense Making in Statistics and Probability”, de la autoría de Schaughnessy, Chance, y Kranendonk.

En este documento se enlistan los siguientes hábitos de razonamiento para ser promovidos entre los estudiantes.

- Analizar un problema buscando patrones y relaciones
- Implementar una estrategia, seleccionando representaciones o procedimientos
- Dar seguimiento al progreso realizado, evaluando la estrategia que se eligió

- Buscar y usar conexiones entre diferentes representaciones
- Reflexionar sobre las soluciones obtenidas, comprobando qué tanto sentido tiene una respuesta

Estos hábitos deben desarrollarse en todo momento a través de la resolución de problemas, al inicio, durante y al concluir un curso, proporcionando experiencias que les permitan la exposición de sus razonamientos.

3.3 La Enseñanza de la Probabilidad

De manera muy breve, se puede decir que se aplica una enseñanza de la probabilidad basada en actividades individuales o realizadas en pequeños grupos, combinada con discusiones colectivas. El diseño de las actividades está guiado tanto por las ideas fundamentales de los temas del programa, como por la búsqueda de que los estudiantes enfrenten los sesgos o concepciones erróneas más frecuentes. Se incluye en estas actividades el uso de la tecnología con el propósito de que los estudiantes puedan simular rápidamente un gran número de repeticiones de experimentos aleatorios para encontrar tendencias y descubrir distribuciones muestrales, y para que puedan resolver dudas o paradojas que se presentan incluso en experimentos sencillos. Se trata de que las actividades incluyan aplicaciones que usan juegos de azar, pero también situaciones relacionadas con la vida cotidiana.

Las discusiones colectivas tienen el objetivo de socializar las conclusiones y ser el puente hacia la formalización de los conceptos y procedimientos que se deben cubrir en los cursos.

En particular, en los instrumentos usados para este estudio, se plantearon un par de situaciones que se modelan a través de la distribución binomial. El análisis que se les propone a los estudiantes está estructurado a través de preguntas y actividades en las que se busca favorecer el desarrollo de un razonamiento probabilístico.

En el cuestionario que sirve de pre-test y post-test, cada pregunta o actividad que se les solicita a los estudiantes es útil para la comprensión de la siguiente. Tras la primera aplicación de este cuestionario, se llevó a cabo una simulación física de cada una de las situaciones planteadas en el cuestionario. Esta fase del trabajo tenía varios objetivos. Uno era entender si los estudiantes ven la equivalencia entre los experimentos aleatorios, otro era analizar cómo ven la relación entre los enfoques clásico y frecuencial de la probabilidad y el tercero era tener elementos sobre su comprensión de la variabilidad. Además, este trabajo fue un antecedente para la realización de una simulación usando tecnología, que fue la siguiente fase del estudio.

Tal vez la actividad que menos logró reflejar la concepción de enseñanza expresada anteriormente fue la simulación computacional, pues se realizó con base en una serie de instrucciones muy dirigidas debido a que era la primera vez que los estudiantes tenían contacto con el software usado. Pese a esta fuerte limitación, el análisis de las gráficas obtenidas y la discusión en parejas sobre los resultados, se enmarcan en la concepción de enseñanza mencionada.

CAPÍTULO 4. METODOLOGÍA.

Según Birks y Mills (2011) la metodología es el conjunto de principios e ideas que se refieren al diseño del estudio de investigación, mientras que el método es el conjunto de procedimientos prácticos usados para obtener y analizar datos. Usando esta terminología, en el presente capítulo se describe tanto la metodología de la investigación que se reporta, como el método empleado en ella.

La primera sección se refiere a la metodología, misma que está estructurada en torno a dos ejes: los principios de diseño educativo de Cobb y McClain (2004), y el procedimiento sugerido por la Teoría Fundamentada.

En la segunda sección se presenta el método, que incluye los participantes en la investigación, los instrumentos utilizados y el procedimiento llevado a cabo, tanto en la ejecución como en el análisis.

4.1 Metodología

La investigación empleada en este trabajo es de corte cualitativo; de acuerdo con Miles y Huberman (1994), este tipo de investigación utiliza una fuente de descripciones bien fundamentadas y de explicaciones de procesos en un contexto local identificable. En cuanto al alcance de la investigación es descriptiva, pues busca específicar las propiedades, características y/o perfiles de las unidades de estudio. En este trabajo se busca describir el razonamiento empleado por los estudiantes en dos problemas de distribución binomial a través de cuestionarios y simulaciones.

El diseño de los instrumentos empleados y la dinámica usada al aplicarlos, están basados en varios de los principios de diseño educativo que presentan Cobb y McClain (2004) para favorecer el desarrollo del razonamiento estadístico en los estudiantes. El análisis e interpretación de la información de los datos obtenidos están basados en algunas de las ideas sugeridas por la Teoría Fundamentada.

4.1.1 Elementos de diseño para desarrollar el razonamiento estadístico

Cobb y McClain (2004) proponen una serie de principios para el diseño de una experiencia educativa que permita desarrollar el razonamiento estadístico de los estudiantes. Los cinco aspectos que se consideran en estos principios son:

- Las ideas centrales
- Las actividades educativas
- La estructura de las actividades en la clase
- Las herramientas informáticas
- El discurso en el aula

El primer aspecto se refiere a orientar el desarrollo de la experiencia educativa mediante las ideas estadísticas centrales del contenido que se va a abordar. Cobb y McCalin (2004) señalan que, para diseñar actividades de enseñanza, conviene identificar las “grandes ideas” que están en el corazón de la disciplina y que tienen un valor que va más allá de lo que ocurre en el salón de clase.

En la investigación desarrollada en este trabajo, el contenido es la introducción de la distribución binomial. Se eligió este contenido precisamente por la importancia de las ideas estadísticas que se vinculan a él, que incluyen conceptos como el espacio muestral, el cálculo de probabilidades, las habilidades combinatorias, las variables aleatorias y la distribución de probabilidad. Los instrumentos elaborados para la investigación se estructuraron alrededor de estas ideas centrales.

En cuanto a las características de las actividades educativas, los autores señalan que deben construirse de manera que permitan y fomenten en los estudiantes un espíritu investigador, es decir, que el análisis que realicen tenga como objetivo entender un fenómeno, hacer un juicio o tomar una decisión, en lugar de meramente manipular cantidades siguiendo procedimientos dados (Cobb y McClain, 2004). También sugieren que las actividades constituyan un recurso que ayude al maestro a hacer emerger las principales ideas estadísticas del programa de la asignatura.

En el trabajo desarrollado, este principio se recoge proponiendo a los estudiantes que resuelvan dos problemas que pueden modelarse mediante una variable aleatoria con distribución binomial, tanto a través del uso de los conceptos antes mencionados para construir la distribución de probabilidad, como usando simulación para generar datos con base en un gran número de repeticiones de experimentos equivalentes a los de los problemas planteados, es decir, datos generados por la distribución binomial.

En cuanto a la estructura de las actividades en el aula, los autores resaltan la necesidad de contemplar el proceso de generación de los datos que se les propone analizar a los estudiantes, enmarcando el fenómeno particular y delineando aspectos relevantes de la situación que deben ser considerados o medidos. Al referirse al desarrollo de una clase, recogen este principio en una estructura que incluye tres etapas: a) una discusión grupal sobre el origen de los datos, b) una actividad individual o en pequeños grupos trabajando en computadoras, y c) una discusión grupal sobre el análisis realizado por los estudiantes (Cobb y McClain, 2004).

En la aplicación de los instrumentos para recoger información sobre el razonamiento estadístico de los estudiantes de nivel bachillerato, las sesiones sobre simulación y experimentos equivalentes se estructuraron en tres etapas. En discusión grupal se abordaron las ideas de los jóvenes acerca de experimentos físicos que resultaban equivalentes a la situación problemática plantada, y se realizaron simulaciones físicas usando algunos de los experimentos propuestos por ellos. Luego se desarrolló una actividad de simulación en computadora que permitió incrementar notablemente el número de repeticiones realizadas, y se concluyó con preguntas que permitieron a los estudiantes comparar sus opiniones con las de sus compañeros.

Dadas las características del estudio y que se desea describir el razonamiento de los estudiantes no se hacían especificaciones o comentarios puntuales, sino que se pedía a ellos responder con base en sus propias ideas y reflexiones.

En lo que se refiere a las características de las herramientas informáticas, Cobb y McClain (2004) señalan que deben ajustarse al razonamiento de los estudiantes cuando se involucran por primera vez en una secuencia educativa, además de servir como un medio para apoyar el desarrollo de los estudiantes de formas cada vez más sofisticadas.

En este trabajo se eligió el software Fathom precisamente por su versatilidad para ajustarse a los distintos niveles de razonamiento estadístico de los alumnos. Dado que era la primera vez que se encontraban con este software, se dirigió a los estudiantes paso a paso, a través del protocolo que se diseñó para esta actividad, intercalando preguntas de análisis con las instrucciones de uso del software.

4.1.2 Teoría Fundamentada

En 1967, Glaser y Strauss publicaron el libro *The Discovery of Grounded Theory* en el que plantearon los principios y componentes de la nueva metodología para investigar problemas sociales. Esta metodología de invetigación tanto culitativa como cuantitativa o mixta, se sustenta en la propuesta de usar profusamente la información obtenida en el campo de investigación para ir desarrollando conceptos y relaciones entre ellos, que conduzcan a la cnstrucción de una teoría intimamente vinculada a los datos recabados y, recomienda, no partir de marcos teóricos pre-establecidos.

Birks y Mills (2011) señalan que el marco metodologico que subyace en una investigación influye en la forma en que el investigador trabaja, pues es a través de esta que adquirira una posición dentro de la investigación. La metodología de la Teoría Fundamentada coloca al investigador en la posición de descubrir las posibles configuraciones en el proceso de abstracción conceptual y teórica.

Los métodos de la teoría fundamentada de acuerdo con Birks y Mills (2011), son:

Codificación inicial y categorización de datos: La codificación inicial es el primer paso del análisis de los datos y consiste en identificar palabras o grupos de palabras importantes en la información recabada para luego etiquetarlos. Cuando se reúnen grupos de códigos que están relacionados, se forman las categorías. Las categorías se denominan teóricamente saturadas cuando el nuevo análisis de datos devuelve códigos que sólo encajan en las categorías existentes, y estas categorías se explican suficientemente en términos de sus propiedades.

Escritura de memorandos: Los memos son registros escritos del pensamiento del investigador durante el proceso de estudio, en cualquier momento en que la información o el desarrollo del análisis genere en él alguna idea o pregunta que considere importante sobre el fenómeno que estudia. Escribir consistentemente ayuda a conducir las ideas a un mayor nivel de abstracción y análisis.

Muestreo teórico: Consiste en recabar más datos centrados en el significado y propiedades de una o más categorías en desarrollo (que no se han saturado). El propósito de buscar datos pertinentes es elaborar y refinar cada vez más las categorías que constituirán la nueva teoría.

Análisis comparativo constante: La Teoría Fundamentada utiliza sistemáticamente la comparación para identificar similitudes y diferencias, así como para establecer distinciones analíticas en los distintos niveles de desarrollo de la construcción teórica. Se pueden comparar incidentes con incidentes, incidentes con códigos, códigos con códigos, códigos con categorías y categorías con categorías. Es un proceso que continúa hasta que una teoría fundamentada está totalmente integrada.

Sensibilidad teórica: Los investigadores que utilizan la Teoría Fundamentada, desarrollan la sensibilidad teórica como resultado de su acción de sumergirse en los datos, de observar el fenómeno estudiado desde múltiples puntos de vista, de hacer comparaciones, seguir pistas, regresar sobre sus propios pasos, etcétera. Todas estas acciones, les permiten ver posibilidades, establecer conexiones y plantearse preguntas, tareas esenciales para la teorización.

Codificación intermedia: Es el desarrollo de categorías totalmente individuales que conectan subcategorías; se dice que la codificación inicial fractura los datos, mientras que la codificación intermedia vuelve a conectar los datos. Los códigos así creados son conceptualmente mucho más abstractos que los primeros.

Identificar una categoría central: Se refiere al momento en que es posible seleccionar una categoría que explica la teoría. Esto se logra a través de la saturación teórica completa tanto de la categoría principal como de sus subcategorías y sus propiedades.

Codificación avanzada e integración teórica: Son los procedimientos avanzados de codificación que logran la integración de las ideas centrales y la presentación de los argumentos que las sustentan mediante una técnica conocida como la *técnica del argumento*

(Strauss y Corbin, 1990). El producto final es un estudio teórico fundamentado, es decir, una teoría integral y exhaustiva que explica un proceso o esquema asociado con un fenómeno.

Llevar a cabo un proceso exhaustivo que permita presentar una teoría fundamentada, implica un trabajo altamente complejo, elaborado y tardado. La complejidad incluye el desarrollo de una construcción teórica abstracta basada en los datos recabados en distintos momentos, en los códigos y categorías construidos con creatividad a lo largo de un proceso constante de comparación, en el análisis de los memos escritos a lo largo de todo el proceso, y en una elaboración de argumentos con base en todo lo anterior.

En este trabajo solamente se usó la codificación de datos para identificar patrones y formar agrupamientos de respuestas con elementos comunes relativos al razonamiento de los estudiantes, y la escritura de memorándums para plantear preguntas o conjeturas acerca de la información obtenida. Sobre este proceso se hablará un poco más en la descripción del análisis de los datos.

4.2 Método

4.2.1 Participantes

En la elaboración de los instrumentos y el análisis de la información, participaron tres investigadores: la autora y sus directores. Los cuestionarios fueron aplicados a tres grupos de sexto semestre del Colegio de Ciencias y Humanidades plantel Sur, el primero y el tercer conformado por 14 estudiantes, el segundo por 6 alumnos. A los estudiantes se les informó que trabajarían en una investigación cuyo propósito era saber “cómo pensaban”.

4.2.2 Instrumentos

Se aplicaron tres cuestionarios, el primero sirvió como pre y post- test, el segundo se diseñó para estudiar el efecto de la realización de simulaciones físicas en el desarrollo del razonamiento de los estudiantes, y el tercero para ver el efecto de simulaciones en computadora usando el software Fathom.

Primer Cuestionario

Considera dos situaciones, llamados experimentos aleatorios, el primero modelo por la distribución binomial con n = 3 y p = ½, tomado de Johnson y Kuby (2012). El segundo experimento es una adaptación del Experimento Aleatorio 1 pero con n = 3 y p = 1/3.

Experimento Aleatorio 1:

Un examen de opción múltiple consta de tres preguntas; cada pregunta tiene dos opciones de respuesta, una de las cuales es la correcta. Un estudiante responde cada pregunta eligiendo al azar una de las opciones.

Experimento Aleatorio 2:

Un examen de opción múltiple consta de tres preguntas; cada pregunta tiene tres opciones una de las cuales es la correcta. Un estudiante responde cada pregunta eligiendo al azar una de las opciones.

Las preguntas que se plantearon en cada uno de los experimentos aleatorios se incluyen a continuación, así como su propósito en el cuestionario.

Pregunta 1. ¿Cuál es la probabilidad de responder correctamente una pregunta? Explica tu respuesta.

- Propósito: La intención de esta pregunta era que los estudiantes determinaran el valor del parámetro *p* de la distribución binomial, identificando el experimento tipo de Bernoulli que se repite 3 veces para integrar el experimento compuesto. En el primer experimento aleatorio el parámetro es *p* = ½, (una respuesta correcta de dos opciones), mientras que, en el segundo, el parámetro es *p* = 1/3, (una respuesta correcta de tres opciones).

Pregunta 2. Describe todas las posibles formas diferentes de responder el examen (Utiliza un diagrama de árbol)

- Propósito: La finalidad de esta pregunta era que los estudiantes se apoyaran en un diagrama de árbol para describir los elementos del espacio muestral del experimento aleatorio compuesto. La pregunta también permitió observar si los jóvenes usan codificaciones que simplifican la construcción del árbol y la descripción del espacio muestral.

  En el primer caso, el árbol debe tener 8 elementos finales, correspondientes a las 2^3 ordenaciones de las dos respuestas posibles en cada una de las tres preguntas, por ejemplo, correcta-incorrecta-correcta (c-i-c), o bien-mal-bien (b-m-b), o símbolos como palomas y taches (√ × √). Para el experimento aleatorio 2, los estudiantes podían haber construido un árbol de 27 ramas o uno de ocho, parecido al del caso anterior, pero colocando las probabilidades sobre las ramas del árbol, es decir, un árbol probabilístico.

Pregunta 3. ¿Cuántos diferentes resultados tienen el Espacio Muestral del experimento?

- Propósito: Esta pregunta está ligada con la anterior, pues se espera que de la construcción del árbol el estudiante pueda desprender el número de elementos que conforman el espacio muestral. En el caso del experimento aleatorio 1 la respuesta esperada es ocho. La pregunta no se planteó para el segundo experimento aleatorio.

Pregunta 4. Considera la variable “El número de respuestas correctas” (en el primer experimento la variable se llamó X y en el segundo Y). Describe todos los valores que puede tomar esta variable.

- Propósito: Si ya el estudiante sabía el valor de *p*, el conjunto de los elementos de espacio muestral y su cardinalidad, se espera que identifique la variable aleatoria que indica el número de respuestas correctas y determine los valores que puede tomar. En ambos experimentos aleatorios se esperaba que la respuesta dada fuera: cero, uno, dos y tres.

Pregunta 5. Haz lo que se te pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la variable tome el valor 0?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la variable tome el valor 1?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la variable tome el valor 2?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que la variable tome el valor 3?

- Propósito: Responder correctamente esta pregunta requería que, además de identificar la variable aleatoria anterior, el estudiante reconociera los elementos del espacio muestral que corresponden a cada uno de sus valores para determinar correctamente la probabilidad que le corresponde a cada uno.

  Las probabilidades para el primer experimento aleatorio eran:

  $P\ (X\ =\ 0) = \frac{1}{8},\ P\ (X\ =\ 1) = \frac{3}{8}\ ,\ P\ (X\ =\ 2) =\ \frac{3}{8}\ \ y\ \ P\ (X\ =\ 3)\ = \frac{1}{8}$

  Para el segundo caso la respuesta correcta era:

$$P\ (Y\ =\ 0) = \ \frac{8}{27}, \qquad P\ (Y\ =\ 1)\ = \frac{12}{27}, P\ (Y\ =\ 2) = \frac{6}{27}\ y\ P\ (Y\ =\ 3)\ = \frac{1}{27}$$

Pregunta 6. Con base en lo anterior, completa la siguiente tabla

Valores de X					Suma
Probabilidad					

- Propósito: Al colocar los valores obtenidos en la pregunta anterior dentro de una tabla, los estudiantes podían visualizar la regularidad o no regularidad de los numeradores y verificar que la suma total de las probabilidades era uno.

Pregunta 7. Para acreditar el examen es necesario que se respondan al menos dos preguntas correctamente. ¿Cuál es la probabilidad de que acrediten el examen?

- Propósito: La finalidad de esta pregunta era saber cómo entendían los estudiantes la expresión “al menos dos” y ver si aplicaban correctamente la regla de la suma para el cálculo de probabilidades. Para el experimento aleatorio 1, la respuesta correcta era:

$$P(X = 2) + P(X = 3) =\ \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8}$$

  Para el experimento aleatorio 2, la respuesta correcta era:

$$P(Y = 2) + P(Y = 3) = \frac{6}{27} + \frac{1}{27} = \frac{7}{27}$$

Pregunta 8. Si 1000 estudiantes respondieran el examen y todos ellos respondieran al azar
a) ¿Cuántos acertarían cero preguntas? Explica tu respuesta

b) ¿Cuántos acertarían en una sola pregunta? Explica tu respuesta

c) ¿Cuántos acertarían en dos preguntas? Explica tu respuesta

d) ¿Cuántos acertaría en 3 preguntas? Explica tu respuesta

Con las respuestas completa la tabla

- Propósito: Con esta pregunta se aborda por primera vez en el estudio, la relación entre la definición clásica y la definición frecuencial de la probabilidad. La intención de esta pregunta era, por una parte, observar como los estudiantes relacionaban toda la información con la que ya se contaba y por otra, para saber identificar si utilizaban conceptos términos que sugirieran que comprenden la noción de variabilidad, como "aproximadamente", "más o menos", o quizás dar intervalos cercanos a las frecuencias que se obtengan, por ejemplo "entre 115 y 135".

Para el experimento aleatorio 1, las respuestas a los incisos serían:

a) Aproximadamente 125, b) Aproximadamente 375, c) Aproximadamente 375, d) Aproximadamente 125

Para el experimento aleatorio 2, las respuestas serían:

a) Aproximadamente 296, b) Aproximadamente 444, c) Aproximadamente 223, d) Aproximadamente 37

Segundo Cuestionario:

En este instrumento se plantea de nuevo a los estudiantes cada una de las situaciones de los experimentos aleatorios descritos en el cuestionario anterior, pero se les pide que hagan una simulación física de cada situación, con 48 repeticiones. En cada grupo se les preguntó cómo pensaban que se podía hacer la simulación y se discutieron sus propuestas.

En el primer experimento, siempre sugirieron el uso de monedas, entre otras propuestas, de manera que resultó natural realizar la simulación lanzando 48 veces 3 monedas. En el segundo, se decidió hacer la simulación usando un material que los estudiantes ya conocían, por haberlo usado en el curso con anterioridad: botellas pequeñas de PET pintadas de negro, dejando solo transparente el cuello de la botella, con tres canicas en su interior, una verde y dos de otro color. La canica verde representaba la respuesta correcta y las otras dos las respuestas incorrectas. Las preguntas planteadas a los estudiantes se desglosan a continuación:

Pregunta 1. Considera las siguientes preguntas: Si 48 estudiantes responden al azar el examen.

- ¿Cuántos alumnos contestarían incorrectamente todas las preguntas?
- ¿Cuántos alumnos contestarían correctamente solo una pregunta?
- ¿Cuántos alumnos contestarían correctamente exactamente dos preguntas?
- ¿Cuántos alumnos contestarían correctamente todas las preguntas?

(Se les aclaró a los estudiantes que las preguntas anteriores se responderían después de realizar la simulación, pero que se hace referencia a ellas en las dos preguntas que se formulan a continuación)

Usando una moneda (en el segundo caso la botella proporcionada) para simular la situación, ¿crees que este procedimiento puede ofrecer una respuesta satisfactoria a las preguntas formuladas? Explica tu respuesta.

- Propósito: Con esta pregunta se deseaba que los alumnos identificaran las similitudes entre la simulación y la situación que se deseaba representar, es decir, que identificaran experimentos equivalentes. Para ello, los alumnos podían observar que ambos experimentos eran azarosos, pero también que tenían la misma cantidad de resultados posibles y que éstos ocurrían son la misma probabilidad, tanto en la situación descrita como en el experimento que se usó en la simulación.

Pregunta 2. ¿Crees que hay una respuesta única para cada pregunta? Si respondes "Sí" ¿Cuáles son esas respuestas únicas? Si respondes "No", explica las razones

- Propósito: La intención era saber si antes de realizar la simulación, los jóvenes podían adelantar que en cada simulación realizada se encontrarían diferentes cantidades para cada valor de la variable aleatoria. Se trataba de identificar indicios de la noción de variabilidad en un nuevo contexto, partiendo de que como ya habían calculado las probabilidades en el cuestionario previo, podrían identificar una tendencia en las respuestas.

Pregunta 3. Con la información que obtuviste de tu simulación responde:

a) ¿Cuántos alumnos contestaron incorrectamente todas las preguntas?

b) ¿Cuántos alumnos contestaron correctamente solo una pregunta?

c) ¿Cuántos contestaron correctamente exactamente dos preguntas?

d) ¿Cuántos alumnos contestaron correctamente todas las preguntas?

- Propósito: La finalidad de esta pregunta era que los alumnos empezaran a concentrar la información necesaria para sus cálculos posteriores. Para los investigadores era una especie de pregunta control para identificar si la simulación se había hecho de forma correcta. En el experimento aleatorio 1, las frecuencias oscilarían alrededor de 6, 18, 18 y 6 respectivamente, y para el experimento aleatorio 2, las frecuencias debían oscilar alrededor de 14, 21, 11 y 2

Pregunta 4. Con base en lo anterior, completa la siguiente tabla

Valores de x	**Frecuencia**	**Frecuencia Relativa**

Suma		

- Propósito: La intención era que los estudiantes relacionaran las frecuencias y las frecuencias relativas obtenidas en su simulación.

Pregunta 5. a) ¿Qué valores de la variable son los menos frecuentes?

b) ¿Qué valores de la variable son los más frecuentes?

c) ¿Crees que lo anterior ocurra en general o que es sólo casualidad?

d) Si ocurre en general ¿Por qué crees que eso pase?

e) Si ocurre por casualidad, explica

- Propósito: Los incisos a y b tenían la finalidad de identificar si los estudiantes notaban la forma de la distribución. En los incisos c, d y e, la intención era indagar si los estudiantes identificaban que esa forma era general, es decir, que se debe obtener más o menos la misma forma en cada simulación. Para el experimento aleatorio 1, los valores menos frecuentes son para $X = 0$ y $X = 3$ y los más frecuentes para $X = 1$ y $X = 2$. Para el experimento aleatorio 2, el valor menos frecuente es $Y = 3$ y el más frecuente es $Y = 1$.

Pregunta 6. En la siguiente tabla anota la probabilidad de obtener cada valor, explica cómo calculaste cada valor

- Propósito: Los estudiantes ya habían calculado previamente las probabilidades en el pre-test, así que para esta pregunta la intención era saber si recuperaban esa información o si utilizaban el enfoque frecuencial. Si escribían las probabilidades que ya conocían, indicaría que identificaban a las frecuencias relativas como una aproximación (práctica) del valor de la probabilidad (teórica).

Pregunta 7. ¿Ves alguna relación entre las probabilidades de cada valor de la variable y las frecuencias correspondientes que anotaste en la pregunta 4?

- Propósito: La respuesta a esta pregunta permitiría tener elementos acerca de cómo razonan los estudiantes la relación entre los enfoques clásico y frecuencial de la probabilidad.

Tercer Cuestionario:

En este caso se asiste a los estudiantes para que hagan una simulación con apoyo del software Fathom con 50 repeticiones y otra con 1000 repeticiones para ambos experimentos aleatorios.

Pregunta 1. ¿Consideras que este proceso corresponde o es semejante al que se aplicó en la simulación física para responder el examen?

- Propósito: Esta pregunta buscaba identificar si los estudiantes veían similitudes entre las dos formas de simulación, específicamente que notaran que en ambos casos se seguían procedimientos similares que se correspondían con experimentos tipo Bernoulli, manteniendo en ambos las condiciones de la situación planteada

Pregunta 2. Con la información que obtuviste de observar el gráfico para 50 casos (para el experimento aleatorio 2 no se especifica que gráfico debían utilizar):

a) ¿Cuántos alumnos contestaron incorrectamente todas las preguntas?

b) ¿Cuántos alumnos contestaron correctamente solo una pregunta?

c) ¿Cuántos contestaron correctamente exactamente dos preguntas?

d) ¿Cuántos alumnos contestaron correctamente todas las preguntas?

- Propósito: La intención de la pregunta era que los estudiantes se apoyaran de una representación gráfica para responder una pregunta similar a la de simulación física, lo que pudiera servir para vincular las actividades

Pregunta 3. Completa las siguientes tablas con la información para 50 casos en las de la izquierda y 1000 en las de la derecha, observa que en las segundas tablas se piden frecuencias relativas

- Propósito: En esta pregunta se podían observar en las tablas de forma simultánea datos similares a los de la simulación física y a los del primer cuestionario para 1000 casos, con la intención de que los estudiantes visualizaran algunas pautas para la respuesta del post-test y que observaran que en 1000 repeticiones el ajuste a la forma de distribución teórica era mejor

Pregunta 4. Cuando presionas Ctrl+y, puedes ver la variación de los datos, ¿dónde, de los dos casos que estamos simulando, observas mayor variabilidad?

- Propósito: En este caso el propósito era que los estudiantes notaran que en 50 repeticiones hay mayor variabilidad que al repetir 1000 veces la simulación, dado que las frecuencias relativas son más estables en este último caso.

Pregunta 5. Comenta con tus compañeros y respondan: ¿Qué observan en los resultados obtenidos?

- Propósito: La finalidad de la pregunta era promover una discusión entre dos o más estudiantes para contribuir a que las observaciones acerca de los resultados obtenidos en la simulación fueran más precisas y contribuyeran a responder el post-test.

4.2.3 Procedimiento

De ejecución

1. Se elaboraron, revisaron y modificaron los instrumentos descritos por los tres investigadores involucrados, buscando que la construcción de cada uno ayudara a alcanzar los propósitos de este trabajo.
2. La aplicación se llevó a cabo por dos de los tres investigadores, una de ellas docente de la asignatura de Estadística II en el CCH-Sur.
3. Se requirieron cuatro sesiones con cada uno de los tres grupos en las que se aplicaron el cuestionario 1(Apéndice A), como pre-test, el cuestionario 2 (simulación física) (Apéndice B), el cuestionario 3 (simulación con Fathom) (Apéndice C) y en la última el cuestionario 1 como post-test.

4. Posterior a las 12 sesiones, se vaciaron los datos obtenidos organizándolos por respuestas a una misma pregunta en cada uno de los 3 grupos, y se inició el análisis de estos.

De análisis

El análisis de datos llevado a cabo en el presente estudio sigue algunos procedimientos de la teoría fundamentada. Por las limitaciones del trabajo, no fue posible desarrollar todo el proceso que recomienda esta metodolgía para generar una teoría más formal, no obstante permitió encontrar algunos hallazgos modestos pero importantes sobre el desarrollo del razonamiento probabilístico de los estudiantes.

1. Se realizó una codificación inicial de las respuestas dadas por los 34 estudiantes a cada una de las preguntas de los cuestionarios. Cada investigador trabajó por separado con las respuestas de uno de los grupos de estudiantes.
2. Se identificaron patrones en las respuestas de los estudiantes, comparando las respuestas entre sí y comparándolas con las respuestas normativas. Esto permitió la conformación de grupos de respuestas con elementos comunes en lo referente al razonamiento probabilístico de los estudiantes.
3. Se revisó este primer análisis y se encontró que era similar en los tres grupos de estudiantes, por lo que fue posible formular *códigos* generales que describieran toda la información y unificar la descripción de los patrones.
4. Se destacaron cinco de los patrones observados, tanto por su recurrencia, como por su relación con alguna idea fundamental de la probabilidad: Habilidades y dificultades combinatorias, experiencias compuestas, variable aleatoria, experiencias aleatorias equivalentes y enfoque frecuencial de probabilidad.
5. Durante el análisis se elaboraron memorándums que contribuyeron a la organización de la información.

En el siguiente capítulo se detallan los resultados.

CAPÍTULO 5. RESULTADOS

En este capítulo se muestran los resultados obtenidos en la investigación después de la aplicación de los instrumentos descritos en el capítulo anterior. La presentación de la información se estructura en cinco apartados correspondiente a cada una de las *ideas* que se elaboraron con los patrones encontrados en los razonamientos de los estudiantes.

Los datos que se analizan en esta investigación están formados por las respuestas de los estudiantes a las hojas de trabajo que se les proporcionaron durante las actividades. Sus respuestas fueron transcritas para codificarlas con base en una comparación entre ellas mismas, y comparándolas también con las respuestas normativas. Más específicamente, para cada pregunta se formaron tres o cuatro agrupamientos, cada una incluyendo respuestas con rasgos similares, con el objetivo de revelar los patrones de razonamiento más comunes (favorables o contrarios). De los patrones observados, se destacan cinco por su recurrencia y también por su relación con alguna idea fundamental de la probabilidad; en este sentido, se ha encontrado que cada uno de tales patrones se puede asimilar a una *idea fundamental*, pues de algún modo u otro, un patrón observado afecta el razonamiento asociado a la idea fundamental correspondiente. Las cinco ideas son las siguientes:

1. Habilidades y dificultades combinatorias
2. Experiencias compuestas
3. La variable aleatoria
4. Experiencias aleatorias equivalentes
5. Enfoque frecuencial de probabilidad

A continuación, se describen cada una de las ideas, desarrolladas por respuesta y se vinculan con los elementos que se toman en consideración en el cuerpo del presente trabajo.

5.1 Idea 1. Habilidades y dificultades combinatorias

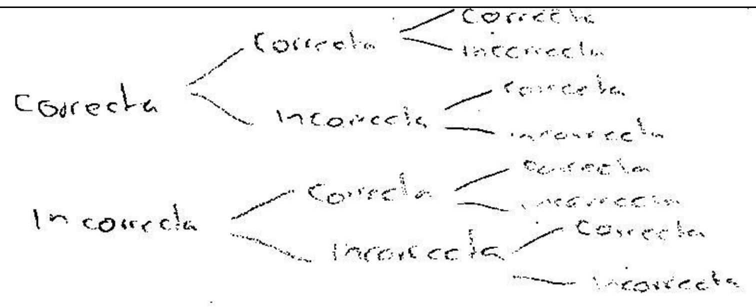
La combinatoria es una herramienta básica de la probabilidad. Batanero et al. (2016) considera a *la enumeración y conteo combinatorio* como la tercera idea fundamental de la probabilidad. El concepto de *combinación* se utiliza en la construcción de la distribución binomial y, de hecho, es parte de la fórmula general de dicha distribución. En consecuencia, en cualquier razonamiento acerca de situaciones binomiales se implica explícita o implícitamente un razonamiento combinatorio. En las actividades de construcción de la distribuciones b(x, 3, ½) y b(x, 3, 1/3) se requiere contar el espacio muestral y distinguir los eventos “Acertar k respuestas de un examen con 3 preguntas” con k = 0, 1, 2, 3. Estos casos son relativamente simples y no es necesario que los estudiantes utilicen el concepto general de combinación, basta que enumeren los elementos del espacio muestral utilizando una representación formada por ternas de E^s y/o F^s (donde E = “éxito” y F= “Fracaso”) como es un árbol combinatorio.

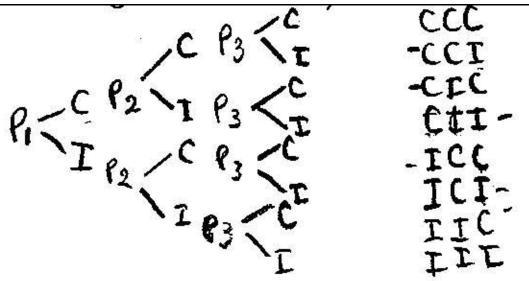
En las dos actividades que realizaron los estudiantes se les pidió describir y contar mediante la construcción de un árbol los elementos del espacio muestral de una experiencia aleatoria; el experimento aleatorio 1, consistió en “responder al azar un examen de tres preguntas con dos opciones por pregunta”; mientras en el experimento aleatorio 2, la experiencia fue “responder al azar un examen de tres preguntas con tres opciones por pregunta”. En ambos experimentos, las respuestas de los estudiantes a la pregunta *“Describe todas las posibles formas diferentes de responder el examen (Utiliza un diagrama de árbol)”* se distribuyeron en cuatro grupos, a continuación, se describen y se da un ejemplo de las respuestas de cada grupo.

G1. Construye el árbol completo. Las respuestas en este grupo consisten en el despliegue del árbol completo. Algunos estudiantes utilizaron el árbol para describir todos los elementos del espacio muestral mediante ternas. En el experimento aleatorio 1, los árboles fueron relativamente fáciles de construir, no obstante, sólo 14 de 34 lo hicieron en el pre-test, mientras que 16 en el post-test lo hicieron; es decir, después de las prácticas de simulación física y computacional, se agregaron dos respuestas correctas. En la tabla 1 se presentan dos ejemplos de respuestas que caen en el grupo G1, la primera del Pre-test y la segunda del post-test (las respuestas mostradas no son del mismo estudiante, a menos que se indique lo contrario):

Tabla 1.

Ejemplos de respuesta de la pregunta 2 en el pre-test y el post-test

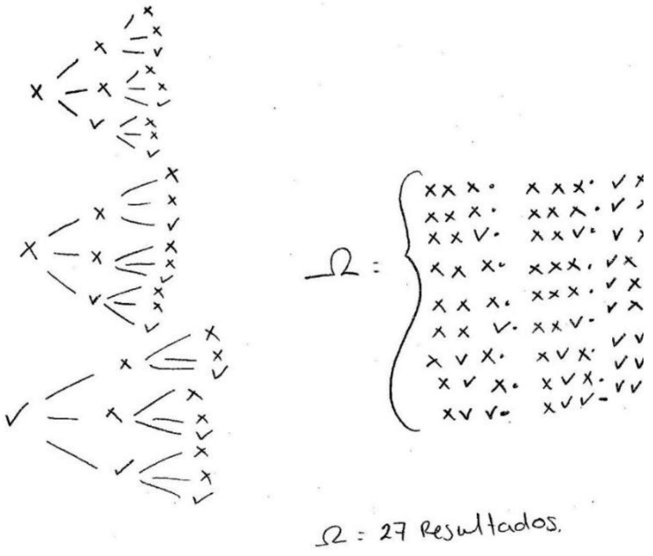


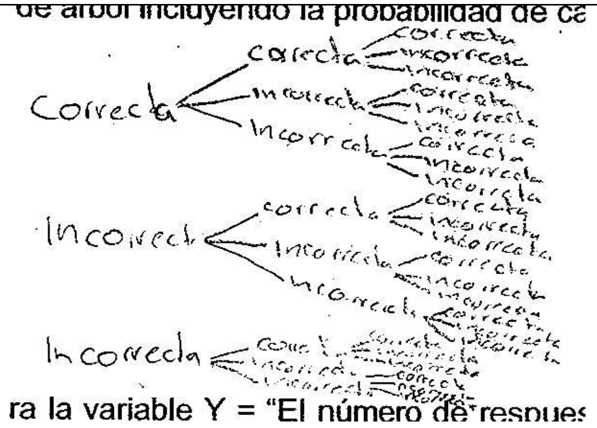


En el experimento aleatorio 2, la construcción del árbol es más difícil pues se forman 27 ramas. Esto hizo que en que, tanto en el pre como en el post-test en esta situación las respuestas que exhiben el árbol completo bajaran a 6 y 8 respectivamente. En la tabla 2 se muestran dos ejemplos de respuesta que desplegaron un árbol con los 27 resultados.

Tabla 2.

Dos respuestas de la pregunta 2 del experimento aleatorio 2, en el pre-test y el post-test



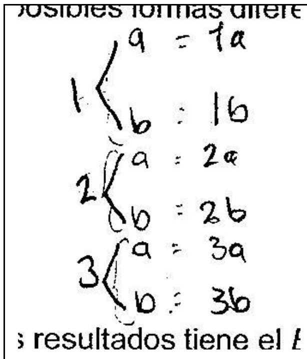
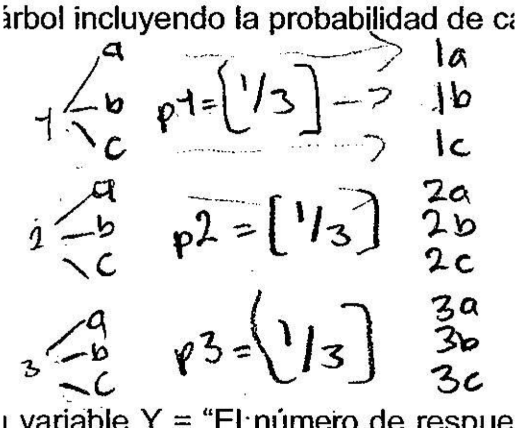
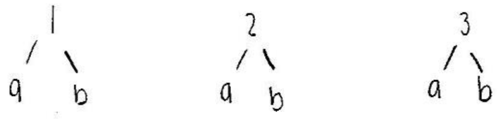
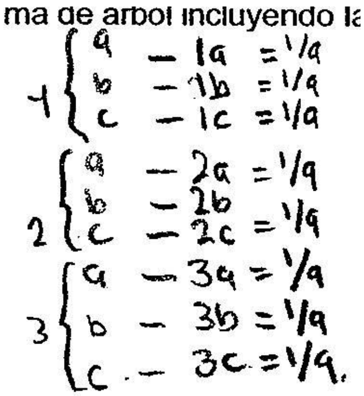


G2. Representa la situación. Las respuestas en este grupo carecen de un razonamiento combinatorio y se restringen a hacer una representación de los elementos que integran la situación estática. En ellas se propone un diagrama con los elementos principales de la situación, pero diferente a un árbol combinatorio. Un árbol combinatorio representa a la situación de una manera dinámica, pues cada rama del árbol describe un desarrollo posible del experimento; en cambio, las representaciones en este grupo nos indican rasgos del estado inicial de la situación, pero no de sus posibles desarrollos. En el experimento aleatorio 1, hubo 11 y 12 respuestas del pre- y post-test respectivamente, que se clasificaron en esta idea. Para el experimento aleatorio 2, aumentaron a 17 y 16 respuestas en el pre- y post-test respectivamente que se clasifican en “Representa la situación”. En la tabla 3 se muestran ejemplos de este tipo de respuesta.

Tabla 3.

Ejemplos de respuestas del grupo 2 a la pregunta 2. Representa la situación

Experimento aleatorio 1:	Experimento aleatorio 2.
Una respuesta del Pretest:	Una respuesta del Pretest:

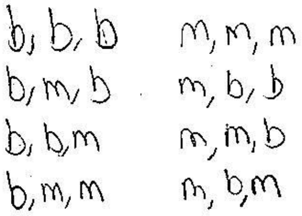
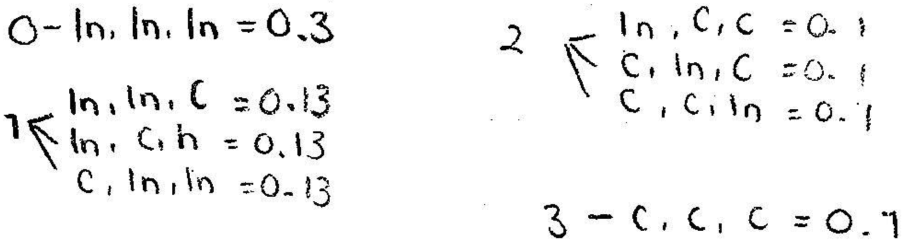
	
Una respuesta del Post-test: 	Una respuesta del Post-test 

G3. Enumera el espacio muestral sin apoyarse en el árbol. En este grupo se consideran las respuestas que describen el espacio muestral sin, aparentemente, utilizar el diagrama de árbol. Quizá los estudiantes se acomodan con formas sistemáticas alternativas para generar la lista de todos los posibles resultados. Para el experimento aleatorio 1, se clasificaron 6 respuestas en el Pretest y 3 en el Post-test en este grupo; mientras que para el experimento aleatorio 2, fueron 3 y 4 respectivamente. Los ejemplos de la tabla 4 pertenecen a este grupo:

Tabla 4.

Ejemplos de respuestas del grupo 3 a la pregunta 2. Enumera el espacio muestral sin usar árbol

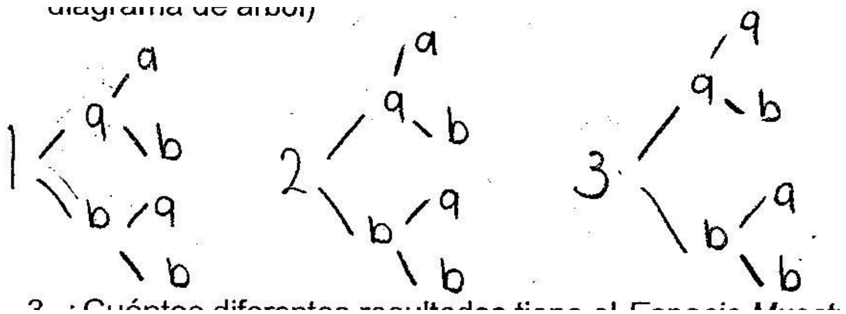
Experimento aleatorio 1 Pretest

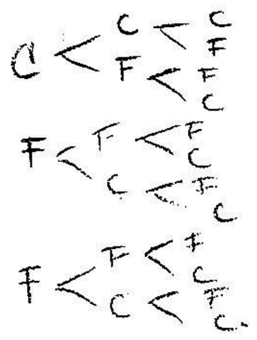
 b, b, b   m, m, m b, m, b   m, b, b b, b, m   m, m, b b, m, m   m, b, m
Experimento aleatorio 2. Post-test
 0- In, In, In = 0.3 1 In, In, C = 0.13 In, C, h = 0.13 C, In, In = 0-13 2 In, C, C = 0.1 C, In, C = 0.1 C, C, In = 0.1 3 - C, C, C = 0.1

G4. Otro. Aquí se agruparon las respuestas que no pertenecen a ninguno de los anteriores grupos. En algunas de ellas se utilizan árboles que incluyen elementos de más o de menos, o que hacen arreglos espurios; en todo caso no llevan al éxito de la actividad.

Tabla 5.

Ejemplos de respuestas del grupo 4 a la pregunta 2. Otras respuestas.

Experimento aleatorio 1. Pretest

Experimento aleatorio 2. Pretest



En la tabla 6 se presentan las frecuencias de cada grupo en el que fueron dividas la totalidad de las respuestas. En la primera columna se enlistan los 4 grupos definidos, en las siguientes dos columnas las frecuencias de las respuestas del experimento aleatorio 1, correspondientes al Pretest y al Post-test; en las últimas dos columnas se registran las frecuencias de las respuestas del experimento aleatorio 2 correspondientes al Pretest y al Post-test.

Tabla 6.

Frecuencias de respuesta por grupo de ambos experimentos (Pretest – Post-test)

	Experimento aleatorio 1: p = 1/2		Experimento aleatorio 2: p = 1/3	
Grupos:	Pre-test	Post-test	Pre-test	Post-test
G1. Construye el árbol completo	14	16	6	8
G2. Representa la situación.	11	12	17	16
G3. Enumera el espacio muestral sin usar árbol.	6	3	3	4
G4. Otro	3	3	8	6
Total	34	34	34	34

5.1.1 Observaciones.

Los resultados obtenidos en esta pregunta sugieren tres observaciones

1. Poca influencia de la simulación. Hay muy poca influencia de las actividades de simulación en el desempeño de los estudiantes con relación a esta pregunta. Las frecuencias de respuesta clasificadas en cada grupo del Pretest al Post-test son relativamente estables y los pocos cambios se pueden atribuir a factores diferentes de las actividades de simulación. Este resultado no es sorprendente ya que precisamente uno de los efectos del uso del software en problemas de probabilidad es que evita que los estudiantes se hagan cargo de los problemas combinatorios. Un rasgo en el que se nota la influencia de las actividades de simulación se presentó en un caso en que no se construyó el árbol en el Pretest, pero en el Post-test sí, utilizando la notación 0 para "Incorrecto" y 1 para "Correcto"; esto ocurrió en ambos experimentos. El uso de esta notación debió ser influencia de las actividades ya que se presenta en los programas de Fathom. Aunque adoptar esta notación no implica la adquisición de un razonamiento combinatorio cuando este está ausente, sí puede ayudar a mejorar la eficiencia para los que ya lo adquirieron; y con esto se muestra la utilidad práctica de la variable aleatoria.

2. Ausencia de razonamiento combinatorio. Aproximadamente una tercera parte en el experimento 1 y la mitad en el experimento 2 se clasifican en el grupo 2 "Representa la situación". En estas respuestas se refleja que los estudiantes no poseen aún o no activaron su razonamiento combinatorio para responder la pregunta. El resultado es algo sorprendente pues la construcción de un árbol para la situación del experimento 1 requiere de un nivel muy elemental de razonamiento combinatorio. Pero los resultados muestran que la idea de árbol puede sugerir representaciones no combinatorias. Parece natural decir que "habiendo 3 preguntas y cada una con dos opciones, entonces hay $3 \times 2 = 6$ posibles respuestas" y este razonamiento incorrecto es asociado a las representaciones de árbol que se hicieron del experimento 1.

3. Tamaño de n y elementos indistinguibles. Hubo un claro descenso de las frecuencias en el grupo 1 "Construye el árbol completo" al pasar del experimento 1 al experimento 2, la diferencia es que se pasó de $n = 2$ a $n = 3$. Es decir, que varios estudiantes que fueron capaces de construir el árbol en el experimento 1, no lo fueron en el experimento 2. Una dificultad leve fue la de organizar el espacio donde se representa el árbol de modo de acomodar las 27 ramas que se generan en el segundo experimento, sin embargo, la dificultad mayor fue manejar el paso hacia tres resultados en el que dos son indistinguibles, por ejemplo, utilizar los rasgos C, I, I, para representar las opciones de respuesta. Por ejemplo, algunos estudiantes comenzaron la primera etapa del árbol con la terna (C, I, I) y en las siguientes etapas del árbol sólo utilizaron la pareja (C, I). Otros consideraron las dos repeticiones de CII en una sola, de modo que el conteo se descarrilló. Esto nos lleva a concluir que el paso hacia la generalización de la distribución binomial en el nivel del bachillerato enfrenta muchas dificultades.

5.2 Idea 2. Experiencias compuestas

Esta idea tiene que ver con *espacios muestrales compuestos, independencia y probabilidad condicional,* ideas 2 y 4 respectivamente señalada por Batanero et al. (2016). Un experimento binomial es la repetición de un experimento de Bernoulli, esto quiere decir que es una composición de un experimento más simple. Para resolver un problema de una situación binomial es necesario que se identifique el experimento simple y la regla de composición, dado por n=3 en ambos experimentos aleatorios, y p = ½ en el primero y p = 1/3 en el segundo.

Las preguntas que se relacionan con este tema son la primera y séptima preguntas del Cuestionario 1 (Apéndice A). En cuanto a la pregunta 1, se consideró como sencilla y fundamental, pues aparentemente era de respuesta clara e implicaba "*reconocer el valor de "p" para cada uno de los experimentos muestrales*".

En el contexto de la problemática las cosas no resultaron tan fáciles, pues varios estudiantes buscan un conjunto de resultados equiprobables sin notar la estructura de Bernoulli. Por ejemplo, en el problema del examen de tres preguntas con dos opciones cada una, piensan que la probabilidad de responder correctamente una pregunta es 1/3. Para ellos, la cardinalidad del espacio muestral es 3, debido a que hay tres preguntas, y el caso favorable es "una pregunta".

En realidad, hay cierta ambigüedad en la pregunta. Imaginemos que un estudiante se está enfrentando al primer experimento aleatorio y responde todo el examen, entonces nos preguntamos ¿Cuál es la probabilidad de responder correctamente una pregunta? Entonces la respuesta correcta sería: $\binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$. Dicho de otra manera, la probabilidad de responder correctamente la primera pregunta y las otras dos incorrectamente es $\frac{1}{8}$, lo mismo para la segunda correcta y las otras dos incorrectas y, también para la última correcta y las otras dos incorrectas; entonces el resultado es $\frac{3}{8}$.

Para las respuestas a esta pregunta se formaron cuatro grupos, mismos que se describen y ejemplifican a continuación:

G1. Distingue la situación simple de la compuesta: En este grupo se encuentran las respuestas que se pueden considerar correctas en el sentido que los estudiantes además de lograr dar el valor de "p" en cada uno de los experimentos aleatorios también dan una justificación que refleja un argumento correcto. Para el experimento aleatorio 1, el 65% (22 casos) de estudiantes entraron en esta clasificación en el pretest, mientras que para el post-test disminuyó al 47% (16 casos), por lo que es posible pensar que las actividades de simulación causaron cierto nivel de confusión, posiblemente la ambigüedad de la pregunta fue más evidente para los estudiantes para el post-test, pues en dos casos se encontró en el post-test la respuesta 3/8 para esta pregunta.

En el experimento aleatorio 2, se presentó la situación de confusión con el hecho de que existían tres preguntas con tres opciones de respuestas, por lo que, aunque hubo casos que, aunque dieron como respuesta 1/3, el argumento era que había tres preguntas y sólo se quería la probabilidad de una pregunta. En este caso, de 19 respuestas correctas en el pretest, más de la mitad, para el post-test este valor disminuyó a sólo 15 casos (menos de la mitad). Para este experimento la ambigüedad del razonamiento combinatorio no se evidenció.

A continuación, se muestran ejemplos de respuestas para esta pregunta, una del pretest y la segunda del post-test, para ambos experimentos:

Tabla 7.

Ejemplos de respuesta de la pregunta 1 en el pre-test y el post-test para ambos experimentos

Experimento aleatorio 1:	Experimento aleatorio 2.
Una respuesta del Pretest:	Una respuesta del Pretest:

<table>
<tr><td><table><tr><td>P = (½)</td><td>Probabilidad de respuesta correcta 50%
Probabilidad de respuesta incorrecta 50%
- Sólo existen estas dos posibilidades</td></tr></table></td><td><table><tr><td>1/3</td><td>La probabilidad de que responda correctamente una pregunta de tres opciones es 1/3</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Una respuesta del Post-test:<table><tr><td>3/8</td><td>CCC
CC I
C I I
I I I
I C C</td><td>I C
C I C
I C I</td><td>P (1) = 3/8</td></tr></table></td><td>Una respuesta del Post-test<table><tr><td>1/3</td><td>P(C) = 1 correcta / 3 casos totales</td></tr></table></td></tr>
</table>

G2. Percibe la situación compuesta y descuida la simple: En este grupo se encuentran las respuestas que determinan el valor del parámetro considerando la situación global, por ejemplo para el experimento aleatorio 1, responden que el valor de p es 3/6, pues en total hay tres preguntas con dos opciones cada una, lo que determina el valor del denominador y en total habrá tres respuestas correctas, lo que da el valor del numerador; para el experimento aleatorio 2, de forma similar el valor dado es 3/9.

Aunque numéricamente estas fracciones son equivalentes a las respuestas consideradas correctas de ½ y de 1/3, aquí la diferencia la hace el argumento que el estudiante hace y que refleja la forma en como estaba razonando la problemática planteada.

En el experimento aleatorio 1 las respuestas que entraron en este grupo aumento de 10 a 7 del pre al post-test. Mientras que para el experimento aleatorio 2, las respuestas de este grupo se mantienen en 7 casos tanto en el pretest como en el post-test. En la siguiente tabla se muestran dos de las respuestas asignadas a este grupo obtenidas para cada experimento.

Tabla 8.

Ejemplos de respuestas del grupo 2 a la pregunta 1 del cuestionario 1. Percibe la situación compuesta y descuida la simple.

Experimento aleatorio 1:	Experimento aleatorio 2.
Una respuesta del Pretest: 3/6 Porque son dos respuestas por 3 preguntas y de esas respuestas sólo 3 son buenas, o sea 3 respuestas de 6 pueden ser correctas.	Una respuesta del Pretest: 3/9= 0.33 Solo puede haber una respuesta correcta de cada pregunta por lo tanto sólo 3 correctas de 9 opciones
Una respuesta del Post-test: $P=\frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}=\frac{3}{6}=P\ (1/2)$ de responder correctamente	Una respuesta del Post-test 1/3 = 0.33 Porque es lo mismo que en la primera, de 3 preguntas sólo contestará una

G3. No argumenta. En este grupo se encuentran las respuestas que sólo dan un número sin dar mayor razón para hacerlo, pues como se comentó antes el argumento es lo que permite agrupar las respuestas en un grupo u otro, por lo que no es posible saber más sobre la idea que el estudiante deseaban transmitir. En el experimento aleatorio 1, se encontraron 3 respuestas en este grupo en el pretest, para el post-test esta cantidad disminuyó a dos. Para el caso del experimento aleatorio 2 la falta de argumento se mantuvo constante del pre al post-test en 3 estudiantes. A continuación, se muestran las respuestas para este grupo.

Tabla 9.

Ejemplos de respuestas del grupo 3 a la pregunta 1. No argumenta

Experimento aleatorio 1:	Experimento aleatorio 2.
Una respuesta del Pretest: ½ ó 0.5	Una respuesta del Pretest: 1/3
Una respuesta del Post-test:	Una respuesta del Post-test

½ = 0.5	1/3 ó 0.33

G4. Otras respuestas: En este grupo se encuentran las respuestas que no pueden agruparse en algún grupo con razonamiento específico, también las respuestas que se consideran extrañas o que no se fue posible saber cuál era la idea del estudiante al escribirlas. Para el experimento aleatorio 1 la frecuencia de estas respuestas aumento de 2 a 6 del pre al post-test; mientras que para el experimento aleatorio 2, aumento de 5 a 9 casos. En la tabla siguiente se incluyen ejemplos de respuestas asignadas a este grupo:

Tabla 10.

Ejemplos de respuestas del grupo 4 a la pregunta 1 del cuestionario 1. Otras respuestas.

<table>
<tr><th>Experimento aleatorio 1:</th><th>Experimento aleatorio 2.</th></tr>
<tr><td>Una respuesta del Pretest:<table><tr><td>1/12</td><td>Porque tiene 12 probabilidades de que solo tenga una respuesta correcta</td></tr></table></td><td>Una respuesta del Pretest:
1/39</td></tr>
<tr><td>Una respuesta del Post-test:<table><tr><td>25%</td><td>Una de cuatro, si las tres preguntas valen el 100% tendría el 25% de probabilidad de tener una correcta</td></tr></table></td><td>Una respuesta del Post-test<table><tr><td>8/39</td><td>La probabilidad de que responda correctamente una pregunta es 8/39</td></tr></table></td></tr>
</table>

En la siguiente tabla se encuentran los grupos formados para clasificar estas respuestas, en la primera columna los nombres de los grupos, en las segunda y tercera columna los datos para el experimento aleatorio 1 para el pre y post-test respectivamente y en la cuarta y quinta columna los del experimento aleatorio 2.

Tabla 11.

Frecuencias de respuesta por grupo de ambos experimentos para la pregunta 1 del cuestionario 1 (Pretest – Post-test)

	Experimento Aleatorio 1: p = ½		Experimento Aleatorio 2: p = 1/3	
Código	Pre-test	Post-test	Pre-test	Post-test
G1. Distingue la situación simple de la compuesta	22	16	19	15
G2. Percibe la situación compuesta y descuida la simple	7	10	7	7
G3. No argumenta	3	2	3	3
G4. Otro	2	6	5	9
Total	34	34	34	34

Dentro de esta idea también se encuentra la pregunta 7 del mismo primer cuestionario, en esta se pregunta a los estudiantes *"qué probabilidad hay de aprobar si se necesitan al menos dos respuestas correctas"*. Esta pregunta se considera en esta idea si se piensa que a los alumnos se les está pidiendo que sumen dos probabilidades, o, dicho de otra manera, para responder correctamente los estudiantes deben entender que se deberían sumar la probabilidad de que la variable aleatoria tome tanto el valor 2 como el 3, que es lo mismo que menciona Batanero, et. al (2016) dentro de su idea fundamental "eventos y espacio muestral" que implica la necesidad de tener en cuenta todos los diferentes resultados posibles en un experimento para calcular su probabilidad.

Es importante mencionar que esta pregunta también se considera dentro de la idea 3, variable aleatoria, pero esto se detalla más adelante.

Para este caso se tienen los siguientes cuatro grupos:

G1. Correcta: En este grupo se consideraron las respuestas que aplicaran el razonamiento correcto, es decir, que sumaran las probabilidades de X ó Y igual a dos y a tres, aunque los cálculos no fueran los correctos, pero si consistentes con los que habían registrado en la pregunta anterior. En el experimento aleatorio 1, la frecuencia para este grupo fue de siete casos para el pretest, y para el post-test aumento a 13 casos; mientras que para el experimento aleatorio de seis casos aumento a 10. Respuestas representativas de este grupo se encuentran en la siguiente tabla.

Tabla 12.

Ejemplos de respuesta del grupo 1 a la pregunta 7 en el pre-test y el post-test para ambos experimentos

Experimento aleatorio 1:	Experimento aleatorio 2.
Una respuesta del Pretest: P (2) + P (3) = 6/20 + 3/20 = 9/20	Una respuesta del Pretest: 2/4 ó ½ ó 50% se sabe esto porque sumas la probabilidad de que tengas Y =2 + Y = 3, y eso da 2/4, la probabilidad total de aprobar
Una respuesta del Post-test: 4/8, porque son al menos dos correctas, pero puede tener tres	Una respuesta del Post-test 7/27 = 0.26

G2. Aproximada: En este grupo se consideraron las respuestas que tomaron sólo el valor de la probabilidad de la variable aleatoria igual a 2, es decir, no sumaron el valor de la variable igual a tres. Nuevamente se consideran las respuestas en función del razonamiento y no de que corresponda a los valores correctos.

Para el experimento aleatorio 1, los estudiantes que reportaron una respuesta aproximada fueron de siete en el pretest y disminuyó a seis para el post-test, mientras que para el experimento aleatorio 2, la frecuencia se mantuvo en ocho tanto para el pre como para el post-test. A continuación, se incluyen algunas respuestas asignadas en este grupo.

Tabla 13.

Ejemplos de respuestas del grupo 2 a la pregunta 7 del cuestionario 1.

Experimento aleatorio 1:	Experimento aleatorio 2.
Una respuesta del Pretest: 3/8	Una respuesta del Pretest: 8/21
Una respuesta del Post-test: 3/8	Una respuesta del Post-test 6/27 = 0.22

G3. Responde 2/3: El grupo 3 se formó con estudiantes que respondieron 2/3 a esta pregunta, es de suponer que la respuesta se debe a que se preguntó la probabilidad de acreditar si se aprueba con al menos dos respuestas correctas de un total de tres, por lo que cabe el pensamiento 2 de 3.

La frecuencia para el experimento aleatorio 1 en el pretest fue de 14 casos y de cinco para el post-test, en cuanto que para el experimento aleatorio 2, fue en el primer momento de 12 y de seis para el segundo momento. Dado que todas estas respuestas son 2/3, no se incluyen ejemplos de las mismas.

G4. Otras respuestas: Como en los casos anteriores este grupo se conforma de los casos en que no es posible asignar la respuesta en los grupos determinados por los patrones encontrados, o porque no es comprensible el razonamiento usado. Para el experimento aleatorio 1, en el pretest se obtuvieron seis casos y para el post-test aumento a 10 casos; en el experimento aleatorio 2 aumento de ocho casos a 10 con referencia al pre y post-test respectivamente.

Tabla 14.

Ejemplos de respuestas del grupo 3 a la pregunta 7 del cuestionario 1.

Experimento aleatorio 1:	Experimento aleatorio 2.
Una respuesta del Pretest: La probabilidad es de 0.33	Una respuesta del Pretest: 6/14
Una respuesta del Post-test: P = (3/4)	Una respuesta del Post-test 14 %

En la tabla siguiente se incluyen los grupos y las frecuencias respectivas en que se organizaron las respuestas para esta pregunta.

Tabla 15.

Frecuencias de respuesta por grupo de ambos experimentos para la pregunta 7 del cuestionario 1 (Pretest – Post-test)

	Experimento Aleatorio 1: p = 1/2		Experimento Aleatorio 2: p = 1/3	
Código	Pre-test	Post-test	Pre-test	Post-test
G1. Correcta	7	13	6	10
G2. Aproximada	7	6	8	8
G3. Responde 2/3	14	5	12	6
G4. Otro	6	10	8	10
Total	34	34	34	34

5.2.1 Observaciones

Las respuestas obtenidas en las dos preguntas que conforman esta idea sugieren las siguientes observaciones:

1. Dificultad para notar la situación simple de la estructura de Bernoulli en un problema contextualizado: Se observa la dificultad de expresar en el lenguaje común preguntas y afirmaciones sobre la estructura compuesta de los experimentos. Se revela que, en las situaciones binomiales, es importante determinar la distribución de Bernoulli correspondientes que subyace en ellas.

Las actividades y las preguntas formuladas a los estudiantes durante el proceso de simulación que se propusieron en esta investigación no propiciaron el uso del lenguaje para lograr la comunicación en este punto. Es casi seguro que, si la pregunta se formula de forma independiente a la situación binomial general, los estudiantes pueden responden con la probabilidad correcta apoyados en el enfoque clásico de probabilidad. El problema surge al presentar la situación binomial compleja y formular (y entender) la pregunta referida a la situación simple de Bernoulli. En la enseñanza se debe tener cuidado de que el estudiante se pregunte y determine la situación de Bernoulli subyacente.

2. Dificultad para asignar una probabilidad compuesta: El uso de expresiones como mayor o menor que, al menos, etcétera, implican reconocer más de un resultado en el espacio muestral y en ocasiones, como en este caso, observar la pertinencia de una operación (suma) para responder, este proceso fue complicado incluso para estudiantes que ya habían determinado la probabilidad para los diferentes valores de la variable aleatoria.

Se presentaron frecuentemente casos en los que se usa un razonamiento combinatorio "incorrecto", asignando el valor de 2/3 bajo la justificación de que se piden al menos dos preguntas correctas de un total de tres, la reflexión de a problemática planteada y no la respuesta inmediata es necesaria para poder responder a esta pregunta.

5.3 Idea 3. Variable aleatoria

En general, una variable aleatoria transforma el espacio muestral en un conjunto numérico que se maneja como un nuevo espacio muestral. La variable aleatoria de una binomial transforma al espacio de 2^n n-eadas de "E" (éxito) y "F" (fracaso) en el conjunto numérico $\{0,1, 2, \ldots n\}$. Así, la variable aleatoria produce una partición del espacio muestral en $n + 1$ subconjuntos. Para asignar la probabilidad es importante tener presente la relación del valor de la variable con el subconjunto correspondiente del espacio muestral, bajo el supuesto de que se conocen las probabilidades de estos.

Spiegel (1991) señala que si una variable aleatoria discreta, como una variable X que puede tomar un conjunto discreto de valores X_1, X_2, …X_k, con probabilidades respectivas p_1, p_2, …p_k, donde $p_1+p_2+\ldots p_k =1$, se dice que se tiene definida una distribución de probabilidad discreta para X. La función p(X), que tiene valores p_1, p_2,…, p_k se llama función de probabilidad. Como X puede tomar ciertos valores con ciertas probabilidades, se le llama variable aleatoria discreta. Por lo tanto, existe una correspondencia entre cada uno de los valore X_1, X_2,… X_n con los respectivos valores p_1, p_2, …p_k.

Son pocos los estudiantes que muestran tener presente la relación entre el valor de la variable y el evento del que éste proviene a la hora de calcular las probabilidades. La mayoría identifica correctamente los valores de la variable, pero pierden la relación con los eventos de los cuales provienen

La semejanza de esta idea con las ideas de Batanero, et al (2016) correspondería a la idea cinco *"Distribución y expectativa de probabilidad",* en función de que la distribución está vinculada a la variable aleatoria, es decir, a cada valor de la variable aleatoria le corresponden ciertos eventos de espacio muestral, lo que determina la probabilidad de ocurrencia para cada uno de esos valores de la variable, en sentido inverso cada probabilidad de la distribución es función de un valor de la variable.

Las preguntas que se relacionan con esta idea son las preguntas 4, 5 y 7 del cuestionario 1 (Apéndice A). A continuación se detallan los grupos formados para cada una de estas preguntas y se muestran las tablas que concentran las frecuencias obtenidas tanto en el pre como en el post-test.

La primera pregunta que se encuentra relacionada con esta idea es la 4 del cuestionario 1, en la que se solicita *"describir los valores que puede tomar X para el primer experimento y Y para el segundo"*. Los grupos que se formaron fueron tres, se describen a continuación:

G1. Proporciona los valores de la variable. En este grupo se encuentran los casos en que se daban puntualmente los cuatro valores que puede tomar la variable aleatoria. Dentro de los resultados se observó que algunos estudiantes mostraban estas relaciones en la construcción de tablas como la siguiente:

X	0	1	2	3
	I, I, I	C, I, I I, C, I I, I, C	C, C, I C, I, C I, C, C	C, C, C
p (X)	1/8	3/8	3/8	1/8

Es decir, lograban vincular los elementos del espacio muestral con los correspondientes valores que toma la variabla aleatoria y las probabilidades respectivas, este comportamiento fue común dentro de aquellos casos en los que hubó un buen desempeño, mientras que en otros peristió la idea de un valor constante para la variable.

Para el experimento aleatorio 1, en el pretest las frecuencias de este grupo alcanzaron hasta 24 casos y para el post-test aumento uno más, a 25 casos; para el experimento aleatorio 2 ocurrió al revés de 23 casos en el pretest disminuyó un caso para el post-test, a 22 casos. En la siguiente tabla se muestran ejemplos de respuestas para este grupo.

Tabla 16.

Ejemplos de respuestas del grupo 1 a la pregunta 4 del cuestionario 1.

<table>
<tr><th>Experimento aleatorio 1:</th><th>Experimento aleatorio 2.</th></tr>
<tr><td>Una respuesta del Pretest
0 = Cuando todas las respuestas son incorrectas
1 = Cuando una respuesta es correcta
2 = Cuando dos respuestas son correctas
3 = Cuando tres respuestas son correctas</td><td>Una respuesta del Pretest:<table><tr><td>Y</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>0</td></tr><tr><td></td><td>8/27</td><td>6/27</td><td>1/27</td><td>12/27</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Una respuesta del Post-test:
“X” puede tomar los siguientes valores 0, 1, 2, 3, ya que cero también es posible</td><td>Una respuesta del Post-test
0, 1, 2, 3</td></tr>
</table>

G2. Asigna un valor constante a la variable. En este grupo se encuentran las respuestas que asignan a la variable un valor constante, es decir, no han conceptualizado que al ser variable puede tomar distintos valores. Para el experimento aleatorio 1, este grupo tuvo una frecuencia de 4 casos tanto para el pre como en el post-test; para el experimento aleatorio 2, aumento de 4 a 6 casos. A continuación, se incluye la tabla donde se ejemplifican las respuestas obtenidas y que se asignaron a este grupo.

Tabla 17.

Ejemplos de respuestas del grupo 2 a la pregunta 4 del cuestionario 1.

Experimento aleatorio 1:	Experimento aleatorio 2.
Una respuesta del Pretest: X = 6 /12	Una respuesta del Pretest: Y = 9/27
Una respuesta del Post-test: X = 8	Una respuesta del Post-test Y = 3/9 = 0.33

G3. Otras respuestas. En este grupo se encuentran los casos que no pueden ser asignados en los anteriores o que parecen peculiares. Para el experimento aleatorio 1 se tuvieron seis estudiantes que cuya respuesta se asignó a este grupo, y para el post-test fue de cinco casos. Para el experimento aleatorio 2, las frecuencias fueron mayores, de siete para el pretest y de seis para el post-test.

Tabla 18.

Ejemplos de respuestas del grupo 3 a la pregunta 4 del cuestionario 1.

Experimento aleatorio 1:	Experimento aleatorio 2.
Una respuesta del Pretest: X = [1/8, ¼, 3/8, ½, 5/8, ¾, 7/8, 1] = 8 valores	Una respuesta del Pretest Y_1 = A = B Y_2 = A = B Y_3 = A = B
Una respuesta del Post-test: x = bm mb bm mb bm mb	Una respuesta del Post-test CCC IIC CIC CCC ICC III CII ICI

En general esta pregunta no presentó dificultades, pero llaman la atención los casos en los que le asignaron un valor constante que oscilo en frecuencias de 8 hasta 12 casos. En la siguiente tabla se encuentran los grupos con sus respectivas frecuencias, para ambos experimentos y para el pre y el post-test

Tabla 19.

Frecuencias de respuesta por grupo de ambos experimentos para la pregunta 4 del cuestionario 1 (Pretest – Post-test)

	Experimento Aleatorio 1: p = 1/2		Experimento Aleatorio 2: p = 1/3	
Código	Pre-test	Post-test	Pre-test	Post-test
G1. Proporciona los valores de la variable	24	25	23	22
G2. Asigna un valor constante a la variable	4	4	4	6
G3. Otras Respuestas	6	5	7	6
Total	34	34	34	34

A partir de este punto, el cuestionario ya se tiene la información suficiente para hacer la pregunta 5 en donde se pide al estudiante “*señalar las probabilidades correspondientes para cada uno de los valores de la variable aleatoria”*, a continuación, describen los grupos que se formaron con ejemplos de las respuestas que se asignaron a cada uno de ellos.

G1. Determina la situación correcta: En este grupo se encuentran los valores correctos de la distribución, es decir, se asigna a cada valor de la variable aleatoria la probabilidad correspondiente. Las frecuencias de este grupo son bajas pues no alcanza el 50% en ningún caso, para el experimento aleatorio se mantiene en 15 casos tanto en el pretest como en el post-test, mientras que en el experimento aleatorio 2, sólo es de tres casos para el pretest y de cinco para el post-test. En la siguiente tabla se incluyen un ejemplo de respuesta para cada uno de los casos

Tabla 20.

Ejemplos de respuestas del grupo 1 a la pregunta 5 del cuestionario 1.

Experimento aleatorio 1:	Experimento aleatorio 2.
Una respuesta del Pretest: a) 1/8, b) 3/8, c) 3/8, d) 1/8	Una respuesta del Pretest a) P (0) = 8/27 b) P (1) = 12/27 = 4/9 c) P (2) = 6/27 = 2/9 d) P (3) = 1/27

Una respuesta del Post-test: a) 1/8 = .125, b) 3/8 = .375, c) 3/8 = .375, d) 1/8 = .125	Una respuesta del Post-test a) 8/27 aproximadamente b) 12/27 aproximadamente, c) 6/27 aproximadamente, d) 1/27 aproximadamente

G2. Propone la distribución uniforme. Se observó que dentro de los casos en que no se reportó la respuesta correcta, se presentaron particularmente casos que incurrían en el sesgo de equiprobabilidad, aún en casos en lo que determinaban correctamente el valor de "p", enumeraban correctamente el espacio muestral y respondían correctamente a los valores que puede tomar la variable aleatoria, pero también se observó que después de las actividades de simulación la recurrencia a este sesgo disminuyó a sólo dos casos en ambos experimentos. Mientras que para el pretest en el experimento aleatorio 1 fue de seis casos y para el experimento aleatorio 2 fue de cuatro casos. A continuación, se muestran ejemplos de respuesta para todos los casos.

Tabla 21.

Ejemplos de respuestas del grupo 2 a la pregunta 5 del cuestionario 1.

Experimento aleatorio 1:	Experimento aleatorio 2.
Una respuesta del Pretest: a) P= (¼), b) P= (¼), c) P= (¼), d) P= (¼)	Una respuesta del Pretest a) ¼ , b) ¼, c) ¼, d) ¼
Una respuesta del Post-test: a) P (0) =1/4, b) P (1) =1/4, c) P (2) = 1/4, d) P (3) = 1/4	Una respuesta del Post-test a) 1/4 b) 1/4, c) 1/4, d) 1/4

G3. Otras respuestas. En este grupo se incluyen respuestas consideradas como incorrectas y de las que no se puede determinar algún razonamiento en específico, por ejemplo, hubo casos que asignaban probabilidades cuyo numerador eran los valores de la variable aleatoria y el denominador es el tamaño del espacio muestral, en otros casos no es posible saber la combinación que forma la fracción y en otros casos usaron fracciones que sumaban uno.

Es importante observar que este grupo alcanza hasta el 38% (13 casos) en el pretest y del 50% (17 casos) en el post-test en el primer experimento aleatorio y de 74% (25 casos) para el pretest en el segundo experimento aleatorio y hasta el 80% (27 casos) en el post-test. La siguiente tabla muestra algunos ejemplos de respuesta para este grupo.

Tabla 22.

Ejemplos de respuestas del grupo 3 a la pregunta 5 del cuestionario 1.

Experimento aleatorio 1:	Experimento aleatorio 2.
Una respuesta del Pretest a) 0, b) 0.16, c) 0.33, d) 0.5 (Los números salen de: 0/6, 1/6, 2/6, 3/6. La suma es 1)	Una respuesta del Pretest a) 11/21, b) 1/21, c) 8/21, d) 1/21
Una respuesta del Post-test: a) 1/14, b) 6/14, c) 6/14, d) 1/14	Una respuesta del Post-test a) 16/39 b) 12/39, c) 8/39, d) 1/39

En la siguiente tabla se incluyen los grupos que conforman esta idea con sus respectivas frecuencias en el pre y en el post-test para ambos experimentos aleatorios.

Tabla 23.

Frecuencias de respuesta por grupo de ambos experimentos para la pregunta 5 del cuestionario 1 (Pretest – Post-test)

	Experimento Aleatorio 1: p = 1/2		Experimento Aleatorio 2: p = 1/3	
Código	Pre-test	Post-test	Pre-test	Post-test
G1. Determina la distribución correcta	15	15	4	5
G2. Propone la distribución uniforme	6	2	5	2

G3. Otros (v. gr. Poner los valores de la variable como numerador y el tamaño del EM como denominador)	13	17	25	27
Total	34	34	34	34

Como puede observarse el desempeño es mucho mejor para el segundo experimento aleatorio, pues en el primero, tanto en el pre como en el post-test el 44% de los estudiantes logran determinar la distribución correcta, mientras que para el segundo sólo cerca del 12% en el pre-test y cerca del 15% para el post-test lo consiguen.

En esta idea también se incluyen resultados de la pregunta 7, dónde se solicita a los estudiantes que mencionen *¿cuál es la probabilidad de aprobar si se necesitan por lo menos dos respuestas correctas?;* dado que los estudiantes se apoyaron del cálculo de sus distribuciones para responder, las respuestas a esta pregunta también se incluyen en esta sección con una segunda codificación, a continuación, se muestran los grupos que se conformaron.

G1. Utiliza la distribución para calcular la probabilidad de pasar el examen. En este grupo se encuentran las respuestas que utilizaron sus distribuciones para calcular la probabilidad de aprobar, se consideran respuestas con base en los cálculos que el estudiante haya usado, aunque no sean los datos correctos. Hay dos casos en este grupo los estudiantes que suman las probabilidades de que la variable tome el valor dos más el tres, y también casos en los que sólo toman la probabilidad de que X ó Y sea igual a dos. En otras palabras, se considera el uso de la distribución de la forma más correcta posible o aproximada.

Para el experimento aleatorio 1 este grupo alcanzo en el pretest 11 casos y para el post-test de 14 casos, en tanto que para el experimento aleatorio 2, en el pretest fue de 17 casos y de 16 para el post-test. En la siguiente tabla se ejemplifican respuestas típicas de este grupo.

Tabla 24.

Ejemplos de respuestas del grupo 1 a la pregunta 7 del cuestionario 1 (2ª clasificación).

Experimento aleatorio 1:	Experimento aleatorio 2.
Una respuesta del Pretest 3/8 (Probabilidad de exactamente 2)	Una respuesta del Pretest 6/27 (Probabilidad de exactamente 2)
Una respuesta del Post-test: 4/8, porque son al menos dos correctas, pero puede tener tres	Una respuesta del Post-test 1/8 + 3/8 = 4/8 (Usa la distribución del experimento aleatorio 1 en el 2)

G2. Calcula con base en el experimento compuesto sin percibir el experimento simple de que se compone. En este grupo se consideran los casos en los que los estudiantes respondieron 2/3, es decir, perciben una situación compuesta en la que se responde 2 de 3 casos posibles sin hacer mayor análisis, pues no se considera la situación simple de la que surgen los datos. En el caso del experimento aleatorio 1, el pretest tiene 14 casos y disminuye hasta cinco casos en el post-test, para el experimento aleatorio 2, de 12 casos en el pretest disminuyó a seis casos en el post-test. En este caso no se incluyen tabla de ejemplificación de respuesta dado que todas consisten en 2/3.

G3. Responde de acuerdo con la distribución uniforme y sólo un valor. En este grupo se consideran los casos en los que se recurría al sesgo de equiprobabilidad, se observó que en todos los casos sólo se reportaba ¼, como la probabilidad de la variable aleatoria para dos, o quizás tres, pero en ningún caso la suma de ambos. Se presentaron para el experimento aleatorio 1, dos casos en el pretest y sólo un para el post-test; y para el segundo experimento un solo caso en el pretest y ninguno en el post-test. Como en el grupo anterior no se incluyen ejemplos pues todas las respuestas son ¼.

G4. Otras respuestas. En este grupo se encuentran las respuestas cuyo razonamiento no se puede establecer en los grupos anteriores, también hay repuestas sin sentido e incongruentes con los planteamientos que se hacían en el resto del cuestionario. En el experimento aleatorio 1, las frecuencias aumentaron de cinco casos en el pretest a 10 en el post-test. En tanto que para el experimento aleatorio 2, paso de ocho casos a 10. Algunas respuestas que fueron incluidas en este grupo se muestran en la tabla que se encuentra a continuación.

Tabla 25.

Ejemplos de respuestas del grupo 4 a la pregunta 7 del cuestionario 1 (2ª clasificación).

Experimento aleatorio 1:	Experimento aleatorio 2.
Una respuesta del Pretest 7/10	Una respuesta del Pretest $P(2 \leq 3)$
Una respuesta del Post-test: 2/8 = 0.25%	Una respuesta del Post-test 1/3 = 33.3 %

Un resumen de las frecuencias tanto del pre como del post-test obtenidas por grupo para las respuestas de esta pregunta en ambos experimentos aleatorios se incluye a continuación.

Tabla 26.

Frecuencias de respuesta por grupo de ambos experimentos para la pregunta 7 del cuestionario 1 (Pretest – Post-test) (2ª clasificación).

	Experimento Aleatorio 1: p = 1/2		Experimento Aleatorio 2: p = 1/3	
Código	Pre-test	Post-test	Pre-test	Post-test
G1. Utiliza la distribución para calcular la probabilidad de pasar el examen (algunos calculan sólo $p = P(X = 2)$, en lugar de $p = P(X = 2) + P(X = 3)$.	13	18	13	18
G2. Calcula con base en el experimento compuesto sin percibir el experimento simple de que se compone.	14	5	12	6
G3. Responde de acuerdo con la distribución uniforme y sólo un valor. p = P (X ó Y = 2) o p = P (X ó Y = 3)	2	1	1	0
G4. Otro	5	10	8	10

Total	34	34	34	34

5.3.1 Observaciones

Las respuestas obtenidas en las tres preguntas que conforman esta idea sugieren las siguientes observaciones:

1. Falta de comprensión de la variable aleatoria como función. Aunque a algunos estudiantes les resulta sencillo describir los valores de la variable no todos la conciben o utilizan como función, ya que no ponen atención al evento y a la medida del evento que da como resultado un valor de la variable (la imagen inversa del valor).

2. Tendencia al sesgo de equiprobabilidad. Ya se ha mencionado el aspecto clave de concebir a la variable aleatoria como función, esto se debe reflejar en que puedan recuperar el evento correspondiente a cada valor de la variable. Las actividades de simulación propuestas en esta investigación no se plantearon desarrollar esta habilidad, pero posiblemente las actividades si ayudaron a que los estudiantes observaran que la distribución uniforme no era la respuesta correcta, pues esta tendencia si disminuyo del pre al post-test en ambos casos.

3. Uso de la distribución para resolver cuestionamientos. Usar los valores de la distribución fue una estrategia usada por más de la mitad de los estudiantes en el post-test en ambos experimentos aleatorios, disminuyó considerablemente el número de frecuencias de 2/3 y la recurrencia al sesgo de equiprobabilidad, aunque las “otras respuestas” también reflejan la falta de comprensión en la relación entre la distribución y las preguntas planteadas en ese contexto.

5.4 Idea 4. Experiencias aleatorias equivalentes

La idea de una simulación es sustituir una experiencia por otra equivalente; la simulación cobra sentido cuando la primera es difícil de manipular, pero la segunda no lo es, es decir, es susceptible de investigación. Lo que permite que las conclusiones que se obtengan en una se transfieren a la otra. Así, para entender la idea de la simulación es condición necesaria saber cuándo dos experiencias son equivalentes. Una definición es la siguiente:

Dos experiencias aleatorias son equivalentes si sus espacios muestrales tienen el mismo número de elementos y *hay una correspondencia biunívoca x(s) entre ellos tal que P(s)=P(x(s)).*

La necesidad de esta noción emerge cuando se trata de utilizar la simulación para desarrollar el razonamiento probabilístico de los estudiantes, pues se requiere para argumentar que los resultados de una simulación nos informan sobre el comportamiento de la situación original. La idea ocho de las propuestas por Batanero, et al (2016), justamente es *“modelado y simulación”* y en ella se señala que la simulación actúa como un paso intermedio entre la realidad y el modelo matemático además de ser una herramienta didáctica, que puede ayudar a mejorar la intuición probabilística de los estudiantes.

La pregunta relacionada con esta idea es la primera de la simulación física, que consiste en plantear la situación de que “48 estudiantes responden al azar un examen de tres preguntas con dos opciones de respuesta para el experimento aleatorio 1, y con tres opciones de respuesta para el experimento aleatorio 2, una de las cuales es correcta. Después se formulan en lenguaje sencillo cuatro preguntas equivalentes a las siguientes: ¿Cuántos alumnos contestarían k respuestas correctas con k = 0, 1, 2, 3? A partir de esta situación se hace la pregunta: *1. (Usando una moneda para simular la situación, o una botella con tres canicas) ¿Crees que este procedimiento puede ofrecer una respuesta satisfactoria a las preguntas formuladas? Explica tu respuesta”.*

Se pudo observar durante la aplicación del cuestionario y revisando las respuestas que en los tres grupos la pregunta es poco clara dado que en algunos casos los estudiantes se confundían entre las preguntas que se les planteaban y las preguntas de la situación experimental por lo que se hizo la aclaración en el contexto de la clase. Con relación a las respuestas que dieron los estudiantes se tienen los siguientes grupos:

G1. Equivalencia de experimentos de Bernoulli: Menciona la correspondencia de espacios muestrales, es decir, un elemento del espacio se corresponde con una canica, e identifica igualdad de probabilidades de los experimentos de Bernoulli. Este tipo de respuesta fue la más completa sólo la mostró un estudiante en el segundo experimento aleatorio con la respuesta: “Sí, porque las canicas simulan ser los incisos y tienen una probabilidad igual”.

G2. *Semejanza de los espacios muestrales.* Menciona la igualdad de los espacios muestrales de los experimentos de Bernoulli, es decir, relacionan las dos caras de la moneda o cada canica con las opciones de respuesta, en el primer experimento aleatorio una correcta y una incorrecta, en el segundo experimento muestral una correcta con dos incorrectas. En este grupo se presentaron tres casos en el primer experimento aleatorio y en segundo experimento cinco casos, en la siguiente tabla se ejemplifican respuestas de este grupo.

Tabla 27.

Ejemplos de respuestas del grupo 2 a la pregunta 1 del cuestionario 2.

Experimento aleatorio 1:	Experimento aleatorio 2.
Sí, porque tiene dos opciones de responder en el examen, así como también tiene dos caras la moneda	Sí, porque hay una canica por cada respuesta
Sí, porque en los dos experimentos hay pruebas al azar. Sólo hay dos opciones y se puede repetir las veces necesarias.	Sí, porque las canicas representan las respuestas y como es un experimento aleatorio es lo más representativo al caso

G3. Igualdad de probabilidades. Menciona la igualdad de probabilidades de los elementos correspondientes en los experimentos de Bernoulli, en el primer experimento aleatorio de ½ para cada cara de la moneda y/o respuesta y de un 1/3 para el segundo experimento para cada canica y/o respuesta, aunque para este segundo caso no existe completa claridad en la respuesta. En el primer caso se presentaron cuatro casos y en el segundo sólo uno. Los ejemplos de respuesta se incluyen en la siguiente tabla:

Tabla 28.

Ejemplos de respuestas del grupo 3 a la pregunta 1 del cuestionario 2.

Experimento aleatorio 1:	Experimento aleatorio 2.
Sí, porque ambos tienen la misma probabilidad para ambos resultados.	Sí, porque tiene el mismo índice de probabilidad

Sí, porque es la misma probabilidad de ser correcta como incorrecta.	

G4. Similitud en el azar y aleatoriedad. En este grupo están los casos en que respondieron que la similitud entre ambas situaciones se debe a que se tratan de eventos azarosos o aleatorios, no consideran ninguna otra correspondencia entre la simulación y el experimento aleatorio planteado. Son las respuestas más frecuentes después del grupo "otros", con 10 y cinco casos para el primer y segundo experimento respectivamente. A continuación, se incluyen ejemplos de respuestas.

Tabla 29.

Ejemplos de respuestas del grupo 4 a la pregunta 1 del cuestionario 2.

Experimento aleatorio 1:	Experimento aleatorio 2.
Sí, aunque cambias la forma de examen por moneda, tiene el mismo mecanismo de azar.	Sí, porque es como una aproximación y es al azar
Sí, porque es un experimento aleatorio y las respuestas están basadas en él.	Sí, porque es un experimento aleatorio

G5. Responden Negativamente. En este grupo se encuentran las respuestas negativas, es decir, aquellas que no notan similitudes o equivalencia entre el experimento planteado y la simulación a realizar, o también aquellos casos en los que no se comprendió la pregunta y consideran que no se modela el experimento porque no contempla los conocimientos o lo que cada alumno sabe. Para el primer experimento se obtuvieron seis casos y para el segundo cinco casos. Los ejemplos de respuesta se incluyen en la siguiente tabla.

Tabla 30.

Ejemplos de respuestas del grupo 5 a la pregunta 1 del cuestionario 2.

Experimento aleatorio 1:	Experimento aleatorio 2.
No, porque no te permite analizar correctamente cada pregunta	No, porque depende de los conocimientos del grupo

No, porque no se contemplan los conocimientos, además es completamente azaroso	No, porque con 3 bolas, 2 incorrectas y una correcta hay más probabilidad de que la respuesta sea incorrecta

G6. Otras Respuesta. En este grupo se encuentran aquellas respuestas que no se comprenden, que no pudieron asignarse a los otros grupos, que no reflejan un patrón como tal o bien aquellos casos en los que no se respondió. Este es el grupo cuyas frecuencias son las más altas, para el primer experimento aleatorio es de 11 casos y para el segundo es de 15 casos. En la siguiente tabla se incluyen algunos ejemplos

Tabla 31.

Ejemplos de respuestas del grupo 6 a la pregunta 1 del cuestionario 2.

Experimento aleatorio 1:	Experimento aleatorio 2.
Sí, porque se comprobaría la teoría que fue lo que se hizo anteriormente	Pienso que es más probable que sea una incorrecta a correcta, es un quizás
Sí, porque se repitió muchas veces	Sí, porque los elementos son adecuados para el experimento

La siguiente tabla contiene los grupos en que se organizaron los grupos para estas respuestas y las frecuencias para cada uno de los experimentos aleatorios.

Tabla 32.

Frecuencias de respuesta por grupo para la pregunta 1 del cuestionario 2 (Simulación física).

Código	Experimento Aleatorio 1: p = 1/2	Experimento Aleatorio 2: p = 1/3
G1 Equivalencia de experimentos de Bernoulli	0	1
G2. Tamaños de los espacios muestrales	3	5

G3. Igualdad de probabilidades	4	1
G4. Justifican la similitud entre el modelo y la simulación en que ambos son azarosos	10	5
G5. Responden negativamente	6	7
G6. Otra	11	15
Total	34	34

5.4.1 Observaciones

Las respuestas obtenidas en la pregunta que conforma esta idea sugieren la siguiente observación:

1. *No identifican los aspectos que hace equivalentes la simulación física y la situación original.* La mayoría de estudiantes encuentran similitudes entre la situación planteada y la simulación en que son eventos azarosos o que arrojan resultados azaros, pero no logran identificar que los espacios muestrales de Bernoulli son equivalentes y que las probabilidades de éxito y fracaso de los eventos "simples" son las mismas. De modo que el modelo de simulación se ve reducido a la existencia de aleatoriedad.

5.5 Idea 5. Enfoque frecuencial de probabilidad

Dentro de esta idea es posible incluir la pregunta 8 del cuestionario 1 (Apéndice A), además de ambas simulaciones, es decir, las respuestas obtenidas tanto en el cuestionario dos (simulación física) a partir de la segunda pregunta, como en el tres (simulación con Fathom), a continuación, se hace una descripción de los resultados obtenidos en estos casos.

En cuanto a las ideas de Batanero et. al. (2016), esta se relaciona con la ocho, *"modelado y simulación"*, en la que se menciona que las simulaciones permiten explorar conceptos y propiedades de la probabilidad, y a su vez permite generar relaciones entre problemática planteada y el modelo matemático. En este trabajo también se esperaba observar elementos en el razonamiento de los estudiantes de como conectan el enfoque frecuencial con el clásico de la probabilidad.

En el caso de la pregunta 8, del primer cuestionario se pide a los estudiantes *predigan que ocurriría si el examen lo respondieran 1000 alumnos, es decir, con apoyo de toda la información con la que cuentan que señalen cuales serían las frecuencias para 1000 repeticiones*, es importante hacer notar que se esperaba que los alumnos incluyeran expresiones que contemplaran la variabilidad y no que dieran respuestas exactas, pero esto ocurrió sólo en dos casos que se comentaran en el capítulo siguiente (Discusión de Resultados)

Los grupos formados con las respuestas obtenidas para esta pregunta se incluyen a continuación:

G1. Proporcional a la distribución correcta: En este grupo se incluyen las respuestas que hacen una predicción que corresponde a la distribución binomial, esta pregunta al parecer es de difícil respuesta para los estudiantes pues en el experimento aleatorio 1, de 12 casos que la dieron del pretest disminuyó a sólo tres casos en el post-test. En cuanto al experimento aleatorio 2, de 17 casos del pretest sólo se obtienen tres en el post-test. En la tabla se dan ejemplos de las respuestas encontradas en este grupo, dentro de estos ejemplos se encuentran los casos que se pudieron identificar considerar la variabilidad a través de expresiones, en este caso “aproximadamente”.

Tabla 33.

Ejemplos de respuestas del grupo 1 a la pregunta 8 del cuestionario 1.

Experimento aleatorio 1:	Experimento aleatorio 2.
Una respuesta del Pretest a) 125 porque la probabilidad de que un estudiante acierte 0 preguntas es 0.125 y eso por 1000 que son los estudiantes da 125 b) 375 lo mismo de arriba solo que ahora la probabilidad es de 0.375 c) 375, 0.375 = P (acertar 2 preguntas) x 1000 estudiantes da 375	Una respuesta del Pretest a) 444 aproximadamente b) 296 aproximadamente c) 222 aproximadamente d) 37 aproximadamente como es al azar, a la larga estos son los resultados que se estimarían aproximadamente, en base al espacio

d) 125 0.125 = P (acertar 3 preguntas) x 1000 estudiantes da 125	muestral y el valor que puede tomar cada uno de los eventos
Una respuesta del Post-test: a) 125 aproximadamente, b) 375 aproximadamente, c) 375 aproximadamente, d) 125 aproximadamente Como es al azar no podemos saber exactamente si saldría eso, pero a la larga eso es lo que se estima que saldría.	Una respuesta del Post-test a) 296 estudiantes b) 444 estudiantes c) 222 estudiantes d) 37 estudiantes LOS OBTIENE DE MULTIPLICAR POR LAS PROBABILIDADES

G2. Proporcional a distribuciones incorrectas. En este grupo se encuentran los casos en los que los estudiantes hicieron cálculos de frecuencias con las distribuciones que obtenían en sus cálculos, aunque no es la distribución que corresponde a la situación binomial. Las respuestas que corresponden a este grupo aumentaron en ambos experimentos en los post-test, para el primero aumento de cinco a 13 casos, y para el segundo de siete a 19; pero se pudo observar que disminuyeron los casos en los que se recurría a la distribución equiprobable, pues de cuatro casos en el pretest del experimento aleatorio 1 y de dos casos en el experimento aleatorio 2, sólo se presentó un caso en ambos post-test.

Una posible razón para notar disminución en el uso de la equiprobabilidad puede ser porque las simulaciones ayudaron a los estudiantes a “saber” que esta condición no se cumplía. A continuación, se incluyen ejemplos de respuestas de este grupo.

Tabla 34.

Ejemplos de respuestas del grupo 2 a la pregunta 8 del cuestionario 1.

Experimento aleatorio 1:	Experimento aleatorio 2.
Una respuesta del Pretest a) Un cuarto del total, o sea 250 estudiantes aproximadamente acertarían cero	Una respuesta del Pretest a) 250 ya que es ¼ b) 250 ya que es ¼ c) 250 ya que es ¼

preguntas, porque las variables son equiprobables b) ¼ c) ¼ d) ¼	d) 250 ya que es ¼
Una respuesta del Post-test: a) 72, b) 428, c) 428, d) 72	Una respuesta del Post-test a) 166.66 que corresponde a la probabilidad de 0 pero existen muchas variables b) 416.66 corresponde a la probabilidad de 1 pero existen muchas variables c) 333.33, corresponde a la probabilidad de 2 pero existen muchas variables d) 83.33, corresponde a la probabilidad de 3 pero existen muchas variables

G3. Otras. El tercer grupo corresponde a los casos en los que los estudiantes dieron respuestas que no están relacionadas con alguna distribución, ni a la binomial, ni a la que hayan obtenido de malos cálculos, son respuestas en las que no se encuentra una razón o un sentido que la respalde. También están las respuestas en las que no se respondió con frecuencias, sino que se usan probabilidades u otro tipo de expresiones.

En cuanto a la frecuencia con la que están respuesta se dieron más o menos fue constante, pues para el experimento aleatorio 1, se pasó de 17 a 18 casos del pre al post-test, y para el segundo experimento aleatorio de 10 en el pretest aumento a 12 casos en el post-test. En la tabla que se muestra a continuación se encuentran ejemplos de respuestas de este grupo.

Tabla 35.

Ejemplos de respuestas del grupo 3 a la pregunta 8 del cuestionario 1.

Experimento aleatorio 1:	Experimento aleatorio 2.
Una respuesta del Pretest	Una respuesta del Pretest

a) P (0) = 500/1000 el resultado en 0 es el que más se podría repetir ~~b) P (1) = 300/1000 aproximadamente 300 acertarían al menos uno de acuerdo al resultado~~ P (1) = 50/1000 c) P (2) = 300/1000 aproximadamente acertarían al menos 2 respuestas por los resultados d) P (3) = 140/1000 de acuerdo a una probabilidad aleatoria es el porcentaje que tendría 3	a) 10 % en 6/6 es 1/6 b) 40 % en 6/6 es 2/6 c) 40 % en 6/6 es 2/6 d) 10 % en 6/6 es 1/6
Una respuesta del Post-test: a) 0 porque hay más probabilidad de tener 1 correcta a nada b) Solo 300 ya que es porcentaje c) Como 600 d) Solo como 10	Una respuesta del Post-test: a) 2/8 En la distribución binomial (0) lleva una probabilidad media b) 3/8 En la distribución binomial la gran parte, casi la mayoría acierta a una pregunta c) 2/8 En la distribución binomial (2) lleva una probabilidad media d) 1/8 En la distribución binomial, muy pocos sacan las tres preguntas correctas

La tabla que concentra las frecuencias con cada uno de los grupos que se formaron con las respuestas a la pregunta ocho, viene a continuación.

Tabla 36.

Frecuencias de respuesta por grupo de ambos experimentos para la pregunta 8 del cuestionario 1 (Pretest – Post-test).

	Experimento Aleatorio 1: p = 1/2	Experimento Aleatorio 2: p = 1/3

Código	Pre-test	Post-test	Pre-test	Post-test
G1. Proporcional a la distribución correcta	12	3	17	3
G3. Proporcional a distribuciones incorrectas	5 (4 son equiprobables)	13 (1 es equiprobable)	7 (2 son equiprobables)	19 (1 es equiprobable)
G4. Otras	17	18	10	12
Total	34	34	34	34

- **Para la simulación física**.

En la segunda pregunta de la simulación física, se pide a los estudiantes que *digan si las respuestas a las preguntas de la situación que se planteó en la pregunta anterior (¿Cuántos alumnos contestarían k respuestas correctas con k = 0, 1, 2, 3?) es única*. Ésta se hizo con la intención de explorar si los estudiantes tenían una idea de la variación de los resultados, es decir, que no hay "respuestas únicas" pues los resultados oscilan, alrededor de las frecuencias esperadas: 6, 18, 18, 6.

Los estudiantes identificaban que las respuestas no pueden ser únicas, pues en una simulación cada uno tendría respuestas distintas, en canto a la justificación de sus respuestas estás están clasificadas en los siguientes grupos:

Grupo 1. Azar y variabilidad. La mayoría de estudiantes identifican que las diferencias en las probabilidades se deben básicamente a que es un evento azaroso que implica variabilidad, pues es una simulación y esto evidencia que las respuestas cambian de un caso a otro. Las frecuencias en este grupo alcanzan los 18 casos para el primer experimento aleatorio y de 15 para el segundo. A continuación, se ejemplifican respuesta de este grupo.

Tabla 37.

Ejemplos de respuestas del grupo 1 a la pregunta 2 del cuestionario 2.

Experimento aleatorio 1:	Experimento aleatorio 2.

No, porque en cada experimento varía el resultado, ya que se está realizando un experimento al azar	No, porque es un experimento que es aleatorio que no puede ofrecer el mismo resultado por ser aleatorio
No, porque es al azar y no se puede esperar una sola respuesta en esta situación	No, porque es al azar y puede ser cualquier respuesta

Grupo 2. Probabilidad. En el experimento aleatorio 2 se encontraron dos casos de interés, en un caso la respuesta fue afirmativa, y adjudico la respuesta a la probabilidad, es decir, dijo que sí son únicas debido a que hay dependencia de la probabilidad, en este caso no se consideró la variabilidad. En el segundo caso, dijo que no puede haber respuestas únicas pero que existe un patrón determinado por la probabilidad

Grupo 3. Confusión. En este caso están las respuestas que no tenían claro el sentido de la pregunta, en general se trata de los casos que consideraron que se estaba preguntando por las respuestas del examen planteado como problema a resolver. Para el experimento aleatorio la frecuencia fue de 13 casos y para el segundo fue de 12 casos, ejemplos de estas respuestas se dan a continuación:

Tabla 38.

Ejemplos de respuestas del grupo 3 a la pregunta 2 del cuestionario 2.

Experimento aleatorio 1:	Experimento aleatorio 2.
Sí, la respuesta única sería la correcta, porque son distintas respuestas (incisos) aunque sólo sea particular la respuesta correcta	No son únicas, depende de los aprendizajes del grupo.
Yo creo que sí, son los mismos exámenes en base a las preguntas solo hay una respuesta correcta en las dos opciones, así que sí.	Correcto, incorrecto, incorrecto

Grupo 4. Otras. En este grupo están los casos en lo que no se identifica claridad en la respuesta, es decir, no hay un argumento que respalde la afirmación o negación de la

pregunta. Las frecuencias para el primer y segundo experimento son de 3 y 5 casos respectivamente.

Tabla 39.

Ejemplos de respuestas del grupo 4 a la pregunta 2 del cuestionario 2.

Experimento aleatorio 1:	Experimento aleatorio 2.
No, hay otras opciones	No, porque la probabilidad de correcto es menos que la de incorrecto
No, porque puede haber varianza debido/dependiendo de la población	No, por las variables

Los resultados obtenidos en todos los grupos para las respuestas de esta pregunta se incluyen en la siguiente tabla:

Tabla 40.

Frecuencias de respuesta por grupo para la pregunta 2 del cuestionario 2 (Simulación física).

Código	Experimento Aleatorio 1: p = 1/2	Experimento Aleatorio 2: p = 1/3
G1. Azar y variabilidad	18	15
G2. Probabilidad	0	2
G3. Confusión	13	12
G4. Otras	3	5
Total	34	34

En la pregunta 3 se les pedía que escribieran los resultados de la simulación. En general, las simulaciones estuvieron bien hechas pues el promedio de los resultados de los estudiantes se aproxima a los valores teóricos.

Para el experimento aleatorio 1, los resultados obtenidos son los siguientes:

Tabla 41.

Promedios obtenidos en la Simulación física, así como los teóricos para el experimento aleatorio 1.

Resultados de las simulaciones por pareja de estudiantes	Promedio	[Teórico]	[Porcentajes teóricos]
a) 2, 4, 6, 9, 4, 5, 7, 5, 6, 9, 11, 7, 5, 8, 8, 4, 11, 5, 10, 11, 5	6.76	6	12.5%
b) 22, 18, 16, 19, 24, 23, 14, 19, 18, 12, 16, 16, 21, 20, 16, 18, 20, 19, 16, 17, 14	18	18	37.5%
c) 21, 21, 16, 13, 16, 17, 21, 18, 19, 22, 16, 17, 15, 16, 22, 18, 13, 18, 17, 16, 21	17.76	18	37.5%
d) 3, 5, 10, 7, 4, 3, 6, 6, 5, 5, 5, 8, 7, 4, 2, 8, 4, 6, 5, 4, 8	5.48	6	12.5%

Para el experimento aleatorio 2, los resultados son:

Tabla 42.

Promedios obtenidos en la Simulación física, así como los teóricos para el experimento aleatorio 2.

Resultados de las simulaciones por pareja de estudiantes	Promedio	[Teórico]	[Porcentajes teóricos]
a) 12, 14, 13, 16, 20, 16, 8, 16, 12, 20, 12, 12, 16, 20, 9, 13, 17, 22, 19, 15	15.1	14.22	29.7%
b) 23, 24, 19, 21, 15, 17, 24, 20, 22, 23, 20, 19, 19, 20, 29, 23, 16, 13, 15, 22	20.2	21.33	44.4%
c) 12, 8, 15, 11, 10, 12, 14, 8, 11, 4, 13, 13, 11, 6, 7, 12, 13, 11, 12, 9	10.6	10.67	22.2%

d) 1, 2, 1, 0, 3, 3, 2, 4, 3, 1, 3, 4, 2, 2, 3, 0, 2, 2, 2, 2	2.1	1.78	3.7%

Tabla 12. Frecuencias por código P3_C2

En la *<u>pregunta 4 se les daba una tabla para que anotaran en una columna las frecuencias que obtuvieron en su simulación para cada valor de la variable; además, se les pidió que en otra columna anotaran las frecuencias relativas,</u>* en la mayoría de los casos los estudiantes llevaron a cabo de forma correcta este registro salvo algunos casos en que registraron frecuencias acumuladas en lugar de relativas, y un caso del grupo 3, que registro mal sus frecuencias y llevó a cabo cálculos incorrectos, en la siguiente tabla se incluye esta información:

Tabla 43.

Frecuencias de respuesta por grupo para la pregunta 4 del cuestionario 2 (Simulación física).

Frecuencias	Experimento Aleatorio 1: p = 1/2	Experimento Aleatorio 2: p = 1/3
Correcta	24	19
Acumulada	9	14
Caso excluido	1	1
Total	34	34

En *<u>la pregunta 5</u>* se pidió a los estudiantes *<u>que indicaran los valores más y menos frecuentes en la distribución que obtuvieron de la simulación; luego se les pide que respondan si creen que este comportamiento ocurre en general o si es casualidad, y que expliquen su respuesta.</u>*

En el caso del experimento aleatorio 1, la mayoría de estudiantes logaron determinar los valores menos frecuentes (X ó Y = 0 y X ó Y = 3) y los más frecuentes (X ó Y = 1 y X ó Y = 2), resultando 21 casos; mientras que 12 alumnos sólo mencionan un solo caso como más o menos frecuente, es decir, solo notan el comportamiento de la distribución para dos valores y no para los cuatro. Se tuvo un caso que reporto frecuencias extrañas.

En el caso del experimento aleatorio 2, la situación era más complicada porque en el caso anterior hay simetría para los valores de la variable aleatoria y en este caso no es así (los valores menos frecuentes son Y=2 y Y=3, y los más frecuentes son Y=0 y Y=1), pero aun así hubo 15 casos que reportaron correctamente los valores, hubo 15 casos más que sólo reportaron un valor menos frecuente y un valor más frecuente, y cuatro casos en total reportaron la distribución de la situación experimental 1.

En cuanto a las respuestas que consideran si el comportamiento es general o por casualidad se tiene lo siguiente:

G1. En general. Las razones que dan para las respuestas "en general" se sustentan en que es más probable tener pocas respuestas correctas cuando respondes al azar, por lo que eso haría un comportamiento generalizado. Para el experimento aleatorio 1, 17 personas dieron esta justificación y 18 para el experimento aleatorio 2.

Tabla 44.

Ejemplos de respuestas del grupo 1 a la pregunta 5 del cuestionario 2.

Experimento aleatorio 1:	Experimento aleatorio 2.
En general, es más probable que te equivoques a que tengas todas correctas	En general, porque en experimentos aleatorios tiende a tener el mismo resultado
Tomando en cuenta que lo hicieron al azar, es más probable que obtenga 2 a 1 correctas	En general, porque como son 3 respuestas y solo una correcta es más fácil que se equivoque

G2. Casualidad. Los que contestaron que era un comportamiento por casualidad dicen que es debido al azar, lo que hace que cada resultado sea distinto, para decir que sería en general necesitan hacer más repeticiones. En el experimento aleatorio 1 estas respuestas alcanzaron 15 casos y para el experimento aleatorio 2, 13 casos. Algunos ejemplos de este tipo de respuestas se incluyen a continuación:

Tabla 45.

Ejemplos de respuestas del grupo 1 a la pregunta 5 del cuestionario 2.

Experimento aleatorio 1:	Experimento aleatorio 2.
Casualidad, porque pueden variar los resultados en cada experimento	Ocurre por casualidad porque el azar es por casualidad
Casualidad, porque son independientes de otros experimentos	Casualidad, porque es una prueba de azar y pueden salir distintos resultados

G3. Otras. En cuanto a este grupo, un estudiante señala para ambos experimentos aleatorios, que ambas cosas ocurren, pues el azar da resultados por casualidad, y en general porque a la larga los datos son aproximados. Dos casos corresponden a estudiantes que no responden y uno en el segundo experimento responde que "no sabe". Las respuestas obtenidas en este grupo para esta pregunta se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 46.

Ejemplos de respuestas del grupo 3 a la pregunta 5 del cuestionario 2.

Experimento aleatorio 1:	Experimento aleatorio 2.
Ambos, si en general, porque a la larga son datos aproximados y por casualidad porque el azar es por casualidad	Ambas, ocurre en general porque son datos aproximados y ocurre por casualidad porque el azar es por casualidad
	No sé

A continuación, se incluye la tabla que muestra las frecuencias de los grupos formados con las respuestas para la pregunta cinco de la simulación física.

Tabla 47.

Frecuencias de respuesta por grupo para la pregunta 5 del cuestionario 2 (Simulación física).

Código	Experimento Aleatorio 1: p = 1/2	Experimento Aleatorio 2: p = 1/3
En general	17	18
Por casualidad	15	13g

Otras	2	3
Total	34	34

En la pregunta 6, se pide que escriban las probabilidades para cada valor de la variable aleatoria y que expliquen como la obtuvieron, los resultados se agruparon por el tipo de respuesta en cuatro grupos que se explican a continuación.

G1. Enfoque frecuencial. En este grupo que encuentran los casos que calculaban las probabilidades con apoyo de sus datos, registrando las frecuencias relativas obtenidas en su simulación. Para el experimento aleatorio 1, fueron 16 los casos que se asignaron en este grupo, mientras que para el experimento aleatorio 2, se obtuvieron 19 casos. En la tabla que continúa, se ejemplifican respuestas de este grupo.

Tabla 48.

Ejemplos de respuestas del grupo 1 a la pregunta 6 del cuestionario 2.

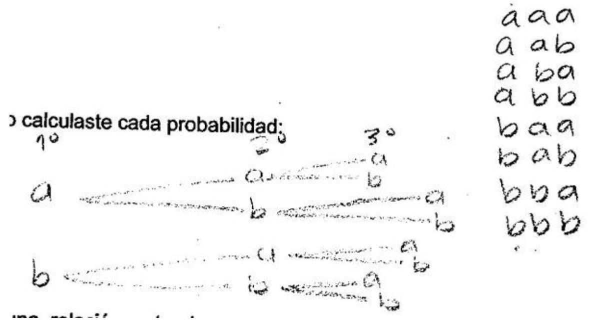
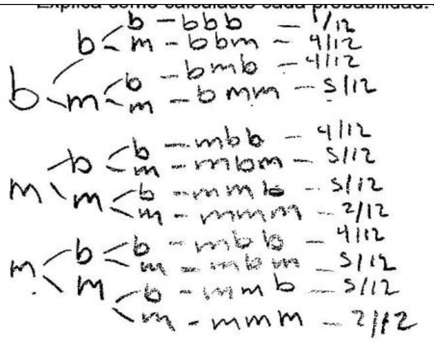
Experimento aleatorio 1:	Experimento aleatorio 2.
Con la frecuencia relativa	Dividiendo la frecuencia en cada caso entre el valor absoluto
Con regla de 3	Son los valores de los porcentajes

G2. Enfoque clásico. Son las respuestas que hicieron el cálculo de las probabilidades considerando el enfoque clásico, dado que ya las habían calculado en el cuestionario previo, en dos casos, en ambos experimentos se usó la herramienta del diagrama de árbol. Para este grupo se obtuvieron 4 y 5 casos para el primer y segundo experimento aleatorio respectivamente. A continuación, se muestran algunas respuestas de este grupo.

Tabla 49.

Ejemplos de respuestas del grupo 2 a la pregunta 6 del cuestionario 2.

Experimento aleatorio 1:	Experimento aleatorio 2.

Con la probabilidad clásica: Casos favorables entre casos totales	Determine esos valores porque al lanzar tres monedas la probabilidad de que salga AAA y SSS es 1/8 y SSA y AAS es 3/8.
	

G3. Enfoque frecuencial apoyado del clásico. Este grupo se formó de las respuestas que usaron el enfoque frecuencial para calcular probabilidades, pero recurrían a una explicación apoyada del enfoque clásico, lo que evidenció confusión entre la probabilidad de un evento y el cálculo de la frecuencia relativa. En este grupo en hay 10 casos para el experimento aleatorio 1 y 6 para el segundo. Los ejemplos se incluyen a continuación.

Tabla 50.

Ejemplos de respuestas del grupo 3 a la pregunta 6 del cuestionario 2.

Experimento aleatorio 1:	Experimento aleatorio 2.
El número de casos favorables entre casos totales, en cada caso dan la probabilidad	Con la fórmula de la probabilidad clásica

G4. Otras Respuestas. Son los casos que no cumplen con los patrones anteriores o que no dan respuesta, para ambos casos dos estudiantes no respondieron, uno más sólo registro frecuencias y un caso reporto como probabilidades el valor de “p” elevado al respectivo valor de la variable aleatoria para 1, 2, y 3 y para el caso de cero, asignaba lo que faltaba para que la suma fuera uno. En ambos experimentos las frecuencias para este grupo fueron de cuatro casos.

Tabla 51.

Ejemplos de respuestas del grupo 4 a la pregunta 6 del cuestionario 2.

Experimento aleatorio 1:	Experimento aleatorio 2.
Con los valores de las frecuencias	Sin Respuesta
1) (½) = ½ 2) (½)^2 = ¼ 3) (½)^3 = 1/8	0.- (1/3)^3 = 1/27 1.- (1/3) = 1/3 2.- (1/3)^2 = 1/9 3.- (1/3)^3 = 1/27

En la tabla que aparece a continuación, se resumen los grupos con las respectivas frecuencias para cada uno, de acuerdo con el experimento aleatorio planteado.

Tabla 52.

Frecuencias de respuesta por grupo para la pregunta 6 del cuestionario 2 (Simulación física).

Código	Experimento Aleatorio 1: p = 1/2	Experimento Aleatorio 2: p = 1/3
G1. Enfoque Frecuencial	16	19
G2. Enfoque Clásico	4	5
G3. Enfoque frecuencial apoyado del clásico	10	6
G4. Otras	4	4
Total	34	34

En la pregunta 7, se les pide que indiquen si ven alguna relación entre las probabilidades de cada valor de la variable y las frecuencias correspondientes de la pregunta 4, el código empleado corresponde al tipo de relación que establecen, ya sea frecuencial o con el enfoque clásico y si observan o no cierta proporcionalidad. A continuación, se incluyen los resultados obtenidos:

Tabla 53.

Frecuencias de respuesta por grupo para la pregunta 7 del cuestionario 2 (Simulación física).

Código	Experimento Aleatorio 1: p = 1/2
G1. Frecuencial y proporcional	9
G2. Frecuencial sin justificación	8
G3. Clásica y relacionadas	6
G4. Otras	11

En el caso de las respuestas del grupo 4, *"otras"* este es tan elevado porque en varios alumnos no explicaban de forma comprensible sus respuestas, decían cosas como "sí van en aumento", "si porque hay correctos e incorrectos".

- **Para la simulación en Fathom**.

En esta simulación los estudiantes se encontraban por primera vez con el software por lo que había que explicarles detalladamente como trabajar con un ambiente totalmente nuevo. Fathom se usaba como apoyo para para que a través de éste los estudiantes notaran las similitudes entre las dos simulaciones (física y en computadora) y las ventajas del uso de la tecnología, también brindaba la posibilidad de que visualizaran el comportamiento de la variable aleatoria en los dos casos propuestos a través de gráficos, dado que en los cuestionarios no se solicitó la construcción de ningún tipo de estas representaciones.

En la *primera pregunta* se cuestionaba a los estudiantes *si creían que la simulación computacional era semejante a la simulación física*, las razones que dieron en su mayoría era que eran equivalentes en función de que simulaban un evento aleatorio en el que obviamente intervenía en azar. Desafortunadamente las respuestas no son lo suficientemente explícitas por lo que se asignan en función de los términos que usan para argumentar. Las respuestas se organizaron de la siguiente manera:

G1. Igualdad de probabilidades. Para el experimento aleatorio 1, sólo dos estudiantes dan una respuesta relacionada con probabilidades, en un caso un estudiante menciona que "son semejantes porque se están calculando probabilidades" y en otro "porque todo es entre probabilidades, mis resultados no son iguales al de los demás". Mientras que para el experimento aleatorio 2, la respuesta no tiene mucho sentido, pues el estudiante menciona que son semejantes "porque es la mayor probabilidad".

G2. Azar y aleatoriedad: En este grupo se encuentran las respuestas que argumentan que las similitudes en las simulaciones son porque ambos procedimientos arrojan resultados aleatorios, o porque son procesos azarosos. Para el experimento aleatorio 1, la frecuencia de este grupo alcanzó los 10 casos y para el experimento aleatorio 2, los 14 casos.

Tabla 54.

Ejemplos de respuestas del grupo 2 a la pregunta 1 del cuestionario 3.

Experimento aleatorio 1:	Experimento aleatorio 2.
Sí, porque actúa aleatoriamente con los datos dados	Sí, porque igualmente se tomaron respuestas aleatorias
Sí, porque los resultados son totalmente aleatorios	Si porque igual es al azar

G3. Variabilidad: En este grupo se encuentran las respuestas que de alguna forma denotan que hay variaciones en los datos que arrojan ambas simulaciones y ahí está la similitud entre ellas. En el experimento aleatorio 1, se encontraron dos respuestas que se asignaron a este grupo, estas son: "Sí, los datos varían mucho" y "Sí, porque se tomaron unas variantes similares"

Para el experimento aleatorio 2, fueron tres respuestas: "Sí, los datos varían mucho", "Sí, pues las distribuciones varían" y "Sí, porque se tomaron unas variantes similares".

G 4. Respuestas negativas: Sólo se presentó un caso en el experimento aleatorio 1, que dice que no hay similitudes.

G 5. Otro: En este grupo se asignaron 19 respuestas en este grupo del primer experimento y 16 del segundo, dado que no se entiende a qué se refieren y no se encontraron palabras clave para asignarle en algún grupo, también están los casos en que no respondieron. A continuación, se incluyen algunos ejemplos de respuestas de este grupo.

Tabla 55.

Ejemplos de respuestas del grupo 6 a la pregunta 1 del cuestionario 3.

Experimento aleatorio 1:	Experimento aleatorio 2.
Sí porque representan lo mismo	Sí, porque se usó el mismo método para llegar a la respuesta
Sí, porque estamos checando que estudiantes se equivocaron	Sí, puesto que la mayoría tenían una respuesta correcta

En la siguiente tabla se incluyen los grupos formados con las respuestas a esta pregunta con sus respectivas frecuencias.

Tabla 56.

Frecuencias de respuesta por grupo para la pregunta 1 del cuestionario 3 (Simulación con fathom).

Código	Experimento Aleatorio 1: p = 1/2	Experimento Aleatorio 2: p = 1/3
G 1. Igualdad de probabilidades	2	1
G 2. Azar y aleatoriedad	10	14
G 3. Variabilidad	2	3
G 4. Respuestas negativas	1	0
G 5. Otras	19	16
Total	34	34

La segunda actividad consistía en simular 50 veces el experimento y responder lo siguiente ¿Cuántos alumnos contestaron correctamente k preguntas? Con k = 0, 1, 2, 3, pero formulado pregunta por pregunta. En general, esta pregunta no tiene dificultades pues sólo se trata de transcribir los resultados de la simulación que hicieron con Fathom.

En las respuestas se observa que los promedios de las frecuencias de cada variable que obtuvieron los estudiantes se aproximan razonablemente a las frecuencias esperadas.

La tercera pregunta se debía responder después de hacer una simulación con 1000 repeticiones y transcribir las frecuencias de cada valor de la variable tanto del resultado de las 50 repeticiones de la situación anterior, como de las 1000 de la nueva simulación. A partir de los anteriores datos, se debían llenar las tablas respectivas de frecuencias relativas.

Los estudiantes, en general, realizaron una simulación adecuada, sólo en 4 casos se observan algunos valores atípicos en la situación experimental 1 y 4 casos más en la segunda, en esta misma situación se presentaron 7 casos de registros incorrectos para frecuencias relativas lo que hace suponer que no tomaron los datos de la computadora, sino que los calcularon ellos mismos.

La cuarta pregunta sugería observar el comportamiento de muchas simulaciones a través de la representación de cada simulación mediante un diagrama de barras o histograma; se preguntaba entonces ¿dónde, de los dos casos que estamos simulando, observas mayor variabilidad? Una descripción de las respuestas de los estudiantes se resume enseguida.

Tabla 57.

Frecuencias de respuesta por grupo para la pregunta 4 del cuestionario 3 (Simulación en fathom).

Código	Experimento Aleatorio 1: p = 1/2	Experimento Aleatorio 2: p = 1/3
G1. 50 repeticiones	23	22
G2. 1000 repeticiones	3	4
G3. Sin Respuesta	3	3

G4. Otro	5	5

Es importante señalar que se para esta pregunta dos estudiantes de grupos diferentes señalaron que hay mayor variabilidad para los valores de la variable en 1 y 2.

La pregunta 5 sugiere que comenten sus observaciones con el compañero y respondan: ¿Qué observan en los resultados obtenidos?

G1. Variabilidad Comparada. Son respuestas que comparan los resultados de ambas simulaciones con 50 y con 1000 casos y se refieren a que en el de 50 hay mayor variabilidad en comparación con el de 1000. En el primer experimento aleatorio las respuestas asignadas a este grupo fueron de 10 casos y en el segundo experimento aleatorio de 12 casos. A continuación, hay ejemplos de respuesta de este grupo.

Tabla 58.

Ejemplos de respuestas del grupo 1 a la pregunta 5 del cuestionario 3.

Experimento aleatorio 1:	Experimento aleatorio 2.
Entre menos casos mayor variabilidad	Al igual que en el ejercicio anterior, se ve más variabilidad en el de 50 casos
Cuando son 50 alumnos las gráficas se ven con mucha variación y en la muestra de 1000 la variación no es mucha	Que hay mayor variabilidad en los casos de 50 alumnos porque son menos

G2. Distribución. Hacen referencia a los valores más o menos frecuentes de la variable aleatoria en cada uno de los experimentos. También se incluyen aquellos que hablan de aspectos relacionados con la distribución, aunque no den una respuesta completa. En ambos experimentos aleatorios se obtuvieron ocho casos. Algunos ejemplos de las respuestas obtenidas y asignadas en este grupo se encuentran a continuación:

Tabla 59.

Ejemplos de respuestas del grupo 2 a la pregunta 5 del cuestionario 3.

Experimento aleatorio 1:	Experimento aleatorio 2.
Las variaciones son mayores en 1 y 2 que en 0 y 3, hay menos probabilidad de tener 0 y 3	Que son muy diferentes y que las respuestas o resultados más comunes son 0 y 1
Que son muy pocos los que pueden reprobar y el número de alumnos que tienen 2 preguntas correctas es muy alto	Que la mayor probabilidad es 1 correcta

G3. Variabilidad sin Argumento. Aquí se asignaron las respuestas que hablan de alguna variación, pero no especifican ni argumentan más, por lo que no fue posible asignar las respuestas en el G1. Estas respuestas sólo se presentaron en el primer experimento aleatorio y se dieron tres casos, cuyas respuestas son: "Entre mayor cambio, mayor variabilidad", "Varían" y "Son resultados muy variables"

G4. Otras. En este caso se encuentran aquellos casos que, aunque mencionen conceptos como "variabilidad" o "distribución" no se comprenden bien, también están aquellos casos que no respondieron la pregunta y particularmente en un grupo de loa que se les aplicó se encontró que mencionan que los resultados son similares, pero no mencionan similares en qué sentido

Tabla 60.

Ejemplos de respuestas del grupo 4 a la pregunta 5 del cuestionario 3.

Experimento aleatorio 1:	Experimento aleatorio 2.
Que la probabilidad es diferente cuando hay más estudiantes en el estudio	Varían más cuando son más casos
En la primera hubo más errores	Que cambian dependiendo de la variabilidad

Un resumen de los grupos de las respuestas con sus respectivas frecuencias se encuentra en la siguiente tabla.

Tabla 61.

Frecuencias de respuesta por grupo para la pregunta 5 del cuestionario 3 (Simulación en fathom).

Código	Experimento Aleatorio 1: p = 1/2	Experimento Aleatorio 2: p = 1/3
G1. Variabilidad comparada	10	12
G2. Distribución	8	8
G3. Variabilidad sin argumento	3	0
G4. Otras	13	14
Total	34	34

5.5.1 Observaciones

1. *Ausencia de conceptos que denoten variabilidad.* Hay una diferencia importante entre la b (x, 3, ½) y b (x, 3, ⅓), que se refleja en que para el primer caso hay al menos un estudiante que percibe y trata de expresar la variabilidad, en cambio, en el segundo no hay ningún intento de expresarla. Como la pregunta donde se pide la predicción es complicada los estudiantes tiene la posibilidad de tener control de aspectos más básicos que la propia variabilidad: Que las frecuencias reflejen la distribución, que sumen 1000 y aspectos como estos.

Varios estudiantes reconocen la variabilidad como una consecuencia de que el experimento es aleatorio (o al azar) en las simulaciones, pero no la consideran en sus argumentos.

2. *Disminuye el uso de distribución equiprobable.* Las frecuencias basadas en la distribución equiprobable disminuyeron en el post-test, muy pocos casos logran reportar frecuencias proporcionales a la distribución correcta.

3. *Similitudes entre el experimento aleatorio planteado y la simulación.* Algunos estudiantes ven la equivalencia entre la situación original y la simulación enfocándose en que

ambas son situaciones de azar. Este puede ser un buen comienzo, pero tiene que evolucionar hacia ver 1) El modelo elemental de la situación; 2) La equivalencia entre los Espacios Muestrales del modelo elemental y su simulación, como una correspondencia biunívoca entre ellos y que términos correspondientes tengan la misma probabilidad; 3) Reproducir en la modelación la manera en que se componen experiencias en el original.

4. *Forma de la distribución.* La mayoría de los estudiantes notan la forma de la distribución, pero se dividen entre los que afirman que es un patrón estable y los que lo dudan y recomiendan más repeticiones del experimento.

5. *Relación entre el enfoque frecuencial y el clásico.* La mayoría calcula las probabilidades con base en el enfoque frecuencial, muchos de ellos olvidando que ya habían calculado las probabilidades con base en el enfoque clásico (o describieron el espacio muestral a partir de construir un árbol). La comparación entre probabilidades clásica y las frecuencias relativas no se pudo hacer porque las probabilidades propuestas fueron con base en el enfoque frecuencial.

CAPÍTULO 6. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En el presente capítulo se discuten los principales elementos observados en cada una de las cinco ideas en las que se presentaron los datos y que son reflejo de los patrones identificados en las respuestas obtenidas en este estudio. La presentación se hace justamente por ideas.

6.1 Habilidades y Dificultades Combinatorias

Roa, et. al. en 1997 apuntaban en un estudio realizado con estudiantes de nivel superior, que la manera en que se utiliza un diagrama de árbol y el control que se tenga en su construcción hacen una diferencia en su efectividad, pues a pesar de constituirse como una gran herramienta para resolver problemas de combinatoria, su uso se verá limitado por la posibilidad de saber cómo construirlo y cómo interpretarlo.

En cuanto a los resultados de este estudio se encontró que para el experimento aleatorio 1, el 41% de estudiantes logró una buena construcción en el pre-test y este porcentaje aumento al 47% en el post-test. La dificultad para construir el árbol aumentó considerablemente para el experimento aleatorio 2, pues en el pre-test sólo el 17% logaron una construcción satisfactoria, afortunadamente para el post-test hubo un aumento al 24%.

Dentro de lo que pudo observarse y que es relevante en este apartado, se encuentra el hecho de saber cómo usar una herramienta que permita resolver un problema planteado, ya que dentro de los patrones identificados en las respuestas se encuentra que en repetidas ocasiones los estudiantes hacen una diagrama que representa la situación que se les plantea y no una forma de esquematizar las posibles soluciones para la problemática, es decir, se encontraron muchos diagramas que representaban cada pregunta con 2 y 3 respuestas, lo que arrojaba en el mejor de los casos 6 y 9 opciones de respuesta, y no 8 y 27, que era la respuesta correcta. Entonces, aunque el uso de diagramas de árbol representa un gran apoyo para resolver problemas de complejidad en combinatoria, si el estudiante no sabe cómo construirlos y usarlos, su efectividad se verá completamente limitada.

Por otra parte, es importante mencionar que para el experimento aleatorio 2 se solicitaba a los estudiantes la construcción de árboles con probabilidades, pero no se encontró ningún caso que los empleara, lo que permite suponer que no los conocen o no saben cómo elaborarlos. Este aspecto es fundamental dado que se presentaron casos que repetían el modelo de la situación experimental 1 en la 2 de forma incorrecta, pues para el primer caso la probabilidad "p" de éxito de la situación simple, es igual a "1-p" la probabilidad de fracaso, pero en el segundo caso no es así ($p = 1/3$ y $1-p = 2/3$). No es posible saber si recurrían al primer modelo y por no considerar esta situación no lograban la resolución correcta o se debía a otras razones, pero sin duda, contemplar este detalle para algunos casos hubiera representado mejores resultados.

El saber asignar una probabilidad a cada rama de un diagrama de árbol, permite usar árboles pequeños para situaciones con 3 o más respuestas en cada evento simple. Sin embargo, algo que se debe considerar es que la pregunta estaba en el contexto del conteo de respuestas posibles no en el de cálculo de probabilidades.

También fue posible identificar a algunos estudiantes que sin aparentemente utilizar diagramas de árbol, lograron identificar de forma correcta los elementos y la cardinalidad del espacio muestral, lo que permite suponer que se trata de estudiantes que tiene alguna forma alternativa de conteo y de identificación de cada uno de los elementos; debido al tiempo con el que se contaba para esta investigación y los tiempos de fin de semestre del CCH no fue posible hacer una entrevista a estos casos para conocer cuál es su estrategia de conteo y de control.

Dentro de esta idea también se incluye una pregunta planteada sólo en el primer experimento aleatorio y que es que los estudiantes indiquen cuántos elementos tiene el espacio muestral, dado que el segundo caso era más difícil y que el número de elementos no daría necesariamente el denominador de las probabilidades, esta pregunta se excluyó.

La relación de esta respuesta con la construcción del diagrama de árbol es inmediata, pues ante una buena representación se esperaría que esta respuesta fuera correcta, pero se presentó un caso en el pre-test y cuatro en el post-test en el que no hay coincidencia entre la representación gráfica y la respuesta dada. Cómo ya se mencionó antes también se presentaron casos en los que un mal diagrama no tenía como consecuencia esta respuesta incorrecta, en el pre-test se dio un caso y en post-test aumento a cuatro casos.

En general, se obtuvo que el 50% de estudiantes en el pre-test y 47 % en el post-test los usaron correctamente para obtener el número de elementos del espacio muestral, aunado al 23% del pre-test y el 15% del post-test de casos que respondieron mal pero consistentemente con su representación, dado que el número elevado de casos que usaron este apoyo, constituye más de la mitad, es posible decir que es una herramienta que debe perfeccionarse para que sea utilizada de forma satisfactoria.

La consistencia entre las preguntas 2 y 3 se considera elemental para el razonamiento de la problemática planteada, pues implica poder deducir información de un recurso esquemático, por lo que dice mucho de cómo se está haciendo la representación en el estudiante. Primero, porque la construcción del diagrama habla de la forma en cómo se visualiza la situación y posible solución y en segunda implica extraer elementos que permitan llegar a la resolución final.

A través de estas respuestas fue posible detectar que, con diagramas bien elaborados, los alumnos pueden resolver problemas de combinatoria que por otros medios pueden resultar muy complicados, sólo que necesitan contar con procedimientos efectivos para construirlos.

En el caso de la situación experimental 2, se evidenció en los estudiantes que construyeron árboles con los 27 casos, que les resulta complicado construir árboles en los que conviene utilizar elementos indistinguibles, en este caso la utilización de la misma representación “I” para dos respuestas incorrectas. El uso de árboles de probabilidades podría ser una buena solución para evitar esta confusión.

Finalmente, es importante mencionar que ninguna actividad de simulación ayudaba a los estudiantes a enumerar o de alguna manera identificar explícitamente el espacio muestral y su cardinalidad, por lo que sería conveniente contemplar esta información en próximos estudios donde se lleven a cabo simulaciones.

6.2 Experiencias Compuestas

La segunda idea en la que se clasificaron los datos corresponde a la de experiencias compuestas; dado que como ya se ha mencionado, un experimento binomial es la repetición de un experimento de Bernoulli, es necesario identificar primero la situación simple, aspecto que trató de resolverse en las primeras preguntas de ambas situaciones experimentales, en las que se preguntaba cuál era la probabilidad de éxito del experimento de Bernoulli, (en el primer caso ½ y en el segundo 1/3).

Aparentemente, esta pregunta no debería tener problemas para responderse, pues es de suponer que si a los estudiantes se les pregunta por la probabilidad de obtener águila en un volado, o si en una urna con una bola verde y dos blancas, se les pregunta cuál es la probabilidad de sacar una bola verde, la frecuencia de las respuestas correctas aumentaría considerablemente, pero al hacer las mismas preguntas en el contexto de una situación binomial, las cosas cambian, y las respuestas esperadas disminuyen como en este caso.

El patrón observado fue que muchos estudiantes respondían que para la primera situación (dos opciones de respuesta con una correcta) la respuesta debía ser 2/4, dos opciones correctas entre 4 totales, o en la segunda situación (tres opciones de respuesta con una correcta) señalaban 3/6 o en algunos casos 1/3 “porque es para una pregunta y son tres”. En estos casos se identificó que los alumnos no distinguían la situación simple, objetivo de la pregunta.

Ahora bien, durante las simulaciones al plantear preguntas sobre ¿con qué objetos podrías simular la situación?, los estudiantes en su mayoría decían como en el ejemplo antes mencionado que con monedas o con urnas, es decir, identificaban correctamente la probabilidad que se pedía en esta pregunta, pero en relación con el pre-test y post-test se encontró que para el primer experimento aleatorio las respuestas correctas bajaron del 71% al 56% y para el segundo experimento de 56% al 44%. Parece ser que las actividades de simulación generaron confusión.

En el análisis de las respuestas se notó ambigüedad en la pregunta que aparentemente era totalmente clara. La pregunta se puede interpretar de una manera diferente de la intención original. Ésta consistía en preguntar por la probabilidad simple de responder correctamente una pregunta independientemente de las demás preguntas; mientras que una interpretación alternativa era la de creer que se pedía “la probabilidad de responder correctamente una pregunta del examen”; esta interpretación ya es un problema binomial que se resuelve de la siguiente manera: con n = 3, p = ½, q = ½

$$\binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{3!}{1!\,(3-1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$$

En el pre-test no hubo ningún caso que diera esta respuesta, pero en el post-test la respuesta indicada para esta pregunta fue 3/8 en dos ocasiones, es decir, la probabilidad de que la variable aleatoria (respuestas correctas) tome el valor 1, por lo que esta respuesta en este contexto es tan correcta como ½, lo que de alguna manera refuerza la ambigüedad, pues una vez que se hicieron las simulaciones dos estudiantes notaron que también esta podría ser la respuesta solicitada.

En esta idea también se incluye la pregunta 7 del primer cuestionario, en ella se pide a los estudiantes que den la probabilidad de aprobar el examen, si se considera que para aprobar se requieren *“al menos dos*” respuestas correctas, entonces la respuesta correcta implicaría la suma de dos respuestas correctas y de tres respuestas correctas.

Aquí también se observó que la mayoría de estudiantes tienen problema con la expresión “al menos dos”, pues para la primera situación experimental de 21% de respuestas correctas del pre-test al post-test bajó a 18%, mientras que en la segunda situación experimental bajó de 38% al 32%.

Algunos alumnos simplemente dieron la probabilidad para dos respuestas (sin considerar que también con tres respuestas correctas se pasa el examen) pero en varios casos los estudiantes reportaron 2/3 (algo así como dos respuestas de tres) como la probabilidad que se les pedía. En el primer experimento aleatorio esta respuesta alcanzó el 41% en el pre-test y en el segundo el 35%, para el post-test bajó a 15% en la primera situación y para la segunda bajó al 18%, por lo que hay elementos suficientes para suponer que algunos de los estudiantes que estaban confundidos dejaron de estarlo, o en algún momento se propició más la comprensión del sentido de la pregunta.

En concreto para esta pregunta es posible pensar que si el estudiante hubiera tenido la posibilidad de hacer un plan de simulación que le permitiera comprender el sentido y relación de las situaciones planteadas el desempeño hubiera sido mucho mejor, tal como lo señala Hoffman, Maxara, Meyfarth, y Prömmel (2014), desafortunadamente para este estudio no se contó con esta posibilidad.

6.3 Variable Aleatoria

Dentro de la tercera idea construida se incluyen las respuestas de tres preguntas, la cuatro, la cinco y la siete. A continuación, se habla sobre las principales características observadas en estos casos.

En la pregunta cuatro se solicita a los estudiantes que describan los valores que puede tomar la variable aleatoria (número de respuestas correctas), X para el primer experimento y Y para el segundo. En general esta pregunta no presentó dificultades, pues se respondió correctamente en más de la mitad de los casos en ambos momentos tanto en el pre como en el post-test.

Aun así, se dieron casos de entre el 23% al 35% en que asignaban un valor constante en esta respuesta, es decir, no identificaban a X y/o a Y como variable y mucho menos lograban identificar lo que implicaba en el contexto del problema, no quedaba claro que en los experimentos aleatorios propuestos el número de respuestas correctas podía cambiar.

Se presentaron dos tipos de respuestas correctas, aquellas que sólo daban los valores que podrían tomar X y Y, o sea, 0, 1, 2 y 3 y aquello casos en los que se comprendían las relaciones de los elementos hallados hasta este punto, por ejemplo, la relación entre los valores de la variable y los correspondientes elementos del espacio muestra. En cuanto al primer tipo de respuestas, es posible pensar que las actividades de simulación reforzaron la comprensión de esta respuesta pues se pedía puntualmente esta información y se visualizaba en las gráficas en Fathom.

Llama la atención que un patrón particular observado entre las mejores respuestas correctas fue que varios alumnos usaban tablas que relacionaban los valores de la variable, los elementos del espacio muestral y las probabilidades correspondientes; lo que permite suponer que además de identificar los valores que podía tomar la variable se percataban de las relaciones de esos valores con los datos ya pedidos como los elementos del espacio muestral.

Ahora bien, saber qué valores tomaba la variable no implicaba necesariamente que los alumnos lograran concebirla como función, ya que no ponían atención al evento y a la medida del evento que da como resultado un valor de la variable (la imagen inversa del valor). Hay estudiantes que describen bien el espacio muestral y determinan correctamente el recorrido de la variable y, no obstante, no logran calcular adecuadamente las probabilidades correspondientes.

En cuanto a la pregunta cinco se solicitaba lo que de forma natural algunos estudiantes habían hecho, que era dar las probabilidades que correspondían a cada valor de la variable aleatoria, pero en otros casos resultó un salto al vacío, pues aunque habían asignado correctamente el valor de “p”, ya habían descrito el espacio muestral y conocían su cardinalidad y habían dado los valores de la variable aleatoria, no lograban vincular esta información con las probabilidades que se solicitaban, aunque fuera de forma incorrecta pero consistente con sus datos.

Dentro de los patrones erróneos en las respuestas de esta pregunta, se encontró que había estudiantes que usaban los valores de la variable como numerador de las probabilidades y denominador el tamaño del espacio muestral, en otros casos era imposible saber que razonamiento se estaba usando y en otros casos se recurría a la distribución uniforme para resolver la situación.

En relación con el post-test, lo que se pudo observar es que el sesgo de equiprobabilidad disminuyó, posiblemente por las actividades de simulación en las que los alumnos podían observar que esta no era la respuesta. Desafortunadamente no hubo mejoras sustanciales con respecto a la distribución correcta y sí aumento el uso de otras respuestas.

Para esta idea también se consideró la pregunta siete (en la que se solicitaba la suma de X ó Y = 2 y X ó Y = 3), pues en el contexto de la pregunta se pide una probabilidad relacionada a la distribución recién descrita en la pregunta anterior.

El porcentaje de casos que usan la distribución de probabilidad correcta para responder en esta pregunta oscila entre el 32% y el 50%. Mientras que los casos en que lo perciben como una situación compuesta sin identificar la distribución sí bajó, para el post-test, en la primera situación del 41% al 15% y para la segunda situación del 18% al 12%.

Desafortunadamente, los casos en que se recurre a otras distribuciones o respuestas persistieron alcanzando porcentajes de hasta el 41%.

6.4 Experiencias Aleatorias Equivalentes

En esta idea se incluye la primera pregunta del segundo cuestionario, (correspondiente a la simulación física), recordando, consistía en plantear la situación de que 48 estudiantes responden al azar un examen de tres preguntas con dos opciones de respuesta para el experimento aleatorio 1, y con tres opciones de respuesta para el experimento aleatorio 2, sólo una de las cuales es correcta. Posteriormente se exponían los cuestionamientos siguientes: ¿Cuántos alumnos contestarían k respuestas correctas? (para k = 0, 1, 2, 3)

A partir de esta situación se hace la pregunta: (Usando una moneda para simular la situación, o una botella con tres canicas) ¿Crees que este procedimiento puede ofrecer una respuesta satisfactoria a las preguntas formuladas? Explica tu respuesta.

El objetivo de este cuestionamiento era indagar sobre las similitudes que observaban en una simulación y la situación experimental propuesta. Dentro de las respuestas obtenidas efectivamente se presentaron entre el 21% y 32% de estudiantes que observaron similitudes, una en especial, ambos son sucesos al azar. (Es decir, distinguir la situación de Bernoulli de la situación Binomial)

Este puede ser un buen comienzo, pero tiene que evolucionar hacia ver 1) El modelo elemental de la situación (es decir, distinguir la situación de Bernoulli de la situación Binomial); 2) La equivalencia entre los Espacios Muestrales del modelo elemental y su simulación, como una correspondencia biunívoca entre ellos y que términos correspondientes tengan la misma probabilidad; y 3) Reproducir en la modelación la manera en que se componen las experiencias de Bernoulli.

Se observó que solo en dos casos se habló sobre probabilidades, y uno en la equivalencia de los experimentos de Bernoulli, sólo hay un caso que hizo referencia a que la similitud era debida al tamaño de los espacios muestrales.

Es importante mencionar que el 18% de los casos respondieron que no eran equivalentes la situación original y su simulación para la primera situación experimental y el 21% para la segunda. Esto se explica, al parecer, por una confusión

Es importante mencionar, que el 18% de los casos respondieron que no eran equivalentes la situación original y su simulación para la primera situación experimental y el 21% para la segunda. Esto se explica, al parecer, por una confusión en el planteamiento de la pregunta, dado que, en esta se presenta la problemática en el contexto de la resolución de un examen, situación que algunos estudiantes mencionaron que les resultaba confusa.

Previo a la exposición del cuestionario y de la actividad se comentó con los alumnos sobre la forma en cómo ellos consideraban se debía hacer la simulación y expresaban con claridad que podrían usar, una moneda, una urna, dados, etc. Por lo que es posible suponer que sí creían que la simulación modelaba la situación a resolver y la respuesta negativa está relacionada con esta confusión.

Ahora bien, dentro de lo que se supuso que se podría obtener como respuesta, estaba la posibilidad de observar ciertas conexiones entre el enfoque frecuencial y el enfoque clásico de probabilidad, o que quizás respuestas que dieran luz sobre la consideración de la variabilidad. Ninguno de estos casos se presentó.

6.5 Enfoque Frecuencial de Probabilidad

Dentro de esta idea es posible agrupar la pregunta ocho (predicción de frecuencias para 1000 casos) del primer cuestionario y los cuestionarios correspondientes a ambas simulaciones.

En lo referente a la pregunta ocho, como primera instancia se esperaba que los alumnos dieran frecuencias cercanas a las correspondientes a las probabilidades que calculaban, pero también se esperaba observar indicadores sobre el uso de la variabilidad. Es complicado que los alumnos dieran un intervalo que representara su respuesta, pero si se creyó que era posible el uso de términos como “más o menos”, “alrededor de”, “cerca de”, pero este no fue el caso, sólo un estudiante reporto frecuencias usando el término “aproximadamente”, tanto en el pre como en el post-test, para el último hubo algunos indicadores de otro estudiante que uso la expresión “como unos…”

Aunado a lo anterior, se encuentra el hecho de que las respuestas incorrectas en los cuatro casos (dos del pre y dos del post-test) tuvieron un alto porcentaje, entre el 29% y el 50%. Estas respuestas que no sólo fueron incorrectas sino también inconsistentes con los cálculos que realizaron durante todo el cuestionario.

Dentro de esta idea también se encuentran los cuestionarios de las simulaciones; en cuanto a la simulación física, con respecto a la pregunta dos, en la que se preguntaba si había respuestas únicas, con la intención de observar conceptos o frases relevantes a la variabilidad, se encontró que en efecto los estudiantes señalan que no puede haber respuestas únicas a causa del azar y por lo tanto cualquier cosa podría ocurrir, pero es difícil que sus argumentos trasciendan al concepto “azar”.

Posteriormente se pidió en las dos preguntas siguientes que calcularan frecuencias y frecuencias relativas con sus simulaciones, en general esto no presentó problemas, a excepción de que en algunos casos los estudiantes calcularon frecuencias acumuladas en lugar de relativas o había algunos problemas para redondear.

La pregunta 5 pide a los estudiantes que indiquen los valores más y menos frecuentes obtenidos de la simulación; y posteriormente se les pide que respondan si creen que este comportamiento ocurre en general o si es casualidad, y que expliquen su respuesta.

En estas respuestas se encontraron respuestas que arrojaron la complejidad de la situación experimental 2, sobre la 1, pues en el segundo caso no existe la simetría del primero, por lo que algunos estudiantes señalaban como más o menos frecuente solo un valor de la variable aleatoria y no como en el caso anterior. Visualizar la forma de la distribución en este caso no es tan evidente, y esto se reflejó en las respuestas dadas.

Ahora bien, se encontró que las respuestas sobre el comportamiento de la distribución en cuanto a si es por casualidad o en general, estuvo dividida, los argumentos para la casualidad nuevamente están en función de la aleatoriedad, bajo el argumento de que "pues nunca se puede saber que va a pasar", pero también se evidenció que los casos en los que observan un patrón general de comportamiento sugieren más repeticiones para estar seguros. Estas ideas podrían servir como fundamento para desarrollar ideas fundamentales como la Ley de los Grande Números, y para conectar el enfoque frecuencial y el enfoque clásico, pero esto implicaría una intervención mucho más profunda y con estos objetivos en concreto.

Posteriormente en el cálculo de probabilidades, la mayoría las calcula con base en el enfoque frecuencial, muchos de ellos olvidando que ya habían calculado las probabilidades con base en el enfoque clásico (describieron el espacio muestral a partir de construir un árbol).

Finalmente, se deseaba que los alumnos hicieran una comparación entre probabilidades clásica y las frecuencias relativas, pero esto no se pudo hacer porque las probabilidades propuestas fueron con base en el enfoque frecuencial, es decir, los alumnos asumieron sus datos como las probabilidades que se solicitaban, además en su argumentación decían calcular con base a la definición clásica de probabilidad, lo que también evidencia una confusión.

En cuanto a la simulación con Fathom, se guió a los estudiantes a que simularan ambas situaciones experimentales con 50 y con 1000 repeticiones, en el software podían graficar los valores de la variable con sus frecuencias y repetir las simulaciones con tan sólo apretar dos teclas, lo que permite ver gráficamente en la pantalla varias veces el comportamiento de la distribución.

Dentro de los aspectos más importantes que se identificaron se encuentra que en términos generales observaron mayor variabilidad en las gráficas con 50 datos que con las de 1000 datos, los estudiantes no utilizan los conceptos y el lenguaje adecuado para comparar dos experimentos aleatorios; la mayoría refiere *al azar*, pero que ambos sean al azar o aleatorios no es suficiente, como se ha mencionado antes es necesario que comparen la cardinalidad de los espacios muestrales y las probabilidades asignadas a sus elementos.

Un aspecto importante que no puede pasarse por alto es la limitante de esta simulación, es que los estudiantes fueron totalmente guiados, ellos no razonaron en ningún momento la forma en que podría diseñarse un plan de simulación, lo anterior debido a que así se dieron las circunstancias y las restricciones de tiempo, pero evidentemente, el razonamiento, comprensión y la elaboración de un diseño sería por mucho más enriquecedor.

Hasta aquí se hace una discusión de los patrones identificados en el análisis de los datos obtenidos, para próximos estudios se cuenta con mucha información que pudrirá guiar un programa de intervención más específico. En el siguiente capítulo se resumen las conclusiones más importantes de todo el material recabado y su revisión.

CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES

En este capítulo se formulan las conclusiones presente trabajo, la presentación se hace respondiendo a las preguntas planteadas en el primer capítulo, organizando la primera respuesta por *ideas*, es decir se describen los rasgos principales de cada una de las cinco categorías en las que se organizó este trabajo y la segunda se responde describiendo los patrones identificados en términos generales. Finalmente se incluye una sección de limitaciones de este estudio y de posibles investigaciones a fututo.

7. 1 Conclusiones Generales

La primera pregunta de investigación que se planteó en el primer capítulo fue: ***¿Qué patrones de razonamiento se pueden identificar en las respuestas de los estudiantes a las tareas de distribución binomial propuestas en el presente trabajo?,*** la respuesta a la misma se incluye a continuación.

En las respuestas de los estudiantes se observaron rasgos o patrones de sus razonamientos que les permitían u obstaculizaban responder correctamente las preguntas; dependiendo de la presencia o ausencia de tales rasgos algunos pocos pudieron llegar con éxito hasta las tareas finales y otros se quedaron en el camino. Tales rasgos o patrones se distribuyen entre cinco ideas centrales que corresponden a momentos clave en el desarrollo del razonamiento probabilístico en general y, en particular, con relación a la distribución binomial, a saber, 1) Combinatoria y espacio muestral, 2) Experiencias aleatorias compuestas, 3) Variable aleatoria, 4) Experiencias aleatorias equivalentes, y 5) Enfoque frecuencial de probabilidad. Estas ideas centrales son muy conocidas pues, excepto por 4, son temas de un primer curso de probabilidad y, también ya habían sido mencionadas como ideas fundamentales desde hace mucho tiempo por Heitele (1975) y reeditadas por Batanero et al (2016). La aportación de este trabajo es distinguir patrones de razonamiento específicos pertenecientes a esas ideas y que emergen en un tratamiento introductorio de la distribución binomial. Enseguida describiremos los patrones que encontramos con relación a cada una de esas ideas.

1) Combinatoria y espacio muestral

El nivel de razonamiento combinatorio que se requiere para el desempeño de las tareas en este estudio se reduce a la construcción de árboles combinatorios. La posibilidad de construir un árbol combinatorio para arreglos de tamaño 3 de 2 objetos distintos es indicador de una diferencia crucial en el nivel de razonamiento que han alcanzado los estudiantes. Los dos patrones paradigmáticos son 1) los que pueden construir el árbol correctamente (8 en el primer experimento). 2) Los que utilizan los parámetros de la situación (2 objetos y secuencias de tamaño 3) para representar la situación estática y obtener 6 (2×3) resultados en lugar de 8 (2^3). Los otros tipos de respuestas incorrectas no presentan patrones tan definidos.

Otra condición que filtra el avance de los estudiantes para razonar con la binomial es el de poder construir el árbol más complejo correspondiente al experimento aleatorio 2. En efecto, varios estudiantes que construyeron adecuadamente el árbol de tamaño 3 de 2 objetos distinguibles, no fueron capaces de construir el árbol de tamaño 3 de 3 objetos, dos de ellos indistinguibles. Este árbol produce 27 ramas en comparación con las 8 del anterior, pero además exige manejar un solo símbolo (el correspondiente a “Incorrecta”) de manera duplicada. Para este caso otra alternativa era construir árboles de 8 ramas ponderadas por su probabilidad, pero esto estuvo fuera del alcance de los estudiantes.

Los anteriores rasgos nos indican la importancia de tener un buen nivel de combinatoria para el desarrollo del razonamiento con la distribución binomial.

2) Experiencias aleatorias compuestas

La distribución binomial se refiere al caso general de repeticiones independientes de un experimento de Bernoulli, por lo que en muchos razonamientos es necesario tener en cuenta esta condición. Así, el reconocimiento de que la binomial se refiere a la composición de experiencias repetidas e independientes de Bernoulli se vuelve un indicador del nivel de razonamiento de los estudiantes. Este hecho se relaciona con la combinatoria, pues el espacio muestral de la binomial con parámetros n y p, es el producto cartesiano de n espacios muestrales de la Bernoulli.

En el presente trabajo notamos la importancia de reconocer el modelo simple de Bernoulli gracias a las respuestas de los estudiantes a una pregunta que incluimos en la batería de preguntas de cada experimento. Una pedía la probabilidad de un resultado simple: “responder correctamente una pregunta del examen”. Los investigadores la entendimos como “cuál es la probabilidad de éxito en la distribución de Bernoulli asociada a la binomial” y cuya respuesta debía ser ½ en el experimento 1 y ⅓ en el experimento 2. En cambio, gran parte de los estudiantes la enmarcaron en la situación general del examen pensándola como “cuál es la probabilidad de que alguien que responda todo el examen sólo acierte una pregunta”, en cuyo caso la probabilidad sería ⅜. Pero la solución de estos estudiantes no fue ésta, pues hubiera reflejado un conocimiento preciso de la binomial, sino su respuesta fue ⅓, reduciendo la situación a un espacio muestral de 3 casos igualmente probables (las preguntas del examen) y de la cual se quiere saber la probabilidad de responder una adecuadamente.

Estos estudiantes están todavía en una etapa de buscar modelar las situaciones con el esquema simple de Laplace, es decir, determinar un espacio muestral equiprobable, sin haber construido una noción de la composición de experiencias aleatorias simples de Bernoulli.

3) Variable aleatoria

El concepto de variable aleatoria permite transitar de un tratamiento aritmético relativamente simple de las probabilidades a uno más sofisticado en el que se utilizan herramientas matemáticas más potentes, en particular, el concepto de función. Como muchos conceptos matemáticos, en contextos simples y a cierto nivel modesto, no es necesario conocer la definición formal del concepto para usar una o más variables aleatorias en el cálculo de probabilidades y resolver problemas. En el caso de la situación de “respuestas a un examen” utilizada en el presente estudio, la expresión “el número de respuestas correctas obtenidas” define la variable aleatoria y con esta simple mención se pudo avanzar con preguntas sobre los valores que toma y sobre las probabilidades correspondientes. Casi la totalidad de los estudiantes pudo enlistar los valores que toma la variable: 0, 1, 2 y 3. Lo que claramente distinguió diferentes niveles de razonamiento fue la identificación o no de los eventos que dan origen a cada valor de la variable y su utilización para calcular las probabilidades.

Aunque varios estudiantes habían enlistado correctamente el espacio muestral y a partir de éste derivaron los valores de la variable, al hacer el cálculo de las probabilidades no distinguieron ni tuvieron en cuenta los eventos que dan lugar a cada uno de esos valores para calcular las probabilidades; esto llevó a algunos al sesgo de equiprobabilidad tomando como espacio muestral el conjunto de los valores de la variable, a otros a utilizar ideas extrañas para asignar las probabilidades. Esta observación nos indica que, aunque los estudiantes no necesitan la definición formal de variable aleatoria para utilizar ésta, sí que se requiere que se consideren rasgos de la variable como función, en particular, es importante la imagen inversa de cada valor de la variable, es decir, enfatizar en la enseñanza la importancia de no disociar los valores de la variable con los eventos que los generan.

4) Experiencias aleatorias equivalentes

En varias investigaciones se reconoce el potencial que tienen las actividades de simulación estocástica para apoyar el aprendizaje y la enseñanza de la probabilidad y la estadística (Hoffman et al 2014, Chance, Ben-Zvi, Garfield, y Medina (2007), Biehler, 1991). No obstante, no encontramos en la literatura alguna descripción y análisis de indicadores que permitan saber cuándo un estudiante se ha apropiado de la simulación como una herramienta de exploración de ideas probabilísticas y para resolver problemas. Un análisis a priori lleva a la observación de que una característica crucial, no necesariamente la única, para entender e interpretar los resultados de una simulación es el reconocimiento de *experiencias aleatorias equivalentes*; para esto se distinguen tres rasgos definitorios 1) Que sean experiencias aleatorias; 2) que haya una correspondencia biunívoca entre sus espacios muestrales, 3) que valores correspondientes tengan la misma probabilidad. En un experimento binomial, lo que se tiene que reconocer es la equivalencia de los experimentos de Bernoulli subyacentes en cada experimento y la acción que en ambos se realiza de repetirlos de forma independiente el mismo número de veces. Si se pretende que los estudiantes vean en la realización de un experimento aleatorio virtual información relacionada con el experimento aleatorio original deben considerar, aunque sea intuitivamente, estos aspectos. En el presente estudio, después de aclarar con los estudiantes el mecanismo de simulación se les preguntaba "¿Crees que este procedimiento puede ofrecer una respuesta satisfactoria a las preguntas formuladas? Explica tu respuesta" (Es decir, si creen que el experimento virtual puede ayudar a resolver problemas del experimento original) y con sus respuestas se encontró que la mayoría decía que sí, pero ninguno daba una argumentación completa. Los que respondieron positivamente dieron principalmente uno de dos tipos de argumento: "porque son experimentos al azar" o "porque dan los mismos resultados". El que ellos no distingan los experimentos de Bernoulli y mencionen los rasgos de equivalencia entre ellos pone en duda su comprensión de la función de la simulación.

5) Enfoque frecuencial de probabilidad

Hoffman et al (2014, p. 284) comentan que "la simulación es una herramienta fundamental que permite a los estudiantes acercarse experimentalmente y de manera adecuada a las ideas estocásticas [teóricas]. Los estudiantes se familiarizan con la interpretación frecuencial de la probabilidad". Se puede entender que con "acercarse experimentalmente…a las ideas estocásticas" quieren decir entender la relación de las frecuencias relativas con las probabilidades teóricas, cuando es posible contar con éstas. En este estudio, para percibir el manejo de los estudiantes de esta relación se les guio a través de las preguntas al primer cuestionario a construir la distribución de probabilidades teóricas de los dos experimentos binomiales ya mencionados [b (x, n, ½) y b (x, n, ⅓)]. En la segunda etapa, se les guio para que simularan los mismos experimentos y observaran las frecuencias absolutas y relativas de los eventos singulares (valores de la variable). En este contexto se les pidieron nuevamente las probabilidades de dichos eventos con la intención de que recuperaran los resultados de la distribución teórica calculada en la fase anterior, no obstante, la mayoría de estudiantes no lo hicieron así y respondieron con las probabilidades frecuenciales y sólo algunos respondieron con las probabilidades teóricas como se quería. Esto muestra que muchos estudiantes consideran el acercamiento teórico (clásico) y el acercamiento frecuencias como métodos independientes cuya elección depende del contexto en el que se plantea la pregunta. Por otro lado, se pidió a los estudiantes en el pre y en el post-cuestionario responder preguntas de predicción, con la idea de ver si gracias a las actividades en el post-test los estudiantes respondían con expresiones para la variabilidad que debían haber observado en la simulación de los experimentos. La mayoría de los estudiantes no lo hizo, salvo dos excepciones. Los resultados muestran la dificultad de lograr que los estudiantes manejen combinadamente las nociones aproximación y variabilidad en sus predicciones, sin embargo, la existencia de dos estudiantes que sí lograron hacerlo alimenta la esperanza de tener más éxito si se modifican las actividades teniendo en cuenta la experiencia adquirida en el presente estudio.

En cuanto a la segunda pregunta de investigación, ***¿qué elementos del razonamiento de los estudiantes pueden extraerse de problemas de Distribución Binomial con alumnos de bachillerato cuando su resolución se ve apoyado con el uso de un software?***, se tiene lo siguiente:

Esta pregunta está relacionada con la influencia del software, en este trabajo se esperaba observar mejores resultados y mayor influencia de la simulación computacional en los resultados del post-test, pero no resulto de esta manera, aun así, es posible extraer los siguientes elementos generales.

- En el post-test se observó que dos estudiantes usaron la notación “0” y “1” para dar el valor de correcto e incorrecto a los elementos del espacio muestral, lograban vincular la existencia de una característica con el valor uno y la ausencia de ella con el número cero, muestra que el software puede ayudar a desarrollar en ellos, en el caso de la distribución binomial, la comprensión de sólo dos posibles resultados (éxito y fracaso)

- El apoyo de gráficos ayudo a los estudiantes a observar el cambio del comportamiento de la variable aleatoria dependiendo de los valores que ésta puede tomar. En el caso del experimento aleatorio 2, la forma de esta distribución no es tan fácil de descubrir por frecuencias, ya que no es simétrica como en el caso del primer experimento, pero se observó en algunas respuestas que trataban de describir el comportamiento más y menos frecuente.

- En un grupo se encontraron para el experimento aleatorio 1, dos respuestas 3/8, para la probabilidad en el caso en que la variable aleatoria es igual a uno, además de tener un buen argumento. Para el segundo experimento los mismos estudiantes intentaron construir su diagrama de árbol con 27 ramas, podría ser que la simulación en Fathom haya influido en que conocían el número de elementos del espacio muestral, por lo que se buscaron encontrar esos 27 casos.

- La simulación con Fathom permitió que los estudiantes observaran que existe mayor variabilidad en una simulación con 50 casos que en una de 1000, por lo que también puede servir como apoyo para desarrollar en ellos la noción de variabilidad y el posterior desarrollo de otros temas como por ejemplo la Ley de los Grandes Números.

7.2 Limitaciones e Investigaciones a Futuro

Esta investigación tuvo la limitación del tiempo. Por un lado, el periodo para realizar la investigación está acotado por las normativas del programa de maestría. Por otro, con relación a la toma de datos, las actividades realizadas con los estudiantes debían ajustarse a los tiempos que ellos tenían disponibles y éstos fueron limitados. El propósito de la Teoría Fundamentada, adoptado parcialmente en el presente estudio, recomienda el muestreo teórico, consistente en volver al campo o a la población estudiada a obtener nuevos datos para reforzar o rectificar observaciones realizadas; el muestreo teórico es crucial para llegar a una teoría emergente de los datos. En el presente estudio sólo nos quedamos con la primera toma de datos, no fue posible, por ejemplo, llevar a cabo entrevistas para profundizar o ampliar en las características de los patrones de respuesta observados. Durante el análisis se percibieron defectos en algunas preguntas y ausencia de otras, que de ser posible volver al campo, se habrían podido corregir e incluir algunas nuevas. Esto tampoco fue posible.

Hubo una limitación también con relación a la escasez y dispersión de las investigaciones sobre distribución binomial publicadas en las revistas importantes. Aunque no se hizo un estudio exhaustivo, con lo realizado no fue posible identificar una tradición o corriente de investigación con componentes similares a las del presente estudio. Con dispersión nos referimos a la variedad de niveles escolares en el que se han realizado las investigaciones (desde secundaria hasta universidad); algunos no incluyen tecnología y también han sido llevadas a cabo con métodos variados; en particular, no hay estudios que sigan, al menos explícitamente, los principios de la Teoría Fundamentada.

Con relación al diseño de las actividades, una limitación importante fue que no se hizo intervenir a los estudiantes en el diseño de la aplicación, en particular que ellos hicieran un plan de simulación después de entender la naturaleza del problema y después lo programaran en el software (Hoffman et al, 2014). En efecto, las simulaciones se obtenían a partir de aplicaciones prefabricadas por los investigadores. Esta elección, que a posteriori podemos decir que fue equivocada, también fue influida por la limitación del tiempo, pues para que los estudiantes siguieran las etapas sugeridas por Hoffman et al (2014) se requería dar más tiempo para la realización de los planes de simulación y asegurar un manejo aceptable del software, aspecto que no podíamos lograr en el tiempo previsto.

A partir de la investigación llevada aquí se infieren algunas posibilidades para trabajos a futuro. Una investigación en la línea del estudio realizado debería modificar el diseño de cómo fue realizada la simulación de modo que permita una participación más activa de los estudiantes en la construcción del programa que genera los datos. Probablemente esto les permitiría reflexionar sobre los conceptos básicos involucrados en la distribución binomial y estar en mejor posición para entender las relaciones entre el enfoque frecuencial y el clásico. Es muy probable que, si los estudiantes, a partir de situaciones binomiales sencillas, manejan instancias de los conceptos de espacio muestral, variable aleatoria, cálculo de probabilidades y distribución de probabilidad puedan generalizar estos conceptos a situaciones un tanto más complejas apoyándose de simulaciones tanto físicas como computacionales, pero en donde ellos elaboren los caminos a seguir para resolver la problemática.

REFERENCIAS

Alvarado, H. y. Batanero, C. (2007). *Dificultades de comprensión de la aproximación normal a la distribución binomial.* . Obtenido de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/67/ideas_01.php

Batanero, C., Chernoff, E., Engel, J., Lee, H., y Sánchez, E. (2016). *Research on Teaching and Learning Probability.* Springer International Publishing.

Birks, M., y Mills, J. (2011). *Grounded Theory. A Practical Guide.* London: Sage Publications.

Chance, B., Ben-Zvi, D., Garfield, J., y Medina, E. (2007). The Role of Technology in Improving Student Learning of Statistics. *Technology Innovations in Statistics Education,* 1-26. Obtenido de https://escholarship.org/content/qt8sd2t4rr/qt8sd2t4rr.pdf

Chalikias, M. (2009). The binomial distribution in shooting. *Teaching Statistics*, *31*(3), 87-89. Recuperado de: http://www3.interscience.wiley.com/journal.

Cobb, P., y McClain, K. (2004). Principles of Instructional Design for Supporting the Development of Students' Statistical Reasoning. En D. Ben-Zvi, y J. Garfield, *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (págs. 375-396). Estados Unidos: Kluwer Academic Publishers.

English, L. D. (2007). Children's strategies for solving two - and three - dimensional combinatorial problems. En G. C. Leder, y H. J. Forgasz, *Stepping stones for the 21st century : Australasian mathematics education research.* The Netherlands: Sense Publishers. 139-156.

García, J. (2017). *Razonamiento Probabilístico de Estudiantes de Bachillerato sobre la Noción de la Distribución Binomial*. (Tesis de Doctorado). Ciudad de México: CINVESTAV.

Hadar, N., y Hadass, R. (1981). The Road to Solving a Combinatorial Problem is Strewn with Pitfalls. *Educational Studies in Mathematics*(12), 435-443.

Hoffman, T., Maxara, C., Meyfarth, T., y Prömmel, A. (2014). Using the software FATHOM for learning and teaching statistics in Germany – A review on the research activities of Rolf Biehler’s working group over the past ten years. En W. e. al, *Mit Werkzeugen Mathematik und Stochastik Lernen.* Heidelberg: Springer. 283-304.

Ireland, S., y Watson, J. (2009). Building a Connection Between Experimental and Theoretical Aspects of Probability. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 229-260.

Johnson, R., y Kuby, P. (2012). *Estadística Elemental.* México: CENGAGE, Learning.

Jones, G., Langrall, C., y Mooney, E. (2007). Research in Probability: Responding to Classroom Realities. En F. Lester, *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (págs. 909-955). USA: NCTM.

Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (1982) Judment under uncertainty: Heuristics and biases. Cambridge University Press.

Kapur, J. (1970). Combinatorial Analysis and School Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*(3), 111-127.

Konold, C., Madden, S., Pollatsek, A., Pfannkuch, M., Wild, C., Ziedins, I., . . . Kazak, S. (2011). Conceptual Challenges in Coordinating Theoretical and Data-centered Estimates of Probability. *Mathematical Thinking and Learning*, 68-86.

Landín, R. (2013). Razonamiento de Estudiantes de Bachillerato al resolver problemas de Probabilidad Binomial. (Tesis de Doctorado). Ciudad de México: CINVESTAV.

Lee, H. S., y Hollebrands, K. F. (2011). Characterising and developing teachers’ knowledge for teaching statistics with technology. In C. Batanero, G. Burrill, y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education* (pp. 359–369). Netherlands: Springer.

Lee, H. S., y Lee, J. T. (2011). Simulations as a path for making sense of probability. In K. Hollebrands y T. Dick (Eds.), *Focus in high school mathematics on reasoning and sense making with technology* (pp. 69–88). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Mathematics, N. C. (2009). *Focus in High School Mathematics. Reasoning and Sense Making.* EUA: NCTM.

Maxara, C. y Biehler, R. (2010). Students' understanding and reasoning about sample size and the law of large numbers after a computer-intensive introductory course on stochastics. En C. Reading (Ed.), *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics* (ICOTS 8, July, 2010. Ljubljana, Slovenia). Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute, (s/p)

Miles, M., y Huberman, A. (1994). *An expanded sourcebook qualitative data analysis.* Londres: Sage Publications.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática.* Reston: NCTM.

Pfannkuch, M., y Reading, C. (2006). Reasoning about distribution: A complex process. *Statistics Education Research Journal, 5*(2), 4-9. Obtenido de https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ5%282%29_GuestEd.pdf

Richmond, P. (2000). *Introducción a Piaget* (15a ed.). España: Fundamentos.

Roa, R., Batanero, C., Godino, J., y Cañizares, J. (1997). Estrategias en la Resolución de Problemas Combinatorios por Estudiantes con Preparación Matemática Avanzada. *Epsilon*(36), 433-446.

Sánchez, E., Inzunza, S., y Ávila, R. (2015). *Probabilidad y Estadística.* México: Grupo Editorial Patria.

Shaughnessy, J. (1992). Research in probability and statistics:Reflections and Directions . En D. Grouws, *Handbook of Reseach on Mathematics Teaching and Learning* (págs. 465-494). New York: Macmillan Publishing Company .

Shaughnessy, J., Chance, B., y Kranendonk, H. (2009). *Focus in High School Mathematics. Reasoning and Sense Making in Statistics and Probability.* EUA: NCTM.

Spiegel, M. (1991). *Estadística.* España: Mc Graw-Hill.

Stohl, H., y Tarr, J. (2002). Developing notions of inference using probability simulation tools. *Journal of Mathematical Behavior*, 319-337.

Stohl, H., Angotti, R., y Tarr, J. (2010). Making Comparisons Between Observed Data and Expected Outcomes: Students' Informal Hypothesis Testing with Probability Simulation Tools. *Statistics Education Research Journal*, 68-96.

Triola, M. (2009). *Estadística.* México: Pearson Education.

Walpole, R., Myers, R., Myers, S., y Ye, K. (2007). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias.* México: Pearson Educación.

Wild, C. (2006). The concept of distribution. *Statistics Education Research Journal, 5*(2), 10-26. Obtenido de https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ5(2)_Wild.pdf

APENDICE A. Cuestionario 1, usado como pre y post-test.

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES, UNAM, Plantel Sur

CUESTIONARIO DE PROBABILIDAD

Profesora: Guadalupe Carrasco Licea

Nombre del alumno: _____________________________________

Grupo: ___________ Edad________________

Instrucciones: Lee con cuidado cada situación y responde las preguntas que se hacen; en algunas probablemente no sepas de antemano la respuesta, pero reflexiona y escribe lo que consideres que es correcto

Ojo: Para hacer cálculos utilicen su calculadora

Experimento aleatorio 1. Un examen de opción múltiple consta de tres preguntas; cada pregunta tiene dos opciones de respuesta, una de las cuales es la correcta. Un estudiante responde cada pregunta eligiendo al azar una de las opciones. Se observan las opciones que elige.

1. ¿Cuál es la probabilidad de responder correctamente una pregunta? Explica tu respuesta

2. Describe todas las posibles formas diferentes de responder el examen (Utiliza un diagrama de árbol)

3. ¿Cuántos diferentes resultados tiene el *Espacio Muestral* del experimento?

4. Considera la variable X = “El número de respuestas correctas”. Describe todos los valores que puede tomar esta variable.

5. Haz lo que se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la variable tome el valor 0?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que tome el valor 1?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que tome el valor 2?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que tome el valor 3

6. Con base en lo anterior, completa la siguiente tabla [Discutir qué tabla es más apropiada]:

Valores de X					Suma
Probabilidad					

7. Si el estudiante acredita el examen cuando responde al menos dos preguntas correctamente ¿Cuál es la probabilidad de que pase el examen?

8. Si 1000 estudiantes respondieran el examen y todos ellos respondieran al azar

a) ¿Cuántos acertarían cero preguntas? Explica tu respuesta

____

b) ¿Cuántos acertarían en una sola pregunta? Explica tu respuesta

____

c) ¿Cuántos acertarían en dos preguntas? Explica tu respuesta

____

d) ¿Cuántos acertaría en 3 preguntas? Explica tu respuesta

____

Con las respuestas llena la siguiente tabla:

Valores de x	**Frecuencias**
Suma	

Experimento aleatorio 2. Un examen de opción múltiple consta de tres preguntas. Cada pregunta tiene tres opciones una de las cuales es la correcta. Un estudiante responde cada pregunta eligiendo al azar una de las opciones.

Responde las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la probabilidad de responder correctamente una pregunta? Explica tu respuesta

2. Describe todas las posibles formas diferentes de responder el examen (Utiliza un diagrama de árbol incluyendo la probabilidad de cada rama)

3. Considera la variable Y = "El número de respuestas correctas". Describe todos los valores que puede tomar esta variable.

4. Calcula lo que se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la variable Y tome el valor 0?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que tome el valor 1?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que tome el valor 2?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que tome el valore 3?

5. Con base en lo anterior, completa la siguiente tabla

Valores de X					Suma
Probabilidad					

6. Para acreditar el examen es necesario que se respondan al menos dos preguntas correctamente. ¿Cuál es la probabilidad de que acredite el examen?

7. Si 1000 estudiantes respondieran el examen y todos ellos respondieran al azar

a) ¿Cuántos acertarían cero preguntas? Explica tu respuesta

____

b) ¿Cuántos acertarían en una sola pregunta? Explica tu respuesta

____

c) ¿Cuántos acertarían en dos preguntas? Explica tu respuesta

____

d) ¿Cuántos acertaría en 3 preguntas? Explica tu respuesta

____

Con las respuestas llena la siguiente tabla:

Valores de x	**Frecuencias**
Suma	

APENDICE B. Cuestionario 2, Simulación Física.

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES, UNAM, Plantel Sur

CUESTIONARIO DE PROBABILIDAD

Profesora: Guadalupe Carrasco Licea

Nombre del alumno: _____________________________________

Grupo: ___________ Edad________________

Teniendo en cuenta nuevamente el **experimento aleatorio 1**, que se reproduce enseguida:

> Un examen de opción múltiple consta de tres preguntas; cada pregunta tiene dos opciones de respuesta, una de las cuales es la correcta. Un estudiante responde cada pregunta eligiendo al azar una de las opciones.

Considera las siguientes preguntas: Si 48 estudiantes responden al azar el examen

- ¿Cuántos alumnos contestarían incorrectamente todas las preguntas?
- ¿Cuántos alumnos contestarían correctamente solo una pregunta?
- ¿Cuántos alumnos contestarían correctamente exactamente dos preguntas?
- ¿Cuántos alumnos contestarían correctamente todas las preguntas?

Para responder un equipo decidió **simular** la situación de la siguiente manera:

Se considera que responder al azar una pregunta del examen es equivalente a lanzar una moneda y observar el resultado: Se conviene que si sale "Sol" es como si el estudiante atinara a la respuesta correcta; si sale "Águila" es como si su respuesta fuera incorrecta. Como el examen consta de tres preguntas, se deben lanzar tres monedas (o tres veces una moneda) para simular una vez el experimento. Ahora bien, se puede simular 48 veces el experimento descrito y observar en cuántos exámenes no se responde correctamente ninguna pregunta (no sale ningún "Sol"), en cuántos exámenes se responde correctamente sólo una pregunta (sale un "Sol"), etc.

1. ¿Crees que este procedimiento puede ofrecer una respuesta satisfactoria a las preguntas formuladas? Explica tu respuesta.

2. ¿Crees que hay una respuesta única para cada pregunta?

- Si respondes "Sí" ¿Cuáles son esas respuestas únicas?

____

____

- Si respondes "No", explica las razones

____

____

Práctica 1. Formen equipos de dos estudiantes y con ayuda de una moneda (o tres monedas) simulen 48 veces el experimento; anoten en cada renglón de la tabla de abajo si la respuesta a la pregunta correspondiente es "correcta" o "incorrecta" de acuerdo a los resultados de la moneda y a lo convenido anteriormente:

Alumno	**Pregunta 1**	**Pregunta 2**	**Pregunta 3**	**Numero de respuestas correctas: variable X**
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				

8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				
21				
22				
23				
24				
25				
26				
27				
28				
29				
30				
31				
32				
33				
34				
35				
36				
37				
38				
39				
40				
41				
42				
43				
44				
45				
46				
47				
48				

3. Con la información que obtuviste de tu simulación responde:

a) ¿Cuántos alumnos contestaron incorrectamente todas las preguntas? __________

b) ¿Cuántos alumnos contestaron correctamente solo una pregunta? __________

c) ¿Cuántos contestaron correctamente exactamente dos preguntas? __________

d) ¿Cuántos alumnos contestaron correctamente todas las preguntas? __________

4. Con base en lo anterior, completa las siguientes tablas:

Valores de x	**Frecuencia**	**Frecuencia Relativa**
Suma		

5. a) ¿Qué valores de la variable son los menos frecuentes?

b) ¿Qué valores de la variable son los más frecuentes?

c) ¿Crees que lo anterior ocurra en general o que es sólo casualidad?

d) Si ocurre en general ¿Por qué crees que eso pase?

e) Si ocurre por casualidad, explica.

6. En la siguiente tabla anota la probabilidad de obtener cada valor:

Valores de X					Suma
Probabilidad					

Explica cómo calculaste cada probabilidad:

7. ¿Ves alguna relación entre las probabilidades de cada valor de la variable y las frecuencias correspondientes que anotaste en la pregunta 4?

Teniendo en cuenta nuevamente el **experimento aleatorio 2**, que se reproduce enseguida:

> Un examen de opción múltiple consta de tres preguntas. Cada pregunta tiene tres opciones una de las cuales es la correcta. Para acreditar el examen es necesario que se respondan al menos dos preguntas correctamente. Un estudiante responde cada pregunta eligiendo al azar una de las opciones.

Considera las siguientes preguntas: Si 48 estudiantes responden al azar el examen

- ¿Cuántos alumnos contestarían incorrectamente todas las preguntas?
- ¿Cuántos alumnos contestarían correctamente solo una pregunta?
- ¿Cuántos alumnos contestarían correctamente exactamente dos preguntas?
- ¿Cuántos alumnos contestarían correctamente todas las preguntas?

Para responder un equipo decidió **simular** la situación de la siguiente manera:

Se considera que responder al azar una pregunta del examen es equivalente en este caso a usar dos canicas blancas y una negra en una bolsa. Se conviene que si sale "Bola Negra" el estudiante atinara a la respuesta correcta; si sale "bola blanca" es como si su respuesta fuera incorrecta. Como el examen consta de tres preguntas, se debe hacer el experimento tres veces. Ahora bien, se puede simular 48 veces el experimento descrito y observar en cuántos exámenes no se responde correctamente ninguna pregunta (no sale ninguna "Bola Negra"), en cuántos exámenes se responde correctamente sólo una pregunta (sale una "Bola Negra"), etc.

1. ¿Crees que este procedimiento puede ofrecer una respuesta satisfactoria a las preguntas formuladas? Explica tu respuesta.

2. ¿Crees que hay una respuesta única para cada pregunta?

- Si respondes "Sí" ¿Cuáles son esas respuestas únicas?

- Si respondes "No", explica las razones

Práctica 2. Formen equipos de dos estudiantes y con ayuda de una botella con tres bolas simulen 48 veces el experimento; anoten en cada renglón de la tabla de abajo si la respuesta a la pregunta correspondiente es “correcta” o “incorrecta” de acuerdo con el color de la bola que se puede ver en la botella y a lo convenido anteriormente:

Alumno	**Pregunta 1**	**Pregunta 2**	**Pregunta 3**	**Numero de respuestas correctas (x)**
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				
21				
22				
23				
24				
25				
26				
27				
28				
29				
30				
31				
32				
33				
34				
35				
36				
37				
38				
39				
40				
41				
42				
43				
44				
45				
46				
47				
48				

3. Con la información que obtuviste de tu simulación responde:

a) ¿Cuántos alumnos contestaron incorrectamente todas las preguntas? __________

b) ¿Cuántos alumnos contestaron correctamente solo una pregunta? ___________

c) ¿Cuántos contestaron correctamente exactamente dos preguntas? ___________

d) ¿Cuántos alumnos contestaron correctamente todas las preguntas? ___________

4. Con base en lo anterior, completa las siguientes tablas:

Valores de x	**Frecuencia**	**Frecuencia Relativa**
Suma		

5. a) ¿Qué valores de la variable son los menos frecuentes?

b) ¿Qué valores de la variable son los más frecuentes?

c) ¿Crees que lo anterior ocurra en general o que es sólo casualidad?

d) Si ocurre en general ¿Por qué crees que eso pase?

e) Si ocurre por casualidad, explica.

6. En la siguiente tabla anota la probabilidad de obtener cada valor:

Valores de X					Suma
Probabilidad					

Explica cómo calculaste cada probabilidad:

APENDICE C. Cuestionario 3, Simulación Computacional.

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES, UNAM, Plantel Sur
CUESTIONARIO DE PROBABILIDAD

Profesora: Guadalupe Carrasco Licea

Nombre del alumno: ______________________________________

Grupo: ___________ Edad________________

Experimento Aleatorio 1

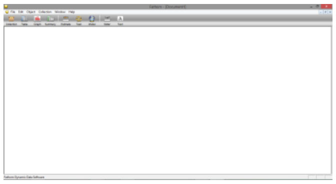
Considerar nuevamente el siguiente problema:

Un **examen** de opción múltiple consta de tres preguntas. Cada pregunta tiene sólo dos opciones una de las cuales es la correcta. Para acreditar el examen es necesario que se respondan al menos dos preguntas correctamente. Un estudiante responde cada pregunta eligiendo al azar una de las opciones. Para resolver nuestra situación vamos a simularla con el software Fathom:

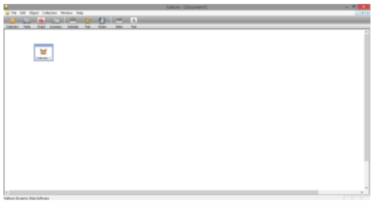
1. Da doble click en el ícono de Fathom

   Fathom 2

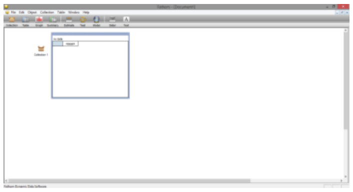
   Observarás que se abre la siguiente ventana



2. Da click en el ícono *Collection*, Collection y arrastra hasta la ventana.

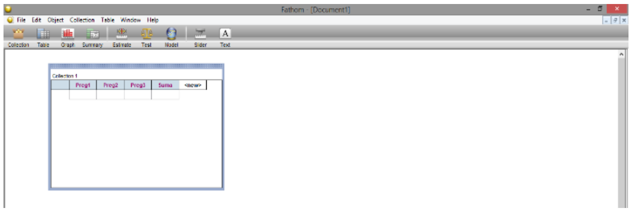


3. Da click en el ícono *Table*, Table y arrastra a la ventana

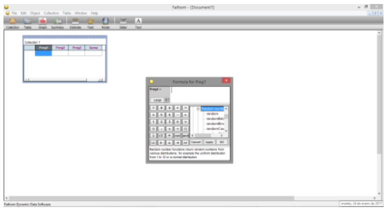


   A continuación, vamos a introducir los datos para resolver nuestra situación.

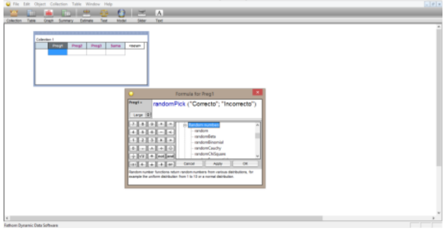
4. En la celda que dice <new>, de la tabla que apareció escribe *Preg1* y da un "enter", en la celda de la derecha que aparece escribe *Preg2* y da "enter" nuevamente, en la siguiente escribe *Preg3*, con el respectivo "enter" y por último escribe *Suma*. Ahora ya todas las columnas con las que se trabajará tienen nombre, quedando de la siguiente forma:



5. Selecciona con un click sobre la celda *Preg1* y da click derecho, aparece un menú del que seleccionaras “Edit Formula” y se desplegará una ventana como se muestra a continuación:



6. Del menú que aparece seleccionaras “*Functions*” → *“random Numbers”* → *“randomPick”* con doble click. Observaras que en la pantalla aparece la leyenda “random Pick ( )”, dentro del paréntesis colocaras entre comillas las palabras **“correcto”** e **“incorrecto”** separados de un punto y coma como se muestra en la siguiente imagen:



Preg1 = randomPick ("Correcto"; "Incorrecto")

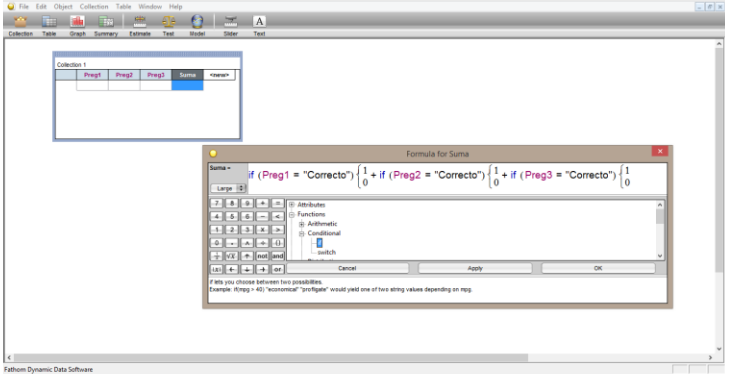
Da un click en el recuadro “Apply” y después en “OK”

7. Posteriormente darás un click derecho nuevamente sobre *“Preg1”* y seleccionaras del menú que se despliega la opción *“CopyFormula”*. Da un click derecho sobre *“Preg2”* y selecciona *“Paste Formula”*, has lo mismo para *“Preg3”*.

Ahora debes decirle al software como haría el profesor para contar las respuestas correctas, y para eso, haremos lo siguiente: A cada respuesta correcta le daremos un punto y a cada respuesta incorrecta cero puntos, así que la instrucción será, *“si la respuesta es correcta vale 1, sino entonces vale 0”*

8. En la celda llamada *“Suma”* darás click derecho y seleccionaras *“Edit Formula”* → *“Functions”* → “Conditional”, después doble click en *“if”,* aparece la expresión “if” seguida de un paréntesis escribirás lo siguiente:

$$if(Preg1 = "Correcto")\begin{cases}1\\0\end{cases} + if(Preg2 = "Correcto")\begin{cases}1\\0\end{cases} + if(Preg3 = "Correcto")\begin{cases}1\\0\end{cases}$$

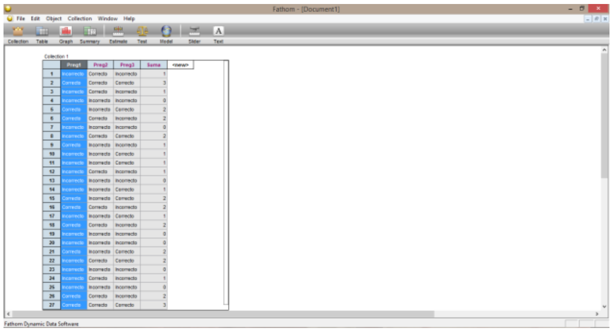


Suma = if (Preg1 = "Correcto") $\begin{cases}1\\0\end{cases}$ + if (Preg2 = "Correcto") $\begin{cases}1\\0\end{cases}$ + if (Preg3 = "Correcto") $\begin{cases}1\\0\end{cases}$

If lets you choose between two possibilities.
Example: if(mpg > 40) "economical" "profligate" would yield one of two string values depending on mpg.

Da un click en el recuadro “Apply” y después en “OK”
Nota que en esa instrucción se están sumando los puntos de todas las respuestas correctas

9. A continuación, da click derecho y del menú que se despliega selecciona *“New Cases”*, en el recuadro que aparece escribe 50 y da enter. Ahora tienes una tabla parecida a la que construiste en la simulación con objetos físicos.

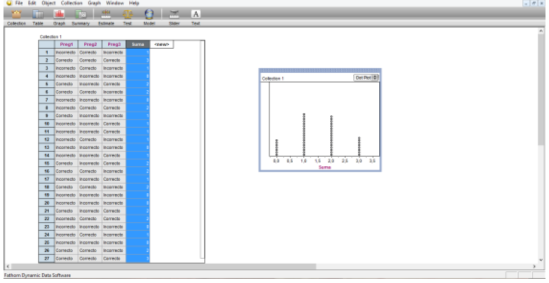


Collection 1

	Preg1	Preg2	Preg3	Suma	<new>
1	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	1	
2	Correcto	Correcto	Correcto	3	
3	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	1	
4	Incorrecto	Incorrecto	Incorrecto	0	
5	Correcto	Incorrecto	Correcto	2	
6	Correcto	Correcto	Incorrecto	2	
7	Incorrecto	Incorrecto	Incorrecto	0	
8	Incorrecto	Correcto	Correcto	2	
9	Correcto	Incorrecto	Incorrecto	1	
10	Incorrecto	Incorrecto	Correcto	1	
11	Incorrecto	Incorrecto	Correcto	1	
12	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	1	
13	Incorrecto	Incorrecto	Incorrecto	0	
14	Incorrecto	Incorrecto	Correcto	1	
15	Correcto	Incorrecto	Correcto	2	
16	Correcto	Correcto	Incorrecto	2	
17	Incorrecto	Incorrecto	Correcto	1	
18	Correcto	Correcto	Incorrecto	2	
19	Incorrecto	Incorrecto	Incorrecto	0	
20	Incorrecto	Incorrecto	Incorrecto	0	
21	Correcto	Incorrecto	Correcto	2	
22	Incorrecto	Correcto	Correcto	2	
23	Incorrecto	Incorrecto	Incorrecto	0	
24	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	1	
25	Incorrecto	Incorrecto	Incorrecto	0	
26	Correcto	Correcto	Incorrecto	2	
27	Correcto	Correcto	Correcto	3	

10. El siguiente paso es construir un histograma. Para ello, da click en el menú al icono *"Graph"* y arrástralo hacia la ventana. Aparece un recuadro en el que se graficará.

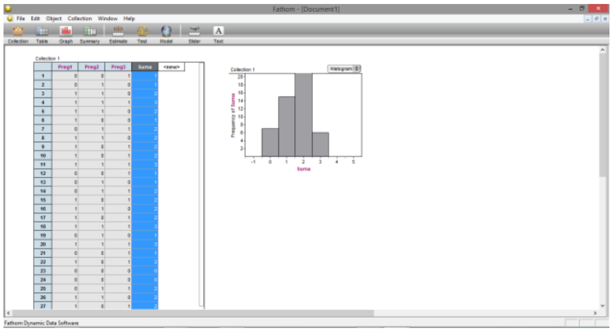
11. Da click sobre la columna *"Suma"* y arrastra hasta la parte horizontal del recuadro que apareció cuando presionaste "Graph". Se crea algo similar a la siguiente imagen:



Collection 1

	Preg1	Preg2	Preg3	Suma	<new>
1	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	1	
2	Correcto	Correcto	Correcto	3	
3	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	1	
4	Incorrecto	Incorrecto	Incorrecto	0	
5	Correcto	Incorrecto	Correcto	2	
6	Correcto	Correcto	Incorrecto	2	
7	Incorrecto	Incorrecto	Incorrecto	0	
8	Incorrecto	Correcto	Correcto	2	
9	Correcto	Incorrecto	Incorrecto	1	
10	Incorrecto	Incorrecto	Correcto	1	
11	Incorrecto	Incorrecto	Correcto	1	
12	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	1	
13	Incorrecto	Incorrecto	Incorrecto	0	
14	Incorrecto	Incorrecto	Correcto	1	
15	Correcto	Incorrecto	Correcto	2	
16	Correcto	Correcto	Incorrecto	2	
17	Incorrecto	Incorrecto	Correcto	1	
18	Correcto	Correcto	Incorrecto	2	
19	Incorrecto	Incorrecto	Incorrecto	0	
20	Incorrecto	Incorrecto	Incorrecto	0	
21	Correcto	Incorrecto	Correcto	2	
22	Incorrecto	Correcto	Correcto	2	
23	Incorrecto	Incorrecto	Incorrecto	0	
24	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	1	
25	Incorrecto	Incorrecto	Incorrecto	0	
26	Correcto	Correcto	Incorrecto	2	
27	Correcto	Correcto	Correcto	3	

12. En la parte superior derecha del gráfico selecciona del menú desplegable la opción "Histogram"



Collection 1

	Preg1	Preg2	Preg3	Suma	<new>
1	0	0	1	1	
2	0	1	0	1	
3	1	1	0	2	
4	1	1	1	3	
5	1	1	0	2	
6	1	0	0	1	
7	0	1	1	2	
8	1	1	0	2	
9	1	0	1	2	
10	1	0	1	2	
11	1	1	1	3	
12	0	0	1	1	
13	0	1	0	1	
14	0	1	1	2	
15	1	0	1	2	
16	1	1	0	2	
17	1	0	1	2	
18	1	1	1	3	
19	0	1	0	1	
20	1	1	1	3	
21	0	0	1	1	
22	1	0	1	2	
23	0	0	0	0	
24	0	0	0	0	
25	0	1	1	2	
26	1	1	0	2	
27	1	0	1	2	

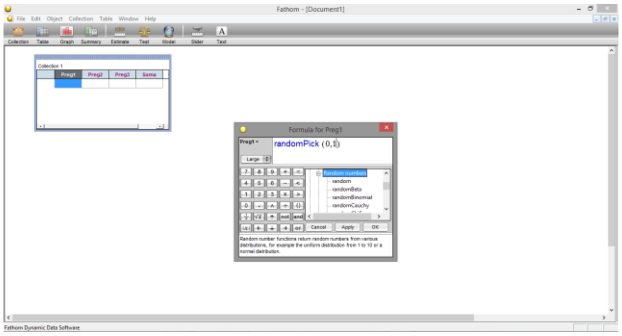
Antes de continuar, responde a la siguiente pregunta y justifica tu respuesta:

- ¿Consideras que este proceso corresponde o es semejante al que se aplicó en la simulación física para responder el examen?

Para facilitar los cálculos podemos dar indicaciones más sencillas al software, por ejemplo, en lugar de usar los términos correcto e incorrecto, podemos asignar el número uno para una respuesta correcta y el número cero para una incorrecta, teniendo esto en cuenta en el momento de sumar podríamos hacerlo directamente con los valores que están en las celdas sin tener que usar la función condicional "if"

13. Selecciona con un click nuevamente el icono *"Collection"* Collection y arrástralo a la ventana, aparece un icono con el nombre "Collection2". Repite todos los pasos, ahora llama a las columnas distinto, por ejemplo: Preg_1, Pregunta1, P1, etc.

14. La diferencia es que al llegar al paso 6 cuando la pantalla aparece la leyenda "random Pick ( )", dentro del paréntesis colocaras un cero y un uno separados de un punto y coma como se muestra en la siguiente imagen:



Formula for Preg1

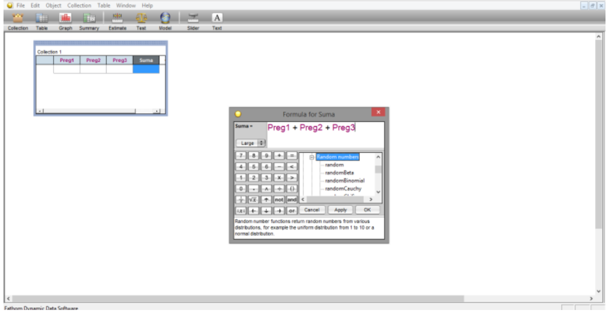
Preg1 = randomPick (0,1)

Random number functions return random numbers from various distributions, for example the uniform distribution from 1 to 10 or a normal distribution.

Da un click en el recuadro "Apply" y después en "OK"

15. Posteriormente darás un click derecho nuevamente sobre *"Preg1"* y seleccionaras del menú que se despliega la opción *"CopyFormula"*. Da un click derecho sobre *"Preg2"* y selecciona *"Paste Formula"*, has lo mismo para *"Preg3"*.

16. En la celda llamada *"Suma"* darás click derecho y seleccionaras *"Edit Formula",* en el recuadro donde aparece el cursor, debes escribir *"Preg1+Preg2+Preg3",* como aparece a continuación:



Formula for Suma

Suma = Preg1 + Preg2 + Preg3

Random number functions return random numbers from various distributions, for example the uniform distribution from 1 to 10 or a normal distribution.

Da un click en el recuadro "Apply" y después en "OK"

17. Para esta segunda colección cuando selecciones *"New Cases"*, en el recuadro que aparece escribe 1000 y da enter.

18. En la parte vertical del gráfico es posible cambiar de escala dando click derecho, puedes pasar a frecuencias relativas y observar lo que ocurre cuantas veces lo desees.

Responde a las siguientes preguntas:

1. Sólo viendo el gráfico para 50 casos,
    a. ¿Cuántos alumnos contestaron incorrectamente todas las preguntas?

    b. ¿Cuántos alumnos contestaron correctamente solo una pregunta?

    c. ¿Cuántos alumnos contestaron correctamente exactamente dos preguntas?

    d. ¿Cuántos alumnos contestaron correctamente todas las preguntas?

2. Completa las siguientes tablas con la información para 50 casos en las de la izquierda y 1000 en las de la derecha, observa que en las segundas tablas se piden frecuencias relativas:

Valores de x	Frecuencia
Suma	

Valores de x	Frecuencia
Suma	

Valores de x	Frecuencia Relativa
Suma	

Valores de x	Frecuencia Relativa
Suma	

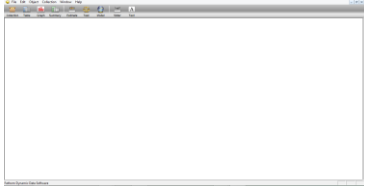
3. Cuando presionas Ctrl+y, puedes ver la variación de los datos, ¿dónde, de los dos casos que estamos simulando, observas mayor variabilidad?

4. Comenta con tus compañeros y respondan: ¿Qué observan en los resultados obtenidos?

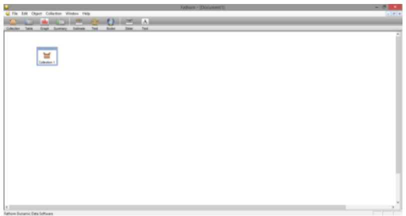
Experimento Aleatorio 2.
Contempla nuevamente la siguiente situación:
Un examen de opción múltiple consta de tres preguntas. Cada pregunta tiene tres opciones, una de las cuales es la correcta. Para acreditar el examen es necesario que se respondan al menos dos preguntas correctamente. Un estudiante responde cada pregunta eligiendo al azar una de las opciones. Harás lo mismo que en el caso anterior, pero ahora las respuestas posibles son a), b) y c).
Para resolver nuestra situación vamos a simularla con el software Fathom:

1. Da doble click en el ícono de Fathom
Fathom 2

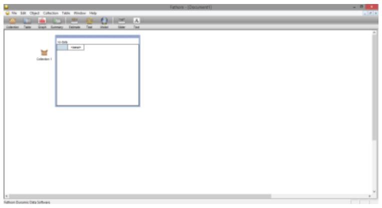
Observaras que se abre la siguiente ventana



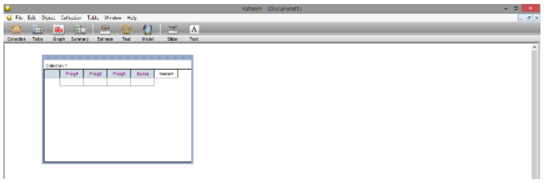
2. Da click en el ícono *Collection*, Collection y arrastra hasta la ventana.



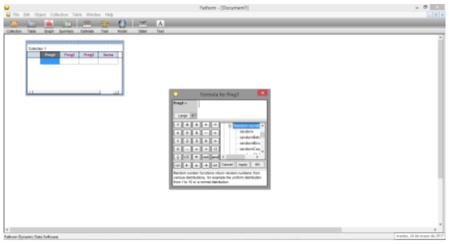
3. Da click en el ícono *Table*, Table y arrastra a la ventana



4. En la celda que dice <new>, de la tabla que apareció escribe *Preg1* y da un “enter”, en la celda de la derecha que aparece escribe *Preg2* y da “enter” nuevamente, en la siguiente escribe *Preg3*, con el respectivo “enter” y por último escribe *Suma*. Ahora ya todas las columnas con las que se trabajará tienen nombre, quedando de la siguiente forma:

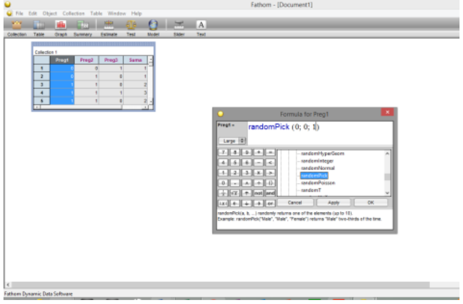


5. Selecciona con un click sobre la celda *Preg1* y da click derecho, aparece un menú del que seleccionaras “Edit Formula” y se desplegará una ventana como se muestra a continuación:



Antes de continuar es importante hacer notar lo siguiente, en el caso anterior teníamos dos opciones de respuesta, por lo que les asignábamos el valor uno para la correcta y el valor cero para la incorrecta, pero en este caso tenemos tres opciones de respuesta, de las cuales una sola es correcta, por lo tanto, dos de ellas son incorrectas, así que debemos contemplar esta condición en el siguiente paso.

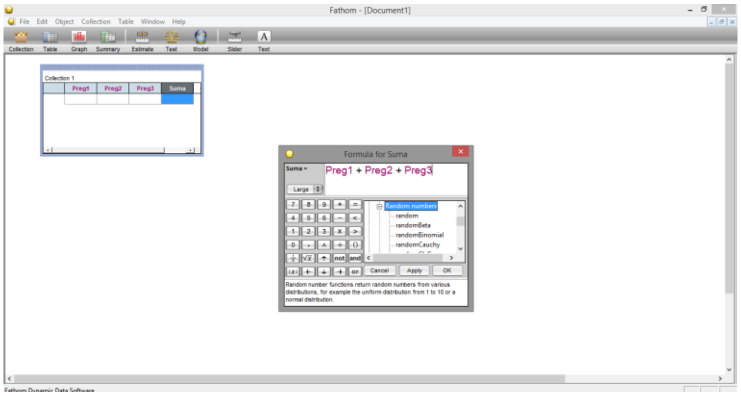
6. Del menú que aparece seleccionaras “*Functions*” → *“random Numbers”* → *“randomPick”* con doble click. Observaras que en la pantalla aparece la leyenda “random Pick ( )”, dentro del paréntesis colocaras **dos ceros y un uno** separados de un punto y coma como se muestra en la siguiente imagen:



Da un click en el recuadro “Apply” y después en “OK”

7. Posteriormente darás un click derecho nuevamente sobre *“Preg1”* y seleccionaras del menú que se despliega la opción *“CopyFormula”*. Da un click derecho sobre *“Preg2”* y selecciona *“Paste Formula”*, has lo mismo para *“Preg3”*.

8. En la celda llamada *“Suma”* darás click derecho y seleccionaras *“Edit Formula”,* en el recuadro donde aparece el cursor, debes escribir *“Preg1+Preg2+Preg3”,* como aparece a continuación:

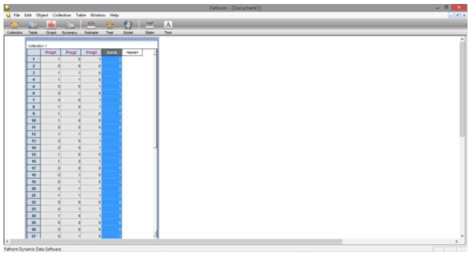


Suma = Preg1 + Preg2 + Preg3

Random number functions return random numbers from various distributions, for example the uniform distribution from 1 to 10 or a normal distribution.

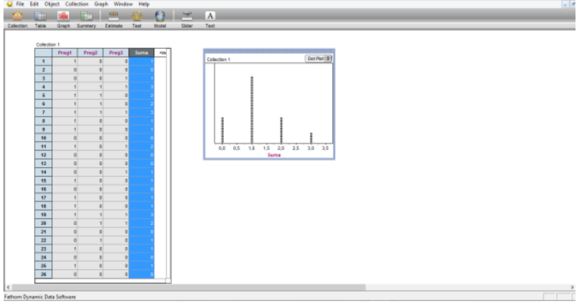
Da un click en el recuadro “Apply” y después en “OK”

9. A continuación, da click derecho y del menú que se despliega selecciona *“New Cases”*, en el recuadro que aparece escribe 50 y da enter. Ahora tienes una tabla parecida a la que construiste en la simulación con objetos físicos.

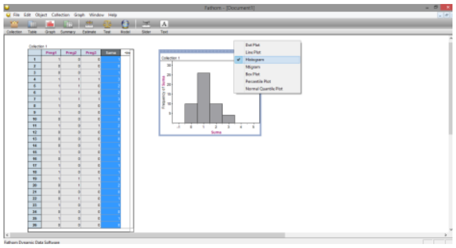


10. El siguiente paso es construir un histograma. Para ello, da click en el menú al icono *“Graph”* Graph y arrástralo hacia la ventana. Aparece un recuadro en el que se graficará.

11. Da click sobre la columna *“Suma”* y arrastra hasta la parte horizontal del recuadro que apareció cuando presionaste “Graph”. Se crea algo similar a la siguiente imagen:



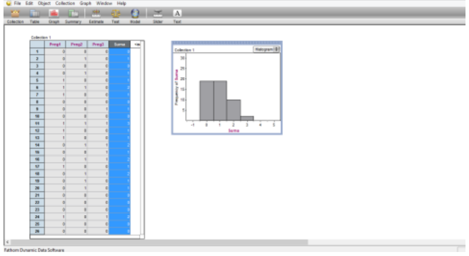
12. En la parte superior derecha del gráfico selecciona del menú desplegable la opción “Histogram”



Antes de continuar, responde a la siguiente pregunta y justifica tu respuesta:

- ¿Consideras que este proceso corresponde o es semejante al que se aplicó en la simulación física para responder el examen?

13. Presiona Ctrl+y y verás cómo cambian los datos de la muestra y el gráfico que la acompaña.



14. Selecciona con un click nuevamente el icono *"Collection"* Collection y arrástralo a la ventana, aparece un icono con el nombre "Collection2". Repite todos los pasos, ahora llama a las columnas distinto, por ejemplo: Preg_1, Pregunta1, P1, etc. La diferencia es que al llegar al paso 9 y selecciones *"New Cases"*, en el recuadro que aparece escribe 1000 y da enter.

15. En la parte vertical del gráfico es posible cambiar de escala dando click derecho, puedes pasar a frecuencias relativas y observar lo que ocurre cuantas veces lo desees.

Responde a las siguientes preguntas:

16. Sólo viendo el gráfico,
    a. ¿Cuántos alumnos contestaron incorrectamente todas las preguntas?
    b. ¿Cuántos alumnos contestaron correctamente solo una pregunta?
    c. ¿Cuántos alumnos contestaron correctamente exactamente dos preguntas?
    d. ¿Cuántos alumnos contestaron correctamente todas las preguntas?

17. Completa las siguientes tablas con la información para 50 casos en las de la izquierda y 1000 en las de la derecha:

Valores de x	**Frecuencia**
Suma	

Valores de x	**Frecuencia**
Suma	

Valores de x	**Frecuencia Relativa**
Suma	

Valores de x	**Frecuencia Relativa**
Suma	

18. Cuando presionas Ctrl+y, puedes ver la variación de los datos, ¿dónde, de los dos casos que estamos simulando, observas mayor variabilidad?

19. Comenta con tus compañeros y respondan: ¿Qué observan en los resultados obtenidos?

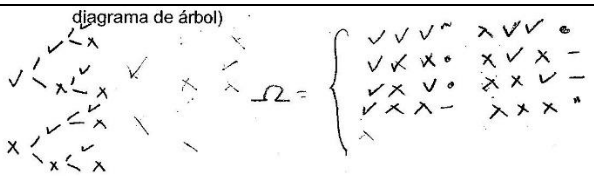
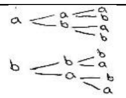
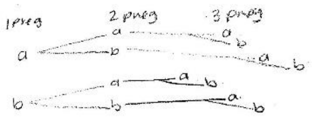
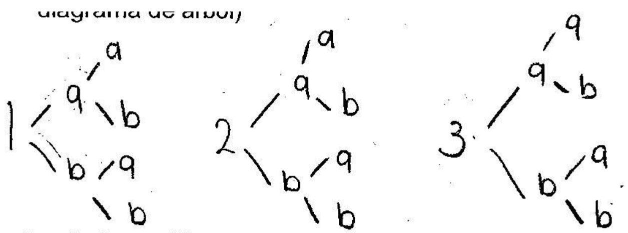
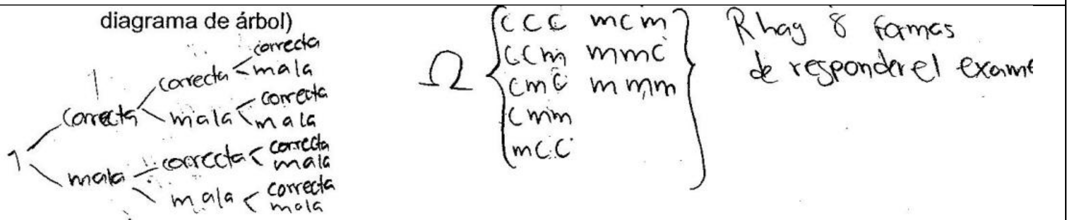
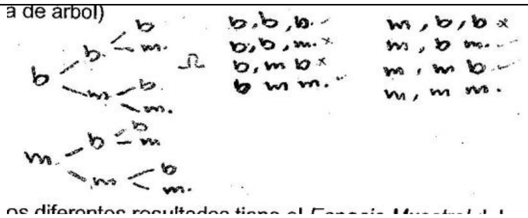
APENDICE D. Resultados obtenidos en el Cuestionario1 como Pretest.

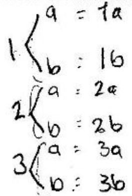
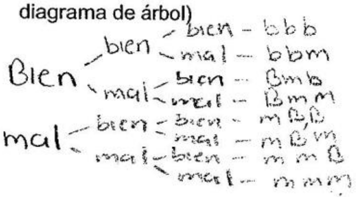
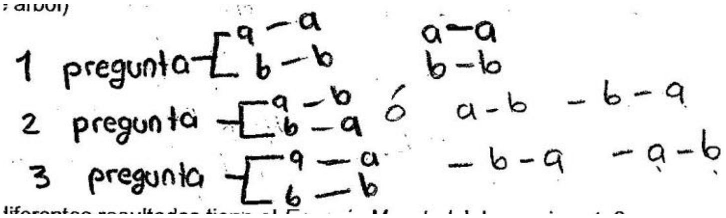
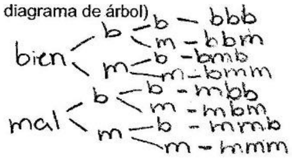
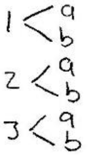
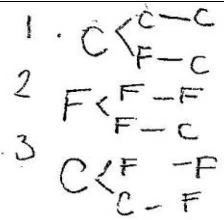
Experimento aleatorio 1. Un examen de opción múltiple consta de tres preguntas; cada pregunta tiene dos opciones de respuesta, una de las cuales es la correcta. Un estudiante responde cada pregunta eligiendo al azar una de las opciones. Se observan las opciones que elige

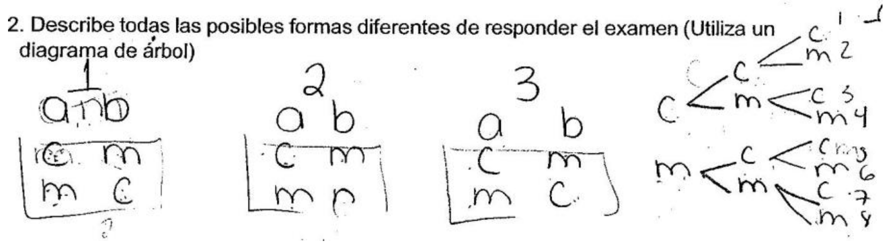
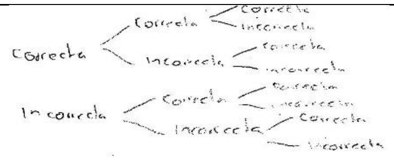
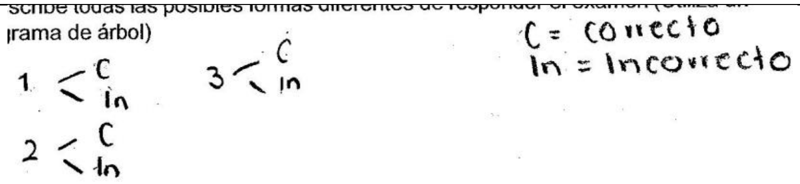
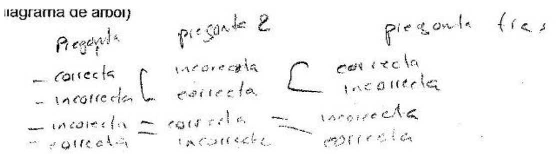
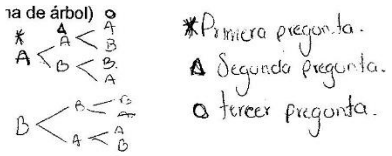
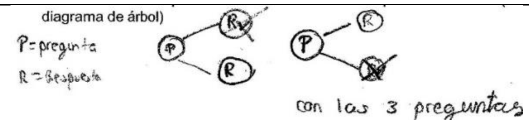
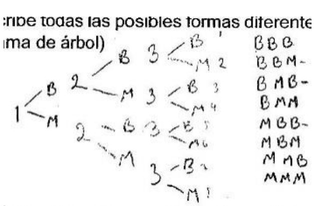
1. ¿Cuál es la probabilidad de responder correctamente una pregunta? Explica tu respuesta

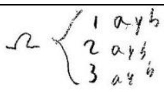
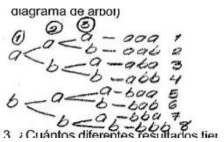
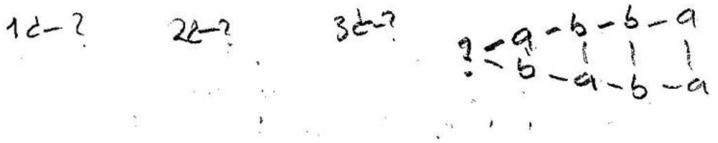
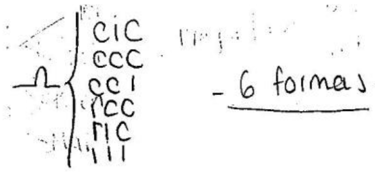
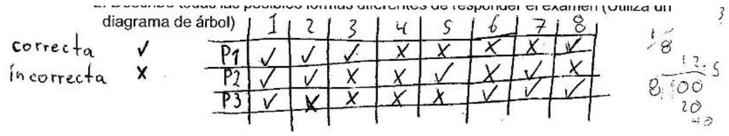
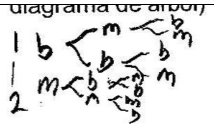
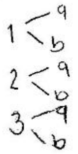
1.	1/3	Ya que son tres preguntas y cada una tiene solo una respuesta correcta
2.	½	La probabilidad de responder correctamente es ½. En el evento tenemos dos opciones contestadas correctamente o lo contario
3.	50%	Hay un 50% de que la respuesta sea correcta, porque del 100% de los dos, sólo elegirías una y hay 50% de que estés en lo correcto o 50% de que sea incorrecta.
4.	1/12	Porque tiene 12 probabilidades de que solo tenga una respuesta correcta
5.	½ ó 50%	Ya que cada pregunta tiene dos respuestas de las cuales solo 1 es correcta
6.	3/6	Porque son dos respuestas por 3 preguntas y de esas respuestas sólo 3 son buenas, o sea 3 respuestas de 6 pueden ser correctas.
7.	P = (½)	Probabilidad de respuesta correcta 50% Probabilidad de respuesta incorrecta 50% - Sólo existen estas dos posibilidades
8.	½	Ya que solamente existen dos opciones para la pregunta, la que es correcta y falsa
9.	1.5	P = $\frac{3 \text{ preguntas}}{2 \text{ respuestas}}$ = 1.5 Tiene 3 preguntas de las cuales una puede salir buena
10.	50%	Como tiene solo dos opciones el 100% se divide en 2, porque son las opciones, entonces hay 50% de que este mal y el otro 50% de que este bien
11.	1/3	
12.	3/6	
13.	½	Porque si tiene dos respuestas una es correcta y la otra no
14.	½ = o.5	Primero que nada, deben de contarse las preguntas que son, de ahí, se sacaría la probabilidad
15.	½	Ya que sólo es una correcta y el total es dos
16.	½ o 0.5	
17.	½	La probabilidad de que salga correctamente una pregunta es un medio porque tiene dos opciones cada pregunta, así que esa es la probabilidad
18.	50%	Tiene 50% de probabilidad ya que sólo puede ser correcto e incorrecto
19.	½ = 0.5	Ya que sólo hay dos opciones y una es la correcta
20.	½	Porque cada pregunta tiene dos opciones solamente, si se toma en cuenta solo una pregunta
21.	½	
22.	½	La probabilidad de que se responda bien una pregunta es de ½, porque tiene dos opciones de respuesta, de las cuales solo una es la correcta.
23.	½	Una elección entre dos opciones
24.	½	Probabilidad del evento = una es la correcta, dos son las opciones
25.	1/3	Porque son 3 preguntas en total que contiene el examen y sólo está preguntando por una
26.	50%	Ya que sólo hay dos posibles resultados significa que hay un 50% de probabilidad
27.	½ = 3/6	
28.		Sin Respuesta
29.	½	La probabilidad es de ½ y esto de acuerdo a que existen solo dos opciones, donde solo una es la correcta
30.	½	P(correcto) = 1 opción a elegir entre 2 opciones totales de una pregunta
31.	½	Su probabilidad es de ½, ya que solo da dos opciones, entonces puede que tenga la respuesta correcta
32.	½	Porque solo hay dos opciones, una es la correcta y por lo tanto la otra es incorrecta
33.	50 %	Sólo hay 2 opciones entonces es ½ -- 50 %
34.	P(r) = 1/2	Porque tienes en tu espacio muestral correcto e incorrecto

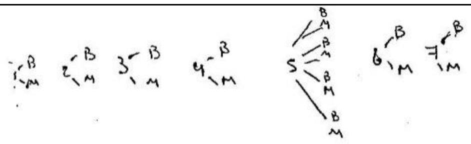
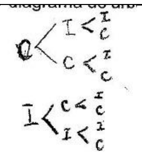
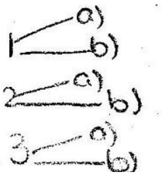
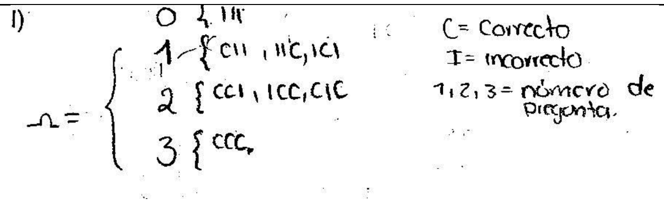
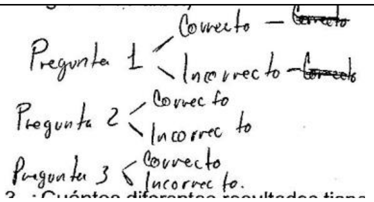
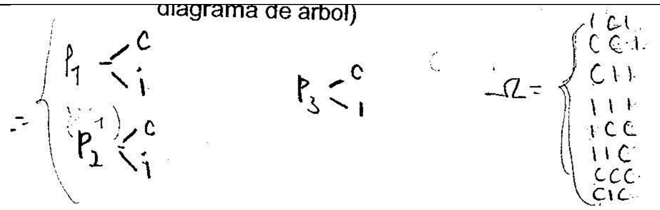
2. Describe todas las posibles formas diferentes de responder el examen (Utiliza un diagrama de árbol)

1.	 diagrama de árbol) Ω =
2.	 a b
3.	 1preg 2 preg 3 preg
4.	 diagrama de árbol) 1 2 3
5.	 diagrama de árbol) correcta mala Ω CCC mcm CCm mmC CmC mmm Cmm mCC R hay 8 formas de responder el exame
6.	 a de arbol) b m Ω

7.	osibles formas difere  resultados tiene el
8.	diagrama de árbol) 
9.	árbol) 
10.	diagrama de árbol) 
11.	
12.	b, b, b m, m, m b, m, b m, b, b b, b, m m, m, b b, m, m m, b, m
13.	diagrama de árbol) C = correcta F = Falsa $\Omega = [$ C, C, C C F C F F C C F F F, F, F F C F C C F F C C 

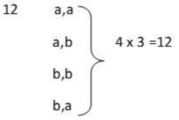
14.	 2. Describe todas las posibles formas diferentes de responder el examen (Utiliza un diagrama de árbol)
15.	
16.	 scribe todas las posibles formas diferentes de responder el examen (Utiliza un rama de árbol)
17.	 iagrama de árbol)
18.	 a de árbol)
19.	 diagrama de árbol)
20.	 ribe todas las posibles formas diferente ma de árbol)

21.	
22.	
23.	
24.	
25.	
26.	
27.	
28.	

29.	
30.	
31.	
32.	I) Ω = { 0 { III 1 { CII, IIC, ICI 2 { CCI, ICC, CIC 3 { CCC. C= Correcto I= incorrecto 1, 2, 3 = número de pregunta.
33.	Pregunta 1 < Correcto — ~~Correcto~~ Incorrecto — ~~Correcto~~ Pregunta 2 < Correcto Incorrecto Pregunta 3 < Correcto Incorrecto.
34.	 Ω = { ICI CCI. CII. III ICC IIC CCC. CIC.

3. ¿Cuántos diferentes resultados tiene el Espacio Muestral del experimento?

1.	8 resultados distintos
2.	El experimento tiene 8 resultados distintos
3.	8 resultados diferentes aaa baa aab bab aba bba abb bbb
4.	Ω = { ab aa ba bb

<table>
<tr><td>5.</td><td>8 diferentes resultados</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>8 diferentes</td></tr>
<tr><td>7.</td><td>6 resultados diferentes</td></tr>
<tr><td>8.</td><td>8 resultados</td></tr>
<tr><td>9.</td><td>Solo tiene 12 espacios muestrales diferentes</td></tr>
<tr><td>10.</td><td>8 diferentes resultados, porque cambian de posición los bien o mal</td></tr>
<tr><td>11.</td><td>8 Ω = aaa bab baa
aab bba aba
abb bbb</td></tr>
<tr><td>12.</td><td>8</td></tr>
<tr><td>13.</td><td>8 diferentes</td></tr>
<tr><td>14.</td><td>Ω = 8</td></tr>
<tr><td>15.</td><td>8 diferentes resultados</td></tr>
<tr><td>16.</td><td>8</td></tr>
<tr><td>17.</td><td>Tiene 12 diferentes resultados</td></tr>
<tr><td>18.</td><td>Tiene 6 resultados equiprobables</td></tr>
<tr><td>19.</td><td>6</td></tr>
<tr><td>20.</td><td>8</td></tr>
<tr><td>21.</td><td>6</td></tr>
<tr><td>22.</td><td>Muestra 8 distintos resultados</td></tr>
<tr><td>23.</td><td>12
a,a
a,b
b,b
b,a
4 x 3 =12</td></tr>
<tr><td>24.</td><td>6 posibles respuestas porque cada pregunta tiene dos posibles respuestas</td></tr>
<tr><td>25.</td><td>6 distintas formas, por cada pregunta. Ya que puedes responder bien o mal el examen</td></tr>
<tr><td>26.</td><td>24</td></tr>
<tr><td>27.</td><td><table><tr><td>Ω =</td><td>b
m
b</td><td>m
b
b</td><td>b
b
m</td><td>b
b
b</td><td>m
m
m</td><td>m
m
b</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>28.</td><td>46 resultados</td></tr>
<tr><td>29.</td><td>Ω = 20</td></tr>
<tr><td>30.</td><td>8 resultados diferentes</td></tr>
<tr><td>31.</td><td>6</td></tr>
<tr><td>32.</td><td>8 resultados posibles</td></tr>
<tr><td>33.</td><td>4<table><tr><td>1) Corr
Inc</td><td>2) Inc
Inc</td><td>3) Corr
Corr</td><td>4) Corr
Inc</td><td>5) Inc
Corr</td><td>6) Inc
Inc</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>34.</td><td>8 distintos valores</td></tr>
</table>

4. Considera la variable X = “El número de respuestas correctas”. Describe todos los valores que puede tomar esta variable.

1	X = 0, 1, 2, 3
2.	La variable puede tomar los siguientes valores cero, uno, dos, tres, cuatro
3.	x = 3, x = 2, x = 1, x = 0 puede que tengas 3 respuestas correctas, o 2, o1 o ninguna correcta
4.	x = 1. 2. 3. mb bm bb bb bb bm bm mb mb
5.	X = 12
6.	X = 0 No tiene respuestas correctas 1 sólo tiene 1 correcta 2 tiene 2 correctas y una mala 3 tiene todas correctas y ninguna mala
7.	X = 0, 1, 2, 3
8.	X → 0 – 1 – 2 – 3

<table>
<tr><td>9.</td><td>x = 0 x = 2
x = 1 x = 3</td></tr>
<tr><td>10.</td><td>X = 3, 2, 1, 0</td></tr>
<tr><td>11.</td><td>P(A) = 0/3
P(B) = 1/3
P(C) = 2/3
P(D) = 3/3</td></tr>
<tr><td>12.</td><td>x_1, x_2, x_3, x_4</td></tr>
<tr><td>13.</td><td>X = [1/8, ¼, 3/8, ½, 5/8, ¾, 7/8, 1] = 8 valores</td></tr>
<tr><td>14.</td><td>X = 6 /12</td></tr>
<tr><td>15.</td><td>x 0 x 1 x 2 x 3</td></tr>
<tr><td>16.</td><td><table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td>in in in</td><td>in C in
in in C
c in in</td><td>c c in
c in c
in c c</td><td>c c c</td></tr>
<tr><td></td><td>1/8</td><td>3/8</td><td>3/8</td><td>1/8</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>17.</td><td>X = 12</td></tr>
<tr><td>18.</td><td>Puede tomar los valores: 0, 1, 2 y 3
Ya que sólo son tres preguntas, y por lo tanto es posible que ninguna sea correcta, o sólo 1 o 2 o las 3 sean correctas</td></tr>
<tr><td>19.</td><td>0, 1, 2, 3</td></tr>
<tr><td>20.</td><td><table>
<tr><td>X</td><td>3B</td><td>2B</td><td>1B</td></tr>
<tr><td></td><td>1/8</td><td>3/8</td><td>3/8</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>21</td><td>X_1 a y b
X_2 a y b
X_3 a y b</td></tr>
<tr><td>22.</td><td><table>
<tr><td>X</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>P(X)</td><td>I I I
I I I</td><td>C I I
I C I</td><td>CC I
C I C</td><td>CCC
CCC</td></tr>
</table>
C = correctas
I = incorrectas</td></tr>
<tr><td>23.</td><td><table>
<tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">P(x)</td><td>P (a, b)
P (a, a)
P (b, a)
P (b, b)</td><td>P (a, b)
P (a, a)
P (b, a)
P (b, b)</td><td>P (a, b)
P (a, a)
P (b, a)
P (b, b)</td></tr>
<tr><td>1/8</td><td>1/8</td><td>1/8</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>24.</td><td>X = 3/3
X_1 = 1/3
X_2 = 2/3
X_3 = 3/3</td></tr>
<tr><td>25.</td><td><table>
<tr><td></td><td>P_0</td><td>P_1</td><td>P_2</td><td>P_3</td></tr>
<tr><td>X</td><td>1/8</td><td>3/8</td><td>3/8</td><td>1/8</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>26.</td><td>0 = Cuando todas las respuestas son incorrectas
1 = Cuando una respuesta es correcta
2 = Cuando dos respuestas son correctas
3 = Cuando tres respuestas son correctas</td></tr>
<tr><td>27.</td><td><table>
<tr><td>X</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>P(X)</td><td>bbb</td><td>bmb
mbb
bbm</td><td>mmb</td><td>mmm</td></tr>
<tr><td></td><td>1/6</td><td>3/6</td><td>3/6</td><td>1/6</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>28.</td><td>Equis sería 0, 1, 2, 3 que sola una puede estar correcta, ya que la otra mitad es incorrecta</td></tr>
<tr><td>29.</td><td>P(X) = 10/20</td></tr>
<tr><td>30.</td><td><table>
<tr><td></td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>P(X)</td><td>I I I</td><td>I C I
C I I
I I C</td><td>I C C
C I C
I C C</td><td>C C C</td></tr>
<tr><td></td><td>1/8</td><td>3/8</td><td>3/8</td><td>1/8</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

31.	X = 1, X = 2, X = 3, X = 0				
32.	X	1	2	3	0
		C I I I I C I C I	C C I I C C C I C	C C C	I I I
		3/8	3/8	1/8	1/8
33.	X = 3, 2, 1 ó 0				
34.	X	0	1	2	3
		1/8	3/8	3/8	1/8

5. **Haz lo que se pide:**
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que la variable tome el valor 0?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que tome el valor 1?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que tome el valor 2?
   d) ¿Cuál es la probabilidad de que tome el valor 3

1.	a) P(0) =1/8 b) P(1) = 3/8 c) P(2) = 3/8 d) P(3) = 1/8
2.	a) ¼, b) ¼, c) ¼, d) ¼ Es equiprobable
3.	a) ¼, b) ¼, c) ¼, d) ¼
4.	a) 0, b) 0.16, c) 0.33, d) 0.5
5.	a) 1/8, b) 3/8, c) 3/8, d) 1/8
6.	a) 1/8, b) 3/8, c) 3/8, d) 1/8
7.	a) P= (¼), b) P= (¼), c) P= (¼), d) P= (¼)
8.	a) 1/8, b) 3/8, c) 3/8, d) 1/8
9.	a) 3/0, b) 1/3, c) 2/3, d) 3/3
10.	a) 1/8, porque solo hay 1 y 8 porque son los casos totales b) 3/8, c) 3/8, d) 1/8
11.	Sin Respuesta
12.	a) 1/8, b) 3/8, c) 3/8, d) 1/8
13.	a) 1/8, b) 3/8, c) 3/8, d) 1/8
14.	a) 1/12 = 0.08, b) 2/12 = 0.16, c) 2/12 = 0.16, d) 1/12 = 0.08
15.	a) 3/14, b) 3/14, c) 6/14, d) 1/14
16.	a) 1/8, b) 3/8, c) 3/8, d) 1/8
17.	Sin respuesta
18.	a) 3/6 1/8 = 0.125, b) 3/8 = 0.375, c) 3/8 = 0.375, d) 1/8 = 0.125
19.	a) 1/4, b) 1/4, c) 1/4, d) 1/4
20.	a) 1/8, b) 3/8, c) 3/8, d) 1/8
21.	a) b) 1/3, c) 2/3, d) 3/3
22.	a) 0/3, b) 2/3, c) 4/3, d) 6/3
23.	a)1/8 b) 1/8, c) 1/8, d) 1/8
24.	a) b) 1/3, c) 2/3, d) 3/3
25.	a)1/8 = 0.125 b) 3/8 = 0.375, c) 1/8 = 0.375, d) 1/8 = 0.125
26.	a)1/8 = 12.5% b) 3/8 = 37.5%, c) 1/8 = 37,5%, d) 1/8 = 12.5%
27.	a)1/6 b) 1/6, c) 3/6, d) 1/6
28.	a) P(0) = 0/6 = 0 b) P(1) = 1/6 = 0.16 c) P(2) = 2/6 = 0.33 d) P(3) = 3/6 = 0.5
29.	a) P(0) = 10/20 b) P(b) = 1/20 c) P(c) = 6/20 d) P(d) = 3/20
30.	a)1/8 b) 3/8, c) 3/8, d) 1/8
31.	a) P(0) = 0/6 = 0 b) P(1) = 1/6 = 0.16 c) P(2) = 2/6 = 0.33 d) P(3) = 3/6 = 0.5
32.	a)1/8 b) 2/8, c) 3/8, d) 1/8

33.	a)1/4 b) 1/4, c) 1/4, d) 1/4
34.	a)1/8 b) 3/8, c) 3/8, d) 1/8

6. Con base en lo anterior, completa la siguiente tabla:

1.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	1/8	3/8	3/8	1/8	1

2.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	¼	¼	¼	¼	1

3.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	¼	¼	¼	¼	4/4= 1

4.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	0	0.16	0.33	0.5	0.99

5.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	0.125	0.375	0.375	0.125	1

6.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	1/8	3/8	3/8	1/8	1

7.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	¼	¼	¼	¼	4/4

8.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	1/8=0.125	3/8=0.375	3/8=0.375	1/8=0.125	8/8=1

9.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	3/0	1/3	2/3	3/3	5

10.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	1/8	3/8	3/8	1/8	8/8=1

11.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad					

12.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	1/8	3/8	3/8	1/8	1

13.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	0.1	0.4	0.4	0.2	1

14.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	0.08	0.16	0.16	0.08	0.48

15.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	3/14	3/14	6/14	1/14	.92

16.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	0.125	0.375	0.375	0.125	1

17.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	1/20	3/10	6/10	9/10	10

18.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	0.125	0.375	0.375	0.125	1

19.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	1/4	1/4	1/4	1/4	1

20.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	1/8	3/8	3/8	1/8	1

21.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	0	1/3	2/3	3/3	

22.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	0/3	2/3	4/3	6/3	12/3

23.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	1/8	1/8	1/8	1/8	1

24.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	0	1/3	2/3	3/3	

25.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	1/8	3/8	3/8	1/8	1

26.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	1/8	3/8	3/8	1/8	1

27.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	1/6	1/6	3/6	1/6	1

28.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	0	0.16	0.33	0.5	0.99

29.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	10/20	1/20	6/20	3/20	20/20 = 1

30.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	1/8	3/8	3/8	3/8	1

31.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	0	0.16	0.33	0.5	0.99

32.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	1/8	2/8	3/8	1/8	1

33.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	1	1	1	1	4

34.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	1/8	3/8	3/8	1/8	1

7. Si el estudiante acredita el examen cuando responde al menos dos preguntas correctamente ¿Cuál es la probabilidad de que pase el examen?

1.	4/8
2.	La probabilidad de que pase ¼
3.	2/4, porque sumas la probabilidad de que tenga 2 correctas, más la probabilidad de que tenga 3 correctas
4.	La probabilidad es de 0.33

5.	¼
6.	3/8
7.	P = (2/3)
8.	2/3 ya que está respondiendo más de la mitad de preguntas por ende las aprueba
9.	2/3
10.	2/3 porque necesita al menos 2 preguntas correctas de 3 para pasar el examen
11.	66 %
12.	3/8
13.	2/3 = 0.66
14.	2/3
15.	6/14
16.	3/8
17.	7/10
18.	2/3 = 0.66666 o 66.66%
19.	2/3 = 0.66
20.	3/8
21.	Sin Respuesta
22.	2/3, porque tiene la posibilidad de pasar con 2 preguntas de 3
23.	P(2)) 2/3
24.	2/3 = más de 50 % porque son 3 preguntas de las cuales 2 están bien
25.	½
26.	50 %
27.	50 % de probabilidad de aprobar
28.	3 – 100 2 – 66.6
29.	P(2) + P(3) = 6/20 + 3/20 = 9/20
30.	P(2) = 2/8 2 correctas entre 8 casos posibles
31.	2/3 = 33%
32.	4/8 = 50%
33.	80 %
34.	4/7

8. Si 1000 estudiantes respondieran el examen y todos ellos respondieran al azar
a) ¿Cuántos acertarían cero preguntas? Explica tu respuesta
b) ¿Cuántos acertarían en una sola pregunta? Explica tu respuesta
c) ¿Cuántos acertarían en dos preguntas? Explica tu respuesta
d) ¿Cuántos acertaría en 3 preguntas? Explica tu respuesta

1.	a) 125 personas, ya que es una octava parte de 1000 b) 375 personas c) 375 personas d) 125 personas
2.	a) Un cuarto del total, o sea 250 estudiantes aproximadamente acertarían cero preguntas, porque las variables son equiprobables

	b) ¼ c) ¼ d) ¼
3.	Sin Respuesta
4.	a) 0, b) 0.05, c) 0.025, d) 0.016
5.	a) 125 estudiantes b) 375 estudiantes c) 375 estudiantes d) 125 estudiantes
6.	a) 125, b) 375, c) 375, d) 125
7.	a) P= (250) por la probabilidad ¼ = 250/1000 b) P= (250) por la probabilidad ¼ = 250/1000 c) P= (250) por la probabilidad ¼ = 250/1000 d) P= (250) por la probabilidad ¼ = 250/1000 Se tiene las mismas probabilidades
8.	a) 125 sólo multiplicaría por los 1000 estudiantes a los que se le aplica el examen b) 375 se multiplica por el número de estudiantes c) 375 se multiplica por 1000 estudiantes d) 125 se multiplica por 1000 estudiantes
9.	a) 1000/0 b) 1000/1 c) 1000/2 d) 1000/3
10.	a) 125 porque la probabilidad de que un estudiante acierte 0 preguntas es 0.125 y eso por 1000 que son los estudiantes da 125 b) 375 lo mismo de arriba solo que ahora la probabilidad es de 0.375 c) 375, 0.375 = P(acertar 2 preguntas) x 1000 estudiantes da 375 d) 125 0.125 = P(acertar 3 preguntas) x 1000 estudiantes da 125
11.	Sin Respuesta
12.	a)1/8, b) 3/8, c)3/8, d) 1/8
13.	a) 200 porque se multiplica P(0) x 1000 b) 400 porque se multiplica (0.4) x 1000 c) 400 porque se multiplica P(2) x 1000 d) 120 porque se multiplica P(0.2) x 100
14.	a) 80, b) 160, c) 160, d) 80
15.	Sin respuesta
16.	a) 125 estudiantes, se multiplica 1000 por cada probabilidad, b) 375, c)375, d) 125
17.	a) 250, b) 500, c) ~~750~~, d) 250
18.	a) 1.25 x 10^{-4}, es el promedio al dividirlo entre 1000, b) 3,75 x 10^{-4}, se divide entre 1000
19.	a) 250 ya que es ¼ b) 250 ya que es ¼ c) 250 ya que es ¼ d) 250 ya que es ¼
20.	a) 125 de acuerdo a la tabla anterior ese es el valor de ese número de respuestas correctas, siendo al azar el valor sería aproximado. b) 375 aproximadamente, igual que la explicación de arriba c) 375 aproximadamente, igual que la primera explicación d) 125 aproximadamente, igual que la primera explicación. A la larga, se supone se repetiría el patrón, aunque es al azar y por eso es aproximadamente.
21.	a) 0/1000, b), c) y d) Sin respuesta
22.	a) 250, b) 250, c)250, d) 250
23.	a) 1000/8 = 125 Porque de los mil ninguno dio entre las 8 opciones. b) 1000/4 = 250 Porque no dieron entre las 4 opciones que restaban c) 1000/2 = 500 Porque fallaron en la última pregunta d) 1000/8 = 125 Porque le dieron a las 4 correctas
24.	Sin Respuesta
25.	a)0/1000, b) 1/1000, c)2/100, d) 3/1000
26.	a) Serían 125 ya que es 1/8 de los estudiantes b) 375 ya que es 3/8 de los estudiantes c) 375 ya que es 3/8 de los estudiantes d) 125 ya que es 1/8 de los estudiantes
27.	a) 166.66 tienen la misma probabilidad que en otros casos b) 166.66 tienen la misma probabilidad que en otros casos

	c) 500 tienen la misma probabilidad que en otros casos d) 166.66 tienen la misma probabilidad que en otros casos
28.	$a)\ P\ (1000) = \left(\frac{1000}{1}\right)\left(\frac{0}{4}\right)$ $b)\qquad\qquad \left(\frac{1000}{1}\right)\left(\frac{1}{4}\right)$
29.	a) P(0) = 500/1000 el resultado en 0 es el que más se podría repetir ~~b) P(1) = 300/1000 aproximadamente 300 acertarían al menos uno de acuerdo al resultado~~ P(1) = 50/1000 c) P(2) = 300/1000 aproximadamente acertarían al menos 2 respuestas por los resultados d) P(3) = 140/1000 de acuerdo a una probabilidad aleatoria es el porcentaje que tendría 3
30.	a) P(0) = 100 correctas entre 100(8) casos posibles = 100/800 = 1/8 b) P(1) = 300 (1) correctas entre 100(8) casos posibles = 300/800 = 3/8 c) P(2) = 300 (2) correctas entre 100(8) casos posibles = 300/800 = 3/8 d) P(3) = 100 (3) correctas entre 100(8) casos posibles = 100/800 = 1/8
31.	a) Ninguno porque la probabilidad de tener nada bien es nula b), c) y d) Sin Respuesta
32.	a) 1/8(1000) = 125 b) 3/8(1000) = 375 c) 3/8(1000) = 375 d) 1/8(1000) = 125
33.	a) 10 %, b) 40 %, c)40 %, d) 10 %
34.	a) 1/8(1000), porque equivale a la probabilidad de uno de acierto cero b) 3/8(1000), igual que el anterior c) 3/8(1000), igual que el anterior d) 1/8(1000), igual que el anterior

Con las respuestas llena la siguiente tabla:

1.

Valores de x	Frecuencias
0	12.5 %
1	37.5 %
2	37.5 %
3	12.5 %
Suma	100 %

2.

Valores de x	Frecuencias
0	250
1	250
2	250
3	250
Suma	1000

3. Sin Respuesta

4.

Valores de x	Frecuencias
0	0
1	0.05
2	0.025
3	0.016
Suma	0.091

5.

Valores de x	Frecuencias

0	125
1	375
2	375
3	125
Suma	1000

6.

Valores de x	Frecuencias
0	125
1	375
2	375
3	125
Suma	1000

7.

Valores de x	Frecuencias
0	125
1	125
2	125
3	125
Suma	1000

8.

Valores de x	Frecuencias
0	125
1	375
2	375
3	125
Suma	1000

9.

Valores de x	Frecuencias
0	1
1	1
2	1
3	1
Suma	4

10.

Valores de x	Frecuencias
0	124
1	375
2	375
3	125
Suma	1000

11. Sin Respuesta

12.

Valores de x	Frecuencias
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8
Suma	1

13.

Valores de x	**Frecuencias**
0	0.1
1	0.4
2	0.4
3	0.1
Suma	1

14.

Valores de x	**Frecuencias**
0	80
1	160
2	160
3	80
Suma	480

15. Sin respuesta

16.

Valores de x	**Frecuencias**
0	125
1	375
2	375
3	125
Suma	1000

17. Sin Respuesta

18.

Valores de x	**Frecuencias**
1.25×10^{-4}	
Suma	

19.

Valores de x	**Frecuencias**
250	25%
250	25%
250	25%
250	25%
Suma	100%

20.

Valores de x	**Frecuencias**
0	125
1	375
2	375
3	125
Suma	1000

21.

Valores de x	**Frecuencias**
0	0
1	1
2	2

3	3
Suma	

22.

Valores de x	Frecuencias
0	250
1	250
2	250
3	250
Suma	1000

23.

Valores de x	Frecuencias
0	12.5
1	37.5
2	37.5
3	12.5
Suma	100

24. Sin Respuesta

25. Sin Respuesta

26.

Valores de x	Frecuencias
0	125
1	375
2	375
3	125
Suma	1000

27.

Valores de x	Frecuencias
0	16.6 %
1	16.6 %
2	50 %
3	16. 6%
Suma	99.8 %

28.

Valores de x	Frecuencias
0	0
1	0.16
2	0.33
3	0.5
Suma	0.99

29.

Valores de x	Frecuencias
0	0.5
1	0.05
2	0.03
3	0.15
Suma	1

30**.**

Valores de x	Frecuencias
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8
Suma	1

31. Sin Respuesta

32.

Valores de x	Frecuencias
0	125
1	375
2	375
3	125
Suma	1000

33.

Valores de x	Frecuencias
0	10 %
1	40 %
2	40 %
3	10 %
Suma	100 %

34.

Valores de x	Frecuencias
0	125
1	375
2	375
3	125
Suma	1000

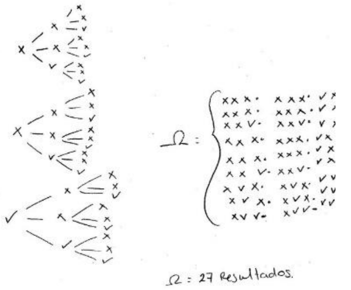
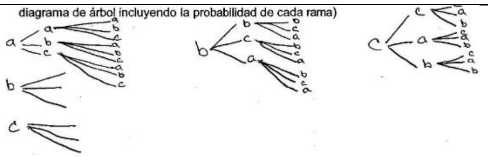
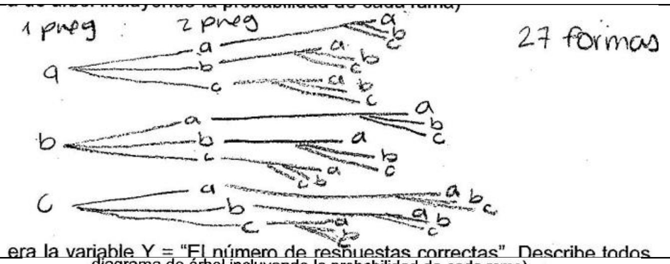
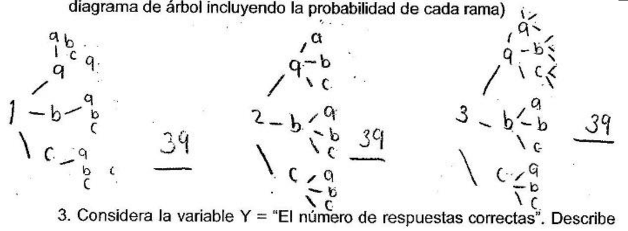
Experimento aleatorio 2. Un examen de opción múltiple consta de tres preguntas. Cada pregunta tiene tres opciones una de las cuales es la correcta. Un estudiante responde cada pregunta eligiendo al azar una de las opciones.

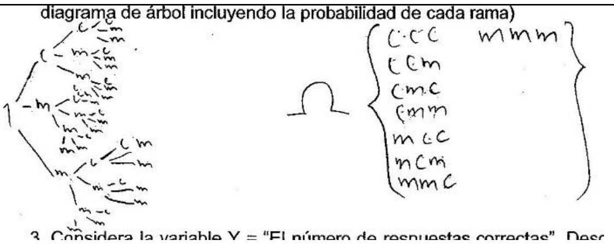
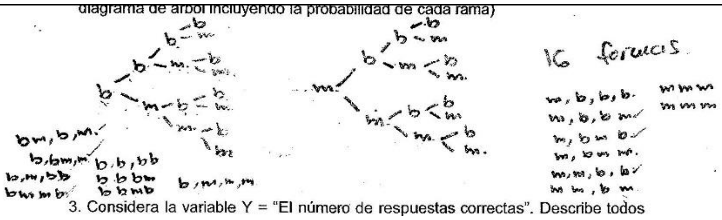
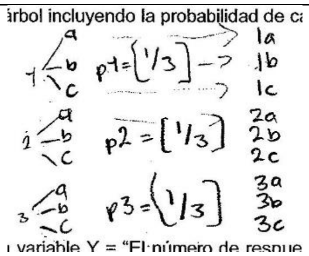
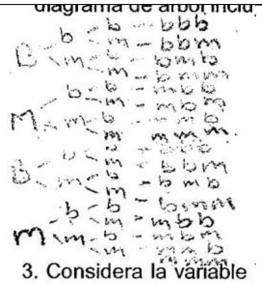
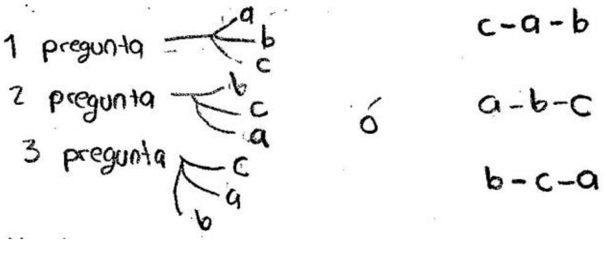
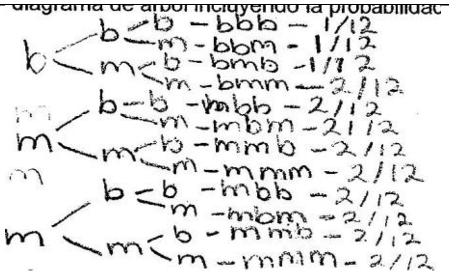
1. ¿Cuál es la probabilidad de responder correctamente una pregunta? Explica tu respuesta

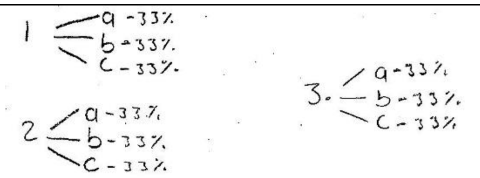
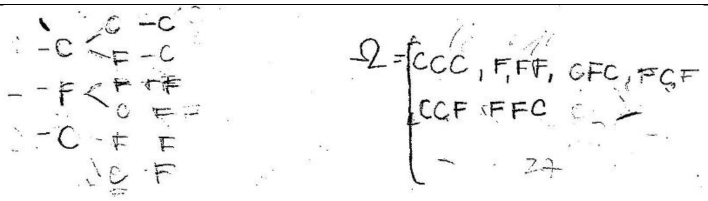
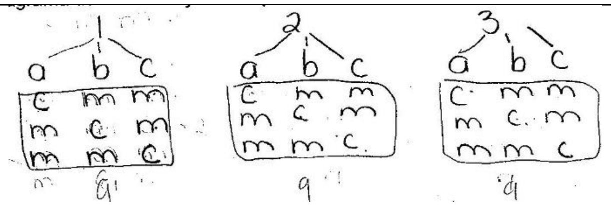
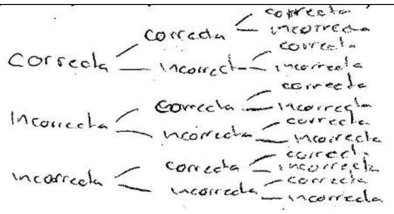
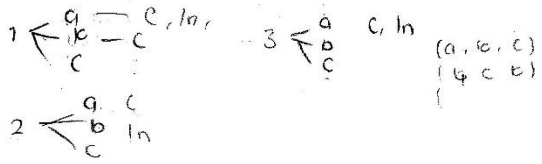
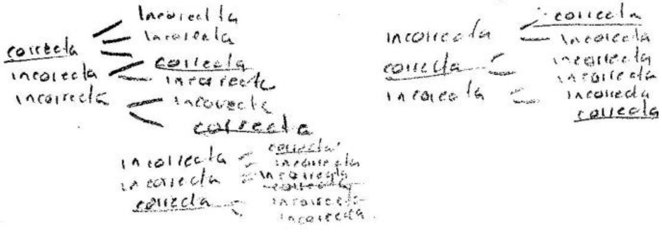
1.	1/3	Ya que son 3 preguntas
2.	1/3	La probabilidad de acertar es de 1/3, debido a que tenemos sólo un caso favorable entre tres posibles presentes en el estudio
3.	33%	Hay un 33% de que tenga una respuesta correcta porque de 100% cada pregunta valdría 33…% y esa es la probabilidad que tiene de acertar
4.	1/39	
5.	1/3= 0.33	De cada pregunta hay 3 respuestas y sólo una es la correcta
6.	3/9= 0.33	Solo puede haber una respuesta correcta de cada pregunta por lo tanto sólo 3 correctas de 9 opciones
7.	P=(1/3)	Solo una respuesta de las tres opciones es la correcta
8.	1/3	Ya que sólo existe una respuesta correcta de 3 posibilidades
9.	3/3	P = 3 preguntas = 1 3 respuestas Tiene 3 preguntas y 3 respuestas de las cuales una es correcta
10.	33.3%	Es lo mismo que el primer ejercicio, si dividimos 100% entre 3 que son las opciones que tiene el estudiante obtenemos un 33.3%
11.	33%	
12.	3/9	
13.	1/3	Porque en tres preguntas una es correcta
14.	1/3 = 0.33	
15.	1/3	Porque son tres posibilidades y solo una es la correcta
16.	1/3=0.33	

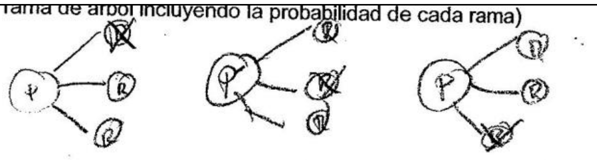
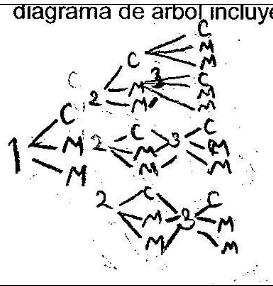
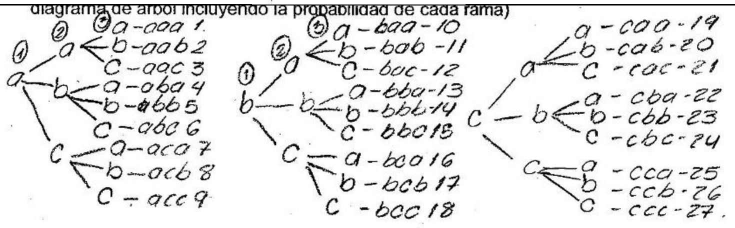
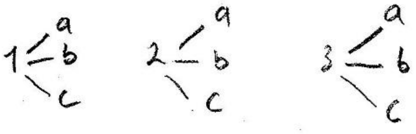
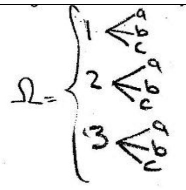
17.	1/3	La probabilidad de que responda correctamente una pregunta de tres opciones es 1/3
18.	1/3=0.333	Solo hay una correcta de tres posibles respuestas
19.	1/3=0.333	Ya que sólo hay 3 opciones
20.	1/3	Sólo es una pregunta y cada una tiene 3 opciones, entonces de responder correctamente es 1/3
21.	1/3	
22.	1/3	Porque hay tres respuestas y solo una es la correcta
23.	1/3	Una pregunta tres opciones
24.	1/3	Probabilidad del evento= Una es la correcta entre 3 opciones posibles
25.	1/3	Porque son tres preguntas y te esta preguntando ¿cuál es la probabilidad de responder una bien?
26.	33.3 %	Ya que es 1/3
27.	1/3	9 posibilidades 3/9 = 1/3
28.		Sin Respuesta
29.	9/18	P(B) = 9/18
30.	1/3	P(correcto) = 1 correcta / 3 opciones posibles
31.		La probabilidad es muy alta, ya que es muy sencillo tener una buena
32.	1/3	Porque hay una correcta de 3 probabilidades
33.	1/3	El número de casos posibles es 3, que son los incisos, y el número de probabilidad de que sea correcta es 1, pues sólo hay una respuesta correcta
34.	1/3	Porque de 3 opciones sólo una es correcta

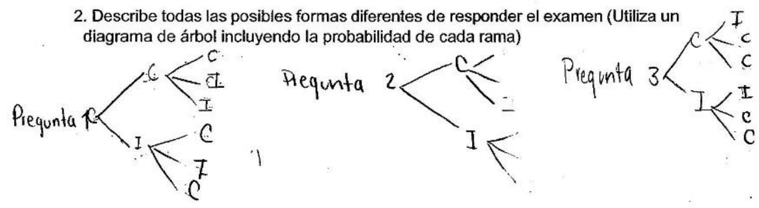
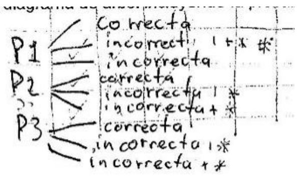
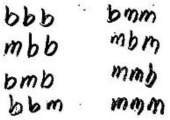
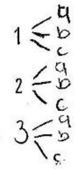
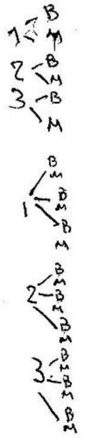
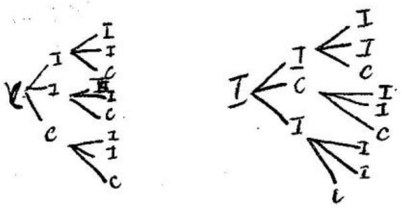
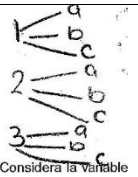
2. Describe todas las posibles formas diferentes de responder el examen (Utiliza un diagrama de árbol incluyendo la probabilidad en cada rama)

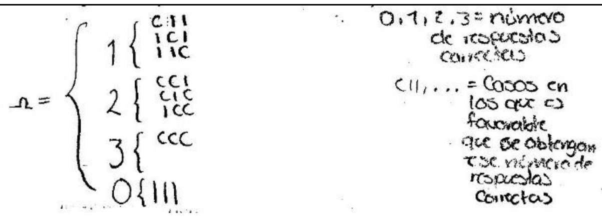
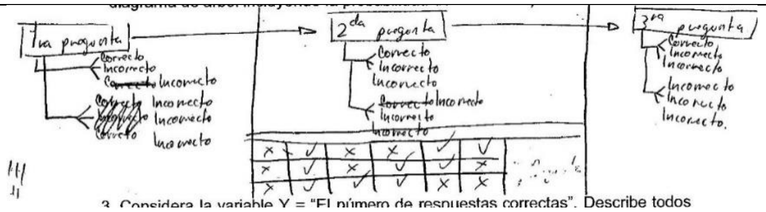
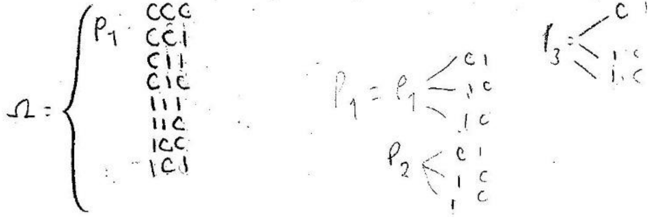
1.	
2.	
3.	
4.	

5.	diagrama de árbol incluyendo la probabilidad de cada rama) Ω ccc mmm ccm cmc cmm mcc mcm mmc 3. Considera la variable Y = "El número de respuestas correctas". Desc
6.	diagrama de arbol incluyendo la probabilidad de cada rama) 16 formas 3. Considera la variable Y = "El número de respuestas correctas". Describe todos
7.	árbol incluyendo la probabilidad de c p1=[1/3] 1a 1b 1c p2 = [1/3] 2a 2b 2c p3=(1/3] 3a 3b 3c variable Y = "El número de respue
8.	diagrama de arbol inclu bbb bbm bmb bmm mbb mbm mmb mmm 3. Considera la variable
9.	1 pregunta 2 pregunta 3 pregunta ó c-a-b a-b-c b-c-a
10.	diagrama de arbol incluyendo la probabilidad bbb - 1/12 bbm - 1/12 bmb - 1/12 bmm - 2/12 mbb - 2/12 mbm - 2/12 mmb - 2/12 mmm - 2/12 mbb - 2/12 mbm - 2/12 mmb - 2/12 mmm - 2/12

11.	
12.	b – m – b 0.3 m – b – b 0.3 m – b – m 0.3 m – m – b 0.3 b – m – m 0.3 m – b – m 0.3
13.	
14.	
15.	
16.	
17.	

18.	 Ω {A,A,A | AAB | ABB | BBB | BAC, BCC, CCC, CBA, CBB, BAA, ACB, ABC, ACC, BBC, BBA, BAB, CCC, CCB, CCA,
19.	rama de arbol incluyendo la probabilidad de cada rama)  con los 3 preguntas
20.	diagrama de arbol incluyendo la probabilidad de cada rama)  CCC CCM 1 CCM 2 CMC 3 1 CMM 2 CMM CMC 4 3 CMM 4 C.MM MCC 5 5 MCM 6 MCM MMM MMM MMM MMM MMM MMM MCC 6 7 MCM 8 MCM MMM MMM MMM MMM MMM MMM
21.	Ω = {1 a,b,c 2 a,b,c 3 a,b,c
22.	diagrama de arbol incluyendo la probabilidad de cada rama) 
23.	
24.	

25.	2. Describe todas las posibles formas diferentes de responder el examen (Utiliza un diagrama de árbol incluyendo la probabilidad de cada rama) 
26.	
27.	bbb bmm mbb mbm bmb mmb bbm mmm
28.	
29.	
30.	
31.	 . Considera la variable

32.	
33.	
34.	

3. Considera la variable Y = "El número de respuestas correctas". Describe todos los valores que puede tomar esta variable.

1.	Y = 0, 1, 2, 3, 4
2.	La variable Y puede tomar los valores: 0, 1, 2, 3
3.	Y = 0 Y = 1 Y =2 Y = 3 aaa baa caa aab bab cab aac bac cac aba bba cba abb bbb cbb abc bbc cbc aca bca cca acb bcb ccb acc bcc ccc
4.	abc cab acb cba aaa ccc bac bca bbb
5.	12
6.	Y = 0 No tiene correctas 1 solo tiene 1 correcta 2 tiene dos correctas y una mala 3 todas las respuestas son correctas
7.	Y = 0, 1, 2, 3
8.	Y = 0, 1, 2, 3
9.	Y = 0, 1, 2, 3
10.	Y = 0, 1, 2, 3
11.	Sin Respuesta
12.	$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$
13.	[1/9, 2/27, 1/27]
14.	Y = 9/27
15.	x = 0 x = 1 x = 2 x = 3

16. y = 0, 1, 2, 3

x	0	1	2	3
	0.301	0.444	0.219	0.036

17. Y = 9

18. 0, 1, 2, 3

19. Y = 0, 1, 2, 3

20.

Y	1	2	3	0
	8/27	6/27	1/27	12/27

21. Y_1 = A
= B
Y_2 = A
= B
Y_3 = A
= B

22.

Y	0	1	2	3
P (y)	I I I	C I I	C C I	C C C
	I I I	I C I	I C C	C C C
	I I I	I I C	C I C	C C C

C = correctas
I = incorrectas

23.

Y	X = 0	X = 1	X = 2	X = 3
	a, a, a a, b, c a, c, b b, c, a	b, a, c b, c, a b, b, b	a, b, b a, a, b	c, b, b c, a, a

24. Y = 3 de 3
Porque sólo uno de los 3 incisos de las 3 respuestas es correcta

25.

Y	0	1	2	3
	1/8	3/8	3/8	1/8

= 3/2

26. 0 = Todas incorrectas
1 = una incorrecta
2 = dos correctas
3 = tres correctas

27.

Y	1	2	3	0
P(Y)	bmm mbm mmb	mbb bmb bmm	bbb	mmm

28. X = 0, 1, 2, 3

29. P(C) = 9/18

30.

Y	X=0	X=1	X=2	X=3
P(X)	I I I	C I I I C I I I C	C C I C I C I C C	C C C

31. y = 0 y = 1 y = 2 y = 3

32. 0, 1, 2, 3 = número de respuestas correctas

Y	0	1	2	3
Ω	I I I	C I I I C I I I C	C C I C I C I C C	C C C
	1/8	3/8	3/8	1/8

33. Y = 3, 2, 1, o 0
y = 3, Todas las respuestas son correctas
y = 2, Dos de las tres respuestas son correctas
y = 1, Una de las tres respuestas es correcta

<table>
<tr><td></td><td>y = 0, Ninguna de las respuestas es correcta</td></tr>
<tr><td>34.</td><td><table><tr><td></td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>Y</td><td>6/9</td><td>2/9</td><td>2/9</td><td>3/9</td></tr></table></td></tr>
</table>

4. Calcula lo que se pide:
a) ¿Cuál es la probabilidad de que la variable Y tome el valor 0?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que tome el valor 1?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que tome el valor 2?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que tome el valor 3

1.	a) P(0) = 8/27 b) P(1) = 12/27 = 4/9 c) P(2) = 6/27 = 2/9 d) P(3) = 1/27
2.	a) 3/9 = ¼, b) ¼, c) ¼, d) ¼
3.	a) ¼ , b) ¼, c) ¼, d) ¼
4.	a) 0, b) 0.125, c) 0.5, d) 0.083
5.	a) 1/27 , b) 3/27, c) 3/27, d) 1/27
6.	a) 2/16 , b) 3/16, c) 6/16, d) 9/16
7.	a) P= (¼) , b) P=(¼), c) P=(¼), d) P=(¼)
8.	a) 2/16 , b) 6/16, c) 6/16, d) 2/16
9.	a) 3/0 , b) 3/1, c) 3/2, d) 3/3
10.	a) 2/12 , b) 5/12, c) 4/12, d) 1/12
11.	a) P(A) = b) P(B) = 1/3 c) P(C) = 2/3 d) P(D) = 3/3
12.	a) 1/6 , b) 5/6, c) 5/6, d) 3/6
13.	a) 1/27, b) 3/27, c) 3/27, d) 1/27
14.	a) 1/27 = 0.03, b) 3/27 = 0.11, c) 3/27 = 0.11, d) 1/27 = 0.03
15.	a) 11/21, b) 1/21, c) 8/21, d) 1/21
16.	a) 0.301, b) 0.444, c) 0.219, d) 0.036
17.	a) 9/36, b) 18/36, c) 27/36, d) 36/36
18.	Sin Respuesta
19.	a) 1/4, b) 1/4, c) 1/4, d) 1/4
20.	a) 12/27, b) 8/27, c) 6/27, d) 1/27
21.	a) Sin respuesta, b) 1/4, c) 2/4, d) 2/4
22.	a) 0/3, b) 3/3, c) 6/3, d) 9/3
23.	a) Sin respuesta, b) 1/8, c) 1/8, d) 1/8
24.	a) 0/3, b) 1/3, c) 2/3, d) 3/3
25.	a) 1/8, b) 3/8, c) 3/8, d) 1/8
26.	a) 8/27 = 29.63%, b) 12/27 = 44.4 %, c) 6/27 = 22.2 %, d) 1/27 = 3.7 %
27.	a) 1/9 = 11.1 %, b) 4/9 = 44.4 %, c) 3/9 = 33.33 %, d) 1/9 = 11.1 %
28.	a) P(0) = 0/9 = 0 b) P(1) = 1/9 = 0.11 c) P(2) = 2/9 = 0.22 d) P(3) = 3/9 = 0.33
29.	a) P(0) = 9/18 b) P(1) = 3/18 c) P(2) = 3/18 d) P(3) = 3/18
30.	a) 1/18, b) 3/18, c) 3/18, d) 1/18
31.	a) P(0) = 0/9 = 0 b) P(1) = 1/9 = 0.11 c) P(2) = 2/9 = 0.22 d) P(3) = 3/9 = 0.33
32.	a) 1/8, b) 3/8, c) 3/8, d) 1/8
33.	a) 1/3, b) 2/3, c) 2/3, d) 1/3
34.	a) 3/24, b) 9/24, c) 9/24, d) 3/24

5. Con base en lo anterior, completa la siguiente tabla:

1.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	8/27	12/27	6/27	1/27	1

2.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	¼	¼	¼	¼	1

3.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	¼	¼	¼	¼	4/4 = 1

4.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	0	0.125	0.05		

5.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	0.12	0.38	0.38	0.12	0.96

6.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	2/16	4/16	6/16	4/16	1

7.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	¼	¼	¼	¼	4/4

8.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	2/16=0.125	6/16=0.375	6/16=0.335	2/16=0.125	16/16=1

9.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	3/0	3/1	3/2	3/3	

10.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	2/12	5/12	4/12	1/12	12/12=1

11.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad					

12.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	1/6	5/6	5/6	3/6	2.33

13.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	0.4	0.1	0.1	0.4	0.28

14.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	0.03	0.11	0.11	0.03	0.88

15.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	1/21	1/21	8/21	1/21	1

16.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	0.301	0.444	0.219	0.036	1

17.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad					9/9

18. Sin Respuesta

19.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	1/4	1/4	1/4	1/4	1

20.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	12/27	8/27	6/27	1/27	1

21.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	1/4	2/4	3/4	4/4	

22.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	0/3	3/3	6/3	9/3	18/3

23.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	1/8	1/8	1/8	1/8	

24.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	0	1/3	2/3	3/3	18/3

25.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	1/8	3/8	3/8	1/8	

26.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	8/27	12/27	6/27	1/27	1

27.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	1/9	4/9	3/9	1/9	

28.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	0	0.11	0.22	0.33	0.66

29.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	9/18	3/18	3/18	3/18	18/18=1

30.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	1/18	3/18	3/18	1/18	8/18

31.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	0	0.11	0.22	0.33	0.66

32.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	1/8	3/8	3/8	1/8	1

33.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	1	2	2	1	6

34.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	3/24	9/24	9/24	3/24	1

6. Para acreditar el examen es necesario que se respondan al menos dos preguntas correctamente. ¿Cuál es la probabilidad de que acredite el examen?

1.	7/27
2.	La probabilidad es de ¼
3.	2/4 ó ½ ó 50% se sabe esto porque sumas la probabilidad de que tengas Y =2 + Y = 3, y eso da 2/4, la probabilidad total de aprobar
4.	0.05
5.	3/27
6.	11/16
7.	P = (2/3)
8.	2/3 ya que se responden bien 2 preguntas de 3 posibles
9.	P= 3/2 = 1.5
10.	2/3 es la misma probabilidad porque necesita al menos 2 preguntas correctas de 3 para pasar el examen
11.	66 %
12.	5/6
13.	2/3 = 0.66
14.	3/27
15.	8/21

16.	0.219
17.	Sin Respuesta
18.	2/3 = 0.666 o 66%, ya que cada pregunta tiene el 33.333%
19.	2/3 = 0.66
20.	6/27
21.	2/3 = 0.66
22.	2/3
23.	2/3
24.	2/3
25.	2/3
26.	7/27 = 25.9 %
27.	4/9 = 44.4 %
28.	P(2 ≤ 3)
29.	Sin Respuesta
30.	P(2) = 2 correctas/ 18 casos posibles = 2/18 =1/9
31.	22%
32.	4/8 = 50%
33.	40 %
34.	1/2

7. Si 1000 estudiantes respondieran el examen y todos ellos respondieran al azar
a) ¿Cuántos acertarían cero preguntas? Explica tu respuesta
b) ¿Cuántos acertarían en una sola pregunta? Explica tu respuesta
c) ¿Cuántos acertarían en dos preguntas? Explica tu respuesta
d) ¿Cuántos acertaría en 3 preguntas? Explica tu respuesta

1.	a) 296 personas b) 444 personas c) 222 personas d) 37 personas
2.	a) ¼ del total b) ¼ del total c) ¼ del total d) ¼ del total
3.	Sin Respuesta
4.	a) 0, b) 2.5, c) 5.1, d) 0.13
5.	a) 120, b) 380, c) 380, d) 120
6.	a) 125, b) 250, c) 375, d) 250
7.	a) P= (250) por la probabilidad ¼ = 250/1000 b) P= (250) por la probabilidad ¼ = 250/1000 c) P= (250) por la probabilidad ¼ = 250/1000 d) P= (250) por la probabilidad ¼ = 250/1000
8.	a) 125 porque solo se multiplica por los 1000 b) 375 solo se multiplica por los 1000 c) 375 solo se multiplica por los 1000 d) 125 solo se multiplica por los 1000
9.	a) 1000/0, b) 1000/1, c) 1000/2, d) 1000/3
10.	a) 167 porque la probabilidad de que un estudiante responda 0 preguntas correctas es 0.1666…y multiplicado por 1000 estudiantes y redondeada da eso b) 417, es lo mismo, si la probabilidad de que un estudiante responda 1 pregunta correcta es de 0.41666… multiplicado por 1000 estudiantes y redondeada da eso c) 333, la probabilidad de que un estudiante obtenga 2 preguntas correctas es de 0.333… multiplicado por 1000 estudiantes da 333 d) 83, la probabilidad de que un estudiante tenga 3 preguntas correctas es de 0.08333… multiplicado por 1000 estudiantes da 83.33333
11.	Sin Respuesta
12.	Sin Respuesta
13.	a) 400 porque se multiplica< por la probabilidad b) 100 se multiplica por la (P) c) 100 se multiplica por la (P) d) 100 se multiplica por la (P)
14.	a) 30, b) 110, c) 110, d) 30

15.	Sin respuesta
16.	a) 301 estudiantes, b) 444 estudiantes, c) 219 estudiantes, d) 36 estudiantes
17.	Sin Respuesta
18.	Sin Respuesta
19.	a) 250 ya que es ¼ b) 250 ya que es ¼ c) 250 ya que es ¼ d) 250 ya que es ¼
20.	a) 444 aproximadamente b) 296 aproximadamente c) 222 aproximadamente d) 37 aproximadamente como es al azar, a la larga estos son los resultados que se estimarian aproximadamente, en base al espacio muestral y el valor que puede tomar cada uno de los eventos
21.	a) 0/3, b) 1/3, c) 2/3, d) 3/3 Probabilidad de eventos = Número de casos favorables/Número de casos posibles
22.	a) 250, b) 250, c) 250, d) 250
23.	1000/9 = 111.11, b) 125, c) 166.6, d) 333.33
24.	Sin Respuesta
25.	a) Sin Respuesta b) 1/1000, 1000 alumnos acertarían por lo menos a una c) 2/1000, 1000 alumnos acertarían por lo menos a 2 d) 3/1000, 1000 alumnos acertarían por lo menos a 3
26.	a) 296 ya que es la probabilidad más acertada b) 444 ya que es 12/27 estudiantes c) 222 ya que eso dicen las estadísticas d) 37 es la probabilidad
27.	Sin Respuesta
28.	Sin Respuesta
29.	a) P(0) = 90/180 de acuerdo al resultado obtenido b) P(1) = 30/180 tendrían al menos 1 pregunta c) P(2) = 30/180 es la probabilidad de dos al menos d) P(3) = 30/180 3 de acuerdo al resultado
30.	a) P(0) = 100 (0) correctas entre 100(18) casos posibles = 100/1800 = 1/18 b) P(1) = 300 (1) correctas entre 100(18) casos posibles = 300/1800 = 3/18 c) P(2) = 300 (2) correctas entre 100(18) casos posibles = 300/1800 = 3/18 d) P(3) = 100 (3) correctas entre 100(18) casos posibles = 100/1800 = 1/18
31.	Sin Respuesta
32.	a) 1/8(1000) = 125 b) 3/8(1000) = 375 c) 3/8(1000) = 375 d) 1/8(1000) = 125
33.	a) 10 % en 6/6 es 1/6 b) 40 % en 6/6 es 2/6 c) 40 % en 6/6 es 2/6 d) 10 % en 6/6 es 1/6
34.	a) 125, b) 375, c) 375, d) 125

Con las respuestas llena la siguiente tabla:

1.

Valores de x	Frecuencias
0	29.6%
1	44.4%
2	22.2%
3	3.7%
Suma	99.9%

2.

Valores de x	Frecuencias
0	250
1	250
2	250
3	250
Suma	1000

3. Sin Respuesta

4.

Valores de x	Frecuencias
0	0
1	2.5
2	5.1
3	0.13
Suma	

5.

Valores de x	Frecuencias
0	120
1	380
2	380
3	120
Suma	1000

6.

Valores de x	Frecuencias
0	125
1	250
2	375
3	250
Suma	1000

7.

Valores de x	Frecuencias
0	250
1	250
2	250
3	250
Suma	1000

8.

Valores de x	Frecuencias
0	125
1	375
2	375
3	125
Suma	1000

9.

Valores de x	Frecuencias
0	0
1	1
2	1
3	1
Suma	3

10.

Valores de x	Frecuencias
0	167
1	417
2	333
3	83
Suma	1000

11. Sin Respuesta

12. Sin Respuesta

13.

Valores de x	Frecuencias
0	0.4
1	0.1
2	0.1
3	0.4
Suma	1

14.

Valores de x	Frecuencias
0	30
1	110
2	110
3	30
Suma	280

15. Sin Respuesta

16.

Valores de x	Frecuencias
0	301
1	444
2	219
3	36
Suma	1000

17. Sin Respuesta

18. Sin Respuesta

19.

Valores de x	Frecuencias
250	25%
250	25%
250	25%
250	25%
Suma 1000	100%

20.

Valores de x	Frecuencias
0	444
1	296
2	222
3	37
Suma	999

21. Sin Respuesta

22.

Valores de x	Frecuencias
0	250
1	250
2	250
3	250
Suma	1000

23.

Valores de x	Frecuencias
0	12.5
1	37.5
2	12.5
3	37.5
Suma	100

24. Sin Respuesta

25. Sin Respuesta

26.

Valores de x	Frecuencias
0	29.63
1	44.44
2	22.22
3	3.71
Suma	100

27.

Valores de x	Frecuencias
0	11.11 %
1	44.4 %
2	33.3 %
3	11.11%
Suma	99.9 %

28.

Valores de x	Frecuencias
0	0
1	0.11
2	0.22
3	0.33
Suma	0.66

29.

Valores de x	Frecuencias
0	0.5
1	0.16
2	0.16
3	0.16
Suma	0.98

30.

Valores de x	Frecuencias
0	1/18
1	3/18
2	3/18
3	1/18
Suma	8/18

31. Sin Respuesta

32.

Valores de x	Frecuencias
0	125
1	375
2	375
3	125
Suma	1000

33.

Valores de x	Frecuencias
0	10 %
1	40 %
2	40 %
3	10 %
Suma	100 %

34.

Valores de x	Frecuencias
0	125
1	375
2	375
3	125
Suma	1000

APENDICE E. Resultados obtenidos en el Cuestionario 2

Experimento aleatorio 1. Un examen de opción múltiple consta de tres preguntas; cada pregunta tiene dos opciones de respuesta, una de las cuales es la correcta. Un estudiante responde cada pregunta eligiendo al azar una de las opciones. Se observan las opciones que elige

Considera las siguientes preguntas: Si 48 estudiantes responden al azar el examen

- **¿Cuántos alumnos contestarían incorrectamente todas las preguntas?**
- **¿Cuántos alumnos contestarían correctamente solo una pregunta?**
- **¿Cuántos alumnos contestarían correctamente exactamente dos preguntas?**
- **¿Cuántos alumnos contestarían correctamente todas las preguntas?**

1. (Usando una moneda para simular la situación) ¿Crees que este procedimiento puede ofrecer una respuesta satisfactoria a las preguntas formuladas? Explica tu respuesta.

1.	Sin Respuesta
2.	Sí, porque al repetir el experimento el total de casos podría mostrar alguna
3.	Sí, aunque cambias la forma de examen por moneda, tiene el mismo mecanismo de azar
4.	Sí, porque se hace lo mismo
5.	Sí, porque se puede obtener un resultado en cada lanzamiento
6.	Sí, porque los alumnos hacen los mismo de lanzar una moneda
7.	Sí, porque las respuestas están basadas en el experimento aleatorio
8.	Sí, porque es al azar, entonces nos da una aproximación de cómo les pudo salir a los 48 estudiantes
9.	Sí, porque es un experimento aleatorio y las respuestas están basadas en él.
10.	Sí, porque a fin de cuentas es al azar y nos puede salir así como a ellos
11.	Sin Respuesta
12.	No, porque no te permite analizar correctamente cada pregunta
13.	Sí, porque al repetir el experimento puede llegar a dar un aproximado a lo satisfactorio
14.	Sí, porque puedes obtener un resultado con cada lanzamiento
15	No creo porque son predicciones
16.	Sí, porque ambos tienen la misma probabilidad para ambos resultados
17.	Yo creo que sí porque si es al azar contestando las preguntas sería lo mismo como unas monedas.
18.	Yo pienso que no, porque no es una muestra muy grande por lo tanto considero que no es tan representativa
19.	Sí, porque es la misma probabilidad de ser correcta como incorrecta
20.	Sí, porque se comprobaría la teoría que fue lo que se hizo anteriormente
21.	Sí porque la probabilidad de acertar su respuesta a las preguntas es igual al sacar sol o águila
22.	Sí, porque está empleando una técnica para poder reproducir las respuestas del examen
23.	No porque es al azar y tiene un 50% de probabilidad de equivocarse
24.	Sí, porque tiene dos opciones de responder en el examen, así como también tiene dos caras la moneda
25.	No, porque no hay una sincera probabilidad
26.	Sí, ya que solo hay 2 respuestas y se escogen al azar
27.	No, Porque es al azar, puede tener las mismas posibilidades
28.	Sí, porque es un experimento al azar
29.	Sí, ya que los resultados son al azar
30.	Sí, porque la probabilidad de los eventos es ½ y se pueden enlazar
31.	Sí, porque es un experimento al azar
32.	No, porque no se contemplan los conocimientos, además es completamente azaroso
33.	Sí, porque en los dos experimentos hay pruebas al azar. Sólo hay dos opciones y se puede repetir las veces necesarias
34.	Sí, porque se repitió muchas veces

2. ¿Crees que hay una respuesta única para cada pregunta? Si respondes "Sí" ¿Cuáles son esas respuestas únicas? Si respondes "No", explica las razones

1.	No, porque es el azar y no siempre da el mismo resultado
2.	Sí, porque es una, será una respuesta correcta
3.	Sí, tal vez habría un aproximado
4.	No, porque es al azar y no se puede esperar una sola respuesta en esta situación
5.	Sí, águila = incorrecto, sol = correcto
6.	No, porque es al azar y en esa situación no se puede esperar una sola respuesta
7.	No, porque en cada experimento varía el resultado, ya que se está realizando un experimento al azar
8.	No, porque es al azar y puede variar
9.	No, porque en cada experimento varía el resultado ya que es un evento al azar

10.	No, son al azar y puede variar
11.	No, porque son eventos al azar sin respuestas únicas
12.	Sí, porque hay dos variantes, sol y águila
13.	Sí, porque una tiene que ser verdadera
14.	Sí, águila = incorrecto, sol = correcto
15	Si, correcto e incorrecto
16.	No, porque sólo es un aproximado
17.	Yo creo que sí, son los mismos exámenes en base a las preguntas solo hay una respuesta correcta en las dos opciones, así que sí.
18.	No, porque son al azar y la muestra no es muy representativa
19.	No, hay otras opciones
20.	No, porque es al azar, por lo tanto varían los resultados
21.	Si, porque sería sol y sería una pregunta contestada correctamente
22.	No, porque es un procedimiento al azar
23.	No, porque por ser al azar los resultados pueden variar
24.	Sí sería "sol" para una respuesta correcta y "águila" para la incorrecta
25.	No, porque siempre salen respuestas diferentes
26.	Sí, sol y águila
27.	No, porque el experimento es al azar por eso hay más posibles resultados
28.	No, porque puede variar en personas y en lo que te pidan con exactitud
29.	Sí, la respuesta única sería la correcta No, porque son distintas respuestas (incisos) aunque sólo sea particular la respuesta correcta
30.	No, porque todo depende de cómo lo contestó el sujeto y sería cuestión de probabilidad
31.	Sí, porque siento que hay más de 1 pregunta que pueden tener bien todos
32.	No, porque puede haber varianza debido/dependiendo de la población
33.	No, porque, aunque se haga las veces necesarias, siempre puede variar
34.	No, porque puede variar

3. Con la información que obtuviste de tu simulación responde:
a) ¿Cuántos alumnos contestaron incorrectamente todas las preguntas?
b) ¿Cuántos alumnos contestaron correctamente solo una pregunta?
c) ¿Cuántos contestaron correctamente exactamente dos preguntas?
d) ¿Cuántos alumnos contestaron correctamente todas las preguntas?

1.	a) 2, b) 22, c) 21, d) 3
2.	a) 4, b) 18, c) 21, d) 5
3.	a) 6, b) 16, c) 16, d) 10
4.	a) 9/48, b) 19/48, c) 13/48, d) 7/48
5.	a) 4/48, b) 24/48, c) 16/48, d) 4/48
6.	a) 9/48, b) 19/48, c) 13/48, d) 7/48
7.	a) 5, b) 23, c) 17, d) 3
8.	a) 7, b) 14, c) 21, d) 6
9.	a) 5, b) 23, c) 17, d) 3
10.	a) 7, b) 14, c) 21, d) 6
11.	a) 2, b) 22, c) 21, d) 3
12.	a) 5, b) 19, c) 18, d) 6
13.	a) 4, b) 18, c) 21, d) 5
14.	a) 4/48, b) 24/48, c) 16/48, d) 4/48
21.	a) 8, b) 20, c) 16, d) 4
22.	a) 8, b) 16, c) 22, d) 2
23.	a) 4, b) 18, c) 18, d) 8
24.	a) 8, b) 20, c) 16, d) 4
25.	a) 11, b) 20, c) 13, d) 4
26.	a) 5, b) 19, c) 18, d) 6
27.	a) 4, b) 18, c) 18, d) 8
28.	a) 10, b) 16, c) 17, d) 5
29.	a) 10, b) 16, c) 17, d) 5
30.	a) 4, b) 18, c) 18, d) 8
31.	a) 11, b) 17, c) 16, d) 4
32.	a) 5, b) 14, c) 21, d) 8
33.	a) 5, b) 19, c) 18, d) 6

34.	a) 61, b) 22, c) 18, d) 6

4. Con base en lo anterior, completa la siguiente tabla:

1.

Valores de x	**Frecuencia**	**Frecuencia Relativa**
0	2	4.2%
1	22	45.8%
2	21	43.7%
3	3	6.2%
Suma	48	99.9%

2.

Valores de x	**Frecuencia**	**Frecuencia Relativa**
0	4	8.3%
1	18	37.5%
2	21	43.75%
3	5	10.41%
Suma	48	99.9%

3.

Valores de x	**Frecuencia**	**Frecuencia Relativa**
0	6	1/8 0.125
1	16	1/3 0.333
2	16	1/3 0.333
3	10	5/24 0.208333
Suma	48	1

4.

Valores de x	**Frecuencia**	**Frecuencia Relativa**
0	9	9
1	19	28
2	13	41
3	7	48
Suma	48	

5.

Valores de x	**Frecuencia**	**Frecuencia Relativa**
0	4	8.33
1	24	50
2	16	33.33
3	4	8.33
Suma	48	99.99

6.

Valores de x	**Frecuencia**	**Frecuencia Relativa**
0	9	9
1	19	28
2	13	41
3	7	48
Suma	48	

7.

Valores de x	**Frecuencia**	**Frecuencia Relativa**
0	5	10.41%
1	23	47.91%
2	17	35.41%
3	3	6.25%
Suma	48	99.98%

8.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	7	% 14.58
1	14	%29.16
2	21	%43.75
3	6	%12.50
Suma	48	%99.99

9.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	5	10.41%
1	23	47.91%
2	17	35.41%
3	3	6.25%
Suma	48	99.98

10.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	7	14.58%
1	14	29.16%
2	21	43.75%
3	6	12.50%
Suma	48	99.99%

11.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	2	4.2%
1	22	45.8%
2	21	43.7%
3	3	6.2%
Suma	48	99.9%

12.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	5	10.42%
1	19	39.58%
2	18	37.5%
3	6	12.5%
Suma	48	99.99%

13.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	4	8.33
1	18	37.5
2	21	43.75
3	5	10.41
Suma	48	99.9

14.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	4	8.33 %
1	24	50%
2	16	33.33%
3	4	8.33%
Suma	48	99.99%

15.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	6	12.5 %
1	18	37.5 %
2	19	39.5 %
3	5	10.4 %
Suma	48	99.9 %

16.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	9	18.75%
1	12	25%
2	22	45.83%
3	5	10.42%
Suma	48	100%

17.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	11	
1	16	
2	16	
3	5	
Suma	48	

18.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	7	0.14%
1	16	0.33%
2	17	0.35%
3	8	0.16%
Suma	48	0.99%

19.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	9	18.75%
1	12	25%
2	22	45.83%
3	5	10.42%
Suma	48	100%

20.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	5	0.10
1	21	0.43
2	15	0.31
3	7	0.14
Suma	48	0.98

21.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	8	8
1	20	28
2	16	44
3	4	48
Suma	48	

22.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	8	8
1	16	24
2	22	46
3	2	48
Suma	48	

23.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	4	8.33%
1	18	37.5%
2	18	37.5%
3	8	16.67%
Suma	48	100%

24.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa

0	8	8
1	20	28
2	16	44
3	4	48
Suma	48	

25.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	11	22.91%
1	20	41.6 %
2	13	27 %
3	4	8.3 %
Suma	48	100%

26.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	5	10.42 %
1	19	39.58 %
2	18	37.5 %
3	6	12. 5%
Suma	48	100%

27.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	4	8.33 %
1	18	37.5 %
2	18	37.5 %
3	8	16.67 %
Suma	48	100%

28.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	10	10
1	16	26
2	17	43
3	5	48
Suma	48	

29.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	10	10
1	16	26
2	17	43
3	5	48
Suma	48	

30.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	4	8.33 %
1	18	37.5 %
2	18	37.5 %
3	8	16 .57 %
Suma	48	100 %

31.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	11	11
1	17	28
2	16	44
3	4	48
Suma	48	

32.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	5	10.41%

1	14	29.16%
2	21	43.75%
3	8	16.67%
Suma	48	100%

33.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	5	10.42%
1	19	39.58%
2	18	35.5%
3	6	12.5%
Suma	48	100%

34.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	61	58.09
1	22	48.88
2	14	31.1
3	9	20
Suma	105	86.97

5. a) ¿Qué valores de la variable son los menos frecuentes?
b) ¿Qué valores de la variable son los más frecuentes?
c) ¿Crees que lo anterior ocurra en general o que es sólo casualidad?
d) Si ocurre en general ¿Por qué crees que eso pase?
e) Si ocurre por casualidad, explica.

1.	a) 0 y 3 b) 1 y 2 - Sí ocurre bastante. Tomando en cuenta que lo hicieron al azar, es más probable que obtenga 2 a 1 correctas
2.	a) Valores 0 y 3 b) Valores 1 y 2 c) Casualidad, es un experimento al azar y se necesitarían más registros para obtener un resultado más cercano
3.	a) El 0 y el 3 b) 1 y 2 c) Es casualidad, pues cada quien hizo sus volados
4.	a) En todas buenas (3) b) En una buena (1) d) En general, es más probable que te equivoques a que tengas todas correctas
5.	a) X = 0, X = 3 b) X = 1, X = 2 c) Por casualidad, se necesitan hacer más experimentos para determinar si es en general
6.	a) El 3 en todas buenas b) El 1 = 1 buena d) Sí en general, porque es más probable que te equivoques a que tengas todas correctas
7.	a) X = 3 b) X = 1 d) En general, porque en experimentos aleatorios, tienen a tener el mismo resultado
8.	a) El 0 y 3 b) El 1 y 2 d) En general, porque no tiene la misma probabilidad de salir
9.	a) 3 b) 1 d) En general, porque en experimentos aleatorios sucede así
10.	a) Es menos frecuente 0 y 3 b) Es más frecuente 1 y 2 d) En general, porque no tiene la misma probabilidad de salir
11.	a) Cero y tres b) Dos y uno d) En general, tomando en cuenta que respondieron al azar estos son los números más probables
12.	a) 3 y 0 b) 1 y 2 c) Sí, porque difícilmente se pueden obtener las 3 respuestas correctas

13.	a) Valores 0 y 3 b) Valores 1 y 2 c) Casualidad, porque es un ejercicio al azar, se necesita un espacio muestral más extenso
14.	a) x = 0, x = 3 b) x = 1 , x = 2 c) Casualidad, porque se necesitan hacer más experimentos para comprobarlo
21.	a) Todas las respuestas correctas b) Una respuesta correcta d) Que ocurra en general, porque es una probabilidad
22.	a) 0 b) 2 c) Casualidad, porque es una prueba al azar se pueden sacar distintos resultados
23.	a) 0 y 3 b) 1 y 2 c) Casualidad, porque los valores pueden variar
24.	a) Todas las respuestas correctas b) Una respuesta correcta d) Que ocurra en general, porque es una probabilidad
25.	a) Los que contestaron correctamente b) Los que contestaron solo una pregunta c) Solo por casualidad, porque no siempre te van a dar los mismos resultados
26.	a) 0 y 3 b) 1 y 2 d) En general, porque es la probabilidad más acertada
27.	a) 0 y 3 b) 1 y 2 c) Casualidad, porque los valores varían mucho
28.	a) Los valores de x en 3 b) Los valores de x en 1 y 2 c) No ocurre en general, ya que es al azar
29.	a) Los valores de x en 3 b) Los valores de x en 1 y 2 c)Casualidad, son resultados al azar
30.	a) 0 y 3 b) 1 y 2 c) Es casualidad, porque depende de la probabilidad
31.	a) El 3 y 0 b) 1 y 2 c)Casualidad, porque es un evento al azar
32.	a) 3 y 0 respuestas correctas b) 1 y 2 respuestas correctas d) General, porque la mayoría de los alumnos tiende a fallar debido a ciertas causas
33.	a) 0 y 3 b) 1 y 2 d) Ocurre en general, porque es más probable que salga al menos una mala o una buena
34.	a) 3, 2 b) 22, 61 d) En general, porque hay dos incorrectas

6. En la siguiente tabla anota la probabilidad de obtener cada valor, explica cómo calculaste cada valor

1.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	2/48	22/48	21/48	3/48	1

Buscando en los resultados que salieron después del experimento

2.

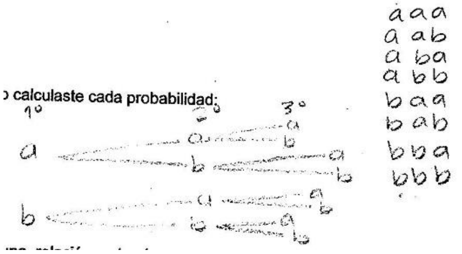
Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	0.08	0.38	0.44	0.10	1

Con la probabilidad clásica: Casos favorables entre casos totales

3.

Valores de X	0	1	2	3	Suma

Probabilidad	1/8	3/8	3/8	1/8	1



4.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	9/48	19/48	13/48	7/48	1

Con el experimento

5.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	0.083	0.5	0.333	0.083	0.000

Dividiendo el número de casos favorables a un evento sobre el número de casos posibles

6.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	9/48	19/48	13/48	7/48	1

Gracias al experimento

7.

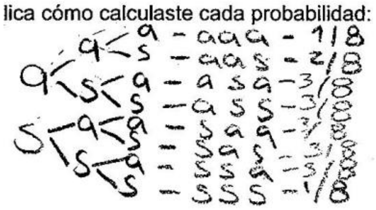
Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	5/48	23/48	17/48	3/48	48/48 = 1

Dividiendo el número de casos favorables entre el número de casos totales

8.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	1/8	3/8	3/8	1/8	8/8 = 1

Haciendo un diagrama de árbol



9.

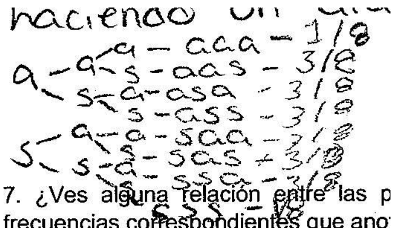
Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	5/48	23/48	17/48	3/48	1

El número de casos favorables sobre el número de casos totales

10.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	1/8	3/8	3/8	1/8	1

Haciendo un diagrama de árbol



11.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	2/48	22/48	21/48	3/48	1

Basándonos en los resultados obtenidos de los lanzamientos de la moneda

12.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	5/48	19/48	18/48	6/48	48/48

Las frecuencias de cada valor de “x” la dividimos entre el total de la misma, para obtener también la frecuencia relativa

13.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	0.08	0.38	0.44	0.10	1

El número de casos entre el número de casos totales

14.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	0.083	0.5	0.333	0.083	0.999

Dividiendo el número de casos favorables a un evento sobre el número de casos posibles

15.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	6/48	18/48	19/48	5/48	48/48

Poniendo el número de la frecuencia entre el total

16.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	0.19	0.25	0.46	0.10	1

Dividiendo los casos favorables entre el total de veces que se repitió el experimento

17.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	11/48	16/48	16/48	5/48	48/48

Basándome en el número de resultados obtenidos.

18.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	1/8	3/8	3/8	1/8	8/8 = 1

Determine esos valores porque al lanzar tres monedas la probabilidad de que salga AAA y SSS es 1/8 y SSA y AAS es 3/8.

19.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	0.19	0.25	0.46	0.10	1

Divido el número de casos favorables entre el número de totales

20.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	5/48	21/48	15/48	7/48	1

El número de casos favorables entre casos totales, en cada caso dan la probabilidad

21. Sin Respuesta

22.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	8	16	22	2	48

Con la frecuencia obtenida de los valores

23.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	8.33%	37.5%	37.5%	16.67%	100%

Por la frecuencia relativa

24. Sin Respuesta

25.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	22.91%	41.6%	27%	8.3%	100%

Con regla de 3

26.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	10.42 %	39.58 %	37.5 %	12.5 %	100 %

Con regla de 3

27.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	8.33 %	37.5 %	37.5 %	16.67 %	

Son los valores de la tabla

28.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	0.208	0.333	0.354	0.104	1

Divides la frecuencia con el valor absoluto

Valor x 0 por frecuencia 10 entre datos absolutos 10/48 = 0.208

29.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	0.208	0.333	0.354	0.104	1

Se divide la frecuencia entre el valor absoluto en los distintos casos

30.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	1/8	½	1/4	1/8	1

1) (½) = ½ 2) $(½)^2$ = ¼ 3) $(½)^3$ = 1/8

31.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	0.23	0.35	0.33	0.083	0.99

Dividir el número de casos favorables entre el número total de casos

32.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	5/48	14/48	21/48	8/48	1

Con la frecuencia relativa

33.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	10.42%	39.58%	35.5%	12.%%	100%

Regla de 3

34.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	61/105	22/105	14/105	9/105	1

Dividí la frecuencia entre el número de casos totales

7. ¿Ves alguna relación entre las probabilidades de cada valor de la variable y las frecuencias correspondientes que anotaste en la pregunta 4?

1.	Sin respuesta
2.	Sí, al ser divididos entre cien, los números son muy cercanos
3.	Solo las primeras son iguales (valor de 0) y en los otros se acerca mucho
4.	No, porque son valores diferentes
5.	Sí, son proporcionales
6.	No, porque los valores son diferentes
7.	Sí veo una relación
8.	Sí, porque es menos probable que salgan 3 (ya sea de incorrectas o correctas) y las frecuencias que obtuvimos es menos frecuente

9.	Sí hay una relación
10.	Sí, porque es menos probable que salgan 3 (ya sea de incorrectas o correctas) y las frecuencias que obtuvimos es menos frecuente
11.	Gracias a la frecuencia se puede calcular la probabilidad
12.	Sí, si la vemos
13.	Son proporcionales
14.	Sí, hay una relación, porque son proporcionales
21.	Sin respuesta
22.	Sí, son los mismos
23.	Sí.
24.	Sin respuesta
25.	Sí
26.	Sí
27.	Sí
28.	Yo no encuentro nada
29.	No
30.	Sí las probabilidades se aproximan
31.	Si hay relación porque hay un aumento de valores
32.	Sí, dependiendo del conocimiento adquirido, en este caso las probabilidades son más grandes para 1y 2 respuestas correctas
33.	Sí
34.	Sí, porque hay más incorrectos y habrá más frecuencia

Experimento aleatorio 2. Un examen de opción múltiple consta de tres preguntas. Cada pregunta tiene tres opciones una de las cuales es la correcta. Un estudiante responde cada pregunta eligiendo al azar una de las opciones.

Considera las siguientes preguntas: Si 48 estudiantes responden al azar el examen

- **¿Cuántos alumnos contestarían incorrectamente todas las preguntas?**
- **¿Cuántos alumnos contestarían correctamente solo una pregunta?**
- **¿Cuántos alumnos contestarían correctamente exactamente dos preguntas?**
- **¿Cuántos alumnos contestarían correctamente todas las preguntas?**

1. (Usando una botella con tres canicas, dos del mismo color y una de color distinto) ¿Crees que este procedimiento puede ofrecer una respuesta satisfactoria a las preguntas formuladas? Explica tu respuesta.

1.	No, porque es al zar y no sabes si está bien o mal
2.	Es al azar y el resultado en base a las canicas
3.	No, porque con 3 bolas, 2 incorrectas y una correcta hay más probabilidad de que la respuesta sea incorrecta
4.	Sí, porque los elementos son adecuados para hacer el experimento
5.	Sí, porque hay una canica por cada respuesta
6.	Sí, porque los elementos son adecuados para el experimento
7.	Sí, porque las canicas representan las respuestas y como es un experimento, es lo más representativo al caso
8.	Sí, porque es como una aproximación y es al azar
9.	Sí, porque las canicas representan las respuestas y como es un experimento aleatorio es lo más representativo al caso
10.	Sí, es una aproximación y es al azar
11.	No, porque cuando se hace al azar nunca hay una respuesta correcta
12.	No, porque no puedes analizar correctamente la pregunta
13.	Sí, porque es un experimento aleatorio
14.	Sí, porque hay una canica para cada respuesta
15.	Sí, porque se puede saber si es correcta o no
16.	Sí, porque las canicas simulan ser los incisos y tienen una probabilidad igual
17.	Sin Respuesta
18.	Sin Respuesta
19.	Sí, porque las canicas representan cada opción
20.	Sí, porque salen al azar y simulan bien las respuestas
21.	Sin Respuesta
22.	Sí, porque se está representando un proceso pero de otro modo
23.	Pienso que es más probable que sea una incorrecta a correcta, es un quizás
24.	Sí, porque ofrece el mismo número de opciones

25.	Puede ser sí
26.	Sí
27.	Tal vez sí pueda dar un resultado satisfactorio, pero hay más probabilidades de que sea incorrecta
28.	Sí, porque es un experimento al azar
29.	Sin Respuesta
30.	Sí, porque tiene el mismo índice de probabilidad
31.	No, porque sigue siendo al azar
32.	No, porque depende de los conocimientos del grupo
33.	No
34.	Si porque se repitió muchas veces

2. ¿Crees que hay una respuesta única para cada pregunta? Si respondes "Sí" ¿Cuáles son esas respuestas únicas? Si respondes "No", explica las razones

1.	No, porque es al azar y puede ser cualquier respuesta
2.	Sí, porque sólo una es correcta
3.	Sí, porque si haces el experimento muchísimas veces, tal vez haya un patrón No, porque el experimento anterior me demuestra que es pura casualidad
4.	No, porque es al azar
5.	Sí verde es correcta, negro es incorrecta
6.	Porque es al azar
7.	No, porque es un experimento que es aleatorio que no puede ofrecer el mismo resultado por ser aleatorio
8.	No, porque es al azar y puede variar
9.	No, porque es un experimento que no puede ofrecer el mismo resultado por ser aleatorio
10.	No, porque es al azar e igual puede variar
11.	No hay una respuesta única porque es al azar
12.	Sí, porque o sale un color u otro
13.	Sí, porque solo una es verdadera
14.	Verde = correcta, negro = incorrecto
15.	Correcto, incorrecto, incorrecto
16.	No, varían los resultados
17.	Yo creo que sí, sería el mismo caso del ejercicio de las monedas.
18.	No, porque la probabilidad de correcto es menos que la de incorrecto
19.	No
20.	No, porque salen al azar y eso quiere decir que van a variar
21.	Sí, porque son tres opciones y es la misma probabilidad de obtener una respuesta correcta
22.	No, pueden varían porque es una prueba al azar
23.	No, hay más posibilidades
24.	Sí, porque es cada color para cada respuesta
25.	No, pueden salir muchas respuestas
26.	Verde, negra, negra
27.	No, porque hay muchas posibilidades
28.	No, porque varia la cantidad a quien se le aplica la prueba
29.	Sí, sólo una es la correcta, los demás son incisos, más solo una es correcta
30.	No, se acercarían a la probabilidad, pero serían diferentes
31.	No, porque sigue siendo incorrecta
32.	No, depende de los aprendizajes del grupo
33.	No, por las variables
34.	No, porque puede cambiar según las frecuencias

3. Con la información que obtuviste de tu simulación responde:
a) ¿Cuántos alumnos contestaron incorrectamente todas las preguntas?
b) ¿Cuántos alumnos contestaron correctamente solo una pregunta?
c) ¿Cuántos contestaron correctamente exactamente dos preguntas?
d) ¿Cuántos alumnos contestaron correctamente todas las preguntas?

1.	a) 12, b) 23, c) 12, d)1
2.	a) 14, b) 24, c) 8, d) 2
3.	a) 13, b) 19, c) 15, d) 1
4.	a) 16/48, b) 21/48, c) 11/48, d) 0/48
5.	a) 20/48, b) 15/48, c) 10/48, d) 3/48
6.	a) 16/48, b) 21/48, c) 11/48, d) 0/48

7.	a) 16, b) 17, c) 12, d) 3
8.	a) 8, b) 24, c) 14, d) 2
9.	a) 16, b) 17, c) 12, d) 3
10.	a) 8, b) 24, c) 14, d) 2
11.	a) 12, b) 23, c) 12, d)1
12.	a) 16, b) 20, c) 8, d) 4
13.	a) 14, b) 24, c) 8, d) 2
14.	a) 20/48, b) 15/48, c) 10/48, d) 3/48
15.	a) 12, b) 22, c) 11, d) 3
16.	a) 20, b) 23, c) 4, d) 1
17.	a) 12, b) 20, c) 13, d) 3
18.	a) 12, b) 19, c) 13, d) 4
19.	a) 20, b) 23, c) 4, d) 1
20.	a) 16, b) 19, c) 11, d) 2
21.	a) 20, b) 20, c) 6, d) 2
22.	a) 9, b) 29, c) 7, d) 3
23.	a) 13, b) 23, c) 12, d) 0
24.	a) 20, b) 20, c) 6, d) 2
25.	a) 17, b) 16, c) 13, d) 2
26.	a) 17, b) 16, c) 13, d) 2
27.	a) 13, b) 23, c) 12, d) 0
28.	a) 22, b) 13, c) 11, d) 2
29.	a) 22, b) 13, c) 11, d) 2
30.	a) 13, b) 23, c) 12, d) 0
31.	a) 19, b) 15, c) 12, d) 2
32.	a) 15, b) 22, c) 9, d) 2
33.	a) 17, b) 16, c) 13, d) 2
34.	a) 14, b) 20, c) 9, d) 2

4. Con base en lo anterior, completa la siguiente tabla:

1.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	12	25%
1	23	47.9%
2	12	25%
3	1	2.1%
Suma	48	100%

2.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	14	29.17%
1	24	50%
2	8	16.76%
3	2	4.17%
Suma	48	100%

3.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	13	0.270
1	19	0.390
2	15	0.3125
3	1	0.0208
Suma	48	1

4.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	16	16

1	21	37
2	11	48
3	0	48
Suma	48	

5.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	20	41.66
1	15	31.25
2	10	20.83
3	3	6.25
Suma	48	99.99

6.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	16	16
1	21	37
2	11	48
3	0	48
Suma	48	

7.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	16	33.33%
1	17	35.41
2	12	25%
3	3	6.25%
Suma	48	99.94%

8.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	8	%16.66
1	24	%50
2	14	%29.16
3	2	%4.16
Suma	48	%99.98

9.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	16	33.33%
1	17	35.41%
2	12	25%
3	3	6.25%
Suma	48	99.99%

10.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	8	16.66%
1	24	50%
2	14	29.16%
3	2	4.16%
Suma	48	99.98%

11.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	12	25%
1	23	47.9%
2	12	25%
3	1	2.1%
Suma	48	100%

12.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa

0	16	33.33%
1	20	41.66%
2	8	16.66%
3	4	8.33%
Suma	48	99.98%

13.

Valores de x	**Frecuencia**	**Frecuencia Relativa**
0	14	29.17 %
1	24	50 %
2	8	16.66 %
3	2	4.17%
Suma	48	100%

14.

Valores de x	**Frecuencia**	**Frecuencia Relativa**
0	20	41.66 %
1	15	31.25 %
2	10	20.83 %
3	3	6.25%
Suma	48	99.9%

15.

Valores de x	**Frecuencia**	**Frecuencia Relativa**
0	12	25 %
1	22	46 %
2	11	23 %
3	3	6 %
Suma	48	100 %

16.

Valores de x	**Frecuencia**	**Frecuencia Relativa**
0	20	41.67%
1	23	47.92%
2	4	8.3%
3	1	2.1%
Suma	48	99.99%

17.

Valores de x	**Frecuencia**	**Frecuencia Relativa**
0	12	
1	20	
2	13	
3	3	
Suma	48	

18.

Valores de x	**Frecuencia**	**Frecuencia Relativa**
0	12	0.25%
1	19	0.39%
2	13	0.270%
3	4	0.083%
Suma	48	0.99%

19.

Valores de x	**Frecuencia**	**Frecuencia Relativa**
0	20	41.67%
1	23	47.92%
2	4	8.3%
3	1	2.1%
Suma	48	99.99%

20.

Valores de x	**Frecuencia**	**Frecuencia Relativa**
0	12	0.25
1	19	0.39

2	11	0.22
3	2	0.04
Suma	48	0.9

21.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	20	20
1	20	40
2	6	46
3	2	48
Suma	48	----

22.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	9	9
1	29	38
2	7	45
3	3	48
Suma	48	

23.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	13	27.1%
1	23	47.9%
2	12	25%
3	0	0%
Suma	48	99.2%

24.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	20	20
1	20	40
2	6	46
3	2	48
Suma	48	

25.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	17	35.41 %
1	16	33.33 %
2	13	27.8 %
3	2	4.1 %
Suma	48	100 %

26.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	17	35.42 %
1	16	33.33 %
2	13	27.08 %
3	2	4.1 %
Suma	48	100 %

27.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	13	27.1 %
1	23	47.9 %
2	12	25 %
3	0	0 %
Suma	48	99.2 %

28.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	22	22
1	13	35
2	11	46
3	2	48

Suma	48	

29.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	22	22
1	13	35
2	11	46
3	2	48
Suma	48	

30.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	13	27.1%
1	23	47.9%
2	12	25%
3	0	0%
Suma	48	99.2%

31.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	19	19
1	15	34
2	12	46
3	2	48
Suma	48	

32.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	15	31.25
1	22	45.84
2	9	18.75
3	2	4.17
Suma	48	100%

33.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	17	35.41%
1	16	33.33%
2	13	27.08%
3	2	4.1%
Suma	48	100%

34.

Valores de x	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0	14	31.1
1	20	22.2
2	9	20
3	2	4
Suma	35	100

5. a) ¿Qué valores de la variable son los menos frecuentes?
b) ¿Qué valores de la variable son los más frecuentes?
c) ¿Crees que lo anterior ocurra en general o que es sólo casualidad?
d) Si ocurre en general ¿Por qué crees que eso pase?
e) Si ocurre por casualidad, explica.

1.	a) Sólo 3 b) El de 1 d) En general, porque es el azar y no hay como tal una forma de saber si es o no correcto
2.	a) Son los valores 2 y 3 b) cero, 0 y 1 d) Ocurre de forma general, porque se observó cierta relación entre algunos valores
3.	a) El 3 b) El 1 y el 2 c) Pues no sé, se tendrían que hacer más experimentos
4.	a) 3

	b) 1 c) En general, porque solo una es la respuesta correcta de las 3
5.	a) x =2, x = 3 b) x = 0, x = 1 c) Casualidad, porque se necesitan hacer más pruebas para determinarlo
6.	a) 3 todas correctas b) 1 d) En general, porque como son 3 respuestas y solo una correcta es más fácil que se equivoque
7.	a) x = 3 b) x = 1 d) En general, porque en experimentos aleatorios tiende a tener el mismo resultado
8.	a) El 0 y 3 b) El 1 y 2 d) En general, porque no tiene la misma probabilidad
9.	a) 3 b) 1 d) En general, porque en experimentos aleatorios tiende a tener el mismo resultado
10.	a) Otra vez el 0 y el 3 b) Otra vez el 1 y el 2 d) En general, porque no tiene la misma probabilidad
11.	a) Tres b) Uno d) En general, por ser al azar estos son más posibles.
12.	a) 2 y 3 b) 0 y 1 c) Porque difícilmente contestas todas buenas o todas malas porque hay 1/3 de que obtengas buenas
13.	a) 2 y 3 b) 0 y 1 d) En general, porque aunque repitieras el experimento sacarías más o y 1
14.	a) x = 2, x = 3 b) x = 0, x = 1 c) Sólo por casualidad, porque se necesitan hacer muchas pruebas para determinar
15.	a) Las tres correctas b) Al menos una correcta c) Casualidad, ya porque el azar puede ser que tengas dos o una buena mínimo
16.	a) Que responda todas correctamente b) Que responda una correctamente c) Casualidad, porque varían los resultados
17.	a) Que tengan 3 respuestas correctas b) Una respuesta correcta c) Pues yo creo que es casualidad, porque depende de la suerte
18.	a) Que salgan las tres correctas b) Los valores 0 y 1 d) En general. Pienso que en general, porque hay más probabilidad de incorrecto que de correcto
19.	a) Las 3 respuestas correctas b) Que responda una correctamente c) Casualidad, porque varían los resultados de cada experimento
20.	a) 3 b) 1 c) Ambas, ocurre en general porque son datos aproximados y ocurre por casualidad porque el azar es por casualidad
21.	a) Las 3 respuestas correctas b) Las 0 y 1 respuestas correctas d) Que ocurra en general, porque es posible que pase
22.	a) 0 b) 1 c) Casualidad, porque es una prueba de azar y pueden salir distintos resultados
23.	a) 0 y 3 b) 1 y 2 c) Casualidad, porque es al azar
24.	a) Las 3 respuestas correctas

	b) Las 0 y 1 respuestas correctas d) Que ocurra en general, porque es posible que pase
25.	a) El 3 b) Los que no responden ninguna bien d) General, porque muchos reprobaron
26.	a) 3 b) 0, 1, 2 d) En general, porque la probabilidad así lo dice
27.	a) 3 y 0 b) 1 y 2 c)Casualidad, porque hay más posibilidad de que saliera incorrecto
28.	a) Los valores de x en 3 b) Los valores de x en 0 c) Casualidad, porque es un juego al azar
29.	a) Los valores de x en 3 b) Los valores de x en 0 c) Casualidad, los resultados son al azar
30.	a) 3 y 2 b) 1 y 0 c) Es casualidad, porque depende de la probabilidad del evento
31.	a) El 2 y 3 b) 0 y 1 c) Casualidad, porque son eventos al azar
32.	a) 2 y 3 respuestas correctas b) 0 y 1 respuestas correctas d) General, porque hay más probabilidad de equivocarse
33.	a) 2 y 3 b) 0 y 1 d) General, por la posibilidad de error
34.	a) 3, 1 b) 0, 1 d) En general, porque hay más incorrectas

6. En la siguiente tabla anota la probabilidad de obtener cada valor, explica cómo calculaste cada valor

1.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	12/48	23/48	12/48	1/48	1

Gracias a los resultados del experimento

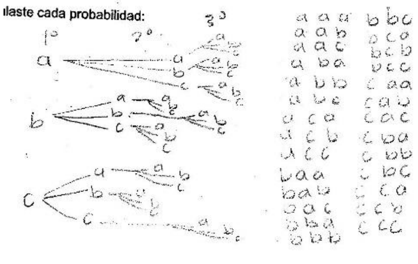
2.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	0.29	0.6	0.17	0.6	1

Como resultados de la división de casos favorables entre casos probables

3.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	8/27	11/27	7/27	1/27	1



4.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	16/48	21/48	11/48	0/48	1

Realizando el experimento

5.

Valores de X	0	1	2	3	Suma

Probabilidad	0.416	0.312	0.208	0.062	0.998

Con la fórmula de la probabilidad clásica

6.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	16/48	21/48	11/48	0/48	1

Realizando el experimento

7.

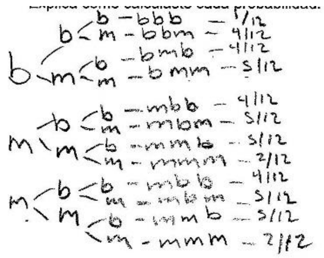
Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	16/48	17/48	12/48	3/48	48/48= 1

Sin Respuesta

8.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	1/12	5/12	4/12	2/12	12/12 = 1

Con un diagrama de árbol



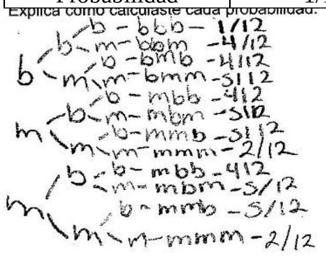
9.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	16/48	17/48	12/48	3/48	1

Sin Respuesta

10.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	1/12	5/12	4/12	2/12	1



11.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	12/48	23/48	12/48	1/48	1

Con los resultados obtenidos se calculo

12.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	16/48	20/48	8/48	4/48	48/48

La frecuencia de los valores de “x” la dividimos entre el total de la misma

13.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	0.29	0.5	0.17	0.04	1

Casos favorables entre casos totales

14.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	0.416	0.312	0.208	0.062	0.998

Con la fórmula de la probabilidad clásica

15.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	12/48	22/48	11/48	3/48	48/48

Con la frecuencia sobre el total

16.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	0.42	0.48	0.08	0.02	1

Dividiendo los casos favorables entre el total de las pruebas realizadas

17.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	12/48	20/48	13/48	3/48	48/48

Basándome en el resultado de números obtenidos

18.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	8/27	12/27	6/27	1/27	27/27 =1

Por medio de un diagrama de árbol

19.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	0.42	0.48	0.08	0.02	1

Dividiendo los casos favorables entre los casos totales

20.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	16/48	19/48	11/48	2/48	1

Con el número de casos favorables, sobre todos los casos

21. Sin Respuesta

22.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	9	29	7	3	48

Con los valores de las frecuencias

23.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	27.1%	47.9%	25%	0%	99.2%

Con la frecuencia relativa

24. Sin Respuesta

25.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	35.41 %	33.33%	27.8 %	4.1 %	100 %

Por regla de 3

26.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	35.42%	33.3 %	27.07 %	4.1 %	100 %

Con regla de 3

27.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	27 %	47.9 %	25 %	0 %	

Como lo dice la tabla

28.

Valores de X	0	1	2	3	Suma

Probabilidad	0.458	0.270	0.229	0.041	1

La frecuencia entre el valor absoluto

29.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	0.458	0.270	0.229	0.041	1

Dividiendo la frecuencia en cada caso entre el valor absoluto

30.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	13/27	1/3	1/9	1/27	1

0.- $(1/3)^3 = 1/27$ 1.- $(1/3) = 1/3$ 2.- $(1/3)^2 = 1/9$ 3.- $(1/3)^3 = 1/27$

31.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	0.40	0.31	0.25	0.041	100

Dividiendo el número de casos favorables entre el número total de casos

32.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	31.25%	45.84%	18.75%	4.17%	100%

Sin Respuesta

33.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	35.4%	33.33%	27.08%	4.1%	100%

Regla de 3

34.

Valores de X	0	1	2	3	Suma
Probabilidad	14/35	10/35	9/45	2/45	1

Porque se divide la frecuencia con los casos totales

APENDICE F. Resultados obtenidos en el Cuestionario 3

Experimento aleatorio 1. Un examen de opción múltiple consta de tres preguntas; cada pregunta tiene dos opciones de respuesta, una de las cuales es la correcta. Un estudiante responde cada pregunta eligiendo al azar una de las opciones. Se observan las opciones que elige

1. (Simulación con fathom) ¿Consideras que este proceso corresponde o es semejante al que se aplicó en la simulación física para responder el examen?

1.	Si, aunque creo que esto es más preciso
2.	Sí, porque es de forma aleatoria
3.	Sí, pero le das los datos a una computadora
4.	Sin Respuesta
5.	Sí, porque cada que varía cambian los valores al igual que en la simulación física, ya que no siempre salían los mimos valores
6.	Sí porque es aleatorio
7.	Sí es lo mismo
8.	Pues sí, porque son al azar y son variables
9.	Sí, pero ahora es en computadora
10.	Sí, porque son al azar
11.	Sí, porque los resultados se dan de una forma aleatoria
12.	Sí, porque se registran los datos más fácilmente
13.	Sí porque se hizo algo parecido a la representación
14.	Sí, porque hay mucha variabilidad
15.	Si, porque por medio de la computadora dan los resultados al azar de las respuestas
16.	Sí, porque se usó el mismo método para llegar al resultado
17.	Sí, porque se aplica el mismo método
18.	Sin Respuesta
19.	Sin Respuesta
20.	Sin Respuesta
21.	Si, porque por medio de la computadora dan los resultados al azar de las respuestas
22.	Sí, porque se usó el mismo método para llegar al resultado
23.	Sí, porque se aplica el mismo método
24.	Sí, te facilita mucho más hacer las cosas
25.	Sí, porque estamos checando que estudiantes se equivocaron
26.	Sí, porque es la probabilidad
27.	Sí, porque son valores aleatorios
28.	Sí, de una forma muy fácil y práctica
29.	Sí es similar, ya que se califica como correcto e incorrecto
30.	Sí, porque actúa aleatoriamente con los datos dados
31.	Sí, porque los resultados son totalmente aleatorios
32.	No, ya que en la prueba física la mayoría fue 0 respuestas correctas
33.	Sí, porque todo es entre posibilidades, mis resultados no son iguales al de los demás
34.	Sí, porque se cuentan las correcta e incorrectas

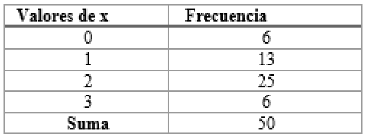
2. Con la información que obtuviste de observar el gráfico para 50 casos:
a) ¿Cuántos alumnos contestaron incorrectamente todas las preguntas?
b) ¿Cuántos alumnos contestaron correctamente solo una pregunta?
c) ¿Cuántos contestaron correctamente exactamente dos preguntas?
d) ¿Cuántos alumnos contestaron correctamente todas las preguntas?

1.	a) 6, b) 13, c) 25, d) 6
2.	a) 5, b) 20, c) 20, d) 5
3.	a) 8, b) 13, c) 18, d) 11
4.	a) 7, b) 21, c) 12, d) 10
5.	a) 8, b) 13, c) 20, d) 9

6.	a) 4, b) 17, c) 21, d) 8
7.	a) 8, b) 15, c) 19, d) 8
8.	a) 10%, b) 40%, c) 42%, d) 8%
9.	a) 20%, b) 24%, c) 33%, d) 22%
10.	a) 5, b) 22, c) 14, d) 9
11.	a) 1, b) 23, c) 18, d) 8
12.	a) 11, b) 17, c) 19, d) 3
13.	a) 6, b) 23, c) 14, d) 7
14.	a) 6, b) 13, c) 25, d) 6
15.	a) 300, b) 455, c) 195, d) 50
16.	a) 6, b) 21, c) 11, d) 12
17.	a) Como 125 alumnos, b) 350 alumnos, c) 450 alumnos, d) 125 alumnos
18.	a) 5, b) 16, c) 18, d) 11
19.	a) 4, b) 19, c) 22, d) 5
20.	a) 6, b) 15, c) 21, d) 8
21.	a) 6, b) 17, c) 22, d) 5
22.	a) 10, b) 18, c) 15, d) 7
23.	a) 6, b) 21, c) 17, d) 6
24.	a) 4, b) 14, c) 26, d) 6
25.	a) 6, b) 21, c) 22, d) 1
26.	a) 7, b) 17, c) 16, d) 10
27.	a) 9, b) 31, c) 10, d) 0
28.	a) 6, b) 14, c) 22, d) 8
29.	a) 5, b) 15, c) 25, d) 5
30.	a) 4, b) 20, c) 18, d) 8
31.	a) 7, b) 18, c) 20, d) 5
32.	a) 7, b) 16, c) 17, d) 10
33.	a) 7, b) 21, c) 16, d) 6
34.	a) 7, b) 14, c) 22, d) 7

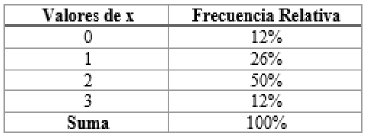
3. Completa las siguientes tablas con la información para 50 casos en las de la izquierda y 1000 en las de la derecha, observa que en las segundas tablas se piden frecuencias relativas:

1.

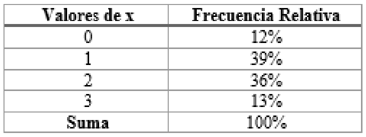


Valores de x	Frecuencia
0	6
1	13
2	25
3	6
Suma	50

Valores de x	Frecuencia
0	120
1	390
2	360
3	130
Suma	1000



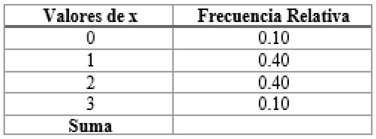
Valores de x	Frecuencia Relativa
0	12%
1	26%
2	50%
3	12%
Suma	100%



Valores de x	Frecuencia Relativa
0	12%
1	39%
2	36%
3	13%
Suma	100%

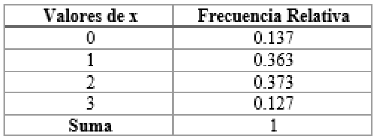
2.

Valores de x	Frecuencia
0	5
1	20
2	20
3	5
Suma	50



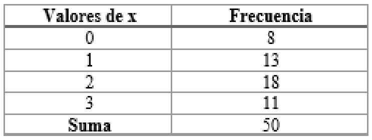
Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.10
1	0.40
2	0.40
3	0.10
Suma	

Valores de x	Frecuencia
0	137
1	363
2	373
3	127
Suma	1000

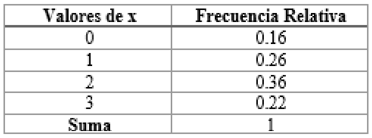


Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.137
1	0.363
2	0.373
3	0.127
Suma	1

3.

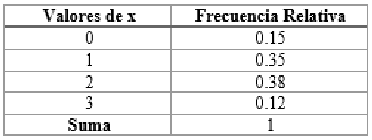


Valores de x	Frecuencia
0	8
1	13
2	18
3	11
Suma	50



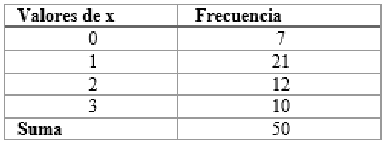
Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.16
1	0.26
2	0.36
3	0.22
Suma	1

Valores de x	Frecuencia
0	150
1	350
2	380
3	120
Suma	1000

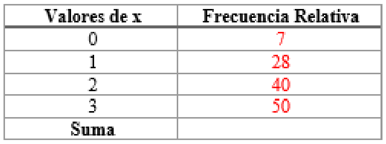


Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.15
1	0.35
2	0.38
3	0.12
Suma	1

4.

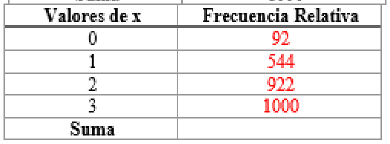


Valores de x	Frecuencia
0	7
1	21
2	12
3	10
Suma	50



Valores de x	Frecuencia Relativa
0	7
1	28
2	40
3	50
Suma	

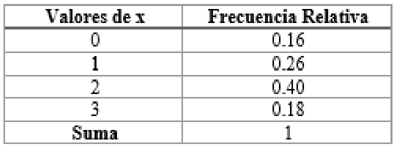
Valores de x	Frecuencia
0	92
1	452
2	378
3	78
Suma	1000



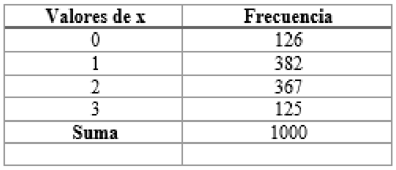
Valores de x	Frecuencia Relativa
0	92
1	544
2	922
3	1000
Suma	

5.

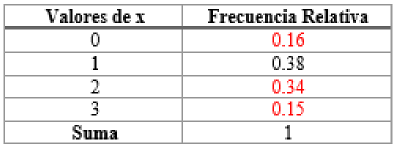
Valores de x	Frecuencia
0	8
1	13
2	20
3	9
Suma	50



Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.16
1	0.26
2	0.40
3	0.18
Suma	1



Valores de x	Frecuencia
0	126
1	382
2	367
3	125
Suma	1000



Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.16
1	0.38
2	0.34
3	0.15
Suma	1

6.

Valores de x	Frecuencia
0	4
1	18
2	21
3	7
Suma	50

Valores de x	Frecuencia
0	123
1	376
2	370
3	131
Suma	1000

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.08
1	0.36
2	0.42
3	0.14
Suma	1

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	1.23
1	0.376
2	0.37
3	0.131
Suma	1

7.

Valores de x	Frecuencia
0	8
1	15
2	19
3	8
Suma	50

Valores de x	Frecuencia
0	124
1	363
2	384
3	129
Suma	1000

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	16 %
1	30 %
2	38 %
3	16 %
Suma	100%

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	12.4 %
1	36.3 %
2	38.4 %
3	12.9 %
Suma	100 %

8.

Valores de x	Frecuencia
0	5
1	20
2	21
3	4
Suma	50

Valores de x	Frecuencia
0	110
1	350
2	410
3	130
Suma	1000

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	10%
1	40%
2	42%
3	8%
Suma	100%

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	11%
1	35%
2	41%
3	13%
Suma	100%

9.

Valores de x	Frecuencia
0	10
1	12
2	17
3	11
Suma	50

Valores de x	Frecuencia
0	175
1	360
2	310
3	155
Suma	1000

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.20
1	0.24
2	0.34
3	0.22
Suma	1

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.11
1	0.36
2	0.33
3	0.19
Suma	0.99

10.

Valores de x	Frecuencia
0	5
1	22
2	14
3	9
Suma	50

Valores de x	Frecuencia
0	120
1	368
2	370
3	141
Suma	999

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.10
1	0.43
2	0.28
3	0.18
Suma	0.99

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.12
1	0.37
2	0.37
3	0.14
Suma	1

11.

Valores de x	Frecuencia
0	1
1	23
2	18
3	8
Suma	50

Valores de x	Frecuencia
0	117
1	403
2	355
3	125
Suma	

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	2%
1	46%
2	36%
3	16%
Suma	

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	11.7
1	40.3
2	35.5
3	12.5
Suma	100

12.

Valores de x	Frecuencia
0	11
1	17
2	19
3	3
Suma	50

Valores de x	Frecuencia
0	124
1	378
2	369
3	129
Suma	1000

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.22
1	0.34
2	0.38
3	0.06
Suma	1

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.124
1	0.378
2	0.369
3	0.129
Suma	1

13.

Valores de x	Frecuencia
0	6
1	23
2	14
3	7
Suma	50

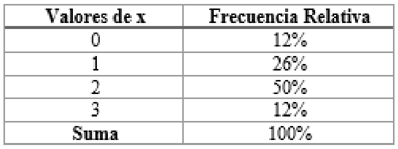
Valores de x	Frecuencia
0	125
1	336
2	418
3	121
Suma	1000

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	.12 %
1	.45 %
2	.28 %
3	.15 %
Suma	100 %

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	.12 %
1	.32 %
2	.42 %
3	.14 %
Suma	100 %

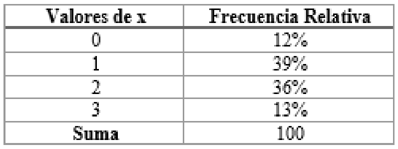
14.

Valores de x	Frecuencia
0	6
1	13
2	25
3	6
Suma	50



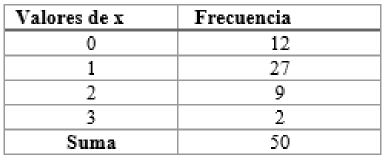
Valores de x	Frecuencia Relativa
0	12%
1	26%
2	50%
3	12%
Suma	100%

Valores de x	Frecuencia
0	120
1	390
2	360
3	130
Suma	1000

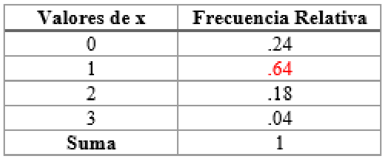


Valores de x	Frecuencia Relativa
0	12%
1	39%
2	36%
3	13%
Suma	100

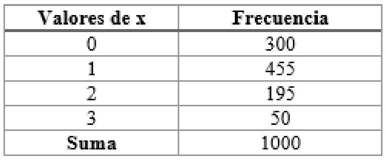
15.



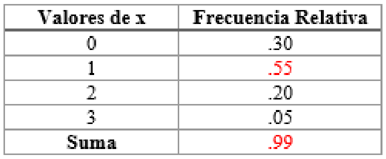
Valores de x	Frecuencia
0	12
1	27
2	9
3	2
Suma	50



Valores de x	Frecuencia Relativa
0	.24
1	.64
2	.18
3	.04
Suma	1

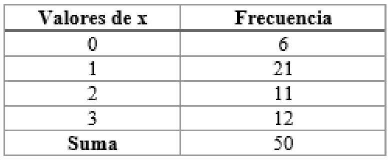


Valores de x	Frecuencia
0	300
1	455
2	195
3	50
Suma	1000

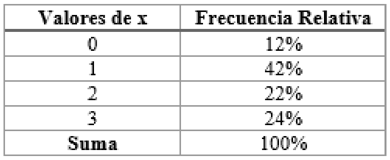


Valores de x	Frecuencia Relativa
0	.30
1	.55
2	.20
3	.05
Suma	.99

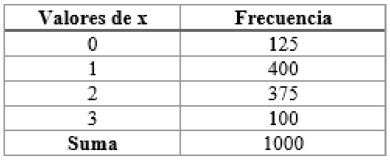
16.



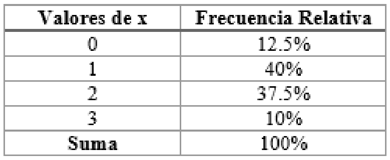
Valores de x	Frecuencia
0	6
1	21
2	11
3	12
Suma	50



Valores de x	Frecuencia Relativa
0	12%
1	42%
2	22%
3	24%
Suma	100%

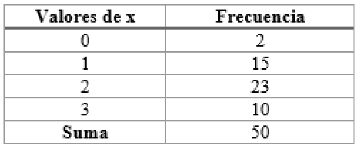


Valores de x	Frecuencia
0	125
1	400
2	375
3	100
Suma	1000

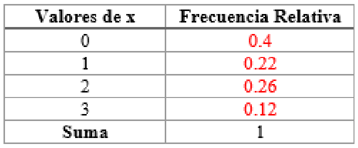


Valores de x	Frecuencia Relativa
0	12.5%
1	40%
2	37.5%
3	10%
Suma	100%

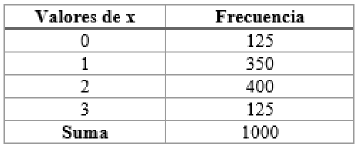
17.



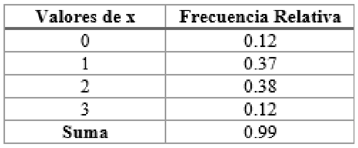
Valores de x	Frecuencia
0	2
1	15
2	23
3	10
Suma	50



Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.4
1	0.22
2	0.26
3	0.12
Suma	1



Valores de x	Frecuencia
0	125
1	350
2	400
3	125
Suma	1000



Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.12
1	0.37
2	0.38
3	0.12
Suma	0.99

18.

Valores de x	Frecuencia
0	5
1	16
2	18
3	11
Suma	50

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.10%
1	0.32%
2	0.37%
3	0.20%
Suma	100%

Valores de x	Frecuencia
0	130
1	380
2	370
3	110
Suma	1000

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.13%
1	0.38%
2	0.37%
3	0.11%
Suma	100%

19.

Valores de x	Frecuencia
0	4
1	19
2	22
3	5
Suma	50

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	8%
1	38%
2	44%
3	10%
Suma	100%

Valores de x	Frecuencia
0	125
1	350
2	400
3	125
Suma	1000

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	12.5%
1	35%
2	40%
3	12.5%
Suma	100%

20.

Valores de x	Frecuencia
0	6
1	15
2	21
3	8
Suma	50

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.12
1	0.30
2	0.42
3	0.15
Suma	0.99

Valores de x	Frecuencia
0	150
1	351
2	349
3	150
Suma	1000

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.15
1	0.36
2	0.34
3	0.15
Suma	1

21.

Valores de x	Frecuencia
0	6
1	17
2	22
3	5
Suma	50

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	.2956
1	1.423
2	2.549
3	3.676
Suma	7.9936

Valores de x	Frecuencia
0	140
1	376
2	376
3	108
Suma	1000

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	.5000
1	2.500
2	2.500
3	3.500
Suma	9

22.

Valores de x	Frecuencia
0	10
1	18
2	15
3	7
Suma	50

Valores de x	Frecuencia
0	114
1	398
2	360
3	128
Suma	1000

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.20
1	0.35
2	0.32
3	0.12
Suma	1.0

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.12
1	0.40
2	0.37
3	0.13
Suma	1.2

23.

Valores de x	Frecuencia
0	6
1	21
2	17
3	6
Suma	50

Valores de x	Frecuencia
0	125
1	396
2	351
3	128
Suma	1000

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.11
1	0.44
2	0.34
3	0.12
Suma	1

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.13
1	0.38
2	0.35
3	0.13
Suma	

24.

Valores de x	Frecuencia
0	4
1	14
2	26
3	6
Suma	50

Valores de x	Frecuencia
0	122
1	369
2	374
3	135
Suma	1000

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.8
1	0.25
2	0.5
3	0.11
Suma	

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.11
1	0.36
2	0.37
3	0.14
Suma	

25.

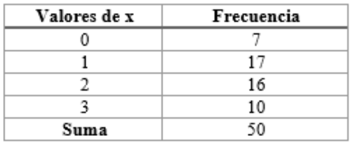
Valores de x	Frecuencia
0	6
1	21
2	22
3	1
Suma	50

Valores de x	Frecuencia
0	119
1	410
2	347
3	124
Suma	1000

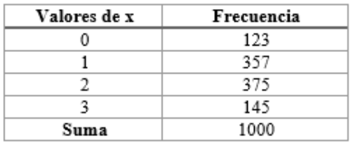
Valores de x	Frecuencia Relativa
0	12 %
1	42 %
2	44 %
3	2 %
Suma	100%

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	11.9 %
1	41 %
2	34.7 %
3	12.4 %
Suma	100%

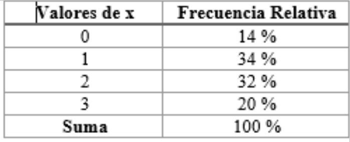
26.



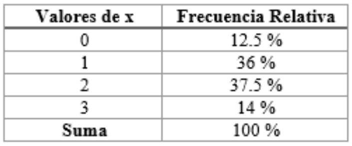
Valores de x	Frecuencia
0	7
1	17
2	16
3	10
Suma	50



Valores de x	Frecuencia
0	123
1	357
2	375
3	145
Suma	1000

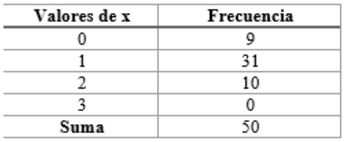


Valores de x	Frecuencia Relativa
0	14 %
1	34 %
2	32 %
3	20 %
Suma	100 %

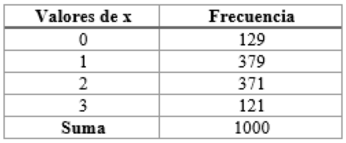


Valores de x	Frecuencia Relativa
0	12.5 %
1	36 %
2	37.5 %
3	14 %
Suma	100 %

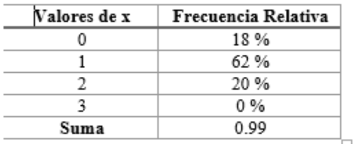
27.



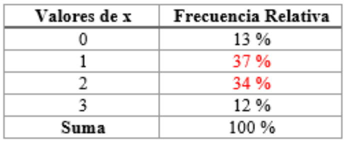
Valores de x	Frecuencia
0	9
1	31
2	10
3	0
Suma	50



Valores de x	Frecuencia
0	129
1	379
2	371
3	121
Suma	1000

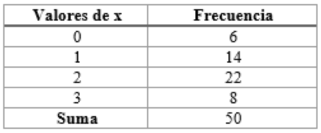


Valores de x	Frecuencia Relativa
0	18 %
1	62 %
2	20 %
3	0 %
Suma	0.99

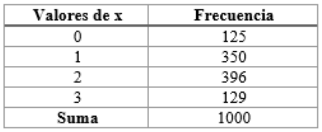


Valores de x	Frecuencia Relativa
0	13 %
1	37 %
2	34 %
3	12 %
Suma	100 %

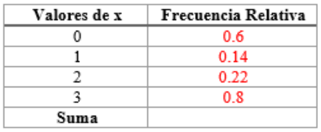
28.



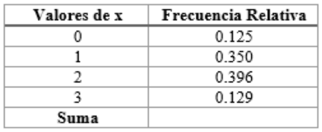
Valores de x	Frecuencia
0	6
1	14
2	22
3	8
Suma	50



Valores de x	Frecuencia
0	125
1	350
2	396
3	129
Suma	1000

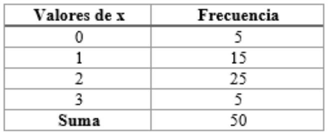


Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.6
1	0.14
2	0.22
3	0.8
Suma	

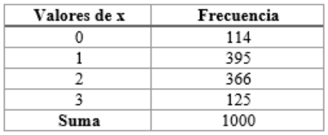


Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.125
1	0.350
2	0.396
3	0.129
Suma	

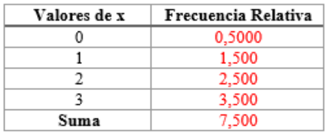
29.



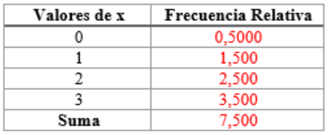
Valores de x	Frecuencia
0	5
1	15
2	25
3	5
Suma	50



Valores de x	Frecuencia
0	114
1	395
2	366
3	125
Suma	1000



Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0,5000
1	1,500
2	2,500
3	3,500
Suma	7,500



Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0,5000
1	1,500
2	2,500
3	3,500
Suma	7,500

30.

Valores de x	Frecuencia
0	4
1	20
2	18
3	8
Suma	50

Valores de x	Frecuencia
0	136
1	360
2	385
3	119
Suma	1000

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	10 %
1	40 %
2	35 %
3	15 %
Suma	100 %

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	13 %
1	36 %
2	37 %
3	14 %
Suma	

31.

Valores de x	Frecuencia
0	9
1	18
2	16
3	7
Suma	50

Valores de x	Frecuencia
0	136
1	360
2	389
3	115
Suma	1000

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.12
1	0.36
2	0.40
3	0.11
Suma	1.00

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.136
1	0.360
2	0.389
3	0.115
Suma	1

32.

Valores de x	Frecuencia
0	7
1	16
2	17
3	10
Suma	50

Valores de x	Frecuencia
0	126
1	352
2	416
3	106
Suma	1000

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	14 %
1	32 %
2	34 %
3	20 %
Suma	100 %

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	12.5 %
1	35 %
2	42.5 %
3	10 %
Suma	100 %

33.

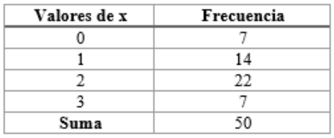
Valores de x	Frecuencia
0	7
1	21
2	16
3	6
Suma	50

Valores de x	Frecuencia
0	126
1	371
2	384
3	119
Suma	1000

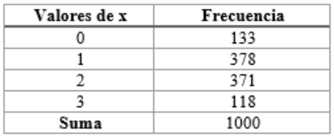
Valores de x	Frecuencia Relativa
0	.14 %
1	.42 %
2	.32 %
3	.12 %
Suma	100 %

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	.125 %
1	.37 %
2	.38 %
3	.12 %
Suma	100 %

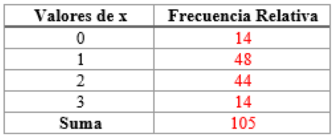
34.



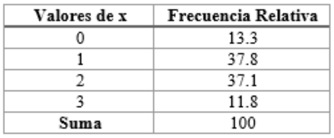
Valores de x	Frecuencia
0	7
1	14
2	22
3	7
Suma	50



Valores de x	Frecuencia
0	133
1	378
2	371
3	118
Suma	1000



Valores de x	Frecuencia Relativa
0	14
1	48
2	44
3	14
Suma	105



Valores de x	Frecuencia Relativa
0	13.3
1	37.8
2	37.1
3	11.8
Suma	100

4. Cuando presionas Ctrl+y, puedes ver la variación de los datos, ¿dónde, de los dos casos que estamos simulando, observas mayor variabilidad?

1.	En los 50 casos
2.	En el primero
3.	En el de 50 alumnos, pero de todas formas el histograma no cambia taaanto
4.	En la situación 1 ya que son menos
5.	En el x = 2 y x = 1
6.	Sí en los datos de 50 alumnos
7.	En el histograma de la situación 1 (50 casos)
8.	En el de 1000
9.	Sin Respuesta
10.	En la de 50 porque son menos datos
11.	En el caso de 50 exámenes
12.	Sí, en los de 50
13.	No, no varía mucho
14.	En el de 50 casos
15.	Sí, hay demasiada variabilidad
16.	En el de 50 casos, ya que es una muestra menor
17.	Sí se observan muchos cambios y hay mucha variabilidad
18.	En la muestra de 50, porque los datos son menos, por lo tanto la muestra es más pequeña
19.	En la muestra de 50, ya que son más pocos
20.	En la primera
21.	Sí,
22.	En el primer caso, el de 50 casos
23.	En los 50 casos
24.	En el primero
25.	Observe mayor variabilidad en la segunda
26.	En la de 50
27.	En los casos de 1 y 2 resultados correctas
28.	En el ejemplo de 50 se puede ver más variabilidad
29.	Sí varían los resultados
30.	En el segundo
31.	En el de 50 personas
32.	La variabilidad es mayor en el de 50 casos
33.	En la de 50 casos
34.	En la de 50

5. Comenta con tus compañeros y respondan: ¿Qué observan en los resultados obtenidos?

1	Entre menos casos mayor variabilidad
2.	Que siempre hay más casos en los que los alumnos contestaron bien dos y una pregunta
3.	Que como sospechaba, si hay un aproximado de los resultados que pueden salir
4.	Sin Respuesta

5.	Varían
6.	Entre mayor cambio, mayor variabilidad
7.	Mientras más grande es el número hay menos variabilidad
8.	Que la probabilidad es diferente cuando hay más estudiantes en el estudio
9.	Son resultados muy variables
10.	Sin Respuesta
11.	En los casos, la mayoría de los alumnos saco entre 1 y dos respuestas
12.	Sin Respuesta
13.	Sin Respuesta
14.	Entre menos casos haya habrá más variabilidad
15.	Son parecidos
16.	Los resultados entre mi compañera y yo son semejantes, se aproximan mucho a los valores.
17.	Son muy parecidos los resultados
18.	Una mayor variabilidad en la muestra pequeña y una menor en la muestra grande
19.	Los resultados obtenidos varían, pero son muy similares
20.	Las variaciones son mayores en 1 y 2 que en 0 y 3, hay menos probabilidad de tener 0 y 3
21	Cuando son 50 alumnos las gráficas se ven con mucha variación y en la muestra de 1000 la variación no es mucha
22.	Que los resultados de la primera gráfica son más variables que el de la segunda
23.	Se ve más variabilidad en los 50 casos, ya que es menor y cambia más
24.	En la primera hubo más errores
25.	Que los resultados más frecuentes son 2 y 1 y uno de los menores es 0
26.	Que en la mayoría sale 1 o 2 correctas
27.	Que los resultados que se obtuvieron fueron diferentes y en las tablas de 1000 no variaba mucho y en la de 50 menos
28.	En la muestra tiene que la mayoría respondieron 2 correctas
29.	La de 1000 varía poco, en cuanto a la de 50 varía mucho
30.	Hay mayor variabilidad en 1000 casos que en 50
31.	Que son muy pocos los que pueden reprobar y el número de alumnos que tienen 2 preguntas correctas es muy alto
32.	Los alumnos tienden a tener 1 ó 2 respuestas correctas y casi no hay reprobados para la muestra de 1000 alumnos. Para la muestra de 50 alumnos, tiende a tener 1, 2 ó 3 respuestas correctas
33.	La mayoría reprueban en 4 de 5 repeticiones con Ctrl + y
34.	Que los aciertos más frecuentes son 2 y 1

Experimento aleatorio 2. Un examen de opción múltiple consta de tres preguntas. Cada pregunta tiene tres opciones una de las cuales es la correcta. Un estudiante responde cada pregunta eligiendo al azar una de las opciones.

1. (Simulación con fathom) ¿Consideras que este proceso corresponde o es semejante al que se aplicó en la simulación física para responder el examen?

1.	Sí, porque igualmente se tomaron respuestas aleatorias
2.	Sí, pero es más preciso
3.	Sí
4.	Sin Respuesta
5.	Sí, porque no está establecido podría arrojarnos diferentes resultados por cada vez que realicemos el procedimiento
6.	Sí, los datos varían mucho
7	Sí, el proceso es demasiado semejante
8.	Sí, porque es al azar y es variable
9.	Sí, pues las distribuciones varían
10.	Sí, porque se hace al azar y además puedes cambiar los casos o las posiciones
11.	Sí, porque son aleatorios
12.	Sí, porque se registran los datos más fácilmente

13.	Sí, porque se tomaron unas variantes similares
14.	Sí, pasa lo mismo
15.	Si porque igual es al azar
16.	Sí es semejante, porque los valores se asemejan
17.	Sin respuesta
18.	Sí, porque igual es una muestra aleatoria
19.	Sí, pero es más rápido
20.	Supongo que sí, son al azar y varían mucho
21.	Sí, porque igualmente se tomaron respuestas aleatorias
22.	Sí, porque se usó el mismo método para llegar a la respuesta
23.	Sí, se ocupa el mismo procedimiento
24.	Sí, es muy similar
25.	Sí, porque las dos muestras son aleatorias, con la única diferencia que es a computadora
26.	Sí, porque es la mayor probabilidad
27	Sí, es muy parecido ya que si fueron valores aleatorios y en el caso de 3 incisos eran muy pocos los que sacaban 3
28.	Sí, es parecido al examen
29.	Sí también por la variación de los 3 resultados, ya que es aleatorio
30.	Sí porque es aleatorio y corresponde al problema
31.	El proceso es el mismo que el físico sólo que más rápido
32.	Sí, puesto que la mayoría tenían una respuesta correcta
33.	Sí, pues los resultados son variados
34.	Sí, porque se hace un experimento aleatorio y la misma probabilidad de correctas e incorrectas

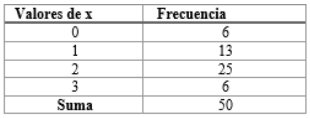
2. Con la información que obtuviste de observar algún gráfico responde:
a) ¿Cuántos alumnos contestaron incorrectamente todas las preguntas?
b) ¿Cuántos alumnos contestaron correctamente solo una pregunta?
c) ¿Cuántos contestaron correctamente exactamente dos preguntas?
d) ¿Cuántos alumnos contestaron correctamente todas las preguntas?

1.	a) 24, b) 18, c) 6, d) 2
2.	a) 137, b) 372, c) 364, d) 127
3.	a) 14, b) 23, c) 12, d) 1
4.	a) 12, b) 19, c) 12, d) 7
5.	a) 13, b) 22, c) 12, d) 3
6.	a) 17, b) 21, c) 9, d) 3
7.	a) 14, b) 24, c) 11, d) 1
8.	a) 26%, b) 44%, c) 24%, d) 6%
9.	a) 30%, b) 43%, c) 24%, d) 5%
10.	a) 14, b) 22, c) 11, d) 3
11.	a) 278, b) 441, c) 234, d) 47
12.	a) 14, b) 23, c) 8, d) 5
13.	a) 13, b) 16, c) 20, d) 1
14.	a) 24, b) 18, c) 6, d) 2
15.	a) 125, b) 375, c) 375, d) 125
16.	a) 16, b) 24, c) 8, d) 2
17.	a) 300, b) 440, c) 200, d) 60
18.	a) 12, b) 27, c) 7, d) 4
19.	a) 21, b) 18, c) 9, d) 2
20.	a) 350, b) 400, c) 200, d) 50
21.	a) 18, b) 21, c) 9, d) 2
22.	a) 295, b) 451, c) 212, d) 42
23.	a) 268, b) 466, c) 232, d) 34
24.	a) 15, b) 26, c) 5, d) 4
25.	a) 12, b) 22, c) 18, d) 2
26.	a) 308, b) 441, c) 211, d) 40
27.	a) 19, b) 17, c) 12, d) 2
28.	a) 320, b) 461, c) 198, d) 21
29.	a) 10, b) 26, c) 12, d) 2
30.	a) 300, b) 433, c) 221, d) 46

31.	a) 300, b) 440, c) 230, d) 30
32.	a) 310, b) 455, c) 200, d) 35
33.	a) 19, b) 20, c) 10, d) 1
34.	a) 10, b) 25, c) 14, d) 1

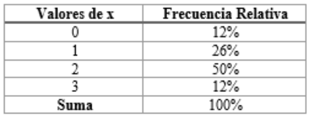
3. Completa las siguientes tablas con la información para 50 casos en las de la izquierda y 1000 en las de la derecha, observa que en las segundas tablas se piden frecuencias relativas:

1.

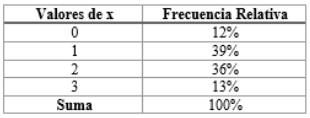


Valores de x	Frecuencia
0	6
1	13
2	25
3	6
Suma	50

Valores de x	Frecuencia
0	120
1	390
2	360
3	130
Suma	1000

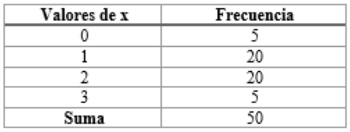


Valores de x	Frecuencia Relativa
0	12%
1	26%
2	50%
3	12%
Suma	100%

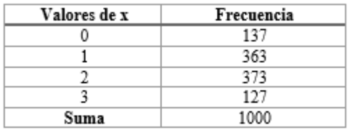


Valores de x	Frecuencia Relativa
0	12%
1	39%
2	36%
3	13%
Suma	100%

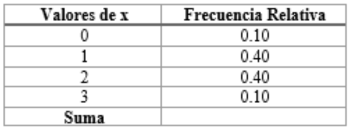
2.



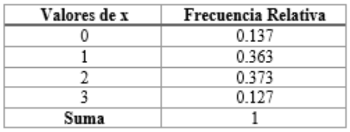
Valores de x	Frecuencia
0	5
1	20
2	20
3	5
Suma	50



Valores de x	Frecuencia
0	137
1	363
2	373
3	127
Suma	1000



Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.10
1	0.40
2	0.40
3	0.10
Suma	

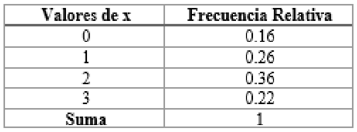


Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.137
1	0.363
2	0.373
3	0.127
Suma	1

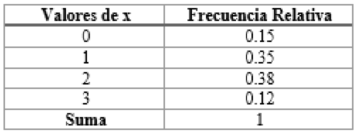
3.

Valores de x	Frecuencia
0	8
1	13
2	18
3	11
Suma	50

Valores de x	Frecuencia
0	150
1	350
2	380
3	120
Suma	1000

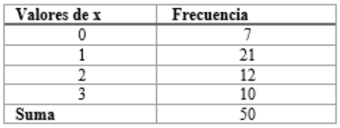


Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.16
1	0.26
2	0.36
3	0.22
Suma	1



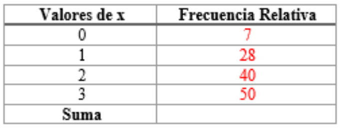
Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.15
1	0.35
2	0.38
3	0.12
Suma	1

4.

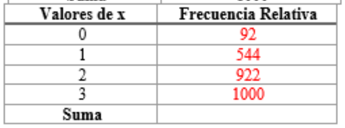


Valores de x	Frecuencia
0	7
1	21
2	12
3	10
Suma	50

Valores de x	Frecuencia
0	92
1	452
2	378
3	78
Suma	1000



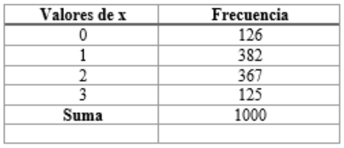
Valores de x	Frecuencia Relativa
0	7
1	28
2	40
3	50
Suma	



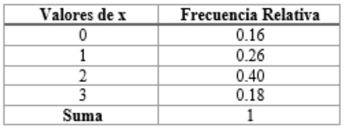
Valores de x	Frecuencia Relativa
0	92
1	544
2	922
3	1000
Suma	

5.

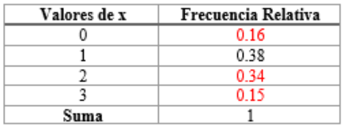
Valores de x	Frecuencia
0	8
1	13
2	20
3	9
Suma	50



Valores de x	Frecuencia
0	126
1	382
2	367
3	125
Suma	1000

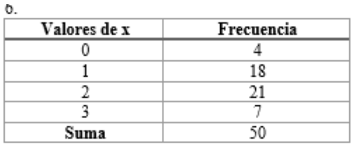


Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.16
1	0.26
2	0.40
3	0.18
Suma	1

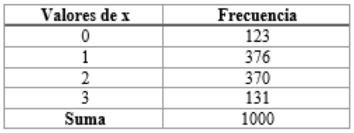


Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.16
1	0.38
2	0.34
3	0.15
Suma	1

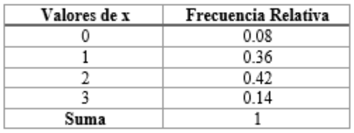
6.



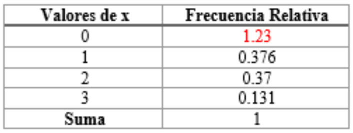
Valores de x	Frecuencia
0	4
1	18
2	21
3	7
Suma	50



Valores de x	Frecuencia
0	123
1	376
2	370
3	131
Suma	1000



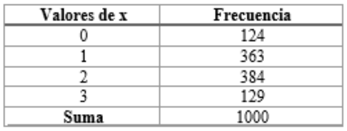
Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.08
1	0.36
2	0.42
3	0.14
Suma	1



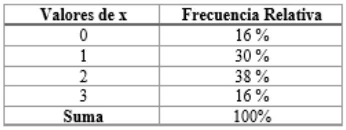
Valores de x	Frecuencia Relativa
0	1.23
1	0.376
2	0.37
3	0.131
Suma	1

7.

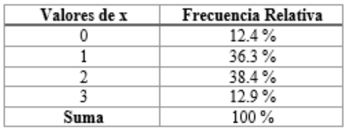
Valores de x	Frecuencia
0	8
1	15
2	19
3	8
Suma	50



Valores de x	Frecuencia
0	124
1	363
2	384
3	129
Suma	1000

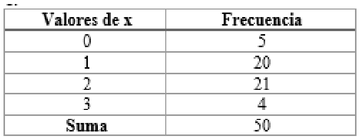


Valores de x	Frecuencia Relativa
0	16 %
1	30 %
2	38 %
3	16 %
Suma	100%



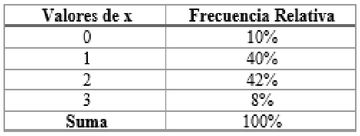
Valores de x	Frecuencia Relativa
0	12.4 %
1	36.3 %
2	38.4 %
3	12.9 %
Suma	100 %

8.

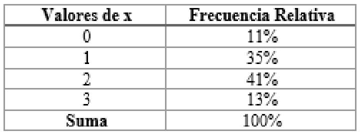


Valores de x	Frecuencia
0	5
1	20
2	21
3	4
Suma	50

Valores de x	Frecuencia
0	110
1	350
2	410
3	130
Suma	1000



Valores de x	Frecuencia Relativa
0	10%
1	40%
2	42%
3	8%
Suma	100%



Valores de x	Frecuencia Relativa
0	11%
1	35%
2	41%
3	13%
Suma	100%

9.

Valores de x	Frecuencia
0	10
1	12
2	17
3	11
Suma	50

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.20
1	0.24
2	0.34
3	0.22
Suma	1

Valores de x	Frecuencia
0	175
1	360
2	310
3	155
Suma	1000

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.11
1	0.36
2	0.33
3	0.19
Suma	0.99

10.

Valores de x	Frecuencia
0	5
1	22
2	14
3	9
Suma	50

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.10
1	0.43
2	0.28
3	0.18
Suma	0.99

Valores de x	Frecuencia
0	120
1	368
2	370
3	141
Suma	999

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.12
1	0.37
2	0.37
3	0.14
Suma	1

11.

Valores de x	Frecuencia
0	1
1	23
2	18
3	8
Suma	50

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	2%
1	46%
2	36%
3	16%
Suma	

Valores de x	Frecuencia
0	117
1	403
2	355
3	125
Suma	

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	11.7
1	40.3
2	35.5
3	12.5
Suma	100

12.

Valores de x	Frecuencia
0	11
1	17
2	19
3	3
Suma	50

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.22
1	0.34
2	0.38
3	0.06
Suma	1

Valores de x	Frecuencia
0	124
1	378
2	369
3	129
Suma	1000

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.124
1	0.378
2	0.369
3	0.129
Suma	1

13.

Valores de x	Frecuencia
0	6
1	23
2	14
3	7
Suma	50

Valores de x	Frecuencia
0	125
1	336
2	418
3	121
Suma	1000

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	.12 %
1	.45 %
2	.28 %
3	.15 %
Suma	100 %

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	.12 %
1	.32 %
2	.42 %
3	.14 %
Suma	100 %

14.

Valores de x	Frecuencia
0	6
1	13
2	25
3	6
Suma	50

Valores de x	Frecuencia
0	120
1	390
2	360
3	130
Suma	1000

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	12%
1	26%
2	50%
3	12%
Suma	100%

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	12%
1	39%
2	36%
3	13%
Suma	100

15.

Valores de x	Frecuencia
0	2
1	15
2	23
3	10
Suma	50

Valores de x	Frecuencia
0	125
1	325
2	325
3	125
Suma	1000

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	.06
1	.30
2	.44
3	.20
Suma	1

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	.12
1	.57
2	.38
3	.12
Suma	.99

16.

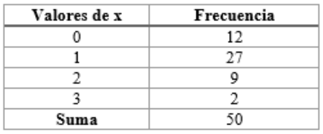
Valores de x	Frecuencia
0	16
1	24
2	8
3	2
Suma	50

Valores de x	Frecuencia
0	300
1	450
2	200
3	50
Suma	1000

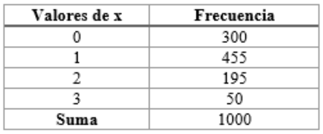
Valores de x	Frecuencia Relativa
0	32%
1	48%
2	16%
3	4%
Suma	100%

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	30%
1	45%
2	20%
3	5%
Suma	100%

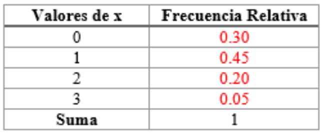
17.



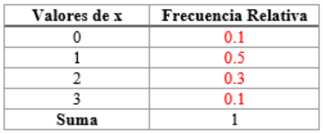
Valores de x	Frecuencia
0	12
1	27
2	9
3	2
Suma	50



Valores de x	Frecuencia
0	300
1	455
2	195
3	50
Suma	1000

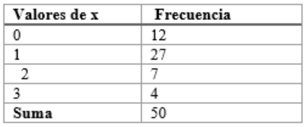


Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.30
1	0.45
2	0.20
3	0.05
Suma	1

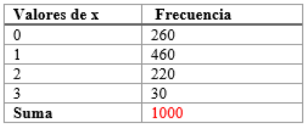


Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.1
1	0.5
2	0.3
3	0.1
Suma	1

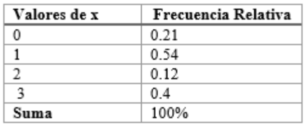
18.



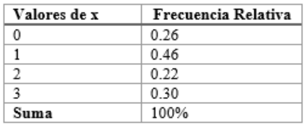
Valores de x	Frecuencia
0	12
1	27
2	7
3	4
Suma	50



Valores de x	Frecuencia
0	260
1	460
2	220
3	30
Suma	1000

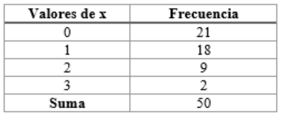


Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.21
1	0.54
2	0.12
3	0.4
Suma	100%

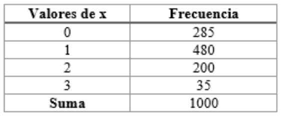


Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.26
1	0.46
2	0.22
3	0.30
Suma	100%

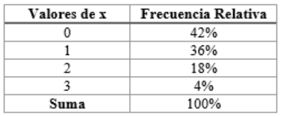
19.



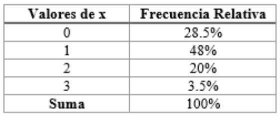
Valores de x	Frecuencia
0	21
1	18
2	9
3	2
Suma	50



Valores de x	Frecuencia
0	285
1	480
2	200
3	35
Suma	1000

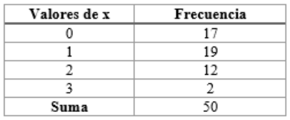


Valores de x	Frecuencia Relativa
0	42%
1	36%
2	18%
3	4%
Suma	100%

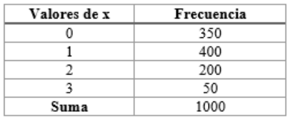


Valores de x	Frecuencia Relativa
0	28.5%
1	48%
2	20%
3	3.5%
Suma	100%

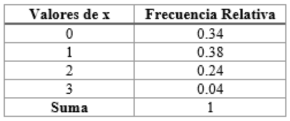
20.



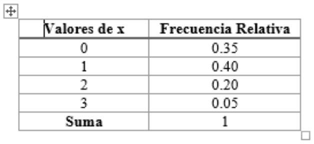
Valores de x	Frecuencia
0	17
1	19
2	12
3	2
Suma	50



Valores de x	Frecuencia
0	350
1	400
2	200
3	50
Suma	1000



Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.34
1	0.38
2	0.24
3	0.04
Suma	1



Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.35
1	0.40
2	0.20
3	0.05
Suma	1

21.

Valores de x	Frecuencia
0	18
1	21
2	9
3	2
Suma	50

Valores de x	Frecuencia
0	293
1	472
2	195
3	40
Suma	1000

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	
1	
2	
3	
Suma	

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	
1	
2	
3	
Suma	

22.

Valores de x	Frecuencia
0	18
1	21
2	10
3	1
Suma	50

Valores de x	Frecuencia
0	295
1	451
2	212
3	42
Suma	1000

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.35
1	0.43
2	0.20
3	0.02
Suma	1.0

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.3
1	0.45
2	0.2
3	0.55
Suma	1.5

23.

Valores de x	Frecuencia
0	16
1	20
2	12
3	2
Suma	50

Valores de x	Frecuencia
0	268
1	466
2	232
3	34
Suma	1000

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.32
1	0.40
2	0.23
3	0.04
Suma	1

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.25
1	0.45
2	0.23
3	0.05
Suma	0.98

24.

Valores de x	Frecuencia
0	15
1	26
2	5
3	4
Suma	50

Valores de x	Frecuencia
0	309
1	424
2	231
3	36
Suma	1000

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.3
1	0.51
2	0.1
3	0.8
Suma	

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.31
1	0.42
2	0.24
3	0.04
Suma	100%

25.

Valores de x	Frecuencia
0	12
1	22
2	14
3	2
Suma	50

Valores de x	Frecuencia
0	301
1	451
2	218
3	30
Suma	1000

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	24%
1	44%
2	28%
3	6%
Suma	100%

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	30.1 %
1	45.1 %
2	21.8 %
3	3 %
Suma	100%

26.

Valores de x	Frecuencia
0	12
1	19
2	13
3	6
Suma	50

Valores de x	Frecuencia
0	308
1	441
2	221
3	40
Suma	1000

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	24 %
1	38 %
2	26 %
3	12 %
Suma	100 %

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	31 %
1	44 %
2	21 %
3	4 %
Suma	100 %

27.

Valores de x	Frecuencia
0	19
1	17
2	12
3	2
Suma	50

Valores de x	Frecuencia
0	310
1	423
2	237
3	30
Suma	1000

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	37%
1	34%
2	24%
3	5%
Suma	100%

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	31 %
1	40 %
2	25 %
3	4 %
Suma	100%

28.

Valores de x	Frecuencia
0	14
1	25
2	10
3	1
Suma	50

Valores de x	Frecuencia
0	320
1	461
2	198
3	21
Suma	1000

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.14
1	0.25
2	0.10
3	0.1
Suma	0.5

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.320
1	0.461
2	0.198
3	0.21
Suma	1.189

29.

Valores de x	Frecuencia
0	18
1	21
2	9
3	2
Suma	50

Valores de x	Frecuencia
0	293
1	472
2	195
3	40
Suma	1000

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0,5000
1	1,500
2	2,500
3	3,500
Suma	7500

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	4961
1	1,500
2	2504
3	3,508
Suma	12,473

30.

Valores de x	Frecuencia
0	12
1	25
2	8
3	5
Suma	50

Valores de x	Frecuencia
0	300
1	433
2	221
3	46
Suma	1000

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	23%
1	50%
2	17%
3	10%
Suma	100%

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	30 %
1	44 %
2	22 %
3	4 %
Suma	100%

31.

Valores de x	Frecuencia
0	12
1	22
2	15
3	1
Suma	50

Valores de x	Frecuencia
0	300
1	438
2	231
3	31
Suma	1000

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.12
1	0.22
2	0.15
3	0.1
Suma	0.59

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	0.30
1	0.43
2	0.23
3	0.31
Suma	1.27

32.

Valores de x	Frecuencia
0	14
1	25
2	9
3	2
Suma	50

Valores de x	Frecuencia
0	310
1	455
2	200
3	35
Suma	1000

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	29%
1	50%
2	19%
3	2%
Suma	100%

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	31 %
1	46 %
2	20 %
3	3 %
Suma	100%

33.

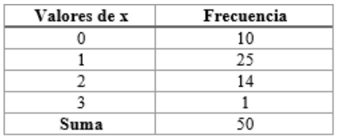
Valores de x	Frecuencia
0	19
1	20
2	10
3	1
Suma	50

Valores de x	Frecuencia
0	274
1	466
2	226
3	34
Suma	1000

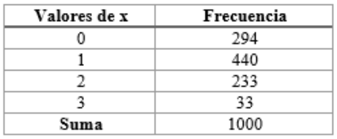
Valores de x	Frecuencia Relativa
0	38%
1	40%
2	20%
3	2%
Suma	100%

Valores de x	Frecuencia Relativa
0	23 %
1	45 %
2	21 %
3	1 %
Suma	100%

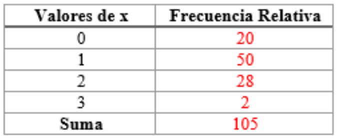
34.



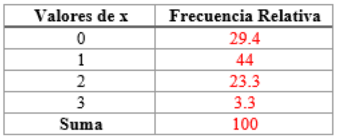
Valores de x	Frecuencia
0	10
1	25
2	14
3	1
Suma	50



Valores de x	Frecuencia
0	294
1	440
2	233
3	33
Suma	1000



Valores de x	Frecuencia Relativa
0	20
1	50
2	28
3	2
Suma	105



Valores de x	Frecuencia Relativa
0	29.4
1	44
2	23.3
3	3.3
Suma	100

4. Cuando presionas Ctrl+y, puedes ver la variación de los datos, ¿dónde, de los dos casos que estamos simulando, observas mayor variabilidad?

1.	En los 50 casos
2.	En los valores de X 1 y 2
3.	En el de 50
4.	En la situación 1, de 50, ya que son menos
5.	En el de 1000 porque son más casos
6.	Sí, en los casos de 50 alumnos
7.	En el primer caso (50 datos)
8.	En los de 50 porque son menos
9.	Sin Respuesta
10.	Sin Respuesta
11.	Sin Respuesta
12.	Sí, en los de 50
13.	En la de 50 casos
14.	Igual, en los 50 casos
15.	Sí, ya que cambia demasiado y hay mucha variabilidad
16.	En el de 1000 casos
17.	Si hay demasiada probabilidad
18.	En la de 50, porque es más pequeña la muestra
19.	En el de 50
20.	En la primera
21.	Sí, los casos varían más en muestras pequeñas
22.	En la primera porque tiene menos datos
23.	En los 50 casos
24.	En la primera de 50 personas
25.	Observo mayor variabilidad en el segundo caso
26.	En el de 50
27.	Los datos se mueven más en 1 y 2
28.	Tiene más variabilidad cuando sólo ocupamos 50 casos
29.	No varía mucho
30.	En el primero
31.	En la de 1000 personas
32.	En la de 50 casos muestra
33.	Varía más de 50 que en 1000
34.	En la de 50

5. Comenta con tus compañeros y respondan: ¿Qué observan en los resultados obtenidos

1.	A menor número de casos mayor variabilidad
2.	Que la cantidad de alumnos que contestaron entre 1 y 2 preguntas correctas casi siempre es mayor
3.	Que ahora el de 3 respuestas correctas es el más chaparro
4.	Que la mayoría de los alumnos solo tiene una respuesta correcta

5.	Varían más cuando son más casos
6.	Que hay mayor variabilidad em los casos de 50 alumnos porque son menos
7.	Mientras más datos, varía menos
8.	Que cambian dependiendo de la variabilidad
9.	El grupo de 50 varía mucho más
10.	Sin Respuesta
11.	La variabilidad es mayor en los de 50
12.	Sin Respuesta
13.	Porque son menos datos
14.	Que entre menos casos sean igual, es mayor variabilidad
15.	Son muy parecidos los resultados
16.	Son semejantes los valores
17.	Son parecidos
18.	Una ligera variabilidad en la muestra grande y una mayor en la pequeña.
19.	Son similares todas las pruebas
20.	Los aprobados son mucho menores, la mayoría contesta 1 buena o ninguna
21.	Los rangos en las gráficas son menos en la muestra mayor
22.	Que los de la primera tabla varían más que los de la segunda
823.	Al igual que en el ejercicio anterior, se ve más variabilidad en el de 50 casos
24.	La mayor variabilidad es en la primera tabla
25.	Que son muy diferentes y que las respuestas o resultados más comunes son 0 y 1
26.	Que la mayor probabilidad es 1 correcta
27.	Los resultados son iguales ya que es un experimento aleatorio
28.	Que en el caso de 50 solo un caso respondió correctamente y en el de 1000, 461 contestaron correctamente bien sólo una pregunta
29.	Varía mucho y no es lineal
30.	En 50 casos varía más porque "n" es más reducido y no se repite en tantos casos
31.	Los alumnos que contestaron todo correcto es muy bajo y el índice de 1 correcta es muy alto
32.	Que la variación siempre es más grande en los de 50 casos
33.	En la de 50 los de más posibilidad sacar las 3 buenas es 5 personas
34.	Que en ambas gráficas el resultado más alto es 1