CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Un análisis gráfico de la razón de cambio

Tesis que presenta:

Arturo Leandro Valdivia

Para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias

en la Especialidad de Matemática Educativa

Directora de tesis: **Dra. Claudia Margarita Acuña Soto.**

México, Distrito Federal Octubre 2013

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por otorgarme el apoyo financiero para la realización de los estudios de Maestría, a través de la beca número 324515, con registro 263057.

Agradecimientos

Quiero expresar mi profunda gratitud a los doctores que me apoyaron en mi formación académica durante mi estancia en el CONVESTAV, especialmente a la Doctora Claudia Margarita Acuña Soto, por su paciencia, perseverancia y sabia dirección en el transcurso de este trabajo, sin los cuales no hubiese sido posible la realización y culminación del mismo.

Al Dr. Francisco Cordero Osorio y a la Dra. Asuman Oktaç por sus sugerencias, apoyo y atención en la elaboración de esta tesis.

Al departamento de Matemática Educativa por brindarme la oportunidad de la realización de mis estudios de maestría.

A mis padres Arturo Leandro Sandoval y María Dolores Valdivia Pacheco que siempre me han apoyado y a mis amigos Sergio Damian Chalé Can, Victor Manuel Guerrero Rojas, José Manuel Rosales Guzmán, Silvia Rodríguez Vazquez, Lourdes Ivon Lujan Rosales y Ruth Anahí Santana Pérez que me apoyaron de distintas maneras.

Gracias por su apoyo.

Resumen

En este proyecto de investigación, abordamos el tema de la interpretación de la razón de cambio en el contexto del análisis gráfico. La puesta en marcha del presente trabajo consistió del diseño de actividades cuyo objetivo fue que los alumnos de licenciatura pudieran darle sentido a la razón de cambio, como una herramienta para el análisis de la variación de los parámetros de una función, lo que los colocaba en mejores condiciones para interpretar la derivada.

Para llevar a cabo lo anterior nos apoyamos en ideas que hacen énfasis en el papel que juegan tres elementos: la influencia de los conocimientos previos de los estudiantes en el desarrollo de nuevos conocimientos, la relación proceso-objeto considerando como base de los procesos para el desarrollo del objeto abstracto asociado a la razón de cambio y al análisis gráfico como la herramienta que nos permitió dar sentido a la razón de cambio.

Tomando en consideración éstos tres elementos en el diseño de las actividades y en el análisis cualitativo de los resultados obtenidos, se concluyó entre otras cosas que: el análisis gráfico de la razón de cambio permitió que los estudiantes concibieran a ésta como un valor, que establece una relación entre el cambio de las variables de una función dentro de un intervalo. Encontramos que construir la idea de razón de cambio instantánea a partir de la razón de cambio promedio, no es un proceso natural y trajo dificultades a los estudiantes, sin embargo, se empieza a considerar el cálculo de ésta en intervalos pequeños.

Abstract

In this research project, the subject was the interpretation of the rate of change in the context of graphic analysis, this study consisted in designing activities which had the objective that undergraduate students could give sense to the rate of change, like a tool for analyzing parameter's variation of a function, which place them in the best conditions to interpret the derivate.

To accomplish this aim, we were supported by ideas that make emphasis in the role in which three elements play: the influence of previous knowledge in the development of new knowledge, the relation process-object considering as basis the process for the development of the abstract object associated to the rate of change, and the graphic analysis like a tool that allowed us give sense to the rate of change.

Considering this three elements in the design of activities and the qualitative analysis of the obtained results, we concluded that graphic analysis of the rate of change allowed the students to conceive this rate as a value that establish a relation in the variable's changes of a function in an interval. We found that constructing the idea of instantaneous rate of change as of the average rate of change is not a natural process and is difficult for the students. However, it starts to consider the calculus of this in small intervals.

Índice

Introducción

En este trabajo, estamos interesados en investigar sobre las condiciones necesarias para una adecuada comprensión de la razón de cambio, es por ello que llevamos a cabo un análisis de las formas de abordar ésta en libros y en los apuntes de algunas clases de Cálculo. Encontramos que la razón de cambio, aparece principalmente en la introducción a los temas del límite, la derivada y la integral: y aunque en el caso de la derivada es esencial para la formación de este concepto, observamos que se hace poco énfasis en ella y en algunas ocasiones queda relegada a un simple algoritmo.

Consideramos, que el entender a la razón de cambio más allá de una fórmula puede propiciar mejores condiciones para que los alumnos comprendan algunos conceptos del Cálculo. Es por esto que nuestra investigación, está enfocada en desarrollar un significado de la razón de cambio, asociado a la variación de sus parámetros.

Para alcanzar este objetivo, tomamos como base tres elementos: la influencia de las experiencias y los conocimientos previos en el desarrollo de nuevas ideas, la relación entre los procesos y los objetos, en la que se toma como principio el desarrollo de procesos asociados al objeto para la formación de éste, y el análisis gráfico que es visto como la herramienta que permite estructurar y dar sentido al proceso que dará paso al objeto matemático.

El formular lo anterior dentro del caso específico de nuestra investigación nos lleva a plantearnos las siguientes preguntas:

1. ¿De qué manera influye el estudio de la velocidad y el flujo de agua, para el desarrollo de procesos que impliquen el trabajo con la razón de cambio?
2. ¿De qué manera los procesos fundados en el análisis gráfico de la razón de cambio, fomentan condiciones para construir esta idea desde el punto de vista de la variación?

3. ¿La comprensión y el análisis gráfico de la razón de cambio son suficientes para acceder al concepto de derivada? y en cualquier caso ¿por qué?

Para responder a estas preguntas de investigación, se diseñaron 5 actividades que fueron aplicadas a 7 estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas (UAZ), en las que era necesario realizar interpretaciones gráficas del comportamiento de la velocidad y el flujo de agua para resolver los problemas de cada actividad. Durante el proceso de resolución de éstas, se propuso utilizar relaciones establecidas a través de la razón de cambio para resolver las actividades y realizar un análisis gráfico de los procesos realizados.

Posteriormente, se realizó un análisis cualitativo con los datos obtenidos en cada problema; en general se observó lo siguiente:

- Los estudiantes son influenciados en sus respuestas por sus ideas previas de cursos de cálculo y experiencias con el trabajo gráfico.
- El análisis gráfico permitió que los alumnos establecieran, relaciones entre el cambio de las variables con el valor de la razón de cambio y la importancia del intervalo elegido para calcularla.
- La idea que se formularon acerca de la velocidad se opone al hecho de establecer la velocidad en un punto.

Estas y otras observaciones realizadas en la investigación en conjunto con el análisis de datos, nos permitieron llegar a las siguientes conclusiones que también responden las preguntas de investigación:

- Las experiencias y conocimientos previos ligados a los problemas gráficos de velocidad y flujo de agua, guiaron las decisiones del estudiante, aunque con más dificultades en el segundo caso. Pero fueron reemplazados rápidamente por el proceso de cálculo y el análisis de los elementos inmersos en la razón de cambio.

- El análisis gráfico de la razón de cambio permitió que los estudiantes concibieran a ésta como un valor, que establece una relación entre el cambio de las variables de una función dentro de un intervalo.
- El proceso de dar forma a la idea sobre la razón de cambio instantánea (la derivada) no es natural y trae dificultades a los estudiantes, sin embargo, se empieza a considerar el cálculo de ésta en intervalos pequeños.

CAPÍTULO 1

Antecedentes

En este capítulo presentamos una reflexión de la manera como se aborda la relación entre la derivada y la razón de cambio en los programas educativos de nivel medio superior de las siguientes instituciones: la Secretaria de Educación Pública (SEP), Colegio de Bachilleres, Bachillerato Tecnológico y La Unidad Académica de Preparatorias de la Universidad Autónoma de Zacatecas (UAPUAZ). De igual manera presentamos un análisis de cómo este tema es tratado en algunos de los libros de texto sugeridos en los programas antes mencionados (Purcell, Varverg y Rigdon, 2007; Stewart, 2001; Larson y Edwards, 2010).

Completaremos esta perspectiva, con una revisión de apuntes de algunas clases tomados por los estudiantes de nivel medio superior y licenciatura. Posteriormente agregamos una revisión de algunas investigaciones realizadas alrededor del tema que nos atañe.

Finalizaremos el capítulo estableciendo la problemática bajo la cual se llevó a cabo la presente investigación, así como la dirección que tomará ésta en adelante.

1.1 La razón de cambio y la derivada en los programas educativos

En esta sección se analizan cuatro programas educativos (SEP, 2012; Colegio de Bachilleres, 2011; Bachillerato Tecnológico, 2009; UAPUAZ, 2013) en los cuales nos centraremos en los objetivos generales de la materia de matemáticas, la estructura y el objetivo del cálculo diferencial y las aptitudes que se pretenden desarrollar en el estudio del cálculo diferencial.

A manera de conclusión estableceremos, desde nuestro punto de vista, el rol que juega la razón de cambio dentro del tema de cálculo diferencial.

1.1.1 *Programas Educativos*

En México existe una gran variedad de centros educativos a los que se puede asistir para formarse en el nivel medio superior, cada uno difiere en los objetivos y programas con que se trabaja dentro de cada materia.

En el estado Zacatecas a nivel bachillerato existen 4 instituciones de gran importancia: Colegio de Bachilleres del Estado de Zacatecas (COBAEZ), Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios (CBTIS), Preparatorias estatales y Prepas-UAZ. La estructura, los objetivos y el enfoque de los contenidos en las distintas asignaturas, en cada una de ellas, se rige por los programas de instituciones mayores como son: Colegio de Bachilleres, Bachilleratos Tecnológicos, SEP y UAPUAZ, respectivamente.

En la materia de matemáticas los objetivos planteados son los siguientes:

- Bachillerato Tecnológico. El estudiante, a partir de la apropiación de los contenidos fundamentales de las Matemáticas, desarrollará habilidades de pensamiento, comunicación, descubrimiento y transferencia que le permitan resolver problemas y ser partícipe del desarrollo sustentable de su entorno (Bachillerato Tecnológico, 2009).
- Colegio de bachilleres. Se busca el mejoramiento de las habilidades de razonamiento lógico, abstracción y generalización que le permitan comprender y aplicar los métodos y lenguajes de la matemática en el conocimiento de la realidad (Colegio de bachilleres, 2011).

- UAPUAZ. Reconocer que el área de las ciencias exactas son un producto del quehacer humano en constante cambio y evolución. Utilizar y valorar las matemáticas y su conexión con otras áreas (UAPUAZ, 2013).
- SEP. Su objetivo es propiciar el desarrollo de la creatividad, el pensamiento lógico y crítico, mediante procesos de razonamiento, argumentación y estructuración de ideas que conlleven al despliegue de conocimientos, habilidades, actitudes y valores, en la resolución de problemas matemáticos que en sus aplicaciones trasciendan a lo escolar (SEP, 2012).

Entre la gran variedad de objetivos que se pretende desarrollar en el alumno, dentro de la materia de matemáticas, en general encontramos un interés compartido para que el alumno: desarrolle un pensamiento crítico, la capacidad de argumentar en un lenguaje verbal y matemático, diseñe e interprete modelos matemáticos y desarrolle la capacidad de movilizar sus conocimientos matemáticos adquiridos para hacer frente a problemas de la vida cotidiana.

En el siguiente apartado mostraremos cómo se encuentra estructurado el tema de cálculo diferencial en cada Programa Educativo.

1.1.2 *Estructura del Cálculo Diferencial*

En este apartado se ilustran los temas y subtemas, así como la secuencia con las que son presentados éstos, dentro del programa de Cálculo Diferencial por cada una de las instituciones mencionadas en la sección anterior.

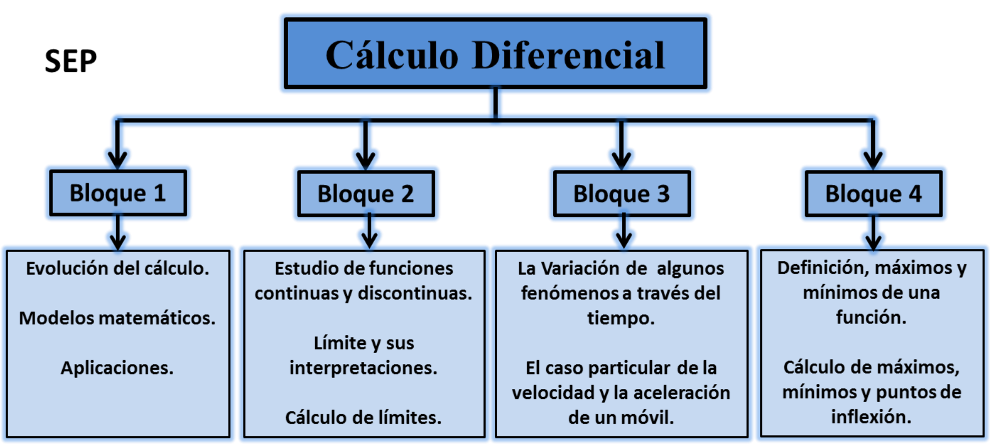


Figura 1. Contenido temático del programa de Cálculo Diferencial establecido por la SEP (2012).

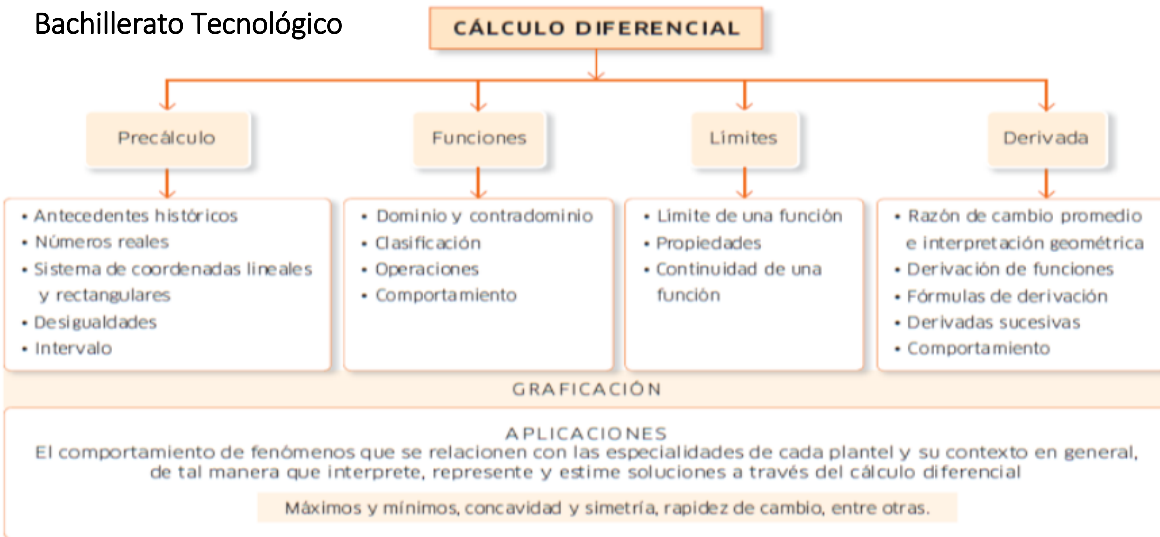


Figura 2. Contenido temático del programa de Cálculo diferencial en los Bachilleratos tecnológicos. Fuente: Bachillerato Tecnológico, 2009. Programa de estudios matemáticas. México. Recuperado de http://www.cecyteo.edu.mx/site/Docs/ProgramasBasicas/Matematicas.pdf

En las prepas UAZ, el plan de estudio sólo nos muestra la estructura básica de la materia, que consiste en abordar tres contenidos con el siguiente orden: funciones, límites y derivadas. A este tópico le anteceden conocimientos de álgebra y geometría analítica, y le sigue el cálculo integral.

En los Colegios de Bachilleres, los temas razón de cambio y derivada, se abordan después del tema de funciones, en quinto semestre junto con temas de Geometría Analítica. Hay que hacer notar que ningún contenido sugiere que se tome el tema de límites dentro de la carrera, solo se hace de manera ilustrativa. La razón de cambio se enseña por medio de problemas de variación y el análisis de su interpretación geométrica, a ella le siguen las reglas de derivación y el cálculo de máximos y mínimos.

En lo que sigue nos centraremos en cuáles son los objetivos que se pretenden desarrollar en el estudiante que cursa Cálculo Diferencial, y como interviene la razón de cambio en la tarea de conseguir los objetivos planteados en cada programa educativo.

1.1.3 *La razón de cambio en el Cálculo Diferencial*

En lo referente al tópico de Cálculo Diferencial cada plan de estudios presenta los siguientes objetivos:

- Bachillerato Tecnológico. Desarrollar el razonamiento matemático, mediante el análisis e interpretación de las relaciones entre dos variables en problemas surgidos de la actividad humana y de los fenómenos naturales, que a su vez impliquen procesos finitos que involucren razones de cambio (Bachillerato Tecnológico, 2009).
- Colegio de Bachilleres. Que desarrolle y profundice su pensamiento lógico-matemático, mediante la comprensión y aplicación de la razón de cambio (la derivada), en la solución de problemas propios del cálculo diferencial, aplicados a diferentes áreas del conocimiento, utilizando la matemática como herramienta que explica y cuantifica el comportamiento de fenómenos naturales y sociales presentes en la realidad del estudiante (Colegio de Bachilleres, 2011).
- SEP. El objetivo es analizar cualitativa y cuantitativamente la razón de cambio instantáneo y promedio, lo que permitirá responder a problemas del contexto real del estudiante al facilitarle la formulación de modelos matemáticos de problemas financieros, económicos, químicos, ecológicos, físicos y geométricos (SEP, 2012).

En general en todos los programas mostrados (excepto el de UAPUAZ donde no se hace explicito los contenidos tratados en cálculo diferencial) encontramos presente el estudio de la razón de cambio promedio, la cual aparece como una herramienta que nos introduce a la derivada de funciones. El trabajo con la razón de cambio, se propone inmerso en la resolución de problemas de variación basados en modelos matemáticos de situaciones reales y en el análisis de su interpretación gráfica.

De manera que consideramos de la revisión, que si bien la razón de cambio aparece como un elemento a considerar en los programas revisados, parece que no se le asigna una función específica en la enseñanza, sólo se le considera como preámbulo de la derivada: en realidad se le menciona, pero no se le aprovecha.

Pero los programas educativos no son la única fuente en la que se basan los profesores para la elaboración de sus clases. Razón por la cual en la siguiente sección analizaremos el contenido del tema de Cálculo Diferencial en algunos de los libros textos sugeridos en los programas educativos.

1.2 La derivada y la razón de cambio en los libros de texto

En esta sección se muestra un análisis de tres libros que se sugieren en los programas educativos, analizados en la sección anterior (Purcell, Varverg y Rigdon, 2007; Stewart, 2001; Larson y Edwards, 2010). De éstos se presenta un esbozo general de los contenidos temáticos abordados en el tema de Cálculo Diferencial, una síntesis general del papel que juegan las gráficas y las tablas asociadas a la razón de cambio y un análisis del rol que juega ésta para introducir el concepto de derivada.

1.2.1 *Estructura del cálculo diferencial en los libros de texto*

Partiendo de los libros sugeridos en los programas educativos antes mencionados, nos hemos dado a la tarea de realizar un estudio de los contenidos temáticos que se manejan en el tópico de cálculo diferencial, dentro de tres libros: Cálculo diferencial e integral (Purcell, Varverg y Rigdon, 2007), Cálculo de una variable trascendentes tempranas (Stewart, 2001) y cálculo 1 (Larson y Edwards, 2010).

Estudiando el contenido de cálculo diferencial dentro de cada libro y la secuencia con la que es presentado este tópico, hemos realizado los siguientes esquemas.

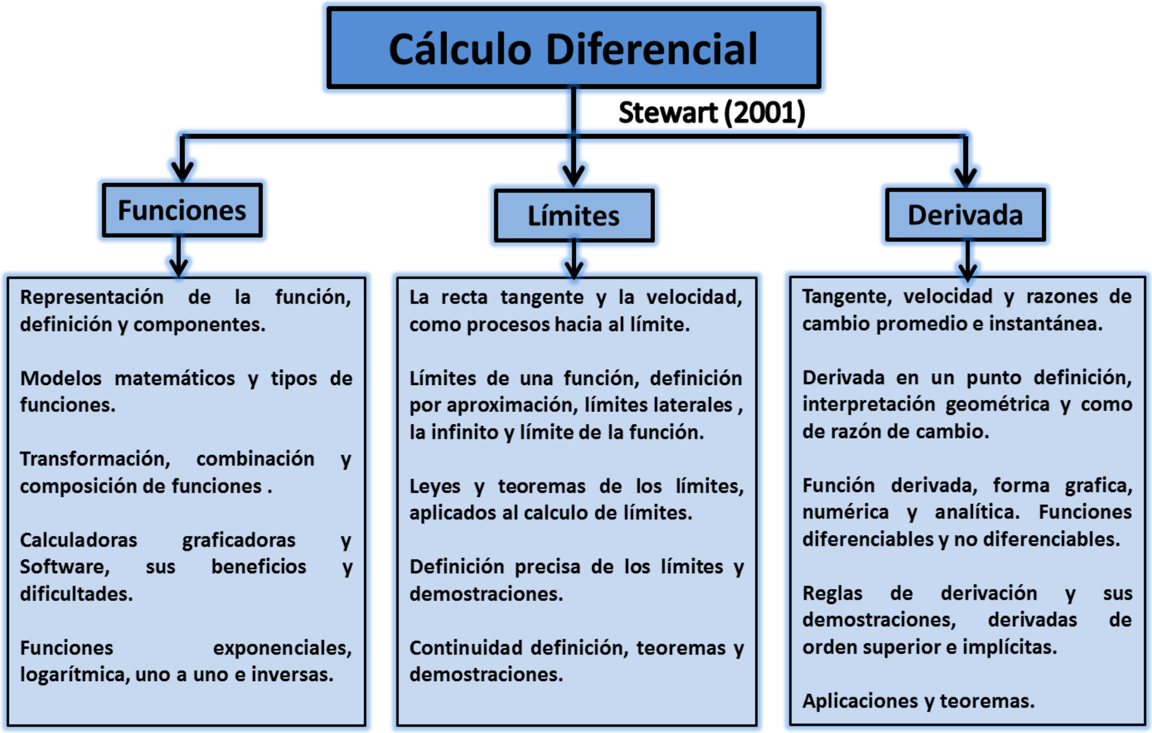


Figura 3. Stewart (2001), temas contenidos dentro del tópico de Cálculo Diferencial.

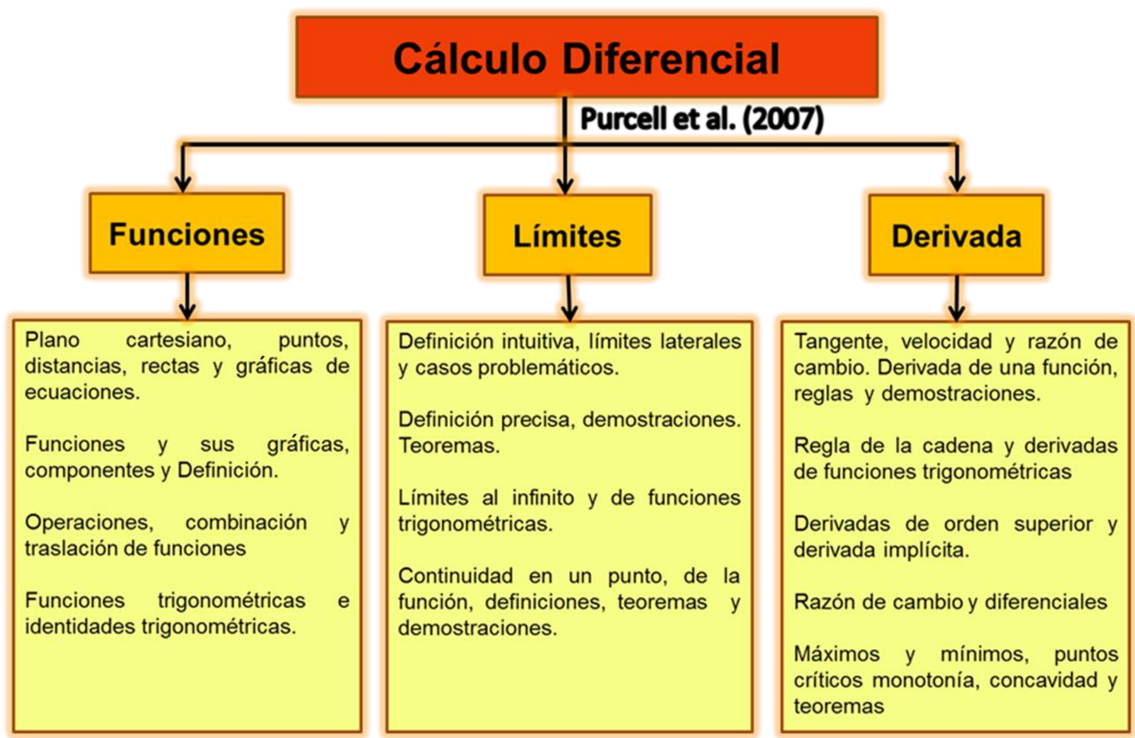


Figura 4, Purcell et, al. (2007), temas contenidos dentro del tópico de Cálculo Diferencial.

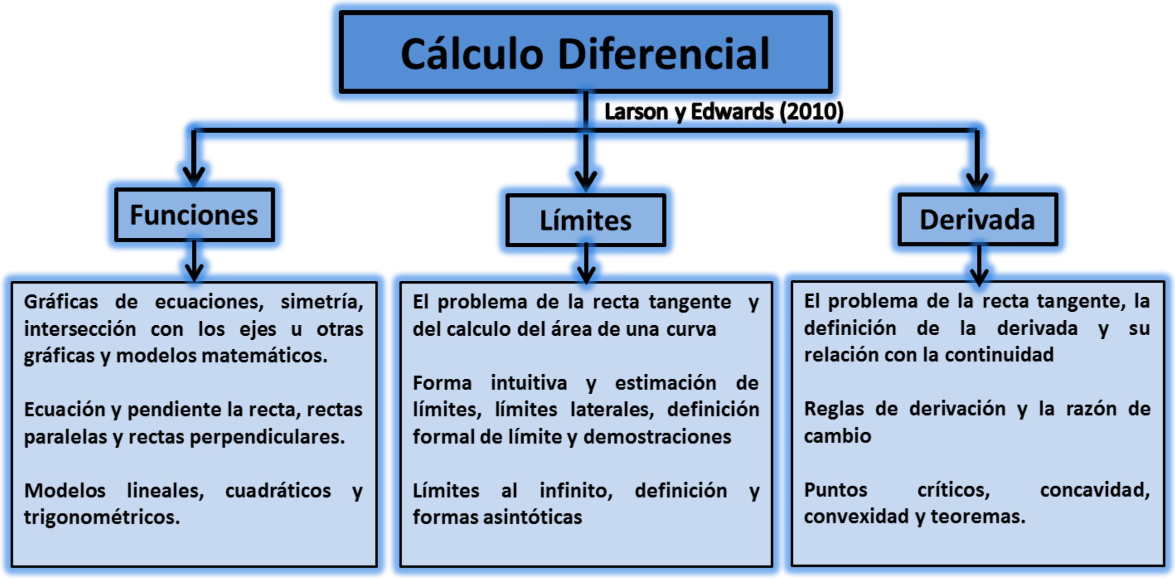


Figura 5. Larson y Edwards (2010), temas contenidos dentro del tópico de Cálculo Diferencial.

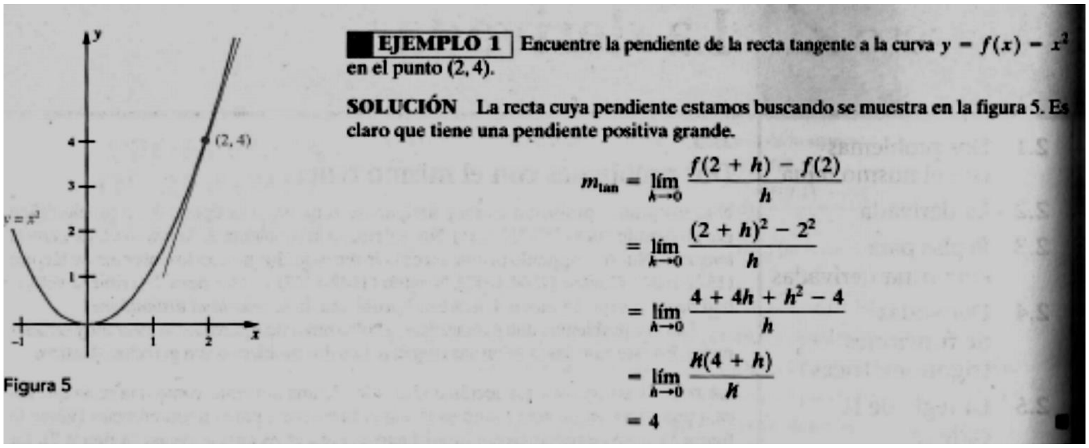
En general en los tres libros, el inicio de cada tema (funciones, límites y derivadas) se da mediante una ligera introducción, uno o algunos problemas de donde se originan o muestran la necesidad de cada conocimiento, después de ello siguen una definición informal del concepto central, seguida de varios ejemplos y problemas. Luego aparece la definición formal, continuando con ejemplos, fórmulas, problemas, teoremas y aplicaciones entre otras cosas.

Las definiciones así como ejemplos que se presentan durante esta secuencia, se explican y representan, mediante expresiones analíticas acompañadas de argumentos verbales, que algunas veces son complementadas con el uso de tablas y gráficas, cuya presencia difiere en cada libro.

Son estos recursos de interpretación (o didácticos) los que vamos a observar con más detalle en el siguiente apartado.

1.2.2 *Uso de gráficas y tablas*

Las gráficas aparecen dentro de los libros, como apoyos que ilustran lo expresado analíticamente en ejemplos y definiciones. En algunos casos sólo aparecen como imágenes a los márgenes sobre las que no se hace el énfasis necesario, ya que para su interpretación se requiere que se expliciten algunos de los componentes gráficos y su relación con la expresión analítica que representan, como lo muestra la Figura 6.



EJEMPLO 1 Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x) = x^2$ en el punto (2, 4).

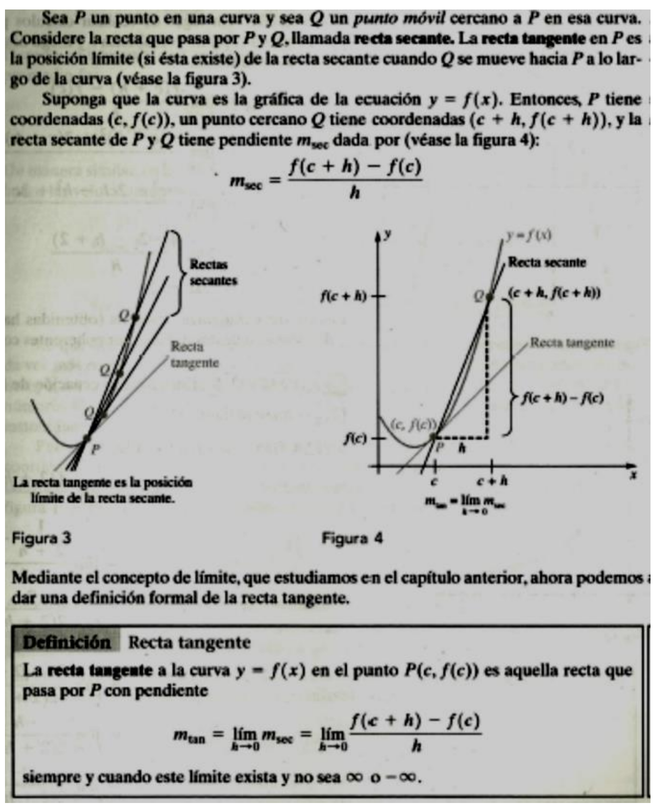
SOLUCIÓN La recta cuya pendiente estamos buscando se muestra en la figura 5. Es claro que tiene una pendiente positiva grande.

$$m_{\tan} = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2-2^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4+4h+h^2-4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(4+h)}{h} = 4$$

Figura 5

Figura 6. Imagen de un problema de Purcell *et al.* (2007).

En cambio en otros casos aparece de forma clara la relación entre los elementos de la expresión analítica y el gráfico, haciendo énfasis en esta relación. Pero, a pesar de esto, todas las explicaciones se desarrollan entorno a los procesos y expresiones analíticas presentes, como se aprecia en la Figura 7.



Sea P un punto en una curva y sea Q un *punto móvil* cercano a P en esa curva. Considere la recta que pasa por P y Q, llamada **recta secante.** La **recta tangente** en P es la posición límite (si ésta existe) de la recta secante cuando Q se mueve hacia P a lo largo de la curva (véase la figura 3).

Suponga que la curva es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$. Entonces, P tiene coordenadas $(c, f(c))$, un punto cercano Q tiene coordenadas $(c+h, f(c+h))$, y la recta secante de P y Q tiene pendiente m_{sec} dada por (véase la figura 4):

$$m_{sec} = \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

Figura 3 Figura 4

Mediante el concepto de límite, que estudiamos en el capítulo anterior, ahora podemos dar una definición formal de la recta tangente.

Definición Recta tangente

La **recta tangente** a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(c, f(c))$ es aquella recta que pasa por P con pendiente

$$m_{\tan} = \lim_{h\to 0} m_{sec} = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

siempre y cuando este límite exista y no sea ∞ o $-\infty$.

Figura 7. Definición de recta tangente en Larson y Edwards, (2010).

Las tablas aparecen con poca frecuencia dentro de cada tema, comúnmente se encuentran al principio de éstos, acompañando un ejemplo sugerido. En la tabla se muestra el comportamiento numérico de la función en general o alrededor de un punto, dependiendo del problema.

Algo que aún no se ha dicho es dónde aparece y cuál es papel que juega la razón de cambio en los libros de textos. Discusión que trataremos en el siguiente apartado.

1.2.3 *La razón de cambio en los libros analizados.*

La razón de cambio en los libros de texto analizados aparece en tres momentos importantes: 1. Dentro de los problemas de la recta tangente y la velocidad instantánea, como una introducción al tema de límites, 2. El problema de la recta tangente y la velocidad instantánea como una introducción a la derivada, y 3. La relación entre la derivada y las razones de cambio.

En estos tres momentos el trabajo con la razón de cambio es indiscutible, pero en estos casos su papel no va más allá de representar una fórmula que permite calcular un valor. Desde el primer momento aparece dentro de las fórmulas para: calcular la velocidad promedio de un objeto en un intervalo de tiempo y la pendiente de la recta secante que pasa por dos puntos de una curva, luego en la representación analítica de ambas situaciones haciendo uso de incrementos y al final con la incorporación del límite para formular la expresión analítica de la derivada.

Pero en ningún momento de la secuencia anterior se hace una reflexión sobre la manera como surgen estas expresiones, qué representan los elementos relacionados en la razón de cambio y cuáles son las exigencias que nos llevan a incluir el proceso al límite. Además la razón de cambio toma el papel del algoritmo que resuelve estos problemas.

Una vez visto cómo se presenta en los libros de textos y programas educativos, el papel que juega la razón de cambio en el desarrollo del concepto de derivada, surge la pregunta ¿La relación entre la derivada y la razón de cambio es percibida adecuadamente por los estudiantes como una forma de aproximación? Para tratar de responder esta pregunta, en la siguiente sección realizaremos un análisis de los apuntes de clases de cálculo de bachillerato y licenciatura tomados por algunos estudiantes.

1.3 La razón de cambio en los apuntes de cálculo

En esta sección, se expone cómo se refleja en los apuntes de clases de nivel bachillerato y universitario, la relación entre la derivada y la razón de cambio. Además de la estructura y características de los problemas en que se encuentra inmersa la razón de cambio.

1.3.1 *Apuntes de bachillerato*

Revisando los apuntes del curso de Cálculo Diferencial del último año bachillerato, pertenecientes a 4 jóvenes provenientes de distintas escuelas, y enfocándonos el tema de derivadas identificamos una estructura común en las 4 libretas analizadas.

En los cuatro apuntes de clase, antes de iniciar el tema de derivadas se expone el problema de encontrar la pendiente de la recta tangente, después de ello se define la derivada como el límite de la razón de los incrementos, se ejemplifica un método para resolver estos problemas utilizando la estructura analítica de la definición, luego se exponen las reglas de derivación y finalmente se sigue con la resolución de una considerable cantidad de problemas y ejercicios, que implican el uso de las reglas antes mencionadas.

En lo referente a la razón de cambio, como se menciona en el párrafo anterior encontramos que antes de definir la derivada se expone el problema de la pendiente de la recta tangente, en el cual se hace un amplio uso de ésta. El tratamiento que se le da a este problema así como el rol de la razón de cambio en los distintos apuntes analizados, se muestra de forma general en las Figuras 8 y 9.

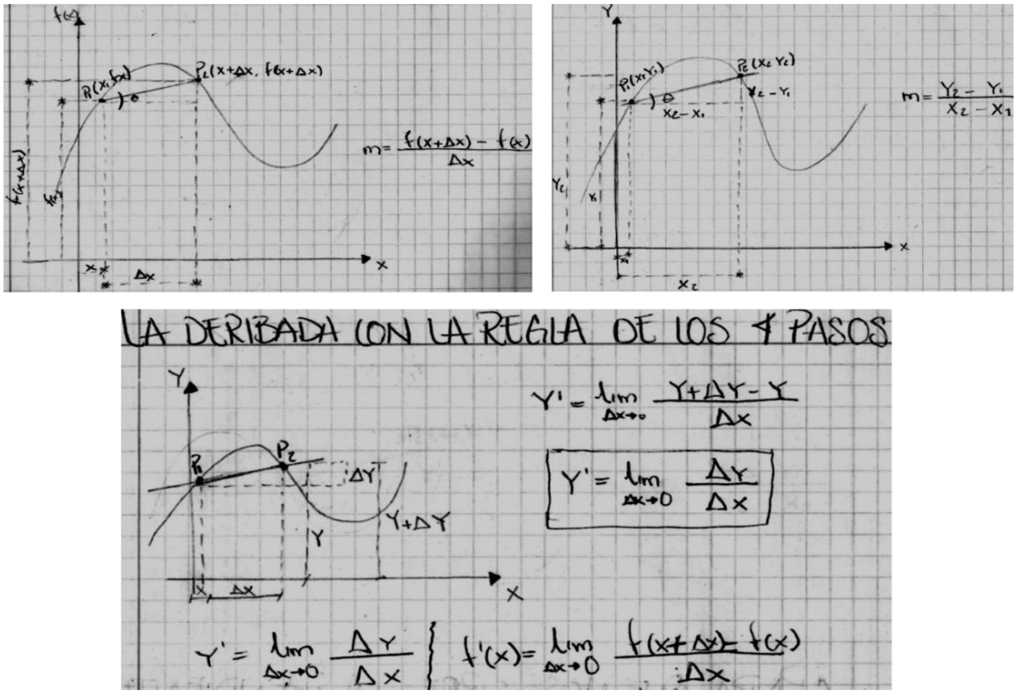


Figura 8. Apuntes de clases de un estudiante de bachillerato.

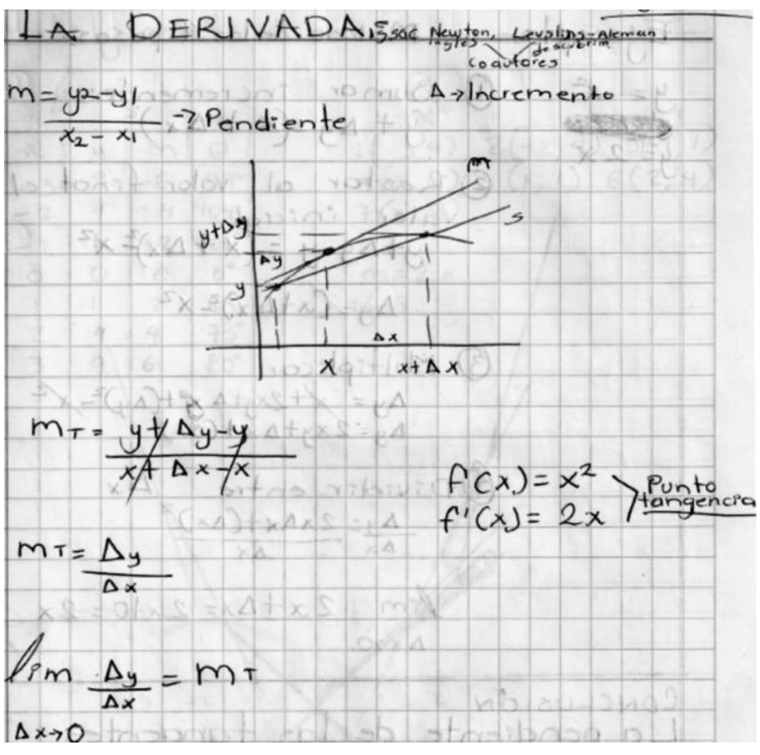


Figura 9. Apuntes de clases de un estudiante de bachillerato.

La secuencia con que se aborda el problema de la recta tangente mostrada en las Figuras 8 y 9, está presente en los 4 apuntes de clase que hemos analizado.

Dentro de éstas observamos que el problema parte de considerar una curva donde se trazan una o un par de rectas secantes que pasan por dos puntos, uno fijo y otro móvil; a partir de esta imagen se extrae información para expresar analíticamente la fórmula para calcular el valor de la pendiente de la recta secante. Después de lo anterior, se calcula el límite de la razón cuando el incremento en el dominio tiende a cero, obteniendo así el valor de la pendiente de la recta tangente y definiendo a ésta como la derivada de la función en un punto "*x*" del dominio.

El contenido que se ilustra en las figuras mencionadas, consiste en interpretar un resultado que se obtiene a partir del análisis gráfico y se traslada al terreno analítico. Para llevar a cabo lo anterior, podemos apreciar en la imagen, que se hace mucho énfasis en que aparezcan todos los elementos de forma gráfica y analítica que intervienen en el proceso que nos lleva al resultado buscado, pero no se muestran indicios que se aborde este proceso en el terreno gráfico ni analítico, sino que se trabaja sólo en una situación estereotipada que sustituye la idea general.

1.3.2 *Apuntes de licenciatura*

En el primer semestre la Licenciatura en Matemáticas de la UAZ, la materia de cálculo 1 está centrada en el Cálculo Diferencial, la cual tiene la siguiente secuencia de temas: sistemas numéricos, funciones, límites y derivadas. En los apuntes de clases de la asignatura, la razón de cambio aparece de forma explícita al inicio del tema de derivadas.

El tema de derivadas se inicia definiendo la razón de cambio promedio en el intervalo de una función de forma analítica, apoyándose en la gráfica de una función y su tabla, de las que se extrae la información para calcular la razón de cambio en distintos intervalos, tal como se muestra en la Figura 10.

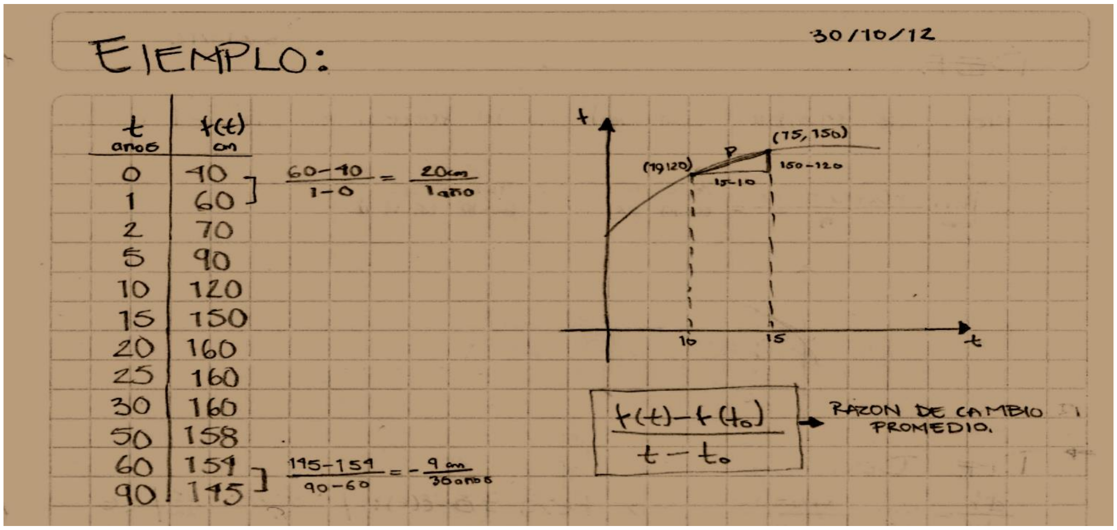


Figura 10. Formulación analítica de la razón de cambio.

Después se expone nuevamente de forma geométrica y analítica, pero en esta ocasión también se presenta como la pendiente de la recta secante que pasa por dos puntos sobre una curva y se utilizan incrementos en ambas representaciones. Lo anterior se puede observar en la Figura 11.

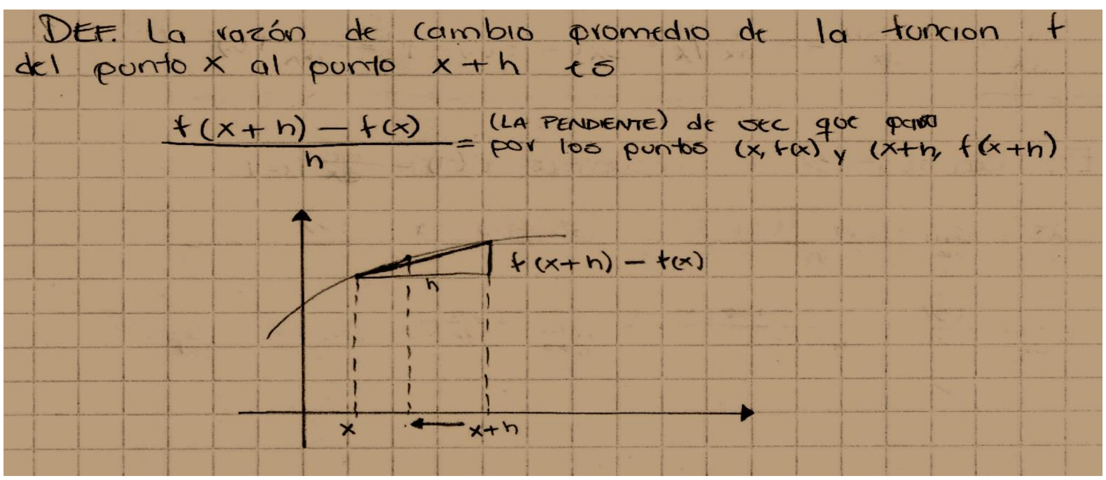
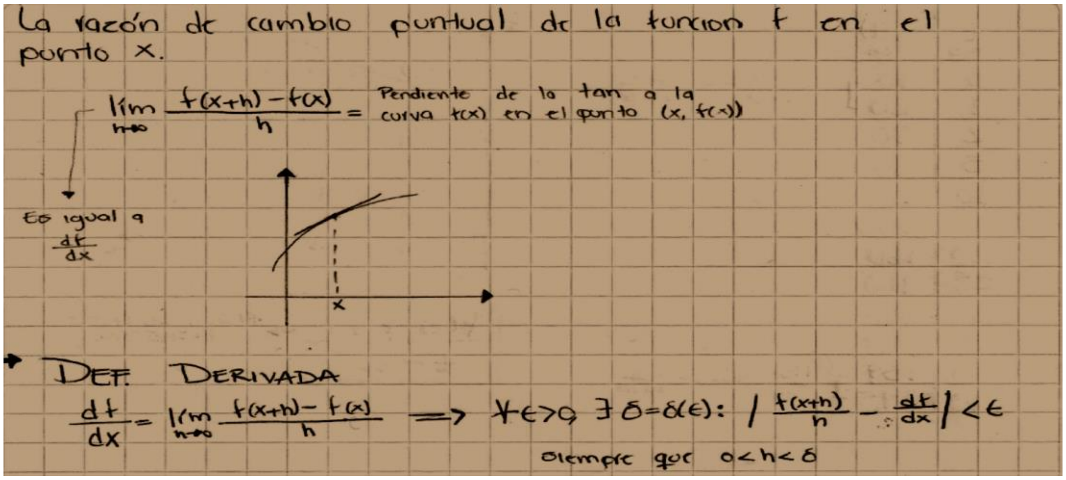


Figura 11. Forma geométrica de la razón de cambio.

Esta secuencia finaliza mostrando de ambas maneras la razón de cambio puntual (instantánea) y de ahí se define la derivada como el límite de la razón de cambio y en su forma épsilon-delta, para relacionarla directamente con la pendiente de la recta tangente, como se ilustra en la Figura 12.


La razón de cambio puntual de la funcion f en el punto x.

$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ = Pendiente de la tan a la curva f(x) en el punto (x, f(x))

Es igual a $\frac{df}{dx}$

x

DEF. DERIVADA

$\frac{df}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \Longrightarrow \forall \epsilon>0\ \exists\, \delta=\delta(\epsilon): \left| \frac{f(x+h)}{h} - \frac{df}{dx} \right| < \epsilon$

siempre que $0<h<\delta$

Figura 12. Introducción de límite a la razón de cambio.

En forma general, aunque vemos el trabajo con la razón de cambio presente en los apuntes de clases de licenciatura, se observa, que al igual que en los libros de texto y apuntes de bachillerato, es utilizada únicamente como la fórmula que nos permite resolver un problema. Es decir, aparece de forma directa como un algoritmo y no se le da sentido a ésta, a los elementos que la forman, ni a la relación que existe entre sus elementos. Además se aprecia que no se trabajó con la idea de aproximación, ni que se reflexione sobre el proceso que nos lleva a la convergencia del intervalo en el punto o de la secante a la tangente.

En este momento disponemos de la información suficiente para tener una idea de cómo es impartida y el papel que juega la razón de cambio en el tema de la derivada. Pero antes de profundizar en esto, consideramos necesario conocer qué acciones sugieren algunas investigaciones, para mejorar la comprensión de la derivada y de la razón de cambio.

1.4 Investigaciones sobre la derivada y la razón de cambio

En este apartado estudiaremos distintas investigaciones en las cuales se plantean secuencias o estrategias que nos lleven a una mejor comprensión de la derivada. También se abordarán investigaciones enfocadas a la comprensión de la razón de cambio, en las cuales este conocimiento se plantea como esencial para una mejor asimilación de los conceptos del cálculo.

1.4.1 *La derivada*

Respecto a las investigaciones en las que se trabaja o se discute sobre la comprensión, significado o sentido de la derivada, se pueden distinguir unas de otras por los marcos teóricos utilizados y aquellos recursos que guían y predominan en las actividades diseñadas.

Entre esta variedad de investigaciones encontramos: aquellas que resaltan la importancia del trabajo y coordinación de varias representaciones semióticas de la derivada (Font, 2000; Font, 2005; Cortés, 2012), las enfocadas en el uso de distintos tipos de software para facilitar la comprensión de esta (Tall 2013; Tall 2009; Giraldo, Carvallo y Tall 2000), y las que se refieren al trabajo y estudio de la variación (Cantoral, Molina y Sánchez, 2005; Dolores, 2000).

También encontramos diseños que se basan en la exploración de modelos físicos de variación (Nemirosky, 1994; Parra, 2006), aquellas donde el contexto juega un papel primordial en el diseño de las actividades (Jurdak, 2005) y las basadas en la presencia de la derivada dentro de otras ciencias (García, Moreno, Badillo y Azcaráte, 2011).

El papel que se atribuye a los sistemas de representación como medios a través de los cuales se dota de significado a los conceptos, lleva a que algunas investigaciones se centren en la manera como los estudiantes usan las diferentes representaciones semióticas. Tomar a los sistemas de representación como medios que ayudan a dotar de significado a la derivada, es una tendencia presente en varias investigaciones (Font, 2000b; Font, 2005, Cortés, 2012).

Font (2000b) sugiere que las representaciones pueden ser estudiadas a partir de sus propiedades ostensivas; menciona que las prácticas utilizadas al resolver problemas con una notación y contexto específico, producen un determinado sentido. Por lo tanto “las diferentes representaciones ostensivas de los objetos matemáticos y las traducciones entre ellas son un elemento fundamental para su comprensión” (Font, 2000, p.1).

Bajo esta visión, Font considera que el cálculo de la derivada a partir de su primitiva se puede ver como un proceso en el que se ha de considerar: Las traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar la función, el paso de una representación de la función a una forma de representar su derivada, y las traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar la derivada.

Esta es la razón por la cual encontramos en las investigaciones de Font (2000, 2005) secuencias de actividades que tienen como finalidad calcular la derivada con el uso de diversos procedimientos como: el cálculo del límite del cociente incremental, de la pendiente de la recta tangente y el cálculo de la razón de cambio en tablas. En estas actividades los estudiantes se valen de procesos ostensivos en expresiones simbólicas, gráficas y numéricas.

Por otro lado el uso de software para lograr darle sentido a la derivada, es tratado en investigaciones como las de Tall (2013, 2009) y Giraldo, Carvallo y Tall (2002). En éstas, las actividades presentadas se centran en el uso de un software, mientras que sus objetivos están dirigidos a observar un aspecto o trabajar sobre un sentido específico de la derivada.

Las investigaciones de Tall (2013, 2009) y Girlado *et al*. (2002), nos muestran el potencial de la tecnología para lograr que la derivada tome un sentido determinado. Tall considera a las percepciones y acciones, como la base para el desarrollo de la producción en matemáticas, y cree que el "pensamiento nos permite construir sobre lo que vemos, e imaginar nuevas posibilidades más allá de las limitaciones del cuerpo humano" (Tall, 2009).

Por lo cual, basado en la consideración de que el cálculo es esencialmente dinámico, plantea el uso de software que le permitan al estudiante interactuar con los conceptos para observar aquello que es difícil de percibir en imágenes estáticas. En el caso particular de la derivada, Tall (2009) nos muestra tratamientos gráficos en los cuales se presentan situaciones donde se pueden ampliar las gráficas de forma dinámica en una pantalla, para buscar en ésta la imagen local de la recta e incorporar la gesticulación de la mano a lo largo del gráfico para representar el cambio de la pendiente.

Lo anterior permite el reconocimiento de un objeto de salida que se incorporó a través de los sentidos, en donde para lograr una mejor comprensión de éste se requiere de métodos numéricos, que tienen la ventaja de dar un significado incorporado a la notación de Leibniz, como una relación entre los componentes del vector tangente.

Existen otras investigaciones que se centran en la exploración de contextos físicos y la experimentación con modelos de la derivada como son la velocidad y el flujo del agua (Nemirosky, 1994; Parra, 2006; Jurdak, 2005). Comúnmente este tipo de investigación se centra en la interpretación y diseño de gráficos que representen eventos físicos. El tipo de problemas que se plantean, tienen como objetivo que los estudiantes establezcan un vínculo entre los cambios en la variación de los parámetros, con las distintas formas de la gráfica que lo representa.

Las investigaciones que tienen como eje rector el estudio de la variación (Cantoral, Molina y Sánchez, 2005; Dolores, 2000) se destacan por el uso de secuencias de actividades basadas en el análisis de la variación de distintos eventos.

1.4.2 *La razón de cambio*

Existe una gran variedad de artículos que destacan la importancia de la razón de cambio como un conocimiento que antecede al estudio formal del cálculo, y la necesidad de su comprensión para poder asimilar algunos conceptos dentro del cálculo, entre los que destacamos a la derivada (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, y Hsu 2002; Doerr y O’Neil, 2011; Herbert y Pierce, 2012; Johnson, 2012). En ellos se hace mención a la falta de comprensión de la razón de cambio por parte de los alumnos donde, en algunos casos, está concebida como un simple algoritmo o fórmula que se debe aplicar cuando se nos pide calcular una cantidad específica.

Las investigaciones de Carlson, *et al* (2002) y Doerr y O’Neil (2011) se caracterizan por proponer actividades donde se plantean situaciones de cambio, en ellas encontramos secuencias que guían al estudiante a establecer la razón de cambio de forma gradual, a través de resolver problemas que son principalmente de carácter gráfico. Éste tiene el objetivo final de que el estudiante establezca una relación numérica entre el cambio de una variable con respecto a otra, donde cada una afecta de forma diferente el valor de la razón de cambio.

1.5 Reflexiones y Problemática

Los programas educativos nos permiten ver que existe una preocupación por que la derivada tome significado a partir de fenómenos de variación y cambio. En ellos, el trabajo con la razón de cambio aparece como la principal estrategia para lograr este objetivo. Mientras que en los libros de texto se observa cómo los problemas que involucran el trabajo con ella, son utilizados como puentes para introducir los conceptos de derivada y límite de una función en un punto, donde en algunos casos se cuenta con el apoyo de figuras geométricas y tablas.

En los apuntes de clases analizados también es posible observar la presencia de la razón de cambio, al igual que en los libros ésta aparece como la herramienta que nos permite resolver los problemas que están diseñados con la intención de introducir el tema de la derivada. Los problemas utilizados están enfocados en mostrarle al estudiante cómo se construye, con base en el análisis de la variación, la fórmula que nos permite calcular la derivada en un punto.

Pero aun con estas secuencias, los estudiantes no logran comprender a la derivada, por lo que encontramos diversas investigaciones que se valen de planteamientos y estrategias distintas para diseñar secuencias, que permitan al estudiante darle sentido a la derivada. También localizamos investigaciones que enfatizan la necesidad de la comprensión previa de elementos, como la razón de cambio, antes de iniciar el estudio formal del cálculo, debido a que con esta idea es más natural comprender la idea de variación.

Nosotros coincidimos con esta última idea. Por lo que consideramos que uno de los problemas existentes en los desarrollos mostrados en los libros de texto y los apuntes de clases estudiados, se debe a que la razón de cambio es considerada como un simple algoritmo y no se explotan aspectos de la variación.

Es decir, por un lado en el desarrollo del estudiante la razón de cambio aparece en el algoritmo que le permite resolver problemas de cambio, pero en ningún momento se reflexiona sobre estos algoritmos y las relaciones entre los elementos que intervienen en el problema. Por otro lado, tampoco se reflexiona sobre relaciones geométricas y numéricas que se asocian con ella.

En conclusión, lo que decimos aquí es que la razón de cambio es vista y tratada solamente como un algoritmo que nos permite resolver ciertos problemas. Por lo que consideramos que un método para lograr una comprensión de la derivada, es lograr que el estudiante le dé un significado a la razón de cambio asociado a la variación de sus parámetros, para luego construir a partir de ella la definición de derivada.

Por lo tanto, nuestro problema de investigación se refiere a la forma en cómo los estudiantes podrían dar sentido a la razón de cambio, a partir de un proceso que nos permita analizar la variación de distintos fenómenos dentro de sus representaciones gráficas.

Lo anterior nos lleva a plantearnos los siguientes objetivos:

1. Observar cómo los estudiantes interpretan la razón de cambio a través del análisis gráfico de la variación de un par de fenómenos.
2. Investigar las ventajas que tiene una aproximación gráfica para el desarrollo de la idea de razón de cambio.
3. Interpretar a la razón de cambio como una herramienta que permite analizar la variación entre los parámetros de una función.

CAPÍTULO 2

Marco teórico

En este capítulo presentamos las estructuras teóricas sobre las que se basa y se desarrolla la presente investigación, éstas son utilizadas para fundamentar nuestro punto de vista sobre el papel que juegan tres elementos en la construcción del significado de la razón de cambio, que son los siguientes:

1. El papel de la experiencia y conocimientos previos. Éste se establece con base en las ideas de Tall (2008) y Sfard (1994, 1998), quienes señalan que éstos son indispensables e influyen en la estructura y significado que tomen nuestros nuevos conocimientos, a través de dos constructos teóricos *met-before* y la *metáfora*.
2. La relación entre los procesos y los objetos. Ésta es analizada mediante 2 elementos teóricos el *procept* y la *reificación,* expuestos por Tall (2008) y Sfard (1991, 1994) respectivamente, donde señalan que primero se debe desarrollar una familiaridad y entendimiento de los procesos inmersos en un objeto matemático, para lograr su comprensión.
3. La importancia de la interpretación de la gráfica. El análisis gráfico se considera esencial en nuestra investigación, por lo cual es estudiado mediante las ideas de Roth (2001, 2003, 2004).

2.1 La influencia de nuestros conocimientos previos

El construir nuevos conocimientos en matemáticas a partir del trabajo con conceptos y procesos que ya son de nuestro dominio, es una de las ideas centrales sobre las que se elabora esta investigación.

En particular consideramos las propuestas de Tall (2008) y Sfard (1994, 1998), quienes proporcionan una postura teórica que relaciona nuestra experiencia con la construcción de conocimientos matemáticos, dando especial énfasis a un par de constructos que se refieren a esta situación: *met-before* y *metáfora* elaborados respectivamente por cada investigador.

El enfoque que toman los conocimientos previos en ambas posturas es complementario, desde nuestro punto de vista. Pero dado que estas posturas teóricas se centran en puntos diferentes, consideramos pertinente presentarlas.

2.1.1 *La metáfora*

A lo largo de nuestra vida nos hemos enfrentado a retos que nos exigen la adquisición de nuevos conocimientos, para desarrollarlos es necesario entender o comprender los objetos que están inmersos dentro de la situación a la que nos enfrentamos. La comprensión que desarrollemos del objeto está vinculada con nuestra experiencia y conocimientos previos, el mecanismo con el cual surge este vínculo es la metáfora (Sfard, 1994).

En este sentido *entender* es visto por Sfard (1994) como la creación de vínculos entre símbolos y una realidad independiente de la mente, es una representación exacta, en la mente, de lo que está fuera de ella. Mientras *comprender* consiste de una sensación de certeza hacia algo, que puede depender o no de realizar una prueba formal.

Para Sfard, nuestra comprensión se manifiesta mediante la forma en que experimentamos el mundo, en nuestro modo de estar en él. En otras palabras nuestra comprensión es exteriorizada en la manera como actuamos y nos comportamos, se hace visible en forma de acciones, donde *“nuestra experiencia* *corporal es la principal, de hecho la única, fuente de comprensión”* (Sfard, 1994, p.45).

El medio por el cual la experiencia nos permite la comprensión de algo nuevo, es la metáfora, en ella ésta es estructurada, dando paso a la imaginación y al razonamiento. Básicamente *“la metáfora es una asignación de un dominio conceptual en otro y su esencia es entender y experimentar un tipo de cosa en términos de otra”* (Sfard, 1994, p.46). Estos dominios conceptuales son trasladados a otro dominio por medio de un esquema incorporado, que es la estructura de una determinada actividad, en la cual nuestra experiencia física es organizada, luego es estructurada para dar forma y sentido a nuestra imaginación, de manera que podamos comprender.

Por lo tanto, la metáfora se constituye como una fuente para la construcción de nuestros conocimientos, imaginación y razonamientos, los cuales pueden llegar tan lejos como las estructuras existentes lo permitan. Esta conclusión proviene del hecho de que nuestras ideas abstractas fueron formadas a través de estructuras sobre nuestra experiencia física, corporal y perceptual, lo que indica que las nuevas ideas heredan la estructura de nuestras experiencias previas.

El hecho anterior es considerado por Sfard para proponer la siguiente tesis de su teoría: “*todas las abstracciones matemáticas están estrechamente conectadas y limitadas por la naturaleza de nuestros encuentros con una realidad física” (*Sfard 1994, p.47). Dentro de esta afirmación se considera a las matemáticas avanzadas, reconociendo dentro de ellas la existencia de objetos matemáticos que no están directamente ligados a nuestra experiencia física, sin embargo, es muy posible que la metáfora que permita la comprensión de éstos sea otra de menor nivel dentro de la estructura matemática.

Ver a los conocimientos matemáticos como resultado de la construcción de varias metáforas, es una idea que toma sentido si vemos a la matemática como una estructura jerárquica. En ella algunos estratos no pueden construirse antes de que otro se ha completado, donde las mismas ideas son vistas de manera diferente, cuando se observan desde distintas posiciones (Sfard, 1994).

Esta dependencia entre conocimientos, nos lleva a considerar que en nuestra práctica no podemos usar cualquier *metáfora*, ya que las distintas *metáforas* conllevan a diferentes formas de pensar y actuar. Lo anterior las convierte en una espada de doble filo: por un lado, son el mecanismo que permite la construcción de nuestras concepciones, y por otra parte, delimitan nuestro desarrollo dentro de los límites de nuestra experiencia y sobre la estructura de nuestras concepciones anteriores (Sfard, 1998).

Dentro de nuestra investigación, la teoría planteada acerca de las *metáforas* fundamenta las ideas formuladas de la problemática descrita en el capítulo anterior. Afirmamos lo anterior, ya que la razón de cambio es formulada dentro de los libros de texto, programas y apuntes de clases, como uno de los elementos principales que forman y conducen al concepto de derivada. Esto sugiere que la razón de cambio, es uno de los conocimientos previos con los que es posible construir una metáfora que da paso a la derivada.

El considerar a la razón de cambio, inmersa en la metáfora que nos permite comprender la derivada, nos hace pensar que la forma en que se encuentra constituida ésta, influirá directamente en el significado que le demos a la derivada.

El centrarnos en la razón de cambio nos lleva a cuestionarnos ¿Cuáles son los elementos que intervienen en la formación de este concepto? y ¿Que formas puede tomar éste a partir de los elementos utilizados? Para poder profundizar más en estas preguntas pasaremos a considerar otro punto de vista en la siguiente sección.

2.1.2 *Met-before*

Tall (2013), nos hace reflexionar sobre la importancia de la experiencia en el ámbito escolar, sugiriendo que una parte fundamental en el aprendizaje es lo que sabe el alumno, siendo necesario determinar esto y enseñar partir de los conocimientos ya existentes, ya que como el menciona:

> *“Las nuevas experiencias que se construyen coherentemente con las experiencias anteriores son mucho mejor recordadas que aquellas que no encajan en la experiencia previa, las cuales no son aprendidas o aprendidas temporalmente y se olvidan fácilmente”* (McGowen y Tall, 2010, p.3).

Esto nos lleva a considerar que en el momento cuando uno se enfrenta a nuevos conocimientos, éstos no son simplemente aceptados y almacenados en nuestra memoria. Más bien son asimilados con base en nuestras ideas ya existentes, en un proceso donde lo nuevo y lo viejo no siempre están relacionados coherentemente, que pueden ser inconsistentes el uno con el otro e incluso estar en conflicto. Esta forma de concebir el desarrollo de nuevos conocimientos lleva a Tall a considerar que:

> *“Cómo los estudiantes asimilen nuevos conocimientos depende de sus experiencias previas y las imágenes cognitivas previamente construidas, cómo se representa el nuevo problema, cómo se recupera y presenta el conocimiento pertinente en vigor, y en qué centran la atención de las señales visuales que se recogen a partir de la exploración de los símbolos escritos*” (Tall, 2013, p.15).

Con base en lo anterior, se formula un nuevo concepto donde se incorpora la idea de que el pensamiento de una persona, es consecuencia de las experiencias que ha tenido antes. A este concepto se le conoce como *met-before* y se define como: "*una estructura mental que se tiene ahora, como resultado de las experiencias previas específicas del individuo*" (Tall, 2008, p.2), las cuales son construcciones personales que surgen de manera diferente en contextos diversos, en donde cada persona le asigna su sello personal.

Las concepciones *met-before,* afectan la forma en que los individuos interpretan los nuevos conocimientos matemáticos, ya que las experiencias previas forman conexiones en el cerebro que influyen la manera en que damos sentido a las nuevas situaciones, por lo cual el trabajo con las *met-before* se centra en cómo un nuevo aprendizaje se ve afectado por la experiencia previa del alumno.

Lo anterior nos conduce a pensar que existen *met-befores* que benefician o perjudican el desarrollo del pensamiento. Tal como como lo expresan Tall (2008) y McGowen y Tall (2010, 2013), las *met-before* nos pueden brindar una ayuda para la comprensión de nuevos conceptos, pero a su vez pueden ocasionar una gran problemática para lograr este objetivo.

Entonces por un lado, podemos encontrar una gran ventaja de la experiencia previa del estudiante, cuando ésta se relaciona de forma coherente y está incorporada dentro del desarrollo de los nuevos conceptos, dotándolos de comprensión y estructura, propiciando así una mejor asimilación de éstos.

Mientras que por otro lado, la experiencia puede ser problemática y una gran desventaja para desarrollar la comprensión deseada del concepto, debido a que es posible que se encuentre en una posición contraria, o que evoque ideas que no sean compatibles con el significado que se le desea dar al concepto. Así la experiencia puede impedir que el alumno se haga de nuevos conceptos u ocasionar que éstos tomen formas inadecuadas.

Lo nuevo que el término *met-before* nos ofrece es considerar la problemática que puede traer consigo la experiencia y nuestros conocimientos previos, cuando éstos no logran relacionarse o están en oposición con los nuevos conocimientos. Además, nos lleva a considerar que en una actividad o en un concepto, se encuentran inmersos más elementos de los que son visibles y que su papel es tan primordial como el de aquellos que observamos.

Al formular lo anterior dentro de nuestra investigación nos lleva a preguntarnos ¿Cuáles son los conocimientos que relacionamos con la razón de cambio? y ¿Cuál de estos es más compatible con el significado de razón de cambio que pretendemos lograr?

2.1.3 *La experiencia y los conocimientos previos en esta investigación*

La teoría señalada hasta al momento, indica las bases sobre las cuales se construirán las situaciones que permitan lograr llegar a una comprensión de la razón de cambio. Los elementos teóricos formulados hasta el momento, nos indican que para que un nuevo conocimiento tome estructura y sentido para nosotros, es necesario que éste se relacione coherentemente con nuestros conocimientos previos y experiencias, además el significado que tome dependerá directamente de los elementos y las características de la situación con la que éste fue expuesto.

Por otro lado, también nos señala que las experiencias y conocimientos previos que se involucran en una actividad, son más de lo que se hacen visibles, y en algunos casos el contexto de la actividad puede traer consigo la asociación de elementos no previstos. También, la comprensión dada al objeto puede modificarse al verlo desde distintos ángulos, la cual puede seguir siendo víctima de cambios, aun cuando se trabaja con el objeto en concreto.

En el plano de nuestra investigación consideramos que es el momento de apostar por cuáles serán esas experiencias y conocimientos iniciales, con los que se trabajará para lograr nuestro objetivo de interpretar a la razón de cambio como una herramienta que le permite al estudiante analizar la variación entre los parámetros de una función.

Partiendo de las investigaciones anteriores (Nemirosky, 1994; Parra, 2006) creemos que las situaciones que involucran la velocidad de vehículos y el flujo de agua de una llave, son adecuadas para desarrollar nuestra investigación pues son escenarios que encontramos en nuestra vida cotidiana y al mismo tiempo está presente la variación. Además estos fenómenos pueden ser estudiados haciendo uso de la razón de cambio y estas dos situaciones ofrecen al alumno experiencias que se desarrollan coherentemente con nuestros objetivos. En particular consideraremos la relación entre el llenado de un tanque y la abertura de una llave, y la que hay entre la velocidad de un vehículo y el tiempo que tarda en ir de un lugar a otro.

Uno de los problemas observados en el capítulo anterior, se refiere a que cuando se trabaja con la razón de cambio se hace poco énfasis en las variables involucradas, sin tener en cuenta que ésta es resultado de establecer una relación entre los cambios de los parámetros. Nosotros consideramos que nuestros conocimientos iniciales deben estar desarrollados con base en el análisis del cambio en cada variable.

Ya hemos establecido los puntos de partida que tomaremos para alcanzar nuestro objetivo, que se refieren a dos experiencias con antecedentes de tratamiento en los estudiantes y un análisis del cambio entre variables, de manera que a continuación mostraremos la forma como trabajaremos con ellos.

2.2 La relación entre los procesos y los objetos

Analizamos la influencia de los procesos en el desarrollo de la compresión de los conceptos matemáticos desde el punto de vista teórico de Tall (2008) y Sfard (1991, 1994). Ambos investigadores coinciden en que primero se debe lograr una familiarización con los procesos y un entendimiento más profundo de éstos, no sólo como una secuencia de pasos, para después lograr comprender el concepto matemático inmerso en los procesos.

Para lograr este fin común, los investigadores profundizan en aspectos diferentes y hacen énfasis en distintos elementos, por lo que consideramos conveniente presentar ambas posturas por separado.

2.2.1 *La reificación*

Sfard (1994) establece que las metáforas estructurales son las más adecuadas y que éstas nacen del proceso de *reificación*, que consiste en una transición del pensamiento desde un modo operativo a una estructura del conocimiento. En otras palabras, la reificación se refiere a la construcción de metáforas que parten de la adquisición de un esquema operacional, es decir, operar sobre ciertos objetos para obtener otros, a un esquema estructural incorporado, donde se crea un mensaje permanente y los objetos producto de ello son construcciones teóricas en los que se puede actuar para obtener otras nuevas.

Sfard, estudia el pensamiento matemático a través de la reflexión sobre la naturaleza ontológica y epistemológica de las construcciones matemáticas, centrándose en los conceptos matemáticos y en el problema de la comprensión de los procesos psicológicos de los cuales éstos emergen, donde nuestra comprensión está limitada por el desarrollo de concepciones operacionales y estructurales del concepto.

Al hablar de *concepto* Sfard se refiere a: *“la idea matemática en relación con su forma oficial, un constructo teórico dentro del universo formal del conocimiento perfecto”* (Sfard, 1991, p.3), mientras por concepción considera: *"todo el conjunto de representaciones internas y asociaciones evocadas por el concepto”* (Sfard, 1991, p.3).

Dentro del universo específico de las matemáticas, encontramos que los matemáticos usan ciertos objetos para referirse a éste, los cuales tienen características específicas, están regidos por leyes bien definidas y se someten a ciertos procesos. Estos objetos son construcciones matemáticas totalmente inaccesibles para nuestros sentidos, que sólo se pueden alcanzar por medio de los *ojos de nuestra mente*, en consecuencia Sfard (1991) considera que: ser capaz de *ver* de alguna manera los objetos *invisibles*, parece ser un componente esencial de la capacidad matemática. El ver un ente matemático como un objeto significa:

> *“ser capaz de referirse a esté como si fuera una cosa real, una estructura estática, que existe en algún lugar en el espacio y el tiempo, y poder reconocer en él una idea "de un vistazo" y manipularlo como un todo, sin entrar en detalles”(*Sfard 1991 P.4)

De esta manera, Sfard encuentra dos concepciones que se derivan del trabajo con los objetos matemáticos, una estructural y otra operacional. La primera es de naturaleza abstracta donde el concepto se dota de una especie de fisionomía, lo que nos permite verlo como una cosa única, por lo que este nivel de concepción es estático, instantáneo e integrado. La otra es de tipo descriptivo, se refiere a procesos, algoritmos y acciones, donde la existencia del objeto se define a través de una secuencia de acciones, por lo que este nivel de concepción es dinámico, secuencial y detallado.

Aunque pudiera parecerlo las concepciones operacionales y estructurales de la misma noción matemática no son mutuamente excluyentes, en realidad se complementan una a la otra, ya que un objeto matemático lo podemos encontrar definido tanto estructuralmente como operacionalmente, y es mediante estas dos concepciones que se puede construir el concepto.

Esta separación en dos tipos de concepciones, abordando sus naturalezas ontológicas y psicológicas, combinado con su complementariedad, induce a considerar que el desarrollo de nuestras concepciones estructurales y operaciones refleja el tipo de comprensión que logramos.

En este desarrollo dirigido a la comprensión, Sfard señala una secuencia a seguir donde el pensamiento operacional precede al estructural:

> *"un conocimiento profundo de los procesos que subyacen a los conceptos matemáticos, tal vez incluso un cierto grado de maestría en la ejecución de estos procesos, a veces debe ser visto como una base para la comprensión de tales conceptos en lugar de un resultado"*(Sfard, 1991, p.9).

Esto nos permite considerar que la "*abstracción no se origina directamente en el objeto que se trabaja, sino de la acción que se realiza sobre él*" (Piaget, 1970, citado por Sfard, 1991, p.17). Dentro de esta relación proceso-objeto, Sfard identifica tres etapas en el desarrollo del concepto: interiorización, condensación y reificación.

En la interiorización, el alumno se familiariza con los procesos que con el tiempo dan lugar a un nuevo concepto. Diremos que un proceso ha sido interiorizado si puede llevarse a cabo a través de representaciones mentales con el fin de ser considerado, analizado y comparado.

La fase de condensación, es un período donde se separan largas secuencias de operaciones en unidades manejables. En esta etapa, la persona se vuelve más y más capaz de pensar sobre un determinado proceso en su conjunto, el alumno se referiría al proceso en términos de relaciones de insumo-producto y no por indicación de las operaciones. Este es el punto en el cual un nuevo concepto oficialmente nace, pero aun así éste sigue conectado al proceso.

La reificación, es la etapa en la cual una persona llega a ser capaz de concebir la idea de un objeto pleno. Por lo tanto, la reificación se define como un cambio ontológico, una habilidad repentina para ver algo familiar con una luz totalmente nueva.

Así, mientras la interiorización y la condensación son cambios graduales, cuantitativos y no cualitativos, la reificación es un salto cualitativo donde un proceso se solidifica en un objeto dentro de una estructura fija. Esta tríada está estructurada en un esquema jerárquico, donde los objetos formados pueden ser víctimas nuevamente de esta secuencia, como se muestra en la Figura 13.

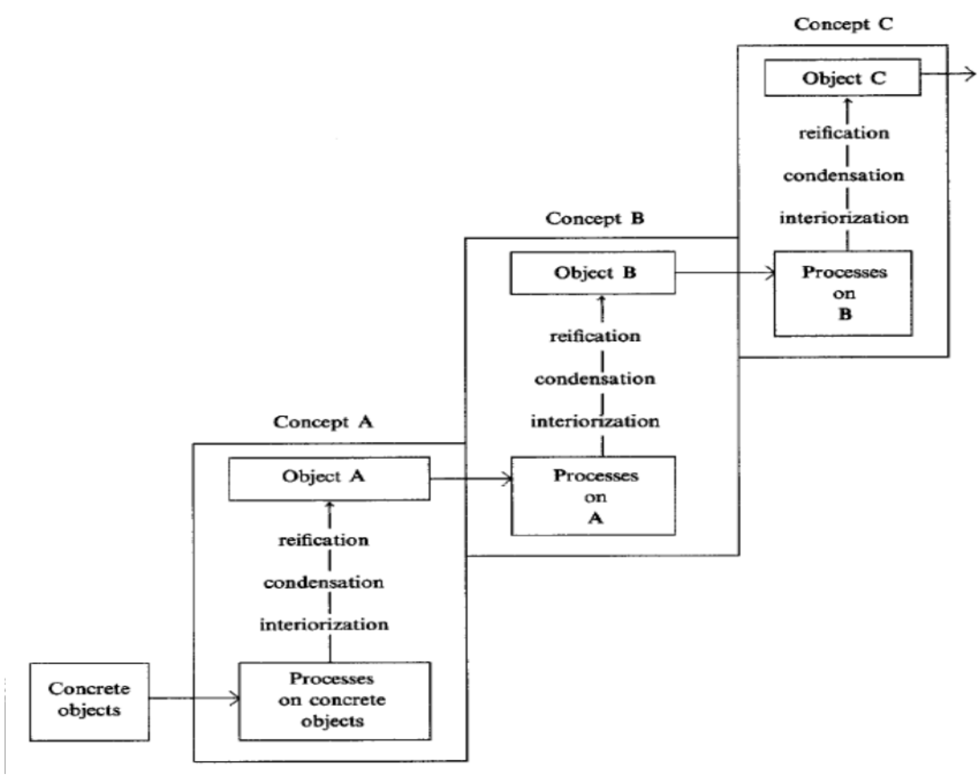


Figura 13. Esquema general de la formación de conceptos de Sfard.
Fuente: Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36.

Lo anterior nos muestra una matemática dividida entre lo abstracto y algorítmico, lo declarativo y procedimental, los cuales son aspectos que se necesitan desarrollar y relacionarse para formar nuevos conceptos, también deben estar presentes cuando resolvemos problemas.

Dentro de la resolución de problemas no parece conveniente siempre recurrir a la carga operacional, también es necesario un objeto matemático fijo que consista en una representación que integre la información en un todo compacto y convierta el esquema cognitivo en un estructura más conveniente, es decir, los objetos matemáticos son los "nodos" superiores en el esquema jerárquico, como resultado de la reificación (Sfard, 1991). Para una persona cognoscente, funcionan como imágenes o símbolos simplificados, los cuales pueden ser aprovechados en un instante y ser usados en lugar de *"lo real"*. En otras palabras, en la resolución de problemas el proceso de compactar entidades abstractas sirve como un enlace a información más detallada.

Por lo tanto, casi cualquier actividad matemática puede ser vista como una intrincada interacción entre las versiones estructurales y operativas de las mismas ideas matemáticas, donde *"el enfoque estructural invita a la contemplación, el enfoque operativo invita a la acción, el enfoque estructural genera conocimiento y el enfoque operativo genera resultados”* (Sfard, 1991, p.28).

En ciertas etapas de la formación del conocimiento (o adquisición) la ausencia de una concepción estructural puede dificultar aun más el desarrollo. Como la cantidad de información crece, el esquema anterior se puede saturar y ser prácticamente impermeable a cualquier enriquecimiento. Podemos decir que en las matemáticas, la transición de los procesos a los objetos abstractos aumenta nuestro sentido de la comprensión matemática.

2.2.2 *Problemas de la reificación*

La capacidad de ver algo familiar en una forma totalmente nueva no es fácil de lograr. De acuerdo con el modelo planteado la reificación de un proceso se produce simultáneamente con la interiorización de los procesos de más alto nivel (Sfard, 1991). Pero no hay ninguna razón para convertir el proceso en objeto a menos que tengamos algunos de ellos de alto nivel realizados sobre otros más simples.

Lo anterior presenta una gran complicación: por un lado, sin un intento de la interiorización de más alto nivel, no se producirá la reificación, por otro lado, la existencia de objetos en los que se llevan a cabo los procesos de más alto nivel parece indispensable para la interiorización. En otras palabras la reificación de nivel inferior y la interiorización de más alto nivel son un requisito previo para la construcción de un nuevo objeto matemático, lo cual nos lleva a un círculo vicioso.

La tesis del "círculo vicioso" implica que una capacidad no puede desarrollarse plenamente sin la otra. Es necesario por un lado, que una persona sea muy hábil en la realización de algoritmos con el fin de lograr una buena idea de los "objetos" que intervienen en estos algoritmos, por otra parte, debe tener un dominio técnico completo, poseer plenamente estos objetos, ya que sin ellos los procesos parecen sin sentido y por lo tanto difícil de realizar y de recordar

Dentro de la investigación, esto nos lleva a considerar que en el grupo que se trabaje, los elementos y objetos de los que partan los procesos dentro de las situaciones que se planteen, deben ser comprensibles para los alumnos, y que las actividades deben propiciar que se dé una reflexión sobre las acciones realizadas.

2.2.3 *Procept*

Para Tall la capacidad de pensar de manera flexible en matemáticas depende de doble uso del símbolo como proceso y el concepto, es decir, el considera una dualidad entre los procesos y los conceptos relacionados a un signo.

Gray y Tall (1994) mencionan que el pensador matemático exitoso utiliza una estructura mental en la cual dota a los signos de un significado dual, en el que se encuentra el proceso y el concepto, esta acción de encapsular los procesos y conceptos en un símbolo la llaman *procept*.

El término *procept* es utilizado en un primer instante para referirse a la amalgama entre el concepto y proceso representada por el mismo símbolo, este es retomado posteriormente por Tall, Gray, Ali, Crowley, DeMarois, McGowen, Pitta, Pinto, Thomas y Yusof (2001) para ser redefinido como: *“un constructo cognitivo, en el que el símbolo puede actuar como pivote, entre el cambio de enfoque en el proceso para calcular o manipular y el concepto que puede ser pensado como una entidad manipulable”* (p.5).

Gray y Tall (1994) consideran que el nivel de la interpretación del simbolismo matemático marca la brecha entre el éxito y el fracaso académico de los estudiantes, donde el desarrollo de un *procept* es el nivel a alcanzar, el cual es precedido de otros dos niveles que son: procedimiento y proceso. Esta jerarquía o niveles de desarrollo se encuentran enmarcados en la Figura 14.

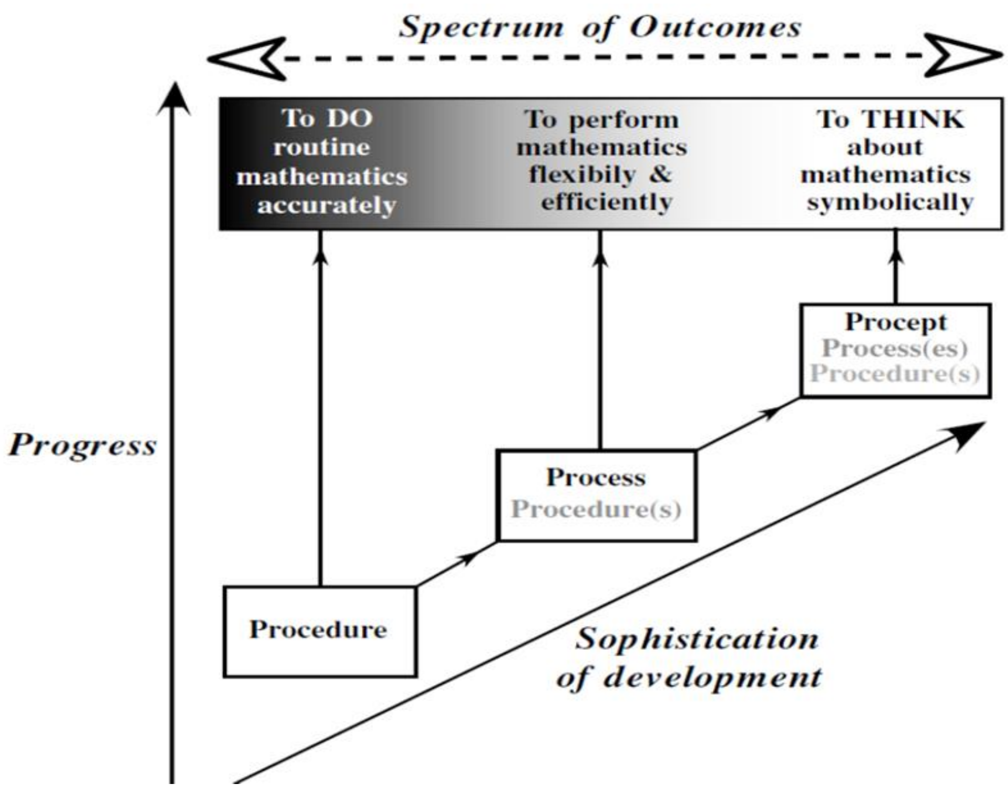


Figura 14. Procedimientos, Procesos y Procept.

Fuente: Gray, E., Pinto, M., Pitta, D., & Tall, D. (1999). Knowledge construction and diverging thinking in elementary & advanced mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 38 (1). 111-133.

En este esquema, el procedimiento es visto como una secuencia de pasos que sólo pueden usarse para propósitos específicos, mientras que el proceso se puede ver como la capacidad de relacionar un conjunto de procedimientos asociados a un mismo símbolo, donde se dispone de la capacidad para seleccionar el procedimiento más eficaz que lleve a cabo las tareas con rapidez y precisión.

En la Figura 14, se muestra un desarrollo creciente del nivel de las estructuras mentales que utilizamos al desarrollar tareas matemáticas. El esquema parte de acciones a un nivel de rutina, que se van desarrollando conforme se incrementan el número de procedimientos para efecto de una misma tarea. El nivel de proceso inicia cuando el foco de atención cambia de centrarse en las secuencias realizadas a centrarse en las tareas asociadas a un símbolo y vincular los sistemas de pasos que las resuelven. Mientras que el pensamiento *proceptual,* se va adquiriendo cuando comprimimos las etapas de los procesos asociados a un símbolo, hasta el punto que los símbolos son vistos como objetos que se pueden descomponer y armar de forma flexible, obteniendo como resultados, símbolos que se pueden ver como procesos y conceptos manipulables.

Lo anterior nos indica que los *procept,* se originan cuando una o varias operaciones en una entidad mental se convierten a su vez en un objeto. Si el objeto es formado por un único proceso el símbolo que adquiere esta dualidad se le conoce como *procept* elemental, por lo que un *procept* puede ser visto como: *"una colección de procepts elementales que tienen el mismo objeto*" (Gray y Tall, 1994, p.120). Cabe señalar que, si bien dentro de este constructo es necesario tener un símbolo, este no es único, es decir un mismo objeto puede estar asociado a distintos símbolos.

La distinción entre *procepts elementales* nos indica que la encapsulación de diferentes procesos evoca distintos *procepts,* por lo que es necesario que los estudiantes reconstruyan su comprensión mientras se mueven a nuevos contextos, donde llegar a una nueva etapa de desarrollo implica un nuevo *procept* y una nueva reconstrucción del conocimiento personal. Esto nos indica que a medida que un estudiante avanza el número de *procepts* crece tanto en cantidad como en su riqueza interior y terminología. Pero hay que tener en consideración que esto no es algo natural ni tampoco una tarea sencilla.

Tall (2008) y Gray, Pinto, Pitta y Tall (1999) señalan mediante diversos estudios que muy pocos estudiantes le dan a los signos la doble dualidad (proceso/concepto), la mayor parte de los estudiantes sólo manifiestan el nivel de proceso. También comentan que el hecho de que varios procedimientos señalen un mismo objeto, es motivo de conflictos entre los estudiantes, y la restructuración de los conocimientos es un proceso complicado.

Lo anterior nos indica que debemos de tener un gran cuidado, ya que cada cambio entre dominios conceptuales involucra sus propias transformaciones sutiles y reconstrucciones cognitivas, ya que si bien los ejemplos construidos en distintos dominios satisface a la definición, cada uno tiene cualidades adicionales, que pueden o no, ser compartidas entre los ejemplos individuales. Por lo tanto esto sugiere: *"que las diferentes maneras en que los individuos procesan la información en un momento dado pueden ser benéfico o comprometer gravemente su desarrollo actual y futuro*" (Gray, *et al.,* 1999, p.118).

En nuestro trabajo, lo anterior trae como nuevo el hecho de que entre más variada sea la cantidad de procesos que intervienen para la formación del concepto, se obtendrá una mejor comprensión del concepto siempre y cuando las ideas que emergen dentro de cada proceso sean compatibles unas con otras.

2.2.4 ***El rol de los procesos en la investigación***

Los elementos teóricos expuestos en esta sección, muestran por un lado, que es conveniente partir de los procesos sobre los que está inmerso un concepto matemático para lograr la comprensión de éste. Por otro lado, marcan que para poder llegar a una concepción estructurada de un objeto matemático, es necesario que haya una reflexión y familiaridad con los procesos relacionados a éste. Además, que es necesario, que los elementos y objetos matemáticos que intervienen de forma explícita en los procesos estén ya estructurados en el alumno.

También nos mencionan sobre la importancia de los procesos utilizados, ya que ellos determinan la comprensión que se obtenga del objeto, así que los procesos deben estar direccionados sobre el significado que pretendemos. Además que tanto el objeto, como el significado pretendido y los procesos, deben estar relacionados coherentemente para que no surjan complicaciones.

En nuestra investigación, lo anterior exhibe ciertas condiciones que deben cumplir tanto el grupo de trabajo como la situación planteada. Es decir, por un lado, creemos que en la interpretación de la razón de cambio es necesario que los alumnos puedan encontrar el valor de una variable a partir de otra en la gráfica de la función, para así poder llevar a cabo comparaciones entre los cambios de las variables. Por otro lado, nos condiciona a que dentro del diseño que planteamos se reflexione sobre los procesos realizados.

También nos indica, que es necesario profundizar sobre los procesos que intervienen al resolver las situaciones planteadas y cuidar que estén relacionados de forma congruente con el significado que se le desea dar a la razón de cambio. Lo anterior nos guía a proponer secuencias de acciones mediante las cuales se calcule la variación de las funciones. Además nos conduce a que los procesos que intervienen en las secuencias comparten estructuras similares y estén organizados de manera coherente, para que no existan contradicciones entre las distintas acciones que llevan a un mismo objetivo.

Por lo anterior el último paso dentro de las secuencias sugeridas, el estructurar y encapsular los procesos en un objeto estático, es primordial y es el que ocasiona mayores problemas para lograr la concepción de objeto matemático. Para enfrentar esto, nosotros proponemos un diseño de actividades sobre contextos gráficos; los motivos e implicaciones que nos hicieron tomar esta decisión son planteados en la siguiente sección.

2.3 El papel de las gráficas

Hasta este momento nuestro marco teórico nos ha dirigido a tomar dos consideraciones. La primera de ellas consiste en la búsqueda y elección de objetos matemáticos que el estudiante domine algorítmicamente y tenga comprensión de éstos; además los objetos elegidos deben ser parte esencial en la estructura del nuevo objeto matemático que se desea desarrollar. Mientras que la segunda, nos conduce al diseño de actividades vinculadas con los objetos que se desean formar, las cuales nos dirijan a una familiarización y reflexión sobre los procesos que se desarrollan.

En la segunda idea, es importante la elección del entorno de las actividades, ya que estas deben fomentar un enfoque tanto operacional como estructural. En este sentido Sfard (1991) considera que el trabajo con representaciones gráficas fomenta el desarrollo de una concepción estructural, ya que son imágenes mentales, compactas e integradas de un concepto, las cuales permiten una visión simultánea de todos los elementos involucrados haciendo las ideas abstractas más tangibles.

Lo anterior, nos lleva a considerar en nuestra investigación un diseño compuesto por actividades que se realicen sobre gráficos. También nos plantea, la necesidad de considerar elementos teóricos que profundicen sobre las problemáticas inmersas dentro del trabajo gráfico.

2.3.1 *La transparencia*

Dentro de la literatura escolar, las gráficas son utilizadas para ejemplificar o ayudar a entender mejor un concepto. Comúnmente, se considera que fallar en la interpretación y diseño de las gráficas se debe a una falta de comprensión del concepto involucrado, dejando de lado los conflictos que la propia interpretación de la gráfica pueda ocasionar.

Roth (2001) es uno de los autores que consideran que este problema es mucho más profundo, ya que aún los científicos expertos pueden tener problemas en tareas que impliquen interpretar gráficas, en particular cuando el especialista no se encuentra familiarizado con el dominio y los datos que genera la gráfica. Por lo que considera que la lectura de gráficas no depende sólo del dominio de los conceptos involucrados, sino también implica una familiaridad con el dominio en que se originan los datos, así como conocer las convenciones estructurales de los gráficos y las características del fenómeno que se representa.

De forma semejante Roth (2004) sugiere que las habilidades relacionadas con la lectura y diseño de gráficas, tales como la percepción de aspectos gráficos relevantes e interpretar el origen de éstos, surgen del proceso de investigación y se relacionan con la creciente familiaridad con el objeto investigado, la instrumentación, y una comprensión de los procesos de transformación que convierten a un conjunto de datos en gráficas.

Por otro lado, establece que las personas inmersas en las tareas gráficas asociadas a fenómenos de su entorno laboral logran ver a éstas como trasparentes, es decir, la gráfica deja de ser el mediador entre el fenómeno y el investigador, y ésta toma el lugar de la situación estudiada. Roth (2004) ejemplifica esta idea como los anteojos que una persona ha utilizado por varios años que en un principio le sirvieron para apreciar de mejor manera lo que sucede a su alrededor y aún continúan haciéndolo, con la diferencia que ya no se percata de su presencia.

Lo anterior nos indica que el contexto en que se usa o se interpreta un gráfico, además de la forma en que se les utilizan y se recaban los datos, se estructuran en conjunto para dar forma al discurso específico al que se establece en la gráfica. Por otro lado, las acciones correspondientes al trabajo de interpretación, así como las normas de interacción de los elementos gráficos y las herramientas disponibles en las situaciones planteadas, son mediadores en la relación entre el individuo y el gráfico. Por lo tanto forman parte del resultado de sus producciones.

En conclusión, cuando los estudiantes tienen la oportunidad de reunir una considerable experiencia y estar íntimamente familiarizados con el carácter de los datos, con el mapeo entre los gráficos y los fenómenos haciendo uso de la experiencia, se vuelven altamente competentes en la lectura e interpretación de gráficos.

2.3.2 *Las gráficas en la investigación*

Lo formulado en esta sección muestra que la gráfica aparte de utilizarse para comprender un concepto, también puede servir como una herramienta que permite la construcción de un nuevo objeto matemático en el individuo. Esto es gracias a que bajo ciertas condiciones es posible acceder directamente al fenómeno estudiado a través de la gráfica correspondiente, lo que condiciona a que el estudiante pueda observar dentro de éstas, el conjunto de procesos realizados y una imagen simultánea de todos los elementos, permitiendo integrar y estructurar los procesos en un objeto abstracto.

Lo anterior nos dirige a considerar dentro de nuestra investigación la necesidad de plantear actividades que fomenten el diseño e interpretación de gráficas, donde sea necesario realizar procesos. Estos deben ser aquellos en los que está inmerso el objeto matemático que se pretende desarrollar.

Por otro lado, nos conduce a trabajar con gráficas que se encuentren dentro de contextos familiares para los alumnos, así como a considerar el conocimiento que tienen de las reglas gráficas, la habilidad para el diseño y la interpretación de ellas.

Con la introducción del trabajo con gráficas, se han planteado todos los elementos teóricos necesarios para nuestra investigación, así como el camino que seguiremos en nuestro trabajo. Esto nos pone en condiciones para plantearnos el esquema que llevaremos a cabo para lograr nuestros objetivos, así como las hipótesis y preguntas de nuestra investigación. Éstos serán establecidos a continuación.

2.4 Hipótesis y Preguntas de investigación

Para desarrollar una concepción de la razón de cambio relacionada con la variación de sus parámetros y apoyada en el análisis gráfico, proponemos las siguientes hipótesis y preguntas de investigación.

Hipótesis de trabajo:

Si los estudiantes cuentan con antecedentes de interpretación de gráficas de fenómenos familiares de variación, estarán en mejores condiciones para interpretar la razón de cambio.

Hipótesis de investigación:

Sí los estudiantes, trabajan con gráficas que representan la distancia recorrida y el llenado de un tanque con relación al tiempo, haciendo énfasis en el análisis gráfico de la velocidad y el flujo de agua respectivamente, estarán en condiciones de construir un significado de la razón de cambio asociado a la variación de sus parámetros.

Preguntas de investigación:

1. ¿De qué manera influye el estudio de la velocidad y el flujo de agua, para el desarrollo de procesos que impliquen el trabajo con la razón de cambio?
2. ¿De qué manera los procesos fundados en el análisis gráfico de la razón de cambio, fomentan condiciones para construir esta idea desde el punto de vista de la variación de sus parámetros?
3. ¿La comprensión y el análisis gráfico de la razón de cambio son suficientes para acceder al concepto de derivada? y en cualquier caso ¿por qué?

CAPÍTULO 3

Metodología

En este capítulo, se describe a los estudiantes qué participaron en la investigación, la dinámica con la que trabajaron las actividades propuestas en cada sesión, la cual consistió en tres etapas: Individual, equipos y grupal. Además, se muestran los resultados obtenidos de un cuestionario diagnóstico realizado a un grupo que se encontraba en condiciones similares a las de nuestros participantes.

Para finalizar el capítulo, describimos en que consistían los problemas que forman cada actividad, así como los objetivos y los resultados que se esperan obtener. También damos a conocer una serie de problemas que se plantean como intervenciones dentro de cada actividad.

3.1 Participantes

El presente trabajo se realizó con 7 jóvenes inscritos en la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas, 3 re-cursaban la asignatura de Cálculo 1 (Cálculo Diferencial) y 4 cursaban la asignatura de cálculo 2 (Cálculo Integral), impartidas en el primer y segundo semestre de la carrera.

Consideramos que tanto la formación académica y las experiencias de los estudiantes, indican que éstos han desarrollado habilidades y conocimientos que les permiten realizar nuestras actividades de la forma en que fueron planeadas.

El hecho de trabajar con jóvenes universitarios, nos hace suponer que ellos se han enfrentado con situaciones que involucran percepciones que asocian a la velocidad con el tiempo y la distancia. Por ejemplo, el hecho de comparar los tiempos de los recorridos al viajar en un autobús o al ir en un automóvil. También consideramos, de manera semejante, que los estudiantes pueden haber afrontado actividades que involucran la idea de volumen de agua asociado a la apertura de una llave.

El realizar la investigación con estudiantes que ya aprobaron el bachillerato y han tomado un curso de Cálculo Diferencial a nivel universitario, nos permite suponer sentado que los integrantes de nuestro grupo de trabajo tienen la capacidad de extraer información puntual de las gráficas, están familiarizados con la fórmula para calcular la razón de cambio y no tienen dificultades para realizar operaciones que impliquen comparar el cambio entre unidades de medida.

Por lo tanto, consideramos que nuestro grupo de trabajo está en posibilidades de realizar actividades que se desarrollen sobre modelos gráficos de sucesos que describen el comportamiento de la velocidad o el flujo de agua en un objeto, en las cuales se realicen acciones que impliquen obtener o analizar la información puntual de las gráficas, calcular el valor de la razón de cambio en distintas funciones lineales y comparar el cambio de las variable dependiente e independiente en ésta y otras funciones.

Para profundizar más en las capacidades de los estudiantes, respecto a los aspectos gráficos y para conocer el tipo de experiencias y conocimientos al que el alumno puede recurrir al trabajar en estos contextos, se realizó un cuestionario diagnóstico cuyo contenido explicaremos a continuación.

3.2 Cuestionario diagnóstico

El Cuestionario diagnóstico fue aplicado a 17 estudiantes que tenían los mismos antecedentes académicos que nuestro grupo de trabajo, éste consistió en realizar una serie de problemas, en los cuales era necesario diseñar, extraer información puntual e interpretar gráficas para poder llegar a la solución de los problemas planteados. A continuación describiremos y mostraremos algunos de los problemas del cuestionario diagnóstico (ver Anexo 1).

La primera serie de problemas consistió en extraer y localizar información puntual en el plano o en la gráfica de una función. Con estos problemas se pretendía conocer la capacidad de los alumnos para ubicar y conocer los datos que nos proporciona un punto específico sobre un gráfico o plano, algunos de estos problemas son mostrados en la Figura 15.

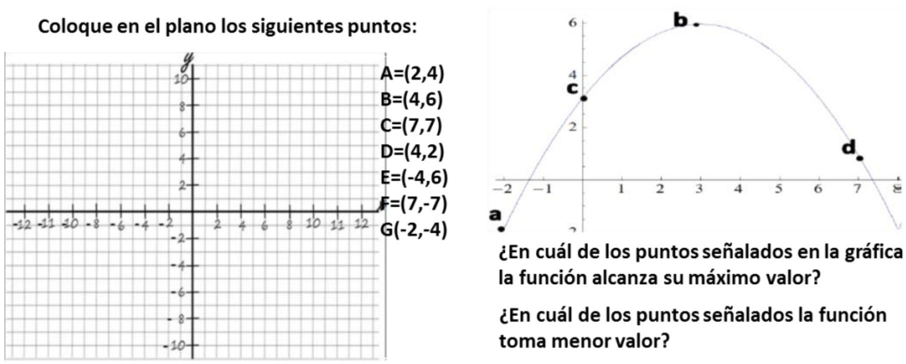


Figura 15. Extraer y localizar información puntual.

Otro grupo de problemas consistió en la lectura y diseño de gráficas de ciertos eventos. Tenían la finalidad de explorar los aspectos en los que el alumno se basa al momento de interpretar y esbozar gráficas de recorridos en relación al tiempo; algunos de estos problemas se ilustran en la Figura 16.

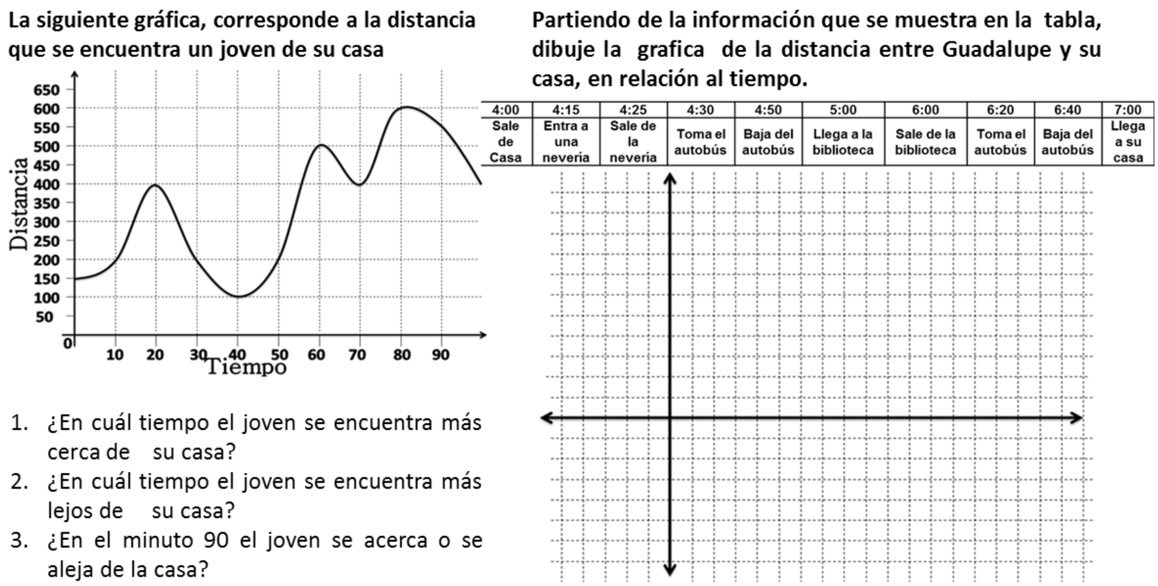


Figura 16. Interpretación y diseño de gráficas.

En la última serie de problemas, era necesario comparar la velocidad de distintos eventos con base en sus representaciones gráficas. El objetivo de éstos era observar en qué características y elementos de las gráficas distancia-tiempo, se basan los alumnos analizar la velocidad. La Figura 17 ilustra alguno de estos problemas.

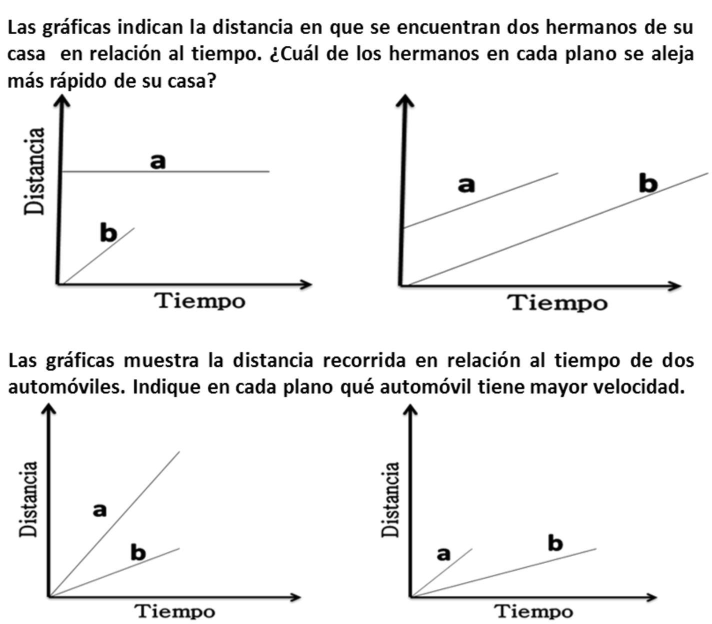


Figura 17. Análisis de la velocidad.

El Cuestionario diagnóstico nos arrojó los siguientes resultados relevantes para nuestra investigación:

- No existen complicaciones para extraer datos puntuales de las gráficas.
- Gran parte de los estudiantes le dan una interpretación icónica a las gráficas, es decir, interpretan a las gráficas como trayectorias.
- Algunos no relacionan las respuestas entre preguntas de un mismo problema.
- Los alumnos experimentan dificultades, cuando dentro de la gráfica de una función se les pide comparar puntos en relación a su dominio.
- En algunos casos, no se logra interpretar, ni graficar situaciones que involucren lapsos de tiempo donde no hay movimiento.
- Las gráficas son comúnmente diseñadas con trazos rectos y a la distribución de los elementos en el eje *"x"* se le resta importancia.
- Cuando se compara la variación entre funciones lineales graficadas en el mismo plano, los estudiantes tienen complicaciones cuando las gráficas no se originan en un mismo punto, algunos se guían en la magnitud o la posición de la gráfica en el eje de las "*y*".

Estos resultados fueron de gran ayuda para diseñar y guiar el desarrollo de las actividades, las cuales discutiremos en la siguiente sección.

3.3 Instrumento y puesta en marcha

Para alcanzar nuestro objetivo y responder a nuestras preguntas se diseñaron cinco actividades que se realizaron en tres sesiones de dos horas; en cada sesión a excepción de la última, se trabajaron dos actividades. En las primeras dos sesiones, se contó con la participación de todos los estudiantes y en la última sólo fue posible contar con 3 estudiantes debido a su disponibilidad.

Todas las actividades, a excepción de la última se desarrollaron en 3 etapas: individual, equipos y grupal. En el desarrollo de esta secuencia de trabajo no hubo irregularidades y las intenciones de cada etapa de trabajo fueron las siguientes:

En la etapa individual se esperaba que cada alumno respondiera la actividad por separado. Ésta tenía como objetivo, que el estudiante exprese sus ideas personales y realice los procesos que crea necesario para la actividad, sin condicionante alguno. En esta fase, no hubo discusión acerca de las preguntas o respuestas entre los participantes, sólo hubo diálogo con el observador de la prueba en los casos que las indicaciones no fueron claras para el estudiante.

Durante la etapa de equipos, los alumnos discutieron sus respuestas únicamente con los integrantes de su equipo, bajo la indicación de llegar a una respuesta a través de acuerdos internos, la cual debería ser justificada con argumentos sólidos. Esta fase tuvo como objetivo, que los estudiantes analizaran los procesos realizados al resolver las actividades y que relacionaran sus acciones con argumentos que justificaran sus resultados; también se esperaba que el estudiante observara y reflexionara sobre otros procedimientos que le permitieran resolver las actividades planteadas.

En la etapa grupal, se expusieron en el pizarrón las diferentes respuestas a las que llegaron los equipos y cada uno defendió con argumentos la validez de su respuesta. Esta fase fue guiada por el observador quien planteó nuevas preguntas acerca de los elementos y problemas que intervienen en cada actividad. Dentro de esta etapa, el observador guio a los estudiantes a reflexionar sobre por qué sus procesos les permitieron resolver cada problema de la actividad o a reformular sus ideas si era necesario; para esto el aplicador propuso nuevos problemas que le permitían al estudiante re-estructurar sus ideas.

La decisión de realizar esta secuencia trabajo con los alumnos, se justifica en la teoría de Reificación de Sfard (1991, 1994) y la transición entre niveles jerárquicos para desarrollar un *procept* presentada por Gray *et al* (1999), expuestos en el Capítulo 2. Es decir, en la primera y segunda etapa se esperaba, en una primera instancia, que el alumno se familiarizara con los procesos, para que después explorara y contemplara nuevos métodos que le permitieran acceder a la solución del problema. Mientras que en la tercera etapa se tenía la intención que se estructuraran los procesos realizados y se contemplaran como argumentos que definen a un objeto matemático.

Las 5 actividades de las que se compone nuestro diseño también toman en cuenta teoría expuesta en el Capítulo 2, haciendo énfasis en los elementos expuestos dentro de las *metáforas* y *met-before*. Es decir, están elaboradas con la intención de que el alumno ponga en juego ciertas experiencias y conocimientos ya establecidos, para darle significado a un nuevo objeto matemático.

Los objetivos específicos de cada actividad y el papel de las etapas de trabajo dentro de ellas, se explica a detalle en la siguiente sección.

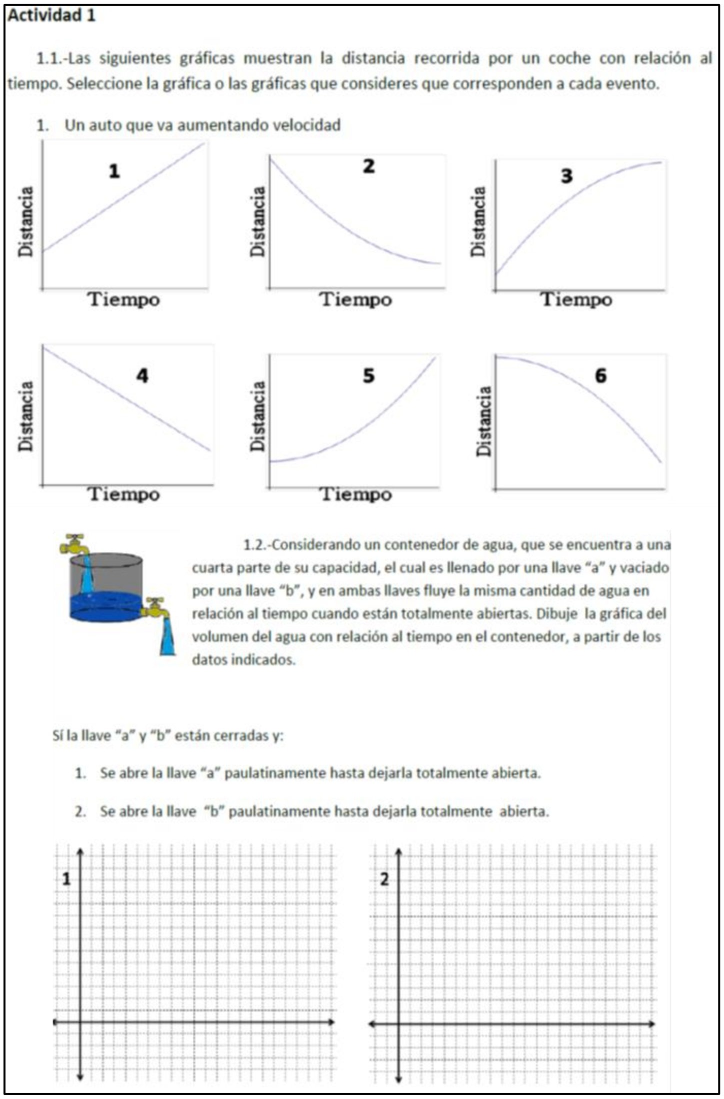
3.4 Descripción y objetivos de las actividades

En esta sección describiremos cada una de las actividades, los elementos que las forman, lo que se esperaba que realizara el alumno en cada etapa, su relación con los elementos teóricos planteados en el Capítulo 2 y el propósito de cada actividad. Las actividades se muestran de forma completa en el Anexo 2.

3.4.1 *Actividad 1*

Dentro de esta actividad se elaboraron problemas que implican, por un lado, analizar a lo largo de distintas gráficas el cambio entre variables (analizar la variación). Por otro lado, también se cuenta con problemas en los que es necesario realizar la tarea inversa: dado el comportamiento de la variación de un fenómeno, mostrar gráficamente cómo cambian sus variables una respecto a la otra.

En resumen en esta actividad se presentan situaciones donde es necesario establecer una relación entre el comportamiento de la variación y la forma de la gráfica. Algunos de los problemas propuestos dentro de la actividad se ilustra en la Figura 18.


Actividad 1

1.1.-Las siguientes gráficas muestran la distancia recorrida por un coche con relación al tiempo. Seleccione la gráfica o las gráficas que consideres que corresponden a cada evento.

1. Un auto que va aumentando velocidad

1.2.-Considerando un contenedor de agua, que se encuentra a una cuarta parte de su capacidad, el cual es llenado por una llave "a" y vaciado por una llave "b", y en ambas llaves fluye la misma cantidad de agua en relación al tiempo cuando están totalmente abiertas. Dibuje la gráfica del volumen del agua con relación al tiempo en el contenedor, a partir de los datos indicados.

Sí la llave "a" y "b" están cerradas y:

1. Se abre la llave "a" paulatinamente hasta dejarla totalmente abierta.
2. Se abre la llave "b" paulatinamente hasta dejarla totalmente abierta.

Figura 18. Algunos problemas de la Actividad 1.

Con base en el estudio exploratorio se prevé que algunos estudiantes den respuestas, donde relacionen la magnitud de la variación con el valor del elemento correspondiente al eje de las "y". También se esperaba que dada su formación académica surgieran argumentos que involucraran a la derivada, en este tipo de respuestas se consideraba que los alumnos no dispondrían de argumentos sólidos para justificar sus soluciones.

En el desarrollo de la actividad se esperaba que el estudiante expresara aquellos conocimientos e ideas que liga a los problemas establecidos, y que al momento de reflexionar sobre los procesos que son resultado de sus ideas iniciales, encuentre debilidades y la falta de coherencia entre sus acciones y sus pensamientos. Para fomentar esto, se planteó enfrentar a los estudiantes con experiencias derivadas de los fenómenos donde se construyen los problemas y proyectar sus argumentos sobre las respuestas desechadas.

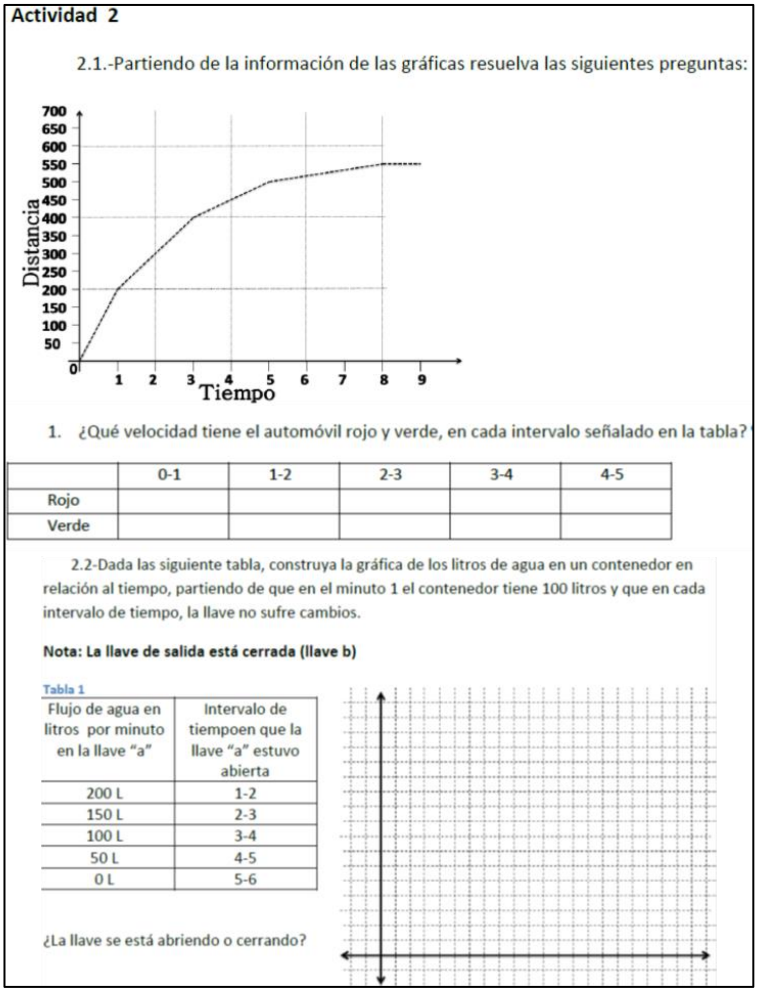
El objetivo de esta actividad es que los estudiantes expresen y enfrenten las ideas con las que han creado vínculos entre la gráfica y la variación, para que así los estudiantes reflexionen acerca de los elementos, las cualidades y las características de la propia representación gráfica, y sobre cómo cambian sus variables en relación al comportamiento de la variación.

Los problemas mostrados en esta sección ofrecen al estudiante la libertad de elegir el criterio y procedimiento para resolverlos, en cambio en los problemas de la actividad 2 se conduce a los estudiantes a usar ciertos procedimientos para resolver este tipo de problemas. Actividad que discutiremos continuación.

3.4.2 *Actividad 2*

Dentro de esta actividad se proponen problemas que guían al estudiante a comparar el valor de la razón de cambio en distintos intervalos definidos sobre una gráfica, para así conocer el comportamiento de la variación a lo largo de la gráfica. También se plantean problemas que dirigen al estudiante a realizar la tarea inversa, como se muestra en la Figura 19.

En esta actividad se espera que los estudiantes no tengan complicaciones para resolver los problemas ya que estos son de carácter algorítmico, donde para conocer los datos que intervienen en los algoritmos sólo es necesario extraer información puntual de las gráficas, mientras que en los problemas inversos es necesario ubicar la información puntual en la gráfica. Lo que nos brinda la confianza de que ocurra esto, es la formación académica de los estudiantes y los datos recabados en el estudio exploratorio.



Actividad 2

2.1.-Partiendo de la información de las gráficas resuelva las siguientes preguntas:

1. ¿Qué velocidad tiene el automóvil rojo y verde, en cada intervalo señalado en la tabla?

	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5
Rojo					
Verde					

2.2-Dada las siguiente tabla, construya la gráfica de los litros de agua en un contenedor en relación al tiempo, partiendo de que en el minuto 1 el contenedor tiene 100 litros y que en cada intervalo de tiempo, la llave no sufre cambios.

Nota: La llave de salida está cerrada (llave b)

Tabla 1

Flujo de agua en litros por minuto en la llave "a"	Intervalo de tiempoen que la llave "a" estuvo abierta
200 L	1-2
150 L	2-3
100 L	3-4
50 L	4-5
0 L	5-6

¿La llave se está abriendo o cerrando?

Figura 19. Algunos problemas de la Actividad 2.

Si observamos la Actividad 1 y 2 presentan problemas semejantes, esto se debe a que se espera que los estudiantes vinculen los resultados y procesos obtenidos en la Actividad 2 con las de la 1.

Lo anterior marca la finalidad de esta actividad, que el estudiante encuentre una herramienta que le permita analizar el comportamiento de la variación y que se familiarice con los procesos efectuados al utilizar esta herramienta.

Entonces en este momento el estudiante estaría en la posición de resolver de forma adecuada los problemas de la Actividad 1. Sin embargo creemos que aún no puede justificar sus respuestas, por lo que sugerimos una serie de intervenciones, las cuales se muestran en el siguiente apartado.

3.4.3 *Intervenciones, regreso a la Activad 1*

Al terminar la Actividad 2, se propondrá a los estudiantes que retomen en equipos la Actividad 1, donde se espera que los alumnos utilicen los métodos empleados y las observaciones realizadas en la Actividad 2. Confiamos que logren llegar a las respuestas correctas de cada problema, pero que aún no puedan dar argumentos que justifiquen sus respuestas, debido a la falta de graduación y valores en los gráficos de cada problema.

Para que los estudiantes puedan enfrentar esta situación se plantea una intervención con una serie de problemas, algunos de los cuales aparecen ilustrados en la Figura 20, con los que se pretende que los estudiantes profundicen más acerca de la razón de cambio.

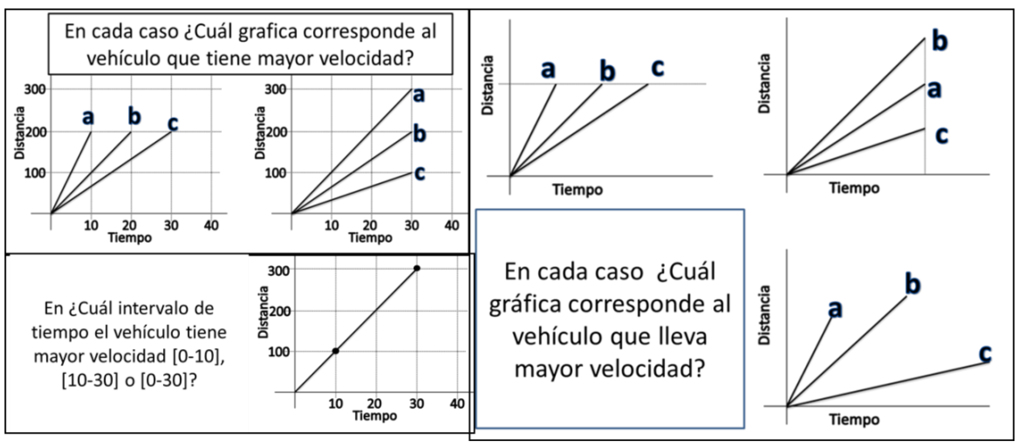


Figura 20. Intervenciones en las Actividades 1 y 2.

Estos problemas están diseñados con base en las decisiones tomadas en el Capítulo 2, de analizar en el cambio de una variable y realizar una reflexión estructurada de los procesos realizados. Consideramos que esto es factible gracias a que se mantiene una variable constante y es posible realizar un análisis gráfico de cada problema.

Con estas intervenciones se espera que el estudiante se percate, por un lado, que para poder comparar el valor de la razón de cambio entre dos objetos es necesario que ambos estén definidos sobre un mismo intervalo. Mientras que por otro lado, establezca una relación entre los incrementos de cada variable con el valor de la razón de cambio.

Una vez que los estudiantes resuelvan y deliberen sobre las soluciones de los problemas propuestos, consideramos que estarán en condiciones para construir argumentos que justifiquen las respuestas obtenidas en la Actividad 1. Se espera que ellos comiencen a desprenderse de los procedimientos realizados y a establecer la razón de cambio como una herramienta que nos permite analizar la variación de los parámetros de una función, es decir, como una relación que nos indica el cambio entre las variables de una función en un intervalo dado.

3.4.5 *Actividad 3*

En esta actividad se plantean problemas que implican que el estudiante asocie distintas formas gráficas con el comportamiento de la variación y que compare el valor de esta en distintos puntos de la gráfica. La Figura 21 muestra algunos de los problemas planteados.

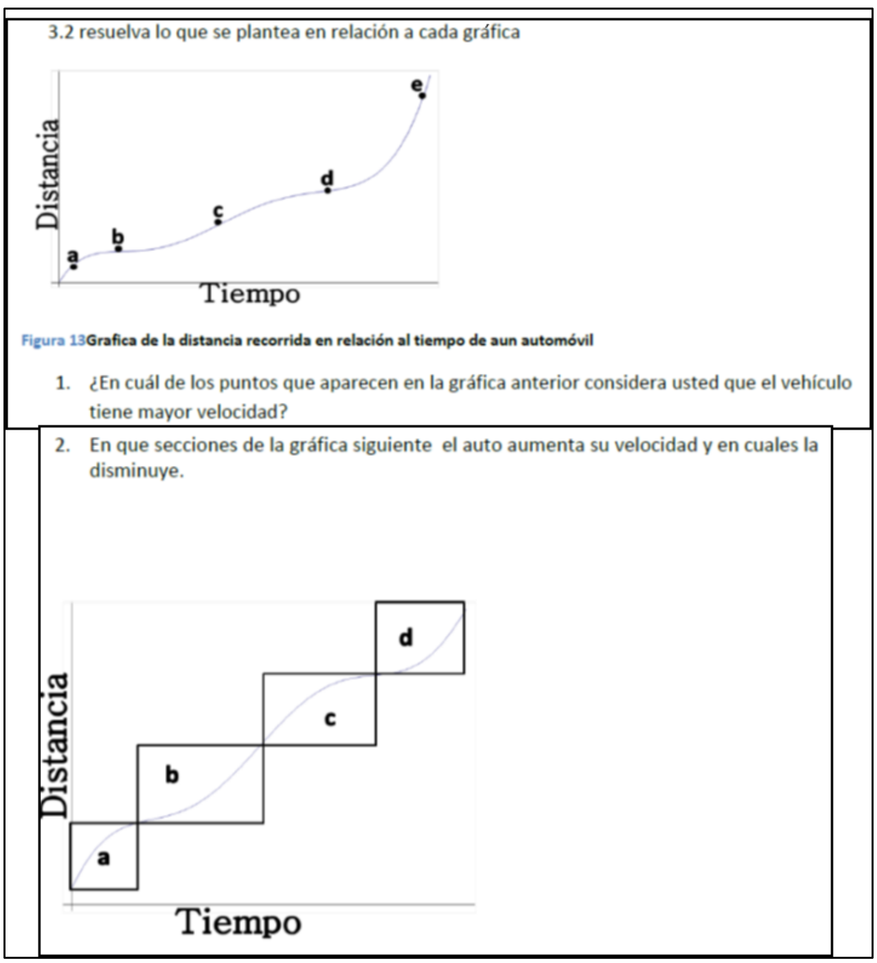


Figura 21. Problemas de la Actividad 3.

Se espera que en esta sección el estudiante haga uso de las herramientas utilizadas en el Capítulo 1 para resolver los problemas de esta actividad. La finalidad de esta sección es que el estudiante trate a la razón de cambio como un objeto que nos permite conocer la variación de distintos fenómenos y que relacione el valor de ésta con el de la pendiente de la recta secante.

El objetivo de esta sección es que utilicen la razón de cambio para resolver los problemas y que dentro de sus argumentos, para validar sus respuestas consideren los utilizados en la sección anterior.

3.4.6 Actividad *4*

En esta actividad se abordan problemas que implican que el estudiante compare el valor de la variación en distintos puntos, estos puntos se dan sobre la gráfica de una función o de distintas funciones. En estos problemas las respuestas obtenidas dependerán del intervalo elegido para analizar la razón de cambio alrededor de cada punto. La Figura 22 muestra uno de los problemas abordados en esta actividad.

3. Ordene los puntos en la gráfica, de mayor a menor en relación a la velocidad que tiene el auto en cada punto.

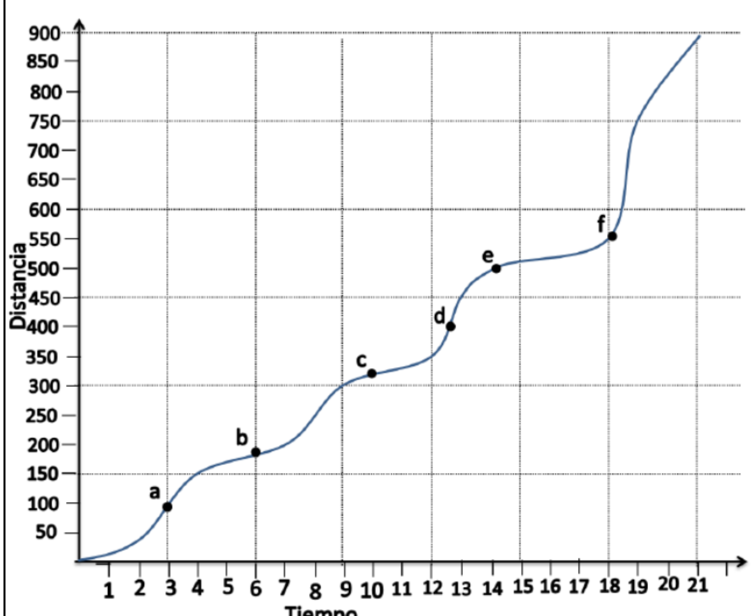


Figura 22. Problemas de la Actividad 4.

En la actividad se busca que los estudiantes ubiquen el intervalo para estimar la variación en el punto en diversas posiciones que lo contengan, lo que dará como resultado una discusión entre los estudiantes y la interrogante de ¿Qué ubicación es la más conveniente?

Dentro de esta actividad se espera que el estudiante se percate, que si bien la razón de cambio es un objeto que nos permite explorar globalmente el comportamiento de la variación a lo largo de una función, localmente sólo nos aproxima al valor de la variación en un punto, donde esta aproximación depende del tamaño y la ubicación del intervalo que consideremos.

Para lograr que el estudiante reflexione sobre lo anterior, se plantea debatir las distintas respuestas que resulten en cada problema. Además, se propone intervenir con problemas que muestren, que un intervalo puede contener puntos donde la variación de la función es muy distinta al valor de la razón de cambio en el intervalo, y como varios intervalos que contienen un mismo punto dan aproximaciones distintas del valor de la variación. Algunos de los problemas utilizados se muestran en la Figura 23.

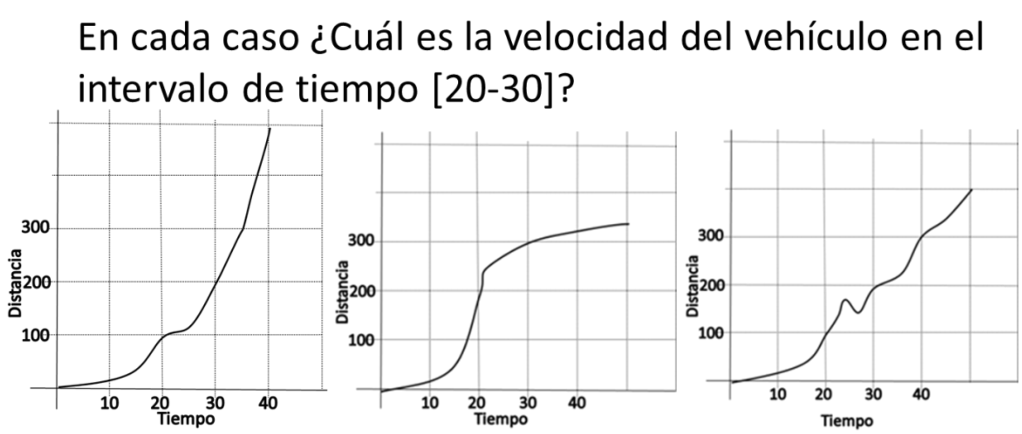
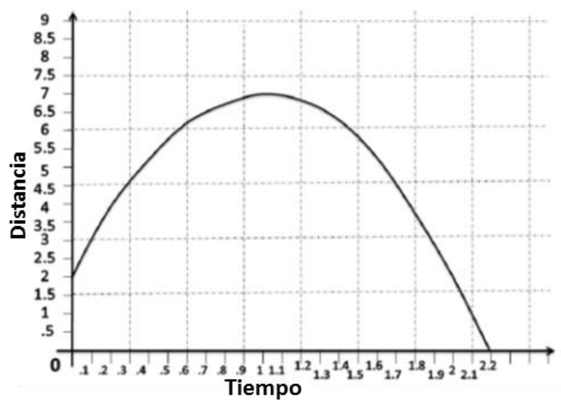


Figura 23. Algunos de la segunda intervención.

3.4.7 *Actividad 5*

Esta actividad se compone de problemas que guían al estudiante a evaluar la variación en un punto mediante un análisis gráfico y analítico, además, a comparar y analizar ambos resultados. Se guía al estudiante a que encuentre una relación entre la aproximación a la variación en un punto y la dimensión del intervalo donde se calcula la razón de cambio. Además, se les conduce a que hagan una conversión de las acciones que realizan en el ambiente gráfico al terreno analítico. La Figura 24 muestra algunos de los problemas presentes en esta actividad

5.1.-El siguiente gráfico representa la distancia con relación al tiempo, del suelo a una pelota que se lanza en forma vertical. Responda las siguientes preguntas:



1.¿Qué velocidad aproximada tiene la pelota cuando tiene .3 s de ser lanzada?
2.¿Qué velocidad aproximada tiene la pelota cuando tiene 2 s de ser lanzada?
3.¿Qué velocidad aproximada toma la pelota cuando tiene 1 s de ser lanzada?

5.2.-La gráfica anterior corresponde a la ecuación D = $10t - 5t^2 + 2$. Responda las siguientes preguntas teniendo en consideración que D indica la distancia y t el tiempo

1.¿Qué velocidad aproximada tiene la pelota cuando tiene .3 s de ser lanzada?
2.¿Qué velocidad aproximada tiene la pelota cuando tiene 2 s de ser lanzada?
3.¿Qué velocidad aproximada toma la pelota cuando tiene 1 s de ser lanzada?

5.3.-Escriba una fórmula para aproximar la velocidad de un vehículo en un tiempo "a", dado que la distancia recorrida por el auto está determinada por una función f(t).

Figura 24. Problemas de la Actividad 5.

La finalidad de esta actividad es establecer si el significado de la razón de cambio, que se ha formado en el estudiante a lo largo de las actividades, es suficiente para que el alumno logre vincular a éste con la derivada. Podemos decir que esta actividad tiene el propósito de diseñar las bases para una investigación futura.

Para propiciar que surjan resultados que nos permitan alcanzar este objetivo, se plantea realizar comentarios y cuestionamientos con base en las construcciones analíticas que formulen los estudiantes, motivándolos a que reformulen sus estructuras e integren a éstas procesos recursivos centrados en encontrar en cada ocasión una mejor aproximación a la variación en un punto.

CAPÍTULO 4

Resultados y Observaciones

En este capítulo mostraremos una selección de los resultados a los que llegaron los estudiantes al resolver cada actividad, tanto de forma individual, en equipos y grupal. En esta selección se intenta mostrar el papel que jugaron tres elementos a lo largo de cada sesión, que son: Las experiencias y conocimientos previos, la relación entre los procesos y los objetos mencionada en el marco teórico y el análisis gráfico de los procesos realizados.

También daremos a conocer nuestras observaciones sobre el rol que jugaron los tres elementos antes mencionados, basándonos en el análisis cualitativo de las respuestas de los estudiantes a las actividades y en los diálogos que surgieron tanto en la fase de equipos y grupal. Para poder analizar las producciones realizadas por cada alumno y equipo, éstas se muestran de forma separada, apoyándose en la división mostrada en la Tabla 1.

Equipo	Integrantes	Materia de cálculo en curso
1	A1 y A2	Cálculo 2
2	A3 y A4	Cálculo 2
3	A5, A6 y A7	Cálculo 1

Tabla 1. Alumnos que integraron cada equipo.

4.1 Sesión 1

En esta sección presentaremos algunos de los resultados obtenidos por los estudiantes al resolver las Actividades 1 y 2, así como las discusiones que surgieron en torno a éstas y las estrategias que surgieron al reflexionar sobre los problemas propuestos en las intervenciones. Al final daremos a conocer nuestras observaciones de los resultados obtenidos.

4.1.2 *Actividad 1*

Como se mencionó en el capítulo anterior, la Actividad 1 consta de dos secciones de problemas que consistieron en lo siguiente:

Sección 1. Con base en la gráfica de la distancia recorrida en relación al tiempo, el alumno establezca si la velocidad es creciente o decreciente.

Sección 2. Los estudiantes tienen que diseñar la gráfica del volumen del agua en un contenedor dada las manipulaciones que se indiquen en la llave de salida y entrada.

En la sección 1, en la fase de trabajo individual surgieron tres respuestas diferentes. Mientras en la fase de equipos se discutió, con la intención de llegar a soluciones conjuntas. En esta etapa surgió una nueva respuesta por parte de los estudiantes, cuando se realizó una discusión grupal.

La Figura 25, ilustra las distintas respuestas expresadas por los estudiantes en la fase de grupos, mientras que la Tabla 2 nos muestra las respuestas dadas por cada alumno durante el trabajo individual, y en la Tabla 3 podemos apreciar las repuesta realizadas por cada equipo en la fase de grupos, junto con los argumentos presentados para defender su respuesta. Cabe señalar que el equipo 3 presentó dos respuestas ya que no se logró un acuerdo entre sus integrantes.

Alumno	La velocidad aumenta	La velocidad disminuye
A1, A2, A4, A5 y A6	En las gráficas 1, 3 y 5	En las gráficas 2, 4 y 6
A7	En las gráficas 1, 2 y 5	En las gráficas 3, 4 y 6
A3	En la gráfica 5	En la gráfica 3

Tabla 2. Respuestas individuales a los problemas de la primera sección.

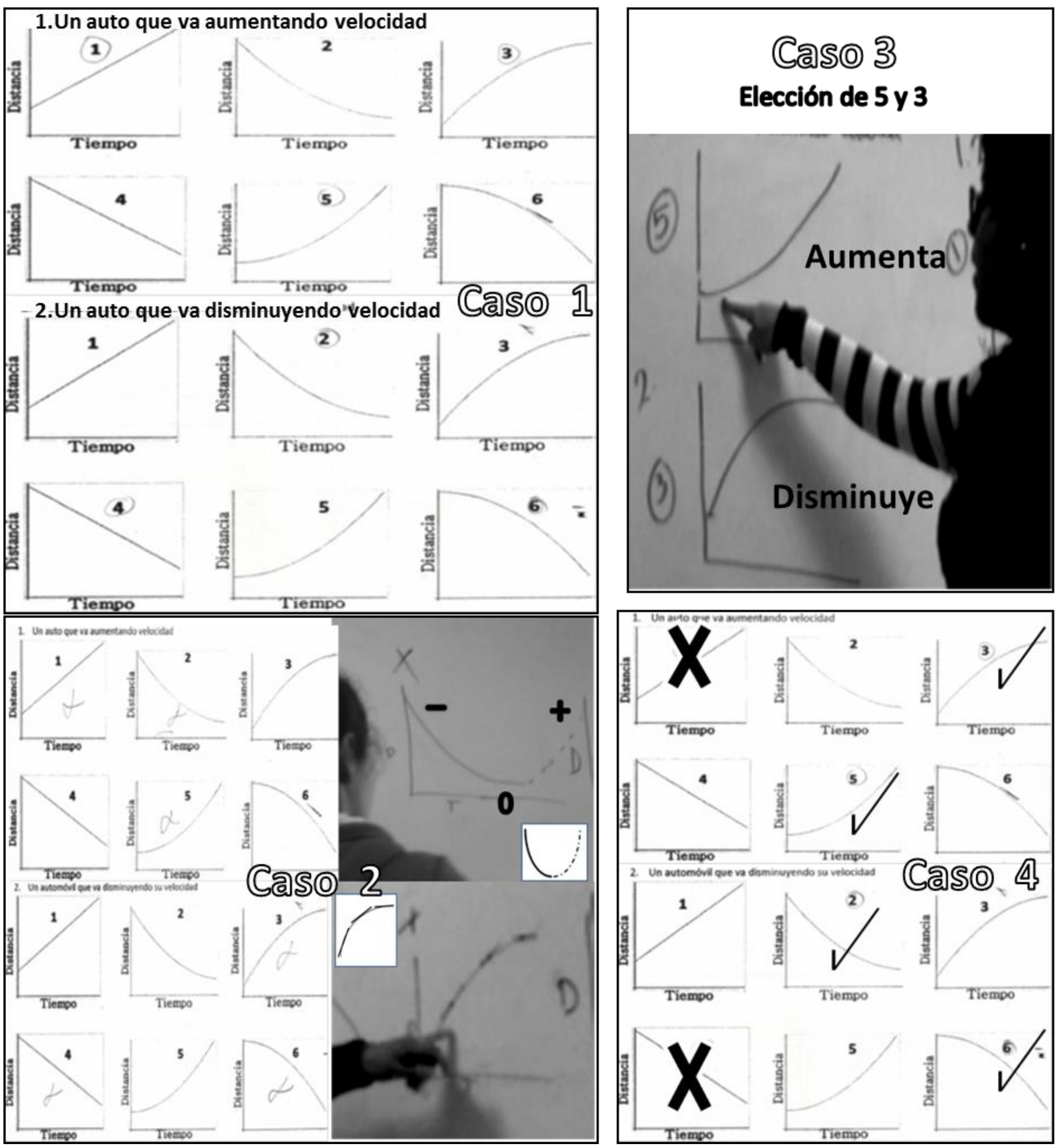


Figura 25. Respuestas de los equipos a los problemas de la sección 1.

Caso	Equipo	Resumen de los argumentos de los equipos para justificar su respuestas
1	Equipo 3 (A5 y A6)	Las gráficas nos indican si el auto está aumentando o disminuyendo de velocidad. Ante la duda agrega: *además en las gráficas es posible ver como la distancia crece o baja, por lo que la velocidad está aumentando o disminuyendo.*
2	Equipo 1 (A7)	*Si completamos las gráficas podemos ver como cambia el signo del valor de la velocidad y así decidir si la velocidad aumenta o disminuye*. También traza tangentes y conforme las dibuja va haciendo referencia a la velocidad, haciendo énfasis cuando estas se tornan horizontales.
3	Equipo 2	*La velocidad aumenta en la 5 porque en ésta la distancia va aumentando cada vez más rápido, y disminuye en 3 ya que la distancia crece cada vez menos. Excluimos las gráficas descendentes ya que no se puede recorrer distancia hacia atrás.*
4	Equipo 1	*Nosotros estábamos en el caso 1 pero excluimos las gráficas lineales, ya que estas indican velocidades constantes.*

Tabla 3. Resumen de las respuestas y justificaciones de los equipos a la primera sección.

En la segunda sección de la actividad, en las respuestas individuales encontramos, que en todos los problemas a excepción del 4 (donde tuvieron complicaciones A1, A3, A4 y A7), los estudiantes lograron formular correctamente, mediante sus gráficas, si el contenedor se estaba llenando o vaciando, pero en la mayoría de los casos éstas no reflejaban la manipulación que se hacía en las llaves. En la Figura 26, podemos observar algunas de las respuestas dadas por los alumnos.

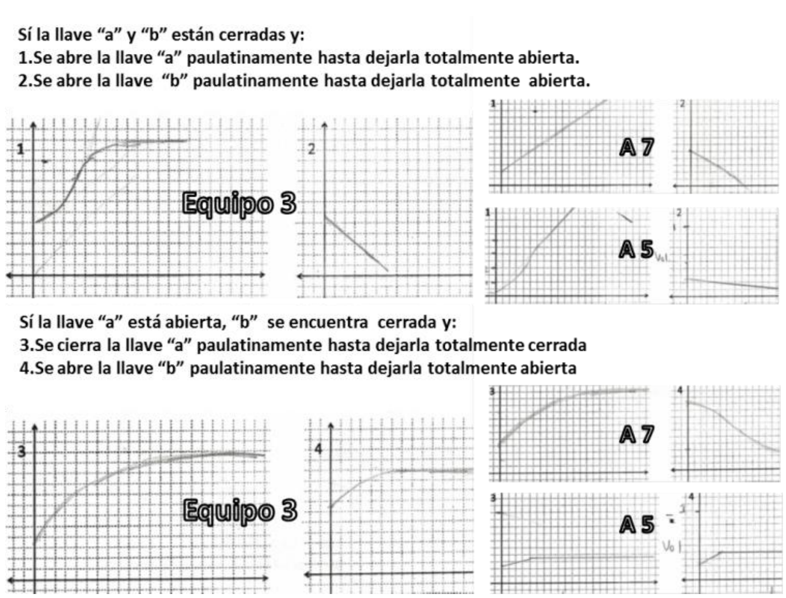


Figura 26. Algunas respuestas a la segunda sección de problemas.

En la fase de equipos de la actividad, aquellos estudiantes que habían tenido dificultades en el problema 4, reformularon su respuesta, pero a pesar de las discusiones internas que surgieron, los estudiantes siguieron teniendo complicaciones para vincular la abertura de las llaves con la información de la gráfica, la Figura 26 nos muestra un ejemplo de esto.

En lo que respecta a las justificaciones resultantes del trabajo en equipo, surgieron dos tipos de argumentos en esta fase, pero en ninguno de ellos se hizo referencia correcta a la cantidad agua que fluía en la llave. En la tabla 4 presentamos un resumen de las respuestas dadas por los equipos.

Equipo	Justificación de sus resultados
Equipo 2	La manipulación en las llaves nos indica si el contenedor se está llenando o vaciando poco a poco.
Equipo 1 y 3	El aumento o disminución de agua en el contenedor, depende de cual llave se encuentra más abierta.

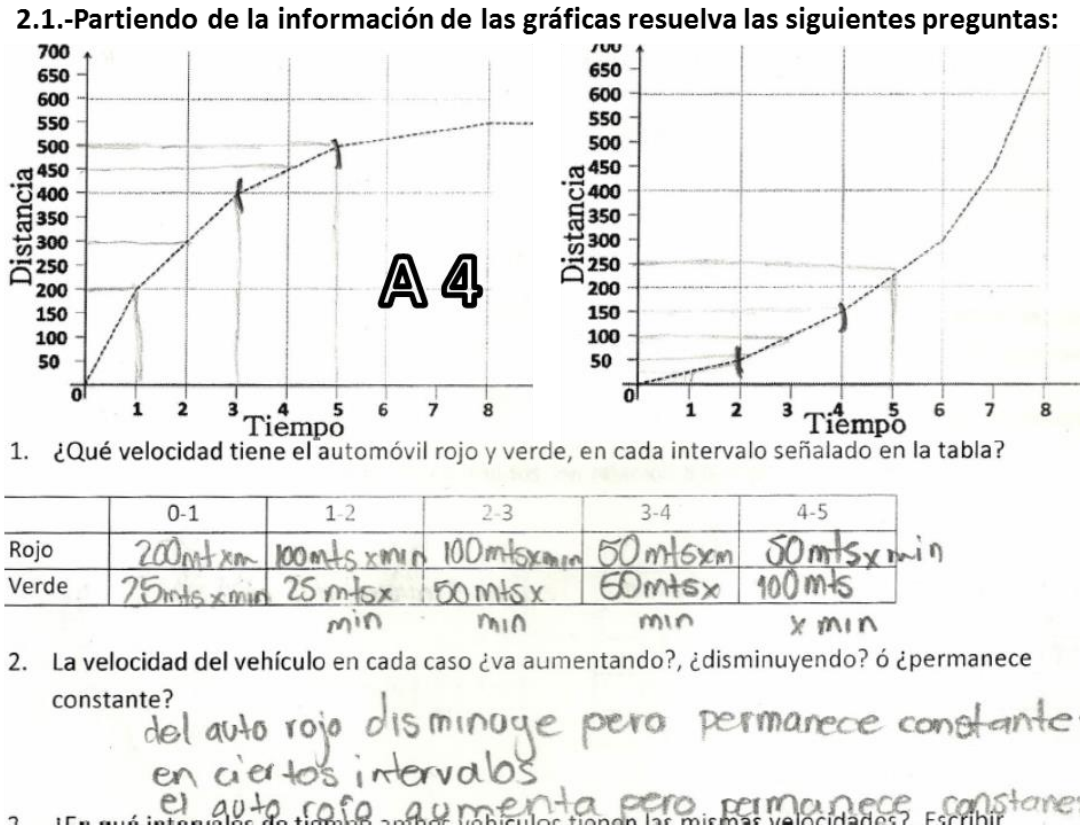
Tabla 4.Justificación de las respuestas dadas a los problemas de la sección 2.

En general los resultados mostrados hasta el momento, nos permiten observar que las experiencias, los conocimientos previos y el contexto de los problemas, conducen las decisiones que toman los alumnos tal como lo sugieren McGowen y Tall (2010, 2013). El hecho que las experiencias sean la fuente principal de las justificaciones del alumno nos indica desde el punto vista teórico de Tall (2008) que las respuestas de cada individuo son resultado de sus estructuras *Met-Before,* las cuales se pueden apreciar en los procesos realizados al resolver cada problema.

También, notamos la fragilidad y falta de congruencia en algunas de las ideas generadas por ellos, ya que a través de la discusión y el trabajo de interpretación en conjunto, sus puntos de vista son modificados o sustituidos, gracias a la inclusión de nuevos conocimientos y experiencias, que sustituyen a los anteriores o se incluyen en ellos, las cuales son consideradas de mayor o igual validez que las anteriores y pueden estar o no en congruencia con los razonamientos previos.

4.1.2 *Actividad 2*

La Actividad 2 presenta problemas similares a la anterior. En la primera sección de esta actividad, al estudiante se le proporciona gráficas graduadas, y además antes de establecer el comportamiento de la velocidad a lo largo de la gráfica el estudiante debe conocer la velocidad en los intervalos de la gráfica. Mientras que en la segunda sección, se hace específico el flujo de agua que tienen las llaves durante cada minuto, y agregamos un problema donde era necesario aproximar el flujo de agua por minuto en cada llave.


2.1.-Partiendo de la información de las gráficas resuelva las siguientes preguntas:

1. ¿Qué velocidad tiene el automóvil rojo y verde, en cada intervalo señalado en la tabla?

	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5
Rojo	200mt x m	100mts x min	100mts x min	50 mts x m	50 mts x min
Verde	75mts x min	25 mts x min	50 mts x min	60mts x min	100 mts x min

2. La velocidad del vehículo en cada caso ¿va aumentando?, ¿disminuyendo? ó ¿permanece constante?
del auto rojo disminoye pero permanece constante en ciertos intervalos
el auto rojo aumenta pero permanece constane

Figura 27. Respuesta de A4 a los problemas de la primera sección.

La primera sección fue resuelta factiblemente por todos los estudiantes. Para lograr esto, calcularon en cada intervalo el valor de la velocidad promedio y analizaron el cambio de la velocidad. En la Figura 27 mostramos las respuestas dadas por un estudiante en esta sección.

2.2-Dada la siguiente tabla, construya la gráfica de los litros de agua en un contenedor en relación al tiempo**, partiendo de que en el minuto 1 el contenedor tenía 100 litros.**

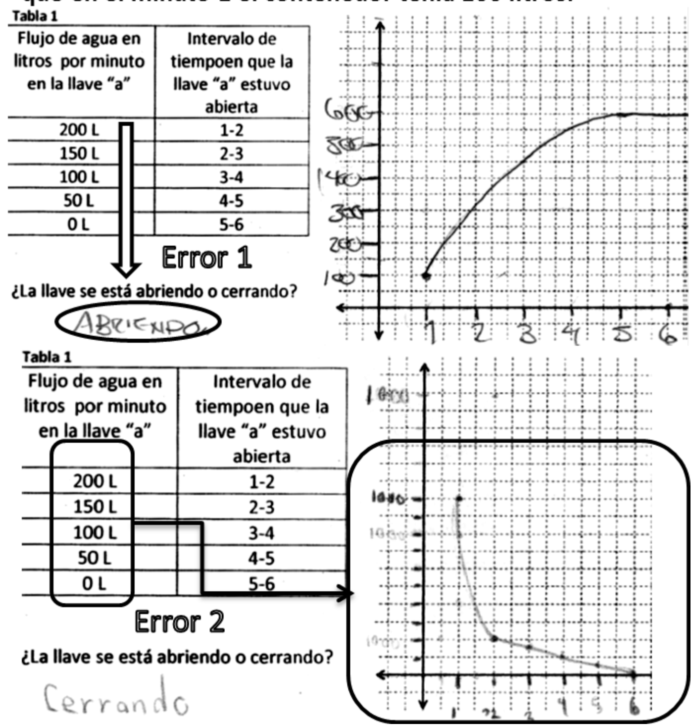


Figura 28. Errores cometidos en el problema 2.2

2.3.- Partiendo de que la llave de salida está totalmente abierta, la de entrada está totalmente cerrada y que el contenedor contiene 1 000 litros de agua.

1. Construya una gráfica, que muestre que se comienza a abrir la llave de entrada paulatinamente hasta dejarla totalmente abierta
2. Tomando en cuenta la gráfica, complete la tabla usando valores estimados

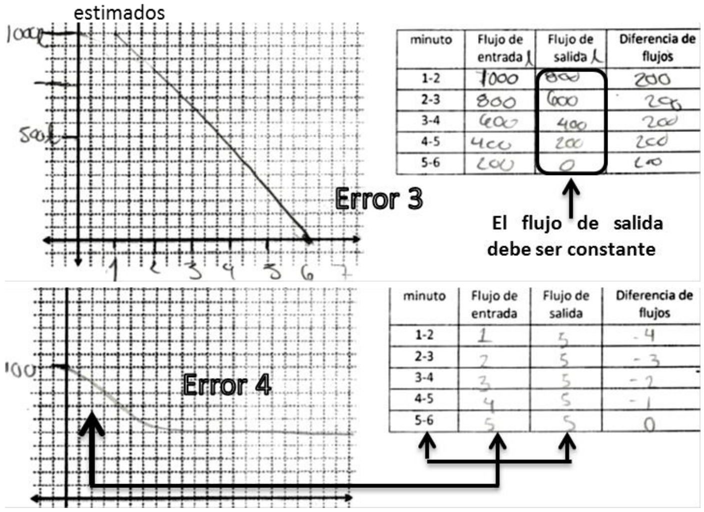


Figura 29.Errores cometidos en el problema 2.3

En la segunda sección, algunos alumnos presentaron complicaciones al establecer comportamiento de las llaves. Además varios tomaron el flujo de agua en la llave como el volumen de agua en el contenedor; en la Figura 28 mostramos un ejemplo de estos dos casos. También, encontramos que algunos alumnos no extraen de forma adecuada los datos del problema y otros a pesar de disponer de datos estimados, siguen presentando complicaciones para diseñar de forma adecuada la gráfica. En la Figura 29 ilustramos un ejemplo de los dos casos antes mencionados, y en la Tabla 5 presentamos la información de los alumnos y equipos que cometieron estos errores.

Alumno	Equipo	Error cometido
A1,A2 y A7	Equipo 1	1
A5, A6 y A7	Equipo 3	2
A1, A2	Equipo 1	3
A3	Ninguno	4

Tabla 5 . Error cometido por los equipos y alumnos.

Cabe señalar que las personas que cometieron el error 3, tampoco lograron diseñar de forma adecuada la gráfica.

En la fase de trabajo de equipo y principalmente en la grupal, los estudiantes reformularon sus ideas y aceptaron los argumentos que contradecían sus primeras respuestas, también se llegó al acuerdo de representar el flujo de agua en el tanque como la diferencia entre flujo de entrada menos el flujo de salida. Principalmente, los alumnos defendieron sus respuestas apoyándose en los datos que presentaba el problema y en diferenciar el flujo, del volumen de agua en el contenedor.

Entre los diálogos que surgieron, destacamos el que se dio alrededor del problema 2.3 (presentado en la Figura 29), donde se discute sobre la forma de la gráfica y se hace referencia constante a la realizada por el equipo 2, la cual aparece ilustrada en la Figura 30.

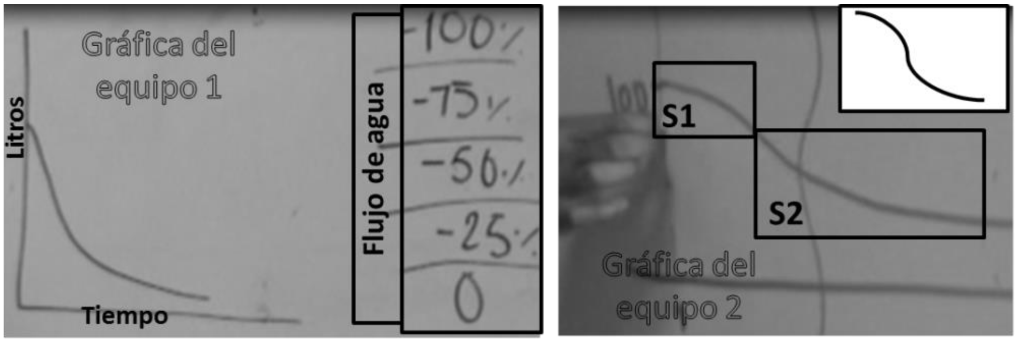


Figura 30. Gráficas del equipo 1 y 2

A continuación, mostraremos los diálogos que se llevaron a cabo cuando se discutió este problema:

Observador.-*Si observamos en el problema 2.3, se construyó la gráfica con dos formas distintas (las presentadas por el equipo 2 y 3, y la del equipo 1).*

A1.- *Si es por esta parte (señala la región S1 representada en la Figura 30 y luego explica su gráfica). Bueno, el problema decía que la llave de salida estaba totalmente abierta y la de entrada cerrada, entonces al momento que la va abriendo uno, el flujo de salida es mayor que el de entrada, pero va a llegar un momento en que va a ser igual. Entonces va a ir bajando y va a llegar un momento en que va a ser constante.*

Observador.- *pero, ¿Por qué crees que las gráficas tienen formas distintas?*

A1.-*Es por la manera en que vimos la gráfica pero es la misma idea, ¿No?*

A4.-*Es un esbozo de la gráfica, no hay que ser tan estrictos*.

A7.- *Pero sí debe ser así (refiriéndose a la forma de la gráfica del equipo 3), porque así se nota que el flujo está creciendo y de la forma otra forma el flujo está disminuyendo (haciendo referencia a la región S1).*

A4.- *Sí A7 tiene razón, tiene que ser más así (refiriéndose a la forma de la región S2, de la Figura 30).*

En esta actividad es posible observar por un lado, que los problemas de la sección 2 causan mayor complicación que los de la sección anterior; esto se puede deber a lo mencionado por Roth (2003, 2004), a una falta de familiaridad, ya sea con las situaciones de flujo de agua y con los elementos que intervienen en ésta o con las actividades que impliquen el diseño de gráficas.

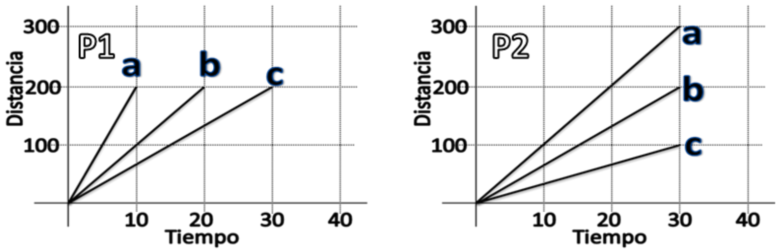
Por otro lado, los resultados obtenidos en la sección 1 nos indican, que cuando los procesos e ideas utilizadas son producto de conocimientos y experiencias que ya son de su dominio y se encuentran relacionadas de manera coherente en ellos, estos son aceptados de forma inmediata y sustituyen o modifican a los anteriores. Pero a pesar de lo anterior, los alumnos aun no son capaces de aplicar los procesos utilizados y validar sus respuestas en problemas semejantes, en este punto coincidimos con Sfard (1991) y Gray *et al* (1999) quienes dicen que el cambio de ideas no es inmediato.

Lo que sí es posible apreciar desde el punto de vista de la teoría, es que los alumnos comienzan una *Interiorización* de los procesos realizados, ya que se familiarizan y asocian los procedimientos realizados a las tareas que implican la razón de cambio.

4.1.3 *Actividad 1, trabajo en grupo*

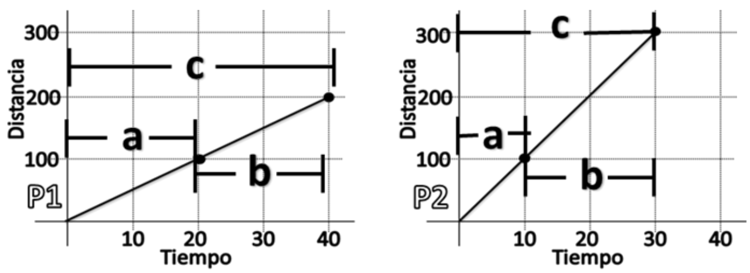
Después de que los alumnos resolvieron la Actividad 2, se percataron de cuáles eran las respuestas indicadas de los problemas de la Actividad 1, sin embargo, no lograron justificar sus respuestas, debido a que tanto las gráficas que representaban la velocidad y las manipulaciones realizadas a las llaves, las que podemos observar en el problema 1.2 no disponían de datos numéricos, por lo que se intervino con una nueva serie de problemas (ver Anexo 3).

Los problemas que se discutieron y resolvieron en grupo, consistieron básicamente en comparar la velocidad, tiempo y distancia, en las gráficas de la distancia recorrida en relación al tiempo de distintos vehículos, dejando a un lado el ejemplo del flujo de agua. Algunos de estos problemas se muestran en las Figuras 31 y 32.



En cada plano determine:
1.-¿Cuál de los vehículos tiene mayor velocidad?
2.-¿Cómo es el valor del tiempo y la distancia descrita por la grafica del vehículo "a" con respecto de "b" y "c" ?

Figura 31. Algunos problemas de las intervenciones



En cada plano determine:
1.-¿En qué intervalo el vehículo tiene mayor velocidad ?
2.-¿Cuánto creció la distancia y el tiempo en el intervalo "c" con relación al "a"?

Figura 32. Algunos problemas de las intervenciones

Las preguntas que se realizaron en cada problema, fueron expresadas de forma verbal. Al resolver éstas, los estudiantes se apoyaron de la graduación de los planos para realizar cálculos y observaciones. Las respuestas que se acordaron en la discusión grupal se muestran en la Tabla 6.

Pregunta	Respuesta acordada por el grupo
1 de la Figura 31	El vehículo *a* es el que tiene mayor velocidad en ambos planos.
2 de la Figura 31	En el plano 1 los tres vehículos recorren la misma distancia y *a* realiza el recorrido en menor tiempo. En el plano 2, el vehículo *a* recorre la mayor distancia y los tres viajan durante el mismo tiempo.
1 de la Figura 32	En los tres intervalos de ambos planos el vehículo tiene la misma velocidad.
2 de la Figura 32	En el plano 1, tanto la distancia como el tiempo crecen al doble. En el plano 2, tanto la distancia como el tiempo crecen al triple.

Tabla 6. Respuestas grupales

Después se planteó una serie de problemas similares, en los cuales se excluía la graduación en los planos; algunos de estos aparecen en la Figura 33. En la Tabla

7 mostramos un resumen de los argumentos que los estudiantes ofrecieron para justificar su respuesta en el plano 1 (P1) y en el plano 2 (P2) de la Figura 33.

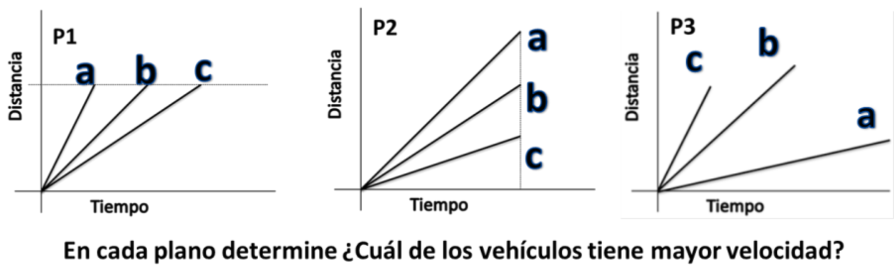


Figura 33. Algunos problemas realizados en las intervenciones

Plano	Respuesta	justificación
1	a	El plano no tiene numeración, pero se puede observar que todos los vehículos recorren la misma distancia y que *a* lo hace en menor tiempo, entonces a es quien tiene mayor velocidad
2	a	Es igual que en el anterior, pero aquí todos tienen la misma distancia y *a* la recorre en menos tiempo. Entonces, *a* tiene mayor velocidad por que recorre igual distancia en menor tiempo.

Tabla 7. Respuestas al problema de la figura 33

En los planos 1 y 2, los estudiantes respondieron y justificaron sus respuestas con rapidez y seguridad. En cambio para encontrar cuál era el vehículo que tenía mayor velocidad en el plano 3, surgieron varias opciones y se desarrolló una discusión amplia entre ellos, la cual mostramos a continuación:

Observador.- *¿Cuál vehículo tiene mayor velocidad?*

A2.-*El más largo.*

A1.-*No es cierto, porque es el que tiene mayor tiempo y menor velocidad.*

A2.- *Entonces b.*

A6.-*No sé, porque tenemos que ver la distancia y el tiempo, pero creo que sí es el b.*

Observador.- *b ¿todos de acuerdo?*

A3.- *Yo creo que el c.*

A7.-*Yo igual.*

Observador. *¿Cómo comparamos la velocidad en los otros problemas?*

A3.- *Es que en los otros había algo igual en todos.*

A7.- *Sí, es el c [hablando con seguridad].*

Observador.- *¿Por qué?*

Para justificar su respuesta, A7 pasó al pizarrón y dibujó una recta en un plano (ver Figura 34).

A7.-*La velocidad es igual en todos los intervalos de ésta, por lo visto en uno de los problemas anteriores* (ver Figura 32).

Después represento el problema por medio de un gráfico y trazó una recta paralela al eje del tiempo (ver Figura 34).

A7.-*Si trazamos una recta que pase por todas (que cruce las rectas las rectas b, c y a), estaríamos en uno de los problemas anteriores (ver Figuras 33 y 34) por lo tanto "c" tiene mayor velocidad.*

Observador.- *¿Todos entendieron*?

A6.- *Sí, porque así las distancias son iguales y c es el que tiene menos tiempo.*

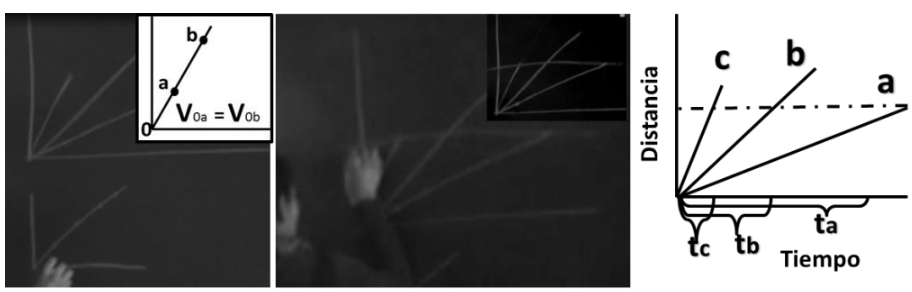


Figura 34

Después de que los estudiantes resolvieron y discutieron los problemas propuestos, se les pidió que justificaran las respuestas acordadas en los problemas de la Actividad 1.

En esta tarea, las respuestas dadas a la segunda sección de problemas de la actividad, fueron explicadas entorno a cómo se comportaba el flujo de agua en el tanque a lo largo del tiempo, en relación a la manipulación de las llaves que se indica en el problema. Mientras que en la primera sección surgieron dos tipos de argumentos que mostraremos a continuación.

La primera justificación fue dada por A3 y se ilustra en la Figura 35, ésta consistió en trazar intervalos de tiempo iguales y luego comparar la magnitud de la distancia entre éstos. Con base en este proceso se concluyó, que la velocidad iba aumentando en 5, ya que la distancia está creciendo a lo largo de los intervalos tomados.

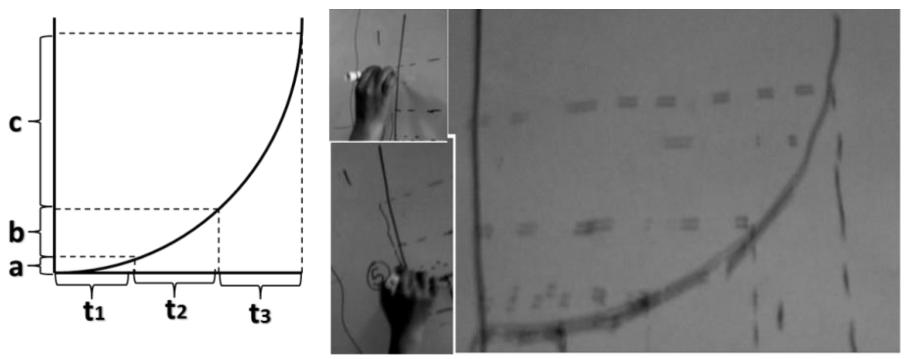


Figura 35. Esbozo de la respuesta dada por A3

La segunda justificación fue dada por A7 y se muestra en la Figura 36, ésta consiste en una generalización del proceso ilustrado en la Figura 34. En éste, A7 menciona: si trazamos varias rectas (del origen a un punto de la curva) y luego trazamos otra recta (paralela al eje y), al sacar los intervalos donde se recorre la misma distancia, observamos que el que tiene menos tiempo es el primero, luego el segundo y así, por lo tanto: conforme estamos avanzando la velocidad aumenta.

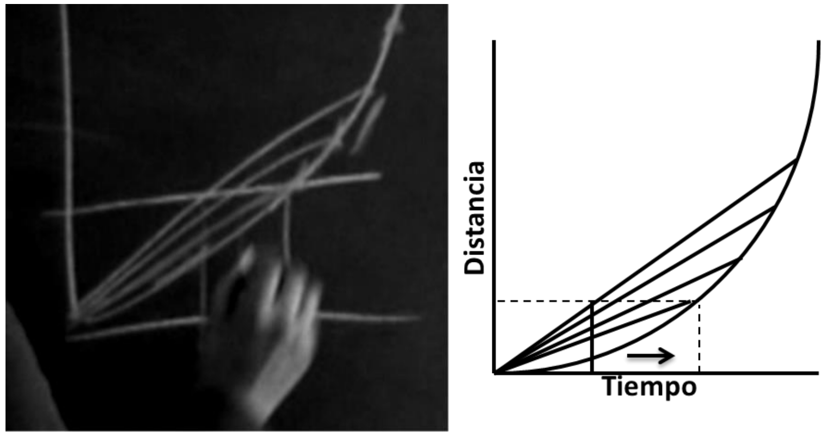


Figura 36. Esbozo de la respuesta de A7

En general, encontramos que el análisis gráfico de la razón de cambio permite observar de forma simultánea a los elementos que intervienen en este proceso, así como estructurarlo y establecer la relación entre sus elementos. Gracias a esto, el alumno logra justificar sus respuestas al incorporar a sus acciones tres resultados obtenidos durante el análisis gráfico, los cuales son los siguientes:

- Si un grupo de vehículos recorren la misma distancia, el que tiene mayor velocidad promedio será aquel que realice el viaje en menor tiempo.
- Si un grupo de vehículos andan durante el mismo tiempo, el que tiene mayor velocidad es aquel que realice el recorrido de mayor distancia.
- Si la distancia recorrida por un vehículo es representada gráficamente por un segmento de recta, el vehículo tiene la misma velocidad en cualquier intervalo de tiempo del recorrido.

Desde el punto de vista teórico, lo anterior nos indica que el alumno ha finalizado la etapa de *interiorización* y comienza la *condensación* del proceso, ya que el trabajo con gráficas, donde se omiten los valores numéricos, obliga al estudiante a llevar acabo los procesos mediante representaciones mentales y a establecer relaciones insumo-producto.

4.1.4 *Observación final de la sesión*

En general, podemos observar que el alumno comienza resolviendo los problemas utilizando conocimientos y experiencias asociadas a éstos, que en la mayoría de los casos carecen de fundamentos. Esto permite que al presentarle un proceso para resolverlos, basado en el uso razón de cambio y fundado en conocimientos que ya son de su dominio, ésta nueva idea sea fácilmente aceptada y reemplace a las anteriores.

En cambio, el análisis gráfico del proceso, permitió estructurarlo y observar como sus elementos se relacionaban para establecer propiedades en éste, las cuales eran independientes del contexto y datos del problema, lo que nos lleva a un inicio de abstracción del objeto. Esto nos permite notar cómo el alumno pasa de una fase de rutina o familiarización con el proceso, a otra donde las actividades realizadas comienzan a estructurarse y se aprecian relaciones entre las variables y el resultado obtenido, esto es algo similar a las estructuras teóricas de *proceso y condensación de* Gray *et al* (1999) y Sfard (1991) respectivamente.

4.2 Sesión 2

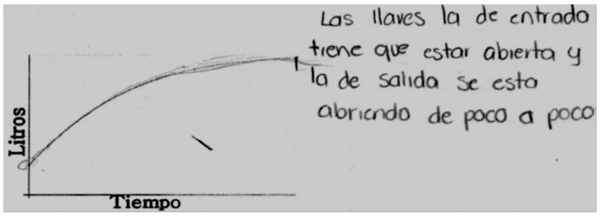
En esta sección, presentaremos algunos de los resultados obtenidos por los estudiantes al resolver las Actividades 3 y 4, así como las discusiones que emergieron entorno a éstas y las estrategias que surgieron al reflexionar sobre los problemas propuestos en las intervenciones. Al final daremos a conocer nuestras observaciones de los resultados obtenidos.

4.2.1 *Actividad 3*

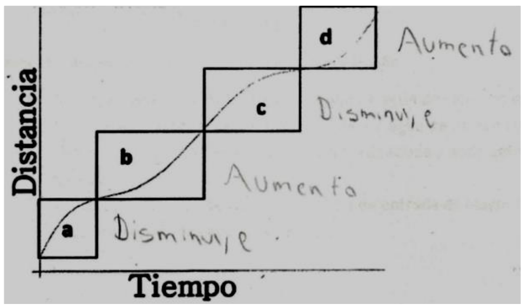
La actividad 3 consistía en problemas donde era necesario describir cómo se comporta la velocidad y el flujo de agua, a lo largo de las gráficas de la distancia recorrida y del volumen de agua en relación al tiempo respectivamente. También contenía un problema que comparaba la velocidad en distintos puntos de una gráfica.

Al resolver los problemas de esta actividad los estudiantes no tuvieron complicaciones, en la mayor parte de los problemas las respuestas de ellos y los equipos coincidieron. Para justificar sus respuestas, retomaron lo visto en la sesión anterior, con la diferencia de que consideraron suficiente una explicación verbal para fundamentar sus respuestas. La Figura 33 muestra las respuestas de los estudiantes a algunos de estos problemas.

¿Cómo se deben manipular estas llaves para que el flujo de agua quede reflejado en la gráfica?



En qué secciones de la gráfica el auto va aumentando su velocidad y en cuales la va disminuyendo.



4.Señale en qué zona de la gráfica , el flujo de agua de salida es mayor al de la entrada

5.Indique en qué zona de la gráfica, el flujo de agua de entrada es mayor al de la salida

6.Indique en qué zona de la gráfica, el flujo de salida y el de entrada son aproximadamente iguales

7.Señale en qué zona de la gráfica, el flujo de entrada es mayor que el de salida, pero éste es cada vez menor en relación al tiempo.

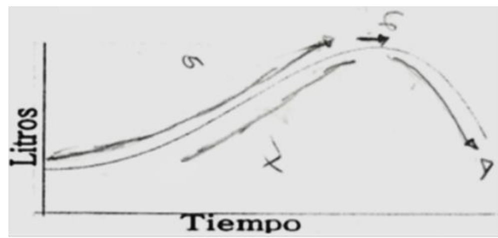
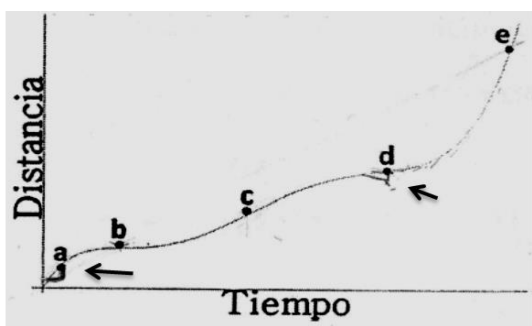


Figura 37. Problemas de la activadad 3.

Dentro de esta actividad el problema que causó más controversia es el que se muestra en la Figura 38. Al principio algunos estudiantes respondieron estas preguntas, tomando como base la forma que tenía la gráfica alrededor de cada punto, pero al trabajar en equipo se vieron en la necesidad de fundamentar sus respuestas.



1.¿En cuál de los puntos que aparecen en la gráfica considera usted que el vehículo alcanza su mayor velocidad?

2.¿En qué punto de los que aparecen en la gráfica el vehículo tiene la menor velocidad?

3.¿En cuál punto el vehículo va más rápido en "a" o "c"?

Figura 38. Problema sobre la velocidad en un punto.

La justificación que se dio por parte del grupo, se apoyó en la comparación de las distancias en intervalos de tiempos iguales alrededor del punto, como se muestra en la Figura 39. A pesar del uso de este recurso, algunos alumnos (A7, A4 y A3) tenían dudas sobre sus respuestas, ya que señalaban que los valores eran muy parecidos en un par de puntos, pero al discutir en equipos y en grupo, acordaron una respuesta. En las discusiones, destaca la que se dio entre A7 y A6, quienes dialogaron acerca de cuál punto representaba una mayor velocidad en el vehículo, si "b" o "d". A continuación reproducimos una parte de la discusión realizada por los estudiantes:

A7.- *Yo digo que es d, pero ellos (A6 y A5) dicen que b, aunque no estoy muy segura, es que los dos son casi iguales.*

A6.- *Sí, son muy parecidos.*

A7.- *Pero, es que en el d cambia. Sí, en el punto d está cambiando la gráfica, creo que ellos tienes razón*.

Observador.- *Si tomamos los intervalos señalados por A5 (a la izquierda de los puntos) las velocidades parecen iguales.*

A6.- *No, pero si lo tomamos del otro lado (derecho), se ve que la distancia va a ser mayor en d.*

A7.- *Sí, entonces b es el menor*.

Figura 39. Análisis por intervalos.

En general los resultados de esta actividad, nos muestran que las ideas derivadas de la solución a los problemas de la sesión anterior, fomentan que se establezca sin complicaciones una relación entre las formas de la gráfica con el comportamiento de la velocidad y el flujo de agua. También se aprecia que el diseño de gráficas a partir de fenómenos que involucran el flujo de agua, sigue trayendo ligeras complicaciones, pero con la diferencia que en esta sesión, éstas son superadas en breves discusiones efectuadas en la fase de equipos.

En el problema que implica comparar la velocidad de un vehículo en distintos puntos, se aprecian indicios que señalan que el alumno comienza a relacionar la inclinación de la recta secante con el valor de la velocidad promedio, además que los argumentos con los que validan sus respuestas, están fundamentados en el uso de intervalos para estimar la velocidad en el punto.

4.2.2 *Actividad 4*

En esta actividad, se presentan dos problemas, que se caracterizan por hacer referencia a gráficas que disponen de una graduación numérica, los cuales consisten en lo siguiente:

En el problema 1, era necesario estimar y comparar la velocidad en diversos puntos de la gráfica de la distancia recorrida, en relación al tiempo de un automóvil. Una parte de este problema se ilustra en la Figura 40.

Figura 40. Problema 1 de la actividad 4.

Problema 2. Es necesario estimar y comparar el flujo de agua en distintos puntos de dos gráficas del volumen de agua de un contenedor. Este problema se muestra en la Figura 41.

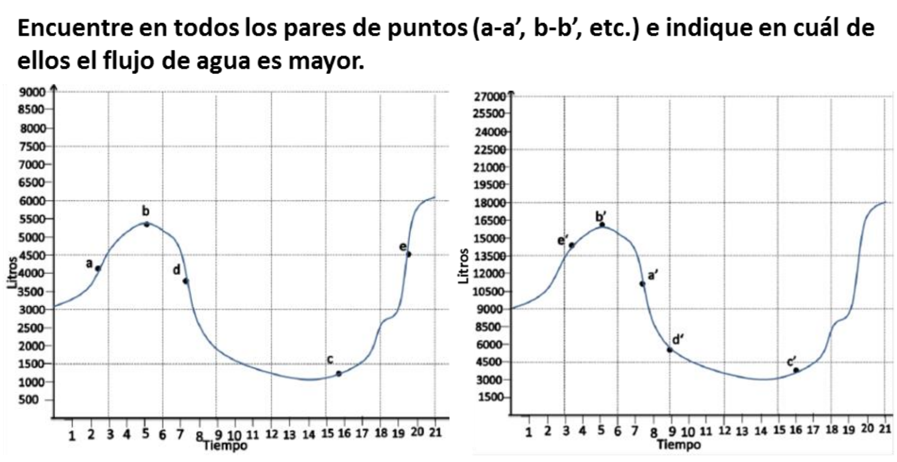


Figura 41. Problema 2 de la actividad 4.

En el problema 1, nuevamente surgió la estrategia de hacer comparaciones sobre intervalos que contengan los puntos analizados, pero en esta ocasión tanto la posición como el tamaño del intervalo generaron conflicto, además que para comparar las velocidades los alumnos se basaron en la velocidad promedio del intervalo, la altura o la inclinación de la recta secante. En la Figura 42 es posible observar algunas de las acciones realizadas para resolver el problema y la Tabla 8 nos muestra las estrategias utilizadas por cada estudiante.

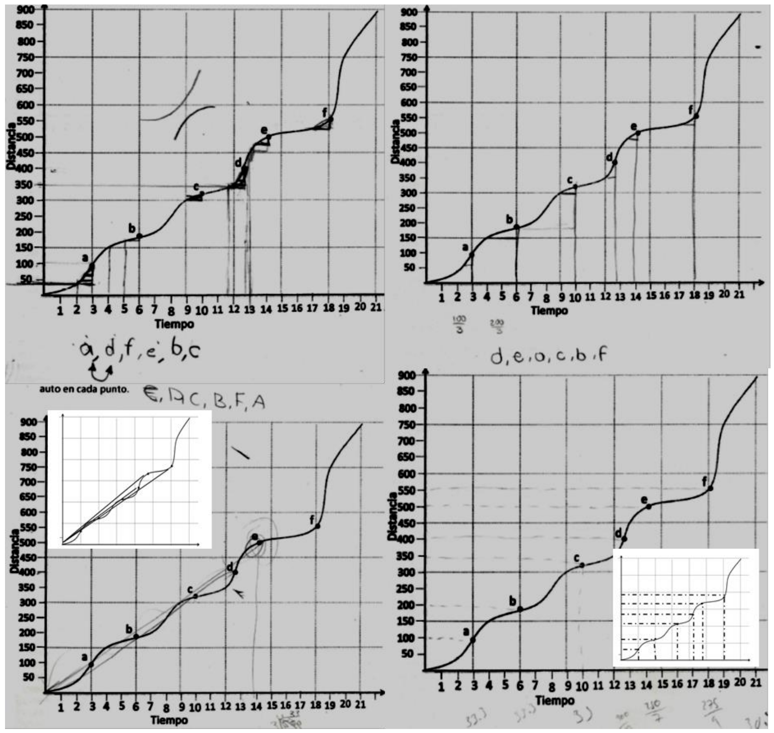


Figura 42. Algunas repuestas al problema 1.

Alumno	Tipo de intervalo tomado	Elemento para comparar las velocidades
A1 y A4	Intervalos que van de un punto a otro	Calcula velocidad promedio
A2,	Intervalos que van del origen al punto	Se basa en las pendientes
A3	Intervalos que van del origen al punto	Calcula la velocidad promedio
A5	Intervalos iguales a la izquierda de cada punto	Se basa en la distancia recorrida en cada intervalo
A7 y A6	Intervalos iguales a la izquierda de cada punto	Se basan en las pendientes de las rectas secantes

Tabla 8.Análisis de intervalos realizado por los alumnos.

Debido a las diferentes formas de tomar los intervalos, los alumnos llegaron a distintas respuestas y aunque la discusión se dio tanto en la fase de equipos como en la de grupo, los alumnos no lograron llegar a un acuerdo mutuo.

Para que los alumnos pudieran reflexionar más sobre las decisiones que tomaron al resolver esta actividad, se intervino con una nueva serie de problemas (revisar Anexo 3), algunos de los cuales se muestran en las Figuras 43, 44 y 45.

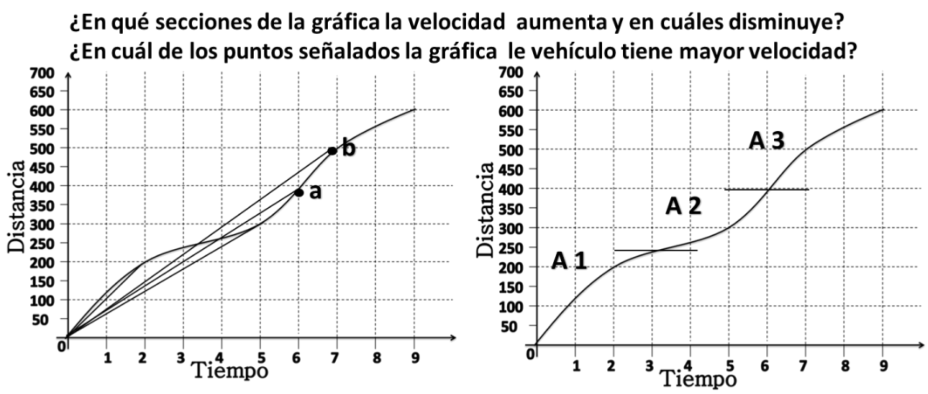


Figura 43. Problemas de las intervenciones.

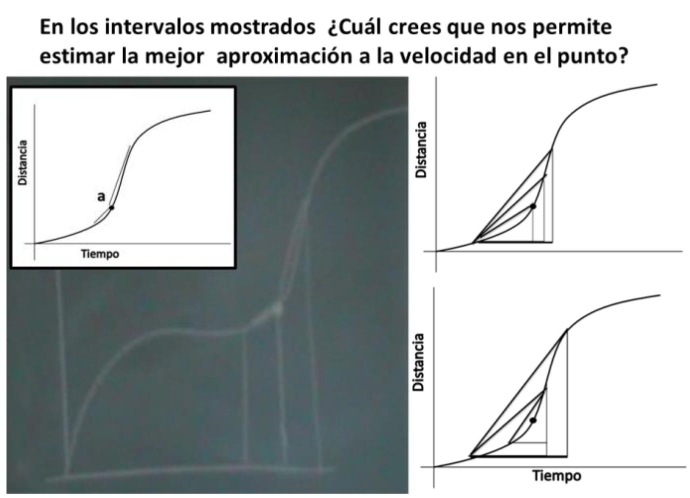


Figura 44. Problemas de las intervenciones.

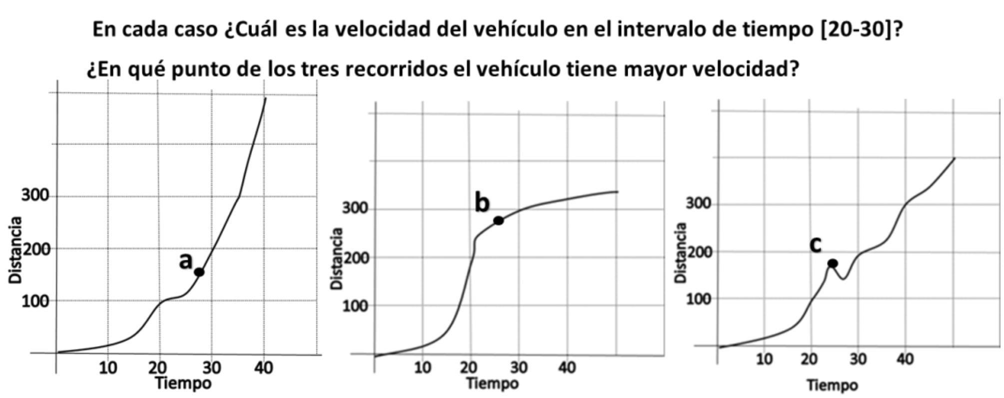


Figura 45.

Los primeros problemas (ver Figura 43) les permitieron descartar las respuestas que estaban basadas en los intervalos, que van del origen al punto, ya que con estos se podría llegar a contradicciones con conocimientos previamente establecidos, como podemos ver en la figura 46.

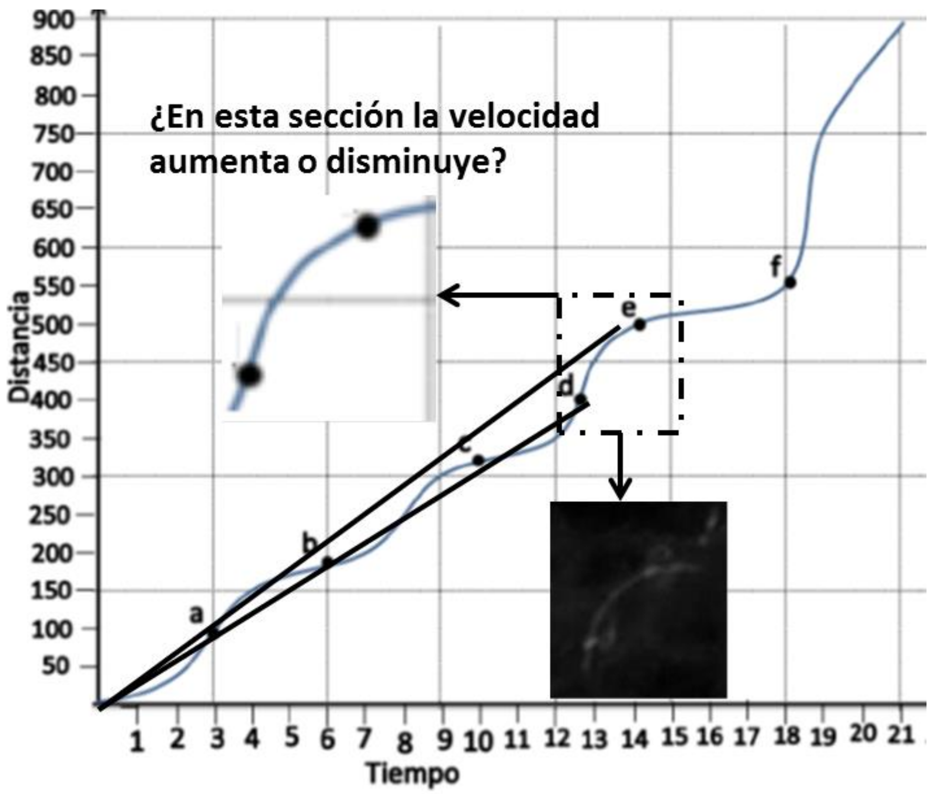


Figura 46. Análisis del comportamiento de la velocidad en el problema1.

Con los problemas siguientes (ver Figura 44), se logró observar que al cambiar la ubicación de un intervalo, la estimación podía cambiar bruscamente. Al tratar con los problemas de la actividad, esto se vio reflejado principalmente en los puntos e y f, en los cuales se observó que la estimación de la velocidad, podría ser radicalmente distinta dependiendo de la ubicación del intervalo (ver Figura 47), gracias a este análisis los alumnos concluyeron que los intervalos más convenientes eran los más pequeños.

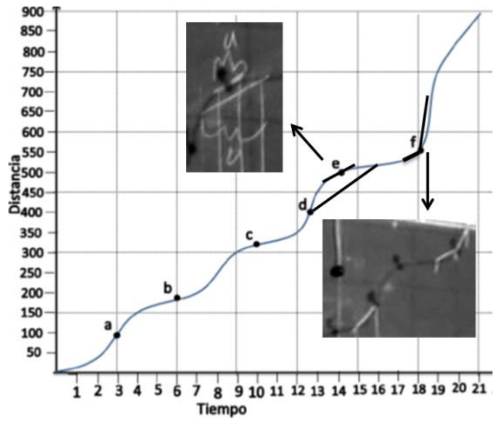


Figura 47. Análisis de la velocidad en el punto e y f.

Con los últimos problemas (ver Figura 45) los alumnos observaron que tomar intervalos iguales en algunos casos no era suficiente, que se tenía que procurar que la sección donde se tomara éste no tuviera una forma irregular. Ante esta situación los estudiantes comentaron que la gran diferencia entre las velocidades del vehículo en los puntos marcados, se debía a que la forma de la gráfica era muy diferente en los intervalos.

En lo que respecta a la segunda sección de problemas, las maneras de elegir los intervalos de la sección anterior se preservó en esta sección, pero el método utilizado para comparar las velocidades, estaba basado en el cálculo de la velocidad promedio o en la diferencia entre la escala de cada gráfica. Hay que recordar que el trabajo en grupo se da hasta finalizar toda la actividad.

A pesar de que los alumnos se percatan de que no es conveniente realizar deducciones a partir de la forma que tiene la figura alrededor del punto, la elección de los intervalos llevó a los alumnos a respuestas incorrectas. Pero después del trabajo con los problemas anteriores (Figuras 43, 44 y 45) los estudiantes reformularon sus respuestas y modificaron su punto de vista.

En este cambio de decisiones, surgieron dos que consideramos importantes:

1.- Cuando se percatan que el valor de a’<a, ya que el flujo ha cambiado de positivo a negativo. En este caso A2 menciona: es a, porque en el otro punto el agua está saliendo y el flujo es negativo. Esta idea se ilustra en la Figura 48.

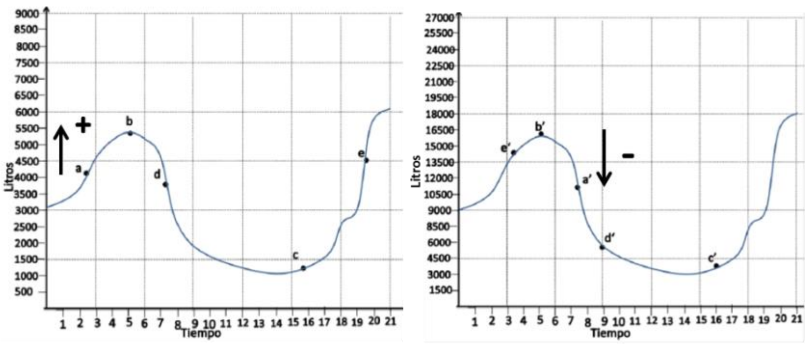


Figura 48. El signo del flujo de agua.

2.- Cuando observan que el flujo de b’=b, ya que en ambos casos es cero. En este caso A7 dijo: ninguna de las dos es mayor porque en las dos es cero. Esto lo muestra trazando una recta por b paralela al eje y, tal como se muestra en la Figura 49.

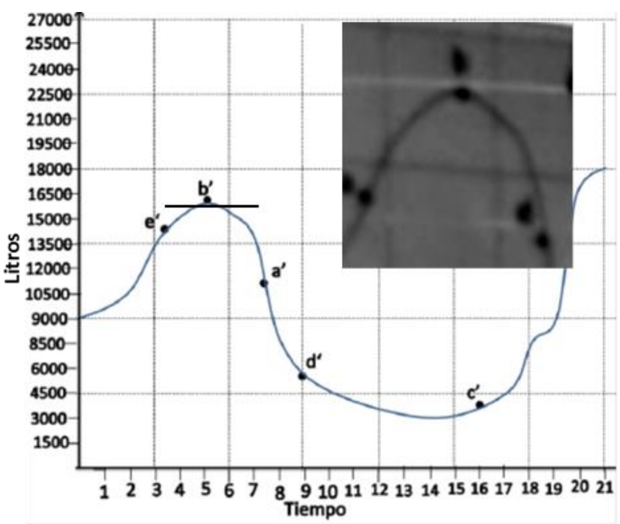


Figura 49. Flujo de agua cero.

Al igual que los resultados de la actividad anterior, en los presentados en esta sección, es posible ver cómo las ideas y conocimientos derivados del trabajo previo influyen en el desarrollo de las respuestas y sirven para descartar e impulsar nuevas ideas. Además, se observa que la inclinación de la recta secante es utilizada por algunos estudiantes para realizar comparaciones entre las velocidades que representa cada punto, esto podría indicar que la recta comienza a jugar un papel de pivote, ya que con ella se puede hacer referencia tanto al proceso de comparar la distancia contra el tiempo, como a la velocidad promedio.

Otro resultado interesante en esta actividad es cómo los intervalos empiezan a jugar un papel importante en las decisiones tomadas. En general, en un principio los intervalos que intervienen en los procesos son tomados de forma arbitraria, con la idea de que se deberían generar los mismos resultados, pero al comparar sus resultados descubren que cada elección puede traer distintos resultados. Mientras que en la discusión grupal de los problemas propuestos, el estudiante concluye que para obtener una buena aproximación, el intervalo debe ser pequeño y el punto no debe localizarse en los extremos y que la sección gráfica en el intervalo debe tener una forma regular.

4.3 Sesión 3

En esta sección presentaremos algunos de los resultados obtenidos por los estudiantes al resolver los problemas de la Actividad 5, así como las discusiones que surgieron en torno a éstos y las estrategias que surgieron al reflexionar sobre los problemas propuestos en las intervenciones. Al final daremos a conocer nuestras observaciones de los resultados obtenidos.

4.3.1 *Actividad 5*

Como se mencionó en el capítulo anterior, en esta actividad se contó con la participación de 3 de los 7 estudiantes que estuvieron en las sesiones anteriores y las respuestas a las actividades que mencionaremos corresponden a lo realizado por ellos.

La Actividad 5, consistió en problemas en cuales era necesario, estimar en distintos tiempos la velocidad de una pelota que era lanzada en forma vertical. Para realizar lo anterior se disponía en principio, de la representación gráfica del fenómeno y después se proporcionaba la ecuación de éste. También se pedía expresar de forma analítica las acciones realizadas.

Al resolver los problemas que consistían en estimar la velocidad, aparecieron dos métodos distintos: el utilizado por A1 y A6 que consistía en utilizar la fórmula convencional $v = \frac{distancia}{tiempo}$, y el expresado por A7 que se basaba en el uso de pequeños intervalos donde el punto se ubicara a mitad de éstos, para así calcular la velocidad promedio.

Cuando A7 expresó sus resultados y el método que utilizó, A1 y A6 se dieron cuenta de forma inmediata del error que estaban cometiendo, expresando que su error se debía a que ellos habían calculado velocidad promedio del vehículo hasta el tiempo indicado y no la velocidad en éste. Agregaron que la forma más adecuada de resolver los problemas, debió de haber sido como se había concluido en la sesión anterior, cuando se estimaba la velocidad en un punto, tal como lo había hecho A7.

Al momento de discutir en grupo, se concluyó que cuando se dispone de la representación analítica del problema, se pueden obtener aproximaciones más precisas de la velocidad de un vehículo en un cierto punto, ya que mediante esta representación, es posible tomar intervalos tan pequeños como queramos, pero el resultado que obtengamos siempre va a ser una aproximación. Al momento que surgió esta afirmación, se dio un diálogo que nos llevó a un nuevo resultado, el cual reproducimos a continuación:

Observador.- ¿Por qué sólo podemos aproximarnos al valor de la velocidad en el punto?

A7.-Porque no se puede crear un intervalo tan pequeño donde sólo este el punto.

Observador.- ¿Y si tomamos el punto como el intervalo?

A1.- Eso no se puede porque la distancia recorrida y el tiempo serían cero.

A5.-No se puede, necesitas comprarlo con otro punto.

A1.- Sí, sino ¿cómo analizamos la velocidad?

Observador.- Entonces ¿no se puede calcular la velocidad?

A7.-No, porque un punto no tiene distancia ni tampoco tiempo, es solo un punto todo está igual.

A1.-Sí, nada cambia. No se pueden hacer comparaciones.

En este diálogo podemos notar cómo los alumnos expresan que el problema de calcular la velocidad en un punto radica en mezclar ideas que son opuestas para ellos. Por un lado la velocidad se ha formado como un objeto con el que se compara el cambio entre las variables, mientras que por otro lado, el analizar un único punto indica la ausencia de cualquier cambio y elementos con quien realizar comparaciones.

Para discutir más la aproximación al valor de la velocidad en el punto, planteamos hacer un tratamiento gráfico de los problemas, apoyado en el uso de rectas tangentes. Pero en este intento se descubrió, que el alumno a pesar de conocer la fórmula para calcular la pendiente de una recta y saber que existe una relación entre ésta y el valor de la velocidad promedio, desconocía que éstos eran iguales.

Al conocer lo anterior y observar de forma geométrica cómo los intervalos iban convergiendo al punto, los alumnos mencionaron que las rectas secantes convergían a la recta tangente en el punto donde se realiza la aproximación y la pendiente de ésta coincide con la velocidad en el punto. Pero hay que tener en cuenta que lo anterior no es un descubrimiento nuevo, ya que es algo que conocían de sus cursos de Cálculo, la diferencia es que ahora tiene más sentido para ellos.

Esta forma de tratar el problema, ocasionó que A7 intentara introducir el límite dentro de la expresión analítica que formuló, con la finalidad de expresar las acciones realizadas para obtener una estimación a la velocidad en un punto. Además de introducir este concepto a la discusión, también agrega que las nuevas ideas introducidas hacen que nuestras acciones se tornen más como si realizáramos una derivada. A continuación mostramos el diálogo donde A7 expresa lo anterior.

A7.-Yo antes tenía otra expresión pero con lo que dijimos: que cuando nos acercamos con las secantes al punto llegamos a la tangente, pero que ésta nunca puede estar en el punto, ahora ya se está pareciendo a una derivada.

Observador.-Entonces, ¿Cuál fue la nueva fórmula a la que llegaste?

A7.-Bueno, tenemos que acercarnos al punto pero no podemos tomar al punto, entonces tenemos que tomar un intervalo muy, muy, muy pequeño pero sin que llegue a ser el punto. (Luego de dar éste argumento A7 escribe la segunda fórmula que podemos en la Figura 50)

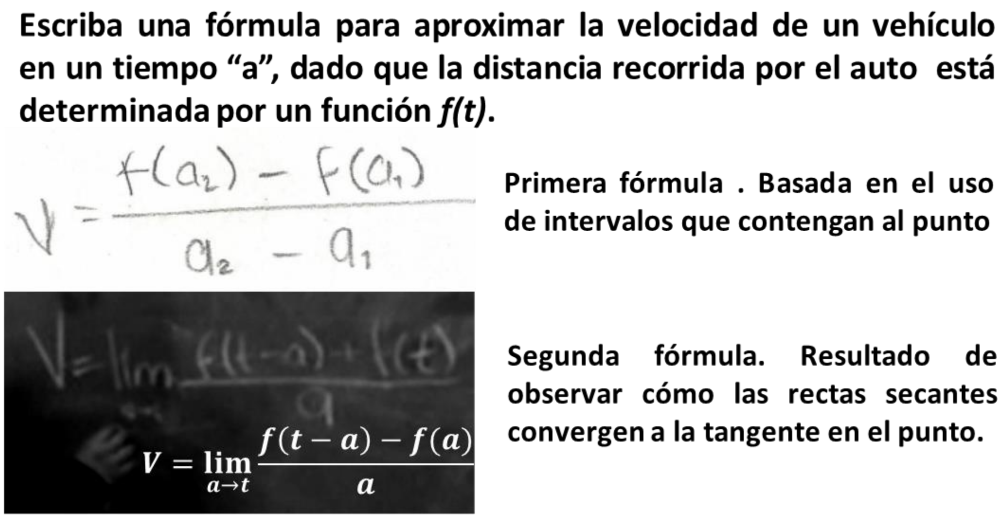


Figura 50. Fórmulas de A7 para estimar la velocidad en un punto.

Después de que el grupo observara esta fórmula, los alumnos coincidieron en que parece necesario usar el límite, ya que como se mencionó, la actividad nos indica que debemos acercarnos al punto, pero sin ser el punto. Pero consideran que la forma expresada no es correcta, ya que ésta no refleja lo que se está haciendo. Por lo tanto a pesar de que expresan los objetos de derivada y límite, los alumnos no logran concretar sus acciones en una expresión que las refleje.

Observaciones

En las discusiones generadas en esta actividad se aprecia que los alumnos distinguen una incongruencia entre su idea que han desarrollado de la velocidad y el establecer la velocidad en un punto, ya que han concebido a la velocidad como un valor que enmarca una relación donde se compara el cambio entre las variables distancia y tiempo, contrastando esta idea, con el hecho de que en un punto no existe un cambio en las variables. Lo anterior los lleva a concluir que en un punto sólo es posible aproximar la velocidad.

Algo que también es importante destacar, es que los alumnos si bien conciben que existe una relación entre la razón de cambio y la pendiente de la recta secante, desconocen que éstas son iguales, a pesar de disponer de los conocimientos para establecer este resultado. Si recordamos, esta relación es parte fundamental de los métodos con los que se intenta introducir la derivada en los libros y apuntes de cálculo presentados en el Capítulo 1.

Por último en esta actividad observamos, que una vez que se percatan de la relación anterior y aprecian en la gráfica a la secante dentro de una secuencia de aproximaciones a la velocidad en el punto, se dan cuenta que las secantes convergen a la recta tangente y por lo anterior su pendiente debería coincidir con la velocidad en el punto. Este hecho llevó a que los alumnos retomaran sus conocimientos previos de cálculo, mediante los que aseguraron que el calcular la velocidad en el punto es la derivada en éste, y que el proceso de aproximarse coincide con calcular el límite. Pero a pesar de lo anterior los alumnos no tuvieron éxito en el último problema, probablemente se debió al surgimiento temprano de la idea de derivada.

4.4 El desarrollo de los estudiantes y el caso de A7

En esta sección mostraremos por un lado, el desarrollo general de los estudiantes a lo largo de las sesiones trabajadas, y por otro lado, nuestros puntos de vista de cómo fueron evolucionando las ideas de A7 al resolver y enfrentarse a las actividades y los problemas propuestos en las intervenciones.

4.4.1 *El Desarrollo de los estudiantes*

Para darnos una mejor impresión de cómo han cambiado los puntos de vista e ideas de los estudiantes en las actividades grupales, en la Figura 51 mostramos de forma general cómo sus conocimientos e ideas se manifestaron y fueron modificándose al resolver las actividades propuestas.

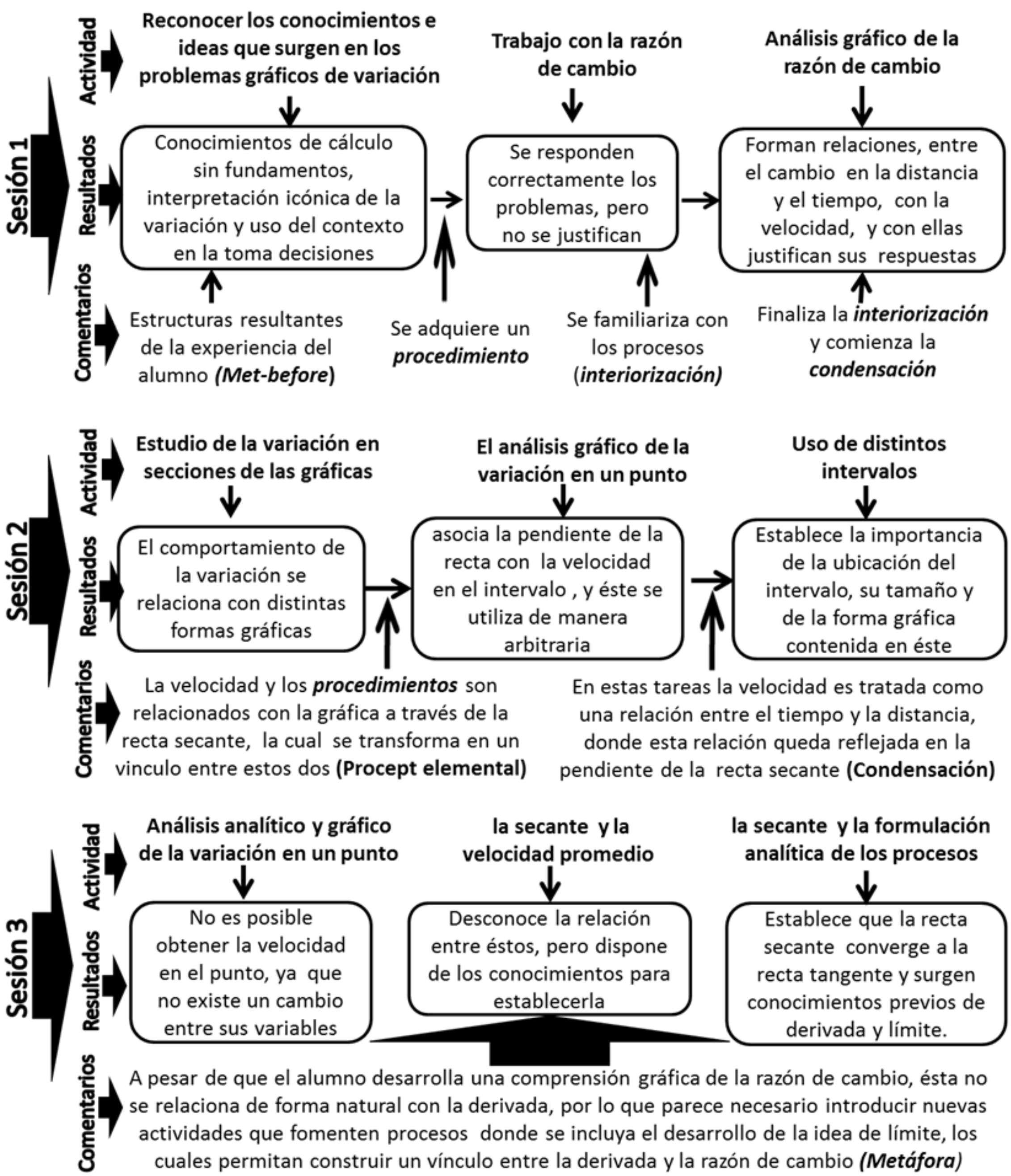


Figura 51. Desarrollo general de los estudiantes.

En el esquema mostrado en la Figura 51, se puede observar cómo cambian los procesos y los conocimientos utilizados por los estudiantes durante la realización y discusión de las actividades propuestas. El nivel con el que se efectúan los procesos en cada tarea aparece señalado con los elementos teóricos indicados en el Capítulo 2.

A continuación mostraremos el desarrollo de uno de los estudiantes que estuvo en todas las sesiones.

4.4.2 *La evolución de las ideas de A7*

Para finalizar la exposición de nuestros resultados, hemos decidido mostrar cómo las ideas de A7, se fueron modificando a lo largo de las actividades. El motivo para elegir a A7, sobre el resto de los participantes se debe a que estuvo presente durante las 3 sesiones, tuvo una gran participación en todas las discusiones que se dieron y presentó una adecuada evolución en sus ideas.

Para mostrar la evolución de A7 a través de cada actividad, se diseñó el esquema que aparece en la Figura 52, donde se ilustran las acciones que realizó en cada actividad y las ideas que manifestó al resolver los problemas de cada actividad.

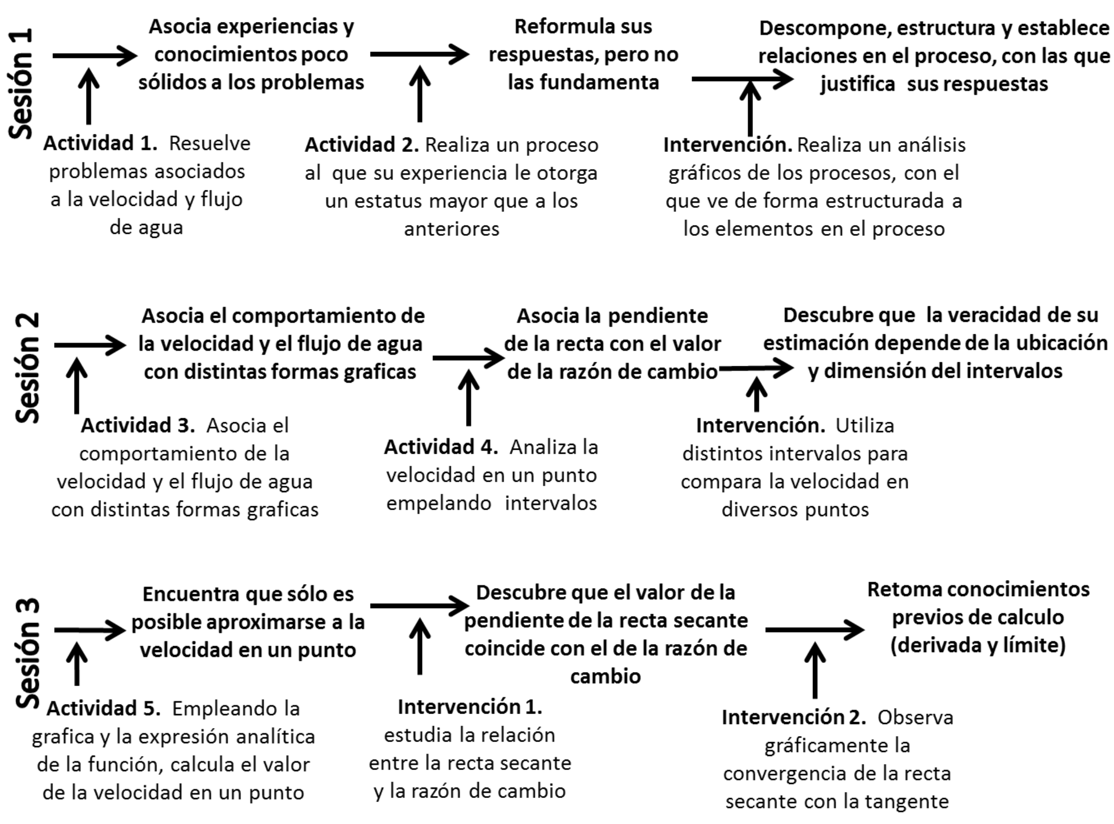


Figura 52. La evolución de las ideas de A7

En el esquema es posible apreciar cómo las ideas iniciales de A7 son sustituidas por las que se construyen a partir del trabajo con la razón de cambio, la influencia del análisis gráfico para comprender este proceso, el descubrimiento de la importancia de los intervalos y cómo la idea de derivada y razón de cambio se encuentran en oposición para A7.

El cambio en la forma de ejecucion y la estructura de los procesos de A7, así como el papel de sus elementos y la manera en que se relacionan con la tarea realizada, se muestran en la Figura 53 a través de la teoria.

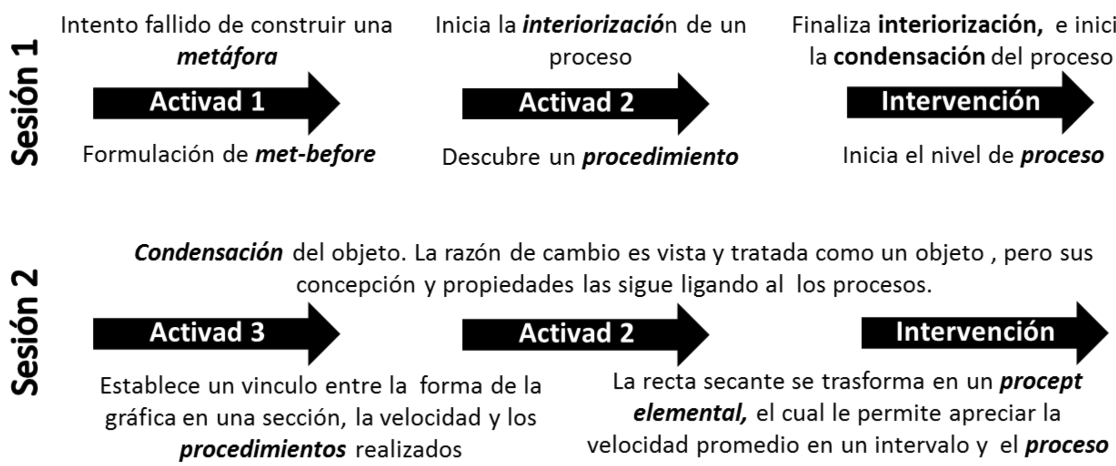


Figura 53. El desarrollo de A7 a través de la teoría.

A partir de estos resultados y los mostrados en secciones anteriores en conjunto con las observaciones señaladas, hemos formulado conclusiones de nuestra investigación, las cuales presentaremos en el capítulo siguiente.

CAPÍTULO 5

Conclusiones y respuestas a las preguntas de investigación

En este capítulo presentamos las conclusiones que se obtuvieron de nuestra investigación y hacemos énfasis en la evidencia que nos permite llegar a las conclusiones que planteamos. Al final, tratamos de mostrar de manera explícita las respuestas a nuestras preguntas de investigación.

5.1 Conclusiones

En esta sección presentamos las conclusiones que obtuvimos a través del análisis de nuestros resultados con base en nuestro marco teórico, así como los elementos específicos que nos permitieron llegar a éstas. Nuestras conclusiones serán presentadas en tres partes: 1. El papel de las experiencias y los conocimientos previos, 2. El análisis Gráfico y la relación proceso-objeto, y 3. La razón de cambio y su relación con la derivada.

5.1.1 *El papel de las experiencias y los conocimientos previos*

En general encontramos que las experiencias y conocimientos previos asociados a los problemas presentados en las actividades, son parte de las ideas que utilizaron los estudiantes al resolver las actividades posteriores, que en nuestro caso están asociadas a los problemas gráficos de velocidad y flujo de agua. En tales actividades intervinieron las siguientes experiencias, conocimientos e ideas:

1. Conocimientos previos de cálculo. En nuestro caso, se relacionan con la recta tangente, la velocidad y la derivada, pero éstos se aplican superficialmente.
2. Conocimiento del comportamiento de la velocidad bajo ciertas formas gráficas, resultado de las experiencias de trabajo con gráficas.
3. Experiencias ligadas al contexto. En nuestro caso se realizan deducciones lógicas utilizando el contexto del problema, aunque no siempre son correctas.
4. Experiencias con el trabajo gráfico. En nuestro caso observamos una falta de experiencias de trabajo en la lectura y diseño de gráficas, lo que lleva a interpretar el comportamiento de la velocidad en la gráfica de forma icónica.

También, encontramos que varios de los resultados anteriores pueden ser utilizados por una misma persona sin importarle que éstos se contradigan: ya que en varios casos algunos resultados son inmediatos para el alumno. Además observamos que la interpretación del contexto es poco usual por parte de los participantes, pero puede llegar a ser de gran utilidad para conducirlos a reflexionar sobre sus respuestas.

Otro punto importante que deseamos resaltar es que las experiencias y conocimientos previos, son fácilmente desplazados por la idea de razón de cambio, ya que ésta es introducida por medio de objetos y procesos que son del dominio del estudiante, lo cual lleva a los alumnos, a considerar la idea de razón de cambio como la base de sus procesos y razonamientos posteriores.

En resumen concluimos: que las experiencias y conocimientos previos ligadas a los problemas gráficos de velocidad y flujo de agua propuestos en esta investigación, guiaron en un principio las decisiones del estudiante. Pero éstas, fueron remplazadas fácilmente por el proceso y los elementos inmersos en la razón de cambio, los cuales se convirtieron en la base de las acciones y reflexiones posteriores.

5.1.2 *El análisis gráfico y la relación Proceso-Objeto*

En general encontramos tal como lo menciona Sfard (1991), que el análisis gráfico de los procesos realizados, permite estructurarlos y establecer relaciones entre sus elementos para así dar paso a un nuevo objeto. En nuestro caso, encontramos que el análisis gráfico del proceso de calcular y estimar la razón de cambio para conocer la velocidad y el flujo de agua, permitió al alumno estructurar la idea de razón de cambio a través de una secuencia de pasos y estableciera relaciones entre el cambio en los parámetros, con el valor de ésta.

Lo anterior trajo como resultado que el alumno concibiera a la razón de cambio como un valor ligado a una relación entre el cambio de las variables de cierta función, dentro de un intervalo. Pero hay que tener en cuenta, que el objeto matemático general no se logró formar en sí, ya que el significado que los estudiantes le dan a la razón de cambio y las propiedades que observan, aun conservan ligeras relaciones con el proceso específico.

Otra conclusión que es posible plantear, es que la recta secante se convierte en el equivalente a un pivote en el cual se vincula el proceso que implica calcular la razón de cambio, y las relaciones que se establecen entre el cambio de los parámetros de la función con el valor de la velocidad promedio.

5.1.3 *La razón de cambio y su relación con la derivada*

En general, encontramos que a pesar de que los alumnos lograron entender la razón de cambio desde el punto vista de la variación de sus parámetros, el establecer de manera instantánea la razón de cambio en un punto (la derivada) les resultó complicado, ya que los alumnos se enfrentan a ideas que son para ellos contrarias.

Esto se debe, a que ellos entienden que para calcular la velocidad es necesario un cambio, un desplazamiento entre las unidades, pero un punto carece de esto. Esto trae complicaciones, a pesar de que el alumno relaciona la aproximación a la velocidad en el punto con el tamaño del intervalo.

En resumen concluimos: que a pesar de que se entienda a la razón de cambio en términos de la variación de los parámetros involucrados, el proceso de aterrizar esta idea sobre la razón de cambio instantánea (la derivada) no resultó ser natural y trajo dificultades a los estudiantes, problema que consideramos puede ser superado cuando se aborde la idea de límite.

5.2 Respuestas a las preguntas de investigación

Tomando en consideración los resultados y las conclusiones de la presente investigación, hemos respondido a nuestras preguntas de investigación de la forma siguiente:

¿De qué manera influye el estudio de la velocidad y el flujo de agua, para el desarrollo de procesos que impliquen el trabajo con la razón de cambio?

Ambas situaciones propician que el alumno utilice procesos en los cuales se encuentra la razón de cambio, el contexto en estas situaciones, permite al estudiante hacer reflexiones sobre sus resultados obtenidos y los procesos realizados. Sin embargo, nos parece que el estudiante se encuentra en una situación de mayor comodidad en los problemas relativos a velocidad.

¿De qué manera los procesos fundados en el análisis gráfico de la razón de cambio, fomentan condiciones para construir esta idea desde el punto de vista de la variación?

El análisis gráfico, fomenta actividades que permiten al alumno estructurar los procesos ligados a la razón de cambio y establecer las relaciones entre los elementos que intervienen en éstos, de manera que construyen significados donde asocian la variación de los parámetros, la inclinación de la recta y el valor de la razón de cambio, haciendo hincapié en la importancia del intervalo.

¿La comprensión y el análisis gráfico de la razón de cambio son suficientes para acceder al concepto de derivada?

El comprender la razón de cambio con el objeto de abordar la idea de derivada, no es suficiente, ya que en la primera se analiza el cambio entre dos momentos, mientras que en la derivada este análisis se lleva alrededor de un punto a través de una aproximación llevada al límite. Sin embargo, la razón de cambio puede establecer interpretaciones de apoyo en la dirección de la idea de derivada.

Referencias

Bachillerato Tecnológico, 2009. *Programa de estudios matemáticas*. México. Recuperado de http://www.cecyteo.edu.mx/site/Docs/ProgramasBasicas/Matematicas.pdf

Cantoral, R., Molina, J., Sánchez, M. (2005) Socioepistemología de la Predicción. *En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18*, 463-468.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., y Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education, 33* (5), 352–378.

Colegio de Bachilleres, 2011. *Matemáticas V*. México. Recuperado de http://www.cbachilleres.edu.mx/cb/comunidad/docentes/pdf/Reforma_curricular/Documentos/quintosemestre2012/AFB/Matematicas_V.pdf

Cortes, J. C. (2012). Construyendo funciones derivadas. *UNION, 29*, 23-34.

Doerr, H. M., y O'Neil, M. H. (2011). A modelling approach to developing an understanding of average rate of change. *CERME 7*, 937-946.

Dolores, C. (2000). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. *El futuro del cálculo infinitesimal,* 69-91.

Font, V. (2000), Representaciones ostensivas que pueden ser activadas en el cálculo de f'(x). El caso de la función seno. *Uno, 25*, 21-40.

Font, V. (2005), Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada en A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (eds): *Investigación en Educación Matemática. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* pp. 109-128. Córdoba: Universidad de Córdoba.

García, L., Moreno, M., Badillo, E., & Azcárate, C. (2011). Historia y aplicaciones de la derivada en las ciencias económicas: Consideraciones didácticas. *Economía, 36* (31), 137-171.

Giraldo, V., Carvalho, L. M. y Tall, D. O, (2002). Theoretical-Computational Conflicts and the Concept Image of Derivative. *Proceedings of the BSRLM Conference*. Nottingham, England, 22 (3), 37–42.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14* (3), 325-355.

Gray, E., Pinto, M., Pitta, D., & Tall, D. (1999). Knowledge construction and diverging thinking in elementary & advanced mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 38* (1), 111-133.

Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A" proceptual" view of simple arithmetic. Journal for research in Mathematics Education, 26(2),115-141.

Herbert, S., & Pierce, R. (2012). Revealing educationally critical aspects of rate. *Educational Studies in Mathematics, 81* (1), 85-101.

Johnson, H. L. (2012). Reasoning about variation in the intensity of change in covarying quantities involved in rate of change. *Journal of Mathematical Behavior, 31* (3), 313-330.

Jurdak, M. E. (2006). Contrasting perspectives and performance of high school students on problem solving in real world, situated, and school contexts. *Educational Studies in Mathematics, 63 (3)*, 283-301.

Larson, R. y Edwards, B. (2010). *Cálculo 1, de una variable.* (9ª ed.). México: Mc Graw Hill

McGowen M. y Tall D. (2010). Metaphor or Met-before? The effects of previous experience on the practice and theory of learning mathematics. *Journal of Mathematical Behavior 29*, 169–179.

McGowen, M. & Tall, D. (2013). Flexible Thinking and Met-befores: Impact on learning mathematics, with particular reference to the minussign. (Artículo en revisión). Recuperado de http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads.html

Nemirovsky, R. (1994). On Ways of Symbolizing: The Case of Laura and Velocity Sign. *The Journal of Mathematical Behavior, 13*, 389-422.

Parra, T. G. (2006). *El uso de las gráficas en la ingeniería*. *Una resignificación de la derivada* (Tesis de maestría inédita). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México, D.F.

Purcell, E., Varberg, D. y Rigdon, S. (2007). *Cálculo diferencial e integral*. México: Pearson.

Roth, W.M. (2004). Emergence of graphing practices in scientific research. *Journal of Cognition and Culture, 4*, 595-627.

Roth, W. M., & Bowen, G. M. (2001). Professionals read graphs: A semiotic analysis. *Journal for Research in Mathematics Education,* 159-194.

Roth, W. M. (2003). Competent workplace mathematics: How signs become transparent in use. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 8*(2), 161-189.

Sánchez, G., García, M. y Salvador L. La Comprensión de la Derivada como Objeto de Investigación en Didáctica de la Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *11*(2): 267-296. 2008.

Secretaria de Educación Pública –SEP- (2012). *Programa de cálculo diferencial*. México. Recuperado de http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion_academica/programasdeestudio/cf-propedeutico-5sem/calculo-diferencial.pdf

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, *22*(1), 1-36.

Sfard, A. (1994). Reification as a birth of a metaphor. *For the Learning of Mathematics*, *14*(1), 44-55.

Sfard, A. (1998). On Two Metaphors for Learning and the Dangers of Choosing Just One. *Educational researcher, 27*(2), 4-13.

Stewart J. (2001). *Cálculo de una variable trascendentes tempranas.* (4ª. ed.). Colombia: Thomson Learning.

Tall, D., Gray, E., Ali, M. B., Crowley, L., DeMarois, P., McGowen, M., .. & Yusof, Y. (2001). Symbols and the bifurcation between procedural and conceptual thinking*. Canadian Journal of Math, Science & Technology Education, 1*(1), 81-104.

Tall D. (2008). The Transition to Formal Thinking in Mathematics. *Mathematics Education Research Journal, 20* (2), 5-24

Tall, D. (2009). Dynamic mathematics and the blending of knowledge structures in the calculus*. ZDM , 41 (4),* 481–492.

Tall, D. (2013). The Evolution of Technology and the Mathematics of Change and Variation. In Jeremy Roschelle & Stephen Hegedus (eds), *The Simcalc Vision and Contributions: Democratizing Access to Important Mathematics*, (pp. 449–561). Springer

ANEXOS

Anexo 1

Examen Diagnostico

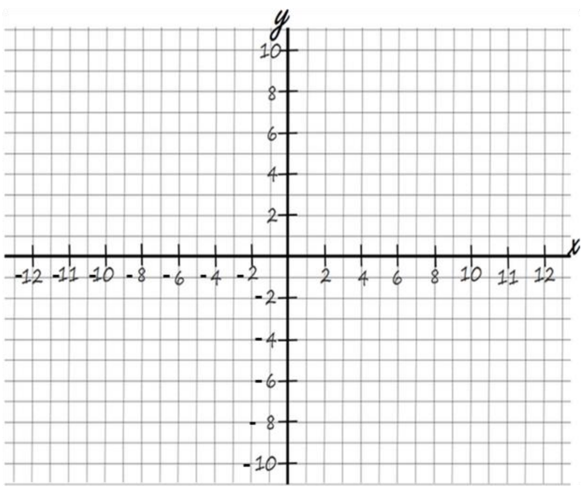
Nombre:____

Institución:____

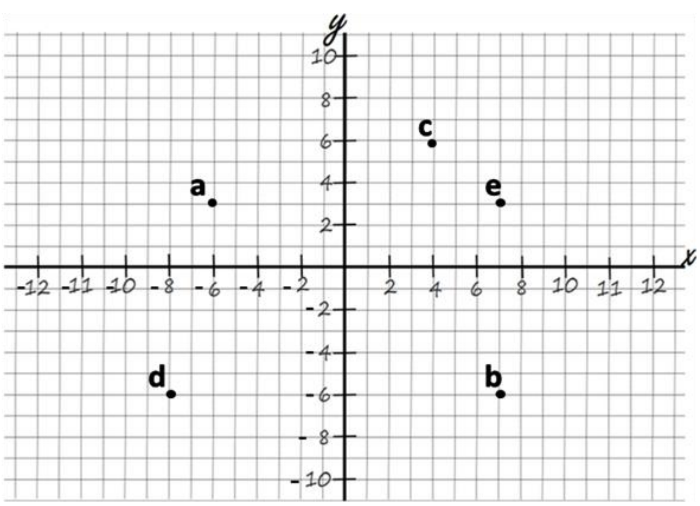
Semestre_________ **Nivel**____

Actividad 1

1.1.-Coloque en el plano los siguientes puntos: A(2,4), B(4,6), C(4,-2), D(-4,6) y F(-2,-4)



1.2.-¿Cuáles son las coordenadas de los puntos que se encuentran dentro del siguiente plano?



a(__,__)

b(__,__)

c(__,__)

d(__,__)

e(__,__)

Actividad 2

2.1.-El siguiente par de gráficas, muestran de manera distinta el recorrido de dos vehículos en relación al tiempo. Analizando ambas gráficas responda las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál gráfica muestra al vehículo que va a mayor velocidad?

2. Si tuvieras prisa ¿En cuál vehículo preferirías viajar?

3. ¿Cuál vehículo consideras que recorre más distancia en menor tiempo?

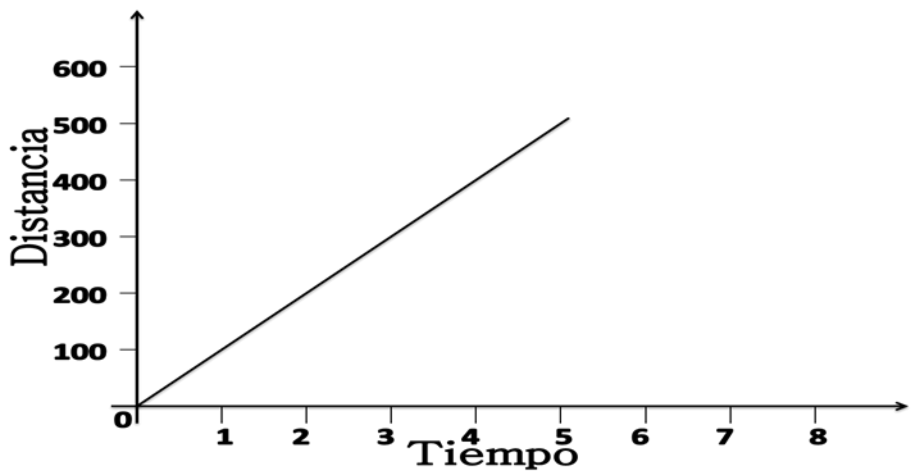


Figura 54. Gráfica distancia-tiempo de la distancia recorrida por un automóvil, en un intervalo de tiempo que se divide en minutos

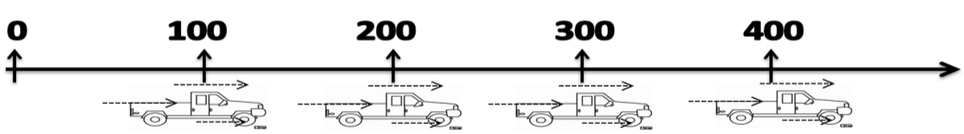


Figura 55. En esta gráfica los números representan la distancia recorrida, y cada intervalo equivale a un minuto

2.2.-El siguiente par de gráficas, muestran la distancia recorrida de dos vehículos que compiten en una carrera de 1200 m. Considerando que los vehículos tienen la misma regularidad al continuar su recorrido responda las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál vehículo crees que ganara la carrera?

2. ¿Cuál crees que vaya al frente al inicio de la carrera?

3. ¿cuál vehículo tendrá mayor velocidad al final de la carrera?

4. ¿Cuál tiene mayor velocidad al principio de la carrera?

5. ¿Cuál vehículo ganaría la carrera si esta fuera solo de 800 m?

6. ¿Cuál vehículo ganaría la carrera si esta fuera solo de 600 m?

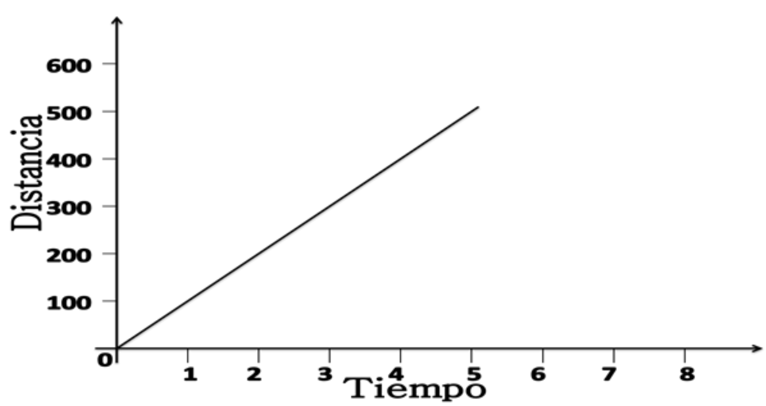


Figura 56. Gráfica distancia-tiempo de la distancia recorrida por un automóvil, en un intervalo de tiempo que se divide en minutos

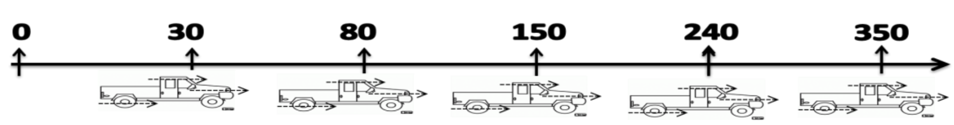


Figura 57. En esta gráfica los números representan la distancia recorrida, y cada intervalo equivale a un minuto

Actividad 3

3.1.-Responda las preguntas, partiendo de la información que se proporciona en cada gráfica.

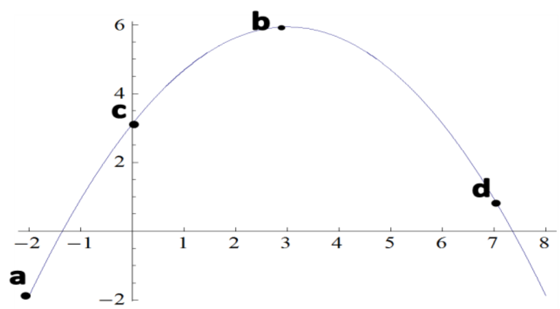


Figura 58 gráfica de una función $f(x)$

1. ¿En cuál de los puntos señalados en la gráfica $(a, b, c,\ \text{ó}\ d)$ la función $f(x)$ alcanza su máximo valor?

2. ¿Cuál de los puntos señalados corresponde al de mayor valor en el dominio?

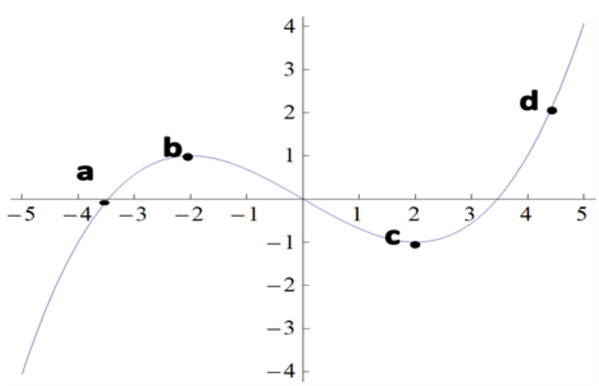


Figura 59 Gráfica de una función $g(x)$

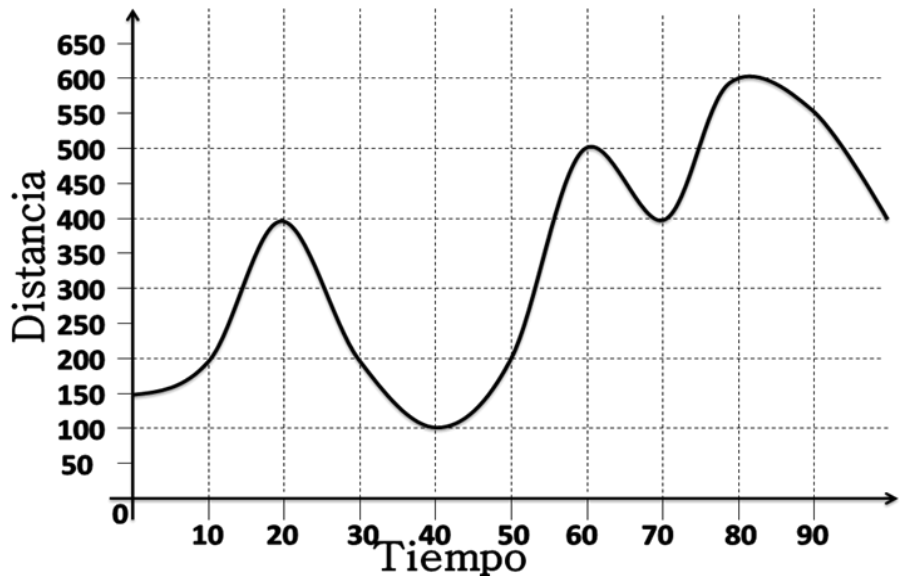
3. ¿En cuál de los puntos señalados en la gráfica la función $g(x)$ alcanza su máximo valor?

4. ¿Cuál de los puntos señalados corresponde al de mayor valor en el dominio?

5. ¿En cuál de los puntos señalados la función $g(x)$ toma menor valor?

Actividad 4

4.1.-La siguiente gráfica, corresponde a la distancia que se encuentra un joven de su casa, a lo largo de una hora y media (90 min.). Con base en la gráfica responda las preguntas.



1. ¿En cuál tiempo el joven se encuentra más cerca de su casa?

2. ¿En cuál tiempo el joven se encuentra más lejos de su casa?

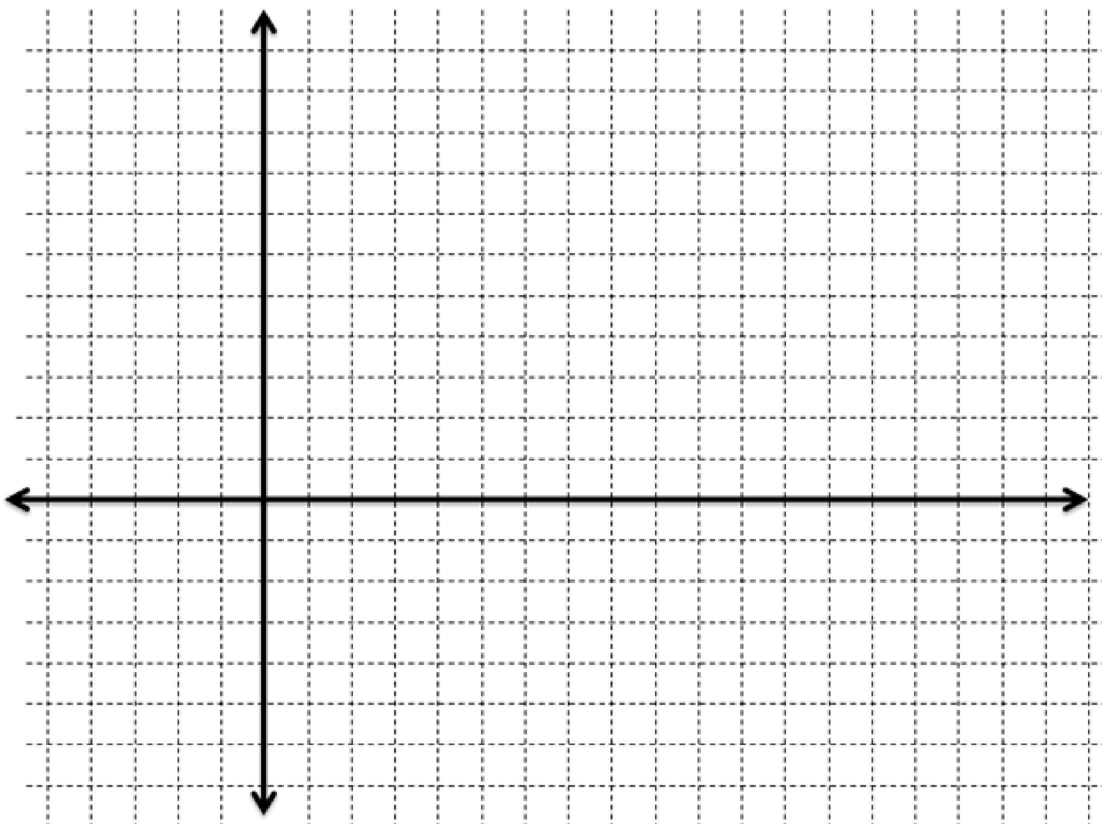
3. ¿En el minuto 90 el joven se acerca o se aleja de la casa?

4. ¿En cuál de los siguientes intervalos: $(0-10), (10-20),\ (20-30),\ (40-50),$ $(50-60),\ (70-80)$ el joven recorre más distancia y en cuál menos?

5. Considerando los tiempos 10,30 y 50, ¿En cuál el joven se encuentra más lejos de su casa? y ¿en cuál más cerca?

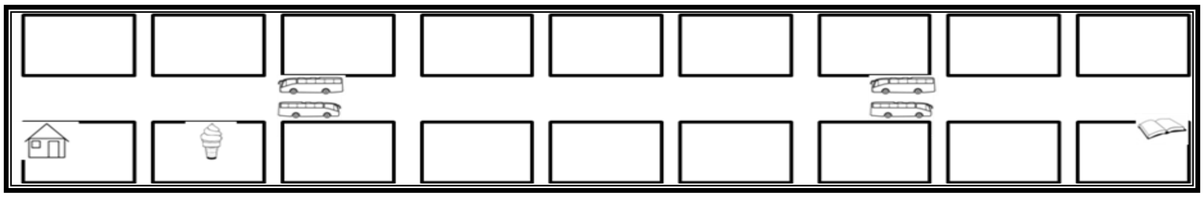
4.2.- Guadalupe tiene que realizar una tarea a las 5:00 de la tarde con unos amigos, partiendo de la información que se muestra en la siguiente tabla dibuje una gráfica que indique la distancia entre Guadalupe y su casa, en relación al tiempo.

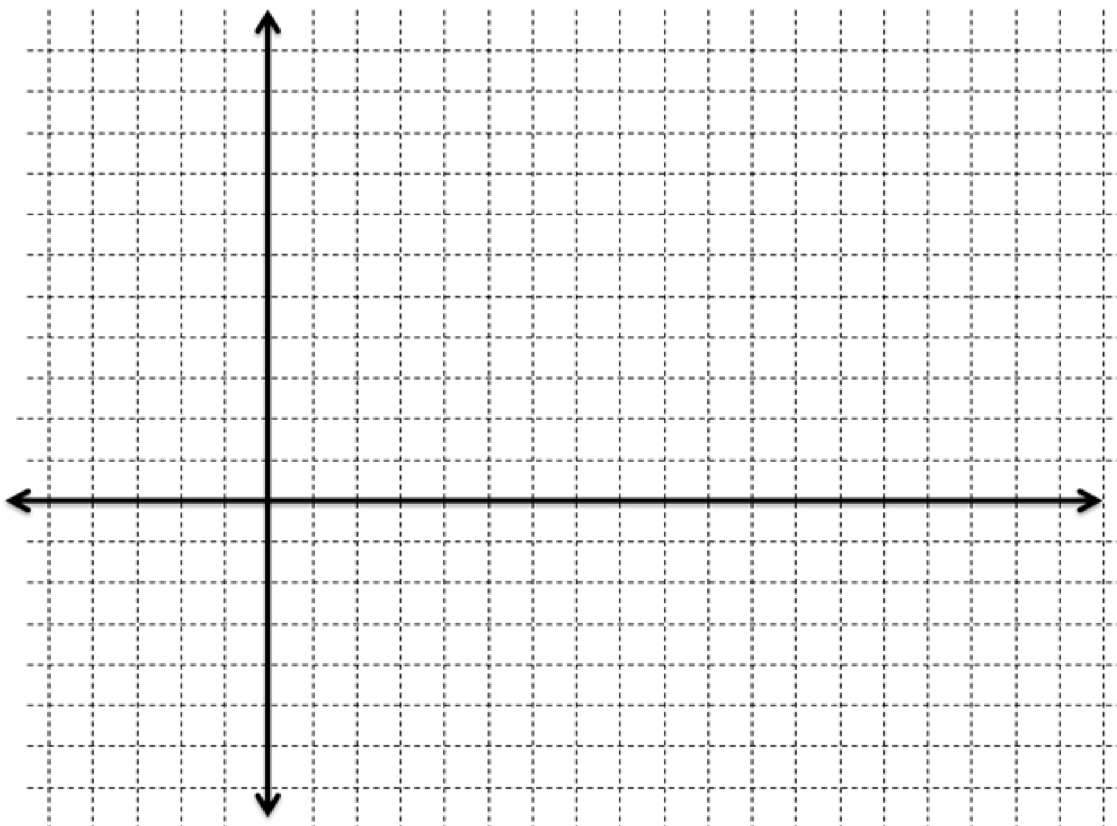
Tiempo	**4:00**	**4:15**	**4:25**	**4:30**	**4:50**	**5:00**	**6:00**	**6:20**	**6:40**	**7:00**
Lugar	Sale de Casa	Entra a una nevería	Sale de la nevería	Toma el autobús	Baja del autobús	Llega a la biblioteca	Sale de la biblioteca	Toma el autobús	Baja del autobús	Llega a su casa



4.3.-Tomando en cuenta la tabla anterior y el siguiente croquis, donde se señala la ubicación de cada uno de los lugares por los cuales pasó Guadalupe, dibuje la gráfica de la distancia entre Guadalupe y su casa en relación al tiempo, y responda las preguntas.

Nota: Cada uno de los bloques tiene la misma distancia





1. ¿En general en cuál intervalo de tiempo Guadalupe avanza más rápido y en cual más despacio?

2. ¿En el camino de regreso en cuál intervalo de tiempo avanza más rápido y en cual más despacio?

Actividad 5

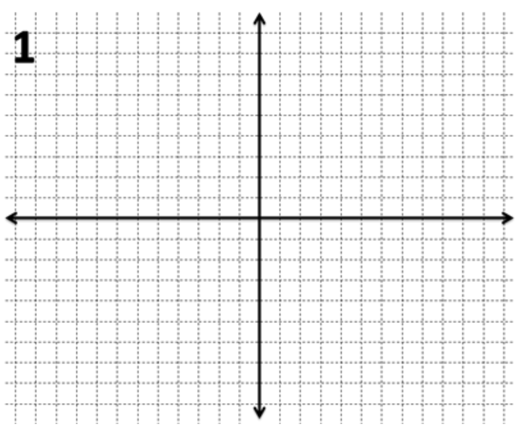
Dibuje en cada plano el conjunto de los puntos de la forma (x,y), que cumplen las siguientes condiciones:

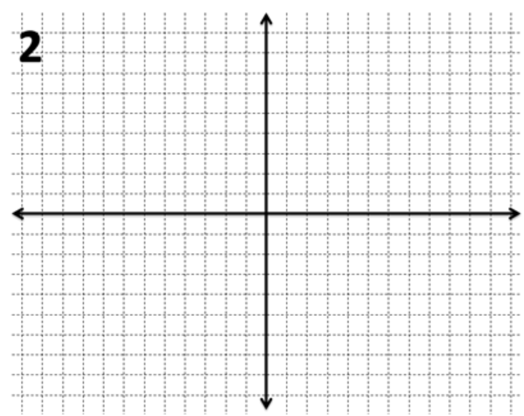
Plano 1. Todos los puntos tales que el valor de $x > 0$

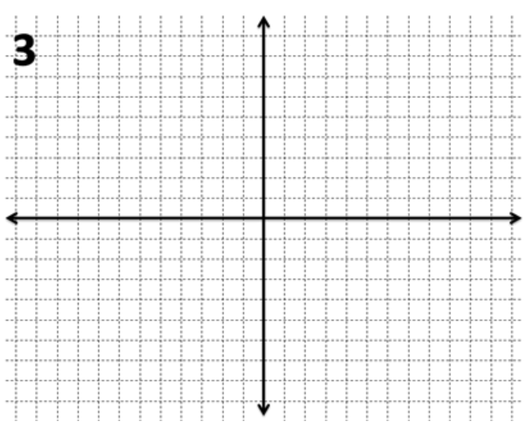
Plano 2. Todos los puntos tales que el valor de $y < 0$

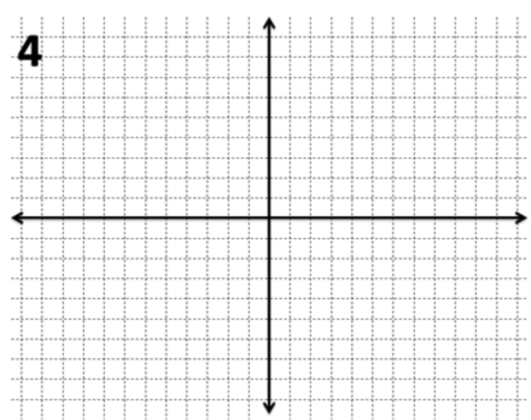
Plano 3. Todos los puntos tales que $x > y$

Plano 4. Todos los puntos tales que x y y tienen el mismo signo.



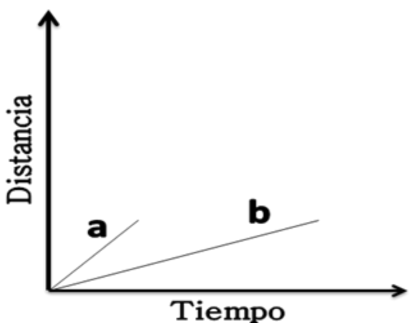


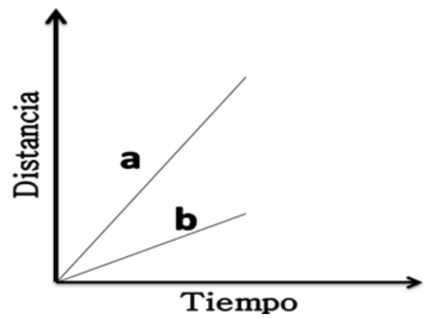




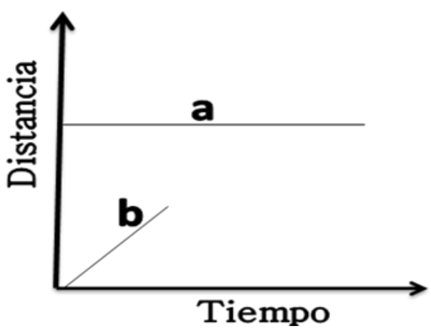
Actividad 6

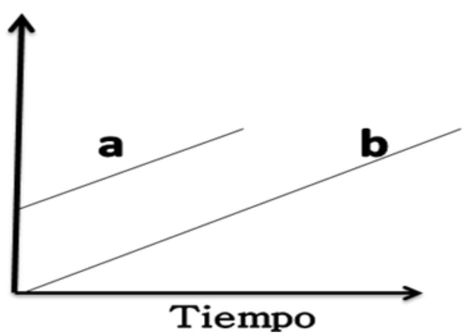
6.1.-Las siguientes gráficas muestran la distancia recorrida con relación al tiempo de dos automóviles. Indique en cada plano que automóvil tiene mayor velocidad.



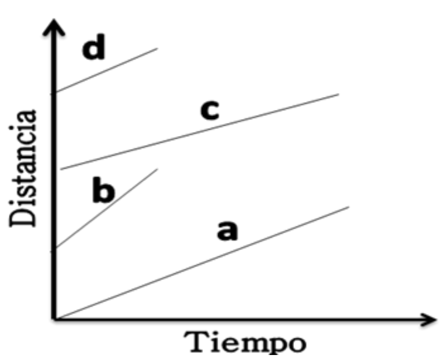


6.2.-Las siguientes gráficas indican la distancia en la cual se encuentran dos hermanos de su casa con relación al tiempo. ¿Cuál de los hermanos en cada plano se aleja más rápido de su casa?





6.3.-En el siguiente plano se muestran las gráficas distancia-tiempo, de 4 amigos que deciden jugar una carrera, en la cual acuerdan ofrecer ventaja según el peso de cada quien. Dado que las gráficas se muestran parcialmente ¿Cuál de ellos consideras que gane la carrera si esta se prolonga y la velocidad que tienen los competidores no cambia?



Anexo 2

Autor
Arturo Leandro Valdivia

Institución
Centro de investigación y estudios avanzados, del Instituto Politécnico Nacional

Cinvestav

Actividad

Nombre:____

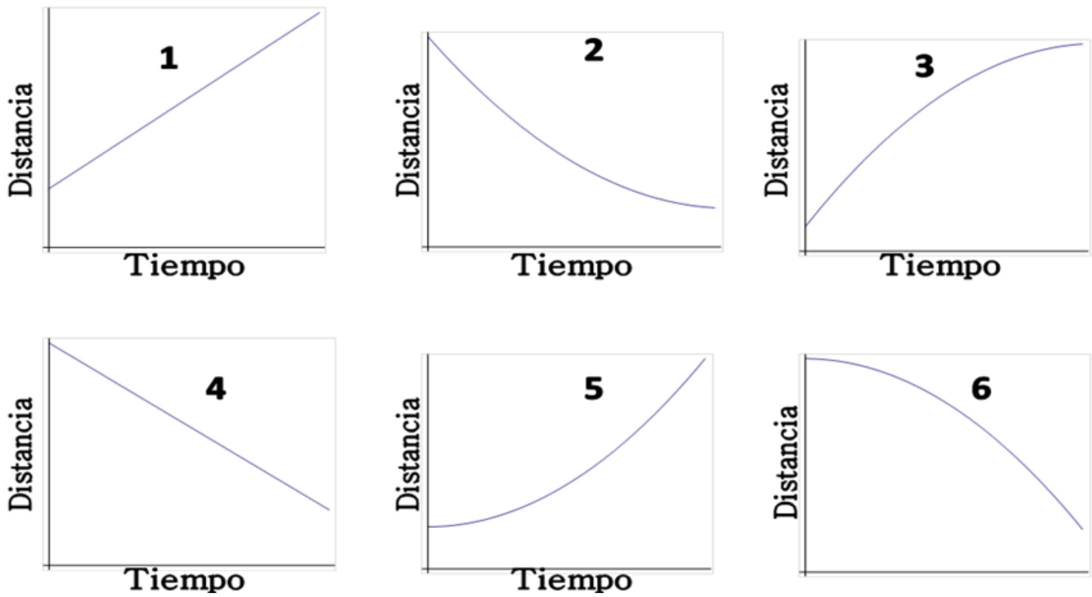
Institución:____

Semestre____________ **Nivel**____

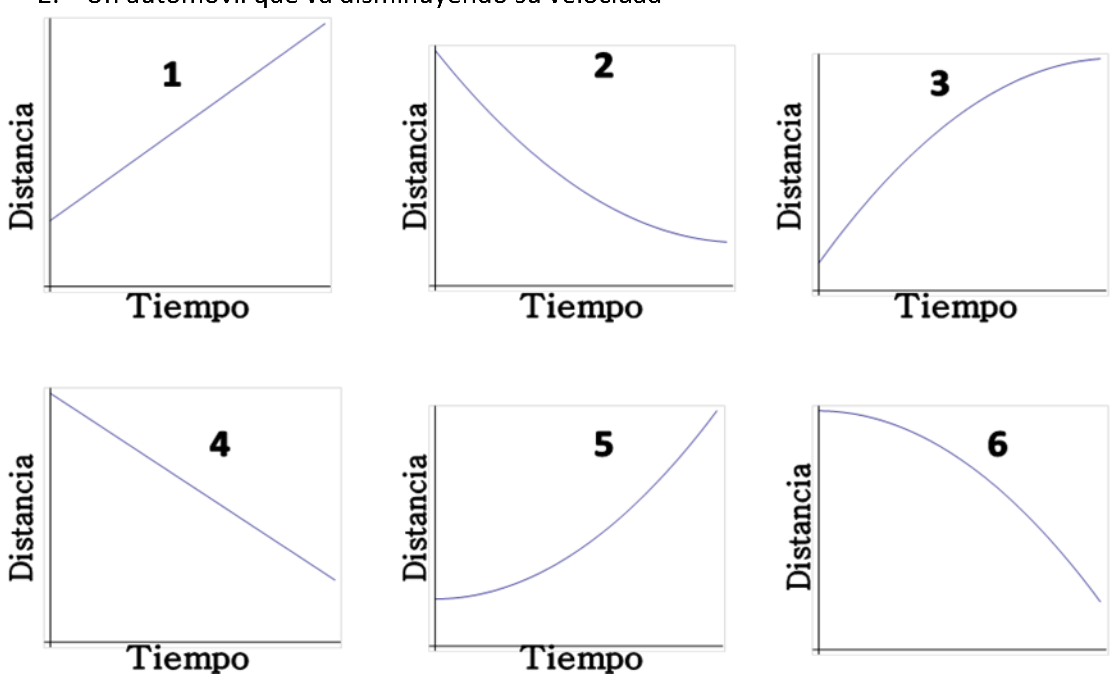
Actividad 1

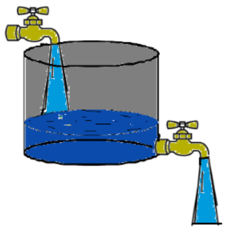
1.1.-Las siguientes gráficas muestran la distancia recorrida por un coche en relación al tiempo. Seleccioné la gráfica o las gráficas que consideres que corresponden a cada evento.

1. Un auto que va aumentando velocidad



2. Un automóvil que va disminuyendo su velocidad

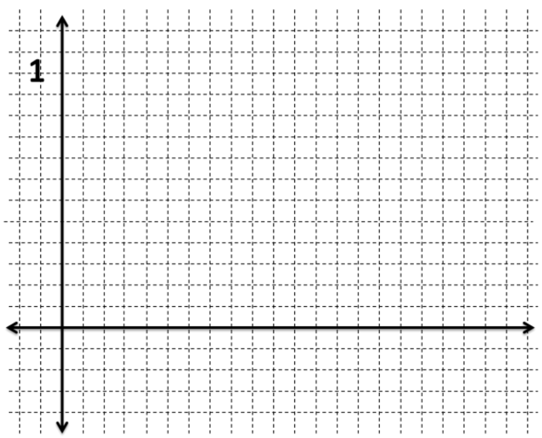


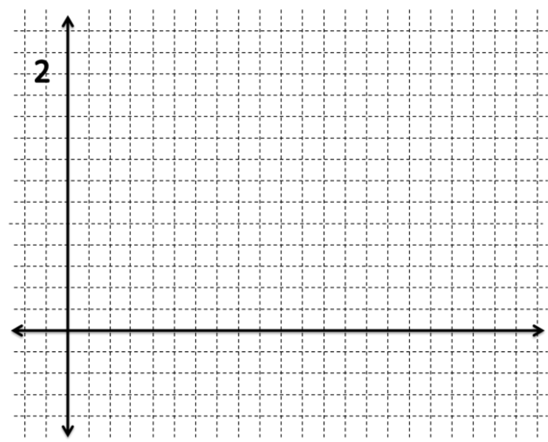


1.2.-Considerando un contenedor de agua, que se encuentra a una cuarta parte de su capacidad. El cual es llenado por una llave “a” y vaciado por una llave “b”, donde en ambas llaves fluye la misma cantidad de agua en relación al tiempo cuando están totalmente abiertas. Dibuje la gráfica del volumen del agua en relación al tiempo en el contenedor, a partir de los datos indicados.

Sí la llave “a” y “b” están cerradas y:

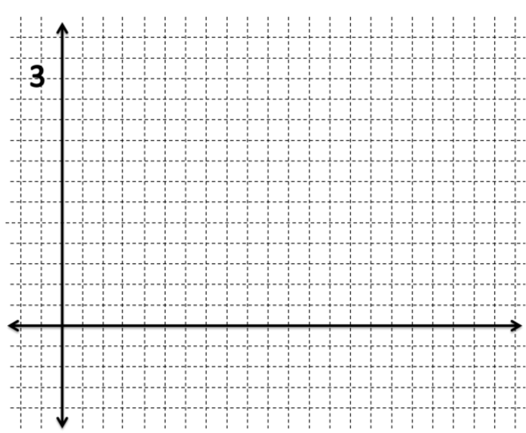
1. Se abre la llave “a” paulatinamente hasta dejarla totalmente abierta.
2. Se abre la llave “b” paulatinamente hasta dejarla totalmente abierta.

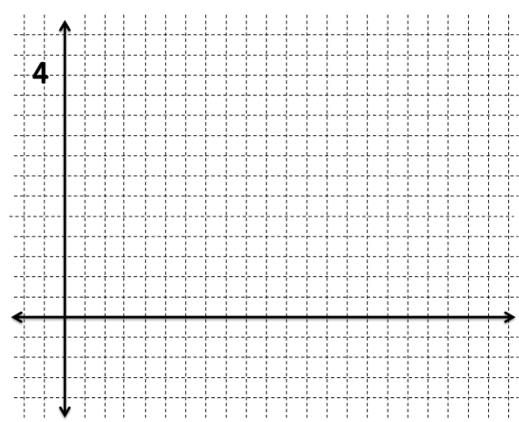




Sí la llave “a” está abierta, “b” se encuentra cerrada y:

3. Se cierra la llave “a” paulatinamente hasta dejarla totalmente cerrada
4. Se abre la llave “b” paulatinamente hasta dejarla totalmente abierta





Actividad 2

2.1.-Partiendo de la información de las gráficas resuelva las siguientes preguntas:

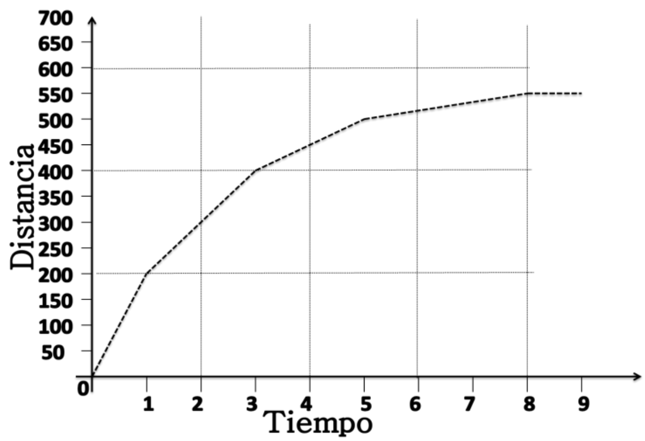


Figura 60. Gráfica distancia-tiempo, de la distancia recorrida por un auto rojo

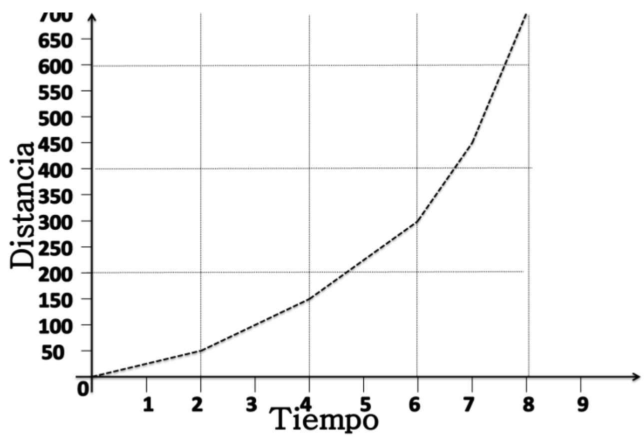


Figura 61. Gráfica distancia-tiempo de la distancia recorrida por un auto verde

1. ¿Qué velocidad tiene el automóvil rojo y verde, en cada intervalo señalado en la tabla?

	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5
Rojo					
Verde					

2. ¿La velocidad del vehículo en cada caso va aumentando, disminuyendo o permanece constante?

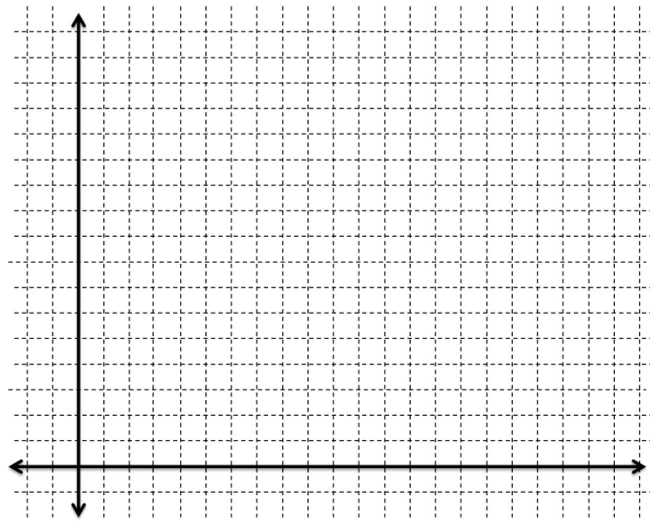
3. ¿En qué intervalos de tiempo ambos vehículos tienen las mismas velocidades, escribir respuesta y señala los intervalos en las gráficas?

2.2-Dada las siguiente tabla, construya la gráfica de los litros de agua en un contenedor en relación al tiempo, partiendo de que en el minuto 1 el contenedor tenía 100 litros y que en cada intervalo de tiempo, la llave no sufrió cambios.

Nota: si no se da información de alguna llave es porque se encuentra cerrada

Tabla 9

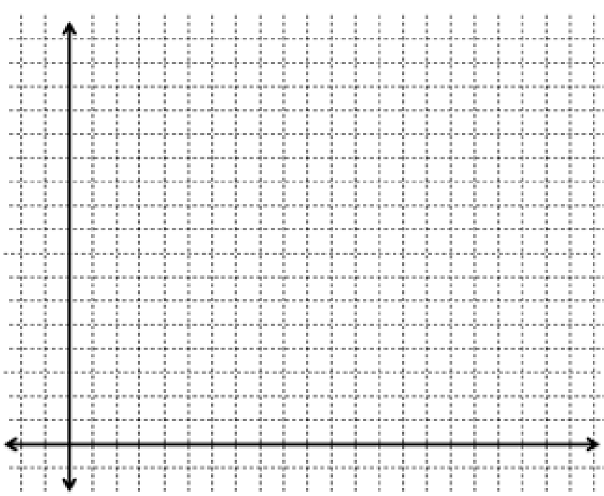
Flujo de agua en litros por minuto en la llave "a"	Intervalo de tiempo en que la llave "a" estuvo abierta
200 L	1-2
150 L	2-3
100 L	3-4
50 L	4-5
0 L	5-6



¿La llave se está abriendo o cerrando?

2.3.- **Partiendo de que la llave de salida está totalmente abierta**, la de entrada está totalmente cerrada y que el contenedor contiene 1 000 litros de agua.

1. Construya una gráfica, que muestre que se comienza a abrir la llave de entrada paulatinamente hasta dejarla totalmente abierta
2. Complete la tabla usando valores estimados, en relación a la gráfica realizada.



minuto	Flujo de entrada	Flujo de salida	Diferencia de flujos
1-2			
2-3			
3-4			
4-5			
5-6			

Actividad 3

3.1 Responda las preguntas

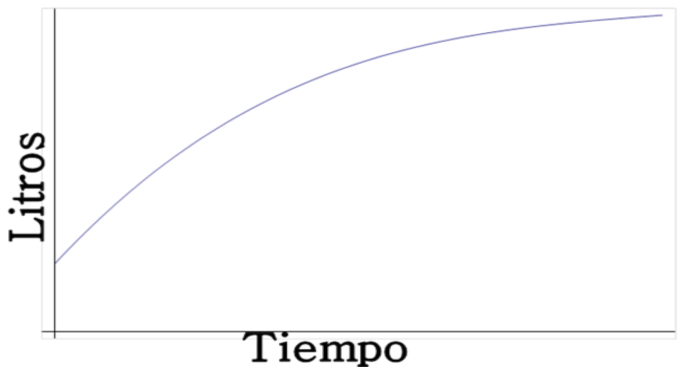


Figura 62. Litros de agua en un contenedor en relación al tiempo

1. La gráfica anterior representa los litros de agua con relación al tiempo en un contenedor, sí el contenedor tiene dos llaves una de salida y otra de entrada ¿Cómo se deben manipular estas llaves para que el flujo de agua quede reflejado en la gráfica?

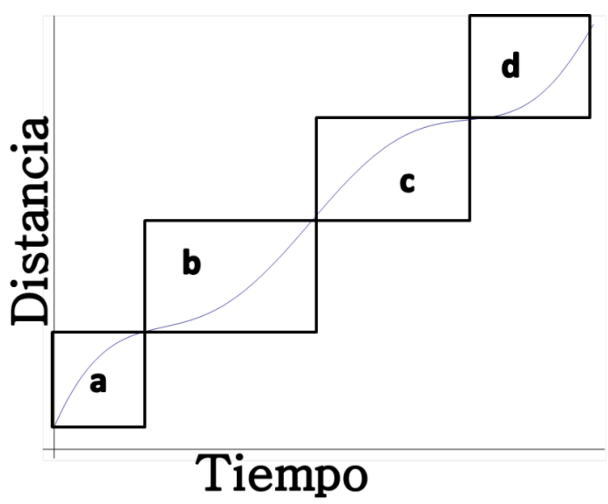


Figura 63. Gráfica distancia recorrida en relación al tiempo, de un automóvil

2. En que secciones de la gráfica el auto va aumentando su velocidad y en cuales la va disminuyendo.

3.2

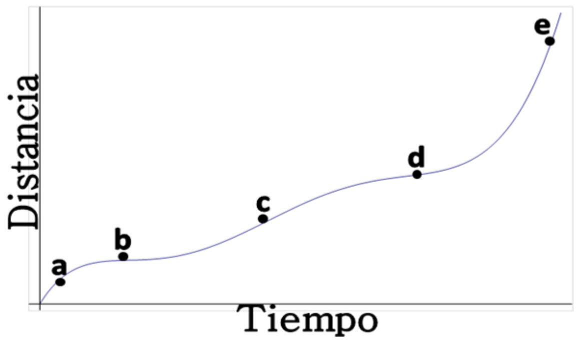


Figura 64 Gráfica de la distancia recorrida en relación al tiempo de aun automóvil

1. ¿En cuál de los puntos que aparecen en la gráfica anterior considera usted que el vehículo tiene mayor velocidad?

2. ¿En qué punto de los que aparecen en la gráfica el vehículo tiene menor velocidad?

3. ¿En cuál punto el vehículo va más rápido en el "a" o en el "c"?

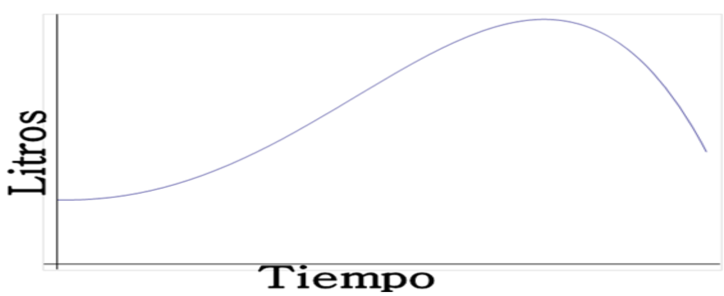


Figura 65 Gráfica del volumen de agua en litros de un contenedor

4. Señale en que zona de la gráfica, el flujo de agua de salida es mayor al de entrada.
5. Indique en que zona de la gráfica, el flujo de agua de entrada es mayor al de la salida.
6. Indique en que zona de la gráfica, el flujo de salida y el de entrada son aproximadamente iguales.
7. Señale en que zona de la gráfica, el flujo de entrada es mayor que el de salida, pero éste es cada vez menor en relación al tiempo.

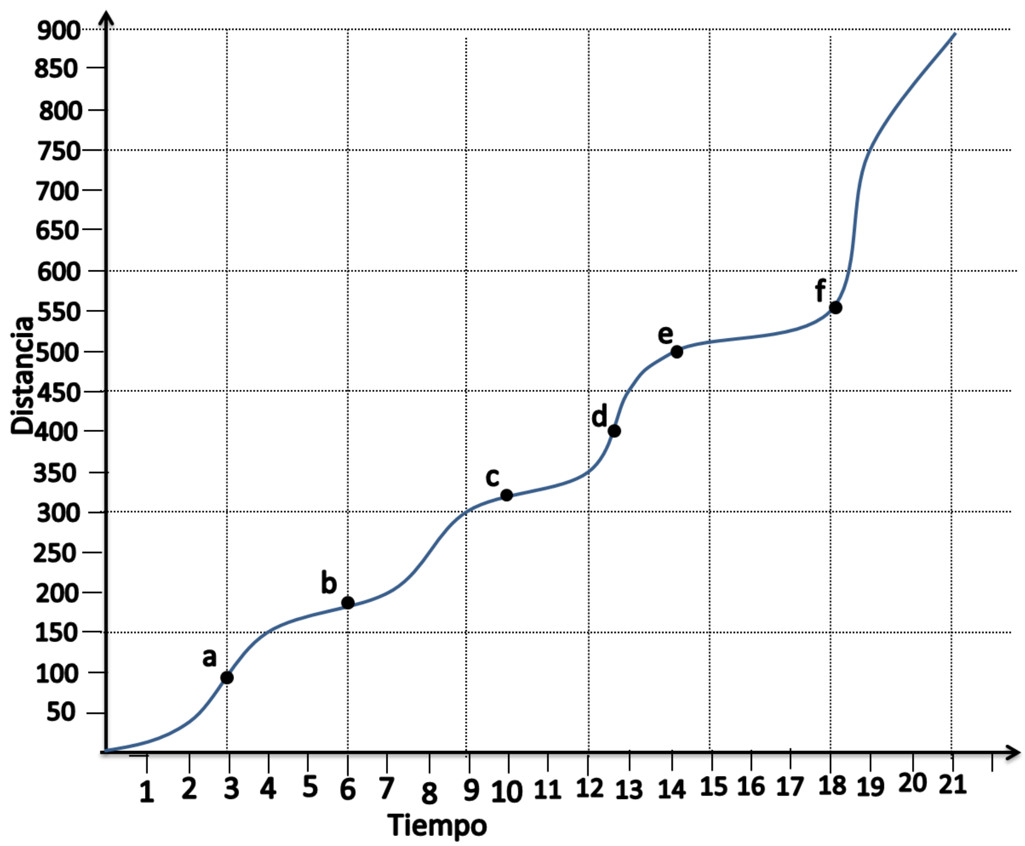
Actividad 4

5.1.-El siguiente gráfico muestra, la distancia recorrida por un auto en relación al tiempo.

1. ¿En cuál de los puntos indicados en la gráfica, el automóvil tiene mayor velocidad?

2. ¿En cuál de los puntos indicados en la gráfica, el automóvil tiene menor velocidad?

3. Ordene les puntos en la gráfica, de mayor a menor tomando como valor del punto, la velocidad que tiene el auto en ese momento



5.2.-El siguiente par de gráficas representan, la cantidad de agua en relación al tiempo, de dos contenedoras (C y C')

Encuentre en todos los pares de puntos (a-a', b-b', etc.) e indique en cuál de ellos el flujo de agua de entrada es mayor.

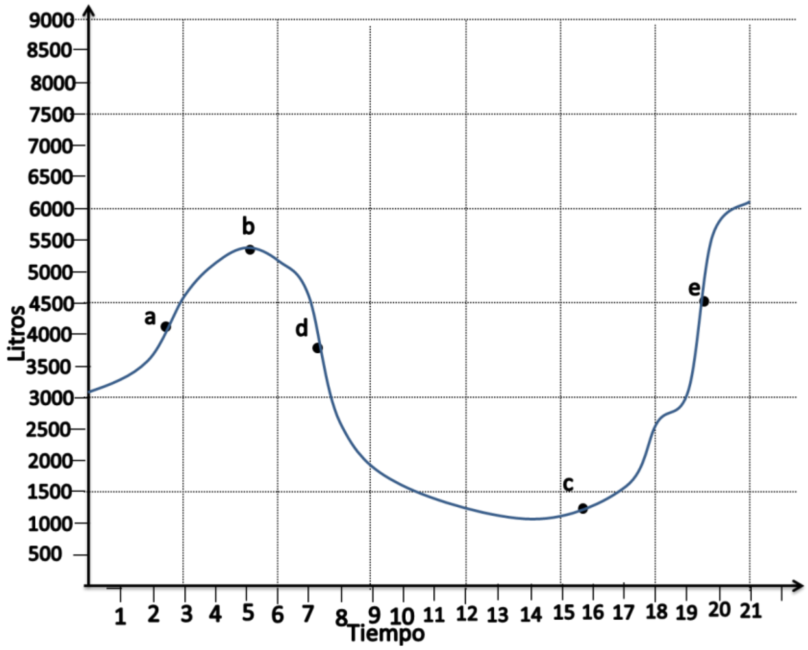


Figura 66 Cantidad de agua en litros de un contenedor A

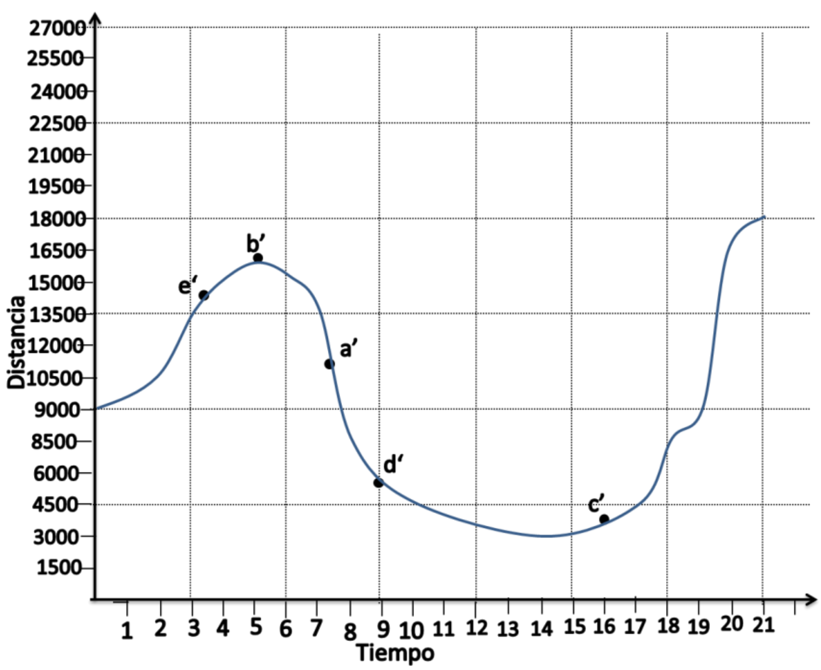
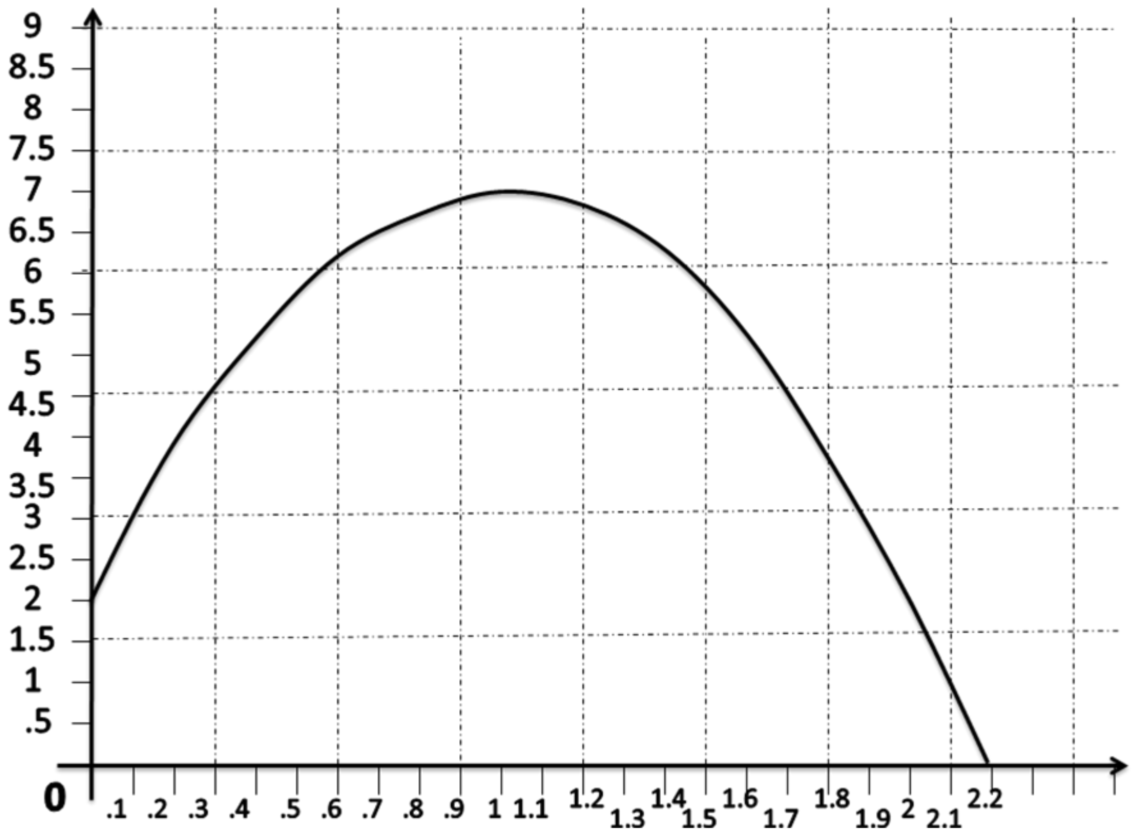


Figura 67 Cantidad de agua en litros de un contenedor A'

Actividad 5

6.1.-El siguiente gráfico representa la distancia en relación al tiempo, del suelo a una pelota que es lanzada de forma vertical. Tomando en consideración la gráfica responda las siguientes preguntas:



1. ¿Qué velocidad aproximada tiene la pelota cuando tiene .3 s de ser lanzada?

2. ¿Qué velocidad aproximada tiene la pelota cuando tiene 2 s de ser lanzada?

3. ¿Qué velocidad aproximada toma la pelota cuando tiene 1 s de ser lanzada?

4. ¿En cuál de los siguientes momentos la pelota tiene mayor velocidad y cuál es su velocidad aproximada en 6 s, 1.4s y 1.9 s?

6.2.-La gráfica anterior corresponde a la ecuación D = $10t - 5t^2 + 2$. Responda las siguientes preguntas teniendo en consideración que D indica la distancia y t el tiempo.

1. ¿Qué velocidad aproximada tiene la pelota cuando tiene .3s de ser lanzada?

2. ¿Qué velocidad aproximada tiene la pelota cuando tiene 2s de ser lanzada?

3. ¿Qué velocidad aproximada toma la pelota cuando tiene 1s de ser lanzada?

4. ¿En cuál de los siguientes momentos la pelota tiene mayor velocidad y cuál es su velocidad aproximada, .6s, 1.4s y 1.9s?

5. ¿En cuál de las representaciones anteriores de la distancia recorrida por el coche es posible hacer una mejor aproximación a la velocidad del coche en un determinado tiempo?

6. ¿De qué de pende la precisión de nuestra aproximación?

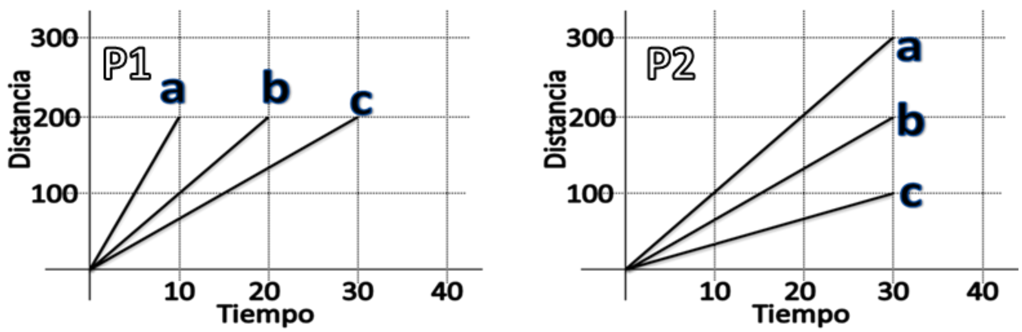
3.-Escriba una fórmula para aproximar la velocidad de un vehículo en un tiempo “a”, dado que la distancia recorrida por el auto está determinada por un función f(t).

Anexo 3

Los siguientes problemas fueron expuestos en el pizarrón y resueltos de manera grupal. Consisten establecer o comparar la velocidad de diversos vehículos, por medio del análisis de las representaciones gráficas de sus recorridos.

Intervenciones Sesión 1

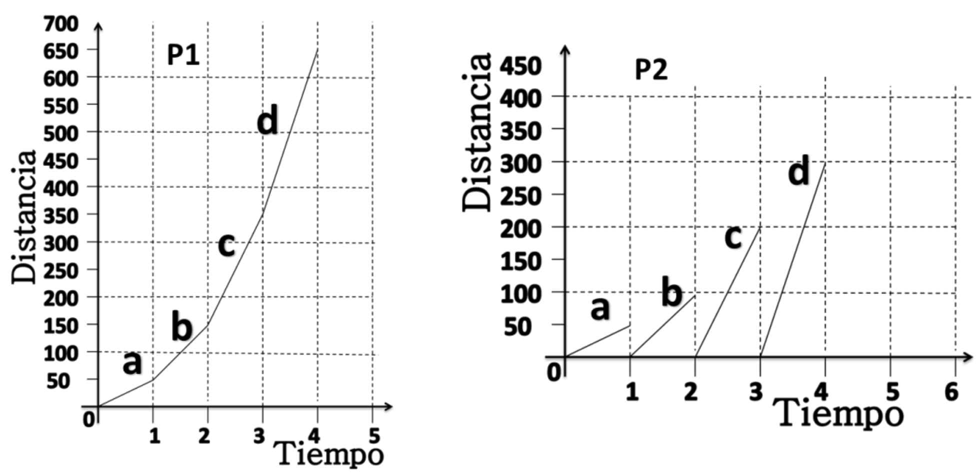
Problema 1.1



En cada plano determine:

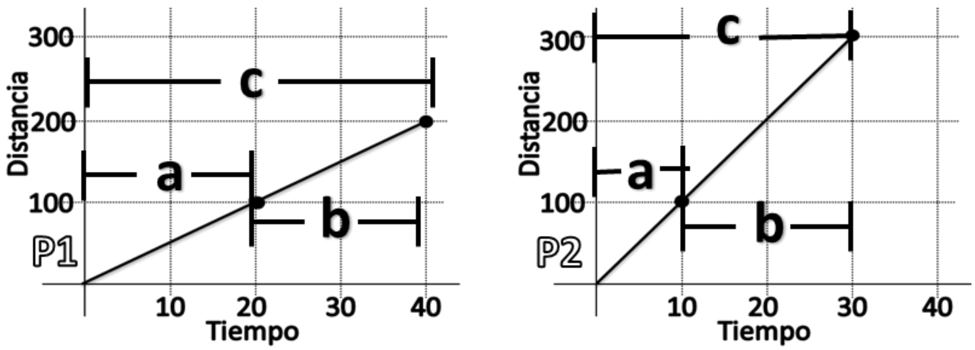
1. ¿Cuál de los vehículos tiene mayor velocidad?
2. ¿Cómo es el valor del tiempo y la distancia descrita por la gráfica del vehículo “a” con respecto de “b” y “c”?

Problema 1.2



1. ¿En el plano 1 en cuál sección el vehículo tiene mayor velocidad?
2. ¿En el plano 2 cuál vehículo tiene mayor velocidad?

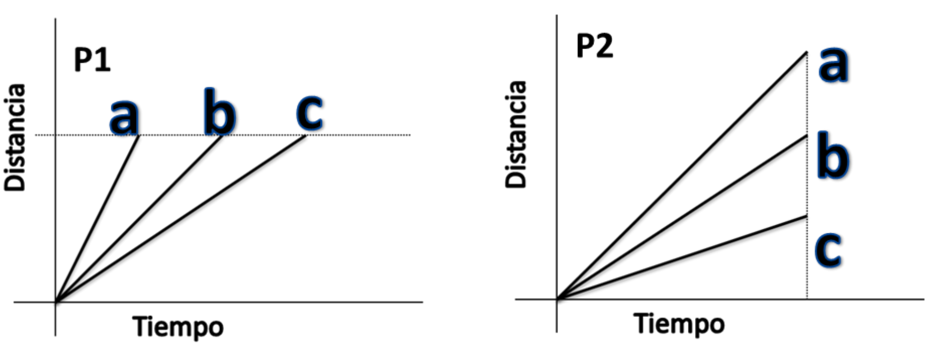
Problema 1.3



En cada plano determine:

1. ¿En qué intervalo el vehículo tiene mayor velocidad?
2. ¿Cómo crece el tiempo del intervalo “a” con relación al “c”?
3. ¿Cómo crece la distancia en intervalo “a” con relación al “c”?

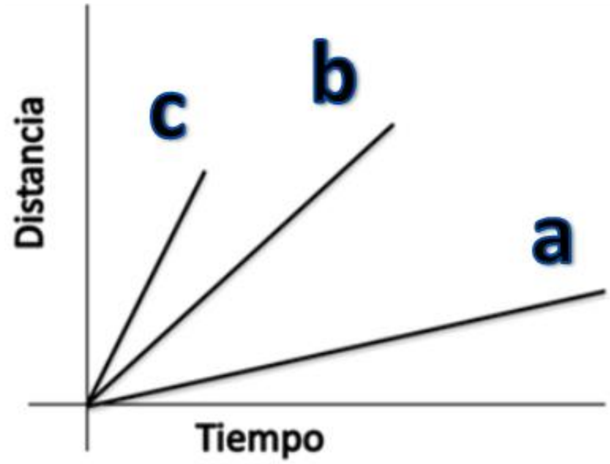
Problema 1.4



En cada plano determine:

1. ¿Cuál de los vehículos tiene mayor velocidad?
2. ¿Cómo es el valor de la distancia recorrida por el vehículo *a* con respecto de *b* y *c*?
3. ¿Cómo es el valor del tiempo que tarda en hacer su recorrido el vehículo *a* con respecto de *b* y *c*?

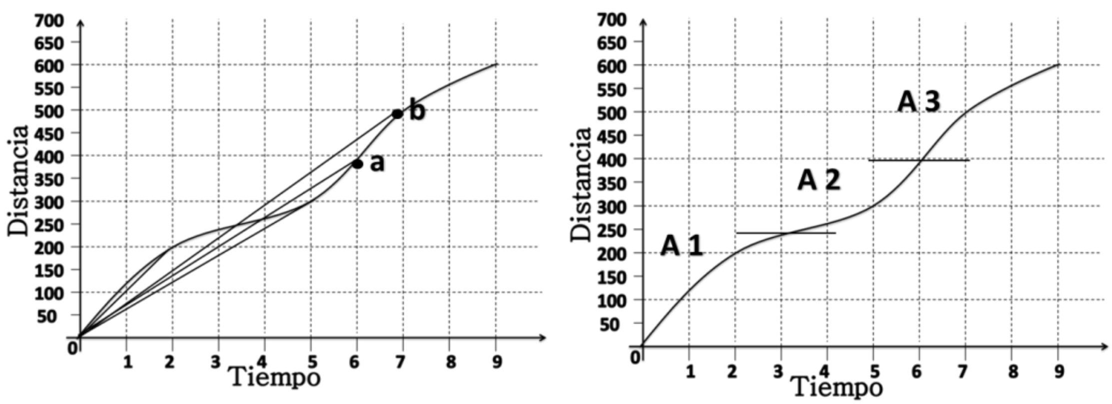
Problema 1.3



1. ¿Cuál vehículo tiene mayor velocidad?

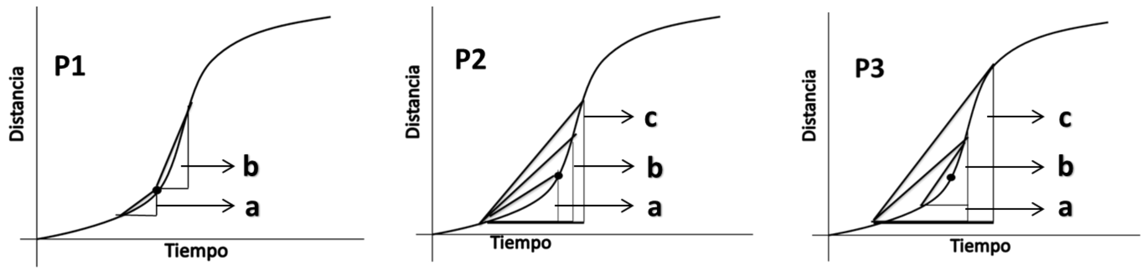
Intervenciones en la sesión 2

Problema 2.1



1. ¿En qué secciones de la gráfica la velocidad aumenta y en cuáles disminuye?
2. ¿En cuál de los puntos señalados la gráfica le vehículo tiene mayor velocidad?

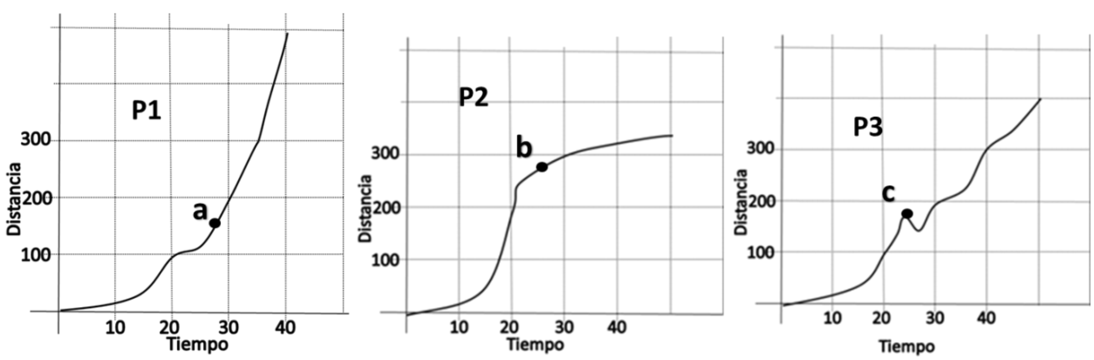
Problema 2.2



En cada plano:

1. ¿Cuál intervalo consideras que nos permite obtener una mejor aproximacion a la velocidad en el punto?

Problema 2.3



1. En cada plano ¿Cuál es la velocidad del vehículo en el intervalo de tiempo [20-30]?
2. ¿En qué punto de los tres recorridos el vehículo tiene mayor velocidad?